

# THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ès SCIENCES PHYSIQUES

par

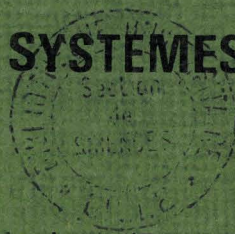
**Pierre BORNE**

Ingénieur I.D.N.

Docteur en Automatique

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DES SYSTEMES DISCRETS  
NON LINEAIRES DE GRANDE DIMENSION.**

**APPLICATION AUX SYSTEMES INTERCONNECTES**



Soutenue le 2 Mars 1976 devant le Jury d'Examen.

Président du Jury,	M. le Professeur R. GABILLARD	Rapporteur
	M. le Professeur Lj T. GRUJIĆ	"
	M. le Professeur F. LAURENT	"
	M. le Professeur J.L. ABATUT	Examineur
	M. le Professeur F. LHOTE	"
	M. le Professeur P. VIDAL	"
	M. Robert BOSSUT, Directeur de l'I.D.N.	Invité
	M. O. F.	"

SCD LILLE 1



D 030 308471 7

50376  
1976  
24

50376  
1976  
24

Avant - Propos

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire de Systématique de l'Université des Sciences et Techniques de Lille I sous la direction de Monsieur le Professeur F. Laurent.

Nous lui exprimons toute notre gratitude pour l'enseignement qu'il a su nous dispenser et l'accueil qu'il nous a réservé au sein de son équipe.

Monsieur Laurent a su très rapidement et efficacement nous initier à la recherche et nous a guidé durant toute l'élaboration de cette thèse avec le sérieux et la compétence qui le caractérisent, tout en nous encourageant de sa chaude amitié.

Monsieur le Professeur R. Gabillard nous a grandement honorés en acceptant de bien vouloir présider notre Jury. C'est avec la plus grande bienveillance qu'il a accepté de nous conseiller pour la mise au point définitive de nos travaux et nous sommes heureux de lui exprimer ici notre très profonde gratitude.

Nous tenons à exprimer notre très vive reconnaissance à Monsieur le Professeur Lj T Grujić pour l'intérêt qu'il a porté à nos travaux. Il nous a permis par sa très haute compétence dans le domaine de l'étude de la stabilité de faire évoluer très sensiblement notre travail et nous a suivi et guidé très régulièrement malgré les difficultés dues à l'éloignement géographique. Nous espérons que le contact maintenant établi avec son équipe de recherche se poursuivra de façon fructueuse. Nous lui adressons nos très vifs et très sincères remerciements pour avoir bien voulu juger notre travail et participer au Jury de notre thèse.



Monsieur le Professeur JL Abatut a bien voulu accepter de nous conseiller au cours de nos recherches. L'intérêt qu'il a montré pour nos travaux nous a permis d'approfondir plusieurs points de ce mémoire. Sa présence à notre Jury de thèse nous a profondément touché et nous lui exprimons toute notre reconnaissance.

Il nous est très agréable de remercier Monsieur le Professeur Lhote pour l'intérêt qu'il a porté à nos recherches en acceptant de nous aider à la mise au point de ce mémoire. Nous avons été très honorés de sa participation à notre Jury de thèse.

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à Monsieur le Professeur Vidal pour l'enseignement qu'il nous a tout d'abord dispensé ainsi que pour les conseils dont il a su nous faire profiter au cours de nos travaux. Nous le remercions également d'avoir bien voulu accepter de participer à notre Jury.

Monsieur le Professeur Bossut, Directeur de l'Institut Industriel du Nord nous a, à tout moment, apporté son soutien et en particulier en acceptant de participer à notre Jury de thèse. Nous tenons à ce qu'il reçoive ici le témoignage de notre très respectueuse et très vive reconnaissance ainsi que l'expression de notre profond dévouement.

Que Monsieur Miossec, Ingénieur EDF reçoive ici nos très sincères remerciements. Il nous a en effet permis par son amabilité et sa compétence de proposer une application de nos travaux à l'étude d'un processus de caractère industriel. Nous lui exprimons toute notre gratitude pour sa participation à notre Jury.

Nous voudrions également remercier notre collègue et ami Monsieur JC Gentina, chercheur au Laboratoire de Systématique, qui a su être à tout moment un interlocuteur intéressé et à l'esprit critique exercé ; les échanges que nous avons eu concernant nos travaux respectifs se sont avérés particulièrement profitables. Nous lui exprimons toute notre sympathie et lui témoignons ici notre profonde amitié.

Nous tenons enfin à exprimer notre reconnaissance à tous les membres de l'équipe du Laboratoire de Systématique pour l'aide précieuse qu'ils nous ont apportée tant sur le plan scientifique que sur le plan humain.



## Introduction générale

Les travaux présentés dans ce mémoire constituent une contribution à l'analyse et à la synthèse des processus discrets non-linéaires de grande dimension. Ils concernent plus précisément la détermination de modèles particuliers associés à un processus discret en vue d'en faciliter l'étude.

A cet effet nous utiliserons deux notions : celle de système majorant et celle de système de comparaison.

Ce dernier concept a été initialement introduit afin de permettre l'analyse de certains problèmes de stabilité. Il consiste à définir une récurrence linéaire, d'ordre donné, dont la stabilité implique celle du processus dont elle est déduite.

D'un point de vue distinct la recherche de conditions de convergence des algorithmes itératifs linéaires a conduit en analyse numérique à la définition de suites récurrentes également linéaires mais de dimensions plus faibles. Celles ci sont caractérisées par un ensemble d'inégalités et correspondent à la notion de majorant.

Nous proposons dans ce mémoire une méthode de détermination systématique de systèmes majorants et de comparaison, linéaires et non linéaires, associés à un processus discret non linéaire et leur utilisation en vue de l'étude de certains problèmes particuliers.

Après avoir précisé la classe des systèmes étudiés ainsi que la représentation utilisée pour leur description nous rappellerons les définitions usuellement adoptées relativement à la notion de stabilité. Ce concept, initialement introduit par les mécaniciens dans le cadre des processus continus a été étendu au cas discret par les mathématiciens et en particulier par W Hahn. La situation des résultats présentés par rapport aux travaux voisins existants fait l'objet d'une analyse particulière. Elle est suivie d'une étude permettant la détermination de systèmes majorants, linéaires ou non, relatifs à un processus non linéaire de structure éventuellement variable. Ce dernier point trouve son

intérêt en particulier lors de la recherche de conditions suffisantes de stabilité connective, c'est-à-dire indépendantes de l'évolution des interactions entre les divers sous systèmes d'un processus multivariable.

La méthode utilisée pour définir un modèle de comparaison discret est basée sur la notion de majorant et s'étend au cas des processus imparfaitement identifiés ou mal définis.

Plusieurs applications de ces travaux sont envisagées dans la suite du mémoire.

La recherche systématique de conditions suffisantes de stabilité qui tiennent compte de la structure particulière d'un processus conduit à l'énoncé de théorèmes d'application simple. Ceux ci concernent selon les cas la stabilité locale ou globale d'un système. Une mise en oeuvre des résultats obtenus est proposée dans l'analyse du comportement d'un processus de structure variable. L'utilisation des majorants permet de définir simplement une estimation numérique de l'écart entre deux modèles d'ordre éventuellement distincts d'un même processus. De plus la sensibilité d'un modèle aux variations de ses divers paramètres peut être déterminée à partir d'un système de dimension réduite.

D'un point de vue distinct, la définition de majorants d'une suite récurrente décrite sur le corps des complexes permet d'envisager l'étude de certains cas critiques de stabilité.

Un avant projet de régulation discrète d'un groupe turbo-alternateur est proposé dans une dernière partie. La loi de commande est déterminée en utilisant un système de comparaison indépendant des variations de structure dues à l'évolution du réseau alimenté par le groupe.

## CHAPITRE I

### Formulation des processus discrets - stabilité.

#### Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter la classe des processus étudiés, de préciser les notations adoptées, et de rappeler les principales définitions relatives à la stabilité des processus discrets.

La représentation des processus discrets a longtemps été effectuée en utilisant le symbolisme de la transmittance opérationnelle ou transformée en  $Z/1$ . Ce choix a été justifié par l'important développement des méthodes fréquentielles d'analyse et de synthèse transposées des techniques continues.

Lorsqu'il s'agit de processus de type multivariable ou fortement non linéaires il apparaît intéressant d'envisager une représentation dans l'espace d'état qui s'avère particulièrement adaptée à un traitement sur ordinateur.

Nous avons choisi de représenter l'évolution d'un processus discret par une suite récurrente vectorielle définie par une fonction de transition.

Après avoir ainsi précisé la classe des processus étudiés, nous rappellerons les principales définitions relatives à la notion de stabilité telles qu'elles ont été formulées par W. Hahn /2 / et N. Rouche/3/.

Dans une dernière partie seront présentées les principales méthodes d'étude de la stabilité que nous aurons à utiliser.



I - Définitions relatives aux systèmes échantillonnés, description des processus étudiés.

Les systèmes que nous allons étudier sont caractérisés principalement par deux ensembles de grandeurs accessibles susceptibles d'évoluer en fonction du temps.

Il est possible de distinguer  $p$  grandeurs d'entrées  $u_i(t)$  appartenant à un espace de fonctions du temps noté  $\mathcal{U}$  et qui constituent les composantes d'un vecteur  $u(t)$  :

$$u^T(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)]^T \quad (1)$$

et  $r$  grandeurs de sorties  $s_i(t)$  définissant un vecteur  $s(t)$  :

$$s^T(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_r(t)]^T. \quad (2)$$

Cet ensemble de grandeurs défini par les composantes des vecteurs  $u(t)$  et  $s(t)$  s'avère généralement insuffisant pour caractériser sans ambiguïté l'évolution du processus. Il apparaît nécessaire d'introduire un nouveau vecteur  $x(t)$  à  $q$  composantes :

$$x^T(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_q(t)]^T$$

qui constituent les variables, en nombre minimum, telles que leur connaissance à l'instant  $t_0$  et la connaissance de l'évolution des entrées sur l'intervalle  $[t_0, t_1 ; t_1 > t_0]$  suffisent à déterminer l'évolution des sorties sur le même intervalle.

Ces  $q$  variables définissent un vecteur état  $x(t)$  appartenant à un espace vectoriel linéaire et normé  $\mathcal{E}$  dit espace d'état.

Nous ne retiendrons que les systèmes pour lesquels ce vecteur est réel (sauf dans un cas présenté ultérieurement) et de dimension finie.

Parmi les systèmes susceptibles d'être représentés sur le mode discret il est possible de distinguer en plus des systèmes discrets par nature les systèmes à données échantillonnées. Ces derniers sont essentiellement caractérisés par une transmission de l'information à des instants discrets du temps.

Dans la plupart des cas usuellement rencontrés, chaque fonction d'entrée  $u_i(t)$  est élaborée par modulation des valeurs prises à des instants discrets  $t_n$  ( $n$  entier naturel,  $t_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$ ) d'un signal continu  $\varepsilon_i(t)$ .

soit

$$u_i(t) = u_i(\varepsilon_i(t_n), t) \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}[$$

avec

(3)

$$t_{n+1} - t_n = T_n(\varepsilon_i(t_n), t_n)$$

Nous n'entrerons pas ici dans le détail des divers types de modulateurs susceptibles d'être rencontrés leur étude ayant déjà fait l'objet de nombreux travaux.

La définition (3) permet d'envisager un fonctionnement totalement asynchrone des divers modulateurs pulsés utilisés dans l'élaboration des commandes  $u_i(t)$ . Toutefois cette hypothèse permet difficilement d'aboutir à la définition d'un modèle simple de l'évolution du processus. Aussi envisageons nous dans toute la suite de notre étude uniquement le cas d'échantillonneurs fonctionnant au synchronisme et à la même fréquence pour les divers modulateurs.

Nous allons maintenant présenter les systèmes dont l'évolution entre deux instants d'échantillonnage consécutifs est régie par une équation différentielle linéaire.

### 1.1 - Systèmes linéaires

Une classe importante de processus peut être caractérisée par un fonctionnement régi par un ensemble d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.

$$\dot{x}(t) = A^* x(t) + B^* u(t) \quad (4)$$

$$s(t) = C x(t) + D u(t)$$

Dans cette écriture  $A^*$  désigne une matrice carrée d'ordre  $q$  d'éléments constants  $a_{ij}^*$  caractéristiques de l'évolution du processus en l'absence d'entrées.

Les matrices  $B^*$  et  $C$ , de dimensions respectives  $qp$  et  $qr$  sont les matrices de commande et d'observation /4/.

L'utilisation d'une représentation dans l'espace d'état permet de caractériser simplement le processus à un instant  $t$  à l'aide d'une fonction de transition /5/.

$$x(t) = \phi_u(t, t_0, x(t_0)) \quad \forall t \geq t_0 \quad (5)$$

une telle fonction vérifie la relation

$$\phi_u(t_0, t_0, x(t_0)) = x(t_0) \quad (6)$$

Dans l'hypothèse échantillonnée et lorsque les divers échantillonneurs fonctionnent au synchronisme il convient de considérer la fonction de transition entre deux échantillonnages consécutifs.

Il en résulte une représentation de l'évolution du processus à l'aide d'une équation de récurrence :

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) &= \phi_u(t_{n+1}, t_n, x(t_n)) \\ u(t) &\in \mathcal{U} \quad t_n \leq t \leq t_{n+1} \end{aligned} \quad (7)$$

Une telle relation s'obtient simplement par intégration de l'équation différentielle (4) régissant l'évolution du système sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$

$$\dot{x}(t) = A^* x(t) + B^* u(t) \quad (4)$$

En notant  $B_i^*$  la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $B^*$  il vient :

$$x(t) = \exp(A^*(t-t_n)) x(t_n) + \sum_{i=1}^p \int_{t_n}^t \exp(A^*(t-\tau)) B_i^* u_i(\tau) d\tau \quad (8)$$

$$t_n \leq t \leq t_{n+1}$$

soit pour  $t = t_{n+1}$ , en notant  $T_n = t_{n+1} - t_n$

$$x(t_{n+1}) = \exp(A^* T_n) \{x(t_n) + \sum_{i=1}^p \int_0^{T_n} \exp(-A^* \tau) B_i^* u_i(t_n + \tau) d\tau\} \quad (9)$$

Cette relation de récurrence traduit la linéarité du processus à commander. L'état à l'instant  $t_{n+1}$  résulte de la superposition du régime libre du système entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  et de l'effet des entrées  $u_i(t)$  sur le même intervalle. Compte-tenu de la relation (3), elle peut être réécrite sous la forme simplifiée :

$$x_{n+1} = A(T_n) x_n + \sum_{i=1}^p B_i (\epsilon_n^i, t_n) \quad (10)$$

avec les notations

$$\begin{aligned} x_n &= x(t_n) \\ A(n) &= \exp(A^* T_n) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\epsilon_n^i = \epsilon_i(t_n)$$

$$B_i(\epsilon_n^i, t_n) = \exp(A^* T_n) \int_0^{T_n} \exp(-A^* \tau) B_i^* u_i(\epsilon_i(t_n), \tau + t_n) d\tau \quad (12)$$

Lorsque la durée  $T_n$  entre deux échantillonnages consécutifs dépend du seul instant  $t_n$  et que les divers échantillonneurs modulateurs sont linéaires il vient :

$$T_n = t_{n+1} - t_n = T(n)$$

$$u_i(\epsilon_n^i, t) = \alpha_i(t) \epsilon_n^i \quad \forall_i = 1, \dots, r$$

Dans ces conditions, avec les hypothèses de linéarité du processus, la relation (10) prend la forme :

$$x_{n+1} = A(n) x_n + B(n) \varepsilon_n \quad (13)$$

avec

$$\varepsilon_n^T = [\varepsilon_n^1, \varepsilon_n^2, \dots, \varepsilon_n^p]^T \quad (14)$$

Cette relation dans laquelle les matrices  $A(n)$  et  $B(n)$  sont fonctions du seul indice  $n$  (du seul instant  $t_n$ ) correspond à la représentation des systèmes linéaires non stationnaires. Si de plus les matrices  $A(n)$  et  $B(n)$

sont constantes  $A(n) \equiv A$  ,  $B(n) \equiv B$

le système linéaire est dit stationnaire, c'est-à-dire indépendant du temps. C'est le cas des systèmes échantillonnés linéaires à période d'échantillonnage constante.

## 1.2. - Systemes non linéaires

Lorsque le processus comporte des non-linéarités, dues par exemple aux modulateurs, ou est régi par une équation différentielle non linéaire, il n'est plus possible de décrire son évolution par une relation telle que (13). Dans ce cas cependant la description du système par une équation de transition sera conservée. Nous admettrons dans toute la suite de cette étude de nous limiter aux processus pour lesquels celle-ci peut se réduire en l'absence d'entrées à la forme :

$$x(t_{n+1}) = f(t_n, x(t_n)) = \phi(t_{n+1}, t_n, x(t_n)) \quad (15)$$

dans laquelle :

- $x(t_n) \in \mathcal{R}^q$  représente l'état du système à l'instant  $t_n \in \mathcal{T} = (\tau, +\infty)$  et  $n$  un entier positif tel que  $t_n \rightarrow +\infty$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$
- La fonction  $f(t_n, x(t_n))$  est de classe  $C^{(0,0)}$ , en  $t$  et  $x$ , et définit  $\forall t_n$  donné une application ponctuelle à une seule détermination de  $\mathcal{T} \times \mathcal{R}^q$  dans  $\mathcal{R}^q$ . De plus la solution  $\phi(t_n, t_0, x_0)$  de la récurrence (15)

de condition initiale  $t_0, x_0$  vérifie la relation

$$\phi(t_n, t_0, x_0) = \phi(t_n, t_m, x(t_m, t_0, x_0)) \quad (16)$$

$$\forall t_0, t_m, t_n \in \mathcal{C} \text{ avec } t_0 \leq t_m \leq t_n$$

- La fonction  $f$  vérifie également la relation

$$f(t_n, 0) = 0 \quad \forall t_n \in \mathcal{C} \quad (17)$$

et l'origine  $x = 0$  de l'espace d'état est l'unique point d'équilibre de la récurrence (15) situé dans les domaines  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{D}$ , fermés connexes et à compléments connexes, qui seront définis par la suite.

Afin d'abrégier l'écriture nous représenterons parfois l'équation (15) sous la forme condensée :

$$x_{n+1} = f(n, x_n) = \phi(n+1, x_n, n) \quad (18)$$

Compte-tenu des hypothèses faites sur la fonction  $f$ , lorsque le processus est décrit sous la forme :

$$x_{n+1} = A(x_n, n) x_n \quad (19)$$

dans laquelle  $A(x_n, n)$  est une matrice carrée d'ordre  $q$  à coefficients non constants, ceux-ci sont bornés en module pour  $n$  et  $x_n$  bornés.

### Systemes interconnectés

Un cas important de systèmes non linéaires correspond aux systèmes composés, formés de sous systèmes plus simples interconnectés selon le mode d'équations suivant :

$$x_{n+1}^i = g_i(n, x_n^i) + h_i(n, x_n) \quad (20)$$

$x_n^i \in \mathcal{R}^{q_i}$  représente l'état du sous système  $S_i$  à l'instant  $n$

$$x_n^T = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k) \text{ vecteur d'ordre } q = \sum_{i=1}^k q_i$$

$g_i$  est une application de  $\mathcal{C} \times \mathcal{R}^{q_i}$  dans  $\mathcal{R}^{q_i}$  et

$h_i$  une application de  $\mathcal{C} \times \mathcal{R}^q$  dans  $\mathcal{R}^{q_i}$ .

## II - Définitions relatives à la stabilité

Avant de commencer une étude de la stabilité des processus multivariés, nous allons rappeler les principales définitions très générales concernant la stabilité d'un processus discret représenté par son équation de transition telles qu'elles ont été énoncées par W. Hahn /2/.

Soit le système dont l'évolution entre les instants  $n_0$  et  $n+1$  est donnée par l'équation de transition

$$x_{n+1} = \phi(n+1, n_0, x_0) \quad (21)$$

et dans le cas général

$$x_n = \phi(n, n_0, x_0) \quad \forall n \geq n_0 \quad (22)$$

$n_0$  désignant l'indice de l'instant initial  $t_0$ .

L'équation (21) admet la solution triviale  $x_n = 0$  appelée position d'équilibre si la relation suivante est vérifiée :

$$0 = \phi(n+1, n, 0) \quad \forall n \geq n_0 \quad (23)$$

Pour toute la suite de cette étude notons  $\|x\|$  la norme euclidienne du vecteur  $x$

$$\|x\|^2 = x^T \cdot x \quad (24)$$

et  $|x|$  le vecteur obtenu en substituant son module à chacune des composantes du vecteur  $x$ . Les autres normes, scalaires ou vectorielles, utilisées par la suite seront définies ultérieurement.

### 2.1. - Stabilité asymptotique

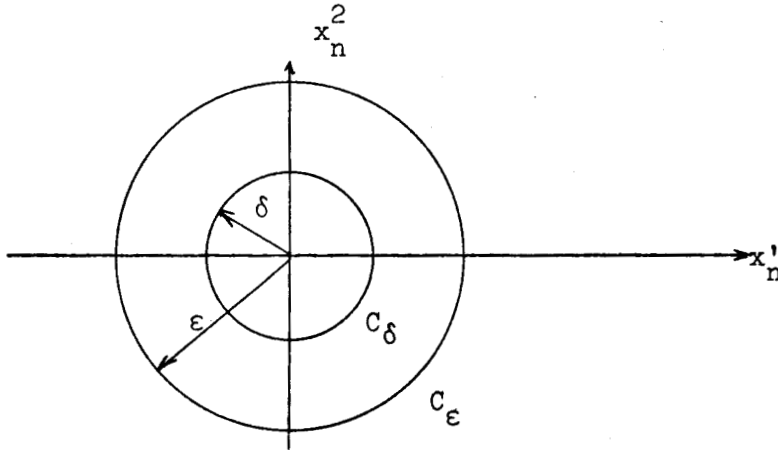
#### - Définition 1

L'équilibre de l'équation aux différences (21) est dit stable au sens de Lyapunov /6/

$$\text{si } \forall \varepsilon > 0 \text{ et } \forall n_0 \quad \exists \delta(\varepsilon, n_0) > 0 \text{ tel que} \quad (23)$$

$$\forall x_0, \|x_0\| < \delta \quad \underline{\text{il vient}} \quad \|\phi(n, n_0, x_0)\| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Cette définition admet une interprétation géométrique simple. La définition proposée indique que le point représentatif de l'état du processus restera dans la sphère de centre 0 et de rayon  $\epsilon$  pourvu qu'il soit situé dans la sphère de même centre et de rayon  $\delta$  à l'instant initial.



L'origine est dite uniformément stable si la quantité  $\delta$  intervenant dans la définition de la stabilité est indépendante de  $t_0$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0, \forall x_0 (\|x_0\| < \delta(\epsilon)) \Rightarrow \|\phi(n, n_0, x_0)\| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad (26)$$

- Définition 2

Le point d'équilibre de l'équation aux différences (21) est dit attractif s'il existe un nombre  $\eta(n_0)$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(n, n_0, x_0) = 0 \quad \forall x_0 (\|x_0\| < \eta) \quad (27)$$

Dans ce cas, le point d'équilibre  $x = 0$  doit nécessairement être isolé, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage de 0 ne contenant pas de point A vérifiant la relation.

$$A = \phi(n, n_0, A) \quad \forall n \geq n_0 \quad (28)$$



Si de plus  $\eta$  est indépendant de  $n_0$  le point d'équilibre est uniformément attractif.

Les deux concepts qui viennent d'être énoncés sont indépendants.

Tout domaine  $\mathcal{D}$  de l'espace  $\mathcal{E}$  tel que la propriété (27) soit vérifiée  $\forall x_0 \in \mathcal{D}$  est dit domaine d'attraction pour les solutions de la récurrence (21).

### Définition 3

Le point d'équilibre de l'équation aux différences (21) est dit asymptotiquement stable au sens de Lyapunov s'il est à la fois stable et attractif.

Si le point d'équilibre est à la fois uniformément attractif et uniformément stable il est uniformément asymptotiquement stable.

## 2.2. - Stabilité globale

Les définitions qui viennent d'être proposées caractérisent des propriétés locales, concernant l'origine. Lorsque les propriétés définies en 2 et 3 sont vérifiées pour toute condition initiale  $x_0$  nous pouvons parler de stabilité asymptotique illimitée définissant ainsi une propriété globale.

De même, si le système converge vers zéro  $\forall x_0 \in \mathcal{D}$ , le domaine  $\mathcal{D}$  est dit domaine d'attraction vis à vis des conditions initiales.

### - Stabilité absolue

Il est également intéressant de définir la notion de stabilité absolue qui a fait l'objet de très nombreux travaux, en particulier par V.M. Popov /7/, AM. Aizerman et F.R. Gantmacher /8/ Luré /2/ dans le cas des systèmes continus et Ja Cypin /9/ et Jury et Lee /10/ dans le cas des processus discrets. La notion de stabilité absolue implique un ensemble de contraintes relatives aux non-linéarités ou aux paramètres du système et qui, lorsqu'elles sont vérifiées pour toutes valeurs de  $x_n$  et de  $n$ , permettent de conclure à la stabilité asymptotique globale du processus.

L'étude de la stabilité absolue des processus discrets à partir des méthodes fréquentielles a surtout été envisagée pour les systèmes décrits par des relations de la forme :

- cas monodimensionnel

$$x_{n+1} = A x_n + B f(\epsilon_n) \quad (29)$$

avec

$$\epsilon_n = C x_n$$

- cas multidimensionnel

$$x_{n+1}^i = A_i x_n + B_i f_i(\epsilon_n^i) \quad (30)$$

avec

$$\epsilon_n^i = C_i x_n \quad \forall i = 1, \dots, k$$

### 2.3. - Stabilité exponentielle

L'état d'équilibre  $x = 0$  du système (15)

$$x(t_{n+1}) = f(t_n, x(t_n)) = \phi(t_{n+1}, t_n, x(t_n)) \quad (15)$$

est globalement et exponentiellement stable s'il existe deux nombres réels  $\alpha > 1$  et  $\beta > 0$  tels que

$$\|\phi(t_n, t_0, x_0)\| < \alpha \|x_0\| \exp(-\beta(t_n - t_0)) \quad (31)$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^q \quad \text{et} \quad \forall t_n \in \mathcal{L}_0, \mathcal{L}_0 : [t_0 + \infty[$$

### 2.4. - Stabilité orbitale

Un ensemble  $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}$  est appelé invariant si

$$\phi(m, n_0, x_0) \in \mathcal{D} \text{ implique } \phi(n, n_0, x_0) \in \mathcal{D} \quad \forall n$$

La récurrence (21) est orbitalement stable / attractive si l'ensemble invariant  $\mathcal{D}$  est stable / attractif.

Lorsque ces deux propriétés sont vérifiées simultanément, la suite définie en (21) possède la propriété de stabilité asymptotique orbitale.

### III - Conditions de stabilité des solutions d'une récurrence.

3.1. - Suivant W. Hahn /2/ adoptons les définitions suivantes :

- une fonction  $a(r)$  définie sur  $[0, r_1]$  est dite de classe K si elle est définie, continue, strictement croissante pour  $r \in [0, r_1]$  et nulle à l'origine

$$a(0) = 0$$

- Une fonction  $\sigma(s)$  est dite de classe L si elle est définie continue et strictement décroissante pour

$$0 \leq s_1 \leq s < \infty \quad \text{et vérifie}$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma(s) = 0$$

Avec ces notations les définitions proposées peuvent s'énoncer :

- L'équilibre de l'équation récurrente est uniformément stable s'il existe une fonction  $a$  de classe K et si il existe  $\rho > 0$  tels que

$$\|\phi(n, n_0, x_0)\| \leq a(\|x_0\|) \quad \forall n_0, \forall n \geq n_0, \forall x_0 : \|x_0\| < \rho \quad (32)$$

- L'équilibre est uniformément attractif si  $\exists \eta > 0$  tel que

pour  $\|x_0\| < \eta$  il existe une fonction  $\sigma$  de classe L telle que

$$\|\phi(n, n_0, x_0)\| \leq \sigma(n - n_0) \quad (33)$$

$$\forall n \geq n_0$$

- L'équilibre est asymptotiquement et uniformément stable si  $\exists a \in K$  et  $\eta > 0$  tel que si  $\|x_0\| < \eta$  il existe une fonction  $\sigma$  de classe L telle que

$$\| \phi(n, n_0, x_0) \| \leq a(\|x_0\|) \sigma(n - n_0) \quad (34)$$
$$\forall n \geq n_0, \forall n_0$$

### 3.2. - Méthodes d'étude de la stabilité.

L'étude de la stabilité à l'aide de critères fréquentiels, particulièrement développée dans le cas des processus continus a été étendue au cas des processus discrets, en particulier dans les travaux de Ja Z Cypkin /9/ et de Jury et Lee /10, 11/.

L'emploi des méthodes fréquentielles s'avère très intéressante lors de l'étude de la stabilité absolue d'un processus, toutefois la complexité en croit très vite lorsqu'il s'agit d'étudier un système à plusieurs non-linéarités. Dans ce cas il apparaît intéressant d'utiliser les méthodes de comparaison, telles la méthode de Lyapunov /6, 12/ ou les méthodes de contraction basées sur les travaux de Banach /13/.

Nous allons rappeler ces méthodes que nous utiliserons pour étudier la stabilité des processus.

#### 3.2.1. - Méthode de comparaison.

La méthode de comparaison consiste à déduire les propriétés d'une équation de récurrence difficile à étudier de celles d'une récurrence plus simple définissant un système de comparaison.

Ce principe est utilisé dans la méthode de Lyapunov que nous allons rappeler ici, la méthode de comparaison faisant l'objet d'une présentation détaillée dans le cas vectoriel au chapitre suivant.

Méthode de Lyapunov :

Soit le système décrit par la relation de récurrence

$$x_{n+1} = f(x_n, n) \quad (18)$$

définie sur un espace euclidien.

S'il existe une fonction scalaire  $v(x_n, n)$  vérifiant les propriétés suivantes :

- il existe une fonction  $a$  de classe  $K$  telle que

$$v(x_n, n) \geq a(\|x_n\|) \quad \forall x_n \in \mathcal{E} \quad (35)$$

-  $x_{n+1}$  étant lié à  $x_n$  par la relation (18), la différence finie

$\Delta v(x_n, n) = v(x_{n+1}, n+1) - v(x_n, n)$  est définie négative :

$$\exists c \in K, \quad \Delta v(x_n, n) \leq -c(\|x_n\|) \quad (36)$$

Nous pouvons conclure à la stabilité asymptotique globale du système /12, 14/.

Lorsque la propriété  $\Delta v(x_n, n) < 0$  n'est pas vérifiée dans tout l'espace d'état mais seulement dans un domaine entourant l'origine, il n'est plus possible de conclure à la stabilité asymptotique globale du processus dans tout l'espace d'état. Il convient alors de rechercher le domaine de stabilité par rapport aux conditions initiales /14/ (Domaine d'attractivité).

Dans ce cas, si  $v^*(x_n)$  désigne une fonction vérifiant les propriétés (35), (36) et (37) dans un domaine  $\mathcal{D}$ , un domaine d'attractivité vis à vis des conditions initiales s'obtient en recherchant la plus grande équipotentielle  $v^*(x_n) = c$  ( $c > 0$ )

comprise dans ce domaine

$$\exists b \in K \quad v^*(x_n) \leq b(\|x_n\|) \quad \forall x_n \in \mathcal{D} \quad (37)$$

3.2.2. - Application des méthodes de contraction à l'étude de la stabilité des suites récurrentes.

La suite vectorielle  $x_n$  dont l'évolution est décrite par la relation

(18) converge asymptotiquement vers l'origine s'il est possible de définir sur l'espace  $\mathcal{E}$  une norme  $\varphi$  telle que

$$\varphi(x_{n+1}) \leq \alpha_n \varphi(x_n) \quad \forall x_n \in \mathcal{E} \quad (38)$$

avec

$$0 \leq \alpha_n \leq \beta < 1$$

Cette propriété résulte de la nullité du produit infini

$$\prod_{i=n_0}^{\infty} \alpha_i = 0$$

Parmi les modes d'études de la stabilité basés sur la méthode de contraction nous pouvons citer en particulier les travaux de Kalman-Bertram /15/, F. Laurent /16/ et Wegrzyn-Vidal /17/.

### Conclusion

Les hypothèses faites, dans le cas des systèmes échantillonnés, sur le mode de fonctionnement des modulateurs mis en oeuvre conduisent en l'absence d'entrée à une représentation des processus par une relation de récurrence de la forme  $x_{n+1} = f(x_n, n)$ .

Les méthodes de Lyapunov et de contraction appliquées à l'étude de la stabilité de telles récurrences présentent certaines analogies. En particulier, lorsque la norme  $\varphi$  utilisée dans la méthode de contraction définit une fonction de Lyapunov pour la récurrence, elle conduit aux mêmes conditions de stabilité.

BIBLIOGRAPHIE CHAPITRE I

- /1/ E.I. JURY  
*"Theory and applications of the z-transform method"*.  
John Wiley and Sons - 1964
- /2/ W. HAHN  
*"Stability of motion"*.  
Springer-Verlag - 1967
- /3/ N. ROUCHE et J. MAWHIN  
*"Equations différentielles ordinaires II"*.  
Masson - Paris - 1973
- /4/ A. FOSSARD  
*"Commande des systèmes multidimensionnels"*.  
Dunod - 1972
- /5/ R.E. KALMAN  
*"Mathematical description of linear systems"*.  
J. Siam on Control - Ser. A 1 (2), pp 152-192 - 1963
- /6/ A.M. LYAPUNOV  
*"Problème général de la stabilité de mouvement"*.  
Annales des études de mathématiques n° 17  
Princeton Univ. Press - 1949
- /7/ S. LEFSCHETZ  
*"Stability of non-linear control system"*.  
Mathematic in Science and Engineering - Volume 13  
New York - Academic Press - 1965

- /8/ A.M. AIZERMAN and F.R. GANTMACHER  
"Absolute stability of control systems".  
Moscow - 1963
- /9/ Ja. CYPKIN  
"Sur la stabilité absolue des systèmes non linéaires échantillonnés".  
Automatika i telemekhanika - tome XXIII n° 12 - 1962
- /10/ JURY and LEE  
"On the stability of a certain class of non-linear sampled data systems".  
I.E.E.E. - Trans. Aut. Contr. - January 1964
- /11/ JURY and LEE  
"The absolute stability of systems with many non-linearities".  
Aut. Remote Control - Vol. 26 , pp 943-961 - June 1965
- /12/ W. HAHN  
"Application de la méthode de Lyapunov aux équations aux différences".  
Mathematische Annalen - Vol. 136 - 1958
- /13/ S. BANACH  
"Théorie des opérations linéaires".  
Monographie matematyczne  
Warszawa - 1932
- /14/ P. VIDAL  
"Systèmes échantillonnés non linéaires".  
Gordon and Breach - 1968
- /15/ R.E. KALMAN and S.E. BERTRAM  
"Control systems analysis and design via the second method of Lyapunov".  
Transaction of the ASME - J. of Basic Eng. 82 - June 1960



/16/

F. LAURENT

"Contribution à l'étude des systèmes échantillonnés non-linéaires en régime dynamique".

Thèse Sciences Physiques - Lille - 1968

/17/

S. WEGRZYN, P. VIDAL, O. POLUSINKI et F. LAURENT

"Contribution de l'algèbre de Banach à l'étude de la stabilité globale des processus linéaires".

4<sup>ème</sup> conférence d'automatique de Pologne-Cracovie - Juin 1967

## CHAPITRE II

### Systemes Majorants et Minorants d'un Processus discret.

#### Introduction

L'introduction des méthodes de comparaison utilisant plus d'une fonction auxiliaire a permis d'obtenir des résultats intéressants concernant l'étude de la stabilité des grands systèmes. La plupart des travaux sur ce sujet sont relatifs aux systèmes continus.

Nous pouvons citer principalement les travaux de Matrosov /1/ utilisant deux fonctions auxiliaires  $v(x)$  et  $w(x)$  au lieu d'une seule comme dans la méthode de Lyapunov, ainsi que les travaux de N. Rouche /2/ utilisant également deux fonctions auxiliaires, la seconde étant de type vectoriel.

L'extension de la méthode de comparaison développée par Wazewski /3/ et en particulier l'introduction de fonctions de Lyapunov de type vectoriel par Bellman /4/ et Matrosov /5/ a permis de simplifier l'étude des processus non linéaires, en particulier dans le cas des systèmes interconnectés.

Parmi les résultats induits par les travaux de Bellman nous pouvons citer tout d'abord ceux de F N Bailey /6/.

Bailey envisage l'étude de systèmes de type interconnectés décomposés en sous systèmes asymptotiquement stables et interconnectés linéairement.

L'étude s'effectue à partir de fonctions de Lyapunov et d'équations de comparaison déterminées initialement pour chacun des divers sous systèmes. Les équations de comparaison ainsi obtenues sont alors interconnectées selon le même schéma que pour le processus initial en un système d'équations de comparaison. Ce système est linéaire, à coefficients constants et d'ordre égal au nombre des sous systèmes intervenant dans la définition du processus initial.

La stabilité asymptotique du système auxiliaire permet alors de conclure à la stabilité asymptotique globale du processus initial.

Etudiant le même type de processus, A N Michel et D W Porter /7/ ont envisagé une approche de la stabilité utilisant pour le processus complet une fonction de Lyapunov construite par sommation pondérée des fonctions de Lyapunov élémentaires définies sur chacun des sous systèmes pris isolément. Cette méthode permet parfois d'obtenir des conditions de stabilité moins dures que celles obtenues par Bailey mais la détermination des coefficients de pondération s'avère en général assez délicate.

L'extension des résultats de Bailey aux processus interconnectés non linéairement a été réalisée par Mituhiko Araki et Bunji Kondo /8/ lorsque les gains de non-linéarités intervenant dans les interconnexions sont bornés.

D'un point de vue distinct les résultats de Matrosov /5/ basés également sur la méthode de comparaison ont permis récemment à L T Grujić et D D Siljak une étude de la stabilité des processus interconnectés qui ne soit plus nécessairement du type stabilité exponentielle /9/. D D Siljak a également introduit la notion de stabilité connective /10/, c'est-à-dire insensible à la présence des interconnexions lorsque celles-ci vérifient certaines conditions. Avec L T Grujić il a étendu aux processus discrets l'étude de la stabilité à partir de fonctions de Lyapunov vectorielles /11/ en utilisant un système de comparaison à coefficients constants.

Nous pouvons également citer en ce qui concerne l'étude des processus discrets les travaux de Mituhiko Araki, Kazuaki Ando et Bunji Kondo /12/ qui s'attachant à une classe très particulière de processus discrets recherchent un système de comparaison du processus complet à partir des systèmes de comparaisons définis sur chaque sous système pris isolément.

L'ensemble des méthodes générales concernant l'étude des grands systèmes qui viennent d'être citées possèdent certaines caractéristiques communes.

D'une part elles impliquent la possibilité de décomposer à priori le processus en sous systèmes asymptotiquement ou exponentiellement stables interconnectés.

D'autre part l'étude de stabilité s'effectue à partir de systèmes de comparaison à coefficients constants.

Dans ce chapitre nous envisageons la détermination de fonctions de comparaison vectorielles ne nécessitant pas la décomposition à priori du processus étudié en sous systèmes stables interconnectés. Cette propriété lorsqu'elle est vérifiée est susceptible de simplifier l'étude mais n'apparaît pas indispensable.

A cette fin, nous utiliserons les normes vectorielles de vecteurs et de matrices introduites initialement en analyse numérique par F. Robert /13/ dans le but d'étudier la convergence des récurrences linéaires de grande dimension et étudiées par F. Robert /14/, J.F.Maitre /15/ et E. Deutch/16/.

La généralisation au cas non-linéaire des normes vectorielles de matrices va ainsi permettre de définir des systèmes de comparaison qui ne soient plus nécessairement linéaires.

Le choix d'une même norme vectorielle pour un processus donné permet ainsi d'induire de façon systématique deux systèmes de comparaison.

Le premier que nous appellerons majorant et dont la stabilité entraîne celle du système initial et le second minorant permettant une étude de la non attractivité /17/.

I - Normes vectorielles de vecteurs et de matrices /14/.

1.1. - Définition de la norme vectorielle d'un vecteur.

Désignons par  $x$  et  $y$  deux vecteurs définis sur un espace vectoriel linéaire  $\mathcal{E}$  de dimension  $q$ .

Soit  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_k$  un recouvrement de l'espace  $\mathcal{E}$  et  $x^i$  la projection du vecteur  $x$  dans le sous espace  $\mathcal{E}_i$ .

Il vient

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \dots \cup \mathcal{E}_k \quad (1)$$

$$x^i = P_{\mathcal{E}_i} x \quad (2)$$

$P_{\mathcal{E}_i}$  matrice à coefficients constants définissant la projection de l'espace  $\mathcal{E}$  dans le sous espace  $\mathcal{E}_i$ .

Soit  $p_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) une norme scalaire définie sur le sous espace  $\mathcal{E}_i$  avec la notation :

$$p_i(x) = p_i(x^i) \quad (3)$$

si  $y^i$  désigne un second vecteur du sous espace  $\mathcal{E}_i$  et  $\lambda$  un réel, nous avons  $\forall i$  les inégalités

$$\begin{aligned} p_i(x^i) &> 0 && \forall x \in \mathcal{E} \\ p_i(x^i) &= 0 && \Leftrightarrow x^i = 0 \\ p_i(x^i + y^i) &\leq p_i(x^i) + p_i(y^i) && \forall x, y \in \mathcal{E} \\ p_i(\lambda x^i) &= |\lambda| p_i(x^i) && \forall x \in \mathcal{E} \text{ et } \forall \lambda \in \mathcal{R} \end{aligned} \quad (4)$$

Dans ces conditions notons  $p(x)$  le vecteur de  $\mathcal{R}_+^k$  de  $i$ ème composante  $p_i(x^i)$ . L'ensemble des relations (4) peut être réécrit :

$$\begin{aligned}
 p(x) &\geq 0 && \forall x \in \mathcal{E} \\
 p(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \\
 p(x+y) &\leq p(x) + p(y) && \forall x, y \in \mathcal{E} \\
 p(\lambda x) &= |\lambda| p(x) && \forall x \in \mathcal{E} \text{ et } \forall \lambda \in \mathcal{R}.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Chacune des relations envisagées étant prise composante à composante.

Un tel vecteur est appelé norme vectorielle du vecteur  $x$ .

Soit par exemple dans  $\mathcal{R}^4$  le vecteur  $x$  de  $i^{\text{ème}}$  composante  $x^i$  ;

le vecteur

$$p(x) = \left[ \begin{array}{c} |x^1| + |x^2| \\ \text{Max} \{ |x^2|, |x^3|, |x^4| \} \\ \sqrt{|x^3|^2 + |x^4|^2} \end{array} \right]
 \tag{6}$$

définit une norme vectorielle du vecteur  $x$ .

Une telle norme vectorielle semble redondante, en effet, le vecteur obtenu en supprimant la dernière composante de  $p(x)$  reste une norme vectorielle au sens de la définition (5).

Lorsque dans le recouvrement  $\{\mathcal{E}_i\}$  de l'espace  $\mathcal{E}$  il n'existe pas de sous espace  $\mathcal{E}_{i_0}$  tel que

$$\bigcup_{j \neq i_0} \mathcal{E}_j = \mathcal{E}
 \tag{7}$$

la norme vectorielle est dite surjective ; c'est le cas,  $x$  étant défini sur le même espace de la norme  $p^*(x)$

$$p^*(x) = \left[ \begin{array}{c} |x^1| + |x^2| \\ \text{Max} \{ |x^2|, |x^3|, |x^4| \} \end{array} \right]
 \tag{8}$$

Si de plus les sous espaces  $\mathcal{E}_i$  constituent une partition de  $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j
 \tag{9}$$

la norme  $p(x)$  est dite régulière, c'est-à-dire sans redondance c'est le cas de la norme  $p^{**}(x)$

$$p^{**}(x) = \begin{bmatrix} |x^1| + |x^2| \\ \text{Max}\{|x^3|, |x^4|\} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Seules les normes vectorielles régulières sont utilisées dans la suite de cette étude.

### 1.2. - Définition des majorantes d'une matrice.

Soit la relation

$$y = Ax \quad (11)$$

y vecteur colonne de dimension q

x vecteur colonne de dimension p

A matrice rectangulaire de dimension q x p

Nous appelons majorante de A relativement aux normes vectorielles p et q, de dimensions respectives k et l, toute matrice  $M^*(A)$  de dimension l x k telle que l'inégalité (12) soit vérifiée pour toute valeur de x.

$$q(Ax) \leq M^*(A) p(x) \quad (12)$$

En particulier il est possible de choisir la majorante M(A) d'éléments :

$$m_{ij}(A) = \sup_{\substack{x \in \mathcal{E}_j \\ x \neq 0}} \frac{q_i(Ax)}{p_j(x)} \quad (13)$$

Remarque :

La régularité de p implique que M(A) constitue une norme vectorielle de la matrice A, il vient en particulier  $m_{ij}(A) \geq 0 \quad \forall i, j$ . De plus dans ce cas M(A) est la plus petite des majorantes de A relative à p et q (Annexe I).

### II - Détermination d'une suite majorante d'une suite récurrente vectorielle non linéaire.

Avant d'aborder la détermination d'un système majorant d'un processus

discret, nous allons étendre au cas d'un système de comparaison non linéaire la version discrète du lemme de Bellman /14/ établie par L.T. Grujić et D.D. Siljak /11/.

Lemme :

Soit  $p(n, n_0, p_0)$  une solution de l'inéquation aux différences d'ordre  $k$  :

$$p(n+1) \leq M(n) p(n) \quad (14)$$

avec  $p_0 = p(n_0, n_0, p_0)$  et  $M(n)$  fonction non linéaire de  $n$  et de  $p(n)$

et soit  $q(n, n_0, q_0)$  une solution de l'équation de comparaison discrète :

$$q(n+1) = M(n) q(n) \quad (15)$$

telle que  $q_0 = q(n_0, n_0, q_0)$

Si  $q_0 = p_0 \geq 0$  et si les éléments  $m_{ij}(n)$  de la matrice  $M(n)$  sont non négatifs

$$m_{ij}(n) \geq 0 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, k \quad (16)$$

alors

$$p(n, n_0, p_0) \leq q(n, n_0, p_0) \quad \forall n \geq n_0 \quad (17)$$

La démonstration de cette propriété est simple, en effet les relations (14) et (15) et la propriété (16) impliquent le résultat par récurrence sur l'indice  $n$ .

### 2.1. - Majoration d'une suite récurrente.

Le système étudié est décrit par la relation de récurrence vectorielle :

$$x_{n+1} = A(t_n, x_n) x_n \quad (18)$$

$x_n$  vecteur de dimension  $q$  définissant l'état du système à l'instant  $n$ .

$A(t_n, x_n)$  matrice carrée d'ordre  $q$  dont les coefficients non constants mais bornés caractérisent la récurrence.

Soit  $p(x)$  une norme vectorielle régulière de taille  $k$ .

A chaque instant  $n$  il est possible de déterminer une majorante de la matrice  $A(t_n, x_n)$ .



La détermination d'une matrice majorante de  $A(t_n, x_n)$  relative à la norme vectorielle régulière  $p$  et telle que l'on ait  $\forall n \geq n_0$  et  $\forall x_n \in \mathcal{E}$  l'inégalité

$$p(x_{n+1}) \leq M^*(A(t_n, x_n)) p(x_n) \quad (19)$$

peut alors s'effectuer selon une méthode semblable à celle définie en (II.1.2.)

Notons  $x_n^i$  la projection du vecteur  $x_n$  dans le sous espace  $\mathcal{E}_i$

$$x_n^i = P_{\mathcal{E}_i} x_n \quad \forall i = 1, 2, \dots, k \quad (20)$$

et  $m_{ij}^*(A(t_n, x_n))$  les éléments de la matrice  $M^*(A(t_n, x_n))$ .

La relation (19) s'écrit alors :

$$p_i(x_{n+1}^i) \leq \sum_{j=1}^k m_{ij}^*(A(t_n, x_n)) p_j(x_n^j) \quad (21)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, k$$

Compte tenu des relations (18) et (20) il vient la majorante locale et instantanée  $M(A(t_n, x_n))$  d'éléments minima

$$m_{ij}(A(t_n, x_n)) : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$m_{ij}(A(t_n, x_n)) = \sup_{\substack{x \in \mathcal{E}_j \\ x \neq 0}} \frac{p_i(P_{\mathcal{E}_i} A(t_n, x_n) x)}{p_j(x)} \quad (22)$$

En désignant par  $A_{ij}(t_n, x_n)$  la matrice définie par la relation (23)

$$A_{ij}(t_n, x_n) = P_{\mathcal{E}_i} A(t_n, x_n) P_{\mathcal{E}_j} \quad (23)$$

$$\forall i, j = 1, 2, \dots, k$$

il vient

$$m_{ij}(A(t_n, x_n)) = \sup_{\substack{x \in \mathcal{E}_j \\ x \neq 0}} \frac{p_i(A_{ij}(t_n, x_n) x)}{p_j(x)} \quad (24)$$

Il est évident que toute matrice  $M^*(A(t_n, x_n))$  obtenue en ajoutant à  $M(A(t_n, x_n))$  une matrice à éléments non négatifs est une majorante de  $A(t_n, x_n)$

$$m_{ij}^*(A(t_n, x_n)) = m_{ij}(A(t_n, x_n)) + \delta_{ij} \quad (25)$$

$$\delta_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, k$$

En effet, de par la définition des normes vectorielles  $p(x_n) \geq 0$ , comme les éléments de la plus petite des majorantes  $m_{ij}(A(t_n, x_n))$  sont non négatifs il en est de même de  $m_{ij}^*(A(t_n, x_n))$ , la propriété énoncée en résulte immédiatement.

Cette propriété qui conduit à une majoration plus dure pour la matrice  $A(t_n, x_n)$  présente cependant un intérêt non négligeable. Elle peut permettre d'une part d'obtenir une majorante d'expression plus simple que celle définie en (22) et (24), et d'autre part de déterminer une majorante d'un processus imparfaitement identifié. Il suffit dans ce cas de remplacer le terme indéterminé par une majorante de la valeur maximale qu'il est susceptible d'atteindre. Nous illustrerons cette propriété plus loin sur un exemple.

Montrons maintenant que la majorante ainsi définie permet l'étude de la stabilité du processus.

Soit  $p(n, n_0, p_0)$  une solution de l'inéquation

$$p(n+1) \leq M^*(A(t_n, x_n)) p(n) \quad (26)$$

telle que  $\forall n \geq n_0$  la suite  $x_n$  vérifie la récurrence (18) avec la condition initiale  $x_{n_0}$  et soit le système de comparaison régi par l'équation :

$$q(n+1) = M^*(A(t_n, x_n)) q(n) \quad (27)$$

avec

$$q_0 = -p_0 = p(x_{n_0}) \quad (28)$$

Il vient compte tenu du lemme précédent :

$$q(n) \geq p(n) \quad \forall n \geq n_0 \quad (29)$$

La suite récurrente  $p(x_n)$  vérifie bien l'inégalité (26) et la condition (28) ce qui implique

$$p(x_n) \leq q(n) \quad \forall n \geq n_0 \quad (30)$$

dans ces conditions la stabilité asymptotique du système décrit par la relation (27) implique la même propriété pour le processus initial.

## 2.2. - Détermination pratique d'une majorante.

2.2.1. - En pratique, on choisit généralement une partition de l'espace de définition du vecteur état déduite d'une décomposition en blocs de la matrice A.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1j} & \dots & A_{1k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{ik} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \dots & A_{kj} & \dots & A_{kk} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$A_{ij}$  représente ici le bloc formé des éléments d'indices de lignes et colonnes respectifs  $I_i$  et  $I_j$ .

Dans ces conditions si  $S_{p_i p_j}(A_{i,j})$  désigne la norme scalaire du "bloc"

$A_{ij}$  issue des normes de vecteurs  $p_i$  et  $p_j$  /18/ il vient :

$$M(A(t_n, x_n)) = \begin{bmatrix} S_{p_1 p_1}(A_{11}(t_n, x_n)) & \dots & S_{p_1 p_k}(A_{1k}(t_n, x_n)) \\ \vdots & & \vdots \\ S_{p_k p_1}(A_{k1}(t_n, x_n)) & \dots & S_{p_k p_k}(A_{kk}(t_n, x_n)) \end{bmatrix} \quad (32)$$

Dans le cas de systèmes de type interconnectés, le choix du partitionnement de l'espace  $\mathcal{E}$  peut être induit par la structure particulière du processus. Il peut alors permettre d'isoler l'effet des divers sous systèmes sur la stabilité du processus.

En particulier dans le cas d'un système composé décrit par l'ensemble des relations (33):

$$\begin{aligned} x_{n+1}^i &= A_i x_n + B_i f_i(\epsilon_n^i) \\ \epsilon_n^i &= \sum_{j=1}^k C_{ij} x_n^j \\ \forall i &= 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (33)$$

lorsque chacune des fonctions scalaires  $f_i(\epsilon_n^i)$  est Lipschitzienne et telle que

$$l_i \epsilon_n^i \leq f_i(\epsilon_n^i) \leq L_i \epsilon_n^i \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$$

avec  $l_i$  et  $L_i$  constantes  $\in \mathcal{R}$ , nous pouvons définir les fonctions  $f_i^*(\epsilon_n^i)$  telle que

$$f_i(\epsilon_n^i) = f_i^*(\epsilon_n^i) \epsilon_n^i \quad (34)$$

Il en résulte en notant

$$x_n^T = [x_n^{1T}, x_n^{2T}, \dots, x_n^{kT}] \quad (35)$$

la mise en équation

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 C_{11} f_1^*(\epsilon_n^1) & , B_1 C_{12} f_1^*(\epsilon_n^1), \dots , B_1 C_{1k} f_1^*(\epsilon_n^1) \\ B_2 C_{21} f_2^*(\epsilon_n^2) & , A_2 + B_2 C_{22} f_2^*(\epsilon_n^2), \dots , B_2 C_{2k} f_2^*(\epsilon_n^2) \\ \vdots & \vdots \\ B_k C_{k1} f_k^*(\epsilon_n^k) & , B_k C_{k2} f_k^*(\epsilon_n^k) \dots A_k + B_k C_{kk} f_k^*(\epsilon_n^k) \end{bmatrix} x_n \quad (36)$$

On voit que le choix d'un partitionnement de l'espace  $\mathcal{E}$  de définition du vecteur  $x_n$  correspondant aux divers sous systèmes décrits par la relation (33) conduit à la définition d'une majorante dans laquelle le  $i^{\text{ème}}$  élément diagonal correspond au  $i^{\text{ème}}$  sous système pris isolément.

La norme vectorielle  $p(x_n) = \{p_i(x_n^i)\}$  induit alors la majorante :

$$p(x_{n+1}) \leq \begin{bmatrix} S_{p_1 p_1}(A_1+B_1 C_{11} f_1^*(\epsilon_n^1)) & , & S_{p_1 p_2}(B_1 C_{12} f_1^*(\epsilon_n^1)) & , & \dots \\ S_{p_2 p_1}(B_2 C_{21} f_2^*(\epsilon_n^2)) & & S_{p_2 p_2}(A_2+B_2 C_{22} f_2^*(\epsilon_n^2)) & , & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} p(x_n) \quad (37)$$

### 2.2.2. - Mise en oeuvre.

D'un point de vue pratique, la détermination d'une majorante en utilisant le même type de norme sur chacun des sous espaces définissant le partitionnement permet de simplifier considérablement l'étude.

Afin de montrer les diverses possibilités offertes pour la majoration, considérons un système du 5<sup>ème</sup> ordre décrit par la relation :

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} a_{11}(t_n, x_n) & \dots & a_{15}(t_n, x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{51}(t_n, x_n) & \dots & a_{55}(t_n, x_n) \end{bmatrix} x_n \quad (38)$$

a) Il est tout d'abord possible de choisir une norme vectorielle de vecteur  $x_n$  de taille 1 ; on retrouve dans ce cas la définition de la norme scalaire de matrice /18/.

Il vient par exemple en utilisant la norme du max la majoration :

$$\text{Max}_{i=1,\dots,5} |x_{n+1}^i| \leq \text{Max}_{i=1,\dots,5} \sum_{j=1}^5 |a_{ij}(t_n, x_n)| \cdot \text{Max}_{i=1,\dots,5} |x_n^i| \quad (39)$$

b) Le choix d'une norme vectorielle de taille égale à l'ordre du système conduit à une majoration très simple. En particulier, lorsqu'elle est définie en remplaçant chaque composante du vecteur état par sa valeur absolue il vient :

$$\begin{bmatrix} |x_{n+1}^1| \\ |x_{n+1}^2| \\ \vdots \\ |x_{n+1}^5| \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} |a_{11}(t_n, x_n)| & |a_{12}(t_n, x_n)| & \dots & |a_{15}(t_n, x_n)| \\ |a_{21}(t_n, x_n)| & |a_{22}(t_n, x_n)| & \dots & |a_{25}(t_n, x_n)| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |a_{51}(t_n, x_n)| & |a_{52}(t_n, x_n)| & \dots & |a_{55}(t_n, x_n)| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |x_n^1| \\ |x_n^2| \\ \vdots \\ |x_n^5| \end{bmatrix} \quad (40)$$

Ce type de majoration est très utilisé. La définition du symbolisme particulier des normes vectorielles trouve son intérêt dans le type de majoration suivant qui permet de définir un système de comparaison de dimension strictement comprise entre 1 et q (ordre du système).

c) Majoration à partir d'une norme vectorielle de taille k inférieure à l'ordre du système.

Nous allons envisager deux modes de majoration conduisant tous deux à un système de comparaison de dimension 2.

La norme définie sur chaque sous espace étant la norme du max, définissons tout d'abord un partitionnement de l'espace  $\mathcal{E}$  tel que :

$$X^1 = \{x^1, x^2\} \in \mathcal{E}_1, \quad X^2 = \{x^3, x^4, x^5\} \in \mathcal{E}_2 \quad (41)$$

il vient

$$\begin{bmatrix} \text{Max}\{|x_{n+1}^1|, |x_{n+1}^2|\} \\ \\ \text{Max}\{|x_{n+1}^3|, |x_{n+1}^4|, |x_{n+1}^5|\} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \text{Max}\left\{ \begin{array}{l} |a_{11}|+|a_{12}| \\ |a_{21}|+|a_{22}| \end{array} \right\}, \text{Max}\left\{ \begin{array}{l} |a_{13}|+|a_{14}|+|a_{15}| \\ |a_{23}|+|a_{24}|+|a_{25}| \end{array} \right\} \\ \\ \text{Max}\left\{ \begin{array}{l} |a_{31}|+|a_{32}| \\ |a_{41}|+|a_{42}| \\ |a_{51}|+|a_{52}| \end{array} \right\}, \text{Max}\left\{ \begin{array}{l} |a_{33}|+|a_{34}|+|a_{35}| \\ |a_{43}|+|a_{44}|+|a_{45}| \\ |a_{53}|+|a_{54}|+|a_{55}| \end{array} \right\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Max}\{|x_n^1|, |x_n^2|\} \\ \\ \text{Max}\{|x_n^3|, |x_n^4|, |x_n^5|\} \end{bmatrix} \quad (42)$$

Un partitionnement de l'espace  $\mathcal{E}$  défini par exemple par :

$$x^1 = \{x^1, x^3\} \in \mathcal{E}_1 \quad \text{et} \quad x^2 = \{x^2, x^4, x^5\} \in \mathcal{E}_2 \quad (43)$$

conduirait à la majoration suivante, obtenue en permutant les indices 2 et 3 dans la relation (42)

$$\begin{bmatrix} \text{Max}\{|x_{n+1}^1|, |x_{n+1}^3|\} \\ \\ \text{Max}\{|x_{n+1}^2|, |x_{n+1}^4|, |x_{n+1}^5|\} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \text{Max}\left\{ \begin{array}{l} |a_{11}|+|a_{13}| \\ |a_{31}|+|a_{33}| \end{array} \right\}, \quad \dots \\ \\ \dots, \quad \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Max}\{|x_n^1|, |x_n^3|\} \\ \\ \text{Max}\{|x_n^2|, |x_n^4|, |x_n^5|\} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Dans le cas général les résultats proposés peuvent se résumer comme suit :

La matrice  $A$  étant décomposée en blocs  $A_{ij}$ , le choix du même type de norme sur chaque sous espace  $\mathcal{E}_i$  conduit aux majorations simples suivantes :

- a) si la norme vectorielle  $p$  est de dimension  $k = 1$ , on retrouve la définition d'une norme scalaire de matrice.

b) dans le cas d'une norme vectorielle de dimension égale à celle du vecteur état, la majorante  $M(A(t_n, x_n))$  s'obtient en remplaçant chaque élément de  $A(t_n, x_n)$  par son module.

$$\begin{bmatrix} |x_{n+1}^1| \\ \vdots \\ |x_{n+1}^q| \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} |a_{11}(t_n, x_n)| & \dots & |a_{1q}(t_n, x_n)| \\ \vdots & & \vdots \\ |a_{q1}(t_n, x_n)| & \dots & |a_{qq}(t_n, x_n)| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |x_n^1| \\ \vdots \\ |x_n^q| \end{bmatrix} \quad (45)$$

c) Lorsque la norme vectorielle  $p$  est de taille  $k$  strictement comprise entre 1 et  $q$ , notons  $I_i$  et  $I_j$  respectivement les ensembles des indices des lignes et des colonnes du bloc  $A_{ij}$ . Il vient alors selon le choix de la norme scalaire utilisée la majorante d'éléments  $m_{ij}(A(t_n, x_n))$  :

- Norme de matrice déduite de la norme du max :

$$m_{ij}(A(t_n, x_n)) = \max_{k \in I_i} \sum_{\ell \in I_j} |a_{k\ell}(t_n, x_n)| \quad (46)$$

- Norme de matrice déduite de la norme duale du max :

$$m_{ij}(A(t_n, x_n)) = \max_{\ell \in I_j} \sum_{k \in I_i} |a_{k\ell}(t_n, x_n)| \quad (47)$$

- Norme de matrice déduite de la norme euclidienne :

$$m_{ij}(A(t_n, x_n)) = \{\rho(A_{ij}^T \cdot A_{ij})\}^{\frac{1}{2}} \quad (48)$$

avec  $\rho(M)$  norme spectrale de la matrice  $M$ .

### 2.3 - Application à l'étude de la stabilité d'un processus en fonction des non-linéarités (cette notion est à rapprocher de celle de stabilité absolue).

Soit à déterminer une condition sur la non-linéarité  $k(x_n)$  permettant de



conclure à la stabilité asymptotique globale du système discret dont l'évolution est régie par la relation (49)

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,05 & -0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & -0,1 & 0,5 & -0,15 & 0,3 \\ 0,1k(x_n) & 0,2 & -0,2 & 0,1 & 0,05 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & -0,1k(x_n) & 0,1 \\ 0,05 & -0,25 & 0,1 & 0,15 & 0,1 \end{bmatrix} x_n \quad (49)$$

L'utilisation des critères usuels ne permet pas de conclure simplement à la stabilité du processus.

En particulier la norme du Max et sa duale conduisent à des impossibilités.

L'application des fonctions de Lyapunov vectorielles aux systèmes discrets nécessite la décomposition préalable du système interconnecté et la détermination d'un nombre important de paramètres arbitraires en vue de définir un système de comparaison à coefficients constants.

Cette méthode, en général délicate à mettre en oeuvre s'avère ici difficilement envisageable.

Nous proposons l'étude à partir d'un système de comparaison non-linéaire d'ordre 3 défini à partir de la norme vectorielle :

$$p(x_n) = \begin{bmatrix} p_1(x_n) & = & \text{Max}\{|x_n^1|, |x_n^2|\} \\ p_2(x_n) & = & |x_n^3| \\ p_3(x_n) & = & \text{Max}\{|x_n^4|, |x_n^5|\} \end{bmatrix} \quad (50)$$

La décomposition de  $\mathcal{C}$  en sous espaces est réalisée de façon à ce que le partitionnement de la matrice qui en résulte isole dans un même bloc les éléments de plus grand module. La nature de la norme est alors choisie de façon à minimiser la contribution de ces éléments lors de la définition de la majorante. Il vient l'inégalité :

$$p(x_{n+1}) \leq \begin{bmatrix} 0,15 & 0,5 & 0,5 \\ 0,1|k(x_n)|+0,2 & 0,2 & 0,15 \\ 0,3 & 0,1 & \text{Max} \left| \begin{array}{l} 0,1|k(x_n)|+0,1 \\ 0,25 \end{array} \right. \end{bmatrix} p(x_n) \quad (51)$$

L'application du lemme de comparaison établi plus haut montre que la stabilité asymptotique globale du système discret (52) implique la même propriété pour le processus initial.

$$y_{n+1} = \begin{bmatrix} 0,15 & 0,5 & 0,5 \\ 0,1|k(x_n)|+0,2 & 0,2 & 0,15 \\ 0,3 & 0,1 & \text{Max} \begin{cases} 0,1|k(x_n)|+0,1 \\ 0,25 \end{cases} \end{bmatrix} y_n \quad (52)$$

Une seconde majoration utilisant la norme scalaire duale de la précédente

$$\varphi(y_n) = |y_n^1| + |y_n^2| + |y_n^3| \quad (53)$$

conduit à l'inégalité

$$\varphi(y_{n+1}) \leq \text{Max} \left\{ \begin{array}{l} 0,15 + 0,1|k(x_n)| + 0,2 + 0,3 \\ 0,5 + 0,2 + 0,1 \\ 0,5 + 0,15 + \text{Max} \begin{cases} 0,1|k(x_n)| + 0,1 \\ 0,25 \end{cases} \end{array} \right\} \varphi(y_n) \quad (54)$$

une condition suffisante de stabilité asymptotique globale du système (52) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} 0,65 + 0,1|k(x_n)| &< 1 \\ 0,75 + 0,1|k(x_n)| &< 1 \end{aligned}$$

Soit

$$|k(x_n)| < 2,5 \quad \forall x_n \in \mathcal{E} \quad (55)$$

Cette même condition implique la stabilité asymptotique globale du système initial (49).

III - Généralisation de la notion de système majorant.

La notion de système majorant qui vient d'être définie correspond essentiellement aux processus pour lesquels il est possible de définir simplement une description de la forme (18). Nous allons ici envisager deux modes de description plus généraux d'un processus, d'une part le cas d'une description de la forme (S<sub>1</sub>), qui permet de représenter une classe importante de systèmes non-linéaires qui n'admettent pas nécessairement une description de la forme /18/ :

$$(S_1) \quad x_{n+1} = A(t_n, x_n) a(t_n, x_n) \quad (56)$$

$$A : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{q \times r} ; a : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad r \leq q$$

et d'autre part le cas d'une description de la forme :

$$(S_2) \quad x_{n+1} = A(t_n, x_n, \Lambda_n, E_n) a(t_n, x_n) \quad (57)$$

$$A : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^q \times \mathcal{D}_\Lambda \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^{q \times r} ; a : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^r$$

correspondant au cas d'un processus imparfaitement identifié et à structure variable.

Dans cette écriture la matrice  $\Lambda_n \in \mathcal{D}_\Lambda \subset \mathbb{R}^{m \times m^*}$  d'éléments  $\lambda_{ij}$  caractérise les incertitudes sur la description du processus étudié et peut dépendre du temps  $t_n$  et de l'état  $x_n$ ,

$$\lambda_{ij} : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathcal{D}_{\Lambda_{ij}} \subset \mathbb{R}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \quad \text{et} \quad \forall j = 1, 2, \dots, m^*$$

Le domaine de variation admissible  $\mathcal{D}_\Lambda$  de  $\Lambda_n$  est supposé connu ; il est en général fonction de la précision obtenue lors de l'identification du processus.

$E_n : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^{s \times s}$  représente la valeur à l'instant  $t_n$  de la matrice d'interconnection définie par D.D. Siljak /19/. Elle exprime le poids des diverses connections intervenant entre les  $s$  sous-systèmes constituant le processus.

Il vient  $e_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, s$  la condition  $e_{ij} = 0$  impliquant la non interaction du  $j^{\text{ème}}$  sous système, caractérisé par le vecteur état  $x_n^j$  sur le  $i^{\text{ème}}$  sous système de vecteur état  $x_n^i$ .

3.1. - Système majorant défini à partir d'une norme vectorielle p.

3.1.1. - Définition du système majorant et lemme de comparaison.

Définition 1 : La matrice  $M : \mathcal{T} \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$  définit un système majorant relatif à la norme  $p : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^k_+$  du système  $S_1/S_2$  (relation (56), ou (57)) si l'inégalité (58) est vérifiée le long des trajectoires de  $S_1/S_2$  pour chaque composante de p

$$p(x_{n+1}) \leq M(t_n, x_n) p(x_n) \quad \forall t_n, x_n \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}^q \quad (58)$$

L'existence d'un système majorant d'un processus permet lorsque  $M = \{\mu_{ij} \geq 0, \forall i, j = 1, 2, \dots, k\}$  de définir pour le système  $S_1/S_2$  un système de comparaison C.

Lemme de comparaison : Si il existe une norme vectorielle p et une matrice  $M(t_n, x_n)$  d'éléments non négatifs et définissant un système majorant de  $S_1/S_2$  alors le système C défini par la relation :

$$z_{n+1} = M(t_n, x_n) z_n \quad (59)$$

est un système de comparaison de  $S_1/S_2$ , il vient alors lorsque l'inégalité

$$z_{n_0} \geq p(x_{n_0}) \quad (60)$$

est vérifiée la relation

$$z_n \geq p(x_n) \quad \forall n > n_0 \quad (61)$$

Démonstration

Soit  $\varepsilon_n$  un vecteur d'écart défini par la relation (62)

$$\varepsilon_n = z_n - p(x_n) \tag{62}$$

pour  $n = n_0$  ( $t_n = t_{n_0}$ ) la relation (60) impose  $\varepsilon_{n_0} \geq 0$  les relations (58) et (59) impliquent alors :

$$\varepsilon_{n+1} \geq M(t_n, x_n) \varepsilon_n \tag{63}$$

La proposition énoncée se déduit alors immédiatement des relations (62) et (63).

3.1.2. - Détermination de systèmes majorants d'un processus.

Plusieurs types de systèmes majorants peuvent être définis à partir d'un modèle donné d'un processus de la forme  $S_1/S_2$  (relations 56 et 57) selon que l'on recherche un système de comparaison à coefficients constants, fonction de l'état ou du temps seul ou fonction de ces deux variables.

Soit  $\mathcal{E}^* = \mathbb{R}^r$  et  $\mathcal{E}_1^*, \mathcal{E}_2^*, \dots, \mathcal{E}_k^*$  une partition de  $\mathcal{E}^*$  et  $P_{\mathcal{E}_i}^*$  l'opérateur de projection de  $\mathcal{E}^*$  dans  $\mathcal{E}_i^*$

il vient

$$\begin{aligned} a_i(t_n, x_n) &= P_{\mathcal{E}_i}^* a(t_n, x_n) \quad \forall i = 1, 2, \dots, k \\ A_{ij}(t_n, x_n) &= P_{\mathcal{E}_i}^* A(t_n, x_n, \Lambda_n, E_n) P_{\mathcal{E}_j}^* \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \tag{64}$$

Ces notations permettent de définir quatre types de matrices majorantes associées au système  $S_2$

Définition 2 : la matrice  $M(t_n, x_n) = (\mu_{ij}(t_n, x_n))$ ,

$\mu_{ij} : \mathcal{E}_0 \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une matrice majorante du système  $S_2$  relative à la

norme p :  $\mathcal{R}^q \rightarrow \mathcal{R}_+^k$  si et seulement si

$$\mu_{ij} = \text{Max}(\delta, \sup_{\substack{x \in \mathcal{C} \\ \Lambda \in \mathcal{D}_\Lambda \\ E \in \mathcal{E}}} \frac{p_i(A_{ij}(t_n, x_n, \Lambda, E) a_j(t_n, x))}{p_j(x^j)}) \quad (65)$$

$$\forall i, j = 1, 2, \dots, k, \forall t_n \in \mathcal{C}_0, \forall x_n \in \mathcal{C}, \delta \in ]0, +\infty[$$

avec  $\mathcal{C}_0 = [t_0, +\infty[$

La recherche de systèmes majorants fonctions de  $t_n$  seul (majorant instantané) ou de  $x_n$  seul (majorant local) conduit aux définitions 3 et 4

Définition 3 : La matrice  $M(t_n) = (\mu_{ij}(t_n))$ ,  $\mu_{ij} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R}_+$  est une matrice majorante du système  $S_2$  relative à la norme  $p : \mathcal{R}^q \rightarrow \mathcal{R}_+^k$  si et seulement si :

$$\mu_{ij}(t_n) = \text{Max}(\delta, \sup_{\substack{x \in \mathcal{C} \\ \Lambda \in \mathcal{D}_\Lambda \\ E \in \mathcal{E}}} \frac{p_i(A_{ij}(t_n, x, \Lambda, E) a_j(t_n, x))}{p_j(x^j)}) \quad (66)$$

$$\forall i, j = 1, 2, \dots, k ; \forall t_n \in \mathcal{C}_0, \delta \in ]0, +\infty[$$

Définition 4 : La matrice  $M(x_n) = (\mu_{ij}(x_n))$ ,  $\mu_{ij} : \mathcal{R}^q \rightarrow \mathcal{R}_+$  est une matrice majorante du système  $S_2$  relative à la norme  $p : \mathcal{R}^q \rightarrow \mathcal{R}_+^k$  si et seulement si

$$\mu_{ij}(x_n) = \text{Max}(\delta, \sup_{\substack{x \in \mathcal{C} \\ t \in \mathcal{C}_0 \\ \Lambda \in \mathcal{D}_\Lambda \\ E \in \mathcal{E}}} \frac{p_i(A_{ij}(t, x_n, \Lambda, E) a_j(t, x))}{p_j(x^j)}) \quad (67)$$

$$\forall i, j = 1, 2, \dots, k ; \forall x_n \in \mathcal{C}, \delta \in ]0, +\infty[$$

Une majorante constante peut être obtenue à partir de la définition 5

Définition 5 : la matrice  $M = (\mu_{ij})$  est une matrice majorante du système  
 $S_2$  relative à la norme  $p : \mathcal{R}^q \rightarrow \mathcal{R}_+^k$  si et seulement si

$$\mu_{ij} = \text{Max}(\delta, \sup_{\substack{x \in \mathcal{C} \\ t \in \mathcal{C}_0 \\ \Lambda \in \mathcal{D}_\Lambda \\ E \in \mathcal{E}}} \frac{p_i(A_{ij}(t, x, \Lambda, E) a_j(t, x))}{p_j(x^j)}) \quad (68)$$

$$\forall i, j = 1, 2, \dots, k ; \quad \delta \in ]0, +\infty[$$

La recherche de majorants des systèmes décrits sous la forme  $S_1$  s'effectue en choisissant  $\Lambda_n$  et  $E_n$  constants dans les définitions précédentes.

### Application

Soit à déterminer une majorante du système non linéaire défini par la relation (69)

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,05 \sin t_n & -0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & -0,1 & \frac{x_n^1 x_n^3}{(x_n^1)^2 + (x_n^3)^2} & -0,15 & 0,3 \\ 0,1k(x_n) & 0,2 & -0,2 & 0,1 \cos t_n & 0,05 \\ 0,1 \cos x_n^4 & 0,1 & 0,1 & -0,1k(x_n) & 0,1 \\ 0,05 & -0,25 & 0,1 \sin x_n^5 & 0,15 & 0,1 \end{bmatrix} x_n \quad (69)$$

en posant

$$\Lambda_n = \left( \frac{x_n^1 x_n^3}{(x_n^1)^2 + (x_n^3)^2} \right)^2, \quad \cos x_n^4, \quad \sin x_n^5$$

ce système prend la forme

$$x_{n+1} = A(t_n, x_n, \Lambda_n) x_n \quad (69)$$

Le choix du vecteur  $\Lambda_n$  se déduit de la recherche des éléments de la relation (69) admettant une variation bornée ce qui permettra de simplifier l'expression du système majorant.

L'application de la définition 4 avec la norme  $p(x)$  définie en (50) conduit alors au système majorant défini en (51)

$$p(x_n)^T = \left[ \max(|x_n^1|, |x_n^2|), |x_n^3|, \max(|x_n^4|, |x_n^5|) \right] \quad (50)$$

$$p(x_{n+1}) \leq \begin{bmatrix} 0,15 & 0,5 & 0,5 \\ 0,1 k(x_n) + 0,2 & 0,2 & 0,15 \\ 0,3 & 0,1 & h(x_n) \end{bmatrix} p(x_n) \quad (51)$$

$$\text{avec } h(x_n) = \begin{cases} 0,25 & \text{si } |k(x_n)| < 1,5 \\ 0,1|k(x_n)| + 0,1 & \text{si } |k(x_n)| \geq 1,5 \end{cases}$$

### 3.2. - Système majorant défini à partir de deux normes $p$ et $q$ distinctes.

L'utilisation de deux normes distinctes permet de définir un système majorant d'un système donné.

Ce système majorant ne permet pas en général la définition d'un système de comparaison du processus mais permet d'envisager des études particulières de stabilité.

Le processus étant décrit sous la forme  $S_1$ , notons  $q$  une norme vectorielle de taille  $k'$  du vecteur  $a(t_n, x_n)$ ,  $q: \mathcal{R}^r \rightarrow \mathcal{R}^{k'}$  il vient :



Définition 6 : La matrice  $M_{pq} \in \mathcal{R}_+^{k \times k}$  définit un système majorant de  $S_1/S_2$  relatif aux normes vectorielles  $p : \mathcal{R}^q \rightarrow \mathcal{R}_+^k$  et  $q : \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}_+^{k'}$  si et seulement si l'inégalité (70) est vérifiée composante à composante le long des trajectoires de  $S_1/S_2$ .

$$p(x_{n+1}) \leq M_{pq}(t_n, x_n) q(a(t_n, x_n)), \forall t_n \in \mathcal{C}_0, \forall x_n \in \mathcal{E} \quad (70)$$

A partir de cette définition générale peuvent être précisés divers types de Matrices Majorantes selon que le système est sous la forme  $S_1$  ou  $S_2$  et que la majorante recherchée est linéaire ou non linéaire.

Les définitions de matrices majorantes qui viennent d'être énoncées dans cette section nous ont conduit à introduire une classe plus générale de systèmes majorants dont la forme particulière appelle un certain nombre de remarques :

- Le choix de  $\delta \in \mathcal{R}_+$  dans les définitions 2-5 permet la détermination d'une majorante au sens des définitions 1 ou 6 en utilisant une norme vectorielle  $p$  non surjective et même non régulière et dont les éléments sont strictement positifs.

- La définition 1 permet d'envisager des majorantes à coefficients non tous non-négatifs mais elles ne permettent généralement pas la définition d'un système de comparaison.

- La majorante de la définition 2 correspond à celle définie à la relation (22) lorsque, le système admettant une description de la forme  $S_1$  il vient

$$r = q, \quad a(t_n, x_n) \equiv x_n \quad \text{et} \quad \delta = 0$$

- Lorsque le  $\delta$  choisi est identique dans les définitions 2, 3, 4 et 5 il vient les inégalités

$$M(t_n, x_n) \leq M(t_n), \quad M(x_n) \leq M \quad \forall t_n \in \mathcal{C}_0, \quad \forall x_n \in \mathcal{E} \quad (71)$$

IV - Détermination d'une minorante d'une récurrence vectorielle non-linéaire.

La détermination d'un système majorant d'un processus donné peut simplifier de façon sensible l'étude de la stabilité. De la même façon, nous proposons de définir un système dit minorant susceptible de permettre une étude de l'instabilité.

Soit  $p(n, n_0, p_0)$  une solution de l'inéquation aux différences d'ordre  $k$  :

$$\begin{aligned} p(n+1) &\geq N(n) p(n) \\ p(n+1) &\geq 0 \end{aligned} \tag{72}$$

avec

$$p_0 = p(n_0, n_0, p_0) \geq 0$$

l'une au moins des composantes de  $p_0$  étant non nulle.

Si la matrice  $N(n)$  admet  $\forall n$  une inverse à éléments non négatifs, la stabilité asymptotique de la récurrence

$$y_{n+1} = N^{-1}(n) y_n \tag{73}$$

permet de conclure à la non-attractivité des inéquations (72).

En effet, supposons la suite  $p(n)$  asymptotiquement stable, dans ce cas

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \quad n \geq N \Rightarrow p(n) \leq \varepsilon$$

or la relation (72) peut être réécrite

$$N_n^{-1} p(n+1) \geq p(n) \quad \forall n \geq n_0 \tag{74}$$

il vient

$$N(n_0)^{-1} N(n_0+1)^{-1} \dots N(n)^{-1} p(n+1) \geq p(n_0) \tag{75}$$

d'ou  $\forall n \geq N \geq n_0$

$$N(n_0)^{-1} N(n_0+1)^{-1} N(n)^{-1} \varepsilon \geq p(n_0)$$

or la stabilité de la récurrence (73) implique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(n_0)^{-1} N(n_0+1)^{-1} \dots N(n)^{-1} = 0 \tag{76}$$

Dans ces conditions lorsque nous faisons tendre  $n$  vers l'infini la relation (75) devient

$$p(n_0) \leq 0$$

ce qui est contraire à l'hypothèse sur  $p(n_0)$

La suite  $p(n)$  ne peut donc être attractive.

#### 4.1. - Définition et détermination d'une minorante d'un processus discret.

##### 4.1.1. - Définition

Soit le système dont l'évolution est régie par la relation de récurrence

$$x_{n+1} = A(t_n, x_n) x_n \quad (18)$$

et  $p(x)$  une norme vectorielle régulière.

Par définition la matrice  $N^*(A(t_n, x_n))$  est dite minorante de  $A(t_n, x_n)$  relativement à  $p$  lorsque la relation suivante est vérifiée :

$$p(x_{n+1}) \geq N^*(A(t_n, x_n)) p(x_n) \quad \forall t_n \in \mathcal{C}_0, \forall x_n \in \mathcal{E} \quad (77)$$

##### 4.1.2. - Détermination d'une minorante de $A(t_n, x_n)$ au sens d'une norme $p$ .

Si  $P_{\mathcal{E}_i}$  désigne l'opérateur de projection de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}_i$ , nous avons vu qu'il est possible de décomposer la matrice  $A(t_n, x_n)$  en blocs  $A_{ij}(t_n, x_n)$  définis par la relation

$$A_{ij}(t_n, x_n) = P_{\mathcal{E}_i} A(t_n, x_n) P_{\mathcal{E}_j} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, k$$

$$A(t_n, x_n) = \sum_{i,j=1}^k A_{ij}(t_n, x_n)$$

La relation (18) peut alors s'écrire

$$x_{n+1}^i = \sum_{j=1}^k A_{ij}(t_n, x_n) x_n^j$$

avec

$$x_n^i = P_{\mathcal{L}_i} x_n$$

Il en résulte par minoration

$$p_i(x_{n+1}^i) \geq \sum_{j=1}^k n_{ij}(A_{ij}(t_n, x_n)) p_j(x_n^j) \quad (78)$$

L'indépendance des sous espaces  $\mathcal{L}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) implique pour les  $n_{ij}$

la définition :

$$n_{ij}(A_{ij}(t_n, x_n)) = - \sup_{\substack{x \in \mathcal{L}_j \\ x \neq 0}} \left\{ \frac{p_i(A_{ij}(t_n, x_n)x)}{p_j(x)} \right\} \quad \forall i \neq j \quad (79)$$

$$n_{ii}(A_{ii}(t_n, x_n)) = \inf_{\substack{x \in \mathcal{L}_i \\ x \neq 0}} \left\{ \frac{p_i(A_{ii}(t_n, x_n)x)}{p_i(x)} \right\}$$

Désignons par  $\Delta(t_n, x_n)$  la matrice bloc-diagonale extraite de  $A(t_n, x_n)$

$$\begin{aligned} \Delta_{ii}(t_n, x_n) &= A_{ii}(t_n, x_n) & \forall i \\ \Delta_{ij}(t_n, x_n) &= 0 & \forall i \neq j \end{aligned} \quad (80)$$

et notons  $m(\Delta(t_n, x_n))$  la matrice diagonale minorante de  $\Delta(t_n, x_n)$  relative à la norme  $p$ .

$$m(\Delta(t_n, x_n)) = \begin{bmatrix} n_{11}(A(t_n, x_n)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & n_{kk}(A(t_n, x_n)) \end{bmatrix} \quad (81)$$

D'après la définition (79)  $m(\Delta)$  représente la plus grande des minorantes de  $\Delta$  relative à  $p$ .

Dans ces conditions il résulte des relations précédentes la minorante de  $A(t_n, x_n)$  d'expression

$$N(A(t_n, x_n)) = m(\Delta(t_n, x_n)) - M(A(t_n, x_n) - \Delta(t_n, x_n)) \quad (82)$$

avec  $M(A(t_n, x_n) - \Delta(t_n, x_n))$  majorante de  $A(t_n, x_n) - \Delta(t_n, x_n)$  relative à  $p$ .

Malgré la définition simple de cette minorante, il est parfois nécessaire de lui préférer une minorante un peu plus dure mais possédant un ensemble de propriétés très particulières.

En effet, l'utilisation des minorantes en vue d'une étude de l'instabilité impose à celles-ci d'avoir une inverse à éléments non négatifs.

Cette propriété n'étant pas nécessairement vérifiée par  $N(A)$ , il convient tout d'abord d'examiner les conditions d'existence d'une minorante relative à la norme  $p$  possédant la propriété souhaitée.

Nous proposons ensuite un mode de détermination systématique de ces matrices.

#### 4.2. - Recherche de M-minorantes.

##### 4.2.1. - Définition d'une M-matrice /20,21/.

Notons  $Z_0$  la classe des matrices réelles de type  $k \times k$  à éléments hors diagonaux négatifs ou nuls et  $Z$  la partie de  $Z_0$  formée des matrices à diagonale strictement positive. Il est évident que la minorante  $N(A)$  de la matrice  $A$  définie en (79) appartient à la classe  $Z_0$ .

Toutefois cette matrice n'admet pas nécessairement une inverse à éléments non négatifs.

Pour qu'une minorante  $N^*(A)$  de la matrice  $A$  admette une inverse à éléments non négatifs il faut et il suffit que l'une des propriétés équivalentes suivante soit satisfaite :

- Il existe un vecteur  $u \geq 0$  tel que  $N^* u > 0$
- Il existe une matrice diagonale positive  $D$  telle que  $N^* D$  soit une matrice à diagonale positive dominante
- Si  $BEZ_0$  et  $B \geq N^*$  alors  $B^{-1}$  existe
- La partie réelle de toute valeur propre de  $N^*$  est positive
- Tous les mineurs principaux de  $N^*$  sont positifs
- L'inverse  $N^{*-1}$  existe et est à éléments non négatifs.

Une matrice  $Z_0$  vérifiant l'une de ces conditions équivalentes est appelée M-matrice.

#### 4.2.2. - Détermination d'une M-minorante.

Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une M-minorante de la matrice  $A(t_n, x_n)$  relative à la norme  $p$  impose (Annexe 2) à la matrice  $\Delta(t_n, x_n)$  d'être régulière et au rayon spectral de  $M(J(t_n, x_n))$  de rester inférieur à l'unité, avec

$$J(t_n, x_n) = I - \Delta^{-1}(t_n, x_n) A(t_n, x_n) \quad (83)$$

Dans ces conditions, la minorante de  $A(t_n, x_n)$  définie ci-dessous appartient à la classe  $Z$  et est une M-minorante relative à la norme  $p$

$$N^*(A(t_n, x_n)) = m(\Delta(t_n, x_n))(I - M(J(t_n, x_n))) \quad (84)$$

La minoration est plus stricte que celle définie en (79) on peut montrer en effet (Annexe 2) que l'on a :

$$N^*(A(t_n, x_n)) \leq N(A(t_n, x_n))$$

l'égalité étant obtenue pour une norme vectorielle de taille  $q$  du type :

$$p(x) = |x|$$

Il vient dans ce cas

$$N(A(t_n, x_n)) = N^*(A(t_n, x_n)) = \begin{bmatrix} |a_{11}| & -|a_{12}| & \dots & -|a_{1q}| \\ -|a_{21}| & |a_{22}| & & -|a_{2q}| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -|a_{q1}| & -|a_{q2}| & & |a_{qq}| \end{bmatrix} \quad (85)$$

Une condition pour que cette matrice soit une M-minorante de  $A(t_n, x_n)$  s'écrit alors :

$$|a_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} |a_{11}| - |a_{12}| \\ -|a_{21}| & |a_{22}| \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} |a_{11}| & -|a_{12}| & \dots & -|a_{1q}| \\ -|a_{21}| & |a_{22}| & \dots & -|a_{2q}| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -|a_{q1}| & -|a_{q2}| & \dots & |a_{qq}| \end{vmatrix} > 0 \quad (86)$$

D'une façon générale lorsque la minorante  $N(A(t_n, x_n))$  a ses mineurs principaux successifs positifs, elle appartient à la classe des M-matrices ; elle est alors susceptible de permettre une étude de l'instabilité.

### Conclusion

Le concept de norme vectorielle permet la détermination systématique de systèmes majorants d'un processus. Dans ce cas la stabilité du système majorant implique celle du système initial. De même, la détermination d'un système minorant permet d'envisager une étude de l'instabilité.

Il est toujours possible de déterminer un majorant d'un processus de la classe étudiée qui soit à coefficients constants.

Nous obtenons alors des résultats semblables à ceux obtenus au moyen des fonctions de Lyapunov vectorielles.

Toutefois la détermination d'un système de comparaison à coefficients cons-

tants risque de conduire à une majoration très dure et ne s'avère pas nécessaire. Dans ce sens la définition d'un système de comparaison à coefficients non constants paraît très intéressante.

La mise en oeuvre de ce mode de majoration est simple et n'est pas limitée aux seuls systèmes composés. Elle permet, ainsi que nous l'avons montré sur un exemple, l'étude de la stabilité d'un processus sans nécessairement connaître à priori une décomposition de celui-ci en sous systèmes stables interconnectés.

Lorsqu'un processus est formé de sous systèmes interconnectés et admet une structure variable il est encore possible de définir un système majorant de structure fixe, la stabilité de ce dernier implique alors la stabilité connective de même type pour le processus initial.



BIBLIOGRAPHIE CHAPITRE II

- /1/ V.M. MATROSOV  
"On the stability of motion".  
P.M.M. - J. Appl. Math. and Mech. 26 - pp 1337-1353 - 1962
- /2/ N. ROUCHE  
"On the stability of motion".  
Int. J. Non-lin. Mech. 3 - pp 295-306 - 1966
- /3/ T. WAZEWSKI  
"Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires  
aux deuxièmes membres monotones et leurs applications".  
An. Soc. Polon. Math. 23 - pp 122-166 - 1950
- /4/ R. BELLMAN  
"Vector Lyapunov functions".  
J. SIAM Control - Ser. A - Vol. 1 - pp 32-34 - 1962
- /5/ V.M. MATROSOV  
"On the theory of stability of motion".  
Prikl. Mat. Mekhan 26 - pp 992-1002 - 1962
- /6/ F.N. BAILEY  
"The application of Lyapunov second method to interconnected systems".  
J. SIAM Control - Ser. A - Vol. 3 - n° 3 - pp 443-462 - 1966
- /7/ A.N. MICHEL and D.W. PORTER  
"Stability analysis of composite systems".  
I.E.E.E. Trans. on Aut. Contr. - pp 222-226 - April 1972
- /8/ MITUHIKO ARAKI and JUNJI KONDO  
"Stability and Transient Behavior of composite non-linear systems".  
I.E.E.E. Trans. on Aut. Control - pp 537-541 - August 1972

- /9/ L.T. GRUJIC and D.D. SILJAK  
*"Asymptotic stability and instability of large-scale systems"*.  
I.E.E.E. Trans. on Aut. Control - Vol. AC 18 n° 6 - pp 636-645  
December 1973
- /10/ D.D. SILJAK  
*"Connective stability of non-linear matrix systems"*.  
Report n° NGR 05-017-010-7305 - June 1973  
Engineering and Applied Science Research  
University of Santa Clara - Santa Clara - California
- /11/ L.T. GRUJIC and D.D. SILJAK  
*"On the stability of discrete composite systems"*.  
I.E.E.E. Trans. on Aut. Control - pp 522-524 - October 1973
- /12/ MITUHIKO ARAKI, KAZUAKI ANDO and BUNJI KONDO  
*"Stability of sampled data composite systems with many non-linearities"*.
- /13/ F. ROBERT  
*"Normes vectorielles de vecteurs et de matrices"*.  
RFTI - Chiffres - Vol. n° 4 - pp261-299 - 1964
- /14/ F. ROBERT  
*"Etude et utilisation des normes vectorielles en analyse numérique linéaire"*.  
Thèse de Doctorat ès Sciences - Grenoble - 1968
- /15/ J.F. MAITRE  
*"Norme composée et norme associée généralisée d'une matrice"*.  
Numerische Mathematik 10 - pp 132-141 - 1967
- /16/ E. DEUTCH  
*"Matricial Norms"*.  
Numerische Mathematik 16 - pp 73-84 - 1970

- /17/ P. BORNE et J.C. GENTINA  
"On the stability of large non-linear systems".  
Joint Automatic Control Conference - Austin Texas - June 1974
- /18/ N. GASTINEL  
"Analyse numérique linéaire".  
Herman - Paris - 1966
- /19/ D.D. SILJAK  
"On large scale system stability".  
Proc. 9<sup>th</sup> Anna Allerton Conf. - Circuit and System theory - Oct. 1971
- /20/ M. FIELDER and V. PTAK  
"On matrices with non positive off diagonal element and positive principal minors".  
Czec. Math. J. 12 (87) - pp 382-400 - 1962
- /21/ F. ROBERT  
"M. Minorantes".  
Actes du colloque international du CNRS - Besançon - Septembre 1966.

## CHAPITRE III

### Application des systèmes majorants à l'étude de la stabilité

#### d'un processus

#### Introduction

Les définitions proposées au chapitre précédent permettent la détermination simple de systèmes majorants ou de systèmes de comparaison d'un processus en utilisant la notion de norme vectorielle. Une importante application de la notion de système majorant concerne l'étude de la stabilité d'un processus de grande dimension.

De nombreux travaux relatifs à l'étude de la stabilité des grands systèmes ont été réalisés en particulier dans le cadre de l'étude des systèmes continus /1/-/13/ en utilisant le concept de fonction de Lyapunov vectorielle ou les travaux de Popov. L'étude des systèmes discrets de grande dimension /14/-/26/ plus récente a été envisagée par trois approches principales :

- Kalman et Bertram /14/, Bubnicki /15/, /16/ et Rosenvasser /17/ ont utilisé la notion de contraction.
- Des études ont été réalisées notamment par Jury et Lee /18/, /19/ et Tsypkin /20/ à partir des travaux de Popov.

- L'application de la méthode de Lyapunov a été envisagée par de nombreux auteurs /20/-/27/, en particulier une contribution importante relative à l'utilisation de fonctions de Lyapunov vectorielles dans l'étude des systèmes discrets de grande dimension a été apportée par L T Grujić /23/-/25/ et D D Siljak /23/-/24/.

L'introduction du concept de norme vectorielle /27/ permet d'envisager une

étude de stabilité en utilisant une fonction de comparaison de type vectoriel dont chaque composante ne constitue plus nécessairement une fonction de Lyapunov associée à un sous système isolé extrait du système initial /28/-/31/.

Les méthodes d'étude de la stabilité présentées dans ce chapitre sont définies à partir d'un système majorant du processus initial.

Le choix d'un système majorant de structure fixe, linéaire ou non, défini à partir d'un processus de structure variable permet de définir des conditions de stabilité indépendantes des variations de structure admissibles. Cette notion correspond à la stabilité connective introduite par D D Siljak /32/-/33/.

Ce chapitre comporte quatre parties, les deux premières concernent d'une part l'étude de la stabilité exponentielle et d'autre part l'étude de la stabilité asymptotique d'un processus. Divers théorèmes relatifs à la stabilité des grands systèmes y sont proposés. La présentation adoptée permet de ne pas distinguer formellement le cas des processus à structure variable, la différence avec les autres processus apparaissant au niveau de la détermination du système majorant.

Une troisième partie regroupe sous le titre "stabilité absolue" une étude de la stabilité des processus à non-linéarités multiples pour lesquels il est possible de définir un système majorant ayant la forme de Lur'e discrète.

Cette représentation particulière permet de voir le lien existant avec les travaux déduits de l'extension au cas discret de la méthode de Popov /18/-/19/.

La recherche de conditions permettant de conclure à la stabilité connective d'un processus particulier à structure variable est envisagée dans une dernière partie.

## 1 - Stabilité exponentielle

Avant d'aborder la recherche de conditions permettant de conclure à la stabilité exponentielle d'un processus il convient de montrer que la stabilité exponentielle du système majorant implique la même propriété pour le processus initial.

### 1.1. - Système majorant et stabilité exponentielle

Nous allons tout d'abord supposer que le processus étudié admet un système de comparaison exponentiellement stable déduit de la norme p. Il est alors possible d'énoncer le théorème:

Théorème 1 : Si un système discret non-linéaire admet un système de comparaison exponentiellement stable il est lui-même exponentiellement stable.

#### Démonstration

Par hypothèse le système de comparaison vérifie la relation (1)

$$\exists \alpha \in \mathcal{R}_+, 0 < \rho < 1 : \|z_{n_0+m}\| \leq \alpha \rho^m \|z_{n_0}\| \quad \forall m \geq 1, \forall z_{n_0} \in \mathcal{R}_+^k \quad (1)$$

dans cette écriture  $\|z\|$  représente la norme euclidienne  $(z^T z)^{\frac{1}{2}}$ .

Une propriété usuelle d'équivalence des normes scalaires indique que quelle que soit la norme scalaire  $\psi$  d'un vecteur  $x$ ,  $\psi : \mathcal{R}^q \rightarrow \mathcal{R}_+$  il vient l'inégalité

$$\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{R}_+ : \alpha_1 \|x\| \leq \psi(x) \leq \alpha_2 \|x\|, \forall x \in \mathcal{E} \quad (2)$$

Le système de comparaison doit vérifier à l'instant  $t_{n_0}$  l'inégalité

$$z_{n_0} \geq p(x_{n_0}) ; \text{ prenons}$$

$$z_{n_0} = p(x_{n_0}) \quad (3)$$

La quantité  $||p(x)||$  définit une norme scalaire du vecteur  $x$ , le lemme de comparaison (chapitre II) associé aux inégalités (2) et (3) implique alors les inégalités (4)

$$\alpha_1 ||x_{n_0+m}|| \leq ||p(x_{n_0+m})|| \leq ||z_{n_0+m}|| \leq \alpha \rho^m ||p(x_{n_0})|| \leq \alpha \rho^m \alpha_2 ||x_{n_0}|| \quad (4)$$

Il en résulte :

$$||x_{n_0+m}|| \leq \alpha \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \rho^m ||x_{n_0}|| \quad (5)$$

d'ou la propriété énoncée.

## 1.2. - Etude de la stabilité d'un système admettant un système de comparaison à coefficients constants

L'existence d'un système majorant à coefficients constants non négatifs permet simplement de conclure à la stabilité du processus initial.

Théorème 2 : Supposons qu'il existe une NV  $p$  qui induise un système de comparaison, défini par une matrice  $M$  à coefficients constants non négatifs, pour un système discret non linéaire  $S$ . Si le rayon spectral de  $M$  est strictement inférieur à l'unité, l'état d'équilibre  $x = 0$  du système  $S$  est exponentiellement et globalement stable.

### Démonstration

Avec l'hypothèse  $\rho(M) \leq c < 1$  le système de comparaison du processus  $S$  est exponentiellement et globalement stable. Le théorème 2 apparaît alors comme une conséquence directe du théorème 1.

### Application

Si nous reprenons l'exemple défini au chapitre II du processus décrit par la relation (II,69) avec une non-linéarité  $k(x_n)$  vérifiant la contrainte  $|k(x_n)| < 2$ , le choix de la norme vectorielle (II,50) permet de définir un système de comparaison de la forme (6).

$$z_{n+1} = \begin{bmatrix} 0,15 & 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,15 \\ 0,3 & 0,1 & 0,3 \end{bmatrix} z_n \quad (6)$$

Le rayon spectral de la matrice définissant le système (6) étant strictement inférieur à l'unité, l'application du théorème 2 permet de conclure à la stabilité exponentielle et globale du système décrit en (II.69).

### 1.3. - Système de comparaison admettant un vecteur propre possédant certaines propriétés particulières

Lorsqu'il est possible de trouver un système majorant à coefficients non constants d'un processus tel que la matrice  $M(t_n, x_n)$  qui le définit admette un vecteur propre, relatif au rayon spectral  $\rho(M)$ , de direction fixe il vient le théorème suivant :

Théorème 3 : Soit un système discret non linéaire S tel que le système de comparaison, déduit de la norme p, qui lui est associé admette la forme

$$z_{n+1} = M(t_n, x_n) z_n \quad \text{avec}$$

$$\rho(M(t_n, x_n)) \leq c < 1 \quad \forall t_n, x_n \in \mathcal{T}_0 \times \mathcal{Y}$$

$$x = 0 \in \mathcal{Y} \subset \mathcal{R}^q \quad \text{et } M \text{ irréductible à coefficients non négatifs}$$

a) si le vecteur propre de la matrice  $M^T(t_n, x_n)$  relatif au rayon spectral  $\rho(M)$



est de direction fixe u alors l'état d'équilibre  $x = 0$  du système S est exponentiellement stable.

b) si la propriété a) est vraie pour  $\mathcal{G} = \mathcal{R}^q$  alors la stabilité exponentielle de  $x = 0$  est globale.

### Démonstration

La matrice  $M^T(t_n, x_n)$  étant positive, le vecteur propre  $u$  de direction fixe, relatif à la valeur propre  $\rho_n = \rho(M(t_n, x_n))$  admet des composantes toutes strictement positives /34/ /35/

$$\delta = \inf_i u^i > 0 \quad (7)$$

Choisissons le vecteur  $u$  de module unité :  $\|u\| = 1$

Soit la fonction  $v : \mathcal{R}^k \rightarrow \mathcal{R}_+$  définie par la relation :

$$v(z_n) = |z_n|^T u$$

Cette fonction  $v(z_n)$  est définie positive, décroissante et peut être encadrée par deux fonctions  $\phi_1$ , et  $\phi_2$  de classe  $K/36/$ . Il vient en effet puisque  $v(z_n)$  constitue une norme scalaire du vecteur  $z_n$  :

$$\exists \phi_1(\|z_n\|) \text{ et } \phi_2(\|z_n\|) : \phi_1(\|z_n\|) \leq v(z_n) \leq \phi_2(\|z_n\|) \quad (8)$$

(Le choix de  $\psi(z) = v(z)$  dans la relation (2) permet une définition simple des fonctions  $\phi_1$  et  $\phi_2$ ).

Il vient par différence

$$\Delta v_n = v(z_{n+1}) - v(z_n) \quad (9)$$

soit

$$\Delta v_n = |z_n|^T [M^T(t_n, x_n) - I] u \quad (10)$$

Il en résulte puisque  $u$  est vecteur propre de  $M^T(t_n, x_n)$  la relation :

$$\Delta v_n = (\rho_n - 1) |z_n|^T u \quad (11)$$

d'où par majoration puisque  $\rho_n \leq c$

$$\Delta v_n \leq (c-1) v_n \quad (12)$$

Il apparait que la condition  $c < 1$  implique bien la stabilité exponentielle de l'état d'équilibre  $z_n = 0$  du système de comparaison et donc de l'état d'équilibre  $x_n = 0$  du processus étudié. La stabilité devient globale si les conditions du théorème 1 sont vérifiées  $\forall x_n \in \mathcal{R}^q$ .

#### 1.4. - Systèmes discrets non linéaires admettant une représentation particulière

1.4.1. - Soit un processus admettant une représentation de la forme (13)

$$x_{n+1} = A D(\varphi_n) x_n \quad (13)$$

avec  $A \in \mathcal{R}_+^{q \times q}$  matrice constante à éléments non négatifs et  $D(\varphi_n)$  matrice diagonale,  $D(\varphi_n) = (\text{diag } \varphi_i(t_n, x_n))$

$$d_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j = 1, 2, \dots, q; \quad d_{ii} = \varphi_i(t_n, x_n); \quad \varphi_i : \mathcal{T}_0 \times \mathcal{R}^q \rightarrow \mathcal{R}_+$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \varphi_i(t_n, x_n) \leq k_i < \infty \\ \forall i = 1, 2, \dots, q \\ \forall x_n \in \mathcal{Y}, \forall t_n \in \mathcal{T}_0 \\ (x = 0 \in \mathcal{Y}) \end{array} \right\} \quad (14)$$

La valeur limite  $k_i$  de la fonction  $\varphi_i$  est donnée pour toute valeur de l'indice  $i$ . Si nous notons  $k_M \in \mathcal{R}_+$  :

$$k_M = \sup_{i=1, 2, \dots, q} k_i \quad (15)$$

il vient le théorème 4 :

Théorème 4 : Soit le système S décrit par la relation (13) dans laquelle la matrice A est à coefficients positifs et les non-linéarités  $\varphi_i$  vérifient les relations (14) et (15)

- a) si le rayon spectral de la matrice  $k_M A$  est inférieur à l'unité, l'état d'équilibre  $x = 0$  du système S est exponentiellement stable
- b) si a) est vrai pour  $\mathcal{Y} = \mathcal{R}^q$  la stabilité exponentielle de  $x = 0$  est globale.

Démonstration

Soit  $u$  le vecteur propre positif relatif à la valeur propre  $\rho$  de la matrice  $A^T$ ,  $\|u\| = 1$  et soit  $v(x_n)$ ,  $v : \mathcal{R}^q \rightarrow \mathcal{R}_+$  la fonction

$$v(x_n) = |x_n|^T \cdot u \quad (16)$$

il vient avec la notation  $\Delta v_n = v(x_{n+1}) - v(x_n)$  :

$$\Delta v_n = |x_n|^T \left[ D(\varphi(t_n, x_n)) A^T - I \right] u$$

soit

$$\Delta v_n = |x_n|^T \left[ D(\varphi(t_n, x_n)) \rho - I \right] u \quad (17)$$

par majoration de la relation (17) en tenant compte des relations (14), (15) et (16) il vient

$$\Delta v_n \leq (\rho k_M - 1) v_n$$

d'où la première partie du théorème 4 la seconde partie de ce théorème est une conséquence directe des inégalités (14) lorsque l'on fait  $\mathcal{Y} = \mathcal{R}^q$ .

Lorsque le processus n'admet pas directement une description de la forme (13) le choix d'une norme vectorielle  $p$  peut parfois conduire à un système de comparaison remplissant les conditions d'application du théorème 4 d'où le corollaire :

Corollaire 1 Si la matrice majorante  $M(t_n, x_n)$  d'un système S, relative à une norme p, est formée du produit d'une matrice constante A à éléments non négatifs par une matrice diagonale  $D(\varphi(t_n, x_n))$  satisfaisant (14) et (15) la condition  $\rho(A) k_M < 1$  implique que l'état d'équilibre  $x = 0$  du système S est exponentiellement stable, il est absolument stable pour toute non linéarité satisfaisant (14) avec  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^q$ .

Ce théorème est une conséquence directe des théorèmes 1 et 4 et de la définition 2 de la matrice majorante d'un processus envisagée au chapitre II.

#### 1.4.2. - Système de comparaison symétrique

Lorsqu'il est possible de déterminer un système de comparaison d'un système S de la forme

$$z_{n+1} = M(t_n, x_n) z_n \quad (18)$$

avec  $M(t_n, x_n)$  symétrique il vient la condition simple de stabilité suivante :

Théorème 5 : Soit le système S pour lequel il est possible de définir un système de comparaison de la forme (18)

- a) Si la matrice  $M(t_n, x_n)$  est symétrique et admet un rayon spectral  $\rho(t_n, x_n)$  tel que  $\rho(t_n, x_n) < C < 1, \forall t_n \in \mathcal{C}_0, \forall x_n \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^q$  avec  $x = 0 \in \mathcal{Y}$  l'état d'équilibre  $x = 0$  du système S est exponentiellement stable.
- b) Si la condition du a) est vérifiée pour  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^q$  l'état d'équilibre  $x = 0$  est exponentiellement et globalement stable.

La démonstration de ce théorème se déduit simplement des propriétés des matrices symétriques /37/, en particulier si M est symétrique il vient  $\rho(M^T M) = \rho^2(M)$ .

#### Application

Soit le système décrit sous la forme (19)

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 0,1 & ; & 0,2 \sin t_n & ; & 0,5 k(x_n) \\ -0,25 & ; & 0 & ; & 0,2 k(x_n) \\ 0 & ; & 0,5k(x_n)\cos t_n & ; & -0,2 \end{bmatrix} x_n \quad (19)$$

avec  $k_1 \leq k(x_n) \leq k_2 \quad \forall x_n \in \mathcal{R}^3$

Le choix de la norme  $p(x_n)$  de taille 2 :

$$p(x_n)^T = \left[ \text{Max}\{|x_n^1|, |x_n^2|\}, |x_n^3| \right] \quad (20)$$

permet de définir un système de comparaison symétrique du système (19) en utilisant une majoration selon la définition 4 du chapitre II :

$$z_{n+1} = \begin{bmatrix} 0,3 & & 0,5|k(x_n)| \\ 0,5|k(x_n)| & & 0,2 \end{bmatrix} z_n$$

L'application du théorème 5 montre que la condition

$$|k(x_n)| \leq 1,49 \quad \forall x_n \in \mathcal{R}^3$$

implique que l'état d'équilibre  $x = 0$  du système (19) est exponentiellement et globalement stable.

## II - Stabilité asymptotique

Nous allons dans cette partie envisager la détermination de conditions suffisantes de stabilité d'un processus qui ne soient plus nécessairement de type exponentiel .

2.1. - Détermination d'une condition de stabilité à partir d'un système de comparaison du processus

Soit un système S à partir duquel il a été possible de définir un système majorant de la forme :

$$p(x_{n+1}) \leq M(t_n, x_n) p(x_n) \quad (21)$$

Nous proposons d'introduire les notations suivantes :

-  $\mathcal{D}_\ell$  est un domaine tel que l'on ait

$$\mathcal{D}_\ell = \{x_n \mid \rho_n \leq \ell \quad \forall t_n \in \mathcal{C}_0, \forall x_n \in \mathcal{D}_\ell \subset \mathbb{R}^q\} \quad (22)$$

-  $\mathcal{D}_u$  est un domaine tel que  $u_n$  vecteur propre de  $M^T(t_n, x_n)$  est constant et égal à u sur la frontière de  $\mathcal{D}_u$  ( $u_n$  est choisi de module unité)

$$- v(x_n, n) = p^T(x_n) u_{n-1} \quad (23)$$

-  $\mathcal{D}_c$  est un domaine tel que

$$\Delta v_n \leq c \psi(\|x_n\|) \quad \forall x_n \in \mathcal{D}_c \quad (24)$$

avec  $c < 0$  et  $\psi$  définie positive vérifiant  $\psi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$  et

$$c_1 < c_2 \Leftrightarrow \mathcal{D}_{c_1} \subset \mathcal{D}_{c_2} \quad (25)$$

$$- (x = 0) \in \bigcap (\mathring{\mathcal{D}}_{(\cdot)}(t_n), t_n \in \mathcal{C}) \text{ et } \bigcap (\mathring{\mathcal{D}}_{(\cdot)}(t_n), t_n \in \mathcal{C}) \neq \{0\}$$

Théorème 6 : Soit  $M(t_n, x_n)$  une matrice majorante pour un système S, induite par la norme vectorielle régulière p. Si la matrice  $M(t_n, x_n)$  est à coefficients strictement positifs et vérifie les propriétés suivantes :

- les domaines  $\mathcal{D}_\ell$  et  $\mathcal{D}_u$  ne sont pas vides,  $\bigcap (\mathring{\mathcal{D}}_{(\cdot)}(t_n), t_n \in \mathcal{C}) \neq \{0\}$
- $\exists u$  et  $\ell$ ,  $\mathcal{D}_u \subset \mathcal{D}_\ell \subset \mathbb{R}^q$ ,  $x_n = 0 \in \mathcal{D}_u \quad \forall t_n \in \mathcal{C}_0$
- $\mathcal{D}_u$  est connexe ainsi que son complément

alors l'état d'équilibre  $x_n = 0$  du système S est asymptotiquement stable et la fonction  $v(x_n, n)$  définie en (23) est de Lyapunov.

Démonstration

A partir de (21) et de (23) il vient

$$\Delta v_n \leq p^T(x_n) (\rho_n u_n - u_{n-1}) \quad (26)$$

La définition de  $\mathcal{D}_u$  impose si  $\mathcal{D}_u \subset \mathcal{D}_\ell$  que l'on ait  $\Delta v_n$  négatif sur la frontière de  $\mathcal{D}_u$ , dans ces conditions  $\mathcal{D}_u$  est inclus dans un domaine  $\mathcal{D}_c$  et la fonction  $v(x_n, n)$  est de Lyapunov /30/-/31/.

Ce théorème s'avère généralement d'utilisation délicate, par contre il est possible d'en déduire un cas d'application simple.

Corollaire 2 Soit  $M(t_n, x_n)$  une matrice majorante pour un système S,  
induite par la N V p.

Si la matrice  $M(t_n, x_n)$  à coefficients strictement positifs a ses éléments non constants isolés dans une seule rangée et admet un rayon spectral inférieur à l'unité pour  $x_n \in \mathcal{Y}$  ( $x_n = 0 \in \mathcal{Y}$ ) alors l'état d'équilibre  $x_n = 0$  du système S est asymptotiquement stable.

Lorsque les éléments non linéaires de  $M(t_n, x_n)$  sont isolés dans une seule rangée, tout domaine  $\mathcal{D}_\ell$  est un domaine  $\mathcal{D}_u$  /30/. Ce dernier corollaire apparaît alors comme une conséquence directe du théorème précédent.

2.2. - Interprétation du corollaire 2

Dans les conditions d'application de ce corollaire, le système de comparaison du processus envisagé admet la forme

$$z_{n+1} = M(t_n, x_n) z_n$$

les éléments de la matrice  $M$  étant isolés dans une seule rangée, par exemple la première colonne.

Soit  $\ell$  la plus grande valeur du rayon spectral  $\rho$  de la matrice  $M$  tel que  $\ell \leq c < 1$ . Pour cette valeur de  $\ell$  donnée le vecteur propre correspondant de la matrice  $M^T$  est strictement défini à partir des  $k-1$  premières lignes de cette matrice ; soit  $u = (u_i)$  ce vecteur.

Notons  $P_u$  la matrice diagonale et  $y_n$  le vecteur défini par les relations :

$$P_u = \text{Diag} (u_i) \quad (27)$$

$$y_n = P_u z_n \quad (28)$$

il vient alors dans la nouvelle représentation du système de comparaison l'expression :

$$y_{n+1} = P_u M(t_n, x_n) P_u^{-1} y_n \quad (29)$$

La matrice  $\hat{M} = P_u M P_u^{-1}$  admet pour éléments :

$$\hat{\mu}_{ij} = u_i \mu_{ij} u_j^{-1} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, k \quad (30)$$

Le choix de la nouvelle base impose

$$\sum_{i=1}^k \hat{\mu}_{ij} = u_j^{-1} \sum_{i=1}^k \mu_{ij} u_i \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, k \quad (31)$$

soit puisque  $u$  est vecteur propre de  $M^T$ , pour  $\rho_M = \ell$  :

$$\sum_{i=1}^k \hat{\mu}_{ij} = \ell < 1 \quad \forall j = 2, \dots, k, \quad \forall t_n \in \mathcal{L}_0, \quad \forall x_n \in \mathcal{R}^q \quad (32)$$

l'application de la condition

$$\sum_{i=1}^k \hat{\mu}_{i1} \leq \ell < 1 \quad (33)$$



à la matrice  $\hat{M}$  est donc rigoureusement équivalente à la condition

$$\rho(\hat{M}) \leq \ell < 1 \text{ soit } \rho(M) \leq \ell < 1,$$

en effet la matrice  $\hat{M}^T$  est pour  $\rho_M = \ell$  égale au produit de son rayon spectral par une matrice stochastique /29//35/.

Les conditions du corollaire (2) correspondent alors à la condition  $S_{11}(\hat{M}) < 1$  ou  $S_{11}$  désigne la norme scalaire de matrice associée à la norme duale du max.

exemple

Soit le système décrit par la relation récurrente scalaire de la forme :

$$\varepsilon_{n+2} + f_1(\varepsilon_{n+1}, t_{n+1}) \varepsilon_{n+1} + f_2(\varepsilon_n, t_n) \varepsilon_n = 0 \quad (34)$$

Cette forme de relation récurrente se rencontre fréquemment dans l'étude des processus monovariés. Il est possible de lui faire correspondre une représentation matricielle de la forme

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} \lambda - f_1 & \lambda \\ -(\lambda - f_1 + \frac{f_2}{\lambda}) & -\lambda \end{bmatrix} x_n \quad (35)$$

avec  $|\lambda| < 1$ ,  $\lambda \neq 0$  et  $f_1, f_2 : \mathcal{C}_0 \times \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$  fonctions du même instant  $t_n$ . Le coefficient  $\lambda$  ici défini est arbitraire mais fixé.

Le choix de la NV :  $p(x_n) = |x_n|$  conduit pour la matrice majorante à l'expression :

$$M(t_n, x_n) = \begin{bmatrix} |\lambda - f_1(t_n, x_n)| & |\lambda| \\ |\lambda - f_1(t_n, x_n) + \frac{f_2}{\lambda}(t_n, x_n)| & |\lambda| \end{bmatrix} \quad (36)$$

L'application du corollaire 2 conduit pour  $\lambda$  positif aux conditions suffisantes de stabilité :

$$\begin{aligned} 1 - f_1 + f_2 &> 0 \\ 1 - 2\lambda + f_1 - f_2 &> 0 \\ 1 - 2\lambda^2 - f_1(1 - 2\lambda) - f_2 &> 0 \\ 1 - 2\lambda + 2\lambda^2 + (1 - 2\lambda) f_1 + f_2 &> 0 \end{aligned} \tag{37}$$

Ces inégalités définissent dans le plan  $f_1, f_2$  l'intérieur d'un parallélogramme de centre  $(\lambda, 0)$  dont les sommets sont situés sur les droites d'équations  $1 \pm (f_1 + f_2) = 0$  et  $1 - f_1 + f_2 = 0$

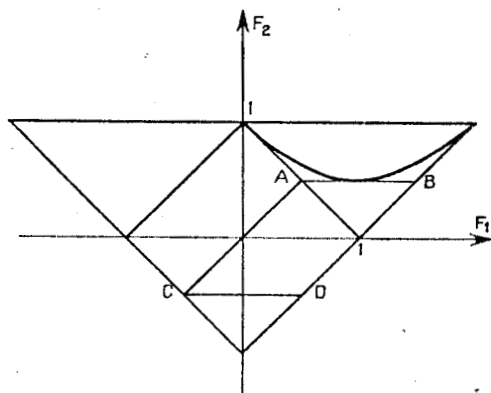


figure 1

Lorsque les conditions (37) sont vérifiées dans un domaine  $\mathcal{S}$  contenant le point d'équilibre  $x = 0$  du processus, ce point d'équilibre est asymptotiquement stable.

On peut remarquer que pour  $\lambda \rightarrow 0$  on retrouve les conditions de stabilité obtenues en appliquant le critère de Wengzyn-Vidal /38/.

Si nous admettons maintenant que la matrice  $M(t_n, x_n)$  peut à la limite admettre un rayon spectral égal à l'unité il lui correspond le vecteur propre  $u$  de direction fixe :

$$u = \begin{bmatrix} 1 - \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (38)$$

dans ces conditions, avec le changement de base défini en (27) le système de comparaison prend la forme :

$$y_{n+1} = \begin{bmatrix} |f_1 - \lambda| & 1 - \lambda \\ \frac{\lambda}{1-\lambda} |f_1 - \frac{f_2}{\lambda} - \lambda| & \lambda \end{bmatrix} y_n \quad (39)$$

Il apparait qu'il est équivalent d'appliquer le corollaire 2 au système (35) et la condition de stabilité déduite de la norme duale du max du système (39).

### 2.3. - Conditions de stabilité définies à partir de systèmes majorants du processus

Le processus étant décrit sous la forme  $S_1/S_2$  (II 56 et II 57) il est possible en utilisant deux NV  $p$  et  $q$  de lui associer un système majorant au sens de la définition II-6.

Lorsque l'on choisit  $k = k'$  la matrice majorante  $M_{pq}$  relative au système  $S$  est carrée et permet d'énoncer des conditions de stabilité asymptotique semblables à celles permettant d'étudier la stabilité exponentielle lorsque  $p$  est choisi égal à  $q$ .

**Théorème 7** Soit un système  $S$  décrit sous la forme  $S_1/S_2$  pour lequel il est possible de définir un système majorant associé aux normes  $p$  et  $q$

de la forme :

$$p(x_{n+1}) \leq M_{pq} \cdot q(a(t_n, x_n)) \quad (40)$$

avec les conditions,  $\phi_a$  étant une fonction de classe K :

$$\|q(a(t_n, x_n))\| \leq \phi_a(\|x_n\|), \forall t_n \in \mathcal{C}_0, \forall x_n \in \mathbb{R}^q \quad (41)$$

$$a(t_n, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n = 0 \quad \forall t_n \in \mathcal{C}_0 \quad (42)$$

a) Soit  $u^*$  le vecteur propre relatif à la valeur propre de plus grand module de la matrice constante et à éléments strictement positifs  $M_{pq}^T$ . La condition  $\rho_M c < 1$  avec  $\rho_M$  rayon spectral de  $M_{pq}$  et  $c \in \mathbb{R}_+$  constante réelle telle que l'on ait

$$u^{*T} \cdot q(a(t_n, x_n)) < c u^{*T} p(x_n) \quad \forall t_n \in \mathcal{C}_0 \text{ et } \forall x_n \in \mathcal{G} \quad (43)$$

avec  $x = 0 \in \mathcal{G}$  implique que le point d'équilibre  $x = 0$  du système S est asymptotiquement stable.

La stabilité est globale si  $\mathcal{G} = \mathbb{R}^q$

b) L'énoncé du a) reste valable si la condition (43) est remplacée par la condition (44)

$$\exists c \in \mathbb{R}_+ \text{ et tel que } q(a(t_n, x_n)) < cp(x_n) \forall t_n \in \mathcal{C}_0, \forall x_n \in \mathcal{G} \quad (44)$$

### Démonstration

La démonstration de ce théorème est semblable à celle des théorèmes énoncés au paragraphe 1 de ce chapitre.

La matrice  $M_{pq}$  étant constante, soit  $v : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction définie par la relation

$$v(x_n) = p(x_n)^T u^* \quad (45)$$

Il vient

$$\Delta v_n \leq q^T(a(t_n, x_n)) M_{pq}^T u^* - p(x_n)^T u^* \quad (46)$$

soit

$$\Delta v_n \leq \rho q^T(a(t_n, x_n)) u^* - p(x_n)^T u^* \quad (47)$$

dans ces conditions, la vérification de l'une des conditions (43) ou (44) implique qu'il existe une fonction  $\psi(\|x_n\|)$  définie positive avec  $\psi(0) = 0$  telle que l'on ait

$$\Delta v_n \leq (\rho c - 1) \psi(\|x_n\|) \quad (48)$$

le théorème 7 en résulte immédiatement.

Il est possible de remarquer que compte-tenu de la relation (41) et des propriétés des normes scalaires, il existe nécessairement une constante  $c$  telle que la condition (43) soit vérifiée si  $\phi_a$  est homogène de degré 1, ce qui n'est pas toujours le cas pour la condition (44).

Nous allons maintenant énoncer un théorème relatif à certains processus admettant une description particulière.

théorème 8 Soit un processus décrit sous la forme  $S_1/S_2$  pour lequel il est possible de définir un système majorant associé aux NV  $p$  et  $q$  de la forme

$$p(x_{n+1}) \leq M_{pq}(t_n, x_n) q(a(t_n, x_n)) \quad (40)$$

avec les conditions

$$\|q(a(t_n, x_n))\| \leq \phi_a(\|x_n\|) \quad \forall t_n \in \mathcal{C}_0, \forall x_n \in \mathcal{R}^q \quad (41)$$

$$a(t_n, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n = 0 \quad \forall t_n \in \mathcal{C}_0 \quad (42)$$

a) Si la matrice majorante  $M_{pq}$  est formée du produit d'une matrice constante  $M^*$  à coefficients positifs par une matrice diagonale  $D(\varphi)$  vérifiant les

conditions (14) et (15) la condition  $k_M \rho_M c - 1 < 0$  associée à la condition (44) implique que l'état d'équilibre  $x = 0$  du système S est asymptotiquement stable.

$$\exists c \in \mathcal{R}_+ \text{ tel que } q(a(t_n, x_n)) \leq c p(x_n) \forall t_n \in \mathcal{I}_0, \forall x_n \in \mathcal{S} \quad (44)$$

Si de plus les relations (14) et (44) sont vérifiées pour  $\mathcal{S} = \mathcal{R}^q$  la stabilité est absolue

- b) Si la matrice majorante  $M_{pq}$  à coefficients positifs a ses éléments non linéaires isolés dans une seule rangée, la condition  $\rho_M c - 1 < 0$  associée à la condition (44) implique la stabilité asymptotique de l'état d'équilibre  $x = 0$  du système S .

### Démonstration

Dans les conditions du a) si  $u^*$  désigne le vecteur propre relatif au rayon spectral de  $M^{*T}$  le choix de la fonction  $v(x_n)$  définie en (45) implique la relation

$$\Delta v_n \leq q^T(a(t_n, x_n)) D(\varphi(t_n, x_n)) M^{*T} u^* - p(x_n^T) u^* \quad (49)$$

les conditions (14), (15) et (44) impliquent alors l'existence d'une fonction  $\psi$  définie positive telle que

$$\Delta v_n \leq (k_M \rho c - 1) \psi (\|x_n\|) \quad (50)$$

d'ou le premier volet du théorème 8.

Le second volet de ce théorème est une conséquence directe du corollaire (2) et de la condition (44).

### III - Stabilité absolue

Les théorèmes énoncés dans les sections 1 et 2 peuvent dans certaines

conditions permettre de définir des conditions de stabilité absolue d'un processus.

Nous allons envisager dans cette section l'étude de la stabilité absolue d'un processus dont la description, ou celle de son système de comparaison admet une représentation correspondant à la forme discrète de Lur'e.

Soit le système décrit par la relation

$$x_{n+1} = A(\Lambda_n, E_n) x_n + B(\Lambda_n, E_n) \varphi(\sigma_n) \quad (51)$$

$$\sigma_n = C x_n$$

avec  $A : \mathcal{D}_\Lambda \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}^{q \times q}$ ,  $B : \mathcal{D}_\Lambda \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}^{q \times r}$ ,  $C \in \mathcal{F}^{r \times q}$

$$\sigma : \mathcal{R}^q \rightarrow \mathcal{R}^r, \varphi : \mathcal{R}^r \rightarrow \mathcal{R}^r$$

et les conditions

$$\varphi_i(\sigma_n^i) = 0 \Leftrightarrow \sigma_n^i = 0 \quad \forall \sigma_n^i \in \mathcal{R}, \forall_i = 1, 2, \dots, r \quad (52)$$

### 3.1. - Etude de la stabilité à partir de normes vectorielles régulières

En utilisant les notations du chapitre II il est possible de définir un système majorant du système (51) de la forme (53) et admettant des coefficients constants :

$$p(x_{n+1}) \leq M(A) p(x_n) + M_{pq}(B) |\varphi(\sigma_n)| \quad (53)$$

$$|\sigma_{n+1}| \leq M_{qp}(CA) p(x_n) + M_{qq}(CB) |\varphi(\sigma_n)|$$

avec pour la norme  $q$  la définition particulière  $q(\varphi(\sigma_n)) = |\varphi(\sigma_n)|$

Soit  $v(x_n)$  la fonction définie par la relation

$$v(x_n) = p(x_n)^T p(x_n) + \sigma_n^T \sigma_n \quad (54)$$

Cette fonction est définie positive et ne s'annule que pour  $x_n = 0$ .

Il vient par différence :

$$\Delta v_n = p(x_{n+1})^T p(x_{n+1}) + \sigma_{n+1}^T \sigma_{n+1} - p(x_n)^T p(x_n) - \sigma_n^T \sigma_n$$

soit par majoration à partir des relations (53) :

$$\Delta v(x_n) \leq (p^T(x_n), |\phi(\sigma_n)|^T) \mathcal{M} (p^T(x_n), |\phi(\sigma_n)|^T)^T \quad (55)$$

en notant

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} M^T(A)M(A) + M_{qp}^T(CA)M_{qp}(A) - I_k & , & M^T(A)M_{pq}(B) + M_{pq}^T(A)M_{qq}(CB) \\ M_{pq}^T(B)M(A) + M_{qq}^T(CB)M_{qp}(CA) & , & M_{pq}^T(B)M_{pq}(B) + M_{qq}^T(CB)M_{qq}(CB) - I_r \end{bmatrix} \quad (56)$$

Il apparait que si la matrice  $\mathcal{M}$  est définie négative la fonction  $v(x_n)$  est de Lyapunov, d'où le théorème 9.

Théorème 9 Si la matrice symétrique  $\mathcal{M}$  définie en (56) est définie négative, nous pouvons conclure à la stabilité absolue de l'état d'équilibre  $x_n = 0$  du système défini en (51) pour toutes non-linéarités  $\varphi_i(\sigma_n^i)$  vérifiant les conditions (52).

### 3.2. - Utilisation de normes vectorielles non régulières

Soit le système décrit en (51) pour lequel les non-linéarités  $\varphi_i(\sigma_n^i)$  vérifient les relations :



$$k_i^1 \leq \frac{\varphi_i(\sigma_n^i)}{\sigma_n^i} \leq k_i^2 \quad \text{avec } k_i^1, k_i^2 \in \mathcal{R}, \forall \sigma_n^i \in \mathcal{R}, \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (57)$$

et sont telles que l'on peut écrire :

$$\varphi(\sigma_n) = \varphi^*(\sigma_n) \sigma_n \quad (58)$$

soit  $p(x_n)$  une norme vectorielle du vecteur  $x_n$  et  $\psi(\sigma_n)$  une norme scalaire du vecteur  $\sigma_n = Cx_n$ . La norme  $p^*(x_n)$

$$p^{*T}(x_n) = \left[ p^T(x_n), \psi^T(Cx_n) \right] \quad (59)$$

constitue une norme vectorielle non régulière et non surjective du vecteur  $x_n$  qui permet de définir un système de comparaison (60) du système (51).

$$z_{n+1} = \begin{bmatrix} M_{pp}(A) & M_{p\psi}(B \varphi^*(\sigma_n)) \\ M_{\psi p}(CA) & M_{\psi\psi}(CB \varphi^*(\sigma_n)) \end{bmatrix} z_n \quad (60)$$

En effet, la norme vectorielle définie en (59) peut s'interpréter comme une NV régulière relativement au système décrit par le vecteur état  $y_n^T = (x_n^T, \sigma_n^T)$  du système (61) qui correspond à une description redondante du système si l'on pose  $\sigma_n = Cx_n$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \sigma_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ CA & CB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ \varphi(\sigma_n) \end{pmatrix} \quad (61)$$

Le système de comparaison (60) ayant ses éléments non linéaires isolés dans la dernière colonne permet l'application directe du corollaire 2.

IV - Application, étude de la stabilité connective d'un processus discret.

Soit le système représenté figure 2 et décrit par les relations (62)

$$x_{n+1}^1 = A_{11} x_n^1 + A_{12} x_n^2 + B_1 \varphi_1(\sigma_n^1) + e_{11}(n) T_{11} \varphi_1(\sigma_n^1) + e_{12}(n) T_{12} \varphi_2(\sigma_n^2). \quad (62)$$

$$x_{n+1}^2 = A_{21} x_n^1 + A_{22} x_n^2 + B_2 \varphi_2(\sigma_n^2) + e_{21}(n) T_{21} \varphi_1(\sigma_n^1) + e_{22}(n) T_{22} \varphi_2(\sigma_n^2)$$

$$\sigma_n^1 = C_1 x_n^1$$

$$\sigma_n^2 = C_2 x_n^2$$

avec  $x_n^1 \in \mathcal{R}^3$ ,  $x_n^2 \in \mathcal{R}^2$ ,  $\sigma_n^1 \in \mathcal{R}$ ,  $\sigma_n^2 \in \mathcal{R}$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,3 & 0,2 \\ -0,15 & 0,15 & -0,01 \\ 0,12 & 0,05 & 0,17 \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,08 & -0,03 \\ -0,01 & -0,07 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & -0,1 \\ 0,05 & 0 & -0,15 \end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0,16 & -0,18 \\ 0,04 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0,1 \\ 0,2 \\ -0,15 \end{bmatrix} \quad T_{11} = \begin{bmatrix} 0,05 \\ -0,1 \\ -0,06 \end{bmatrix} \quad T_{12} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ -0,07 \\ -0,07 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0,3 \\ -0,01 \end{bmatrix} \quad T_{21} = \begin{bmatrix} 0,05 \\ -0,04 \end{bmatrix} \quad T_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,11 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [0,167, 0, 0]$$

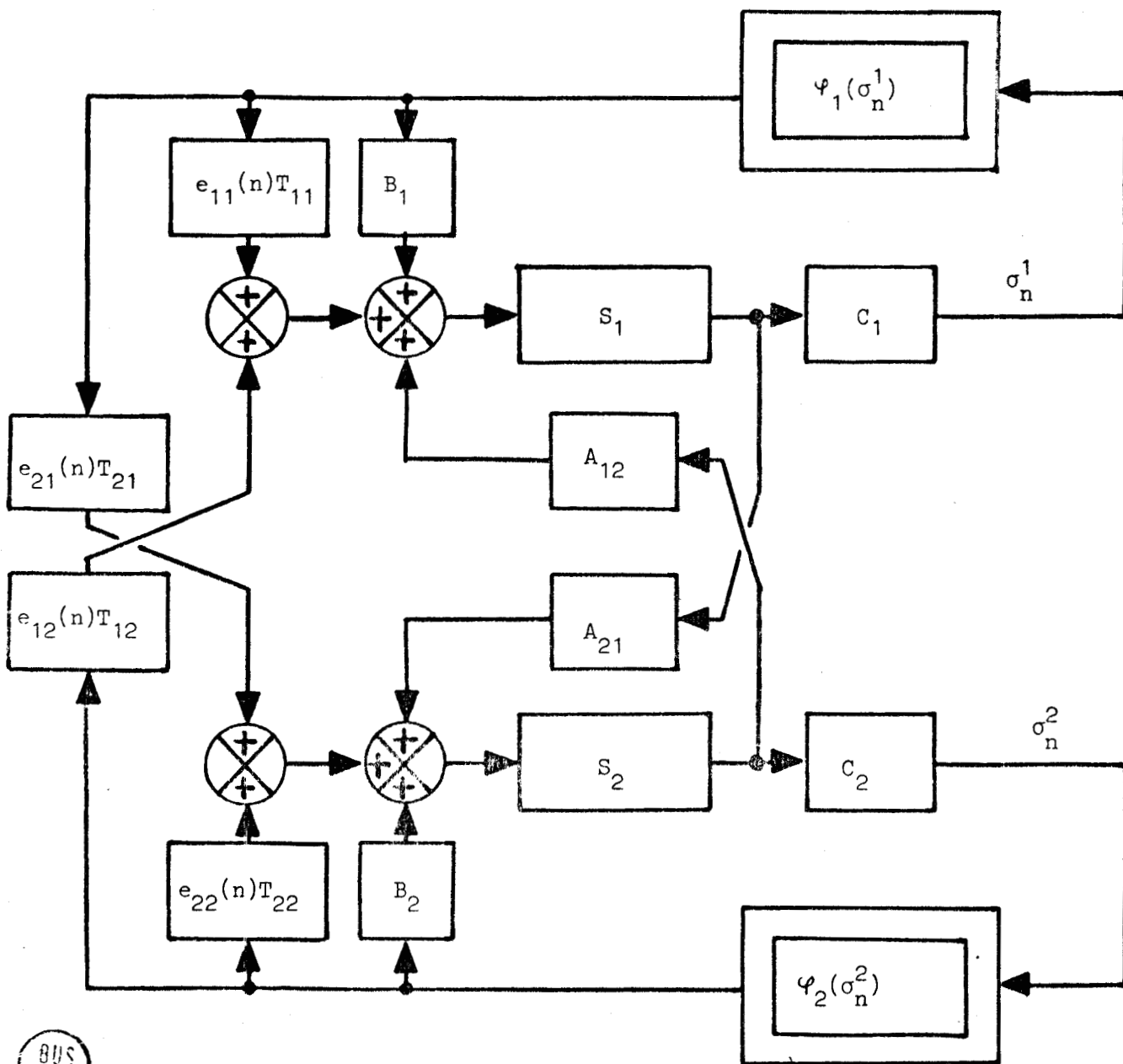
$$C_2 = [0,833, 0]$$

La matrice de connection  $E_n = (e_{ij})$ ,  $E : \mathcal{C}_0 \times \mathcal{R}^5 \rightarrow E \subset \mathcal{R}^{2 \times 2}$

n'est pas définie, il vient  $e_{ij}(n) \in [0,1] \quad \forall i,j = 1,2$

Les non-linéarités  $\varphi_1(\sigma_n^1)$  et  $\varphi_2(\sigma_n^2)$  sont soumises à la contrainte

$$k_1 < \frac{\varphi_i(\sigma_n^i)}{\sigma_n^i} < k_2 \quad \forall \sigma_n^i \in \mathcal{R} \quad \text{et} \quad \varphi_i(0) = 0 \quad \forall i = 1, 2 \quad (63)$$



BUS LILLE

figure 2

Notons

$$\begin{aligned} \varphi_1(\sigma_n^1) &= \varphi_1^*(\sigma_n^1) \sigma_n^1 \\ \varphi_2(\sigma_n^2) &= \varphi_2^*(\sigma_n^2) \sigma_n^2 \\ y_n^T &= (x_n^{1T}, x_n^{2T}, \sigma_n^1, \sigma_n^2) \end{aligned} \quad (64)$$

les relations (62) peuvent être réécrites

$$y_{n+1} = \begin{bmatrix} A_{11} & , & A_{12} & , & (B_1 + e_{11}(n)T_{11})\varphi_1^*(\sigma_n^1) & , & e_{12}(n)T_{12}\varphi_2^*(\sigma_n^2) \\ A_{21} & , & A_{22} & , & e_{21}(n)T_{21}\varphi_1^*(\sigma_n^1) & , & (B_2 + e_{22}(n)T_{22})\varphi_2^*(\sigma_n^2) \\ C_1 A_{11} & , & C_1 A_{12} & , & C_1 (B_1 + e_{11}(n)T_{11})\varphi_1^*(\sigma_n^1) & , & C_1 e_{12}(n)T_{12}\varphi_2^*(\sigma_n^2) \\ C_2 A_{21} & , & C_2 A_{22} & , & C_2 e_{21}(n)T_{21}\varphi_1^*(\sigma_n^1) & , & C_2 (B_2 + e_{22}(n)T_{22})\varphi_2^*(\sigma_n^2) \end{bmatrix} y_n \quad (65)$$

Le choix de la norme vectorielle  $p$  :

$$p^T(y_n) = (p_1(x_n^1), p_2(x_n^2), p_3(\sigma_n^1, \sigma_n^2))$$

avec  $p_i(x^i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  norme scalaire duale du max pour le vecteur  $x^i$  conduit au système majorant :

$$p(y_{n+1}) \leq \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 & \text{Max}(0,51|\varphi_1^*| ; 0,34|\varphi_2^*|) \\ 0,3 & 0,2 & \text{Max}(0,09|\varphi_1^*| ; 0,4|\varphi_2^*|) \\ 0,3 & 0,15 & \text{Max}(0,0583|\varphi_1^*| ; 0,283|\varphi_2^*|) \end{bmatrix} p(y_n) \quad (66)$$

La forme particulière du système majorant permet l'application du corollaire (2) sur le système de comparaison qui s'en déduit. Il vient la condition suffisante de stabilité absolue :

$$1 - 0,770 \text{Max}(0,51|\varphi_1^*|, 0,34|\varphi_1^*|) - 0,282 \text{Max}(0,09|\varphi_1^*|; 0,4|\varphi_2^*|) - \text{Max}(0,058|\varphi_1^*|, 0,283|\varphi_2^*|) > 0 \quad (67)$$

Le système (62) sera donc connectivement et absolument stable pour toutes les non-linéaires vérifiant les inégalités :

$$- 1,26 < \frac{\varphi_i(\sigma_n^i)}{(\sigma_n^i)} < + 1,26 \quad (68)$$

### Conclusion

Les propriétés particulières des systèmes majorants définis au chapitre II ont permis la détermination de conditions de stabilité d'application simple.

L'utilisation des propriétés spectrales particulières des matrices à éléments non négatifs définissant les systèmes majorants d'un processus permet la définition de fonctions de Lyapunov d'un type nouveau, obtenues par projection du vecteur état du système majorant sur un vecteur particulier. Un apport intéressant réside également dans le fait que l'étude proposée comporte une démonstration de la conjecture linéaire et de la conjecture d'Aizerman pour une classe importante de processus discrets non linéaires.

La possibilité de définir un système de structure fixe, linéaire ou non, majorant d'un processus de structure variable permet d'envisager simplement une étude de stabilité connective à l'aide des divers théorèmes énoncés. L'exemple proposé illustre cette propriété.

BIBLIOGRAPHIE CHAPITRE III

- /1/ T. WAZEWSKI  
*"Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux seconds membres monotones et leurs applications".*  
Ann. Soc. Pol. Math 23 - 1950 - pp 122-166
- /2/ BELLMAN  
*"Vector Lyapunov functions".*  
J. SIAM Control Ser. A - 1 - 1962 - pp 32-34
- /3/ V.M. MATROSOV  
*"Sur la stabilité de mouvement".*  
Prikl Math Mekhan 26 - 1962 - pp 885-895
- /4/ W.E. THOMPSON  
*"Exponential stability of interconnected systems".*  
I.E.E.E. Trans. A C - Vol. AC-15 - n° 4 - 1970 - pp 504-506
- /5/ F.N. BAILEY  
*"The application of Lyapunov 's second method to interconnected systems".*  
J. SIAM Control Ser. A - 1966 - pp 443-462
- /6/ A.N. MICHEL , D.W. PORTER  
*"Stability analysis of composite systems".*  
I.E.E.E. Trans. on Aut. Contr. - pp 222-226 - April 1972
- /7/ D.D. SILJAK  
*"Stability large scale systems".*  
IFAC 5<sup>th</sup> World Congress C-32 - pp 1-11 - 1972

- /8/ D.D. SILJAK  
*"Stability of large scale systems under structural perturbations".*  
I.E.E.E. Trans. SMS - Vol. SM C-3 - n° 4 - pp 415-417 - 1973
- /9/ L.T. GRUJIC', D.D. SILJAK  
*"Asymptotic stability and instability of large scale systems".*  
I.E.E.E. Trans. AC - Vol. AC 18 - n° 6 - pp 636-645 - 1973
- /10/ A.N. MICHEL  
*"Stability analysis of interconnected systems".*  
Bericht - Nr 4 - Ber Mat-Stat. - 5 ckt Forsch Gray - 1973
- /11/ A.N. MICHEL  
*"Stability analysis of interconnected systems".*  
SIAM J. Control - Vol. 12 n° 3 - pp 554-579 - 1974
- /12/ L.T. GRUJIC'  
*"Stability analysis of large scale systems with stable and instable subsystems".*  
Int. J. Control - Vol. 20 - n° 3 - pp 453-463 - 1974
- /13/ L.T. GRUJIC'  
*"On multi-level absolute stability analysis scale systems".*  
- Part 1 : *"The Popov method, the comparison principale and time-invariant systems"*  
Automatika n°1-2 - pp 67-72 - 1974  
- Part 2 : *"the Lyapunov method, the comparaison principle and time-varying systems".*  
Automatika n° 4-5 - pp 155-161 - 1974
- /14/ R.E. KALMAN and J.E. BERTAM  
*"Control system analysis and design via the second method of Lyapunov"*  
- Part II : *"Discrete-time systems".*  
Trans. ASME - Vol. 82 - pp 394-400 - June 1960

- /15/ Z. BUBNICKI  
*"On the stability condition of non-linear sampled data systems"*  
I.E.E.E. Trans. AC-9 - pp 280-281 - 1964
- /16/ Z. BUBNICKI  
*"On the linear conjecture in the deterministic and stochastic stability of discrete systems"*.  
I.E.E.E. Trans. AC - Vol. AC-13 - pp 199-200 - 1968
- /17/ E.N. ROZENVASSER  
*"Stability criteria of non-linear discrete systems"*  
Aut. Remote contr. - Vol. 27 - pp 2053-2062 - 1966
- /18/ E.I. JURY and B.W. LEE  
*"On the stability of a certain class of non-linear sampled data systems"*.  
I.E.E.E. Trans. AC - Vol. AC-9 - pp 51-61 - 1964
- /19/ E.I. JURY and B.W. LEE  
*"The absolute stability of systems with many non-linearities"*.  
Aut. Remote Contr. - Vol. 26 - pp 943-961 - 1965
- /20/ Y.Z. TSYPKIN  
*"Absolute stability of non-linear automatic sampled data systems"*.  
Aut. Remote Contr. - Vol. 25 - pp 1030-1036 - 1964
- /21/ G.P. SZEGÖ  
*"On the absolute stability of sampled-data systems"*.  
Proc. Nat. Acad. Sc. US - Vol. 50 - pp 558-560 - 1963
- /22/ A.N. MICHEL et S.H. WA  
*"Stability of discrete systems over a finite interval of time"*.  
Int. J. Control - Vol. 9 - pp 679-693 - 1969



- /23/ L.T. GRUJIC' and D.D. SILJAK  
"Exponential stability of large scale discrete systems".  
Int. J. Control - Vol. 19 n° 3 - pp 481-491 - 1974
- /24/ L.T. GRUJIC' and D.D. SILJAK  
"On the stability of discrete composite systems"  
I.E.E.E. Trans. AC - pp 522-524 - 1973
- /25/ L.T. GRUJIC'  
"Uniform asymptotic stability of discrete large scale systems".  
I.E.E.E. Trans. SMC - pp 636-643 - 1974
- /26/ M. ARAKI , K. ANDO , B. KONDO  
"Stability of sampled-data composite systems with many non-linearities".  
I.E.E.E. - Trans. AC - Vol. AC-16 , pp22-27 - 1971
- /27/ F. ROBERT  
"Normes vectorielles de vecteurs et de matrices".  
RFTI - Chiffres - Vol. 17 - n° 4 - pp 261-299 - 1964
- /28/ P. BORNE , J.C. GENTINA  
"Sur une extension des conditions linéaires de stabilité à certaines classes de systèmes échantillonnés non-linéaires".  
CRAS série A - Tome 274 - pp 1275-1277 - Paris 1972
- /29/ P.BORNE , JC GENTINA , F. LAURENT  
"Sur une forme simplifiée d'une condition de stabilité des systèmes échantillonnés non-linéaires".  
Congrès automatica 72 - Barcelone - Oct. 1972 - Actes du congrès  
pp 37-42
- /30/ P. BORNE - J.C. GENTINA - F. LAURENT  
"Sur la stabilité des systèmes échantillonnés non-linéaires".  
RAIRO - J. 2 - Mai 1972 - pp 96-105

- /31/ P. BÖRNE , J.C. GENTINA  
"On the stability of large non-linear systems".  
JACC - Austin Texas - June 1974
- /32/ D.D. SILJAK  
"On the large scale system stability".  
Proc. 9<sup>th</sup> Ann. - Allerton Conf. - Circuit and system theory - Oct.1971
- /33/ D.D. SILJAK  
"Connective stability of non-linear matrix systems"  
Report n° NGR 05-017-010-7305 - June 1973  
Engineering and applied science research  
University of Santa Clara, Santa Clara - California
- /34/ KOTELJANSKI  
"Sur certaines propriétés des matrices à éléments positifs".  
Mat Sb - Vol.31 - 1952 - pp 497-505
- /35/ F.R. GANTMACHER  
"Théorie des matrices"  
Dunod - Paris - Vol. 1 et 2 - 1966
- /36/ W. HAHN  
"Stability of motion"  
Springer Verlag - 1967
- /37/ F. LAURENT, A. PETTE , H. NGUYEN QUY  
"Critère de stabilité des systèmes continus et échantillonnés non linéaires".  
CRAS - Paris Série A - Tome 270 - 1970 - pp 1637-1640
- /38/ P. VIDAL  
"Systèmes échantillonnés linéaires".  
Gordon and Breach - 1968



## CHAPITRE IV

### Application des techniques de majoration à certains problèmes particuliers

#### Introduction

L'utilisation des systèmes majorants d'un processus peut être envisagée pour l'étude de problèmes distincts de celui de la stabilité des grands systèmes.

Dans ce chapitre sont présentées trois applications de la notion de majorant.

- Une première application concerne le problème de la comparaison de deux modèles d'un même processus. En effet le choix d'un modèle constitue un problème délicat lors de l'identification d'un processus. Dans ce sens nous proposons une méthode permettant d'estimer numériquement l'écart qui apparaît dans le comportement dynamique de deux modèles distincts soumis à une entrée variant dans un domaine admissible donné /1/.

- L'étude de certains cas critiques de stabilité est envisagée dans une seconde partie. Un cas critique au sens de Lyapunov apparaît lorsqu'une racine de l'équation caractéristique (multiplicateur) /2/ /3/ a son module égal à l'unité, les autres pouvant être de module inférieur ou égal. L'étude présentée est limitée au second ordre et deux cas sont envisagés selon que les multiplicateurs sont réels ou complexes.

L'utilisation de systèmes majorants définis à partir d'un processus décrit sur le corps des réels ou des complexes permet dans certains cas d'étudier la stabilité locale des cas critiques et de définir un domaine suffisant de stabilité dans le plan des conditions initiales.

La détermination du domaine exact de stabilité et de l'évolution des propriétés de stabilité d'un processus en fonction d'un paramètre ont déjà fait l'objet de nombreux travaux, en particulier au LAAS /4/-/7/ et ne sont pas envisagés dans cette partie.

- Une dernière partie concerne l'application des systèmes majorants à l'estimation numérique de la sensibilité /8/ d'un modèle d'un processus.

Il est alors possible de distinguer divers cas selon que l'on s'attache à l'étude de la sensibilité à une variation des paramètres du système ou de son état initial /9/-/10/.

I - Majoration de l'écart entre deux modèles d'un même processus.

Au cours de cette section nous proposons d'envisager l'influence du choix d'un modèle particulier dans l'étude d'un processus. En particulier lorsque la même commande  $u_n$  évoluant dans un domaine de variation admissible  $\mathcal{U}$  est appliquée à deux modèles distincts il convient de déterminer une estimation numérique de l'écart entre les états de ces deux modèles /1/.

Dans cette étude l'origine est supposée constituer un point d'équilibre stable pour le processus évoluant en l'absence d'entrée.

Les deux modèles envisagés pour le processus correspondent aux représentations suivantes :

$$x_{n+1} = A(t_n, x_n, \Lambda_n, E_n) a(t_n, x_n) + B(t_n, x_n, u_n) \quad (1)$$

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{A}(t_n, \hat{x}_n, \hat{\Lambda}_n, \hat{E}_n) \hat{a}(t_n, \hat{x}_n) + \hat{B}(t_n, \hat{x}_n, u_n) \quad (2)$$

avec les propriétés :

$$x_n \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^q, u_n \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p, A: \mathcal{T}_0 \times \mathbb{R}^q \times \mathcal{D}_\Lambda \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^{q \times r}, a: \mathcal{T}_0 \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^r$$

$$B: \mathcal{T}_0 \times \mathbb{R}^q \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^q, \hat{x}_n \in \hat{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^{\hat{q}}, \hat{A}: \mathcal{T}_0 \times \mathbb{R}^{\hat{q}} \times \hat{\mathcal{D}}_\Lambda \times \hat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}^{\hat{q} \times \hat{r}}, \hat{a}: \mathcal{T}_0 \times \mathbb{R}^{\hat{q}} \rightarrow \mathbb{R}^{\hat{r}},$$

$$\hat{B}: \mathcal{T}_0 \times \mathbb{R}^{\hat{q}} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{\hat{q}}$$

$$\exists \phi_a \text{ définie positive} \Rightarrow \|a(t_n, x_n)\| \leq \phi_a(\|x_n\|) \quad \forall t_n \in \mathcal{T}_0, \forall x_n \in \mathbb{R}^q \quad (3)$$

$$\exists \hat{\phi}_a \text{ définie positive} \Rightarrow \|\hat{a}(t_n, \hat{x}_n)\| \leq \hat{\phi}_a(\|\hat{x}_n\|) \quad \forall t_n \in \mathcal{T}_0, \forall \hat{x}_n \in \mathbb{R}^{\hat{q}}$$

$$\begin{aligned} a(t_n, x_n) = 0 &\Leftrightarrow x_n = 0 & \forall t_n \in \mathcal{T}_0 \\ \hat{a}(t_n, \hat{x}_n) = 0 &\Leftrightarrow \hat{x}_n = 0 & \forall t_n \in \mathcal{T}_0 \end{aligned} \quad (4)$$

les matrices  $A, \hat{A}, B$  et  $\hat{B}$  sont à coefficients bornés dans leur domaine de définition

Afin de simplifier les écritures les relations (1) et (2) seront réécrites sous

la forme :

$$x_{n+1} = A_n a_n + B_n \quad (1')$$

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{A}_n \hat{a}_n + \hat{B}_n \quad (2')$$

### 1.1. - Modèles de même ordre

Dans cette partie les modèles (1) et (2) correspondent à deux représentations distinctes obtenues en utilisant les vecteurs états  $x_n$  et  $\hat{x}_n$  de même dimension et de même nature : il vient  $\hat{q} = q, \hat{r} = r, \mathcal{Y} = \hat{\mathcal{Y}}, \mathcal{D}_\Lambda = \hat{\mathcal{D}}_\Lambda$ .

L'écart entre ces deux modèles provient de la nature des méthodes d'identifications mises en oeuvre. Les modèles étant de même dimension, les relations (1) et (2) peuvent être réécrites sous la forme

$$x_{n+1} - \hat{x}_{n+1} = A_n(a_n - \hat{a}_n) + (A_n - \hat{A}_n) \hat{a}_n + B_n - \hat{B}_n \quad (5)$$

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{A}_n \hat{a}_n + \hat{B}_n \quad (6)$$

nous allons maintenant envisager deux cas selon que  $(a_n, \hat{a}_n)$  est égal à  $(x_n, \hat{x}_n)$  ou non.

#### 1.1.1. - Système pour lequel $(a_n, \hat{a}_n) = (x_n, \hat{x}_n)$

Les deux modèles sont de la forme

$$x_{n+1} = A_n^* x_n + B_n^* u_n \quad (7)$$

Les équations (5) et (6) prennent alors la forme particulière suivante :

$$x_{n+1} - \hat{x}_{n+1} = A_n^*(x_n - \hat{x}_n) + (A_n^* - \hat{A}_n^*)\hat{x}_n + (B_n^* - \hat{B}_n^*)u_n \quad (8)$$

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{A}_n^* \hat{x}_n + \hat{B}_n^* u_n \quad (9)$$

soit  $p : \mathcal{R}^q \rightarrow \mathcal{R}_+^k$  une NV régulière définie sur  $\mathcal{E} = \mathcal{R}^q$

Les propriétés des normes vectorielles définies au chapitre II impliquent les inégalités

$$p(x_{n+1} - \hat{x}_{n+1}) \leq p(A_n^*(x_n - \hat{x}_n)) + p[(A_n^* - \hat{A}_n^*)\hat{x}_n] + p((B_n^* - \hat{B}_n^*)u_n) \quad (10)$$

$$p(\hat{x}_{n+1}) \leq p(\hat{A}_n^* \hat{x}_n) + p(\hat{B}_n^* u_n) \quad (11)$$

A partir des définitions présentées en (II.3) il est possible de définir un système de comparaison du système (8), (9) qui généralise la notion de système de comparaison défini au chapitre II. Soit en effet  $q : \mathcal{R}^r \rightarrow \mathcal{R}_+^k$  une NV régulière du vecteur  $u_n$ , nous pouvons définir le système de comparaison :

$$\begin{pmatrix} z_{n+1}^1 \\ z_{n+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_{pp}(A^*) & M_{pp}(A^* - \hat{A}^*) \\ 0 & M_{pp}(\hat{A}^*) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_n^1 \\ z_n^2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} M_{pq}(B^* - \hat{B}^*) \\ M_{pq}(\hat{B}^*) \end{bmatrix} q(u_n) \quad (12)$$

Il vient  $z_{n+m}^1 \geq p(x_{n+m} - \hat{x}_{n+m})$  et  $z_{n+m}^2 \geq p(\hat{x}_{n+m})$

$\forall u_n \in \hat{U}$  et  $\forall (z_n^1, z_n^2) = (p(x_n - \hat{x}_n), p(\hat{x}_n))$

Deux cas sont alors à envisager selon que le système de comparaison est linéaire ou non

a) Dans l'hypothèse linéaire, la relation

$$\text{Max}\{\rho(M_{pp}(A^*)), \rho(M_{pp}(\hat{A}^*))\} \leq \rho < 1 \quad (13)$$

permet de définir une limitation de l'écart des vecteurs états des deux systèmes initiaux.



En effet, en notant

$$z_n^T = \begin{bmatrix} z_n^1 \\ z_n^2 \end{bmatrix} : z_n^1, z_n^2 \in \mathcal{R}^k \quad (14)$$

$$z_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \text{ et } q_{\mathcal{U}} = \max_{u \in \mathcal{U}} q(u) \quad (15)$$

nous avons pour le système de comparaison

$$z_\infty^1 = M_{pp}(A^*) z_\infty^1 + M_{pp}(A^* - \hat{A}^*) z_\infty^2 + M_{pq}(B^* - \hat{B}^*) q_{\mathcal{U}} \quad (16)$$

$$z_\infty^2 = M_{pp}(\hat{A}^*) z_\infty^2 + M_{pq}(\hat{B}^*) q_{\mathcal{U}}$$

soit pour la valeur limite

$$z_\infty^2 = (I - M_{pp}(\hat{A}^*))^{-1} M_{pq}(\hat{B}^*) q_{\mathcal{U}} \quad (17)$$

$$z_\infty^1 = (I - M_{pp}(A^*))^{-1} \left[ M_{pq}(B^* - \hat{B}^*) + M_{pp}(A^* - \hat{A}^*) (I - M_{pp}(\hat{A}^*))^{-1} M_{pq}(\hat{B}^*) \right] q_{\mathcal{U}}$$

nous avons donc pour l'écart entre les états des deux modèles soumis à la même commande  $u_n$  la majoration :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n - \hat{x}_n) \leq (I - M_{pp}(A^*))^{-1} (M_{pq}(B^* - \hat{B}^*) + M_{pp}(A^* - \hat{A}^*) (I - M_{pp}(\hat{A}^*))^{-1} M_{pq}(\hat{B}^*)) q_{\mathcal{U}} \quad (18)$$

Il est possible de remarquer que la relation (13) peut s'interpréter à partir de la relation (18) comme une condition de stabilité entrée-bornée, sortie-bornée /11/.

La condition (13) est nécessaire, de plus elle implique, les matrices  $M_{pp}(A^*)$  et  $M_{pp}(\hat{A}^*)$  étant à éléments non négatifs que les matrices  $(I - M_{pp}(A^*))^{-1}$  et  $(I - M_{pp}(\hat{A}^*))^{-1}$  existent et soient elles mêmes à éléments non négatifs /12/ (inverses de M-matrices).

b) Lorsqu'il n'est plus possible de définir un système de comparaison à coefficients constants tel que l'inégalité (13) soit vérifiée nous pouvons définir simplement un système de comparaison d'ordre deux du système (5),(6).

Ceci peut s'effectuer soit directement en prenant une norme  $p$  scalaire soit par majoration à partir du système (12) en utilisant une norme scalaire  $\varphi$  définie sur  $\mathcal{R}^k$ . Il vient alors le système de comparaison de la forme :

$$z_{n+1}^* = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} z_n^* + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

d'ou en notant  $\varphi^*(x_n - \hat{x}_n)$ , soit la norme  $p(x_n - \hat{x}_n)$  si  $p$  est une norme scalaire, soit la norme  $\varphi(p(x_n - \hat{x}_n))$  si  $p$  est une norme vectorielle :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^*(x_n - \hat{x}_n) \leq (1 - m_{11})^{-1} [n_1 + m_{12}(1 - m_{22})^{-1} n_2] \quad (20)$$

1.1.2. - Modèles de la forme générale (1), (2)

Lorsque les équations (5), (6) ne peuvent se ramener à la forme (8), (9) il est possible de se ramener à l'étude d'un système de comparaison à coefficients constants de la forme (21) :

$$z_{n+1} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} z_n + \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

avec en utilisant les notations définies au chapitre II

$$M_{11} = (\mu_{ij}^{11}) \in \mathcal{R}_+^{k \times k}$$

$$\mu_{ij}^{11} = \text{Max}(0, \sup_{\Omega} \frac{p_i \{A_{ij}(t, x, \Lambda, E)(a_j(t, x) - \hat{a}_j(t, \hat{x}))\}}{p_j(x^j - \hat{x}^j)} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, k$$

$$M_{22} = (\mu_{ij}^{22}) \in \mathcal{R}_+^{k \times k}$$

$$\mu_{ij}^{22} = \text{Max}(0, \sup_{\Omega} \frac{p_i(\hat{A}_{ij}(t, x, \Lambda, E)\hat{a}_j(t, x))}{p_j(x^j)} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, k$$

$$M_{12} = (\mu_{ij}^{12}) \in \mathcal{R}_+^{k \times k}$$

$$\mu_{ij}^{12} = \text{Max}(0, \sup_{\Omega} \frac{p_i \{ (A_{ij}(t, x, \Lambda, E) - \hat{A}_{ij}(t, \hat{x}, \hat{\Lambda}, \hat{E})) a_j(t, \hat{x}) \}}{p_j(\hat{x}^j)} \quad \forall i, j=1, 2, \dots, k \quad (22)$$

$$N_1 = (v_i^1) \in \mathcal{R}_+^k$$

$$v_i^1 = \text{Max}(0, \sup_{\Omega} (p_i(B(t, x, u) - \hat{B}(t, \hat{x}, u))) \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$$

$$N_2 = (v_i^2) \in \mathcal{R}_+^k$$

$$v_i^2 = \text{Max}(0, \sup_{\Omega} (p_i(\hat{B}(t, x, u))) \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$$

le sup étant défini sur le domaine  $\Omega$

$$\Omega : t \in \mathcal{C}_0, x \in \mathcal{Y}, x - \hat{x} \in \mathcal{Y}^*, \Lambda \in \mathcal{D}_{\Lambda}, \hat{\Lambda} \in \mathcal{D}_{\Lambda}, E \in \mathcal{E}, \hat{E} \in \mathcal{E}, u \in \mathcal{U}$$

Remarque

Le domaine  $\mathcal{G}^*$  n'étant pas connu à ce stade de l'étude, il est nécessaire de fixer à priori un majorant  $l_m$  du vecteur  $p(x_n - \hat{x}_n)$ , ce majorant étant au plus égal à la valeur maximale de  $p(x_n - \hat{x}_n)$  pour  $x_n, \hat{x}_n \in \mathcal{G}$  domaine de variation admissible pour l'état du processus. Il convient en fin d'étude de vérifier si la limitation trouvée pour l'écart des vecteurs état est bien compatible avec la majoration fixée à priori :

Lorsque les matrices  $M_{11}$  et  $M_{22}$  sont telles que

$$\max(\rho(M_{11}), \rho(M_{22})) \leq \rho < 1$$

nous pouvons majorer l'écart limite de l'état défini pour les modèles (1) et (2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n - \hat{x}_n) \leq (I - M_{11})^{-1} (N_1 + M_{12} (I - M_{22})^{-1} N_2) \quad (23)$$

### 1.2. - Modèles d'ordre distincts

Lorsque les deux modèles du processus étudiés sont d'ordre distincts il vient par exemple  $\hat{q} < q$ , dans ces conditions il n'est plus possible d'utiliser directement la méthode présentée en 1.1.

Soit alors  $y_n$  un vecteur de  $\mathcal{R}^q$  défini à partir du vecteur  $\hat{x}_n$  et tel que l'on ait

$$\hat{x}_n = P y_n \quad (24)$$

$P \in \mathcal{R}^{\hat{q} \times q}$ , matrice de rang maximum choisie de façon à faire correspondre les composantes de même nature des vecteurs  $x_n$  et  $y_n$ .

En notant  $P^-$  un pseudo-inverse /13/ de la matrice  $P$  telle que l'on ait

$$P P^- = I_{\hat{q}} \quad (25)$$

la relation (2) peut être réécrite :

$$y_{n+1} = P^- \hat{A}(t_n, P y_n, \hat{\Lambda}_n, \hat{E}_n) \hat{a}(t_n, P y_n) + P^- \hat{B}(t_n, P y_n, u_n) \quad (2'')$$

Les relations (2) et (2'') sont bien équivalentes lorsque la relation  $\hat{x}_{n_0} = P y_{n_0}$  est vérifiée à l'instant initial  $t_{n_0}$ ; la vérification de cette propriété s'effectue immédiatement en multipliant la relation (2'') à gauche par la matrice  $P$ .

Nous sommes ainsi ramenés au cas du problème étudié en 1.1 en remplaçant le modèle défini en (2) par celui défini en (2'').

En pratique, il est possible de prendre pour le pseudo-inverse de la matrice  $P$  la définition de Moore et Penrose /14/. La matrice  $P$  étant de rang maximum il vient dans ce cas :

$$P^- = P^+ = P^T (P P^T)^{-1}$$

la condition (25) se vérifie alors aisément.

Lorsque le système (2) admet la forme (7) il vient

$$y_{n+1} = P^+ \hat{A}_n^* P \cdot y_n + P^+ \hat{B}_n^* u_n$$

description qui conserve bien la forme initiale.

### 1.3. - Application à l'étude de la stabilité d'un processus imparfaitement identifié.

Soit le système d'ordre 3 décrit par une relation de la forme

$$x_{n+1} = A_n x_n + B_n k(u_n) \quad (26)$$

$$u_n = a x_n^1 + b x_n^2$$

avec comme informations :

$$A_n = A + \Lambda_n, B_n = B + \Lambda_n^*, k(u_n) = k u_n + k^*(u_n)$$

$$(A, B) = \begin{bmatrix} 1 & 0,48 & 0,2 & 0,7 \\ 0,75 & 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$|\Lambda_n, \Lambda_n^*| \leq \begin{bmatrix} 0,05 & 0,02 & 0,01 & 0,03 \\ 0,03 & 0,02 & 0,01 & 0,02 \\ 0,01 & 0,01 & 0,01 & 0,01 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$k = 0,8, \quad |k^*(u_n)| < 0,2 \quad (29)$$

a et b coefficients de réglage que l'on souhaite ajuster de façon à accroître la stabilité du processus c'est-à-dire dans ce cas à limiter l'amplitude de ses oscillations.

Prenons à cet effet un modèle du même processus de la forme

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{A} \hat{x}_n + \hat{B} u_n \quad (30)$$

avec

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0,48 \\ 0,75 & 0,3 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,5 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$u_n = \hat{a} \hat{x}_n^1 + \hat{b} \hat{x}_n^2 = \hat{C} \hat{x}_n$$

Pour le modèle (30) le choix des valeurs

$$\begin{aligned} \hat{a} &= -1 \\ \hat{b} &= -1,2 \end{aligned}$$

permet un amortissement rigoureux du régime transitoire en un temps fini /15/ /16/. Il vient en effet  $\hat{x}_{n+2} = 0 \quad \forall \hat{x}_n$ .

Nous allons utiliser ces valeurs déterminées sur le modèle (30) pour le modèle (26) qui correspond à une représentation plus exacte, bien qu'imprécise, du processus et estimer l'écart entre les évolutions des deux processus.

Notons à cet effet  $y_n \in \mathcal{R}^3$  un vecteur tel que l'on ait

$$\hat{x}_n = P y_n \quad (32)$$

le choix

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0,2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

permet de représenter (30) sous la forme :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= P^+ \hat{A} P y_n + P^+ \hat{B} u_n \\ u_n &= \hat{C} P x_n \end{aligned} \quad (34)$$

ce qui correspond à un modèle de même dimension que le modèle initial avec :

$$P^+ = \frac{1}{1,05} \begin{bmatrix} 1,04 & -0,02 \\ -0,02 & 1,01 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Ce choix de  $P^+ = P^T(P P^T)^{-1}$

conduit à écrire (34) sous la forme

$$y_{n+1} = P^+(\hat{A} + \hat{B} C) P y_n$$

soit

$$y_{n+1} = \begin{bmatrix} 0,293 & -0,352 & -0,041 \\ 0,244 & -0,282 & -0,032 \\ 0,076 & -0,091 & -0,010 \end{bmatrix} y_n \quad (36)$$

Avec le réglage  $ka = \hat{a}$ ,  $kb = \hat{b}$  il vient pour le modèle (26) :

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 0,3 \pm 0,08 & -0,36 \pm 0,056 & 0,2 \pm 0,01 \\ 0,25 \pm 0,05 & -0,3 \pm 0,044 & 0,2 \pm 0,01 \\ 0,1 \pm 0,02 & -0,02 \pm 0,022 & 0,1 \pm 0,01 \end{bmatrix} x_n + \begin{bmatrix} \pm 0,146 \\ \pm 0,104 \\ \pm 0,022 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Pour le choix de la norme scalaire  $p$

$$p(x_n) = |x_n^1| + |x_n^2| + |x_n^3| \quad (38)$$

il vient avec les notations définies en (22)

$$m_{11} = 0,802 \quad ; \quad m_{12} = 0,613 \quad ; \quad m_{22} = 0,725 \quad (39)$$

$$n_1 = 0,272 \quad n_2 = 0$$

soit d'après (20) et compte tenu du réglage adopté

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n - y_n) \leq 1,38 \quad (40)$$

## II - Etude de la stabilité locale de certains cas critiques de stabilité

Cette section a pour but de montrer l'apport possible de l'utilisation des systèmes majorants dans l'étude de la stabilité de certains cas critiques, l'étude spécifique des cas critiques ayant déjà fait l'objet de nombreux travaux, en particulier au LAAS /4/-/7/.

Afin de simplifier la présentation nous nous limiterons aux cas critiques du second ordre.

L'étude de la stabilité locale d'un état stationnaire d'un système discret non-linéaire peut en général se déduire de l'approximation linéaire du modèle récurrent adopté. Supposons à cet effet que, le point d'équilibre du processus étant ramené à l'origine il vienne une équation d'état de la forme :

$$\begin{aligned}x_{n+1}^1 &= a x_n^1 + b x_n^2 + h^1(t_n, x_n^1, x_n^2) \\x_{n+1}^2 &= c x_n^1 + d x_n^2 + h^2(t_n, x_n^1, x_n^2)\end{aligned}\tag{41}$$

$$x_n^1, x_n^2 \in \mathcal{R}, \quad h^1, h^2 : \mathcal{C}_0 \times \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$$



avec les conditions

$$h^1(t_n, 0, 0) = h^2(t_n, 0, 0) = 0 \quad \forall t_n \in \mathcal{C}_0$$

les fonctions  $h^1$  et  $h^2$  n'admettant pas de développement limité en  $x_n^1$  et  $x_n^2$  d'ordre inférieur à 2 au voisinage de l'origine.

Deux cas peuvent être considérés. Lorsque le rayon spectral de la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\tag{42}$$

est strictement inférieur à l'unité, le point d'équilibre  $x_n = 0$  est localement stable.



Dans le cas contraire :  $\rho(A) = 1$  il y a cas critique au sens de Lyapunov et l'étude de la stabilité locale de l'état d'équilibre  $x_n = 0$  du processus nécessite de tenir compte des termes non-linéaires  $h^1(x_n^1, x_n^2)$  et  $h^2(x_n^1, x_n^2)$ .

Deux cas peuvent se présenter selon que la matrice A admet des valeurs propres réelles ou complexes. Dans le premier cas l'une des valeurs propres au moins est de module égal à l'unité. Dans le second cas les deux valeurs propres, qui sont alors complexes conjuguées sont de module unité ; ce cas va nous conduire à généraliser à une description sur les corps des complexes, les propriétés de majorations qui ont été définies sur le corps des réels.

2.1. - Majoration d'un processus décrit sur le corps des complexes

Nous noterons  $|\alpha|$  le module de  $\alpha \in \mathcal{C}$

$$|\alpha| = \sqrt{\bar{\alpha} \cdot \alpha} \tag{43}$$

avec  $\bar{\alpha}$  complexe conjugué de  $\alpha$

De la même façon nous noterons pour un vecteur  $x \in \mathcal{C}^q$

$$||x|| = \sqrt{x^T \cdot x} \tag{44}$$

la norme hermitienne du vecteur complexe x qui est la généralisation sur le corps des complexes de la norme euclidienne définie sur le corps des réels.

Avec ces notations les résultats du chapitre II s'étendent aisément au corps des complexes.

Lorsqu'une récurrence du second ordre admet un cas critique de stabilité à multiplicateurs complexes un simple changement de base permet de donner à la matrice A (42) la forme :

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Le système (41) s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi + a_{11}(t_n, x_n) & -\sin \varphi + a_{12}(t_n, x_n) \\ \sin \varphi + a_{21}(t_n, x_n) & \cos \varphi + a_{22}(t_n, x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \end{pmatrix} \tag{45}$$

Une description sur le corps des complexes définie à partir de la relation (45) par le changement de base :

$$\begin{pmatrix} y_n^1 \\ y_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \end{pmatrix} \quad (46)$$

dans lequel  $j^2 = -1$ , conduit à la relation :

$$y_{n+1} = B(t_n, y_n) y_n \quad (47)$$

avec

$$b_{11}(n) = e^{-j\varphi} + \frac{1}{2}(a_{11}(n)+a_{22}(n)+j(a_{12}(n)-a_{21}(n))) = \bar{b}_{22}(n)$$

$$b_{12}(n) = \frac{1}{2}(a_{11}(n)-a_{22}(n)-j(a_{12}(n)+a_{21}(n))) = \bar{b}_{21}(n)$$

La matrice  $B(t_n, y_n)$  est alors diagonale pour  $y_n | x_n = 0$

Soit  $p(y_n) = |y_n|$  une NV de dimension 2 du vecteur  $y_n$ , il vient le système majorant

$$p(y_{n+1}) \leq \begin{vmatrix} |b_{11}(n)| & |b_{12}(n)| \\ |b_{21}(n)| & |b_{22}(n)| \end{vmatrix} p(y_n) \quad (48)$$

d'où le système de comparaison (49) :

$$z_{n+1} = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{bmatrix} z_n \quad (49)$$

$$\text{avec } a_n = \left( \left( \cos \varphi + \frac{a_{11}(n)+a_{22}(n)}{2} \right)^2 + \left( \sin \varphi + \frac{a_{21}(n)-a_{12}(n)}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \left( (a_{11}(n)-a_{22}(n))^2 + (a_{12}(n)+a_{21}(n))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- La matrice  $M(B)$  définissant le système majorant admet une forme remarquable : elle est symétrique et égale au produit de son rayon spectral par une matrice bistochastique /17/

$$M(B) = (a_n + b_n) \begin{pmatrix} \frac{a_n}{a_n + b_n} & \frac{b_n}{a_n + b_n} \\ \frac{b_n}{a_n + b_n} & \frac{a_n}{a_n + b_n} \end{pmatrix} \quad (50)$$

Dans ces conditions l'étude de la stabilité du système de comparaison à partir de la norme du max, de sa duale ou de la norme euclidienne conduirait nécessairement aux mêmes conditions de stabilité locale /18/ de l'état d'équilibre  $x_n = 0$  soit  $a_n + b_n \leq c < 1$ .

## 2.2. - Application à l'étude locale de certains cas critiques de stabilité

Nous proposons deux exemples d'étude de cas critiques à l'aide des systèmes majorants le premier correspondant à des multiplicateurs réels et le second à des multiplicateurs complexes.

### 2.2.1. - Cas critique à multiplicateurs réels

soit le système décrit par la récurrence :

$$\begin{aligned} x_{n+1}^1 &= x_n^1 + x_n^1 (x_n^2)^2 \\ x_{n+1}^2 &= 0,4x_n^2 - (x_n^1)^2 x_n^2 \end{aligned} \quad (51)$$

Il est possible de lui associer la représentation matricielle équivalente suivante :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - (x_n^2)^2 & 2x_n^1 x_n^2 \\ -x_n^1 x_n^2 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \end{pmatrix} \quad (52)$$

Le choix de la NV  $p$

$$p^T(x_n) = \left[ |x_n^1|, \sqrt{2} |x_n^2| \right] \quad (53)$$

conduit au système majorant symétrique :

$$p(x_{n+1}) \leq \begin{vmatrix} |1 - (x_n^2)^2| & \sqrt{2} |x_n^1 x_n^2| \\ \sqrt{2} |x_n^1 x_n^2| & 0,4 \end{vmatrix} p(x_n) \quad (54)$$

L'application du théorème (II.5) qui correspond à l'utilisation d'une fonction de Lyapunov de la forme :

$$v(x_n) = p(x_n)^T p(x_n) \quad (55)$$

permet alors de conclure à la stabilité asymptotique de l'état d'équilibre  $x_n = 0$  du processus.

Il vient en effet :

$$\Delta v_n = v(x_{n+1}) - v(x_n) \leq p(x_n)^T \left[ M^2(x_n) - I \right] p(x_n) \quad (56)$$

La condition  $\Delta v_n < c v_n$  avec  $c$  négatif s'exprime sous la forme

$$\left. \begin{aligned} |1 - (x_n^2)^2| - 1 < 0 \\ -(|1 - (x_n^2)^2| - 1) 0,6 - 2(x_n^1)^2 (x_n^2)^2 > 0 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

La plus grande équipotentielle comprise dans le domaine défini par les conditions (57) correspond à  $v(x_n) = 0,3$ . Il en résulte un domaine de stabilité vis à vis des conditions initiales défini par la contrainte

$$(x_n^1)^2 + 2(x_n^2)^2 \leq 0,3 \quad (58)$$

2.2.2. - Cas critique à multiplicateurs complexes

Soit le système décrit par la récurrence vectorielle

$$\begin{aligned} x_{n+1}^1 &= x_n^1 \cos\varphi - x_n^2 \sin\varphi + 8,25 (x_n^1)^3 + 0,75(x_n^1)^2 x_n^2 \\ x_{n+1}^2 &= x_n^1 \sin\varphi + x_n^2 \cos\varphi - 3,75 (x_n^1)^3 + 2,25(x_n^1)^2 x_n^2 \end{aligned} \quad (59)$$

il lui correspond la représentation matricielle

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi + 8,25(x_n^1)^2 & -\sin\varphi + 0,75(x_n^1)^2 \\ \sin\varphi - 3,75(x_n^1)^2 & \cos\varphi + 2,25(x_n^1)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \end{pmatrix} \quad (60)$$

Le changement de vecteur état défini par la relation (46) permet de majorer la suite récurrente  $y_n$  selon la relation :

$$\begin{pmatrix} |y_{n+1}^1| \\ |y_{n+1}^2| \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |y_n^1| \\ |y_n^2| \end{pmatrix} \quad (61)$$

avec

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + (x_n^1)^2 (10,5 \cos\varphi - 4,5 \sin\varphi) + (x_n^1)^4 \left(\left(\frac{10,5}{2}\right)^2 + \left(\frac{4,5}{2}\right)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ b_n &= \left(11,25(x_n^1)^4\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

D'après le théorème (II.5) l'existence d'un domaine  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{R}^2$  tel que l'on ait  $x = 0 \in \mathcal{G}$  et

$$a_n + b_n \leq c < 1 \quad (62)$$

implique que l'état d'équilibre  $x = 0$  du système (59) est asymptotiquement stable.

la condition (62) donne

$$(x_n^1)^2 < \frac{4,5 \sin \varphi - 10,5 \cos \varphi - 6,7}{21,51} \quad (63)$$

L'existence d'un domaine  $\mathcal{U}$  non vide vérifiant (62) implique la contrainte

$$4,5 \sin \varphi - 10,5 \cos \varphi > 6,7$$

soit

$$103^\circ < \varphi < 211^\circ \quad (64)$$

Lorsque cette contrainte est vérifiée nous pouvons donc conclure à la stabilité locale de l'état d'équilibre  $x = 0$ .

Afin d'expliciter les calculs et d'indiquer un domaine certain de stabilité vis à vis des conditions initiales du processus (59) prenons  $\varphi = 120^\circ$ .

Compte-tenu de la relation (46) la NV du vecteur  $y_n$  utilisée en (61) correspond pour le vecteur  $x_n$  à la NV :

$$p^T(x_n) = \left( \left[ (x_n^1)^2 + (x_n^2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \left[ (x_n^1)^2 + (x_n^2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \quad (65)$$

il s'agit en fait d'une NV non régulière du vecteur  $x_n$ .

La fonction de Lyapunov utilisée dans théorème (II.5), de la forme (55), correspond alors à

$$v(x_n) = 2 \left[ (x_n^1)^2 + (x_n^2)^2 \right] \quad (66)$$

et pour  $\varphi = 120^\circ$  la condition  $\Delta v_n < 0$  définie en (63) s'exprime sous la forme

$$|x_n^1| < 0,34 \quad (67)$$

La définition de  $v(x_n)$  (66) nous permet alors d'affirmer que le domaine défini par l'inégalité :

$$(x_n^1)^2 + (x_n^2)^2 \leq (0,34)^2 \quad (68)$$

est un domaine de stabilité relativement aux conditions initiales de la récurrence (59)

### III - Etude de la sensibilité d'un modèle d'un processus.

L'étude de la sensibilité /8/,/9/ d'un modèle d'un processus présente une grande importance tant du point de vue de l'analyse (influence des paramètres) que de la synthèse (problème d'optimisation).

Après un bref rappel de la notion de sensibilité nous allons indiquer une méthode permettant une estimation numérique de la sensibilité d'un processus à ses divers paramètres.

#### 3.1. - Rappel de la définition de la sensibilité d'un processus

L'évolution du système étudié est supposée décrite en régime dynamique par une relation de la forme :

$$x_{n+1} = f(t_n, x_n, u_n, \lambda) \quad (69)$$

$$s_{n+1} = g(t_n, x_n, u_n, \lambda) \quad (70)$$

avec  $u_n \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^p$  vecteur de commande et  $\lambda \in \mathcal{D}_\lambda \subset \mathcal{R}^l$  vecteur des paramètres constants caractéristiques du processus par rapport auquel nous voulons étudier la sensibilité

$$f : \mathcal{C}_0 \times \mathcal{R}^q \times \mathcal{U} \times \mathcal{D}_\lambda \rightarrow \mathcal{R}^q \quad \text{et} \quad g : \mathcal{C}_0 \times \mathcal{R}^q \times \mathcal{U} \times \mathcal{D}_\lambda \rightarrow \mathcal{R}^m$$

##### 3.1.1. - Sensibilité de l'état

Considérons l'effet sur le système d'une variation finie  $\Delta\lambda$  de l'ensemble de ses paramètres. Si  $\Delta x_n$  représente la variation de l'état  $x_n$  à l'instant  $t_n$  consécutive à la variation  $\Delta\lambda$  il vient

$$\Delta x_{n+1} = f(t_n, x_n + \Delta x_n, u_n, \lambda + \Delta\lambda) - f(t_n, x_n, u_n, \lambda) \quad (71)$$

Notons  $F_x(n)$  et  $F_\lambda(n)$  les matrices d'éléments respectifs

$$(F_x(n))_{ij} = \frac{\Delta_{x_n^j}(f_i)}{\Delta_{x_n^j}} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, q \quad (72)$$

$$(F_\lambda(n))_{ij} = \frac{\Delta_{\lambda^j}(f_i)}{\Delta \lambda^j} \quad \forall i = 1, 2, \dots, q \text{ et } \forall j = 1, 2, \dots, \ell \quad (73)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta_{x_n^j}(f_i) &= f_i(t_n, x_n^1 + \Delta x_n^1, \dots, x_n^j + \Delta x_n^j, x_n^{j+1}, \dots, x_n^q, u_n, \lambda) \\ &\quad - f_i(t_n, x_n^1 + \Delta x_n^1, \dots, x_n^{j-1} + \Delta x_n^{j-1}, x_n^j, \dots, x_n^q, u_n, \lambda) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_{\lambda^j}(f_i) &= f_i(t_n, x_n + \Delta x_n, u_n, \lambda^1 + \Delta \lambda^1, \dots, \lambda^j + \Delta \lambda^j, \lambda^{j+1}, \dots, \lambda^\ell) \\ &\quad - f_i(t_n, x_n + \Delta x_n, u_n, \lambda^1 + \Delta \lambda^1, \dots, \lambda^{j-1} + \Delta \lambda^{j-1}, \lambda^j, \dots, \lambda^\ell) \end{aligned}$$

dans ces conditions la relation (71) peut être réécrite

$$\Delta x_{n+1} = F_x(n) \Delta x_n + F_\lambda(n) \Delta \lambda \quad (74)$$

Lorsque la fonction  $f(t_n, x_n, u_n, \lambda)$  est suffisamment continue et dérivable par rapport à  $x$  et  $\lambda$ ,  $F_x$  et  $F_\lambda$  sont les approximations au premier ordre des matrices des dérivées partielles par rapport à  $x$  et  $\lambda$ .

En particulier, lorsque la fonction vectorielle  $f$  admet des dérivées partielles premières continues, il existe un point de coordonnées  $x_n^*$ ,  $\lambda^*$  du domaine défini par les contraintes :

$$\begin{aligned} \left| x_n^* - \left( x_n + \frac{\Delta x_n}{2} \right) \right| &< \left| \frac{\Delta x_n}{2} \right| \\ \left| \lambda^* - \left( \lambda + \frac{\Delta \lambda}{2} \right) \right| &< \left| \frac{\Delta \lambda}{2} \right| \end{aligned} \quad (75)$$



tel que l'on ait

$$F_x(n) = \frac{\partial f}{\partial x_n} (t_n, x_n^*, u_n, \lambda^*) \quad (76)$$

$$F_\lambda(n) = \frac{\partial f}{\partial \lambda} (t_n, x_n^*, u_n, \lambda^*)$$

En posant

$$\sigma_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta \lambda} \quad (77)$$

la matrice de sensibilité par rapport aux paramètres  $\lambda$  il vient :

$$\sigma_{n+1} = F_x(n) \sigma_n + F_\lambda(n) \quad (78)$$

l'effet d'une variation  $\Delta \lambda$  des paramètres à l'instant  $t_n$  conduit à une variation du vecteur état définie par la relation

$$\Delta x_{n+k} = \sigma_{n+k} \Delta \lambda \quad (79)$$

$\sigma_{n+k}$  étant solution de la récurrence (78) pour des conditions initiales nulles.

### 3.1.2. - Sensibilité de la sortie

En définissant  $G_x(n)$  et  $G_\lambda(n)$  de la même façon que  $F_x(n)$  et  $F_\lambda(n)$  il vient pour la sortie dans le cas d'une variation  $\Delta \lambda$  à l'instant  $t_n$  :

$$\Delta S_{n+k} = G_x(n) \Delta x_{n+k} + G_\lambda(n) \Delta \lambda \quad (80)$$

soit en tenant compte de (79) et (78)

$$\Delta S_{n+k} = (G_x(n) \sigma_{n+k} + G_\lambda(n)) \Delta \lambda \quad (81)$$

### 3.2. - Estimation numérique de la sensibilité

Une étude directe de la sensibilité d'un processus à l'aide des définitions précédentes peut dans le cas général s'avérer délicate.

Nous envisagerons le cas pour lequel il est possible de déterminer des majorantes à coefficients constants au sens des  $NVP$  et  $p$ ,  $p$  et  $q$ ,  $r$  et  $p$  et  $q$  respectivement pour les matrices  $F_x(n)$ ,  $F_\lambda(n)$ ,  $G_x(n)$ ,  $G_\lambda(n)$ . Ces majorantes sont définies pour  $t_n, x_n, u_n, \lambda \in \mathcal{C}_0 \times \mathbb{R}^q \times \mathcal{U} \times \mathcal{D}_\lambda$  il vient

$$\begin{aligned} M_x &= M_{pp}(F_x(n)) & ; & & M_\lambda &= M_{pq}(F_\lambda(n)) \\ M_x^* &= M_{rp}(G_x(n)) & ; & & M_\lambda^* &= M_{rq}(G_\lambda(n)) \end{aligned} \quad (82)$$

### 3.2.1. - Sensibilité aux variations des paramètres $\lambda^j$

avec les notations (82) il vient :

$$\begin{aligned} p(\Delta x_{n+1}) &\leq M_x p(\Delta x_n) + M_\lambda q(\Delta \lambda) \\ r(\Delta s_n) &\leq M_x^* p(\Delta x_n) + M_\lambda^* q(\Delta \lambda) \end{aligned}$$

L'estimation numérique de l'effet d'une perturbation peut alors s'effectuer simplement à l'aide du système de comparaison à coefficients constants :

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= M_x z_n + M_\lambda q(\Delta \lambda) \\ y_n &= M_x^* z_n + M_\lambda^* q(\Delta \lambda) \end{aligned} \quad (83)$$

Si la matrice  $M_x$  est de rayon spectral inférieur à 1 les trajectoires du système (69) avec et sans variation ne divergeront pas indéfiniment pour une commande et des conditions initiales identiques.

Le système de comparaison (83) implique alors en effet :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p(\Delta x_n) &\leq (I - M_x)^{-1} M_\lambda q(\Delta \lambda) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} r(\Delta s_n) &\leq (M_x^* (I - M_x)^{-1} M_\lambda + M_\lambda^*) q(\Delta \lambda) \end{aligned} \quad (84)$$

En pratique il apparait parfois intéressant de choisir  $q(\Delta\lambda) = |\Delta\lambda|$  afin de distinguer l'effet des diverses composantes du vecteur  $\Delta\lambda$  sur le processus.

Les relations (84) s'interprètent simplement comme une majoration de l'amplitude des oscillations limites de l'écart entre les trajectoires du système perturbé par rapport au système non perturbé.

### 3.2.2. - Sensibilité aux variations des conditions initiales.

L'étude précédente concerne l'effet d'une variation des paramètres de structure sur le processus partant de conditions initiales données et soumis à un vecteur d'entrée déterminé.

En fait l'état initial d'un système est souvent mal connu, l'imprécision des capteurs mis en oeuvre dans les processus réels ne permet généralement pas sa détermination exacte.

Il convient donc d'examiner l'effet sur l'évolution ultérieure du système d'une variation  $\Delta x_n$  de son état initial lorsque la commande  $u_n$  reste dans un domaine de variations  $\mathcal{U}$ .

Le système étant décrit par les relations (69) et (70), en l'absence de variation du vecteur  $\lambda$  les relations (74) et (80) prennent la forme simple

$$\begin{aligned} \Delta x_{n+1} &= F_x(n) \Delta x_n & \text{a} \\ \Delta s_n &= G_x(n) \Delta x_n & \text{b} \end{aligned} \tag{85}$$

deux cas peuvent se présenter selon que la récurrence définie en (85 a) est stable ou non, la matrice  $G_x(n)$  étant supposée à coefficients bornés.

- Dans le premier cas, le système possède la propriété de stabilité du régime forcé /9/ /10/ /20/ c'est-à-dire que l'effet des conditions initiales sur le système tend à disparaître au cours du temps.

Lorsque cette propriété est vérifiée, le comportement du système soumis à une commande donnée devient très rapidement dépendant de cette seule loi de commande, c'est-à-dire indépendant des conditions initiales.

Le problème se ramène,  $M$  étant une majorante constante ou non induite par une NV  $p$ , à un problème d'étude de stabilité qui a déjà été envisagé au chapitre III.

- Lorsqu'il n'est pas possible de conclure à la stabilité de la récurrence (85 a), la matrice  $F_x(n)$  restant cependant à coefficients bornés, il est parfois possible de donner une majoration de l'écart entre les trajectoires du système évoluant avec et sans perturbation des conditions initiales.

En effet, supposons qu'il soit possible de majorer la relation (85), à l'aide des NV  $p$  et  $r$ , sous la forme (86)

$$\begin{aligned} p(\Delta x_{n+1}) &\leq M p(\Delta x_n) + N \\ r(\Delta s_n) &\leq M^* p(\Delta x_n) \end{aligned} \tag{86}$$

dans laquelle  $M \in \mathcal{R}_+^{k \times k}$  est une matrice à coefficients constants de rayon spectral inférieur à l'unité et  $N \in \mathcal{R}_+^k$  est un vecteur constant.

Dans ces conditions il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p(\Delta x_n) &\leq (I-M)^{-1} N \\ \lim_{n \rightarrow \infty} r(\Delta s_n) &\leq M^*(I - M^{-1}) N \end{aligned} \tag{87}$$

On retrouve bien la propriété de stabilité du régime forcé s'il est possible d'obtenir une majoration de la forme (86) avec  $N = 0$  et  $\rho(M) < 1$ .

## Conclusion

Les diverses applications des normes vectorielles et des systèmes majorants présentés dans ce chapitre montrent que ceux-ci constituent un outil de calcul d'utilisation simple.

En effet dans le cadre d'un grand système il est toujours délicat d'effectuer une comparaison rigoureuse des propriétés de deux modèles d'un processus en vue de son identification et de sa commande. L'utilisation des systèmes majorants permet par une réduction de dimensionnalité de simplifier l'étude. Elle facilite notamment une majoration numérique de l'erreur introduite par un changement de modèle compte tenu de la précision connue des paramètres déterminés lors de l'identification. D'autre part elle permet la détermination de la sensibilité du modèle à une variation de ses divers paramètres.

D'un point de vue distinct l'utilisation des systèmes majorants en vue d'étudier les cas critiques de stabilité peut parfois permettre de déterminer avec un minimum de calculs un domaine fini dans l'espace d'état ou / et dans l'espace des paramètres du système pour lequel on est assuré de la stabilité du processus.

BIBLIOGRAPHIE CHAPITRE IV

- /1/ P. BORNE , J.C. GENTINA et F. LAURENT  
"About the evaluation of the error made when representing a large system by a given order model".  
Actes du 3<sup>ème</sup> symposium IFAC : Sensitivity, adaptativity and optimality, - Ischia - Juin 1973
- /2/ S. LATTES  
"Annali di Mathematica".  
Série 3 - tome 13- 1906
- /3/ W. HAHN  
"Theorie und Anwendung der direkten methode von Lyapunov".  
Springer Verlag - 1959
- /4/ F. ROUBELLAT  
"Contribution à l'étude des solutions des récurrences non linéaires et applications aux systèmes à données échantillonnées".  
Thèse Docteur ès Sciences physiques - Toulouse - Septembre 1969
- /5/ J.P. BABARY  
"Contribution à l'étude des solutions des récurrences non-linéaires et différentes applications".  
Thèse Docteur ès Sciences physiques - Toulouse - Septembre 1969
- /6/ J.L. ABATUT  
"Contribution à l'analyse de systèmes à données échantillonnées à l'aide des récurrences associées".  
Thèse Docteur ès Sciences Physiques - Toulouse - Mai 1970
- /7/ J. LAGASSE , C. MIRA  
"Travaux du Laboratoire d'Automatique et de ses applications spatiales sur les récurrences et leurs applications".  
Actes du 5<sup>ème</sup> Congrès mondial IFAC - Paris - Juin 1972

- /8/ R. TOMOVIC  
"Sensitivity analysis of dynamic systems"  
Mac Graw Hill - 1963
- /9/ F. LAURENT , P. VIDAL  
"Sur une condition suffisante d'unicité de la réponse d'un système échantillonné non linéaire à une sollicitation quelconque".  
CRAS - Paris Série A - t. 264 - pp 779-780 - 1967
- /10/ F. LAURENT , C. MAIZIERES  
"Sur une majoration de l'écart entre les réponses à une entrée quelconque des systèmes asservis non-linéaires continus ou échantillonnés".  
CRAS - Paris Série A - t. 262 - pp 659-661 - 1966
- /11/ J.C. WILLEMS  
"The generation of Lyapunov functions for input-output stable systems".  
SIAM Contr. J. - Vol. 9 - n° 1 - pp 105-134 - 1971
- /12/ G. BIRKHOFF and R.S. VARGA  
"Reactor criticality and non negative matrices".  
J. Soc. Ind. Appl. Math. - Vol. 6 - n° 4 - pp 354-377 - 1958
- /13/ C.R. RAO and S.K. MITRA  
"Generalized inverse of matrices undits applications".  
John Wiley and sons - 1971
- /14/ R. PENROSE  
"A generalized inverse for matrices".  
Proc. Cambridge Philos. Soc. - 51 - pp 406-413 - 1955
- /15/ J.M. TOULOTTE , F. LAURENT , P. VIDAL  
"Regulation par échantillonnage et correction tachymétrique".  
IFAC - Budapest - 1968

- /16/ F. LAURENT , J.C. GENTINA , M. STAROSWIECKI , P. BORNE  
*"On the controllability of incompletely observable sampled data system with a plurality of monitoring"*.  
2<sup>nd</sup> IFAC Symposium on multivariable Düsseldorf - 1971
- /17/ F.R. GANTMACHER  
*"Théorie des matrices"*  
Dunod - 1966
- /18/ P. BORNE , J.C. GENTINA , F. LAURENT  
*"Sur une étude par majoration de la stabilité des suites récurrentes vectorielles non linéaires"*.  
Colloque international du CNRS : Transformations ponctuelles et leurs applications - Toulouse - septembre 1973
- /19/ I. GUMOWSKI  
*"Sensitivity analysis and Lyapunov stability, sensitivity methods in control theory"*.  
Pergamon Press 1966
- /20/ J.C. GENTINA , P. BORNE , F. LAURENT , C. MAIZIERES  
*"Sur une condition suffisante d'unicité des systèmes continus non-linéaires de grande dimension"*.  
Automatica 72 - Octobre 1972 - Actes du congrès pp 43-51





## CHAPITRE V

### Essai de synthèse d'une régulation d'un groupe turbo-alternateur à une resurchauffe

#### Introduction

Nous proposons dans ce chapitre d'appliquer les techniques de majoration à un avant projet de synthèse de la commande d'un processus industriel. Il s'agit ici d'un groupe turbo-alternateur pour lequel la structure du modèle et les valeurs des divers paramètres qui le caractérisent ont été déterminées par l'E D F /1/.

Les groupes turbo alternateurs à une resurchauffe sont appelés à fonctionner dans des conditions très variées :

- (i) alimentation du réseau interconnecté Ouest européen,
- (ii) alimentation d'un réseau isolé à la suite de perturbations,
- (iii) marche à vide

Dans les asservissements envisagés la régulation de la vitesse du groupe est obtenue par action sur l'ouverture des soupapes d'admission de vapeur de façon à compenser l'effet des diverses perturbations. L'avant projet que nous proposons s'attache à montrer comment les résultats des chapitres précédents permettent d'envisager le principe d'une régulation à caractère discret pour les groupes turbo alternateurs usuellement commandés selon des techniques continues.

Comme il n'est pas toujours possible de détecter à la centrale le passage pour le groupe d'un fonctionnement sur le réseau interconnecté à un fonctionnement sur réseau isolé, la compensation doit pouvoir convenir quelle que soit l'évolution possible du réseau.

Cette notion est très voisine de celle de stabilité connective et sera étudiée à l'aide des techniques de majoration déjà présentées (chapitre II).

Ce travail est essentiellement un avant projet, en effet, la mise en oeuvre d'une régulation d'un groupe alternateur par des techniques discrètes nécessiterait une étude complémentaire en particulier à propos des sécurités qui en cas d'incident doivent être parfaites, le processus mettant en oeuvre des puissances très importantes.

## I - Description du processus étudié

Nous envisagerons l'étude correspondant au cas d'exploitation le plus fréquent, pour lequel la turbine est alimentée par le corps haute pression (HP) et les soupapes moyennes pression (MP) sont à pleine ouverture. Certains groupes sont alimentés par le corps moyenne pression lors de la marche à vide et de prises en charge d'importance très réduite par rapport à leur puissance nominale. A un instant donné, la puissance des groupes qui alimentent le réseau et dont la turbine reçoit la vapeur exclusivement par l'admission du corps MP est faible devant celle des groupes recevant la vapeur par l'admission du corps HP. Leur influence sur la stabilité du réseau est donc négligeable. Par ailleurs l'apparition d'une marche sur réseau isolé pendant une période de démarrage est suffisamment peu probable pour qu'elle ne justifie pas d'étude particulière.

Le groupe est appelé à fonctionner en asservissement d'ouverture, ou en asservissement de puissance, pour alimenter ainsi soit le réseau interconnecté, soit un réseau isolé. Enfin il peut fonctionner en marche à vide en asservissement de puissance.

Il est généralement admis que pour assurer une bonne stabilité au réseau interconnecté il est suffisant que chaque groupe soit stable en réseau isolé et que tous les groupes couplés à un même réseau présentent des réponses identiques à une même perturbation de la consommation. Cette conception permet en effet d'éviter les transferts de puissance entre groupes.

Nous allons envisager dans cette étude le cas d'un fonctionnement en asservissement de puissance, le groupe pouvant alimenter indifféremment le réseau interconnecté ou un réseau isolé.

## II - Description des turbo alternateurs et du réseau

Cette étude concerne dans un premier temps la stabilité des groupes pour de petites perturbations. Dans ce cas l'hypothèse de linéarité peut être conservée. L'influence des non-linéarités est envisagée ensuite après synthèse du mode de régulation selon l'hypothèse linéaire.

Trois sous ensembles caractéristiques permettent de représenter le groupe :

- La turbine qui fournit une puissance motrice fonction de l'ouverture des soupapes du corps haute pression.
- Les masses tournantes, dont l'accélération angulaire est proportionnelle à l'écart entre le couple moteur de la turbine et le couple résistant correspondant à la puissance électrique fournie par le groupe au réseau.
- L'alternateur et le réseau dont la puissance électrique est fonction de la vitesse du groupe.

### 2.1. - La turbine

Il est possible de distinguer trois éléments /1/

a) - Le corps haute pression (HP)

Il fournit une puissance motrice proportionnelle dans le rapport  $\alpha$  à la puissance de la turbine qui est elle-même fonction de la course des soupapes.

La fonction de transfert liant la puissance fournie par le corps HP à la position des soupapes s'écrit

$$\frac{G \alpha}{1 + T_p} \quad (1)$$

En un point de fonctionnement, le gain généralisé  $G$  entre les écarts relatifs de débit et les écarts relatifs de position est en général différent de l'unité.

b) - Le circuit de resurchauffe

La relation liant la pression du circuit de resurchauffe à l'ouverture des soupapes HP peut s'exprimer par la transmittance

$$\frac{G}{(1 + T_p)} \cdot \frac{1}{(1 + T_{R_p})} \quad (2)$$

c) - Les corps moyenne pression (MP) et basse pression (BP)

Ils fournissent une puissance motrice représentant une fraction  $(1-\alpha)$  de la puissance de la turbine, les soupapes d'admission du corps MP étant à pleine ouverture.

Compte tenu des hypothèses généralement adoptées, la relation entre la puissance fournie par les corps MP et BP et l'ouverture des soupapes HP s'écrit donc :

$$\frac{G}{1 + T_p} \cdot \frac{1 - \alpha}{1 + T_{R_p}} \quad (3)$$

## 2.2. - Les masses tournantes

L'accélération angulaire du groupe est proportionnelle à l'écart entre la puissance motrice et la puissance absorbée par l'alternateur et inversement proportionnelle au temps de lancer. Celui ci correspond au temps que la vitesse mettrait pour passer de zéro à la vitesse nominale si l'on appliquait le couple nominal à l'ensemble des masses tournantes. La relation entre la vitesse et l'écart s'exprime donc par la relation :

$$\frac{1}{T_{\sigma p}} \quad (4)$$

## 2.3. - L'alternateur et le réseau

Il est possible de distinguer deux cas selon la nature du réseau :

### - Réseau interconnecté

La représentation tient compte des puissances échangées sous la forme d'un terme proportionnel et d'un terme intégral de la vitesse, ce qui suppose que les écarts de puissance du groupe ont une influence négligeable sur la fréquence du réseau. Dans ces conditions, la relation liant la puissance électrique produite et la vitesse du groupe s'exprime sous la forme :

$$\frac{1}{p} (A+Bp) \quad (5)$$

### - Réseau isolé

La représentation tient compte de l'autoréglage en puissance du réseau supposé égal à 1. Le couple résistant est constant et la puissance absorbée est proportionnelle à la fréquence. Les masses tournantes du réseau sont supposées négligeables devant celles du groupe.

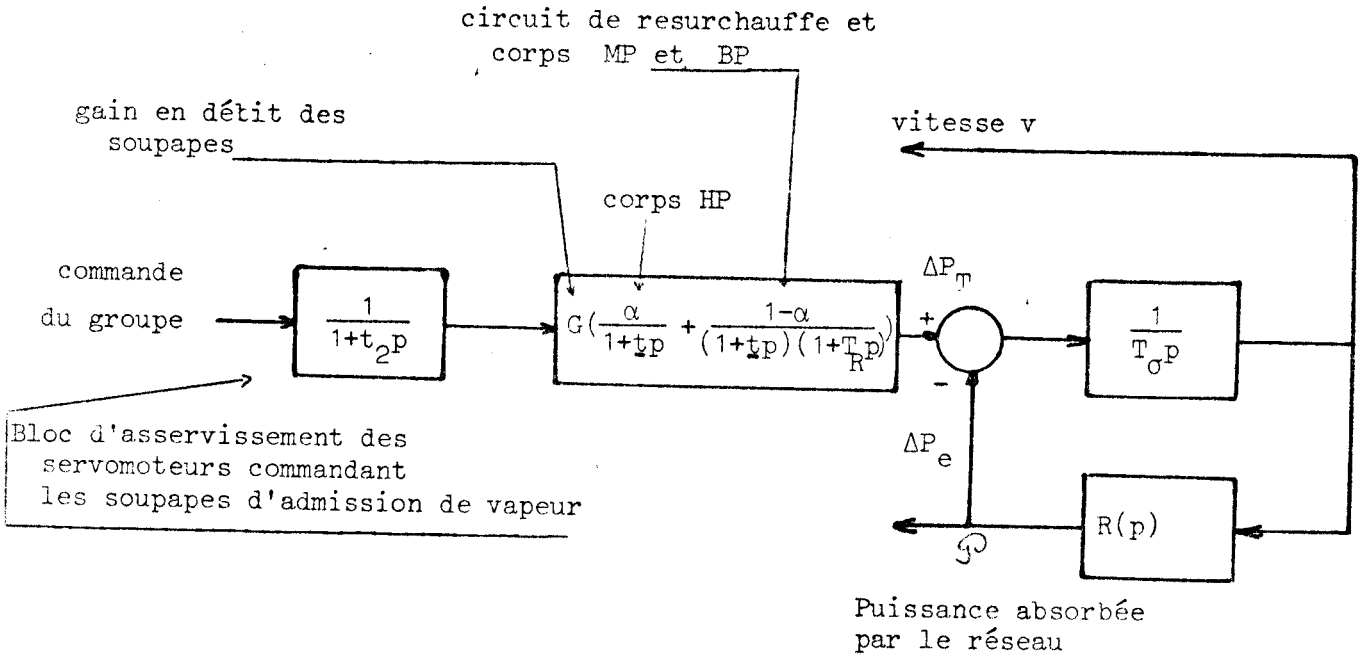


figure 1

figure 1 - schéma bloc du groupe turbo alternateur alimentant un réseau.

### III - Etude préliminaire et présentation de la régulation proposée

#### 3.1. - Présentation de la régulation existante

Il existe trois constructeurs de turbines en France: Alsthom, CEM, Jeumont Scheider (RATEAU RIVA). Chacun propose un schéma différent pour la régulation en vitesse ou puissance. Mr A. Bonnelie /1/ a montré cependant qu'il existe un schéma suffisamment général pour les représenter tous.

Afin de décrire la régulation actuellement mise en oeuvre, la régulation Alsthom sera prise en exemple.

3.1.1. - Régulation en asservissement d'ouverture

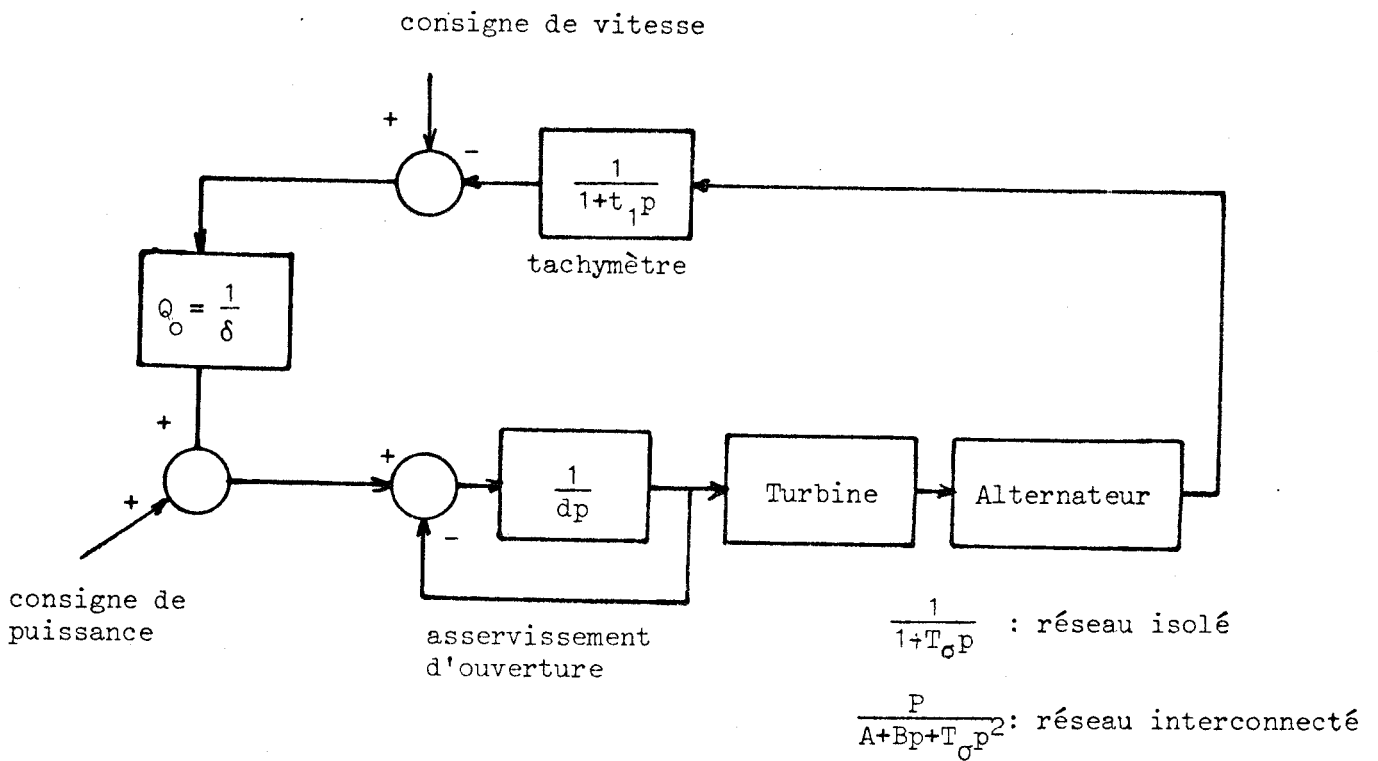


figure 2

Le régulateur de vitesse est constitué par un gain  $Q_o = 25$  pour assurer un statisme de 4%.





3.1.2. - Régulation en asservissement de puissance

consigne de vitesse

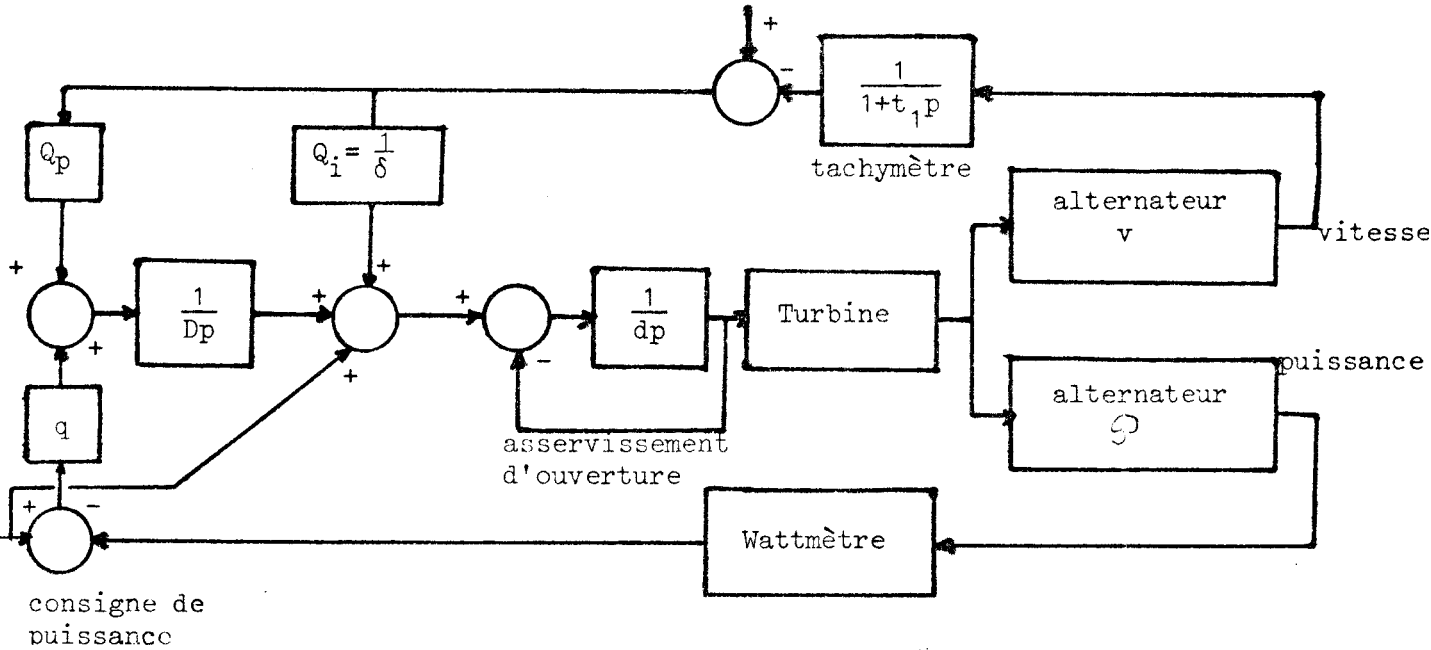


figure 3

Pour obtenir une fermeture plus rapide des soupapes sur incident une action dérivée de la vitesse (accélérotachymétrique) s'ajoute sur le sommateur à travers un seuil et n'intervient donc pas sur la stabilité du groupe.

Le schéma commun aux trois constructeurs se retrouve sous la forme :

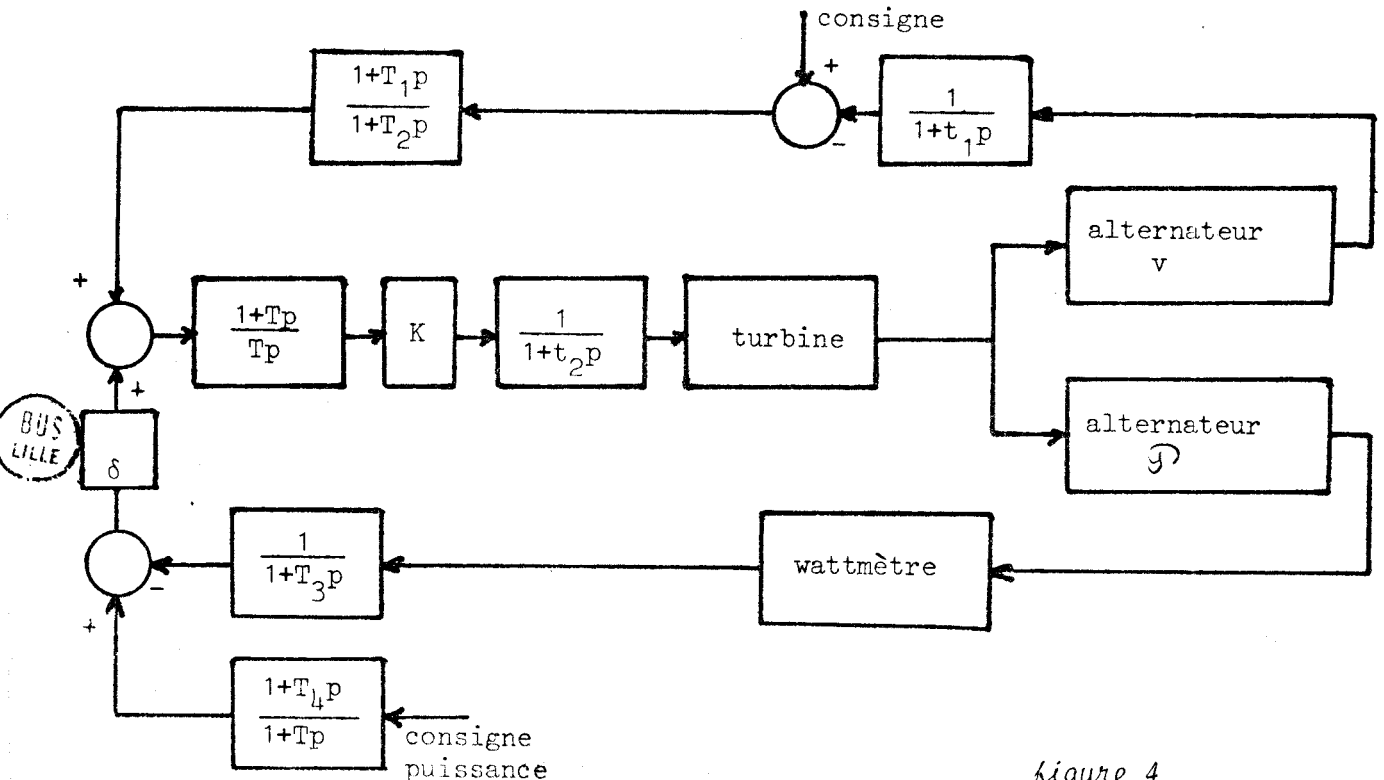


figure 4

à condition de prendre

$$T_1 = 0$$

$$T_3 = T$$

$$T_2 = 0$$

$$T_4 = \frac{D}{q}$$

$$T = D \frac{Q_o}{Q_p}$$

$$K = Q_o$$

$$t_2 = d$$

$$\delta = \frac{q}{Q_p}$$

si  $Q_o = Q_p = \frac{1}{0,04}$  et  $q = 1$  la détermination du régulateur se ramène à la détermination de D.

### 3.1.3. - Principe des études de stabilité effectuées aux études et recherches de l'EDF

Les études ont été faites sur le schéma commun aux trois constructeurs. Les coefficients suivants sont à déterminer:

$$T_1, T_2, T_3, T, K$$

Ils doivent conduire à la stabilité que le réseau soit isolé ou interconnecté. Une première étude est faite en supposant le réseau isolé, des coefficients s'en déduisent. Il convient alors d'étudier si le réglage reste acceptable en réseau interconnecté. Dans la négative, l'opération inverse est à effectuer.

### 3.2. - Présentation de la régulation proposée

Nous proposons d'effectuer ici une étude préliminaire à la synthèse d'une commande de type mixte continu-discret. A cet effet nous allons envisager une régulation totalement discrète de la turbine afin de mettre en évidence certaines caractéristiques de ce type de commande et de les comparer avec celles

des commandes continues actuellement existantes.

Dans le cas de la commande continue, les actions des retours en vitesse et en puissance sont découplées. De façon semblable, nous envisagerons pour définir une régulation de type discret une modulation différente des signaux provenant des boucles de vitesse et de puissance.

Il en résultera une commande de type multimodulée /2/ définie à partir des vecteurs de commande caractérisant les actions respectives des retours en vitesse et en puissance sur chacun des pôles intervenant dans les diverses fonctions de transfert susceptibles de définir le processus.

La méthode utilisée consistera à déterminer les réglages à adopter de façon à accroître la stabilité du processus, l'étude étant effectuée sur un majorant commun aux deux modes de fonctionnement en réseau isolé ou sur réseau interconnecté.

### 3.2.1. - Représentation adoptée pour le groupe turbo alternateur et le réseau dans un fonctionnement en asservissement de puissance

a) groupe turbo alternateur alimentant un réseau isolé.

Dans un fonctionnement sur réseau isolé, en notant  $t_1$  et  $t_3$  les constantes de temps respectives du tachymètre et du wattmètre il vient pour les boucles ouvertes de vitesse et de puissance les transmittances respectives :

$$L_v(p) = \frac{1}{(1+t_2 p)} \frac{G}{(1+t_1 p)} \left( \alpha + \frac{1-\alpha}{1+T_R p} \right) \frac{1}{(1+T_O p)} \frac{1}{(1+t_1 p)}$$

$$L_\varphi(p) = \frac{1}{(1+t_2 p)} \frac{G}{(1+t_1 p)} \left( \alpha + \frac{1-\alpha}{1+T_R p} \right) \frac{1}{(1+T_O p)} \frac{1}{(1+t_3 p)}$$
(6)

La recherche d'une commande de type discret conduit à choisir une période d'échantillonnage des informations telle que l'influence des constantes de temps  $t_1$  et  $t_3$  des appareils de mesure puisse être négligée sans erreur appréciable au niveau d'un avant projet. En conséquence, les transmittances

des chaînes de vitesse et de puissance peuvent être considérées comme identiques dans un fonctionnement sur réseau isolé.

Il vient alors, en utilisant une décomposition de cette fonction de transfert selon la méthode des modes une représentation du processus sous la forme d'une équation différentielle du 4<sup>ème</sup> ordre.

Soit :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{t_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_\sigma} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (7)$$

$$x^T = (x^1, x^2, x^3, x^4) \quad (7')$$

$$v = C x$$

$$\mathcal{P} = C x$$

$$C = [C_1, C_2, C_3, C_4]$$

avec u signal de commande fonction des écarts de vitesse et de puissance par rapport aux valeurs de consigne et fonction de la nature de la régulation utilisée.

b) Groupe turbo alternateur alimentant le réseau interconnecté.

Dans ce cas, avec les notations précédemment adoptées les fonctions de transfert en boucle ouverte des boucles de vitesse et de puissance admettent, en négligeant les constantes de temps des appareils de mesure, les expressions respectives

$$L'_v(p) = \frac{1}{(1+t_2p)} \frac{G}{(1+tp)} \left( \alpha + \frac{1-\alpha}{1+T_R p} \right) \frac{p}{(A+Bp+T_\sigma p^2)} \quad (8)$$

$$L'_\mathcal{P}(p) = \frac{1}{(1+t_2p)} \frac{G}{(1+tp)} \left( \alpha + \frac{1-\alpha}{1+T_R p} \right) \frac{A+Bp}{(A+Bp+T_\sigma p^2)}$$

En notant  $\lambda_5$  et  $\lambda_6$  les racines (complexes) de

$$A+B\lambda + T_{\sigma} \lambda^2 = 0$$

Il vient alors le modèle mathématique :

$$\begin{matrix} \circ \\ x' \end{matrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{t_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u' \quad (9)$$

avec

$$x'^T = [x'^1, x'^2, x'^3, x'^4, x'^5, x'^6] \quad (9')$$

$$\begin{aligned} v &= C' x' \\ \mathcal{P} &= C'' x' \end{aligned}$$

les  $C'_i$  et  $C''_i$  représentant les résidus relatifs aux divers pôles des fonctions de transfert  $L'_v(p)$  et  $L'_{\mathcal{P}}(p)$  respectivement.

Il vient

$$C' = [c'_1, c'_2, c'_3, c'_5, c'_5]$$

$$C'' = [c''_1, c''_2, c''_3, c''_5, c''_6]$$

3.2.2. - Définition du mode de régulation et choix de la représentation discrète.

3.2.2.a) Principe de la régulation

Soit T la période d'échantillonnage adoptée. Le choix de cette période s'avère particulièrement important car elle définit le temps minimum nécessaire de réaction à un incident. Afin de simplifier la présentation de la méthode de régulation proposée nous n'étudierons pas le critère de choix de la période d'échantillonnage ; toutefois dans une étude plus complète ce problème devrait être envisagé.

La période d'échantillonnage T étant donc fixée, l'évolution du processus en régulateur est régie par une relation récurrente de la forme (10) dans un fonctionnement sur réseau isolé, et de la forme (11) dans un fonctionnement sur réseau interconnecté.

$$x_{n+1} = A_{is} x_n + B_{is} C x_n + B'_{is} C x_n \quad (10)$$

$$x'_{n+1} = A_{int} x'_n + B_{int} C' x'_n + B'_{int} C'' x'_n \quad (11)$$

avec

$$D_1 = e^{-\frac{T}{t_2}}, D_2 = e^{-\frac{T}{t}}, D_3 = e^{-\frac{T}{T_R}}, D_4 = e^{-\frac{T}{T_\sigma}}, D_5 = e^{\lambda_5 T}, D_6 = e^{\lambda_6 T}$$

$$\begin{aligned} A_{is} &= \text{Diag}(D_1, D_2, D_3, D_4) \\ B_{is} &= [b_1, b_2, b_3, b_4]^T \\ B'_{is} &= [b'_1, b'_2, b'_3, b'_4]^T \\ A_{int} &= \text{Diag}(D_1, D_2, D_3, D_5, D_6) \\ B_{int} &= [b_1, b_2, b_3, b_5, b_6]^T \\ B'_{int} &= [b'_1, b'_2, b'_3, b'_5, b'_6]^T \end{aligned} \quad (12)$$

Dans cette notation les vecteurs lignes C, C', C'' ont été définis en (7') et (9'). Les vecteurs B<sub>is</sub> et B<sub>int</sub> d'une part et B'<sub>is</sub> et B'<sub>int</sub> d'autre part caractérisent l'effet au bout d'une période d'échantillonnage de la loi de commande u(t). (Chapitre I)

Le signal de commande  $u$  défini dans la relation (7) est constitué dans l'intervalle  $nT, (n+1)T$  de la somme de deux signaux  $u_1$  et  $u_2$ . Chacun d'entre eux est constitué d'une impulsion linéairement modulée en amplitude respectivement par  $v_n$  et  $\mathcal{P}_n$  valeurs de la vitesse et de la puissance mesurées à l'instant  $nT$ .

Les vecteurs  $B_{is}$  et  $B'_{is}$  s'identifient donc à  $x_{n+1}$  lorsque  $x_n=0$  respectivement lorsque l'écart de vitesse ou l'écart de puissance est égal à l'unité l'autre grandeur étant nulle /2/. Les vecteurs  $B_{int}$  et  $B'_{int}$  sont définis de la même façon.

Les vecteurs de commande étant choisis, il est toujours possible, lorsque l'hypothèse de commandabilité est vérifiée, de déterminer un élément de commande que nous noterons RC, de nature analogique ou numérique, élaborant la loi de commande correspondante /3/. Il existe théoriquement une infinité de solutions, en pratique le choix de l'élément RC est guidé par des contraintes d'ordre technologique ainsi que par des considérations d'optimalité ou de dynamique du comportement du processus.

Il vient le schéma de régulation :

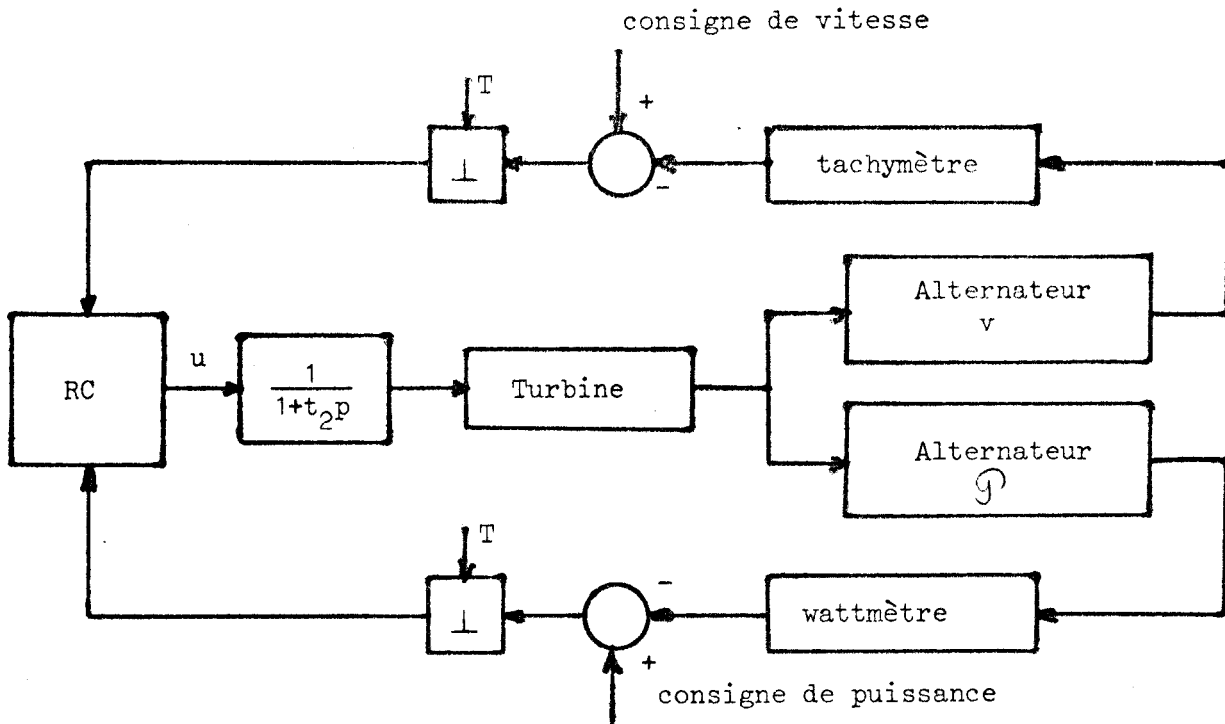


figure 5

Dans le problème que nous étudions nous pouvons considérer que le système de commande RC sera déduit des valeurs déterminées pour les divers vecteurs de commande qui viennent d'être définis.

3.2.2. b) Détermination d'une représentation discrète unique du fonctionnement du groupe

Notons  $e_n$  une variable prenant la valeur 1 si le groupe fonctionne sur réseau isolé et 0 dans le cas contraire.

Notons  $x_n^{*1}, x_n^{*2}, x_n^{*3}, x_n^{*4}, x_n^{*5}, x_n^{*6}$  les états associés aux éléments simples des décompositions des fonctions de transferts du processus relatifs aux pôles respectifs  $-\frac{1}{t_2}, -\frac{1}{t}, -\frac{1}{T_R}, -\frac{1}{T_G}, \lambda_5, \lambda_6$ .

Soit  $x_n^*$  le vecteur

$$x_n^* = \left[ x_n^{*1}, x_n^{*2}, x_n^{*3}, e_n x_n^{*4}, (1-e_n) x_n^{*5}, (1-e_n) x_n^{*6} \right]^T \quad (13)$$

Il vient la représentation unique :

$$x_{n+1}^* = A^*(e_n) x_n^* \quad (14)$$

avec pour la matrice  $A^*(e_n)$  la définition suivante :



$$A^*(e_n) =$$



$D_1 + e_n C_1 (b_1 + b_1')$	$e_n C_2 (b_1 + b_1')$	$e_n C_3 (b_1 + b_1')$	$e_n C_4 (b_1 + b_1')$	$(1 - e_n) (C_6^I b_1 + C_6^{II} b_1')$
$+ (1 - e_n) (C_1^I b_1 + C_1^{II} b_1')$	$+ (1 - e_n) (C_2^I b_1 + C_2^{II} b_1')$	$+ (1 - e_n) (C_3^I b_1 + C_3^{II} b_1')$		
$e_n C_1 (b_2 + b_2')$	$D_2 + e_n C_2 (b_2 + b_2')$	$e_n C_3 (b_2 + b_2')$	$e_n C_4 (b_2 + b_2')$	$(1 - e_n) (C_6^I b_2 + C_6^{II} b_2')$
$+ (1 - e_n) (C_1^I b_2 + C_1^{II} b_2')$	$+ (1 - e_n) (C_2^I b_2 + C_2^{II} b_2')$	$+ (1 - e_n) (C_3^I b_2 + C_3^{II} b_2')$		
$e_n C_1 (b_3 + b_3') +$	$e_n C_2 (b_3 + b_3') +$	$D_3 + e_n C_3 (b_3 + b_3')$	$e_n C_4 (b_3 + b_3')$	$(1 - e_n) (C_6^I b_3 + C_6^{II} b_3')$
$(1 - e_n) (C_1^I b_3 + C_1^{II} b_3')$	$(1 - e_n) (C_2^I b_3 + C_2^{II} b_3')$	$+ (1 - e_n) (C_3^I b_3 + C_3^{II} b_3')$		
$e_n C_1 (b_4 + b_4')$	$e_n C_2 (b_4 + b_4')$	$e_n C_3 (b_4 + b_4')$	$D_4 e_n + e_n C_4 (b_4 + b_4')$	0
				0
$(1 - e_n) (C_1^I b_5 + C_1^{II} b_5')$	$(1 - e_n) (C_2^I b_5 + C_2^{II} b_5')$	$(1 - e_n) (C_3^I b_5 + C_3^{II} b_5')$	0	$(1 - e_n) (D_5 + C_5^I b_5 + C_5^{II} b_5')$
$(1 - e_n) (C_1^I b_6 + C_1^{II} b_6')$	$(1 - e_n) (C_2^I b_6 + C_2^{II} b_6')$	$(1 - e_n) (C_3^I b_6 + C_3^{II} b_6')$	0	$(1 - e_n) (D_6 + C_6^I b_6 + C_6^{II} b_6')$

#### IV - Synthèse de l'asservissement

##### 4.1. - Détermination des paramètres de réglage

Nous avons vu que la détermination de la régulation s'effectue à partir des composantes  $b_i$  et  $b_i^!$  des divers vecteurs de commande.

A cet effet nous allons définir un majorant du système (15) de dimension plus faible.

Le processus que nous étudions correspond aux valeurs numériques suivantes :

$$t_2 = 0,125 \text{ s} ; \underline{t} = 0,1 \text{ s} ; T_R = 12,5 \text{ s} ; T_G = 8 \text{ s} ; G = 1,7$$

$$\alpha = 0,4 ; A = 200 ; B = 16 ; T = 1 \text{ s}$$

Il vient avec les notations définies en (7') et (9')

$$\begin{array}{ll}
 C_1 = -0,425 \ 204 & C_2 = +0,340 \ 102 \\
 C_3 = +0,230 \ 802 & C_4 = -0,145 \ 737 \\
 C'_1 = -0,366 \ 955 & C''_1 = 3,302 \ 614 \\
 C'_2 = +0,319 \ 892 & C''_2 = -1,279 \ 569 \\
 C'_3 = -0,914 \ 055 \ 10^{-5} & C'_3 = 0,227 \ 051 \\
 \\ 
 C'_5 = \bar{C}'_6 = 0,023 \ 547 - & 0,031 \ 675 \ j \\
 C''_5 = \bar{C}''_6 = -1,053 \ 067 - & 1,176 \ 346 \ j \\
 D_1 = 3,3546 \ 10^{-4} & D_2 = 4,5399 \ 10^{-5} \\
 D_3 = 0,92311 & D_4 = 0,882496 \\
 D_5 = \bar{D}_6 = 0,068245 - & 0,361 \ 493 \ j
 \end{array} \quad (17)$$

Le choix des variables d'état permet alors de distinguer trois sous ensembles pour lesquels les pôles associés sont de même ordre et de même nature soit :

$$x_n^{*1} \text{ et } x_n^{*2}, \quad x_n^{*3} \text{ et } x_n^{*4}, \quad x_n^{*5} \text{ et } x_n^{*6}$$

L'influence de chacun de ces ensembles de variables sur les autres peut être particularisée simplement en effectuant un partitionnement en blocs 2-2 de la matrice  $A^*(e_n)$  selon le mode

$$A^*(e_n) = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{13}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* & A_{23}^* \\ A_{31}^* & A_{32}^* & A_{33}^* \end{bmatrix} \quad (18)$$

Nous allons déterminer les réglages à effectuer sur le système de façon à accroître sa stabilité quelque soit le mode de fonctionnement. A cet effet nous allons définir un majorant constant de la matrice  $M^*(e_n)$  déduit de la norme vectorielle  $p(x_n^*)$  qui correspond au partitionnement de la matrice  $A^*(e_n)$  défini en (18) :

$$p(x_n^*) = (|x_n^{*1}| + |x_n^{*2}|, |x_n^{*3}| + |x_n^{*4}|, |x_n^{*5}| + |x_n^{*6}|)^T \quad (19)$$

La matrice majorante étant à coefficients non négatifs son rayon spectral est une fonction croissante de l'ensemble de ses éléments. En conséquence nous pourrions accroître la stabilité du système de comparaison en choisissant un réglage qui minimise les éléments de la matrice majorante.

A cet effet nous allons chercher un réglage, compatible avec les contraintes physiques imposées au processus qui minimise le rayon spectral de  $A^*(e_n)$ .

Un changement de représentation défini sur chaque sous espace correspondant au partitionnement défini en (18) nous conduira alors au résultat recherché pour la majorante.

Pour  $e_n = 1$  la matrice  $A^*(1)$  admet deux valeurs propres nulles, si nous notons  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  les fonctions symétriques fondamentales des quatre autres valeurs propres il vient les relations :

$$C_i(b_i + b_i!) = \frac{D_i^4 - \sigma_1 D_i^3 + \sigma_2 D_i^2 - \sigma_3 D_i + \sigma_4}{\prod_{j \neq i} (D_j - D_i)} \quad \forall i=1,2,3,4 \quad (20)$$

Si l'on choisit de minimiser le temps de réponse dans un fonctionnement sur réseau isolé, il convient d'annuler le rayon spectral de  $A^*(1)$  soit

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0 \quad (21)$$

Il en résulte pour le groupe étudié les conditions

$$\begin{aligned} C_1(b_1+b'_1) &= -5,36337 \cdot 10^{-11} \Rightarrow b_1+b'_1 = 1,26136 \cdot 10^{-10} \\ C_2(b_2+b'_2) &= +5,21496 \cdot 10^{-18} \Rightarrow b_2+b'_2 = 1,53334 \cdot 10^{-17} \\ C_3(b_3+b'_3) &= -20,98737 \Rightarrow b_3+b'_3 = -90,9321 \\ C_4(b_4+b'_4) &= +19,18130 \Rightarrow b_4+b'_4 = -131,6159 \end{aligned} \quad (22)$$

La nécessité d'assurer la prépondérance des coefficients  $b_i$  sur les  $b'_i$  c'est-à-dire de la boucle d'asservissement de vitesse sur celle de puissance ne nous permet pas d'imposer de la même façon les valeurs propres de  $A^*(0)$ .

Le choix des divers vecteurs de commande s'effectuera en vue de minimiser les coefficients de la majorante de la matrice  $A^*(e_n)$ .

Les éléments des blocs de la première ligne ( $A^*_{1i}$ ) de la matrice  $A^*$  sont à valeurs numériques faibles pour  $e_n=1$ .

Afin d'une part de conserver cette propriété et d'autre part d'assurer une importance prépondérante de la boucle d'asservissement de vitesse sur celle d'asservissement de puissance nous choisirons les composantes  $b'_1$  et  $b'_2$  faibles devant  $b_1$  et  $b_2$  soit

$$b'_1 = 0,04 b_1 \quad \text{et} \quad b'_2 = 0,04 b_2 \quad (23)$$

Ce qui équivaudrait au choix d'un statisme de 4% dans une régulation de type continu.

Le bloc  $A_{22}$  admet des valeurs propres très faibles pour  $e_n=1$ , afin de conserver cette propriété pour  $e_n=0$  nous choisirons  $b_3$  et  $b'_3$  de façon à vérifier

$$D_3 + C'_3 b_3 + C''_3 b'_3 = 0$$

Il vient alors compte tenu des relations 22 et en imposant  $b'_4/b_4$  :

$$\begin{aligned}
 b'_4 &= 0,04b_4 \\
 b_1 &= 1,21115 \cdot 10^{-10} & b'_1 &= 4,84615 \cdot 10^{-12} \\
 b_2 &= 1,47436 \cdot 10^{-17} & b'_2 &= 5,89746 \cdot 10^{-19} \\
 b_3 &= -79,78712 & b'_3 &= -11,14497 \\
 b_4 &= -126,55375 & b'_4 &= -5,06215
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Les quatre premiers paramètres de commande peuvent paraître faibles, ceci est en fait dû au choix particulier de la représentation qui conduit à un mauvais conditionnement de la matrice  $A^*$ . Un simple changement de base de type diagonal permet de remédier à cet inconvénient.

Le choix des paramètres de commande non encore déterminés nous permet d'annuler à la fois le bloc  $A_{32}^*$  et les valeurs propres du bloc  $A_{33}^*$

il vient

$$\begin{aligned}
 b_5 &= -4,573791 + 1,167007j & b'_5 &= (-18,13 + 4,69809j) \cdot 10^{-4} \\
 b_6 &= \bar{b}_5 & b'_6 &= \bar{b}'_5
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Avec ces réglages l'équation de fonctionnement du processus prend la forme :

$$x_{n+1}^* = A(e_n) x_n^*$$

la matrice  $A(e_n)$  étant définie par le tableau suivant :

$3,3546 \cdot 10^{-4} e_n$	$4,2899 \cdot 10^{-11} e_n$	$2,9112 \cdot 10^{-11} e_n$	$-1,8382 \cdot 10^{-11} e_n$	$-2,2513 \cdot 10^{-12} (1-e_n)$	$-2,2513 \cdot 10^{-12} (1-e_n)$
$+3,3546 \cdot 10^{-4} (1-e_n)$	$+3,119 \cdot 10^{-4} (1-e_n)$	$+0(10^{-1}) (1-e_n)$		$-9,5371 \cdot 10^{-12} (1-e_n)$	$+9,5371 \cdot 10^{-12} (1-e_n)$
$-6,5198 \cdot 10^{-18} e_n$	$4,5399 \cdot 10^{-5} e_n$	$3,4029 \cdot 10^{-18} e_n$	$-2,2346 \cdot 10^{-18} e_n$	$-2,7404 \cdot 10^{-19} (1-e_n)$	$-2,7404 \cdot 10^{-19} (1-e_n)$
$-3,456 \cdot 10^{-18} (1-e_n)$	$+4,5399 \cdot 10^{-5} (1-e_n)$	$0(10^{-1}) (1-e_n)$		$-1,1607 \cdot 10^{-18} (1-e_n)$	$+1,1607 \cdot 10^{-18} (1-e_n)$
$38,664 e_n - 7,5292 (1-e_n)$	$-30,926 e_n - 11,262 (1-e_n)$	$-20,064 + 0(1-e_n)$	$13,252 e_n$	$9,8576 (1-e_n)$	$9,8576 (1-e_n)$
$55,963 e_n$	$-44,762 e_n$	$-30,377 e_n$	$+20,063 e_n$	$+15,637 j (1-e_n)$	$-15,637 j (1-e_n)$
			$0$	$0$	$0$
$1,6723 (1-e_n)$	$-1,4608 (1-e_n)$	$0(1-e_n)$	$0$	$-0,1935 j (1-e_n)$	$-0,1478 (1-e_n)$
$-0,42668 j (1-e_n)$	$+0,3748 j (1-e_n)$				$-0,1342 j (1-e_n)$
$1,6723 (1-e_n)$	$-1,4608 (1-e_n)$	$0(1-e_n)$	$0$	$-0,1478 (1-e_n)$	$+0,1935 j (1-e_n)$
$+0,42668 j (1-e_n)$	$-0,3748 j (1-e_n)$			$+0,1242 j (1-e_n)$	



4.2. - Etude de la stabilité du réglage.

Afin de vérifier la stabilité du processus nous allons effectuer un changement de base bloc diagonal permettant d'une part de rendre réels les éléments de  $A^*$  et d'autre part d'obtenir un meilleur conditionnement de cette matrice.

Soit  $P$  le changement de base :

$$P = \text{diag} (P_1, P_2, P_3)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 151,4 \end{bmatrix}, P_3 = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -0,4670 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Les matrices  $P_2$  et  $P_3$  sont définies en conservant l'un des vecteurs de base du sous espace concerné et en prenant comme second vecteur de base le vecteur relatif à la valeur propre la plus faible en module du bloc correspondant.

Il en résulte

$$P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0,6605 \\ 0 & 0,006605 \end{bmatrix}, P_3^{-1} = 50 \begin{bmatrix} 1 & +0,4670 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \quad (28)$$

4.2.1. - Hypothèse linéaire.

Dans le cas de petites perturbations il vient le modèle :

$$y_{n+1} = \hat{A}(e_n) y_n \quad (29)$$

$$\hat{A}(e_n) =$$

$$\begin{bmatrix} 3,3546,10^{-4} e_n & 4,289,10^{-11} e_n & 2,91,10^{-11} e_n & 1,433,10^{-10} e_n & -4,50,10^{-14} (1-e_n) & -1,69,10^{-13} (1-e_n) \\ 3,3546,10^{-4} (1-e_n) & 3,119,10^{-11} (1-e_n) & 0(10^{-11})(1-e_n) & 0 & 0 & 0 \\ -6,519,10^{-18} e_n & 4,5399,10^{-5} e_n & 3,4029,10^{-18} e_n & 1,97,10^{-18} e_n & 5,48,10^{-21} (1-e_n) & -2,57,10^{-20} (1-e_n) \\ -3,456,10^{-18} (1-e_n) & 4,5399,10^{-5} (1-e_n) & 0(10^{-18})(1-e_n) & 0 & 0 & 0 \\ 1,7007 e_n^{-75292} (1-e_n) & -1,3603 e_n^{-11,2625} (1-e_n) & -4,99,10^{-5} e_n & -4,38,10^{-4} e_n & 0,19715 (1-e_n) & 0,22068 (1-e_n) \\ 0,3696 e_n & -2956 e_n & -0,2006 e_n & -4,610^{-4} e_n & 0 & 0 \\ 187,152 (1-e_n) & -163,58 (1-e_n) & 0(1-e_n) & 0 & 0 & 0 \\ 42,66 (1-e_n) & -37,48 (1-e_n) & 0(1-e_n) & 0 & 0,3177 (1-e_n) & 0 \end{bmatrix}$$





Dans ces conditions, en choisissant pour la matrice  $\hat{A}(e_n)$  un partitionnement tel que celui défini en (18) et en prenant pour chaque sous espace la norme obtenue en faisant la somme des modules des composantes il vient quelque soit  $e_n$  la majorante à coefficients constants :

$$M_o = \begin{bmatrix} 3,3610^{-4} & 0(10^{-9}) & 0(10^{-12}) \\ 11,6 & 0,201 & 0,221 \\ 201 & 0 & 0,3177 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$p(y_n) = (|y_n^1| + |y_n^2|, |y_n^3| + |y_n^4|, |y_n^5| + |y_n^6|)^T$$

L'application du théorème 2 du chapitre III nous permet alors de conclure à la stabilité du processus quelque soit le mode de fonctionnement si le rayon spectral de la matrice  $M_o$  est inférieur à l'unité. Il est équivalent de vérifier les inégalités :

$$1-3,3610^{-4} > 0, \quad \begin{vmatrix} 1-3,3610^{-4} & -0(10^{-9}) \\ -11,6 & 1-0,201 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 1-3,3610^{-4} & -0(10^{-9}) & -0(10^{-12}) \\ -11,6 & 1-0,201 & -0,221 \\ -201 & 0 & 1-0,3171 \end{vmatrix} > 0 \quad (32)$$

Le rayon spectral de la matrice majorante reste en fait inférieur à 0,32 , cette propriété résulte de la méthode utilisée pour la synthèse consistant à minimiser les éléments de la majorante.

De plus, l'écart relatif par rapport à la puissance de consigne est inférieur à  $10^{-3}$  au bout de 7s. Cette durée s'avère compatible avec le temps de réponse imposé par EDF pour la boucle d'asservissement et qui doit être compris entre 5s et 20s.

4.2.2. - Hypothèse non linéaire.

Nous allons maintenant étudier l'effet de non linéarités sur la stabilité du processus pour le réglage proposé.

Le gain du groupe turbo alternateur n'est plus supposé constant et égal à  $G_0 = 1,7$  mais susceptible de varier en fonction du niveau du signal de commande. Dans ce cas l'étude précédente s'avère insuffisante.

Notons  $\beta$  un paramètre tel que les variations admissibles du gain  $G = G_0(1+\beta)$  soient définies par la double inégalité:

$$G_0(1-\beta_M) \leq G \leq G_0(1+\beta_M) \quad (33)$$

Nous allons rechercher une valeur de  $\beta_M = \text{Max } |\beta|$  telle que le processus soit stable pour toute non linéarité vérifiant la contrainte (33).

Dans le cas d'un fonctionnement sur réseau isolé ( $e_n=1$ ), l'évolution du processus peut être décrite simplement en substituant au gain  $G$  la valeur  $G(1+\beta)$  dans la représentation (30).

Il en résulte l'équation de fonctionnement :

$$y_{is\ n+1} = \hat{A}_{is}^* y_{is\ n} \quad (34)$$

$$y_{is}^T = (y_{is}^1, y_{is}^2, y_{is}^3, y_{is}^4)$$

$$\hat{A}_{is} = \begin{bmatrix} 3,3546 \cdot 10^{-4} - 5,3633 \cdot 10^{-11}(\beta+1); & 4,289 \cdot 10^{-11}(1+\beta); & 2,91 \cdot 10^{-11}(1+\beta) & ; & 1,433 \cdot 10^{-10}(1+\beta) \\ -6,519 \cdot 10^{-18}(1+\beta) & ; & 4,5399 \cdot 10^{-5} & & 3,4029 \cdot 10^{-18}(1+\beta); & 1,97 \cdot 10^{-18}(1+\beta) \\ & & +5,249 \cdot 10^{-18}(\beta+1); & & & \\ 1,7007(1+\beta) & ; & -1,3603(1+\beta) & ; & -4,9910^{-5} - 0,9237\beta; & -4,3810^{-4} - 40,84\beta \\ 0,3696(1+\beta) & ; & -0,2956(1+\beta) & ; & -0,2006(1+\beta) & ; & -4,610^{-4} - 0,87943\beta \end{bmatrix}$$

Le choix de la norme vectorielle p

$$p(y_{is}) = \begin{vmatrix} |y_{is}^1| + |y_{is}^2| \\ |y_{is}^3| \\ |y_{is}^4| \end{vmatrix} \quad (35)$$

permet de définir la majorante de la matrice  $\hat{A}_{is}$

$$M[\hat{A}_{is}] = \begin{bmatrix} 3,36 \cdot 10^{-4} + 4,29 \cdot 10^{-11} \beta_M & 2,92 \cdot 10^{-11} (1 + \beta_M) & 1,44 \cdot 10^{-10} (1 + \beta_M) \\ 1,701 (1 + \beta_M) & 5 \cdot 10^{-5} + 0,9237 \beta_M & 4,38 \cdot 10^{-4} + 4,084 \beta_M \\ 0,37 (1 + \beta_M) & 0,2006 (1 + \beta_M) & 4,6 \cdot 10^{-4} + 0,88 \beta_M \end{bmatrix} \quad (36)$$

avec  $\beta_M$  valeur maximum admissible par le coefficient  $|\beta|$  caractérisant la non linéarité du groupe.

La matrice  $M(\hat{A}_{is})$  étant à coefficients constants nous pouvons appliquer le théorème 2 du chapitre III.

Il apparait alors que la contrainte  $\beta_M \leq 0,35$  permet de conclure à la stabilité du processus pour le réglage proposé. Le gain  $G$  doit donc vérifier la double inégalité :

$$1,105 < G < 2,295$$

Cette condition est une condition suffisante de stabilité, il est a noter toutefois que le temps de réponse du processus majorant est une fonction croissante de l'écart du gain  $G$  avec sa valeur nominale  $G = 1,7$ .

Une étude semblable montre que la condition de stabilité du groupe fonctionnant sur réseau isolé implique pour la régulation proposée la stabilité dans un fonctionnement sur réseau interconnecté. La régulation étudiée présente donc une certaine tolérance sur la définition du modèle et en particulier sur les non-linéarités qu'il est susceptible de comporter.

## Conclusion

L'étude proposée montre comment il est possible d'envisager la synthèse d'une régulation discrète pour un groupe turbo alternateur à l'aide des techniques de majoration.

Un certain nombre de caractéristiques semblables à celles qui apparaissent pour les régulations actuellement utilisées peuvent être mises en évidence. En particulier la compensation proposée montre le découplage des actions sur la régulation de vitesse des boucles d'asservissement de vitesse et de puissance. D'autre part, la notion de statisme apparaît également sous la forme du rapport des gains intervenant dans les deux boucles ainsi que le montre l'exemple étudié.

La réalisation d'une régulation telle que celle proposée n'est pas envisageable directement dans l'état actuel de la technique en raison de la nature continue des sécurités relatives à l'asservissement de vitesse.

Les actions des deux boucles, de vitesse et de puissance étant découplées et les rapports des gains étant de même ordre quelle que soit la nature continue ou discrète de la régulation, il est possible d'envisager une régulation de type à boucles superposées /1/ de caractère mixte continu-discret. Une telle régulation, continue en ce qui concerne la boucle d'asservissement de vitesse présenterait les garanties de sécurité qui existent actuellement, sans avoir à intervenir au niveau de la conception de la turbine ce qui est difficilement envisageable. Par contre une action discrète de type multimodulée agissant au niveau de la boucle d'asservissement de puissance et se superposant à la précédente pourrait permettre de diminuer sensiblement le temps de réponse du groupe en ce qui concerne les changements de régime tout en augmentant la stabilité du point de vue de la régulation de vitesse et de la sensibilité aux non linéarités.

Une telle méthode de régulation, de caractère hybride, permettrait de concilier les avantages des régulations actuellement existantes et ceux des compensations de type discret.

BIBLIOGRAPHIE CHAPITRE V

- /1/ A. BONNELIE  
*"Choix des valeurs des paramètres des régulateurs de vitesse des groupes turbo-alternateurs à une resurchauffe".*  
EDF - Département Automatique des moyens de production  
H J 022/104 - Avril 1972
- /2/ F. LAURENT  
*"Sur la commande d'un filtre linéaire par des impulsions modulées".*  
CRAS - Paris t. 270 - janvier 1970 - Série A - pp 288-289
- /3/ BOUDAREL DELMAS GUICHET  
*"Commande optimale des processus".*  
Dunod - Paris - 1968

## Conclusion générale

L'utilisation de systèmes majorants d'un processus discret permet d'envisager de façon nouvelle l'étude de la stabilité des grands systèmes, en particulier dans le cas d'interconnexions. Il est notamment possible de définir des systèmes de comparaison qui ne sont pas nécessairement de dimension égale au nombre de sous systèmes mis en oeuvre. La détermination d'un majorant, indépendant de l'évolution des interactions entre ceux-ci, permet d'aborder simplement les problèmes de stabilité connective. De plus les imprécisions d'identification, lorsqu'il est possible d'en évaluer les limites, ne constituent pas un obstacle à la détermination d'un modèle de comparaison.

Une contribution essentielle des travaux présentés réside à notre sens dans la définition de systèmes de comparaison non linéaires pour lesquels une contrainte sur le seul rayon spectral permet de conclure à la stabilité. Il en résulte un élargissement de la classe des systèmes discrets de grande dimension susceptibles d'être étudiés.

Un autre apport important concerne la présentation d'une méthode nouvelle de construction de fonctions de Lyapunov de type scalaire qui constituent le fondement de critères de stabilité d'application simple.

L'approche de la stabilité réalisée avec les outils présentés permet leur utilisation en vue de la synthèse de régulations de type discret. C'est ainsi que nous avons proposé un avant projet d'une commande discrète d'un groupe turbo-alternateur.

Deux autres applications importantes des systèmes majorants peuvent être envisagées : d'une part la commande des processus par ordinateur en temps réel avec les problèmes de modélisation correspondants, et d'autre part certaines études de traitement numérique de données relatives aux processus continus ou discrets. C'est dans ce sens que nous envisageons maintenant d'orienter nos travaux.

ANNEXE I

Plus petite des majorantes d'une matrice A  
relative à une norme p.

Ia) Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A de dimension finie admette une plus petite majorante relative à la norme p est que celle-ci soit régulière.

- La condition est suffisante.

Soit x un vecteur défini sur un espace  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_k$  un recouvrement de  $\mathcal{E}$ .

Notons M(A) la matrice d'éléments

$$m_{ij}(A) = \text{Max}_{x \in \mathcal{E}_j} \frac{p_i(Ax)}{p_j(x)}$$

Si p est régulière M(A) est la plus petite des majorantes relative à p.

En effet, il vient  $\forall x$  :

$$p_i(Ax) \leq \sum_j p_j(x) \text{Max}_{x \in \mathcal{E}_j} \frac{p_i(Ax)}{p_j(x)}$$

La régularité de p implique l'indépendance des sous espaces  $\mathcal{E}_i$  et  $\mathcal{E}_j$   $\forall i \neq j$ . Il en résulte donc que M(A) est la plus petite des majorantes relatives à p.

- La condition est nécessaire

Supposons que  $p$  n'étant pas régulière induise une plus petite des majorantes  $M_A$  pour toute matrice  $A$ .

Il existe au moins un couple d'indices  $i$  et  $j$  tel que l'on ait

$$\mathcal{H}_i \wedge \mathcal{H}_j = \mathcal{H}_{ij} \neq \emptyset$$

Prenons un vecteur particulier  $x_0$  de  $\mathcal{H}_{ij}$  n'ayant pas de composante dans les autres sous espaces.

Il vient par définition de  $M(A)$

$$p_i(Ax) \leq m_{ii} p_i(x_0) + m_{ij} p_j(x_0)$$

Nous constatons qu'il existe une infinité de couples  $m_{ii}, m_{ij}$  vérifiant la contrainte précédente, en particulier il est possible de choisir l'un de ces éléments égal à zéro l'autre étant alors fixé.

Cette propriété étant contraire à l'hypothèse de l'existence d'une plus petite des majorantes la norme  $p$  ne peut donc être que régulière.

Ib) Si la norme est régulière, la plus petite des majorantes  $M(A)$  qui lui correspond est une norme sous multiplicative de la matrice  $A$ .

La propriété de norme est évidente, montrons la sous multiplicité.

Désignons par  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de même ordre et  $x$  un vecteur de dimension correspondante.

Il vient par définition de la majorante :

$$p(ABx) \leq M(A) p(Bx) \leq M(A) M(B) p(x), \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

d'où  $M(AB) \leq M(A) M(B)$

puisque par définition  $M(AB)$  est la plus petite des majorantes de  $AB$ .



ANNEXE II

Recherche de M-minorantes relatives à une norme  
vectorielle régulière

IIa) Soit un vecteur défini sur l'espace  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_k$   
et  $x_i$  la projection de  $x$  dans l'espace  $\mathcal{E}_i$ .

Représentons par  $Z$  l'ensemble des matrices réelles  $k \times k$   
dont les éléments diagonaux sont positifs et les éléments hors diagonaux  
négatifs ou nuls. Notons de plus  $Z_m$  l'ensemble des minorantes de  $A$  appar-  
tenant à  $Z$ .

Une condition nécessaire évidente pour que  $A$  admette une M-  
minorante est que  $Z_m$  soit non vide.

Proposition :

Pour que  $Z_m$  soit non vide il faut et il suffit que tous les  
blocs diagonaux  $A_{ii}$  soient réguliers.

- La condition est nécessaire :

Soit  $N = (n_{ij})$  appartenant à  $Z_m$ , il vient

$$N.p(x) \leq p(Ax) \quad \forall x \in \mathcal{E}$$

pour tout  $x_i$  non nul appartenant à  $\mathcal{E}_i$  il est possible d'écrire

$$n_{ii} p_i(x_i) \leq p_i(A_{ii} x_i)$$

d'où

$$n_{ii} \leq \inf_{x_i \in \mathcal{U}_i} \left\{ \frac{p_i(A_{ii}x_i)}{p_i(x_i)} \right\} = s_{ii}(A_{ii})$$

$n_{ii}$  est positif puisque  $NEZ_m$ , il en résulte que  $s_{ii}(A_{ii})$  est lui même positif d'où  $A_{ii}$  non singulier

- la condition est suffisante :

Si tous les  $A_{ii}$  sont réguliers, la matrice  $m(\Delta)$  minorante de la matrice bloc-diagonale  $\Delta$  extraite de  $A$  est régulière. La minorante  $\hat{N}(A)$  de diagonale  $m(\Delta)$  positive est une  $Z$  minorante :  $Z_m$  est non vide.

IIb) Nous supposons pour la suite  $\Delta$  non singulier.

Notons

$$J = I - \Delta^{-1} A$$

il vient

$$\hat{N}(A) = m(\Delta) - M(\Delta J)$$

La matrice  $N(A)$

$$N(A) = m(\Delta) (I - M(J))$$

est minorante de  $A$ .

En effet il vient  $\forall x \in \mathcal{U}$

$$m(\Delta) \{p(x) - M(J) p(x)\} \leq m(\Delta) \{p(x) - p(Jx)\} \leq m(\Delta) p((I-J)x)$$

soit

$$N(A) p(x) \leq p(\Delta(I-J)x) = p(Ax)$$

Il en résulte de la définition de la minorante  $N(A)$  l'inégalité :

$$\hat{N}(A) \leq N(A)$$

Théorème :

Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice  $A$  admette une  $M$ -minorante relativement à  $P$  est que la minorante

$$N(A) = m(\Delta) (I - M(J))$$

soit elle-même une  $M$ -matrice, c'est-à-dire que :

$$\rho(M(J)) < 1$$

Cette condition est suffisante, montrons qu'elle est nécessaire.

Supposons que la minorante  $N = D - DU$

avec

$$0 < D \leq m(\Delta)$$

$$0 < M(J) \leq U$$

soit une  $M$ -matrice. Le rayon spectral de  $U$  est alors inférieur à l'unité.

Il en résulte la contrainte

$$\rho(M(J)) \leq \rho(U) < 1$$

et par conséquent  $N(A)$  est elle-même une  $M$ -matrice.

ANNEXE III

Matrices irréductibles - Matrices non négatives

IIIa) Définition

Une matrice  $A$  d'ordre  $q$ , d'éléments  $a_{ij}$  est dite réductible si et seulement si l'opérateur correspondant  $A$  a un sous espace de coordonnées invariant de dimension  $\nu$  avec  $\nu < q$ .

Dans le cas contraire la matrice  $A$  est dite irréductible.

Théorème de Perron FROBENIUS

Une matrice non négative irréductible  $A$  a toujours une valeur caractéristique réelle et positive  $\lambda$  qui est une racine simple de l'équation caractéristique et est supérieure aux modules de toutes les autres valeurs caractéristiques. A cette valeur caractéristique "maximale"  $\lambda$  il correspond un vecteur caractéristique  $V_\lambda$  de  $A$  de coordonnées strictement positives.

IIIb) Soit une matrice non négative  $A$  d'ordre  $q$  possédant  $q-1$  lignes d'éléments constants. Dans ce cas le vecteur propre relatif à une valeur propre donnée  $\lambda = \lambda_0$  est nécessairement de direction fixe puisque  $q-1$  relations suffisent à la déterminer.

Notons :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{q-1,1} & a_{q-1,2} & \dots & a_{q-1,q} \\ a_{q1}^* & a_{q2}^* & \dots & a_{q,q}^* \end{bmatrix}$$

dans cette présentation seuls les  $a_{qi}^*$  ( $i=1,2,\dots, q$ ) sont non constants.

Si  $V_\lambda$  représente le vecteur propre de composantes  $\alpha_i$  ( $i = 1,\dots, q$ ) relatif à la valeur propre  $\lambda > 0$  de la matrice A, il vient :

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1,q-1} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2,q-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{q-1,1} & a_{q-1,2} & \dots & a_{q-1,q-1}^{-\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{q-1} \end{bmatrix} = - \alpha_q \begin{bmatrix} a_{1q} \\ a_{2q} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{q-1,q} \end{bmatrix}$$

Lorsque la matrice A admet un rayon spectral inférieur à l'unité, la matrice  $A_1(\lambda)$  :

$$A_1(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1,q-1} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2,q-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{q-1,1} & a_{q-1,2} & \dots & a_{q-1,q-1} - \lambda \end{bmatrix}$$

est l'opposé d'une M-matrice, il en résulte que l'inverse de  $-A_1(\lambda)$  existe et est à éléments non négatifs.

Il vient alors :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{q-1} \end{bmatrix} = \alpha_q (-A_1(\lambda))^{-1} \begin{bmatrix} a_{1,q} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{q-1,q} \end{bmatrix}$$

La valeur caractéristique de plus grand module de A et la direction propre correspondante sont donc simultanément invariantes lorsque sont vérifiées les conditions :

- les éléments de A sont non négatifs,
- A possède une seule ligne d'éléments non constants,
- les valeurs propres de A sont de module inférieur à l'unité.

TABLE DES MATIERES

---

	page
<u>Introduction générale</u>	1
 <u>CHAPITRE I : Formulation des processus discrets - stabilité</u>	
Introduction .....	3
I - Définitions relatives aux systèmes échantillonnés, description des processus étudiés .....	4
1.1 - Systèmes linéaires .....	5
1.2 - Systèmes non linéaires .....	8
II - Définitions relatives à la stabilité .....	10
2.1 - Stabilité asymptotique .....	10
2.2 - Stabilité globale .....	12
2.3 - Stabilité exponentielle .....	13
2.4 - Stabilité orbitale .....	13
III - Conditions de stabilité des solutions d'une récurrence .	14
3.1 - Définitions de W. Hahn .....	14
3.2 - Méthodes d'étude de la stabilité .....	15
3.2.1 - Méthode de comparaison .....	15
3.2.2 - Application des méthodes de contraction à l'étude de la stabilité des suites récurrentes .....	16
conclusion .....	17
Bibliographie Chapitre I .....	18

CHAPITRE II : Systèmes majorants et minorants d'un processus discret

	Page
Introduction .....	21
I - Normes vectorielles de vecteurs et de matrices .....	24
1.1 - Définition de la norme vectorielle d'un vecteur ..	24
1.2 - Définition des majorantes d'une matrice .....	26
II - Détermination d'une suite majorante d'une suite récurrente vectorielle non-linéaire .....	26
2.1 - Majoration d'une suite récurrente .....	27
2.2 - Détermination pratique d'une majorante .....	30
2.3 - Application à l'étude de la stabilité d'un processus en fonction des non-linéarités .....	35
III - Généralisation de la notion de système majorant .....	38
3.1 - Système majorant défini à partir d'une norme vectorielle $p$ .....	39
3.1.1 - Définition du système majorant et lemme de comparaison .....	39
3.1.2 - Détermination de systèmes majorants d'un processus .....	40
3.2 - Système majorant défini à partir de deux normes $p$ et $q$ distinctes .....	43
IV - Détermination d'une minorante d'une récurrence vectorielle non-linéaire .....	45
4.1 - Définition et détermination d'une minorante d'un processus discret .....	46
4.2 - Recherche de $M$ -minorantes .....	48
Conclusion .....	50
Bibliographie Chapitre II .....	52



CHAPITRE III : Application des systèmes majorants à l'étude de la stabilité d'un processus

	Page
Introduction .....	55
I - Stabilité exponentielle .....	57
1.1 - Système majorant et stabilité exponentielle .....	57
1.2 - Etude de la stabilité d'un système admettant un système de comparaison à coefficients constants .....	58
1.3 - Système de comparaison admettant un vecteur propre possédant certaines propriétés particulières .....	59
1.4 - Systèmes discrets non-linéaires admettant une représentation particulière .....	61
II - Stabilité asymptotique .....	64
2.1 - Détermination d'une condition de stabilité à partir d'un système de comparaison du processus .	65
2.2 - Interprétation du corollaire 2 .....	66
2.3 - Conditions de stabilité définies à partir de systèmes majorants du processus .....	70
III - Stabilité absolue .....	73
3.1 - Etude de la stabilité à partir de normes vectorielles régulières .....	74
3.2 - Utilisation de normes vectorielles non régulières	75
IV - Application , étude de la stabilité connective d'un processus discret .....	77
Conclusion .....	80
Bibliographie Chapitre III .....	81

CHAPITRE IV : Application des techniques de majoration à certains problèmes particuliers.

	Page
Introduction .....	87
I - Majoration de l'écart entre deux modèles d'un même processus	89
1.1 - Modèle de même ordre .....	90
1.2 - Modèles d'ordres distincts .....	95
1.3 - Application à l'étude de la stabilité d'un processus imparfaitement identifié .....	96
II - Etude de la stabilité locale de certains cas critiques de stabilité .....	99
2.1 - Majoration d'un processus décrit sur le corps des complexes .....	100
2.2 - Application à l'étude locale de certains cas critiques de stabilité .....	102
III - Etude de la sensibilité d'un modèle d'un processus .....	106
3.1 - Rappel de la définition de la sensibilité d'un processus .....	106
3.2 - Estimation numérique de la sensibilité .....	108
Conclusion .....	112
Bibliographie Chapitre IV .....	113

CHAPITRE V : Essai de synthèse d'une régulation d'un groupe turbo alternateur à une resurchauffe.

Introduction .....	117
I - Description du processus étudié .....	118
II - Description des turbo alternateurs et du réseau .....	119
2.1 - La turbine .....	119

	Page
2.2 - Les masses tournantes .....	121
2.3 - L'alternateur et le réseau .....	121
III - Etude préliminaire et présentation de la régulation proposée	122
3.1 - Présentation de la régulation existante .....	122
3.1.1 - Régulation en asservissement d'ouverture .....	123
3.1.2 - Régulation en asservissement de puissance .....	124
3.1.3 - Principe des études de stabilité effectuées aux études et recherches de l'EDF .....	125
3.2 - Présentation de la régulation proposée .....	125
3.2.1 - Représentation adoptée pour le groupe turbo alternateur et le réseau dans un fonctionnement en asservissement de puissance .....	126
3.2.2 - Définition du mode de régulation et choix de la représentation discrète .....	129
3.2.2. a - Principe de la régulation .....	129
3.2.2. b - Détermination d'une représentation discrète unique du fonctionnement du groupe .....	131
IV - Synthèse de l'asservissement .....	133
4.1 - Détermination des paramètres de réglage .....	133
4.2 - Etude de la stabilité du réglage .....	138
4.2.1 - Hypothèse linéaire .....	138
4.2.2 - Hypothèse non-linéaire .....	141
Conclusion .....	143
Bibliographie Chapitre.V.....	144
Conclusion générale.....	145
Annexe I .....	147
Annexe II .....	149
Annexe III .....	153
Table des Matières .....	157