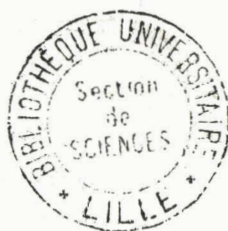


50376
1976
22

50376
1976
22



A ma femme,
A mes enfants
A mes parents et beaux parents,
A mon père,

Avant propos

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire de Systématique de l'Université des Sciences et Techniques de Lille I.

Les recherches que nous y avons effectuées ont été dirigées par Monsieur le Professeur F. Laurent.

C'est avec empressement que nous voulons remercier Monsieur le Professeur Laurent pour l'enseignement qu'il a su nous dispenser puis pour l'accueil qu'il nous a réservé au sein de son équipe de recherche. Très rapidement et aussi efficacement, il a su nous initier à la recherche. Durant toute l'élaboration de cette thèse il nous a guidé avec sérieux en nous procurant sur un plan moral et humain sa sure et chaude amitié.

Avec la plus grande bienveillance, Monsieur le Professeur R. Gabillard a accepté de nous conseiller dans la mise au point définitive de nos travaux. Monsieur le Professeur R. Gabillard nous a grandement honoré en voulant bien accepter de présider notre jury. Qu'il reçoive ici le témoignage de notre très profonde gratitude.

Nous tenons à exprimer notre très vive reconnaissance à Monsieur le Professeur Lj. T. Grujić pour le dévouement qu'il a montré en s'intéressant à nos recherches. Il nous a permis, par ses très hautes compétences dans le domaine de la stabilité des systèmes de faire évoluer très sensiblement notre travail malgré l'éloignement géographique. Les relations qui existent maintenant entre nos deux laboratoires sont le résultat de cette étroite collaboration.

Monsieur le Professeur Grujić a bien voulu juger notre travail et participer au jury de thèse, nous le prions d'accepter nos très vifs et sincères remerciements.

Monsieur le Professeur J.L. Abatut a bien voulu accepter de nous conseiller tout au long de nos recherches. Par l'intérêt qu'il a montré pour nos travaux, il nous a permis d'approfondir plusieurs points de ce mémoire. Sa présence à notre jury de thèse nous a profondément touché, nous lui exprimons toute notre reconnaissance.

Nous avons été particulièrement honoré par la présence à notre jury de Monsieur le Professeur F. Lhote, il nous a témoigné de son intérêt pour nos recherches et a accepté avec beaucoup de bienveillance de nous aider dans la mise au point de ce mémoire. Nous le remercions très vivement.

Nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance à Monsieur le Professeur P. Vidal pour l'enseignement qu'il nous a d'abord dispensé puis pour les conseils qu'il nous a prodigués au cours de nos recherches. Nous le remercions également d'avoir bien voulu accepter de participer à notre jury de thèse.

Que Monsieur le Professeur Bossut, Directeur de l'Institut Industriel du Nord reçoive ici le témoignage de notre respectueuse et très profonde reconnaissance. A tout moment il nous a apporté son soutien et en particulier en acceptant de participer à notre jury de thèse. Nous tenons à lui exprimer notre profond attachement.

Le concours de Monsieur Miossec, Ingénieur E.D.F. a été très précieux. Par son dévouement et sa gentillesse, Monsieur Miossec nous a permis de traiter une application à caractère industriel. Nous le prions de croire en notre très amicale et très sincère gratitude.

Nous voudrions également remercier notre collègue et ami Monsieur P. Borne, chercheur au Laboratoire de Systématique. A tout moment il a su jouer le rôle d'un interlocuteur toujours intéressé à

l'esprit critique exercé ; les échanges de vues que nous avons pu avoir sur nos problèmes de recherches respectifs ont été extrêmement profitables. Nous lui exprimons toute notre sympathie et lui témoignons de notre amitié profonde.

Nous ne saurions terminer cet avant propos sans exprimer notre reconnaissance à tous les chercheurs de l'équipe du Laboratoire de Systématique pour l'aide précieuse qu'ils nous ont apportée à la fois sur le plan scientifique et sur le plan des contacts amicaux.

Introduction générale

Ce mémoire a essentiellement pour objet la présentation de nouvelles méthodes de majoration des systèmes continus non linéaires de grandes dimensions. Deux applications seront envisagées, la première est relative à l'analyse des propriétés de stabilité d'un processus, la seconde a pour objet d'illustrer sur un exemple concret les possibilités de synthèse à partir du système majorant.

Introduit à l'origine en mécanique, le concept de stabilité désigne une caractéristique de l'équilibre d'un corps rigide. L'idée première d'un mouvement par rapport à une position d'équilibre stable a permis d'introduire la notion de représentation dynamique d'un processus. Ainsi, en mécanique, le repérage d'un mobile s'effectue le plus souvent à partir des coordonnées de Lagrange (positions, vitesses). Cette préoccupation de décrire à la fois la position instantanée et la dynamique d'un processus conduit à la notion d'état utilisée de manière habituelle en automatique.

Les processus que nous étudierons dans ce mémoire sont supposés d'évolution continue, leur état est représenté par un vecteur d'ordre fini. De plus, les modèles que nous serons amenés à utiliser dans la représentation de tels systèmes sont par hypothèse décrits à partir d'équations différentielles vectorielles du premier ordre et de forme générale :

$$\dot{x} = f(x, t, \pi) \quad (A)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathcal{T}_0, \quad \mathcal{T}_0 = [t_0, \infty[, \quad \mathcal{T} =]-\infty, +\infty[$$

$$\pi \in \mathbb{R}^l, \quad f : \mathcal{T}_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Lors de la définition d'un modèle, au cours de la phase d'identification, il convient de tenir compte à la fois du caractère non linéaire du processus des erreurs de mesures dues aux capteurs et aux bruits, et enfin des hypothèses simplificatrices. Dans ce sens, le vecteur π traduit le caractère d'imprécision du modèle.

Deux points de vue peuvent ainsi conduire à des méthodes d'analyse différentes.

- (i) On peut tout d'abord considérer le vecteur π comme un vecteur aléatoire défini par les fonctions caractéristiques de chacune de ses composantes. Dans ce cas, il s'agit d'étudier un processus de Markov dont le caractère de stabilité ne peut être précisé qu'en termes stochastiques.
- (ii) Nous avons choisi d'utiliser ici une autre méthode et d'associer au modèle A, un modèle majorant déterministe B d'ordre inférieur ou égal à celui de A. Les solutions de A seront par hypothèses majorées par celles de B au sens d'une inégalité.

L'idée d'associer un système de comparaison de structure simple à un processus non linéaire complexe n'est pas nouvelle, elle a permis notamment à V.M Matrozov de donner une interprétation de la seconde méthode de Ljapunov. Toutefois, il convient de rappeler que ces systèmes de comparaison furent à l'origine décrits par une équation différentielle scalaire du premier ordre. Plus récemment, différents auteurs se sont intéressés à la recherche de conditions de stabilité moins restrictives en utilisant un système de comparaison qui ne serait pas nécessairement du premier ordre. C'est dans cette optique que nous présentons ce mémoire comme une contribution à l'analyse des systèmes continus non linéaires de grandes dimensions avec une application dans le domaine de la synthèse.

Dans un premier chapitre nous proposons de rappeler les définitions relatives au concept de stabilité.

Une seconde partie concerne la présentation d'un critère de stabilité adapté à l'analyse des processus monovariés. Les notions de système majorant et de système de comparaison sont ainsi définies dans le cas particulier d'un vecteur de comparaison de même ordre que le vecteur état.

La définition plus précise de ces concepts nous amène dans une troisième

étape à étudier d'une manière plus systématique la notion de processus majorant par l'utilisation des normes vectorielles.

Le chapitre IV est relatif à l'analyse des propriétés d'un processus continu non linéaire. L'utilisation du système de comparaison conduit ainsi à l'énoncé de plusieurs critères de stabilité.

L'illustration sur un exemple de ces techniques de majoration est envisagée dans une dernière partie et concerne la synthèse d'un mode de contrôle auto-adaptatif du surchauffeur de la centrale de Loire sur Rhône.

CHAPITRE I

Représentation des Systèmes à variables continues: Stabilité.

I.1. - Structure des Systèmes continus non linéaires.

La notion de système physique est généralement associée à la définition de deux ensembles de variables :

- d'une part les variables de sorties supposées accessibles à la mesure.
- d'autre part les variables d'entrée permettant d'agir sur le comportement du processus.

Les systèmes que nous proposons d'étudier appartiennent à la classe des systèmes "dynamiques" au sens de la définition de M. Athans /1/. Leur mouvement est susceptible d'être reproduit par la résolution d'un modèle mathématique. Nous envisageons de suivre l'évolution du processus sur l'intervalle de temps $\mathcal{C}_0 = [t_0, +\infty[$, t_0 définissant l'instant initial.

Dans ce cas l'évolution du processus est supposée de sens constant, la variable t étant constamment croissante à partir de t_0 .

$$t \in \mathcal{C}_0, \quad t_0 \in \mathcal{C} \quad \mathcal{C} =]-\infty, +\infty[$$

Afin de préciser les notations, nous supposons que l'ensemble des variables d'entrées constitue un vecteur u de dimension ℓ dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ des fonctions du temps $u_i(t)$

$$\begin{aligned} u^T &= \{ u_1(t), \dots, u_\ell(t) \} \\ \forall t \in \mathcal{C}_0 \end{aligned} \quad (1)$$

De même, les variables de sorties forment un vecteur de sortie s de dimension r dans le même espace $\mathcal{C}$:

$$s^T = \{s_1(t), \dots, s_r(t)\} \quad (2)$$

$\forall t \in \mathcal{C}_0$

Il convient à ce niveau d'introduire deux hypothèses supplémentaires conduisant à une définition plus précise de la classe des systèmes étudiés.

En premier lieu nous supposons que le vecteur de sortie $s(t)$, défini à l'instant t , ne dépend pas du vecteur de commande $u(t_i)$ défini aux instants t_i postérieurs à l'instant t .

En second lieu, les variables et fonctions que nous serons amenés à introduire au cours de cet exposé ne dépendront d'aucun facteur aléatoire.

Les systèmes étudiés appartiennent donc à la classe des processus déterministes et non anticipatifs.

L'évolution du vecteur de sortie $s(t)$ est continue ou continue par morceau par rapport à l'argument temporel t sur $\mathcal{C}_0$; de même le vecteur de commande $u(t)$ est d'évolution continue ou continue par morceau sur le même intervalle de temps. A l'instant t le vecteur $e(t)$ de dimension m représente les entrées ou consignes. Le vecteur de commande $u(t)$ est élaboré à partir des variables des consignes e et des sorties s éventuellement retardées. Cette structure d'asservissement peut être représentée selon le schéma suivant

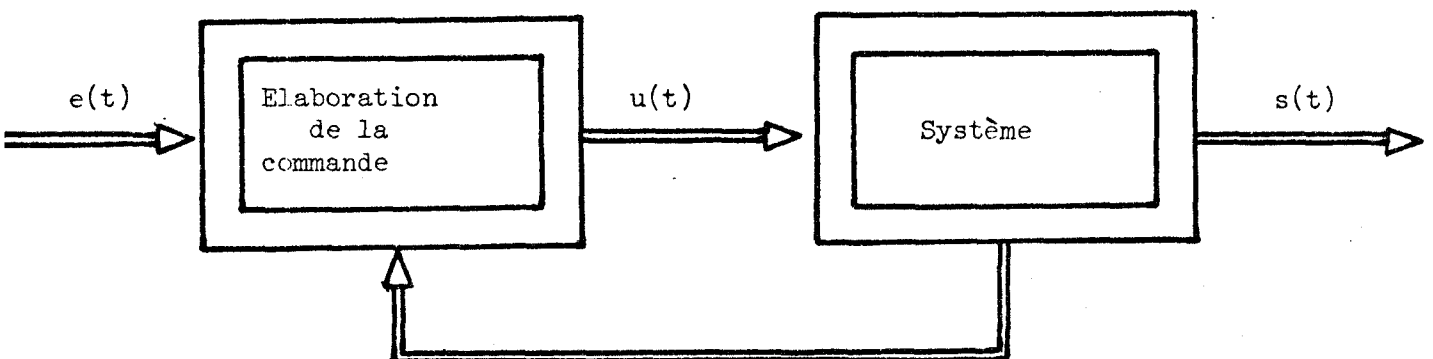


figure 1.

1.2. - Notion d'Etat

L'évolution du processus sur l'intervalle d'observation ne dépend pas en fait des seules entrées mais aussi des données initiales à l'instant t_0 . En effet, pour un même intervalle d'observation, une même évolution du vecteur de commande $u(t)$ l'observation des sorties peut être différente. Il convient donc d'adjoindre aux deux notions de commande et de sortie précédemment définies, la notion d'état qui caractérise l'ensemble des informations dont il suffit de disposer à l'instant t_0 pour prédire le comportement du processus sur l'intervalle de définition.

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des fonctions du temps, supposé linéaire et normé, nous appellerons x le vecteur état de dimension n sur $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}$ désigne ici le corps des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$. Si x_0 représente l'état initial du processus à l'instant t_0 , la relation de dépendance entre le vecteur état, les commandes et l'état initial x_0 est définie à tout instant de l'intervalle d'observation $]t_0, t_f]$ sous la forme de la fonction de transition (3) /1/, /2/, /3/.

$$x(t) = x(x_0 ; u(t_0, t) ; t_0, t) \quad (3)$$

Cette fonction est supposée continue par morceau par rapport à x_0 pour t et t_0 fixés et par rapport à t pour x_0 et t_0 fixés.

$$x(x_0 ; u(t_0, t_0) ; t_0, t_0) = x_0 \quad (3')$$

Ainsi la connaissance de l'état initial x_0 à l'instant t_0 ainsi que des commandes $u(t_0, t)$ sur l'intervalle d'observation suffit à déterminer à tout instant l'état du processus et les sorties correspondantes. Notons enfin que ce vecteur est constitué d'un minimum d'informations dont le nombre définit l'ordre du processus.

D'une façon analogue les variables de sortie sont définies par la relation suivante :

$$s(t) = s[x_0 ; u(t_0, t) ; t_0, t] \quad (4)$$

1.3. - Stabilité d'un système dynamique.

Dans un premier temps, nous proposons de préciser les définitions relatives à la stabilité d'un système dynamique continu.

Les systèmes que nous étudierons ayant généralement une structure de type bouclée nous noterons sous forme simplifiée la fonction de transition $x(t)$

$$\begin{aligned} x &\in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathcal{T}_0, \quad t_0 \in \mathcal{T} \\ x(t) &= x[t, x_0, t_0] \end{aligned} \quad (5)$$

Cette relation suppose une dépendance (feedback) entre les commandes et les sorties ; le régime d'évolution est autonome, les entrées étant supposées constantes ou nulles.

1.3.1. - Stabilité Asymptotique.

Notons $x(t, x_0, t_0)$ et $x(t, x'_0, t_0)$ deux mouvements d'un même processus pour des états initiaux différents et $d(t, t_0 ; x_0, x'_0)$ la distance entre deux points successifs au même instant :

$$\begin{aligned} d(t, t_0 ; x_0, x'_0) &= ||x(t, x_0, t_0) - x(t, x'_0, t_0)|| \\ \text{avec : } ||x||^2 &= x^T x \end{aligned} \quad (6)$$

Les études de stabilité cherchent généralement à donner une estimation de cette distance à partir de fonctions de comparaison. Afin de préciser le concept de stabilité asymptotique, il convient de rappeler les notions de stabilité et d'attractivité introduites par W. Hahn /4/.

Définition 1.

Le mouvement $x(t, x'_1, t_0)$ est appelé mouvement perturbé si x'_1

est susceptible d'évoluer dans un certain voisinage de x_0 selon l'inégalité suivante :

$$x'_1 \in \mathcal{B}_\Delta(x_0) = \{x'_1 : ||x_0 - x'_1|| < \Delta\} \quad , \quad \Delta > 0$$

Définition 2.

$\varphi(r)$ représente au sens de la définition de Hahn une fonction de classe K telle que :

$$\varphi(0) = 0$$

$\varphi(r)$ est une fonction définie continue strictement croissante de r pour

$$0 \leq r \leq r_1$$

$$\forall r > 0 \quad \varphi(r) > 0$$

Définition 3.

D'une façon analogue $\sigma(s)$ désigne une fonction de classe L définie continue strictement décroissante de l'argument s et telle que :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma(s) = 0 \quad \sigma(s) > 0, \quad \forall s > 0$$

Dans ces conditions, le mouvement non perturbé $x(t)$ est stable s'il existe une fonction φ de classe K par rapport aux conditions initiales telle que :

$$\begin{aligned} d(t, t_0; x_0, x'_1) &\leq \varphi[||x_0 - x'_1||; t_0] \\ \forall t \in \mathcal{T}_0, \forall t_0 \in \mathcal{T}, \forall x'_1 \in \mathcal{B}_\Delta(x_0) \end{aligned} \quad (7)$$

La définition originale de la stabilité exprime qu'il doit exister pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre δ tel que :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathcal{T}_0, ||x_0 - x'_1|| < \delta(t_0, \varepsilon) \Rightarrow d(t, t_0; x_0, x'_1) < \varepsilon \\ \forall t_0 \in \mathcal{T}, \forall x'_1 \in \mathcal{B}_\Delta(x_0), \quad \delta > 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Le mouvement non perturbé est attractif s'il existe une fonction δ de classe L par rapport à $t - t_0$ et telle que :

$$d(t, t_0; x_0, x'_1) \leq \delta[t - t_0; x'_1, t_0] \quad (9)$$

$$\forall t_0 \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{C}_0, \forall x'_1 \in \mathcal{B}_\Delta(x_0)$$

Il est équivalent de dire que pour tout nombre $\eta > 0$ il existe T tel que :

$$d(t, t_0; x_0, x'_1) < \eta \Leftrightarrow t - t_0 > T \quad (10)$$

$$\forall t_0 \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{C}_0, \forall x'_1 \in \mathcal{B}_\Delta(x_0)$$

Enfin, si le mouvement non perturbé est à la fois stable et attractif il est dit asymptotiquement stable, c'est dire qu'il existe un majorant de la distance d défini par l'inégalité suivante :

$$d(t, t_0; x_0, x'_1) \leq \varphi[||x_0 - x'_1||; t_0] \delta[t - t_0; x'_1, t_0] \quad (11)$$

$$\forall t_0 \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{C}_0, \forall x'_1 \in \mathcal{B}_\Delta(x_0)$$

1.3.2. - Stabilité uniforme

La notion de stabilité uniforme exprime que les fonctions de comparaison peuvent être choisies indépendamment de l'instant t_0 . i.e :

$$\forall x'_1 \in \mathcal{B}_\Delta(x_0), \forall t_0 \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{C}_0, d(t, t_0; x_0, x'_1) \leq \varphi[||x_0 - x'_1||] \quad (12)$$

Le concept d'attractivité peut être qualifié d'uniforme par rapport à t_0 ou par rapport au mouvement perturbé de x'_1 .

Dans chacun des cas il vient : $\forall t_0 \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{C}_0, \forall x'_1 \in \mathcal{B}_\Delta(x_0)$

par rapport à x'_1 $d(t, t_0; x_0, x'_1) \leq \delta(t - t_0; t_0) \quad \forall t > t_0$

par rapport à t_0 $d(t, t_0; x_0, x'_1) \leq \delta(t - t_0; x'_1) \quad (13)$

Enfin le mouvement est dit uniformément et asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et uniformément attractif (par rapport à x'_1). Dans ce cas, la stabilité ne dépend ni de l'instant initial ni des perturbations.

1.3.3. - Stabilité illimitée, stabilité asymptotique globale

Le domaine d'attraction d'un point d'équilibre ramené à l'origine est constitué de tous les points x_0 tels que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0, t_0) = 0 \quad \forall t_0 \in \mathcal{T}, \forall t \in \mathcal{T}_0$$

Lorsque la propriété de stabilité est vérifiée le domaine d'attraction est très souvent appelé domaine de stabilité. Ce concept doit être distingué du concept de domaine de stabilité dans l'espace des paramètres au sens du critère de Routh - Lorsque le domaine de stabilité et d'attraction est constitué de tout l'espace de définition du vecteur état x on dit qu'il s'agit de stabilité asymptotique illimitée ou de stabilité asymptotique globale.

1.3.4. - Stabilité absolue.

De très nombreux systèmes asservis non linéaires n'ont qu'une seule non linéarité. La caractéristique non linéaire $f(z)$ vérifie par hypothèse une relation du type suivant :

$$0 \leq z f(z) \leq \alpha z^2 \quad 0 < \alpha < \infty$$

Un tel système vérifie la propriété de stabilité absolue /6/ dans le secteur $[0, \alpha]$ si l'équilibre est globalement asymptotiquement stable et ne dépend pas du choix particulier de la valeur de $f(z)$ dans le secteur $[0, \alpha]$.

1.3.5. - Stabilité orbitale

La notion de stabilité orbitale /5/ peut permettre de caractériser les régimes oscillants de certains systèmes non linéaires.

Il s'agit en effet de rechercher sous quelles conditions un ensemble de points, représentant une oscillation en régime permanent, peut présenter les

caractères de stabilité et d'attraction au sens ou nous l'avons défini antérieurement.

Les définitions relatives à ce type de stabilité sont donc analogues à celles qui ont précédemment été introduites, il convient toutefois de leur adjoindre la notion supplémentaire d'ensemble invariant.

Un ensemble Ω inclus dans Ω^* est invariant si : $\forall t, t_1 \in \mathcal{C}_0, \forall t_0 \in \mathcal{C}$
 $x(t, x_0, t_0) \in \Omega$ pour $t = t_1 \Leftrightarrow x(t, x_0, t_0) \in \Omega \quad \forall t > t_1$

Il convient dans ce cas de préciser la notion de distance d'un point x à un ensemble Ω :

$$d(x, \Omega) = \inf \left[\|x - y\|, y \in \Omega \right]$$

si $x \in \Omega$, $d(x, \Omega) = 0$

Les notions de stabilité orbitale et d'attractivité orbitale découlent ainsi directement de cette notion particulière de distance.

1.4. - Théorèmes de Ljapunov - /7/, /8/

La mise en oeuvre de la seconde méthode de Ljapunov ou méthode directe implique le choix de fonctions $v(x, t)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- a) $v(x, t)$ est défini dans tout l'espace $\mathcal{E}$, $\forall t \in \mathcal{C}_0$
- b) $v(x, t) = 0 \Leftrightarrow x=0 \quad \forall t \in \mathcal{C}_0$
- c) pour t donné, $v(x, t)$ est continue par rapport à $\|x\|$ et bornée dans le domaine de définition
- d) Pour x donné $v(x, t)$ est continue par rapport à t .
- e) $v(x, t)$ est définie positive dans le domaine de définition si elle est définie et positive en tout point de ce domaine à l'exclusion de l'origine c'est-à-dire minorée à tout instant par une fonction φ de la norme euclidienne du vecteur x et de classe K au sens de Hahn i.e :

$\exists \varphi$ de classe K : $v(x, t) \geq \varphi(||x||)$, $\forall t \in \mathcal{C}_0$

La fonction $v(x, t)$ joue le rôle d'une distance généralisée et définit une évaluation particulière de la distance de l'extrémité du vecteur état du système à l'origine le long du mouvement du processus étudié.

Théorème 1.

S'il existe une fonction définie positive $v(x, t)$ de dérivée (eulérienne) semi définie négative $\overset{\circ}{v}$ le long du mouvement $x(t; x_0, t_0)$, alors l'équilibre est dit stable.

Théorème 2.

S'il existe une fonction v définie positive et de dérivée définie négative le long du mouvement $x(t; x_0, t_0)$, alors l'équilibre est asymptotiquement stable.

Ce théorème induit en fait l'existence d'une inégalité de la forme suivante :

$$\overset{\circ}{v} \leq -\dot{x}(v) \quad (14)$$

$\dot{x}(r)$ fonction définie continue strictement croissante $\forall r$:

$$0 < r < r_1 \quad r_1 \in [0, +\infty[\\ \dot{x}(0) = 0$$

Les hypothèses relatives au théorème de Ljapunov impliquent en fait pour la fonction v et sa dérivée la vérification d'inégalités telles que (15) :

$$\varphi_1(||x||) \leq v(x, t) \leq \varphi_2(||x||) \quad \forall t \in \mathcal{C}_0 \\ \overset{\circ}{v} \leq -\psi(||x||). \quad (15)$$

ψ : fonction de classe K au sens de Hahn.

1.5. - Description des systèmes étudiés

Les systèmes dont nous proposons l'étude peuvent être rattachés

à la classe des processus non linéaires décrits par l'équation d'état vectorielle (I) :

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (I)$$

x vecteur état d'ordre n défini sur $\mathcal{R}^n$

Par hypothèse la fonction vectorielle f de composantes f_i vérifie les propriétés usuelles suivantes : /9/

1 - Le point $x = 0$ est solution triviale de l'équation (I)

$$f(t, x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \quad \forall t \geq t_0$$

2 - L'origine est un point singulier isolé :

$\exists h' > 0$ donné l'équation $f(t, x) = 0$ ne peut s'annuler qu'en $x = 0$ à l'intérieur du domaine $\|x\| \leq h'$

3 - La condition de Lipshitz est vérifiée pour l'équation (I) (*)

$$\begin{aligned} \|f(t, x') - f(t, x'')\| &\leq L \cdot \|x' - x''\| \\ \forall x', \forall x'', \forall t \geq t_0 : \|x'\| &< h, \quad \|x''\| < h \end{aligned}$$

L : constante positive.

Nous limiterons notre étude le plus souvent à la classe des systèmes continus non linéaires représentés par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = A(t, x) x \quad (II)$$

$A(t, x)$ est un tableau de dimension $n \times n$ et d'éléments

a_{ij} fonctions du vecteur état x et du temps t [$i, j = 1, \dots, n$]

$$\begin{aligned} A(t, x) : \quad \mathcal{C} \times \mathcal{R}^n &\rightarrow \mathcal{R}^{n \times n} \\ a_{ij}(t, x) : \quad \mathcal{C} \times \mathcal{R}^n &\rightarrow \mathcal{R} \quad [i, j = 1, \dots, n] \end{aligned}$$

* Rq : Pour que la condition de Lipshitz soit satisfaite il suffit par exemple que les composantes f_i du vecteur f admettent des dérivées partielles bornées par rapport aux composantes x_i du vecteur état x .

- La forme matricielle (II) peut être justifiée à partir de la donnée de l'équation d'état I et de l'hypothèse 1.

En effet, si l'on suppose que la fonction vectorielle f admet des dérivées partielles d'ordre 1 continues, il vient à partir d'un développement de $f(t,x)$ par rapport au point $x=0$ et limité au premier ordre :

$$f(t,x) \approx f(t,0) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x$$

d'où une équation d'état approchée du système (I) sous la forme (II')

$$\dot{x} = J \cdot x, \quad J = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (II')$$

Dans ce cas, NN Krasovskii /14/ a démontré que si la matrice $J^T + J$ est telle que toutes ses racines caractéristiques restent strictement négatives pour toute évolution du vecteur état x , le système I est globalement et asymptotiquement stable. A cette fin NN Krasovskii a utilisé la forme matricielle (II') associée à l'équation d'état I.

Remarques

- 1 - Un ensemble de systèmes continus non linéaires interconnectés peuvent être décrits le plus souvent par une équation d'état matricielle telle que II.
- 2 - Puisqu'à chaque instant le tableau A peut être considéré comme un opérateur linéaire matriciel, nous dirons par extension que $A(t,x)$ est une matrice.
- 3 - Le système (II) vérifiant les hypothèses que nous venons d'énoncer pour le système (I), la condition de Lipshitz s'écrit dans ce cas :

$$\|A(t,x) x\| < L \|x\| \quad \forall x, \forall t \in \mathcal{C}_0 \text{ tel que } \|x\| < h \quad (16)$$

compte tenu de la définition de $\|x\|$ il vient :

$$|x^T A^T(t,x) A(t,x) x| < L |x^T x| \quad (17)$$

Soit encore

$$\max \lambda_{A^T A} < L \quad \forall x : \|x\| < h$$

$\max \lambda$: la plus grande valeur propre de la matrice symétrique $A^T A$.

La condition de Lipshitz revient donc à définir des contraintes sur la variation des coefficients a_{ij} de la matrice A .

I.6. - Stabilité des systèmes non linéaires décrits par des équations d'état
du type (I) et (II)

L'étude des propriétés de stabilité des processus décrits par des équations de la forme (I) et (II) a été envisagée dans de nombreux ouvrages. Les méthodes généralement utilisées peuvent être divisées en deux classes :

(i) Les méthodes fréquentielles inspirées du critère Nyquist pour les systèmes linéaires développées par V.M. Popov /10/ dans le cadre des systèmes non linéaires. Ces critères s'appliquent aux systèmes asservis décrits par le schéma bloc de la figure 2 et définissent généralement des conditions de stabilité absolue.

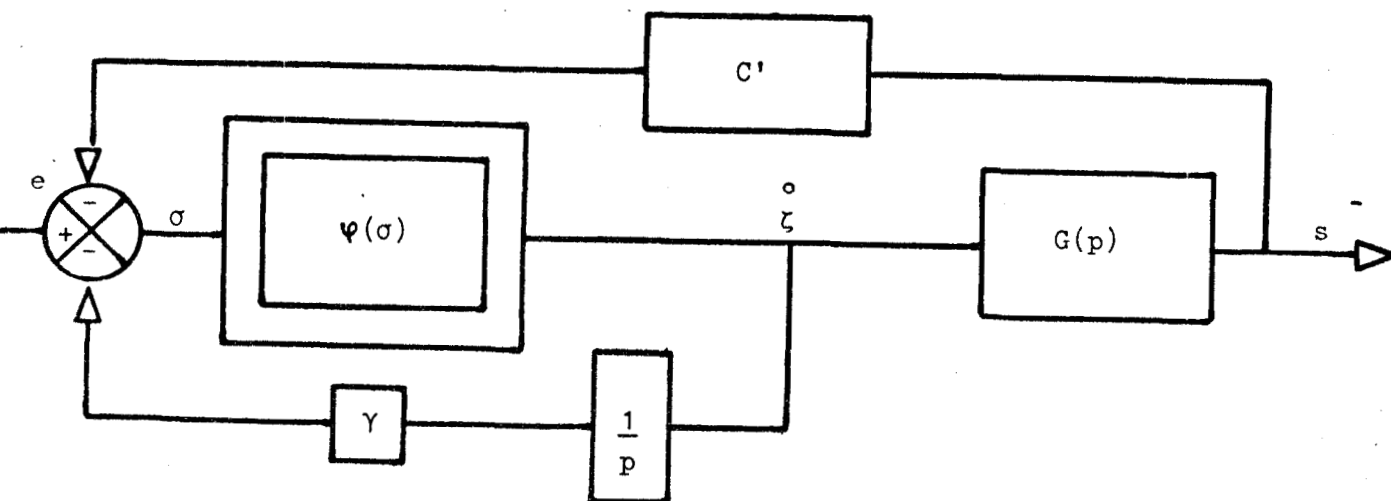


figure 2.

Ces travaux ont été repris par M M. Kalman et Yacubovitch /11/, /12/ établissant ainsi le rapport entre le critère fréquentiel de Popov et la seconde méthode de Ljapunov. Plus récemment, M M Lalanne et Rault ont proposé une approche unifiée de la stabilité des systèmes non linéaires à partir des méthodes fréquentielles /13/.

(ii) La seconde méthode de Ljapunov qui reste en fait l'outil essentiel dans l'analyse des propriétés de stabilité d'un processus. Nous proposons

d'en rappeler quelques applications dans le cadre de l'étude de la stabilité des systèmes du type (II). /21/

1.7. - Méthode directe de Ljapunov

Cette méthode s'interprète géométriquement comme la recherche de fonctions v du type distance généralisée. Dans ce sens et pour les systèmes décrits sous la forme II, le choix de fonctions de Ljapunov quadratiques du type distance euclidienne conduit à l'énoncé de conditions suffisantes de stabilité relativement simples : /14/

La fonction $v = x^T Q x$ associée à l'étude de la stabilité du système (II) est de Ljapunov s'il existe une matrice Q telle que la matrice $S = A(t, x)^T \cdot Q + Q \cdot A(t, x)$ vérifie la condition de stabilité suivante :

$$\operatorname{Re} [\lambda_m(S)] < 0 \quad Q = Q^T, \quad Q : \text{définie positive}$$

$\lambda_m(S)$: désigne la valeur propre de plus grande partie réelle de S .

La difficulté d'utilisation d'un tel critère réside en fait dans la liberté de choix de la matrice Q .

De même l'utilisation de la notion de norme conduit à définir une classe particulière de fonctions de Ljapunov et de conditions suffisantes de stabilité des systèmes continus non linéaires.

1.7.1. - Fonctions de Ljapunov du type norme

L'introduction de fonctions de Ljapunov du type norme peut être considérée comme une généralisation au continu des résultats sur la contraction obtenus pour les systèmes discrets.

Notons $\varphi(x)$ une norme scalaire du vecteur état x $x \in \mathcal{R}^n$.
 $\varphi(x)$ définit une application de $\mathcal{R}^n$ dans $\mathcal{R}^+$ telle que :

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &\geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
 \varphi(\lambda x) &= |\lambda| \varphi(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n \\
 \varphi(x+y) &\leq \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \\
 \varphi(x) &= 0 \Rightarrow x = 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

Le choix de la fonction v définie positive et de la forme suivante :

$$v = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

conduit à l'énoncé du critère de Rosenbrock /15/ pour les systèmes continus non linéaires décrits sous la forme II soit :

$$\begin{aligned}
 A &= \{a_{ij}\} \quad i, j = 1, \dots, n \\
 \max_{i=1, \dots, n} \left[a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right] &< 0
 \end{aligned} \tag{19}$$

M M Laurent et Lhote /10/ ont généralisé ce point de vue au cas de fonctions v de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 v &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\
 v &= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}
 \end{aligned} \tag{20}$$

Nous proposons pour terminer ce chapitre d'étendre le domaine de validité de ces critères au cas où le vecteur x est défini sur le corps des complexes $\mathbb{C}$.

En effet, l'interprétation des conditions algébriques de stabilité asymptotique peut conduire à la définition d'un critère géométrique de stabilité relatif au lieu des racines d'un système non linéaire dans le plan complexe /17/.

1.7.2. - Extension de l'utilisation d'un lieu d'Evans à l'étude de la stabilité des systèmes continus non linéaires.

L'étude de la stabilité asymptotique du système (II) défini sur $\mathbb{C}^n$ conduit à rechercher une fonction qui vérifie les conditions d'application de la seconde méthode de Ljapunov. Soit v une fonction réelle du vecteur état x décrite par la relation (21) :

$$v = \max_{i=1 \dots n} \sqrt{\overline{x_i} x_i} = (x_{i_m} \overline{x_{i_m}})^{1/2} \quad (21)$$

$$x_i \in \mathbb{C}$$

$\overline{x_i}$ désigne le complexe conjugué de la variable x_i

L'équation d'état (II) permet d'écrire :

$$\dot{v} = \frac{x_{i_m} \sum_{j=1}^{j=n} \overline{a_{i_m j}} \overline{x_j} + \overline{x_{i_m}} \sum_{j=1}^{j=n} a_{i_m j} x_j}{2v} \quad (22)$$

Après avoir regroupé les termes diagonaux il vient :

$$\dot{v} = \frac{\overline{x_{i_m}} x_{i_m} (a_{i_m i_m} + \overline{a_{i_m i_m}}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_m}}^{j=n} (x_{i_m} \overline{a_{i_m j}} \overline{x_j} + \overline{x_{i_m}} a_{i_m j} x_j)}{2v} \quad (23)$$

Une majoration du second membre de la relation (23) conduit à écrire :

$$\dot{v} \leq \frac{\overline{x_{i_m}} x_{i_m} \left\{ a_{i_m i_m} + \overline{a_{i_m i_m}} + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_m}}^{j=n} |a_{i_m j}| \right\}}{2v} \quad (24)$$

$|a_{i_m j}|$ désigne le module de l'élément $a_{i_m j}$

$$|a_{i_m j}| = [a_{i_m j} \cdot \overline{a_{i_m j}}]^{1/2}$$

il vient dans ces conditions :

$$\sigma_v \leq \left[\operatorname{Re}(a_{i_m i_m}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_m}}^{j=n} |a_{i_m j}| \right] \quad v \quad (25)$$

Compte-tenu de l'énoncé du second théorème de Ljapunov et des remarques relatives à la fonction de comparaison $\dot{x}(v)$ (équation 14), il en découle que la fonction v est de Ljapunov si la contrainte (26) est vérifiée :

$$\max_{i=1 \dots n} \left[\operatorname{Re} a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} |a_{ij}| \right] \leq c < 0 \quad (26)$$

Cette condition assure la stabilité asymptotique du système non linéaire (II).

La condition de stabilité (26) représente la transcription directe des conditions obtenues dans l'étude des systèmes linéaires : En effet le théorème d'Hadamard Gershgorine /18/, /19/, /20/ sur la localisation des valeurs propres d'une matrice dans le plan complexe indique qu'elles sont toutes localisées à l'intérieur de cercles de centre a_{ii} et de rayon $\left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right\}$. La condition (26) précise ainsi

que la localisation des racines dans le plan complexe à partir des "cercles de Gershgorine" doit être située dans le demi-plan gauche $\operatorname{Re} < 0$ quelle que soit l'évolution dynamique du système et par conséquent des coefficients a_{ij} .

Critère 1

Soit un système continu non linéaire décrit par une équation d'état de la forme $\dot{x} = A(t,x) x$ dans laquelle les éléments non linéaires a_{ij} de la matrice A dépendent de l'état et du temps. La stabilité asymptotique d'un tel système est assurée si quelle que soit l'évolution du processus, tout cercle de centre a_{ii} et de rayon $R = \sum_{\substack{i \neq j \\ j=1 \dots n}} |a_{ij}|$ reste constamment à gauche de l'axe imaginaire J .

Interprétation sur le lieu d'Evans

Lorsque le système non linéaire décrit par l'équation d'état (II) ne dépend que du seul paramètre k^* , la matrice $A(t,x)$ prend une forme particulière. Dans ces conditions le polynôme caractéristique de A ne dépend à l'instant t donné que du seul paramètre k^* . Il est alors possible de tracer dans le plan complexe le lieu des racines de l'équation caractéristique de A lorsque k^* varie.

$$r^n + \sum_{i=1}^n g_i(k^*) r^{n-i} = 0 \quad (27)$$

Plus particulièrement, dans le cas d'un système continu asservi monovariable à non linéarité séparable, à retour unitaire, de fonction de transfert $\frac{1}{D(p)}$ en boucle ouverte, l'équation (27) prend la forme :

$$r^n + \sum_{i=1}^{n-1} f_i r^{n-i} + k^* = 0 \quad (28)$$

Le paramètre k^* s'interprète alors comme le gain de la caractéristique non linéaire associé au système linéaire. Cette dernière relation conduit à un tracé systématique du lieu des racines, identique au lieu des racines du système linéaire mais gradué en valeurs du gain non linéaire k^* . La localisation des racines dans le plan complexe à partir des cercles de centre a_{ii} et de rayon $\sum_{\substack{i \neq j \\ j=1 \dots n}} |a_{ij}|$ est également paramétrée selon k^* et définit ainsi une surface généra-

lisant en non linéaire la notion de lieu d'Evans dans le sens d'un domaine de localisation des racines gradué en valeurs de k^* .

Mise en oeuvre du critère sur un exemple

Soit le système non linéaire décrit par l'équation différentielle non linéaire suivante et soumis à la perturbation indépendante y :

$$\ddot{z} + (1 - y^2) \dot{z} + z = 0, \quad y \in D_y, \quad D_y \subset \mathbb{R}$$

Le lieu des racines de l'équation caractéristique correspondante conduit au tracé de la figure 2 graduée en valeurs de y^2 .

Le choix d'un vecteur état de composantes $\{z, \dot{z}\}$ conduit à l'écriture matricielle suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1(1-y^2) \end{bmatrix} \quad (29)$$

Soit P une matrice de changement de base diagonalisant A au voisinage de $y^2 = 1$, il vient une nouvelle forme de l'équation d'état :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & , & 1 \\ i-\varepsilon & , & -i-\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \varepsilon \text{ petit positif} \quad (30)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = A^* \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad P \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

$$A^* = \{a_{ij}^*\}, \quad i, j=1, 2$$

Si l'on néglige les termes en ε d'ordre supérieur à l'unité il vient :

$$\begin{aligned} a_{11}^* &= a_{22}^* = i \quad [1-\varepsilon r] - r, \quad r = \frac{1-y^2}{2} \\ a_{12}^* &= a_{21}^* = r - \varepsilon - r\varepsilon i \end{aligned} \quad (31)$$

Il s'en déduit lorsque ε tend vers zéro la localisation des racines dans le plan complexe définie par les cercles de centre $a_{ii} = \pm i-r$ et de rayon r . La condition de stabilité déduite du critère (1) s'écrit :

$$-r+r\sqrt{1-\frac{2\varepsilon}{r}} \leq 0$$

soit encore compte tenu de l'hypothèse $\varepsilon > 0$ petit

$$0 \leq y^2 < 1 \quad (32)$$

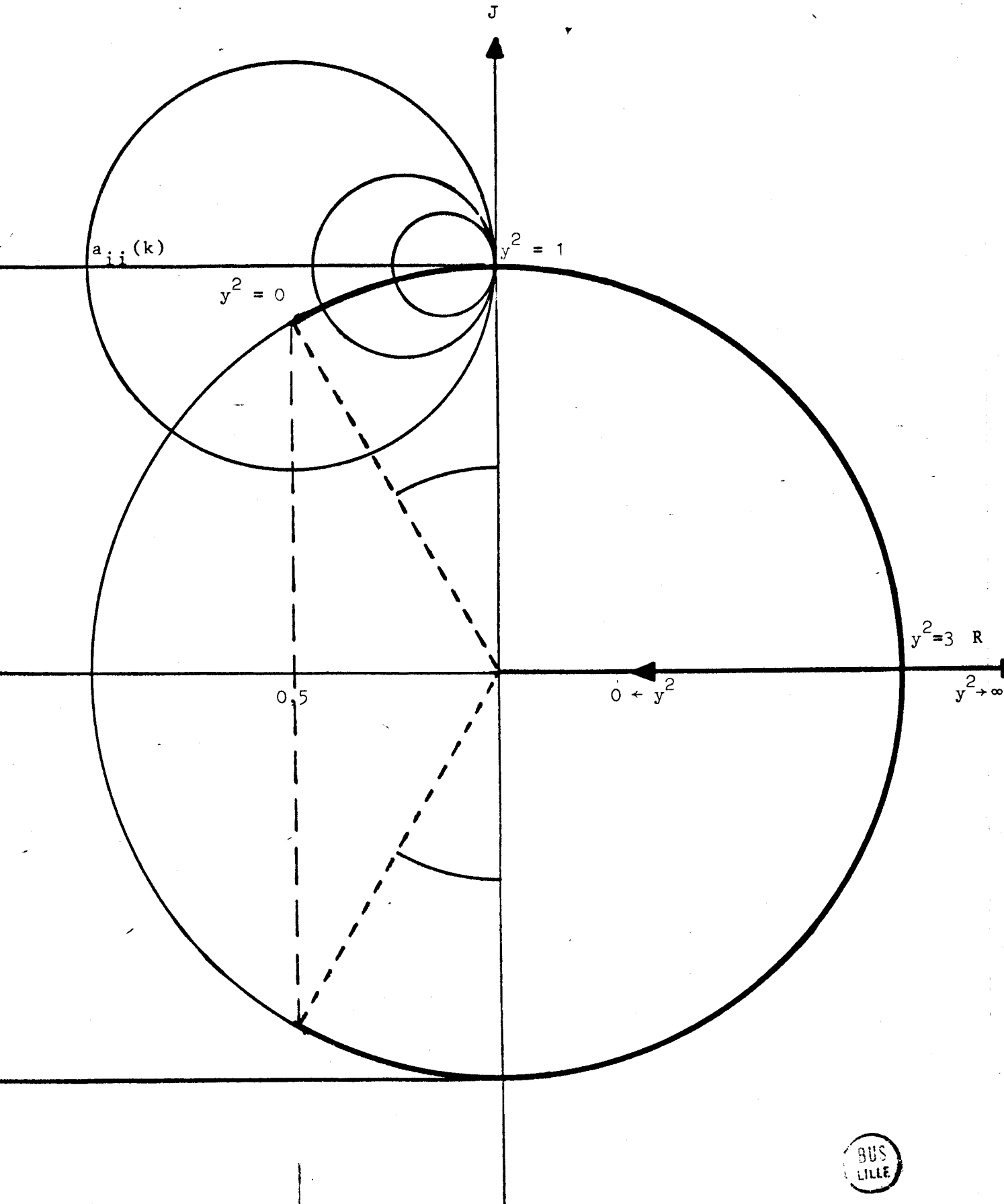


figure 3

Conclusion

L'introduction de la notion de système nous a conduit au cours de ce premier chapitre à rappeler les définitions et résultats principaux concernant la stabilité des processus continus non linéaires.

En ce point de notre exposé et à partir des travaux de Rosenbrock, nous avons indiqué une extension possible de la méthode de tracé du lieu des racines à l'étude de la stabilité asymptotique de certains systèmes non linéaires. La mise en oeuvre d'une fonction de Ljapunov directement déduite de la norme hermitique permet ainsi de définir géométriquement les propriétés de stabilité des systèmes à une seule caractéristique non linéaire.

Le tracé du lieu des racines de l'équation caractéristique de la matrice définissant le régime libre conduit ainsi à une utilisation simplifiée du critère de stabilité énoncé.

Nous envisageons, dans la suite de cet exposé, de définir une méthode générale de recherche de fonctions de Ljapunov de type norme à partir de systèmes de comparaisons d'un type nouveau.

B I B L I O G R A P H I E

BIBLIOGRAPHIE CHAPITRE I

- /1/ M. ATHANS , P.L. FALB
"Optimal control"
Mac Graw Hill company - 1966
- /2/ R.E. KALMAN
"Mathematical description of linear dynamical systems"
J. SIAM of control - serie A 1 (2) - 1964 - pp 152-192
- /3/ ZADEH , DESOER
"Linear system theory the state approach"
Mc Graw Hill - 1963
- /4/ W. HAHN
"Stability of motion"
Springer Verlag - Berlin Heidelberg New York - 1967
- /5/ J.P. LASALLE
"An invariance principle in the theory of stability"
Differential equations and dynamical systems,
Academic Press - New York - 1967
- /6/ A.M. AIZERMAN , F.R. GANTMACHER
"Absolute stability of control systems"
Moscou - 1963 - (Russe)
San Francisco - 1964 - (Anglais)
- /7/ J.P. LASALLE , S. LEFSHETZ
"Stability by Ljapunov's direct method with applications"
New York - 1961

- /8/ A.M. LJAPUNOV
"Problème général de la stabilité de mouvement"
Ann. Fac. Sci. - Toulouse - 9 - 1907
"Stability of motion"
New York - 1966
- /9/ N. ROUCHE , J. MAWHIN
"Equations différentielles ordinaires"
Masson et cie - T. 1 - 1973
- /10/ V.M. POPOV
"Absolute stability of non-linear systems of automatic control"
Aut. Telemecanica - 1962 - pp 961-979 - (1972) (Russe)
Version anglaise dans Automatic and remote control 22 - pp 857-875
- /11/ R.E. KALMAN
"Ljapunov functions for the problem of Lure' in automatic control"
Proc. Nat. Acad. Sci. 49 - 1963 - pp 201-205
- /12/ V.A. VACUBOVITCH
"Solutions of certain matrix inequalities occuring in the theory of automatic control"
Dokl. Akad. Nauk. U.R.S.S. - Vol. 143 - 1963
- /13/ B. LALANNE , A. RAULT
"Approche unifiée de la détermination de critères fréquentiels de stabilité de systèmes non-linéaires et / ou non stationnaires"
I. RAIRO - fev. 73 - J1 - pp 70-96
- /14/ N.N. KRASOVSKI
"Certain problems of the theory of stability of motion"
Moscou - 1959 - (Russe)
Traduction Standford - Cal. - 1963

- /15/ H.H. ROSENBROCK
 "A method of investigating stability"
 IFAC - Bâle - Sept. - 1965
- /16/ F. LAURENT , F. LHOTE
 "Sur une condition suffisante de stabilité asymptotique pour un système continu non-linéaire"
 C.R.A.S - T. 262 - 1966 - pp 35-37
- /17/ EVANS
 "Control system dynamics"
 Mac Graw Hill - Ch. 7-8
- /18/ A.M. OSTROWSKI
 "Note on bounds for determinants with dominant principal diagonal"
 Proc. Ann. Math. Soc. - Vol.3 - 1952 - pp 26-30
- /19/ S.A. GERSHGORINE
 "Über die Abgrenzung der eigenwerte einer matrix"
 Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R - Ser. Fiz. Mat. - Vol. 6 - 1936 - pp 749-754
- /20/ E.V. HAYNSWORTH
 "Bounds for determinants with dominant main diagonal"
 Duke Math. - J. 20 - 1953
- /21/ J. Ch. GILLE , P. DECAULNE , M. PELEGRIN
 "Systèmes asservis non linéaires"
 Dunod Automatique - 1975

CHAPITRE II

Système de comparaison et Système majorant

Introduction

La seconde méthode de Ljapunov conduit le plus souvent à reporter l'étude de la stabilité d'un système d'ordre supposé supérieur à l'unité sur celle d'un système de comparaison du premier ordre /1/.

Nous proposons de présenter une méthode qui permet d'élaborer à partir d'une extension de la notion de norme, un système de comparaison dont l'ordre pourrait à la limite être égal à l'ordre du système initial.

L'utilisation immédiate de ce système de comparaison peut ensuite être envisagée lors de la recherche des conditions de stabilité du système initial.

L'idée d'associer à un système non linéaire, un système dit de comparaison a été initialement déduite des travaux de Wazewski /2/ sur les inégalités différentielles. L'application de ces résultats aux problèmes de stabilité ayant été envisagée par de nombreux auteurs, nous proposons dans un premier temps de préciser l'ensemble des résultats essentiels à partir desquels nous avons cherché à définir l'idée de "système majorant".

Dans une seconde étape, afin de mieux préciser la démarche que nous envisageons de suivre aux prochains chapitres, nous proposons d'établir, par la définition d'un système majorant simplifié, un critère de stabilité d'application simple.

II.1. - Méthode de comparaison.

Cette méthode consiste à associer à un système continu différentiel non linéaire d'ordre $n > 1$ un système continu différentiel non linéaire du premier ordre. Ce système de comparaison introduit de cette manière et en deux volets, d'une part la définition et les propriétés du système de comparaison, d'autre part la condition de stabilité associée. L'énoncé et les hypothèses relatives à ce théorème sont donnés dans la référence /1/.

A partir de ce résultat R. Bellman a indiqué en /3/ de quelle façon il est possible de définir pour certains systèmes, un système de comparaison linéaire d'ordre supérieur à l'unité. Cette idée rejoint la notion de fonction de Ljapunov vectorielle utilisée par F.N. Bailey /4/ dans l'étude de la stabilité des systèmes interconnectés. Dans ce cas, le système complet est supposé constitué de sous systèmes non linéaires isolément stables en régime autonome. Précisons que dans le cadre des travaux de F.N. Bailey les connections entre sous systèmes sont supposées linéaires ; la stabilité des sous systèmes est supposée définie à partir d'un ensemble de fonctions $\mathcal{L}(v_i)$. Chacune des composantes v_i est une fonction de Ljapunov associée à la définition de la propriété de stabilité du sous système (i) isolé pour un fonctionnement en régime autonome. Ces éléments constituent ainsi les composantes d'une fonction de Ljapunov de type vectoriel utilisée dans la définition du système de comparaison. Le système ainsi obtenu est linéaire et d'ordre égal au nombre des sous systèmes.

Ces travaux ont été repris récemment par A.N. Michel et D.W. Porter /5/ , ces auteurs ont montré la possibilité de construire à partir du système de comparaison une fonction scalaire $v = \sum_i \alpha_i v_i$ permettant de conclure à la stabilité du processus initial.

Les conditions de stabilité obtenues par cette méthode sont moins dures que celles définies par F.N. Bailey. Il semble en particulier que le fait de ne pas chercher dans ce cas à aboutir nécessairement à la définition d'un système de comparaison linéaire contribue fortement à l'amélioration des résultats. Toutefois, l'application de cette méthode est relativement délicate

et en particulier le choix des coefficients α_i reste arbitraire.

Dans le même esprit Mituhiko Araki et Bunji Kondo /6/ ont cherché à généraliser les travaux de Bailey au cas de systèmes interconnectés non linéaires à interconnexions non linéaires. Le système de comparaison est, dans ce cas également, linéaire.

Dans une orientation de recherche voisine des recherches effectuées par Bailey et Bellman, V. Matrozov /7/ a utilisé la notion de fonction de Ljapunov vectorielle pour définir un système de comparaison d'un type nouveau. En particulier, l'utilisation de deux fonctions auxiliaires $v(x,t)$ et $w(x,t)$ permet de définir des conditions de stabilité asymptotique de la solution de l'équation (I). Ces conditions sont moins restrictives que celles obtenues par l'utilisation directe de la seconde méthode de Ljapunov. En effet, cette méthode permet par l'introduction de la fonction supplémentaire w de conclure à la stabilité d'un processus décrit par une équation d'état telle que (I) à partir d'une fonction v définie positive mais dont la dérivée $\dot{v}$ ne serait que semi-définie négative.

La généralisation de ce théorème au cas de fonctions de Ljapunov vectorielles a été effectuée successivement par V.M. Matrozov et N. Rouche /9₁/.

Plus récemment, L. Salvadori /8/ a étendu le théorème de Matrozov au cas des systèmes pour lesquels la fonction $f(t,x)$ ne serait pas bornée. Enfin, dans la même orientation de recherche, N. Rouche /9₂/ puis A. d'Anna /10/ ont définies des conditions de stabilité uniforme selon la même démarche.

A partir de la même idée de base et par une synthèse des travaux de V.M. Matrozov et de F.N. Bailey, M.M. Grujić et Siljak ont très largement contribué, ces dernières années, à la définition de nouvelles méthodes de construction de fonctions de Ljapunov pour les systèmes interconnectés.

Références : /11/, /12/, /13/, /14/, /15/, /16/.

Dans ce cas, les sous systèmes autonomes sont supposés décrits par une équation d'état de la forme (II.1) :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= g_i(t, x_i) & (II.1) \\ x_i &\in \mathcal{R}^n, \quad x_i \in \mathcal{R}^{n_i} & \sum_{i=1}^s n_i = n \\ g_i(t, x_i) : & \mathcal{R}^{n_i} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{R}^{n_i} \end{aligned}$$

Les interactions étant de nature non linéaire, l'équation d'état du système complet est représentée pour le sous système (i) par l'équation (II.2) :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= g_i(t, x_i) + h_i(t, x) & (II.2) \\ h_i(t, x) : & \mathcal{R}^n \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{R}^{n_i} \end{aligned}$$

M.M. Grujić et Siljak notent v_i les fonctions de Lyapunov associées aux sous systèmes isolés de rang (i). La méthode consiste à définir un vecteur de comparaison $w = [\phi_{13}, \dots, \phi_{s3}]$ de façon à établir les conditions que doivent vérifier les interactions permettant d'imposer la stabilité du processus complet.

Ce vecteur w est en fait constitué des majorants successifs de la dérivée $\dot{v}_i(t, x_i)$ de chaque fonction élémentaire v_i :

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(t, x) &\leq - \phi_{i3}(\|x_i\|) & \forall t, \forall x \in \mathcal{R}^n \\ & & t > t_0 \\ \|x_i\| &= (x_i^T x_i)^{1/2} \\ \phi_{i3} &\text{ fonction de classe K.} \end{aligned}$$

Il vient dans ces conditions un système de comparaison de la forme (II.3)

$$\dot{v} \leq A w \quad (II.3)$$

La matrice A est ici constituée d'éléments constants obtenus par majoration des éléments scalaires $[\text{Grad} v_i]^T h_i(t, x)$.

$$(\text{Grad} v_i)^T h_i(t, x) \leq \sum_{j=1}^s \xi_{ij}(t, x) \phi_{j3}(\|x_j\|)$$

$$\sup |\xi_{ij}(t, x)| = v_{ij} \quad \forall t \in \mathcal{T}_0, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n$$

Dans ce cas, les conditions de stabilité se réduisent ici encore aux conditions linéaires appliquées à la matrice A. Toutefois il convient de remarquer que le système de comparaison vectoriel (II.3) est particulier en ce sens qu'il lie, comme dans le théorème de Matrozov, l'évolution de la fonction de Ljapunov vectorielle v à l'évolution d'une fonction vectorielle auxiliaire w ne faisant état que des bouclages.

Enfin ces mêmes auteurs ont été amenés à définir la notion de stabilité connective /11/ dans le sens où un système interconnecté peut être stable en présence ou non de l'ensemble ou même d'une partie quelconque des connections possibles.

L'ensemble de ces résultats tend d'une manière générale à l'étude de la stabilité des systèmes interconnectés en utilisant la méthode de comparaison soit directement, soit sous une forme plus évoluée issue des travaux de Matrozov. Dans tous les cas le système de comparaison est obtenu à partir d'une fonction de Ljapunov vectorielle supposée connue à priori et les conditions de stabilité sont en fait déduites des conditions appliquées à la matrice d'éléments constants du système de comparaison.

La démarche que nous proposons de suivre ultérieurement et que nous allons illustrer sur un cas relativement simple consiste tout d'abord à considérer le système globalement. En particulier, la structure de décomposition en sous système n'est pas nécessairement définie ; de ce point de vue la connaissance du processus peut être supposée "diffuse". Ainsi, nous proposons à partir de la donnée de l'équation d'état d'un système de grande dimension, de former directement et de façon systématique un système de comparaison vectoriel et généralement non linéaire ; nous dirons qu'il s'agit d'un système majorant.

Puis une utilisation de ce système majorant nous mènera à l'exposé

de nouveaux critères de stabilité par la recherche, pour ce dernier système, de fonctions de Ljapunov scalaires d'un type très particulier. Cette méthode utilise dans son principe l'idée de système de comparaison. Toutefois la notion de norme vectorielle conduit à définir un système de comparaison non linéaire et les conditions de stabilité qui s'en déduisent sont d'utilisation simplifiée.

11.2. - Présentation d'un critère simplifié de stabilité pour une classe de systèmes continus non linéaires.

11.2.1. - Définition du processus, système majorant associé.

La classe des systèmes que nous proposons d'étudier dans cette présentation simplifiée est caractérisée par une équation d'état non linéaire de la forme suivante :

$$\dot{x} = A(t, x) x \quad (II)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathcal{C}, A(t, x) : \mathcal{C} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$$

Les coefficients a_{ij} de la matrice A dépendent explicitement des composantes x_i du vecteur état x et du temps.

$$a_{ij}(t, x) : \mathcal{C} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Les hypothèses introduites au premier chapitre sont supposées vérifiées.

Dans un premier temps nous proposons d'associer au processus décrit en (II) un système dont l'évolution majore les solutions de l'équation non linéaire (II).

Dans cette intention, notons $|x|$ un vecteur de même ordre que x et dont les composantes $|x_i|$ sont constituées de la norme euclidienne de chaque élément x_i soit :

$$|x_i| = \sqrt{x_i^T x_i} = |x_i| \text{ signe } (x_i)$$

$$x_i \in \mathbb{R}$$

Puisque la dérivée de $|x_i|$ n'existe pas nécessairement au point $x_i = 0$, nous proposons d'utiliser la notion de dérivée à droite $\frac{d^+}{dt} |x_i(t)|$ telle qu'elle a été utilisée par M.M. Rosenbrock /17/, Sandberg /18/ puis plus récemment par M.M. Siljak et Grujić. Dans ce but on note $\sigma[x_i(t)]$ la fonctionnelle suivante :

$$(II.4) \quad \sigma[x_i(t)] = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i(t) > 0 \text{ ou si } x_i(t) = 0 \text{ et } \overset{\circ}{x}_i(t) > 0 \\ 0 & \text{si } x_i(t) = 0 \text{ et } \overset{\circ}{x}_i(t) = 0 \\ -1 & \text{si } x_i(t) < 0 \text{ ou si } x_i(t) = 0 \text{ et } \overset{\circ}{x}_i(t) < 0 \end{cases}$$

il vient alors

$$\frac{d^+}{dt} |x_i(t)| = \sigma[x_i(t)] \cdot \overset{\circ}{x}_i(t) \quad (II.5)$$

Trois cas sont ainsi considérés :

(i) - Si pour t donné, $x_i(t) \neq 0$ alors :

$$\sigma(x_i) = \text{signe } x_i \text{ et } \frac{d^+ |x_i|}{dt} = \text{signe } x_i \cdot \overset{\circ}{x}_i$$

(ii) - Si pour t donné, $x_i(t) = \overset{\circ}{x}_i(t) = 0$ alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} |x_i(t+h)| = \frac{d^+}{dt} |x_i| = 0$$

(iii) - Si pour t donné, $x_i(t) = 0$ et $\overset{\circ}{x}_i(t) \neq 0$

$$\text{alors } \sigma(x_i) \overset{\circ}{x}_i = \lim_{h \rightarrow 0} \sigma(x_i) \frac{x_i(t+h)}{h} = \frac{d^+}{dt} |x_i| = \overset{\circ}{x}_i \text{ signe } \overset{\circ}{x}_i$$

L'utilisation de ces notations permet ainsi de déduire de l'équation d'état (II) la forme particulière définie par la relation suivante :

$$\overset{\circ}{x}_i \sigma(x_i) = a_{ii} x_i \sigma(x_i) + \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^n a_{ij} x_j \sigma(x_i) \quad (II.6)$$

Dans chacun des trois cas envisagés précédemment, la notion de dérivée à droite conduit à la majoration suivante de la dérivée de $|x_i|$ soit :

$$\frac{d^+}{dt} |x_i| \leq a_{ii} |x_i| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| |x_j| \quad (\text{II.7})$$

Cette inégalité sur l'une des composantes du vecteur $\frac{d^+}{dt} |x|$ peut être simplement transcrite sous la forme matricielle (II.8) :

$$\frac{d^+}{dt} |x| \leq \begin{bmatrix} a_{11} & |a_{12}| & \dots & |a_{1n}| \\ |a_{21}| & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ |a_{n1}| & \dots & |a_{nn-1}| & a_{nn} \end{bmatrix} |x| \quad (\text{II.8})$$

Notons z un vecteur associé à l'équation d'état (II.9) nous proposons de démontrer que le système (II.9) est un système de comparaison, majorant de (II.8).

$$\begin{aligned} \dot{z} &= M(A) z \\ M(A) &= \begin{bmatrix} a_{11} & |a_{12}| & \dots & |a_{1n}| \\ |a_{21}| & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ |a_{n1}| & \dots & |a_{nn-1}| & a_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

C'est sur cette idée que nous définirons ultérieurement une classe plus générale de systèmes majorants en utilisant la notion de norme vectorielle.

Compte tenu du choix particulier du vecteur de comparaison $|x|$, le caractère majorant du système (II.9) peut être exprimé de la façon suivante :

Si à l'instant initial t_0 les vecteurs états des systèmes (II.8) et (II.9) sont liés par une relation de la forme :

$$\forall t_0 > 0, \quad z(t_0) \geq |x(t_0)|$$

alors il en découle

$$\forall t \in \mathcal{C}_0, \quad z(t) \geq |x(t)| \quad (\text{II.10})$$

Ces inégalités restant vérifiées composante à composante.

Le système de comparaison (II.9) est donc majorant par rapport à $|x|$.

Démonstration

Dans le cas linéaire stationnaire M.M. Beckenbach et Bellman /19/ ont démontré ce lemme. Nous donnons à titre de rappel la démonstration en annexe |1|.

Une démonstration de ce lemme a été proposée pour les systèmes linéaires non stationnaires. Nous allons proposer une extension de ce lemme au cas des systèmes non linéaires de la forme (II). Dans ce cas l'hypothèse de non-négativité des coefficients non diagonaux de la matrice $M(A)$ est essentielle.

Soit $\epsilon(t)$ un vecteur d'écart défini par la relation suivante :

$$\epsilon(t) = z(t) - |x(t)| \quad (\text{II.11})$$

La définition II.11 conduit à écrire compte tenu de (II.10) :

$$\epsilon(t_0) \geq 0 \quad (\text{II.12})$$

L'équation d'état (II.9) associée à l'inégalité (II.8) permet de minorer le vecteur $\frac{d^+}{dt}(\epsilon)$ soit :

$$\begin{cases} \frac{d^+}{dt} \epsilon \geq M(A) \epsilon \\ \epsilon(t_0) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

La continuité de l'évolution du vecteur ε par rapport au temps t permet d'affirmer que s'il existe un instant t_1 tel que :

$$t_1 > t_0$$

l'une au moins des composantes ε_i du vecteur ε ne peut devenir négative que si elle est passée par la valeur $\varepsilon_i = 0$.

Supposons en outre qu'à cet instant t_1 la composante ε_i s'annule, on peut montrer que dans ce cas la composante ε_i ne peut devenir négative. En effet pour $t = t_1$ il vient pour la $i^{\text{ème}}$ ligne de l'inégalité (II.13)

$$\frac{d^+}{dt}(\varepsilon_i) \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \varepsilon_j \quad (\text{II.14})$$

Puisque par hypothèse les éléments non diagonaux de $M(A)$ sont non négatifs et $\varepsilon_j \geq 0 \quad \forall i \neq j$ il vient :

$$\frac{d^+}{dt}(\varepsilon_i) \geq 0$$

Il en découle que , $\varepsilon_i(t)$ est non décroissant à l'instant $t = t_1$ à priori quelconque, et tel que $\varepsilon_i(t_1) = 0$.

Par extension de ce résultat on peut affirmer que le vecteur $\varepsilon(t)$ ne peut devenir négatif. Q.E.D.

Le système (II.9) est donc un majorant du système II au sens de l'inégalité (II.10).

Remarque

La démonstration du lemme de comparaison est basée sur la non-négativité des éléments non diagonaux de la matrice $M(A)$. C'est dans ce sens qu'il nous a été possible de définir un système majorant d'ordre n égal à l'ordre du système initial. Ultérieurement nous serons amené à définir une notion

plus générale de système majorant continu par l'utilisation des normes vectorielles. Pour des raisons analogues, les matrices pseudo majorantes que nous noterons $M(A)$, seront à éléments non diagonaux non négatifs.

II.2.2. - Application à l'étude de la stabilité.

Nous proposons dans un premier temps de montrer que la stabilité du système majorant implique celle du système initial. Ce résultat découle en fait du second volet du théorème de comparaison.

Choisissons en effet une fonction v vectorielle et de dimension n telle que :

$$v(x,t) = |x| \quad (\text{II.15})$$

dans ce cas il vient selon les résultats antérieurs :

$$\frac{d^+}{dt} |x| \leq M(A) \cdot |x| \quad (\text{II.16})$$

Démontrons dans une première étape que la stabilité de l'origine du système (II.9) implique celle du système (II.8).

La stabilité à l'origine du système (II.9) peut être exprimée par les conditions suivantes :

$$\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < \rho \quad \text{et} \quad \forall t_0 \in \mathcal{T}, \exists \delta(t_0, \varepsilon) > 0$$

tel que :

$$\forall z_0 > 0, \quad z_0 < \delta \quad (\text{II.17})$$

alors

$$\forall t \in \mathcal{T}_0 \\ z(t, t_0, z_0) < \varepsilon$$

puisque pour t_0 donné et tel que $z_0 = |x_0|$

l'inégalité (II.10) est vérifiée, il vient :

$$|x(t, t_0, x_0)| < z(t, t_0, z_0) < \varepsilon \quad (\text{II.18})$$

ce qui prouve la stabilité de l'origine.

L'attractivité de l'origine est alors imposée de façon évidente pour le système initial par celle du système de comparaison. En effet, $|x|$ est une fonction vectorielle du vecteur x , continuellement croissante avec x et nulle pour $x = 0$.

Dans ce cas la condition :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t, z_0, t_0) = 0 \quad \forall (t_0, z_0)$$

associée à l'inégalité (II.10) implique

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0, t_0)| = 0 \quad (\text{II.19})$$

d'où la propriété énoncée.

II.2.3. - Critère simplifié de stabilité.

L'étude de la stabilité du système majorant est envisagée à partir d'une fonction scalaire positive $\bar{f}$ du vecteur de comparaison $|x|$:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, t) &= |x|^T \cdot u \\ u &\geq u_c > 0, \quad u^T u = 1. \\ u_c &\text{ vecteur constant} \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Nous supposons que les vecteurs u et u_c qui viennent d'être définis sont à composantes strictement positives et de même dimension que le vecteur état x .

Dans ces conditions la fonction $\bar{f}$ ne s'annule que pour $x = 0$.

Le calcul de la dérivée de $\bar{f}$ conduit à écrire :

$$\frac{d^+}{dt} (\bar{f}) = \frac{d^+}{dt} |x|^T \cdot u + |x|^T \frac{d^+}{dt} u \quad (\text{II.21})$$

A partir de l'inégalité (II.8), il est possible de définir un majorant de (II.21) :

$$\frac{d^+}{dt} (\bar{f}) \leq |x|^T [M(A)^T u + u^0] \quad (\text{II.22})$$

Supposons à priori que la matrice $(M(A)^T)$ vérifie les conditions linéaires de stabilité. Elle appartient alors à la classe des-M-matrices.

Deux propriétés essentielles de ce type de matrice vont permettre de guider le choix du vecteur positif u : /20/

- 1 - La partie réelle des valeurs propres λ_i de $M(A)^T$ est négative et inférieure à λ_m elle-même réelle et négative.
- 2 - Le vecteur propre v relatif à la valeur propre λ_m est à composantes toutes positives. La matrice $M(A)^T$ doit dans ce cas avoir une inverse irréductible. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

Compte tenu de la relation (II.22) et de la définition de la fonction $\bar{f}$, ces propriétés conduisent à prendre pour vecteur de projection u le vecteur propre v de la matrice $M(A)^T$.

Les inégalités (II.23) s'en déduisent immédiatement :

$$\lambda_m < 0$$

$$\frac{d^+}{dt}(\bar{f}) \leq |x|^T [\lambda_m v + v] \quad (II.23)$$

soit encore

$$\frac{d^+}{dt}(\bar{f}) \leq \lambda_m \bar{f} + |x|^T \cdot v$$

Si l'on suppose que les éléments non constants de la matrice $M(A)^T$ sont isolés dans une seule rangée de cette matrice, l'invariance de la valeur propre λ_m impose la même propriété d'invariance en direction du vecteur propre correspondant v . [Annexe 2]

Soit alors D_v le domaine fermé dont la frontière est définie par la relation:

$$\bar{v} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_m \leq c < 0 \quad \text{dans} \quad D_v$$

$$(x = 0) \subset \cap \{D_v(t), \forall t \in \mathcal{C}_0\} \neq \{0\}$$

$$D_v(t) \text{ domaine ouvert.}$$

Nous supposons D_v connexe et à complément connexe /21/.

Sur la frontière de D_v il vient :

$$\frac{d^+}{dt}(\bar{f}) \leq \lambda_m \bar{f} \quad (II.24)$$

Dans ces conditions le système linéaire d'équation $\dot{y} = \lambda_m y$ est un système de comparaison associé à l'inégalité (II.24).

Un tel système est stable pour $\lambda_m \leq c < 0$

Soit D_c un domaine à l'intérieur duquel :

$$\frac{d}{dt}\bar{f}(t,x) \leq c \bar{f}(t,x) \quad c < 0$$

Dans ces conditions si $\forall t \in \mathcal{C}_0 D_v$ est inclus dans D_c , il en découle que $\bar{f}(t,x)$ est de Lyapunov dans D_v .

L'ensemble de ces résultats conduit ainsi à l'énoncé d'un premier critère de stabilité :

Critère de stabilité (II.1) :

Soit le système décrit par l'équation d'état II et $M(A)$ la matrice des coefficients a_{ij}^* tels que :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t,x) x & (II) \\ M(A) : \begin{cases} a_{ii}^* &= a_{ii} & 1, j = 1, 2, \dots, n \\ a_{ij}^* &= |a_{ij}| & \forall i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Si les termes non constants sont groupés dans une seule ligne ou colonne de la matrice $M(A)$ la stabilité asymptotique globale du système (II) est assurée lorsque pour une quelconque évolution du processus toutes les valeurs propres de $M(A)$ restent à parties réelles négatives.

Remarque

- On constate que l'hypothèse selon laquelle la matrice $-M(A)$ appartient à la classe des M -matrices ne restreint pas le champ d'application d'un tel critère.

Application de ce critère.

Les travaux de Kotelyanski ont mis en évidence un théorème particulièrement adapté à l'étude de la stabilité des systèmes correspondant aux hypothèses introduites par le critère précédent :

Lemme de Kotelyanski /22/,/23/

Un nombre réel λ est plus grand que la valeur caractéristique maximale ν de la matrice A d'éléments non diagonaux $a_{ik} \geq 0$ si et seulement si pour cette valeur λ tous les mineurs principaux successifs de la matrice $(\lambda I - A)$ sont positifs.

Il est alors possible de préciser les conditions de stabilité linéaires, nécessaires à l'application du critère pratique (II.2).

Critère pratique (II.3)

Lorsque les termes non constants de la matrice $M(A)^T$ sont groupés dans une seule de ses lignes ou colonnes, la stabilité asymptotique globale du système (II) est assurée par la vérification des contraintes suivantes

$$-a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & |a_{12}| \\ |a_{21}| & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

$$- (-1)^n \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & |a_{12}| & \cdots & |a_{1n}| \\ |a_{21}| & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ |a_{n1}| & \cdots & |a_{n,n-1}| & a_{nn} \end{array} \right| > 0 \quad (\text{II.25})$$

II.2.4. - Exemple, d'application :

Afin de préciser la technique d'utilisation de ce critère, envisageons le cas d'un système asservi du second ordre dont l'évolution en régime autonome est régie par l'équation différentielle (II.26) : /25/

$$\ddot{y} + f_1(\zeta_1, \zeta_2, t) \dot{y} + f_2(\zeta_1, \zeta_2, t) y = 0 \quad (\text{II.26})$$

$$\zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{R}, \quad f_1, f_2 : \mathcal{R}^2 \times \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{R}$$

Ce système non linéaire du second ordre est caractérisé par une évolution indépendante de z_1, z_2 et des variables de phase $y, \dot{y}$. Il n'est pas exclu d'envisager le caractère non stationnaire de f_1, f_2 .

Associons à l'équation scalaire du second ordre (II.26) l'équation différentielle vectorielle du 1^o ordre (II.27) de vecteur état $\begin{bmatrix} \dot{y} \\ y \end{bmatrix}$ il vient :

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \dot{y} \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -f_1 & -f_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

Le choix du vecteur de comparaison $\begin{bmatrix} 0 \\ |y| \\ |y| \end{bmatrix}$ ne permet pas de conclure à la

stabilité. Notons cependant que les éléments non linéaires de A sont isolés dans la première ligne de cette matrice. En conséquence, pour permettre l'application du critère de stabilité (II.1), il convient de rechercher un changement de base défini par la matrice triangulaire P conservant ainsi les éléments non linéaires dans la première ligne de la matrice transformée. Ce changement de base doit également introduire un nombre suffisant de paramètres pour permettre la vérification des conditions de Kotelyanskii (II.25).

Notons P une matrice de changement de base de ce type, la représentation matricielle (II.28) est équivalente à l'équation (II.27)

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -f_1 + \lambda & , & + \frac{\lambda}{\mu}(f_1 - \lambda) - \frac{f_2}{\mu} \\ \mu & & - \lambda \end{bmatrix} z \quad (\text{II.28})$$

$$z = P \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ y \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

Les éléments non linéaires sont ainsi isolés dans la première ligne de la matrice définissant le régime libre. Le système majorant qui s'en déduit prend la forme :

$$\frac{d}{dt} |z| \leq \begin{bmatrix} \lambda - f_1 & , & \left| \frac{\lambda}{\mu} \right| \left| f_1 - \lambda - \frac{f_2}{\lambda} \right| \\ |\mu| & , & - \lambda \end{bmatrix} |z| \quad (\text{II.29})$$

Le critère de H.H. Rosenbrock ne permet pas d'étudier la stabilité de ce système $|\mu| > |\lambda|$. Il suffit alors d'appliquer à la matrice majorante $M(A)$ les conditions de stabilité définies en (II.25)

$$M(A) = \begin{bmatrix} \lambda - f_1 & , & \left| \frac{\lambda}{\mu} \right| \left| f_1 - \lambda - \frac{f_2}{\lambda} \right| \\ \left| \mu \right| & , & -\lambda \end{bmatrix} \quad (\text{II.30})$$

d'où les contraintes de stabilité indépendante de μ :

$$\begin{aligned} \lambda - f_1 &< 0, & \lambda &> 0 \\ \lambda(f_1 - \lambda) - \lambda \left| \lambda - f_1 + \frac{f_2}{\lambda} \right| &> 0 \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

Il en résulte les domaines de stabilité définis sur la figure (II.1). Tout domaine tel que A B C est alors un domaine de stabilité non linéaire dans le plan f_1, f_2 .

Remarque : Lorsque λ varie la droite d'équation $-2\lambda^2 + 2\lambda f_1 - f_2 = 0$ enveloppe la parabole d'équation $f_1^2 - 2f_2 = 0$.

figure (II.1)

Conclusion

La notion de système de comparaison vectoriel généralement utilisée lors de l'étude de la stabilité des systèmes interconnectés nous a conduit à envisager la recherche de systèmes de comparaison dits majorants.

Dans un cas relativement simple, nous avons indiqué le schéma de la démarche que nous envisageons de suivre ultérieurement. Tout d'abord, nous cherchons à définir directement à partir du système initial donné sous forme globale un système majorant. Ce système est le plus souvent non linéaire et sa définition peut ou non tenir compte de la décomposition connue en sous systèmes.

Dans une seconde étape, le système majorant permet une étude simplifiée de la stabilité du système initial.

L'étude particulière d'une classe de systèmes non linéaires a ainsi permis la mise en évidence d'une condition de stabilité simplement déduite des conditions du linéaire. Le critère ainsi énoncé peut être directement appliqué à l'étude de la stabilité des processus monovariables.

Ces résultats introduits à partir de la définition d'un système majorant particulier nous conduisent à la recherche d'une technique de majoration plus élaborée en vue de l'étude de la stabilité des processus non linéaires de grande dimension.

BIBLIOGRAPHIE CHAPITRE II

- /1/ N. ROUCHE , J. MAWHIN
"Equations différentielles ordinaires"
Stabilité et solutions périodiques - Méthode de comparaison - T.2 - p 45
Masson et cie - Paris - 1973
- /2/ T. WAZEWSKY
*"Système des équations et des inégalités différentielles ordinaires
aux deuxièmes membres monotones et leurs applications"*
Ann. Soc. Polon. Math. - Vol. 23 - 1950 - pp 112-166
- /3/ R. BELLMAN
"Vector Ljapunov functions"
J. SIAM of Control - Ser. A - Vol.1 - n° 1 - 1962
- /4/ F.N. BAILEY
*"The application of second method of Ljapunov to interconnected
systems"*
J. SIAM of Control Ser. A - Vol. 3 n° 3 - 1966
- /5/ A.N. MICHEL , D.W. PORTER
"Stability analysis of composite systems"
I.E.E.E - Trans. on Aut. Control - Avril 1972
- /6/ MITUHIKO ARAKI , BUNJI KONDO
"Stability and transient behaviour of composite systems"
I.E.E.E - Trans. on Aut. Control - Août 1972
- /7/ V.M. MATROZOV
"Sur la stabilité du mouvement"
Prikl. Mat. Mech. - 1962 - pp 885-895 et 992-1002 (en russe)

- /8/ L. SALVADORI
"Un ossevazione su di un criterio di stabilita del routh"
Rend Accad. Sci. Fis. Math. Napoli - 1953 - 20
- /9/ N. ROUCHE
(1) - *"On the stability of motion"*
Int. J. Non linear Mech. - 1968 - 3
(2) - *"Nouveaux théorèmes de stabilité utilisant la méthode directe de Ljapunov"*
Intern. J. Non linear Mech. - 1969 - 4 - pp 301-309
- /10/ ARMANDO d'ANNA
"Asymptotic stability proved by using vector Ljapunov functions"
Annales de la société scientifique de Bruxelles - T. 87 II -
1973 - pp 119-139
- /11/ D.D. ŠILJAK
"Stability of large-scale systems under structural perturbations"
I.E.E.E - S.M.C - Nov. 1972 pp 657-663
- /12/ D.D. ŠILJAK
"Stability of large-scale systems"
5th World I.F.A.C Congress - Paris - 12 - 17 juin 1972
- /13/ D.D. ŠILJAK
"On stability of large-scale systems under structural perturbations"
Fev. 1973 - Rapport Univ. of Santa Clara
- /14/ D.D. ŠILJAK
"On stability of large-scale systems under structural perturbations"
3rd IFAC - Symposium on sensitivity, adaptativity and Optimality -
ISCHIA - Italie - 18/23 Juin 1973

- /15/ L.T. GRUJIĆ et D.D. ŠILJAK
"Asymptotic stability and instability of large-scale systems"
I.E.E.E - Trans. on Aut. control - Dec. 1973
- /16/ D.D. ŠILJAK
"Competitive economic systems : stability, decomposition and aggregation"
Proc. of the 1973 conference on decision and control - San Diego - California - Dec. 1973
- /17/ H.H. ROSENBROCK
"A Ljapunov function for some naturally occurring linear homogeneous time-dependent equations"
Automatica 1 - 1963
- /18/ I.W. SANDBERG
"Some theorems on the dynamic response of non-linear transistor networks"
Bell. syst. Tech. J. 48 - 1969
- /19/ E.F. BECKENBACH , R. BELLMAN
"Inequalities"
Springer Verlag Berlin Göttingen Heidelberg - 1961
- /20/ M. FIEDLER , V. PTAK
"On matrices with non positive off diagonal elements and positive principal minors"
Czec. Math. J.12 (87) - 1972
- /21/ C. BERGE
"Espaces topologiques"
Dunod - Paris - 1966 - Ch. IV
- /22/ F.R. GANTMACHER
"Théorie des matrices"
Dunod - Paris - 1966 - T.2 - Ch. 13 - pp 69-70

/23/

KOTELVANSKI

"Sur certaines propriétés des matrices à éléments positifs"

Mat. Sb. - Vol.31 - 1952 - pp 497-505

/23/

A.I. LURE' , V.N. POSNIKOV

"Some non-linear processes in the theory of Automatic regulation"

Gostehizdat - 1951

/25/

J.C. GENTINA , P. BORNE

*"Sur une condition d'application du critère de stabilité linéaire
à certaines classes de systèmes continus non-linéaires"*

C.R.A.S - Paris - T. 275 - Août 1972

CHAPITRE III

Modèle majorant d'un système continu non linéaire de grandes dimensions

Introduction

Le concept de norme vectorielle a été initialement introduit par F. ROBERT /1/ dans le but d'étudier la convergence des récurrences linéaires en analyse numérique. Ultérieurement, ces travaux ont été repris par J.F. Maitre /3/ puis par F. Robert /2/ pour l'étude des récurrences vectorielles de grandes dimensions. L'utilisation des normes vectorielles dans l'étude des systèmes continus non-linéaires n'a pas été abordée par ces auteurs, ce problème n'est plus en effet du domaine de l'analyse numérique mais plutôt du domaine de l'analyse des systèmes au sens de l'automatique. Cette application particulière des N.V* semble particulièrement utile puisqu'elle peut conduire à la définition systématique d'une classe de systèmes majorants. C'est dans cette voie que nous proposons maintenant d'orienter la présentation de nos travaux.

Afin de préciser l'intérêt de la notion de N.V, il convient avant tout d'en rappeler certaines caractéristiques particulières du point de vue de l'utilisation.

- (i) Notons tout d'abord qu'il ne s'agit pas nécessairement d'une fonction de Lyapunov vectorielle. En conséquence le système majorant défini à partir d'une N.V n'a pas pour seule application les problèmes généraux liés aux études de stabilité.
- (ii) La dimension du processus majorant ne dépend pas directement du nombre des sous systèmes d'un processus à structure interconnectée.

* Abréviation de norme vectorielle

- (iii) Chaque sous système peut être contracté à une dimension à priori quelconque éventuellement différente du premier ordre.
- (iv) Il est enfin possible de définir, au sens des travaux de D.D Siljak /4/ une classe de systèmes majorants des processus admettant des variations de structure.

Une première application du concept de norme vectorielle a été envisagée, dans le domaine discret, à l'étude de la stabilité des processus non linéaires de grandes dimensions /5/ /6/. Ces travaux basés sur l'utilisation des propriétés des matrices à éléments non négatifs ont permis de définir de nouvelles conditions de stabilité.

Nous proposons d'étendre au domaine continu les techniques de majoration basées sur l'utilisation des N.V. Dans ce sens il est nécessaire de définir pour les systèmes continus non linéaires la notion de système majorant et de matrice pseudo-majorante. Ces concepts nouveaux pour les systèmes continus nous conduiront à analyser les propriétés des systèmes majorants ainsi obtenus. En particulier nous serons amenés à généraliser le lemme de comparaison de Wazewski /7/ et à préciser la classe des systèmes majorants pour lesquels ce lemme peut être utilisé.

Les résultats présentés peuvent être étendus sans difficultés à la majoration des systèmes définis sur le corps des complexes et à la minoration des systèmes continus non linéaires de grande dimension.

III. 1 - Systèmes majorants de processus définis sur le corps des réels $\mathbb{R}$.

III. 1.1. - Notion de norme vectorielle /1/, /2/.

Soit $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$ un espace vectoriel et $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_k$ un ensemble

formé de k sous espaces $\mathcal{E}_i$ $\{i = 1, 2, \dots, k\}$ de l'espace $\mathcal{E}$.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \dots \cup \mathcal{E}_k \quad (\text{II}, 1)$$

Dans cet espace notons x un vecteur de dimension n et désignons par x_i chacune des projections du vecteur x dans le sous espace correspondant $\mathcal{E}_i$

$$x_i : x_i = \text{Pr}_i x, \quad \forall x \in \mathcal{E}, \quad \forall x_i \in \mathcal{E}_i \quad (\text{III}, 2)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, k.$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

Pr_i désigne ici l'opérateur de projection de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}_i$.

Si $p_i(x_i)$ est une norme scalaire du vecteur x_i défini dans le sous espace $\mathcal{E}_i$, alors le vecteur $p(x)$ de dimension k et de composantes $p_i(x_i) [i=1, 2, \dots, k]$ est une norme vectorielle du vecteur x :

$$p_i(x) = p_i(x_i), \quad p(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^k \quad /1/, /2/$$

Par l'introduction d'un nouveau vecteur $y \in \mathcal{E}$, les axiomes de définition de la norme vectorielle $p(x)$ s'écrivent sous la forme des relations (III.3)

$$(i) \quad p_i(x_i) > 0 \quad \forall x_i \in \mathcal{E}_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k \quad (\text{III}, 3)$$

$$(ii) \quad p_i(x_i) = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$$

$$(iii) \quad p_i(x_i + y_i) \leq p_i(x_i) + p_i(y_i) \quad \forall x_i, y_i \in \mathcal{E}_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$$

$$(iv) \quad p_i(\lambda x_i) = |\lambda| p_i(x_i) \quad \forall x_i \in \mathcal{E}_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $k-1$ des sous espaces $\mathcal{E}_i$ ne suffisent pas à définir l'espace $\mathcal{E}$, la norme vectorielle p est dite surjective. Enfin elle est dite régulière si les sous espaces $\mathcal{E}_i$ sont disjoints deux à deux :

$$\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j = 1, 2, \dots, k \quad (\text{III.4})$$

$$\bigcup_{i=1}^k \mathcal{C}_i = \mathcal{C}$$

Nous proposons d'illustrer ces définitions sur les trois exemples suivants. Soit x un vecteur d'ordre 4

$$x^T = [x_1, x_2, x_3, x_4] \quad , \quad x \in \mathcal{C} = \mathbb{R}^4 \quad (\text{III.5})$$

a) Formons tout d'abord une norme vectorielle $p(x)$ de taille* 3, ni régulière ni surjective, à partir du découpage suivant de l'espace $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \mathbb{R}^1, \quad y_1 = x_1 \in \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{C}_2 &= \mathbb{R}^2, \quad y_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_2 \\ \mathcal{C}_3 &= \mathbb{R}^3, \quad y_3 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_3 \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

$$p(x)^T = [p_1(y_1), p_2(y_2), p_3(y_3)]$$

cette norme vectorielle n'est pas surjective en effet la réunion des 2 sous espaces $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ permet de reconstituer l'espace $\mathcal{C}$. Le sous espace $\mathcal{C}_1$ est donc, de ce point de vue redondant.

En prenant pour p_1 la norme du max pour p_2 la norme euclidienne et pour p_3 la norme "somme des modules" il vient par définition pour $p(x)$:

$$p(x)^T = \{|x_1|, \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, |x_1| + |x_2| + |x_3|\} \quad (\text{III.7})$$

* la taille d'une N.V correspondant à sa dimension

b) Afin de définir une norme vectorielle surjective de taille 3, choisissons maintenant un nouveau découpage de $\mathcal{U}$ défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \mathbb{R}^2, & y_1 &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 &= \mathbb{R}^2, & y_2 &= \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_3 &= \mathbb{R}^1, & y_3 &= (x_4) \in \mathcal{U}_3 \end{aligned} \quad (\text{III},8)$$

Toute norme vectorielle de taille 3 définie à partir de $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$ est par conséquent surjective puisqu'il est nécessaire de disposer de tous les sous espaces $\mathcal{U}_i$ pour reconstituer $\mathcal{U}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3 \\ \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 &\neq \emptyset \end{aligned}$$

Cependant, cette norme surjective n'est pas régulière, en effet les sous espaces $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ ne sont pas disjoints.

A partir d'une même définition de p_1 , p_2 et p_3 que précédemment, il vient pour $p(x)$ la norme surjective suivante :

$$p(x)^T = \{\max\{|x_1|, |x_2|\}, \sqrt{x_2^2 + x_3^2}, |x_4|\} \quad (\text{III}.9)$$

c) Enfin si les sous espaces $\mathcal{U}_i$ sont disjoints il vient la définition d'une norme vectorielle régulière

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_1 &= \mathbb{R}^2 & y_1 &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & \in & \mathcal{U}_1 \\
 \mathcal{U}_2 &= \mathbb{R} & y_2 &= x_3 & \in & \mathcal{U}_2 \\
 \mathcal{U}_3 &= \mathbb{R} & y_3 &= x_4 & \in & \mathcal{U}_3
 \end{aligned}
 \tag{III.10}$$

$$p(x)^T = \left[\max \{ |x_1|, |x_2| \}, |x_3|, |x_4| \right]$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3$$

$$\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j = 1, 2, 3$$

Il est donc possible à priori d'éliminer ou au contraire d'imposer une redondance dans la définition d'une norme vectorielle p .

III.1.2. - Systèmes majorants d'un système continu non linéaire

La classe de systèmes que nous étudierons est décrite par une équation différentielle vectorielle et non linéaire du premier ordre : (réf CH I.I.5, CH II.II.2.1)

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x) \cdot a(t, x) \tag{S}$$

Dans (S) le vecteur état est noté $x \in \mathbb{R}^n = \mathcal{U}$,

$a(t, x)$ est un vecteur d'ordre m :

$$a(t, x) : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

ou $\mathcal{U} =]-\infty, +\infty[$ est un intervalle de temps infini.

Le capteur C_1 délivrant la variable x_1 n'est plus linéaire au delà de certaines limites. Il vient dans ce cas une équation d'état du type S :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta & , & \sin t \\ \alpha & , & -x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sat } x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Le système majorant de (S) sera défini à partir de la norme vectorielle $p(x)$ du vecteur état x .

Comme dans le chapitre précédent (II.2.1) il est nécessaire d'utiliser la dérivation au sens M.M Rosenbrock /8/ et Sandberg /9/ que l'on notera $D^+ p_i(x_i)$. Cette définition permet de lever les difficultés apparaissant lors des discontinuités éventuelles d'une ou plusieurs composantes du vecteur déduit de $p(x)$ par dérivation, ainsi que nous l'avons noté pour la norme particulière $|x_i|$. La dérivée $D^+ p_i(x_i)$ est prise le long des solutions de S dans le sous espace $\mathcal{C}_i$ et $D^+ p(x)$ est prise le long de solutions de S dans $\mathcal{C}$.

Définition (III.1)/10/ La matrice $M(t,x) : \mathcal{C} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$ définit relativement à la norme vectorielle $p(x)$, un système majorant du système S si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée composante à composante :

$$D^+ p(x) \leq M(t,x) p(x) , \quad \forall x \in \mathcal{C} , \quad \forall t \in \mathcal{C}_0 \quad (\text{III.11})$$

A partir des notations suivantes :

$$\begin{aligned} a_j(t,x) &= \text{Pr}_j^* a(t,x) & \forall j &= 1,2,\dots, k \\ A_{ij}(t,x) &= \text{Pr}_i A(t,x) \text{Pr}_j^* & \forall i,j &= 1,2,\dots, k \\ M(t,x) &= \{\mu_{ij}(t,x)\} & \forall i,j &= 1,2,\dots, k \\ \text{Pr}_j^* &: \text{opérateur de projection de } \mathbb{R}^m \text{ dans } \mathcal{C}_j \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

il est possible de proposer plusieurs expressions des matrices pseudo-majorantes $M(t,x)$.

Définition (III.2) La matrice $M(t,x) = \{\mu_{ij}(t,x)\}$, $\mu_{ij} : \mathcal{C} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une matrice pseudo majorante de type canonique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{ii}(t,x) = \sup_{y \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T A_{ii}(t,x) a_i(t,y)}{p_i(y_i)} \right\} \\ \forall i = 1, 2, \dots, k \quad ; \quad \forall x \in \mathcal{C} \quad ; \quad \forall t \in \mathcal{C}_0 \end{array} \right\} \quad (\text{III.13})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{ij}(t,x) = \text{Max} \left\{ 0, \sup_{y \in \mathcal{C}} \frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T A_{ij}(t,x) a_j(t,y)}{p_j(y_j)} \right\} \\ \forall i \neq j = 1, 2, \dots, k, \quad \forall x \in \mathcal{C} \quad ; \quad \forall t \in \mathcal{C}_0. \end{array} \right\}$$

Pour obtenir la définition (III.2) il convient tout d'abord de choisir une norme vectorielle $p(x)$ puis d'en prendre la dérivée au sens de Sandberg et Rosenbrock soit :

$$D_i^+ p(x) = \left[\frac{\partial^+ p_i(x_i)}{\partial x_i} \right]^T \begin{matrix} 0 \\ x_i \end{matrix} \quad (\text{III.14})$$

compte-tenu de la définition de S il vient :

$$D_i^+ p_i(x) = \text{Grad } p_i(x_i)^T \text{Pr}_i A(t,x) \cdot a(t,x)$$

soit encore :

$$D_i^+ p_i(x) = \sum_{j=1}^{j=k} \text{Grad } p_i(x_i)^T \text{Pr}_i A(t,x) \text{Pr}_j^* a_j(t,x) \quad (\text{III.15})$$

En notant $A_{ij}(t,x)$ la matrice obtenue à partir des opérateurs de projection Pr_i et Pr_j^* il est possible d'écrire :

$$D^+ p_i(x) = \sum_{j=1}^k \frac{\text{Grad } p_i(x_i) A_{ij}(t,x) a_j(t,x)}{p_j(x_j)} \cdot p_j(x_j) \quad (\text{III.16})$$

Par majoration de la relation (III.16) il vient ainsi la définition (III.2) de la matrice pseudo-majorante $M(t,x)$.

Notons que dans cette première définition nous avons imposé la non négativité des éléments non diagonaux $\mu_{ij}(t,x)$. Nous justifierons ce choix ultérieurement, lors de la démonstration du lemme de comparaison.

Il est assez souvent intéressant de définir une matrice pseudo-majorante à coefficients constants ou ne dépendant que du temps seul.

Définition (III.3) La matrice $M(t) = \{\mu_{ij}(t)\}$, $\mu_{ij} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est une matrice pseudo-majorante instantanée :

$$\begin{aligned} \mu_{ii}(t) &= \sup_{y \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T A_{ii}(t,y) a_i(t,y)}{p_i(y_i)} \right\} & \forall i=1,2,\dots,k \\ & & \forall t \in \mathcal{C}_0 \\ \mu_{ij}(t) &= \text{Max} \left\{ 0, \sup_{y \in \mathcal{C}} \left[\frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T A_{ij}(t,y) a_j(t,y)}{p_j(y_j)} \right] \right\} & \forall i \neq j=1,2,\dots,k \\ & & \forall t \in \mathcal{C}_0 \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

cette seconde définition est strictement obtenue par majoration des relations (III.16)

Définition (III.4) La matrice $M = \{\mu_{ij}\}$ est une matrice pseudo-majorante constante :

$$\begin{aligned} \mu_{ii} &= \sup_{\substack{y \in \mathcal{C} \\ t \in \mathcal{C}_0}} \left\{ \frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T A_{ii}(t,y) a_i(t,y)}{p_i(y_i)} \right\} & \forall i=1,2,\dots,k \\ \mu_{ij} &= \text{Max} \left\{ 0, \sup_{\substack{y \in \mathcal{C} \\ t \in \mathcal{C}_0}} \frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T A_{ij}(t,y) a_j(t,y)}{p_j(y_j)} \right\} & \forall i \neq j=1,2,\dots,k \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Les majorations relatives aux définitions 2, 3 et 4 étant effectuées à des degrés différents, il en découle la suite d'inégalités (III.19) :

$$M(t,x) \leq M(t) \leq M \quad (\text{III.19})$$

Nous allons envisager maintenant une forme simplifiée du système S noté S :

$$\dot{x} = A(t,x) \cdot x \quad (\underline{S})$$

Avec les mêmes hypothèses que pour S, A(t,x) désigne dans ce cas une matrice carrée $n \times n$:

$$A(t,x) : \mathcal{T} \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n \times n}$$

Le choix d'un opérateur de projection $\text{Pr}_j^* = \text{Pr}_j$ conduit à une forme simplifiée de système majorant au sens de la définition (III.5) :

Définition (III.5) La matrice $M(t,x) = [\mu_{ij}(t,x)]$, $\mu_{ij} : \mathcal{T} \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ est une matrice pseudo-majorante canonique :

$$\begin{aligned} \mu_{ii}(t,x) &= \sup_{y \in \mathcal{E}} \frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T A_{ii}(t,x) y_i}{p_i(y_i)} & \forall i=1,2,\dots,k \\ & & \forall x \in \mathcal{E}; \forall t \in \mathcal{T}_0 \\ \mu_{ij}(t,x) &= \max \left[0, \sup_{y \in \mathcal{E}} \frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T A_{ij}(t,x) y_j}{p_j(y_j)} \right] & \forall i \neq j=1,2,\dots,k \\ & & \forall x \in \mathcal{E}, \forall t \in \mathcal{T}_0 \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Toutes les définitions qui viennent d'être énumérées sont relatives à une même forme de système majorant, au sens de l'inégalité (III.11). Toutefois, certaines applications des inégalités différentielles, relatives notamment aux études de stabilité des systèmes, conduisent à introduire de nouvelles formes de systèmes majorants.

Définition (III.6) La matrice $M^*(t,x)$, $M^* : \mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{k \times k}$ définit un système majorant S' du système S pour les 2 normes vectorielles p et q si l'inégalité suivante est vérifiée composante à composante :

$$D^+ p(x) \leq M^*(t,x) q[a(t,x)] \quad \forall x \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{C}_0 \quad (S')$$

Une majorante particulière peut être utilisée lors de l'étude des systèmes de grandes dimensions interconnectés. Dans ce cas il peut être intéressant de choisir pour composante de rang i de la norme vectorielle $p(x)$ une norme scalaire $p_i(x_i)$ du vecteur état x_i du $i^{\text{ème}}$ sous système.

Soit par exemple un système non linéaire de grande dimension que nous supposons décomposable en un ensemble de s sous systèmes interconnectés :

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(t, x_i) + h_i(t, x) \quad \forall i = 1, 2, \dots, s \quad (\text{III.21})$$

La fonction $g_i : \mathcal{C} \times \mathcal{R}^{n_i} \rightarrow \mathcal{R}^{n_i}$ est associée au sous système déconnecté S_i :

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(t, x_i)$$

Le vecteur $x_i \in \mathcal{R}^{n_i}$ est le vecteur état du sous système S_i ($\sum_{i=1}^s n_i = n$).

La fonction $h_i : \mathcal{C} \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n_i}$ est caractéristique de l'action de S sur le sous système S_i . Un majorant du système S peut être obtenu à partir d'une norme vectorielle $p(x)$ de $i^{\text{ème}}$ composante $p_i(x_i)$:

Définition (III.7) Le système S'' défini à partir de l'inégalité (III.22) est un système majorant de (III.21) /18/

$$D^+ p_i(x_i) \leq \mu_{ii}(t, x_i) p_i(x_i) + \ell_i(t, x) \quad (\text{III.22})$$

$$\text{ou : } \mu_{ii}(t, x_i) = \sup_{y \in \mathcal{C}_i} \left[\frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T g_i(t, x_i)}{p_i(y)} \right] \quad \begin{array}{l} \forall i = 1, 2, \dots, s \\ \forall t \in \mathcal{C}_0 \\ \forall x \in \mathcal{C} \end{array}$$

$$\ell_i(t, x) = \text{Grad } p_i(x)^T h_i(t, x)$$

l'inégalité (III.22) peut encore s'écrire :

$$D^+ p(x) \leq M(t, x) p(x) + \ell(t, x) \quad (\text{III.23})$$

$$\text{avec } M(t, x) = \{\mu_{ij}(t, x_i)\} \text{ et } \ell(t, x) = \{\ell_i(t, x)\}$$

$\mu_{ii}(t, x_i)$ et $\ell_i(t, x)$ sont définis en (III.22)

$$\mu_{ij}(t, x_i) = 0 \quad \forall i \neq j = 1, 2, \dots, s \quad \forall x \in \mathcal{C}, \quad \forall t \in \mathcal{C}_0.$$

III.1.3. - Analyse des propriétés des matrices pseudo-majorantes

a - Existence d'un plus petit élément dans l'ensemble des pseudo-majorantes d'une matrice relativement à une norme vectorielle régulière p (définition 5)

Nous envisageons ici le cas des systèmes majorants au sens de la définition 5, dans ce cas nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème (III.1) La matrice pseudo-majorante $M_{pp}(t, x)$ de la matrice $A(t, x)$ associée à la définition du système continu non linéaire $\underline{S}$ est la plus petite pseudo-majorante de A relativement à $p(x)$ si la norme vectorielle $p(x)$ est régulière.

Démonstration

Supposons qu'il existe une pseudo-majorante $\underline{M}(t, x)$ dont les éléments

$\underline{\mu}_{ij}$ ne sont pas tous supérieurs aux éléments μ_{ij} définis dans la relation (III.20). Dans ce cas, au moins pour le couple d'indices i, j il vient l'inégalité :

$$\underline{\mu}_{ij} \leq \mu_{ij} \quad (\text{III.24})$$

puisque $\underline{M}(t, x)$ est une pseudo-majorante de A , la définition 5 implique l'inégalité :

$$\sum_{\ell=1}^k v_{i\ell} p_{\ell}(x_{\ell}) \leq \sum_{\ell=1}^k \underline{\mu}_{i\ell} p_{\ell}(x_{\ell}) \quad \begin{cases} \forall t \in \mathcal{C}_0, \forall x_{\ell} \in \mathcal{C}_{\ell} \\ \forall \ell = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (\text{III.25})$$

$$v_{ij} = \frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T A_{ij}(t, x) y_j}{p_j(y_j)}$$

La norme p , choisie sans redondance, est par définition régulière ce qu'exprime la relation (III.26)

$$\forall i \neq j = 1, 2, \dots, k \quad p_j(x_i) = 0 \quad (\text{III.26})$$

il résulte alors des inégalités (III.24) et (III.25) :

$$v_{ij}(y, t, x) \leq \underline{\mu}_{ij}(t, x) \leq \mu_{ij}(t, x) \quad (\text{III.27})$$

soit y_M la valeur de y pour laquelle l'élément $\mu_{ij}(t, x)$ est maximum il vient par définition :

$$\mu_{ij}(t, x) = v_{ij}(y_M, t, x) \quad (\text{III.28})$$

si l'on donne à y la valeur y_M dans (III.28) il s'en déduit :

$$\mu_{ij}(t, x) \leq \underline{\mu}_{ij}(t, x) \leq \mu_{ij}(t, x)$$

La régularité de la norme vectorielle p permet donc d'affirmer que $M(t, x)$

est la plus petite pseudo-majorante relative à p.

b - Non négativité des éléments non diagonaux de M(t,x).

Dans les définitions III.1 à III.5 les éléments non diagonaux μ_{ij} $\forall i \neq j$ de la matrice majorante M ont été pris à priori non négatifs :

$$\forall i \neq j = 1, 2, \dots, k \quad \mu_{ij}(-) = \max [0, \sup (-)] \quad (\text{III.29})$$

Cette définition permet en effet de lever les difficultés qui pourraient apparaître lors de la recherche d'un système majorant à partir de normes vectorielles ni régulières ni surjectives.

En se référant à la définition III.5 et en supposant la N.V p régulière, l'indépendance des vecteurs y_i et y_j lorsque $i \neq j$ implique la non négativité des éléments non diagonaux, dans ce cas il vient :

$$\begin{aligned} \forall i \neq j = 1, 2, \dots, k \\ \forall x \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{C}_0 \end{aligned} \quad \mu_{ij} = \sup_{y \in \mathcal{C}} \frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T A_{ij}(t, x) y_j}{p_j(y_j)} \geq 0 \quad (\text{III.30})$$

Si pour la même définition (III.5) la N.V p est choisie ni régulière, ni surjective, les éléments μ_{ij} définis en (III.30) ne sont plus nécessairement non négatifs. Soit en effet

$$y_i \in \mathcal{C}_i \text{ et } y_j \in \mathcal{C}_j \text{ et tels que : } \mathcal{C}_j = \mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_j^*$$

$$\begin{aligned} \text{si l'on suppose : } A_{ij}(t, x) &= [A_{ii}(t, x), 0] \\ p_j(y_j) &= p_i \begin{pmatrix} y_i \\ y_j^* \end{pmatrix} = p_i(y_i) \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

il vient :

$$v_{ij} = \frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T A_{ij}(t, x) y_j}{p_i(y_j)} = \frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T A_{ii}(t, x) y_i}{p_i(y_i)} \quad (\text{III.32})$$

Dans ces conditions l'élément non diagonal μ_{ij} :

$$\mu_{ij} = \sup_{y \in \mathcal{C}} (v_{ij})$$

n'est plus nécessairement non négatif compte tenu de la dépendance des sous espaces $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_j$.

Une telle définition peut être intéressante dans certaines études de stabilité, toutefois comme nous le verrons ultérieurement le lemme de comparaison n'est plus valable, la définition de la majorante n'est pas systématique, la non négativité du vecteur $p(x)$ doit être vérifiée dans chaque cas.

c - Majoration de la plus grande partie réelle des valeurs propres d'une matrice.

- Dans le cas d'un système linéaire décrit sous la forme de $\underline{S}$ il vient par intégration :

$$x(t, t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)} \cdot x_0 \quad \forall t \in \mathcal{C}_0, \forall x_0 \in \mathcal{C} \quad (\text{III.33})$$

une majoration du système linéaire $\underline{S}$ obtenue à partir de la norme vectorielle $p(x)$ conduit à la définition du système majorant (III.34)

$$D^+ p(x) \leq M \cdot p(x) \quad \forall x \in \mathcal{C} \quad (\text{III.34})$$

La relation (III.34) permet d'obtenir par intégration une solution majorante de la solution (III.33) :

$$p \left[e^{A(t-t_0)} x_0 \right] \leq e^{M(t-t_0)} p(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{C}_0 \quad (\text{III.35})$$

Lorsque la norme p est régulière, ou pour une définition particulière de M , la matrice $e^{M(t-t_0)}$ est à éléments non négatifs /15/. Désignons par v le vecteur propre de composantes v_i relatif à la valeur propre de plus grande partie réelle de A :

$$e^{A(t-t_0)} v = e^{\lambda(t-t_0)} v \quad \forall t \in \mathcal{C}_0 \quad (\text{III.36})$$

De même $e^{\rho t}$ et u désignent respectivement la valeur propre de plus grand module de $e^{M(t-t_0)}$ et le vecteur propre qui lui correspond. Dans ces conditions le vecteur u à composantes strictement positives est choisi de telle façon que l'on ait : /11/

$$\begin{cases} u_\ell \geq p_\ell(v) & \forall \ell = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, k \\ u_i = p_i(v) \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

L'homogénéité de la norme p introduite permet d'écrire

$$p[e^{A(t-t_0)} v] = |e^{\lambda(t-t_0)}| p(v) \leq e^{M(t-t_0)} p(v) \quad \forall t \in \mathcal{C}_0 \quad (\text{III.38})$$

Une majoration beaucoup plus dure déduite des relations (III.37) conduit à l'inégalité :

$$|e^{\lambda(t-t_0)}| p(v) \leq e^{M(t-t_0)} u \leq e^{\rho t} u \quad (\text{III.39})$$

En particulier pour la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur u il vient :

$$|e^{\lambda(t-t_0)}| \leq |e^{\rho(t-t_0)}|$$

soit encore :

$$\text{Re } \lambda \leq \text{Re } \rho \quad (\text{III.40})$$

Dans ces conditions, la plus grande partie réelle des valeurs propres de la matrice pseudo-majorante $M(A)$ majore la plus grande partie réelle des valeurs propres de A .

Cette propriété mise en évidence dans l'hypothèse linéaire est également vérifiée dans l'hypothèse non linéaire. Il convient toutefois d'associer au système initial $\underline{S}$ un majorant au sens de la définition 5. Dans ce cas, la démonstration précédente doit rester valable pour tout instant $t \in \mathcal{T}_0$ et pour tout état $x \in \mathcal{E}$. La seule contrainte sur M réside donc dans la non négativité de ses éléments non diagonaux.

Théorème (III.2) Soit un système non linéaire $\underline{S}$ et son système majorant associé par la norme vectorielle $p(x)$. Si les éléments non diagonaux de la matrice pseudo-majorante $M(t,x)$ sont non négatifs $\forall x \in \mathcal{E}$ et $\forall t \in \mathcal{T}_0$, la valeur propre de plus grande partie réelle de $M(t,x)$ majore la valeur propre de plus grande partie réelle de $A(t,x)$:

$$\operatorname{Re} \lambda_{M(t,x)} \geq \operatorname{Re} \lambda_{A(t,x)} \quad \forall t \in \mathcal{T}_0, \forall x \in \mathcal{E} \quad (\text{III.41})$$

Nous désignons par Z_0 la classe des matrices réelles de dimension $k \times k$ à éléments hors diagonaux positifs ou nuls.

L'ensemble des matrices pseudo-majorantes qui viennent d'être définies appartiennent à Z_0 . Des travaux de M.M Fiedler et Ptak /12/, il ressort que toute matrice de classe Z_0 est de classe $(-M)$ si et seulement si sa valeur propre de plus grande partie réelle est négative ; la matrice $M(t,x)$ est alors par définition l'opposée d'une M matrice. Nous proposons donc, afin de conclure cette étude relative à l'analyse des propriétés des matrices pseudo-majorantes, de rappeler le théorème suivant qui sert de définition de base à la classe des M matrices : /12/, /13/, /14/.

Théorème (III.4) Soit $M \in Z_0$, on appelle $(-M)$ matrice toute matrice de Z_0 qui vérifie au moins l'une des conditions équivalentes énoncées ci-dessous :

- 1 - Il existe $u \geq 0$ tel que $Mu < 0$
- 2 - Il existe une diagonale positive Δ telle que $M\Delta v < 0$
(v : vecteur dont les composantes sont toutes égales à l'unité)
- 3 - Il existe une diagonale Δ telle que $N = M\Delta$ soit une matrice à diagonale négative dominante.
- 4 - Toute valeur propre de M est à partie réelle négative.
- 5 - Tous les mineurs principaux de M sont de signes alternés le premier étant négatif.
- 6 - Il existe une matrice de permutation P telle que $P N P^T$ peut être écrite sous la forme d'un produit $T_1 T_2$ où T_1 , triangulaire inférieure, appartient à Z et T_2 triangulaire supérieure appartient à Z_0
 Z : désigne la partie de Z_0 formée des matrices de Z_0 à diagonale strictement négative
- 7 - L'inverse M^{-1} existe et $M^{-1} \geq 0$
- 8 - La valeur propre de plus grande partie réelle de M est réelle et négative.
- 9 - Pour tout vecteur $x \geq 0$ il existe un indice i tel que
 $x_i y_i < 0$ pour $y = Mx$

Une conséquence importante de ce théorème peut être énoncée sous la forme du corollaire suivant :

Corollaire III.4

Lorsqu'une matrice pseudo-majorante $M(t,x)$ est l'opposée d'une M matrice, alors $M(t,x)$ admet un vecteur propre $u(t,x)$, associé à la valeur propre de plus grande partie réelle négative de $M(t,x)$, dont toutes les composantes $u_i(t,x)$ sont non négatives. Lorsque $M(t,x)$ admet une inverse irréductible //1/ les composantes $u_i(t,x)$ sont strictement positives.

L'hypothèse d'irréductibilité traduit l'impossibilité d'isoler dans M , par permutations, un bloc diagonal indépendant.

L'ensemble de ces propriétés particulières permettra d'envisager ultérieurement une application du concept de système majorant à l'étude de la stabilité d'un système continu non linéaire de grande dimension.

III.1.4. - Normes vectorielles et principe de comparaison

Les systèmes étudiés dans cette section sont décrits sous la forme de S. Pour de tels systèmes il est possible de démontrer un lemme de comparaison qui peut être interprété comme une généralisation du lemme de comparaison de Wazewski /7/.

Lemme de comparaison (III.1)

Soit une norme vectorielle p de taille k et une matrice pseudo-majorante $M(t,x)$ associée au système S telle que d'une part les éléments non diagonaux de $M(t,x)$ soient non négatifs et que d'autre part l'inégalité suivante soit vérifiée le long des solutions de S :

$$D^+p(x) \leq M(t,x) p(x), \quad \forall t \in \mathcal{T}_0, \forall x \in \mathcal{E} \quad (\text{III.42})$$

alors le système (C) tel que $z(t_0) \geq p(x(t_0))$

$$(C) \quad \frac{dz}{dt} = M(t,x) z \quad \forall z \in \mathcal{R}_+^k \quad (\text{III.43})$$

est un système de comparaison de (S) et l'inégalité suivante est vérifiée

$$z(t) \geq p(x(t)) \quad \forall t \in \mathcal{T}_0 \quad (\text{III.44})$$

Démonstration

ε désigne un vecteur d'erreur de dimension k et tel que

$$\varepsilon(t) = z(t) - p(x(t)) \quad \forall t \in \mathcal{T}_0 \quad (\text{III.45})$$

avec $x(t) = x(t; t_0, x_0)$

Pour $t = t_0$ il vient $\varepsilon(t_0) \geq 0$.

Compte-tenu des définitions de z et p (III.42 et III.43) il est possible d'obtenir une inégalité différentielle sur ε :

$$D^+ \varepsilon \geq M(t, x) \varepsilon \quad (\text{III.46})$$

ε est un vecteur d'évolution continue par rapport à t et x .

Soit $t_1 > t_0$ le premier instant pour lequel l'une des composantes ε_i de ε s'annule. On peut alors écrire :

$$D^+ \varepsilon_i \geq \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1, \dots, k}} \mu_{ij}(t_1, x) \varepsilon_j \quad (\text{III.47})$$

Il apparaît ainsi à l'instant t_1 pour lequel ε_i s'annule que cette composante est une fonction non décroissante. En conclusion $\varepsilon(t)$ ne peut devenir négatif $\forall t \in \mathcal{T}_0$ d'où le résultat :

$$z(t) \geq p(x(t)) \quad \forall t \in \mathcal{T}_0 \quad (\text{III.48})$$

Il convient de remarquer que l'hypothèse $\mu_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j = 1, 2, \dots, k$ $\forall x \in \mathcal{E}$ et $\forall t \in \mathcal{T}_0$ est essentielle à la démonstration de ce lemme. Pour cette raison les matrices pseudo-majorantes ont été définies à priori dans la classe Z_0 .

Remarquons enfin que si $M(t, x) = M(t)$ ou $M(t, x) = M$ le lemme de comparaison 1 se réduit à une forme particulière du lemme de Wazewski /7/, /15/.

La définition 7 relative à la majoration des systèmes non linéaires conduit à énoncer sous une forme particulière le lemme de comparaison précédent :

Lemme de comparaison (III.2)

Soit une norme vectorielle p de taille k définissant un système majorant de classe S'' du système interconnecté non linéaire (III.21)

$$S''_i : D^+ p(x) \leq M(t, x) p(x) + l(t, x) \quad \forall x \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{C}_0$$

alors le système (C) tel que $z(t_0) \geq p[x(t_0)]$

$$\frac{dz}{dt} = M(t, x) z + l(t, x) \quad (C)$$

est un système de comparaison de (III.21) et les inégalités suivantes sont vérifiées le long des solutions de (III.21)

$$z(t) \geq p[x(t_0)] \quad \forall t \in \mathcal{C}_0$$

La démonstration de ce lemme découle immédiatement des résultats antérieurs.

III.1.5. - Exemples de matrices pseudo-majorantes d'une matrice relativement à une norme vectorielle régulière p .

En se référant à la définition 5 d'une classe de matrices pseudo-majorantes nous proposons à titre d'illustration de définir directement et d'une manière systématique les éléments $\mu_{i,j}$ de la matrice $M(t, x)$ à partir de la donnée de la matrice $A(t, x)$. Trois cas seront successivement étudiés, tout d'abord nous envisagerons le choix d'une norme vectorielle régulière p déduite de la norme du max, puis de sa norme duale et enfin de la norme euclidienne.

Dans chacun de ces cas le partitionnement de l'espace de définition $\mathcal{C}$ correspond à un découpage par blocs de la matrice $A(t, x)$. Dans ce sens les opérateurs de partitionnement Pr_i et Pr_j prennent une forme simplifiée :

$$Pr_i = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline [0] & [0] & [0] \\ \hline \hline \hline \hline \hline \\ \hline [0] & [0] & [0] \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} I_j \\ \\ \\ \\ I_i \\ \end{array} \end{array} \quad Pr_j = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline [0] & \begin{array}{|c|} \hline I_j \\ \hline \end{array} & [0] \\ \hline [0] & \begin{array}{|c|} \hline I_j \\ \hline \end{array} & [0] \\ \hline [0] & \begin{array}{|c|} \hline I_j \\ \hline \end{array} & [0] \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \\ I_i \\ \end{array} \end{array} \quad (III.49)$$

I_i et I_j désignent les ensembles d'indices des lignes et des colonnes du bloc A_{ij}

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \overbrace{0 \quad 0}^{I_j} & 0 \\ 0 & \text{diagonal} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{diagonal} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \right\} I_i$$

a) - Norme vectorielle $p(x)$ déduite de la norme du max :

Choisissons pour $p_i(x)$ la norme relative au module maximum des composantes $x_i \in \mathcal{L}_i$. Il vient par définition :

$$p_j(x) = \max_{k \in I_j} |x_k| = x_{j_m} \text{ signe } x_{j_m} \quad (\text{III.50})$$

La recherche d'une définition des éléments μ_{ij} de la majorante $M(t,x)$ conduit à écrire :

$$\text{Grad } p_i(x_i)^T = [0, \dots, 0, \text{ signe } x_{i_m}, 0, \dots, 0] \quad (\text{III.51})$$

Il s'en déduit une définition simple de la matrice A_{ij} en effet, cette matrice de même dimension que A est constituée d'éléments nuls sauf pour le bloc situé à l'intersection des ensembles I_i et I_j de lignes et colonnes dans lequel sont isolés les éléments correspondants. Dans le cas particulier qui nous intéresse il vient pour les matrices Pr_i et Pr_j :

$$Pr_j = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{diagonal} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} & [0] \\ [0] & \underbrace{[0]}_{I_j} & [0] \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & \text{diagonal} & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix}} \right\} I_i \quad (\text{III.52})$$

$$\text{soit : } A_{ij} = \{a_{ij}\} : \begin{cases} a_{ij} = a_{ij} & (\forall i \in I_i) \cap (\forall j \in I_j) \\ a_{ij} = 0 & (\forall i \notin I_i) \cup (\forall j \notin I_j) \end{cases} \quad (\text{III.53})$$

La définition des blocs A_{ij} conduit à écrire :

$$\text{Grad } p_i(x_i)^T A_{ij} x_j = \text{signe } x_{i_m} \sum_{\ell \in I_j} a_{i_m \ell} x_\ell \quad (\text{III.54})$$

d'ou pour l'élément μ_{ij} de la majorante :

$$\mu_{ij} = \max_{y \in \mathcal{C}} \left[\frac{\text{signe } y_{i_m} \sum_{\ell \in I_j} a_{i_m \ell} y_\ell}{y_{j_m} \text{signe } y_{j_m}} \right] \quad \forall t \in \mathcal{C}_0, \forall x \in \mathcal{C} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, k \quad (\text{III.55})$$

si l'on désigne par a_{ij} les éléments de la matrice A il vient :

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \max_{k \in I_i} \left\{ \sum_{\ell \in I_j} |a_{k\ell}| \right\} & \forall i \neq j = 1, 2, \dots, k \\ & & \forall t \in \mathcal{C}_0, \forall x \in \mathcal{C} \\ \mu_{ii} &= \max_{k \in I_i} \left\{ a_{kk} + \sum_{\substack{\ell \in I_i \\ k \neq \ell}} |a_{k\ell}| \right\} & \forall i = j = 1, 2, \dots, k \\ & & \forall t \in \mathcal{C}_0, \forall x \in \mathcal{C} \end{aligned} \quad (\text{III.56})$$

b) - Norme duale de la norme du max

La définition de la norme duale permet d'écrire :

$$p_i(x) = \sum_{k \in I_i} |x_k| \quad (\text{III.57})$$

il vient pour le gradient de $p_i(x)$:

$$\text{Grad } p_i(x)^T = [\dots, \text{signe } x_k, \dots] \quad k \in I_i \quad (\text{III.58})$$

soit pour l'élément μ_{ij} :

$$\mu_{ij} = \max_{y \in \mathcal{C}} \frac{\sum_{k \in I_i} \text{signe } y_k \cdot \sum_{l \in I_j} a_{kl} y_l}{\sum_{k \in I_i} y_k \text{ signe } y_k} \quad \forall x \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{C}_0 \quad (\text{III.59})$$

L'indépendance des indices k et l permet d'intervertir l'ordre des sommations définies au numérateur de μ_{ij}

$$\mu_{ij} = \max_{y \in \mathcal{C}} \frac{\sum_{l \in I_j} y_l \sum_{k \in I_i} \text{signe } y_k \cdot a_{kl}}{\sum_{k \in I_i} y_k \text{ signe } y_k} \quad \forall x \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{C}_0 \quad (\text{III.60})$$

soit encore

$$\mu_{ij} = \max_{l \in I_j} \left\{ \sum_{k \in I_i} |a_{kl}| \right\} \quad \begin{array}{l} \forall x \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{C}_0 \\ \forall i \neq j = 1, 2, \dots, k \end{array} \quad (\text{III.61})$$

$$\mu_{ii} = \max_{l \in I_i} \left[a_{ll} + \sum_{\substack{k \in I_i \\ k \neq l}} |a_{kl}| \right] \quad \begin{array}{l} \forall i = j = 1, 2, \dots, k \\ \forall x \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{C}_0 \end{array}$$

c) - Norme euclidienne

Il vient par définition de la norme euclidienne sur un sous espace $\mathcal{C}_i$:

$$p_i(y_i) = \left[y_i^T \ y_i \right]^{1/2} \quad (\text{III.62})$$

soit

$$\text{Grad } p_i(y_i)^T = \frac{y_i^T}{p_i(y_i)}$$

Avec les notations suivantes :

$$\text{Grad } p_i(y_i) = \{\alpha_k\}, \quad k \in I_i$$

$$\text{et } \sum_{k \in I_i} \alpha_k^2 = 1$$

il vient

$$\mu_{ij} = \max_{y \in \mathcal{C}} (v_{ij}) \quad \forall x \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{C}_0 \\ \forall i, j = 1, 2, \dots, k_0$$

$$v_{ij} = \frac{y_i^T A_{ij} y_j}{p_i(y_i) p_j(y_j)} = \sum_{k \in I_i} \alpha_k \sum_{\substack{\ell \in I_j \\ \ell \neq k}} a_{k\ell} \alpha_\ell \quad (\text{III.63})$$

Cherchons tout d'abord à exprimer les éléments diagonaux μ_{ii} de $M(t, x)$ par majoration des éléments v_{ii} définis en (III.63) :

$$v_{ii} \leq \sum_{k \in I_i} \alpha_k^2 a_{kk} + \sum_{\substack{k \in I_i \\ \ell \in I_j = I_i \\ \ell \neq k}} (a_{k\ell} + a_{\ell k}) \alpha_k \alpha_\ell \quad (\text{III.64})$$

compte-tenu de l'inégalité usuelle $\alpha_k \alpha_\ell \leq \frac{1}{2} (\alpha_k^2 + \alpha_\ell^2)$

il vient :

$$\mu_{ii} = \max_{k \in I_i} \left\{ a_{kk} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \neq \ell \\ k \in I_i \\ \ell \in I_i}} |a_{k\ell} + a_{\ell k}| \right\} \quad \forall x \in \mathcal{C} \\ \forall t \in \mathcal{C}_0 \quad (\text{III.65})$$

Les éléments non diagonaux s'expriment alors sous la forme :

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \max_{k \in I_j} \sum_{\ell \in I_i} |a_{k\ell}| + \max_{\ell \in I_i} \sum_{k \in I_j} |a_{\ell k}| \right\} \quad \forall x \in \mathcal{C} \\ \forall t \in \mathcal{C}_0 \quad (\text{III.66})$$

Pour les trois normes usuelles il apparait ainsi la possibilité d'une définition systématique des matrices pseudo-majorantes à condition toutefois de partir d'une représentation matricielle de la forme $\dot{x} = A(t, x)x$ et d'utiliser une norme vectorielle régulière.

III.2. - Pseudo-majorantes des processus continus non linéaires définis sur le corps des complexes.

La représentation des systèmes sur un espace vectoriel réel nous a conduit à définir le concept de matrice pseudo-majorante. Par extension, il est possible d'associer à un processus défini sur un espace hermitique /16/ un système majorant réel. Cette technique de majoration peut permettre d'aborder l'étude de la stabilité des systèmes à représentation complexe. C'est généralement le cas des systèmes pour lesquels la matrice définissant le régime libre est diagonalisée au voisinage d'un point moyen de fonctionnement et admet des valeurs propres complexes.

III.2.1. - Définition d'un système majorant réel d'un processus complexe.

Supposons les systèmes S et $\underline{S}$ définis sur le corps des complexes :

$$x \in \mathcal{K}^n = \mathcal{C}^{\mathcal{K}}$$

$$a(t,x) : \mathcal{C} \times \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^m$$

$$A(t,x) : \mathcal{C} \times \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^{n \times m} \quad (\text{III.67})$$

Le point $x = 0$ est par hypothèse le seul point d'équilibre stable du système S .

Soit $p(x)$ une norme vectorielle du vecteur état x ; $p(x)$ a pour composante $p_i(x_i)$:

$$p(x) : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{R}_+^k$$

chacune des composantes $p_i(x_i)$ est norme scalaire hermitienne du vecteur x_i défini sur un sous espace complexe $\mathcal{C}^{\mathcal{K}_i}$ de $\mathcal{C}^{\mathcal{K}}$.

Pour les trois normes hermitiques usuelles il vient :

1) norme du max hermitique

$$p_i(x_i) = \max_{k \in I_i} \sqrt{x_k^T \bar{x}_k} \quad (\text{III.68})$$

2) norme duale de la norme du max hermitique :

$$p_i(x_i) = \sum_{k \in I_i} \sqrt{x_k^T \bar{x}_k} \quad (\text{III.69})$$

3) norme euclidienne hermitique :

$$p_i(x_i) = \left[x_i^T \bar{x}_i \right]^{1/2} \quad (\text{III.70})$$

Dans ces conditions toutes les définitions antérieures relatives à la notion de processus majorant peuvent être rigoureusement transposées dans le domaine complexe.

A titre d'illustration nous proposons de définir 2 processus majorants du système $\underline{S}$ complexe.

$$\underline{S} : \overset{o}{x} = A(t, x) x \quad (\text{III.71})$$

Ces deux définitions d'une matrice pseudo-majorante réelle sont relatives à l'utilisation de la norme vectorielle régulière $p(x)$ de taille k . Dans le premier cas il s'agit de la norme du max et dans le second cas de la norme duale.

III.2.2. - Pseudo-majorante déduite de la norme du max

Soit $p_i(x)$ l'une des composantes de la norme vectorielle $p(x)$

$$p_i(x) = \max_{k \in I_i} \sqrt{x_k \bar{x}_k} = \sqrt{\bar{x}_{i_m} x_{i_m}}$$

La dérivée $D^+ p_i(x)$ s'exprime dans ce cas par la relation :

$$D^+ p_i(x) = \frac{1}{2\sqrt{\bar{x}_i x_i}} \left[\frac{\bar{x}_i}{x_i} + \frac{x_i}{\bar{x}_i} \right] \quad (\text{III.72})$$

Soit compte-tenu de la définition du système $\underline{S}$:

$$D^+ p_i(x) = \frac{1}{2\sqrt{\bar{x}_i x_i}} \sum_{j=1}^k \left[\frac{[0 \dots 0 \bar{x}_i \ 0 \dots 0] A_{ij} x_j + [0 \dots 0 x_i \ 0 \dots 0] \bar{A}_{ij} \bar{x}_j}{\sqrt{x_j \bar{x}_j}} \right] p_j(x) \quad (\text{III.73})$$

Cette relation conduit alors par majoration à la définition des éléments μ_{ij} de la matrice pseudo-majorante induite par la norme vectorielle p :

$$\mu_{ii} = \frac{1}{2} \max_{y \in \mathcal{C}} \mathcal{K} \left\{ \frac{[0 \dots 0 \bar{y}_i \ 0 \dots 0] A_{ii} y_i + [0 \dots 0 y_i \ 0 \dots 0] \bar{A}_{ii} \bar{y}_i}{\bar{y}_i y_i} \right\} \quad \begin{matrix} \forall i = 1, 2, \dots, k \\ \forall x \in \mathcal{C}^{\mathcal{K}}, \forall t \in \mathcal{C}_0 \end{matrix} \quad (\text{III.74})$$

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2} \max_{y \in \mathcal{C}} \mathcal{K} \left\{ \frac{[0 \dots 0 \bar{y}_i \ 0 \dots 0] A_{ij} \bar{y}_j + [0 \dots 0 y_i \ 0 \dots 0] \bar{A}_{ij} \bar{y}_j}{\sqrt{\bar{y}_i y_i} \sqrt{\bar{y}_j y_j}} \right\} \quad \begin{matrix} \forall i \neq j = 1, 2, \dots, k \\ \forall x \in \mathcal{C}^{\mathcal{K}}, \forall t \in \mathcal{C}_0 \end{matrix}$$

Les éléments de $M(A)$ peuvent alors s'exprimer à partir des coefficients a_{kl} des divers blocs A_{ij} définis directement à partir de la matrice A soit :

$$\mu_{ii} = \max_{k \in I_i} \left[\text{Re } a_{kk} + \sum_{\substack{l \in I_i \\ l \neq k}} |a_{kl}| \right] \quad \begin{matrix} \forall i = 1, 2, \dots, k \\ \forall x \in \mathcal{C}^{\mathcal{K}}, \forall t \in \mathcal{C}_0 \end{matrix} \quad (\text{III.75})$$

$$\mu_{ij} = \max_{k \in I_i} \left\{ \sum_{l \in I_j} |a_{kl}| \right\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, k, \quad i \neq j \quad (\text{III.75})$$

III.2.3. - Pseudo-majorante déduite de la norme duale.

Une pseudo-majorante de structure voisine peut être définie par la norme duale de la norme du max (III.69), il vient dans ce cas :

$$\begin{aligned} \mu_{ii} &= \max_{l \in I_i} \left\{ \operatorname{Re} a_{kk} + \sum_{k \in I_i} |a_{kl}| \right\} & \forall i = 1, 2, \dots, k \\ & & \forall x \in \mathcal{C}^K, \forall t \in \mathcal{C}_0 \\ \mu_{ij} &= \max_{l \in I_j} \left\{ \sum_{k \in I_i} |a_{kl}| \right\} > 0 & \forall i \neq j = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (\text{III.76})$$

Remarque : dans le cas particulier d'une contraction au premier ordre nous retrouvons le résultat énoncé à la sous section (I.7.1) du chapitre I :

$$\mu = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \operatorname{Re} a_{ii} + \sum_{j \neq i=1, \dots, n} |a_{ij}| \right\}$$

D'une façon générale les résultats et définitions énoncés sur le corps des réels sont simplement transposés dans le domaine complexe ainsi que nous venons de le voir sur les 2 exemples d'illustration précédents.

III.3. - Processus minorant d'un système continu non linéaire.

Après avoir défini la notion de système majorant par l'utilisation des normes vectorielles, nous proposons maintenant d'introduire, selon une démarche analogue, la notion de processus minorant.

III.3.1. - Système minorant, définition.

Le système minorant de (S) est défini à partir de la norme vectorielle $p(x)$ du vecteur état x :

Définition (III.8) La matrice $N(t,x) : \mathcal{C} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$ définit relativement à la norme vectorielle $p(x)$ un système minorant de S si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée composante à composante :

$$D^+ p(x) \geq N(t,x) p(x), \quad \forall x \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{C}_0 \quad (\text{III.77})$$

A partir des notations (III.12) il est possible de donner plusieurs expressions des matrices pseudo-minorantes $N(t,x)$:

Définition (III.9) La matrice $N(t,x) = \{n_{ij}(t,x)\}$, $n_{ij} : \mathcal{C} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une matrice pseudo-minorante :

$$n_{ii}(t,x) = \inf_{y \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T A_{ii}(t,x) a_i(t,y)}{p_i(y_i)} \right\} \quad \begin{matrix} \forall i = 1, 2, \dots, k \\ \forall x \in \mathcal{C} \\ \forall t \in \mathcal{C}_0 \end{matrix} \quad (\text{III.78})$$

$$n_{ij}(t,x) = \min \left\{ 0, \inf_{y \in \mathcal{C}} \frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T A_{ij}(t,x) a_j(t,y)}{p_j(y_j)} \right\} \quad \begin{matrix} \forall i \neq j = 1, 2, \dots, k \\ \forall x \in \mathcal{C} \\ \forall t \in \mathcal{C}_0 \end{matrix}$$

D'autres définitions, analogues aux définitions 3, 4 et 5 sur les systèmes majorants, peuvent ici encore être précisées. Ces nouvelles définitions relatives aux systèmes minorants sont simplement obtenues par transposition des définitions 3, 4, 5. Il suffit en effet de remplacer dans les expressions (III.17), (III.18) et (III.20) respectivement :

sup par inf et max par min.

III.3.2. - Propriétés des matrices pseudo-minorantes.

Nous envisagerons essentiellement le cas des systèmes minorants de systèmes décrits sous la forme $\underline{S}$.

- 1) Lorsque la norme p est choisie régulière, il découle directement des définitions que :

$$\inf_{y \in \mathcal{C}} \left\{ \frac{\text{Grad } p_i(y_i)^T A_{ij}(t,x) a_j(t,y)}{p_j(y_j)} \right\} \leq 0 \quad (\text{III.79})$$

Cette propriété est une conséquence immédiate de l'indépendance des vecteurs y_i et y_j lorsque $i \neq j$.

2) Minoration de la plus petite partie réelle des valeurs propres d'une matrice.

Pour démontrer cette propriété il suffit d'utiliser le système rétrograde (III.80) du système minorant (III.77).

En effet si l'on suppose qu'il est possible d'inverser le sens d'évolution du temps il vient

$$\begin{aligned} D_{\tau}^+ p(x) &\leq -N(\tau, x) p(x) \\ \tau = -t \quad \forall \tau \in \mathcal{C} \quad \forall x \in \mathcal{C} \end{aligned} \quad (\text{III.80})$$

Dans ce cas la matrice $-N(\tau, x)$ est une matrice pseudo-majorante du système rétrograde au sens de la définition 1. Le théorème (III.2) conduit donc à écrire l'inégalité suivante :

$$\max \text{Re} \lambda_{(-A)} \leq \max \text{Re} \lambda_{(-N(\tau, x))} \quad (\text{III.81})$$

si l'on tient compte de la relation (III.82)

$$\max_{(-A)} \text{Re} \lambda = - \min_{(A)} \text{Re} \lambda \quad (\text{III.82})$$

il vient :

$$\min \text{Re} \lambda_{(N(\tau, x))} \leq \min \text{Re} \lambda_{(A)} \quad (\text{III.83})$$

Cette inégalité exprime la possibilité d'une localisation dans le plan complexe de la plus petite valeur propre d'une matrice soit :

$$\min \text{Re} \lambda_{N(\tau, x)} \leq \min \text{Re} \lambda_A \leq \max \text{Re} \lambda_A \leq \max \text{Re} \lambda_{M(t, x)}$$

3 - Les matrices pseudo-minorantes $N(t,x)$ appartiennent à la classe des matrices à éléments hors diagonaux négatifs ou nuls. De plus, $N(t,x)$ est du type M matrice lorsque toutes ses valeurs propres sont positives /17/.

4 - A titre d'exemple nous proposons de donner une expression de la matrice pseudo-minorante $N(t,x)$ associée à la minoration du système $\underline{S}$. Si avec les notations antérieures I_i et I_j désignent les ensembles de lignes et de colonnes intervenant dans le bloc A_{ij} , il est possible de définir une minorante d'expression :

$$n_{ii} = \min_{\ell \in I_i} \left\{ \operatorname{Re} a_{\ell\ell} - \sum_{\substack{k \in I_i \\ k \neq \ell}} |a_{k\ell}| \right\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$$

$$\forall x \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{C}_0$$

(III.84)

$$n_{ij} = - \max_{\ell \in I_j} \left\{ \sum_{k \in I_i} |a_{k\ell}| \right\} \quad \forall i \neq j = 1, 2, \dots, k$$

dans le cas d'une contraction au premier ordre il vient :

$$n(C) = \min_i \left\{ c_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |c_{ij}| \right\} \quad \forall x \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{C}_0$$

(III.85)

$$C = \{c_{ij}\}$$

C pouvant être la matrice A, sa transposée A^T ou bien encore $\frac{A + A^T}{2}$

Conclusion

L'utilisation du concept de norme vectorielle lors de l'étude des systèmes continus non linéaires, nous a conduit à mettre en évidence deux classes importantes de systèmes majorants continus, selon qu'il est possible ou non d'appliquer le lemme de comparaison (III.1) ou (III.2). Pour chacune de ces classes nous avons défini plusieurs types de systèmes majorants selon la nature linéaire stationnaire, non stationnaire, ou non linéaire de la représentation matricielle adoptée. Dans toutes les définitions énoncées au cours de ce chapitre les matrices pseudo-majorantes appartiennent à la classe Z_0 , c'est-à-dire que les éléments non diagonaux sont choisis à priori non négatifs.

Lorsqu'une matrice de classe Z_0 vérifie les conditions de Hurwitz, ou encore les conditions linéaires de stabilité, elle est l'opposé d'une M-matrice et possède de ce fait un grand nombre de propriétés intéressantes que nous utiliserons au cours du prochain chapitre.

Diverses propriétés des matrices pseudo-majorantes ont porté notre choix sur l'utilisation de normes vectorielles régulières n'introduisant aucune redondance dans les définitions.

Dans ce cas, il est en effet possible de donner une définition systématique de la matrice pseudo-majorante pour chacune des normes vectorielles usuelles.

Le choix d'une représentation complexe peut permettre de situer le fonctionnement du processus au voisinage d'un point de l'espace d'état pour lequel la matrice du régime libre admet des racines complexes. Le choix d'une norme vectorielle p permet alors par l'application $p(x)$ qu'elle définit, de ramener l'étude de la stabilité d'un processus à éléments complexes à celle de son majorant à éléments réels.

Il apparaît enfin que la notion de N.V permet d'associer à un processus réel étudié deux systèmes, l'un majorant l'autre minorant ; leurs évolutions respectives encadrent le comportement du système réel.

BIBLIOGRAPHIE CHAPITRE III

- /1/ F. ROBERT
"Etude et utilisation des normes vectorielles en analyse numérique linéaire"
Thèse de doctorat ès Sciences - Grenoble - 1968
- /2/ F. ROBERT
"Normes vectorielles de vecteurs et de matrices"
RFTI - Chiffres - Vol. 17 - n° 4 - 1964 - pp 261-299
- /3/ J.F. MAITRE
"Norme composée et norme associée généralisée d'une matrice"
Numerische Mathematik - 10 - 1967 - pp 132-141
- /4/ D.D. ŠILJAK
"On large-scale system stability"
Proc. 9th Ann. Allier. Conf. Circ. Theory - Univ. Illinois - 1971
pp 731-741
- /5/ P. BORNE , J.C. GENTINA
"Sur une extension des conditions linéaires de stabilité à certaines classes de systèmes échantillonnés non-linéaires"
C.R.A.S. - Série A - Vol. 274 n° 16 - 1972 - pp 1275-1277
- /6/ P. BORNE , J.C. GENTINA et F. LAURENT
"Sur la stabilité des systèmes échantillonnés non-linéaires"
R.A.I.R.O. - J.2 - Mai 1972 - pp 96-105
- /7/ T. WAZEWSKI
"Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications"
Ann. Soc. Pol. Math. - 23 - 1950 - pp 112-166

- /8/ H.H. ROSENBROCK
"A Ljapunov function for some naturally occurring linear homogeneous time-dependant equations"
Automatica 1 - 1963 - pp 97-109
- /9/ I.W. SANDBERG
"Some theorems on the dynamic response of non-linear transistor network"
Bell. Syst. Tech. J. - 48 - 1969 - pp 35-54
- /10/ J.C. GENTINA , P. BORNE , F. LAURENT
"On a study of stability and sensitivity of large continuous non-linear systems under uncertainty"
Proc. 3rd - IFAC Symp. Sens. Adap. Opt. Ischia - Italie - 1973 - pp 412-417
- /11/ F.R. GANTMACHER
"Théorie des matrices"
Dunod - Paris 1966 - Vol. 2 - ch. 13
- /12/ M. FIEDLER and V. PTAK
"On matrices with non-positive off diagonal elements and positive principal minors"
Czech. Math. J. Vol. 12 - 87 - 1962 - pp 382-400
- /13/ G. BIRKOFF and R.S. VARGA
"Reactor criticality and non negative matrices"
SIAM J. - Vol. 6 - n° 4 - 1958 - pp 354-377
- /14/ M. FIEDLER and V. PTAK
"Some generalization of positive definiteness and monotonicity"
Numerische Mathematik 9 - 1966 - pp 163-172
- /15/ E.F. BEKENBACH and R. BELLMAN
"Inequalities"
Springer Verlag - Berlin - 1961

/16/ F.R. GANTMACHER

"Théorie des matrices"

Dunod - Paris - 1966 - Vol. 1 - ch. 9 - P° - p 271

/171 F. ROBERT

"Recherche d'une M-matrice parmi les minorantes d'un opérateur linéaire"

Num. Math. 9 - 1966 - pp 188-199

/18/ W.M. MATROZOV

"Comparison principle and vector Ljapunov functions"

en russe. Diff Uravn - Vol. 4 - n° 8 - 1968 - pp 1374-1386

Vol. 4 n° 10 - 1968 - pp 1740-1752

Vol. 5 n° 7 - 1969 - pp 1171-1185

Vol. 5 n° 12 - 1969 - pp 2128-2143.

CHAPITRE IV

Application des méthodes de majorations vectorielles à l'étude de la stabilité des systèmes continus non linéaires de grandes dimensions.

Introduction

L'utilisation du concept de norme vectorielle a permis de définir la notion de processus majorant d'un système continu non linéaire de grande dimension. En application de ces techniques de majoration, nous proposons maintenant de rechercher de nouvelles conditions suffisantes de stabilité des systèmes continus non linéaires du type S. Bien que les outils employés soient différents, il convient tout de suite de noter l'analogie de ce point de vue avec les méthodes vectorielles utilisant le concept de fonction de Ljapunov vectorielle /1/-/10/. Ainsi, la norme vectorielle du "vecteur état" d'un processus peut être considérée comme un vecteur de comparaison. L'intérêt des méthodes basées sur cette idée réside essentiellement dans la possibilité de simplifier une étude de stabilité et par suite de limiter à priori le volume des calculs.

Au cours de ce chapitre nous présenterons successivement deux façons d'aborder l'étude de la stabilité d'un système continu non linéaire de grande dimension. Dans un premier temps, en supposant qu'il est possible de transposer l'étude initiale de stabilité sur le système de comparaison contracté, nous proposons d'énoncer plusieurs critères de stabilité exponentielle et asymptotique. En particulier, la conjecture d'Aizerman peut être démontrée pour une classe de systèmes non linéaires.

Il est également possible, à partir de la notion de norme vectorielle d'élargir le champ d'application du critère généralisé de V.M Popov /11/ au sens des résultats proposés par L.T Grujić /12/-/13/.

En second lieu, à partir des inégalités différentielles introduites antérieurement dans les définitions des systèmes majorants il est possible d'énoncer plusieurs conditions suffisantes de stabilité asymptotique. Elles s'expriment généralement sous la forme des conditions de Hurwitz appliquées à une matrice pseudo-majorante.

Pour terminer ce chapitre nous proposons d'une part, d'appliquer les résultats relatifs à la minoration des systèmes aux études d'instabilité et d'autre part d'aborder le problème de la stabilité des régimes forcés vis à vis de perturbations initiales.

IV.1 - Etude de stabilité basée sur l'utilisation d'un système de comparaison.

En utilisant les résultats du chapitre III et en particulier le lemme de comparaison 1, nous proposons tout d'abord de montrer que les caractères de stabilité du système de comparaison impliquent les mêmes propriétés pour le système initial. Il convient ensuite de préciser les conditions qui permettent une utilisation simple, du point de vue de la stabilité, du système de comparaison. C'est notamment le cas lorsque le système majorant est linéaire.

IV.1.1. - Stabilité induite par le système de comparaison

a - stabilité

La stabilité au sens de Ljapunov ou $\mathcal{L}$ stabilité du système de comparaison (C) peut être définie par l'ensemble des relations (IV.1) /14/

$$\forall \varepsilon : \quad \varepsilon > 0 \text{ et } \forall t_0 \in \mathcal{T} ; \quad \exists \delta(t_0, \varepsilon) > 0$$

$$\text{tel que } \forall z_0 : \delta > z_0 > 0 \Rightarrow z(t, t_0, z_0) < \varepsilon \quad \forall t \in \mathcal{T}_0 \quad (\text{IV.1})$$

compte tenu du lemme de comparaison (III.1) il vient l'inégalité (IV.2) :

$$\forall t \in \mathcal{T}_0, \forall x_0, z_0 \in \mathcal{E} \quad z[t; t_0, z_0] \geq p[x[t; t_0, x_0]] \quad (IV.2)$$

soit encore en choisissant $z_0 = p(x_0)$ à l'instant initial t_0 :

$$p[x(t; t_0, x_0)] \leq z[t; t_0, p(x_0)] < \varepsilon \quad \begin{cases} \forall t \in \mathcal{T}_0 \\ \forall x, z \in \mathcal{E} \end{cases} \quad (IV.3)$$

Lorsque les conditions d'application du lemme de comparaison sont vérifiées, il découle de la définition (IV.1) et de l'inégalité (IV.3) que la $\mathcal{L}$ stabilité du système de comparaison implique celle du système initial S.

b - Stabilité asymptotique

La stabilité asymptotique a été définie comme la conjonction des deux propriétés de $\mathcal{L}$ stabilité d'une part et d'attractivité d'autre part /14/. Il reste donc à vérifier maintenant que la propriété d'attractivité d'un système peut être étudiée sur le système de comparaison. Cette propriété est évidente si l'on tient compte à la fois du lemme de comparaison (III.1) et des axiomes de définition de la norme vectorielle $p(x)$, il vient en effet :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z[t; t_0, z_0] = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} p[x(t; t_0, x_0)] = 0 \quad (IV.4)$$

c - Stabilité exponentielle

Nous supposons maintenant le système de comparaison exponentiellement stable i.e /14/

$$\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0 : ||z(t; t_0, z_0)|| \leq \alpha_1 e^{\alpha_2(t-t_0)} ||z(t_0)|| \quad (IV.5)$$

l'inégalité suivante (IV.6) est directement déduite du lemme de comparaison (III.1) :

$$||p[x(t;t_0,x_0)]|| \leq ||z(t;t_0,z_0)|| \quad \forall t \in \mathcal{T}_0, \forall x \in \mathcal{C} \quad (\text{IV.6})$$

Dans ce cas $||p(x)||$ peut être considérée comme une norme scalaire du vecteur x ; il est donc possible de trouver 2 constantes positives β_1 et β_2 telles que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\forall t \in \mathcal{T}_0, \forall x \in \mathcal{C} \quad \beta_1 ||x|| \leq ||p(x)|| \leq \beta_2 ||x|| \quad (\text{IV.7})$$

si l'on choisit x_0 et z_0 de telle façon que $z_0 = p(x_0)$ les inégalités (IV.5) (IV.6) et (IV.7) impliquent les relations (IV.8) :

$$\beta_1 ||x|| \leq p[x(t;t_0,x_0)] \leq \alpha_1 e^{\alpha_2(t-t_0)} ||z(t_0)|| \leq \alpha_1 e^{\alpha_2(t-t_0)} ||p(x_0)|| \leq \alpha_1 \beta_2 e^{\alpha_2(t-t_0)} ||x_0|| \quad (\text{IV.8})$$

cette suite d'inégalités conduit ainsi au résultat recherché :

$$||x|| \leq \alpha_1 \frac{\beta_2}{\beta_1} e^{\alpha_2(t-t_0)} ||x_0|| \quad (\text{IV.9})$$

D'où le théorème (IV.1) conséquence directe du lemme de comparaison (III.1).

Théorème (IV.1) Lorsque les conditions d'application du lemme de comparaison (III.1) sont vérifiées, les propriétés de stabilité asymptotique / exponentielle et de stabilité au sens de Ljapunov du système de comparaison, impliquent les mêmes propriétés de stabilité pour le processus initial.

Ces résultats peuvent être généralisés à d'autres formes de stabilité et en particulier aux études de stabilité entrée-bornée, sortie-bornée (stabilité E.B.S.B.).

IV.1.2. - Système de comparaison linéaire stationnaire.

Le système étudié est représenté par une équation d'état de la forme S. Nous supposons que le choix d'une norme vectorielle $p(x)$ permet de définir un système majorant linéaire au sens de la définition (III.1) :

$$D^+ p(x) \leq M p(x) \quad \forall x \in \mathcal{C}.$$

Dans ce cas il vient un premier théorème de stabilité exponentielle :

Théorème (IV.2) Soit un système continu non linéaire S auquel peut être associé un système de comparaison linéaire stationnaire de matrice pseudo-majorante constante M. Si la matrice M est l'opposée d'une M-matrice alors le point d'équilibre $x = 0$ du système S est globalement exponentiellement stable.

Démonstration

Le système linéaire de comparaison (C) est défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{z} = M z \quad (C)$$

Puisque la matrice M est l'opposée d'une M-matrice toutes ses valeurs propres sont à parties réelles strictement négatives (théorème III.4). Cette condition implique donc la stabilité exponentielle du système de comparaison (C).

D'après le théorème (IV.1) il est alors possible de conclure à la stabilité exponentielle du système S.

Une seule condition est imposée au système de comparaison par le théorème (IV.2) : La matrice pseudo-majorante M doit en effet appartenir à la classe des (-M) matrices ce qu'expriment les conditions de Kotelyanskii /15/ :

$$\mu_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^n \begin{vmatrix} \mu_{11} \dots & \mu_{1n} \\ \mu_{n1} & \mu_{nn} \end{vmatrix} > 0 \quad (IV.10)$$

IV.1.3. - Système de comparaison non linéaire : conjecture d'Aizerman.

Le système de comparaison C obtenu à partir de la définition (III.1) est maintenant supposé non linéaire. Dans ce cas il convient de considérer successivement plusieurs formes de systèmes de comparaison permettant de conclure simplement aux propriétés de stabilité de S .

Dans toutes les études de stabilité des sections IV.1.3 et IV.1.4, les hypothèses suivantes seront vérifiées :

- (i) La matrice pseudo-majorante $M(t,x)$ appartient à priori à la classe des $(-M)$ matrices. Notons $u(t,x)$ le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_{M(t,x)}$ de plus grande partie réelle de la matrice transposée $M^T(t,x)$. D'après le corollaire (III.4), $u(t,x)$ est un vecteur dont les composantes sont non négatives.
- (ii) La matrice $M^T(t,x)$ admet une inverse irréductible. Si cette dernière propriété n'était pas vérifiée, nous déduirions simplement de $M^T(t,x)$, par une majoration supplémentaire, une autre matrice pseudo-majorante $M^*(t,x)$ irréductible et définie de la manière suivante :

$$M^*(t,x) = M(t,x) + B \quad (IV.11)$$

$$B = \{b_{ij}\} \quad \forall i,j = 1,2,\dots, k$$

$$b_{ii} = 0 \quad \forall i = 1,2,\dots, k$$

$$b_{ij} > 0 \quad \forall i \neq j = 1,2,\dots, k$$

La matrice B est alors choisie de telle façon que l'inverse de $M^*(t,x)$ soit irréductible.

- (iii) Le vecteur propre $u(t,x)$ défini en (i) est choisi de module unité.

Compte tenu du corollaire (III.4) et puisque la matrice $M(t,x)$ admet une inverse irréductible, il vient pour $u(t,x)$ les inégalités suivantes :

$$u(t,x) \geq u_\delta > 0 \quad \forall t \in \mathcal{C}_0, \forall x \in \mathcal{C}$$

$$u_\delta^T = [\delta, \delta, \dots, \delta] \quad (IV.12)$$

- la constante δ est la limite inférieure des composantes $u_i(t,x)$:

$$\delta = \inf u_i(t,x), \forall i = 1, 2, \dots, k, \forall t \in \mathcal{T}_0, \forall x \in \mathcal{E}$$

$$u^T(t,x) u(t,x) = 1$$

L'hypothèse (i) conduit à reporter l'étude de stabilité du processus S sur son système de comparaison C :

$$\dot{z} = M(t,x) z \quad (C)$$

$$z_0 > 0$$

Soit $v \in \mathcal{R}^+$ une fonction définie positive obtenue par projection du vecteur majorant z du système de comparaison (C) sur le vecteur propre $u(t,x)$

$$v(z) = z^T \cdot u(t,x) \quad (IV.13)$$

Pour cette fonction v définie positive, il est possible de trouver deux fonctions de comparaison ϕ_1 et ϕ_2 de classe K telles que l'on ait :

$$\phi_2(||z||) \leq v(z) \leq \phi_1(||z||) \quad (IV.14)$$

Les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 sont dans ce cas définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \phi_1(||z||) &\geq z^T u_1 \\ \phi_2(||z||) &\leq z^T u_\delta \\ u_1^T &= [1, 1, \dots, 1] \end{aligned} \quad (IV.15)$$

1 - Envisageons dans une première étude de stabilité le cas pour lequel le vecteur propre $u(t,x)$ est supposé de direction fixe lors d'une quelconque évolution du système S :

$$u(t,x) = \text{cte} \succ u_\delta > 0 \quad (IV.16)$$

Dans ce cas par dérivation de v il vient :

$$\frac{d}{dt} v(z) = \left[\frac{d}{dt} z \right]^T u \quad (\text{IV.17})$$

La définition de la matrice pseudo-majorante M et les propriétés de u conduisent à écrire la relation (IV.17) sous la forme :

$$\frac{d}{dt} v(z) = z^T M^T u \quad (\text{IV.18})$$

soit encore :

$$\frac{d}{dt} v(z) = \lambda_{M(t,x)} v(z) \quad (\text{IV.19})$$

nous avons donc défini en (IV.19) un nouveau système de comparaison du 1° ordre. Puisque $M(t,x)$ appartient à la classe des M -matrices et admet une inverse irréductible il vient :

$$\alpha_1 ||z|| \leq u_\delta^T z \leq v(z) \leq u_1^T z \leq \alpha_2 ||z|| \quad (\text{IV.20})$$

$$\alpha_2 > \alpha_1 > 0$$

il est donc possible au sens du théorème (IV.1) de conclure à la stabilité exponentielle du système de comparaison C donc de S :

$$||p(x(t;t_0, x_0))|| \leq ||z(t;t_0, x_0)|| \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)} ||z_0||$$

$$\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \beta = \sup \{ \text{Re} \lambda_{M(t,x)} \} \quad \begin{matrix} \forall t \in \mathcal{T}_0 \\ \forall x \in \mathcal{Z} \end{matrix} \quad (\text{IV.21})$$

d'ou le théorème :

Théorème (IV.2)

a - Soit un système continu non linéaire de grandes dimensions S dont le

système de comparaison obtenu à partir de la N.V p est de la forme C.

Si la matrice pseudo-majorante $M(t, x)$ vérifie les propriétés suivantes :

(i) l'opposé de M est une M matrice

$$\forall t \in \mathcal{T}_0, \forall x \in \mathcal{C} = \mathbb{R}^n$$

le point d'équilibre $x = 0 \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$

(ii) M admet une inverse irréductible

(iii) le vecteur propre $u(t, x)$ associé à la valeur propre de plus grande partie réelle de $M^T(t, x)$ est constant.

Alors, le point d'équilibre $x=0$ du système S est exponentiellement stable.

b - Lorsque (a) est vérifié pour $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^n$ alors la stabilité exponentielle du point d'équilibre $x=0$ est globale.

2 - Conjecture d'Aizerman



Avant d'étudier le cas pour lequel le vecteur $u(t, x)$ n'est plus constant, nous proposons d'introduire une sous section pour démontrer la conjecture d'Aizerman qui est à la base des développements ultérieurs /16/- /17/.

Nous allons tout d'abord étudier la stabilité d'un système de la forme S auquel sont associées les hypothèses additionnelles (IV.23) et (IV.25)

$$\frac{d}{dt} x = A(t, x) a(t, x) \quad (IV.22)$$

$$\left. \begin{aligned} a(t, x) : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \quad (m=n) \\ \text{sign}(a(t, x)) &= \text{sign } x, \text{sign}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (IV.23)$$

La fonction $\psi : \mathcal{C} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ est définie positive

$$\psi(t, x) \geq \phi(\|x\|), \quad \forall t \in \mathcal{C}_0, \forall x \in \mathcal{Y} \quad (\text{IV.24})$$

ϕ : fonction de classe K.

La matrice carrée $A(t, x)$ d'éléments a_{ij} est telle que l'on ait :

$$a_{ij}(t, x) : \mathcal{C} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\sup_{\mathcal{C}_0 \times \mathcal{Y}} a_{ij}(t, x) < +\infty, \quad \inf_{\mathcal{C}_0 \times \mathcal{Y}} a_{ij}(t, x) \geq 0 \quad \forall i \neq j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.25})$$

$$\sup_{\mathcal{C}_0 \times \mathcal{Y}} a_{ii}(t, x) < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad A \in \mathcal{Z}_0$$

Dans ce cas la conjecture d'Aizerman peut être prouvée à partir du théorème suivant pour lequel $u(t, x)$ est le vecteur propre correspondant à la valeur propre de plus grande partie réelle de $A(t, x)$.

Théorème (IV.3)

(i) Si la matrice $A(t, x)$ du système (IV.22) vérifie d'une part les contraintes (IV.23) et (IV.25) et d'autre part les conditions de Hurwitz, si de plus $A(t, x)$ admet une inverse irréductible sur $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{Y}$ et s'il existe une fonction $\psi(t, x)$ (IV.24) telle que l'on ait :

$$D^+ u(t, x)^T \cdot |x| + \lambda_M(A) u^T(t, x) |a(t, x)| \leq -\psi(t, x) \quad \forall t, x \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{Y}$$

alors le point d'équilibre $x=0$ du système (IV.22) est asymptotiquement stable.

(ii) Si (i) reste vérifiée pour $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^n$ la stabilité asymptotique du point d'équilibre $x=0$ est globale.

(iii) S'il existe un vecteur positif e de dimension n tel que $\psi(t, x) \geq e^T |x|$ sur $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{Y}$ alors la condition (i) implique la stabilité exponentielle de l'équilibre $x=0$.

(iv) Si la condition (iii) est vérifiée pour $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^n$ la stabilité exponentielle de l'équilibre $x=0$ est globale.

Démonstration

Soit v la fonction définie positive :

$$v(t, x) = u(t, x)^T |x| \quad (IV.26)$$

$$u(t, x) > 0 \quad \forall t \in \mathcal{C}_0, \forall x \in \mathcal{Y}$$

Par dérivation de v il vient :

$$D^+ v(t, x) \leq D^+ u(t, x) |x| + u(t, x)^T A(t, x) |a(t, x)| \quad (IV.27)$$

Si la matrice A vérifie les conditions de Hurwitz et les contraintes (IV.25), $A(t, x)$ est l'opposée d'une M-matrice.

En choisissant pour $u(t, x)$ le vecteur propre relatif à la valeur propre $\lambda_M(A)$ de plus grande partie réelle de $A(t, x)$, l'inégalité (IV.27) s'écrit :

$$D^+ v(t, x) \leq D^+ u(t, x) |x| + \lambda_M(A(t, x)) u^T(t, x) |a(t, x)| \quad (IV.28)$$

d'où les énoncés partiels (i) et (ii) du théorème (IV.3). Les parties (iii) et (iv) découlent directement du théorème (IV.1) sur la stabilité exponentielle.

Une difficulté apparaît ici dans l'application de ce théorème ; en effet il est nécessaire de calculer le vecteur propre $u(t, x)$ ainsi que sa dérivée temporelle $D^+ u(t, x)$.

Cependant il est possible de démontrer la conjecture d'Aizerman lorsque $A(t, x) \equiv A$ et $a(t, x) = D[\varphi(t, x)] \cdot x$

$$\begin{aligned} D(\varphi(t, x)) &= \text{diag} [\varphi_i(t, x)] \\ \varphi_i(t, x) &\geq \delta > 0 \quad \forall t, x \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{Y} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (IV.29)$$

$D(\varphi(t, x))$ est une matrice diagonale

d'où le corollaire

Corollaire (IV.4)

Si la matrice $A(t,x) \equiv A$ satisfait (IV.25), vérifie les conditions de Hurwitz et admet une inverse irréductible, alors le point d'équilibre $x=0$ du système (IV.30)

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot D[\varphi(t,x)] \cdot x \quad (IV.30)$$

est exponentiellement stable pour toutes les non linéarités $\varphi_i(t,x)$ vérifiant les contraintes (IV.29).

La stabilité est globale lorsque $\mathcal{G} = \mathbb{R}^n$

Démonstration

Soit v une fonction définie positive telle que (IV.26), il vient par dérivation :

$$D^+ v \leq |x|^T D(\varphi) A^T u \quad (IV.31)$$

si u est le vecteur propre relatif à la valeur propre de plus grande partie réelle de A l'inégalité (IV.31) prend la forme (IV.32)

$$D^+ v \leq |x|^T D(\varphi) \lambda_M(A) u \quad (IV.32)$$

Ecrivons la suite d'inégalités (IV.29) sous forme matricielle :

$$D[\varphi(t,x)] \geq \delta I_n \quad (IV.33)$$

I_n : matrice unité de dimension $n \times n$:

L'inégalité (IV.32) peut s'écrire :

$$D^+ v \leq \lambda_M(A) \delta \cdot |x|^T u \quad (IV.34)$$

soit encore :

$$D^+ v \leq \lambda_M(A) \delta \cdot v \quad (IV.35)$$

La stabilité exponentielle du système de comparaison du 1^o ordre déduit de l'inégalité (IV.35) est évidente, on peut donc conclure à la même propriété pour le système (IV.30).

La majoration d'un système décrit sous la forme S à partir d'une norme vectorielle $p(x)$ peut conduire à la définition d'un système de comparaison C sous une forme analogue à l'équation (IV.30) soit :

$$\frac{dz}{dt} = A D(\varphi).z \quad (IV.36)$$

La matrice A appartenant à la classe des Z_0 matrices, il vient le théorème (IV.5) :

Théorème (IV.5) Si la matrice pseudo-majorante $M(t,x)$ du système S peut être définie comme le produit d'une matrice constante A, appartenant à la classe des $(-M)$ matrices à inverse irréductible, par une matrice diagonale $D[\varphi(t,x)]$ vérifiant les contraintes (IV.33) alors le point d'équilibre $x=0$ du système S associé au système majorant (IV.37) pour $\mathcal{G} = \mathbb{R}^n$,

$$D^+p(x) \leq A D(\varphi) p(x) \quad (IV.37)$$

est exponentiellement stable.

La démonstration de ce théorème est en tout point analogue à celle du corollaire (IV.4).

IV.1.4. - Stabilité asymptotique du système de comparaison.

Nous allons supposer maintenant que le vecteur $u(t,x)$ n'est plus constant et que la matrice $M(t,x)$ ne peut être factorisée comme précédemment.

L'utilisation de la fonction définie positive (IV.13) conduit à écrire après dérivation :

$$\frac{d}{dt} v(z) = z^T \left[M(t,x) u(t,x) + \frac{d}{dt} u(t,x) \right] \quad (IV.38)$$

puisque $u(t, x)$ est le vecteur propre de la matrice $M(t, x)$ relatif à la valeur propre de plus grande partie réelle λ_M il vient :

$$\frac{d}{dt} v(z) = \lambda_M v(z) + z^T \cdot \frac{d}{dt} u(t, x) \quad (\text{IV.39})$$

Soit $D_V \subset \mathcal{E}$ un domaine fermé connexe, à complément connexe dont la frontière $\mathcal{F}_{D_V}$ est définie par la relation (IV.40)

$$\mathcal{F}_{D_V} = \left\{ x \in \mathcal{F}_{D_V} : \frac{d}{dt} u(t, x) = 0 \quad \forall t \in \mathcal{C}_0 \right\} \quad (\text{IV.40})$$

$$\{x = 0\} \in D_V$$

et soit $D_L \subset \mathcal{E}$ un domaine à l'intérieur duquel toutes les valeurs propres de la matrice $M(t, x)$ sont strictement négatives :

$$D_\ell = \{x : \max \lambda_M(t, x) \leq -\varepsilon < 0\} \quad (\text{IV.41})$$

$$\forall t \in \mathcal{C}_0, x \in D_\ell, \varepsilon \in]0, +\infty[$$

Notons D_C un domaine fermé à l'intérieur duquel l'inégalité (IV.42) est vérifiée :

$$D_C : \frac{d}{dt} v(z) = C v(z) \quad C < 0 \quad (\text{IV.42})$$

avec : $D_{C_1} \subset D_{C_2} \Leftrightarrow C_1 < C_2$

Lorsque le domaine D_V est inclus dans un domaine D_L , la fonction v est telle que sur la frontière de D_V :

$$\mathcal{F}_{D_V} : \frac{d}{dt} v(z) = \lambda_M v(z) \quad \forall z \in \mathcal{F}_{D_V} \subset D_L \quad (\text{IV.43})$$

avec $\lambda_M \leq C < 0$

Notons $D_{(\cdot)}(t)$ un domaine dépendant du temps avec : $(\cdot) = (v), (\ell)$, ou (C) .

Lorsque le point $(x=0) \in \cap \{D_{(\cdot)}(t), \forall t \in \mathcal{C}_0\}$ à condition toutefois que $\cap \{D_{(\cdot)}(t), \forall t \in \mathcal{C}_0\} \neq \{0\}$, D_V est inclus dans un domaine D_C et la fonction $v(z)$ est une fonction de Ljapunov à l'intérieur de ce domaine.

Théorème (IV.6) Soit $M(t,x)$ une matrice pseudo-majorante associée à la définition du système de comparaison C pour la norme vectorielle $p(x)$. Si la matrice $M(t,x)$ est l'opposée d'une M matrice, admet une inverse irréductible pour $(t,x) \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{S}$ et vérifie les conditions suivantes :

- (i) Les domaines D_L et D_V ne sont pas vides, $x=0 \in \mathcal{S}$
- (ii) $D_V \subset D_L \subset \mathcal{C}$, $(x=0) \in \bigcap \{D_{(\cdot)}^{\circ}(t), \forall t \in \mathcal{C}_0\} \neq \{0\}$

(iii) D_V est un domaine connexe à complément connexe, alors le point d'équilibre $x=0$ du système S est asymptotiquement stable et la fonction $v(z)$ définie à la relation (IV.13) est une fonction de Ljapunov.

La difficulté de mise en oeuvre de ce théorème général nous conduit à envisager une forme simplifiée de systèmes pour lesquels il est possible d'éliminer la contrainte (ii).

En effet il est difficile de vérifier dans une application pratique les propriétés d'inclusion du domaine D_V par rapport à D_L .

Envisageons, dans ce sens, une classe particulière de systèmes de la forme S pour lesquels il est possible de définir, après majoration par la norme vectorielle $p(x)$, un système de comparaison de matrice pseudo-majorante $M(t,x)$. Cette matrice est telle que par hypothèse les éléments non linéaires sont isolés dans une seule ligne ou colonne de $M(t,x)$. Afin de fixer les idées, supposons les éléments non linéaires isolés dans la dernière ligne de $M(t,x)$ et notons μ_{nj}^* $j=1,2,\dots,n$ ces éléments :

$$M(t,x) = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \dots & \mu_{1n} \\ \vdots & & \\ \mu_{n-1,1} & \dots & \mu_{n-1,n} \\ \mu_{n,1}^* & & \mu_{n,n}^* \end{bmatrix} \quad (\text{IV.44})$$

si $u(t,x) = \{u_i\}$ ($i=1,2,\dots, n$) est le vecteur propre positif relatif à la valeur propre maximale supposée négative de $M(t,x)$ notée λ_M il vient :

$$\begin{bmatrix} \mu_{11}^{-\lambda_M}, \mu_{12}, \dots & \mu_{1,n-1} \\ \mu_{21}, \mu_{22}^{-\lambda_M}, \dots & \mu_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1,1}, \mu_{n-1,2}, \dots & \mu_{n-1,n-1}^{-\lambda_M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = -u_n \begin{bmatrix} \mu_{1,n} \\ \mu_{2,n} \\ \vdots \\ \mu_{n-1,n} \end{bmatrix} \quad (IV.45)$$

De cette relation il découle que lorsque λ_M est constant, le vecteur propre $u(t,x)$ qui lui correspond est de direction fixe. On peut donc affirmer, dans ce cas particulier, que les frontières des domaines D_V et D_L précédemment définies sont maintenant confondues, d'où le corollaire (IV.6) déduit du théorème précédent /18/.

Corollaire (IV.6)

Soit $M(t,x)$ une matrice pseudo-majorante associée à la définition du système de comparaison C pour la norme vectorielle $p(x)$. Si la matrice $M(t,x)$ est à la fois l'opposée d'une M matrice et admet une inverse irréductible sur $\mathcal{S} \times \mathcal{C}_0$, si de plus les éléments non constants de $M(t,x)$ sont isolés dans une seule ligne ou colonne de cette matrice, alors le point d'équilibre $x=0$ du système S est asymptotiquement stable.

IV.1.5. - Lemme de comparaison et critère de Popov.

Les travaux de L.T Grujic /12/ /13/ ont récemment montré la possibilité d'une application du critère de Popov sur un système de comparaison du type de Popov /11/.

L'utilisation d'une norme vectorielle $p(x)$ peut conduire dans certains cas après majoration du système interconnecté $\dot{x}_i = g_i(t, x_i) + h_i(t, x)$, à la définition d'une inégalité vectorielle différentielle de la forme (IV.46).

$$D^+p(x) \leq M p(x) + B f(r) \quad (\text{IV.46})$$

$$\left. \begin{aligned} M &= \{\mu_{ij}\}, \quad \mu_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j=1,2,\dots,k \\ M &\in \mathcal{R}^{k \times k} \quad \mu_{ij} \in \mathcal{R} \\ B &= \{\beta_{ij}\}, \quad \beta_{ij} \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall i=1,2,\dots,k, \forall j=1,2,\dots,l \leq k \\ i \neq j \end{array} \right. \\ B &\in \mathcal{R}^{k \times l} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.47})$$

$$\begin{aligned} f(r)^T &= [f_1(r)f_2(r)\dots f_l(r)] \quad , \quad f(r) : \mathcal{R}^l \rightarrow \mathcal{R}^l \\ \text{et } r &= C p(x) \quad C \in \mathcal{R}^{l \times k} \\ r &= \{\rho_i\} : i=1,2,\dots,l \end{aligned} \quad (\text{IV.48})$$

La fonction f peut appartenir soit à la classe $\mathcal{F}_1$ soit à la classe plus générale $\mathcal{F}_2$

$$\mathcal{F}_1 = \{f_i, i=1,2,\dots,l, \frac{f_i(r)}{\rho_i} \in [0, \varphi_i[, \forall r \in \mathcal{R}^l\} \quad (\text{IV.49})$$

$$\mathcal{F}_2 = \{f_i, i=1,2,\dots,l, \frac{f_i(r)}{\rho_i} \in [0, +\infty[, \forall r \in \mathcal{R}^l\}$$

Compte tenu des propriétés particulières des matrices M et B (IV.47) il est possible en se référant aux travaux de Wazewski /19/ et de Matrosov /20/ de définir un système de comparaison de la forme (IV.50), à condition toutefois que les contraintes (IV.51) restent vérifiées

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}z = Mz + B f(r) \\ r = Cz \end{array} \right. \quad (\text{IV.50})$$

$$B f(r) : [B f(Cp_1)]_i \leq [B f(Cp_2)]_i \quad \text{pour } p_{j1} \leq p_{j2} \quad (\text{IV.51})$$

$$\forall i,j=1,2,\dots,k \quad i \neq j$$

$z=0$ unique point d'équilibre du système (IV.50)

La forme de Lur'e Postnikov du système de comparaison (IV.50) conduit naturellement à l'application du critère de Popov. Il convient de remarquer que la forme des équations (IV.50) est tout à fait analogue à celle qui a été obtenue par M L.T Grujić à partir de fonctions de Ljapunov vectorielles. L'application qu'on peut en faire est donc en tout point analogue à celle qui a été envisagée par cet auteur. Nous rappellerons donc brièvement le critère de stabilité essentiel basé sur la définition d'un système de comparaison tel que (IV.50) et déduit des travaux de V.M Popov /11/.

Théorème (IV.7) Soit $p(x)$ une norme vectorielle permettant de définir par majoration un système de comparaison du type (IV.50) avec les contraintes (IV.51) . Si la matrice M est stable, la paire (M, B) commandable et la contrainte (IV.51') vérifiée,

$$\begin{cases} \operatorname{Re} C [M - j\omega I_K]^{-1} B > 0 \\ \forall \omega \in]-\infty, +\infty[, \quad C.M.B \text{ définie positive.} \end{cases} \quad (\text{IV.51'})$$

alors le point d'équilibre $x=0$ du système S est asymptotiquement stable
 $\forall f_i(r) \in \mathcal{F}_1 \text{ ou } \mathcal{F}_2$.

IV.1.6. - Exemples d'application.

Nous proposons de traiter maintenant plusieurs exemples permettant à la fois d'illustrer les techniques de majoration et d'appliquer les théorèmes de stabilité précédents.

Application 1

Soit le système continu non linéaire d'ordre 5 d'équation d'état (IV.52)

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} x_1 \\ \frac{d}{dt} x_2 \\ \frac{d}{dt} x_3 \\ \frac{d}{dt} x_4 \\ \frac{d}{dt} x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & , & 1 & , & 0.2 & , & 0.7 & , & 2 \\ -0.2 & , & -1.5 & , & -0.4 & , & 0.6 & , & -1.5 \\ -0.1 \text{signe } x_2 & , & 0.3 & , & -1.3 & , & 0.3 & , & 0.3 \\ 0.1 & , & 0.4 & , & -1.1 & , & -2 & , & 0.4 \text{sat } x_4 \\ 0.3 & , & 0.7 & , & 0 & , & 0 & , & -5.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.52})$$

$$\text{avec : } \text{signe } x_2 = \begin{cases} +1 & \text{si } x_2 > 0 \\ -1 & \text{si } x_2 < 0 \\ 0 & \text{si } x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{sat } x_4 = \begin{cases} x_4 & \text{si } -1 < x_4 < 1 \\ 1 & \text{si } x_4 \geq 1 \\ -1 & \text{si } x_4 \leq -1 \end{cases}$$

Une première solution consiste à essayer de définir un système majorant d'ordre 1 à partir par exemple de la norme du max ou de la somme des modules, il vient dans chacun de ces cas :

$$\begin{aligned} D^+ p_1(x) &\leq + 1.9 & p_1(x) \\ D^+ p_2(x) &\leq + 0.4 & p_2(x) \end{aligned} \quad (\text{IV.53})$$

$$p_1(x) = \max \{ |x_1|, |x_2|, |x_3|, |x_4|, |x_5| \}$$

$$p_2(x) = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5|$$

Dans chacun de ces 2 cas il n'est pas possible de conclure à la stabilité à partir d'un système de comparaison d'ordre 1. Dans ce sens, nous proposons de définir un système majorant d'ordre 3. Ce système majorant peut être simplement obtenu à partir d'une norme vectorielle régulière de taille 3 dont chaque composante est formée d'une norme scalaire du type norme du max :

$$p(x)^T = \{ \text{Max} \left[|x_1|, |x_2| \right], \text{Max} \left[|x_3|, |x_4| \right], |x_5| \} \quad (\text{IV.54})$$

il vient ainsi le système de comparaison linéaire (IV.55) :

$$\frac{dz}{dt} = M z, \quad M = \begin{bmatrix} -1 & , & 1 & , & 2 \\ 0.5 & , & -0.9 & , & 0.4 \\ 1 & , & 0 & , & -5.6 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.55})$$

La matrice M appartient bien à la classe des Z matrices, puisque les conditions de Hurwitz (IV.56) sont vérifiées,

$$(-1) < 0, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0.5 & -0.9 \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} -1 & , & 1 & , & 2 \\ 0.5 & -0.9 & , & 0.4 \\ 1 & , & 0 & , & -5.6 \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{IV.56})$$

D'après le théorème (IV.2), le système de comparaison (IV.55) et le système initial (IV.52) sont exponentiellement globalement stables.

Application 2

Le système non linéaire étudié est maintenant décrit par l'équation d'état (IV.57)

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -2\varphi_1(t,x) & , & \varphi_1(t,x) & , & 0.2\varphi_2(x) & , & 0.7\varphi_2(x) & , & 2 \\ -0.2\varphi_1(t,x) & , & -1.5\varphi_1(t,x) & , & -0.4\varphi_2(x) & , & 0.6\varphi_2(x) & , & -1.5 \\ -0.1\text{sign}x_2\varphi_1(t,x) & , & 0.3\varphi_1(t,x) & , & -1.3\varphi_2(x) & , & 0.3\varphi_2(x) & , & 0.3 \\ 0.1\varphi_1(t,x) & , & 0.4\varphi_1(t,x) & , & -1.1\varphi_2(x) & , & -2\varphi_2(x) & , & 0.4\text{sat}x_4 \\ 0.3\varphi_1(t,x) & , & 0.7\varphi_1(t,x) & , & 0 & , & 0 & , & -5.6 \end{bmatrix} x \quad (\text{IV.57})$$

avec $\varphi_1 : \mathcal{C}_0 \times \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\varphi_2 : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$\text{et } \inf_{\substack{x \in \mathcal{E} \\ t \in \mathcal{C}_0}} [\min \varphi_1(t,x) , \min \varphi_2(x)] > \delta > 0 \quad (\text{IV.58})$$

Ce système peut encore s'écrire sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = M(x) \cdot D(\varphi) \cdot x \quad (\text{IV.59})$$

ou : $D(\varphi) =$

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t,x) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1(t,x) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_2(x) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou $M(x)$ est la matrice du régime libre du système précédent décrit par l'équation (IV.52). Le choix de la norme vectorielle (IV.54) permet de définir le système de comparaison (IV.60) :

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0.5 & -0.9 & 0.4 \\ 1 & 0 & -5.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(t,x) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} z \quad (\text{IV.60})$$

Dans ce cas les conditions de Hurwitz (IV.56) étant vérifiées et compte tenu des contraintes (IV.58), le point d'équilibre $x=0$ du système (IV.57) est exponentiellement stable (théorème IV.5).

Application 3

Afin d'illustrer une possibilité d'application du corollaire (IV.6), envisageons le cas d'un processus multivariable correspondant au schéma de la figure (IV.1).

Les non linéarités inhérentes aux divers sous systèmes élaborent à partir du signal d'erreur ϵ_i un signal de commande noté $f(\epsilon_i) \epsilon_i$. Les signaux de commande ϵ_i fonctions du vecteur état sont élaborés à partir d'un réseau correcteur non linéaire permettant de compenser l'effet des gains non linéaires $f_i(\epsilon_i)$.

Il vient pour le processus un modèle décrit par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1$$

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2$$

$$u_1 = f_1(\epsilon_1) \epsilon_1 + C_{11} x_1 + C_{12} x_2$$

(IV.61)

$$u_2 = f_2(\epsilon_2) \epsilon_2 + C_{21} x_1 + C_{22} x_2$$

$$\dot{\epsilon}_1 = \alpha_{11}(\epsilon_1) \epsilon_1 + \alpha_{12}(\epsilon_2) \epsilon_2 + g_{11} x_1 + g_{12} x_2 + d_1 e_1$$

$$\dot{\epsilon}_2 = \alpha_{22}(\epsilon_2) \epsilon_2 + \alpha_{21}(\epsilon_1) \epsilon_1 + g_{21} x_1 + g_{22} x_2 + d_2 e_2$$

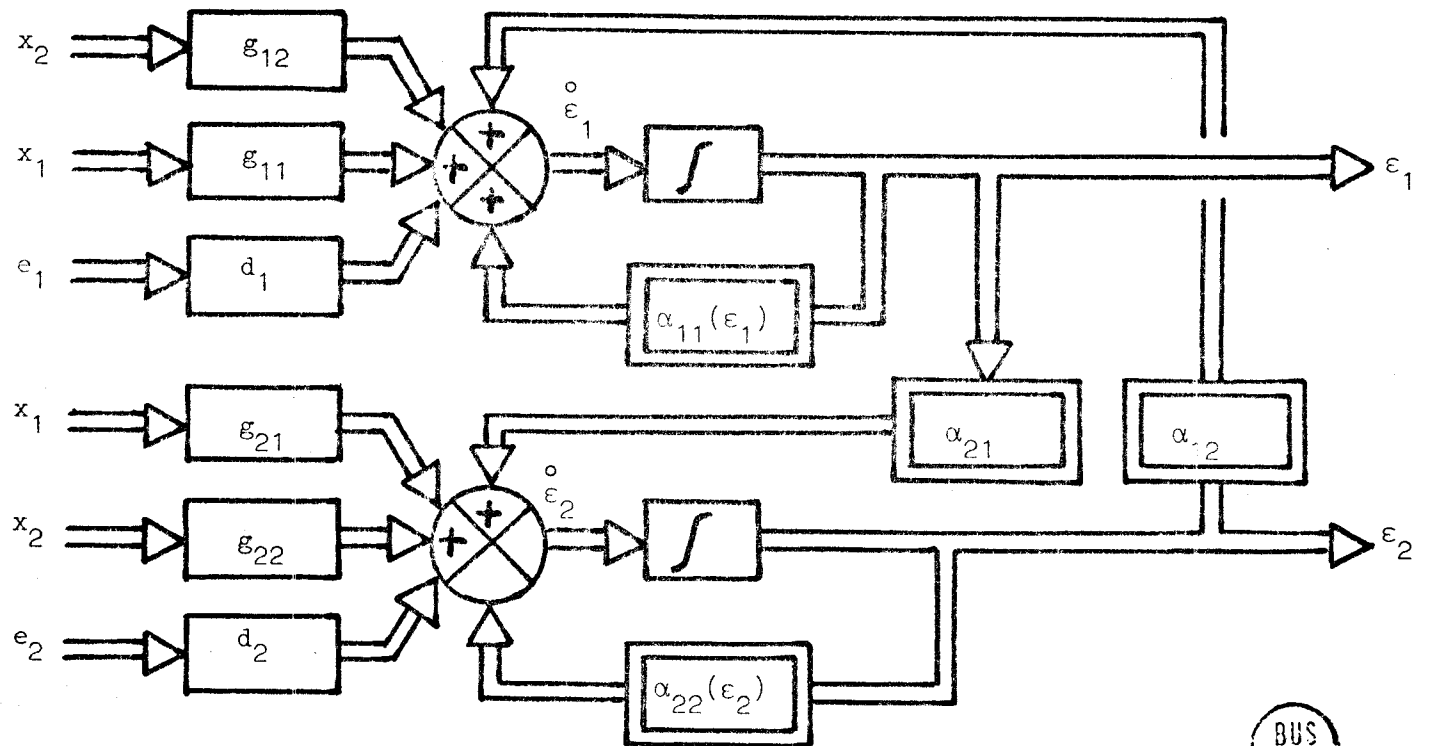
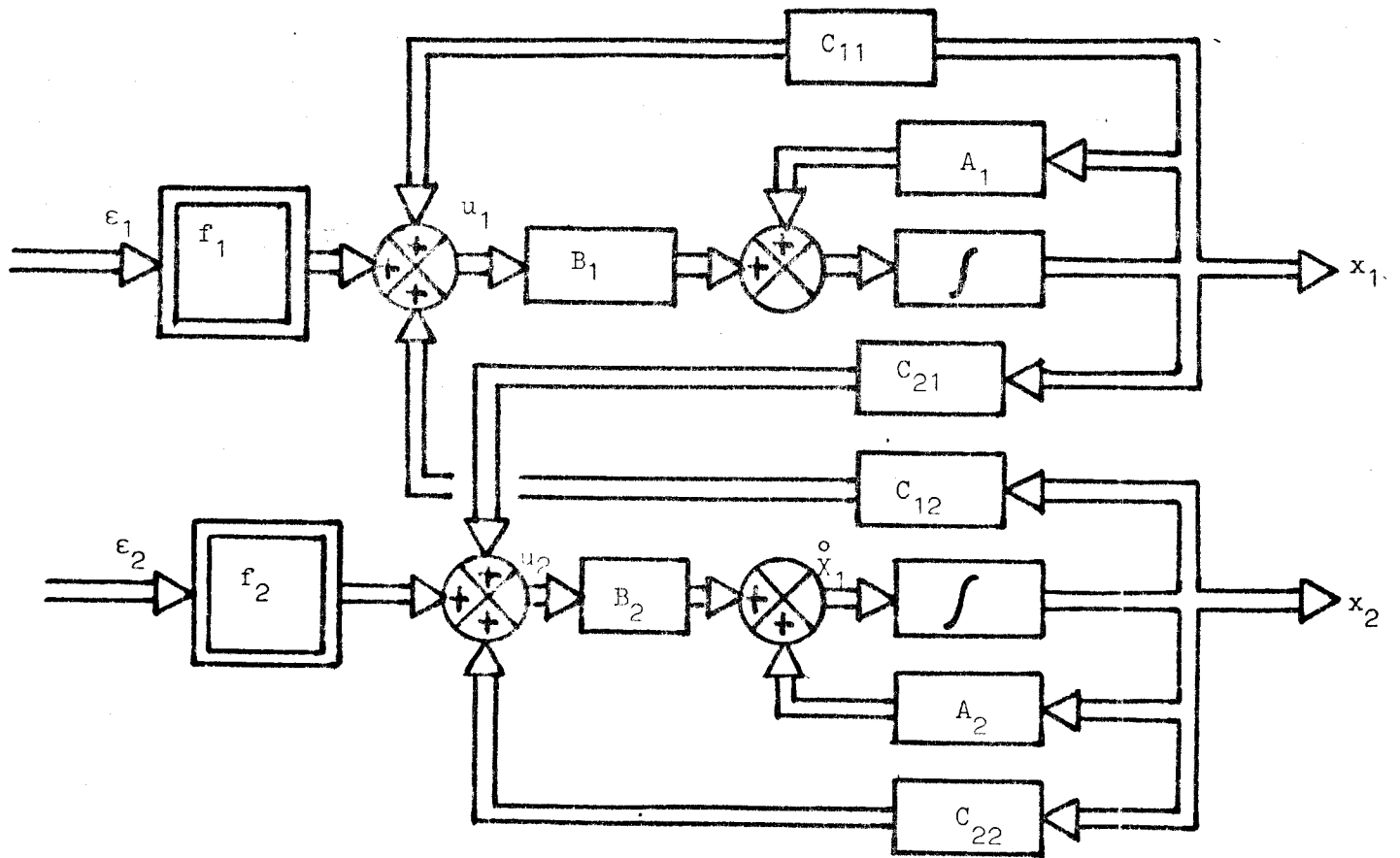


figure IV.1

Le système (IV.61) se ramène en régime autonome à la forme matricielle (IV.62) :

$$\begin{bmatrix} \circ \\ \varepsilon_1 \\ \circ \\ \varepsilon_2 \\ \circ \\ x_1 \\ \circ \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc|cc} & & \alpha & & \\ \hline & \alpha_{11}(\varepsilon_1) & \alpha_{12}(\varepsilon_2) & g_{11} & g_{12} \\ & \alpha_{21}(\varepsilon_1) & \alpha_{22}(\varepsilon_2) & g_{21} & g_{22} \\ \hline & B_1 f_1(\varepsilon_1) & 0 & A_1 + B_1 C_{11} & B_1 C_{12} \\ & 0 & B_2 f_2(\varepsilon_2) & B_2 C_{21} & A_2 + B_2 C_{22} \end{array} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (IV.62)$$

Il s'agit donc d'un système non linéaire comportant 4 sous systèmes dont 2 sous systèmes de vecteurs états respectifs x_1 et x_2 sont commandés par les 2 sous systèmes de vecteurs états ε_1 et ε_2 .

Les éléments non linéaires sont isolés dans les premières colonnes de la matrice de régime libre de l'équation (IV.62). Dans ce sens un partitionnement de type (α, β) peut conduire à une application directe du corollaire (IV.6).

Afin de préciser l'application de ce corollaire supposons les sous systèmes (1) et (2) d'ordre 1 et 2 respectivement, et les sous systèmes de commande du 1^o ordre soit par exemple :

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 C_{11} &= \begin{bmatrix} -1.3 & , & 0.3 \\ -1.1 & , & -2 \end{bmatrix}, \quad B_1 C_{12} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \text{ sat } x_5 \end{bmatrix} \\ A_2 + B_2 C_{22} &= -5.6, \quad B_2 C_{21} = [0 \quad , \quad 0] \\ B_1 f_1(\varepsilon_1) &= \begin{bmatrix} 0 \\ f_1(\varepsilon_1) \end{bmatrix}, \quad B_2 f_2(\varepsilon_2) = f_2(\varepsilon_2) \\ g_{11} &= \begin{bmatrix} 0.2 & & 0.7 \end{bmatrix}, \quad g_{12} = 2, \quad g_{21} = [-0.4 \quad 0.6], \quad g_{22} = -1.5 \end{aligned}$$

il vient dans ces conditions :

$$\begin{bmatrix} \circ \\ \varepsilon_1 \\ \circ \\ \varepsilon_2 \\ \circ \\ x_{11} \\ \circ \\ x_{12} \\ \circ \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(\varepsilon_1) & \alpha_{12}(\varepsilon_1) & 0.2 & 0.7 & 2 \\ \alpha_{21}(\varepsilon_2) & \alpha_{22}(\varepsilon_2) & -0.4 & 0.6 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1.3 & 0.3 & 0.3 \\ f_1(\varepsilon_1) & 0 & -1.1 & -2 & 0.4 \text{sat } x_5 \\ 0 & f_2(\varepsilon_2) & 0 & 0 & -5.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.63})$$

notons $l_1(\varepsilon) = \max[\alpha_{11}(\varepsilon_1) + |\alpha_{12}(\varepsilon_1)|, |\alpha_{21}(\varepsilon_2)| + \alpha_{22}(\varepsilon_2)]$

le choix de la norme vectorielle $p(x)$ définie en (IV.54) permet de définir le système de comparaison (IV.64) :

$$\frac{d}{dt}(z) = \begin{bmatrix} l_1(\varepsilon) & , & 1 & , & 2 \\ |f_1(\varepsilon_1)| & , & -0.9 & , & 0.4 \\ |f_2(\varepsilon_2)| & , & 0 & , & -5.6 \end{bmatrix} z \quad (\text{IV.64})$$

Le corollaire (IV.6) conduit alors aux conditions de stabilité asymptotique suivantes :

$$\begin{aligned} l_1(\varepsilon) < 0, \quad -0.9l_1(\varepsilon) - |f_1(\varepsilon_1)| > 0, \\ 5.04 l_1(\varepsilon) + 5.6|f_1(\varepsilon_1)| + 2.2 |f_2(\varepsilon_2)| < 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.65})$$

Application 4

Nous proposons en dernière application un exemple relatif à la mise en oeuvre du théorème (IV.7) utilisant le critère généralisé de Popov :

Soit le système non linéaire décrit par l'équation d'état (IV.66)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_1 &= -2\alpha x_1 + \begin{bmatrix} 2\text{sat}(x_{11}+2x_{12}) \\ 2x_{11} + 4x_{12} \end{bmatrix} + \beta_{11} \begin{bmatrix} [2|x_{11}|+3|x_{12}|]x_{11} \\ [|x_{11}|+2|x_{12}|]x_{12} \end{bmatrix} + \beta_{12} \begin{bmatrix} (|x_{21}|+|x_{22}|)x_{21} \\ (|x_{21}|+|x_{22}|)x_{22} \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt} x_2 &= -2\alpha x_2 + \begin{bmatrix} 2\text{sat}(x_{21}+2x_{22}) \\ 2x_{21} + 4x_{22} \end{bmatrix} + \beta_{21} \begin{bmatrix} [2|x_{11}|+3|x_{12}|]x_{11} \\ [|x_{11}|+2|x_{12}|]x_{12} \end{bmatrix} + \beta_{22} \begin{bmatrix} (|x_{21}|+|x_{22}|)x_{21} \\ (|x_{21}|+|x_{22}|)x_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.66})$$

$$x_1^T = (x_{11}, x_{12}) \quad x_2^T = [x_{21}, x_{22}]$$

$p(x)$ désignant une norme vectorielle de taille 4 correspondant à la norme du max, il vient par majoration

$$\begin{aligned} \frac{d^+}{dt} |x_1| &\leq \begin{bmatrix} -2\alpha+2, & 4 \\ 2 & , & -2\alpha+4 \end{bmatrix} |x_1| + \beta_{11} \begin{bmatrix} 2(x_{11})^2+3|x_{12}||x_{11}| \\ |x_{11}||x_{12}|+2|x_{12}|^2 \end{bmatrix} + \beta_{12} \begin{bmatrix} |x_{21}|^2+|x_{22}||x_{21}| \\ |x_{21}||x_{22}|+|x_{22}|^2 \end{bmatrix} \\ \frac{d^+}{dt} |x_2| &\leq \begin{bmatrix} -2\alpha+2, & 4 \\ 2 & , & -2\alpha+4 \end{bmatrix} |x_2| + \beta_{21} \begin{bmatrix} 2|x_{11}|^2+3|x_{12}||x_{11}| \\ |x_{12}||x_{11}|+2|x_{12}|^2 \end{bmatrix} + \beta_{22} \begin{bmatrix} |x_{21}|^2+|x_{22}||x_{21}| \\ |x_{21}||x_{22}|+|x_{22}|^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.67})$$

cette première majoration conduit alors à effectuer une contraction au second ordre à partir de la norme vectorielle suivante :

$$\begin{aligned} p_1(x)^T &= [|x_{11}| + |x_{12}|, |x_{21}| + |x_{22}|] \\ \frac{d^+}{dt} p_1(x) &\leq \begin{bmatrix} -2(\alpha-4), & 0 \\ 0 & , & -2(\alpha-4) \end{bmatrix} p_1(x) + \begin{bmatrix} 2\beta_{11} & |\beta_{12}| \\ 2|\beta_{21}| & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [|x_{11}| + |x_{12}|]^2 \\ [|x_{21}| + |x_{22}|]^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.68})$$

à partir de cette dernière relation il est possible de définir le système de comparaison d'ordre 2 (IV.69) :

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} -2(\alpha-4) & 0 \\ 0 & -2(\alpha-4) \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 2\beta_{11} & |\beta_{12}| \\ 2|\beta_{21}| & \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1^2 \\ r_2^2 \end{bmatrix} \\ r^T = z^T = [r_1, r_2] \end{cases} \quad (\text{IV.69})$$

si l'on rapproche l'équation (IV.69) de l'équation (IV.50) il vient par identification :

$$\begin{cases} M = -2(\alpha-4) I_2 & I_2 \text{ matrice unité } 2 \times 2 \\ B = \begin{bmatrix} 2 & \beta_{11} & |\beta_{12}| \\ 2 & |\beta_{21}| & \beta_{22} \end{bmatrix} \\ C = I_2, \quad f(r) = \begin{bmatrix} r_1^2 \\ r_2^2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{IV.70})$$

L'application du théorème (IV.7) conduit ainsi aux conditions de stabilité asymptotique suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \quad C.M.B > 0 & \Rightarrow -2(\alpha-4) B > 0 \\ & \forall \omega \in]-\infty, +\infty[\\ (2) \quad \operatorname{Re} C(M-j\omega I_2)^{-1} B > 0 & \Rightarrow \frac{-2(\alpha-4)}{\omega^2 + 4(\alpha-4)^2} B > 0 \end{aligned}$$

ces conditions peuvent se réduire sous forme simplifiée aux deux contraintes :
 $\alpha > 4$ et $B < 0$

une condition suffisante de stabilité asymptotique des systèmes (IV.66) s'exprime donc sous la forme des trois inégalités (IV.71) :

$$\alpha < 4, \quad \beta_{11}, \beta_{22} < 0, \quad \beta_{11} \beta_{22} - |\beta_{12}| |\beta_{21}| > 0 \quad (\text{IV.71})$$

Application 5 : Représentation complexe d'un processus.

Afin de mettre en évidence l'intérêt d'une éventuelle représentation des processus sur un espace hermitique, reprenons l'exemple d'application relatif au critère pratique (II.1) (CH.II). Le processus est décrit par l'une ou l'autre des deux équations suivantes : (II.27)

$$\begin{aligned} & \overset{\circ}{y} + f_1(z_1, z_2, t) \overset{\circ}{y} + f_2(z_1, z_2, t) y = 0 \\ & \begin{bmatrix} \overset{\circ}{y} \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \overset{\circ}{y} \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -f_1 & -f_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

posons

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1^* - \lambda_1 - \lambda_2, & f_2 &= f_2^* + \lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_1 &= \bar{\lambda}_2, & \lambda_1, \lambda_2 &\in \mathbb{K} \end{aligned}$$

Supposons lorsque $f_1^* = f_2^* = 0$ que le point de coordonnées f_1, f_2 se situe dans ce plan au dessus de la parabole P d'équation $f_1^2 - 2f_2 = 0$ (figure V.2). Le critère pratique (II.1) ne permet plus de conclure à la stabilité de ce système, en effet la caractéristique non linéaire du processus est dans ce cas située au dessus de P , cette parabole représentant dans ce cas particulier la limite de validité du critère II.1. Une solution simple consiste à effectuer un changement de base qui diagonaliserait localement A pour $f_1^* = f_2^* = 0$. Compte tenu des hypothèses sur λ_1 et λ_2 un tel changement de base ne peut être que complexe et conduit à une représentation équivalente à celle définie en (II.27) mais sur le corps des complexes :

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ A^* &= \begin{bmatrix} \lambda_1 - \frac{\lambda_1 f_1^* + f_2^*}{\lambda_1 - \lambda_2}, -\frac{\lambda_2 f_1^* + f_2^*}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \frac{\lambda_1 f_1^* + f_2^*}{\lambda_1 - \lambda_2}, \lambda_2 + \frac{\lambda_2 f_1^* + f_2^*}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{bmatrix} = P^{-1} A P \end{aligned} \quad (\text{IV.74})$$

$$A^* = \{a_{ij}^*\} \quad i, j=1, 2$$

Une matrice pseudo-majorante M de dimension 2×2 peut alors être obtenue à partir de la norme du max :

$$M(A^*) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(a_{11}^*), & |a_{12}^*| \\ |a_{21}^*|, & \operatorname{Re}(a_{22}^*) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.75})$$

Les racines λ_1 et λ_2 étant complexes conjuguées, la matrice $M(A^*)$ est symétrique. Dans ce cas les conditions de Hurwitz /15/ appliquées à $M(A^*)$ impliquent la stabilité asymptotique du point d'équilibre $x=0$ du système (II.27).

En posant $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ces conditions s'écrivent

$$\begin{aligned} \alpha - \frac{f_1^*}{2} &< 0 \\ \left| \alpha - \frac{f_1^*}{2} \right|^2 &> \frac{\beta^2 f_1^* + |f_2^* + \alpha f_1^*|^2}{4 \beta^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.76})$$

Dans le plan des variables f_1, f_2 il vient par exemple pour $\alpha = -\beta = -1$ le domaine de stabilité de la figure (IV.2)

avec :

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1^* - 2\alpha \\ f_2 &= f_2^* + \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

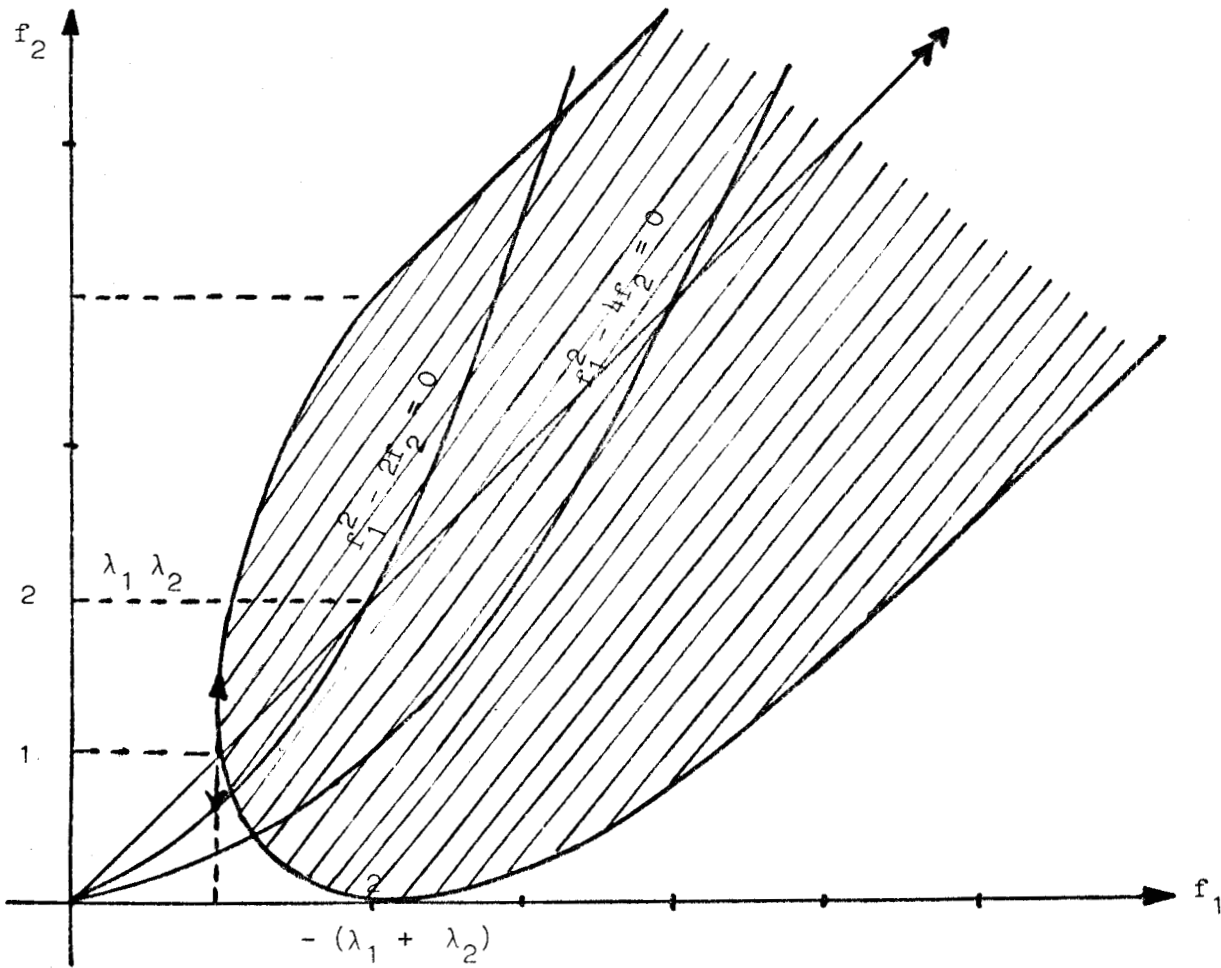


figure IV.2

IV.2 - Etude de stabilité à partir d'inégalités différentielles.

Au cours du chapitre III nous avons insisté sur les raisons qui nous ont amené à choisir systématiquement les matrices pseudo-majorantes dans la classe des Z_0 matrices. Dans ce sens, l'utilisation du lemme de comparaison a permis de définir un ensemble de critères de stabilité asymptotique ou exponentielle.

Toutefois, pour certaines classes de systèmes et bien qu'il soit possible de définir des systèmes majorants dont les matrices pseudo-majorantes sont du type Z matrices ou éventuellement $(-M)$ matrices, il n'est pas toujours évident de définir un système de comparaison permettant de conclure aux propriétés de stabilité.

Dans ce sens, il peut être plus avantageux de partir directement d'inégalités différentielles sous la forme (IV.77) (définition III.6) afin d'étudier la stabilité d'un processus : /21/, /22/.

$$D^+p(x) \leq M^*(t,x) q[a(t,x)] \quad (\text{IV.77})$$

Selon la structure de la matrice $M^*(t,x)$ il est possible d'obtenir différentes conditions de stabilité asymptotique du système initial.

Au cours de cette partie de l'exposé le système initial S est supposé tel que les conditions suivantes restent vérifiées :

$$(1) \quad a(t,x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \quad \forall t \in \mathcal{C}_0 \quad (\text{IV.78})$$

$$(2) \quad ||a(t,x)|| \leq \phi_a(||x||) ; \quad \forall t \in \mathcal{C}_0, \forall x \in \mathcal{C}$$

ϕ_a fonction de classe K

De plus nous supposerons ici encore que la matrice $M^{*T}(t,x)$ admet une inverse irréductible et appartient à la classe des (-M) matrices.

Comme dans la section précédente, nous allons utiliser une fonction définie positive $v(t,x)$ obtenue par projection de la norme vectorielle $p(x)$ sur le vecteur propre $u(t,x)$ relatif à la valeur propre négative et de plus grande partie réelle de la matrice $M^{*T}(t,x)$ soit :

$$v(t,x) = p(x)^T u(t,x) \quad (\text{IV.79})$$

il apparaît ainsi de toute évidence (cf section IV.1.3) que $v(t,x)$ est encadrée par 2 fonctions scalaires de classe K au sens de la définition de Hahn.

$$\phi_2(||x||) \leq v(t,x) \leq \phi_1(||x||) \quad (\text{IV.80})$$

1 - Envisageons dans un premier volet le cas pour lequel le vecteur propre $u(t,x)$ reste de direction fixe.

$$u(t,x) = u \quad \forall t \in \mathcal{C}_0, \quad \forall x \in \mathcal{C}$$

Dans ces conditions il vient en dérivant v :

$$D^+v(x) \leq \lambda_{M^*} q^T[a(t,x)]u$$

si l'on suppose de plus :

$$\inf_{\mathcal{C}_0 \times \mathcal{G}_{M^*}} \lambda \leq -\varepsilon < 0 \quad \varepsilon \in]0, +\infty[\quad (\text{IV.81})$$

La condition (IV.78/2) implique l'existence d'une fonction de classe $K : \phi_q(||x||)$ telle que l'on ait :

$$q^T[a(t,x)]u \leq q^T[a(t,x)]u_1 \leq \phi_q(||x||) \quad (\text{IV.82})$$

Les inégalités (IV.81 et (IV.82) permettent donc d'écrire :

$$D^+v(x) \leq -\varepsilon \phi_q(||x||) \quad (\text{IV.83})$$

d'ou une condition suffisante de stabilité asymptotique :

Théorème (IV.8) Soit un système continu non linéaire S dont le système majorant obtenu à partir de la N.V $p(x)$ est de la forme $S' : D^+p(x) \leq M^*(t,x)q[a(t,x)]$

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) L'opposée de $M^*(t,x)$ est une M -matrice $\forall t \in \mathcal{C}_0, \forall x \in \mathcal{S}, x=0 \in \mathcal{S}$
- (ii) M admet une inverse irréductible
- (iii) $\exists \{\phi_a(||x||) : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^+\}$ tel que $||a(t,x)|| \leq \phi_a(||x||)$
- (iv) $a(t,x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \quad \forall t \in \mathcal{C}_0$
- (v) Le vecteur propre u associé à la valeur propre de plus grande partie réelle de M^{*T} est constant.

Alors le point d'équilibre $x=0$ du système S est asymptotiquement stable. Lorsque $\mathcal{S} = \mathcal{R}^n$, la stabilité asymptotique est globale.

2 - Supposons maintenant que la matrice $M^*(t,x)$ puisse se factoriser sous la forme d'un produit de 2 matrices, M^* constante par $D(\varphi)$ diagonale. La matrice $D(\varphi)$ est définie par la relation (IV.29) et les contraintes associées sont supposées vérifiées.

Soit $v(x)$ une fonction définie positive de la forme (IV.79) dans laquelle u est le vecteur propre constant de la matrice M^{*T} . Il vient par dérivation :

$$D^+ v(x) \leq \lambda_{M^*} \delta_q[a(t,x)]^T u \quad (IV.84)$$

lorsque la condition (IV.81) est vérifiée, il vient compte tenu de (IV.82) la majoration suivante :

$$D^+ v(x) \leq -\varepsilon \delta \phi_q(||x||) \quad (IV.85)$$

d'où le théorème :

Théorème (IV.9) Soit un système continu non linéaire S dont le système majorant obtenu à partir de la N.V $p(x)$ est de la forme S' , Si les conditions (i) à (iv) du théorème (IV.8) sont vérifiées et si la matrice $M^*(t,x)$ se factorise sous la forme du produit d'une matrice constante M^* par une matrice diagonale $D(\varphi)$ vérifiant (IV.29), alors le point d'équilibre $x=0$ du système S est asymptotiquement stable.

Lorsque $\mathcal{G} = \mathbb{R}^n$ la stabilité asymptotique est globale.

3 - Supposons enfin que les éléments non linéaires de $M^*(t,x)$ sont isolés dans une seule ligne ou colonne de cette matrice. Soit u_c le vecteur propre relatif au maximum C de la valeur propre de plus grande partie réelle de $M^*(t,x)$

$$C = \max_{\substack{\forall t \in \mathcal{C}_0 \\ \forall x \in \mathcal{E}_0}} \lambda_{M^*(t,x)} \leq -\varepsilon < 0 \quad \varepsilon \in]0, +\infty[\quad (IV.86)$$

et soit $v(x)$ une fonction définie positive telle que $v(x) = p(x)^T u_C$

En dérivant v il vient :

$$D^+ v(x) \leq q[a(t,x)]^T M^{*\top}(t,x) u_C \quad (\text{IV.87})$$

notons $\mathcal{F}_{D_C}$ la frontière du domaine D_C tel que $\lambda_{M^*(t,x)} = C < 0 \quad \forall x \in \mathcal{F}_{D_C} \subset \mathcal{E}$

Puisque les éléments non linéaires de $M^*(t,x)$ sont isolés dans une seule rangée de $M^*(t,x)$ le vecteur propre $u(t,x)$ relatif à la valeur propre C est constant. L'inégalité suivante est donc vérifiée sur $\mathcal{F}_{D_C}$:

$$D^+ v(x) \leq C q[a(t,x)] u_C \quad (\text{IV.88})$$

soit compte tenu de la contrainte (IV.82) sur $q[a(t,x)]$:

$$D^+ v(x) \leq C \phi_q^*(||x||) \quad \forall x \in \mathcal{F}_{D_C} \quad (\text{IV.89})$$

Si les domaines D_C sont emboîtés et tels que l'on ait :

$$C_1 < C_2 \Leftrightarrow D_{C_1} \subset D_{C_2} \subset \mathcal{S} \quad (\text{IV.90})$$

$$\text{et } (x=0)C \cap \{D_{(.)}^o(t), \forall t \in \mathcal{C}_0\} \neq \{0\}, (.)=(v) \text{ ou } (C)$$

la fonction $v(x)$ est une fonction de Ljapunov, et le point d'équilibre $x=0$ du système S est asymptotiquement stable.

Théorème (IV.10) Soit $M^*(t,x)$ une matrice pseudo-majorante de S définissant un système majorant S' pour les normes vectorielles p et q tel que les contraintes (IV.82) soient vérifiées. Si $M^*(t,x)$ vérifie l'ensemble de conditions suivantes :

- (i) $M^*(t, x)$ est l'opposée d'une M-matrice et admet une inverse irréductible $\forall t \in \mathcal{T}_0$ et $\forall x \in \mathcal{S}$
 - (ii) Les éléments non linéaires de la matrice $M^*(t, x)$ sont isolés dans une seule rangée de cette matrice.
 - (iii) Il existe un domaine $D_C \subset \mathcal{E}$ non vide tel que le point d'équilibre $x=0 \in D_C$
- alors, le point d'équilibre $x=0$ du système S est asymptotiquement stable.

Lorsque $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$ la stabilité asymptotique de l'équilibre est globale.

Exemple d'illustration 1.

Le système non linéaire dont nous proposons d'étudier la stabilité est décrit par l'équation d'état (IV.91) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\varphi_1(t, x)x_1^3 - \varphi_2(x_2)x_2 + 2 \text{ sat } x_3 \\ \dot{x}_2 = 0,5 \varphi_1(t, x)x_1^3 - 0,9 \varphi_2(x_2)x_2 - 0,4 \text{ sat } x_3 \\ \dot{x}_3 = \varphi_1(t, x)x_1^3 - 5,6 \text{ sat } x_3 \end{cases} \quad (\text{IV.91})$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0,5 & -0,9 & -0,4 \\ 1 & 0 & -5,6 \end{bmatrix} \quad D(\varphi) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t, x) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2(x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\inf [\varphi_1(t, x), \varphi_2(x_2)] \geq \delta > 0$$

$$a^T(x) = [x_1^3, x_2, \text{sat } x_3]$$

Les conditions (IV.78) étant vérifiées soient $p(x)$ et $p[a(x)]$ deux normes vectorielles de taille 3, il est alors possible de définir le système majorant (IV.92) :

$$D^+ \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \\ |x_3| \end{bmatrix} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0,5 & -0,9 & 0,4 \\ 1 & 0 & -5,6 \end{bmatrix}}_{M(A)} \begin{bmatrix} \varphi_1(t, x) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |x_1^3| \\ |x_2| \\ |\text{sat } x_3| \end{bmatrix} \quad (\text{IV.92})$$

Puisque les conditions de Hurwitz sont vérifiées sur la matrice $M(A)$ le système (IV.91) est asymptotiquement stable.

Exemple d'illustration 2.

Un système non linéaire est décrit par l'équation d'état (IV.93) :

$$\begin{aligned} \overset{o}{x}_1 &= f_1(x_1) x_1 - \text{sat } x_2 + 2 g(x_3) \\ \overset{o}{x}_2 &= f_2(x_1) x_1 - 0,9 \text{ sat } x_2 + 0,4 g(x_3) \\ \overset{o}{x}_3 &= f_3(x_1) x_1 - 5,6 g(x_3) \end{aligned} \quad (\text{IV.93})$$

$$g(x_3) = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0 \quad \begin{cases} g(x_3) \text{ fonction croissante de } x_3 \\ \text{sign } g(x_3) = \text{sign}(x_3) \end{cases}$$

soit $p(x)$ une norme vectorielle de taille 3, il vient après majoration :

$$\frac{d^+}{dt} \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \\ |x_3| \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} f_1(x_1) & 1 & 2 \\ |f_2(x_1)| & -0,9 & 0,4 \\ |f_3(x_1)| & 0 & -5,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |x_1| \\ |\text{sat } x_2| \\ |g(x_3)| \end{bmatrix} \quad (\text{IV.94})$$

L'application du théorème (IV.10) conduit aux conditions de stabilité asymptotique :

$$\begin{aligned} f_1(x_1) < 0, -0,9 f_1(x_1) - |f_2(x_1)| > 0 \\ 5,05 f_1(x_1) + 5,6 |f_2(x_1)| + 2,2 |f_3(x_1)| < 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.95})$$

IV.3 - Etude de l'instabilité des systèmes continus non linéaires.

L'étude de l'instabilité d'un système de la forme S peut être envisagée sur un système minorant (III.77) :

$$D^+p(x) \geq N(t,x) p(x) \quad \forall x \in \mathcal{C}, \forall t \in \mathcal{C}_0 \quad (\text{IV.96})$$

Cette étude peut être abordée très rapidement si l'on impose à la matrice $N(t,x)$ d'appartenir à la classe des M-matrices.

Dans ce cas en effet toutes les valeurs propres de $N(t,x)$ sont à parties réelles positives. Il convient cependant de remarquer que la contrainte ainsi imposée à $N(t,x)$ est particulièrement dure puisqu'il n'est pas possible de conclure à l'instabilité des processus non linéaires dont les racines caractéristiques ne sont pas systématiquement toutes positives.

IV.3.1. - Etude de l'instabilité à partir d'une matrice M pseudo-minorante.

Précisons tout d'abord que la matrice $N(t,x)$ appartient par hypothèse à la classe des M-matrices. En supposant qu'il soit possible d'inverser le sens d'évolution du temps, l'étude de l'instabilité basée sur la relation minorante (IV.96) se transpose directement en une étude de stabilité basée sur la relation majorante (IV.97) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} p(x) &\leq -N(\tau,x) p(x) \\ \tau &= -t \end{aligned} \quad (\text{IV.97})$$

Dans ce cas la matrice $-N(\tau,x)$ est une pseudo-majorante au sens de la définition 1 et il est possible d'utiliser sur l'inégalité (IV.97) l'ensemble des théorèmes de stabilité présentés dans les sections (IV.1) et (IV.2).

IV.3.2. - Exemple d'application.

Reprenons à titre d'illustration l'exemple 1 du chapitre II, compte tenu du changement de base défini par la matrice P le système étudié est décrit par l'équation d'état (IV.98) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \lambda - f_1 & , & -\lambda + f_1 - \frac{f_2}{\lambda} \\ \lambda & , & -\lambda \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (\text{IV.98})$$

il s'en déduit pour la norme vectorielle de taille 2

$p(x)^T = [|x_1|, |x_2|]$ la pseudo-minorante d'expression :

$$N(t,x) = \begin{bmatrix} \lambda - f_1 & , & |\lambda + f_1 - \frac{f_2}{\lambda}| \\ -|\lambda| & , & -\lambda \end{bmatrix}$$

l'étude de l'instabilité du système (IV.98) peut donc être transposée en la recherche d'une condition de stabilité d'un système de matrice pseudo-majorante - $N(t,x)$. Puisque les éléments non linéaires de cette matrice sont isolés dans la première ligne, il est possible d'appliquer le critère de stabilité (II.3) d'ou les conditions suffisantes d'instabilité :

$$\begin{aligned} f_1 &< \lambda \\ \lambda(f_1 - \lambda) - |\lambda| \cdot \left| \lambda - f_1 + \frac{f_2}{\lambda} \right| &> 0 \end{aligned} \quad (IV.99)$$

Il en résulte l'instabilité de tout système dont les paramètres non linéaires f_1 et f_2 évoluent à l'intérieur d'un domaine tel que A.B.C. figure (IV.3)

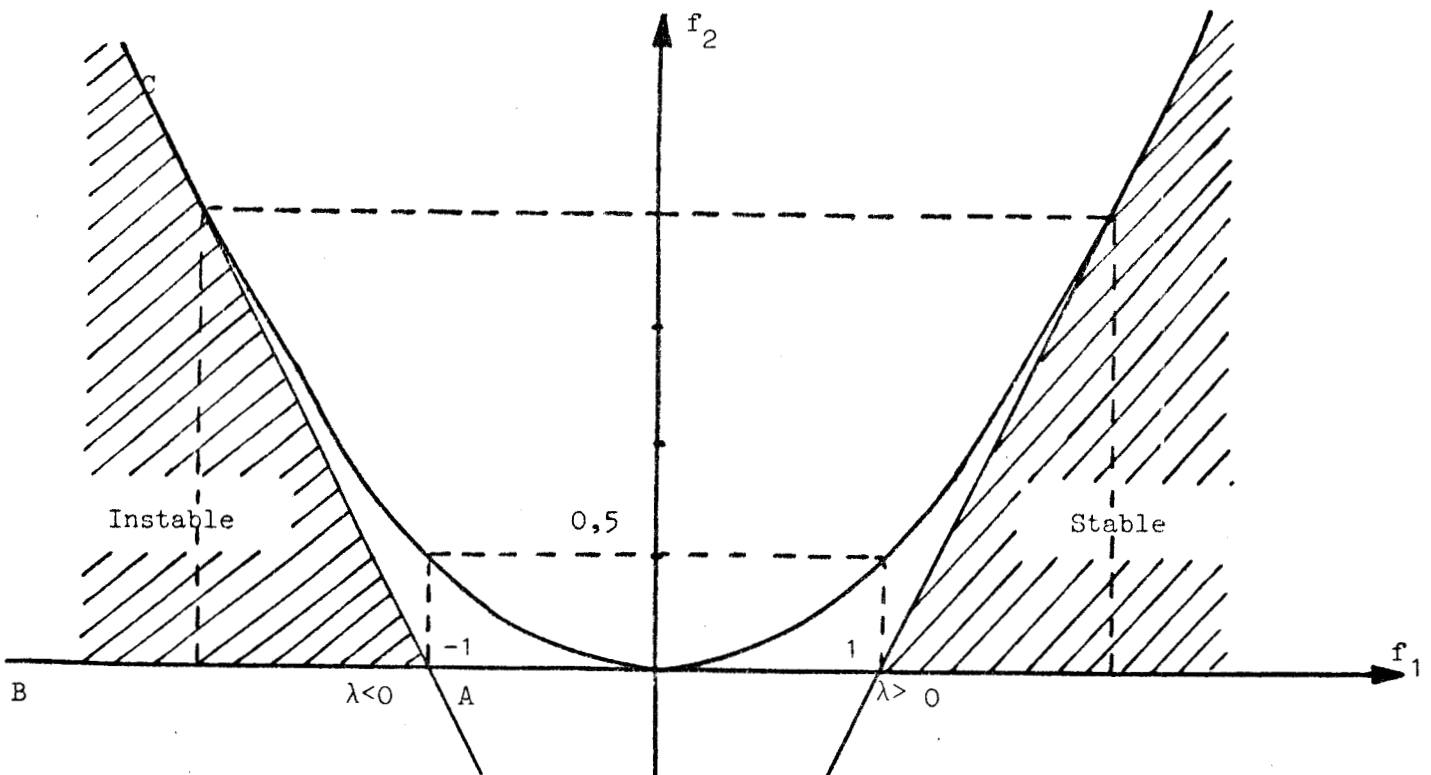


figure IV.3

IV.4. - Stabilité absolue des systèmes continus non linéaires /14/.

IV.4.1. - Cas des systèmes monovariabiles linéaires à commande non linéaire.

De tels processus sont généralement définis à partir d'une équation d'état de la forme (IV.100) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B f(u) \\ u &= e - C^T x \end{aligned} \quad (IV.100)$$

$$A \in \mathcal{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathcal{R}^{n \times 1}, \quad C^T \in \mathcal{R}^{1 \times n}, \quad f(u) : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$$

$$A = \{a_{ij}\} \quad B = \{b_i\} \quad C^T = \{c_i\} \quad , \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} \neq 0$$

e : entrée du système $e \in \mathcal{R}$

u : commande du processus $u \in \mathcal{R}$

x : vecteur état d'ordre n , $x \in \mathcal{R}^n$

Soit y un nouveau vecteur état obtenu en substituant à la première composante du vecteur x la commande scalaire u :

$$y^T = [u, x_2, \dots, x_n] \quad , \quad y \in \mathcal{R}^n$$

il vient pour le régime libre l'équation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \underline{A} y \\ \underline{A} &= \left[\begin{array}{cccc} \sum_{k=1}^n C_k \left(\frac{a_{k1}}{C_1} - b_k \frac{f(u)}{u} \right) & \dots & \overbrace{\sum_{k=1}^n \frac{C_k}{C_1} (C_j a_{k1} - C_1 a_{kj})}^{\text{colonne } j} & \dots \\ \vdots & & & \\ h_i \frac{f(u)}{u} - \frac{a_{i1}}{C_1} & \dots & \frac{C_1 a_{ij} - a_{1j} C_j}{C_1} & \dots \end{array} \right] \end{aligned} \quad (IV.101)$$

} ligne i

Les éléments non linéaires de $\underline{A}$ sont isolés dans la première colonne de cette matrice. Une condition suffisante de stabilité absolue sur la non linéarité $f(u)$ s'exprime simplement à partir des conditions de Hurwitz appliquées à une matrice pseudo-majorante de $\underline{A}$ pour une norme vectorielle p .

IV.4.2. - Cas des systèmes interconnectés.

Soit maintenant un ensemble de s systèmes interconnectés. Chaque sous système S_i est décrit par une équation d'état relative au vecteur x_i de la forme (IV.102). L'origine $x=0$ est par hypothèse le seul point d'équilibre de ce système.

$$\frac{dx_i}{dt} = P_i x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^s P_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{v_i} T_{ij} \varphi_j(z_j) \quad \forall i=1,2,\dots,s \quad (\text{IV.102})$$

avec $v_i \leq s$, $z_i = R_i x_i$, $R_i \in \mathbb{R}^{\mu_i \times n_i}$, $P_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $P_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$
 $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $z_i \in \mathbb{R}^{\mu_i}$, $T_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times \delta_j}$, $z_i = \{z_{ij}\}$, $j=1,2,\dots,\mu_i$

Les non linéarités $\varphi_i : \mathbb{R}^{\mu_i} \rightarrow \mathbb{R}^{\delta_i}$ appartiennent par hypothèse à la classe U_3 :

$$\{U_3 : \varphi_i, i=1,2,\dots,s : \frac{\varphi_{ij}(z_j)}{z_{ij}} < k_{ij}, \forall z_i \in \mathbb{R}^{\mu_i}, \forall j=1,2,\dots,\mu_i\} \quad (\text{IV.103})$$

1 - Supposons tout d'abord que les non linéarités $\varphi_i(z_i)$ puissent se mettre sous la forme (IV.104) :

$$\varphi_i(z_i) = \varphi_i^*(z_i) \cdot z_i, \quad \{\varphi_i^*(z_i) : \mathbb{R}^{\mu_i} \rightarrow \mathbb{R}^{\delta_i \times \mu_i}\} \quad (\text{IV.104})$$

dans ce cas l'équation d'état (IV.102) peut s'écrire :

$$\frac{dx}{dt} = Px + T \varphi(z) , \quad z_i = R_i x_i \quad (\text{IV.105})$$

avec : $z^T = [z_1^T, z_2^T, \dots, z_s^T]$, $P = \{P_{ij}\}$, $P_{ii} = P_i$

$$T = \{T_{ij}\} \quad \text{et} \quad \varphi^*(z) = \text{diag} \{\varphi_i^*(z_i)\}$$

La forme de l'équation d'état (IV.105) est une généralisation au domaine multivariable de l'équation (IV.100). Comme précédemment formons un nouveau vecteur état y du système (IV.102) :

$$y^T = [y_1^T, y_2^T, \dots, y_s^T, y_{s+1}^T] \quad (\text{IV.106})$$

$$y_i = R_i^* x_i \quad \forall i=1,2,\dots,s, \quad y_{s+1} = z$$

$$R_i^* \in \mathcal{R}^{(n_i - \mu_i) \times n_i}, \quad i=1,2,\dots,s \quad \text{rang} \begin{bmatrix} R_i^{*T} & R_i^T \end{bmatrix} = n_i$$

il vient :

$$y = R^* x$$

$$R^* = \{R_{ij}^*\} \quad \begin{matrix} j=1,2,\dots,s \\ i=1,2,\dots,2s \end{matrix} \quad R^* \in \mathcal{R}^{n \times n}$$

$$R_{ij}^* \in \mathcal{R}^{(n_i - \mu_i) \times n_j}, \quad R_{i+s,j}^* \in \mathcal{R}^{\mu_i \times n_i} \quad \forall i,j=1,2,\dots,s$$

$$R_{ij}^* = R_{i+s,j}^* = 0, \quad R_{ii}^* = R_i^*, \quad R_{i+s,i}^* = R_i \quad \forall i \neq j=1,2,\dots,s$$

Puisque le rang de la matrice R^* est égal à n , il est possible de déduire de l'équation d'état (IV.105) la nouvelle représentation (IV.107) :

$$\frac{dy}{dt} = R^* P R^{*-1} y + R^* \varphi^*(z) y_{s+1} \quad (\text{IV.107})$$

soit encore $\frac{dy}{dt} = P^* y$.

Les éléments non linéaires de la matrice P^* sont ainsi regroupés dans la dernière colonne de cette matrice. Dans ce sens une norme vectorielle $p(y)$ de composante $\{p_i(y_i)\}$ $i=1,2,\dots, s+1$ permet de définir une matrice pseudo-majorante de P^* dont les éléments non linéaires sont isolés dans une seule colonne de cette matrice ; d'où le système de comparaison :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= M [P^*] z \\ z &\geq p[x(t)] \quad \forall t \in \mathcal{C}_0 \end{aligned} \quad (\text{IV.108})$$

Le corollaire (IV.6) permet alors d'affirmer que les conditions de Hurwitz appliquées à la matrice $M(P^*)$ entraînent la stabilité asymptotique du point d'équilibre $x=0$ du système (IV.102). Il s'agit bien d'une condition de stabilité absolue exprimant une contrainte sur les non linéarités $\varphi_{ij}(z_j)$ de classe U_3 .

2 - Lorsque les non linéarités $\varphi_{ij}(z_j)$ n'appartiennent plus à la classe U_3 , il convient d'utiliser une autre technique de majoration.

Notons maintenant $R = \{R_{ij}\}$, $R_{ii} = R_i$, $R_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j=1,2,\dots, s$

$$\text{avec} \quad R \in \mathcal{R}^{\delta \times n} \quad \delta = \sum_{i=1}^s \delta_i \quad n = \sum_{i=1}^s n_i$$

$$\text{il vient :} \quad z = Rx \quad \text{et} \quad \varphi^T(z) = \left[\varphi_1^T(z_1), \dots, \varphi_s^T(z_s) \right]$$

soit $p(x)$ une norme vectorielle de taille s il vient après majoration de l'équation d'état (IV.105) :

$$D^+ p(x) \leq M(P) p(x) + \underline{M}(T) |\varphi(z)| \quad (\text{IV.109})$$

$M(P) \in \mathcal{R}^{s \times s}$: pseudo-majorante de P pour la norme vectorielle $p(x)$

$$\underline{M}(T) \in \mathcal{R}^{s \times \delta}, \quad \underline{M}(T) = \{\underline{m}_{ij}\} \quad (\text{IV.110})$$

la matrice majorante $\underline{M}$ peut être définie de la manière suivante :

$$\underline{M}(B) = [\underline{\mu}_{ij}(B)] , \quad \underline{\mu}_{ij}(B) = \max_{y \in \mathcal{R}_\delta} \frac{p_i(B_{ij}y_j)}{|y_j|} \quad \forall i, j=1,2,\dots,s \quad (\text{IV.111})$$

Deux cas peuvent alors être envisagés :

a) La norme $p(x)$ peut être choisie de telle façon que la relation suivante soit vérifiée : $z = C p(x)$ $C \in \mathcal{R}^{\delta \times s}$.

Dans ce cas il est possible d'utiliser le théorème (IV.7) basé sur les travaux de M.M Grujić et Popov.

b) Le plus souvent, il ne peut être possible de déduire du système (IV.109) un système de comparaison de la forme Lur'e Postnikov. Dans ce cas l'utilisation de la fonction définie positive $v(x,z)$ suivante

$$v(x,z) = p(x)^T \cdot p(x) + \int_0^z \varphi^T(u) du \quad (\text{IV.112})$$

conduit après dérivation à l'inégalité (IV.113)

$$D^+ v(x,z) \leq (p(x)^T, |z|^T) \mathcal{M} \begin{bmatrix} p(x) \\ |\varphi(z)| \end{bmatrix} \quad (\text{IV.113})$$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} M(P) + M(P)^T & , & \underline{M}(T) + \underline{M}^T(\frac{RP}{2}) \\ \underline{M}^T(T) + \underline{M}^T(\frac{RP}{2}) & , & M\left(\frac{RT + T^T R^T}{2}\right) \end{bmatrix} , \mathcal{M} \in \mathcal{R}_+^{k \times k} \quad (\text{IV.114})$$

Une condition de stabilité asymptotique du point d'équilibre $x=0$ du système (IV.102) est simplement déduite des conditions de Hurwitz appliquées à la matrice symétrique $\mathcal{M}$: la forme quadratique (IV.113) est alors définie négative.

IV.5. - Application à une étude de stabilité du régime forcé des systèmes continus non linéaires vis à vis des perturbations initiales.

Nous proposons en dernière application des critères de stabilité présentés au cours de ce chapitre, d'étudier la stabilité des régimes forcés des systèmes continus non linéaires vis à vis de perturbations initiales.

D'une manière générale, l'évolution des variables de sortie d'un système d'équations différentielles non linéaires dépend non seulement des signaux d'entrées, mais aussi des conditions initiales. Un tel processus peut être considéré stable en régime forcé par rapport aux perturbations initiales lorsqu'au bout d'un temps suffisamment long, le comportement de la sortie ne dépend que des entrées, l'effet des conditions initiales ayant totalement disparu. Il s'agit donc d'une forme particulière de stabilité qui traduit l'amortissement du régime transitoire pour définir un régime dynamique unique à partir des signaux d'entrée /23/, /24/.

Ce problème est particulièrement délicat puisqu'il n'est pas possible, compte tenu du caractère à priori non linéaire des systèmes que nous étudions, d'utiliser le principe de superposition. Le phénomène transitoire de stabilisation d'un processus non linéaire sur un régime forcé dépend donc à la fois d'une part des perturbations initiales, d'autre part de l'évolution des entrées.

IV.5.1. - Position du problème.

Le processus non linéaire étudié est régi par l'équation d'état (IV.115)

$$\dot{x} = f(x, e, t) \quad (\text{IV.115})$$

désignons par $x_1(0)$ et $x_2(0)$ 2 vecteurs de conditions initiales pour une même entrée $e(t)$. L'évolution de l'écart des solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est

alors défini par la relation :

$$\overset{o}{x}_1 - \overset{o}{x}_2 = f(x_1, e, t) - f(x_2, e, t) \quad (\text{IV.116})$$

Cette relation peut assez souvent être ramenée à la forme matricielle (IV.118)

$$\begin{aligned} \overset{o}{z} &= F z \\ z &= x_1 - x_2 \\ F &= \left\{ \frac{\Delta_j f_i}{x_j^1 - x_j^2} \right\} \quad i, j=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{IV.118})$$

$$\Delta_j f_i = f_i(x_1^2, \dots, x_{j-1}^2, x_j^1, \dots, x_n^1) - f_i(x_1^2, \dots, x_j^2, x_{j+1}^1, \dots, x_n^1)$$

Le problème d'unicité du régime permanent du système (IV.115) se ramène donc à une étude de stabilité du système (IV.118) /25/.

IV.5.2. - Applications

Nous envisagerons 2 exemples, le premier concerne l'étude de stabilité vis à vis des perturbations initiales des systèmes linéaires à commande monovariante non linéaire. Nous avons vu (cf IV.4.1) que de tels systèmes peuvent être représentés par une équation d'état de la forme (IV.101). Il est donc possible en supposant que la non linéarité $f(u)$ vérifie une relation de la forme : $f(u_1) - f(u_2) = f^*(u_1, u_2)(u_1 - u_2)$, d'obtenir une équation d'état des écarts de la forme (IV.118).

A titre d'illustration nous proposerons l'exemple d'un système non linéaire correspondant au schéma bloc de la figure (IV.4)

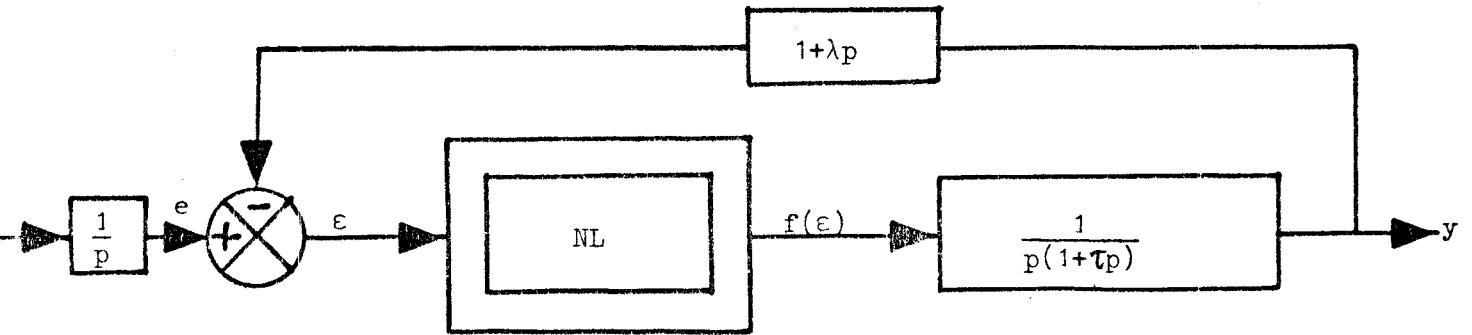


figure IV.4

Le fonctionnement d'un système de ce type est défini par l'équation d'état (IV.119) :

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{\tau} \frac{f(\epsilon)}{\epsilon}, -1 + \frac{\lambda}{\tau} \\ \frac{1}{\tau} \frac{f(\epsilon)}{\epsilon}, -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{de}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.119})$$

si P désigne une matrice de changement de base telle que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{bmatrix} \quad x = P \begin{bmatrix} \epsilon \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

il vient :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \mu(1 - \frac{\lambda}{\tau}) - \frac{\lambda}{\tau} \frac{f(\epsilon)}{\epsilon}, \frac{\lambda}{\tau} - 1 \\ \frac{f(\epsilon)}{\epsilon} (\frac{1}{\tau} - \frac{\lambda}{\tau} \mu) + \frac{\mu}{\tau} - \mu^2 (-1 + \frac{\lambda}{\tau}), \mu (\frac{\lambda}{\tau} - 1) - \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} \\ \mu \dot{e} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.120})$$

L'étude de la stabilité vis à vis des conditions initiales du régime forcé peut donc s'effectuer sur l'équation d'état des écarts (IV.121) :

$$\frac{d}{dt} z = \begin{bmatrix} \mu(1 - \frac{\lambda}{\tau}) - \frac{\lambda}{\tau} f^* & , & \frac{\lambda}{\tau} - 1 \\ f^* \frac{1}{\tau} (1 - \lambda\mu) + \frac{\mu}{\tau} (1 - \lambda\mu) + \mu^2 & , & \frac{1}{\tau} (\lambda\mu - 1) - \mu \end{bmatrix} z \quad (IV.121)$$

D'où les conditions de stabilité évidentes compte tenu du critère pratique (II.3):

$$(1) \quad \mu(1 - \frac{\lambda}{\tau}) - \frac{\lambda}{\tau} f^* < 0$$

$$(2) \quad (\mu(1 - \frac{\lambda}{\tau}) - \frac{\lambda}{\tau} f^*) (\frac{1}{\tau} (\lambda\mu - 1) - \mu) - |\frac{\lambda}{\tau} - 1| |f^* \frac{1}{\tau} (1 - \lambda\mu) + \frac{\mu}{\tau} (1 - \lambda\mu) + \mu^2| > 0 \quad (IV.122)$$

$$(3) \quad f^* = \frac{f(\varepsilon_1) - f(\varepsilon_2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$$

Les relations (IV.122) imposent une contrainte sur la variation de f^* donc sur les variations de pente de la caractéristique non linéaire $f(\varepsilon)$. Dans le plan des coefficients du polynome caractéristique de la matrice M^* , il vient lorsque f^* varie l'équation d'une droite représentant ainsi la caractéristique non linéaire du système (IV.121) :

$$f_2^* = f_1^* / \tau, \quad f_1^* = 1/\tau + \lambda f^* / \tau$$

d'où les conditions déduites de (IV.122) en fonction de f_1^* et f_2^*

$$\begin{aligned} -2 \rho^2 - 2\rho \left[-f_1^* + \frac{\lambda}{\tau} \right] + \frac{2}{\tau} f_1^* - \frac{2}{\tau^2} - f_2^* &> 0 \\ \rho + \frac{1}{\tau} - f_1^* &< 0 \\ f_2^* &> 0 \\ \rho &= \mu \left[1 - \frac{\lambda}{\tau} \right] \end{aligned} \quad (IV.123)$$

il s'en déduit le domaine d'unicité de la figure (IV.5)

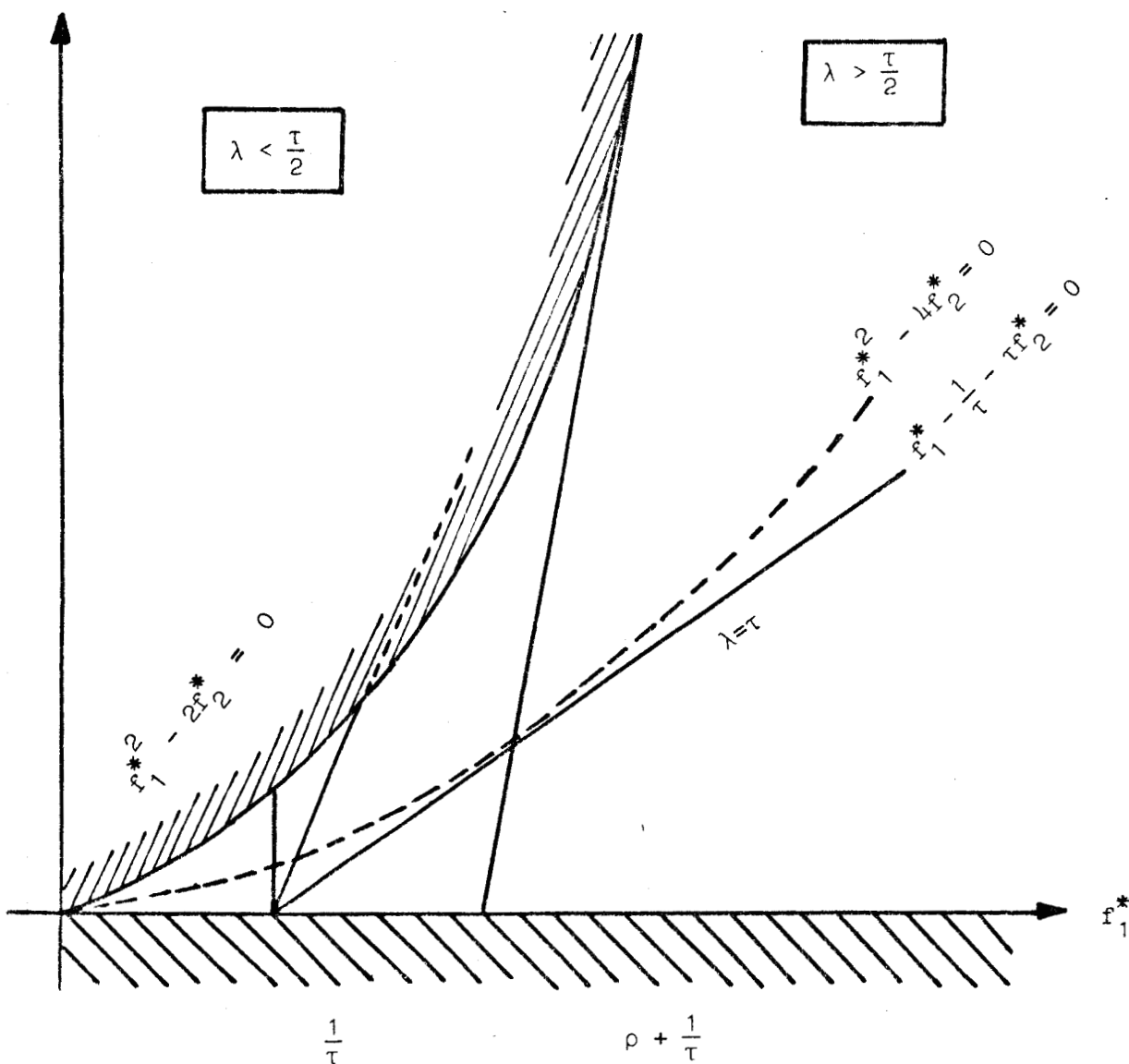


figure (IV.5)

Exemple 2.

Les phénomènes de non multiplication de fréquence /26/ des réseaux électriques peuvent également être mis en évidence à partir d'une telle étude. Dans ce cas la convergence asymptotique des solutions des équations de fonctionnement assure, pour toute entrée et des conditions initiales quelconques, l'unicité de la réponse du réseau.

Soit le schéma du réseau électrique suivant :

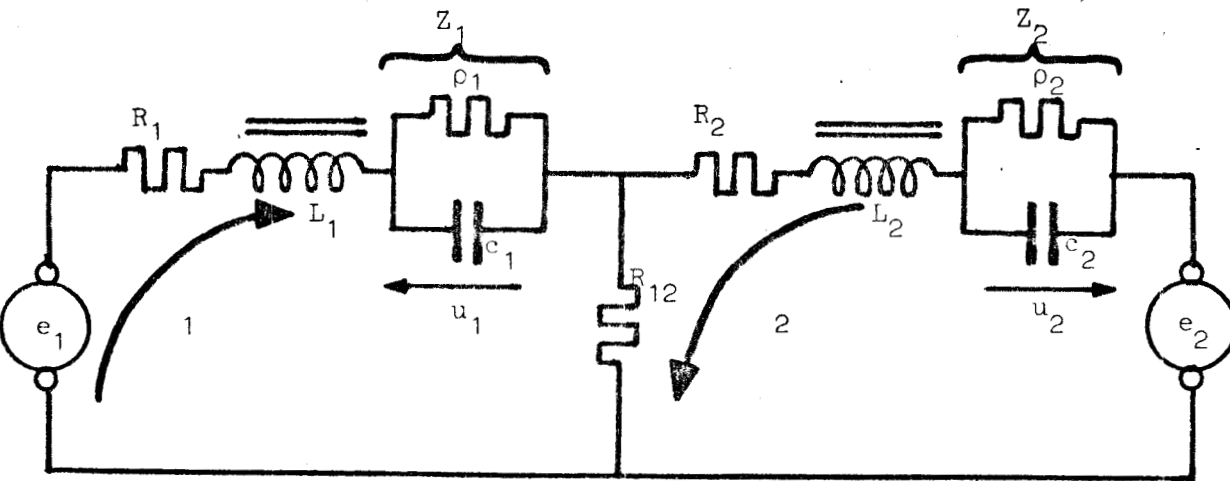


figure IV.6

Le choix des variables u_i et ϕ_i correspondant respectivement aux tensions aux bornes impédances Z_i et aux flux des selfs L_i conduit à l'équation d'état suivante du processus.

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\phi_1 \\ \frac{d}{dt}u_1 \\ \frac{d}{dt}\phi_2 \\ \frac{d}{dt}u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(R_1+R_{12})L_1^{-1} & -1 & -R_{12}L_2^{-1} & 0 \\ \frac{1}{C_1}L_1^{-1} & -\frac{1}{\rho_1 C_1} & 0 & 0 \\ -R_{12}L_1^{-1} & 0 & -(R_2+R_{12})L_2^{-1} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2}L_2^{-1} & -\frac{1}{\rho_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ u_1 \\ \phi_2 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \\ e_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.124})$$

Les inductances L_i sont non linéaires. La recherche d'une condition de non émulplification de fréquence conduit donc à étudier la stabilité vis à vis des perturbations initiales du système (IV.124). L'équation aux écarts peut alors s'exprimer sous la forme :

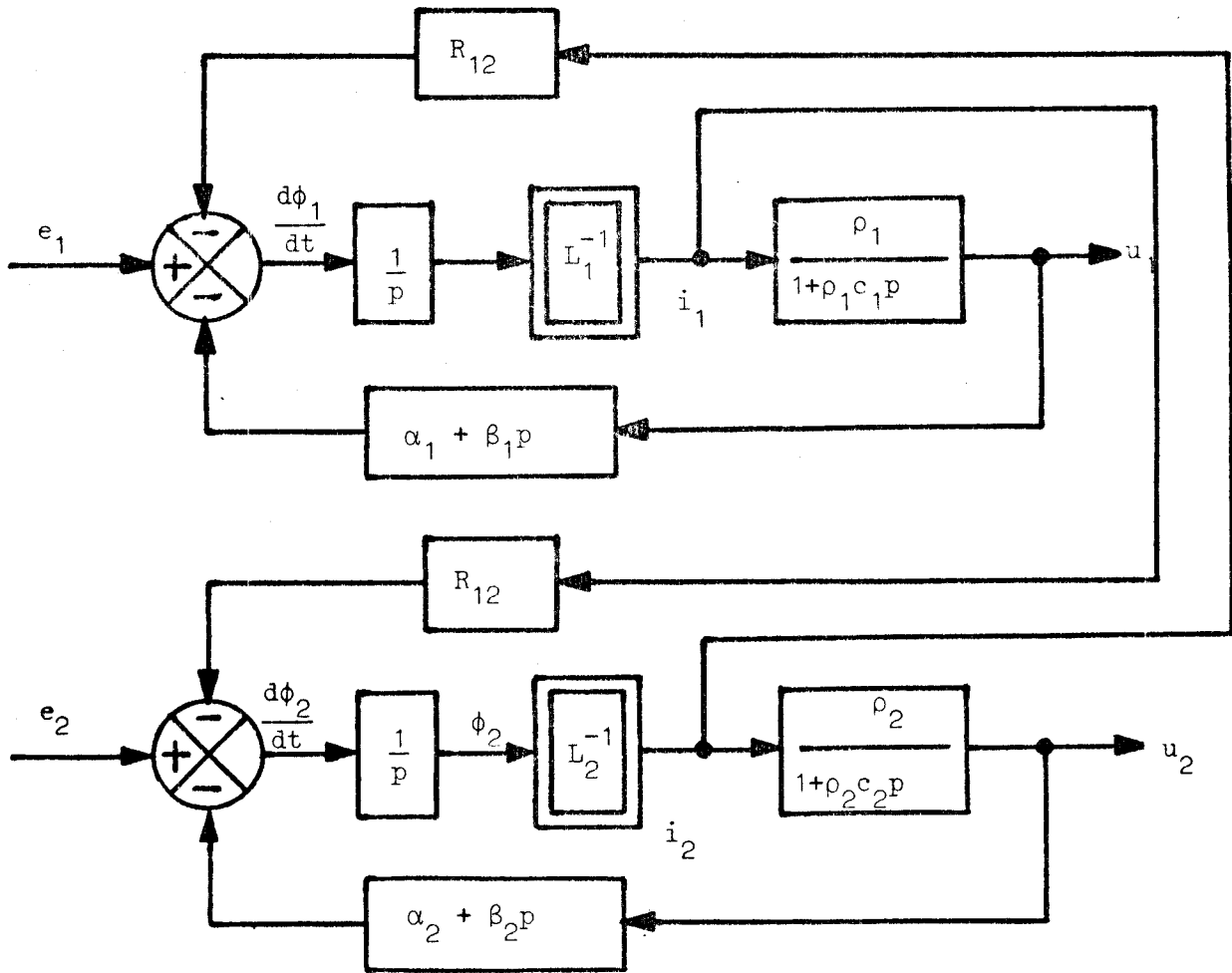


figure IV.7

$$\alpha_1 = 1 + \frac{R_1 + R_{12}}{\rho_1}$$

$$\beta_1 = (R_1 + R_{12}) C_1$$

$$\alpha_2 = 1 + \frac{R_2 + R_{12}}{\rho_2}$$

$$\beta_2 = (R_2 + R_{12}) C_2$$

$$\begin{matrix} \circ \\ z \end{matrix} = \begin{bmatrix} -(R_1+R_{12}) L_1^{*-1} & , & -R_{12} L_2^{*-1} & , & -1 & , & 0 \\ -R_{12} L_1^{*-1} & & -(R_2+R_{12}) L_2^{*-1} & , & 0 & , & -1 \\ \frac{1}{C_1} L_1^{*-1} & , & 0 & , & -\frac{1}{\rho_1 C_1} & , & 0 \\ 0 & , & \frac{1}{C_2} L_2^{*-1} & , & 0 & , & -\frac{1}{\rho_2 C_2} \end{bmatrix} z \quad (\text{IV.125})$$

Par contraction au second ordre à partir de la norme vectorielle :

$$p(z)^T = \begin{bmatrix} |z_1| + |z_2| , & |z_3| + |z_4| \end{bmatrix}$$

il vient :

$$\frac{d^+}{dt} p(z) \leq \begin{bmatrix} \max \left[-L_1^{*-1} R_1 , -L_2^{*-1} R_2 \right] , & 1 \\ \max \left(\frac{L_1^{*-1}}{C_1} , \frac{L_2^{*-1}}{C_2} \right) , & \max \left(-\frac{1}{\rho_1 C_1} - \frac{1}{\rho_2 C_2} \right) \end{bmatrix} p(z) \quad (\text{IV.126})$$

Des contraintes de non démultiplication de fréquences du réseau (IV.6) sont ainsi définies par les conditions suffisantes suivantes :

$$\begin{aligned} \max \left[-L_1^{*-1} R_1 , -L_2^{*-1} R_2 \right] &< 0 \\ \max \left[-L_1^{*-1} R_1 , -L_2^{*-1} R_2 \right] \cdot \max \left[-\frac{1}{\rho_1 C_1} , -\frac{1}{\rho_2 C_2} \right] - \max \left[\frac{L_1^{*-1}}{C_1} , \frac{L_2^{*-1}}{C_2} \right] &> 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.127})$$

IV.6. - Discrétisation d'une équation d'état continue non linéaire :

stabilité comparée du système continu et du système discret associé.

La résolution formelle des systèmes continus non linéaires ne peut généralement être envisagée à partir des méthodes analytiques usuelles. La recherche des solutions nécessite alors la mise en oeuvre de moyens numériques. Le traitement de l'information sous forme discrète implique dans ce cas la définition d'un modèle de même nature. Pour terminer ce chapitre, nous proposons en comparant les propriétés de stabilité d'un processus continu et d'un modèle discrétisé, de définir une méthode de discrétisation d'un type particulier.

IV.6.1. - Fonctions de Ljapunov déduites de la distance euclidienne :

Associons à un processus continu non linéaire décrit sous la forme de l'équation d'état matricielle (IV.128), une fonction v positive déduite de la distance euclidienne /27/

$$\dot{x} = A(t, x)x \quad (IV.128)$$

$$v = x^T x \quad (IV.129)$$

Un algorithme de discrétisation approchée simple peut être obtenu pour le pas de calcul Δt , en exprimant la relation qui lie le vecteur $x + \Delta t \frac{\dot{x}}{2}$ au vecteur $x - \Delta t \frac{\dot{x}}{2}$:

$$x + \frac{\Delta t}{2} \dot{x} = H^{-1}(A\Delta t) \left(x - \frac{\Delta t}{2} \dot{x} \right) \quad (IV.130)$$

$$H^{-1}(A\Delta t) = \left[I + \frac{A\Delta t}{2} \right] \left[I - \frac{A\Delta t}{2} \right]^{-1}$$

exprimons $\frac{dv}{dt}$ d'une part en fonction de x et d'autre part en fonction de

$x - \frac{\Delta t}{2} \overset{o}{x}$, il vient respectivement :

$$\frac{dv}{dt} = x^T (A + A^T) x \quad (IV.131)$$

$$\frac{dv}{dt} = (x - \Delta t \frac{\overset{o}{x}}{2})^T \left[H^{-1}(A) H^{-1}(A)^T - I \right] (x - \Delta t \frac{\overset{o}{x}}{2})$$

Il revient donc au même de dire que le système non linéaire (IV.128) est asymptotiquement stable si les conditions de stabilité continues appliquées à $A + A^T$ ou discrètes appliquées à $H^{-1}(A) H^{-1}(A)^T$ sont vérifiées.

En conséquence le système continu (IV.128) et le système discrétisé qui lui est associé par la transformation H^{-1} ont les mêmes propriétés de stabilité vis à vis de la fonction de Ljapunov de type euclidien (IV.129).

Réciproquement la transformation H^{-1} étant biunivoque il est possible d'associer au système discret (IV.132) le système (IV.133). Dans ce cas encore les propriétés de stabilité sont conservées pour la fonction de Ljapunov (IV.134) vis à vis de la transformation inverse H .

$$x_{n+1} = M(x_n, n) x_n \quad (IV.132)$$

$$H(M) = (M - I) \left(\frac{M + I}{2} \right)^{-1} : y = H(M) y. \quad (IV.133)$$

$$v_n = x_n^T x_n \quad (IV.134)$$

Cette transformation semble donc particulièrement intéressante puisqu'elle peut s'interpréter comme une méthode de discrétisation (Annexe 3) donnant au modèle discret le même caractère de stabilité qu'au modèle continu /28/,/29/.

Cette propriété toutefois n'est plus vérifiée en général pour d'autres types de fonctions de Ljapunov. Envisageons dans ce sens le cas des fonctions convexes.

IV.6.2. - Fonctions de Ljapunov convexes.

Soit $v(x)$ une fonction définie positive de type convexe. Dans ce cas l'inégalité triangulaire est vérifiée à priori et il découle de la définition des fonctions convexes la relation suivante :

$$v(x - \Delta t \frac{\overset{\circ}{x}}{2} + \Delta t dx) = v \left[(x - \Delta t \frac{\overset{\circ}{x}}{2})(1 - dt) + dt(x - \Delta t \frac{\overset{\circ}{x}}{2} + \Delta t \frac{dx}{dt}) \right] \quad (IV.135)$$

$$v(x - \Delta t \frac{\overset{\circ}{x}}{2} + \Delta t dx) \leq (1 - dt) v(x - \Delta t \frac{\overset{\circ}{x}}{2}) + dt v(x - \Delta t \frac{\overset{\circ}{x}}{2} + \Delta t \frac{dx}{dt})$$

Si l'on fait tendre dt vers zéro sans l'atteindre, l'inégalité (IV.135) conduit à écrire :

$$\frac{d}{dt} v(x - \Delta t \frac{\overset{\circ}{x}}{2}) \leq v(x + \Delta t \frac{\overset{\circ}{x}}{2}) - v(x - \Delta t \frac{\overset{\circ}{x}}{2}) \quad (IV.136)$$

Ainsi, si l'on choisit une même fonction convexe v pour étudier la stabilité du système continu (IV.128) et de son transformé discret (IV.130), les propriétés de stabilité déduites de l'utilisation de cette fonction v pour le système discrétisé, seront également vérifiées pour le système continu initial.

Les critères de stabilité basés sur l'utilisation des normes scalaires des normes vectorielles ou des distances se ramènent généralement à l'utilisation de fonctions de Ljapunov convexes. C'est en particulier le cas pour les critères que nous avons présentés dans ce chapitre. Dans ces conditions, lorsqu'un système continu est discrétisé en vue d'un traitement numérique par la transformation H^{-1} , il est possible à partir d'une utilisation de tels critères sur la forme discrétisée, de déduire les mêmes propriétés de stabilité pour le

système continu dont il est issu.

Notons encore une fois les conditions particulières requises pour transposer ainsi du domaine discret au domaine continu les propriétés de stabilité d'un processus.

- (i) L'algorithme de discrétisation est impérativement basé sur l'utilisation de la transformation homographique H^{-1} .
- (ii) Le critère utilisé pour l'étude de la stabilité du système discrétisé revient à mettre en oeuvre une fonction de Ljapunov convexe.

Conclusion.

L'utilisation de la notion de norme vectorielle a permis de mettre en évidence plusieurs critères de stabilité déduits des nouvelles méthodes de contraction présentées au chapitre III. L'utilisation de systèmes de comparaison non linéaires nous a ainsi amené à élargir sensiblement la classe des systèmes continus non linéaires qu'il est possible d'étudier ainsi. De ce point de vue, la démonstration de la conjecture d'Aizerman peut être considérée comme l'un des principaux apports de ces techniques de majoration.

Une autre contribution importante est relative à la définition d'un nouveau type de fonction de Ljapunov scalaire. Cette fonction a été utilisée d'une façon presque systématique dans les démonstrations des critères de stabilité proposés dans ce chapitre. Ces critères sont d'une mise en oeuvre simple mais impliquent toutefois que la matrice pseudo-majorante obtenue par contraction soit l'opposée d'une M-matrice.

Enfin, lorsque le système de comparaison est décrit sous la forme de Lur'e Postnikov, le critère de Popov conduit à l'énoncé de conditions suffisantes de stabilité.

BIBLIOGRAPHIE CHAPITRE IV

- /1/ A.N. MICHEL and D.W. PORTER
"Stability analysis of composite systems"
IEEE - Trans. AC - Vol. 15 - n° 4 - 1972 - pp 537-541
- /2/ M. ARAKI and B. KONDO
"Stability and Transient behaviour of composite systems"
Int. J. Cont. - Vol. 15 n° 4 - 1972 - pp 751-763
- /3/ D.D. ŠILJAK
"Stability of large-scale systems"
IFAC 5th World Congress - 1972 - C-32 - pp 1-11
- /4/ A.N. MICHEL
"Stability analysis of interconnected systems"
Bericht - Nr 4 - Ber. Mat. Sekt. Forsch. - Graz - 1973
- /5/ A.N. MICHEL
"Stability analysis of interconnected systems"
SIAM J. Cont. - Vol. 12 - n° 3 - 1974 - pp 554-579
- /6/ W.E. THOMPSON
"Exponential stability of interconnected systems"
I.E.E.E Trans. AC - Vol. AC-15 - n° 4 - 1970 - pp 504-506
- /7/ Lj. T. GRUJIĆ and D.D. ŠILJAK
"Stability of large-scale systems with stable and unstable subsystems"
Proc. 1972 - JACC Conf. Stanf. - 1972 - pp 550-555
- /8/ Lj. T. GRUJIĆ and D.D. ŠILJAK
"Asymptotic stability and instability of large-scale systems"
I.E.E.E Trans. AC - Vol. AC-18 - n° 6 - 1973 - pp 636-645

- /9/ S. WEISSENBERGER
"Stability Regions of Large-scale systems"
Automatica - Vol. 9 - 1973 - pp 653-663
- /10/ Lj. T. GRUJIC
"Stability analysis of large-scale systems with stable and unstable subsystems"
Int. J. Control - Vol. 20 - n° 3 - 1974 - pp 453-463
- /11/ V.M. POPOV
"Hyperstability of control systems"
Springer Verlag - Berlin - 1973
- /12/ Lj. T. GRUJIC
"On multi-level absolute stability analysis of large-scale systems"
Part. I : *"The Popov method, the comparaison principle and time invariant systems"*
Automatika - n° 1-2 - 1974 - pp 67-72
- /13/ Lj. T. GRUJIC
"On multi-level absolute stability analysis of large-scale systems"
Part. II : *"The Lyapunov method, the comparaison principle and time varying systems"*
Automatika - n° 4-5 - 1974 - pp 155-161
- /14/ W. HAHN
"Stability of motion"
Springer Verlag - Berlin - 1967
- /15/ F.R. GANTMACHER
"Théorie des matrices"
Dunod Paris - 1966 - Vol. 2
- /16/ Z. BUBNICKI
"On the linear conjecture in the deterministic and stochastic stability of discrete systems"
I.E.E.E - Trans. AC Vol. AC-13 - Ap. 1968 - pp 199-200

- /17/ A.M. AIZERMAN
"On a problem concerning the stability in the large of dynamical systems"
en Russe - Usp. Mat. Nauk - 4 - 1949 - pp 187-188
- /18/ J.C. GENTINA , P. BORNE et F. LAURENT
"Stabilité des systèmes continus non-linéaires de grande dimension"
RAIRO - J.3 - 1972 - pp 69-77
- /19/ T. WAZEWSKI
"Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications"
Ann. Soc. Pol. Math. - 23 - 1950 - pp 112-166
- /20/ W.M. MATROZOV
"Comparaison principe and vector Lyapunov functions"
en russe - Diff. Uravn. - Vol. 4 n° 8 - 1968 - pp 1374-1386
vol. 4 n°10 - 1968 - pp 1740-1752
vol. 5 n° 7 - 1969 - pp 1171-1185
vol. 5 n°12 - 1969 - pp 2128-2143
- /21/ J.C. GENTINA , P. BORNE et F. LAURENT
"On a study of stability and sensitivity of large continuous non-linear systems under uncertainty"
Proc. 3rd IFAC - Symp. Sens. Adapt. Opt. Ischia - 1973 - pp 412-417
- /22/ P. BORNE , J.C. GENTINA
"On the stability of large non-linear systems"
JACC - 1974 - Austin Texas
- /23/ F. LAURENT , P. VIDAL
"Sur une condition suffisante d'unicité de la réponse d'un système échantillonné non-linéaire à une sollicitation quelconque".
C.R.A.S - T. 264 - Série A - 1967 - p 779

- /24/ C. MAIZIERES , F. LAURENT
"Sur l'unicité de la réponse d'un système continu non-linéaire"
C.R.A.S. Paris - Série A - 1967 - T. 264 - pp 1157-1159
- /25/ J.C. GENTINA , P. BORNE , F. LAURENT , C. MAIZIERES
"Sur une condition suffisante d'unicité des systèmes continus non-linéaires de grande dimension"
Congreso Nacional Automatica - 1972 - T. 1 - Barcelone - Oct. 1972
pp 43-51
- /26/ M. PANET , F. LAURENT , C. MAIZIERES
"Sur l'unicité de la réponse des systèmes multivariables non-linéaires. Application aux réseaux électriques"
1er Symposium I.F.A.C sur les systèmes multivariables
Düsseldorf - 7-8 - Oct. 1968
- /27/ S. BARNETT , C. STOREY
"Matrix Methods in stability theory"
Ed. Nelson - 1970 - pp 100-103
- /28/ P. BORNE , J.C. GENTINA
"Definition of a matricial transformation permitting the discretization of a set of differential equations"
Congrès IFIP Stockholm - 5-10 Août 1974
- /29/ J.C. GENTINA , R. QUET
"Definition of quasi optimal solutions in continuous optimal control problems by homographic transformation"
Congrès IFAC Varna Opt. Math. App. Aspects - Oct. 74 - pp 315-323

CHAPITRE V

Présentation d'une commande autoadaptative de la surchauffe d'une centrale thermique

Introduction

Dans ce dernier chapitre nous proposons à titre d'application d'étudier la stabilité du système de surchauffe d'une centrale thermique et plus précisément d'un élément de la centrale de Loire sur Rhône. De telles unités présentent un intérêt particulier du fait de leurs possibilités d'utilisation en apport variable d'énergie. C'est le cas notamment de la centrale étudiée pour laquelle les puissances fournies peuvent varier de 120 à 250 MW. Une difficulté apparaît toutefois dans la mise au point des régulations d'un ensemble aussi complexe. En effet, les paramètres de structure du système évoluent en fonction de la puissance demandée, ce qui confère au processus un caractère non linéaire marqué. Il semble cependant qu'un ensemble de plusieurs études de synthèses locales effectuées pour des régimes de puissances constantes, convenablement choisies entre 120 et 250 MW, puissent conduire par approximation à définir les caractéristiques d'un réglage adapté à de telles variations de structure.

L'utilisation des méthodes d'études présentées antérieurement, et en particulier des critères de stabilité, vont permettre d'effectuer à la fois une étude théorique de la stabilité et la détermination d'un réglage adaptatif d'une installation de surchauffe. En effet une représentation d'état du surchauffeur permet d'étudier globalement les propriétés de stabilité et de définir un mode de réglage à structure continuellement variable avec la puissance demandée à l'installation.

V.1. - Position du problème, schéma de l'installation.

V.1.1. - Générateur de vapeur.

L'installation de surchauffe peut être considérée comme l'un des éléments essentiels du générateur de vapeur d'une centrale thermique. Afin de préciser l'ensemble des éléments associés à l'installation de surchauffe, il convient de définir les principales grandeurs d'entrée et sortie d'un générateur de vapeur : /1/

- θ_{VI} : température de la vapeur entre les deux surchauffeurs secondaires
- θ_{VS} : température de la vapeur à la sortie du surchauffeur final
- θ_{VR} : température de vapeur à la sortie du résurchauffeur final
- P_V : pression de vapeur à l'admission de la turbine
- N_V : niveau dans le ballon
- O_p : opacité des fumées

Les commandes indépendantes auxquelles ces sorties sont associées sont respectivement :

- C_{Qd} : débit d'eau d'injection de désurchauffe
- C_{Rcy} : position des registres de recyclage
- C_f : débit de combustible
- C_E : débit d'eau d'alimentation
- C_{EX} : excès d'air.

La chaudière alimente en vapeur le corps haute pression d'une turbine.

Schéma global de la centrale.

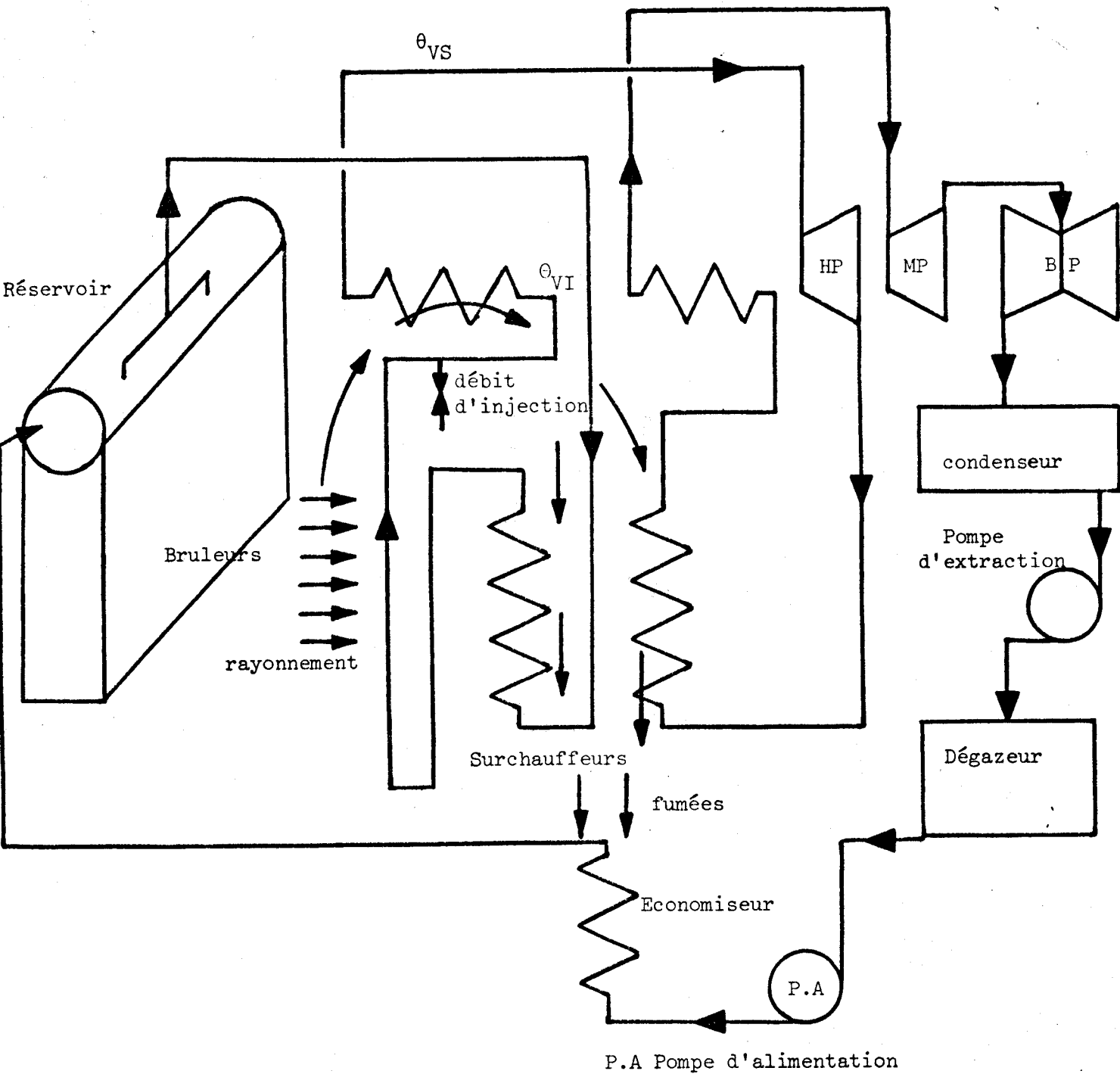


figure V.1



Si l'on suppose une évolution de faible amplitude autour d'un régime de charge donné, un tel générateur de vapeur peut être représenté par une matrice de transfert correspondant au modèle d'un système linéaire multivariable. Une telle représentation n'a de sens qu'à charge constante.

$$Y(p) = Z(p) \cdot E(p)$$

$$\begin{cases} Y^T = [\theta_{VI}, \theta_{VS}, \theta_{VR}, P_V, N_V, O_p, Q_V] \\ E^T = [C_{Qd}, C_{Rcy}, C_F, C_E, C_{EX}, OS] \end{cases} \quad (V.1)$$

La position OS des soupapes d'admission du corps haute pression fixe le débit de vapeur Q_V injecté.

Les fonctions de transfert de la matrice Z_p ont été déterminées par analyse indicielle, et linéarisation autour de 3 régimes de fonctionnement particulier : 120 MW, 180 MW et 250 MW.

Les caractéristiques spécifiques du surchauffeur sont définies dans le tableau I. Les fonctions de transfert $\mathcal{L}_1(p)$ ou $\mathcal{L}_2(p)$ n'ont de sens que lorsque la puissance fournie $\mathcal{Q}_o$ reste constante.

Les transmittances $\mathcal{L}_1(p)$ et $\mathcal{L}_2(p)$ seront symbolisées sous la forme :

$$\frac{\theta_{VS}(p)}{C_{Qd}(p)} = \mathcal{L}_1(p) = \frac{l_1}{p^3 + b_0 p^2 + b_1 p + b_2} \quad (V.2)$$

$$\frac{\hat{\theta}_{VI}(p)}{C_{Qd}(p)} = \mathcal{L}_2(p) = \frac{l_2}{p^2 + d_0 p + d_1}$$

Tableau 1

9

	120 MW	180 MW	250 MW
$\frac{V_I(p)}{Q_d(p)} = \alpha_2(p)$	$\frac{0.58}{(1+65p)(1+218p)}$	$\frac{0.38}{(1+32p)(1+196p)}$	$\frac{0.32}{(1+17p)(1+180p)}$
$\frac{V_S(p)}{Q_d(p)} = \alpha_1(p)$	$\frac{0.56}{(1+233p)(1+242p+1.88 \cdot 10^{-4} p^2)}$	$\frac{0.40}{(1+177p)(1+161p+1.026 \cdot 10^{-4} p^2)}$	$\frac{0.33}{(1+24p)(1+262p+1.87 \cdot 10^{-4} p^2)}$

V.1.2. - Installation de surchauffe

L'installation mise en service sur le site de Loire/Rhône comporte en plus de la chaine finale de surchauffe, une boucle de température intermédiaire (figure V.2).

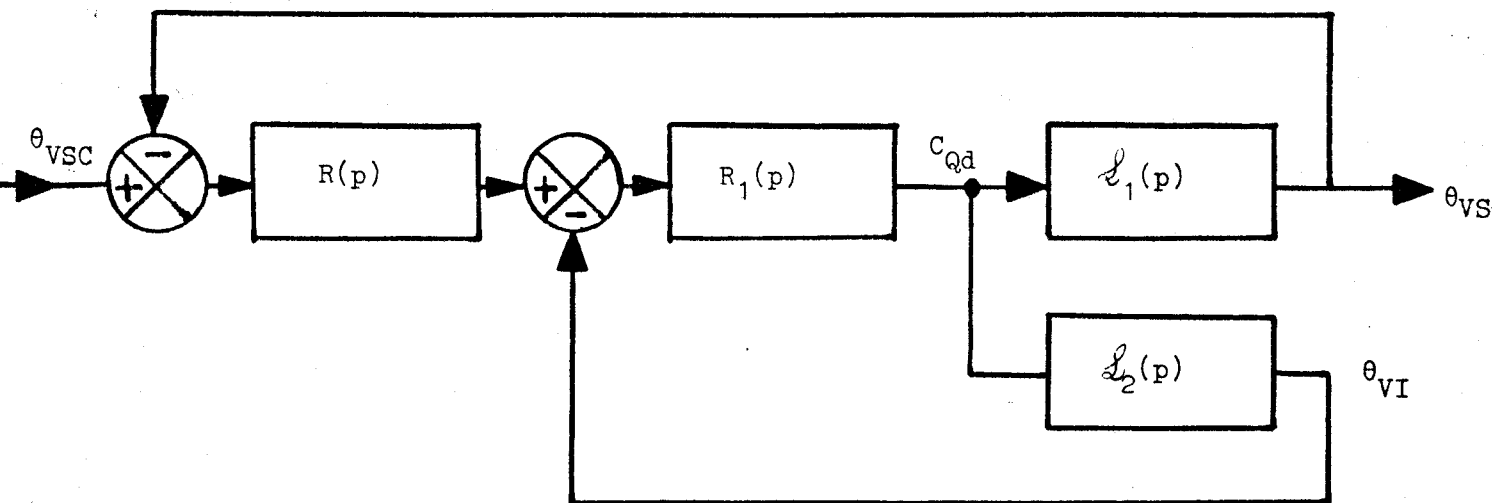


figure V.2

Dans cet asservissement θ_{VSC} représente la température de consigne; la commande C_{Qd} de débit d'injection de désurchauffe se trouve perturbée par les variations de régime de puissance de la centrale.

Les réglages des correcteurs $R(p)$ et $R_1(p)$ actuellement mis en oeuvre sur la centrale ont été calculés de la manière suivante /2/. Autour des 3 régimes d'identification et pour un choix de correcteurs PID pour $R(p)$ et PD pour $R_1(p)$, le constructeur a calculé 3 réglages de façon à minimiser le critère CR :

$$CR = \int_0^{\infty} \theta_{VS}^2 dt + \alpha \int_0^{\infty} \left(\frac{d}{dt} C_{Qd} \right)^2 dt \quad (V.3)$$

Les coefficients ont tout d'abord été déterminés à 120 MW c'est en effet pour ce régime que l'asservissement est le moins stable.

Sur cette base, la transposition à 250 MW d'un réglage de l'asservissement calculé pour 120 MW a donné des performances correctes à cette charge. Pour les 3 régimes particuliers étudiés, les réglages différents sont adaptés à la puissance demandée à la centrale. Le contrôle adaptatif a donc été défini comme l'interpolation des résultats particuliers obtenus pour l'asservissement du surchauffeur à 120, 180 et 250 MW. Cette étude a été complétée par une simulation qui a permis de confirmer le bien fondé d'une telle conjecture et de vérifier le bon comportement du surchauffeur aux régimes intermédiaires.

Nous proposons dans ce chapitre de présenter une méthode d'étude théorique de la synthèse auto adaptative du surchauffeur en utilisant l'un des critères de stabilité énoncés aux chapitres précédents.

V.2. - Réglage auto adaptatif du surchauffeur avec chaîne de régulation principale.

V.2.1. - Formulation et présentation d'une méthode de synthèse adaptative.

Dans le schéma de régulation que nous proposons d'étudier, la mesure de température intermédiaire n'est plus utilisée pour la régulation. Dans ce cas la température intermédiaire n'est plus régulée ; ceci ne représente pas un inconvénient majeur puisque l'objectif essentiel dans l'asservissement du surchauffeur est relatif à la régulation de la température finale. L'asservissement étudié est représenté par le schéma bloc de la figure V.3 et correspond à l'une des solutions de régulation proposée par la direction des études et recherches d'EDF.

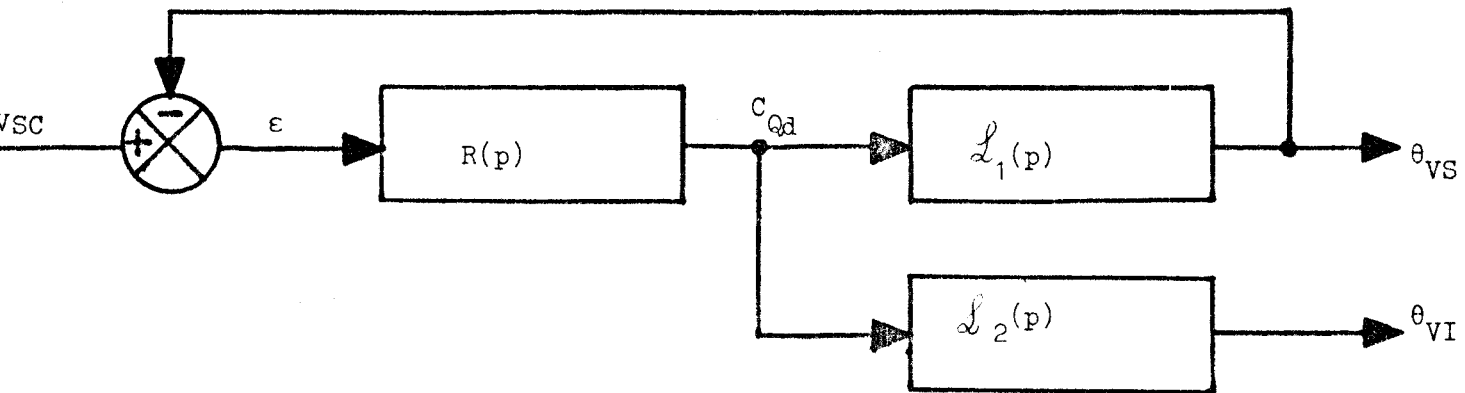


figure V.3

Afin de comparer les résultats de la méthode de synthèse proposée aux résultats réels déjà obtenus sur le site, le réseau correcteur $R(p)$ est supposé de même classe. Il s'agit d'un correcteur à triple action proportionnelle intégrale et dérivée (P.I.D.).

La fonction de transfert $\mathcal{L}_1(p)$ représente à puissance constante la transmittance

$$\frac{\theta_{VS}(p)}{C_{Qd}(p)}$$

Ce type d'installation peut éventuellement fonctionner à puissance variable dans la gamme 120/250 MW. Au cours des changements de régimes les représentations utilisant la transformée de Laplace ne sont plus adaptées. Il convient dans ce cas d'utiliser une représentation d'état telle que (V.4) permettant de tenir compte du caractère non linéaire de ce processus.

$$\begin{matrix} \circ \\ \theta \end{matrix} = \begin{bmatrix} -b_0(\mathcal{G}), & -b_1(\mathcal{G}), & -b_2(\mathcal{G}) \\ 1 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 1 & , & 0 \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} \ell_1(\mathcal{G}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} c_{Qd}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \theta_{VSC} - \theta_{VS} \\ \beta_1 \begin{matrix} \circ \\ \varepsilon \end{matrix} + \beta_2 \varepsilon + \beta_3 \int_0^t \varepsilon d\tau &= c_{Qd} \end{aligned} \quad (V.4)$$

$$\theta^T = [\theta_{VS}^{(2)}, \begin{matrix} \circ \\ \theta_{VS} \end{matrix}, \theta_{VS}]$$

Une première difficulté concerne la définition des conditions de stabilité du surchauffeur en raison des variations de structure dues à $\mathcal{G}$. La solution adoptée par EDF d'un réglage P.I.D adaptatif déduit de plusieurs études ponctuelles en régime statique peut être confirmée a priori à partir d'une étude de stabilité sur la représentation d'état (V.4).

La stabilité du processus doit en effet être assurée pour tout régime de fonctionnement compris entre 120 et 250 MW. De plus s'il est possible de donner autour de chaque point de fonctionnement $\mathcal{G}$ la variation admissible de puissance du point de vue de la stabilité, on peut envisager un pilotage des changements de point de fonctionnement minimisant le temps d'une telle opération tout en assurant à chaque instant la stabilité du surchauffeur.

La consigne θ_{VSC} restant constante, l'étude de stabilité peut être effectuée en régime autonome.

Le système bouclé est alors représenté par l'équation d'état (V.5)

$$\begin{bmatrix} \theta^{(4)} \\ \theta^{(3)} \\ \theta^{(2)} \\ \begin{matrix} \circ \\ \theta \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_0 & , & -c_1 & , & -c_2 & , & -c_3 \\ 1 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & & 1 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^{(3)} \\ \theta^{(2)} \\ \begin{matrix} \circ \\ \theta \end{matrix} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \theta_{VSC} \quad (V.5)$$

$$\theta^T = (\theta^{(3)}, \theta^{(2)}, \theta^{(1)}, \theta) ; \theta_{VS} = [0, \ell_1 \beta_1, \ell_1 \beta_2, \ell_1 \beta_3] \cdot \theta$$

$$\begin{aligned}c_0(\mathcal{G}) &= b_0(\mathcal{G}) \\c_1(\mathcal{G}) &= b_1(\mathcal{G}) + \ell_1(\mathcal{G}) \beta_1(\mathcal{G}) \\c_2(\mathcal{G}) &= b_2(\mathcal{G}) + \ell_1(\mathcal{G}) \cdot \beta_2(\mathcal{G}) \\c_3(\mathcal{G}) &= \ell_1(\mathcal{G}) \beta_3(\mathcal{G})\end{aligned}$$

V.2.2. - Etude de stabilité

La forme particulière de l'équation d'état (V.5) conduit à envisager l'application du théorème de stabilité (IV.6).

Les éléments non linéaires sont en effet isolés dans la première ligne de la matrice du régime libre de l'équation (V.5). Toutefois l'application directe de ce théorème ne peut conduire à un résultat sous cette forme. Il convient donc par un changement de base appropriée de donner à l'équation d'état (V.5) une structure particulière permettant une utilisation efficace du théorème de stabilité (IV.6).

Notons tout d'abord que ce changement de base (cf CH2, exemple) doit laisser les éléments non linéaires dans la première ligne de la matrice transformée et qu'il doit introduire un nombre minimum de paramètres pour assurer l'utilisation efficace du critère. Il convient donc d'utiliser ici un changement de base qui serait une forme généralisée de celui qui a été décrit en (II.28). La matrice $\mathcal{R}^{-1}$ doit donc être triangulaire supérieure et comporter au moins 3 paramètres indépendants, afin d'assurer la vérification des 3 premières conditions de Krasovskii.

Dans ce sens, la matrice de changement de base $\mathcal{R}^{-1}$ définie à la relation (V.6) permet de déduire de l'équation d'état (V.5) une nouvelle représentation (V.7) /3/

$$\mathcal{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_0} & -\frac{1}{\lambda_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1} & -\frac{1}{\lambda_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{bmatrix} \quad (V.6)$$

$$R^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \theta^{(3)} \\ \theta^{(2)} \\ \theta \\ \theta \\ \theta \end{bmatrix} = y$$

$$y = \begin{bmatrix} \lambda_0 - c_0, & c_0 - \lambda_0 + \frac{1}{\lambda_0} (\lambda_1 - c_1), & -\frac{1}{\lambda_0} (\lambda_1 - c_1) + \frac{1}{\lambda_1} (\lambda_2 - c_2), & -\frac{1}{\lambda_1} (\lambda_2 - c_2) - \frac{c_3}{\lambda_2} \\ \lambda_0, & \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \lambda_0, & \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}, & -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \\ 0, & \frac{\lambda_1}{\lambda_0}, & \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}, & -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \\ 0, & 0, & \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, & -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \end{bmatrix} y \quad (V.7)$$

En vue de l'utilisation du critère (IV.6), il convient de définir à partir de l'équation d'état (V.7) le système de comparaison (V.8) :

$$z = \begin{bmatrix} \lambda_0 - c_0, & |c_0 - \lambda_0 + \frac{1}{\lambda_0} (\lambda_1 - c_1)|, & |-\frac{1}{\lambda_0} (\lambda_1 - c_1) + \frac{1}{\lambda_1} (\lambda_2 - c_2)|, & |-\frac{1}{\lambda_1} (\lambda_2 - c_2) - \frac{c_3}{\lambda_2}| \\ |\lambda_0|, & \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \lambda_0, & |\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}|, & |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| \\ 0, & |\frac{\lambda_1}{\lambda_0}|, & \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}, & |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| \\ 0, & 0, & |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|, & \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \end{bmatrix} z \quad (V.8)$$

Les conditions de stabilité exprimées en (V.9) découlent alors directement de l'application du critère de stabilité (IV.6)

$$\Delta_0 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = < 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} & , & |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| \\ |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| & , & -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \end{vmatrix} > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \lambda_0 & , & |\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}| & , & |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| \\ |\frac{\lambda_1}{\lambda_0}| & , & \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} & , & |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| \\ 0 & , & |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| & , & -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \end{vmatrix} < 0$$

(v.9)

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \lambda_0 - c_0, |c_0 - \lambda_0 + \frac{1}{\lambda_0}(\lambda_1 - c_1)|, |-\frac{1}{\lambda_0}(\lambda_1 - c_1) + \frac{1}{\lambda_1}(\lambda_2 - c_2)|, |-\frac{1}{\lambda_1}(\lambda_2 - c_2) - \frac{c_3}{\lambda_2}| \\ |\lambda_0|, \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \lambda_0, |\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}|, |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| \\ 0, |\frac{\lambda_1}{\lambda_0}|, \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}, |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| \\ 0, 0, |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|, -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \end{vmatrix} > 0$$

Les contraintes sur $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ ne dépendent en fait que du choix des paramètres constants $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ définissant le changement de base.

La condition sur Δ_3 dépend à la fois du choix des paramètres λ_i mais aussi des paramètres de régulation $\beta_i(\mathcal{Q})$ et de la structure du système $b_i(\mathcal{Q})$.

L'étude de stabilité peut donc être associée à la synthèse de l'asservissement puisque la vérification des conditions de stabilité (V.9) conduit à imposer un réglage particulier des coefficients β_i .

V.2.3. - Synthèse d'un régulateur adaptatif.

Le choix du réglage $\beta_i(\mathcal{G})$ peut tout d'abord être effectué autour d'un point de fonctionnement particulier $\mathcal{G}_0$. Dans ce sens la condition de stabilité (V.9) définit à la limite la variation admissible $\Delta\mathcal{G}$ autour de $\mathcal{G}_0$.

Les paramètres λ_i introduits dans la matrice de changement de base $\mathcal{R}^{-1}$ peuvent être utilisés pour assurer la vérification des conditions sur Δ_0 , Δ_1 , Δ_2 , et les paramètres β_i pour définir le réglage et imposer la dernière condition sur Δ_3 .

Une solution particulièrement simple consiste, compte tenu de la forme de l'équation d'état (V.7) à annuler 3 des coefficients non linéaires de la matrice du régime libre du système de comparaison soit :

$$\begin{aligned} a_1 &= c_0 - \lambda_0 + \frac{1}{\lambda_0}(\lambda_1 - c_1) = 0 \\ a_2 &= -\frac{1}{\lambda_0}(\lambda_1 - c_1) + \frac{1}{\lambda_1}(\lambda_2 - c_2) = 0 \\ a_3 &= -\frac{1}{\lambda_1}(\lambda_2 - c_2) - \frac{c_3}{\lambda_2} = 0 \end{aligned} \tag{V.10}$$

il est alors possible d'exprimer chacun des paramètres λ_1 et λ_2 en fonction de c_0 et λ_0 .

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= c_1 + \lambda_0(\lambda_0 - c_0) \\ \lambda_2 &= c_2 + \lambda_1(\lambda_0 - c_0) \\ \lambda_2 &= -\frac{c_3}{\lambda_0 - c_0} \end{aligned} \tag{V.11}$$

L'élimination de λ_1, λ_2 dans les équations (V.11) permet de montrer que $\lambda_0 - C_0$ est solution de l'équation caractéristique de la matrice du régime libre (V.5) :

$$(\lambda_0 - C_0)^4 + C_0(\lambda_0 - C_0)^3 + C_1(\lambda_0 - C_0)^2 + C_2(\lambda_0 - C_0) + C_3 = 0 \quad (V.11')$$

Si λ_0 est choisi de telle manière que l'on ait $\lambda_0 - C_0 < 0$, les conditions de stabilité (V.9) se réduisent aux trois inégalités (V.12) :

$$\Delta_0 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0, \quad \Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 < 0 \quad (V.12)$$

il reste donc à étudier les possibilités de choix des paramètres λ_i tout en respectant les contraintes précédentes.

Afin d'une part d'imposer un régime de fonctionnement non oscillant et d'autre part d'assurer la vérification des contraintes (V.12), les racines de l'équation caractéristiques (V.11') seront supposées réelles et multiples.

Dans le cas particulier qui nous intéresse le coefficient C_0 est donné, il est cependant possible d'imposer une racine multiple d'ordre 3 que l'on notera $(-\alpha)$ et une racine simple $(-\beta)$. Les coefficients C_i définis à l'équation (V.5) s'expriment ainsi en fonction de α et β :

$$\begin{aligned} \alpha, \beta &> 0 \\ 3\alpha + \beta &= C_0 \\ 3\alpha(\alpha + \beta) &= C_1 \\ \alpha^2(\alpha + 3\beta) &= C_2 \\ \beta\alpha^3 &= C_3 \end{aligned} \quad (V.13)$$

Compte tenu des relations (V.11), il vient en fonction de α et β pour l'ensemble des paramètres λ_i :

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

$$\lambda_0 = 2\alpha + \beta$$

$$\lambda_1 = \alpha(\alpha + 2\beta)$$

$$\lambda_2 = \beta\alpha^2$$

(V.14)

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \lambda_0 = -\frac{3\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{\beta + 2\alpha} \quad -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\frac{\alpha\beta}{\alpha + 2\beta}$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = -\alpha \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2}{(\beta + 2\alpha)(\alpha + 2\beta)}$$

Les conditions de stabilité (V.12) s'écrivent alors sous la forme suivante :

$$\Delta_0 = -\frac{\alpha\beta}{\alpha + 2\beta} < 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\alpha \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2}{(\beta + 2\alpha)(\alpha + 2\beta)}, & \frac{\alpha\beta}{\alpha + 2\beta} \\ \frac{\alpha\beta}{\alpha + 2\beta} & , -\frac{\alpha\beta}{\alpha + 2\beta} \end{vmatrix} = \frac{\alpha^2\beta(\alpha^2 + 2\beta^2)}{(\alpha + 2\beta)^2(\beta + 2\alpha)} > 0$$

(V.15)

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{3\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{\beta + 2\alpha}, & \alpha \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2}{(\beta + 2\alpha)(\alpha + 2\beta)}, & \frac{\alpha\beta}{\alpha + 2\beta} \\ \alpha \frac{\alpha + 2\beta}{\beta + 2\alpha} & , -\alpha \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2}{(\beta + 2\alpha)(\alpha + 2\beta)}, & \frac{\alpha\beta}{\alpha + 2\beta} \\ 0 & , & \frac{\alpha\beta}{\alpha + 2\beta}, -\frac{\alpha\beta}{\alpha + 2\beta} \end{vmatrix} < 0$$

Les contraintes sur Δ_0 et Δ_1 étant toujours vérifiées, il ne reste donc qu'une seule condition à satisfaire sur Δ_2 :

$$\Delta_2 = \frac{\alpha^2\beta}{(\alpha + 2\beta)^2(\beta + 2\alpha)^2} \left[-2\alpha^4 - 2\beta^4 + \alpha\beta[4(\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta] \right] < 0 \quad (V.16)$$

la forme particulière de cette relation conduit à prendre pour paramètre $\mu = \frac{\beta}{\alpha}$, il vient dans ce cas :

$$\Delta_2 = \alpha^3 \cdot \frac{\mu}{(1+2\mu)^2(2+\mu)^2} \cdot [-2-2\mu^4 + \mu[4(1+\mu)^2 - 3\mu]] < 0 \quad (V.17)$$

puisque μ et α sont choisis positifs l'inégalité (V.17) est équivalente à l'inégalité (V.18)

$$-2\mu^4 - 2 + \mu[4(1+\mu)^2 - 3\mu] < 0 \quad (V.18)$$

D'où les contraintes sur le paramètre μ :

$$\begin{aligned} \mu &> 3.01 \\ \text{ou} \\ \mu &< \frac{1}{3.01} \end{aligned} \quad (V.19)$$

En conclusion si l'on choisit une valeur du paramètre μ telle que la contrainte (V.19) soit satisfaite, le système étudié sera asymptotiquement stable pour un régime de puissance $\mathcal{P}_0$ fixé, dans la gamme 120/250 MW.

Dans ce cas pour toute une gamme de régime de puissance, les paramètres de la régulation sont définis par les relations :

$$\begin{aligned} \alpha &> 3.01 \beta \\ b_0 &= c_0 = 3\alpha + \beta \\ b_1 + l_1 \beta_1 &= c_1 = 3\alpha(\beta + \alpha) \\ b_2 + l_1 \beta_2 &= c_2 = \alpha^2(\alpha + 3\beta) \\ b_3 + l_1 \beta_3 &= c_3 = \beta \alpha^3 \end{aligned} \quad (V.20)$$

Les paramètres b_0, b_1, b_2, b_3 étant fonction de $\mathcal{P}_0$, une première solution consiste à choisir un rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ constant pour tous les régimes de puissance. Dans ces conditions l'installation aura le même type de comportement quel que soit le régime de puissance, le temps de réponse étant toutefois différemment modulé en fonction de $\mathcal{P}_0$.

Pour $\beta = \mu\alpha$ il vient :

$\mu = \text{constante}$

$$\begin{cases} b_0 = c_0 = \alpha[3+\mu] \\ b_1 + \ell_1\beta_1 = c_1 = 3\alpha^2(1+\mu) \\ b_2 + \ell_1\beta_2 = c_2 = \alpha^3(1+3\mu) \\ \ell_1\beta_3 = c_3 = \mu\alpha^4 \end{cases} \quad (V.21)$$

$$\begin{cases} \lambda_0 = \alpha[2+\mu] \\ \lambda_1 = \alpha^2[1+2\mu] \\ \lambda_2 = \mu\alpha^3 \end{cases}$$

pour μ donné le réglage adaptatif est donc défini par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \ell_1\beta_1 &= 3 \cdot \frac{b_0^2(\mathcal{G}_0)}{(3+\mu)^2} (1+\mu) - b_1(\mathcal{G}_0) \\ \ell_1\beta_2 &= \frac{b_0^3(\mathcal{G}_0)}{(3+\mu)^3} (1+3\mu) - b_2(\mathcal{G}_0) \\ \ell_1\beta_3 &= \mu \frac{b_0^4(\mathcal{G}_0)}{(3+\mu)^4} \end{aligned} \quad (V.22)$$

Ce mode de controle assure à $\mathcal{G}_0$ donné la stabilité de l'installation. Il reste à étudier dans quelles conditions il est possible d'admettre autour de $\mathcal{G}_0$ une variation $\Delta\mathcal{G}$ du régime de fonctionnement tout en conservant le caractère de stabilité de l'installation.

Soit $\mathcal{G}_0$ un régime de consigne pour lequel la compensation adoptée est définie par les relations (V.22) et qui compte tenu de la vérification des contraintes (V.12) est stable en $\mathcal{G}_0$. Notons α' , β' les valeurs des racines caractéristiques obtenues pour $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_0 + \Delta\mathcal{G}$.

$$\alpha' = \frac{c_0(\mathcal{G}_1)}{3+\mu}, \quad \beta' = \mu\alpha' \quad (V.23)$$

dans ces conditions les éléments a_1, a_2, a_3 de la première ligne de la matrice (V.7) ne sont plus nuls, et s'expriment à partir des relations (V.24) :

$$a_0(\alpha', \alpha) = \lambda_0(\alpha) - C_0(\alpha') = \alpha(2+\mu) - \alpha'(3+\mu)$$

$$\begin{cases} a_1(\alpha', \alpha) = C_0(\alpha') - \frac{C_1(\alpha')}{\lambda_0(\alpha)} + \frac{\lambda_1(\alpha)}{\lambda_0(\alpha)} - \lambda_0(\alpha) \\ a_1(\alpha', \alpha) = \alpha \left[\frac{\alpha'}{\alpha} (3+\mu) - \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)^2 \frac{3(1+\mu)}{2+\mu} + \frac{1+2\mu}{2+\mu} - 2 - \mu \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2(\alpha', \alpha) = \frac{C_1(\alpha')}{\lambda_0(\alpha)} - \frac{C_2(\alpha')}{\lambda_1(\alpha)} + \frac{\lambda_2(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)} - \frac{\lambda_1(\alpha)}{\lambda_0(\alpha)} \\ a_2(\alpha', \alpha) = \alpha \left[3 \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)^2 \frac{1+\mu}{2+\mu} - \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)^3 \frac{1+3\mu}{1+2\mu} + \frac{\mu}{1+2\mu} - \frac{1+2\mu}{2+\mu} \right] \end{cases} \quad (V.24)$$

$$\begin{cases} a_3(\alpha', \alpha) = \frac{C_2(\alpha')}{\lambda_1(\alpha)} - \frac{C_3(\alpha')}{\lambda_2(\alpha)} - \frac{\lambda_3(\alpha)}{\lambda_2(\alpha)} \\ a_3(\alpha', \alpha) = \alpha \left[\left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)^3 \frac{1+3\mu}{1+2\mu} - \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)^4 - \frac{\mu}{1+2\mu} \right] \end{cases}$$

$$a_1(\alpha, \alpha) = a_2(\alpha, \alpha) = a_3(\alpha, \alpha) = 0$$

La contrainte déduite de l'utilisation du théorème de stabilité (IV.6) conduit alors, compte tenu du choix particulier du paramètre μ , à la condition V.25 exprimée à partir du système de comparaison.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \lambda_0(\alpha) - c_0(\alpha') & |a_1(\alpha', \alpha)| & |a_2(\alpha', \alpha)| & |a_3(\alpha', \alpha)| \\ \lambda_0(\alpha) & \frac{\lambda_1(\alpha)}{\lambda_0(\alpha)} - \lambda_0(\alpha) & \frac{\lambda_1(\alpha)}{\lambda_0(\alpha)} - \frac{\lambda_2(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)} & \frac{\lambda_2(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)} \\ 0 & \lambda_0(\alpha) & \frac{\lambda_2(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)} - \frac{\lambda_1(\alpha)}{\lambda_0(\alpha)} & \frac{\lambda_2(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_2(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)} & -\frac{\lambda_2(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)} \end{vmatrix} > 0 \quad (V.25)$$

soit encore :

$$\Delta_3 = \alpha^3 \frac{\mu}{(1+2\mu)^2(2+\mu)^2} \left[-2 - 2\mu^4 + \mu[4(1+\mu)^2 - 3\mu] \right] [2(2+\mu) - c_0(\alpha')] \quad (V.26)$$

$$- \alpha^3 \mu \left[|a_2(\alpha, \alpha')| + |a_3(\alpha, \alpha')| \right] - \alpha^3 \frac{\mu(1+2\mu^2)}{(1+2\mu)^2} |a_1(\alpha, \alpha')| > 0$$

La limite de validité de cette contrainte conduit alors à définir deux valeurs particulières du rapport $\frac{\alpha'}{\alpha}$ donc de la variation admissible de puissance $\Delta \mathcal{P}$.

V.3. - Application pratique

Dans le cas particulier des valeurs du tableau II obtenues lors de l'identification, il est possible de donner une loi d'évolution des paramètres b_0, b_1, b_2 .

$\mathcal{G}$	120 MW	180 MW	250 MW
b_0	0.01716	0.02134	0.0557
b_1	$1.084 \cdot 10^{-4}$	$1.8612 \cdot 10^{-4}$	$6.373 \cdot 10^{-4}$
b_2	$2.2829 \cdot 10^{-7}$	$5.5065 \cdot 10^{-7}$	$2.228 \cdot 10^{-6}$

tableau II

Un changement d'échelle des temps correspondant à une accélération par 100 du modèle initial permet de définir pour ℓ_1 , b_0 , b_1 et b_2 les lois :

$$\begin{aligned}\ell_1(\mathcal{G}) &= 4,475 \cdot 10^{-1} \mathcal{G}^2 - 1,145 \cdot 10^{-1} \mathcal{G} + 1,278 \cdot 10^{-1} \\ b_0(\mathcal{G}) &= 1,705 \mathcal{G}^3 + 0,083 \mathcal{G} + 1,716 \\ b_1(\mathcal{G}) &= 2,726 \mathcal{G}^{5/2} + 0,029 \mathcal{G} + 1,084 \\ b_2(\mathcal{G}) &= 3,073 \mathcal{G}^{5/2} + 0,118 \mathcal{G} + 0,228\end{aligned}\quad (V.27)$$

$$\frac{\theta_{VS}}{C_{Qd}} = \frac{\ell_1}{p^3 + b_0 p^2 + b_1 p + b_2}$$

$$\mathcal{G} \in [0, 1.3] \quad \mathcal{G} = 0 \text{ pour } 120 \text{ MW}, \mathcal{G} = 1.3 \text{ pour } 250 \text{ MW}$$

Nous avons choisi une valeur de $\mu = \frac{1}{3,616}$, dans ce cas la condition (V.19) est vérifiée et la stabilité assurée pour tout régime statique de fonctionnement compris entre 120 et 250 MW.

Il vient :

$$\begin{cases} \begin{cases} c_0 = 3,276 \alpha \\ c_1 = 3,829 \alpha^2 \\ c_2 = 1,829 \alpha^3 \\ c_3 = 0,276 \alpha^4 \end{cases} & \begin{cases} \lambda_0 = 2,276 \alpha \\ \lambda_1 = 1,553 \alpha^2 \\ \lambda_2 = 0,276 \alpha^3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \lambda_0 = -1,594 \alpha \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = 0,504 \alpha \\ -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0,178 \alpha \end{cases}\quad (V.28)$$

en notant $\frac{\alpha'}{\alpha} = \rho$, le déterminant Δ_3 s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_3}{\alpha^4} &= -0,002208 + 0,00318\rho - |0,433\rho - 0,223\rho^2 - 0,211| \\ &\quad - 0,276 \left[|1,682\rho^2 - 1,178\rho^3 - 0,504| + |1,178\rho^3 - \rho^4 - 0,178| \right]\end{aligned}\quad (V.29)$$

la contrainte de stabilité s'exprime sous la forme de l'inégalité (V.30) :

$$\frac{\Delta_3}{\alpha^4} > 0 \quad (V.30)$$

et conduit à une variation admissible du rapport $\frac{\alpha'}{\alpha} = \rho$:

$$0.916 < \rho < 1.05 \quad (V.31)$$

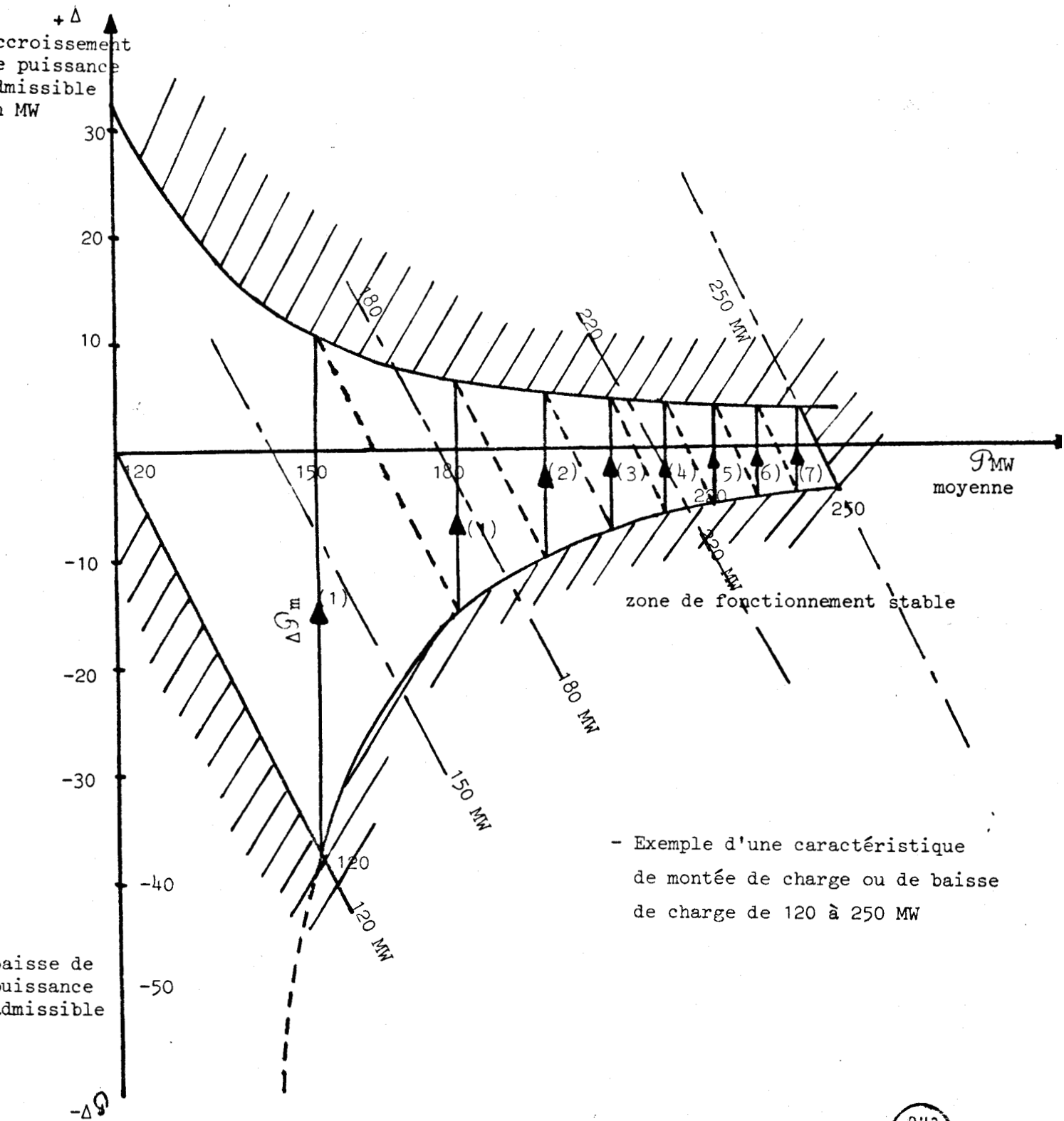
la relation $\alpha = f(\mathcal{G})$ peut s'exprimer sous la forme (V.32)

$$\alpha = 0.5204 \mathcal{G}^3 + 0.025 \mathcal{G} + 0.524 \quad (V.32)$$

Les diverses possibilités de variation de régime autour d'un point de fonctionnement donné entre 120 et 250 MW, peuvent alors s'exprimer sous la forme de la figure V.4. Les résultats chiffrés sont donnés dans le tableau III et exprimés en temps réel.

$\mathcal{G}_{MW}$	120	150	180	220	250
α/s^{-1}	$0.523 \cdot 10^{-2}$	$0.545 \cdot 10^{-2}$	$0.651 \cdot 10^{-2}$	$1.069 \cdot 10^{-2}$	$1.70 \cdot 10^{-2}$
β/s^{-1}	$0.145 \cdot 10^{-2}$	$0.151 \cdot 10^{-2}$	$0.180 \cdot 10^{-2}$	$0.296 \cdot 10^{-2}$	$0.47 \cdot 10^{-2}$
$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \lambda_0/s^{-1}$	$-0.835 \cdot 10^{-2}$	$-0.868 \cdot 10^{-2}$	$-1.038 \cdot 10^{-2}$	$-1.703 \cdot 10^{-2}$	$-2.710 \cdot 10^{-2}$
$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}/s^{-1}$	$-2.64 \cdot 10^{-2}$	$-0.275 \cdot 10^{-2}$	$0.328 \cdot 10^{-2}$	$-0.538 \cdot 10^{-2}$	$-0.857 \cdot 10^{-2}$
$-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}/s^{-1}$	$-0.093 \cdot 10^{-2}$	$-0.097 \cdot 10^{-2}$	$-0.116 \cdot 10^{-2}$	-0.1910^{-2}	$-0.303 \cdot 10^{-2}$
$\Delta \mathcal{G}_{MW}$	+ 32	+ 12	+ 6	+ 3.3	+ 2.6
$-\Delta \mathcal{G}_{MW}$		- 60	- 11	- 6.2	- 4
$\Delta \mathcal{G}_{T^{MW}}$		72	17	9.5	6.6

Tableau III



Variation de puissance admissible autour d'un régime donné

figure V.4

Ce graphique appelle essentiellement deux remarques.

Tout d'abord il convient de souligner que l'évolution de la racine β est croissante avec la puissance $\mathcal{P}$ de l'installation. En conséquence, ce surchauffeur est sensiblement plus stable à 250 MW qu'à 120 MW.

En outre le caractère non linéaire de la caractéristique $\beta(\mathcal{P})$ explique la possibilité d'une plus grande variation de puissance à 120 MW qu'à 250 MW. Ces deux résultats ne semblent donc pas en contradiction (figure V.5)

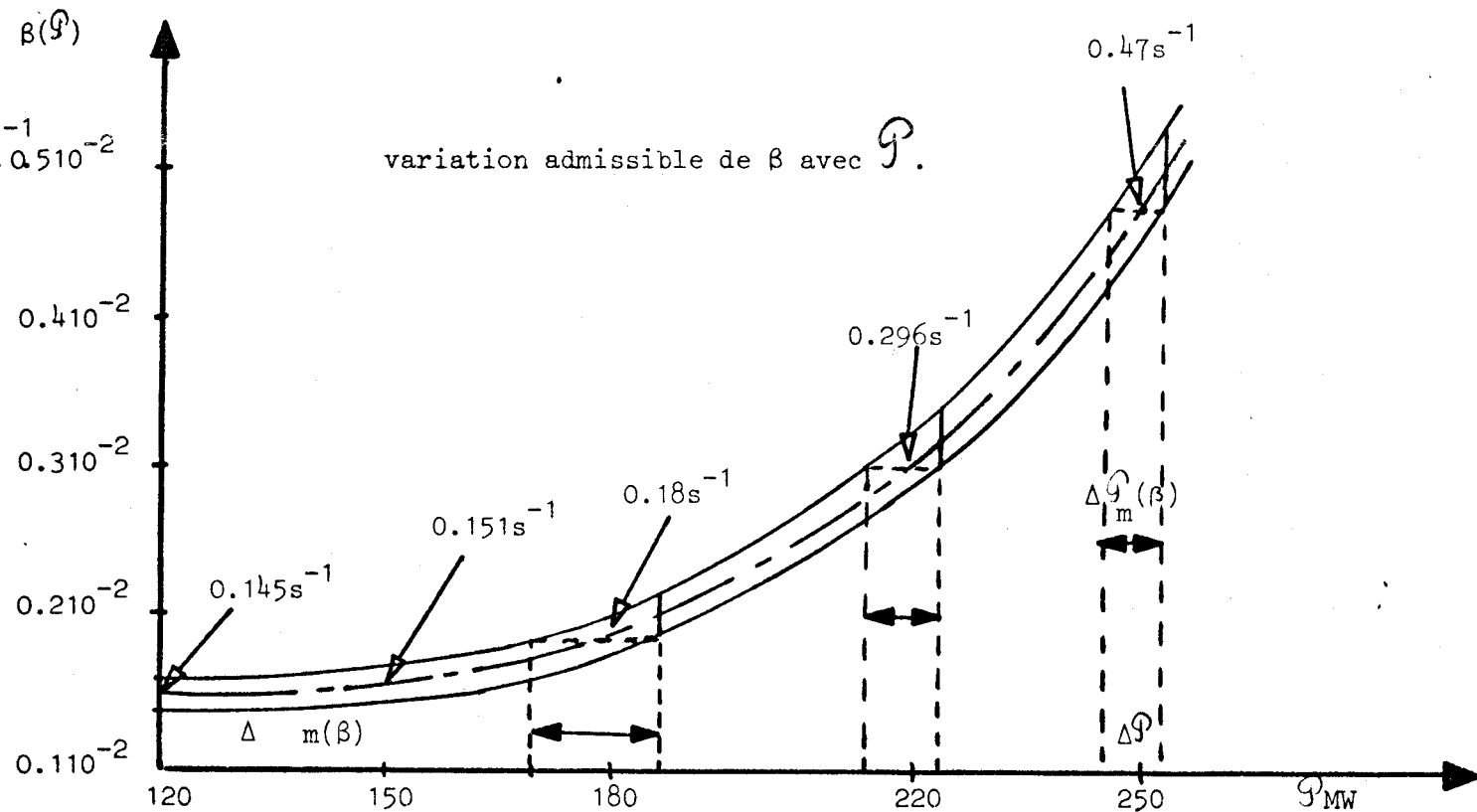


figure V.5

Ces résultats sont dans l'ensemble en accord avec les résultats expérimentaux observés sur le site.

Notons tout d'abord qu'au régime de fonctionnement établi à 250 MW les réglages proposés dans ce chapitre et effectués par E D F sont assez proches. L'adaptation des paramètres β_i est cependant différente, toutefois le caractère croissant de β_1 et β_2 avec la puissance demandée est bien conservé.

	Réglage E D F	Réglage proposé
C_0/s^{-1}	$5.57 \cdot 10^{-2}$	$5.57 \cdot 10^{-2}$
C_1/s^{-2}	$9.67 \cdot 10^{-4}$	$11.05 \cdot 10^{-4}$
C_2/s^{-3}	$7.72 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-6}$
C_3/s^{-4}	$2.72 \cdot 10^{-8}$	$2.31 \cdot 10^{-8}$

Tableau IV

Signalons d'autre part que des essais de changement de régime ont été effectués dans le cas du réglage E D F sur la base d'une variation de 25 MW autour de 120, 180 et 250 MW. Le temps de réponse à une baisse de régime ou à un accroissement de régime est de l'ordre de 1000 à 1500 s. L'utilisation du réglage proposé conduit à des résultats comparables à forte puissance, il semble cependant possible d'accélérer notablement les opérations de changement de consigne entre 120 et 180 MW.

b - Réglage à temps de réponse imposé.

Une autre méthode de réglage consiste à garder constant le pôle le moins stable β . Dans ce cas le temps de réponse de l'installation, essentiellement fonction de ce pôle, évolue peu avec la puissance demandée. Ce point de vue peut conduire à une amélioration sensible des limites de stabilité pour un point de fonctionnement donné.

Si l'on prend le cas du surchauffeur étudié ici et en imposant à la racine la valeur $0.145 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, il vient pour $\mathcal{G}$ les possibilités de variations suivantes autour d'un point donné de fonctionnement

$$- 12 \text{ MW} < \Delta \mathcal{G} < 12 \text{ MW}$$

$$\text{soit encore : } \Delta \mathcal{G}_m = 24 \text{ MW} \quad (\text{V.33})$$

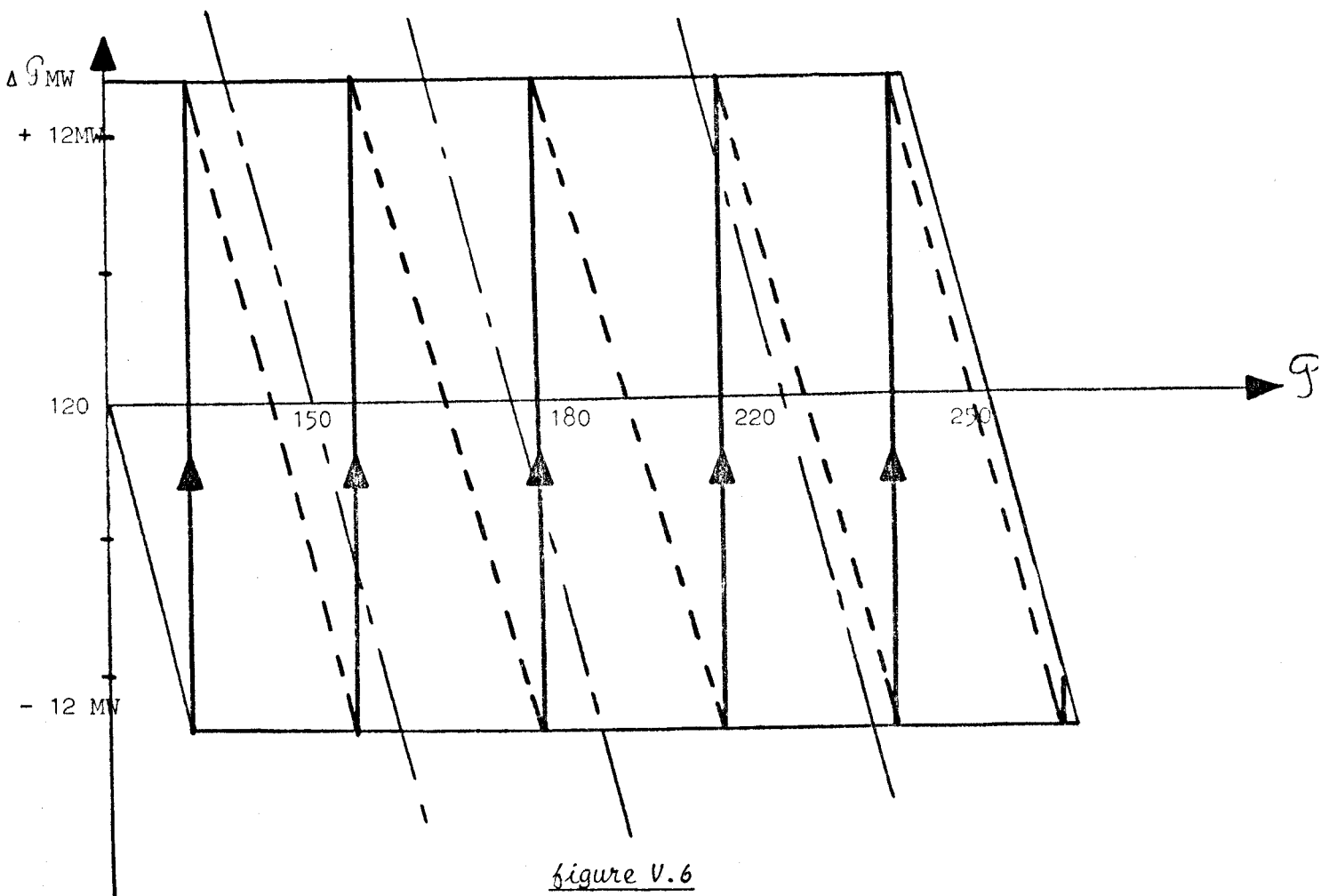


figure V.6

La variation admissible de puissance est ainsi sensiblement accrue vers la puissance nominale de l'installation.

V.4. - Présentation d'une méthode d'approche de l'étude de la rapidité d'adaptation du régulateur.

Dans l'étude précédente, nous avons supposé qu'à une évolution du régime de puissance selon la loi $\mathcal{G}(t)$ correspondait un réglage adaptatif défini par l'ensemble des coefficients $\beta_i(\mathcal{G})$. L'adaptation instantanée du réglage ne peut en fait être réalisée en toute rigueur. En effet si l'ensemble des paramètres de structure b_i du surchauffeur dépend par construction de la puissance $\mathcal{G}(t)$, les paramètres β_i sont calculés en fonction de l'estimation à l'instant t de la puissance réelle fournie $\mathcal{G}(t)$. Cette double opération d'estimation de $\mathcal{G}(t)$ et de calcul des β_i n'est pas immédiate, il convient donc d'admettre que ces coefficients sont fonctions de $\mathcal{G}(t) - \Delta\mathcal{G}$. Le terme $\Delta\mathcal{G}$ représente la variation maximale de puissance possible de l'installation en régime dynamique pour un intervalle de temps correspondant au retard d'adaptation des paramètres β_i .

Nous proposons de montrer dans ce cas qu'il est encore possible d'adapter la méthode de synthèse précédemment décrite tout en répondant aux exigences de stabilité de l'installation.

V.4.1. - Détermination du réglage adaptatif.

Le réglage adaptatif peut être défini à partir de la méthode présentée au paragraphe (V.2). En effet si la puissance estimée est notée, en raison du retard d'adaptation, $\mathcal{G}' = \mathcal{G}(t) - \Delta\mathcal{G}$ les paramètres de réglage β_i peuvent s'exprimer (equation V.22) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha(\mathcal{G}') = \frac{b_0(\mathcal{G}')}{3+\mu} \\ \beta_1(\mathcal{G}') &= \frac{c_1(\mathcal{G}') - b_1(\mathcal{G}')}{\ell_1(\mathcal{G}')} = \frac{1}{\ell_1(\mathcal{G}')} [3(1+\mu)\alpha^2(\mathcal{G}') - b_1(\mathcal{G}')] \\ \beta_2(\mathcal{G}') &= \frac{c_2(\mathcal{G}') - b_2(\mathcal{G}')}{\ell_1(\mathcal{G}')} = \frac{1}{\ell_1(\mathcal{G}')} [(1+3\mu)\alpha^3(\mathcal{G}') - b_2(\mathcal{G}')] \\ \beta_3(\mathcal{G}') &= \frac{c_3(\mathcal{G}')}{\ell_1(\mathcal{G}')} = \frac{1}{\ell_1(\mathcal{G}')} \mu \alpha^4(\mathcal{G}') \end{aligned} \quad (V.34)$$

V.4.2. - Etude de la stabilité.

Si l'on choisit ici encore une matrice de changement de base définie par R (équation V.6) il vient les contraintes de stabilité définies en (V.9). L'interprétation des coefficients C_i est toutefois différente puisqu'ils dépendent maintenant de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ soit encore de $\mathcal{G}$ et $\Delta\mathcal{G}$.

$$\begin{aligned} c_0 &= c_0(\mathcal{G}) = b_0(\mathcal{G}) \\ c_1 &= c_1(\mathcal{G}', \mathcal{G}) = b_1(\mathcal{G}) + \ell_1(\mathcal{G}') \cdot \beta_1(\mathcal{G}') \\ c_2 &= c_2(\mathcal{G}', \mathcal{G}) = b_2(\mathcal{G}) + \ell_1(\mathcal{G}') \cdot \beta_2(\mathcal{G}') \\ c_3 &= c_3(\mathcal{G}') = \ell_1(\mathcal{G}') \cdot \beta_3(\mathcal{G}') \end{aligned} \quad (V.35)$$

Les coefficients λ_i constants définissant la matrice de changement de base peuvent être pris à priori dépendants de $\mathcal{G}$. Cette hypothèse permet ainsi de satisfaire les contraintes (V.12) sur Δ_0 , Δ_1 et Δ_2 compte tenu du réglage défini en (V.34).

Il reste donc à vérifier une dernière condition d'ordre 4 sur le déterminant Δ_3 et dépendant à la fois de $\mathcal{G}$ et de $\mathcal{G}'$.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \lambda_0(\alpha) - c_0(\alpha), & |a_1(\mathcal{G}', \mathcal{G})|, & |a_2(\mathcal{G}', \mathcal{G})|, & |a_3(\mathcal{G}', \mathcal{G})| \\ \lambda_0(\alpha), & \frac{\lambda_1(\alpha)}{\lambda_0(\alpha)} \lambda_0(\alpha), & \left| \frac{\lambda_2(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)} - \frac{\lambda_1(\alpha)}{\lambda_0(\alpha)} \right|, & \left| \frac{\lambda_2(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)} \right| \\ 0, & \left| \frac{\lambda_1(\alpha)}{\lambda_0(\alpha)} \right|, & \frac{\lambda_2(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)} - \frac{\lambda_1(\alpha)}{\lambda_0(\alpha)}, & \left| \frac{\lambda_2(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)} \right| \\ 0, & 0, & \left| \frac{\lambda_2(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)} \right|, & - \frac{\lambda_2(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)} \end{vmatrix} > 0 \quad (V.36)$$

$$\lambda_i(\alpha) = \lambda_i(\mathcal{G}), i=0,1,2, \quad \alpha = \alpha(\mathcal{G}) = \frac{c_0(\mathcal{G})}{3+\mu}$$

$$a_1(\mathcal{G}', \mathcal{G}) = c_0(\mathcal{G}) - \frac{c_1(\mathcal{G}', \mathcal{G})}{\lambda_0(\alpha)} + \frac{\lambda_1(\alpha)}{\lambda_0(\alpha)} - \lambda_0(\alpha)$$

$$a_2(\mathcal{G}', \mathcal{G}) = \frac{c_1(\mathcal{G}', \mathcal{G})}{\lambda_0(\alpha)} - \frac{c_2(\mathcal{G}', \mathcal{G})}{\lambda_1(\alpha)} + \frac{\lambda_2(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)} - \frac{\lambda_1(\alpha)}{\lambda_0(\alpha)}$$

$$a_3(\mathcal{G}', \mathcal{G}) = \frac{c_2(\mathcal{G}', \mathcal{G})}{\lambda_1(\alpha)} - \frac{c_3(\mathcal{G}')}{\lambda_2(\alpha)} - \frac{\lambda_2(\alpha)}{\lambda_1(\alpha)}$$

La recherche des valeurs de $\Delta \mathcal{G}$ conduisant à la limite de validité de la condition (V.36) conduit à une valeur maximale admissible de $\Delta \mathcal{G} = \Delta \mathcal{G}_{\max} = \mathcal{G} - \mathcal{G}'$.

V.4.3. - Dynamique des changements de régime.

Autour d'un régime donné il est encore possible de donner les limites de variation admissible de $\mathcal{G}$ assurant la stabilité du système. Il convient dans ce cas de tenir compte du retard d'adaptation des paramètres de réglage. Nous proposons pour terminer ce chapitre de formuler ce problème et ainsi de montrer la possibilité d'une telle étude.

Notons $\mathcal{G}_0$ le régime de puissance initial et $\mathcal{G}_1$ le régime maximal admissible en partant de $\mathcal{G}_0$. La recherche d'une condition suffisante de stabilité lors du passage de $\mathcal{G}_0$ à $\mathcal{G}_1$ conduit à vérifier la validité de la contrainte inégalité suivante :

$$\Delta_3[\mathcal{G}', \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_0] > 0 \quad (V.37)$$

$\mathcal{G}_0$: Puissance initiale correspondant à un régime établi stable

$\mathcal{G}'_0$: Estimation de $\mathcal{G}_0$ en vue du réglage adaptatif

$\mathcal{G}_1$: Puissance maximale admissible à partir de $\mathcal{G}_0$

$\mathcal{G}'_1$: Estimation de $\mathcal{G}_1$ en vue du réglage adaptatif

$$a_1(\mathcal{G}'_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_0) = c_0(\mathcal{G}_1) - \frac{c_1(\mathcal{G}'_1, \mathcal{G}_1)}{\lambda_0(\alpha_0)} + \frac{\lambda_1(\alpha_0)}{\lambda_0(\alpha_0)} - \lambda_0(\alpha_0)$$

$$a_2(\mathcal{G}'_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_0) = \frac{c_1(\mathcal{G}'_1, \mathcal{G}_1)}{\lambda_0(\alpha_0)} - \frac{c_2(\mathcal{G}'_1, \mathcal{G}_1)}{\lambda_1(\alpha_0)} + \frac{\lambda_2(\alpha_0)}{\lambda_1(\alpha_0)} - \frac{\lambda_1(\alpha_0)}{\lambda_0(\alpha_0)}$$

(V.39)

$$a_3(\mathcal{G}'_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_0) = \frac{c_2(\mathcal{G}'_1, \mathcal{G}_1)}{\lambda_1(\alpha_0)} - \frac{c_3(\mathcal{G}'_1)}{\lambda_2(\alpha_0)} - \frac{\lambda_2(\alpha_0)}{\lambda_1(\alpha_0)}$$

$$\alpha_0 = \alpha(\mathcal{G}_0) = \frac{c_0(\mathcal{G}_0)}{3+\mu}$$

Compte tenu de la rapidité d'adaptation du régulateur défini par le terme $\mathcal{G} - \mathcal{G}'$, il est ainsi possible d'établir un graphe des variations de régime admissible analogue au graphe de la figure (V.4). Il peut être également intéressant de tracer un réseau d'abaques paramétré selon $\mathcal{G} - \mathcal{G}'$, permettant d'étudier la possibilité d'une utilisation du retard d'adaptation de réglage dans le but d'assurer une plus grande stabilité ou une meilleure dynamique des changements de régime.

Conclusion

L'utilisation du critère de stabilité (IV.6) basé sur la définition d'un système de comparaison du type (II.1) nous a permis dans un premier temps de préciser les conditions de stabilité en régime statique d'une installation de surchauffe de la centrale de Loire/Rhône.

D'une étude de ce type, il est possible de déduire un mode de réglage auto adaptatif des processus à structure variable. De plus les résultats obtenus conduisent à définir pour le processus étudié une zone de fonctionnement stable. La stabilité est assurée à l'instant t et pour la puissance effective délivrée $\mathcal{G}(t)$ si la variation $\Delta \mathcal{G}_1[\mathcal{G}, t]$ exigée reste en deça des limites de stabilité calculées.

Si l'on tient compte du retard d'adaptation des paramètres, essentiellement du au temps nécessaire à l'estimation de la puissance réelle de

l'installation et au calcul des paramètres du régulateur, les conditions de stabilité en régime statique ou dynamique font apparaître une limite $\Delta \mathcal{G}_2(\mathcal{G}, t)$ représentant l'écart maximum entre la puissance réelle $\mathcal{P}$ de l'installation et la puissance estimée $\mathcal{P}'$ dans la boucle d'adaptation.

La définition d'une stratégie des changements de régime en temps minimal peut donc être interprétée comme la recherche du signal pilote optimal $\mathcal{G}_e(t)$ pour lequel à chaque instant la puissance délivrée $\mathcal{G}(t)$ satisfait une double condition de stabilité :

- (i) La première contrainte conduit à définir une limite supérieure du retard d'adaptation.
- (ii) L'écart instantané entre la puissance de consigne et la puissance réelle de l'installation doit rester inférieur au maximum admissible exprimé par la seconde contrainte.

BIBLIOGRAPHIE CHAPITRE V

/1/

J. LECOUTURIER , M. DUPUY

"Centrale de Loire/Rhône tranche 3, identification des installations de température et de pression du générateur de vapeur"

Direction des Etudes et Recherches, Département Automatique des moyens de production - Avril 1971 - Rapport AMP 84

/2/

J. LECOUTURIER

"Centrale de Loire/Rhône tranche 3, Etude des régulations de pression et température du générateur de vapeur. Simulation de l'installation"

Direction des Etudes et Recherches, Département Automatique des moyens de production - Juin 1971 - Rapport AMP 88

/3/

F. LAURENT , F. LHOTE

"Sur une condition suffisante de stabilité asymptotique pour un système continu non-linéaire"

C.R.A.S - T. 262 - 1966 - pp 35-37.

Conclusion générale

L'analyse des propriétés fondamentales des systèmes continus linéaires et non linéaires à partir des techniques de majoration constitue l'une des orientations essentielles des travaux présentés dans ce mémoire.

Une première approche nous a amené, dans le cadre des systèmes asservis monovariabiles, à proposer la généralisation des critères de stabilité présentés par H.H Rosenbrock d'une part, F. Laurent et F. Lhote d'autre part à partir d'une représentation sur le corps des réels.

Une approche différente de ce même problème a ensuite permis d'associer au processus étudié, un système de comparaison de même dimension induisant une étude simplifiée de la stabilité. Ces résultats nous ont conduit à étendre ces notions dans le sens d'une définition plus systématique des systèmes majorants.

La mise en oeuvre du concept de norme vectorielle a pu être envisagée simplement lors de l'étude de la stabilité des systèmes de grandes dimensions dont on connaît à priori la décomposition en sous systèmes interconnectés. Dans ce sens plusieurs théorèmes de stabilité exponentielle et asymptotique ont été énoncés.

Pour certaines classes de processus, la validité de la conjecture linéaire et de la conjecture d'Aizerman a pu être démontrée. Ce résultat peut être considéré comme l'un des apports essentiels des techniques de majoration vectorielles. Dans ce cas, il est effectivement possible d'étudier la stabilité d'un processus à partir d'un système de comparaison non linéaire. Toutefois, les critères présentés ne peuvent être efficacement mis en oeuvre que si la matrice du régime libre du système de comparaison est l'opposée d'une M-matrice, celui-ci doit donc être construit dans ce sens.

L'ensemble de ces travaux contribue ainsi à préciser le concept de système majorant d'un processus continu non linéaire. En particulier, pour une représentation sous forme matricielle, les matrices pseudo-majorantes sem-

blent constituer un moyen d'analyser les propriétés d'un système de grandes dimensions. Ces techniques, élaborées pour les systèmes continus non linéaires, s'interprètent comme une extension de la notion de contraction au premier ordre généralement utilisée dans la seconde méthode de Ljapunov.

Dans leur mise en oeuvre, elles tendent à exprimer les caractères essentiels de processus d'origines diverses. En effet, ces méthodes réservées habituellement à l'étude des systèmes asservis peuvent s'étendre à tout système physique régi par des équations de même type et en particulier à la recherche de conditions de non démultiplication de fréquence dans les réseaux électriques.

Le problème très général posé par la stabilité d'un système n'est en fait qu'une étape dans la détermination de la commande d'un processus. Il convient d'ailleurs de constater que certaines méthodes de synthèses ont été déduites de techniques nouvelles d'étude de stabilité. Dans cet esprit, la recherche de la commande adaptative d'un surchauffeur présentée au chapitre V, illustre bien les possibilités de synthèse d'un processus continu non linéaire à partir du système de comparaison non linéaire qui lui est associé.

C'est dans cette voie que nous proposons de poursuivre ce travail, en étudiant de manière systématique les méthodes de synthèse basées sur l'utilisation des processus majorants.

ANNEXES

Annexe 1

Théorème : Soit A une matrice d'éléments constants a_{ij} , $i, j=1, 2, \dots, n$.
Les solutions de l'inégalité (1) sont minorées par celles de l'équation
(2) si les éléments non diagonaux de A sont non négatifs :

$$a_{ij} \geq 0 \quad \forall \quad i \neq j=1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &\geq Ax \\ x(0) &= C \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay \\ y(0) &= C \end{aligned} \tag{2}$$

Démonstration

Soit (3) une équation déduite de (1).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(t) \\ f(t) &\geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

La solution de (3) s'exprime sous la forme suivante :

$$x = e^{At} C + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau \tag{4}$$

Soit k un scalaire réel positif, il vient :

$$e^{At} = e^{(A+kI)t} e^{-kIt} \tag{5}$$

si k est choisi suffisamment grand pour que la matrice $A+kI$ soit non négative, alors l'exponentielle de cette matrice est également non négative. Puisque $e^{kIt} \geq 0$, la matrice e^{At} est non négative. Dans ces conditions, compte tenu des hypothèses énoncées, il vient :

$$x = y + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau \tag{6}$$

$$\text{soit } \forall t \geq t_0 : x(t; t_0, C) \geq y(t; t_0, C)$$

Annexe 2

Soit une matrice A d'ordre n possédant $n-1$ lignes d'éléments constants. Dans ce cas le vecteur propre relatif à une valeur propre donnée $\lambda = \lambda_0$ est nécessairement de direction fixe puisque $n-1$ relations suffisent à le déterminer.

Notons

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1}^* & a_{n2}^* & \dots & a_{n,n}^* \end{bmatrix} \quad (1)$$

dans cette présentation seuls les $a_{ni}^* (i=1,2,\dots,n)$ sont non constants.

Si v_λ présente le vecteur propre de composantes $\alpha_i (i=1,\dots,n)$ relatif à la valeur propre $\lambda > 0$ de la matrice A , il vient :

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2,n-1} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = - \alpha_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{n-1,n} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Lorsque la matrice A est à éléments non diagonaux non négatifs et admet une valeur propre de plus grande partie réelle négative, la matrice $A_1(\lambda)$:

$$A_1(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2,n-1} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} - \lambda \end{bmatrix} \quad (3)$$

est l'opposé d'une M matrice, il en résulte que l'inverse de $-A_1(\lambda)$ existe et est à éléments non négatifs.

Il vient alors :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \alpha_n \left[-A_1(\lambda) \right]^{-1} \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{n-1,n} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Dans ces conditions le vecteur propre v_λ admet des composantes toutes de même signe et correspond à la valeur propre de plus grande partie réelle.

Si lors d'une évolution particulière des coefficients a_{ni}^* , la valeur propre maximale λ reste constante et négative alors le vecteur propre v_λ reste de direction fixe.

Annexe 3

- Transformation homographique

Les systèmes continus et discrets que nous allons étudier sont représentés respectivement par les équations d'état (1) et (2)

$$\begin{matrix} \dot{x} = Ax + Bu \\ s = Cx \end{matrix} \quad (1)$$

$$\begin{matrix} x_{n+1} = M x_n + F u_n \\ s_n = G x_n \end{matrix} \quad (2)$$

x/x_n vecteur état $\in \mathbb{R}^n$

s/s_n vecteur de sortie $\in \mathbb{R}^r$

u/u_n vecteur d'entrée $\in \mathbb{R}^m$

$A/M \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$B/F \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$C/G \in \mathbb{R}^{r \times n}$

Les systèmes continus et discrets ainsi définis peuvent être linéaires stationnaires, linéaires non stationnaires ou non linéaires. Nous envisagerons principalement le cas des systèmes linéaires.

Les équations (1) et (2) peuvent s'écrire :

$$x + \frac{\dot{x}}{2} = \left(I + \frac{A}{2}\right) \left(I - \frac{A}{2}\right)^{-1} \left(x - \frac{\dot{x}}{2}\right) + \left(I - \frac{A}{2}\right)^{-1} Bu \quad (\text{II}, 1a)$$

$$x_{n+1} - x_n = (M - I) \left(\frac{M + I}{2}\right)^{-1} \left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2}\right) + \left(\frac{M + I}{2}\right)^{-1} F u_n \quad (\text{II}, 2a)$$

Associations à ces relations les systèmes d'équations (1b) et (2b) respectivement :

$$y_{n+1} = \left(I + \frac{A}{2}\right) \left(I - \frac{A}{2}\right)^{-1} y_n + \left(I - \frac{A}{2}\right)^{-1} B u_n \quad (1b)$$

$$\dot{y} = (M - I) \left(\frac{M + I}{2}\right)^{-1} y + \left(\frac{M + I}{2}\right)^{-1} F u \quad (2b)$$

Il apparait alors que si l'on note $\{H(A) : \mathcal{R}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{R}^{n \times n}\}$ la transformation matricielle suivante

$$H(A) = (I + \frac{A}{2})(I - \frac{A}{2})^{-1}$$

il vient pour la transformation inverse H^{-1}

$$H^{-1}(M) = (M-I) (\frac{M+I}{2})^{-1}$$

Les relations 1b et 2b prennent alors une forme simplifiée :

$$y_{n+1} = H(A) y_n + (I - \frac{A}{2})^{-1} B u_n \quad (1c)$$

$$y = H^{-1}(M) y + (\frac{I+M}{2})^{-1} F u \quad (2c)$$

Les relations (1) et (1c) d'une part et (2) et (2c) d'autre part se correspondent biunivoquement par la transformation H.

Propriétés de la transformation H/6/

Soit une matrice D constante nous avons $H[H^{-1}(D)] = D$; de plus les propriétés spectrales de l'opérateur H(D) peuvent se déduire aisément de celle de D. En effet, lorsque la dérivée de $H(\lambda) / H^{-1}(\lambda)$ n'est pas nulle sur le spectre (λ_i) de D, les valeurs propres de $H(D)/H^{-1}(D)$ sont $\{H(\lambda_i)/H^{-1}(\lambda_i)\}$. De plus les matrices constituantes Z_i des matrices D, H(D) et $H^{-1}(D)$ sont identiques à un facteur près.

II.2 - Etude comparative des systèmes continus/discrets et de leurs transformés discrets/continus par homographie.

Stabilité

La stabilité des systèmes continus (1) et discrets (2) fonctionnant en régime autonome ($u/u_n \equiv 0$) est imposée par les contraintes respectives suivantes :

$$\max \operatorname{Re}(\lambda_A) < 0 \quad (3)$$

$$\max |\lambda_M| < 1$$

Il vient pour les transformés par homographie

$$\max \left| \lambda_{H^{-1}(A)} \right| < 1 \quad (4)$$

$$\max \operatorname{Re} \lambda_{H(M)} < 0$$

En effet la transformation H réalise la transformation biunivoque dans le plan complexe de l'intérieur du cercle de rayon unité en le demi plan partie réelle négative.

Dans ce sens l'application des conditions de stabilité à un système continu/discret et à son transformé discret/continu conduit nécessairement au même résultat.

Dualité

Nous allons maintenant définir les systèmes adjoints des modèles (1) et (2) et de leurs transformés (1c) et (2c). Le système adjoint du système (1) caractérisé par le vecteur ψ :

$$x^T \psi = \text{constante} \quad (5)$$

vérifie l'équation

$$\dot{\psi} = -A^T \psi \quad (6)$$

Il apparaît en représentant par (6a) le transformé discret du système (6) :

$$\psi_{n+1} = H(-A^T) \psi_n \quad (6a)$$

Compte tenu des relations (7) et (6a)

$$H(-A^T) = [H(A)]^{-1T} \quad (7)$$

il vient :

$$\psi_{n+1} = [H(A)]^{-1T} \psi_n \quad (6b)$$

Le système (6b) est ainsi le système adjoint du système (1c) transformé du système (1). Une propriété semblable peut être mise en évidence pour le système discret. Les résultats énoncés sont résumés sur la figure (A1).

Commandabilité - Observabilité

- Commandabilité

La condition de commandabilité d'un système linéaire décrit par la relation (1)/(2) peut s'exprimer simplement au moyen des composantes Z_i de la matrice $A|M$, il vient :

$$\text{commandabilité de (1)} \Rightarrow \text{rang } (Z_1^A B, Z_2^A B, \dots, Z_n^A B) = n \quad (8)$$

$$\text{commandabilité de (2)} \Rightarrow \text{rang } (Z_1^M F, Z_2^M F, \dots, Z_n^M F) = n \quad (9)$$

si les matrices A et $H(A)$ M et $H^{-1}(M)$ ont mêmes composantes à un facteur près, les conditions nécessaires et suffisantes de commandabilité des systèmes (1) et (1c) (2) et (2c) sont respectivement identiques.

- Observabilité

Les propriétés d'observabilité et de commandabilité s'échangent par dualité. La transformation H étant compatible avec la notion de dualité, elle conserve les propriétés d'observabilité du modèle adopté.

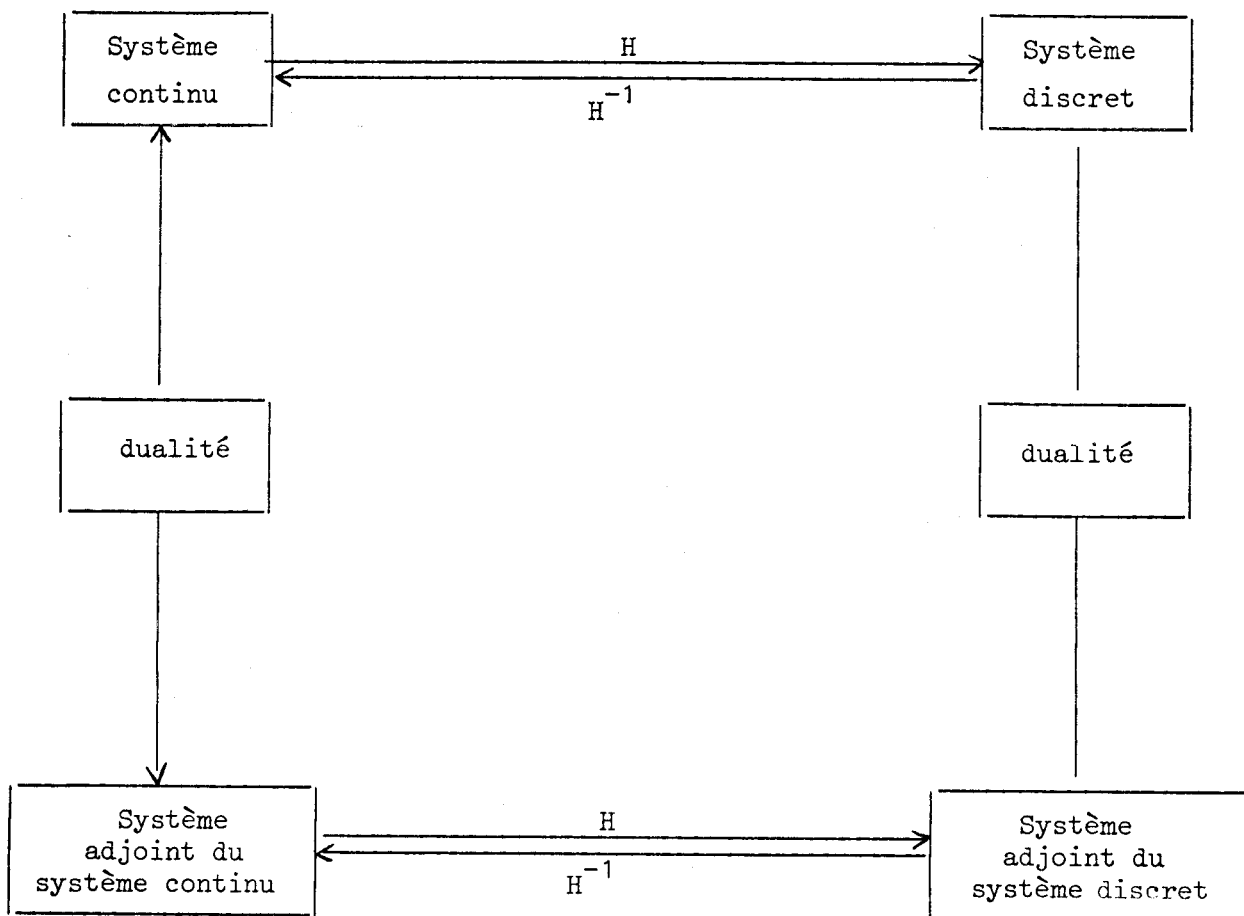


Figure A1

TABLE DES MATIERES

<u>Avant propos</u>	Page
<u>Introduction générale</u>	1
<u>CHAPITRE I : Représentation des systèmes à variables continues : stabilité</u>	5
1.1 - Structure des systèmes continus non-linéaires	5
1.2 - Notion d'état	7
1.3 - Stabilité d'un système dynamique	8
1.4 - Théorème de Ljapunov	12
1.5 - Description des systèmes étudiés	13
1.6 - Stabilité des systèmes non linéaires décrits par des équations d'état du type (I) et (II)	16
1.7 - Méthode directe de Ljapunov	17
Conclusion	24
Bibliographie du Chapitre I	25
<u>CHAPITRE II - Système de comparaison et système majorant</u>	
Introduction	29
II.1 - Méthode de comparaison	30
II.2 - Présentation d'un critère simplifié pour une classe de systèmes continus non-linéaires	34
Conclusion	47
Bibliographie du Chapitre II.....	48

CHAPITRE III : Modèle majorant d'un système continu non-linéaire de grandes dimensions.

	Page
Introduction	53
III.1 - Systèmes majorants de processus définis sur le corps des réels	54
III.1.1 - Notion de norme vectorielle	54
III.1.2 - Systèmes majorants d'un système continu non-linéaire	58
III.1.3 - Analyse des propriétés des matrices pseudo-majorantes ...	65
III.1.4 - Normes vectorielles et principe de comparaison	72
III.1.5 - Exemples de matrices majorantes d'une matrice relativement à une norme vectorielle régulière p	74
III.2 - Pseudo-majorantes de processus continus non-linéaires définis sur le corps des complexes	79
III.3 - Processus minorant d'un système continu non-linéaire	82
Conclusion	86
Bibliographie du Chapitre III	87

CHAPITRE IV : Application des méthodes de majorations vectorielles à l'étude de la stabilité des systèmes continus non-linéaires de grandes dimensions.

Introduction	91
IV.1 - Etude de stabilité basée sur l'utilisation du système de comparaison	92
IV.1.1 - Stabilité induite par le système de comparaison	92
IV.1.2 - Système de comparaison linéaire stationnaire	95
IV.1.3 - Système de comparaison non-linéaire : Conjecture d'Aizerman	96
IV.1.4 - Stabilité asymptotique du système de comparaison	103
IV.1.5 - Lemme de comparaison et critère de Popov	106
IV.1.6 - Exemples d'application	108

	Page
IV.2 - Etude de stabilité à partir d'inégalités différentielles	120
IV.3 - Etude de l'instabilité des systèmes continus non linéaires	127
IV.3.1 - Etude de l'instabilité à partir d'une matrice M pseudo-minorante	127
IV.3.2 - Exemple d'application	127
IV.4 - Stabilité absolue des systèmes continus non-linéaires...	129
IV.4.1 - Cas des systèmes monovariabiles linéaires à commande non-linéaire	129
IV.4.2 - Cas des systèmes interconnectés	130
IV.5 - Application à une étude de stabilité du régime forcé des systèmes continus non-linéaires vis à vis des perturbations	134
IV.5.1 - Position du problème	134
IV.5.2 - Applications	135
IV.6 - Discrétisation d'une équation d'état continue non-linéaire : Stabilité comparée du système continu et du système discret associé	142
IV.6.1 - Fonctions de Ljapunov déduites de la distance euclidienne	142
IV.6.2 - Fonctions de Ljapunov convexes	144
Conclusion	145
Bibliographie du Chapitre IV	146

CHAPITRE V : Présentation d'une commande auto adaptative de la surchauffe d'une centrale thermique.

Introduction	151
V.1 - Position du problème	152
V.1.1 - Générateur de vapeur	152
V.1.2 - Installation de surchauffe	155
V.2 - Réglage auto adaptatif du surchauffeur avec chaîne de régulation principale	157
V.2.1 - Formulation et présentation d'une méthode de synthèse adaptative	157

	Page
V.2.2 - Etude de stabilité	159
V.2.3 - Synthèse d'un régulateur adaptatif	162
V.3 - Application pratique	168
V.4 - Présentation d'une méthode d'approche de l'étude de la rapidité d'adaptation du régulateur	175
Conclusion	178
Bibliographie du Chapitre V	180
<u>Conclusion générale</u>	181
Annexes	183
Annexe 1	183
Annexe 2	184
Annexe 3	186
Table des matières	191

