

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR INGENIEUR

par

Joel MOYAUX

Ingénieur I.D.N.

SUR LA DETERMINATION DE LA COMMANDE DISCRETE DE PROCESSUS MULTIVARIABLES



Soutenue le 8 Novembre 1976 devant le Jury d'Examen :

M. C. MAIZIERES

Président

M. P. BORNE

Rapporteur

M. F. LAURENT

Examineur

M. J.C. GENTINA

"

M. G. MANESSE

"

M. Y. CHASSIN

Invité

A Monique

A François et Dominique

A mes Parents et Amis

Avant - Propos

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire de Systématique de l'Université des Sciences et des Techniques de Lille I.

Nous sommes particulièrement sensible à l'honneur que Monsieur le Professeur Maizières nous a fait en acceptant de présider notre Jury de Thèse. Qu'il trouve ici l'expression de notre vive reconnaissance.

Nous voulons exprimer notre profonde gratitude à Monsieur Laurent, Maître de Conférences à l'Université de Lille I et Directeur du Laboratoire de Systématique qui a bien voulu nous accueillir au sein de son équipe. Nous lui sommes reconnaissant pour l'enseignement qu'il nous a dispensé et l'intérêt qu'il nous a porté au cours de nos recherches.

Nous sommes très redevable envers Monsieur Pierre Borne, Maître-Assistant à Lille I et chargé de cours à l'Institut Industriel du Nord pour nous avoir guidé et conseillé tout au long de l'élaboration de cette thèse. Nous avons eu la chance de pouvoir dépasser avec lui les simples relations de travail et partager une excellente amitié. Très conscient de ce que nous lui devons, nous le remercions bien sincèrement.

Nous sommes particulièrement heureux que Monsieur Manesse, Maître-Assistant à Lille I et chargé de cours au CNAM ait bien voulu participer à notre Jury de Thèse et lui exprimons notre profonde reconnaissance.

Nous voulons exprimer toute notre sympathie à Monsieur Jean Claude Gentina, Maître-Assistant à Lille I et chargé de cours à l'Institut Industriel du Nord qui a toujours montré l'intérêt qu'il portait à nos travaux. Nous le remercions d'avoir accepté de participer à notre Jury.

Nous remercions également Monsieur Chassin, Ingénieur d'Etudes de la Société Kestron qui a bien voulu juger notre travail et faire partie de notre Jury de Thèse.

Nous tenons maintenant à exprimer notre amitié à chacun des membres de notre équipe de recherche . Nous voudrions en particulier associer à ce travail MM. François Cléret et Dominique Haug avec qui nous avons mené conjointement nos recherches et à qui nous témoignons notre plus grande amitié.

A chacun nous adressons nos remerciements les plus vifs.

INTRODUCTION GENERALE

L'étude des équations de récurrences prend une importance croissante dans le domaine des applications concrètes. En effet, ces équations constituent des modèles mathématiques usuels des systèmes à information discrète (système à données échantillonnées, systèmes commandés par ordinateur, systèmes continus à paramètres périodiques, ...).

Les travaux présentés dans ce mémoire se situent dans le cadre de l'étude des processus linéaires multivariables à données discrètes. Plus précisément, nous proposons pour ces systèmes plusieurs types de commandes dont le choix est lié aux informations disponibles, à l'objectif à atteindre et/ou à la dynamique que l'on désire leur imposer.

Dans le premier chapitre sont d'abord précisées les caractéristiques des processus étudiés ainsi qu'une méthode de détermination des commandes imposant à un processus une évolution donnée, en particulier dans le cas d'une optimisation énergétique. Le cas de non-commandabilité y est également envisagé.

Dans le deuxième chapitre, nous proposons de réaliser de telles commandes, d'abord par réaction d'état à paramètres variables ou non, puis à partir d'un filtre numérique convenablement initialisé. Cette étude permet de plus de résoudre le problème de l'estimation de l'état d'un processus en temps minimum tel que l'a défini Luentberger.

L'objet du troisième chapitre est de réaliser la compensation par réaction de sortie et gain variable dans la chaîne d'action d'un processus dont seule une partie des variables d'état est accessible. La séquence des gains est déterminée en vue d'éliminer le régime transitoire du processus en temps fini.

Le quatrième chapitre généralise les notions développées au début de ce mémoire, en particulier la notion de pseudo-inverse de matrice, en vue de définir la commande optimale au sens de divers critères. En particulier une commande satisfaisant à un compromis précision-énergie y est présentée.

CHAPITRE I

Analyse des commandes des systèmes discrets multivariables linéaires

Introduction

Une première partie de ce chapitre concerne la présentation des systèmes linéaires multivariables susceptibles d'une formulation de type discret.

Cette classe de système comprend en plus des systèmes discrets par nature les systèmes continus discrétisés, la discrétisation résultant d'échantillonnage [1] ou d'une analyse spectrale [2].

L'objet de notre étude étant la commande de tels processus, le développement des techniques numériques nous a conduit à adopter une représentation dans l'espace d'état qui permet un traitement aisé sur ordinateur.

De plus, cette représentation s'avère particulièrement bien adaptée à l'introduction et à l'étude des notions de commandabilité et d'observabilité.

Dans une seconde partie, nous montrons combien l'utilisation des pseudo-inverses de matrices [3] facilite la détermination des commandes imposant à un processus une évolution donnée.

L'étude de ces commandes, en particulier dans le cas d'une optimisation énergétique, fera l'objet d'une dernière partie. La politique à tenir en cas de non commandabilité y est également considérée.

1.1. - Description des systèmes étudiés.

1.1. - Classe des systèmes étudiés : représentation et notations.

L'étude des systèmes discrets multivariables linéaires est fréquemment menée à partir de trois types de représentation, à savoir la représentation par équations récurrentes scalaires, la représentation par fonctions de transfert en z et la représentation d'état.

Les deux premiers types peuvent donner lieu à des contradictions entre les solutions théoriques et les résultats expérimentaux d'un problème de commande. Celles-ci sont dues le plus souvent à la méconnaissance des notions de commandabilité et d'observabilité [4] [5].

Un des avantages du concept d'état [6] est d'expliquer ces contradictions. De plus, cette notion permet de ne pas distinguer formellement les processus monovariables des processus multivariables et constitue un outil bien adapté au traitement numérique des systèmes.

C'est pourquoi nous choisissons de décrire les systèmes discrets multivariables linéaires par une représentation d'état.

Nous nous limitons au cas des systèmes stationnaires, la plupart des résultats que nous proposons s'étendent sans difficulté au cas systèmes non stationnaires. (cf Chapitre II. § 15 et Annexe III).

Les systèmes discrets étudiés évoluent en fonction d'une variable que nous appellerons temps en généralisant le vocabulaire utilisé pour les systèmes échantillonnés.

Les instants successifs sont notés $n, n+1, \dots$

Une description de ces systèmes peut être donnée par une équation du type (II,1) :

$$X_{n+1} = A X_n + B U_n \quad (\text{II},1)$$

dans laquelle X_n représente le vecteur état de dimension finie q et U_n le vecteur de commandes de dimension ℓ .

A et B désignent respectivement la matrice d'évolution et la matrice de commande de dimensions respectives $q \times q$ et $q \times \ell$.

L'équation (1,1) peut être complétée par l'équation des sorties :

$$Y_n = C X_n \quad (II,2)$$

Y_n étant un vecteur de dimension λ' et C la matrice de sortie de dimensions $\lambda' \times q$.

Ces divers vecteurs et matrices ont leurs composantes définies sur le corps des réels ou sur celui des complexes dans certaines représentations particulières.

1.1. - Commandabilité et observabilité [4] [7]

1.2.1. - Généralités

Un mode de représentation du processus dynamique étant choisi, il convient d'examiner la validité du modèle adopté.

Si la connaissance à chaque instant des entrées et sorties du processus ne permet pas de déterminer son état, tout essai d'identification ne peut mettre en évidence qu'une partie du modèle adopté.

La possibilité de reconstitution de l'état à partir des sorties correspond à la notion d'observabilité.

Toutefois l'intérêt de cette notion ne se limite pas à l'étude de la validité d'une représentation. En effet, en cas de non observabilité, la stabilité des sorties ne permet pas de conclure à la stabilité du processus. Ainsi une variable d'état correspondant à une grandeur physique peut être instable et prendre des valeurs dommageables pour le matériel utilisé.

La possibilité d'agir sur cette grandeur depuis l'entrée pallie à cette difficulté. C'est là qu'apparaît la notion de commandabilité (ou gouvernabilité) qui exprime l'existence d'une commande permettant de réaliser un objectif déterminé, par exemple depuis un état initial atteindre un état donné.

Avant de donner les définitions précises de la commandabilité et de l'observabilité, nous allons faire deux remarques :

- d'une part, les propriétés de commandabilité et d'observabilité ne constituent pas toujours des caractéristiques indispensables du modèle d'un processus : il n'est pas toujours nécessaire de commander tous les modes stables d'un processus ou d'observer un mode que l'on sait stable.
- d'autre part, les conditions de commandabilité et d'observabilité interviennent souvent comme des conditions mathématiques nécessaires et suffisantes dans de nombreux problèmes de compensation : fixation arbitraire de modes en boucle fermée [8], existence de l'observateur de Luentberger [9], existence de la solution unique de l'équation de Riccati induisant la stabilité asymptotique au système bouclé [10].

1.2.2. - Définitions [7]

a) Le système $X_{n+1} = A X_n + B u_n$ est dit commandable si, étant donné un instant n quelconque et deux états quelconques X_o et X_d , il existe un instant $n+m$ et une commande $[u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+m-1}]$ transférant le système de l'état X_o à l'instant n à l'état X_d à l'instant $n+m$. Nous pouvons également définir la commandabilité en particulierisant l'instant initial n ou l'instant final $n+m$ (commandabilité en m coups) ou encore les états X_o et X_d (commandabilité de l'état).

En particulier, il est possible de définir la commandabilité à zéro lorsque l'état désiré est l'état nul.

Il est à noter que ces notions ne sont pas équivalentes, même pour les systèmes linéaires.

b) Le système $X_{n+1} = A X_n + B u_n$ de sortie $Y_n = C X_n$ est dit observable si étant donné un instant quelconque n , il existe un instant $n+m$ tel que l'observation des sorties $[Y_n, Y_{n+1}, \dots, Y_{n+m-1}]$ et la connaissance de l'entrée sur l'intervalle $[n, n+m]$ permettent de déterminer l'état initial X_n .

De même, il est possible de définir l'observabilité en m coups ou l'observabilité d'un état.

1.2.3. - Condition de commandabilité et d'observabilité

Rappelons le critère de commandabilité de Kalman [6] [5]

Le système d'équations (II,1) est dit commandable (au sens strict) s'il existe un entier m tel que :

$$\text{rg} [B, AB, \dots, A^{m-1} B] = q \quad (\text{II},3)$$

(où $\text{rg}[M]$ signifie rang de M).

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, m est inférieur ou égal à q .

Le plus petit m tel que la condition (II,3) est vérifiée est appelé indice de commandabilité.

Le critère d'observabilité s'en déduit par dualité. Le système d'équations (II,1) et (II,2) est dit observable s'il existe un entier p tel que :

$$\text{rg} [C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{p-1} C^T] = q \quad (\text{II},4)$$

Le plus petit p est appelé indice d'observabilité.

1.2 - Utilisation des pseudo-inverses de matrices dans l'étude des commandes [11]

La détermination des q commandes transférant un système monovarié d'ordre q de l'état X_0 à l'instant n à un état X_d est un problème simple puisqu'il se réduit à la résolution d'un système de q équations à q inconnues $u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+q-1}$:

$$X_d - A^q X_0 = \begin{bmatrix} A^{q-1} B & \dots & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+q-1} \end{bmatrix} \quad (\text{I2},1)$$

(où A est de dimensions $q \times q$, B de dimensions $q \times 1$).

Toutefois, on peut envisager le cas d'une commande, soit en un nombre de coups inférieur à q - dans ce cas, il n'est généralement plus possible d'atteindre un état X_d mais il est souhaitable d'arriver le plus près possible de X_d - soit en un nombre de coups supérieurs, par exemple pour diminuer l'énergie de commande.

Ce dernier problème peut présenter plusieurs solutions de commande parmi lesquelles il est possible de choisir la "meilleure" séquence de commande au sens d'un critère énergétique.

Ces caractéristiques vont se retrouver à fortiori dans le cas des systèmes multivariables.

Nous sommes donc amenés à considérer des systèmes d'équations linéaires compatibles ou non, surabondantes ou non. La notion d'inverse-généralisé ou pseudo-inverse simplifie considérablement l'étude de ces équations. Elle permet d'exprimer la compatibilité des équations et leurs solutions éventuelles sous un formalisme très simple. Le pseudo-inverse au sens de Moore-Penrose permet en particulier de donner la meilleure solution au sens des moindres carrés.

Nous avons rappelé en annexe I les définitions et quelques propriétés des inverses généralisés. Nous y donnons également une bibliographie concernant ce type de problème.

2.1. - Existence et expression des commandes

2.1.1. - Existence

L'équation (I1,1) permet d'écrire à l'instant $n+m$:

$$X_{n+m} = A^m X_n + \begin{bmatrix} A^{m-1} B & \dots & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+n-1} \end{bmatrix} \quad (I2,2)$$

Notons $\begin{bmatrix} A^{n-1} & B & \dots & B \end{bmatrix} = Cd$ et $\begin{bmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+m-1} \end{bmatrix} = U$, m étant un entier

positif quelconque.

Avec cette écriture, l'équation précédente devient :

$$X_{n+m} = A^m X_n + Cd U \quad (I2,3)$$

La séquence de commande permettant au système de passer de l'état X_0 à l'instant n à l'instant X_d à l'instant $n+m$ nécessite la résolution du système (I2,3).

D'après l'équation (A1,4) où l'on choisit comme pseudo-inverse le pseudo-inverse au sens de Moore-Penrose, la condition de compatibilité s'écrit :

$$Cd Cd^+ \begin{bmatrix} X_d - A^m X_0 \end{bmatrix} = X_d - A^m X_0 \quad (I2,4)$$

La matrice $Cd^+(m, q)$ est le pseudo-inverse de la matrice de commandabilité Cd . $Cd Cd^+$ est une matrice $q \times q$.

La définition que nous avons donnée de la commandabilité en m coups suppose que X_0 et X_d sont deux états quelconques. Il en résulte :

$$Cd Cd^+ = I_0 \quad (I2,5)$$

ce qui est équivalent (cf Annexe 1) à :

$$\text{rg} [Cd] = q \quad (I2,6)$$

Toutefois, la relation (I2,4) donne l'ensemble des états X_d que l'on peut atteindre en m coups à partir de X_0 que le système soit commandable ou non.

Pour que le système soit commandable jusqu'à zéro en m coups (X_0 quelconque, X_d nul), il faut et il suffit que l'on ait :

$$Cd Cd^+ A^m = A^m \quad (I2,7)$$

Dans le cas d'une matrice A singulière, cette condition n'est pas équivalente à $Cd Cd^+ = I$. Ce cas n'est pas sans intérêt : en particulier dans l'étude d'un système bouclé.

2.1.2. - Expression des commandes

Lorsque le système (I2,3) est compatible, l'expression des commandes est d'après (A1,5) :

$$\mathcal{U} = Cd^+ \left[X_d - A^m X_o \right] + \left[I - Cd^+ Cd \right] Y \quad (I2,8)$$

où $[I - Cd^+ Cd]$ est une matrice de dimensions $m_l \times m_l$ et Y un vecteur arbitraire de dimension m_l .

Cette expression appelle un certain nombre de remarques :

α) La séquence des commandes réalisant l'objectif fixé n'est pas unique en général : elle dépend d'un vecteur Y arbitraire. Il en résulte une certaine liberté dans le choix de la structure qui réalise ces commandes.

β) L'unicité n'est réalisée que pour $[Cd^+ Cd] = I_{(m_l, m_l)}$, propriété équivalente à $\text{rg } [Cd] = m_l$. Pour un système commandable ($\text{rg } [Cd] = q$), l'unicité de la solution impose la condition $m_l = q$, propriété qui n'est pas vérifiée en général.

γ) La suite $\mathcal{U}$ des commandes peut être obtenue même dans le cas où le système n'est pas commandable en m coups, au sens strict, lorsque le passage de l'état X_o à l'état X_d en m coups est possible.

δ) Pour un système commandable, on peut exprimer Cd^+ par la relation (I2,9) :

$$Cd^+ = Cd^* \left[Cd Cd^* \right]^{-1} \quad (I2,9)$$

(cf Annexe I) où Cd^* désigne la matrice transposée de la matrice de commandabilité Cd .

La relation (I2,8) devient :

$$u = cd^* \begin{bmatrix} cd & cd^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_d - A^m x_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I - cd^* \begin{bmatrix} cd & cd^* \end{bmatrix}^{-1} cd \end{bmatrix} y \quad (I2,10)$$

2.1.3. - Exemple

Le système à commander est constitué d'un filtre du troisième ordre de fonction de transfert

$$L(p) = \frac{1}{p^2(1+p)}$$

Le modulateur comporte un échantillonneur linéaire et sans mémoire de période T et délivre à partir de deux grandeurs de commande u_{1n} et u_{2n} une sortie représentée figure 1 :

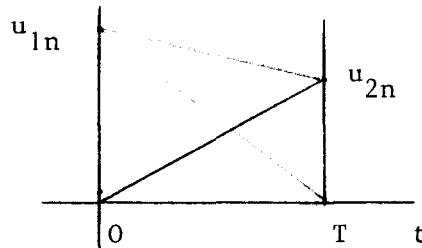


figure 1.

Le schéma bloc est le suivant (fig. 2) :

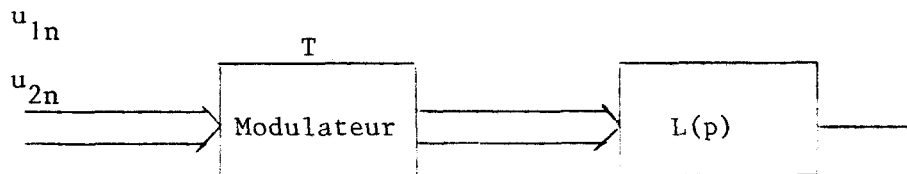


figure 2.

La commande est ainsi une commande multimodulée [12] que l'on peut représenter par un vecteur de commande d'ordre 2.

L'équation du système s'écrit :

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \\ \ddot{s} \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} D & 1-D & T-1+D \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_n + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{3} - \frac{T}{2} - D + \frac{1-D}{T} & \frac{T^2}{6} - \frac{T}{2} + 1 - \frac{1-D}{T} \\ \frac{T^2}{3} & \frac{T^2}{6} \\ \frac{T}{2} & \frac{T}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n^1 \\ u_n^2 \end{bmatrix}$$

avec $D = e^{-T}$.

Nous allons commander ce système en 2 coups afin de le faire évoluer de l'état X_0 à l'instant n à l'état X_d . La période d'échantillonnage est $T = 1$ s.

De la relation

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} 0,368 & 0,632 & 0,368 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_n + \begin{bmatrix} 0,097 & 0,035 \\ 0,333 & 0,166 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n^1 \\ u_n^2 \end{bmatrix},$$

il vient

$$\begin{bmatrix} u_n^1 \\ u_n^2 \\ u_{n+1}^1 \\ u_{n+1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,015 & -2,152 & 3,289 \\ 2,00 & -1,316 & 0,502 \\ 0,030 & 1,694 & -1,421 \\ -0,045 & 0,458 & 0,131 \end{bmatrix} X_d - \begin{bmatrix} -0,002 & -2,139 & 0,999 \\ 0,270 & 0,412 & 0,139 \\ 0,004 & 1,720 & 2,002 \\ 0,006 & 0,419 & 0,996 \end{bmatrix} X_0 + \begin{bmatrix} 0,0714 & -0,0075 & 0,1427 & -0,2141 \\ -0,0075 & 0,0008 & -0,0150 & 0,0225 \\ 0,1427 & -0,0150 & 0,2855 & -0,4282 \\ -0,2141 & 0,0225 & -0,4282 & 0,6423 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

avec y_1, y_2, y_3, y_4 quelconques.

2.2. - Etude de la commande optimale

2.2.1. - Expression de la commande optimale

Parmi l'ensemble des séquences réalisant l'objectif fixé, on peut sélectionner celle qui réalise une performance particulière.

Divers critères peuvent être choisis. Nous prendrons ici le critère de l'énergie que nous définissons dans une première étape comme la somme des carrés des commandes. Cette quantité est une mesure du coût de commande [13].

Nous envisagerons au chapitre IV le choix d'autres critères.

Le problème s'énonce alors de la façon suivante :

l'état du système étant X_0 à l'instant initial n et X_d à l'instant final $n+m$, quelle est la commande qui fait évoluer le système de X_0 à X_d en minimisant (I2,11) :

$$J = \sum_{i=0}^{m-1} u_{n+i}^* u_{n+i} = u^T u = ||u||^2 \quad (I2,11)$$

où $||u||$ désignera donc la norme euclidienne de u .

Il est facile de voir que les pseudo-inverses de matrices permettent de résoudre ce problème de façon simple.

En effet, la "meilleure solution" au sens des moindres carrés du système compatible (I2,12) (commandable ou non) :

$$X_d - A^m X_0 = C d u \quad (I2,12)$$

est

$$u = C d^+ [X_d - A^m X_0] \quad (I2,13)$$

puisque cette solution minimise la quantité $||X_d - A^m X_0 - C d u||$ en l'annulant et minimise aussi $||u||$ c'est-à-dire l'énergie de commande (cf Annexe I).

La commande optimale du point de vue énergétique permettant de passer de X_0 à X_d en m coups, lorsque ceci est possible, est donc donnée par la relation (I2,13).

On retrouve un résultat important [7, T3] : chaque variable de commande est une combinaison linéaire des composantes des vecteurs X_d et X_o .

2.2.2. - Expression de l'énergie optimale

D'après (I2,11) et (I2,13), l'énergie optimale a pour valeur :

$$J = \left[X_d - A^m X_o \right]^* (Cd^+)^* Cd^+ \left[X_d - A^m X_o \right] \quad (I2,14)$$

où $(Cd^+)^* Cd^+$ est une matrice de dimensions $(q \times q)$.

Nous voyons que J est une fonction quadratique de $(X_d - A^m X_o)$.

Dans le cas d'une commande jusqu'à 0, l'expression de l'énergie est :

$$J_{X_o \rightarrow 0} = X_o^* (A^m)^* (Cd^+)^* Cd^+ A^m X_o \quad (I2,15)$$

Dans le cas d'une commande depuis 0 jusqu'à X_d , il vient :

$$J_{0 \rightarrow X_d} = X_d^* (Cd^+)^* Cd^+ X_d \quad (I2,16)$$

Remarques :

α) Dans tous les cas, le pseudo-inverse Cd^+ vérifie (cf Annexe I) :

$$Cd^+ = Cd^* (Cd Cd^*)^+ \quad (I2,17)$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } (Cd^+)^* Cd^+ &= \left[(Cd Cd^*)^+ \right]^* Cd Cd^* \left[Cd Cd^* \right]^+ \\ &= \left[Cd Cd^* \right]^+ Cd Cd^* \left[Cd Cd^* \right]^+ = \left[Cd Cd^* \right]^+ \end{aligned}$$

$$\text{soit } (Cd^+)^* Cd^+ = \left[A^{m-1} B B^* (A^{m-1})^* + \dots + B B^* \right]^+ \quad (I2,18)$$

β) Dans le cas d'un système commandable, il vient :

$$(Cd^+)^* Cd^+ = \left[Cd Cd^* \right]^{-1} = \left[A^{m-1} B B^* (A^{m-1})^* + \dots + B B^* \right]^{-1}$$

$$\text{D'où } J = \left[X_d - A^m X_o \right]^* \left[Cd Cd^* \right]^{-1} \left[X_d - A^m X_o \right] \quad (I2,19)$$

2.2.3. - Exemple

Il suffit de faire $Y = 0$ dans l'exemple précédent pour obtenir la commande optimale. L'énergie minimale permettant le transfert du système de $X_0 = 0$ à l'état X_d en 2 séquences de commande devient alors :

$$J_{0 \rightarrow X_d} = X_d^T \left[C_d \ C_d \ T \right]^{-1} X_d = X_d^T \begin{bmatrix} 3,996 & -2,631 & 1,004 \\ -2,631 & 9,446 & -10,089 \\ 1,004 & 10,089 & 13,109 \end{bmatrix} X_d$$

(2 coups)

2.3. - Définition et calcul d'une "meilleure commande" pour un système non commandable en m coups.

2.3.1. - Définition d'une "meilleure commande".

Un système peut ne pas être commandable en m coups de deux façons différentes :

- Il n'est pas commandable au sens strict, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'entier m tel que $\text{rg} \begin{bmatrix} A^{m-1} B & \dots & B \end{bmatrix}_{(q \times ml)} = q$

- l'entier m choisi est trop petit et la longueur de la séquence s'avère insuffisante.

Dans les deux cas, lorsque l'on ne peut pas passer de l'état X_0 à l'état X_d en m coups, c'est-à-dire lorsque :

$$C_d \ C_d^+ \ [X_d - A^m X_0] \neq X_d - A^m X_0 \quad (I2,20)$$

on peut essayer pourtant de commander le système "au mieux".

Cette qualité d'optimalité dans le cas de systèmes non commandables sera définie comme suit :

On cherche à transférer en m coups l'état de X_0 (à l'instant n) à X'_d tel que X'_d minimise la norme de l'écart $X'_d - X_d$, X_d étant l'état désiré impossible à atteindre.

On obtiendra alors l'état le plus proche de l'état souhaité au sens de la norme euclidienne. Il est bien sûr que l'on ne pourra pas agir sur les modes non commandables.

2.3.2. - Calcul de la "meilleure commande"

Pour un système d'équations linéaires incompatibles $AY = B$ la matrice Y_0 telle que $||AY_0 - B|| \leq ||AY - B||$ pour tout Y est $Y_0 = A^+ B$ (cf Annexe I)

Par suite la commande

$$U = Cd^+ [X_d - A^m X_0] \quad (I2,21)$$

est la séquence de commandes cherchée.

Démonstration

La solution U' qui résoud au mieux $X_d - A^m X_0 = Cd U$, c'est-à-dire qui minimise la norme $||Cd U - (X_d - A^m X_0)||$ conduit à un état X'_d tel que $X'_d - A^m X_0 = Cd U'$. Elle minimise donc la quantité $|(X'_d - A^m X_0) - (X_d - A^m X_0)| = ||X'_d - X_d||$

Remarques :

α) La séquence optimale de commandes en m coups au sens défini ci-dessus a donc même expression dans le cas d'un système commandable et dans celui d'un système non commandable.

β) On peut calculer l'erreur $(X'_d - X_d)$:

$$\begin{aligned} X'_d - X_d &= A^m X_0 + Cd Cd^+ [X_d - A^m X_0] - X_d \\ &= (Cd Cd^+ - I) (X_d - A^m X_0) \end{aligned} \quad (I2,22)$$

Ce vecteur appartient au noyau de Cd^+ :

$$Cd^+ (X'_d - X_d) = 0$$

Il appartient donc aussi (cf Annexe I) au noyau de Cd^T et est orthogonal à l'espace engendré par les colonnes de Cd .

La relation (I2,22) montre que l'erreur est une fonction linéaire de l'état initial et de l'état final.

2.3.3. Exemples

Nous donnons deux exemples :

Exemple 1 :

Reprenons le système décrit paragraphe I 2.1.3. de fonction de transfert $\frac{1}{p^2(1+p)}$ commandé par multimodulation ($T = 1s$).

L'objectif fixé est d'approcher au mieux l'origine au sens de la norme euclidienne par l'application d'un seul vecteur de commande. Avec les notations précédentes, la commande qui conduit à ce résultat s'écrit :

$$\begin{aligned} U &= - C d^+ A^m X_n \\ &= - B^+ A X_n \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,736 & -6,264 & -3,875 \\ +0,780 & 6,34 & 2,03 \end{bmatrix} X_n$$

L'état atteint est :

$$\begin{aligned} X_d' &= (I - C d C^+) A^m X_n = (I - B B^+) A X_n \\ X_d' &= \begin{bmatrix} 0,412 & 1,019 & 0,671 \\ 0,115 & 2,032 & 1,95 \\ 0,022 & -0,042 & 1,92 \end{bmatrix} X_n \end{aligned}$$

Exemple 2 :

Cas d'un système non commandable (quelque soit m)

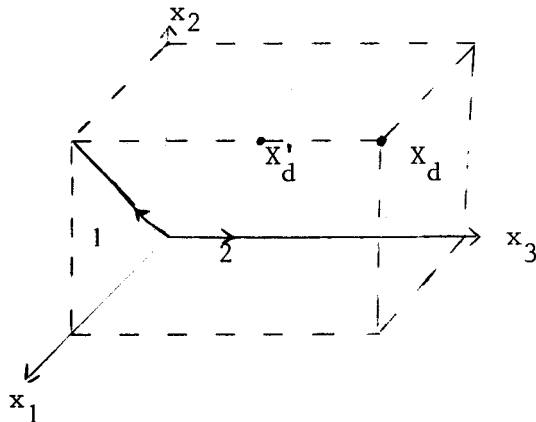
Une illustration géométrique s'avère possible dans le cas d'un système d'ordre 3 commandé en m coups depuis l'origine.

Soit le système décrit par l'équation récurrente :

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \lambda_2 \\ 0 & & \lambda_3 \end{bmatrix} X_n + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix} U_n \quad \beta_1 \beta_2 \neq 0$$

et pour lequel le mode λ_3 n'est pas commandable.

La figure ci-dessous montre les points représentatifs des états X_d et X'_d .



(x_1, x_2) : sous-espace commandable
 x_3 : mode non gouvernable
 1 : évolution commandée
 2 : évolution libre

figure 3.

On peut agir suivant x_1 et x_2 mais l'évolution suivant x_3 est fixée par λ_3 et les conditions initiales.

2.4. - Influence du temps de commande

2.4.1. - Critère de choix du temps de commandes

Un système commandable peut être commandé en tout nombre de séquences supérieur ou égal à l'indice de commandabilité m_c .

Le choix d'un critère d'optimalité détermine le nombre m qui convient le mieux à un problème donné.

Ainsi, en prenant m égal à m_c , on réalise une minimisation du temps de commande.

On peut également choisir m de façon à minimiser un critère du type énergétique (I2,11). Le problème consiste dans ce cas à déterminer le temps m et la séquence de commandes $u_n, \dots, u_{n+m-1}$ qui permettent le transfert de l'état X_n à l'état X_d en assurant la minimisation de l'énergie définie par la relation

$$J = \sum_{i=0}^{m-1} u_{n+i}^* u_{n+i} .$$

Pour répondre à cette question, nous considérons les énergies optimales en m coups (la condition de compatibilité est supposée réalisée) :

$$J_{x_0 \rightarrow 0} = x_0^* (A^m)^* (Cd^+)^* Cd^+ A^m x_0 \quad (I2,15)$$

pour une commande jusqu'à zéro et

$$J_{0 \rightarrow x_d} = x_d^* (Cd^+)^* Cd^+ x_d \quad (I2,16)$$

pour une commande depuis zéro et nous examinons les variations de l'énergie en fonction de m dans ces deux cas particuliers.

2.4.2. - Variation de l'énergie de commande avec m

Nous allons montrer que les énergies $J_{x_0 \rightarrow 0}$ et $J_{0 \rightarrow x_d}$ sont des fonctions décroissantes de m .

Nous considérons les matrices de commandabilité en m_1 et m_2 séquences ($m_2 > m_1$) notées respectivement Cd_1 et Cd_2

$$Cd_1 = [A^{m_1-1}B \dots B] \quad (I2,23)$$

$$Cd_2 = [A^{m_2-1}B \dots B] \quad (I2,24)$$

Ces matrices sont supposées de rang q : $m_1 \geq m_c$

Théorème : Les matrices $M_1 = [(Cd_2^+)^* Cd_2^+ - (Cd_1^+)^* Cd_1^+]$

et $M_2 = [A^{*m_2} (Cd_2^+)^* Cd_2^+ A^{m_2} - A^{*m_1} (Cd_1^+)^* Cd_1^+ A^{m_1}]$

sont définies négatives.

Démonstration :

Lemme 1 : Soit à calculer le pseudo-inverse de la matrice partitionnée

$\mathcal{A} = [A, a]$ où A est de dimensions $m \times n$ et a de dimensions $m \times 1$.

Si le rang de la matrice $\mathcal{A}$ est égal au rang de A , le pseudo-inverse de $\mathcal{A}$ est :

$$\mathcal{A}^+ = \begin{bmatrix} A^+ - A^+ a b^* \\ b^* \end{bmatrix} \quad (I2,25)$$

$$\text{avec } b = \frac{(A^+)^* A^+ a}{1 + a^* (A^+)^* A^+ a} \quad (I2,26)$$

La vérification de ce résultat obtenu par Gréville [14] peut s'effectuer par calcul direct.

Lemme 2 : Si le rang de $\mathcal{A}$ est égal au rang de A , la matrice $(\mathcal{A}^+)^* \mathcal{A}^+ - (A^+)^* A^+$ est définie non positive.

En effet :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}^+)^* \mathcal{A}^+ - (A^+)^* A^+ &= [(A^+)^* - b a^* (A^+)^*] [A^+ - A^+ a b^*] + b b^* - (A^+)^* A^+ \\ &= -b a^* (A^+)^* A^+ - (A^+)^* A^+ a b^* + b a^* (A^+)^* A^+ a b^* + b b^* \\ &= -b a^* (A^+)^* A^+ - (A^+)^* A^+ a b^* + b [a^* (A^+)^* A^+ a + 1] b^* \\ &= -b a^* (A^+)^* A^+ - \frac{(A^+)^* A^+ a a^* (A^+)^* A^+}{1 + a^* (A^+)^* A^+ a} \\ &= - \frac{(a^* (A A^+)^*)^* (a^* (A A^+)^*)}{1 + a^* (A^+)^* A^+ a} \quad (I2,27) \end{aligned}$$

Si la matrice A de dimensions $m \times n$ est de rang m , la matrice AA^* est régulière. $(AA^*)^+ = (AA^*)^{-1}$ et par suite le vecteur ligne $a^* (AA^+)^+$ ne peut être nul. Par suite, la quantité (I2,27) est dans ce cas strictement négative.

En raisonnant de proche en proche, on peut étendre ce lemme au cas où a est une matrice $m \times \ell$.

$$\text{En prenant } A = C d_1^+ \text{ et } a = \begin{bmatrix} A^{m_2-1} & B & \dots & A^{m_1} & B \end{bmatrix},$$

il vient immédiatement que la matrice $M_1 = (C d_2^+)^* C d_2^+ - (C d_1^+)^* C d_1^+$ est définie négative.

En écrivant $Cd^+ A^m$ sous la forme $\begin{bmatrix} A^{-1} B \dots A^{-m} B \end{bmatrix}^+$, si A est régulière, la propriété est également immédiate pour M_2 .

Il en résulte que les énergies $J_{X_0 \rightarrow 0}$ et $J_{0 \rightarrow X_d}$ sont des fonctions décroissantes du temps : l'énergie dépensée est d'autant plus faible que la commande s'effectue sur un temps plus long.

Le système étant commandable, l'énergie minimale sera donc :

$$J_{X_0 \rightarrow 0} = \min_{m \rightarrow \infty} X_0^* (A^m)^* \left[A^{m-1} B B^* (A^{m-1})^* \dots + B B^* \right]^{-1} A^m X_0 \quad (I2,28)$$

et

$$J_{0 \rightarrow X_d} = \min_{m \rightarrow \infty} X_d^* \left[A^{m-1} B B^* (A^{m-1})^* + \dots + B B^* \right]^{-1} X_d \quad (I2,29)$$

Cette énergie peut être nulle, par exemple pour la commande à zéro d'un système stable, il suffit dans ce cas de laisser le processus évoluer en régime autonome.

Dans le cas d'une énergie minimale non nulle, on peut se fixer l'entier m tel que $\frac{J_{\infty}}{J^m} = \beta \%$ et on réalise ainsi un compromis entre le temps de réponse et l'énergie dépensée.

2.4.3. - Exemple

De nouveau nous reprenons le système d'ordre 3 piloté en multimodulé que l'on souhaite commander depuis 0 jusqu'à X_d .

L'énergie de commande est

$$J_{0 \rightarrow X_d} = \sum_{i=0}^{m-1} u_{n+1}^T u_{n+i} = X_d^T \begin{bmatrix} Cd & Cd^T \end{bmatrix}^{-1} X_d$$

Le tableau ci-dessous donne la valeur des coefficients de la matrice

$[Cd \ Cd^T]^{-1}$ pour différentes valeur de m.

On remarquera que pour les vecteurs $X_{1d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
 $X_{2d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_{3d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, le rapport $\frac{J_{30 \text{ coups}}}{J_2 \text{ coups}}$ est respectivement
 égal à 0,9925 , 0,41 , 0,38.

Tableau 1 - Valeurs de $[Cd \ Cd^T]^{-1}$

m	$[Cd \ Cd^T]^{-1}$		
2	.399 683 E 01	-.263 157 E 01	.100 447 E 01
	-.263 157 E 01	.944 695 E 01	-.100 899 E 02
	.100 447 E 01	-.100 899 E 02	.131 096 E 02
5	.398 959 E 01	-.270 624 E 01	.112 445 E 01
	-.270 624 E 01	.660 041 E 01	-.746 862 E 01
	.112 445 E 01	-.746 862 E 01	.101 993 E 02
10	.398 194 E 01	-.278 513 E 01	.125 123 E 01
	.278 513 E 01	.540 258 E 01	-.590 546 E 01
	.125 122 E 01	-.590 546 E 01	.792 852 E 01
30	.397 143 E 01	-.289 339 E 01	.142 518 E 01
	-.289 339 E 01	.409 446 E 01	-.398 426 E 01
	.142 518 E 01	-.398 426 E 01	.496 189 E 01

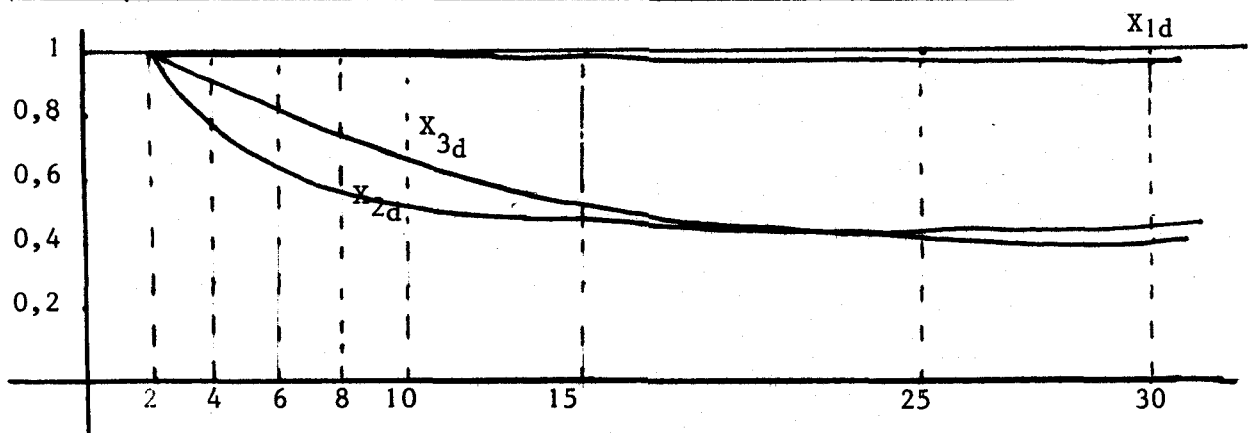


figure 4.

La figure 4. donne le rapport $\frac{J_m}{J_2}$ lorsque m varie pour les vecteurs X_{1d} , X_{2d} , X_{3d} . Le gain en énergie lorsqu'on augmente m est pratiquement nul pour X_{1d} . Pour X_{2d} et X_{3d} , l'évolution est lente après 10 coups.

Le cas du système d'ordre 1 est traité complètement en annexe II.

Conclusion.

Nous avons, dans ce chapitre, analysé les caractéristiques des commandes des systèmes multivariables discrets linéaires.

Lorsqu'il existe des commandes permettant de transférer un système dynamique d'un état initial donné à un état final imposé en temps fixé, il a été possible de formuler l'expression de toutes ces commandes.

L'introduction des pseudo-inverses de matrices de Moore-Penrose dans la détermination de la commande en vue de la réalisation d'un objectif a permis la résolution de deux problèmes importants :
d'une part, en cas de non commandabilité, l'expression de la commande donnant la meilleure solution approchée au sens des moindres carrés et
d'autre part, lorsque le processus est commandable, la détermination parmi l'ensemble des commandes admissibles de celle qui minimise l'énergie consommée.

CHAPITRE II

Synthèse de quelques commandes des systèmes discrets multivariables linéaires.

Introduction

Au cours de la synthèse d'un processus, le choix du mode de commande dépend de l'objectif à atteindre et des informations disponibles.

Dans une première partie de ce chapitre, nous nous intéressons plus particulièrement au problème du régulateur. Nous proposons la détermination systématique d'une structure optimale par réaction d'état à paramètres variables ou non éliminant le régime transitoire en temps fini tout en minimisant l'énergie de commande.

Une réaction d'état à paramètres constants amenant l'état d'un système multivariable à zéro est également envisagée.

Cette étude permet également de résoudre le problème de la reconstitution de l'état d'un processus en temps minimum tel que l'a défini Luenberger. Ce problème est en effet dual de celui de la commande en temps minimum.

Dans une seconde partie, nous élaborons la commande optimale d'un processus à réguler à partir d'un filtre numérique convenablement initialisé.

La résolution de ces problèmes fera appel au pseudo-inverse de More-Penrose.

I - Réalisation des commandes par réaction d'état

1.1. - Position du problème

Nous avons déterminé au chapitre précédent les séquences de commande permettant de transférer l'état d'un système de l'état initial jusqu'à un état désiré.

Nous allons maintenant considérer plus particulièrement le cas où l'état final est nul.

Cette caractéristique correspond à l'annulation du régime transitoire en temps fini, problème spécialement intéressant dans l'hypothèse des systèmes linéaires puisque l'évolution de tels systèmes résulte de la superposition de l'effet des conditions initiales et de l'effet des entrées.

Ce problème se rencontre également dans la théorie des observateurs en temps fini où il faut annuler l'erreur entre l'état estimé et de l'état réel et où l'on construit un estimateur en temps fini /1/ /2/ /3/.

La séquence de commande est réalisée à partir d'une boucle d'asservissement formée par une réaction sur l'état X_n . L'avantage de cette commande en boucle fermée par rapport à la commande en boucle ouverte est qu'elle permet de compenser d'éventuelles dérives ou encore des erreurs sur l'état apprécié X_n .

L'évolution du système étudié est alors régie par l'ensemble des relations vectorielles:

$$X_{n+1} = A X_n + B U_n \quad (\text{II}1,1)$$

$$U_n = C_n X_n \quad (\text{II}1,2)$$

où nous reprenons les notations du chapitre I pour l'équation (II 1,1) et où C_n , matrice à éléments variables, de dimensions $l \times q$, caractérise la chaîne de retour.

La matrice B est supposée à éléments constants. Elle correspond pour les systèmes échantillonnés à un modulateur donné.

Les vecteurs-colonnes de B sont d'autre part indépendants.

Après avoir donné une formulation du problème, nous chercherons les retours variables C_{n+i} permettant d'annuler le régime transitoire en m coups, m étant supérieur ou égal à l'indice de commandabilité m_c , par une commande optimale du point de vue de l'énergie.

1.2. - Formulation générale

A partir des relations (II 1,1) et (II 1,2), on obtient à l'instant $(n+m)$:

$$X_{n+m} = A^m X_n + C d \begin{bmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ \vdots \\ U_{n+m-1} \end{bmatrix} \quad (\text{II } 1,3)$$

$$\begin{bmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ \vdots \\ U_{n+m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1}(A+B C_n) \\ \vdots \\ C_{n+m-1}(A+B C_{n+m-2}) \dots (A+B C_n) \end{bmatrix} X_n \quad (\text{II } 1,4)$$

avec $Cd = \begin{bmatrix} A^{m-1}B & A^{m-2}B & \dots & B \end{bmatrix}$

Nous transformons l'équation (II 1,4) en introduisant la matrice d'observabilité en m coups à partir de l'instant n :

$$Ob = \begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1}A \\ \vdots \\ C_{n+m-1}A^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\ell & & & \\ -C_{n+1}B & I_\ell & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -C_{n+m-1}A^{m-1}B & -C_{n+1}B & & I_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1}(A+B C_n) \\ \vdots \\ C_{n+m-1}(A+B C_{n+m-2}) \dots (A+B C_n) \end{bmatrix} \quad (II\ 1,5)$$

En écrivant cette équation sous la forme (II 1,6) :

$$Ob = M^{-1} \begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1}(A+B C_n) \\ \vdots \\ C_{n+m-1}(A+B C_{n+m-2}) \dots (A+B C_n) \end{bmatrix} \quad (II\ 1,6)$$

où M^{-1} est une matrice régulière, il vient :

$$\begin{bmatrix} U_n \\ \vdots \\ U_{n+m-1} \end{bmatrix} = M \quad Ob \quad X_n \quad (II\ 1,7)$$

L'amortissement du régime transitoire en temps fini, quel que soit l'état initial, se traduit par l'existence de l'entier m tel que les trois équations équivalentes suivantes soient vérifiées :

$$A^m + Cd \begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1}(A+B C_n) \\ \vdots \\ C_{n+m-1}(A+B C_{n+m-2}) \dots (A+B C_n) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II } 1,8)$$

$$A^m + Cd M Ob = 0 \quad (\text{II } 1,9)$$

$$(A+B C_{n+m-1}) \dots (A+B C_{n+i}) \dots (A+B C_n) = 0 \quad (\text{II } 1,10)$$

où les inconnues sont les retours $C_n, \dots, C_{n+m-1}$.

L'équation (II 1,9) permet de faire une remarque importante.

Lorsque la matrice A est supposée régulière, le problème de la détermination du nombre m et des retours ne peut avoir de solutions que si le système est commandable. Par suite, le nombre m doit être supérieur ou égal à l'indice de commandabilité m_c .

Cette condition est à rapprocher de l'équation (I 2,26).

L'équation (II 1,19) montre, lorsque A est régulière, que les retours variables, s'ils existent, conduisent à un système observable.

Dans la suite de ce chapitre, nous supposerons la matrice A régulière, le système commandable et le nombre m supérieur ou égal à l'indice de commandabilité m_c .

La séquence de commandes conduisant à l'état nul est donnée de façon équivalente par les équations (II 1,11) et (II 1,12) :

$$U = \begin{bmatrix} U_n \\ \vdots \\ U_{n+m-1} \end{bmatrix} = - Cd^- A^m X_n \quad (\text{II } 1,11)$$

$$= - Cd^+ A^m X_n + [I - Cd^+ Cd] Y \quad (\text{II } 1,12)$$

où Cd^- désigne un pseudo-inverse quelconque de Cd , Cd^+ le pseudo-inverse du sens de Moore-Penrose et Y un vecteur quelconque de dimension m (cf Annexe I).

La commande optimale au sens de l'énergie est obtenue pour $Y = 0$ et le système (II 1,1) étant supposé commandable, la matrice Cd^+ vérifie l'équation (II 1,13) :

$$Cd^+ = Cd^T [Cd Cd^T]^{-1} \quad (\text{II } 1,13)$$

1.3. - Structure optimale par réaction d'état à paramètres variables

Nous allons démontrer dans ce paragraphe que si le système étudié est commandable en m coups (i.e. $m \geq m_c$), il est toujours possible de réaliser la commande optimale amenant à zéro l'état du système au moyen de m retours $C_n, \dots, C_{n+m-1}$.

D'après les équations (II 1,4) et (II 1,12), il faut donc réaliser :

$$\begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1}(A+B C_n) \\ \vdots \\ C_{n+m-1}(A+B C_{n+m-2}) \dots (A+B C_n) \end{bmatrix} = -C_d^+ A^m = - \begin{bmatrix} B^T A^{Tm-1} \\ B^T A^{Tm-2} \\ \vdots \\ B^T \end{bmatrix} [C_d C_d^T]^{-1} A^m \quad (\text{II } 1,14)$$

ce qui conduit à la résolution de m équations telles que :

$$C_{n+i}(A+B C_{n+i-1}) \dots (A+B C_n) = -B^T A^{Tm-i-1} [C_d C_d^T]^{-1} A^m \quad (\text{II } 1,15)$$

pour i variant de 0 à m-1.

La détermination des retours variables C_{n+i} peut se faire de proche en proche à partir des relations précédentes à condition que ces équations soient compatibles.

Nous montrons maintenant que cette compatibilité est vérifiée et que les matrices $(A+B C_{n+i})$ sont régulières pour $i \leq m-m_c$.

a) En supposant qu'il existe des retours C_{n+j} solutions, exprimons le produit $(A+B C_{n+i}) \dots (A+B C_n)$.

Des équations (II 1,14), il vient :

$$\begin{aligned} A+B C_n &= A+B(-B^T A^{Tm-1} [C_d C_d^T]^{-1} A^m) \\ &= A^{-(m-1)} [C_d C_d^T - A^{m-1} B B^T A^{Tm-1}] [C_d C_d^T]^{-1} A^m \end{aligned} \quad (\text{II } 1,16)$$

$$\begin{aligned} (A+B C_{n+1})(A+B C_n) &= A(A+B C_n) + B C_{n+1}(A+B C_n) \\ &= A^{-(m-2)} [C_d C_d^T - A^{m-1} B B^T A^{Tm-1} - A^{m-2} B B^T A^{Tm-2}] [C_d C_d^T]^{-1} A^m \end{aligned} \quad (\text{II } 1,17)$$

Un raisonnement par récurrence montre qu'il vient :

$$(A+B C_{n+i-1}) \dots (A+B C_n) = A^{-(m-i)} [B B^T + \dots + A^{m-i-1} B B^T A^{Tm-i-1}] [C_d C_d^T]^{-1} A^m \quad (\text{II } A,18)$$

b) L'équation (II 1,15) s'écrit alors :

$$C_{n+i} A^{-(m-i)} [B B^T + \dots + A^{m-i-1} B B^T A^{Tm-i-1}] [Cd Cd^T]^{-1} A^m = - B^T A^{Tm-i-1} [Cd Cd^T]^{-1} A^m \quad (II 1,19)$$

Les matrices A et $Cd Cd^T$ étant supposées régulières, la condition de compatibilité de cette équation est :

$$\text{rg}[B B^T + \dots + A^{m-i-1} B B^T A^{Tm-i-1}] = \text{rg} \begin{bmatrix} B^T A^{Tm-i-1} \\ B B^T + \dots + A^{m-i-1} B B^T A^{Tm-i-1} \end{bmatrix} \quad (II 1,20)$$

Les matrices entre crochets peuvent être écrites respectivement sous la forme

$$[B \ AB \ \dots \ A^{m-i-1} B] \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T A^{Tm-i-1} \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} I & & & 0 \\ \vdots & & & \\ \hline A^T \dots B & \dots & AB & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T A^{Tm-i-1} \\ \vdots \\ B^T A^T \\ B^T \end{bmatrix}$$

Ces deux matrices ont donc même rang que $[B \ AB \ \dots \ A^{m-i-1} B]$.

Par suite il est toujours possible de déterminer les retours C_{n+i} à partir des relations (II 1,19).

c) La matrice produit $(A+B C_{n+i}) \dots (A+B C_n)$ a donc le même rang que la matrice $[B \ AB \ \dots \ A^{m-i-2} B]$.

Ainsi par exemple $(A+B C_{n+m-2}) \dots (A+B C_n)$ a le même rang que la matrice B .

Pour tout $i \leq m-m_c-1$, le produit $(A+B C_{n+i}) \dots (A+B C_n)$ est régulier.

L'expression des retours C_{n+i} s'obtient alors facilement; il vient :

$$C_{n+i} = -B^T A^T \sum_{m-i-1}^{+} A^{m-i} + Y_i \left[I - \sum_{m-i-1}^{+} \sum_{m-i-1}^{+} \right] A^{m-i} \quad (\text{II } 1,21)$$

$$\text{avec } \sum_{m-i-1} = BB^T + \dots + A^{m-i-1} BB^T A^T \sum_{m-i-1} \quad (\text{II } 1,22)$$

$$(\text{donc } \sum_{m-i-1}^{+} = \sum_{m-i-1}^{-1} \text{ pour } i \leq m-m_c)$$

et Y_i une matrice quelconque de mêmes dimensions que C_{n+i}

Les retours $C_n, C_{n+1}, \dots, C_{n+m-m_c}$ sont déterminés de façon unique.

Les $m_c - 1$ retours $C_{n+m-m_c+1}, \dots, C_{n+m-1}$ sont déterminés à une matrice près.

Le choix des matrices Y_i égales à zéro correspond à des C_{n+i} tels que la somme des carrés de leurs coefficients aient une somme minimale.

On peut remarquer que les retours C_{n+i} dépendent de $m-i$ plutôt que de i . Ainsi

$$C_{n+m-1} = -B^T [BB^T]^{+} A + Y_{n-1} [I - BB^T [BB^T]^{+}] A \quad (\text{II } 1,23)$$

quel que soit m .

On retrouve que les équations récurrentes d'optimalité évoluent dans le sens rétrograde.

Les retours $C_n, \dots, C_{n+m-m_c}$ étant déterminés de façon unique, il résulte de ce qui précède qu'il ne sera pas possible en général pour $m > m_c$ de trouver parmi les retours solutions un retour constant correspondant à une commande optimale.

Le choix de m supérieur à l'indice de commandabilité m_c ne se justifie que par la possibilité de minimiser l'énergie de commande.

1.4. - Structure de commande par réaction d'état à paramètres constants.

L'annulation du régime transitoire d'un système par un retour constant a été envisagée par de nombreux auteurs tant pour les systèmes monovariabiles /3/ que pour les systèmes multivariabiles commandés en q coups /4/ ou en m coups /5//2/ .

Nous envisagerons successivement les cas où les nombres m_c , l , q vérifient $m_c \ l=q$ et $m_c \ l \neq q$.

1.4.1. - Cas particulier $m_c \ l=q$

On sait que lorsque l'indice de commandabilité m_c vérifie l'égalité $m_c \ l=q$ le retour C annulant en $m=m_c$ coups le régime transitoire est donné par les l premières lignes de l'expression $- [A^{-1}B \dots A^{-m}B]^{-1}$

Une démonstration semblable à celles données aux paragraphes précédents permet de retrouver rapidement ce résultat.

L'égalité $m_c \ l=q$ conduit à une matrice de commandabilité carrée. La séquence de commande est unique et d'après l'équation (II 1,14), le retour constant doit vérifier les équations (II 1,24) :

$$\begin{bmatrix} C \\ C(A+B \ C) \\ \vdots \\ C(A+B \ C)^{m-1} \end{bmatrix} = -Cd^{-1}A^m = - \begin{bmatrix} B^T A^{T \ m-1} \\ B^T A^{T \ m-2} \\ \vdots \\ B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cd \ Cd^T \end{bmatrix}^{-1} A^m \quad (\text{II } 1,24)$$

A partir de l'équation (II 1,25)

$$C = -B^T A^{T \ m-1} \begin{bmatrix} Cd \ Cd^T \end{bmatrix}^{-1} A^m \quad (\text{II } 1,25)$$

tirée des équations précédentes, il vient :

$$\begin{aligned}
 C(A+BC) &= -B^T A^{Tm-1} [CdCd^T]^{-1} A^m [A-B B^T A^{Tm-1} [Cd Cd^T]^{-1} A^m] \\
 &= -B^T A^{Tm-1} [CdCd^T]^{-1} [A [CdCd^T]^{-1} A^m - B B^T A^{Tm-1} [Cd Cd^T]^{-1} A^m] \\
 &= -B^T A^{Tm-1} [CdCd^T]^{-1} [A B \dots A^{m-1} B] \begin{bmatrix} B^T \\ \vdots \\ B^T A^{Tm-2} \end{bmatrix} [CdCd^T]^{-1} A^m \quad (II\ 1,26)
 \end{aligned}$$

Or lorsque $m_c \ell = q$, la relation (II 1,27) est vérifiée :

$$Cd^+ Cd = Cd^T [Cd Cd^T]^{-1} Cd = I \quad (II\ 1,27)$$

ce qui permet d'écrire l'équation (II 1,26) sous la forme :

$$\begin{aligned}
 C(A+BC) &= - \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T \\ \vdots \\ B^T A^{Tm-2} \end{bmatrix} [CdCd^T]^{-1} A^m \\
 &= - B^T A^{Tm-2} [CdCd^T]^{-1} A^m \quad (II\ 1,28)
 \end{aligned}$$

Un raisonnement par récurrence montre alors que l'on a :

$$C(A+BC)^i = - B^T A^{Tm-i-1} [CdCd^T]^{-1} A^m \quad (II\ 1,29)$$

Par suite le système d'équations (II 1,24) est compatible et le retour C est donné par l'équation (II 1,25) c'est-à-dire par les ℓ premières lignes de l'expression $-Cd^{-1}A^m$ qui peut s'écrire lorsque A est régulière sous la forme $-[A^{-1}B \dots A^{-m}B]^{-1}$.

Cette valeur de C aurait pu être obtenue à partir de (II 1,21) pour un choix convenable de Y_i .

On remarquera que la démonstration précédente s'applique au cas des matrices A singulières pour lesquelles le système (II 1,1) est commandable. Le retour C est alors donné par l'expression (II 1,25).

1.4.2. - Cas ou $m_c \ell \neq q$

Il est facile de vérifier que lorsque $m_c \ell \neq q$ le retour constant donné précédemment ne rend pas la matrice $(A+BC)$ nilpotente.

La commande que l'on obtiendrait avec un retour constant, s'il existe, ne pourra donc être optimale au sens de l'énergie.

D'après l'équation (II 1,11), le retour C existe si l'on peut trouver un pseudo-inverse Cd^- de Cd tel que l'on ait :

$$\begin{bmatrix} C \\ C(A+BC) \\ \vdots \\ C(A+BC)^{m-1} \end{bmatrix} = - Cd^- A^m \quad (\text{II } 1,28)$$

La détermination d'un tel pseudo-inverse mène à des calculs compliqués.

Aussi nous préférons donner une expression particulière de C déduite par analogie du résultat précédent.

Nous considérons le système des $m_c \ell$ vecteurs $[A^{-1}B, \dots, A^{-m_c}B]$ de rang q , le processus étant supposé commandable et la matrice A régulière

Nous notons :

$$[A^{-1}B \dots A^{-m_c}B] = \underbrace{[V_1, V_2, \dots, V_\ell]}_{A^{-1}B}, \dots, V_{m_c \ell} \quad (\text{II } 1,29)$$

A partir de ces vecteurs, nous formons une base de la façon suivante :

V_i sera choisi comme vecteur de base s'il est indépendant des vecteurs $V_1, \dots, V_{i-1}$.

La base ainsi constituée est déterminée de façon unique.

Les colonnes de la matrice B étant linéairement indépendantes, les vecteurs colonnes de $A^{-1}B$ (c'est-à-dire $V_1, V_2, \dots, V_\ell$) font partie de la base. Les autres vecteurs de la base seront de la forme $A^{-i}V_j$, où i peut varier de 1 à $m_C - 1$ et j de 1 à ℓ .

Il est alors facile de montrer qu'une expression du retour C est donnée par les ℓ premières lignes de l'expression (II 1,30) :

$$- [A^{-1}B, \dots, A^{-i}V_j, \dots]^{-1} \quad (\text{II } 1,30)$$

dont les vecteurs-colonnes sont les vecteurs de la base précédemment déterminée.

Démonstration :

La matrice C est déterminée par les ℓ premières lignes de l'expression (II 1,30) si et seulement si C vérifie les équations :

$$I + CA^{-1}B = I + C[V_1, \dots, V_\ell] = 0 \quad (\text{II } 1,31)$$

$$CA^{-i}V_j = 0 \quad (\text{II } 1,32)$$

Pour cette valeur de C, on a donc :

$$(A+BC)A^{-1}B = 0 \quad (\text{II } 1,32)$$

Considérons le vecteur $A^{-1}V_1$ première colonne de $A^{-1}B$.

. Si $A^{-1}V_1$ est une combinaison des vecteurs de $A^{-1}B$ (donc n'appartient pas à la base) il vient :

$$(A+BC)A^{-1}V_1 = 0 \quad (\text{II } 1,34)$$

. Si $A^{-1}V_1$ fait partie de la base, on a :

$$(A+BC)A^{-1}V_1 = V_1 + BCA^{-1}V_1 = V_1 + 0 \quad (\text{II } 1,35)$$

d'après (II 1,32). D'où :

$$(A+BC)^2 A^{-1}V_1 = (A+BC)V_1 = 0 \quad (\text{II } 1,36)$$

d'après (II 1,31).

Ce raisonnement montre que l'on a pour le retour C ainsi choisi :

$$(A+BC)^2 A^{-1} V_i = 0 \quad (\text{II } 1,37)$$

pour tout i variant de 1 à ℓ

Plus généralement il vient :

$$(A+BC)^j A^{-j+1} V_i = 0 \quad (\text{II } 1,37)$$

pour tout j inférieur ou égal à m_c et tout i variant de 1 à ℓ .

La matrice $(A+BC)^{m_c}$ dont le produit par q vecteurs indépendants est nul est donc identiquement nulle.

Remarques :

1. Le choix d'autres bases convenables de représentation conduit à d'autres expressions du retour C. En particulier, on peut utiliser la méthode précédente après permutation sur les éléments du vecteur de commande U_n .

2. On peut démontrer (cf annexe IV) que le rang de la matrice $(A+BC)^m$ vérifie, à la seule condition que A soit régulière et quelque soit l'entier positif m, l'égalité

$$\text{rg} [(A+BC)^m] = \text{rg} \begin{bmatrix} I+CA^{-1}B & CA^{-2}B & \dots & CA^{-m}B \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & CA^{-2}B & \\ 0 & & & I+CA^{-1}B \end{bmatrix} = m\ell - q \quad (\text{II } 1,38)$$

Rendre la matrice $(A+BC)$ nilpotente revient donc à trouver m et C tels que :

$$\text{rg} \begin{bmatrix} I + CA^{-1}B & \dots & CA^{-m}B \\ & \ddots & \ddots \\ & & I+CA^{-1}B \end{bmatrix} = m\ell - q \quad (\text{II } 1,39)$$

On voit alors que dans le cas où $m = m_c$ et $m_c \ell = q$, le choix de C vérifiant

$$\begin{cases} I + CA^{-1}B = 0 \\ CA^{-i}B = 0 \end{cases} \quad \text{pour } i = 2, \dots, m_c \quad \begin{matrix} \text{(II 1,40)} \\ \text{(II 1,41)} \end{matrix}$$

satisfait l'équation (II 1,39)

ce qui peut s'exprimer de façon équivalente en disant que C est donné par les l premières lignes de l'expression

$$- [A^{-1}B, \dots, A^{-m_c}B]^{-1}$$

1.5 - Cas des systèmes linéaires non stationnaires

Nous nous proposons de montrer que pour les systèmes linéaires non stationnaires décrits par les équations

$$X_{n+1} = A_n X_n + B_n u_n \quad \text{(II 1,42)}$$

il est possible de réaliser la séquence de commandes optimales au sens de l'énergie et amenant le système à zéro au moyen d'une réaction d'état de la forme

$$u_n = C_n X_n.$$

Nos hypothèses sont les suivantes :

1°) A_{n+i} est régulière pour tout i

2°) La "matrice de commandabilité"

$$Cd = [A_{n+m-1} \dots A_{n+1} B_n, \dots, B_{n+m-1}]$$

est de rang q pour tout m supérieur ou égal à m_c , quelque soit l'indice m (le système est dit uniformément commandable).

D'après l'équation :

$$X_{n+m} = A_{n+m-1} X_{n+m-1} = A_n X_n + Cd \begin{bmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+m-1} \end{bmatrix}, \quad \text{(II 1,43)}$$

la séquence optimale au sens de l'énergie amenant le système à zéro est donnée

$$\text{par } U = -Cd^+ A_{n+m-1} \dots A_n X_n$$

Les retours $C_n, \dots, C_{n+m-1}$ réalisant cette commande doivent vérifier les équations

$$\begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1}(A_n + B_n C_n) \\ \dots \\ C_{n+m-1}(A_{n+m-2} + B_{n+m-2} C_{n+m-2}) \dots (A_n + B_n C_n) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{n+1}^T A_{n+1}^T \dots A_{n+m-1}^T \\ B_{n+1}^T A_{n+2}^T A_{n+m-1}^T \\ \dots \\ B_{n+m-1}^T \end{bmatrix} (CdCd^T)^{-1} A_{n+m-1} \dots A_n \quad (\text{II } 1,44)$$

Une démonstration calquée sur celle du paragraphe 3 (voir annexe III) permet de montrer que sous les hypothèses précédentes les équations (II 1,44) sont compatibles et déterminent C_{n+i} .

$$C_{n+i} = -B_{n+2}^T A_{n+i+1}^T \dots A_{n+m-1}^T \sum_{m-i-1}^+ A_{n+i+1} A_{n+m-1} + Y_i \left[I - \sum_{m-i-1}^+ \right] A_{n+i+1} \dots A_{n+m-1} \quad (\text{II } 1,45)$$

avec Y_i vecteur quelconque

$$\text{et } \sum_{m-i-1}^+ = B_{n+m-1} B_{n+m-1}^T + \dots + A_{n+m-1} \dots A_{n+i+1} B_{n+2} B_{n+2}^T A_{n+i+1}^T \dots A_{n+m-1}^T \quad (\text{II } 1,46)$$

Ces formules sont tout à fait analogues à celles trouvées dans le cas stationnaire.

1.6 - Applications

Nous allons illustrer la méthode sur deux exemples choisis volontairement simples pour permettre une vérification aisée.

1.6.1. Exemple 1 : Système monovariante de 2ème ordre

Nous considérons le système instable en boucle ouverte décrit par les équations

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X_n + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_n$$

On souhaite transférer ce système à l'origine

a - Calcul des retours pour une commande en deux coups

La séquence de commande est ici unique :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = -Cd^{-1}A^2X_n = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X_n$$

Les retours qui lui correspondent C_n et C_{n+1} sont donnés par les équations (II 1,21). C_n est également déterminé par la première ligne de $-Cd^{-1}A^2$ (d'après II 1,14). D'où :

$$\begin{aligned} C_n &= [1 \quad -4] \\ C_{n+1} &= \left[-\frac{1}{2} \quad -1\right] + [\alpha \quad \beta] \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left[-\frac{1}{2}(1+\beta-\alpha) \quad -1(1+\alpha-\beta)\right] \end{aligned}$$

où α et β sont deux nombres quelconques.

Les plus faibles gains correspondent à $\alpha = \beta = 0$.

En choisissant $[\alpha \quad \beta] = [1 \quad -4]$, on trouve le retour constant $C_2 = C_{n+1}$.

L'énergie dépensée est alors :

$$J_2 = X_n^T \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & 32 \end{pmatrix} X_n$$

b - Calcul des retours pour une commande optimale en trois coups.

La séquence de commande optimale est obtenue par l'équation (II 1,11) dans laquelle on fait $Y = 0$:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = - C_d^+ A^3 X_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{20}{7} \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{7} \\ -1 & \frac{16}{7} \end{pmatrix} X_n$$

Les retours C_n, C_{n+1}, C_{n+2} sont donnés par les équations (II 1,20) :

$$C_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{20}{7} \end{bmatrix}$$

$$C_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$C_{n+2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(1+\alpha-\beta) & -1(1+\alpha-\beta) \end{bmatrix}$$

L'énergie nécessaire pour le transfert est alors :

$$J_3 = X_n^T \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -4 \\ -4 & \frac{96}{7} \end{pmatrix} X_n$$

On peut constater que le gain en énergie est important par rapport à la commande en deux coups

1.6.2. Exemple 2 : Cas d'un système multivariable

Soit le système décrit par l'expression

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} X_n + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n^1 \\ u_n^2 \end{bmatrix}$$

Nous cherchons le retour constant C qui annule le régime transitoire en deux coups

Les matrices $A^{-1}B$ et $A^{-2}B$ s'écrivent respectivement

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Le choix de la base $(A^{-1}b_1, A^{-1}b_2, A^{-2}b_1)$ détermine C par les deux premières lignes de

$$- \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\text{soit } C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

La réaction d'état à réaliser est donc :

$$U_n = \begin{bmatrix} u_n^1 \\ u_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} X_n$$

Une autre valeur de C peut être obtenue en permutant u_n^1 et u_n^2 .

L'équation du système écrite sous la forme :

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} X_n + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n^2 \\ u_n^1 \end{bmatrix}$$

donne pour matrice $A^{-1}B$ et $A^{-2}B$ respectivement :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Le retour C' correspondant au nouveau choix de variables de commandes est déterminé par les deux premières lignes de

$$- \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \quad \text{soit} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La réaction à réaliser est donc

$$U_n = \begin{bmatrix} u_n^1 \\ u_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} X_n$$

1.6.3. Application à la reconstitution de l'état en temps minimum

Le problème de la reconstitution de l'état en temps minimum tel que l'a défini par exemple Luentberger [1] est le problème dual du problème de commande en temps minimum discuté ci-dessus.

Le système (S_1) dont on veut reconstituer l'état a pour équations :

$$(S_1) \begin{cases} X_{n+1} = AX_n + BU_n \\ Y_n = C X_n \end{cases} \quad (II\ 1,47)$$

où Y_n désigne la sortie du système. B et C^T sont de dimension $q \times \ell$

Le système associé (S_2) - l'observateur - a pour équation

$$(S_2) \quad \hat{X}_{n+1} = A \hat{X}_n + BU_n + H (C \hat{X}_n - Y_n) \quad (II\ 1,48)$$

On souhaite trouver la matrice de gain H telle que l'erreur $X_n - \hat{X}_n = \tilde{X}_n$ soit nulle en temps minimum.

D'après les équations précédentes, il vient :

$$\tilde{X}_{n+1} = (A+H C) \tilde{X}_n \quad (II\ 1,49)$$

On doit donc déterminer la matrice H telle que le produit $(A+HC)^m$ soit nul en temps minimum.

Il est immédiat que les résultats ci-dessus permettant de déterminer C tel que $(A+BC)^m$ soit nul permettent également de déterminer la matrice H de (II 1,49) lorsque C est connu : il suffit d'appliquer les résultats précédents au système dual caractérisé par $(A^T + C^T H^T)^m = 0$

Le temps minimal de commande sera donc m_0 indice d'observabilité du système (A,C) .

Une valeur de la matrice H solution sera donnée par analogie à la formule (II 1,30) par les ℓ premières colonnes de la matrice

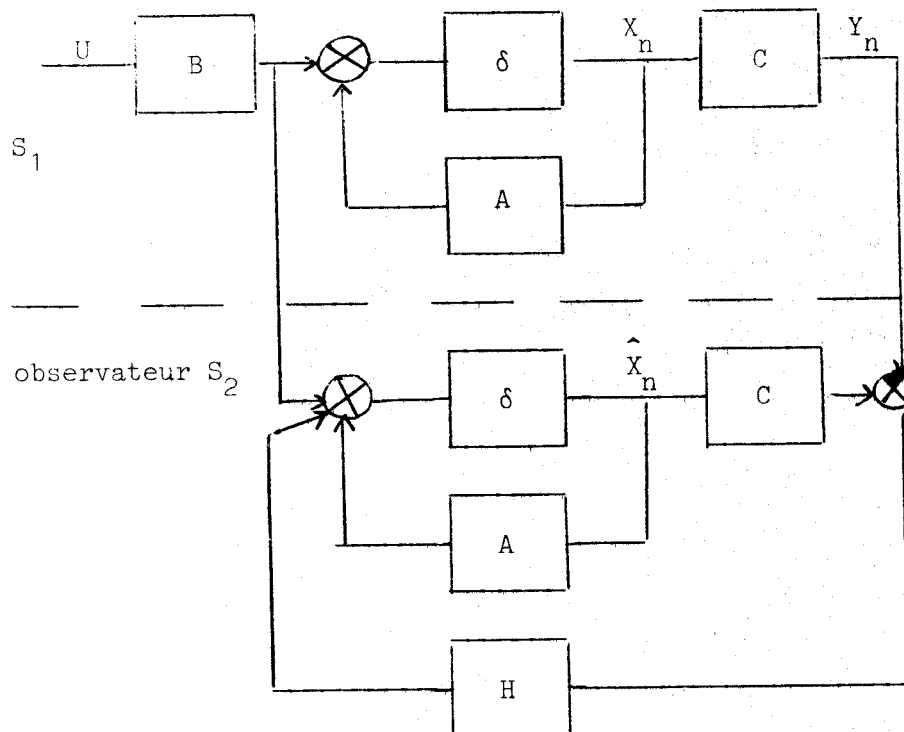
$$- \begin{bmatrix} C & A^{-1} \\ \vdots & \vdots \\ U_j & A^{-i} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

(II 1,50)

où les vecteurs U_j sont choisis de façon analogue aux V_j de (II 1,30) : à partir des vecteurs lignes de l'expression $[A^{-1T} C^T, \dots, A^{-mT_0} C^T]^T$

notée $\underbrace{[U_1^T, U_2^T, \dots, U_{\ell}^T, \dots, U_{m_0}^T]}_{A^{-1T} C^T}$, nous formons une base (unique) en choisissant les vecteurs U_j indépendants de $U_1, U_2, \dots, U_{j-1}$.

La structure obtenue avec cet observateur en temps minimum est donnée ci-dessous figure 1 :



H tel que $(A+HC)^m = 0$ - δ représente ici l'opérateur de décalage temporel

figure 1

On pourrait envisager également le cas de matrices de gain H_n variables avec le temps.

II - Recherche d'un modulateur pour une commande optimale

2.1. - Position du problème

Dans cette seconde partie, nous allons plus particulièrement considérer la commande échantillonnée des processus continus monovariables.

La commande sera élaborée à partir d'informations prises à des instants discrets puis modulés sous forme d'impulsions /6/.

L'introduction de la commande par impulsions dans les boucles de régulation se justifie par sa mise en oeuvre aisée, associée aux progrès de la technologie des circuits électroniques, et par le caractère inhérent à la constitution même du régulateur permettant de commander des organes de puissance à partir de signaux de faible puissance /7/ .

Nous souhaitons transférer l'état du filtre (continu) à réguler de l'état initial X_n à l'état imposé X_d en un temps de commande fixé T .

Des considérations d'ordre pratique en particulier dans le cas de commande à partir de micro-calculateur conduisent à choisir la commande sous forme de m crénaux (figure 2)

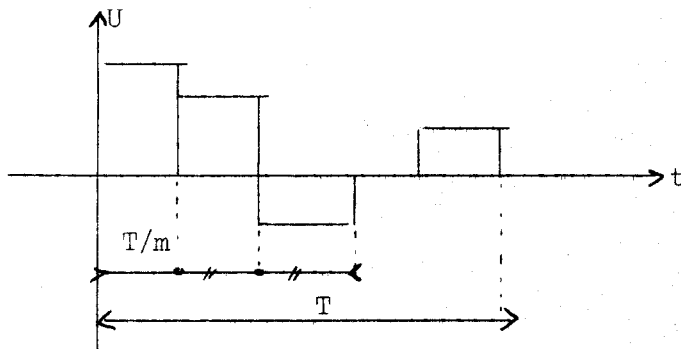


figure 2

Cette séquence de commande peut être réalisée à partir d'un filtre associé convenablement initialisé et dont la sortie échantillonnée à chaque intervalle de temps T/m est bloquée par un bloqueur d'ordre zéro. On réalise ainsi un signal de commande multimodulé /8//9/.

Le schéma de régulation est le suivant (figure 3) :

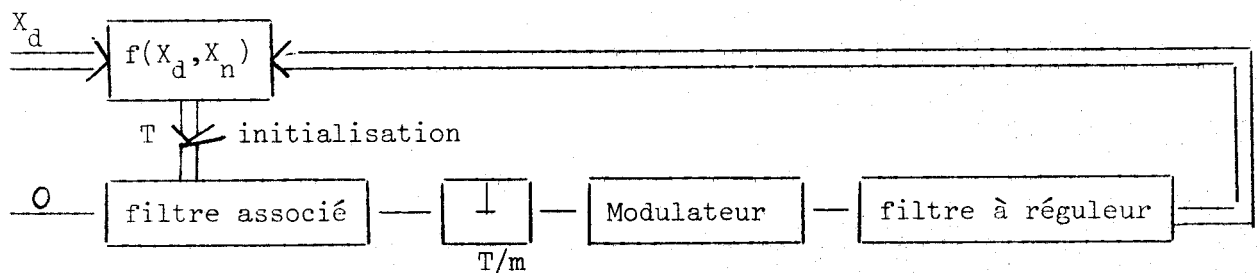


figure 3

Le filtre associé va être déterminé de façon à minimiser l'énergie de commande
$$\sum_{i=0}^{m-1} u_{n+i}^2$$

Avec ce choix de modulation et entre deux instants d'échantillonnage, (T/m) , l'équation d'état du filtre à réguler est supposé s'écrire sous la forme :

$$X_{n+1} = AX_n + Bu_n \quad (\text{II } 2,1)$$

où A est de dimensions $q \times q$ et B de dimensions $q \times 1$.

La matrice A obtenue à partir d'un filtre continu est régulière (puisque c'est l'exponentielle d'une autre matrice).

2.2. - Utilisation des pseudo-inverses pour la détermination du filtre associé

En utilisant le principe du maximum de Halkin /10/ , il serait possible

de déterminer le filtre associé tel que la séquence de commande minimise la fonctionnelle $\sum_{i=0}^{m-1} u_{n+i}^2$ compte-tenu de la contrainte récurrente (22 2,1). cette méthode nécessiterait alors l'introduction d'une fonction hamiltonienne.

Au lieu d'utiliser le principe du maximum, nous exploiterons les résultats obtenus à l'aide des pseudo-inverses de matrices et plus précisément l'équation (I 2,13) pour obtenir le filtre associé.

La meilleure solution au sens des moindres carrés de l'équation

$$X_d = A^m X_n + [A^{m-1} B \dots B] \begin{bmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+m-1} \end{bmatrix} \quad (\text{II } 2,2)$$

est, lorsque le système est supposé commandable en m coups : (cf chapitre I)

$$\begin{bmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+m-1} \end{bmatrix} = Cd^+_{(A,B)} [X_d - A^m X_n] = Cd^T [CdCd^T]^{-1} [X_d - A^m X_n] \quad (\text{II } 2,3)$$

Soit

$$\begin{cases} Y_{n+1} = A' Y_n \\ y_n = C Y_n \end{cases} \quad (\text{II } 2,4)$$

les équations du filtre associé supposé d'ordre p

Le vecteur Y_n d'ordre p caractérise l'état de ce filtre à l'instant n et y_n sa sortie.

Les sorties successives $y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+m-1}$ sont liées à Y_n par la relation :

$$\begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA' \\ \vdots \\ CA'^{m-1} \end{bmatrix} Y_n = Ob_{(A',C)} Y_n \quad (\text{II } 2,5)$$

où l'on a posé

$$\begin{bmatrix} C \\ CA' \\ \vdots \\ CA'^{m-1} \end{bmatrix} = Ob_{(A',C)} \quad (II\ 2,6)$$

Nous avons donc à déterminer $A'_{(p \times p)}$, $C_{(1 \times p)}$ et $Y_n(p \times 1)$

tels que

$$Ob_{(A',C)} Y_n = Cd^+_{(A,B)} [\bar{X}_d - A^m X_n] \quad (II\ 2,7)$$

$(m \times p)(p \times 1) \quad (m \times q) \quad (q \times 1)$

A priori, il existe plusieurs solutions. Pour tenir compte des q paramètres du vecteur $\bar{X}_d - A^m X_n$, il est nécessaire de prendre p supérieur ou égal à q . A partir d'une solution, on peut en trouver une infinité d'autres en augmentant l'ordre du système par des modes non observables.

Nous allons déterminer un filtre associé d'ordre minimum q ce qui conduit à résoudre les équations

$$Ob = Cd^+ G \quad (II\ 2,8)$$

$$Y_n = G^{-1} [\bar{X}_d - A^m X_n] \quad (II\ 2,9)$$

où G est une matrice régulière de dimensions $q \times q$

Une solution est obtenue en posant :

$$G = - [Cd \ Cd^T] (A^T)^{-m+1} \quad (II\ 2,10)$$

ce qui donne :

$$Ob = Cd^+ [- (Cd \ Cd^T)(A^T)^{-m+1}] = -Cd^T (A^T)^{-m+1} \quad (II\ 2,11)$$

(d'après les propriétés des pseudo-inverses)

soit :

$$\begin{bmatrix} C \\ CA' \\ \vdots \\ CA'^{m-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{m-1} \end{bmatrix} \quad (II\ 2,12)$$

D'où la solution :

$$C = - B^T$$

(II 2,13)

$$A' = (A^T)^{-1}$$

$$Y_n = -(A^T)^{m-1} (Cd \ Cd^T)^{-1} (X_d - A^m X_n)$$

Le filtre associé peut être symbolisé figure 4 :

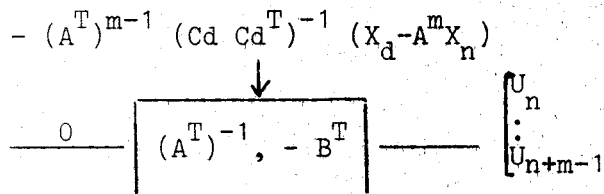


Figure 4

Il est possible d'effectuer sur les équations de ce filtre tout changement de base. En particulier, en posant $Y_n = -(A^T)^{m-1} Z_n$, il vient la solution suivante :

$$C = + B^T (A^T)^{m-1}$$

$$A' = (-A^T)^{-m+1} (A^T)^{-1} (A^T)^{m-1} = (A^T)^{-1}$$

(II 2,14)

$$Y_n = (Cd \ Cd^T)^{-1} (X_d - A^m X_n)$$

correspondant à $G = Cd \ Cd^T$.

Le filtre correspondant est représenté figure 5 :

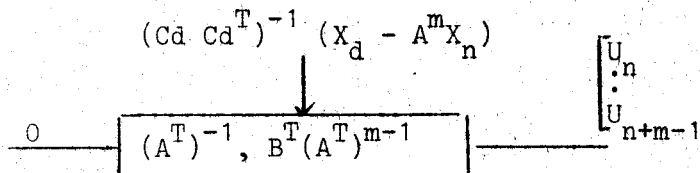


Figure 5

Remarques :

a) Interprétation des résultats

Le filtre associé qui minimise l'énergie de commande est caractérisé par les matrices $(A^T)^{-1}$, B^T . Nous retrouvons là l'équation du filtre adjoint /3/.

La commande optimale en T secondes du système échantillonné aux intervalles de temps T/m d'équation $X_{n+1} = A X_n + B u_n$ est réalisée à partir d'une initialisation convenable du filtre adjoint $Y_{n+1} = (A^T)^{-1} Y_n$ de sortie $y = -B^T Y_n$.

On retrouve ainsi dans l'hypothèse discrète certains résultats déjà obtenus par une démarche différente, relatifs à la commande à énergie minimale des processus continus /10/.

b) Choix de la modulation

Les résultats précédents ont été obtenus en choisissant une forme de modulation particulière et un système monovariable.

Il est immédiat que pour tout autre choix de modulateur conduisant à une équation de la forme $X_{n+1} = A X_n + B U_n$ dans laquelle U_n peut être un vecteur, le filtre représenté par les équations (II 2,13) transfère le processus de l'état X_n à l'état X_d en minimisant la quantité $\sum_{i=0}^{m-1} U_{n+i}^T U_{n+i}$.

2.3. Application pratique

L'exemple proposé concerne le contrôle optimal d'un système linéaire du second ordre défini par la fonction $L(p) = \frac{1}{p(1+\tau p)}$ y désignant la sortie du processus et $\dot{y}$ sa dérivée, les variables d'état choisies sont les quantités $y + \tau \dot{y}$ et $\dot{y}$. Entre les instants d'échantillonnage, le processus admet la représentation matricielle suivante :

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} X_n + \begin{bmatrix} T \\ 1-D \end{bmatrix} u_n$$

avec $D = e^{-\frac{T}{mT}}$

La séquence de commande optimale s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+m-1} \end{bmatrix} = -Cd [Cd \quad Cd^T]^{-1} [X_d - A^m X_n]$$

où $Cd = \begin{bmatrix} T & \dots & T & T \\ D^{m-1}(1-D) & \dots & D(1-D) & 1-D \end{bmatrix}$

D'où :

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+m-1} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{1-D}{1+D} (1-D^m) (1+D^m - D^{m-1}(1+D)) & -T(1-D^m) + D^{m-1}(1-D) mT \\ \frac{1-D}{1+D} (1-D^m) (1+D^m - D^{m-2}(1+D)) & -T(1-D^m) + D^{m-2}(1-D) mT \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1-D}{1+D} (1-D^m) (1+D^m - (1+D)) & -T(1-D^m) + (1-D) mT \end{bmatrix} \times \left[X_d - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D^m \end{bmatrix} X_n \right]$$

avec $\Delta = T(1-D^m) \left[m \frac{1-D}{1+D} (1+D^m) - (1-D^m) \right]$

Le filtre associé correspondant est défini par les équations (II 2,13) soit :

$$Y_n = -\frac{1}{T\Delta} \begin{bmatrix} \frac{1-D}{1+D} (1-D^{2m}) & -T(1-D^m) \\ -T D^{m-1} (1-D^m) & D^{m-1} mT^2 \end{bmatrix} \left[X_d - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D^m \end{bmatrix} X \right]$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$$

$$C = - \begin{bmatrix} T & 1-D \end{bmatrix}$$

Une simulation numérique a été effectuée pour l'ensemble des paramètres suivants :

Conditions initiales	$x_0 = 1$ $\dot{x}_0 = 1$	Constante de temps du filtre = 1s
Conditions finales	$x_d = 0$ $\dot{x}_d = 0$	temps de réponse fixé $T = 2s$

Une variation du paramètre m de 2 à 10 conduit aux résultats suivants :

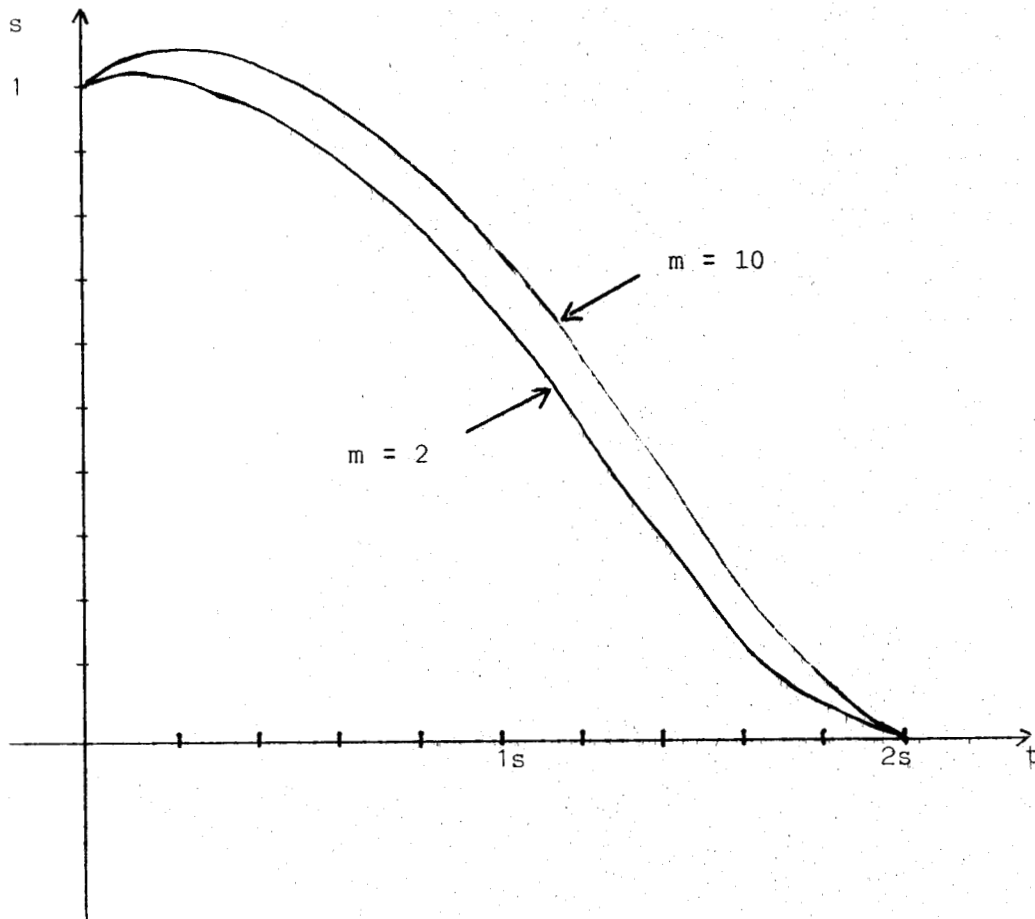
m	y_0	y'_0
2	0,343	- 0,372
4	0,007	0,113
6	- 0,079	0,318
8	- 0,122	0,499
10	- 0,147	0,659

Une simulation a été réalisée pour $m = 2$ et $m = 10$ /11/.

Le filtre adjoint a été obtenu par l'échantillonnage du filtre continu $\frac{1}{p(1-\tau p)}$

L'initialisation de ce filtre est obtenu par l'utilisation d'un calculateur à temps réel. Le processus à réguler est simulé sur un calculateur hybride AD 32.

Les réponses obtenues sont reproduites figure 6.



Résultat de la simulation hybride

Figure 6



Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre deux types de commande discrète d'un processus.

D'une part, nous avons déterminé une structure optimale au sens de l'énergie amenant à zéro l'état d'un processus par réaction d'état. Les paramètres de cette réaction sont en général variables.

Un retour constant assurant un amortissement du régime transitoire en temps fini par une commande le plus souvent sous optimale a été également défini. Le problème de la reconstitution de l'état d'un processus en temps minimum tel que l'a défini Luerberger, dual du problème de la commande en temps minimum a pu être envisagé à partir des mêmes outils.

D'autre part, nous avons montré qu'une régulation échantillonnée optimale d'un processus peut être obtenue par un filtre adjoint convenablement initialisé. Le modulateur réalisant une structure optimale a été simulé sur un processus du 2ème ordre.

CHAPITRE III

Commande des systèmes discrets par gains variables.

Introduction

Nous avons calculé dans le chapitre précédent les retours permettant de réaliser la commande d'un processus par réaction d'état. L'emploi de ce type de commande suppose que toutes les composantes du vecteur état sont accessibles.

Lorsqu'une partie seulement des variables d'état est disponible, il est possible d'envisager une compensation par réaction de sortie et gain variable K_i dans la chaîne d'action /1/ à /6/.

Le problème du régulateur en temps fini se formule alors comme suit : trouver un instant m fini et une séquence de gains K_i tels que l'état X_{n+m} soit nul quel que soit l'état initial X_n .

Une telle séquence de gains sera en fait répétée périodiquement afin de maintenir l'état à zéro en annulant l'effet des perturbations.

Dans la première partie de ce chapitre, nous démontrons un ensemble de relations vérifiées par les séquences de gains solutions, en particulier les séquences de longueur minimale.

Cela nous permet dans un second volet d'établir une procédure de calcul donnant une séquence de gains solutions pour une classe importante de systèmes observables et commandables.

Dans les deux dernières parties de ce chapitre, nous appliquons cette procédure d'abord à un processus échantillonné monovarié du 3ème ordre simulé sur calculatrice hybride et pour lequel nous déterminons la séquence de gains sous forme explicite, ensuite à un système multivarié simulé sur ordinateur.

I. - Caractéristiques des systèmes asservis à gains variables.

1.1. - Première formulation du problème.

Considérons le système multivariable linéaire décrit par les équations (III 1, 1) et (III 1, 2) :

$$X_{n+1} = A X_n + B U_n \quad (\text{III } 1, 1)$$

$$Y_n = C X_n \quad (\text{III } 1, 2)$$

avec A, B, C matrices de dimensions respectives $(q \times q)$, $(q \times 1)$, $(r \times q)$ et de rang maximum $(1, r \leq q)$. Y_n représente la sortie du système.

Nous cherchons à transférer le système de l'état initial X_n jusqu'à l'origine en un temps fini m au moyen de m réactions de sortie du type :

$$U_{n+i} = K_i Y_{n+i} \quad (\text{III } 1, 3)$$

où K_i de dimensions $(1 \times r)$ est une matrice de gains.

Le schéma de régulation est le suivant (Fig.1) :

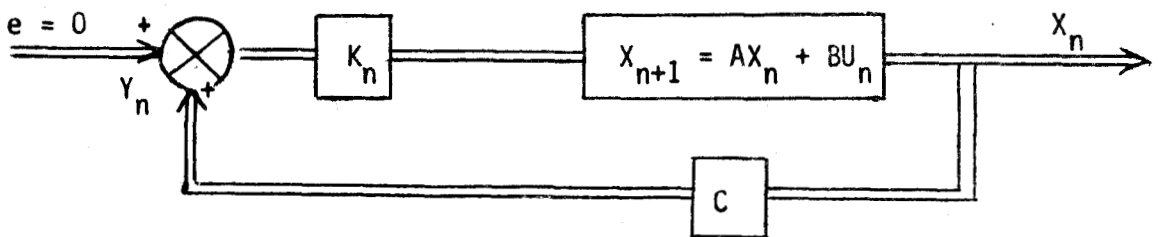


FIGURE 1

On peut calculer l'état à l'instant $(n+m)$ en fonction de l'état initial :

$$X_{n+m} = (A + B K_{m-1} C) \dots (A + B K_0 C) X_n \quad (\text{III } 1, 4)$$

$$= \prod_{i=0}^{m-1} (A + B K_i C) X_n \quad (\text{III } 1, 5)$$

La condition d'amortissement en temps fini impose qu'il existe un nombre m et une séquence de gains $K_0, \dots, K_{m-1}$ tels que l'état final soit nul quel que soit l'état initial X_n . D'où l'équation :

$$\prod_{i=0}^{m-1} (A + B K_i C) = 0 \quad (\text{III } 1, 6)$$

Cette équation peut s'écrire facilement sous une autre forme en faisant apparaître les matrices de commandabilité et d'observabilité /7/ :

$$A^m + Cd \begin{bmatrix} K_0 & & & 0 \\ & K_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_{m-1} \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & & & \\ -CBK_0 & I_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -CA^{m-1}BK_0 & \dots & -CBK_{m-2} & I_1 \end{bmatrix}^{-1} Ob = 0 \quad (\text{III } 1, 7)$$

$$\text{où } Cd = [A^{m-1} B \dots B] \quad (\text{III } 1, 8)$$

$$\text{et } Ob = [C^T \dots A^{m-1} C^T]^T \quad (\text{III } 1, 9)$$

A partir des relations (III 1, 6) et (III 1, 7), nous allons dégager quelques premières propriétés des gains variables K_i solutions.

1.2. - Commandabilité et observabilité, conditions nécessaires :

La matrice A étant supposée régulière, une condition nécessaire pour que l'équation (III 1, 7) ait une solution est que les matrices de commandabilité et d'observabilité soient de rang maximum q .

Ceci traduit une propriété bien connue /5/ /6/ : les sous-espaces non observables ou non commandables ne sont pas affectés par le retour.

Nous supposons donc le système (A, B, C) décrit par les équations (III 1, 1) et (III 1, 2) commandable et observable.

L'indice m devra être supérieur ou égal aux indices de commandabilité et observabilité.

(En fait, si les modes non commandables ou non observables sont suffisamment stables, il suffit de s'intéresser aux seules composantes commandables et observables).

1.3. - Définition et calcul des gains "fondamentaux" :

1.3.1. - Séquence de longueur minimale :

L'équation (III 1, 6) $\prod_{i=0}^{m-1} (A + B K_i C) = 0$ implique qu'un certain

nombre de matrices $(A + B K_i C)$ sont singulières.

Or, si deux matrices carrées M et N sont telles que :

- M est régulière
- MN = 0

la matrice N est la matrice nulle.

Par suite, le premier et le dernier gains de la séquence de longueur minimale rendent la matrice $(A + B K_i C)$ singulière.

1.3.2. - Choix de K_i pour rendre $(A + B K_i C)$ singulière :

En généralisant la factorisation donnée en /8/, on obtient quelles que soient les matrices $A(q \times q)$, $B(q \times 1)$, $C(r \times q)$, $K(1 \times r)$:

$$\begin{bmatrix} A + B K C & B \\ 0 & -I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ K C A^+ & I_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & u \\ v & -I_1 + K C A^+ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & A^+ B \\ 0 & I_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ K C & I_1 \end{bmatrix}$$

(III 1, 10)

où I_q et I_1 sont les matrices identités de dimensions respectives $(q \times q)$ et (1×1)

$$\begin{aligned} u &= [\bar{I}_q - AA^+]B \\ v &= KC^T [\bar{I}_q - A^+A] \end{aligned}$$

Cette factorisation est vraie non seulement pour le pseudo-inverse au sens de Moore-Penrose de A (A^+) mais aussi pour tout pseudo-inverse reflexif de A (A_r^-) (c'est à dire vérifiant : $A_r^- AA_r^- = A_r^-$ en plus de $AA_r^- A = A$)

De la relation (III 1, 10), il vient :

$$\text{rg } [A+BKC] = \text{rg} \begin{bmatrix} A & u \\ v & -I_1 + KCA^+B \end{bmatrix} - 1 \quad (\text{III 1, 11})$$

Dans le cas présent d'une matrice A régulière, on obtient :

$$\text{rg } [A+BKC] = q - 1 + \text{rg } [I_1 + KCA^{-1}B] \quad (\text{III 1, 12})$$

et en 'rangeant' K avec B :

$$\text{rg } [A+BKC] = q - r + \text{rg } [I_r + CA^{-1}BK] \quad (\text{III 1, 13})$$

Par suite, la matrice $(A+BKC)$ est singulière si et seulement si les matrices $(I_1 + KCA^{-1}B)$ et $(I_r + CA^{-1}BK)$ le sont .

La matrice $(I_1 + KCA^{-1}B)$ qui apparaît ici est le complément de Sch_{ur}

$$\text{de } A \text{ dans } M = \begin{bmatrix} A & B \\ KC & -I_1 \end{bmatrix} \quad /10/ /11/ .$$

En monovariante, les équations (III 1, 12) et (III 1, 13) s'écrivent :

$$\text{rg } [A + kBC] = q - 1 + \text{rg } [1 + kCA^{-1}B] \quad (\text{III 1, 14})$$

Pour rendre $(A+kBC)$ singulière, il est nécessaire et suffisant de prendre pour valeur de k : $k_f = -1/(CA^{-1}B)$, ce qui suppose $CA^{-1}B \neq 0$

En multivariante, si $l = r$ et si la matrice $CA^{-1}B$ est régulière, le choix de K égal à $K_f = -[CA^{-1}B]^{-1}$ rend la matrice $(A+BKC)$ de rang $(q-1)$ Ce choix est unique.

D'une façon plus générale, si s désigne le rang de $CA^{-1}B$, le rang des matrices $[I_1 + KCA^{-1}E]$ et $[I_r + CA^{-1}BK]$ ne peut être inférieur à $(1-s)$ et $(r-s)$, quel que soit K .

Les inégalités :

$$\text{rg } [I_1 + KCA^{-1}E] \leq 1 \quad (\text{III } 1, 15)$$

$$\text{et } \text{rg } [I_r + CA^{-1}BK] \leq r \quad (\text{III } 1, 16)$$

peuvent présenter plusieurs solutions en K : il convient de choisir K tel que $CA^{-1}BK$ et $KCA^{-1}E$ aient une ou plusieurs valeurs propres égales à (-1) .

Le gain K peut être choisi de façon à rendre la matrice $(A+BKC)$ de rang minimum $(q-s)$.

Nous nous appuyons sur le théorème suivant /9/.

Etant donné une matrice G $(rx1)$, une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice K de dimensions $(1xr)$ vérifie l'une ou l'autre des relations :

$$\text{rg } [I_1 - KG] = 1 - \text{rg } [G] \quad (\text{III } 1, 17)$$

$$\text{rg } [I_r - GK] = r - \text{rg } [G] \quad (\text{III } 1, 18)$$

est que K soit un pseudo-inverse de G .

Il en résulte que si $K = K_f = - [CA^{-1}B]^-$ (où M^- désigne un pseudo-inverse de M), la matrice $(A+BKC)$ d'après (III 1, 12, 13, 17, 18) est de rang minimum $(q-s)$.

Un choix particulier de gain est $\hat{K}_f = - [CA^{-1}B]^+$.

Le choix du pseudo-inverse au sens de Moore-Penrose trouve sa justification dans le fait que l'on minimise la somme des carrés des

éléments k_{ij} ce qui assure des gains peu importants /5/.

Les gains K_f se déduisent du gain K_f par la relation :

$$K_f = \hat{K}_f + U - \hat{K}_f [CA^{-1}B] U [CA^{-1}B] \hat{K}_f \quad (\text{III } 1, 19)$$

où U est une matrice arbitraire de dimensions convenables /9/.

Nous appellerons 'gains fondamentaux' les gains K_f .

Si $CA^{-1}B$ est de rang 0, la matrice $(A+BKC)$ est toujours de rang q et par suite, on ne peut pas trouver une séquence de gains annulant le régime transitoire en temps fini.

1.3.3. Nombre de gains fondamentaux dans la séquence.

Dans le but de minimiser la longueur de la séquence de gains, nous n'utiliserons dans la suite que des gains 'fondamentaux' pour diminuer le rang de $(A+BKC)$.

L'inégalité de Sylvester appliquée aux matrices M et N de dimensions compatibles donne :

$$\text{rg}(M) + \text{rg}(N) - q \leq \text{rg}(MN) \leq \min [\text{rg}(M), \text{rg}(N)] \quad (\text{III } 1, 20)$$

Le rang de $(A+BK_f C)$ étant $(q-s)$, l'équation (III 1, 6)

$$\prod_{i=0}^{m-1} (A+BK_i C) = 0 \text{ ne pourra être vérifiée qu'en utilisant au moins } p \text{ fois}$$

les gains 'fondamentaux' K_f avec l'entier p tel que :

$$(p-1) s < q \leq ps \quad (\text{III } 1, 21)$$

En monovariante, la séquence de gains comportera au moins q fois le gain $k_f = -1/(CA^{-1}B)$.

1.4. Etude du produit de matrices $(A+BK_m C) \dots (A+BK_1 C)$.

1.4.1. Rang du produit.

Nous établissons en annexe IV un théorème permettant d'exprimer

le rang du produit $\prod_{i=0}^{m-1} (A+BK_i C)$ en fonction des matrices de Markov

$CA^{-i}B$ /12/. Ce théorème généralise l'équation (III 1, 12) et se traduit par les égalités (III 1, 22) et (III 1, 23) :

$$\text{rg} \left[(A+BK_{m-1}C) \dots (A+BK_0C) \right] = q-m+1+\text{rg} \begin{bmatrix} I_1 + K_0 CA^{-1}B & K_0 CA^{-2}B & \dots & K_0 CA^{-m}B \\ & \ddots & & \vdots \\ & & I_{m-2} + K_{m-2} CA^{-2}B & \\ & & & I_1 + K_{m-1} CA^{-1}B \end{bmatrix} \quad (\text{III 1, 22})$$

$$\text{rg} \left[(A+BK_{m-1}C) \dots (A+BK_0C) \right] = q-m+\text{rg} \begin{bmatrix} I_r + CA^{-1}BK_0 & CA^{-2}BK_1 & \dots & CA^{-m}BK_{m-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & I_r + CA^{-1}BK_{m-1} & \\ & & & I_r + CA^{-1}BK_{m-1} \end{bmatrix} \quad (\text{III 1, 23})$$

1.4.2. Conditions d'annulation du produit.

Afin de simplifier la suite de l'exposé, nous posons :

$$CA^{-i}B = \eta_i \quad (\text{III 1, 24})$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que le produit

$\prod_{i=0}^{m-1} (A+BK_i C)$ soit nul est donc :

$$\text{rg} \begin{bmatrix} I_1 + K_0 n_1 & K_0 n_2 & \dots & K_0 n_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & I_1 + K_{m-1} n_1 \end{bmatrix} = m-1 - q \quad (\text{III } 1, 25)$$

ou encore :

$$\text{rg} \begin{bmatrix} I_1 + n_1 K_0 & n_2 K_1 & \dots & n_m K_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & I_1 + n_1 K_{m-1} \end{bmatrix} = m-1 - q \quad (\text{III } 1, 26)$$

1.4.3. Cas particulier des systèmes monovariables.

Dans le cas particulier des systèmes monovariables ($l=r=1$), les égalités (III 1, 22) et (III 1, 23) permettent de montrer (cf annexe IV) que les produits $\prod_{i=0}^{m-1} (A+k_i BC)$ et $\prod_{i=m-1}^0 (A+k_i BC)$ ont même rang.

Il en résulte la remarque importante suivante :

Si une séquence de gains $k_0, \dots, k_{m-1}$ conduit à l'annulation du régime transitoire, la séquence inverse $k_{m-1}, \dots, k_0$ a la même propriété.

1.5. Résumé

Toute séquence de gains amortissant le régime transitoire en temps fini du processus dynamique décrit par les équations (III 1, 1), (III 1, 2) où :

- A, B, C sont de rang maximum
- le système (A, B, C) est commandable et observable

vérifie les équations nécessaires et suffisantes (III 1, 24) et (III 1, 25).

Une telle séquence de gains ne peut exister que si la matrice $CA^{-1}B$ est différente de la matrice nulle. Le nombre de gains nécessaires est supérieur ou égal aux indices de commandabilité et d'observabilité.

Si l'on n'utilise que les gains 'fondamentaux' $k_f = - [CA^{-1}B]^{-1}$ pour rendre la matrice $(A+BKC)$ singulière, la séquence de gains comprendra au moins p fois les gains fondamentaux, p vérifiant :

$$(p-1) s < q \leq ps$$

(s rang de $CA^{-1}B$), en particulier pour la séquence de longueur minimale comme premier et dernier gain.

En monovariabale, le gain $k_f = - 1/(CA^{-1}B)$ se trouve au moins q fois dans la séquence. Si une séquence $k_0, \dots, k_{m-1}$ est solution, la séquence $k_{m-1}, \dots, k_0$ l'est également.

II. - Procédure de calcul de la séquence des gains.

L'ensemble des propriétés mises en évidence précédemment, en particulier les égalités (III 1, 22 à 25), permet d'établir une procédure de calcul de la séquence des gains conduisant à un amortissement en temps fini du système décrit par les équations (III 1, 1) et (III 1, 2).

Il ne s'agit pas de donner ici toutes les séquences de gains possibles mais, sous certaines conditions que nous préciserons, une séquence adéquate.

Nous dégagerons d'abord à partir des systèmes monovariabiles les éléments essentiels de la procédure de calcul.

2.1. Cas des systèmes monovariables.

Dans le cas des systèmes monovariables, l'égalité (III 1, 22) s'écrit :

$$\text{rg} \left(\prod_{i=0}^{m-1} (A + k_i BC) \right) = q - m + \text{rg} (M) \quad (\text{III } 2, 1)$$

avec :

$$M = \begin{bmatrix} 1+k_0 n_1 & \dots & k_0 n_m \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1+k_{m-1} n_1 \end{bmatrix} \quad (\text{III } 2, 2)$$

de dimension $(m \times m)$.

L'annulation du régime transitoire en temps fini repose sur l'équation :

$$\text{rg} \left(\prod_{i=0}^{m-1} (A + k_i BC) \right) = 0 \quad (\text{III } 2, 3)$$

Nous allons choisir successivement les gains pour que les produits correspondants soient de rang $(q-1)$, $(q-2)$, et enfin 0.

2.1.1. Choix des gains pour rendre le produit de rang $(q-1)$ et $(q-2)$

D'après l'équation (III 1, 14), le gain fondamental $k_0 = k_f = -1/CA^{-1}L$ rend la matrice $(A+k_f BC)$ de rang $(q-1)$.

Le nombre de gains fondamentaux dans la séquence de gains est q d'après (III 1, 21). Mais il ne suffit pas de choisir comme gain le gain k_f dans le produit des matrices $\prod$ pour abaisser le rang de ce produit d'une unité.

Ainsi le rang de $(A+k_f BC)^2$ est :

$$q - 2 + \text{rg} \begin{bmatrix} 0 & k_f n_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq q - 2 \quad \text{en général.}$$

Pour obtenir un produit de rang $(q-2)$, il faudra donc utiliser un gain intermédiaire k_1 entre $k_0 = k_f$ et $k_2 = k_f$ et réaliser :

$$\text{rg} \left(\prod_{i=0}^2 (A + k_i BC) \right) = q - 2 \quad (\text{III } 2, 4)$$

ce qui amène à résoudre l'équation (III 2, 5) :

$$q - 3 + \text{rg} \begin{bmatrix} 0 & k_f n_2 & k_f n_3 \\ 0 & 1+k_1 n_1 & k_1 n_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = q - 2 \quad (\text{III } 2, 5)$$

On voit donc que les q gains fondamentaux seront séparés par un certain nombre de gains 'intermédiaires' choisis pour que chaque gain k_f diminue effectivement d'une unité le rang du produit.

2.1.2. Choix des gains pour rendre le produit $\prod$ de rang $(q-3)$.

L'introduction d'un gain supplémentaire k_3 amène à considérer la matrice :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & k_f n_2 & \boxed{\begin{matrix} k_f n_3 & k_f n_4 \\ k_1 n_2 & k_1 n_3 \end{matrix}} \\ 0 & 1+k_1 n_1 & \\ 0 & 0 & 0 & k_f n_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1+k_3 n_1 \end{bmatrix} \quad (\text{III } 2, 6)$$

en général de rang 2, le mineur $\begin{bmatrix} k_{fn3} & k_{fn4} \\ k_{1n2} & k_{1n3} \end{bmatrix}$ étant non nul sauf cas particulier.

On voit donc qu'un gain supplémentaire dans la relation (III 2, 1)

- augmente m d'une unité (3 à 4)

- augmente le rang de la matrice M (1 à 2) et ceci du seul fait des gains précédemment choisis.

Par suite, le produit ne diminue pas de rang et il est nécessaire d'introduire plus d'un gain supplémentaire.

De même, la matrice M (III 2, 7) correspond aux gains supplémentaires k_3 et k_4 .

$$M = \begin{bmatrix} 0 & k_{fn2} & \boxed{\begin{matrix} k_{fn3} & k_{fn4} & k_{fn5} \\ k_{1n2} & k_{1n3} & k_{1n4} \\ 0 & k_{fn2} & k_{fn3} \end{matrix}} \\ 0 & 1+k_{1n1} & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \quad 1+k_{3n1} \quad k_{3n2} \\ 0 & 0 & 0 \quad 0 \quad 1+k_{4n1} \end{bmatrix} \quad (\text{III 2, 7})$$

est en général au moins de rang 3 du fait des gains précédents.

Deux gains supplémentaires k_3 et k_4 ne suffisent donc pas en général pour obtenir un produit de rang $(q-3)$, le rang de M ne pouvant descendre en dessous du nombre de gains précédemment choisis sauf cas particulier.

Il faudra choisir 3 gains $k_3, k_4, k_5 = k_f$ tels que les vecteurs lignes correspondants dans M appartiennent au sous espace engendré par les vecteurs lignes correspondant aux gains $k_0 = k_f, k_1, k_2 = k_f$.

Nous allons maintenant généraliser le procédé.

2.1.3. Choix des gains intermédiaires.

Pour formaliser le problème, nous considérons le produit $\prod_i$ produit de $m(i)$ matrices et supposé de rang $(q-i)$. Soit M_i la matrice

correspondant à II dans l'égalité (III 2, 1). Nous avons donc :

$$\text{rg} (\prod_i) = q - m(i) + \text{rg} (M_i) = q - i \quad (\text{III 2, 7})$$

Nous cherchons les gains $k_i^1, k_i^2, \dots, k_i^j = k_f$ (j étant à déterminer, tels que :

$$\prod_{i+1} = (A + k_i^j bC) \dots (A + k_i^1 bC) \prod_i \quad (\text{III 2, 8})$$

produit de $m(i+1) = m(i) + j$ matrices soit de rang $(q - (i+1))$.

Il correspond à $\prod_{i+1}$ l'égalité (III 2, 9) :

$$\text{rg} (\prod_{i+1}) = q - m(i+1) + \text{rg} (M_{i+1}) \quad (\text{III 2, 9})$$

où la matrice M_{i+1} peut être écrite sous la forme :

$$M_{i+1} = \left[\begin{array}{c|c} M_i & M_i' \\ \hline 0 & \begin{array}{ccc} 1+k_i^1 n_1 & \dots & k_i^1 n_j \\ & \ddots & \\ & & 1+k_i^{j-1} n_1 & k_i^{j-1} n_2 \\ & & & 0 \end{array} \end{array} \right] \quad (\text{III 2, 10})$$

Nous énonçons alors le théorème suivant :

Une condition suffisante pour que le produit $\prod_{i+1}$ soit de rang $(q - (i+1))$ est que l'on ait :

$$1^\circ \quad m(i+1) - m(i) = j \geq i+1 \quad (\text{III 2, 11, a})$$

$$2^\circ \quad \text{rg}(M_{i+1}) \leq \text{rg} \left[\begin{array}{c} M_i \\ M_i' \end{array} \right] \quad (\text{III 2, 11, b})$$

En effet, il vient alors d'après (III 2, 9) :

$$\text{rg} (M_{i+1}) \leq q - m(i+1) + \text{rg} \left[\begin{array}{c} M_i \\ M_i' \end{array} \right] \quad (\text{III 2, 12})$$

La matrice $\left[\begin{array}{c} M_i \\ M_i' \end{array} \right]$ de dimensions $(m(i) \times m(i+1))$ est de rang inférieur ou égal à $m(i)$. D'où :

$$\text{rg} (\prod_{i+1}) \leq q - m(i+1) + m(i) = q - (i+1) \quad (\text{III 2, 13})$$

On peut alors donner la procédure de calcul.

2.1.4. Procédure de calcul.

Une séquence de gains annulant le régime transitoire en temps fini est formée de $q(q+1)/2$ gains dont q fois le gain fondamental k_f comme 1er, 3ème, 6ème, ..., $j(j+1)/2$ ème gain, j variant de 1 à q .

On choisira entre le i ème et le $(i+1)$ ème gain k_f i gains intermédiaires tels que les vecteurs lignes correspondants à chacun de ces gains dans M_{i+1} (III 2, 10) appartiennent à l'espace engendré par les vecteurs lignes de $\begin{bmatrix} M_i \\ M_i' \end{bmatrix}$ (ce qui réalise la condition suffisante (III 2, 11)).

Ceci se ramène à la résolution d'équations linéaires et les conditions d'existence des solutions sont les conditions de validité de la procédure.

On a ainsi par exemple les conditions :

$$- \Delta_1 = n_1 = CA^{-1}b \neq 0 \text{ pour le calcul de } k_f.$$

$$- \Delta_2 = \begin{bmatrix} n_2 & n_3 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix} \neq 0 \text{ pour le calcul de } k_1 \text{ (d'après III 2, 5)}$$

$$- \Delta_3 = \begin{bmatrix} n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \\ n_2 & n_3 & n_4 & n_5 \\ 0 & n_2 & n_3 & n_4 \\ 0 & n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \neq 0 \text{ pour le calcul de } k_3$$

(en supposant $k_1 \neq 0$)

$$- \Delta_4 = \begin{bmatrix} n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \\ n_2 & n_3 & n_4 & n_5 \\ 0 & n_2 & n_3 & n_4 \\ 0 & 0 & n_1 & n_2 \end{bmatrix} \neq 0 \text{ pour le calcul de } k_4$$

(en supposant $k_1 \neq 0$)

etc

Nous donnons un exemple d'utilisation de cette procédure pour un système monovariable d'ordre 3 dans la troisième partie de ce chapitre.

Nous allons maintenant généraliser la procédure aux systèmes multivariables.

2.2. Cas des systèmes multivariables.

Afin de simplifier l'exposé, nous supposons dans un premier temps le rang de la matrice $CA^{-1}B$ ($r \times l$) égal à sa plus petite dimension, disons 1. Le choix de $K_f = - [CA^{-1}B]^{-1}$ donne donc :

$$I_l + K_f CA^{-1}B = 0 \quad (\text{III } 2, 14)$$

La séquence de gains comportera p fois le gain fondamental (p défini par (III 1, 21) avec cette fois $s = 1$). Les gains fondamentaux seront séparés par un certain nombre de gains intermédiaires choisis pour que chaque gain fondamental diminue le rang du produit de $s=1$ (ou de $q - (p-1)l$ pour le dernier).

2.2.1. Choix des gains intermédiaires.

Nous reprenons pour formaliser le problème les notations données en 2.1.3.

Le produit $\prod_i$, produit de $m(i)$ matrices, est supposé de rang $(q - il)$.

La matrice M_{i+1} est écrite sous la forme :

$$M_{i+1} = \left[\begin{array}{c|ccc} M_i & & & \\ \hline & I_l + K_i^1 \eta_1 & \dots & K_i^1 \eta_j \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \dots & I_l + K_i^{j-1} \eta_1 \\ & & & K_i^{j-1} \eta_2 \\ & & & 0 \end{array} \right] \quad (\text{III } 2, 15)$$

Une condition suffisante pour que le produit $\prod_{i+1}$ de rang inférieur ou égal à $(q - (i+1) 1)$ est que l'on ait :

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad m(i+1) - m(i) &\geq i+1 & (\text{III } 2, 16, a) \\ 2^\circ) \quad \text{rg } (M_{i+1}) &\leq \text{rg } \begin{bmatrix} M_i \\ M_i' \end{bmatrix} & (\text{III } 2, 16, b) \end{aligned}$$

Il vient en effet alors d'après (III 2, 9) :

$$\text{rg } (\prod_{i+1}) \leq q - m(i+1) 1 + \text{rg } \begin{bmatrix} M_i \\ M_i' \end{bmatrix} \quad (\text{III } 2, 17)$$

où la matrice $\begin{bmatrix} M_i \\ M_i' \end{bmatrix}$ de dimensions $[m(i)1 \times m(i+1)1]$ est de rang inférieur ou égal à $m(i) 1$.

D'où :

$$\text{rg } (M_{i+1}) \leq q - m(i+1) 1 + m(i) 1 \leq q - (i+1) 1 \quad (\text{III } 2, 18)$$

Pour réaliser l'inégalité (III 2, 16, b), on choisira les gains K_i tels que les lignes correspondantes dans M_{i+1} appartiennent à l'espace engendré par les vecteurs lignes de $\begin{bmatrix} M_i \\ M_i' \end{bmatrix}$.

Ceci traduit l'existence d'une matrice P telle que :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I + K_i 1 \quad K_i 2 \quad \dots \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} M_i \\ M_i' \end{bmatrix} \quad (\text{III } 2, 19)$$

ce qui conduit à résoudre des équations linéaires du type :

$$K_i 1 n_1 = P N_2 \quad (\text{III } 2, 20, a)$$

$$I_1 + K_i n_1 = P N_3 \quad (\text{III } 2, 20, b)$$

Il en résulte :

$$I_1 + K_i [n_1 - N_1 N_2^{-1} N_3] = 0 \quad (\text{III } 2, 21)$$

d'où enfin K_i si les conditions de compatibilité sont satisfaites.

2.2.2. Procédure de calcul.

Une séquence de gain s annulant le régime transitoire en temps fini est formée de $p(p+1)/2$ gains dont p fois le gain fondamental K_f comme 1er, 3ème, , $j(j+1)/2$ ème gain, j variant de 1 à p .

Entre le i ème et le $(i+1)$ ème gain K_f , on utilisera i gains intermédiaires tels que les vecteurs lignes correspondants à chacun de ces gains dans M_{i+1} (III 2, 15) appartiennent à l'espace engendré par les vecteurs lignes de $\begin{bmatrix} M_i & M_i' \end{bmatrix}$.

La compatibilité des équations linéaires correspondantes donne les conditions de validité de la procédure de calcul.

2.2.3. Remarques.

- Lorsque le rang de $(CA^{-1}B)$ est égal à sa plus petite dimension r , on peut utiliser l'équation (III 1, 23) et opérer sur les colonnes.

- Lorsque le rang de $CA^{-1}B$ est s , il convient pour obtenir des conditions de compatibilité moins sévères, de remplacer l'inéquation (III 2, 16, b) par :

$$\text{rg } (M_{i+1}) \leq \text{rg } \begin{bmatrix} M_i & M_i' \end{bmatrix} + (1-s)(i+1) \quad (\text{III 2, 22})$$

Les gains seront alors déterminés de telle sorte que parmi les vecteurs lignes correspondant à chacun des gains s vecteurs appartiennent à l'espace engendré par les lignes de $\begin{bmatrix} M_i & M_i' \end{bmatrix}$.

- Cette procédure de calcul a été simulée sur ordinateur, et est appliquée dans la quatrième partie de ce chapitre à un système multivariable.

III - Etude d'un système d'ordre 3 monovariable.

Nous donnons pour un système monovariable d'ordre 3 l'expression littérale des gains amenant une annulation en temps fini du régime transitoire, à savoir en 6 coups.

Un moteur modélisé par un système du troisième ordre à commande échantillonnée par un bloqueur d'ordre zéro, sera piloté par cet ensemble de gains. Une analyse des résultats de simulation est alors donnée.

3.1. Etude théorique.

3.1.1. Expressions des gains.

Conformément à la procédure indiquée, la séquence de gains comprendra $q(q+1)/2 = 6$ gains.

- Gain fondamental.

Le gain fondamental $k_0 = -1/CA^{-1}B$ sera le 1er, 3ème et 6ème gain de la séquence (k_0, k_2, k_5).

- Gain k_1

Entre le 1er et le 2ème gain fondamental, on introduit un gain intermédiaire k_1 tel que :

$$\text{rg} \begin{bmatrix} k_f n_2 & k_f n_3 \\ 1+k_1 n_1 & k_1 n_2 \end{bmatrix} = 1 \quad (\text{III } 3, 1)$$

ce qui donne :

$$k_1 = \frac{CA^{-3}B}{(CA^{-2}B)^2 - CA^{-1}B \cdot CA^{-3}B} \quad (\text{III } 3, 2)$$

à la condition que le dénominateur soit non nul.

- Gains k_3 et k_4

Entre le 2ème et 3ème gain fondamental, on introduit 2 gains intermédiaires k_3 et k_4 tels que le rang des matrices $M(k_3)$ et $M(k_4)$ définis ci - dessous :

$$M(k_3) = \begin{bmatrix} 0 & k_f^{n_2} & k_f^{n_3} & k_f^{n_4} & k_f^{n_5} & k_f^{n_6} \\ 0 & 1+k_1^{n_1} & k_1^{n_2} & k_1^{n_3} & k_1^{n_4} & k_1^{n_5} \\ 0 & 0 & 0 & k_f^{n_2} & k_f^{n_3} & k_f^{n_4} \\ 0 & 0 & 0 & 1+k_3^{n_1} & k_3^{n_2} & k_3^{n_3} \end{bmatrix} \quad (\text{III } 3, 3)$$

$$M(k_4) = \begin{bmatrix} 0 & k_f^{n_2} & k_f^{n_3} & k_f^{n_4} & k_f^{n_5} & k_f^{n_6} \\ 0 & 1+k_1^{n_1} & k_1^{n_2} & k_1^{n_3} & k_1^{n_4} & k_1^{n_5} \\ 0 & 0 & 0 & k_f^{n_2} & k_f^{n_3} & k_f^{n_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+k_4^{n_1} & k_4^{n_2} \end{bmatrix} \quad (\text{III } 3, 4)$$

soient identiques au rang de la matrice formée par leurs trois premières lignes.

Le mineur $\begin{vmatrix} k_f^{n_2} & k_f^{n_3} \\ 1+k_1^{n_1} & k_1^{n_2} \end{vmatrix}$ étant nul, les conditions précédentes

se réduisent à :

$$\begin{vmatrix} k_f^{n_3} & k_f^{n_4} & k_f^{n_5} & k_f^{n_6} \\ k_1^{n_2} & k_1^{n_3} & k_1^{n_4} & k_1^{n_5} \\ 0 & k_f^{n_2} & k_f^{n_3} & k_f^{n_4} \\ 0 & 1+k_3^{n_1} & k_3^{n_2} & k_3^{n_3} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{III } 3, 5)$$

et

$$\begin{vmatrix} k_f n_3 & k_f n_4 & k_f n_5 & k_f n_6 \\ k_1 n_2 & k_1 n_3 & k_1 n_4 & k_1 n_5 \\ 0 & k_f n_2 & k_f n_3 & k_f n_4 \\ 0 & 0 & 1+k_4 n_1 & k_4 n_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{III } 3, 6)$$

Le gain k_f étant non nul, on a finalement

$$k_3 = \begin{bmatrix} CA^{-3}B & CA^{-5}B & CA^{-6}B \\ k_1 CA^{-2}B & k_1 CA^{-4}B & k_1 CA^{-5}B \\ 0 & CA^{-3}B & CA^{-4}B \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} CA^{-3}B & CA^{-4}B & CA^{-5}B & CA^{-6}B \\ k_1 CA^{-2}B & k_1 CA^{-3}B & k_1 CA^{-4}B & k_1 CA^{-5}B \\ 0 & CA^{-2}B & CA^{-3}B & CA^{-4}B \\ 0 & CA^{-1}B & CA^{-2}B & CA^{-3}B \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{III } 3, 7)$$

et :

$$k_4 = \begin{bmatrix} CA^{-3}B & CA^{-4}B & CA^{-6}B \\ k_1 CA^{-2}B & k_1 CA^{-3}B & k_1 CA^{-5}B \\ 0 & CA^{-2}B & CA^{-4}B \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} CA^{-3}B & CA^{-4}B & CA^{-5}B & CA^{-6}B \\ k_1 CA^{-2}B & k_1 CA^{-3}B & k_1 CA^{-4}B & k_1 CA^{-5}B \\ 0 & CA^{-2}B & CA^{-3}B & CA^{-4}B \\ 0 & 0 & CA^{-1}B & CA^{-2}B \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{III } 3, 8)$$

à condition que les déterminants des matrices à inverser soient non nuls, ce qui implique en particulier que k_1 (donc $CA^{-3}B$) soit différent de zéro.

Les expressions données en (III 3, 7) et (III 3, 8) peuvent alors être simplifiées par k_1 .

3.1.2. Remarques.

Comme les produits $\prod_{i=0}^{m-1} (A + k_i BC)$ et $\prod_{i=m-1}^0 (A + k_i EC)$ ont même rang, la séquence inverse des gains $k_f, k_4, k_3, k_f, k_1, k_f$ amène également le système à zéro.

Les gains trouvés par la procédure sont évidemment réels.

3.2. Etude pratique.

3.2.1. Description du système.

L'asservissement considéré est représenté sur le schéma ci-dessous. (figure 2)

Il comprend , dans la chaîne d'action, un moteur représenté par la fonction de transfert $L(p) = 1/p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)$, le retour étant unitaire et l'entrée nulle (problème de régulation). Le modulateur est constitué d'un échantillonneur linéaire et sans mémoire de période T suivi d'un bloqueur d'ordre zéro B_0 .

A chaque période, le gain k prend une nouvelle valeur. La séquence de gains déterminée est répétée périodiquement afin de maintenir l'état à zéro en annulant l'effet de perturbations.

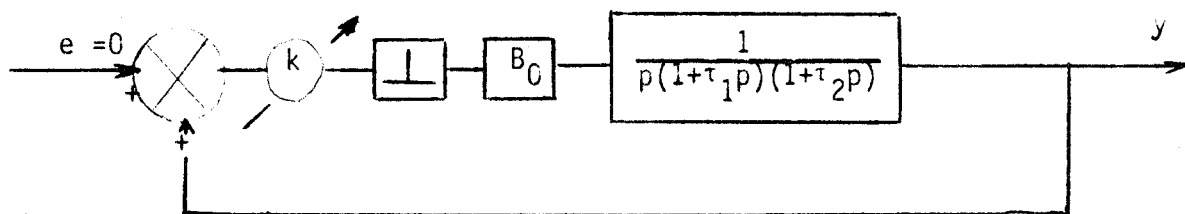


figure 2

3.2.2. Equations du système.

Le processus précédent peut être décrit par les équations :

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\tau_1^2(1-D_1) - \tau_2^2(1-D_2)}{\tau_1 - \tau_2} & \frac{\tau_1\tau_2[\tau_1(1-D_1) - \tau_2(1-D_2)]}{\tau_1 - \tau_2} \\ 0 & \frac{\tau_1 D_1 - \tau_2 D_2}{\tau_1 - \tau_2} & \frac{\tau_1\tau_2(D_1 - D_2)}{\tau_1 - \tau_2} \\ 0 & \frac{D_2 - D_1}{\tau_1 - \tau_2} & \frac{\tau_1 D_2 - \tau_2 D_1}{\tau_1 - \tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}_n$$

$$+ \begin{bmatrix} T - \tau_1 - \tau_2 + \frac{\tau_1^2 D_1 - \tau_2^2 D_2}{\tau_1 - \tau_2} \\ 1 - \frac{\tau_1 D_1 - \tau_2 D_2}{\tau_1 - \tau_2} \\ \frac{D_1 - D_2}{\tau_1 - \tau_2} \end{bmatrix} u_n \quad (\text{III } 3, 9)$$

$$u_n = k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X_n \quad (\text{III } 3, 10)$$

La sortie du système étant la position, et u la commande.

3.2.3. Valeur des gains.

La fonction de transfert adaptée pour le moteur présentant un seul pôle nul, chacun des gains est de la forme :

$$k = \frac{1}{T} f\left(\frac{\tau_1}{T}, \frac{\tau_2}{T}\right) \quad (\text{III } 3, 11)$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs numériques des gains pour différentes valeurs de $T, \frac{\tau_1}{T}, \frac{\tau_2}{T}$.

T_s	$\frac{\tau_1}{T}$	$\frac{\tau_2}{T}$	k_f	k_1	k_3	k_4
1	0,1	1	- 0,0041	1,100	- 1,780	1,140
	0,2		- 0,160	0,930	- 1,692	1,102
	0,025	0,5	10^{-8}	0,423	- 1,200	0,424
	0,05		$4 \cdot 10^{-7}$	0,394	- 1,201	0,398
	0,1		- 0,0018	0,334	- 1,176	0,356
	0,2		- 0,065	0,261	- 1,148	0,317
	0,3		- 0,193	0,277	- 1,098	0,352

Nous avons choisi comme valeurs expérimentales :

$$T = 1s \quad \frac{\tau_1}{T} = 0,2 \quad \frac{\tau_2}{T} = 0,5$$

3.2.4. Simulation.

Une simulation de ce système a été réalisée.

Le schéma de simulation est représenté figure 3.

Nous avons réglé les commandes logiques des interrupteurs électroniques Sw1 à Sw4 pour obtenir dans un premier temps la séquence $k_f, k_1, k_f, k_3, k_4, k_f$, dans un second temps la séquence inverse $k_f, k_4, k_3, k_f, k_1, k_f$.

Les équations simulées sont :

$$\begin{cases} y'''' = 10 u - 7 y'' - 10 y' \\ u = k y \end{cases} \quad (\text{III } 3, 12)$$

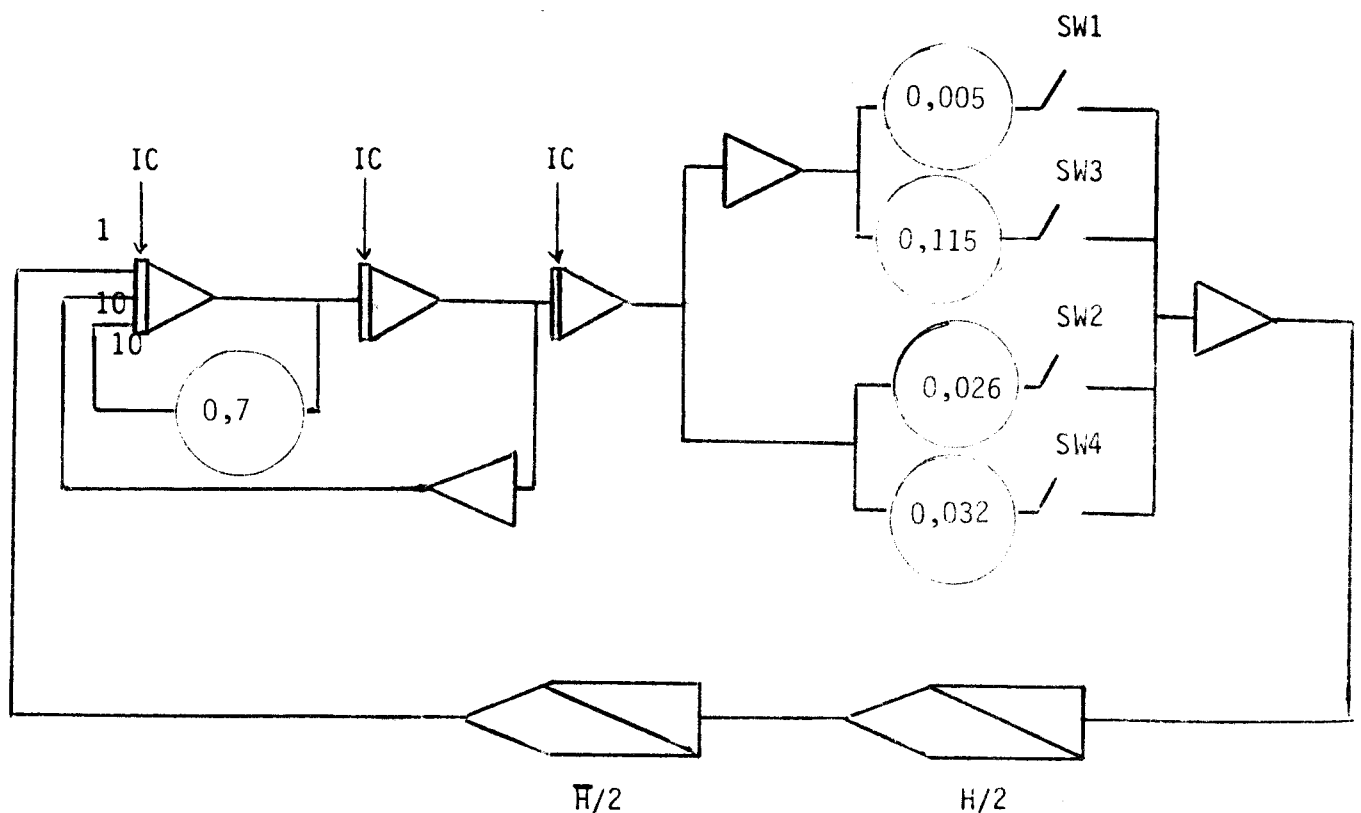


Figure 3

3.2.5. Courbes de réponse.

Nous avons représenté :

- Figure 4 : l'amortissement du système pour un ensemble de conditions initiales et la séquence de gains $k_f, k_4, k_3, k_f, k_1, k_f$ (puis $k_4, k_3, k_f, \dots$)
- Figure 5 : la réponse du système pour cette même séquence de gains mais la séquence démarrant de façon quelconque.
- Figure 6 : les réponses du système pour la séquence 'directe' et la séquence 'inverse', les conditions initiales étant identiques ($y_0, y_0' = y_0'' = 0$)

Les réponses du système pour la séquence $k_f, k_1, k_f, k_3, k_4, k_f$ lorsque le démarrage est quelconque ont la même allure que celle de la figure 4 et n'ont pas été représentées.

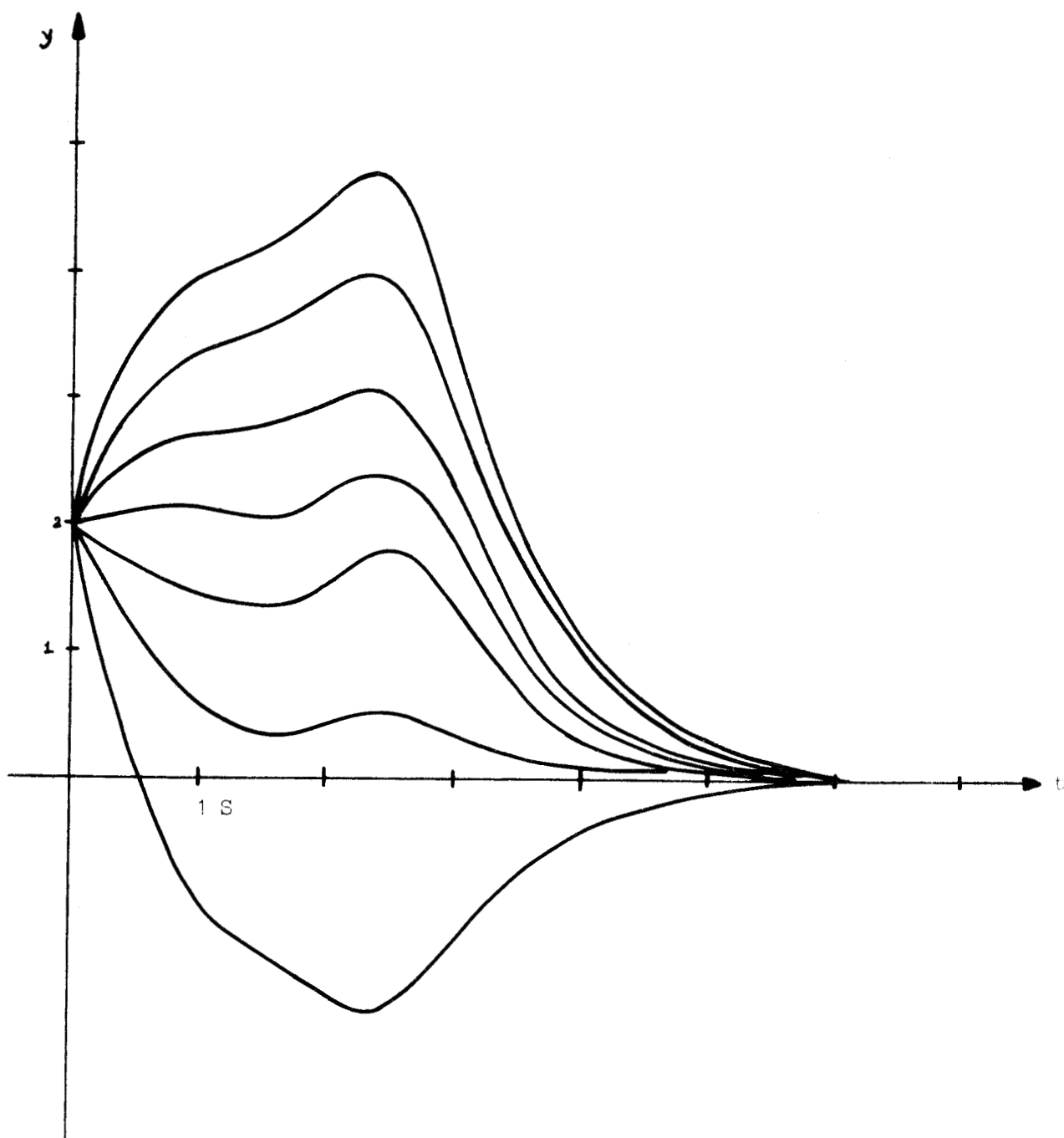


FIGURE 4



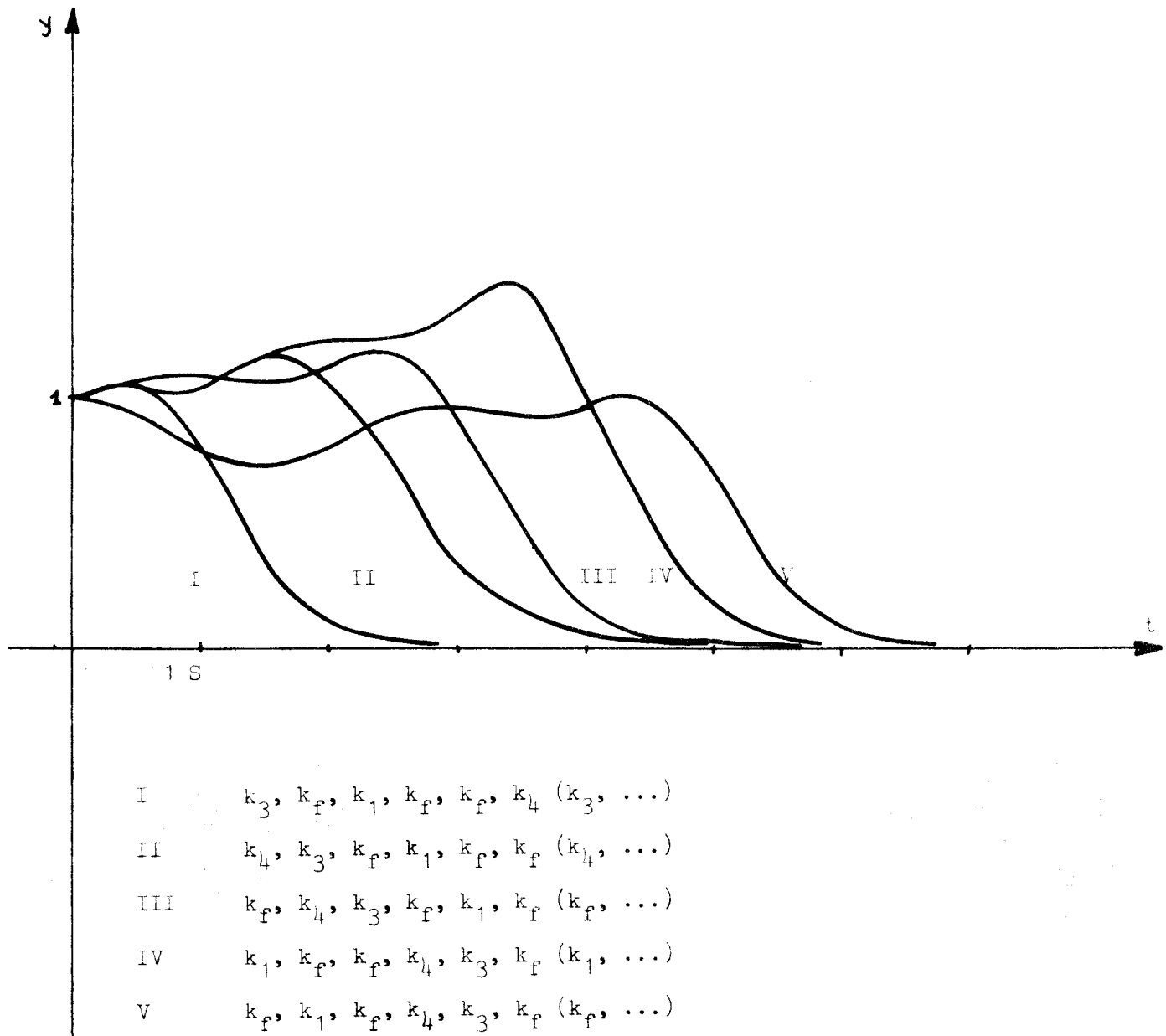


FIGURE 5



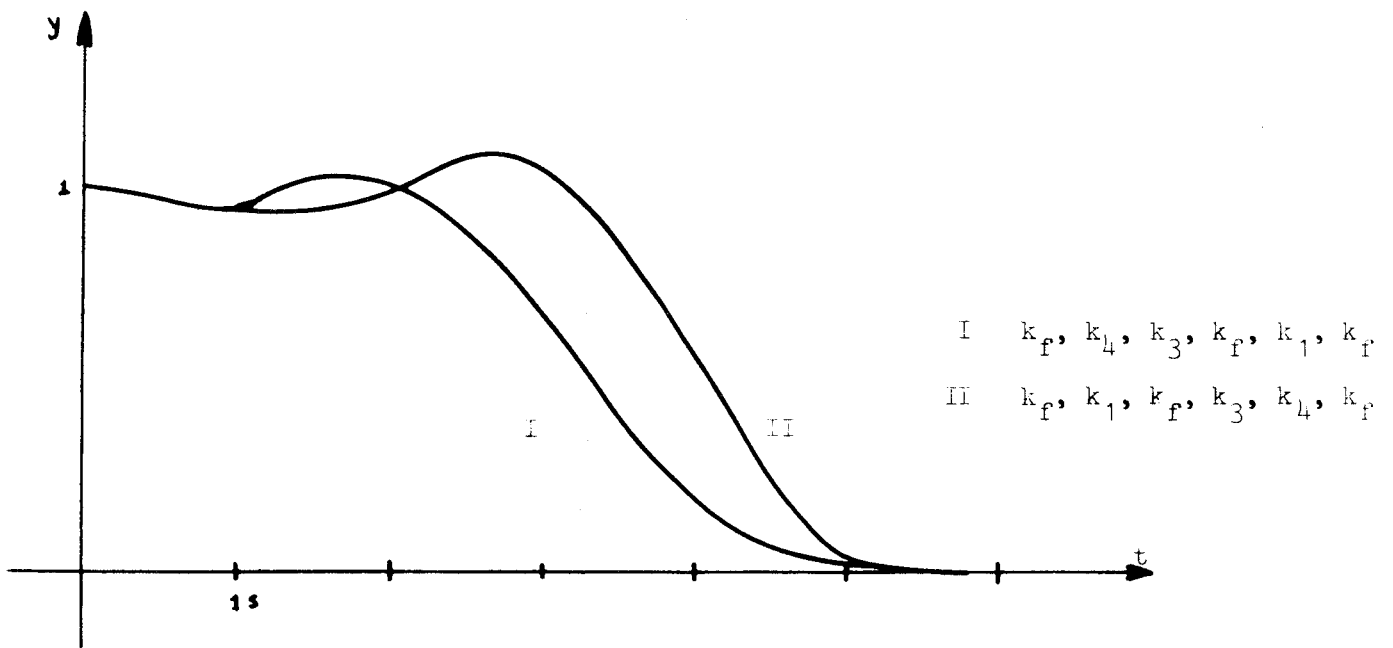


FIGURE 6



L'examen de ces courbes de réponse permet de faire les remarques suivantes :

- Le régime transitoire, lorsque la séquence démarre par le premier gain fondamental k_f , est parfaitement amorti en 6 coups. Au bout de 5 périodes, la valeur de la sortie y est déjà très faible.

- La réponse du système pour une condition initiale sur la position seule (y_0) se fait sans aucun dépassement.

- Lorsque la séquence de gains ne démarre pas par le premier gain fondamental k_f , l'amortissement se fait au plus en 11 périodes.

Pour certaines conditions initiales, le système peut répondre plus rapidement qu'en 6 coups : par exemple la courbe II de la figure 5. Au bout de la 4ème période, l'écart avec zéro est suffisamment faible pour ne plus être physiquement décelable.

3.2.6. Comparaison avec les résultats antérieurs.

MM Borne et Gentina ont proposé /1/ /2/ une commande particulière par gains périodiques.

$K_1, K_2, K_3, K_1, K_2, K_3, K_1, \dots$

le gain K_1 étant égal au gain fondamental k_f .

Le régime transitoire est amorti au mieux en 7 coups, au maximum en 9 coups.

Nous avons représenté figure 7 la réponse à un échelon pour des conditions initiales nulles pour les trois séquences de commandes :

I - $K_1, K_2, K_3, K_1, K_2, K_3, K_1$

II - $k_f, k_4, k_3, k_f, k_1, k_f$

III - $k_f, k_1, k_f, k_3, k_4, k_f$

On remarque que pour le type d'entrée choisi, il ne se produit pas de dépassement pour les séquences de gains variables II et III.

D'autre part, avec la procédure considérée dans ce chapitre, il n'y a pas à considérer le problème de la réalisation du gain.

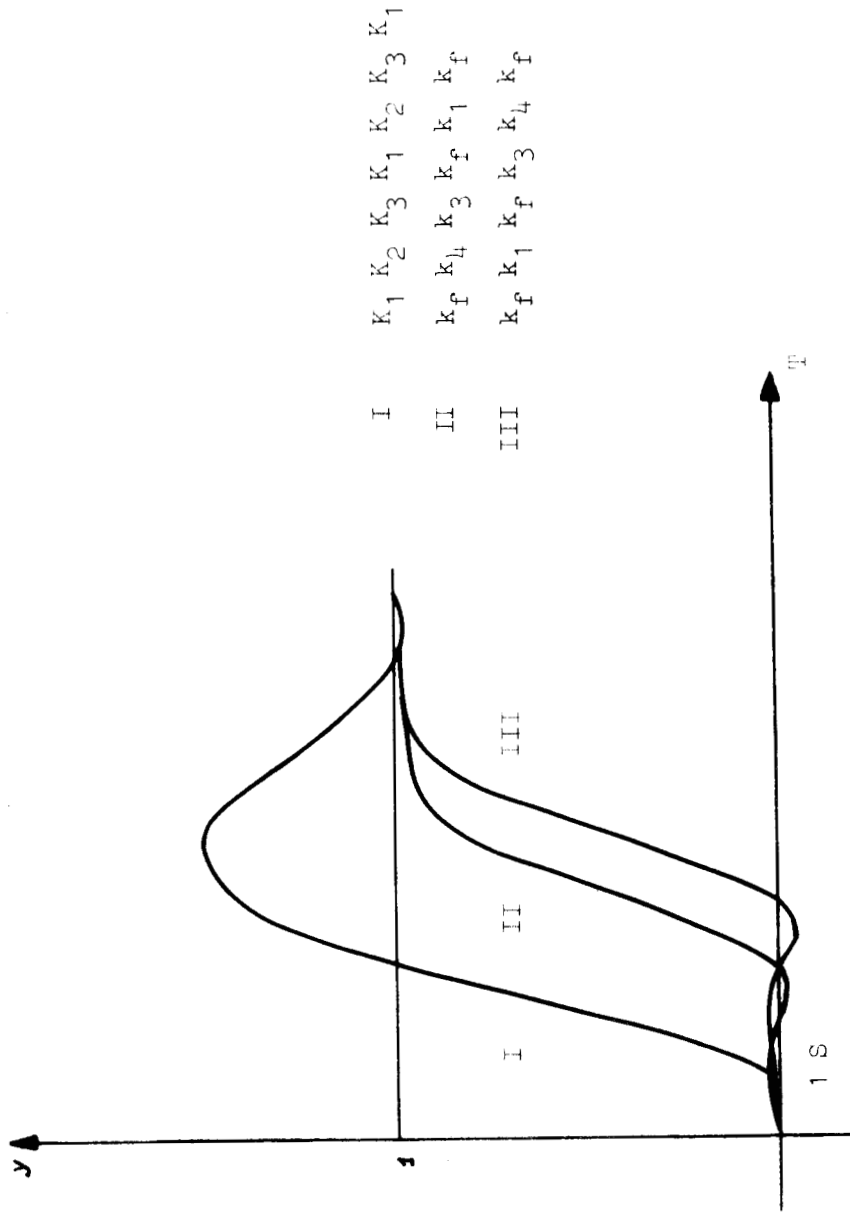


FIGURE 7



IV - Simulation d'un système multivariable sur ordinateur.

Nous présentons les résultats de la procédure de calcul des gains appliquée à un système multivariable d'ordre 2 pour lequel le vecteur de commande est de dimension 2.

4.1. Description du système.

L'asservissement considéré comprend dans sa chaîne d'action un moteur de fonction de transfert $L(p) = \frac{1}{p(1+\tau p)}$. Le retour est unitaire. La commande est échantillonnée à période T et multimodulée suivant la figure 8.

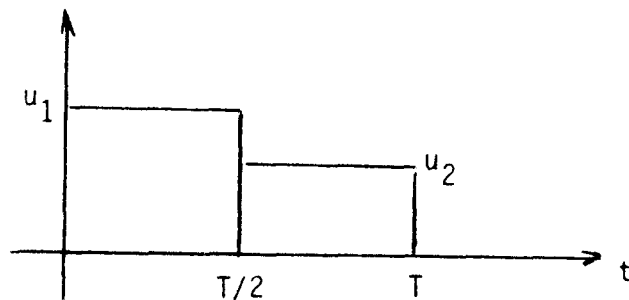


figure 8

Les équations du système sont :

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & \tau(1-D) \\ 0 & D \end{bmatrix} X_n + \begin{bmatrix} T/2 - \tau(1-D_1) + \tau(1-D_1)^2 & T/2 - \tau(1-D_1) \\ D_1(1-D_1) & 1-D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n^1 \\ u_n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{III } 4, 1)$$

$$Y_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X_n \quad (\text{III } 4, 2)$$

avec $D = e^{-T/\tau}$ et $D_1 = e^{-T/2\tau}$ et $X_n^0 = [y_n, \dot{y}_n]$

Nous prenons $T = \tau = 1s$

Ce système est observable et commandable.

4.2. Mise en oeuvre de la procédure.

Dans le cas présent, le nombre de sortie (1) est inférieur à la dimension du vecteur de commande (2). Nous appliquons donc la procédure de calcul indiquée précédemment aux matrices transposées.

La procédure de calcul écrite en FORTRAN IV et mise en oeuvre sur IBM 360-44 et est présentée en annexe V.

Le régime transitoire du système peut être annulé en 3 périodes par la séquence de gains K_f , K_1 , K_f tels que

$$K_f = \begin{vmatrix} 0,429 \\ 1,644 \end{vmatrix} \quad K_1 = \begin{vmatrix} - 2,392 \\ - 1,894 \end{vmatrix}$$

La matrice $CA^{-1}B$ n'étant pas carrée, nous avons choisi comme gain K_f le gain donné par le pseudo-inverse de Moore - Penrose. Les autres gains fondamentaux sont donnés par :

$$K_f = \begin{vmatrix} 0,429 + 1,063\alpha + 0,242\beta \\ 1,644 + 0,239\alpha + 1,934\beta \end{vmatrix}$$

où α et β sont quelconques (d'après (III 1, 15))

Diverses réponses du système pour cette séquence de gains sont données figure 9.

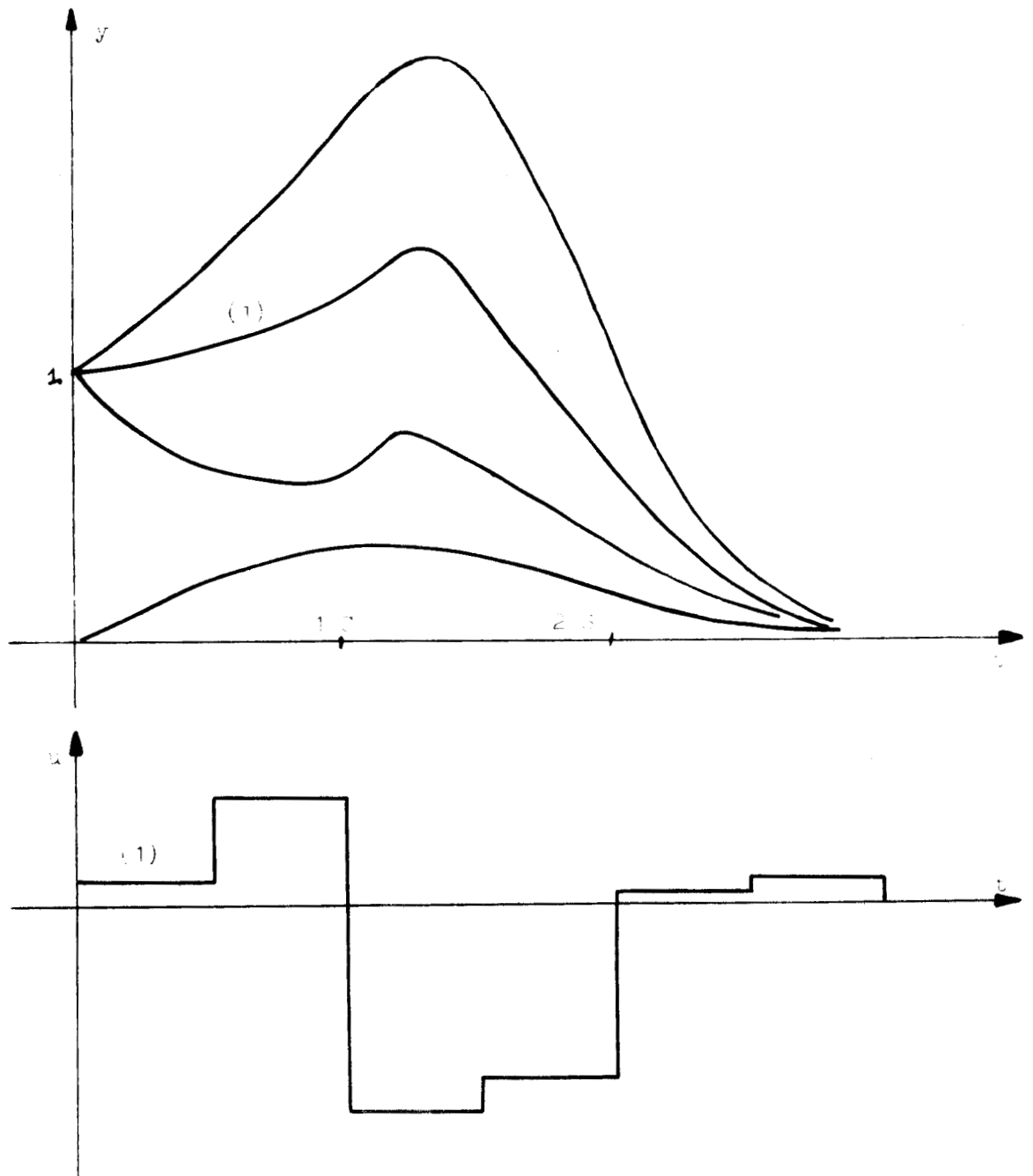


FIGURE 2



V - Conclusion.

Nous avons déterminé pour une classe importante de systèmes discrets commandables et observables une séquence de gains K_i telle qu'une réaction de sortie $u_n = K_n y_n$ garantisse l'amortissement du régime transitoire de ces processus en temps fini.

L'étude des propriétés de la séquence de gains a permis de dégager un algorithme de calcul de ceux-ci. Cette procédure conduit dans le cas particulier des systèmes monovariables à des séquences de longueur $q(q+1)/2$ (où q est l'ordre du système).

Une simulation d'un moteur décrit par un système d'ordre 3 a été effectuée et ce système a pu être amené à zéro en 6 coups.

La procédure de calcul a été réalisée sur ordinateur pour les systèmes multivariables et mise en application sur un exemple permettant de commander un système multivariable d'ordre 2, en trois périodes.

CHAPITRE IV

Commandes optimales au sens de divers types de mesures.

Introduction

Nous avons montré dans le premier chapitre que les propriétés attachées aux pseudo-inverses permettent d'exprimer la séquence des commandes qui, pour un problème à horizon fini, minimise la norme de l'erreur sur l'état tout en minimisant l'énergie de commande. Ce résultat était obtenu par l'intermédiaire du pseudo-inverse au sens de Moore-Penrose, les normes utilisées étant les normes euclidiennes.

Il peut sembler intéressant de chercher à généraliser ce résultat, tant en ce qui concerne le type d'erreur minimisée que les normes choisies.

Après avoir étudié la minimisation de l'erreur définie sur les sorties successives du processus ou sur une partie du vecteur état, nous recherchons dans quelles conditions la commande optimale au sens du critère proposé est une fonction linéaire de la consigne (ou des consignes successives) et du vecteur état initial.

Afin de réaliser un compromis entre la précision et l'énergie dépensée, nous envisageons dans une dernière partie le choix d'un autre critère d'optimalité introduisant un type particulier de pseudo-inverse de matrices. Ce type de commande est étudié sur un exemple.

I - Commande optimale au sens de deux normes données.

1.1. Notations et préliminaires.

Les notations utilisées sont celles définies au premier chapitre (paragraphe 1 et 1.2.2). En particulier, X_0 étant l'état initial, X_d l'état à atteindre, X'_d l'état obtenu à partir de la séquence $\mathcal{U}$ des m commandes $[u_n, \dots, u_{n+m-1}]$. Y_n est la sortie du système à l'instant n .

La norme $|| \cdot ||$ désigne la norme euclidienne. Nous serons conduits à introduire d'autres normes sur l'erreur ou la commande notées N_1 et N_2 .

Il est apparu dans le premier chapitre, que la séquence $\mathcal{U}$ des m commandes transférant le système de l'état X_0 à l'état X'_d et solution du problème formalisé par (IV 1, 1) :

$$||\mathcal{U}|| = \min, \mathcal{U} \in \left\{ \mathcal{U}; ||X_d - X'_d|| = ||X_d - A^m X_0 - C_d \mathcal{U}|| = \min \right\} \quad (\text{IV } 1, 1)$$

minimisant donc l'erreur

$$\epsilon = X_d - A^m X_0 - C_d \mathcal{U} \quad (\text{IV } 1, 2)$$

est donnée par :

$$\mathcal{U} = C_d^+ [X_d - A^m X_0] \quad (\text{IV } 1, 3)$$

Dans cette expression $\mathcal{U}$ apparaît comme une fonction linéaire de la consigne X_d et de l'état initial à travers le pseudo-inverse de Moore-Penrose C_d^+ de la matrice de commandabilité.

Les grandeurs minimisées dans ce cas sont la norme euclidienne de l'erreur et la norme euclidienne de la séquence de commandes $\mathcal{U}$.

1.2. Erreur sur les sorties.

Au lieu de considérer l'erreur sur l'état à l'instant $(n+m)$, il peut s'avérer intéressant de caractériser l'évolution du système par l'écart de ses sorties successives avec une trajectoire donnée.

En désignant par S le vecteur des sorties successives et E le vecteur des consignes :

$$S = \begin{bmatrix} y_{n+1}^T, \dots, y_{n+m}^T \end{bmatrix}^T \quad (\text{IV } 1, 4)$$

$$E = \begin{bmatrix} e_1^T, \dots, e_m^T \end{bmatrix}^T \quad (\text{IV } 1, 5)$$

le vecteur erreur s'exprime sous la forme :

$$\epsilon = E - S = E - \begin{bmatrix} CA \\ \vdots \\ CA^m \end{bmatrix} X_n - \begin{bmatrix} CB & & & \\ & CAB & & \\ & & \ddots & \\ & & & CA^{n-1}B & \dots & CAB & CB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+m-1} \end{bmatrix} \quad (\text{IV } 1, 6)$$

Cette expression de l'erreur est du même type que l'expression (IV 1, 2). Ces deux égalités peuvent donc être écrites sous la forme unique :

$$\epsilon = E - M_1 X_n - M_2 \mathcal{U} \quad (\text{IV } 1, 7)$$

Les résultats obtenus lors de la recherche d'une commande minimisant l'erreur définie sur l'état d'un processus peuvent donc être transposés facilement au cas d'une erreur sur les sorties.

1.3. Fonctions de l'erreur et de la commande minimisées.

Il est possible d'envisager une minimisation d'autres fonctions de l'erreur et de la commande que celles considérées dans le premier chapitre.

L'énergie dépensée pour la commande était caractérisée précédemment par la somme des carrés des commandes. Toutes les commandes avaient donc le même poids.

Il est parfois utile de pondérer ces commandes selon le temps, par exemple en pénalisant les dernières commandes. Nous avons vu au premier chapitre qu'en augmentant le temps de commande, on diminuait l'énergie nécessaire. Une telle pondération permet de réaliser un compromis énergie temps de réponse.

Pour caractériser la commande, il est parfois utile de choisir d'autres critères, par exemple la consommation $\sum |u_i|$ ou encore la commande maximale. Ceci équivaut à reprendre l'étude précédente en choisissant pour la séquence $\mathcal{U}$ d'autres normes que la séquence euclidienne.

Lorsque l'état X_d n'est pas commandable, on peut de la même façon minimiser non plus la somme des carrés des écarts de chacune des composantes, mais par exemple l'écart maximum. Il est également possible de chercher à minimiser l'écart de certaines variables seulement, par exemple les variables commandables ou les seules sorties du processus qui intéressent l'utilisateur.

Nous sommes donc amenés à étudier le problème de la minimisation d'autres normes de l'écart et de la séquence de commande que la norme euclidienne ainsi que l'utilisation de semi-normes.

Notons N_1 la norme (ou semi-norme) associée à l'erreur ϵ et N_2 la norme associée au vecteur des commandes nécessaires.

La solution optimale au sens des normes N_1 et N_2 , si elle existe, sera donc la solution du problème formalisé par :

$$N_2(\mathcal{U}) = \min, \mathcal{U} \in \left\{ \mathcal{U} ; N_1(\epsilon) = N_1(\epsilon - M_1 X_n - M_2 \mathcal{U}) = \min \right\}$$

(IV 1, 8)

1.4. Meilleure solution pour les normes N_1 et N_2 .

Le système linéaire (IV 1, 9) d'inconnue u :

$$E = M_1 X_n + M_2 u \quad (\text{IV 1, 9})$$

où M_1 et M_2 désignent les matrices précisées antérieurement, peut être résolu au sens des diverses approximations /1, p264-5/ , par exemple au sens de Tchebycheff c'est à dire en utilisant la norme du maximum, ou encore au sens de la minimisation de la somme des valeurs absolues. Dans ces deux cas, il n'est pas possible de trouver un pseudo-inverse de la matrice M_2 tel que la séquence optimale de commande s'exprime sous la forme (IV 1, 10) :

$$u = M_2^- [E - M_1 X_n] \quad (\text{IV 1, 10})$$

On sait que lorsqu'on minimise la consommation dans un problème de commande, la commande optimale n'est pas une fonction linéaire de l'état mais bien plutôt un système par tout ou rien en particulier en présence de contraintes du type saturation sur l'amplitude de la commande.

En utilisant la notion de meilleure solution d'un système linéaire pour deux normes N_1 et N_2 (cf annexe I), il apparaît que la commande optimale u meilleure solution du système (IV 1, 9) s'exprime sous la forme (IV 1, 10) si et seulement si il existe une matrice M_2^- vérifiant les égalités suivantes :

$$M_2 M_2^- M_2 = M_2$$

$$(M_2 M_2^-)^\# = M_2 M_2^-$$

(IV 1, 11)

$$M_2^- M_2 M_2^- = M_2^-$$

$$(M_2^- M_2)^\# = M_2^- M_2$$

où $(.)^\#$ symbolise la matrice adjointe /2 et annexe I / pour les formes hermitiennes associées aux normes N_1 et N_2 .

La matrice M_2^- si elle existe est dite pseudo-inverse au sens des normes N_1 et N_2 de la matrice A. Cette matrice peut ne pas être unique.

1.5. Cas particuliers.

Lorsqu'on choisit $N_1(\epsilon) = (\epsilon^* N_1 \epsilon)^{1/2}$ et $N_2(\eta) = (\eta^* N_2 \eta)^{1/2}$ où N_1 et N_2 sont des matrices positives semi-définies ou définies, et où $(.)^*$ symbolise le transconjugué, ces conditions deviennent :

$$N_1 M_2 M_2^- M_2 = N_1 M_2$$

$$N_2 M_2^- M_2 M_2^- = N_2 M_2^-$$

(IV 1, 12)

$$(M_2 M_2^-)^* N_1 = N_1 M_2 M_2^-$$

$$(M_2^- M_2)^* N_2 = N_2 M_2^- M_2$$

Lorsque les matrices N_1 et N_2 sont les matrices identités, ces équations définissent le pseudo-inverse de Moore-Penrose.

Avec le type de norme choisi, le pseudo-inverse M_2^- de la matrice M_2 existe et peut ne pas être unique. Diverses expressions de la matrice pseudo-inverse sont données dans /3/.

Lorsque la matrice N_2 est définie positive, le pseudo-inverse M_2^- est unique et peut s'exprimer sous la forme :

$$M_2^- = N_2^{-1} M_2^* N_1 M_2 \left[M_2^* N_1 M_2 N_2^{-1} M_2^* N_1 M_2 \right]^{-1} M_2^- N_1 \quad (\text{IV } 1, 13)$$

II - Compromis précision - énergie.

2.1. Définition et calcul de la commande optimale.

Il peut s'avérer intéressant de réaliser un compromis entre la

précision et le coût de commande car en général la recherche d'une précision élevée conduit à un accroissement très important de l'énergie dissipée.

Aussi nous définissons ici la commande optimale comme celle qui parmi les commandes minimisant la quantité $||\sigma u||^2 + ||\Omega e||^2$ minimise $||u||$ où l'on se limite à la norme euclidienne $||.||$. L'erreur e est définie soit sur l'état, soit sur les sorties. Les matrices Ω et σ désignent des facteurs de pondération agissant respectivement sur le coût de la commande et sur la précision.

Le critère adopté correspond pour les systèmes linéaires aux notions de lissage et de fidélité des solutions /1/ et admet diverses applications en analyse numérique /4/.

La quantité e vérifiant l'égalité (IV 1, 7), le problème de la recherche de la commande optimale revient à trouver la meilleure solution, au sens de la norme euclidienne, de l'équation (IV 2, 1) :

$$\begin{bmatrix} \Omega M_2 \\ \sigma \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} \Omega \\ 0 \end{bmatrix} [E - M_1 X_n] \quad (\text{IV } 2, 1)$$

La commande optimale a donc pour expression :

$$u = \begin{bmatrix} \Omega M_2 \\ \sigma \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \Omega \\ 0 \end{bmatrix} [E - M_1 X_n] \quad (\text{IV } 2, 2)$$

ce qui s'écrit encore en utilisant les propriétés des pseudo-inverses de Moore-Penrose :

$$u = [M_2^* \Omega^* M_2 + \sigma^* \sigma]^+ M_2^* \Omega^* (E - M_1 X_n) \quad (\text{IV } 2, 3)$$

Afin de simplifier les notations, nous posons :

$$\begin{aligned} \Omega^* \Omega &= \Pi \\ \sigma^* \sigma &= \Sigma \end{aligned} \quad (\text{IV } 2, 4)$$

$$\text{La matrice } M_2^- = \left[M_2^* \Pi M_2 + \Sigma \right]^+ M_2^* \Pi \quad (\text{IV } 2, 5)$$

apparaît comme un nouveau type de pseudo-inverse de la matrice M_2 correspondant au critère d'optimalité envisagé, permettant de factoriser linéairement la quantité $\left[E - M_1 X_n \right]$ dans l'expression de $\mathcal{U}$.

Une autre forme de l'expression (IV 2, 3) peut être obtenue lorsque la matrice $\begin{bmatrix} \Omega & M_2 \\ \sigma & \end{bmatrix}$ est de rang maximum et du rang de ses colonnes.

($M_2^* \Pi M_2 + \Sigma$ est dans ce cas définie positive). Il vient alors :

$$\mathcal{U} = \left[M_2^* \Pi M_2 + \Sigma \right]^{-1} M_2^* \Pi \left[E - M_1 X_n \right] \quad (\text{IV } 2, 6)$$

2.2. Gain en énergie.

Soit $\mathcal{U}(0, \Pi)$ la commande optimale correspondant à $\sigma = 0$ c'est à dire à une précision maximale. Son expression est donnée par :

$$\mathcal{U}(0, \Pi) = \left[M_2^* \Pi M_2 \right]^+ M_2^* \Pi \left[E - M_1 X_n \right] \quad (\text{IV } 2, 7)$$

Le gain en énergie correspondant à la commande du système par $\mathcal{U}(\Sigma, \Pi)$, peut être défini comme le rapport :

$$v = \frac{||\mathcal{U}(\Sigma, \Pi)||}{||\mathcal{U}(0, \Pi)||} \quad (\text{IV } 2, 8)$$

Une évaluation de ce rapport en fonction des différents paramètres s'avère intéressante. Supposons la matrice $(M_2^* \Pi M_2 + \Sigma)$ définie positive. Cette condition est réalisée si l'on choisit Σ définie positive, $M_2^* \Pi M_2$ peut être semi définie positive.

Des expressions (IV 2, 6) et (IV 2, 7), il vient :

$$\mathcal{U}(0, \Pi) = (M_2^* \Pi M_2)^+ (M_2^* \Pi M_2 + \Sigma) \mathcal{U}(\Sigma, \Pi) \quad (\text{IV } 2, 9)$$

$$= \left[(M_2^* \Pi M_2 + \Sigma) \quad (M_2^* \Pi M_2) \right]^+ \mathcal{U}(\Sigma, \Pi) \quad (\text{IV } 2, 10)$$

$$= \left[I - (M_2^* \Pi M_2 + \Sigma)^{-1} \right]^+ \mathcal{U}(\Sigma, \Pi) \quad (\text{IV } 2, 11)$$

$$\text{d'où en posant } (M_2^* \Pi M_2 + \Sigma)^{-1} = \theta \quad (\text{IV } 2, 12)$$

$$\text{et } [I - \theta]^+ = S \quad (\text{IV } 2, 13)$$

l'expression :

$$u = \frac{||\mathcal{U}(\Sigma, \Pi)||}{||S\mathcal{U}(\Sigma, \Pi)||} \quad (\text{IV } 2, 14)$$

Il vient alors l'inégalité :

$$\frac{1}{\max_j \sqrt{(\lambda_{S^*S})_j}} \leq u \leq \frac{1}{\min_j \sqrt{(\lambda_{S^*S})_j}} \quad (\text{IV } 2, 15)$$

dans laquelle $(\lambda_{S^*S})_j$ représente une valeur propre de S^*S .

Or en utilisant les propriétés des pseudo-inverses (cf annexe I, (A 1, 11)), il vient :

$$\begin{aligned} S^*S &= [(I - \theta)^+]^* (I - \theta)^+ = [(I - \theta)(I - \theta)^*]^+ \\ &= [I - \theta - \theta^* + \theta\theta^*]^+ \end{aligned} \quad (\text{IV } 2, 16)$$

Il est alors possible d'exprimer les valeurs propres de S^*S en fonction de $\theta + \theta^* - \theta\theta^*$. Si $(\lambda_{\theta + \theta^* - \theta\theta^*})_j \neq 1$, auquel cas $(\lambda_{S^*S})_j \neq 0$, il vient :

$$(\lambda_{S^*S})_j = \left[\lambda_{(I - \theta - \theta^* + \theta\theta^*)} \right]_j^{-1} = \left[1 - \lambda_{(\theta + \theta^* - \theta\theta^*)} \right]_j^{-1} \quad (\text{IV } 2, 17)$$

$$\text{D'où :} \quad \left[1 - \max_j \lambda_{\theta + \theta^* - \theta\theta^*} \right]^{1/2} \leq u \leq \left[1 - \min_j \lambda_{\theta + \theta^* - \theta\theta^*} \right]^{1/2}$$

(IV 2, 18)

avec $\theta = (M_2^* \Pi M_2 + \Sigma)^{-1} \Sigma$

Cas particulier : Si l'on choisit $\Sigma = \alpha^2 I$ où α^2 est un scalaire réel positif et I la matrice identité, la matrice θ est hermitienne et il vient :

$$1 - \max_j (\lambda_{\theta})_j \leq u \leq 1 - \min_j (\lambda_{\theta})_j \quad (\text{IV } 2, 19)$$

avec :

$$\theta = \alpha^2 \left[M_2^* \Pi M_2 + \alpha^2 I \right]^{-1} \quad (\text{IV } 2, 20)$$

Il en résulte la double inégalité :

$$\frac{\min_j (\lambda_{M_2^* \Pi M_2})_j}{\alpha^2 + \min_j (\lambda_{M_2^* \Pi M_2})_j} \leq u \leq \frac{\max_j (\lambda_{M_2^* \Pi M_2})_j}{\alpha^2 + \max_j (\lambda_{M_2^* \Pi M_2})_j} \quad (\text{IV } 2, 21)$$



Les équations précédentes permettent d'évaluer le gain en énergie en fonction de M_2 , Π et Σ seulement et ne dépendent pas du vecteur de consigne E ni de l'état initial X_n .

III - Application pratique.

La recherche d'une commande réalisant un compromis entre le coût de commande et la précision obtenue est mise en application sur un système du second ordre.

3.1. Description et équations du système étudié.

Le système de fonction de transfert $L(p) = \frac{1}{p(1 + \tau p)}$ avec

$\tau = 1$ sec. est piloté par une commande échantillonnée et modulée par un

bloqueur d'ordre zéro de période $T = 1$ sec.

En choisissant comme variables d'état la sortie y et sa dérivée $\dot{y}$, les équations du processus entre les instants d'échantillonnage sont :

$$Y_{n+1} = AX_n + Bu_n = \begin{bmatrix} 1 & 1-D \\ 0 & D \end{bmatrix} X_n + \begin{bmatrix} D \\ 1-D \end{bmatrix} u_n \quad (\text{IV } 3, 1)$$

$$Y_n = CX_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X_n \quad (\text{IV } 3, 2)$$

avec $D = e^{-1}$

Soit u_5 le vecteur définissant la séquence de commandes sur 5 périodes.

$$u_5^T = [u_n^T, \dots, u_{n+4}^T] \quad (\text{IV } 3, 3)$$

Nous définissons le vecteur erreur comme le vecteur séquence des erreurs entre la sortie y et la consigne e pour 5 périodes.

$$\epsilon_5 = \begin{bmatrix} e \\ e \\ e \\ e \\ e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ y_{n+3} \\ y_{n+4} \\ y_{n+5} \end{bmatrix} \quad (\text{IV } 3, 4)$$

Ce vecteur s'écrit encore :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} e \\ e \\ e \\ e \\ e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \end{bmatrix} X_n - \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & 0 & 0 \\ CAB & CB & 0 & 0 & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & 0 & 0 \\ CA^3B & CA^2B & CAB & CB & 0 \\ CA^4B & CA^3B & CA^2B & CAB & CB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \\ u_{n+4} \end{bmatrix} \quad (\text{IV } 3, 5)$$

Le problème d'optimalité est défini comme suit : asservir la sortie y à une consigne e en choisissant la séquence u telle que l'expression $J = ||\sigma u_5||^2 + ||\epsilon_5||^2$ soit minimisée. Si ce problème admet plusieurs solutions, elle devra minimiser en outre la quantité $||u||^2$.

Prenons $\sigma = \alpha I$ (où I est la matrice identité) ce qui donne :

$$J = \alpha^2 u_5^T u_5 + \epsilon_5^T \epsilon_5 \quad (\text{IV } 3, 6)$$

3.2. Réponses du système.

Les réponses du système pour les commandes optimales relatives à diverses valeurs du paramètre α sont représentées ci-dessous.

Le tableau 1 rassemble les valeurs des commandes et des gains correspondants.

La figure 1 montre que les courbes de réponse sont à variation d'autant plus douce que la précision demandée aux instants d'échantillonnage est plus faible.

α	0	0,06	0,14	0,20
u	2,718	2,441	2,000	1,759
	-2,952	-2,207	-1,206	-0,763
	2,121	1,170	0,226	-0,030
	-1,523	-0,628	-0,018	0,037
	1,094	0,360	0,003	0,000
v	1,000	0,527	0,228	0,152

Tableau 1

La simulation a été réalisée sur calculateur IBM 360 - 44.
Le programme de calcul figure en annexe VI.

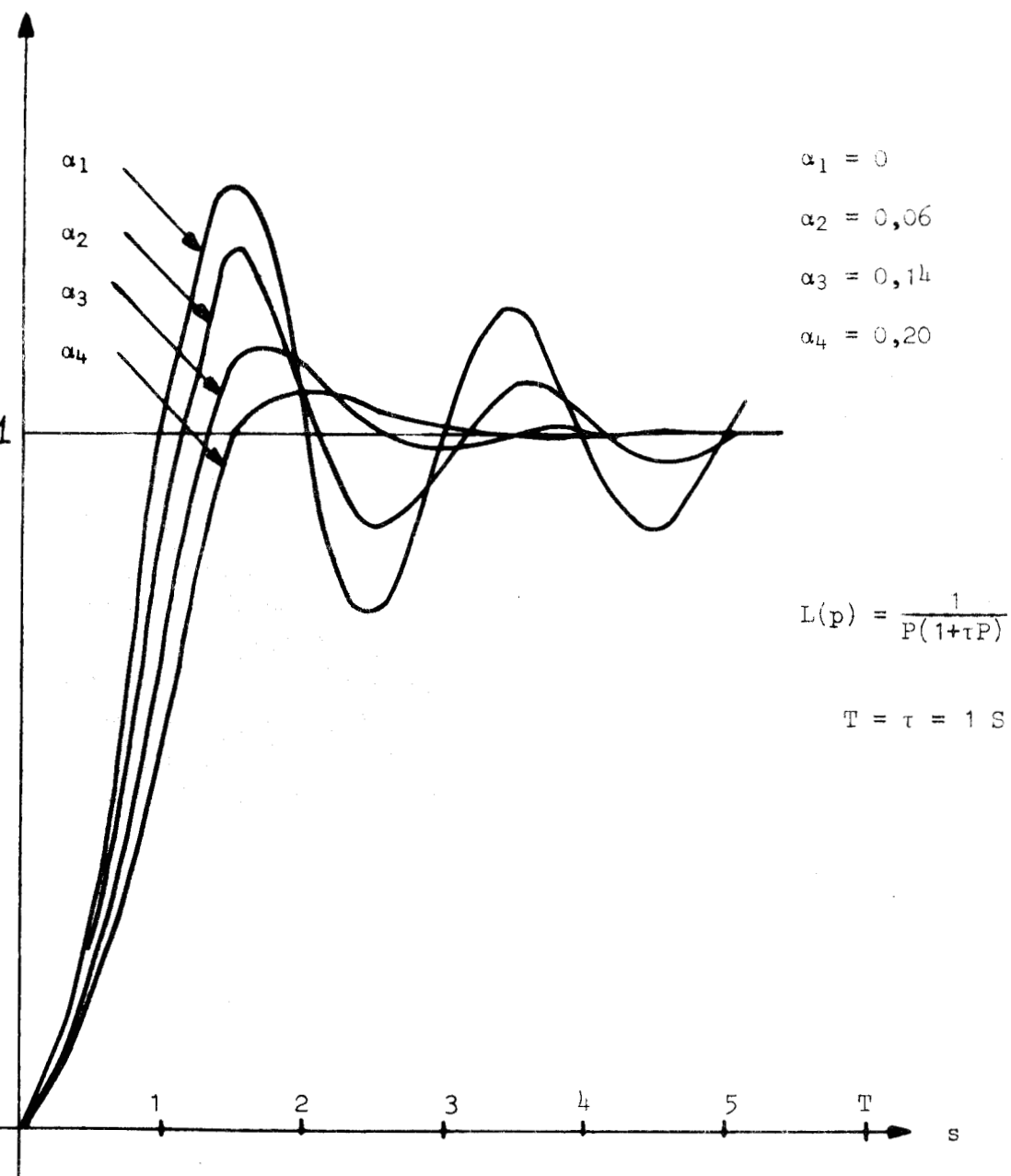


FIGURE 1



Conclusion.

L'utilisation de diverses généralisations de la notion de pseudo-inverse a permis de définir différents types de commande optimale correspondant soit à divers types d'erreur, soit à un compromis énergie-précision.

Les conditions que doivent vérifier d'une part les critères d'optimalité, d'autre part les différents paramètres du système pour que la séquence de commande soit une fonction linéaire des consignes et du vecteur état initial ont été établies.

L'étude d'un exemple a permis la mise en oeuvre de ce type de commande optimale en montrant l'influence de la précision exigée sur le coût de la commande.

CONCLUSION GENERALE

L'utilisation des pseudo-inverses de matrices permet de faciliter la détermination des commandes numériques des systèmes linéaires multivariables discrets. Ainsi plusieurs types de commande optimale ont pu être définis et explicités grâce à la notion de pseudo-inverse généralisé.

Divers exemples de réalisation de ces commandes ont été donnés : par réaction d'état à paramètres constants ou non, par filtre adjoint associé, ou par réaction de sortie avec gains variables dans la chaîne d'action. Le choix entre ces divers types de commandes est lié d'une part à l'objectif à réaliser et d'autre part à la nature des informations disponibles.

Les propriétés très particulières associées à la notion de pseudo-inverse permettent d'envisager leur utilisation pour la recherche des commandes d'autres types de processus que ceux présentés dans ce mémoire, par exemple les systèmes héréditaires où le vecteur état est de dimension infinie, ou encore les systèmes évoluant en présence de perturbations.

ANNEXE I

DEFINITIONS ET PROPRIETES DES INVERSES GENERALISES

MOORE en 1920 et 1935 /1/ /2/ et indépendamment PENROSE en 1955 /3/ se sont proposés d'étendre la notion d'inverse de matrice au cas des matrices singulières ou rectangulaires.

En modifiant les définitions, de nombreux auteurs ont poursuivi les travaux de MOORE-PENROSE. On peut citer TSUNG /4, 5, 6/, BJERHAMMER /7, 8, 9/, RAO /10, 11/, GREVILLE /12/, BEN-ISRAEL et CHARNES /13/.

La théorie des pseudo-inverses a trouvé de nombreuses applications : programmation numérique, théorie des réseaux, analyse statistique, théorie de la prédiction, identification... et suscite actuellement de nombreuses publications /19 à 40/.

I - NOTATIONS

Les matrices considérées sont des matrices A_{mn} à éléments complexes ayant m lignes, n colonnes et de rang r .

La matrice est dite de rang maximum si son rang est égal à sa plus petite dimension.

A^* désigne la transconjuguee de la matrice A .

II - DEFINITIONS /14, 15, 16, 17/

II.1 - Pseudo-inverse ou inverse généralisé

La matrice A^- est un pseudo-inverse ou inverse généralisé ou g-inverse de la matrice A si :

$$A A^- A = A$$

(A 1, 1)

II.2 - Pseudo-inverse réflexif

La matrice A_r^- est un pseudo-inverse réflexif /17/ ou semi-inverse /23/ de la matrice A si :

$$A A_r^- A = A \quad (A \ 1, \ 2)$$

$$A_r^- A A_r^- = A_r^-$$

II.3 - Pseudo-inverse de MOORE-PENROSE

La matrice A^+ est le pseudo-inverse au sens de MOORE-PENROSE de la matrice A si :

$$A A^+ A = A$$

$$A^+ A A^+ = A^+$$

(A 1, 3)

$$(A A^+)^* = A A^+$$

$$(A^+ A)^* = A^+ A$$

PENROSE a montré que quelque soit la matrice A il existe toujours une et une seule solution à ces équations matricielles.

III - RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES A L'AIDE DES PSEUDO-INVERSES DE MATRICES /15, 16/

III.1 - Théorème

- Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $A X B = C$ ait une solution, est que l'on ait :

$$A A^- C B^- B = C \quad (A \ 1, \ 4)$$

où A^- et B^- désignant respectivement un pseudo-inverse de A et un pseudo-inverse de B.

- Lorsque cette relation est vérifiée, la solution générale de l'équation est :

$$X = A^- C B^- + Y - A^- A Y B B^- \quad (A 1, 5)$$

où Y désigne une matrice arbitraire de mêmes dimensions que X .

- La classe de toutes les solutions de l'équation compatible $AX = B$ est :

$$X = G B \quad (A 1, 6)$$

où G désigne un élément de la classe des inverses généralisés de A .

III.2 - Remarques :

- On peut exprimer ces relations en utilisant comme pseudo-inverses les pseudo-inverses de MOORE-PENROSE.

- Lorsque la matrice C se réduit à un vecteur colonne c , la condition de compatibilité s'écrit pour $B = I$:

$$A A^- c = c \quad (A 1, 7)$$

Le rang de (A, c) est égal au rang de A et c appartient à l'espace des colonnes de A .

- Lorsque les matrices $A^- A$ et $B B^-$ ne sont pas les matrices identité, la solution du système $A X B = C$ n'est pas unique.

- Ce théorème montre que les pseudo-inverses permettent de donner simplement la condition de résolubilité d'un système linéaire ainsi que l'expression de toutes les solutions.

En cas d'indétermination, une condition supplémentaire peut conduire à l'unicité de la solution.

IV - QUELQUES PROPRIETES DES PSEUDO-INVERSES DE MOORE-PENROSE

IV.1 - Premières propriétés :

$$(A^+)^+ = A \quad (A \ 1, \ 8)$$

$$(A^*)^+ = (A^+)^* \quad (A \ 1, \ 9)$$

Si A est carré régulier, $A^+ = A^{-1}$ (A 1, 10)

$$(A^* A)^+ = A^+ A^* \quad (A \ 1, \ 11)$$

$$A, A^*, A^+ \text{ ont même rang} \quad (A \ 1, \ 12)$$

IV.2 - Quelques expressions de la matrice A

IV.2.1 - Théorème 1 :

$$A^+ = (A^* A)^+ A^* \quad (A \ 1, \ 13)$$

$$A^+ = A^* (A A^*)^+$$

Si A est de rang maximum, la matrice $A^* A$ ou la matrice $A A^*$ (ou les deux si A est carré) est de rang maximum.

Par suite, on aura soit $(A^* A)^+ = (A^* A)^{-1}$ (A 1, 14)
 soit $(A A^*)^+ = (A A^*)^{-1}$

Application :

Lorsque la matrice A est la matrice de commandabilité, réelle et de dimensions $(q \times m)$, on a :

$$Cd^+ = (Cd^T Cd)^+ Cd^T = Cd^T (Cd Cd^T)^+ \quad (A \ 1, \ 15)$$

Un vecteur du noyau de Cd^T est donc aussi vecteur du noyau de Cd^+ . Par suite, comme les matrices Cd^+ et Cd^T ont même rang, elles ont même noyau.

Lorsque la matrice Cd est de rang maximum q c'est-à-dire lorsque le processus est commandable, il vient :

$$Cd^+ = Cd^T [Cd Cd^T]^{-1} \quad (A \ 1, \ 16)$$

et

$$Cd Cd^+ = I_q$$

(I_q matrice identité d'ordre q)

Par contre, la relation $Cd^+ Cd = I_{[n]}$ n'est pas en général vérifiée ($q \neq n$)

IV.2.2 - Théorème 2 :

Si A est une matrice de dimensions $m \times n$, de rang r et V une matrice de rang maximum et de dimensions $m \times (m - r)$ telle que $V^* A = 0$, alors :

$$A^+ = A^* (A A^* + V V^*)^{-1} \quad (A\ 1, 17)$$

Ce théorème est particulièrement intéressant dans le cas des matrices carrées singulières puisque l'on est ramené à calculer les vecteurs du noyau de A^* .

IV.3 - Calcul de la matrice A^+

On trouvera dans /17/ une liste de différents algorithmes de calcul de pseudo-inverses au sens de MOORE-PENROSE. Ces algorithmes font le plus souvent appel aux théorèmes précédents ainsi qu'aux algorithmes d'inversion.

V - MEILLEURE SOLUTION DE L'EQUATION $A X = B$ AU SENS DES MOINDRES CARRES

Le pseudo-inverse de MOORE-PENROSE a la propriété capitale de donner la meilleure solution au sens des moindres carrés de l'équation $A X = B$.

L'espace des vecteurs X est normé par la norme euclidienne $||X|| = (\sum x_i \bar{x}_i)^{\frac{1}{2}}$. On désigne par $||A||$ la norme hermitienne de la matrice A et a_{ij} le terme générique de A ($\bar{a}_{ij}$ son conjugué).

$$||A|| = (\sum_{i,j} a_{ij} \bar{a}_{ij})^{\frac{1}{2}} \quad (A\ 1, 18)$$

V.1 - Définition :

La matrice X_0 est dite "meilleure solution approchée" de l'équation matricielle $A X = B$ au sens des moindres carrés si quelque soit X , il vient :

Soit : $||A X - B|| > ||A X_0 - B||$ (A 1, 19)

Soit : $||A X - B|| = ||A X_0 - B||$ avec $||X|| > ||X_0||$

V.2 - Théorème :

La matrice $X_0 = A^+ B$ est l'unique "meilleure solution approchée" de l'équation $A X = B$ au sens des moindres carrés.

DEMONSTRATION : /17/

a. Lemme

Si A est de dimensions $m \times n$, p et q deux matrices arbitraires de dimensions $n \times t$ et $m \times t$, on a l'identité :

$$||A p + (I - A A^+) q||^2 = ||A p||^2 + ||(I - A A^+) q||^2$$

en effet :

$$\begin{aligned} & [A p + (I - A A^+) q]^T [A p + (I - A A^+) q] = \\ & [A p]^T A p + [(I - A A^+) q]^T (I - A A^+) q + [(I - A A^+) q]^T A p \\ & + [A p]^T (I - A A^+) q \end{aligned}$$

$$\text{or } [(I - A A^+) q]^T A p + [A p]^T (I - A A^+) q = 0$$

ce qui prouve l'identité.

b. En appliquant ce lemme à $A X - B$ que l'on écrit sous la forme :

$$A(X - A^+ B) + (I - A A^+) (-B), \text{ on a :}$$

$$\begin{aligned} ||A X - B||^2 &= ||A(X - A^+ B) + (I - A A^+) (-B)||^2 = \\ & ||A X - A A^+ B||^2 + ||A A^+ B - B||^2 \geq ||A A^+ B - B||^2 \end{aligned}$$

L'égalité $||A X - B||^2 = ||A A^+ B - B||^2$ n'est obtenue que pour $||A X - A A^+ B||^2 = 0$ soit : $A X = A A^+ B$

c. En remplaçant A par A^+ dans l'identité, on obtient :

$$||A^+ p + (I - A^+ A)q||^2 = ||A^+ p||^2 + ||(I - A^+ A)q||^2$$

Cette identité appliquée à $p = B$ et $q = X$ donne :

$$||A^+ B + (I - A^+ A)X||^2 = ||A^+ B||^2 + ||(I - A^+ A)X||^2$$

Lorsque $A X = A A^+ B$, cette relation devient :

$$||X||^2 = ||A^+ B||^2 + ||X - A^+ B||^2$$

$||X||$ est donc minimal si et seulement si $X = A^+ B$

Corollaire : la meilleure solution approchée au sens des moindres carrés de $A X = I$ est A^+ .

V.3 - Remarque :

Il est important de noter que le théorème précédent s'applique aux systèmes incompatibles.

Dans ce cas, la solution $X_0 = A^+ B$ ne rend pas la matrice $A X - B$ nulle mais en minimise la norme.

VI - MEILLEURE SOLUTION DE L'EQUATION $A X = B$ AU SENS DES NORMES N_1 ET N_2

VI.1 - Matrice adjointe :

K désignant l'ensemble des complexes, on associe aux espaces K^x et K^y de dimensions finies x et y deux formes hermitiennes (définies ou singulières) $F_1(X_1, X_2)$ et $F_2(Y_1, Y_2)$.

A partir de ces formes hermitiennes, on définit deux normes ou semi-normes hermitiennes :

$$N_1(X, X) = \sqrt{F_1(X, X)}$$

$$N_2(Y, Y) = \sqrt{F_2(Y, Y)}$$

La matrice adjointe de la matrice $A \in K^{X, Y}$, notée $A^{\#}$, est définie par

$$F_1(A Y, X) = F_2(Y, A^{\#} X) \quad (A 1, 21)$$

Cette matrice adjointe existe et dans le cas de formes hermitiennes définies est unique /18/.

VI.2 - Définition :

La matrice X_0 est dite "meilleure solution au sens des normes N_1 et N_2 de l'équation matricielle $A X = B$ si quel que soit X , il vient :

$$\text{soit :} \quad N_1(A X - B) > N_1(A X_0 - B) \quad (A 1, 22)$$

$$\text{soit :} \quad N_1(A X - B) = N_1(A X_0 - B) \text{ avec } N_2(X) > N_2(X_0)$$

VI.3 - Pseudo-inverse au sens des normes N_1 et N_2

On peut démontrer /15/ qu'il existe une matrice G telle que la meilleure solution X_0 définie précédemment s'exprime sous la forme :

$$X_0 = G B \quad (A 1, 23)$$

si et seulement si, il existe une matrice G telle que les conditions (A 1,24) soient vérifiées :

$$A G A = A$$

$$(A G)^{\#} = A G$$

(A 1, 24)

$$G A G = G$$

$$(G A)^{\#} = G A$$

où $(\)^\#$ symbolise la matrice adjointe pour les formes hermitiennes associées aux normes N_1 et N_2 .

La matrice G , si elle existe, est dite pseudo-inverse au sens des normes N_1 et N_2 de la matrice A . Cette matrice peut ne pas être unique.

ANNEXE II

CONDUITE OPTIMALE DES SYSTEMES DU PREMIER ORDRE

On considère le système du premier ordre défini par l'équation (A 2, 1)

$$x_{n+1} = a x_n + b u_n \quad (A 2, 1)$$

et l'on souhaite transférer l'état de ce système de 0 à un état x_c en m coups et par une conduite optimale au sens de l'énergie.

1 - ETUDE DE LA SEQUENCE OPTIMALE

Les séquences de commande transférant l'état de 0 à x_c en m coups vérifient l'équation (A 2, 2) :

$$x_d = [a^{m-1} b, \dots, b] \begin{bmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+m-1} \end{bmatrix} \quad (A 2, 2)$$

La séquence optimale est définie par (A 2, 3) :

$$u = \begin{bmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+m-1} \end{bmatrix} = C_d^+ x_d = \begin{bmatrix} \frac{a^{m-1}}{b (1+a^2 + \dots + a^{2m-2})} \\ \vdots \\ \frac{1}{b (1+a^2 + \dots + a^{2m-2})} \end{bmatrix} \quad (A 2, 3)$$

ce qui s'écrit encore pour $|a| \neq 1$

$$u = \begin{bmatrix} \frac{a^{m-1} (1-a^2)}{b (1-a^{2m})} \\ \vdots \\ \frac{1-a^2}{b (1-a^{2m})} \end{bmatrix} \quad x_{n+1} \quad (A 2, 4)$$

Cette séquence de commandes conduit à des états intermédiaires x_{n+1} définis par :

$$x_{n+1} = a^{m-1} \frac{1-a^{2i}}{1-a^{2m}} \quad (A 2, 5)$$

Nous avons représenté figure 1 les commandes successives et les états atteints lorsque m varie et suivant les valeurs de a .

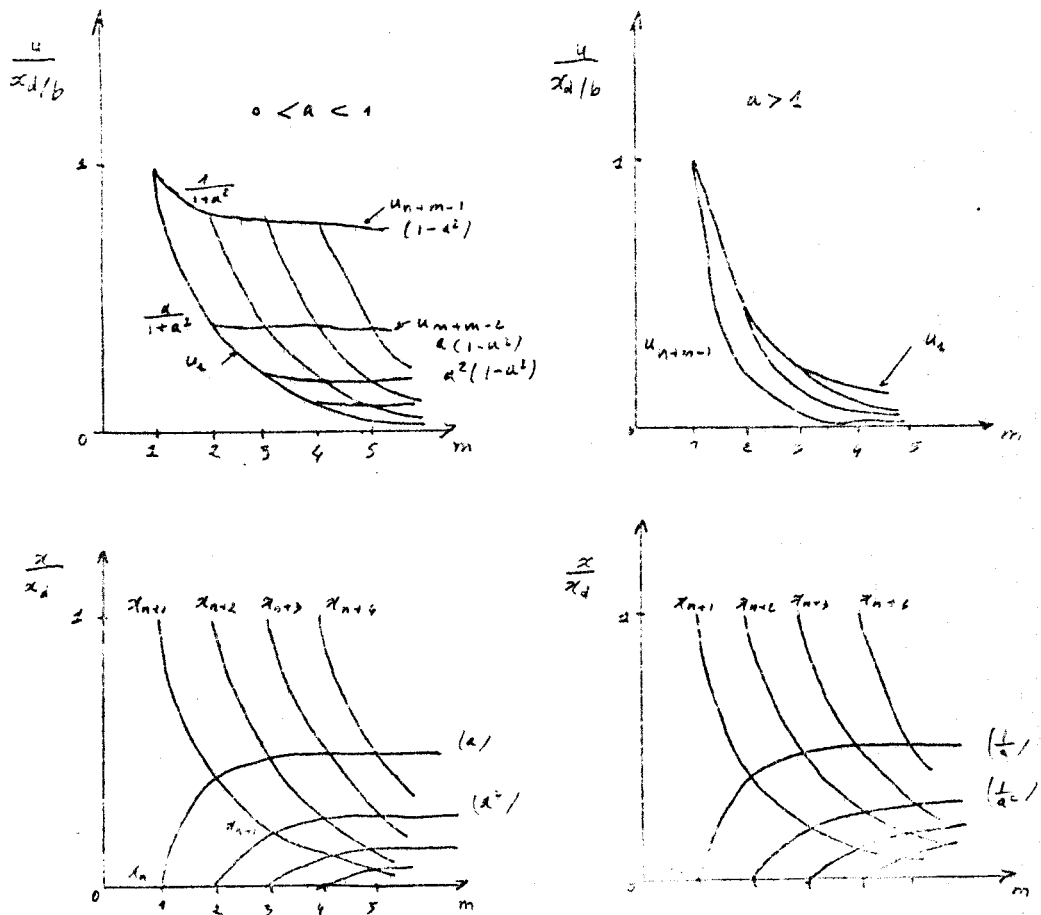


Fig. 1

II - VARIATIONS DE L'ENERGIE DE COMMANDE

Nous définissons l'énergie de commande par :

$$\mathcal{E} = \sqrt{\sum u_i^2} = \sqrt{\mathcal{U}^T \mathcal{U}} \quad (A\ 2, 6)$$

Elle vérifie l'égalité :

$$\mathcal{E} = \left| \frac{x_d}{b} \right| \sqrt{\frac{1-a^2}{1-a^{2m}}} \quad (\text{pour } |a| \neq 1) \quad (A\ 2, 7)$$

Pour les systèmes instables, $|a| \geq 1$, la quantité $\mathcal{E}$ tend vers 0 lorsque le nombre m tend vers l'infini.

Pour les systèmes stables, $|a| < 1$, la quantité $\mathcal{E}$ tend vers une énergie minimale $\left| \frac{x_d}{b} \right| \sqrt{1-a^2}$

On peut alors choisir le temps de commande pour dépenser une énergie égale à $\beta\%$ près à l'énergie minimale :

$$\frac{\beta}{100} = \frac{\sqrt{\mathcal{U}^T \mathcal{U}_m} - \sqrt{\mathcal{U}^T \mathcal{U}_{\min}}}{\sqrt{\mathcal{U}^T \mathcal{U}_{\min}}} = \frac{1}{\sqrt{1-a^{2m}}} - 1$$

ce qui définit m comme l'entier le plus voisin de

$$m_{\beta} = \frac{1}{2} \frac{\log \left(1 - \frac{1}{(1+\beta/100)^2} \right)}{\log a}$$

Plus a est voisin de 0, plus m_{β} est petit.

La figure 2 représente les variations de la quantité

$$f_m = \frac{\sqrt{\mathcal{U}^T \mathcal{U}_m}}{\left| x_d/b \right|} = \sqrt{\frac{1-a^2}{1-a^{2m}}} \quad \text{en fonction de } a.$$

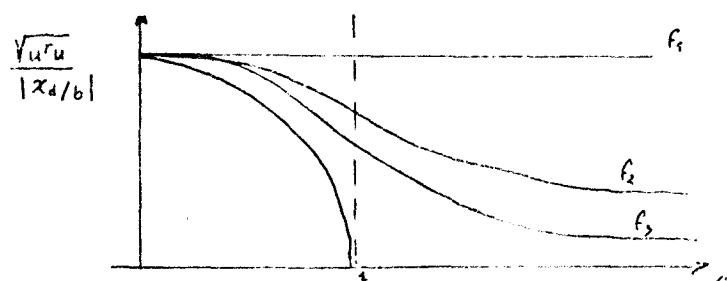


fig 2 Variation de l'énergie de commande avec a

ANNEXE III

COMMANDE OPTIMALE DES SYSTEMES LINEAIRES NON STATIONNAIRES

A partir des équations (II 1,44) notées ici (A 3, 1), nous allons déterminer les valeurs de C_{n+i} .

$$\begin{bmatrix} C_n \\ C_{n+1}(A_n + B_n C_n) \\ \vdots \\ C_{n+m-1}(A + BC)_{n+m-2} \dots (A_n + B_n C_n) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_n^T A_{n+1}^T \dots A_{n+m-1}^T \\ B_{n+1}^T A_{n+2}^T \dots A_{n+m-1}^T \\ \vdots \\ B_{n+m-1}^T \end{bmatrix} [CdCd^T]^{-1} A_{n+m-1} \dots A_n \quad (A 3, 1)$$

1 - En supposant que C_{n+j} existe, nous exprimons les produits $(A_{n+i} + B_{n+i} C_{n+i}) \dots (A_n + B_n C_n)$

$$C_n = - B_n^T A_{n+1}^T \dots A_{n+m-1}^T [CdCd^T]^{-1} A_{n+m-1} \dots A_n \quad (A 3, 2)$$

$$\begin{aligned} A_n + B_n C_n &= A_n - B_n B_n^T A_{n+1}^T \dots A_{n+m-1}^T [CdCd^T]^{-1} A_{n+m-1} \dots A_n \\ &= A_{n+1}^{-1} \dots A_{n+m-1}^{-1} [CdCd^T - A_{n+m-1} \dots A_{n+1} B_n B_n^T A_{n+1}^T \dots A_{n+m-1}^T] [CdCd^T]^{-1} A_{n+m-1} \dots A_n \end{aligned} \quad (A 3, 3)$$

sous l'hypothèse que les A_{n+i} sont réguliers.

$$\begin{aligned} (A_{n+1} + B_{n+1} C_{n+1}) (A_n + B_n C_n) &= A_{n+1} (A_n + B_n C_n) + B_{n+1} C_{n+1} (A_n + B_n C_n) \\ &= \left\{ A_{n+1}^{-1} \dots A_{n+m-1}^{-1} [CdCd^T - A_{n+m-1} \dots A_{n+1} B_n B_n^T A_{n+1}^T \dots A_{n+m-1}^T] - \right. \\ &\quad \left. B_{n+1} B_{n+1}^T A_{n+1}^T \dots A_{n+m-1}^T \right\} \times [CdCd^T]^{-1} A_{n+m-1} \dots A_n \end{aligned}$$

$$= A_{n+2}^{-1} \dots A_{n+m-1}^{-1} \left[C_d C_d^T - A_{n+m-1} \dots A_{n+1} B_n^T B_{n+1}^T A_{n+1}^T \dots A_{n+m-1}^T - \right. \\ \left. A_{n+m-1} \dots A_{n+2} B_{n+1}^T B_{n+1}^T A_{n+2}^T \dots A_{n+m-1}^T \right] \times \left[C_d C_d^T \right]^{-1} A_{n+m-1} \dots A_n$$

(A 3, 4)

Par récurrence, on obtient :

$$(A_{n+i} + B_{n+i} C_{n+i}) \dots (A_n + B_n C_n) = A_{n+i+1}^{-1} \dots A_{n+m-1}^{-1} \left[C_d C_d^T - \right. \\ \left. A_{n+m-1} \dots A_{n+1} B_n^T B_{n+1}^T A_{n+1}^T \dots A_{n+m-1}^T - A_{n+m-1} \dots A_{n+i+1} B_{n+i}^T B_{n+i}^T A_{n+i+1}^T \dots A_{n+m-1}^T \right] \\ \left[C_d C_d^T \right]^{-1} A_{n+m-1} \dots A_n$$

$$= A_{n+i+1}^{-1} \dots A_{n+m-1}^{-1} \left[B_{n+m-1}^T B_{n+m-1} + \dots + A_{n+m-1} \dots A_{n+i+2} B_{n+i+1}^T B_{n+i+1}^T A_{n+i+2}^T \dots \right. \\ \left. A_{n+m-1}^T \right] \left[C_d C_d^T \right]^{-1} A_{n+m-1} \dots A_n$$

(A 3, 5)

2 - Les matrices $\left[B_{n+m-1}^T B_{n+m-1} + \dots + A_{n+m-1} A_{n+i+2} B_{n+i+1}^T B_{n+i+1}^T A_{n+i+2}^T \dots \right. \\ \left. A_{n+m-1}^T \right]$ ont même rang que $\left[B_{n+m-1}, \dots, A_{n+m-1} \dots A_{n+i+2} B_{n+i+1} \right]$

En supposant le système uniformément commandable, ces matrices seront de rang q si et seulement si elles comportent m_c termes ou plus.

La matrice $\left[B_{n+m-1}, \dots, A_{n+m-1} \dots A_{n+m-m_c+2} B_{n+m-m_c+1} \right]$ est donc la première matrice singulière quand i croît, ce qui rend la matrice $(A + BC)_{n+m-m_c} \dots (A + BC)_n$ singulière.

Il suffit donc de vérifier que l'équation :

$$C_{n+m-m_c+1} (A+BC)_{n+m-m_c} (A+BC)_n = - B_{n+m-m_c+1}^T A_{n+m-m_c+1}^T \dots A_{n+m-1}^T \times \\ \left[C_d C_d^T \right]^{-1} A_{n+m-1} \dots A_n$$

(A 3, 6)

est compatible.

Le premier terme de cette équation s'écrit encore :

$$C_{n+m-m_c+1}^{-1} A_{n+m-m_c+2}^{-1} \dots A_{n+m-1}^{-1} \left[B_{n+m-1} B_{n+m-1}^T + \dots + A_{n+m-1} \dots A_{n+m-m_c+2} \right. \\ \left. B_{n+m-m_c+1} B_{n+m-m_c+1}^T \dots A_{n+m-1}^T \right] \left[C d C d^T \right]^{-1} A_{n+m-1} \dots A_n$$

La condition de compatibilité est alors :

$$\text{rg} \left[B_{n+m-1} B_{n+m-1}^T + \dots + A_{n+m-1} A_{n+m-m_c+2} B_{n+m-m_c+1} B_{n+m-m_c+1}^T \dots A_{n+m-1}^T \right] \\ = \text{rg} \begin{bmatrix} B_{n+m-1} B_{n+m-1}^T + \dots + A_{n+m-1} \dots A_{n+m-1}^T \\ B_{n+m-m_c+1}^T \dots A_{n+m-1}^T \end{bmatrix}$$

$$\text{Or } \text{rg} \left[B_{n+m-1} B_{n+m-1}^T + \dots + A_{n+m-1} \dots A_{n+m-1}^T \right] =$$

$$\text{rg} \left[B_{n+m-1}, \dots, A_{n+m-1} \dots B_{n+m-m_c+1} \right]$$

$$\text{et } N = \begin{bmatrix} B_{n+m-1} B_{n+m-1}^T + \dots + A_{n+m-1} \dots A_{n+m-1}^T \\ B_{n+m-m_c+1}^T \dots A_{n+m-1}^T \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} A_{n+m-1} \dots B_{n+m-m_c+1}^T \dots B_{n+m-1}^T \\ I \quad \quad \quad C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{n+m-m_c+1}^T \dots A_{n+m-1}^T \\ B_{n+m-1}^T \end{bmatrix}$$

On a donc d'après la définition de M ,

$$\text{rg}[M] \geq \text{rg} \left[B_{n+m-1} B_{n+m-1}^T + \dots + A_{n+m-1} \dots A_{n+m-1}^T \right]$$

et d'après l'équation précédente :

$$\text{rg}[M] \leq \text{rg} \left[B_{n+m-1}, \dots, A_{n+m-1} \dots B_{n+m-m_c+1} \right]$$

Par suite la condition de compatibilité est vérifiée.

On peut donc en déduire de l'équation (A 3, 6) $C_{n+m-1}+1$ puis de façon analogue les retours successifs jusqu'à C_{n+m-1} .

Les valeurs de ces retours sont données au chapitre II.

ANNEXE IV

$$\text{RANG DU PRODUIT} \quad \prod_{i=1}^m (A + B K_i C)$$

Nous supposons les matrices A, B, C de dimensions respectives $q \times q$, $q \times 1$, $r \times q$ et la matrice A régulière.

La démonstration que nous allons donner est basée sur la décomposition d'une matrice en un produit de matrices dont plusieurs régulières.

Les matrices I_q, I_1, I_r désignant les matrices identité de dimensions $q, 1, r$.

I - On considère la matrice M écrite ci - dessous :

$$M = \left[\begin{array}{c|cccccc} (A+BK_m C) \dots (A+BK_1 C) & (A+BK_m C)B \dots (A+BK_2 C) \dots (A+BK_m C)L & B \\ \hline 0 & -I_1 & 0 \\ & 0 & -I_1 \\ & & 0 & -I_1 \end{array} \right]$$

On peut écrire :

$$M = M_1 M_2 \quad (A 4,1)$$

avec $M_1 =$

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{nn} & (A+BK_m C) \dots (A+BK_2 C)B \dots \dots \dots B \\ \hline K_1 C & -I_1 \\ \vdots & \vdots \\ K_m CA^{m-1} & -I_1 \end{array} \right]$$

$M_2 =$

$$\left[\begin{array}{c|c} I_q & 0 \\ \hline K_1 C & I_1 \\ \vdots & \vdots \\ K_m CA^{m-1} & I_1 \end{array} \right]$$

La relation (A 4, 1) repose sur l'égalité (A 4, 2)

$$(A+BK_m C) \dots (A+BK_1 C) = (A+BK_m C) \dots (A+BK_2 C)A + (A+BK_m C) \dots (A+BK_2 C)BK_1 C$$

(A 4, 2)

dont le premier terme s'écrit encore :

$$(A+BK_m C) \dots (A+BK_3 C)A^2 + (A+BK_m C) \dots (A+BK_3 C)BK_2 CA$$

La matrice M_2 étant régulière, il vient :

$$\text{rg}(M) = \text{rg}(M_1) \quad (\text{A 4, 3})$$

II - La matrice

$$M' = \left[\begin{array}{c|cccc} A^m & & & & \\ \hline & -(I_1 + K_1 CA^{-1}B) & \dots & -K_1 CA^{-m+1}B & -K_1 CA^{-m}B \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & -(I_1 + K_{m-1} CA^{-1}B) & \\ & & & & -(I_1 + K_m CA^{-1}B) \end{array} \right]$$

vérifie l'égalité (A 4, 4)

$$M' = M_3 M_1 M_4 \quad (A 4, 4)$$

avec $M_3 =$

$$\left[\begin{array}{c|ccc} I_q & & & \\ \hline & -K_1 CA^{-m} & & \\ & \vdots & I_1 & \\ & -K_m CA^{-1} & & I_1 \end{array} \right]$$

$$M_4 = \left[\begin{array}{c|cccc} I_q & -A^{-1}B & \dots & -A^{-m}B & \\ \hline & & & & \\ & I_1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & -K_2 CB & & \\ & & & \ddots & \\ & -K_m C(A+BK_{m-1}C) & \dots & (A+BK_1C)B & \dots & -K_m CB & I_1 \end{array} \right]$$

Les matrices M_3 et M_4 étant régulières, il vient :

$$\text{rg}(M') = \text{rg}(M_1) \quad (A 4, 5)$$

III - Des égalités (A 4, 3) et (A 4, 5) il vient :

$$\text{rg} (M) = \text{rg} (M') \quad (\text{A } 4, 6)$$

ce qui s'écrit encore :

$$\text{rg} \left[(A+BK_m C) \dots (A+BK_1 C) \right] = q - ml + \text{rg} \begin{bmatrix} I_1 + K_1 C A^{-1} B & K_1 C A^{-2} B & \dots & K_1 C A^{-m} B \\ & 0 & & K_{m-1} C A^{-2} B \\ & & & & I_1 + K_m C A^{-1} B \end{bmatrix} \quad (\text{A } 4, 7)$$

IV - Une relation du même type est obtenue en "rangeant" K avec C :

On a :

$$\text{rg} \left[(A+BK_m C) \dots (A+BK_1 C) \right] = \text{rg} \left[(A^T + C^T K_1^T B^T) \dots (A^T + C^T K_m^T B^T) \right] \quad (\text{A } 4, 8)$$

ce qui est encore égal d'après l'équation précédente à :

$$q - mr + \text{rg} \begin{bmatrix} I_r + K_m B^T A^T - 1 C^T & \dots & K_m B^T A^T - 1 C^T \\ & 0 & & I_r + K_1 B^T A^T - 1 C^T \end{bmatrix} \quad (\text{A } 4, 9)$$

Après transposition de cette dernière matrice et permutation de ses colonnes, on obtient :

$$\text{rg} \left[(A+BK_m C) \dots (A+BK_1 C) \right] = q - mr + \text{rg} \begin{bmatrix} I_r + CA^{-1} L K_1 & CA^{-2} L K_2 & \dots & CA^{-m} L K_m \\ & \ddots & & \\ & & I_r + CA^{-1} L K_m & \\ & & & I_r + CA^{-1} L K_1 \end{bmatrix} \quad (A 4, 10)$$

V - Cas des systèmes monovariables

Pour les systèmes monovariables où $l = r = 1$, les paramètres de Markov $CA^{-i}B$ sont égaux à leurs transposées $B^T A^{T-i} C^T$.

Par suite, en utilisant l'expression donnée en (A 4, 9), on obtient dans ce cas particulier :

$$\text{rg} \left[(A+k_m BC) \dots (A+k_1 BC) \right] = q - m + \text{rg} \begin{bmatrix} 1+k_m CA^{-1} L & \dots & k_m CA^{-m} B \\ & \ddots & \\ & & 1+k_1 CA^{-1} B \end{bmatrix} \quad (A 4, 11)$$

Or d'après (A 4, 7), en intervertissant les indices, on a également :

$$\text{rg} \left[(A+k_1 BC) \dots (A+k_m BC) \right] = q - m + \text{rg} \begin{bmatrix} 1+k_m CA^{-1} B & \dots & k_m CA^{-m} L \\ & \ddots & \\ & & 1+k_1 CA^{-1} L \end{bmatrix} \quad (A 4, 12)$$

Il en résulte le théorème suivant :

Les produits $(A+k_m BC) \dots (A+k_1 BC)$ et $(A+k_1 BC) \dots (A+k_l BC)$ ont même rang.

VI - Cas où $l = r$ et $K_i = I_1$ (matrice unité)

Lorsque les gains sont égaux à la matrice unité, il vient :

$$\text{rg} [(A+BC)^m] = q - ml + \text{rg} \begin{bmatrix} I+CA^{-1}B & \dots & CA^{-m}B \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & I+CA^{-1}B \end{bmatrix} \quad (A.4, 13)$$

ANNEXE V

PROCEDURE DE CALCUL DE LA SEQUENCE DES GAINS K_i TELS QUE $\prod_i (A+B K_i C) = 0$

-128 -
PROGRAMME

```
REAL*8      A(10,10),B(10,10),C(10,10),A1(10,10),A2(10,10),X(10,10),
XC1(10,10),S(10,10),T(10,10),AA(10,10),K(10,10),KA(10,10,10)
```

```
DIMENSIONS A(C*Q),B(C*L),C(R*Q)
```

```
PROGRAMME LIMITE A L'ORDRE Q=4
```

```
INTEGER Q,R,P,PP,PPL,PPR
```

```
SYSTEME L(P)=1/(P*(1+T*P)) COMMANDE PAR MULTIMODULATION
```

```
C=2
```

```
P=1
```

```
L=2
```

```
T0=1.
```

```
T1=1.
```

```
D0=EXP(-T1/T0)
```

```
D1=EXP(-T1/(2.*T0))
```

```
A(1,1)=0.1D 01
```

```
A(1,2)=T0*(1.-D0)
```

```
A(2,2)=D0
```

```
A(2,1)=0.0D 01
```

```
C(1,1)=0.1D 01
```

```
C(1,2)=0.0D 01
```

```
P(1,1)=T1/2.-T0*(1.-D1)+T0*(1.-D1)*(1.-D1)
```

```
P(2,2)=1.-D1
```

```
P(1,2)=T1/2-T0*(1.-D1)
```

```
B(2,1)=D1*(1.-D1)
```

```
WRITE (6,9)
```

```
9 FORMAT(1X,'LES MATRICES A,B,C SONT RESPECTIVEMENT ')
```

```
CALL ECRIT2(A,Q,Q)
```

```
CALL ECRIT2(B,Q,L)
```

```
CALL ECRIT2(C,R,Q)
```

```
IND=0
```

```
IF (P-L) 1,1 ,11
```

```
1 LL=L
```

```
L=R
```

```
R=LL
```

```
IND=1
```

```
CALL TRANS(AA,A,Q,Q)
```

```
DO 3 I=1,Q
```

```
DO 3 J=1,Q
```

```
3 A(I,J)=AA(I,J)
```

```
DO 4 I=1,Q
```

```
DO 4 J=1,R
```

```
4 A1(I,J)=B(I,J)
```

```
CALL TRANS(B,C,L,Q)
```

```
CALL TRANS(C,A1,Q,R)
```

```
CALCUL DU NOMBRE DE GAINS
```

```
11 P=Q/L
```

```
IL=P*L
```

```
IF (Q-IL)64,64,63
```

```
63 P=P+1
```

```
64 PP=P*(P+1)/2
```

```
WRITE(6,55) PP
```

```
65 FORMAT(1X,'NOMBRE TOTAL DE GAINS ',13)
```

REPLISSAGE DU TABLEAU DE TRAVAIL PAR 0.

DO 2 I=1,10

DO 2 J=1,10

T(I,J)=0.

2 CONTINUE

DETERMINATION DE LA MATRICE INVERSE

CALL INVMA(A2,A,Q)

SAUVEGARDE DE LA MATRICE INVERSE

DO 6 I=1,Q

DO 6 J=1,Q

A1(I,J)=A2(I,J)

6 CONTINUE

CALCUL DE CAIR=S1

CALL DROP(C,A1,B,R,Q,Q,L,S1)

IPP=PP-1

DO 7 II=1,IPP

CALL PROD(A2,A1,X,Q,Q,Q)

BUT CALCULER A***-2,A***-3,...

DO 8 I=1,Q

DO 8 J=1,Q

A2(I,J)=X(I,J)

8 CONTINUE

CALL DROP(C,A2,B,R,Q,Q,L,S)

BUT CALCULER C*A***-I*B=S

REPLISSAGE DU TABLEAU T

IPI=PP-II

DO 7 IR=1,IPI

DO 7 I=1,R

II=(IR-1)*R+I

DO 7 J=1,L

J1=J+L*(II+IR-1)

T(II,J1)=S(I,J)

7 CONTINUE

DO 12 II=1,PP

DO 12 I=1,R

II=(II-1)*R+I

DO 12 J=1,L

J1=(II-1)*L+J

12 T(II,J1)=S1(I,J)

EDITION DU TABLEAU T

PPR=PP*R

PPL=PP*L

WRITE (6,93)

93 FORMAT(1X,'ECRITURE DU TABLEAU T')

CALL ECRIT2(T,PPR,PPL)

CALCUL DES GAINS A PARTIR DU TABLEAU T

CALL GAIN (KA,T,P,R,L,IND,PP,Q,AA,B,C,K,PPR,PP,A)

VERIFICATION CALCUL DU PRODUIT

CALL VERIF (A,B,C,KA,P,R,L,Q,K)

STOP

END

SUBROUTINE GAIN(KA,T,P,R,L,IND,PP,Q,A,B,C,K,PPR,PPL,S)

INTEGER P,R,PP,Q,PPP,PPR,PPL

REAL*8 A(10,10), M(10,10),M1(10,10),N1(10,10),N2(10,10),T(10,10)

REAL*8 M2(10,10),M3(10,10),M4(10,10),KA(10,10,10),K(10,10)

REAL*8 ETA(10,10),ETI(10,10),AA(10,10),B(10,10),C(10,10),
XS(10,10)

DO 10 I=1,10

DO 10 J=1,10

K(I,J)=0

A(I,J)=0

M(I,J)=0

DO 15 II=1,R

DO 15 JJ=1,L

ETA(II,JJ)=-T(II,JJ)

CALL PSEUDO(ETA,R,L,ETI,AA)

DO 1000 J1=1,P

U=J1*(J1+1)/2

DO 1000 I=1,L

DO 1000 J=1,R

K(I,J)=ETI(I,J)

1000 KA(NU,I,J)=ETI(I,J)

LC=L*3

CALL PROD(ETI,T,A,L,R,LC)

DO 10 I=1,L

10 A(I,1)=A(I,1)+0.1D 01

CALCUL DES GAINS

DO 1 J1=2,P

J11=J1*(J1-1)/2+1

J12=J1*(J1+1)/2-1

DO 2 J0=J11,J12

I1=(J11-1)*L

J1=(J12+1)*L

I2=(J11-1)*R

FORMATION DE LA MATRICE M (A-LA NU-IEME COLONNE)

DO 3 I=1,I1

JM=0

JN2=0

DO 4 J=1,J1

JJ=J/L

IF (NO-JJ)100,101,100

100 JM=JM+1

M(I,JM)=A(I,J)

GO TO 4

101 JN2=JN2+1

N2(I,JN2)=A(I,J)

4 CONTINUE

3 CONTINUE

MC=J12*L

ML=I1

DESCRIPTION DE LA MATRICE LIGNE DES LIA I

```

DO 5 I=1, K
  JI=L
  JIA=JI2*L
  DO 6 J=1, JIA
    JJ=J-.10*I
    IF (JJ)102,103,103
102  N1(I,J)=0
    GO TO 6
103  JI=JI+1
    N1(I,J)=T(I,JI)
6    CONTINUE
5    CONTINUE

CALCUL D'UN GAIN KA(NU) PSEUDO INVERSE DE P, PUIS PRODUIT N1*M-*N2
CALL PSEUDO (N,I1,MC,M1,AA)
CALL PROD (N1,M1,M2,R,MC,I1)
CALL PROD (M2,N2,M3,R,I1,L)
DO 11 IN=1,R
  DO 11 JN=1,L
11  M3(IN,JN)=M3(IN,JN)-T(IN,JN)
  CALL PSEUDO (M3,R,L,M4,AA)
  DO 12 IN=1,L
    DO 12 JN=1,R
12  KA(NU,IN,JN)=M4(IN,JN)
2    CONTINUE

CALCUL DE LA NOUVELLE MATRICE A(JI*(JI+1)/2,(JI+1)*(JI+2)/2).
LIA=(JI*(JI+1)/2)
L1K=LIA*L
LAA=(JI-1)*JI/2.
L2K=L1A*R
DO 1001 IU=LAA,L1A
  DO 1001 I=1,L
    DO 1001 J=1,R
      I1=(IU-1)*L+1
      J1=(IU-1)*R+J
1001  K(I1,J1)=KA(NU,I,J)

MATRICE A=K*ETA+I
IF (JI-P) 1003,1,1
1003 LZA=(JI+1)*(JI+2)/2
  LZE=LZA*L
  CALL PROD(K,I,A,L1K,L2K,LZE)
  DO 1002 I=1,L1K
1002 A(I,I)=A(I,I)+0.10 01
  CONTINUE

DO 21 I=1,10
  DO 21 J=1,10
21  K(I,J)=0.

IF (IND-1) 1007,1006,1006
1006 DO 20 I1=1,PP

```

```
IO=PP-11+1
DO 20 I=1,L
DO 20 J=1,R
II=(IO-1)*L+1
JJ=(IO-1)*R+J
20 K(JJ,II)=KA(IO,I,J)
PPP=PPL
PPL=PPR
PPR=PPP
PL=R
R=L
L=PL
DO 24 I=1,L
DO 24 J=1,Q
24 AA(I,J)=C(I,J)
CALL TRANS(C,F,Q,R)
CALL TRANS(H,AA,L,Q)
CALL TRANS(M,S,Q,Q)
DO 25 I=1,Q
DO 25 J=1,Q
25 S(I,J)=M(I,J)
GO TO 1005
1007 DO 26 IO=1,PP
DO 26 I=1,L
II=(IO-1)*L+1
DO 26 J=1,R
JJ=(IO-1)*R+J
26 K(II,JJ)=KA(IO,I,J)
1005 WRITE (6,1004)
1004 FORMAT(IX,'TABLEAU DES GAINS')
CALL ECRIT2(K,PPL,PPR)
RETURN
END
```

```

SUBROUTINE VERIF (A,B,C,KA,P,R,L,Q,K)
REAL*8      A(10,10),B(10,10),L(10,10),PP(10,10),PI(10,10)
REAL*8      KA(10,10,10),K(10,10),M(10,10),MI(10,10)
INTEGER P,Q,R
DO 10 II=1,Q
DO 10 JJ=1,L
10 PP(II,JJ)=0.00 01
DO 11 II=1,Q
11 PP(II,II)=0.10 01
WRITE(6,20)
20 FORMAT(1X,'VALEUR DES GAINS ET DES PRODUITS CORRESPONDANTS')
J1=(P+1)*7/2
DO 1 I=1,J1
DO 2 JJ=1,L
J1=(1-I)*L+JJ
DO 2 II=1,R
II=(1-I)*R+II
2 M(JJ,II)=K(J1,II)

EDITION DES GAINS
CALL ECRIT2(M,L,R)

3 CALL DROP(B,M,C,Q,L,R,Q,MI)
DO 3 II=1,Q
DO 3 JJ=1,Q
3 PI(II,JJ)=A(II,JJ)+MI(II,JJ)
CALL PROD (PP,PI,MI,Q,Q,Q)
DO 4 II=1,Q
DO 4 JJ=1,Q
4 PP(II,JJ)=MI(II,JJ)
CALL ECRIT2(M1,Q,Q)
1 CONTINUE
RETURN
END

```

SUBROUTINE PSEUDO(A,M,N,A1,A2)

CALCUL DU PSEUDO-INVERSE DE A NOTE A1
CAS DES MATRICES DE RANG MAXIMUM

REAL*8 A(10,10),A1(10,10),AA(10,10),S(10,10),SS(10,10)

REAL*8 AZ,AZZ

IF (M-N) 1,1,2

1 CALL TRANS(AA,A,M,N)

CALL PROD (A,AA,S,M,N,M)

CALL INVMA(SS,S,M)

CALL PROD (AA,SS,A1,M,M,M)

GOTO 3

2 CALL TRANS(AA,A,M,N)

CALL PROD(AA,A,S,N,M,N)

CALL INVMA(SS,S,N)

CALL PROD(SS,AA,A1,M,N,M)

3 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE TRANS(AA,A,MM,M)

CALCUL DE LA TRANSPOSEE DE A NOTEE AA

REAL*8 A(10,10),AA(10,10)

DO 1 I=1,M

DO 1 J=1,MM

AA(I,J)=A(J,I)

1 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE PROD(C,A,S,IR,IQ,IL)

PRODUIT DE LA MATRICE C(IR*IQ) PAR A(IQ*IL) NOTEE S(IR*IL)

REAL*8 C(IQ,IQ),A(IQ,IQ),S(IQ,IQ)

DO 1 I=1,IR

DO 1 J=1,IL

S(I,J)=0.

DO 1 K=1,IQ

S(I,J)=S(I,J)+C(I,K)*A(K,J)

CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE ECRIT2(A,IQ,IP)

ECRIURE DE LA MATRICE A(IQ*IP)

REAL*8 A(10,10)

DO 1 I=1,IQ

1 WRITE (6,2) (A(I,J),J=1,IP)

2 FORMAT (1X,10D12.4)

WRITE (6,2)

RETURN

END

SUBROUTINE DRDP(C,A,B,IR,IQ,IQQ,IL,S)

PRODUIT DE TROIS MATRICES C(IR*IQ) PAR A(IQ*IQQ) PAR B(IQQ*IL) NOTE S

REAL*8 C(10,10),A(10,10),B(10,10),S(10,10),S1(10,10)

CALL PROD(C,A,S1,IR,IQ,IQQ)

CALL PROD(S1,B,S,IR,IQQ,IL)

RETURN

END

SUBROUTINE INVMA(A,AA,N)

INVERSE DE LA MATRICE AA NOTE A

DIMENSION L(10)

REAL*8 A(10,10),AA(10,10),D(10)

REAL*8 EPS

REAL*8 AP

IMP=6

DO 20 I=1,N

DO 20 J=1,N

A(I,J)=AA(I,J)

EPS=0.1D-08

DO 1 I=1,N

L(I)=1

DO 2 K=1,N

IF(DABS(A(K,K))-EPS)3,3,4

WRITE(IMP,100)

FORMAT(2X,'PIVOT NUL'/)

K1=K+1

DO 5 M=K1,N

IF(DABS(A(K,M))-EPS)5,5,6

CONTINUE

WRITE(IMP,101)

FORMAT(2X,'MATRICE SINGULIERE')

STOP

DO 7 I=1,N

IF(L(I)-K)7,8,7

CONTINUE

IO=1

DO 9 I=1,N

IF(L(I)-M)9,10,9

CONTINUE

L(IO)=M

L(I)=K

DO 11 I=1,N

AP=A(I,K)

A(I,K)=A(I,M)

A(I,M)=AP

DO 12 I=1,N

IF(I-K)13,12,13

A(I,K)=-A(I,K)/A(K,K)

DO 112 J=1,N

IF(J-K)14,112,14

A(I,J)=A(I,J)+A(I,K)*A(K,J)

CONTINUE

CONTINUE

D(K)=A(K,K)

A(K,K)=1

DO 15 I=1,N

DO 15 J=1,N

A(I,J)=A(I,J)/D(I)

DO 16 I=1,N

MP=L(I)

```
DO 17 J=1,N  
IF(L(J)-1)17,18,17  
7 CONTINUE  
8 L(J)=MP  
DO 16 J=1,N  
AP=A(1,J)  
A(1,J)=A(MP,J)  
6 A(MP,J)=AP  
RETURN  
END
```

- 142 -
RESULTATS

LES MATRICES A,B,C SONT RESPECTIVEMENT

0.1000D 01	0.6321D 00
0.0	0.3679D 00
0.2613D 00	0.1065D 00
0.2387D 00	0.3935D 00
0.1000D 01	0.0

NUMBRE TOTAL DE GAINS 3

ECRITURE DU TABLEAU T

-0.1487D 00	-0.1263D 01	-0.4293D 01
-0.5696D 00	-0.2407D 01	-0.7403D 01
0.0	-0.1487D 00	-0.1263D 01
0.0	-0.5696D 00	-0.2407D 01
0.0	0.0	-0.1487D 00
0.0	0.0	-0.5696D 00

TABLEAU DES GAINS

0.4292D 00	0.0	0.0
0.1644D 01	0.0	0.0
0.0	-0.2392D 01	0.0
0.0	-0.1894D 01	0.0
0.0	0.0	0.4292D 00
0.0	0.0	0.1644D 01

VALEUR DES GAINS ET DES PRODUITS CORRESPONDANTS

0.4292D 00
0.1644D 01

0.1287D 01 0.6321D 00
0.7492D 00 0.3679D 00

-0.2392D 01
-0.1894D 01

-0.6089D 00 0.1046D 01
-0.3544D 00 0.6089D 00

0.4292D 00
0.1644D 01

-0.7910D-15 -0.4163D-15
-0.3608D-15 -0.1943D-15

A N N E X E V I

PROGRAMME DE CALCUL DES COMMANDES OPTIMALES AU SENS D'UN COMPROMIS

ENERGIE-PRECISION POUR UN SYSTEME MONOVARIABLE.

```
C
C   SYSTEME L(P)=1/(P(1+P))
C   MONOVARIABLE
C   EQUATION X(N+1)=A*X(N)+B*U(N)
C   DIMENSIONS A(L*L),B(L*1),C(1*L)
C   XO ETAT INITIAL, E ENTREE
C
C   DIMENSION TT(10,10),T(10,10),TR(10,10),TP(10,10),E(10,13),U(10,10)
C   X,B(10,10),C(10,10),D(10,10),A(10,10),X(10,10),XX(10,10),P(10,10) ,
C   XV(10,10),TS(10,10),Al(10,10),XO(10,10)
C   INTEGER S,SS
C
C   DONNEES
C
C   T1=1.
C   IND=0
13  T0=1.
C   DO=EXP(-T1/T0)
C   A(1,1)=1.
C   A(1,2)=T0*(1.-DO)
C   A(2,1)=0.
C   A(2,2)=DO
C   B(1,1)=T1-T0*(1.-DO)
C   B(2,1)=1.-DO
C   C(1,1)=1.
C   C(1,2)=0.
C   XO(1,1)=0.
C   XO(2,1)=0.
C   IF (IND-1) 14,15,15
14  L=2
C   M=5
C
C   ECRITURE DE A,B,C
C   CALL ECRIT2(A,L,L)
C   CALL ECRIT2(B,L,1)
C   CALL ECRIT2(C,1,L)
C
C   MISE A ZERO DES TABLEAUX DE TRAVAIL
C   DO 11 I=1,M
11  E(I,1)=1.
C   DO 1 I=1,M
C   DO 1 J=1,M
1  T(I,J)=0.
C
C   REMPLISSAGE DU TABLEAU T PAR C*(A**I)*B
C
C   CALL PROD(C,B,V,1,L,1)
C   DO 2 I=1,M
2  T(I,1)=V(1,1)
100 CONTINUE
C   DO 20 I=1,M
C   DO 20 J=1,M
20  A1(I,J)=A(I,J)
C   IP=1
```

```

25 CALL DROP(C,A1,B,1,L,L,1,V)
   MM=M-IP
   DO 21 I=1,MM
21  T((I+IP),I)=V(1,1)
   IP=IP+1
   IF (IP-M) 22,23,23
22  CALL PROD(A,A1,TR,L,L,L)
   DO 24 I=1,M
   DO 24 J=1,M
24  A1(I,J)=TR(I,J)
   GO TO 25

```

C
C
C

CALCUL DE LA COMMANDE OPTIMALE

```

23 CALL TRANS(TR,T,M,M)
   CALL PROD(TR,T,TP,M,M,M)
   DO 6 I=1,M
   DO 6 J=1,M
   TS(I,J)=TP(I,J)
6   T(I,J)=TP(I,J)
   DO 5 S=1,21,2
   SS=S-1
   DO 4 I=1,M
4   TS(I,I)=T(I,I)+SS*SS/10000.
   DO 41 I=1,L
41  X(I,1)=X0(I,1)
   CALL INVMA(P,TS,M)
   CALL PROD(P,TR,TP,M,M,M)
   CALL PROD(TP,E,U,M,M,1)
   CALL ECRIT2(U,M,1)

```

C
C
C

CALCUL DU GAIN NU

```

9  CALL TRANS(XX,U,M,1)
   CALL PROD(XX,U,V,1,M,1)
   CALL ECRIT2(V,1,1)
   IF (SS) 7,7,8
7  V0=V(1,1)
8  AU=V(1,1)/V0
   WRITE (6,10) SS,AU
10 FORMAT(1X,'POUR S=',I4,'LE RAPPORT NU VAUT',F7.3,'LES ETATS SUCCES
XSIFS SONT ALORS')

```

C
C
C

CALCUL DES ETATS

```

   MM=2*M
   DO 5 K=1,MM
   KK=(K+1)/2
   T1=0.5
   IND=1
   GO TO 13
15  CALL PROD(A,X,D,L,L,1)
   DO 3 I=1,L
3   X(I,1)=D(I,1)+B(I,1)*U(KK,1)

```

```
5  CALL ECRIT2(X,L,1)
200 CONTINUE
    STOP
    END
```

```
SUBROUTINE  PROD , DROP , TRANS , INVMA , ECRIT2 :
          voir Annexe V
```

BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE I

/1/ B.C. KUO

"Discrete-Data Control Systems"

Prentice-Hall, Inc - New Jersey - 1970

/2/ C. BOZZO

"Transformée de Laguerre d'un signal continu : application à l'étude du régime asymptotique du filtre de Kalman"

C.R.A.S. p 227 (23 / 07 / 1973) - Série A

/3/ C.R. RAO - S.K. MITRA

"Generalized inverse of matrices and its applications"

Wiley and sons - New York - 1971

/4/ FOSSARD A.

"Commande des systèmes multidimensionnels"

Techniques de l'automatisme - Dunod - Paris - 1972

/5/ E.S. GILBERT

"Controllability and observability in multivariable control systems"

J. SIAM on Control - Série A - 1(2) - pp 128-151 - 1963

/6/ R.E. KALMAN

"On the general theory of control systems"

Proc. Ist. Int. Aut. Cont. - Vol 1 pp 129-136 - 1961 - Butterworths - London

/7/ R. BOUDAREL - J. DELMAS - P. GUICHET

"Commande optimale des processus" Vol. 1 à 4

Techniques de l'automatisme - Dunod - Paris - 1967

/8/ B. PORTER - P. CROSSLEY

"Modal control - Theory and applications"

Taylor and Francis L.T.D. - London - 1972

/9/ D.G. LUENTBERGER

"Observing the state of a linear system"

IEEE - Trans. Mil Electron. Vol. M 12-8 - pp 74-80 - April 1964

/10/ J.C. WILLEMS

"Least square stationary optimal control and the Algebraic Riccati equation"

IEEE - Trans. on Automatic Control - Vol. AC 16 n°6 - Décembre 1971

/11/ J. MOYAUX - M. BENREJEB - P. BORNE

"Application des pseudo-inverses de matrices à l'étude de la commande des systèmes discrets".

AFAS - Limoges 1974

/12/ F. LAURENT

"Sur la commande d'un filtre par impulsions multimodulées"

C.R.A.S. t. 270 pp 686-688 - Mars 1970 - Série A.

/13/ E.B. LEE - L. MARKUS

"Foundations of optimal control theory"

John Wiley & Sons - New York - 1967

/14/ T.N.E. GREVILLE

"Some applications of the pseudo inverse of a matrix"

SIAM Rev. - 2 - pp15-22 - 1960

CHAPITRE II

/1/ D.G. LUENTBERGER

"Observers for multivariable systems"

IEEE Trans. Automat. Cont. , Vol AC-11, pp 190-197 - April 1966

/2/ T.M. ABDEL MONEIM

"Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes échantillonnés incomplètement observés"

Thèse de Docteur-ingénieur - Lille 1974

/3/ R. BOUDAREL - J. DELMAS - P. GUICHET

"Commande optimale des processus"

Dunod - Paris - 1967

/4/ A. FOSSARD

"Commande des systèmes multidimensionnels"

Technique de l'automatisme - Dunod - Paris 1972

/5/ F. LAURENT - J.C. GENTINA - M. STAROSWIECKI - P. BORNE

"On the operating time optimisation of incompletely observable sampled data systems with a plurality of monitoring"

2nd IFAC SYMPOSIUM - Dusseldorf 1971

/6/ B.C. KUO

"Analysis and synthesis of sampled data control systems"

Printice Hall - 1963

/7/ C. MELIN

"Contribution à l'analyse et à la synthèse dans l'espace d'état des systèmes multidimensionnels décrits par des récurrences non linéaires"

Thèse de doctorat d'état - Paris - Décembre 1973

/8/ F. LAURENT

"Sur la commande d'un filtre linéaire par des impulsions modulées"

C.R.A.S tome 27 - pp 288-289 - Janvier 1970 - Série A

/9/ C. VASSEUR

"Contribution à l'étude des systèmes échantillonnés commandés par impulsions multimodulées"

Thèse de Docteur-ingénieur - Lille - Juillet 1972

/10/ H. HALKIN

"A Maximum principle of the Pontryagin type for systems described by non linear difference equations"

J. SIAM Control - Vol. 4 - n°1 - 1966 - pp 91-111

/11/ J.C. GENTINA - P. BORNE

"On an isomorphism between continuous and discrete processes. Application to the definition of discrete models with a view to analyses and synthesize continuous systems"

Actes du Symposium IFAC de Riga (URSS) - 1974

CHAPITRE III

/1/ W.S. LEVINE - T.L. JOHNSON - M. ATHENS

"Optimal limited state variable feedback controllers for linear system"

IEEE - Trans. on Aut. Control - Vol. AC-16 - pp 785-793 - 1971

/2/ W.S. LEVINE - M. ATHENS

"On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems".

IEEE - Trans. on Aut. Control - Vol AC-15 - pp 44-48 - 1970

/3/ P. BORNE

"Analyse des systèmes asservis échantillonnés à paramètres périodiques"

Thèse de Docteur en Automatique - Université de Lille - Juin 1970

/4/ J.C. GENTINA

"Contribution à la commande optimale des systèmes échantillonnés non linéaires"

Thèse de Docteur ingénieur - Université de Lille - Juin 1970

/5/ B. PORTER - P. CROSSLEY

"Modal Control - Theory and applications"

Taylor and Francis L.T.D. - London - 1972

/6/ C.T. MULLIS

"On the controllability of discrete linear system with output feedback"

1973

/7/ F. LAURENT - J.C. GENTINA - M. STAROSWIECKI - P. BORNE

"On the operating time optimization of incompletely observable sampled data systems with a plurality of monitoring"

Second Ifac Symposium on multivariable technical control systems. Dusseldorf - Octobre 1971

/8/ C.D. MEYER

"Generalized inversion of modified matrices"

SIAM J. Appl. Math. Vol. 24 - n°3 - 1973

/9/ C.R. RAO - S.K. MITRA

"Generalized inverse of matrices and its applications"

Wiley and sons - 1971

/10/ D. CARLSON - E. HAYNSWORTH - T. MARKHAM

"A generalization of the Schur complement by means of the Moore-Penrose inverse"

SIAM J. Appl. Math - Vol. 26 - n°1 - 1974

/11/ F. BURNS - D. CARLSON - E. HAYNSWORTH - T. MARKHAM

"Generalized inverse formulas using the Schur complement"

SIAM J. Appl. Math - Vol. 26 n°2 - 1974

/12/ E. EMRE - Ö. HÜSEYİN

"Invertibility criteria for linear multivariable systems"

IEEE Transactions on automatic control - Octobre 1974

CHAPITRE IV

- /1/ A. KORGANOFF A. - M. PAVEL PARVU
"Eléments de théorie des matrices carrées et rectangles en analyse numérique"
Dunod - Paris - 1967 - Tome 2
- /2/ R. BOUDAREL - J. DELMAS - P. GUICHET
"Commande optimale des processus"
Dunod - Paris - 1967
- /3/ C.R. RAO - S.K. MITRA
"Generalized inverse of matrices and its applications"
Wiley and Sons - New York - 1971
- /4/ C. GASQUET
"Une barre d'erreur dans la résolution des problèmes linéaires perturbés et régularisés"
Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle n° R-3
pp 96-100 - 1971

BIBLIOGRAPHIE SUR LES PSEUDO-INVERSES DE MATRICES ET SES APPLICATIONS

a) Articles fondamentaux

/1/ E.H. MOORE

"On the reciprocal of the general algebraic matrix"(abstract)

Bull. Amer. Math. Soc. - 26 - pp 394-395 - 1920

/2/ E.H. MOORE

"General Analysis"

American Philosophical Society - Philadelphia - 1935

/3/ PENROSE

"A generalized inverse for matrices"

Proc. Cambridge Philos. Society - 51 - pp 406-413 - 1955

/4/ Y. TSENG

"Generalized inverses of unbounded operators between two unitary spaces"

Dokl. Akad. Nauk. SSSR - 67 - pp 431-434 - 1949

/5/ Y. TSENG

"Properties and classifications of generalized inverses of closed operators"

Dokl. Akad. Nauk. SSSR - 67 - pp 607-610 - 1949

/6/ Y. TSENG

"Virtual solutions and generalized inversions"

Uspeki. Math. Nauk (NS) - 11 - pp 213-215 - 1956

/7/ BJERHAMMER

"Rectangular reciprocal matrices with special reference to geodetic calculations"

Bull. Geodesique, 52 - pp 188-220 - 1951

/8/ BJERHAMMER

"Application of calculus of matrices to method of least squares with special reference to geodetic calculation"

Kungl. Tekn. Högsk. Handl. Stockholm - 49 - pp 1-86 - 1957

/9/ BJERHAMMER

"A generalized matrix algebra"

Kungl. Tekn. Högsk. Handl. Stockholm, - 124 - pp 1-32 - 1958

/10/ C.R. RAO

"Analysis of dispersion for multiply classified data with unequal numbers in alls"

Sankhyā - 15 - pp 253-280 - 1955

/11/ C.R. RAO

"Calculus of generalized inverse of matrices. Part 1 : General theory"

Sankhyā - Ser. A - 29 - 317-342 - 1967

/12/ GREVILLE

"The pseudo-inverse of a rectangular or singular matrix and its application to the solution of systems of linear equations"

SIAM News Letter - 5 pp 3-6 - 1957

/13/ BEN ISRAEL CHARNES

"Contributions to the theory of generalized inverses"

SIAM J. Appl. Math. - 11 - pp.667-699 - 1961

/14/ J.E. SAOGGS - P.L. ODELL

"An alternative definition of the pseudo-inverse of a matrix"

SIAM J. Appl. Math. - 14 - pp 796-810 - 1966

b) Ouvrages généraux

/15/ C.R. RAO - S.K. MITRA

"Generalized inverse of matrices and its applications"

Wiley and sons - New York - 1971

/16/ A. KORGANOFF - M. PAVEL-PARVU

"Elements de théorie des matrices carrées et rectangles en analyse numérique"

tome 1 et 2 - Dunod - Paris - 1969

/17/ GERMAIN-BONNE

"Méthodes de calcul de pseudo-inverses de matrices"

Thèse de Docteur-ingénieur - Lille - 1967

/18/ R. BOUDAREL-J. DELMAS-P. GUICHET

"Commande optimale des processus"

Dunod - Paris - 1967 (pour la notion de matrice adjointe)

(Techniques de l'automatisme)

c) Articles récents

/19/ W.R. HARWOOD - V. LOVASS-NAGGY - D.L. POWERS

"A note on the generalized inverses of some partitioned matrices"

SIAM J. Appl. Math. pp 555-559 - 1970

/20/ N. GUPTA

"On the convergence of an iterative method for the computation of generalized inverse and associated projections"

Systems Sciences, 2 - Juillet 1971

/21/ J.V. RAO

"Some more representations for the generalized inverse of a partitioned matrix"

SIAM J. Appl. Math. pp 272-276 - 1972

/22/ G.H. GOLUB - V. PERRYNA

"The differentiation of pseudo-inverses and non-linear least squares problems whose variables separate"

SIAM J. Appl. Math. - Vol.10 - n°2 - pp 413-432 - 1973

/23/ R.E. CLINE - L.D. PVLE

"The generalized inverse in linear programming. An intersection projection method and the solution of a class of structured linear programming problems"

SIAM J. Appl. Math. - Vol. 24 - n°3 - pp 338-351 - 1973

/24/ C.R. RAO - S.K. MITRA

"Theory and applications of constrained inverse of matrices"

SIAM J. Appl. Math - Vol 24 - n° 4 - pp 473-488 - 1973

/25/ R. BOULDIN

"The pseudo-inverse of a product"

SIAM J. Appl. Math. - Vol.24 - n° 4 - pp 489-495 - 1973

/26/ W.C. PYE - T.L. BOUILLON - T.A. ATCHISON

"The pseudo-inverse of a composite matrix of circulants"

SIAM J. Appl. Math. - Vol. 24 - n° 4 - pp 552-555 - 1973

/27/ R.P. NAYAK - E.C. FLOUDRIAT

"Sequential parametre estimation using pseudo-inverse"

IEEE Transactions on automatic control - pp 81-83 - 1974

/28/ C.D. MEYER

"Generalized inverses of modified matrices"

SIAM J. Appl. Math. - Vol 24 - n°3 - 1973

/29/ N. MINAMIDE - K. NAKAMURA

"A restricted pseudo-inverse and its applications to constrained minima"

SIAM J. Appl. Math. - Vol 19 - n°1 - 1970

/30/ D. CARLSON - E. HAYNSWORTH - Th. MARKHAM

"A generalization of the Schur complement by means of the Moore-Penrose inverse"

SIAM J. Appl. Math. - Vol 26 - n°1 - 1974

/31/ T. SÖDERSTON - G.W. STEWART

"On the numerical properties of an iteration method for computing the Moore-Penrose generalized inverse"

SIAM J. Num. Anal. - Vol.11 - n°1 - 1974

/32/ F. BURNS - D. CARLSON - E. HAYNSWORTH - Th. MARKHAM

"Generalized inverse formulas using the Schur complement"

SIAM J. Appl. Math. - Vol 26 - n°2 - 1974

/33/ T.N.E. GREVILLE

"Solutions of the matrix equation $XAX = X$, and relations between oblique and orthogonal projectors"

SIAM J. Appl. Math. - Vol 26 - n°4 - 1974

/34/ W.T. STALLINGS - T.L. BOUILLON

"A strong spectral inverse for an r -circulant matrix"

SIAM J. Appl. Math. - Vol 27 - n°2 - 1974

/35/ D. CARLSON

"Matrix decompositions involving the Schur complement"

SIAM J. Appl. Math. Vol 28 - n°3 - 1975

/36/ R.E. HAZTWIG

" $AX-XB=C$, Resultants and generalized inverses"

SIAM J. Appl. Math. - Vol 28 - n°1 - 1975

/37/ D.T. BARWICK - J.D. GILBERT

"On generalizations of the reverse order law"

SIAM J. Appl. Math. - Vol. 27 - n°2 - 1974

/38/ Y. FUNAHASHI - K. NAKAMURA

"A matrix formulation for the estimation of weighting sequence matrix"

Int. J. Systems Sci. - vol. 5 n° 8 - pp 725-731 - 1974

/39/ N.K. SINKA - A. SEN

"Comparison of some on-line identification methods for a simulated first order process"

Automatic control theory and applications - vol 2 n°2 - pp37-43 - 1974

/40/ A.I. VARDULAKIS

"A sufficient condition for a specified eigenvalues to be assigned under constant output feedback"

IEEE Transactions on automatic control - 1975.

TABLE des MATIERES

	Page
Avant Propos	
<u>Introduction générale</u>	1
<u>CHAPITRE I : Analyse des commandes des systèmes discrets multivariables linéaires.</u>	
Introduction	2
I.1. Description des systèmes étudiés.	
1.1 Classe des systèmes étudiés : représentation et notations	3
1.2 Commandabilité et observabilité	4
I.2. Utilisation des pseudo-inverses de matrices dans l'étude des commandes.	
2.1 Existence et expression des commandes	7
2.2 Etude de la commande optimale	12
2.3 Définition et calcul d'une "meilleure commande" pour un système non commandable en m coups	14
2.4 Influence du temps de commande	17
Conclusion	23
<u>CHAPITRE II : Synthèse de quelques commandes des systèmes discrets multivariables linéaires.</u>	
Introduction	24
II.1. Réalisation des commandes au moyen d'une chaîne de retour.	
1.1 Position du problème	25
1.2 Formulation générale	26
1.3 Structure optimale par réaction d'état à paramètres variables	29
1.4 Structure de commande par réaction d'état à paramètres constants	33
1.5 Cas des systèmes linéaires non stationnaires	38
1.6 Application	39

II.2. Recherche d'un modulateur pour une commande optimale.	
2.1 Position du problème	46
2.2 Utilisation des pseudo-inverses pour la détermination du filtre associé	47
2.3 Application pratique	51
Conclusion	55

CHAPITRE III : Commande des systèmes discrets par gains variables.

Introduction	56
III.1. Caractéristiques des systèmes asservis à gains variables.	
1.1 Première formulation du problème	57
1.2 Commandabilité, observabilité, conditions nécessaires.	58
1.3 Définition et calcul des gains "fondamentaux"	59
1.4 Etude du produit de matrices $(A+BK_m C) \dots (A+BK_1 C)$	63
1.5 Résumé	65
III.2 Procédure de calcul de la séquence des gains.	
2.1 Cas des systèmes monovariables	66
2.2 Cas des systèmes multivariables	71
III.3. Etude d'un système d'ordre 3 monovariable	
3.1 Etude théorique	74
3.2 Etude pratique	77
III.4. Simulation d'un système multivariable sur ordinateur.	
4.1 Description du système	86
4.2 Mise en oeuvre de la procédure	87

CHAPITRE IV : Commande optimale au sens de divers types de mesures.

Introduction	90
IV.1. Commande optimale pour deux normes données.	
1.1 Notations et préliminaires	91
1.2 Erreur sur les sorties	92
1.3 Fonctions de l'erreur et de la commande minimisées ...	93
1.4 Meilleure solution pour les normes N_1 et N_2	94
1.5 Cas particulier	95

IV.2. Compromis précision-énergie.	
2.1 Définition et calcul de la commande optimale	95
2.2 Gain en énergie	97
IV.3. Application pratique.	
3.1 Description et équations du système étudié	99
3.2 Réponses du système	101
Conclusion	103
<u>Conclusion générale</u>	104
Annexe 1 : Définitions et propriétés des inverses généralisées	105
Annexe 2 : Conduite optimale des systèmes du premier ordre	114
Annexe 3 : Commande optimale des systèmes linéaires non stationnaires .	117
Annexe 4 : Rang du produit $\prod_{i=1}^m (A+BK_iC)$	121
Annexe 5 : Procédure de calcul de la séquence des gains K_i tels que $\prod_i (A+BK_iC) = 0$	127
Annexe 6 : Programme de calculs des commandes optimales au sens d'un compromis énergie-précision pour un système monovariable ...	143

Bibliographie

Table des Matières.

