

THESE

présentée

à l'Université des Sciences et Techniques de Lille 1

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

par

F. NOTELET

Ingénieur H.E.I. - Licencié ès-Sciences - Docteur Ingénieur

**REGIMES TRANSITOIRES DES COURANTS ET DU COUPLE
DU MOTEUR ASYNCHRONE TRIPHASE**

Soutenue le 24 juin 1975 devant la Commission d'Examen

Président	: M. BECART	, Université de Lille
Rapporteur	: M. SEGUIER	, Université de Lille
Examineurs	: M. MARTY	, Université de Toulouse
	M. COULON	, Université de Lille
	M. MAIZIERES	, Université de Lille
Invité	: M. ROUELLE	, Professeur Honoraire

REGIMES TRANSITOIRES DES COURANTS ET DU COUPLE

DU MOTEUR ASYNCHRONE TRIPHASE

Si les propriétés en régime établi des machines électriques conventionnelles sont bien connues, de nombreux travaux de recherche continuent à s'intéresser à leurs régimes transitoires. Cet intérêt est lié à la réalisation d'unités de puissance de plus en plus élevée travaillant avec des contraintes de plus en plus fortes. Il importe donc de mieux connaître les régimes transitoires car les pointes de courant et de couple même très brèves peuvent avoir des répercussions importantes tant pour les réseaux que pour les machines elles-mêmes.

Il faut toutefois noter que si les régimes transitoires en général sont fréquemment abordés, peu d'études sont consacrées aux questions où les aspects électriques et mécaniques sont indissociablement liés ; cela semble tenir à la complexité des calculs et à la difficulté des vérifications expérimentales.

Nous nous sommes particulièrement intéressés, dans le cadre de ce mémoire, aux régimes transitoires des courants et du couple du moteur asynchrone d'induction triphasé.

L'étude de ces régimes ne saurait se déduire du fonctionnement en régime établi ; d'autre part les régimes transitoires possibles sont très nombreux. Aussi nous a-t-il semblé intéressant de développer une méthode générale d'analyse permettant une étude complète du moteur tant pour son fonctionnement en régime permanent que pour tous les régimes transitoires n'affectant pas la symétrie de la machine.

Grâce à un choix convenable des paramètres et du mode de calcul nous avons pu donner des expressions générales des courants et du couple en n'ayant recours qu'à un nombre limité d'hypothèses.

Après avoir situé notre travail par rapport à ceux antérieurement effectués, nous développerons une étude générale de la machine asynchrone, l'appliquerons au régime libre en insistant sur l'influence des paramètres de construction et de la vitesse sur les constantes de temps et les pseudo-pulsations qui le caractérisent. L'application au régime forcé permet de proposer des méthodes simples de détermination des grandeurs intervenant dans tous les régimes transitoires.

Nous passerons ensuite en revue les divers régimes transitoires possibles. La rapidité avec laquelle les solutions seront obtenues montrera l'intérêt de la méthode générale préconisée.

Les vérifications expérimentales portant sur les courants et le couple rappelleront la difficulté que soulève tout enregistrement de couple en régime dynamique ; elles montreront toutefois l'exactitude de l'étude théorique et permettront même de la compléter.

C'est sous la direction de Monsieur ROUELLE que nous avons commencé nos premiers travaux de recherche. Nous lui exprimons notre très vive reconnaissance.

Nous remercions Monsieur BECART d'avoir bien voulu présider le Jury.

Nous exprimons notre gratitude à Monsieur MARTY et nous tenons à le remercier d'avoir bien voulu examiner notre travail et participer, malgré son éloignement, à notre Jury.

Notre reconnaissance va également à Messieurs COULON et MAIZIERES qui nous ont donné d'utiles conseils.

Nous remercions très vivement Monsieur SEGUIER. Il nous a fait profiter de sa grande connaissance et expérience de l'Electrotechnique. Tout au long de nos travaux il a été un guide attentif.

Nous exprimons aussi notre reconnaissance à tout le personnel du Département Génie Electrique de l'Institut Universitaire de Technologie de Béthune en qui nous avons trouvé une aide efficace.

Au cours de notre recherche bibliographique nous avons pu accéder au Service de Documentation de la Société Jeumont-Schneider. Nous remercions la Direction de cette Société ainsi que le personnel qui nous a facilité la tâche.

I - INTRODUCTION

Lorsque l'on modifie l'alimentation ou l'un des paramètres de construction du moteur asynchrone d'induction, ni les courants ni le couple ne prennent immédiatement les valeurs correspondant au régime établi que l'on pourrait déduire, par exemple, du diagramme circulaire. Ces grandeurs présentent un régime transitoire et ne prennent leur valeur finale qu'après des oscillations dont l'importance relative peut être très élevée.

Une analyse générale du moteur est donc nécessaire. On pourra en déduire le régime permanent mais aussi les régimes transitoires. Les constantes de temps, les pseudo-pulsations et l'influence des conditions initiales qui régissent tout régime transitoire seront également déduites de l'analyse générale.

Nous rappellerons tout d'abord les études antérieures sur l'analyse des machines à courant alternatif puis sur les régimes transitoires du moteur asynchrone d'induction ce qui nous permettra de mieux préciser le plan de notre travail et les procédés de calculs que nous avons utilisés.

I.1 ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE (1)

C'est en 1821 que débute l'Electrotechnique. En effet cette année là, Michael FARADAY démontre pour la première fois la possibilité d'un mouvement d'origine électromagnétique : c'est le mouvement d'une aiguille aimantée dans un champ magnétique.

Ce n'est qu'en 1837 que le premier brevet relatif au moteur électrique est obtenu par l'inventeur américain : le forgeron Thomas DAVENPORT. J.C. MICHALOWICZ {1} retraçant brièvement les premiers temps de l'histoire de la locomotion électrique, rend honneur aux pionniers de l'électrotechnique.

Cependant les études mathématiques conséquentes ne datent que du début du siècle. Les travaux de BLONDEL sont à l'origine d'une importante littérature consacrée aux machines électriques.

(1) Les chiffres entre crochets renvoient aux références bibliographiques.

I.1.1 Difficultés rencontrées dans l'analyse des machines à courant alternatif

Si les machines à courant alternatif, tant utilisées et si bien connues en régime permanent, font encore de nos jours l'objet d'études pour ce qui est des transitoires, c'est que l'on se heurte dans ce cas à de nombreuses difficultés.

En plus de celles rencontrées lors de l'analyse du régime permanent, telles que la saturation du circuit magnétique, le magnétisme rémanent, la répartition non sinusoidale du flux dans l'entrefer, les harmoniques de denture, etc ... de nombreuses complications apparaissent dès que l'on aborde le régime dynamique.

Dans ce cas, les systèmes polyphasés de courants ne sont équilibrés ni au stator, ni au rotor. On ne saurait donc proposer, du moins à priori, un schéma monophasé équivalent. Il est dès lors nécessaire de traduire le phénomène physique par des équations ne faisant intervenir que des grandeurs instantanées, d'où des relations complexes et le risque, par des simplifications prématurées, de dénaturer l'objet de l'étude.

I.1.2 Etude bibliographique des méthodes d'analyse des machines à courant alternatif

Bien que le point de départ se situe en France, ce n'est pas dans ce pays que seront développés les concepts avancés par BLONDEL.

C'est surtout d'une façon expérimentale que l'électrotechnique évoluera. Les travaux de A. MAUDUIT {2} continueront de faire autorité. J. FALLOU {3} saura, vers 1939, tirer parti à la fois de l'analyse mathématique des machines électriques et de leur étude expérimentale. Dans la plupart des écoles françaises l'enseignement de l'électrotechnique s'inspire encore beaucoup de cet auteur.

C'est surtout à l'étranger, et tout particulièrement aux Etats Unis, que l'étude des machines électriques devait donner lieu à d'importants développements mathématiques.

La théorie des deux réactions proposée d'abord par A. BLONDEL {4} lors de l'étude des machines synchrones fait apparaître la notion d'axes direct et transverse et des inductances correspondantes. Cette théorie sera

développée par R.E. DOHERTY et C.A. NICKLE {5} puis par R.H. PARK {6}, les axes étant alors appelés direct (d) et en quadrature (q). Cette méthode d'analyse était particulièrement nécessaire pour les machines synchrones à pôles saillants car le rotor de celles-ci n'a pas une configuration géométrique simple et ne présente pas de ce fait une symétrie cylindrique.

Pour cette théorie, R.H. PARK {7} avait défini auparavant, la machine synchrone idéale. Il associe aux quantités réelles que constituent les tensions et intensités des différentes phases des quantités fictives. Le procédé pour remplacer le système des variables réelles par un système de variables fictives est connu sous le nom de transformation de R.H. PARK. Les variables fictives sont les composantes directe (d), en quadrature (q) et homopolaire (o).

Cette méthode d'analyse est naturellement applicable aux machines synchrones où la symétrie cylindrique du rotor existe et également aux moteurs asynchrones d'induction. E.M. SABBAGH {8} a étendu la théorie des deux réactions ou théorie des deux axes à tous les types de machines électriques en insistant sur les avantages de la méthode : elle est simple ; elle exclut toute incertitude et toute ambiguïté concernant les signes ; elle présente une unité pour ce qui est de l'analyse mathématique de toutes les machines électriques.

Pratiquement en même temps que R.H. PARK, YU H. KU {9}, {10}, après avoir précisé les composantes f(forward) et b(backward), développe la théorie du champ tournant et l'analyse générale des machines synchrones et asynchrones d'induction.

D.W.C. SHEN {11} à montré, en faisant une étude des réseaux par une méthode tensorielle que les composantes d et q d'une part et f et b d'autre part sont simplement deux formes de la même solution.

G. KRON {12}, en 1930, dans une théorie générale des machines électriques, détermine les diagrammes de la plupart des machines électriques (transformateur, machines synchrones, moteurs asynchrones d'induction et à collecteur), du montage en cascade des moteurs asynchrones d'induction et des lignes de transmission. Il {13} développe ensuite une analyse tensorielle des machines électriques tournantes en montrant que les transformations algébriques utilisées jusqu'alors et mettant en jeu soit les composantes

symétriques, soit les composantes d et q , soit les composantes f et b , soit d'autres encore, peuvent être exprimées d'une façon générale lorsque les équations de la machine sont écrites sous forme tensorielle. Il {14} définit le concept de la machine primitive généralisée. Monsieur E. GUDEFIN {15} a défini d'ailleurs clairement cette machine primitive dans le cas d'armatures lisses, à stator et rotor polyphasés.

Beaucoup de travaux ont été réalisés en vue d'obtenir un schéma équivalent des diverses machines électriques. Celles-ci seront alors traitées comme un élément de réseau. G. KRON {16}, se basant sur l'analyse tensorielle, montre que les équations et les circuits équivalents de toutes les machines peuvent être déduits, en tant que cas particuliers, de ceux de la machine primitive. YU H. KU et D.W.C. SHEN {17} proposent également quelques schémas équivalents.

H.E. KOENIG {18}, dans un esprit de généralisation et prenant comme point de départ la théorie générale des réseaux, montre que l'analyse des machines tournantes n'est qu'un problème de réseau dans lequel il y a mouvement relatif entre quelques-uns ou l'ensemble des éléments du réseau. Il considère alors la machine tournante comme un "réseau dynamique". Les coefficients sont variables et résultent du mouvement relatif du rotor et du stator.

N. KESAVAMURTHY et R.E. BEDFORD {19} étudient particulièrement des machines d'induction à rotor à cage d'écureuil tout en tenant compte, dans l'évaluation des paramètres, de la denture et de la saturation.

J.E. WILLIAMS {20} et J.T. MITCHELL {21} examinent à l'aide des composantes symétriques le fonctionnement des moteurs alimentés sous tensions déséquilibrées. J. PYTEL {22}, par la même méthode, utilise les résultats obtenus pour les machines de constitution symétrique à des machines de constitution asymétrique.

N.N. HANCOCK et B.H. KARAKARADDI {23} comparent, à partir de considérations physiques et d'essais, les circuits équivalents du moteur d'induction proposés par W.J. MORRILL, G. KRON, C.G. VEINOTT et S. CHANG.

A partir du circuit équivalent établi par G. KRON, J. BEN URI {24} étudie des moteurs d'induction monophasé, diphasé et triphasé alimentés sous

tensions déséquilibrées et possédant des enroulements dissymétriques. T.H. BARTON et J.C. DUNFIELD {25} et {26} tiennent compte de la présence d'harmoniques de force magnétomotrice et de perméance d'entrefer. Les auteurs montrent qu'en limitant le nombre d'harmoniques ils obtiennent des circuits équivalents plus simples que ceux déduits de la théorie générale de G. KRON.

Pour toutes les études que nous venons de citer, il est toujours admis que le rotor à une vitesse constante. H.C. STANLEY {27} analyse la machine d'induction en considérant que la vitesse de rotation fluctue sinusoidalement autour d'une valeur moyenne.

Signalons enfin les ouvrages généraux de P.L. ALGER {28} et de B. ADKINS {29}.

I.1.3 Etude bibliographique des régimes transitoires du moteur d'induction triphasé

Le moteur asynchrone d'induction fonctionnant en régime permanent, toute variation d'un paramètre quelconque venant modifier son alimentation, son fonctionnement ou ses caractéristiques de construction provoque un régime transitoire. Il existe donc de nombreuses occasions de régimes transitoires. On peut, très sommairement les classer en quatre catégories :

- les procédés de démarrage du moteur,
- les variations brusques de la charge,
- les défauts dans les lignes d'alimentation ou dans le moteur,
- l'alimentation par des systèmes électroniques : onduleur, gradateur.

Ces exemples montrent toute l'importance que l'on doit accorder à l'étude des régimes transitoires. Non seulement ils affectent les grandeurs électriques et les pointes de courant sont toujours préjudiciables au moteur mais ils touchent également les grandeurs électromécaniques et les oscillations de couple sont toujours gênantes dans les arbres de transmission et leurs organes annexes.

L'analyse d'un régime transitoire n'est jamais simple même lorsque l'on fait les hypothèses simplificatrices classiques : absence de saturation, ...Après la mise en équation du phénomène, la résolution est souvent compliquée. Et quand bien même cette résolution est menée à bien, les résultats

sont toujours exprimés sous forme littérale par des formules très "lourdes" où il est donc très difficile de discerner le rôle des principaux paramètres. C'est pourquoi, après la mise en équations, beaucoup de chercheurs ont préféré faire une simulation analogique et donner, sous forme de courbes, des résultats numériques plutôt que des formules.

Nous parlerons tout d'abord des études antérieures mathématiques puis des études numériques.

Les études mathématiques les plus simples sont celles qui concernent le démarrage du moteur asynchrone d'induction, rotor arrêté et par fermeture simultanée des phases du stator. L'étude est simple car la vitesse nulle du rotor permet une résolution relativement rapide des équations.

A.M. WAHL et L.A. KILGORE {30}, P.L. ALGER et YU H. KU {31}, F. PAVLASEK {32}, AMARJIT SINGH {33}, K.F. KOVÁCS {34}, W. WUTHERICH {35} et F. NOTELET {36} ont étudié ce type usuel de démarrage du moteur asynchrone d'induction. La résolution des équations permet la détermination des courants et du couple transitoires de démarrage et l'évaluation des constantes de temps du phénomène. Des relevés oscillographiques viennent vérifier les calculs mathématiques.

Lorsque le rotor est en rotation, même si on admet que pendant le régime transitoire la vitesse de rotation reste constante, l'étude mathématique est beaucoup plus compliquée : les coefficients de mutuelle inductance existant entre les enroulements statoriques et rotoriques sont alors fonctions du temps. Aux hypothèses classiques déjà énoncées s'ajoute alors celle de la variation sinusoïdale des coefficients de mutuelle inductance entre enroulements primaires et secondaires en fonction du temps.

W.V. LYON étudie les courants transitoires dans les machines électriques par la méthode vectorielle {37} puis par la méthode des composantes symétriques instantanées {38}. YU H. KU {39} fait l'analyse transitoire des machines tournantes et des réseaux stationnaires ou des lignes de transmission et traite successivement l'interconnexion d'une machine tournante et d'un réseau, l'interconnexion des machines tournantes entr'elles, les opérations synchrones et asynchrones d'une machine généralisée à n_1 phases au stator et n_2 phases au rotor et le montage en cascade des moteurs d'inducti

E. PILLET {40} retrace l'évolution de la théorie des machines synchrones et asynchrones et en particulier leurs régimes transitoires. Une bibliographie complète et intéressante est annexée à ce travail. Il {41} propose ensuite une méthode pour la mise en équations des machines synchrones et asynchrones basée directement sur l'utilisation de la transformation de LAPLACE. E. MORATH {42} fait l'étude des machines asynchrones à l'aide du calcul matriciel. W. SCHUISKY {43} fait l'analyse transitoire du moteur d'induction et étudie la mise en court-circuit de son stator ainsi que deux procédés de démarrage : le démarrage direct sous la pleine tension et le démarrage étoile-triangle. Dans ce deuxième procédé il suppose que le changement de connexion dure suffisamment pour que le régime transitoire dû à l'ouverture du stator en étoile ne n'empiète pas sur celui dû à la refermeture du stator en polygone.

M.R. CHIDAMBARA et C. GANAPATHY {44} calculent le couple transitoire du moteur d'induction triphasé durant le démarrage à vitesse nulle, la reconnexion à la ligne et le passage au fonctionnement à contre-courant. Ils tracent les courbes relatives à ces différents régimes transitoires et pour diverses valeurs des paramètres de la machine. Ils font la vérification expérimentale uniquement pour le démarrage à vitesse nulle.

I.R. SMITH et S. SRIHARAN {45} étudient la remise sous tensions équilibrées du moteur, la vitesse du rotor étant, dans le cas général, différente de zéro. N.C. ENSLIN, W.M. KAPLAN et J.L. DAVIES {46} poursuivent ce travail et analysent en particulier le fonctionnement à contre-courant. Ils présentent un dispositif original pour l'enregistrement du couple. Leurs vérifications expérimentales sont bonnes surtout pour les glissements faibles.

W.S. WOOD, F. FLYNN et A. SHANMUGASUNDARAM {47} expérimentent les effets de la non-simultanéité de la fermeture des contacts lors du démarrage à vitesse nulle. R.D. SLATER et W.S. WOOD {48} font une étude mathématique du même problème mais pour une vitesse quelconque du rotor. Ils présentent leurs résultats sous forme de courbes et montrent l'évolution des pointes de couple en fonction du décalage se présentant éventuellement entre les fermetures des différents contacts. F.P. FLYNN, R.D. SLATER et W.S. WOOD {49} évaluent la valeur de la pointe de couple négative apparaissant lors de la reconnexion rapide du moteur à la source en fonction de la tension résiduelle qui existait aux bornes du stator. Ils établissent une relation entre la

valeur de cette pointe de couple négative et le retard avec lequel la reconnexion à la source est effectuée. Signalons enfin le livre de K.P. KOVÁCS et I. RÁCZ {50}.

Les analyses du moteur asynchrone d'induction à l'aide d'un calculateur analogique ou numérique sont très nombreuses. Cette méthode est utilisée aussi bien pour les fonctionnements en régime permanent qu'en régime transitoire quelconque. C.G. VEINOTT {51} montre la façon de calculer un moteur asynchrone d'induction en utilisant un calculateur numérique. Les articles traitant des régimes transitoires sont très nombreux et, étant donné qu'ils ne sont pas directement l'objet de notre travail, nous n'en citerons que deux, l'un plus ancien et l'autre assez récent.

Dès 1944, F.J. MAGINISS et N.R. SCHULTZ {52} ont analysé les performances transitoires d'un moteur asynchrone d'induction alimenté par un système triphasé de tensions équilibrées à l'aide d'un analyseur différentiel. En 1969 A.K. DE SARKAR et G.J. BERG {53} font la même étude, mais avec alimentation triphasée donnant des tensions non sinusoïdales, à l'aide d'une simulation numérique. Ces études, par simulation, concernent surtout les servo-moteurs et les moteurs d'induction alimentés par un système électronique.

Signalons enfin que tant que l'on se limite à une analyse mathématique, quelle que soit la méthode utilisée, la précision des résultats est entachée par l'hypothèse de la constance de tous les paramètres. Seul un examen expérimental ou une simulation peut tenir compte des effets non linéaires tels que la saturation magnétique qui modifie les coefficients d'inductance et, éventuellement, l'effet de peau dans les barres rotoriques qui diminue la résistance secondaire.

I.2 PRESENTATION DE NOTRE ETUDE

Ce bref rappel des travaux antérieurs permet de mieux situer notre contribution à ce problème des régimes transitoires des machines asynchrones.

Il nous a semblé important d'étudier d'une façon générale le régime libre des courants et du couple, en particulier les constantes de temps, les pseudo-pulsations et l'influence sur ces grandeurs des paramètres de construction du moteur. En effet cette étude est commune à l'examen de la

plupart des régimes transitoires et en constitue la partie la plus délicate. Il ne reste ensuite pour chacun d'eux qu'à préciser à partir du régime forcé la valeur initiale des termes qui interviennent dans le régime libre et à superposer régimes libre et forcé.

Notre étude se limite au moteur triphasé de construction symétrique ; elle suppose sinusoidale la répartition de l'induction créée dans l'entrefer par chaque bobine. Négligeant la saturation et l'hystérésis elle admet la constance des coefficients d'auto-induction et de mutuelle-induction. Enfin nous avons supposé les régimes transitoires suffisamment brefs pour que la vitesse ne varie pas pendant leur durée.

- La première partie est commune à tous les régimes transitoires considérés. Des équations des tensions, on déduit une expression générale des courants et du couple. L'étude du régime libre de ces grandeurs montre l'existence de constantes de temps et de pseudo-pulsations, fonction de la vitesse et des paramètres de construction. Des expressions générales on déduit également les caractéristiques en régime permanent ou forcé.

- Dans la deuxième partie, après avoir classé les diverses perturbations pouvant entraîner des régimes transitoires, nous appliquons la méthode générale à chacun d'eux.

- La troisième partie présente les résultats des vérifications expérimentales.

II - ETUDE GENERALE DES REGIMES DES COURANTS ET DU COUPLE

L'établissement des expressions des courants primaires et secondaires et du couple du moteur asynchrone en régime transitoire ne saurait se déduire des expressions de ces mêmes grandeurs en régime établi. Il ne peut non plus découler de l'examen séparé des régimes des armatures primaire et secondaire.

Le couplage entre les deux enroulements rend solidaires les variations de tous les courants. Pour être exacte l'étude de tout phénomène transitoire doit aborder celui-ci dans sa totalité et sans utiliser, comme point de départ, les résultats bien connus du régime permanent.

Après avoir précisé les hypothèses et notations adoptées nous indiquerons d'abord comment on résout les équations des tensions pour en déduire les courants. En reportant ces derniers dans l'expression générale du couple, on obtient alors les variations de celui-ci.

Nous étudierons ensuite le régime libre du moteur, qui n'est qu'un régime transitoire particulier. Nous examinerons l'influence de la vitesse et des caractéristiques de construction sur les constantes de temps et les pseudo-pulsations qui caractérisent ces régimes transitoires.

Puis nous déduirons, toujours des expressions générales, les courants et le couple en régime permanent ou forcé.

Par la suite, lors de l'étude d'un régime transitoire quelconque, il suffira, pour obtenir le régime réel des courants, de superposer les régimes forcé et libre et de particulariser les constantes d'intégration relatives à ce dernier. Il sera aisé ensuite de déterminer le régime du couple puisqu'il se déduit directement des courants.

II.1 ETABLISSEMENT DES EXPRESSIONS GENERALES DES COURANTS ET DU COUPLE

Pour que cette étude soit générale nous considérerons que les tensions d'alimentation du moteur, lorsqu'elles existent, forment un système

triphase quelconque, avant d'examiner les simplifications qui apparaissent lorsque ces tensions sont sinusoïdales puis lorsqu'elles forment un système équilibré.

Mais il est nécessaire d'adopter certaines hypothèses afin notamment de pouvoir caractériser les enroulements.

II.1.1 Hypothèses et notations

Le moteur asynchrone étudié sera supposé de construction symétrique, triphasé au stator et au rotor.

On admettra que l'induction créée dans l'entrefer par chacune des phases, tant du stator que du rotor, présente une répartition sinusoïdale. Les flux rémanents seront négligés.

Surtout on supposera le circuit magnétique non saturé ; cette hypothèse est d'ailleurs nécessaire, même dans le cas simple du régime permanent, si l'on veut éviter une étude trop difficile du fonctionnement du moteur. Elle entraîne deux conséquences principales :

- la perméabilité du fer étant très supérieure à celle de l'entrefer, les surfaces des armatures primaire et secondaire peuvent être supposées équipotentielles au point de vue magnétique. Les inductions dans l'entrefer dues aux diverses bobines sont alors radiales et peuvent s'ajouter algébriquement.

- il est possible d'admettre la proportionnalité des flux aux courants qui les créent et de mettre en évidence des coefficients d'auto-induction et de mutuelle-induction.

On négligera les pertes dans le fer du circuit magnétique et les diverses pertes supplémentaires.

Enfin on supposera que la vitesse de rotation reste constante pendant le régime transitoire considéré.

Les notations adoptées sont les suivantes :

$2p$, nombre de pôles ;

R_1 , résistance d'une phase du stator ;

- R_2 , résistance d'une phase du rotor ;
 L_1 , inductance propre d'une phase primaire ;
 L_2 , inductance propre d'une phase secondaire ;
 M_{1ij} , mutuelle-inductance entre les phases i et j du stator ;
 M_{2ij} , mutuelle-inductance entre les phases i et j du rotor ;
 m_{sr} , mutuelle-inductance entre la phase s du stator et la phase r du rotor (s et r variant de 1 à 3) ;
 M , mutuelle-inductance entre les phases s et r lorsque leurs axes sont confondus ;
 i_{1s} , courant dans la phase s du stator ;
 i_{2r} , courant dans la phase r du rotor ;
 v_{1s} , tension de pulsation fondamentale ω éventuellement appliquée à la phase de rang s du stator ;
 Ω' , vitesse angulaire de rotation du moteur ;
 θ , angle géométrique que font, à l'instant t , les axes des phases 1 du stator et du rotor ;
 ω' , pulsation correspondant à la vitesse Ω' donc telle que $\omega' = p \Omega'$

L'instant initial sera celui où la perturbation est créée.

Les indices l , f et o ajoutés à la notation d'une variable signifieront qu'on considère respectivement pour celle-ci son régime libre, son régime forcé ou sa valeur initiale.

L'angle électrique $p\theta$ entre les phases de même rang des deux armatures est donc donné par

$$p\theta = \omega' t + p\theta_o \quad (1)$$

Quelques *remarques* découlant des hypothèses permettent de simplifier la notation des inductances ou d'expliciter la valeur de celles-ci.

- Les bobinages de chacune des armatures triphasées étant supposés de construction symétrique, les mutuelles inductances des trois phases seront égales tant au stator qu'au rotor.

On posera

$$M_1 = M_{1ij} \quad (2)$$

$$M_2 = M_{2ij} \quad (3)$$

- Etant donnée la répartition sinusoïdale admise pour les inductions, la mutuelle inductance entre la phase 1 du stator et la phase 1 du rotor décalée d'un angle θ dans le sens où l'on compte les angles a pour valeur

$$m_{11} = M \cos p \theta$$

L'axe de la phase s du stator est en avance par rapport à celui de la phase 1 de $(s-1)\frac{2\pi}{3p}$, de même celui de la phase r du rotor avance par rapport à l'axe de la première phase secondaire de $(r-1)\frac{2\pi}{3p}$. L'écart angulaire de la phase r par rapport à la phase s est donc

$$\theta + (r-1)\frac{2\pi}{3p} - (s-1)\frac{2\pi}{3p}$$

et la mutuelle inductance m_{sr} a pour expression

$$m_{sr} = M \cos \left(p\theta + (r-1)\frac{2\pi}{3} - (s-1)\frac{2\pi}{3} \right) \quad (4)$$

- Enfin, tant au stator qu'au rotor, nous verrons qu'il est possible de mettre en évidence les inductances cycliques et de poser

$$L_1 = L_1 - M_1 \quad (5)$$

$$L_2 = L_2 - M_2 \quad (6)$$

II.1.2 Equations algébriques des tensions

Au stator, les tensions appliquées aux enroulements et les six courants primaires ou secondaires sont liés par les trois relations suivantes

$$v_{11} = R_1 i_{11} + L_1 \frac{di_{11}}{dt} + M_1 \frac{di_{12}}{dt} + M_1 \frac{di_{13}}{dt} + \frac{d}{dt}(m_{11}i_{21}) + \frac{d}{dt}(m_{12}i_{22}) + \frac{d}{dt}(m_{13}i_{23})$$

$$v_{12} = R_1 i_{12} + L_1 \frac{di_{12}}{dt} + M_1 \frac{di_{13}}{dt} + M_1 \frac{di_{11}}{dt} + \frac{d}{dt}(m_{21}i_{21}) + \frac{d}{dt}(m_{22}i_{22}) + \frac{d}{dt}(m_{23}i_{23})$$

$$v_{13} = R_1 i_{13} + L_1 \frac{di_{13}}{dt} + M_1 \frac{di_{11}}{dt} + M_1 \frac{di_{12}}{dt} + \frac{d}{dt}(m_{31}i_{21}) + \frac{d}{dt}(m_{32}i_{22}) + \frac{d}{dt}(m_{33}i_{23})$$

$$\text{Puisque } m_{11} + m_{21} + m_{31} = 0,$$

$$m_{12} + m_{22} + m_{32} = 0,$$

$$m_{13} + m_{23} + m_{33} = 0,$$

$$v_{11} + v_{12} + v_{13} = R_1 (i_{11} + i_{12} + i_{13}) + (L_1 + 2M_1) \frac{d}{dt}(i_{11} + i_{12} + i_{13}).$$

Si la somme des tensions $v_{11} + v_{12} + v_{13}$ est nulle, la somme des courants $i_{11} + i_{12} + i_{13}$ l'est également, et réciproquement.

Lorsque les enroulements statoriques sont couplés en étoile sans conducteur neutre, les courants dans les trois phases ont forcément une somme nulle.

Si les trois phases sont groupées en triangle c'est la somme des tensions aux bornes des enroulements qui est nulle.

Donc, quel que soit le couplage des bobines primaires, on a

$$i_{11} + i_{12} + i_{13} = 0$$

et on peut introduire l'inductance cyclique L_1 dans les équations des tensions qui s'écrivent alors :

$$\left. \begin{aligned} v_{11} &= R_1 i_{11} + L_1 \frac{di_{11}}{dt} + m_{11} \frac{di_{21}}{dt} + m_{12} \frac{di_{22}}{dt} + m_{13} \frac{di_{23}}{dt} + i_{21} \frac{dm_{11}}{dt} + i_{22} \frac{dm_{12}}{dt} + i_{23} \frac{dm_{13}}{dt} \\ v_{12} &= R_1 i_{12} + L_1 \frac{di_{12}}{dt} + m_{21} \frac{di_{21}}{dt} + m_{22} \frac{di_{22}}{dt} + m_{23} \frac{di_{23}}{dt} + i_{21} \frac{dm_{21}}{dt} + i_{22} \frac{dm_{22}}{dt} + i_{23} \frac{dm_{23}}{dt} \\ v_{13} &= R_1 i_{13} + L_1 \frac{di_{13}}{dt} + m_{31} \frac{di_{21}}{dt} + m_{32} \frac{di_{22}}{dt} + m_{33} \frac{di_{23}}{dt} + i_{21} \frac{dm_{31}}{dt} + i_{22} \frac{dm_{32}}{dt} + i_{23} \frac{dm_{33}}{dt} \end{aligned} \right\} (7)$$

Au rotor, les trois phases étant en court-circuit les équations des tensions donnent

$$0 = R_2 i_{21} + L_2 \frac{di_{21}}{dt} + M_2 \frac{di_{22}}{dt} + M_2 \frac{di_{23}}{dt} + \frac{d}{dt}(m_{11} i_{11}) + \frac{d}{dt}(m_{21} i_{12}) + \frac{d}{dt}(m_{31} i_{13})$$

$$0 = R_2 i_{22} + L_2 \frac{di_{22}}{dt} + M_2 \frac{di_{23}}{dt} + M_2 \frac{di_{21}}{dt} + \frac{d}{dt}(m_{12} i_{11}) + \frac{d}{dt}(m_{22} i_{12}) + \frac{d}{dt}(m_{32} i_{13})$$

$$0 = R_2 i_{23} + L_2 \frac{di_{23}}{dt} + M_2 \frac{di_{21}}{dt} + M_2 \frac{di_{22}}{dt} + \frac{d}{dt}(m_{13} i_{11}) + \frac{d}{dt}(m_{23} i_{12}) + \frac{d}{dt}(m_{33} i_{13})$$

A cause de la propriété des mutuelles inductances m_{11}' , m_{12}' , m_{13}' , m_{21} ... due à la symétrie de construction de la machine, la somme des courants secondaires $i_{21} + i_{22} + i_{23}$ est nulle ; les équations des tensions rotoriques deviennent

$$\left. \begin{aligned} 0 &= R_2 i_{21} + L_2 \frac{di_{21}}{dt} + m_{11} \frac{di_{11}}{dt} + m_{21} \frac{di_{12}}{dt} + m_{31} \frac{di_{13}}{dt} + i_{11} \frac{dm_{11}}{dt} + i_{12} \frac{dm_{21}}{dt} + i_{13} \frac{dm_{31}}{dt} \\ 0 &= R_2 i_{22} + L_2 \frac{di_{22}}{dt} + m_{12} \frac{di_{11}}{dt} + m_{22} \frac{di_{12}}{dt} + m_{32} \frac{di_{13}}{dt} + i_{11} \frac{dm_{12}}{dt} + i_{12} \frac{dm_{22}}{dt} + i_{13} \frac{dm_{32}}{dt} \\ 0 &= R_2 i_{23} + L_2 \frac{di_{23}}{dt} + m_{13} \frac{di_{11}}{dt} + m_{23} \frac{di_{12}}{dt} + m_{33} \frac{di_{13}}{dt} + i_{11} \frac{dm_{13}}{dt} + i_{12} \frac{dm_{23}}{dt} + i_{13} \frac{dm_{33}}{dt} \end{aligned} \right\} (8)$$

II.1.3 Mise sous forme matricielle

Il n'est pas possible de résoudre directement les systèmes d'équations (7) et (8) pour en déduire les expressions des trois courants primaires et des trois courants secondaires. Il est nécessaire de passer par la forme matricielle.

Les équations des tensions se présentent alors ainsi :

$$\left. \begin{aligned} R_1 \begin{pmatrix} I_1 \end{pmatrix} + L_1 \left(\frac{dI_1}{dt} \right) + \begin{pmatrix} M \end{pmatrix} \left(\frac{dI_2}{dt} \right) + \left(\frac{dM}{dt} \right) \begin{pmatrix} I_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_1 \end{pmatrix} \\ R_2 \begin{pmatrix} I_2 \end{pmatrix} + L_2 \left(\frac{dI_2}{dt} \right) + \begin{pmatrix} M_t \end{pmatrix} \left(\frac{dI_1}{dt} \right) + \left(\frac{dM_t}{dt} \right) \begin{pmatrix} I_1 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

en posant

$$\begin{pmatrix} I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{11} \\ i_{12} \\ i_{13} \end{pmatrix} ; \quad \left(\frac{dI_1}{dt} \right) = \begin{pmatrix} \frac{di_{11}}{dt} \\ \frac{di_{12}}{dt} \\ \frac{di_{13}}{dt} \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{21} \\ i_{22} \\ i_{23} \end{pmatrix} ; \quad \left(\frac{dI_2}{dt} \right) = \begin{pmatrix} \frac{di_{21}}{dt} \\ \frac{di_{22}}{dt} \\ \frac{di_{23}}{dt} \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix}$$

et en désignant par $\begin{pmatrix} M \end{pmatrix}$ la matrice des mutuelles inductances

$$\begin{pmatrix} M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \quad (10)$$

par $\begin{pmatrix} M_t \end{pmatrix}$ sa transposée.

II.1.3.1 Autre présentation de la matrice des mutuelles inductances

Les éléments de la matrice $\begin{pmatrix} M \end{pmatrix}$ sont donnés par la relation (4)

$$\begin{pmatrix} M \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \cos p\theta & \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(p\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(p\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos p\theta & \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(p\theta - \frac{4\pi}{3}) & \cos(p\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos p\theta \end{pmatrix}$$

avec $p\theta = \omega't + p\theta_0$.

En développant les cosinus, on peut mettre $\begin{pmatrix} M \end{pmatrix}$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} M \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} M \sin(\omega't + p\theta_0) \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} - \frac{1}{2} M \cos(\omega't + p\theta_0) \begin{pmatrix} B \end{pmatrix}, \quad (11)$$

en posant

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On remarque que

- les matrices $\begin{pmatrix} A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B \end{pmatrix}$ ne comportent que des termes numériques constants alors que ceux de $\begin{pmatrix} M \end{pmatrix}$ étaient des fonctions du temps ;
 - la matrice $\begin{pmatrix} A \end{pmatrix}$ est antisymétrique alors que $\begin{pmatrix} B \end{pmatrix}$ est symétrique ;
 - les matrices $\begin{pmatrix} A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B \end{pmatrix}$ sont liées par la relation
- $$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} B \end{pmatrix}. \quad (12)$$

De (11) et (12) on déduit

$$\begin{pmatrix} M \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} M \sin(\omega't + p\theta_0) \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} - \frac{1}{2} M \cos(\omega't + p\theta_0) \begin{pmatrix} A \end{pmatrix}^2. \quad (13)$$

La matrice $\begin{pmatrix} A \end{pmatrix}$ étant antisymétrique, il existe une matrice unitaire $\begin{pmatrix} D \end{pmatrix}$ qui diagonalise la matrice $\begin{pmatrix} A \end{pmatrix}$.

Si $\begin{pmatrix} A \end{pmatrix}$ est diagonalisable, il en est de même de $\begin{pmatrix} A \end{pmatrix}^2$, de $\begin{pmatrix} M \end{pmatrix}$, de $\begin{pmatrix} M_t \end{pmatrix}$, de $\left(\frac{dM}{dt}\right)$ et de $\left(\frac{dM_t}{dt}\right)$.

II.1.3.2 Valeurs et vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} A \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} A \end{pmatrix}$ sont les solutions de l'équation

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 3) = 0$$

D'où les trois valeurs propres

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = j\sqrt{3}$$

$$\lambda_3 = -j\sqrt{3}, \quad \text{avec } j = \sqrt{-1}.$$

On détermine les vecteurs propres $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_3 \end{pmatrix}$ tels que

$$\begin{pmatrix} x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x_{1n} \bar{x}_{1n} + x_{2n} \bar{x}_{2n} + x_{3n} \bar{x}_{3n}}} \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ x_{3n} \end{pmatrix} \quad (14)$$

n valant successivement 1, 2 puis 3 et \bar{x}_{1n} désignant la valeur conjuguée de x_{1n} , par la relation générale

$$\begin{pmatrix} \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_n x_{2n} \\ \lambda_n x_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ x_{3n} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Les trois vecteurs propres, correspondant respectivement à λ_1, λ_2 et λ_3 sont donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$$

avec $a = e^{j2\pi/3}$.

D'où la matrice unitaire $\begin{pmatrix} D \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} D \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

C'est la matrice de Fortescue. Ses colonnes ont pour norme l'unité ; elles sont orthogonales deux à deux.

L'inverse de $\begin{pmatrix} D \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1}$ tel que

$$\begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix} . \quad (17)$$

Si on effectue le produit $\begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}$ on trouve la matrice $\begin{pmatrix} E \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & j\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -j\sqrt{3} \end{pmatrix} . \quad (18)$$

On peut donc exprimer $\begin{pmatrix} A \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} E \end{pmatrix}$ par

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \quad (19)$$

De même le produit $\begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}$ vaut $\begin{pmatrix} E \end{pmatrix}^2$;

$$\begin{pmatrix} E \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad (20)$$

D'où

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \quad (21)$$

II.1.3.3 Présentation retenue pour la matrice des mutuelles et sa dérivée

Compte tenu des relations (19) et (21), l'expression (13) de $\begin{pmatrix} M \end{pmatrix}$ devient

$$\begin{pmatrix} M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \end{pmatrix} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} M \sin(\omega't + p\theta_0) \cdot \begin{pmatrix} E \end{pmatrix} - \frac{1}{2} M \cos(\omega't + p\theta_0) \cdot \begin{pmatrix} E \end{pmatrix}^2 \right\} \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} ;$$

qu'on met sous la forme

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} M \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} , \\ \text{avec} \\ \begin{pmatrix} M' \end{pmatrix} &= \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} M \sin(\omega't + p\theta_0) \cdot \begin{pmatrix} E \end{pmatrix} - \frac{1}{2} M \cos(\omega't + p\theta_0) \cdot \begin{pmatrix} E \end{pmatrix}^2 \right\} \end{aligned} \right\} (22)$$

Des calculs semblables effectués pour $\begin{pmatrix} M_t \end{pmatrix}$, $\frac{dM}{dt}$, $\frac{dM_t}{dt}$ donnent les résultats suivants :

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} M_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M'_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} , \\ \frac{dM}{dt} &= \begin{pmatrix} D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} , \\ \frac{dM_t}{dt} &= \begin{pmatrix} D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M''_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} , \end{aligned} \right\}$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} M'_t \end{pmatrix} &= - \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} M \sin(\omega't + p\theta_0) \cdot \begin{pmatrix} E \end{pmatrix} + \frac{1}{2} M \cos(\omega't + p\theta_0) \cdot \begin{pmatrix} E \end{pmatrix}^2 \right\} , \\ \begin{pmatrix} M'' \end{pmatrix} = \frac{dM'}{dt} &= \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} M \omega' \cos(\omega't + p\theta_0) \cdot \begin{pmatrix} E \end{pmatrix} + \frac{1}{2} M \omega' \sin(\omega't + p\theta_0) \cdot \begin{pmatrix} E \end{pmatrix}^2 \right\} , \\ \begin{pmatrix} M''_t \end{pmatrix} = \frac{dM'_t}{dt} &= \left\{ - \frac{\sqrt{3}}{2} M \omega' \cos(\omega't + p\theta_0) \cdot \begin{pmatrix} E \end{pmatrix} + \frac{1}{2} M \omega' \sin(\omega't + p\theta_0) \cdot \begin{pmatrix} E \end{pmatrix}^2 \right\} . \end{aligned} \right\} (23)$$

II.1.3.4 Changement de variables

Compte tenu des présentations retenues pour les matrices $\begin{pmatrix} M \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} M_t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} dM/dt \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} dM_t/dt \end{pmatrix}$, les équations des tensions (9) deviennent

$$\left. \begin{aligned} R_1 \cdot \begin{pmatrix} I_1 \end{pmatrix} + L_1 \cdot \begin{pmatrix} dI_1/dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} dI_2/dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} I_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_1 \end{pmatrix} \\ R_2 \cdot \begin{pmatrix} I_2 \end{pmatrix} + L_2 \cdot \begin{pmatrix} dI_2/dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M'_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} dI_1/dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M''_t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned} \right\} (24)$$

Pour résoudre ce système d'équations il est nécessaire d'effectuer un changement de variables. Pour mettre en évidence ce changement, on prémultiplie tous les termes des relations (24) par la matrice $\begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1}$; ce qui donne :

$$\left. \begin{aligned} R_1 \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_1 \end{pmatrix} + L_1 \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} dI_1/dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} dI_2/dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \end{pmatrix} \\ R_2 \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_2 \end{pmatrix} + L_2 \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} dI_2/dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M'_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} dI_1/dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M''_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_1 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned} \right\} (25)$$

On pose alors

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} I'_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i'_{11} \\ i'_{12} \\ i'_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i_{11} \\ i_{12} \\ i_{13} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} dI'_1/dt \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} di'_{11}/dt \\ di'_{12}/dt \\ di'_{13}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} dI_1/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} di_{11}/dt \\ di_{12}/dt \\ di_{13}/dt \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v'_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v'_{11} \\ v'_{12} \\ v'_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} I'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i'_{21} \\ i'_{22} \\ i'_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i_{21} \\ i_{22} \\ i_{23} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} dI'_2/dt \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} di'_{21}/dt \\ di'_{22}/dt \\ di'_{23}/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} dI_2/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} di_{21}/dt \\ di_{22}/dt \\ di_{23}/dt \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (26)$$

Le système d'équations (25) devient, avec les nouvelles variables ainsi définies,

$$\left. \begin{aligned} R_1 \begin{pmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{pmatrix} + L_1 \begin{pmatrix} \frac{dI'_1}{dt} \\ \frac{dI'_2}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M' \\ M'_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dI'_2}{dt} \\ \frac{dI'_1}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M'' \\ M''_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I'_2 \\ I'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

II.1.4 Nouvelles équations des tensions. Méthode de résolution

Si l'on développe les relations (27), compte tenu des expressions des diverses matrices et après regroupement des termes, il vient

$$R_1 i'_{11} + L_1 \frac{di'_{11}}{dt} = v'_{11} \quad (28)$$

$$R_1 i'_{12} + L_1 \frac{di'_{12}}{dt} + \frac{3}{2} M e^{j(\omega't+p\theta_o)} \left(\frac{di'_{22}}{dt} + j\omega' i'_{22} \right) = v'_{12} \quad (29)$$

$$R_1 i'_{13} + L_1 \frac{di'_{13}}{dt} + \frac{3}{2} M e^{-j(\omega't+p\theta_o)} \left(\frac{di'_{23}}{dt} - j\omega' i'_{23} \right) = v'_{13} \quad (30)$$

$$R_2 i'_{21} + L_2 \frac{di'_{21}}{dt} = 0 \quad (31)$$

$$R_2 i'_{22} + L_2 \frac{di'_{22}}{dt} + \frac{3}{2} M e^{-j(\omega't+p\theta_o)} \left(\frac{di'_{12}}{dt} - j\omega' i'_{12} \right) = 0 \quad (32)$$

$$R_2 i'_{23} + L_2 \frac{di'_{23}}{dt} + \frac{3}{2} M e^{j(\omega't+p\theta_o)} \left(\frac{di'_{13}}{dt} + j\omega' i'_{13} \right) = 0 \quad (33)$$

II.1.4.1 Recherche des variables auxiliaires

Pour résoudre les six équations qui précèdent, on est amené à considérer *séparément* et successivement

- l'équation (28) qui donne i'_{11} ,
- l'équation (31) qui donne i'_{21} ,
- le système formé par (29) et (32) qui permet d'obtenir i'_{12} et i'_{22}
- le système d'équations (30) et (33) qui donne i'_{13} et i'_{23} .

On peut noter la simplification obtenue pour les calculs à effectuer. Au lieu d'avoir à résoudre le système de six équations dans chacune desquelles les six inconnues interviennent, tel que le donnaient les relations (7) et (8), on n'a plus que deux équations à une inconnue chacune et deux systèmes de deux équations à deux inconnues.

D'ailleurs la résolution du second système est inutile. En effet les équations (30) et (33) sont respectivement conjuguées des équations (29) et (32).

Connaissant la forme de i'_{12} et i'_{22} , il suffira pour obtenir celle de i'_{13} et i'_{23} de remplacer le nombre imaginaire j par $-j$ et les valeurs initiales i'_{120} et i'_{220} par i'_{130} et i'_{230} .

II.1.4.2 Passage aux courants réels

Pour passer aux valeurs réelles des courants primaires et secondaires, il suffit d'opérer la transformation inverse au changement de variables proposé.

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ \\ \\ \\ \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{11} \\ i_{12} \\ i_{13} \\ \\ i_{21} \\ i_{22} \\ i_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & O \\ \hline O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I'_1 \\ \\ \\ \\ I'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & O \\ \hline O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i'_{11} \\ i'_{12} \\ i'_{13} \\ \\ i'_{21} \\ i'_{22} \\ i'_{23} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} i_{11} \\ i_{12} \\ i_{13} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i'_{11} \\ i'_{12} \\ i'_{13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i_{21} \\ i_{22} \\ i_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i'_{21} \\ i'_{22} \\ i'_{23} \end{pmatrix}$$

ou, en développant,

$$\left. \begin{aligned} i_{11} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (i'_{11} + i'_{12} + i'_{13}) \\ i_{12} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (i'_{11} + a^2 i'_{12} + a i'_{13}) \\ i_{13} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (i'_{11} + a i'_{12} + a^2 i'_{13}) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} i_{21} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (i'_{21} + i'_{22} + i'_{23}) \\ i_{22} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (i'_{21} + a^2 i'_{22} + a i'_{23}) \\ i_{23} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (i'_{21} + a i'_{22} + a^2 i'_{23}) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Mais comme nous l'avons montré dès le début de l'étude des équations des tensions (§ II.1.2), à cause de la symétrie de construction des deux armatures et de l'absence de conducteur neutre lorsque le stator est couplé en étoile, tant au stator qu'au rotor la somme des courants des trois phases est nulle.

$$\begin{aligned} \text{Or } i_{11} + i_{12} + i_{13} &= \sqrt{3} i'_{11} \\ i_{21} + i_{22} + i_{23} &= \sqrt{3} i'_{21} \end{aligned}$$

Les courants i'_{11} et i'_{21} sont donc nuls et il est inutile de résoudre les équations (28) et (31).

Pour passer des courants auxiliaires i'_{12} , i'_{13} , i'_{22} et i'_{23} , calculés à partir des équations (29), (30), (32) et (33), on utilisera les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} i_{11} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (i'_{12} + i'_{13}) \\ i_{12} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (a^2 i'_{12} + a i'_{13}) \\ i_{13} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (a i'_{12} + a^2 i'_{13}) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} i_{21} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (i'_{22} + i'_{23}) \\ i_{22} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (a^2 i'_{22} + a i'_{23}) \\ i_{23} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (a i'_{22} + a^2 i'_{23}) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

II.1.5 Expression générale du couple

Le courant i_{1s} de la phase s du stator crée un flux à travers la phase r du rotor égal à $m_{sr} i_{1s}$. L'énergie électromagnétique correspondant à l'existence de courants i_{1s} et i_{2r} est donc $m_{sr} i_{1s} i_{2r}$.

Le couple exercé sur l'enroulement secondaire r par l'enroulement primaire s est donné par

$$c_{sr} = \frac{d}{d\theta} (m_{sr} i_{1s} i_{2r})$$

ou, compte tenu de la relation (4), par

$$c_{sr} = -p M i_{1s} i_{2r} \sin \left[p\theta + (r-1)\frac{2\pi}{3} - (s-1)\frac{2\pi}{3} \right]$$

Le couple total dû à l'action de chacun des trois courants statoriques sur les trois courants rotoriques s'écrira

$$c = -p M \left[\begin{aligned} & (i_{11} i_{21} + i_{12} i_{22} + i_{13} i_{23}) \sin (\omega't + p\theta_0) \\ & + (i_{11} i_{22} + i_{12} i_{23} + i_{13} i_{21}) \sin (\omega't + p\theta_0 + \frac{2\pi}{3}) \\ & + (i_{11} i_{23} + i_{12} i_{21} + i_{13} i_{22}) \sin (\omega't + p\theta_0 + \frac{4\pi}{3}) \end{aligned} \right] \quad (38)$$

Il est commode d'exprimer le couple non pas en fonction des courants réels mais de leurs transformées dans le changement de variables présenté précédemment. En remplaçant $i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{21}, i_{22}, i_{23}$ par leurs expressions en fonction de $i'_{12}, i'_{13}, i'_{22}, i'_{23}$ [relations (36) et (37)], tous calculs effectués il vient

$$c = -\frac{3}{2} p M j \left[i'_{12} i'_{23} e^{-j(\omega't+p\theta_0)} - i'_{13} i'_{22} e^{j(\omega't+p\theta_0)} \right]$$

Or les deux quantités $i'_{12} i'_{23} e^{-j(\omega't+p\theta_0)}$ et $i'_{13} i'_{22} e^{j(\omega't+p\theta_0)}$ sont des quantités conjuguées. Si l'on désigne par $2jJ$ leur différence on obtient

$$c = 3 p M J, \quad (39)$$

avec J valeur numérique de la partie imaginaire de $i'_{12} i'_{23} e^{-j(\omega't+p\theta_0)}$.

II.2 ETUDE DU REGIME LIBRE

Le régime libre est un régime transitoire particulier ; il fait intervenir dans des relations plus simples les constantes de temps et les pseudo-pulsations qu'on trouvera dans les autres. L'étude des expressions des courants sera suivie de celle des constantes de temps et des pseudo-pulsations ; puis nous passerons à l'étude du couple.

II.2.1 Courants primaires et secondaires

Le régime libre correspond à la mise en court-circuit des enroulements primaires. Les tensions v_{11} , v_{12} et v_{13} sont donc nulles ; il en est de même de leurs transformées v'_{11} , v'_{12} et v'_{13} .

Les relations (29) et (32) qui suffisent à déterminer $i'_{12\ell}$ et $i'_{22\ell}$, dont on déduit les autres composantes $i'_{13\ell}$ et $i'_{23\ell}$, deviennent

$$\left. \begin{aligned} R_1 i'_{12\ell} + L_1 \frac{di'_{12\ell}}{dt} + \frac{3}{2} M e^{j(\omega' t + p\theta_0)} \left(\frac{di'_{22\ell}}{dt} + j\omega' i'_{22\ell} \right) &= 0 \\ R_2 i'_{22\ell} + L_2 \frac{di'_{22\ell}}{dt} + \frac{3}{2} M e^{-j(\omega' t + p\theta_0)} \left(\frac{di'_{12\ell}}{dt} - j\omega' i'_{12\ell} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Pour résoudre ce système on pose

$$\left. \begin{aligned} i'_{12\ell} &= x_\ell e^{j \frac{\omega' t + p\theta_0}{2}} \\ i'_{22\ell} &= y_\ell e^{-j \frac{\omega' t + p\theta_0}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Il vient alors

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{dx_\ell}{dt} + \frac{3}{2} M \frac{dy_\ell}{dt} &= -(R_1 + j L_1 \frac{\omega'}{2}) x_\ell - \frac{3}{2} j M \frac{\omega'}{2} y_\ell \\ \frac{3}{2} M \frac{dx_\ell}{dt} + L_2 \frac{dy_\ell}{dt} &= \frac{3}{2} j M \frac{\omega'}{2} x_\ell - (R_2 - j L_2 \frac{\omega'}{2}) y_\ell \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

II.2.1.1 Recherche des inconnues auxiliaires x_ℓ et y_ℓ

Le système (42) peut se mettre sous forme matricielle

$$\left[F \right] \left[\frac{dx_\ell}{dt} \right] = \left[G \right] \left[x_\ell \right]$$

en posant

$$\begin{pmatrix} x_\ell \\ y_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\ell \\ y_\ell \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} \frac{dx_\ell}{dt} \\ \frac{dy_\ell}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx_\ell}{dt} \\ \frac{dy_\ell}{dt} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & \frac{3}{2} M \\ \frac{3}{2} M & L_2 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(R_1 + jL_1 \frac{\omega'}{2}) & -\frac{3}{2} jM \frac{\omega'}{2} \\ \frac{3}{2} jM \frac{\omega'}{2} & -(R_2 - jL_2 \frac{\omega'}{2}) \end{pmatrix}$$

On peut inverser la matrice $\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$, la quantité $L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2$ étant différente de zéro puisque le couplage entre les deux armatures n'est pas parfait

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{L_1 L_2 - \frac{9}{4} M^2} \begin{pmatrix} L_2 & -\frac{3}{2} M \\ -\frac{3}{2} M & L_1 \end{pmatrix}$$

En prémultipliant par $\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}^{-1}$ la forme matricielle des relations (42), on obtient le système homogène

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_\ell}{dt} \\ \frac{dy_\ell}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\ell \\ y_\ell \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_\ell}{dt} \\ \frac{dy_\ell}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\tau_2 + \tau_1 \tau_2 (2-\sigma) j \frac{\omega'}{2}}{\sigma \tau_1 \tau_2} & \frac{\frac{3}{2} M (1 - j \tau_2 \omega')}{\sigma \tau_1 \tau_2 R_1} \\ \frac{\frac{3}{2} M (1 + j \tau_1 \omega')}{\sigma \tau_1 \tau_2 R_2} & -\frac{\tau_1 - \tau_1 \tau_2 (2-\sigma) j \frac{\omega'}{2}}{\sigma \tau_1 \tau_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\ell \\ y_\ell \end{pmatrix} \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{avec } \tau_1 &= \frac{L_1}{R_1} \\ \tau_2 &= \frac{L_2}{R_2} \\ \sigma &= 1 - \frac{\frac{9}{4} M^2}{L_1 L_2} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

τ_1 est la constante de temps du primaire seul, τ_2 celle du secondaire et σ le coefficient de dispersion.

Les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} F \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G \end{pmatrix}$ sont les solutions de l'équation

$$f(\lambda_\ell) = \begin{vmatrix} -\frac{\tau_2 + \tau_1 \tau_2 (2-\sigma) j \frac{\omega'}{2}}{\sigma \tau_1 \tau_2} - \lambda_\ell & \frac{3}{2} M \frac{1-j\tau_2 \omega'}{\sigma \tau_1 \tau_2 R_1} \\ \frac{3}{2} M \frac{1+j\tau_1 \omega'}{\sigma \tau_1 \tau_2 R_2} & -\frac{\tau_1 - \tau_1 \tau_2 (2-\sigma) j \frac{\omega'}{2}}{\sigma \tau_1 \tau_2} - \lambda_\ell \end{vmatrix} = 0$$

$$f(\lambda_\ell) = \sigma \tau_1 \tau_2 \lambda_\ell^2 + (\tau_1 + \tau_2) \lambda_\ell + 1 + j(\tau_1 - \tau_2) \frac{\omega'}{2} + \sigma \tau_1 \tau_2 \frac{\omega'^2}{4} = 0$$

La résolution de cette équation donne

$$\lambda_{1\ell} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\sigma \tau_1 \tau_2 \left(1 + \sigma \tau_1 \tau_2 \frac{\omega'^2}{4} + j(\tau_1 - \tau_2) \frac{\omega'}{2} \right)}}{2\sigma \tau_1 \tau_2}$$

$$\lambda_{2\ell}$$
(45)

Si l'on pose $Q = (\tau_1 + \tau_2)^2 - \sigma \tau_1 \tau_2 (4 + \sigma \tau_1 \tau_2 \omega'^2)$

$$S = 2\sigma \tau_1 \tau_2 (\tau_1 - \tau_2) \omega'$$
(46)

et $Z = \sqrt{\frac{Q + \sqrt{Q^2 + S^2}}{2}}$

les valeurs propres de $\begin{pmatrix} F \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G \end{pmatrix}$ peuvent s'écrire

$$\lambda_{1\ell} = -\frac{1}{T_1} + j \frac{C}{2} \quad ; \quad \lambda_{2\ell} = -\frac{1}{T_2} - j \frac{C}{2}$$
(47)

avec $T_1 = \frac{2\sigma \tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 - Z}$

$$T_2 = \frac{2\sigma \tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + Z}$$
(48)

$$\frac{C}{2} = -\frac{(\tau_1 - \tau_2) \omega'}{2Z}$$
(49)

On détermine les vecteurs propres,

$$\begin{pmatrix} x_{n\ell} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x_{1n\ell} \bar{x}_{1n\ell} + x_{2n\ell} \bar{x}_{2n\ell}}} \begin{pmatrix} x_{1n\ell} \\ x_{2n\ell} \end{pmatrix}$$

par la relation générale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_{n\ell} & x_{1n\ell} \\ \lambda_{n\ell} & x_{2n\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1n\ell} \\ x_{2n\ell} \end{pmatrix}$$

n valant successivement 1 puis 2.

Les vecteurs propres ainsi calculés sont

$$\begin{pmatrix} x_{1\ell} \end{pmatrix} = \frac{1}{D_1} \begin{pmatrix} N_1 + jN'_1 \\ P_1 + jP'_1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} x_{2\ell} \end{pmatrix} = \frac{1}{D_2} \begin{pmatrix} N_1 + jN'_1 \\ P_2 + jP'_2 \end{pmatrix} \quad (50)$$

$$\text{avec } N_1 = \frac{3}{2} M, \quad N'_1 = -\frac{3}{2} M \tau_2 \omega'$$

$$P_1 = R_1 \tau_2 \left(1 - \sigma \frac{\tau_1}{T_1}\right), \quad P'_1 = R_1 \tau_1 \tau_2 (\omega' - \sigma \omega_2)$$

$$P_2 = R_1 \tau_2 \left(1 - \sigma \frac{\tau_1}{T_2}\right), \quad P'_2 = R_1 \tau_1 \tau_2 (\omega' - \sigma \omega_1)$$

$$D_1 = \sqrt{\frac{9}{4} M^2 (1 + \omega'^2 \tau_2^2) + R_1^2 \tau_2^2 \left(1 - \sigma \frac{\tau_1}{T_1}\right)^2 + R_1^2 \tau_1^2 \tau_2^2 (\omega' - \sigma \omega_2)^2}$$

$$D_2 = \sqrt{\frac{9}{4} M^2 (1 + \omega'^2 \tau_2^2) + R_1^2 \tau_2^2 \left(1 - \sigma \frac{\tau_1}{T_2}\right)^2 + R_1^2 \tau_1^2 \tau_2^2 (\omega' - \sigma \omega_1)^2}$$

(51)

Les deux pulsations ω_1 et ω_2 que nous venons d'introduire sont définies par

$$\omega_1 = \frac{\omega' + C}{2} ; \quad \omega_2 = \frac{\omega' - C}{2} . \quad (52)$$

La résolution du système (42) donne donc

$$\begin{pmatrix} x_\ell \\ y_\ell \end{pmatrix} = k_1 e^{\lambda_{1\ell} t} \begin{pmatrix} x_{1\ell} \\ x_{2\ell} \end{pmatrix} + k_2 e^{\lambda_{2\ell} t} \begin{pmatrix} x_{1\ell} \\ x_{2\ell} \end{pmatrix} \quad (53)$$

k_1 et k_2 désignant les constantes d'intégration.

II.2.1.2 Courants réels

La relation (41) permet de passer d'abord de x_ℓ et y_ℓ aux composantes $i'_{12\ell}, i'_{22\ell}, i'_{13\ell}, i'_{23\ell}$.

$$\begin{aligned}
 i'_{12\ell} &= \frac{k_1}{D_1} (N_1 + jN'_1) e^{(\lambda_{1\ell} t + j \frac{\omega' t + p\theta_o}{2})} + \frac{k_2}{D_2} (N_1 + jN'_1) e^{(\lambda_{2\ell} t + j \frac{\omega' t + p\theta_o}{2})} \\
 i'_{22\ell} &= \frac{k_1}{D_1} (P_1 + jP'_1) e^{(\lambda_{1\ell} t - j \frac{\omega' t + p\theta_o}{2})} + \frac{k_2}{D_2} (P_2 + jP'_2) e^{(\lambda_{2\ell} t - j \frac{\omega' t + p\theta_o}{2})}
 \end{aligned}
 \tag{54}$$

Comme nous l'avons indiqué précédemment il est inutile de résoudre le système d'équations donnant $i'_{13\ell}$ et $i'_{23\ell}$ puisque ces courants sont respectivement les conjugués de $i'_{12\ell}$ et $i'_{22\ell}$. Nous désignerons par k_3 et k_4 les constantes d'intégration correspondant aux composantes $i'_{13\ell}$ et $i'_{23\ell}$.

Nous montrerons d'ailleurs lors de l'étude des constantes d'intégration que k_1 et k_3 d'une part, k_2 et k_4 d'autre part, sont des quantités conjuguées, donc de la forme

$$\begin{aligned}
 k_1/D_1 &= K_1 \pm j K_2 & k_2/D_2 &= K_3 \pm j K_4 \\
 k_3/D_1 & & k_4/D_2 &
 \end{aligned}
 \tag{55}$$

Dans ces conditions $i'_{12\ell}$ et $i'_{22\ell}$ s'écrivent

$$\begin{aligned}
 i'_{12\ell} &= \frac{3}{2} M \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega'^2} \left[\frac{1}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}} e^{-\frac{t}{T_1}} e^{j(\omega_1 t + \frac{p\theta_o + \rho + \psi}{2})} + \frac{1}{\sqrt{K_3^2 + K_4^2}} e^{-\frac{t}{T_2}} e^{j(\omega_2 t + \frac{p\theta_o + \nu + \psi}{2})} \right] \\
 i'_{22\ell} &= \frac{1}{\sqrt{(K_1^2 + K_2^2)(P_1^2 + P_1'^2)}} e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-j(\omega_2 t + \frac{p\theta_o - \rho - \zeta}{2})} + \frac{1}{\sqrt{(K_3^2 + K_4^2)(P_2^2 + P_2'^2)}} e^{-\frac{t}{T_2}} e^{-j(\omega_1 t + \frac{p\theta_o - \nu - \xi}{2})}
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

$$\text{avec } \operatorname{tg} \frac{\rho}{2} = \frac{K_2}{K_1} ; \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \frac{K_4}{K_3}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{N'_1}{N_1} = -\tau_2 \omega' ; \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2} = \frac{P'_1}{P_1} ; \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} = \frac{P'_2}{P_2}$$

Il ne reste plus qu'à passer des composantes $i'_{12\ell}$, $i'_{22\ell}$ à la valeur réelle des courants primaires et secondaires à l'aide des relations (36) et (37).

Compte tenu des égalités (54) et (55), après regroupement des termes, on obtient

$$i_{11\ell} = \sqrt{3} M \sqrt{1+\tau_2^2 \omega'^2} \left(\sqrt{K_1^2+K_2^2} \cos(\omega_1 t + \frac{p\theta_o + \rho + \psi}{2}) e^{-\frac{t}{T_1}} + \sqrt{K_3^2+K_4^2} \cos(\omega_2 t + \frac{p\theta_o + \nu + \psi}{2}) e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad (57)$$

$$i_{21\ell} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{(K_1^2+K_2^2)(P_1^2+P_1'^2)} \cos(\omega_2 t + \frac{p\theta_o - \rho - \zeta}{2}) e^{-\frac{t}{T_1}} + \sqrt{(K_3^2+K_4^2)(P_2^2+P_2'^2)} \cos(\omega_1 t + \frac{p\theta_o - \nu - \xi}{2}) e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \quad (58)$$

Les courants $i_{12\ell}$ et $i_{13\ell}$ sont de la même forme que $i_{11\ell}$. Il suffit de remplacer $\frac{p\theta_o}{2}$ respectivement par $\frac{p\theta_o}{2} - \frac{2\pi}{3}$ et par $\frac{p\theta_o}{2} - \frac{4\pi}{3}$.

De même les courants $i_{22\ell}$ et $i_{23\ell}$ sont de la même forme que $i_{21\ell}$. Mais il faut remplacer $\frac{p\theta_o}{2}$ respectivement par $\frac{p\theta_o}{2} + \frac{2\pi}{3}$ et par $\frac{p\theta_o}{2} + \frac{4\pi}{3}$.

II.2.2. Etude des constantes de temps et des pseudo-pulsations

Dans l'expression des courants en régime libre deux constantes de temps T_1 et T_2 et deux pseudo-pulsations ω_1 et ω_2 interviennent. Elles sont fonctions des paramètres de construction du moteur τ_1 , τ_2 , σ et de la pulsation ω' correspondant à la vitesse de rotation Ω' .

En effet nous avons montré que

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2 \sigma \tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + Z}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega'}{2} \left(1 + \frac{\tau_1 - \tau_2}{Z} \right)$$

où
$$Z = \sqrt{\frac{Q + \sqrt{Q^2 + S^2}}{2}}$$

$$\text{avec } Q = (\tau_1 + \tau_2)^2 - \sigma \tau_1 \tau_2 (4 + \sigma \tau_1 \tau_2 \omega'^2)$$

$$S = 2 \sigma \tau_1 \tau_2 (\tau_1 - \tau_2) \omega'$$

Pour les moteurs asynchrones de construction courante, les paramètres τ_1 , τ_2 et σ sont compris entre les limites suivantes {54} :

$$0,15 < \tau_1 < 1 \text{ s} \quad ,$$

$$0,025 < \tau_2 < 0,4 \text{ s} \quad ,$$

$$0,05 < \sigma < 0,2 \quad .$$

Nous suivrons l'évolution de T_1 , T_2 , ω_1 et ω_2 lorsque le rapport ω'/ω varie de zéro à un, c'est-à-dire lorsque la vitesse du moteur passe d'une valeur nulle à la vitesse synchrone.

Les calculs ont été effectués pour une fréquence des tensions éventuelles d'alimentation de 50 Hertz, donc pour $\omega = 100\pi$ rd/s.

II.2.2.1 Variations de T_1 et T_2

Les courbes des figures 1, 2 et 3 donnent les variations de T_1 et de T_2 en fonction de ω'/ω pour diverses valeurs de σ , de τ_1 et de τ_2 .

La figure 1 correspond à un moteur à faible coefficient de dispersion ($\sigma = 0,05$). On a reproduit pour T_1 puis pour T_2 les neuf caractéristiques correspondant à $\tau_1 = 0,15$; 0,5 et 1 s ,

$$\text{à } \tau_2 = 0,025 ; 0,1 \text{ et } 0,4 \text{ s} .$$

Les courbes des figures 2 puis 3 sont relatives à une machine de dispersion moyenne ($\sigma = 0,10$) puis forte ($\sigma = 0,20$) ; elles ont été tracées pour les mêmes valeurs de τ_1 et τ_2 .

Sur la partie gauche du tableau I, on trouvera de façon plus précise les valeurs de T_1 et T_2 calculées pour $\omega'/\omega = 0$ et 1, pour $\sigma = 0,05$; 0,10 et 0,20 , pour $\tau_1 = 0,15$; 0,50 et 1 s , pour $\tau_2 = 0,025$ et 0,40 s. On a en outre indiqué le sens de variations de T_1 et T_2 .

L'examen de ces courbes et de ce tableau montre

. en ce qui concerne T_1 ,

- que T_1 diminue toujours quand la vitesse croît. La diminution de T_1 est d'autant plus rapide quand ω'/ω s'écarte de zéro que τ_2 est plus grand.

- que l'augmentation de τ_1 entraîne celle de T_1

- qu'aux faibles vitesses, T_1 croît en même temps que τ_2 . Mais aux vitesses plus élevées, si σ est faible, l'augmentation de τ_2 réduit T_1 . Enfin aux vitesses plus élevées, si σ est fort, l'accroissement de τ_2 entraîne l'augmentation de T_1 si τ_1 est faible, sa diminution si τ_1 est fort.

- qu'aux vitesses réduites, lorsque σ croît, T_1 diminue. Aux vitesses plus élevées, si τ_2 est faible, l'augmentation de σ fait d'abord croître puis décroître T_1 . Aux vitesses élevées et pour les fortes valeurs de τ_2 , l'accroissement de σ entraîne celui de T_1 .

. en ce qui concerne T_2

- que la constante de temps T_2 est une fonction croissante de ω'/ω , de τ_1 , de τ_2 et de σ .

- que, surtout pour les faibles valeurs de τ_2 , l'accroissement de T_2 avec la vitesse est négligeable.

- que T_2 est toujours inférieur à T_1 pour une machine et une vitesse donnée. Le rapport T_1/T_2 diminue avec la vitesse. Ce n'est que pour ω'/ω voisin de 1, les valeurs fortes de τ_2 et moyennes de τ_1 , que T_1/T_2 se rapproche de l'unité.

II.2.2.2 Variations de ω_1 et ω_2

Les pseudo-pulsations ω_1 et ω_2 varient beaucoup moins en fonction des paramètres de construction et de la vitesse que les constantes de temps. On a pu adopter pour ω_1 et ω_2 une échelle linéaire sur les figures 4, 5, 6 qui montrent leurs variations en fonction de la vitesse.

La figure 4 est relative à un moteur de coefficient de dispersion σ égal à 0,05. Les figures 5 et 6 correspondent respectivement à $\sigma = 0,10$ et $\sigma = 0,20$.

Pour chaque valeur de σ on a tracé neuf courbes pour τ_1 égal à 0,15 ; 0,50 et 1 s, pour $\tau_2 = 0,025$; 0,1 et 0,4 s, du moins lorsque ces paramètres ont une influence notable.

On a complété le tableau I en indiquant à côté des valeurs de T_1 et T_2 celles de ω_1 et ω_2 pour $\omega'/\omega = 0$ et $\omega'/\omega = 1$. Lorsque leur sens de variation s'inverse pour une vitesse intermédiaire on a indiqué la valeur de leur maximum.

L'examen des courbes des figures 4, 5, 6 et de la partie droite du tableau I montre

- . que ω_1 et ω_2 sont nuls lorsque la vitesse est nulle
- . les effets sur ω_1 de τ_1 , τ_2 , σ et de la vitesse :

- L'augmentation de τ_1 entraîne une réduction de ω_1 .
- Lorsque τ_2 croît, ω_1 augmente pour les faibles valeurs de τ_1 mais diminue si τ_1 est élevé.
- L'accroissement de σ produit une diminution de ω_1 , sauf lorsque τ_2 est élevé et τ_1 faible où ω_1 croît en même temps que σ .
- Le rôle de la vitesse dépend beaucoup de la valeur de σ .

Si σ est faible, lorsque τ_1 et τ_2 le sont également, ω_1 croît toujours avec ω'/ω . Si σ étant faible, τ_1 est réduit alors que τ_2 a une valeur moyenne, ω_1 augmente avec la vitesse, passe par un maximum puis diminue. Si σ et τ_1 gardant une valeur réduite, τ_2 augmente encore, le maximum disparaît, ω_1 croît sans cesse en fonction de ω'/ω .

Si σ a une valeur moyenne, les courbes donnant ω_1 en fonction de la vitesse ont la même allure que pour σ faible ; toutefois le domaine des valeurs de τ_2 donnant un maximum s'étend de part et d'autre des valeurs moyennes de cette constante de temps.

Si σ a une valeur relativement forte, les courbes donnant ω_1 en fonction de ω'/ω présentent un maximum pour toutes les valeurs de τ_2 , sauf si τ_2/τ_1 est très grand.

- . les effets sur ω_2 de τ_1 , τ_2 , σ et de la vitesse :

- Pour des valeurs données de σ , τ_2 et ω'/ω , l'augmentation de la constante de temps τ_1 augmente ω_2 .
- L'influence de τ_2 , à σ , ω'/ω et τ_1 donnés, dépend de la valeur de τ_1 . Lorsque τ_1 est faible, l'augmentation de τ_2 entraîne une diminution de ω_2 . Lorsque τ_1 est moyen ou fort, l'accroissement de τ_2 entraîne celui de ω_2 .
- Lorsque le coefficient de dispersion σ croît, la pseudo-pulsation ω_2 croît également, sauf pour les faibles valeurs de τ_1 et les valeurs élevées de τ_2 où σ et ω_2 varient en sens inverse.
- La caractéristique donnant ω_2 en fonction de la vitesse relative a une allure dépendant essentiellement de τ_1 et τ_2 :

Si τ_1 est faible, τ_2 faible ou moyen, ω_2 croît sans cesse quand ω'/ω va de zéro à un.

Si τ_1 étant faible, τ_2 est élevé, ω_2 augmente d'abord avec la vitesse, passe par un maximum, puis diminue.

Si τ_1 est moyen ou fort, ω_2 est une fonction croissante de ω'/ω pour tout l'intervalle compris entre zéro et la vitesse synchrone.

σ	τ_1 s	τ_2 s	T_1 s		T_2 s		ω_1 rd/s		ω_2 rd/s	
			$\omega'/\omega=0$	$\omega'/\omega=1$	$\omega'/\omega=0$	$\omega'/\omega=1$	$\omega'/\omega=0$	$\omega'/\omega=1$	$\omega'/\omega=0$	$\omega'/\omega=1$
0,05	0,15	0,025	0,1739 ↘	0,0558	0,00108 ↗	0,00109	0 ↗	40,40	0 ↗	273,8
		0,4	0,5445 ↘	0,0227	0,0055 ↗	0,0072	0 ↗	294,5	0 ↗ 29 ↘	19,70
	0,5	0,025	0,5238 ↘	0,1534	0,00119 ↗	0,00120	0 ↗	12,72	0 ↗	301,4
		0,4	0,8888 ↘	0,0251	0,0113 ↗	0,0199	0 ↗ 26,5 ↘	6,162	0 ↗	308,0
	1	0,025	1,0238 ↘	0,2944	0,001221 ↗	0,001225	0 ↗	6,414	0 ↗	307,7
		0,4	1,3856 ↘	0,0507	0,0144 ↗	0,0199	0 ↗ 11,8 ↘	3,025	0 ↗	311,1
0,1	0,15	0,025	0,1728 ↘	0,0386	0,0022 ↗	0,0023	0 ↗	30,87	0 ↗	283,3
		0,4	0,5389 ↘	0,0411	0,0111 ↗	0,0149	0 ↗	309,4	0 ↗ 13,5 ↘	4,759
	0,5	0,025	0,5226 ↘	0,1168	0,00239 ↗	0,00243	0 ↗	8,920	0 ↗	305,2
		0,4	0,8772 ↘	0,0501	0,0228 ↗	0,0400	0 ↗ 13,1 ↘	1,438	0 ↗	312,7
	1	0,025	1,0225 ↘	0,2294	0,0024 ↗	0,0025	0 ↗	4,417	0 ↗	309,7
		0,4	1,3708 ↘	0,1003	0,0292 ↗	0,0399	0 ↗ 5,7 ↘	0,7162	0 ↗	313,4
0,2	0,15	0,025	0,1706 ↘	0,0390	0,0044 ↗	0,0048	0 ↗ 14,8 ↘	13,27	0 ↗	300,9
		0,4	0,5272 ↘	0,0805	0,0228 ↗	0,0299	0 ↗	313,1	0 ↗ 6,1 ↘	1,060
	0,5	0,025	0,5202 ↘	0,1300	0,0048 ↗	0,0049	0 ↗ 4,2 ↘	3,725	0 ↗	310,4
		0,4	0,8531 ↘	0,1000	0,0469 ↗	0,0800	0 ↗ 3,6 ↘	0,3182	0 ↗	313,8
	1	0,025	1,0201 ↘	0,2600	0,0049 ↗	0,0050	0 ↗ 2,1 ↘	1,837	0 ↗	312,3
		0,4	1,3403 ↘	0,2002	0,0597 ↗	0,0800	0 ↗ 1,6 ↘	0,1591	0 ↗	314,0

Tableau I. Valeurs des constantes de temps T_1 et T_2 , des pseudo-pulsations ω_1 et ω_2 lorsque la vitesse est nulle ($\omega'/\omega = 0$) ou égale à la vitesse synchrone ($\omega'/\omega = 1$),

pour $\omega = 100 \pi$ rd/s,

$\sigma = 0,05$ ou $0,1$ ou $0,2$,

$\tau_1 = 0,15$ ou $0,5$ ou 1 s.,

$\tau_2 = 0,025$ ou $0,4$ s.

Figure 1 : Variations des constantes de temps T_1 et T_2 en fonction de la vitesse pour $\sigma = 0,05$ et diverses valeurs de τ_1 et τ_2 .

		Courbes donnant T_1	Courbes donnant T_2
$\tau_1 = 0,15 \text{ s}$	{	①	①'
	{	②	②'
	{	③	③'
$\tau_1 = 0,5 \text{ s}$	{	④	④'
	{	⑤	⑤'
	{	⑥	⑥'
$\tau_1 = 1 \text{ s}$	{	⑦	⑦'
	{	⑧	⑧'
	{	⑨	⑨'

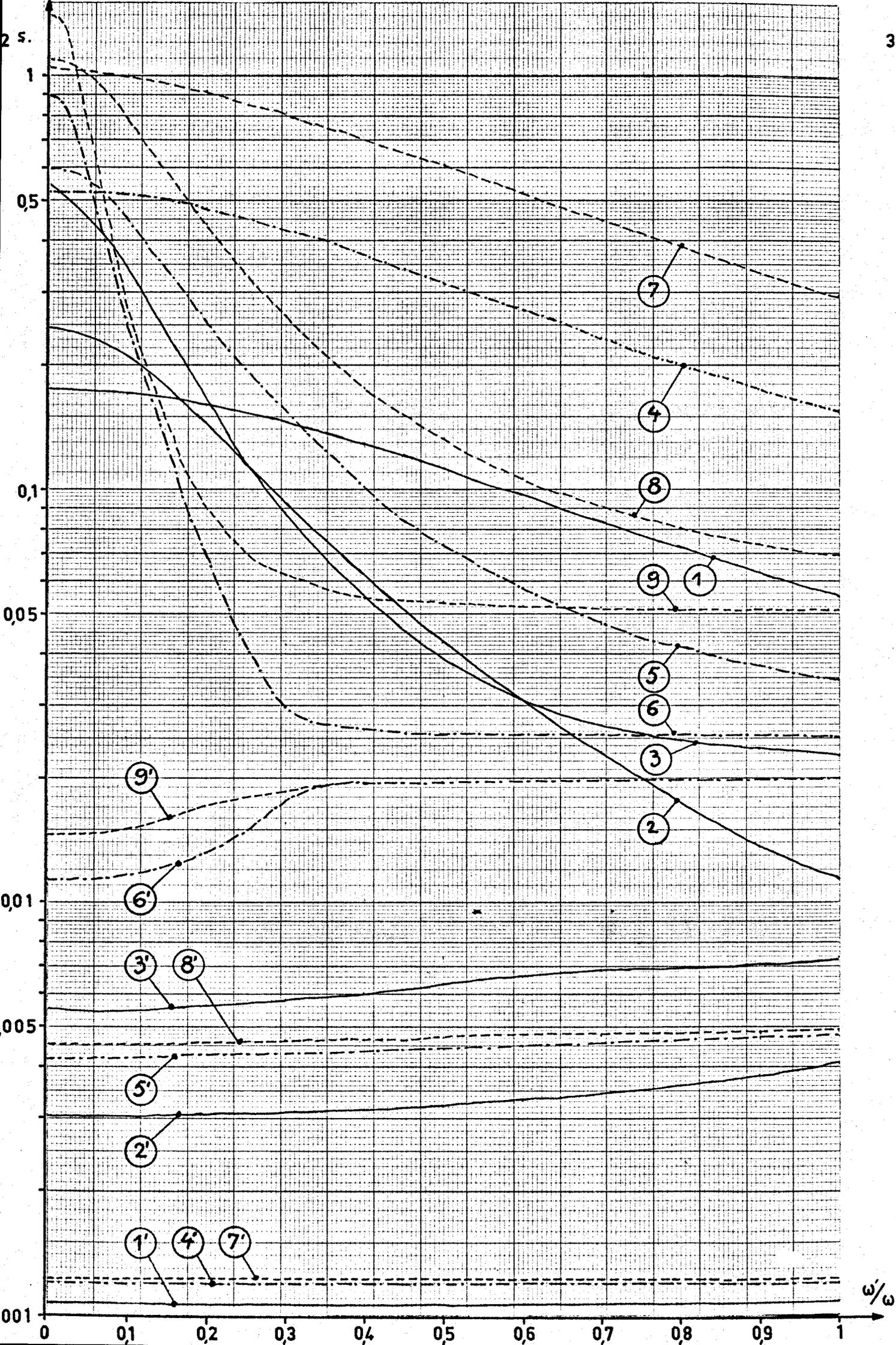


Figure 2 : Variations des constantes de temps T_1 et T_2 en fonction de la vitesse pour $\sigma = 0,10$ et diverses valeurs de τ_1 et τ_2 .

		Courbes donnant T_1	Courbes donnant T_2	
$\tau_1 = 0,15 \text{ s}$	}	$\tau_2 = 0,025 \text{ s}$	①	①'
		$\tau_2 = 0,1 \text{ s}$	②	②'
		$\tau_2 = 0,4 \text{ s}$	③	③'
$\tau_1 = 0,5 \text{ s}$	}	$\tau_2 = 0,025 \text{ s}$	④	④'
		$\tau_2 = 0,1 \text{ s}$	⑤	⑤'
		$\tau_2 = 0,4 \text{ s}$	⑥	⑥'
$\tau_1 = 1 \text{ s}$	}	$\tau_2 = 0,025 \text{ s}$	⑦	⑦'
		$\tau_2 = 0,1 \text{ s}$	⑧	⑧'
		$\tau_2 = 0,4 \text{ s}$	⑨	⑨'

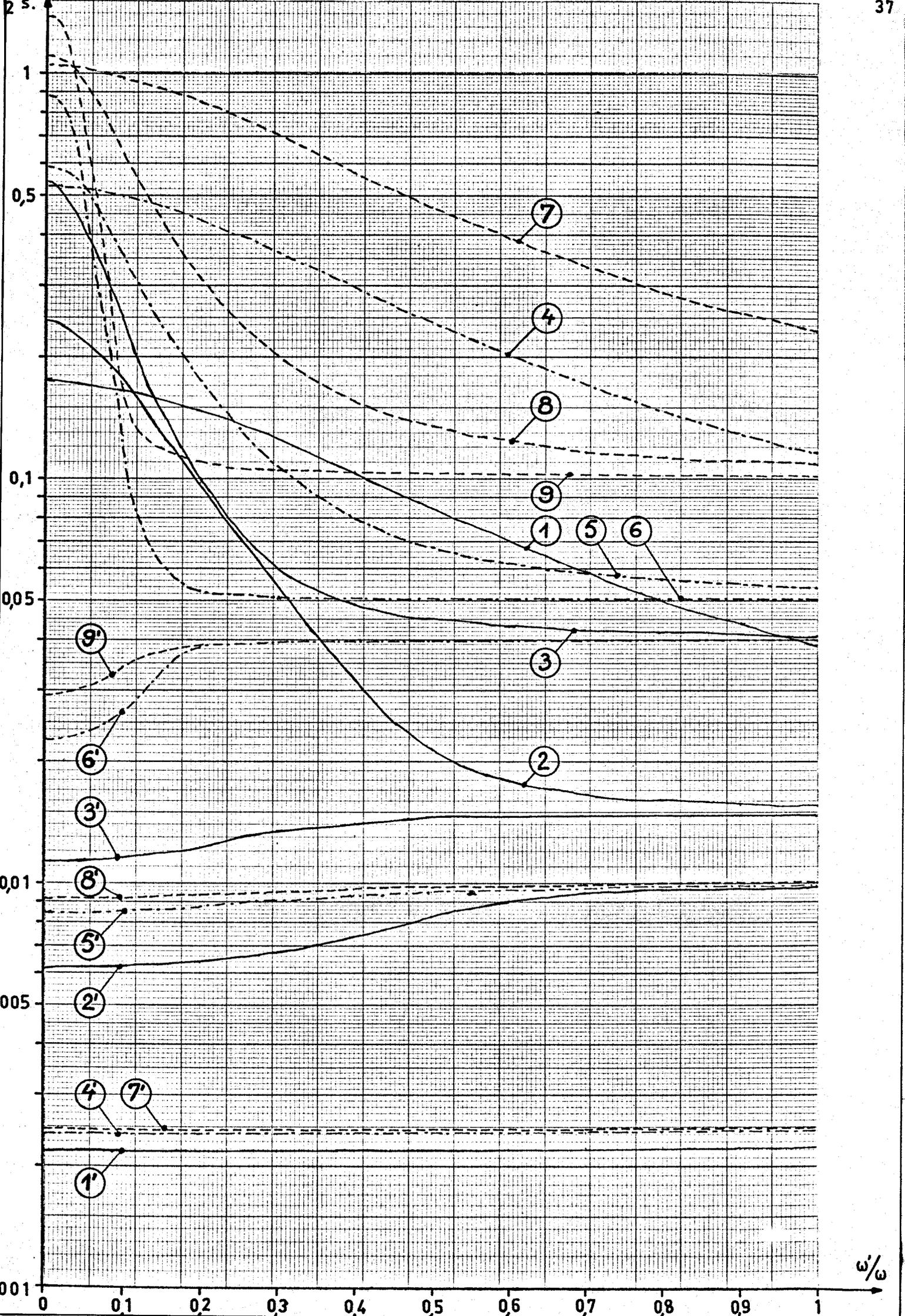
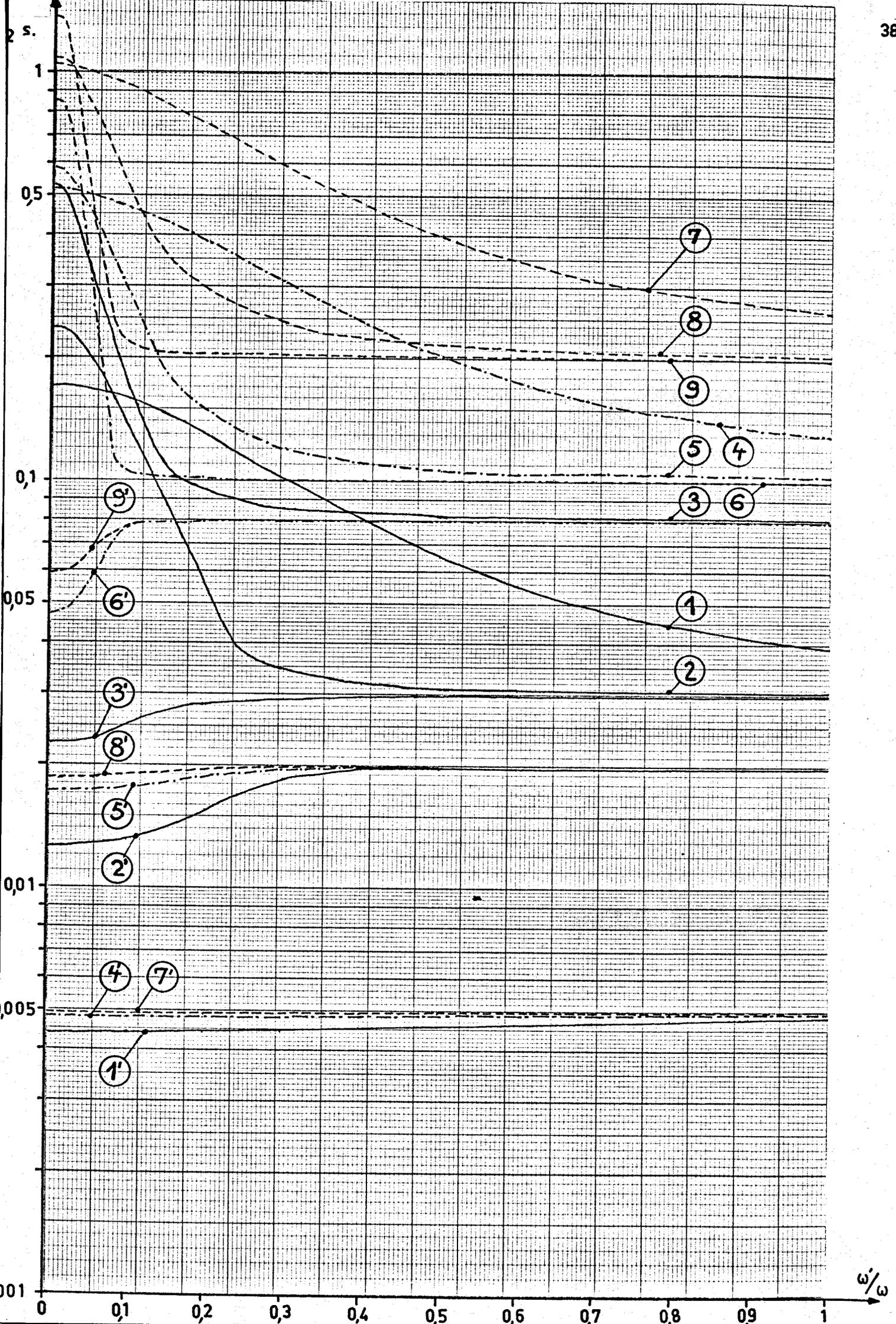


Figure 3 : Variations des constantes de temps T_1 et T_2 en fonction de la vitesse pour $\sigma = 0,20$ et diverses valeurs de τ_1 et τ_2 .

		Courbes donnant T_1	Courbes donnant T_2	
$\tau_1 = 0,15 \text{ s}$	}	$\tau_2 = 0,025 \text{ s}$	①	①'
		$\tau_2 = 0,1 \text{ s}$	②	②'
		$\tau_2 = 0,4 \text{ s}$	③	③'
$\tau_1 = 0,5 \text{ s}$	}	$\tau_2 = 0,025 \text{ s}$	④	④'
		$\tau_2 = 0,1 \text{ s}$	⑤	⑤'
		$\tau_2 = 0,4 \text{ s}$	⑥	⑥'
$\tau_1 = 1 \text{ s}$	}	$\tau_2 = 0,025 \text{ s}$	⑦	⑦'
		$\tau_2 = 0,1 \text{ s}$	⑧	⑧'
		$\tau_2 = 0,4 \text{ s}$	⑨	⑨'



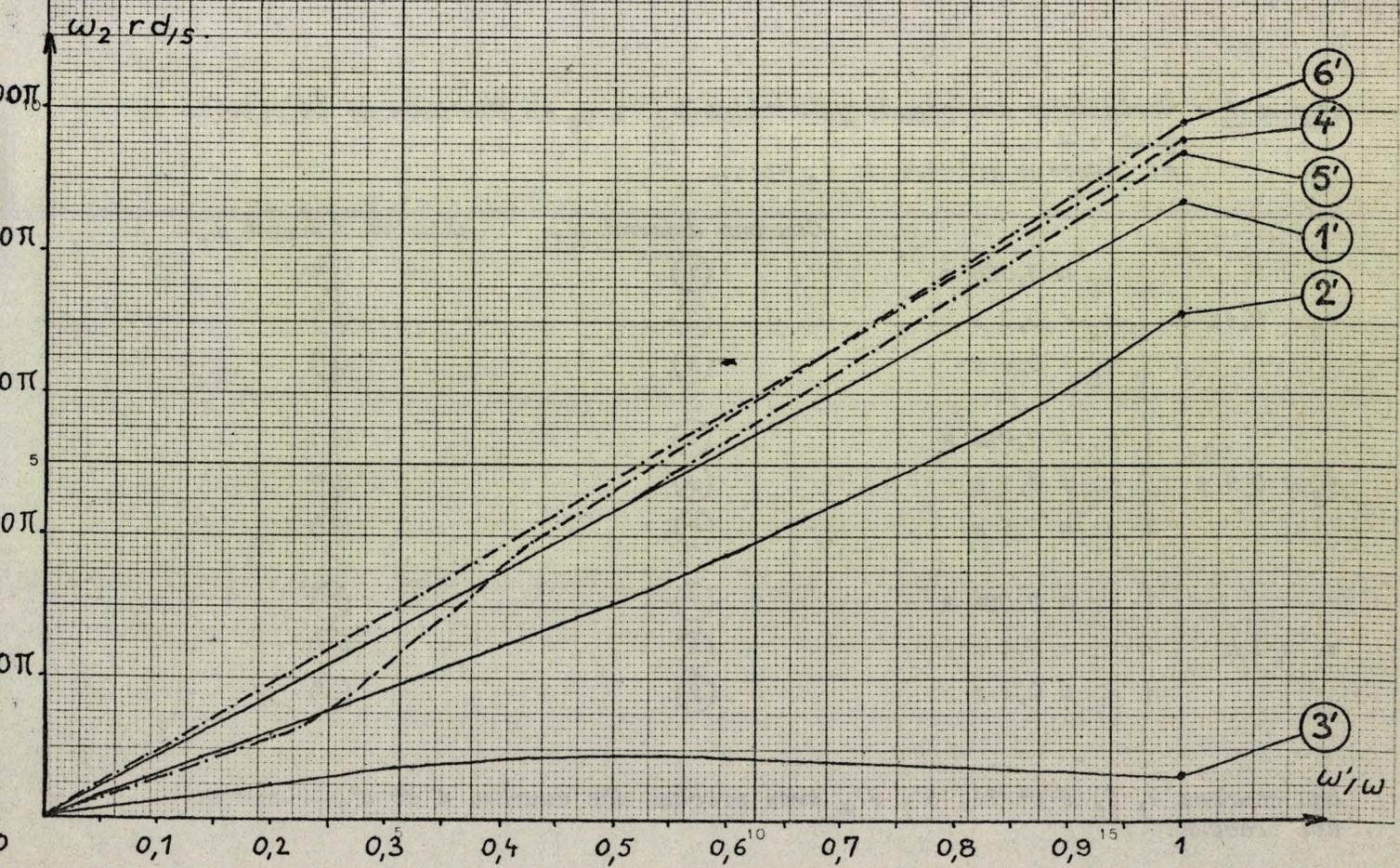
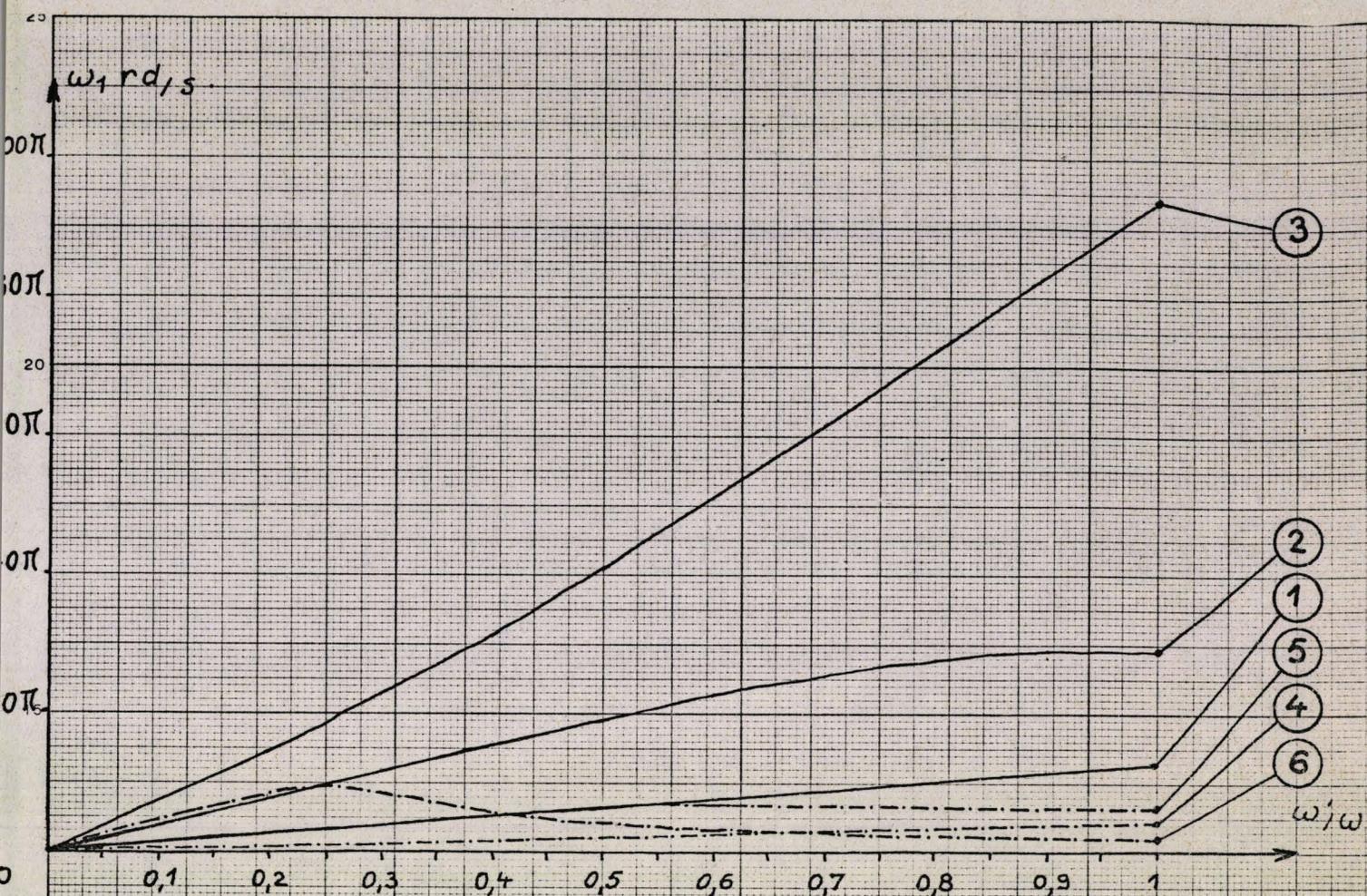


Figure 5 : Variations des pseudo-pulsations ω_1 et ω_2 en fonction de la vitesse pour $\sigma = 0,10$ et diverses valeurs de τ_1 et τ_2 .

	Courbes donnant ω_1	Courbes donnant ω_2
$\tau_1 = 0,15 \text{ s}$	$\left\{ \begin{array}{l} \tau_2 = 0,025 \text{ s} \\ \tau_2 = 0,1 \text{ s} \\ \tau_2 = 0,4 \text{ s} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2'} \\ \textcircled{3'} \end{array} \right.$
$\tau_1 = 0,5 \text{ s}$	$\left\{ \begin{array}{l} \tau_2 = 0,025 \text{ s} \\ \tau_2 = 0,1 \text{ s} \\ \tau_2 = 0,4 \text{ s} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{4'} \\ \textcircled{5'} \\ \textcircled{6'} \end{array} \right.$
$\tau_1 = 1 \text{ s}$	$\left\{ \begin{array}{l} \tau_2 = 0,025 \text{ s} \\ \tau_2 = 0,1 \text{ s} \\ \tau_2 = 0,4 \text{ s} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{7'} \\ \textcircled{8'} \\ \textcircled{9'} \end{array} \right.$

Les courbes 7, 8, 9 et 7', 8', 9', très proches des courbes 4 et 4', n'ont pas été tracées.

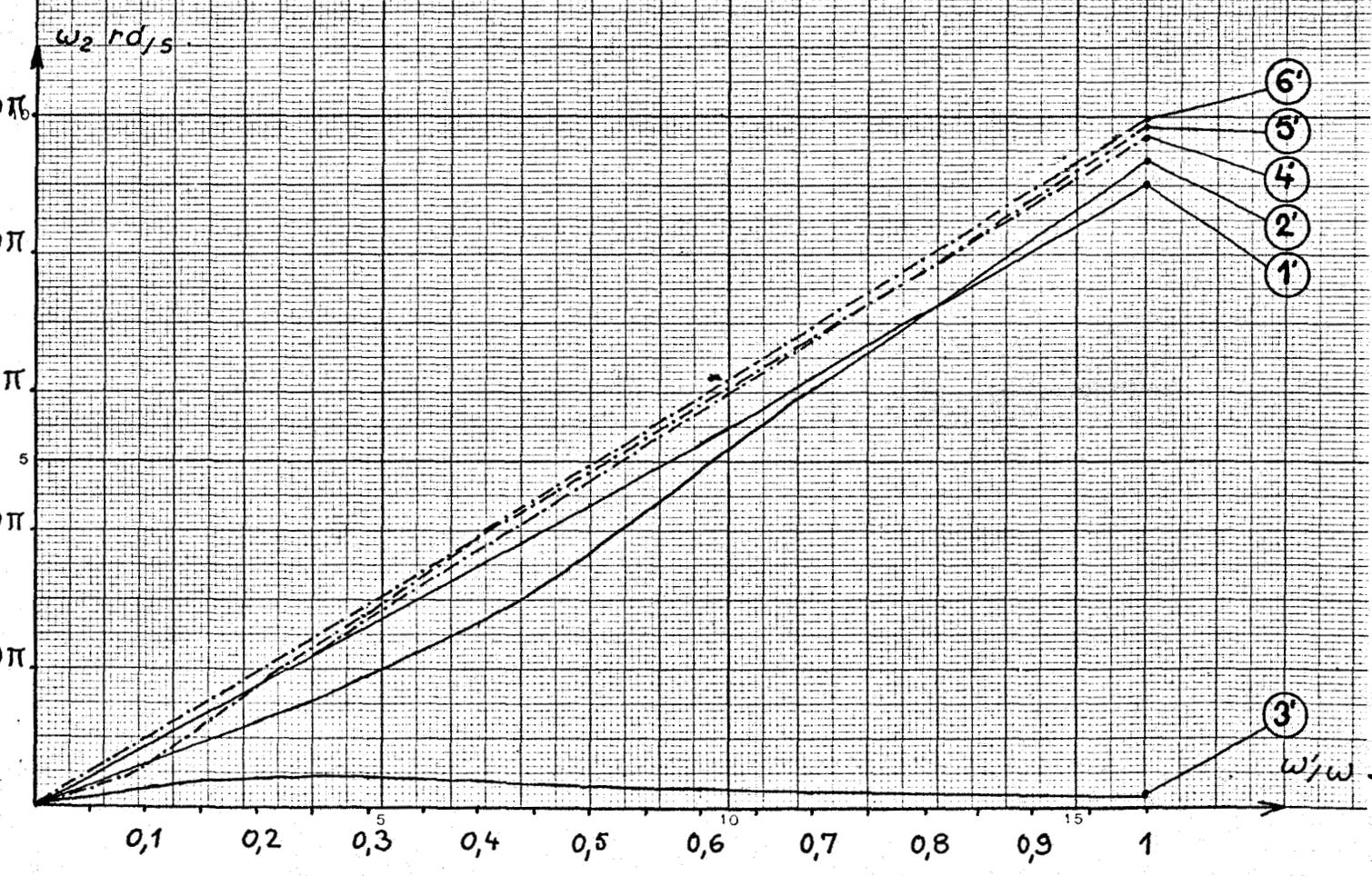
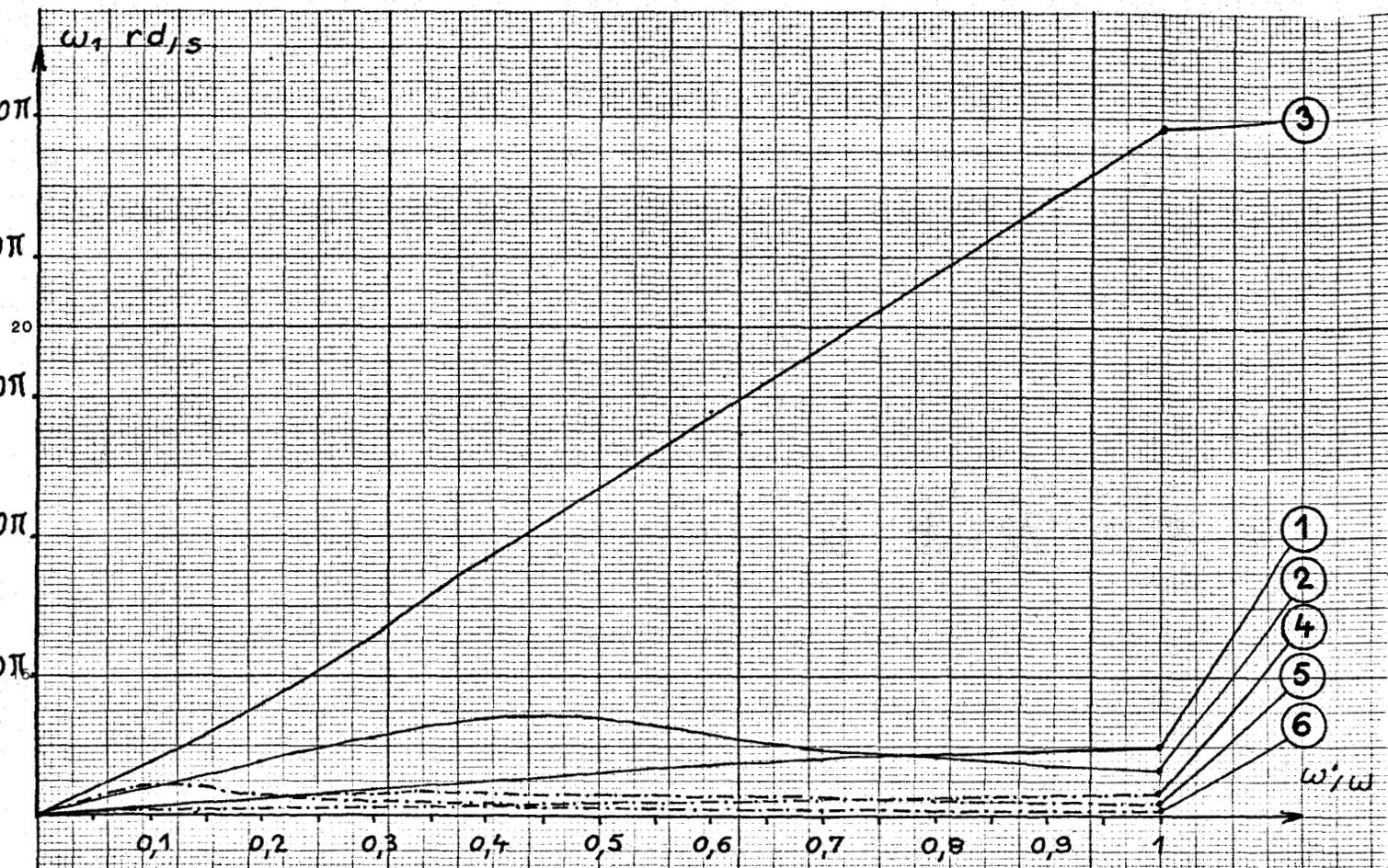
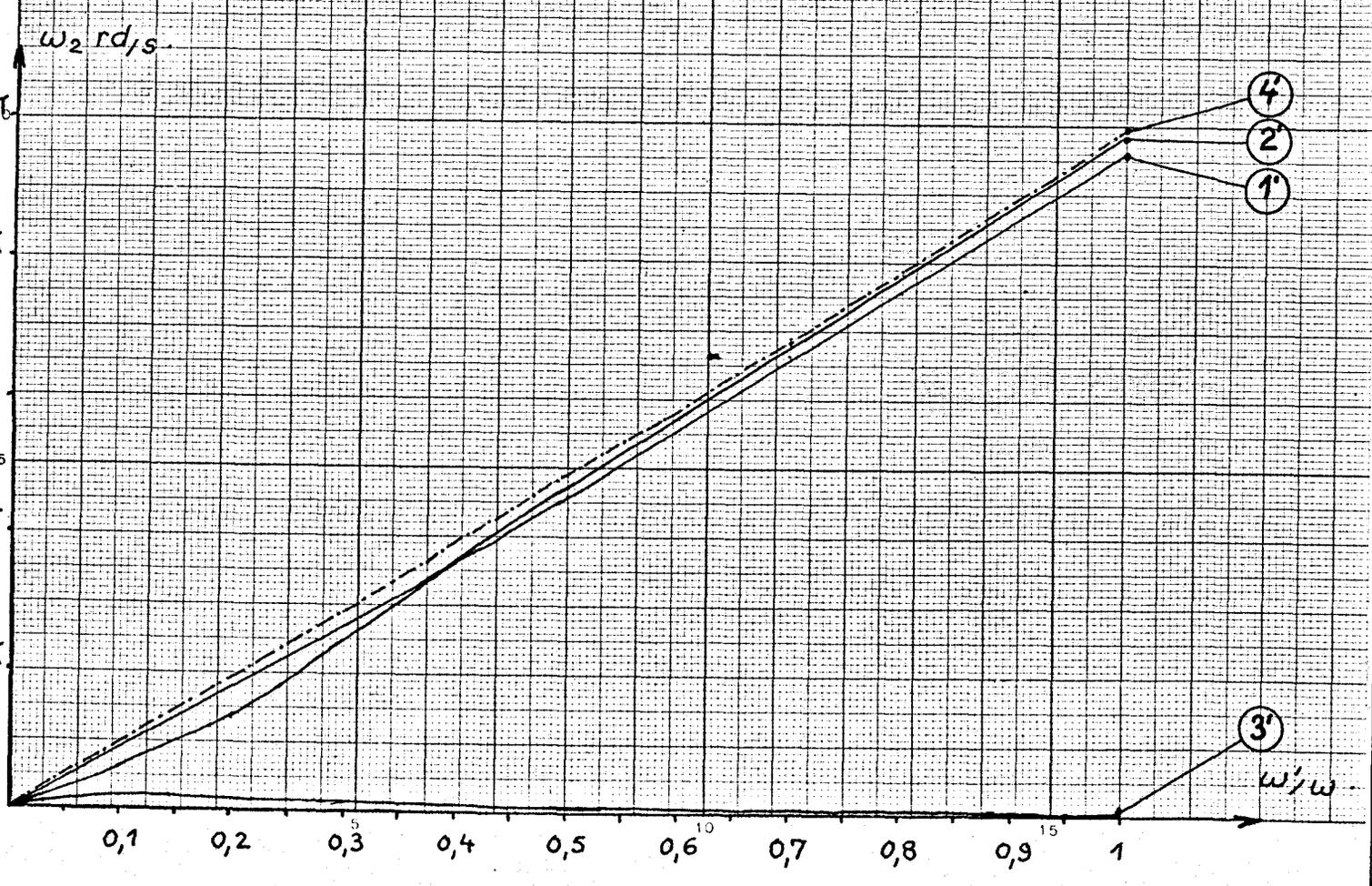
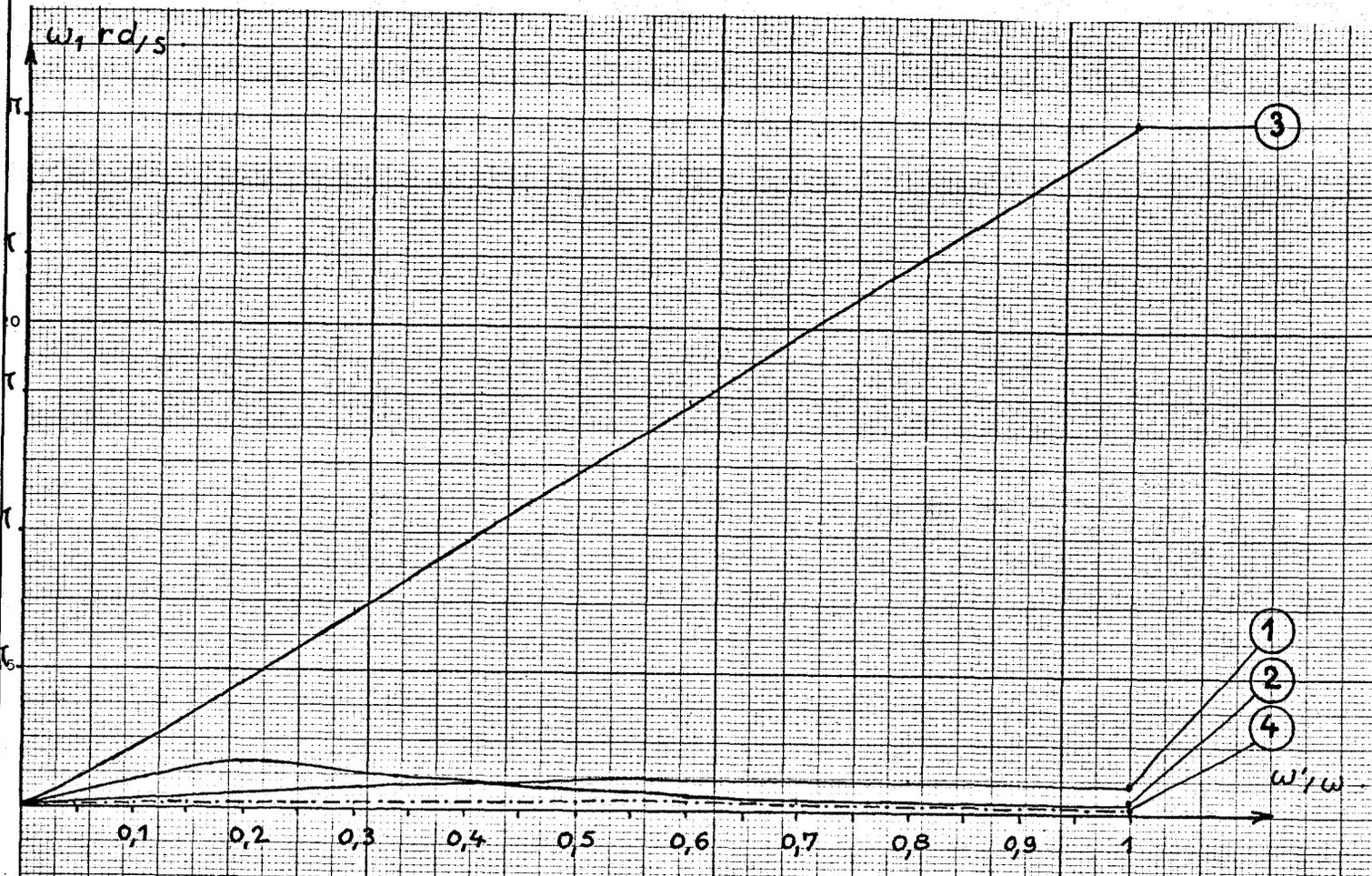


Figure 6 : Variations des pseudo-pulsations ω_1 et ω_2 en fonction de la vitesse pour $\sigma = 0,20$ et diverses valeurs de τ_1 et τ_2 .

	Courbes donnant ω_1	Courbes donnant ω_2	
$\tau_1 = 0,15 \text{ s}$	$\tau_2 = 0,025 \text{ s}$	①	①'
	$\tau_2 = 0,1 \text{ s}$	②	②'
	$\tau_2 = 0,4 \text{ s}$	③	③'
$\tau_1 = 0,5 \text{ s}$	$\tau_2 = 0,025 \text{ s}$	④	④'
	$\tau_2 = 0,1 \text{ s}$	⑤	⑤'
	$\tau_2 = 0,4 \text{ s}$	⑥	⑥'
$\tau_1 = 1 \text{ s}$	$\tau_2 = 0,025 \text{ s}$	⑦	⑦'
	$\tau_2 = 0,1 \text{ s}$	⑧	⑧'
	$\tau_2 = 0,4 \text{ s}$	⑨	⑨'

Les courbes 5 à 9 et 5' à 9', très proches des courbes 4 et 4', n'ont pas été tracées.



II.2.3 Détermination des constantes d'intégration

L'établissement direct des relations donnant les constantes d'intégration K_1, K_2, K_3 et K_4 , qui interviennent dans les expressions des courants primaires et secondaires en régime libre, est malaisé.

Il est commode ici encore de passer par les composantes $i'_{12\ell}, i'_{22\ell}, i'_{13\ell}$ et $i'_{23\ell}$ des courants réels et de déterminer d'abord les constantes d'intégration k_1, k_2, k_3 et k_4 correspondantes.

II.2.3.1 Valeur de k_1, k_2, k_3 et k_4

Les expressions (54) des composantes $i'_{12\ell}$ et $i'_{22\ell}$ donnent à l'instant initial

$$i'_{12\ell 0} = (N_1 + jN'_1) \left(\frac{k_1}{D_1} + \frac{k_2}{D_2} \right) e^{j\frac{p\theta_0}{2}} \quad (59)$$

$$i'_{22\ell 0} = \left[(P_1 + jP'_1) \frac{k_1}{D_1} + (P_2 + jP'_2) \frac{k_2}{D_2} \right] e^{-j\frac{p\theta_0}{2}} \quad (60)$$

Puisque les composantes i'_{13} et i'_{23} sont les conjuguées respectivement de i'_{12} et de i'_{22} et que les constantes d'intégration qui leur correspondent sont k_3 et k_4 , pour $t = 0$ on obtient

$$i'_{13\ell 0} = (N_1 - jN'_1) \left(\frac{k_3}{D_1} + \frac{k_4}{D_2} \right) e^{-j\frac{p\theta_0}{2}} \quad (61)$$

$$i'_{23\ell 0} = \left[(P_1 - jP'_1) \frac{k_3}{D_1} + (P_2 - jP'_2) \frac{k_4}{D_2} \right] e^{j\frac{p\theta_0}{2}} \quad (62)$$

Ces quatre relations permettent de calculer k_1, k_2, k_3 et k_4 qui ont pour expression

$$\frac{k_1}{D_1} = \frac{i'_{12\ell 0} e^{-j\frac{p\theta_0}{2}} (P_2 + jP'_2) - i'_{22\ell 0} e^{j\frac{p\theta_0}{2}} (N_1 + jN'_1)}{(N_1 + jN'_1) \left[(P_2 + jP'_2) - (P_1 + jP'_1) \right]} \quad (63)$$

$$\frac{k_3}{D_1} = \frac{i'_{13\ell 0} e^{j\frac{p\theta_0}{2}} (P_2 - jP'_2) - i'_{23\ell 0} e^{-j\frac{p\theta_0}{2}} (N_1 - jN'_1)}{(N_1 - jN'_1) \left[(P_2 - jP'_2) - (P_1 - jP'_1) \right]} \quad (64)$$

$$\frac{k_2}{D_2} = \frac{i'_{12l0} e^{-j\frac{p\theta}{2}} (P_1 + jP'_1) - i'_{22l0} e^{j\frac{p\theta}{2}} (N_1 + jN'_1)}{(N_1 + jN'_1) \left[(P_2 + jP'_2) - (P_1 + jP'_1) \right]} \quad (65)$$

$$\frac{k_4}{D_2} = \frac{i'_{13l0} e^{j\frac{p\theta}{2}} (P_1 - jP'_1) - i'_{23l0} e^{-j\frac{p\theta}{2}} (N_1 - jN'_1)}{(N_1 - jN'_1) \left[(P_2 - jP'_2) - (P_1 - jP'_1) \right]} \quad (66)$$

On remarque que k_1 et k_3 d'une part, k_2 et k_4 d'autre part sont des quantités conjuguées. Il est commode, comme nous l'avons signalé dès le paragraphe II.2.1.2, de poser

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{D_1} &= K_1 \pm j K_2 & \frac{k_2}{D_2} &= K_3 \pm j K_4 \\ \frac{k_3}{D_1} & & \frac{k_4}{D_2} & \end{aligned} \quad (55)$$

car K_1, K_2, K_3 et K_4 constituent les constantes réelles qui interviennent dans les expressions des vrais courants primaires et secondaires tels que les donnent les relations (57) et (58).

II.2.3.2 Passage aux constantes K_1, K_2, K_3 et K_4

Pour calculer K_1, K_2, K_3 et K_4 il est nécessaire de faire intervenir les courants réels car c'est eux qui ne peuvent subir de discontinuité. La valeur initiale du terme libre i_{11l} par exemple doit être telle que, si i_{11} vaut i_{110} pour $t = 0$ et i_{11fo} est la valeur du terme forcé pour $t = 0$, le courant i_{11} égal à $i_{11l} + i_{11f}$ ne subisse pas de discontinuité.

$$\begin{aligned} \text{Donc } i_{11l0} &= i_{110} - i_{11fo} \\ i_{12l0} &= i_{120} - i_{12fo} \dots \text{ etc.} \end{aligned}$$

Or les relations (26) liant les courants réels à leurs composantes donnent à l'instant de la perturbation

$$\begin{aligned} i'_{12l0} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (i_{11l0} + a i_{12l0} + a' i_{13l0}) \\ i'_{22l0} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (i_{21l0} + a i_{22l0} + a'' i_{23l0}) \end{aligned}$$

ou, en remplaçant les valeurs initiales des termes libres par celles des courants réels et des termes forcés

$$\begin{aligned} i'_{12l0} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ (i_{110} - i_{11fo}) + (i_{120} - i_{12fo}) e^{j\frac{2\pi}{3}} + (i_{130} - i_{13fo}) e^{j\frac{4\pi}{3}} \right\} \\ i'_{22l0} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ (i_{210} - i_{21fo}) + (i_{220} - i_{22fo}) e^{j\frac{2\pi}{3}} + (i_{230} - i_{23fo}) e^{j\frac{4\pi}{3}} \right\} \end{aligned} \quad (67)$$

Il est maintenant possible à l'aide des relations (55), (63), (64), (65), (66) et (67) d'établir les expressions de K_1, K_2, K_3 et K_4 se prêtant bien aux applications numériques.

Après avoir effectué ces calculs on trouve :

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{(P_2 - P_1)^2 + (P'_2 - P'_1)^2}} \left\{ \sqrt{\frac{P_2^2 + P_1'^2}{N_1^2 + N_1'^2}} \left\{ (i_{110} - i_{11fo}) \cos \left(\frac{p\theta_o + \psi + \varphi - \xi}{2} \right) \right. \right.$$

$$+ (i_{120} - i_{12fo}) \cos \left(\frac{p\theta_o + \psi + \varphi - \xi}{2} - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$+ (i_{130} - i_{13fo}) \cos \left(\frac{p\theta_o + \psi + \varphi - \xi}{2} - \frac{4\pi}{3} \right) \left. \right\}$$

$$- \left\{ (i_{210} - i_{21fo}) \cos \left(\frac{p\theta_o - \varphi}{2} \right) + (i_{220} - i_{22fo}) \cos \left(\frac{p\theta_o - \varphi}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) \right.$$

$$\left. + (i_{230} - i_{23fo}) \cos \left(\frac{p\theta_o - \varphi}{2} + \frac{4\pi}{3} \right) \right\}$$

$$K_2 = - \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{(P_2 - P_1)^2 + (P'_2 - P'_1)^2}} \left\{ \sqrt{\frac{P_2^2 + P_1'^2}{N_1^2 + N_1'^2}} \left\{ (i_{110} - i_{11fo}) \sin \left(\frac{p\theta_o + \psi + \varphi - \xi}{2} \right) \right. \right.$$

$$+ (i_{120} - i_{12fo}) \sin \left(\frac{p\theta_o + \psi + \varphi - \xi}{2} - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$+ (i_{130} - i_{13fo}) \sin \left(\frac{p\theta_o + \psi + \varphi - \xi}{2} - \frac{4\pi}{3} \right) \left. \right\}$$

$$+ \left\{ (i_{210} - i_{21fo}) \sin \left(\frac{p\theta_o - \varphi}{2} \right) + (i_{220} - i_{22fo}) \sin \left(\frac{p\theta_o - \varphi}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) \right.$$

$$\left. + (i_{230} - i_{23fo}) \sin \left(\frac{p\theta_o - \varphi}{2} + \frac{4\pi}{3} \right) \right\}$$

$$K_3 = - \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{(P_2 - P_1)^2 + (P'_2 - P'_1)^2}} \left\{ \sqrt{\frac{P_2^2 + P_1'^2}{N_1^2 + N_1'^2}} \left\{ (i_{110} - i_{11fo}) \cos \left(\frac{p\theta_o + \psi + \varphi - \zeta}{2} \right) \right. \right.$$

$$+ (i_{120} - i_{12fo}) \cos \left(\frac{p\theta_o + \psi + \varphi - \zeta}{2} - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$+ (i_{130} - i_{13fo}) \cos \left(\frac{p\theta_o + \psi + \varphi - \zeta}{2} - \frac{4\pi}{3} \right) \left. \right\}$$

$$- \left\{ (i_{210} - i_{21fo}) \cos \left(\frac{p\theta_o - \varphi}{2} \right) + (i_{220} - i_{22fo}) \cos \left(\frac{p\theta_o - \varphi}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) \right.$$

$$\left. + (i_{230} - i_{23fo}) \cos \left(\frac{p\theta_o - \varphi}{2} + \frac{4\pi}{3} \right) \right\}$$

$$K_4 = \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{(P_2 - P_1)^2 + (P'_2 - P'_1)^2}} \left\{ \sqrt{\frac{P_2^2 + P_1'^2}{N_1^2 + N_1'^2}} \left\{ (i_{110} - i_{11fo}) \sin \left(\frac{p\theta_o + \psi + \varphi - \zeta}{2} \right) \right. \right.$$

$$+ (i_{120} - i_{12fo}) \sin \left(\frac{p\theta_o + \psi + \varphi - \zeta}{2} - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$+ (i_{130} - i_{13fo}) \sin \left(\frac{p\theta_o + \psi + \varphi - \zeta}{2} - \frac{4\pi}{3} \right) \left. \right\}$$

$$+ \left\{ (i_{210} - i_{21fo}) \sin \left(\frac{p\theta_o - \varphi}{2} \right) + (i_{220} - i_{22fo}) \sin \left(\frac{p\theta_o - \varphi}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) \right.$$

$$\left. + (i_{230} - i_{23fo}) \sin \left(\frac{p\theta_o - \varphi}{2} + \frac{4\pi}{3} \right) \right\}$$

(68)

avec $\text{tg } \frac{\varphi}{2} = \frac{P'_2 - P'_1}{P_2 - P_1}$; $N_1^2 + N_1'^2 = \frac{9}{4} M^2 (1 + \tau^2 \omega'^2)$

II.2.4 Régime libre du couple

Pour calculer le couple C_ℓ correspondant au régime libre, on applique la méthode générale (voir § II.1.5).

Les relations (56) donnant $i'_{12\ell}$ et $i'_{22\ell}$, on forme le produit $i'_{12\ell} i'_{22\ell} e^{-j(\omega't + p\theta_0)}$. La valeur numérique J_ℓ de ce produit donne C_ℓ qui est égal à $3 p M J_\ell$.

En effectuant les calculs, on trouve

$$C_\ell = \frac{9}{2} p M^2 \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega'^2} \left\{ \begin{aligned} & (K_1^2 + K_2^2) \sqrt{P_1^2 + P_1'^2} \sin\left(\frac{\psi - \xi}{2}\right) e^{-\frac{2t}{T_1}} \\ & \sqrt{(K_1^2 + K_2^2)(K_3^2 + K_4^2)(P_2^2 + P_2'^2)} \sin\left(Ct + \frac{\rho + \psi - \nu - \xi}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-\frac{t}{T_2}} \\ & - \sqrt{(K_1^2 + K_2^2)(K_3^2 + K_4^2)(P_1^2 + P_1'^2)} \sin\left(Ct + \frac{\rho + \xi - \nu - \psi}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-\frac{t}{T_2}} \\ & + (K_3^2 + K_4^2) \sqrt{P_2^2 + P_2'^2} \sin\left(\frac{\psi - \xi}{2}\right) e^{-\frac{2t}{T_2}} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Alors que le régime libre de chacun des courants ne comprend que deux termes pseudo-périodiques

pour les courants primaires

- l'un de pseudo-pulsation ω_1 amorti avec la constante de temps T_1
- l'autre de pseudo-pulsation ω_2 amorti avec la constante de temps T_2

pour les courants secondaires

- l'un de pseudo-pulsation ω_2 amorti avec la constante de temps T_1
- l'autre de pseudo-pulsation ω_1 amorti avec la constante de temps T_2 ,

le régime libre du couple comprend trois termes

- deux termes aperiodiques amortis, l'un de constante de temps $T_1/2$, l'autre de constante de temps $T_2/2$,
- un terme pseudo-périodique, de pulsation C égale à $\omega_1 - \omega_2$ et de constante de temps $T_1 T_2 / (T_1 + T_2)$.

II.3 ETUDE DU REGIME FORCE

Les équations (29) et (32) qui, par leur solution générale, donnent le régime libre, donnent par leurs solutions particulières le régime forcé.

Nous examinerons d'abord le cas général d'une alimentation du moteur par un système triphasé quelconque de tensions. Ensuite nous verrons les simplifications qui apparaissent si ces tensions sont sinusoïdales, puis si ces tensions sont sinusoïdales et forment un système triphasé équilibré.

L'intérêt de cette étude du régime permanent tient au fait que nous utilisons les mêmes notations que pour le régime libre. Cela nous permettra notamment de préconiser quelques essais simples en régime permanent permettant de déterminer les constantes de temps et les pseudo-pulsations intervenant dans le régime libre.

Pour le régime forcé, les équations donnant les composantes des courants s'écrivent

$$\left. \begin{aligned} R_1 i'_{12f} + L_1 \frac{di'_{12f}}{dt} + \frac{3}{2} M e^{j(\omega't + p\theta_0)} \left(\frac{di'_{22f}}{dt} + j\omega' i'_{22f} \right) &= v'_{12} \\ R_2 i'_{22f} + L_2 \frac{di'_{22f}}{dt} + \frac{3}{2} M e^{-j(\omega't + p\theta_0)} \left(\frac{di'_{12f}}{dt} - j\omega' i'_{12f} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

II.3.1 Cas général. Tensions d'alimentation quelconques

Si les trois tensions d'alimentation sont des fonctions quelconques du temps, il est nécessaire de les décomposer en série de Fourier. Vu les hypothèses générales adoptées, on trouvera les courants et le couple réels par superposition des effets des termes fondamentaux de pulsation ω et des termes harmoniques.

Les tensions primaires peuvent s'écrire

$$\left. \begin{aligned} v_{11} &= \sum_{n=1}^{\infty} V_{1nm} \sin(n\omega t + \alpha + \alpha_{1n}) \\ v_{12} &= \sum_{n=1}^{\infty} V_{2nm} \sin(n\omega t + \alpha + \alpha_{2n}) \\ v_{13} &= \sum_{n=1}^{\infty} V_{3nm} \sin(n\omega t + \alpha + \alpha_{3n}) \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

ou, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\omega t + \alpha) \begin{pmatrix} v_{1nm} \cos \alpha_{1n} \\ v_{2nm} \cos \alpha_{2n} \\ v_{3nm} \cos \alpha_{3n} \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\omega t + \alpha) \begin{pmatrix} v_{1nm} \sin \alpha_{1n} \\ v_{2nm} \sin \alpha_{2n} \\ v_{3nm} \sin \alpha_{3n} \end{pmatrix} \quad (72)$$

II.3.1.1 Changements de variables

Effectuons le changement de variables indiqué dans la méthode générale

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_{11} \\ v'_{12} \\ v'_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix}$$

En développant, compte tenu de (72), il vient

$$\begin{pmatrix} v'_{11} \\ v'_{12} \\ v'_{13} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\omega t + \alpha) \begin{pmatrix} v_{1nm} \cos \alpha_{1n} + v_{2nm} \cos \alpha_{2n} + v_{3nm} \cos \alpha_{3n} \\ v_{1nm} \cos \alpha_{1n} + a v_{2nm} \cos \alpha_{2n} + a^2 v_{3nm} \cos \alpha_{3n} \\ v_{1nm} \cos \alpha_{1n} + a^2 v_{2nm} \cos \alpha_{2n} + a v_{3nm} \cos \alpha_{3n} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\omega t + \alpha) \begin{pmatrix} v_{1nm} \sin \alpha_{1n} + v_{2nm} \sin \alpha_{2n} + v_{3nm} \sin \alpha_{3n} \\ v_{1nm} \sin \alpha_{1n} + a v_{2nm} \sin \alpha_{2n} + a^2 v_{3nm} \sin \alpha_{3n} \\ v_{1nm} \sin \alpha_{1n} + a^2 v_{2nm} \sin \alpha_{2n} + a v_{3nm} \sin \alpha_{3n} \end{pmatrix} \quad (73)$$

Rappelons la remarque générale effectuée dès le début : que le primaire du moteur soit couplé en étoile sans conducteur neutre ou en triangle, les tensions aux bornes des trois phases ont une somme nulle. Donc $v'_{11} = 0$.

On note ici encore que, a étant le conjugué de a^2 , les composantes v'_{12} et v'_{13} sont conjuguées. Seule l'étude complète des courants correspondant à v'_{12} est nécessaire.

La composante v'_{12} peut s'écrire

$$v'_{12} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (A_n + jB_n) e^{j(n\omega t + \alpha)} + (C_n + jD_n) e^{-j(n\omega t + \alpha)} \right\}$$

en posant

$$A_n = v_{2nm} \cos \alpha_{2n} - v_{3nm} \cos \alpha_{3n} + \frac{2}{\sqrt{3}} v_{1nm} \sin \alpha_{1n} - \frac{1}{\sqrt{3}} v_{2nm} \sin \alpha_{2n} - \frac{1}{\sqrt{3}} v_{3nm} \sin \alpha_{3n}$$

$$B_n = -\frac{2}{\sqrt{3}} v_{1nm} \cos \alpha_{1n} + \frac{1}{\sqrt{3}} v_{2nm} \cos \alpha_{2n} + \frac{1}{\sqrt{3}} v_{3nm} \cos \alpha_{3n} + v_{2nm} \sin \alpha_{2n} - v_{3nm} \sin \alpha_{3n}$$

$$C_n = -v_{2nm} \cos \alpha_{2n} + v_{3nm} \cos \alpha_{3n} + \frac{2}{\sqrt{3}} v_{1nm} \sin \alpha_{1n} - \frac{1}{\sqrt{3}} v_{2nm} \sin \alpha_{2n} - \frac{1}{\sqrt{3}} v_{3nm} \sin \alpha_{3n}$$

$$D_n = \frac{2}{\sqrt{3}} v_{1nm} \cos \alpha_{1n} - \frac{1}{\sqrt{3}} v_{2nm} \cos \alpha_{2n} - \frac{1}{\sqrt{3}} v_{3nm} \cos \alpha_{3n} + v_{2nm} \sin \alpha_{2n} - v_{3nm} \sin \alpha_{3n}$$

(74)

Pour les composantes i'_{12f} et i'_{22f} des courants forcés on pose

$$\left. \begin{aligned} i'_{12f} &= x_f e^{j \frac{\omega' t + p\theta_0}{2}} \\ i'_{22f} &= y_f e^{-j \frac{\omega' t + p\theta_0}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Compte tenu de (74) et (75), les relations (70) deviennent

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{dx_f}{dt} + \frac{3}{2} M \frac{dy_f}{dt} &= -(R_1 + j L_1 \frac{\omega'}{2}) x_f - \frac{3}{2} j M \frac{\omega'}{2} y_f + H \\ \frac{3}{2} M \frac{dx_f}{dt} + L_2 \frac{dy_f}{dt} &= \frac{3}{2} j M \frac{\omega'}{2} x_f - (R_2 - j L_2 \frac{\omega'}{2}) y_f \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

avec

$$H = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n + jB_n) e^{j \left((n\omega - \frac{\omega'}{2}) t + \alpha - \frac{p\theta_0}{2} \right)} + (C_n + jD_n) e^{-j \left((n\omega + \frac{\omega'}{2}) t + \alpha + \frac{p\theta_0}{2} \right)} \right]$$

ou, sous forme matricielle,

$$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx_f}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \quad (77)$$

$\begin{bmatrix} F \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} G \end{bmatrix}$ ayant la valeur donnée précédemment (voir § II.2.1.1)

$\begin{bmatrix} \frac{dx_f}{dt} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} X_f \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} H \end{bmatrix}$ étant ainsi définis

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_f}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx_f}{dt} \\ \frac{dy_f}{dt} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} X_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En prémultipliant l'égalité matricielle (77) par $\begin{bmatrix} F \end{bmatrix}^{-1}$, on obtient

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_f}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H \end{bmatrix}$$

soit, en développant

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_f}{dt} \\ \frac{dy_f}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\tau_2 + \tau_1 \tau_2 (2-\sigma) j \frac{\omega'}{2}}{\sigma \tau_1 \tau_2} & \frac{3}{2} M \frac{1 - j \tau_2 \omega'}{\sigma \tau_1 \tau_2 R_1} \\ \frac{3}{2} M \frac{1 + j \tau_1 \omega'}{\sigma \tau_1 \tau_2 R_2} & -\frac{\tau_1 - \tau_1 \tau_2 (2-\sigma) j \frac{\omega'}{2}}{\sigma \tau_1 \tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \end{bmatrix} = \frac{H}{\sigma L_1 L_2} \begin{bmatrix} L_2 \\ -\frac{3}{2} M \end{bmatrix} \quad (78)$$

Les relations (78) se prêtent assez bien à la recherche des solutions particulières.

La nature de H montre que pour chaque valeur de n on aura deux solutions particulières,

l'une correspondant à $(A_n + jB_n) e^{j \left((n\omega - \frac{\omega'}{2}) t + \alpha - \frac{p\theta_0}{2} \right)}$

l'autre à $(C_n + jD_n) e^{-j \left((n\omega + \frac{\omega'}{2}) t + \alpha + \frac{p\theta_0}{2} \right)}$

II.3.1.2 Les deux séries de solutions particulières

La première solution particulière pour le terme de rang n est de la forme

$$\begin{pmatrix} x_{nf} \\ y_{nf} \end{pmatrix} = e^{j(n\omega - \frac{\omega'}{2})t} \begin{pmatrix} x_{nfo} \\ y_{nfo} \end{pmatrix} \quad (79)$$

En dérivant puis en reportant $\begin{pmatrix} x_{nf} \\ y_{nf} \end{pmatrix}$ et $\left(\frac{d}{dt} x_{nf}\right)$ dans le système d'équations (78) où H est réduit à son terme $\frac{1}{4} (A_n + jB_n) e^{j\left[(n\omega - \frac{\omega'}{2})t + \alpha - \frac{p\theta_0}{2}\right]}$ on obtient, par identification à l'instant $t = 0$, tous calculs effectués

$$\begin{pmatrix} x_{nfo} \\ y_{nfo} \end{pmatrix} = \frac{1}{4R_1 R_2} \frac{(A_n + jB_n) e^{j\left(\alpha - \frac{p\theta_0}{2}\right)}}{1 - \sigma\tau_1\tau_2 n\omega(n\omega - \omega') + j[\tau_1 n\omega + \tau_2(n\omega - \omega')]} \begin{pmatrix} R_2 \left(1 + j\tau_2(n\omega - \omega')\right) \\ -\frac{3}{2} j M(n\omega - \omega') \end{pmatrix}$$

D'où la première solution à un instant quelconque

$$\begin{pmatrix} x_{nf} \\ y_{nf} \end{pmatrix} = \frac{1}{4R_1 R_2} \frac{(A_n + jB_n) e^{j\left[(n\omega - \frac{\omega'}{2})t + \alpha - \frac{p\theta_0}{2}\right]}}{1 - \sigma\tau_1\tau_2 n\omega(n\omega - \omega') + j[\tau_1 n\omega + \tau_2(n\omega - \omega')]} \begin{pmatrix} R_2 \left(1 + j\tau_2(n\omega - \omega')\right) \\ -\frac{3}{2} j M(n\omega - \omega') \end{pmatrix} \quad (80)$$

La seconde solution particulière pour le terme d'ordre n correspond au terme en $(C_n + jD_n) e^{-j\left[(n\omega + \frac{\omega'}{2})t + \alpha + \frac{p\theta_0}{2}\right]}$ dans l'expression de H.

Elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} x'_{nf} \\ y'_{nf} \end{pmatrix} = e^{-j(n\omega + \frac{\omega'}{2})t} \begin{pmatrix} x'_{nfo} \\ y'_{nfo} \end{pmatrix} \quad (81)$$

Comme précédemment on identifie, à l'instant $t = 0$, les deux membres des relations (78). On obtient ainsi x'_{nfo} et y'_{nfo} .

D'où la seconde solution à un instant t quelconque

$$\begin{pmatrix} x'_{nf} \\ y'_{nf} \end{pmatrix} = \frac{1}{4R_1 R_2} \frac{(C_n + jD_n) e^{-j\left[(n\omega + \frac{\omega'}{2})t + \alpha + \frac{p\theta_0}{2}\right]}}{1 - \sigma\tau_1\tau_2 n\omega(n\omega + \omega') - j[\tau_1 n\omega + \tau_2(n\omega + \omega')]} \begin{pmatrix} R_2 \left(1 - j\tau_2(n\omega + \omega')\right) \\ \frac{3}{2} j M(n\omega + \omega') \end{pmatrix} \quad (82)$$

L'ensemble des deux séries de solutions particulières donne le régime forcé des composantes x_f et y_f .

$$\begin{pmatrix} x_f \\ y_f \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} x_{nf} \\ y_{nf} \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} x'_{nf} \\ y'_{nf} \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} x_{nf} + x'_{nf} \\ y_{nf} + y'_{nf} \end{pmatrix} \quad (83)$$

II.3.1.3 Passage aux courants réels

Pour retourner aux courants réels, on passe d'abord de x_f et y_f à i'_{12f} et i'_{22f} . Les calculs donnent

$$\begin{aligned} i'_{12f} &= \frac{1}{4R_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sqrt{\frac{(A_n^2+B_n^2) \left(1 + \tau_2^2(n\omega-\omega')^2\right)}{\left[1 - \sigma\tau_1\tau_2 n\omega(n\omega-\omega')\right]^2 + \left[\tau_1 n\omega + \tau_2(n\omega-\omega')\right]^2}} \times \right. \\ &\quad \left. e^{j(n\omega t + \alpha + \epsilon_{1n} + \gamma_{1n} - \delta_{1n})} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{(C_n^2+D_n^2) \left(1 + \tau_2^2(n\omega+\omega')^2\right)}{\left[1 - \sigma\tau_1\tau_2 n\omega(n\omega+\omega')\right]^2 + \left[\tau_1 n\omega + \tau_2(n\omega+\omega')\right]^2}} \times \right. \\ &\quad \left. e^{-j(n\omega t + \alpha - \epsilon'_{2n} + \gamma_{2n} - \delta_{2n})} \right\} \\ i'_{22f} &= \frac{3M}{8R_1 R_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n\omega - \omega') \sqrt{\frac{A_n^2+B_n^2}{\left[1 - \sigma\tau_1\tau_2 n\omega(n\omega-\omega')\right]^2 + \left[\tau_1 n\omega + \tau_2(n\omega-\omega')\right]^2}} \times \right. \\ &\quad \left. e^{j\left[(n\omega - \omega')t + \alpha - p\theta_0 + \epsilon_{1n} - \delta_{1n} - \frac{\pi}{2}\right]} \right. \\ &\quad \left. + (n\omega + \omega') \sqrt{\frac{C_n^2+D_n^2}{\left[1 - \sigma\tau_1\tau_2 n\omega(n\omega+\omega')\right]^2 + \left[\tau_1 n\omega + \tau_2(n\omega+\omega')\right]^2}} \times \right. \\ &\quad \left. e^{-j\left[(n\omega + \omega')t + \alpha + p\theta_0 - \epsilon'_{2n} - \delta_{2n} - \frac{\pi}{2}\right]} \right\} \quad (84) \end{aligned}$$

avec $\operatorname{tg} \epsilon_{1n} = \frac{B_n}{A_n}$; $\operatorname{tg} \epsilon'_{2n} = \frac{D_n}{C_n}$

$$\operatorname{tg} \gamma_{1n} = \tau_2(n\omega - \omega') \quad ; \quad \operatorname{tg} \gamma_{2n} = \tau_2(n\omega + \omega')$$

$$\operatorname{tg} \delta_{1n} = \frac{\tau_1 n\omega + \tau_2(n\omega - \omega')}{1 - \sigma\tau_1\tau_2 n\omega(n\omega - \omega')}$$

$$\operatorname{tg} \delta_{2n} = \frac{\tau_1 n\omega + \tau_2(n\omega + \omega')}{1 - \sigma\tau_1\tau_2 n\omega(n\omega + \omega')}$$

Il ne reste qu'à passer aux courants réels primaires et secondaires à l'aide des relations (36) et (37). Les calculs conduisent aux résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 i_{11f} &= \frac{1}{2\sqrt{3}R_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sqrt{\frac{(A_n^2+B_n^2) \left(1 + \tau_2^2(n\omega-\omega')^2\right)}{\left[1-\sigma\tau_1\tau_2 n\omega(n\omega-\omega')\right]^2 + \left[\tau_1 n\omega + \tau_2(n\omega-\omega')\right]^2}} \right. \\
 &\quad \times \cos(n\omega t + \alpha + \varepsilon_{1n} + \gamma_{1n} - \delta_{1n}) \\
 &\quad + \sqrt{\frac{(C_n^2+D_n^2) \left(1 + \tau_2^2(n\omega+\omega')^2\right)}{\left[1-\sigma\tau_1\tau_2 n\omega(n\omega+\omega')\right]^2 + \left[\tau_1 n\omega + \tau_2(n\omega+\omega')\right]^2}} \\
 &\quad \left. \times \cos(n\omega t + \alpha - \varepsilon'_{2n} + \gamma_{2n} - \delta_{2n}) \right\} \\
 i_{21f} &= \frac{\sqrt{3}M}{4R_1 R_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n\omega-\omega') \sqrt{\frac{A_n^2+B_n^2}{\left[1-\sigma\tau_1\tau_2 n\omega(n\omega-\omega')\right]^2 + \left[\tau_1 n\omega + \tau_2(n\omega-\omega')\right]^2}} \right. \\
 &\quad \times \sin\left((n\omega-\omega')t + \alpha - p\theta_o + \varepsilon_{1n} - \delta_{1n}\right) \\
 &\quad + (n\omega+\omega') \sqrt{\frac{C_n^2+D_n^2}{\left[1-\sigma\tau_1\tau_2 n\omega(n\omega+\omega')\right]^2 + \left[\tau_1 n\omega + \tau_2(n\omega+\omega')\right]^2}} \\
 &\quad \left. \times \sin\left((n\omega+\omega')t + \alpha + p\theta_o - \varepsilon'_{2n} - \delta_{2n}\right) \right\} \quad (85)
 \end{aligned}$$

Le système de tensions de pulsation $n\omega$ donne au primaire des courants de même pulsation. Au secondaire on trouve des courants de pulsation $n\omega-\omega'$ et d'autres de pulsation $n\omega+\omega'$; les premiers sont dus à la composante directe des tensions qui crée un flux tournant direct de vitesse $n\omega/p$, les seconds à la composante inverse qui donne un flux tournant en sens inverse à la vitesse $n\omega/p$.

Ayant les courants dans les premières phases au stator et au rotor, il est facile de passer aux autres.

Pour obtenir i_{12f} et i_{22f} , il suffit dans la première série de termes donnant i_{11f} et i_{21f} de remplacer α par $\alpha - \frac{2\pi}{3}$, dans la seconde série α par $\alpha + \frac{2\pi}{3}$.

Pour obtenir i_{13f} et i_{23f} , on remplacera α par $\alpha - \frac{4\pi}{3}$ dans les termes faisant intervenir A_n et B_n , α par $\alpha + \frac{4\pi}{3}$ dans ceux où ce sont C_n et D_n qui interviennent. (1)

II.3.2 Cas des tensions d'alimentation sinusoïdales

Si les tensions d'alimentation, équilibrées ou non, sont sinusoïdales, leurs expressions données par les relations (71) s'écrivent

$$\begin{aligned} v_{11} &= V_{11m} \sin(\omega t + \alpha + \alpha_{11}) , \\ v_{12} &= V_{21m} \sin(\omega t + \alpha + \alpha_{21}) , \\ v_{13} &= V_{31m} \sin(\omega t + \alpha + \alpha_{31}) , \end{aligned}$$

ou, en supprimant les indices superflus et en choisissant l'angle α_{11} de telle façon qu'il soit nul,

$$\left. \begin{aligned} v_{11} &= V_{1m} \sin(\omega t + \alpha) , \\ v_{12} &= V_{2m} \sin(\omega t + \alpha + \alpha_2) , \\ v_{13} &= V_{3m} \sin(\omega t + \alpha + \alpha_3) . \end{aligned} \right\} \quad (71')$$

Puisque $v_{11} + v_{12} + v_{13} = 0$ à tout instant, cette égalité pour $\omega t = \frac{\pi}{2} - \alpha$ donne

$$V_{1m} + V_{2m} \cos \alpha_2 + V_{3m} \cos \alpha_3 = 0 \quad (86)$$

et pour $\omega t = 0$

$$V_{2m} \sin \alpha_2 + V_{3m} \sin \alpha_3 = 0 \quad (87)$$

Ces relations simplifient les relations (74) qui donnent A_1 , B_1 , C_1 et D_1 .

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= V_{2m} \cos \alpha_2 - V_{3m} \cos \alpha_3 , \\ B_1 &= V_{2m} \sin \alpha_2 - V_{3m} \sin \alpha_3 - \sqrt{3} V_{1m} , \\ C_1 &= -(V_{2m} \cos \alpha_2 - V_{3m} \cos \alpha_3) = -A_1 , \\ D_1 &= V_{2m} \sin \alpha_2 - V_{3m} \sin \alpha_3 + \sqrt{3} V_{1m} . \end{aligned} \right\} \quad (74')$$

(1) Il serait trop long de développer ici le calcul du couple. L'application de la méthode générale (voir § II.1.5) montre que les tensions de pulsation $n\omega$ seules donneraient un couple moyen, différence du couple direct et du couple inverse, auquel s'ajouterait un terme de pulsation $2n\omega$. Mais l'interaction entre les courants dus à des tensions de fréquences différentes fait apparaître d'autres couples pulsatoires.

Les angles $\varepsilon_1, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1$ et δ_2 deviennent

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{B_1}{A_1} = \frac{V_{2m} \sin \alpha_2 - V_{3m} \sin \alpha_3 - \sqrt{3} V_{1m}}{V_{2m} \cos \alpha_2 - V_{3m} \cos \alpha_3}$$

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \tau_2 (\omega - \omega'), \quad \operatorname{tg} \gamma_2 = \tau_2 (\omega + \omega')$$

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega - \omega')}{1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega - \omega')} \quad , \quad \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega + \omega')}{1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega + \omega')}$$

(88)

On posera $\varepsilon_2 = \pi - \varepsilon_1'$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_2 = -\frac{D_1}{C_1} = \frac{V_{2m} \sin \alpha_2 - V_{3m} \sin \alpha_3 + \sqrt{3} V_{1m}}{V_{2m} \cos \alpha_2 - V_{3m} \cos \alpha_3}$$

Les composantes i'_{12f} et i'_{22f} deviennent

$$i'_{12f} = \frac{1}{4R_1} \frac{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2)} [1 + \tau_2^2 (\omega - \omega')^2] e^{j(\omega t + \alpha + \varepsilon_1 + \gamma_1 - \delta_1)}}{\sqrt{[1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega - \omega')]^2 + [\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega - \omega')]^2}} - \frac{1}{4R_1} \frac{\sqrt{(A_1^2 + D_1^2)} [1 + \tau_2^2 (\omega + \omega')^2] e^{-j(\omega t + \alpha + \varepsilon_2 + \gamma_2 - \delta_2)}}{\sqrt{[1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega + \omega')]^2 + [\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega + \omega')]^2}}$$

$$i'_{22f} = \frac{3M(\omega - \omega')}{8R_1 R_2} \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} e^{j\left((\omega - \omega')t + \alpha - p\theta_0 + \varepsilon_1 - \delta_1 - \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{[1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega - \omega')]^2 + [\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega - \omega')]^2}} - \frac{3M(\omega + \omega')}{8R_1 R_2} \frac{\sqrt{A_1^2 + D_1^2} e^{-j\left((\omega + \omega')t + \alpha + p\theta_0 + \varepsilon_2 - \delta_2 - \frac{\pi}{2}\right)}}{\sqrt{[1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega + \omega')]^2 + [\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega + \omega')]^2}}$$

(84')

et les courants réels

$$i_{11f} = \frac{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2)} [1 + \tau_2^2 (\omega - \omega')^2] \cos(\omega t + \alpha + \varepsilon_1 + \gamma_1 - \delta_1)}{2\sqrt{3}R_1 \sqrt{[1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega - \omega')]^2 + [\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega - \omega')]^2}} - \frac{\sqrt{(A_1^2 + D_1^2)} [1 + \tau_2^2 (\omega + \omega')^2] \cos(\omega t + \alpha + \varepsilon_2 + \gamma_2 - \delta_2)}{2\sqrt{3}R_1 \sqrt{[1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega + \omega')]^2 + [\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega + \omega')]^2}}$$

$$i_{21f} = \frac{\sqrt{3} M(\omega-\omega') \sqrt{A_1^2+B_1^2} \sin[(\omega-\omega')t+\alpha-p\theta_0+\varepsilon_1-\delta_1]}{4R_1R_2 \sqrt{[1-\sigma\tau_1\tau_2\omega(\omega-\omega')]^2 + [\tau_1\omega+\tau_2(\omega-\omega')]^2}} - \frac{\sqrt{3} M(\omega+\omega') \sqrt{A_1^2+D_1^2} \sin[(\omega+\omega')t+\alpha+p\theta_0+\varepsilon_2-\delta_2]}{4R_1R_2 \sqrt{[1-\sigma\tau_1\tau_2\omega(\omega+\omega')]^2 + [\tau_1\omega+\tau_2(\omega+\omega')]^2}} \quad (85')$$

Dans les courants primaires de pulsation ω , on voit l'influence de la composante directe et de la composante inverse des tensions. Au rotor ces composantes donnent des courants de pulsation $\omega-\omega'$ pour la première, $\omega+\omega'$ pour la seconde.

II.3.3 Cas des tensions d'alimentation équilibrées

Si les tensions d'alimentation sont sinusoïdales et forment un système triphasé équilibré, dans les relations (71') on a

$$V_{3m} = V_{2m} = V_{1m} , \\ \alpha_2 = -\frac{2\pi}{3} , \alpha_3 = -\frac{4\pi}{3}$$

II.3.3.1 Expression des courants

L'égalité des amplitudes des trois tensions et la valeur de α_2 et α_3 font que

$$A_1 = V_{2m} \cos\alpha_2 - V_{3m} \cos\alpha_3 = 0 \\ D_1 = V_{2m} \sin\alpha_2 - V_{3m} \sin\alpha_3 + \sqrt{3} V_{1m} = 0 \\ B_1 = V_{2m} \sin\alpha_2 - V_{3m} \sin\alpha_3 - \sqrt{3} V_{1m} = -2\sqrt{3} V_{1m} \\ \varepsilon_1 = \text{arc tg } \frac{B_1}{A_1} = \frac{\pi}{2}$$

Les courants deviennent

$$i_{11f} = \frac{V_{1m}}{R_1} \frac{\sqrt{1+\tau_2^2(\omega-\omega')^2}}{\sqrt{[1-\sigma\tau_1\tau_2\omega(\omega-\omega')]^2 + [\tau_1\omega+\tau_2(\omega-\omega')]^2}} \sin(\omega t + \alpha + \gamma_1 - \delta_1) \\ i_{21f} = - \frac{\frac{3}{2} M V_{1m} (\omega-\omega')}{R_1 R_2 \sqrt{[1-\sigma\tau_1\tau_2\omega(\omega-\omega')]^2 + [\tau_1\omega+\tau_2(\omega-\omega')]^2}} \cos\left((\omega-\omega')t + \alpha - p\theta_0 - \delta_1\right) \quad (89)$$

Remarque

Les résultats précédents peuvent être retrouvés à partir du schéma équivalent représenté sur la figure 7.

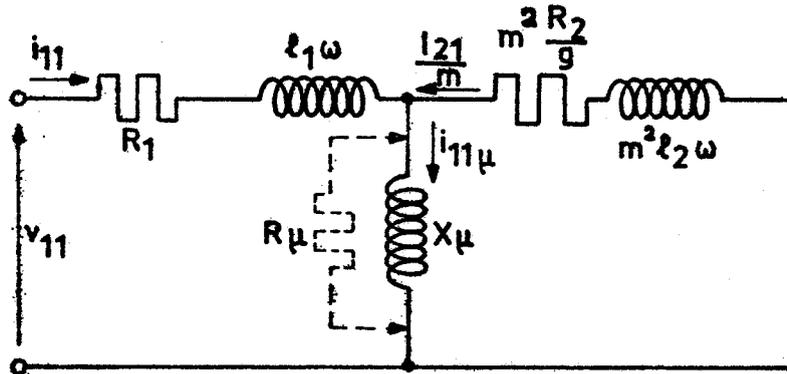


Fig 7 - Schéma monophasé équivalent au moteur asynchrone

Dans ce schéma, où le secondaire est ramené au primaire, les notations utilisées représentent

m : le rapport de transformation ;

$l_1\omega$: la réactance de fuite du primaire. Si L_1 désigne l'inductance cyclique totale d'une phase primaire,

$$L_1 - l_1 = \frac{3}{2} m M ;$$

$l_2\omega$: la réactance de fuite du secondaire. Elle est telle que

$$L_2 - l_2 = \frac{3}{2} \frac{M}{m} ;$$

g : le glissement égal à $\omega - \omega' / \omega$;

X_μ : la réactance magnétisante absorbant le courant magnétisant $i_{11\mu}$,

$$X_\mu = \frac{3}{2} m M \omega .$$

Dans nos calculs nous avons négligé les pertes dans le fer. Si on voulait en tenir compte il faudrait ajouter une résistance R_μ en parallèle avec X_μ .

Ce schéma équivalent permettrait d'ailleurs aussi de calculer les courants dus à la composante inverse des tensions à condition de prendre pour glissement le rapport $\frac{\omega + \omega'}{\omega}$.

II.3.3.2 Détermination de T_1 , T_2 , ω_1 et ω_2

Quelques essais simples, effectués en régime permanent, permettent de déterminer les trois paramètres τ_1 , τ_2 et σ utilisés tout au long de notre étude et d'en déduire les constantes de temps T_1 , T_2 et les pseudo-pulsations ω_1 , ω_2 qui interviennent dans le régime libre, que le circuit

électrique du rotor soit accessible ou non.

Premier essai :

On mesure la résistance R_1 d'une phase du stator.

Deuxième essai :

Le moteur étant alimenté par un système triphasé équilibré de tensions sinusoïdales, à l'aide d'un moteur auxiliaire on fait tourner le moteur dans le sens du champ tournant statorique à la vitesse synchrone. On mesure l'impédance apparente V_1/I_1 d'une phase du moteur.

Aucun courant n'étant induit au secondaire, la réactance mesurée est $L_1\omega$

$$L_1 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{V_1^2}{I_1^2} - R_1^2}, \text{ d'où } \tau_1 = \frac{L_1}{R_1}$$

Troisième essai :

On alimente le moteur par un système triphasé équilibré de tensions sinusoïdales et on lui fait entraîner une charge quelconque. (On peut éventuellement le faire tourner à vide, mais les résultats déduits sont moins précis). On mesure la tension V_1 et le courant I_1 primaires, la puissance active P_1 et la puissance réactive Q_1 absorbées par phase, le glissement $(\omega - \omega')/\omega$.

- La puissance active P_1 est donnée par $P_1 = V_1 I_1 \cos(\delta_1 - \gamma_1)$, car, d'après la première des relations (89), $\delta_1 - \gamma_1$ désigne le déphasage du courant primaire par rapport à la tension correspondante. Cette puissance P_1 correspond à une résistance apparente R'_1 , telle que $R'_1 I_1^2 = P_1$.

Si on développe l'égalité $V_1 I_1 \cos(\delta_1 - \gamma_1) = R'_1 I_1^2$,

$$\text{ou } R'_1 = \frac{V_1}{I_1 \cos(\delta_1 - \gamma_1)},$$

on trouve

$$R'_1 - R_1 = \frac{(1-\sigma)\tau_1\tau_2\omega(\omega-\omega')R_1}{1+\tau_2^2(\omega-\omega')^2} \quad (90)$$

- De la même façon la puissance réactive $Q_1 = V_1 I_1 \sin(\delta_1 - \gamma_1)$ correspond à une inductance apparente L'_1 telle que $Q_1 = L'_1 \omega I_1^2$. Si on remplace, dans l'égalité $L'_1 = \frac{V_1}{\omega I_1} \sin(\delta_1 - \gamma_1)$, les termes I_1 , δ_1 et γ_1 par leurs valeurs telles que les donnent les relations (88) et (89), il vient :

$$L_1 - L'_1 = \frac{(1-\sigma)\tau_2^2(\omega-\omega')^2 L_1}{1+\tau_2^2(\omega-\omega')^2} \quad (91)$$

- La comparaison de (90) et (91) donne

$$\frac{L_1 - L_1'}{R_1' - R_1} = \tau_2 \frac{\omega - \omega'}{\omega}$$

D'où la constante de temps rotorique

$$\tau_2 = \frac{\omega}{\omega - \omega'} \cdot \frac{L_1 - L_1'}{R_1' - R_1} \quad (92)$$

- Ayant τ_2 la relation (91) permet de déduire σ de L_1 et de L_1'

$$\sigma = \frac{L_1'}{L_1} - \frac{L_1 - L_1'}{L_1 \tau_2^2 (\omega - \omega')^2} \quad (93)$$

II.3.4 Calcul du couple

Le couple en régime forcé se déduit de la relation générale (39)

$$c_f = 3 p M J_f,$$

J_f étant la valeur numérique de la partie imaginaire du produit $i'_{12f} i'_{23f} e^{-j(\omega't + p\theta_0)}$.

- Dans le cas d'une alimentation par des tensions sinusoïdales formant un système déséquilibré, la composante i'_{12f} des courants primaires est donnée par la première des relations (84'). En outre i'_{23f} est le conjugué de i'_{22f} que donne la seconde.

Le calcul de c_f conduit à l'expression suivante

$$\frac{(1-\sigma)p\tau_1\tau_2}{8R_1} \left\{ \begin{aligned} & (\omega - \omega') \frac{(V_{2m} \cos \alpha_2 - V_{3m} \cos \alpha_3)^2 + (V_{2m} \sin \alpha_2 - V_{3m} \sin \alpha_3 - \sqrt{3} V_{1m})^2}{\left[\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega - \omega') \right]^2 + \left[1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega - \omega') \right]^2} \\ & - (\omega + \omega') \frac{(V_{2m} \cos \alpha_2 - V_{3m} \cos \alpha_3)^2 + (V_{2m} \sin \alpha_2 - V_{3m} \sin \alpha_3 + \sqrt{3} V_{1m})^2}{\left[\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega + \omega') \right]^2 + \left[1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega + \omega') \right]^2} \\ & + 2\omega' \sqrt{\frac{(V_{2m} \cos \alpha_2 - V_{3m} \cos \alpha_3)^2 + (V_{2m} \sin \alpha_2 - V_{3m} \sin \alpha_3 - \sqrt{3} V_{1m})^2}{\left[\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega - \omega') \right]^2 + \left[1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega - \omega') \right]^2}} \times \\ & \sqrt{\frac{(V_{2m} \cos \alpha_2 - V_{3m} \cos \alpha_3)^2 + (V_{2m} \sin \alpha_2 - V_{3m} \sin \alpha_3 + \sqrt{3} V_{1m})^2}{\left[\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega + \omega') \right]^2 + \left[1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega + \omega') \right]^2}} \cos(2\omega t + 2\alpha + \epsilon_1 + \epsilon_2 - \delta_1 - \delta_2) \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

On voit que le couple forcé comporte deux termes constants, l'un positif dû à la composante directe des tensions, l'autre négatif dû à leur composante inverse, et un couple alternatif de pulsation 2ω .

- Dans le cas d'une alimentation par un système triphasé équilibré de tensions sinusoïdales, l'expression du couple forcé se simplifie et devient

$$C_f = \frac{3(1-\sigma)p v_{im}^2 \tau_1 \tau_2 (\omega - \omega')}{2R_1 \left\{ \left[\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega - \omega') \right]^2 + \left[1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega - \omega') \right]^2 \right\}} \quad (95)$$

Le terme constant négatif et le terme pulsatoire ont disparu.

III - APPLICATION

A L'ETUDE DES REGIMES TRANSITOIRES SYMETRIQUES

III.1 INTRODUCTION

L'étude générale du régime libre et du régime forcé du moteur asynchrone permet d'obtenir rapidement les régimes transitoires des courants et du couple quelle que soit la perturbation qui les provoque, à condition toutefois qu'*après la perturbation le moteur soit de constitution symétrique*. En effet l'étude générale a été effectuée en supposant que le stator et le rotor étaient de construction symétrique.

Malgré cette condition, la quasi-totalité des régimes transitoires usuels permet l'utilisation des résultats établis. Seule l'ouverture d'une phase, qui rend le moteur monophasé, nécessite une étude spéciale. Afin de ne pas nuire à la clarté de l'exposé de ce mémoire, nous avons reporté *en annexe l'examen de l'ouverture d'une phase*.

III.1.1 Classification des régimes transitoires symétriques

Le tableau II présente les particularités des régimes transitoires symétriques que nous allons examiner. Pour chacun d'eux nous avons indiqué, tant pour le stator que pour le rotor,

- s'il y avait des courants avant la perturbation
- si le régime forcé résultant de celle-ci entraîne ou non l'existence de courants.

1 - Cas général

Le régime transitoire le plus général correspond

- au moteur en rotation
- à des valeurs initiales non nulles des courants primaires et secondaires
- à des valeurs forcées non nulles de ces courants.

La perturbation peut être une variation des tensions d'alimentation, une modification des caractéristiques du stator ou du rotor à condition qu'elle soit la même pour les trois phases de la même armature.

Les autres régimes transitoires sont des cas particuliers de celui-ci.

2 - Mise en court-circuit du stator

Ce régime transitoire débute avec la brusque annulation des tensions d'alimentation. Les deux armatures sont donc mises en court-circuit à partir de l'instant $t = 0$. Les courants forcés primaires et secondaires sont nuls.

3 - Démarrage du moteur à l'arrêt

Les courants primaires et secondaires étant nuls, le rotor étant immobile, on suit le régime qui résulte de l'application simultanée des trois tensions statoriques.

4 - Ouverture du stator

La machine étant en rotation, on examine le régime transitoire produit par l'ouverture simultanée des trois phases statoriques. On supposera cette ouverture instantanée, négligeant les phénomènes liés à l'apparition d'arcs entre les contacts au moment de la séparation du moteur de la source qui l'alimentait.

5 - Opérations de démarrage par le stator du moteur en rotation

Ces régimes correspondent aux étapes d'un démarrage progressif par action sur le stator : alimentation par paliers de tension de valeur croissante, changement de couplage étoile-triangle, élimination successive d'impédances mises en série avec le stator.

Le moteur est donc en rotation, le stator a été ouvert, du moins dans les deux premiers cas, pour passer de l'étape précédente à celle qui débute avec le régime transitoire examiné. On suppose que cette ouverture a été assez brève pour que, si la valeur initiale des courants primaires est nulle, les courants rotoriques n'aient pas eu le temps de s'amortir complètement.

6 - Ouverture du rotor

La machine en rotation, les deux armatures parcourues par des courants, à l'instant $t = 0$ on ouvre simultanément les trois phases secondaires. Négligeant les arcs aux bornes de l'interrupteur, on supposera que les courants rotoriques s'annulent instantanément.

7 - Fermeture du rotor du moteur en rotation

Le rotor tournant, on envisage ce qui se passe lorsqu'après une ouverture accidentelle du bobinage rotorique on referme rapidement celui-ci. A l'instant de la fermeture du rotor, on suppose que les courants dans celui-ci sont nuls mais que les courants statoriques n'avaient pas eu le temps d'atteindre le régime permanent à rotor ouvert.

(Le démarrage par élimination par paliers de résistances additionnelles au secondaire entre dans le cas général, puisque, tant au rotor qu'au stator, les courants des trois phases à l'instant de la perturbation et les courants forcés diffèrent de zéro).

8 - Remise sous tension d'une phase ouverte

Une phase ayant été momentanément ouverte, à l'instant $t = 0$ on referme celle-ci. On suppose cette coupure brève, donc des valeurs initiales non nulles pour les courants secondaires. La valeur initiale de l'un des courants primaires est nulle.

9 - Inversion du sens du flux tournant statorique

Le moteur en rotation, on ouvre le stator, on croise deux de ses fils d'alimentation et on remet sous tension. On examinera ce qui se passe à cette remise sous tension dans le cas où le primaire a été ouvert pendant un temps trop bref pour que les courants secondaires aient pu s'annuler.

Régime transitoire	vitesse	valeur initiale des courants		valeur forcée des courants	
		stator	rotor	stator	rotor
1) Cas général	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
2) Mise en court-circuit du stator	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	0	0
3) Démarrage du moteur à l'arrêt	0	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$
4) Ouverture du stator	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	0	0
5) Opérations de démarrage sur le stator	$\neq 0$	0	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
6) Ouverture du rotor	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	0
7) Fermeture du rotor	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$	$\neq 0$
8) Remise sous tension d'une phase ouverte	$\neq 0$	$\neq 0$ ⁽¹⁾	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
9) Inversion du sens du flux tournant	$\neq 0$ ⁽²⁾	0	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$

Remarques : ⁽¹⁾ sauf pour une phase ; ⁽²⁾ le glissement passe de g à 2-g

Tableau II - Répertoire des différents régimes transitoires symétriques avec indication des valeurs nulles ou non nulles des courants initiaux, des courants forcés et de la vitesse.

III.1.2 Méthode d'étude

L'expression d'une variable en régime transitoire est la somme de son terme libre et de son terme forcé. Seuls varient d'un régime à l'autre le terme forcé et les constantes d'intégration intervenant dans le terme libre. Il suffit donc de connaître les valeurs initiales des variables et leurs valeurs forcées pour pouvoir utiliser directement les relations établies dans la deuxième partie.

Pour chaque perturbation on donnera successivement

- les transformées i'_{12} , i'_{13} et i'_{22} , i'_{23} des courants, car c'est d'elles qu'on déduit le couple,
- les constantes d'intégration,
- les courants primaires et secondaires,
- le couple.

On n'envisagera, lorsque pendant le régime transitoire le moteur est alimenté, que le cas où les tensions primaires sont sinusoïdales, équilibrées ou non. Si les tensions n'étaient pas sinusoïdales, on trouverait pour chacun des harmoniques des expressions semblables à celles données pour le fondamental.

On indiquera ensuite les simplifications qui interviennent lorsque les tensions primaires sont équilibrées et lorsque la vitesse est nulle.

Les résultats obtenus étant souvent très lourds nous réduirons au minimum les étapes permettant de les obtenir. Mais, et c'est là l'avantage de la méthode générale proposée, l'obtention de ces résultats ne soulève aucune difficulté particulière.

III.2 CAS GENERAL

Le moteur tournant à la vitesse ω'/p , ses enroulements sont parcourus à l'instant de la perturbation par des courants i_{110} , i_{120} , i_{130} au primaire, i_{210} , i_{220} , i_{230} au secondaire. A partir de $t = 0$, les tensions appliquées au moteur (relations (71')) tendent à y faire circuler les courants forcés donnés par les expressions (85') dont on obtient les valeurs initiales i_{11fo} , i_{12fo} , i_{13fo} et i_{21fo} , i_{22fo} , i_{23fo} en faisant $t = 0$ dans ces expressions.

III.2.1 Alimentation par des tensions déséquilibrées

- Les transformées des courants s'obtiennent en ajoutant les termes correspondants des relations (56) et (84')

$$\begin{aligned}
 i'_{12} = & \frac{3}{2} M \sqrt{1+\tau_2^2 \omega'^2} \left[\sqrt{K_1^2+K_2^2} e^{-\frac{t}{T_1}} e^{j(\omega_1 t + \frac{p\theta_0 + \rho + \psi}{2})} \right. \\
 & \left. + \sqrt{K_3^2+K_4^2} e^{-\frac{t}{T_2}} e^{j(\omega_2 t + \frac{p\theta_0 + \nu + \psi}{2})} \right] \\
 & + \frac{1}{4R_1} \frac{\sqrt{(A_1^2+B_1^2) \left(1+\tau_2^2(\omega-\omega')^2\right)}}{\sqrt{U_1}} e^{j(\omega t + \alpha + \epsilon_1 + \gamma_1 - \delta_1)} \\
 & - \frac{1}{4R_1} \frac{\sqrt{(A_1^2+D_1^2) \left(1+\tau_2^2(\omega+\omega')^2\right)}}{\sqrt{U_2}} e^{-j(\omega t + \alpha + \epsilon_2 + \gamma_2 - \delta_2)} \\
 \\
 i'_{22} = & \sqrt{(K_1^2+K_2^2) (P_1^2+P_1'^2)} e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-j(\omega_2 t + \frac{p\theta_0 - \rho - \zeta}{2})} \\
 & + \sqrt{(K_3^2+K_4^2) (P_2^2+P_2'^2)} e^{-\frac{t}{T_2}} e^{-j(\omega_1 t + \frac{p\theta_0 - \nu - \xi}{2})} \\
 & + \frac{\frac{3}{2} M(\omega-\omega')}{4R_1 R_2} \frac{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}{\sqrt{U_1}} e^{j\left((\omega-\omega')t + \alpha - p\theta_0 + \epsilon_1 - \delta_1 - \frac{\pi}{2}\right)} \\
 & - \frac{\frac{3}{2} M(\omega+\omega')}{4R_1 R_2} \frac{\sqrt{A_1^2+D_1^2}}{\sqrt{U_2}} e^{-j\left((\omega+\omega')t + \alpha + p\theta_0 + \epsilon_2 - \delta_2 - \frac{\pi}{2}\right)}
 \end{aligned} \tag{96}$$

Rappelons les notations adoptées

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{2\sigma\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + Z} ; & \omega_1 &= \frac{\omega'}{2} \left(1 + \frac{\tau_1 - \tau_2}{Z}\right) \\
 T_2 & & \omega_2 &= \frac{\omega'}{2} \left(1 - \frac{\tau_1 - \tau_2}{Z}\right)
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } Z = \sqrt{\frac{Q + \sqrt{Q^2 + S^2}}{2}}$$

$$\text{où } Q = (\tau_1 + \tau_2)^2 - \sigma\tau_1\tau_2(4 + \sigma\tau_1\tau_2\omega'^2)$$

$$S = 2\sigma\tau_1\tau_2(\tau_1 - \tau_2)\omega' ;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\rho}{2} = \frac{K_2}{K_1} ; \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \frac{K_4}{K_3} ; \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = -\tau_2 \omega' ;$$

$$P_1 = R_1 \tau_2 \left(1 - \sigma \frac{\tau_1}{\tau_1}\right) ; P'_1 = R_1 \tau_1 \tau_2 (\omega' - \sigma \omega_2) ;$$

$$P_2 = R_1 \tau_2 \left(1 - \sigma \frac{\tau_1}{\tau_2}\right) ; P'_2 = R_1 \tau_1 \tau_2 (\omega' - \sigma \omega_1) ;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} = \frac{P'_1}{P_1} ; \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} = \frac{P'_2}{P_2} ;$$

$$A_1 = V_{2m} \cos \alpha_2 - V_{3m} \cos \alpha_3 ;$$

$$B_1 = V_{2m} \sin \alpha_2 - V_{3m} \sin \alpha_3 - \sqrt{3} V_{1m} ;$$

$$D_1 = V_{2m} \sin \alpha_2 - V_{3m} \sin \alpha_3 + \sqrt{3} V_{1m} ;$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{B_1}{A_1} ; \operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{D_1}{A_1} ;$$

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \tau_2 (\omega - \omega') ; \operatorname{tg} \gamma_2 = \tau_2 (\omega + \omega') ;$$

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega - \omega')}{1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega - \omega')} ; \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega + \omega')}{1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega + \omega')}$$

En outre pour simplifier l'écriture des relations nous venons de poser

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \left\{ \tau_1 \omega + \tau_2 (\omega - \omega') \right\}^2 + \left\{ 1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega - \omega') \right\}^2 \\ U_2 &= \left\{ \tau_1 \omega + \tau_2 (\omega + \omega') \right\}^2 + \left\{ 1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega + \omega') \right\}^2 \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

La composante i'_{13} est la conjuguée de i'_{12} . De même i'_{23} est conjugué de i'_{22} .

- Les constantes d'intégration K_1, K_2, K_3 et K_4 sont données par les relations (68) à partir des valeurs initiales des courants libres et forcés réels dont nous allons rappeler les expressions.

- Les courants primaires et secondaires s'obtiennent en ajoutant les termes libres et forcés tels que les donnent les relations (57), (58) et (85').

Au primaire,

$$\begin{aligned}
 i_{11} = & \sqrt{3} M \sqrt{1+\tau_2^2 \omega'^2} \sqrt{K_1^2+K_2^2} \cos(\omega_1 t + \frac{p\theta_o + \rho + \psi}{2}) e^{-\frac{t}{T_1}} \\
 & + \sqrt{3} M \sqrt{1+\tau_2^2 \omega'^2} \sqrt{K_3^2+K_4^2} \cos(\omega_2 t + \frac{p\theta_o + \nu + \psi}{2}) e^{-\frac{t}{T_2}} \\
 & + \frac{\sqrt{(A_1^2+B_1^2)} [1+\tau_2^2(\omega-\omega')^2]}{2\sqrt{3} R_1 \sqrt{U_1}} \cos(\omega t + \alpha + \epsilon_1 + \gamma_1 - \delta_1) \\
 & - \frac{\sqrt{(A_1^2+D_1^2)} [1+\tau_2^2(\omega+\omega')^2]}{2\sqrt{3} R_1 \sqrt{U_2}} \cos(\omega t + \alpha + \epsilon_2 + \gamma_2 - \delta_2)
 \end{aligned} \tag{98}$$

Les deux premiers termes correspondent au régime libre, les deux autres au régime forcé.

Pour obtenir i_{12} , il suffit de déphaser de $-\frac{2\pi}{3}$ les trois premiers termes, de $+\frac{2\pi}{3}$ le quatrième.

De même on passe de i_{11} à i_{13} en déphasant de $-\frac{4\pi}{3}$ les deux termes dus au régime libre et celui dû à la composante directe des tensions, de $+\frac{4\pi}{3}$ le terme dû à la composante inverse.

Au secondaire,

$$\begin{aligned}
 i_{21} = & \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(K_1^2+K_2^2)(P_1^2+P_1'^2)} \cos(\omega_2 t + \frac{p\theta_o - \rho - \zeta}{2}) e^{-\frac{t}{T_1}} \\
 & + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(K_3^2+K_4^2)(P_2^2+P_2'^2)} \cos(\omega_1 t + \frac{p\theta_o - \nu - \xi}{2}) e^{-\frac{t}{T_2}} \\
 & + \frac{\sqrt{3} M(\omega-\omega')}{4R_1 R_2} \frac{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}{\sqrt{U_1}} \sin\left((\omega-\omega')t + \alpha - p\theta_o + \epsilon_1 - \delta_1\right) \\
 & - \frac{\sqrt{3} M(\omega+\omega')}{4R_1 R_2} \frac{\sqrt{A_1^2+D_1^2}}{\sqrt{U_2}} \sin\left((\omega+\omega')t + \alpha + p\theta_o + \epsilon_2 - \delta_2\right)
 \end{aligned} \tag{99}$$

Ici aussi les deux termes pseudo-périodiques viennent du régime libre, les deux termes sinusoidaux du régime forcé.

Pour passer de l'expression de i_{21} à celles de i_{22} et de i_{23} , on remplace $\omega_2 t$ par $\omega_2 t + \frac{2\pi}{3}$ et $\omega_2 t + \frac{4\pi}{3}$, $\omega_1 t$ par $\omega_1 t + \frac{2\pi}{3}$ et $\omega_1 t + \frac{4\pi}{3}$, $(\omega-\omega')t$ par $(\omega-\omega')t - \frac{2\pi}{3}$ et $(\omega-\omega')t - \frac{4\pi}{3}$, $(\omega+\omega')t$ par $(\omega+\omega')t + \frac{2\pi}{3}$ et $(\omega+\omega')t + \frac{4\pi}{3}$.

Le couple ne peut se déduire de la simple superposition du couple libre et du couple forcé car c'est l'interaction des courants transitoires réels des deux armatures qui le produit.

La relation générale (39) appliquée aux courants dont l'expression est donnée par les expressions (96) conduit, après un long calcul, à la valeur du couple c ci-dessous

$$\begin{aligned}
 c = 3pM \left\{ \right. & \frac{3M(\omega-\omega')}{32R_1^2R_2} \frac{A_1^2+B_1^2}{U_1} - \frac{3M(\omega+\omega')}{32R_1^2R_2} \frac{A_1^2+D_1^2}{U_2} \\
 & + \frac{3M}{16R_1^2R_2} \sqrt{\frac{(A_1^2+B_1^2)(A_1^2+D_1^2)}{U_1 U_2}} \cos(2\omega t + 2\alpha + \epsilon_1 - \delta_1 + \epsilon_2 - \delta_2) \\
 & + \frac{9M^2(\omega-\omega')}{16R_1R_2} \sqrt{\frac{(1+\tau_2^2\omega'^2)(K_1^2+K_2^2)(A_1^2+B_1^2)}{U_1}} \cos\left((\omega-\omega_1)t + \alpha + \epsilon_1 - \delta_1 - \frac{p\theta_o + \rho + \psi}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} \\
 & + \frac{9M^2(\omega+\omega')}{16R_1R_2} \sqrt{\frac{(1+\tau_2^2\omega'^2)(K_1^2+K_2^2)(A_1^2+D_1^2)}{U_2}} \cos\left((\omega+\omega_1)t + \alpha + \epsilon_2 - \delta_2 + \frac{p\theta_o + \rho + \psi}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} \\
 & + \frac{9M^2(\omega-\omega')}{16R_1R_2} \sqrt{\frac{(1+\tau_2^2\omega'^2)(K_3^2+K_4^2)(A_1^2+B_1^2)}{U_1}} \cos\left((\omega-\omega_2)t + \alpha + \epsilon_1 - \delta_1 - \frac{p\theta_o + \nu + \psi}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_2}} \\
 & + \frac{9M^2(\omega+\omega')}{16R_1R_2} \sqrt{\frac{(1+\tau_2^2\omega'^2)(K_3^2+K_4^2)(A_1^2+D_1^2)}{U_2}} \cos\left((\omega+\omega_2)t + \alpha + \epsilon_2 - \delta_2 + \frac{p\theta_o + \nu + \psi}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_2}} \\
 & + \frac{1}{4R_1} \sqrt{\frac{(P_1^2+P_1'^2)(K_1^2+K_2^2)(A_1^2+B_1^2)[1+\tau_2^2(\omega-\omega')^2]}{U_1}} \sin\left((\omega-\omega_1)t + \alpha + \epsilon_1 + \gamma_1 - \delta_1 - \frac{p\theta_o + \rho + \zeta}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} \\
 & + \frac{1}{4R_1} \sqrt{\frac{(P_1^2+P_1'^2)(K_1^2+K_2^2)(A_1^2+D_1^2)[1+\tau_2^2(\omega+\omega')^2]}{U_2}} \sin\left((\omega+\omega_1)t + \alpha + \epsilon_2 + \gamma_2 - \delta_2 + \frac{p\theta_o + \rho + \zeta}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} \\
 & + \frac{1}{4R_1} \sqrt{\frac{(P_2^2+P_2'^2)(K_3^2+K_4^2)(A_1^2+B_1^2)[1+\tau_2^2(\omega-\omega')^2]}{U_1}} \sin\left((\omega-\omega_2)t + \alpha + \epsilon_1 + \gamma_1 - \delta_1 - \frac{p\theta_o + \nu + \xi}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_2}} \\
 & + \frac{1}{4R_1} \sqrt{\frac{(P_2^2+P_2'^2)(K_3^2+K_4^2)(A_1^2+D_1^2)[1+\tau_2^2(\omega+\omega')^2]}{U_2}} \sin\left((\omega+\omega_2)t + \alpha + \epsilon_2 + \gamma_2 - \delta_2 + \frac{p\theta_o + \nu + \xi}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_2}} \\
 & + \frac{3}{2} M \sqrt{(1+\tau_2^2\omega'^2)(P_1^2+P_1'^2)(K_1^2+K_2^2)} \sin \frac{\psi-\zeta}{2} e^{-\frac{2t}{T_1}} \\
 & + \frac{3}{2} M \sqrt{(1+\tau_2^2\omega'^2)(P_2^2+P_2'^2)(K_3^2+K_4^2)} \sin \frac{\psi-\xi}{2} e^{-\frac{2t}{T_2}} \\
 & + \frac{3}{2} M \sqrt{(1+\tau_2^2\omega'^2)(P_2^2+P_2'^2)(K_1^2+K_2^2)(K_3^2+K_4^2)} \sin\left((\omega_1-\omega_2)t + \frac{\rho+\psi-\nu-\xi}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-\frac{t}{T_2}} \\
 & - \left. \frac{3}{2} M \sqrt{(1+\tau_2^2\omega'^2)(P_1^2+P_1'^2)(K_1^2+K_2^2)(K_3^2+K_4^2)} \sin\left((\omega_1-\omega_2)t - \frac{\nu+\psi-\rho-\zeta}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-\frac{t}{T_2}} \right\} \quad (100)
 \end{aligned}$$

Même en regroupant les termes de même nature, on voit que l'expression de c est la somme de 9 termes :

- un terme constant,
- un terme non amorti de pulsation 2ω ,
- cinq termes pseudo-périodiques amortis ayant les pseudo-pulsations et les constantes de temps suivantes

$$\begin{aligned} & \omega - \omega_1, T_1 \\ & \omega + \omega_1, T_1 \\ & \omega - \omega_2, T_2 \\ & \omega + \omega_2, T_2 \\ & \omega_1 - \omega_2, \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}, \end{aligned}$$

- deux termes apériodiques amortis
- l'un de constante de temps $T_1/2$,
- l'autre de constante de temps $T_2/2$.

III.2.2 Alimentation par des tensions équilibrées

Si les tensions appliquées au moteur à partir de l'instant $t = 0$ de la perturbation forment un système équilibré, les relations (96), (98), (99) et (100) se simplifient car

$$A_1 = D_1 = 0 \quad ; \quad B_1 = -2\sqrt{3} v_{1m} \quad ; \quad \epsilon_1 = \pi/2$$

Seules les relations (68) donnant les constantes d'intégration ne peuvent être simplifiées.

Les transformées des courants deviennent, en remplaçant U_1 et U_2

par leurs valeurs,

$$\left. \begin{aligned} i'_{12} &= \frac{3}{2} M \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega'^2} \left[\frac{1}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}} e^{-\frac{t}{T_1}} e^{j(\omega_1 t + \frac{p\theta_o + \rho + \psi}{2})} + \frac{1}{\sqrt{K_3^2 + K_4^2}} e^{-\frac{t}{T_2}} e^{j(\omega_2 t + \frac{p\theta_o + \nu + \psi}{2})} \right] \\ &- \frac{\sqrt{3} v_{1m}}{2R_1} \sqrt{\frac{1 + \tau_2^2 (\omega - \omega')^2}{[\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega - \omega')]^2 + [1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega - \omega')]^2}} e^{j(\omega t + \alpha + \gamma_1 - \delta_1 + \frac{\pi}{2})} \\ i'_{22} &= \frac{1}{\sqrt{(K_1^2 + K_2^2)(P_1^2 + P_1'^2)}} e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-j(\omega_2 t + \frac{p\theta_o - \rho - \zeta}{2})} + \frac{1}{\sqrt{(K_3^2 + K_4^2)(P_2^2 + P_2'^2)}} e^{-\frac{t}{T_2}} e^{-j(\omega_1 t + \frac{p\theta_o - \nu - \xi}{2})} \\ &- \frac{3\sqrt{3} M (\omega - \omega') v_{1m}}{4R_1 R_2 \sqrt{[\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega - \omega')]^2 + [1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega - \omega')]^2}} e^{j\left((\omega - \omega')t + \alpha - p\theta_o - \delta_1\right)} \end{aligned} \right\} (96')$$

Les courants primaires et secondaires, maintenant donnés par

$$i_1 = \sqrt{3} M \sqrt{1+\tau_2^2 \omega'^2} \left[\sqrt{K_1^2+K_2^2} \cos\left(\omega_1 t + \frac{p\theta_o + \rho + \psi}{2} - \frac{t}{T_1}\right) + \sqrt{K_3^2+K_4^2} \cos\left(\omega_2 t + \frac{p\theta_o + \nu + \psi}{2} - \frac{t}{T_2}\right) \right] + \frac{V_{1m}}{R_1} \sqrt{\frac{1+\tau_2^2(\omega-\omega')^2}{[\tau_1\omega + \tau_2(\omega-\omega')]^2 + [1-\sigma\tau_1\tau_2\omega(\omega-\omega')]^2}} \sin(\omega t + \alpha + \gamma_1 - \delta_1) \quad (98')$$

$$i_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{(K_1^2+K_2^2)(P_1^2+P_1'^2)} \cos\left(\omega_2 t + \frac{p\theta_o - \rho - \zeta}{2} - \frac{t}{T_1}\right) + \sqrt{(K_3^2+K_4^2)(P_2^2+P_2'^2)} \cos\left(\omega_1 t + \frac{p\theta_o - \nu - \xi}{2} - \frac{t}{T_2}\right) \right] - \frac{\frac{3}{2} M(\omega-\omega') V_{1m}}{R_1 R_2 \sqrt{[\tau_1\omega + \tau_2(\omega-\omega')]^2 + [1-\sigma\tau_1\tau_2\omega(\omega-\omega')]^2}} \cos\left((\omega-\omega')t + \alpha - p\theta_o - \delta_1\right) \quad (99')$$

ne comportent que deux termes libres caractérisés par ω_1, T_1 et ω_2, T_2 au primaire, par ω_1, T_2 et ω_2, T_1 au secondaire et le terme sinusoïdal forcé de pulsation ω au stator, $\omega-\omega'$ au rotor.

L'expression du couple transitoire devient

$$= 3pM \left\{ \frac{9M(\omega-\omega') V_{1m}^2}{8R_1^2 R_2 \{ [\tau_1\omega + \tau_2(\omega-\omega')]^2 + [1-\sigma\tau_1\tau_2\omega(\omega-\omega')]^2 \}} + \frac{9\sqrt{3}M^2(\omega-\omega') V_{1m}}{8R_1 R_2} \sqrt{\frac{(1+\tau_2^2\omega'^2)(K_1^2+K_2^2)}{[\tau_1\omega + \tau_2(\omega-\omega')]^2 + [1-\sigma\tau_1\tau_2\omega(\omega-\omega')]^2}} \sin\left((\omega-\omega_1)t + \alpha - \delta_1 - \frac{p\theta_o + \rho + \psi}{2} - \frac{t}{T_1}\right) + \frac{9\sqrt{3}M^2(\omega-\omega') V_{1m}}{8R_1 R_2} \sqrt{\frac{(1+\tau_2^2\omega'^2)(K_3^2+K_4^2)}{[\tau_1\omega + \tau_2(\omega-\omega')]^2 + [1-\sigma\tau_1\tau_2\omega(\omega-\omega')]^2}} \sin\left((\omega-\omega_2)t + \alpha - \delta_1 - \frac{p\theta_o + \nu + \psi}{2} - \frac{t}{T_2}\right) - \frac{\sqrt{3}V_{1m}}{2R_1} \sqrt{\frac{(P_1^2+P_1'^2)(K_1^2+K_2^2)[1+\tau_2^2(\omega-\omega')^2]}{[\tau_1\omega + \tau_2(\omega-\omega')]^2 + [1-\sigma\tau_1\tau_2\omega(\omega-\omega')]^2}} \cos\left((\omega-\omega_1)t + \alpha + \gamma_1 - \delta_1 - \frac{p\theta_o + \rho + \zeta}{2} - \frac{t}{T_1}\right) - \frac{\sqrt{3}V_{1m}}{2R_1} \sqrt{\frac{(P_2^2+P_2'^2)(K_3^2+K_4^2)[1+\tau_2^2(\omega-\omega')^2]}{[\tau_1\omega + \tau_2(\omega-\omega')]^2 + [1-\sigma\tau_1\tau_2\omega(\omega-\omega')]^2}} \cos\left((\omega-\omega_2)t + \alpha + \gamma_1 - \delta_1 - \frac{p\theta_o + \nu + \xi}{2} - \frac{t}{T_2}\right) + \frac{3}{2} M(K_1^2+K_2^2) \sqrt{(1+\tau_2^2\omega'^2)(P_1^2+P_1'^2)} \sin \frac{\psi - \zeta}{2} e^{-\frac{2t}{T_1}} + \frac{3}{2} M(K_3^2+K_4^2) \sqrt{(1+\tau_2^2\omega'^2)(P_2^2+P_2'^2)} \sin \frac{\psi - \xi}{2} e^{-\frac{2t}{T_2}} + \frac{3}{2} M \sqrt{(1+\tau_2^2\omega'^2)(K_1^2+K_2^2)(K_3^2+K_4^2)} \left[\sqrt{P_2^2+P_2'^2} \sin\left((\omega_1-\omega_2)t + \frac{\rho + \psi - \nu - \xi}{2}\right) - \sqrt{P_1^2+P_1'^2} \sin\left((\omega_1-\omega_2)t - \frac{\nu + \psi - \rho - \zeta}{2}\right) \right] e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-\frac{t}{T_2}} \right\} \quad (100')$$

En regroupant les termes en sinus et en cosinus de $(\omega-\omega_1)t$ et de $(\omega-\omega_2)t$, il reste six termes.

Le couple permanent est constant, le terme sinusoïdal de pulsation 2ω a disparu.

Parmi les termes pseudo-périodiques amortis il ne reste que ceux caractérisés par $\omega-\omega_1$ et T_1 , par $\omega-\omega_2$ et T_2 , par $\omega_1-\omega_2$ et T_1T_2/T_1+T_2 .

Les deux termes apériodiques amortis de constante de temps $T_1/2$ et $T_2/2$ subsistent.

III.3 MISE EN COURT-CIRCUIT DU STATOR

Lorsque le régime transitoire consiste en la mise en court-circuit simultanée des trois phases du stator, toutes les grandeurs forcées sont nulles, ce qui simplifie beaucoup l'expression des courants et du couple transitoires et facilite la recherche des constantes d'intégration.

Nous examinerons le cas où les courants avant la mise en court-circuit étaient quelconques, puis celui où ils étaient équilibrés. Nous montrerons enfin les possibilités de mesure offertes par la réalisation de ce régime transitoire avec rotor immobilisé.

III.3.1 Cas de courants préalables déséquilibrés

Puisque i_{11f} , i_{12f} , i_{13f} et i_{21f} , i_{22f} , i_{23f} sont nuls, les seules valeurs des courants intervenant dans les calculs sont les valeurs initiales correspondant au régime que la source imposait au moteur jusqu'à la perturbation.

Les constantes d'intégration sont maintenant calculées par

$$\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{(P_2-P_1)^2+(P_2'-P_1')^2}} \left\{ \frac{\sqrt{P_2^2+P_1'^2}}{2} \left[i_{110} \cos \frac{p\theta_o + \psi + \gamma - \xi}{2} + i_{120} \cos \left(\frac{p\theta_o + \psi + \gamma - \xi}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) + i_{130} \cos \left(\frac{p\theta_o + \psi + \gamma - \xi}{2} - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \right. \\ \left. - \left[i_{210} \cos \frac{p\theta_o - \gamma}{2} + i_{220} \cos \left(\frac{p\theta_o - \gamma}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) + i_{230} \cos \left(\frac{p\theta_o - \gamma}{2} + \frac{4\pi}{3} \right) \right] \right\}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{(P_2-P_1)^2+(P_2'-P_1')^2}} \left\{ \frac{\sqrt{P_2^2+P_1'^2}}{2} \left[i_{110} \sin \frac{p\theta_o + \psi + \gamma - \xi}{2} + i_{120} \sin \left(\frac{p\theta_o + \psi + \gamma - \xi}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) + i_{130} \sin \left(\frac{p\theta_o + \psi + \gamma - \xi}{2} - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \right. \\ \left. + i_{210} \sin \frac{p\theta_o - \gamma}{2} + i_{220} \sin \left(\frac{p\theta_o - \gamma}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) + i_{230} \sin \left(\frac{p\theta_o - \gamma}{2} + \frac{4\pi}{3} \right) \right\}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{(P_2-P_1)^2+(P_2'-P_1')^2}} \left\{ \frac{\sqrt{P_1^2+P_1'^2}}{2M\sqrt{1+\tau_2^2\omega'^2}} \left[i_{110} \cos \frac{p\theta_o + \psi + \varphi - \zeta}{2} + i_{120} \cos \left(\frac{p\theta_o + \psi + \varphi - \zeta}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) + i_{130} \cos \left(\frac{p\theta_o + \psi + \varphi - \zeta}{2} - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \right. \\ \left. - \left[i_{210} \cos \frac{p\theta_o - \varphi}{2} + i_{220} \cos \left(\frac{p\theta_o - \varphi}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) + i_{230} \cos \left(\frac{p\theta_o - \varphi}{2} + \frac{4\pi}{3} \right) \right] \right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{(P_2-P_1)^2+(P_2'-P_1')^2}} \left\{ \frac{\sqrt{P_1^2+P_1'^2}}{2M\sqrt{1+\tau_2^2\omega'^2}} \left[i_{110} \sin \frac{p\theta_o + \psi + \varphi - \zeta}{2} + i_{120} \sin \left(\frac{p\theta_o + \psi + \varphi - \zeta}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) + i_{130} \sin \left(\frac{p\theta_o + \psi + \varphi - \zeta}{2} - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \right. \\ \left. + i_{210} \sin \frac{p\theta_o - \varphi}{2} + i_{220} \sin \left(\frac{p\theta_o - \varphi}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) + i_{230} \sin \left(\frac{p\theta_o - \varphi}{2} + \frac{4\pi}{3} \right) \right\}$$

Les courants statoriques et rotoriques voient leur expression réduite aux seuls termes correspondant au régime libre

$$= \sqrt{3} M \sqrt{1+\tau_2^2\omega'^2} \left[\sqrt{K_1^2+K_2^2} \cos \left(\omega_1 t + \frac{p\theta_o + \rho + \psi}{2} - \frac{t}{T_1} \right) e^{-\frac{t}{T_1}} + \sqrt{K_3^2+K_4^2} \cos \left(\omega_2 t + \frac{p\theta_o + \nu + \psi}{2} - \frac{t}{T_2} \right) e^{-\frac{t}{T_2}} \right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\sqrt{(K_1^2+K_2^2)(P_1^2+P_1'^2)} \cos \left(\omega_2 t + \frac{p\theta_o - \rho - \zeta}{2} - \frac{t}{T_1} \right) e^{-\frac{t}{T_1}} + \sqrt{(K_3^2+K_4^2)(P_2^2+P_2'^2)} \cos \left(\omega_1 t + \frac{p\theta_o - \nu - \xi}{2} - \frac{t}{T_2} \right) e^{-\frac{t}{T_2}} \right]$$

Il en est de même de l'expression du couple

$$\frac{2}{3} p M^2 \sqrt{1+\tau_2^2\omega'^2} \left\{ (K_1^2+K_2^2) \sqrt{P_1^2+P_1'^2} \sin \frac{\psi - \zeta}{2} e^{-\frac{2t}{T_1}} \right. \\ \left. + (K_3^2+K_4^2) \sqrt{P_2^2+P_2'^2} \sin \frac{\psi - \xi}{2} e^{-\frac{2t}{T_2}} \right. \\ \left. + \sqrt{(K_1^2+K_2^2)(K_3^2+K_4^2)} \left[\sqrt{P_2^2+P_2'^2} \sin \left((\omega_1 - \omega_2) t + \frac{\rho + \psi - \nu - \xi}{2} \right) - \sqrt{P_1^2+P_1'^2} \sin \left((\omega_1 - \omega_2) t - \frac{\nu + \psi - \rho - \zeta}{2} \right) \right] e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-\frac{t}{T_2}} \right\}$$

III.3.2 Cas de courants préalables équilibrés

Si avant la mise en court-circuit du stator, les tensions qui étaient appliquées à celui-ci étaient équilibrées et si le régime au primaire et au secondaire était établi donc donnait dans ces enroulements des courants sinusoidaux,

$$i_{110} = I_{1m} \sin(\alpha + \gamma_1 - \delta_1)$$

$$i_{210} = I_{2m} \cos(\alpha - p\theta_o - \delta_1)$$

$$\text{De plus } i_{120} = I_{1m} \sin(\alpha + \gamma_1 - \delta_1 - \frac{2\pi}{3}) ; i_{130} = I_{1m} \sin(\alpha + \gamma_1 - \delta_1 - \frac{4\pi}{3})$$

$$i_{210} = I_{2m} \cos(\alpha - p\theta_0 - \delta_1 - \frac{2\pi}{3}) ; i_{230} = I_{2m} \cos(\alpha - p\theta_0 - \delta_1 - \frac{4\pi}{3})$$

Notons enfin que I_{1m} et I_{2m} sont dans le rapport de transformation des courants en régime établi à la vitesse ω'/p .

$$\frac{I_{2m}}{I_{1m}} = - \frac{\frac{3}{2} M(\omega - \omega')}{R_2 \sqrt{1 + \tau_2^2 (\omega - \omega')^2}}$$

L'expression des constantes d'intégration se simplifie devenant

$$K_1 = \frac{\sqrt{3} I_{1m}}{2\sqrt{(P_2 - P_1)^2 + (P'_2 - P'_1)^2}} \left(\frac{\sqrt{P_2^2 + P_1'^2}}{\frac{3}{2} M \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega'^2}} \sin(\alpha + \gamma_1 - \delta_1 - \frac{p\theta_0 + \psi + \varphi - \xi}{2}) + \frac{\frac{3}{2} M(\omega - \omega')}{R_2 \sqrt{1 + \tau_2^2 (\omega - \omega')^2}} \cos(\alpha - \delta_1 - \frac{p\theta_0 + \varphi}{2}) \right)$$

$$K_2 = \frac{\sqrt{3} I_{1m}}{2\sqrt{(P_2 - P_1)^2 + (P'_2 - P'_1)^2}} \left(- \frac{\sqrt{P_2^2 + P_1'^2}}{\frac{3}{2} M \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega'^2}} \cos(\alpha + \gamma_1 - \delta_1 - \frac{p\theta_0 + \psi + \varphi - \xi}{2}) + \frac{\frac{3}{2} M(\omega - \omega')}{R_2 \sqrt{1 + \tau_2^2 (\omega - \omega')^2}} \sin(\alpha - \delta_1 - \frac{p\theta_0 + \varphi}{2}) \right)$$

$$K_3 = - \frac{\sqrt{3} I_{1m}}{2\sqrt{(P_2 - P_1)^2 + (P'_2 - P'_1)^2}} \left(\frac{\sqrt{P_2^2 + P_1'^2}}{\frac{3}{2} M \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega'^2}} \sin(\alpha + \gamma_1 - \delta_1 - \frac{p\theta_0 + \psi + \varphi - \zeta}{2}) + \frac{\frac{3}{2} M(\omega - \omega')}{R_2 \sqrt{1 + \tau_2^2 (\omega - \omega')^2}} \cos(\alpha - \delta_1 - \frac{p\theta_0 + \varphi}{2}) \right)$$

$$K_4 = \frac{\sqrt{3} I_{1m}}{2\sqrt{(P_2 - P_1)^2 + (P'_2 - P'_1)^2}} \left(\frac{\sqrt{P_2^2 + P_1'^2}}{\frac{3}{2} M \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega'^2}} \cos(\alpha + \gamma_1 - \delta_1 - \frac{p\theta_0 + \psi + \varphi - \zeta}{2}) - \frac{\frac{3}{2} M(\omega - \omega')}{R_2 \sqrt{1 + \tau_2^2 (\omega - \omega')^2}} \sin(\alpha - \delta_1 - \frac{p\theta_0 + \varphi}{2}) \right)$$

Signalons que dans ce cas les quantités $\sqrt{k_1^2+k_2^2}$ et $\sqrt{k_3^2+k_4^2}$ et les angles $\frac{p\theta_{o+\rho}}{2}$ et $\frac{p\theta_{o+v}}{2}$ sont indépendants de $p\theta_o$: le régime transitoire des courants primaires ne dépend donc pas de la position relative du rotor par rapport au stator.

III.3.3 Cas particulier d'une vitesse nulle

Si la vitesse du moteur, précédemment alimenté par des courants équilibrés, est nulle au moment où l'on court-circuite le stator, on obtient des relations simples. Ce type de régime transitoire est fort improbable lors d'une utilisation du moteur ; mais il peut être expérimentalement réalisé pour vérifier les constantes de temps T_1 et T_2 .

Le fait que $\omega' = 0$ conduit aux simplifications suivantes

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \left(\tau_1 + \tau_2 \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\sigma\tau_1\tau_2} \right) ; \omega_1 = \omega_2 = 0 ; \\ P_1 &= R_1(\tau_2 - T_2) ; P'_1 = 0 ; P_2 = R_1(\tau_2 - T_1) ; P'_2 = 0 ; \\ \psi &= \zeta = \xi = \varphi = 0 ; \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, \text{ avec } \operatorname{tg}\gamma = \tau_2\omega ; \\ \delta_1 &= \delta_2 = \delta, \text{ avec } \operatorname{tg}\delta = \frac{(\tau_1 + \tau_2)\omega}{1 - \sigma\tau_1\tau_2\omega^2} = \frac{\omega(T_1 + T_2)}{1 - \omega^2 T_1 T_2} ; \\ \delta &= \eta_1 + \eta_2 \text{ avec } \operatorname{tg}\eta_1 = \omega T_1 \text{ et } \operatorname{tg}\eta_2 = \omega T_2. \end{aligned} \right\} (101)$$

Si le régime précédant la perturbation était le régime permanent à l'arrêt de la machine alimentée par des tensions d'amplitude V_{1m} , les courants avaient comme amplitude

$$\begin{aligned} \text{au primaire} \quad I_{1m} &= \frac{V_{1m} \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2}}{R_1 \sqrt{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}} , \\ \text{au secondaire} \quad I_{2m} &= -\frac{3}{2} M\omega \frac{I_{1m}}{R_2 \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2}} . \end{aligned}$$

Dans ces conditions, les constantes d'intégration peuvent s'écrire :

$$K_1 = \frac{(\tau_2 - T_1) V_{1m}}{\sqrt{3} M R_1 (T_2 - T_1) \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}} \sin\left(\alpha - \eta_1 - \frac{p\theta_0}{2}\right)$$

$$K_2 = - \frac{(\tau_2 - T_1) V_{1m}}{\sqrt{3} M R_1 (T_2 - T_1) \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}} \cos\left(\alpha - \eta_1 - \frac{p\theta_0}{2}\right)$$

$$K_3 = - \frac{(\tau_2 - T_2) V_{1m}}{\sqrt{3} M R_1 (T_2 - T_1) \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}} \sin\left(\alpha - \eta_2 - \frac{p\theta_0}{2}\right)$$

$$K_4 = \frac{(\tau_2 - T_2) V_{1m}}{\sqrt{3} M R_1 (T_2 - T_1) \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}} \cos\left(\alpha - \eta_2 - \frac{p\theta_0}{2}\right)$$

Si l'on reporte ces valeurs des constantes dans les expressions des courants primaires et secondaires celles-ci deviennent

$$i_{11} = \frac{I_{1m}}{(T_2 - T_1) \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}} \left((\tau_2 - T_1) \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2} \sin(\alpha - \eta_1) e^{-\frac{t}{T_1}} - (\tau_2 - T_2) \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \sin(\alpha - \eta_2) e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

$$i_{21} = \frac{I_{2m}}{\omega(T_2 - T_1)} \left(\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2} \sin(\alpha - \eta_1 - p\theta_0) e^{-\frac{t}{T_1}} - \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \sin(\alpha - \eta_2 - p\theta_0) e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$$

Chaque courant est la somme de deux exponentielles amorties l'une avec la constante de temps T_1 , l'autre avec la constante de temps T_2 . Cependant les relevés du courant primaire effectués à des instants particuliers ($\alpha = \eta_1$ ou $\alpha = \eta_2$) permettent d'obtenir une décroissance du courant suivant une seule exponentielle.

Le couple disparaît suivant la relation

$$c = C_0 e^{-\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} t}$$

C_o désignant la valeur initiale soit

$$C_o = \frac{27 p M^2 V_{1m}^2 \omega}{8 R_1^2 R_2 (1 + \omega^2 T_1^2) (1 + \omega^2 T_2^2)}$$

L'enregistrement du couple permet de vérifier la constante de temps $T_1 T_2 / T_1 + T_2$.

III.4 DEMARRAGE DU MOTEUR A L'ARRET

L'étude de l'application des tensions d'alimentation à un moteur arrêté peut être menée en supposant que la machine était séparée depuis assez longtemps de la source pour que les courants secondaires aient eu le temps de s'éteindre complètement. Dans ce régime transitoire toutes les valeurs initiales seront prises égales à zéro.

De plus la vitesse étant nulle, toutes les simplifications relatives aux constantes de temps indiquées par les relations (101) sont applicables.

Considérons le cas où les tensions sinusoïdales appliquées au moteur sont déséquilibrées avant d'examiner celui où elles sont équilibrées.

III.4.1 Alimentation par des tensions déséquilibrées

Les constantes d'intégration se déduisent des valeurs forcées des six courants à l'instant $t = 0$ d'application des tensions

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{3} R_1 (T_2 - T_1)} \left\{ \frac{R_1 (\tau_2 - T_1)}{\frac{3}{2} M} \left[i_{11fo} \cos \frac{p\theta_o}{2} + i_{12fo} \cos \left(\frac{p\theta_o}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) + i_{13fo} \cos \left(\frac{p\theta_o}{2} - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \right. \\ \left. + i_{21fo} \cos \frac{p\theta_o}{2} + i_{22fo} \cos \left(\frac{p\theta_o}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) + i_{23fo} \cos \left(\frac{p\theta_o}{2} + \frac{4\pi}{3} \right) \right\}$$

$$K_2 = \frac{1}{\sqrt{3} R_1 (T_2 - T_1)} \left\{ \frac{R_1 (\tau_2 - T_1)}{\frac{3}{2} M} \left[i_{11fo} \sin \frac{p\theta_o}{2} + i_{12fo} \sin \left(\frac{p\theta_o}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) + i_{13fo} \sin \left(\frac{p\theta_o}{2} - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \right. \\ \left. + i_{21fo} \sin \frac{p\theta_o}{2} + i_{22fo} \sin \left(\frac{p\theta_o}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) + i_{23fo} \sin \left(\frac{p\theta_o}{2} + \frac{4\pi}{3} \right) \right\}$$

$$K_3 = \frac{1}{\sqrt{3}R_1(T_2-T_1)} \left\{ \frac{R_1(\tau_2-T_2)}{\frac{3}{2}M} \left[i_{11fo} \cos \frac{p\theta_o}{2} + i_{12fo} \cos \left(\frac{p\theta_o}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) + i_{13fo} \cos \left(\frac{p\theta_o}{2} - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \right. \\ \left. - \left[i_{21fo} \cos \frac{p\theta_o}{2} + i_{22fo} \cos \left(\frac{p\theta_o}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) + i_{23fo} \cos \left(\frac{p\theta_o}{2} + \frac{4\pi}{3} \right) \right] \right\}$$

$$K_4 = \frac{-1}{\sqrt{3}R_1(T_2-T_1)} \left\{ \frac{R_1(\tau_2-T_2)}{\frac{3}{2}M} \left[i_{11fo} \sin \frac{p\theta_o}{2} + i_{12fo} \sin \left(\frac{p\theta_o}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) + i_{13fo} \sin \left(\frac{p\theta_o}{2} - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \right. \\ \left. + i_{21fo} \sin \frac{p\theta_o}{2} + i_{22fo} \sin \left(\frac{p\theta_o}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) + i_{23fo} \sin \left(\frac{p\theta_o}{2} + \frac{4\pi}{3} \right) \right\}$$

Les courants primaires et secondaires sont chacun la somme de deux termes libres et des deux termes forcés correspondant l'un à la composante directe des tensions, l'autre à leur composante inverse.

$$i_{11} = \sqrt{3}M \left[\frac{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}{2} \cos \frac{p\theta_o + \rho}{2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{\sqrt{K_3^2+K_4^2}}{2} \cos \frac{p\theta_o + \nu}{2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right] \\ + \frac{\sqrt{1+\tau_2^2\omega^2}}{2\sqrt{3}R_1\sqrt{(1+\omega^2T_1^2)(1+\omega^2T_2^2)}} \left(\sqrt{A_1^2+B_1^2} \cos(\omega t + \alpha + \epsilon_1 + \gamma - \eta_1 - \eta_2) \right. \\ \left. - \sqrt{A_1^2+D_1^2} \cos(\omega t + \alpha + \epsilon_2 + \gamma - \eta_1 - \eta_2) \right)$$

$$i_{21} = \frac{2R_1}{\sqrt{3}} \left[(\tau_2-T_2) \frac{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}{2} \cos \frac{p\theta_o - \rho}{2} e^{-\frac{t}{T_1}} + (\tau_2-T_1) \frac{\sqrt{K_3^2+K_4^2}}{2} \cos \frac{p\theta_o - \nu}{2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right] \\ + \frac{\sqrt{3}M\omega}{4R_1R_2\sqrt{(1+\omega^2T_1^2)(1+\omega^2T_2^2)}} \left(\sqrt{A_1^2+B_1^2} \sin(\omega t + \alpha - p\theta_o + \epsilon_1 - \eta_1 - \eta_2) \right. \\ \left. - \sqrt{A_1^2+D_1^2} \sin(\omega t + \alpha + p\theta_o + \epsilon_2 - \eta_1 - \eta_2) \right)$$

Le couple a pour expression :

$$\begin{aligned}
 c = 3pM \left\{ \frac{3\sqrt{3} M \omega V_{1m} (V_{2m} \sin \alpha_2 - V_{3m} \sin \alpha_3)}{8R_1^2 R_2 (1+\omega^2 T_1^2) (1+\omega^2 T_2^2)} \right. \\
 + \frac{9 M^2 \omega}{16R_1 R_2 \sqrt{(1+\omega^2 T_1^2) (1+\omega^2 T_2^2)}} \left(\sqrt{(K_1^2+K_2^2) (A_1^2+B_1^2)} \cos(\omega t + \alpha + \epsilon_1 - \eta_1 - \eta_2 - \frac{p\theta_o + \rho}{2}) e^{-\frac{t}{T_1}} \right. \\
 + \sqrt{(K_1^2+K_2^2) (A_1^2+D_1^2)} \cos(\omega t + \alpha + \epsilon_2 - \eta_1 - \eta_2 + \frac{p\theta_o + \rho}{2}) e^{-\frac{t}{T_1}} \\
 + \sqrt{(K_3^2+K_4^2) (A_1^2+B_1^2)} \cos(\omega t + \alpha + \epsilon_1 - \eta_1 - \eta_2 - \frac{p\theta_o + v}{2}) e^{-\frac{t}{T_2}} \\
 \left. \left. + \sqrt{(K_3^2+K_4^2) (A_1^2+D_1^2)} \cos(\omega t + \alpha + \epsilon_2 - \eta_1 - \eta_2 + \frac{p\theta_o + v}{2}) e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \right. \\
 + \frac{(\tau_2 - T_2) \sqrt{1+\tau_2^2 \omega^2}}{4\sqrt{(1+\omega^2 T_1^2) (1+\omega^2 T_2^2)}} \left(\sqrt{(K_1^2+K_2^2) (A_1^2+B_1^2)} \sin(\omega t + \alpha + \epsilon_1 + \gamma - \eta_1 - \eta_2 - \frac{p\theta_o + \rho}{2}) \right. \\
 \left. + \sqrt{(K_1^2+K_2^2) (A_1^2+D_1^2)} \sin(\omega t + \alpha + \epsilon_2 + \gamma - \eta_1 - \eta_2 + \frac{p\theta_o + \rho}{2}) \right) e^{-\frac{t}{T_1}} \\
 + \frac{(\tau_2 - T_1) \sqrt{1+\tau_2^2 \omega^2}}{4\sqrt{(1+\omega^2 T_1^2) (1+\omega^2 T_2^2)}} \left(\sqrt{(K_3^2+K_4^2) (A_1^2+B_1^2)} \sin(\omega t + \alpha + \epsilon_1 + \gamma - \eta_1 - \eta_2 - \frac{p\theta_o + v}{2}) \right. \\
 \left. + \sqrt{(K_3^2+K_4^2) (A_1^2+D_1^2)} \sin(\omega t + \alpha + \epsilon_2 + \gamma - \eta_1 - \eta_2 + \frac{p\theta_o + v}{2}) \right) e^{-\frac{t}{T_2}} \\
 \left. + \frac{3}{2} M R_1 (T_2 - T_1) \sqrt{(K_1^2+K_2^2) (K_3^2+K_4^2)} \sin \frac{\rho - v}{2} e^{-\frac{t}{T_1} - \frac{t}{T_2}} \right\}
 \end{aligned}$$

En regroupant quatre par quatre les termes de même pulsation et de même constante de temps, on voit que le couple est la somme du couple forcé,

d'un terme de pseudo-pulsation ω et de constante de temps T_1 ,

d'un terme de pseudo-pulsation ω et de constante de temps T_2 ,

d'un terme apériodique s'amortissant avec la constante de temps $\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$.

III.4.2 Alimentation par des tensions équilibrées

Si les tensions appliquées au moteur sont équilibrées, les courants forcés le sont également. Pour les premières phases des deux armatures ils ont pour expression

$$i_{11f} = I_{1mf} \sin(\omega t + \alpha + \gamma - \eta_1 - \eta_2) \quad , \quad \text{avec } I_{1mf} = \frac{V_{1m} \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2}}{R_1 \sqrt{(1 + \omega^2 T_1^2) (1 + \omega^2 T_2^2)}} \quad ;$$

$$i_{21f} = I_{2mf} \cos(\omega t + \alpha - p\theta_o - \eta_1 - \eta_2) \quad , \quad \text{avec } I_{2mf} = - \frac{\frac{3}{2} M \omega V_{1m}}{R_1 R_2 \sqrt{(1 + \omega^2 T_1^2) (1 + \omega^2 T_2^2)}}$$

Les constantes d'intégration ont la même valeur que celles données au paragraphe III.3.4 à condition de changer leur signe.

En effet i_{11fo} , i_{12fo} , i_{13fo} , i_{21fo} , i_{22fo} , i_{23fo} ont la même valeur que i_{11o} , i_{12o} , i_{13o} , i_{21o} , i_{22o} , i_{23o} dans le régime alors étudié.

Les expressions des courants statoriques et rotoriques comportent toujours les deux termes aperiodiques de constantes de temps T_1 et T_2 , mais le terme sinusoïdal est réduit au seul effet de la composante directe des tensions.

$$i_{11} = I_{1mf} \left(- \frac{\tau_2 - T_1}{T_2 - T_1} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_2^2}{1 + \omega^2 \tau_2^2}} \sin(\alpha - \eta_1) e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{\tau_2 - T_2}{T_2 - T_1} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 T_1^2}{1 + \omega^2 \tau_2^2}} \sin(\alpha - \eta_2) e^{-\frac{t}{T_2}} + \sin(\omega t + \alpha + \gamma - \eta_1 - \eta_2) \right)$$

$$i_{21} = I_{2mf} \left(- \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}{\omega(T_2 - T_1)} \sin(\alpha - \eta_1 - p\theta_o) e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_1^2}}{\omega(T_2 - T_1)} \sin(\alpha - \eta_2 - p\theta_o) e^{-\frac{t}{T_2}} + \cos(\omega t + \alpha - \eta_1 - \eta_2 - p\theta_o) \right)$$

Les quatre termes de l'expression du couple se simplifient pour la même raison :

$$c = C_f \left(1 + \frac{\sin(\omega t + \eta_1 - \eta_2)}{\sin(\eta_2 - \eta_1)} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{\sin(\omega t + \eta_2 - \eta_1)}{\sin(\eta_2 - \eta_1)} e^{-\frac{t}{T_2}} + e^{-\left(\frac{t}{T_1} + \frac{t}{T_2}\right)} \right)$$

C_f désignant le couple permanent à l'arrêt

$$C_f = \frac{27pM^2\omega V_{1m}^2}{8R_1^2R_2(1+\omega^2T_1^2)(1+\omega^2T_2^2)}$$

III.5 OUVERTURE DU STATOR

Le moteur étant alimenté, on ouvre l'interrupteur reliant le stator à la source. On supposera ici l'interrupteur parfait, c'est-à-dire faisant passer instantanément de zéro à l'infini la résistance de la liaison qu'il établit. Dans ces conditions les courants statoriques s'annulent brutalement sans régime transitoire. On n'étudiera pas les phénomènes qui se déroulent durant l'intervalle où les arcs assurent le passage des courants primaires à travers l'interrupteur ouvert.

Le seul régime transitoire à étudier reste alors celui lié à l'extinction des courants rotoriques et aux tensions que ceux-ci induisent au stator.

Les résultats de l'étude générale s'appliquent difficilement puisque une armature est ouverte. Mais précisément parce qu'il n'y a de courants que dans le seul rotor, l'étude directe de ce régime transitoire est aisée.

III.5.1 Relations générales

Les équations des tensions au rotor deviennent, puisque les courants statoriques sont constants et nuls,

$$\left. \begin{aligned} R_2 i_{21} + L_2 \frac{di_{21}}{dt} &= 0 \\ R_2 i_{22} + L_2 \frac{di_{22}}{dt} &= 0 \\ R_2 i_{23} + L_2 \frac{di_{23}}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

D'où les courants secondaires

$$i_{21} = i_{210} e^{-\frac{t}{T_2}} ; i_{22} = i_{220} e^{-\frac{t}{T_2}} ; i_{23} = i_{230} e^{-\frac{t}{T_2}}$$

i_{210} , i_{220} et i_{230} sont les valeurs initiales des courants secondaires, c'est-à-dire à l'instant $t = 0$ où tous les courants primaires sont nuls.

Ces courants rotoriques s'éteignant exponentiellement avec la constante de temps τ_2 induisent des tensions, dites tensions de réapparition, aux bornes du stator.

Ces tensions, repérées par l'addition de l'indice r , sont données par

$$\left. \begin{aligned} v_{11r} &= \frac{d}{dt} (m_{11} i_{21} + m_{12} i_{22} + m_{13} i_{23}) \\ v_{12r} &= \frac{d}{dt} (m_{21} i_{21} + m_{22} i_{22} + m_{23} i_{23}) \\ v_{13r} &= \frac{d}{dt} (m_{31} i_{21} + m_{32} i_{22} + m_{33} i_{23}) \end{aligned} \right\}$$

III.5.2 Applications

La disparition brutale des courants primaires fait que le système triphasé des valeurs initiales des courants secondaires n'est pas équilibré.

Le moteur étant en rotation, le calcul des tensions de réapparition, compte tenu des relations ci-dessus et de l'expression générale des mutuelles entre armatures, donne finalement

$$v_{11r} = - \frac{M\sqrt{1+\tau_2^2\omega'^2}}{\tau_2} \left(i_{210} \cos(\omega't+p\theta_0 + \frac{\psi}{2}) + i_{220} \cos(\omega't+p\theta_0 + \frac{\psi}{2} + \frac{2\pi}{3}) + i_{230} \cos(\omega't+p\theta_0 + \frac{\psi}{2} + \frac{4\pi}{3}) \right) e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

Pour obtenir v_{12r} puis v_{13r} il suffit de remplacer dans l'expression de v_{11r} l'angle $p\theta_0$ par $p\theta_0 - \frac{2\pi}{3}$ puis par $p\theta_0 - \frac{4\pi}{3}$.

Les tensions de réapparition de pulsation ω' s'éteignent avec la constante de temps τ_2 .

III.6 OPERATIONS DE DEMARRAGE SUR LE STATOR DU MOTEUR EN ROTATION

Les moteurs asynchrones à cage dont la puissance est relativement importante par rapport à celle du réseau qui doit les alimenter, ne peuvent

être démarrés par application directe de la tension totale du réseau.

Trois types de procédés pour réduire l'appel de courant sont utilisés

- démarrage par paliers de tension
- démarrage étoile-triangle
- démarrage par élimination d'impédances statoriques additionnelles.

Nous n'examinerons pas ici la première étape qui consiste à l'application de la tension réduite au moteur à l'arrêt ou à l'application de la tension totale au moteur arrêté avec impédance additionnelle. Ce régime transitoire a été vu au paragraphe III.4.

Mais les modifications de tension ou d'impédance qui se situent pendant la montée en vitesse de la machine provoquent des régimes transitoires dont nous allons préciser les particularités.

III.6.1 Passage des paliers de tension

Le passage d'un palier de tension au suivant nécessite forcément l'ouverture du stator.

Soient v_{11}'' , v_{12}'' , v_{13}'' les tensions appliquées au stator jusqu'à l'instant $t = -\Delta t$ où on l'a séparé de la source, Δt désignant la durée de cette séparation. A l'instant $t = 0$, on applique au moteur tournant à la vitesse ω'/p les nouvelles tensions v_{11} , v_{12} , v_{13} .

Δt étant d'ordinaire faible devant la constante de temps τ_2 du rotor, l'application de v_{11} , v_{12} , v_{13} trouve le moteur avec des courants statoriques nuls mais des courants rotoriques non nuls.

Si l'on désigne par $(i'_{21})_{-\Delta t}$, $(i'_{22})_{-\Delta t}$, $(i'_{23})_{-\Delta t}$ la valeur des courants secondaires à l'instant où les courants primaires sont nuls, dans l'étude du régime transitoire débutant pour $t = 0$, on aura

$$i_{110} = 0 \quad ; \quad i_{120} = 0 \quad ; \quad i_{130} = 0 \quad ;$$
$$i_{210} = (i'_{21})_{-\Delta t} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_2}} \quad ; \quad i_{220} = (i'_{22})_{-\Delta t} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_2}} \quad ; \quad i_{230} = (i'_{23})_{-\Delta t} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_2}} .$$

En reportant ces valeurs dans les relations (68) on obtiendra les constantes d'intégration qui permettent de suivre l'évolution des courants et du couple à l'aide des expressions établies dans le cas général (voir § III.2).

III.6.2 Passage de l'étoile au triangle

Si on désigne par v_{11}' , v_{12}' , v_{13}' les tensions composées sinusoïdales, équilibrées ou non, du réseau, pour $t \leq -\Delta t$ le stator étant couplé en étoile les tensions aux bornes de ses phases étaient v_{11}'' , v_{12}'' , v_{13}'' . Entre $t = -\Delta t$ et $t = 0$ le stator est ouvert. A partir de $t = 0$, durant le régime transitoire étudié, les enroulements primaires sont groupés en triangle et les tensions à leurs bornes sont v_{11}' , v_{12}' , v_{13}' .

Notons que les tensions aux bornes des phases ayant, quel que soit leur couplage, une somme nulle, sur le diagramme vectoriel de la figure 8 les tensions v_{11}'' , v_{12}'' , v_{13}'' sont représentées par les vecteurs joignant le centre de gravité aux sommets du triangle représentant v_{11}' , v_{12}' , v_{13}' .

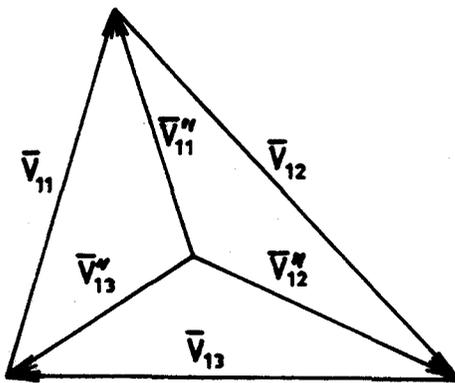


Fig 8 - Construction des vecteurs représentant les tensions aux bornes des phases primaires en étoile à partir de ceux représentant ces tensions lorsque les phases sont couplées en triangle.

Comme dans le cas précédent, il faut déterminer les courants rotoriques lorsque le stator était couplé en étoile. Leur valeur pour $t = -\Delta t$ et leur décroissance durant l'intervalle Δt donne i_{210} , i_{220} et i_{230} . Les courants primaires sont nuls pour $t = 0$, lorsque débute le régime transitoire étudié.

III.6.3 Elimination d'impédances statoriques additionnelles

L'élimination par étapes successives de résistances ou de réactances placées entre les bornes de la source et celles du stator ne nécessite pas l'ouverture du primaire. On élimine ces impédances additionnelles en les court-circuitant.

Avant la perturbation que constitue la brusque annulation d'une

partie de l'impédance du primaire, on détermine les expressions des six courants d'où leurs valeurs i_{110} , i_{120} , i_{130} , i_{210} , i_{220} et i_{230} à l'instant de la perturbation. A partir de $t = 0$, le primaire présente les constantes R_1 , L_1 pour lesquelles tous les calculs ont été effectués.

Ce régime transitoire n'entraîne de discontinuité ni pour les courants, ni pour le couple. Il correspond tout à fait au cas général examiné au paragraphe II.2 ⁽¹⁾.

III.7 OUVERTURE DU ROTOR

L'ouverture du bobinage rotorique est d'ordinaire accidentelle. Elle est d'ailleurs le plus souvent unipolaire ; le rotor devient alors brusquement monophasé et l'étude générale ici effectuée des régimes transitoires symétriques n'est pas applicable ; il faudrait développer un calcul analogue à celui développé en annexe et relatif au cas plus fréquent d'un fonctionnement avec primaire monophasé et secondaire triphasé.

Nous examinerons ici le régime transitoire résultant de l'ouverture simultanée et que nous supposons instantanée des trois phases secondaires.

A partir de $t = 0$, les trois courants secondaires sont nuls. Les équations des tensions primaires deviennent

$$v_{11} = v_{1m} \sin(\omega t + \alpha) = R_1 i_{11} + L_1 \frac{di_{11}}{dt}$$

$$v_{12} = v_{2m} \sin(\omega t + \alpha + \alpha_2) = R_1 i_{12} + L_1 \frac{di_{12}}{dt}$$

$$v_{13} = v_{3m} \sin(\omega t + \alpha + \alpha_3) = R_1 i_{13} + L_1 \frac{di_{13}}{dt}$$

D'où les expressions des courants primaires

$$i_{11} = \left(i_{110} - I_{11mf} \sin(\alpha - \beta) \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} + I_{11mf} \sin(\omega t + \alpha - \beta)$$

(1) Les régimes transitoires provoqués par les changements de résistances secondaires lors du démarrage par résistances additionnelles en série avec le rotor s'étudieraient de la même façon.

$$i_{12} = \left(i_{12o} - I_{12mf} \sin(\alpha + \alpha_2 - \beta) \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} + I_{12mf} \sin(\omega t + \alpha + \alpha_2 - \beta)$$

$$i_{13} = \left(i_{13o} - I_{13mf} \sin(\alpha + \alpha_3 - \beta) \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} + I_{13mf} \sin(\omega t + \alpha + \alpha_3 - \beta)$$

expressions dans lesquelles

i_{11o} , i_{12o} , i_{13o} désignent les valeurs initiales des trois courants statiques,

$$I_{11mf} = \frac{V_{1m}}{R_1 \sqrt{1 + \tau_1^2 \omega^2}} ; I_{12mf} = \frac{V_{2m}}{R_1 \sqrt{1 + \tau_1^2 \omega^2}} ; I_{13mf} = \frac{V_{3m}}{R_1 \sqrt{1 + \tau_1^2 \omega^2}} ,$$

$$\beta = \text{arc tg } \tau_1 \omega .$$

Les courants primaires induisent au rotor des tensions de "répartition".

Pour chaque phase du rotor ces tensions sont données par

$$v_{21r} = \frac{d}{dt} (m_{11} i_{11} + m_{21} i_{12} + m_{31} i_{13})$$

$$v_{22r} = \frac{d}{dt} (m_{12} i_{11} + m_{22} i_{12} + m_{32} i_{13})$$

$$v_{23r} = \frac{d}{dt} (m_{13} i_{11} + m_{23} i_{12} + m_{33} i_{13})$$

La première de ces tensions est de la forme

$$\begin{aligned} v_{21r} = & M \cos(\omega' t + p\theta_o) \left\{ -\frac{1}{\tau_1} \left(i_{11o} - I_{11mf} \sin(\alpha - \beta) \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \omega I_{11mf} \cos(\omega t + \alpha - \beta) \right\} \\ & + M \cos(\omega' t + p\theta_o - \frac{2\pi}{3}) \left\{ -\frac{1}{\tau_1} \left(i_{12o} - I_{12mf} \sin(\alpha + \alpha_2 - \beta) \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \omega I_{12mf} \cos(\omega t + \alpha + \alpha_2 - \beta) \right\} \\ & + M \cos(\omega' t + p\theta_o - \frac{4\pi}{3}) \left\{ -\frac{1}{\tau_1} \left(i_{13o} - I_{13mf} \sin(\alpha + \alpha_3 - \beta) \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \omega I_{13mf} \cos(\omega t + \alpha + \alpha_3 - \beta) \right\} \\ & - M\omega' \sin(\omega' t + p\theta_o) \left\{ \left(i_{11o} - I_{11mf} \sin(\alpha - \beta) \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} + I_{11mf} \sin(\omega t + \alpha - \beta) \right\} \\ & - M\omega' \sin(\omega' t + p\theta_o - \frac{2\pi}{3}) \left\{ \left(i_{12o} - I_{12mf} \sin(\alpha + \alpha_2 - \beta) \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} + I_{12mf} \sin(\omega t + \alpha + \alpha_2 - \beta) \right\} \\ & - M\omega' \sin(\omega' t + p\theta_o - \frac{4\pi}{3}) \left\{ \left(i_{13o} - I_{13mf} \sin(\alpha + \alpha_3 - \beta) \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} + I_{13mf} \sin(\omega t + \alpha + \alpha_3 - \beta) \right\} \end{aligned}$$

Lorsque le rotor est bobiné, le couplage de ses phases est souvent étoilé et le point neutre n'est pas accessible. Ce sont donc les tensions composées de réapparition qui seront mesurables. Par exemple nous aurons

$u_{12r} = v_{22r} - v_{21r}$ ou, en développant

$$u_{12r} = -\frac{\sqrt{3M}\sqrt{1+\tau_1^2\omega'^2}}{\tau_1} \left\{ i_{11o} \sin(\omega't+p\theta_o-\beta' - \frac{2\pi}{3}) + i_{12o} \sin(\omega't+p\theta_o-\beta' - \frac{4\pi}{3}) + i_{13o} \sin(\omega't+p\theta_o-\beta') \right\} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

$$+ \frac{\sqrt{3M}\sqrt{1+\tau_1^2\omega'^2}}{2\tau_1} \left\{ I_{11mf} \cos(\omega't+p\theta_o-\beta'-\alpha+\beta - \frac{2\pi}{3}) + I_{12mf} \cos(\omega't+p\theta_o-\beta'-\alpha-\alpha_2+\beta - \frac{4\pi}{3}) + I_{13mf} \cos(\omega't+p\theta_o-\beta'-\alpha-\alpha_3+\beta) \right\} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

$$- \frac{\sqrt{3M}\sqrt{1+\tau_1^2\omega'^2}}{2\tau_1} \left\{ I_{11mf} \cos(\omega't+p\theta_o-\beta'+\alpha-\beta - \frac{2\pi}{3}) + I_{12mf} \cos(\omega't+p\theta_o-\beta'+\alpha+\alpha_2-\beta - \frac{4\pi}{3}) + I_{13mf} \cos(\omega't+p\theta_o-\beta'+\alpha+\alpha_3-\beta) \right\} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} M(\omega+\omega') \left\{ I_{11mf} \sin\left((\omega+\omega')t+\alpha-\beta+p\theta_o - \frac{2\pi}{3}\right) + I_{12mf} \sin\left((\omega+\omega')t+\alpha+\alpha_2-\beta+p\theta_o - \frac{4\pi}{3}\right) + I_{13mf} \sin\left((\omega+\omega')t+\alpha+\alpha_3-\beta+p\theta_o\right) \right\}$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{2} M(\omega-\omega') \left\{ I_{11mf} \sin\left((\omega-\omega')t+\alpha-\beta-p\theta_o + \frac{2\pi}{3}\right) + I_{12mf} \sin\left((\omega-\omega')t+\alpha+\alpha_2-\beta-p\theta_o + \frac{4\pi}{3}\right) + I_{13mf} \sin\left((\omega-\omega')t+\alpha+\alpha_3-\beta-p\theta_o\right) \right\}$$

en posant $\operatorname{tg} \beta' = \tau_1 \omega'$.

Le calcul des courants et des tensions de réapparition est simplifié si les tensions d'alimentation sont équilibrées, c'est-à-dire si

$$V_{1m} = V_{2m} = V_{3m} ; \alpha_2 = -\frac{2\pi}{3} ; \alpha_3 = -\frac{4\pi}{3} .$$

Les courants forcés ont même amplitude $I_{1mf} = \frac{V_{1m}}{R_1 \sqrt{1+\tau_1^2 \omega^2}}$ et sont régulièrement décalés.

Dans ces conditions les courants transitoires s'écrivent

$$i_{1s} = \left\{ i_{1s0} - I_{1mf} \sin \left[\alpha - \beta - (s-1) \frac{2\pi}{3} \right] \right\} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + I_{1mf} \sin \left[\omega t + \alpha - \beta - (s-1) \frac{2\pi}{3} \right]$$

avec $s = 1, 2$ ou 3 suivant qu'il s'agit de i_{11}, i_{12} ou i_{13} .

La tension de réapparition, entre les bornes 1 et 2 par exemple, devient

$$u_{12r} = - \frac{\sqrt{3M} \sqrt{1+\tau_1^2 \omega'^2}}{\tau_1} \left\{ i_{110} \sin(\omega' t + p\theta_0 - \beta' - \frac{2\pi}{3}) + i_{120} \sin(\omega' t + p\theta_0 - \beta' - \frac{4\pi}{3}) + i_{130} \sin(\omega' t + p\theta_0 - \beta') \right\} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{3\sqrt{3} M I_{1mf} \sqrt{1+\tau_1^2 \omega'^2}}{2\tau_1} \cos(\omega' t + p\theta_0 - \beta' - \alpha + \beta - \frac{2\pi}{3}) e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{3\sqrt{3}}{2} M(\omega - \omega') I_{1mf} \sin \left[(\omega - \omega') t + \alpha - \beta - p\theta_0 + \frac{2\pi}{3} \right]$$

A l'arrêt et en régime établi, la tension u_{12r} est donnée par la relation

$$u_{12r} = - \frac{3\sqrt{3}}{2} M \omega I_{1mf} \sin(\omega t + \alpha - \beta - p\theta_0 + \frac{2\pi}{3})$$

La valeur efficace $U_{12r} = \frac{3\sqrt{3}}{2} M \omega I_{1f}$ permet la détermination du coefficient de mutuelle inductance M

$$M = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{U_{12r}}{\omega I_{1f}}$$

III.8 FERMETURE DU ROTOR

Le moteur étant alimenté par son stator, pour $t = -\Delta t$ le rotor a été ouvert, les courants secondaires ont été annulés, les courants primaires ont évolué comme nous l'avons vu dans l'étude du régime transitoire précédent. A l'instant $t = 0$ on referme simultanément les trois phases du rotor.

Il en résulte à partir de $t = 0$, un nouveau régime transitoire où les courants statoriques et rotoriques présentent les expressions vues dans le cas général.

Seule se simplifie un peu l'expression des constantes d'intégration, puisque $i_{210} = i_{220} = i_{230} = 0$

Les valeurs de i_{110} , i_{120} et i_{130} se déduisent de l'étude du régime précédent, à moins que Δt soit grand devant la constante de temps τ_1 et que les courants primaires puissent être confondus avec leur valeur forcée lors du fonctionnement avec rotor ouvert.

III.9 REMISE SOUS TENSION D'UNE PHASE OUVERTE

Si, pour une cause accidentelle, une phase du stator, la première par exemple, n'est plus alimentée, son courant i_{11} est nul. Le moteur fonctionne en monophasé avec $i_{12} = -i_{13}$.

A l'instant $t = 0$, où la phase 1 est à nouveau reliée à la source, un régime transitoire débute. Pour son étude, on prendra donc pour valeurs initiales des courants primaires

$$i_{110} = 0 \quad ; \quad i_{120} = -i_{130} .$$

Ces valeurs ne simplifient guère le calcul des constantes d'intégration données par les relations (68). Les expressions des courants et du couple indiquées dans le cas général sont toujours applicables.

On obtiendrait un régime transitoire du même type si après l'ouverture accidentelle d'une phase du rotor, celle-ci était à nouveau mise en court-circuit.

III.10 INVERSION DU SENS DU FLUX TOURNANT

Les résultats relatifs au régime transitoire qui se produit lorsque le moteur tournant dans un sens, après ouverture du stator et croisement des connexions entre deux de ses bornes et la source, on applique à nouveau les tensions de celle-ci au moteur, ne se déduisent pas directement de l'étude générale. Il est nécessaire de reprendre en partie les calculs.

Le régime libre est le même pour tous les régimes transitoires symétriques. Aussi notre étude adoptera le plan suivant : détermination du régime forcé lors du fonctionnement à "contre-courants", obtention du régime réel.

La similitude des calculs avec ceux effectués dans l'étude générale permet de ne pas les reprendre complètement. Nous nous contenterons d'en indiquer les étapes et de reproduire les résultats obtenus.

Nous prenons comme expressions des mutuelles-inductances entre les bobines du stator et du rotor celles indiquées dès le paragraphe II.1.1, c'est-à-dire que la vitesse ω'/p du rotor est comptée dans le sens du flux tournant après inversion de ce sens. Si g est le glissement avant croisement des connexions, dans les relations que nous allons établir $\omega' = (2-g)\omega$.

III.10.1 Etude du régime forcé

Si l'on permute les phases 2 et 3 par exemple, les tensions appliquées aux trois phases primaires deviennent respectivement v_{11} , v_{13} et v_{12} et la matrice des tensions primaires peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{13} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1m} \\ v_{3m} \cos\alpha_3 \\ v_{2m} \cos\alpha_2 \end{pmatrix} \sin(\omega t + \alpha) + \begin{pmatrix} 0 \\ v_{3m} \sin\alpha_3 \\ v_{2m} \sin\alpha_2 \end{pmatrix} \cos(\omega t + \alpha)$$

En appliquant le même changement de variable, il vient

$$\begin{pmatrix} v'_{11} \\ v'_{12} \\ v'_{13} \end{pmatrix} = [D]^{-1} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{13} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \frac{\sin(\omega t + \alpha)}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} v_{1m} + v_{3m} \cos\alpha_3 + v_{2m} \cos\alpha_2 \\ v_{1m} + a v_{3m} \cos\alpha_3 + a^2 v_{2m} \cos\alpha_2 \\ v_{1m} + a^2 v_{3m} \cos\alpha_3 + a v_{2m} \cos\alpha_2 \end{pmatrix} + \frac{\cos(\omega t + \alpha)}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} v_{3m} \sin\alpha_3 + v_{2m} \sin\alpha_2 \\ a v_{3m} \sin\alpha_3 + a^2 v_{2m} \sin\alpha_2 \\ a^2 v_{3m} \sin\alpha_3 + a v_{2m} \sin\alpha_2 \end{pmatrix}$$

Le fait que la somme des tensions appliquées aux trois phases soit nulle, annule ici encore $v_{1m} + v_{3m} \cos\alpha_3 + v_{2m} \cos\alpha_2$ et $v_{3m} \sin\alpha_3 + v_{2m} \sin\alpha_2$. La composante v'_{11} est égale à zéro.

Les quantités v'_{12} et v'_{13} sont encore conjuguées.

Si l'on développe l'expression de v'_{12} , elle devient

$$v'_{12} = \frac{1}{4} \left\{ \left[-(V_{2m} \cos \alpha_2 - V_{3m} \cos \alpha_3) - j(V_{2m} \sin \alpha_2 - V_{3m} \sin \alpha_3 + \sqrt{3} V_{1m}) \right] e^{j(\omega t + \alpha)} \right. \\ \left. - \left[-(V_{2m} \cos \alpha_2 - V_{3m} \cos \alpha_3) + j(V_{2m} \sin \alpha_2 - V_{3m} \sin \alpha_3 - \sqrt{3} V_{1m}) \right] e^{-j(\omega t + \alpha)} \right\}$$

ou, en adoptant les notations indiquées par les relations (74')

$$v'_{12} = \frac{1}{4} \left[(-A_1 - jD_1) e^{j(\omega t + \alpha)} - (-A_1 + jB_1) e^{-j(\omega t + \alpha)} \right]$$

On passe ensuite aux expressions des transformées des courants primaires et secondaires en régime forcé

$$i'_{12f} = \frac{\sqrt{[1 + \tau_2^2 (\omega - \omega')^2]} (A_1^2 + D_1^2)}{4R_1 \sqrt{U_1}} e^{j(\omega t + \alpha + \epsilon_2 + \gamma_1 - \delta_1)} \\ - \frac{\sqrt{[1 + \tau_2^2 (\omega + \omega')^2]} (A_1^2 + B_1^2)}{4R_1 \sqrt{U_2}} e^{-j(\omega t + \alpha + \epsilon_1 + \gamma_2 - \delta_2)}$$

$$i'_{22f} = \frac{\frac{3}{2} M (\omega - \omega') \sqrt{A_1^2 + D_1^2}}{4R_1 R_2 \sqrt{U_1}} e^{j \left[(\omega - \omega') t + \alpha - p\theta_0 + \epsilon_2 - \delta_1 - \frac{\pi}{2} \right]} \\ - \frac{\frac{3}{2} M (\omega + \omega') \sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{4R_1 R_2 \sqrt{U_2}} e^{-j \left[(\omega + \omega') t + \alpha + p\theta_0 + \epsilon_1 - \delta_2 - \frac{\pi}{2} \right]}$$

$\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ ayant les valeurs définies par les relations (88)
 U_1 et U_2 désignant toujours les quantités

$$U_1 = \left[\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega - \omega') \right]^2 + \left[1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega - \omega') \right]^2 \\ U_2 = \left[\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega + \omega') \right]^2 + \left[1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega + \omega') \right]^2$$

Les composantes i'_{13f} et i'_{23f} sont respectivement les conjuguées de i'_{12f} et de i'_{22f} .

De leurs composantes on déduit les courants réels au primaire et au secondaire

$$i_{11f} = \frac{\sqrt{[1+\tau_2^2(\omega-\omega')^2]}(A_1^2+D_1^2)}{2\sqrt{3} R_1 \sqrt{U_1}} \cos(\omega t + \alpha + \epsilon_2 + \gamma_1 - \delta_1) - \frac{\sqrt{[1+\tau_2^2(\omega+\omega')^2]}(A_1^2+B_1^2)}{2\sqrt{3} R_1 \sqrt{U_2}} \cos(\omega t + \alpha + \epsilon_1 + \gamma_2 - \delta_2)$$

Pour passer à i_{12f} et i_{13f} , on remplace dans le premier terme α par $\alpha - \frac{2\pi}{3}$ puis par $\alpha - \frac{4\pi}{3}$, dans le second α par $\alpha + \frac{2\pi}{3}$ puis par $\alpha + \frac{4\pi}{3}$.

$$i_{21f} = \frac{\frac{3}{2} M(\omega-\omega') \sqrt{A_1^2+D_1^2}}{2\sqrt{3} R_1 R_2 \sqrt{U_1}} \sin\left((\omega-\omega')t + \alpha - p\theta_0 + \epsilon_2 - \delta_1\right) - \frac{\frac{3}{2} M(\omega+\omega') \sqrt{A_1^2+B_1^2}}{2\sqrt{3} R_1 R_2 \sqrt{U_2}} \sin\left((\omega+\omega')t + \alpha + p\theta_0 + \epsilon_1 - \delta_2\right)$$

Pour obtenir i_{22f} et i_{23f} à partir de i_{21f} on procède comme nous venons de l'indiquer pour les courants primaires.

Le couple se déduit toujours des transformées i'_{12f} et i'_{22f} . D'où son expression

$$c_f = \frac{(1-\sigma)p\tau_1\tau_2}{8R_1} \left\{ (\omega-\omega') \frac{A_1^2+D_1^2}{U_1} - (\omega+\omega') \frac{A_1^2+B_1^2}{U_2} + 2\omega' \sqrt{\frac{(A_1^2+D_1^2)(A_1^2+B_1^2)}{U_1 U_2}} \cos(2\omega t + 2\alpha + \epsilon_1 + \epsilon_2 - \delta_1 - \delta_2) \right\}$$

Si les tensions v_{11} , v_{12} , v_{13} forment un système équilibré, A_1 et D_1 sont nuls, B_1 vaut $-2\sqrt{3} V_{1m}$, l'angle ϵ_1 est égal à $\pi/2$. Les expressions des courants et du couple se simplifient

$$i_{11f} = I_{1mf} \sin(\omega t + \alpha + \gamma_2 - \delta_2),$$

$$\text{avec } I_{1mf} = - \frac{V_{1m} \sqrt{1+\tau_2^2(\omega+\omega')^2}}{R_1 \sqrt{[\tau_1\omega + \tau_2(\omega+\omega')]^2 + [1-\sigma\tau_1\tau_2\omega(\omega+\omega')]^2}}$$

$$i_{21f} = I_{2mf} \cos \left((\omega + \omega') t + \alpha + p\theta_o - \delta_2 \right)$$

$$\text{avec } I_{2mf} = - \frac{\frac{3}{2} M(\omega + \omega')}{R_2 \sqrt{1 + \tau_2^2 (\omega + \omega')^2}} I_{1mf}$$

$$c_f = - \frac{3(1-\sigma)p v_{1m}^2 \tau_1 \tau_2 (\omega + \omega')}{2R_1 \left\{ \left[\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega + \omega') \right]^2 + \left[1 - \sigma \tau_1 \tau_2 \omega (\omega + \omega') \right]^2 \right\}}$$

Les tensions n'ayant plus de composante directe, les courants sont dus à la seule composante inverse, le couple est constant et négatif.

III.10.2 Etude du régime transitoire

L'étude du régime transitoire se déduit directement de celle du régime forcé qui précède et de l'étude générale du régime libre.

Les transformées des courants s'écrivent

$$i'_{12} = \frac{3}{2} M \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega'^2} \left[\sqrt{\frac{K_1^2 + K_2^2}{K_1^2 + K_2^2}} e^{-\frac{t}{T_1}} e^{j(\omega_1 t + \frac{p\theta_o + \rho + \psi}{2})} + \sqrt{\frac{K_3^2 + K_4^2}{K_3^2 + K_4^2}} e^{-\frac{t}{T_2}} e^{j(\omega_2 t + \frac{p\theta_o + \nu + \psi}{2})} \right]$$

$$+ \frac{\sqrt{[1 + \tau_2^2 (\omega - \omega')^2]} (A_1^2 + D_1^2)}{4R_1 \sqrt{U_1}} e^{j(\omega t + \alpha + \epsilon_2 + \gamma_1 - \delta_1)}$$

$$- \frac{\sqrt{[1 + \tau_2^2 (\omega + \omega')^2]} (A_1^2 + B_1^2)}{4R_1 \sqrt{U_2}} e^{-j(\omega t + \alpha + \epsilon_1 + \gamma_2 - \delta_2)}$$

$$i'_{22} = \sqrt{\frac{(K_1^2 + K_2^2)(P_1^2 + P_1'^2)}{K_1^2 + K_2^2}} e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-j(\omega_2 t + \frac{p\theta_o - \rho - \zeta}{2})}$$

$$+ \sqrt{\frac{(K_3^2 + K_4^2)(P_2^2 + P_2'^2)}{K_3^2 + K_4^2}} e^{-\frac{t}{T_2}} e^{-j(\omega_1 t + \frac{p\theta_o - \nu - \xi}{2})}$$

$$+ \frac{\frac{3}{2} M(\omega - \omega') \sqrt{A_1^2 + D_1^2}}{4R_1 R_2 \sqrt{U_1}} e^{j \left((\omega - \omega') t + \alpha - p\theta_o + \epsilon_2 - \delta_1 - \frac{\pi}{2} \right)}$$

$$- \frac{\frac{3}{2} M(\omega + \omega') \sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{4R_1 R_2 \sqrt{U_2}} e^{-j \left((\omega + \omega') t + \alpha + p\theta_o + \epsilon_1 - \delta_2 - \frac{\pi}{2} \right)}$$

Les constantes d'intégration sont données par les relations (68).

Puisque le stator était ouvert avant le régime transitoire étudié

$$i_{110} = i_{120} = i_{130} = 0$$

La valeur initiale des courants rotoriques découle de leur valeur à l'instant $t = -\Delta t$ où on a ouvert le stator et de la constante de temps τ_2

$$i_{210} = (i_{21})_{-\Delta t} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_2}} ; \quad i_{220} = (i_{22})_{-\Delta t} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_2}} ; \quad i_{230} = (i_{23})_{-\Delta t} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_2}}$$

Ce n'est que dans le cas où Δt est grand devant τ_2 que l'on peut supposer nulle la valeur initiale des courants secondaires.

Les courants primaires et secondaires réels ont pour expressions

$$\begin{aligned} i_{11} = & \sqrt{3} M \sqrt{1+\tau_2^2 \omega'^2} \left(\sqrt{\frac{K_1^2+K_2^2}{2}} \cos \left(\omega_1 t + \frac{p\theta_o + \rho + \psi}{2} \right) e^{-\frac{t}{T_1}} \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{K_3^2+K_4^2}{2}} \cos \left(\omega_2 t + \frac{p\theta_o + \nu + \psi}{2} \right) e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \\ & + \frac{\sqrt{[1+\tau_2^2(\omega-\omega')^2]} (A_1^2+D_1^2)}{2 \sqrt{3} R_1 \sqrt{U_1}} \cos(\omega t + \alpha + \epsilon_2 + \gamma_1 - \delta_1) \\ & - \frac{\sqrt{[1+\tau_2^2(\omega+\omega')^2]} (A_1^2+B_1^2)}{2 \sqrt{3} R_1 \sqrt{U_2}} \cos(\omega t + \alpha + \epsilon_1 + \gamma_2 - \delta_2) \\ i_{21} = & \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(K_1^2+K_2^2)(P_1^2+P_1'^2)} \cos \left(\omega_2 t + \frac{p\theta_o - \rho - \zeta}{2} \right) e^{-\frac{t}{T_1}} \\ & + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(K_3^2+K_4^2)(P_2^2+P_2'^2)} \cos \left(\omega_1 t + \frac{p\theta_o + \nu - \xi}{2} \right) e^{-\frac{t}{T_2}} \\ & + \frac{\sqrt{3} M (\omega - \omega')}{4 R_1 R_2} \sqrt{\frac{A_1^2+D_1^2}{U_1}} \sin \left((\omega - \omega') t + \alpha - p\theta_o + \epsilon_2 - \delta_1 \right) \\ & - \frac{\sqrt{3} M (\omega + \omega')}{4 R_1 R_2} \sqrt{\frac{A_1^2+B_1^2}{U_2}} \sin \left((\omega + \omega') t + \alpha + p\theta_o + \epsilon_1 - \delta_2 \right) \end{aligned}$$

Le couple est donné par

$$\begin{aligned}
 c = 3pM \left\{ \frac{3}{32} \frac{M(\omega-\omega')}{R_1^2 R_2} \frac{A_1^2 + D_1^2}{U_1} - \frac{3}{32} \frac{M(\omega+\omega')}{R_1^2 R_2} \frac{A_1^2 + B_1^2}{U_2} \right. \\
 + \frac{3}{16} \frac{M}{R_1^2 R_2} \sqrt{\frac{(A_1^2 + D_1^2)(A_1^2 + B_1^2)}{U_1 U_2}} \cos(2\omega t + 2\alpha + \epsilon_2 - \delta_1 + \epsilon_1 - \delta_2) \\
 + \frac{9}{16} \frac{M^2(\omega-\omega')}{R_1 R_2} \sqrt{\frac{(1+\tau_2^2 \omega'^2)(K_1^2 + K_2^2)(A_1^2 + D_1^2)}{U_1}} \cos\left((\omega-\omega_1)t + \alpha + \epsilon_2 - \delta_1 - \frac{p\theta_o + \rho + \psi}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} \\
 + \frac{9}{16} \frac{M^2(\omega+\omega')}{R_1 R_2} \sqrt{\frac{(1+\tau_2^2 \omega'^2)(K_1^2 + K_2^2)(A_1^2 + B_1^2)}{U_2}} \cos\left((\omega+\omega_1)t + \alpha + \epsilon_1 - \delta_2 + \frac{p\theta_o + \rho + \psi}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} \\
 + \frac{9}{16} \frac{M^2(\omega-\omega')}{R_1 R_2} \sqrt{\frac{(1+\tau_2^2 \omega'^2)(K_3^2 + K_4^2)(A_1^2 + D_1^2)}{U_1}} \cos\left((\omega-\omega_2)t + \alpha + \epsilon_2 - \delta_1 - \frac{p\theta_o + \nu + \psi}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_2}} \\
 + \frac{9}{16} \frac{M^2(\omega+\omega')}{R_1 R_2} \sqrt{\frac{(1+\tau_2^2 \omega'^2)(K_3^2 + K_4^2)(A_1^2 + B_1^2)}{U_2}} \cos\left((\omega+\omega_2)t + \alpha + \epsilon_1 - \delta_2 + \frac{p\theta_o + \nu + \psi}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_2}} \\
 + \frac{1}{4R_1} \sqrt{\frac{(P_1^2 + P_1'^2) [1 + \tau_2^2 (\omega-\omega')^2] (K_1^2 + K_2^2) (A_1^2 + D_1^2)}{U_1}} \sin\left((\omega-\omega_1)t + \alpha + \epsilon_2 + \gamma_1 - \delta_1 - \frac{p\theta_o + \rho + \zeta}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} \\
 + \frac{1}{4R_1} \sqrt{\frac{(P_1^2 + P_1'^2) [1 + \tau_2^2 (\omega+\omega')^2] (K_1^2 + K_2^2) (A_1^2 + B_1^2)}{U_2}} \sin\left((\omega+\omega_1)t + \alpha + \epsilon_1 + \gamma_2 - \delta_2 + \frac{p\theta_o + \rho + \zeta}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} \\
 + \frac{1}{4R_1} \sqrt{\frac{(P_2^2 + P_2'^2) [1 + \tau_2^2 (\omega-\omega')^2] (K_3^2 + K_4^2) (A_1^2 + D_1^2)}{U_1}} \sin\left((\omega-\omega_2)t + \alpha + \epsilon_2 + \gamma_1 - \delta_1 - \frac{p\theta_o + \nu + \xi}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_2}} \\
 + \frac{1}{4R_1} \sqrt{\frac{(P_2^2 + P_2'^2) [1 + \tau_2^2 (\omega+\omega')^2] (K_3^2 + K_4^2) (A_1^2 + B_1^2)}{U_2}} \sin\left((\omega+\omega_2)t + \alpha + \epsilon_1 + \gamma_2 - \delta_2 + \frac{p\theta_o + \nu + \xi}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_2}} \\
 + \frac{3}{2} M (K_1^2 + K_2^2) \sqrt{(1+\tau_2^2 \omega'^2) (P_1^2 + P_1'^2)} \sin \frac{\psi - \zeta}{2} e^{-\frac{2t}{T_1}} \\
 + \frac{3}{2} M (K_3^2 + K_4^2) \sqrt{(1+\tau_2^2 \omega'^2) (P_2^2 + P_2'^2)} \sin \frac{\psi - \xi}{2} e^{-\frac{2t}{T_2}} \\
 + \frac{3}{2} M \sqrt{(1+\tau_2^2 \omega'^2) (P_2^2 + P_2'^2) (K_1^2 + K_2^2) (K_3^2 + K_4^2)} \sin\left((\omega_1 - \omega_2)t + \frac{\rho + \psi - \nu - \xi}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-\frac{t}{T_2}} \\
 \left. - \frac{3}{2} M \sqrt{(1+\tau_2^2 \omega'^2) (P_1^2 + P_1'^2) (K_1^2 + K_2^2) (K_3^2 + K_4^2)} \sin\left((\omega_1 - \omega_2)t - \frac{\nu + \psi - \rho - \zeta}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-\frac{t}{T_2}} \right\}
 \end{aligned}$$

Si les tensions d'alimentation sont équilibrées les relations précédentes se simplifient pour devenir

$$i_{11} = \sqrt{3} M \sqrt{1+\tau_2^2 \omega'^2} \left[\sqrt{K_1^2+K_2^2} \cos\left(\omega_1 t + \frac{p\theta_o + \rho + \psi}{2} - \frac{t}{T_1}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} \right. \\ \left. + \sqrt{K_3^2+K_4^2} \cos\left(\omega_2 t + \frac{p\theta_o + \nu + \psi}{2} - \frac{t}{T_2}\right) e^{-\frac{t}{T_2}} \right]$$

$$- \frac{V_{1m}}{R_1} \sqrt{\frac{1+\tau_2^2(\omega+\omega')^2}{U_2}} \sin(\omega t + \alpha + \gamma_2 - \delta_2) \\ i_{21} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(K_1^2+K_2^2)(P_1^2+P_1'^2)} \cos\left(\omega_2 t + \frac{p\theta_o - \rho - \zeta}{2} - \frac{t}{T_1}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} \\ + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(K_3^2+K_4^2)(P_2^2+P_2'^2)} \cos\left(\omega_1 t + \frac{p\theta_o - \nu - \xi}{2} - \frac{t}{T_2}\right) e^{-\frac{t}{T_2}} \\ + \frac{3}{2} \frac{M(\omega+\omega')V_{1m}}{R_1 R_2 \sqrt{U_2}} \cos\left((\omega+\omega')t + \alpha + p\theta_o - \delta_2\right)$$

$$c = -3pM \left\{ \frac{9M(\omega+\omega')V_{1m}^2}{8R_1^2 R_2 U_2} \right. \\ - \frac{9\sqrt{3}}{8} \frac{M^2(\omega+\omega')V_{1m}}{R_1 R_2} \sqrt{\frac{(1+\tau_2^2 \omega'^2)(K_1^2+K_2^2)}{U_2}} \sin\left((\omega+\omega_1)t + \alpha - \delta_2 + \frac{p\theta_o + \rho + \psi}{2} - \frac{t}{T_1}\right) \\ - \frac{9\sqrt{3}}{8} \frac{M^2(\omega+\omega')V_{1m}}{R_1 R_2} \sqrt{\frac{(1+\tau_2^2 \omega'^2)(K_3^2+K_4^2)}{U_2}} \sin\left((\omega+\omega_2)t + \alpha - \delta_2 + \frac{p\theta_o + \nu + \psi}{2} - \frac{t}{T_2}\right) \\ + \frac{\sqrt{3} V_{1m}}{2R_1} \sqrt{\frac{(P_1^2+P_1'^2)[1+\tau_2^2(\omega+\omega')^2](K_1^2+K_2^2)}{U_2}} \cos\left((\omega+\omega_1)t + \alpha + \gamma_2 - \delta_2 + \frac{p\theta_o + \rho + \zeta}{2} - \frac{t}{T_1}\right) \\ + \frac{\sqrt{3} V_{1m}}{2R_1} \sqrt{\frac{(P_2^2+P_2'^2)[1+\tau_2^2(\omega+\omega')^2](K_3^2+K_4^2)}{U_2}} \cos\left((\omega+\omega_2)t + \alpha + \gamma_2 - \delta_2 + \frac{p\theta_o + \nu + \xi}{2} - \frac{t}{T_2}\right) \\ - \frac{3}{2} M (K_1^2+K_2^2) \sqrt{(1+\tau_2^2 \omega'^2)(P_1^2+P_1'^2)} \sin \frac{\psi - \zeta}{2} e^{-\frac{2t}{T_1}} \\ - \frac{3}{2} M (K_3^2+K_4^2) \sqrt{(1+\tau_2^2 \omega'^2)(P_2^2+P_2'^2)} \sin \frac{\psi - \xi}{2} e^{-\frac{2t}{T_2}} \\ - \frac{3}{2} M \sqrt{(1+\tau_2^2 \omega'^2)(P_2^2+P_2'^2)(K_1^2+K_2^2)(K_3^2+K_4^2)} \sin\left((\omega_1 - \omega_2)t + \frac{\rho + \psi - \nu - \xi}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-\frac{t}{T_2}} \\ + \frac{3}{2} M \sqrt{(1+\tau_2^2 \omega'^2)(P_1^2+P_1'^2)(K_1^2+K_2^2)(K_3^2+K_4^2)} \sin\left((\omega_1 - \omega_2)t - \frac{\nu + \psi - \rho - \zeta}{2}\right) e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-\frac{t}{T_2}} \left. \right\}$$

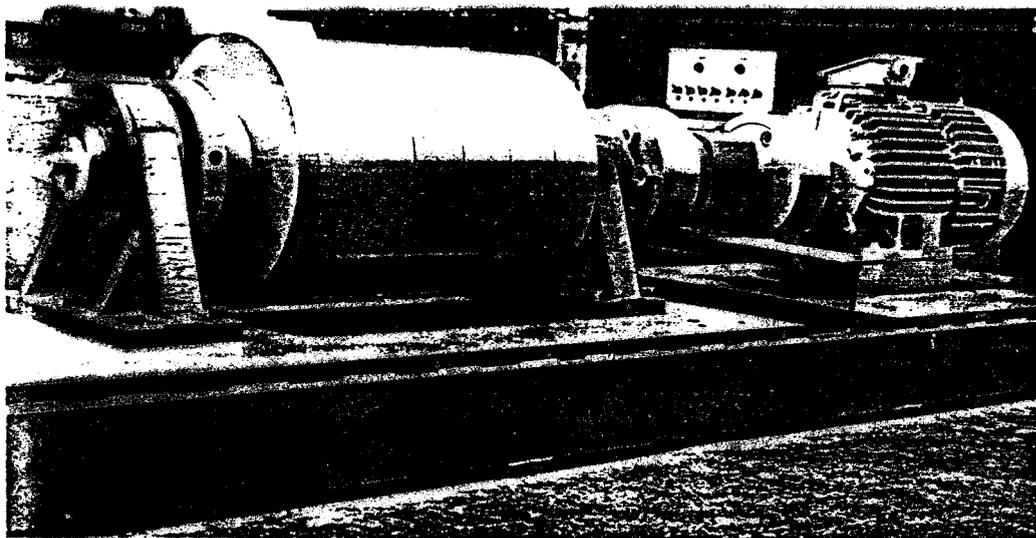
IV - VERIFICATIONS EXPERIMENTALES

Après avoir établi les expressions des courants et du couple en régime transitoire et avoir indiqué comment déterminer la valeur des termes qui interviennent dans ces expressions, il nous a semblé utile de procéder à des vérifications expérimentales. Pour cela nous avons enregistré les courbes donnant les courants et le couple en fonction du temps pour les différents régimes transitoires examinés précédemment et avons comparé ces relevés aux courbes calculées à partir des relations établies dans l'étude théorique.

Après avoir indiqué les caractéristiques du montage expérimental et du moteur utilisés, nous montrerons comment vérifier l'évolution avec la vitesse des constantes de temps T_1 , T_2 et des pseudo-pulsations ω_1 , ω_2 . Nous terminerons par la comparaison entre les formes d'ondes calculées et celles enregistrées pour les divers régimes transitoires symétriques.

IV.1 DISPOSITIF EXPERIMENTAL ET MOTEUR UTILISES

Afin de pouvoir effectuer des régimes transitoires pour toutes les valeurs de la vitesse comprises entre zéro et la vitesse synchrone et être assuré que la vitesse ne varie pas durant les premiers instants de ces régimes, on a réalisé un banc d'essais (fig 9) groupant, sur un socle très rigide, le moteur, le torducteur destiné à la mesure du couple, un volant de forte inertie.



*Fig 9 - Photographie
du banc d'essais*

La machine essayée est un moteur à rotor bobiné de la Compagnie Electro-Mécanique, type L 580 236 ; 7,5 CV ; 50 HZ ; 1420 T/mn ; triphasé ; Stator 220V/380V ; 21,5A/12,5A ; Rotor : 110 V ; 30,5 A.

L'inertie du cylindre entraîné par le moteur est de $576 \text{ kg} \times (0,2\text{m})^2$, soit de $23,04 \text{ kg m}^2$. Si l'ensemble en rotation tourne à 1000 T/mn, l'application durant une seconde du couple nominal du moteur ne fait varier la vitesse que de 1,4 %.

On lance le groupe par le moteur asynchrone. Arrivé à la vitesse où on veut étudier un régime transitoire, on sépare la machine du réseau et on établit ou modifie les connexions créant la perturbation.

IV.1.1 Dispositifs de mesure

Pour enregistrer le *couple* on relève la torsion de l'arbre reliant le moteur au volant d'inertie.

Nous ne reviendrons pas sur l'étude de l'arbre de torsion et sur l'étude comparative des divers procédés de mesures de l'angle ou de la contrainte de torsion, puisque nous les avons développées antérieurement {54}.

Rappelons simplement que pour que la torsion instantanée soit à peu près proportionnelle au couple instantané il faut que l'arbre de torsion soit court et de forte section ; cela entraîne la nécessité d'un compromis entre la linéarité et la sensibilité car celle-ci nécessiterait un arbre de faible diamètre.

L'emploi d'un arbre long nécessaire pour enregistrer un angle de torsion est à écarter. Nous avons comparé les deux procédés permettant de mesurer la contrainte : le torducteur annulaire et les jauges à fil résistant. Pour des mesures à l'arrêt les résultats sont comparables ; pour des relevés sur un arbre en rotation le torducteur se révèle nettement supérieur.

Nous avons utilisé le torducteur annulaire ASEA, type QGTB, permettant la mesure de couples allant jusqu'à 1000 Nm ; le rotor a un diamètre de 48 mm ; la précision est de 1,5 % depuis les couples permanents jusqu'à 250 Hz. On remarque la nécessité de surdimensionner l'arbre de torsion pour pouvoir effectuer des mesures acceptables en régime dynamique puisque on utilise un torducteur apte à mesurer 1000 Nm pour l'étude d'un moteur dont le couple nominal n'est que de 35 Nm.

Le relevé des *courants* s'effectue à l'aide de shunts non inductifs.

L'enregistrement de la tension appliquée à la première phase permet de déterminer l'angle α . Un capteur optique, donnant une impulsion par tour du moteur donne l'écart angulaire $p\theta_0$ à l'instant de la perturbation ⁽¹⁾

IV.1.2 Caractéristiques du moteur essayé

Pour déterminer les trois paramètres essentiels du moteur essayé, τ_1 , τ_2 et σ nous avons effectué les essais en régime permanent indiqués au paragraphe II.3.3.2.

Les deux premiers essais donnent

$$R_1 = 0,54 \Omega ; L_1 = 0,127H$$

on en déduit

$$\tau_1 = 0,235 s .$$

Le troisième essai a été effectué pour le régime nominal du moteur. La mesure de la résistance R'_1 et de l'inductance L'_1 apparentes vues du primaire

$$R'_1 = 14,2 \Omega ; L'_1 = 0,0328H$$

donne

$$\tau_2 = 0,129 s$$

$$\sigma = 0,0995$$

Pour vérifier la précision de cette détermination nous avons tracé le diagramme des impédances (fig 10) en relevant R'_1 et $L'_1\omega$ pour divers régimes compris entre la marche à vide (point B_0) et la marche à couple nominal (point B_n). On vérifie que tous les points relevés se situent bien sur le cercle dont le centre a pour coordonnées R_1 et $\frac{1+\sigma}{2} L_1\omega$.

Alors que les essais précédents s'appliquent à n'importe quel

(1) Les enregistrements reproduits ont été effectués à l'aide d'un oscillographe à faisceaux lumineux SCHLUMBERGER, offrant la possibilité du tracé simultané de 8 courbes. Niveau maximum d'entrée des galvanomètres : 0,24V/cm - Elongation maximale : $\pm 7,5$ cm - Gain des amplificateurs réglable de 1 à 120. Vitesse de déroulement du papier : 0,25 - 1 - 2,5 - 10 - 25 - 100 - 250 et 1000mm/s.

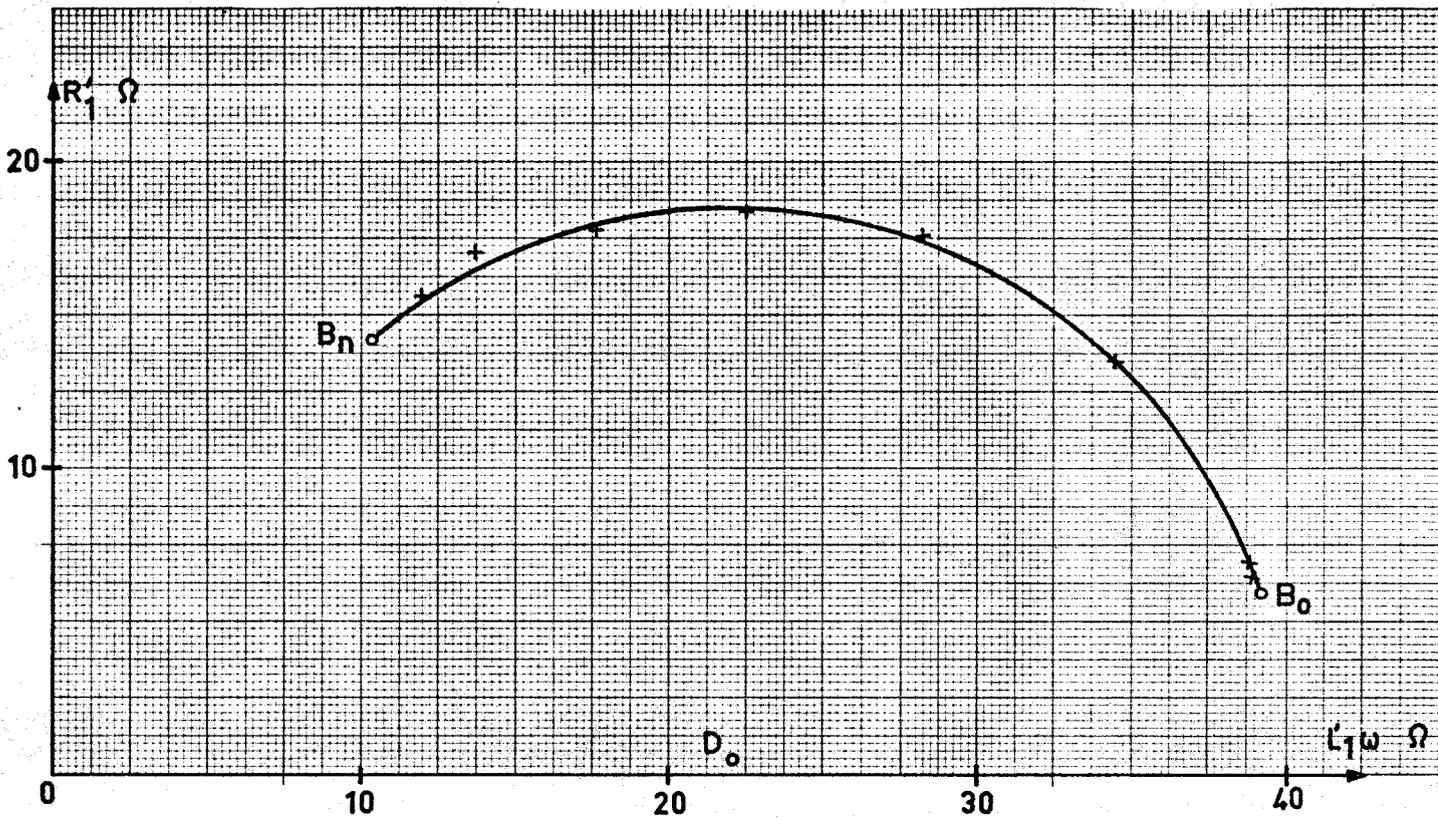


Fig 10 - Diagramme circulaire des impédances du moteur essayé.
Tension d'alimentation 380V, 50Hz.

moteur, celui essayé étant à rotor bobiné on a mesuré les grandeurs permettant la vérification des courants secondaires.

De la résistance R_2 d'une phase secondaire, telle que

$$R_2 = 0,076 \Omega$$

on déduit l'inductance L_2 de celle-ci

$$L_2 = 0,0098 \text{ H.}$$

Notons enfin que la mesure de la tension de réapparition aux bornes du rotor qu'on vient d'ouvrir* permet d'obtenir la mutuelle-inductance M entre les deux armatures

$$M = 0,0225 \text{ H.}$$

IV.2 CONSTANTES DE TEMPS ET PSEUDO-PULSATIONS

Connaissant les valeurs de τ_1 , τ_2 et σ , les relations (48), (49) et (50) permettent de calculer les constantes de temps T_1 , T_2 et les pseudo-pulsations ω_1 , ω_2 en fonction du rapport ω'/ω . Nous avons tracé les courbes ainsi calculées sur la figure 11.



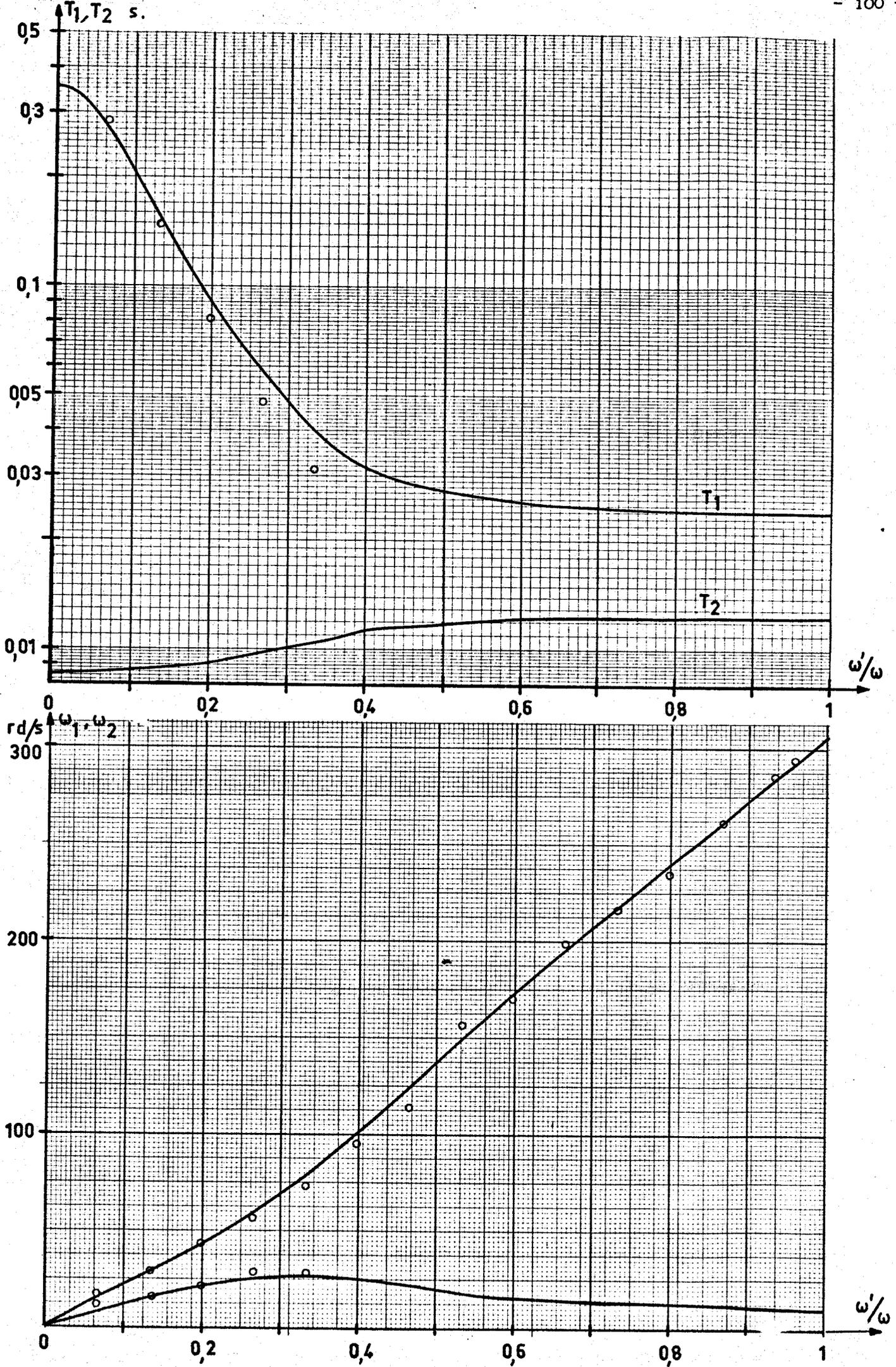


Fig 11 - Variation avec la vitesse de T_1, T_2, w_1 et w_2 ($f = 50$ Hz)
Les courbes correspondent aux valeurs calculées, les o aux valeurs mesurées.

IV.2.1 Relevés expérimentaux

Parmi les divers régimes transitoires possibles c'est la mise en court-circuit du stator qui se prête le mieux à la détermination expérimentale des valeurs de T_1 , T_2 , ω_1 , ω_2 .

Le montage utilisé pour ces essais est celui de la figure 12 ; le moteur relié au réseau triphasé par l'intermédiaire de résistances prend lentement de la vitesse. Arrivé à la vitesse désirée les bornes statoriques sont brusquement mises en court-circuit. On relève lors de ce régime transitoire les courants primaires et secondaires (exemples fig 13).

Pour une même vitesse, les oscillations des courants dépendent de la position du rotor par rapport au stator au moment de la mise en court-circuit, toutefois on n'observe des pointes de valeur relative élevée que lorsqu'on est au voisinage du synchronisme.

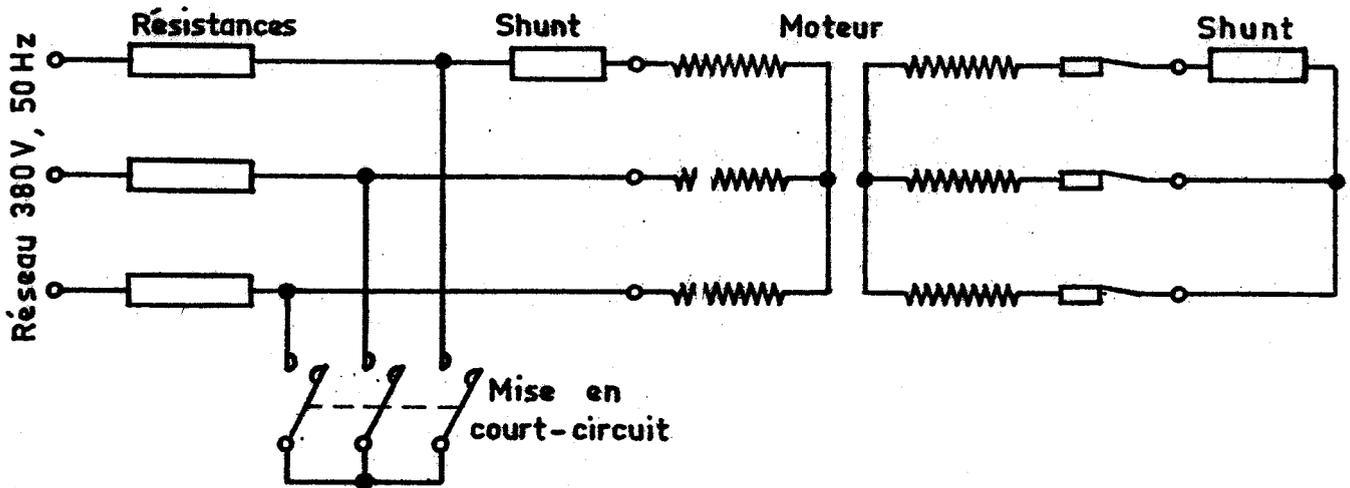


Fig 12 - Montage utilisé pour les essais de mise en court-circuit du stator.

IV.2.2 Détermination de T_1 , T_2 , ω_1 , ω_2 . Comparaison avec les valeurs calculées

L'examen de la nature des expressions des courants (voir § III.3) dans les enroulements lors de la mise en court-circuit du stator montre qu'à partir du relevé de leur forme d'onde on pourra déterminer

- complètement la courbe $\omega_2 = f(\omega'/\omega)$,
 - partiellement les courbes donnant ω_1 et T_1 en fonction de ω'/ω ;
- que la détermination de T_2 sera imprécise à toutes les vitesses.

En effet le *courant primaire* est la somme de deux termes pseudo-périodiques amortis, le premier caractérisé par la pseudo-pulsation ω_1 et la constante de temps T_1 , le second par ω_2 et T_2 .

Tant que les constantes de temps sont très différentes, si au début du régime transitoire les deux termes interviennent, il ne subsiste ensuite que celui dont l'amortissement est faible c'est-à-dire le premier. Pour les faibles valeurs de ω'/ω , le relevé du courant primaire permet de calculer ω_1 et T_1 .

Quand T_1 et T_2 deviennent du même ordre de grandeur, soit pratiquement pour le moteur étudié quand ω'/ω atteint la valeur 0,4, les deux termes interviennent de façon comparable tout au long du régime transitoire ; l'exploitation des relevés oscillographiques ne permet plus de détermination précise.

Le *courant secondaire* est la somme de deux termes : le premier fait intervenir ω_2 et T_1 , le second ω_1 et T_2 . Quelle que soit la vitesse ω_2 est nettement supérieur à ω_1 . Les relevés des courants secondaires permettent la détermination de ω_2 pour toutes les valeurs de ω'/ω .

A partir de 15 enregistrements analogues à ceux de la figure 13 mais obtenus avec une plus grande vitesse de déroulement du papier (1 m/s au lieu de 0,25 m/s) et de plus grandes sensibilités, on a calculé les valeurs de T_1 , ω_1 et ω_2 . Ces résultats sont reportés sur la figure 11.

La comparaison entre les valeurs calculées à partir de τ_1 , τ_2 et σ et celles déduites des relevés pour les vitesses où c'est possible montre que ces dernières confirment avec une bonne précision les valeurs établies à partir des paramètres caractéristiques de la machine.

IV.3 ETUDE EXPERIMENTALE DES DIVERS REGIMES TRANSITOIRES

Les constantes de temps et les pseudo-pulsations qui interviennent dans les termes libres des divers régimes transitoires ayant été déterminées et vérifiées, on peut aborder les divers régimes qui ne diffèrent que par la valeur des constantes d'intégration et les termes forcés.

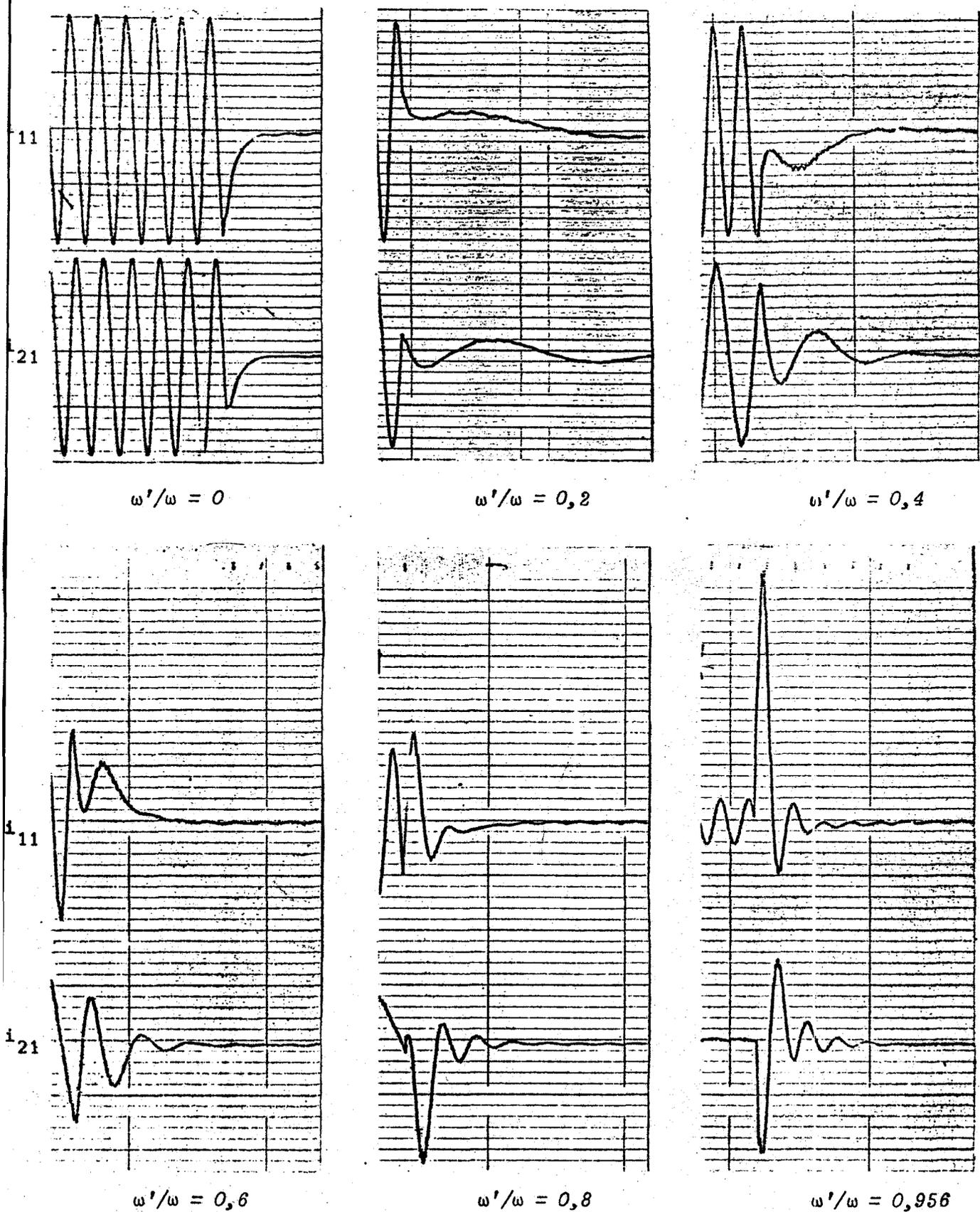


Fig 13 - Exemples d'enregistrements d'un courant primaire et d'un courant secondaire lors de la mise en court-circuit du stator.
(vitesse de déroulement du papier 250 mm/s)

IV.3.1 Exemple de régime entrant dans le cas général

Le cas général (voir § III.2) correspond à l'existence de courants primaires et secondaires tant avant qu'après la perturbation, la vitesse du moteur étant différente de zéro.

IV.3.1.1 Essais et relevés effectués

Une façon simple de réaliser ces conditions consiste à court-circuiter trois résistances identiques (fig 14) montées entre la source et les bornes du stator, le moteur ayant été amené à la vitesse ω'/p désirée. On enregistre un courant primaire i_{11} , un courant secondaire i_{21} , le couple c ainsi que la première tension d'alimentation v_{11} et le signal du capteur de position ; ces deux derniers relevés donnant α et $p\theta_0$.

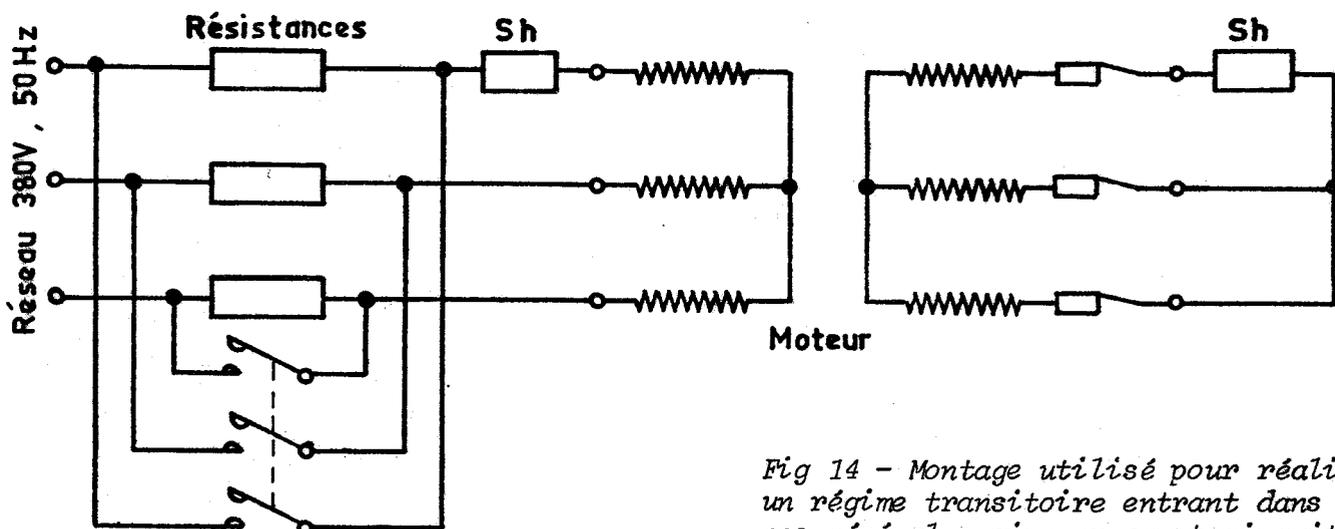
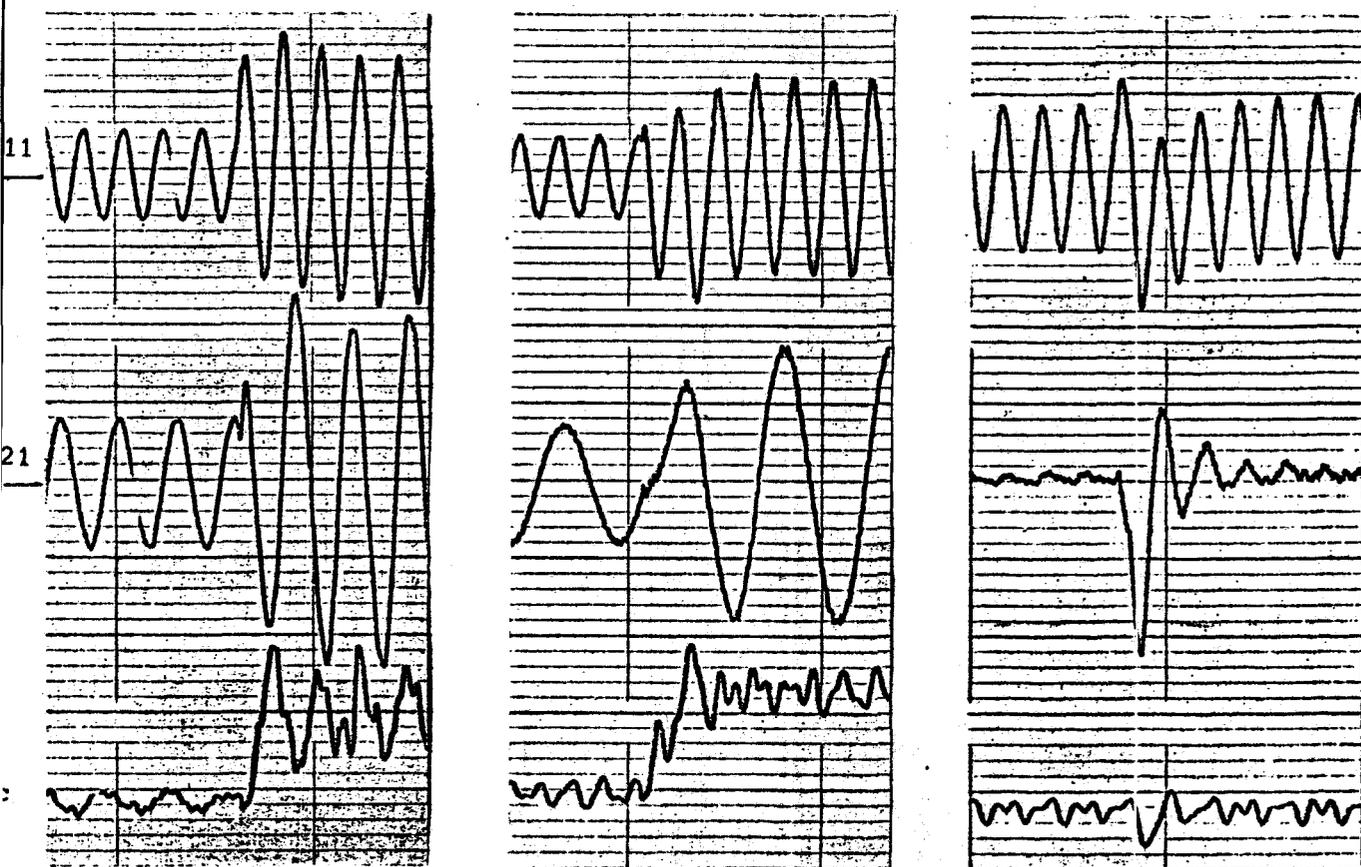


Fig 14 - Montage utilisé pour réaliser un régime transitoire entrant dans le cas général : mise en court-circuit de résistances statoriques additionnelles.

Les variations de i_{11} , i_{21} et de c ont une allure dépendant beaucoup de la *vitesse* à laquelle on produit la perturbation comme le montre la figure 15. C'est encore pour les vitesses élevées que se produisent les plus fortes pointes des courants.

Mais à vitesse donnée, les relevés diffèrent notablement lorsque les angles α et $p\theta_0$ caractérisant l'instant de la perturbation et la position relative que présente alors le rotor par rapport au stator sont modifiés (fig 16).

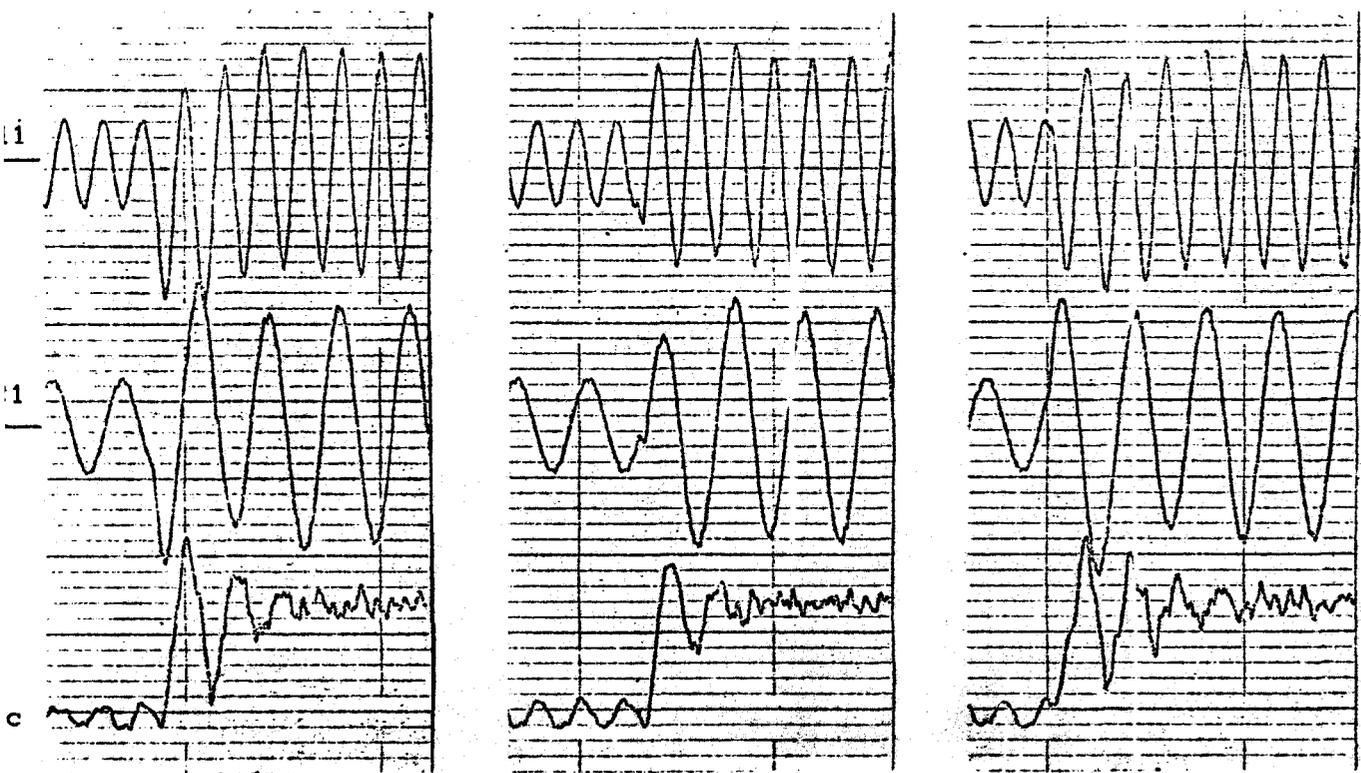


$\omega'/\omega = 0,3$

$\omega'/\omega = 0,6$

$\omega'/\omega = 0,9$

Fig 15 - Relevés, pour trois valeurs de la vitesse, des courants i_{11} , i_{21} et du couple c lors de l'élimination de résistances statoriques additionnelles.



$\alpha = -2,2 \text{ rd}; p\theta_0 = 2,05 \text{ rd}$

$\alpha = -0,3 \text{ rd}; p\theta_0 = 2,05 \text{ rd}$

$\alpha = 2,65 \text{ rd}; p\theta_0 = -2,1 \text{ rd}$

Fig 16 - Relevés de i_{11} , i_{21} et c lors de la mise en court-circuit des résistances statoriques, pour une même valeur de la vitesse $\omega'/\omega = 0,45$, mais des conditions initiales différentes.

IV.3.1.2 Exemple de comparaison entre courbes calculées et courbes relevées

Pour vérifier les relations donnant le courant primaire, le courant secondaire et le couple nous avons calculé et tracé point par point les courbes donnant ces grandeurs en fonction du temps pour la même vitesse et les mêmes conditions initiales que lors du troisième relevé de la figure 16.

La pulsation rotorique étant $\omega' = 141 \text{ rd/s}$, $\omega'/\omega = 0,45$. Les courbes de la figure 11 donnent alors

$$T_1 = 0,0275 \text{ s} ; T_2 = 0,0135 \text{ s} ; \omega_1 = 23 \text{ rd/s} ; \omega_2 = 118,5 \text{ rd/s} .$$

On en déduit

$$N_1 = 0,0334 ; N_1' = -0,608 ; P_1 = 0,0105 ; P_1' = 2,12 ;$$

$$P_2 = -0,05 ; P_2' = 2,28 ; \frac{\psi}{2} = -1,52 \text{ rd} ; \frac{\zeta}{2} = 1,57 \text{ rd} ;$$

$$\frac{\xi}{2} = 1,59 \text{ rd} ; \gamma_1 = 1,53 \text{ rd} ; \delta_1 = 2,61 \text{ rd} .$$

Lors de l'essai V_{1f} était de 225 V, donc $I_{1mf} = 69,2 \text{ A}$.

Lors du relevé les conditions initiales étant

$$\alpha = 2,65 \text{ rd} ; p\theta_0 = -2,10 \text{ rd}$$

les autres rapports et angles ont pour valeur

$$\frac{\psi}{2} = 1,95 \text{ rd} ; K_1 = -2,21 ; K_2 = -82,4 ; K_3 = 47,2 ; K_4 = 53,4 ;$$

$$\frac{\rho}{2} = -1,60 \text{ rd} ; \frac{\nu}{2} = 0,85 \text{ rd} .$$

En reportant dans les relations (98'), (99') et (100') celles-ci donnent

$$\begin{aligned} i_{11} = & 58 \cos(23t+2,12) e^{-\frac{t}{0,0275}} \\ & + 50,1 \cos(118,5t-1,72) e^{-\frac{t}{0,0135}} \\ & + 69,2 \cos \omega t . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{21} = & 201,7 \cos(118,5t-1,02) e^{-\frac{t}{0,0275}} \\ & + 187,3 \cos(23t+2,80) e^{-\frac{t}{0,0135}} \\ & + 236,5 \sin(173,1t+0,58) \end{aligned}$$

$$c = 73,5 \left\{ \begin{aligned} &1 + 0,445 \sin(291,2t+1,77) e^{-\frac{t}{0,0275}} \\ &+ 1,525 \sin(195,2t-1,51) e^{-\frac{t}{0,0135}} \\ &- 0,955 e^{-\frac{t}{0,0138}} - 0,423 e^{-\frac{t}{0,0068}} \\ &- 1,675 \sin(95,5t-1,60) e^{-\frac{t}{0,0091}} \end{aligned} \right\}$$

Sur la figure 17 nous avons tracé les courbes correspondant à ces expressions de i_{11} , i_{21} et c . Nous avons reporté sur cette figure les extrêmes lus sur l'enregistrement reproduit figure 16.

On voit qu'en ce qui concerne les courants la concordance est très satisfaisante. Pour ce qui est du couple les écarts constatés sont essentiellement dus aux parasites générés par le dispositif de mesure et par les vibrations du bâti supportant l'ensemble moteur-volant d'inertie ; cependant les écarts viennent en partie du régime libre du pendule de torsion constitué par le rotor du moteur de la machine essayée et par l'arbre du torducteur annulaire.

IV.3.1.3 Correction de l'erreur due à la transformation couple-torsion

On peut améliorer légèrement la vérification des relevés relatifs au couple en tenant compte du régime libre de l'ensemble mécanique en rotation.

La grandeur enregistrée est la contrainte de torsion et non le couple. Nous avons montré [54] que cette contrainte T dans l'arbre de torsion est liée au couple c , lui-même de la forme

$$c = C_p \left(1+f(t) \right),$$

par l'équation différentielle

$$\frac{d^2T}{dt^2} - 2m \frac{dT}{dt} + n^2 T = n^2 T_p \left(1+f(t) \right),$$

où m est le coefficient d'amortissement, n la pulsation propre du pendule de torsion, T_p la torsion permanente correspondant au couple permanent C_p .

Pour déterminer les valeurs numériques de m et de n nous avons enregistré le régime libre du pendule de torsion. Le moteur tourne à la

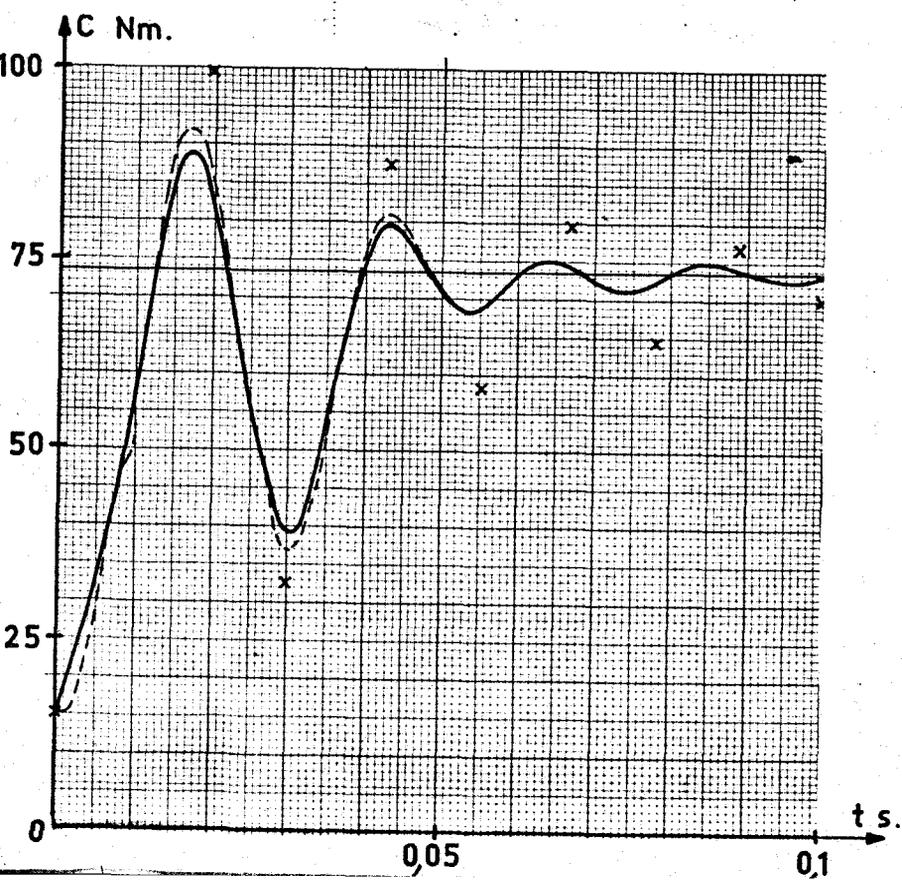
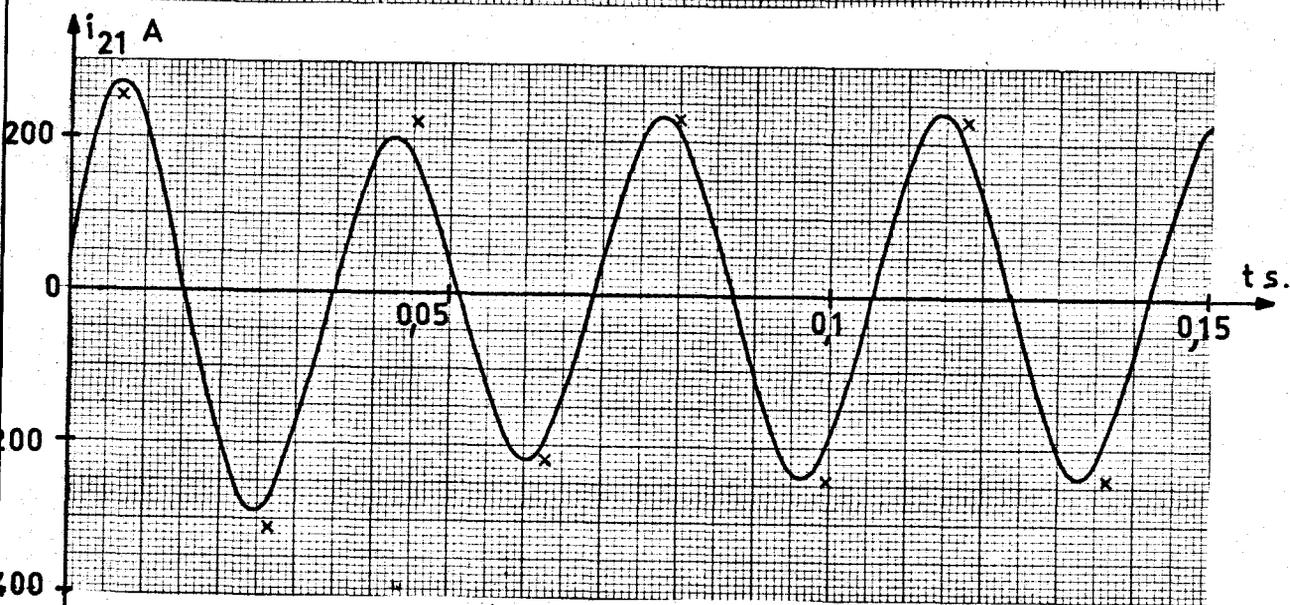
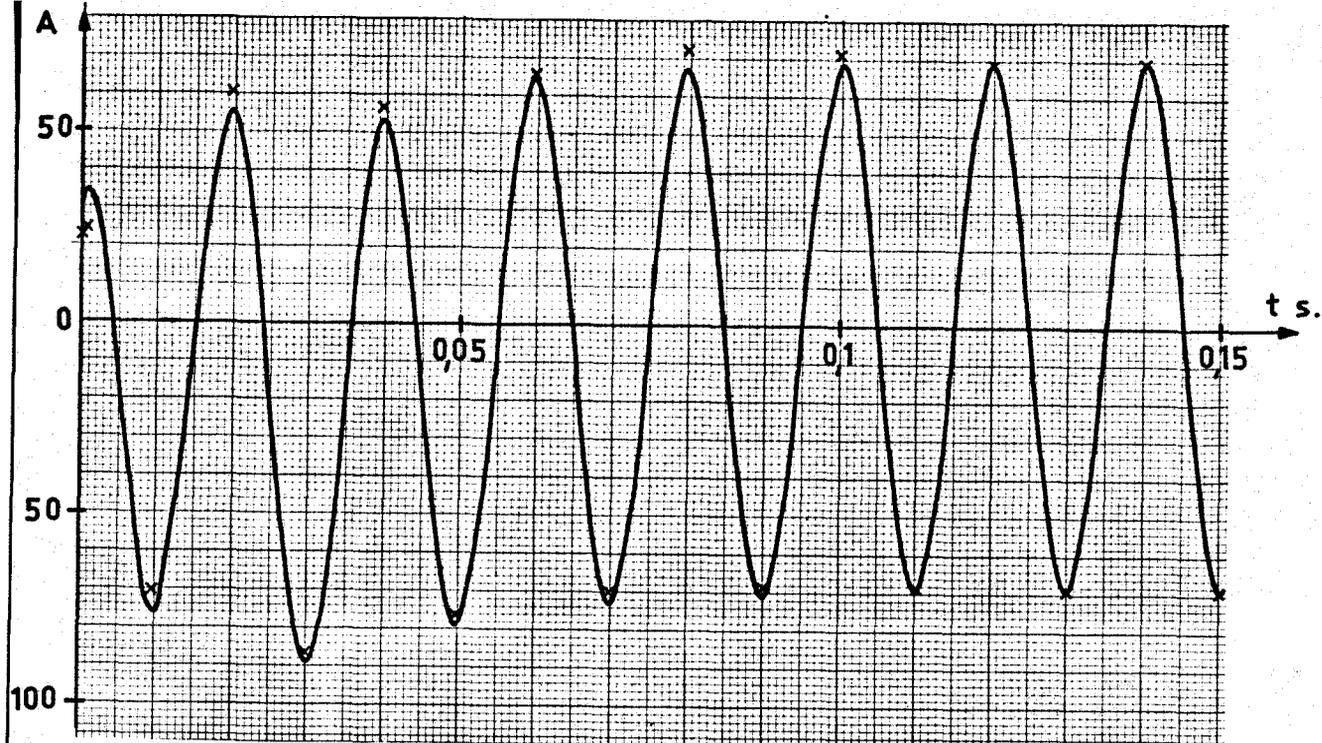


Fig 17 - Courbes donnant i_{11} , i_{21} et c en fonction du temps calculées pour la mise en court-circuit de résistances statoriques $\omega'/\omega=0,45$; $\alpha=2,65 \text{ rd}$; $p\theta_0=-2,10 \text{ rd}$

On a représenté par des + les extréma des courbes expérimentalement relevées.

(Pour le couple, la courbe en traits interrompus est obtenue en tenant compte de la correction due à la transformation couple-torsion)

même vitesse que lors des relevés de la figure 16, on ouvre le rotor ; pendant l'intervalle où existent des courants secondaires le couple n'est pas nul. Mais, dès que ces courants se sont tous annulés, la torsion enregistrée est due au seul régime libre de l'ensemble en rotation. De ce relevé on déduit

$$m = -67,5 \text{ s}^{-1} ; \quad n = 762 \text{ rd/s} .$$

La résolution de l'équation différentielle donne la contrainte de torsion de la forme

$$T = T_p \left(1 + g(t) \right)$$

$$T = T_p \left[1 + 0,525 \sin(291,2t + 1,74) e^{-\frac{t}{0,0275}} \right.$$

$$+ 1,65 \sin(195,7t - 1,51) e^{-\frac{t}{0,0135}}$$

$$- 0,963 e^{-\frac{t}{0,0138}} - 0,422 e^{-\frac{t}{0,0068}}$$

$$- 1,71 \sin(95,5t - 1,59) e^{-\frac{t}{0,0091}}$$

$$\left. + K_5 \sin(759t + k_5) e^{-67,5t} \right]$$

Les constantes d'intégration K_5 et k_5 sont données par les conditions initiales. En régime établi, le couple et la torsion sont indépendants du temps, constants et proportionnels.

$$f(t = 0) = g(t = 0) ;$$

$$\frac{dg}{dt} (t = 0) = 0$$

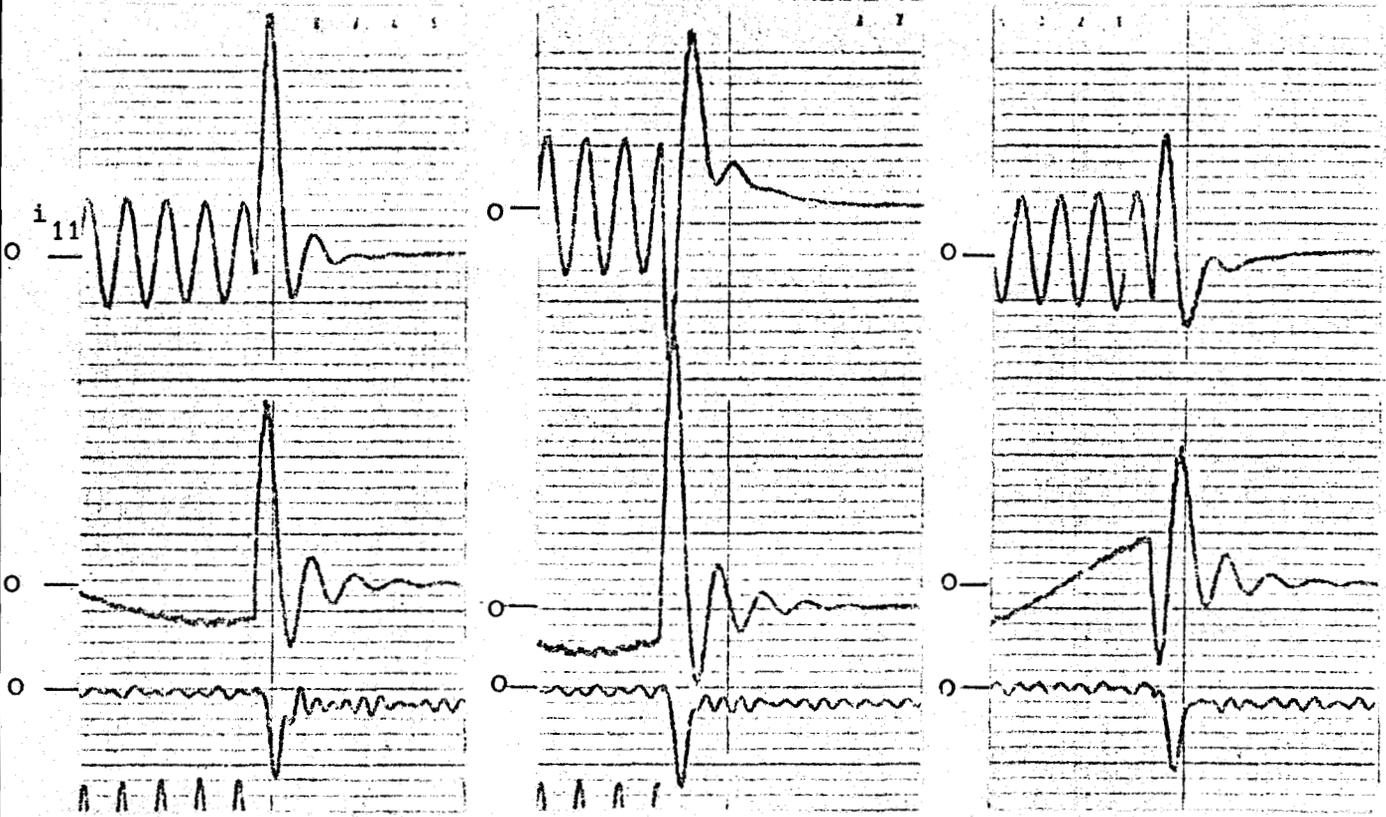
Ces deux conditions donnent

$$K_5 = 0,057 ; \quad k_5 = 2,96 \text{ rd}.$$

Lors de l'enregistrement du régime transitoire on devrait relever non pas le couple du moteur, mais un couple proportionnel à la torsion qu'il produit, c'est-à-dire

$$c_{\text{corrigé}} = 73,5 \frac{T}{T_p}$$

La courbe correspondante a été tracée en traits interrompus sur la figure 17. On voit que l'effet du régime libre est d'augmenter l'amplitude



$\alpha = -2,08rd ; p\theta_0 = 1,85rd$ $\alpha = 1,68rd ; p\theta_0 = -0,90rd$ $\alpha = -1,63rd ; p\theta_0 = 0,16rd$

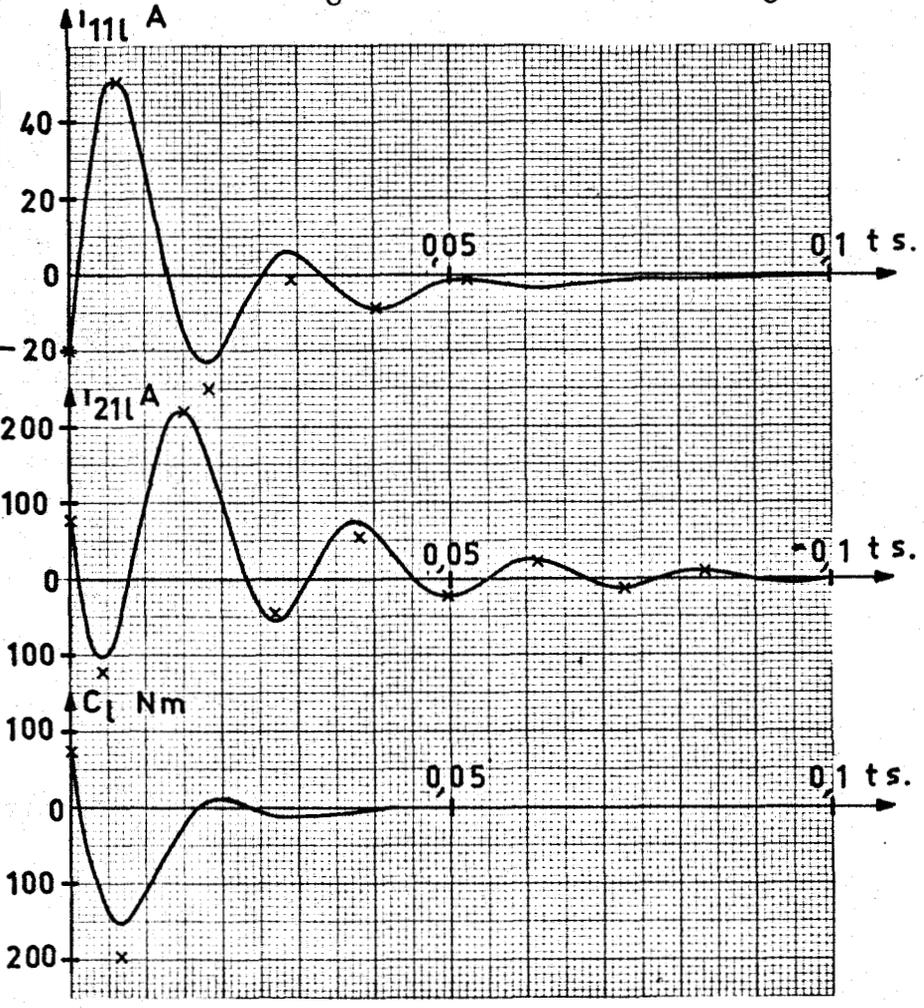


Fig 18 - Mise en court-circuit du stator. $\omega'/\omega = 0,913$
 en haut : enregistrements obtenus pour des conditions initiales différentes
 ci-contre : courbes calculées dans les mêmes conditions que le troisième enregistrement. On a représenté par des + les extréma du relevé expérimental

des premières oscillations du couple, ce qui conduit à un écart acceptable entre le début des courbes calculées et des courbes mesurées. Au-delà des premières oscillations, l'influence des parasites ne permet pas de conclure valablement.

IV.3.2 Mise en court-circuit du stator

Le régime transitoire que constitue la mise en court-circuit du stator a déjà été examiné pour vérifier les constantes de temps et les pseudo-pulsations intervenant dans tout régime libre.

Nous avons montré (voir fig 13) l'évolution des formes d'ondes des courants $i_{11\ell}$ et $i_{21\ell}$ lorsque la vitesse varie. Plus celle-ci est élevée plus la valeur relative des pointes de courant est élevée. A vitesse nulle le régime libre des courants apparaît comme aperiodique amorti.

Le couple présente une pointe négative d'autant plus grande que ω'/ω est plus voisin de l'unité, ses oscillations sont plus amorties que celles des courants.

A vitesse donnée, les conditions initiales, caractérisées par α et $p\theta_0$ influencent ici encore fortement l'allure des relevés. La figure 18 reproduit les oscillogrammes obtenus pour ω'/ω égal à 0,913 et trois couples de valeurs des angles $p\theta_0$ et α . Si la pointe de couple est peu modifiée, il en est autrement de celles des courants.

Pour vérifier les relations donnant les courants et le couple nous avons calculé les expressions de $i_{11\ell}$, $i_{21\ell}$ et c dans les conditions correspondant à ce dernier relevé.

La tension simple était de 220 V et la vitesse, déduite de la fréquence des courants rotoriques, de 1370 T/mn avant la mise en court-circuit.

De $V_1 = 220$ V, $\omega'/\omega = 0,913$; $\alpha = -1,63$ rd et $p\theta_0 = 0,16$ rd, on a déduit $T_1, T_2, \omega_1, \omega_2, N_1, N_1', P_1, P_1', P_2, P_2', \psi, \zeta, \xi, \gamma_1, \delta_1, I_{1m}, \Psi, K_1, K_2, K_3, K_4, \rho$ et ν . En reportant dans les relations (57), (58) et (69), il vient

$$i_{11\ell} = 84,3 \cos(11t+1,43)e^{-\frac{t}{0,023}} + 75,4 \cos(277t-2,02)e^{-\frac{t}{0,0145}}$$

$$i_{21\ell} = 289,6 \cos(277t+1,90)e^{-\frac{t}{0,023}} + 285,5 \cos(11t-0,94)e^{-\frac{t}{0,0145}}$$

$$c_{\ell} = -\left[66,3 e^{-\frac{t}{0,0117}} + 38,5 e^{-\frac{t}{0,0072}} + 246,7 \sin(265t-0,73)e^{-\frac{t}{0,0089}} \right]$$

On a tracé point par point (bas de la fig. 18) les formes d'ondes correspondant à ces expressions. La comparaison avec les relevés oscillographiques est excellente pour les courants. Pour le couple l'allure générale est respectée mais le régime libre de l'ensemble mécanique et les parasites ne permettent pas une vérification précise.

IV.3.3 Démarrage du moteur à l'arrêt

Si le rotor étant immobile, on alimente le moteur par un système triphasé de tensions sinusoïdales équilibrées (voir § III.4.2), les courants primaires et secondaires comportent outre le terme forcé de pulsation ω , un terme apériodique amorti avec la constante de temps T_1 , un autre avec la constante de temps T_2 . Le couple est formé du couple permanent, de deux termes pseudo-périodiques de pulsation ω et de constante de temps T_1 pour l'un, T_2 pour l'autre et d'un terme apériodique s'amortissant avec la constante de temps $T_1 T_2 / (T_1 + T_2)$.

Les courants primaires ne dépendent que de α ; les courants secondaires sont influencés par α et $p\theta_0$. Quant au couple il est indépendant de ces deux angles.

Les relevés oscillographiques donnent des formes d'ondes ayant bien l'allure de celles indiquées par l'étude théorique. Le haut de la figure 19 donne i_{11} , i_{21} , c et v_{11} durant tout le régime transitoire. Au-dessous on a placé les débuts d'enregistrements effectués pour des valeurs différentes de α et $p\theta_0$; on retrouve bien l'influence de α sur i_{11} , celle de α et $p\theta_0$ sur i_{21} ; l'absence d'effets de ces angles sur le couple.

Pour comparer les valeurs calculées et celles mesurées, nous avons effectué les calculs dans les mêmes conditions que pour le premier enregistrement : $V_1 = 223$ V ; $\alpha = -1,6$ rd ; $p\theta_0 = 0,09$ rd.

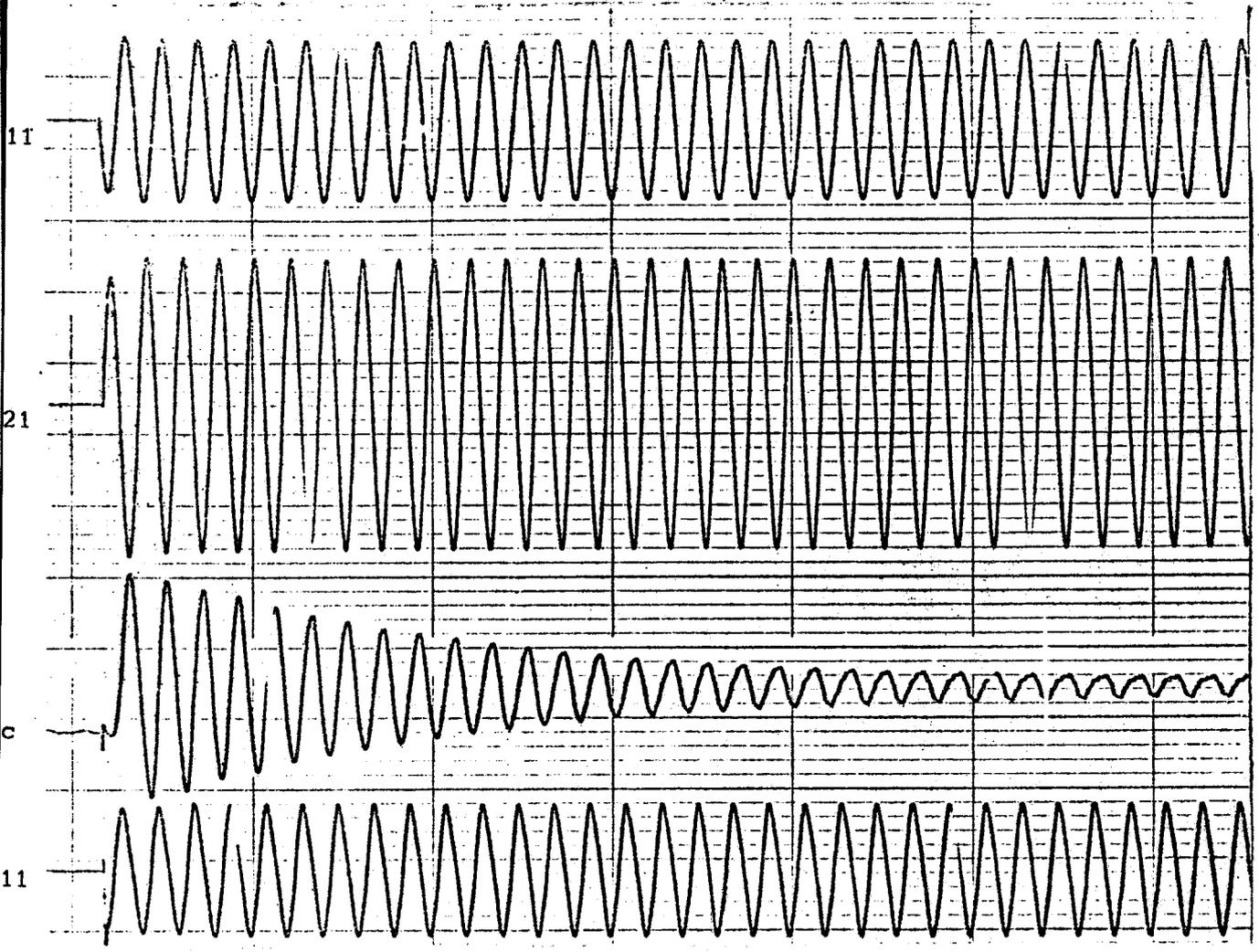
$$\text{Alors } T_1 = 0,355 \text{ s} ; T_2 = 0,0085 \text{ s} ;$$

$$I_{1mf} = 74,3 \text{ A} ; I_{2mf} = -25,4 \text{ A} ; C_f = 46,6 \text{ Nm}$$

$$\eta_1 = 1,56 \text{ rd} ; \eta_2 = 0,21 \text{ rd} ; \gamma = 1,545 \text{ rd}$$

Avec ces valeurs les expressions de i_{11} , i_{21} et c deviennent

$$i_{11} = 74,3 \left(-0,0009 e^{-\frac{t}{0,355}} + 0,31 e^{-\frac{t}{0,0085}} + \sin(\omega t - 2,83) \right)$$



a)

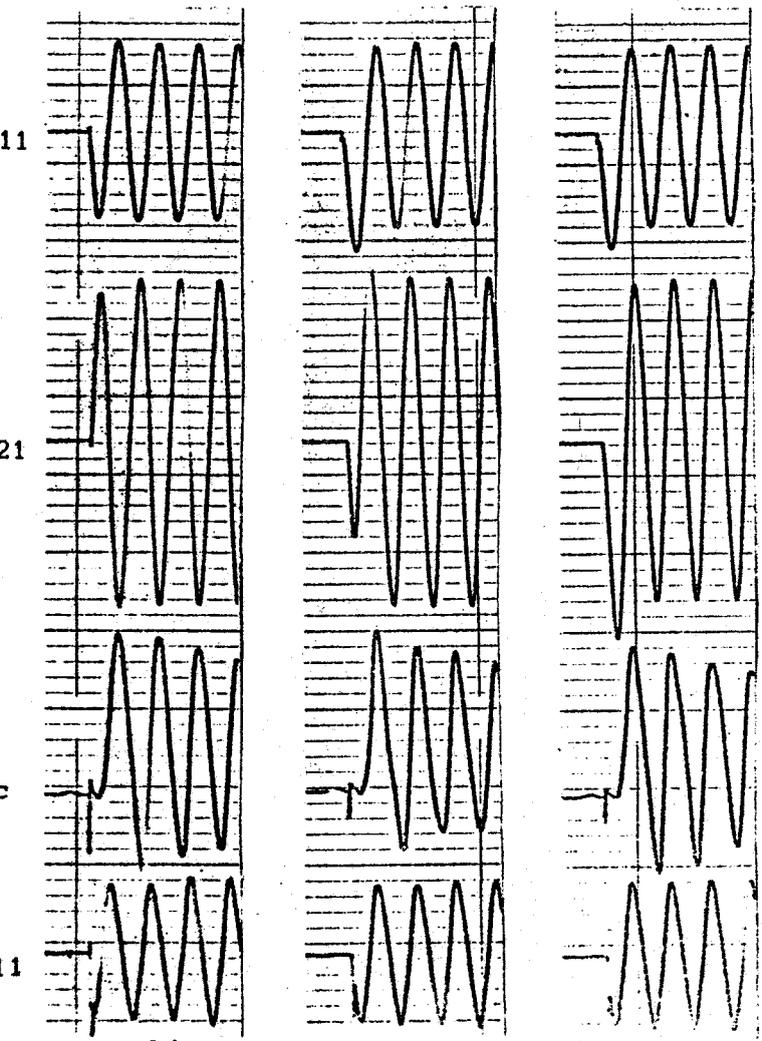


Fig 19 - Enregistrements des courants i_{11} , i_{21} , du couple c , de la tension v_{11} lors de la mise sous tension du moteur à l'arrêt.

- a) $\alpha = -1,6 \text{ rd}$
 $p\theta_0 = 0,09 \text{ rd}$
- b) $\alpha = -1,76 \text{ rd}$
 $p\theta_0 = -0,006 \text{ rd}$
- c) $\alpha = -2,75 \text{ rd}$
 $p\theta_0 = 1,55 \text{ rd}$
- d) $\alpha = -2,57 \text{ rd}$
 $p\theta_0 = 3,04 \text{ rd}$

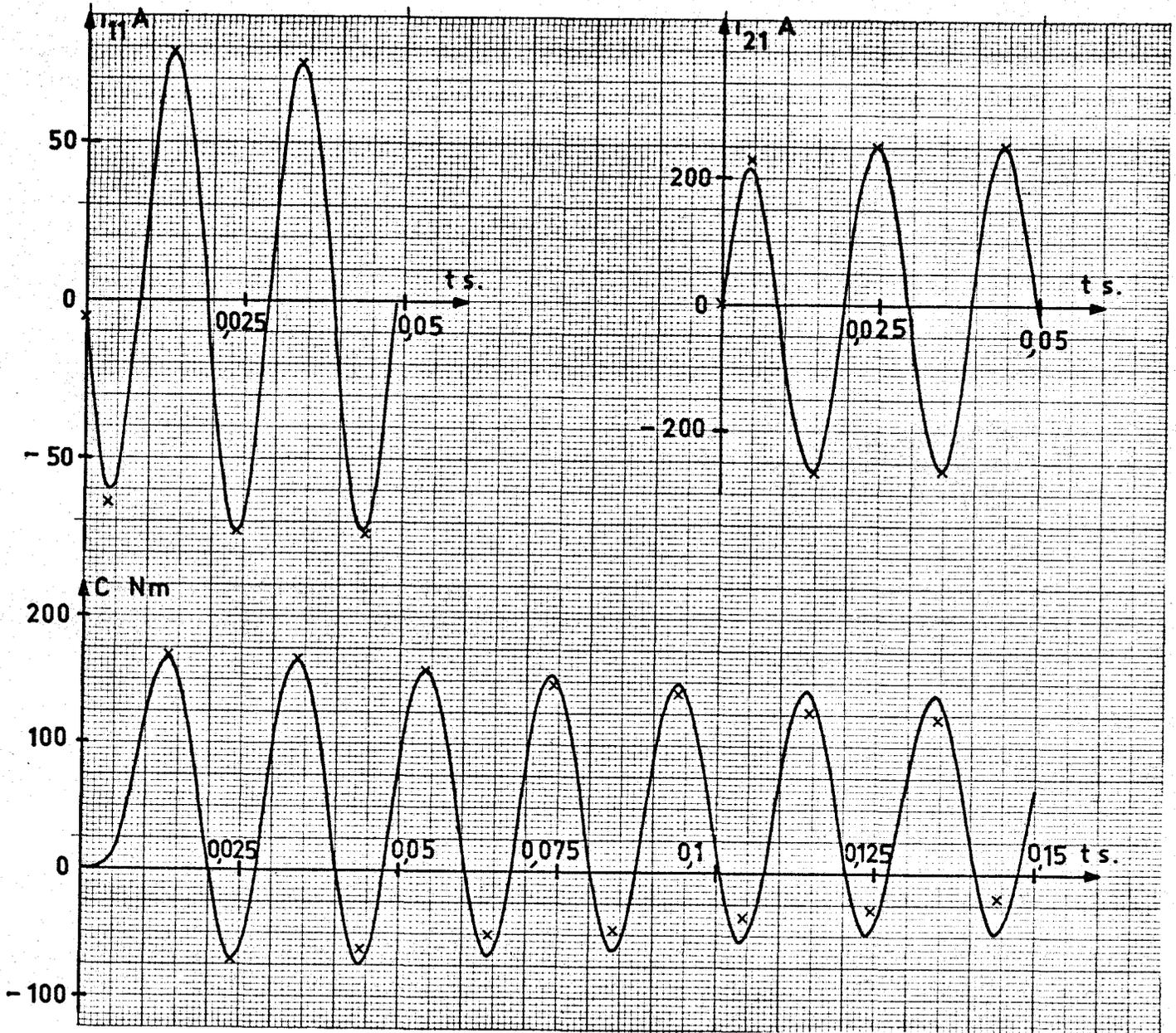


Fig 20 - Mise sous tension du moteur à l'arrêt.

Formes d'ondes des courants i_{11} , i_{21} et du couple c

calculées pour $V_1 = 223 \text{ V}$, $\alpha = -1,6 \text{ rd}$, $p\theta_0 = 0,09 \text{ rd}$.

(Les + correspondent aux extréma expérimentalement relevés)

$$i_{21} = -254 \left[0,003 e^{-\frac{t}{0,355}} + 0,24 e^{-\frac{t}{0,0085}} + \cos(\omega t + 1,82) \right]$$

$$c = 46,6 \left[1 - 2,92 \sin(\omega t + 0,35) e^{-\frac{t}{0,355}} + 2,92 \sin(\omega t - 0,35) e^{-\frac{t}{0,0085}} + e^{-\frac{t}{0,0083}} \right]$$

Sur la figure 20 on a tracé les formes d'ondes correspondant à ces expressions et reporté les extréma des oscillations relevées expérimentalement. La comparaison est très satisfaisante pour les courants ; pour les couples on voit que les termes à 50 Hz sont atténués lors de la transformation couple-torsion par rapport au terme constant.

IV.3.4 Ouverture du stator

Quand on ouvre l'interrupteur reliant le moteur à la source, les courants primaires disparaissent rapidement. Pendant le bref intervalle correspondant à leur extinction, le passage des courants statoriques est assuré par les arcs jaillissant entre les contacts de l'interrupteur. Si le fonctionnement de ce dernier est bon, le premier courant primaire passant par zéro reste ensuite constamment nul. Le stator est ensuite alimenté en monophasé : les deux autres courants primaires sont égaux et opposés, ils s'annulent en même temps.

Pendant la durée des arcs, à cause du couplage entre les deux armatures la rapide variation des courants statoriques entraîne une rapide variation des courants rotoriques.

Ce n'est qu'à partir de l'annulation des courants primaires que les courants secondaires connaissent la décroissance exponentielle avec la constante de temps τ_2 établie au paragraphe III.5.

Le relevé de la figure 21 montre bien que dès l'annulation de i_{11} , les courants i_{12} et i_{13} sont égaux et opposés et s'annulent simultanément. Il met bien en évidence la rapide variation des courants secondaires pendant la durée des arcs puis leur décroissance exponentielle.

Les oscillogrammes effectués pour plusieurs vitesses de rotation montrent que la tension de rétablissement est une fonction sinusoidale amortie de pseudo-pulsation ω' et de constante de temps τ_2 . Plus ω' est grand plus les premières oscillations ont une amplitude élevée. Pour les essais effectués à des vitesses proches du synchronisme, la tension de réapparition a une amplitude initiale voisine de celle des tensions d'alimentation avant l'ouverture de l'interrupteur (on retrouve bien le fait que si pendant la brève durée des arcs les six courants varient rapidement, le flux résultant tournant dans l'entrefer n'a pratiquement pas varié).

La figure 22 reproduit l'enregistrement de deux courants secondaires et de la tension de réapparition v_{11r} effectué pour $\omega'/\omega = 0,91$.

Les calculs effectués à partir des conditions initiales de ce dernier relevé, soit pour

$$\begin{aligned} i_{210} = -i_{220} &= 26,2 \text{ A} ; \omega' = 286 \text{ rd/s} ; p\theta_0 = -2,25 \text{ rd} ; \\ \psi/2 &= -1,54 \text{ rd} \end{aligned}$$

donnent

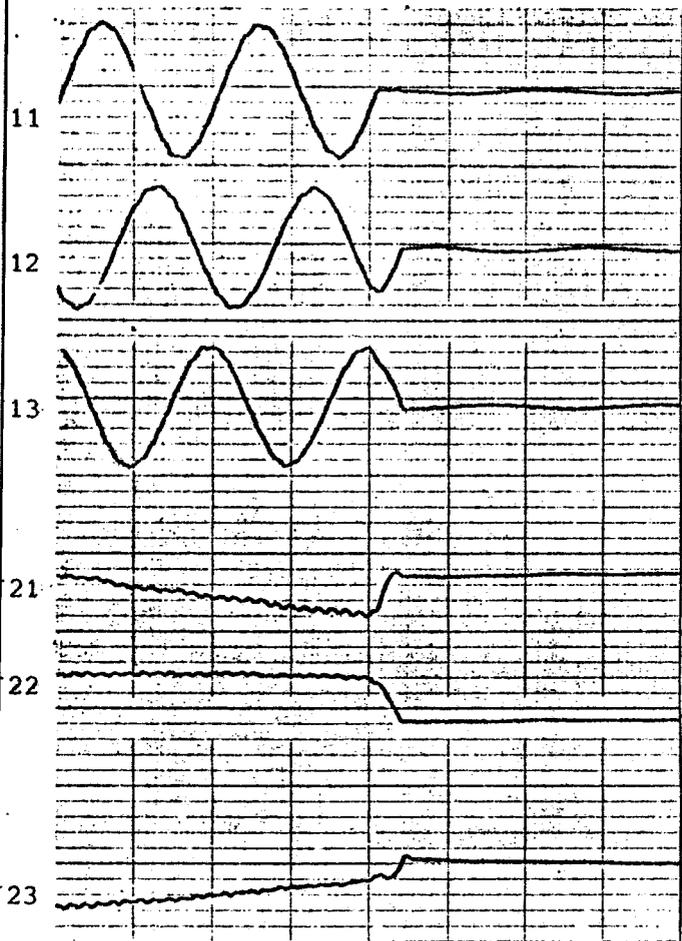


Fig 21 - Relevé des courants primaires i_{11} , i_{12} , i_{13} et secondaires i_{21} , i_{22} , i_{23} lors de l'ouverture du stator. (enregistrement à 1m/s)

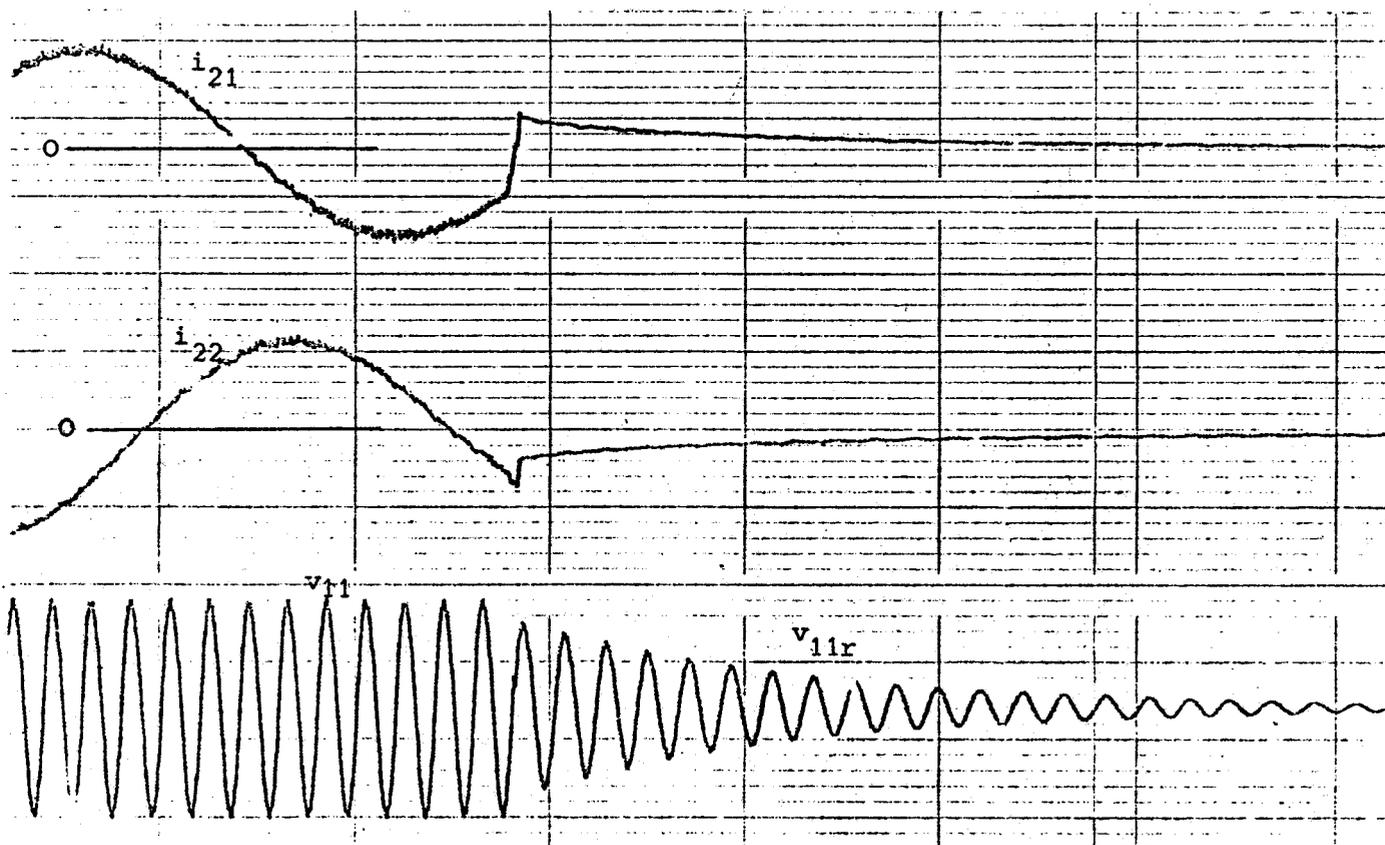


Fig 22 - Courants secondaires i_{21} et i_{22} , tension v_{11} puis v_{11r} aux bornes de la phase 1 lors de l'ouverture du stator pour $\omega' = 0,91\omega$ (vitesse d'enregistrement : 250 mm/s)

$$i_{21} = -i_{22} = 26 e^{-\frac{t}{0,13}}$$
$$v_{11r} = 289 \sin(286t+0,4) e^{-\frac{t}{0,13}}$$

Il a paru inutile de tracer les ondes correspondantes car elles sont pratiquement identiques à celles relevées expérimentalement.

IV.3.5 Opérations de démarrage sur le moteur en rotation

Le démarrage par élimination d'impédances statoriques additionnelles ayant été vu précédemment comme exemple de régime transitoire entrant dans le cas général, nous nous proposons ici d'examiner les autres procédés de démarrage par étapes :

- le démarrage par paliers de tension
- le démarrage étoile-triangle
- l'élimination de résistances rotoriques additionnelles.

IV.3.5.1 Démarrage par paliers de tension

Avant d'appliquer au stator un nouveau palier de tension à l'instant $t = 0$, on a ouvert le stator pour $t = -\Delta t$. Pour $t = 0$, les courants primaires et le couple sont nuls mais les courants rotoriques ont une valeur non nulle surtout si Δt est bref.

Les relevés oscillographiques montrent que les courants et le couple à partir de l'application du nouveau palier de tension dépendent peu du régime précédent même si l'intervalle Δt est court. Le régime transitoire ne diffère guère de celui donné par l'application de tensions à un moteur en rotation.

On observe des pointes de courants et de couples d'autant plus rapidement amorties que la vitesse est voisine du synchronisme. La première pointe de couple peut être positive ou négative et présenter une valeur comparable à celle obtenue pour le moteur arrêté.

A vitesse et tension données, les enregistrements présentent une allure très différente suivant les valeurs de $p\theta_0$ et de α à l'instant d'application de la tension. La figure 23 donne deux exemples de relevés.

Les calculs effectués en régligeant i_{210} , i_{220} et i_{230} permettent de retrouver avec une bonne précision les formes d'ondes expérimentalement observées.

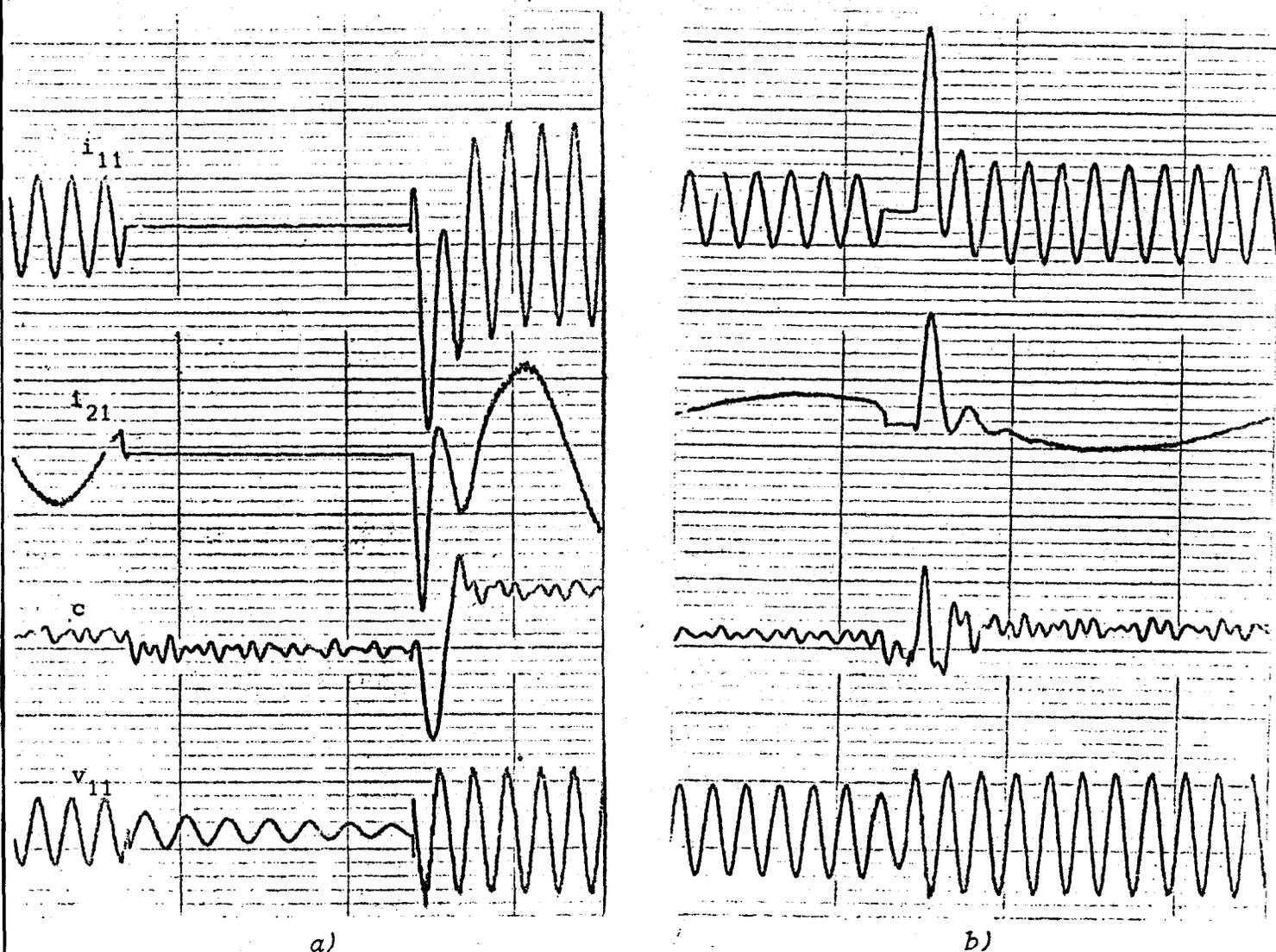


Fig 23 - Enregistrements effectués lors du passage d'un palier de tension
 a) passage de $V_1 = 126 \text{ V}$ à $V_1 = 225 \text{ V}$; $\omega'/\omega = 0,81$; $\Delta t = 0,17 \text{ s}$.
 b) passage de $V_1 = 164 \text{ V}$ à $V_1 = 225 \text{ V}$; $\omega'/\omega = 0,96$; $\Delta t = 0,02 \text{ s}$.

IV.3.5.2 Démarrage étoile-triangle

Il s'agit d'un passage d'un palier de tension à un autre $\sqrt{3}$ fois plus élevé. Les enregistrements ont tout à fait la même allure que ceux relevés dans le cas précédent : pointes importantes mais rapidement amorties, influence prépondérante des conditions caractérisant l'instant d'application des tensions composées.

IV.3.5.3 Elimination de résistances rotoriques additionnelles

Ce régime transitoire entre aussi dans le cas général puisqu'avant et après la mise en court-circuit de tout ou partie des résistances additionnelles montées au secondaire il y a des courants dans les deux armatures.

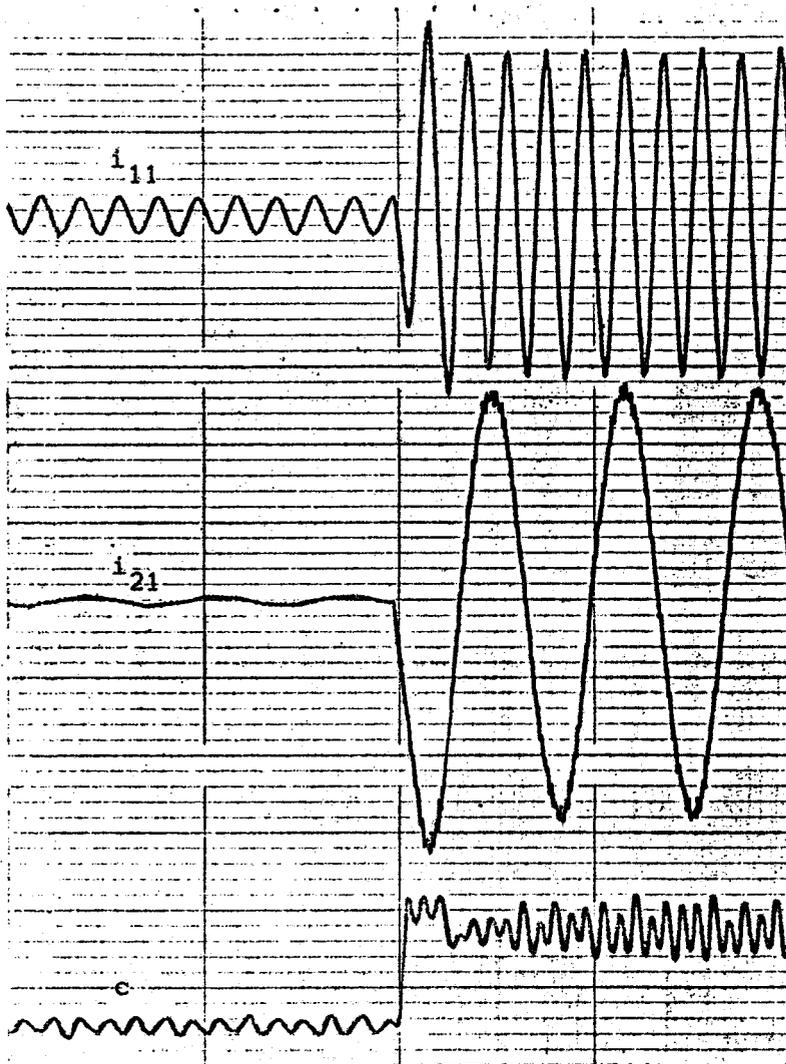


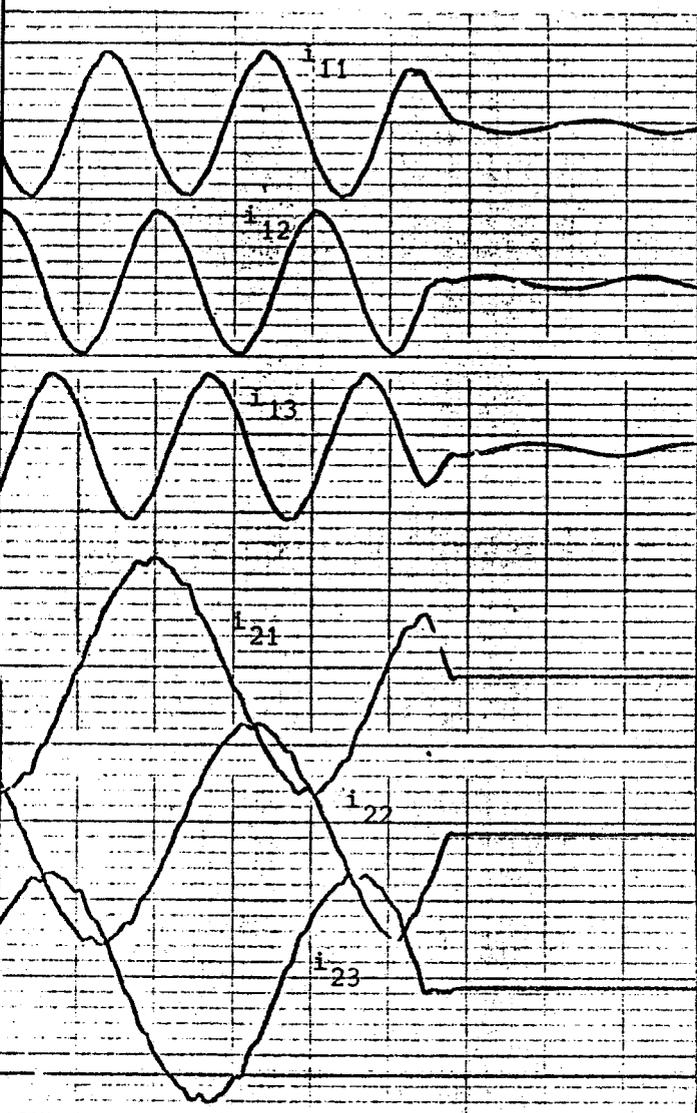
Fig 24 - Courants i_{11} et i_{21} et couple c lors de la mise en court-circuit des résistances secondaires additionnelles.
 $V_1 = 225 \text{ V}$; $\omega'/\omega = 0,71$

Mais tant le calcul que l'expérience montrent que les termes libres intervenant dans les expressions des courants et du couple s'amortissent très rapidement, ces grandeurs atteignent leur valeur forcée sans oscillations appréciables. Cela tient à ce que ce régime transitoire n'entraîne pas de variation du flux tournant.

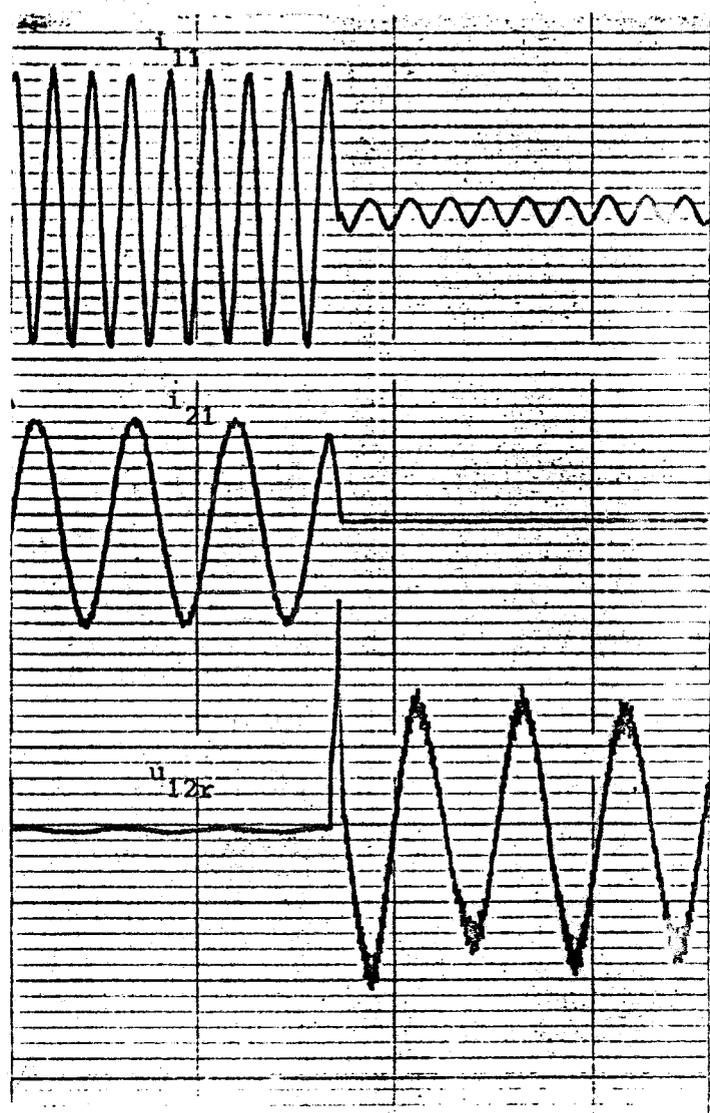
La figure 24 reproduit l'enregistrement obtenu pour une très forte variation des résistances secondaires, donc des courants et du couple ; toutefois il n'y a pas de fort dépassement par rapport au régime final.

IV.3.6 Ouverture du rotor

La disparition des courants secondaires lorsqu'on ouvre le rotor se déroule comme celle des courants primaires lorsqu'on ouvre le stator. Le courant rotorique qui passe le premier par zéro s'annule définitivement, puis les deux autres égaux et opposés s'éteignent lorsqu'ils passent par zéro.



a)



b)

Fig 25 - Ouverture du rotor.

a) Relevé des courants primaires et secondaires
($\omega'/\omega = 0,485$; enregistrement à 1 m/s)

b) Relevé de i_{11} , i_{21} et de u_{12r}
($\omega'/\omega = 0,615$; enregistrement à 0,25 m/s)

Pendant cet intervalle où les courants secondaires passent par les arcs apparus aux bornes de l'interrupteur ouvrant le rotor, à cause de la compensation des ampères-tours, les courants primaires subissent des variations rapides. Quand les courants secondaires ont disparu, le régime transitoire symétrique étudié au paragraphe III.7 débute.

La figure 25 a illustre la variation des courants primaires pendant la disparition des courants secondaires.

Tous ces enregistrements effectués (exemple fig. 25 b) montrent que, après cette disparition, les courants primaires prennent leur valeur forcée, qui correspond au courant magnétisant, sans que le terme libre

apériodique de constante de temps τ_1 qui s'y superpose ne produise d'effet notable. De même la tension de réapparition secondaire u_{12r} se confond presque instantanément avec son terme forcé, sinusoïde de pulsation $\omega - \omega'$ et d'amplitude proportionnelle à $\omega - \omega'$.

La mesure du courant primaire et de la tension secondaire entre bagues en régime établi permet de déterminer le coefficient de mutuelle-induction. A l'arrêt, $M = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{U_{12r}}{\omega I_{1f}}$.

IV.3.7 Fermeture du rotor

IV.3.7.1 Relevés effectués

Un intervalle de temps Δt après l'ouverture des trois phases rotoriques, celles-ci sont remises en court-circuit simultanément. Quand débute ce nouveau régime transitoire, le couple et les courants secondaires sont nuls mais il existe au primaire les courants magnétisants.

Toutefois, les enregistrements montrent que les courants initiaux ont une influence très faible sur ce régime. A vitesse donnée, les relevés effectués dépendent peu de Δt , mais surtout de $p\theta_0$ et de α .

Mais quelle que soit la vitesse, les termes transitoires disparaissent très rapidement et affectent peu la forme d'onde des courants et du couple. Après des dépassements réduits, ces grandeurs prennent très rapidement les valeurs correspondant au régime forcé.

La figure 26 donne un exemple de relevé effectué lors de l'ouverture puis de la fermeture rapide du rotor.

IV.3.7.2 Remarque sur les régimes transitoires dus à une modification des circuits rotoriques

Les régimes transitoires nés d'une perturbation qui a pour effet de modifier la tension appliquée aux bornes du moteur donc la valeur du flux tournant (modification de la résistance statorique, mise en court-circuit du stator, application de la tension au moteur à l'arrêt, ouverture du stator, modification de la tension en cours de démarrage ...) mettent en évidence des termes libres importants. Le régime forcé n'est pratiquement atteint qu'au bout d'un intervalle notable ; les grandeurs relevées

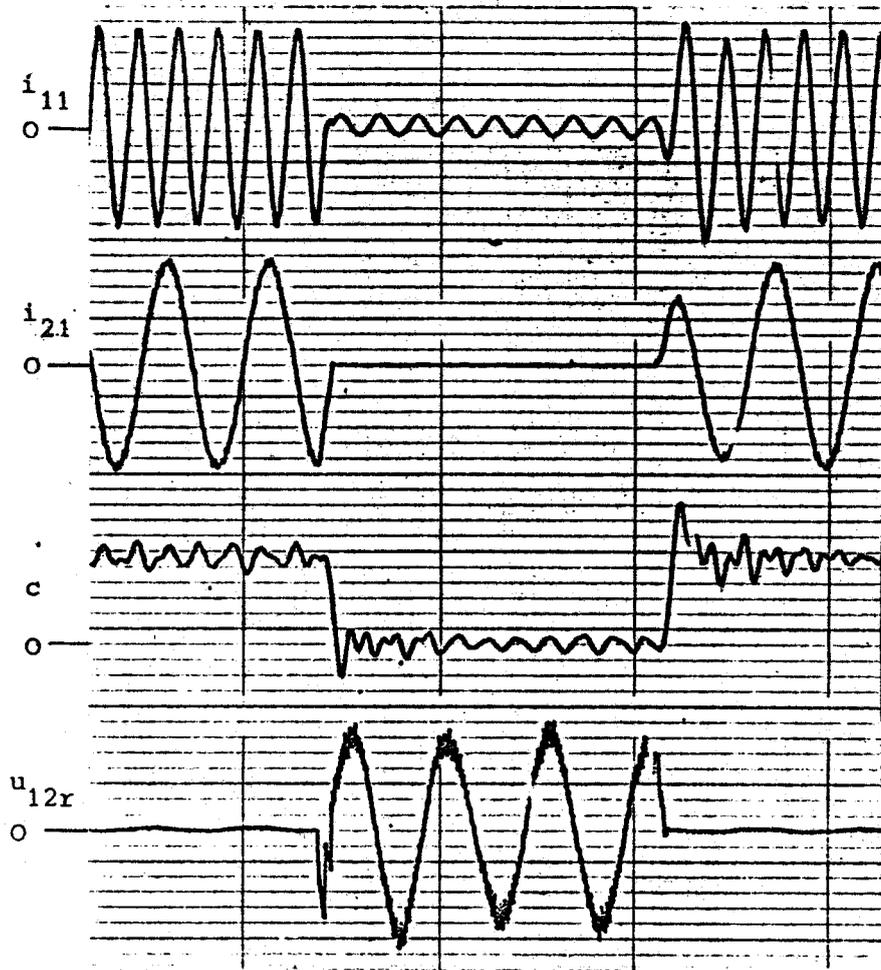


Fig 26 - Enregistrements des courants i_{11} , i_{21} , du couple c et de la tension de réapparition u_{12r} à l'ouverture puis à la fermeture du rotor.

$$\omega'/\omega = 0,615$$

présentent des pointes importantes par rapport à leur forme d'onde en régime établi. C'est que le flux tournant qui correspond à une énergie emmagasinée dans le moteur, ne peut varier qu'assez lentement.

Au contraire lorsque la perturbation vient de la modification du circuit secondaire (suppression de résistances rotoriques additionnelles, ouverture ou fermeture du rotor ...) il n'y a presque pas de régime transitoire ; courants et couple prennent très rapidement la valeur correspondant au régime forcé. Ceci tient à ce que ces perturbations ne modifient que légèrement, par la chute de tension dans la résistance et dans la réactance de fuites du bobinage primaire, la valeur du flux tournant dans l'entrefer.

Si le moteur était parfait, résistance primaire nulle, coefficient de dispersion nul, la modification des caractéristiques du circuit secondaire n'entraînerait pas de régime transitoire.

IV.3.8 Remise sous tension d'une phase ouverte

Lorsque une phase primaire est ouverte (voir étude en annexe) les courants secondaires résultent de l'addition de deux termes sinusoidaux de fréquences d'autant plus différentes que la vitesse est plus élevée. En effet si la vitesse est ω'/p , le flux tournant direct induit au rotor des courants de pulsation $\omega - \omega'$, le flux tournant inverse induit des courants de pulsation $\omega + \omega'$. Le couple a une valeur moyenne réduite et présente un terme pulsatoire.

Quand on referme la phase ouverte (exemples fig 27) les courants et le couple présentent un régime transitoire mais, quelle que soit la vitesse, les dépassements par rapport aux valeurs finales sont assez réduits.

On a effectué les mêmes relevés en ouvrant puis fermant une phase du rotor, le moteur étant en rotation. Pour la raison évoquée précédemment (§ IV.3.7.2) à la fermeture on ne relève pas d'effet notable des termes libres sur les ondes de courants et de couple. Quand la phase rotorique est ouverte le courant secondaire est sinusoidal mais les courants primaires montrent la coexistence de termes sinusoidaux de fréquences différentes.

IV.3.9 Inversion du sens du flux tournant

IV.3.9.1 Relevés effectués

Pour inverser le sens du flux tournant, il faut ouvrir le stator puis le refermer après avoir croisé deux fils d'alimentation.

L'ouverture a été examinée précédemment (voir § IV.3.4) et a montré la réduction des courants secondaires pendant la durée des arcs aux bornes de l'interrupteur monté au primaire.

A cause de cette réduction, les relevés effectués montrent une influence négligeable de l'intervalle séparant l'ouverture du stator de la nouvelle application de la tension. Même si cet intervalle est bref, courants secondaires et couple ont le temps de s'éteindre presque complètement. Le régime transitoire diffère peu de celui qu'on obtiendrait si le moteur en rotation n'avait pas été préalablement alimenté.

Les relevés dépendent de la vitesse et des angles α et $p\theta_0$ caractérisant l'instant de fermeture (fig 28). Le couple présente une forte

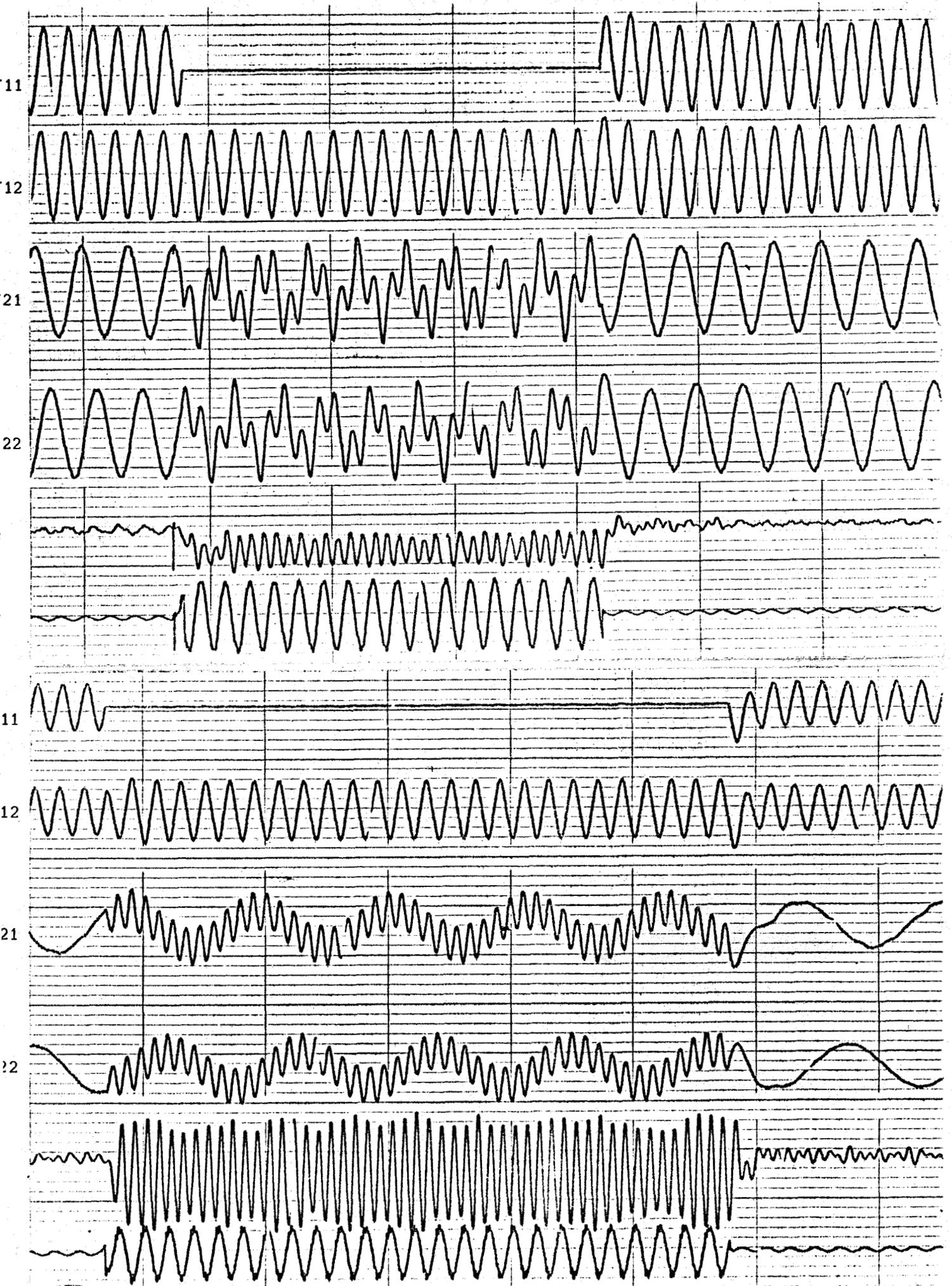


Fig 27 - Relevé de i_{11} , i_{12} , i_{21} , i_{22} , c et v . tension aux bornes de l'interrupteur, lors de l'ouverture puis de la fermeture de la première phase primaire.
(en haut $\omega'/\omega = 0,46$; en bas $\omega'/\omega = 0,81$)

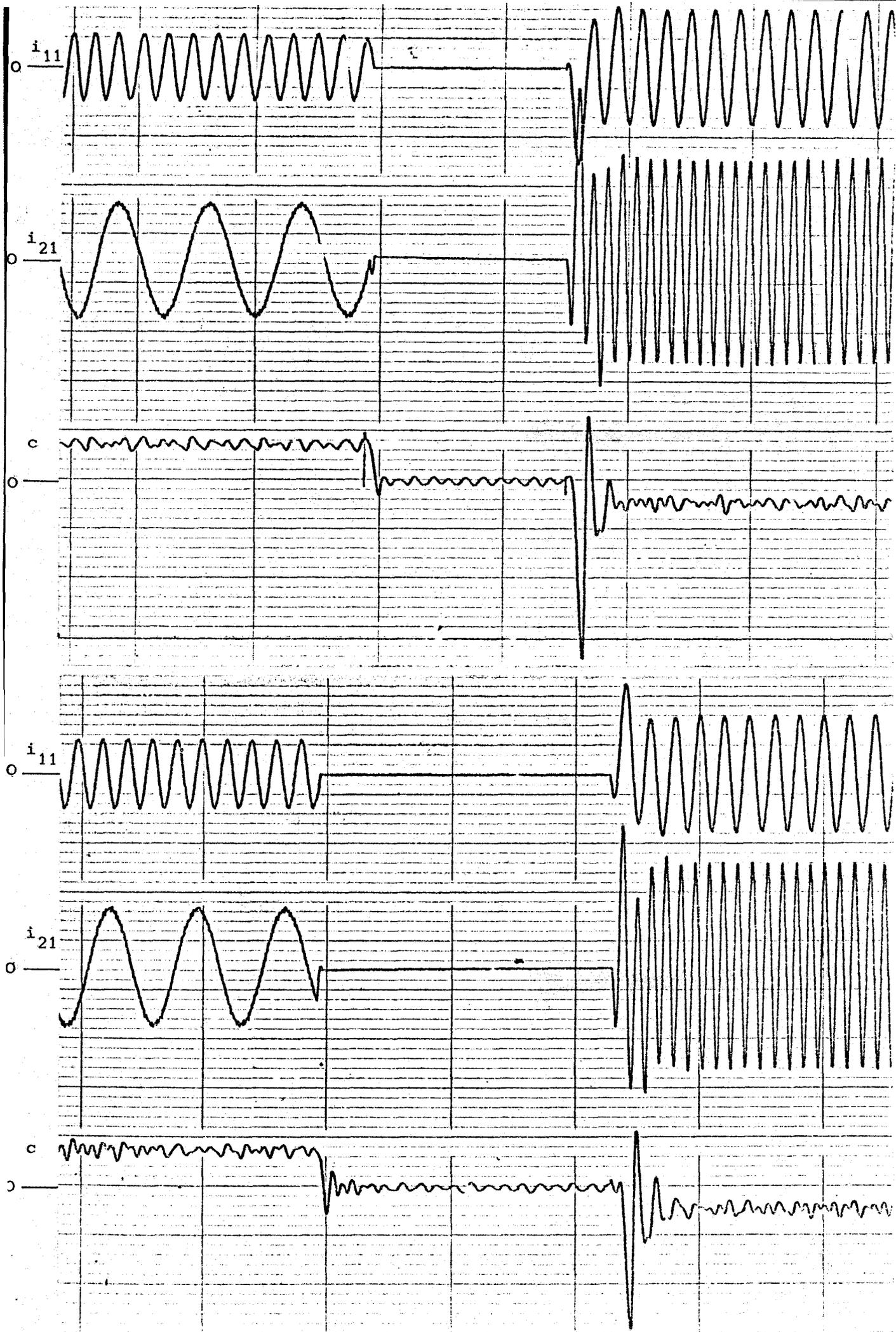


Fig 28 - Relevés oscillographiques de i_{11} , i_{21} et de c effectués lors de l'inversion du sens du flux tournant.
(vitesse avant l'inversion du flux = 1 100 T/mn)

pointe négative.

Si avant l'inversion du flux la vitesse relative du rotor était ω'/ω , après inversion elle devient $(\omega+\omega')/\omega$ par rapport au nouveau sens du flux. C'est pour ω' qu'il faut calculer les constantes de temps T_1 , T_2 et les pseudo-pulsations ω_1 , ω_2 mais c'est $\omega+\omega'$ qu'il faut considérer pour déterminer les valeurs forcées des courants et du couple.

L'étude des pointes de courants et de couple effectuée pour la mise sous tension du moteur à l'arrêt donne l'ordre des grandeurs des pointes qui risquent de se produire lors de l'inversion du sens du flux tournant.

IV.3.9.2 Remarque sur les régimes transitoires avec ouverture d'une armature

De nombreux régimes transitoires étudiés sont caractérisés par l'ouverture d'une phase ou des trois phases du stator ou du rotor, ou bien précédés par une telle ouverture.

Les relevés effectués pour de tels régimes ont mis en évidence l'influence des arcs jaillissant aux bornes de l'interrupteur. Pendant la durée des arcs les courants dans l'armature ouverte s'annulent, mais simultanément les courants dans l'autre diminuent très fortement. Après extinction des arcs les courants dans l'armature restée fermée sont fortement réduits.

Le phénomène de l'arc ne saurait donc être négligé dans les régimes transitoires où il intervient ; il a un effet bénéfique en limitant les pointes de courants et de couple. C'est lors des fermetures de circuits et non lors de leur ouverture que se produisent les contraintes instantanées les plus fortes en ce qui concerne les courants et le couple.

V - CONCLUSIONS

Malgré le nombre et l'intérêt des études antérieures consacrées au moteur asynchrone et à divers de ses régimes transitoires, il nous a semblé important d'effectuer une *étude générale* de ces régimes car la partie la plus délicate de l'examen de tous les régimes transitoires leur est commune et mérite donc d'être traitée complètement et dans toute sa généralité.

Valable pour tous les régimes transitoires laissant la constitution du moteur symétrique, cette étude suppose la constance des inductances et la répartition sinusoïdale du flux créé par chaque bobine.

Nous avons d'abord établi, à partir de l'équation des tensions et grâce à un changement de variables, les *expressions générales des courants et du couple*.

On peut alors déterminer les deux constantes de temps T_1 , T_2 et les deux pseudo-pulsations ω_1 , ω_2 qui interviennent dans les régimes libres. Nous avons examiné comment varient ces quatre grandeurs en fonction de la vitesse de rotation et des caractéristiques de construction du moteur. Nous avons également donné les relations permettant de déterminer, pour chaque régime transitoire particulier, les constantes d'intégration qui interviennent dans les expressions du régime libre des courants et du couple.

L'application des expressions générales au régime forcé donne les courants et le couple correspondants. Nous avons indiqué les essais simples qui permettent de déterminer T_1 , T_2 , ω_1 et ω_2 aux diverses vitesses.

Nous avons pu alors procéder à l'*examen des divers régimes transitoires* possibles : application des tensions d'alimentation au moteur à l'arrêt ; modification des tensions appliquées au moteur en rotation ; changement de la valeur des résistances du circuit primaire ou secondaire ; ouverture ou fermeture du stator ou du rotor ; inversion du sens du flux tournant ...

La rapidité avec laquelle on obtient les courants et le couple pour tous ces régimes transitoires et l'aspect presque répétitif de l'examen successif de ces régimes soulignent l'intérêt d'une étude générale préalable.

Seuls n'entrent pas dans le cadre de cette étude les régimes transitoires rendant dissymétrique l'une ou l'autre des armatures. Nous avons indiqué, en annexe, la façon d'établir alors les expressions des courants et du couple.

Les *vérifications expérimentales* montrent la simplicité et la précision de la méthode proposée pour la détermination de T_1 , T_2 , ω_1 et ω_2 .

Les relevés oscillographiques des courants pour divers régimes transitoires correspondent très bien aux expressions calculées.

Les relevés du couple donnent des formes d'ondes ayant bien l'allure calculée, mais on trouve des écarts parfois importants entre les valeurs calculées et celles mesurées. Cela tient à la difficulté d'observer un couple fonction variable du temps. En réalité on enregistre non le couple mais la torsion qu'il donne à un arbre. Pour que la transformation couple-torsion soit valable en régime dynamique, il faut que l'arbre de torsion soit court et de fort diamètre ; ceci conduit à adopter un compromis entre la linéarité et la sensibilité. Cette difficulté a toutefois l'avantage de bien mettre en évidence le fait que les effets des oscillations du couple en régime transitoire dépendent beaucoup des caractéristiques mécaniques de l'ensemble entraîné par le moteur.

L'observation des relevés effectués lors de l'ouverture du stator ou du rotor met en évidence l'influence des arcs apparaissant aux bornes de l'interrupteur. Pendant la durée des arcs les courants varient très rapidement tant dans l'armature restant fermée que dans celle où les courants s'annulent. Après la disparition des courants dans l'armature ouverte, les courants dans l'enroulement restant fermé prennent leur valeur forcée finale sans présenter d'écart de forte amplitude par rapport à celle-ci.

Les relations établies et les essais effectués montrent *l'importance de l'instant où débute un régime transitoire*. Cet instant est caractérisé par deux angles α et $p\theta_0$ donnant l'un la phase instantanée des tensions d'alimentation, l'autre la position angulaire initiale des bobines du rotor par rapport à celles du stator.

Pour chaque régime transitoire et chaque type de moteur, la connaissance des contraintes maximales, au point de vue courants et couple, nécessite la détermination systématique, à l'aide des relations que nous avons établies, des extréma pour tout le domaine des valeurs de α et $p\theta_0$.

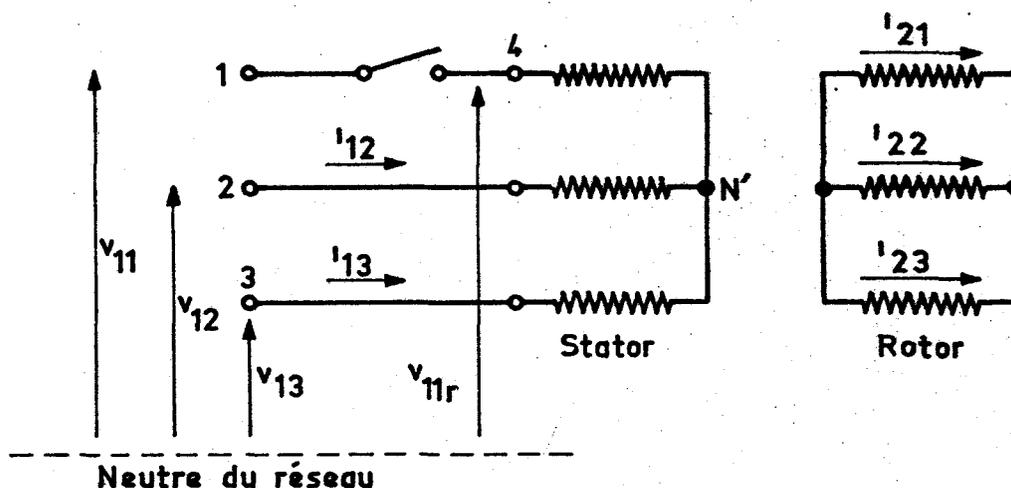
Toutefois on peut remarquer que les contraintes les plus élevées apparaissent lors des régimes transitoires qui correspondent à l'établissement du flux tournant : inversion du flux, application de la pleine tension au moteur à l'arrêt. Pour ces deux régimes les extrema de courants et de couple sont voisins. Or l'étude de la mise sous tension du moteur arrêté est plus simple et nous lui avons consacré antérieurement un mémoire où les pointes possibles de couple étaient évaluées en fonction des caractéristiques de construction du moteur. Cette étude quoique limitée à un seul régime transitoire se révèle donc suffisante pour la détermination des contraintes maximales servant au calcul mécanique de la machine et de la charge qu'elle entraîne.

APPENDICE :

REGIME TRANSITOIRE SUIVANT L'OUVERTURE D'UNE PHASE STATORIQUE

Le moteur étant alimenté par le système triphasé de tensions simples v_{11} , v_{12} , v_{13} (figure ci-dessous) on ouvre une phase, la première par exemple.

Nous nous proposons simplement ici de montrer comment étudier les régimes transitoires du courant primaire, des courants secondaires, du couple moteur et de la tension apparaissant aux bornes de l'interrupteur.



L'interrupteur ouvert peut simuler un accident dans l'alimentation du moteur ou un intervalle du fonctionnement d'un ensemble gradateur - moteur asynchrone durant lequel la liaison source-machine d'une phase est ouverte.

Le régime transitoire examiné débute au moment où le courant de la première phase s'annule, qu'il y ait eu ou non un arc au préalable ⁽¹⁾.

Mise en équation

Il convient, comme le montre la figure, de distinguer les points neutres N et N' du réseau et du stator car ils ne sont plus ici équipotentiels.

(1) L'étude de la fermeture non simultanée des trois pôles de l'interrupteur alimentant un moteur entre dans cette étude plus générale. Il suffit d'annuler la valeur initiale du courant dans les deux phases alimentées en premier lieu.

Désignons par v_{11} , v_{12} , v_{13} les tensions simples de la source et par v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_N et $v_{N'}$ les potentiels des points 1, 2, 3, 4, N et N' par rapport à une origine quelconque mais commune.

La tension aux bornes de la phase 2 du stator s'écrit

$$v_2 - v_{N'} = v_{12} - (v_{N'} - v_N) = R_1 i_{12} + L_1 \frac{di_{12}}{dt} + M_1 \frac{di_{13}}{dt} + \frac{d}{dt} (m_{21} i_{21} + m_{22} i_{22} + m_{23} i_{23})$$

Puisque $i_{13} = -i_{12}$, on peut introduire l'inductance cyclique L_1 égale à $L_1 - M_1$; la relation précédente devient

$$v_{12} - (v_{N'} - v_N) = R_1 i_{12} + L_1 \frac{di_{12}}{dt} + \frac{d}{dt} (m_{21} i_{21} + m_{22} i_{22} + m_{23} i_{23}) \quad (1)$$

De même la tension aux bornes de la phase 3 s'écrit

$$v_3 - v_{N'} = v_{13} - (v_{N'} - v_N) = -R_1 i_{12} - L_1 \frac{di_{12}}{dt} + \frac{d}{dt} (m_{31} i_{21} + m_{32} i_{22} + m_{33} i_{23}) \quad (2)$$

La somme, membre à membre, des relations (1) et (2) donne

$$v_{12} + v_{13} - 2(v_{N'} - v_N) = \frac{d}{dt} \left[(m_{21} + m_{31}) i_{21} + (m_{22} + m_{32}) i_{22} + (m_{23} + m_{33}) i_{23} \right]$$

ou, puisque $v_{11} + v_{12} + v_{13} = 0$,

$$m_{11} + m_{21} + m_{31} = 0$$

$$m_{12} + m_{22} + m_{32} = 0$$

$$m_{13} + m_{23} + m_{33} = 0$$

$$v_{11} + 2(v_{N'} - v_N) = \frac{d}{dt} (m_{11} i_{21} + m_{12} i_{22} + m_{13} i_{23}) \quad (3)$$

Puisque i_{11} est nul, que i_{12} égale $-i_{13}$ et que les phases 2 et 3 présentent la même mutuelle-inductance par rapport à la phase 1 du stator, la tension apparaissant aux bornes de celle-ci est due aux seules tensions induites par les courants secondaires

$$v_4 - v_{N'} = \frac{d}{dt} (m_{11} i_{21} + m_{12} i_{22} + m_{13} i_{23}) \quad (4)$$

La tension aux bornes de l'interrupteur ouvert est $v_{11} - v_{11r}$, en désignant par v_{11r} la tension de réapparition $v_4 - v_{N'}$.

$$v_{11} - v_{11r} = v_{11} + 2(v_{N'} - v_N) - 2(v_{N'} - v_N) - (v_4 - v_{N'}) - (v_{N'} - v_N)$$

Or les relations (3) et (4) montrent que $v_{11} + 2(v_{N'} - v_N)$ égale $v_4 - v_{N'}$. La tension $v_{11} - v_{11r}$ a donc pour expression

$$v_{11} - v_{11r} = -3(v_{N'} - v_N) \quad (5)$$

Donc, si l'on connaît les courants rotoriques i_{21} , i_{22} et i_{23} , l'équation (3) permet le calcul de $v_{N'} - v_N$. La relation (5) donne alors l'expression de la tension $v_{11} - v_{11r}$ aux bornes de l'interrupteur ouvert.

Pour la recherche des quatre courants inconnus i_{12} , i_{21} , i_{22} et i_{23} , on dispose de quatre équations : l'équation des tensions primaires obtenue par la différence des relations (1) et (2), les équations des trois phases secondaires

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{32} = v_{12} - v_{13} = 2R_1 i_{12} + 2L_1 \frac{di_{12}}{dt} \\ \quad + \frac{d}{dt} \left[(m_{21} - m_{31}) i_{21} + (m_{22} - m_{32}) i_{22} + (m_{23} - m_{33}) i_{23} \right] \quad (6) \\ 0 = R_2 i_{21} + L_2 \frac{di_{21}}{dt} + \frac{d}{dt} \left[(m_{21} - m_{31}) i_{12} \right] \quad (7) \\ 0 = R_2 i_{22} + L_2 \frac{di_{22}}{dt} + \frac{d}{dt} \left[(m_{22} - m_{32}) i_{12} \right] \quad (8) \\ 0 = R_2 i_{23} + L_2 \frac{di_{23}}{dt} + \frac{d}{dt} \left[(m_{23} - m_{33}) i_{12} \right] \quad (9) \end{array} \right.$$

Résolution des équations des tensions statorique et rotoriques

Après avoir exprimé les coefficients de mutuelle-inductance m_{sr} existant entre les phases du stator et du rotor et les avoir mis sous forme d'exponentielles, les équations (6), (7), (8) et (9) deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{32} = 2R_1 i_{12} + 2L_1 \frac{di_{12}}{dt} - \frac{\sqrt{3}}{2} j M \frac{d}{dt} \left[(i_{21} + a i_{22} + a^2 i_{23}) e^{jp\theta} \right. \\ \quad \left. - (i_{21} + a^2 i_{22} + a i_{23}) e^{-jp\theta} \right] \quad (10) \\ 0 = R_2 i_{21} + L_2 \frac{di_{21}}{dt} - \frac{\sqrt{3}}{2} j M \frac{d}{dt} \left[i_{12} (e^{jp\theta} - e^{-jp\theta}) \right] \quad (11) \\ 0 = R_2 i_{22} + L_2 \frac{di_{22}}{dt} - \frac{\sqrt{3}}{2} j M \frac{d}{dt} \left[i_{12} (a e^{jp\theta} - a^2 e^{-jp\theta}) \right] \quad (12) \\ 0 = R_2 i_{23} + L_2 \frac{di_{23}}{dt} - \frac{\sqrt{3}}{2} j M \frac{d}{dt} \left[i_{12} (a^2 e^{jp\theta} - a e^{-jp\theta}) \right] \quad (13) \end{array} \right.$$

Changement de variables

On substitue aux trois courants secondaires leurs deux composantes i_2' et i_2'' ainsi définies

$$\left. \begin{aligned} i_2' &= (i_{21} + a i_{22} + a^2 i_{23}) e^{jp\theta} \\ i_2'' &= (i_{21} + a^2 i_{22} + a i_{23}) e^{-jp\theta} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

L'équation (10) devient

$$u_{32} = 2 R_1 i_{12} + 2 L_1 \frac{di_{12}}{dt} - \frac{\sqrt{3}}{2} j M \frac{d}{dt} (i_2' - i_2'') \quad (15)$$

Multiplions les relations (11), (12) et (13) respectivement par $e^{jp\theta}$, $a e^{jp\theta}$ et $a^2 e^{jp\theta}$ et faisons la somme des trois nouvelles égalités ainsi obtenues. On obtient

$$0 = (R_2 - j L_2 \omega') i_2' + L_2 \frac{di_2'}{dt} - \frac{3\sqrt{3}}{2} j M (j \omega' i_{12} - \frac{di_{12}}{dt}) \quad (16)$$

$$\text{avec } \omega' = \frac{d}{dt} p\theta$$

De même, en multipliant (11), (12) et (13) respectivement par $e^{-jp\theta}$, $a^2 e^{-jp\theta}$, $a e^{-jp\theta}$ puis en additionnant, il vient

$$0 = (R_2 + j L_2 \omega') i_2'' + L_2 \frac{di_2''}{dt} - \frac{3\sqrt{3}}{2} j M (j \omega' i_{12} + \frac{di_{12}}{dt}) \quad (17)$$

Passage à l'écriture symbolique

On applique la transformation de Laplace-Carson aux équations (15), (16) et (17).

La tension u_{32} étant de la forme $-U_m \cos(\omega t + \alpha)$, les trois relations s'écrivent, en désignant par P l'opérateur de la transformation et en représentant par des majuscules les transformées des grandeurs électriques ou de leurs composantes alors que leurs valeurs instantanées sont représentées par des minuscules,

$$U_{32} = \frac{U_m}{P^2 + \omega^2} (\omega P \sin \alpha - P^2 \cos \alpha)$$

$$= 2(R_1 + PL_1)I_{12} - 2L_1 P i_{120} - \frac{\sqrt{3}}{2} j M P (I_2' - I_2'') + \frac{\sqrt{3}}{2} j M P (i_{20}' - i_{20}'') \quad (18)$$

$$0 = (R_2 - jL_2 \omega' + PL_2)I_2' - PL_2 i_{20}' - \frac{3\sqrt{3}}{2} j M (j\omega' - P)I_{12} - \frac{3\sqrt{3}}{2} j M P i_{120} \quad (19)$$

$$0 = (R_2 + jL_2 \omega' + PL_2)I_2'' - PL_2 i_{20}'' - \frac{3\sqrt{3}}{2} j M (j\omega' + P)I_{12} + \frac{3\sqrt{3}}{2} j M P i_{120} \quad (20)$$

Le problème est donc ramené à la résolution de trois relations algébriques, les deux dernières étant d'ailleurs conjuguées, dont la solution donne les transformées I_{12}' , I_2' et I_2'' .

Résultats de la résolution

La résolution du système (18), (19) et (20) conduit aux résultats suivants :

$$I_{12} = P \left\{ \begin{aligned} & \frac{U_m}{2R_1} \frac{(\tau_2^2 P^2 + 2\tau_2 P + 1 + \tau_2^2 \omega'^2) (\omega \sin \alpha - P \cos \alpha)}{(P^2 + \omega^2) A_1} \\ & - \frac{\sqrt{3} j M}{4R_1} \frac{\tau_2^{P+1} + \tau_2^2 \omega'^2}{A_1} (i_{20}' - i_{20}'') \\ & - \frac{\sqrt{3} M \tau_2^2 \omega'}{4R_1} \frac{P}{A_1} (i_{20}' + i_{20}'') + \tau_1 \frac{\sigma \tau_2^2 P^2 + \tau_2 (1 + \sigma) P + 1 + \tau_2^2 \omega'^2}{A_1} i_{120} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$I_2' = P \left\{ \begin{aligned} & \frac{3\sqrt{3} j M U_m}{4R_1 R_2} \frac{(\tau_2^{P+1} + j\tau_2 \omega') (\omega \sin \alpha - P \cos \alpha) (j\omega' - P)}{(P^2 + \omega^2) A_1} \\ & + \frac{9M^2}{8R_1 R_2} \frac{(j\omega' - P) (\tau_2^{P+1} + \tau_2^2 \omega'^2)}{(\tau_2^{P+1} - j\tau_2 \omega') A_1} (i_{20}' - i_{20}'') \\ & - \frac{9M^2 \tau_2^2 \omega' j}{8R_1 R_2} \frac{(j\omega' - P) P}{(\tau_2^{P+1} - j\tau_2 \omega') A_1} (i_{20}' + i_{20}'') + \frac{\tau_2}{\tau_2^{P+1} - j\tau_2 \omega'} i_{20}' \\ & + \frac{3\sqrt{3} j M}{2R_2} \frac{\tau_2 (1 + j\sigma \tau_1 \omega') P + (1 + j\tau_1 \omega') (1 + j\tau_2 \omega')}{A_1} i_{120} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

La transformée I_2'' est conjuguée de I_2' .

Dans ces relations τ_1 , τ_2 et σ sont encore définis par

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1} ; \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2} ; \quad \sigma = 1 - \frac{\frac{9}{4} M^2}{L_1 L_2} .$$

A_1 représente une expression du troisième degré en P ainsi définie

$$A_1 = \sigma \tau_1 \tau_2^2 (P^3 + \frac{\tau_1 + \tau_2 + \sigma \tau_1}{\sigma \tau_1 \tau_2} P^2 + \frac{\tau_1 + 2\tau_2 + \sigma \tau_1 \tau_2^2 \omega'^2}{\sigma \tau_1 \tau_2^2} P + \frac{1 + \tau_2^2 \omega'^2}{\sigma \tau_1 \tau_2^2}) \quad (23)$$

A_1 est donc de la forme

$$A_1 = \sigma \tau_1 \tau_2^2 (P - P_1) (P - P_2) (P - P_3) ,$$

en désignant par P_1 , P_2 , P_3 les trois racines de l'équation $A_1 = 0$.

Il est alors possible de repasser aux grandeurs instantanées i_{12} , i_1' et i_2'' .

Différents cas sont à considérer suivant la valeur numérique des coefficients de l'équation $A_1 = 0$. Ces coefficients étant réels trois cas sont possibles :

1er cas : les trois racines P_1 , P_2 et P_3 sont réelles et distinctes.

Aux trois racines correspondent dans les expressions des grandeurs instantanées trois constantes de temps T_1 , T_2 et T_3 telles que

$$T_1 = -\frac{1}{P_1} ; \quad T_2 = -\frac{1}{P_2} ; \quad T_3 = -\frac{1}{P_3} .$$

2ème cas : P_1 , P_2 et P_3 sont réelles mais une racine est double.

Par exemple P_2 et P_3 . Dans les originaux des courants on trouvera des exponentielles amorties avec les constantes de temps

$$T_1 = -\frac{1}{P_1} \quad \text{ou} \quad T_2 = -\frac{1}{P_2} .$$

3ème cas : une racine réelle, deux racines complexes conjuguées.

Une racine P_1 par exemple est réelle, les deux autres P_2 et P_3 sont de la forme

$$\begin{matrix} P_2 \\ P_3 \end{matrix} = a_1 \pm j b_1 .$$

A ces racines correspondent deux constantes de temps $T_1 = -\frac{1}{P_1}$ et $T_2 = -\frac{1}{a_1}$ et une pseudo-pulsation b_1 .

Retour aux valeurs instantanées

L'inverse de la transformation de Laplace-Carson permet d'obtenir la valeur instantanée du courant primaire i_{12} et des composantes i_2' et i_2'' des courants secondaires.

Il n'est pas possible de reproduire dans le cadre de cette annexe les calculs très longs nécessités par cette transformation inverse dans les trois cas possibles, ou même les résultats particulièrement lourds qu'on obtient.

Retour aux courants secondaires réels

Les relations (14) qui définissaient les courants fictifs i_2' et i_2'' en fonction des courants réels i_{21} , i_{22} et i_{23} peuvent s'écrire, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} i_2' e^{-jp\theta} \\ i_2'' e^{jp\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{21} \\ i_{22} \\ i_{23} \end{pmatrix} \quad (14')$$

D'où la transformation inverse

$$\begin{pmatrix} i_{21} \\ i_{22} \\ i_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_2' e^{-jp\theta} \\ i_2'' e^{jp\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui développée et compte tenu du fait que i_2' et i_2'' sont des quantités conjuguées donne

$$\left. \begin{aligned} i_{21} &= \frac{1}{3} (i_2' e^{-jp\theta} + i_2'' e^{jp\theta}) = \frac{2}{3} R(i_2' e^{-jp\theta}) \\ i_{22} &= \frac{2}{3} R\left(i_2' e^{-j(p\theta + \frac{2\pi}{3})}\right) \\ i_{23} &= \frac{2}{3} R\left(i_2' e^{-j(p\theta + \frac{4\pi}{3})}\right) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Remarques

Expression du couple moteur

L'expression générale du couple, établie au paragraphe II.1.5 pour un moteur triphasé au primaire et au secondaire, se simplifie ici puisque $i_{11} = 0$ et que $i_{13} = -i_{12}$ et devient

$$c = -pM_{12} \left[(i_{22} - i_{23}) \sin p\theta + (i_{23} - i_{21}) \sin \left(p\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + (i_{21} - i_{22}) \sin \left(p\theta + \frac{4\pi}{3} \right) \right]$$

Le changement de variables donné par les relations (14) permet de simplifier cette expression et d'obtenir

$$c = \sqrt{3} p M_{12} R(i'_2) \quad (25)$$

Tension entre points neutres et aux bornes de l'interrupteur

La relation (3) à laquelle on applique le même changement de variables donne

$$v_{N'} - v_N = \frac{1}{2} \left[M \frac{d}{dt} R(i'_2) - v_{11} \right] \quad (26)$$

D'où la tension aux bornes de l'interrupteur

$$v_{11} - v_{11r} = - \frac{3}{2} \left[M \frac{d}{dt} R(i'_2) - v_{11} \right] \quad (27)$$

Constantes de temps et pseudo-pulsations à l'arrêt

Dans le cas général où la vitesse de rotation ω' du moteur n'est pas nulle, il est difficile d'obtenir sous forme littérale la valeur des racines P_1, P_2, P_3 qui annulent le polynôme (23) en P .

Dans le cas particulier où la vitesse ω' est nulle, l'expression de A_1 se simplifie et devient

$$A_1 = \sigma \tau_1 \tau_2^2 P^3 + \tau_2 (\tau_1 + \tau_2 + \sigma \tau_1) P^2 + (\tau_1 + 2\tau_2) P + 1$$

Les racines sont alors

$$P_1 = - \frac{1}{\tau_2}$$

$$P_2 = \frac{1}{2\sigma \tau_1 \tau_2} \left(-(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\sigma \tau_1 \tau_2} \right)$$

$$P_3 = \frac{1}{2\sigma \tau_1 \tau_2} \left(-(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\sigma \tau_1 \tau_2} \right)$$

Dans les expressions donnant le régime libre des courants on trouve les constantes de temps

$$T_1 = \tau_2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \left(\tau_1 + \tau_2 \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\sigma\tau_1\tau_2} \right)$$

Malgré sa simplicité apparente, ce régime transitoire particulier conduit à des expressions très lourdes tant pour les courants que pour le couple et la tension aux bornes de l'interrupteur.

En régime permanent à vitesse nulle, les courants primaires et secondaires sont de pulsation ω ; le couple présente en plus du terme moyen un terme sinusoïdal de pulsation 2ω (1).

(1) Nous avons pour l'étude du couple de démarrage en asynchrone du moteur synchrone (mémoire en cours de publication) examiné le régime transitoire à l'arrêt de la machine asynchrone à primaire triphasé, à secondaire monophasé ou diphasé déséquilibré.

B I B L I O G R A P H I E

- {1} J.C. MICHALOWICZ "Origin of the Electric Motor" - *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* - 1948 - Volume 67 - Partie II - p 1288-1292
- {2} A. MAUDUIT "Machines Electriques" H. Dunod et E. Pinat - Editeurs - 1910
- {3} J. FALLOU "Leçons d'Electrotechnique générale" - Gauthier Villars - Editeurs - 1939
- {4} A. BLONDEL "Détermination graphique des inductances directe et transverse d'un alternateur" *Comptes Rendus - Académie des Sciences - Paris France - Volume 166 - 1918 - p 323-329*
- {5} R.E. DOHERTY et C.A. NICKLE "Synchronous machines" - I : An extension of Blondel's two-reactions theory" - *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* - 1926 - Volume 45 - p 912-947
- {6} R.H. PARK "Two-reaction theory of synchronous machines ; Generalized method of analysis". *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* - 1929 - Volume 48 - p 716-730
- {7} R.H. PARK "Definition of an ideal synchronous machine and formula for the armature flux linkages". *General electric review - Juin 1928 - Volume 31 - p 332-334*
- {8} E.M. SABBAGH "Application of the two-reaction theory to electric motors" *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* - Volume 70 - Partie II - 1951 - p 1748-1757
- {9} YU H. KU "Transient analysis of alternating current machinery". *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* - Volume 48 - Juin 1929 p 707-715

- {10} YU H. KU "Rotating-Field theory and general analysis of synchronous and induction machines" - *Proceedings - Institution of Electrical Engineers - Londres - Angleterre - Monographie - Numéro 54 - Volume 99 - Partie IV - 1952 - p 410-427*
- {11} D.W.C. SHEN "Generalized coordinates in substitutive networks" - *The Philosophical Magazine - Londres - Angleterre - Volume 39 - 1948 - p 890-901*
- {12} G. KRON "Generalized theory of electrical machinery" *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers - 1930 - Partie II - Tome 49 - p 666-685*
- {13} G. KRON "The application of tensors to the analysis of rotating electrical machinery" - *General Electric Review - 1935 - Volume 36 - p 181 et suivantes.*
- {14} G. KRON "Equivalent circuit of the primitive rotating machine. Modifications of basic circuit adapt it to the analysis of many types of machines" *General Electric Review - Mars 1946 - Tome 49 - p 43-49 - Schenectady - N.Y.*
- {15} E. GUDEFIN "La machine généralisée à pôles lisses" - *Bulletin de la Société Française des Electriciens - 8ème série - Tome 4 - Numéro 41 - Mai 1963.*
- {16} G. KRON "Equivalent circuit of electrical machines" - *Livre - John Wiley et fils - Editeurs - New York - N.Y. - 1951.*
- {17} YU H. KU et D.W.C. SHEN "Two-reaction theory of a general induction machine and its equivalent circuit" - *Power Apparatus and Systems - Volume 76 - Octobre 1957 - p 729-734.*
- {18} H.E. KOENIG "Application of network theory to the analysis of rotating machinery - Part I - Synchronous and asynchronous machines" - *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers - Communication and Electronics - Volume 73 - Mai 1954 - p 162-169.*
- {19} N. KESAVAMURTHY et R.E. BEDFORD : "The circuit theory and calculations of polyphase induction machines" - *Institution of Electrical Engineers - Monographie - 1958 - Tome 105 - Numéro 8 - p 499-508*

- {20} J.E. WILLIAMS "Operation of three-phase induction motors on unbalanced voltages"
Transactions of the American Institute of Electrical Engineers - Volume 73 - Partie IIIA 1954 - p 125-132.
- {21} J.T. MITCHELL "Equivalent circuits for three-phase four-wire induction motors operating on nonsymmetrical systems".
Transactions of the American Institute of Electrical Engineers - Partie II - Volume 77 - 1958 - p 468-476.
- {22} J. PYTEL "Równania silnika indukcyjnego w uogólnionej postaci symbolicznej".
Archiwum elektrotechniki - Pologne - 1965 - Tome 14 - Numéro 3 - p 671-688.
- {23} N.N. HANCOCK et B.H. KARAKARADDI : "The physical realization of induction - motor equivalent circuits" -
Proceedings - Institution of Electrical Engineers - Volume 108 - Partie C - 1961 - p 145-152.
- {24} J. BEN URI "Induction motor - A general theory -"
Wissensch. Z. Elektrotech. Allemagne - 1969 - Tome 12 - Numéro 4 - p 225-236.
- {25} T.H. BARTON et J.C. DUNFIELD "Polyphase to two-axis transformation for real windings" -
Power Apparatus and Systems - Volume 87 - p 1342-1346.
- {26} J.C. DUNFIELD et T.H. BARTON "Axis transformations for practical primitive machines" -
Power Apparatus and Systems - Volume 87 - p 1346-1354
- {27} H.C. STANLEY "An analysis of the induction machine"
Transactions of the American Institute of Electrical Engineers - Volume 57 - 1938 - p 751-757.
- {28} P.L. ALGER "The nature of polyphase induction machines" -
Livre. John Wiley et fils - Editeurs - New-York - N.Y. - 1951.
- {29} B. ADKINS "General theory of rotating machines" -
Livre - Chapman et Hall - Editeurs - 1957.
- {30} A.M. WAHL et L.A. KILGORE "Transient starting torques in induction motors" - *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers - Volume 59 - Novembre 1940 - p 603-607 - Discussion pages 1263 et 1264.*

- {31} P.L. ALGER et YU H. KU "Switching transients in wound rotor induction motors" - *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers - Volume 73 - Partie IIIB* 1954 - p 19-27.
- {32} F. PAVLASEK "Les couples transitoires dans un moteur asynchrone avec rotor bloqué" - *Elektrotechnický Obzor - Août 1959 - Tome 48 - p 410-415.*
- {33} AMARJIT SINGH "Transient starting currents in three-phase induction motor" - *The Institution of Engineers - India - 1965 - Tome 45 - Numéro 5 - p 249-257.*
- {34} K.P. KOVÁCS "On the starting phenomena of asynchronous motors" - *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* 1966 - 54 - Numéros 3 et 4 - p 453-460.
- {35} W. WÜTHERICH "Übereicht über die einschaltmomente bei Asynchronmaschinen im stillstand" - *Elektrotechnische Zeitschrift - Allemagne - 1967 - 88 - Numéro 22 - p 555-559.*
- {36} F. NOTELET "Le couple transitoire de démarrage du moteur asynchrone triphasé" - *Revue Générale de l'Electricité - Juin 1970 - Tome 79 - Numéro 6 - p 513-520.*
- {37} W.V. LYON "Transient conditions in electric machinery" *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers - Volume 42 - 1923 - p 157-179.*
- {38} W.V. LYON "Transient analysis of alternating current machinery" - *Livre - John Wiley et fils - Editeurs - New-York - N.Y. - 1954.*
- {39} YU H. KU "Transient analysis of rotating machines and stationary networks by means of rotating reference frames" - *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers - Volume 70 - 1951 - p 943-951.*
- {40} E. PILLET "Evolution de la théorie des machines tournantes à courant alternatif" *Revue générale de l'Electricité - Octobre 1952. p 449-465.*
- {41} E. PILLET "Machines tournantes à courant alternatif - Nouvelle méthode de calcul" - *Revue générale de l'Electricité - Mai 1954 - p 251-263.*

- {42} E. MORATH "Grundlagen zur theoretischen untersuchung der Eigenschaften von Asynchronmaschinen" - *Acta Polytech. Scand. - Electr. Engng. Suède* 1966 - numéro 11.
- {43} W. SCHUISKY "Übergangsvorgänge bei induktionsmaschinen" *Asea Research 2 - p 21-42 - Västerås - Schweden* 1959.
- {44} M.R. CHIDAMBARA et C. GANAPATHY : "Transient torques in three-phase induction motors during switching operations". *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers - 1962 - 81 - Partie III - p 47.*
- {45} I.R. SMITH et S. SRIHARAN "Transient performances of the induction motor" *Proceedings - Institution of Electrical Engineers - Grande Bretagne - 1966 - 113 - Numéro 7 - p 1173-1181.*
- {46} N.C. ENSLIN, W.M. KAPLAN et J.L. DAVIES : "Influence of transient switching currents and fluxes on the torque developed by a squirrel-cage induction motor". *Proceedings - Institution of Electrical Engineers - Grande-Bretagne - 1966 - 113 - Numéro 6 - p 1035-1043.*
- {47} W.S. WOOD, F. FLYNN et A. SHANMUGASUNDARAM : "Transient torques in induction motors, due to switching of the supply" - *Proceedings - Institution of Electrical Engineers - 1965 - 112 - 7 - p 1348.*
- {48} R.D. SLATER et W.S. WOOD "Constant-speed solutions applied to the evaluation of induction-motor transient torque peaks" - *Proceedings - Institution of Electrical Engineers - 1967 - 114 - 10 - p 1429-1435.*
- {49} F.P. FLYNN, R.D. SLATER et W.S. WOOD : "Transient negative torques in induction motors due to rapid reconnection of the supply" - *Proceedings - Institution of Electrical Engineers - Volume 116 - Numéro 12 - 1969 - p 2009-2014.*
- {50} K.P. KOVÁCS et I. RÁCZ "Transiente Vorgänge in Wechselstrom-maschinen" Band I et II - *Livre - Verlag der ungarischen Akademie der wissenschaften - Budapest - 1959.*

- {51} C.G. VEINOTT "Synthesis of induction motor designs on a digital computer" - *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers - Partie III - Volume 79 - 1960 - p 12-18.*
- {52} F.J. MAGINISS et N.R. SCHULTZ "Transient performance of induction motors" - *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers - Volume 63 - p 641-646 - Septembre 1944.*
- {53} A.K. DE SARKAR et G.J. BERG "Digital simulation of three-phase induction motors" - I.E.E.E. - *Transactions on Power Apparatus and Systems - Volume PAS 89 - Numéro 6 - Juillet-Août 1970.*
- {54} F. NOTELET "Etude du couple transitoire de démarrage du moteur asynchrone triphasé" - *Thèse de Docteur Ingénieur - Numéro 95 - Université des Sciences et Techniques de Lille I - 18 Septembre 1969.*

TABLE DES MATIERES

- Avant-propos	
I. INTRODUCTION	3
I.1 Etude Bibliographique	3
I.1.1 Difficultés rencontrées dans l'analyse des machines à courant alternatif	4
I.1.2 Etude bibliographique des méthodes d'analyse	4
I.1.3 Etude bibliographique des régimes transitoires du moteur d'induction triphasé	7
I.2 Présentation de l'étude effectuée	10
II. ETUDE GENERALE DES REGIMES DES COURANTS ET DU COUPLE	12
II.1 Etablissement des expressions générales des courants et du couple	12
II.1.1 Hypothèses et notations	13
II.1.2 Equations algébriques des tensions	15
II.1.3 Mise sous forme matricielle	17
- Autre présentation de la matrice des mutuelles inductances	17
- Valeurs et vecteurs propres de la matrice A	18
- Présentation retenue pour la matrice des mutuelles et sa dérivée	20
- Changement de variables	21
II.1.4 Nouvelles équations des tensions. Méthodes de résolution	22
- Recherche des variables auxiliaires	
- Passage aux courants réels	23
II.1.5 Expression du couple	25
II.2 Etude du régime libre	26
II.2.1 Courants primaires et secondaires	26
- Recherche des inconnues auxiliaires x_ℓ et y_ℓ	26
- Courants réels	29
II.2.2 Etude des constantes de temps et des pseudo-pulsations	31
- Variations de T_1 et T_2	32
- Variations de ω_1 et ω_2	33
II.2.3 Détermination des constantes d'intégration	42
- Valeur de k_1, k_2, k_3 et k_4	42
- Passage à K_1, K_2, K_3 et K_4	43
II.2.4 Régime libre du couple	45

II.3 Etude du régime forcé	46
II.3.1 Cas général. Tensions d'alimentation quelconques	46
- Changements de variables	47
- Les deux séries de solutions particulières	50
- Passage aux courants réels	51
II.3.2 Cas des tensions d'alimentation sinusoïdales	53
II.3.3 Cas des tensions d'alimentation équilibrées	55
- Expression des courants	55
- Détermination de T_1 , T_2 , ω_1 et ω_2	56
II.3.4 Calcul du couple	58
III. APPLICATION A L'ETUDE DES REGIMES TRANSITOIRES SYMETRIQUES	60
III.1 Introduction	60
III.1.1 Classification des régimes transitoires symétriques	60
III.1.2 Méthode d'étude	64
III.2 Cas général	64
III.2.1 Alimentation par des tensions déséquilibrées	65
III.2.2 Alimentation par des tensions équilibrées	69
III.3 Mise en court-circuit du stator	71
III.3.1 Cas de courants préalables déséquilibrés	71
III.3.2 Cas de courants préalables équilibrés	72
III.3.3 Cas particulier d'une vitesse nulle	74
III.4 Démarrage du moteur à l'arrêt	76
III.4.1 Alimentation par des tensions déséquilibrées	76
III.4.2 Alimentation par des tensions équilibrées	79
III.5 Ouverture du stator	80
III.5.1 Relations générales	80
III.5.2 Applications	81
III.6 Opérations de démarrage sur le stator du moteur en rotation	81
III.6.1 Passage des paliers de tension	82
III.6.2 Passage de l'étoile au triangle	83
III.6.3 Elimination d'impédances statoriques additionnelles	83
III.7 Ouverture du rotor	84
III.8 Fermeture du rotor	87
III.9 Remise sous tension d'une phase ouverte	88
III.10 Inversion du sens du flux tournant	88
III.10.1 Etude du régime forcé	89
III.10.2 Etude du régime transitoire	92

IV. VERIFICATIONS EXPERIMENTALES	96
IV.1 Dispositif expérimental et moteur utilisés	96
IV.1.1 Dispositifs de mesure	97
IV.1.2 Moteur essayé	98
IV.2 Constantes de temps et pseudo-pulsations	99
IV.2.1 Relevés expérimentaux	101
IV.2.2 Détermination de T_1 , T_2 , ω_1 , ω_2 . Comparaison avec les valeurs calculées	
IV.3 Etude expérimentale des divers régimes transitoires	102
IV.3.1 Exemple de régime entrant dans le cas général	104
- Essais et relevés effectués	104
- Exemple de comparaison entre courbes calculées et courbes relevées	106
- Correction de l'erreur due à la transformation couple-torsion	107
IV.3.2 Mise en court-circuit du stator	111
IV.3.3 Démarrage du moteur à l'arrêt	112
IV.3.4 Ouverture du stator	115
IV.3.5 Opérations de démarrage sur le moteur en rotation	117
- Démarrage par paliers de tension	117
- Démarrage étoile-triangle	118
- Elimination de résistances rotoriques additionnelles	118
IV.3.6 Ouverture du rotor	119
IV.3.7 Fermeture du rotor	121
- Relevés effectués	121
- Remarque sur les régimes transitoires dus à une modification des circuits rotoriques	121
IV.3.8 Remise sous tension d'une phase ouverte	123
IV.3.9 Inversion du sens du flux tournant	123
- Relevés effectués	123
- Remarque sur les régimes transitoires avec ouverture d'une armature	126
V. CONCLUSIONS	127
APPENDICE : Régime transitoire suivant l'ouverture d'une phase statorique	130
BIBLIOGRAPHIE	139
TABLE DES MATIERES	