

0376  
1976  
169

N° d'ordre : 194

50376  
1976  
169

# THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR INGENIEUR

par

**QUET Roland**

Ingénieur I.D.N.

**CONTRIBUTION A LA COMMANDE OPTIMALE DES**

**SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS ET DISCRETS**



Soutenu le 13 Décembre 1976 devant le Jury d'examen :

- M. C. MAIZIERES
- M. J.C. GENTINA
- M. F. LAURENT
- M. G. MANESSE
- M. D. GUINET

- Président
- Rapporteur
- Examinateur
- Examinateur
- Invité

A ma femme

*A mes parents*

*A mes beaux-parents*

## Avant - Propos

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire de Systématique de l'Université des Sciences et des Techniques de Lille I.

Nous sommes particulièrement sensible à l'honneur que Monsieur le Professeur Maizières nous a fait en acceptant de présider notre Jury de Thèse. Qu'il trouve ici l'expression de notre vive reconnaissance.

Nous voulons exprimer notre profonde gratitude à Monsieur Laurent, Maître de Conférences à l'Université de Lille I et Directeur du Laboratoire de Systématique qui a bien voulu nous accueillir au sein de son équipe.

Nous sommes très redevable envers Monsieur Jean-Claude Gentina, Maître-Assistant Docteur à l'Université de Lille I et responsable du Laboratoire d'Automatique de l'Institut Industriel du Nord pour nous avoir guidé et conseillé tout au long de l'élaboration de cette thèse. Nous le remercions de façon toute particulière pour l'aide efficace et patiente qu'il nous a apportée dans la composition de ce mémoire dont la rédaction fut rendue plus difficile par l'éloignement où nous nous trouvions du fait de notre profession. Qu'il trouve ici l'expression de notre profonde sympathie.

Nous sommes tout particulièrement heureux que Monsieur Manesse, Maître-Assistant à l'Université de Lille I et chargé de cours au CNAM ait bien

*voulu participer à notre Jury de thèse.*

*Nous tenons à remercier vivement Monsieur Dominique Guinet, Ingénieur Principal à la Société SESA d'avoir bien voulu participer à notre Jury de Thèse. Nous voulons lui dire le plaisir que sa présence nous apporte.*

*Nous voulons exprimer notre sympathie à Monsieur Pierre Borne et le remercier pour l'intérêt qu'il a porté à notre travail.*

*Nous tenons maintenant à exprimer toute notre amitié à chacun des membres de notre équipe de recherches.*

## INTRODUCTION GENERALE

Les problèmes relatifs à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus linéaires ont été abordés par différentes méthodes. Tout d'abord, la recherche pour un processus linéaire de commandes à caractère continu a permis le développement d'outils mathématiques appropriés. Ainsi, la transformée de Laplace /1-10/ conduit à transposer dans le domaine fréquentiel le problème de synthèse posé dans le domaine temporel. Les hypothèses de linéarité et de stationnarité sont dans ce cas fondamentales.

Les développements récents de l'informatique industrielle entraînent une utilisation croissante des calculateurs "temps réel" dans le domaine de l'automatique, et en particulier en régulation. Dans ces conditions, la transposition au domaine échantillonné des problèmes de synthèse et d'analyse des systèmes continus a conduit à l'utilisation de la transformée en Z /1-11/.

Dans l'intention d'unifier les méthodes d'étude des systèmes linéaires continus et discrets, Steiglitz puis Bozzo /1-12/ ont été amenés à définir la transformée en  $\xi$ . Cet opérateur permet d'établir un isomorphisme entre l'espace des signaux continus et celui des signaux discrets /1-13/ et ainsi de traiter de manière parallèle la synthèse des filtres continus et échantillonnés.

L'étude des systèmes peut aussi être envisagée en utilisant le concept d'état. Cette approche permet également d'étendre le parallèle entre les méthodes d'étude des systèmes continus et des systèmes discrets, qu'il s'agisse cette fois de processus multivariables linéaires ou éventuellement non linéaires. Dans ce but, une transformation de type homographique des opérateurs caractéristiques de l'évolution du système /1-2/, conduit à associer un processus discret à un processus continu.

Nous envisageons de présenter, au cours de ce mémoire, l'application de cette transformation aux problèmes de synthèse des systèmes continus en utilisant les résultats de la théorie de la commande optimale. /1-14/.

Dans un premier chapitre, nous proposons de rappeler les définitions relatives à cette transformation.

Une seconde partie concerne la recherche d'une solution quasi-optimale d'un problème optimal continu et l'estimation théorique de l'approximation ainsi réalisée.

La transformation homographique peut, d'autre part, être interprétée comme une méthode numérique d'intégration et cela nous conduit, dans une troisième étape, à rechercher les solutions d'un système d'équations différentielles de Riccati.

L'illustration de ces méthodes, sur un exemple, est envisagée dans une dernière partie et concerne l'étude de la commande optimale d'un moteur.

CHAPITRE I

---

DISCRETISATION D'UN SYSTEME CONTINU :

TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE



DISCRETISATION D'UN SYSTEME CONTINU : TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE

INTRODUCTION

La description et l'étude d'un processus linéaire par les méthodes fréquentielles conduit à une détermination rapide des dispositifs de réglage assurant un comportement convenable en régime permanent.

L'extension de ces techniques à des systèmes complexes (multivariables, non linéaires) leur fait perdre leur principal avantage de simplicité.

La description d'un système par les variables d'état /1-1/ permet d'en préciser les paramètres caractéristiques et de définir un vecteur significatif de son évolution. Cette méthode se prête à l'utilisation des techniques numériques de calcul et conduit à introduire la notion de modèle discret d'un processus continu linéaire ou non linéaire.

Dans ce sens, il a été proposé, /1-2/ /1-3/ d'associer à une classe de processus continus une classe de systèmes discrets à partir d'une transformation homographique des opérateurs caractéristiques de son évolution.

Dans un premier temps, nous proposons après avoir précisé la classe des systèmes continus abordés dans cette étude, de rappeler la définition d'une transformation homographique de ce type. Nous comparerons, ensuite les propriétés essentielles des processus continu et discret associés.

1.1. Représentation des systèmes dans l'espace d'état :

L'état d'un système, à un instant  $t$ , peut être défini, comme l'ensemble des valeurs des paramètres permettant de préciser son évolution future. Dans ce sens, si l'on exclut les systèmes à constantes non localisées, l'état d'un système de dimension finie est caractérisé par les  $q$  composante  $x_j$  d'un vecteur  $x$  défini sur  $R^q$ .

Afin de préciser les notations, nous envisageons l'évolution d'un processus sur l'intervalle  $\mathcal{C}$  ;  $t_0$  définissant l'instant initial, la variable  $t$  étant constamment croissante à partir de  $t_0$

$$\begin{array}{l}
t_0 \in \mathcal{C}_0 \quad \mathcal{C}_0 \in ] - \infty, + \infty [ \\
t \in \mathcal{C} \quad \mathcal{C} \in [ t_0, + \infty [
\end{array}$$

connaissant l'état initial  $x_0 \in R^q$  à l'instant  $t_0$  et les  $r$ , composantes  $u_k$  du vecteur de commande  $u \in R^r$  sur l'intervalle de temps  $[t_0, t]$  l'état d'un processus dynamique à l'instant  $t$  peut se définir par une fonction de transition de la forme :

$$x(t) = \Phi(x_0 ; u(t_0, t) ; t)$$

où  $\phi$  est une application de  $R^q \times R^r \times \mathcal{E}$  dans  $R^q$  supposée continue ou continue par morceaux par rapport à  $x_0$  pour  $t$  et  $t_0$  fixés et par rapport à  $t$  pour  $x_0$  et  $t_0$  fixés.

Les processus dynamiques à états continus sont généralement représentés par l'équation (1-2). Nous préciserons ultérieurement la classe des fonctions  $f$  retenues pour cette étude

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad 1-2$$

$f$  est une application de  $\mathcal{E} \times R^q \times R^r$  dans  $R^q$  vérifiant la condition de Lipshitz /1-4/.

Les informations captées sur le processus sont représentées par les  $m$  composantes  $y_j$  d'un vecteur de sortie  $y \in R^m$  ( $m \leq q$ ) dépendant de l'état du système et de l'entrée. Nous notons :

$$y = g(t, x(t), u(t)) \quad 1-3$$

où  $g$  est une application de  $\mathcal{E} \times R^q \times R^r$  dans  $R^m$  supposée continue ou continue par morceaux par rapport à  $t$ .

L'ensemble des équations (1-2) et (1-3) constitue un modèle mathématique décrivant l'évolution du processus.

Les systèmes physiques représentés à partir d'un système d'équations différentielles, peuvent être décrits sous forme matricielle. A titre d'illustration, nous proposons en Annexe 1-1 un exemple emprunté au domaine de l'aéronautique.

Les systèmes retenus dans cette étude peuvent être rattachés à la classe des processus linéaires stationnaires ou non stationnaires décrits par une équation d'état de la forme (1-4) représentée selon le schéma de la figure 1-1.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B u \\ y &= C x \end{aligned} \quad 1-4$$

$x$ ,  $y$  et  $u$  sont respectivement les vecteurs d'état, de sortie et d'entrée à l'instant  $t$ , de dimensions respectives :  $q$ ,  $m \leq q$  et  $r \leq q$ .

$A$  est une matrice fonctionnelle de dimension  $q \times q$  dépendant éventuellement du temps  $t$ , et d'éléments  $a_{ij}$

$$A(t) : \mathcal{E} \rightarrow R^q \times q$$

Ce tableau caractérise l'évolution du système en régime autonome à partir de conditions initiales  $x_0$ .

$B$  est une matrice fonctionnelle dépendant éventuellement du temps  $t$ , de dimension  $q \times r$  et d'éléments  $b_{ik}$ .

$$B(t) : \mathcal{E} \rightarrow R^q \times r$$

Ce tableau traduit l'influence des  $r$  entrées  $u_k$  sur l'état du système à l'instant  $t$ .

$C$  est une matrice fonctionnelle dépendant éventuellement du temps  $t$ , de dimension

$m \times q$  et d'éléments  $c_{ij}$   
 $C(t) : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^m \times q$

Ce tableau précise la nature des informations réellement captées sur le système.

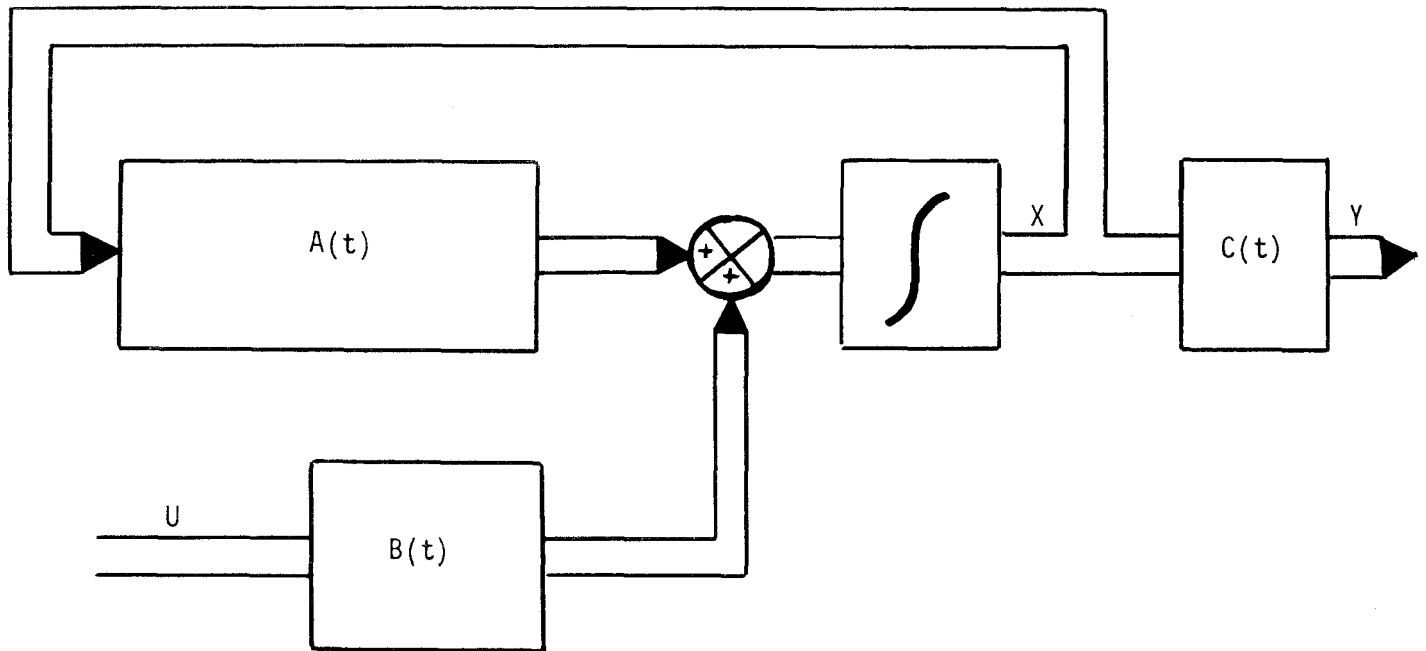


FIGURE 1-1

1.2. Définition de la transformation homographique :

La détermination d'un modèle discret d'un processus continu linéaire ou non linéaire peut être envisagée par une transformation portant sur la matrice fonctionnelle qui caractérise l'évolution du régime autonome du système étudié. Dans la représentation continue du système linéaire décrit par les équations 1-4, il s'agit de la matrice A.

Une démarche analogue a déjà été utilisée /1-5/ pour l'étude de la stabilité des systèmes continus linéaires au moyen de la seconde méthode de Lyapunov. Dans cette étude la condition de stabilité en régime autonome du système (1-4) peut être déduite de celle d'un système discret associé de la forme suivante :

$$x_{k+1} = (I+A) (I-A)^{-1} x_k \quad 1-5$$

Le choix de la fonction de Lyapunov  $v$ ,  $v : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^+$  notée  $v = x^T x$  permet de vérifier rapidement cette propriété.

Une condition de stabilité du système continu (1-4) s'obtient à partir du calcul de la dérivée eulérienne de la fonction  $v$  le long des solutions du système (1-4).

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -x^T Q x \\ Q &= -(A^T + A) \end{aligned}$$

d'où la condition suffisante de stabilité asymptotique :

$$\max \left\{ \operatorname{Re} \mu_{A+A^T} \right\} < 0$$

exprimant que la matrice symétrique Q est définie positive.

Une fonction de Lyapunov de même type  $v_k = x_k^T x_k$  utilisée pour le système discret (1-5) conduit au calcul de la différence finie  $\Delta v$ .

$$\Delta v = v_{k+1} - v_k = x_k^T (S - I) x_k \quad 1-6$$

où

$$\begin{aligned} S &= H^T(A) H(A) \\ H(A) &= (I + A) (I - A)^{-1} \end{aligned}$$

d'où la condition suffisante de stabilité :

$$\max \left\{ |\lambda|_{H(A)} \right\} < 1$$

Ces deux conditions sont équivalentes. En effet, la valeur propre de plus grand module de  $H(A) = (I + A) (I - A)^{-1}$  notée  $|\lambda_j|$  est la transformée homographique de la valeur propre de plus grande partie réelle  $\mu_j$  de A et, dans le cas linéaire, la condition de stabilité /1-6/.  $\operatorname{Re}(\mu_j) < 0$  est équivalente à  $\max |\lambda|_{H(A)} < 1$ .

Cette transformation se présente donc comme une généralisation de la transformée en W /1-7/ qui à l'intérieur du cercle de rayon 1, fait correspondre le demi plan complexe  $\operatorname{Re} \mu < 0$ .

Sur cette idée, il semble donc possible d'associer un processus discret à un processus continu et nous proposons de définir les notations adaptées à cette transformation.

Bien que le résultat soit valable en non linéaire, de façon à simplifier la présentation, les calculs seront conduits à partir de l'hypothèse linéaire.

Soit un processus discret dont nous observons l'évolution sur l'intervalle  $[n_0, n]$ ;  $n_0$  définissant l'indice initial, la variable n étant constamment croissante à partir de  $n_0$ .

$$\begin{aligned} n_0 &\in N_0 & N_0 &= -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, +\infty \\ n &\in N & N &\in n_0, \dots, +\infty \end{aligned}$$

Connaissant l'état initial  $x_0 \in R^q$  et le vecteur de commande  $u(0,n)$  sur la

séquence  $[0, n]$  ; l'état du processus discret à la séquence  $n$  peut se définir par une fonction de transition de la forme :

$$x_n = \phi(n, x_0, u(0, n)) \quad 1-7$$

où  $\phi$  est une application de  $N \times R^q \times R^r$  dans  $R^q$ .

Les systèmes discrets envisagés dans cette étude peuvent être rattachés à la classe des processus discrets linéaires stationnaires ou non stationnaires décrits par une équation d'état de la forme 1-8 :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= M x_n + F u_n \\ y_n &= G x_n \end{aligned} \quad 1-8$$

$x_n$ , vecteur d'ordre  $q$ , caractérise l'état du processus discret pour l'indice  $n$ .

$y_n$ , vecteur de sortie d'ordre  $m \leq q$ .

$u_n$ , vecteur d'entrée d'ordre  $r \leq q$ .

$M$ , tableau de dimension  $q \times q$  et d'éléments  $m_{ij}$  dépendants de l'indice  $n$  :

$$M(n) : N \rightarrow R^q \times q$$

Ce tableau caractérise l'évolution du système à partir de conditions initiales  $x_0$  en l'absence de toute entrée (régime autonome).

$F$ , tableau de dimension  $q \times r$  et d'éléments  $f_{ik}$  dépendants de l'indice  $n$  :

$$F(n) : N \rightarrow R^q \times r$$

Ce tableau traduit l'influence des  $r$  entrées sur l'état du système pour l'indice  $n$ .

$G$ , tableau de dimension  $m \times q$  et d'éléments  $g_{lj}$  dépendants de l'indice  $n$  :

$$G(n) : N \rightarrow R^m \times q$$

Ce tableau exprime la nature des informations captées sur le système.

Exprimons, à partir d'une transformation simple, l'effet du vecteur  $(x_{n+1} + x_n)/2$  sur la différence finie  $(x_{n+1} - x_n)$  ; pour ce faire, calculons chacune de ces quantités :

$$\begin{aligned} (x_{n+1} + x_n)/2 &= ((I + M)/2)x_n + F/2 u_n \\ (x_{n+1} - x_n) &= (M - I)x_n + F u_n \end{aligned} \quad 1-9$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= (M - I) \left( (I + M)/2 \right)^{-1} \left( (x_{n+1} + x_n)/2 \right) \\ &\quad + \left( (M + I)/2 \right)^{-1} F u_n \end{aligned} \quad 1-10$$

de même en continu, exprimons le vecteur  $x + \dot{x}/2$  en fonction de  $x - \dot{x}/2$  en tenant compte de 1-4, il vient :

$$\begin{aligned} x + \dot{x}/2 &= (I + A/2)x + B/2 u \\ x - \dot{x}/2 &= (I - A/2)x - B/2 u \end{aligned}$$

soit :

$$(x + \overset{\circ}{x}/2) = (I + A/2) (I - A/2)^{-1} (x - \overset{\circ}{x}/2) + (I - A/2)^{-1} B u \quad 1-11$$

Les équations 1-10 et 1-11 conduisent à introduire deux fonctions matricielles de type homographique notées H et H' :

$$H(D) = (I + D/2) (I - D/2)^{-1} \quad 1-12$$

$$H'(D) = (D - I) ((D + I)/2)^{-1} \quad 1-13$$

D est une matrice carrée d'ordre q, pour laquelle nous supposons qu'il existe des inverses telles que définies dans ces deux relations.

Calculons  $(H(D) - I)$  et  $(H(D) + I)/2$ , il vient :

$$\begin{aligned} (H(D) - I) &= (I + D/2) (I - D/2)^{-1} - I \\ &= D(I - D/2)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (H(D) + I)/2 &= ((I + D/2) (I - D/2)^{-1} + I)/2 \\ &= (2I(I - D/2)^{-1})/2 = (I - D/2)^{-1} \end{aligned}$$

et la transformation H' est inverse de la transformation H. En effet :

$$\begin{aligned} H'(H(D)) &= (H(D) - I) ((H(D) + I)/2)^{-1} \\ &= D(I - D/2)^{-1} (I - D/2) = D \end{aligned} \quad 1-11$$

Cette transformation matricielle H et son inverse permettent d'associer respectivement aux deux systèmes continu et discret définis par (1-4) et (1-8) les représentations discrètes et continues (1-14) et (1-15).

$$z_{n+1} = H(A) z_n + (I - A/2)^{-1} B u_n \quad 1-14$$

$$\overset{\circ}{z} = H^{-1}(M) z + ((M + I)/2)^{-1} F u \quad 1-15$$

La fonction de matrice  $(I + A/2) (I - A/2)^{-1}$  est la matrice fonctionnelle discrète caractérisant le comportement en régime libre du système. Elle est déduite, par la transformation matricielle H, de la matrice fonctionnelle continue A.

La fonction de matrice  $(I - A/2)^{-1} B$  traduit sur le plan discret l'influence de la commande sur le système. Elle est obtenue par composition des deux matrices A et B.

La relation liant le système original (continu ou discret) et son transformé homographique (resp : discret ou continu) peut être précisée en indiquant que le vecteur d'état  $x$  du système continu (resp :  $x_n$  discret) est associé au vecteur d'état  $z_n$  du modèle discret (resp :  $z$  continu) suivant le schéma de la figure 1-2

$$\begin{array}{ll}
 z_{n+1} \xrightarrow{\quad} x + \dot{x}/2 & z \xrightarrow{\quad} (x_{n+1} + x_n)/2 \\
 z_n \xrightarrow{\quad} x - \dot{x}/2 & z \xrightarrow{\quad} x_{n+1} - x_n
 \end{array} \quad 1-16$$

FIGURE 1-2

### 1.3. Etude des propriétés pour les systèmes linéaires

Dans l'hypothèse linéaire, la transformation homographique implique, par définition, l'équivalence des conditions de stabilité du système continu et du modèle discret associé.

Dans cette hypothèse, il est également possible de démontrer la conservation du principe de dualité.

#### Dualité

Pour un fonctionnement en régime autonome du système décrit par l'équation d'état 1-17, le système adjoint s'écrit sous la forme 1-18.

$$\dot{x} = Ax \quad 1-17$$

$$\dot{\psi} = -A^T \psi \quad 1-18$$

avec  $x^T \psi = \text{cste.}$

La transformation homographique précédemment définie en 1-12 permet d'associer au système adjoint (1-18) un système adjoint discret.

En effet, le modèle discret associé par homographie au système continu 1-17 est noté :

$$z_{n+1} = H(A) z_n \quad 1-19$$

Le modèle discret associé par la transformation H au système continu adjoint s'écrit 1-20 :

$$\psi + \psi/2 = (I + (-A^T)/2) (I - (-A^T)/2)^{-1} (\psi - \psi/2) \quad 1-20$$

Compte tenu de la définition (1-12) et en notant  $\xi_n$  le vecteur associé au vecteur continu adjoint  $\psi$ , il vient :

$$\xi_{n+1} = ((H(A))^T)^{-1} \xi_n \quad 1-21$$

Il s'agit du système adjoint du système discret 1-19.

### Commandabilité

La condition de commandabilité d'un système linéaire décrit par la relation 1-4 peut s'exprimer simplement au moyen des composantes  $z_i$  de la matrice A, il vient :

$$\text{commandabilité de (1-4)} \rightarrow \text{rang} (z_1^A B, z_2^A B, \dots, z_{q_1}^A B) = n.$$

Les matrices A et H(A) ayant même composantes /1-9/, les conditions nécessaires et suffisantes de commandabilité des systèmes 1-4 et 1-14 sont identiques.

### Observabilité

Les propriétés d'observabilité et de commandabilité s'échangent par dualité.

Nous en déduisons, compte tenu des résultats précédents, l'équivalence des propriétés d'observabilité des système continu et discret associés par la transformation homographique H.

Des propriétés analogues peuvent être mises en évidence pour le système discret et son transformé continu par la transformation inverse  $H^{-1}$ .

L'ensemble de ces propriétés peut être simplement résumé sur le schéma de la figure 1-3.



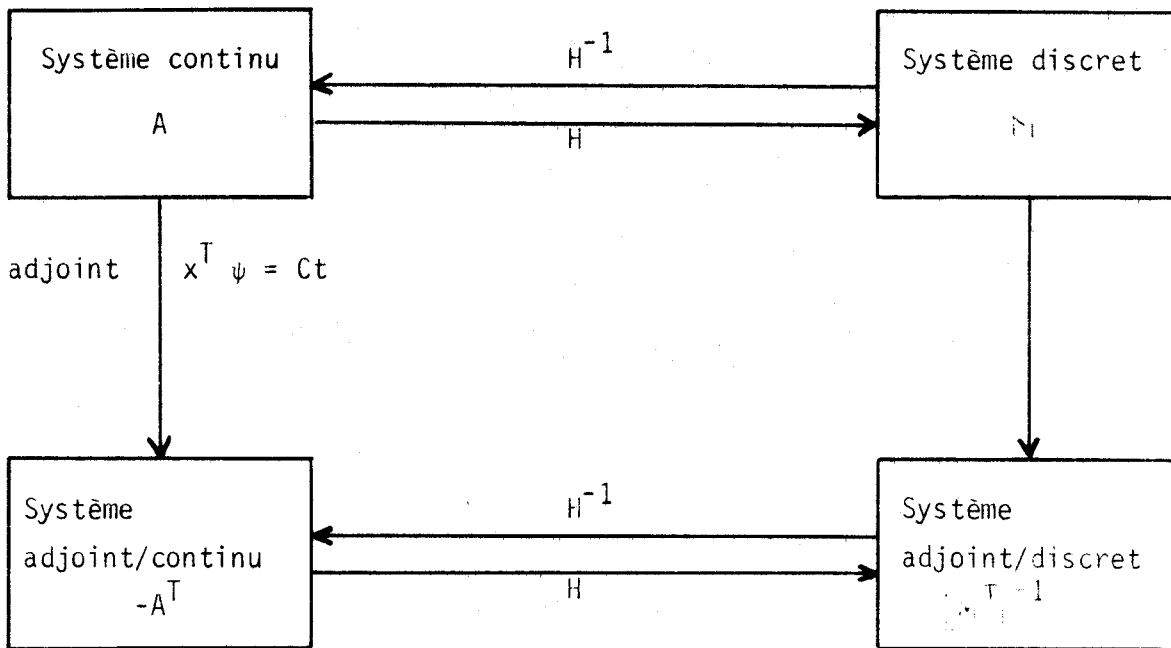


FIGURE 1.3

Dans le cas des systèmes continus non linéaires, la stabilité du modèle discret associé entraîne généralement celle du système continu initial /1-3/. L'équivalence des propriétés n'a cependant pas pu être mise en évidence comme dans le cas linéaire.



## CONCLUSION

L'étude d'un processus continu, la synthèse d'un mode de commande, nécessitent le plus souvent l'utilisation d'un modèle discret de son évolution.

Dans ce sens, la mise en oeuvre d'une méthode de discrétisation basée sur l'emploi d'une transformation homographique permet de conserver pour le modèle discret approché l'ensemble des propriétés de stabilité, commandabilité, observabilité du système linéaire initial.

Plus particulièrement, la conservation des propriétés de dualité conduit à envisager l'application de cette méthode de discrétisation à la synthèse, à partir des théories de l'optimalité, des processus continus ou discrets.

CHAPITRE II

DEFINITION DES COMMANDES QUASI-OPTIMALES D'UN SYSTEME CONTINU

PAR TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE

## INTRODUCTION

La notion d'état, généralement utilisée pour la représentation des processus, conduit à une formulation des équations d'un système dans le domaine temporel et se prête ainsi à une utilisation aisée des techniques numériques.

Dans le cadre de la théorie de la commande optimale, ce mode de description permet de substituer aux indices de qualité, usuellement définis dans le domaine fréquentiel tels la précision, le temps de réponse, le taux d'amortissement, des critères quantitatifs rigoureux.

Les lois de commandes déterminées par ces méthodes restent en général difficiles à exprimer et surtout à mettre en pratique. Dans ce sens, l'étude des systèmes linéaires à critères quadratiques /2-1/ et plus particulièrement celle du problème du régulateur d'état conduit à une structure de commande linéaire bouclée où la loi de commande peut être définie de manière implicite. La forme des équations de résolution impose, cependant, l'utilisation de méthodes numériques d'intégration. La détermination pratique de la commande conduit donc à une discrétisation du processus continu et pose le délicat problème de l'évaluation de l'approximation arbitraire ainsi réalisée.

La transformation homographique, précédemment définie, permettant d'associer de manière rigoureuse au système continu étudié un système discret, constitue un moyen de transposer le problème optimal continu en un problème optimal discret et de préciser l'approximation ainsi effectuée dans la détermination de la commande.

Après un bref rappel de la théorie de la commande optimale, nous proposons, dans un premier temps de définir un problème de régulateur d'état en étudiant la solution optimale continue ainsi que les modèles discrets auxquels conduisent la résolution des équations définissant la loi de commande.

Dans une deuxième étape, la définition d'un problème optimal discret associé au problème continu par transformation homographique conduit à interpréter la solution discrète obtenue comme une solution sous-optimale constituant une approximation de la solution optimale continue théorique.

## 2.1. Commande optimale à critères quadratiques

Pour un système décrit au moyen des variables d'état, le problème de synthèse peut se définir de la manière suivante : il s'agit de déterminer une trajectoire partant d'un état initial imposé pour atteindre un état final ou objectif en minimisant une fonction de coût ou critère.

La formulation mathématique de cette définition est donnée en annexe 2.1 ainsi que les différents critères introduits ci-après :

D'un point de vue global, ces problèmes peuvent être classés en différentes catégories /2-2/ selon l'objectif et les critères retenus.

- (i) commande en temps minimal /2-3/ : le système doit atteindre un certain domaine de l'espace d'état dans l'intervalle de temps le plus court possible. Pour un système décrit par une équation d'état de la forme 1-4

$$\dot{x} = A x + B u$$

il s'agit de trouver le vecteur de commande  $u$  tel que le système passe de l'état  $x(t_0) = x_0$  à  $x_f$  en un temps minimal d'où le critère  $J = \int dt$

- (ii) commande à consommation minimale /2-4/ : Pour le système précédent décrit en (1-4) :

$$\dot{x} = A x + B u$$

la consommation peut être représentée par une combinaison linéaire  $\Phi : R^r \rightarrow R^+$  des valeurs absolues des composantes du vecteur de commande

$$\Phi(u) = \sum_{k=1}^{k=r} \lambda_k |u_k|$$

$$\lambda_k > 0 \quad \forall k = 1, \dots, r$$

d'où le critère :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(u) dt$$

- (iii) asservissement à énergie minimale /2-5/ : l'état du système doit suivre le mieux possible une loi d'entrée déterminée en minimisant l'énergie consommée.

Ce problème conduit à un critère de type quadratique et nous proposons de l'envisager en détail dans ce chapitre.

En effet, l'étude des systèmes linéaires à critère quadratique permet de faire le lien entre la théorie de l'optimalité et les méthodes de synthèse classiques /2-6/. De plus, la linéarité des relations permet d'exprimer formellement les différentes solutions obtenues et permet ainsi une meilleure comparaison des méthodes utilisées.

2.1.1. Systèmes linéaires à critères quadratiques :

Envisageons un processus linéaire non stationnaire décrit par une équation d'état de la forme (1-4)

$$\dot{x} = A x + B u \quad 2-1$$

$$y = C x \quad 2-2$$

avec les notations du chapitre I,  $x$ ,  $y$  et  $u$  étant respectivement les vecteurs d'état, de sortie et de commandes d'ordre  $q$ ,  $m \leq q$ ,  $r \leq q$ .

Notons  $e$  l'écart instantané entre la sortie du processus  $y$  et la valeur désirée notée  $z$

$$e = z - y$$

L'évolution du processus est suivie sur un intervalle de temps  $t_0, t_f$ , le temps terminal  $t_f$  est fixé.

La loi de commande assurant un comportement convenable du processus 2-1 peut être obtenue en minimisant la fonctionnelle  $J$

$$J = J_f + J_c \quad 2-3$$

$$J_f = (1/2) \left[ e^T S e \right]_{t=t_f}$$
$$J_c = (1/2) \int_{t_0}^{t_f} (e^T Q e + u^T R u) dt$$

$S$  : matrice de dimension  $m \times m$  symétrique semi-définie positive.

$Q$  : est une matrice fonctionnelle dépendant éventuellement du temps  $t$ , de dimension  $m \times m$

$Q(t) : \mathcal{E} \rightarrow R^{m \times m}$   
telle que, quel que soit  $t$ , elle soit toujours semi-définie positive.

$R$  : est une matrice fonctionnelle dépendant éventuellement du temps  $t$ , de dimension  $r \times r$

$R(t) : \mathcal{E} \rightarrow R^{r \times r}$   
telle que, quel que soit  $t$ , elle soit toujours définie positive.

La partie de la fonctionnelle  $J$  notée  $J_f$  impose une contrainte sur le domaine de valeurs de l'état final  $x(t_f)$  noté  $x_f$  non imposé dans la définition du problème.

Le terme  $J_c$  de la fonctionnelle  $J$  pénalise les écarts entre la sortie du système et la sortie désirée ; il donne, en outre une indication sur la dépense d'énergie de commande.

La matrice  $Q(t)$  permet de pondérer l'effet du critère sur les composantes du vecteur de sortie et de moduler le comportement du système pour un temps d'observation donné  $t_f$  (Cf. figure 2-1 a et b)

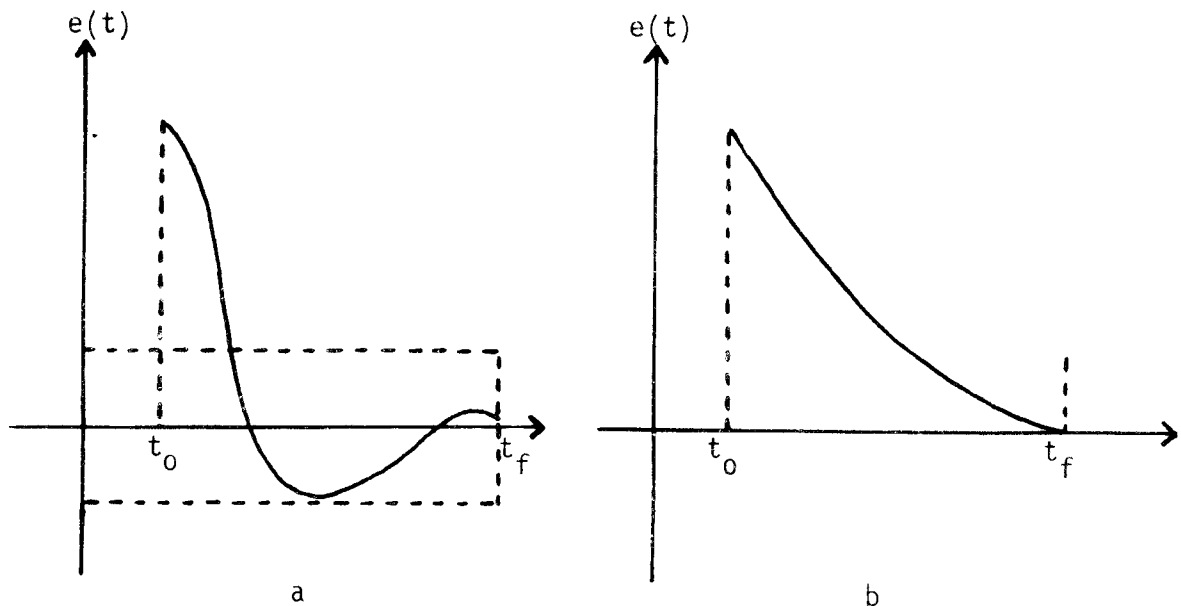


FIGURE 2-1

Le caractère non stationnaire de la matrice de coût  $Q(t)$  permet d'éviter la pénalisation des écarts initiaux non accessibles à la correction de la commande.

Suivant les valeurs de la sortie désirée, trois groupes de problèmes sont usuellement définis :

- Problème de régulateur d'état

Le système étant écarté d'une position d'équilibre, on désire le ramener à cette position sans dépense excessive d'énergie.

La précision exigée sera obtenue en minimisant une fonctionnelle de la forme (2-3) dans laquelle le vecteur d'écart précédemment défini se réduit au vecteur  $x$  décrivant l'état du système.

### - Problème de régulateur de sortie

On désire que la sortie du système soit aussi proche que possible d'une valeur de consigne égale à zéro en minimisant la dépense d'énergie de commande.

Dans ce cas :

$$\forall t \quad z(t) = 0 \quad \text{et} \quad e = y = C x$$

le critère  $J_2$  obtenu est très proche du critère  $J_1$  caractérisant le régulateur d'état.

$$J_2 = (1/2) \left[ x^T (C^T S C) x \right]_{t=t_f} + (1/2) \int_{t_0}^{t_f} (x^T C^T Q C x + u^T R u) dt$$

En effet, si le système linéaire décrit par les équations (2-1) et (2-2) est observable /2-4/, le problème de régulateur de sortie peut toujours se ramener /2-1/ à un problème de régulateur d'état (les matrices de pondérations étant dans ce cas modifiées).

### - Problème de poursuite

On désire que la sortie du système suive le mieux possible une entrée déterminée sans dépense excessive d'énergie.

La loi de commande sera obtenue en minimisant la fonctionnelle  $J$  définie en (2-3).

Cependant une telle formulation ne pourra être adaptée au traitement de la commande en temps réel. En effet, la résolution de ce problème /2-1/ montre que la valeur à l'instant  $t$ , de la loi de commande dépend des valeurs futures de la sortie désirée.

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad \tau \in [t, t_f]$$
$$u^*(t) = \psi(z(\tau))$$

Un tel mode de commande peut cependant être envisagé dans le cas d'un traitement en temps différé.

Precisons que, dans le cas de système linéaires stationnaires, il est



possible /2-5/ de ramener un problème de poursuite à un problème de régulateur d'état d'ordre plus élevé.

L'étude d'un problème de régulateur d'état permet donc d'envisager d'une manière générale la classe des systèmes linéaires avec critères quadratiques.

## 2.2. Problème du régulateur d'état continu

Le système étant décrit par l'équation d'état (2-1) :

$$\dot{x} = A x + B u$$

La loi de commande recherchée doit minimiser la fonctionnelle  $J_1$  suivante :

$$J_1 = J_{1f} + J_{1c}$$

$$J_{1f} = (1/2) [x^T S x]_{t=t_f} \quad 2-4$$

$$J_{1c} = (1/2) \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

les notations étant définies en 2-3

L'application du principe du maximum de Pontryagin (cf. Annexe 2-2) /2-7/ détermine la loi de commande optimale comme une fonction linéaire de l'état du système et conduit à la structure optimale en boucle fermée du schéma de la figure 2-2.

$$u = - R^{-1} B^T K x = G x \quad 2-5$$

$$\dot{x} = (A - B R^{-1} B^T K) x \quad 2-6$$

La valeur de la fonctionnelle  $J_1$  est donnée, pour une solution optimale partant de  $x$  à l'instant  $t$ , par la relation 2-7

$$J_{1 \min}(x(t), t) = (1/2) x^T(t) K(t) x(t) \quad 2-7$$

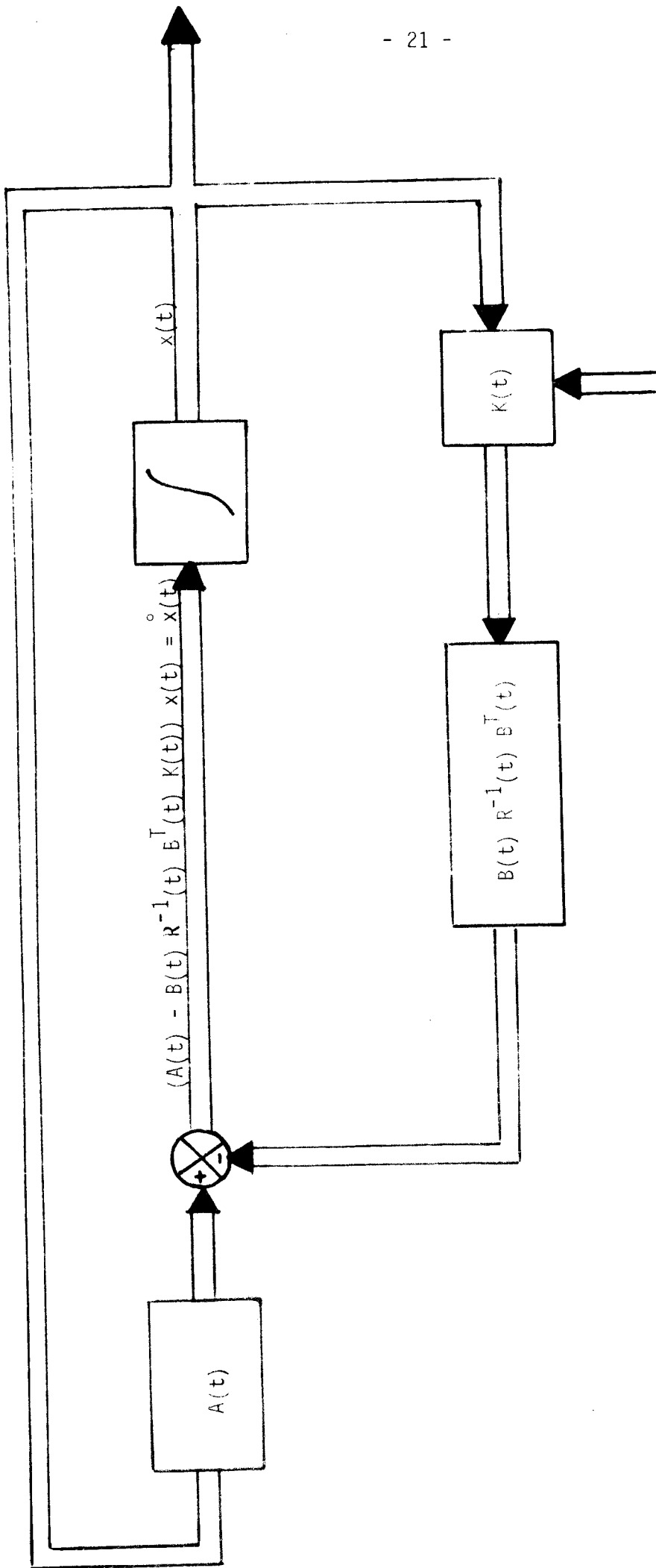


FIGURE 2-2



La recherche de la commande optimale nécessite le calcul de la matrice du gain  $K(t)$ . Dans ce cas, les travaux de Kalman ont montré que la matrice symétrique  $K(t) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{q \times q}$  à éléments non constants, est solution unique /2-8/ de l'équation différentielle du type de Riccati (2-8).

$$\dot{K}(t) + f(t, K(t)) = 0 \quad K(t_f) = S \quad 2-8$$

$$f(t, K(t)) = A^T(t) K(t) + K(t) A(t) - K(t) B(t) R^{-1}(t) B^T(t) K(t) + Q(t)$$

- Dans le cas de systèmes stationnaires où les matrices A, B, Q, R sont à éléments indépendants du temps, l'équation 2-8 prend la forme simplifiée suivante :

$$A^T K + K A - K B R^{-1} B^T K + Q = 0 \quad 2-8 b$$

L'utilisation d'un système matriciel associé /2-9/ permet de résoudre cette équation.

- Dans le cas non stationnaire, la solution ne peut être obtenue de manière analytique et il faut utiliser des méthodes numériques d'intégration.

Dans ce sens, nous proposons de souligner le caractère sous optimal des solutions obtenues par intégration numérique de l'équation (2-8) en utilisant un algorithme de Runge-Kutta /2-10/.

#### 2.2.1. Méthode numérique d'intégration de l'équation 2-8

Il peut être envisagé un algorithme simple de la forme suivante où le pas d'intégration est noté h :

$$K(t - h) = K(t) + h f(t, K(t))$$

L'algorithme de calcul de Runge-Kutta d'ordre 4 plus précis, peut être rapidement décrit par les équations 2-9, avec les notations correspondant à la relation 2-8.

$$K(t_n) = K(t_{n+1}) + (1/6) (L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)$$

$$L_1 = h f(t_{n+1}, K(t_{n+1}))$$

$$L_2 = h f(t_{n+1} - h/2, K(t_{n+1}) + L_1/2)$$

2-9

$$L_3 = h f(t_{n+1} - h/2, K(t_{n+1}) + L_2/2)$$

$$L_4 = h f(t_{n+1} - h, K(t_{n+1}) + L_3)$$

$$t_n = t_{n+1} - h$$

La détermination de la valeur du gain  $K$  à chaque itération nécessite le calcul des grandeurs  $L_1, L_2, L_3, L_4$  ; le volume de calcul imposé par cette méthode croît donc très rapidement avec l'ordre du système. Cependant pour un nombre de pas de calcul relativement peu élevé, il est possible d'atteindre une bonne précision.

En pratique un certain nombre de valeurs du gain  $K$  correspondant au pas d'intégration choisi sont déterminées à l'avance ( $K$  ne dépendant en aucune manière de l'état du système) ainsi que la matrice fonctionnelle  $G$  définie en 2-5 et caractérisant la boucle de retour.

La loi de commande calculée par ce moyen est une loi de commande discrète.

#### 2.2.2. Caractère sous optimal de la commande déterminée

La mise en oeuvre de la loi de commande "optimale" conduit ainsi à un échantillonnage du système et la structure obtenue constitue une approximation de la structure optimale continue.

La résolution du problème optimal continu impose donc une discrétisation "a posteriori" du système continu initial.

L'arbitraire de la discrétisation induite par la méthode de calcul ne permet pas d'exprimer de manière simple le caractère sous optimal des solutions obtenues.

Dans ce sens, nous proposons, de remplacer la discrétisation "a posteriori" par une discrétisation "a priori" des équations d'état du système envisagé et donc de formuler le problème optimal directement en termes discrets.

La loi de commande discrète est obtenue par application du principe du maximum discret de Halkin /2-11/ et constitue une solution sous-optimale du problème continu initial.

Nous proposons d'envisager cette discrétisation "a priori" selon les deux méthodes suivantes reprises dans le schéma de la figure 2-3 :

i) - L'intégration des équations d'état (2-1) qui décrivent le système permet d'obtenir, dans un premier temps, un modèle discret de l'évolution du processus.

Les solutions quasi-optimales obtenues sont, cependant, difficilement comparables à la solution optimale continue.

ii) - L'utilisation de la transformation homographique permet d'associer de manière rigoureuse un système discret au système continu initial.

Elle conduit, dans une deuxième partie, à une interprétation simple des solutions quasi-optimales ainsi déterminées.

### 2.3. Problème du régulateur d'état discret

#### 2.3.1. Discrétisation par intégration

Envisageons le système discret (2-10) obtenu par discrétisation d'une équation d'état continue (2-1)

$$x_{k+1} = M x_k + F u_k \quad 2-10$$

avec les notations :

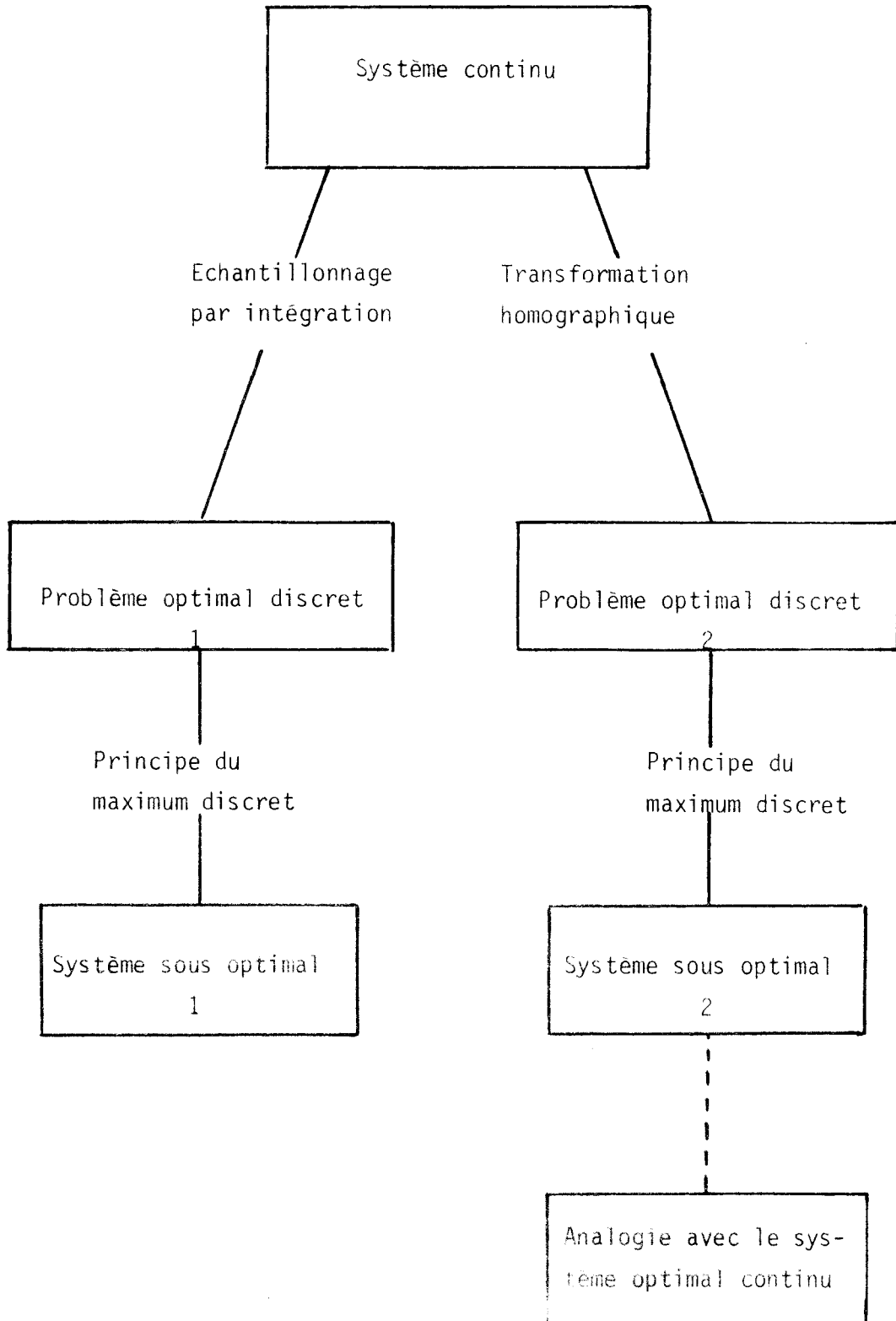
$$x_k = x(t_k) \quad t_k \in \{ t_0, t_1, \dots, t_f \}$$

$x_k$  vecteur d'ordre  $q$  représentant l'état du système à l'instant  $t_k$ .

$u_k$  vecteur d'ordre  $r$  définissant la valeur de la commande à l'instant  $t_k$ .

$M$  matrice carrée de dimension  $q \times q$  dont les éléments  $m_{ij}$  dépendent de l'instant d'échantillonnage  $t_k$ . Cette matrice traduit le comportement du système en régime autonome.

$F$  matrice rectangulaire de dimension  $q \times r$  dont les éléments  $f_{ik}$  dépendent de l'instant d'échantillonnage  $t_k$ .



*Figure 2-3*

Les contraintes de précision et de stabilité recherchées sont traduites par la fonctionnelle  $J_d$  (2-11) ; il s'agit d'une forme discrète du critère  $J_1$  défini par la relation 2-4 et caractérisant le problème de régulateur d'état continu.

L'indice  $f$  caractérisant l'instant final, il vient avec les notations de la relation 2-3 :

$$J_d = J_{df} + J_{dc}$$

$$J_{df} = (1/2) \left| x_k^T S x_k \right|_{k=f} \quad 2-11$$

$$J_{dc} = (1/2) \sum_{k=0}^{k=f} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k)$$

La séquence de commande optimale  $u_0, \dots, u_f$  doit, par conséquent minimiser le critère  $J_d$ .

L'application du principe du maximum discret de Halkin (cf. Annexe 2-3) permet de déterminer la séquence de commande optimale (2-12) au sens du modèle discret (2-10) et de la fonctionnelle (2-11).

La structure optimale en boucle fermée peut être simplement représentée par le schéma de la figure 2-4.

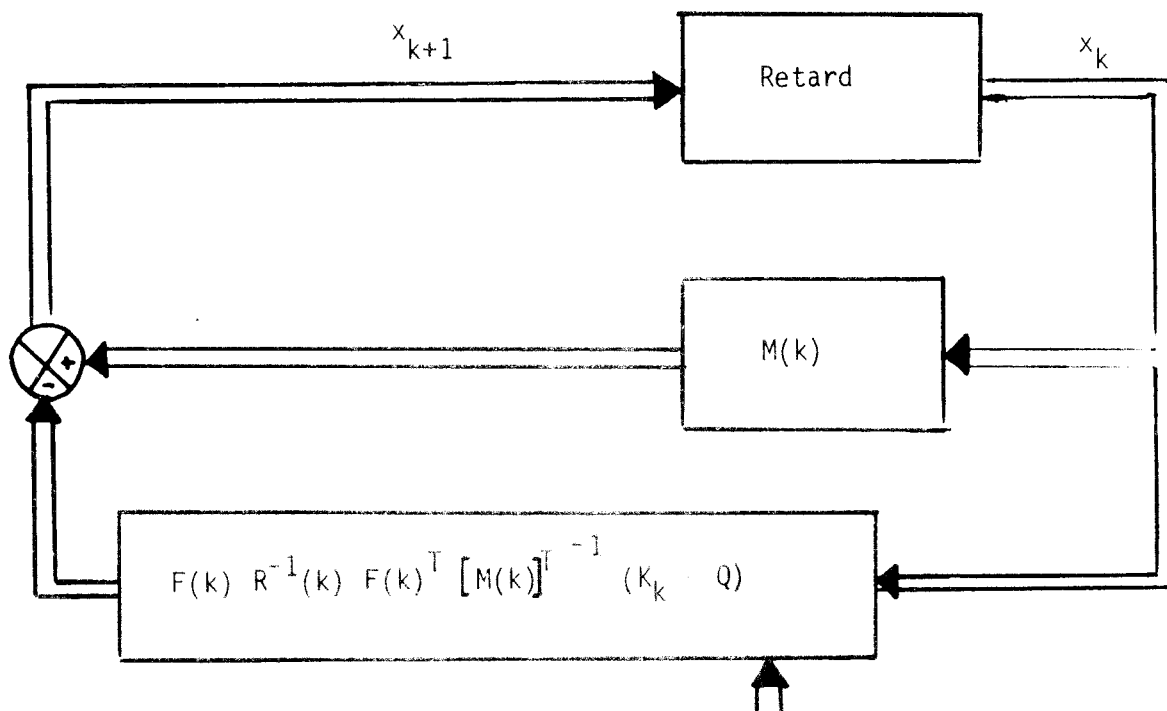


Figure 2-4

$$\begin{aligned} u_k &= - R^{-1} F^T (M^T)^{-1} (K_k - Q) x_k = G x_k \\ x_{k+1} &= [I + F R^{-1} F^T K_{k+1}]^{-1} M x_k \end{aligned} \quad 2-12$$

ou

$$x_{k+1} = (M - F R^{-1} F^T (M^T)^{-1} (K_k - Q)) x_k \quad 2-13$$

Dans cette forme discrète du problème de Kalman, les matrices de gain  $K_k$  permettant de calculer la séquence optimale  $u_0, u_1, \dots, u_f$  sont définies par la relation de récurrence suivante :

$$K_k = Q + M^T K_{k+1} (I + F R^{-1} F^T K_{k+1})^{-1} M \quad 2-14$$

$$K_f = S$$

où  $K_k$  est une matrice symétrique de dimension  $q \times q$  à éléments non constants.

La définition d'un problème optimal discret associé au problème optimal continu permet ainsi de déterminer une structure bouclée du système, parfaitement adaptée à la mise en oeuvre d'une commande numérique.

La solution ainsi calculée ne constitue, cependant, pour une période d'échantillonnage  $h$  tendant vers un infiniment petit, qu'une approximation de la solution optimale continue.

L'estimation des erreurs ainsi commises est délicate. En effet, la méthode de discrétisation utilisée /2-12/ ne permet pas d'obtenir une équivalence simple entre le modèle discret et le système continu initial.

Par contre, la transformation homographique permet de définir un modèle discret directement déduit du système continu initial par analogie et conservant les propriétés de stabilité et de dualité.

En ce sens, la résolution du problème de régulateur d'état discret ainsi associé, conduit à une solution sous-optimale qu'il est possible de comparer à la solution continue optimale et aux différentes solutions quasi-optimales usuellement envisagées.



2.3.2. Problème de régulateur d'état discret associé par la transformation homographique

2.3.2.1. Transposition continu-discret

Le modèle discret associé par la transformation homographique à un système continu défini par les équations 2-1 s'écrit sous la forme (2-15) avec les notation de la relation (1-8) du chapitre 1 :

$$\dot{x} = A x + B u$$

2-1

$$z_{k+1} = M z_k + F u_k$$

2-15

$$M = H(A) = (I + A/2) (I - A/2)^{-1}$$

$$F = (I - A/2)^{-1} B$$

Les vecteurs  $z_k$  et  $x$  étant associés au sens de l'expression (1-16) du chapitre 1 rappelée ci-dessous :

$$\begin{array}{l} (z_{k+1} - z_k) \xrightarrow{\quad} \dot{x} \\ ((z_{k+1} + z_k)/2) \xrightarrow{\quad} x \end{array}$$

La fonctionnelle discrète (2-15 b) notée  $J_h$  définissant les objectifs du problème du régulateur d'état discret peut être déduite du critère  $J_1$  continu défini en (2-4) en respectant la correspondance des vecteurs d'état respectifs du système continu et du système discret associé.

$$\text{Soit } J_h = J_{hf} + J_{hc}$$

$$J_{hf} = (1/2) \left| z_k^T S z_k \right|_{k=f}$$

$$\begin{aligned} J_{hc} = (1/2) \sum_{k=0}^{k=f} & \left[ (z_{k+1} + z_k)/2)^T Q(k) ((z_{k+1} + z_k)/2) \right. \\ & \left. + u_k^T R u_k \right] \end{aligned}$$

2-15 b

Notons :

$Q_h(k)$ ,  $S_h(k)$ ,  $R_h(k)$  les matrices fonctionnelles à éléments non constants de dimensions respectives  $q \times q$ ,  $q \times r$  et  $r \times r$  et définies par les relations suivantes :

$$Q_h(k) = ((M(k) + I)/2)^T Q(k) ((M(k) + I)/2)$$

$$S_h(k) = ((M(k) + I)/2)^T Q(k) (F(k)/2)$$

$$R_h(k) = (F(k)/2)^T Q(k) (F(k)/2)$$

Les matrices  $Q_h$  et  $R_h$  sont symétriques.

Le problème de régulateur d'état discret associé par la transformation homographique au problème continu peut s'exprimer sous la forme suivante :

Il s'agit de déterminer la séquence de commandes optimale  $u_0, u_1, \dots, u_f$  appliquée au système défini par les équations 2-15 et minimisant la fonctionnelle  $J_h$  :

$$J_h = J_{hf} + J_{hc}$$

$$J_{hf} = (1/2) \left| z_k^T S z_k \right|_{k=f} \quad 2-16$$

$$J_{hc} = (1/2) \sum_{k=0}^{k=f} \left[ (z_k^T Q_h(k) z_k + z_k^T S_h(k) u_k + u_k^T S_h^T(k) z_k + u_k^T (R_h(k) + R(k)) u_k) \right]$$

### 2.3.2.2. Solution optimale discrète

L'application du principe du maximum discret de Halkin (cf. Annexe 2-3) conduit aux équations canoniques (2-17) ; en notant  $\psi_k$  le vecteur adjoint du vecteur  $z_k$ , il vient :

$$\psi_k = Q_h(k) z_k + S_h(k) u_k + M(k)^T \psi_{k+1} \quad 2-17$$

$$0 = S_h^T(k) z_k + (R_h(k) + R(k)) u_k + F(k)^T \psi_{k+1}$$

De ces relations et de l'équation d'état (2-15), il est possible de déduire la séquence de commande optimale (2-19). Il vient, si  $W(k)$ ,  $V(k)$  et  $T(k)$  désignent les matrices fonctionnelles à éléments non constants définies en (2-18)

$$W(k) = S_h(k) (R_h(k) + R(k))^{-1} S_h^T(k)$$

$W(k)$  : matrice fonctionnelle symétrique à éléments non constants de dimension  $qxq$ .

$$V(k) = F(k) (R_h(k) + R(k))^{-1} S_h^T(k) \quad 2-18$$

$V(k)$  : matrice fonctionnelle à éléments non constants de dimension  $qxq$ .

$$T(k) = F(k) (R_h(k) + R(k))^{-1} F^T(k)$$

$T(k)$  : matrice fonctionnelle symétrique à éléments non constants de dimension  $qxq$ .

$$u_k = - (R_h + R)^{-1} S_h^T z_k - (R_h + R)^{-1} F^T ((M - V)^T)^{-1} [K_k - (Q_h - W)] z_k \quad 2-19$$

La matrice de gain discrète  $K(k)$  est une matrice symétrique de dimension  $qxq$  définie par la récurrence 2-20.

$$K_k = [Q_h(k) - W(k)] + [M(k) - V(k)]^T K_{k+1} [I + T(k) K_{k+1}]^{-1} [M(k) - V(k)] \quad 2-20$$

Il est à noter que la relation 2-20 définissant la matrice de gain  $K(k)$  est identique à la relation (2-14) du problème discret étudié au paragraphe 2.3.1. Dans ce cas, les matrices de pondération se correspondent selon le schéma suivant :

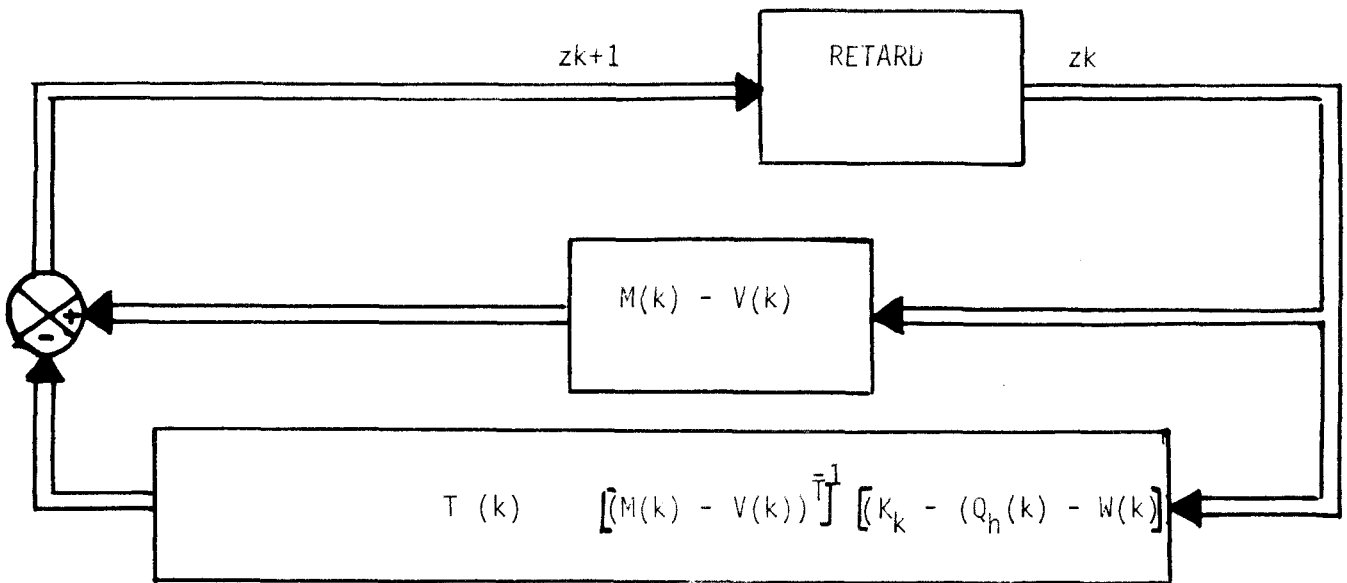
$$\begin{array}{ccc} Q(k) & \xrightarrow{\quad} & Q_h(k) - W(k) \\ M(k) & \xrightarrow{\quad} & M(k) - V(k) \\ F(k) R^{-1} F(k)^T & \xrightarrow{\quad} & T(k) = F(k) (R_h(k) + R(k))^{-1} F(k)^T \\ R(k) & \xrightarrow{\quad} & R_h(k) + R(k) \end{array}$$

De même la structure bouclée du système décrite par la relation 2-20 b est analogue à celle définie précédemment par les équations 2-13. Le schéma de la figure 2-5 permet d'exprimer rapidement la similitude de structure.

$$z_{k+1} = [I + T(k) K_{k+1}]^{-1} (M(k) - V(k)) z_k$$

2-20 b

$$z_{k+1} = \{ (M(k) - V(k)) - T(k) [(M(k) - V(k))^T]^{-1} [K_k - (Q_h(k) - w(k))] \} z_k$$



*Figure 2-5*

2.4. Problème discret associé par homographie et interprété comme approximation du système optimal continu

Nous proposons de reprendre les équations canoniques 2-17 issues de l'application du principe du maximum discret de Halkin au problème optimal défini en 2-15 et 2-16, de manière à mettre en évidence l'analogie avec le problème d'optimalité continu initial.

Dans ce sens, nous utiliserons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta z &= z_{k+1} - z_k & z^x &= (z_{k+1} + z_k)/2 \\ \Delta \psi &= \psi_{k+1} - \psi_k & \psi^x &= (\psi_{k+1} + \psi_k)/2 \end{aligned} \quad 2-21$$

afin d'alléger la présentation nous supposons la stationnarité, soit :

$$M(k) = M \quad F(k) = F \quad \dots \text{ etc } \dots \quad 2-21 \text{ b}$$

Les équations canoniques 2-17 s'écrivent en utilisant les notations

2-21 et 2-21 b :

$$\psi_k = ((M + I)/2)^T Q z^X + M^T \psi_{k+1} \quad 2-22$$

$$0 = R u_k + (F^T Q/2) z^X + F^T \psi_{k+1} \quad 2-23$$

évaluons  $\psi^X$  et  $\Delta\psi$ , à partir de la relation 2-22, il vient :

$$\psi^X = (\psi_{k+1} + \psi_k)/2 = (1/2) ((M + I)/2)^T Q z^X + ((M^T + I)/2) \psi_{k+1} \quad 2-24$$

$$\Delta\psi = \psi_{k+1} - \psi_k = - ((M + I)/2)^T Q z^X - (M^T - I) \psi_{k+1} \quad 2-25$$

La matrice  $(M^T + I)$  étant supposé inversible, il est possible d'exprimer  $\psi_{k+1}$  en fonction des variables  $\psi^X$  et  $z^X$  :

$$\psi_{k+1} = ((M^T + I)/2)^{-1} \psi^X - (Q/2) z^X \quad 2-26$$

Si l'on élimine  $\psi_{k+1}$  des relations 2-25 et 2-23, il vient :

$$\Delta\psi = - Q z^X - (M^T - I) ((M^T + I)/2)^{-1} \psi^X \quad 2-27$$

$$0 = R u_k + F^T ((I + M)/2) \psi^X \quad 2-28$$

La transformation homographique inverse définie au chapitre 1 par la relation 1-13, nous permet d'associer aux équations discrètes 2-15 la relation (2-29)

$$\Delta z = H^{-1}(M) z^X - ((M + I)/2)^{-1} F u_k \quad 2-29$$

la fonction de matrice  $H^{-1}(M)$  étant définie par :

$$H^{-1}(M) = (M - I) ((M + I)/2)^{-1}$$

Les équations canoniques du problème optimal discret associé par la transformation homographique au problème optimal continu peuvent donc être présentées, compte tenu de 2-28, sous la forme 2-30 :

$$\Delta z = H^{-1}(M) z^X - ((I + M)/2)^{-1} F R^{-1} F^T ((I + M)^T/2)^{-1} \psi^X$$

2-30

$$\Delta \psi = - Q z^X - (H^{-1}(M))^T \psi^X \quad (* \text{ Note 1})$$

Les équations (2-30) présentent une forme tout à fait analogue aux équations canoniques (2-30 b) du problème optimal continu défini au § 2-2

$$\dot{x} = A x - B R^{-1} B^T \phi$$

2-30 b

$$\dot{\phi} = - Q x - A^T \phi$$

Dans ce sens, nous proposons de mettre en évidence, dans les équations canoniques (2-30) du système discret, les opérateurs du système continu initial.

En effet, les matrices fonctionnelles M et F du système discret 2-15 sont les transformées par H des matrices fonctionnelles A et B du système continu 2-1 soit, compte tenu des notations 2-15 :

$$M = H(A) = (I + A/2) (I - A/2)^{-1}$$

$$F = (I - A/2)^{-1} B$$

En remplaçant les expressions de M et F dans les opérateurs apparaissant dans les équations canoniques du système discret, il vient :

$$H^{-1}(M) = H^{-1}(H(A)) = A$$

$$\begin{aligned} ((I + M)/2)^{-1} &= ((I + (I + A/2) (I - A/2)^{-1})/2)^{-1} \\ &= ((I - A/2)^{-1})^{-1} = (I - A/2) \end{aligned}$$

d'où :

$$((I + M)/2)^{-1} F = (I - A/2) (I - A/2)^{-1} B = B$$

Note 1 -  $H^{-1}(M^T) = (H^{-1}(M))^T$  Les polynômes caractéristiques sont identiques.

Les équations canoniques 2-30 du système discret peuvent donc être mises sous la forme 2-31 recherchée :

$$\begin{aligned} u_k &= - R^{-1} B^T \psi^X \\ \Delta z &= A z^X - B R^{-1} B^T \psi^X \\ \Delta \psi &= - Q z^X - A^T \psi^X \end{aligned} \quad 2-31$$

Nous proposons maintenant de réécrire les équations de récurrence 2-19 et 2-20 déterminant les séquences optimales discrètes de commande sous une forme analogue à celle obtenue pour les équations canoniques.

La matrice de gain  $K_k$  apparaissant dans ces récurrences étant définie /2-13/ par  $\psi_k = K_k z_k$  exprimons  $\psi^X$  et  $\Delta \psi$  à partir des notations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta K &= K_{k+1} - K_k \xrightarrow{\quad} \overset{\circ}{K} \\ K^X &= (K_{k+1} + K_k)/2 \xrightarrow{\quad} K \end{aligned}$$

il vient :

$$\begin{aligned} \psi^X &= K^X z^X + (\Delta K \Delta Z)/4 \\ \Delta \psi &= K^X \Delta z + \Delta K z^X \end{aligned} \quad 2-32$$

L'élimination de  $\psi^X$  et  $\Delta \psi$  entre les relations 2-31 et 2-32 permet de définir la séquence optimale de commande sous la forme suivante :

$$u_k = - R^{-1} B^T K^X z^X - R^{-1} B^T (\Delta K \Delta Z)/4 \quad 2-33$$

$K^X$  et  $\Delta K$  étant reliés par :

$$(\Delta K + A^T K^X + K^X A - K^X B R^{-1} B^T K^X + Q) + (A^1 - K^X B R^{-1} B^T) (\Delta K \Delta Z)/(4 z^X) = 0 \quad 2-34$$

L'équation du système discret en boucle fermée s'écrivant :

$$\Delta z = (A - B R^{-1} B^T K^X) z^X - B R^{-1} B^T \Delta K z \quad 2-35$$

Il est possible d'écrire la relation 2-34 de manière symétrique en  $\Delta K \Delta Z$ .

En utilisant la fonction  $f$  définie pour la relation continue (2-8), il vient :

$$\Delta K + f(K^X) + \frac{\Delta z^T \Delta K \Delta z}{4 \begin{pmatrix} z^X & z^X \end{pmatrix}} + \begin{bmatrix} \Delta K & \Delta z \end{bmatrix}^T B R^{-1} B^T \begin{bmatrix} \Delta K & \Delta z \\ 4 z^X \end{bmatrix} = 0 \quad 2-36$$

$$f(K^X) = A^T K^X + K^X A - K^X B R^{-1} B^T K^X + Q$$

Si l'on suppose les produits du deuxième ordre  $\Delta K \Delta z$  négligeables devant  $K$ ,  $\Delta K$  et  $z^X$ , les équations 2-35 et 2-36 sont formellement identiques aux équations (2-6) et (2-8) du système continu.

Précisons que les produits du deuxième ordre en  $\Delta K \Delta z$  et d'ordre supérieur traduisent le caractère sous optimal des solutions obtenues vis à vis du problème optimal continu. Ainsi dans le calcul de la matrice de gain, l'approximation réalisée est donnée par :

$$\frac{\Delta z^T \Delta K \Delta z}{4 \begin{pmatrix} z^X & z^X \end{pmatrix}} + \begin{bmatrix} \Delta K & \Delta z \end{bmatrix}^T B R^{-1} B^T \begin{bmatrix} \Delta K & \Delta z \\ 4 z^X \end{bmatrix}$$

Par ailleurs la fonctionnelle discrète  $J_h$  définie par la relation 2-16 pour une solution optimale partant de  $z_k$  à la séquence  $k$  peut s'écrire (cf. Annexe 2-4) sous la forme analogue à celle du continu :

$$J_h(z_k, k) = (1/2) z_k^T K_k z_k$$

Il est donc possible, d'exprimer les équations définissant la loi de commande  $u$ , la matrice de gain  $K$  et le vecteur  $x$  sous une forme qui met en évidence l'approximation réalisée en remplaçant la solution d'un problème optimal continu par la solution du problème optimal discret qui lui est associé à partir de la transformation homographique.

L'ensemble des résultats qui permettent d'apprécier cette approximation peuvent être simplement regroupés dans le tableau 2-1 :



FONCTIONNELLE  
TEMPS TERMINAL FIXE

$$J = (x^T(t_f) S x(t_f))/2 + (1/2) \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

FINI  $t_f$

$$J_2^x = (z^T_f S z_f)/2 + (1/2) \sum_{k=0}^{k=f} (z_k^T Q_h z_k + u_k^T S_h^T z_k + z_k^T S_h u_k + u_k^T (R+R_h) u_k)$$

LOI DE COMMANDE

$$u = - R^{-1} B^T K x$$

$$u_h = - R^{-1} B^T K^x z^x - R^{-1} B^T \Delta K z/4$$

GAIN DE KALMAN

$$f(k) = 0$$

$$\Delta K + f(K^x) + \frac{\Delta z^T \Delta K \Delta z}{4 z^T z^x} + \left( \frac{\Delta K \Delta z}{4 z^x} \right)^T BR^{-1} B^T \left( \frac{\Delta K \Delta z}{4 z^x} \right) = 0$$

$$K(t_f) = S$$

$$K_f = S$$

EQUATION DU SYSTEME  
EN BOUCLE FERME

$$\dot{x} = (A - BR^{-1} B^T K) x$$

$$\Delta z = (A - BR^{-1} B^T K^x) z^x - BR^{-1} B^T \Delta K z/4$$

VALEUR TERMINALE  
DE LA FONCTIONNELLE

$$J(t_f, t_0) = (x^T(t_0) K(t_0) x(t_0))/2$$

$$J_2^x f, 0 = (z_0^T K_0 z_0)/2$$

FONCTIONNELLE

TEMPS TERMINAL FIXE INFINI

$$J_3 = (1/2) \int_{t_0}^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

$$J_3^x = (1/2) \sum_{k=0}^{\infty} (z_k^T Q_h z_k + u_k^T S_h^T z_k + z_k^T S_h u_k + u_k^T (R+R_h) u_k)$$

LOI DE COMMANDE

$$u = - R^{-1} B^T K x$$

$$u_h = - R^{-1} B^T K^x z^x$$

GAIN DE KALMAN

$$f(k) = 0$$

$$f(K^x) = 0$$

$$(\forall j, K_j = K_{j+1} = K^x)$$

EQUATION DU SYSTEME  
EN BOUCLE FERME

$$\dot{x} = (A - BR^{-1} B^T K) x$$

$$\Delta z = (A - BR^{-1} B^T K^x) z^x$$

Fig. 2-6 Correspondance entre les problèmes de régulation d'état continu et discret associé

### 2.5. Cas particulier d'un système linéaire stationnaire à horizon infini

Les matrices A, B, Q et R du problème continu sont maintenant supposées constantes, l'instant final  $t_f$  étant supposé infini. Dans ce cas, le problème étant stationnaire, le maximum de l'hamiltonien doit être nul /2-14/ ie

$$f(K) = 0$$

Le gain de Kalman K vérifiant l'équation 2-8 doit être constant. Pour le problème discret associé, il vient de même :

$$\forall k \quad K_k = K_{k+1} = K^X$$

et K et  $K^X$  sont deux matrices constantes solutions de la même équation matricielle

$$f(K) = 0$$

La solution quasi-optimale obtenue par résolution du problème discret associé par homographie au nouveau problème continu défini ci-dessus est alors identique à la solution continue optimale.

Les équations définissant la loi de commande u, le gain de Kalman K et l'état x sont schématiquement regroupés dans la 2ème partie du tableau de la figure 2-6.

## CONCLUSION

L'introduction des variables d'état et l'utilisation de méthodes numériques permettent de formuler de manière précise les problèmes usuels relatifs à la synthèse des systèmes. Leur résolution conduit à définir les structures d'asservissement optimales ainsi que les lois de commande.

L'utilisation d'une transformation de type homographique pour la synthèse optimale des systèmes linéaires à critères quadratiques, conduit à des solutions quasi-optimales discrètes parfaitement adaptées à la mise en oeuvre d'une commande numérique.

Elle permet, en outre, de mettre en évidence, selon un formalisme analogue, l'approximation réalisée en remplaçant la solution optimale théorique continue par une solution sous-optimale discrète.

C H A P I T R E   I I I

INTERPRETATION DE LA TRANSFORMEE HOMOGRAPHIQUE COMME METHODE NUMERIQUE

D' INTEGRATION

## INTRODUCTION

Dans la résolution du problème de régulateur d'état, l'emploi de méthodes numériques permet d'obtenir avec une bonne précision les solutions de la matrice de bouclage ou de gain  $K(t)$ .

La transformation homographique, précédemment définie, peut tout d'abord être interprétée comme une méthode d'intégration numérique d'un système d'équations différentielles /3.1/.

Cette transformation associe, en effet, à tout système continu linéaire stationnaire ou non, un système discret ayant des propriétés analogues. Sur cette idée, nous proposons, dans un premier temps de définir un algorithme de calcul basé sur l'utilisation de cette transformation.

Dans une deuxième étape nous comparerons la précision des résultats d'une intégration de ce type aux résultats obtenus par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

La comparaison est tout d'abord effectuée d'un point de vue théorique, puis envisagée sur un exemple numérique.

### 3.1. Interprétation numérique de la transformation homographique.

De manière à pouvoir comparer les résultats, nous proposons de résoudre numériquement l'intégration du système différentiel défini par la relation (3-1) à partir de conditions initiales  $x = x_0$  et avec un pas d'intégration noté  $h$ .

$$\dot{x} = A x + B u \quad 3-1$$

Exprimons le vecteur  $x + h \dot{x}/2$  comme une fonction du vecteur  $x - h \dot{x}/2$  ; chacun de ces deux vecteurs est une approximation de la solution  $x(t)$  aux instants  $t + h/2$  et  $t - h/2$  ; il vient dans ces conditions :

$$x + \dot{x} h/2 = (I + Ah/2)(I - Ah/2)^{-1}(x - \dot{x}h/2) + h (I - Ah/2)^{-1} B u$$

Dans ce cas, la solution de la récurrence (3-2) peut être envisagée comme une approximation de la solution de (3-1)

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= H(Ah) z_n + h(I - Ah/2)^{-1} B u_n \\ z_0 &= x_0 \end{aligned} \quad 3-2$$

Les notations étant celles définies au chapitre 1 en 1-12.

Si l'on suppose maintenant la non stationnarité de la matrice du régime libre au sens de l'équation (3-3), la récurrence (3-2) peut prendre la forme (3-4)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t) x(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad 3-3$$

A matrice fonctionnelle de dimension  $q \times q$  à éléments dépendants du temps.

$$A(t) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^{q \times q}$$

Notons  $t_{n+1}$  et  $t_n$  les instants correspondants aux approximations du vecteur  $x$  par les vecteurs  $x(t) + h/2 \overset{\circ}{x}(t)$  et  $x(t) - h/2 \overset{\circ}{x}(t)$ ,  $h$  étant le pas d'intégration choisi.

La récurrence (3-4) associée au système (3-3) par la transformation homographique s'écrit

$$z_{n+1} = [I + A(t_n + \frac{h}{2})h/2] [I - A(t_n + h/2)\frac{h}{2}]^{-1} z_n \quad 3-4$$

$$z_0 = x_0$$

soit en faisant apparaitre la fonction vectorielle d'incrément notée  $\phi(t_n, z_n, h)$

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + h \phi(t_n, z_n, h) \\ \phi(t_n, z_n, h) &= A[t_n + h/2] [I - \frac{h}{2} A(t_n + h/2)]^{-1} z_n \end{aligned} \quad 3-5$$

Nous proposons :

dans un premier temps, de vérifier la convergence de l'algorithme défini par la transformation homographique,

d'étudier ensuite l'erreur par pas puis l'erreur totale dans la résolution du système autonome défini par la relation 3-3.

### 3.2. Propriétés numériques.

Dans l'étude de la convergence nous supposons le système décrit sous la forme non linéaire (3-6)

$$\overset{\circ}{x} = A(t, x)x$$

3-6

$A(t,x)$  matrice fonctionnelle de dimension  $q \times q$  à éléments non constants

$$A(t,x) : \mathcal{C} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{q \times q}$$

### 3.2.1. Convergence

La convergence de la récurrence correspondant au système (3-6) est assurée /3-2/ si la fonction vectorielle d'incrément  $\phi(x,t,h)$  vérifie à la fois l'équation (3-8)(condition de consistance) et la contrainte supplémentaire (3-7)(condition de Liphitz).

$$\begin{aligned} \forall x^* \quad x^{**} \\ |\phi(x^*,t,h) - \phi(x^{**},t,h)| &\leq M|x^* - x^{**}| && 3-7 \\ \phi(x,t,0) &= A(t,x).x && 3-8 \end{aligned}$$

Pour le système envisagé la fonction vectorielle d'incrément  $\phi(x,t,h)$  prend la forme particulière (3-9)

$$\phi(x,t,h) = A(t,x) \left[ I - \frac{h}{2} A(t,x) \right]^{-1} .x \quad 3-9$$

Le théorème de la moyenne généralisée aux fonctions vectorielles s'applique de manière évidente/3-3/ et la condition de consistance 3-8 est vérifiée par définition de  $\phi$ .

L'algorithme défini par la transformation homographique converge vers la solution  $\bar{x}(t)$  du problème.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t,x(t)) x(t) \\ x(t_0) &= x_0 \\ t &\in [t_0, T] \end{aligned}$$



### 3.2.2. Estimation de l'erreur par pas.

Notons  $\bar{x}(t_{n+1})$  la solution du système (3-3)  
avec pour conditions initiales

$$\bar{x}(t_n) = z_n \quad \text{et} \quad t \in [t_n, t_{n+1}]$$

Soit  $z_{n+1}$  la solution donnée par l'algorithme (3-4)  
A l'instant  $t_{n+1}$  l'erreur par pas peut être définie /3-2/ de la manière  
suivante :

$$\varepsilon_{n+1} = \bar{x}(t_{n+1}) - z_{n+1}$$

Soit,  $z_{n+1}$  vérifiant 3-5 :

$$z_{n+1} = z_n + h \phi(t_n, z_n, h)$$

et si

$$\bar{x}(t_{n+1}) = \bar{x}(t_n) + h \psi(t_n, \bar{x}(t_n), h)$$

$$\bar{x}(t_{n+1}) = z_n + h \psi(t_n, z_n, h)$$

il vient :

$$\varepsilon_{n+1} = h [\psi(z_n, t_n, h) - \phi(z_n, t_n, h)] \quad 3-10$$

L'application  $x(t) \rightarrow \overset{\circ}{x}(t)$  est supposée dérivable d'ordre  $n$ , il est donc possible de développer  $\bar{x}(t_{n+1})$  (cf Annexe 3-1) au voisinage de  $t_n$  et d'obtenir une expression de la fonction vectorielle  $\psi(z_n, t_n, h)$  en fonction de la matrice  $A$  et du vecteur  $z_n$ .

Soit en notant  $A(t_n) = A$

$$\psi(z_n, t_n, h) = \left[ A + \frac{h}{2} \left( \frac{\delta A}{\delta t} + A^2 \right) + \frac{h^2}{8} \left( \frac{\delta^2 A}{\delta t^2} + 3A \frac{\delta A}{\delta t} + A^3 \right) \right] z_n + O(h^3) z_n \quad 3-11$$

avec

$\frac{\delta A}{\delta t}, \frac{\delta^2 A}{\delta t^2}$  dérivées partielles respectivement du 1° et 2° ordre par

rapport à la variable  $t$  de la matrice fonctionnelle  $A$ .  $O(h^3)$  traduit un infiniment petit du 3° ordre dans le cadre des notations de Landau.

Procédons de même pour la fonction vectorielle incrément

$$\phi(z_n, t_n, h) = A(t_n + h/2) \left[ I - A(t_n + h/2) \frac{h}{2} \right]^{-1} z_n$$

D'après l'hypothèse de dérivabilité il est possible d'écrire en notant

$$A(t_n + h/2) = A_1$$

$$\phi(z_n, t_n, h) = A_1 + \frac{h}{2} A_1^2 + \frac{h^2}{4} A_1^3 + O(h^4)$$

or

$$A_1 = A + \frac{h}{2} \left( \frac{\delta A}{\delta t} \right) + \frac{h^2}{8} \left( \frac{\delta^2 A}{\delta t^2} \right) + O(h^3)$$

d'où

$$\phi(z_n, t_n, h) = A + \frac{h}{2} \left( \frac{\delta A}{\delta t} + A^2 \right) + \frac{h^2}{8} \left( \frac{\delta^2 A}{\delta t^2} + 4 A \frac{\delta A}{\delta t} + 2 A^3 \right) + O(h^3) \quad 3-12$$

L'erreur par pas  $\epsilon_{n+1}$  définie par 3-10 est alors donnée par 3-13

$$\epsilon_{n+1} = \frac{h^3}{24} \left[ \frac{\delta^2 A}{\delta t^2} - 2 A^3 \right] z_n + O(h^4) z_n$$

avec

$$A = A(t_n)$$

3-13

Dans l'hypothèse linéaire stationnaire il convient de remarquer que la matrice  $A(t)$  du système (3-3) est une matrice à éléments constants, l'erreur  $\epsilon_{n+1}$  par pas s'écrit dans ce cas :

$$\epsilon_{n+1} = -\frac{h^3}{12} A^3 z_n + O(h^4) \quad 3-14$$

Les erreurs par pas engendrent une erreur globale qu'il est possible de borner sur la base d'une estimation de l'erreur par pas /3-5/.

Nous indiquerons simplement l'équation de propagation de l'erreur par pas (3-14b) et l'ordre de grandeur de l'erreur globale.

Pour le système envisagé, les propriétés de la transformée homographique permettent de conclure à la convergence, en effet

$$\begin{aligned} \text{si } \epsilon_n &= \bar{x}(t_n) - z_n \\ \epsilon_{n+1} &= \bar{x}(t_{n+1}) - z_{n+1} \\ |\epsilon_{n+1}| &< |H(A)| |\epsilon_n| \end{aligned}$$

avec les notations de la relation 3-10 il vient :

$$|\epsilon_{n+1}| < \left\| I + A h + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\delta A}{\delta t} + A^2 \right) \right\| |\epsilon_n| + N O(h^3) \quad 3-14b$$

avec  $A = A(t_n)$

$$\begin{aligned} \text{L'erreur globale } \epsilon_q &\text{ est d'ordre 2 soit} \\ \epsilon_q &\leq M h^2 \quad M \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Afin de préciser les avantages de cette méthode d'intégration, nous envisageons de comparer les résultats d'une application directe aux résultats obtenus par la méthode de Runge-Kutta /3-2/, les algorithmes retenus

étant pris à l'ordre 2 puis 4.

3.2.3. Comparaison avec les méthodes de Runge-Kutta.

Dans un premier temps, nous rappellerons brièvement le principe de ces algorithmes pour le système autonome décrit par la relation définie en 3-3

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t)$$

Une présentation géométrique de ces algorithmes est ainsi donnée sur les schémas des figures 3-1 et 3-2

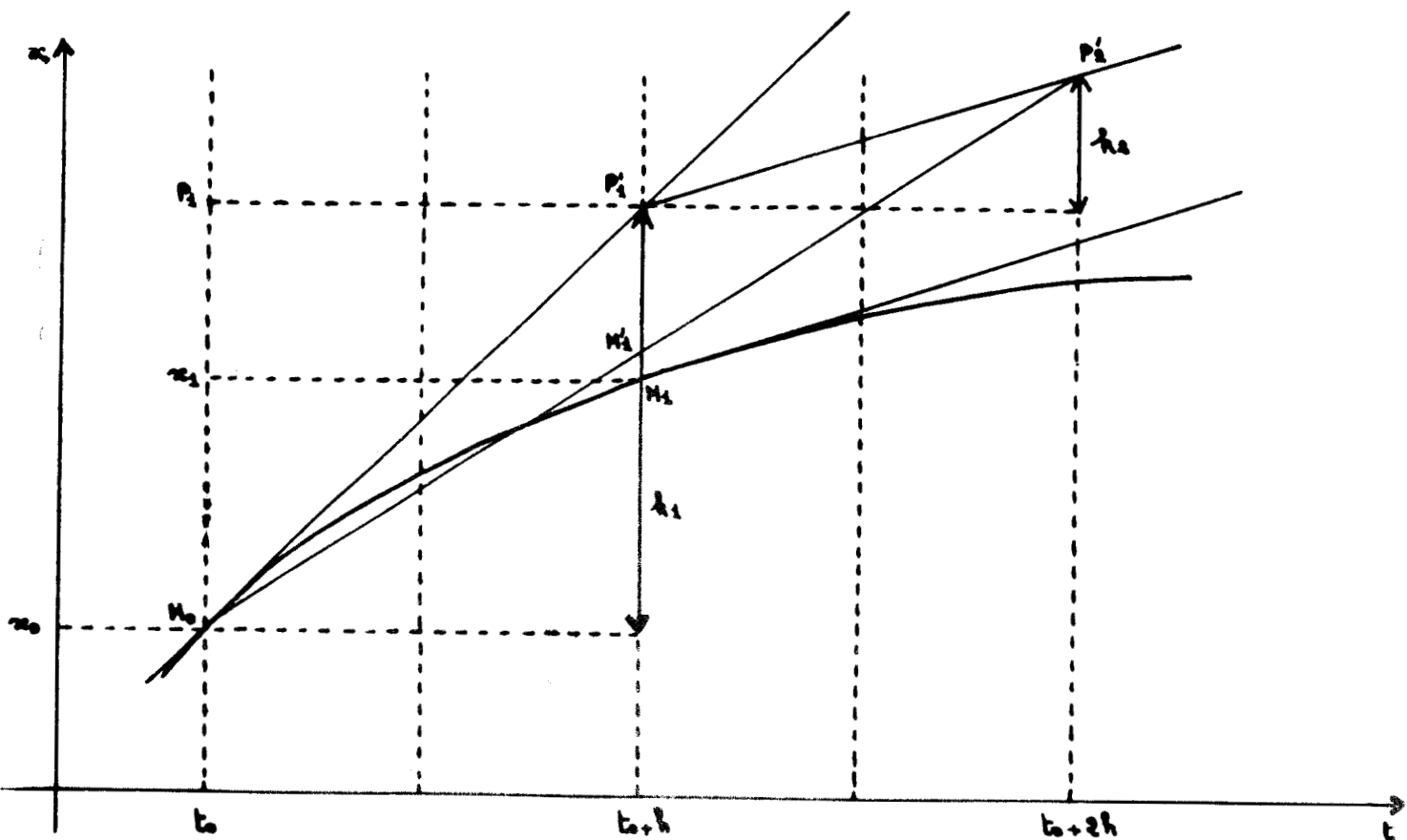


FIGURE 3-1

a) Pour l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2.

Une approximation du point  $M_1$  consiste à prendre  $M'_1$  défini de la façon suivante :

tout d'abord on calcule  $P'_1$

$$P'_1 \begin{cases} t_0 + h \\ x_0 + h \overset{\circ}{x}_0 = x_0 + k_1 \end{cases} \quad \overset{\circ}{x}_0 = A(t_0) x_0$$

puis en  $P'_1$  on calcule la tangente en déterminant  $k_2 = h A(t_0 + h) \cdot (x_0 + k_1)$  au lieu de  $h \cdot A(t_0 + h) \cdot x_1$

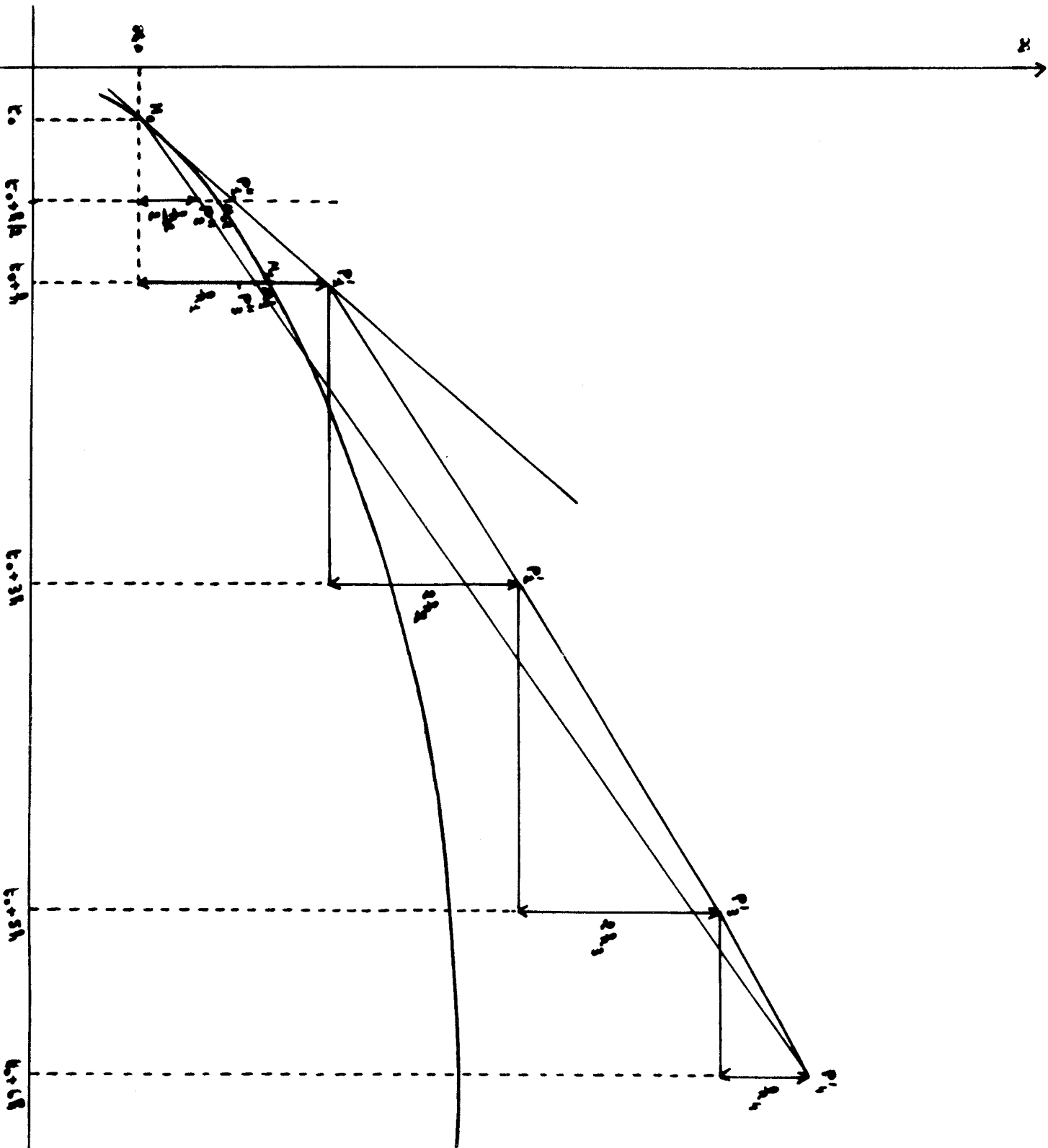
d'où le point  $P'_2$

$$P'_2 \begin{cases} t_0 + 2h \\ x_0 + k_1 + k_2 \end{cases}$$

Enfin on choisit  $M'_1$  point milieu de  $M_0$  et  $P'_2$  soit

$$M'_1 \begin{cases} t_0 + h \\ x_0 + (k_1 + k_2)/2 \end{cases}$$

L'algorithme d'ordre 4 peut être exprimé de la même manière dans la figure 3-2, les points intermédiaires étant ici au nombre de 4



b) Pour l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4

i) tangente à la courbe en  $M_0$

$$P'_1 \begin{cases} t_0 + h \\ x_0 + k_1 \end{cases} \quad k_1 = h A(t_0) x_0$$

ii) tangente à la courbe en  $P''_1$   $\begin{cases} t_0 + h/2 \\ x_0 + k_1/2 \end{cases}$

d'où

$$P'_2 \begin{cases} t_0 + 3h \\ x_0 + k_1 + 2k_2 \end{cases} \quad k_2 = A(t_0 + h/2) \cdot (x_0 + k_1/2)$$

iii) tangente à la courbe en  $P''_2$   $\begin{cases} t_0 + h/2 \\ x_0 + k_2/2 \end{cases}$

d'où

$$P'_3 \begin{cases} t_0 + 5h \\ x_0 + k_1 + 2k_2 + 2k_3 \end{cases} \quad k_3 = A(t_0 + h/2) \cdot (x_0 + k_2/2)$$

iv) tangente à la courbe en  $P''_3$   $\begin{cases} t_0 + h \\ x_0 + k_3 \end{cases}$

d'où

$$P'_4 \begin{cases} t_0 + 6h \\ x_0 + k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 \end{cases} \quad k_4 = A(t_0 + h) \cdot (x_0 + k_3)$$

Le point  $M_1$  est approché par le point  $M'_1$  obtenu en reliant  $M_0$  et  $P'_4$

$$M'_1 \begin{cases} t_0 + h \\ x_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{cases}$$

L'expression des algorithmes de Runge-Kutta d'ordre 2 puis 4 est donnée ci-dessous.



Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = h(A(t_n)) \cdot x_n$$

3-15

$$k_2 = h(A(t_n + h)) \cdot (x_n + k_1)$$

L'erreur par pas déterminée par la méthode exposée au paragraphe

3.2.2.(cfAnnexe 3-1) prend la forme

$$\epsilon_{n+1}^{RK_{22}} = -\frac{h^3}{12} \left| \frac{\delta^2 A}{\delta t^2} - 2 A^3 \right| x_n + O(h^4)$$

L'erreur globale  $\epsilon_q$  est d'ordre 2

$$\epsilon_q^{RH_{22}} \leq M_{22} h^2$$

Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h \cdot A(t_n) \cdot x_n$$

$$k_2 = h(A(t_n + h/2)) \cdot (x_n + k_1/2)$$

$$k_3 = h(A(t_n + h/2)) \cdot (x_n + k_2/2)$$

$$k_4 = h(A(t_n + h)) \cdot (x_n + k_3)$$

3-16

erreur par pas calculée de la même manière que pour l'ordre 2

$$\epsilon_{n+1}^{RK_{44}} = m_{44} h^5 + O(h^6)$$

erreur globale d'ordre 4

$$\epsilon_q^{RK_{44}} \leq M_{44} h^4$$

Il apparait ainsi que la méthode d'intégration numérique issue de la transformation homographique donne une précision comparable à celle de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2.

L'étude des propriétés de stabilité de cet algorithme permet toutefois de conclure différemment.

#### 3.2.4. Stabilité des algorithmes.

Dans le cas de systèmes d'équations différentielles linéaires stationnaires ou non, les propriétés de la transformation homographique permettent d'affirmer qu'à un système différentiel continu stable correspondra un algorithme également stable.

Au contraire la méthode de Runge-Kutta conduit à une récurrence qui assure la meilleure approximation mais dont le domaine de stabilité est restreint suivant les valeurs de  $h$  /3-2/.

Il est possible de modifier l'algorithme de Runge-Kutta afin d'augmenter le domaine de stabilité /3-4/, mais cela se traduit par une perte de précision d'un ordre en  $h$ .

Dans ce sens, on peut admettre que l'algorithme déduit de la transformation homographique donne, pour des domaines de stabilité équivalents, une précision identique à celle d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre 3 /3-2/.

Afin de simplifier la présentation, nous envisageons de présenter l'algorithme déduit de la transformation homographique sous une forme plus adaptée à ce point de vue.

### 3.2.5. Définition de l'algorithme de calcul.

La détermination de la séquence de  $z_n$  d'après la récurrence (3-5) nécessite l'inversion d'une matrice fonctionnelle  $B : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^{q \times q}$

$$B = \left[ I - \frac{h}{2} A(t_n + h/2) \right]$$
$$z_{n+1} = z_n + h A(t_n + \frac{h}{2}) \cdot B^{-1} \cdot z_n$$

Cependant, compte-tenu des résultats de l'étude d'erreur précédente, il est possible, sans perte de précision notable, de remplacer la récurrence (3-5) par l'algorithme 3-17 suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{n+1} = (I + h A_1 + \frac{h^2}{2} A_1^2) \cdot z_n \\ z_0 = x_0 \\ \text{avec } A_1 = A(t_n + h/2) \end{array} \right. \quad 3-17$$

Cet algorithme ne requiert que le calcul d'une même matrice  $A_1$  et les calculs simples décrits en 3-17.

Sur ces bases nous proposons de définir un algorithme de calcul applicable à des systèmes d'équations différentielles non linéaires.

### 3.3. Algorithme homographique pour l'intégration numérique d'un système d'équations différentielles non linéaires.

Soit le système non linéaire autonome décrit par l'équation 3-18

$$\dot{x}(t) = A(t, x(t)) \cdot x(t) \quad 3-18$$

La transformation homographique permet d'associer la récurrence 3-19 au système précédent 3-18

$$z_{n+1} = z_n + h \phi(z_n, t_n, h)$$
$$z_{n+1} = z_n + h A(t_n + h/2, x(t_n + h/2)) \left[ I - \frac{h}{2} A(t_n + h/2, x(t_n + h/2)) \right]^{-1} z_n \quad 3-19$$

La mise en oeuvre de l'algorithme nécessite une évaluation du vecteur  $x(t_n + h/2)$ .

D'après l'étude d'erreur du § 3-2, il est suffisant, compte-tenu de la précision, de remplacer le vecteur  $x(t_n + h/2)$  par une expression du 1<sup>o</sup> ordre en  $h$ .

La fonction vectorielle incrément peut être remplacée sans perte de précision par un développement analogue à celui qui a été défini à la relation 3-17.

L'algorithme de calcul s'écrit donc

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{n+1} = \left[ I + h A_2 + \frac{h^2}{2} (A_2)^2 \right] z_n \\ A_2 = A(t_n + h/2, y_n) \\ y_n = \left[ I + (h/2) A(t_n, z_n) \right] z_n \end{array} \right. \quad 3-20$$

Afin de mieux préciser les résultats de l'algorithme déduit de la transformation homographique, nous proposons de comparer entre elles différentes méthodes d'intégration sur un exemple numérique particulier.

Il s'agit d'un système d'équations différentielles du type de Riccati.

#### 3.4. Intégration d'un système d'équations différentielles du type de Riccati.

Le système que nous avons choisi de résoudre numériquement est décrit par les relations (3-21)

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= (x)^2 / \lambda \tau^2 + \alpha \\ \dot{x} &= (x) / \tau - x^1 + x x^2 / \lambda \tau^2 \\ \dot{x}^2 &= 2 x^2 / \tau - 2x + (x^2)^2 / \lambda \tau^2 + \beta \end{aligned} \quad 3-21$$

$\lambda$  et  $\tau$  sont deux paramètres à valeurs réelles positives.

Les conditions aux limites sont données par les valeurs terminales fixées

$$\text{si } t \in [t_0, t_f]$$

$$x_1(t_f) = x_{1f} \quad x(t_f) = x_f \quad x_2(t_f) = x_{2f} \quad 3-21b$$

Ce système peut être écrit dans la forme vectorielle 3-22 en posant

$$\begin{aligned} x &= [x^1, x, x^2]^T \\ \dot{x} &= f(x) \\ x(t_f) &= x_f \quad x_f = [x_{1f}, x_f, x_{2f}]^T \end{aligned} \quad 3-22$$

Nous envisageons de comparer les résultats de trois méthodes d'intégration numérique (cf figure 3-3) à la solution exacte déterminée dans le cadre d'un problème de régulateur optimal [voir Annexe 3-2 et section 4-2 du ch. 4]. La solution exacte est notée solution (C)

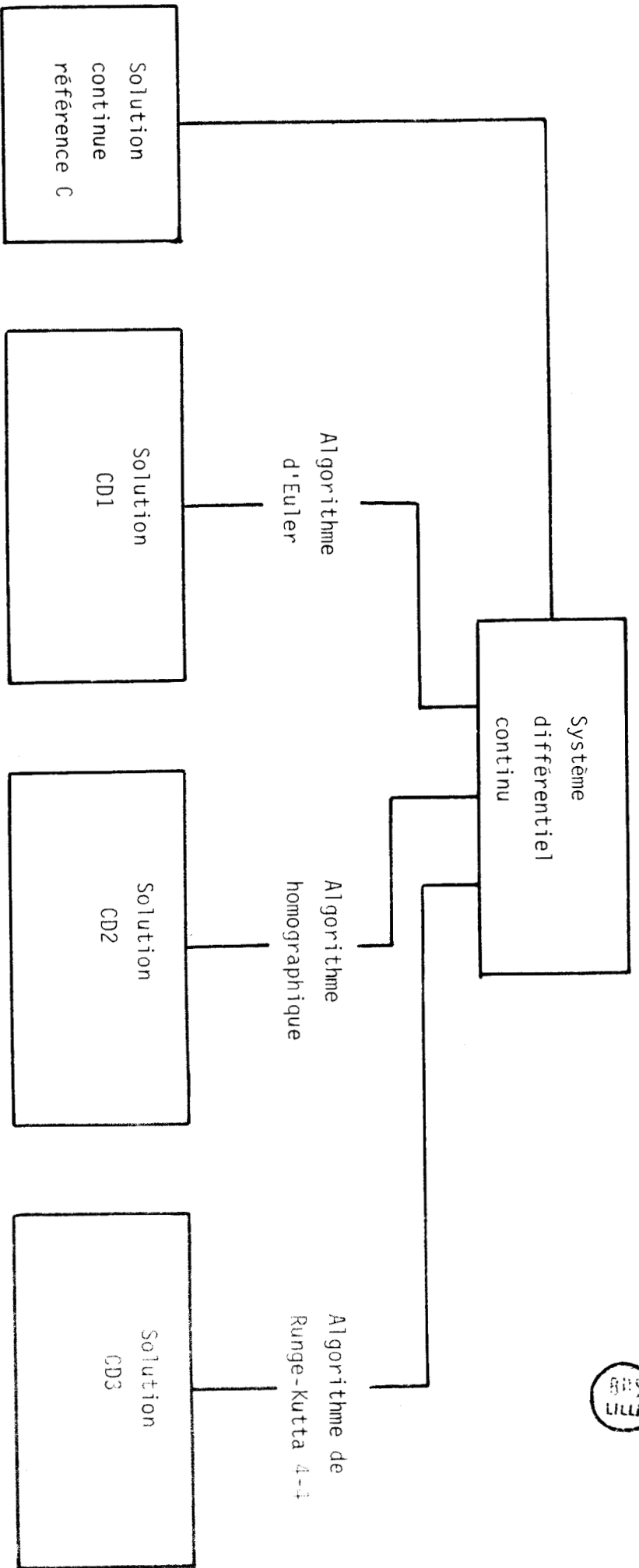


FIGURE 3-3

3.4.1. Approximation d'Euler notée (CD1).

Dans cette approximation au premier ordre, la dérivée  $\dot{x}$  est confondue avec la différence première  $(x_{n+1} - x_n)/h$

La récurrence permettant de déterminer  $x(t_0)$  à partir des valeurs finales  $x(t_f) = x_f$  s'écrit donc sous la forme 3-23 où  $h$  est pris positif.

$$x_n = x_{n+1} - h f(x_{n+1})$$

soit

$$x'_n = x'_{n+1} + h (\alpha - (x_{n+1})^2 / \lambda \tau^2)$$

$$x_n = x_{n+1} + h (x'_{n+1} - x_{n+1} / \tau - x_{n+1}^2 / \lambda \tau^2) \quad 3-23$$

$$x_n^2 = x_{n+1}^2 + h (2x_{n+1} - 2x_{n+1}^2 / \tau - (x_{n+1}^2)^2 / \lambda \tau + \beta)$$

3.4.2. Algorithme déduit de la transformation homographique notée (CD2)

Le système retenu décrit par les relations 3-21 peut se mettre sous la forme matricielle 3-24 suivante, le vecteur  $x$  correspondant aux notations 3-22

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + C \\ C^T &= [\alpha, 0, \beta] \end{aligned} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & x/\lambda\tau^2 & 0 \\ -1 & 1/\tau + x^2/\lambda\tau^2 & 0 \\ 0 & -2 & 2/\tau + x^2/\lambda\tau^2 \end{bmatrix} \quad 3-24$$

L'algorithme défini par les relations 3-20 s'écrit donc, en notant  $y_n = [y^1, y, y^2]^T$  le vecteur intermédiaire, sous la forme 3-25.

$$y^1 = x_{n+1}^1 + h/2(\alpha - (x_{n+1}^1)^2/\lambda\tau^2)$$

$$y = x_{n+1} + h/2(x_{n+1}^1 - x_{n+1}/\tau - x_{n+1} x_{n+1}^2/\lambda\tau^2)$$

$$y^2 = x_{n+1}^2 + h/2(2x_{n+1} - 2x_{n+1}^2 - (x_{n+1}^2)^2/\lambda\tau^2 + \beta)$$

$$x_n^1 = a_3 x_{n+1}^1 - a_6 a_2 x_{n+1} + \alpha h$$

$$x_n = h a_2 x_{n+1}^1 + (a_3 - h a_1 a_2) x_{n+1} \quad 3-25$$

$$x_n^2 = h^2 x_{n+1}^1 + h(4 a_2 - a_4) x_{n+1} + (1 - a_5 + a_5^2/2)x_{n+1}^2 + \beta h [1 - (a_5/2)]$$

avec

$$a_1 = 1/\tau + y^2/\lambda\tau^2 \quad a_2 = 1 - (h/2)a_1$$

$$a_4 = 2 + h/\tau \quad a_5 = h/\tau + h a_1$$

$$a_6 = h y / \lambda\tau^2 \quad a_3 = 1 - (h/2) a_6$$

### 3.4.3. Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4-4 noté (CD3)

Les relations 3-16 définiesci-dessus donnent pour cet exemple numérique en définissant les vecteurs :

$$l_1 = (l_1^1, l_1, l_1^2)^T \quad l_2 = (l_2^1, l_2, l_2^2)^T \quad l_3 = (l_3^1, l_3, l_3^2)^T \quad l_4 = (l_4, l_4, l_4^2)$$

$$l_1 = - hf(x_{n+1})$$

$$l_2 = - hf(x_{n+1} + (l_1/2))$$

$$l_3 = - hf(x_{n+1} + l_2/2)$$

$$l_4 = - hf(x_{n+1} + l_3)$$

Nous indiquons simplement la forme de la relation définissant  $l_2$   
il vient :



$$\begin{aligned} \ell_2^1 &= - (x_{n+1} + (\ell_1/2))^2 / \lambda \tau^2 \\ \ell_2 &= (x_{n+1}^1 + (\ell_1^1/2)) - (x_{n+1} + (\ell_1/2))/\tau - \frac{(x_{n+1} + (\ell_1/2))(x_{n+1}^2 + (\ell_1^2/2))}{\lambda \tau^2} \\ \ell_2^2 &= 2(x_{n+1} + \ell_1/2) - 2(x_{n+1}^2 + (\ell_1^2/2))/\tau - (x_{n+1}^2 + (\ell_1^2/2))^2 / \lambda \tau^2 \end{aligned}$$

$x_n$  est obtenu à partir de  $x_{n+1}$  par la récurrence 3-26

$$x_n = x_{n+1} + \frac{1}{6} [\ell_1 + 2\ell_2 + 2\ell_3 + \ell_4] \quad 3-26$$

Le calcul du vecteur initial  $x(t_0)$  par ces trois méthodes a été effectué sur ordinateur Philips P 9200, les programmes étant rédigés en Fortran IV.

Afin de pouvoir comparer rapidement la qualité des méthodes proposées, nous proposons d'utiliser un certain nombre de critères caractérisant la précision des résultats obtenus par ces trois algorithmes.

#### 3.4.4. Moyens de comparaisons des résultats

Nous proposons de calculer pour chaque résolution (suivant les valeurs des paramètres  $\lambda$  et  $\tau$ )

i) l'écart entre la valeur exacte (C) et la valeur calculée des variables  $x^1$ ,  $x$ ,  $x^2$  pour chaque pas de calcul.

Nous disposons ainsi de valeurs  $\varepsilon_i^1$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $\varepsilon_i^2$  pour chacune des méthodes ; ces valeurs sont définies suivant le modèle de la relation 3-27 pour la variable  $\varepsilon_i^1$ .

$$\epsilon_i^1 = \bar{x}_i^1 - (x_i^1)$$

$\bar{x}_i^1$  valeur exacte de la variable  $x^1$  au temps  $t_i$   
3-27

$x_i^1$  valeur calculée par la méthode envisagée à l'instant  $t_i$

ii) la valeur moyenne des écarts en valeur algébrique et en valeur absolue ainsi que l'erreur globale moyenne des erreurs par pas sur les trois variables  $x^1$ ,  $x$ ,  $x^2$  et de même pour les valeurs initiales

iii) l'écart type des erreurs pour chaque variable permet d'apprécier la propagation des erreurs à chaque pas

iv) la norme euclidienne du vecteur erreur  $\epsilon_i = (\epsilon_i^1, \epsilon_i, \epsilon_i^2)^T$  à chaque pas de calcul permet de chiffrer la précision globale de chaque méthode.

Les résultats sont regroupés pour chaque valeur des paramètres et du pas de calcul suivant le format du tableau de la figure 3-4.

L'allure des solutions exactes du système d'équations différentielles du type de Riccati est de plus indiquée aux figures 4-20, 4-21, 4-22 du chapitre suivant. (section 4-2-3)

	Type de la méthode de résolution		
	CD1	CD2	CD3
$E(\varepsilon x_i^1)$ $E( \varepsilon x_i^1 )$ $\sigma(\varepsilon x_i^1)$	moyenne des erreurs sur $x_i^1$ en valeur algébrique moyenne des erreurs sur $x_i^1$ en valeur absolue écart type des erreurs sur $x_i^1$		
$E(\varepsilon x_i)$ $E( \varepsilon x_i )$ $\sigma(\varepsilon x_i)$	identique pour la variable $x$		
$E(\varepsilon x_i^2)$ $E( \varepsilon x_i^2 )$ $\sigma(\varepsilon x_i^2)$	identique pour la variable $x^2$		
$\frac{\sum (E \varepsilon x^j )}{3}$	moyenne des erreurs sur les trois variables		
$\overline{M}$	moyenne des normes euclidiennes des vecteurs erreurs $\frac{1}{n} \sum \sqrt{(\varepsilon_i^1)^2 + (\varepsilon_i)^2 + (\varepsilon_i^2)^2}$ n nombre de pas		
$\frac{\sum_{j=102} ( \varepsilon x_0^j )}{3}$	moyenne des erreurs sur les valeurs initiales trouvées pour les trois variables $x^1, x, x^2$ (indice j)		

FORMAT DE PRESENTATION DES RESULTATS

FIGURE 3-4



### 3.4.5. Discussion des résultats.

La forme des enregistrements graphiques ( cf chap. 4 ) des valeurs des variables  $x^1$ ,  $x$ ,  $x^2$  montre l'intérêt d'une telle équation pour tester la validité des méthodes utilisées.

La courbe des variations de  $x^2$  indique en effet un comportement quasi-asymptotique au voisinage de la valeur finale  $x_f^2$  plus ou moins accentué suivant la valeur des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  et les valeurs terminales fixées.

Les résultats de ces méthodes sont présentées pour différentes valeurs de paramètres indiquées ci-dessous.

Les calculs ont été effectués pour un nombre de pas respectivement de 5, 10 et 20.

tableau 1 : Erreurs sur  $x^1$ ,  $x$ ,  $x^2$  pour les méthodes CD1, CD2, CD3

$$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad \lambda = 1 \quad \tau = 1 \quad tf = 2s \\ x^1_{tf} = 9 \quad x_{tf} = 0 \quad x^2_{tf} = 1$$

tableau 2 : Erreurs sur  $x^1$ ,  $x$ ,  $x^2$  pour les méthodes CD1, CD2, CD3

$$\alpha = 0 \quad \beta = 6 \quad \lambda = 1 \quad \tau = 1 \quad tf = 2s \\ x^1_{tf} = 1 \quad x_{tf} = 0 \quad x^2_{tf} = 1$$

tableau 3 : Erreurs sur  $x^1$ ,  $x$ ,  $x^2$  pour les méthodes CD1, CD2

$$\alpha = 6 \quad \beta = 6 \quad \lambda = 1 \quad \tau = 1 \quad tf = 2s \\ x^1_{tf} = 1 \quad x_{tf} = 0 \quad x^2_{tf} = 1$$

tableau 4 : Répartition des erreurs entre  $x^1$ ,  $x$ ,  $x^2$  pour les méthodes CD1, CD2, CD3

$$\alpha = 0 \quad \beta = 6 \quad \text{et} \quad \lambda = 1 \quad \tau = 1 \quad tf = 2s \\ \alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad x^1_{tf} = 1 \quad x_{tf} = 0 \quad x^2_{tf} = 1$$

tableau 5 : Répartition des erreurs entre  $x^1$ ,  $x$ ,  $x^2$  pour les méthodes CD1, CD2

$$\alpha = 6 \quad \beta = 6 \quad \lambda = 1 \quad \tau = 1 \quad tf = 2s \\ x^1_{tf} = 1 \quad x_{tf} = 0 \quad x^2_{tf} = 1$$

		CD1	CD2	CD3
$E(\epsilon x^1)$	N = 10	0.926339	- 0.031178	0.004662
	N = 20			
$E(\epsilon   x^1  )$	N = 10	1.026726	0.0579136	0.004662
	N = 20	0.4105976	0.0165336	0.000248
$\sigma(\epsilon x^1)$	N = 10	0.801269	0.057333	0.00308
/ / / / /				
$E(\epsilon x)$	N = 10	0.109325	0.029573	0.000414
$E( \epsilon x )$	N = 10	0.5509954	0.040514	0.002876
	N = 20	0.3710348	0.0132938	0.000244
$\sigma(\epsilon x)$	N = 10	0.568866	0.04363	0.003329
/ / / / /				
$E(\epsilon x^2)$	N = 10	0.097931	- 0.030263	0.000033
$E(\epsilon x^2  )$	N = 10	0.2748996	0.0435634	0.001623
	N = 20	0.1411308	0.00129024	0.0001256
$\sigma(\epsilon x^2)$	N = 10	0.280377	0.060322	0.001826
/ / / / /				
$\xi \frac{ \epsilon x^j }{3}$	N = 10	0.6175404	0.047330	0.00305
	N = 20	0.310921	0.014243	0.000206
$\eta(x^1 x x^2)$	N = 10	1.2813826	0.11366367	0.006347
/ / / / /				
$\xi \left(\frac{\epsilon x_0}{3}\right)$	N = 10	0.562256	0.034570	0.00153
	N = 20	0.206217	0.00885	0.000072

Erreur sur  $x^1, x, x^2$  pour les méthodes CD1, CD2, CD3



$$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad \lambda = 1 \quad \tau = 1$$

tableau 1

$$x^1 \text{tf} = 9 \quad x \text{tf} = 0 \quad x^2 \text{tf} = 1$$

		CD1	CD2	CD3
$E(\epsilon X^1)$	N = 5	0.011634	0.000579	0.001296
	N = 10	0.003663	- 0.000332	0.000048
$E( \epsilon X^1 )$	N = 5	0.016004	0.002973	0.001296
	N = 10	0.004818	0.000496	0.000048
$\sigma(\epsilon X^1)$	N = 5	0.014593	0.003362	0.000897
	N = 10	0.004292	0.000495	0.000025
/ / / / /				
$E(\epsilon X)$	N = 5	- 0.032121	0.033125	0.00613
	N = 10	- 0.016195	0.003909	0.000161
$E( \epsilon X )$	N = 5	0.081144	0.033125	0.00613
	N = 10	0.01677	0.003909	0.000161
$\sigma(\epsilon X)$	N = 5	0.084954	0.024574	0.005626
	N = 10	0.01756	0.003086	0.000148
/ / / / /				
$E(\epsilon X^2)$	N = 5	- 0.093137	0.091749	0.038917
	N = 10	- 0.038149	0.009415	0.000878
$E( \epsilon X^2 )$	N = 5	0.564298	0.091749	0.038917
	N = 10	0.03819	0.009415	0.000878
$\sigma(\epsilon X^2)$	N = 5	0.560608	0.075955	0.03968
	N = 10	0.055818	0.10239	0.001064
/ / / / /				
$\frac{E \epsilon X^j }{3}$	N = 5	0.221752	0.042615	0.015447
	N = 10	0.019928	0.004606	0.0003623
/ / / / /				
$\mu$	N = 5	0.571459	0.097731	0.039433
	N = 10	0.045104	0.010453	0.0009
/ / / / /				
$\frac{E(\epsilon X_0)}{3}$	N = 5	0.2094323	0.010635	0.001684
	N = 10	0.0035026	0.0005636	0.000019

Erreurs sur  $x^1$ ,  $x$ ,  $x^2$  pour les méthodes CD1, CD2, CD3

tableau 2

$$\alpha = 0 \quad \beta = 6 \quad \lambda = 1 \quad \sigma = 1 \quad t_f = 2s$$

$$x^1 t_f = 1 \quad x t_f = 0 \quad x^2 t_f = 1$$



		CD1	CD2
$E(\epsilon_X^1)$	N = 10	- 0.17965	0.00501
$E( \epsilon_X^1 )$	N = 10	0.17965	0.00705
$\sigma(\epsilon_X^1)$	N = 10	0.11245	0.00663
/ / /	/ / /	/ / /	/ / /
$E(\epsilon_X)$	N = 10	- 0.0397	- 0.00455
$E( \epsilon_X )$	N = 10	0.069889	0.007543
$\sigma(\epsilon_X)$	N = 10	0.06476	0.00789
/ / /	/ / /	/ / /	/ / /
$E(\epsilon_X^2)$	N = 10	- 0.04071	0.00323
$E( \epsilon_X^2 )$	N = 10	0.04071	0.01027
$\sigma(\epsilon_X^2)$	N = 10	0.0454	0.01387
/ / /	/ / /	/ / /	/ / /
$\xi \frac{ \epsilon_X^j }{3}$	N = 10	0.09675	0.00835
/ / /	/ / /	/ / /	/ / /
<i>m</i>	N = 10	0.21353	0.01777
/ / /	/ / /	/ / /	/ / /
$\xi \frac{ \epsilon_{X0} }{3}$	N = 10	0.09064	0.00532

Erreur sur  $x^1$ ,  $x$ ,  $x^2$  pour les méthodes CD1, CD2

$$\alpha = 6 \quad \beta = 6 \quad \lambda = 1 \quad \tau = 1 \quad tf = 2s$$

tableau 3

$$x^1 tf = 1 \quad xtf = 0 \quad x^2 tf = 1$$



		CD1	CD2	CD3
%E  $\epsilon x^1$	$\alpha = 0 \quad \beta = 6$	- 2.40 %	2.325 %	4.63 %
	$\alpha = 0 \quad \beta = 0$	8.06 %	3.59 %	4.416 %
%E  $\epsilon x$	$\alpha = 0 \quad \beta = 6$	12.197 %	25.91 %	13.22 %
	$\alpha = 0 \quad \beta = 0$	28.05 %	28.289 %	14.81 %
%E  $\epsilon x^2$	$\alpha = 0 \quad \beta = 6$	84.82 %	71.76 %	83.98 %
	$\alpha = 0 \quad \beta = 0$	63.88 %	68.136 %	80.78 %

tableau 4 : Répartition des erreurs sur  $x^1$ ,  $x$ ,  $x^2$  pour les méthodes CD1, CD2, CD3

$\alpha = 0 \quad \beta = 6$  ou  $\alpha = 0 \quad \beta = 0$  ;  $\lambda = 1$  ;  $\tau = 1$  ;  $tf = 2s$   
 $x^1 tf = 1 \quad x tf = 0 \quad x^2 tf = 1$

	CD1	CD2
% E  $x^1$	61.89 %	28.14 %
% E  $x$	24.078 %	30.11 %
% E  $x^2$	14.025 %	41 %

tableau 5 : Répartition des erreurs sur  $x^1$ ,  $x$ ,  $x^2$  pour les méthodes CD1, CD2

$\alpha = 6 \quad \beta = 6 \quad \lambda = 1 \quad \tau = 1 \quad tf = 2s$   
 $x^1 tf = 1 \quad x tf = 0 \quad x^2 tf = 1$





Diverses remarques peuvent être effectuées sur le comportement de l'algorithme déduit de la transformation homographique CD2

. les erreurs en valeurs algébriques se répartissent en valeurs positives et négatives de part et d'autre du 5<sup>o</sup> pas pour un nombre de pas de calcul de 10 ou de 10<sup>o</sup> pas pour un nombre de pas de calcul de 20.

C'est une vérification du caractère propre à l'algorithme dont les valeurs successives encadrent les valeurs réelles.

. Pour des valeurs de paramètres correspondant à des comportements asymptotiques des variables  $x^1$  ou  $x^2$ , l'erreur reste faible au contraire de l'algorithme CD1 qui donne des résultats aberrants.

. Dans l'ensemble l'erreur globale en valeur absolue sur l'ensemble des variables reste inférieure à 1/100 pour 10 pas de calcul et à 5/100 pour 5 pas de calcul.

### Conclusion

Les propriétés de la transformation homographique ont permis d'envisager son application à l'intégration de systèmes d'équations différentielles vectoriels du premier ordre.

L'étude théorique de l'algorithme ainsi défini montre que pour des systèmes linéaires, stationnaires ou non, il permet d'obtenir, avec un volume de calcul relativement réduit, une précision analogue à celle donnée par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 3.

Les résultats obtenus dans l'exemple numérique non linéaire, sont assez voisins de ceux qui ont été obtenus par une méthode classique d'intégration (méthode de Runge-Kutta d'ordre 4-4).  
En outre ils confirment l'excellente stabilité de l'algorithme et la précision acceptable, même pour un nombre de pas de calcul restreint.

CHAPITRE IV

APPLICATION A LA DEFINITION D'UNE COMMANDE NUMERIQUE QUASI-OPTIMALE

D'UN MOTEUR

## INTRODUCTION

Afin d'illustrer les résultats théoriques des chapitres 2 et 3 nous proposons d'étudier une application concrète relative à un problème de régulateur d'état. Il s'agit de définir la commande discrète d'un moteur à courant continu commandé par l'induit et représenté selon un modèle linéaire du second ordre. Le choix d'un système d'ordre 2 conduit par l'utilisation du principe du maximum à intégrer en fait un système d'ordre 4. L'intégration formelle est encore possible à ce niveau et permet à titre de comparaison de disposer de la solution théorique optimale continue dite "solution de référence".

La transformation homographique est alors utilisée soit comme méthode numérique d'intégration d'un système d'équations différentielles, soit comme un outil de transposition d'un problème de commande optimale continu en un problème discret équivalent.

La comparaison des résultats obtenus est facilitée par l'utilisation d'un indice  $Q$  permettant d'estimer globalement le niveau de l'approximation réalisée pour chaque méthode envisagée.

#### 4.1. Présentation du problème

A titre d'application, nous proposons d'étudier la commande d'un moteur décrit par une fonction de transfert du second ordre et de constante de temps  $\tau$

$$L(p) = 1/p(1 + \tau p)$$

La variable  $u$  désigne la commande monovariante appliquée au système.

Le choix d'un vecteur d'état  $x$  dont les composantes sont successivement la sortie  $y$  et sa dérivée première  $\dot{y}$ , conduit à décrire le système par une relation matricielle de la forme suivante :

$$\dot{x} = A x + B u \quad 4-1$$

$A$  : matrice de dimension  $2 \times 2$  décrivant le fonctionnement du système en régime autonome

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/\tau \end{bmatrix}$$

B : vecteur de dimension 2 traduisant l'effet de la commande u sur le système

$$B^T = [0, 1/\tau]$$

La fonctionnelle de coût déjà décrite au chapitre 2 (2-4) s'écrit dans ce cas

$$J = 1/2 (x^T S x)_{t=t_f} + \int_{t_0}^{t_f} ((x^T Q x) + u^T R u) dt$$

4-2

$$S = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma' \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \quad R = \lambda$$

La commande étant monovariable le seul paramètre  $\lambda$  exprime la valeur relative accordée au coût de la commande.

Les équations canoniques du problème optimal ainsi défini s'écrivent, en notant  $\psi$  le vecteur adjoint, sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B R^{-1} B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix}$$

Pour le système étudié il vient

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\tau & 0 & -1/\lambda\tau^2 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & -1 & 1/\tau \end{bmatrix}$$

4-3

L'introduction d'une structure de commande en boucle fermée conduit à des équations de résolution de la forme décrite au § 2-2 du chapitre II.

Notons  $K(t)$  la matrice de gain de Kalman

$$K(t) = \begin{bmatrix} k_1(t) & k(t) \\ k(t) & k_2(t) \end{bmatrix}$$

définie par le système d'équation différentielle de la forme (2-8) sur  $\mathcal{C}: [t_0, t_f]$

$$\begin{aligned} \dot{k}_1 & - (1/\lambda\tau^2) k^2 + \alpha = 0 & k_1(t_f) & = \gamma \\ \dot{k} + k_1 - k & - (1/\lambda\tau^2) k k_2 = 0 & k(t_f) & = 0 \\ \dot{k}_2 + 2(k - (1/\tau) k_2) & - (1/\lambda\tau^2) k_2^2 + \beta = 0 & k_2(t_f) & = \gamma' \end{aligned} \quad 4-4$$

La loi de commande optimale  $u(t)$  peut alors s'exprimer sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$  par la relation (4-5).

$$u = - (1/\lambda\tau) [k y + k_2 \dot{y}] \quad 4-5$$

Le schéma de la figure 4-1 présente un organigramme fonctionnel des différentes méthodes déjà citées au chapitre II et que nous proposons d'illustrer sur l'exemple d'application relatif à la commande optimale d'un moteur.

Les calculs ont été conduits sur calculateur Philips P 9200.

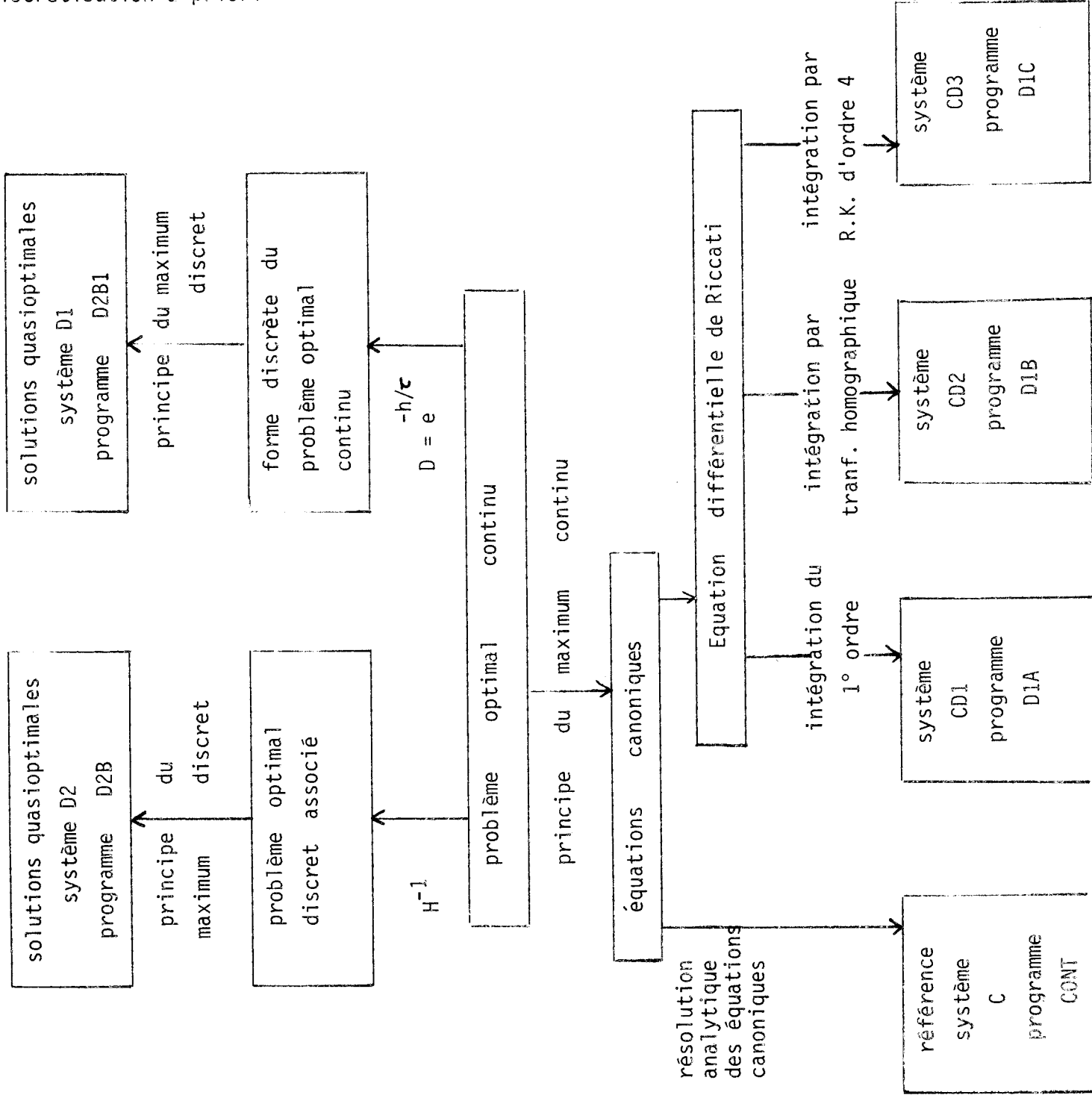


FIGURE 4-1





Nous proposons dans un premier temps de présenter la solution de référence continue et d'étudier les résultats obtenus suivant la valeur des paramètres. Une deuxième étape permet d'introduire et de comparer à cette référence les solutions obtenues par les méthodes numériques classées en deux groupes :

- (i) Les premières correspondent à une discrétisation "à posteriori"
- (ii) Les secondes correspondent à une discrétisation "à priori".

La comparaison des divers résultats sera effectuée suivant les critères que nous avons introduits au chapitre 3 et précisés en annexe 4-1.

#### 4.2. Résolutions exactes : solutions de référence

Une première possibilité pour résoudre ce problème optimal continu est d'effectuer une simulation hybride de la commande et des équations différentielles définissant le moteur. Nous proposons ensuite de rechercher la forme analytique de ces solutions.

##### 4.2.1. Méthode de résolution par simulation hybride

L'obtention des valeurs de la loi de commande  $u(t)$  ainsi que des variables d'état  $y$  et  $\dot{y}$  du moteur nécessite la connaissance des valeurs de la matrice de gain  $K(t)$  à tout instant sur l'intervalle d'étude  $t_0, t_f$ . Le système d'équations différentielles (4-4) dont nous disposons est un système dont la condition aux limites est une condition finale. Soit

$$K(t) + f(k,t) = 0 \text{ avec } K(t_f) = S$$

Les conditions initiales de ce système peuvent être déterminées en résolvant le système adjoint défini par la relation suivante :

$$\dot{K}'(t) - f(K',t) = 0$$

partant des conditions initiales  $K'(t_0) = K(t_f)$  et parvenant aux conditions finales  $K'(t_f) = K(t_0)$ .

La simulation du système continu se décompose donc en 2 phases :

- 1°) Résolution du système adjoint du système d'équations différentielles de Riccati partant de conditions initiales  $K'(t_0) = K(t_f) = S$
  - 2°) Après gel des valeurs finales obtenues par le système adjoint, résolution du système d'équations différentielles de Riccati et du filtre associé.
- L'organisation séquentielle des différentes phases de la simulation peut être résumée sur le schéma suivant :

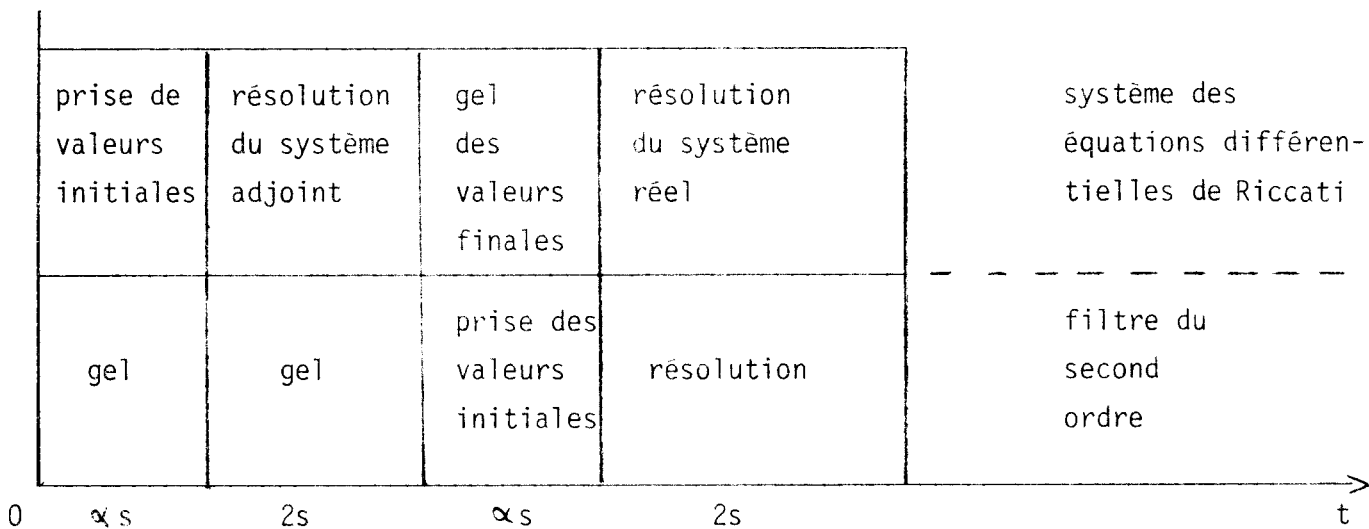


FIGURE 4-2

Nous proposons tout d'abord de décrire les schémas analogiques utilisés pour simuler le système d'équations différentielles de Riccati ainsi que le filtre du second ordre représentant le fonctionnement du moteur et ensuite les fonctions logiques nécessaires à la résolution du modèle ainsi constitué.

#### 4.2.1.1. Représentation analogique des équations différentielles

D'après les relations (4-1), (4-4) et (4-5) les équations différentielles permettant de connaître la loi de commande optimale et de suivre l'évolution des variables d'état du système s'écrivent :

$$\tau \ddot{y} + \dot{y} = u$$

$$u = -(1/\lambda\tau) (ky + k_2 \dot{y})$$

$$\begin{aligned} - \dot{k}_1 &= - (1/\lambda\tau) k^2 + \alpha & k_1(t_f) &= \gamma \\ - \dot{k} &= + k_1 - (1/\tau)k - (1/\lambda\tau^2) k k_2 & k(t_f) &= 0 \\ - \dot{k}_2 &= + 2(k - (1/\tau) k_2) - (1/\lambda\tau^2) k_2^2 + \beta k_2(t_f) & &= \gamma' \end{aligned}$$

il s'en déduit de manière immédiate le système adjoint suivant :

$$\begin{aligned} - \dot{k}'_1 &= - [ - (1/\lambda\tau)k'^2 + \alpha ] & k'_1(t_0) &= \gamma \\ - \dot{k}' &= - [ k_1 - (1/\tau) k' - (1/\lambda\tau^2) k'k'_2 ] & k(t_0) &= 0 \\ - \dot{k}'_2 &= - [ 2(k' - (1/\tau) k'_2) - (1/\lambda\tau^2) k_2'^2 + \beta ] & k'_2(t_0) &= \gamma' \end{aligned}$$

Les paramètres de la fonctionnelle de coût sont supposés prendre les valeurs suivantes

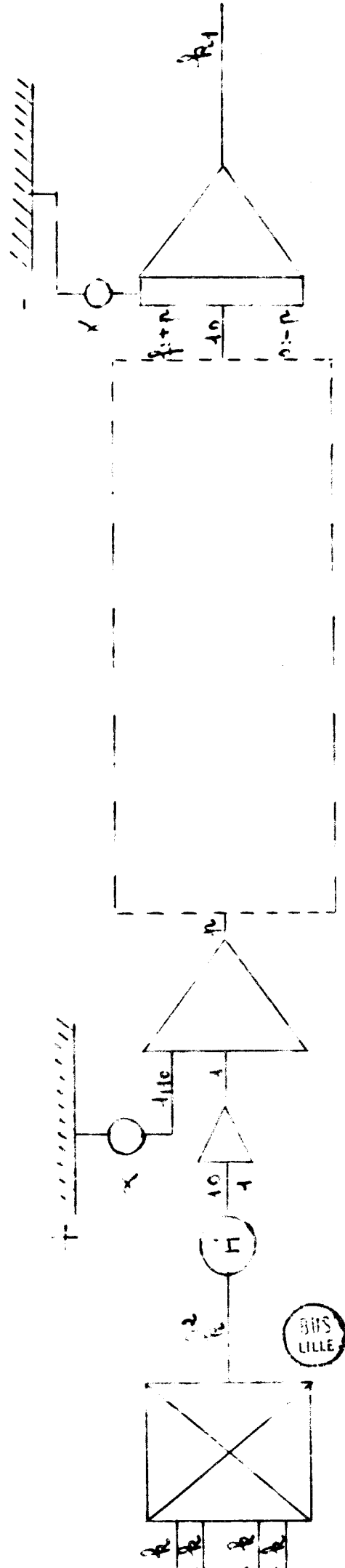
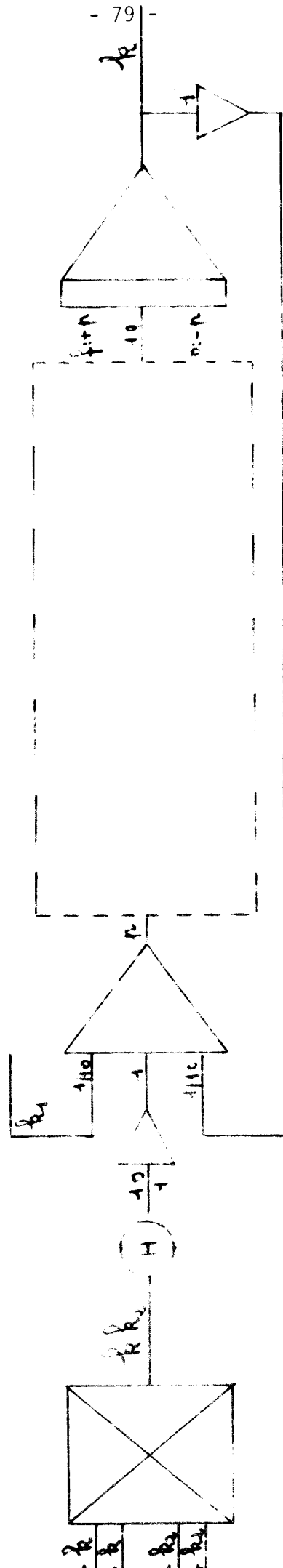
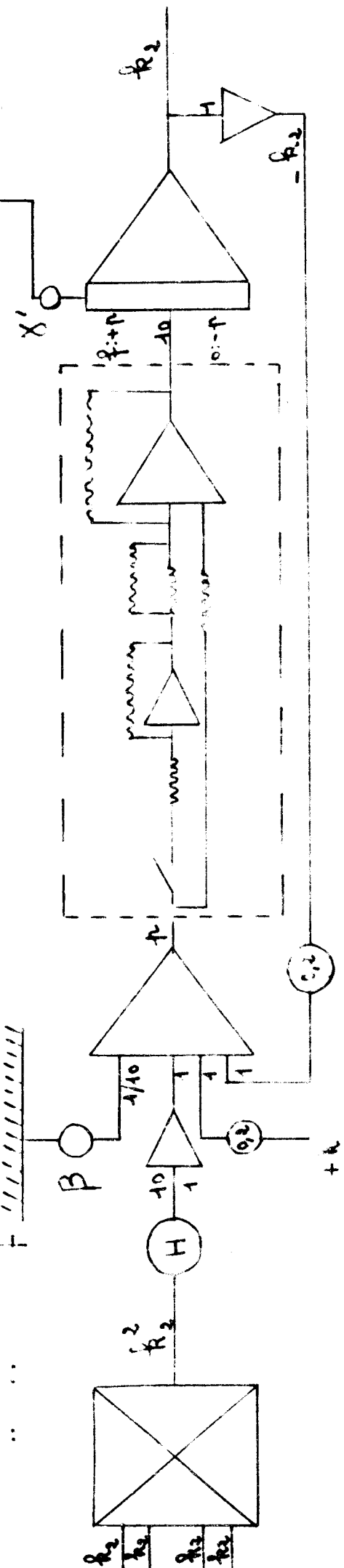
$$\begin{aligned} \lambda &\in [0.01, 1] \\ \alpha &\in [0.1, 10] \\ \beta &\in [0.1, 10] \\ \gamma, \gamma' &\in [0.1, 10] \end{aligned}$$

En notant  $H = \frac{1}{10\lambda\tau}$  et pour  $\tau = 1$  s il vient :

$$\begin{aligned} - \dot{k}_1 &= - 10 H k^2 + \alpha \\ - \dot{k} &= k_1 - k - 10 H k k_2 \\ - \dot{k}_2 &= 2k - 2k_2 - 10 H k_2^2 + \beta \end{aligned} \quad 4-6$$

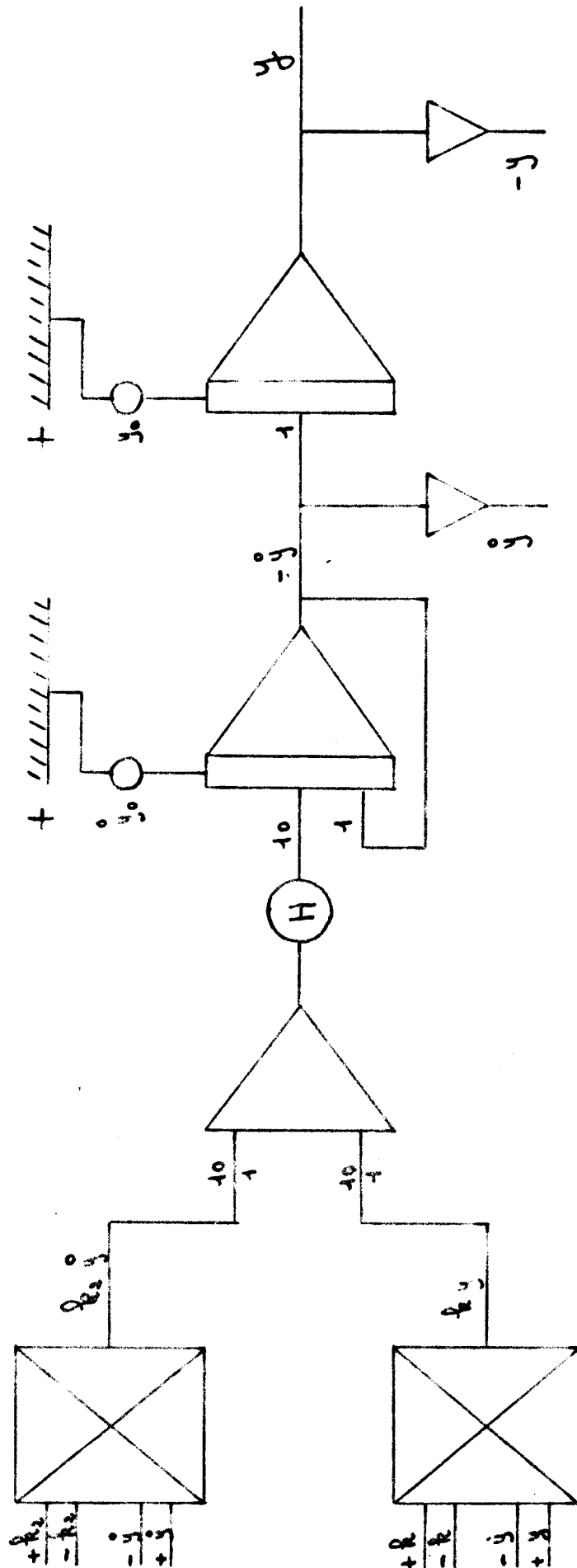
La simulation des équations du système de Riccati et du système adjoint s'effectue alors suivant le schéma de la figure 4-3.

Les valeurs du paramètre  $\lambda$  sont obtenues par changement du gain d'entrée des amplificateurs opérationnels de 10 à 1 ; la variation des paramètres est assurée par des potentiomètres ainsi qu'il est indiqué sur le schéma (4-3).



Simulation des équations de mouvement d'un système à deux degrés de liberté

BIS LILLE



REPRESENTATION ANALOGIQUE D'UN FILTRE DU SECOND ORDRE  $Z=1$

Figure 4-4



#### 4.2.1.2. Logique de contrôle et séquencement

La base de temps est donnée par un ensemble de monostables et bistables, le réglage des monostables  $P_1$  et  $P_2$  permet d'obtenir les 2 signaux  $P_1$  et  $f_1$  à partir desquels seront élaborés les signaux logiques nécessaires. Une Commande Manuelle (CM) permet d'imposer l'état de "Prise de valeurs initiales" puis de démarrer la résolution complète

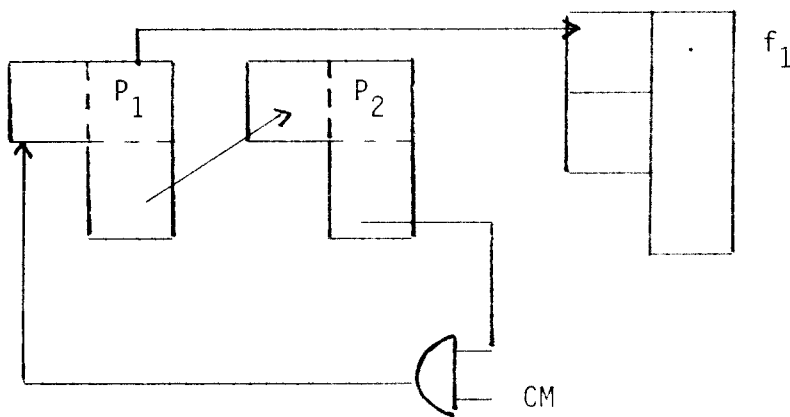


FIGURE 4-5

Notons  $IC_1$ ,  $OP_1$  les signaux booléens commandants respectivement la fonction prise de "conditions initiales" et la fonction "résolution des 3 intégrateurs" correspondants aux équations différentielles de Riccati.

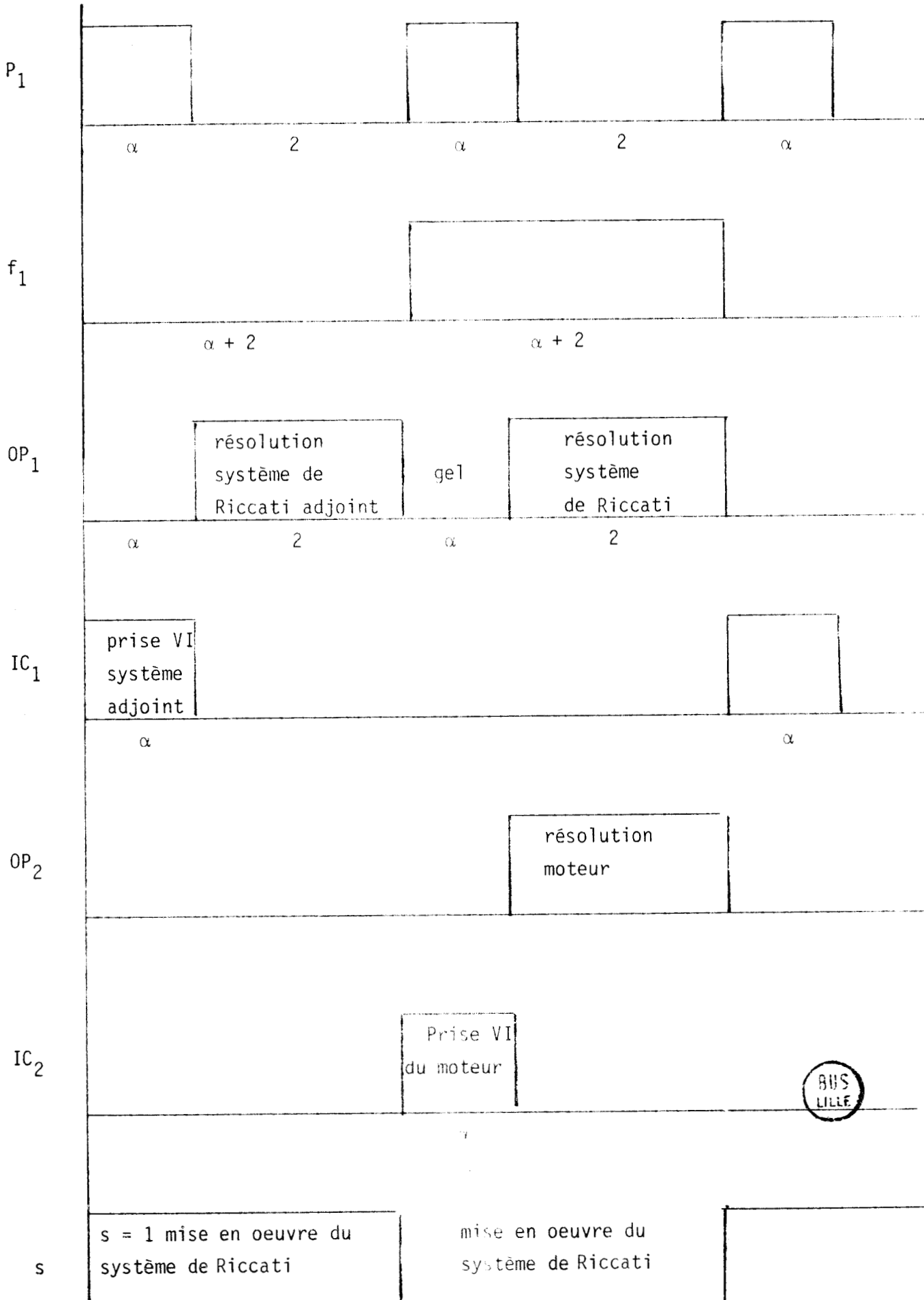
Les signaux booléens  $IC_2$ ,  $OP_2$  définissent la commande des 2 intégrateurs du filtre du second ordre simulant le moteur. (cf figure 4-4)

Enfin  $s$  désigne le signal booléen de commande de l'interrupteur associé à la résolution analogique des équations de Riccati.

Les séquences imposées respectivement aux variables booléennes  $P_1$ ,  $f_1$ ,  $OP_1$ ,  $IC_1$  sont indiquées sur le schéma de la figure 4-6.

EVOLUTION DES SIGNAUX LOGIQUES DE COMMANDE DES INTEGRATEURS

FIGURE 4-6



Les fonctions logiques correspondantes sont alors déduites de  $P_1$  et

$f_1$  :

$$\begin{aligned} OP_1 &= \overline{P_1} \\ IC_1 &= \overline{\overline{P_1} V f_1} \\ OP_2 &= \overline{P_1 V \overline{f_1}} \\ IC_2 &= \overline{\overline{P_1} V \overline{f_1}} \\ s &= (\overline{P_1 V f_1}) V (\overline{\overline{P_1} V \overline{f_1}}) \end{aligned}$$

#### 4.2.1.3. Résultats obtenus

Cette simulation a permis de mettre en évidence une solution de référence du problème du régulateur d'état. Les résultats obtenus sont groupés au paragraphe 4.2.3.

Ces solutions constituent à priori une vérification des solutions analytiques obtenues par intégration directe et permettant de disposer d'une référence utilisable sur calculateur numérique.

#### 4.2.2. Résolution analytique du problème optimal continu.

Les équations canoniques (4.3) du système optimal étudié constituent un système différentiel linéaire du premier ordre de 4 équations à 4 inconnues dont les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ \psi(t_f) &= S x(t_f) \end{aligned}$$

Soit  $\vartheta(t, t_0)$  la matrice de transition de ce système. Il vient

$$\begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix} = \vartheta(t, t_0) \begin{bmatrix} x_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} \quad 4-7$$

$$\vartheta(t, t_0) = \{ \vartheta_{ij}(t, t_0) \}$$

$$i, j = 1, 2$$



la matrice de gain de Kalman  $K(t)$  prend alors la forme suivante

$$K(t) = [\varnothing_{22}(t_f, t) - S \varnothing_{12}(t_f, t)]^{-1} [S \varnothing_{11}(t_f, t) - \varnothing_{21}(t_f, t)]$$

Il est donc possible d'obtenir une expression de la matrice de gain  $K(t)$  et de la loi de commande  $u(t)$  à partir du calcul de la matrice de transition du système (4-3).

La matrice de transition est solution de l'équation matricielle suivante :

$$\frac{d \varnothing(t, t_0)}{dt} = H \varnothing(t, t_0)$$

avec

$$\varnothing(t_0, t_0) = I_4$$

$I_4$  : matrice diagonale unité d'ordre 4.

L'utilisation de la transformée de Laplace conduit alors à exprimer la solution  $\varnothing(p)$  sous la forme

$$\varnothing(p) = [pI - H]^{-1}$$

soit en notant

$$\delta = p^4 - ((\lambda + \beta)/\lambda\tau^2) p^2 + (\alpha/\lambda\tau^2)$$

$$\varnothing(p) = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} p(p^2 - \frac{\alpha + \beta}{\lambda\tau^2}) & p(p-1)/\tau & 1/\lambda\tau^2 & -p/\lambda\tau^2 \\ \varnothing_{11} & & \varnothing_{12} & \\ -\alpha/\lambda\tau^2 & p^2(p-1)/\tau & p/\lambda\tau^2 & -p^2/\lambda\tau^2 \\ -\alpha(p^2 - \frac{\lambda + \beta}{\lambda\tau^2}) & -(p-1)/\tau & p(p^2 - \frac{\lambda + \beta}{\lambda\tau^2}) & \alpha/\lambda\tau^2 \\ \varnothing_{21} & & \varnothing_{22} & \\ \alpha(p+1)/\tau & \alpha - \beta p^2 & -p(p+1)/\tau & p^2(p+1)/\tau \end{bmatrix}$$

L'obtention de la matrice  $\emptyset(t, t_0)$  nécessite le calcul des originaux des fonctions de Laplace apparaissant dans  $\emptyset(p)$ .

Ce calcul dépend des valeurs des paramètres  $(\alpha, \beta, \lambda)$  aussi nous indiquerons simplement ici les fonctions définissant les variables  $k_1$ ,  $k$  et  $k_2$  de la matrice de gain  $K(t)$  dans le cas où  $\alpha$  est nul. L'expression des blocs de dimensions  $2 \times 2$  notés  $(\emptyset_{11}, \emptyset_{12}, \emptyset_{21}, \emptyset_{22})$  de la matrice  $\emptyset(t_0, t)$  pour toute valeur des paramètres est donnée en annexe 4-2.

Définissons les relations suivantes

$$a_1 = \sqrt{\frac{\lambda + \beta}{\lambda \tau^2}} \quad a_2 = 1/\tau \quad a_3 = a_2 / (a_1)^2 \quad a_4 = 1 + a_2 \gamma' \quad a_5 = \beta - \gamma'$$

$$C = \text{ch}(a_1 t) \quad S = (1/a_1) \text{sh}(a_1 t)$$

$$\Delta = [1 - \gamma a_3 (S - t)] [C + a_4 S] + [S + (a_4/a_1^2)(C - 1)] [\gamma a_3 (C - 1)]$$

il vient

$$k_1 = (1/\Delta) \gamma [C + a_4 S]$$

$$k = (1/\Delta) [\gamma S + \gamma' (a_4/a_1^2)(C - 1)] \quad 4-9$$

$$k_2 = (1/\Delta) [\gamma ((a_4 - a_5 a_2)/a_1^4)(C - 1) + \gamma' C + a_5 S + \gamma \gamma' a_3 C t + \gamma a_3 a_5 S t]$$

Ces calculs permettent de disposer dans tous les cas d'une solution de référence et donc de déterminer les erreurs introduites par les méthodes numériques employées tant dans la détermination de la loi de commande que dans la valeur des variables d'état et du critère.

Nous proposons, avant de présenter les différentes méthodes numériques résumées au schéma de la figure 4-1, d'utiliser la solution de référence continue exacte ainsi déterminée pour étudier l'influence des paramètres sur le comportement du système. Les résultats obtenus par simulation hybride permettent de vérifier la validité des courbes théoriques obtenues par résolution analytique .

#### 4.2.3. Présentation de la solution optimale continue.

La résolution du système d'équations différentielles de Riccati a permis de fournir une solution de référence dans l'étude de la transformation homographique comme méthode d'intégration numérique.

L'allure des courbes théoriques présentées dans ce chapitre permet simplement de mettre en évidence pour certaines valeurs de paramètre le caractère asymptotique des solutions et d'expliquer ainsi les oscillations observées dans les résultats obtenus par les méthodes numériques présentées au chapitre 3.

Dans ce paragraphe nous proposons de préciser l'influence du choix du critère retenu sur l'évolution du système dans l'espace d'état et la forme de la loi de commande.

Les résultats sont présentés pour un ensemble de valeurs initiales plus ou moins favorables.

Les enregistrements dans le plan de phase des composantes du vecteur d'état sont tracés sur les figures 4-7, 4-8 et 4-9. Ils permettent de mettre en évidence l'effet des paramètres  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma'$  sur l'évolution du système.

De manière générale il est possible d'effectuer les remarques suivantes

- le coût de la commande reste un facteur prépondérant de précision
- la pénalisation des écarts instantanés des variables d'état à leur position d'équilibre permet d'obtenir les meilleurs résultats
- la pénalisation des écarts finaux des variables d'état à leur position d'équilibre est plus efficace dans le cas de conditions initiales défavorables que pour des conditions initiales favorables.

Dans ce sens la pénalisation des écarts finaux permet de modifier l'évolution relative de la sortie et de sa dérivée ; l'influence des écarts instantanés reste cependant prépondérante ainsi qu'il est possible de le vérifier sur les

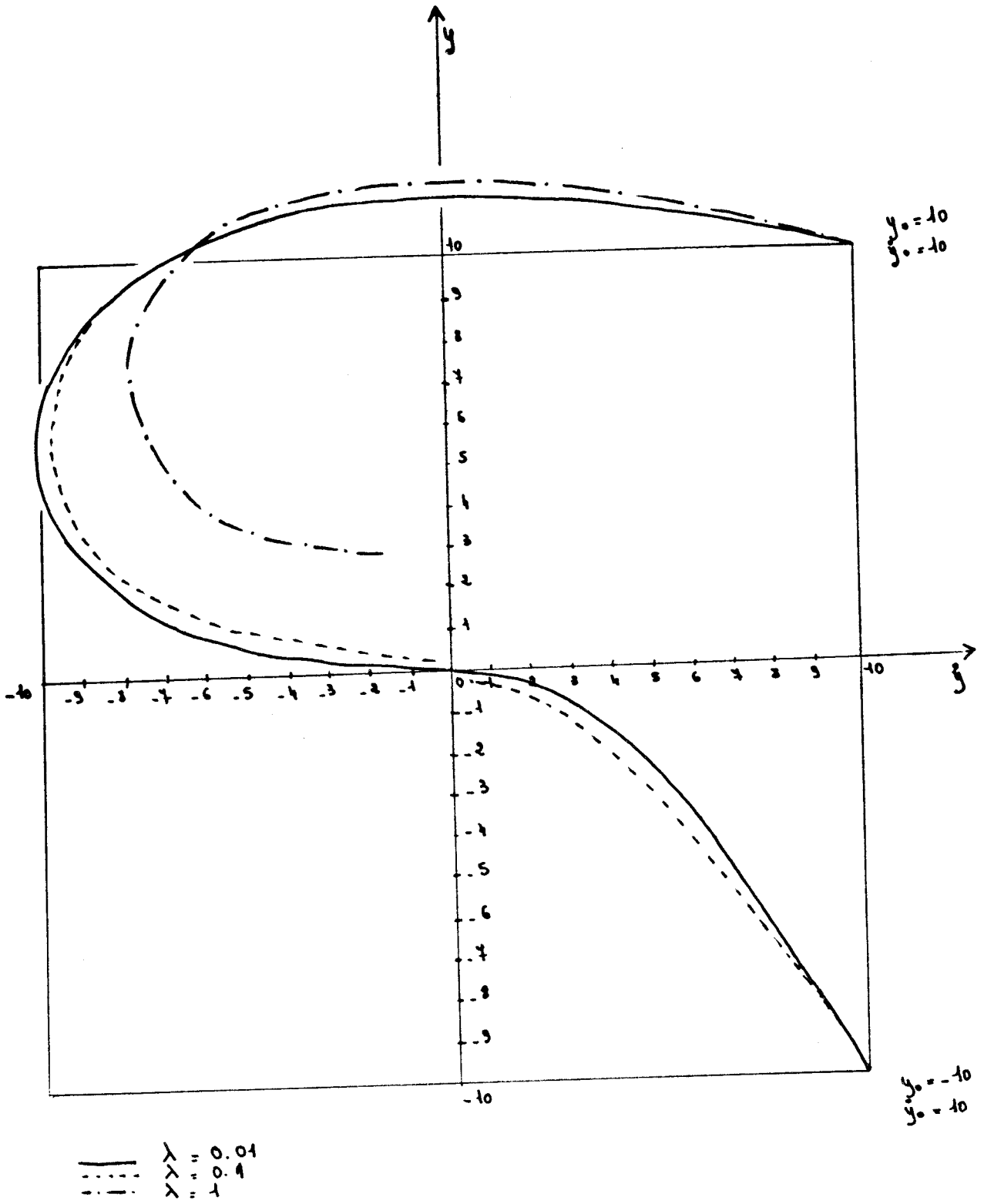


Figure 4-7

EVOLUTION DU SYSTEME SUIVANT  
VALEUR DES PARAMETRES

$\gamma = 10$     $\alpha = 0$     $\beta = 0$   
 $\gamma' = 10$     $\tau = 1$     $t_f = 2s$     $N = 10$



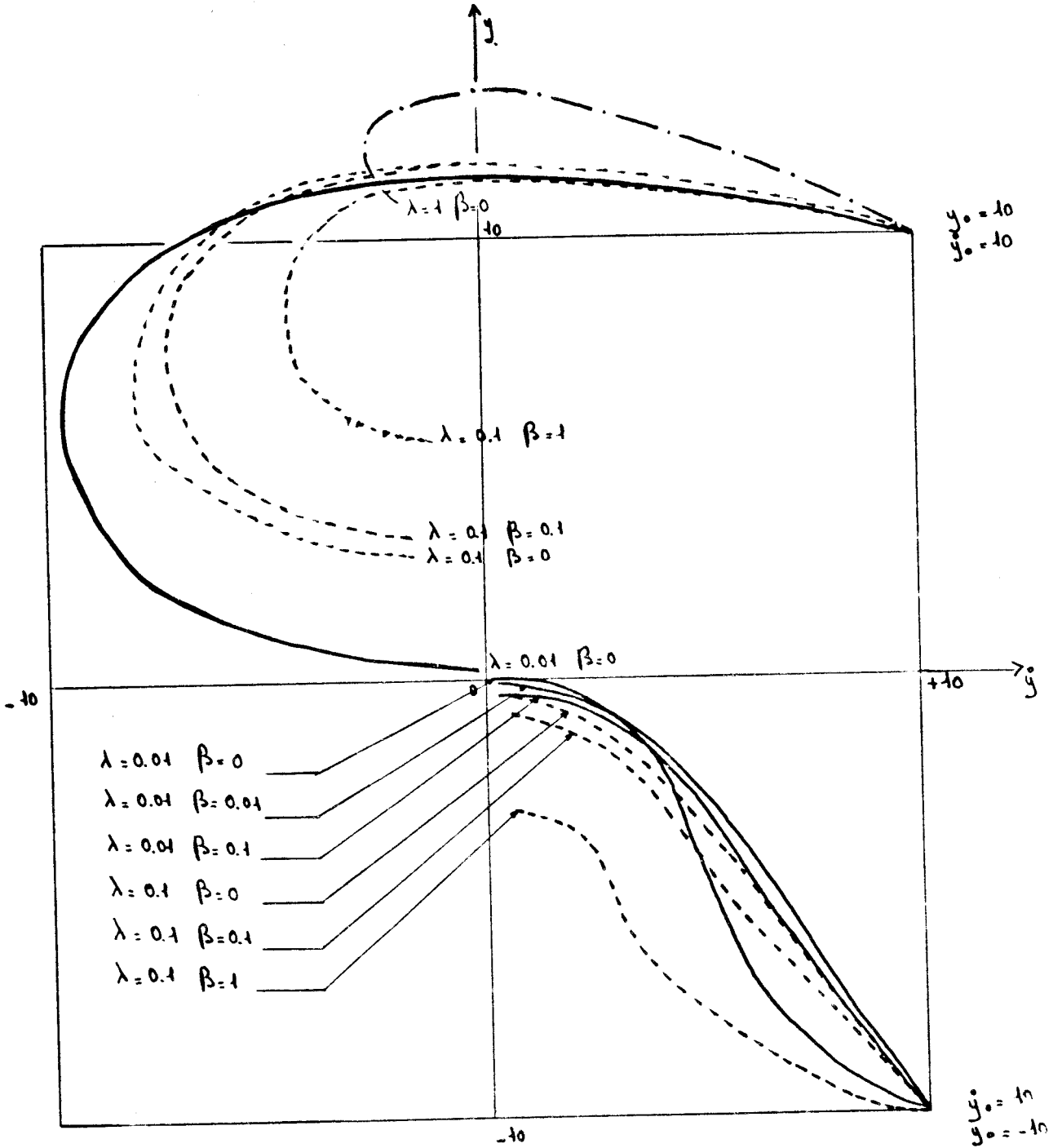


Figure 4-8

EVOLUTION DU SYSTÈME SUIVANT VALEUR DES PARAMÈTRES

$\delta = 1 \quad \alpha = 0$   
 $\delta = 1 \quad \tau = 1 \quad t_f = 2.5 \quad N = 10$



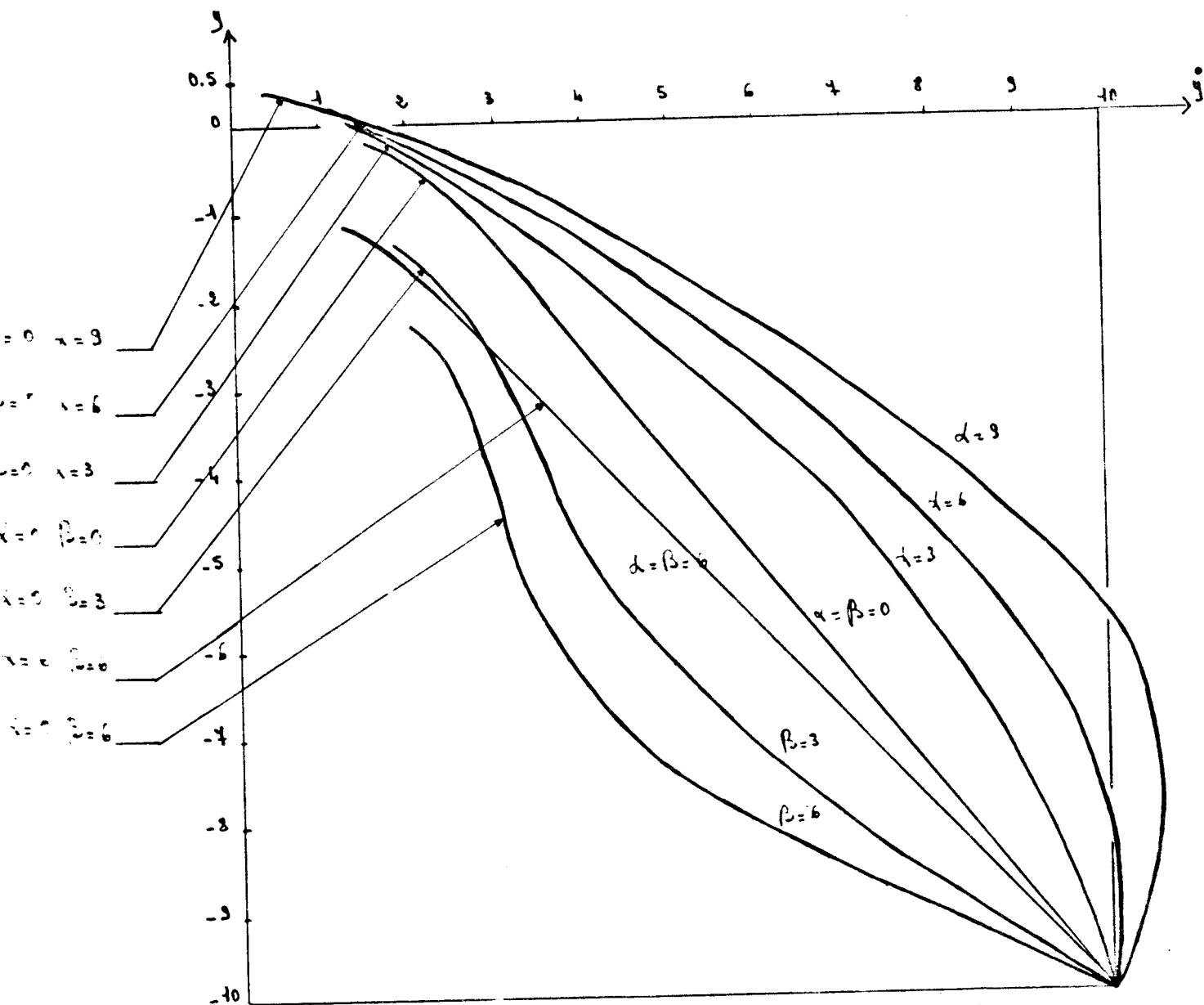


Figure 4-9

EVOLUTION DU SYSTEME SUIVANT  
 VALEUR DES PARAMETRES

$\gamma=9 \quad \lambda=1$   
 $\gamma'=1 \quad \bar{L}=1 \quad t_0^* = 2.1 \quad N=10$



figures 4-10, 4-11, 4-12 et 4-13.

La valeur de la fonctionnelle de coût augmente rapidement avec la rapidité de réponse souhaitée pour le système. La pénalisation des écarts finaux sur la dérivée de la sortie du système conduit à de meilleurs résultats tout en augmentant de façon très importante la valeur finale du critère (cf figures 4-14, 4-15).

Les lois de commande nécessaires à un comportement convenable du système sont décrites sur les figures 4-16, 4-17, 4-18.

L'allure des solutions de l'équation différentielle matricielle de Riccati est présentée sur les schémas des figures 4-19, 4-20, 4-21, 4-22 pour différentes valeurs des paramètres du système. Lorsque l'intervalle de temps sur lequel est commandé le système devient grand, la figure 4-23 permet de vérifier que les solutions de l'équation différentielle matricielle de Riccati  $K + f(K) = 0$  deviennent constantes et solutions de l'équation matricielle  $f(K) = 0$ .

#### 4.3. Solutions obtenues par discrétisation "A Posteriori"

Ces résultats correspondent à la recherche des solutions de l'équation différentielle matricielle de Riccati par des méthodes numériques.

Elles conduisent à une discrétisation du système continu initial.

Nous proposons afin de préciser les avantages de la transformation homographique d'effectuer la discrétisation du système continu initial suivant deux voies :

- discrétisation par intégration
- discrétisation par utilisation de la transformation homographique.

Précisons qu'à ce stade il ne s'agit pas de discrétiser "à priori" le

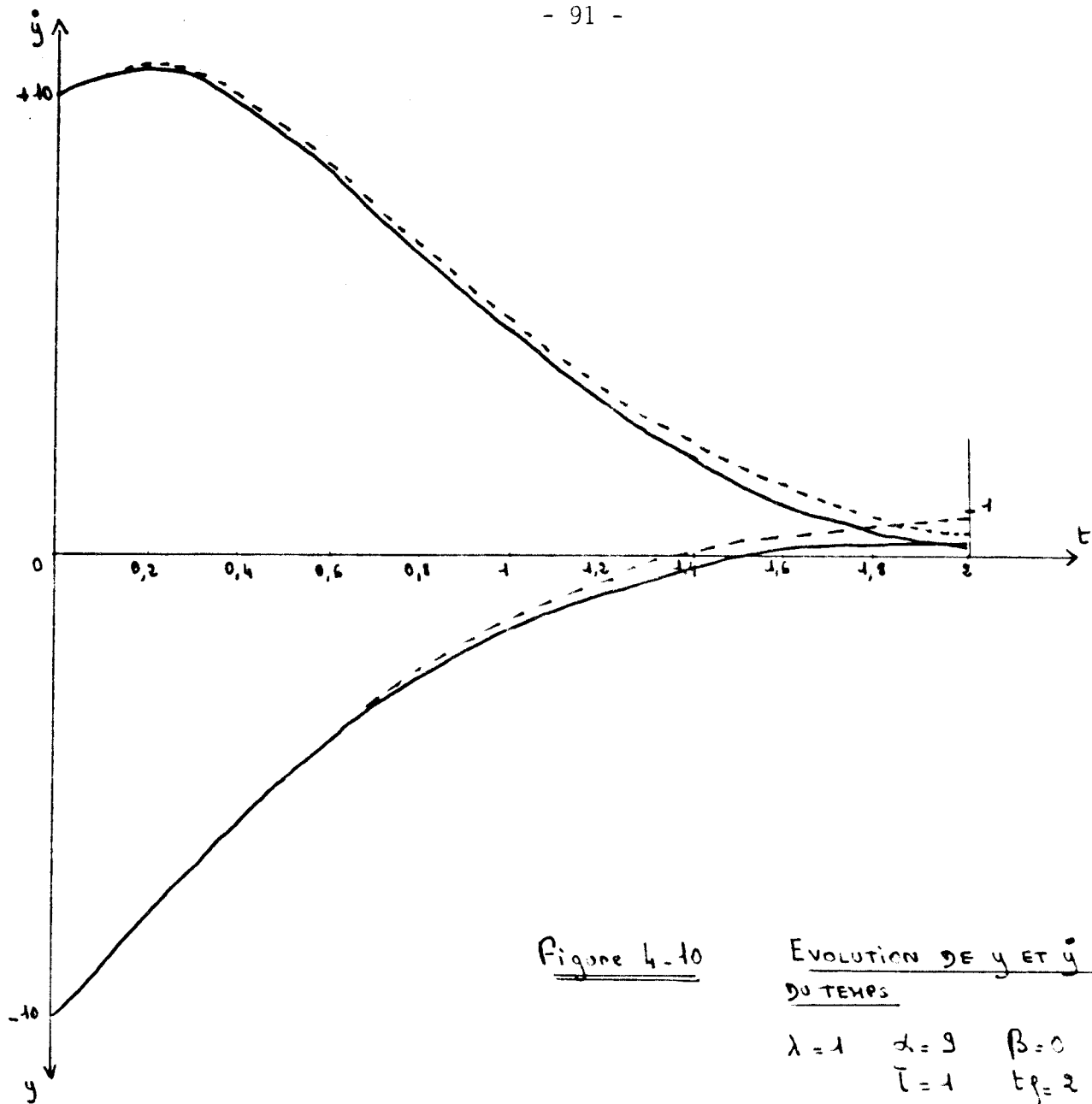


Figure 4-10

EVOLUTION DE  $y$  ET  $\dot{y}$  EN FONCTION DU TEMPS

$$\lambda = 1 \quad \alpha = 9 \quad \beta = 0$$

$$\bar{t} = 1 \quad t_f = 2 \quad r' = 10$$

$$\dot{y}_0 = 10 \quad y_0 = -10$$

—  $\gamma = 10$       - - - -  $\gamma = 1$   
 $\gamma' = 1$                        $\gamma' = 5$





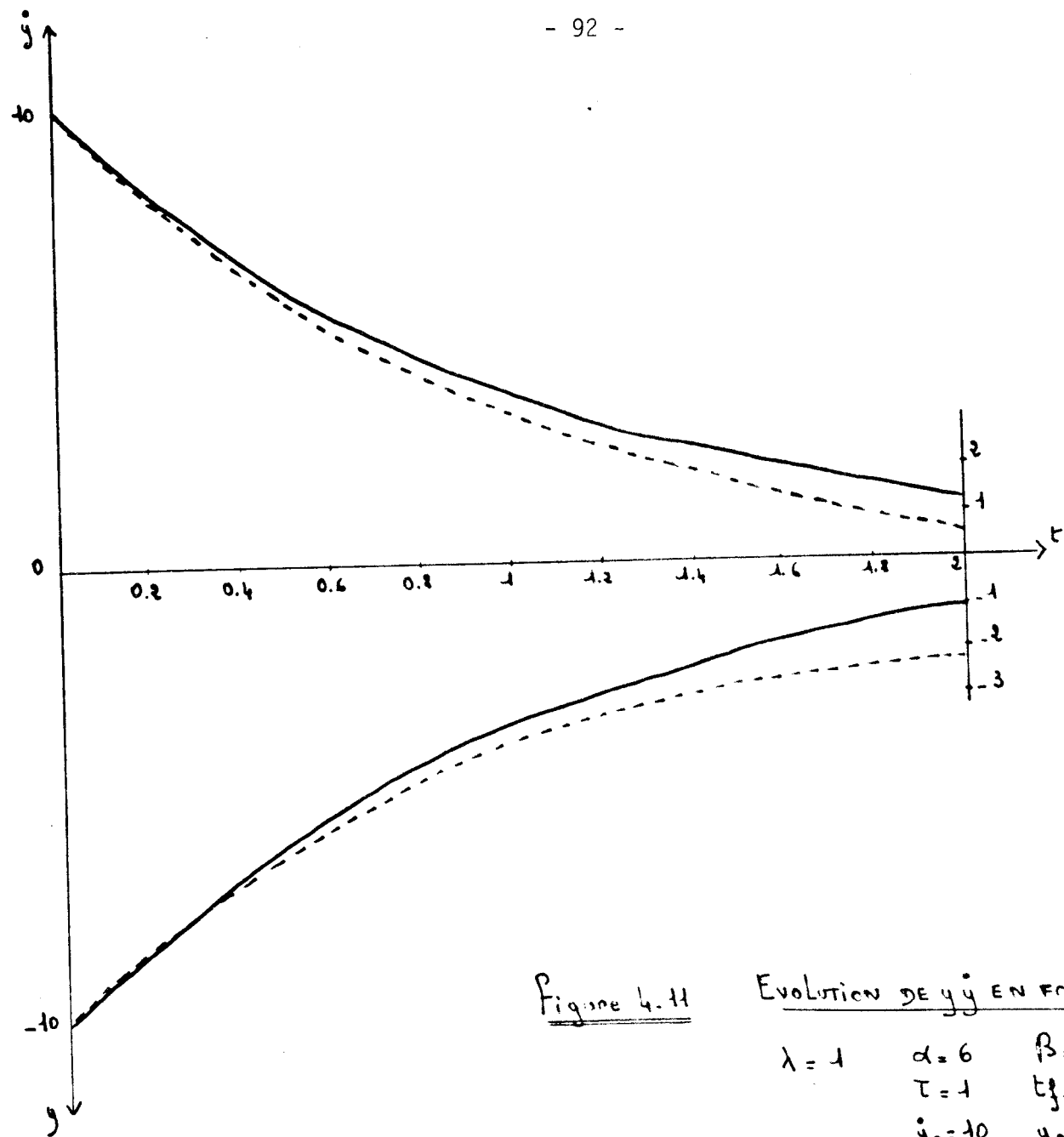


Figure 4.11

Evolution de  $y$  et  $\dot{y}$  en fonction du temps

$\lambda = 1$      $\alpha = 6$      $\beta = 6$   
 $\tau = 1$      $t_f = 2.0$      $N = 10$   
 $\dot{y}_0 = 10$      $y_0 = -10$   
 —  $\gamma = 10$     - - -  $\gamma = 1$   
 $\gamma' = 1$      $\gamma' = 5$



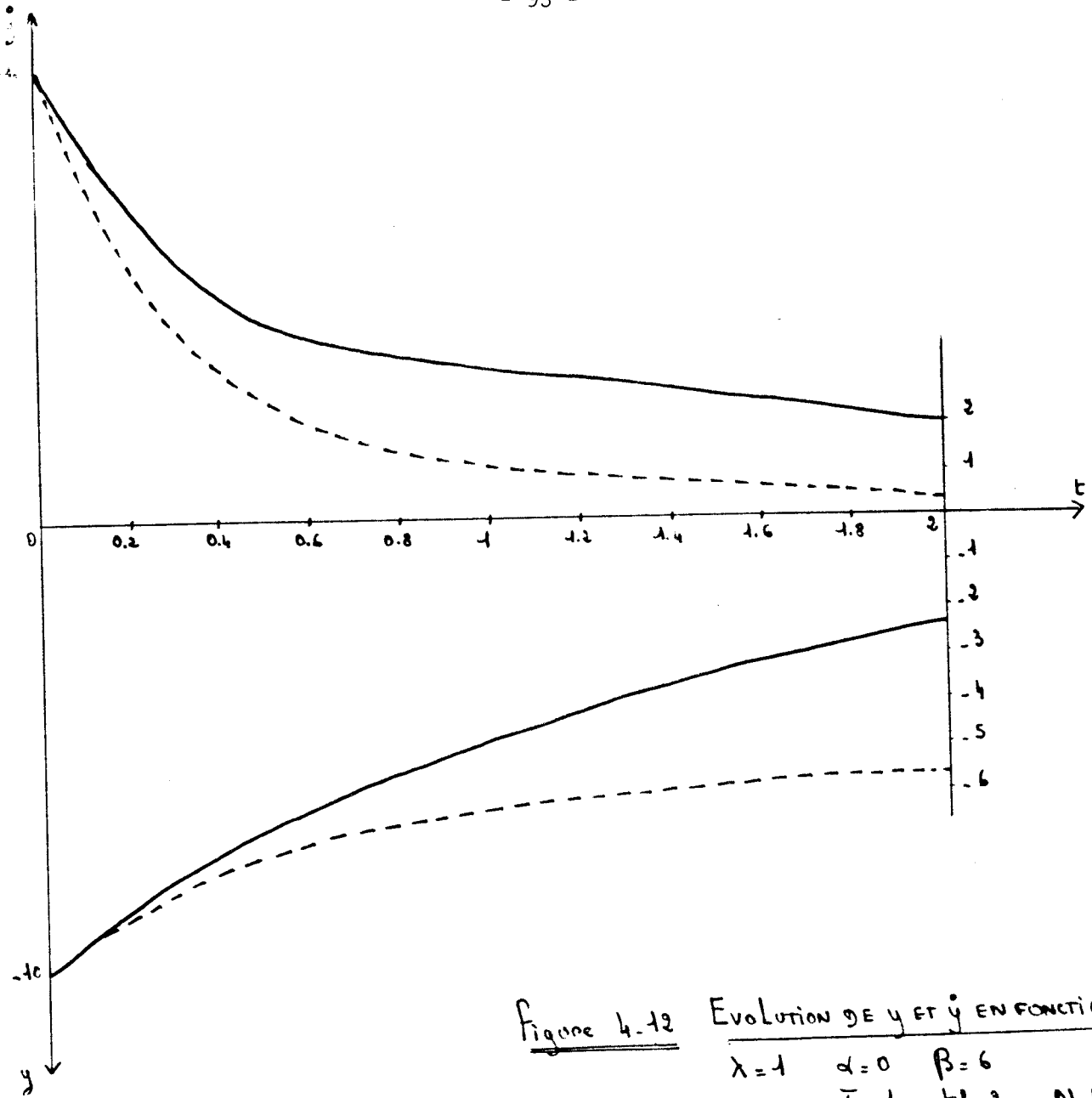


Figure 4.12 Evolution de  $y$  et  $\dot{y}$  en fonction du temps

$$\lambda = 1 \quad \alpha = 0 \quad \beta = 6$$

$$\bar{t} = 1 \quad t_f = 2.2 \quad N = 10$$

$$\dot{y}_0 = 10 \quad y_0 = -10$$

—  $\delta = 10$       - - -  $\delta = 1$   
 $\delta' = 1$        $\delta = 5$



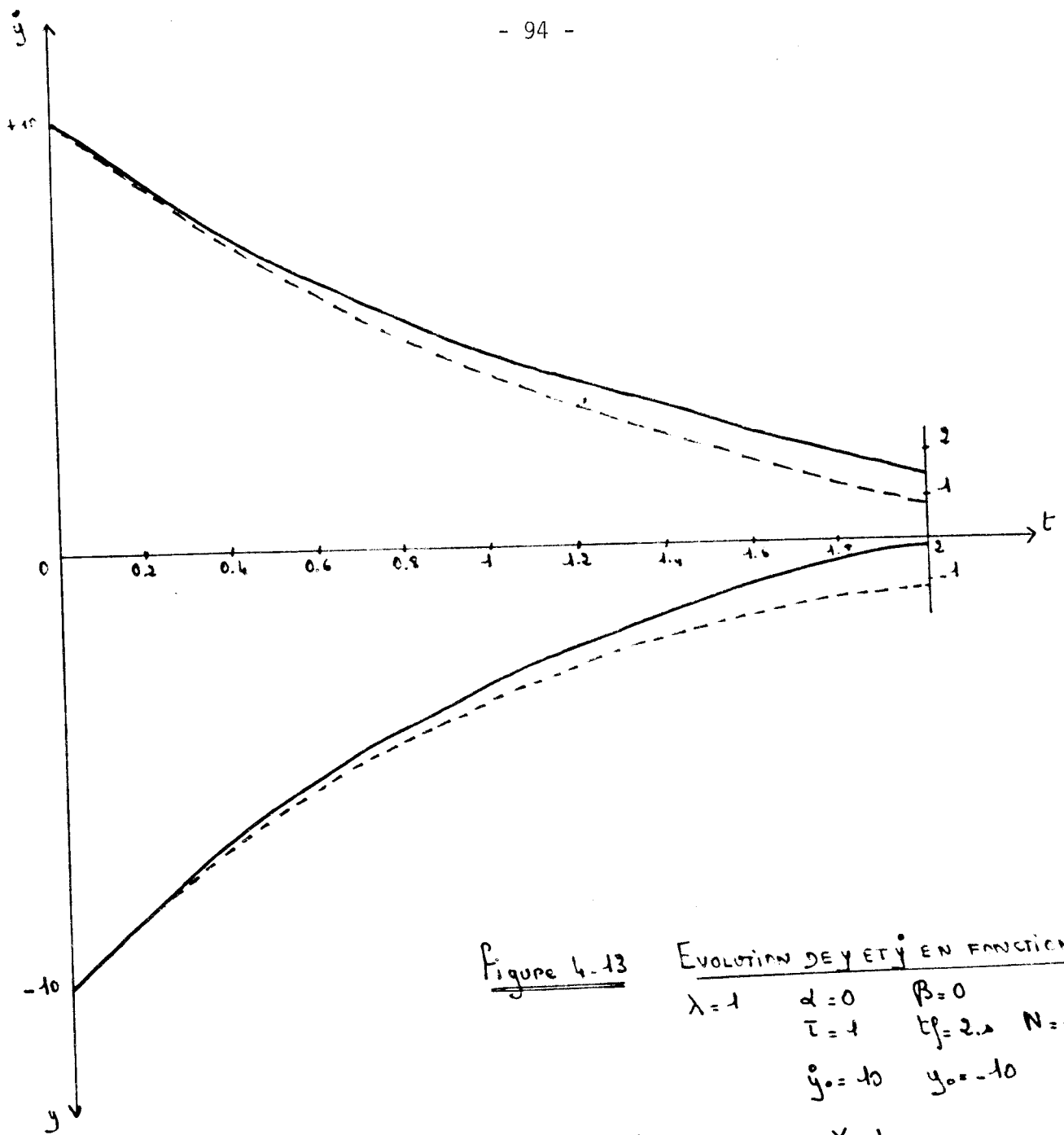


Figure 4-13

EVOLUTION DE Y ET  $\dot{y}$  EN FONCTION DU TEMPS

$$\lambda = -1 \quad \alpha = 0 \quad \beta = 0$$

$$\tau = 1 \quad t_f = 2.2 \quad N = 10$$

$$\dot{y}_0 = 10 \quad y_0 = -10$$

—  $\gamma = 10$       - - -  $\gamma = 1$   
 $\gamma' = 1$        $\gamma' = 5$



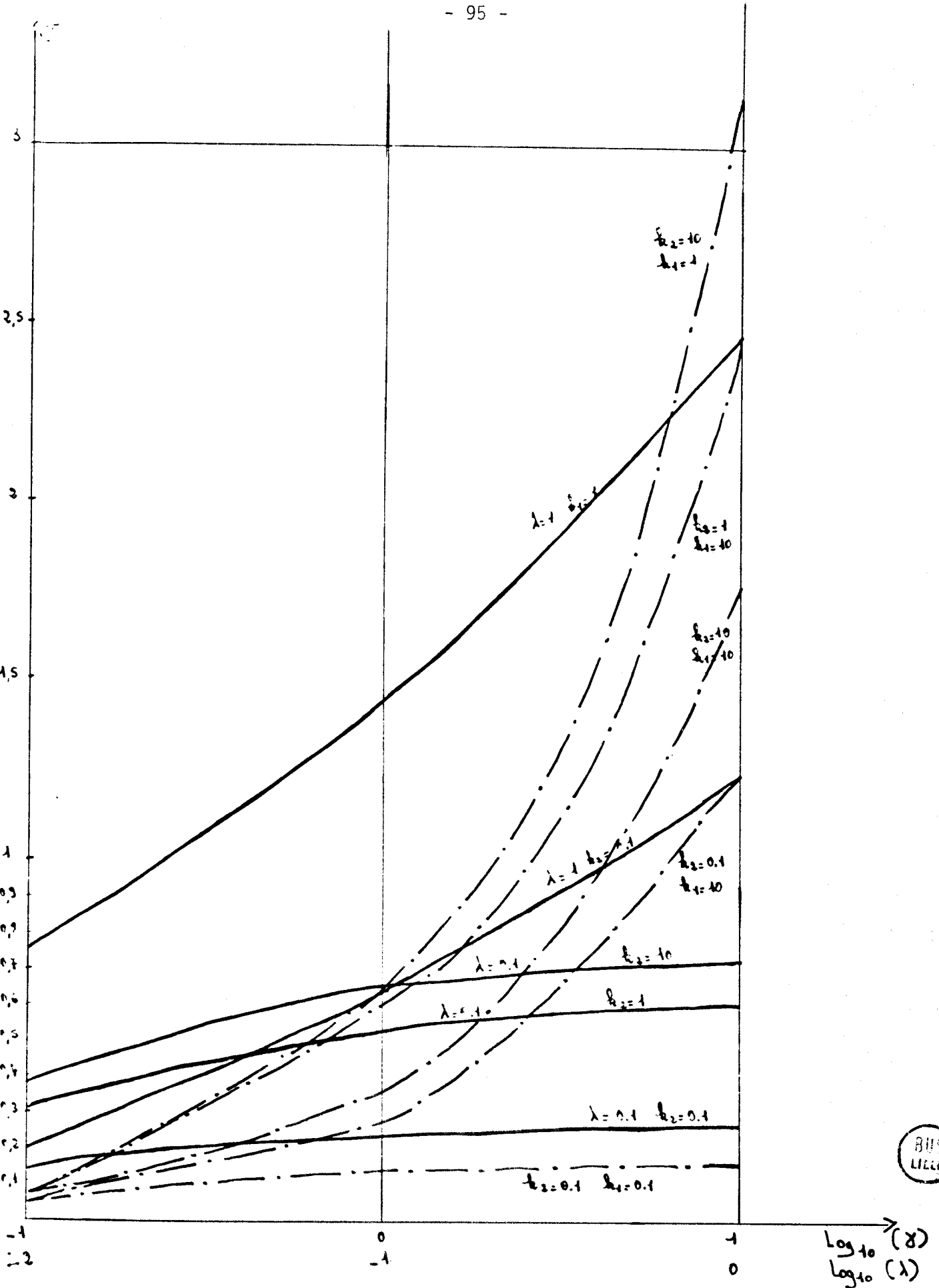


Figure 4.14

EVOLUTION DE LA FONCTIONNELLE DE CÔT J  
 SOIVANT LES VALEURS DE  $\lambda$  OU DE  $\lambda$ .

—  $f(x)$

$\alpha = 0$   $\beta = 0$

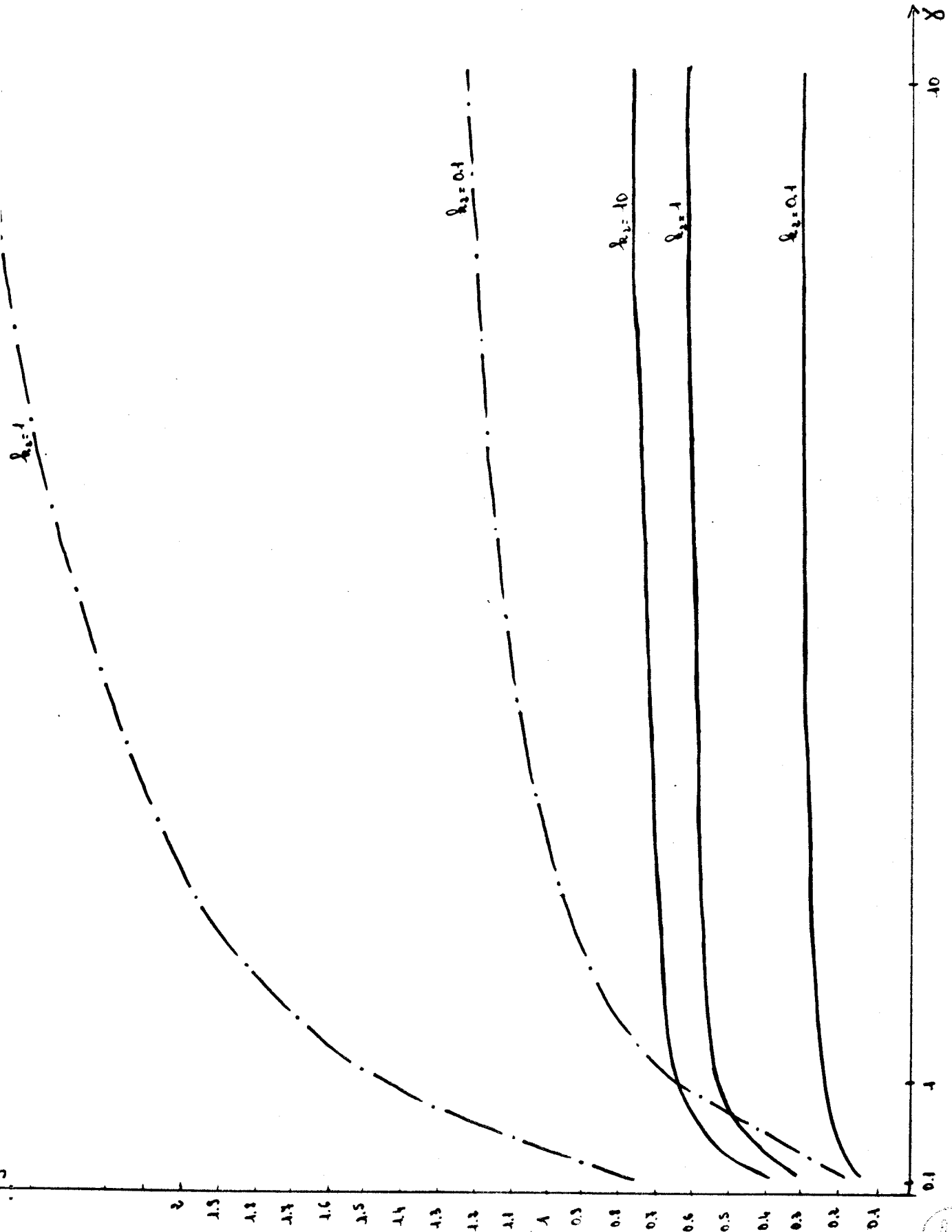


Figure 4.15

EVOLUTION DE LA FONCTIONNELLE DE CÔT EN FONCTION DE X

$d=0$   
 $\gamma=1$   
 $\beta=0$   
 $\epsilon_1=2.0$   
 $N=10$

$\lambda=0.1$



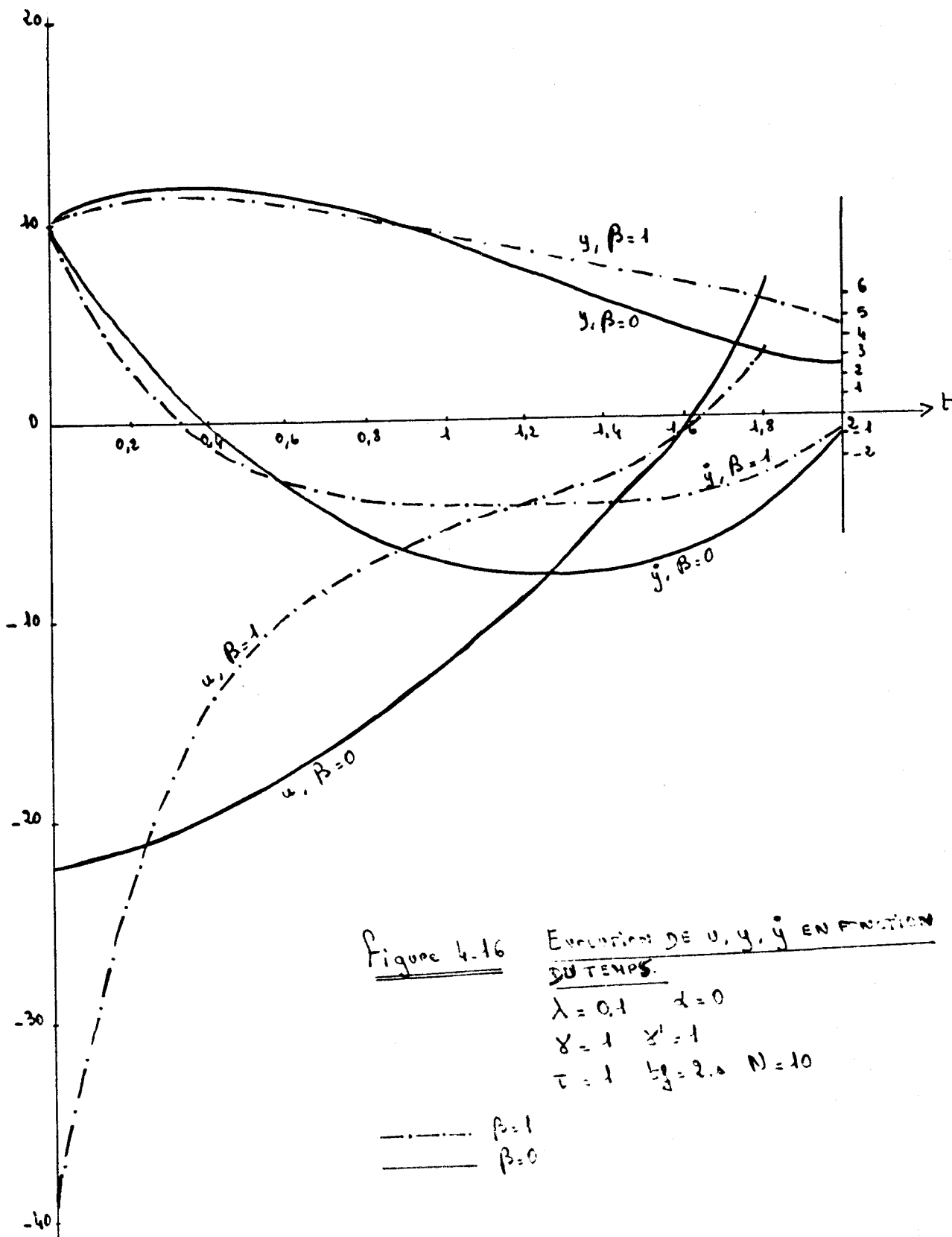


Figure 4.16 Evolution de  $u, y, \dot{y}$  en fonction du temps.

$\lambda = 0.1 \quad \alpha = 0$   
 $\gamma = 1 \quad \gamma' = 1$   
 $\tau = 1 \quad t_f = 2.1 \quad N = 10$



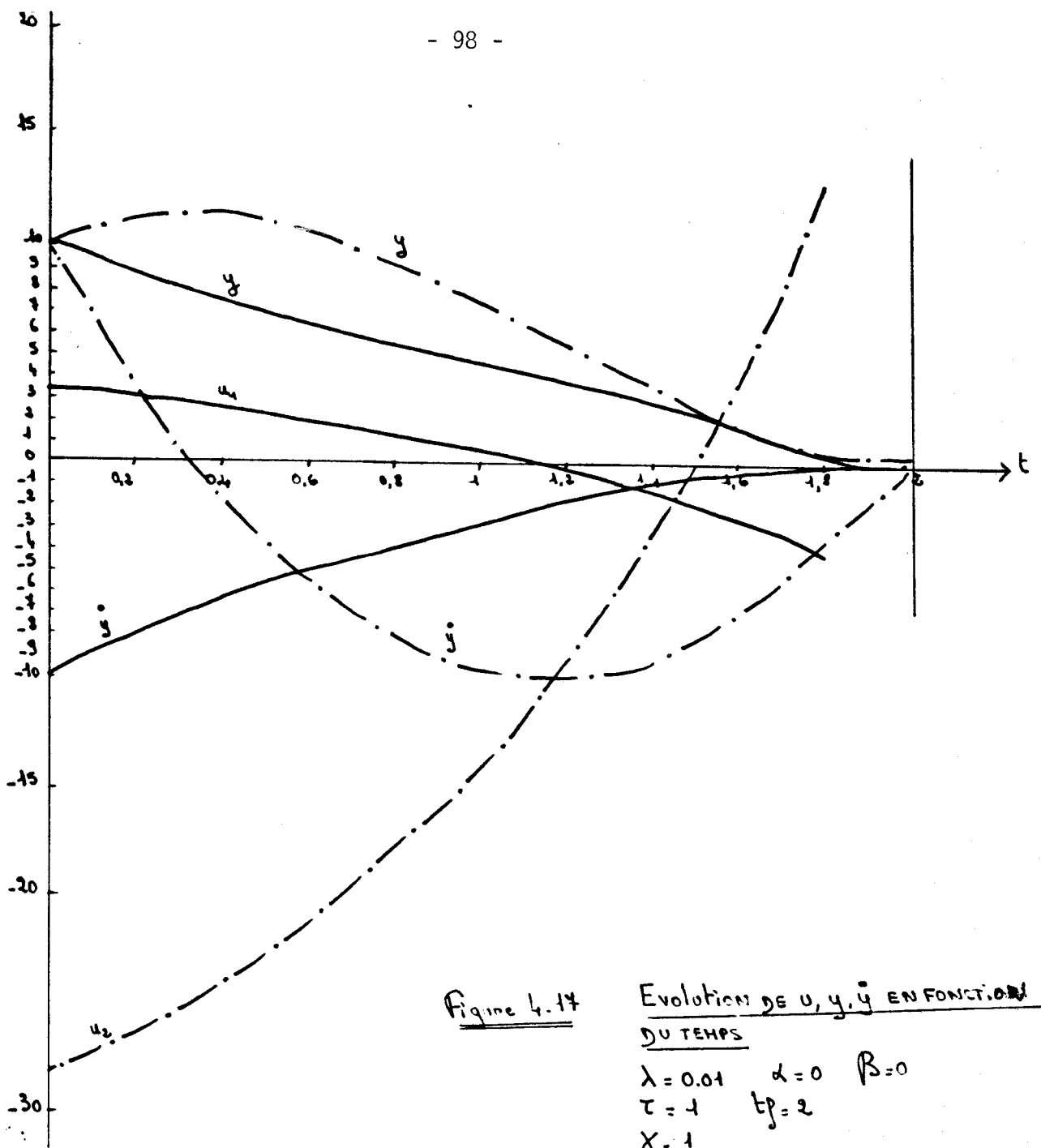


Figure 4.14

Evolution de  $u, y, \dot{y}$  en fonction du temps

$\lambda = 0.01 \quad \alpha = 0 \quad \beta = 0$

$\tau = 1 \quad t_p = 2$

$\gamma = 1$

$\gamma' = 10$

$u_2 \rightarrow y_0 = 10$

$y_0 = +10$

$u_1 \rightarrow y_0 = 10$

$y_0 = 10$



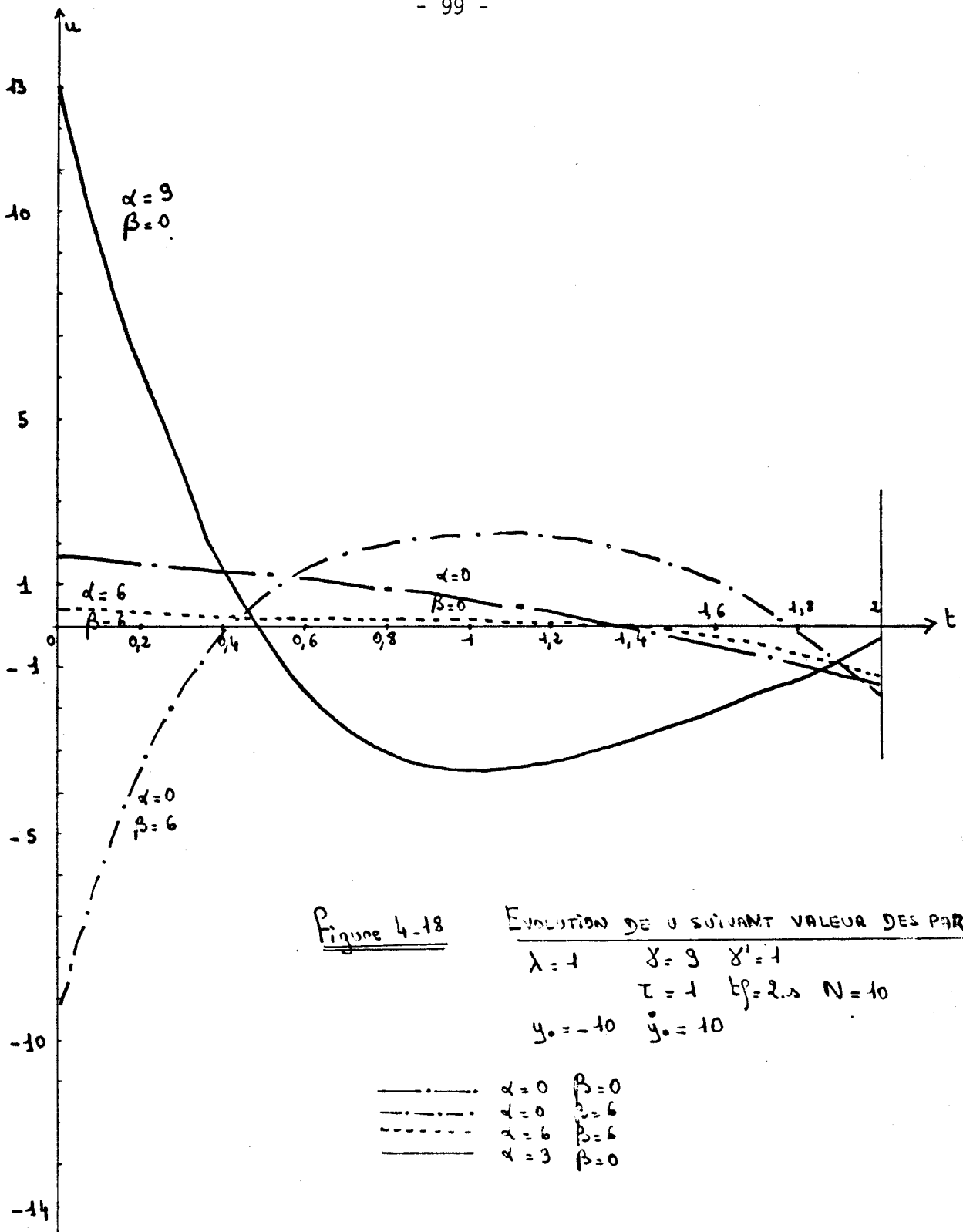


Figure 4-18

EVOLUTION DE U SUIVANT VALEUR DES PARAMETRES

$\lambda = 1$      $\gamma = 9$      $\gamma' = 1$   
 $\tau = 1$      $t_f = 2.5$      $N = 10$   
 $y_0 = -10$      $\dot{y}_0 = 10$

- |           |              |             |
|-----------|--------------|-------------|
| — · — · — | $\alpha = 0$ | $\beta = 0$ |
| — · — — — | $\alpha = 0$ | $\beta = 6$ |
| - - - - - | $\alpha = 6$ | $\beta = 6$ |
| —————     | $\alpha = 3$ | $\beta = 0$ |



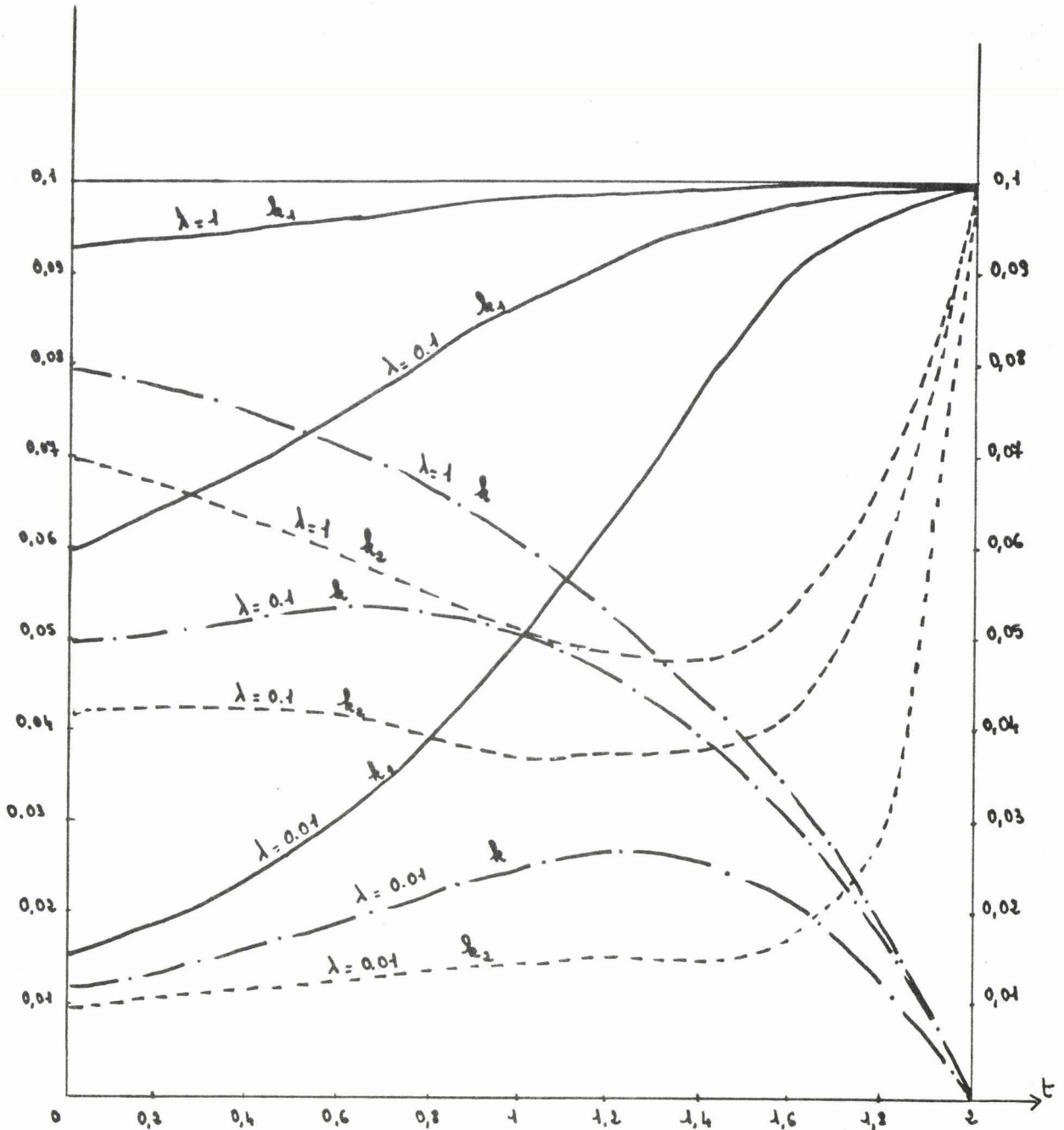


Figure 4-19

EVOLUTION DE  $h_1, h, h_2$  EN FONCTION DU TEMPS  
SUIVANT LES VALEURS DE  $\lambda \{0.01, 0.1, 1\}$

$d=0 \quad \beta=0 \quad \bar{t}=1 \quad t_f=2.4 \quad N=10$   
 $\gamma=1 \quad \gamma'=1$

—  $h_1$   
- · -  $h$   
- - -  $h_2$



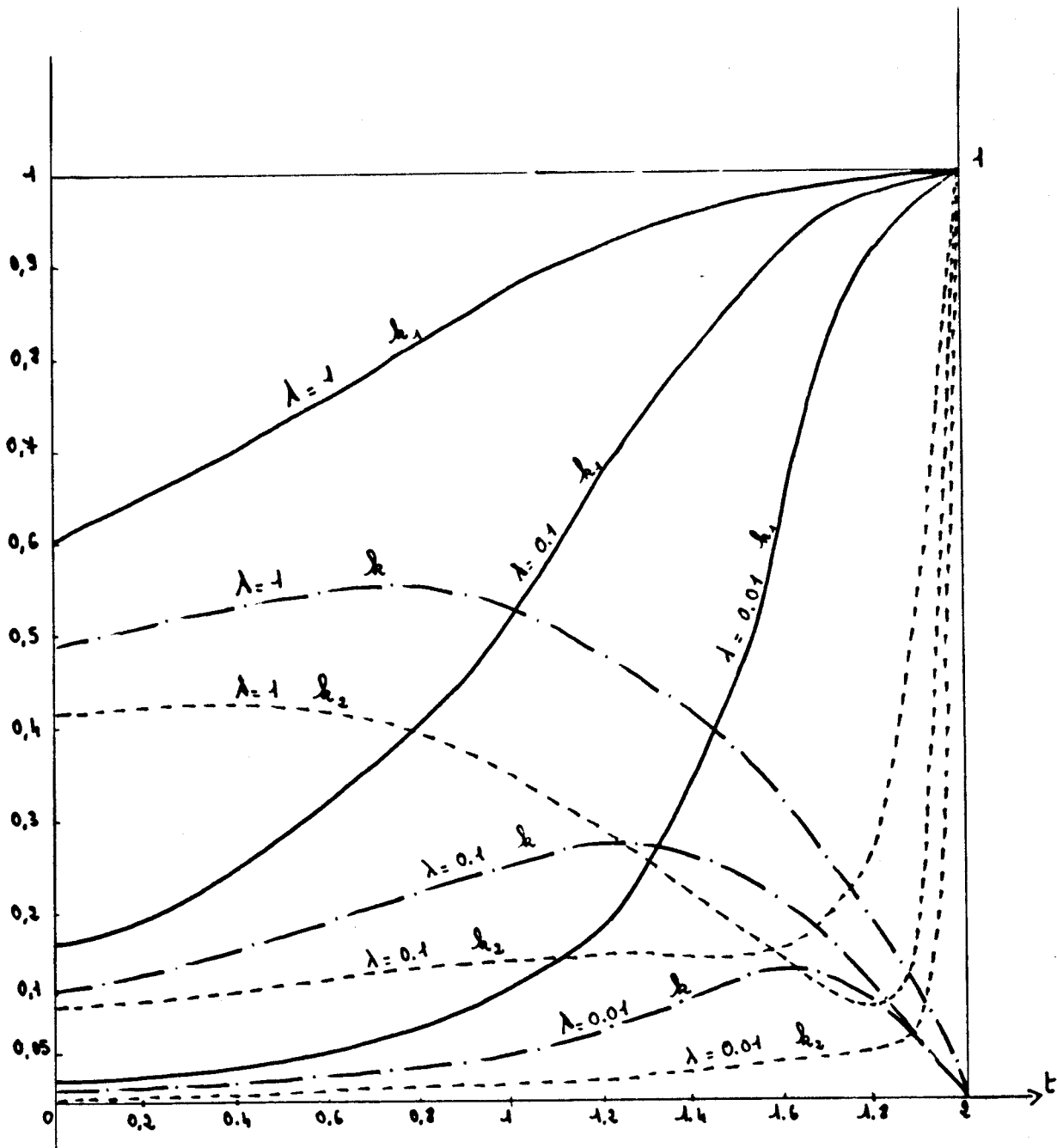


Figure 4.20

EVOLUTION DE  $k_1, k, k_2$  EN FONCTION DU TEMPS  
SUIVANT LES VALEURS DE  $\lambda$  { 0.01, 0.1, 1 }

$d = 0 \quad \beta = 0 \quad \tau = 1 \quad t_f = 2.2 \quad N = 10$   
 $\gamma = 1 \quad \gamma' = 1$

—  $k_1$   
 - · -  $k$   
 - - -  $k_2$



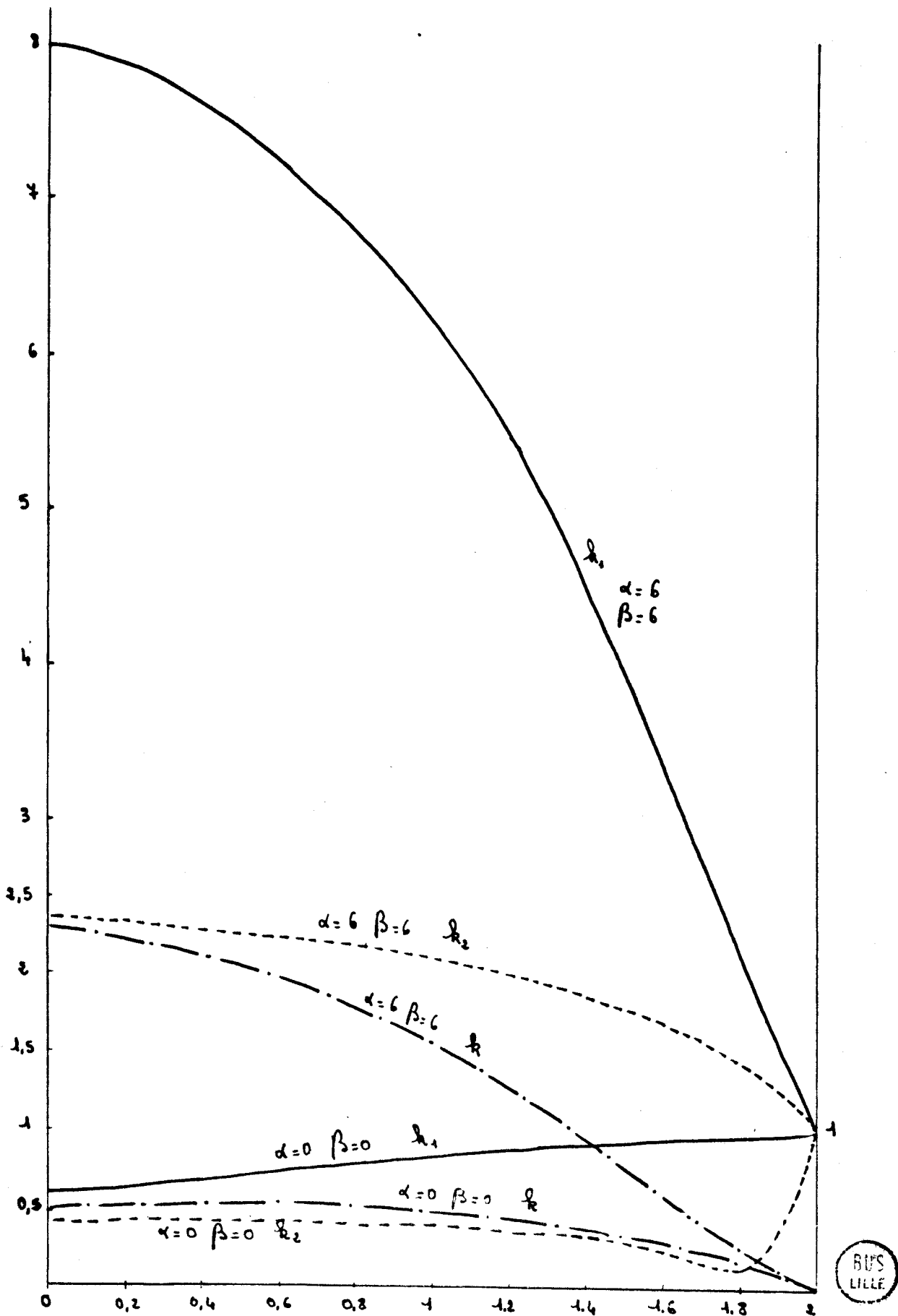


Figure 4-24

EVOLUTION DE  $r_1, r, r_2$  EN FONCTION DU TEMPS  
SUIVANT LES VALEURS DE  $\alpha$  ET  $\beta$ .

$\lambda = 1 \quad \gamma = 1 \quad \chi' = 1$   
 $\tau = 1 \quad t_f = 2.0 \quad N = 10.$

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha = 6 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta = 0 \\ \beta = 6 \end{array} \right.$

—  $r_1$

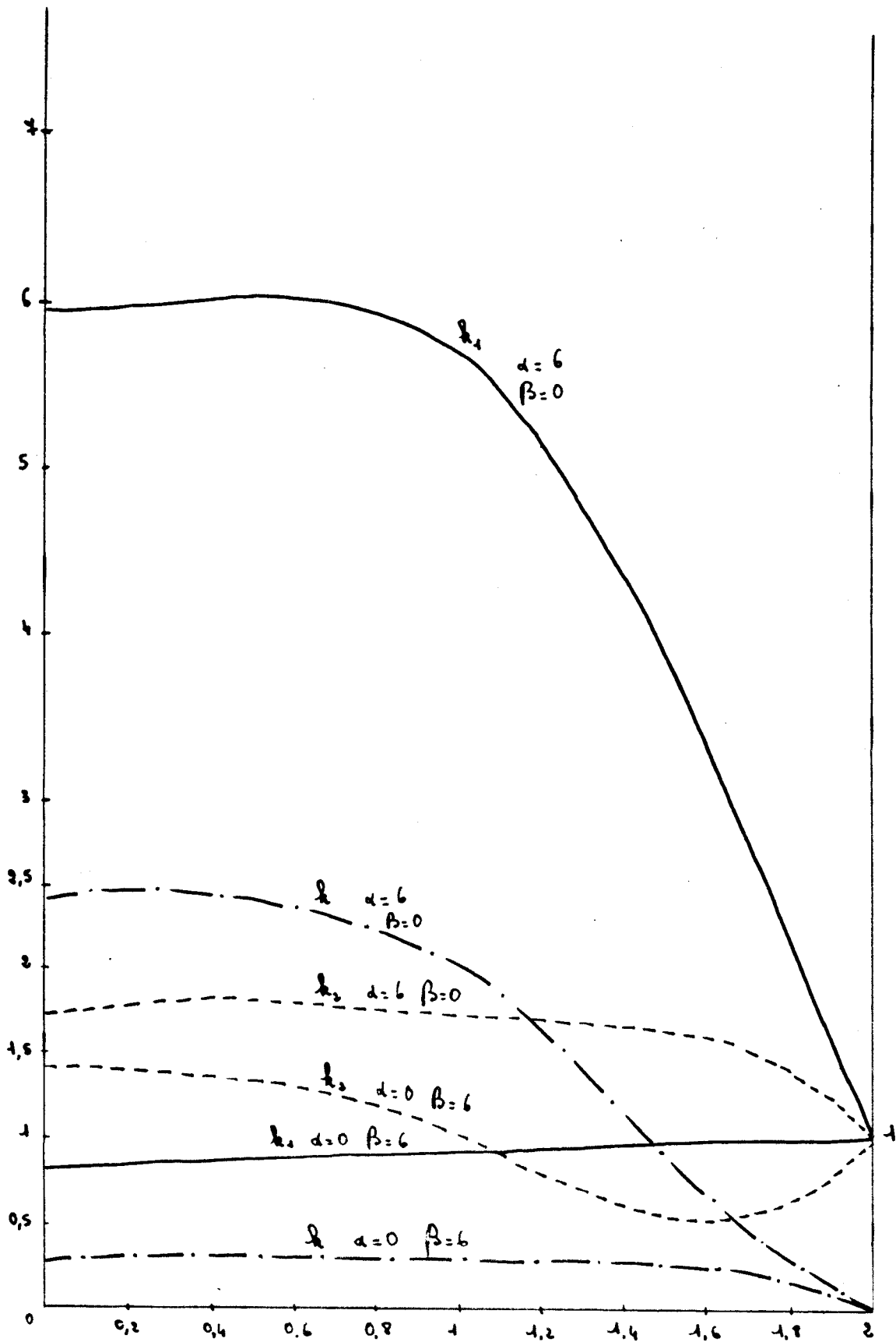


Figure 4-22

EVOLUTION DE  $k_1, k, k_2$  EN FONCTION DU TEMPS  
SUIVANT LES VALEURS DE  $\alpha$  ET  $\beta$

$\lambda = 1$	$\gamma = 1$	$\alpha = 6$	$\beta = 0$
	$\gamma' = 1$	$\alpha = 0$	$\beta = 6$
$\tau = 1$	$t_f = 2,2$	$N = 10$	

—  $k_1$   
- - -  $k$   
- - -  $k_2$

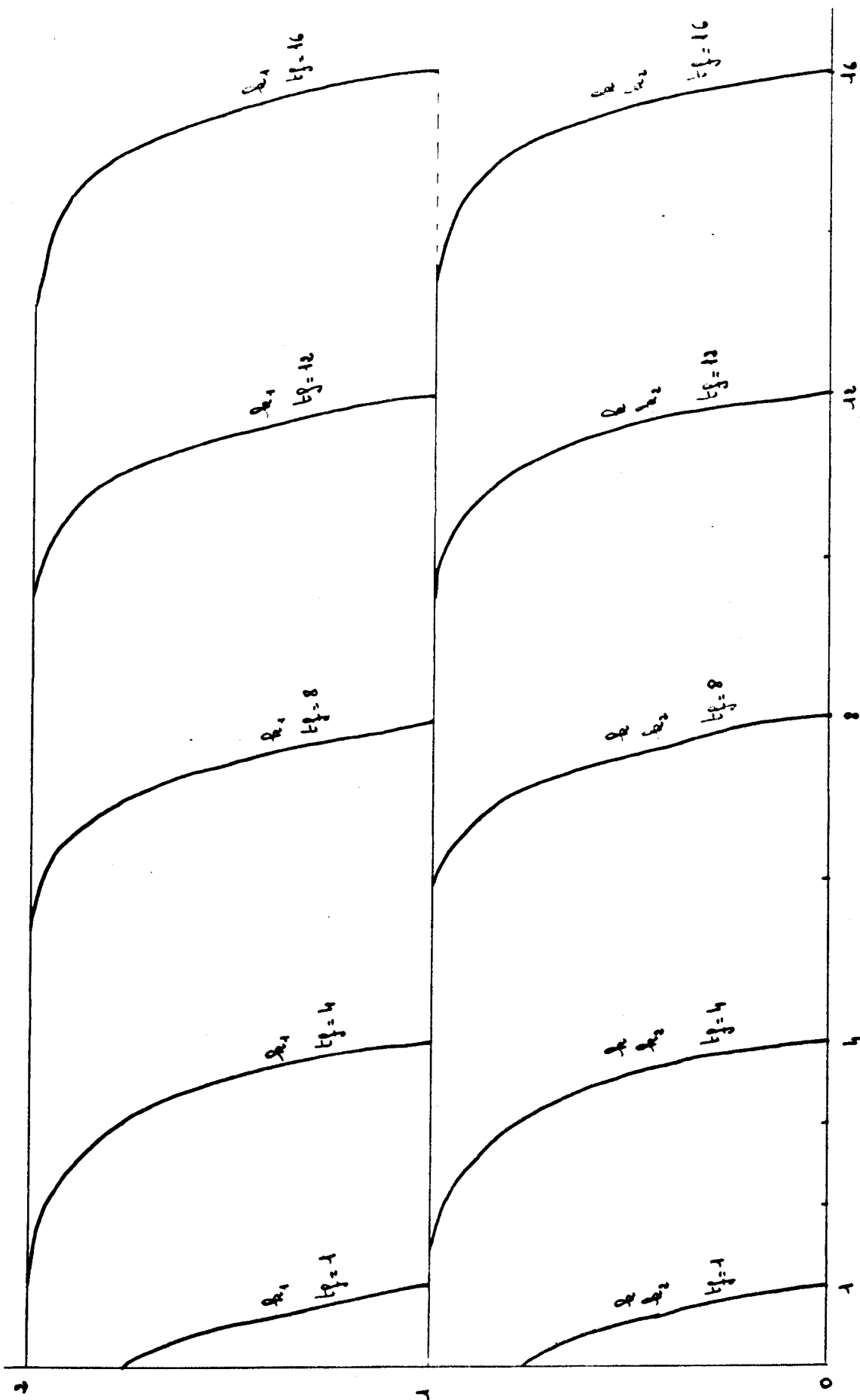


Figure 4-23 Evolution de  $h_1, h_2, h_2$  pour  $t_f$  grand par rapport à  $T$

$\lambda = 1$   $\alpha = 1$   $\beta = 1$   
 $\tau = 1$   $t_f = 2, 4, 8, 16$   $N = 10$



ystème continu initial mais d'obtenir par résolution numérique une approximation de la solution optimale.

#### 4.3.1. Echantillonnage du système continu initial

La forme discrète du système continu définie par la relation

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\tau \end{bmatrix}$$

s'écrit

$$x(t_{n+1}) = M x(t_n) + F u(t_n) \quad 4-10$$

Deux méthodes ont été utilisées pour échantillonner le processus, elles fournissent successivement les expressions des matrices M et F

i) - Echantillonnage par intégration (modèle discret noté D)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \tau(1-D) \\ 0 & D \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} h - \tau(1-D) \\ 1 - D \end{bmatrix} \quad 4-11$$

en notant h le pas d'intégration et  $D = e^{-h/\tau}$

ii) - Echantillonnage par homographie (modèle discret noté H) les relations définies au chapitre 3 permettent d'écrire dans le cas du système stationnaire étudié

$$M = (I + A \frac{h}{2})(I - A \frac{h}{2})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{h}{1 + \frac{h}{2\tau}} \\ 0 & \frac{1 - h/2\tau}{1 + h/2\tau} \end{bmatrix}$$

$$F = (I - Ah/2)^{-1} B h = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2\tau (1 + h/2\tau)} & 1 \\ \frac{h}{\tau (1 + h/2\tau)} & 1 \end{bmatrix}$$

soit en posant  $D = \frac{1 - h/2\tau}{1 + h/2\tau}$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \tau(1-D) \\ 0 & D \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} h - \tau(1-D) \\ 1 - D \end{bmatrix}$$

Les deux méthodes utilisées conduisent dans le cas d'un système stationnaire à la même formulation 4-10, 4-11 de la forme discrète du processus continu, la variable D prenant respectivement les valeurs

$$D = e^{-h/\tau} \quad D = \frac{1 - h/2\tau}{1 + h/2\tau}$$

#### 4.3.2. Définitions des méthodes numériques utilisées.

Les méthodes numériques proposées pour résoudre le système d'équations différentielles de Riccati ont été précisées au chapitre 3. Il s'agit :

- 1) de la méthode d'Euler
- 2) de l'utilisation de la transformation homographique
- 3) de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Les différentes solutions calculées sont introduites sur le schéma de la figure 4-24 et précisées sur la figure 4-24b.

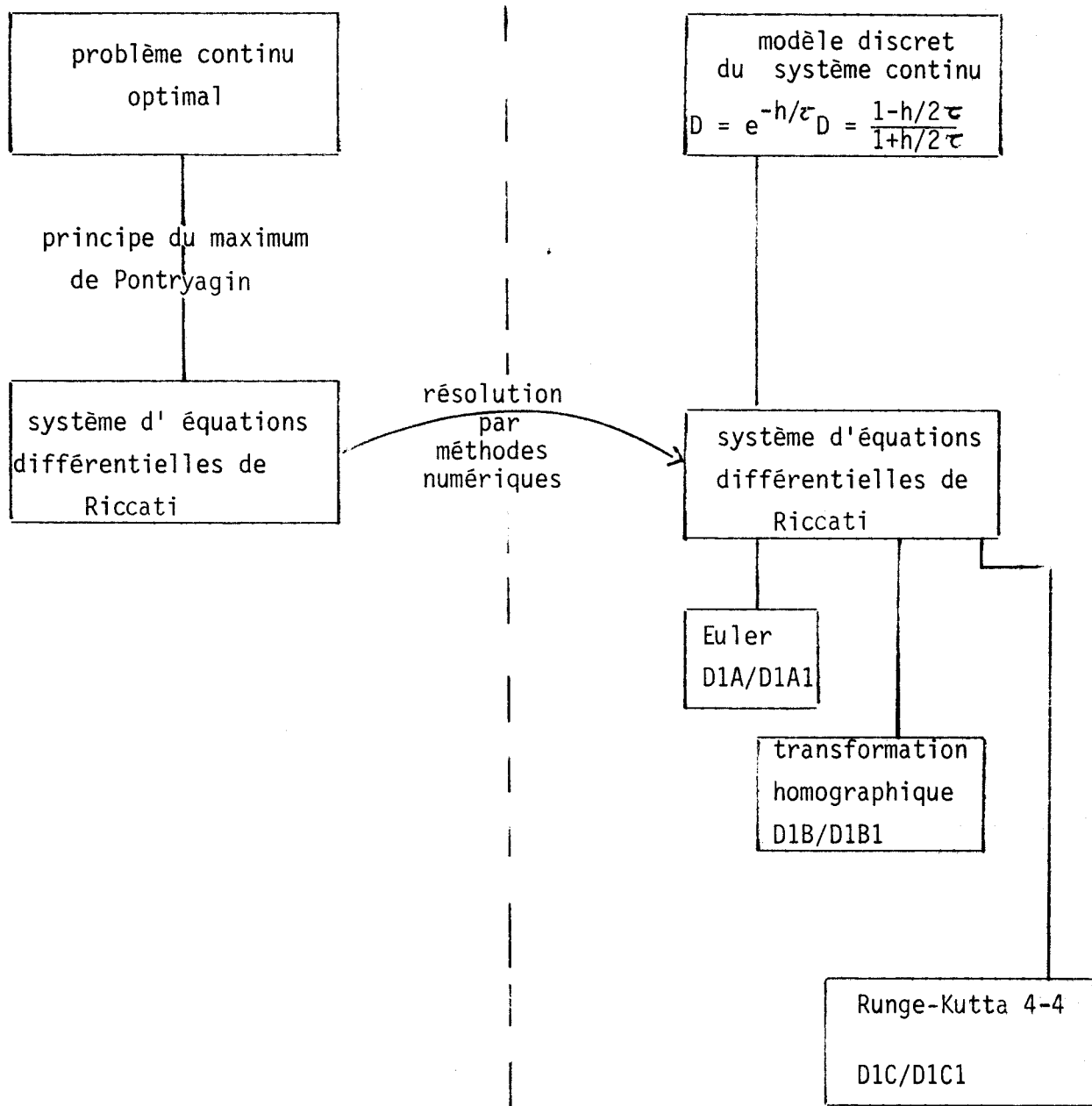


FIGURE 4-24



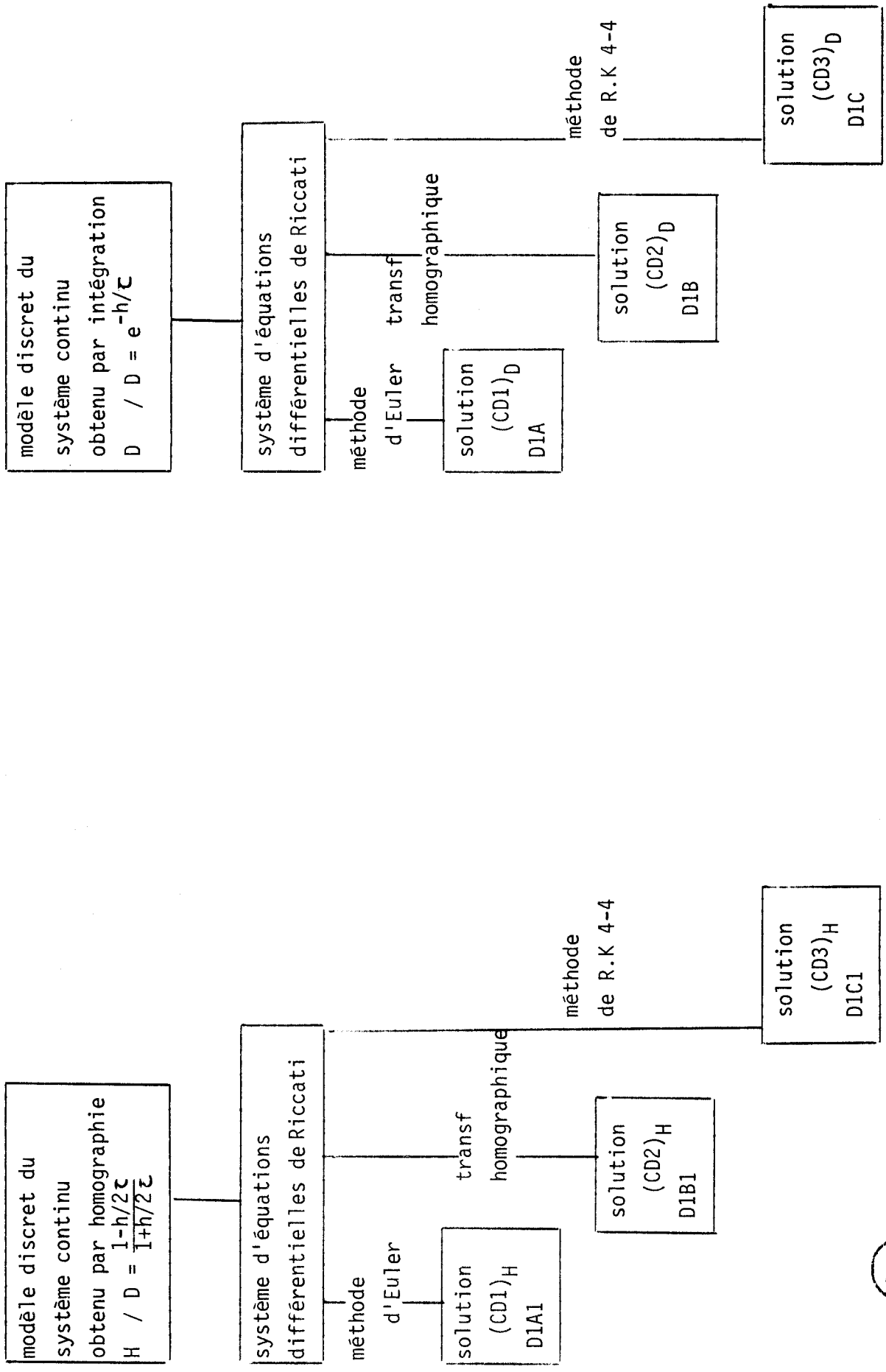


FIGURE 4-24b

#### 4.3.3. Outils de comparaison des résultats

Nous proposons d'utiliser la méthode présentée dans l'application numérique du chapitre 3.

La description détaillée en est donnée à l'annexe 4-1

#### 4.3.4. Résultats

Il s'agit d'évaluer l'erreur d'approximation commise en substituant à la solution continue optimale les solutions quasioptimales obtenues par l'utilisation des méthodes numériques précédentes.

Les comparaisons sont effectuées directement sur les résultats relatifs à l'évolution de la loi de commande, des solutions et de la fonctionnelle de coût.

Les valeurs numériques obtenues sont données en Annexe 4-3.

A la lecture des tableaux des figures 4-25, 4-26, 4-27 il est possible de juger les résultats

i) - dans le cas d'un échantillonnage par intégration, la transformation homographique fournit toujours l'erreur minimale sur la valeur à chaque instant d'échantillonnage des variables d'état du système et en général l'erreur minimale sur la détermination de la loi de commande.

Elle permet de plus la meilleure estimation de la valeur minimale de la fonctionnelle de coût.

ii) - dans le cas d'un échantillonnage par homographie, la transformation homographique utilisée lors de la résolution du système d'équations différentielles de Riccati fournit également la meilleure approximation.

Il est à remarquer, que pour certaines valeurs des paramètres intervenant dans la fonctionnelle de coût, les résultats obtenus à partir de ces méthodes numériques sont très éloignés des valeurs théoriques exactes données par la solution de référence.

		(CD1) <sub>H</sub>	(CD2) <sub>H</sub>	(CD3) <sub>H</sub>
E(εu)	N=3	-1.912899	-6693991	-9.389681
	N=5	-1.15967	-1.863194	-1.71241
E( εu )	N=3	15.45986	6.693991	9.389681
	N=5	3.6230	1.863194	1.712411
r(εu)	N=3	15.986832	5.168002	8.736694
	N=5	4.63858	1.840484	1.873796
/	/	/	/	/
E(εY)	N=3	-2.150773	-1.663687	-4.659225
	N=5	1.7978	0.896958	0.979303
E( εY )	N=3	2.150773	1.663687	4.659225
	N=5	1.7978	0.896948	0.979303
r(εY)	N=3	1.517318	1.117729	3.363383
	N=5	0.9895	0.52307	0.578017
/	/	/	/	/
E(εẎ)	N=3	0.881955	-0.762569	-3.201566
	N=5	1.361897	0.774859	0.871147
E( εẎ )	N=3	4.818138	0.762569	3.201566
	N=5	1.361897	0.7877078	0.871147
r(εẎ)	N=3	5.820527	0.582780	2.189202
	N=5	1.841933	1.035044	1.034739
/	/	/	/	/
E( εu, y, Ẏ  <sub>3</sub> )	N=3	7.47625	3.04008	5.7501573
	N=5	2.26092	1.1826199	1.1876203
E( εyẎ  <sub>2</sub> )	N=3	3.484455	1.213128	3.930395
	N=5	1.57984	0.8423329	0.925225
/	/	/	/	/
E(u, Y, Ẏ)	N=3	18.81058	7.434512	13.736262
	N=5	5.20618	2.511697	2.482627
E(Y, Ẏ)	N=3	5.43086263	1.8512065	5.96670426
	N=5	2.718334	1.4657142	1.5738199
/	/	/	/	/
E(f + εyf  <sub>2</sub> )	N=3	6.505403	0.582009	0.7327935
	N=5	1.285528	0.582009	0.7327935

Ecarts aux valeurs exactes - Figure 4-25

$$\alpha = 0 \quad \beta = 6 \quad \lambda = 1$$

$$\gamma = 1 \quad \gamma' = 1 \quad y_0 = 10 \quad \overset{\circ}{y}_0 = 10$$



	(CD1) <sub>H</sub>	(CD2) <sub>H</sub>	(CD3) <sub>H</sub>
$E( \epsilon u )$	0.929	0.618	0.640
$E( \epsilon y )$	0.382	0.337	0.294
$E( \epsilon \dot{y} )$	0.464	0.294	0.312
$\frac{\sum E \epsilon u, y, \dot{y} }{3}$	0.592	0.417	0.427
$\frac{ \epsilon y f  +  \epsilon \dot{y} f }{2}$	0.527	0.278	0.296
$\mathcal{M}(y, \dot{y}, u)$	1.20	0.861	0.881
$\mathcal{M}(y, \dot{y})$	0.673	0.520	0.525

$$\alpha = 0 \quad \beta = 6 \quad \lambda = 1 \quad \gamma \quad 1 \quad 9 \quad 1$$

$$y_0 = 10 \quad \gamma' \quad 1 \quad 1 \quad 5$$

$$\dot{y}_0 = 10$$

Valeur moyenne des indices pour différentes valeurs de  $\gamma$  et  $\gamma'$  et pour un nombre de pas de 5 et 10

Figure 4-26



	(CD1) <sub>D</sub>	(CD2) <sub>D</sub>	(CD3) <sub>D</sub>
$u$ $E( \epsilon u )$	5.9072	0.7194	0.7298
$\sigma(\epsilon u)$	6.4904	0.5191	0.3997
$y$ $E( \epsilon y )$	1.3148	0.1992	0.2254
$\sigma(\epsilon y)$	0.8509	0.1050	0.1333
$\overset{\circ}{y}$ $E( \epsilon \overset{\circ}{y} )$	2.2937	0.2002	0.2379
$\sigma( \epsilon \overset{\circ}{y} )$	2.5586	0.1896	0.1165
$\frac{\sum E \epsilon u, y, \overset{\circ}{y} }{3}$	3.172	0.3731	0.3977
$\frac{ \epsilon y f  +  \epsilon \overset{\circ}{y} f }{2}$	2.4644	0.1553	0.3515
$\mathcal{M}(u, y, \overset{\circ}{y})$	7.0814	0.8275	0.8445
$\mathcal{M}(y, \overset{\circ}{y})$	2.829	0.3145	0.3531

Ecarts à la valeur exacte - Figure 4-27

$\alpha = 0 \quad \beta = 1 \quad \lambda = 1$

Nombre de pas de calcul = 10

$\gamma = 10 \quad \gamma' = 0 \quad y_0 = 10 \quad \overset{\circ}{y}_0 = 10$



Ces erreurs importantes s'expliquent par le caractère asymptotique des solutions de l'équation différentielle de Riccati pour les valeurs correspondantes des paramètres.

Le calcul d'un facteur de qualité global des méthodes proposées permet de préciser les résultats relatifs de chacune d'elles.

Il vient :

$Q(CD1)_H$	$Q(CD2)_H$	$Q(CD3)_H$
2,4	3,5	3,4

et de manière générale

$$Q(CD1)_H > Q(CD1)_D$$

$$Q(CD2)_H > Q(CD2)_D$$

$$Q(CD3)_H > Q(CD3)_D$$

Nous proposons maintenant d'envisager les résultats obtenus par les méthodes de discrétisation "à priori" présentées au chapitre 2.

#### 4.4. Solutions obtenues par discrétisation "à priori".

Les solutions comparées dans ce paragraphe correspondent aux méthodes définies au chapitre 2 (§ 2-3 ) et reposent sur l'association d'un problème discret au problème optimal continu initial.

Le problème optimal discret est résolu par l'application du principe du maximum discret.

Les deux démarches envisagées sont illustrées sur le schéma de la figure 4-28.

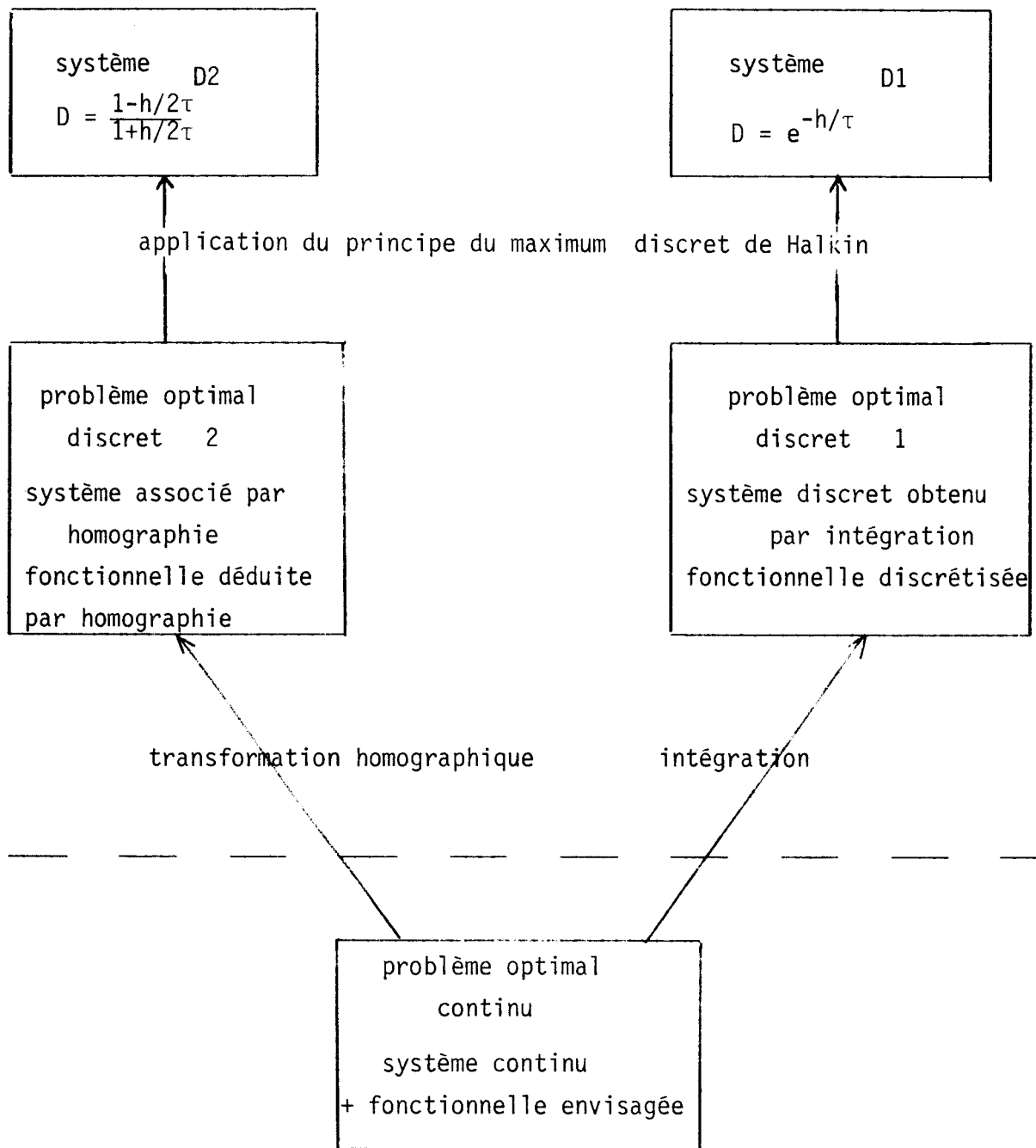


FIGURE 4-28

#### 4.4.1. Présentation des résultats.

La comparaison des résultats effectués suivant la méthode générale présentée en annexe 4-1 a permis de montrer que, pour différentes valeurs des paramètres, les solutions  $D_2$  constituent une approximation convenable de la solution de référence.

Ils ont d'autre part permis de vérifier que lorsque l'intervalle de temps durant lequel le système est étudié devient grand par rapport à  $\tau$  ( $t_f > 12$  s) il y a identité complète des résultats obtenus par ces méthodes d'une part et la solution de référence d'autre part.

Il n'est pas observé d'erreur importante pour les valeurs des paramètres correspondant à un comportement asymptotique des solutions de l'équation différentielle matricielle de Riccati ainsi qu'indiqué sur le tableau de la figure 4-29.

L'utilisation d'un facteur de qualité  $Q$  défini précédemment permet de préciser le niveau des approximations réalisées par les solutions quasioptimales  $D_1$  ou  $D_2$ . Il vient dans tous les cas

$$Q_{D_1} < Q_{D_2}$$



N° de pas	$y^{(C)}$	$y^{(D1)}$	$y^{(D2)}$
0	-10.00000	-10.00000	-10.00000
1	-8.12531	-8.12391	-8.12116
2	-6.47941	-6.47286	-6.46990
3	-5.03619	-5.02256	-5.02105
4	-3.77771	-3.75670	-3.75755
5	-2.69341	-2.66635	-2.66977
6	-1.77976	-1.74951	-1.75510
7	-1.04004	-1.01100	-1.01780
8	-0.48454	-0.46249	-0.46899
9	-0.13093	-0.12144	-0.12574
10	-0.00498	-0.00428	-0.00505

N° de pas	$\overset{\circ}{y}^{(C)}$	$\overset{\circ}{y}^{(D1)}$	$\overset{\circ}{y}^{(D2)}$
0	10.00000	10.00000	10.00000
1	8.77609	8.80083	8.78843
2	7.70459	7.74487	7.72414
3	6.74247	6.79001	6.76437
4	5.85112	5.89822	5.87064
5	4.99476	5.03408	5.00716
6	4.13903	4.16340	4.13953
7	3.24958	3.25204	3.23345
8	2.29072	2.26591	2.25468
9	1.22397	1.18075	1.17783
10	0.00648	0.02921	0.02903

N° de pas	$u^{(C)}$	$u^{(D1)}$	$u^{(D2)}$
0	3.42073	3.38462	3.33637
1	3.07570	2.97548	2.93483
2	2.65427	2.47723	2.44543
3	2.13954	1.87038	1.84884
4	1.51085	1.13108	1.12156
5	0.74296	0.23082	0.23517
6	-0.19494	-0.86424	-0.84389
7	-1.34046	-2.18810	-2.14977
8	-2.73960	-3.72052	-3.66800
9	-4.44850	-5.17191	-5.14058
10	0.00000	0.00000	0.00000

Valeur de  $y$ ,  $\overset{\circ}{y}$ ,  $u$  pour la figure 4-29 système de référence (C) et les deux problèmes optimaux discrets associés ( $D_1$ ) et ( $D_2$ ).

$$\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad \gamma = 10 \quad \gamma' = 10$$

$$\lambda = 0.01 \quad \tau = 1 \quad tf = 2s \quad N = 10$$



## Conclusion

L'illustration sur un cas concret des différentes possibilités d'utilisation de la transformation homographique a permis de mettre en évidence les avantages qui peuvent en découler.

Tout d'abord si l'on utilise cette transformation en tant qu'algorithme de discrétisation, l'utilisation de l'indice de qualité  $Q$  défini au chapitre IV conduit à affirmer que cet algorithme atteint un niveau de précision comparable à celui d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre 3 .

Lors de la discrétisation à postériori, les solutions quasi-optimales obtenues à partir de la transformée homographique donnent de meilleurs résultats qu'une discrétisation utilisant les méthodes usuelles d'analyse des systèmes échantillonnés.

Enfin, dans le cadre des méthodes de discrétisation à priori, la définition d'un problème optimal discret associé au problème continu initial conduit à une approximation très satisfaisante de la solution optimale de référence.

## CONCLUSION GENERALE

La mise en oeuvre d'une transformation homographique des opérateurs caractéristiques de l'évolution d'un système continu permet de lui associer un processus discret analogue. Dans l'hypothèse linéaire, la solution du problème de commande optimale à critère quadratique et à horizon infini, est obtenue de manière identique qu'il s'agisse du système continu ou du système discret associé. Ce résultat, nous a conduit à étudier, d'une manière plus générale, la transformation homographique soit comme un outil de discrétisation d'un système continu, soit comme un opérateur mathématique permettant de transposer du domaine continu au domaine discret un problème de commande optimale.

- L'utilisation de cette transformation comme outil de discrétisation, permet de conserver les caractères de stabilité du système différentiel initial. Du point de vue de la précision, cette technique donne des résultats comparables à ceux obtenus à partir d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre 3.

- La transposition dans le domaine discret d'un problème de régulation optimale continue conduit à une solution optimale au sens discret, définissant une structure de bouclage caractérisée par la matrice des gains  $K(k)$ .

Cette matrice est solution d'une équation de récurrence discrète dont la forme particulière est à rapprocher de l'équation de Riccati définissant, en continu, la matrice des gains  $K(t)$ .

Cette méthode permet ainsi à la fois d'obtenir une commande quasi optimale discrète du système continu initial, et de déterminer de manière analytique l'approximation ainsi réalisée.

- L'étude d'une application relative à la commande optimale d'un moteur a permis de présenter plusieurs commandes quasi-optimales discrètes et d'estimer les écarts de celles-ci par rapport à la solution optimale. Dans ce cas, il est apparu que la discrétisation a posteriori par transformation homographique des équations de Riccati conduit à améliorer sensiblement la précision des résultats.

S O M M A I R E

---

	page
INTRODUCTION GENERALE .....	1
<u>1 - DISCRETISATION D'UN SYSTEME CONTINU : TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE</u>	
<u>Introduction</u> .....	4
1.1. Représentation des systèmes dans l'espace d'état. ....	4
1.2. Définition de la transformation homographique. ....	6
1.3. Etude des propriétés pour les systèmes linéaires. ....	10
<u>Conclusion</u> .....	13
<u>2 - DEFINITION DES COMMANDES QUASI-OPTIMALES D'UN SYSTEME CONTINU PAR TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE</u>	
<u>Introduction</u> .....	15
2.1. Commande optimale à critères quadratiques. ....	16
2.2. Problème du régulateur d'état continu. ....	20
2.3. Problème du régulateur d'état discret. ....	24
2.4. Problème discret associé par homographie et interprété comme approximation du système optimal continu. ....	31
2.5. Cas particulier d'un système linéaire stationnaire à horizon infini. ....	37
<u>Conclusion</u> .....	38
<u>3 - INTERPRETATION DE LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE COMME METHODE NUMERIQUE D'INTEGRATION</u>	
<u>Introduction</u> .....	40
3.1. Interprétation numérique de la transformation homographique. ....	41
3.2. Propriétés numériques. ....	42
3.3. Algorithme homographique pour l'intégration numérique d'un système d'équations différentielles non linéaires. ....	54
3.4. Intégration d'un système d'équations différentielles du type de Riccati. ....	55
<u>Conclusion</u> .....	69

4 - APPLICATION A LA DEFINITION D'UNE COMMANDE NUMERIQUE QUASI-OPTIMALE  
D'UN MOTEUR

<u>Introduction</u> .....	71
4.1. Présentation du problème.....	72
4.2. Résolutions exactes : solution de référence.....	76
4.3. Solutions obtenues par discrétisation "a posteriori".....	90
4.4. Solutions obtenues par discrétisation "a priori".....	113
<u>Conclusion</u> .....	117
CONCLUSION GENERALE .....	118
BIBLIOGRAPHIE .....	121
ANNEXES .....	126
1-1 : Description de la dynamique d'un système physique au moyen des variables d'état. ....	127
2-1 : Définition mathématique d'un problème de commande optimale. ....	134
2-2 : Principe du maximum de Pontryagin : application à la résolution du problème de régulateur d'état continu.....	136
2-3 : Résolution du problème de régulateur d'état discret. ....	141
2-4 : Détermination de la valeur de la fonctionnelle de coût discrète $J_h$ sur le trajet optimal .....	143
3-1 : Calcul de l'erreur par pas de l'algorithme obtenu par la trans- formée homographique. ....	147
3-2 : Détermination de la solution exacte du système d'équations dif- férentielles de Riccati retenue en exemple numérique. ....	152
4-1 : Critères de comparaison des résultats. ....	154
4-2 : Valeur des blocs $\phi_{11}$ , $\phi_{22}$ , $\phi_{21}$ , $\phi_{12}$ de la matrice de transi- tion caractérisant les équations canoniques du problème optimal étudié en exemple. ....	159

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE I

/1-1/- M. DERUSSO, J. ROY, M.C. CLOSE

"State Variable for Engineers".

WILEY & SONS - 1965.

/1-2/- J.C. GENTINA, P. BORNE

"Definition of a matricial transformation permitting the discretization of a set of differential equations".

I.F.I.P. Congress - Stockholm - August 5-10 1974.

/1-3/- J.C. GENTINA

"Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension".

Thèse d'Etat - Université de Lille I - 2 Mars 1976.

/1-4/- ZADEH, DESOER

"Linear system theory the state approach".

Mc. GRAW HILL - 1963.

/1-5/- E. BARNETT and C. STOREY

"Matrix methods in stability theory".

Ed. NELSON - 1970

/1-6/- F.R. GANTMACHER

"Théorie des Matrices". - Tome 1.

DUNOD - PARIS - 1966

/1-7/- P. VIDAL

"Systèmes échantillonnés non linéaires".

GORDON & BREACH - 1968.

/1-8/- BOUDAREL, DELMAS, GUICHET

"Commande optimale des processus". - Tome 1 : Concepts fondamentaux de l'Automatique.

DUNOD - 1967.

/1-9/- J.C. GENTINA

"Sur la notion de modèle dans la description d'un processus".

Colloque ANRT - Ecole Centrale - Juin 1975.

/1-10/ - GILLE - DELCAUNE - PELEGRIN

"Dynamique de la commande linéaire".

DUNOD - 1967

/1-11/ - J.T. TOU

"Digital and sampled data control systems".

Mac Graw Hill - 1959 - Ch. 5 et 6 - p. 145 à 321.

/1-12/ - C. BOZZO

"Notion de transformée de Laguerre d'un signal continu -  
2ème partie : Application aux problèmes d'analyse et de  
synthèse de systèmes continus linéaires et stationnaires".

R.A.I.R.O. - N° 31 - 1972.

/1-13/ - C. BOZZO

"Etude d'un isomorphisme entre l'espace des signaux continus et  
l'espace des signaux discrets : différentes applications".

Thèse D. Phys. - Marseille - 1970.

/1-14/ - J.C. GENTINA, R. QUET

"Definition of quasi-optimal solutions on continuous optimal control  
problems by homographic transformation"

IFAC/IFORS Symposium Varna (Oct. 1974) Bulgarie.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE II

/2-1/- BOUDAREL, DELMAS, GUICHET

"Commande optimale des processus" - T.4 : "Méthodes variationnelles et leurs applications".

DUNOD - 1969 - Chapitres VII et VIII.

/2-2/- R.C. DORF

"Les variables d'état dans l'analyse et la synthèse des systèmes de commande".

DUNOD - 1967.

/2-3/- M. ATHANS - P.L. FALB

"Optimal Control" - Chapitre 6 - Section 6-2 à 6-10 - p. 364 à 428.

MAC GRAW HILL - 1966.

/2-4/- M. ATHANS - P.L. FALB

"Optimal Control" - Chapitre 6 - Section 6-12 à 6-17 - p. 429 à 460

MAC GRAW HILL - 1966.

/2-5/- M. ATHANS - P.L. FALB

"Optimal Control" - Chapitre 9 - p. 662 à 749

MAC GRAW HILL - 1966.

/2-6/- GILLE - DELCAUNE - PELEGRIN

"Dynamique de la commande linéaire"

DUNOD - 1967.

/2-7/- L.S. PONTRYAGIN , V. BOLTYANSKI, B.V. GRAMKRELIDZE, E.F. MISHENKO

"The mathematical theory of optimal process"

INTERSCIENCE PUBLISHERS - N.Y. - 1962.

/2-8/- R.F. KALMAN

"Contribution to the theory of optimal control"

Bul. Soc. Mat. - Mex. - Vol.5 - p. 102-119 - 1960

/2-9/- W.T. REED

"Riccati's differential equations"

MAC GRAW HILL.



/2-10/- G. HACQUES

"Mathématiques pour l'informatique"

3/ Algorithmique numérique

A. COLIN - 1971.

/2-11/- H. HALKIN

"A maximum principle of the Pontryagin type for systems described  
by non linear difference equations"

*J. Siam Control* - Vol.4 - N° 1 - p. 90 à 111 - 1966.

/2-12/- P. SAGE

"Optimum systems"

MAC GRAW HILL - 1967.

/2-13/- P. LEFEVRE

"Estimation réursive optimale"

Filtre de Kalman

*Cours ENSTA* - 1970.

/2-14/- R.E. KALMAN

"The theory of optimal control and calculus of variation in R.E. Bellman"

PRINTICE HALL - 1963.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE III

/3-1/ J.C. GENTINA - P. BORNE

*"Definition of a matricial transformation permitting the discretization of a set of differential equation".*

I.F.I.P. Congress Stockholm - August 5-10-74.

/3-2/ G. HACQUES

*"Mathématiques pour l'Informatique"*

T. 3 Algorithmique Numérique (cours)

A. Colin 1971

/3-3/ KORGANOFF - PAVEL-PARVU

*"Eléments de théorie des matrices carrées et rectangles en analyse numérique".*

T.1 et 2 - Dunod - 1966

/3-4/ J. LEGRAS

*"Méthodes et techniques de l'analyse numérique"*

Dunod - 1971

/3-5/ G. HACQUES

*"Mathématiques pour l'Informatique"*

T.3 - Algorithmique Numérique (cours)

A. Colin - 1971 - Chapitre 5-3.

A N N E X E S

- Annexe 1 - 1 Description de la dynamique d'un système physique au  
moyens des variables d'état.
- Annexe 2 - 1 Définition mathématique d'un problème de commande optimale
- 2 - 2 Principe du maximum de Pontryagin, application à la réso-  
lution du problème de régulateur d'état continu.
- 2 - 3 Résolution du problème de régulateur d'état discret.
- 2 - 4 Détermination de la valeur de la fonctionnelle discrète  
 $J_h$  sur le trajet optimal.
- Annexe 3 - 1 Calcul de l'erreur par pas de l'algorithme obtenu par la  
transformée homographique.
- 3 - 2 Détermination de la solution exacte du système d'équations  
différentielles de Riccati retenue en exemple numérique.
- Annexe 4 - 1 Critères de comparaison des résultats.
- 4 - 2 Valeur des blocs  $\phi_{11}$ ,  $\phi_{22}$ ,  $\phi_{21}$ ,  $\phi_{12}$  de la matrice de  
transition caractérisant les équations canoniques du  
problème optimal.

Annexe 1 - 1

Description de la dynamique d'un système physique au moyen des variables d'état.

. Cet exemple est tiré d'une étude de Mr Brodie sur le pilotage d'un engin aérien autour d'une trajectoire d'atterrissage, présentée à la 17 ème conférence A. G. A. R. D Septembre 1973.

L'étude est restreinte au comportement de l'engin dans le plan de tangage (fig. A1-1), la description des mouvements de roulis pouvant être conduite de manière entièrement analogue .

L'engin du type aile volante présente un écart au tangage  $\theta$  , ses écarts à la trajectoire de vol peuvent être corrigés par l'action des gouvernes notons  $\delta$  leur angle de braquage.

Exprimons la dynamique de l'engin en déterminant les forces et moments auquel il est soumis (fig. A1-2).

### 1 - Décompte des forces

. forces aérodynamiques  $R$  décomposée suivant

$G_{za}$  portance notée  $Z$

$G_{xa}$  trainée notée  $X$

en première approximation la portance est fonction linéaire [A1.1] de l'incidence  $\alpha$  , on écrira donc

$$Z = Z_{\alpha} \cdot \alpha$$

. poids (masse  $m$  de l'engin)

On envisage ses composantes suivant  $G_{za}$  et  $G_{xa}$  soit  $P_z$  et  $P_x$

. forces dues au braquage  $\delta$  des gouvernes notées

$F_z$  suivant  $G_{za}$  (accroissement de portance)

$F_x$  suivant  $G_{xa}$  (accroissement de trainée)

en première approximation cette force est considérée proportionnelle à  $\delta$  on note donc

$$F_z = F_{\delta} \cdot \delta$$

. force due au mouvement de tangage de l'avion et proportionnelle à l'écart de tangage soit  $\theta$  notons la composante suivant  $G_{za}$  :

$$T = T_{\theta} \cdot \theta$$

L'équation de la dynamique suivant  $G_{za}$  s'écrit

$$\overset{\circ}{\overset{\circ}{M}}_z = - Z_{\alpha} \cdot \alpha - F_{\delta} \cdot \delta + T_{\theta} \cdot \theta + P_z \quad (1)$$

## 2 - Décompte des moments

. Moment de tangage dû à l'incidence  $\alpha$  de l'engin soit  $M_1$  pris au centre de gravité G en première approximation [A1.1]

$$M_1 = M_{\alpha} \cdot \alpha$$

. Moment de tangage induit par le mouvement de tangage.

En effet le foyer d'application P de la portance ne correspond pas au centre de gravité et le supplément de portance engendré par le mouvement de tangage entraîne [A1.2] un moment de tangage proportionnel à la vitesse angulaire de tangage  $q = \overset{\circ}{\theta}$

$$\text{notons } M_2 = M_q \times \overset{\circ}{\theta}$$

. Moment correspondant à l'action des gouvernes.

Il est proportionnel à l'angle de braque de ces gouvernes soit

$$M_3 = M_{\delta} \cdot \delta$$

Soit  $I_y$  le moment d'inertie longitudinal de l'engin, l'équation des moments s'écrit (2)

$$\overset{\circ}{\overset{\circ}{I}}_y \overset{\circ}{\theta} = - M_{\alpha} \cdot \alpha - M_q \overset{\circ}{\theta} + M_{\delta} \cdot \delta \quad (2)$$

## 3 - Mise sous forme matricielle

Comme il s'agit d'écart à une trajectoire,  $\gamma$  est petit. Compte-tenu des définitions de la figure (A-1-1) et en notant V la vitesse de l'engin il vient

$$\overset{\circ}{\overset{\circ}{Z}} = - V \overset{\circ}{\gamma}$$

La relation 1 s'écrit alors

$$mV_{\gamma}^{\circ} = Z_{\alpha} \cdot \alpha + F_{\delta} \cdot \delta - T_{\theta} \cdot \theta - P_z \quad (3)$$

l'assiette longitudinale  $\theta$  est liée à l'incidence  $\alpha$  par la relation :

$$\theta = \alpha + \gamma \quad (4)$$

et en éliminant  $\alpha$  de (3) et (2) il vient

$$mV_{\gamma}^{\circ} = (Z_{\alpha} - T_{\theta})\theta - Z_{\alpha} \gamma - P_z + F_{\delta} \cdot \delta \quad (5)$$

$$I_y \overset{\circ}{\theta} = -M_{\alpha} \theta + M_{\alpha} \gamma - M_{\overset{\circ}{q}} \overset{\circ}{\theta} + M_{\delta} \delta \quad (6)$$

définissant le vecteur X suivant :

$$X^T = [ \overset{\circ}{\theta}, \theta, \gamma, \gamma^*, P_z ] \quad (7)$$

avec

$$\gamma^* \text{ tel que } \overset{\circ}{\gamma} = \gamma$$

les équations 5 et 6 peuvent s'écrire sous la forme matricielle :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\theta} \\ \theta \\ \gamma \\ \gamma^* \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{M_{\overset{\circ}{q}}}{I_y} - \frac{M_{\alpha}}{I_y} & \frac{M_{\alpha}}{I_y} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Z_{\alpha} - T_{\theta}}{mV} - \frac{Z_{\alpha}}{mV} & 0 & -\frac{1}{mV} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\theta} \\ \theta \\ \gamma \\ \gamma^* \\ P_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{M_{\delta}}{I_y} \\ 0 \\ \frac{F_{\delta}}{mV} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta$$

soit avec les notations (7)

$$\overset{\circ}{\dot{X}} = A X + B \delta$$

A matrice carrée 5x5 représentant l'évolution dynamique de l'engin en l'absence de contrôle par les gouvernes de braquage.

B matrice colonne 5x1 caractérisant l'influence de la commande ( $\delta$  angle de braquage des gouvernes) sur l'évolution du système.

Bibliographie

A1.1 L. GEORGE, J.F. VERNET, J.C. WANNER

*"La mécanique du vol - performance des avions et des engins"*

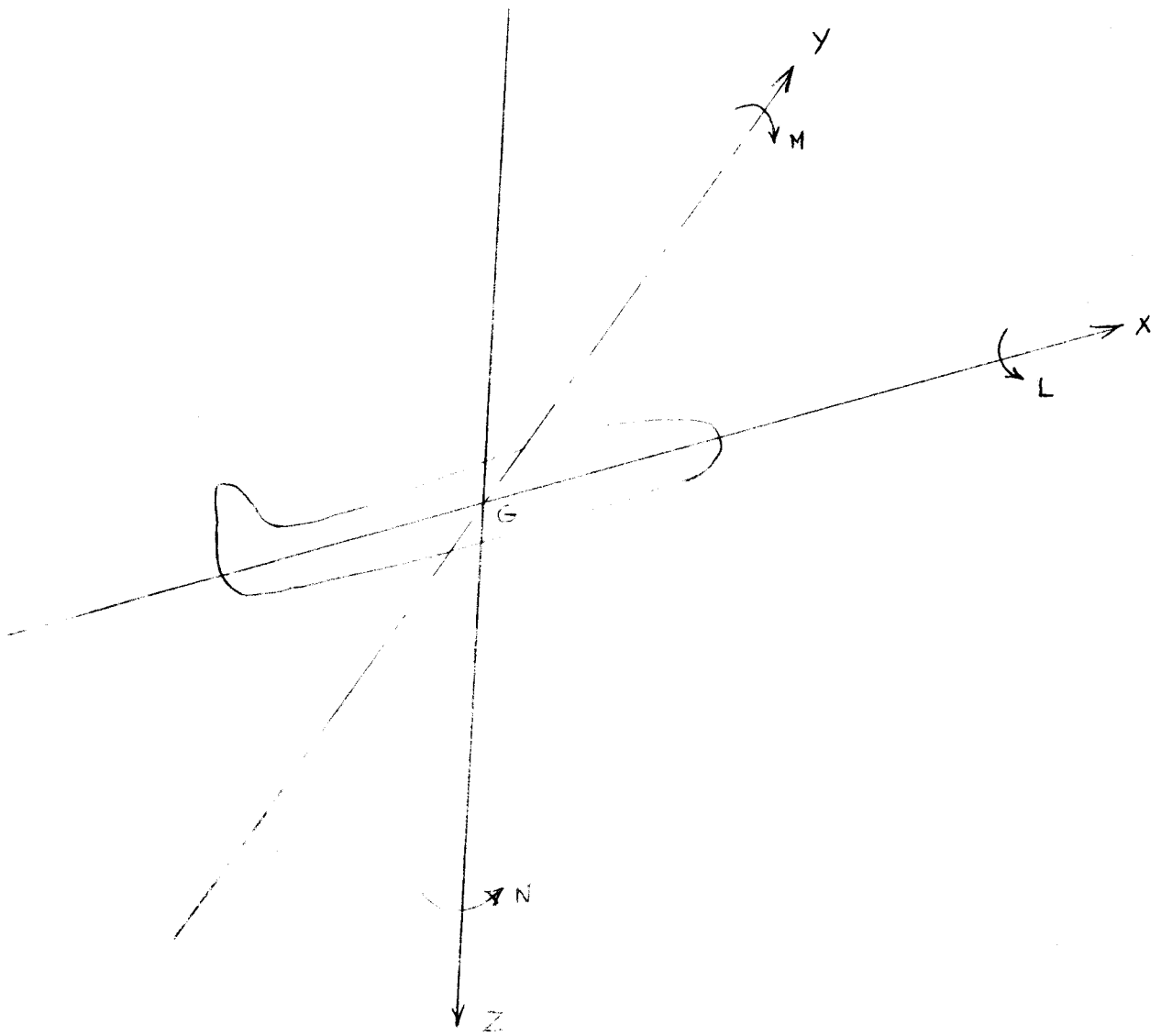
Dunod - 1969

A1.2 A. BOINON

*"L'aérodynamique du vol de l'avion"*

Dunod - 1969



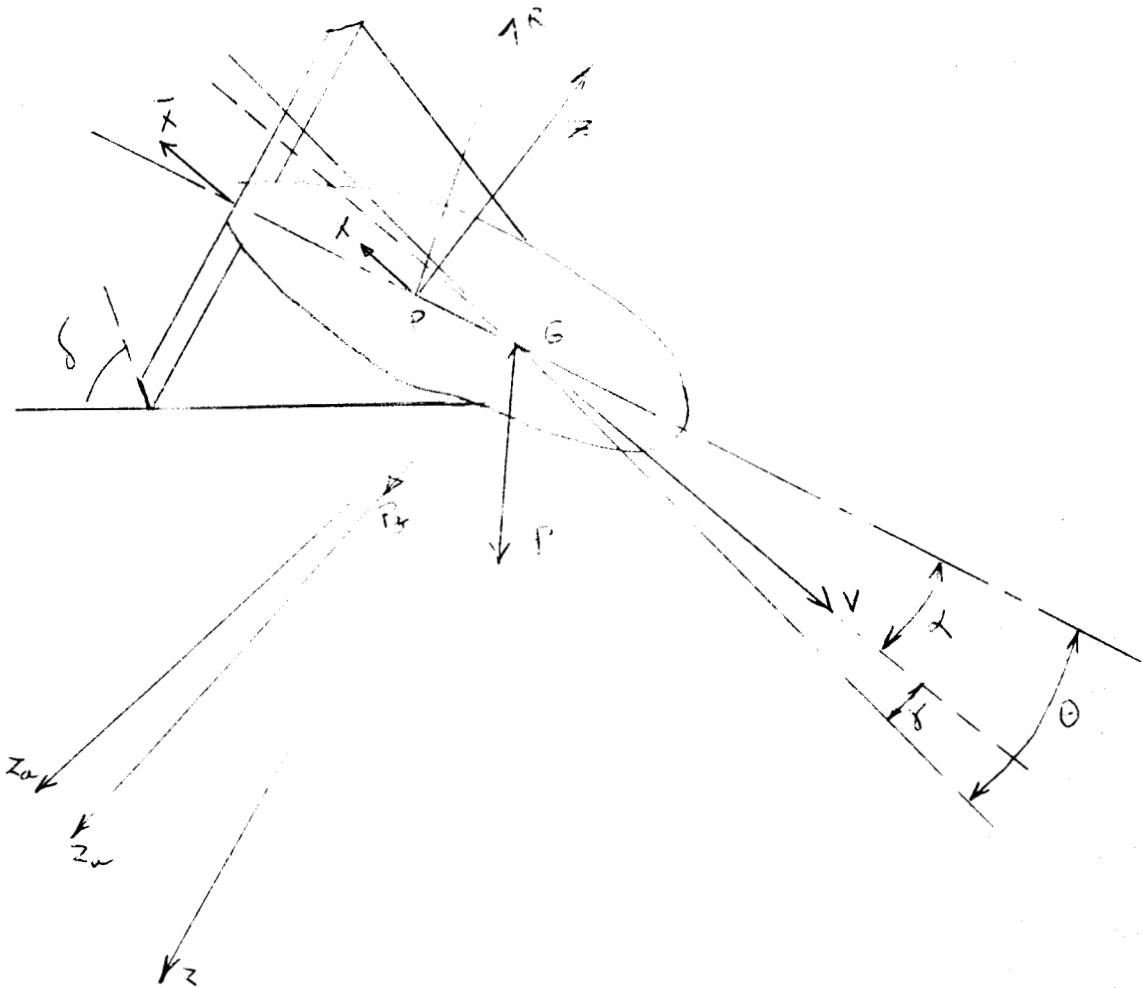


G X Z plan de tangage  
G Y Z plan de roulis  
G X Y plan de lacet

X axe longitudinal    Y axe transversal    Z axe de lacet  
L moment de roulis    M moment de tangage    N moment de lacet



Figure A1.1



On prend un trièdre de référence  $G x_0 z_0 y_0$  lié au plan de vol de l'engin  
 trièdre aérodynamique  $G x_a z_a y_a$  avec  $G x_a$  porté par le vecteur vitesse de l'engin.  
 - trièdre avion  $G x y z$ ,  $G x$  axe longitudinal de l'avion  
 angle  $G x_0, G x_a$  angle de trajectoire de vol  $\gamma$   
 angle  $G x_u, G x$  incidence (on suppose qu'il n'y a pas de dérapage et donc  
 $\alpha$  que  $V$  est dans le plan  $G x z$ )  
 angle  $G x_0, G x$  assiette longitudinale de l'engin noté  $\theta$

Figure A1.2



Annexe 2 - 1

Définition mathématique d'un problème de commande optimale.

Soit un système représenté par l'équation d'état suivante :

$$x(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad 1$$

$$y(t) = g(t, x(t), u(t)) \quad 2$$

avec les notations et hypothèses définies au chapitre 1.

L'objectif recherché peut être défini comme une condition sur la valeur du vecteur de sortie  $y(t)$ . Compte-tenu de la relation 2 cet objectif peut être traduit par une condition sur le vecteur d'état  $x(t)$ .

De façon générale, notons  $D$  un domaine de l'espace d'état et  $[t_1, t_2]$  un intervalle de temps tels que l'évolution considérée du système de  $t_0$  à  $t_f$  soit inclus dans  $D \times [t_1, t_2]$ , l'objectif se traduit par l'appartenance du vecteur état à un domaine de  $D \times [t_1, t_2]$  noté  $S$ .

Suivant que l'évolution est envisagée sur un horizon fixé ou non, la condition sur le vecteur d'état s'écrit :

$$\begin{aligned} t \in [t_0, t_f] \quad t_f \text{ fixé} \\ x(t) \in S \subset D \times [t_1, t_2] \end{aligned} \quad 3$$

$$\begin{aligned} t \in [t_0, t_f] \quad t_f \text{ non fixé} \\ x(t) \in S_{t_f} \subset D \times [t_1, t_2] \end{aligned} \quad 3b$$

D'autre part, la commande est générée par un processus physique, elle ne peut donc prendre que des valeurs finies et parfois restreintes. Le vecteur de commandes  $u(t)$  doit appartenir à un certain domaine de valeurs admissibles  $\Omega$  il vient

$$u(t) \in \Omega \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad 4$$

L'objectif recherché pouvant être atteint de plusieurs manières, la commande retenue sera la meilleure au sens d'un critère de performance ou de coût. Ce critère se traduit par une fonctionnelle  $J$  de la forme 5

$$J = J(t, x(t), u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt + h(x(t_f), t_f) \quad 5$$

où  $f_0$  et  $h$  sont des fonctions scalaires continues et continuellement dérivables.

Cette fonctionnelle se compose de deux termes :

- Une partie intégrée le long de la trajectoire
- une partie traduisant les conditions finales imposées au système.

Le problème de la synthèse d'un système décrit par les relations 1, 2 se ramène à la recherche d'une loi de commande admissible permettant de guider le processus de l'état  $x_0$  vers la région désirée de l'espace d'état, tout en maximalisant un indice de qualité ou en minimalisant une certaine fonction de coût. Ce qui conduit à rechercher la loi de commande  $\hat{u}(t)$  vérifiant les contraintes :

$$U(t) \in \Omega \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad y(t) = g(t, x(t), u(t))$$

et satisfaisant les conditions 3 ou 3b

$$x(t) \in S \quad \text{ou} \quad x(t) \in S_{t_f}$$

et telle que

$$\forall t \quad J(t, x(t), \hat{u}(t)) \leq J(t, x(t), u(t))$$

Annexe 2 - 2

Principe du maximum de Pontryagin : application à la résolution du problème du régulateur d'état.

a) principe de Pontryagin

Le problème optimal décrit au § 2-1-1 du chapitre 2 peut s'exprimer comme la recherche de la loi de commande  $u(t)$  qui transfère le système (1) de l'état 0 à l'état  $x(f)$

$$\overset{o}{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad 1$$

et minimise la fonctionnelle

$$J_1 = J_{1f} + J_{1c}$$

avec  $J_{1f} = h(x(t_f), t_f)$  2

$$J_{1c} = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt \quad 3$$

avec les notations de l'annexe 2-1.

Afin d'alléger les calculs nous noterons

$$J_{1c} = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x, u) dt$$

La loi de commande optimale  $u(t)$  est obtenue par application du principe du maximum de Pontryagin. Pour cela introduisons une variable supplémentaire  $x_0$  définie par la relation

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{dJ_{1c}}{dt} = f_0(x, u) \quad 4$$

Envisageons alors le système global d'ordre  $q+1$  regroupant le système 1 de variables définies par le vecteur  $x$  et la variable  $x_0$  soit en notant

$$x^{*\top} = [x_0, x^T] = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_q] \quad 5$$

il peut être décrit par une relation de la forme

$$\dot{x}^* = F(x^*, u) \quad 6$$

avec

$$f_0(x^*, u) = f_0(x, u) \quad 7$$

$$f_i(x^*, u) = f_i(x, u) \quad \forall i = 1, 2, \dots, q \quad 8$$

Définissons le système adjoint du système 6 en notant  $p^{*\top} = [p_0, p_1, p_2, \dots, p_q]$  les  $q+1$  variables adjointes, il vient :

$$\dot{p}^* = - \left( \frac{\delta F}{\delta x} \right)^T p^* \quad 8$$

Soit alors une fonction scalaire ou hamiltonienne décrite sous forme suivante

$$\mathcal{H}(p^*, x^*, u) = p^{*\top} \dot{x}^* \quad 9$$

Le principe du maximum permet d'affirmer que le vecteur de commande  $u$  qui minimise la fonction de coût  $J_{1c}$ , minimise le hamiltonien  $\mathcal{H}$ .

Le problème initial revient donc à rechercher une commande  $u(t)$  minimisant l'hamiltonien et vérifiant d'autre part les relations

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_i} = \frac{dx_i}{dt} \quad i = 0, 1, 2, \dots, q$$

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x_i} = \sum_{j=0}^q \frac{\delta f_j}{\delta x_i} p_j \quad i = 1, 2, \dots, q$$

soit d'après la relation 8

$$\frac{\delta H}{\delta x_i} = - \frac{dp_i}{dt} \quad i = 0, 1, 2, \dots, q$$

M Pontryagin ayant montré qu'une condition de minimum pour  $J$  est obtenue pour  $f_0 = +1$ , le problème peut être mis sous la forme suivante dite canonique, en éliminant les variables supplémentaires  $x_0$  et  $p_0$  ; il s'agit dans ce cas de rechercher la loi de commande  $u(t)$  qui minimise la forme scalaire

$$\dot{x} = f_0(x, u) + p^T x$$

avec

$$x = \frac{\delta H}{\delta p}$$

$$-p = \frac{\delta H}{\delta x}$$

10

Ces 2 q équations nécessitent la connaissance des 2 q conditions aux limites suivantes : [Athans section 6-7]

$$x(t_0) = x_0$$

$$p(t_f) = \left[ \frac{\delta h(x(t), t)}{\delta x} \right]_{t = t_f}$$

11

b) application au problème de régulateur d'état continu défini au chapitre 2

Il vient :

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) = A(t) x(t) + B(t) u(t)$$

$$J_{1f} = [h(x(t), t)]_{t=t_f} = 1/2 [x(t)^T S x(t)]_{t=t_f}$$

$$J_{1c} = \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt = 1/2 \int_{t_0}^{t_f} (x(t)^T Q(t) x(t) + u(t)^T R(t) u(t)) dt$$

avec les notations du chapitre 2

La forme canonique s'écrit alors :

$$\mathcal{H} = 1/2 (x^T Q x + u^T R u) + p^T (Ax + Bu) \quad 12$$

$$\overset{\circ}{x} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p} = Ax + Bu \quad 13$$

$$\overset{\circ}{p} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta x} = -Qx - A^T p$$

D'où les conditions aux limites :

$$x(t_0) = x_0$$

$$\begin{aligned} p(t_f) &= \left[ \frac{\delta}{\delta x} (h(x(t), t)) \right]_{t=t_f} = \left[ \frac{\delta}{\delta x} x(t)^T S x(t) \right]_{t=t_f} \\ &= S x(t_f) \end{aligned} \quad 14$$

Un extremum de l'hamiltonien est obtenu par simple dérivation :

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u} = 0 \quad \text{soit} \quad R u + B^T p = 0 \quad 15$$

Cet extremum est bien un minimum puisque  $\frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta^2 u}$  est une matrice définie positive, en effet

$$\frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta^2 u} = \frac{\delta}{\delta u} (R u + B^T p) = R.$$

En éliminant u des équations 13 et 15 il vient :

$$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{x} \\ x \\ \overset{\circ}{p} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B R^{-1} B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \quad 16$$

L'étude de la matrice de transitions du système d'ordre 2q décrit par la relation 16 montre que le vecteur d'état x(t) et le vecteur adjoint



$p(t)$  sont reliés par une équation linéaire de la forme

$$p(t) = K(t) x(t) \quad 17$$

où  $K(t)$  est une matrice d'ordre  $q$ , non stationnaire et symétrique qui vérifie d'après 14

$$K(t_f) = S$$

La loi de commande optimale  $u(t)$  s'exprime alors comme une fonction linéaire de l'état du système soit :

$$\begin{aligned} u(t) &= - R^{-1} B(t) p(t) = - R^{-1} B(t) K(t) x(t) \\ &= G(t) x(t) \end{aligned} \quad 18$$

Annexe 2 - 3

Résolution du problème de régulateur d'état discret.

Nous présentons les calculs relatifs au problème discret défini à partir d'une discrétisation par intégration. La résolution du problème discret obtenu par transformation homographique s'effectue de manière analogue.

Il s'agit de rechercher la séquence de commande  $u_0 \dots u_k \dots u_{f-1}$  minimisant la forme scalaire

$$J = (1/2) [x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k] + \psi_{k+1}^T x_{k+1}$$

Nous supposons que la séquence  $\psi_0 \dots \psi_k \dots \psi_{f-1}$  satisfait la relation

$$\psi_k = \left( \frac{\delta H}{\delta x} \right)_{x=x_k}$$

avec les conditions aux limites

$$x_0 = x(0)$$

$$\psi_{k=f} = (1/2) \left[ \frac{\delta}{\delta x} (x_k^T S x_k) \right]_{k=f} = S x_f$$

Il vient, compte-tenu de l'équation d'état :

$$\dot{J} = (1/2) [x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k] + \psi_{k+1}^T [M x_k + F u_k]$$

le maximum de  $J$  implique la stationnarité de l'hamiltonien

$$\frac{\delta H}{\delta u_k} = 0 \quad k = 0, 1, \dots, f-1 \quad \text{soit}$$

$$R u_k + F^T \psi_{k+1} = 0$$

et

$$\psi_k = \left( \frac{\delta H}{\delta x} \right)_{x=x_k} = Q x_k + M^T \psi_{k+1}$$

$$x_{k+1} = \frac{\delta H}{\delta \psi_{k+1}} = M x_k + F u_k$$

le système à résoudre est alors défini par les équations canoniques suivantes

$$x_{k+1} = M x_k - F R^{-1} F^T \psi_{k+1}$$

$$\psi_k = Q x_k + M^T \psi_{k+1}$$

avec les conditions aux limites :

$$x_0 = x(0)$$

$$\psi_f = S x_f$$

2

Comme dans le problème de définition optimal continu, le vecteur adjoint et le vecteur d'état sont reliés par une équation de la forme (3)

$$\psi_k = K_k x_k$$

3

$K_k$  est une matrice fonctionnelle d'ordre  $q$  à éléments non constants. La matrice  $K_k$  est symétrique définie non négative pour  $k = 0, \dots, f$

Éliminons  $\psi_k$  dans les relations 1 et 3 il vient :

$$[I + F R^{-1} F^T K_{k+1}] x_{k+1} = M x_k$$

$$(K_k - Q) x_k = M^T K_{k+1} x_{k+1}$$

Soit en écrivant des relations homogènes en  $k+1$  et  $k$ .

$$x_{k+1} = M x_k - F R^{-1} F^T (M^T)^{-1} (K_k - Q) x_k$$

$$x_{k+1} = [M - F R^{-1} F^T (M^T)^{-1} (K_k - Q)] x_k$$

4

$$\text{avec } x_0 = x(0)$$

Dans ces conditions,  $K_k$  est défini par la récurrence 5

$$K_k = Q + M^T K_{k+1} [I + F R^{-1} F^T K_{k+1}]^{-1} M$$

5

$$K_f = S$$

et

$$u_k = - R^{-1} F^T (M^T)^{-1} (K_k - Q) x_k$$

6

Annexe 2 - 4

Détermination de la valeur de la fonctionnelle discrète  $J_h$  sur le trajet optimal.

La fonctionnelle  $J_h$  est définie par  $J_{hf} + J_{hc}$

$$J_{hf} = (1/2) \left[ z_k^T S z_k \right]_{k=f}^{k=f}$$

$$J_{hc} = (1/2) \sum_{k=0}^f ((z_{k+1} + z_k)/2)^T Q(k) ((z_{k+1} + z_k)/2) + u_k^T R(k) u_k$$

avec les notations du § 2-3-2 du chapitre 2.

Utilisons les notations du § 2-4 du chapitre 2.

$$z^X = (z_{k+1} + z_k)/2 \quad \Delta z = z_{k+1} - z_k$$

il vient :

$$J_h = 1/2 \left[ z_k^T S z_k \right]_{k=f}^{k=f} + (1/2) \sum_{k=0}^{k=f} z^X{}^T Q z^X + u_k^T R u_k$$

Afin de déterminer une valeur simple de la fonctionnelle discrète sur le trajet optimal nous proposons tout d'abord d'établir la relation suivante :

$$u_k^T R u_k + z^X{}^T Q z^X + \Delta(z^T K z) = 0 \tag{2}$$

a) démonstration de la relation 2

Exprimons les relations définissant la loi de commande optimale avec les notations  $z^X$  et  $\Delta z$ . Soit d'après le § 2-4 du chapitre 2

$$u_k = -R^{-1} B^T K^X z^X - R^{-1} B^T \Delta K \Delta z / 4 \tag{3}$$

$$\Delta K + A^T K^X + K^X A - K^X B R^{-1} B^T K^X + Q + \frac{\Delta z^T \Delta K \Delta z}{4 z^X{}^T z^X} + \left( \frac{\Delta K \Delta z}{4 z^X} \right)^T B R^{-1} B^T \left( \frac{\Delta K \Delta z}{4 z^X} \right) = 0 \tag{4}$$

$$\Delta z = (A - B R^{-1} B^T K^X) z^X - B R^{-1} B^T \Delta K \Delta z / 4 \tag{5}$$

multiplions la relation 4 par  $z^{\bar{X}\top}$  à gauche et  $z^X$  à droite ; il vient

$$z^{\bar{X}\top} \Delta K z^X + z^{\bar{X}\top} A^T K^X z^X + z^{\bar{X}\top} K^X A z^X - z^{\bar{X}\top} K^X B R^{-1} B^T K^X z^X + z^{\bar{X}\top} Q z^X + \frac{\Delta z^T \Delta K \Delta z}{4} + \frac{\Delta K^T \Delta z^T B R^{-1} B^T \Delta K \Delta z}{16} = 0$$

si l'on met en évidence les termes du premier ordre  $\Delta z$  et  $\Delta z^T$  il vient :

$$z^{\bar{X}\top} \Delta K z^X + \Delta z^T K^X z^X + (\Delta K^T \Delta z^T)^T B R^{-1} B^T K^X z^X / 4 + z^{\bar{X}\top} K^X \Delta z + z^{\bar{X}\top} K^X B R^{-1} B^T K^X z^X + z^{\bar{X}\top} K^X B R^{-1} B^T \frac{\Delta K \Delta z}{4} + z^{\bar{X}\top} Q z^X + \frac{\Delta z^T \Delta K \Delta z}{4} + \frac{(\Delta K \Delta z)^T B R^{-1} B^T \Delta K \Delta z}{16} = 0 \quad 6$$

compte-tenu de la relation (3) il est possible d'exprimer  $u_k^T R u_k$  sous la forme :

$$u_k^T R u_k = (z^{\bar{X}\top} K^X B R^{-1} + \frac{(\Delta K \Delta z)^T B R^{-1}}{4}) R (R^{-1} B^T K^X z^X + \frac{R^{-1} B^T \Delta K \Delta z}{4}) = z^{\bar{X}\top} K^X B R^{-1} B^T K^X z^X + \frac{(\Delta K \Delta z)^T B R^{-1} B^T (\Delta K \Delta z)}{4} + z^{\bar{X}\top} K^X B R^{-1} B^T \frac{\Delta K \Delta z}{4} + \frac{(\Delta K \Delta z)^T B R^{-1} B^T K^X z^X}{4} \quad 7$$

A partir des relations 6 et 7 nous obtenons :

$$z^{\bar{X}\top} \Delta K z^X + \Delta z^T K^X z^X + z^{\bar{X}\top} K^X \Delta z + \frac{\Delta z^T \Delta K \Delta z}{4} + u_k^T R u_k + z^{\bar{X}\top} Q z^X = 0 \quad 8$$

Montrons maintenant que

$$\Delta(z^T K z) = z^{\bar{X}\top} \Delta K z^X + \Delta z^T K^X z^X + z^{\bar{X}\top} K^X \Delta z + \Delta z^T \Delta K \Delta z / 4$$

en effet, compte-tenu des notations utilisées il vient :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{z_{k+1}^T + z_k^T}{2}\right)(K_{k+1} - K_k) z^X + \left(\frac{z_{k+1}^T - z_k^T}{2}\right)(K_{k+1} + K_k) z^X \\ & + \left(\frac{z_{k+1}^T + z_k^T}{4}\right)(K_{k+1} + K_k) \Delta z + \left(\frac{z_{k+1}^T - z_k^T}{4}\right)(K_{k+1} - K_k) \Delta z \end{aligned}$$

soit

$$z_{k+1}^T K_{k+1} z^X - z_k^T K_k z^X + z_{k+1}^T \frac{K_{k+1}}{2} \Delta z + \frac{z_k^T K_k s_z}{2}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$z_{k+1}^T K_{k+1} z_{k+1} - z_k^T K_k z_k \text{ soit } \Delta(z^T K z)$$

La relation 8 devient dans ces conditions :

$$\underline{\Delta(z^T K z) + u_k^T R u_k + z^X Q z^X = 0}$$

9

b) calcul de la valeur de la fonctionnelle sur le trajet optimal

La relation 9 nous permet d'écrire

$$\sum_{k=0}^{k=f} z^X Q z^X + u_k^T R u_k = - \sum_{k=0}^{k=f} \Delta(z^T K z)$$

or à l'instant final  $K_f = S$

il vient donc

$$\begin{aligned} J_h &= (1/2) \left[ z_k^T S z_k \right]_{k=f} + 1/2 \sum_{k=0}^{k=f} (z^X Q z^X + u_k^T R u_k) \\ &= 1/2 (z_f^T S z_f) - 1/2 z_f^T K_f z_f + 1/2 z_0^T K_0 z_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{J_h = (1/2) z_0^T K_0 z_0}$$

De manière générale pour une solution optimale partant de  $z_k$  à la séquence  $k$  la valeur minimale de la fonctionnelle  $J_h$  s'écrit

$$J_{h \min}(z_k, k) = (1/2) z_k^T K_k z_k$$

Annexe 3 - 1

Calcul de l'erreur pas par les algorithmes :

- Algorithme obtenu par la transformée homographique

- Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2.

1) Algorithme obtenu par la transformée homographique

L'erreur par pas est définie par la relation :

$$\epsilon_{n+1} = h \quad |\psi(z_n, t_n, h) - \phi(z_n, t_n, h)|$$

Les fonctions  $\psi(z_n, t_n, h)$  et  $\phi(z_n, t_n, h)$  sont définies ci-dessous :

$$\bar{x}(t_{n+1}) = \bar{x}(t_n) + h \psi(t_n, z_n, h) \quad \bar{x}(t_n) = z_n$$

avec

$$\phi(z_n, t_n, h) = A(t_n + h/2) \left[ I - \frac{h}{2} A(t_n + h/2) \right]^{-1}$$

Les notations sont celles du chapitre 3

1-1 Evolution de  $\psi(t_n, z_n, h)$

Exprimons la valeur de  $\bar{x}(t_{n+1})$  au voisinage de  $t_n$

$$\begin{aligned} \bar{x}(t_{n+1}) = \bar{x}(t_n) + h \overset{\circ}{x}(t_n) + \frac{h^2}{2!} \overset{\circ\circ}{x}(t_n) + \frac{h^3}{3!} \overset{\circ\circ\circ}{x}(t_n) \\ + \frac{h^4}{4!} \overset{\circ\circ\circ\circ}{x}(t_n) + \frac{h^5}{5!} \overset{\circ\circ\circ\circ\circ}{x}(t_n + \Theta h) \end{aligned}$$

avec les notations :

$$\overset{\circ}{x}(t_n) = \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t_n} \dots\dots$$

$$\overset{\circ\circ}{x}(t_n) = A(t_n) x(t_n)$$



Le vecteur  $x(t)$  est supposé dérivable jusqu'à l'ordre  $n$ .

il vient en notant  $\frac{\delta A(t)}{\delta t}$  la matrice  $\alpha_{ij}$  telle que

$$\alpha_{ij} = \frac{\delta a_{ij}}{\delta t} \quad \forall i, j$$

$${}^{\circ\circ}x(t_n) = \left| \frac{d}{dt}(A(t) x(t)) \right|_{t=t_n}$$

$$= \left| \frac{\delta A(t)}{\delta t} x(t) + A(t) A(t) x(t) \right|_{t=t_n}$$

$$= \left| \left( \frac{\delta A(t)}{\delta t} + A^2(t) \right) x(t) \right|_{t=t_n}$$

de même à l'ordre trois :

$${}^{\circ\circ\circ}x(t_n) = \left| \left( \frac{\delta^2 A(t)}{\delta t^2} + 3 A(t) \frac{\delta A(t)}{\delta t} + A^3(t) \right) x(t) \right|_{t=t_n}$$

en notant  $A(t_n) = A$  et  $\bar{x}(t_n) = z_n$

il vient

$$x(t_{n+1}) = z_n + h \left[ A + \frac{h}{2} \left( \frac{\delta A}{\delta t} + A^2 \right) + \frac{h^2}{6} \left( \frac{\delta^2 A}{\delta t^2} + 3 A \frac{\delta A}{\delta t} + A^3 \right) \right] z_n + O(h^4) z_n \quad (1)$$

1-2 Evolution de  $\phi(t_n, z_n, h)$

$$\phi(t_n, z_n, h) = A(t_n + h/2) \left[ I - \frac{h}{2} A(t_n + h/2) \right]^{-1} z_n$$

effectuons une approximation de cette fonction vectorielle. Il est possible d'effectuer un développement limité analogue à celui de la fonction scalaire

$f(x)(1 - xf(x))$  au voisinage de  $x = 0$ .

Il vient en notant  $A(t_n + h/2) = A_1$

$$A(t_n + \frac{h}{2}) \left[ 1 - \frac{h}{2} A(t_n + h/2) \right]^{-1} = A_1 + \frac{h}{2} A_1^2 + \frac{h^2}{4} A_1^3 + \dots + O(h^n)$$

Compte-tenu de l'hypothèse de dérivabilité du vecteur  $x$  à l'ordre  $n$  il est possible d'écrire :

$$A_1 = A(t_n + \frac{h}{2}) = \left[ A(t) + \frac{h}{2} \frac{\delta A(t)}{\delta t} + \frac{h^2}{8} \frac{\delta^2 A(t)}{\delta t^2} \right]_{t=t_n} + O(h^3)$$

en notant  $A(t_n) = A$  il vient

$$\begin{aligned} \phi(t_n, z_n, h) &= \left[ A + \frac{h}{2} \frac{\delta A}{\delta t} + \frac{h^2}{8} \frac{\delta^2 A}{\delta t^2} \right] + \\ &\frac{h}{2} \left[ A + \frac{h}{2} \frac{\delta A}{\delta t} + \frac{h^2}{8} \frac{\delta^2 A}{\delta t^2} \right] \left[ A + \frac{h}{2} \frac{\delta A}{\delta t} + \frac{h^2}{8} \frac{\delta^2 A}{\delta t^2} \right] \\ &+ \frac{h^2}{4} \left[ A + \frac{h}{2} \frac{\delta A}{\delta t} + \dots \right] \left[ A + \frac{h}{2} \frac{\delta A}{\delta t} + \dots \right] \left[ A + \frac{h}{2} \frac{\delta A}{\delta t} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\phi(t_n, z_n, h) = \left[ A + \frac{h}{2} \left( \frac{\delta A}{\delta t} + A^2 \right) + \frac{h^2}{8} \left( \frac{\delta^2 A}{\delta t^2} + 4 A \frac{\delta A}{\delta t} + 2 A^3 \right) \right] z_n + z_n O(h^3)$$

L'erreur par pas s'exprime donc sous la forme suivante:

$$\epsilon_{n+1} = h [\psi(t_n, z_n, h) - \phi(t_n, z_n, h)]$$

$$\boxed{\epsilon_{n+1} = \frac{h^3}{24} \left( \frac{\delta^2 A}{\delta t^2} - 2 A^3 \right) z_n + z_n O(h^4)}$$

Remarque

Il est à noter que l'introduction d'un nombre  $p$  de points intermédiaires dans l'utilisation de l'algorithme obtenu par transformation homographique revient à diviser l'erreur par pas par un facteur  $p^2$ , ainsi en notant  $\epsilon_{n+1}^1$  l'erreur par pas pour un pas  $h$ ,  $\epsilon_{n+1}^2$  l'erreur par pas avec 1 point intermédiaire et  $\epsilon_{n+1}^3$

l'erreur par pas avec 2 points intermédiaires il vient

$$\epsilon_{n+1}^2 = \frac{\epsilon_{n+1}^1}{4} = \frac{h^3}{96} \left( \frac{\delta^2 A}{\delta t^2} - 2 A^3 \right) z_n + z_n O(h^4)$$

et  $\epsilon_{n+1}^3 = \epsilon_{n+1}^1/9$

## 2) Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2

L'erreur par pas est donnée par la même relation

$$\epsilon_{n+1} = h[\psi(t_n, z_n, h) - \phi(t_n, z_n, h)]$$

L'évolution de  $\psi(t_n, z_n, h)$  est identique à celle conduite en 1. Cependant  $h \phi(t_n, z_n, h)$  est définie par la relation suivante

$$h \phi(t_n, z_n, h) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \text{ avec :}$$

$$\text{en notant } A = A(t_n)$$

$$k_1 = h A(t_n) z_n$$

$$A_2 = A(t_n + h)$$

$$k_2 = h A(t_n + h) (z_n + k_1)$$

$$= h A_2 z_n + h^2 A_2 A z_n$$

il vient

$$h \phi(t_n, z_n, h) = \frac{h}{2} [(A + A_2) + h A_2 A] z_n$$

il est possible d'écrire de la même manière qu'au § 1 de cette annexe

$$A_2 = A(t_n + h) = A + h \frac{\delta A}{\delta t} + \frac{h^2}{2} \frac{\delta^2 A}{\delta t^2} + O(h^3)$$

il vient alors :

$$h \phi(t_n, z_n, h) = h \left[ A + \frac{h}{2} (A^2 + \frac{\delta A}{\delta t}) + \frac{h^2}{4} \left( \frac{\delta^2 A}{\delta t^2} + 2 A \frac{\delta A}{\delta t} \right) \right] z_n + z_n O(h^4)$$

et l'erreur par pas  $\varepsilon_{n+1}^{\text{RK}_2}$  s'exprime sous la forme :

$$\varepsilon_{n+1}^{\text{RK}_2} = -\frac{h^3}{12} \left[ \frac{\delta^2 A}{\delta t^2} - 2 A^3 \right] z_n + o(h^4)$$

Annexe 3 - 2

Détermination de la solution exacte du système d'équations différentielles de Riccati retenue en exemple numérique.

Le système d'équations différentielles de Riccati, étudié en exemple, correspond à la relation matricielle définissant la matrice  $K(t)$  de Kalman du problème de commande optimale d'un moteur envisagé dans le chapitre 4.

Les équations canoniques du système étudié

$$\begin{bmatrix} \dot{0} \\ \dot{x} \\ \dot{0} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & - B R^{-1} B^T \\ - Q & - A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix}$$

constituent un système différentiel linéaire du premier ordre de 4 équations à 4 inconnues.

Si  $\phi(t, t_0)$  désigne la matrice de transition de ce système notée

$$\phi(t, t_0) = \{ \phi_{ij}(t, t_0) \}$$

$$i, j=1, 2$$

la matrice de gain de Kalman  $K(t)$  prend la forme suivante :

$$K(t) = [\phi_{22}(t_f, t) - S \phi_{12}(t_f, t)]^{-1} [S \phi_{11}(t_f, t) - \phi_{21}(t_f, t)]$$

cette matrice de transition peut être calculée par utilisation de la transformée de Laplace comme il est indiqué au §4-2-2 du chapitre 4.

Il est alors possible de déterminer les expressions littérales des variables  $x^1, x, x^2$  du système d'équations différentielles de Riccati envisagé dans l'exemple numérique.

Pour le système d'équations différentielles de Riccati défini par

$$\dot{x}^1 = (x^1)^2 / \lambda \tau + \alpha$$

$$\dot{x}^0 = (x^0) / \tau - x^1 + x^0 x^2 / \lambda \tau^2$$

$$\dot{x}^0{}^2 = 2 x^0 x^2 / \tau - 2 x^0 + (x^2)^2 / \lambda \tau^2 + \beta$$

avec  $x^1(t_f) = \gamma$ ,  $x^2(t_f) = \gamma'$

il vient pour  $\alpha = 0$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $\gamma, \gamma'$  quelconques

$$x^1 = (1/\Delta) \gamma (C + a_4 S)$$

$$x^0 = (1/\Delta) [\gamma S + \gamma' (a_4/a_1^2)(C - 1)]$$

$$x^0{}^2 = (1/\Delta) [\gamma ((a_4 - a_5 a_2) / a_1^4)(C - 1) + \gamma' C + a_5 S + \gamma \gamma' a_3 C t + \gamma a_3 a_5 S t]$$

avec

$$a_1 = \sqrt{\frac{\lambda + \beta}{\lambda \tau^2}} \quad a_2 = 1/\tau \quad a_3 = a_2 / (a_1)^2$$

$$a_4 = 1 + a_2 \gamma' \quad a_5 = \beta - \gamma'$$

$$C = \text{ch}(a_1 t) \quad S = (1/a_1) \text{sh}(a_1 t)$$

$$\Delta = [1 - \gamma a_3 (S - t)] [C + a_4 S + | S + (a_4/a_1^2)(C - 1) | \gamma a_3 (C - 1)]$$

Annexe 4 - 1

Critères de comparaison des résultats

Un premier moyen d'estimation de la précision des résultats numériques consiste à comparer les enregistrements graphiques à la solution exacte de référence. Cependant, les courbes seront le plus souvent confondues du fait de la précision du tracé et de l'échelle des valeurs représentées.

Nous proposons donc de définir un certain nombre de grandeurs qui caractérisent les performances globales d'une méthode numérique. Rappelons toutefois que la précision des résultats obtenus dépend, pour une grande partie, du nombre des pas de calcul utilisés.

i) - Définition des grandeurs utilisées pour la comparaison des résultats.

Précisons tout d'abord les notations utilisées - soit  $X A_i$  la valeur donnée par la méthode numérique pour un pas de calcul n° i et  $X_i$  la valeur exacte correspondante de la variable X, l'erreur à chaque pas de calcul sera notée

$$\varepsilon_i = X_i - X A_i$$

La moyenne de ces erreurs sur les N pas de calcul donne une première estimation de l'erreur globale sur la variable X soit

$$E(\varepsilon) = \left( \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \right) / N$$

Cette grandeur  $E(\varepsilon)$  ne permet cependant pas de juger convenablement des résultats d'une méthode car les erreurs de signes contraires se compensent et une méthode numérique oscillante peut conduire à une erreur moyenne

faible.

Une meilleure estimation de l'erreur moyenne est obtenue par la moyenne arithmétique des valeurs absolues de l'erreur commise à chaque pas soit

$$E(|\varepsilon|) = \left( \sum_{i=1}^N |\varepsilon_i| \right) / N$$

Ces 2 grandeurs ne nous renseignent cependant pas sur la régularité des erreurs commises. Dans ce sens il est intéressant de déterminer la moyenne des écarts relatifs à la moyenne soit l'écart type de la distribution d'erreur obtenue sur le nombre de pas de calcul. Il vient :

$$\sigma(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\varepsilon_i - E(\varepsilon))^2}$$

Les trois grandeurs ci-dessus introduites permettent de caractériser de façon assez précise les erreurs commises sur chaque variable X estimée par les méthodes numériques présentées.

Il est toutefois nécessaire de pouvoir juger de la précision globale obtenue sur l'ensemble des variables caractérisant le système soit les variables  $X_1, X_2, X_3$  auxquelles correspondent les erreurs au pas  $i$

$$\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}, \varepsilon_{3i}$$

Un premier renseignement global sur la qualité de la méthode est donné par l'erreur moyenne globale sur les trois variables soit pour une méthode notée A

$$E(A) = [E(|\varepsilon_1|) + E(|\varepsilon_2|) + E(|\varepsilon_3|)] / 3$$

Une autre grandeur fournit des résultats plus intéressants du fait de son interprétation géométrique immédiate. En effet envisageons les 3 variables



X1, X2, X3 comme coordonnées d'un point représentatif du système dans un espace euclidien, une estimation de la mesure de l'écart entre ce point calculé par la méthode numérique sera donné pour le pas de calcul i par

$$\mathcal{M}_i = \sqrt{(\varepsilon_{1,i})^2 + (\varepsilon_{2,i})^2 + (\varepsilon_{3,i})^2}$$

La moyenne arithmétique de la mesure de ce vecteur écart pour l'ensemble des points calculés (nombre de pas de calcul) constitue une bonne estimation de la qualité de la méthode numérique utilisée. Il vient pour une méthode notée A

$$\mathcal{M}(A) = \left( \sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i \right) / N$$

N : nombre de points calculés ou nombre de pas de calcul.

## ii) Méthode de comparaison des résultats

Pour évaluer les résultats données par une méthode numérique nous disposons

- d'un critère général de comparaison

$$\mathcal{M}(A) \text{ et } E(A)$$

- d'un ensemble de grandeurs permettant une étude plus fine de la répartition de l'erreur sur chaque variable X soit :

$$E(\varepsilon X)$$

$$E(|\varepsilon X|)$$

$$\sigma(\varepsilon X)$$

Les résultats obtenus par les diverses méthodes sont donc présentés de manière synthétique au moyen de tableau (cf figure A 4-1).

Cette structure est utilisée de différentes manières suivant le système étudié :

- résolution d'un système d'équations différentielles de Riccati.

Les 3 variables utilisées sont les éléments  $k^1$ ,  $k$ ,  $k^2$  de la matrice  $K$  solution de l'équation différentielle matricielle de Riccati.

méthode				
résultats				
variable X1	$E(\epsilon X1)$			
	$E(\epsilon  X1 )$			
	$\sigma(\epsilon X1)$			
variable X2	$E(\epsilon X2)$			
	$E(\epsilon  X2 )$			
	$\sigma(\epsilon X2)$			
variable X3	$E(\epsilon X3)$			
	$E(\epsilon  X2 )$			
	$\sigma(\epsilon X3)$			
$E = \frac{E( \epsilon X1 ) + E( \epsilon X2 ) + E( \epsilon X3 )}{3}$				
$\bar{m}_i = \left( \sum_{i=1}^N m_i^i \right) / N$				

Figure A4-1

- Résolution du problème du régulateur d'état.

Les variables d'état  $(y, \overset{\circ}{y})$  et la commande  $u$  caractérisent le système. Compte-tenu de l'interprétation évidente dans l'espace d'état nous proposons de calculer deux grandeurs

- $\mathcal{N}_l(y, \overset{\circ}{y})$  traduisant la norme de l'écart entre deux points du plan de phase
- $\mathcal{N}_l(y, \overset{\circ}{y}, u)$  permettant d'avoir une estimation globale de la précision de la méthode employée.

D'autres grandeurs peuvent être utilisées pour caractériser les résultats du système par exemple les valeurs de la fonctionnelle de coût.

iii) présentation du sous programme permettant de calculer les grandeurs précédentes.

#### - Utilisation

Ce sous programme est appelé par le programme principal après exécution des calculs complets relatifs à l'une ou l'autre méthode.

Il lit en fichier les valeurs exactes des variables ainsi que les valeurs des paramètres du système choisi pour le calcul.

Il lit ensuite les valeurs approchées des mêmes variables calculées par la méthode choisie au programme principal puis effectue les calculs et l'impression des résultats.

#### - Fichiers utilisés

Ce sous programme travaille sur 3 fichiers :

- |           |  |
|-----------|--|
| fichier 1 | solution de référence  |
| fichier 2 | solution approchée par méthode précisée en programme principal |
| fichier 3 | valeur des paramètres choisis                                  |

Les résultats en fichier 1, 2 sont en forme matricielle facilement adressable.

Annexe 4 - 2

Valeur des blocs  $\phi_{11}, \phi_{12}, \phi_{21}, \phi_{22}$ , de la matrice de transition caractérisant les équations canoniques du problème optimal étudié en exemple.

Les calculs sont différents suivant la valeur des paramètres  $\alpha, \beta, \lambda, \tau$ .

Nous étudierons trois cas :

$$\alpha = 0 \quad \beta, \lambda, \tau \text{ quelconques}$$

$$\alpha \neq 0 \quad \alpha < \frac{\beta}{\tau^2}$$

$$\alpha \neq 0 \quad \alpha > \frac{\beta}{\tau^2}$$

Les éléments de la matrice de transition sont présentés par bloc selon les notations suivantes :

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

$$\phi_{11} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(1,1) & \phi_{11}(1,2) \\ \phi_{11}(2,1) & \phi_{11}(2,2) \end{bmatrix}$$

Les variables intermédiaires nécessaires à l'expression des éléments sont données pour chaque cas

1)  $\alpha = 0$   $\beta, \lambda, \tau$  quelconques

$$a_1^2 = \frac{\lambda + \beta}{\lambda} \quad a_2 = \frac{1}{\lambda} \quad a_3 = a_2 / a_1^2$$

$$S = (1/a_1) \operatorname{sh} a_1 t \quad C = \operatorname{ch} a_1 t$$

$$\phi_{11}(1,1) = 1$$

$$\phi_{11}(1,2) = S - (1/a_1^2)(C-1)$$

$$\phi_{11}(2,1) = 0$$

$$\phi_{11}(2,2) = C-S$$

$$\phi_{12}(1,1) = a_3 S - a_3 t$$

$$\phi_{12}(1,2) = -a_3(C-1)$$

$$\phi_{12}(2,1) = a_3(C-1)$$

$$\phi_{12}(2,2) = -a_2 S$$

$$\phi_{21}(1,1) = \phi_{21}(1,2) = \phi_{21}(2,1) = 0$$

$$\phi_{21}(2,2) = -\beta S$$

$$\phi_{22}(1,1) = 1$$

$$\phi_{22}(1,2) = 0$$

$$\phi_{22}(2,1) = - [S + (1/a_1^2)(C-1)]$$

$$\phi_{22}(2,2) = C + S$$

2ème cas  $\alpha \neq 0 \quad \alpha < \frac{\beta}{T^2}$

$$a_1^2 = \frac{\lambda + \beta}{\lambda} \quad a_2 = 1/\lambda$$

$$x_1^2 = \left( \frac{a_1^2}{2} + \sqrt{\frac{a_1^4}{4} - 4 a_2 \alpha} \right) / 2$$

$$x_2^2 = \left( \frac{a_1^2}{2} - \sqrt{\frac{a_1^4}{4} - 4 a_2 \alpha} \right) / 2$$

$$C_1 = \text{ch } x_1 t$$

$$S_1 = (1/x_1) \text{ sh } x_1 t$$

$$C_2 = \text{ch } x_2 t$$

$$S_2 = (1/x_2) \text{ sh } x_2 t$$

$$b_1 = 1/(x_2^2 - x_1^2)$$

$$b_2 = -x_1^2/(x_2^2 - x_1^2)$$

$$b_3 = (a_1^2 - x_1^2)/(x_2^2 - x_1^2)$$

$$b_4 = \alpha a_2/(x_2^2 - x_1^2)$$

$$b_5 = (-\alpha + \beta x_1^2)/(x_2^2 - x_1^2)$$

$$\phi_{11}(1,1) = b_3(C_1 - C_2) + C_2$$

$$\phi_{11}(1,2) = b_1(C_1 - C_2) + b_2(S_1 - S_2) + S_2$$

$$\phi_{11}(2,1) = b_4(S_1 - S_2)$$

$$\phi_{11}(2,2) = b_2(C_1 - S_1) + (1 - b_2)(C_2 - S_2)$$

$$\phi_{12}(1,1) = -a_2 b_1(S_1 - S_2)$$

$$\phi_{12}(1,2) = b_1 a_2(C_1 - C_2)$$

$$\phi_{12}(2,1) = -b_1 a_2(C_1 - C_2)$$

$$\phi_{12}(2,2) = -b_2 a_2(S_1 - S_2) - a_2 S_2$$

$$\phi_{21}(1,1) = -\alpha [b_3(s_1 - s_2) + s_2]$$

$$\phi_{21}(1,2) = \alpha b_1 [(c_1 - s_1) - (c_2 - s_2)]$$

$$\phi_{21}(2,1) = -\alpha b_1 [(c_1 + s_1) - (c_2 + s_2)]$$

$$\phi_{21}(2,2) = b_5(s_1 - s_2) - \beta s_2$$

$$\phi_{22}(1,1) = b_3(c_1 - c_2) + c_2$$

$$\phi_{22}(1,2) = b_4(s_1 - s_2)$$

$$\phi_{22}(2,1) = b_1(c_1 - c_2) - b_2(s_1 - s_2) - s_2$$

$$\phi_{22}(2,2) = b_2 [(c_1 + s_1) - (c_2 + s_2)] + (c_2 + s_2)$$

3ème cas  $\alpha \neq 0 \quad \alpha > \frac{\beta}{\tau_2} \quad \tau = 1$

$$a_1^2 = \frac{\lambda + \beta}{2} \quad a_2^2 = \frac{\alpha}{\lambda} \quad a_3 = \frac{1}{\lambda} \quad a_4 = (a^2)^{1/2}$$

$$a = (2(a_1^2 + a_2^2))^{1/2}$$

$$b_1 = \left( \frac{2a_2}{a_2 - a_1} \right)^{1/2}$$

$$s_1 = \sin(t/b_1 - \theta) \quad s_2 = \sin(t/b_1 a_4)$$

$$S = \text{sh}(at/2) \quad C = \text{ch}(at/2)$$

$$\theta = \text{Arctg}(2/a b_1)$$

$$\phi_{11}(1,1) = b_1 [s_1 C - a_4 ((2 a_1^2 + a_2)/a) s_2 S]$$

$$\phi_{11}(1,2) = (b_1/a) S [s_1 - a_4 s_2]$$

$$\phi_{11}(2,1) = (a_2 b_1/a) [s_1 S - a a_4 s_2 C]$$

$$\phi_{11}(2,2) = b_1 a_4 s_2 e^{\frac{at}{2}} - b_1 S [((a+1)/a s_1 - (a_2 a_4/a) s_2)]$$

$$\phi_{12}(1,1) = (-a_3 b_1/a_2 a) |s_1 S - a a_4 s_2 C|$$

$$\phi_{12}(1,2) = (-a_3 b_1 a_4/a) s_2 S$$

$$\phi_{12}(2,1) = -\phi_{12}(1,2)$$

$$\phi_{12}(2,2) = (-a_3 b_1/a) s_1 S$$

$$\phi_{21}(1,1) = (-\alpha b_1) |((a_2 + 2 a_1^2) s_1 S - (2 a_1^2 a_4/b) s_2 C|$$

$$\phi_{21}(1,2) = (-\alpha b_1) |(1/ba) s_1 S + a_4 s_2 (S/a - C/a_2)|$$

$$\phi_{21}(2,1) = (-\alpha b_1) |(1/ba) s_1 S - a_4 s_2 (S/a + C/a_2)|$$

$$\phi_{21}(2,2) = (-(\alpha + a_2 \beta)/a a_2) b_1 s_1 S + (\alpha b_1 a_4/a_2) s_2 C$$

$$\phi_{22}(1,1) = b_1 |s_1 C - a_4 ((2 a_1^2 + a_2)/a) s_2 S|$$

$$\phi_{22}(1,2) = (-a_2 b_1/a) |s_1 S - a_4 a s_2 C|$$

$$\phi_{22}(2,1) = (-b_1/a) S |s_1 + a_4 s_2|$$

$$\phi_{22}(2,2) = b_1 a_4 e^{\frac{at}{2}} s_2 - (b_1/a) S |(a-1) s_1 + a_2 a_4 s_2|$$