N° D'ORDRE : 578

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ème CYCLE

par

Jacques BLEUEZ

CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES DE CONVERGENCE POUR UNE CLASSE D'ESTIMATEURS DE LA DENSITE

MEMBRES DU JURY

MM. P. POUZET, Président
J. GEFFROY, Rapporteur

Mlle S. MARQUET
M. D. BOSQ
} Examinateurs

Soutenue le 27 FEVRIER 1976

Nous remercions vivement Monsieur le Professeur POUZET qui nous a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de cette thèse, et Mademoiselle le Professeur MARQUET qui a bien voulu faire partie de la commission d'examen.

Nous tenons a exprimer notre profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur BOSQ, qui nous a donné l'idée de ce travail, nous a permis d'utiliser certains de ses résultats, et a su nous initier à la recherche en nous prodiguant conseils et encouragements.

Monsieur le Professeur GEFFROY nous a fait l'honneur de s'intéresser à notre travail ; ses remarques nous ont permis d'améliorer nos résultats sur plusieurs points. Nous lui exprimons notre respectueuse reconnaissance.

Nous remercions enfin Madame BERAT et Madame LENGAIGNE qui, avec beaucoup de gentillesse et de soin, ont permis la réalisation matérielle de cette thèse.

P L A N

INTRODUCTION

L'estimation de la densité a été l'objet de nombreux travaux depuis l'article de ROSENBLATT [1] (1956) qui définissait la méthode du noyau. En 1962, CENCOV [4] proposait une autre méthode d'estimation de la densité, la méthode des fonctions orthogonales, et depuis les deux méthodes se sont développées séparément, la première étant cependant plus étudiée que la seconde.

Pour la méthode du noyau, après ROSENBLATT, des conditions suffisantes de convergence uniforme presque sûre sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ ont été données ; voir par exemple [18], [19]. Tout récemment, Mme BERTRAND-RETALi et M. GEFFROY [20] ont obtenu une condition nécessaire et suffisante de convergence uniforme presque complète avec des hypothèses très faibles sur le noyau. Pour des conditions nécessaires et suffisantes de convergence, on peut voir également [16].

La méthode des fonctions orthogonales, après CENCOV, fut étudiée par S.C. SCHWARZ [5] (1967) dans le cas d'une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ formée par les fonctions d'Hermite, alors que KRONMAL et TARTER [6] (1968) s'intéressaient au cas des fonctions trigonométriques. Enfin en 1969, des conditions suffisantes de convergence uniforme en moyenne quadratique et uniforme presque sûre ont été données par D. BOSQ [7] dans le cas le plus général.

Le point de départ de cette thèse est un ensemble de résultats obtenus par D. BOSQ dans le cas des fonctions trigonométriques. Nous avons d'abord étendu ces résultats au cas des fonctions d'Hermite, puis nous les avons généralisés.

Au chapitre I, nous définissons une classe d'estimateurs de la densité qui contient les estimateurs obtenus par la méthode du noyau et ceux obtenus par la méthode des fonctions orthogonales *. Nous donnons ensuite pour cette classe d'estimateurs dans le cas le plus général des conditions nécessaires et suffisantes de convergence simple en moyenne d'ordre 1 et 2, simple presque complète et en moyenne, uniforme presque complète et en moyenne uniforme (nous supposons alors que la densité est définie sur un espace métrique). La démonstration de certaines conditions nécessaires de convergence (en particulier, les conditions nécessaires de convergence uniforme) a été grandement facilitée par l'utilisation des résultats établis par Mme BERTRAND-RETALI et M. GEFFROY dans le cas de la méthode du noyau.

Au chapitre II, nous étudions le cas où le noyau est positif. Les résultats du chapitre I sont améliorés. On obtient des conditions nécessaires et suffisantes de convergence simple en probabilité, simple presque complète, uniforme presque complète et uniforme en probabilité, ces deux dernières convergences étant alors équivalentes. Nous donnons ensuite deux exemples de noyaux positifs : la méthode du noyau et la méthode des fonctions orthogonales avec comme base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mu)$ les fonctions de Haar.

Le chapitre III est consacré à l'étude de la méthode des fonctions orthogonales dans deux cas particuliers importants : le cas d'une densité appartenant à $\mathbb{L}^2[-\pi,+\pi]$, muni du système des fonctions trigonométriques et celuid'une densité appartenant à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, muni de la base hilbertienne formée par les fonctions d'Hermite. Nous donnons notamment une démonstration de la condition nécessaire de convergence simple en probabilité établie par D. BOSQ pour les fonctions trigonométriques, démonstration qui s'adapte très facilement au cas des fonctions d'Hermite.

(*) Nous avons tout récemment découvert un article de A. FOLDES et P. REVESZ [15] (1974) où une classe analogue d'estimateurs de la densité est définie. Cependant ceux-ci ne donnent que des conditions suffisantes de convergence uniforme presque sûre sur un intervalle compact de R, et même sur ce point nos résultats sont obtenus avec des hypothèses plus faibles.

CHAPITRE I

DEFINITION D'UNE CLASSE D'ESTIMATEURS DE LA DENSITE. CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES DE CONVERGENCE DANS LE CAS GENERAL.

I - METHODES CLASSIQUES D'ESTIMATION DE LA DENSITE.-

I.1. - *Position du problème.*

Soient $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé, $(E,\mathcal{B},\mu)$ un espace mesuré, et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathcal{A})$, à valeurs dans $(E,\mathcal{B})$, dont la loi P_X admet une densité $\frac{dP_X}{d\mu}$ par rapport à μ :

$$(\Omega,\mathcal{A},P) \xrightarrow{X} (E,\mathcal{B})$$

Désignons par $\mathcal{D}_\mu$ l'ensemble de toutes les densités de probabilité par rapport à μ et par $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathcal{D}_\mu$. Soit $(X_1,\ldots,X_n)$ un échantillon de taille n de la variable aléatoire X. Sachant que la densité $\frac{dP_X}{d\mu}$ que l'on veut estimer appartient à $\mathcal{D}$, on se propose de trouver des estimateurs de cette densité qui convergent, suivant des modes que nous préciserons plus loin, lorsque la taille n de l'échantillon augmente indéfiniment.

I.2. - *Méthodes classiques.*

Deux grandes méthodes ont été développées pour estimer une densité de probabilité : la méthode du noyau et la méthode des fonctions orthogonales.

I.2.1. *Méthode du noyau.*

On suppose que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On se donne une application K de E dans $\mathbb{R}$, une suite (h_n) de nombres strictement positifs tendant vers zéro, et on prend comme estimateur de la densité :

$$\hat{f}_n^{(K)}(t,\omega) = \frac{1}{n\, h_n} \sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{t - X_j(\omega)}{h_n}\right) , \quad t \in E , \ \omega \in \Omega$$

En général, on choisit comme fonction K une densité de probabilité. Cette méthode a été introduite par Rosenblatt [1] en 1956.

1.2.2. Méthode des fonctions orthogonales.

On suppose que la densité $\frac{dP_X}{d\mu}$ appartient à $\mathbb{L}^2(\mu)$, et on désigne par $(e_k)_{k\in I}$ une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mu)$. On se donne une suite d'entiers $q(n)$ tendant vers l'infini et on prend comme estimateur de la densité :

$$\hat{f}_n(t,\omega) = \sum_{i=1}^{q(n)} \hat{a}_{k_i n}(\omega)\, e_{k_i}(t) , \quad t \in E , \ \omega \in \Omega$$

avec :

$$\hat{a}_{k_i n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e_{k_i}(X_j) .$$

Si $\mathbb{L}^2(\mu)$ est séparable, on prendra $k_i = i$ $(i = 1,2,\dots,q(n))$. Nous nous placerons dans ce cas dans toute la suite. Cette méthode fut introduite par Cencov [4] en 1962.

II - DEFINITION D'UNE CLASSE D'ESTIMATEURS DE LA DENSITE.-

Soit I une partie infinie et non bornée de $\mathbb{R}^+$. On se donne une famille $(K_r(x,t),\ r \in I)$ de fonctions réelles mesurables à deux variables $(x,t) \in E^2$. On associe à cette famille une suite d'estimateurs de la densité définie de la façon suivante :

$$\hat{f}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} K_{r(n)}(X_j,t) , \quad t \in E$$

où $r(n) \in I$ et $r(n) \to +\infty$.

Cette classe d'estimateurs contient les estimateurs obtenus par la méthode du noyau et ceux obtenus par la méthode des fonctions orthogonales.

En effet :

- La méthode du noyau correspond au choix d'une fonction K à une variable avec :

$$K_r(x,t) = r\, K[r(t-x)], \quad r \in \mathbb{R}^+$$

où l'on suppose que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Il suffit alors de poser $h_n = \frac{1}{r(n)}$ pour retrouver l'estimateur par la méthode du noyau.

- La méthode des fonctions orthogonales correspond au choix :

$$K_r(x,t) = \sum_{i=0}^{r} e_i(x)\, e_i(t) \quad , r \in \mathbb{N} \ , (x,t) \in E^2$$

où les e_i forment une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mu)$ supposé séparable.

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, nous avons tout récemment découvert un article de A. Földes et P. Révész [15] (1974) où une classe analogue d'estimateurs est également définie. Ceux-ci obtiennent des conditions suffisantes de convergence uniforme presque sûre sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Nous verrons que nos résultats sont à la fois plus forts (nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes de convergence) et plus généraux (dans le cas de la convergence simple la densité sera définie sur un espace mesurable quelconque, dans le cas de laconvergence uniforme sur un espace métrique). Rappelons tout d'abord une définition. On dit qu'une suite (X_n) de variables aléatoires converge presque complétement vers une variable aléatoire X si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ , \ \sum_n P[|X_n - X| > \varepsilon] < +\infty$$

On notera alors : $X_n \xrightarrow{p.c_o} X$. D'après le lemme de Borel-Cantelli, la convergence presque complète entraîne la convergence presque sûre. D'autre part, si $F \subset E$, nous dirons que $\hat{f}_n$ converge en moyenne uniforme sur F vers f si : $E[\sup_{t\in F} |\hat{f}_n(t) - f(t)|] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Nous supposons dans ce chapitre que le noyau est de signe quelconque. Nous allons donner pour la classe d'estimateurs que l'on vient de définir des conditions nécessaires et suffisantes de convergence :

- simple en moyenne d'ordre 1 et 2
- simple presque complète et en moyenne
- uniforme presque complète et en moyenne uniforme (on supposera alors que E est un espace métrique).

III - CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES DE CONVERGENCE DANS LE CAS GENERAL.-

Dans toute la suite, on supposera que la mesure μ est non atomique, et on désignera par α un nombre strictement positif attaché à la famille $(K_r(x,t),\ r \in I)$.

L'estimateur $\hat{f}_n$ étant défini par :

$$\hat{f}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} K_{r(n)}(X_j,t) \quad , \quad t \in E$$

on posera : $$f_n(t) = E[\hat{f}_n(t)] = \int_E K_{r(n)}(x,t)\ f(x)\ d\mu(x)$$

et : $$\hat{S}_n(t) = \hat{f}_n(t) - f_n(t)$$

III.1. - *Convergence simple en moyenne d'ordre* $p(p = 1,2)$.

Lemme 1.- Soit $F \subset E$, avec $0 < \mu(F) < + \infty$. Soit $(B_r)_{r\in I}$ une famille de parties de F telle que : $\mu(B_r) = \frac{1}{r^\alpha}$, au moins pour r assez grand. Posons : $E_n = \bigcap_{j=1}^{n} [X_j \notin B_{r(n)}]$. Si la loi commune des X_j admet pour densité $f = \frac{1}{\mu(F)} \cdot 1_F$ et s'il existe $\beta > 0$ et N_o partie infinie de $\mathbb{N}^*$ tels que : $\frac{(r(n))^\alpha}{n} \geq \beta$ pour $n \in N_o$, alors, pour n assez grand dans N_o : $P(E_n) \geq \exp[- \frac{2}{\beta\ \mu(F)}]$.

Démonstration.- Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_1$:

$$p_n = P(E_n) = \left(1 - \frac{1}{\mu(F)} \frac{1}{(r(n))^\alpha}\right)^n$$

$$\text{Log } p_n = n \text{ Log } \left[1 - \frac{1}{\mu(F)} \quad \frac{1}{(r(n))^\alpha}\right]$$

Il existe $n_2 \geq n_1$ tel que pour $n \geq n_2$:

$$\text{Log } \left[1 - \frac{1}{\mu(F)(r(n))^\alpha}\right] > - \frac{2}{\mu(F)(r(n))^\alpha}$$

Donc, pour n assez grand dans N_o :

$$\text{Log } p_n \geq - \frac{2}{\mu(F)} \frac{n}{(r(n))^\alpha} \geq - \frac{2}{\beta\ \mu(F)}$$

et :

$$p_n \geq \exp \left[- \frac{2}{\beta\ \mu(F)}\right]$$

Lemme 2.- Les hypothèses étant celles du lemme 1, soit $t_o \in F$.
On suppose que : $\int_F K_{r(n)}(x,t_o)\ d\mu(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ Alors :

$$E[|\hat{f}_n(t_o) - f(t_o)|] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow E[\hat{f}_n^-(t_o) \mid E_n] \xrightarrow[\substack{n\to+\infty \\ n\in N_o}]{} 0$$

Démonstration.-

1°) Les hypothèses entraînent que :

$$\bar{f}_n(t_o) = E[\hat{f}_n(t_o)] = \int_F K_{r(n)}(x,t_o) \frac{1}{\mu(F)} d\mu(x) \longrightarrow \frac{1}{\mu(F)} = f(t_o)$$

donc :

$$E[\hat{f}_n^+(t_o)] - E[\hat{f}_n^-(t_o)] \longrightarrow f(t_o) \qquad (1)$$

Comme :

$$E[|\hat{f}_n(t_o) - f(t_o)|] \longrightarrow 0 \quad , \text{ on a aussi :}$$

$$E[|\hat{f}_n(t_o)| - f(t_o)] \longrightarrow 0$$

soit

$$E[\hat{f}_n^+(t_o)] + E[\hat{f}_n^-(t_o)] \longrightarrow f(t_o) \qquad (2)$$

De (1) et (2), on déduit que : $E[\hat{f}_n^-(t_o)] \longrightarrow 0$

2°) On suppose que $n \in N_o$. Alors :

$$E[\hat{f}_n^-(t_o) \mid E_n] = \int_\Omega \hat{f}_n^-(t_o)\, dP^{E_n} = \frac{1}{P(E_n)} \int_{E_n} \hat{f}_n^-(t_o)\, dP$$

car $P(E_n) > 0$ d'après le lemme 1.

Alors : $$E(\hat{f}_n^-(t_o) \mid E_n) \leq e^{\frac{2}{\beta\mu(F)}} E[\hat{f}_n^-(t_o)]$$

d'où : $$E[\hat{f}_n^-(t_o) \mid E_n] \xrightarrow[\substack{n\to+\infty \\ n\in N_o}]{} 0 \quad \text{d'après le 1°)}.$$

Soit $F \subset E$. On dira que la condition $C_F(t_o)$ est vérifiée s'il existe une famille $(B_r)_{r\in I}$ de parties de F et un nombre réel $\ell > 0$ tels que, pour r assez grand, $\mu(B_r) = \frac{\ell}{r^\alpha}$ et $\int_{B_r} K_r(x,t_o)d\mu(x) \geq \delta$, où δ est un nombre réel strictement positif.

Lemme 3.- Soient $F \subset E$, avec $0 < \mu(F) < +\infty$ et $f = \frac{1}{\mu(F)} \cdot 1_F$.
Si les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) il existe $t_o \in F$ tel que la condition $C_F(t_o)$ soit vérifiée.

(b) l'intégrale $\int_F K_r(x,t_o)\, d\mu(x)$ existe et tend vers 1 lorsque $r \to +\infty$ dans I.

alors : $$E[|\hat{f}_n(t_o) - f(t_o)|] \longrightarrow 0 \implies \frac{(r(n))^\alpha}{n} \longrightarrow 0 .$$

Démonstration.-

1°) Soit g_n la densité de la loi de X_j conditionnée par E_n .
Elle s'écrit :

$$g_n(x) = \frac{(r(n))^\alpha}{\mu(F)(r(n))^\alpha - \ell} \cdot 1_{F\setminus B_{r(n)}}(x)$$

Alors :

$$E[\hat{f}_n(t_o) \mid E_n] = E[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_{r(n)}(X_j, t_o) \mid E_n]$$

$$= E[K_{r(n)}(X_1, t_o) \mid E_n]$$

$$= \frac{(r(n))^\alpha}{\mu(F)(r(n))^\alpha - \ell} \int_{F\setminus B_{r(n)}} K_{r(n)}(x,t_o)\, d\mu(x)$$

Les conditions (a) et (b) donnent, pour n assez grand :

$$\int_{B_{r(n)}} K_{r(n)}(x,t_o)\, d\mu(x) \geq \delta$$

$$\int_F K_{r(n)}(x,t_o)\, d\mu(x) < 1 + \frac{\delta}{2}$$

où l'on peut supposer que $\delta \in \left]0,1\right[$.

Alors :
$$\int_{F \setminus B_{r(n)}} K_{r(n)}(x,t_o)\, d\mu(x) \leq 1 - \frac{\delta}{2}$$

et :
$$E[\hat{f}_n(t_o) \mid E_n] \leq \frac{(r(n))^\alpha}{\mu(F)(r(n))^\alpha - \ell} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)$$

Pour n assez grand : $\dfrac{(r(n))^\alpha}{(r(n))^\alpha - \dfrac{\ell}{\mu(F)}} \leq 1 + \dfrac{\delta}{2}$

D'où :
$$E[\hat{f}_n(t_o) \mid E_n] \leq \frac{1}{\mu(F)} \left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right)$$

2°) Si $\dfrac{(r(n))^\alpha}{n} \not\to 0$, il existe $\beta > 0$ et une sous-suite $\left(\dfrac{(r(n_k))^\alpha}{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall\, k \in \mathbb{N}$ $\dfrac{(r(n_k))^\alpha}{n_k} \geq \beta$. Puisque $\hat{f}_n(t_o) \xrightarrow{P} f(t_o)$, on a aussi $\hat{f}_{n_k}(t_o) \xrightarrow{P} f(t_o)$, et également : $\hat{f}^+_{n_k}(t_o) \xrightarrow{P} f(t_o)$ puisque $f(t_o) > 0$. Appliquons alors l'inégalité de Markov à $\hat{f}^+_{n_k}(t_o)$. Soit $\gamma \in \left] \dfrac{1 - \delta^2/8}{\mu(F)} , \dfrac{1}{\mu(F)} \right[$.

Alors :

$$P[\hat{f}^+_{n_k}(t_o) > \gamma \mid E_{n_k}] \leq \frac{1}{\gamma} E[\hat{f}^+_{n_k}(t_o) \mid E_{n_k}]$$

$$= \frac{1}{\gamma} \left(E[\hat{f}_{n_k}(t_o) \mid E_{n_k}] + E[\hat{f}^-_{n_k}(t_o) \mid E_{n_k}] \right)$$

D'après le lemme 2 , pour k assez grand :

$$E[\hat{f}^-_{n_k}(t_o) \mid E_{n_k}] < \frac{\delta^2}{8\, \mu(F)}$$

D'où $$P[\hat{f}^{+}_{n_k}(t_o) > \gamma \mid E_{n_k}] \leq \frac{1}{\gamma\,\mu(F)}\left(1 - \frac{\delta^2}{8}\right) < 1$$

Or : $$\hat{f}^{+}_{n_k}(t_o) \leq \gamma \Longrightarrow f(t_o) - \hat{f}^{+}_{n_k}(t_o) \geq \frac{1}{\mu(F)} - \gamma$$

Donc :

$$\begin{aligned}
P\left[|\hat{f}^{+}_{n_k}(t_o) - f(t_o)| \geq \frac{1}{\mu(F)} - \gamma\right] &\geq P\left[f(t_o) - \hat{f}^{+}_{n_k}(t_o) \geq \frac{1}{\mu(F)} - \gamma\right] \\
&\geq P[\hat{f}^{+}_{n_k}(t_o) \leq \gamma] \\
&\geq P[(\hat{f}^{+}_{n_k}(t_o) \leq \gamma) \cap E_{n_k}] \\
&= P[E_{n_k}]\; P[\hat{f}^{+}_{n_k}(t_o) \leq \gamma \mid E_{n_k}] \\
&\geq e^{-\frac{2}{\beta\mu(F)}}\left[1 - \frac{1}{\gamma\,\mu(F)}\left(1 - \frac{\delta^2}{8}\right)\right] > 0
\end{aligned}$$

et ceci contredit la convergence simple en probabilité de $\hat{f}^{+}_{n_k}$ vers f au point t_o, donc la convergence en moyenne de $\hat{f}_n$ vers f au point t_o.

Lemme 4.- Si les conditions suivantes sont remplies :

1°) f est bornée

2°) $\forall t \in E \; \exists \; B(t)$ tel que, pour r assez grand :

$$\int_E [K_r(x,t)]^2 \, d\mu(x) \leq B(t) \,.\, r^{\alpha}$$

alors : $$\frac{(r(n))^{\alpha}}{n} \longrightarrow 0 \Longrightarrow \sigma^2\, \hat{S}_n(t) \longrightarrow 0 \;.$$

Démonstration.-

$$\hat{S}_n(t) = \hat{f}_n(t) - E[\hat{f}_n(t)] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[K_{r(n)}(X_j,t) - \int_E K_{r(n)}(x,t)\, f(x)\, d\mu(x)\right]$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2\, \hat{S}_n(t) &\leq \frac{1}{n} E[(K_{r(n)}(X_1,t))^2] \\
&\leq \frac{M}{n}\int_E (K_{r(n)}(x,t))^2\, d\mu(x) \quad , \qquad M = \sup_{t \in E}[f(t)] \\
&\leq M\, B(t)\, \frac{r(n))^{\alpha}}{n}
\end{aligned}$$

On peut alors énoncer :

Proposition 1.- Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des densités définies sur E qui sont bornées et pour lesquelles l'intégrale $\int_E K_r(x,t)\, f(x)\, d\mu(x)$ existe et admet une limite lorsque $r \to +\infty$ dans I et cela pour tout $t \in E$. On note cette limite $\bar{f}(t)$. Si les conditions suivantes sont satisfaites :

1°) $\forall\, t \in E \;\; \exists\, B(t)$ tel que, pour r assez grand :

$$\int_E [K_r(x,t)]^2\, d\mu(x) \leq B(t)\,.\, r^\alpha$$

2°) il existe $F \subset E$, avec $0 < \mu(F) < +\infty$ tel que $\frac{1}{\mu(F)}\,.\,1_F \in \mathcal{D}$

3°) il existe $t_o \in F$ tel que :

a) $\int_F K_r(x,t_o)\, d\mu(x)$ existe et tend vers 1 lorsque $r \to +\infty$ dans I.

b) la condition $C_F(t_o)$ est vérifiée

alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\frac{(r(n))^\alpha}{n} \longrightarrow 0$

(2) $\forall\, f \in \mathcal{D},\ \forall\, t \in E,\ E[|\hat{f}_n(t) - \bar{f}(t)|] \to 0$

(3) $\forall\, f \in \mathcal{D},\ \forall\, t \in E,\ E[(\hat{f}_n(t) - \bar{f}(t))^2] \to 0$

Démonstration.-

(1) $\Longrightarrow$ (3) . De l'égalité : $(\hat{f}_n(t) - \bar{f}(t))^2 = (\hat{S}_n(t) + f_n(t) - \bar{f}(t))^2$ on tire : $E\,[(\hat{f}_n(t) - \bar{f}(t))^2] = \sigma^2\, \hat{S}_n(t) + (f_n(t) - \bar{f}(t))^2$. D'où le résultat, compte tenu du lemme 4 et de la définition de $\mathcal{D}$.

(3) $\Longrightarrow$ (2) C'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Schwarz.

(2) $\Longrightarrow$ (1) d'après le lemme 3.

III.2. - *Convergence simple presque complète et en moyenne d'ordre* p $(p = 1,2)$.

Lemme 5.- Si les conditions suivantes sont remplies :

1°) f est bornée

2°) L'intégrale $\int_E K_r(x,t)f(x)d\mu(x)$ existe et admet une limite, notée $\bar{f}(t)$, lorsque $r \to +\infty$ dans I, et cela pour tout $t \in E$.

3°) Pour tout $t \in E$, il existe $A_1(t) > 0$ et $B(t)$ tels que, pour r assez grand :

(a) $\forall x \in E, \quad |K_r(x,t)| \leq A_1(t)r^\alpha$

(b) $\int_E [K_r(x,t)]^2 d\mu(x) \leq B(t)r^\alpha$

alors, si $r(n)$ vérifie la condition : $\forall \beta > 0, \ \sum_n \exp[-\beta \dfrac{n}{(r(n))^\alpha}] < +\infty$
on a : $\forall t \in E, \quad \hat{f}_n(t) \xrightarrow{p.c_o} \bar{f}(t)$.

Démonstration.- Il suffit de montrer que $\hat{S}_n(t) \xrightarrow{p.c_o} 0$

où $\hat{S}_n(t) = \hat{f}_n(t) - f_n(t) = \sum_{j=1}^n Y_{jn}(t)$ avec :

$$Y_{jn}(t) = \frac{1}{n}\left[K_{r(n)}(X_j,t) - E(K_{r(n)}(X_j,t))\right].$$

Nous allons utiliser l'inégalité suivante, de Hoeffding ([14] p. 58) :

$$P[S_n \geq n\varepsilon] \leq \exp[-n\frac{\varepsilon}{b}((1+\frac{\sigma^2}{b\varepsilon})\mathrm{Log}(1+\frac{b\varepsilon}{\sigma^2}) - 1)]$$

pour $0 < \varepsilon < b$, avec : $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, où les X_k sont indépendantes, centrées et majorées par b, et $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n E(X_k^2)$.

Posons : $\tilde{Y}_{jn}(t) = n\,Y_{jn}(t)$

et $\tilde{\hat{S}}_n(t) = \sum_{j=1}^n \tilde{Y}_{jn}(t)$.

Alors :

$$\tilde{Y}_{jn}(t) = K_{r(n)}(X_j,t) - \int_E K_{r(n)}(x,t)f(x)d\mu(x)$$

Les variables aléatoires $\tilde{Y}_{jn}(t)$ sont indépendantes, centrées et majorées par $2A_1(t)(r(n))^\alpha$.

La fonction $h(u) = (1+u)\text{Log}(1 + \frac{1}{u}) - 1$ est strictement positive et décroissante sur $]0,+\infty[$. Par conséquent, puisque :

$$\frac{\sigma^2}{b\varepsilon} = \frac{1}{2A_1(t)(r(n))^\alpha\varepsilon} \times \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E[(\tilde{Y}_{jn}(t))^2] \leq \frac{E[(K_{r(n)}(X_1,t))^2]}{2A_1(t).(r(n))^\alpha\,\varepsilon}$$

$$\frac{\sigma^2}{b\varepsilon} \leq \frac{M}{2A_1(t)(r(n))^\alpha\varepsilon} \times \int_E (K_{r(n)}(x,t))^2 d\mu(x) \leq \frac{M\,B(t)}{2A_1(t).\varepsilon}$$

avec : $M = \sup\limits_{x\in E} f(x)$

on a l'inégalité :

$$(1 + \frac{\sigma^2}{b\varepsilon})\text{Log}(1 + \frac{b\varepsilon}{\sigma^2}) - 1 \geq (1 + \frac{M\,B(t)}{2A_1(t)\varepsilon})\ \text{Log}(1 + \frac{2A_1(t)\varepsilon}{M\,B(t)}) - 1 = \rho(t) > 0$$

Alors :

$$P[\hat{S}_n(t) \geq \varepsilon] = P[\tilde{\hat{S}}_n(t) \geq n\varepsilon] \leq \exp[- \frac{\rho(t).\varepsilon}{2A_1(t)}\ \frac{n}{(r(n))^\alpha}]$$

d'où le résultat.

<u>*Lemme*</u> *6.- (Kolmogorov).*

Soient (U_i) des variables aléatoires indépendantes, centrées, telles que $|U_i| \leq d < +\infty$. On pose : $s_n^2 = \sigma^2 S_n = \sigma^2(U_1 + \ldots + U_n)$.

Soit x tel que : $w = \frac{xd}{s_n^2} < \frac{1}{256}$ et $\lambda = \frac{x^2}{s_n^2} > 512$.

Alors :

$$P[S_n > x] > \exp[- \frac{1}{2}\frac{x^2}{s_n^2}(1 + 3\varepsilon)]$$

où : $\varepsilon = \max(32(\frac{\text{Log}\,\lambda}{\lambda})^{1/2}, 64w^{1/2})$.

Démonstration.- Moran [8], pages 378-384.

Proposition 2.- Sous les hypothèses de la Proposition 1 et si de plus :

(a) $\forall\, t \in E$, $\exists\, A_1(t) > 0$ tel que, pour r assez grand :

$$\forall\, x \in E, \quad |K_r(x,t)| \leq A_1(t) r^{\alpha}$$

(b) il existe $f_o \in \mathcal{D}$ et $A_2(t)$ tels que, pour r assez grand :

$$0 < A_2(t) r^{\alpha} \leq E_{f_o}\left[(K_r(X_1,t))^2\right]$$

alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\forall\, \beta > 0, \quad \sum_n \exp\left[-\beta \dfrac{n}{(r(n))^{\alpha}}\right] < +\infty$

(2) $\forall\, f \in \mathcal{D}, \forall\, t \in E, \quad \hat{f}_n(t) \xrightarrow{p.c_o} \bar{f}(t)$ et $E\left[|\hat{f}_n(t) - \bar{f}(t)|\right] \longrightarrow 0$

(3) $\forall\, f \in \mathcal{D}, \forall\, t \in E, \quad \hat{f}_n(t) \xrightarrow{p.c_o} \bar{f}(t)$ et $E\left[(\hat{f}_n(t) - \bar{f}(t))^2\right] \longrightarrow 0$.

Démonstration.-

. (1) $\Longrightarrow$ (3). De l'égalité : $(\hat{f}_n(t) - \bar{f}(t))^2 = (\hat{S}_n(t) + f_n(t) - \bar{f}(t))^2$ on tire immédiatement :

$$E\left[(\hat{f}_n(t) - \bar{f}(t))^2\right] = \sigma^2 \hat{S}_n(t) + (f_n(t) - \bar{f}(t))^2$$

et le lemme 4 entraîne la convergence en moyenne quadratique de l'estimateur. D'autre part, la convergence presque complète résulte du lemme 5.

. (3) $\Longrightarrow$ (2). C'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Schwarz.

. (2) $\Longrightarrow$ (1). La convergence en moyenne implique : $\dfrac{(r(n))^{\alpha}}{n} \longrightarrow 0$.

Ceci va nous permettre d'appliquer le lemme 6. On suppose que la loi commune des X_i est la loi de densité f_o. D'après ce qui précède, il existe pour t fixé un nombre positif a tel que, pour n assez grand, $\dfrac{s_n^2}{256d} > a$, (où $s_n^2 = \sigma^2 \hat{S}_n(t)$).

Soit alors $x \in \,]0,a[$. Pour n assez grand, on aura bien : $W < \frac{1}{256}$ et $\lambda > 512$ (puisque $s_n^2 \longrightarrow 0$). On en déduit :

$$P[\hat{S}_n(t) > x] > \exp[-\, b\, x^2 \frac{n}{(r(n))^\alpha}]$$

où b est une constante.

Finalement, la convergence presque complète implique :

$$\sum_n \exp[-\, b\, x^2 \frac{n}{(r(n))^\alpha}] < +\infty \;, \quad x \in \,]0,a[$$

et ceci entraîne la condition (1).

III.3. - Convergence en moyenne uniforme et uniforme presque complète.-

Nous supposons maintenant que E est un espace métrique muni de sa tribu borélienne, et que $K_r(x,t)$ est Lipschitzienne en t, d'ordre γ et de constante $C\,r^m$ (C constante > 0, m fixe ≥ 0), uniformément par rapport à $x \in E$.

Soit E_1 un sous-espace totalement borné de E.

Nous dirons que la fonction $\psi : I \longrightarrow \mathbb{N}^*$ est de type (R_{E_1}) si, pour tout $r \in I$, il existe un recouvrement de E_1 par $\psi(r)$ boules de rayon plus petit ou égal à $\frac{1}{r^{\frac{m+1}{\gamma}}}$. Alors nous dirons que le sous-espace totalement borné E_1 de E vérifie la condition (C) (resp. (C')) s'il est possible de trouver une fonction ψ de type (R_{E_1}) telle que :

$$\frac{(r(n))^\alpha}{n} \operatorname{Log} n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow \forall\, \beta > 0 \,,\; \psi[r(n)]\, \exp[-\,\beta \frac{n}{(r(n))^\alpha}] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\text{(resp.}\quad \frac{(r(n))}{n} \operatorname{Log} n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow \forall\, \beta > 0 \,,\; \sum_n \psi[r(n)]\, \exp[-\,\beta \frac{n}{(r(n))^\alpha}] < +\infty)$$

Remarque.- Les conditions (C) et (C') sont en particulier satisfaites lorsque $E = \mathbb{R}^s$ et E_1 est une partie bornée de $\mathbb{R}^s$. On a alors $\psi(r(n)) = \left[K(r(n))^{\frac{m+1}{\gamma}\, s}\right]$, où K est une constante.

Lemme 7.- Soit E_1 un sous-espace totalement borné de E vérifiant $0 < \mu(E_1) < +\infty$ et satisfaisant à la condition (C') . Si de plus les conditions suivantes sont vérifiées :

1°) f est bornée sur E

2°) L'intégrale $\int_E K_r(x,t)\, f(x)\, d\mu(x)$ tend vers $f(t)$ uniformément sur E_1.

3°) Il existe des constantes A_1 et B, qui ne dépendent que de E_1 , telles que, pour r assez grand et $t \in E_1$:

(a) $\forall\, x \in E\ ,\ |K_r(x,t)| \leq A_1\, r^\alpha$

(b) $\int_E (K_r(x,t))^2\, d\mu(x) \leq B\, r^\alpha$

alors $\dfrac{(r(n))^\alpha}{n} \operatorname{Log} n \longrightarrow 0 \Longrightarrow \sup\limits_{t\in E_1} |\hat{f}_n(t) - f(t)| \xrightarrow{p.c_o} 0$.

Démonstration.- Il suffit de montrer que : $\sup\limits_{t\in E_1} |\hat{S}_n(t)| \xrightarrow{p.c_o} 0$ puisque : $\sup\limits_{t\in E_1} |\hat{f}_n(t) - f(t)| \leq \sup\limits_{t\in E_1} |\hat{S}_n(t)| + \sup\limits_{t\in E_1} |f_n(t) - f(t)|$, et que la condition 2°) entraîne que : $\sup\limits_{t\in E_1} |f_n(t) - f(t)| \longrightarrow 0$.

Soit $\emptyset(r)$ la fonction dont l'existence est assurée par la condition (C') et $(r(n))$ une suite d'entiers tendant vers l'infini telle que $\dfrac{(r(n))^\alpha}{n} \operatorname{Log} n \longrightarrow 0$.

Soit $(B(t_k))$, $k = 1, 2, .. \emptyset(r(n))$, un recouvrement de E_1 par $\emptyset(r(n))$ boules de centres t_k $(k = 1, 2, .. \emptyset(r(n)))$ et de rayon $\leq \dfrac{1}{(r(n))^{\frac{m+1}{\gamma}}}$.
Soit $t \in E_1$. Alors il existe $k \in \{1,2,\dots, \emptyset(r(n))\}$ tel que $t \in B(t_k)$.
Dans ces conditions :

$$\hat{S}_n(t) - \hat{S}_n(t_k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \Big[K_{r(n)}(X_j,t) - K_{r(n)}(X_j,t_k)$$
$$- \int_E (K_{r(n)}(x,t) - K_{r(n)}(x,t_k))\, f(x)\, d\mu(x)\Big]$$

$K_r(x,t)$ est Lipschitzienne en t d'ordre γ et de constante $C\, r^m$. Donc :

$$|\hat{S}_n(t) - \hat{S}_n(t_k)| \leq 2\, C\, (r(n))^m\, [d(t,t_k)]^\gamma$$
$$\leq 2\, C\, (r(n))^m \times \frac{1}{(r(n))^{m+1}} = \frac{2C}{r(n)}$$

Alors :

$$\sup_{t\in E_1} |\hat{S}_n(t)| \leq \sup_{1\leq k\leq \emptyset(r(n))} |\hat{S}_n(t_k)| + \frac{2C}{r(n)}$$

et, pour n assez grand :

$$P\Big[\sup_{t\in E_1} |\hat{S}_n(t)| > \eta\Big] \leq P\Big[\sup_{1\leq k\leq \emptyset(r(n))} |\hat{S}_n(t_k)| \geq \frac{\eta}{2}\Big]$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\emptyset(r(n))} P\Big[|\hat{S}_n(t_k)| \geq \frac{\eta}{2}\Big]$$
$$\leq 2\, \emptyset(r(n))\, \exp\Big[-\beta \frac{n}{(r(n))^\alpha}\Big]$$

où β est une constante, d'après le lemme 5 et compte tenu des hypothèses (a) et (b) du 3°).

La condition (C') nous permet alors de conclure.

Lemme 8.- Sous les hypothèses du lemme 7, où la condition (C') est remplacée par la condition (C) :

$$\frac{(r(n))^\alpha}{n} \operatorname{Log} n \longrightarrow 0 \Longrightarrow E\Big[\sup_{t\in E_1} |\hat{f}_n(t) - f(t)|\Big] \longrightarrow 0$$

Démonstration.- Il suffit de montrer que : $E\Big[\sup_{t\in E_1} |\hat{S}_n(t)|\Big] \longrightarrow 0$.

Utilisons l'inégalité ([9] p. 158) :

$$\frac{E|X| - a}{\sup|X|} \leqslant P[|X| \geqslant a] \quad , \quad a > 0$$

Puisque : $\sup\limits_{t\in E_1} |\hat{S}_n(t)| \leqslant 2\ A_1\ (r(n))^\alpha$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$E[\sup_{t\in E_1} |\hat{S}_n(t)|] \leqslant 2\ A_1\ (r(n))^\alpha\ P[\sup_{t\in E_1} |\ \hat{S}_n(t)| > \varepsilon] + \varepsilon$$

Or, on a démontré au lemme précédent l'inégalité :

$$P[\sup_{t\in E_1} |\hat{S}_n(t) > \varepsilon] \leqslant 2\ \vartheta[r(n)]\ \exp[-\ \beta\ \frac{n}{(r(n))^\alpha}] \quad , \quad \beta \text{ constante positive}$$

Donc :

$$E[\sup_{t\in E_1} |\ \hat{S}_n(t)|] \leqslant 4\ A_1\ (r(n))^\alpha\ \vartheta[r(n)]\ \exp[-\ \beta\ \frac{n}{(r(n))^\alpha}] + \varepsilon$$

Or, on montre facilement que la condition $\frac{(r(n))^\alpha}{n}$ Log $n \longrightarrow 0$ entraîne : $\forall\ \beta > 0$, $(r(n))^\alpha \exp[-\ \beta\ \frac{n}{(r(n))^\alpha}] \longrightarrow 0$. Ceci, joint à la condition (C), donne par multiplication :

$$\frac{(r(n))^\alpha}{n} \text{ Log } n \longrightarrow 0 \Longrightarrow \forall\ \beta > 0\ ,\ (r(n))^\alpha\ \vartheta[r(n)]\ \exp[-\ \beta\ \frac{n}{(r(n))^\alpha}] \longrightarrow 0$$

Alors, pour n assez grand :

$$E[\sup_{t\in E_1} |\ \hat{S}_n(t)|] \leqslant 2\ \varepsilon$$

ce qui entraîne le résultat.

Désignons par $k(n)$ la partie entière de $(r(n))^\alpha$. Soit $V \subset E$, avec $0 < \mu(V) < +\infty$. Une suite de partitions de V , $(P_n(V))_{n\in\mathbb{N}}$, vérifie la propriété $(\mathcal{P}_o)$ si $P_n(V)$ est composée de $k(n)$ parties $B_{n,t}(t = 1,\dots,k(n))$ de mesures toutes égales $(\mu(B_{n,t}) = \frac{\mu(V)}{k(n)}$, $t = 1,2,\dots,k(n))$.

Une telle suite de partitions de V étant choisie, soit $\delta_1 > 0$.

Nous dirons que le j-uple d'entiers $(t_1,\dots,t_j)$, où $1 \leqslant t_1 < \dots < t_j \leqslant k(n)$, vérifie la condition $C_V(\delta_1)$ si :

$$\int_{\bigcup_{s=1}^{j} B_{n,t_s}} K_{r(n)}(x,\xi)\, d\mu(x) \geq \delta_1$$

pour un ξ convenablement choisi dans V.

Proposition 3.- Soit F un sous-espace totalement borné de E vérifiant la condition (C) et tel que : $0 < \mu(F) < +\infty$. Soit $\mathcal{D}_F$ l'ensemble des densitées définies et bornées sur E telles que $\int_E K_r(x,t)\, f(x)\, d\mu(x)$ existe et tend vers $f(t)$ lorsque $r \to +\infty$ dans I, uniformément par rapport à $t \in F$. Si de plus les conditions suivantes sont satisfaites :

1°) Il existe $E_1 \supset F$, avec $\mu(E_1) < +\infty$, tel que : $\frac{1}{\mu(E_1)} \cdot 1_{E_1} \in \mathcal{D}_F$

2°) Il existe $E_2 \subset F$, de mesure arbitrairement petite mais strictement positive, tel que, pour r assez grand :

$$\forall\, t \in E_2 \quad , \quad \left|\int_{E_2} K_r(x,t)\, d\mu(x)\right| \leq L_1$$

où L_1 est une constante qui ne dépend que de E_2.

3°) Une suite de partitions de E_2 vérifiant (P_o) étant choisie, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour $\varepsilon \in]0,1[$, n assez grand et j vérifiant : $1 \leq j \leq \varepsilon\, k(n)$, la proportion de j-uples $(t_1,\ldots,t_j)$ $(1 \leq t_1 < \ldots < t_j \leq k(n))$ pour lesquels la condition $C_{E_2}(\delta_1)$ est satisfaite est plus grande qu'un certain nombre $p > 0$, indépendant de n, ε et j.

4°) Il existe des constantes $A_1 > 0$, et B, qui ne dépendent que de F, telles que, pour r assez grand et pour tout $t \in F$:

(a) $\forall\, x \in E$, $|K_r(x,t)| \leq A_1\, r^\alpha$,

(b) $\int_E (K_r(x,t))^2\, d\mu(x) \leq B\, r^\alpha$

alors une condition nécessaire et suffisante pour que

$\forall\, f \in \mathcal{D}_F$, $E\left[\sup_{t \in F} |\hat{f}_n(t) - f(t)|\right] \longrightarrow 0$ est que l'on ait : $\frac{(r(n))^\alpha}{n} \operatorname{Log} n \longrightarrow 0$.

Démonstration.-

- La condition suffisante a été démontrée au lemme 8.

- Pour démontrer la condition nécessaire, nous aurons besoin de deux lemmes établis par M. GEFFROY et Mme BERTRAND-RETALI pour la méthode du noyau dans le cas où $E = \mathbb{R}^s$ [20]. Avant d'énoncer ces lemmes, nous allons fixer les notations. On suppose que : $\frac{(r(n))^\alpha}{n} \text{Log } n \not\to 0$. Cela signifie qu'il existe $\beta > 0$ tel que : $\frac{(r(n))^\alpha}{n} \text{Log } n \geq \beta > 0$ pour $n \in N \subset \mathbb{N}^*$, où N est une partie infinie de $\mathbb{N}^*$. Soit $f_o = \frac{1}{\mu(E_1)} \cdot 1_{E_1}$. D'après la condition 2°), il existe $E_2 \subset F$ tel que :
$0 < \frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)} < \min(1, \frac{\beta}{4})$. Soit ν_n le nombre de points de $(X_1,\ldots,X_n)$ qui appartiennent à E_2. Choisissons deux nombres ρ' et ρ'' tels que :

$$0 < \rho' < \frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)} < \rho'' < 1$$

et appelons A_n l'événement :

$$A_n = \{\rho' < \frac{\nu_n}{n} < \rho''\}.$$

Puisque : $\frac{\nu_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} 1_{E_2} \circ X_j \xrightarrow{P} \frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)} = E_{f_o}(1_{E_2} \circ X_1)$

on a : $\lim_n P(A_n) = 1$.

Si $(P_n(E_2))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de partitions de E_2 choisie au 3°), posons : $P_n(E_2) = \{B_{n,t} \; ; \; t = 1,2,\ldots,k(n)\}$, $n \in \mathbb{N}$. Soit J_n le nombre de parties $B_{n,t}$ qui ne contiennent aucun point de l'échantillon.

Dans ces conditions :

Lemme 9 (Mme Bertrand-Rétali et M. Geffroy).-

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}}} P_{f_o}[1 \leq J_n < \varepsilon\, k(n)] = 1.$$

Démonstration.-

a) $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}}} P_{f_o}[J_n \geq 1] = 1.$

Appelons $V_n(t)$, $t \in \{1,2,\ldots,k(n)\}$, l'événement qui consiste en ce qu'aucun point $X_1,\ldots,X_n$ ne tombe sur $B_{n,t}$.

Alors : $$P_{f_o}[J_n \geq 1] = P_{f_o}\Big[\bigcup_{t=1}^{k(n)} V_n(t)\Big]$$

d'où : $$P_{f_o}[J_n = 0] = P_{f_o}\Big[\bigcap_{t=1}^{k(n)} \overline{V_n(t)}\Big] \leq \prod_{t=1}^{k(n)} P_{f_o}(\overline{V_n(t)}).$$

La dernière inégalité découle du fait que :

$$P_{f_o}\Big[\overline{V_n(t)}\,\Big|\bigcap_{j=1}^{t-1} \overline{V_n(j)}\Big] \leq P_{f_o}[\overline{V_n(t)}] \qquad t = \quad 2,\ldots,k(n).$$

Puisque : $f_o = \dfrac{1}{\mu(E_1)} \cdot 1_{E_1}$, on a :

$$P_{f_o}[\overline{V_n(t)}] = 1 - \Big(1 - \frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)} \times \frac{1}{k(n)}\Big)^n$$

Donc : $$P_{f_o}[J_n = 0] \leq \Big[1 - \Big(1 - \frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)} \times \frac{1}{k(n)}\Big)^n\Big]^{k(n)}$$

$$-\operatorname{Log} P_{f_o}[J_n = 0] \geq -k(n)\operatorname{Log}\Big[1 - \Big(1 - \frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)} \times \frac{1}{k(n)}\Big)^n\Big]$$

$$-\operatorname{Log} P_{f_o}[J_n = 0] \geq k(n)\Big(1 - \frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)} \times \frac{1}{k(n)}\Big)^n$$

$$\operatorname{Log}[-\operatorname{Log} P_{f_o}(J_n = 0)] \geq \operatorname{Log} k(n) + n \operatorname{Log}\Big[1 - \frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)} \times \frac{1}{k(n)}\Big].$$

Soit $n_o \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq n_o$ entraîne :

$$\mathrm{Log}\left[1 - \frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)} \times \frac{1}{k(n)}\right] > -2\,\frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)} \times \frac{1}{k(n)} \quad .$$

Alors, pour $n \geqslant n_o$:

$$\mathrm{Log}\left[-\mathrm{Log}\, P_{f_o}\left[J_n = 0\right]\right] > \mathrm{Log}\, k(n) - 2\,\frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)} \times \frac{n}{k(n)} \; .$$

Compte tenu de : $k(n) > (r(n))^{\alpha} - 1$, l'inégalité :

$\frac{(r(n))^{\alpha}}{n}\,\mathrm{Log}\, n \geqslant \beta$ entraîne : $\frac{k(n)}{n}\,\mathrm{Log}\, n \geqslant \beta/2$ pour $n \geqslant n_1$ et $n \in N$.

D'où, pour n assez grand dans N :

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}\left[-\mathrm{Log}\, P_{f_o}(J_n = 0)\right] &> \mathrm{Log}\left(\frac{\beta}{2}\right) + \mathrm{Log}\, n - \mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\, n - 2\,\frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)} \times \frac{2}{\beta}\,\mathrm{Log}\, n \\ &= \left[1 - 4\,\frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1).\beta} + o(1)\right]\mathrm{Log}\, n.\end{aligned}$$

D'après le choix de E_2, cette expression tend vers l'infini avec n, donc :

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\in N}} \mathrm{Log}\left[-\mathrm{Log}\, P_{f_o}\left[J_n = 0\right]\right] = +\infty$$

d'où : $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ n\in N}} P_{f_o}\left[J_n = 0\right] = 0$

et : $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ n\in N}} P_{f_o}\left[J_n \geqslant 1\right] = 1.$

b) $\forall\, \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\in N}} P_{f_o}\left[J_n < \varepsilon\, k(n)\right] = 1.$

Soit ξ_t la variable aléatoire indicatrice de $V_n(t)$.

On a :

$$P[\xi_t = 1] = (1 - \frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)} \times \frac{1}{k(n)})^n.$$

D'autre part : $$J_n = \sum_{t=1}^{k(n)} \xi_t$$

$$E_{f_o}[J_n] = k(n)E_{f_o}(\xi_1) = k(n)(1 - \frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)} \times \frac{1}{k(n)})^n.$$

Mais : $$\frac{(r(n))^\alpha}{n} \to 0 \Longrightarrow \frac{k(n)}{n} \to 0$$

donc : $$E_{f_o}(\frac{J_n}{k_n}) = (1 - \frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)k(n)})^n \to 0.$$

Puisque : $0 \leqslant \frac{J_n}{k(n)} \leqslant 1$, la relation précédente entraîne :

$\frac{J_n}{k(n)} \xrightarrow{p} 0$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P_{f_o}[J_n < \varepsilon\, k(n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et le lemme 9 est démontré.

Soit $j \in \{1,2,\dots,k(n)\}$ et des entiers $t_1,\dots,t_j$ tels que : $1 \leqslant t_1 < \dots < t_j \leqslant k(n)$.

Soit $V_n(t_1,\dots,t_j)$ l'événement consistant en ce que chacune des parties $B_{n,t}$ $(t = t_1,\dots,t_j)$ soit vide, tandis que chacune des parties $B_{n,t}$, $t \notin \{t_1,\dots,t_j\}$ contient au moins un point de l'échantillon. On a alors :

$$\{J_n = j\} = \bigcup_{\substack{t_1,\dots,t_j \\ 1\leqslant t_1<\dots<t_j\leqslant k(n)}} V_n(t_1,\dots,t_j).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit B_n l'événement :

$$B_n = \{1 \leqslant J_n \leqslant \varepsilon\, k(n)\}.$$

On peut écrire :

$$B_n = \bigcup_{j=1}^{[\varepsilon k(n)]} \bigcup_{\substack{t_1,\ldots,t_j \\ 1\leqslant t_1<\ldots<t_j\leqslant k(n)}} V_n(t_1,\ldots,t_j)$$

où $[\varepsilon\ k(n)]$ désigne la partie entière de $\varepsilon\ k(n)$.

Soit ν un entier tel que :

$$[\rho' n] + 1 \leqslant \nu \leqslant \rho'' n. \qquad (1)$$

Alors :

Lemme 10 (Mme Bertrand-Rétali et M. Geffroy).- La loi de chacune des variables aléatoires X_i $(i = 1,\ldots,n)$ conditionnée par l'événement

$$E_n(\nu;t_1,\ldots,t_j) = \{\nu_n = \nu\} \cap V_n(t_1,\ldots,t_j)$$

est absolument continue et admet pour densité par rapport à μ :

$$f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{n-\nu}{n} \cdot \dfrac{1}{\mu(E_1) - \mu(E_2)} & \text{pour } x \in E_1 \setminus E_2 \\[2ex] \dfrac{\nu}{n} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{j}{k(n)}} \cdot \dfrac{1}{\mu(E_2)} & \text{pour } x \in E_2 \setminus \bigcup\limits_{s=1}^{j} B_{n,t_s} \\[2ex] 0 & \text{pour } x \in \bigcup\limits_{s=1}^{j} B_{n,t_s} \text{ ou } x \in E \setminus E_1. \end{cases}$$

Démonstration.-

Par raison de symétrie, les lois conditionnelles de $X_1,\ldots,X_n$ sont identiques. Déterminons celle de X_1. La définition de $V_n(t_1,\ldots,t_j)$ entraîne la nullité de $f^*(x)$ sur $\bigcup\limits_{s=1}^{j} B_{n,t_s}$. Calculons les deux premières déterminations.

a) Première détermination.

Soit Δ un borélien de $E_1 \setminus E_2$. On a :

$$P_{f_o}\left[(X_1 \in \Delta) \cap E_n\right] = P_{f_o}(X_1 \in \Delta).P_{f_o}(E_n | X_1 \in \Delta) \qquad (2)$$

Dire que l'événément : $E_n(\nu;t_1,\ldots,t_j)/(X_1 \in \Delta)$ est réalisé, c'est dire que :

- ν points de $X_2,\ldots,X_n$ sont dans E_2
- aucun point n'appartient à $\bigcup_{s=1}^{j} B_{n,t_s}$
- au moins un d'entre eux appartient à chaque $B_{n,t}$, pour tout $t \notin \{t_1,\ldots,t_j\}$.

Sa probabilité est donc indépendante de Δ, et de (2) nous déduisons :

$$P_{f_o}\left[X_1 \in \Delta | E_n\right] = C.P_{f_o}(\Delta) \qquad (3)$$

où C ne dépend pas de Δ.

Déterminons la valeur de C en prenant : $\Delta = E_1 \setminus E_2$ dans (3). On a :

$$P_{f_o}\left[X_1 \in E_1 \setminus E_2 | E_n\right] = \frac{n-\nu}{n}$$

$$P_{f_o}\left[E_1 \setminus E_2\right] = 1 - \frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)}$$

d'où : $$C = \frac{n-\nu}{n} \times \frac{\mu(E_1)}{\mu(E_1) - \mu(E_2)} .$$

L'égalité :

$$P_{f_o}\left[X_1 \in \Delta | E_n\right] = \frac{n-\nu}{n} \times \frac{\mu(E_1)}{\mu(E_1) - \mu(E_2)} . P_{f_o}(\Delta)$$

$$= \frac{n-\nu}{n} \times \frac{1}{\mu(E_1) - \mu(E_2)} \times \mu(\Delta)$$

montre que la première détermination de $f^*(x)$ est bien celle annoncée.

b) Deuxième détermination.

Soit $t' \in \{1, 2, \ldots, k(n)\} \setminus \{t_1, \ldots, t_j\}$, et Δ un borélien inclus dans $B_{n,t'}$. Nous pouvons encore écrire (2), mais l'événement $\mathcal{E}_n(\nu; t_1, \ldots, t_j)/(X_1 \in \Delta)$ signifie :

- $\nu-1$ points de $X_2, \ldots, X_n$ sont dans E_2,
- aucun d'entre eux n'est dans $\bigcup_{s=1}^{j} B_{n,t_s}$,
- au moins un d'entre eux se trouve sur chacun des $B_{n,t}$, pour tout $t \notin \{t', t_1, \ldots, t_j\}$.

La probabilité de cet événement ne dépend donc pas de Δ, et l'on peut écrire :

$$P_{f_o}[X_1 \in \Delta | \mathcal{E}_n] = C' P_{f_o}(\Delta) \tag{4}$$

où C' est une quantité indépendante de Δ, ainsi que de t', à cause du rôle symétrique joué par les parties $B_{n,t}$, $t \notin \{t_1, \ldots, t_j\}$.

Pour déterminer C', prenons $\Delta = B_{n,t'}$ dans (4) :

$$P_{f_o}[X_1 \in B_{n,t'} | \mathcal{E}_n] = C' P_{f_o}[B_{n,t'}] = C' \frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)} \times \frac{1}{k(n)} .$$

Donnons à t' toutes les valeurs de $\{1, 2, \ldots, k(n)\} \setminus \{t_1, \ldots, t_j\}$ et sommons toutes ces relations :

$$P_{f_o}[X_1 \in E_2 \setminus \bigcup_{s=1}^{j} B_{n,t_s} | \mathcal{E}_n] = (k(n)-j) . C' \frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)} \times \frac{1}{k(n)} .$$

Mais on voit directement que :

$$P_{f_o}[X_1 \in E_2 \setminus \bigcup_{s=1}^{j} B_{n,t_s} | \mathcal{E}_n] = \frac{\nu}{n} .$$

D'où :
$$C' = \frac{\nu}{n} \frac{1}{1-\frac{j}{k(n)}} \times \frac{\mu(E_1)}{\mu(E_2)}$$

et :
$$P_{f_o}\left[X_1 \in \Delta \mid \mathcal{E}_n\right] = \frac{\nu}{n} \frac{1}{1-\frac{j}{k(n)}} \cdot \times \frac{1}{\mu(E_2)} \; \mu(\Delta)$$

d'où la formule annoncée pour f^* sur $E_2 \setminus \bigcup_{s=1}^{j} B_{n,t_s}$.

Commençons maintenant la démonstration proprement dite de la condition nécessaire de la Proposition 3. Cette démonstration se fera en quatre points (elle est analogue à celle réalisée par Mme BERTRAND-RETALI et M. GEFFROY pour la méthode du noyau [20]).

1°) On peut supposer que le nombre δ_1 défini au 3°) appartient à $]0,1[$. Soit ε tel que : $0 < \varepsilon < \min(\frac{1}{2}, \frac{\delta_1}{12(1+L_1)})$.

n étant fixé, soient j et ν qui vérifient les inégalités :

$$1 \leqslant j < \varepsilon\, k(n) \qquad (5)$$

$$[\rho' n] + 1 \leqslant \nu \leqslant \rho'' n. \qquad (1)$$

Soit alors $\mathcal{E}_n(\nu;t_1,\ldots,t_j)$ tel que le j-uple $(t_1,\ldots,t_j)$ satisfasse à la condition $C_{E_2}(\delta_1)$, c'est-à-dire tel qu'il existe $\xi \in E_2$ pour lequel :

$$\int_{\bigcup_{s=1}^{j} B_{n,t_s}} K_{r(n)}(x,\xi)\,d\mu(x) \geqslant \delta_1.$$

Nous allons montrer que, pour n assez grand :

$$E\left[\hat{f}_n(\xi) \mid \mathcal{E}_n(\nu;t_1,\ldots,t_j)\right] \leqslant (1-\delta) \frac{1}{\mu(E_1)}, \quad \delta \in]0,1[.$$

En effet :

$$E[\hat{f}_n(\xi)|\mathcal{E}_n] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} K_{r(n)}(X_\ell,\xi)|\mathcal{E}_n\right]$$

$$= E[K_{r(n)}(X_1,\xi)|\mathcal{E}_n]$$

$$E[\hat{f}_n(\xi)|\mathcal{E}_n] = \frac{n-\nu}{n} \times \frac{1}{\mu(E_1)-\mu(E_2)} \int_{E_1\setminus E_2} K_{r(n)}(x,\xi)d\mu(x)$$

$$+ \frac{\nu}{n}\ \frac{1}{1-\frac{j}{k(n)}} \times \frac{1}{\mu(E_2)} \int_{E_2\setminus \bigcup_{s=1}^{j} B_{n,t_s}} K_{r(n)}(x,\xi)d\mu(x)$$

$$E[\hat{f}_n(\xi)|E_n] = \frac{1}{\mu(E_1)}\ [I_1 + I_2 - I_3]$$

avec :

$$I_1 = \frac{1-\nu/n}{1-\frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)}} \int_{E_1} K_{r(n)}(x,\xi)d\mu(x)$$

$$I_2 = \left(\frac{\nu}{n} \times \frac{\mu(E_1)}{\mu(E_2)} \times \frac{1}{1-\frac{j}{k(n)}} - \frac{1-\nu/n}{1-\frac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)}}\right) \int_{E_2} K_{r(n)}(x,\xi)d\mu(x)$$

$$I_3 = \frac{\nu}{n} \times \frac{\mu(E_1)}{\mu(E_2)} \times \frac{1}{1-\frac{j}{k(n)}} \int_{\bigcup_{s=1}^{j} B_{n,t_s}} K_{r(n)}(x,\xi)d\mu(x).$$

De (5), on tire : $1 \leqslant \dfrac{1}{1-\frac{j}{k(n)}} \leqslant \dfrac{1}{1-\varepsilon}$.

A partir de (1), on obtient les inégalités :

$$1-\rho'' \leqslant 1-\frac{\nu}{n} \leqslant 1-\rho'.$$

Supposons que ρ' et ρ'' ont été choisis assez voisins de $\dfrac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)}$ pour que l'on ait :

$$\frac{1-\rho'}{1-\dfrac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)}} \leqslant 1+\varepsilon, \qquad \frac{1-\rho''}{1-\dfrac{\mu(E_2)}{\mu(E_1)}} \geqslant 1-\varepsilon$$

$$\frac{\nu}{n}\,\frac{\mu(E_1)}{\mu(E_2)} \geqslant 1-\varepsilon, \qquad \frac{\nu}{n}\,\frac{\mu(E_1)}{\mu(E_2)}\,\frac{1}{1-\varepsilon} \leqslant 1+2\varepsilon. \tag{6}$$

Puisque : $\dfrac{1}{\mu(E_1)} \cdot 1_{E_1} \in \mathcal{D}_F$, $\int_{E_1} K_{r(n)}(x,\xi)d\mu(x)$ tend vers 1 uniformément par rapport à $\xi \in E_2$. Pour n assez grand, on a donc :

$$\left|\int_{E_1} K_{r(n)}(x,\xi)d\mu(x)\right| \leqslant 1+\varepsilon$$

d'où :

$$|I_1| \leqslant 1+3\varepsilon.$$

Compte tenu des inégalités (6) et de l'hypothèse 2°) :

$$|I_2| \leqslant 3\varepsilon\, L_1 .$$

Les inégalités (6) et la condition $C_{E_2}(\delta_1)$ donnent enfin :

$$I_3 \geqslant (1-\varepsilon)\delta_1 \geqslant \frac{\delta_1}{2} .$$

Finalement :

$$E[\hat{f}_n(\xi)|\mathcal{E}_n] \leqslant \frac{1}{\mu(E_1)}\,[|I_1| + |I_2| - I_3]$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu(E_1)}\,(1+3\varepsilon(1+L_1) - \frac{\delta_1}{2})$$

$$\leqslant (1-\frac{\delta_1}{4})\,\frac{1}{\mu(E_1)}$$

d'après le choix de ε. D'où le résultat en posant $\delta = \dfrac{\delta_1}{4}$.

2°) Soit :
$$B'_n = \bigcup_{j=1}^{[\varepsilon k(n)]} \bigcup_{\substack{t_1,\ldots,t_j : C_{E_2}(\delta_1) \\ 1\leq t_1<\ldots<t_j\leq k(n)}} V_n(t_1,\ldots,t_j)$$

où : $t_1,\ldots,t_j : C_{E_2}(\delta_1)$ signifie que l'union est prise sur l'ensemble des $(t_1,\ldots,t_j)$ qui vérifient la condition $C_{E_2}(\delta_1)$.

Pour n et j fixés, $P[V_n(t_1,\ldots,t_j)]$ est indépendant du choix des $t_1,\ldots,t_j$. Par conséquent, l'hypothèse 3°) entraîne : $P(B'_n) \geq p\,P(B_n)$ et puisque $P(B_n) \to 1$ lorsque $n \to +\infty$ dans N :

$$P(B'_n) \geq \frac{p}{2}, \text{ pour } n \text{ assez grand dans } N.$$

Posons : $C_n = A_n \cap B'_n$. Alors, puisque $P(A_n) \to 1$, on a :

$$P(C_n) \geq \frac{p}{4}, \text{ pour } n \text{ assez grand dans } N.$$

3°) Montrons que :

$$E[\sup_{t\in F}|\hat{f}_n(t) - f(t)|] \to 0 \implies E[\sup_{t\in F} \hat{f}_n^-(t)] \to 0.$$

De l'inégalité :

$$\hat{f}_n^-(t) - |\hat{f}_n^+(t) - f(t)| \leq |\hat{f}_n(t) - f(t)|$$

on tire :

$$\sup_{t\in F} \hat{f}_n^-(t) \leq \sup_{t\in F}|\hat{f}_n(t) - f(t)| + \sup_{t\in F}|\hat{f}_n^+(t) - f(t)|$$
$$\leq 2 \sup_{t\in F}|\hat{f}_n(t) - f(t)|$$

car, f étant positive : $|\hat{f}_n^+(t) - f(t)| \leq |\hat{f}_n(t) - f(t)|$.

Finalement :

$$E[\sup_{t\in F} \hat{f}_n^-(t)] \leq 2\, E[\sup_{t\in F}|\hat{f}_n(t) - f(t)|]$$

d'où le résultat.

4°) Soit $\gamma \in \left](1-\delta)\frac{1}{\mu(E_1)}, \frac{1}{\mu(E_1)}\right[$.

Appliquons l'inégalité de Markov à $\hat{f}_n^+(\xi)$:

$$P[\hat{f}_n^+(\xi) > \gamma|\mathcal{E}_n] \leq \frac{1}{\gamma} E[\hat{f}_n^+(\xi)|\mathcal{E}_n] = \frac{1}{\gamma} [E(\hat{f}_n(\xi)|\mathcal{E}_n) + E(\hat{f}_n^-(\xi)|\mathcal{E}_n)]$$

$$P[\hat{f}_n^+(\xi) > \gamma|\mathcal{E}_n] \leq \frac{1-\delta}{\gamma\mu(E_1)} + \frac{1}{\gamma} E[\hat{f}_n^-(\xi)|\mathcal{E}_n].$$

$$P[\hat{f}_n^+(\xi) \leq \gamma|\mathcal{E}_n] \geq 1 - \frac{1-\delta}{\gamma\mu(E_1)} - \frac{1}{\gamma} E[\hat{f}_n^-(\xi)|\mathcal{E}_n]. \qquad (7)$$

Alors :

$$P[\sup_{t\in F}|\hat{f}_n(t) - f_o(t)| \geq \frac{1}{\mu(E_1)} - \gamma] \geq P[\sup_{t\in F}|\hat{f}_n^+(t) - f_o(t)| \geq \frac{1}{\mu(E_1)} - \gamma]$$

$$\geq P[(\sup_{t\in F}|\hat{f}_n^+(t) - f_o(t)| \geq \frac{1}{\mu(E_1)} - \gamma) \cap C_n].$$

Posons : $$\sum = \sum_{\nu=[\rho' n]+1}^{[\rho'' n]} \sum_{j=1}^{[\epsilon k(n)]} \sum_{\substack{t_1,\ldots,t_j : C_{E_2}(\delta_1) \\ 1\leq t_1<\ldots<t_j\leq k(n)}}$$

Alors :

$$P[\sup_{t\in F}|\hat{f}_n(t) - f_o(t)| \geq \frac{1}{\mu(E_1)} - \gamma] \geq \sum P[(\sup_{t\in F}|\hat{f}_n^+(t) - f_o(t)| \geq \frac{1}{\mu(E_1)} - \gamma) \cap \mathcal{E}_n].$$

Désignons par $\xi_{\mathcal{E}_n}$ le point ξ associé à $\mathcal{E}_n$. Puisque,

$$\hat{f}_n^+(\xi_{\mathcal{E}_n}) \leq \gamma \implies \sup_{t\in F}|\hat{f}_n^+(t) - f_o(t)| \geq \frac{1}{\mu(E_1)} - \gamma.$$

On a :

$$P\left[\sup_{t\epsilon F}|\hat{f}_n(t) - f_o(t)| \geq \frac{1}{\mu(E_1)} - \gamma\right] \geq \sum P[(\hat{f}_n^+(\xi_{E_n}) \leq \gamma) \cap E_n]$$

$$= \sum P(E_n).P[\hat{f}_n^+(\xi_{E_n}) \leq \gamma | E_n]$$

$$\geq \sum P(E_n)\left[1 - \frac{1-\delta}{\gamma\mu(E_1)} - \frac{1}{\gamma} E[\hat{f}_n^-(\xi_{E_n})|E_n]\right]$$

d'après l'inégalité (7). Puisque $\sum P(E_n) = P(C_n)$, on obtient finalement :

$$P\left[\sup_{t\epsilon F}|\hat{f}_n(t) - f_o(t)| \geq \frac{1}{\mu(E_1)} - \gamma\right] \geq P(C_n)\left[1 - \frac{1-\delta}{\gamma\mu(E_1)}\right] - \frac{1}{\gamma}\sum\int_{E_n} \hat{f}_n^-(\xi_{E_n})dP$$

Or : $\displaystyle\sum \int_{E_n} \hat{f}_n^-(\xi_{E_n})dP \leq \sum\int_{E_n} \sup_{t\epsilon F} \hat{f}_n^-(t)dP = \int_{C_n} \sup_{t\epsilon F} \hat{f}_n^-(t)dP$

$$\leq E[\sup_{t\epsilon F} \hat{f}_n^-(t)]$$

et cette dernière quantité tend vers zéro d'après le 3°).

Comme $P(C_n) \geq \frac{p}{4}$ pour n assez grand dans N, on obtient :

$$P\left[\sup_{t\epsilon F}|\hat{f}_n(t) - f_o(t)| \geq \frac{1}{\mu(E_1)} - \gamma\right] \geq \frac{p}{8}\left(1 - \frac{1-\delta}{\gamma\mu(E_1)}\right) > 0$$

pour n assez grand dans N, et ceci contredit la convergence uniforme en probabilité sur F de $\hat{f}_n$ vers f, et également la convergence en moyenne uniforme sur F de $\hat{f}_n$ vers f d'après l'inégalité de Markov.

En associant les résultats obtenus au lemme 7 et à la Proposition précédente, on peut énoncer :

Corollaire.- Sous les hypothèses de la Proposition 3, où la condition (C) est remplacée par la condition (C'), une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait à la fois : $\forall f \in \mathcal{D}_F$, $\sup_{t\epsilon F}|\hat{f}_n(t) - f(t)| \xrightarrow{p.c_o} 0$ et $E[\sup_{t\epsilon F}|\hat{f}_n(t) - f(t)|] \to 0$ est que l'on ait : $\frac{(r(n))^\alpha}{n} \text{Log}\, n \to 0$.

CHAPITRE II

CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES DE CONVERGENCE DANS LE CAS D'UN NOYAU POSITIF.

Lorsque le noyau $K_r(x,t)$ est positif, les résultats obtenus au chapitre I peuvent être améliorés. Nous allons étudier le cas d'un noyau positif quelconque, puis nous donnerons quelques exemples : la méthode du noyau, la méthode des fonctions orthogonales avec pour base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mu)$ les fonctions de Haar.

I - CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES DE CONVERGENCE DANS LE CAS D'UN NOYAU POSITIF QUELCONQUE.

On suppose donc dans ce paragraphe que :

$\forall (x,t) \in E^2, \forall r \in I, \quad K_r(x,t) \geq 0.$

I.1. - *Convergence simple en probabilité et en moyenne d'ordre* p $(p = 1, 2)$.

Proposition 1.- Sous les hypothèses de la proposition 1,I*, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\dfrac{(r(n))^{\alpha}}{n} \to 0$

(2) $\forall f \in \mathcal{D}, \quad \forall t \in E, \; \hat{f}_n(t) \xrightarrow{p} \bar{f}(t)$

(3) $\forall f \in \mathcal{D}, \quad \forall t \in E, \quad E[|\hat{f}_n(t) - \bar{f}(t)|] \longrightarrow 0$

(4) $\forall f \in \mathcal{D}, \quad \forall t \in E, \quad E[(\hat{f}_n(t) - \bar{f}(t))^2] \longrightarrow 0$

----

* Proposition 1, I : Proposition 1 du chapitre I.

Démonstration.-

D'après la Proposition 1, I, on a : (1) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (3). D'autre part : (3) $\Longrightarrow$ (2) d'après l'inégalité de Markov. Il suffit donc de montrer que (2) $\Longrightarrow$ (1). La démonstration est analogue à celle du lemme 3, I. La 1ère partie est inchangée, et on a toujours :

$$E[\hat{f}_n(t_o)|E_n] \leqslant \frac{1}{\mu(F)}\left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right).$$

Mais dans la seconde partie, le noyau étant positif, $\hat{f}_n(t_o)$ est positif pour tout n, et on peut appliquer l'inégalité de Markov directement à $\hat{f}_n(t_o)$. Reprenons cette démonstration.

On suppose que : $\frac{(r(n))^\alpha}{n} \not\longrightarrow 0$. Alors il existe $\beta > 0$ et une sous-suite $\left(\frac{(r(n_k))^\alpha}{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\frac{(r(n_k))^\alpha}{n_k} \geqslant \beta$.

Puisque $\hat{f}_n(t_o) \xrightarrow{p} f(t_o)$, on a aussi : $\hat{f}_{n_k}(t_o) \xrightarrow{p} f(t_o)$.

Soit $\gamma \in \left]\frac{1-\delta^2/4}{\mu(F)}, \frac{1}{\mu(F)}\right[$. Appliquons l'inégalité de Markov à $\hat{f}_{n_k}(t_o)$:

$$\begin{aligned} P[\hat{f}_{n_k}(t_o) > \gamma | E_{n_k}] &\leqslant \frac{1}{\gamma} E[\hat{f}_{n_k}(t_o)|E_{n_k}] \\ &\leqslant \frac{1}{\gamma\mu(F)}\left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right) < 1. \end{aligned}$$

Or : $\hat{f}_{n_k}(t_o) \leqslant \gamma \Longrightarrow f(t_o) - \hat{f}_{n_k}(t_o) \geqslant \frac{1}{\mu(F)} - \gamma$.

Alors :

$$\begin{aligned} P\left[|\hat{f}_{n_k}(t_o) - f(t_o)| \geqslant \frac{1}{\mu(F)} - \gamma\right] &\geqslant P\left[f(t_o) - \hat{f}_{n_k}(t_o) \geqslant \frac{1}{\mu(F)} - \gamma\right] \\ &\geqslant P[\hat{f}_{n_k}(t_o) \leqslant \gamma] \end{aligned}$$

$$\geq P[(\hat{f}_{n_k}(t_o) \leq \gamma) \cap E_{n_k}] = P[E_{n_k}].P[\hat{f}_{n_k}(t_o) \leq \gamma | E_{n_k}]$$

$$\geq \exp[- \frac{2}{\beta\mu(F)}] \times [1 - \frac{1}{\gamma\mu(F)} (1 - \frac{\delta^2}{4})] > 0$$

et ceci contredit la convergence simple en probabilité de $\hat{f}_n$ vers f au point t_o.

I.2. - Convergence simple presque complète.

Proposition 2.- Sous les hypothèses de la Proposition 2, I, une condition nécessaire et suffisante pour que : $\forall f \in \mathcal{D}$, $\forall t \in E$, $\hat{f}_n(t) \xrightarrow{p.c_o} \bar{f}(t)$ est que l'on ait : $\forall \beta > 0$, $\sum_n \exp\,[- \beta \frac{n}{(r(n))^\alpha}] < + \infty$.

Démonstration.-

- La condition suffisante a été obtenue au lemme 6, I.

- La démonstration de la condition nécessaire est identique à celle de l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1) de la Proposition 2, I car la convergence simple presque complète, qui entraîne la convergence simple en probabilité, entraîne donc ici, le noyau étant positif, que $\frac{(r(n))^\alpha}{n} \to 0$ (Proposition 1).

I.3. - Convergence uniforme presque complète, uniforme en probabilité et en moyenne uniforme.

Proposition 3.- Sous les hypothèses de la Proposition 3, I, où l'on remplace la condition (C) par la condition (C'), les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\frac{(r(n))^\alpha}{n} \operatorname{Log} n \to 0$

(2) $\forall f \in \mathcal{D}$, $\sup_{t \in F} |\hat{f}_n(t) - f(t)| \xrightarrow{p} 0$

(3) $\forall f \in \mathcal{D}, \sup_{t\in F}|\hat{f}_n(t) - f(t)| \xrightarrow{p.c_o} 0$

(4) $\forall f \in \mathcal{D}, E[\sup_{t\in F}|\hat{f}_n(t) - f(t)|] \to 0$

Démonstration.-

(1) <==> (4) d'après la Proposition 3, I puisque (C') entraîne (C).

(1) ==> (3) d'après le lemme 7, I.

(3) ==> (2) évident.

(2) ==> (1). La démonstration est analogue à celle de la condition nécessaire de la Proposition 3, I. Les deux premiers points sont identiques, la troisième ne sert pas. Reprenons le quatrième point.

Soit $\gamma \in](1-\delta)\frac{1}{\mu(E_1)}, \frac{1}{\mu(E_1)}[$. Appliquons l'inégalité de Markov à $\hat{f}_n(\xi)$:

$$P[\hat{f}_n(\xi) > \gamma|E_n] \leq \frac{1}{\gamma} E[\hat{f}_n(\xi)|E_n]$$

$$\leq \frac{1-\delta}{\mu(E_1)} < 1 \quad \text{d'après le } 1°).$$

D'où :

$$P[\hat{f}_n(\xi) \leq \gamma|E_n] \geq 1 - \frac{1-\delta}{\mu(E_1)} > 0.$$

Alors :

$$P[\sup_{t\in F}|\hat{f}_n(t) - f_o(t)| \geq \frac{1}{\mu(E_1)} - \gamma] \geq P[\{\sup_{t\in F}|\hat{f}_n(t) - f_o(t)| \geq \frac{1}{\mu(E_1)} - \gamma\} \cap C_n]$$

$$= \sum P[\{\sup_{t\in F}|\hat{f}_n(t) - f_o(t)| \geq \frac{1}{\mu(E_1)} - \gamma\} \cap E_n]$$

$$\geq \sum P[\{\hat{f}_n(\xi_{E_n}) \leq \gamma\} \cap E_n]$$

$$= \sum P(E_n)P[\hat{f}_n(\xi_{E_n}) \leq \gamma|E_n]$$

$$\geq \left(1 - \frac{1-\delta}{\gamma\mu(E_1)}\right)P(C_n) \geq \frac{p}{4}\left(1 - \frac{1-\delta}{\gamma\mu(E_1)}\right) > 0$$

pour n assez grand dans $\mathbb{N}$, ce qui contredit la convergence uniforme en probabilité sur F.

II - EXEMPLES.

II.1. - Méthode du noyau.

Plaçons-nous dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}$ et où μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On suppose que l'application K est une densité de probabilité appartenant à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Alors la Proposition 1, II s'applique, et l'on peut énoncer :

Proposition 4.- Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des densités définies sur R, bornées, et telles que : $\int_{\mathbb{R}} r\, K[r(t-x)]f(x)dx$ tende vers une limite, notée $\bar{f}(t)$, lorsque $r \to +\infty$ dans I, et cela pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\dfrac{r(n)}{n} \to 0$

(2) $\forall f \in \mathcal{D},\ \forall t \in R,\ \hat{f}_n(t) \xrightarrow{P} \bar{f}(t)$

(3) $\forall f \in \mathcal{D},\ \forall t \in R,\ E[|\hat{f}_n(t) - \bar{f}(t)|] \to 0$

(4) $\forall f \in \mathcal{D},\ \forall t \in R,\ E[(\hat{f}_n(t) - \bar{f}(t))^2] \to 0.$

Remarque 1.- L'ensemble $\mathcal{D}$ défini à la Proposition 4 contient en particulier les fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$, et pour de telles fonctions : $\forall t \in \mathbb{R},\ \bar{f}(t) = f(t)$.

Si la densité K est bornée, la Proposition 2, II s'applique, et on peut énoncer :

Proposition 5.- Sous les hypothèses de la proposition 4, une condition nécessaire et suffisante pour que : $\forall f \in \mathcal{D}, \forall t \in \mathbb{R}, \ \hat{f}_n(t) \xrightarrow{p.c_o} \bar{f}(t)$ est que l'on ait : $\forall \beta > 0, \ \sum_n \exp\left[- \beta \frac{n}{r(n)}\right] < + \infty$.

Nous supposons maintenant que la densité K est bornée et Lipschitzienne. On peut alors énoncer :

Proposition 6.- Soient $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{[a,b]}$ l'ensemble des densités définies et bornées sur $\mathbb{R}$ telles que $\int_{\mathbb{R}} r\, K[r(t-x)]f(x)dx$ tende vers $f(t)$ uniformément par rapport à $t \in [a,b]$, lorsque $r \to + \infty$ dans I.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\frac{r(n)}{n} \operatorname{Log} n \to 0$

(2) $\forall f \in \mathcal{D}_{[a,b]}, \ \sup_{t\in[a,b]} [\hat{f}_n(t) - f(t)] \xrightarrow{p} 0$

(3) $\forall f \in \mathcal{D}_{[a,b]}, \ \sup_{t\in[a,b]} [\hat{f}_n(t) - f(t)] \xrightarrow{p.c_o} 0$

(4) $\forall f \in \mathcal{D}_{[a,b]}, \ E\left[\sup_{t\in[a,b]} |\hat{f}_n(t) - f(t)|\right] \to 0.$

Remarque 2.- L'ensemble $\mathcal{D}_{[a,b]}$ précédent contient en particulier les fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$.

Remarque 3.- Comparons nos résultats à ceux obtenus par M. GEFFROY et Mme BERTRAND-RETALI [20] en nous restreignant au cas d'une densité définie sur $\mathbb{R}$. M. GEFFROY et Mme BERTRAND-RETALI ont montré que si $\mathcal{D}$ est l'ensemble des densités uniformément continues sur $\mathbb{R}^s$ et si le noyau K vérifie les propriétés suivantes :

- K est borné et intégrable sur $\mathbb{R}^s$
- l'ensemble des points de discontinuité de K est de mesure nulle
- la fonction $\sup \{K(u)| / ||u-x|| < 1\}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^s$

alors une condition nécessaire et suffisante pour que $\hat{f}_n$ converge uniformément presque complètement vers f est que : $\frac{r(n)}{n} \operatorname{Log} n \to 0$.

Leur résultat est évidemment meilleur que le nôtre puisque d'une part nous imposons à K d'être Lipschitzienne, et que d'autre part nous n'obtenons la convergence uniforme presque complète que sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Ceci était prévisible puisque nos résultats pour la méthode du noyau découlent de résultats généraux. Cependant, les conditions que nous imposons au noyau K sont vérifiées par de nombreux noyaux.

II.2. - Fonctions de Haar.

Nous supposons que $(E,\mathcal{B},\mu)$ est un espace probabilisé, où $\mathcal{B}$ est engendrée par une suite croissante $\mathcal{B}_n$ de sous-tribus de $\mathcal{B}$ construites de la façon suivante :

$\mathcal{B}_o = \{\phi,E\}$

$\mathcal{B}_1$ est engendrée par la partition de E : $\mathcal{P}_1 = \{B_o^{(1)},B_1^{(1)}\}$

avec : $\mu(B_o^{(1)}) = \mu(B_1^{(1)}) = \frac{1}{2}$

$\mathcal{B}_2$ est engendrée par la partition de E : $\mathcal{P}_2 = \{B_o^{(2)},B_1^{(2)},B_2^{(2)}\}$

avec : $B_o^{(2)} \cup B_1^{(2)} = B_o^{(1)}$, $\mu(B_o^{(2)}) = \mu(B_1^{(2)}) = \frac{1}{2^2}$, $B_2^{(2)} = B_1^{(1)}$

$\mathcal{B}_3$ est engendrée par $\mathcal{P}_3 = \{B_o^{(3)},B_1^{(3)},B_2^{(3)},B_3^{(3)}\}$

avec : $B_i^{(3)} = B_i^{(2)}$ $(i = 0,1)$, $B_2^{(3)} \cup B_3^{(3)} = B_2^{(2)}$, $\mu(B_2^{(3)}) = \mu(B_3^{(3)}) = \frac{1}{2^2}$

et ainsi de suite. D'une manière générale :

$$\text{si} \quad n = 2^k + \ell \qquad \ell = 0,\ 1,\dots,2^k - 1$$

$\mathcal{B}_n$ est engendrée par la partition de E : $\mathcal{P}_n = \{B_o^{(n)},B_1^{(n)},\dots,B_n^{(n)}\}$

avec :

$$\mu(B_o^{(n)}) = \mu(B_1^{(n)}) = \ldots = \mu(B_{2\ell+1}^{(n)}) = \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$B_{2\ell}^{(n)} \cup B_{2\ell+1}^{(n)} \subset B_{2\ell}^{(n-1)}$$

$$\mu(B_{2\ell+2}^{(n)}) = \ldots = \mu(B_n^{(n)}) = \frac{1}{2^k} \quad .$$

La suite de partitions de E, $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, constitue un système de Haar ([9], page 51). A ce système, on associe une base de Haar définie de la façon suivante :

$$U_o(t) \equiv 1$$

$$U_n(t) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{si} \quad t \in B_{2\ell}^{(n)} \\ -\,2^{k/2} & \text{si} \quad t \in B_{2\ell+1}^{(n)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour $n = 2^k + \ell$ $\quad (k \in \mathbb{N},\ \ell = 0,1,\ldots,2^k - 1)$.

Alors, si $t \in B_m^{(r)}$:

$$K_r(x,t) = \sum_{i=0}^{r} U_i(x)U_i(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu(B_m^{(r)})} & \text{pour} \quad x \in B_m^{(r)} \\ 0 \ \ \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette formule se démontre par récurrence (démonstration analogue à celle de SINGER [10], page 13 dans le cas où $E = [0,1]$)

Les propositions 1 et 2 du chapitre I sont encore valables si l'on remplace partout "pour tout $t \in E$" par "pour presque tout $t \in E$". Comme le développement en série de f sur les U_i converge presque partout vers f ([9], page 52) et que toutes les conditions des propositions 1, II et 2, II sont satisfaites avec $\alpha = 1$, on peut énoncer :

Proposition 7.- Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des densités définies et bornées sur E. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\frac{r(n)}{n} \to 0$

(2) $\forall f \in \mathcal{D}$ et pour presque tout $t \in E$, $\hat{f}_n(t) \xrightarrow{p} f(t)$

(3) $\forall f \in \mathcal{D}$ et pour presque tout $t \in E$, $E[|\hat{f}_n(t) - f(t)|] \to 0$

(4) $\forall f \in \mathcal{D}$ et pour presque tout $t \in E$, $E[(\hat{f}_n(t) - f(t))^2] \to 0$

Proposition 8.- Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des densités définies et bornées sur E. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que : $\forall f \in \mathcal{D}$ et pour presque tout $t \in E$, $\hat{f}_n(t) \xrightarrow{p.c_o} f(t)$ est que l'on ait :
$\forall \beta > 0$, $\sum_n \exp\left[-\beta \frac{n}{r(n)}\right] < +\infty$.

Pour la convergence uniforme, les lemmes 7 et 8 du chapitre I ne s'appliquent plus tels quels, car $K_r(x,t)$ n'est évidemment pas Lipschitzienne. Cependant, il est possible de modifier les démonstrations pour obtenir les mêmes résultats que dans le cas où $K_r(x,t)$ est Lipschitzienne. En effet, on a directement :

$$\sup_{t \in E} \hat{S}_n(t) = \sup_{k=0,1,\dots,r(n)} \hat{S}_n(t_k)$$

où $t_k \in B_k^{r(n)}$, $k = 0,1,\dots,r(n)$.

Ceci découle du fait que :

$$\hat{S}_n(t) = \hat{f}_n(t) - f_n(t) = \sum_{i=0}^{r(n)} (\hat{a}_{in} - a_i)U_i(t)$$

donc, pour ω fixé, $\hat{S}_n(t)(\omega)$ est constant dans chacun des ensembles $B_k^{r(n)}$, puisque chacune des fonctions $U_i(t)$ $(i = 0,\dots,r(n))$ est constante sur ces ensembles.

Par conséquent :

$$P\left[\sup_{t\in E} \hat{S}_n(t) \geq \eta\right] = P\left[\sup_{0\leq k\leq r(n)} \hat{S}_n(t_k) \geq \eta\right]$$

et la démonstration se termine comme au lemme 7, I. On vérifie par ailleurs que toutes les autres conditions du lemme 7, I et de la Proposition 3, I sont satisfaites, et on constate que les conditions (C) et (C') n'interviennent plus. On peut alors énoncer :

Proposition 9.- Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des densités définies sur E, bornées et dont le développement en série de fonctions de Haar converge uniformément vers $f(t)$.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\frac{r(n)}{n} \operatorname{Log} n \to 0$

(2) $\forall f \in \mathcal{D}, \quad \sup_{t\in E}|\hat{f}_n(t) - f(t)| \xrightarrow{p} 0$

(3) $\forall f \in \mathcal{D}, \quad \sup_{t\in E}|\hat{f}_n(t) - f(t)| \xrightarrow{p.c_o} 0$

(4) $\forall f \in \mathcal{D}, \ E\left[\sup_{t\in E}|\hat{f}_n(t) - f(t)|\right] \to 0$

Remarque : Si E est un espace métrique, et si la partition $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (système de Haar) est formée d'ensembles dont le diamètre tend vers zéro, $\mathcal{D}$ contient en particulier les densités bornées et uniformément continues sur E.

CHAPITRE III

CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES DE CONVERGENCE DE L'ESTIMATEUR DE LA DENSITE PAR LA METHODE DES FONCTIONS ORTHOGONALES DANS DES CAS PARTICULIERS.

Nous allons maintenant étudier la convergence de l'estimateur de la densité par la méthode des fonctions orthogonales dans deux cas particuliers importants :

- le cas d'une densité appartenant à $\mathbb{L}^2\left[-\pi, +\pi\right]$, muni du système des fonctions trigonométriques
- le cas d'une densité appartenant à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, muni de la base hilbertienne formée par les fonctions d'Hermite.

Nous verrons que les résultats du chapitre I s'appliquent alors, et peuvent être améliorés. On obtient en particulier dans les deux cas une condition nécessaire et suffisante de convergence simple en probabilité, et dans le cas des fonctions trigonométriques une condition nécessaire et suffisante de convergence uniforme presque complète et uniforme en probabilité.

I - <u>LA DENSITE APPARTIENT A</u> $\mathbb{L}^2[-\pi, +\pi]$, <u>MUNI DU SYSTEME DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES</u>.-

On aura alors :

$$e_o(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\left.\begin{aligned} e_{2k-1}(t) &= \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} \\ e_{2k}(t) &= \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}\right. \qquad k = 1,2,\ldots$$

Si r est pair, le noyau s'écrit :

$$K_r(x,t) = \sum_{i=0}^{r} e_i(x)\, e_i(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{r/2} \cos(i(x-t))$$

soit :

$$K_r(x,t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(r+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}$$

On posera dans la suite :

$$\hat{S}_n(t) = \hat{f}_n(t) - f_n(t) = \sum_{j=1}^{n} Y_{jn}(t)$$

où :

$$Y_{jn}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{r(n)} (e_i(X_j) - a_i)\, e_i(t)$$

$$= Z_{jn}(t) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{r(n)} a_i\, e_i(t)$$

Nous supposerons que $r(n)$ est pair : on montre facilement que ceci n'entraîne aucune perte de généralité. On aura alors :

$$Z_{jn}(t) \underset{\text{p.s.}}{=} \frac{1}{2n\pi} \frac{\sin(r(n)+1)\frac{X_j-t}{2}}{\sin\frac{X_j-t}{2}}$$

I.1. - Convergence simple en probabilité et en moyenne d'ordre p $(p=1,2)$.

Proposition 1.- Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des densités définies sur $[-\pi, +\pi]$, bornées, et possédant une série de Fourier qui converge vers $f(t)$ en tout point $t \in [-\pi, +\pi]$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\frac{r(n)}{n} \longrightarrow 0$

(2) $\forall f \in \mathcal{D}$, $\forall t \in [-\pi, +\pi]$, $\hat{f}_n(t) \xrightarrow{p} f(t)$

(3) $\forall f \in \mathcal{D}$, $\forall t \in [-\pi, +\pi]$, $E(|\hat{f}_n(t) - f(t)|) \longrightarrow 0$

(4) $\forall f \in \mathcal{D}$, $\forall t \in [-\pi, +\pi]$, $E[(\hat{f}_n(t) - f(t))^2] \longrightarrow 0$

(5) $\forall f \in \mathcal{D}$, $E\int_{-\pi}^{+\pi} (\hat{f}_n(t) - f(t))^2\, dt \longrightarrow 0$

Démonstration.-

. L'équivalence (1) <==> (5) a été démontré par D. Bosq dans [7], page 48.

. L'implication (1) ==> (4) découle du lemme 4, I, qui s'applique puisque :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \left(\sum_{i=0}^{r} e_i(x)\, e_i(t)\right)^2 dx \leq \sum_{i=0}^{r} e_i^2(t) \leq \frac{r+3}{2\pi}$$

. (4) ==> (3) découle de l'inégalité de Schwarz et (3) ==> (2) de l'inégalité de Markov.

Il reste à montrer que (2) ==> (1). Nous allons démontrer ceci de deux façons.

Première démonstration de (2) ==> (1) .

Nous allons nous ramener au cas d'un noyau positif en introduisant un estimateur basé sur le noyau de Féjer. Pour toute fonction φ définie sur $[-\pi, +\pi]$ et appartenant à $\mathbb{L}^1[-\pi, +\pi]$ on pose :

$$s_\ell \varphi = \sum_{i=0}^{2\ell} \left(\int_{-\pi}^{+\pi} e_i(x)\, \varphi(x)\, dx\right) e_i \,, \qquad \ell \in \mathbb{N}$$

On définit alors un nouvel estimateur de f en posant :

$$\hat{g}_n(t) = \frac{1}{k(n)+1} \sum_{\ell=0}^{k(n)} (s_\ell\, \hat{f}_n)(t) \qquad\qquad (r(n) = 2k(n))$$

Des calculs classiques donnent ([11] page 79) :

$$\hat{g}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi(k(n)+1)} \left(\frac{\sin \left[(k(n)+1)\, \frac{X_j - t}{2}\right]}{\sin \frac{X_j - t}{2}} \right)^2$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} F_n(t-x)\, d\,\mu_n(x)$$

où μ_n désigne la loi empirique associée à l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$

et où : $F_n(u) = \frac{1}{2\pi(k(n)+1)} \left(\frac{\sin \frac{k(n)+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}} \right)^2$.

La démonstration est alors analogue à celle du lemme 3, I et de la proposition 1, II .

1°) On pose : $B_{r(n)} = \left[-\frac{1}{2r(n)} , \frac{1}{2r(n)} \right]$

et
$$E_n = \bigcap_{j=1}^{n} [X_j \notin B_{r(n)}]$$

On prend $f = \frac{1}{2\pi} 1_{[-\pi, +\pi]}$. On sait d'après le lemme 1, I que si $\frac{r(n)}{n} \geq \beta$ pour $n \in \mathbb{N}_o$ partie infinie de $\mathbb{N}$, alors : $P(E_n) \geq \exp \left[-\frac{1}{\pi\beta} \right]$ pour n assez grand dans N_o.

Soit g_n la densité de la loi de X_j conditionnée par E_n. Elle s'écrit :

$$g_n(x) = \frac{r(n)}{2\pi r(n)-1} \cdot 1_{[-\pi,+\pi] \setminus B_{r(n)}} (x)$$

Alors :
$$E[\hat{g}_n(0)|E_n] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi(k(n)+1)} \left(\frac{\sin (k(n)+1) \frac{X_j}{2}}{\sin \frac{X_j}{2}} \right)^2 |E_n \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi(k(n)+1)} \; E\left[\left(\frac{\sin (k(n)+1) \frac{X_j}{2}}{\sin \frac{X_1}{2}} \right)^2 |E_n \right]$$

$$E[\hat{g}_n(0)|E_n] = \frac{1}{2\pi(k(n)+1)} \times \frac{1}{2\pi r(n)-1} \int_{[-\pi, +\pi] \setminus B_{r(n)}} \left(\frac{\sin (k(n)+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 dx$$

Or : $\frac{1}{2\pi(k(n)+1)} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\sin (k(n)+1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 dx = 1$ (cf. [11] page 79)

D'où :

$$E[\hat{g}_n(0)|E_n] = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2\pi r(n)}} \left[1 - \frac{1}{2\pi(k(n)+1)} \int_{-\frac{1}{2r(n)}}^{\frac{1}{2r(n)}} \left(\frac{\sin (k(n)+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2 dx\right]$$

Mais : $I = \int_{-\frac{1}{2r(n)}}^{\frac{1}{2r(n)}} \left(\frac{\sin (k(n)+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2 dx = 2\int_0^{\frac{1}{2r(n)}} \left(\frac{\sin (k(n)+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2 dx$

$$I \geqslant 2\int_0^{\frac{1}{2r(n)}} \left(\frac{\sin (k(n)+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2 dx = 8\int_0^{\frac{1}{2r(n)}} \frac{(\sin (k(n)+1)\frac{x}{2})^2}{x^2} dx$$

Faisons le changement de variable $u = (k(n)+1)\frac{x}{2}$. Alors :

$$I \geqslant 8\int_0^{\frac{k(n)+1}{8k(n)}} \frac{\sin^2 u}{\left(\frac{2u}{k(n)+1}\right)^2} \frac{2}{k(n)+1} du = 4(k(n)+1)\int_0^{\frac{1}{8}(1+\frac{1}{k(n)})} \frac{\sin^2 u}{u^2} du$$

et : $\frac{1}{2\pi(k(n)+1)} I \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{1/8} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \delta$ où $\delta \in]0,1[$

D'autre part, pour n assez grand :

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2\pi r(n)}} \leqslant 1+\delta$$

D'où, pour n assez grand :

$$E[\hat{g}_n(0)|E_n] \leqslant \frac{1}{2\pi}(1-\delta^2)$$

2°) Supposons que $\frac{r(n)}{n} \not\to 0$. Alors il existe une sous-suite $\left(\frac{r(n_k)}{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\left(\frac{r(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et un nombre $\beta > 0$ tels que : $\frac{r(n_k)}{n_k} \geqslant \beta$ $(k\in\mathbb{N})$.
Si $\hat{f}_n(0) \xrightarrow{p} f(0)$ alors $\hat{f}_{n_k}(0) \xrightarrow{p} f(0)$, et il existe une sous-suite de $(\hat{f}_{n_k}(0))_{k\in\mathbb{N}}$, $(\hat{f}_{n_{k_i}}(0))_{i\in\mathbb{N}}$, qui converge presque sûrement vers $f(0)$. Alors $\hat{g}_{n_{k_i}}(0) \xrightarrow{p.s.} f(0)$, donc aussi : $\hat{g}_{n_{k_i}}(0) \xrightarrow{p} f(0)$, et la démonstration se termine comme celle de la proposition 1, II où l'on remplace $\hat{f}_n(t_o)$

par $\hat{g}_{n_{k_i}}(0)$.

Deuxième démonstration de (2) $\Longrightarrow$ (1), *(due à D. BOSQ)*.

Nous commencerons par donner deux lemmes.

Lemme 1.- Si f est bornée et si la série de Fourier de f converge au point t :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N(\varepsilon) \mid n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow P[|Y_{jn}(t)| \geq \varepsilon] \leq \frac{M}{n\varepsilon}, \ j = 1,\dots,n$$

où M est indépendant de n et de ε.

Démonstration.-

$$\sum_{i=0}^{r(n)} a_i \, e_i(t) \longrightarrow f(t) \text{ , donc : } \left|\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{r(n)} a_i \, e_i(t)\right| \leq \frac{K}{n}$$

Il suffit donc de montrer que, pour n assez grand :

$$P[|Z_{jn}(t)| > \varepsilon] \leq \frac{M'}{n\varepsilon} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Or :

$$Z_{jn}(t) \underset{\text{p.s.}}{=} \frac{1}{2n\pi} \, \frac{\sin\,(r(n)+1)\,\frac{X_j - t}{2}}{\sin \frac{X_j - t}{2}}$$

De :

$$|Z_{jn}(t)| \leq \frac{1}{2n\pi} \, \frac{1}{\left|\sin \frac{X_j - t}{2}\right|}$$

on tire aisément :

$$P[|Z_{jn}(t)| \geq \varepsilon] \leq P\left[-\frac{1}{2n\pi\varepsilon} \leq \sin \frac{X_j - t}{2} \leq \frac{1}{2n\pi\varepsilon}\right] = p$$

On a :

$$\frac{-\pi - t}{2} \leq \frac{X_j - t}{2} \leq \frac{\pi - t}{2}$$

Pour n assez grand et $t \neq \pm \pi$:

$$p = P\left[-\text{Arc}\sin\left(\frac{1}{2n\pi\varepsilon}\right) \leq \frac{X_j - t}{2} \leq \text{Arc}\sin\left(\frac{1}{2n\pi\varepsilon}\right)\right]$$

$$p < A \times 4 \ \text{Arc}\sin\left(\frac{1}{2n\pi\varepsilon}\right) < A \times \frac{2}{2n\pi\varepsilon} = \frac{A}{n\varepsilon}$$

où : $$A = \sup_{t \in [-\pi, +\pi]} f(t)$$

Pour $t = \pi$:

$$p = P\left[0 \leqslant \cos \frac{X_j}{2} \leqslant \frac{1}{2n\pi\varepsilon}\right]$$

$$p = P\left[\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{X_j}{2} \leqslant -\operatorname{Arc}\cos \frac{1}{2n\pi\varepsilon}\right) \cup \left(\operatorname{Arc}\cos \frac{1}{2n\pi\varepsilon} \leqslant \frac{X_j}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$p \leqslant \frac{A}{n\varepsilon} \quad \left(\text{puisque : } \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\cos \frac{1}{2n\pi\varepsilon} = \operatorname{Arc}\sin \frac{1}{2n\pi\varepsilon}\right)$$

Pour $t = -\pi$, on obtient la même majoration par une démonstration analogue. On a donc le résultat avec $M' = A$.

Lemme 2.- Sous les hypothèses du lemme 1 et si $\hat{S}_n(t) \xrightarrow{p} 0$ alors : $\forall \varepsilon > 0$, $P[|Y_{jn}(t)| \geqslant \varepsilon] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (j fixé).

Démonstration.- Le lemme 1 montre que les Y_{jn} sont uniformément asymptotiquement négligeables (u.a.n.). D'après un critère de convergence vers la loi normale dégénérée (Loëve p. 317) [17] on en tire bien :

$$\lim_{n\to\infty} n\, P\,[|Y_{jn}(t)| \geqslant \varepsilon] = 0 .$$

Nous pouvons maintenant démontrer l'implication (2) ==> (1) de la proposition 1.

On prend pour f la densité de la loi uniforme sur $[-\pi, +\pi]$, et l'on suppose que $\hat{f}_n(0) \xrightarrow{p} f(0) = \frac{1}{2\pi}$, ce qui entraîne que $\hat{S}_n(0) \xrightarrow{p} 0$. On va en déduire que : $\frac{r(n)}{n} \longrightarrow 0$.

Posons : $$Z'_{jn} = \frac{1}{n} \frac{\sin\,(r(n)+1)\,\frac{X_j}{2}}{\sin \frac{X_j}{2}}$$

Puisque f est la densité uniforme sur $[-\pi, +\pi]$, on a :

$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et $a_i = 0$ pour $i > 1$.

Donc :

$$Y_{jn}(0) = \frac{1}{2\pi} Z'_{jn} - \frac{1}{n} \times \frac{1}{2\pi}$$

Il est donc clair que : $n \, P \left[|Z'_{jn}| \geq \varepsilon \right] \longrightarrow 0$ (lemme 2).

Posons : $E_n = \{ |Z'_{jn}| \geq \varepsilon \}$

et

$$A_{\ell n} = \left\{ \frac{\ell \pi}{r(n)+1} \leq X_j < \frac{(\ell+1)\pi}{r(n)+1} \right\}$$

$$\ell = -r(n)-1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, r(n)$$

On peut écrire :

$$P(E_n) = \sum_{\ell=-r(n)-1}^{r(n)} P(E_n \cap A_{\ell n}) \geq \sum_{\ell=0}^{r(n)} P(E_n \cap A_{\ell n})$$

$$\geq \sum_{\substack{\ell=0 \\ \ell \text{ pair}}}^{2k(n)} P(E_n \cap A_{\ell n})$$

$$= \sum_{h=0}^{k(n)} P\left[E_n \cap A_{2h,n}\right]$$

avec : $A_{2h,n} = \{ h\pi \leq (r(n)+1) \frac{X_j}{2} < h\pi + \frac{\pi}{2} \}$

Sur $A_{2h,n}$, on a : $0 \leq (r(n)+1) \frac{X_j}{2} - h\pi < \frac{\pi}{2}$

donc : $$\left| \sin (r(n)+1) \frac{X_j}{2} \right| = \left| \sin \left[(r(n)+1) \frac{X_j}{2} - h\pi \right] \right|$$

$$\geq \frac{2}{\pi} \left[(r(n)+1) \frac{X_j}{2} - h\pi \right]$$

D'autre part, sur $A_{2h,n}$, on a : $0 \leq \frac{X_j}{2} < \frac{\pi}{2}$

donc : $\sin \frac{X_j}{2} \leq \frac{X_j}{2}$ et :

$$E_n \cap A_{2h,n} \supset \{ \frac{1}{n} \frac{\frac{2}{\pi}\left[(r(n)+1)\frac{X_j}{2} - h\pi\right]}{\frac{X_j}{2}} \geq \varepsilon\} \cap A_{2h,n}$$

Désignons par B_{hn} l'événement entre crochets. On peut écrire :

$$B_{hn} = \{\frac{X_j}{2} (\frac{2}{\pi} (r(n)+1) - n\varepsilon) \geq 2h\}$$

Supposons alors que : $\frac{r(n)}{n} \not\to 0$. Cela entraîne qu'il existe une partie infinie N_o de $\mathbb{N}$ telle que :

(1) $$\frac{r(n)+1}{n} > 2\pi\varepsilon \quad , \qquad n \in N_o$$

où ε est supposé avoir été choisi suffisamment petit.

On a alors, pour $n \in N_o$:

$$B_{hn} \cap A_{2h,n} = \{X_j \geq \frac{2h\pi}{r(n)+1 - n\frac{\pi}{2}\varepsilon}\} \cap \{\frac{2h\pi}{r(n)+1} \leq X_j < \frac{(2h+1)\pi}{r(n)+1}\}$$

et comme on a toujours :

$$\frac{2h\pi}{r(n)+1} < \frac{2h\pi}{r(n)+1 - n\frac{\pi}{2}\varepsilon}$$

il vient :

$$B_{hn} \cap A_{2h,n} = \begin{cases} \emptyset \text{ si } \dfrac{(2h+1)\pi}{r(n)+1} \leq \dfrac{2h\pi}{r(n)+1 - n\frac{\pi}{2}\varepsilon} \\[2em] \{\dfrac{2h\pi}{r(n)+1 - n\frac{\pi}{2}\varepsilon} \leq X_j < \dfrac{(2h+1)\pi}{r(n)+1}\} \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Or : $$\frac{2h\pi}{r(n)+1 - n\frac{\pi}{2}\varepsilon} < \frac{(2h+1)\pi}{r(n)+1} \iff 2h+1 < \frac{r(n)+1}{n\frac{\pi}{2}\varepsilon} .$$

Dans la suite, nous supposerons ε rationnel, ce qui permet d'écrire :

(2) $$2h+1 < \frac{r(n)+1}{n\,\frac{\pi}{2}\,\varepsilon} \iff 2h+1 \leq \left[\frac{r(n)+1}{n\,\frac{\pi}{2}\,\varepsilon}\right]$$

($[y]$ désigne la partie entière de y).

L'inégalité (2) est vérifiée au moins pour $h = 0$ (d'après (1)). Elle n'est pas vérifiée pour $h = k(n)$ (pour n assez grand) puisque $2k(n)+1 = r(n)+1$.

Si h vérifie (2), on a puisque f est uniforme :

$$P\left[B_{hn} \cap A_{2h,n}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(2h+1)\pi}{r(n)+1} - \frac{2h\pi}{r(n)+1-n\,\frac{\pi}{2}\,\varepsilon}\right]$$

d'où :

$$P(E_n) \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{h \geq 0 \\ 2h+1 \leq \left[\frac{r(n)+1}{n\frac{\pi}{2}\varepsilon}\right]}} \left[\frac{(2h+1)\pi}{r(n)+1} - \frac{2h\pi}{r(n)+1-n\,\frac{\pi}{2}\,\varepsilon}\right]$$

$$= \frac{1}{2(r(n)+1)\left[r(n)+1-n\,\frac{\pi}{2}\,\varepsilon\right]} \sum_{\substack{h \geq 0 \\ 2h+1 \leq \left[\frac{r(n)+1}{n\frac{\pi}{2}\varepsilon}\right]}} \left[r(n)+1-n\,\frac{\pi}{2}\,\varepsilon - 2hn\,\frac{\pi}{2}\,\varepsilon\right]$$

Soit I_n le nombre de termes sous le signe $\sum$ précédent :

$$2h+1 \leq \left[\frac{r(n)+1}{n\,\frac{\pi}{2}\,\varepsilon}\right] \iff h \leq \left[\frac{\left[\frac{r(n)+1}{n\frac{\pi}{2}\varepsilon}\right] - 1}{2}\right] = I_n - 1$$

On a :

$$P(E_n) \geq \frac{1}{2(r(n)+1)\left[r(n)+1-n\,\frac{\pi}{2}\,\varepsilon\right]}\left[\left(r(n)+1-n\,\frac{\pi}{2}\,\varepsilon\right) I_n - n\pi\varepsilon\,\frac{(I_n-1)I_n}{2}\right]$$

$$\geq \frac{I_n}{2(r(n)+1)\left[r(n)+1-n\,\frac{\pi}{2}\,\varepsilon\right]}\left[r(n)+1-n\,\frac{\pi}{2}\,\varepsilon\, I_n\right]$$

mais : $$\mathcal{I}n = 1 + \left[\frac{\left[\frac{r(n)+1}{n\frac{\pi}{2}\varepsilon}\right] - 1}{2}\right] = \left[\left(\left[\frac{r(n)+1}{n\frac{\pi}{2}\varepsilon}\right] + 1\right)\frac{1}{2}\right]$$

car $[x] + 1 = [x+1]$

Donc : $$\mathcal{I}n \leq \frac{r(n)+1}{n\pi\varepsilon} + \frac{1}{2}$$

d'où : $$r(n)+1 - n\frac{\pi}{2}\varepsilon\,\mathcal{I}n \geq \frac{1}{2}\left[r(n)+1 - n\frac{\pi}{2}\varepsilon\right]$$

On en tire :

$$P(E_n) \geq \frac{\mathcal{I}n}{4(r(n)+1)}$$

Mais : $$\alpha_n = \frac{r(n)+1}{n\frac{\pi}{2}\varepsilon} > 4 \quad \text{(d'après (1))}$$

donc : $$\frac{\alpha_n}{2} > 2 \quad \text{et} \quad \left[\frac{\alpha_n}{2}\right] \geq \frac{\alpha_n}{4}$$

On en déduit :

$$\mathcal{I}n > \left[\frac{\frac{r(n)+1}{n\frac{\pi}{2}\varepsilon}}{2}\right] \geq \frac{r(n)+1}{4n\frac{\pi}{2}\varepsilon}$$

et $$P(E_n) \geq \frac{1}{8n\pi\varepsilon}\ .$$

Alors, pour $n \in N_o$:

$$n\,P[|Z'_{jn}| \geq \varepsilon] \geq \frac{1}{8\pi\varepsilon}$$

et ceci contredit le lemme 2.

I.2. - *Convergence simple presque complète.*

Proposition 2.- Sous les hypothèses de la proposition 1, une condition nécessaire et suffisante pour que : $\forall f \in \mathcal{D}$, $\forall t \in [-\pi, +\pi]$

$\hat{f}_n(t) \xrightarrow{p.c_o} f(t)$ est que l'on ait :

$$\forall \beta > 0 \ , \ \sum_n \exp \left[- \beta \frac{n}{r(n)}\right] < + \infty \ .$$

Démonstration.- Les conditions de la proposition 2, I sont satisfaites :

- $\forall t \in [-\pi,+\pi], \ \forall x \in [-\pi,+\pi], \ \left| \sum_{i=0}^{r} e_i(x) e_i(t) \right| \leq \frac{r+3}{2\pi}$

- si f_o est la densité uniforme sur $[-\pi, +\pi]$:

$$E_{f_o} \left[\left(\sum_{i=0}^{r} e_i(X_1) \ e_i(t) \right)^2 \right] \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{r} e_i^2(t) \geq \frac{r-1}{(2\pi)^2}$$

Les autres conditions ont été vérifiées à la proposition 1.

L'amélioration par rapport à la proposition 2, I est due au fait que la convergence simple presque complète entraîne ici que $\frac{r(n)}{n} \longrightarrow 0$ Ceci nous permet de nous dispenser de l'hypothèse de convergence simple en moyenne pour la démonstration de la condition nécessaire.

I.3. - *Convergence uniforme presque complète, uniforme en probabilité, et en moyenne uniforme.*

Proposition 3.- Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des densités définies sur $[-\pi, +\pi]$, bornées et dont la série de Fourier converge uniformément sur $[-\pi, +\pi]$ vers $f(t)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\frac{r(n)}{n} \text{Log } n \longrightarrow 0$

(2) $\forall f \in \mathcal{D} \ , \ \sup_{t \in [-\pi, +\pi]} |\hat{f}_n(t) - f(t)| \xrightarrow{p} 0$

(3) $\forall f \in \mathcal{D} \ , \ \sup_{t \in [-\pi, +\pi]} |\hat{f}_n(t) - f(t)| \xrightarrow{p.c_o} 0$

(4) $\forall f \in \mathcal{D}, \ E\left[\sup_{t \in [-\pi, +\pi]} |\hat{f}_n(t) - f(t)| \right] \longrightarrow 0$

Démonstration.-

1°) Montrons que les conditions de la proposition 3, I et du lemme 7,I sont satisfaites.

On prend :

$$E = F = E_1 = [-\pi, +\pi]$$

$$E_2 = [0,\Lambda] \ , \quad \text{où } \Lambda \text{ vérifie } k_o \frac{\Lambda}{4} = \pi$$

$$(k_o \text{ entier pair } \geq 4)$$

(a) Montrons que : $\forall\, t \in [0,\Lambda]$, $I = \int_0^\Lambda K_r(x,t)dx \leq L_1$, où L_1 est une constante et r est pair.

On sait que, pour r pair :

$$K_r(x,t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(r+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}$$

$$2\pi I = \int_0^\Lambda \frac{\sin(r+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}} dx = \int_{-t}^{\Lambda-t} \frac{\sin(r+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} du$$

$$2\pi I = \int_0^{\Lambda-t} \frac{\sin(r+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} du + \int_0^t \frac{\sin(r+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} du$$

Il suffit donc de montrer que, quel que soit $\eta \in]0,\Lambda]$ il existe une constante L_2 telle que :

$$\left|\int_0^\eta \frac{\sin(r+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} du\right| \leq L_2$$

Or :

$$\left|\int_0^\eta \frac{\sin(r+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} du\right| \leq \left|\int_0^\eta \sin\left[(r+1)\frac{u}{2}\right]\left[\frac{1}{\sin\frac{u}{2}} - \frac{2}{u}\right]du\right| + 2\left|\int_0^\eta \frac{\sin(r+1)\frac{u}{2}}{u} du\right|$$

$\dfrac{1}{\sin\frac{u}{2}} - \dfrac{2}{u}$ est une fonction croissante et positive sur $]0,\pi]$. Par conséquent :

$$\left|\int_0^{\eta} \sin\left[(r+1)\frac{u}{2}\right]\left[\frac{1}{\sin\frac{u}{2}} - \frac{2}{u}\right]du\right| \leqslant \int_0^{\eta} \left(\frac{1}{\sin\frac{u}{2}} - \frac{2}{u}\right) du$$

$$\leqslant \eta \left(\frac{1}{\sin\frac{\eta}{2}} - \frac{2}{\eta}\right) \leqslant \Lambda \left(\frac{1}{\sin\frac{\Lambda}{2}} - \frac{2}{\Lambda}\right)$$

D'autre part, pour r assez grand :

$$0 \leqslant \int_0^{\eta} \frac{\sin(r+1)\frac{u}{2}}{u}\, du = \int_0^{(r+1)\frac{\eta}{2}} \frac{\sin y}{y}\, dy \leqslant \pi$$

puisque : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2}$.

On a donc le résultat cherché en prenant $L_2 = \pi + \Lambda \left(\frac{1}{\sin\frac{\Lambda}{2}} - \frac{2}{\Lambda}\right)$.

(b) A tout n, on associe la partition de $[0,\Lambda]$ en $r(n)$ intervalles $I_{n,t}$ définis de la façon suivante :

$$I_{n,t} = \left[(t-1)\frac{\Lambda}{r(n)}\, ,\; t\frac{\Lambda}{r(n)}\right[,\quad t = 1,2,\ldots, r(n) - 1$$

$$I_{n,r(n)} = \left[(r(n)-1)\frac{\Lambda}{r(n)}\, ,\; \Lambda\right]$$

Montrons que la condition 3°) de la proposition 3,I est satisfaite.

$$\int_{\bigcup_{s=1}^{j} I_{n,t_s}} \frac{\sin(r(n)+1)\frac{x-\xi}{2}}{\sin\frac{x-\xi}{2}}\, dx = \int_{\bigcup_{s=1}^{j} (I_{n,t_s}-\xi)} \frac{\sin\,(r(n)+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\, du$$

$$= \int_{\bigcup_{s=1}^{j} (I_{n,t_s}-\xi)} \sin\left[(r(n)+1)\frac{u}{2}\right]\left[\frac{1}{\sin\frac{u}{2}} - \frac{2}{u}\right] du + 2\int_{\bigcup_{s=1}^{j} (I_{n,t_s}-\xi)} \frac{\sin(r(n)+1)\frac{u}{2}}{u}\, du$$

$= A + 2B$

$$|A| \leqslant j\,\frac{\Lambda}{r(n)} \left(\frac{1}{\sin\frac{\Lambda}{2}} - \frac{2}{\Lambda}\right) \leqslant \varepsilon\,\Lambda \left(\frac{1}{\sin\frac{\Lambda}{2}} - \frac{2}{\Lambda}\right)$$

puisqu'on suppose : $1 \leqslant j \leqslant \varepsilon \; r(n)$.

Prenons pour ξ le milieu de I_{n,t_1} . Alors :

$$B = \int_{\bigcup_{s=1}^{j} I'_{n,t_s}} \frac{\sin y}{y} \, dy$$

avec : $$I'_{n,t_s} = \left[\frac{\Lambda}{2}\left(t_s - t_1 - \frac{1}{2}\right), \frac{\Lambda}{2}\left(t_s - t_1 + \frac{1}{2}\right)\right[\quad \text{pour} \quad s = 1,\dots,j \, .$$

puisque : $$\xi = \left(t_1 - \frac{1}{2}\right) \frac{\Lambda}{r(n)}$$

Donc :

$$B = \int_{-\frac{\Lambda}{4}}^{+\frac{\Lambda}{4}} \frac{\sin y}{y} \, dy + \int_{\bigcup_{s=2}^{j} I'_{n,t_s}} \frac{\sin y}{y} \, dy$$

Posons : $$\int_{-\frac{\Lambda}{4}}^{+\frac{\Lambda}{4}} \frac{\sin y}{y} \, dy = 2\pi \, \delta_1 > 0$$

Pour un choix de $(t_1,\dots,t_j)$ pour lequel : $\displaystyle\int_{\bigcup_{s=2}^{j} I'_{n,t_s}} \frac{\sin y}{y} \, dy \geqslant 0$,

on a donc :

$$A + 2B \geqslant 4\pi \; \delta_1 - \varepsilon \, \Lambda\left(\frac{1}{\sin \frac{\Lambda}{2}} - \frac{2}{\Lambda}\right)$$

$$\geqslant 2\pi \; \delta_1 \quad \text{pour un choix convenable de } \varepsilon.$$

Finalement :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\bigcup_{s=1}^{j} I_{n,t_s}} \frac{\sin(r(n)+1) \frac{x-\xi}{2}}{\sin \frac{x-\xi}{2}} \, dx \geqslant \delta_1$$

ce qui est la condition $C_2(\delta_1)$.

Or, ε , n et j étant fixés, la moitié au moins des choix possibles des j-uples $(t_1,\dots,t_j)$ rendent $\displaystyle\int_{\bigcup_{s=2}^{j} I'_{n,t_s}} \frac{\sin y}{y}\,dy \geq 0$. En effet les intervalles I'_{n,t_s} $(s = 2,\dots,j)$ sont des intervalles de longueur $\frac{\Lambda}{2}$ choisis parmi $r(n) - t_1$ intervalles possibles. L'examen du graphe de la fonction $\frac{\sin y}{y}$ permet alors de conclure . La condition 3°) de la proposition 3, I est bien vérifiée avec $p = \frac{1}{2}$.

Les conditions de la proposition 3,I et du lemme 7,I sont donc satisfaites. On a par conséquent (1) $\Longleftrightarrow$ (4) et (1) $\Longrightarrow$ (3) . Comme il est clair que (3) $\Longrightarrow$ (2) , il reste à montrer que (2) $\Longrightarrow$ (1).

2°) Montrons que : (2) $\Longrightarrow$ (1). Nous allons à nouveau passer par l'intermédiaire de $\hat{g}_n$, estimateur basé sur le noyau de Féjer. Nous utiliserons le résultat suivant :

Lemme 3.- Si d est la distance de la convergence uniforme sur $[-\pi, +\pi]$:

$$\left.\begin{array}{l} d(\hat{f}_n,f) \xrightarrow{p.s.} 0 \\ \\ f \in \mathcal{D} \end{array}\right) \Longrightarrow d(\hat{g}_n,f) \xrightarrow{p.s.} 0$$

Démonstration.-

Posons : $g_n = \dfrac{s_o f_n + \dots + s_{k(n)} f_n}{k(n) + 1}$.

Comme $d(f_n,f) \longrightarrow 0$, f est continue, donc :

$$d(g_n,f) \longrightarrow 0 \qquad ([11]\ p.\ 87)\ .$$

Il suffit donc de montrer que $d(\hat{g}_n, g_n) \xrightarrow{p.s.} 0$.

Or : $|\hat{g}_n(t) - g_n(t)| = |\frac{1}{k(n)+1} \sum_{\ell=0}^{k(n)} s_\ell \, (\hat{f}_n(t) - f_n(t))|$

$$= \left|\int_{-\pi}^{+\pi} F_{r(n)}(t-x) \, [\hat{f}_n(x)-f_n(x)] \, dx\right|$$

$$\leqslant d(\hat{f}_n,f_n) \quad \text{(cf. [11] page 79)}$$

d'où : $\qquad d(\hat{g}_n,g_n) \leqslant d(\hat{f}_n,f) + d(f_n,f)$

et le second membre tend presque sûrement vers zéro par hypothèse.

Soit alors f_o la densité uniforme sur $[-\pi, +\pi]$ et supposons que $\frac{r(n)}{n}$ Log $n \not\rightarrow 0$. Ceci implique qu'il existe $\beta > 0$ et une partie infinie N de $\mathbb{N}$ tels que : $\frac{r(n)}{n}$ Log $n \geqslant \beta$ pour $n \in N$.

D'où, il existe N_o infini $\subset N$ tel que :

$$\sup_{t\in[-\pi, +\pi]} |\hat{f}_n(t) - f_o(t)| \xrightarrow{p.s.} 0 \quad , n \in N_o$$

et d'après le lemme précédent ceci entraîne :

$$\sup_{t\in[-\pi, +\pi]} |\hat{g}_n(t) - f_o(t)| \xrightarrow{p.s.} 0 \quad , n \in N_o$$

donc : $$\sup_{t\in[-\pi, +\pi]} |\hat{g}_n(t) - f_o(t)| \xrightarrow{p} 0 \quad , \quad n \in N_o \quad .$$

On est alors ramené à la proposition 3, II, avec l'estimateur $\hat{g}_n$ associé au noyau positif $F_{r(n)}(t-x)$. On vérifie facilement que $F_{r(n)}(t-x)$ satisfait aux conditions de la proposition 3, II (on peut d'ailleurs se limiter aux trois premières). En particulier, si ξ est le milieu de I_{n,t_1} :

$$\int_{\bigcup_{s=1}^{j} I_{n,t_s}} F_{r(n)}(\xi-x)\,dx \geq \int_{I_{n,t_1}} F_{r(n)}(\xi-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi(k(n)+1)} \int_{I_{n,t_1}} \left(\frac{\sin\,(k(n)+1)\,\frac{x-\xi}{2}}{\sin\frac{x-\xi}{2}} \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2\pi(k(n)+1)} \int_{-\Lambda/2k(n)}^{+\Lambda/2k(n)} \left(\frac{\sin\,(k(n)+1)\,\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} \right)^2 du$$

$$\geq \frac{1}{\pi} \int_{-\Lambda/4}^{+\Lambda/4} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 dy = \delta_1 > 0$$

Finalement, on a bien le résultat : (2) $\Longrightarrow$ (1) d'après la proposition 3, II.

II - LA DENSITE APPARTIENT A $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, MUNI DE LA BASE HILBERTIENNE FORMEE PAR LES FONCTIONS D'HERMITE.-

Les fonctions d'Hermite sont données par les formules :

$$e_i(x) = \frac{1}{(2^i\; i!\; \pi^{1/2})^{1/2}}\, H_i(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

avec :

$$H_i(x) = e^{x^2} \frac{d^i}{dx^i} (e^{-x^2}) \;.$$

Le noyau $K_r(x,t)$ peut alors s'écrire ([12] page 377) :

$$\text{(F1)} \qquad K_r(x,t) = \sum_{i=0}^{r} e_i(x)\, e_i(t) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin N(t-x)}{t-x} + \frac{T^r(t,x)}{N}\right]$$

avec

$$N = \frac{\sqrt{2r+3} + \sqrt{2r+1}}{2}$$

et

$$|T^r(t,x)| \leq L$$

où L est une constante, à condition que t et x varient sur des intervalles bornés.

On aura alors :

(F2) $$Z_{jn}(t) = \frac{1}{n} K_{r(n)}(X_j,t) = \frac{1}{n\pi}\left[\frac{\sin N(t-X_j)}{t-X_j} + \frac{T^r(t,X_j)}{N}\right]$$

D'autre part, on a l'égalité suivante ([12] page 378) :

(F3) $$K_r(t,t) = \sum_{i=0}^{r} e_i^2(t) = \sqrt{\frac{r+1}{2}}\left[\frac{2}{\pi} + \frac{E(t)}{\sqrt{r}}\right]$$

où $E(t)$ est indépendant de r .

II.1. - Convergence simple en probabilité et en moyenne d'ordre p (p=1,2).

Proposition 4.- Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des densités définies sur R, bornées, et qui possèdent un développement en série de fonctions d'Hermite convergent en tout point. Posons $\bar{f}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, e_i(t)$, $\forall\, t \in$ R. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\dfrac{r(n)}{n^2} \longrightarrow 0$

(2) $\forall\, f \in \mathcal{D}, \forall\, t \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_n(t) \xrightarrow{p} \bar{f}(t)$

(3) $\forall\, f \in \mathcal{D}, \forall\, t \in \mathbb{R}$, $E[|\hat{f}_n(t) - \bar{f}(t)|] \longrightarrow 0$

(4) $\forall\, f \in \mathcal{D}, \forall\, t \in \mathbb{R}$, $E[(\hat{f}_n(t) - \bar{f}(t))^2] \longrightarrow 0$

Démonstration.-

1°) Les conditions de la proposition 1, I sont satisfaites avec $\alpha = \frac{1}{2}$. En effet :

$$-\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=0}^{r} e_i(x)\, e_i(t)\right)^2 dx = \sum_{i=0}^{r} e_i^2(t) \leqslant B(t)\ \sqrt{r}$$

pour r assez grand, d'après la formule (F3).

- On prend par exemple $F = [-\pi, +\pi]$ et $t_o = 0$. Alors $\frac{1}{2\pi} \cdot 1_{[-\pi,+\pi]} \in \mathcal{D}$ et $\sum a_i \, e_i(0)$ converge vers $f(0)$ ([13] page 71) .

- La condition $C_F(0)$ est satisfaite. On prend :

$B_r = [-\frac{1}{2\sqrt{r}}, \frac{1}{2\sqrt{r}}]$. La formule (F1) donne :

$$I = \int_{-1/2\sqrt{r}}^{1/2\sqrt{r}} \left(\sum_{i=0}^{r} e_i(x)\, e_i(0)\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1/2\sqrt{r}}^{1/2\sqrt{r}} \frac{\sin Nx}{x}\, dx + \frac{1}{\pi N}\int_{-1/2\sqrt{r}}^{1/2\sqrt{r}} T^r(0,x)\,dx$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{1/2\sqrt{r}} \frac{\sin Nx}{x}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{N/2\sqrt{r}} \frac{\sin y}{y}\, dy \geq \frac{2}{\pi} \times \delta_1 \frac{\pi}{2} = \delta_1$$

où $\delta_1 \in]0,1[$, car l'intégrale $\int_0^{N/2\sqrt{r}} \frac{\sin y}{y}\, dy$ tend vers $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\sin y}{y}\, dy$ qui est strictement positive.

D'autre part : $|I_2| \leq \frac{L}{\pi N \sqrt{r}}$

Soit $\delta \in]0, \delta_1[$. Pour r assez grand : $|I_2| \leq \delta_1 - \delta$,

d'où :

$$I = I_1 + I_2 \geq I_1 - |I_2| \geq \delta_1 + (\delta - \delta_1) = \delta > 0 .$$

Par conséquent, on peut appliquer les résultats de la proposition 1,I. Donc : (1) $\Longleftrightarrow$ (4) $\Longleftrightarrow$ (3). Comme il est clair que (3) $\Longrightarrow$ (2) il reste à montrer que (2) $\Longrightarrow$ (1). Nous procéderons comme dans la seconde démonstration donnée pour les fonctions trigonométriques.

2°) *Démonstration de* (2) $\Longrightarrow$ (1) .

Lemme 4.- Si f est une densité bornée sur $[a,b]$, nulle en dehors de $[a,b]$, et si son développement en série de fonctions d'Hermite converge au point $t \in [a,b]$, alors : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_o(\varepsilon)$ tel que :

$n \geq N_o(\varepsilon) \Longrightarrow P[|Y_{jn}(t)| > \varepsilon] \leq \frac{M}{n\varepsilon}$, où M est indépendant de n et ε.

Démonstration.-

Puisque $|\sum_{i=0}^{\infty} a_i \, e_i(t)| < +\infty$, et compte tenu de (F2), il suffit de montrer que :

$$P\left[\left|\frac{1}{n\pi} \frac{\sin N\,(t-X_j)}{t - X_j}\right| > \varepsilon\right] \leqslant \frac{M_1}{n\varepsilon}$$

où M_1 est une constante indépendante de n et ε. Or :

$$\left\{\frac{1}{n\pi}\left|\frac{\sin N\,(t-X_j)}{t - X_j}\right| > \varepsilon\right\} \subset \left\{\frac{1}{n\pi}\frac{1}{|t - X_j|} > \varepsilon\right\}$$

Puisque : $\left\{\frac{1}{n\pi}\frac{1}{|t-X_j|} > \varepsilon\right\} = \left\{t - \frac{1}{n\pi\varepsilon} < X_j < t + \frac{1}{n\pi\varepsilon}\right\}$

on a :

$$P\left[\frac{1}{n\pi}\left|\frac{\sin N(t-X_j)}{t - X_j}\right| > \varepsilon\right] \leqslant \int_{t-1/n\pi\varepsilon}^{t+1/n\pi\varepsilon} f(x)\,dx \leqslant \frac{2A}{\pi n\varepsilon} = \frac{M_1}{n\varepsilon}$$

avec : $M_1 = \frac{2A}{\pi}$ et $A = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$

Lemme 5.- Sous les hypothèses du lemme 4, et si $\hat{S}_n(t) \xrightarrow{p} 0$ $(t \in [a,b])$ alors : $\forall\, \varepsilon > 0, \forall\, j$, $n\,P\,[|Y_{jn}(t)| > \varepsilon] \longrightarrow 0$.

Démonstration.- cf. lemme 2 .

Prenons alors $f = \frac{1}{2\,\pi} \cdot 1_{[-\pi,+\pi]}$, et supposons que $\hat{f}_n(0) \xrightarrow{p} f(0)$. Puisqu'alors $f_n(0) \longrightarrow f(0)$ (cf. [13] page 71), ceci entraîne que : $\hat{S}_n(0) \xrightarrow{p} 0$. La formule (F2) s'écrit au point $t = 0$:

$$Z_{jn}(0) = \frac{1}{n\pi}\left[\frac{\sin N\,X_j}{X_j} + \frac{T^{r(n)}(0,X_j)}{N}\right]$$

Comme : $X_j \in [-\pi, +\pi]$, on a : $|T^{r(n)}(0,X_j)| \leqslant L$. Alors l'égalité : $Y_{jn}(0) = Z_{jn}(0) - \frac{1}{n} f_n(0)$ et le lemme 5 impliquent :

$$n\,P\left[\frac{1}{n}\left|\frac{\sin N\,X_j}{X_j}\right| \geqslant \varepsilon\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \,.$$

Une démonstration analogue à celle réalisée pour les fonctions trigonométriques montre alors que : $\frac{N}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, c'est-à-dire $\frac{r(n)}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

II.2. - Convergence simple presque complète.

Proposition 5.- Sous les hypothèses de la proposition 4, une condition nécessaire et suffisante pour que :

$\forall f \in \mathcal{D}, \forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_n(t) \xrightarrow{p.c_o.} \bar{f}(t)$ est que l'on ait :

$$\forall \beta > 0 \ , \quad \sum_n \exp\left[- \beta \frac{n}{\sqrt{r(n)}}\right] < + \infty,$$

Démonstration.- Il suffit de montrer que les conditions (a) et (b) de la proposition 2,I sont satisfaites (on ne suppose plus la convergence simple en moyenne car ici la convergence simple presque complète entraîne que $\frac{\sqrt{r(n)}}{n} \longrightarrow 0$).

Condition (a) - Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrons qu'il existe $A_1(t)$ tel que, pour r assez grand : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sum_{i=0}^{r} e_i(x)\, e_i(t)| \leq A_1(t) \sqrt{r}$.

On a ([12] p. 371) :

$$\sum_{i=0}^{r} e_i(x)\, e_i(t) = \sqrt{\frac{r+1}{2}}\ \frac{e_{r+1}(x)\, e_r(t) - e_{r+1}(t)\, e_r(x)}{t - x}$$

. Si x est tel que : $|t-x| \geq 1$, on a :

$$|\sum_{i=0}^{r} e_i(x)\, e_i(t)| \leq 2\, c^2 \sqrt{\frac{r+1}{2}} \quad \text{où} \quad c = \sup_{i,x} |e_i(x)|$$

$$\leq B_1 \sqrt{r} \qquad \text{pour} \quad r \geq r_1$$

où B_1 est indépendant de t.

. Si x est tel que : $|t-x| < 1$, nous utiliserons les expressions asymptotiques suivantes ([13] p. 67) :

$$H_i(t) \approx 2^{i+1/2} \, . \, i^{i/2} \, . \, e^{-i/2} \, . \, e^{t^2/2} \cos\left(\sqrt{2i+1}\, t + i\,\frac{\pi}{2}\right)$$

Compte tenu de : $i! \approx e^{-i} \, . \, i^i \, \sqrt{2\pi i}$, on obtient :

$$e_i(t) \approx \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{i^{1/4}} \cos\left(\sqrt{2i+1}\, t + i\,\frac{\pi}{2}\right)$$

Il existe donc $i_o(t)$ et $K_1(t)$ tels que, pour $i > i_o(t)$, on ait :

$$|e_i(x)\, e_i(t)| \leqslant \frac{K_1(t)}{\sqrt{i}} \qquad \text{si} \quad |x-t| < 1 \quad .$$

Pour $r > i_o(t)$, on peut donc écrire :

$$\left|\sum_{i=0}^{r} e_i(x)\, e_i(t)\right| \leqslant \left|\sum_{i=0}^{i_o(t)} e_i(x)\, e_i(t)\right| + \left|\sum_{i=i_o(t)+1}^{r} e_i(x)\, e_i(t)\right|$$

$$\leqslant \left|\sum_{i=0}^{i_o(t)} e_i(x)\, e_i(t)\right| + K_1(t) \sum_{i=i_o(t)+1}^{r} \frac{1}{\sqrt{i}}$$

Or, il existe $K_2(t)$ tel que, pour $|x-t| < 1$:

$$\left|\sum_{i=0}^{i_o(t)} e_i(x)\, e_i(t)\right| \leqslant K_2(t) \sum_{i=1}^{i_o(t)} \frac{1}{\sqrt{i}}$$

Posons : $B(t) = 2\, \mathrm{Max}(K_1(t), K_2(t))$. Alors, pour $|t-x| < 1$:

$$\left|\sum_{i=0}^{r} e_i(x)\, e_i(t)\right| \leqslant \frac{B(t)}{2} \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sqrt{i}} \leqslant \frac{B(t)}{2} \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{t}} = B(t)\, \sqrt{r}$$

Si l'on pose : $A_1(t) = \max(B_1, B(t))$, on a finalement :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \, , \left|\sum_{i=0}^{r} e_i(x)\, e_i(t)\right| \leqslant A_1(t)\, \sqrt{r} \quad \text{pour} \quad r \geqslant r_1$$

Condition (b) - Soit f_o une densité strictement positive et continue sur $\mathbb{R}$.

Montrons que, pour $t \in \mathbb{R}$, il existe $A_2(t) > 0$ tel que, pour r assez grand :

$$E_{f_o}\left[\left(\sum_{i=0}^{r} e_i(X_1)\ e_i(t)\right)^2\right] \geq A_2(t)\ \sqrt{r}$$

Posons : $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} e_i(X_1)\ e_i(t) = \sqrt{\frac{r+1}{2}}\, k_r(t,\ X_1)$. Alors :

$$E_{f_o}\left[\left(\sum_{i=0}^{r} e_i(X_1)\ e_i(t)\right)^2\right] = \frac{r+1}{2}\int_{\mathbb{R}} [k_r(t,x)]^2\ f_o(x)\ dx$$

Nous allons montrer qu'il existe $b(t) > 0$ tel que :

$$\sqrt{\frac{r+1}{2}}\int_{\mathbb{R}} [k_r(t,x)]^2\ f_o(x)\ dx \geq b(t)\ , \quad \text{pour } r \text{ assez grand}$$

ce qui entraînera le résultat.

On utilise les formules suivantes ([12] p. 378 - 380) :

$$(1) \qquad \sqrt{\frac{r+1}{2}}\int_{\mathbb{R}} [k_r(t,x)]^2\ dx = \frac{2}{\pi} + \frac{E(t)}{\sqrt{r}}$$

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{-g} [k_r(t,x)]^2\ dx < \frac{2\ \Gamma^2}{r+1}\ ;\ \int_{g}^{+\infty} [k_r(t,x)]^2\ dx < \frac{2\ \Gamma^2}{r+1}$$

où $]-g,+g[$ est un intervalle contenant t, et Γ une constante.

La formule (1) entraîne, pour r assez grand :

$$\sqrt{\frac{r+1}{2}}\int_{\mathbb{R}} [k_r(t,x)]^2\ dx \geq \frac{1}{\pi}$$

et les formules (2) :

$$\sqrt{\frac{r+1}{2}}\int_{\mathbb{R}\setminus[-g,+g]} [k_r(t,x)]^2\ dx < \frac{4\ \Gamma^2}{\sqrt{2}\ \sqrt{r+1}} < \frac{1}{2\pi}$$

la dernière inégalité étant valable pour r assez grand.

Finalement, pour r assez grand :

$$\sqrt{\frac{r+1}{2}}\int_{[-g,+g]} [k_r(t,x)]^2\ dx \geq \frac{1}{2\pi}$$

$$\text{et} \quad \sqrt{\frac{r+1}{2}} \int_{\mathbb{R}} [k_r(t,x)]^2 \, f_o(x) \, dx \geq \sqrt{\frac{r+1}{2}} \int_{[-g,+g]} [k_r(t,x)]^2 \, f_o(x) \, dx$$

$$\geq \frac{m(t)}{2} = b(t) > 0$$

où : $m(t) = \inf\limits_{x \in [-g,+g]} f_o(x)$.

II.3. - Convergence uniforme presque complète et en moyenne uniforme sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$.-

Proposition 6.- Soient $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_{[a,b]}$ l'ensemble des densités définies sur $\mathbb{R}$, bornées et dont le développement en série de fonctions d'Hermite converge vers f uniformément sur $[a,b]$. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que $\forall f \in \mathcal{D}_{[a,b]}$, $E[\sup\limits_{t \in [a,b]} [\hat{f}_n(t) - f(t)|] \longrightarrow 0$ est que l'on ait : $\frac{\sqrt{r(n)}}{n} \text{ Log } n \longrightarrow 0$.

Démonstration.- Montrons que les différentes conditions de la proposition 3, I sont satisfaites.

1°) Prenons $E_1 = [c,d] \supset]a,b[$. Alors $f = \frac{1}{d-c} 1_{[c,d]} \in \mathcal{D}_{[a,b]}$
En effet, le développement en série de f à l'ordre r s'écrit :

$$\sum_{i=0}^{r} a_i \, e_i(t) = E_f[\sum_{i=0}^{r} e_i(X_1) \, e_i(t)]$$

$$= E_f[\frac{1}{\pi} \frac{\sin N(X_1-t)}{x-t} + \frac{T^r(t,X_1)}{\pi N}]$$

$$= \frac{1}{(d-c)\pi} \int_{[c,d]} \frac{\sin N(x-t)}{x-t} \, dx + \frac{1}{(d-c)\pi N} \int_{[c,d]} T^r(t,x) \, dx$$

Si $t \in [a,b]$:

$$\sum_{i=0}^{r} a_i \, e_i(t) - f(t) = \frac{1}{d-c} [\frac{1}{\pi} \int_{N(c-t)}^{N(d-t)} \frac{\sin u}{u} \, du - 1] + \frac{1}{(d-c)\pi N} \int_{[c,d]} T^r(t,x) \, dx$$

$$|\sum_{i=0}^{r} a_i \, e_i(t) - f(t)| \leq \frac{1}{d-c} [|\frac{1}{\pi} \int_{N(c-t)}^{N(d-t)} \frac{\sin u}{u} \, du - 1|] + \frac{L}{\pi N}$$

Or : $\displaystyle\int_{N(c-t)}^{N(d-t)} \frac{\sin u}{u}\,du$ tend vers π, uniformément pour $t \in [a,b]$, lorsque $r \to +\infty$ $\left(N = \frac{\sqrt{2r+3}+\sqrt{2r+1}}{2}\right)$. Par conséquent, $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} a_i\, e_i(t)$ converge vers $f(t)$ uniformément sur $[a,b]$.

2°) Soit $E_2 = [c_1,d_1] \subset [a,b]$. Soit $t \in [c_1,d_1]$.

$$\int_{[c_1,d_1]} \left(\sum_{i=0}^{r} e_i(x)e_i(t)\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_{[c_1,d_1]} \frac{\sin N(t-x)}{t-x}\,dx + \frac{1}{\pi N}\int_{[c_1,d_1]} T^r(t,x)\,dx$$

$$\left|\int_{[c_1,d_1]} \left(\sum_{i=0}^{r} e_i(x)e_i(t)\right)dx\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\left|\int_{N(c_1-t)}^{N(d_1-t)} \frac{\sin u}{u}\,du\right| + \frac{(d_1-c_1)\,L}{\pi N}$$

$$\leqslant 2 + \frac{(d_1-c_1)\,L}{\pi\, N} \leqslant 3$$

la dernière inégalité étant valable pour r assez grand.

3°) On considère la suite de partitions de $[c_1,d_1[$:

$$I_{n,t} = \left[c_1(t-1)\frac{\ell_1}{k(n)}\, ,\; c_1 + t\,\frac{\ell_1}{k(n)}\right[\qquad \begin{array}{l} k(n) = [\sqrt{r(n)}\,] \\ t = 1,2,\ldots,k(n) \\ \ell_1 = d_1 - c_1 \end{array}$$

Alors :

$$\int_{\bigcup_{s=1}^{j} I_{n,t_s}} \left(\sum_{i=0}^{r(n)} e_i(x)e_i(\xi)\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{\bigcup_{s=1}^{j} I_{n,t_s}} \frac{\sin N(\xi-x)}{\xi-x}\,dx + \frac{1}{\pi N}\int_{\bigcup_{s=1}^{j} I_{n,t_s}} T^r(\xi,x)\,dx$$

Soit ξ le milieu de I_{n,t_1} : $\xi = c_1 + (t_1 - \frac{1}{2})\,\frac{\ell_1}{k(n)}$

Alors :

$$\int_{\bigcup_{s=1}^{j} I_{n,t_s}} \frac{\sin N(\xi-x)\,dx}{\xi-x} = \int_{\bigcup_{s=1}^{j} I'_{n,t_s}} \frac{\sin u}{u}\,du$$

où : $$I'_{n,t_s} = \left[\frac{N}{k(n)}\ell_1(t_s - t_1 - \tfrac{1}{2}),\ \frac{N}{k(n)}\ \ell_1\ (t_s - t_1 + \tfrac{1}{2})\right[$$

$$\int_{\bigcup_{s=1}^{j} I'_{n,t_s}} \frac{\sin u}{u}\,du = \int_{-N/k(n)\,\frac{\ell_1}{2}}^{N/k(n)\,\frac{\ell_1}{2}} \frac{\sin u}{u}\,du + \int_{\bigcup_{s=2}^{j} I'_{n,t_s}} \frac{\sin u}{u}\,du$$

On peut choisir ℓ_1 plus petit que π. Alors, pour n assez grand, il existe $\delta_1 \in \,]0,1[$ et $\varepsilon_1 > 0$ tels que :

$$\int_{-N/k(n)\,\frac{\ell_1}{2}}^{N/k(n)\,\frac{\ell_1}{2}} \frac{\sin u}{u}\,du \geq \pi(\delta_1+\varepsilon_1) \qquad \left(\frac{N}{k(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2}\right)$$

Or, puisque : $1 \leq j \leq \varepsilon\, k(n)$:

$$\left|\frac{1}{\pi N}\int_{\bigcup_{s=1}^{j} I_{n,t_s}} T^r(\xi,x)\,dx\right| \leq \frac{L}{\pi N} \times j\,\frac{\ell_1}{k(n)} \leq \frac{\varepsilon\,\ell_1\,L}{\pi N} \leq \varepsilon_1$$

la dernière inégalité étant valable pour n assez grand.

Alors, pour un choix de $t_1,\ldots,t_j$ rendant : $\displaystyle\int_{\bigcup_{s=2}^{j} I'_{n,t_s}} \frac{\sin u}{u}\,du \geq 0$,

on a :

$$\int_{\bigcup_{s=1}^{j} I_{n,t_s}} \left(\sum_{i=0}^{r(n)} e_i(x)e_i(\xi)\right) dx \geq \delta_1$$

ce qui est la condition $C_{[a,b]}(\delta_1)$.

Il reste à montrer que, n et j étant fixés, il existe une proportion $p > 0$ de j-uples $(t_1,\ldots,t_j)$ pour lesquels $\displaystyle\int_{\bigcup_{s=2}^{j} I'_{n,t_s}} \frac{\sin u}{u}\,du \geq 0.$

Il suffit de choisir ℓ_1 assez petit pour que le résultat soit trivial avec $p = \frac{1}{4}$ par exemple.

4°) Les conditions (a) et (b) sont vérifiées.

. (b) découle de la formule (F3)

. (a) . Il suffit de reprendre la démonstration faite à la proposition 5 (condition (a)) pour constater qu'il est possible lorsque $t \in [a,b]$ de remplacer $A_1(t)$ par une constante ne dépendant que de $[a,b]$.

Par ailleurs $K_r(x,t)$ est Lipschitzienne en t uniformément par rapport à x. En effet ([7] p. 84) :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |e_i'(t)| \leq c[2(i+1)]^{1/2} , \quad c \text{ constante} .$$

Par conséquent la proposition 3,I s'applique.

Corollaire.- Sous les hypothèses de la proposition 6, une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait à la fois :

$$\forall f \in \mathcal{D}_{[a,b]} , \sup_{t\in[a,b]} |\hat{f}_n(t) - f(t)| \xrightarrow{p.c_o} 0 \quad \text{et} \quad E[\sup_{t\in[a,b]} |\hat{f}_n(t) - f(t)|| \longrightarrow 0$$

est que l'on ait : $\dfrac{\sqrt{r(n)}}{n} \operatorname{Log} n \longrightarrow 0$.

II.4. - Convergence presque complète uniforme sur $\mathbb{R}$.-

Lemme 6.- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_o(\varepsilon) \mid n \geq n_o(\varepsilon) \Longrightarrow \sup_{|t|>r(n)} |\hat{S}_n(t)| \leq \varepsilon$

Démonstration.- Le $j^{\text{ième}}$ polynôme d'Hermite peut s'écrire ([12] p. 306) :

$$H_j(t) = \sum_{k=0}^{[j/2]} (-1)^{k+j} \frac{j(j-1)\ \dots\ (j-2k+1)}{k!} (2t)^{j-2k}$$

d'où , pour $|t| \geq \frac{1}{2}$:

$$|H_j(t)| \leq (\sum_{k=0}^{[j/2]} \frac{j^k}{k!}) (2|t|)^j < (2e|t|)^j$$

Donc, pour $|t| \geq \frac{1}{2}$:

$$|e_j(t)| \leq (2^j \cdot j! \cdot \pi^{1/2})^{-1/2} (2e|t|)^j e^{-t^2/2}$$

et : $|e_j(t)| \leq |t|^j \, e^{-t^2/2}$ pour $j > j_o$

car $(2^j \, j! \, \pi^{1/2})^{-1/2} \, (2e)^j \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$

Alors :

$$|\hat{S}_n(t)| = |\sum_{i=0}^{r(n)} (\hat{a}_{i_n} - a_i) \, e_i(t)| \leq \sum_{i=0}^{r(n)} |\hat{a}_{i_n} - a_i| \, |e_i(t)|$$

$$\leq 2 \, c \sum_{i=0}^{r(n)} |e_i(t)| \ , \quad \text{où} \quad c = \sup_{i,x} |e_i(x)|$$

$$|\hat{S}_n(t)| \leq 2 \, c \, [\sum_{i=0}^{j_o} |e_i(t)| + \sum_{i=j_o+1}^{r(n)} |t| \, e^{-t^2/2}]$$

Puisque $e_i(t) \xrightarrow[|t|\to+\infty]{} 0$, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $A > 0$ tel que : $|t| \geq A \Longrightarrow 2 \, c \sum_{i=0}^{j_o} |e_i(t)| \leq \varepsilon/2$.

Posons : $$R_n(t) = 2 \, c \sum_{i=j_o+1}^{r(n)} |t|^i \, e^{-t^2/2}$$

$$|R_n(t)| \leq 2 \, c \, r(n) \, . \, |t|^{r(n)} \, e^{-t^2/2}$$

Pour $|t| > r(n)$:

$$|R_n(t)| \leq 2 \, c \, |t|^{|t|+1} \, e^{-t^2/2} = 2 \, c \, \exp[- \frac{t^2}{2} (1 - 2 \frac{\text{Log} \, |t|}{|t|} - 2 \frac{\text{Log} \, |t|}{|t|^2})]$$

Soit $B > 0$ tel que, pour $|t| > B$, on ait :

$$1 - 2 \frac{\text{Log} \, |t|}{|t|} - 2 \frac{\text{Log} \, |t|}{t^2} \geq \frac{1}{2}$$

Alors, pour $|t| > B$: $|R_n(t)| \leq 2 \, c \, e^{-t^2/4}$.

Soit $C > 0$ tel que, pour $|t| \geq C$: $2 \, c \, e^{-t^2/4} < \varepsilon/2$.

Soit $n_o(\varepsilon)$ tel que, pour $n \geq n_o(\varepsilon)$: $r(n) \geq \max(A,B,C)$.

Alors, pour $n \geq n_o(\varepsilon)$, on a :

$$|\hat{S}_n(t)| \leq \varepsilon \ , \quad \text{dès que} \quad |t| > r(n) \, .$$

Proposition 7.- Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des densités définies et bornées sur $\mathbb{R}$, dont le développement en série de fonctions d'Hermite converge uniformément vers $f(t)$. Alors une condition suffisante pour que :
$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\hat{f}_n(t) - f(t)| \xrightarrow{p.c_o} 0$ est que l'on ait : $\frac{r(n)}{n} \text{Log } n \longrightarrow 0$.

Démonstration.-

1°) Nous utiliserons l'inégalité de Hoeffding ([14] p. 58) donnée au lemme 5, I, où les variables aléatoires $\tilde{Y}_{j_n}(t)$ seront majorées par $2\,c^2\,r(n)$ (avec : $c = \sup_{i,x} |e_i(x)|$) et où

$$\int_{\mathbb{R}} (K_{r(n)}(x,t))^2\,dx = \int_{\mathbb{R}} (\sum_{i=0}^{r(n)} e_i(x)\,e_i(t))^2\,dx \leq c^2\,(r(n) + 1)$$

Dans ces conditions, on obtient pour n assez grand :

$$P[\hat{S}_n(t) \geq \varepsilon] = P[\tilde{S}_n(t) \geq n\,\varepsilon] \leq \exp[-\,\rho_1\,\varepsilon\,\frac{n}{r(n)}]$$

avec ρ_1 indépendant de t.

2°) Il suffit de démontrer que : $\sup_{t\in\mathbb{R}} |\hat{S}_n(t)| \xrightarrow{p.c_o} 0$. Or d'après le lemme 6, pour n assez grand :

$$P[\sup_{t\in\mathbb{R}} |\hat{S}_n(t)| \geq \varepsilon] = P[\sup_{t\in[-r(n),r(n)]} |\hat{S}_n(t)| \geq \varepsilon]$$

Considérons les nombres t_i définis par :

$$t_i = -\,r(n) + i\,\frac{2}{(r(n))^3}\quad,\quad i = 1,2,\ldots,(r(n))^4$$

Soit $t \in [-\,r(n), +\,r(n)]$. Il existe $i \in \{1,2,\ldots,(r(n))^4\}$ tel que $t_i \leq t \leq t_{i+1}$. Dans ces conditions, puisque $K_r(x,t)$ est Lipschitzienne en t d'ordre 1 et de constante $C\,r^2$:

$$|\hat{S}_n(t) - \hat{S}_n(t_i)| \leq 4\,\frac{C}{r(n)}$$

Donc :

$$\sup_{t\in[-r(n),r(n)]} |\hat{S}_n(t)| \leq \sup_{i=1,2,\ldots,r(n))^4} |\hat{S}_n(t_i)| + \frac{4C}{r(n)}$$

Pour n assez grand :

$$P[\sup_{t\in[-r(n),+r(n)]} |\hat{S}_n(t)| \geq \varepsilon] \leq P[\sup_{i=1,\ldots,(r(n))^4} |\hat{S}_n(t_i)| \geq \varepsilon/2]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{(r(n))^4} P[|\hat{S}_n(t_i)| \geq \varepsilon/2]$$

$$\leq 2(r(n))^4 \exp[- \rho_1 \frac{\varepsilon}{2} \frac{n}{r(n)}]$$

la dernière inégalité découlant du 1°).

Finalement, on a :

$$P[\sup_{t\in\mathbb{R}} |\hat{S}_n(t) | \geq \varepsilon] \leq 2(r(n))^4 \exp[- \beta \frac{n}{r(n)}]$$

où β ne dépend pas de n. D'où le résultat.

Remarque.- On peut également montrer, comme au lemme 8, I, que $\frac{r(n)}{n}$ Log n $\longrightarrow 0$ est une condition suffisante pour que $E[\sup_{t\in\mathbb{R}} |\hat{f}_n(t) - f(t)|] \longrightarrow 0$, sous les hypothèses de la proposition 7.

REFERENCES

[2] M. BERTRAND-RETALI - Comptes-Rendus, ser. A, 1974, p. 451.

[20] M. BERTRAND-RETALI et M. GEFFROY - *Sur la convergence uniforme des estimateurs d'une densité de probabilité.* Publications internes de l'Université de Paris VI.

[7] D. BOSQ - *Contribution à la théorie de l'estimation fonctionnelle (1ère partie).* Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, XIX, fasc. 2, 1970.

[4] N.N. CENCOV - *Evaluation of an unknown distribution density from observations.* Soviet Maths 3 p. 1559 - 62 (1962).

[16] DEHEUVELS - Comptes-Rendus, 278, ser. A, 1974, p. 1449.

[11] R.E. EDWARDS - Fourier series - 1967.

[15] A. FÖLDES et P. REVESZ - *A general method for density estimation.* Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 9 (1974) p. 81 - 92.

[3] J. GEFFROY - Comptes-Rendus, ser. A, 1974, p. 1449

[6] R. KRONMAL et M. TARTER - *The estimation of probability densities and cumulatives by Fourier series methods.* J. Amer. Stat. Assoc. 63 p. 925-952.

[13] N.N. LEBEDEV - *Special functions and their applications.*

[17] LOËVE M. - *Probability theory.* Van Nostrand, New-York.

[8] MORAN - *An introduction to probability theory.* Oxford 1968.

[19] NADARAYA - *On non parametric estimates of density functions and regression curves.* Theor. Prob. Anyl. 10 p. 186 - 190 (1965).

[9] NEVEU - *Martingales à temps discret.*

[18] PARZEN E. - *On estimation of a probability density function and mode.*
Ann. Math. Stat. 33 p. 1065 - 1076 (1962).

[14] PETROV - *Sums of independent random variables.*

[1] M. ROSENBLATT - *Remarks on some non parametric estimates of a density function.*
A.M.S. 27 p. 832 - 37 (1956).

[12] SANSONE - *Orthogonal functions.* 1959.

[5] S.C. SCHWARZ - *Estimation of probability density by an orthogonal series.*
A.M.S., 38 p. 1261 - 1265.

[10] I. SINGER - *Bases in Banach Spaces I* - 1970.