

50376
1976
13

N° d'ordre : 179

50376
1976
13

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour l'obtention du titre de

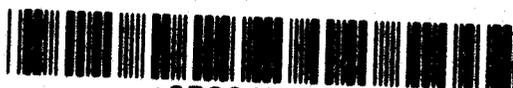
DOCTEUR-INGENIEUR

par

Jean-Luc TYRAN



"ETUDE D'UNE PROCEDURE D'AJUSTEMENTS EN LIGNE
D'UN MODELE DE COMMANDE DANS L'ESPACE PARAMETRIQUE"



0300136372

Soutenue le 12 Janvier 1976, devant la COMMISSION D'EXAMEN

Messieurs

P. VIDAL

Président

L. POVY

Rapporteur

C. MELIN

Examineur

E. DEFFONTAINES

Invité

AVANT - PROPOS

L'étude que nous présentons dans ce mémoire a été menée au centre d'Automatique de l'Université des Sciences et Techniques de LILLE I.

Avant d'exposer nos travaux nous tenons à remercier très sincèrement tous ceux qui ont manifesté de l'intérêt à la préparation de notre thèse et qui nous ont aidé de leur expérience.

Que Monsieur le Professeur VIDAL trouve ici l'expression de notre profonde gratitude pour la confiance qu'il nous a accordée et l'accueil qu'il nous a réservé dans son laboratoire. Nous sommes particulièrement sensible à l'honneur qu'il nous fait en assurant la présidence de notre jury.

Il nous est agréable de témoigner notre sincère reconnaissance à Monsieur POVY qui a dirigé nos recherches et nous a souvent soutenu de ses encouragements. Qu'il soit vivement remercié pour l'aide généreuse qu'il nous a constamment prodiguée.

Nous tenons à souligner l'intérêt que nous a manifesté Monsieur MELIN en acceptant de participer à notre jury. Qu'il veuille bien accepter notre profonde gratitude.

Que Monsieur DEFFONTAINES trouve ici l'expression de notre sincère reconnaissance pour nous avoir initié à l'Automatique et pour le plaisir que nous procure sa présence au sein de notre commission d'examen.

Nous adressons nos vifs remerciements à tout le personnel du centre d'Automatique et plus spécialement à ceux qui ont collaboré à la réalisation de cet ouvrage et à tous nos collègues chercheurs.

Que tous nos amis qui se sont intéressés d'une façon ou d'une autre à notre travail, trouvent ici une marque de cordialité à leur égard.

INTRODUCTION

Cerner les problèmes, caractériser, tenter d'expliquer ont toujours été des démarches essentielles de l'humanité sur le chemin de la Connaissance. Le besoin de connaître, ressenti par chacun, a parmi d'autres motivations, celle, profonde, d'un meilleur usage de tout ce que la nature met à notre disposition, en vue d'un bien commun et d'un progrès réel.

Face à l'énorme complexité et la prodigieuse diversité qu'offre l'univers à nos investigations, face aux modifications que l'homme lui a apportées par l'insertion de ses propres réalisations, dont, parfois, une partie du contrôle lui a échappé, le besoin s'est fait nécessité. Nature et oeuvres humaines se sont vues schématisées et classées en systèmes, la première pour mieux en appréhender les lois, les dernières pour mieux atteindre à la finalité à laquelle on les a assignées ; finalité recouvrant, très souvent, des impératifs d'efficacité, de production, de rendement...

Le but, ou le critère d'efficacité, auquel on veut astreindre le système oblige à commander ce dernier de façon appropriée. Cela ne peut se faire qu'en fonction d'un modèle susceptible de représenter, sous certaines conditions, la structure et les paramètres, ou ce qui en tient lieu, du système réel. L'élaboration (qualitative et quantitative) de ce modèle caractérise d'une certaine manière, ce qu'on a l'habitude de désigner sous le nom d'identification.

L'identification conduit à la commande du système, ou processus, et, en cela, y est étroitement liée. Cependant, on peut faire choix, suivant les circonstances, d'une identification préalable à la commande (au sens de commande efficace) ou, au contraire, menée de pair. La première est l'identification "hors ligne", la seconde "en ligne". Les deux restent néanmoins subordonnées à la réalisation du but fixé et le fait de les considérer comme exactes est déterminé en fonction du but atteint par rapport au but fixé (il peut arriver, par exemple, qu'elles soient intrinsèquement fausses mais exactes vis à vis de ce à quoi elles auront conduit).

De très nombreuses méthodes d'identification ont été proposées ces dernières années. Aucune ne prétend et ne saurait prétendre à l'universalité : il est assez évident, par exemple, que l'identification et la commande d'un échangeur thermique ne seront pas du même ordre que celles du vol d'un hélicoptère ; quand bien même existerait une méthode pseudo-universelle, permettant de traiter un très grand nombre de processus différents, il est hors de doute que la complexité de sa mise en oeuvre irait croissant avec l'étendue du domaine d'application.

L'identification en ligne, très intéressante puisque directement liée à une commande adaptative, serait dès lors très sérieusement compromise du fait du volume excessif des calculs temps réel nécessités à chaque itération.

En ce sens, notre étude se plaçant dans la perspective d'une identification en ligne, nous devrions plutôt opter en faveur de la simplicité de la mise en oeuvre, quitte à restreindre, sur certains points, la généralité de la méthode proposée. Abordant celle-ci au Chapitre II, nous verrons que cet impératif se trouve très largement respecté puisqu'il trouve son plein accord avec des nécessités de convergence et de compromis entre identification et commande.

Auparavant, il n'est certes pas inutile d'analyser rapidement les méthodes d'identification les plus généralement proposées et d'en tirer quelques enseignements en vue de celle qu'à notre tour nous proposerons.

0 0
0

CHAPITRE I

PRESENTATION DE QUELQUES METHODES D' IDENTIFICATION

Nous venons de convenir que l'automatisation d'un processus passe nécessairement par une phase d'identification. Ceci acquis, il faut faire choix d'une méthode d'identification ou, tout au moins, d'un type, d'une classe, de méthodes s'adaptant au processus considéré.

1 - CHOIX D'UN TYPE DE METHODES

1.1. - Connaissances à priori et identification de structure

Le choix n'est généralement pas très facile puisqu'il dépend, dans une certaine mesure, d'un minimum de connaissances à priori sur le système ; connaissances qui, par ailleurs, sont souvent sujettes à incertitudes.

Ainsi en est-il quand il s'agit d'apprécier l'importance des non linéarités :

- Faibles : on pourra vraisemblablement faire appel à un modèle de type linéaire sans trop de risques : modèle linéaire ou quasi linéaire.

- Fortes : il faudra obligatoirement en tenir compte dans la forme même du modèle, tout particulièrement si le système est soumis à des sollicitations dynamiques importantes : modèle non linéaire ou linéaire par morceaux.

Le degré des systèmes est lui aussi sujet à caution. Il faudrait pouvoir déterminer au moins un ordre maximum au-delà duquel tout accroissement n'apporterait rien de plus quant à la précision que l'on est en droit d'attendre, à la fois de l'identification et de la commande résultante (en particulier vis à vis des bruits).

Certaines méthodes se sont attachées à ce problème et permettent une identification directement liée à la structure du modèle en estimant l'ordre du processus, qu'il soit linéaire ou non. / 1 /

D'autres identifications de structure, telles celles ayant trait aux formes des non linéarités sont possibles bien qu'encore assez fragmentaires.

1.2. - Contraintes

Le choix de la méthode doit tenir compte des possibilités d'action sur le processus. Il est évident que, même pour les besoins de l'identification, un processus industriel ne pourra être trop, ni trop longtemps perturbé. L'identification devrait donc s'inscrire autant que possible, dans les phases mêmes de la conduite normale du système.

Le choix du modèle est également subordonné aux contraintes, à l'importance des bruits, au fait que telle ou telle variable n'est pas observable, une autre commandable...

1.3. - Buts propres de l'identification

Certaines identifications peuvent avoir pour seul but l'amélioration de la connaissance du processus au niveau de son interprétation par des lois physiques : le modèle n'est alors qu'un descriptif mathématique plus ou moins élaboré et précis du système. Là n'est pas le souci de l'automatisation : il s'agit de commander le processus. Deux types de commandes et deux types d'identifications peuvent y être rattachées :

a) - Si on cherche à commander le système de telle sorte que cela oblige à de fréquentes et différentes transitions d'un état à un autre, il faudra faire appel à un modèle valable dans des conditions variées et par conséquent, généralement non linéaire. Risque d'une identification assez lourde puisque d'application étendue : il faut s'attendre à une mise en oeuvre relativement délicate si l'identification est conduite en ligne. (Les transitions précédentes sont bien souvent astreintes à un critère d'optimalité, qu'il soit de type énergétique ou temporel).

b) - Par contre, si on cherche à réaliser une commande du type "consigne" (fixe ou d'évolution lente), astreinte à rapidité ou précision (ou les deux), on peut se contenter d'un modèle plus simple. Puisqu'il s'agit de faire fonctionner le processus autour d'un point, dit "point de fonctionnement", on peut sans trop de risques y linéariser le système, et donc le modèle. Le modèle n'est plus alors, comme en a), représentatif de très amples déviations : il doit plutôt donner une image précise du comportement du système réel face à des perturbations, internes et externes, d'amplitudes limitées. A noter qu'il est possible d'améliorer la précision, si celle-ci n'est pas satisfaisante, en adjoignant au modèle, fonctionnant en régulateur, un traitement statistique des valeurs des variables. L'identification liée à ce type de commande est particulièrement apte à une mise en oeuvre "en ligne" ; c'est d'ailleurs dans cette voie que s'inscrit notre étude.

Un autre but peut encore être assigné à l'identification : la prédiction ; on lui préfère le terme estimation bien qu'essentiellement il s'agisse toujours d'une identification mais, cette fois, non d'un comportement immédiat ou quasi immédiat à l'arrivée de l'information, en provenance du système, mais postérieur. Le problème est de réduire le plus possible

l'incertitude liée au comportement futur tout en disposant d'un modèle très souple, hautement adapté à tout changement prononcé et brutal de comportement. Ce type de modèle est utilisé pour des problèmes de sécurité (surcharges par exemple), de suivi de trajectoire (tracking)... Il a été particulièrement étudié par KALMAN. /2/

Jusqu'à présent, nous avons fait choix d'un type de méthodes et lié à ce choix, celui d'un modèle. Il serait cependant inexact d'en déduire que toute méthode fait obligatoirement référence, de façon très explicite, à un modèle réellement représentatif, en toutes circonstances, du comportement du processus : le modèle peut prendre des formes multiples (sans commune mesure d'une méthode à l'autre) et ne prétend à l'image du processus que dans des conditions particulières et fragmentaires de test. Pour mieux s'en convaincre, établissons un inventaire rapide des méthodes les plus courantes et les plus significatives.

2 - METHODES D'IDENTIFICATION

Les diverses méthodes d'identification peuvent être schématiquement réunies sous deux classes : celle des méthodes paramétriques et celle des méthodes non paramétriques, cette dernière subdivisée à son tour en méthodes de type déterministe et de type aléatoire (par référence à des signaux test).

2.1. - Méthodes paramétriques

Le modèle comporte des paramètres auxquels on cherche à affecter une valeur numérique ; modèle linéaire ou non linéaire sous forme, par exemple, d'un système d'équations différentielles, d'équations de récurrence, de fonctions ou matrices de transfert, ... déduit de l'analyse et d'expériences conduites sur le processus

2.1.1. - La méthode "dite" du modèle. /3/, /4/, /5/

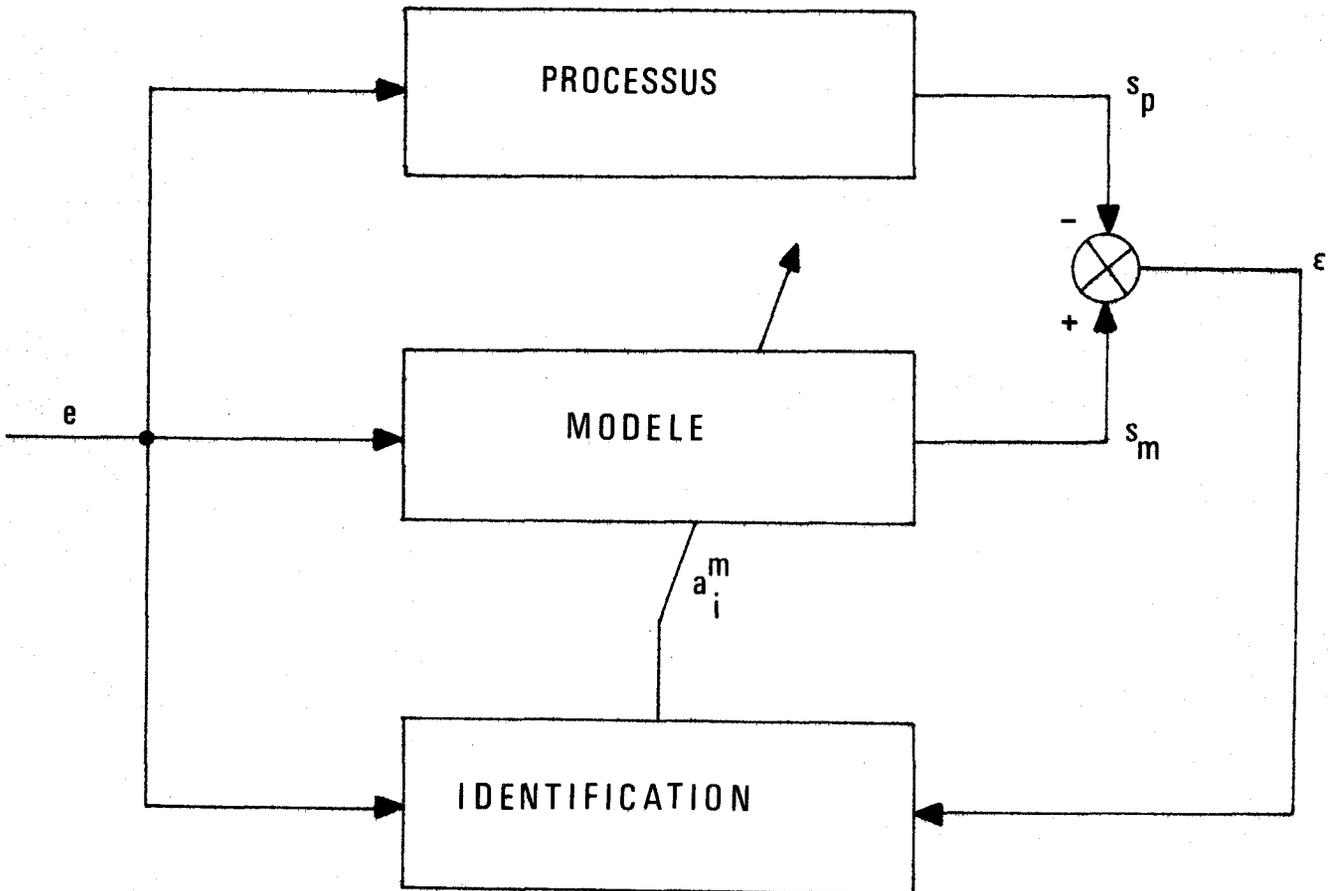


fig. 1

Supposant que le processus puisse être représenté par un modèle (fonction de transfert, par exemple) de paramètres a_i^m (i variant de 1 à n) on cherche à les identifier aux paramètres réels du processus a_i^p de telle sorte que l'erreur ϵ ($\epsilon = S_m - S_p$) soit nulle, sinon minimale (fig. 1). En fait, il n'est pas possible d'ajuster les a_i^m de cette manière puisque ϵ n'est que du premier degré vis à vis de la différence des sorties et donc non minimisable. Par contre, cela devient possible si l'on passe de ϵ à ϵ^2 et mieux, si l'on optimise sur le temps : c'est à dire minimiser la fonctionnelle d'état :

$$D(\epsilon) = \int_H (S_m - S_p)^2 dt$$

Plus généralement, on peut faire intervenir une minimisation du type "moindres carrés" (cf. paragraphe suivant) où D, en tant que distance de structure, s'exprime par la relation suivante :

$$D = \Delta A^t \cdot M \cdot \Delta A$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta A \text{ a pour terme général } (a_i^m - a_i^p) \\ M \text{ est une matrice de "poids" définie positive.} \end{array} \right.$$

Quelque soit la technique employée pour ajuster le modèle au processus, moindres carrés ou autre, elle nécessite d'être optimisée.

En effet, à une distance d'état $D(\epsilon)$, encore appelée "iso-distance", de l'espace paramétrique, correspond généralement tout un ensemble de modèles. D'autre part, si on exprime D sous forme d'un pourcentage :

$$D \% = \frac{\int_H (S_m - S_p)^2 dt}{\int_H S_p^2 dt}$$

Chaque iso-distance $D\%$ est telle que l'un quelconque de ses points définit un modèle auquel on peut accorder un intervalle de confiance de $D\%$ à l'ensemble de ses valeurs.

On montre, d'une part, que l'on ne peut descendre en dessous d'un certain intervalle de confiance (ce minimum non nul exprime d'une certaine façon l'écart entre modèle et processus, non en terme de valeurs de paramètres mais en termes de bruits, de non linéarités, de non stationnarité, d'erreur d'ordre...) et, d'autre part, que connaissant un certain intervalle de confiance (généralement non minimal), le minimal n'est pas obligatoirement au "centre de gravité" du premier.

Aussi on fait appel à une technique de convergence optimale vers le $D\%$ minimal (ou point nominal) qui utilise tout particulièrement les propriétés topologiques des iso-distances : leurs formes, leurs imbrications... : méthode du type "gradient", concepts de ligne de plus grande pente, de vallée, de col. (Fig 2)

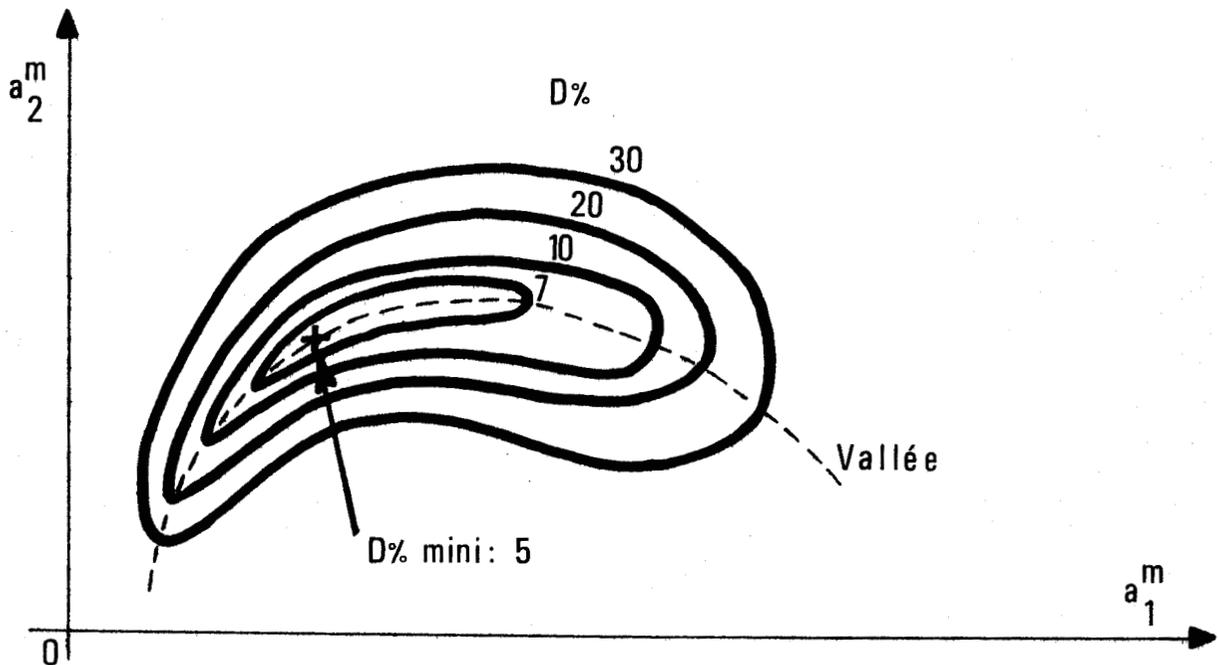


Fig. 2 - Exemple d'iso-distances pour un modèle d'ordre 2

Il a été montré que le résultat de l'identification dépend dans une très large mesure des signaux d'entrée de l'ensemble modèle-processus : les iso-distances précédentes se révélant suivant les cas plus ou moins sensibles à tel ou tel paramètre plutôt qu'à tel autre, ou encore peu sensible à l'ensemble ; en particulier, il conviendrait qu'elles soient de type sphérique de manière à sensibiliser de façon égale tous les paramètres. (Fig. 3)

Dans cet esprit, on établit qu'au voisinage du point nominal une approximation au second ordre de la distance d'état $D(\epsilon)$ relève du terme :

$$\Delta D = A^t \begin{bmatrix} \langle \sigma_1, \sigma_1 \rangle & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \langle \sigma_j, \sigma_i \rangle & & \\ & & \langle \sigma_i, \sigma_1 \rangle & & \\ & & \langle \sigma_i, \sigma_j \rangle & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \langle \sigma_n, \sigma_n \rangle \end{bmatrix} A$$

où $\sigma_i = \frac{\partial S_m}{\partial a_i^m}$: fonction de sensibilité
 A a pour terme général a_i^m
 $\langle \sigma_i, \sigma_j \rangle$ représente le produit scalaire $\int_H \sigma_i(t) \sigma_j(t) dt$

Les entrées "sphérisantes" (au sens de l'iso-distance) peuvent être obtenues en minimisant le coefficient suivant :

$$\rho = \text{Log} \frac{\mathcal{T}^n}{n^n \mathcal{D}}$$

où \mathcal{T} et \mathcal{D} sont respectivement la trace et le déterminant de la matrice de sensibilité précédemment introduite et "n" l'ordre de l'espace paramétrique.

Cependant l'application pratique d'une telle méthode se heurte très souvent aux contraintes existant sur le signal d'entrée ; on lui préfère, parce que beaucoup plus facile d'application, une méthode qui sensibilisera paramètre après paramètre.

Ainsi, les $e_k(t)$ étant des fonctions simples du temps on déterminera l'entrée sensibilisante $e(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k(t)$

relative au paramètre a_i^m en recherchant les λ_k qui permettront de maximiser la Fonction de sensibilité :

$$F_{a_i^m} = \frac{|\sigma_i|}{\sum_{j=1}^n |\sigma_j|}$$

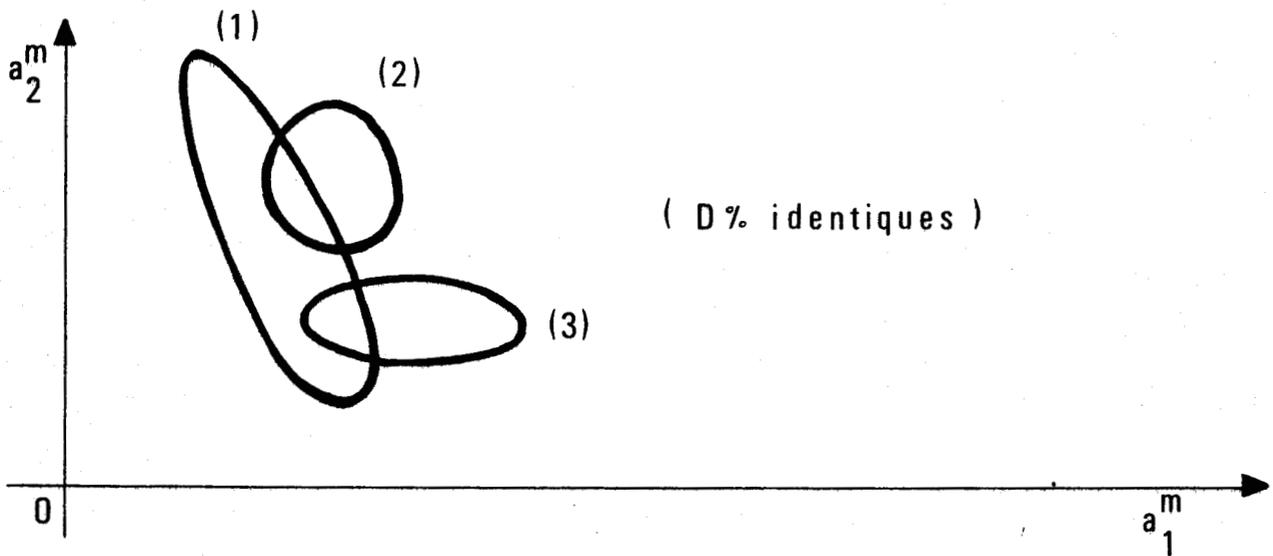


Fig 3 - Différents types d'iso-distances ; exemple sur modèle d'ordre 2

- En (1) : entrée peu sensibilisante tant sur a_1 que sur a_2
- En (2) : entrée sphérisante : sensibilise de la même façon a_1 et a_2
- En (3) : entrée sensibilisant plutôt a_2 que a_1

Des principaux avantages de cette méthode nous retiendrons tout particulièrement qu'elle se prête à une mise en oeuvre en ligne puisque, d'une part, elle est de nature itérative et que, d'autre part, elle ne nécessite pas d'algorithme de calcul très volumineux. Elle peut être utilisée pour des processus multivariés et on peut sans difficulté y introduire un modèle de type non linéaire.

De la méthode elle-même, on remarquera l'aspect topologique de la convergence dans l'espace paramétrique et l'influence importante des signaux d'entrée sur le résultat de l'identification.

2.1.2. - Méthodes des moindres carrés, des variables instrumentales et du maximum de vraisemblance

/6/ - /7/ - /8/ - /9/ - /10/ - /11/

Dans ce type de méthodes, on considère, très généralement, que le processus peut être représenté par un modèle linéaire stable, telle une équation aux différences d'ordre connu, sujet à des bruits de mesures ramenés en sortie, bruits qui sont également et indépendamment distribués.

2.1.2.1. - Modèles

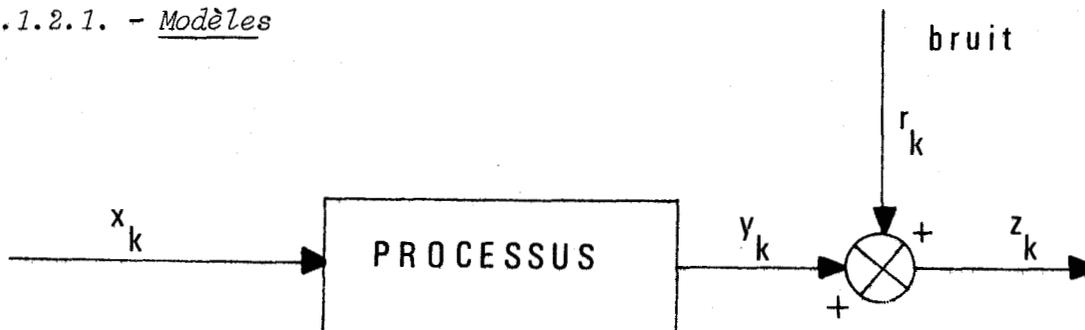


Fig. 4 - (T étant la période d'échantillonnage, l'indice k fait référence à l'instant kT)

La sortie non bruitée du processus (Fig. 4) est représentée par l'équation aux différences d'ordre q :

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \dots + a_q y_{k-q} = b_0 x_k + \dots + b_q x_{k-q}$$

et la sortie bruitée par :

$$z_k = y_k + r_k$$

On en déduit :

$$z_k = -a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \dots - a_q y_{k-q} + b_0 x_k + \dots + b_q x_{k-q} + r_k \quad (1)$$

ou encore :

$$z_k = -a_1 z_{k-1} - a_2 z_{k-2} - \dots - a_q z_{k-q} + b_0 x_k + \dots + b_q x_{k-q} + s_k \quad (2)$$

avec :

$$s_k = r_k + a_1 r_{k-1} + \dots + a_q r_{k-q}$$

Si on dispose de $(q + n)$ mesures, tant d'entrée que de sortie, l'ensemble de n équations de type (1), faisant appel aux $p = 2q + 1$ paramètres du processus, s'écrit :

$$Z = A \Gamma + R \quad (3)$$

De même pour celles de type (2) :

$$Z = B \Gamma + S \quad (4)$$

où : $Z = (z_{q+1}, z_{q+2}, \dots, z_{q+n})$
 $(n \times 1)$

$\Gamma = (-a_1, -a_2, \dots, -a_q, b_0, \dots, b_q)$
 $(p \times 1)$

$A =$
 $(n \times p)$

$$\left[\begin{array}{cc} y_q \dots \dots \dots y_1 & x_{q+1} \dots \dots \dots x_1 \\ y_{q+1} \dots \dots \dots y_2 & x_{q+2} \dots \dots \dots x_2 \\ \vdots & \vdots \\ y_{q+n-1} \dots \dots \dots y_n & x_{q+n} \dots \dots \dots x_n \end{array} \right]$$

$B =$
 $(n \times p)$

$$\left[\begin{array}{cc} z_q \dots \dots \dots z_1 & x_{q+1} \dots \dots \dots x_1 \\ z_{q+1} \dots \dots \dots z_2 & x_{q+2} \dots \dots \dots x_2 \\ \vdots & \vdots \\ z_{q+n-1} \dots \dots \dots z_n & x_{q+n} \dots \dots \dots x_n \end{array} \right]$$

$R =$
 $(n \times 1)$

$$\left[\begin{array}{c} r_{q+1} \\ r_{q+2} \\ \vdots \\ r_{q+n} \end{array} \right]$$



$$\begin{matrix}
 S & = & \\
 (n \times 1) & &
 \end{matrix}
 \begin{bmatrix}
 s_{q+1} \\
 s_{q+2} \\
 \vdots \\
 s_{q+n}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 r_{q+1} + a_1 r_q + \dots + a_q r_1 \\
 r_{q+2} + a_1 r_{q+1} + \dots + a_q r_2 \\
 \vdots \\
 r_{q+n} + a_1 r_{q+n-1} + \dots + a_q r_n
 \end{bmatrix}$$

Les relations (3) et (4) définissent les modèles du système et conduisent à élaborer différents estimés, notés $\hat{\Gamma}$ de l'ensemble des paramètres.

2.1.2.2. - Estimateurs

Considérant que les matrices A et B sont de rang maximum (toujours possible à réaliser par des entrées appropriées), les deux modèles, (3) et (4), conduisent aux quatre estimateurs suivants :

$$\hat{\Gamma}_1 = (A^t A)^{-1} A^t Z \quad (5)$$

$$\hat{\Gamma}_2 = (B^t B)^{-1} B^t Z \quad (6)$$

$$\hat{\Gamma}_3 = (B^t A)^{-1} B^t Z \quad (7)$$

$$\hat{\Gamma}_4 = (A^t B)^{-1} A^t Z \quad (8)$$

Les estimateurs de $\hat{\Gamma}_1$ et $\hat{\Gamma}_2$ sont respectivement déduits des modèles (3) et (4) ; le premier est l'estimateur dit du "maximum de vraisemblance", le second est celui des "moindres carrés".

Ceux de $\hat{\Gamma}_3$ et $\hat{\Gamma}_4$ sont des estimateurs dit des "variables instrumentales" déduits à la fois des modèles (3) et (4). Notons que le terme "estimateur des variables instrumentales" est plutôt réservé au dernier.

Des relations (3), (5), et (7) ainsi que (4), (6) et (8), nous tirons :

$$\hat{\Gamma}_1 = \Gamma + \left[\frac{A^t A}{n} \right]^{-1} \cdot \left[\frac{A^t R}{n} \right] = \Gamma + U_1^{-1} V_1$$

$$\hat{\Gamma}_2 = \Gamma + \left[\frac{B^t B}{n} \right]^{-1} \cdot \left[\frac{B^t S}{n} \right] = \Gamma + U_2^{-1} V_2$$

$$\hat{\Gamma}_3 = \Gamma + \left[\frac{B^t A}{n} \right]^{-1} \cdot \left[\frac{B^t R}{n} \right] = \Gamma + U_3^{-1} V_3$$

$$\hat{\Gamma}_4 = \Gamma + \left[\frac{A^t B}{n} \right]^{-1} \cdot \left[\frac{A^t S}{n} \right] = \Gamma + U_4^{-1} V_4$$

Pour que les estimés $\hat{\Gamma}_i$ ne soient pas biaisés ($\hat{\Gamma}_i$ biaisé : c'est à dire $\hat{\Gamma}_i$ convergeant vers un vecteur différent de Γ) il faut respecter les deux conditions suivantes :

(9) $p. \lim_{n \rightarrow \infty} U_i$: existe et est non singulière

(10) $p. \lim_{n \rightarrow \infty} V_i$: matrice identiquement nulle.

La condition (9) est respectée par les quatre estimateurs puisque les matrices A et B sont de rang maximum. Quant à la condition (10), l'estimateur de $\hat{\Gamma}_2$ (moindres carrés) n'y satisfait pas. En conséquence, seuls les estimés : $\hat{\Gamma}_1$, $\hat{\Gamma}_3$ et $\hat{\Gamma}_4$ ne sont pas biaisés. Parmi ceux-ci, les deux premiers ont de meilleures propriétés statistiques que le dernier en effet, le vecteur "bruit" des premiers, R, est formé de composantes bruitées, également et indépendamment distribuées, de variance σ^2 ; à l'opposé, celui du dernier, S, a des composantes corrélées et de variance $\sigma^2 (1 + a_1^2 + \dots + a_q^2)$. D'autre part, nous devons convenir que y_k n'est pas directement observable et que, par conséquent, la matrice A n'est pas entièrement connue.

En résumé, $\hat{\Gamma}_1$, $\hat{\Gamma}_3$ et $\hat{\Gamma}_4$ sont de bons estimés bien que les estimateurs correspondants ne sont pas de mise en oeuvre immédiate ; par contre, l'estimation de $\hat{\Gamma}_2$ ne pose aucun problème de mise en oeuvre mais l'estimé est biaisé.

Si nous recherchons, en priorité, un bon estimé des paramètres, il va falloir déterminer des approximations suffisamment valables des y_k qui permettront d'élaborer $\hat{\Gamma}_1$, $\hat{\Gamma}_3$ et $\hat{\Gamma}_4$.

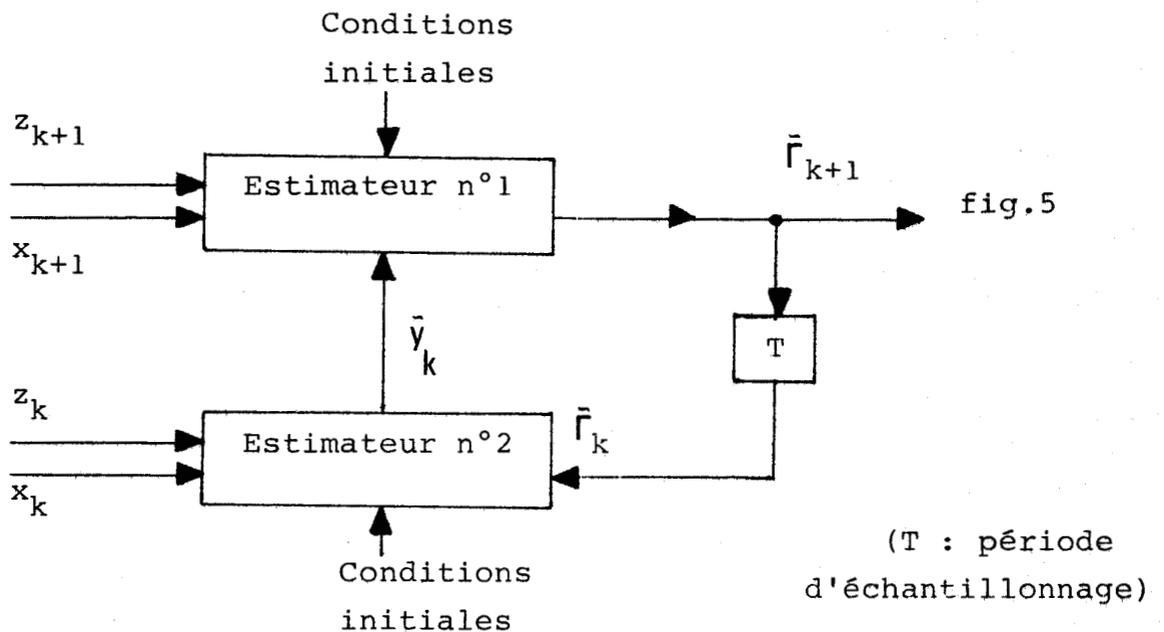
2.1.2.3. - Estimateurs récurrents

Il est possible d'estimer la valeur de Γ en minimisant une forme quadratique du type :

$$Q = (Z - A \Gamma)^t (Z - A \Gamma)$$

Notons que l'estimation des y_k n'y est qu'implicite. D'autre part, les techniques les plus généralement employées, auxquelles conduit une telle minimisation, se révèlent assez peu aptes à une implantation en ligne, d'où la recherche d'une structure récurrente aussi peu volumineuse que possible qui permette tout à la fois d'estimer les y_k et les $\hat{\Gamma}_k$; (cela quelque soit l'estimé considéré).

La structure proposée (Fig. 5) comporte deux estimateurs récurrents et leurs conditions initiales : un pour $\hat{\Gamma}$ (qui élabore $\bar{\Gamma}$) et un pour y_k (qui élabore \bar{y}_k), avec échange continu d'information entre eux. L'estimateur de y_k utilise l'estimé le plus récent de Γ : il fait intervenir l'estimé de l'instant $(k + 1)T$ comme étant celui de l'instant kT .



a) Estimateur n° 1 ($\bar{\Gamma}$)

On remplace les y_k de la matrice A par les \bar{y}_k (estimés du second estimateur). Soit \bar{A} cette nouvelle matrice, il vient :

$$\bar{\Gamma}_1 = (\bar{A}^t \bar{A})^{-1} \bar{A}^t z$$

$$\bar{\Gamma}_3 = (B^t \bar{A})^{-1} B^t z$$

$$\bar{\Gamma}_4 = (\bar{A}^t B)^{-1} \bar{A}^t z$$

On en déduit la forme récurrente de $\bar{\Gamma}_4$:

$$\bar{\Gamma}_{4, k+1} = \bar{\Gamma}_{4, k} + \frac{C_{4, k} a_{k+1} (z_{k+1} - \beta_{k+1}^t \bar{\Gamma}_{4, k})}{1 + \beta_{k+1}^t C_{4, k} a_{k+1}} \quad (11)$$

$$C_{4, k+1} = C_{4, k} - \frac{C_{4, k} \beta_{k+1}^t a_{k+1} C_{4, k}}{1 + \beta_{k+1}^t C_{4, k} a_{k+1}} \quad (12)$$

avec $C_{4, k} = (\bar{A}^t B)^{-1}$

et

$$a_{k+1} = (\bar{y}_k, \bar{y}_{k-1}, \dots, \bar{y}_{k-q+1}, x_{k+1}, \dots, x_{k-q+1})^t$$

$$\beta_{k+1} = (z_k, z_{k-1}, \dots, z_{k-q+1}, x_{k+1}, \dots, x_{k-q+1})^t$$

La forme récurrente de $\bar{\Gamma}_1$ est obtenue de la même façon, à partir des relations (11) et (12), en remplaçant à chaque fois le vecteur β_{k+1} par le vecteur a_{k+1} ; celle de $\bar{\Gamma}_3$ à partir des mêmes relations mais en interchangeant les vecteurs β_{k+1} et a_{k+1} .

b) Estimateur n°2 (\tilde{y}_k)

Très généralement on pourrait utiliser une technique d'estimation des y_k , telle celle du filtre de Kalman. Il n'est cependant pas nécessaire dans le cas présent, vu la forme même du processus et la place des bruits, de développer un filtrage complet de cette sorte. Disons que le filtrage au sens de Kalman prend ici la forme de l'équation aux différences en remplaçant les paramètres inconnus par les plus récents estimés :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k = & -\tilde{a}_{1k} \tilde{y}_{k-1} - \tilde{a}_{2k} \tilde{y}_{k-2} \cdots - \tilde{a}_{qk} \tilde{y}_{k-q} + \tilde{b}_{0k} x_k \cdots \\ & + \tilde{b}_{qk} x_{k-q} \end{aligned}$$

ou encore :

$$\tilde{y}_k = \mathbf{a}_k^t \tilde{\Gamma}_k \quad (13)$$

2.1.2.4. - Convergence

Le ou les algorithmes précédents donnent toute satisfaction quant à l'identification de systèmes linéaires stationnaires ; ils peuvent également être utilisés avec succès sur des systèmes linéaires non stationnaires (variation lente). Dans ce cas, PANDYA a d'ailleurs mis en évidence le meilleur comportement de $\tilde{\Gamma}_3$ et $\tilde{\Gamma}_4$ par rapport à $\tilde{\Gamma}_1$ (propriétés statistiques : cf § 2.1.2.2.)

Malgré ces résultats, il faut néanmoins pouvoir s'assurer de la convergence (ou stabilité) de ces algorithmes vis à vis de conditions initiales arbitraires.

C'est pour cette raison que WONG et POLAK introduisent un test de stabilité dans leur algorithme, ou encore, que YOUNG emploie un filtre passe-bas pour éliminer toute fluctuation soudaine de $\hat{\Gamma}_k$; Pandya, quant à lui, utilise comme conditions initiales les résultats, après quelques pas de calcul, de l'algorithme des moindres carrés ($\hat{\Gamma}_2$) et assure ainsi la convergence. Il a également montré, par des simulations, que le domaine de stabilité par rapport aux conditions initiales peut être augmenté si la relation (13) fait référence à un filtre de Kalman complet.

Après les méthodes paramétriques précédentes, que nous avons très largement développées puisqu'elles s'inscrivent dans notre domaine d'étude, nous abordons, sous forme d'inventaire, les autres méthodes d'identification les plus connues.

2.2. - Autres méthodes

2.2.1. - A signaux de type déterministe

Ces signaux sont le plus souvent des échelons, des impulsions ou des signaux périodiques.

2.2.1.1. - Méthodes avec signaux en échelon

- "STEP METHOD" /12/ , /13/

On enregistre la réponse du système à une sollicitation en échelon. On cherche ensuite à l'identifier graphiquement de telle sorte que la réponse indicielle obtenue puisse être produite, dans les mêmes conditions, par un modèle de fonction de transfert

$$\frac{K e^{-pT}}{(1+pT)^n}$$

Du fait même du modèle, la méthode ne peut s'appliquer qu'à des réponses indicielles de type apériodique ; par ailleurs, il est bien évident qu'il faudra utiliser avec prudence un modèle identifié de cette sorte, car, assez particulier, il ne saurait prétendre à un très large domaine d'applications.

Des méthodes plus élaborées que la précédente, essentiellement graphique, peuvent être utilisées ; en particulier, celles faisant appel à un développement en série de la fonction de transfert, au voisinage de l'origine, dans le plan de Laplace. On cherche à identifier les coefficients de ce développement, à le relier à l'approximation de PADE et obtenir ainsi une expression rationnelle du modèle : le retard e^{-pT} introduit dans la méthode précédente, et parfois très gênant en tant que tel, est alors réduit à une forme rationnelle.

Ces méthodes demandent un calculateur mais, par contre, peuvent s'adapter à l'identification de réponses indicielles accusant des dépassements, un déphasage non minimal, et, dans certaines conditions, être encore valables, même pour des signaux autres que des échelons.

Ces "Step Method" sont dans l'ensemble assez faciles à mettre en oeuvre ; par contre, elles sont malheureusement très sensibles aux bruits et à l'influence des non linéarités, ce qui a pour effet de réduire assez bien leur précision. D'autre part, si un échelon (cf. le spectre d'un échelon) peut être caractérisé comme "riche" au point de vue "variations de fréquence", il est extrêmement "pauvre" en "variations d'amplitude", d'où l'intérêt des méthodes suivantes.

- "MULTI-STEP METHOD" /14/

Ces méthodes utilisent comme signal d'entrée une séquence d'échelons de différentes amplitudes. Le signal test couvre ainsi tout à la fois une partie du domaine fréquentiel et du domaine spatial et est donc intrinséquement meilleur en vue d'une identification. Les autres avantages (en fait des conséquences) sont une meilleure utilisation du temps de test et une diminution des temps de calcul.

Notons que ces méthodes font assez souvent appel à une analyse type transformée de Fourier ou doivent être complétées d'un algorithme tel celui des "moindres carrés".

2.2.1.2. - Méthodes impulsionnelles /15/

Le type même de ces méthodes est la méthode dite de la "réponse impulsionnelle" :

Prenons un système linéaire d'entrée x et de sortie y . On montre que la sortie $y(t)$ est donnée par l'intégrale de convolution :

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) W(t - \tau) d\tau$$

où $W(\tau)$ est la réponse impulsionnelle du système : c'est à dire un enregistrement de la sortie $y(\tau)$ résultant à une entrée $x(\tau)$ qui est une impulsion très brève de surface unité (Fig.6)

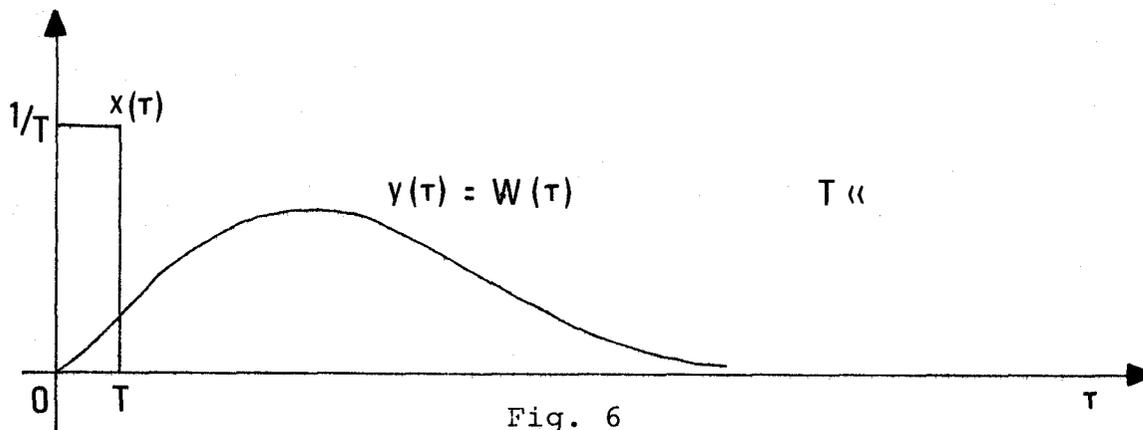


Fig. 6

Néanmoins, nous devons convenir qu'expérimentalement une telle action n'est pas concevable sur un processus industriel sans le perturber considérablement ; aussi, il est généralement plus simple et plus sûr de dériver la réponse indicielle ou encore d'avoir recours à divers moyens mathématiques, facilement programmables sur calculateur, qui permettront d'extraire $W(\tau)$ de la connaissance d'un $y(t)$ relatif à une entrée $x(t)$ quelconque. Nous revenons alors, sous d'autres formes, à la méthode de la réponse indicielle et plus généralement, aux méthodes "multi-step".

D'autres méthodes impulsionnelles font appel non plus à une seule et brève impulsion mais à un train d'impulsions et, très souvent, à des impulsions périodiques ; nous entrons alors dans le domaine des méthodes fréquentielles.

2.2.1.3. - Méthodes fréquentielles /16/

La méthode la plus connue est certainement la méthode harmonique.

On applique à l'entrée du système un signal sinusoïdal à diverses fréquences, ce qui permet une détermination de la réponse fréquentielle : amplitude $A(f)$ et phase $\phi(f)$ en fonction de la fréquence ; elle n'est cependant utilisable que pour des systèmes linéaires.

Une amélioration consiste à ne plus appliquer un signal sinusoïdal pur mais un signal contenant un certain nombre d'harmoniques du fondamental: elle a pour principal avantage d'arriver à compenser, en partie, l'effet des non linéarités. Plus généralement, on peut rechercher une composition spectrale des signaux d'entrée qui permettra d'identifier au mieux le système considéré.

Nous pouvons remarquer que les méthodes fréquentielles sont très largement employées car généralement simples et faciles à utiliser ; par contre, il faut ajouter qu'elles ne sont bien souvent valables que pour des processus linéaires monovariables, que la boucle de régulation doit être inopérante et qu'un bon rapport signal/bruit est nécessaire.

Pour terminer sur ces méthodes, passons à un exemple de méthode fréquentielle, proposée et testée par ISERMANN et, qui a l'avantage de recouvrir en partie les méthodes abordées dans les paragraphes précédents. /17/

S'il est possible de remplacer les constantes de temps relativement voisines d'un processus d'ordre élevé par des constantes de temps égales, on pourra réduire l'erreur globale sur les estimés des paramètres, malgré une perte d'information relative à la dynamique du processus. En particulier, il peut être avantageux de remplacer le modèle exact (au point de vue structure), d'un processus de type passe-bas, par le modèle suivant :

$$G(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{(1 + T_p)^n}$$

où les petites constantes de temps sont remplacées par un retard τ .

Dans sa méthode, Isermann suppose n connu et cherche à estimer les valeurs de K , τ et T . Le signal d'entrée qu'il utilise est une séquence de m impulsions rectangulaires et périodiques (Fig. 7)

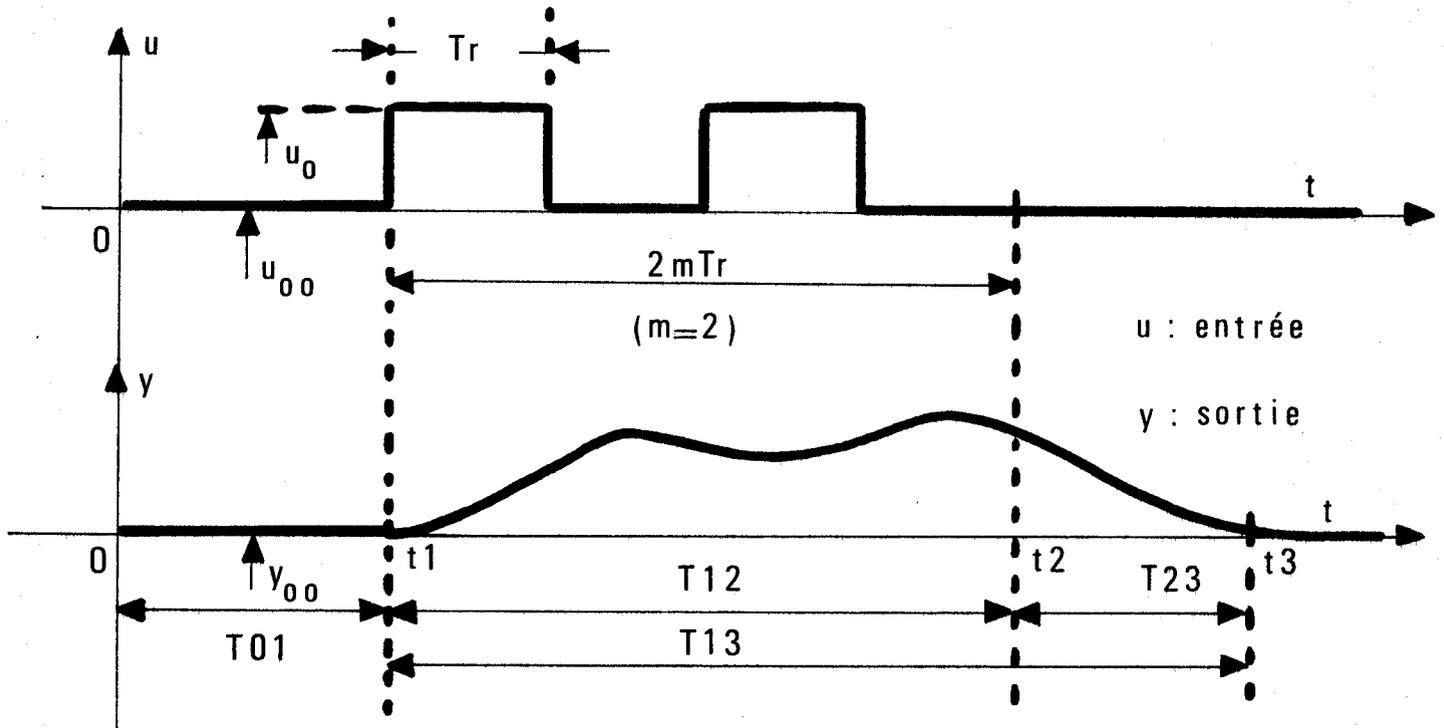


fig. 7

La méthode nécessite le choix de la largeur d'impulsion ($Tr = \pi/W_v$) qui sensibilisera au mieux l'ensemble des paramètres à identifier. Isermann a montré que W_v devait être choisie de telle sorte que le gain $G(jW_v)$ soit compris entre 0,6 et 0,2.

La réponse fréquentielle est déterminée par l'analyse de Fourier du système, c'est à dire :

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{\int_{t_1}^{t_3} (y(t) - y_{00}) e^{-j\omega t} dt}{\int_{t_1}^{t_3} (u(t) - u_{00}) e^{-j\omega t} dt} = \left| G(jW_v) \right| e^{-j\phi(\omega_v)}$$

On en déduit :

$$K = G(0) = \frac{\int_{t_1}^{t_3} (y(t) - y_{00}) dt}{\int_{t_1}^{t_3} (u(t) - u_{00}) dt}$$

et relativement au modèle :

$$T = \frac{1}{W_V} \sqrt{\left(\frac{K}{|G(jW_V)|} \right)^{2/n} - 1}$$

$$\tau = \frac{1}{W_V} \left(\phi(W_V) - n \operatorname{arc} \operatorname{tg} W_V T \right)$$

Remarquons que si Y_{00} n'est pas connu, on peut l'estimer par :

$$Y_{00} = \frac{1}{T_{01}} \int_0^{t_1} y(t) dt$$

L'algorithme est très simple et permet de réestimer les paramètres après chaque nouvelle séquence de m impulsions (m est fonction de W_V , du temps de test, de la précision de l'analyse de Fourier). Nous pouvons noter, de plus, que le modèle choisi n'est qu'un exemple et que la méthode peut être utilisée pour tout autre processus linéaire continu que l'on peut caractériser par un ensemble de trois paramètres.

Les différents tests, conduits en présence de bruit de mesure, indiquent un excellent comportement de la méthode par rapport à d'autres méthodes plus sophistiquées, nécessitant un plus gros volume de calculs.

2.2.2. - A signaux de type aléatoire

Les méthodes utilisant les techniques de corrélation et d'analyse spectrale sont particulièrement adaptées à l'identification de systèmes linéaires ; les fonctions de corrélation donnent un modèle sous forme temporelle et les densités spectrales de puissance , un modèle sous forme fréquentielle.

2.2.2.1. - Modèles /18/

Soit un système linéaire de fonction de transfert $\Phi(j\omega)$ et de réponse impulsionnelle $k(t)$.

Si à l'entrée nous appliquons un signal aléatoire stationnaire $x(t)$, nous récupérons en sortie un signal $y(t)$ également aléatoire et stationnaire.

Les propriétés statistiques de la sortie peuvent alors être rattachées simplement aux propriétés statistiques de l'entrée, via le système :

$$E [y(t)] = E [x(t)] \int_0^{\infty} k(a) da = \Phi(0) E [x(t)]$$

pour ce qui concerne les moyennes temporelles.

$$R_{YY}(\tau) = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} k(a) k(\beta) R_{XX}(\tau + \beta - a) da \right] d\beta$$

pour ce qui concerne les fonctions d'autocorrélation.

$$S_{YY}(j\omega) = \left| \Phi(j\omega) \right|^2 S_{XX}(j\omega)$$

pour ce qui concerne les densités spectrales de puissance.

De la même façon, on peut faire intervenir les intercorrélations entrée-sortie :

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau-\lambda) k(\lambda) d\lambda$$

$$S_{xy}(j\omega) = \Phi(j\omega) S_{xx}(j\omega)$$

Si nous considérons que le système est perturbé par un bruit $b(t)$ tel que : (Fig.8)

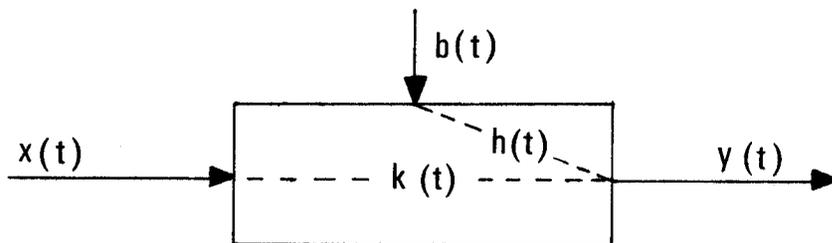


Fig.8

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t-\lambda) k(\lambda) d\lambda + \int_0^{\infty} b(t-\lambda) h(\lambda) d\lambda$$

Nous obtenons :

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau-\lambda) k(\lambda) d\lambda + \int_0^{\infty} R_{xb}(\tau-\lambda) h(\lambda) d\lambda$$

$$S_{xy}(j\omega) = \Phi_x(j\omega) S_{xx}(j\omega) + \Phi_b(j\omega) S_{xb}(j\omega)$$

C'est à dire les mêmes relations que les précédentes si $x(t)$ et $b(t)$ sont indépendants : $R_{xb}(\tau) = S_{xb}(j\omega) = 0$

On peut encore montrer que :

$$S_{YY}(j\omega) = \left| \Phi_x(j\omega) \right|^2 S_{XX}(j\omega) + \left| \Phi_b(j\omega) \right|^2 S_{bb}(j\omega) + 2 \operatorname{Re} \left[S_{bx}(j\omega) \Phi_x(j\omega) \Phi_b(-j\omega) \right]$$

se ramenant de la même façon aux deux premiers termes si $x(t)$ et $b(t)$ sont indépendants.

2.2.2.2. - Méthodes

On peut schématiquement les classer en deux groupes, suivant le type de signal aléatoire utilisé dans l'identification :

2.2.2.2.1. - *Perturbations naturelles* /19/

Si on utilise les bruits internes et propres au processus, ils peuvent généralement permettre l'identification globale de tout le système, incluant les diverses boucles et régulations. Quand, par contre, on ne veut identifier que le seul processus physique, il faut rendre les régulateurs inopérants, ce qui n'est pas toujours souhaitable sur un système de type industriel.

L'identification sera meilleure si le spectre des perturbations est le plus étendu possible.

On n'est pas limité, à priori, par les temps d'expérimentation, ce qui permet d'obtenir des fonctions de transfert relativement satisfaisantes à condition que le processus soit bien stationnaire.

2.2.2.2.2. - *Perturbations forcées* /20/

Il est encore possible d'identifier le processus, les régulateurs opérant, mais alors le choix des perturbations appliquées doit être tel que :

- il faut pouvoir obtenir une intercorrélation suffisamment forte entre entrée et sortie pour pallier à une éventuelle corrélation entre l'entrée et les perturbations naturelles.

- l'amplitude doit être assez modérée pour, à la fois, des raisons de sécurité (ne pas perturber inconsidérément le processus industriel) et de validité du modèle (linéarité).

Quant à la caractérisation, purement spectrale du signal injecté, il est préférable, bien évidemment, que la densité spectrale de puissance soit la plus uniforme possible et, que, par ailleurs, le signal lui-même soit de forme simple, telle binaire, ternaire ou multi-niveaux ; cette dernière est, sans doute, la plus intéressante, mais on lui préfère généralement la première, plus utilisée, du fait de la facilité de l'analyse mathématique qui en résulte.

Les temps d'expérimentation sont, comme précédemment, longs et parfois fastidieux. A cet effet, il peut être utile d'employer des méthodes qui permettent de réduire ce temps ; la méthode qui utilise comme signal d'entrée une "séquence binaire pseudo aléatoire" (S.B.P.A.) en est une. /21/

Les S.B.P.A. peuvent être générées au moyen d'un registre à décalage et d'additions modulo 2 entre certains digits X_i du registre à N digits ; sa longueur maximale est $L = 2^N - 1$ l'état $[0,0,\dots,0]$ n'étant pas possible ; par exemple, si $N = 4$ (Fig. 9) :

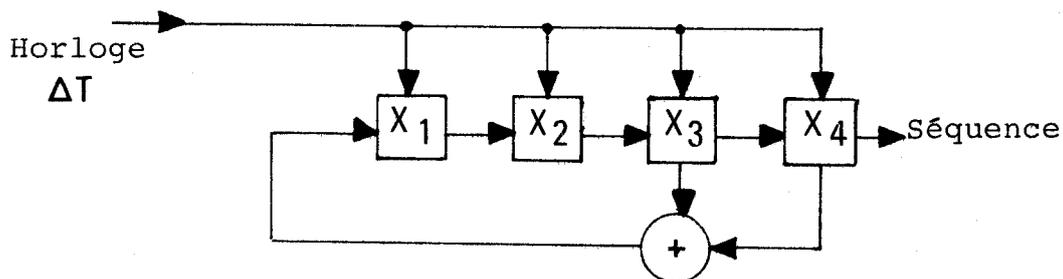


Fig. 9

Si l'état initial du registre est $[1,1,1,1]$ on obtient la séquence de longueur maximum suivante :

$$\underline{1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0},\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\dots$$

$$\text{où } L = 2^4 - 1 = 15$$

Toute séquence n'est pas obligatoirement de longueur maximum mais on montre qu'il est toujours possible par des additions sur les digits appropriés d'obtenir celle-ci. Comme c'est la plus intéressante, c'est généralement ce qu'on réalise. Pour que la valeur moyenne de la séquence soit proche de zéro, on choisit comme niveaux binaires + 1 et - 1 au lieu de 1 et 0 :

$$E [X] = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L X_i = \frac{1}{L} \text{ avec } L \text{ grand.}$$

Ainsi, on place à la sortie du registre un changeur de niveaux suivi d'un gain a de telle sorte que le signal soit du type (Fig.10) :

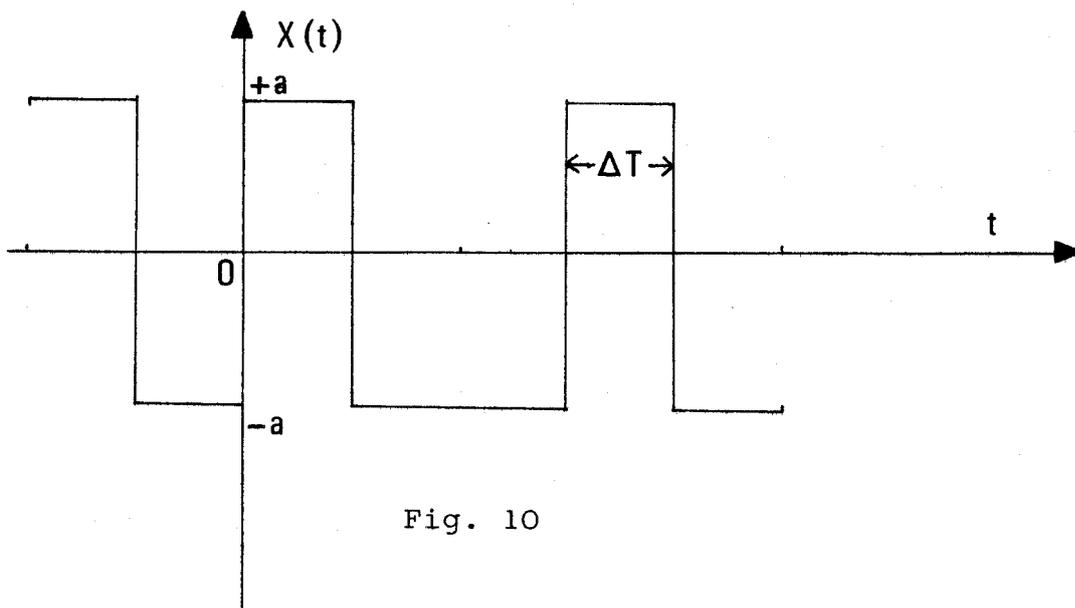


Fig. 10

On montre que la fonction d'autocorrélation de ce signal est la suivante (Fig. 11) :

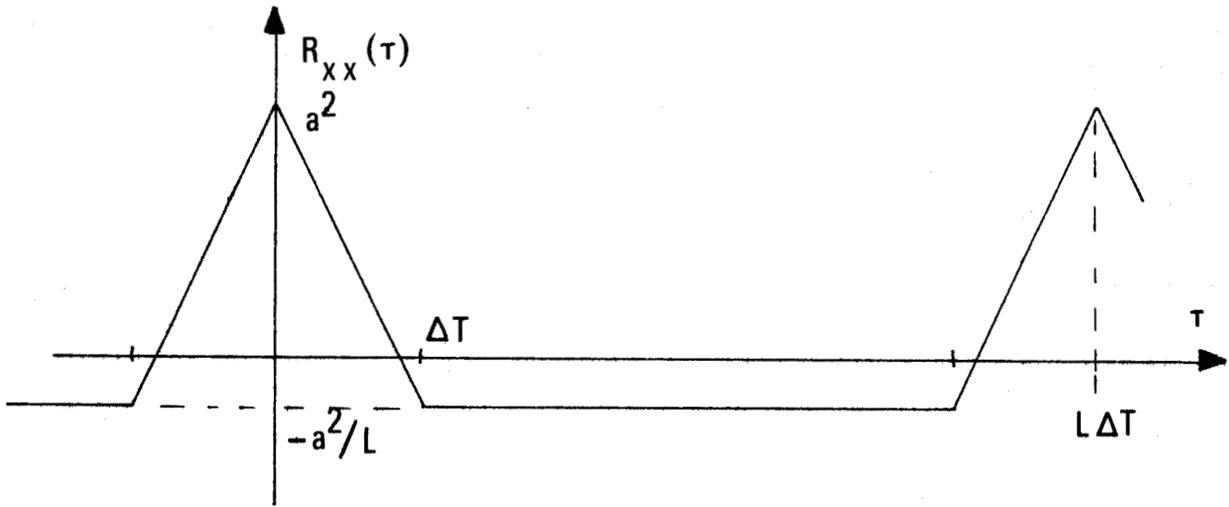


Fig. 11

Si a est petit devant L , et L grand, nous approchons la fonction d'autocorrélation d'un bruit binaire ; néanmoins, on peut limiter la longueur de la séquence et obtenir une identification satisfaisante des fonctions de transfert : il suffit pour cela que la longueur de séquence soit au moins supérieure au "temps de réponse" du processus ; tel est en ce sens la réduction du temps d'expérimentation énoncé plus haut.

2.2.2.3. - Applications

Les méthodes statistiques ont été largement employées ces dernières années, soit en tant que telles, soit en tant que complément à d'autres méthodes, n'y faisant pas appel quant au fond, mais où une amélioration des performances s'imposait vis à vis des erreurs dues aux perturbations internes et externes au processus.

Cet engouement s'explique quand on songe qu'elles ne demandent que peu de connaissances à priori sur le système, que beaucoup de systèmes sont naturellement perturbés et que l'on peut, dans bien des cas, utiliser ces perturbations en vue de l'identification, que par ailleurs, elles procurent une sorte d'estimation statistique des perturbations propres au processus (en ce sens, l'identification comprend non plus le système mais, le système et les perturbations habituelles).

Ces méthodes sont encore attrayantes par le fait qu'elles sont directes et applicables sans trop de problèmes à des processus industriels, sans causer de gêne excessive à leur fonctionnement actuel.

Par contre, on peut leur opposer qu'elles sont rarement itératives, peu conçues en vue d'une commande et surtout, que les temps d'expérimentation nécessaires sont généralement trop longs.

D'autre part, nous noterons qu'elles ne s'adaptent pas très bien à des processus non linéaires mais qu'il est néanmoins possible d'identifier des systèmes multivariés et même, non stationnaires lents. De même, les non linéarités peuvent parfois être "cernées" par le fait que ces méthodes conduisent à la fois à un aspect temporel et à un aspect fréquentiel : "la corrélation", si l'on peut s'exprimer ainsi, entre les fonctions de corrélation et les densités spectrales de puissance, peut à cet égard, nous être très utile. Pour terminer, nous ajouterons que, vis à vis de l'analyse spectrale, des méthodes comme la "Fast Fourier Transform" (F.F.T.) économisent le temps calcul et peuvent facilement être mise en oeuvre dans le cas où les perturbations naturelles sont utilisées.

3 - CONCLUSION

La conclusion idéale qu'il faudrait à ce chapitre est une sorte de vaste comparaison des différentes méthodes ci-dessus abordées. Disons, tout de suite, qu'elle n'est pas possible en tant que telle : l'abstraction ne peut pas être de mise en un tel domaine, il ne faut pas, en effet, comparer des méthodes sur leurs aspects trop formels et écartés des réalités mais les comparer en fonction des processus que l'on cherche à identifier et à commander.

Ces toutes dernières années, des tentatives ont été faites en ce sens, mais elles n'en sont encore qu'au début ; la raison en est, principalement, que les méthodes sont très diverses, allant parfois à contre courant les unes des autres, et que l'esprit d'analyse en ce domaine a toujours prévalu, par ce fait même, à l'esprit de synthèse. /17/, /22/.

Quant à nous, nous chercherons notre fil conducteur, notre ligne d'action, vers ce à quoi sert l'identification, vers ce à quoi il est le plus intéressant qu'elle mène : la commande efficace (précision, performances,...) et raisonnable (simplicité, temps calcul,...) d'un processus dans une identification en ligne.

CHAPITRE II

ELABORATION D'UNE PROCEDURE D'AJUSTEMENTS EN LIGNE D'UN MODELE DE COMMANDE DANS L'ESPACE PARAMETRIQUE

1 - INTRODUCTION

1.1. - Recherche d'une commande efficace

Toute action, pour être menée efficacement, nécessite une connaissance exacte, sinon la plus complète possible, de l'objet et des conditions sur et dans lesquels elle s'exerce.

Certaines de ces conditions limitent l'action : ce sont des contraintes. Leur connaissance pose parfois de sérieux problèmes, bien que souvent l'on puisse faire en sorte que l'action soit suffisamment en deçà de la valeur supposée de la contrainte et être sûr de ne pas lui imposer d'obstacle.

L'objet transforme l'action incidente en action résultante. La première est menée efficacement si la seconde est bien le but que l'on s'est fixé et, éventuellement, a été atteint dans des conditions déterminées ou critère de performance.

Nous avons vu que la connaissance de l'objet passait par une identification qualitative (ramenée, bien souvent, au choix d'une structure ou "modèle" susceptible de la représenter) et une identification quantitative (identification numérique des valeurs que prennent les "paramètres" d'une structure supposée ou

ou identification proprement dite ; identification paramétrique au sens large).

La réalisation du but fixé nécessite des commandes appropriées (action incidente) et celles ci, à leur tour, l'identification de l'objet (ou système) ; il semble logique, dans un souci d'efficacité, de réunir en une seule les deux phases ci-dessus. Lorsque cela est possible, l'identification présente alors tous les caractères d'une identification en ligne. Cependant, de notre point de vue, celle-ci, en tant que telle, n'est pas le but ultime, celui-ci étant la réalisation de l'action résultante désirée ; et le problème est tout autant un problème de commande que d'identification, les deux devenant inséparables.

1.2. - Cadre de l'étude

En résumé, notre étude se place dans le cadre suivant :

Nous cherchons à faire de la commande de systèmes réels (c'est à dire de systèmes imparfaitement connus) et non à étudier comme c'est parfois le cas, la commande de systèmes parfaitement connus (c'est à dire, en fait, de modèles).

Nous ne cherchons absolument pas à faire de l'identification précise de systèmes, en tant que telle, mais de l'identification dans le but de réaliser une commande satisfaisante des systèmes réels ; l'identification est un moyen, non une fin en soi.

Dans cet esprit apparaît le problème de l'incompatibilité d'une bonne identification et d'une bonne commande simultanées et la façon de l'éviter, sinon de le résoudre.

2 - INCOMPATIBILITE IDENTIFICATION-COMMANDE

2.1. - Difficulté à associer identification et commande

On ne pourra pas identifier convenablement un système dynamique sans considérer ses régimes transitoires. Ceux-ci permettent d'obtenir une identification relativement acceptable du comportement dynamique des systèmes parce que vis à vis des bruits les sorties successives (systèmes échantillonnés) sont suffisamment différenciées les unes des autres. Diverses méthodes, classiques pour la plupart, répondent à cette attente.

Aux identifications valables du transitoire succèdent tour à tour des commandes suffisamment adaptées à la valeur désirée sur la sortie ; ce qui amène peu à peu le système vers un régime "permanent". Mais dans ce cas, les sorties, voisines les unes des autres, ne permettent plus une identification correcte, d'où une mauvaise commande, un écart sensible par rapport à la sortie voulue et un retour au transitoire. Le cycle se répète avec des écarts de plus en plus prononcés par rapport à la position nominale : le système se retrouve en instabilité complète.

Ainsi lors de l'identification et de la commande en ligne apparaît une incompatibilité, au niveau de la tendance au régime "permanent", entre la réalisation simultanée d'une bonne identification et d'une bonne commande.

2.2. - Possibilité de les associer

L'incompatibilité peut être levée en n'identifiant le système que sur ses comportements dynamiques - modèle évolutif - ; par contre, on rend fixe le modèle lors des comportements "statiques" . (En échantillonné, on définirait un comportement "statique", par rapport au modèle, comme donnant lieu à $2q + 1$ sorties voisines au bruit près - par exemple, une fonction de l'écart type - q étant l'ordre du modèle).

Cette façon de faire, bien souvent adoptée, ne permet cependant pas d'éviter un comportement oscillatoire, par rapport à la sortie désirée, dont l'amplitude sera relativement plus importante que celle du bruit.

Par conséquent, il faut garder une certaine forme d'identification autour du régime "permanent", mais une identification des plus simples de manière à ne pas retrouver l'incompatibilité identification-commande et obtenir la sortie désirée au bruit près uniquement.

3 - FORME GENERALE DE L'IDENTIFICATION

3.1. - Caractérisation sommaire des processus à identifier

L'identification que nous allons mener ne pourra l'être qu'à partir de la base minimale de tout ce que nous pouvons généralement connaître d'un système, tel que sa classe, ses limites de comportement, ... C'est le cadre de l'identification.

Le système, soumis à des commandes échantillonnées qui l'amènent à fonctionner en régime linéaire, appartient à la classe des systèmes échantillonnés linéaires.

Nous avons la connaissance des principales limitations physiques intervenant tant sur l'entrée que sur la sortie ; nous connaissons également un domaine, liant entrées et conditions initiales, tel que tout point du domaine pris comme point de départ, à chaque instant d'échantillonnage, suffise à assurer la stabilité du système.

Ainsi, le domaine où il est toujours possible de définir l'entrée et la sortie, et qui assure la linéarité et la stabilité, sera le domaine de travail sur lequel on identifiera et commandera le système (domaine des commandes admissibles).

Nous connaissons sinon l'ordre exact du système, du moins un ordre minimal au delà duquel tout accroissement de l'ordre n'apporterait rien de plus vis à vis de la précision avec laquelle nous comptons commander efficacement le système.

3.2. - Modèle d'identification

Nous pouvons représenter l'évolution de la sortie discrète du système réel par l'équation :

$$(1) \quad v_{k+q} = \sum_{i=1}^{i=q} b_{i,k+q-1} v_{k+i-1} + \sum_{i=1}^{i=q} a_{i,k+q-1} u_{k+i-1}$$

$$k = 0, 1, \dots$$

équation d'ordre q où, T étant la période d'échantillonnage, u_k est la valeur de l'entrée du système réel à l'instant kT jusqu'à l'instant $(k+1)T$ et v_k la valeur de la sortie du système réel à l'instant kT .

Le modèle apparaît sous la forme d'un vecteur M_{k+q-1} dont les composantes sont les paramètres $a_{i, k+q-1}$ et $b_{i, k+q-1}$ de l'équation (1).

3.3 - Association Identification-Commande

Partant d'un modèle M_{q-1} , de la mesure des sorties v_0, v_1, \dots, v_{q-1} , de la connaissance des entrées u_0, u_1, \dots, u_{q-2} , du but désiré w_q , nous pouvons déterminer la commande u_{q-1} qui doit théoriquement amener la sortie du système réel au but voulu. Généralement, ceci ne pourra pas être réalisé, tout au moins immédiatement ; aussi la méthode consistera à faire en sorte que $\left| \begin{array}{c} w_{k+q} - v_{k+q} \\ \text{mesuré} \end{array} \right|$ ou une fonction de cette expression, par exemple le carré, décroisse lorsque k croît, c'est à dire d'améliorer constamment la connaissance des paramètres du système réel au fur et à mesure du déroulement du processus.

A cet effet, on peut, par exemple associer à chaque "vecteur paramètre" M_{k+q-1} une "fonction de correction" S_{k+q} telle que :

$$(2) \quad M_{k+q} = S_{k+q} M_{k+q-1}$$

La forme de S (forme matricielle) est celle d'une similitude dans l'espace paramétrique à $2q$ dimensions. Le point origine de chaque vecteur M , ou point origine des coordonnées, définit le point invariant dans la similitude. Toute similitude étant décomposable en homothéties et rotations de même centre on pourra exprimer S sous forme de tels déplacements élémentaires.

3.3.1. - Forme de l'identification lors des régimes à forte tendance dynamique

Sur les transitoires il conviendra d'adapter le modèle en faisant soit des similitudes complètes soit plus simplement des homothéties et rotations successives. En ce qui concerne les premières, dont la formulation est immédiate, nous pouvons nous ramener à des méthodes telle celle des moindres carrés, pour les

dernières, il faut faire apparaître le module du vecteur paramètre et sa direction (par un produit scalaire) et faire en sorte qu'ils s'adaptent à ceux du vecteur paramètre réel.

3.3.2. - Forme de l'identification lors des régimes à faible
tendance dynamique

En régime "permanent" il convient de ne garder que les transformations les plus simples sur le modèle, à savoir les homothéties. Mais, par ailleurs, il faut s'assurer que ces transformations pour simples qu'elles soient, mènent également à la convergence en sortie, au bruit près.

3.4. - Problème des mesures bruitées

S'il y a bruit de mesure, il est vraisemblable que nous le retrouverons, tout ou partie, dans l'estimation des M_k . Aussi, il s'agira à partir des M_k calculés pas à pas, et donc entachés d'erreur, d'extraire une valeur de M se rapprochant le plus du système réel. C'est ce que nous aborderons en partie avec l'étude du système statique qui nous permettra d'introduire les transformations homothétiques.

4 - IDENTIFICATION et COMMANDE ADAPTEES AUX SYSTEMES STATIQUES

4.1. - Transformations homothétiques

Soit un système statique à commande échantillonnée.

On suppose qu'il est possible de le décrire par une relation linéaire du type :

$$\begin{matrix} v_k \\ \text{mesuré} \end{matrix} = \begin{matrix} v_k \\ \text{réel} \end{matrix} = p u_k$$

c'est-à-dire que, dans un premier temps, nous faisons abstraction de tout bruit sur le système.

La représentation sous forme de modèle est la suivante :

$$v_{k+1} = a_k u_k$$

Nous commandons le système de telle sorte que :

$$w_{k+1} = v_{k+1} \quad (w \text{ étant le but désiré})$$

Nous pouvons donc formuler le problème sous la forme suivante :

a) ce que l'on désire obtenir : $w_{k+1} = a_k u_k$

b) ce que l'on obtient réellement : $v_{k+1} = p u_k$

D'où la valeur de u_k :

$$u_k = \frac{w_{k+1}}{a_k}$$

On en déduit :

$$p = \frac{v_{k+1}}{w_{k+1}} a_k$$

De cette dernière relation, nous tirons :

$$a_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{w_{k+1}} a_k$$

C'est à dire que la fonction de correction S_{k+1} correspond à une homothétie de rapport :

$$h_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{w_{k+1}}$$

4.2. - Présence de mesures bruitées

Puisque nous avons fait abstraction de tout bruit sur le système, nous devons théoriquement obtenir :

$$p = a_{k+n} , \quad \forall n \geq 1 \quad \text{ou encore}$$

$$l = h_{k+n} , \quad \forall n \geq 2$$

Comme physiquement ce ne sera pas le cas, la récurrence garde tout son sens (également si le système n'est pas stationnaire). Aussi déterminons l'expression de a_{k+n} .

4.2.1. - Valeur de a_{k+n} en fonction de a_k

On peut exprimer a_{k+n} comme une fonction de a_k et des h de $(k+1)T$ à $(k+n)T$; en effet :

$$a_{k+1} = h_{k+1} a_k$$

$$a_{k+2} = h_{k+2} a_{k+1} = h_{k+2} h_{k+1} a_k$$

$$a_{k+n} = \left[\prod_{i=k}^{k+n-1} h_{k+i} \right] a_k$$

et
$$u_{k+n} = \frac{w_{k+n+1}}{a_{k+n}}$$

$$u_{k+n} = \frac{w_{k+n+1}}{\left[\prod_{i=1}^n h_{k+i} \right] a_k}$$

Si nous prenons $w = \text{constante } \forall k$, il vient :

$$\prod_{i=1}^n h_{k+i} = \frac{\prod_{i=1}^n v_{k+i}}{w^n}$$

d'où :

$$a_{k+n} = \left[\prod_{i=1}^n v_{k+i} \right] \frac{a_k}{w^n}$$

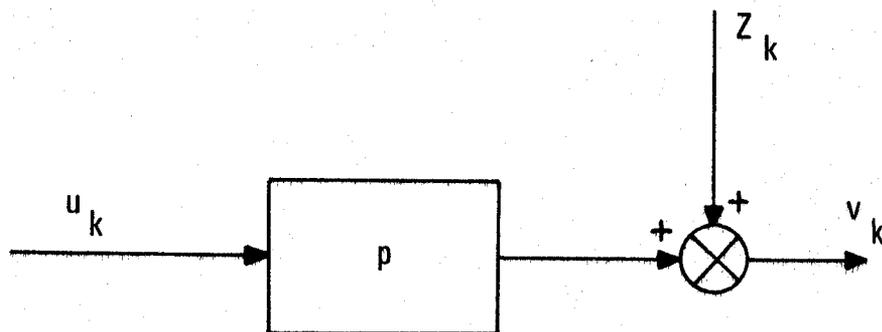
$$u_{k+n} = \frac{1}{\left[\prod_{i=1}^n v_{k+i} \right]} \frac{w^{n+1}}{a_k}$$

Cependant, cette forme ne permet pas d'apprécier l'influence du bruit dans la détermination successive des a_k car elle ne le fait pas intervenir de façon explicite.

4.2.2. - Valeur de l'indétermination apportée sur a_{k+n} par le bruit

On sait que v_{k+1} est en fait la somme de v_{k+1} réel et du bruit sur le système (bruit ramené en sortie : z_{k+1})

$$v_{k+1} = p u_k + z_{k+1}$$



On supposera que les z_k sont à moyenne nulle, non corrélés, et, par exemple, à distribution gaussienne.

Traitons le cas où $w = \text{constante } V_k$.

Il vient :

$$a_{k+1} = \frac{v_{k+1} \text{ mes.}}{w} a_k$$

$$a_{k+1} = \frac{p u_k + z_{k+1}}{w} a_k$$

Or, $u_k = \frac{w}{a_k}$, d'où

$$a_{k+1} = \frac{(p \frac{w}{a_k} + z_{k+1})}{w} a_k$$

$$a_{k+1} = p + \frac{z_{k+1}}{w} a_k$$

posons $z'_{k+1} = \frac{z_{k+1}}{w}$, il vient

$$a_{k+1} = p + z'_{k+1} a_k$$

=====

(Nous supposons $|z'| \leq |z'_{\max}| < 1$ avec, généralement, $|z'|$ petit devant cette quantité).

Nouvelle récurrence à partir de laquelle on déduit a_{k+2} :

$$a_{k+2} = p + z'_{k+2} a_{k+1}$$

$$a_{k+2} = p + z'_{k+2} (a + z'_{k+1} a_k)$$

$$a_{k+2} = p (1 + z'_{k+2}) + z'_{k+2} z'_{k+1} a_k$$

de même :

$$a_{k+3} = p + z'_{k+3} a_{k+2}$$

$$a_{k+3} = p + z'_{k+3} (a(1+z'_{k+2}) + z'_{k+2} z'_{k+1} a_k)$$

$$a_{k+3} = p (1 + z'_{k+3} + z'_{k+3} z'_{k+2}) + z'_{k+3} z'_{k+2} z'_{k+1} a_k$$

et enfin :

$$a_{k+n} = p (1 + z'_{k+n} + z'_{k+n} z'_{k+n-1} + \dots + z'_{k+n} \dots z'_{k+2}) \\ + a_k z'_{k+n} \dots z'_{k+1}$$

L'erreur d'estimation sur a , en prenant pour a la valeur estimée a_{k+n} :

$$E_{k+n} = p (z'_{k+n} + \dots + z'_{k+n} \dots z'_{k+2}) \\ + a_k z'_{k+n} \dots z'_{k+1}$$

L'erreur relative :

$$\epsilon_{k+n} = (z'_{k+n} + \dots + z'_{k+n} \dots z'_{k+2}) + \frac{a_k}{p} z'_{k+n} \dots z'_{k+1}$$

Posons : $\frac{a_k}{p} = q$, il vient :

$$\epsilon_{k+n} = (z'_{k+n} + \dots + z'_{k+n} \dots z'_{k+2}) + q z'_{k+n} \dots z'_{k+1}$$

Si n est grand et $|z'|$ généralement petit devant 1, nous aurons
 ϵ_{k+n} du style :

$$\epsilon_{k+n} \approx z'_{k+n} (1 + z'_{k+n-1})$$

(en se limitant aux deux premiers termes).

D'autre part, on peut écrire que ϵ_{k+n} est compris entre
 $\pm L$, avec $L = \frac{|z'_{\max}|}{1 - |z'_{\max}|}$.

En effet :

$$|\epsilon_{k+n}| \leq |z'_{k+n}| + \dots + |z'_{k+2} \dots z'_{k+n}| + |q| |z'_{k+1} \dots z'_{k+n}|$$

$$|\epsilon_{k+n}| \leq |z'_{\max}| + \dots + |z'_{\max}|^{n-1} + |q| |z'_{\max}|^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\epsilon_{k+n}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (|z'_{\max}| + \dots + |z'_{\max}|^n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (|q| - 1) |z'_{\max}|^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\epsilon_{k+n}| \leq L = \frac{|z'_{\max}|}{1 - |z'_{\max}|}$$

4.2.3. - FILTRAGE

La dernière expression du paragraphe précédent met en évidence le fait que l'on ne peut s'affranchir du bruit par le seul fait des récurrences.

Aussi, il semble préférable de considérer les a_k de la même façon que des mesures bruitées et d'essayer de les filtrer convenablement.

D'autre part, le fait de prendre $a_{k+1} = p_{(k)}$ (paramètre réel à l'instant kT) revient à suivre le système réel avec une période de retard qui est source d'erreur si nous envisageons un système où $p_{(k)}$ est soumis à une certaine loi d'évolution -système non stationnaire- (évolution qui est soit réelle, soit fictive ; On peut envisager une évolution fictive du paramètre qui tienne compte des imperfections du modèle, de sa trop grande simplification au regard du processus réel). En ce sens, on pourrait envisager un filtrage prédictif.

[A noter qu'il supposerait un minimum de corrélation entre les diverses mesures, ce qui peut se traduire par une fonction d'autocorrélation $\rho(\tau)$ telle que $\frac{d\rho(0)}{d\tau} = 0$]

Il est également souhaitable de ne pas filtrer les a_k de kT à $(k+n)T$ et d'estimer \hat{a}_{k+n+1} , ceci quelque soit n , mais, après une phase initiale de kT à $(k+N-1)T$, de les filtrer de kT à $(k+N)T$ et d'estimer \hat{a}_{k+N+1} , puis de les filtrer de $(k+1)T$ à $(k+N+1)T$ et d'estimer \hat{a}_{k+N+2} , et ainsi de suite (estimation à "horizon fuyant") ; cette façon de faire permettant de tenir compte de l'évolution probable de $p_{(k)}$ (moins bien cependant qu'en faisant appel à un filtrage réellement prédictif).

Partant de ces constatations, il semble que la mise en oeuvre d'un filtre linéaire discret à mémoire finie N pourrait reproduire assez fidèlement l'évolution de $p_{(k)}$ (suivant l'importance et le type de celle-ci se pose le problème du choix de la mémoire N et du degré du filtre).

4.2.3.1. - *Caractéristiques du Filtrage (filtrage non prédictif)*

Il s'agira :

- si le bruit est à moyenne nulle, de faire en sorte qu'à la sortie du filtre le bruit soit toujours à moyenne nulle.
- si l'écart type du bruit à l'entrée est σ_e , de réduire celui en sortie, σ_s , de telle sorte que $\sigma_s \ll \sigma_e$.
- si l'évolution de $a_{(k)}$ peut s'exprimer sous forme d'un polynôme $P(t)$ de degré p , de restituer en sortie ce polynôme ($P(t)$ non bruité - filtre de degré p).

4.2.3.2. - *Application au système statique*

4.2.3.2.1. - *Expression de l'estimé du paramètre*

Si on considère qu'il n'y a pas d'évolution de $p_{(k)}$:
 $p_{(k)} = p, \forall k$, il suffira de moyenner les a_k :

$$\hat{a}_{k+n+1} = \frac{\sum_{i=1}^n a_{k+i}}{n}$$

=====

$$\hat{a}_{k+n+1} = \frac{\sum_{i=1}^n (\rho + E_{k+i})}{n} = \frac{n\rho + \sum_{i=1}^n E_{k+i}}{n}$$

$$// = \rho + \frac{\sum_{i=1}^n E_{k+i}}{n}$$

4.2.3.2.2. - Expression de l'erreur d'estimation et de l'erreur relative d'estimation

L'erreur d'estimation de ρ , en prenant pour ρ la valeur estimée \hat{a}_{k+n+1} est :

$$X_{k+n+1} = \frac{\sum_{i=1}^n E_{k+i}}{n}$$

=====

L'erreur relative est alors :

$$x_{k+n+1} = \frac{\sum_{i=1}^n E_{k+i}}{n\rho} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{E_{k+i}}{\rho}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \epsilon_{k+i}}{n}$$

$$x_{k+n+1} = \overline{\epsilon}_{k+n}$$

=====

4.2.3.2.3 - Comportement de l'erreur relative lorsque le nombre d'échantillons croît.

Nous pouvons écrire :

- $\epsilon_{k+1} = qz'_{k+1}$
- $\epsilon_{k+2} = z'_{k+2} + qz'_{k+2} z'_{k+1}$
- $\epsilon_{k+3} = z'_{k+3} + z'_{k+3}z'_{k+2} + qz'_{k+3} z'_{k+2} z'_{k+1}$
- $\epsilon_{k+4} = z'_{k+4} + z'_{k+4} z'_{k+3} + z'_{k+4} z'_{k+3} z'_{k+2}$
 $+ q z'_{k+4} z'_{k+3} z'_{k+2} z'_{k+1}$

d'où :

- $\overline{\epsilon}_{k+1} = q z'_{k+1}$
- $\overline{\epsilon}_{k+2} = \frac{z'_{k+2} + q(z'_{k+2} z'_{k+1} + z'_{k+1})}{2}$
- $\overline{\epsilon}_{k+3} = \frac{\left[\begin{array}{l} z'_{k+3} z'_{k+2} + (z'_{k+3} + z'_{k+2}) + q(z'_{k+3} z'_{k+2} z'_{k+1}) \\ + z'_{k+2} z'_{k+1} + z'_{k+1} \end{array} \right]}{3}$
- $\overline{\epsilon}_{k+4} = \frac{\left[\begin{array}{l} z'_{k+4} z'_{k+3} z'_{k+2} + (z'_{k+4} z'_{k+3} + z'_{k+3} z'_{k+2}) + \\ (z'_{k+4} + z'_{k+3} + z'_{k+2}) + q(z'_{k+4} z'_{k+3} z'_{k+2} z'_{k+1} + \\ z'_{k+3} z'_{k+2} z'_{k+1} + z'_{k+2} z'_{k+1} + z'_{k+1}) \end{array} \right]}{4}$

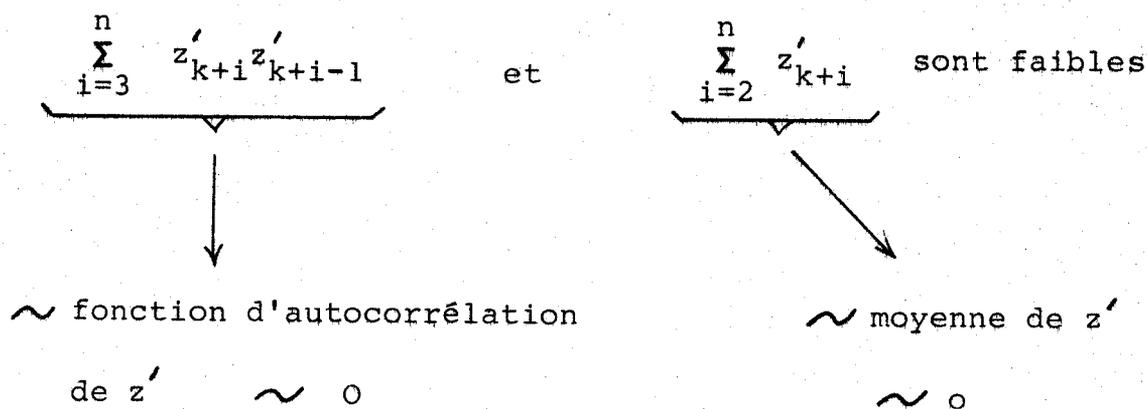
$$\overline{\epsilon}_{k+n} = \left[z'_{k+n} \cdots z'_{k+2} + \sum_{i=n-1}^n z'_{k+i} \cdots z'_{k+i-n+3} + \sum_{i=n-2}^n z'_{k+i} \cdots \right. \\ \left. \cdots z'_{k+i-n+4} + \cdots + \sum_{i=3}^n z'_{k+i} z'_{k+i-1} + \sum_{i=2}^n z'_{k+i} + \right. \\ \left. q (z'_{k+n} \cdots z'_{k+1} + z'_{k+n-1} \cdots z'_{k+1} + \cdots + z'_{k+2} z'_{k+1} + z'_{k+1}) \right] / n$$

$|z'|$ est généralement petit devant 1, nous aurons :

$$\overline{\epsilon}_{k+n} \approx \frac{\sum_{i=3}^n z'_{k+i} z'_{k+i-1} + \sum_{i=2}^n z'_{k+i} + q (z'_{k+2} z'_{k+1} + z'_{k+1})}{n}$$

en se limitant aux termes en z'^2 .

Et si n est grand :



Il reste :

$$\frac{q(z'_{k+2}z'_{k+1} + z'_{k+1})}{n}$$

bornée supérieurement par :

$$\frac{|q| |z'_{\max}| (1 + |z'_{\max}|)}{n}$$

— inférieurement par la même quantité, de signe opposé.

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, les bornes $\rightarrow 0$, d'où de même de la quantité bornée.

Il en résulte que pour n grand $\overline{\varepsilon}_{k+n}$ est assimilable à zéro :

$$\overline{\varepsilon}_{k+n} \approx 0 \quad \text{pour } n \gg$$

=====

Par conséquent :

$$\hat{a}_{k+n} \approx p \quad \text{pour } n \gg$$

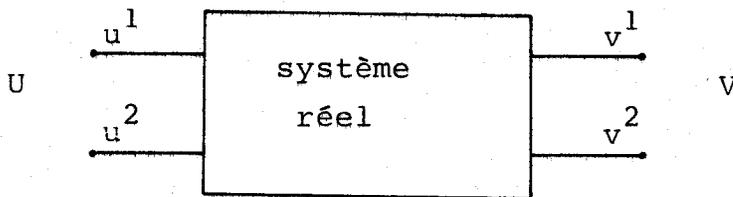
=====

5 - SYSTEME STATIQUE - EXTENSION DES "HOMOTHETIES" AUX DIMENSIONS SUPERIEURES

5.1.- Cas où le nombre d'entrées est égal au nombre de sorties

Le système que nous venons d'étudier peut s'intituler "système statique, dimension 1". Nous pouvons également envisager des systèmes statiques de dimension 2, 3, ..., n.

Voyons le cas de la dimension 2 :



Le système réel considéré peut alors être décrit par une relation du type :

$$\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}_{k+1} \underset{\text{mesuré}}{=} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}_{k+1} \underset{\text{réel}}{=} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix}_k$$

ou :

$$\begin{matrix} V_{k+1} \\ \text{mesuré} \end{matrix} = \begin{matrix} V_{k+1} \\ \text{réel} \end{matrix} = P U_k$$

(on fait abstraction de tout bruit).

La représentation sous forme de modèle est la suivante :

$$V_{k+1} = M_k U_k$$

Nous commandons le système de telle sorte que :

$$W_{k+1} = V_{k+1} \text{ mesuré}$$

Nous pouvons donc formuler le problème sous la forme suivante:

a) ce que l'on désire obtenir : $W_{k+1} = M_k U_k$

b) ce que l'on obtient réellement : $V_{k+1} = P U_k$
mesuré

en itérant :

a') $W_{k+2} = M_{k+1} U_{k+1}$

b') $V_{k+2} = P U_{k+1}$
mesuré

Nous en déduisons U_k et U_{k+1} :

$$U_k = M_k^{-1} W_{k+1}$$

$$U_{k+1} = M_{k+1}^{-1} W_{k+2}$$

avec les conditions : M_k et $M_{k+1} \neq 0$

de b) et b'), nous tirons :

$$P = \left[V_{k+1}, V_{k+2} \right]_{\text{mesuré}} \left[U_k, U_{k+1} \right]^{-1}$$

D'où, l'expression récurrentielle :

$$M_{k+2} = \left[V_{k+1}, V_{k+2} \right]_{\text{mesuré}} \left[U_k, U_{k+1} \right]^{-1}$$

$$M_{k+2} = \left[V_{k+1}, V_{k+2} \right]_{\text{mesuré}} \left[M_k^{-1} W_{k+1}, M_{k+1}^{-1} W_{k+2} \right]^{-1}$$

=====

avec les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} |M_k|, |M_{k+1}| \neq 0 \\ |M_k^{-1} W_{k+1}, M_{k+1}^{-1} W_{k+2}| \neq 0 \end{array} \right.$$

La généralisation au cas du système statique de dimension n est la suivante :

$$M_{k+n} = \left[V_{k+1}, \dots, V_{k+n} \right]_{\text{mesuré}} \left[M_k^{-1} W_{k+1}, \dots, M_{k+n-1}^{-1} W_{k+n} \right]^{-1}$$

=====

avec les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} |M_k|, \dots, |M_{k+n-1}| \neq 0 \\ |M_k^{-1} W_{k+1}, \dots, M_{k+n-1}^{-1} W_{k+n}| \neq 0 \end{array} \right.$$

5.2. - Cas où le nombre d'entrées est différent du nombre de sorties

Nous venons de considérer un système statique où le nombre d'entrées est égal au nombre de sorties. Ce cas n'étant pas très général, il nous faut observer si la méthode précédente est toujours applicable si ces nombres sont différents :

- Si le nombre d'entrées est inférieur au nombre de sorties, la matrice $\begin{bmatrix} U_k, U_{k+1}, \dots, U_{k+n-1} \end{bmatrix}$ n'est pas inversible puisqu'elle comporte au moins une ligne de zéros.

- Par contre, si le nombre de sorties est inférieur au nombre d'entrées, c'est la matrice $\begin{bmatrix} V_{k+1}, V_{k+2}, \dots, V_{k+n} \end{bmatrix}$ qui comporte au moins une ligne de zéros et, par conséquent, la matrice M_{k+n} est non inversible et empêche de déterminer la commande U_{k+n} .

Ainsi, la méthode, telle qu'elle est décrite précédemment, ne peut être appliquée directement quand le nombre d'entrées est différent du nombre de sorties.

Plusieurs voies de résolution sont néanmoins possibles :

- la première consiste, si le nombre de sorties est supérieur au nombre d'entrées, à caractériser les sorties les plus importantes et n'en conserver qu'un nombre égal à celui des entrées et à traiter de la même façon que précédemment : il s'agit alors d'une identification et d'une commande en fonction d'une certaine partition du vecteur de sortie.

- la seconde consiste, au contraire, si le nombre de sorties est inférieur au nombre d'entrées, à augmenter fictivement le nombre des premières en adjoignant une ou plusieurs "boîtes noires" sur le système et en prenant soin de ne pas trop le perturber. On identifie et commande alors l'ensemble système réel + boîtes noires.

- une solution de compromis peut encore être envisagée : elle consiste à faire appel non plus aux matrices inverses mais aux pseudo-inverses chaque fois que cela est nécessaire. Elle n'est certainement pas tout à fait rigoureuse mais son avantage est de pouvoir se passer d'un ajustement du nombre des entrées et des sorties tel qu'il est envisagé ci-dessus et qui nécessite un choix parfois délicat des sorties à retenir ou à construire.

Ayant introduit la transformation homothétique pour les systèmes statiques, il semble naturel de l'adopter comme moyen d'identification et de commande au niveau du "Permanent" atteint par les systèmes dynamiques. C'est l'objet du et des paragraphes suivants.

6 - SYSTEMES DYNAMIQUES

6.1. - Convergence de l'identification adoptée au niveau du "Permanent"

Montrons que la sortie que l'on veut atteindre se ramène dans le plan des coordonnées (v_k, v_{k+1}) à un point d'attraction pour son voisinage (le régime "Permanent") si on effectue une suite d'homothéties de rapport $\frac{v_{k+1}}{w}$

6.1.1. - Choix du rapport d'Homothétie

Le choix du rapport $\frac{v_{k+1}}{w}$ procède de l'analogie qui doit exister entre les homothéties, tant sur un système statique que dynamique.

6.1.2. - Approximation du "Permanent" à un premier ordre

Le "Permanent" tel que nous l'entendons n'est pas statique mais conserve un faible comportement dynamique, que nous ne pouvons négliger, et que l'on assimilera, en première approximation, à un premier ordre.

Nous examinerons, plus loin, la validité de l'approximation retenue, et, s'il y a lieu de la compléter.

6.1.3. - Convergence de l'identification

6.1.3.1. - Expression de la sortie du système réel en fonction des commandes résultant de l'identification

On désire obtenir : $w = b_k v_k + a_k u_k$

or, on obtient : $v_{k+1} = q v_k + p u_k$

On réalise les homothéties suivantes :

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{bmatrix} = \frac{v_{k+1}}{w} \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} \quad (w \neq 0)$$

Partant de la condition initiale v_0 et du vecteur M_0 , on cherche comment s'exprime v_n . On trouve (+) :

$$\begin{aligned} v_1 &= K v_0 + L w \\ v_2 &= K v_1 + L w \frac{w}{v_1} \\ &\text{-----} \\ v_{n+1} &= K v_n + L w \frac{w}{\prod_{i=1}^n v_i} \end{aligned}$$

avec $K = (q - p \frac{b_0}{a_0})$ et $L = \frac{p}{a_0}$

ou encore, si l'on suppose $\begin{cases} v_i \neq 0 & (i \text{ variant de } 1 \text{ à } n) \\ L \neq 0 \end{cases}$

$$v_{n+2} = K \left[v_{n+1} - \frac{v_n}{v_{n+1}} w \right] + w$$

Si on suppose que la limite ℓ existe quand $n \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\ell = w \quad \forall K \neq 1$$

Le système complet est donc un système non linéaire d'ordre 2.

(+) - Calculs détaillés du paragraphe 6.1.3. en Annexe 2A

6.1.3.2. - Etude du comportement du système complet dans le plan v_k, v_{k+1}

Pour étudier son comportement dans le plan (v_k, v_{k+1}) faisons le changement de variable :

$$x_n = v_n - w \quad \text{et écrivons :}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = K y_n + w \frac{y_n - x_n}{y_n + w} \end{cases}$$

avec l'origine comme point singulier.

Au voisinage de l'origine : $y_n \neq 0$, d'où :

$$\frac{1}{y_n + w} = \frac{1}{w} - \frac{y_n}{w^2} + \dots$$

En ne conservant que le premier terme du développement, il vient :

$$y_{n+2} - 2K y_{n+1} + K y_n = 0$$

une condition nécessaire et suffisante de stabilité de la solution de cette équation étant :

$$- 1/3 < K < 1$$

On peut encore écrire le système de la façon suivante / 5 / :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = -K x_n + 2K y_n + \phi(x_n, y_n) \end{cases}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(x_n, y_n) = \frac{K y_n (x_n - y_n)}{y_n + w} \\ \lim_{x_n, y_n \rightarrow 0} \frac{\phi(x_n, y_n)}{|x_n| + |y_n|} = 0 \\ \phi(0, 0) = 0 \end{array} \right.$$

les conditions sur ϕ étant précisées, le comportement autour du point origine est complètement décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = -K x_n + 2K y_n \end{array} \right.$$

Cette récurrence autonome du second degré étant définie par l'équation caractéristique en s :

$$\begin{vmatrix} -s & 1 \\ -K & 2K - s \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad s^2 - 2Ks + K = 0$$

Suivant le type des racines s_1 et s_2 , nous pouvons déduire le comportement :

- $K < -1/3$: col de type 2 (instable) (+)
- $-1/3 < K < 0$: noeud stable de type 2
- $K = 0$: solution exacte
- $0 < K < 1$: Foyer stable de type 1
- $K > 1$: col de type 1 (instable) (+)

(+) - cf Annexe 2 B concernant l'instabilité en $-1/3$ et 1 .

6.1.4. - Conclusion

Nous avons montré que la sortie que l'on veut atteindre (w) est point d'attraction au niveau du "Permanent" (voisinage de w) à la condition qu'à ce niveau la direction du vecteur paramètre modèle (a_0/b_0) ne soit pas trop éloignée de celle du vecteur paramètre système réel (p/q) -système réel assimilé à un premier ordre-

Cette condition correspondant à :

$$- 1/3 < (q - p \frac{b_0}{a_0}) < 1$$

$$p > 0 : - 1/3 \quad 1/p < (q/p - b_0/a_0) < 1/p$$

$$p < 0 : - 1/3 \quad 1/p > (q/p - b_0/a_0) > 1/p$$

Nous avons également montré de quelle nature est le point d'attraction : Noeud ou Foyer et l'importance de ce dernier ($0 < K < 1$).

Bien que la stabilité locale soit très satisfaisante, il nous semble cependant utile de pouvoir définir un domaine de stabilité dans le plan (v_k, v_{k+1}) de manière à pouvoir concrétiser le voisinage attractif de w ; disons, la marge du "permanent convergent". Nous aborderons cette étude (chapitres suivants) par le biais des simulations, de la précision de l'identification, en regard du but à atteindre (w), et, lié à ceci, le passage des similitudes aux homothéties.

CHAPITRE III

CARACTERISATION DE LA STABILITE DE LA PROCEDURE
D' AJUSTEMENTS HOMOTHETIQUES

1 - INTRODUCTION

Nous venons d'observer, au chapitre précédent, qu'il est possible de commander un système, assimilable à un premier ordre, par l'intermédiaire d'un modèle de même ordre, ajusté, pas à pas, uniquement par des transformations homothétiques de ses paramètres. Nous avons précisé la condition de stabilité locale de l'ensemble système-modèle ainsi constitué : le terme K , fonction des paramètres du système et du modèle initial, devant prendre ses valeurs dans l'intervalle $]-1/3, 1[$; quant à la valeur de w , sortie désirée du processus, elle est indépendante de cette condition. D'autre part, nous avons pu définir le comportement du système, autour du point d'équilibre, en caractérisant l'évolution de la sortie dans le plan de phase (v_k, v_{k+1}) : noeud, foyer ou col de divers types.

Ces résultats sont satisfaisants à plus d'un titre ; en effet :

- Pouvoir faire appel à des homothéties dans l'espace paramétrique est particulièrement intéressant :

- a) - elles permettent de lever l'incompatibilité identification-commande au niveau du permanent au profit d'une commande efficace.
- b) - elles satisfont très bien aux impératifs d'implantation en ligne puisqu'elles ne nécessitent qu'un faible volume de calculs.

- La connaissance du comportement du système, dans le plan de phase, peut être très utile pour mieux cerner la condition de stabilité locale d'un processus, en cours d'évolution, et astreint aux homothéties précitées : les valeurs de K étant liées à des types de comportement bien marqués. On pourra ainsi, plus aisément et plus rapidement, amener le système à convergence du fait qu'il sera possible d'ajuster K suivant que le processus amorcera tel ou tel type de comportement.

- La sortie désirée, w , n'influence pas la stabilité locale et en ce sens, il doit être possible de pouvoir modifier sa valeur sans pour autant remettre en cause la condition de stabilité en K . Il est donc permis de penser que, vis à vis d'une stabilité locale stricte, on puisse commander le système à but évolutif sans pour autant craindre l'instabilité.

- Si on se réfère au chapitre précédent, il n'est pas nécessaire que le vecteur paramètre modèle soit identique au vecteur paramètre système (système assimilé) pour assurer l'efficacité de la commande ; bien plus, il n'est même pas nécessaire que l'on ait identité entre les directions des deux vecteurs.

La valeur de K exprime la différence qu'il peut exister entre ces deux directions ; ainsi $K = 0$ est relatif à la concordance des directions et $K \neq 0$ à leur non concordance. Or, la stabilité locale étant assurée pour K variant de $-1/3$ à 1 , il lui correspond donc un domaine large et très satisfaisant dans le plan des paramètres (fig. 1).

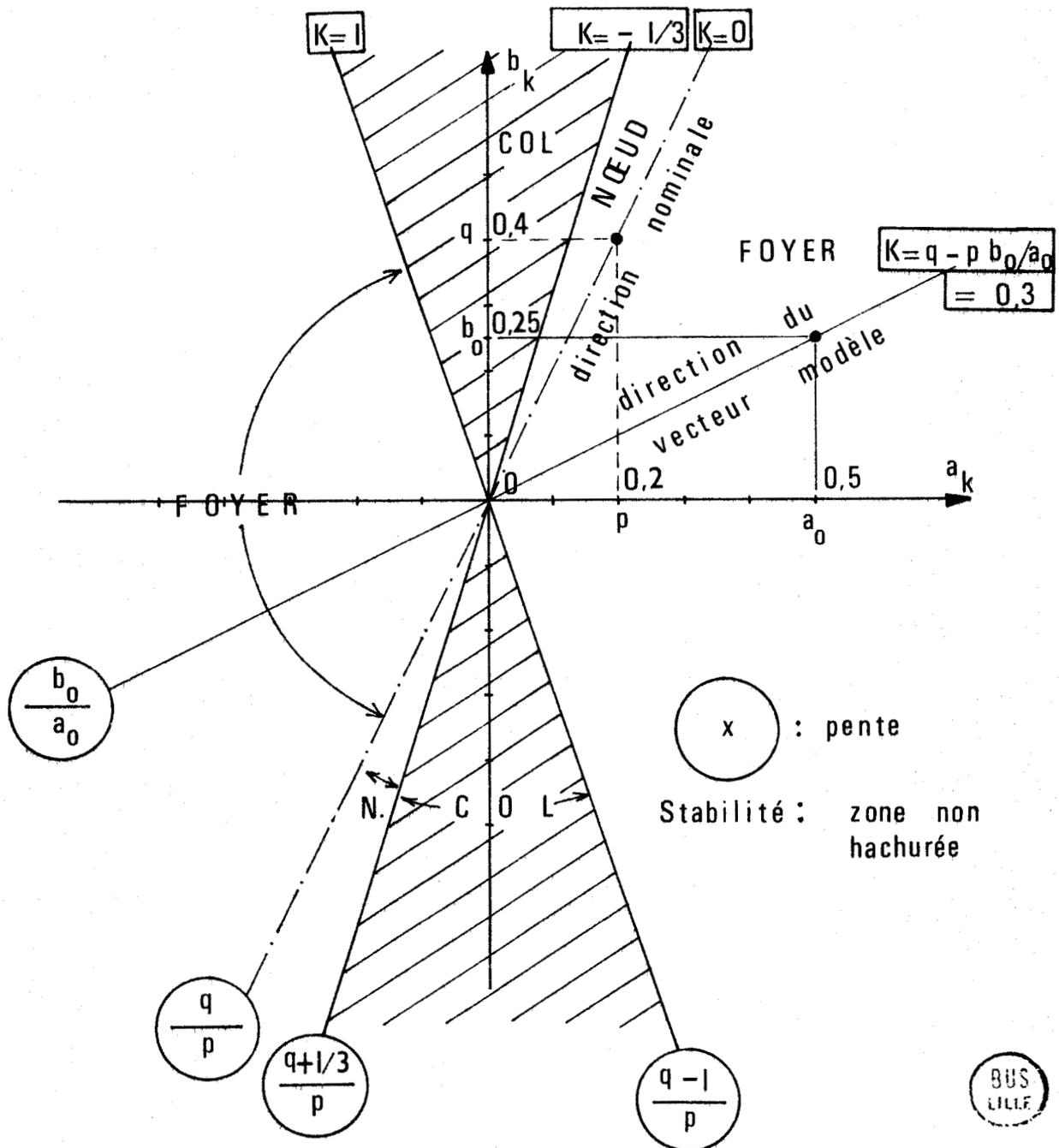


Fig. 1 - Domaine de stabilité locale ramené dans le plan des paramètres.
On remarquera l'importance du foyer.

Bien que ces résultats soient très intéressants, il est néanmoins absolument nécessaire, d'autant plus que le premier ordre considéré résulte d'une approximation du système au niveau du voisinage du régime permanent, d'apprécier quelle peut être l'étendue du voisinage de la sortie désirée qui mène effectivement à convergence ; disons, de connaître la zone, ou l'intervalle de confiance, de sortie à partir de laquelle on pourra se reporter à un algorithme identification-commande simple, mais satisfaisant : les transformations homothétiques dans l'espace des paramètres.

En ce sens, nous chercherons, tout d'abord, à déterminer sinon à juger, sans la détailler avec précision, quelle peut être l'étendue du domaine de stabilité par rapport aux conditions initiales d'un tel algorithme ; puis d'apprécier sa validité et d'essayer de le généraliser.

2 - DOMAINE DE STABILITE PAR RAPPORT AUX CONDITIONS INITIALES

Nous pouvons envisager, tout d'abord, une étude purement mathématique de la convergence, de la récurrence par rapport aux conditions initiales, la compléter, le cas échéant, en essayant de rechercher les limites du domaine de stabilité (travaux de MIRA relatifs à la recherche des frontières de stabilité dans l'espace des variables, pour des récurrences autonomes de second ordre), ou encore, appliquer des critères de type suffisant si cette dernière méthode s'avère trop précise et fragmentaire quant aux limites fournies.

2.1. - Remarques préliminaires

Il ne saurait y avoir de stabilité par rapport aux conditions initiales sans stabilité locale du point nominal ; ainsi, lorsque K est inférieur à $-1/3$ ou supérieur à 1 , il n'existe aucun domaine de stabilité par rapport aux conditions initiales.

Par contre, lorsque K est nul et w quelconque, le domaine de stabilité par rapport aux conditions initiales couvre tout l'espace des variables puisqu'on est en présence d'une convergence directe tant sur le plan identification que commande. (Quand nous indiquons "w quelconque", il faut faire une restriction pour w nul, car, dans ce cas, les homothéties ne sauraient être mathématiquement définies (cf chapitre précédent).

Si on se reporte au chapitre précédent, le système (assimilé à un premier ordre), accusant une condition initiale v_0 , atteint, au pas suivant, la valeur $v_1 = K v_0 + l w$, ou encore,

$$v_1 = \left[q - p \frac{b_0}{a_0} \right] v_0 + \left[\frac{p}{a_0} \right] w$$

v_0 et v_1 , liées entre elles par (p, q) [système], (a_0, b_0) [modèle initial] et w [but], sont les conditions initiales de la récurrence du second ordre qui exprime la sortie de l'ensemble système-modèle, modifiée par les transformations homothétiques :

$$v_{n+2} = K \left[v_{n+1} - w \frac{v_n}{v_{n+1}} \right] + w$$

Or, partant de v_0 , on cherche à faire en sorte que v_n tende vers w lorsque n tend vers l'infini ; il est évident que ceci ne pourra être réalisé que pour certaines valeurs de : $(p, q), (a_0, b_0)$ w et v_0 .

La stabilité locale ne dépend que des valeurs de K , c'est à dire du système et du modèle initial. La stabilité par rapport aux conditions initiales dépend évidemment également de ceux-ci, de la condition initiale v_0 (point de départ) mais aussi du but w (point d'arrivée).

Notons que la dépendance vis à vis du système et du modèle, dans le premier cas, n'affecte que **K**, donc essentiellement la différence entre les directions des vecteurs système et modèle, tandis que dans le second cas, elle affecte tout à la fois **K** et **L** c'est à dire une différence de direction (qui entraîne une modification angulaire) mais aussi un rapport de composantes ($L = p/a_0$) qui entraîne, à direction fixe, une modification de module .

Ainsi, les ajustements des paramètres du modèle (face à ceux du système) peuvent se faire. Concernant la seule stabilité locale par le moyen de rotations dans l'espace paramétrique et concernant la stabilité par rapport aux conditions initiales au moyen de rotations et homothéties combinées : similitudes.

La stabilité locale dans l'espace paramétrique est caractérisée par une marge angulaire autorisée entre système et modèle ; la stabilité par rapport aux conditions initiales devrait être caractérisée, dans l'espace paramétrique, par une marge autorisée fonction d'écart d'angles et de modules entre système et modèle : marge de position se ramenant, peut être, à quelque chose du genre "distance". Nous aurons, plus loin, l'occasion de réaborder cette question des marges, tant de modules que d'angles, à propos de la généralisation des transformations "géométriques" du modèle dans l'espace paramétrique.

2.2. - Etude mathématique de la convergence de la récurrence par rapport aux conditions initiales

2.2.1. - Transformation de la récurrence par introduction des conditions initiales

Partant des conditions initiales v_0 et $v_1 (= K v_0 + L w)$ que nous introduisons dans la récurrence :

$$v_{n+2} = K \left[v_{n+1} - w \frac{v_n}{v_{n+1}} \right] + w$$

il vient :

$$v_2 = K^2 v_0 + K L w + w - \frac{K v_0}{K v_0 + L w} w$$

$$v_3 = K^3 v_0 + K^2 L w + K w + w - \frac{K^2 v_0}{K v_0 + L w} w$$

$$- \frac{K (K v_0 + L w)^2}{K (K v_0 + L w)^2 + L w^2} w$$

$$v_4 = K^4 v_0 + K^3 L w + K^2 w + K w + w - \frac{K^3 v_0}{K v_0 + L w} w$$

$$- \frac{K^2 (K v_0 + L w)^2}{K (K v_0 + L w)^2 + L w^2} w - \frac{K \left[K (K v_0 + L w)^2 + L w^2 \right]^2}{K \left[K (K v_0 + L w)^2 + L w^2 \right]^2 + (K v_0 + L w) L w^3} w$$

$$v_5 = K^5 v_0 + K^4 L w + K^3 w + K^2 w + K w + w - \frac{K^4 v_0}{K v_0 + L w} w$$

$$- \frac{K^3 (K v_0 + L w)^2}{K (K v_0 + L w)^2 + L w^2} w - \frac{K^2 \left[K (K v_0 + L w)^2 + L w^2 \right]^2}{K \left[K (K v_0 + L w)^2 + L w^2 \right]^2 + (K v_0 + L w) L w^3} w$$

$$- \frac{K \left[K \left[K (K v_0 + L w)^2 + L w^2 \right]^2 + (K v_0 + L w) L w^3 \right]^2}{K \left[K \left[K (K v_0 + L w)^2 + L w^2 \right]^2 + (K v_0 + L w) L w^3 \right]^2 + (K v_0 + L w)^2 (K (K v_0 + L w)^2 + L w^2) L w^4} w$$



et ainsi de suite....

Nous pouvons observer l'évolution suivante, du dénominateur du dernier terme des v_n , à partir de $n = 2$:

$$f(0) = K v_0 + Lw (= v_1)$$

$$f(1) = K(K v_0 + Lw)^2 + Lw^2 = K f^2(0) + Lw^2$$

$$f(2) = K \left[K(K v_0 + Lw)^2 + Lw^2 \right]^2 + (K v_0 + Lw) Lw^3 = K f^2(1) + f(0) Lw^3$$

$$f(3) = K \left[K \left[K(K v_0 + Lw)^2 + Lw^2 \right]^2 + (K v_0 + Lw) Lw^3 \right]^2 + (K v_0 + Lw)^2 (K(K v_0 + Lw)^2 + Lw^2) Lw^4$$

$$f(3) = K f^2(2) + f^2(0) f(1) Lw^4$$

.....

$$f(j) = K f^2(j-1) + f^{j-1}(0) f^{j-2}(1) \dots f^2(j-3) f(j-2) Lw^{j+1}$$

et, le numérateur : $K f^2(j-1) w$ (à partir de $n = 3$).

D'où l'expression générale :

$$v_n = K^n v_0 + K^{n-1} Lw + \left[\sum_{i=1}^{n-2} K^i \right] w + w$$

$$- K w \left[\frac{K^{n-2} v_0}{K v_0 + Lw} + \sum_{i=1}^{n-3} K^i \frac{f^2(n-3-i)}{f(n-2-i)} \right]$$

$$- K w \frac{f^2(n-3)}{f(n-2)}$$

On remarque immédiatement que $K = 0$ correspond à la convergence de v_n vers w quelque soit v_0 .

2.2.2. - Etude de la convergence de la récurrence (valeurs de K comprises entre $-1/3$ et 1)

2.2.2.1.

On ne peut assurer la stabilité par rapport aux conditions initiales si on n'assure pas au moins la stabilité locale, d'où les limites à K , ci-dessus.

Puisque la valeur $K = 0$ n'offre pas d'intérêt d'étude particulier (convergence directe), nous pouvons condenser l'expression de v_n sous la forme :

$$v_n = K^n v_0 + K^{n-1} Lw + w \sum_{i=0}^{n-2} K^i - Kw \left[\frac{K^{n-2} v_0}{Kv_0 + Lw} + \sum_{i=0}^{n-3} K^{i+1} \frac{f^2 (n-3-i)}{f (n-2-i)} \right]$$

Par ailleurs, du fait que $|K|$ est inférieur à 1, les termes $K^n v_0$, $K^{n-1} Lw$ et $K^{n-1} v_0 w$ tendent vers zéro lorsque n

$$\frac{Kv_0 + Lw}{Kv_0 + Lw}$$

tend vers l'infini et, ainsi, l'étude de la convergence se ramène à celle de l'expression :

$$w \left[\sum_{i=0}^{n-2} K^i - \sum_{i=0}^{n-3} K^{i+1} \frac{f^2 (n-3-i)}{f (n-2-i)} \right]$$

Le premier terme $\sum_{i=0}^{n-2} K^i$ converge lorsque n tend vers

l'infini ; il reste donc à montrer dans quelles conditions on peut assurer la convergence du second terme, c'est à dire de la série :

$$s_m = \sum_{i=0}^m K^{i+1} \frac{f^2(m-i)}{f(m+1-i)} \quad (m = n-3)$$

On peut faire remarquer que le seul fait de prouver cette convergence suffit ; en effet, nous avons vu au chapitre précédent que si v_n a une limite finie, unique, cette limite ℓ ne peut être autre que le but désiré w (à condition que ℓ soit différent de 1, ce qui est réalisé).

2.2.2.2. - Convergence de la série s_m

$$s_m = \sum_{i=0}^m K^{i+1} \frac{f^2(m-i)}{f(m+1-i)}$$

a) - Caractérisons le terme général de cette série :

Se reportant à l'expression de $f(j)$ précédemment définie, nous pouvons écrire :

$$K \frac{f^2(j-1)}{f(j)} = 1 - \frac{1}{\frac{f^2(j-1)}{f(0) f(1) \dots f(j-2) \frac{L}{K} w^{j+1}} + 1}$$

pour $\forall j$, entier ≥ 1 .

ou encore :

$$K \frac{f^2 (m-i)}{f (m+1-i)} = 1 - \frac{1}{\frac{f^2 (m-i)}{f (0) f (1) \dots f (m-1-i) \frac{L}{K} w^{m+2-i}} + 1}$$

pour $\forall m$, entier ≥ 0 et $0 \leq i$, entier $\leq m$.

On remarque que si l'expression $\left[\begin{matrix} m-i & m-1-i \\ f (0) & f (1) \dots \\ \dots & f (m-1-i) \end{matrix} \frac{L}{K} w^{m+2-i} \right]$ est positive, alors le terme $\frac{K f^2 (m-i)}{f (m+1-i)}$

est positif et inférieur à 1.

Nous en déduisons :

$$0 < K \frac{f^2 (m-i)}{f (m+1-i)} \left| K^i \right| < \left| K^i \right|$$

ou

$$0 < \left| K^{i+1} \frac{f^2 (m-i)}{f (m+1-i)} \right| < \left| K^i \right|$$

$$0 < \sum_{i=0}^m \left| K^{i+1} \frac{f^2 (m-i)}{f (m+1-i)} \right| < \sum_{i=0}^m \left| K^i \right|$$

$|K|$ est inférieur à 1, donc la série de droite converge quand n tend vers l'infini ; la convergence absolue entraînant la convergence simple, la série s_m converge également.

b) - Examinons dans quelles conditions l'expression

$$\left[\begin{array}{cccc} m-i & m-1-i & & m+2-i \\ f(0) & f(1) & \dots & f(m-1-i) \end{array} \frac{L}{K} w \right]$$
 peut être positive :

Elle l'est, par exemple, quelque soient m et i , lorsque $f(j)$, L/K et w sont positifs. Plaçons nous dans le cas où K est compris entre 0 et 1.

L/K positif induit L positif, et, à leur tour, L , K et w positifs induisent, si v_0 est supérieur à $-\frac{L}{K}w$, $f(0)$, $f(1)$, ..., $f(j)$ positifs, quelque soit j ; ces conditions (conditions suffisantes) ne sont pas, semble t-il, trop contraignantes sauf celle sur w positif. A ce propos, considérons la variable v définie comme v/w ($w \neq 0$) et réexaminons la récurrence.

$$v_{n+2} = K \left[v_{n+1} - w \frac{v_n}{v_{n+1}} \right] + w$$

devient :

$$v'_{n+2} = K \left[v'_{n+1} - \frac{v'_n}{v'_{n+1}} \right] + 1$$

De même, les $f(j)$ deviennent $f'(j)$ en changeant v_0 en v'_0 et w en 1. Ainsi, les conditions de stabilité locale pour v' sont exactement les mêmes que pour v et les domaines de stabilité par rapport aux conditions initiales sont également les mêmes à un changement de variable près : $v' \rightarrow v$ avec $v = v'w$.

L'expression à examiner $\left[\begin{matrix} m-i & m-1-i \\ f(0) & f(1) \dots f(m-1-i) \frac{L}{K} w^{m+2-i} \end{matrix} \right]$
 devient $\left[\begin{matrix} m-i & m-1-i \\ f'(0) & f'(1) \dots f'(m-1-i) \frac{L}{K} \end{matrix} \right]$; si $0 < K < 1$, $L > 0$
 et $v'_0 > -\frac{L}{K}$ (et, par voie de conséquence, $v'_1 > 0$) cette expression
 est positive et induit la stabilité de v'_n (v'_n tend vers 1 lorsque
 vers l'infini). Le domaine de stabilité en v' est le suivant :

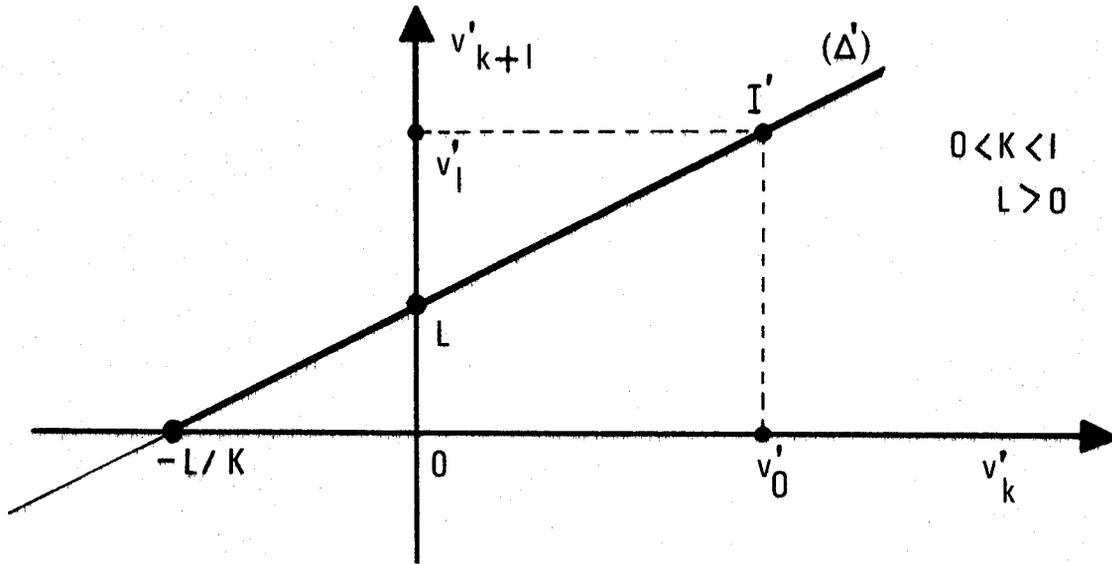


Fig. 2

La condition initiale I' (v'_0 , v'_1) doit se trouver dans le demi plan supérieur, sur la droite (Δ') d'équation $v'_{k+1} = Kv'_k + L$.

Le domaine de stabilité en v s'en déduit par changement de variable : $v = v'w$.

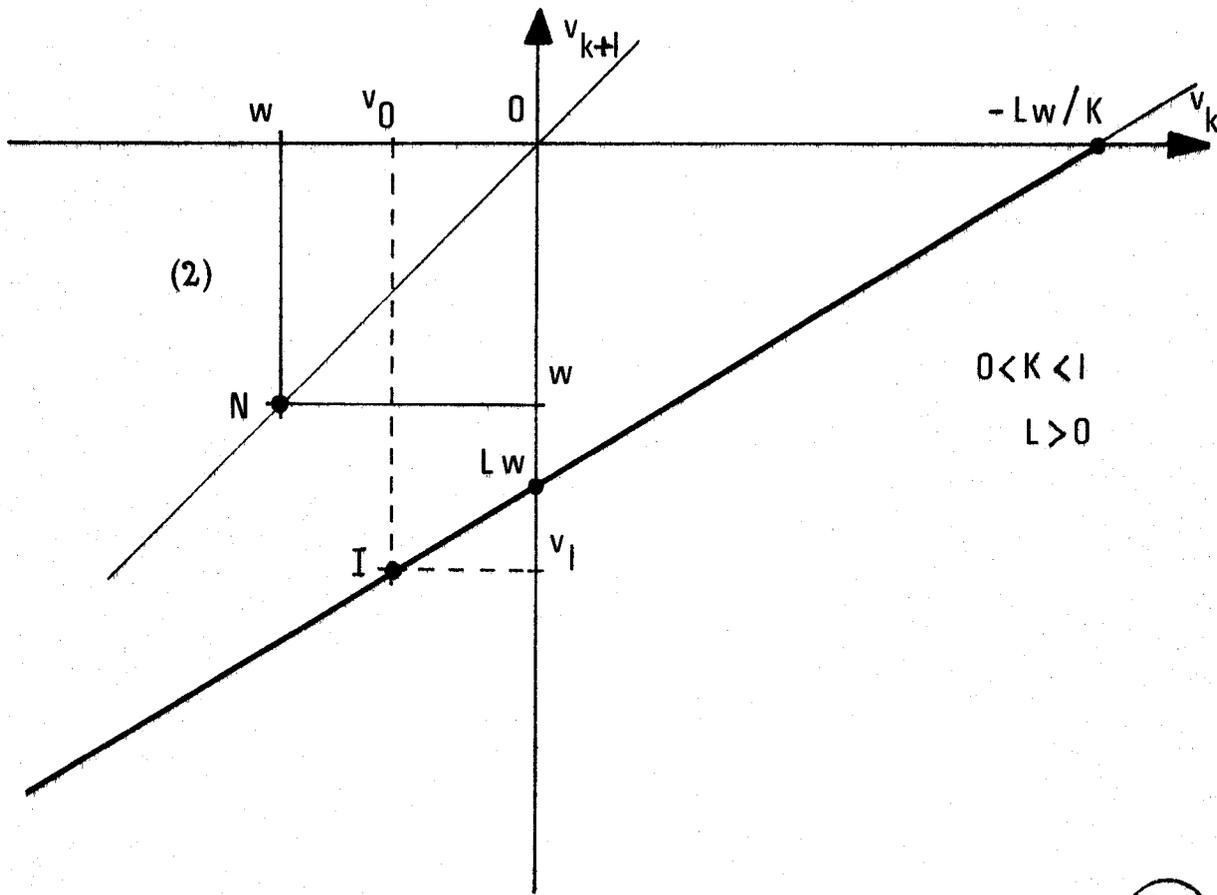
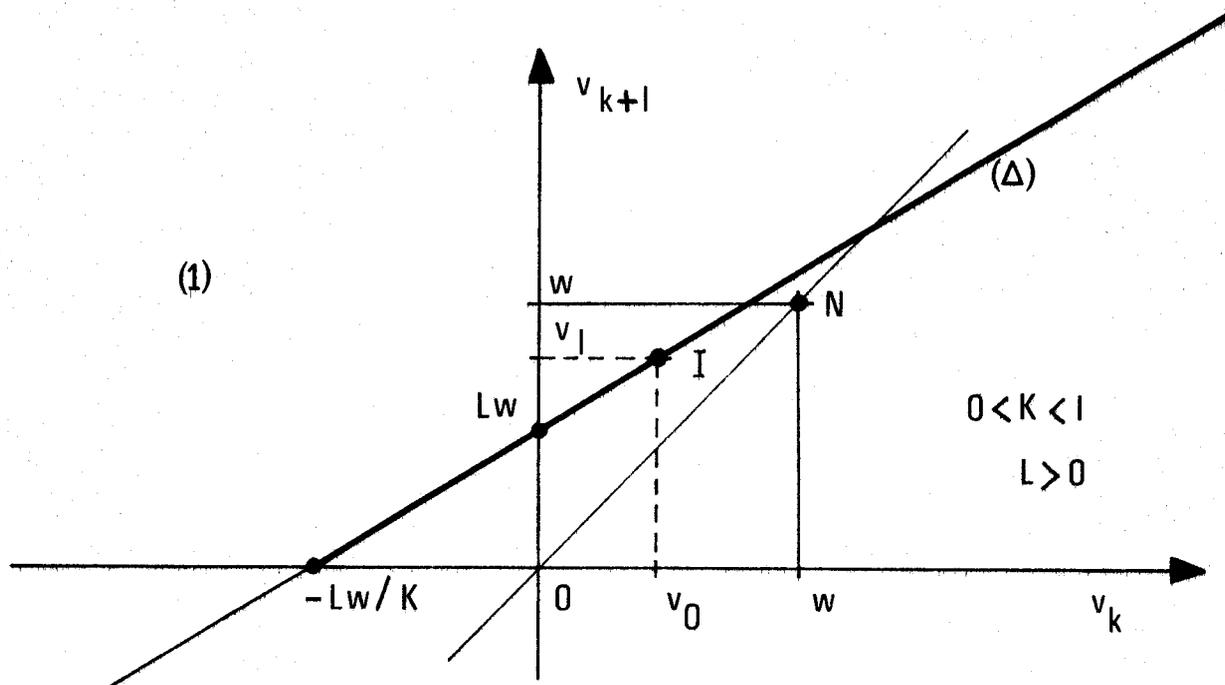


Fig. 3 - (1) Point nominal (N) dans le 1er quadrant : $w > 0$
 (2) Point nominal (N) dans le 3^e quadrant : $w < 0$

Les domaines ainsi définis le sont par des conditions suffisantes de stabilité ; ils ne prétendent donc pas recouvrir tout le domaine réellement existant, que ce soit au point de vue des variables (domaine propre) ou des conditions sur **K** et L.

En ce qui concerne w , il est intéressant de remarquer l'influence importante de ce paramètre sur l'étendue du domaine ; à **K** et L fixés, partant d'un domaine de stabilité dans le plan (v'_k, v'_{k+1}) nous déduisons un domaine plus étendu ($w > 1$) ou moins étendu ($w < 1$), mais de même forme : si S est la surface du domaine dans le plan (v'_k, v'_{k+1}) , sa surface sera $w^2 S$ dans le plan (v_k, v_{k+1}) , donc d'autant plus considérable que w sera grand.

Nous avons conduit les calculs en considérant w positif ou négatif, avec **K** compris entre 0 et 1 et L positif ; il serait néanmoins souhaitable de reprendre ceux-ci pour **K** compris entre $-1/3$ et 0 ; cependant, comme le terme général de la série s_m se prête assez mal à une détermination des conditions de convergence lorsque **K** est négatif, nous aborderons ce cas par d'autres méthodes (nous avons fait figurer en annexe 3A une étude sur la récurrence des $f(j)$, du terme général, qui met en évidence leurs relations avec les conditions de stabilité locale et donc avec **K** négatif).

c) - Voyons, à présent, les enseignements que l'on peut tirer des conditions de stabilité précédentes :

Nous avons montré que pour **K** compris entre 0 et 1 et L positif, il suffit d'avoir v_0 supérieur à $-\frac{L}{K} w$ pour assurer la stabilité si w est positif et v_0 inférieur à $-\frac{L}{K} w$ si w est négatif.

Si on considère que les homothéties seront utilisées au niveau de la tendance au régime permanent, il y a tout lieu de

penser que le point nominal $N(w)$ sera relativement voisin de la condition initiale $I(v_0)$ [condition initiale pour le nouvel algorithme : les homothéties] ; or, en ce sens, les domaines précédents se révèlent suffisamment étendus autour du point N pour que le point I en fasse également partie (d'autant plus, d'ailleurs, que $|w|$ est grand). Il faut néanmoins s'assurer des conditions sur L et K :

L positif implique p et a_0 de même signe ; cela est évidemment réalisable puisque si l'on considère qu'il y a tendance au régime permanent, nous aurons p et a_0 pas trop éloignés et de même signe. Quant à K , sa valeur ne devrait pas être très éloignée de 0 :

- positive : la convergence est assurée, d'autant plus que la marge de manoeuvre est importante : $0 < K < 1$.
- négative : l'étude précédente ne met pas en évidence de domaine de stabilité ; de plus, la marge de manoeuvre, si on considère uniquement la stabilité locale, est plus étroite : $-1/3 < K < 0$
Il est donc nécessaire de montrer qu'il peut exister un domaine de stabilité pour $K < 0$; c'est, entre autres, l'objet des paragraphes suivants.

Nous noterons, cependant, qu'en tout état de choses, l'analyse du comportement de la sortie dans le plan de phase, au cours de l'évolution du processus, peut être très riche d'enseignements. On peut ainsi réajuster les valeurs respectives des a_k , par rapport aux b_k , suivant le comportement, et déplacer, par exemple, la valeur de K vers une zone où la marge de manoeuvre sera plus importante : en l'occurrence K compris entre 0 et 1, caractérisée par un comportement de foyer.

2.3. - Caractérisation directe de la frontière de stabilité

Si on se reporte au chapitre précédent, le système complet (processus - modèle) est caractérisé par la récurrence autonome du second ordre suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) = y_n \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) = K \left[y_n + w \frac{y_n - x_n}{y_n + w} \right] \end{cases}$$

Nous essaierons de rechercher directement la frontière de stabilité de cette récurrence.

2.3.1.

MIRA a montré que la frontière de stabilité des récurrences autonomes du second ordre est constituée : /¹⁴/

- a) par des points doubles instables
- b) par des cycles instables d'ordre fini ou infini, c'est à dire des points vérifiant :

$$\begin{aligned} x_{n+m} &= x_n \\ y_{n+m} &= y_n \quad m(2,3,\dots) \end{aligned}$$

- c) par les antécédents et les conséquents des points doubles instables et des points des cycles instables d'ordre fini ou infini.
- d) peut être par d'autres points de nature différente.

D'autre part, s'il existe des points doubles instables, ils se trouvent parmi les racines réelles du système algébrique :

$$\begin{cases} x = f(x,y) \\ y = g(x,y) \end{cases}$$

et les cycles instables d'ordre fini peuvent se déterminer comme les racines réelles du système algébrique défini par les équations :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \\ x_{n+m} = x_n \\ y_{n+m} = y_n \end{cases} \quad m(2,3,\dots)$$

Appliquons ces divers éléments de recherche à la récurrence précitée.

2.3.2. - Points doubles

Nous avons mis en évidence au chapitre précédent que l'origine ($x = y = 0$) est point double ; ce point double est stable si K est compris entre $-1/3$ et 1 , instable pour K inférieur à $-1/3$ et supérieur à 1 . Y a-t-il d'autres points doubles ? Tous les points doubles sont les racines réelles du système algébrique suivant, et s'il existe des points doubles instables, ils se trouvent parmi celles-ci :

$$\begin{cases} x = y & (1) \\ y = K \left[y + w \frac{y - x}{y + w} \right] & (2) \end{cases}$$

(1) et (2) $\Rightarrow y = Ky$ ou encore $y(1 - K) = 0$

Solutions : $K \neq 1$: $x = y = 0$, un seul point double :

- stable : $- 1/3 < K < 1$

- instable : $K \leq - 1/3$ et $K > 1$

$K = 1$: $x = y$ quelconque, une infinité de points doubles situés sur la première bissectrice : dont très certainement des points doubles instables, sinon tous, entre autres le point (0,0).

2.3.3. - Cycles

Tentons de mettre en évidence l'existence d'un cycle d'ordre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+2} = x_n \quad (3) \\ y_{n+2} = y_n \quad (4) \\ x_{n+1} = y_n \quad (5) \\ y_{n+1} = K \left[y_n + w \frac{y_n - x_n}{y_n + w} \right] \quad (6) \end{array} \right.$$

(5) $\implies x_{n+2} = y_{n+1}$

(6) et (3) $\implies x_n = K \left[y_n + w \frac{y_n - x_n}{y_n + w} \right]$ (7)

De la même façon, il vient :

$y_n = K \left[x_n + w \frac{x_n - y_n}{x_n + w} \right]$ (8)

Posant $l_1 = x_n + w$ et $l_2 = y_n + w$, (7) et (8) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} l_1 = K l_2 + (1 - K \frac{l_1}{l_2}) w \\ l_2 = K l_1 + (1 - K \frac{l_2}{l_1}) w \end{array} \right.$$

que nous simplifions en passant aux coordonnées réduites :

$$l \rightarrow l' : l' = \frac{l}{w} \quad (w \neq 0).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l'_1 = K l'_2 + (1 - K \frac{l'_1}{l'_2}) \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l'_2 = K l'_1 + (1 - K \frac{l'_2}{l'_1}) \end{array} \right. \quad (10)$$

De (9), il vient : $l'_1 = l'_2 \frac{K l'_2 + 1}{K + l'_2}$; $l'_2 \neq 0$

qui, introduit dans (10), donne :

$$l'_2 = K l'_2 \frac{K l'_2 + 1}{K + l'_2} + (1 - K \frac{K + l'_2}{K l'_2 + 1})$$

et, après simplification, conduit à :

$$l'_2{}^3 K (1-K^2) + l'_2{}^2 (1-K^2) - l'_2 (1-K^2) - K(1-K^2) = 0$$

$$l'_2 \neq -K \text{ et } -1/K$$

et si $|K|$ est différent de 1 :

$$K \ell_2'^3 + \ell_2'^2 - \ell_2' - K = 0$$

ou :

$$(\ell_2' - 1) (K \ell_2'^2 + (K+1) \ell_2' + K) = 0 \quad (11)$$

ℓ_2' , différent de 1, existe si :

$$\Delta = (K+1)^2 - 4K^2 \geq 0$$

$$\Delta = -3K^2 + 2K + 1 \geq 0$$

c'est à dire, si nous avons : $-1/3 \leq K \leq 1$

Dans ces conditions, nous pouvons écrire :

$$\ell_2' = \frac{- (K+1) \pm \sqrt{(1+3K) (1-K)}}{2K}$$

Puisque les équations (9) et (10) résultent d'un échange entre ℓ_1' et ℓ_2' , ℓ_1' aussi bien que ℓ_2' doit satisfaire à l'équation (11) ; en ce sens, si :

$$\ell_2' = \frac{- (K+1) \pm \sqrt{(1+3K) (1-K)}}{2K} \quad (12)$$

alors :

$$\ell_1' = \frac{- (K+1) \mp \sqrt{(1+3K) (1-K)}}{2K} \quad (13)$$

D'après (11), le produit des racines : $P = \ell_1' \ell_2' = 1$ (14)

et leur somme : $S = \ell_1' + \ell_2' = \frac{-(K+1)}{K}$ (15)

et donc, pour : $0 < K < 1$: ℓ_1' et ℓ_2' sont négatifs

$-1/3 < K < 0$: ℓ_1' et ℓ_2' sont positifs

L'addition de (9) et (10) :

$$\ell_1' + \ell_2' = K(\ell_1' + \ell_2') + (2 - K) \left(\frac{\ell_1'}{\ell_2'} + \frac{\ell_2'}{\ell_1'} \right)$$

$$S = KS + (2 - K) \left(\frac{S^2 - 2P}{P} \right)$$

est vérifiée par S et P ci-dessus et confirme les valeurs de ℓ_1' et ℓ_2' .

Repasant par ℓ (multiplication par w), puis en (x,y) (soustraction de w), nous obtenons les coordonnées des deux points (A et B) qui forment le cycle d'ordre deux recherché :

$$A \left\{ \begin{array}{l} x_A = \frac{-w\sqrt{1+3K}}{2K} \quad (\sqrt{1-K} + \sqrt{1+3K}) \\ y_A = \frac{w\sqrt{1+3K}}{2K} \quad (\sqrt{1-K} - \sqrt{1+3K}) \end{array} \right.$$

(16)

$$B \left\{ \begin{array}{l} x_B = y_A \\ y_B = x_A \end{array} \right.$$

(17)

Il faut s'assurer que les points A et B ainsi déterminés sont instables, ou, plus exactement, pour quelles valeurs de **K** ils le sont.

A cet effet, nous avons pu mettre en évidence l'instabilité pour **K** compris entre - 1/3 et ≈ 0,627 (cf. Annexe 3B).

[A noter que la dernière valeur indiquée est la racine réelle d'une équation du troisième degré et a donc une expression mathématique précise bien qu'exprimée ici suivant une quantité approchée.]

Mathématiquement, la détermination des cycles d'ordre supérieur, s'ils existent, se heurte à des résolutions d'équations de plus en plus complexes et de degré de plus en plus élevé (d° : 3,4,...).

Ce fait limite la recherche des cycles instables ; on peut alors songer, pour étoffer la connaissance de la frontière, à déterminer les antécédents et les conséquents du cycle instable précédent : antécédents et conséquents qui font partie de cette frontière.

2.3.4. - Antécédents et Conséquents - Domaine Connexe

Si on examine, tant les conséquents :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = K \left[y_n + w \frac{y_n - x_n}{y_n + w} \right] \end{array} \right.$$

que les antécédents :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n = x_{n+1} \\ x_n = x_{n+1} + \frac{(Kx_{n+1} - y_{n+1})(x_{n+1} + w)}{Kw} \end{array} \right.$$

on se rend compte qu'ils ne peuvent donner lieu qu'à des points qui sont ceux du cycle (cela, quelque soit l'ordre du cycle) ; en effet partant d'un couple de valeurs donné (x_n, y_n) , nous aboutissons au pas supérieur (x_{n+1}, y_{n+1}) ou inférieur (x_{n-1}, y_{n-1}) à un point et un seul qui ne peut qu'appartenir au cycle : les relations tant des conséquents que des antécédents étant de type bijectif (pour qu'il en soit autrement il faudrait, par exemple, que la détermination des x_n , en fonction des x_{n+1} et y_{n+1} , se fasse par extraction d'une racine carrée, ou autre..., et donne ainsi au moins deux déterminations.

Néanmoins, le fait que l'on ne puisse remonter la frontière à partir des points des cycles instables, implique nécessairement, si on se réfère aux travaux de ROUBELLAT /5/, que le domaine de stabilité est de type connexe ; des partitions, ou même des points isolés, ne peuvent exister : le domaine est d'un seul tenant autour du point double origine, c'est le domaine immédiat de convergence.

La position des points du cycle instable d'ordre deux, par rapport à l'origine, ne peut suffire à nous donner une idée exacte de l'étendue du domaine de stabilité (il faudrait pour cela connaître plus de points de la frontière, sinon tous) ; mais elle peut, par contre, permettre l'évaluation de l'influence du paramètre K sur l'étendue du domaine de stabilité, particulièrement pour des valeurs de K comprises entre $-1/3$ et 0 , ce que n'a pas montrée l'étude purement mathématique de la récurrence.

2.3.3. - Position, suivant K , des points du cycle instable

d'ordre deux dans le plan de phase (v_k, v_{k+1})

Nous savons, d'après l'étude mathématique de la récurrence, que les coordonnées des points de la frontière de stabilité sont proportionnelles à la valeur w de la sortie désirée ;

C'est bien ce qu'on observe pour les coordonnées des points A et B du cycle instable d'ordre deux. En ce sens, nous pouvons restreindre l'étude à K et passer aux coordonnées réduites : $v' = \frac{v}{w}$.

Des relations (14) et (15), nous déduisons que le lieu des points A et B dans le plan de phase réduit (v'_k, v'_{k+1}) est l'hyperbole équilatère :

$$v'_k v'_{k+1} = 1$$

- : branche positive de l'hyperbole pour K compris entre $-1/3$ et 0
- : branche négative de l'hyperbole pour K compris entre 0 et 1 (avec restriction à $K \leq 0,627$).

De (16) et (17), nous déduisons que A et B sont symétriques par rapport à la droite $v'_{k+1} = v'_k$ et que, suivant l'axe v'_{k+1} , A est inférieur à B sur la branche positive et supérieur à B sur la branche négative :

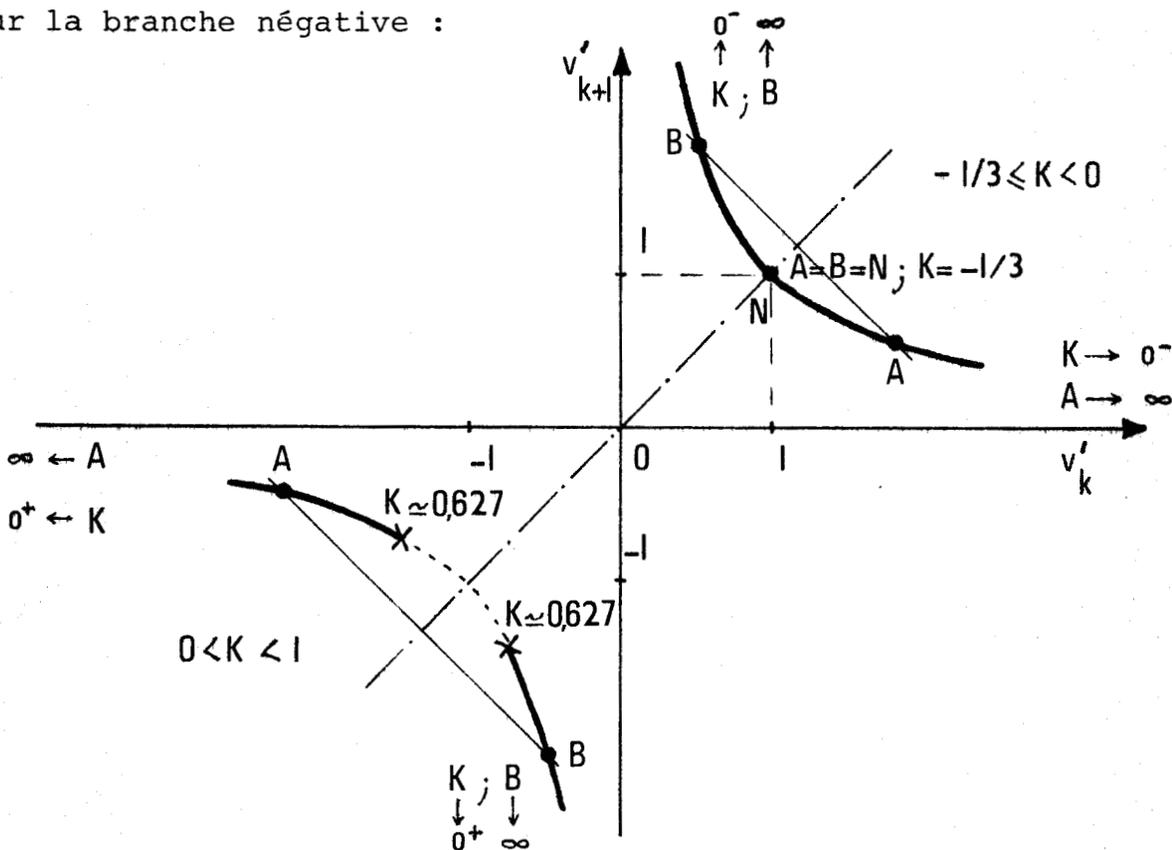


Fig. 4 - Position dans le plan de phase réduit, des points A et B du cycle instable d'ordre deux, suivant les valeurs de K .

- 5 -

Si on considère que la seule position des points A et B peut nous renseigner sur l'étendue du domaine pour K négatif, nous concluons que celle-ci croît avec les valeurs de ce paramètre. Ce n'est bien sûr qu'une évaluation très incomplète : on peut néanmoins la compléter par le tracé du voisinage des points du cycle qui appartient à la frontière. C'est l'objet du paragraphe suivant.

2.3.4. - Portions de la frontière de stabilité voisines des points du cycle instable d'ordre 2

Réintroduisons la récurrence autonome du second ordre :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = K \left[y_n + w \frac{y_n - x_n}{y_n + w} \right] \end{cases}$$

Nous constatons que les seconds membres sont analytiques. Or, lorsque les seconds membres sont des fonctions analytiques, LATTES /23 / a montré que si en un point double P, les multiplicateurs S_1 et S_2 sont réels distincts de module différent de 0 et 1, et $S_1 \neq S_2^q$ et $S_2 \neq S_1^q$ (q entier), il existe deux courbes invariantes analytiques et deux seulement passant par le point double P, tangentes aux axes principaux (cf. Annexe 2A) et définies dans un certain voisinage de ce point. Si P est un col, ce sont les deux seules courbes invariantes passant par le point P.

Il a été montré /26 / que si un point double sur la frontière de stabilité est un noeud ou un col, l'axe principal qui correspond au multiplicateur de plus petit module est tangent à la frontière. La connaissance de la tangente en un point double ou cycle situé sur la frontière entraîne celle de la tangente à la frontière en chacun des antécédents de ces points singuliers.

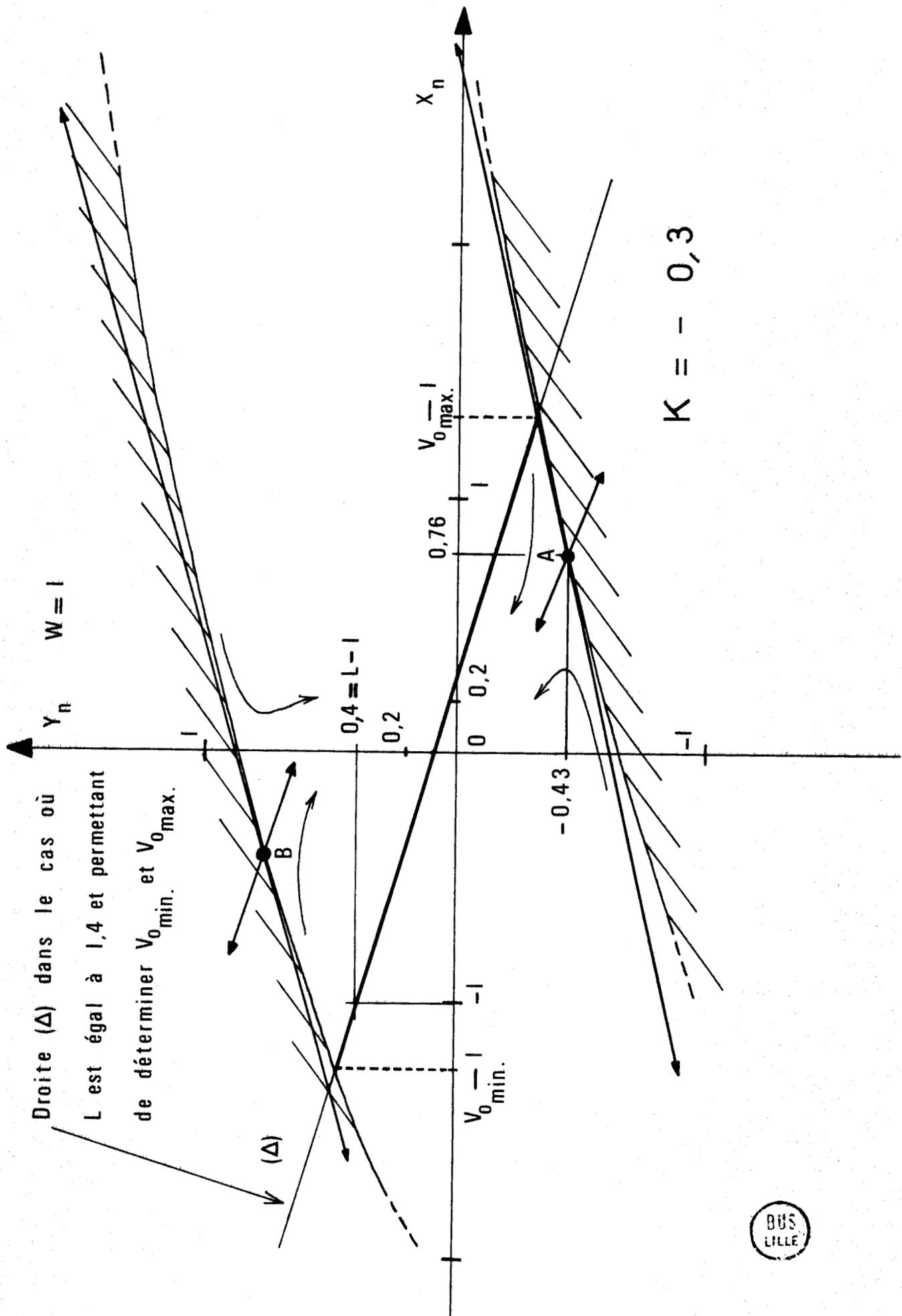
Il a été montré également que d'un col situé sur la frontière est issu l'arc de courbe invariante analytique portion de cette frontière si les seconds membres de la récurrence sont analytiques et si l'arc de courbe invariante analytique correspond au multiplicateur de plus petit module. Lorsque le point double est un noeud, le problème est plus complexe car la frontière passant par le noeud n'est pas nécessairement une des courbes invariantes analytiques en ce point.

Ainsi, lorsque nous sommes en présence d'un col, il doit être possible de déterminer un développement en série d'une fonction représentative de l'arc de courbe invariante analytique issu du col dans un voisinage plus ou moins important de ce col.

Une autre méthode consiste à se placer au col même et à déterminer les antécédents de ce col. Théoriquement, si on se trouve exactement au col, on n'en bougera pas ; cependant, il faut tenir compte des très faibles erreurs faites à chaque itération dans le calcul des antécédents : peu à peu on "déstabilisera" le point jusqu'à "décrire" la frontière de stabilité dans un voisinage relativement important du col. C'est cette méthode que nous avons mise en oeuvre.

Nous connaissons un cycle d'ordre deux. Encore faut-il pour pouvoir appliquer la méthode, qu'il s'agisse d'un cycle du type col et non du type noeud. A cet effet, nous avons déterminé le type des points du cycle. Il s'avère (cf. Annexe 3B) que pour les valeurs de K comprises entre $-1/3$ et $\approx 0,627$, le cycle est du type col. Nous pouvons donc déterminer une portion de la frontière issue des points A et B du cycle d'ordre deux lorsque K est compris entre ces valeurs, et nous pouvons également mener le calcul des tangentes à la frontière en ces points.

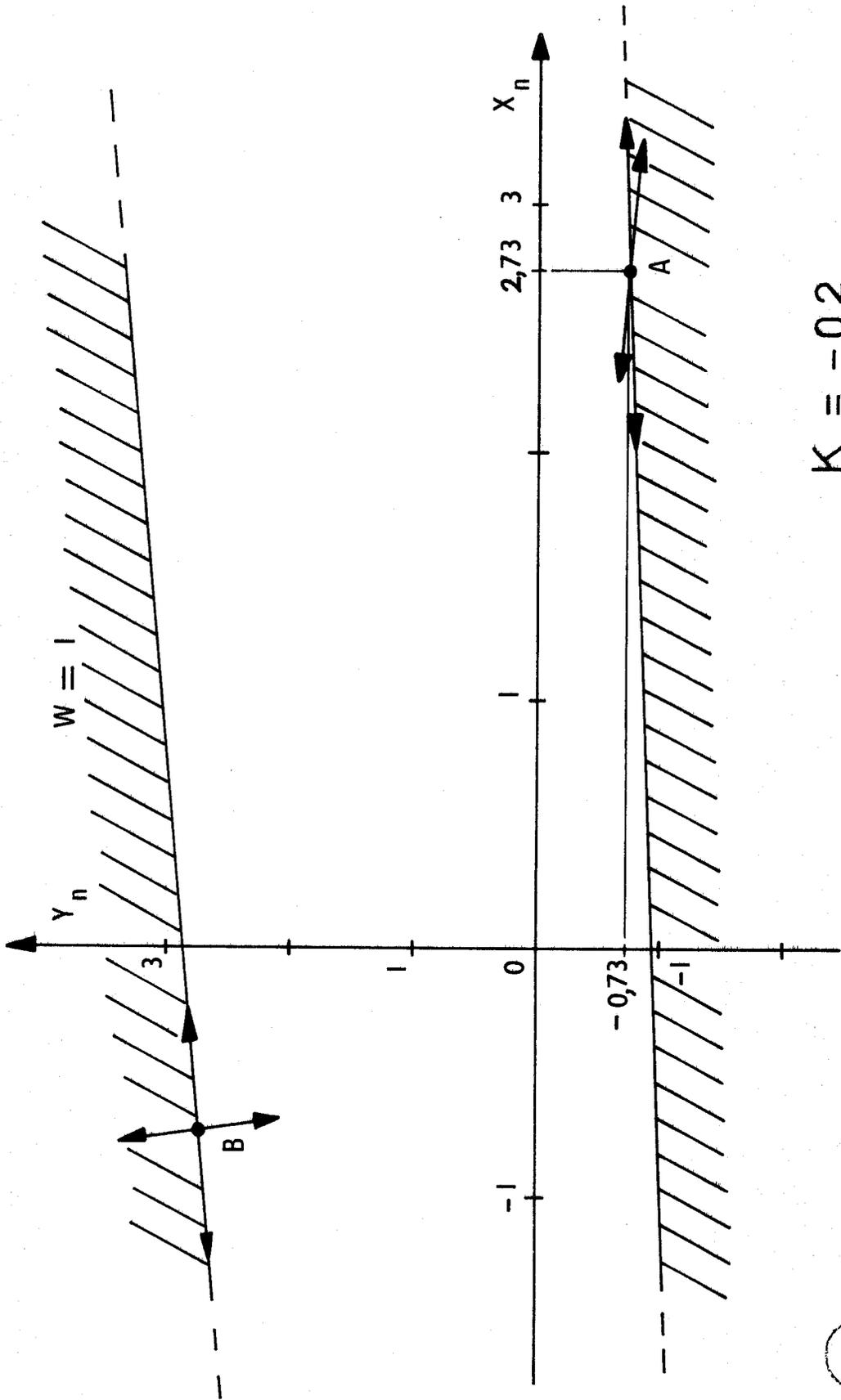
Nous faisons figurer dans les pages suivantes les tracés pour diverses valeurs de K .



Droite (Δ) dans le cas où L est égal à $1,4$ et permettant de déterminer V_0_{\min} et V_0_{\max} .

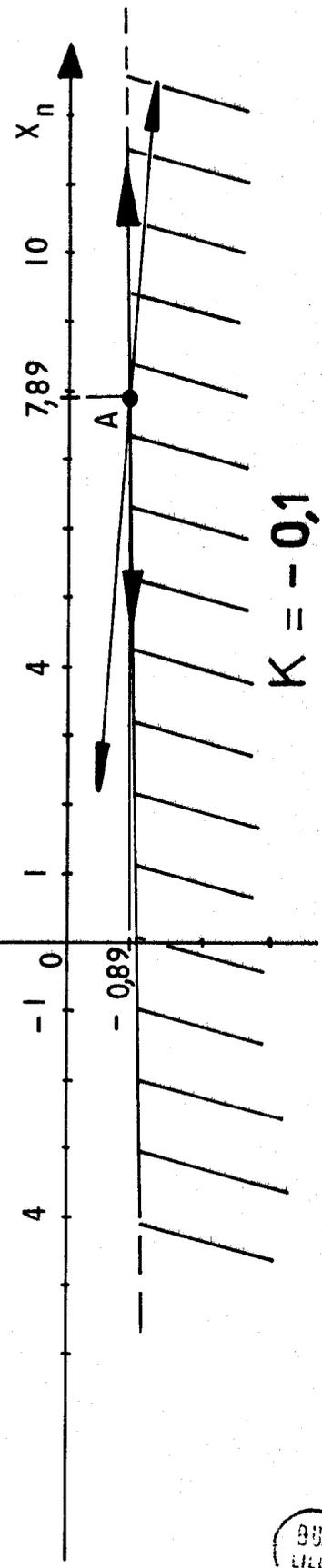
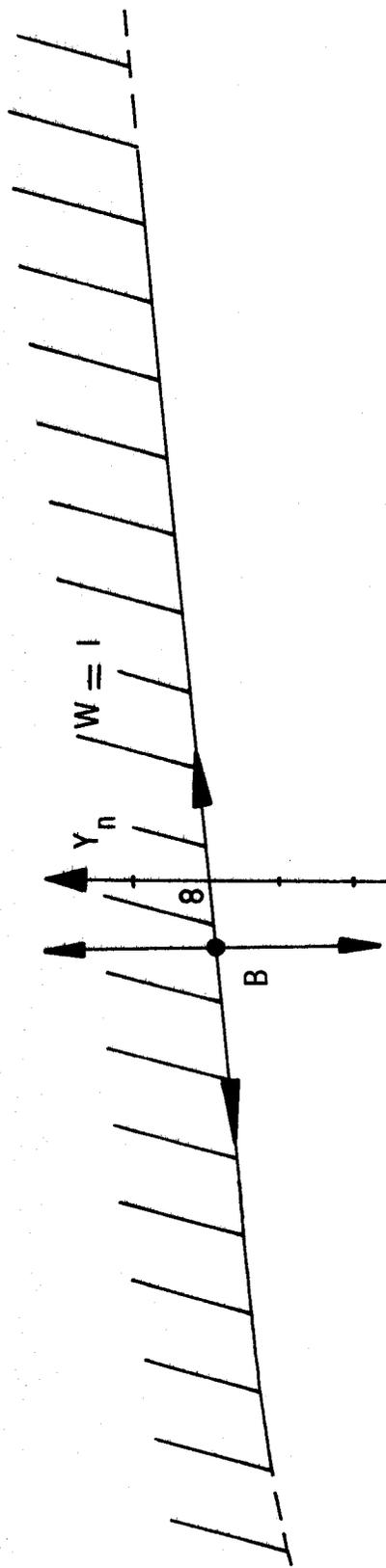
$$K = -0,3$$

BUS LILLE



$$K = -0,2$$





L'ensemble des deux méthodes (§ 2.2. & 2.3) a permis de dégager l'existence d'un domaine de stabilité par rapport aux conditions initiales suffisamment étendu autour du point nominal pour ne pas devoir craindre l'instabilité de la convergence au niveau du permanent.

Jusqu'à présent, nous avons considéré qu'au niveau du permanent, nous avons un système réel assimilable à un premier ordre ; ceci permet de tenir compte du comportement dynamique résiduel du système. Néanmoins, si on veut une meilleure connaissance de l'approche du régime permanent, on peut être amené à considérer l'ordre du système réel ainsi assimilé.

Puisque nous recherchons la simplicité de la méthode, il est alors intéressant de voir ce que peut entraîner le fait de considérer un système assimilé à un premier ordre alors qu'en fait, il est d'un ordre supérieur : disons d'apprécier la validité de l'algorithme proposé dans ces conditions.

3 - DIFFERENCE D'ORDRE - VALIDITE DE L'ALGORITHME

Dans cette optique, nous avons étudié le cas d'un premier ordre identifiant un second ordre.

On désire obtenir par le modèle une expression de la forme :

$$w = b_{k+1} v_{k+1} + a_{k+1} u_{k+1}$$

et on obtient (système) :

$$v_{k+2} = q_1 v_{k+1} + q_2 v_k + p_1 u_{k+1} + p_2 u_k$$

On modifie le modèle
par des homothéties :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{k+2} = \frac{v_{k+2}}{w} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{k+1}$$

Nous conduisons un calcul analogue à celui du Chapitre II et nous obtenons (cf. Annexe 3C) :

$$v_{n+3} = K_1 v_{n+2} + K_2 v_{n+1} + L_1 w \frac{w^{n+2}}{\prod_{i=1}^{n+2} v_i} + L_2 w \frac{w^{n+1}}{\prod_{i=1}^{n+1} v_i}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = q_1 - p_1 \frac{b_0}{a_0} \\ K_2 = q_2 - p_2 \frac{b_0}{a_0} \\ L_1 = \frac{p_1}{a_0} \\ L_2 = \frac{p_2}{a_0} \end{array} \right.$$

ce qui s'écrit encore :

$$v_{n+3} = K_1 v_{n+2} + K_2 v_{n+1} + \frac{L_2 v_{n+2} + L_1 w}{L_2 v_{n+1} + L_1 w} \left(1 - K_1 \frac{v_{n+1}}{v_{n+2}} - K_2 \frac{v_n}{v_{n+2}} \right) w$$

Nous avons étudié les conditions de convergence d'une telle équation (cf. Annexe 3C) et obtenu :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 + 5K_2 > -3 \\ (K_1 + K_2) (2L' - 3) - 2L' > -3 \\ 2L' (1 - K_1 - K_2) + 3K_1 - K_2 > -1 \\ K_2 \left[3K_1 + K_2 + 2L'(1 - K_1 - K_2) \right] < 1 \end{array} \right.$$

avec $L' = \frac{L_2}{L_1 + L_2}$

Lorsque $K_2 = L_2 = 0$, nous retrouvons, évidemment, la condition - $1/3 < K_1 < 1$ de l'équation du second ordre ; et plus L_2 et K_2 sont différents de zéro, plus nous nous éloignons de cette condition.

Revenant à l'équation du troisième ordre, il ressort que le fait d'atteindre le but w et de s'y maintenir (convergence - stabilité) impose :

$$w = \left[q_1 - p_1 \frac{b_0}{a_0} \right] w + \left[q_2 - p_2 \frac{b_0}{a_0} \right] w + \frac{p_1}{a'} w + \frac{p_2}{a'} w$$

où \hat{a} est la valeur atteinte par a à la convergence. On en déduit :

$$a' = \frac{p_1 + p_2}{1 - (q_1 + q_2) + (p_1 + p_2) \frac{b_0}{a_0}}$$



S'il s'était agi de l'équation du second ordre, on aurait obtenu :

$$a' = \frac{p_1}{1 - q_1 + p_1 \frac{b_0}{a_0}}$$

b' s'en déduit facilement : $b' = a' \frac{b_0}{a_0}$

Nous vérifierons au chapitre V, les valeurs de a' et b' ainsi atteintes.

Dans ces résultats, il est important de remarquer que les p_1 et q_1 du second ordre jouent le même rôle que les $\sum p_i$ et $\sum q_i$ des ordres supérieurs. De ce fait, vis à vis du modèle qui mène à convergence les $\sum K_i$ et les $\sum L_i$ doivent jouer des rôles un peu identiques aux K_1 et L_1 du second ordre. Bien que ces conditions soient plus restrictives, l'analogie peut être conduite, sur ces valeurs, à l'existence de comportement et de domaine de stabilité par rapport aux conditions initiales. A cet effet, nous mettrons en évidence, au Chapitre V, des comportements de type foyer ou noeud pour le troisième ordre comme nous l'avons fait pour le second.

4 - CONCLUSION

Les résultats que nous avons obtenus concernant l'existence et l'étendue du domaine de stabilité par rapport aux conditions initiales se sont révélés satisfaisants.

L'analyse des équations d'ordre supérieur montre que si on considère l'ordre du système réel dans son intégralité, cela amène à des conditions de stabilité plus restrictives mais que, néanmoins, les analogies fondamentales sont conservées ; il faut de plus avoir en vue que le fait de devoir considérer le système comme étant d'un ordre plus ou moins élevé, tient à la plus ou moins grande largeur de la zone autour du régime désiré, à partir de laquelle on fait intervenir les transformations homothétiques.

A cet égard, on peut se poser la question de savoir à quel stade utiliser ces transformations homothétiques ultimes et qu'employer avant celles-ci ; également, de considérer si on ne peut pas augmenter la taille du vecteur paramètre : c'est à dire généraliser la méthode en considérant des modèles d'ordre plus élevé que le premier, utilisé jusqu'à présent.

C'est, entre autres, ce que nous examinerons au chapitre suivant.

CHAPITRE IV

GENERALISATION

I - INTRODUCTION

Au second chapitre nous avons introduit la fonction de correction S_k qui, au vecteur paramètre modèle M_{k-1} associe le vecteur M_k . Cette transformation géométrique dans l'espace paramétrique est une similitude dont le point invariant est l'origine des coordonnées.

Jusqu'à présent, nous n'avons mis en évidence que la seule transformation homothétique; néanmoins bien d'autres types de transformations peuvent être menées sous le couvert des similitudes précédentes.

La convergence ultime de l'ensemble système-modèle vers le régime désiré vient d'être assurée par l'emploi de transformations homothétiques; de leur étude, il ressort qu'elles sont utilisables efficacement dans un large voisinage du régime désiré. Pour des raisons de sécurité de convergence il y a lieu de réduire cette zone à un écart pas trop important de la valeur désirée et d'amener le système dans la zone par d'autres transformations (Fig 1)

L'intérêt spécifique des transformations homothétiques ultimes est dû au fait qu'elles permettent une évolution simple mais suffisante du modèle pour s'adapter aux impératifs d'un but à réaliser.

Nous allons examiner à présent les transformations que l'on peut envisager pour amener le processus dans le voisinage du but avant de laisser l'ensemble système-modèle uniquement contrôlé par les homothéties.

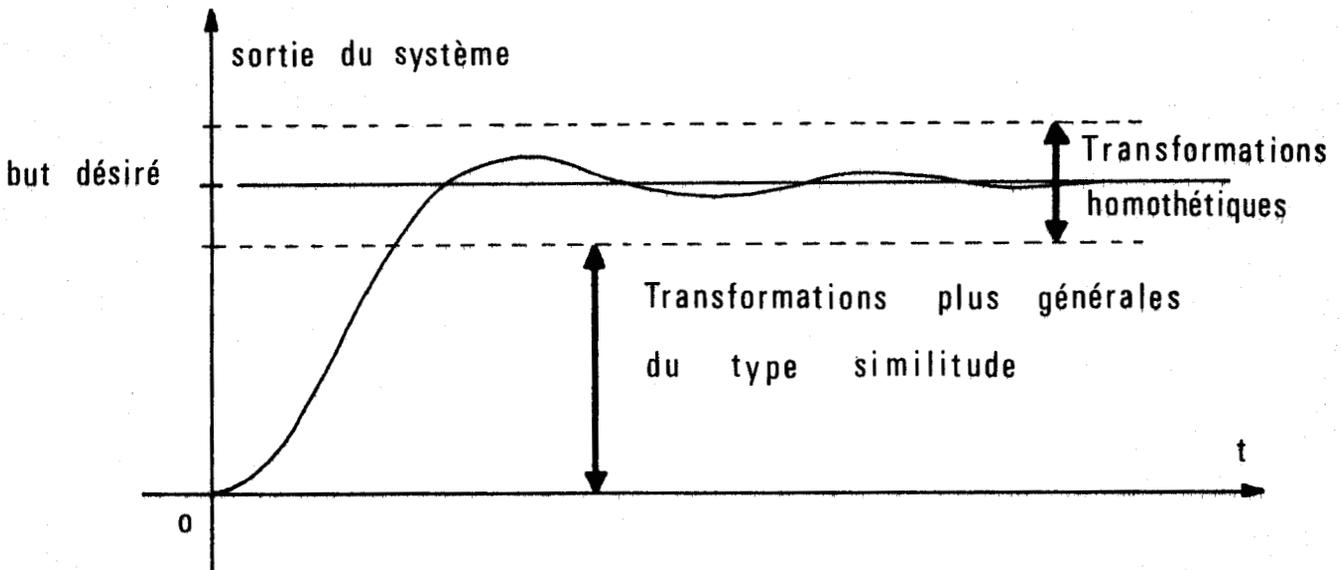


fig. 1

2 - TRANSFORMATIONS GÉNÉRALES DU TYPE SIMILITUDE.

Suivant les ordres respectifs ou supposés du système réel et du modèle adjoint on peut être amené à conduire différents types de transformations.

2.1. - On suppose l'ordre du modèle égal à l'ordre du système.

Considérons le premier ordre, nous généraliserons ensuite :

$$\text{on désire obtenir : } w = a_k u_k + b_k v_k \quad (1)$$

$$\text{or, on obtient : } v_{k+1} = p u_k + q v_k \quad (2)$$

2.1.1. Transformation directe

Itérons la relation (2). Il vient :

$$M_{k+2} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{k+2} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_k & v_k \\ u_{k+1} & v_{k+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_{k+1} \\ v_{k+2} \end{bmatrix}$$

$$P = \mathcal{M}_{k+2}^{-1} \mathcal{V}_{k+2} \quad (3)$$

Partant de commandes arbitraires u_0 et u_1 on doit obtenir la détermination du vecteur paramètre $M_2 (= P)$ qui nous permettra de calculer la commande u_2 qui nous amènera suivant (1) en w :

$$u_2 = (w - b_2 v_2) / a_2 \quad (4)$$

A ce niveau l'identification ne peut être terminée : en effet si nous fixons le vecteur paramètre nous nous écarterons inévitablement du but désiré du fait des perturbations qui ne peuvent manquer d'exister sur le système. On poursuit l'identification sous la forme des transformations homothétiques : elles sont simples et susceptibles d'un traitement statistique aisé ce qui assure de ne pas s'écarter du but w , sinon de toujours rester dans son voisinage très immédiat.

Néanmoins, on ne fera le passage aux homothéties que si le module du déterminant de \mathcal{M}_{k+2} est inférieur à une quantité positive δ et que $\left| \frac{v_{k+2} - w}{w} \right|$ et $\left| \frac{v_{k+1} - w}{w} \right|$ sont inférieurs à une seconde quantité positive δ' ; δ et δ' étant petits mais proportionnés à l'importance des perturbations.

Si à un moment quelconque ces conditions ne sont plus respectées on revient aux transformations directes. (cela peut intervenir, entre autres, lors d'une évolution soit des paramètres du système, soit du but w) .

Les marges δ et δ' précédentes sont nécessaires pour deux raisons :

a) à partir d'un certain stade l'inversion de la matrice M_k n'aura plus de sens : théoriquement elle devient strictement non inversible s'il n'y a pas de bruit sur le système. Or, du fait des bruits elle le reste mais le résultat auquel elle conduit est aberrant ; d'où la limitation δ .

b) à partir d'un certain niveau de convergence vers le but désiré nous sommes très vraisemblablement dans la zone qui permet de passer aux homothéties, la convergence par celles-ci pouvant être réalisée ; d'où la limitation δ' .

La généralisation aux ordres supérieurs se fait immédiatement : Pour un ordre q tous les vecteurs P , M_k et V_k auront $2q$ composantes et la matrice M_k aura $2q$ lignes et $2q$ colonnes ; la limitation δ' se rapportant à $2q$ sorties consécutives.

2.1.2. - Homothéties et Rotations

L'idée est d'ajuster successivement le module et la direction du vecteur paramètre dans l'espace paramétrique à $2q$ dimensions.

Par rapport au cas précédent la convergence est séparée et conduit à ne considérer que des déplacements élémentaires simples telles rotations et homothéties.

Reprenons l'exemple du premier ordre.

Les relations (1) et (2) peuvent s'écrire :

$$w = \left| \left(\overrightarrow{u_k, v_k} \right) \right| \left| M_k \right| \cos \phi_k \quad (5)$$

$$v_{k+1} = \left| \left(\overrightarrow{u_k, v_k} \right) \right| \left| P \right| \cos (\phi_k - \theta_{k+1}) \quad (6)$$

avec la représentation suivante dans le plan des paramètres
(Fig 2) :

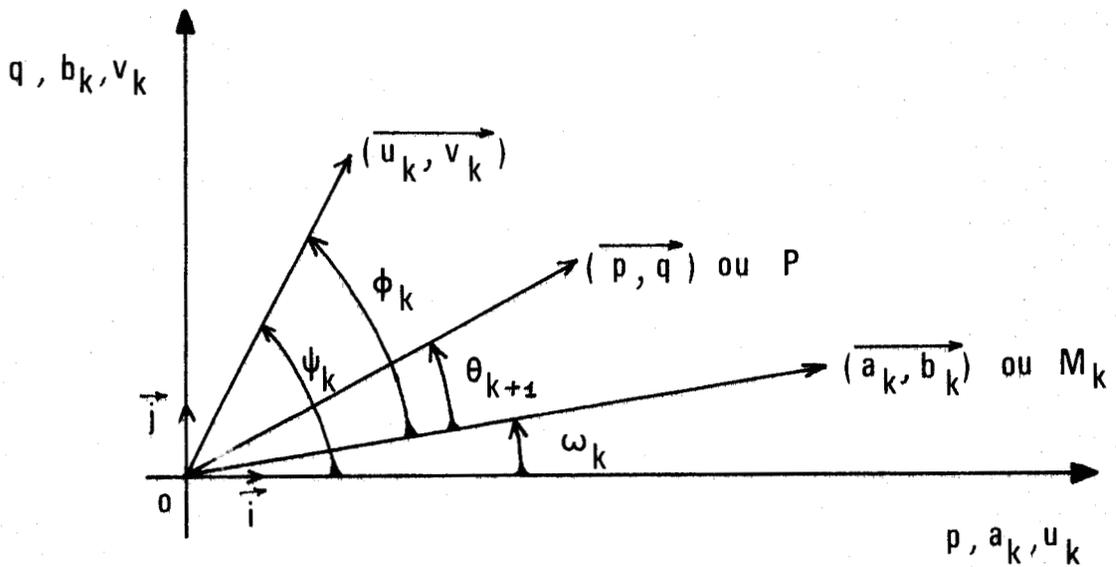


fig. 2

Itérons (5) et (6) :

$$w = \left| \left(\overrightarrow{u_{k+1}, v_{k+1}} \right) \right| \left| M_{k+1} \right| \cos \phi_{k+1}$$

$$v_{k+2} = \left| \left(\overrightarrow{u_{k+1}, v_{k+1}} \right) \right| \left| P \right| \cos (\phi_{k+1} - \theta_{k+2})$$

partant de M_k effectuons tout d'abord une homothétie

$$h_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{w} :$$

$$(I) \quad \underline{\underline{M_{k+1} = h_{k+1} M_k}} \quad (\theta_{k+2} = \theta_{k+1})$$

Que nous poursuivons par une rotation d'angle θ_{k+2} ;
il vient :

$$v_{k+2}/w = (\cos \phi_k / \cos \phi_{k+1}) (\cos (\phi_{k+1} - \theta_{k+2}) / \cos (\phi_k - \theta_{k+2}))$$

ou encore :

$$h_{k+2} = (1 + \operatorname{tg} \phi_{k+1} \operatorname{tg} \theta_{k+2}) / (1 + \operatorname{tg} \phi_k \operatorname{tg} \theta_{k+2})$$

$$\text{d'où : } \operatorname{tg} \theta_{k+2} = (1 - h_{k+2}) / (h_{k+2} \operatorname{tg} \phi_k - \operatorname{tg} \phi_{k+1})$$

Exprimons $\operatorname{tg} \phi_k$:

$$\operatorname{tg} \phi_k = \operatorname{tg} (\psi_k - \omega_k) = (\operatorname{tg} \psi_k - \operatorname{tg} \omega_k) / (1 + \operatorname{tg} \psi_k \operatorname{tg} \omega_k)$$

$$\text{or, } \operatorname{tg} \psi_k = v_k / u_k \text{ et } \operatorname{tg} \omega_k = b_k / a_k$$

$$\text{d'où : } \operatorname{tg} \phi_k = (a_k v_k - b_k u_k) / w$$

$$\operatorname{tg} \phi_k = \Delta_k / w$$

et , par conséquent :

$$\operatorname{tg} \theta_{k+2} = (1 - h_{k+2}) w / (h_{k+2} \Delta_k - \Delta_{k+1})$$

Nous pouvons donc écrire :

$$(\text{II}) \quad \underline{\underline{M_{k+2} = \mathcal{R}_{k+2} M_{k+1}}}$$

$$\text{où } \mathcal{R}_{k+2} = \left(\begin{array}{cc} \cos \theta_{k+2} & \sin \theta_{k+2} \\ \sin \theta_{k+2} & \cos \theta_{k+2} \end{array} \right)$$

(rotation)

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta_{k+2} = 1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_{k+2}} \\ \sin \theta_{k+2} = \cos \theta_{k+2} \operatorname{tg} \theta_{k+2} \end{array} \right.$$

à remarquer que l'on prend la détermination positive en ce qui concerne $\cos \theta_{k+2}$; en effet, à la convergence θ doit tendre vers zéro, c'est-à-dire qu'il lui correspond un cosinus positif.

Ensuite nous poursuivons par une homothétie qui théoriquement doit nous amener au but voulu :

$$(\text{III}) \quad \underline{\underline{M_{k+3} = h_{k+3} M_{k+2}}}$$

La poursuite de la séquence $h_i - \mathcal{R}_{i+1} - h_{i+2} - \dots$ est possible mais limitée, au point de vue des rotations, par l'indétermination qui risque de surgir sur la valeur de $\text{tg } \theta$ lorsque l'on se rapproche de plus en plus du régime désiré (nous retrouvons sous une autre forme la non inversibilité de la matrice \mathcal{M}).

Par conséquent, la séquence {homothétie puis rotation} doit faire place aux homothéties seules lorsque nous aurons les quantités $|1 - h_{k+2}|$ et $|\frac{\Delta_{k+1} - \Delta_k}{\Delta_{k+1}}|$ respectivement inférieures aux quantités positives ϵ et ϵ' ; avec ϵ et ϵ' petits, mais proportionnés à l'importance des perturbations (analogie avec les transformations précédentes).

La généralisation aux ordres supérieurs est plus complexe qu'en ce qui concerne la transformation directe.

Ainsi à l'ordre deux le vecteur M_k comprend quatre paramètres; c'est-à-dire que le système est défini suivant quatre degrés de liberté qui peuvent être les quatre composantes du vecteur, son module et sa direction (trois " angles "), deux modules et deux angles dans deux sous-espaces.

Suivant cette dernière possibilité on peut organiser le vecteur M_k de la manière :

$$M_k = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} M_{1k} \\ M_{2k} \end{bmatrix} \quad \text{et } P = \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \\ p_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

et écrire :

$$v_{k+2} = \left| \left(\overrightarrow{u_k}, \overrightarrow{v_k} \right) \right| \left| P_1 \right| \cos \left(\phi_{1k+1} - \theta_{1k+2} \right) + \left| \left(\overrightarrow{u_{k+1}}, \overrightarrow{v_{k+1}} \right) \right| \left| P_2 \right| \cos \left(\phi_{2k+1} - \theta_{2k+2} \right)$$

avec les représentations dans les deux sous-espaces (Fig. 3) :

Par référence à ces travaux nous pouvons mettre en oeuvre une méthode moins volumineuse :

- Nous pouvons remarquer qu'il n'est pas d'une nécessité absolue d'aborder la convergence, si comme on le suppose l'ordre est connu, sous la forme d'un critère ayant pour objet la minimisation d'une fonctionnelle de l'écart entre régime atteint et régime désiré ; les transformations directes ou les séquences homothétie-rotation étant alors à même d'amener à une poursuite convergente correcte par les seules homothéties.

- Remplaçant l'estimateur à deux niveaux par les transformations homothétiques, qui elles, ne nécessitent qu'un très faible volume de calcul, nous réalisons un gain très appréciable dans la suite des opérations d'identification et de commande en ligne.

- De la façon dont nous avons défini le passage des transformations directes ou des séquences homothétie-rotation aux homothéties seules, nous avons assuré le fait de ne pouvoir atteindre à l'instabilité : en effet, les contraintes imposées sur ce passage préservent de la mise en dépassement par trop importante de part et d'autre du régime désiré.

2.2 - On suppose l'ordre du modèle différent de celui du système.

En général nous pouvons approcher l'ordre du système réel de telle façon qu'il n'y ait pas de trop grande différence avec l'ordre effectif de ce système ; rigoureusement les ordres peuvent être assez différents mais pratiquement réduits suivant les constantes de temps principales, ce qui permet de mieux les accorder.

Que l'ordre du modèle soit supérieur ou inférieur à celui du système réel il faut, ici, obligatoirement utiliser un critère de minimisation dans la phase initialisatrice de manière à pouvoir amener la sortie du système " vers " le régime désiré, puis de poursuivre par des transformations homothétiques.

Si l'ordre est supérieur, on aura un certain nombre de paramètres redondants qui ne peuvent en aucun cas gêner le comportement convergent.

Si l'ordre est inférieur, on réalisera un compromis au mieux de la minimisation de l'écart entre régime désiré et régime atteint.

Plus les ordres du modèle et du système seront différents plus l'on ajoutera à l'erreur statistique (résultat des perturbations, dans l'optique de la méthode des moindres carrés) une erreur systématique. Si celle-ci est trop importante, on risque de ne plus pouvoir engager la poursuite de la commande de l'ensemble système-modèle par le moyen des transformations homothétiques, car il y a tout lieu de craindre que l'on se trouvera hors du domaine de convergence vis-à-vis des conditions initiales de la nouvelle procédure.

Généralement, comme nous ne connaissons pas l'ordre du système, il est recommandé d'employer une méthode qui permet une minimisation de l'erreur dans la phase initialisatrice, mais une méthode simple, telle les moindres carrés ; d'autres, telles " le maximum de vraisemblance " ou " les variables instrumentales " ont de meilleures propriétés statistiques mais celles-ci sont superflues dans le cas présent ; d'autant que ces deux dernières méthodes sont plus lourdes d'emploi que les moindres carrés.

En résumé nous pouvons présenter le schéma suivant :

- Juger de l'ordre approximatif du système d'après la connaissance minimale que l'on peut en avoir.
- Initialiser par la méthode des moindres carrés et poursuivre cette procédure jusqu'au voisinage du régime désiré ; voisinage caractérisé par un écart plus ou moins important vis-à-vis de ce régime et directement fonction de l'importance des perturbations existantes sur le système : au minimum l'écart type.

- Terminer par des transformations homothétiques que l'on peut éventuellement filtrer.

2.3. - Insertion des transformations homothétiques dans la méthode des moindres carrés.

Lors de l'emploi des moindres carrés, nous faisons appel dès la première minimisation à un ensemble de commandes admissibles totalement arbitraires ; on peut envisager que ces commandes résultent de modèles à structure bien précise mais à paramètres arbitraires, du but désiré et des états précédents. En effet :

Supposons que nous ayons fait choix d'un modèle du premier ordre. On désire obtenir par ce modèle :

$$w = a_k u_k + b_k v_k$$

Dans cette optique w et v_k connus induisent par a_k et b_k , paramètres arbitraires, une commande u_k arbitraire également.

Au modèle correspond la sortie du système réel effectivement obtenue: v_{k+1} .

La minimisation au sens des moindres carrés se fait sur un ensemble de N périodes (si q est l'ordre du modèle : $N \gg 2q$, donc ici $N \gg 2$).

$$\text{L'erreur s'écrit : } e_{k+1} = w - v_{k+1}$$

et la fonction à minimiser :

$$E = \sum_{k=0}^N e_{k+1}^2 = \sum_{k=0}^N (w - v_{k+1})^2$$

Aux commandes arbitraires u_0, \dots, u_{N+1} , correspondent les vecteurs paramètres aux composantes arbitraires :

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad , \quad \dots \quad , \quad \begin{bmatrix} a_{N+1} \\ b_{N+1} \end{bmatrix}$$

On estimera ce dernier vecteur suivant la minimisation des moindres carrés :

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_{N+1} \\ \hat{b}_{N+1} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = a_0 a_{N+1} \\ a_1 = a_1 a_{N+1} \\ \dots \dots \dots \\ a_N = a_N a_{N+1} \\ a_{N+1} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} b_0 = \beta_0 b_{N+1} \\ b_1 = \beta_1 b_{N+1} \\ \dots \dots \dots \\ b_N = \beta_N b_{N+1} \\ b_{N+1} \end{array} \right.$$

où les a_i et β_i relient la valeur de a_{N+1} et b_{N+1} aux valeurs des a_i et b_i précédents.

Suivant cette écriture la fonction à minimiser a pour forme :

$$E = \sum_{k=0}^N (a_k a_{N+1} u_k + \beta_k b_{N+1} v_k - v_{k+1})^2$$

La condition nécessaire et suffisante pour que E soit minimale est que :

$$\frac{\partial E}{\partial a_{N+1}} = \frac{\partial E}{\partial b_{N+1}} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial E}{\partial a_{N+1}} = \sum_{k=0}^N 2 a_k u_k (a_k a_{N+1} u_k + \beta_k b_{N+1} v_k - v_{k+1}) = 0$$

$$a_{N+1} \sum_{k=0}^N (a_k u_k)^2 + b_{N+1} \sum_{k=0}^N (a_k u_k) (\beta_k v_k) = \sum_{k=0}^N (a_k u_k) v_{k+1}$$

de même :

$$\frac{\partial E}{\partial b_{N+1}} = \sum_{k=0}^N 2 \beta_k v_k (a_k a_{N+1} u_k + \beta_k b_{N+1} v_k - v_{k+1}) = 0$$

$$b_{N+1} \sum_{k=0}^N (\beta_k v_k)^2 + a_{N+1} \sum_{k=0}^N (\beta_k v_k) (a_k u_k) = \sum_{k=0}^N (\beta_k v_k) v_{k+1}$$

d'où :

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}_{N+1} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^N (a_k u_k)^2 & \sum_{k=0}^N (a_k u_k) (\beta_k v_k) \\ \sum_{k=0}^N (a_k u_k) (\beta_k v_k) & \sum_{k=0}^N (\beta_k v_k)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^N (a_k u_k) v_{k+1} \\ \sum_{k=0}^N (\beta_k v_k) v_{k+1} \end{bmatrix}$$

A condition que nous restons toujours dans le domaine des commandes admissibles, nous pouvons supposer que les a_i de a_0 à a_N et les b_i de b_0 à b_N résultent de récurrences dans l'espace paramétrique ; en effet, une succession non arbitraire des paramètres n'implique pas nécessairement une succession dépendante des commandes et un tel choix est donc parfaitement possible (on montrera au chapitre V un exemple d'une telle minimisation). En ce sens la phase initiale peut comporter des transformations homothétiques réestimées par les moindres carrés :

$$a_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{w} a_k \quad \text{et} \quad b_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{w} b_k$$

$$\text{induisent : } a_k = \beta_k = \frac{w^{N+1-k}}{v_{N+1} v_N \cdots v_{k+1}}$$

$$0 \leq k \leq N$$

d'où :

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}_{N+1} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^N (a_k u_k)^2 & \sum_{k=0}^N a_k^2 u_k v_k \\ \sum_{k=0}^N a_k^2 u_k v_k & \sum_{k=0}^N (a_k v_k)^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^N a_k u_k v_{k+1} \\ \sum_{k=0}^N a_k v_k v_{k+1} \end{bmatrix}$$

Cette façon de faire peut, évidemment, être étendue aux ordres supérieurs. Son avantage est de simplifier les calculs matriciels précédents.

Ainsi, en conclusion, nous pouvons mettre en évidence que les transformations homothétiques, tout au long de l'identification et de la commande en ligne, permettent de réduire de façon appréciable les temps de calcul.

3. - Amélioration du temps de réponse.

Les transformations homothétiques permettent, nous l'avons vu, une bonne convergence de la sortie du système vers le but désiré.

Nous pouvons nous demander s'il ne serait pas possible dans le même temps de réduire au mieux le temps de réponse vers ce but.

Si on en juge par le comportement dans le plan de phase des transformations homothétiques successives, il doit être possible d'accélérer ou de réduire le processus de convergence en agissant sur les paramètres du modèle de façon appropriée.

En effet, d'après ce qui a été vu au chapitre II, la rapidité de convergence doit être fonction du paramètre K (ou de la somme des paramètres assimilés K_i , si on considère que l'on fait référence à des ordres de plus en plus élevés) : la rapidité maximum étant à la frontière du comportement de noeud et de foyer ; ainsi si le comportement est celui d'un noeud on augmente K , inversement s'il est celui d'un foyer on diminue cette valeur. Le problème est de définir qualitativement et quantitativement l'augmentation ou la diminution du paramètre de telle façon qu'elle soit réellement efficace.

Si on se reporte à l'assimilation au premier ordre du voisinage du régime désiré, on sait que la stabilité est assurée pour K compris entre $-1/3$ et 1 avec la rapidité maximale pour K nul ; en ce sens il est donc possible d'amener à rapidité sans risquer véritablement l'instabilité puisque la valeur de rapidité n'est pas une valeur limite. Par contre le problème se reporte sur l'appréciation de la valeur de K : celle-ci est appréciée par le type de comportement, mais n'est qu'appréciée ; on ne peut donc préjuger avec exactitude de la correction à lui apporter, et qui plus est, du choix du ou des paramètres à modifier plutôt que d'autres.

Il est toujours possible de se fixer à priori un certain type de correction sur tel ou tel paramètre suivant le comportement décelé, mais cette façon de faire ne sera très certainement pas la mieux adaptée, la plus optimale ; par contre, elle peut être assez intéressante si nous travaillons à but évolutif ou avec un système non stationnaire (à condition cependant que cette évolution ou cette non stationnarité soit relativement plus lente que la prise d'information sur le système).

Nous aborderons, au chapitre suivant, ces divers aspects par le biais des simulations ; ainsi d'ailleurs que toutes les simulations et justifications des chapitres précédents sur des exemples précis.

CHAPITRE V

RESULTATS DES SIMULATIONS

I - INTRODUCTION

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de mettre en évidence les divers aspects de l'identification et de la commande abordés précédemment non plus de façon formelle mais de façon directe par le biais des simulations.

Nous jugerons de la convergence des transformations homothétiques, de ses modes dans les plans (u_k, v_k) ou (v_k, v_{k+1}) , de l'évolution des paramètres qui lui sont attachés, de l'influence des bruits. Nous étudierons également les modifications de direction du vecteur paramètre, l'insertion des rotations, la combinaison homothéties-moindres carrés, les différences d'ordre au niveau de l'assimilation au régime permanent, la rapidité de convergence ...

Nous rappelons que le but de ces simulations est essentiellement de vérifier que les transformations homothétiques peuvent assurer la relève efficace des transformations directes ou de celles type moindres carrés qui ne peuvent amener à une convergence satisfaisante quand nous nous trouvons au voisinage du régime désiré.

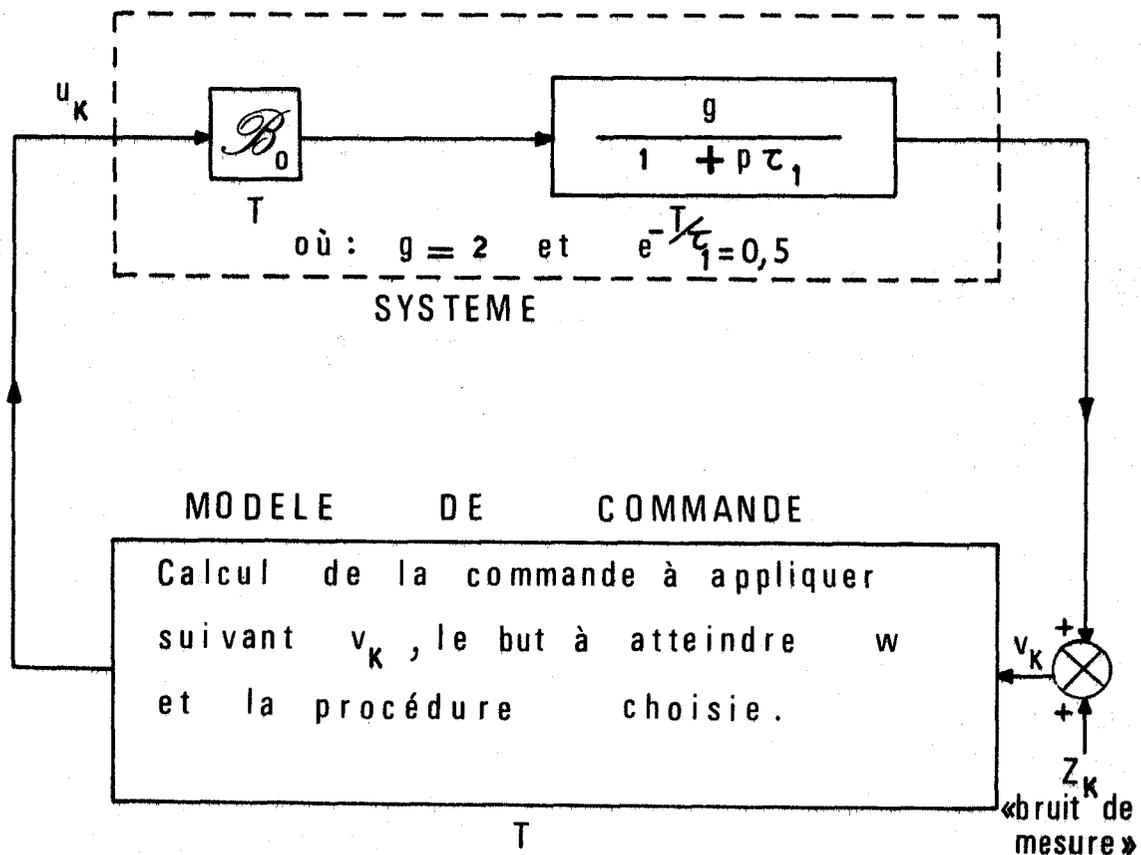
Comme il s'agit d'appréhender le processus dans une zone relativement voisine du régime désiré, il doit être suffisant de l'assimiler dans ce voisinage à un système dynamique d'ordre relativement faible : premier et deuxième ordre par exemple. Ce sont donc des systèmes de cette sorte que nous avons pris comme exemples d'étude, mais avec des tests nettement plus durs que les conditions pratiques, puisque nous avons généralement considéré des conditions initiales très éloignées du régime désiré.

2 - EXEMPLES D'ETUDE

2.1. - Exemple n° 1

Nous illustrons les différents modes de convergence sur l'identification et la commande d'un processus échantillonné linéaire du premier ordre d'équation de fonctionnement :

$$v_{k+1} = u_k + 0,5 v_k$$



Dans l'exemple que nous avons simulé, le but w a été choisi égal à 3 et la condition initiale v_0 nulle (donc assez éloignée du but).

Nous supposons que les temps de calcul sont suffisamment petits pour être négligés devant la période d'échantillonnage et les constantes de temps du système (ceci est particulièrement vrai lorsque nous faisons appel à la procédure homothétique). Nous supposons également que la sortie v_k est entachée d'un "bruit de mesure" Z_k ; dans l'exemple : bruit gaussien à moyenne nulle dont physiquement on peut considérer la valeur maximale comme étant de l'ordre de 0,13.

Les simulations ont été menées sur ordinateur numérique CII 10070.

A noter que les segments reliant les divers instants d'échantillonnage ne préjugent en aucune façon des valeurs atteintes par la sortie entre ces instants : ils ne servent qu'à repérer la succession des " points " faisant partie d'une même procédure. On suppose par ailleurs qu'il n'y a pas d'oscillations cachées et que la condition de SHANNON est respectée.

Figure n° 1

Nous avons la comparaison des sorties dans le cas d'homothéties successives et d'homothéties et rotations alternées.

Par rapport aux paramètres p et q (1 et 0,5) du processus, nous avons pris comme point de départ les paramètres $a_0 = 2$ et $b_0 = 0,1$ du modèle. En ce qui concerne les homothéties cela amène à un coefficient K de 0,45 et un coefficient L de 0,5 ; étant données la condition initiale v_0 (nulle au bruit près) et ces valeurs nous sommes évidemment dans la zone de stabilité.

Nous observons que la procédure homothétique nous amène à un dépassement d'environ 40 % que l'on peut réduire à 25 en effectuant une rotation après la première homothétie ; seulement il faut ensuite poursuivre uniquement avec des homothéties car la séquence homothétie-rotation est, du fait des bruits, tout à fait à prohiber au niveau du permanent ; on peut se rendre compte en effet de la bonne aptitude des homothéties à suivre ce régime alors que la succession des homothéties et des rotations ne l'est pas du tout.

Figure n° 2

Conformément à ce que nous avons mis en évidence au quatrième chapitre, nous avons considéré une zone autour du régime permanent dans laquelle nous n'effectuerons que des transformations homothétiques ; en dehors de cette zone nous reviendrons aux séquences homothétie-rotation précédentes. Nous avons choisi comme largeur de zone 0,52 soit quatre fois l'amplitude maximale du bruit ; la demi-largeur (0,26) représentant l'écart par rapport au permanent, soit près de 9 % de sa valeur (le bruit correspondant en gros à 4 ou 5 % de la valeur du permanent).

Suivant la procédure indiquée, nous avons ainsi un comportement tout à fait satisfaisant de la sortie du processus : dépassement minimisé et convergence efficace vers le système désiré (au bruit près évidemment) Ce qui se traduit après l'initialisation par une homothétie suivie d'une rotation et d'homothéties successives.

Figure n° 3

Nous présentons les valeurs de la commande à appliquer au processus. Nous avons la comparaison de celles relatives aux homothéties et rotations alternées avec celles relatives aux homothéties successives ; comme nous l'avons constaté également du point de vue de la sortie, les premières ne sont

pas adaptées au niveau du permanent alors que les secondes le sont très bien, avec d'ailleurs peu de fluctuations autour de $u_w = 1,5$ qui amène et maintient au but désiré $w = 3$.

Figure n° 4

C'est dans le plan (u_k, v_k) la transcription des résultats traduits par les courbes de la figure n° 2.

Pour ce qui est des homothéties successives nous observons très bien le comportement de type foyer relatif à la valeur $K = 0,45$. Du fait des bruits, nous n'avons pas une convergence "ponctuelle" mais une convergence vers une petite zone voisine du point nominal $(u_w = 1,5 ; w = 3)$: courbe "détaillée" dans la partie gauche et basse de la figure.

En ce qui concerne l'homothétie suivie de la rotation, puis d'homothéties successives, nous observons par rapport à la courbe précédente la bien plus grande rapidité de convergence alliée de surcroît à des dépassements beaucoup plus réduits. D'où l'intérêt de cette procédure.

Figures n°s 5 et 6

Nous avons représenté les valeurs atteintes par les paramètres du modèle.

Nous remarquons que la procédure d'homothéties et rotations alternées amène à des valeurs très fluctuantes des paramètres du modèle mais que ces valeurs s'organisent autour des valeurs réelles des paramètres du processus à commander.

Par contre la procédure des homothéties successives conduit à des valeurs peu différentes les unes des autres mais sans lien particulier avec les paramètres réels. Or, on a pu remarquer que cette dernière procédure est bien adaptée à la convergence vers le but à atteindre.

Il est ainsi mis en évidence que l'identification n'est qu'un moyen pour amener à la convergence : le modèle étant un modèle de commande ; sa valeur n'est qu'un " compromis " qui permet de bien commander. Nous pouvons vérifier les valeurs atteintes par le modèle par les relations donnant a et b , vues au chapitre III (Chapitre III, § 3) Nous obtenons :

$$a = 1,840$$

$$b = 0,091$$

C'est également ce que nous obtenons sur les courbes, au bruit près.

Figure n° 7

Nous nous plaçons dans le plan des paramètres (à rapprocher de la figure 1 du chapitre III). Procédure : homothétie, rotation, homothéties successives.

Nous avons mis en évidence le changement de direction apportée par la rotation : départ de type foyer ($K = 0,45$) et convergence de type noeud ($K = -0,184$).

Figure n° 8

Il s'agit ici du plan (x_n, y_n) tel qu'il a été introduit au chapitre II (§ 6.1.3.2.) .

Nous y avons représenté la convergence suivant les homothéties successives en dehors de tout bruit. Nous y observons le comportement de foyer avec " orientation " de l'enveloppe des points suivant une pente très voisine de la valeur K ($K = 0,45$) ; cela résulte de l'approximation linéaire ultime autour du point nominal :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} \approx K y_n \end{cases}$$

qui mène à une convergence de type 1 qui est bien celle que nous avons prévue au chapitre II (foyer de type 1 puisque la partie réelle des multiplicateurs S_1 et S_2 est positive).

Figure n° 9

Il s'agit du même système mais sans bruit et avec initialisation sur des modèles différents. La condition initiale v_0 et le but désiré w sont inchangés. La procédure de commande ressort de transformations homothétiques et la représentation de l'évolution du système est faite dans le plan (u_k , v_k) .

Nous y avons deux types de comportement : un comportement noeud stable et un comportement col, évidemment instable.

Le premier relatif aux modèles $(a_0 = 1 ; b_0 = 0,75)$ et $(a_0 = 2 ; b_0 = 1,5)$ qui ressortent d'une même valeur K $(K = - 0,25)$ mais de valeurs L différentes $(L = 1 \text{ et } 0,5)$. Nous sommes évidemment dans le domaine de stabilité avec ces valeurs, mais il est intéressant d'observer la différence qu'elles apportent dans l'amortissement et la rapidité de convergence ; en ce sens il semble préférable d'avoir une valeur de L plutôt petite que grande à K égal, c'est-à-dire de privilégier le choix d'un a_0 plutôt grand que petit.

La modification de L $(= p/a_0)$ entraîne à direction fixe une modification de module du vecteur paramètre modèle M_k : ainsi une augmentation de a_0 conduit à un module $|M_k|$ plus grand (cf. § 2.1. chap. III). Si on se reporte au § 2.1.2. du chapitre IV : de la relation (5) il ressort que $|(u_k, v_k)|$ sera plus petit et donc v_{k+1} déduit de (6) plus petit également, d'où un régime plus amorti qui confirme les résultats obtenus.

Le comportement col représenté dans la figure résulte d'un modèle initial $a_0 = 1$ et $b_0 = 0,833$ ($\neq 5/6$).

La valeur de K ($\neq -1/3$) est très voisine de la valeur critique d'instabilité, d'où ce comportement.

La Figure n° 10 représente dans le plan (x_n, Y_n) une convergence de type noeud très lente correspondant à une valeur de K ($= -0,32$) en deça de la valeur critique.

2.2. - Exemple n° 2

Nous avons simulé un système du second ordre :

$$v_{k+2} = p_1 u_{k+1} + p_2 u_k + q_1 v_{k+1} + q_2 v_k$$

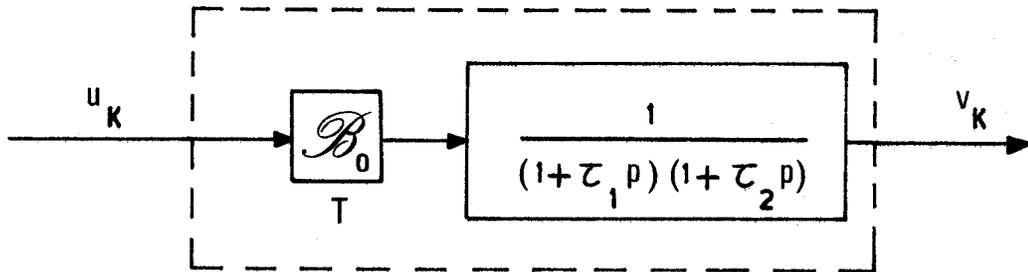
où nous avons repris en p_1 et q_1 les valeurs 1 et 0,5 des p et q précédents et où les p_2 et q_2 ont été pris comme le dixième de ces mêmes valeurs : 0,1 et 0,05. Nous avons gardé la condition initiale v_0 nulle et le but désiré w égal à 3. Nous n'avons pas considéré de bruit sur le système. Le modèle est un modèle à deux paramètres a_k et b_k dont on a choisi les valeurs initiales : $a_0 = 2$ et $b_0 = 0,1$. Nous utilisons comme procédure les homothéties et rotations alternées avec interdiction d'employer des rotations dans une zone de sortie $\{w - \Delta w, w + \Delta w\}$ avec Δw égal à 0,5, soit près de 17 % du but désiré.

Nous avons représenté dans le plan (u_k, v_k) l'évolution du système (Figure n° 11). Le comportement est très satisfaisant. Les homothéties ultimes correspondent à $K_1 \simeq -0,100$, $K_2 \simeq -0,010$, $L_1 \simeq 1,165$ et $L_2 \simeq 0,116$ valeurs qui assurent la stabilité du point nominal : $u_w \simeq 1,227$, $w = 3$ (cf. chap. III § 3.). Les valeurs de convergence du modèle sont $a_1 \simeq 0,991$ et $b_1 \simeq 0,595$ (elles correspondent à une pente $b_2 / a_2 \neq 0,6$; $a_2 \simeq 0,859$, $b_2 \simeq 0,515$).

Nous noterons que du fait des faibles valeurs de p_2 et q_2 les résultats sont assez comparables à ceux de la figure n° 4 de l'exemple précédent.

2.3. - Exemple n° 3

Nous poursuivons sur un exemple du second ordre où les coefficients de l'équation de fonctionnement résultent non d'un choix arbitraire mais d'une structure bien précise :



où : $T = 3s$, $\tau_1 = 2s$ et $\tau_2 = 5s$; ce qui nous mène aux valeurs suivantes : $p_1 \simeq 0,234$, $p_2 \simeq 0,116$, $q_1 \simeq 0,772$, $q_2 \simeq -0,122$.

Nous cherchons à atteindre une sortie de valeur 5 par l'intermédiaire d'une procédure constituée de transformations homothétiques successives. Comme précédemment nous démarrons la convergence à partir d'une valeur nulle.

La Figure n° 12 représente l'évolution du système dans le plan (x_n, y_n) à partir d'un modèle $a_0 = 0,10$, $b_0 = 0,14$. Nous y observons un comportement foyer stable à convergence lente et tributaire d'assez forts dépassements par rapport au point nominal. Si l'on se réfère à l'exemple n° 1 et aux commentaires de la figure n° 9 on doit y remédier en augmentant la valeur du paramètre a_0 (ajustements simultanés de L_1 et L_2). C'est ce qui a été réalisé en faisant passer a_0 de 0,10 à 0,35.

Il y a lieu également, à a_0 fixe, de modifier la pente b_0/a_0 , c'est-à-dire d'ajuster simultanément K_1 et K_2 . Nous avons représenté, Figure n° 13 , les résultats de ces ajustements par modification de la valeur de b_0 tout en gardant celle de a_0 égale à 0,35.

Chaque courbe représente en valeur absolue les écarts maximaux et minimaux successifs de la sortie atteinte par rapport à la sortie désirée. Nous avons fait varier b_0 de 0,15 à 0,65 ce qui correspond à une variation de la somme $(K_1 + K_2)$ de 0,5 à 0.

De cet ensemble de courbes, on remarquera qu'une somme faible est préférable dans les premières périodes ($\leq 6T$) mais qu'ensuite on s'accommode mieux d'une valeur plus forte.

Ceci peut s'expliquer par l'expression même de la récurrence qui fait tout d'abord intervenir K_1 seul, puis K_1 et K_2 (cf. § 3, chap III); en ce sens pour avoir une convergence initiale rapide il faut, qu'à l'image du paramètre K , auquel on peut l'assimiler, le paramètre K_1 soit nul, sinon voisin de zéro. Or, la somme $(K_1 + K_2)$ étant nulle, K_1 ne l'est pas; on peut donc descendre plus en deçà. Nous avons représenté Figure n° 14 les valeurs atteintes par la sortie dans la phase initiale (jusqu'à $t = 3T$); elles mettent en évidence le meilleur comportement suivant les valeurs décroissantes de K_1 et de $(K_1 + K_2)$.

Si dans la phase initiale c'est K_1 qui importe, il ressort, par contre, que c'est surtout K_2 qui est primordial au niveau de la convergence ultime vers le régime désiré: les valeurs de K_2 proches de zéro favorisant la rapidité de cette convergence (Figure n° 15).

On peut l'expliquer si on se réfère à la récurrence du troisième ordre représentant l'ensemble {système à commander - modèle de commande} :

$$v_{n+3} = K_1 v_{n+2} + K_2 v_{n+1} + \frac{L_2 v_{n+2} + L_1 w}{L_2 v_{n+1} + L_1 w} \left(1 - K_1 \frac{v_{n+1}}{v_{n+2}} - K_2 \frac{v_n}{v_{n+2}} \right) w$$

Le système étant du second ordre, il est normal que la meilleure " adaptation " du modèle à ce système ressorte d'une description suivant une récurrence du second ordre. Plus exactement, il faut donc que la récurrence ci-dessus, puisse s'exprimer, indépendamment de tout v_1 , selon un second ordre ; en fait que le " coefficient " multiplicatif de v_n , indépendant de tout v_1 , devienne nul, s'il ne l'est déjà : ce coefficient est le paramètre K_2 .

Généralement on ne pourra tout à la fois régler au mieux K_1 et K_2 . La référence la plus simple dont on dispose pour ce réglage est leur somme et non K_1 et K_2 individuellement. Régler la somme revient à ajuster la pente b_0/a_0 à a_0 fixe (comme nous venons de le voir) suivant que l'on se trouve en phase initiale ou non. Sans oublier le premier réglage mis en évidence : les dépassements trop importants ou un régime dynamique trop lent se corrigeant par les variations de a_0 à b_0/a_0 fixe (L_1 et L_2).

Partant d'une condition initiale v_0 nulle et considérant K_2 nul, peut-il exister une valeur de K_1 qui fasse que le système réponde en deux périodes ?

Nous avons :

$$v_1 = L_1 w$$

$$v_2 = (K_1 L_1 + 1 + L_2) w$$

$$v_3 = \left[K_1 (K_1 L_1 + 1 + L_2) + \frac{1}{K_1 L_1 + 1 + L_2} + \frac{L_2}{L_1} \right] w$$

...

v_2, v_3, \dots, v_n seront égaux à w si K_1 est égal à $-L_2/L_1$ c'est-à-dire à $-p_2/p_1$.

K_2 nul implique b_0/a_0 égal à q_2/p_2 , d'où :

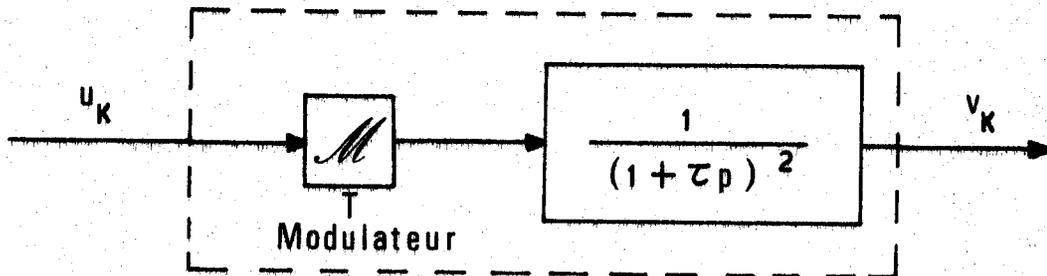
$$K_1 = q_1 - p_1 q_2/p_2 = - p_2/p_1$$

Cette dernière relation est spécifique du système à commander et n'est généralement pas réalisée ; aussi met-elle bien en évidence ce que nous annonçons : généralement, on ne pourra, tout à la fois régler au mieux K_1 et K_2 .

A titre de vérification, nous avons mené la simulation d'un exemple correspondant à cette relation.

2.4. - Exemple n° 4

Nous étudions un système du second ordre représenté par le schéma suivant :



où le modulateur est tel que l'équation de fonctionnement puisse s'écrire :

$$v_{k+2} = 2 D v_{k+1} - D^2 v_k + (1 - D) u_{k+1} + D (D - 1) u_k$$

$$\text{avec } D = e^{-T/\tau}$$

Choissant $\tau = T = 1$ seconde, nous aboutissons aux valeurs suivantes : $D \approx 0,368$

$$p_1 = (1 - D) \approx 0,632 \quad p_2 = D (D - 1) \approx -0,232$$

$$q_1 = 2 D \approx 0,736 \quad q_2 = -D^2 \approx 0,135$$

Comme précédemment, partant d'une condition initiale nulle, nous cherchons à atteindre, par le biais d'homothéties, une sortie de valeur 5.

La Figure n° 16 représente l'évolution du système dans le plan (u_k, v_k) à partir d'un modèle $a_0 = 0,35$, $b_0 = 0,30$. Nous y observons un comportement noeud stable assez similaire à celui mis en évidence avec le premier ordre (figure n° 9). Réduisant b_0 ($b_0 = 0,15$) nous modifions le comportement en foyer stable (Figure n° 17)

C'est entre ces deux comportements que doit se situer la convergence la plus rapide. A cet égard, si nous calculons la somme $(K_1 + K_2)$ celle-ci devrait être plus faible lors du comportement noeud que lors du comportement foyer ; nous obtenons :

Noeud : $K_1 \simeq 0,194$; $K_2 \simeq 0,064$; Somme $\simeq 0,258$

Foyer : $K_1 \simeq 0,465$; $K_2 \simeq -0,036$; Somme $\simeq 0,429$

Notons que le signe négatif, caractéristique du noeud quand il s'agissait d'un premier ordre, n'est pas conservé car il y a déplacement de l'équilibre caractérisé par K nul (ou de la somme $\sum K_i$) vers les valeurs positives ; par contre, la relation d'ordre sur les valeurs de la somme l'est quand il s'agit de hiérarchiser noeud et foyer. Les comportements noeud ou foyer étant très caractéristiques il est facile de les déceler et de modifier en conséquence la pente b_0/a_0 de façon à accélérer le processus de convergence.

Gardant le même modèle ($a_0 = 0,35$, $b_0 = 0,15$) nous réduisons τ à une demi-seconde ; le foyer précédent se change alors en noeud, noeud d'ailleurs peu amorti (Figure n° 18). Examinons les valeurs que prennent K_1 et K_2 dans ce nouvel exemple d'étude.

Déterminant p_1 , p_2 , q_1 et q_2 ($\simeq 0,865$; $\simeq -0,117$; $\simeq 0,271$; $\simeq -0,018$) nous obtenons $K_1 \simeq -0,100$, $K_2 \simeq 0,032$

et leur somme $\simeq - 0,068$.

Si l'on veut une convergence plus rapide on cherchera à accroître la somme précédente. On peut le faire sans modifier les conditions initiales (u_0, v_0) en réduisant la valeur de b_0 et en tendant ainsi au comportement foyer ; on obtient une convergence adéquate (en deux périodes) pour une valeur de b_0 avoisinant 0,055 (Figure n° 19). Nous avons déterminé les K_1 et K_2 correspondants :

$$K_1 \simeq 0,135 \qquad K_2 \simeq 0,000$$

ainsi que L_1 et L_2 (inchangés) : $L_1 \simeq 2,46$ $L_2 \simeq - 0,33$

D'après ce que nous avons vu précédemment il est logique que K_2 soit nul et nous pouvons vérifier par ailleurs que K_1 correspond bien au rapport $- p_2/p_1$.

Réduisant L_1 (augmentant a_0), tout en gardant la même pente b_0/a_0 ($a_0 = 0,750$, $b_0 = 0,118$), nous réduisons l'amplitude du dépassement (figure n° 19). Nous réalisons sensiblement la même chose avec $a_0 = 0,75$, $b_0 = 0,35$ dans le cas du comportement noeud (figure n° 18).

K_2 nul, K_1 égal à $-p_2/p_1$, on peut commander le système en une période : il suffit pour cela d'amener L_1 à l'unité ($v_1 = L_1 w$) ; c'est-à-dire prendre pour modèle $a_0 = p_1$

$$b_0 = \frac{p_1}{p_2} q_2 \text{ ou encore appliquer } u_0 = w/p_1, u_1 = u_2 = \dots = (1/p_1 - q_2/p_2) w.$$

2.5.- Exemple n° 5

Nous avons testé l'insertion des transformations homothétiques précédentes dans la méthode des moindres carrés.

Nous avons choisi pour cela un système du premier ordre décrit par l'équation de fonctionnement :

$$v_{k+2} = 0,4 v_k + 0,2 u_k$$

la condition initiale est v_0 , égale à zéro , et le but à atteindre est w , égal à 2.

Nous sommes volontairement partis d'un modèle qui donne une commande initiale importante de manière à obtenir des valeurs fortes de sortie et d'observer si dans ce cas extrême il y a ou non amélioration par la nouvelle procédure :

$$a_0 = 0,02 \text{ et } b_0 = 0,01 \quad (K = 0,3 , L = 10)$$

Par les transformations homothétiques seules, on obtient : $v_1 = 20$, $v_2 = 8$, $v_3 = 2,9$, ... Dès v_2 , on peut faire intervenir les moindres carrés, estimer \hat{a}_2 et \hat{b}_2 et les prendre pour modèle au lieu de a_2 et b_2 (0,8 et 0,4). On obtient alors : $\hat{a}_2 = 1,6$ et $\hat{b}_2 = 0,8$ ce qui conduit à $v_3 = 2,65$ au lieu de 2,9 précédemment.

Il y a diminution de l'écart par rapport à w de plus de 25 %.

Néanmoins, les homothéties seules peuvent être plus performantes que cette nouvelle procédure, il suffit pour cela que l'on amène le paramètre L à une valeur plus faible. Ainsi avec $L = 1$ ($a_0 = 0,2$, $b_0 = 0,1$) nous obtenons : $v_1 = 2$, $v_2 = 2,6$, $v_3 = 2,32$, ... , alors que l'insertion des moindres carrés amène v_3 aux environs de 1,55. L'écart relatif par rapport à w n'est plus que 22,5% ($0,45/2$) au lieu de 32,5% ($0,65/2$) précédemment, mais celui par les homothéties seules est descendu plus en deça : de 45 % ($0,90/2$) à 16% ($0,32/2$).

Ceci nous amène à préférer une initialisation par la méthode des moindres carrés, type classique, quoique celle ci demande plus de temps calcul que la méthode mixte précédente. Nous la préférons également aux rotations généralisées, des essais ayant montré leur trop grande sensibilité aux bruits. Comme nous l'avons mis en évidence au § 2.3. du chap IV, nous faisons appel aux homothéties dans la phase d'approche du but désiré (où nous amène " les moindres carrés ") ; elles y sont beaucoup plus aptes que " les moindres carrés " à convergence : la sortie atteinte et les paramètres " biaisés " en sont les conditions initiales très satisfaisantes et les temps calcul y sont bien plus faibles.

Le problème est généralement la marge autour du régime désiré qui marque le passage d'une méthode à l'autre : elle est au moins de l'importance des perturbations, vues de la sortie ; sinon, d'après nos essais nous pouvons retenir un écart relatif d'environ 20 % du but à atteindre.

2.6. - Exemples n°s 6 et 7

Pour terminer, et puisqu'à plusieurs reprises nous avons envisagé soit des commandes à but évolutif lent, soit des systèmes non stationnaires lents, nous examinons des exemples de maintien de consigne dans de telles conditions.

a) A cet effet nous reprenons le système du premier ordre précédent :

$$v_{k+1} = q(k) v_k + p u_k$$

où le paramètre q varie comme indiqué Figure n° 20 et où p est fixe, égal à 0,2.

Le but est w égal à 2 et la condition initiale est prise égale à 3. Le modèle initial est tel que $a_0 = 0,1$, $b_0 = 0,2$.

La sortie partant de v_0 (= 3) se ramène assez rapidement vers le but désiré (Figure 20) Hormis le fait que nous partons d'une condition initiale dont l'écart relatif par rapport au but est de 50 % , les fluctuations n'atteignent pas 15 % de la valeur du régime désiré alors que celles relatives au paramètre q les dépassent largement (25 %) ; de plus ces fluctuations sont relativement rapides dans le temps : environ 12 % par période.

b) Nous poursuivons à présent avec une commande à but évolutif.

On reprend le système précédent avec q fixe , égal à 0,4. Le but évolue suivant une loi linéaire : $w_k = 2 + 0,2 k$.

La condition initiale v_0 est égale à l'unité et le modèle initial est le même que le précédent.

La sortie converge assez rapidement vers le but et le suit très bien (Figure n° 21). Dans le plan (u_k , v_k) nous avons un " comportement foyer " dont le point nominal se déplace suivant une pente u_k/v_k égale à l'inverse du gain du système (Figure n° 22).

Nous noterons enfin, que lorsqu'il y a moyen d'apprécier le gain " g " du système cela peut être utile pour définir la pente b_0/a_0 sur laquelle nous démarrons la procédure homothétique. En effet, nous avons montré (chap. III § 3.) que nous avons :

$$a' = \frac{\sum p_i}{1 - \sum q_i - (\sum p_i) b_0/a_0} \quad \text{et} \quad b' = a' b_0/a_0$$

Or, le gain s 'exprime par la relation :

$$g = \frac{\sum p_i}{1 - \sum q_i}$$

d'où nous déduisons : $b_1 = \frac{1}{1 + \frac{a_0}{b_0 g}}$

comme il est obligatoire que le modèle soit stable en fin de convergence, nous devons avoir :

$$\left| \frac{1}{1 + \frac{a_0}{b_0 g}} \right| < 1, \text{ d'où connaissant } g, \text{ une}$$

possibilité de choix de la pente b_0/a_0 ; si on considère qu'il est plus représentatif du système à commander de partir d'un modèle initial, stable lui aussi (ce qui n'est pas obligatoire), on ajoutera la condition : $|b_0| < 1$.

Figures n° 1 à n° 22 du chapitre : pages suivantes .

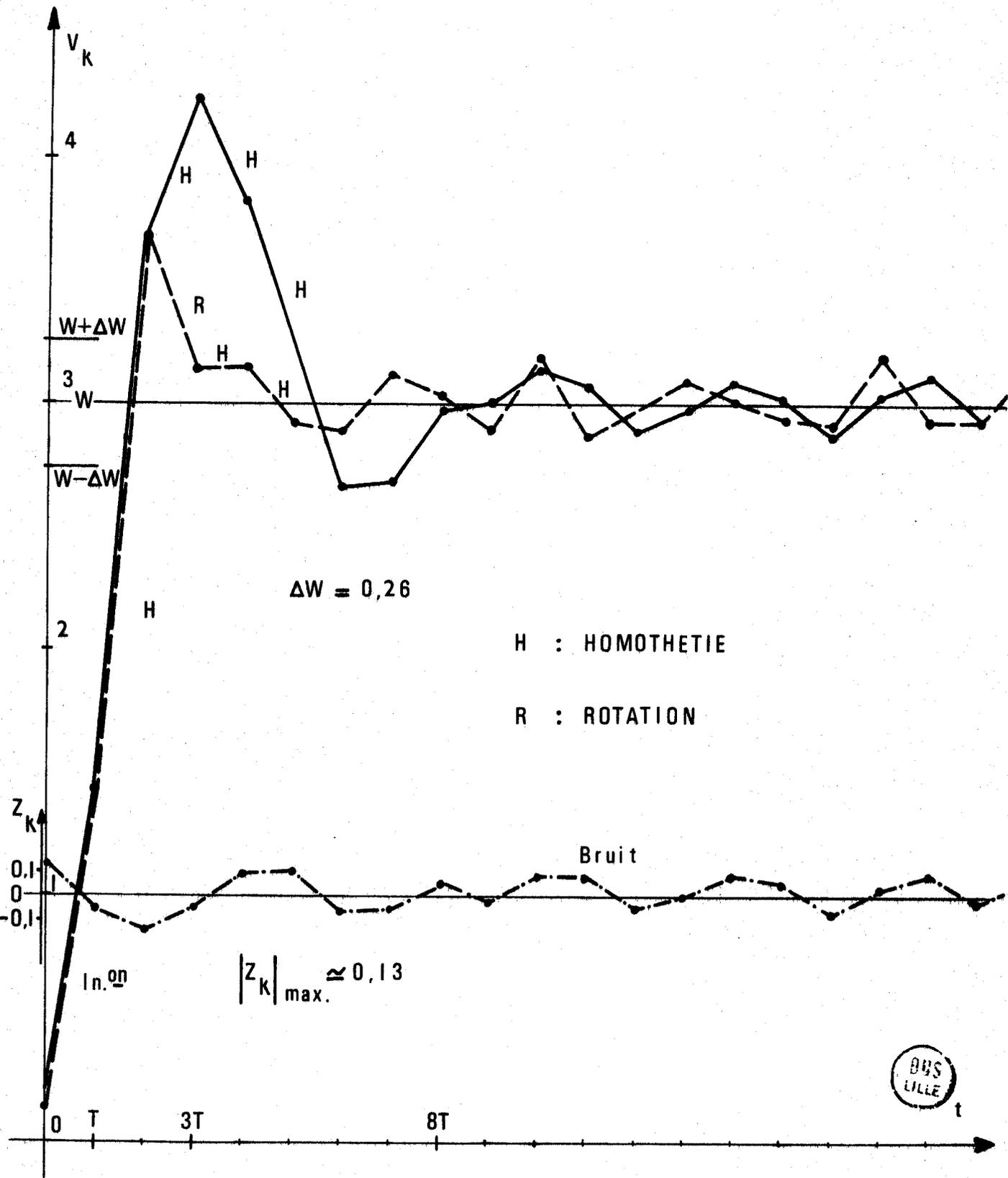


fig. 2

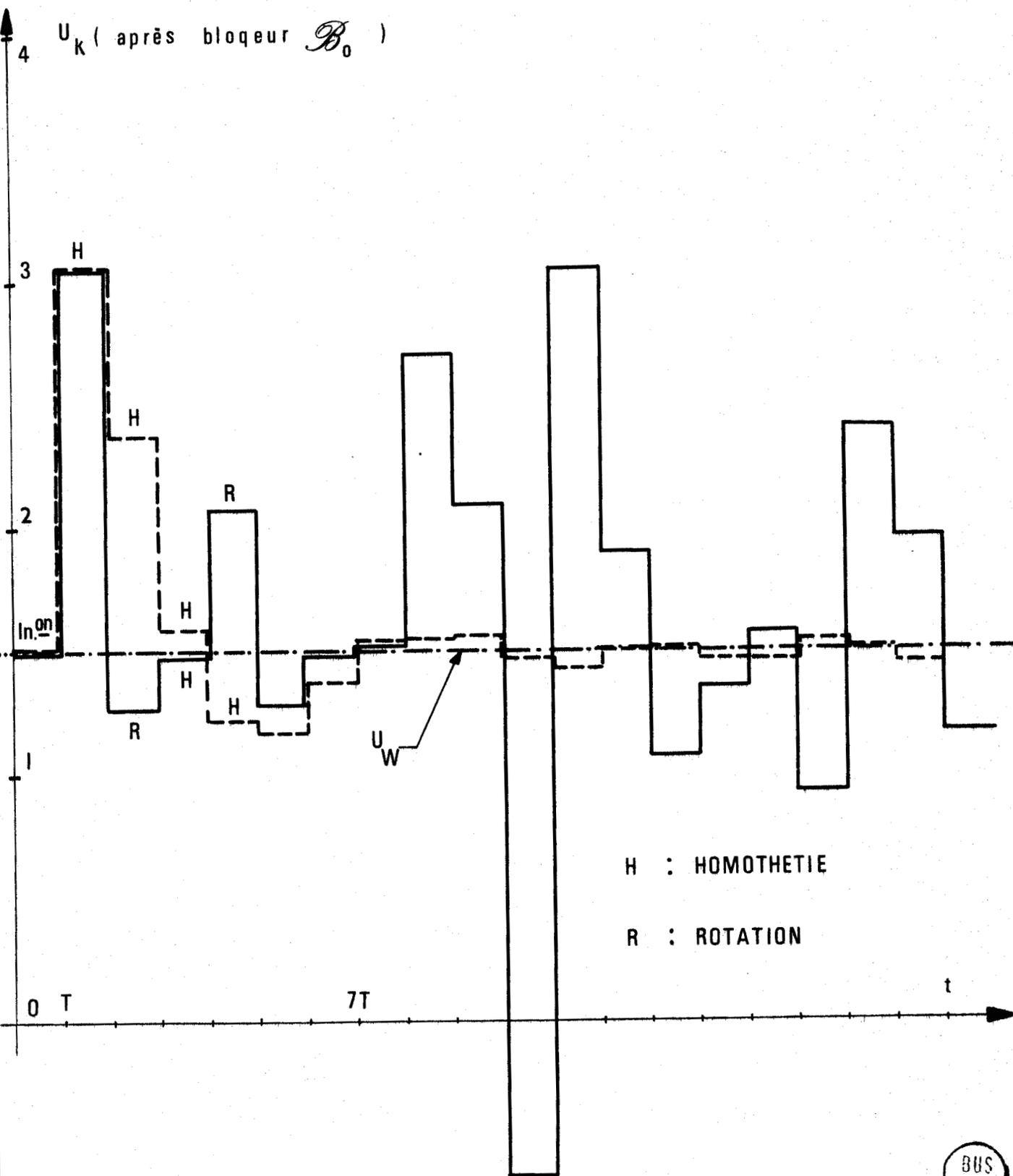


fig. 3

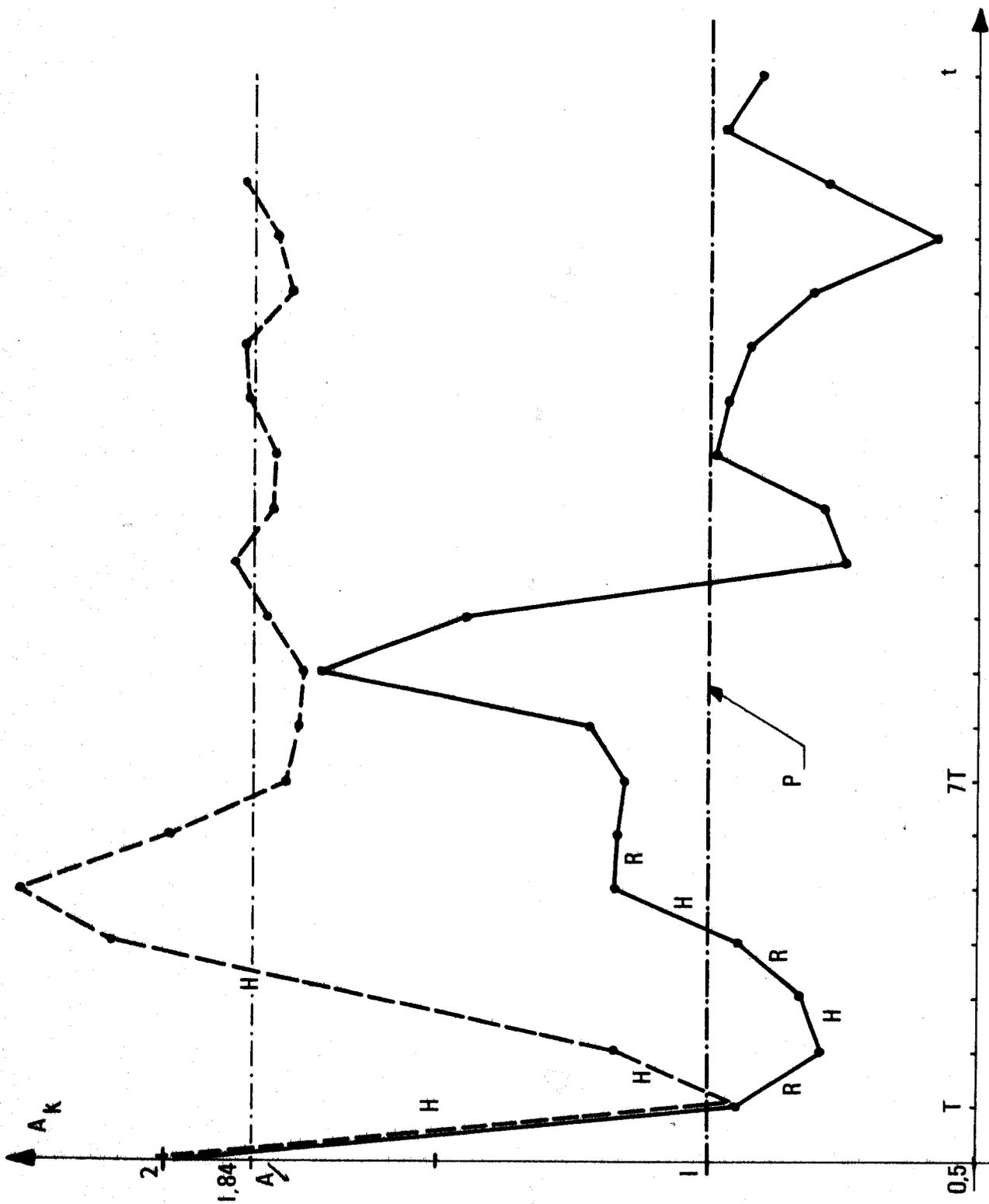


fig. 5



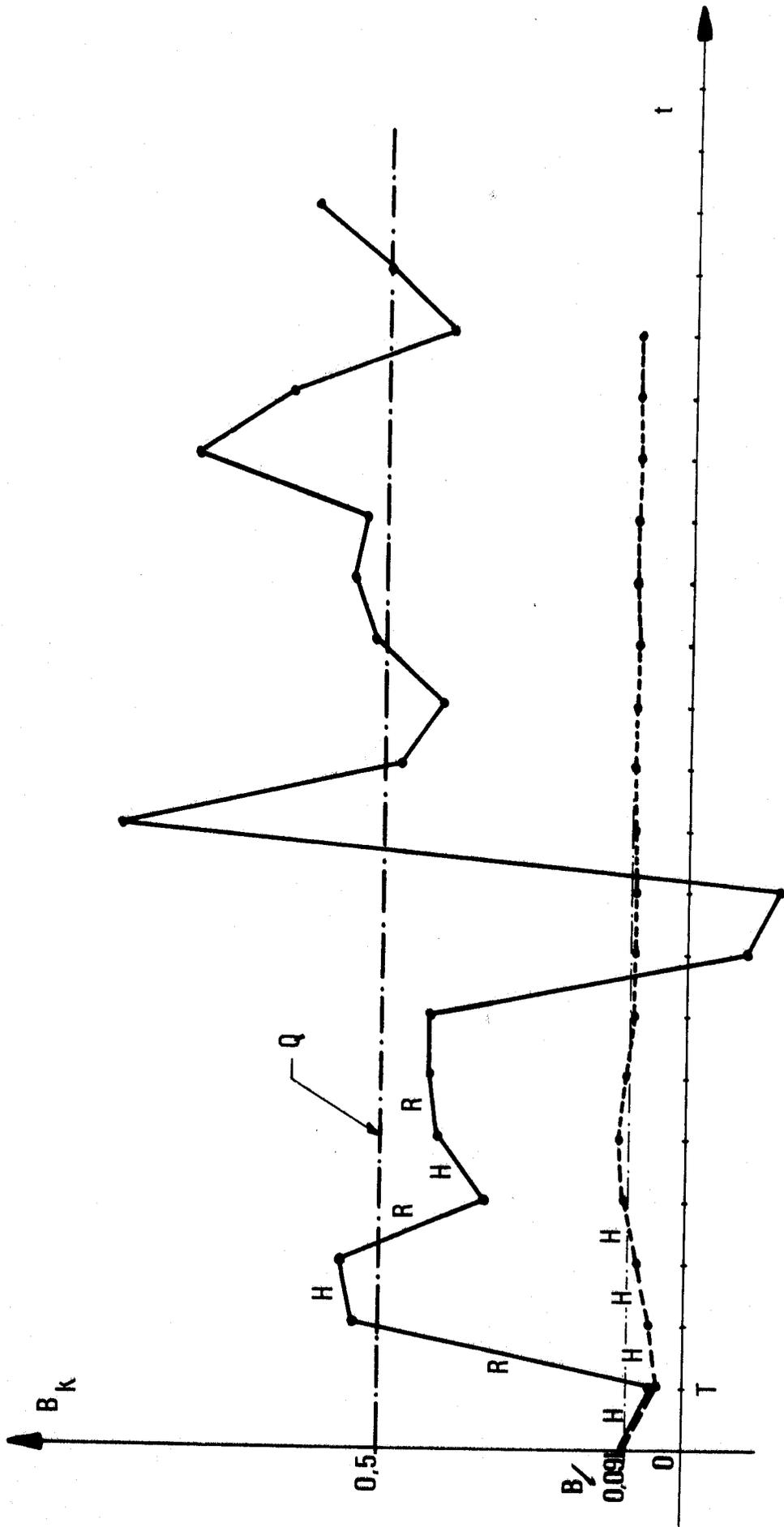


fig. 6

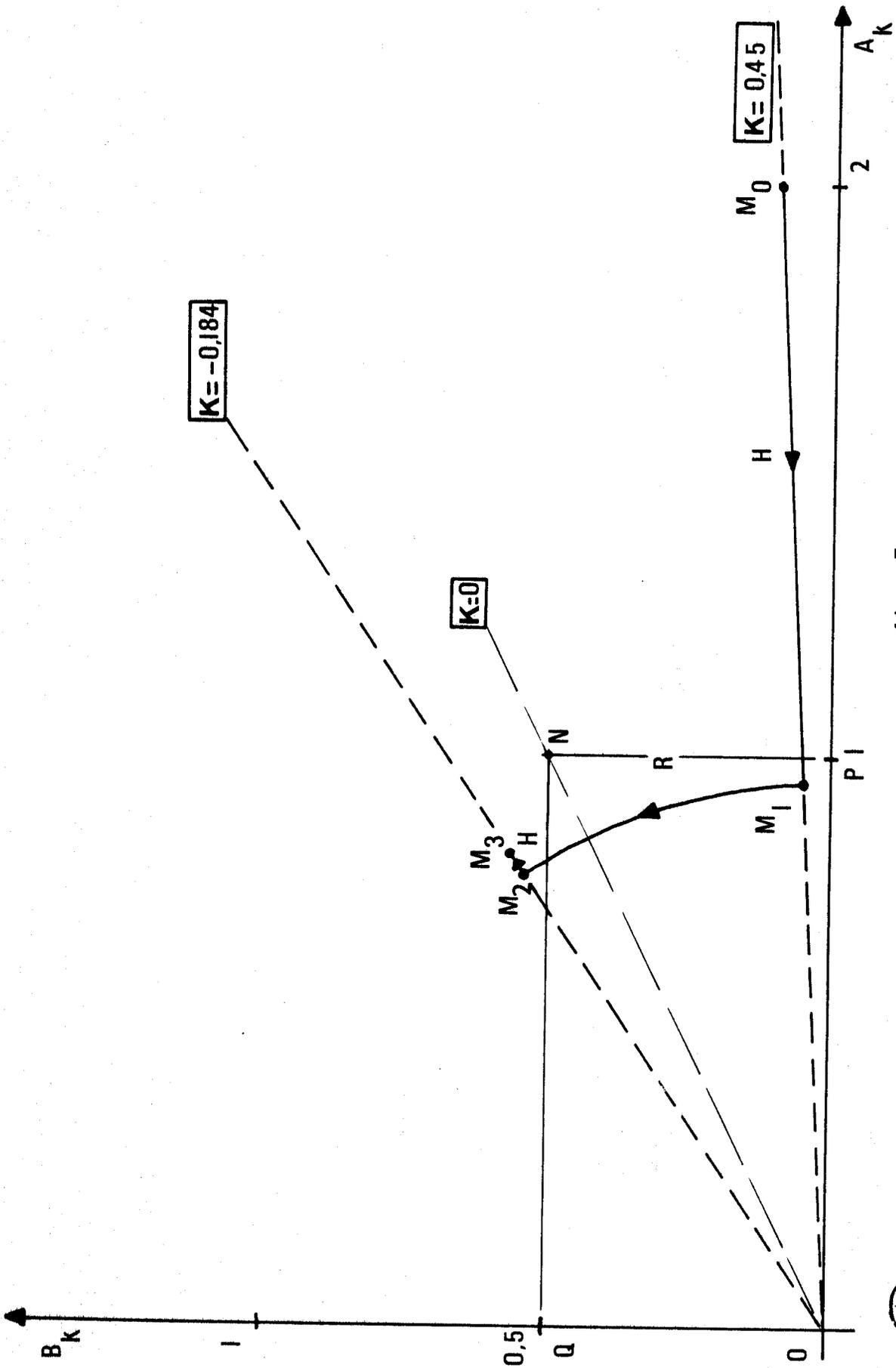


fig. 7

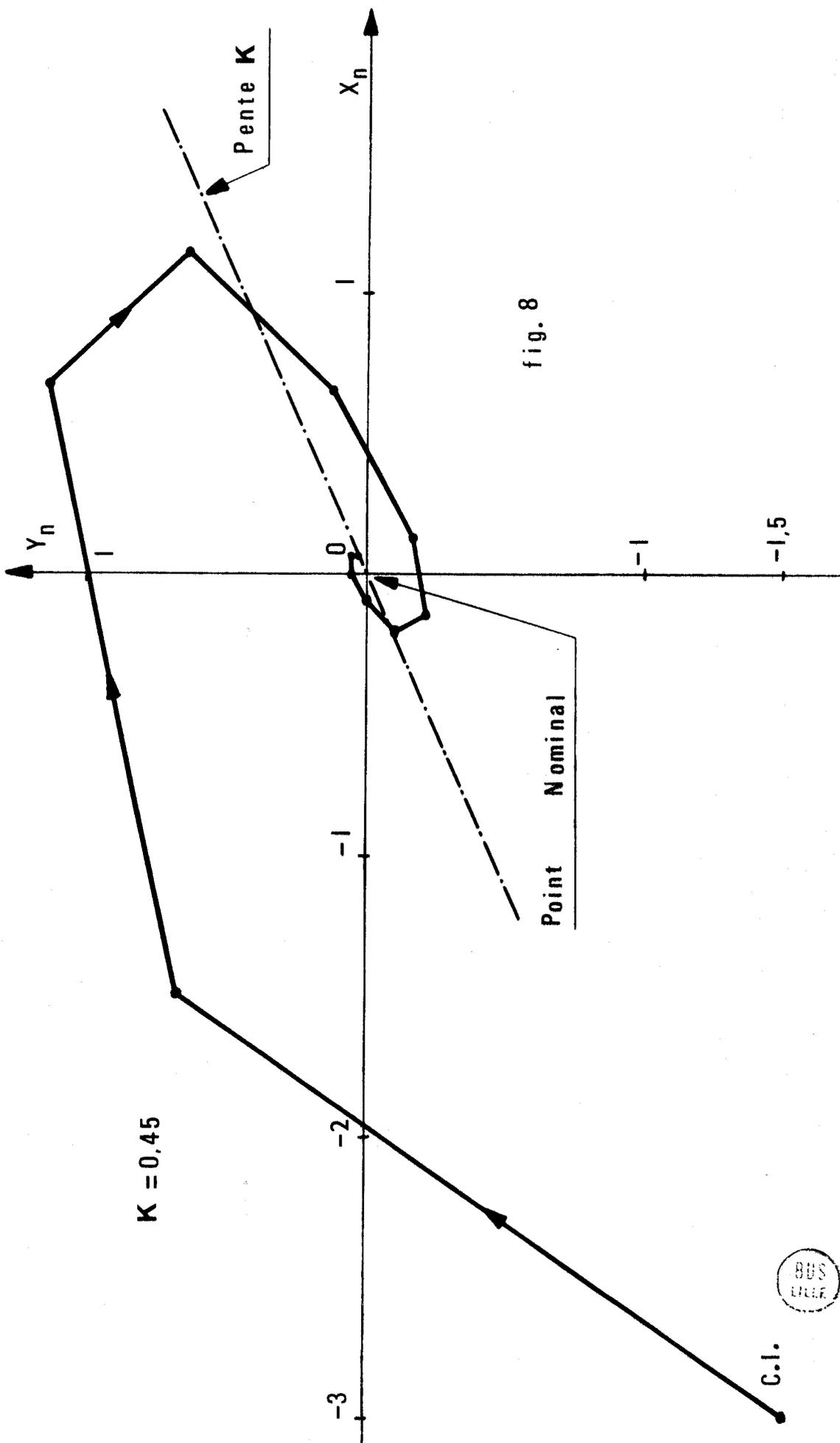


fig. 8

$K = 0,45$

Pente K

Point Nominal

BUS 11111

C.I.

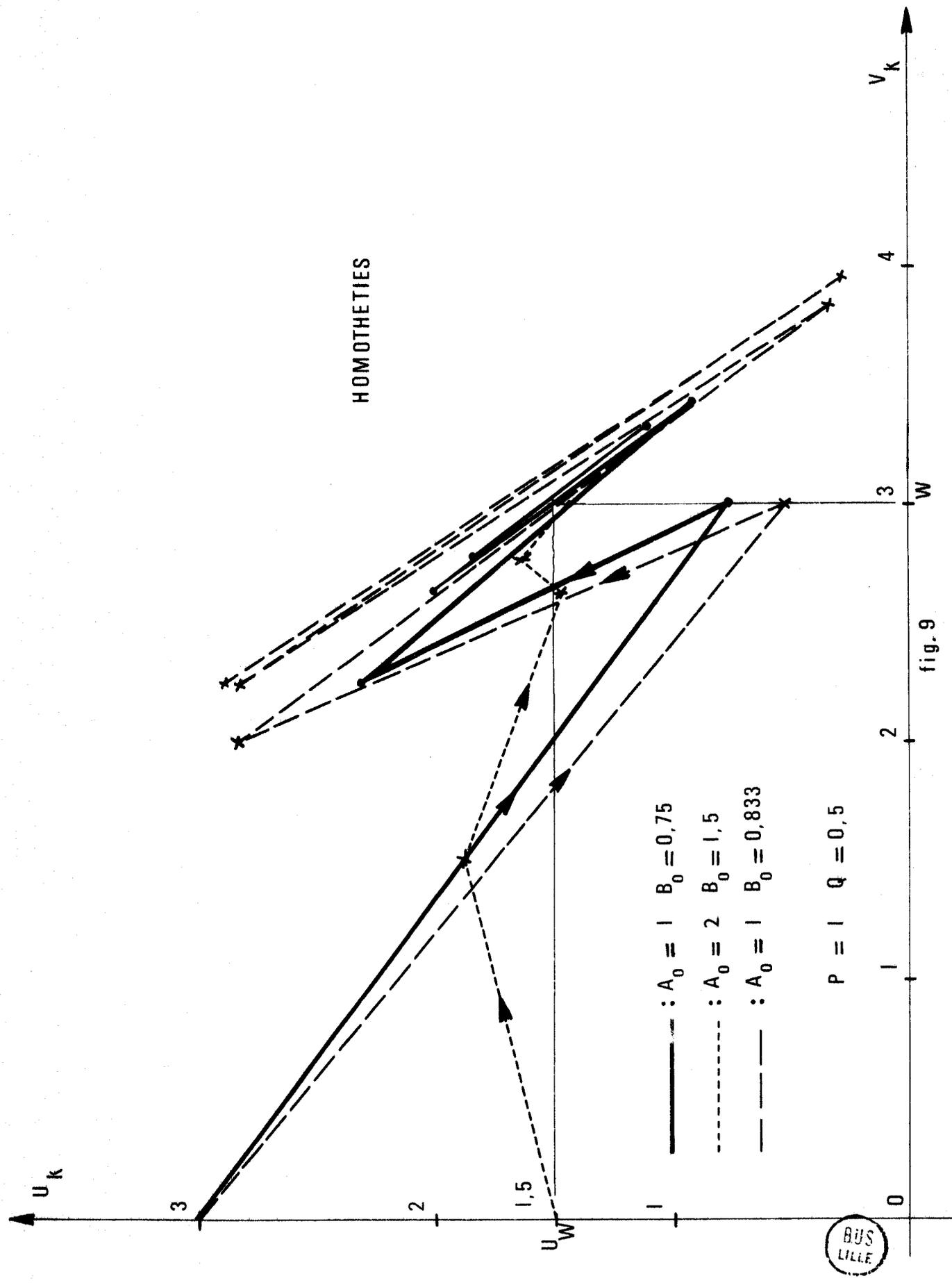


fig. 9

$K = -0,32$

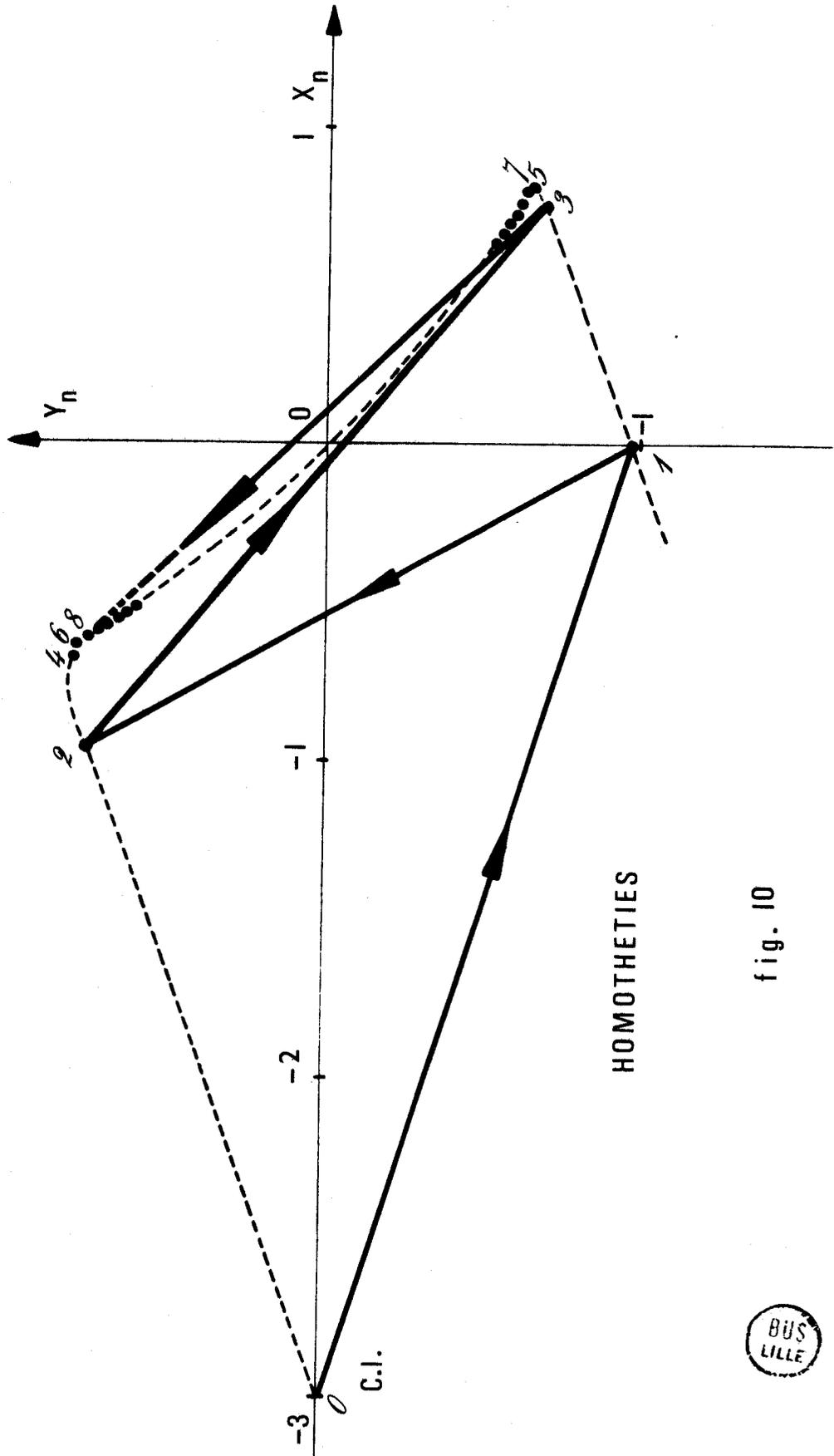


fig. 10



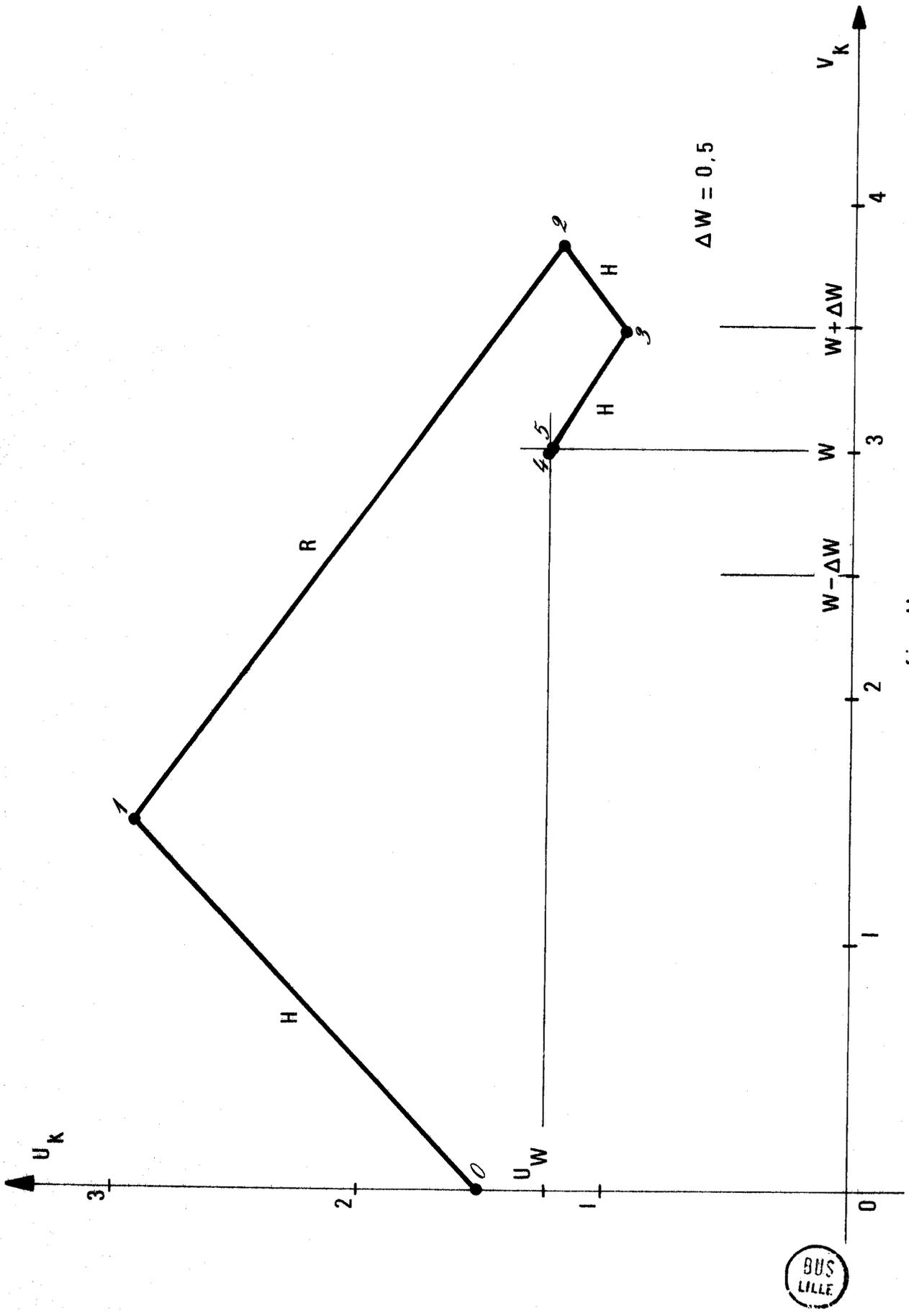


fig. 11



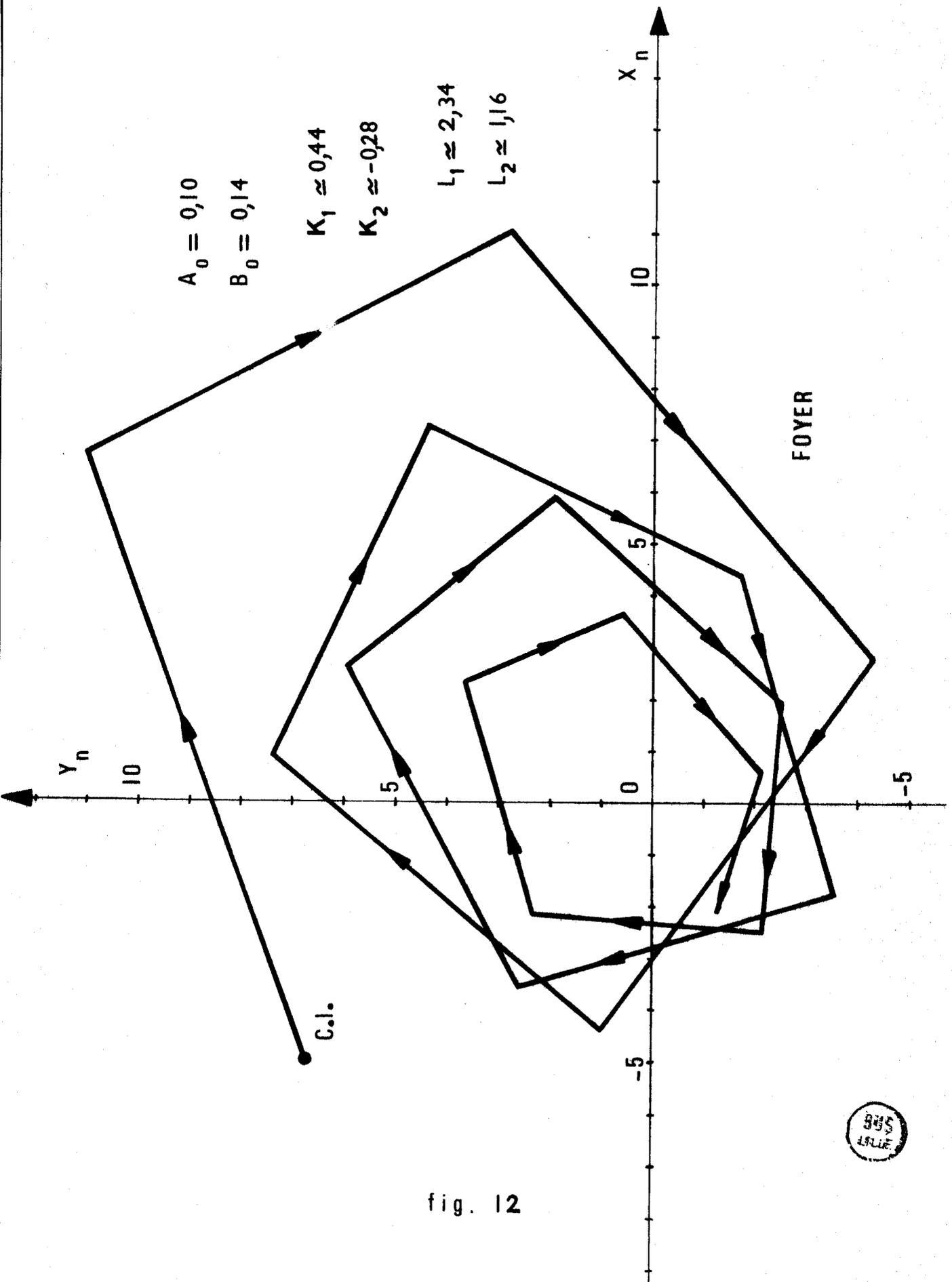


fig. 12

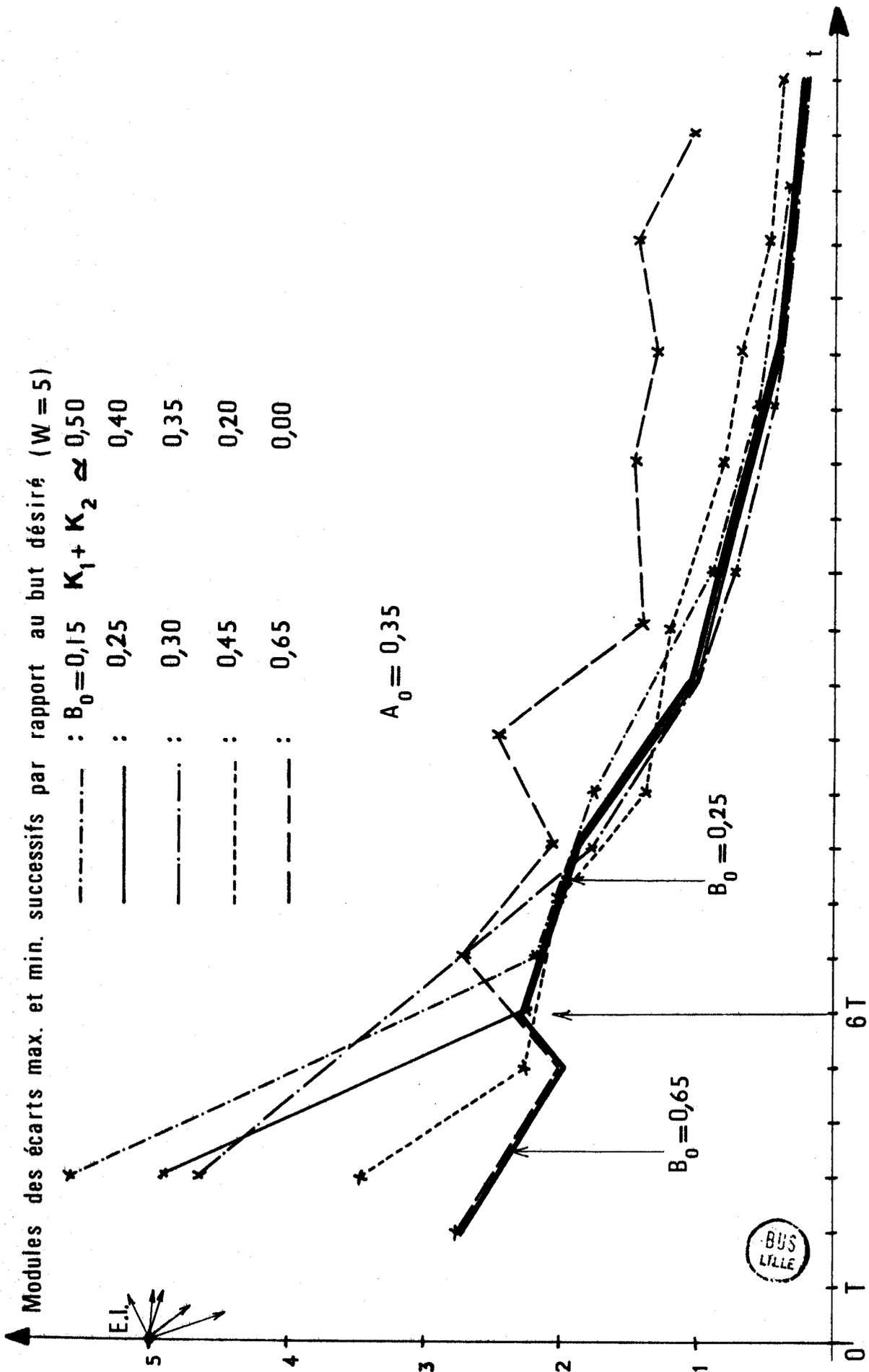


fig. 13

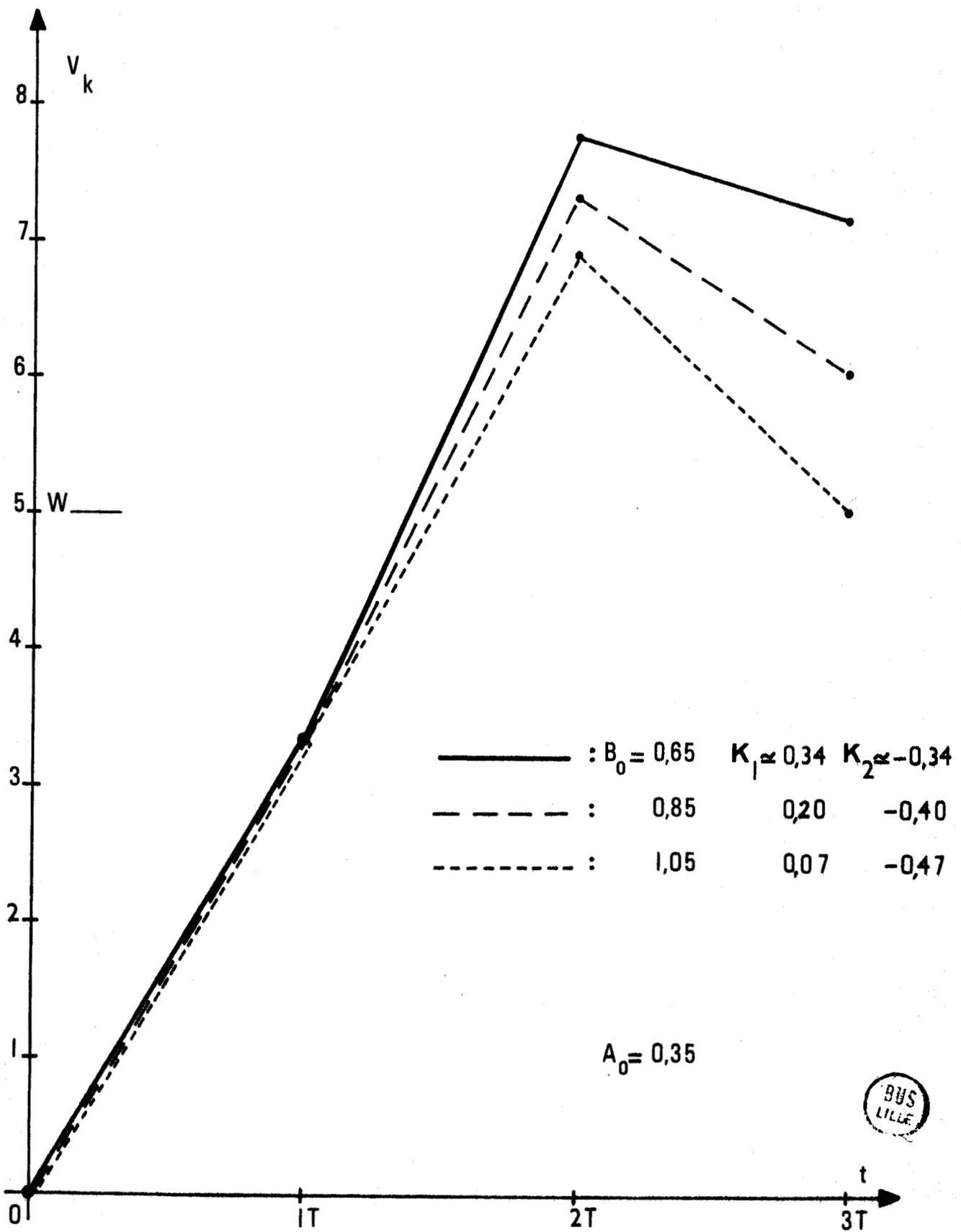


fig. 14

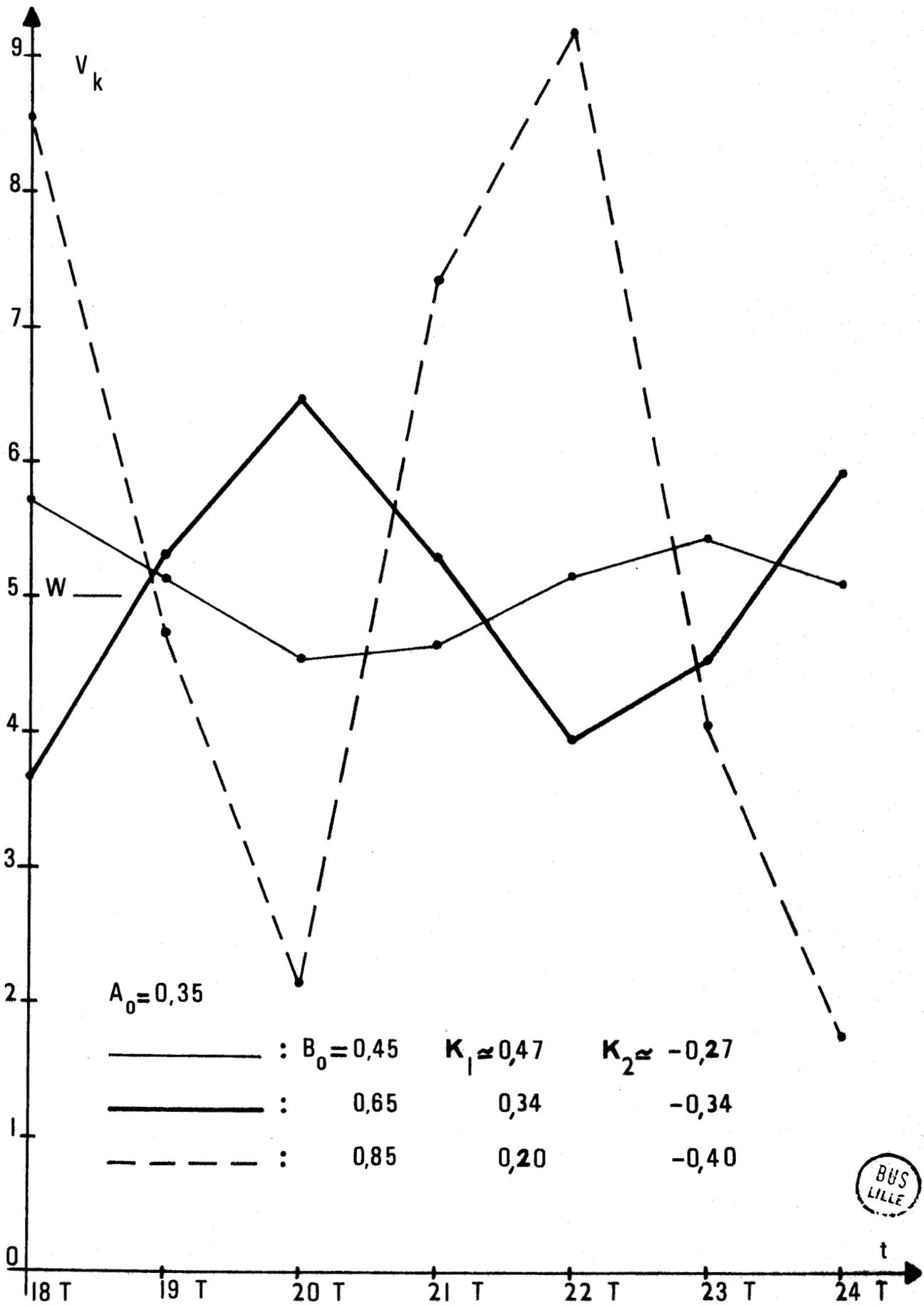
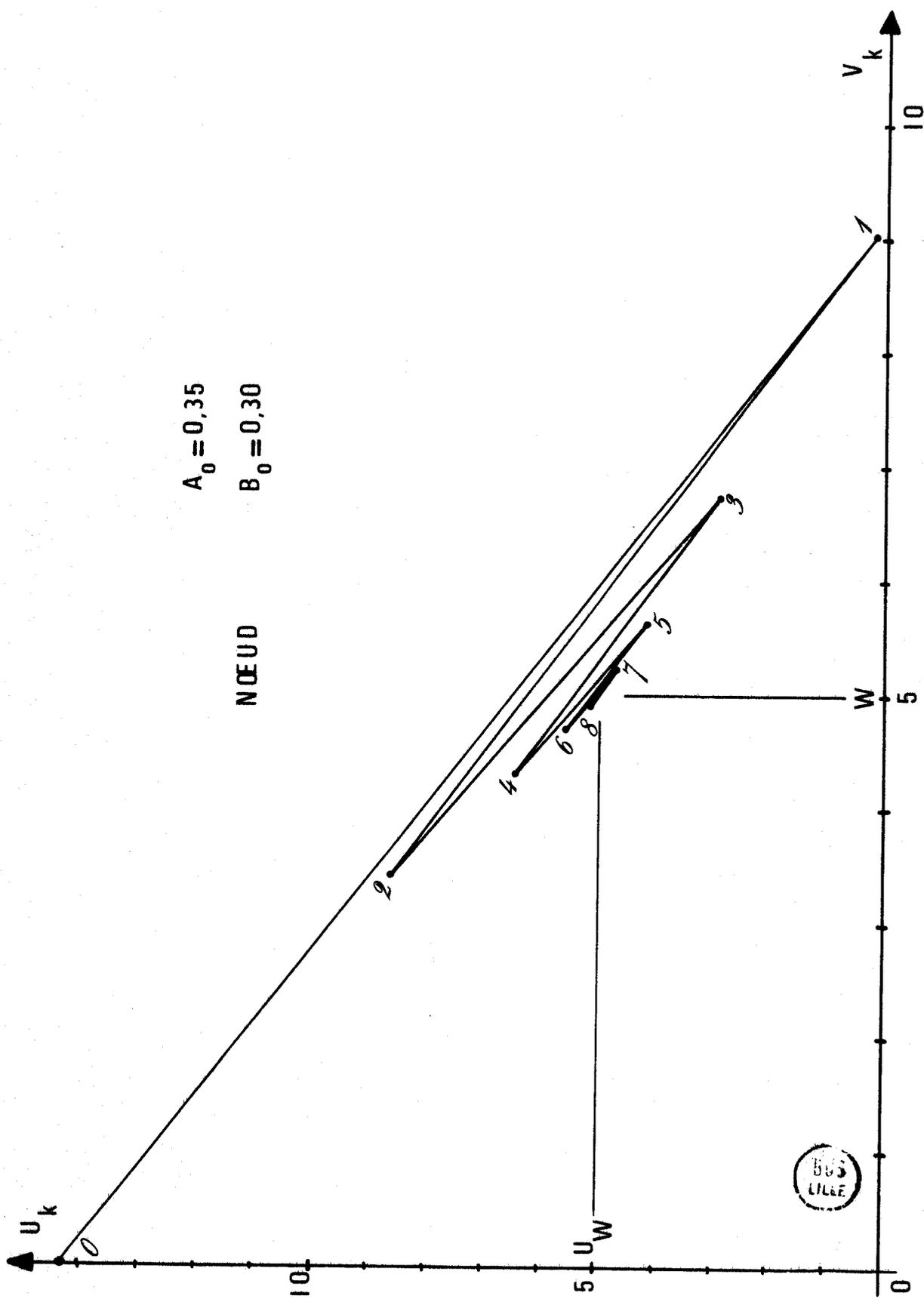


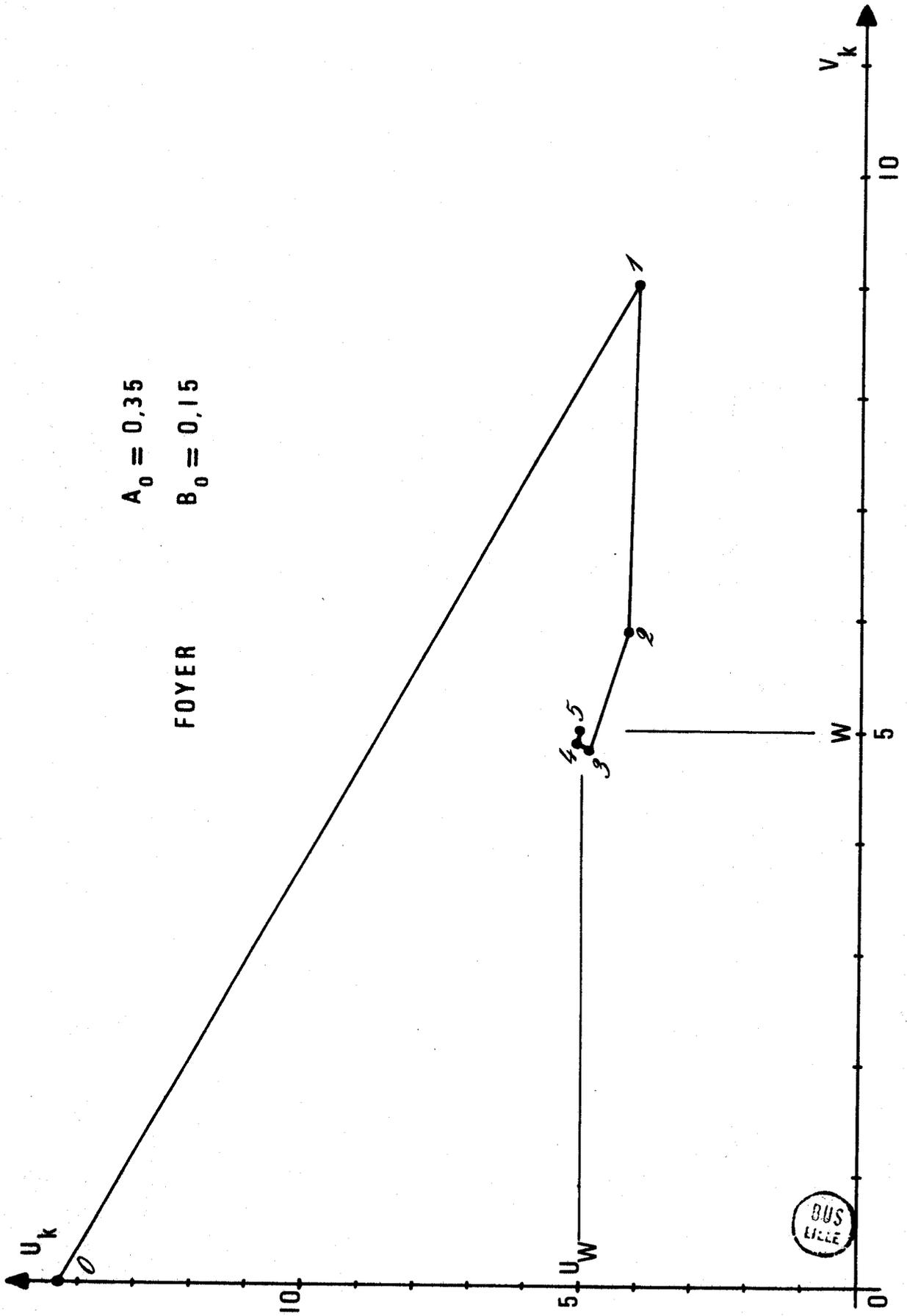
fig. 15



$A_0 = 0,35$
 $B_0 = 0,30$

NŒUD

fig. 16



$A_0 = 0,35$
 $B_0 = 0,15$

FOYER

fig. 17

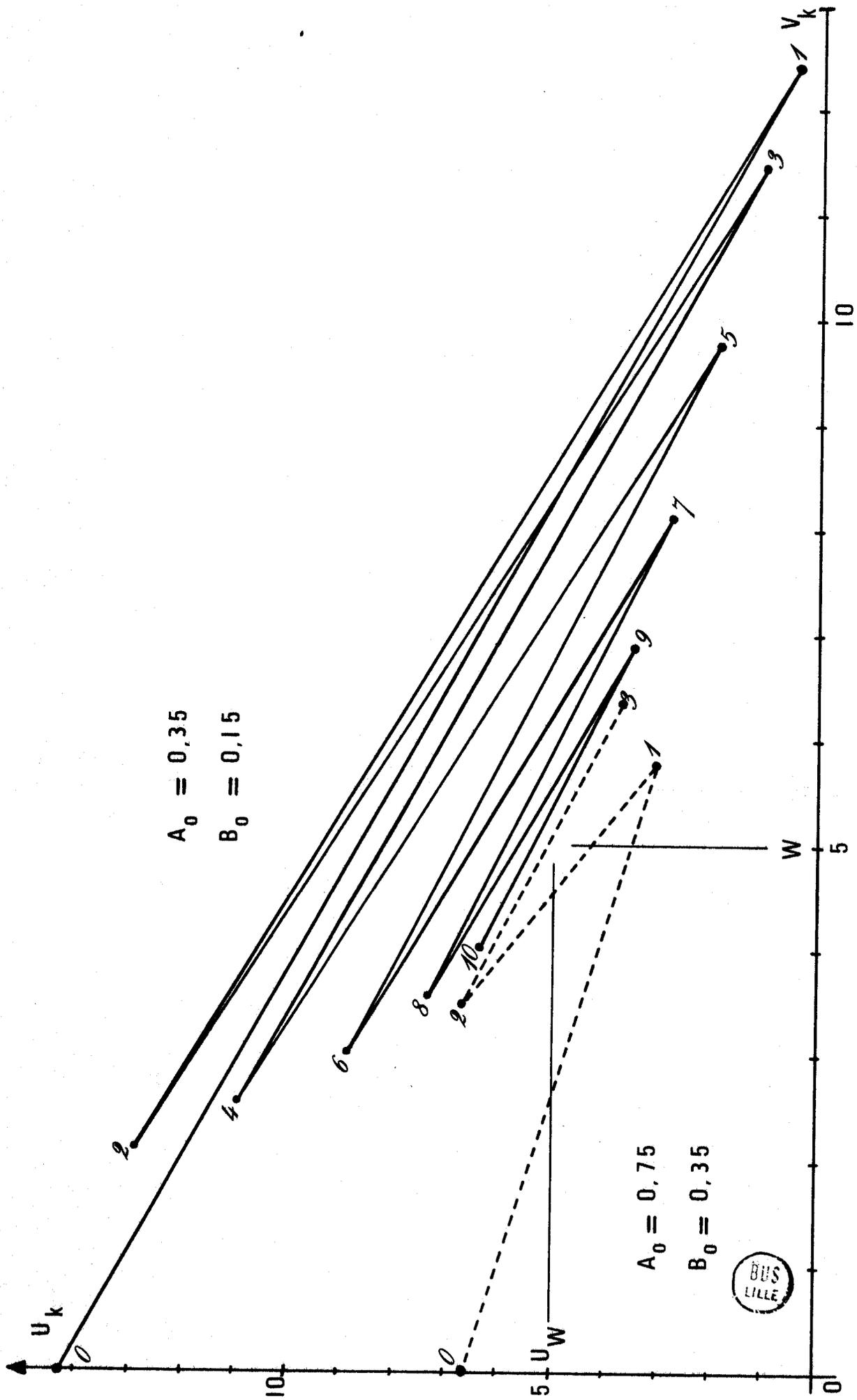


fig. 18

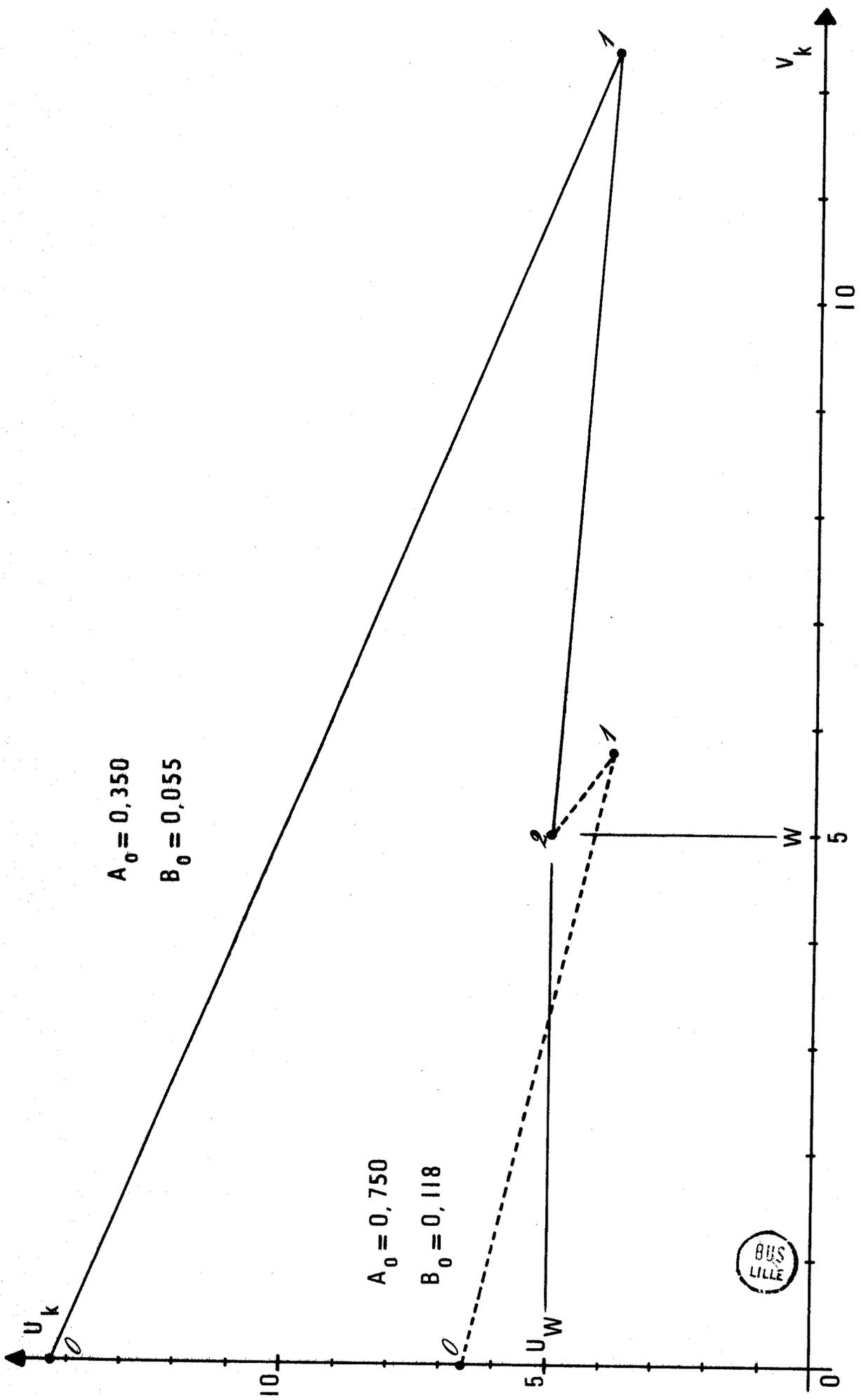


fig. 19

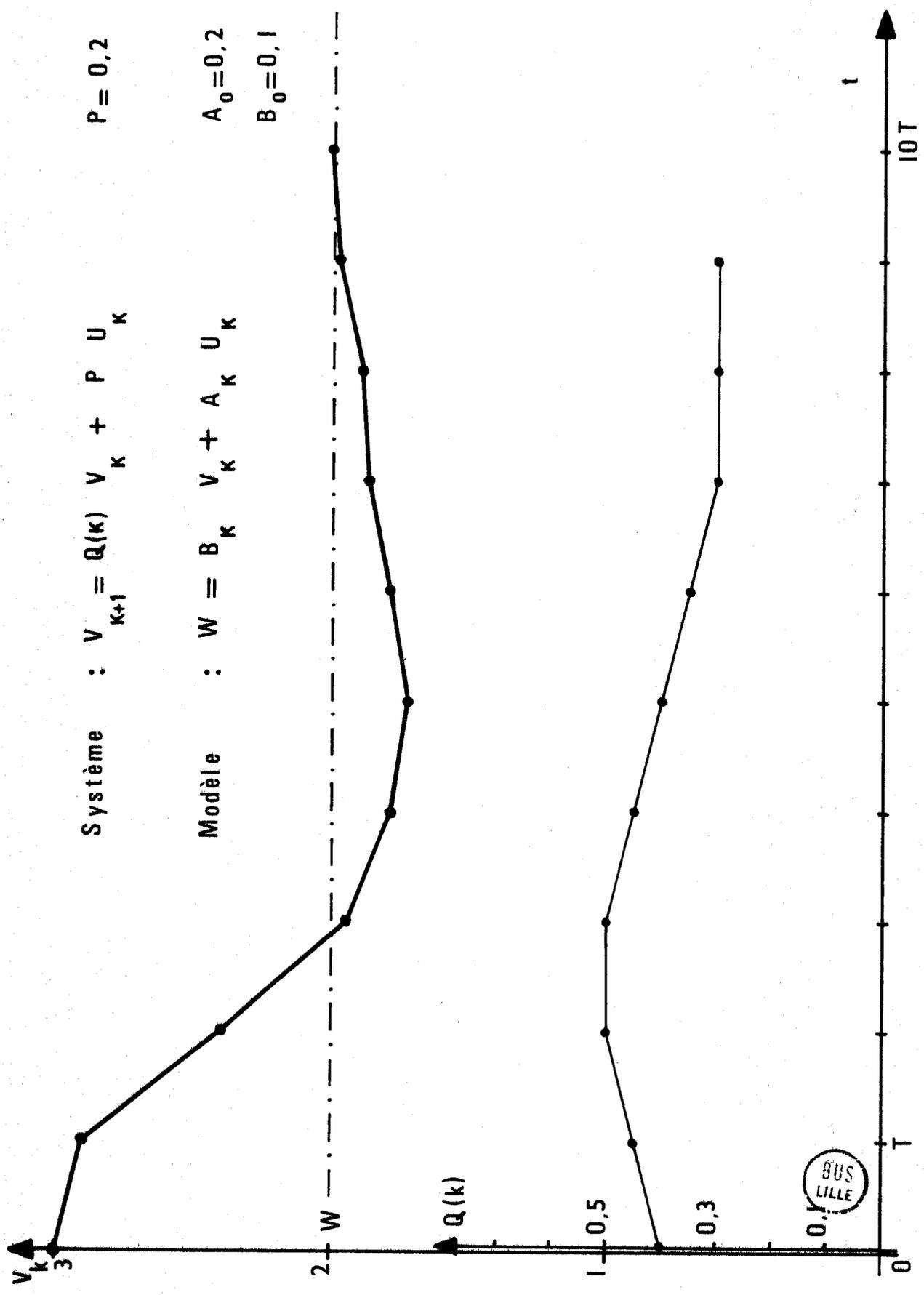


fig. 20

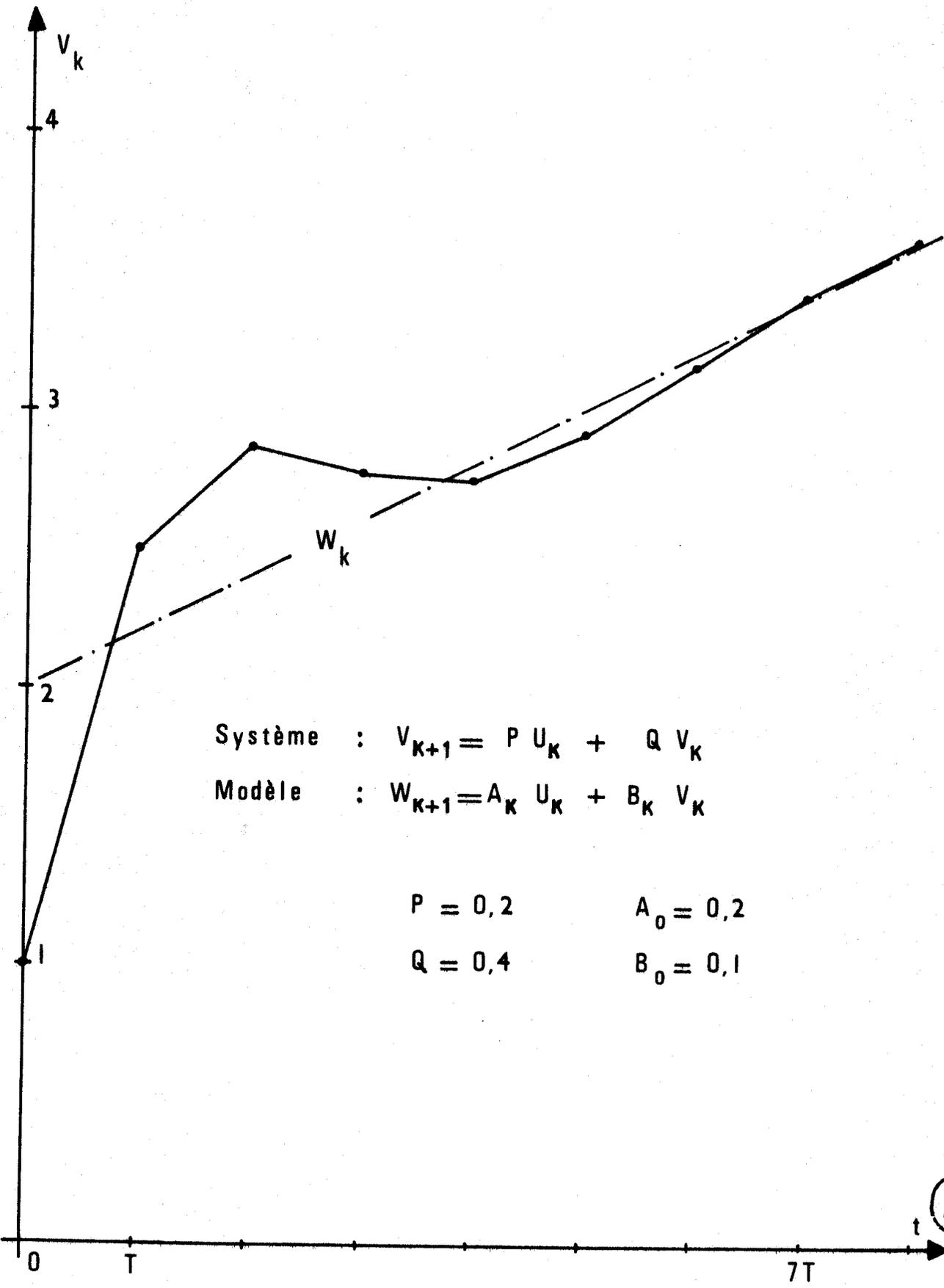


fig. 21

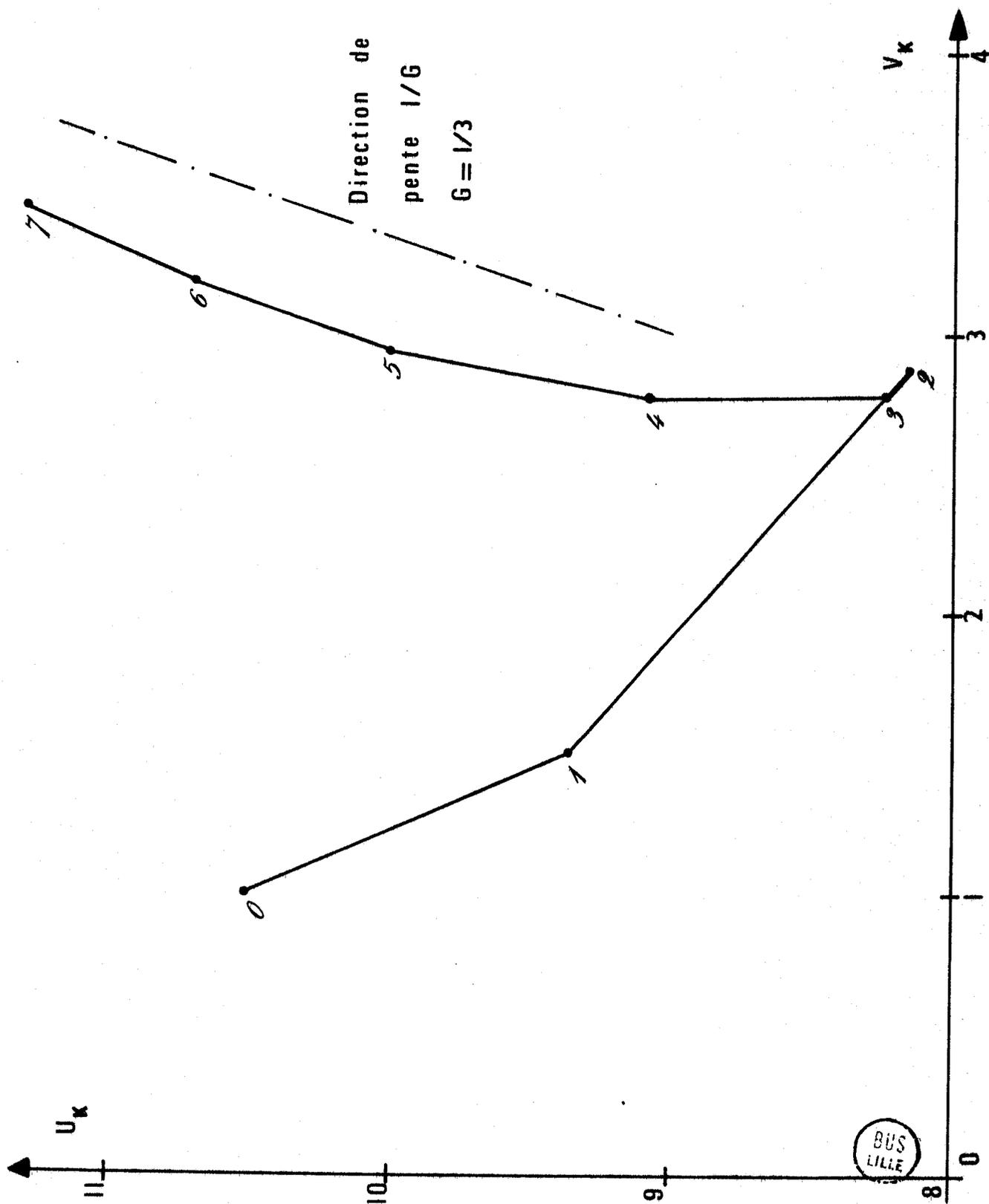


fig. 22

CONCLUSION

Cette étude a mis en évidence l'intérêt de la référence à l'espace paramétrique, et aux transformations géométriques qu'il est possible d'y effectuer, en vue de l'élaboration d'un modèle de commande simple mais efficace.

Notre attention s'est portée sur les possibilités d'ajustement en ligne du modèle de commande par le moyen de transformations homothétiques, que ce soit dans la commande des processus en maintien de consigne (régulation) ou en convergence vers un but donné.

C'est au niveau du régime désiré que les transformations homothétiques ont toutes leurs valeurs : elles y sont la relève efficace et nécessaire des méthodes classiques d'identification réadaptées à l'identification et à la commande en ligne ; efficace parce que ne demandant que peu de temps calcul et privilégiant la " fin " aux " moyens " (c'est-à-dire la commande menant au but par rapport au modèle non réellement représentatif du processus) ; nécessaire parce qu'il y a lieu de faire face à l'incompatibilité identification-commande qui ne manque pas de surgir dans les méthodes classiques : du fait de valeurs de plus en plus voisines, des perturbations, de matrices dont l'inversion n'est plus possible ou n'a plus de sens...

Des méthodes récentes, telle celle préconisée par PANDYA, ont permis d'y répondre en partie. Intéressantes par leurs propriétés statistiques, mais restées basées sur un formalisme classique qui s'attache à vouloir concilier bonne identification et bonne commande, elles se révèlent plus volumineuses et plus lourdes d'emploi que la procédure homothétique que nous avons développée. Leur convergence n'est assurée que vis-à-vis de certaines conditions initiales, plus ou moins voisines du but à atteindre : d'où l'initialisation de leur algorithme par la méthode des moindres carrés facile à appliquer et qui, bien que biaisée, permet d'atteindre ce voisinage.

Confronté à un domaine de stabilité par rapport aux conditions initiales d'assez semblable extension, nous avons gardé l'initialisation adoptée dans ces méthodes.

Notre méthode peut, nous semble-t-il, recevoir quelques aménagements qui sans trop l'alourdir devrait la rendre plus efficace ; entre autres, il faudrait chercher à optimiser la rapidité de la convergence de façon systématique : le repérage du comportement foyer devrait nous y aider. Il y a lieu également de l'étudier sur des systèmes non stationnaires ou des systèmes à but évolutif, tels qu'ils ont été abordés dans les deux derniers exemples du chapitre V ; introduire l'influence de temps non négligeables entre la prise d'information et l'établissement de la commande (non négligeables vis-à-vis des périodes d'échantillonnage) ; enfin, pour être complet, de juger de son extension possible aux systèmes multivariables et aux systèmes non linéaires.

Tels pourraient être les prolongements de l'étude.

ANNEXE 2A

CALCULS DETAILLES DU PARAGRAPHE 6. 1. 3.

On désire obtenir : $w = b_k v_k + a_k u_k$

Or, on obtient : $v_{k+1} = q v_k + p u_k$

On réalise les homothéties suivantes :

$$\begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{bmatrix} = \frac{v_{k+1}}{w} \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} \quad (w \neq 0)$$

Partant de la condition initiale v_0 et du vecteur M_0 , on cherche comment s'exprime v_n :

$$u_k = \frac{w - b_k v_k}{a_k} = \frac{w}{a_k} - \frac{b_0}{a_0} v_k$$

et donc :

$$v_{k+1} = q v_k + p \frac{w}{a_k} - p \frac{b_0}{a_0} v_k$$

$$\text{Or, } a_k = \frac{v_k}{w} a_{k-1} \quad \text{d'où :}$$

$$v_{k+1} = \left[q - p \frac{b_0}{a_0} \right] v_k + \frac{p w^2}{v_k a_{k-1}}$$

$$v_{k+1} = \left[q - p \frac{b_0}{a_0} \right] v_k + \frac{p w^3}{v_k v_{k-1} a_{k-2}}$$

et, ainsi de suite, ...

$$v_{k+1} = \left[q - p \frac{b_0}{a_0} \right] v_k + \frac{p w^{n+1}}{v_k v_{k-1} \dots v_{k-n+1} a_{k-n}}$$

à la limite : $a_{k-n} \longrightarrow a_0$

d'où : $0 = k - n$
 $k = n$

$$v_{n+1} = \left[q - p \frac{b_0}{a_0} \right] v_n + \frac{p w^{n+1}}{v_n \dots v_1 a_0}$$

posons $K = q - p \frac{b_0}{a_0}$ et $L = \frac{p}{a_0}$

il vient :

$$v_{n+1} = K v_n + L w \frac{w^n}{\prod_{i=1}^n v_i}$$

On écrit :

$$v_{n+1} - K v_n = L w \frac{w^n}{\prod_{i=1}^n v_i}$$

$$v_{n+2} - K v_{n+1} = L w \frac{w^{n+1}}{\prod_{i=1}^{n+1} v_i}$$

si $L \neq 0$ et $v_i \neq 0$ ($i = 1$ à n) :

$$\frac{v_{n+1} - K v_n}{v_{n+2} - K v_{n+1}} = \frac{w^n}{\prod_{i=1}^n v_i} \frac{\prod_{i=1}^{n+1} v_i}{w^{n+1}} = \frac{v_{n+1}}{w}$$

Supposons que la limite ℓ ($\ell \neq 0$) existe quand $n \rightarrow \infty$:

$$\ell = w \frac{\ell - K \ell}{\ell - K \ell} \quad (K \neq 1)$$

$$\ell = w$$

et :

$$v_{n+2} = K v_{n+1} + \left(1 - K \frac{v_n}{v_{n+1}}\right) w$$

ou encore :

$$v_{n+2} = K \left[v_{n+1} - \frac{v_n}{v_{n+1}} w \right] + w$$

posons : $x_n = v_n - w$, il vient :

$$x_{n+2} = K \left[x_{n+1} + w \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1} + w} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \\ y_n = x_{n+1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = K \left[y_n + w \frac{y_n - x_n}{y_n + w} \right] \end{array} \right.$$

On obtient donc un système non linéaire de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{array} \right.$$

dont l'origine est point singulier.

* Au voisinage de l'origine : $y_n \neq 0$, d'où :

$$\frac{1}{y_n + w} \neq \frac{1}{w} - \frac{y_n}{w^2} + \frac{y_n^2}{w^3} - \dots$$

en ne conservant que le premier terme du développement, il vient :

$$y_{n+1} = K \left[y_n + w \frac{y_n - x_n}{w} \right]$$

$$y_{n+1} = 2K y_n - K x_n$$

ou encore :

$$y_{n+2} - 2K y_{n+1} + K y_n = 0$$

Une condition nécessaire et suffisante de stabilité de cette équation nous impose :

$$\left. \begin{array}{l} 1 - 2K + K > 0 \\ 1 - 2K + K > 0 \\ 1 - K > 0 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} 1 - K > 0 \\ 1 + 3K > 0 \end{array}$$

c'est à dire : $-1/3 < K < 1$, condition de stabilité au voisinage de l'origine.

* Etudions le comportement du système au voisinage de l'origine.

Nous avons établi que le système peut être représenté par la récurrence suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = K \left[y_n + w \frac{y_n - x_n}{y_n + w} \right] \end{cases}$$

ou encore :

$$V_{n+1} = F(V_n)$$

C'est une récurrence autonome car "n" n'intervient pas explicitement dans la fonction F . V est un vecteur à 2 dimensions, F une fonction réelle à variables réelles ; elle définit la transformation ponctuelle \mathcal{I} qui fait passer du point P_n au point P_{n+1} de l'espace des coordonnées (x, y) .

Un point double de la récurrence est tel que :

$$V_{n+1} = V_n = F(V_n)$$

l'origine (0,0) est donc point double (point singulier).

Le comportement du système au voisinage de l'origine est déterminé par la nature du point double origine, elle-même déterminée par application du critère de stabilité locale, au sens de Ljapunov, de ce point double.

Pour l'appliquer, au point double concerné, il est nécessaire d'y pouvoir linéariser le système, c'est à dire :

si la récurrence autonome du second ordre à variables réelles s'écrit :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) = y_n \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) = K \left[y_n + w \frac{y_n - x_n}{y_n + w} \right] \end{cases}$$

et si (0,0) sont les coordonnées du point double, de pouvoir écrire la récurrence sous la forme :

$$\begin{cases} x_{n+1} = a x_n + b y_n + \psi(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = c x_n + d y_n + \phi(x_n, y_n) \end{cases}$$

avec :

$$\lim_{x_n, y_n \rightarrow 0} \frac{\psi(x_n, y_n)}{|x_n| + |y_n|} = 0,$$

$$\lim_{x_n, y_n \rightarrow 0} \frac{\phi(x_n, y_n)}{|x_n| + |y_n|} = 0,$$

$\psi(0,0) = 0$, $\phi(0,0) = 0$, et on a :

$$\begin{aligned} a &= f'_{x_n}(0,0) & b &= f'_{y_n}(0,0) \\ c &= g'_{x_n}(0,0) & d &= g'_{y_n}(0,0) \end{aligned}$$

(à condition que ces dérivées existent.)

Cette transformation nous mène à :

$$a = 0 \quad , \quad b = 1 \quad , \quad \psi(x_n, y_n) = 0$$

$$c = g'_{x_n}(0,0) = -K$$

$$g'_{y_n} = K + Kw \frac{(y_n + w) - (y_n - x_n)}{(y_n + w)^2}$$

$$d = g'_{y_n}(0,0) = K + Kw \frac{w}{w^2} = 2K$$

et nous aurons :

$$y_{n+1} = -K x_n + 2K y_n + \phi(x_n, y_n)$$

Soit :

$$\phi(x_n, y_n) = K \left[y_n + w \frac{y_n - x_n}{y_n + w} \right] + K x_n - 2K y_n$$

$$\phi(x_n, y_n) = K \left[x_n - y_n + w \frac{y_n - x_n}{y_n + w} \right]$$

$$\phi(x_n, y_n) = \frac{K y_n (x_n - y_n)}{y_n + w}$$

et $\phi(0,0) = 0$

D'autre part :

$$\frac{\phi(x_n, y_n)}{|x_n| + |y_n|} = \frac{K y_n}{y_n + w} \frac{x_n - y_n}{|x_n| + |y_n|}$$

$$\frac{|\phi(x_n, y_n)|}{|x_n| + |y_n|} = \left| \frac{K y_n}{y_n + w} \right| \frac{|x_n - y_n|}{|x_n| + |y_n|} \leq \left| \frac{K y_n}{y_n + w} \right| \frac{|x_n| + |y_n|}{|x_n| + |y_n|} = \left| \frac{K y_n}{y_n + w} \right|$$

$$-\left| \frac{K y_n}{y_n + w} \right| \leq -\frac{|\phi(x_n, y_n)|}{|x_n| + |y_n|} \leq \frac{\phi(x_n, y_n)}{|x_n| + |y_n|} \leq \frac{|\phi(x_n, y_n)|}{|x_n| + |y_n|} \leq \left| \frac{K y_n}{y_n + w} \right|$$

$$\lim_{y_n, x_n \rightarrow 0} -\left| \frac{K y_n}{y_n + w} \right| \leq \lim_{y_n, x_n \rightarrow 0} \frac{\phi(x_n, y_n)}{|x_n| + |y_n|} \leq \lim_{y_n, x_n \rightarrow 0} \left| \frac{K y_n}{y_n + w} \right|$$

$$0^- \leq \lim_{y_n, x_n \rightarrow 0} \frac{\phi(x_n, y_n)}{|x_n| + |y_n|} \leq 0^+$$



d'où :

$$\lim_{x_n, y_n \rightarrow 0} \frac{\phi(x_n, y_n)}{|x_n| + |y_n|} = 0$$

On peut d'ailleurs se passer d'une telle démonstration dans le cas présent puisque le degré de ϕ est \geq à 2.

Le système s'écrit donc :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = -Kx_n + 2Ky_n + \frac{Ky_n(x_n - y_n)}{y_n + w} \end{cases}$$

et linéarisable autour du point double origine :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} \approx -Kx_n + 2Ky_n \end{cases}$$

L'équation caractéristique du système linéarisé est la suivante :

$$\begin{vmatrix} 0 - s & 1 \\ -K & 2K - s \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad s^2 - 2Ks + K = 0$$

Suivant le type des racines S_1 et S_2 , nous pourrons déduire le comportement autour du point double origine (critère de stabilité locale au sens de Ljapunov).

[S_1 et S_2 sont également appelés "multiplicateurs" de la récurrence.]

pour $K = 0$ (solution exacte) $S_1 = S_2 = 0$

pour $K = 1$ $S_1 = S_2 = 1$

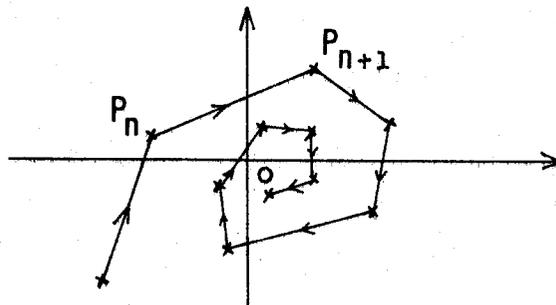
pour $0 < K < 1$
$$\begin{cases} S_1 = K + j \sqrt{-K(K-1)} \\ S_2 = K - j \sqrt{-K(K-1)} \end{cases}$$

pour $\begin{cases} K < 0 \\ K > 1 \end{cases}$
$$\begin{cases} S_1 = K + \sqrt{K(K-1)} \\ S_2 = K - \sqrt{K(K-1)} \end{cases}$$

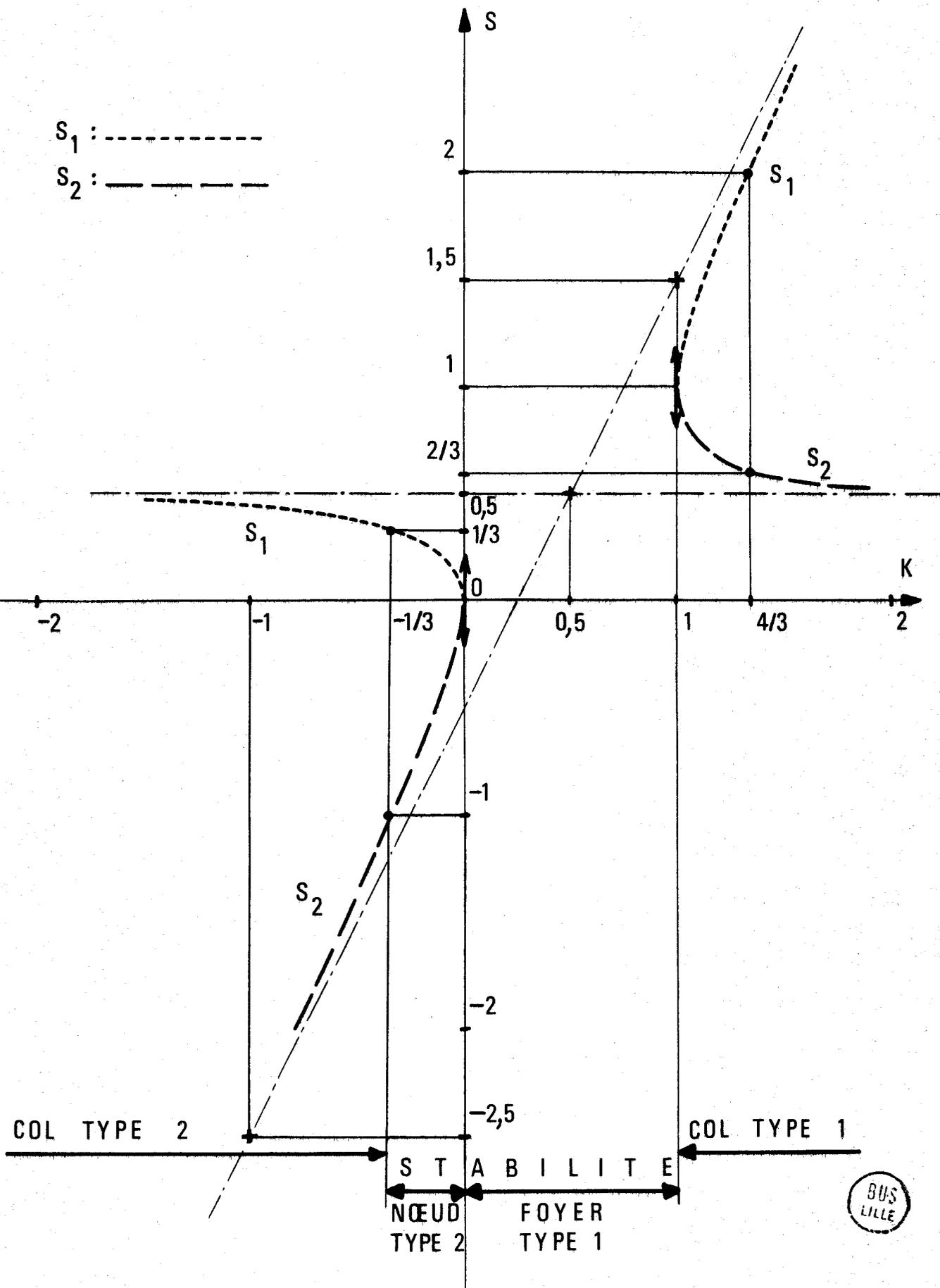
* Lorsque $0 < K < 1$, S_1 et S_2 sont complexes conjuguées : le point double origine est donc un foyer. La partie réelle étant positive, c'est un foyer de type 1.

$$|S_1| = |S_2| = \sqrt{K^2 - K(K-1)} = \sqrt{K} < 1$$

le module étant inférieur à 1, il s'agit d'un foyer stable :



* Lorsque $K < 0$ ou $K > 1$, S_1 et S_2 sont réelles : le point double origine est donc un col (instable) ou un noeud. Les valeurs que prennent les racines en fonction de K sont les suivantes :



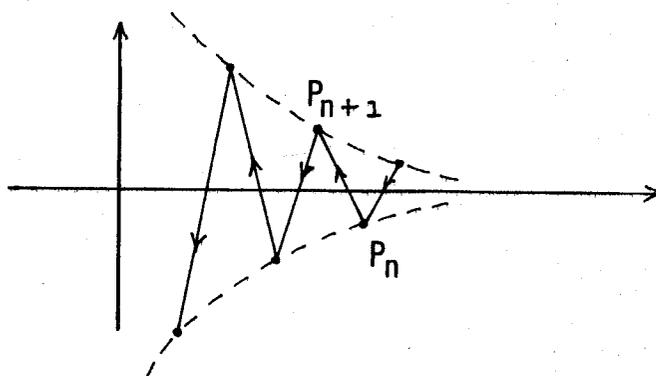
a) $K = 1/3$

$|S_1| < 1$ et $|S_2| > 1$: col (instable)

$S_1 > 0$ et $S_2 < 0$: type 2

(type 2 : le vecteur $\overrightarrow{P_n P_{n+1}}$ coupe un des axes principaux (+))

par exemple

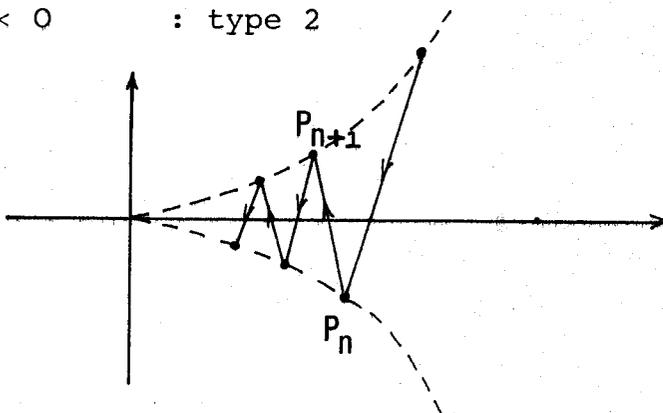


b) $-1/3 < K < 0$

$|S_1| < 1$ et $|S_2| < 1$: noeud stable

$S_1 > 0$ et $S_2 < 0$: type 2

par exemple



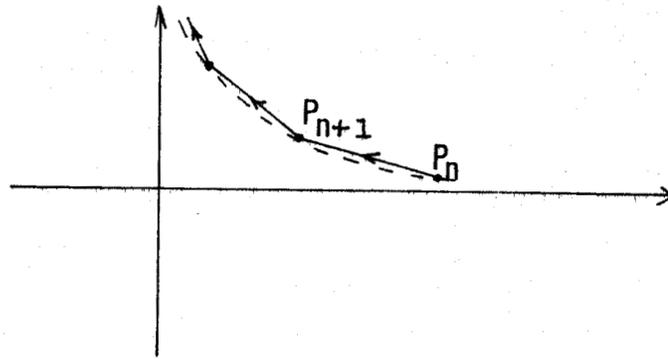
c) $K > 1$

$|S_1| > 1$ et $|S_2| < 1$: col (instable)

$S_1 > 0$ et $S_2 > 0$: type 1

(Type 1 : le vecteur $\overrightarrow{P_n P_{n+1}}$ ne coupe pas les axes principaux)

par exemple



En résumé, la nature, le type, l'instabilité ou la stabilité du point double origine sont les suivants :

- | | |
|----------------|--|
| $K < -1/3$ | Col type 2 (instable) |
| $-1/3 < K < 0$ | Noeud type 2 stable |
| $K = 0$ | Solution exacte |
| $0 < K < 1$ | Foyer type 1 stable |
| $K > 1$ | Col type 1 (instable) |
| $K = -1/3, 1$ | cas critiques (voir Annexe 2B, 1 et 2) |

(+) AXES PRINCIPAUX

Le système étant mis sous la forme :

$$\begin{cases} x_{n+1} = a x_n + b y_n + \psi(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = c x_n + d y_n + \phi(x_n, y_n) \end{cases}$$

les axes principaux sont les 2 vecteurs propres associés à la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dont les pentes sont données par :

$$p_1 = \frac{S_1 - a}{b} = \frac{c}{S_1 - d}$$

$$p_2 = \frac{S_2 - a}{b} = \frac{c}{S_2 - d}$$

c'est à dire dans le cas présent :

$$p_1 = S_1 = K + \sqrt{K(K-1)}$$

$$p_2 = S_2 = K - \sqrt{K(K-1)}$$

Si S_1 et S_2 sont réels, distincts en module et non nuls, on peut, en choisissant comme axes au point $(0,0)$ les axes principaux, ramener le système précédent à la forme canonique suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1}^* = S_1 x_n^* + \psi^*(x_n^*, y_n^*) \\ y_{n+1}^* = S_2 y_n^* + \phi^*(x_n^*, y_n^*) \end{cases}$$

Si S_1 et S_2 sont complexes conjugués de module ρ et d'argument θ , la forme canonique s'écrit :

$$\begin{cases} x_{n+1}^* = x_n^* \rho \cos \theta - y_n^* \rho \sin \theta + \psi^*(x_n^*, y_n^*) \\ y_{n+1}^* = x_n^* \rho \sin \theta + y_n^* \rho \cos \theta + \phi^*(x_n^*, y_n^*) \end{cases}$$

ETUDE DE LA STABILITE LOCALE POUR LES CAS CRITIQUES :

$K = -1/3$ et $K = 1$

I) $K = -1/3$

Le système du second ordre s'écrit :

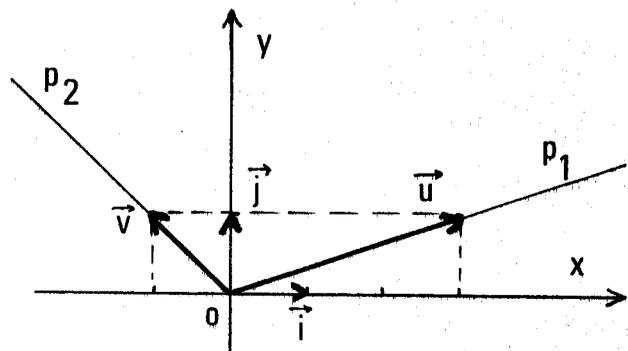
$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = -Kx_n + 2Ky_n + \frac{Ky_n(x_n - y_n)}{y_n + w} \end{cases}$$

Pour $K = -1/3$ nous obtenons les multiplicateurs :

$S_1 = 1/3$ et $S_2 = -1$ (cas critique) et les pentes des axes principaux : $p_1 = 1/3$ et $p_2 = -1$.

On effectue un changement de base pour ramener le système suivant les axes p_1 et p_2 et faire apparaître les multiplicateurs précédents :

$$\begin{cases} \vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} \end{cases}$$



ce qui nous donne :

$$\begin{cases} x = 3x^* - y^* \\ y = x^* + y^* \end{cases} \quad (x^* \text{ et } y^* : \text{ nouvelles coordonnées })$$

Cette transformation, appliquée au système, induit :

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 x_{n+1}^* - Y_{n+1}^* = x_n^* + y_n^* \\ x_{n+1}^* + Y_{n+1}^* = (1/3) x_n^* - y_n^* - \frac{(2/3)(x_n^* + y_n^*)(x_n^* - y_n^*)}{(x_n^* + y_n^*) + w} \end{array} \right.$$

ou encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1}^* = (1/3)x_n^* - (1/6) \frac{(x_n^* + y_n^*)(x_n^* - y_n^*)}{(x_n^* + y_n^*) + w} \\ Y_{n+1}^* = -y_n^* - (1/2) \frac{(x_n^* + y_n^*)(x_n^* - y_n^*)}{(x_n^* + y_n^*) + w} \end{array} \right.$$

c'est-à-dire un système ramené à la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1}^* = S_1 x_n^* + X(x_n^*, y_n^*) \\ Y_{n+1}^* = S_2 y_n^* + Y(x_n^*, y_n^*) \end{array} \right.$$

S_2 est de module unité mais de signe négatif ; or, l'étude de la stabilité nécessitant un signe positif on introduit la récurrence double /25/ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+2}^* = S_1^2 x_n^* + S_1 X(x_n^*, y_n^*) + X[S_2 x_n^* + X(x_n^*, y_n^*), S_1 y_n^* + Y(x_n^*, y_n^*)] \\ y_{n+2}^* = S_2^2 y_n^* + S_2 Y(x_n^*, y_n^*) + Y[S_2 x_n^* + X(x_n^*, y_n^*), S_1 y_n^* + Y(x_n^*, y_n^*)] \end{array} \right.$$

c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+2}^* = (1/9)x_n^* + (1/3) X(x_n^*, y_n^*) + X[-x_n^* + X(x_n^*, y_n^*), (1/3)y_n^* + Y(x_n^*, y_n^*)] \\ y_{n+2}^* = y_n^* - Y(x_n^*, y_n^*) + Y[-x_n^* + X(x_n^*, y_n^*), (1/3)y_n^* + Y(x_n^*, y_n^*)] \end{array} \right.$$

Ayant changé $S_2 = -1$ en $S_2^2 = 1$, la stabilité se juge sur les expressions suivantes :

$$\begin{cases} (1/3)X(x_n^*, 0) + X \left[-x_n^* + X(x_n^*, 0), Y(x_n^*, 0) \right] \\ -Y(0, y_n^*) + Y \left[X(0, y_n^*), (1/3)y_n^* + Y(0, y_n^*) \right] \end{cases}$$

Constatant que $X(x_n^*, y_n^*)$ et $Y(x_n^*, y_n^*)$ sont identiques à un facteur multiplicatif près ("1/3") et que $X(x_n^*, y_n^*) =$

$-X(y_n^*, x_n^*)$ et $Y(x_n^*, y_n^*) = -Y(y_n^*, x_n^*)$: on déduit que les deux expressions ci-dessus ont même degré.

D'après les travaux de ROUBELLAT sur la stabilité des cas critiques /25/ il résulte qu'il y aura stabilité, si, et seulement si, la seconde expression (celle relative au multiplicateur unité) a pour terme de degré minimal, un terme de degré impair ; en ce sens, développons cette seconde expression :

$$\begin{aligned} & - (1/2) \frac{y_n^{*2}}{y_n^* + w} - (1/2) \frac{\left[X(0, y_n^*) \right]^2 - \left[(1/3)y_n^* + Y(0, y_n^*) \right]^2}{X(0, y_n^*) + (1/3)y_n^* + Y(0, y_n^*) + w} = \\ & - (1/2) y_n^{*2} \left[\frac{1}{w} - \frac{y_n^*}{w^2} + \frac{y_n^{*2}}{w^3} - \dots \right] - (1/2) \left[(1/36) y_n^{*4} \left[\frac{1}{w} - \frac{y_n^*}{w^2} + \frac{y_n^{*2}}{w^3} - \dots \right]^2 \right. \\ & \left. - (1/9) y_n^{*2} - (1/4) y_n^{*4} \left[\frac{1}{w} - \dots \right]^2 - (1/3) y_n^{*3} \left[\frac{1}{w} - \dots \right] \right] \\ & \left[\frac{1}{w} - \frac{(1/6) y_n^{*2} \left[\frac{1}{w} - \dots \right]}{w^2} + \frac{(1/3) y_n^*}{w^2} + \frac{(1/2) y_n^{*2} \left[\frac{1}{w} - \dots \right]}{w^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

Nous extrayons le terme de degré minimal :

$$\frac{1}{w} \left[- (1/2) y_n^{*2} + (1/18) y_n^{*2} \right]$$

dégré pair, donc le point double $x_n^* = y_n^* = 0$ est instable :

noeud-col.

II) $K = 1.$

Pour $K = 1$ il faut obligatoirement travailler sur la récurrence initiale :

$$v_{n+1} = K v_n + L w \frac{w^n}{\prod_{i=1}^n v_i}$$

On passe aux coordonnées réduites : $v' = v/w$

$$v'_{n+1} = K v'_n + (L / \prod_{i=1}^n v'_i)$$

et on effectue le changement de variable : $v' = x' + 1.$

$$x'_{n+1} = K x'_n + (L / \prod_{i=1}^n (x'_i + 1)) + (K - 1)$$

faisons $K = 1$, il vient :

$$x'_{n+1} = x'_n + (L / \prod_{i=1}^n (x'_i + 1))$$

Si le point $x' = 0$ est point d'équilibre, il faut que l'on ait :

$$0 = 0 + L \quad , \quad \text{soit} \quad L = 0$$

Or, généralement, L est différent de zéro.

Supposons L nul, il vient :

$$x'_{n+1} = K x'_n$$

$$x'_{n+2} = K x'_{n+1} = K^2 x'_n$$

.....

$$x'_{n+m} = K^m x'_n$$

ou encore :

$$x'_m = K^m x'_0$$

Si K est positif, $K < 1$: $x'_m \longrightarrow 0$ quand $m \longrightarrow \infty$

$K = 1$: $x'_m \longrightarrow x'_0$ quand $m \longrightarrow \infty$

$K > 1$: $x'_m \longrightarrow \infty$ quand $m \longrightarrow \infty$

d'où pour $K = 1$ l'obligation d'avoir $x'_0 = 0$,

c'est-à-dire : $v_0 = w$.

En conclusion : lorsque $K = 1$, $v = w$ n'est point d'équilibre que si $L = 0$ et $v_0 = w$

(tous les v_n sont alors égaux à w)

On ne peut cependant considérer qu'il y ait stabilité du point $v = w$, puisque partant d'un v quelconque (mais différent de w) ce point ne se révèle pas attractif . Donc instabilité si $K = 1$.

----- oOo -----

A N N E X E 3A

ETUDE DE LA RECURRENCE $f(n)$

Partant de :

$$f(n) = K f^2(n-1) + f^{n-1}(0) f^{n-2}(1) \dots f^2(n-3) f^{n-2}(n-2) L w^{n+1}$$

il vient :

$$\frac{f(n+1) - K f^2(n)}{f(n) - K f^2(n-1)} = \frac{f^n(0) f^{n-1}(1) \dots f^2(n-2) f^{n-1}(n-1) L w^{n+2}}{f^{n-1}(0) f^{n-2}(1) \dots f^2(n-2) L w^{n+1}}$$

$$= f(0) f(1) \dots f(n-2) f(n-1) w$$

avec les conditions :

$$L \neq 0, w \neq 0 \text{ et } f(i) \neq 0 \text{ (i variant de 0 à n-2)}$$

de même, il vient :

$$\frac{f(n+2) - K f^2(n+1)}{f(n+1) - K f^2(n)} = f(0) f(1) \dots f(n-1) f(n) w$$

avec la condition supplémentaire : $f(n-1) \neq 0$

Combinant les deux expressions précédentes, nous obtenons :

$$\frac{f(n+1) - K f(n)^2}{f(n) - K f(n-1)^2} \cdot \frac{f(n+1) - K f(n)^2}{f(n+2) - K f(n+1)^2} = \frac{f(0) f(1) \dots f(n-1) w}{f(0) f(1) \dots f(n-1) f(n) w}$$

$$\text{d'où : } f(n) = \frac{(f(n) - K f(n-1)^2)(f(n+2) - K f(n+1)^2)}{(f(n+1) - K f(n)^2)^2}$$

ou encore :

$$f(n+2) = \frac{f(n) (f(n+1) - K f(n)^2)^2}{f(n) - K f(n-1)^2} + K f(n+1)^2$$

c'est-à-dire :

$$\frac{K f(n+1)^2}{f(n+2)} = 1 - \frac{f(n) (f(n+1) - K f(n)^2)^2}{f(n+2) (f(n) - K f(n-1)^2)}$$

avec $f(n+2) \neq 0$.

Après quelques transformations, il vient :

$$\frac{K f(n+1)^2}{f(n+2)} = 1 - \frac{f(n+1)^2 (1 - K \frac{f(n)^2}{f(n+1)})}{f(n+2) (1 - K \frac{f(n-1)^2}{f(n)})}$$

avec $f(n)$ et $f(n+1) \neq 0$.

Posons $c_n = \frac{f^2(n-1)}{f(n)}$, l'expression précédente s'écrit :

$$K c_{n+2} = 1 - c_{n+2} \frac{(1 - K c_{n+1})^2}{1 - K c_n}$$

$$1 - K c_{n+2} = 1 - \frac{K}{K + \frac{(1 - K c_{n+1})^2}{1 - K c_n}}$$

$$\text{Posons } d_n = 1 - K c_n = 1 - K \frac{f^2(n-1)}{f(n)}$$

il vient :

$$d_{n+2} = 1 - \frac{K}{K + \frac{d_{n+1}^2}{d_n}} = 1 - \frac{K d_n}{K d_n + d_{n+1}^2}$$

$$\text{ou : } d_{n+2} = \frac{d_{n+1}^2}{d_{n+1}^2 + K d_n}$$

* Si d_n tend vers une limite l_1 quand n tend vers l'infini, nous aurons :

$$l_1 = \frac{l_1^2}{l_1^2 + K l_1}$$

$$1 = \frac{\ell_1}{\ell_1 + K} \quad \text{avec } \ell_1 \neq 0$$

c'est-à-dire $\ell_1 + K = \ell_1$ soit $K = 0$

Il faut donc que K soit nul pour que d_n tende vers une limite ; nous retrouvons la condition de concordance exacte.

* Si c_n tend vers une limite ℓ_2 quand n tend vers l'infini nous aurons :

$$K \ell_2 = 1 - \ell_2 \frac{(1 - K \ell_2)^2}{1 - K \ell_2}$$

il vient :

$$K \ell_2 = 1 - \ell_2 (1 - K \ell_2) \quad \text{avec } (1 - K \ell_2) \neq 0$$

$$\text{soit : } K \ell_2^2 - (K + 1) \ell_2 + 1 = 0$$

qui a pour discriminant : $\Delta = (1 + 3K)(1 + K)$

Ainsi ℓ_2 peut exister si nous avons : $-1/3 \leq K \leq 1$;

Nous retrouvons les conditions de stabilité locale.

A N N E X E 3B

NATURE DES POINTS A ET B DU CYCLE D'ORDRE DEUX.

La détermination de la nature des points du cycle d'ordre deux nécessite l'étude de la récurrence n à $n+2$.

Partant de la forme réduite du système :

$$\begin{cases} x'_{n+1} = y'_n \\ y'_{n+1} = K \left[y'_n + \frac{y'_n - x'_n}{y'_n + 1} \right] \end{cases}$$

il vient :

$$x'_{n+2} = K \left[y'_n + \frac{y'_n - x'_n}{y'_n + 1} \right]$$

$$y'_{n+2} = K \left[K \left[y'_n + \frac{y'_n - x'_n}{y'_n + 1} \right] + \frac{K \left[y'_n + \frac{y'_n - x'_n}{y'_n + 1} \right] - y'_n}{K \left[y'_n + \frac{y'_n - x'_n}{y'_n + 1} \right] + 1} \right]$$

On amène l'origine en l'un des points du cycle, par exemple le point A :

$$\begin{cases} u'_n &= x'_n - x'_A \\ v'_n &= y'_n - y'_A \end{cases}$$

d'où (supprimant les « ' » et les indices « A ») :

$$\begin{cases} u_{n+2} = -x + K \left[v_{n+y} + \frac{v_{n+y} - u_n - x}{v_{n+y} + 1} \right] \\ v_{n+2} = -y + K \left[K \left[v_{n+y} + \frac{v_{n+y} - u_n - x}{v_{n+y} + 1} \right] + \frac{K \left[v_{n+y} + \frac{v_{n+y} - u_n - x}{v_{n+y} + 1} \right] - v_n - y}{K \left[v_{n+y} + \frac{v_{n+y} - u_n - x}{v_{n+y} + 1} \right] + 1} \right] \end{cases}$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\begin{cases} u_{n+2} = f(u_n, v_n) = \frac{\partial f(0,0)}{\partial u_n} u_n + \frac{\partial f(0,0)}{\partial v_n} v_n + \psi(u_n, v_n) \\ v_{n+2} = g(u_n, v_n) = \frac{\partial g(0,0)}{\partial u_n} u_n + \frac{\partial g(0,0)}{\partial v_n} v_n + \phi(u_n, v_n) \end{cases}$$

avec $\psi(u_n, v_n)$ et $\phi(u_n, v_n)$ de degré plus grand ou égal à deux ; également : $\psi(0,0) = \phi(0,0) = 0$.

Pour l'étude de la stabilité du point A, seul nous intéresse le système linéarisé (autour de ce point) où les a, b, c et d sont les dérivées précédentes :

$$\begin{cases} u_{n+2} \neq a u_n + b v_n \\ v_{n+2} \neq c u_n + d v_n \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} a = -K / (y+1) \\ b = K \left[1 + (x+1)/(y+1)^2 \right] \\ c = -K^2 \left[1/(y+1) + 1/(x+1)^2 \right] \\ d = K \left[b + \left[b(y+1) - (x+1) \right] / (x+1)^2 \right] \end{cases}$$

Posons $X = x + 1$ et $Y = y + 1$.

Nous avons vu que le produit XY est égal à 1 et la somme $X + Y$ à $-(K + 1)/K$. Il vient :

$$\begin{cases} a = -K X \\ b = K (1 + X^3) \\ c = -K^2 (X + Y^2) \\ d = K \left[2 K - Y + K (X^3 + Y^3) \right] \end{cases}$$

La stabilité s'étudie sur l'équation caractéristique :

$$\begin{vmatrix} a - s & b \\ c & d - s \end{vmatrix} = 0$$

On obtient :

$$s^2 K - s (4K^3 + K^2 - 2K - 1) + K^3 = 0$$

On cherche tout d'abord à mettre en évidence la séparation entre racines réelles et racines imaginaires. A cet effet on écrit le discriminant :

$$\Delta = \left[4K^3 + K^2 - 2K - 1 \right]^2 - 4K^4$$

$$\Delta = (K^2 - 1) (4K^2 + 3K + 1) \left(2K - \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \right) \left(2K - \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \right)$$

D'où la nature des racines suivant les valeurs de K :

VALEURS DE K	$-\infty$	-1	$\frac{1-\sqrt{17}}{8}$ $\approx -0,39$	0	$\frac{1+\sqrt{17}}{8}$ $\approx 0,64$	1	$+\infty$
SIGNE DE Δ	+	-	-	+	-	-	+
NATURE DES RACINES	réelles	imaginaires	imaginaires	réelles	imag.	imag.	réelles

$-1/3$
 ← le cycle existe →
 foyer

Supposant K différent de zéro, l'équation caractéristique s'écrit :

$$s^2 - s \left[\frac{4K^3 + K^2 - 2K - 1}{K} \right] + K^2 = 0$$

d'où les conditions de stabilité :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \left[\frac{4K^3 + K^2 - 2K - 1}{K} \right] + K^2 > 0 \quad (1) \\ 1 + \left[\frac{4K^3 + K^2 - 2K - 1}{K} \right] + K^2 > 0 \quad (2) \\ 1 - K^2 > 0 \quad (3) \end{array} \right.$$

(3) implique : $-1 < K < 1$

(2) " : $-1 < K < -1/3$ et $0 < K < 1$

(1) " : $K < 0$ et $K > \text{Racine de } r(k) = 0$

$r(k) = 5K^3 + K^2 - K - 1$; on détermine la racine de $r(k) = 0$ par la formule de CARDAN. Soit :

$$\text{Rac.} = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

avec $a = -\frac{16}{75}$ et $\beta = -\frac{628}{3375}$

soit, numériquement : $Rac. \approx 0,627$.

D'où de (1), (2) et (3) :

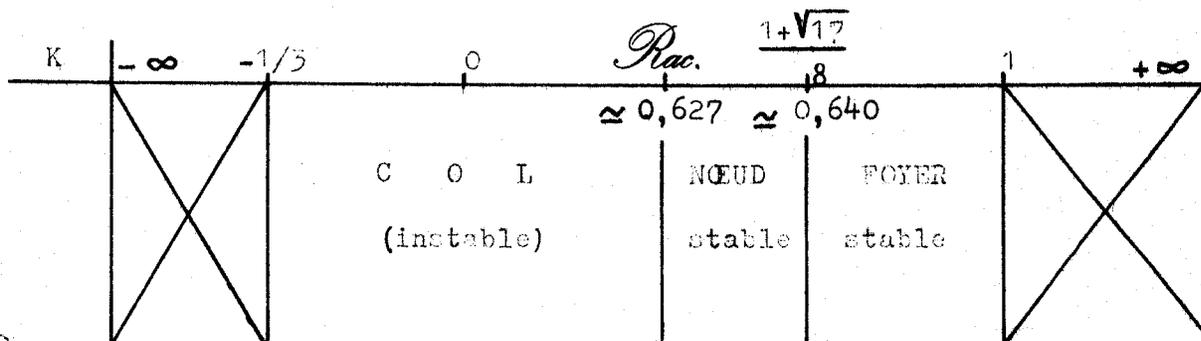
$$\left. \begin{array}{l} \text{Stabilité pour} \\ \text{Instabilité pour} \end{array} \right\} \begin{array}{l} -1 < K < -1/3 \\ Rac. < K < 1 \\ K \leq -1 \\ -1/3 \leq K \leq Rac. \\ K \geq 1 \end{array}$$

Le cycle n'existant que pour K compris entre -1/3 et 1 nous retenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Stabilité} : Rac. < K < 1 \\ \text{Instabilité} : -1/3 \leq K \leq Rac. \end{array} \right.$$

D'autre part, dans la zone d'instabilité précédente, si on considère que la nature des points du cycle est un noeud, alors $|S_1|$ et $|S_2|$ doivent être plus grands que 1 ; or, le produit $S_1 S_2$ étant obligatoirement positif ou nul (K^2) et inférieur à 1, il ne peut s'agir d'un noeud instable : par conséquent ce ne peut être qu'un col ;

d'où le tableau récapitulatif :



DETERMINATION DE LA RECURRENCE DU TROISIEME ORDRE

ET ETUDE DE SA STABILITE (domaine de stabilité locale).

1) Réurrence du 3ème ordre

On désire obtenir par le modèle :

$$w = a_{k+1} u_{k+1} + b_{k+1} v_{k+1}$$

Or, on obtient par le système :

$$v_{k+2} = p_1 u_{k+1} + p_2 u_k + q_1 v_{k+1} + q_2 v_k$$

On réalise les homothéties :

$$\begin{bmatrix} a_{k+2} \\ b_{k+2} \end{bmatrix} = \frac{v_{k+2}}{w} \begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{bmatrix} \quad (w \neq 0)$$

Ainsi :

$$u_k = \frac{w - b_k v_k}{a_k} = \frac{w}{a_k} - \frac{b_0}{a_0} v_k$$

de même en $k + 1$.

D' où :

$$v_{k+2} = \left[q_1 - p_1 \frac{b_0}{a_0} \right] v_{k+1} + \left[q_2 - p_2 \frac{b_0}{a_0} \right] v_k + \frac{p_1 w}{a_{k+1}} + \frac{p_2 w}{a_k}$$

De la même façon qu'à l'annexe 2A , nous obtenons :

$$v_{n+3} = \left[q_1 - p_1 \frac{b_0}{a_0} \right] v_{n+2} + \left[q_2 - p_2 \frac{b_0}{a_0} \right] v_{n+1} + \frac{p_1 w^{n+3}}{n+2 \prod_{i=1}^{n+2} v_i} + \frac{p_2 w^{n+2}}{n+1 \prod_{i=1}^{n+1} v_i}$$

ou encore :

$$v_{n+3} = K_1 v_{n+2} + K_2 v_{n+1} + L_1 w \frac{w^{n+2}}{n+2 \prod_{i=1}^{n+2} v_i} + L_2 w \frac{w^{n+1}}{n+1 \prod_{i=1}^{n+1} v_i}$$

il vient :

$$\frac{v_{n+3} - K_1 v_{n+2} - K_2 v_{n+1}}{v_{n+2} - K_1 v_{n+1} - K_2 v_n} = \frac{L_1 w \frac{w^{n+2}}{n+2 \prod_{i=1}^{n+2} v_i} + L_2 w \frac{w^{n+1}}{n+1 \prod_{i=1}^{n+1} v_i}}{L_1 w \frac{w^{n+1}}{n+1 \prod_{i=1}^{n+1} v_i} + L_2 w \frac{w^n}{n \prod_{i=1}^n v_i}}$$

$v_i \neq 0$ ($i = 1 \text{ à } n + 1$) , nous obtenons :

$$\frac{v_{n+3} - K_1 v_{n+2} - K_2 v_{n+1}}{v_{n+2} - K_1 v_{n+1} - K_2 v_n} = \frac{w}{v_{n+2}} \frac{L_1 w + L_2 v_{n+2}}{L_1 w + L_2 v_{n+1}}$$

ou :

$$v_{n+3} = K_1 v_{n+2} + K_2 v_{n+1} + \frac{L_2 v_{n+2} + L_1 w}{L_2 v_{n+1} + L_1 w} \left[1 - K_1 \frac{v_{n+1}}{v_{n+2}} - K_2 \frac{v_n}{v_{n+2}} \right] w$$

2) Domaine de stabilité locale (en K_1 , K_2 , L_1 et L_2)

Partant de la récurrence :

$$v_{n+3} = K_1 v_{n+2} + K_2 v_{n+1} + \frac{L_2 v_{n+2} + L_1 w}{L_2 v_{n+1} + L_1 w} \left[1 - K_1 \frac{v_{n+1}}{v_{n+2}} - K_2 \frac{v_n}{v_{n+2}} \right] w$$

et posant $v_n = x_n + w$, nous déduisons :

$$x_{n+3} = K_1 x_{n+2} + K_2 x_{n+1} + \frac{L_2 x_{n+2} + (L_1 + L_2) w}{L_2 x_{n+1} + (L_1 + L_2) w} \left[1 - K_1 \frac{x_{n+1} + w}{x_{n+2} + w} - K_2 \frac{x_n + w}{x_{n+2} + w} \right] w + w (K_1 + K_2 - 1)$$

$$1 - K_1 \frac{x_{n+1} + w}{x_{n+2} + w} - K_2 \frac{x_n + w}{x_{n+2} + w} \left[w + w (K_1 + K_2 - 1) \right]$$

Passant aux coordonnées réduites ($x'_n = x_n/w$) ,
il vient :

$$x'_{n+3} = K_1 x'_{n+2} + K_2 x'_{n+1} + \frac{L_2 x'_{n+2} + (L_1 + L_2)}{L_2 x'_{n+1} + (L_1 + L_2)} \left[1 - K_1 \frac{x'_{n+1} + 1}{x'_{n+2} + 1} - K_2 \frac{x'_n + 1}{x'_{n+2} + 1} \right] + (K_1 + K_2 - 1)$$

$$1 - K_1 \frac{x'_{n+1} + 1}{x'_{n+2} + 1} - K_2 \frac{x'_n + 1}{x'_{n+2} + 1} \left[1 + (K_1 + K_2 - 1) \right]$$

ou encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_{n+1} = y'_n \\ y'_{n+1} = z'_n \\ z'_{n+1} = K_1 z'_n + K_2 y'_n + \frac{L_2 z'_n + (L_1 + L_2)}{L_2 y'_n + (L_1 + L_2)} \left[1 - K_1 \frac{y'_{n+1}}{z'_{n+1}} - K_2 \frac{x'_{n+1}}{z'_{n+1}} \right] + (K_1 + K_2 - 1) \end{array} \right.$$

Supprimant dans l'écriture les « ' », nous cherchons à exprimer z_{n+1} sous la forme :

$$z_{n+1} = \alpha z_n + \beta y_n + \gamma x_n + \psi(x_n, y_n, z_n)$$

avec $\psi(x_n, y_n, z_n)$ de degré plus grand ou égal à deux et $\psi(0, 0, 0)$ nul.

En ce sens déterminons le développement de l'expression suivante, en le limitant aux termes de degré plus petit ou égal à un :

$$\frac{L_2 z_n + (L_1 + L_2)}{L_2 y_n + (L_1 + L_2)} \left[1 - K_1 \frac{y_{n+1}}{z_{n+1}} - K_2 \frac{x_{n+1}}{z_{n+1}} \right] + (K_1 + K_2 - 1)$$

Il vient :

$$\# z_n \left[L'(1 - K_1 - K_2) + K_1 + K_2 \right] + y_n \left[-L'(1 - K_1 - K_2) - K_1 \right] + x_n \left[-K_2 \right]$$

$$\text{avec } L' = \frac{L_2}{L_1 + L_2}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} \alpha = L' (1 - K_1 - K_2) + 2 K_1 + K_2 \\ \beta = - L' (1 - K_1 - K_2) - K_1 + K_2 \\ \gamma = - K_2 \end{cases}$$

L'équation caractéristique du système s'écrit :

$$\begin{vmatrix} 0 - s & 1 & 0 \\ 0 & 0 - s & 1 \\ \gamma & \beta & \alpha - s \end{vmatrix} = -s \begin{vmatrix} -s & 1 \\ \beta & \alpha - s \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & \alpha - s \end{vmatrix} = 0$$

ou encore :

$$s^3 - \alpha s^2 - \beta s - \gamma = 0$$

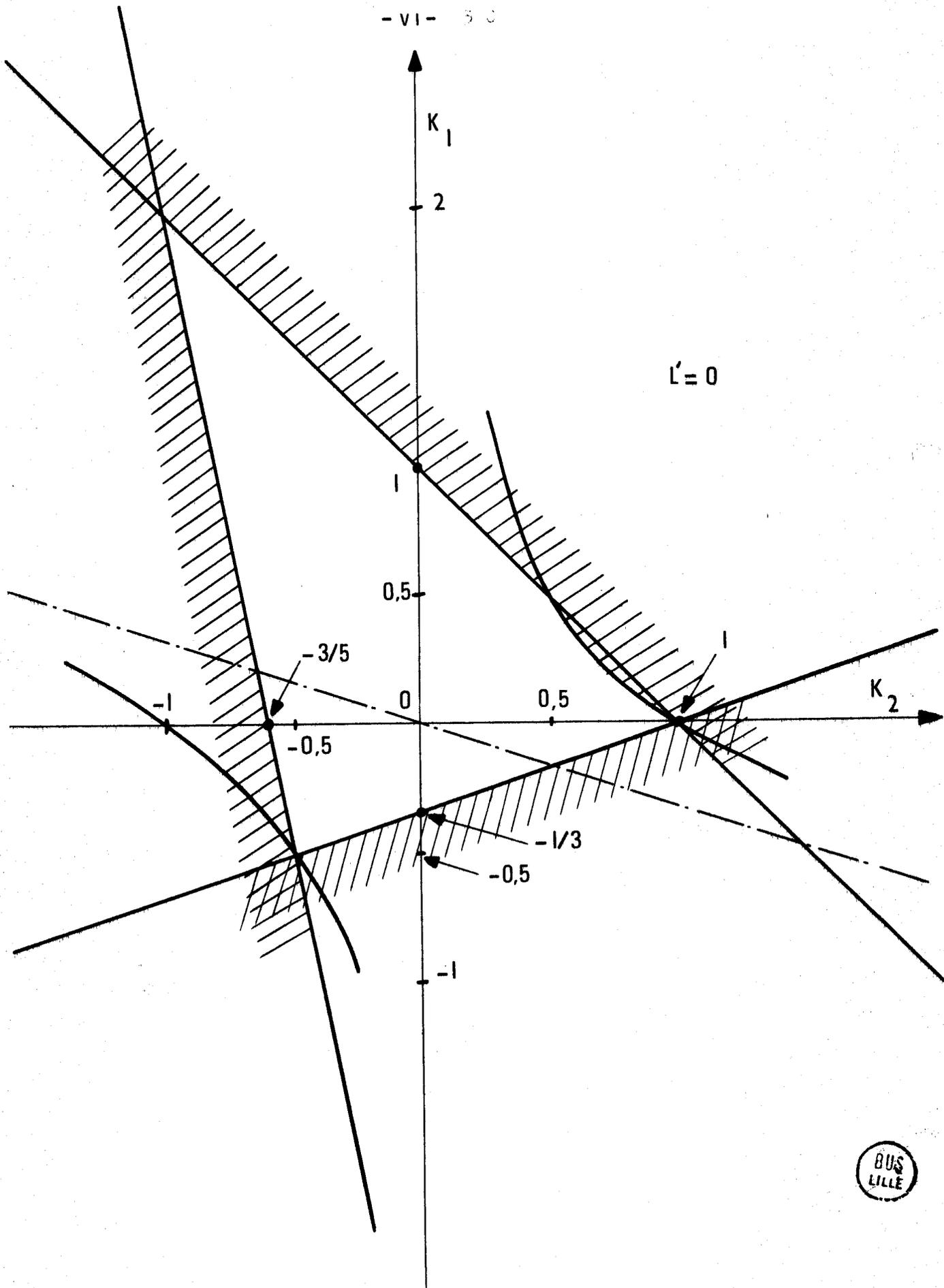
La stabilité sera assurée si $|s|$ est inférieur à un, c'est-à-dire si :

$$\begin{cases} 3(1 + \gamma) - \alpha + \beta > 0 \\ 3(1 - \gamma) + \alpha + \beta > 0 \\ 1 + \alpha - \beta + \gamma > 0 \\ 1 - \gamma^2 + \alpha\gamma - \beta\gamma > 0 \end{cases}$$

D'où les conditions cherchées :

$$\begin{cases} K_1 + 5 K_2 > -3 \\ (K_1 + K_2)(2 L' - 3) - 2 L' > -3 \\ 2 L' (1 - K_1 - K_2) + 3 K_1 - K_2 > -1 \\ K_2 \left[3 K_1 + K_2 + 2 L' (1 - K_1 - K_2) \right] < 1 \end{cases}$$

Nous faisons figurer, ci-après, le tracé du domaine de stabilité pour L' nul.



BIBLIOGRAPHIE

/1/ CHOW Joseph C.

On the structural identification and parameter estimation in linear multivariable dynamic systems.

Joint automatic control conference of the American Automatic Control Council (AACC). The Ohio State University, Columbus, 20 - 22 Juin 1973.

/2/ - KALMAN R.F.

New methods in WIENER filtering theory. Function theory and probability. Wiley, New-York, 1963.

- MEHRA R.K.

On-line identification of linear dynamic systems with applications to KALMAN filtering. IEEE Trans. auto. cont., vol. AC - 16, p. 12 - 21, 1971.

/3/ RICHALET J., RAULT A., POULIGUEN R.

Identification des processus par la méthode du modèle. Gordon and Breach, 1971.

/4/ RAULT A.

Identification. Applications to aeronautics.

Identification and system parameter estimation. IFAC, La Haye, 1973.

/5/ RICHALET J.

Identification of a glass furnace.

Identification and system parameter estimation. IFAC, La Haye, 1973.

/6/ ASTROM K.J. , BOHLIN T.

Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records. Theory of self adaptive systems.
Editor P.H. Hamond , New-York , Plenum Press , 1966.

/7/ MEHRA R.K.

Eight IEEE Symposium on adaptive processes.
University Park , Pennsylvania , 1969.

/8/ WONG K.V. , POLAK E.

1967 , IEEE Trans. autom. control , 12 , 707.

/9/ YOUNG P.C.

1969 , IFAC Varsovie , 26-6.

/10/ PANDYA R.N.

A class of bootstrap estimators for linear system identification.
Int. J. control , 1972 , vol. 15 , n°6 , 1091-1104.

/11/ PANDYA R.N. , PAGUREK B.

Two stage least squares estimators and their recursive approximations. Identification and system parameter estimation.
IFAC , La Haye , 1973.

/12/ QUENTIN J.F.

Quelques perfectionnements apportés à la méthode d'identification de V. STREJC. Automatisme , mai 1967.

/13/ LE COUTURIER , POULIGUEN , QUENTIN

Aperçus sur une méthode d'identification numérique des systèmes industriels à partir de leur réponse indicielle.
Automatisme , tome XVI , mai 1971.

/14/ MENAHEM M.

Process dynamic identification by the multistep method.
IFAC , Varsovie , 1969.

/15/ DE LARMINAT , MEZENECV

Méthodes d'identification des systèmes aperiodiques par l'étude des réponses impulsionnelles. C.R. Acad. Sc. 6 février 1967.

/16/ WELFONDER E.

Correlation method for identification of disturbed control systems by periodical test signal. IFAC , Prague , 1967.

/17/ ISERMANN R. , BAUR U. , BAMBERGER W. , KNEPPO P. , SIEBERT H.

Comparison and evaluation of six on-line identification and parameter estimation methods with three simulated processes.
IFAC , La Haye , 1973.

/18/ SOLODOVNIKOV

Dynamique statistique des systèmes linéaires.
Dunod , Paris 1965.

/19/ VITEK V. , JOSEFUS J.

Statistical methods in the automation of the operation control of power systems. IFAC , Londres , 1966.

/20/ LAURANS , LABARRERE , MENAHEM

Sur l'identification des systèmes industriels par la méthode de corrélation. IFAC , Toronto , 1968.

/21/ MENENDEZ MARTINEZ A.

Identification de la réponse impulsionnelle d'un système par intercorrélation au moyen de séquences binaires pseudo aléatoires.
Thèse de docteur Ingénieur. Laboratoire d'automatique de Grenoble.
Juin 1970.

/22/ CUENOD M. , SAGE A.

Comparison of some methods used for process identification.
IFAC , Prague , 1967.

/23/ LATTES S.

Annales de Mathématiques. Série 3. Tome 13. 1906.

/24/ MIRA C.

Etude de la frontière de stabilité d'un point double stable d'une récurrence non linéaire autonome du deuxième ordre.
International Pulse Symposium. IFAC , Budapest , 9-11 Avril 1968.

/25/ ROUBELLAT F.

Contribution à l'étude des solutions des récurrences non linéaires et applications aux systèmes à données échantillonnées.
Thèse de docteur ès Sciences Physiques , Université de Toulouse , 1969.

/26/ BABARY J.P.

Contribution à l'étude des solutions des récurrences non linéaires et différentes applications. Thèse de docteur ès Sciences Physiques , Université de Toulouse , 1969.

TABLE des MATIERES

INTRODUCTION.....	Page I
CHAPITRE I - PRESENTATION de QUELQUES METHODES D'IDENTIFICATION	
I - Choix d'un type de méthodes.....	4
2 - Méthodes d'identification.....	7
3 - Conclusion.....	36
CHAPITRE II - ELABORATION D'UNE PROCEDURE D'AJUSTEMENTS EN LIGNE D'UN MODELE de COMMANDE DANS L'ESPACE PARAMETRIQUE	
I - Introduction.....	37
2 - Incompatibilité identification-commande.....	39
3 - Forme générale de l'identification.....	40
4 - Identification et commande adaptées aux systèmes statiques.....	43
5 - Systèmes statique-Extension des "homothéties" aux dimensions supérieures.....	57
6 - Systèmes dynamiques.....	61
CHAPITRE III - CARACTERISATION DE LA STABILITE DE LA PROCEDURE d'AJUSTEMENTS HOMOTHETIQUES	
I - Introduction.....	67
2 - Domaine de stabilité par rapport aux conditions initiales.....	70
3 - Différence d'ordre-Validité de l'algorithme.....	97
4 - Conclusion.....	100
CHAPITRE IV - GENERALISATION	
I - Introduction.....	101
2 - Transformations générales du type similitude...	102
3 - Amélioration du temps de réponse.....	116
CHAPITRE V - RESULTATS DES SIMULATIONS	
I - Introduction.....	118
2 - Exemples d'étude.....	119
Figures n°1 à n°22	

CONCLUSION

ANNEXES du CHAP.II : 2A,2B ; du CHAP.III : 3A,3B,3C

BIBLIOGRAPHIE