

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE SPÉCIALITÉS

par

Marc WARREN



CONTRIBUTION A L'ETUDE

DE L'EXTENSION COMPLEXE

DU QUADRIVECTEUR D'ONDE DES ONDES PLANES

*

Soutenue le 20 mai 1976 devant la Commission d'examen

Membres du Jury

M.	J. SCHILTZ	<i>Président</i>
M.	J. CORTOIS	<i>Rapporteur</i>
M.	J. BILLARD	<i>Examineur</i>
M.	C. IMBERT	<i>Membre invité</i>

B.U. LILLE 1



A ma Femme,

A mes Parents.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé dans le Laboratoire de Physique Théorique de Lille dirigé par Monsieur le Professeur TILLIEU. Je tiens à le remercier d'avoir bien voulu m'accueillir dans son équipe.

Monsieur le Professeur CORTOIS a accepté de diriger mes recherches. Ses critiques constructives ont permis de mener à bien cette thèse, qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Monsieur le Professeur SCHILTZ m'a fait l'honneur de présider le jury ; il a montré un réel intérêt pour ce travail, je le prie de trouver ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

Monsieur le Professeur IMBERT de l'Institut d'Optique d'Orsay a accepté de se joindre au jury, je tiens également à le remercier.

Cette étude a été réalisée en étroite collaboration avec le Laboratoire des Stases Anisotropes de Lille dirigé par Monsieur le Professeur BILLARD. Celui-ci a bien voulu juger cette thèse : qu'il en soit ici remercié.

Une partie expérimentale a été réalisée dans ce laboratoire par Monsieur CUVELIER. Les discussions avec ce dernier m'ont permis de conclure cette thèse. J'espère conserver son amitié ainsi que celle de tous les membres des laboratoires.

Je suis reconnaissant aux personnes spécialisées de l'U.E.R. de Physique grâce à qui cette thèse a pris son aspect définitif. En particulier à Mademoiselle CHOMBART qui très sobrement a exécuté ce travail de moine.

L' EXTENSION COMPLEXE DU 4-VECTEUR D' ONDE

★ ★ ★

— PLAN —

<u>Introduction</u>	1
— chapitre I —	
<u>Conséquences mathématiques de l'extension complexe du 4-vecteur d'onde</u>	2
— chapitre II —	
<u>Les ondes d'une source en extinction</u>	7
A - Structure de l'onde	8
B - Caractéristiques de l'onde d'une source en extinction	11
a) Surfaces isophases et équiamplitudes	11
b) Vitesse et direction de propagation de l'énergie	12
C - Superposition des ondes d'une source en extinction	16
D - Conclusion	19
— chapitre III —	
<u>Etude relativiste des ondes uniformément hétérogènes</u>	21
A - Etude d'un cas particulier	22
B - Structure de l'onde	23
C - Caractéristiques de l'onde	26
a) Définition des droites isophases-équiamplitudes	26
b) Evolution des surfaces	27
D - Propagation de l'énergie	30
a) Le vecteur de Poynting	30
b) Vitesse de propagation de l'énergie	35
E - Conclusion	39
— chapitre IV —	
<u>Un modèle d'onde hétérogène d'extension finie</u>	41
A - Les ondes hétérogènes d'extension finie	42
B - Non focalisation des ondes hétérogènes d'extension finie	48
a) Profil homogène	50
b) Profil hétérogène	51
C - Vérification expérimentale et conclusion	55
<u>Perspectives et conclusions</u>	56
<u>Annexes</u>	58
<u>Bibliographie</u>	61

L' EXTENSION COMPLEXE DU 4-VECTEUR D'ONDE

INTRODUCTION

Récemment ont été reprises des études antérieures [1] [2] sur les ondes hétérogènes. Des champs dont l'amplitude varie exponentiellement ont été utilisés. Il s'agit de l'extension complexe du 3-vecteur d'onde \vec{k} des ondes planes homogènes et uniformes. On aboutit ainsi à un modèle appelé ondes planes uniformément hétérogènes [3]. Son étude conduit à un certain nombre de résultats insolites mais prévisibles, par exemple l'indice du vide est supérieur à un [4]. La propagation de l'énergie de ce type d'onde n'a pas encore été complètement résolue [5], [6].

Le but de ce travail est de traiter de ce problème. Nous utilisons un formalisme relativiste et opérons l'extension complexe du 4-vecteur d'onde. Cette étude concerne la propagation de ces champs dans le vide.

La généralisation effectuée introduit un nouveau type d'onde dont les champs représentent l'extinction d'une source.

Dans un premier temps, nous établissons les conditions mathématiques qu'il faut imposer au 4-vecteur d'onde pour que le champ soit solution mathématique des équations de Maxwell. Il faudra distinguer deux types d'onde : les ondes d'une source en extinction et les ondes hétérogènes.

Nous discuterons dans les deux chapitres suivants de la validité physique de ces deux types de champs.

Dans le chapitre quatre nous étudions un modèle d'onde hétérogène d'extension finie. La diffraction de Fraunhofer permet de comparer la focalisation d'une onde hétérogène et d'une onde homogène, toutes deux d'extension finie. Nous donnons en conclusion les résultats expérimentaux en accord avec cette théorie.

– CHAPITRE I –

CONSEQUENCES MATHÉMATIQUES DE L'EXTENSION

COMPLEXE DU 4-VECTEUR D'ONDE

Pour que l'onde plane à 4-vecteur d'onde complexe soit solution des équations de Maxwell, certaines conditions mathématiques doivent être réunies. Nous les précisons dans ce chapitre ; ultérieurement sera discutée la valeur physique des solutions.

Dans l'espace de Minkowski $(E_{(1,3)})$ pour lequel les coordonnées sont :

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}) ; \quad x^0 = x_0 = ct, \quad x^j = -x_j$$

Le champ électromagnétique est défini par le tenseur électromagnétique [7] $F^{\mu\nu}$:

$$1-1 \quad F^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{vmatrix}$$

Les équations de Maxwell sont :

$$1-2 \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

$$1-2' \quad \partial_\rho F^{\mu\nu} + \partial_\mu F^{\nu\rho} + \partial_\nu F^{\rho\mu} = 0$$

Nous cherchons à quelles conditions une onde plane 4-vecteur d'onde complexe est solution de ces équations. Nous écrivons le tenseur $F^{\mu\nu}$ de la manière suivante :

$$1-3 \quad F^{\mu\nu} = F_0^{\mu\nu} e^{i K^\mu x_\mu}$$

avec

$$1-4 \quad F_0^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & -E_{01} & -E_{02} & -E_{03} \\ E_{01} & 0 & -cB_{03} & cB_{02} \\ E_{02} & cB_{03} & 0 & -cB_{01} \\ E_{03} & -cB_{02} & cB_{01} & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} \vec{E}_0 &= \vec{E}'_0 + i\vec{E}''_0 \\ \vec{B}_0 &= \vec{B}'_0 + i\vec{B}''_0 \end{aligned}$$

$$1-4' \quad K^\mu = k^\mu + ih^\mu$$

Les vecteurs \vec{E}_0 et \vec{B}_0 ont des composantes indépendantes de l'espace et du temps.

Portons cette expression de $F^{\mu\nu}$ dans les équations de Maxwell. Nous obtenons :

$$1-5 \quad K_\mu F_0^{\mu\nu} = 0$$

$$1-5' \quad K_\rho F_0^{\mu\nu} + K_\mu F_0^{\nu\rho} + K_\nu F_0^{\rho\mu} = 0$$

Ces deux relations forment un ensemble de huit équations (cf. Annexe 1). Par combinaison, les relations 1-2, 1-2' donnent l'équation de propagation :

$$1-6 \quad \partial_\rho \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0 \iff \partial_\rho \partial^\rho \vec{E} = 0, \partial_\rho \partial^\rho \vec{B} = 0$$

Compte tenu de la forme du tenseur $F^{\mu\nu}$:

$$\partial_\rho \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow K_\rho K^\rho F^{\mu\nu} = 0$$

soit

$$1-7 \quad K_\rho K^\rho = 0$$

Séparons parties réelles et imaginaires :

$$(k^\rho k_\rho - h^\rho h_\rho) + 2i k^\rho h_\rho = 0$$

soit enfin :

$$1-8 \quad \left\{ \begin{array}{l} k^\rho k_\rho = h^\rho h_\rho \\ k^\rho h_\rho = 0 \end{array} \right.$$

Les parties réelles k^μ et imaginaires h^μ du 4-vecteur K^μ sont donc orthogonales et ont même norme : elles ne peuvent être que du genre espace ou lumière [8].

L'angle θ entre les deux 3-vecteurs \vec{k} et \vec{h} est, en utilisant (1-8) :

$$1-9 \quad \cos \theta = \frac{\vec{k} \cdot \vec{h}}{|\vec{k}| |\vec{h}|} = \frac{k^0 h^0}{k h}$$

Dans le cas où k^μ et h^μ sont du genre lumière, cet angle est nul et les deux 4-vecteurs sont proportionnels.

L'introduction des champs dans les équations 1-5 et 1-5' ne précisera que la position respective des champs par rapport aux 3-vecteurs \vec{k} et \vec{h} (cf. Annexe 1). Nous l'étudions dans les chapitres suivants.

Les solutions du type $F_0^{\mu\nu} e^{iK^\mu x_\mu}$ des équations de Maxwell peuvent alors être classées en deux groupes : celles pour lesquelles les parties réelles k^μ et imaginaires h^μ du 4-vecteur d'onde K^μ sont du genre lumière — nous les appellerons "ondes d'une source en extinction" — et celles pour lesquelles ces mêmes 4-vecteurs sont du genre espace — Elles sont appelées ondes uniformément hétérogènes —.

Insistons sur le fait que ce ne sont que des solutions mathématiques : elles ne représenteront une onde que si elles satisfont à certains critères d'ordre physique.

En particulier un principe de relativité [9] attribue à la lumière dans le vide une vitesse indépendante du repère dans lequel elle est mesurée : nous montrerons que l'onde hétérogène ne suit pas ce principe.

L'intensité du rayonnement est liée à l'amplitude des champs par la densité d'énergie. Les rayonnements sont expérimentalement localisés dans une portion d'espace. On sait qu'un champ d'extension infinie ne saurait en conséquence convenir pour représenter une onde réelle. Mais

l'onde homogène plane et uniforme est utilisée car elle est la base de la représentation d'onde réelle par série de Fourier.

Les deux types de champs que nous étudions possèdent cette extension infinie. "L'onde d'une source en extinction" présente des analogies avec l'onde plane homogène et elle pourra être considérée elle aussi comme la base d'une représentation d'onde dont l'amplitude évolue dans le temps. Par contre l'onde hétérogène possède une énergie infinie à l'infini.

Les deux chapitres suivants sont consacrés à l'étude de la structure et des caractéristiques physiques de ces deux types d'ondes que nous avons introduits.

- CHAPITRE II -

LES ONDES D'UNE SOURCE EN EXTINCTION

Nous donnons cette dénomination aux champs du type onde plane à 4-vecteur d'onde complexe K^μ dont les parties réelle k^μ et imaginaire h^μ sont isotropes :

$$k^\mu k_\mu = h^\mu h_\mu = 0$$

Nous justifions cette dénomination en étudiant la structure et les caractéristiques des champs. Nous appelons structure la position relative de tous les vecteurs $\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k}, \vec{h}$ qui définissent les champs. Les caractéristiques sont essentiellement : les surfaces isophases, équiampitudes, la direction et la vitesse de propagation de l'énergie.

Nous montrons enfin que ce type d'onde conduit par superposition à un ensemble plus vaste.

Dans ce chapitre, nous considérons les champs suivants :

Dans un repère R :

$$2-1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = (\vec{E}'_0 + i\vec{E}''_0) e^{iK^\mu x_\mu} \quad ; \quad \vec{B} = (\vec{B}'_0 + i\vec{B}''_0) e^{iK^\mu x_\mu} \\ \\ K^\mu = k^\mu + ih^\mu \\ \\ k^\mu k_\mu = h^\mu h_\mu = 0 \end{array} \right.$$

Nous savons qu'ils sont solutions des équations de Maxwell si (cf. Annexe 1) :

$$2-2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{K} \vec{E}_0 = 0 \quad ; \quad \vec{K} \vec{B}_0 = 0 \\ \\ \vec{K} \wedge \vec{E}_0 = + c \vec{K} \vec{B}_0 \quad ; \quad \vec{K} \wedge \vec{B}_0 = - \frac{1}{c} \vec{K} \vec{E}_0 \end{array} \right.$$

Etudions la position respective des vecteurs $\vec{E}'_0, \vec{B}'_0, \vec{E}''_0, \vec{B}''_0, \vec{k}, \vec{h}$.

A - STRUCTURE DE L'ONDE

Les deux 4-vecteurs k^μ et h^μ sont isotropes et orthogonaux : ils sont donc colinéaires (cf. Annexe 2) et nous pouvons poser :

$$2-3 \quad h^\mu = \alpha k^\mu \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Le 4-vecteur K^μ est alors :

$$2-4 \quad K^\mu = (1 + i\alpha) k^\mu$$

Les équations de Maxwell deviennent :

$$2-5 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{k} \vec{E}_0 = 0 \quad ; \quad \vec{k} \vec{B}_0 = 0 \\ \vec{k} \wedge \vec{E}_0 = + ck^0 \vec{B}_0 \quad ; \quad \vec{k} \wedge \vec{B}_0 = - \frac{1}{c} k^0 \vec{E}_0 \end{array} \right.$$

Séparons parties réelles et imaginaires, nous obtenons deux systèmes indépendants et identiques :

$$2-6 \quad \begin{array}{l} \vec{k} \vec{E}'_0 = 0 \quad ; \quad \vec{k} \vec{E}''_0 = 0 \\ \vec{k} \vec{B}'_0 = 0 \quad ; \quad \vec{k} \vec{B}''_0 = 0 \\ \vec{k} \wedge \vec{E}'_0 = + ck^0 \vec{B}'_0 \quad ; \quad \vec{k} \wedge \vec{E}''_0 = + ck^0 \vec{B}''_0 \\ \vec{k} \wedge \vec{B}'_0 = - \frac{1}{c} k^0 \vec{E}'_0 \quad ; \quad \vec{k} \wedge \vec{B}''_0 = - \frac{1}{c} k^0 \vec{E}''_0 \end{array}$$

Ce sont des équations analogues à celles de l'onde plane homogène [10] : les mêmes résultats en découlent.

La transversalité : les vecteurs $\vec{E}'_0, \vec{E}''_0, \vec{B}'_0, \vec{B}''_0$ sont dans un même plan normal à \vec{k} . Les vecteurs $(\vec{k}, \vec{E}'_0, \vec{B}'_0)$ et $(\vec{k}, \vec{E}''_0, \vec{B}''_0)$ forment deux trièdres trirectangles. Les modules des champs sont dans le rapport c :

$$|\vec{E}'| = c |\vec{B}'_0| \quad ; \quad |\vec{E}''| = c |\vec{B}''_0| \quad \Rightarrow \quad |\vec{E}| = c |\vec{B}|$$

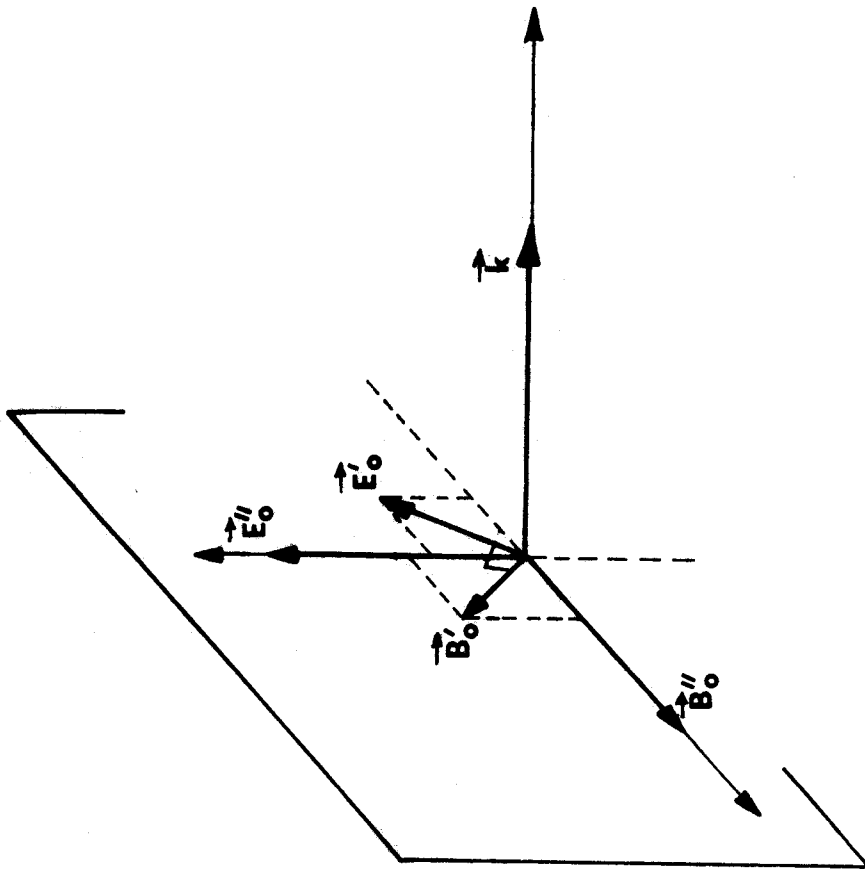
La figure 2.1 illustre la position des vecteurs.

Les modules respectifs de \vec{E}'_0 et \vec{E}''_0 ainsi que l'angle $\phi = (\vec{E}'_0, \vec{E}''_0)$ sont quelconques. Du choix de ces paramètres dépendra la polarisation.

Ainsi par exemple $\vec{E}''_0 = 0$ décrit la polarisation rectiligne.
 $|\vec{E}'| = |\vec{E}''| \quad \phi = \frac{\pi}{2}$ une polarisation circulaire.

Du point de vue de la structure, l'onde d'une source en extinction ne diffère pas de l'onde plane homogène.

Le changement se situe au niveau des caractéristiques que nous étudions maintenant.



-- Figure 2.1 -- Structure de l'onde d'une source en extinction.

BUS
LILLE

B - LES CARACTERISTIQUES DE L'ONDE D'UNE SOURCE
EN EXTINCTION

Nous étudions particulièrement les surfaces isophases, équi-amplitudes et l'énergie.

a) Surfaces isophases et équiampplitudes.

L'écriture des champs fait apparaître une amplitude A et une phase ϕ dont les expressions sont :

$$2-7 \quad A = |\vec{E}_0| e^{-h^\mu x_\mu} ; \quad \phi = k^\mu x_\mu$$

Les surfaces isophases sont alors définies par l'ensemble des points d'espace tels que :

$$\phi = k^\mu x_\mu = c^{te} = \phi_0$$

ou :

$$k^0 ct - \vec{k} \vec{r} = \phi_0$$

Ce sont des plans normaux à \vec{k} .

Les surfaces équiampplitudes sont définies de la même manière par le lieu des points d'espace tels que :

$$A = |\vec{E}_0| e^{-h^\mu x_\mu} = A_0 \Rightarrow h^\mu x_\mu = c^{te}$$

d'après 2-3 :

$$h^\mu x_\mu = \alpha k^\mu x_\mu = \alpha (k^0 ct - \vec{k} \vec{r}) = c^{te}$$

Ces surfaces sont également des plans normaux à \vec{k} .

Le cas étudié ici est donc différent de l'onde plane homogène pour laquelle tout l'espace est équiampplitude.

Les surfaces isophases et équiampitudes évoluent à la vitesse c de la lumière dans le vide, en effet :

d'après l'expression de la phase, sa vitesse est :

$$2-8 \quad v_{\phi} = \frac{k^0 c}{|\vec{k}|}$$

l'amplitude dépend de la même variable de propagation $(k^0 ct - \vec{k} \cdot \vec{r})$ d'où la vitesse des plans équiampitude :

$$2-9 \quad v_a = \frac{k^0 c}{|\vec{k}|}$$

Le 4-vecteur k^μ étant du genre lumière :

$$k^{02} - \vec{k}^2 = 0 \Rightarrow v_a = v_{\phi} = c$$

b) Vitesse et direction de propagation de l'énergie.

L'étude de l'énergie s'aborde généralement à l'aide du vecteur de Poynting \vec{P} et de la densité d'énergie électromagnétique ω_{em} :

par définition :

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad ; \quad \omega_{em} = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

dans le vide :

$$2-10 \quad \vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \quad ; \quad \omega_{em} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)$$

Nous savons que les champs \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires à la direction \vec{k} . Le vecteur de Poynting lui sera donc parallèle. En tenant compte du fait que les vecteurs \vec{E} et \vec{B} sont normaux entre eux et que leurs modules sont dans le rapport c , nous obtenons :

$$|\vec{P}| = \frac{1}{\mu_0 c} |\vec{E}|^2 \quad ; \quad \omega_{em} = \epsilon_0 |\vec{E}|^2$$

En appelant le vecteur unitaire dans la direction \vec{k} :

$$2-11 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = \omega_{em} c \\ \omega_{em} = \epsilon_0 E_0^2 e^{-2h^\mu x_\mu} \sin^2 k^\mu x_\mu \end{array} \right.$$

On sait que :

$$\iiint \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iiint \text{div} \vec{P} \, dv = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iiint \omega_{em} \, dv$$

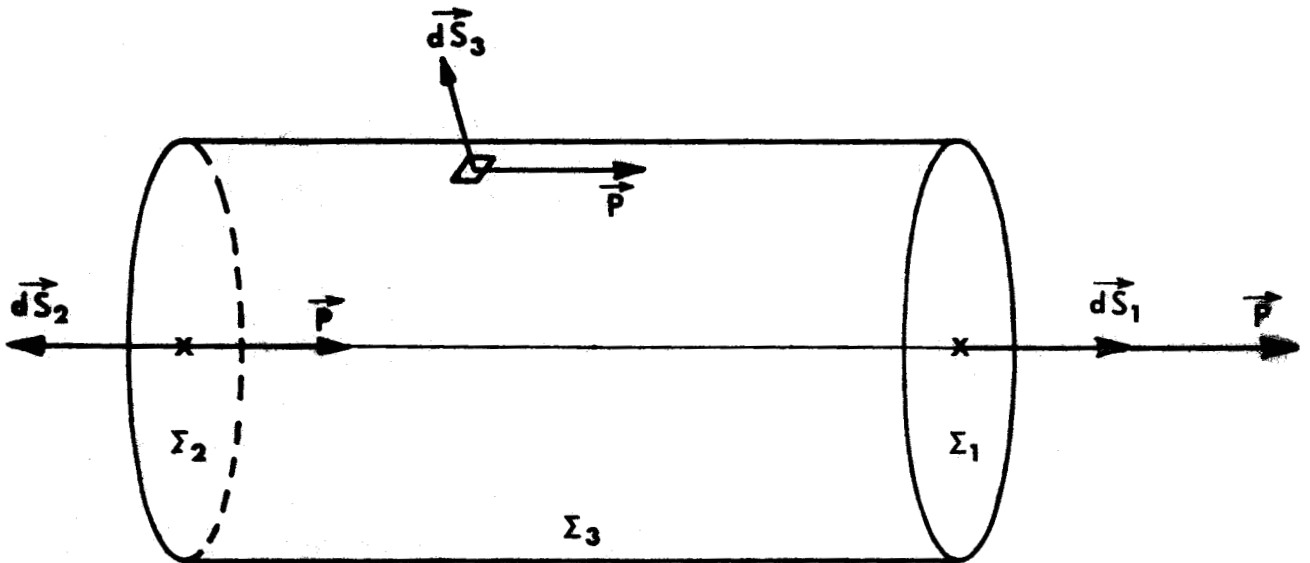
En conséquence le flux du vecteur de Poynting à travers une surface fermée est égal à la variation d'énergie électromagnétique contenue dans le volume délimité par la surface fermée.

Considérons un cylindre de surface de base unité et d'axe parallèle à \vec{k} (Fig. 2.2).

Puisque le vecteur de Poynting est parallèle à \vec{k} , seules les surfaces Σ_1 et Σ_2 ont une contribution au flux de \vec{P} égal à la variation de l'énergie dans le temps. Ce qui montre que \vec{k} est la direction de propagation de l'énergie*. Elle se propage à la vitesse c de la lumière dans le vide.

Considérons en effet autour du point M un volume élémentaire dv . L'énergie à l'instant t_0 dans ce volume est $\omega_{em}(M, t_0) dv$. A l'instant t_1 au même point M, celle-ci a diminué d'un facteur $e^{-2h^0 c(t_1 - t_0)}$, mais au point N tel que $MN = c(t_1 - t_0)$, nous retrouvons la même énergie (Fig. 2.3). La vitesse de propagation de l'énergie est bien c .

* De tels raisonnements ont déjà été tenus [11], [12].



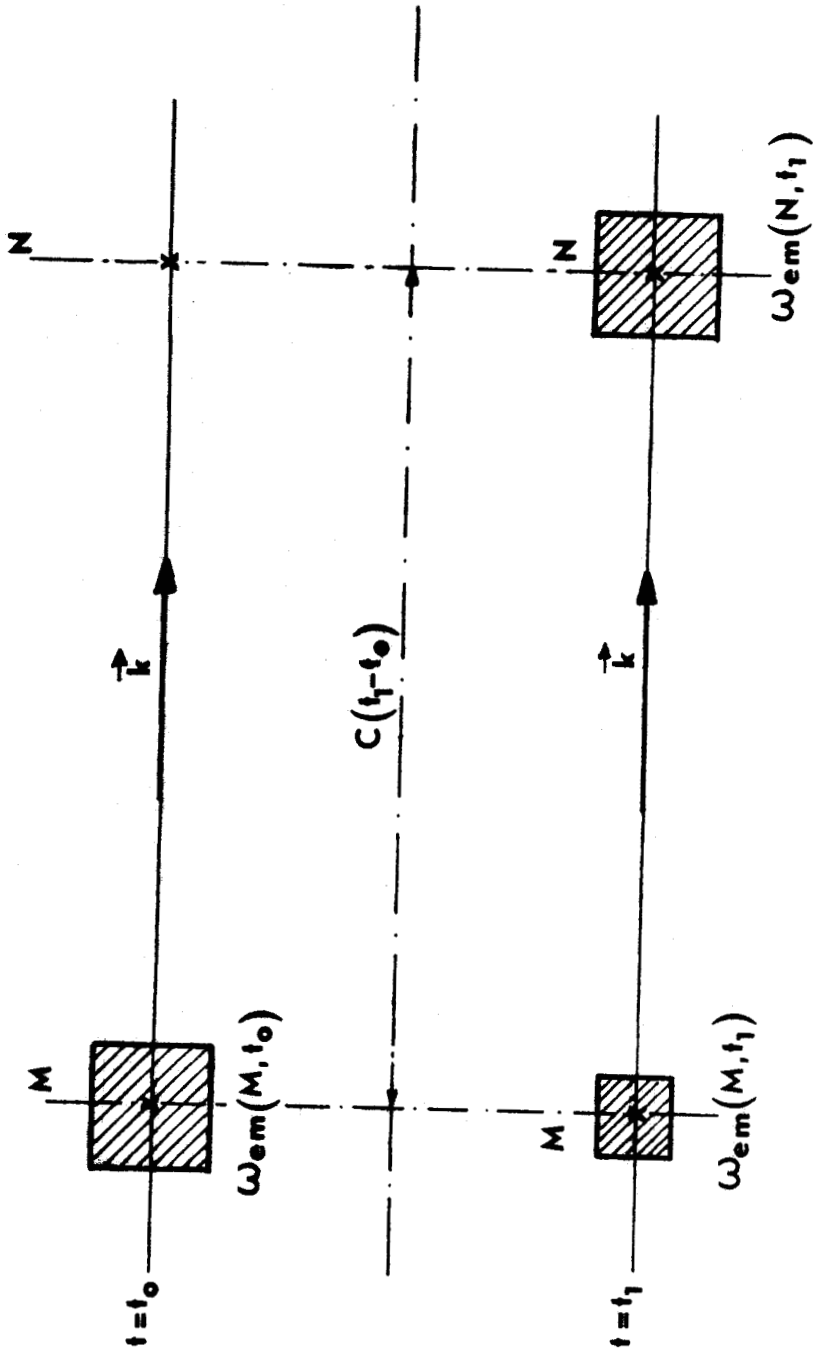
- Figure 2.2 - Le flux du vecteur de Poynting.

Un raisonnement semblable est impossible avec des ondes homogènes car pour celles-ci l'espace est équiampitude. Seule la phase nous renseigne sur l'évolution de cette onde.

Ce raisonnement nous prouve en outre qu'il n'y a pas de dispersion de l'énergie puisqu'elle se retrouve intégralement en N . La décroissance exponentielle de la densité d'énergie est liée à celle de la source.

Autrement dit, les champs (2-1) proviennent de l'extinction d'une source rayonnant de manière exponentielle. L'extension infinie de l'onde pose les mêmes problèmes que ceux rencontrés avec l'onde plane homogène.

Cette dernière est souvent considérée physiquement comme étant la limite d'une onde sphérique. Nous pouvons tenir le même raisonnement avec



$$\omega_{em}(M, t_1) = \omega_{em}(M, t_0) e^{-2h^0 c(t_1 - t_0)}$$

$$\omega_{em}(N, t_1) = \omega_{em}(M, t_0)$$

- Figure 2.3 - Propagation et décroissance de la densité d'énergie.

les ondes d'une source en extinction : une source ponctuelle rayonne une onde sphérique dont l'intensité décroît exponentiellement dans le temps. Les champs (2-1) représentent, loin de cette source, la perturbation de l'espace causée par cette dernière.

De même que des superpositions d'ondes planes homogènes permettent la construction de trains d'ondes, il est possible d'atteindre par superposition, des champs qui proviennent de sources ayant des modes d'extinction plus généraux.

C - SUPERPOSITION D'ONDES D'UNE SOURCE EN EXTINCTION

Nous superposons des champs de la forme :

$$2-12 \quad \vec{E}_{(\alpha)} = \vec{E}_0(\alpha) e^{-\alpha(k^0 ct - \vec{k} \vec{r})} e^{i(k^0 ct - \vec{k} \vec{r})}$$

La sommation est effectuée sur α . C'est-à-dire que nous additionnons des champs de même fréquence et de même direction de propagation, mais dont la décroissance exponentielle est différente.

Imposons à chacune des composantes (2-12) de la sommation les conditions suivantes :

$$2-13 \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} \text{ tq } |\vec{E}_0(\alpha)| < M \\ \forall \alpha \in]-\infty; 0[, \Rightarrow \vec{E}_0(\alpha) \equiv 0 \end{array} \right.$$

Considérons la variable spatio-temporelle $(k^0 ct - \vec{k} \vec{r})$ que nous noterons p . Elle est négative quand la perturbation n'est pas encore "arrivée" au point d'observation. Le principe de causalité sera respecté si les champs sont nuls pour p négatif. Les deux conditions précédentes nous assurent que dans ce cas les champs $\vec{E}_{(\alpha)}$ sont bornés :

la première impose que $\vec{E}_0(\alpha)$ soit borné pour tout α

et la seconde permet d'éviter la discontinuité de l'exponentielle réelle pour α négatif.

Le domaine d'intégration sur α est illimité, la condition 2-13 permet de le réduire à :

$$[0 ; +\infty [$$

La superposition a alors la forme :

$$2-14 \quad \vec{E} = \int_0^{\infty} \vec{E}_0(\alpha) e^{-\alpha(k^0 ct - \vec{k} \vec{r})} e^{i(k^0 ct - \vec{k} \vec{r})} d\alpha$$

Soit

$$2-15 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = \vec{E}_{(p)} e^{i(k^0 ct - \vec{k} \vec{r})} \\ \text{et} \\ \vec{E}_{(p)} = \int_0^{\infty} \vec{E}_0(\alpha) e^{-\alpha p} d\alpha \end{array} \right. \quad p = (k^0 ct - \vec{k} \vec{r}) > 0$$

L'amplitude $\vec{E}_{(p)}$ de la superposition apparaît comme étant la transformée de Laplace de l'amplitude des composantes $\vec{E}_0(\alpha)$. La résultante est fonction de la seule variable $p = (k^0 ct - \vec{k} \vec{r})$: elle est solution de l'équation de propagation, c'est un train d'ondes dont les surfaces isophases et équiampitudes sont planes et se propagent à la vitesse c de la lumière dans le vide, dans la direction \vec{k} .

Réciproquement tout champ de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_{(p)} e^{i(k^0 ct - \vec{k} \vec{r})} \quad \text{pour } p > 0$$

peut être décomposé en onde d'une source en extinction si (théorème de Lerch) [13] :

- a) Il existe un réel a tel que $\vec{E}_{(p)}$ soit analytique dans le demi-plan $\text{Rée}(p) > a$
- b) Si b est un réel quelconque supérieur à a , il existe un nombre positif r tel que :

$$p^{r+1} \vec{E}_{(p)} \quad \text{soit borné pour } \text{Rée}(p) > b$$

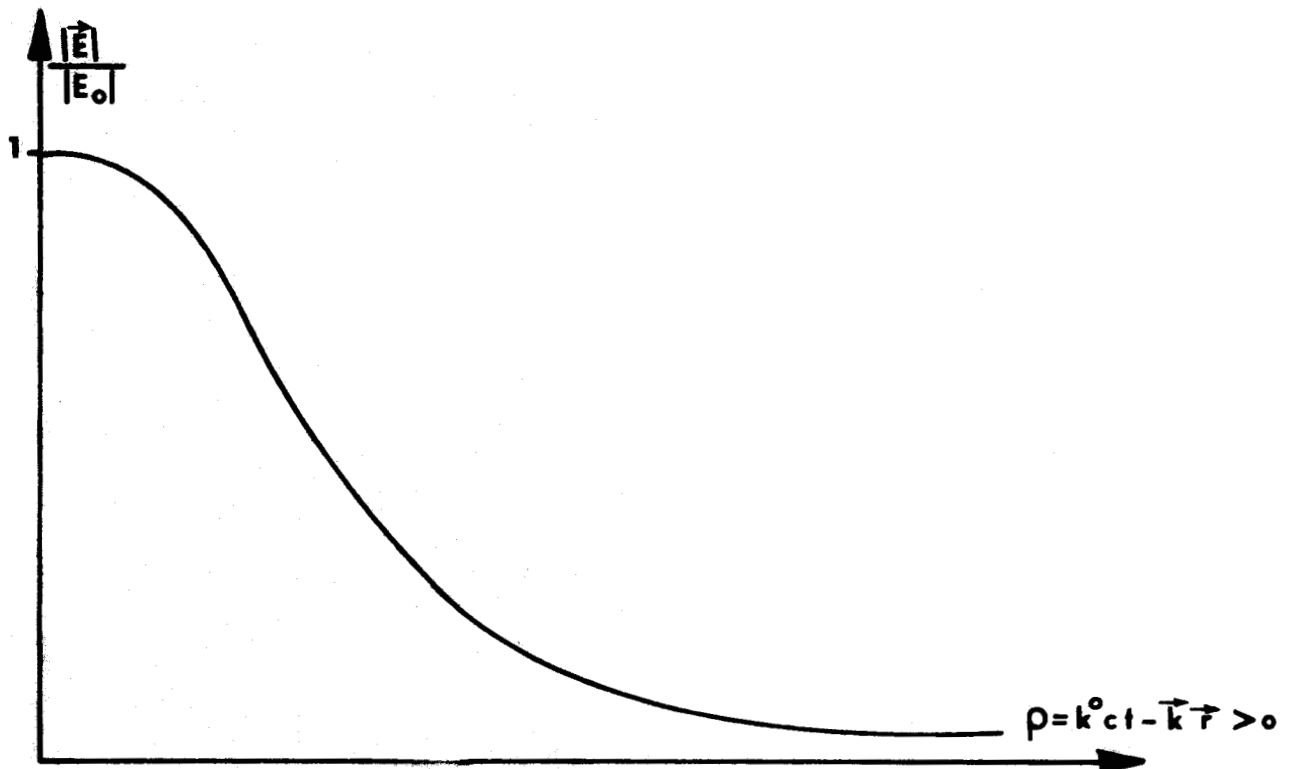
Les composantes $\vec{E}_0(\alpha)$ sont alors données par l'intégrale de Mellin-Fourier :

$$2-16 \quad \vec{E}_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \vec{E}(z) e^{\alpha z} dz$$

Soit par exemple le champ :

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1+p^2} e^{ip} \quad p = (k^0 ct - \vec{k} \vec{r}) > 0$$

Il présente une amplitude décroissante en forme de cloche (Fig. 2.4).



- Figure 2.4 - Module du champ : $\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1+p^2} e^{ip}$; $p = k^0 ct - \vec{k} \vec{r} > 0$.

Il peut être considéré comme superposition des champs suivants :

$$\vec{E}_0 \cdot \sin \alpha \cdot e^{-\alpha p} e^{ip}$$

Les conditions 2-16 ne sont pas très restrictives et il est alors possible à l'aide de ce modèle de représenter un grand nombre de trains d'ondes plans, limités dans le temps et se propageant dans une direction donnée. Une sommation de ces trains d'onde sur différentes directions de propagation peut être réalisée ; nous pouvons écrire un paquet de trains d'ondes :

$$\vec{E} = \int_{\Delta \vec{k}} \vec{E}(\vec{p}) e^{ip} d^3 k \quad p = (k^0 ct - \vec{k} \cdot \vec{r}) > 0$$

Expression dans laquelle $\vec{E}(\vec{p})$ est une transformée de Laplace.

D - CONCLUSION

Nous avons donc étudié les caractéristiques de l'onde plane à 4-vecteur d'onde complexe dont les parties réelles et imaginaires sont toutes deux du genre lumière. Ce type d'onde n'avait pas encore été étudié. Nous obtenons alors les résultats suivants. Les parties réelles k^μ et imaginaires h^μ du 4-vecteur d'onde complexe sont proportionnelles. Nous définissons les plans isophases et les plans équiampitudes. Ils sont parallèles et normaux au trivecteur \vec{k} , partie spatiale du 4-vecteur d'onde. Ils évoluent dans cette direction à la vitesse de la lumière c . Les champs sont également normaux à \vec{k} . La différence avec les ondes planes homogènes vient de ce que l'espace n'est plus équiampitude. L'étude du vecteur de Poynting et de la densité d'énergie amène à la conclusion suivante : la vitesse de propagation de l'énergie est c et sa direction de propagation est \vec{k} .

La décroissance exponentielle de l'amplitude rend compte d'un mode d'extinction particulier d'une source. Une superposition de ces champs de même fréquence mais d'extinction différente s'exprime simplement par une

transformée de Laplace. Par cette transformée, il est possible de représenter des trains d'ondes dont les ondes d'une source en extinction forment la base mathématique. Il est également possible de représenter des paquets de trains d'ondes par superposition de trains de directions de propagation différentes.

Les champs que nous avons étudiés dans ce chapitre peuvent alors être considérés au même titre que les ondes planes homogènes comme solutions des équations de Maxwell.

- CHAPITRE III -

ETUDE RELATIVISTE DES ONDES UNIFORMEMENT HETEROGENES

De part son extension infinie, l'onde plane homogène n'a pas de réalité physique. Son utilisation dans certains calculs permet de rendre compte qualitativement et quantitativement de certains phénomènes comme la diffraction. Son étude directe permet de donner au 3-vecteur d'onde \vec{k} le sens de direction de propagation.

Dans le même état d'esprit, nous étudions l'onde uniformément hétérogène. Nous utilisons le formalisme plus général de la relativité restreinte. Il nous permettra entre autre de montrer que ce type d'onde ne respecte pas le principe de relativité. Il n'y a pas propagation en ligne droite de ces champs. Ce résultat sera atteint par l'étude de la structure et des caractéristiques des champs. Nous montrons d'abord que les ondes uniformément hétérogènes des études précédentes sont un cas particulier de celles que nous étudions.

Dans ce chapitre, nous considérons les champs suivants :

Dans un repère R :

$$3-1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = (\vec{E}'_0 + i\vec{E}''_0) e^{i K^\mu x_\mu} \quad ; \quad \vec{B} = (\vec{B}'_0 + i\vec{B}''_0) e^{i K^\mu x_\mu} \\ \\ K^\mu = k^\mu + i h^\mu \\ \\ k^\mu k_\mu = h^\mu h_\mu < 0 \end{array} \right.$$

Nous savons qu'ils sont solutions des équations de Maxwell si (cf. Annexe 1)

$$3-2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{K} \vec{E}_0 = 0 \quad ; \quad \vec{K} \vec{B}_0 = 0 \\ \\ \vec{K} \wedge \vec{E}_0 = + c K^0 \vec{B}_0 \quad ; \quad \vec{K} \wedge \vec{B}_0 = - \frac{1}{c} K^0 \vec{E}_0 \end{array} \right.$$

A - ETUDE D'UN CAS PARTICULIER

Dans les études précédentes [4], seul le trivecteur d'onde est complexe, ce qui revient à se placer dans le repère R_a pour lequel h^0 est nul.

Dans un repère R_a les champs sont proportionnels à :

$$e^{-\vec{h}_a \vec{r}} e^{i(k_a^0 t - \vec{k}_a \vec{r})}$$

avec

$$k_a^{02} - k_a^2 = - h_a^2 < 0 \quad ; \quad \vec{k}_a \vec{h}_a = 0$$

Dans un repère R quelconque en translation uniforme par rapport à R_a , les champs seront proportionnels à :

$$e^{-h^\mu x_\mu} e^{i k^\mu x_\mu}$$

avec

$$k^r = \Lambda^\mu_\nu k^r_a ; h = \Lambda^\nu_\mu h^v_a$$

Λ^μ_ν est la transformation de Lorentz qui fait passer de R à R_a . En général $h^0 = \Lambda^0_\nu h^v_a$ est différent de zéro et les ondes uniformément hétérogènes étudiées auparavant sont donc le cas particulier de l'écriture 3-1 correspondant au repère R_a pour lequel h^0 est nul.

Dans la présente étude, les résultats ne faisant pas intervenir h^0 seront donc identiques à ceux des études antérieures : ils ne seront pas repris.

Nous étudions d'abord la structure de l'onde.

B - STRUCTURE DE L'ONDE UNIFORMEMENT HETEROGENE

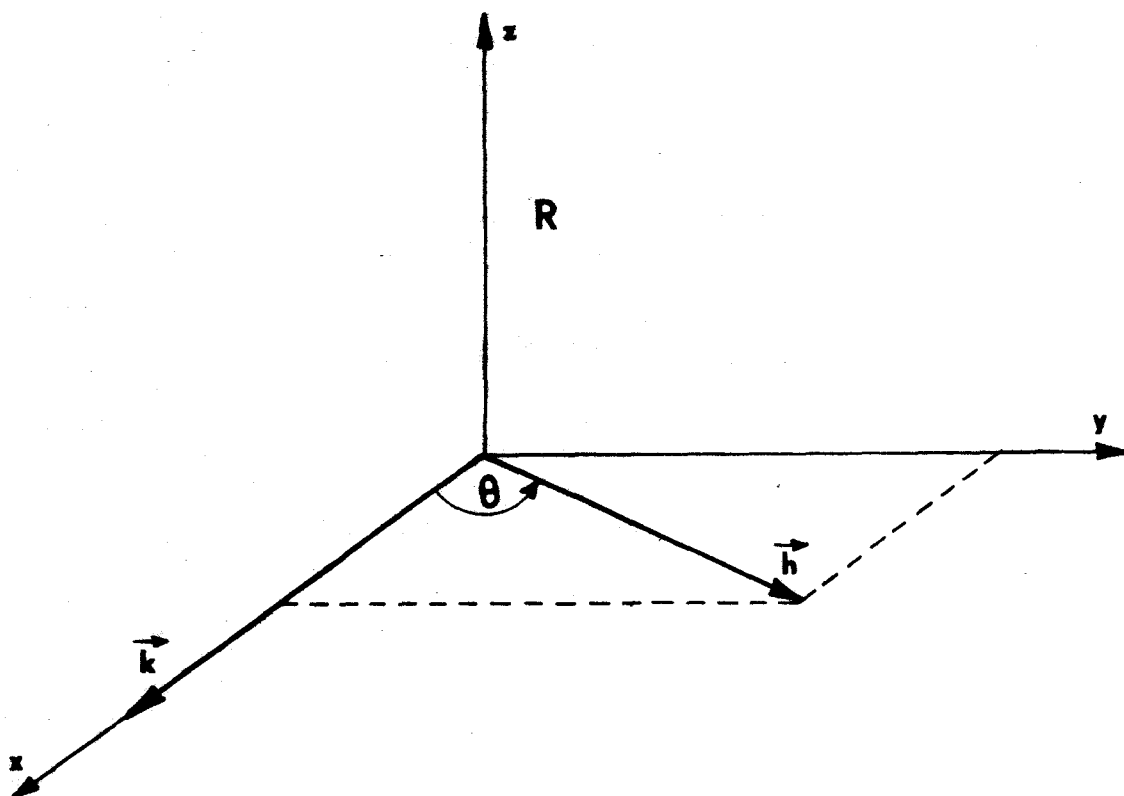
Les 3-vecteurs \vec{h} et \vec{k} forment un angle θ dont le cosinus est donné par (1-10)

$$3-3 \quad \cos \theta = \frac{k^0 h^0}{k h}$$

Les deux 3-vecteurs \vec{h} et \vec{k} forment un plan (\vec{h}, \vec{k}) : nous disposerons le repère R telsque (\vec{h}, \vec{k}) et (Oxy) coïncident et que l'axe Ox soit parallèle à \vec{k} (Fig. 3.1)

La position respective des champs se déduit des équations (3-2)

$$\vec{K} \wedge \vec{E}_0 = + c K^0 \vec{B} ; \vec{K} \wedge \vec{B} = - \frac{1}{c} K^0 \vec{E}$$

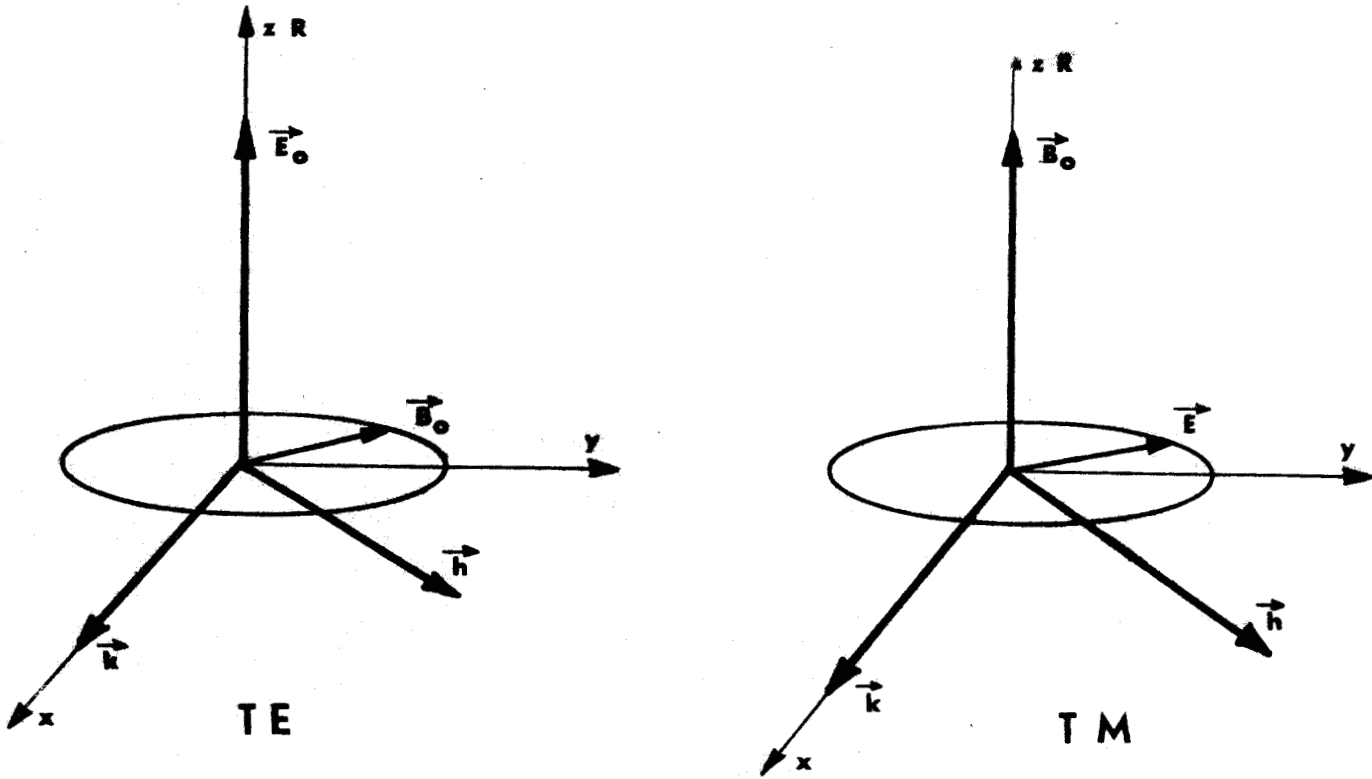


- Figure 3.1 - Les vecteurs \vec{k} , \vec{h} dans le repère R.

La position des champs \vec{E} et \vec{B} par rapport à \vec{k} et \vec{h} est déterminée par :

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad ; \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

Celles-ci vont déterminer les différents états de polarisation. Elles ne font pas intervenir h^0 : les résultats antérieurs sont conservés. Ceux-ci [3] se résument dans le fait que la polarisation ne peut être rectiligne simultanément pour les champs électrique et magnétique. L'onde Transverse électrique (TE) est définie par $\vec{E}'' = 0$. La Transverse magnétique (TM) par $\vec{B}'' = 0$ et les circulaires gauche et droite par $|\vec{E}'| = |\vec{E}''| = |c\vec{B}'| = |c\vec{B}''|$. Dans les cas transverses, \vec{E} et \vec{B} sont respectivement parallèles à Oz (Fig. 3.2), dans le cas circulaire \vec{E} et \vec{B} évoluent dans un même plan fixe par rapport à \vec{h} et \vec{k} .



- Figure 3.2 - Les ondes TE et TM dans le repère R.

Si la polarisation n'est pas affectée par le caractère relativiste de l'étude, il n'en va pas de même pour les surfaces isophases et équiampplitudes.

Nous les étudions ci-dessous.



C - LES CARACTERISTIQUES DE L'ONDE UNIFORMEMENT HETEROGENES

Dans ce paragraphe, nous n'étudions que les surfaces isophases, les équiampplitudes avec lesquelles nous sommes amenés à définir les droites isophases-équiampplitudes. Les problèmes d'énergie seront abordés dans un paragraphe spécial.

a) Définition des droites isophases-équiampplitudes.

Une surface isophase est le lieu des points pour lesquels la phase ϕ est identique, une surface équiampplitude est le lieu des points pour lesquels l'amplitude A est identique.

Ces deux surfaces sont alors définies par :

$$\phi = k^\mu x_\mu = k^0 ct - \vec{k} \cdot \vec{r} = c^t e$$

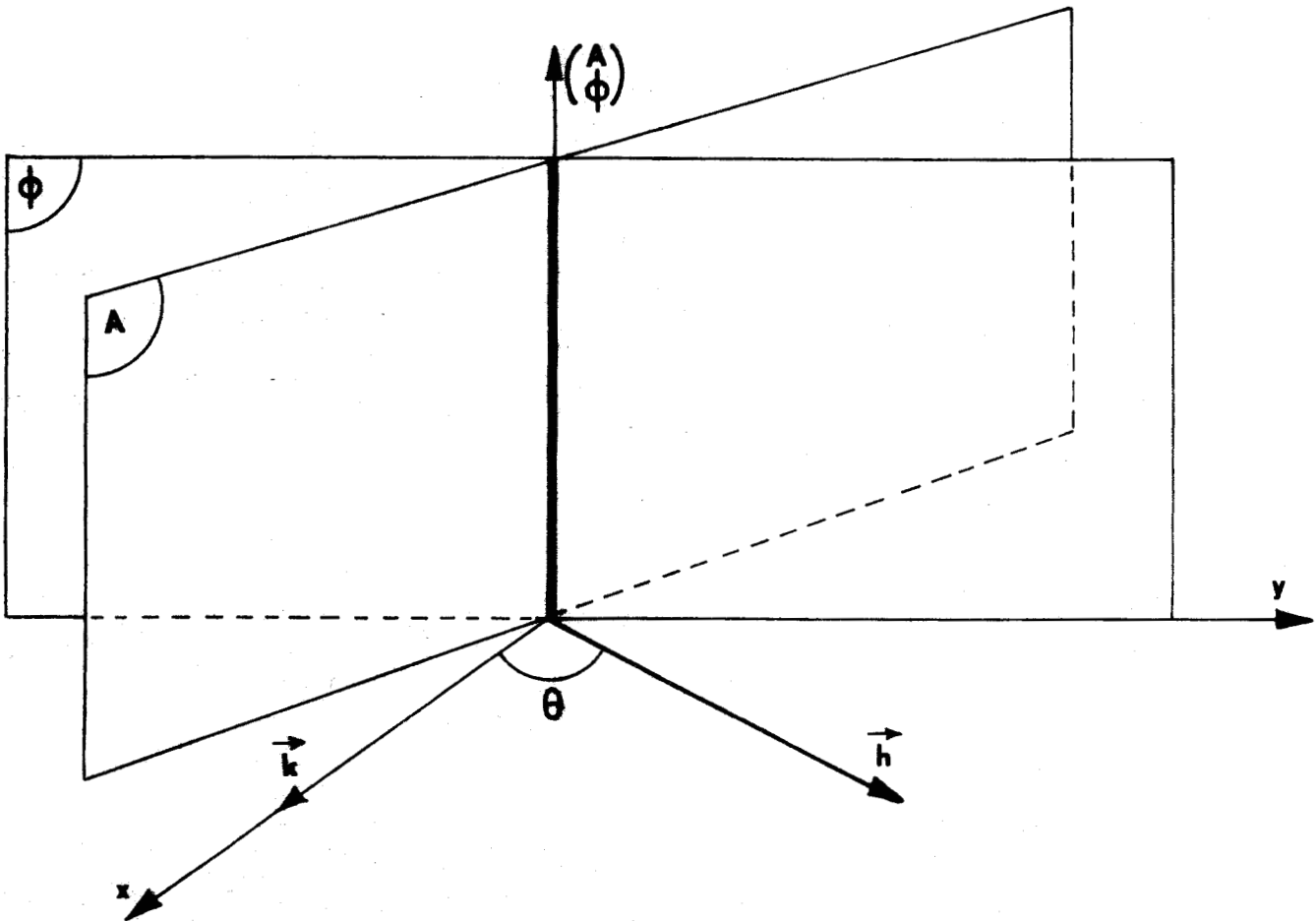
$$A = k^\mu x_\mu = h^0 ct - \vec{h} \cdot \vec{r} = c^t e$$

Comme pour les ondes d'extinction, ces lieux sont plans et normaux respectivement à \vec{k} pour les isophases et \vec{h} pour les équiampplitudes. Ces plans font entre-eux un angle θ .

Nous pouvons définir une droite isophase-équiampplitude, lieu des points pour lesquels à la fois l'amplitude et la phase sont constantes. Ce sont les intersections des plans isophases avec les équiampplitudes. Donc il s'agit de droites normales au plan (\vec{h}, \vec{k}) (Fig. 3.3).

La notion de droite isophase-équiampplitude n'a pas de sens dans le cas d'onde plane homogène : tout l'espace est équiampplitude et le plan isophase est aussi équiampplitude. De même pour les ondes d'extinction, les plans isophases et équiampplitudes sont parallèles : il n'y a aucune distinction à faire entre les trois lieux introduits.

L'intérêt des droites isophases-équiampplitudes apparaîtra dans l'étude de la propagation de l'énergie.



- Figure 3.3 - Plans isophases (ϕ) ; plans équiampitudes (A) ;
droites isophases équiampitudes ($\overset{A}{\phi}$).

b) Evolution des surfaces.

Un raisonnement analogue à celui effectué dans le cas des ondes d'une source en extinction (cf. page 13) montre que les plans isophases et équiampitudes ont une vitesse \vec{v}_ϕ et \vec{v}_a qui satisfont aux relations :

$$3-4 \quad \vec{k} \vec{v}_\phi = k^0 c \quad ; \quad \vec{h} \vec{v}_a = h^0 c$$

Seules les composantes v_ϕ et v_a normales aux plans isophases et équiampitudes sont accessibles à la mesure, elles ont pour valeur :

$$3-5 \quad v_\phi = \frac{k^0 c}{k} \quad ; \quad v_a = \frac{h^0 c}{h}$$

Les droites équiamplitudes-isophases ont une vitesse \vec{v}_d . Les points de ces droites appartiennent simultanément à un plan isophase et à un plan équiamplitude, d'où les deux relations :

$$3-6 \quad \vec{k} \vec{v}_d = k^0 c \quad \text{et} \quad \vec{h} \vec{v}_d = h^0 c$$

Comme pour les plans, seule la composante \vec{v}_{dn} de la vitesse \vec{v}_d , normale aux droites isophases-équiamplitudes, est accessible à la mesure. Nous l'exprimons en fonction de \vec{k} et \vec{h} .

Nous décomposons \vec{v}_d en partie normale et tangentielle à la droite :

$$\vec{v}_d = \vec{v}_{dn} + \vec{v}_{dt} \quad \text{avec} \quad \vec{v}_{dn} = \alpha \vec{k} + \beta \vec{h}$$

$$\text{et} \quad \vec{v}_{dt} \vec{k} = \vec{v}_{dt} \vec{h} = 0$$

Des relations 3-6 nous tirons :

$$\vec{k} \vec{v}_d = \vec{k} \vec{v}_{dn} = \alpha k^2 + \beta \vec{k} \vec{h} = k^0 c$$

$$\vec{h} \vec{v}_d = \vec{h} \vec{v}_{dn} = \alpha \vec{k} \vec{h} + \beta h^2 = h^0 c$$

La résolution de ce système donne :

$$3-7 \quad \vec{v}_d = \frac{c}{h^0{}^2 + k^2} (k^0 \vec{k} + h^0 \vec{h}) + \vec{v}_{dt}$$

La composante normale, seule accessible à la mesure, a pour module :

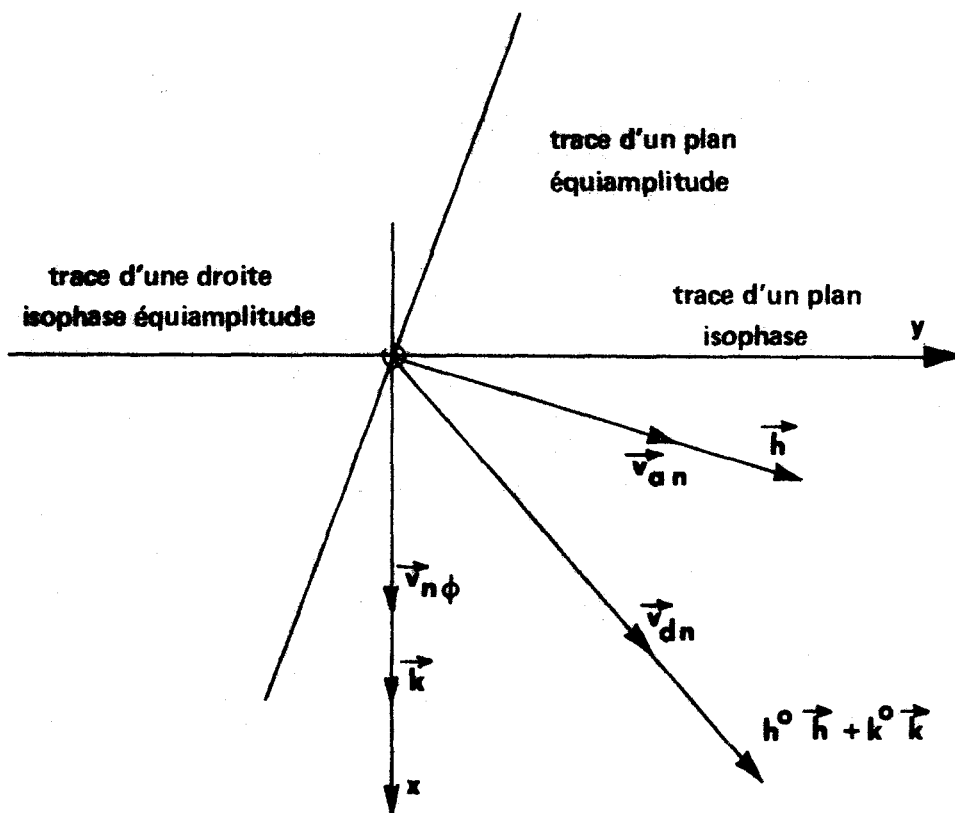
$$3-8 \quad v_{dn} = c \left(\frac{k^0{}^2 + h^0{}^2}{h^2 + k^0{}^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Les 4-vecteurs h^μ et k^μ sont du genre espace, donc les trois composantes normales v_a , v_ϕ , v_{dn} sont inférieures à la célérité de la lumière dans le vide.

La situation est illustrée dans la figure 3.4 : des plans isophases normaux à \vec{k} évoluant dans cette direction à la vitesse $\frac{k^0 c}{k}$; des plans équiampplitudes normaux à \vec{h} évoluant dans cette direction à la vitesse $\frac{h^0 c}{h}$; enfin des droites isophases équiampplitudes normales au plan (\vec{h}, \vec{k}) évoluant dans la direction $(h^0 \vec{h} + k^0 \vec{k})$ à la vitesse v_{dn} .

Notons que dans le cas $h^0 = 0$:

$$v_a = 0 ; \quad v_\phi = v_{dn} = \frac{k^0 c}{k}$$



- Figure 3.4 - Vitesse des surfaces isophases équiampplitudes.

Il n'y avait donc pas lieu de distinguer ces trois vitesses dans les études antérieures. L'étude de la propagation se limitait à celle de la phase.

Tous les résultats mis en évidence à l'aide de ce modèle d'onde (Réflexion, etc.) l'ont été grâce à la connaissance de l'évolution des surfaces isophases. Montrons que dans le cas général, il y a lieu de distinguer les vitesses de propagation de l'énergie et de la phase.

D - PROPAGATION DE L'ENERGIE

Dans les études antérieures, les seules allusions au problème de la propagation de l'énergie apparaissent dans l'étude du vecteur de Poynting [15], [5], [6].

Dans un premier temps nous réécrivons ce vecteur dans le cadre relativiste de notre étude. En considérant son évolution dans le temps, nous en déduisons que la variation de l'énergie peut se faire dans plusieurs directions et qu'en moyenne la direction de propagation est celle des droites isophases équiamplitudes. L'étude du vecteur de Poynting conduit alors à une propagation non rectiligne des champs du modèle étudié. Le comportement des 4-vecteurs k^μ et h^μ dans les transformations de Lorentz permettra d'une certaine manière de confirmer cette hypothèse.

a) Le vecteur de Poynting.

Nous utilisons la définition habituelle du vecteur de Poynting :

3-9

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}$$

Nous l'écrivons en fonction du champ électrique et des 4-vecteurs k^μ et h^μ .

Pour cela nous donnons d'abord l'expression du champ magnétique en fonction de ces mêmes quantités.

De (3-2) nous tirons :

$$3-10 \quad \left\{ \begin{array}{l} c\vec{B}' = \frac{1}{k^{02} + h^{02}} (\vec{F} \wedge \vec{E}' + \vec{G} \wedge \vec{E}'') \\ c\vec{B}'' = \frac{1}{k^{02} + h^{02}} (\vec{F} \wedge \vec{E}'' - \vec{G} \wedge \vec{E}') \\ c^2 \vec{B}' \vec{B}'' = \vec{E}' \vec{E}'' \end{array} \right.$$

Nous avons posé :

$$3-11 \quad \begin{array}{l} \vec{F} = h^0 \vec{h} + k^0 \vec{k} \\ \vec{G} = h^0 \vec{k} - k^0 \vec{h} \end{array} ; \quad \vec{F} \vec{G} = 0$$

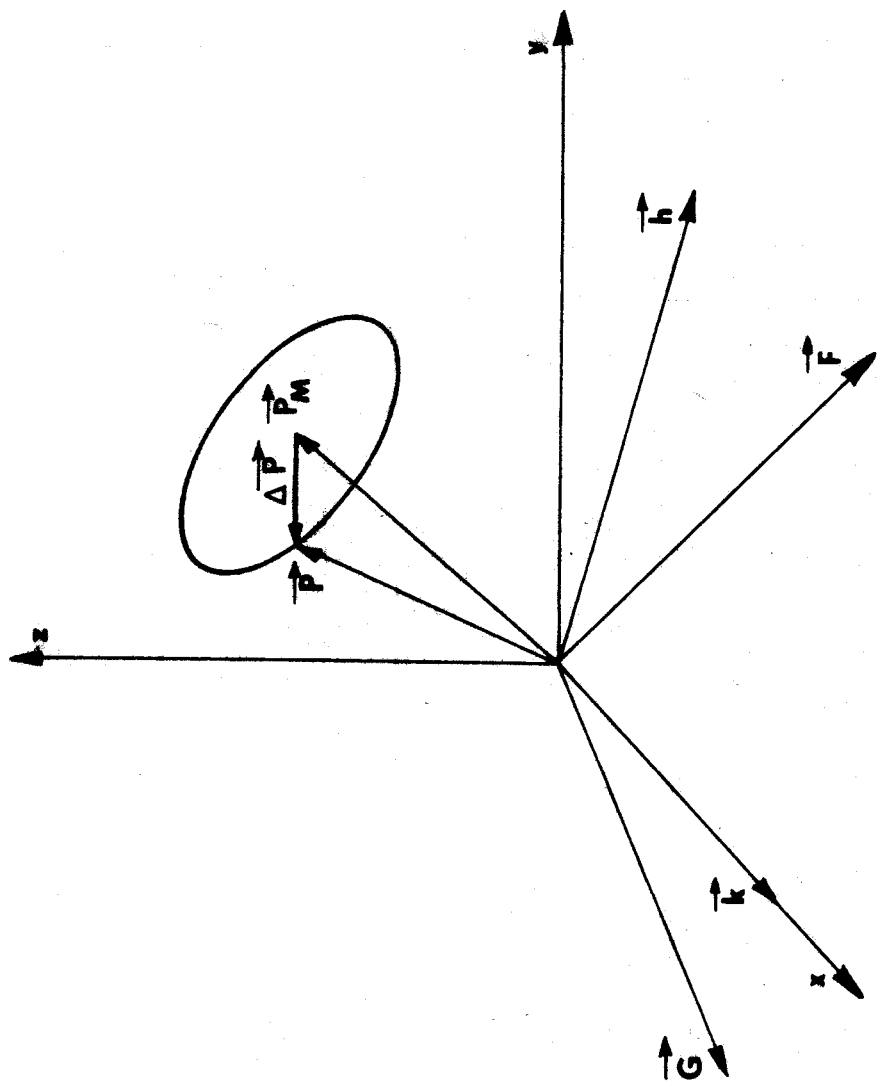
Compte tenu des relations (A-2) qui deviennent :

$$3-12 \quad \vec{F} \vec{E}'' = \vec{G} \vec{E}' ; \quad \vec{F} \vec{E}' = -\vec{G} \vec{E}''$$

Le vecteur de Poynting a pour expression :

$$3-13 \quad \vec{P} = \frac{\epsilon_0 c e^{-2h^\mu x_\mu}}{k^{02} + h^{02}} \left[-(\vec{F} \vec{E}') \vec{E}' - (\vec{F} \vec{E}'') \vec{E}'' \right. \\ \left. + (\vec{E}'^2 \cos^2 k^\mu x_\mu + \vec{E}''^2 \sin^2 k^\mu x_\mu - \vec{E}' \vec{E}'' \sin 2k^\mu x_\mu) \vec{F} \right. \\ \left. + (\vec{E}' \vec{E}'' \cos 2k^\mu x_\mu + \frac{1}{2} (\vec{E}'^2 - \vec{E}''^2) \sin 2k^\mu x_\mu) \vec{G} \right]$$

De même il est possible d'exprimer la densité d'énergie électromagnétique en fonction des mêmes quantités.



-- Figure 3.5 -- Le vecteur de Poynting pour une polarisation quelconque.

Par définition dans le vide :

$$3-14 \quad \omega_{em} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} (E^2 + c^2 B^2)$$

$$3-15 \quad \omega_{em} = \epsilon_0 e^{-2h^\mu x_\mu} \left[\frac{1}{2} (\vec{E}'^2 + \vec{E}''^2) \frac{k^2 + k'^2}{k'^2 + h'^2} - \frac{(\vec{F}'\vec{E}')^2 + (\vec{F}''\vec{E}'')^2}{(k'^2 + k''^2)^2} \right. \\ \left. + \vec{E}'^2 \cos^2 k^\mu x_\mu + \vec{E}''^2 \sin^2 k^\mu x_\mu - \vec{E}'\vec{E}'' \sin 2k^\mu x_\mu \right]$$

Le vecteur de Poynting et la densité d'énergie électromagnétique ont en un point d'espace une valeur qui évolue dans le temps, ou réciproquement en un instant donné, leur valeur change suivant le point d'espace considéré.

Le raisonnement utilisé dans le chapitre deux pour déterminer la direction de propagation de l'énergie nous contraint à la conclusion qu'il n'y a pas de propagation en ligne droite du type d'onde étudié puisque la variation d'énergie peut se faire dans plusieurs directions, le vecteur de Poynting ayant une direction variable dans le temps. Pour fixer les idées, précisons l'évolution de ce vecteur dans le temps. L'extrémité du vecteur de Poynting décrit une ellipse dans un plan parallèle au plan (\vec{h}, \vec{k}) dont la cote dépend de la polarisation. Son centre est l'extrémité du vecteur de Poynting moyen que nous définirons plus loin. Ses axes sont parallèles aux directions \vec{F} et \vec{G} . Leur grandeur dépend de la polarisation mais l'ellipticité en est indépendante (Fig. 3.5).

Si le vecteur de Poynting instantané ne résoud pas avec précision le problème de la propagation de l'énergie, le vecteur de Poynting moyen apporte des précisions intéressantes.

Nous le définissons de la manière suivante :

$$3-16 \quad \frac{1}{\epsilon_0 c e^{-2h\mu x_\mu}} \vec{P}_M = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\vec{P} dt}{\epsilon_0 c e^{-2h\mu x_\mu}}$$

de même la densité d'énergie moyenne :

$$3-16' \quad \frac{1}{\epsilon_0 e^{-2h\mu x_\mu}} \omega_{em_M} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\omega_{em} dt}{\epsilon_0 e^{-2h\mu x_\mu}}$$

La moyenne est ainsi faite sur les termes périodiques dont la nature est différente physiquement de la décroissance exponentielle.

Avec ces définitions, nous obtenons :

$$3-17 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{P}_M = \frac{\epsilon_0 c e^{-2h\mu x_\mu}}{k^{02} + h^{02}} \left\{ - (\vec{F} \vec{E}') \vec{E}' - (\vec{F} \vec{E}'') \vec{E}'' + \frac{1}{2} (E'^2 + E''^2) \vec{F} \right\} \\ \omega_{em_M} = \frac{\epsilon_0 e^{-2h\mu x_\mu}}{(k^{02} + h^{02})^2} \left\{ \frac{1}{2} (E'^2 + E''^2) (k^{02} + h^{02}) (k^2 + h^{02}) - (\vec{F} \vec{E}')^2 - (\vec{F} \vec{E}'')^2 \right\} \end{array} \right.$$

Le vecteur de Poynting \vec{P} et le vecteur de Poynting moyen \vec{P}_M ont tous deux une composante suivant l'axe Oz perpendiculaire au plan (\vec{h}, \vec{k}) indépendante de la variable z. Dans la relation de conservation

$$\text{div } \vec{P} + \frac{1}{c} \frac{\partial \omega_{em}}{\partial t} = 0$$

celle-ci n'intervient pas et elle peut être négligée dans l'étude de la direction de propagation. Nous ne considérons que les composantes dans le plan (\vec{h}, \vec{k}) du vecteur de Poynting et du vecteur de Poynting moyen.

Physiquement ceci revient à négliger un glissement de l'énergie parallèlement aux plans isophases et équiampitudes, glissement qui serait indiscernable expérimentalement.

Montrons alors la relation :

$$3-18 \quad \vec{P}_M = c \sqrt{\frac{k^{02} + h^{02}}{k^2 + h^{02}}} \omega_{emM} \vec{r} \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$$

Le vecteur \vec{P}_M est parallèle à \vec{F} en effet :

$$\vec{P}_M \vec{G} = \frac{\epsilon_0 c e^{-2h^\mu x_\mu}}{k^{02} + h^{02}} \left\{ -(\vec{F} \vec{E}') (\vec{G} \vec{E}') - (\vec{F} \vec{E}'') (\vec{G} \vec{E}'') \right\}$$

Compte tenu des relations (3-12) nous obtenons :

$$\vec{P}_M \vec{G} = 0$$

Calculons alors le module de \vec{P}_M ; compte tenu du fait que la composante P_{Mz} n'intervient pas.

$$\begin{aligned} |\vec{P}_M| &= \frac{\vec{P}_M \vec{F}}{|\vec{F}|} \\ &= \frac{\epsilon_0 c e^{-2h^\mu x_\mu}}{(k^{02} + h^{02})} \left\{ -(\vec{F} \vec{E}')^2 - (\vec{F} \vec{E}'')^2 + \frac{1}{2} (E'^2 + E''^2) F^2 \right\} \end{aligned}$$

D'après l'expression de \vec{F} , son module est $(k^{02} + h^{02})^{1/2} (k^2 + h^{02})^{1/2}$
et :

$$|\vec{P}_M| = c \sqrt{\frac{k^{02} + h^{02}}{k^2 + h^{02}}} \omega_{emM}$$

D'où la relation annoncée entre le vecteur de Poynting moyen et la densité d'énergie moyenne.

De cette relation nous pouvons tirer la conclusion suivante :

En moyenne, l'énergie se propage dans la direction \vec{F} à la vitesse v_{dn} :

$$v_{dn} = \sqrt{\frac{k^{02} + h^{02}}{k^2 + h^{02}}} c$$

Autrement dit, l'énergie -pour le type d'onde étudié- se propage en moyenne comme les droites isophases équiamplitudes.

En conclusion, l'étude du vecteur de Poynting laisse supposer plusieurs directions de propagation et celle du vecteur de Poynting moyen donne un support physique à la propagation des droites isophases et équiamplitudes. Mais la vitesse de propagation est inférieure à celle de la lumière dans le vide : nous allons voir quelles en sont les conséquences en retrouvant ce résultat par une autre méthode.

b) Vitesse de propagation de l'énergie.

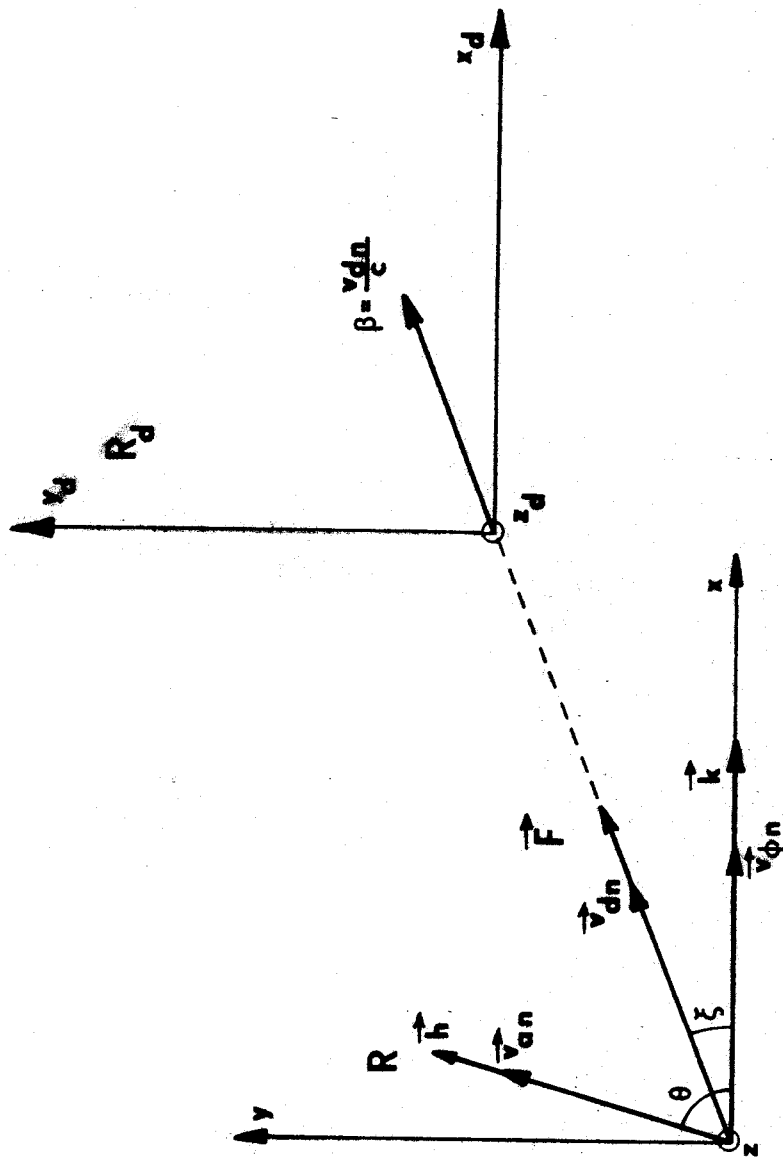
Pour trouver la vitesse de propagation de l'énergie, nous allons montrer qu'il existe un repère R_d en translation uniforme par rapport à R dans lequel les champs sont statiques et par conséquent dans lequel la vitesse de propagation est nulle.

Considérons en effet le repère R_d en translation uniforme par rapport à R tel que la vitesse relative soit dirigée suivant \vec{F} (direction de propagation des droites isophases équiamplitudes) et dont le module soit v_{dn} (Fig. 3.7), le repère existe car $v_{dn} < c$.

La transformation de Lorentz (Λ) faisant passer de R à R_d est :

$$\Lambda = \text{Rot}_{(-\xi)} \otimes L \otimes \text{Rot}_{\xi}$$

Opération dans laquelle Rot_{ξ} représente une rotation d'espace d'axe Oz et d'angle ξ tel que :



— Figure 3.7 — Les repères R et R_D .



$$\cos \xi = \frac{k^0}{k} \sqrt{\frac{k^2 + h^{02}}{k^{02} + h^{02}}}$$

Et L est la transformation spéciale de Lorentz dont la représentation matricielle est :

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \beta = \frac{v_{dn}}{c} = \sqrt{\frac{k^{02} + h^{02}}{k^2 + h^{02}}}$$

La matrice $[\Lambda]$ représentant l'opérateur Λ sera une matrice 4×4 dont nous ne donnons que la première ligne :

$$\Lambda_0^0 = \left(\frac{h^2 + k^{02}}{k^2 - k^{02}} \right)^{\frac{1}{2}} ; \quad \Lambda_1^0 = -\frac{k^0}{k} \left(\frac{h^2 + k^{02}}{k^2 - k^{02}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

3-21

$$\Lambda_2^0 = -\frac{h^0}{k} ; \quad \Lambda_3^0 = 0$$

Dans le nouveau repère R_d les champs sont écrits :

$$3-22 \quad \vec{E}_d = \vec{E}_{od} e^{iK_d^\mu x_{\mu d}} ; \quad \vec{B}_d = \vec{B}_{od} e^{-iK_d^\mu x_{\mu d}}$$

Ils se déduisent des champs dans R par la transformation du tenseur $F^{\mu\nu}$:

$$F_d^{\mu\nu} = \Lambda_\sigma^\mu \Lambda_\rho^\nu F^{\sigma\rho}$$

Nous ne développerons pas celle-ci : elle n'intervient que sur les vecteurs \vec{E}_0 et \vec{B}_0 ; la grandeur $K^\mu x_\mu$ étant scalaire ; elle est invariante.

Nous étudions le comportement du 4-vecteur K^μ dans cette transformation et plus particulièrement la composante temporelle K^0 de celui-ci.

Dans R les composantes de k^μ et h^μ sont :

$$k^\mu \left\{ \begin{array}{l} k^0 \\ k \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \quad h^\mu \left\{ \begin{array}{l} h^0 \\ \frac{h^0 k^0}{k} \\ \frac{1}{k} \sqrt{(k^2 - k^{02})(k^2 + h^{02})} \\ 0 \end{array} \right.$$

Dans R_d elles deviennent :

$$k_d^\mu = \Lambda_{\nu}^{\mu} k^{\nu} \quad ; \quad h_d^\mu = \Lambda_{\nu}^{\mu} h^{\nu}$$

Soit, pour les composantes temporelles k_d^0 et h_d^0 :

$$k_d^0 = \Lambda_{\nu}^0 k^{\nu} \quad ; \quad h_d^0 = \Lambda_{\nu}^0 h^{\nu}$$

Nous avons donné l'expression des Λ_{ν}^0 et le calcul donne :

$$h_d^0 = 0 \quad ; \quad k_d^0 = 0$$

Dans le repère R_d , le 4-vecteur d'onde complexe se réduit à sa composante spatiale :

$$\vec{K}_d = \vec{k}_d + i\vec{h}_d$$

Les champs \vec{E}_d et \vec{B}_d sont statiques dans ce repère :

$$\vec{E}_d = \vec{E}_{od} e^{-i\vec{K}_d \vec{r}_d} ; \quad \vec{B}_d = \vec{B}_{od} e^{-i\vec{K}_d \vec{r}_d}$$

Un champ statique ne rayonne pas d'énergie : la vitesse de propagation de l'énergie dans R_d est nulle. En conséquence, dans R elle est la vitesse relative des deux repères : c'est celle des droites isophases équiamplitudes. Nous retrouvons ainsi le résultat obtenu par l'étude du vecteur de Poynting moyen. On peut remarquer que la vitesse de propagation de l'énergie dépend du repère dans lequel elle est mesurée, ce qui vient en contradiction avec le principe de relativité. Nous arrivons au résultat suivant : le modèle étudié est solution mathématique des équations de Maxwell mais ne suit pas un principe de relativité. Nous pouvons mettre ce résultat en parallèle avec la conclusion concernant le vecteur de Poynting instantané. La relativité restreinte part du principe que la vitesse de la lumière est identique dans tous les repères lorentziens. Tacitement il s'agit de propagation libre en ligne droite. Ici ce principe n'est pas respecté, nous pouvons interpréter ce résultat en disant que ce type de propagation est incompatible avec le modèle étudié et nous retrouvons le résultat concernant le vecteur de Poynting instantané.

Nous en concluons que le modèle étudié ne représente pas une onde physique puisqu'un principe de relativité n'est pas respecté.

Deux points sont intéressants à noter :

- Il n'est pas possible de raisonner de cette manière avec l'onde plane homogène puisque le plan isophase se déplace à la vitesse c de la lumière.
- Nous trouvons un résultat concernant l'énergie sans faire intervenir une définition quelconque de celle-ci.

Ces remarques montrent que c'est le modèle utilisé qui est en cause dans ce résultat.

E - CONCLUSION

Nous avons étudié dans ce chapitre les caractéristiques physiques de l'onde plane à 4-vecteur d'onde plane complexe dont les parties réelles et imaginaires sont du genre espace. Ce type d'onde est l'écriture covariante des ondes hétérogènes planes et uniformes déjà étudiées. Nous avons donc porté l'étude sur les points qui ont été modifiés par l'introduction du formalisme covariant et sur le problème de l'énergie qui n'avait pas été abordé à fond. Nous sommes arrivés aux conclusions suivantes : il est possible de définir des plans équiampitudes des plans isophases respectivement normaux aux parties spatiales imaginaires \vec{h} et réelles \vec{k} du 4-vecteur d'onde. Ces plans évoluent dans la direction de ces vecteurs avec des vitesses

$$v_a = \frac{h^0 c}{h} \quad \text{et} \quad v_\phi = \frac{k^0 c}{k}$$

Il est également possible de définir des droites isophases-équiampitudes normales au plan (\vec{h}, \vec{k}) qui évoluent dans la direction

$$\vec{F} = k^0 \vec{k} + h^0 \vec{h} \quad \text{à la vitesse } v_{dn} < c.$$

Dans le cas des ondes uniformément hétérogènes, les plans équiampitudes sont "immobiles" et les droites isophases équiampitudes évoluent à la même vitesse dans la même direction que les plans isophases. Elles ont déjà été utilisées sans être nommées dans une des explications des déplacements Imbert et Goss Hanchen [16].

L'étude de la propagation de l'énergie a été réalisée en deux temps.

Tout d'abord l'étude du vecteur de Poynting et de ses seules composantes intervenant dans la relation de conservation de l'énergie montre qu'il y aurait plusieurs directions de propagation de l'énergie si l'hypothèse visant à donner un sens physique du vecteur de Poynting est correcte. Si c'est le vecteur de Poynting moyen qui peut être considéré comme direction de propagation alors celle-ci est \vec{F} direction de

propagation des droites isophases-équiamplitudes.

L'étude du comportement des 4-vecteurs k^μ et h^μ dans les transformations de Lorentz va trancher cette alternative de manière surprenante, sans pour autant résoudre le problème de l'existence du sens physique du vecteur de Poynting ou du vecteur de Poynting moyen.

Il est en effet possible de trouver un repère R_d lorentzien dans lequel les champs sont statiques et donc dans lequel la vitesse de propagation de l'énergie est nulle. Nous en avons déduit que dans un repère R quelconque la vitesse de propagation de l'énergie est la vitesse relative entre R et R_d . C'est la direction \vec{F} et la vitesse des droites isophases-équiamplitudes. Ce résultat semble confirmer l'hypothèse concernant le vecteur de Poynting moyen. Mais la vitesse étant une vitesse relative entre deux repères, elle n'est pas indépendante du repère comme le propose le principe de relativité. Le type d'onde étudié ne respecte donc pas le principe de relativité et il n'y a pas de propagation en ligne droite pour ce type d'onde, ce qui rejoint la conclusion concernant le vecteur de Poynting. De toute façon, nous sommes obligés de conclure de la manière suivante : le modèle que nous avons étudié est solution mathématique des équations de Maxwell mais ne représente pas une onde physique dans la mesure où il ne respecte pas le principe de relativité. Nous allons voir néanmoins qu'il est possible d'utiliser ce modèle et de prévoir des résultats vérifiés expérimentalement, en limitant l'onde de façon à exclure les infinités. C'est l'objet du chapitre suivant qui étudie un modèle d'onde hétérogène d'extension finie.

— CHAPITRE IV —

UN MODELE D'ONDE HETEROGENE D'EXTENSION FINIE

Les contradictions rencontrées dans le chapitre précédent ainsi que l'existence d'une infinité pour l'énergie à l'infini sont manifestement liées à un manque de conditions aux limites. Le modèle précédent est solution des équations de Maxwell si l'on n'impose pas de conditions aux limites. Pour étayer cette supposition nous étudions un modèle d'ondes hétérogènes d'extension finie, dont l'étude permet de prévoir un effet qui sera vérifié expérimentalement.

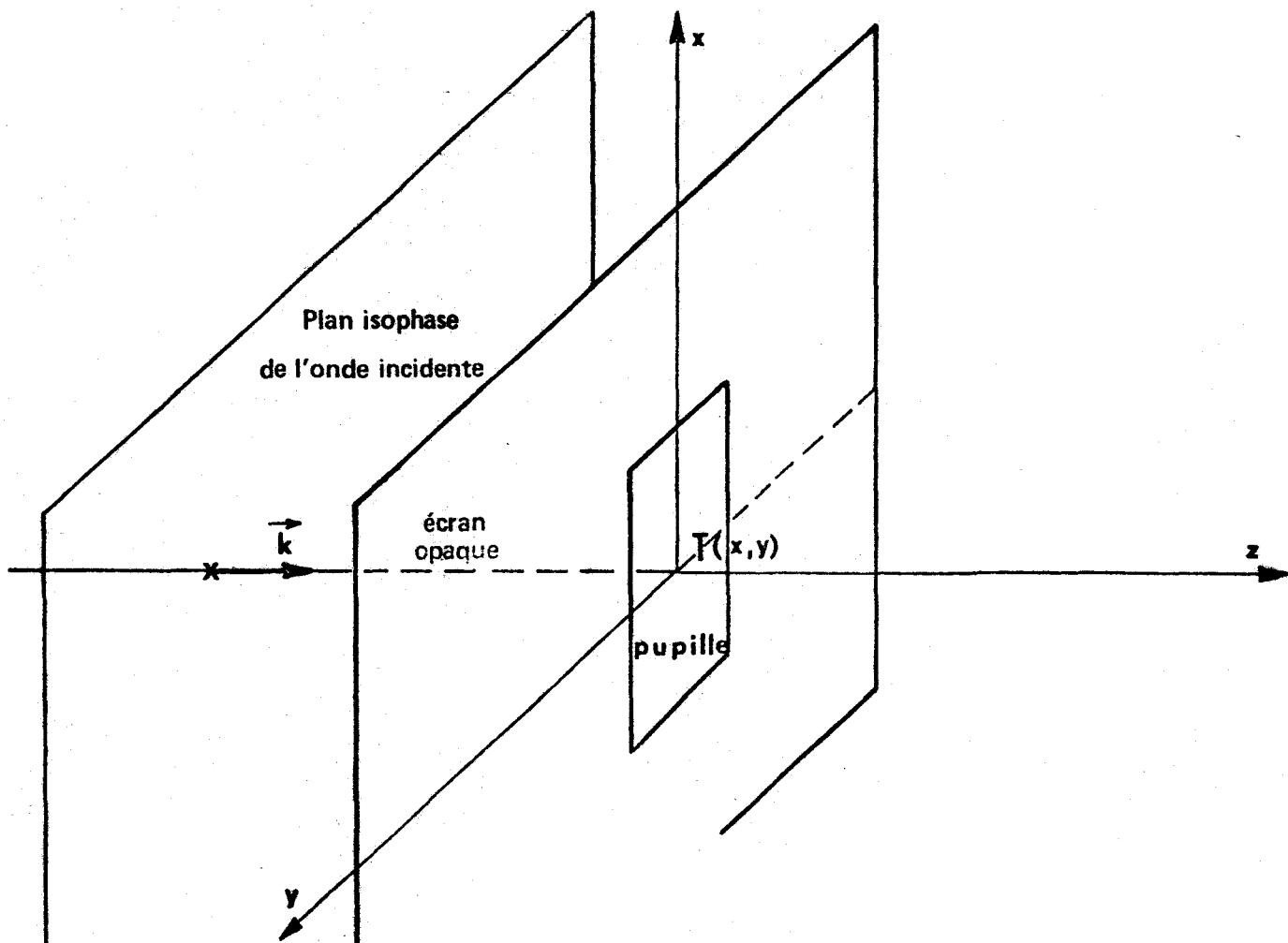
Nous proposons d'abord un paquet d'ondes hétérogènes d'extension finie. Dans un deuxième temps nous en étudions la caractéristique qui permet de prévoir un effet. En conclusion nous parlons de la vérification expérimentale de celui-ci.

A - LES ONDES HÉTÉROGENES D'EXTENSION FINIE

Nous avons étudié les ondes hétérogènes dans le cas le plus général, c'est-à-dire sans préciser le repère dans lequel nous travaillons. Pour simplifier les calculs, nous nous placerons dans le repère R_a pour lequel h^0 est nul. C'est celui qui a été implicitement choisi dans toutes les études antérieures.

Dans celles-ci, une source d'onde hétérogène a été proposée [4] : la traversée d'un prisme absorbant par une onde plane homogène. Nous reprenons ce type de source en la modifiant légèrement pour obtenir des ondes hétérogènes d'extensions finies :

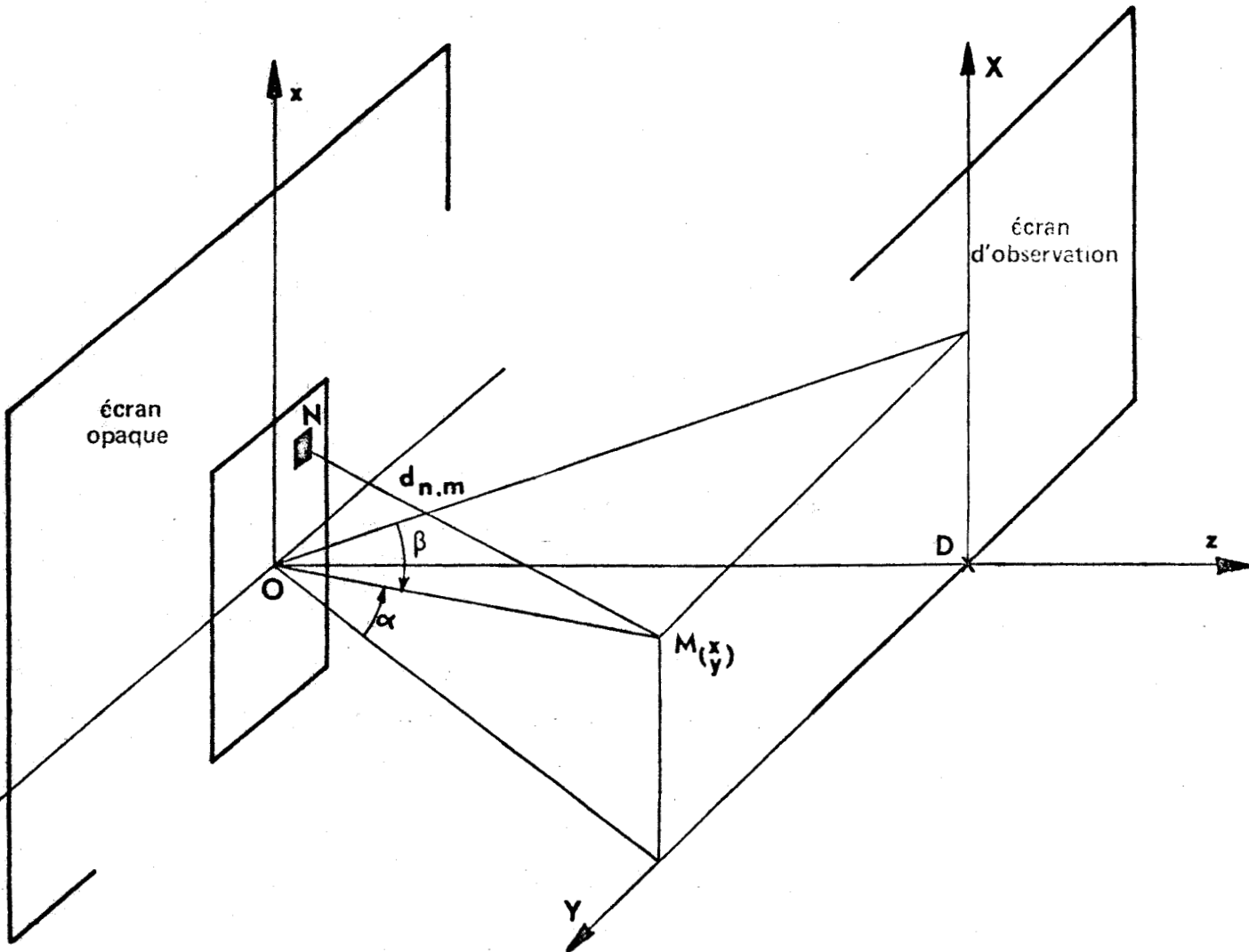
une onde plane homogène tombe normalement sur un écran opaque percé d'une pupille rectangulaire de transparence $T(x,y)$ exponentielle dans une direction (Ox) (Fig. 4.1).



- Figure 4.1 - Ecran et plan d'onde incident.

La transparence exponentielle pourra être obtenue expérimentalement par un prisme absorbant de la taille de la pupille. De même l'onde plane homogène incidente peut être limitée à ces mêmes dimensions : seule l'amplitude sur la pupille interviendra dans le calcul. Pour étudier l'état de l'onde de l'autre côté de l'écran, nous utilisons le postulat de Fresnel [17] considérant chacun des points de la pupille comme une source émettant dans toutes les directions d'amplitude $T_{(xy)} ds$. Il serait également possible d'utiliser le théorème de Kirchhoff.

Un point N de la pupille, de coordonnées (x,y) émet donc dans toutes les directions une amplitude $ds_N = T_{(xy)} dx dy$. Considérons alors un écran d'observation parallèle au premier, situé à une distance D de l'écran source. En un point M de cet écran, il y aura superposition de la contribution ds_{NM} de chaque source élémentaire de la pupille (Fig. 4.2).



- Figure 4.2 - Source élémentaire N et point d'observation M .

ds_{NM} représente l'amplitude en M de la source en N : il est tenu compte du chemin parcouru entre N et M :

$$4-1 \quad ds_{NM} = ds_N e^{-i k d_{NM}} = T_{(xy)} e^{-i k d_{NM}} dx dy$$

L'amplitude en M est alors :

$$A_M = \int_N ds_{NM}$$

$N \in \text{pupille}$

Soit :

$$4-2 \quad A_M = \int_N T_{(xy)} e^{-i k d_{NM}} dx dy$$

Cette intégrale peut se simplifier si la distance d'observation D est grande face aux dimensions de la pupille, ce qui est expérimentalement souvent le cas.

Les coordonnées de M sont (X, Y, D) d'où :

$$d_{NM} = [(X - x)^2 + (Y - y)^2 + D^2]^{\frac{1}{2}}$$

Posons :

$$d_{OM} = (X^2 + Y^2 + D^2)^{\frac{1}{2}}$$

alors :

$$4-3 \quad d_{NM} = [d_{OM}^2 + x(x - 2X) + y(y - 2Y)]^{\frac{1}{2}}$$

Au second ordre en x et y :

$$d_{NM} = d_{OM} + \frac{x(x - 2X) + y(y - 2Y)}{2 d_{OM}}$$

Soient α et β les angles tels que :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{X}{(D^2 + Y^2)^{1/2}} ; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{Y}{(D^2 + X^2)^{1/2}}$$

Enfin :

$$4-4 \quad d_{NM} = d_{OM} + \frac{x^2 + y^2}{2 d_{OM}} - (x \sin \alpha + y \sin \beta)$$

Pour D grand devant les dimensions de la pupille, l'amplitude devient :

$$4-5 \quad A_M = e^{-k d_{OM}} \int_{\text{pupille}} T_{(xy)} e^{-i k \left\{ \frac{x^2 + y^2}{2 d_{OM}} - (x \sin \alpha + y \sin \beta) \right\}} dx dy$$

Cette expression rend compte de manière satisfaisante de la diffraction de Fresnel. Un développement au premier ordre donne l'expression de l'amplitude dans le cas de la diffraction de Fraunhofer [18] :

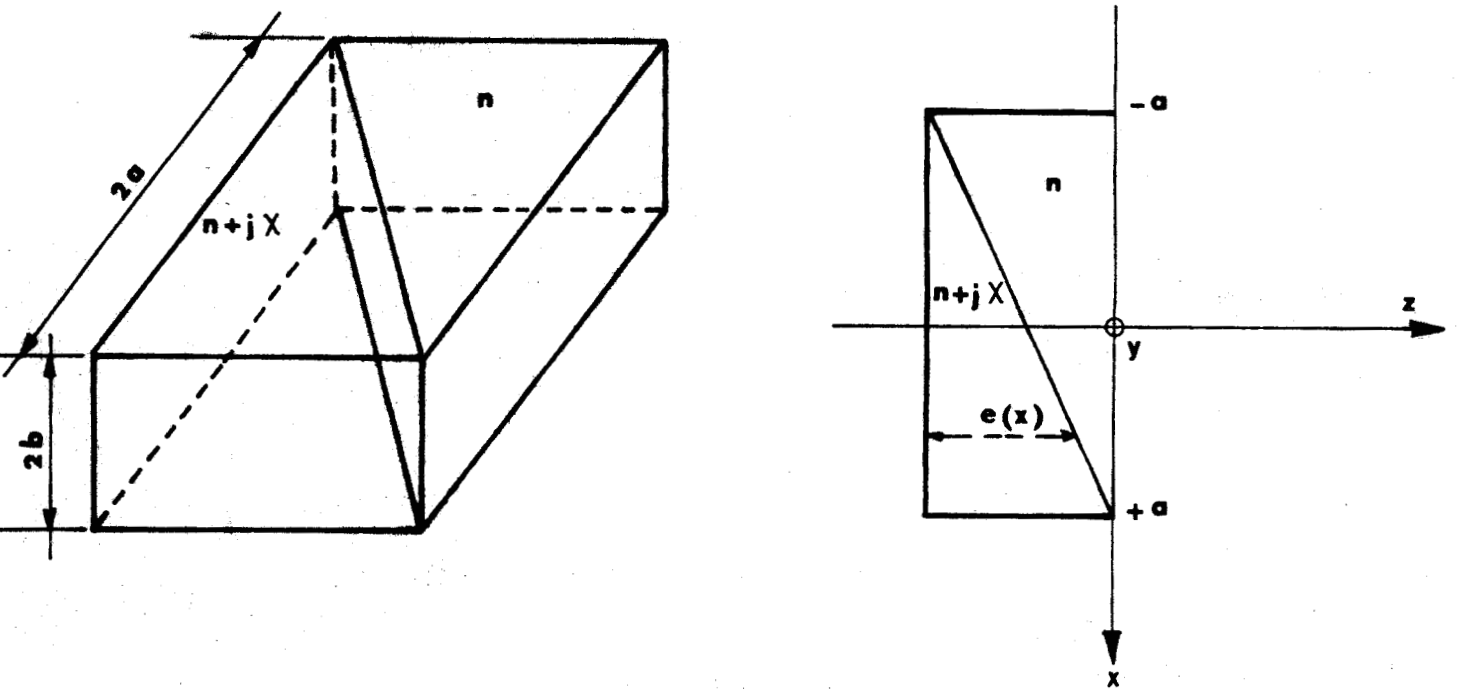
$$4-6 \quad A_M = e^{-i k d_{OM}} \int_{\text{pupille}} T_{(xy)} e^{i k (x \sin \alpha + y \sin \beta)} dx dy$$

Expérimentalement la diffraction à l'infini (de Fraunhofer) s'observe dans le plan focal d'une lentille.

C'est elle que nous étudions avec une transparence exponentielle.

Cette transparence peut être obtenue en plaçant dans la pupille un ensemble de deux prismes géométriquement identiques placés de manière à fermer un parallélépipède rectangle ce qui permet de conserver la phase constante dans le plan de la pupille*. L'un des prismes sera pris absorbant, les indices des deux prismes étant alors : n et $n + j\chi$ (Fig. 4.3).

* Expérimentalement ce n'est pas une nécessité, théoriquement cela simplifie les calculs.



— Figure 4.3 — Prisme absorbant et épaisseur traversée.

La transparence qui est le rapport entre les amplitudes d'entrée et de sortie est :

$$T_{(xy)} = \frac{A}{A_0} = e^{-k\chi e(x)}$$

Expression dans laquelle k est le nombre d'ondes de l'onde incidente, χ le coefficient d'absorption du prisme et $e_{(x)}$ l'épaisseur traversée.

$$e_{(x)} = (x + a) \operatorname{tg} \alpha$$

Notons :

4-7

$$h = \chi \operatorname{tg} \alpha$$

La transparence est donc :

$$4-8 \quad T_{(xy)} = \begin{cases} 0 & \forall x \in] -\infty - a [\cup] a + \infty [\\ & \forall y \in] -\infty - b [\cup] b + \infty [\\ -h k(x+a) & \forall x \in [-a + a] \\ & \forall y \in [-b + b] \end{cases}$$

L'amplitude d'une onde hétérogène d'extension finie en un point M loin de la source est donnée par :

$$4-9 \quad A_M = \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b}^{+b} dy \left[e^{-hk(x+a)} e^{i k(x \sin \alpha + y \sin \beta)} \right]$$

Il est possible de calculer cette intégrale :

Introduisons les variables angulaires u et v en posant :

$$4-10 \quad u = \sin \alpha \quad ; \quad v = \sin \beta$$

la relation entre les coordonnées X, Y, D et u et v sont :

$$X = \frac{Du}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}} \quad ; \quad Y = \frac{Dv}{\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}}$$

L'intégrale 4-9 avec ces notations devient :

$$A_M = e^{-hka} \int_{-b}^{+b} e^{i kv y} dy \int_{-a}^{+a} e^{i k(u+ih)x} dx$$

Soit finalement :

$$4-11 \quad A_M = e^{-hka} 4ab \frac{\sin kvb}{kvb} \cdot \frac{\sin k(u+ih)a}{k(u+ih)a}$$

C'est l'expression de la distribution d'amplitude d'une onde hétérogène d'extension finie dans le plan focal d'une lentille. L'intensité correspondante est :

$$4-12 \quad I_M = |A_M|^2 = (4ab)^2 e^{-2hka} \frac{\sin^2 kvb}{(kvb)^2} \frac{\sin^2 kua + sh^2 kha}{k^2 a^2 (u^2 + h^2)}$$

Comparons l'intensité précédente à celle de l'onde plane homogène dans les mêmes conditions. Nous la retrouvons en faisant tendre h vers zéro. Le profil d'intensité dans le cas de l'onde plane homogène pour une diffraction de Fraunhofer est :

$$4-13 \quad I_{M(\text{hom})} = (4ab)^2 \frac{\sin^2 kvb}{(kvb)^2} \frac{\sin^2 kua}{(kua)^2}$$

L'étude comparative de ces deux profils va mettre en évidence une différence fondamentale au niveau de la focalisation.

B - NON FOCALISATION DES ONDES HETEROGENES D'EXTENSION FINIE

Les deux distributions d'intensité dépendent des variables angulaires u et v . La dépendance en v est identique dans les deux cas homogène et hétérogène. La différence se situe au niveau de la seule variable u : nous comparerons alors les deux distributions suivantes :

$$4-14 \quad I_M = I_0 e^{-2hka} \frac{\sin^2 kua + sh^2 kha}{k^2 a^2 (h^2 + u^2)} ; \quad I_{M(\text{hom})} = I_0 \frac{\sin^2 kua}{(hua)^2}$$

Elles représentent (Fig. 4.5) un maximum principal prononcé et des maxima secondaires. La caractéristique qui nous intéressera est la largeur à mi-hauteur du maximum principal toujours centré sur $u = 0$.

Nous la déterminons pour les deux profils.

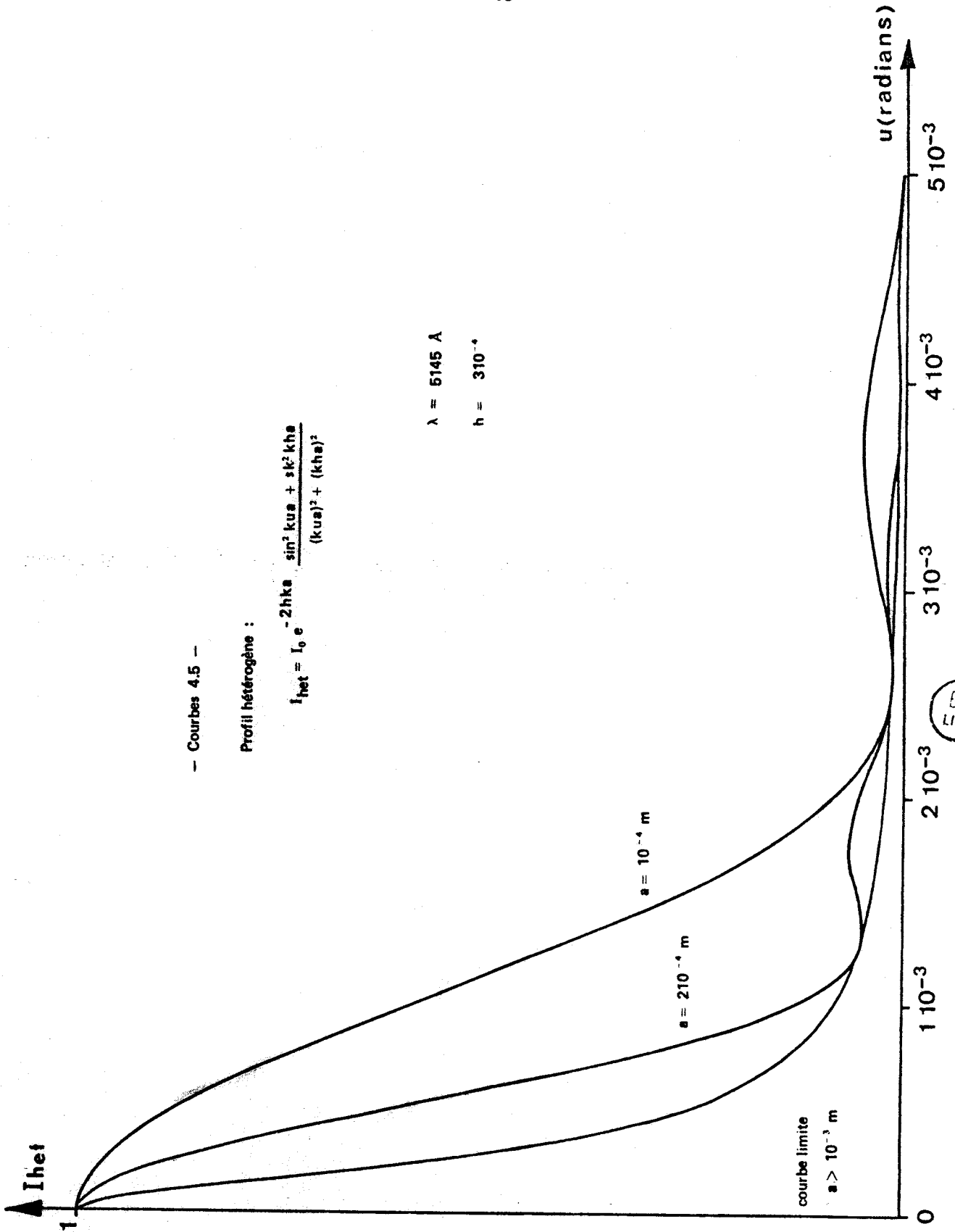
- Courbes 4.5 -

Profil hétérogène :

$$I_{het} = I_0 e^{-2hka} \frac{\sin^2 kua + sk^2 kha}{(kua)^2 + (kha)^2}$$

$$\lambda = 6145 \text{ \AA}$$

$$h = 310^{-4}$$



a) Profil homogène.

Le maximum principal de $I_{M(\text{hom})}$ a pour hauteur I_0 pour $u = 0$. La largeur angulaire à mi-hauteur est alors définie par :

$$\delta = 2u_0$$

avec u_0 solution de l'équation transcendante :

$$I_0 \frac{\sin^2 ku_0 a}{(ku_0 a)^2} = \frac{I_0}{2}$$

En posant $X_0 = ku_0 a$, cette équation devient simplement :

$$\sin^2 X = \frac{1}{2} X^2$$

Dont la solution est un nombre unique :

$$X_0 = 1,39155$$

Soit pour u_0 :

$$u_0 = \frac{X_0}{ka}$$

La largeur angulaire à mi-hauteur pour le profil homogène est enfin :

$$4-15 \quad \delta_{\text{hom}} = \frac{2X_0}{ka}$$

L'étude de δ en fonction de a dimension de la pupille montre que la largeur à mi-hauteur tend vers zéro si la largeur de la pupille augmente.

La frange centrale dans le plan focal d'une lentille pour une onde plane homogène tend vers une limite idéalement nulle si la largeur de la pupille augmente indéfiniment. Nous parlerons de focalisation parfaite. Il n'en est pas de même avec l'onde hétérogène.

b) Profil hétérogène.

Pour ce profil, le maximum principal est en $u = 0$ et sa hauteur est :

$$I_M(0) = I_0 e^{-2hka} \frac{\text{sh}^2 kha}{(hka)^2}$$

La largeur angulaire à mi-hauteur est définie par :

$$\delta = 2u_0$$

avec u_0 solution de l'équation transcendante :

$$4-16 \quad \frac{\sin^2 kua + \text{sh}^2 kha}{k^2 a^2 (u^2 + h^2)} = \frac{1}{2} \frac{\text{sh}^2 kha}{(hka)^2}$$

Nous transformons cette équation pour en permettre une étude graphique ; elle peut en effet être mise sous la forme :

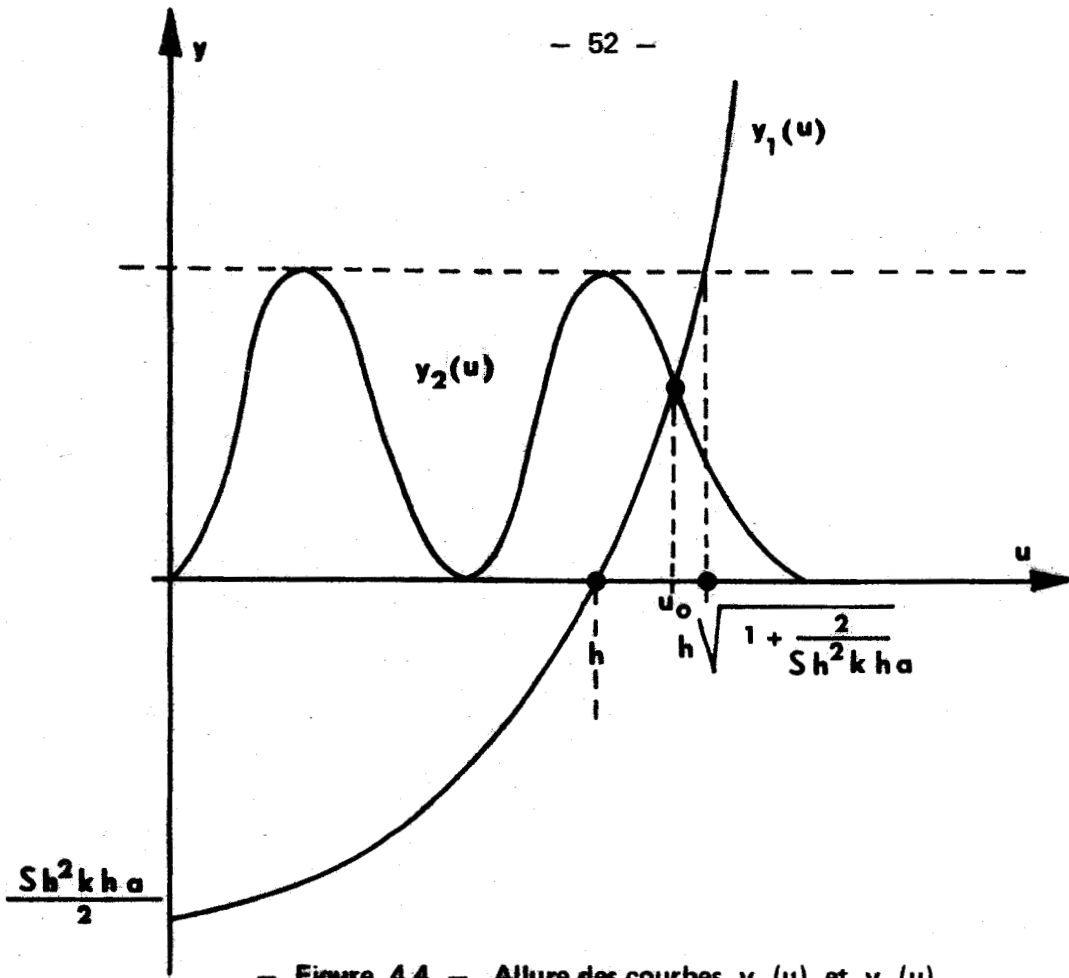
$$\left(\frac{u^2}{h^2} - 1 \right) \frac{\text{sh}^2 kha}{2} = \sin^2 (kua)$$

Notons y_1 le membre de gauche et y_2 celui de droite. Traçons les courbes $y_1(u)$ et $y_2(u)$: la ou les intersections fourniront la valeur u_0 cherchée. D'après la forme du profil nous savons qu'il n'y aura qu'une intersection (qu'une largeur à mi-hauteur).

La courbe $y_1(u)$ est une parabole, la deuxième bien connue est comprise entre 0 et 1, il s'ensuit que l'intersection sera dans cette zone et que la parabole doit être également coupée, d'où (Fig. 4.4) :

$$4-17 \quad 0 \leq y_1(u) \leq 1 \Rightarrow h \leq u_0 \leq h \sqrt{1 + \frac{2}{\text{sh}^2 kha}}$$

De cette inégalité, nous déduisons la polarisation imparfaite de l'onde hétérogène. En effet la limite inférieure de la largeur à mi-hauteur qui est ici $\delta = 2h$ ne peut être nulle comme dans le cas homogène.



- Figure 4.4 - Allure des courbes $y_1(u)$ et $y_2(u)$.

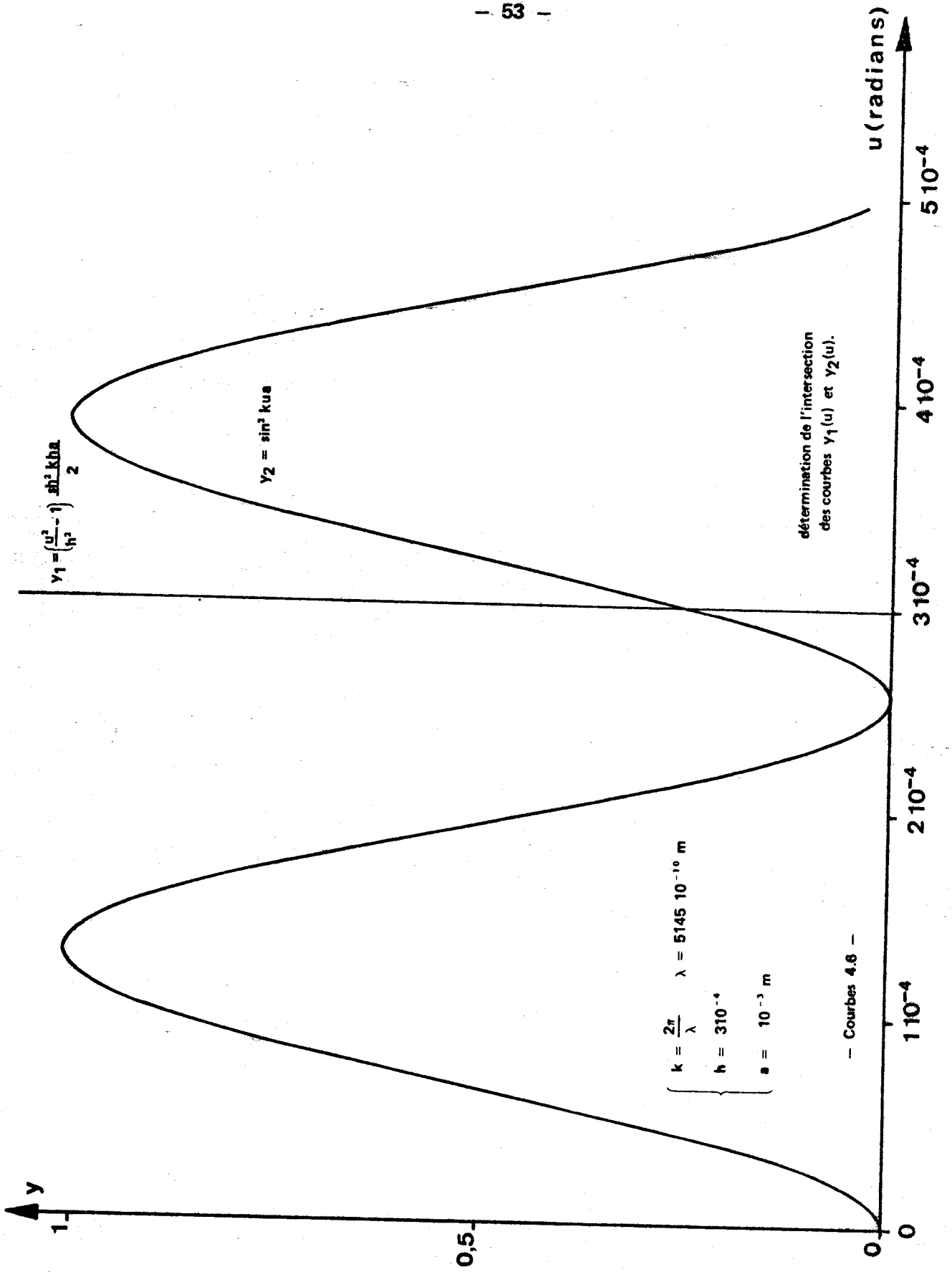
Les courbes 4.6 représentent y_1 et y_2 dans l'intervalle $y \in (0, 1)$.

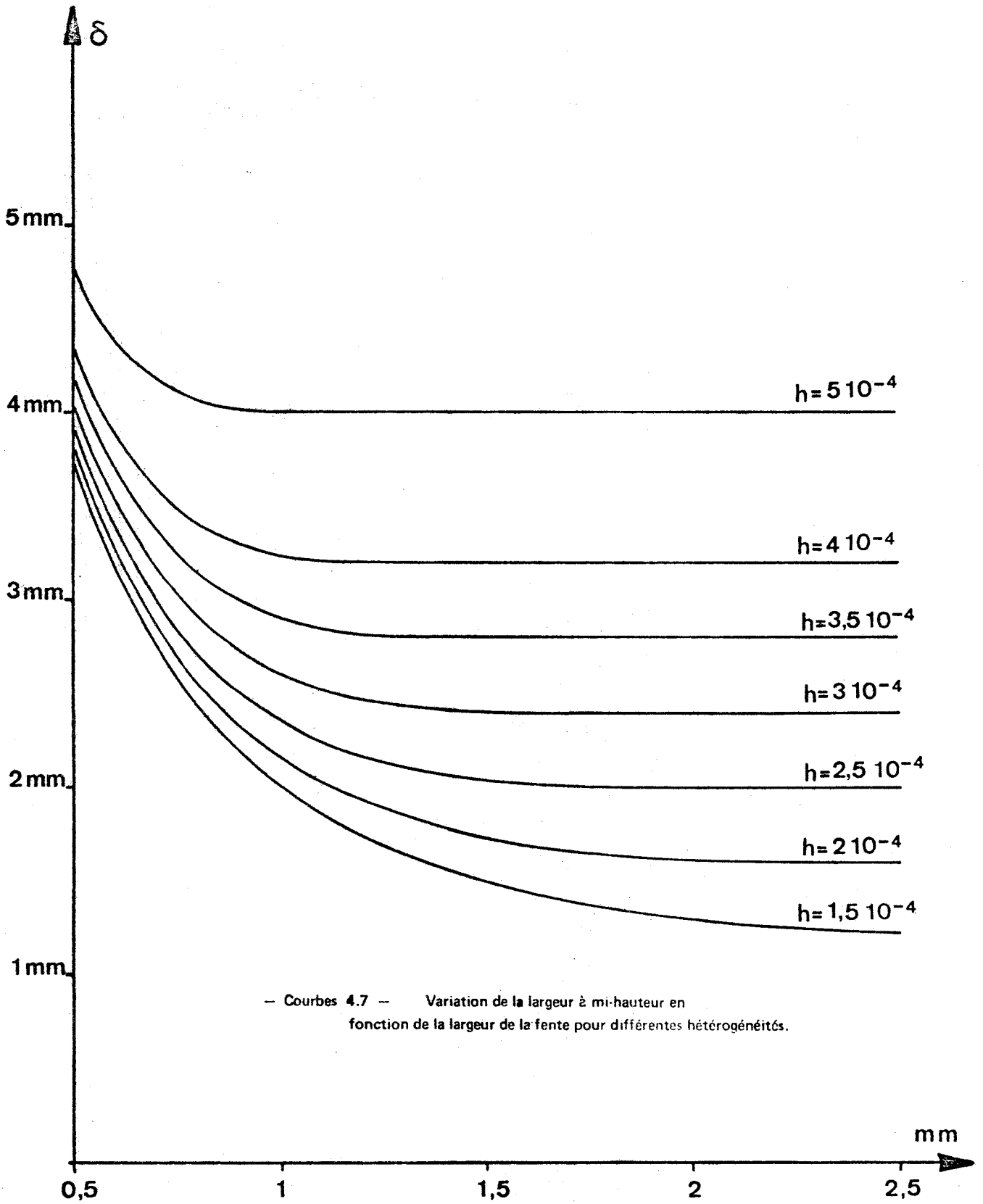
Les courbes 4.7 donnent la variation de la largeur à mi-hauteur en fonction de la largeur de la pupille pour différentes valeurs de h . Elles montrent que la largeur limite $2h$ est très vite atteinte (2 mm). Nous pouvons, sur l'expression 4-12, nous en rendre compte. En effet, quand le coefficient ha est grand devant ua , le sh est très grand devant le \sin et le profil devient simplement :

$$ha \gg ua \quad \text{et} \quad I_M = \frac{sh^2(hka)}{h^2 a^2 (u^2 + h^2)}$$

Ce profil limite a pour largeur à mi-hauteur $\delta = 2h$.

Celui-ci a une autre particularité : il n'y a plus de maximum secondaire. Le phénomène de non focalisation parfaite est accompagné d'apodisation.





-- Courbes 4.7 -- Variation de la largeur à mi-hauteur en fonction de la largeur de la fente pour différentes hétérogénéités.



C - VERIFICATION EXPERIMENTALE ET CONCLUSION

Le relevé des profils au foyer d'une lentille a été réalisé dans le Laboratoire des Stases Anisotropes [19].

Pour le profil hétérogène, un prisme absorbant est placé dans une pupille de largeur variable. La limite théorique est effectivement atteinte et l'accord entre la théorie et l'expérience pour la largeur à mi-hauteur est bon : la valeur expérimentale obtenue à 10 % près encadre parfaitement la valeur théorique ($\delta = 2dh$).

Pour le profil homogène, la pupille est transparente. La largeur à mi-hauteur limite précédente est très sensiblement dépassée bien que la limite théorique nulle du profil homogène ne soit évidemment pas atteinte.

Les prévisions théoriques sont confirmées. L'apodisation a également été observée.

Le modèle d'ondes hétérogènes d'extension finie proposé donne au moins un résultat physique. Il semble donc que limiter dans l'espace le modèle du chapitre précédent soit positif et que le manque de conditions aux limites des ondes uniformément hétérogènes soit la source des difficultés rencontrées. Dans tout problème physique ces conditions existent et pour qu'un modèle d'ondes hétérogènes se rapproche de la réalité il doit se plier à celles-ci.

PERSPECTIVES ET CONCLUSIONS

L'extension complexe du 4-vecteur d'onde a permis de mettre en évidence un certain nombre de notions et résultats nouveaux.

Dans une première étape nous avons établi l'existence de deux groupes de solutions suivant que les parties réelle k^μ et imaginaire h^μ du 4-vecteur d'onde sont du genre espace en lumière.

Nous avons étudié ensuite le contenu physique des solutions obtenues pour les équations de Maxwell.

Le premier type d'onde pour lequel k^μ et h^μ sont du genre lumière, introduit une notion nouvelle. Nous avons trouvé que les champs de ce type pouvaient provenir d'une source en extinction. Toute superposition de ces champs peut être comprise comme découlant d'une source en extinction. Cette superposition est représentée par une transformée de Laplace. Nous pouvons ainsi limiter dans le temps l'existence des champs.

Le deuxième type d'onde est une onde plane uniformément hétérogène, déjà étudiée dans un repère particulier. Nous en avons proposé une écriture covariante. Il a été ainsi possible de définir des droites isophases équiamplitudes dont la direction de propagation ($h^0 \vec{h} + k^0 \vec{k}$) est identique à celle de l'énergie moyenne. Pour ces ondes planes uniformément hétérogènes, le problème de l'énergie est abordé en détail. L'étude du vecteur de Poynting ne permet pas de définir une direction de propagation de l'énergie. L'étude du comportement des 4-vecteurs k^μ et h^μ dans les transformations de Lorentz montre que l'énergie se propage avec une vitesse qui dépend du repère dans lequel elle est mesurée, et donc bien que solutions des équations de Maxwell, les ondes planes uniformément hétérogènes ne suivent pas le principe de relativité.

En fait cette onde n'a pas d'existence physique, en particulier elle présente une amplitude infinie à l'infini. C'est pour cette raison que nous avons étudié un modèle d'onde hétérogène d'extension finie.

Nous montrons que cette onde plane hétérogène d'extension finie présente une focalisation plus grossière que l'onde plane homogène. Elle est associée à une apodisation dans la diffraction de Fraunhofer. Cette prévision a été confirmée par l'expérience.

L'étude que nous venons de retracer se prête à différentes extensions dans chacune des deux voies ouvertes.

Les différentes superpositions d'onde d'une source en extinction devraient permettre de rendre compte de certains modes d'extinction des sources lumineuses. L'étude de la transformée de Laplace utilisée dans ce sens devrait permettre de progresser dans la connaissance de ce genre de rayonnement. Certaines notions déjà connues telles que les précurseurs [18] [19] pourraient être retrouvées par cette méthode.

Une étude approfondie du modèle d'onde plane hétérogène d'extension finie, des superpositions de ce type d'onde nous rapprocherait de la réalité. D'autres sources d'ondes hétérogènes ont été proposées (réflexion totale, etc.). Une étude analogue à celle réalisée au chapitre quatre mérite d'être faite.

Les deux voies ainsi ouvertes permettront une meilleure compréhension de l'optique et une approche plus fine de la réalité.

I - L' ELECTROMAGNETISME CLASSIQUE ET RELATIVISTE

Le champ électromagnétique est défini dans le formalisme relativiste par le tenseur $F^{\mu\nu}$:

Par définition :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

A^μ est le 4-vecteur potentiel dont les composantes sont :

$$A^0 = \frac{1}{c} V ; (A_1, A_2, A_3) = \vec{A}$$

Les équations de Maxwell sont obtenues à l'aide du formalisme Lagrangien. Elles sont :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

Un autre groupe inhérent à la forme antisymétrique du tenseur $F^{\mu\nu}$ donne :

$$\partial_\rho F^{\mu\nu} + \partial_\mu F^{\nu\rho} + \partial_\nu F^{\rho\mu} = 0$$

En écriture tridimensionnelle le premier groupe est équivalent à :

$$\text{pour } \nu = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{pour } \nu = 1, 2, 3 \Rightarrow \text{Rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Le deuxième groupe :

$$(\rho, \mu, \nu) = (1, 2, 3) \Rightarrow \text{div } \vec{B} = 0$$

$$(\rho, \mu, \nu) = (0, 1, 2) (0, 1, 3) (0, 2, 3) \Rightarrow \text{Rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Pour la forme des champs (1,3) étudiés, elles deviennent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} = 0 & \Rightarrow \vec{k} \vec{E}_0 = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \Rightarrow \vec{k} \wedge \vec{B}_0 = -\frac{1}{c} K^0 \vec{E}_0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \Rightarrow \vec{k} \vec{B}_0 = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \Rightarrow \vec{k} \wedge \vec{E}_0 = c K^0 \vec{B}_0 \end{aligned}$$

En séparant les parties réelle et imaginaire, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{k} \vec{E}'_0 - \vec{h} \vec{E}''_0 &= 0 & \vec{h} \vec{E}'_0 + \vec{k} \vec{E}''_0 &= 0 \\ \vec{k} \wedge \vec{B}'_0 - \vec{k} \wedge \vec{B}''_0 &= -\frac{1}{c} (k^0 \vec{E}''_0 - k^0 \vec{E}'_0) & \vec{k} \wedge \vec{B}''_0 + \vec{h} \wedge \vec{B}'_0 &= -\frac{1}{c} (k^0 \vec{E}''_0 + h^0 \vec{E}'_0) \\ \vec{k} \vec{B}'_0 - \vec{h} \vec{B}''_0 &= 0 & \vec{k} \vec{B}''_0 + \vec{h} \vec{B}'_0 &= 0 \\ \vec{k} \wedge \vec{E}'_0 - \vec{h} \wedge \vec{E}''_0 &= c (k^0 \vec{B}'_0 - h^0 \vec{B}''_0) & \vec{k} \wedge \vec{E}''_0 + \vec{h} \wedge \vec{E}'_0 &= c (k^0 \vec{B}''_0 + h^0 \vec{B}'_0) \end{aligned}$$

II - DEUX 4-VECTEURS ISOTROPES ET ORTHOGONAUX SONT COLINEAIRES

$$k^\mu k_\mu = h^\mu h_\mu = 0 \Rightarrow k^{02} = k^2 ; h^{02} = h^2$$

$$k^\mu h_\mu = 0 \Rightarrow \vec{k} \vec{h} = k^0 h^0$$

$$\cos(\vec{k}, \vec{h}) = \frac{k^0 h^0}{k h}$$

$$|\cos(\vec{k}, \vec{h})| = \left| \frac{k^0 h^0}{k h} \right| = 1$$

↓

$$\vec{k} // \vec{h}$$

Posons

$$\vec{k} = \alpha \vec{h} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Alors

$$\vec{k} \vec{h} = \alpha h^2 = \alpha h^{02} = k^0 h^0$$

↓

$$\alpha h^0 = k^0$$

et

$$k^\mu = \alpha h^\mu$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CAUCHY (A) - C. R. Acad. Sci. 1836 - 2 - 341
- [2] GREEN (G) - Trans. Cambridge Phil. Soc.
1838 (Mathematical paper of the
Late George Green, pg 245,
Mac Millan London 1873)
- [3] CUVELIER (P) et BILLARD (J) - Rev. Opt. Appl. 1973 - 4 - 23, 36
- [4] CUVELIER (P) - Thèse, Lille 1974
- [5] COSTA DE BEAUREGARD (O),
IMBERT (C), RICARD (J) - Int. Jour. of theo. Phys. 1971
4 - 2 - 125 140
- [6] COSTA DE BEAUREGARD (O) - Int. Jour. of theo. Phys. 1973
7 - 2 - 129 143
- [7] BOGOLIOBOV (NN), CHIRKOV (DV) - "Introduction à la théorie quan-
tique des champs"
Pg 4145, DUNOD PARIS 1960
- [8] SYNGE (JL) - "RELATIVITY : the special theory"
Pg 26, North Holland
Amsterdam 1956
- [9] EINSTEIN (A) - Ann. der Phys. 1905 XVII
- [10] BORN (M), WOLF (E) - "Principles of optics"
Pg 22, Pergamon Press 1959
- [11] RICARD (J) - Rev. opt. appl. 1970 1 - 5

- [12] ARZELIES (M) - "Rayonnement et dynamique du corpuscule chargé fortement accéléré"
Pg 40, Gauthiers Villard
Paris 1966
- [13] JÄEGER (JC) - "An introduction to the Laplace transformation"
Pg 3, METHUEN'S Monograph
London 1961
- [14] DECUYPER (M) - "Modèle Mathématique de la Physique"
Pg 112, Dunod Université
Paris 1968
- [15] CUVELIER (P), BILLARD (J) - C. R. Acad. Sci. 1971 - 272 -
1172, 1175
- [16] STEERS (M) - Thèse, Lille 1973
- [17] BORN (M), WOLF (E) - "Principles of optics"
Pg 82, Pergamon Press 1959
- [18] BORN (M), WOLF (E) - "Principles of optics"
Pg 83, Pergamon Press 1959
- [19] WARENGHEM (M), CUVELIER (P) - A paraître
- [20] SOMMERFELD (A) - Ann. der Phys. 1914, 44 - 177
- [21] BRILLOUIN (L) - Ann. der Phys. 1914, 44 - 203

