N° d'ordre 351

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

le grade de Docteur ès Sciences

en Mathématiques

par

Gérard HECQUET

SUR L'EXISTENCE GLOBALE OU LA PERIODICITE DES SOLUTIONS DE PROBLEMES DIFFERENTIELS DE TYPE HYPERBOLIQUE

Membres du Jury : Messieurs les Professeurs

L. CESARI J.C. De PARIS M. ROSEAU J. VAILLANT	Rapporteurs
D. LEHMANN M. PARREAU	Examinateurs

Soutenue le 26 Mai 1976

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE

01.02.1976

DOYENS HONORAIRES de l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit
et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, SAVART, WATERLOT, WIEMAN, ZAMANSKI.

PRESIDENTS HONORAIRES DE L'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R. DEFRETIN, M. PARREAU.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. J. LOMBARD.

PROFESSEURS TITULAIRES

M.	BACCHUS Pierre	Astronomie
M.	BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Physique
M.	BECART Maurice	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BILLARD Jean	Physique du Solide
M.	BIAYS Pierre	Géographie
M.	BONNEMAN Pierre	Chimie Appliquée
M.	BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M.	BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M.	BOUGHON Pierre	Algèbre
M.	BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M.	CELET Paul	Géologie Générale
M.	CONSTANT Eugène	Electronique
M.	DECUYPER Marcel	Géométrie
M.	DELATTRE Charles	Géologie Générale
M.	DELHAYE Michel	Chimie Physique
M.	DERCOURT Michel	Géologie Générale
M.	DURCHON Maurice	Biologie Expérimentale
M.	FAURE Robert	Mécanique
M.	FOURET René	Physique du Solide
M.	GABILLARD Robert	Electronique
M.	GLACET Charles	Chimie Organique
M.	GONTIER Gérard	Mécanique
M.	GRUSON Laurent	Algèbre
M.	GUILLAUME Jean	Microbiologie
M.	HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M.	LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique
M.	LANSRAUX Guy	Physique Atomique et Moléculaire
M.	LAVEINE Jean-Pierre	Paléontologie
M.	LEBRUN André	Electronique
M.	LEHMANN Daniel	Géométrie

Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M.	LINDER Robert	Biologie et Physiologie Végétales
M.	LOMBARD Jacques	Sociologie
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M.	LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M.	MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M.	MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M.	MONTREUIL Jean	Biochimie
M.	PARREAU Michel	Analyse
M.	POUZET Pierre	Analyse Numérique
M.	PROUVOST Jean	Minéralogie
M.	SALMER Georges	Electronique
M.	SCHILTZ René	Physique Atomique et Moléculaire
Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Géométrie
M.	SEGUIER Guy	Electrotechnique
M.	TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée
M.	VIDAL Pierre	Automatique
M.	VIVIER Emile	Biologie Cellulaire
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique Atomique et Moléculaire
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.	BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BODARD Marcel	Biologie Végétale
M.	BOILLET Pierre	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M.	BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M.	CAPURON Alfred	Biologie Animale
M.	CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des entreprises
M.	DEPREZ Gilbert	Physique Théorique
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M.	GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M.	LACOSTE Louis	Biologie Végétale
Mme	LEHMANN Josiane	Analyse
M.	LENTACKER Firmin	Géographie
M.	LOUAGE Francis	Electronique
Mle	MARQUET Simone	Probabilités
M.	MIGEON Michel	Chimie Physique
M.	MONTEL Marc	Physique du Solide
M.	PANET Marius	Electrotechnique
M.	RACZY Ladislas	Electronique
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M.	SLIWA Henri	Chimie Organique

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés d'Enseignement)

M.	ADAM Michel	Sciences Economiques
M.	ANTOINE Philippe	Analyse
M.	BART André	Biologie Animale
M.	BEGUIN Paul	Mécanique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
M.	BOSCQ Denis	Probabilités
M.	BREZINSKI Claude	Analyse Numérique
M.	BRUYELLE Pierre	Géographie

.../...

M. CARREZ Christian	Informatique
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. COQUERY Jean-Marie	Psycho-Physiologie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DEBENEST Jean	Sciences Economiques
M. DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M. DHAINAUT André	Biologie Animale
M. DELAUNAY Jean-Claude	Sciences Economiques
M. DERIEUX Jean-Claude	Microbiologie
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique du Solide
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du Solide
Me EVRARD Micheline	Chimie Appliquée
M. FONTAINE Jacques-Marie	Electronique
M. FOURNET Bernard	Biochimie
M. FORELICH Daniel	Chimie Physique
M. GAMBLIN André	Géographie
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M. GUILLAUME Henri	Sciences Economiques
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. HERMAN Maurice	Physique Spatiale
M. JOURNEL Gérard	Physique Atomique et Moléculaire
Mle KOSMAN Yvette	Géométrie
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LAURENT François	Automatique
Mle LEGRAND Denise	Algèbre
Mle LEGRAND Solange	Algèbre
M. LEROY Jean-Marie	Chimie Appliquée
M. LEROY Yves	Electronique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique Théorique
M. LOUCHET Pierre	Sciences de l'Education
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAHIEU Jean-Marie	Physique Atomique et Moléculaire
Me N'GUYEN VAN CHI Régine	Géographie
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MALAUSSENA Jean-Louis	Sciences Economiques
M. MESSELYN Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. MONTUELLE Bernard	Biologique Appliquée
M. NICOLE Jacques	Chimie Appliquée
M. PAQUET Jacques	Géologie Générale
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie Physique
M. PERROT Pierre	Chimie Appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie Animale
M. PONSOLLE Louis	Chimie Physique
M. POVY Lucien	Automatique
M. RICHARD Alain	Biologie
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROY Jean-Claude	Psycho-Physiologie
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SOMME Jean	Géographie
Mle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. STEEN Jean-Pierre	Informatique

.../...

M.	THERY Pierre	Electronique
M.	TOULOTTE Jean-Marc	Automatique
M.	TREANTON Jean-René	Sociologie
M.	VANDORPE Bernard	Chimie Minérale
M.	VILLETTE Michel	Mécanique
M.	WALLART Francis	Chimie
M.	WERNIER Georges	Informatique
M.	WATERLOT Michel	Géologie Générale
Mme	ZINN-JUSTIN Nicole	Algèbre

A Josette,

Il arrive quelquefois qu'on ne peut rien répondre, et qu'on n'est pas persuadé. On est atterré sans pouvoir être convaincu. On sent dans le fond de son âme un scrupule, une répugnance qui nous empêche de croire ce qu'on nous a prouvé. Un géomètre vous démontre qu'entre un cercle et une tangente vous pouvez faire passer une infinité de lignes courbes, et que vous n'en pouvez faire passer une droite. Vos yeux, votre raison, vous disent le contraire. Le géomètre vous répond gravement que c'est là un infini du second ordre. Vous vous taisez, et vous vous en retournez tout stupéfait, sans avoir aucune idée nette, sans rien comprendre, et sans rien répliquer.

Vous consultez un géomètre de meilleure foi, qui vous explique le mystère. "Nous supposons, dit-il, ce qui ne peut être dans la nature, des lignes qui ont de la longueur sans largeur ; il est impossible, physiquement parlant, qu'une ligne réelle en pénètre une autre. Nulle courbe ni nulle droite réelle ne peut passer entre deux lignes réelles qui se touchent : ce ne sont là que des jeux de l'entendement, des chimères idéales ; et la véritable géométrie est l'art de mesurer les choses existantes".

Je fus très content de l'aveu de ce sage mathématicien, et je me mis à rire, dans mon malheur, d'apprendre qu'il y avait de la charlatanerie jusque dans la science qu'on appelle la haute science.

Voltaire,
l'homme aux quarante écus.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Roseau qui n'a cessé de m'encourager et m'a ainsi permis de présenter cette thèse.

Ce travail trouve pour une part son origine dans les travaux du Professeur L. Césari. Qu'il me soit permis de le remercier pour la bienveillante attention qu'il a portée à mon travail et de lui exprimer toute mon admiration.

Que Monsieur le Président Parreau qui commença ma formation mathématique et qui a bien voulu me proposer le second sujet trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude.

Mes remerciements vont également à Messieurs les Professeurs J.C. De Paris, D. Lehmann et J. Vaillant qui ont bien voulu accepter de faire partie du jury.

Je tiens à remercier également tous mes collègues et amis pour les discussions fructueuses quoique parfois extra-mathématiques que j'ai eues avec eux ainsi que Madame Bérat pour la patience et le dévouement qu'elle a manifestés lors de la frappe du manuscrit.

TABLE DES MATIERES

1ère PARTIE

EXISTENCE GLOBALE DES SOLUTIONS DE QUELQUES PROBLEMES AUX LIMITES.

ERRATA DE LA PREMIERE PARTIE

Page (I.2), (I.A.12) lire $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left|\int_x^y L_\lambda^2(s,y)ds\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}\lambda} L_\lambda^2(x,y)$

au lieu de $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left|\int_x^y L_\lambda^2(s,y)ds\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} L_\lambda^2(x,y)$

Page (I.3), (I.A.12bis) lire $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left|\int_x^y L_\lambda^2(x,t)dt\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}\lambda} L_\lambda^2(x,y)$

au lieu de $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left|\int_x^y L^2(x,t)dt\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} L_\lambda^2(x,y)$

Page (I.4), ligne 6, lire $+ A_2(x,y)\{\sqrt{\left|\int_x^y u_x^2(x,t)dt\right|} + \sqrt{\left|\int_x^y u_y^2(x,t)dt\right|}\}$

au lieu de $+ A_2(x,y)\{\sqrt{\left|\int_x^y u_x^2(x,t)dt\right.} + \sqrt{\left|\int_x^y u_y^2(x,t)dt\right|}\}$

Page (I.14),(I.B.11) lire $\begin{cases} |S_1^* v(x,y)| \leq \sqrt{\left|\int_x^y \bar{\psi}^2(s,y,1)ds\right|} \cdot ||v||_1(x,y) \\ |S_2^* v(x,y)| \leq \sqrt{\left|\int_x^y \bar{\psi}^2(x,t,1)dt\right|} \cdot ||v||_2(x,y) \end{cases}$

au lieu de $\begin{cases} |S_1 v(x,y)| \leq \sqrt{\left|\int_x^y \bar{\psi}^2(s,y,1)ds\right|} \cdot ||v||_1(x,y) \\ |S_2 v(x,y)| \leq \sqrt{\left|\int_x^y \bar{\psi}^2(x,t,1)dt\right|} \cdot ||v||_2(x,y) \end{cases}$

Page (I.19), ligne 7, lire avant l'hypothèse (h.C.1) ν_q, μ_p

au lieu de ν_q, ν_p

Page (I.22), ligne 6, lire (1) $\chi(t,0) = 0$ si $t \geq 0$

au lieu de (1) $\chi(t,0)$ si $t \geq 0$

.../...

Page (II.6), ligne 10, lire $A_2(x,y) = |\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\mathcal{G}}_1(x,y)| + \sqrt{|\int_o^y dt \int_o^x \bar{\vartheta}^2(r,x+t-r,1)dr|}$

au lieu de $A_2(x,y) = |\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\mathcal{G}}_1(x,y)| + \sqrt{|\int_o^y dt \int_o^x \bar{\vartheta}(r,x+t-r,1)dr|}$

Page (II.9), ligne 1 supprimer (II.A.25)

Page (II.9), ligne 13, lire

$$\Omega_{1,k}(\delta) = \{\omega_{2,2k}(\delta) + \omega_{3,2k}(2\bar{N}_{2k}\delta) + \omega_{4,2k}(2\bar{N}_{2k}\delta)\}\ k + \omega_{7,2k}(\delta)$$

au lieu de

$$\Omega_{1,k}(\delta) = \{\omega_{2,2k}(\delta) + \omega_{3,2k}(2\bar{N}_{2k}\ ) + \omega_{4,2k}(2\bar{N}_{2k}\delta)\}\ k + \omega_{7,2k}(\delta)$$

Page (II.31), ligne 7, lire $= \frac{1}{8\lambda^2}\{6^{6\lambda y} - L_\lambda^2(y,x) - \frac{4}{6}e^{6\lambda y} + \frac{4}{6}e^{\lambda 6x}\}$

au lieu de $= \frac{1}{8\lambda^2}\{6^{6\lambda y} - L^2(y,x) - \frac{4}{6}e^{6\lambda y} + \frac{4}{6}\ {}^{\lambda 6x}\}$

Page (II.44), ligne 3, lire

$$\frac{\partial^2 T_4 u}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}_4}{\partial x\partial y}(x,y) + \int_{\frac{x+y}{2}}^{x} F(\xi,x+y-\xi,U)d\xi - \sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{2^{i-1}}m(x_i+y_i,x_i+y_i,U)$$

au lieu de

$$\frac{\partial^2 T_4 u}{\partial x\partial y}(x,y) = \int_{\frac{x+y}{2}}^{x} F(\xi,x+y-\xi,U)d\xi - \sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{2^{i-1}}m(x_i+y_i,x_i+y_i,U)$$

Page (II.49), ligne 8, lire

$$\overset{\lambda}{\beta}{}_k^k(\Psi) = \mathrm{Max}\{\overset{\lambda}{\alpha}{}_k^k(\Psi_x),\overset{\lambda}{\alpha}{}_k^k(\Psi_x),\overset{\lambda}{\alpha}{}_k^k(\Psi_y),\overset{\lambda}{\alpha}{}_k^k(\Psi_{xy})\}.$$

au lieu de

$$\overset{\lambda}{\beta}{}_k^k(\Psi) = \mathrm{Max}\{\overset{\lambda}{\alpha}{}_k^k(\Psi),\alpha_k^k(\Psi_x),\overset{\lambda}{\alpha}{}_k^k(\Psi_y),\overset{\lambda}{\alpha}{}_k^k(\Psi_{xy})\}.$$

CHAPITRE I

ETUDE DE QUELQUES PROBLEMES AUX LIMITES RELATIFS A

$$\frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}, \ldots\right) \qquad \begin{array}{l} 0 \leqslant p \leqslant r \\ 0 \leqslant q \leqslant s \\ p + q < r + s \end{array}$$

Le problème de l'existence des solutions d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique a préoccupé de nombreux mathématiciens depuis la fin du siècle dernier (E. Picard, Goursat,...). Les livres de M. Cinquini - Cibrario e Cinquini [1] et de W. Walter [1], entre autres, donnent de nombreuses références bibliographiques sur cette question. Mais il faut bien reconnaître que la plupart de ces articles se limitent à l'étude de l'existence locale d'une solution. Il faut attendre les années 1950 pour que les questions d'existence globale commencent à se résoudre (encore s'agit-il de solutions définies sur un compact : Kisynski [4] - Shanahan [2],...). Dix ans plus tard A.K. Aziz, J.P. Maloney [1] et B. Palczewski [1] examinent le problème de Goursat :

$$u_{xy} = f(x,y,u,u_x,u_y)$$

$$u(x,0) = \sigma(x) \qquad u(0,y) = \tau(y) \qquad \sigma(0) = \tau(0)$$

pour en rechercher une solution définie sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Plus récemment encore Georgeta Teoduru [1] s'intéressa à l'existence et à l'unicité d'une solution définie sur tout $\mathbb{R}^2$ de l'équation $u_{xy} = f(x,y,u)$ soumise aux mêmes conditions initiales.

Leur étude repose essentiellement sur le théorème de Tychonoff (dont on trouvera une démonstration dans le livre de Dunford et Schwartz [1]). "Soit E un espace vectoriel complet, localement convexe et A une partie convexe fermée de E. Si T désigne une application continue de E dans E telle que $\overline{T(A)}$ soit un compact de A, T possède un point fixe dans A".

L'étude entreprise dans cette première partie concerne les deux équations :

$$(1) \quad \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s} = f\left(x,y,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}, \ldots\right) \quad \left\{\begin{array}{l} 0 \leq p \leq r \\ 0 \leq q \leq s \\ p + q < r + s \end{array}\right.$$

et

$$(2) \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = f(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})$$

auxquelles nous imposerons diverses conditions initiales.

Le chapitre 1 débute par l'examen du second problème de Picard :

$$(\mathrm{I-A}) \quad \begin{cases} u_{xy} = f(x,y,u,u_x,u_y) \\ \\ u_x(x,x) = \sigma(x) \qquad u_y(y,y) = \tau(y) \qquad u(0,0) = u_o \end{cases}$$

et se poursuit par l'étude des trois problèmes aux limites associés à l'équation (1) :

$$(\mathrm{I-B}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^p u}{\partial x^p}(x,x) = \sigma_p(x) \qquad 1 \leqslant p \leqslant r, \quad x \in \mathbb{R} \\ \qquad u(0,0) = u_o \\ \dfrac{\partial^q u}{\partial y^q}(y,y) = \tau_q(y) \qquad 1 \leqslant q \leqslant s, \quad y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(\mathrm{I-C}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^p u}{\partial x^p}(0,y) = \mu_p(y) \qquad 0 \leqslant p < r, \quad y \in \mathbb{R} \\ \\ \dfrac{\partial^q u}{\partial y^q}(x,0) = \nu_q(x) \qquad 0 \leqslant q < s, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(\mathrm{I-D}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^p u}{\partial x^p}(0,y) = \mu_p(y) \qquad 0 \leqslant p < r, \quad y \in \mathbb{R} \\ \\ \dfrac{\partial^q u}{\partial y^q}(x,g(x)) = \gamma_q(x) \quad 0 \leqslant q < s, \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Nous supposerons que les données initiales sont compatibles entre elles et que la fonction f de $C(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ $m = 1 + (r+1)(s+1)$ vérifie sur $\mathbb{R}^m$ la relation :

$$|f(x,y,z_{oo},\dots,z_{pq},\dots)| \leq \vartheta(x,y,\sum_{pq}|z_{pq}|) = \vartheta_{x,y}(\sum|z_{pq}|)$$

dans laquelle $\vartheta_{x,y}$ désigne une application sous-additive de $\mathbb{R}_+$.

Le principal résultat obtenu dans le chapitre 1 est que si la fonction f est lipschitzienne sur tout compact de $\mathbb{R}^m$ par rapport aux $r+s$ variables z_{ps} $(0 \leq p < r)$ et z_{rq} $(0 \leq q < s)$ les problèmes (I-B - C et D) possèdent une solution définie sur le plan $\mathbb{R}^2$ tout entier. (G. HECQUET [1]).

L'équation (2) fut examinée par M. Winants durant les années 1930-1936 dans une série d'articles. Son étude ne concerne que l'existence locale et suppose que la fonction f : $f(x,y,u,p,q,z)$ est lipschitzienne par rapport aux quatre variables u, p, q, z. Dans ce second chapitre, j'examine quatre problèmes aux limites relatifs à cette équation (2).

$$\text{(II - A)} \quad \begin{cases} u(x,0) = \sigma(x) \qquad u(0,y) = \tau(y) \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \tau_1(y) \\ \sigma(0) = \tau(0) \qquad \sigma'(0) = \tau_1(0) \qquad x,\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\text{(II - B)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,x) = \mu(x) \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,x) = \nu(x) \qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,x) = \chi(x) \\ u(0,0) = u_o \qquad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{(II - C)} \quad \begin{cases} u(x,0) = \sigma(x) \qquad u(x,x) = \gamma(x) \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \sigma_1(x) \\ \sigma(0) = \gamma(0) \qquad \sigma'(0) + \sigma_1(0) = \gamma'(0) \qquad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{(II - D)} \quad \begin{cases} u(x,0) = \sigma(x) \qquad u(0,y) = \tau(y) \qquad u(x,x) = \gamma(x) \\ \sigma(0) = \tau(0) = \gamma(0) \qquad \gamma'(0) = \sigma'(0) + \tau'(0) \qquad x,\ y \in \mathbb{R}\ . \end{cases}$$

Comme précédemment, nous supposerons que les données sont compatibles entre elles et que la fonction f vérifie sur $\mathbb{R}^6$ une relation du type :

$$|f(x,y,u,p,q,z)| \leq \emptyset(x,y,|u|+|p|+|q|+|z|)$$

Moyennant une condition supplémentaire de Lipschitz par rapport à p, q et z les quatre problèmes admettent une solution définie sur tout $\mathbb{R}^2$.

Malgré tous mes efforts, je n'ai pu éviter le caractère répétitif des démonstrations causé par la succession des problèmes étudiés.

A - RESOLUTION DU SECOND PROBLEME DE E. PICARD

Nous considérons tout d'abord le problème

$$(\mathrm{I.A})\qquad \begin{cases} u_{xy} = f(x,y,u,u_x,u_y) \\ u_x(x,x) = \sigma(x) \qquad u_y(y,y) = \tau(y) \qquad u(0,0) = u_o \end{cases}$$

dans lequel la fonction f vérifie l'hypothèse suivante :

Hypothèse (h.A.1) :

La fonction f de $C(\mathbb{R}^5,\mathbb{R})$ satisfait pour tout (x,y,u,p,q) de $\mathbb{R}^5$ la relation :

$$(\mathrm{I.A.1})\qquad |f(x,y,u,p,q)| \leqslant \vartheta(x,y,|u|+|p|+|q|) = \vartheta_{x,y}(|u|+|p|+|q|)$$

avec $\vartheta_{x,y}$ fonction de $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ sous-additive quels que soient x et y de $\mathbb{R}$: $\vartheta_{x,y}(t+\bar{t}) \leqslant \vartheta_{x,y}(t) + \vartheta_{x,y}(\bar{t}) \quad t,\ \bar{t} \geqslant 0.$

Soit $\bar{\vartheta}$ la fonction sous-additive de $C(R_+,R_+)$ croissante définie à partir de ϑ par

$$(\mathrm{I.A.2})\qquad \bar{\vartheta}(x,y,t) = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t} \vartheta(x,y,\tau).$$

Cette fonction $\bar{\vartheta}$ satisfait l'inégalité

$$(\mathrm{I.A.3})\qquad \vartheta(x,y,t) \leqslant \bar{\vartheta}(x,y,t) \leqslant \bar{\vartheta}(x,y,1)(1+t) \qquad t \geqslant 0$$

de sorte que l'hypothèse (I.A.1) permet d'écrire :

$$(\mathrm{I.A.4})\qquad |f(x,y,u,p,q)| \leqslant \bar{\vartheta}(x,y,1)\{1+|u|+|p|+|q|\}.$$

D'un autre côté, la continuité de la fonction f permet de définir des fonctions continues croissantes non négatives sous-additives et nulles à l'origine telles que :

$$(\text{I.A.5}) \quad \left\{ \begin{array}{l} |f(x,y,u,p,q) - f(\bar{x},y,u,p,q)| \leq \omega_{1,k}(|x-\bar{x}|) \\ |f(x,y,u,p,q) - f(x,\bar{y},u,p,q)| \leq \omega_{2,k}(|y-\bar{y}|) \\ |f(x,y,u,p,q) - f(x,y,\bar{u},p,q)| \leq \omega_{3,k}(|u-\bar{u}|) \\ |f(x,y,u,p,q) - f(x,y,u,\bar{p},q)| \leq \omega_{4,k}(|p-\bar{p}|) \\ |f(x,y,u,p,q) - f(x,y,u,p,\bar{q})| \leq \omega_{5,k}(|q-\bar{q}|) \end{array} \right. \qquad k \in \mathbb{N}$$

pourvu que $x,\bar{x},y,\bar{y} \in [-k,k], u,\bar{u},p,\bar{p},q,\bar{q} \in [-N_k,N_k]$ $(N_k > 0)$.

Nous noterons plus brièvement

$$(\text{I.A.6}) \qquad F(x,y,U) = f(x,y,u,p,q) \quad \text{quand} \quad p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Avec cette notation, nous pouvons écrire l'équivalence entre les solutions de ce problème et les points fixes de l'opérateur T_1 :

$$(\text{I.A.7}) \quad (T_1 u)(x,y) = u_o + \int_o^x \sigma(s)ds + \int_o^y \tau(t)dt - \int_x^y \{\int_x^t F(s,t,U)ds\}dt$$

d'où nous déduisons :

$$(\text{I.A.8}) \qquad \frac{\partial}{\partial x}(T_1 u)(x,y) = \sigma(x) + \int_x^y F(x,t,u)dt$$

$$(\text{I.A.9}) \qquad \frac{\partial}{\partial y}(T_1 u)(x,y) = \tau(y) - \int_x^y F(s,y,u)ds .$$

Soit L_λ la fonction de $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ définie pour tout $\lambda \geq 0$ par

$$(\text{I.A.10}) \qquad L_\lambda(x,y) = \sqrt{\operatorname{ch} \lambda\sqrt{2}(x-y)} .$$

Cette fonction satisfait aux propriétés suivantes :

Lemme I.A.1.

$$(\text{I.A.11}) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad L_\lambda^2(x,y) = \lambda^2 \int_x^y\int_x^y L_\lambda^2(s,t)ds\,dt + 1$$

$$(\text{I.A.12}) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \left|\int_x^y L_\lambda^2(s,y)ds\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} L_\lambda^2(x,y)$$

(I.A.12 bis) $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\left|\int_x^y L_\lambda^2(x,t)dt\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} L_\lambda^2(x,y)$.

Sur $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et $H_1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) = \{\Psi \in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) : \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})\}$

nous définissons la topologie induite respectivement par les semi-normes $\alpha_k^{\lambda_k}$ et $\beta_k^{\lambda_k}$ $(k \in \mathbb{N})$

(I.A.13)
$$\alpha_k^{\lambda_k}(\Psi) = \sup_{Q_k}\{|\Psi(x,y)|L_{\lambda_k}^{-1}(x,y)\}$$
$$Q_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq k,\ |y| \leq k\}.$$

(I.A.14)
$$\beta_k^{\lambda_k}(\Psi) = \mathrm{Max}\{\alpha_k^{\lambda_k}(\Psi), \alpha_k^{\lambda_k}(\Psi_x), \alpha_k^{\lambda_k}(\Psi_y)\}.$$

Avec cette topologie $H_1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ devient un espace vectoriel complet localement convexe auquel s'applique le théorème de Tychonoff.

Afin de définir l'ensemble A_1 qui contiendra un point fixe de T_1, introduisons les fonctions de $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

$$A_o(x,y) = |u_o| + \left|\int_o^x|\sigma(s)|ds\right| + \left|\int_o^y|\tau(t)|dt\right| + \int_x^y\int_x^y \bar{\psi}(s,t,1)ds\,dt$$

$$A_1(x,y) = \mathrm{Max}\{A_o(x,y), \sqrt{\int_x^y\int_x^y \bar{\psi}^2(s,t,1)ds\,dt}\}$$ de sorte que

$$|T_1u(x,y)| \leq A_o(x,y) + A_1(x,y)\sqrt{\int_x^y\int_x^y u^2(s,t)ds\,dt}$$
$$+ A_1(x,y)\{\sqrt{\int_x^y\int_x^y u_x^2(s,t)ds\,dt} + \sqrt{\int_x^y\int_x^y u_y^2(s,t)ds\,dt}\}$$

et pour $(x,y) \in Q_k$

$$|T_1u(x,y)| \leq \alpha_k^o(A_1) + \alpha_k^o(A_1)\beta_k^{\lambda_k}(u)\frac{3L_{\lambda_k}(x,y)}{\lambda_k}$$

c'est-à-dire

(I.A.15)
$$\alpha_k^{\lambda_k}(T_1u) \leq \alpha_k^o(A_1) + \alpha_k^o(A_1)\frac{3\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\lambda_k}.$$

Définissons ensuite les fonctions A_2, A_3

(I.A.16) $$A_2(x,y) = \mathrm{Max}\{|\sigma(x)| + |\int_y^x \bar{\psi}(x,t,1)dt|, \sqrt{|\int_y^x \bar{\psi}^2(x,t,1)dt|}\}$$

(I.A.16bis) $$A_3(x,y) = \mathrm{Max}\{|\tau(y)| + |\int_y^x \bar{\psi}(s,y,1)ds|, \sqrt{|\int_y^x \bar{\psi}^2(s,y,1)ds|}\}$$

qui nous permettent d'écrire :

$$|\frac{\partial}{\partial x}(T_1u)(x,y)| \leq A_2(x,y) + A_2(x,y)\sqrt{|\int_x^y u^2(x,t)dt|}$$

$$+ A_2(x,y)\{\sqrt{|\int_x^y u_x^2(x,t)dt} + \sqrt{|\int_x^y u_y^2(x,t)dt|}\}$$

c'est-à-dire :

(I.A.17) $$\alpha_k^{\lambda_k}(\frac{\partial T_1 u}{\partial x}) \leq \alpha_k^o(A_2) + \alpha_k^o(A_2)\frac{3\beta_k^{\lambda_k}(u)}{4\sqrt{2}\sqrt{\lambda_k}}$$

et

(I.A.18) $$\alpha_k^{\lambda_k}(\frac{\partial T_1 u}{\partial y}) < \alpha_k^o(A_3) + \alpha_k^o(A_3)\frac{3\beta_k^{\lambda_k}(u)}{4\sqrt{2}\sqrt{\lambda_k}} .$$

En choisissant $A_4 = \mathrm{Max}\{A_1,A_2,A_3\}$ et en posant $N_k = \alpha_k^o(A_4)$ on peut écrire :

(I.A.19) $$\begin{cases} \alpha_k^{\lambda_k}(T_1u) \leq N_k\{1 + \dfrac{3\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\lambda_k}\} \\ \alpha_k^{\lambda_k}((T_1u)_x) \leq N_k\{1 + \dfrac{3\beta_k^{\lambda_k}(u)}{4\sqrt{2}\sqrt{\lambda_k}}\} \\ \alpha_k^{\lambda_k}((T_1u)_y) \leq N_k\{1 + \dfrac{3\beta_k^{\lambda_k}(u)}{4\sqrt{2}\sqrt{\lambda_k}}\} \end{cases}$$

Le choix

(I.A.20) $\lambda_k = \mathrm{Max}\{6N_k, 18\sqrt{2}\ N_k^2\}$

permet alors d'établir la relation :

(I.A.21) $\beta_k^{\lambda_k}(u) \leq 2N_k \implies \beta_k^{\lambda_k}(T_1 u) \leq 2N_k.$

Dans la suite nous supposerons les λ_k ainsi définis (de sorte que la relation (I.A.21) est satisfaite) et ferons l'hypothèse :

Hypothèse (h.A.2) :

Les fonctions σ et τ appartiennent à $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Il sera possible de déterminer des fonctions continues réelles croissantes, non négatives, sous-additives et nulles à l'origine telles que :

(I.A.22) $$\begin{cases} |\sigma(x) - \sigma(\bar{x})| \leq \omega_{6,k}(|x-\bar{x}|), & x,\ \bar{x} \in [-k,k] \\ |\tau(y) - \tau(\bar{y})| \leq \omega_{7,k}(|y-\bar{y}|), & y,\ \bar{y} \in [-k,k] \end{cases} .$$

Soient $D_k = \{(x,y,z,p,q) : |x| \leq k,\ |y| \leq k,\ |z| \leq N_k,\ |p| \leq N_k,\ |q| \leq N_k\}$ un compact de $\mathbb{R}^5$, $M_k = \sup\limits_{D_k} |f(x,y,z,p,q)|$, $\bar{N}_k = N_k L_{\lambda_k}(k,k)$ et

(I.A.23) $$\Omega_{1,k}(\delta) = \omega_{6,k}(\delta) + M_k\delta + 2k\{\omega_{1,k}(\delta) + \omega_{3,k}(2\bar{N}_k\delta) + \omega_{5,k}(M_k\delta)\}$$

(I.A.23bis) $$\Omega_{2,k}(\delta) = \omega_{7,k}(\delta) + M_k\delta + 2k\{\omega_{2,k}(\delta) + \omega_{3,k}(2\bar{N}_k\delta) + \omega_{4,k}(M_k\delta)\}$$

Ces fonctions nous permettent d'introduire la dernière hypothèse nécessaire à l'établissement du théorème d'existence.

Hypothèse (h.A.3) :

Les équations intégrales :

$$
\text{(I.A.23)} \quad \begin{cases} \rho_{1,k}(\delta,y) = \Omega_{1,k}(\delta) + \displaystyle\int_{-k}^{y} \omega_{4,k}\left[\rho_{1,k}(\delta,t)\right]dt \\ \rho^{*}_{1,k}(\delta,y) = \Omega_{1,k}(\delta) + \displaystyle\int_{y}^{k} \omega_{4,k}\left[\rho^{*}_{1,k}(\delta,t)\right]dt \end{cases}
$$

$$
\text{(I.A.24)} \quad \begin{cases} \rho_{2,k}(x,\delta) = \Omega_{2,k}(\delta) + \displaystyle\int_{-k}^{x} \omega_{5,k}\left[\rho_{2,k}(s,\delta)\right]ds \\ \rho^{*}_{2,k}(x,\delta) = \Omega_{2,k}(\delta) + \displaystyle\int_{x}^{k} \omega_{5,k}\left[\rho^{*}_{2,k}(s,\delta)\right]ds \end{cases}
$$

sont supposées admettre des solutions positives tendant vers 0 avec δ uniformément par rapport à x ou y sur $[-k,k]$.

Cette hypothèse est automatiquement satisfaite dès que les fonctions $\omega_{4,k}$ et $\omega_{5,k}$ sont linéaires.

Théorème (I.A.1) :

Sous les hypothèses

(h.A.1) $\quad f \in C(\mathbb{R}^5,\mathbb{R}), |f(x,y,u,p,q)| \leq \vartheta(x,y,|u|+|p|+|q|)$

(h.A.2) $\quad \sigma,\ \tau \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$

(h.A.3) $\quad \lim\limits_{\delta\to 0} \rho_1(x,\delta) = \lim\limits_{\delta\to 0} \rho^{*}_1(x,\delta) = \lim\limits_{\delta\to 0} \rho_2(\delta,y) = \lim\limits_{\delta\to 0} \rho^{*}_2(\delta,y) = 0$

uniformément sur $[-k,k]$.

L'équation
$$
\begin{cases} u_{xy} = f(x,y,u,u_x,u_y) & u(0,0) = u_o \\ u_x(x,x) = \sigma(x) & u_y(y,y) = \tau(y) \end{cases}
$$

admet une solution définie sur tout $\mathbb{R}^2$.

Preuve :

Il nous faut établir que l'opérateur T_1 a un point fixe dans $H_1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Désignons par A_1 la partie convexe et compacte de $H_1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$:

$$A_1 = \begin{cases} u \in H_1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \ : \ \beta_k^{\lambda_k}(u) \leq 2N_k, \\ |u_x(x,y) - u_x(\bar{x},y)| \leq \rho_{1,k}(|x-\bar{x}|,y) \qquad x,\bar{x} \leq y, \\ |u_x(x,y) - u_x(\bar{x},y)| \leq \rho^*_{1,k}(|x-\bar{x}|,y) \qquad x,\bar{x} > y, \\ |u_x(x,y) - u_x(x,\bar{y})| \leq M_k|y-\bar{y}|, \ |u_y(x,y) - u_y(\bar{x},y)| \leq M_k|x-\bar{x}| \\ |u_y(x,y) - u_y(x,\bar{y})| \leq \rho_{2,k}(x,|y-\bar{y}|) \qquad x \leq y,\bar{y}, \\ |u_y(x,y) - u_y(x,\bar{y})| \leq \rho^*_{2,k}(x,|y-\bar{y}|) \qquad x > y,\bar{y}, \end{cases}$$

pour $x, \bar{x}, y, \bar{y} \in [-k,k]$.

T_1 est un opérateur continu de $H_1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. En effet

$$|(T_1u)(x,y) - (T_1\bar{u})(x,y)| = \left|\int_x^y \int_x^t F(s,t,u) - F(s,t,\bar{u})ds\ dt\right|$$

$$\leq \int_x^y \int_x^y \{\omega_{3,k}(|u(s,t)-\bar{u}(s,t)|) + \omega_{4,k}(|u_x(s,t)-\bar{u}_x(s,t)|) +$$

$$+ \omega_{5,k}(|u_y(s,t)-\bar{u}_y(s,t)|)\}ds\ dt$$

pour $(x,y) \in [-k,k]^2$.

On a donc $\alpha_k^{\lambda_k}(T_1u - T_1\bar{u}) \leq 4k^2\{\omega_{3,k}(||u-\bar{u}||) + \omega_{4,k}(||u_x-\bar{u}_x||)$

$$+ \omega_{5,k}(||u_y-\bar{u}_y||)\}$$

$$\alpha_k^{\lambda_k}((T_1u)_x - (T_1\bar{u})_x) \leq 2k\{\omega_{3,k}(||u-\bar{u}||) + \omega_{4,k}(||u_x-\bar{u}_x||) + \omega_{5,k}(||u_y-\bar{u}_y||)\},$$

et de même pour $\alpha_k^{\lambda_k}((T_1u)_y - (T_1\bar{u})_y)$.

On obtient ainsi

$$\beta_k^{\lambda_k}(T_1u - T_1\bar{u}) \leq (4k^2+4k)\{\omega_{3,k}(||u-\bar{u}||)+\omega_{4,k}(||u_x-\bar{u}_x||)+\omega_{5,k}(||u_y-\bar{u}_y||).$$

Cette dernière relation établit notre assertion puisque

$$||u|| \leq \beta_k^{\lambda_k}(u).L_{\lambda_k}(k.k).$$

Notre théorème sera prouvé si $T_1(A_1) \subset A_1$. Comme nous avons déjà établi que $\beta_k^{\lambda_k}(u) \leqslant 2N_k \Rightarrow \beta_k^{\lambda_k}(T_1 u) \leqslant 2N_k$ et que

$$|(T_1u)_x(x,y) - (T_1u)_x(x,\bar{y})| = \left|\int_y^{\bar{y}} F(x,t,U)dt\right| \leqslant M_k|y-\bar{y}| \quad \text{et}$$

$$|(T_1u)_y(x,y) - (T_1u)_y(\bar{x},y)| \leqslant M_k|x-\bar{x}| \text{ , il suffit d'évaluer}$$

$$(T_1u)_x(x,y) - (T_1u)_x(\bar{x},y) \quad \text{et} \quad (T_1u)_y(x,y) - (T_1u)_y(x,\bar{y}) .$$

Nous avons

$$(T_1u)_x(x,y) - (T_1u)_x(\bar{x},y) = \sigma(x) - \sigma(\bar{x}) + \int_x^y F(x,t,u)dt - \int_{\bar{x}}^y F(\bar{x},t,u)dt$$

$$|(T_1u)_x(x,y) - (T_1u)_x(\bar{x},y)| \leqslant \omega_{6,k}(|x-\bar{x}|) + \left|\int_x^{\bar{x}} F(x,t,U)dt\right|$$

$$+ \left|\int_{\bar{x}}^y |F(x,t,u) - F(\bar{x},t,u)|dt\right| \quad \text{sur } Q_k.$$

Mais $|F(x,t,U) - F(\bar{x},t,U)| \leqslant \omega_{1,k}(|x-\bar{x}|)+\omega_{3,k}(|u(x,t)-u(\bar{x},t)|)$

$$+ \omega_{4,k}(|u_x(x,t) - u_x(\bar{x},t)|) + \omega_{5,k}(|u_y(x,t) - u_y(\bar{x},t)|)$$

de sorte que

$$|F(x,t,U) - F(\bar{x},t,U)| \leqslant \omega_{1,k}(|x-\bar{x}|) + \omega_{3,k}(2\bar{N}_k|x-\bar{x}|) + \omega_{4,k}(\rho_{1,k}(|x-\bar{x}|,t))$$

$$+ \omega_{5,k}(M_k|x-\bar{x}|)$$

si $x,\bar{x} \leqslant t$, $(x,t) \in Q_k$, $(\bar{x},t) \in Q_k$, (sinon $\rho_{1,k}$ est remplacé par $\rho^*_{1,k}$). On en déduit alors pour $(x,y),(\bar{x},y) \in Q_k$, $x,\bar{x} \leqslant y$

$$|(T_1u)_x(x,y) - (T_1u)_x(\bar{x},y)| \leqslant \Omega_{1,k}(\delta) + \int_{-k}^y \omega_{4,k}\{\rho_{1,k}(|x-\bar{x}|,t)\}dt$$

$$\leqslant \rho_{1,k}(|x-\bar{x}|,y)$$

ou $|(T_1u)_x(x,y) - (T_1u)_x(\bar{x},y)| \leqslant \Omega_{1,k}(\delta) + \int_y^k \omega_{4,k}\{\rho^*_{1,k}(|x-\bar{x}|,t)\}dt$

$\leqslant \rho^*_{1,k}(|x-\bar{x}|,y)$ pour $x,\bar{x} \geqslant y$.

Ce qui établit que $T_1(A_1) \subset A_1$, puisque par raison de symétrie

$$|(T_1u)_y(x,y) - (T_1u)_y(x,\bar{y})| \leqslant \rho_{2,k}(x,|y-\bar{y}|) \quad \text{si} \quad x,\bar{x} \leqslant y$$
$$\leqslant \rho^*_{2,k}(x,|y-\bar{y}|) \quad \text{si} \quad x,\bar{x} \geqslant y.$$

Remarque :

Ce théorème n'implique pas l'unicité comme le montre l'exemple suivant dû à Conlan [1]. L'équation :

(I.A.25) $\qquad u_{xy} = -|u|^{1/2} \qquad u_o = 0 \qquad \sigma(x) = \tau(y) = 0$

possède les deux solutions $u_1 : u_1(x,y) \equiv 0$ et $u_2 : u_2(x,y) = \dfrac{(y-x)^4}{144}$, définies toutes deux sur $\mathbb{R}^2$.

B - RESOLUTION DU PROBLEME (I - B)

1 Nous examinons dans cette section l'équation

$$\text{(I.B.1)} \qquad \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s} = f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\ldots,\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q},\ldots\right) \qquad \begin{matrix} 0 \leqslant p \leqslant r \\ 0 \leqslant q \leqslant s \\ p+q < r+s \end{matrix}$$

soumise aux conditions initiales : $u(0,0) = u_o$

$$\text{(I.B.2)} \qquad \frac{\partial^p u}{\partial x^p}(x,x) = \sigma_p(x) \quad 1 \leqslant p \leqslant r, \qquad \frac{\partial^q u}{\partial y^q}(y,y) = \tau_q(y) \quad 1 \leqslant q \leqslant s.$$

Nous continuerons à définir $F(x,y,U) = f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\ldots,\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q},\ldots\right)$

pour u appartenant à l'ensemble $H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

$$H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) = \{u \in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) : \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q} \in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}),\ p \in \{0,1,\ldots,r\},\ q \in \{0,1,\ldots,s\},\ p+q < r+s\}.$$

La topologie de $H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ sera définie d'une manière analogue à celle de $H_1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ (voir la partie I.A) à partir des semi-normes notées encore $\beta_k^{\lambda_k}$:

$$\text{(I.B.3)} \qquad \beta_k^{\lambda_k}(\Psi) = \operatorname*{Max}_{p,q}\{\alpha_k^{\lambda_k}\left(\frac{\partial^{p+q} \Psi}{\partial x^p \partial y^q}\right)\} \qquad \lambda_k \geqslant 0\ ,\ k \in N$$

Hypothèse (h.B.1) :

La fonction f de $C(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ $m = 1 + (r+1)(s+1)$ vérifie pour tout $(x,y,(z_{pq}))$, $(0 \leqslant p \leqslant r,\ 0 \leqslant q \leqslant s,\ p+q < r+s)$ la relation

$$\text{(I.B.4)} \qquad |f(x,y,(z_{pq}))| \leqslant \vartheta(x,y,\sum|z_{pq}|) = \vartheta_{x,y}(\sum|z_{pq}|)$$

dans laquelle $\vartheta_{x,y}$ est une fonction de $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ sous-additive.

Cette hypothèse de continuité permet de définir sur des compacts du type $[-k,k]^2 \times [-N_k,N_k]^{m-2}$ des fonctions $\omega_{pq}^{(k)}$ de $C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ non décroissantes, nulles à l'origine sous-additives telles que :

(I.B.5) $$|f(x,y,z,\ldots,z_{pq},\ldots)-f(x,y,\ldots,\bar{z}_{pq},\ldots)| \leqslant \sum_{p,q} \omega_{pq}^{(k)}(|z_{pq}-\bar{z}_{pq}|).$$

$\mathfrak{S}$ désignera la solution de l'équation $\dfrac{\partial^{r+s}\mathfrak{S}}{\partial x^r \partial y^s} = 0$ soumise aux conditions initiales (I.B.2). Cette fonction sera définie sur tout $\mathbb{R}^2$ pourvu que toutes les fonctions σ_p et τ_q soient définies sur $\mathbb{R}$.

En particulier si $r = 2$, $s = 1$ nous avons

$$\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x}(x,x) = \sigma_1(x), \quad \frac{\partial^2\mathfrak{S}}{\partial x^2}(x,x) = \sigma_2(x), \quad \frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial y}(y,y) = \tau_1(x) \quad \text{et si}$$

σ_1 est dérivable : $$\frac{\partial^2\mathfrak{S}}{\partial x^2}(x,x) + \frac{\partial^2\mathfrak{S}}{\partial x\partial y}(x,x) = \sigma_1'(x)$$

soit : $$\frac{\partial^2\mathfrak{S}}{\partial x\partial y}(y,y) = \sigma_1'(y) - \sigma_2(y)$$

et $$\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x}(x,y) = \sigma_1(0) + \int_o^x \sigma_2(x) + \int_o^y [\sigma_1'(t) - \sigma_2(t)]dt$$

$$= \sigma_1(y) + \int_o^x \sigma_2(s)ds - \int_o^y \sigma_2(t)dt.$$

Il en résulte que

$$\mathfrak{S}(x,y) = u_o + x\,\sigma_1(y) - y\,\sigma_1(y) + \int_o^y \sigma_1(t)dt + \int_o^y \tau_1(t)dt$$

$$+ \int_o^y t\,\sigma_2(t)dt + \int_o^x (x-s)\sigma_2(s)ds - x\int_o^y \sigma_2(t)dt$$

$$\mathfrak{S}(x,y) = u_o + (x-y)\sigma_1(y) + \int_o^y \sigma_1(t)dt + \int_o^y \tau_1(t)dt$$

$$- \int_x^y (x-t)\sigma_2(t)dt.$$

$$\widetilde{\mathfrak{S}}(x,y) = u_o + (x-y)\sigma_1(y) + \int_o^y [\sigma_1(t) + \tau_1(t)]dt + \int_y^x (x-t)\sigma_2(t)dt$$

Cet exemple introduit en fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse (h.B.2) :

Les fonctions $\sigma_p \in C^{r-p}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\tau_q \in C^{s-q}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définissent une fonction $\widetilde{\mathfrak{S}}$ solution de $\frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s} = 0$ appartenant à $H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

La continuité de $\widetilde{\mathfrak{S}}$ et de ses dérivées permet de définir sur des compacts de la forme $[-k,k]^2$ des fonctions $\bar{\omega}_{pq}^{(k)}$ non décroissantes réelles, nulles à l'origine et sous-additives telles que :

(I.B.6) $$\left|\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} \widetilde{\mathfrak{S}}(x,y) - \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} \widetilde{\mathfrak{S}}(\bar{x},\bar{y})\right| \leq \bar{\omega}_{pq}^{(k)}(|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}|).$$

(2) Afin de définir l'opérateur T_1 de $H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ dans $H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ dont les points fixes coïncident avec les solutions de l'équation (I.B.1 et 2) nous sommes amenés à considérer les applications S, S_1 et S_2 de $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ dans lui-même.

(I.B.7) $$S\Psi(x,y) = \int_x^y \{\int_t^x \Psi(s,t)ds\}dt = \int_x^y \{\int_y^s \Psi(s,t)dt\}ds$$

(I.B.8) $$S_1\Psi(x,y) = \int_y^x \Psi(x,t)dt$$

(I.B.9) $$S_2\Psi(x,y) = \int_x^y \Psi(s,y)ds.$$

· Nous remarquons que $S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1 = S$ de sorte que les opérateurs S, S_1 et S_2 permutent entre eux. Ceci nous permet d'écrire :

$$(T_1 U)(x,y) = \tilde{\mathfrak{S}}(x,y) + S_1^s \circ S_2^r F(x,y,U)$$

ou suivant les cas :

$r = s \qquad (T_1 u)(x,y) = \tilde{\mathfrak{S}}(x,y) + S^r F(x,y,U)$

$r > s \qquad (T_1 u)(x,y) = \tilde{\mathfrak{S}}(x,y) + S_2^{r-s}\{S^s F(x,y,U)\}$

$r < s \qquad (T_1 u)(x,y) = \tilde{\mathfrak{S}}(x,y) + S_1^{s-r}\{S^r F(x,y,U)\}$.

On vérifie aisément que T_1 est une application de $H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ dans lui-même. Voulant évaluer les semi-normes de $T_1 u$ à partir de celles de u, nous utiliserons les applications linéaires de $H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ dans lui-même S^*, S_1^*, S_2^* définies par :

$$S^* v(x,y) = \int_x^y \int_x^y \bar{\vartheta}(s,t,1)v(s,t)ds\,dt$$

$$S_1^* v(x,y) = \int_x^y \bar{\vartheta}(x,t,1)v(x,t)dt$$

$$S_2^* v(x,y) = \int_x^y \bar{\vartheta}(s,y,1)v(s,y)ds .$$

Pour x, y fixés, S^* est une application linéaire, continue pour la norme $v \to ||v||(x,y) = \sqrt{\int_x^y \int_x^y v^2(s,t)ds\,dt}$ de sorte que

$$|S^* v(x,y)| \leq \sqrt{\int_x^y \int_x^y \bar{\vartheta}^2(s,t,1)ds\,dt} \,.\, ||v||(x,y) . \tag{I.B.10}$$

D'un autre côté avec

$$||v||_1(x,y) = \sqrt{\left|\int_x^y v^2(s,y)ds\right|}$$

$$||v||_2(x,y) = \sqrt{\left|\int_x^y v^2(x,t)dt\right|}$$

on pourra écrire :

$$\text{(I.B.11)} \quad \begin{cases} |S_1 v(x,y)| \leqslant \sqrt{\left|\int_x^y \bar{\vartheta}^2(s,y,1)ds\right|} \cdot ||v||_1(x,y) \\ |S_2 v(x,y)| \leqslant \sqrt{\left|\int_x^y \bar{\vartheta}^2(x,t,1)dt\right|} \cdot ||v||_2(x,y) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$|(S\bar{\vartheta}v)(x,y)| \leqslant ||\bar{\vartheta}||(x,y).||v||(x,y)$$

$$|(S_1\bar{\vartheta}v)(x,y)| \leqslant ||\bar{\vartheta}||_1(x,y).||v||_1(x,y)$$

$$|(S_2\bar{\vartheta}v)(x,y)| \leqslant ||\bar{\vartheta}||_2(x,y).||v||_2(x,y).$$

Plus généralement nous voyons la possibilité d'introduire des fonctions A_{pq} de $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ $p \in \{0,1,\ldots,r-1\}$ et $q \in \{0,1,\ldots,s-1\}$ telles que :

$$\text{(I.B.12)} \quad \begin{cases} |(S_1^{s-q} \circ S_2^{r-p}\,\bar{\vartheta}\,v)(x,y)| \leqslant A_{pq}(x,y).||v||(x,y) \\ |(S_1^{s-q}\,\bar{\vartheta}\,v)(x,y)| \leqslant A_{rq}(x,y).||v||_1(x,y) \\ |(S_2^{r-p}\,\bar{\vartheta}\,v)(x,y)| \leqslant A_{ps}(x,y).||v||_2(x,y). \end{cases}$$

Soient alors les fonctions B_{pq} et B :

$$\text{(I.B.13)} \quad B_{pq}(x,y) = \operatorname{Max}\left\{\left|\frac{\partial^{p+q}\mathcal{G}}{\partial x^p \partial y^q}(x,y)\right| + |S_1^{s-q}S_2^{r-p}\,\bar{\vartheta}(x,y,1)|, A_{pq}(x,y)\right\}$$

$$\text{(I.B.14)} \quad B(x,y) = \operatorname*{Max}_{p,q}\{B_{pq}(x,y)\}$$

Nous écrirons comme dans la partie (I.A)

$$|(T_1 u)(x,y)| \leqslant B(x,y) + B(x,y) \sum_{p,q} \left|\left| \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q} \right|\right|(x,y)$$

c'est-à-dire

$$\alpha_k^{\lambda_k}(T_1 u) \leq \alpha_k^o(B) + \alpha_k^o(B) \frac{m-2}{\lambda_k} \beta_k^{\lambda_k}(u)$$

ou

$$\alpha_k^{\lambda_k}(T_1 u) \leq N_k\{1 + \frac{m-2}{\lambda_k} \beta_k^{\lambda_k}(u)\} \quad \text{avec} \quad N_k = \alpha_k^o(B). \tag{I.B.15}$$

De la même façon si $p \in \{0,1,\ldots,r-1\}$, $q \in \{0,1,\ldots,s-1\}$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_k^{\lambda_k}\left(\dfrac{\partial^{p+q} T_1 u}{\partial x^p \partial y^q}\right) \leq N_k\{1 + \dfrac{m-2}{\lambda_k} \beta_k^{\lambda_k}(u)\} \\[2ex] \alpha_k^{\lambda_k}\left(\dfrac{\partial^{p+s} T_1 u}{\partial x^p \partial y^s}\right) \leq N_k\{1 + \dfrac{m-2}{4\sqrt{2}\sqrt{\lambda_k}} \beta_k^{\lambda_k}(u)\} \\[2ex] \alpha_k^{\lambda_k}\left(\dfrac{\partial^{r+q} T_1 u}{\partial x^r \partial y^q}\right) \leq N_k\{1 + \dfrac{m-2}{4\sqrt{2}\sqrt{\lambda_k}} \beta_k^{\lambda_k}(u)\} \end{array}\right. \tag{I.B.16}$$

Le choix :

(I.B.17) $\lambda_k = \text{Max}\{2(m-2)N_k,\ 2\sqrt{2}(m-2)^2 N_k\}$ permet d'écrire la relation

$$\beta_k^{\lambda_k}(u) \leq 2N_k \quad \Rightarrow \quad \beta_k^{\lambda_k}(T_1 u) \leq 2N_k. \tag{I.B.18}$$

L'introduction des fonctions ρ_k^1 et ρ_k^2 majorantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial^r u}{\partial x^r}(x,y) - \dfrac{\partial^r u}{\partial x^r}(\bar{x},y)\right| \leq \rho_k^1(|x-\bar{x}|,y) \\[2ex] \left|\dfrac{\partial^s u}{\partial y^s}(x,y) - \dfrac{\partial^s u}{\partial y^s}(x,\bar{y})\right| \leq \rho_k^2(x,|y-\bar{y}|) \end{array}\right. \tag{I.B.19}$$

permet avec la continuité des fonctions f et $\mathcal{G}$ d'obtenir les majorations suivantes :

$$\left|\frac{\partial^r T_1 u}{\partial x^r}(x,y) - \frac{\partial^r T_1 u}{\partial x^r}(\bar{x},y)\right| \leq \begin{cases} \Omega_k^1(|x-\bar{x}|) + \sum_{q=0}^{s-1} \omega_{rq}^{(k)} \left(\left|\int_{-k}^{y} \frac{(y-\eta)^{s-1-q}}{(s-1-q)!} \rho_k^1(|x-\bar{x}|,\eta)\,d\eta\right|\right) \\ \\ \Omega_k^1(|x-\bar{x}|) + \sum_{q=0}^{s-1} \omega_{rq}^{(k)} \left(\left|\int_{y}^{k} \frac{(y-\eta)^{s-1-q}}{(s-1-q)!} \rho_k^1(|x-\bar{x}|,\eta)\,d\eta\right|\right) \end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial^s T_1 u}{\partial y^s}(x,y) - \frac{\partial^s T_1 u}{\partial y^s}(x,\bar{y})\right| \leq \begin{cases} \Omega_k^2(|y-\bar{y}|) + \sum_{p=0}^{r-1} \omega_{ps}^{(k)} \left(\left|\int_{-k}^{x} \frac{(x-\xi)^{r-1-p}}{(r-1-p)!} \rho_k^2(\xi,|y-\bar{y}|)\,d\xi\right|\right) \\ \\ \Omega_k^2(|y-\bar{y}|) + \sum_{p=0}^{r-1} \omega_{ps}^{(k)} \left(\left|\int_{x}^{k} \frac{(x-\xi)^{r-1-p}}{(r-1-p)!} \rho_k^2(\xi,|y-\bar{y}|)\,d\xi\right|\right) \end{cases}$$

Ces relations conduisent tout naturellement à formuler l'hypothèse (h.B.3) analogue à l'hypothèse (h.A.3).

Hypothèse (h.B.3) :

Les équations intégrales

(I.B.20)
$$\begin{cases} \rho_{1,k}(\delta,y) = \Omega_{1,k}(\delta) + \sum_{q=0}^{s-1} \omega_{rq}^{(k)} \left(\left|\int_{-k}^{y} \frac{(y-\eta)^{s-1-q}}{(s-1-q)!} \rho_{1,k}(\delta,\eta)\,d\eta\right|\right) \\ \\ \rho_{1,k}^*(\delta,y) = \Omega_{1,k}(\delta) + \sum_{q=0}^{s-1} \omega_{rq}^{(k)} \left(\left|\int_{y}^{k} \frac{(y-\eta)^{s-1-q}}{(s-1-q)!} \rho_{1,k}^*(\delta,\eta)\,d\eta\right|\right) \end{cases}$$

(I.B.21
$$\begin{cases} \rho_{2,k}(x,\delta) = \Omega_{2,k}(\delta) + \sum_{p=0}^{r-1} \omega_{ps}^{(k)} \left(\left|\int_{-k}^{x} \frac{(x-\xi)^{r-1-p}}{(r-1-p)!} \rho_{2,k}(\xi,\delta)\,d\xi\right|\right) \\ \\ \rho_{2,k}^*(x,\delta) = \Omega_{2,k}(\delta) + \sum_{p=0}^{r-1} \omega_{ps}^{(k)} \left(\left|\int_{x}^{k} \frac{(x-\xi)^{r-1-p}}{(r-1-p)!} \rho_{2,k}^*(\xi,\delta)\,d\xi\right|\right) \end{cases}$$

admettent des solutions positives tendant vers 0 avec δ uniformément par rapport à x ou y sur $[-k,+k]$.

Cette hypothèse sera automatiquement satisfaite dès que les $r+s$ fonctions $\omega_{rq}^{(k)}$ et $\omega_{ps}^{(k)}$ $p \in \{0,1,\dots,r-1\}$, $q \in \{0,1,\dots,s-1\}$ seront linéaires.

Théorème (I.B.1) :

Sous les hypothèses :

(h.B.1) : $f \in C(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ $\quad |f(x,y,(z_{pq}))| \leq \psi(x,y,\Sigma|z_{pq}|)$

(h.B.2) : $\sigma_p \in C^{r-p}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\tau_q \in C^{s-q}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

(h.B.3) : $\lim\limits_{\delta\to 0} \rho_{1k}(x,\delta) = \lim\limits_{\delta\to 0} \rho^*_{1k}(x,\delta) = \lim\limits_{\delta\to 0} \rho_{2k}(\delta,y) = \lim \rho^*_{2k}(\delta,y) = 0$

uniformément sur $[-k,k]$.

L'équation $\dfrac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s} = f(x,y,u,\dots,\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q},\dots)$ $\quad \left\{\begin{array}{l} 0 \leq p \leq r \\ 0 \leq q \leq s \\ p+q < r+s \end{array}\right.$

$$u(0,0) = u_o \ , \ \frac{\partial^p u}{\partial x^p}(x,x) = \sigma_p(x) \ , \ \frac{\partial^q u}{\partial y^q}(y,y) = \tau_q(y)$$

admet une solution définie sur tout $\mathbb{R}^2$.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème (I.A.1), elle consiste à définir une partie convexe compacte A_1 de $H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ puis à vérifier la continuité de l'opérateur T_1.

Remarque :

Le théorème qui vient d'être établi nous suggère de généraliser le résultat de A.K. Aziz et J.P. Maloney [1] ou celui de B. Palczewski [1] en examinant l'équation : (I.B.1) soumise cette fois aux conditions initiales :

$$\text{(I.B.22)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^q u}{\partial y^q}(x,0) = \nu_q(x) & 0 \leq q \leq s-1, \quad x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial^p u}{\partial x^p}(0,y) = \mu_p(y) & 0 \leq p \leq r-1, \quad y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ce problème désigné par (I.C) fera l'objet de la section suivante. D'un autre côté en nous inspirant des articles de Jan Kisynski et Adam Bielecki nous en viendrons à examiner (dans la section D) une autre généralisation.

C - RESOLUTION DU PROBLEME (I - C)

Soit l'équation :

$$\text{(I.C.1)} \qquad \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s} = f(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\ldots,\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q},\ldots) \quad \begin{cases} p \in \{0,1,\ldots,r\} \\ q \in \{0,1,\ldots,s\} \\ \quad p+q < r+s \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$\text{(I.C.2)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^q u}{\partial y^q}(x,0) = \nu_q(x) & 0 \leqslant q \leqslant s-1 \\ \dfrac{\partial^p u}{\partial x^p}(0,y) = \mu_p(y) & 0 \leqslant p \leqslant r-1 \end{cases}$$

dans laquelle la fonction f vérifie l'hypothèse (h.B.1) et les fonctions ν_q, ν_p l'hypothèse suivante :

Hypothèse (h.C.1)

Les fonctions μ_p de $C^{r-p}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et ν_q de $C^{s-q}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ satisfont aux relations de compatibilité suffisantes pour que l'équation $\frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s} = 0$ soumise aux données (I.C.2) admette une solution $\tilde{S}$ définie sur tout $\mathbb{R}^2$ et appartenant à $H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

$H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ désignera encore le sous-espace de $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

$H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) = \{\Psi \in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) : \frac{\partial^{p+q} \Psi}{\partial x^p \partial y^q} \in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) : p+q < r+s\}$ et sera muni de la topologie induite par les semi-normes

$$\beta_k^{\lambda_k}(\Psi) = \operatorname{Max}\{\alpha_k^{\lambda_k}(\frac{\partial^{p+q} \Psi}{\partial x^p \partial y^q})\}, k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_k \geqslant 0 \quad \text{avec}$$

$$\alpha_k^{\lambda_k}(\Psi) = \sup_{(x,y)\in Q_k} \{|\Psi(x,y)| e^{-\lambda_k(|x|+|y|)}\}$$

avec $Q_k = \{x,y) \in R^2 : |x| \leqslant k, \quad |y| \leqslant k\}$

S, S_1 et S_2 désigneront maintenant les applications de $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ dans lui-même :

$$S\Psi(x,y) = \int_0^x \int_0^y \Psi(s,t)ds\ dt$$

$$S_1\Psi(x,y) = \int_0^y \Psi(x,t)dt$$

$$S_2\Psi(x,y) = \int_0^x \Psi(s,y)ds$$

de sorte que

$$(\mathrm{I.C.4}) \qquad (T_2u)(x,y) = \mathfrak{S}(x,y) + S_1^s \circ S_2^r F(x,y,U).$$

La démarche suivie est alors la même que dans la partie précédente, en particulier l'introduction des fonctions majorantes :

$$\left|\frac{\partial^r u}{\partial x^r}(x,y) - \frac{\partial^r u}{\partial x^r}(\bar{x},y)\right| \leqslant \rho_k^1(|x-\bar{x}|,y)$$

$$\left|\frac{\partial^s u}{\partial y^s}(x,y) - \frac{\partial^s u}{\partial y^s}(x,\bar{y})\right| \leqslant \rho_k^2(x,|y-\bar{y}|)$$

permet d'écrire :

$$\left|\frac{\partial^r T_2u}{\partial x^r}(x,y) - \frac{\partial^r T_2u}{\partial x^r}(\bar{x},y)\right| \leqslant \Omega_k^1(|x-\bar{x}|)+\sum_{q=0}^{s-1}\omega_{rq}^{(k)}\left(\left|\int_0^y \frac{(y-\eta)^{s-1-q}}{(s-1-q)!}\,\rho_k^1(|x-\bar{x}|,\eta)d\eta\right|\right)$$

et
$$\left|\frac{\partial^s T_2u}{\partial y^s}(x,y) - \frac{\partial^s T_2u}{\partial y^s}(x,\bar{y})\right| \leqslant \Omega_k^2(|y-\bar{y}|)+\sum_{p=0}^{r-1}\omega_{ps}^{(k)}\left(\left|\int_0^x \frac{(x-\xi)^{r-1-p}}{(r-1-p)!}\,\rho_k^2(\xi,|y-\bar{y}|)d\xi\right|\right)$$

et de supposer :

Hypothèse (h.C.2) :

Les équations intégrales :

$$\text{(I.C.5)}\quad \rho_{1,k}(\delta,y) = \Omega_k^1(\delta) + \sum_{q=0}^{s-1} \omega_{rq}^{(k)}\left(\left|\int_0^y \frac{(y-\eta)^{s-1-q}}{(s-1-q)!}\ \rho_{1,k}(\delta,\eta)d\eta\right|\right)$$

$$\text{(I.C.6)}\quad \rho_{2,k}(x,\delta) = \Omega_k^2(\delta) + \sum_{p=0}^{r-1} \omega_{ps}^{(k)}\left(\left|\int_0^x \frac{(x-\xi)^{r-1-p}}{(r-1-p)!}\ \rho_{2,k}(\xi,\delta)d\xi\right|\right)$$

admettent des solutions positives tendant vers 0 avec δ uniformément par rapport à x ou y sur $[-k,k]$.

Nous avons alors le

Théorème (I.C.1) :

Avec les hypothèses :

(h.B.1) $f \in C(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}), |f(x,y,(z_{pq}))| \leq \vartheta(x,y,\sum |z_{pq}|)$

(h.C.1) $\mu_p \in C^{r-p}(\mathbb{R},\mathbb{R})\ ,\ \nu_q \in C^{s-q}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(h.C.2) $\lim\limits_{\delta\to 0} \rho_{1,k}(\delta,y) = \lim\limits_{\delta\to 0} \rho_{2,k}(x,\delta) = 0$ uniformément sur $[-k,k]$

Le problème (I.C)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s} = f\left(x,y,u,\ldots,\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q},\ldots\right) \\[2ex] \dfrac{\partial^q u}{\partial y^q}(x,0) = \nu_q(x) \qquad \dfrac{\partial^p u}{\partial x^p}(0,y) = \mu_p(y) \end{cases}$$

possède au moins une solution définie sur tout $\mathbb{R}^2$.

Même dans le cas où $r = s = 1$ ce théorème n'implique pas l'unicité. Par exemple, A. Alexiewicz et W. Orlicz [1] indiquèrent que l'équation $u_{xy} = 9|u|^{2/3}$ $u(x,0) = u(0,y) = 0$ admet les deux solutions $u_1 \equiv 0$ et $u_2 : u_2(x,y) = x^3y^3$.

B. Palczewski [1] et J.P. Shanahan [1] ont examiné le problème d'unicité pour l'équation $u_{xy} = f(x,y,u,u_x,u_y)$. En particulier, le théorème de B. Palczewski fait intervenir l'hypothèse suivante :

Hypothèse (h.C.3) :

$\chi \in C(\mathbb{R}_+^2,\mathbb{R}_+)$ désigne une fonction continue, non négative telle que

(1) $\chi(t,0)$ si $t \geq 0$

(2) $r \to \chi(t,r)$ est non décroissante pour $t \geq 0$ fixé.

(3) quel que soit $\rho \geq 0$, $t \to \chi(t,\rho t)$ est non décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

(4) quel que soit $t_o > 0$ le problème de Cauchy $\rho'(t) = \chi(t,\rho(t))$, $\rho(0) = 0$, $0 \leq t \leq t_o$ admet pour unique solution la fonction identiquement nulle.

Il nous est possible de généraliser le résultat de B. Palczewski en considérant :

Hypothèse (h.C.4) :

Il existe pour tout entier k, $m-2$ fonctions $\gamma_{pq}^{(k)}$ définies sur Q_k, non négatives telles que $\sum\limits_{pq} \gamma_{pq}^{(k)} \equiv 1$ et

$$|f(x,y,(z_{pq})) - f(x,y,(\bar{z}_{pq}))| \leq \sum_{pq} \gamma_{pq}^{(k)}(x,y)\chi(|x|^r|y|^s,|x|^p|y|^q|z_{pq}-\bar{z}_{pq}|)$$

pour tout $(x,y) \in Q_k$ et $\beta_k^{\lambda_k}(u) \leq 2N_k$.

Cette dernière hypothèse conduit au :

Théorème (I.C.2) :

Sous les hypothèses :

(h.B.1), (h.C.1, 2, 3 et 4) le problème (I.C) admet une et une seule solution pouvant être obtenue par approximations successives.

La démonstration de ce théorème est calquée sur celle de B. Palczewski [1 p. 30 à 33] ; elle repose essentiellement sur l'inégalité

$$\text{(I.C.7)} \qquad |x|^p|y|^q|S_1^{s-q} \circ S_2^{r-p}\Psi(x,y)| \leq \int_o^{|x|^r|y|^s} \sup_{A_t} \{|\Psi(\xi,\eta)|\}dt$$

dans laquelle $A_t = \{(x,y) \in Q_k : |x|^r|y|^s \leq t\}$ $t \geq 0$ $(x,y) \in Q_k$ et $\Psi \in C(Q_k,\mathbb{R})$; S_1 et S_2 définies par (I.C.3).

Les considérations développées dans cette partie peuvent se transposer sans difficulté à l'équation plus générale :

$$\text{(I.C.8)} \qquad \frac{\partial^{r_1+\dots+r_n} u}{\partial x_1^{r_1},\dots,\partial x_n^{r_n}} = f(x_1,\dots,x_n,u, \frac{\partial u}{\partial x_1},\dots, \frac{\partial^{p_1+\dots+p_n} u}{\partial x_1^{p_1},\dots,\partial x_n^{p_n}},\dots)$$

$$p_1 \in \{0,1,\dots,r_1\},\dots, p_n \in \{0,1,\dots,r_n\}, \qquad p_1+\dots+p_n < r_1+\dots+r_n$$

soumise aux conditions initiales :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{p_1} u}{\partial x_1^{p_1}}(0,x_2,\dots,x_n) = \sigma_1^{p_1}(x_2,\dots,x_n) & 0 \leq p_1 \leq r_1-1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial^{p_n} u}{\partial x_n^{p_n}}(x_1,\dots,x_{n-1},0) = \sigma_n^{p_n}(x_1,\dots,x_{n-1}) & 0 \leq p_n \leq r_n-1 \ . \end{cases}$$

Nous ferons les hypothèses suivantes :

Hypothèse (h.C.5) :

La fonction f de $C(\mathbb{R}^{m'},\mathbb{R})$ $m' = n-1 + (r_1+1)(r_2+1),\dots,(r_n+1)$ $f : f(x_1,\dots,x_n,(z_{p_1,\dots,p_n}))$ satisfait la relation :

$$\text{(I.C.10)} \qquad |f(x_1,\dots,x_n,(z_{p_1,\dots,p_n}))| \leq \emptyset(x_1,\dots,x_n, \sum_{p_1\dots p_n} |z_{p_1,\dots,p_n}|)$$

dans laquelle $\psi \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ est pour $(x_1,\dots,x_n)$ fixé une fonction sous-additive de $\mathbb{R}^+$.

D'autre part, f est supposée lipschitzienne par rapport aux variables $z_{p_1,\dots,p_n}$ dès que l'une des n égalités $p_i = r_i$ est satisfaite.

Hypothèse (h.C.6) :

Les fonctions $\sigma_i^{p_i}$ de $C(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R})$ sont suffisamment différentiables pour que la solution $\tilde{\mathcal{S}}$ de l'équation $\frac{\partial^{r_1+\dots+r_n}}{\partial x_1^{r_1}\dots\partial x_n^{r_n}}\tilde{\mathcal{S}} = 0$ soumise aux données (I.C.9) appartienne à :

$$\mathcal{K}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) = \{\Psi \in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) : \frac{\partial^{p_1+\dots+p_n}}{\partial x_1^{p_1}\dots\partial x_n^{p_n}}\Psi \in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\} \quad .$$

Théorème (I.C.3) :

Avec les hypothèses (h.C.5 et 6), le problème (I.C.8 et 9) admet une solution définie sur tout $\mathbb{R}^n$.

La démonstration de ce théorème est calquée sur celle du théorème (I.C.1).

Remarque :

Le résultat précédent généralise ceux obtenus par I.I. Glick [1], J. Conlan et J.B. Diaz [1] qui supposent des conditions de Lipschitz par rapport à toutes les dérivées $u_{p_1,\dots,p_n}$, et ceux de V. Durikovic [1] qui n'exigent ces conditions de régularité que pour les dérivées d'ordre supérieur ou égal à $\min(r_1,r_2,\dots,r_n)$.

D'un autre côté, le théorème d'unicité (I.C.2) peut aussi se généraliser à l'équation (I.C.8 et 9) avec l'hypothèse (h.C.7).

Hypothèse (h.C.7) :

Il existe pour tout entier k, m'-n fonctions $\gamma^{(k)}_{p_1,\dots,p_n}$ définies sur Q_k, non négatives telles que :

$$\sum_{p_1\dots p_n} \gamma^{(k)}_{p_1\dots p_n}(x_1,\dots,x_n) \equiv 1 \quad \text{et}$$

$$|f(x_1,\dots,x_n,(z_{p_1,\dots,p_n})) - f(x_1,\dots,x_n,(\bar{z}_{p_1,\dots,p_n}))| \leqslant$$

$$\sum_{p_1\dots p_n} \gamma^{(k)}_{p_1\dots p_n}(x_1,\dots,x_n)$$

$$\chi(|x_1|^{r_1}\dots|x_n|^{r_n},|x_1|^{p_1}\dots|x_n|^{p_n}|z_{p_1\dots p_n} - \bar{z}_{p_1\dots p_n}|)$$

pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in Q_k$ $\quad \beta_k^{\lambda_k}(u) \leqslant 2N_k$.

(χ satisfaisant l'hypothèse (h.C.3).

Théorème (I.C.4) :

Sous les hypothèses (h.C.3, 5, 6, 7) le problème (I.C.8 et 9) admet une et une seule solution définie sur tout $\mathbb{R}^n$.

Remarque : Ce théorème est à rapprocher de ceux de V. Durikovic [2].

$\mathcal{D}$ - RESOLUTION DU PROBLEME (I - $\mathcal{D}$)

En 1959, Jan Kisynski [4] examina l'équation

(I.D.1) $$z_{xy} = f(x,y,z,z_x,z_y)$$

soumise aux conditions initiales

(I.D.2) $$\begin{cases} z(x,g(x)) = \sigma(x) & x \in [0,a] \\ z(0,y) = \tau(y) & \text{pour} \quad y \in [-b,+b]. \end{cases}$$

Moyennant certaines hypothèses de régularité il donna un théorème d'existence globale d'une solution par l'introduction d'une fonction M définie sur :

$\{(x,y) : 0 \leq x \leq a, \ |y| \leq b\}$ vérifiant une relation de la forme :

$$K(1 + \int_0^x \left| \int_{g(x)}^y M(u,v)dv \right| du) + |g'(x)| \left| \int_0^x M(u,g(x))du \right.$$

$$\left. + \left| \int_{g(x)}^y M(x,v)dv \right| + \int_0^x M(u,y)du \right) \leq M(x,y).$$

Modifiant légèrement cette fonction, il est alors possible de déterminer une famille de semi-normes $\alpha_k^{\lambda_k}$ et $\beta_k^{\lambda_k}$ jouant le même rôle que précédemment. Précisons les hypothèses :

Hypothèse (h.D.1) :

La fonction g de $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admet une dérivée continue sur tout $\mathbb{R}$ et vérifie $g(0) = 0$.

On notera $c_k = \inf_{|x|\leq k} g(x) \leq \sup_{|x|\leq k} g(x) = d_k$.

Hypothèse (h.D.2) :

Les fonctions $\mu_p \in C^{r-p}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\gamma_q \in C^{s-q}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifient les relations de compatibilité suffisantes pour que l'équation $\frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s} = 0$

soumise aux conditions

$$\text{(I.D.3)} \qquad \frac{\partial^q u}{\partial y^q}(x,g(x)) = \gamma_q(x) \quad 0 \leqslant q < s \qquad \frac{\partial^p u}{\partial x^p}(0,y) = \mu_p(y) \quad 0 \leqslant p < r$$

admet une solution définie sur tout $\mathbb{R}^2$ et appartenant à

$H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) = \{\Psi \in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}),\ \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} \Psi \in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})\}$.

S, S_1 et S_2 désigneront cette fois les applications de $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ dans lui-même :

$$\text{(I.D.4)} \qquad \begin{cases} S\Psi(x,y) = \int_0^x \{\int_{g(x)}^y \Psi(s,t)dt\}ds \\ S_1\Psi(x,y) = \int_{g(x)}^y \Psi(x,t)dt - g'(x) \int_0^x \Psi(s,g(x))ds \\ S_2\Psi(x,y) = \int_0^x \Psi(s,y)ds \end{cases}$$

de sorte que $(T_3 u)(x,y) = \mathfrak{S}(x,y) + S_1^s \circ S_2^r F(x,y,U)$.

Après avoir introduit les fonctions majorantes :

$$\left|\frac{\partial^r u}{\partial x^r}(x,y) - \frac{\partial^r u}{\partial x^r}(\bar{x},y)\right| \leqslant \rho_k^1(|x-\bar{x}|,y)$$

$$\left|\frac{\partial^s u}{\partial y^s}(x,y) - \frac{\partial^s u}{\partial y^s}(x,\bar{y})\right| \leqslant \rho_k^2(x,|y-\bar{y}|)$$

nous pouvons grâce à la continuité des fonctions f et $\mathfrak{S}$, déterminer des fonctions Ω_k^1 et Ω_k^2 de $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ telles que :

$$\left|\frac{\partial^r T_3 u}{\partial x^r}(x,y) - \frac{\partial^r T_3 u}{\partial x^r}(\bar{x},y)\right| \leq \Omega_k^1(|x-\bar{x}|) + \sum_{q=0}^{s-1} \omega_{rq}^{(k)} \left(\left|\int_{c_k}^{y} \frac{(y-\eta)^{s-1-q}}{(s-1-q)!} \rho_k^1(|x-\bar{x}|,\eta)d\eta\right|\right)$$

si $g(x) \leq y$ et $g(\bar{x}) \leq y$

$$\left|\frac{\partial^r T_3 u}{\partial x^r}(x,y) - \frac{\partial^r T_3 u}{\partial x^r}(\bar{x},y)\right| \leq \Omega_k^1(|x-\bar{x}|) + \sum_{q=0}^{s-1} \omega_{rq}^{(k)} \left(\left|\int_{y}^{d_k} \frac{(y-\eta)^{s-1-q}}{(s-1-q)!} \rho_k^1(|x-\bar{x}|,\eta)d\eta\right|\right)$$

si $g(x) \geq y$ et $g(\bar{x}) \geq y$

puis

$$\left|\frac{\partial^s T_3 u}{\partial y^s}(x,y) - \frac{\partial^s T_3 u}{\partial y^s}(x,\bar{y})\right| \leq \Omega_k^2(|y-\bar{y}|) + \sum_{p=0}^{r-1} \omega_{ps}^{(k)} \left(\left|\int_{0}^{x} \frac{(x-\xi)^{r-1-p}}{(r-1-p)!} \rho_k^2(\xi,|y-\bar{y}|)d\xi\right|\right)$$

<u>*Hypothèse*</u> (h.D.3) :

Les équations intégrales :

$$\text{(I.D.5)} \quad \begin{cases} \rho_{1,k}(\delta,y) = \Omega_k^1(\delta) + \displaystyle\sum_{q=0}^{s-1} \omega_{rq}^{(k)} \left(\left|\int_{c_k}^{y} \frac{(y-\eta)^{s-1-q}}{(s-1-q)!} \rho_{1,k}(\delta,\eta)d\eta\right|\right) \\ \rho_{1,k}^*(\delta,y) = \Omega_k^1(\delta) + \displaystyle\sum_{q=0}^{s-1} \omega_{rq}^{(k)} \left(\left|\int_{y}^{d_k} \frac{(y-\eta)^{s-1-q}}{(s-1-q)!} \rho_{1,k}^*(\delta,\eta)d\eta\right|\right) \end{cases}$$

$$\text{(I.D.6)} \quad \rho_{2,k}(x,\delta) = \Omega_k^2(\delta) + \sum_{p=0}^{r-1} \omega_{rq}^{(k)} \left(\left|\int_{0}^{x} \frac{(x-\xi)^{r-1-p}}{(r-1-p)!} \rho_{2,k}(\xi,\delta)d\xi\right|\right)$$

admettent des solutions positives tendant vers 0 avec δ uniformément par rapport à x ou y sur $[-k,k]$.

Ces hypothèses conduisent au thèorème suivant :

Théorème (I.D.1) :

Sous les hypothèses :

(h.B.1) $f \in C(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ $\quad |f(x,y,(z_{pq}))| \leq \vartheta(x,y,\sum|z_{pq}|)$

(h.D.1) $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $g(0) = 0$

(h.D.2) $\mu_p \in C^{r-p}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\quad \gamma_q \in C^{s-q}(R,R)$

(h.D.3) $\lim\limits_{\delta\to 0} \rho_{1,k}(\delta,y) = \lim\limits_{\delta\to 0} \rho^*_{1,k}(\delta,y) = \lim\limits_{\delta\to 0} \rho_{2,k}(x,\delta) = 0$

uniformément sur $[-k,k]$.

L'équation

$$\text{(I.D)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s} = f(x,y,u,\ldots,\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q},\ldots) \\[2ex] \dfrac{\partial^q u}{\partial y^q}(x,g(x)) = \gamma_q(x),\ 0 \leq q < s,\ \dfrac{\partial^p u}{\partial x^p}(0,y) = \mu_p(y),\quad 0 \leq p < r \end{cases}$$

possède au moins une solution définie sur tout $\mathbb{R}^2$.

Conclusion.

D'après notre étude, nous constatons que les trois problèmes examinés, relatifs à l'équation $\dfrac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s} = f(x,y,u,\ldots,\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q},\ldots)$ admettent une solution si la fonction f de $C(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ est lipschitzienne par rapport aux seules variables z_{rq} et z_{ps} $\quad q \in \{0,1,\ldots,s-1\}$, $p \in \{0,1,\ldots,r-1\}$.
Ce résultat doit pouvoir se transposer sans difficulté aux équations :

$$\text{(I.D.7)} \quad \begin{cases} u_{x^2y^2} = f(x,y,u,u_x,u_y,u_{x^2},u_{xy},u_{y^2},u_{x^2y},u_{xy^2}) \\ u(0,y) = A(y),\ u_x(0,y) = B(y),\ u(x,0) = C(x), u_y(x,y_o) = D(x), \end{cases}$$

examinée par Vera Radochovã [1] sous une forme simplifiée et

$$
\text{(I.D.8)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^{2m}u}{\partial x^m \partial y^m} = f(x,y,u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, (\dfrac{\partial^{2p}u}{\partial x^p \partial y^p}), (\dfrac{\partial^{2p+1}u}{\partial x^{p+1}\partial y^p}), (\dfrac{\partial^{2p+1}u}{\partial x^p \partial y^{p+1}})) \\[2ex] \dfrac{\partial^{2p}u}{\partial x^p \partial y^p}(x,0) = \gamma_p(x), \quad \dfrac{\partial^{2p}u}{\partial x^p \partial y^p}(0,y) = \delta_p(y) \qquad p \in \{0,1,\dots,m-1\} \end{cases}
$$

considérée par Paolo de Lucia [1]. Au lieu d'approfondir l'étude de ces problèmes, il nous est apparu intéressant de reprendre l'étude de M. Winants [1,...,11] concernant l'équation : $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = f(x,y,u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})$ et de montrer que le théorème de Tychonoff permet encore d'obtenir des solutions globales définies sur tout $\mathbb{R}^2$. Le prochain chapitre sera consacré à ce sujet.

CHAPITRE II

ETUDE DE QUELQUES PROBLEMES D'EXISTENCE GLOBALE RELATIFS A

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = f(x,y,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})$$

Lors de son étude sur l'équation :

(II.0.1) $$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = f(x,y,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})$$

M. Winants a remarqué tout d'abord que l'équation

(II.0.2) $$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0 \qquad u(x,0) = u(0,y) = u(x,-x) = 0$$

admettait une infinité de solutions : $I(x) + I(y) - I(x+y)$ (I impaire appartenant à $C^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$) tandis que l'équation :

(II.0.3) $$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = x \sin y$$ soumise aux mêmes données initiales

n'en avait aucune.

Les problèmes aux limites qu'il étudia ensuite, ne présentèrent pas cette particularité. Pour les quatre problèmes examinés dans ce chapitre, nous ferons les hypothèses suivantes :

Hypothèse (II.0.1) :

La fonction f de $C(\mathbb{R}^6,\mathbb{R})$ satisfait pour tout (x,y,u,p,q,z) de $\mathbb{R}^6$ la relation :

(II.0.4) $$|f(x,y,u,p,q,z)| \leq \vartheta(x,y,|u|+|p|+|q|+|z|) = \vartheta_{x,y}(|u|+|p|+|q|+|z|)$$

avec $\vartheta_{x,y}$ fonction de $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ sous-additive quels que soient x et y :

$$\vartheta_{x,y}(t+\bar{t}) \leq \vartheta_{x,y}(t) + \vartheta_{x,y}(\bar{t}) \qquad t, \bar{t} \geq 0.$$

Notons comme dans le chapitre 1, $\bar{\vartheta}$ la fonction définie à partir de ϑ par

$$\bar{\vartheta}(x,y,t) = \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t} \vartheta(x,y,\tau).$$

On a

(II.0.5) $$\bar{\vartheta}(x,y,t) \leqslant \bar{\vartheta}(x,y,1)(1+t) \quad \text{si} \quad t \geqslant 0.$$

c'est-à-dire

$$|f(x,y,u,p,q,z)| \leqslant \bar{\vartheta}(x,y,1)\{1+|u|+|p|+|q|+|z|\}$$

$H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ sera le sous-espace de $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

$$H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) = \{\Psi \in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) : \Psi , \frac{\partial\Psi}{\partial x} , \frac{\partial\Psi}{\partial y} , \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} \in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})\}$$

et

(II.0.6) $$F(x,y,U) = f(x,y,u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y), \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)).$$

La continuité de la fonction f permet de définir des fonctions continues croissantes, non négatives sous-additives et s'annulant à l'origine telles que :

(II.0.7) $$\begin{cases} |f(x,y,u,p,q,z) - f(\bar{x},y,u,p,q,z)| \leqslant \omega_{1,k}(|x-\bar{x}|) \\ |f(x,y,u,p,q,z) - f(x,\bar{y},u,p,q,z)| \leqslant \omega_{2,k}(|y-\bar{y}|) \\ |f(x,y,u,p,q,z) - f(x,y,\bar{u},p,q,z)| \leqslant \omega_{3,k}(|u-\bar{u}|) \\ |f(x,y,u,p,q,z) - f(x,y,u,\bar{p},q,z)| \leqslant \omega_{4,k}(|p-\bar{p}|) \\ |f(x,y,u,p,q,z) - f(x,y,u,p,\bar{q},z)| \leqslant \omega_{5,k}(|q-\bar{q}|) \\ |f(x,y,u,p,q,z) - f(x,y,u,p,q,\bar{z})| \leqslant \omega_{6,k}(|z-\bar{z}|) \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}$$

Toutes ces relations sont satisfaites pour $x, \bar{x}, y, \bar{y} \in [-k,k]$ $u, \bar{u}, p, \bar{p}, q, \bar{q}, z, \bar{z} \in [-2N_k, 2N_k]$ $N_k > 0$.

On notera :

$$M_k = \sup_{D_k} f(x,y,u,p,q,z) \quad \text{avec}$$

$$D_k = \{(x,y,u,p,q,z) : |x|,|y| \leqslant k,\ |u|,\ |p|\ ,\ |q|\ ,\ |z| \leqslant \bar{N}_k\}.$$

La procédure utilisée pour l'étude des 4 problèmes aux limites (II. A. B. C. D) est la même. Elle peut se résumer ainsi :

1°) définition de l'équation intégrale dont les solutions coïncident avec celles du problème examiné.

2°) définition de la fonction L_λ et par suite de la topologie de $H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

3°) évaluation des quantités

$$\left|\frac{\partial^2 T_i u}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 T_i u}{\partial x \partial y}(\bar{x},y)\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^2 T_i u}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 T_i u}{\partial x \partial y}(x,\bar{y})\right|$$

intervenant dans la définition du sous-ensemble convexe compact du théorème de Tychonoff.

4°) Enoncé du théorème d'existence globale.

A - RESOLUTION DU PROBLEME (II - A)

(1) Remarquons tout d'abord l'analogie entre les solutions du problème :

$$(\text{II. A})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = f(x,y,u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}) \\ u(x,0) = \sigma(x), \quad u(0,y) = \tau(y), \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \tau_1(y) \\ \sigma(0) = \tau(0) \qquad \sigma'(0) = \tau_1(0) \end{cases}$$

et les points fixes de l'opérateur T_1.

$$(\text{II.A.1})\qquad (T_1 u)(x,y) = \mathcal{S}_1(x,y) + \int_0^x ds \int_0^y dt \int_0^s F(r,s+t-r,U)dr$$

avec

$$(\text{II.A.2})\qquad \mathcal{S}_1(x,y) = \sigma(x) + \tau(y) - \sigma(0) + \int_0^x [\tau_1(s+y) - \tau_1(s)]ds.$$

Nous en déduisons

$$(\text{II.A.3})\qquad \frac{\partial}{\partial x}(T_1 u)(x,y) = \sigma'(x) + \tau_1(x+y) - \tau_1(x) + \int_0^y dt \int_0^x F(r,x+t-r,U)dr$$

$$(\text{II.A.4})\qquad \frac{\partial}{\partial y}(T_1 u)(x,y) = \tau'(y) + \tau_1(x+y) - \tau_1(y) + \int_0^x ds \int_0^s F(r,s+y-r,U)dr$$

$$(\text{II.A.5})\qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(T_1 u)(x,y) = \tau'(x+y) + \int_0^x F(r,x+y-r,U)dr.$$

(2) Désignons par L_λ la fonction de $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ définie pour tout $\lambda \geqslant 0$ par

(II.A.6) $$L_\lambda(x,y) = \exp\{\lambda(|x| + \frac{1}{2}|y|)\}.$$

Cette fonction admet les propriétés suivantes dont les démonstrations élémentaires pourront être admises :

(II.A.7) $$\left|\int_0^x L_\lambda^2(t,x+y-t)dt\right| \leq \frac{1}{\lambda} L_\lambda^2(x,y)$$

(II.A.8) $$\left|\int_0^x \{\int_0^r L_\lambda^2(t,r+y-t)dt\}dr\right| \leq \frac{1}{2\lambda^2} L_\lambda^2(x,y)$$

(II.A.9) $$\left|\int_0^y \{\int_0^x L_\lambda^2(t,x+s-t)dt\}ds\right| \leq \frac{1}{\lambda^2} L_\lambda^2(x,y)$$

(II.A.10) $$\left|\int_0^x dr \int_0^y ds \int_0^r L_\lambda^2(t,r+s-t)dt\right| \leq \frac{1}{2\lambda^3} L_\lambda^2(x,y)$$

Soit Q_k le compact de $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : |x| \leq k,\ |y| \leq k\}$ $(k \in \mathbb{N})$ nous définissons sur $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et $H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ la topologie induite par les semi-normes $\alpha_k^{\lambda_k}$ et $\beta_k^{\lambda_k}$:

(II.A.11) $$\alpha_k^{\lambda_k}(\Psi) = \sup_{Q_k}\{|\Psi(x,y)|\ L_{\lambda_k}^{-1}(x,y)\}$$

(II.A.12) $$\beta_k^{\lambda_k}(\Psi) = \mathrm{Max}\{\alpha_k^{\lambda_k}(\Psi), \alpha_k^{\lambda_k}(\Psi_x), \alpha_k^{\lambda_k}(\Psi_y), \alpha_k^{\lambda_k}(\Psi_{xy})\}.$$

Introduisons les fonctions de $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

$$A_o(x,y) = |\widetilde{\mathcal{G}}_1(x,y)| + \left|\int_0^x ds \int_0^y dt \int_0^s \bar{\vartheta}(r,s+t-r,1)dr\right|$$

(II.A.13) $$A_1(x,y) = \mathrm{Max}\{A_o(x,y), \sqrt{\left|\int_0^x ds \int_0^y dt \int_0^s \bar{\vartheta}^2(r,s+t-r,1)dr\right|}\}$$

de sorte que

$$|(\mathcal{T}_1 u)(x,y)| \leq A_o(x,y) + A_1(x,y)\sqrt{\left|\int_o^x ds \int_o^y dt \int_o^s u^2(r,s+t-r)\,dr\right|}$$

$$+ A_1(x,y)\sqrt{\left|\int_o^x ds \int_o^y dt \int_o^s u_x^2(r,s+t-r)\,dr\right|}$$

$$+ A_1(x,y)\sqrt{\left|\int_o^x ds \int_o^y dt \int_o^s u_y^2(r,s+t-r)\,dr\right|}$$

$$+ A_1(x,y)\sqrt{\left|\int_o^x ds \int_o^y dt \int_o^s u_{xy}^2(r,s+t-r)\,dr\right|} \ .$$

Pour $(x,y) \in Q_k$, on peut écrire

$$|(\mathcal{T}_1 u)(x,y)| \leq \alpha_k^o(A_1) + \alpha_k^o(A_1)\beta_k^{\lambda_k}(u)\,\frac{4L_{\lambda_k}(x,y)}{\lambda_k\sqrt{2\lambda_k}}$$

c'est-à-dire

$$\text{(II.A.14)} \qquad \alpha_k^{\lambda_k}(\mathcal{T}_1 u) \leq \alpha_k^o(A_1)\ \{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\lambda_k\sqrt{2\lambda_k}}\} \ .$$

Définissons maintenant les fonctions :

$$A_2(x,y) = \left|\frac{\partial}{\partial x}\,\mathfrak{S}_1(x,y)\right| + \sqrt{\left|\int_o^y dt \int_o^x \bar{\varphi}(r,x+t-r,1)\,dr\right|}$$

$$\text{(II.A.15)} \qquad A_3(x,y) = \operatorname{Max}\{A_2(x,y), \sqrt{\left|\int_o^y dt \int_o^x \bar{\varphi}^2(r,x+t-r,1)\,dr\right|}\}$$

$$A_4(x,y) = \left|\frac{\partial}{\partial y}\,\mathfrak{S}_1(x,y)\right| + \left|\int_o^x ds \int_o^s \bar{\varphi}(r,s+y-r,1)\,dr\right|$$

$$\text{(II.A.16)} \qquad A_5(x,y) = \operatorname{Max}\{A_4(x,y), \sqrt{\left|\int_o^x ds \int_o^s \bar{\varphi}^2(r,s+y-r,1)\,dr\right|}\}$$

$$A_6(x,y) = |\tau_1'(x+y)| + \left|\int_o^x \bar{\varphi}(r,x+y-r,1)\,dr\right|$$

$$\text{(II.A.17)} \qquad A_7(x,y) = \operatorname{Max}\{A_6(x,y), \sqrt{\left|\int_o^x \bar{\varphi}^2(r,x+y-r,1)\,dr\right|}\} \ .$$

Ces fonctions nous permettent d'écrire :

$$\text{(II.A.18)}\qquad \alpha_k^{\lambda_k}((T_1u)_x) \leqslant \alpha_k^o(A_3)\ \{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\lambda_k}\}$$

$$\text{(II.A.19)}\qquad \alpha_k^{\lambda_k}((T_1u)_y) \leqslant \alpha_k^o(A_5)\ \{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\sqrt{2}\ \lambda_k}\}$$

$$\text{(II.A.20)}\qquad \alpha_k^{\lambda_k}((T_1u)_{xy}) \leqslant \alpha_k^o(A_7)\ \{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\sqrt{\lambda_k}}\} \quad .$$

En choisissant pour A la fonction $\text{Max}\{A_1, A_3, A_5, A_7\}$ et

$$\text{(II.A.21)}\qquad N_k = \alpha_k^o(A) \quad \text{nous écrirons :}$$

$$\alpha_k^{\lambda_k}(T_1u) \leqslant N_k\{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\lambda_k\sqrt{2\lambda_k}}\} \qquad \alpha_k^{\lambda_k}((T_1u)_x) \leqslant N_k\{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\lambda_k}\}$$

$$\alpha_k^{\lambda_k}((T_1u)_y) \leqslant N_k\{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\lambda_k}\} \qquad \alpha_k^{\lambda_k}((T_1u)_{xy}) \leqslant N_k\{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\sqrt{\lambda_k}}\}$$

et nous concluerons que le choix :

$$\text{(II.A.22)}\qquad \lambda_k = \text{Max}\ \{\sqrt[3]{32}\ N_k^{2/3},\ 8N_k,\ 64N_k^2\} \quad \text{implique la relation :}$$

$$\text{(II.A.23)}\qquad \beta_k^{\lambda_k}(u) \leqslant 2N_k \implies \beta_k^{\lambda_k}(T_1u) \leqslant 2N_k .$$

3 Formulons l'hypothèse

Hypothèse (II.A.1) :

Les fonctions σ, τ, τ_1 de $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettent des dérivées

σ, τ, τ_1' continues.

On pose alors

$$a_k = \sup_{|x|\leq k} |\sigma'(x)| \qquad b_k = \sup_{|x|\leq k} |\tau'(x)| \qquad c_k = \sup_{|x|\leq k} |\tau_1'(x)| .$$

Il résulte de la continuité des fonctions σ', τ', τ_1' sur $[-k,k]$ l'existence de fonctions continues, croissantes, non négatives sous-additives nulles à l'origine $\omega_{7,k}$ telles que :

$$\text{(II.A.24)} \qquad \begin{cases} |\sigma'(x) - \sigma'(\bar{x})| \leq \omega_{7,k}(|x-\bar{x}|) \\ |\tau'(x) - \tau'(\bar{x})| \leq \omega_{7,k}(|x-\bar{x}|) \\ |\tau_1'(x) - \tau_1'(\bar{x})| \leq \omega_{7,k}(|x-\bar{x}|) . \end{cases}$$

Nous en déduisons pour x, $\bar{x}$, y et $\bar{y}$ de module inférieur à k :

$$|\mathfrak{S}_1(x,y) - \mathfrak{S}_1(\bar{x},y)| \leq a_k|x-\bar{x}| + k\, c_k|x-\bar{x}|$$

$$|\mathfrak{S}_1(x,y) - \mathfrak{S}_1(x,\bar{y})| \leq b_k|y-\bar{y}| + k\, c_k|y-\bar{y}|$$

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial x}(\bar{x},y)\right| \leq \omega_{7,k}(|x-\bar{x}|) + 2c_k|x-\bar{x}|$$

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial x}(x,\bar{y})\right| \leq c_k|y-\bar{y}|$$

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial y}(\bar{x},y)\right| \leq c_k|x-\bar{x}|$$

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial y}(x,\bar{y})\right| \leq \omega_{7,k}(|y-\bar{y}|) + 2c_k|y-\bar{y}|)$$

$$\left|\frac{\partial^2 \mathfrak{S}_1}{\partial x\, \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 \mathfrak{S}_1}{\partial x\, \partial y}(\bar{x},y)\right| \leq \omega_{7,2k}(|x-\bar{x}|)$$

$$\left|\frac{\partial^2 \mathfrak{S}_1}{\partial x\, \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 \mathfrak{S}_1}{\partial x\, \partial y}(x,\bar{y})\right| \leq \omega_{7,2k}(|y-\bar{y}|).$$

En tenant compte des relations (II.0.7) avec $\bar{N}_k = N_k\, L_{\lambda_k}(k,k)$ et de :

(II.A.25) $\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,\bar{y})\right| \leqslant \rho_{2,k}(|x|,|y-\bar{y}|) \qquad x \in [-k,k]$

$x + y,\ x + \bar{y} \in [-2k,2k]$,

nous écrirons :

$$|F(r,x+y-r,U) - F(r,\bar{x}+y-r,U)| \leqslant$$

$$\omega_{2,2k}(|x-\bar{x}|) + \omega_{3,2k}(|u(r,x+y-r)-u(r,\bar{x}+y-r)|)$$

$$+ \omega_{4,2k}\{|u_x(r,x+y-r) - u_x(r,\bar{x}+y-r)|\}$$

$$+ \omega_{5,2k}\{|u_y(r,x+y-r) - u_y(r,\bar{x}+y-r)|\}$$

$$+ \omega_{6,2k}\{|u_{xy}(r,x+y-r) - u_{xy}(r,\bar{x}+y-r)|\}$$

de sorte que pour x, y, $\bar{x}$ tels que $x + y$, $\bar{x} + y \in [-2k,2k]$ et $r \in [-k,k]$

$$|F(r,x+y-r,U) - F(r,\bar{x}+y-r,U)| \leqslant \omega_{2,2k}(|x-\bar{x}|) + \omega_{3,2k}(2\bar{N}_k\ |x-\bar{x}|)$$

$$+ \omega_{4,2k}(2\bar{N}_{2k}|x-\bar{x}|) + \omega_{5,2k}\left(\left|\int_0^{|r|} \rho_{2,k}(s,|x-\bar{x}|)ds\right|\right)$$

$$+ \omega_{6,2k}\{\rho_{2,k}(|r|,|x-\bar{x}|)\}.$$

Posons :

(II.A.25) $\Omega_{1,k}(\delta) = \{\omega_{2,2k}(\delta) + \omega_{3,2k}(2\bar{N}_{2k}\ ) + \omega_{4,2k}(2\bar{N}_{2k}\delta)\}\ k + \omega_{7,2k}(\delta)$

(II.A.26) $\rho_{1,k}(\delta) = \Omega_{1,k}(\delta) + M_{2,k}\delta + \int_0^k \omega_{5,2k}\left(\left|\int_0^s \rho_{2,k}(r,\delta)dr\right|\right)ds +$

$$+ \int_0^k \omega_{6,2k}(\rho_{2,k}(r,\delta))dr.$$

Nous trouvons facilement que

$$\left|\frac{\partial^2 T_1 u}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 T_1 u}{\partial x \partial y}(\bar{x},y)\right| \leq \rho_{1,k}(|x-\bar{x}|).$$

D'un autre côté, nous pouvons évaluer

$$\left|\frac{\partial^2 T_1 u}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 T_1 u}{\partial x \partial y}(x,\bar{y})\right| \leq \omega_{7,2k}(|y-\bar{y}|) +$$

$$\left|\int_0^x F(r,x+y-r,U) - F(r,x+\bar{y}-r,U)\,dr\right|$$

et trouver :

$$\left|\frac{\partial^2 T_1 u}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 T_1 u}{\partial x \partial y}(x,\bar{y})\right| \leq \Omega_{1,k}(|y-\bar{y}|) + \left|\int_0^x \omega_{6,2k}\{\rho_{2,k}(r,|y-\bar{y}|)\}dr\right|$$

$$+ \left|\int_0^x \omega_{5,2k}\left(\left|\int_0^s \rho_{2,k}(r,|y-\bar{y}|)dr\right|\right)ds\right|$$

4 Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

Théorème (II.A.1) (*existence*) :

Sous les hypothèses :

(h.O.1) $f \in C(\mathbb{R}^6,\mathbb{R})$ $\quad |f(x,y,u,p,q,z)| \leq \vartheta(x,y,|u|+|p|+|q|+|z|)$

(h.A.1) Les fonctions σ, τ, τ_1 de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définissent une fonction $\mathfrak{S}_1$ de $H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

(h.A.2) L'équation intégrale :

$$\rho_k(x,\delta) = \Omega_{1,k}(\delta) + \left|\int_0^x \{\omega_{5,2k}\left(\left|\int_0^s \rho_k(r,\delta)dr\right|\right) + \omega_{6,2k}(\rho_k(s,\delta))\}ds\right|$$

admet une solution positive tendant vers 0 avec δ uniformément par rapport à x sur $[-k,k]$.

Le problème (II.A) admet une solution définie sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration :

Elle ressemble à celle des théorèmes d'existence établis dans le premier chapitre. On définit le sous-ensemble convexe compact pour la topologie de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

$$A = \begin{cases} u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \ : \ \beta_k^{\lambda_k}(u) \leq 2N_k, \ \left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(x,\bar{y})\right| \leq \rho_{2,k}(x,|y-\bar{y}|) \\ \left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(\bar{x},y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}(x,y)\right| \leq \rho_{1,k}(|x-\bar{x}|) \quad \text{pour} \begin{cases} |x|, |\bar{x}| \leq k \\ |x-\bar{x}|, |y-\bar{y}| \leq \delta \\ |x+y|, |x+\bar{y}|, |\bar{x}+y| \leq 2k. \end{cases} \end{cases}$$

La compacité de A, résulte en fait de celle du sous-ensemble A' défini comme dans le chapitre 1 à savoir :

$$A' = \begin{cases} u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}), \beta_k^{\lambda_k}(u) \leq 2N_k, \left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial u}{\partial x}(\bar{x},y)\right| \leq \tilde{\rho}_{1,k}(|x-\bar{x}|,y) \\ \left|\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,\bar{y})\right| \leq \tilde{\rho}_{2,k}(x,|y-\bar{y}|) \quad \text{et} \\ \left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,\bar{y})\right| \leq \bar{M}_k|y-\bar{y}|, \left|\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial u}{\partial y}(\bar{x},y)\right| \leq \bar{M}_k|x-\bar{x}| \end{cases}$$

(les fonctions $\tilde{\rho}_{1,k}$ et $\tilde{\rho}_{2,k}$ sont des primitives des fonctions $\rho_{1,k}$ et $\rho_{2,k}$).

T_1 est un opérateur continu de A_1 dans A_1 de sorte que le théorème de Tychonoff peut s'appliquer.

Remarque (A . 1) :

L'hypothèse (h.A.2) est automatiquement satisfaite dès que les fonctions $\omega_{5,2k}$, $\omega_{6,2k}$ sont linéaires (c'est-à-dire dès que la fonction f est lipschitzienne sur tout compact par rapport aux variables q et z).

<u>*Remarque*</u> (A . 2) :

On peut écrire la relation (II.A.4) sous la forme :

(II.A.27) $$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(T_1 u)(x,y) = \gamma'(x+y) - \int_{x+y}^{y} F(x+y-r,r,U)\,dr$$

de sorte que l'hypothèse

(II.A.28) $$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\bar{x},y)\right| \leqslant \rho_{1,k}(|x-\bar{x}|,y) \quad \begin{cases} |y| \leqslant k \\ |x+y| \leqslant 2k \\ |\bar{x}+y| \leqslant 2k \end{cases}$$

nous conduit à évaluer

$$|F(x+y-r,r,U) - F(\bar{x}+y-r,r,U)| \leqslant \omega_{1,2k}(|x-\bar{x}|) +$$

$$+ \omega_{3,2k}(2\bar{N}_{2k}|x-\bar{x}|) + \omega_{5,2k}(2\bar{N}_{2k}|x-\bar{x}|)$$

$$+ \omega_{4,2k}\left(\left|\int_0^r \bar{\rho}_{1,k}(|x-\bar{x}|,s)\,ds\right|\right) + \omega_{6,2k}(\bar{\rho}_{1,k}(|x-\bar{x}|,r))$$

puis comme dans (II.A.24 et 25) à poser

(II.A.29) $$\bar{\Omega}_{1,k}(\delta) = \omega_{7,2k}(\delta)+k\{\omega_{1,2k}(\delta)+\omega_{3,2k}(2\bar{N}_{2k}\,\delta)+\omega_{5,2k}(2\bar{N}_{2k}\delta)\}$$

et

(II.A.30) $$\bar{\Omega}_{2,k}(\delta) = \bar{\Omega}_{1,k}(\delta) + 2M_{2k}\,\delta + 2\int_0^k \omega_{4,2k}\left(\left|\int_0^r \bar{\rho}_{1,k}(\delta,s)\,ds\right|\right)dr$$

$$+ \int_0^k \omega_{6,2k}\{\bar{\rho}_{1,k}(\delta,r)\}\,dr.$$

Nous obtenons comme précédemment :

$$\left|\frac{\partial^2 T_1 u}{\partial x\, \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 T_1 u}{\partial x\, \partial y}(x,\bar{y})\right| \leqslant \bar{\rho}_{2,k}(|y-\bar{y}|)$$

et $$\left|\frac{\partial^2 T_1 u}{\partial x\, \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 T_1 u}{\partial x\, \partial y}(\bar{x},y)\right| \leqslant \omega_{7,2_k}(|x-\bar{x}|) + M_{2k}|x-\bar{x}| +$$

$$+\left|\int_{x+y}^{y}\left[F(x+y-r,r,U) - F(\bar{x}+y-r,r,U)\right]dr\right| .$$

Il nous faut alors distinguer les cas $x, \bar{x} < 0$ et $x, \bar{x} > 0$:

dans le premier cas $\left|\frac{\partial^2 T_1 u}{\partial x\, \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 T_1 u}{\partial x\, \partial y}(\bar{x},y)\right|$ est majoré par

$$\bar{\Omega}_{1,k}(|x-\bar{x}|) + \int_{-k}^{y} \omega_{4,2k}\left(\left|\int_{o}^{r} \bar{\rho}_{1,k}(|x-\bar{x}|,s)ds\right|\right)dr +$$

$$+ \int_{-k}^{y} \omega_{6,2k}(\bar{\rho}_{1,k}(|x-\bar{x}|,r)dr.$$

tandis que dans le second cas, nous obtenons :

$$\bar{\Omega}_{1,k}(|x-\bar{x}|) + \int_{y}^{k} \omega_{4,2k}\left(\left|\int_{o}^{r} \bar{\rho}_{1,k}(|x-\bar{x}|,s)ds\right|\right)dr + \int_{y}^{k} \omega_{6,2k}(\bar{\rho}_{1,k}(|x-\bar{x}|,r)dr.$$

Cette remarque conduit au théorème d'existence :

Théorème (II.A.2) :

Avec les hypothèses :

(h.O.1) $f \in C(\mathbb{R}^6,\mathbb{R})$: $|f(x,y,u,p,q,z)| \leqslant \vartheta(x,y,|u|+|p|+|q|+|z|)$

(h.A.1) Les fonctions σ, τ, τ_1 de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définissent une fonction $\mathfrak{S}_1$ de $H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

(h.A.3) Les équations intégrales :

(II.A.31) $$\bar{\rho}_k(\delta,y) = \Omega_{1,k}(\delta) + \int_{-k}^{y} \{\omega_{4,2k}\left[\int_{o}^{r} \rho_k(\delta,s)ds\right] + \omega_{6,2k}(\rho_k(\delta,r))\}dr$$

(II.A.32) $$\bar{\rho}_k(\delta,y) = \Omega_{1,k}(\delta) + \int_{y}^{k} \{\omega_{4,2k}\left[\int_{o}^{r} \rho_k(\delta,s)ds\right] + \omega_{6,2k}(\rho_k(\delta,r))\}dr$$

admettent une solution positive tendant vers 0 avec δ uniformément par rapport à y sur $[-k,k]$.

Le problème (II.A) admet une solution définie sur $\mathbb{R}^2$.

Naturellement l'hypothèse (h.A.3) est satisfaite dès que les fonctions $\omega_{4,2k}$ et $\omega_{6,2k}$ sont linéaires (c'est-à-dire dès que la fonction f est lipschitzienne en p et z sur tout compact).

Conclusion.

Dans [10], M. Winants appliqua la méthode des approximations successives, en supposant que la fonction f était lipschitzienne par rapport aux quatre dernières variables u, p, q et z. Il montra par cette méthode l'existence d'une solution (nécessairement unique) à l'intérieur du domaine $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a,\ x + y < b\}$ en affirmant même l'impossibilité de la prolonger à l'extérieur.

L'unicité de la solution peut être facilement obtenue en supposant que la fonction f est lipschitzienne en u, p, q et z, il suffit de suivre pas à pas A. Bielecki [1] pour constater que, dans ce cas, T_1 est une contraction.

B - RESOLUTION DU PROBLEME (II - B)

① Recherchons comme M. Winants [9 - p. 287] l'opérateur T_2 permettant d'écrire sous forme intégrale les solutions du problème

$$\text{(II.B.1)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = g(x,y) & \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,x) = \mu(x) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,x) = \nu(x) \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,x) = \chi(x) & u(0,0) = u_o \end{cases}$$

La solution générale de l'équation $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = g(x,y)$

étant : $u(x,y) = p(x) + q(y) + \int_o^x \int_o^y m(s,t)ds\,dt + \int_o^x \int_o^y P(s+t)ds\,dt$

avec $m(s,t) = \int_o^s g(\xi, s+t-\xi)d\xi$, il nous faut déterminer les fonctions p, q et P.

Nous avons : $u(0,0) = p(0) + q(0) = u_o$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,x) = p'(x) + \int_o^x m(x,t)dt + \int_o^x P(x+t)dt$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(y,y) = q'(y) + \int_o^y m(s,y)ds + \int_o^y P(s+y)ds$$

et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,x) = m(x,x) + P(2x)$

de sorte que : $P(x) = \chi(\frac{x}{2}) - m(\frac{x}{2}, \frac{x}{2})$

$$p(x) - p(0) = \int_o^x \{\mu(s) - \int_o^s \chi(\tfrac{s+t}{2})dt\}ds + \int_o^x \{\int_o^s [m(\tfrac{s+t}{2}, \tfrac{s+t}{2}) - m(s,t)]dt\}ds$$

et

$$q(y) - q(0) = \int_o^y \{\nu(t) - \int_o^t \chi(\tfrac{s+t}{2})ds\}dt + \int_o^y \{\int_o^t [m(\tfrac{s+t}{2}, \tfrac{s+t}{2}) - m(s,t)]ds\}dt.$$

Soit alors :

(II.B.2) $$\mathcal{S}_2(x,y) = u_o + \int_o^x \mu(s)ds + \int_o^y \nu(t)dt + \int_y^x \{\int_s^y \chi(\frac{s+t}{2})dt\}ds \ .$$

La solution du problème (II.B.1) s'écrira

(II.B.3) $$u(x,y) = \mathcal{S}_2(x,y) - \int_y^x \{\int_s^y [m(\frac{s+t}{2}, \frac{s+t}{2}) - m(s,t)]dt\}ds$$

ou encore compte tenu de la relation :

$$m(\frac{s+t}{2}, \frac{s+t}{2}) - m(s,t) = -\int_{\frac{s+t}{2}}^s g(r,s+t-r)dr$$

(II.B.3bis) $$u(x,y) = \mathcal{S}_2(x,y) + \int_y^x \{\int_s^y (\int_{\frac{s+t}{2}}^s g(r,s+t-r)dr)dt\}ds \ .$$

Il nous est possible, dès lors, de définir l'opérateur T_2 :

(II.B.4) $$T_2u(x,y) = \mathcal{S}_2(x,y) + \int_y^x \{\int_s^y (\int_{\frac{s+t}{2}}^s F(r,s+t-r,U)dr)dt\}ds$$

qui est la représentation intégrale des solutions du problème (II. B).

On peut écrire :

(II.B.5) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(T_2u)(x,y) = \mu(x) + \displaystyle\int_x^y \chi(\frac{x+t}{2})dt + \int_x^y \{\int_{\frac{x+t}{2}}^x F(r,x+t-r,U)dr\}dt \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(T_2u)(x,y) = \nu(y) + \displaystyle\int_y^x \chi(\frac{s+y}{2})ds + \int_y^x \{\int_{\frac{y+s}{2}}^s F(r,s+y-r,U)dr\}ds \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}(T_2u)(x,y) = \chi(\frac{x+y}{2}) + \displaystyle\int_{\frac{x+y}{2}}^x F(r,x+y-r,U)dr. \end{cases}$$

② Désignons par L_λ la fonction de $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ définie pour tout $\lambda > 0$ par

(II.B.6) $$L_\lambda(x,y) = \sqrt{\operatorname{ch} \lambda(x-y)}.$$

Cette fonction admet les propriétés suivantes dont les démonstrations peuvent être admises.

(II.B.7) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \left| \int_{\frac{x+y}{2}}^{x} L_\lambda^2(s,x+y-s)ds \right| \leq \frac{1}{\lambda} L_\lambda^2(x,y)$

(II.B.8) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \left| \int_y^x \{ \int_{\frac{y+s}{2}}^{s} L_\lambda^2(r,s+y-r)dr \} ds \right| \leq \frac{L_\lambda^2(x,y)}{\lambda^2}$.

(II.B.9) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \left| \int_y^x \{ \int_{\frac{y+t}{2}}^{y} L_\lambda^2(r,x+t-r)dr \} dt \right| \leq \frac{L_\lambda^2(x,y)}{\lambda^2}$

(II.B.10) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \left| \int_y^x ds \int_s^y dt (\int_{\frac{s+t}{2}}^{s} L_\lambda^2(r,s+t-r)dr) \right| \leq \frac{L_\lambda^2(x,y)}{\lambda^3}$.

Nous conservons les mêmes notations que dans la partie II.A à savoir $Q_k = \{(x,y) : |x| \leq k, \ |y| \leq k\}$ et les semi-normes $\alpha_k^{\lambda_k}$, $\beta_k^{\lambda_k}$:

(II.B.11) $\alpha_k^{\lambda_k}(\Psi) = \sup_{Q_k} \{ |\Psi(x,y)| L_{\lambda_k}^{-1}(x,y) \} \qquad \Psi \in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

(II.B.12) $\beta_k^{\lambda_k}(\Psi) = \mathrm{Max}\{\alpha_k^{\lambda_k}(\Psi), \alpha_k^{\lambda_k}(\Psi_x), \alpha_k^{\lambda_k}(\Psi_y), \alpha_k^{\lambda_k}(\Psi_{xy})\}$.

Introduisons les fonctions de $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

$$B_o(x,y) = |\widetilde{\mathfrak{S}}_2(x,y)| + \left| \int_y^x \{ \int_y^s (\int_{\frac{s+t}{2}}^{s} \bar{\vartheta}(\xi,s+t-\xi,1)d\xi)dt \} ds \right|$$

(II.B.13) $B_1(x,y) = \mathrm{Max}\{B_o(x,y), \sqrt{\left| \int_y^x \{ \int_y^s (\int_{\frac{s+t}{2}}^{s} \bar{\vartheta}^2(\xi,s+t-\xi,1)d\xi)dt \} ds \right|}\}$

de sorte que (comme pour II.A.13)

$$\alpha_k^{\lambda_k}(T_2 u) \leq \alpha_k^o(B_1)\{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\lambda_k \sqrt{\lambda_k}}\} \quad .$$

Définissons maintenant les fonctions :

$$B_2(x,y) = \left|\frac{\partial}{\partial x}\, \mathfrak{S}_2(x,y)\right| + \left|\int_y^x \left(\int_{\frac{x+t}{2}}^x \bar{\vartheta}(r,x+t-r,1)\,dr\right)dt\right|$$

(II.B.14) $$B_3(x,y) = \mathrm{Max}\left\{B_2(x,y), \sqrt{\left|\int_y^x \left(\int_{\frac{x+t}{2}}^x \bar{\vartheta}^2(r,x+t-r,1)\,dr\right)dt\right|}\right\}$$

$$B_4(x,y) = \left|\frac{\partial}{\partial y}\, \mathfrak{S}_2(x,y)\right| + \left|\int_y^x \left(\int_{\frac{y+s}{2}}^s \bar{\vartheta}(r,s+y-r,1)\,dr\right)ds\right|$$

(II.B.15) $$B_5(x,y) = \mathrm{Max}\left\{B_4(x,y), \sqrt{\left|\int_y^x \left(\int_{\frac{y+s}{2}}^s \bar{\vartheta}^2(r,s+y-r,1)\,dr\right)ds\right|}\right\}$$

$$B_6(x,y) = \left|\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\, \mathfrak{S}_2(x,y)\right| + \left|\int_{\frac{x+y}{2}}^x \bar{\vartheta}(r,x+y-r,1)\,dr\right|$$

(II.B.16) $$B_7(x,y) = \mathrm{Max}\left\{B_6(x,y), \sqrt{\left|\int_{\frac{x+y}{2}}^x \bar{\vartheta}^2(r,x+y-r,1)\,dr\right|}\right\}.$$

Nous trouverons comme dans la première partie les relations

(II.B.17) $$\alpha_k^{\lambda_k}((T_2u)_x) \leq \alpha_k^o(B_3)\left\{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\lambda_k}\right\}$$

(II.B.18) $$\alpha_k^{\lambda_k}((T_2u)_y) \leq \alpha_k^o(B_5)\left\{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\lambda_k}\right\}$$

(II.B.19) $$\alpha_k^{\lambda_k}((T_2u)_{xy}) \leq \alpha_k^o(B_7)\left\{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\sqrt{\lambda_k}}\right\} .$$

En choisissant pour $\mathcal{B}$ la fonction $\mathrm{Max}\{B_1, B_3, B_5, B_7\}$ et

(II.B.20) $$N_k = \alpha_k^o(\mathcal{B}),$$ nous écrirons

$$\alpha_k^{\lambda_k}(T_2u) \leqslant N_k\{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\lambda_k\sqrt{\lambda_k}}\} \qquad \alpha_k^{\lambda_k}((T_2u)_x) \leqslant N_k\{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\lambda_k}\}$$

$$\alpha_k^{\lambda_k}((T_2u)_y) \leqslant N_k\{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\lambda_k}\} \qquad \alpha_k^{\lambda_k}((T_2u)_{xy}) \leqslant N_k\{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\sqrt{\lambda_k}}\}$$

et concluerons que le choix

(II.B.21) $$\lambda_k = \mathrm{Max}\{\sqrt[3]{64}\ N_k^{2/3},\ 8N_k,\ 64N_k^2\}$$

implique la relation :

(II.B.22) $$\beta_k^{\lambda_k}(u) \leqslant 2N_k \implies \beta_k^{\lambda_k}(T_2u) \leqslant 2N_k.$$

3 Formulons maintenant l'hypothèse

Hypothèse (II.B.1) :

Les fonctions μ, ν et χ appartiennent à $C(R,R)$.

On pose alors : $a_k = \sup\limits_{|x|\leqslant k} |\mu(x)|$, $b_k = \sup\limits_{|x|\leqslant k} |\nu(x)|$,

$$c_k = \sup_{|x|\leqslant k} |\chi(x)|.$$

D'un autre côté, la continuité de ces fonctions entraîne sur $[-k,k]$ l'existence de fonctions continues, croissantes, non négatives sous-additives $\omega_{7,k}$ telles que :

(II.B.23) $$\begin{cases} |\mu(x) - \mu(\bar{x})| \leqslant \omega_{7,k}(|x-\bar{x}|) \\ |\nu(x) - \nu(\bar{x})| \leqslant \omega_{7,k}(|x-\bar{x}|) \\ |\chi(x) - \chi(\bar{x})| \leqslant \omega_{7,k}(|x-\bar{x}|) \qquad \text{pour } x, \bar{x} \in [-k,k] \\ \omega_{7,k}(0) = 0 \end{cases}$$

Nous en déduisons :

$$|\mathcal{S}_2(x,y) - \mathcal{S}_2(\bar{x},y)| \leq (a_k + 2k\, c_k)|x-\bar{x}|$$
$$|\mathcal{S}_2(x,y) - \mathcal{S}_2(x,\bar{y})| \leq (b_k + 2k\, c_k)|y-\bar{y}|$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{S}_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{S}_2(\bar{x},y)\right| \leq \omega_{7,k}(|x-\bar{x}|) + 2k\,\omega_{7,k}\left(\left|\frac{x-\bar{x}}{2}\right|\right) + c_k|x-\bar{x}|$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{S}_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{S}_2(x,\bar{y})\right| \leq c_k|y-\bar{y}|$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{S}_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{S}_2(\bar{x},y)\right| \leq c_k|x-\bar{x}|$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{S}_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{S}_2(x,\bar{y})\right| \leq \omega_{7,k}(|y-\bar{y}|) + 2k\,\omega_{7,k}\left(\left|\frac{y-\bar{y}}{2}\right|\right) + c_k|y-\bar{y}|$$

$$\left|\frac{\partial^2\mathcal{S}_2}{\partial x\partial y}(x,y) - \frac{\partial^2\mathcal{S}_2}{\partial x\partial y}(\bar{x},y)\right| \leq \omega_{7,k}\left(\left|\frac{x-\bar{x}}{2}\right|\right)$$
$$\left|\frac{\partial^2\mathcal{S}_2}{\partial x\partial y}(x,y) - \frac{\partial^2\mathcal{S}_2}{\partial x\partial y}(x,\bar{y})\right| \leq \omega_{7,k}\left(\left|\frac{y-\bar{y}}{2}\right|\right)$$

puis tenant compte des relations (II.0.7) avec $\bar{N}_k = N_k\, L_{\lambda_k}(k,k)$ et

(II.B.24) $$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,\bar{y})\right| \leq \rho_{2,k}(x,|y-\bar{y}|) \qquad x \in [-k,k]$$
$$x+y,\ x+\bar{y} \in [-2k,2k]$$

nous écrirons :

$$|F(r,x+y-r,U) - F(r,\bar{x}+y-r,U)| \leq \omega_{2,2k}(|x-\bar{x}|) + \omega_{3,2k}(2\bar{N}_{2k}|x-\bar{x}|)$$
$$+ \omega_{4,2k}(2\bar{N}_{2k}|x-\bar{x}|) + \omega_{5,2k}\left(\left|\int_y^r \rho_{2,k}(s,|x-\bar{x}|)ds\right|\right)$$
$$+ \omega_{6,2k}\{\rho_{2,k}(r,|x-\bar{x}|)\}.$$

Posons comme dans la partie II.A

$$\text{(II.B.25)}\quad \Omega_{1,k}(\delta) = \{\omega_{2,2k}(\delta) + \omega_{3,2k}(2\bar{N}_{2k}\delta) + \omega_{4,2k}(2\bar{N}_{2k}\delta)\}k + \omega_{7,2k}(\delta)$$

et

$$\text{(II.B.26)}\quad \rho_{1,k}(\delta) = \Omega_{1,k}(\delta) + M_{2k}\delta + 2k\ \omega_{5,2k}(\left|\int_{-k}^{k} \rho_{2,k}(s,\delta)ds\right|) + \int_{-k}^{k} \omega_{6,2k}(\rho_{2,k}(r,\delta))dr.$$

Nous trouvons facilement que

$$\left|\frac{\partial^2 T_2\ u}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 T_2\ u}{\partial x \partial y}(\bar{x},y)\right| \leq \rho_{1,k}(|x-\bar{x}|).$$

D'un autre côté, nous aurons :

$$\left|\frac{\partial^2 T_2\ u}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 T_2\ u}{\partial x \partial y}(x,\bar{y})\right| \leq \omega_{7,2k}(|y-\bar{y}|) + $$

$$+ \left|\int_{\frac{x+y}{2}}^{x} F(r,x+y,r,U)dr - \int_{\frac{x+\bar{y}}{2}}^{x} F(r,x+\bar{y},r,U)dr\right|$$

soit pour $x < y,\ \ x < \bar{y}$

$$\left|\frac{\partial^2 T_2\ u}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 T_2\ u}{\partial x \partial y}(x,\bar{y})\right| \leq \Omega_{1,k}(|y-\bar{y}|) + M_k|y-\bar{y}| + \int_{x}^{k}\omega_{5,2k}(\int_{s}^{k}\rho_{2,k}(r,|y-\bar{y}|)dr)ds$$

$$+ \int_{x}^{k} \omega_{6,2k}\{\rho_{2,k}(r,|y-\bar{y}|)\}dr$$

et pour $x > y,\ \ x > \bar{y}$

$$\left|\frac{\partial^2 T_2\ u}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 T_2\ u}{\partial x \partial y}(x,\bar{y})\right| \leq \Omega_{1,k}(|y-\bar{y}|) + M_k|y-\bar{y}| + $$

$$+ \int_{-k}^{x} \omega_{5,2k}\left(\int_{-k}^{s} \rho_{2,k}(r,|y-\bar{y}|)dr\right)ds + \int_{-k}^{x} \omega_{6,2k}(\rho_{2,k}(r,|y-\bar{y}|))dr.$$

④ Nous sommes maintenant en mesure de formuler le théorème :

Théorème (II.B.1) :

Avec les hypothèses :

(h.O.1) $f \in C(\mathbb{R}^6,\mathbb{R})$ $|f(x,y,u,p,q,z)| \leq \vartheta(x,y,|u|+|p|+|q|+|z|)$

(h.B.1) les fonctions μ, ν et χ appartiennent à $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$

(h.B.2) les équations intégrales :

(II.B.27) $$\rho_k(x,\delta) = \Omega_{2,k}(\delta) + \int_{x}^{k} \omega_{5,2k}\left(\int_{s}^{k} \rho_k(r,\delta)dr\right)ds + \int_{x}^{k} \omega_{6,2k}(\rho_k(r,\delta))dr$$

(II.B.27bis) $$\rho_k(x,\delta) = \Omega_{2,k}(\delta) + \int_{-k}^{x} \omega_{5,2k}\left(\int_{-k}^{s} \rho_k(r,\delta)dr\right)ds + \int_{-k}^{x} \omega_{6,2k}(\rho_k(r,\delta))dr$$

admettent des solutions positives tendant vers 0 avec δ uniformément sur le compact $[-k,k]$.

Le problème (II.B) admet une solution définie sur $\mathbb{R}^2$.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème (II.A.1). Le sous-ensemble

$$A_2 = \left\{ \begin{array}{l} u \in H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) : \beta_k^{\lambda_k}(u) \leq 2N_k, \quad \left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,\bar{y})\right| \leq \rho_{2,k}(x,|y-\bar{y}|) \\ \\ \left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\bar{x},y)\right| \leq \rho_{1,k}(|x-\bar{x}|) \quad \text{pour} \left\{ \begin{array}{l} |x|,|\bar{x}| \leq k, |x-\bar{x}| \leq \delta \\ |x+y|,|x+\bar{y}|,|\bar{x}+y| \leq 2k \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est convexe et compact pour la topologie de $H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. T_2 est un opérateur continu de A_2 dans A_2 de sorte que le théorème de Tychonoff peut s'appliquer.

Remarque (B . 1) :

Dès que la fonction f est lipschitzienne sur tout compact, par rapport aux variables q et z l'hypothèse (h.B.2) est satisfaite.

Remarque (B . 2) :

En écrivant la dernière relation de II.B.5 sous la forme :

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (T_2 u)(x,y) = \chi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \int_y^{\frac{x+y}{2}} F(x+y-\xi,\xi,U)\,d\xi \tag{II.B.28}$$

nous aurons l'analogue du théorème (II.A.2) et conclurons en l'existence d'une solution du problème (II.B) sous les hypothèses (h.O.1), (h.B.1) et si la fonction f est lipschitzienne en p et z sur tout compact.

Remarque (B . 3) :

Le théorème qui vient d'être établi ne concerne nullement l'unicité comme le montre l'exemple suivant : $u_{x^2y} - u_{xy^2} = 15(y-x)|u|^{1/3}$ qui admet les deux solutions $u_1 \equiv 0$ et $u_2 = \frac{1}{64}(y-x)^6$.

Dans [8 - 9], M. Winants a en fait examiné l'équation

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)$$

soumise aux conditions initiales : $u(x,x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,x) = 0$.

Moyennant une condition de Lipschitz portant sur les variables u, p, q, z il montra l'existence d'une solution (unique) dans le domaine $\mathcal{D} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a,\ |x-y| \leq c\}$.

Ainsi que nous le signalions dans la partie précédente l'unicité de la solution du problème (II.B) sera obtenue si la fonction f est lipschitzienne sur tout compact par rapport à ses 4 dernières variables.

C - RESOLUTION DU PROBLEME (II - C)

Nous poursuivons notre étude sur l'équation de M. Winants :

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = f(x,y,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})$$ avec les conditions initiales :

$$(\text{II.C.1}) \quad \begin{cases} u(x,0) = \sigma(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \sigma_1(x), \quad u(x,x) = \gamma(x) \\ \sigma(0) = \gamma(0) \qquad \sigma'(0) + \sigma_1(0) = \gamma'(0). \end{cases}$$

① Nous commencerons par définir l'opérateur T_3 permettant d'écrire sous forme intégrale les solutions du problème

$$(\text{II.C.2}) \quad \begin{cases} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = g(x,y) \qquad g \in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \\ u(x,0) = \sigma(x) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \sigma_1(x) \quad u(x,x) = \gamma(x) . \end{cases}$$

Suivant la procédure du paragraphe précédent, nous écrirons la solution générale du problème (II.C.2) sous la forme :

$$(\text{II.C.3}) \quad u(x,y) = p(x) + q(y) + H(x+y) + \int_0^y \{\int_y^x m(s,t)ds\}dt$$

avec $\quad q(0) = H(0) = 0 \;$ et $\; m(x,y) = \int_0^x g(\xi, x+y-\xi)d\xi.$

Pour déterminer les fonctions p, q et H nous utiliserons les conditions aux limites ; c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \sigma(x) = p(x) + H(x) \\ \sigma_1(x) = q'(0) + H'(x) + \int_0^x m(s,0)ds \\ \gamma(x) = p(x) + q(x) + H(2x) \end{cases}$$

de sorte que $$H'(x) = \sigma_1(x) - \int_0^x m(s,0)ds - q'(0)$$

$$H(x) = \int_0^x [\sigma_1(s) - q'(0)]ds - \int_0^x (x-s)m(s,0)ds$$

$$p(x) = \sigma(x) - \int_0^x[\sigma_1(s) - q'(0)]ds + \int_0^x (x-s)m(s,0)ds$$

$$q(y) = \gamma(y) - \sigma(y) + \int_0^y \{\sigma_1(s) - q'(0)\}ds -$$

$$- \int_0^y (y-s)m(s,0)ds - \int_0^{2y} [\sigma_1(s) - q'(0)]ds + \int_0^{2y}(2y-s)m(s,0)ds \ .$$

La relation (II.C.3) s'écrira, compte tenu des relations précédentes :

(II.C.3bis) $$u(x,y) = \sigma(x) - \sigma(y) + \gamma(y) + \int_x^y \sigma_1(s)ds - \int_{x+y}^{2y} \sigma_1(s)ds$$

$$+ \int_0^y\{ \int_y^x m(s,t)ds\}dt + \int_0^x (x-s)m(s,0)ds - \int_0^y (y-s)m(s,0)ds$$

$$+ \int_0^{2y}(2y-s)m(s,0)ds - \int_0^{x+y} (x+y-s)m(s,0)ds.$$

Définissons :

(II.C.4) $$\tilde{\mathfrak{S}}_3(x,y) = \sigma(x) - \sigma(y) + \gamma(y) + \int_x^y \{\sigma_1(s) - \sigma_1(s+y)\}ds$$

et l'opérateur I_3 de $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

(II.C.5) $$(I_3 g)(x,y) = \int_0^y\{\int_y^x m(s,t)ds\}dt + \int_0^x (x-s)m(s,0)ds$$

$$- \int_0^y (y-s)m(s,0)ds + \int_0^{2y} + (2y-s)m(s,0)ds - \int_0^{x+y}(x+y-s)m(s,0)ds$$

(m est toujours la fonction $m(x,y) = \int_0^x g(\xi,x+y-\xi)d\xi$).

En remarquant que $\mathcal{I}_3 g(y,y) = 0$ et

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{I}_3 g)(x,y) = \int_0^y m(x,t)dt + \int_0^x m(s,0)ds - \int_0^{x+y} m(s,0)ds$$

$$= \int_0^y m(x,t)dt - \int_x^{x+y} m(s,0)ds$$

$$= \int_0^y [m(x,t) - m(t+x,0)]dt$$

$$= \int_0^y \{ \int_{s+x}^x g(\xi, x+s-\xi)d\xi\}ds$$

nous avons $(\mathcal{I}_3 g)(x,y) = \int_y^x [\int_0^y \{\int_{t+s}^s g(\xi, s+t-\xi)d\xi\}dt]ds.$

L'opérateur $\mathcal{T}_3$ est défini par :

(II.C.6) $$(\mathcal{T}_3 u)(x,y) = \mathfrak{S}_3(x,y) + \int_y^x \{\int_0^y [\int_{s+t}^s \mathcal{F}(\xi, s+t-\xi, \mathcal{U})d\xi]dt\}ds$$

d'où l'on déduit

(II.C.7) $$\frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{T}_3 u)(x,y) = \sigma'(x) + \sigma_1(x+y) - \sigma_1(x) + \int_0^y \{\int_{s+x}^s \mathcal{F}(\xi, s+x-\xi, \mathcal{U})d\xi\}ds$$

(II.C.8) $$\frac{\partial}{\partial y}(\mathcal{T}_3 u)(x,y) = \gamma'(y) - \sigma'(y) + \sigma_1(y) - 2\sigma_1(2y) + \sigma_1(x+y) +$$

$$+ \int_y^x \{\int_{s+y}^s \mathcal{F}(\xi, s+y-\xi, \mathcal{U})d\xi\}ds - \int_0^y \{\int_{t+y}^y \mathcal{F}(\xi, y+t-\xi, \mathcal{U})d\xi\}dt$$

et

(II.C.9) $$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{T}_3 u}{\partial x \partial y}\right)(x,y) = \sigma_1'(x+y) + \int_{x+y}^x \mathcal{F}(\xi, x+y-\xi, \mathcal{U})d\xi.$$

② Désignons par L_λ la fonction de $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ définie pour tout $\lambda > 0$ par

$$\text{(II.C.10)} \qquad L_\lambda(x,y) = \exp\{\lambda(3|y| + |x-y|)\}.$$

Cette fonction vérifie différentes propriétés :

Lemme (C . 1) :

$$\text{(II.C.11)} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \left|\int_{x+y}^{x} L_\lambda^2(\xi,x+y-\xi)d\xi\right| \leqslant \frac{1}{\lambda} L_\lambda^2(x,y).$$

En raison de la symétrie présentée par la fonction L_λ, nous pouvons nous limiter au cas $x \geqslant 0$.

1er cas : $0 \leqslant x \leqslant y$. $L_\lambda^2(x,y) = \exp\lambda(8y-2x)$.

$$\int_x^{x+y} L_\lambda^2(\xi,x+y-\xi)d\xi = \int_x^{x+y} \exp\,\lambda(6|x+y-\xi| + 2|x+y-2\xi|)d\xi$$

$$= \int_x^{\frac{x+y}{2}} \exp\,\lambda(8x + 8y - 10\xi)d\xi + \int_{\frac{x+y}{2}}^{x+y} \exp\,\lambda(4x + 4y - 2\xi)d\xi$$

$$\leqslant \frac{1}{10\lambda} \exp\,\lambda(8y - 2x) + \frac{1}{2\lambda} \exp\,\lambda(3x + 3y)$$

mais dans ce cas $3x + 3y \leqslant 8y - 2x$ de sorte que :

$$\left|\int_x^{x+y} L_\lambda^2(\xi,x+y-\xi)d\xi\right| \leqslant \frac{3}{5\lambda} L_\lambda^2(x,y).$$

2ème cas : $0 \leqslant y \leqslant x$. $L_\lambda^2(x,y) = \exp\,\lambda(4y + 2x)$

$$\int_x^{x+y} L_\lambda^2(\xi,x+y-\xi)d\xi = \int_x^{x+y} \exp\,\lambda(4x + 4y - 2\xi)d\xi \leqslant \frac{1}{2\lambda} \exp\,\lambda(4y + 2x)$$

c'est-à-dire :

$$\left|\int_x^{x+y} L_\lambda^2(\xi,x+y-\xi)d\xi\right| \leqslant \frac{1}{2\lambda} L_\lambda^2(x,y)$$

<u>3ème cas : $-x \leqslant y \leqslant 0$.</u> $L_\lambda^2(x,y) = \exp \lambda(2x - 8y)$

$$\int_{x+y}^{x} L_\lambda^2(\xi,x+y-\xi)d\xi = \int_{x+y}^{x} \exp \lambda(10\xi - 8x - 8y)d\xi$$

$$\leqslant \frac{1}{10\lambda} \exp \lambda(2x - 8y)$$

$$\left|\int_{x+y}^{x} L_\lambda^2(\xi,x+y-\xi)d\xi\right| \leqslant \frac{1}{10\lambda} L_\lambda^2(x,y)$$

<u>4ème cas : $y \leqslant -x \leqslant 0$.</u> $L_\lambda^2(x,y) = \exp \lambda(2x - 8y)$

$$\int_{x+y}^{x} L_\lambda^2(\xi,x+y-\xi)d\xi = \int_{x+y}^{\frac{x+y}{2}} L_\lambda^2(\xi,x+y-\xi)d\xi + \int_{\frac{x+y}{2}}^{x} L_\lambda^2(\xi,x+y-\xi)d\xi$$

$$= \int_{x+y}^{\frac{x+y}{2}} \exp \lambda(-4x - 4y + 2\xi)d\xi + \int_{\frac{x+y}{2}}^{x} \exp \lambda(10\xi - 8x - 8y)d\xi$$

$$\leqslant \frac{1}{2\lambda} \exp \lambda(-3x - 3y) + \frac{1}{10\lambda} \exp \lambda(2x - 8y)$$

mais dans ce cas $-3x - 3y \leqslant 2x - 8y$ de sorte que

$$\left|\int_{x+y}^{x} L_\lambda^2(\xi,x+y-\xi)d\xi\right| \leqslant \frac{3}{5\lambda} L_\lambda^2(x,y) .$$

Le lemme est entièrement prouvé.

<u>*Lemme*</u> (C . 2) :

(II.C.12) $\qquad \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \left|\int_0^y L_\lambda^2(x,t)dt\right| \leqslant \frac{L_\lambda^2(x,y)}{2\lambda} .$

On peut se limiter en raison de la symétrie au cas $y \geq 0$.

<u>1er cas : $x < 0$.</u>

$$\int_o^y L_\lambda^2(x,t)dt = \int_o^y \exp(-2\lambda x + 8\lambda t)dt = \frac{1}{8\lambda}\{e^{-2\lambda x+8\lambda y} - e^{-2\lambda x}\}$$

$$\leq \frac{1}{8\lambda} e^{-\lambda(2x-8y)} = \frac{1}{8\lambda} L_\lambda^2(x,y).$$

<u>2ème cas : $0 < x \leq y$.</u>

$$\int_o^y L_\lambda^2(x,t)dt = \int_o^x L_\lambda^2(x,t)dt + \int_x^y L_\lambda^2(x,t)dt$$

$$= \int_o^x \exp \lambda(4t + 2x)dt + \int_x^y \exp \lambda(8t - 2x)dt$$

$$\leq \frac{1}{4\lambda} \exp(6\lambda x) + \frac{1}{8\lambda} \exp \lambda(8y - 2x)$$

$$\leq \frac{1}{2\lambda} \exp \lambda(8y - 2x) = \frac{1}{2\lambda} L_\lambda^2(x,y).$$

<u>3ème cas : $y \leq x$.</u>

$$\int_o^y L_\lambda^2(x,t)dt = \int_o^y \exp \lambda(4t + 2x)dt \leq \frac{1}{4\lambda} \exp \lambda(4y + 2x)$$

$$\leq \frac{1}{4\lambda} L_\lambda^2(x,y).$$

<u>*Remarque*</u> :

(II.C.13) $$\left|\int_o^y L_\lambda^2(y,t)dt\right| \leq \frac{L_\lambda^2(x,y)}{2\lambda} \quad \text{pour tout} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

<u>*Lemme*</u> (C . 3) :

(II.C.14) $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \left|\int_x^y L_\lambda^2(s,y)ds\right| \leq \frac{L_\lambda^2(x,y)}{2\lambda}$$

Toujours pour $y \geq 0$, examinons les deux cas $x < y$ et $x \geq y$.

1er cas : $x \leq y$.

$$\int_x^y \exp(8\lambda y - 2\lambda s)ds \leq \frac{1}{2\lambda} \exp(8\lambda y - 2\lambda x) = \frac{1}{2\lambda} L_\lambda^2(x,y).$$

2ème cas : $y \leq x$.

$$\int_y^x \exp(4\lambda y + 2\lambda s)ds \leq \frac{1}{2\lambda} \exp(4\lambda y + 2\lambda x) = \frac{1}{2\lambda} L_\lambda^2(x,y).$$

Lemme (C . 4) :

(II.C.15) $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \left|\int_o^y \left\{\int_y^x L_\lambda^2(s,t)ds\right\}dt\right| \leq \frac{L_\lambda^2(x,y)}{8\lambda^2}$.

Toujours pour $y \geq 0$, nous examinerons les cas :

$(x,y) \in (I) = \{(x,y) = y \geq 0 \quad x > y\}$

$(x,y) \in (II) = \{(x,y) : y \geq 0 \quad x \leq y\}$

pour lesquels $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} L_\lambda^2(x,y)$ est respectivement égal à $8\lambda^2 L_\lambda^2(x,y)$ ou à $-16\lambda^2 L_\lambda^2(x,y)$.

1er cas : $(x,y) \in (I)$.

$$\int_o^y \left\{\int_x^y L_\lambda^2(s,t)ds\right\}dt = \frac{1}{8\lambda^2}\{L_\lambda^2(x,y) - L_\lambda^2(x,0) - L_\lambda^2(y,y) + L_\lambda^2(y,0)\}$$

$$= \frac{1}{8\lambda^2}\{\exp \lambda(4y + 2x) - \exp 2\lambda x - \exp 6\lambda y + \exp 2\lambda y\}$$

$$\leq \frac{1}{8\lambda^2} L_\lambda^2(x,y).$$

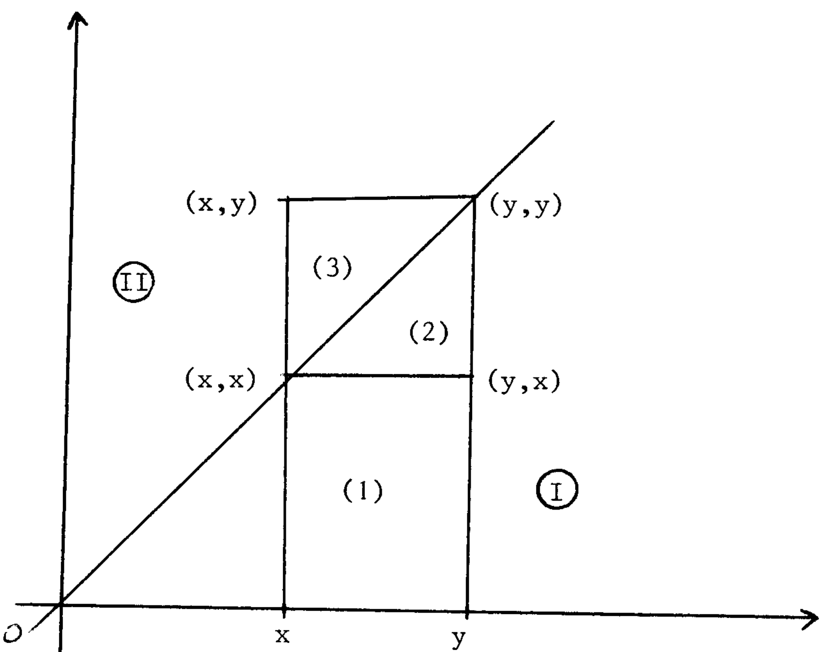
<u>2ème cas : $0 \leq x < y$.</u>

$$\iint_{(1)} L_\lambda^2(s,t)\,ds\,dt = \frac{1}{8\lambda^2}\{L_\lambda^2(y,x) - e^{2\lambda y} - e^{6\lambda x} + e^{2\lambda x}\}$$

$$\iint_{(2)} L_\lambda^2(s,t)\,ds\,dt = \frac{1}{8\lambda^2}\int_x^y\{\int_t^y \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} L_\lambda^2(s,t)\,ds\}\,dt$$

$$= \frac{1}{8\lambda^2}\int_x^y\{\frac{\partial}{\partial y} L_\lambda^2(y,t) - \frac{\partial^{(2)}}{\partial y} L_\lambda^2(t,t)\}\,dt$$

avec $\dfrac{\partial^{(2)}}{\partial y} L_\lambda^2(t,t) = 4\lambda e^{6\lambda t}$.



$$\iint_{(2)} L_\lambda^2(s,t)\,ds\,dt = \frac{1}{8\lambda^2}\{L_\lambda^2(y,y) - L_\lambda^2(y,x) - \frac{4}{6}(e^{6\lambda y} - e^{6\lambda x})\}$$

$$= \frac{1}{8\lambda^2}\{e^{6\lambda y} - L^2(y,x) - \frac{4}{6}e^{6\lambda y} + \frac{4}{6}e^{\lambda 6x}\}$$

de même : $$\iint_{(3)} L_\lambda^2(s,t)\,ds\,dt = -\frac{1}{16\lambda^2}\int_x^y\{\int_x^t \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} L_\lambda^2(s,t)\,ds\}\,dt$$

$$= - \frac{1}{16\lambda^2} \int_x^y \left[\frac{\partial^{(3)}}{\partial y} L_\lambda^2(t,t) - \frac{\partial}{\partial y} L_\lambda^2(x,t)\right] dt$$

avec $\dfrac{\partial^{(3)}}{\partial y} L_\lambda^2(t,t) = 8\lambda e^{6\lambda t}$.

$$\iint_{(3)} L_\lambda^2(s,t) ds\ dt = - \frac{1}{16\lambda^2} \{\frac{4}{3} e^{6\lambda y} - \frac{4}{3} e^{6\lambda x} - L_\lambda^2(x,y) + L_\lambda^2(x,x)\}.$$

Par suite :

$$\int_o^y \{\int_x^y L_\lambda^2(s,t) ds\} dt = \frac{1}{8\lambda^2} \{\frac{L_\lambda^2(x,y)}{2} - \frac{1}{6} e^{6\lambda x} - \frac{1}{3} e^{6\lambda y} + e^{2\lambda x} - e^{2\lambda y}\}$$

$$\leqslant \frac{1}{8\lambda^2} L_\lambda^2(x,y).$$

<u>3ème cas : $x < 0 \leqslant y$.</u>

$$\int_o^y \{\int_x^y L_\lambda^2(s,t) ds\} dt = \int_o^y \{\int_x^o L_\lambda^2(s,t) ds\} dt + \int_o^y \{\int_o^y L_\lambda^2(s,t) ds\} dt$$

$$\leqslant - \frac{1}{16\lambda^2} \{L_\lambda^2(0,y) - L_\lambda^2(x,y) - L_\lambda^2(0,0) + L_\lambda^2(x,0)\} + \frac{L_\lambda^2(0,y)}{16\lambda^2}$$

$$\leqslant \frac{1}{8\lambda^2} L_\lambda^2(x,y).$$

Maintenant que ces différents lemmes viennent d'être prouvés, il est possible de définir la topologie sur $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ utile pour ce problème. Nous adoptons les mêmes notations que précédemment :

$$Q_k = \{(x,y) : |x| \leqslant k,\ |y| \leqslant k\}$$

$$\text{(II.C.16)} \quad \begin{cases} \alpha_k^{\lambda_k}(\Psi) = \sup\{|\Psi(x,y)| L_{\lambda_k}^{-1}(x,y)\} & \text{si } \Psi \in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \\ \beta_k^{\lambda_k}(\Psi) = \operatorname{Max}\{\alpha_k^{\lambda_k}(\Psi), \alpha_k^{\lambda_k}(\Psi_x), \alpha_k^{\lambda_k}(\Psi_y), \alpha_k^{\lambda_k}(\Psi_{xy})\} \end{cases}$$

et introduisons les fonctions de $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$:

$$C_o(x,y) = |\mathfrak{S}_3(x,y)| + |\int_o^y \{\int_y^x [\int_{s+t}^s \bar{\vartheta}(r,s+t-r,1)dr]ds\}dt|$$

$$C_1(x,y) = \mathrm{Max}\{C_o(x,y), \sqrt{|\int_o^y \{\int_y^x [\int_{s+t}^s \bar{\vartheta}^2(r,s+t-r,1)dr]ds\}dt|}\}$$

de sorte que

$$\text{(II.C.17)} \qquad \alpha_k^{\lambda_k}(T_3 u) \leq \alpha_k^o(C_1)\ \{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{2\lambda_k\sqrt{2\lambda_k}}\} ,$$

puis les fonctions :

$$C_2(x,y) = |\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{S}_3(x,y)| + |\int_o^y \{\int_{x+t}^x \bar{\vartheta}(r,x+t-r,1)dr\}dt|$$

$$\text{(II.C.18)} \qquad C_3(x,y) = \mathrm{Max}\{C_2(x,y), \sqrt{|\int_o^y \{\int_{x+t}^x \bar{\vartheta}^2(r,x+t-r,1)dr\}dt|}\}$$

$$C_4(x,y) = |\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{S}_3(x,y)| + |\int_o^y [\int_{y+t}^y \bar{\vartheta}(r,y+t-r,1)dr]dt|$$

$$+ |\int_y^x \{\int_{s+y}^s \bar{\vartheta}(r,s+y-r,1)dr\}ds|$$

$$\text{(II.C.19)} \qquad C_5(x,y) = \mathrm{Max}\{C_4(x,y), \sqrt{|\int_o^y \{\int_{y+t}^y \bar{\vartheta}^2(r,y+t-r,1)dr\}dt|},$$

$$\sqrt{|\int_y^x \{\int_{s+y}^s \bar{\vartheta}^2(r,s+y-r,1)dr\}ds|}\}$$

$$C_6(x,y) = |\frac{\partial^2}{\partial x\ \partial y}\mathfrak{S}_3(x,y)| + |\int_{x+y}^x \bar{\vartheta}(r,x+y-r,1)dr|$$

$$\text{(II.C.20)} \qquad C_7(x,y) = \mathrm{Max}\{C_6(x,y), \sqrt{|\int_{x+y}^x \bar{\vartheta}^2(r,x+y-r,1)dr|}\}$$

Comme pour les parties précédentes, nous pouvons écrire avec

$C = \mathrm{Max}(C_1, C_3, C_5, C_7)$ et $N_k = \alpha_k^o(C)$

$$
\text{(II.C.21)} \quad \left\{
\begin{aligned}
&\alpha_k^{\lambda_k}(T_3 u) \leq N_k \{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{2\lambda_k\sqrt{2\lambda_k}}\} \\
&\alpha_k^{\lambda_k}((T_3 u)_x) \leq N_k \{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\sqrt{2}\ \lambda_k}\} \\
&\alpha_k^{\lambda_k}((T_3 u)_y) \leq N_k \{1 + \frac{8\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\sqrt{2}\ \lambda_k}\} \\
&\alpha_k^{\lambda_k}((T_3 u)_{xy}) \leq N_k \{1 + \frac{4\beta_k^{\lambda_k}(u)}{\sqrt{\lambda_k}}\}
\end{aligned}
\right.
$$

Le choix

$$
\text{(II.C.22)} \qquad \lambda_k = \mathrm{Max}\ \{\sqrt[3]{16}\ N_k^{2/3},\ 8\sqrt{2}\ N_k,\ 64 N_k^2\}
$$

implique la relation

$$
\text{(II.C.23)} \qquad \beta_k^{\lambda_k}(u) \leq 2N_k \implies \beta_k^{\lambda_k}(T_3 u) \leq 2N_k .
$$

3 Introduisons l'hypothèse concernant les conditions initiales :

Hypothèse (II.C.1) :

Les fonctions σ, σ_1 et γ de $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettent des dérivées σ', σ_1' et γ' continues et vérifient : $\sigma(0) = \gamma(0)$

$$\sigma'(0) + \sigma_1'(0) = \gamma'(0).$$

On pose alors pour $k \in \mathbb{N}$.

$$a_k = \sup_{|x|\leq k} |\sigma'(x)| \qquad b_k = \sup_{|x|\leq k} |\sigma_1'(x)| \qquad d_k = \sup_{|x|\leq k} |\gamma'(x)| .$$

La continuité des fonctions σ', σ_1' et γ' sur $[-k,k]$ donne l'existence de fonctions continues croissantes non-négatives sous-additives $\omega_{7,k}$ telles que : $\omega_{7,k}(0) = 0$

$$\text{(II.C.24)} \qquad \begin{cases} |\sigma'(x) - \sigma'(\bar{x})| \leq \omega_{7,k}(|x-\bar{x}|) \\ |\sigma_1'(x) - \sigma_1'(\bar{x})| \leq \omega_{7,k}(|x-\bar{x}|) \\ |\gamma'(x) - \gamma'(\bar{x})| \leq \omega_{7,k}(|x-\bar{x}|). \end{cases}$$

Nous en déduisons :

$$|\tilde{\mathcal{G}}_3(x,y) - \tilde{\mathcal{G}}_3(\bar{x},y)| \leq a_k|x-\bar{x}| + 2k\ d_{2k}|x-\bar{x}|$$

$$|\tilde{\mathcal{G}}_3(x,y) - \tilde{\mathcal{G}}_3(x,\bar{y})| \leq (a_k+b_k)|y-\bar{y}| + 6k\ d_{2k}|y-\bar{y}|$$

puis
$$|\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\mathcal{G}}_3(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{\mathcal{G}}_3(\bar{x},y)| \leq \omega_{7,k}(|x-\bar{x}|) + (d_k+d_{2k})\ |x-\bar{x}|$$

$$|\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\mathcal{G}}_3(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{\mathcal{G}}_3(x,\bar{y})| \leq d_{2k}|y-\bar{y}|$$

$$|\frac{\partial}{\partial y}\tilde{\mathcal{G}}_3(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\tilde{\mathcal{G}}_3(\bar{x},y)| \leq d_{2k}|x-\bar{x}|$$

$$|\frac{\partial}{\partial y}\tilde{\mathcal{G}}_3(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\tilde{\mathcal{G}}_3(x,\bar{y})| \leq 2\omega_{7,k}(|y-\bar{y}|) + (d_k+4d_{2k})\ |y-\bar{y}|$$

enfin
$$|\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\tilde{\mathcal{G}}_3(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\tilde{\mathcal{G}}_3(\bar{x},y)| < \omega_{7,2k}(|x-\bar{x}|)$$

$$|\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\tilde{\mathcal{G}}_3(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\tilde{\mathcal{G}}_3(x,\bar{y})| \leq \omega_{7,2k}(|y-\bar{y}|).$$

Tenant compte des relations (II.0.7) avec $\bar{N}_k = N_k\ L_{\lambda_k}(k,k)$ et

$$\text{(II.C.25)} \qquad |\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,\bar{y})| \leq \rho_{2,k}(x,|y-\bar{y}|) \quad \text{pour}$$

$$x \in [-k,k] \quad \text{et} \quad x+y,\ x+\bar{y} \quad \text{de} \quad [-k,k]$$

nous écrirons l'estimation

$$|F(r,x+y-r,U) - F(r,\bar{x}+y-r,U)| \leqslant \omega_{2,2k}(|x-\bar{x}|) + \omega_{3,2k}(2\bar{N}_{2k}|x-\bar{x}|)$$

$$+ \omega_{4,2k}(2\bar{N}_{2k}|x-\bar{x}|) + \omega_{5,2k}(|\int_y^r \rho_{2,k}(s,|x-\bar{x}|)ds|)$$

$$+ \omega_{6,2k}\{\rho_{2,k}(r,|x-\bar{x}|)\},$$

puis

$$\text{(II.C.27)} \quad \Omega_{1,k}(\delta) = \{\omega_{2,2k}(\delta) + \omega_{3,2k}(2\bar{N}_{2k}\delta) + \omega_{4,2k}(2\bar{N}_{2k}\delta)\}k + \omega_{7,2k}(\delta)$$

$$\text{(II.C.28)} \quad \rho_{1,k}(\delta) = \Omega_{1,k}(\delta) + M_{2k}\delta + 2k\,\omega_{5,2k}(|\int_{-k}^{k} \rho_{2,k}(s,\delta)ds|)$$

$$+ \int_{-k}^{k} \omega_{6,2k}\{\rho_{2,k}(r,\delta)\}dr.$$

On trouvera facilement que

$$|\frac{\partial^2 T_3 u}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 T_3 u}{\partial x \partial y}(\bar{x},y)| \leqslant \rho_{1,k}(|x-\bar{x}|).$$

D'un autre côté

$$|\frac{\partial^2 T_3 u}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 T_3 u}{\partial x \partial y}(x,\bar{y})| \leqslant \omega_{7,2k}(|y-\bar{y}|) +$$

$$+ |\int_{x+y}^{x} F(\xi,x+y-\xi,U)d\xi - \int_{x+\bar{y}}^{x} F(\xi,x+\bar{y}-\xi,U)d\xi|$$

soit pour $y < 0$ et $\bar{y} < 0$

$$\leqslant \Omega_{1,k}(|y-\bar{y}|) + M_k|y-\bar{y}| + \int_{-k}^{x} \omega_{5,2k}\{|\int_{-k}^{s} \rho_{2,k}(r,|y-\bar{y}|)dr|\}ds +$$

$$+ \int_{-k}^{x} \omega_{6,2k} \{\rho_{2,k}(r,|y-\bar{y}|)\}dr$$

et pour $y \geqslant 0$, $\bar{y} \geqslant 0$

$$\leqslant \Omega_{1,k}(|y-\bar{y}|) + M_k|y-\bar{y}| + \int_{x}^{k} \omega_{5,2k}\{|\int_{s}^{k} \rho_{2,k}(r,|y-\bar{y}|)dr|\}ds$$

$$+ \int_{x}^{k} \omega_{6,2k}\{\rho_{2,k}(r,|y-\bar{y}|)\}dr$$

(4) Enonçons le théorème d'existence

Théorème (III.C.1) :

Avec les hypothèses

(h.0.1) $f \in C(\mathbb{R}^6,\mathbb{R})$: $|f(x,y,u,p,q,z)| \leqslant \vartheta(x,y,|u|+|p|+|q|+|z|)$

(h.C.1) Les fonctions σ, σ_1 et γ de $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définissent une fonction de $H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ solution de $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2} = 0$.

(h.C.2) Les équations intégrales :

(II.C.28) $$\rho_k(x,\delta) = \Omega_{2,k}(\delta) + \int_{x}^{k} \omega_{5,2k} \{\int_{s}^{k} \rho_k(r,\delta)dr\}ds + \int_{x}^{k} \omega_{6,2k}\{\rho_k(r,\delta)\}dr$$

(II.C.29) $$\rho_k(x,\delta) = \Omega_{2,k}(\delta) + \int_{-k}^{x} \omega_{5,2k} \{\int_{-k}^{s} \rho_k(r,\delta)dr\}ds + \int_{-k}^{s} \omega_{6,2k}\{\rho_k(r,\delta)\}dr$$

admettent des solutions positives tendant vers 0 uniformément sur le compact $[-k,k]$.

Le problème (II.C) admet une solution définie sur $\mathbb{R}^2$.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème (II.A.1) et en écrivant la relation (II.C.9) sous la forme

$$\frac{\partial^2 T_3 u}{\partial x \partial y}(x,y) = \sigma_1'(x+y) - \int_0^y F(x+y-\xi,\xi,U)\,d\xi$$

nous aurons l'analogue du théorème (II.A.2).

Remarque (C . 1) :

Le problème que nous venons d'étudier n'a, en fait, pas été examiné par M. Winants. Toutefois M. Winants [11] a considéré les conditions aux limites suivantes :

$$u(x,0) = \sigma(x), \quad u(x,x) = \gamma(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,x) = \mu(x),$$

ce qui l'a conduit, comme dans le prochain problème, à une formulation compliquée de l'opérateur T. Il en a conclu l'existence d'une solution dans le domaine $\Delta = \{(x,y) : 0 \leqslant y \leqslant x, \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \quad x + y \leqslant b$, lorsque la fonction $f : f(x,y,u)$ est lipschitzienne par rapport à u.

D - RESOLUTION DU PROBLEME (II - D)

1 Signalons pour terminer ce chapitre le quatrième problème relatif à l'équation :

$$\text{(II.D.1)} \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = f(x,y,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})$$

soumise cette fois aux conditions initiales

$$\text{(II.D.2)} \qquad \begin{cases} u(x,0) = \sigma(x), \quad u(0,y) = \tau(y), \quad u(x,x) = \gamma(x) \\ \\ \sigma(0) = \tau(0) = \gamma(0), \quad \sigma'(0) + \tau'(0) = \gamma'(0). \end{cases}$$

Nous cherchons tout d'abord comme M. Winants [11] l'opérateur T_4 permettant d'écrire sous forme intégrale les solutions du problème

$$\text{(II.D.3)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = g(x,y) \quad \text{avec} \quad g \in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \\ \\ u(x,0) = \sigma(x), \quad u(0,y) = \tau(y), \quad u(x,x) = \gamma(x). \end{cases}$$

Suivant le procédé, désormais classique, la solution générale de : $u_{x^2y} - u_{xy^2} = g(x,y)$ s'écrira :

$$u(x,y) = p(x) + q(y) + H(x+y) + \int_0^x (\int_0^y m(s,t)dt)ds$$

avec $q(0) = H(0) = 0$ et

$$m(x,y) = \int_0^x g(r,x+y-r)dr.$$

Pour déterminer les fonctions p, q et H nous avons les relations :

$$\begin{cases} \sigma(x) = p(x) + H(x) \\ \tau(y) = p(0) + q(y) + H(y) \\ \gamma(x) = p(x) + q(x) + H(2x) + \int_0^x \left(\int_0^x m(s,t)dt\right)ds \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$H(2x) - 2H(x) = \gamma(x) - \sigma(x) - \tau(x) + \sigma(0) - \int_0^x \int_0^x m(s,t)ds\,dt$$

c'est-à-dire, en posant $x_i = \frac{x}{2^i}$ pour $i \geq 1$

$$H(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1}\{\gamma(x_i) - \sigma(x_i) - \tau(x_i) + \sigma(0)\}$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} \int_0^{x_i} \int_0^{x_i} m(s,t)ds\,dt$$

(sous réserve évidemment que ces séries convergent).

Nous aurons alors : $\begin{cases} p(x) = \sigma(x) - H(x) \\ q(y) = \tau(y) - \sigma(0) - H(y). \end{cases}$

Définissons :

(II.D.4) $$\mathfrak{S}_4(x,y) = \sigma(x) - \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1}\{\gamma(x_i) - \sigma(x_i) - \tau(x_i) + \sigma(0)\}$$

$$+ \tau(y) - \sigma(0) - \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1}\{\gamma(y_i) - \sigma(y_i) - \tau(y_i) + \sigma(0)\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1}\{\gamma(x_i+y_i) - \sigma(x_i+y_i) - \tau(x_i+y_i) + \sigma(0)\}$$

et d'opérateur I_4 de $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

$$(\text{II.D.5}) \qquad \mathcal{I}_4 g(x,y) = \int_0^x \left(\int_0^y m(s,t)dt\right)ds + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} \int_0^{x_i} \left(\int_0^{x_i} m(s,t)dt\right)ds$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} \int_0^{y_i}\left(\int_0^{y_i} m(s,t)dt\right)ds - \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} \int_0^{x_i+y_i}\left(\int_0^{x_i+y_i} m(s,t)dt\right)ds$$

(m désigne toujours la fonction $m(x,y) = \int_0^x g(\xi,x+y-\xi)d\xi$.

La remarque suivante permettra d'affirmer que l'opérateur $\mathcal{I}_4$ est bien défini sur $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

Remarque (D . 1) :

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \int_0^x \int_0^x m(s,t)ds\, dt$ nous pouvons écrire

$$h'(x) = \int_0^x \left[m(x,t) + m(t,x)\right]dt$$

$$\text{et} \quad h''(x) = 2m(x,x) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\{m(x,t) + m(t,x)\}dt.$$

Mais $\frac{\partial}{\partial x} m(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} m(x,y) = g(x,y)$, de sorte que

$$h''(x) = \int_0^x \{\frac{\partial}{\partial t}\left[m(x,t) + m(t,x)\right] - g(t,x) + g(x,t)\}dt + 2m(x,x)$$

$$= 4m(x,x) - m(x,0) - m(0,x) + \int_0^x \left[g(x,t) - g(t,x)\right]dt$$

$$= 4\int_0^x g(t,2x-t)dt + \int_0^x \{g(x,t) - g(t,x) - g(t,x-t)\}dt.$$

L'existence de la dérivée seconde de h permet de majorer $h(x)$ sur tout compact par une expression de la forme $|h(x)| \leqslant A\ x^2$ et donc d'assurer la définition de $\mathcal{I}_4$.

Remarque (D . 2) :

L'hypothèse que les fonctions σ, τ et γ admettent des dérivées premières et secondes continues est suffisante pour assurer la définition de la fonction $\tilde{\mathcal{G}}_4$.

En effet, la fonction $x \to \gamma(x) - \sigma(x) - \tau(x) + \sigma(0)$ est majorée sur tout compact par une expression de la forme

$$|\gamma(x) - \sigma(x) - \tau(x) + \sigma(0)| \leqslant A' x^2$$

de sorte que $\forall\, i \quad |\gamma(x_i) - \sigma(x_i) - \tau(x_i) + \sigma(0)| \leqslant A' x_i^2$ (A' est indépendant de i). Les séries définissant la fonction $\tilde{\mathcal{G}}_4$ sont convergentes et la convergence est même uniforme sur tout compact.

Ces remarques permettent de définir l'opérateur T_4

$$T_4 u(x,y) = \tilde{\mathcal{G}}_4(x,y) + I_4 F(x,y,U) \qquad u \in H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \tag{II.D.6}$$

avec la précision que m désigne cette fois la fonction

$$m(x,y,U) = \int_0^x F(\xi, x+y-\xi, U)\, d\xi .$$

Avec cette définition, on a les expressions des dérivées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(T_4 u)(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\tilde{\mathcal{G}}_4(x,y) + \int_0^y m(x,t,U)\,dt \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{x_i}\left[m(x_i,t,U) + m(t,x_i,U)\right]dt \\ &- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{x_i+y_i}\left[m(x_i+y_i,t,U)+m(t,x_i+y_i,U)\right]dt \end{aligned} \tag{II.D.7}$$

avec

$$\text{(II.D.8)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\tilde{\mathcal{S}}_4(x,y) = \sigma'(x) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\gamma'(x_i) - \sigma'(x_i) - \tau'(x_i)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\gamma'(x_i+y_i) - \sigma'(x_i+y_i) - \tau'(x_i+y_i)\right]$$

puis

$$\text{(II.D.9)} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\, \mathcal{T}_4 u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\tilde{\mathcal{S}}_4(x,y) + \int_o^x m(s,y,\mathcal{U})\, ds$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\int_o^{y_i}\left[m(y_i,t,\mathcal{U}) + m(t,y_i,\mathcal{U})\right]dt$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\int_o^{x_i+y_i}\left[m(x_i+y_i,t,\mathcal{U}) + m(t,x_i+y_i,\mathcal{U})\right]dt$$

avec

$$\text{(II.D.10)} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\tilde{\mathcal{S}}_4(x,y) = \tau'(y) - \frac{1}{2}\sum_{i=i}^{\infty}\left[\gamma'(y_i) - \sigma'(y_i) - \tau'(y_i)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\gamma'(x_i+y_i) - \sigma'(x_i+y_i) - \tau'(x_i+y_i)\right]$$

enfin

$$\text{(II.D.11)} \qquad \frac{\partial^2(\mathcal{T}_4 u)}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2\tilde{\mathcal{S}}_4}{\partial x \partial y}(x,y) + m(x,y,\mathcal{U}) - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i-1}}\, m(x_i+y_i,x_i+y_i,\mathcal{U})$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i+1}}\, m(x_i+y_i,0,\mathcal{U}) - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i+1}}\int_o^{x_i+y_i}\left[\mathcal{F}(x_i+y_i,t,\mathcal{U}) - \mathcal{F}(t,x_i+y_i,\mathcal{U})\right]dt$$

avec

$$\text{(II.D.12)} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\tilde{\mathcal{S}}_4(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i+1}}\{\gamma''(x_i+y_i) - \sigma''(x_i+y_i) - \tau''(x_i+y_i)\}.$$

On peut exprimer d'une autre manière la relation (II.D.11) en remarquant que :

$$m(x,y,\mathcal{U}) = \int_0^x F(\xi,x+y-\xi,\mathcal{U})d\xi.$$

$$m(x_1+y_1,x_1+y_1,\mathcal{U}) = \int_0^{x_1+y_1} F(\xi,x+y-\xi,\mathcal{U})d\xi$$

(II.D.13) $$\frac{\partial^2 T_4 u}{\partial x \partial y}(x,y) = \int_{\frac{x+y}{2}}^{x} F(\xi,x+y-\xi,\mathcal{U})d\xi - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} m(x_i+y_i,x_i+y_i,\mathcal{U})$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} m(x_i+y_i,0,\mathcal{U}) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \int_0^{x_i+y_i} [F(x_i+y_i,t,\mathcal{U}) - F(t,x_i+y_i,\mathcal{U})]dt$$

② Désignons maintenant par L_λ la fonction de $C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ définie pour tout $\lambda \geqslant 0$ par

(II.D.14) $L_\lambda(x,y) = \sqrt{\operatorname{ch}\lambda\,\{2|x+y| + |x-y| + \frac{3}{2}\inf(|x|,|y|)\}}$ et qui vérifie

les propriétés suivantes :

Lemme D.1.

(II.D.15) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \left|\int_{\frac{x+y}{2}}^{x} L_\lambda^2(\xi,x+y-\xi)d\xi\right| \leqslant \frac{3}{\lambda} L_\lambda^2(x,y).$

Par symétrie, on peut se limiter au cas $x+y \geqslant 0$ sans restreindre la généralité.

<u>1er cas : $x \geqslant 0$, $-x \leqslant y \leqslant x$.</u> $L_\lambda^2(x,y) = \operatorname{ch}\lambda(3x + y + \frac{3}{2}|y|)$

$$\int_{\frac{x+y}{2}}^{x} L_\lambda^2(\xi,x+y-\xi)d\xi = \int_{\frac{x+y}{2}}^{x} \operatorname{ch}\lambda\{2(x+y) + 2\xi - x - y + \frac{3}{2}(x+y-\xi)\}d\xi$$

$$= \int_{\frac{x+y}{2}}^{x} \operatorname{ch}\lambda\,\{\frac{5}{2}(x+y) + \frac{1}{2}\xi\}d\xi \leqslant \frac{2}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda(3x + \frac{5}{2}y)$$

$$\leqslant \frac{2}{\lambda} L_\lambda^2(x,y) \quad \text{puisque} \quad 3x + \frac{5}{2}y > 0 \text{ et } \frac{5}{2}y \leqslant y + \frac{3}{2}|y|$$

2ème cas : $x \geq 0, \quad y \geq x$. $\quad L_\lambda^2(x,y) = \text{ch}\ \lambda(x + 3y + \frac{3}{2}|x|)$

$$\int_x^{\frac{x+y}{2}} L_\lambda^2(\xi, x+y-\xi)d\xi = \int_x^{\frac{x+y}{2}} \text{ch}\ \lambda\{2(x+y) + x + y - 2\xi + \frac{3}{2}\xi\}d\xi$$

$$= \int_x^{\frac{x+y}{2}} \text{ch}\ \lambda\{3x + 3y - \frac{1}{2}\xi\}\ d\xi \leq \frac{2}{\lambda}\ \text{sh}\ \lambda(\frac{5}{2}x + 3y)$$

$$\leq \frac{2}{\lambda}\ \text{ch}\ \lambda(x + 3y + \frac{3}{2}x) = \frac{2}{\lambda} L_\lambda^2(x,y)$$

3ème cas : $x \leq 0, \quad y \geq -x \geq x$. $\quad L_\lambda^2(x,y) = \text{ch}\ \lambda(-\frac{x}{2} + 3y)$

$$\int_x^{\frac{x+y}{2}} L_\lambda^2(\xi, x+y-\xi)d\xi = \int_o^{\frac{x+y}{2}} \text{ch}\ \lambda(2x + 2y + x + y - 2\xi + \frac{3}{2}\xi)d\xi$$

$$+ \int_x^o \text{ch}\ \lambda(2x + 2y + x + y - 2\xi - \frac{3}{2}\xi)d\xi \leq \frac{3}{\lambda}\ \text{ch}\ \lambda(3y - \frac{x}{2})$$

Lemme D. 2.

(II.D.16) $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} \left|\int_o^{x_i+y_i} L_\lambda^2(\xi, x_{i-1}+y_{i-1}-\xi)d\xi\right| \leq \frac{2}{\lambda} L_\lambda^2(x,y)$

On peut toujours supposer $x + y > 0$ et écrire :

$$\int_o^{x_i+y_i} L_\lambda^2(\xi, x_{i-1}+y_{i-1}-\xi)d\xi = \int_o^{x_i+y_i} \text{ch}\ \lambda\{3(x_{i-1}+y_{i-1}) - \frac{1}{2}\xi\}\ d\xi$$

$$\leq \frac{2}{\lambda}\ \text{sh}\ \lambda\{3(x_{i-1}+y_{i-1})\}.$$

Pour $i \geq 2$ nous aurons

$$\left|\int_o^{x_i+y_i} L_\lambda^2(\xi, x_{i-1}+y_{i-1}-\xi)d\xi\right| \leq \frac{2}{\lambda} L_\lambda^2(x,y)$$

et $\qquad \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} \left|\int_o^{x_i+y_i} L_\lambda^2(\xi, x_{i-1}+y_{i-1}-\xi)d\xi\right| \leq \frac{2}{\lambda} L_\lambda^2(x,y).$

Lemme D.3.

$$\text{(II.D.17)} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \left| \int_0^{x_i+y_i} L_\lambda^2(\xi, x_i+y_i-\xi)\,d\xi \right| \leq \frac{4}{\lambda} L_\lambda^2(x,y)$$

La démonstration est analogue à celle du lemme précédent :

$$\int_0^{x_i+y_i} \mathrm{ch}\ \lambda\{2(x_i+y_i) + |x_i+y_i-2\xi| + \frac{3}{2}\inf(|\xi|,|x_i+y_i-\xi|)\}d\xi$$

$$= \int_0^{x_{i+1}+y_{i+1}} \mathrm{ch}\ \lambda\{3(x_i+y_i) - \frac{1}{2}\xi\}\ d\xi + \int_{x_{i+1}+y_{i+1}}^{x_i+y_i} \mathrm{ch}\lambda\{5(x_{i+1}+y_{i+1}) + \frac{1}{2}\xi\}d\xi$$

$$\leq \frac{2}{\lambda}\mathrm{ch}\lambda\{3(x_i+y_i)\} + \frac{2}{\lambda}\mathrm{ch}\lambda\{3(x_i+y_i)\}$$

soit pour $i \geq 1$: $\left|\int_0^{x_i+y_i} L_\lambda^2(\xi,x_i+y_i-\xi)d\xi\right| \leq \frac{4}{\lambda}\ \mathrm{ch}\ \lambda(x_1 + y_1).$

Mais comme $\mathrm{ch}\ \lambda(x_1+y_1) \leq \mathrm{ch}\lambda\{2(x+y) + |x-y| + \frac{3}{2}\inf(|x|,|y|)\}$,

nous avons $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \left|\int_0^{x_i+y_i} L_\lambda^2(\xi,x_i+y_i-\xi)d\xi\right| \leq \frac{4}{\lambda} L_\lambda^2(x,y)$

Lemme D.4.

$$\text{(II.D.18)} \quad \forall (x,y) \in R^2 \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \left|\int_0^{x_i+y_i} L_\lambda^2(x_i+y_i,\xi)d\xi\right| \leq \frac{1}{2\lambda} L_\lambda^2(x,y)\ .$$

Supposons toujours $x + y \geq 0$

$$\int_0^{x_i+y_i} L_\lambda^2(x_i+y_i,t)dt = \int_0^{x_i+y_i} \mathrm{ch}\lambda\{3(x_i+y_i) + \frac{5}{2}\xi\}d\xi$$

$$\leq \frac{2}{5\lambda}\ \mathrm{ch}\ \lambda\{\frac{11}{2}(x_i+y_i)\} \leq \frac{2}{5\lambda}\mathrm{ch}\lambda\{2(x+y) + \frac{3}{4}(x+y)\} \quad \text{si} \quad i \geq 1.$$

Mais comme $\frac{3}{4}(x+y) \leq |x-y| + \frac{3}{2}\inf(|x|,|y|)$ on a

$$\int_0^{x_i+y_i} L_\lambda^2(x_i+y_i,\xi)d\xi \leqslant \frac{2}{5\lambda} L_\lambda^2(x,y) \leqslant \frac{1}{\lambda} L_\lambda^2(x,y)$$

et

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \left| \int_0^{x_i+y_i} L_\lambda^2(x_i+y_i,\xi)d\xi \right| \leqslant \frac{1}{2\lambda} L_\lambda^2(x,y).$$

De la même façon, on aura la relation symétrique

$$\text{(II.D.19)} \quad \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \left|\int_0^{x_i+y_i} L_\lambda^2(\xi,x_i+y_i)d\xi\right| \leqslant \frac{1}{2\lambda} L_\lambda^2(x,y)$$

Lemme D.5.

$$\text{(II.D.20)} \quad \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \left|\int_0^x L_\lambda^2(\xi,y)d\xi\right| \leqslant \frac{3}{\lambda} L_\lambda^2(x,y).$$

Nous nous limitons encore à $x + y \geqslant 0$

<u>1er cas : $x < 0$, $y \geqslant -x$.</u> $L_\lambda^2(x,y) = \text{ch } \lambda(x + 3y - \frac{3}{2} x) = \text{ch } \lambda(-\frac{x}{2} + 3y)$

$$\int_x^0 \text{ch } \lambda(2\xi + 2y + y - \xi - \frac{3}{2} \xi)d\xi = \int_x^0 \text{ch } \lambda(-\frac{\xi}{2} + 3y)d\xi \leqslant \frac{2}{\lambda} \text{ch } \lambda(-\frac{x}{2} + 3y)$$

<u>2ème cas : $x \geqslant 0$, $y \geqslant x$.</u> $L_\lambda^2(x,y) = \text{ch } \lambda(x + 3y + \frac{3}{2} x)$

$$\int_0^x L_\lambda^2(\xi,y)d\xi = \int_0^x \text{ch } \lambda(2\xi + 2y + y - \xi + \frac{3}{2} \xi)d\xi = \int_0^x \text{ch } \lambda(\frac{5}{2} \xi + 3y)d\xi$$

$$\leqslant \frac{2}{5\lambda} \text{ch } \lambda(\frac{5}{2} x + 3y) = \frac{2}{5\lambda} L_\lambda^2(x,y).$$

<u>3ème cas : $x \geqslant y \geqslant 0$.</u> $L_\lambda^2(x,y) = \text{ch } \lambda(3x + \frac{5}{2} y)$

$$\int_0^x L_\lambda^2(\xi,y)d\xi = \int_0^y \text{ch } \lambda(2\xi + 2y + y - \xi + \frac{3}{2} \xi)d\xi +$$

$$+ \int_y^x \text{ch } \lambda(2\xi + 2y + \xi - y + \frac{3}{2} y)d\xi$$

$$= \int_0^y \operatorname{ch} \lambda(\frac{5}{2}\xi + 3y)d\xi + \int_y^x \operatorname{ch} \lambda(3\xi + \frac{5}{2}y)d\xi$$

$$\leqslant \frac{2}{5\lambda} \operatorname{ch} \lambda(\frac{5}{2}y + 3y) + \frac{1}{3\lambda} \operatorname{ch} \lambda(3x + \frac{5}{2}y)$$

$$\leqslant \frac{11}{15\lambda} \operatorname{ch} \lambda(3x + \frac{5}{2}y) \leqslant \frac{3}{\lambda} L_\lambda^2(x,y).$$

<u>4ème cas : $0 \geqslant y \geqslant -x$.</u> $L_\lambda^2(x,y) = \operatorname{ch} \lambda(2x + 2y + x - y - \frac{3}{2}y)$

$$\int_0^x L_\lambda^2(\xi,y)d\xi = \int_0^{-y} \operatorname{ch} \lambda(-2\xi - 2y + \xi - y + \frac{3}{2}\xi)d\xi + \int_{-y}^x \operatorname{ch} \lambda(2\xi + 2y + \xi - y - \frac{3}{2}y)d\xi$$

$$= \int_0^{-y} \operatorname{ch} \lambda(\frac{\xi}{2} - 3y)d\xi + \int_{-y}^x \operatorname{ch} \lambda(3\xi - \frac{1}{2}y)d\xi$$

$$\leqslant \frac{2}{\lambda} \operatorname{ch} \lambda(-\frac{y}{2} - 3y) + \frac{1}{3\lambda} \operatorname{ch} \lambda(3x - \frac{y}{2}) \leqslant \frac{3}{\lambda} \operatorname{ch} \lambda(3x - \frac{y}{2}).$$

Ainsi dans tous les cas

$$\left|\int_0^x L_\lambda^2(\xi,y)d\xi\right| \leqslant \frac{3}{\lambda} L_\lambda^2(x,y).$$

On montrerait de la même façon que

(II.D.21) $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \left|\int_0^y L_\lambda^2(x,t)dt\right| \leqslant \frac{3}{\lambda} L_\lambda^2(x,y)$

et

(II.D.22) $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \left|\int_0^x \int_0^y L_\lambda^2(s,t)dsdt\right| \leqslant \frac{9}{\lambda^2} L_\lambda^2(x,y).$

D'une manière plus précise, on peut établir que

(II.D.23) $\quad \forall\, x \in \mathbb{R} : \left|\int_0^x (\int_0^s L_\lambda^2(\xi,x)d\xi)ds\right| \leqslant \frac{4}{25\lambda^2} \{L_\lambda^2(x,x) - 1\}$

il suffit en effet d'écrire pour $x > 0$

$$\int_o^s L_\lambda^2(\xi,x)d\xi \leqslant \frac{2}{5\lambda} \operatorname{sh} \lambda(\frac{5}{2} s + 3x)$$

et
$$\int_o^x (\int_o^s L_\lambda^2(\xi,x)d\xi)ds \leqslant \frac{4}{25\lambda^2} \{\operatorname{ch} \lambda(\frac{11x}{2}) - 1\}.$$

Nous conservons une dernière fois les mêmes notations que dans les parties (II.A.B.C) à savoir

$$Q_k = \{(x,y) : |x| \leqslant k, \quad |y| \leqslant k\}$$

(II.D.24)
$$\alpha_k^{\lambda_k}(\Psi) = \sup_{Q_k}\{|\Psi(x,y)| \, L_{\lambda_k}^{-1}(x,y)\}$$

$$\beta_k^{\lambda_k}(\Psi) = \operatorname{Max}\{\alpha_k^{\lambda_k}(\Psi), \alpha_k^{k}(\Psi_x), \alpha_k^{\lambda_k}(\Psi_y), \alpha_k^{\lambda_k}(\Psi_{xy})\}.$$

D'autre part, si nous désignons par I_4 l'opérateur de $C(R^2,R)$

(II.D.25)
$$I_4\Psi(x,y) = \int_{\frac{x+y}{2}}^x \Psi(\xi,x+y-\xi)d\xi - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} \int_o^{x_i+y_i} \Psi(\xi,x_{i-1}+y_{i-1}-\xi)d\xi$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \int_o^{x_i+y_i} \Psi(\xi,x_i+y_i-\xi)d\xi - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} \int_o^{x_i+y_i} \Psi(x_i+y_i,\xi) - \Psi(\xi,x_i+y_i)\,d\xi$$

qui n'est autre que $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (I_4\Psi)(x,y)$.

Nous voyons la possibilité d'écrire les relations (II.D.6), (II.D.7.9.11.) sous la forme :

$$\text{(II.D.26)}\quad \begin{cases} (\mathcal{T}_4 u)(x,y) = \mathfrak{S}_4(x,y) + \int_0^x \int_0^y I_4 \mathcal{F}(s,t,\mathcal{U})\,ds\,dt \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(\mathcal{T}_4 u)(x,y) = \dfrac{\partial \mathfrak{S}_4}{\partial x}(x,y) = \int_0^y I_4 \mathcal{F}(x,t,\mathcal{U})\,dt \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(\mathcal{T}_4 u)(x,y) = \dfrac{\partial \mathfrak{S}_4}{\partial y}(x,y) + \int_0^x I_4 \mathcal{F}(s,y,\mathcal{U})\,ds \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\mathcal{T}_4 u)(x,y) = \dfrac{\partial^2 \mathfrak{S}_4}{\partial x \partial y}(x,y) + I_4 \mathcal{F}(s,y,\mathcal{U}) . \end{cases}$$

Sous cette forme et sans entrer dans plus de détails nous concevons la possibilité de définir des fonctions D_i $(i = 0, 1, \ldots, 7)$ et $\mathcal{D} = \text{Max } D_i$ sur les compacts Q_k et d'obtenir grâce aux lemmes précédents les majorations suivantes :

$$\alpha_k^{\lambda_k}(\mathcal{T}_4 u) \leq N_k \left\{1 + \frac{4\sqrt{90}\ \beta_k^{\lambda_k}(u)}{\lambda_k \sqrt{\lambda_k}}\right\}$$

$$\alpha_k^{\lambda_k}\left(\frac{\partial \mathcal{T}_4 u}{\partial x}\right), \alpha_k^{\lambda_k}\left(\frac{\partial \mathcal{T}_4 u}{\partial y}\right) \leq N_k \left\{1 + \frac{4\sqrt{30}\ \beta_k^{\lambda_k}(u)}{\lambda_k}\right\}$$

et

$$\alpha_k^{\lambda_k}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{T}_4 u}{\partial x \partial y}\right) \leq N_k \left\{1 + \frac{4\sqrt{10}\ \beta_k^{\lambda_k}(u)}{\sqrt{\lambda_k}}\right\} \quad \text{avec } N_k = \alpha_k^o(\mathcal{D}).$$

Le choix :

$$\text{(II.D.27)}\qquad \lambda_k = \text{Max}\left\{4\ \sqrt[3]{90}\ N_k^{2/3},\ 8\sqrt{30}\ N_k,\ 640\ N_k^2\right\}$$

implique la relation :

$$\text{(II.D.28)}\qquad \beta_k^{\lambda_k}(u) \leq 2N_k \implies \beta_k^{\lambda_k}(\mathcal{T}_4 u) \leq 2N_k .$$

③ Rappelons l'hypothèse concernant les fonctions σ, τ et γ qui a déjà servi à définir la fonction $\mathfrak{S}_4$.

Hypothèse (II.D.1)

Les fonctions σ, τ et γ admettent des dérivées premières et secondes continues sur R.

On pose alors $a_k = \sup\limits_{|x|\leq k} (|\sigma'(x)| + |\sigma''(x)|)$

$b_k = \sup\limits_{|x|\leq k} (|\tau'(y)| + |\tau''(y)|) \qquad c_k = \sup\limits_{|x|\leq k} (|\gamma'(x)| + |\gamma''(x)|)$

D'autre part, la continuité des fonctions σ'', τ'' et γ'' permet d'avoir une fonction $\omega_{7,k}$ continue, croissante, non négative nulle à l'origine telle que

$$|\gamma''(x) - \sigma''(x) - \tau''(x) - \gamma''(\bar{x}) + \sigma''(\bar{x}) + \tau''(\bar{x})| \leq \omega_{7,k}(|x-\bar{x}|)$$

pour $x, \bar{x} \in [-k,k]$.

On écrira comme précédemment

$$\left|\frac{\partial^2 \mathfrak{S}_4}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 \mathfrak{S}_4}{\partial x \partial y}(\bar{x},y)\right| \leq \omega_{7,k}(|x-\bar{x}|)$$

$$\left|\frac{\partial^2 \mathfrak{S}_4}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 \mathfrak{S}_4}{\partial x \partial y}(x,\bar{y})\right| \leq \omega_{7,k}(|y-\bar{y}|)$$

$$|\mathfrak{S}_4(x,y) - \mathfrak{S}_4(\bar{x},y)| \leq \{a_k + 2(a_k + b_k + c_k)k\}k|x-\bar{x}|$$

$$|\mathfrak{S}_4(x,y) - \mathfrak{S}_4(x,\bar{y})| \leq \{a_k + 2(a_k + b_k + c_k)k\}k|y-\bar{y}|$$

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{S}_4}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \mathfrak{S}_4}{\partial x}(\bar{x},y)\right| \leq \{a_k + 2(a_k + b_k + c_k)k\}|x-\bar{x}|$$

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{S}_4}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \mathfrak{S}_4}{\partial x}(x,\bar{y})\right| \leq (a_k + b_k + c_k)k|y-\bar{y}|$$

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{S}_4}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial \mathfrak{S}_4}{\partial y}(\bar{x},y)\right| \leq (a_k + b_k + c_k)k|x-\bar{x}|$$

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{S}_4}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial \mathfrak{S}_4}{\partial y}(x,\bar{y})\right| \leq \{a_k + 2(a_k + b_k + c_k)k\}|y-\bar{y}|$$

Pour simplifier la fin de ce chapitre nous supposerons la fonction f lipschitzienne.

Hypothèse (II.D.2) :

La fonction f de $C(\mathbb{R}^6,\mathbb{R})$ est lipschitzienne sur tout compact par rapport aux variables p, q et z.

$$|f(x,y,u,p,q,z) - f(x,y,u,\bar{p},\bar{q},\bar{z})| \leq \ell_k(|p-\bar{p}| + |q-\bar{q}| + |z-\bar{z}|)$$

pour $(x,y) \in Q_k$ et $u,p,\bar{p},q,\bar{q},z,\bar{z} \in [-2\bar{N}_k, 2\bar{N}_k]$ avec $\bar{N}_k = N_k L_{\lambda_k}(k,k)$.
En utilisant les relations (II.0.7) et les relations

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x+\delta,y)\right| \leq \rho_k(\delta,x,y) \\[2ex] \left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y+\delta)\right| \leq \rho_k(\delta,x,y) \end{cases}$$

pour $x+\delta$, $x \in [-k,k]$, y et $y+\delta \in [-k,k]$, nous obtenons

$$|F(\xi,x+y+\delta-\xi,U) - F(\xi,x+y-\xi,U)| \leq \omega_{2,k}(\delta) + \omega_{3,2k}(2\bar{N}_{2k}\delta)$$

$$+ \ell_k(2\bar{N}_{2k}\delta) + \ell_k \left|\int_0^\xi \rho_k(\delta,t,x+y-\xi)dt\right| + \ell_k\, \rho_k(\xi,x+y-\xi)$$

et donc une expression de la forme :

$$\left|\frac{\partial^2 T_4 u}{\partial x\partial y}(x,y+\delta) - \frac{\partial^2 T_4 u}{\partial x\partial y}(x,y)\right| \leq \Omega_k(\delta) + \left|\int_{x_1+y_1}^{x} \ell_k \left|\int_0^\xi \rho_k(\delta,t,x+y-\xi)dt\right| d\xi\right|$$

$$+ \ell_k \left|\int_{x_1+y_1}^{x} \rho_k(\delta,\xi,x+y-\xi)d\xi\right| + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\ell_k}{2^{i-1}} \left|\int_0^{x_i+y_i} \left|\int_0^\xi \rho_k(\delta,t,x_i+y_i-\xi)dt\right| d\xi\right|$$

$$+ \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\ell_k}{2^{i-1}} \left|\int_0^{x_i+y_i} \rho_k(\delta,\xi,x_{i-1}+y_i-\xi)d\xi\right| + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ell_k}{2^{i+1}} \left|\int_0^{x_i+y_i} \rho_k(\delta,\xi,x_i+y_i-\xi)d\xi\right| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ell_k}{2^{i+1}} \left| \int_0^{x_i+y_i} \left| \int_0^{\xi} \rho_k(\delta,t,x_i+y_i-\xi)dt \right| d\xi \right|$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ell_k}{2^{i+1}} \left| \int_0^{x_i+y_i} \left| \int_0^{\xi} \{\rho_k(\delta,x_i+y_i,t) + \rho_k(\delta,t,x_i+y_i)\}dt \right| d\xi \right|$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ell_k}{2^{i+1}} \left| \int_0^{x_i+y_i} \{\rho_k(\delta,x_i+y_i,\xi) + \rho_k(\delta,\xi,x_i+y_i)\}d\xi \right|$$

Nous allons écrire que $\rho_k(\delta,x,y)$ est proportionnel à $L^2_{\lambda'}(x,y)$ et déterminer le nombre λ' et le coefficient de proportionnalité pour que

$$\left| \frac{\partial^2 T_4 u}{\partial x \partial y}(x,y+\delta) - \frac{\partial^2 T_4 u}{\partial x \partial y}(x,y) \right| \leqslant \rho_k(\delta,x,y).$$

Soit donc $\rho_k(\delta,x,y) = R(\delta)L^2_{\lambda'}(x,y)$; il vient en tenant compte de $L_{\lambda'}(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}) \leqslant L_{\lambda'}(x,y)$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\left| \frac{\partial^2 T_4 u}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 T_4 u}{\partial x \partial y}(x,y+\delta) \right| \leqslant \Omega_k(\delta) + \ell_k R(\delta)\left(\frac{27}{\lambda'^2} + \frac{10}{\lambda'}\right)L^2_{\lambda'}(x,y)$$

$$- \frac{4}{25\lambda'^2} R(\delta).$$

On prendra λ' positif tel que $\left(\frac{27}{\lambda'^2} + \frac{10}{\lambda'}\right)\ell_k = 1$, ce choix fait on aura $R(\delta) = \frac{25\lambda'^2}{4} \Omega_k(\delta)$ de sorte que

$$\left| \frac{\partial^2 T_4 u}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 T_4 u}{\partial x \partial y}(x,y+\delta) \right| \leqslant \rho_k(\delta,x,y).$$

Nous établirons de la même façon que

$$\left| \frac{\partial^2 T_4 u}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 T_4 u}{\partial x \partial y}(x+\delta,y) \right| \leqslant \rho_k(\delta,x,y), \text{ de sorte}$$

que nous pouvons énoncer le théorème d'existence

Théorème (II.D.1) :

Avec les hypothèses :

(h.O.1) $f \in C(\mathbb{R}^6,\mathbb{R})$ $\quad |f(x,y,u,p,q,z)| \leq \psi(x,y,|u|+|p|+|q|+|z|)$

(h.D.1) Les fonctions σ, τ et γ appartiennent à $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

(h.D.2) La fonction f est lipschitzienne sur tout compact de $\mathbb{R}^6$ par rapport aux variables p, q et z.

Le problème (II.D) admet une solution définie sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque (D . 3) :

Dans [11] M. Winants n'a examiné que l'équation $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = f(x,y,u)$ en voulant déterminer une solution s'annulant sur les deux axes de coordonnées et la première bissectrice. Il a naturellement supposé que la fonction f était lipschitzienne en u et a montré l'existence d'une solution à l'intérieur du domaine

$$\Delta = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a, \quad x+y < b\}.$$

E - CONCLUSION

Dans tout ce chapitre, nous nous sommes attachés à prouver l'existence d'une solution (définie sur tout $\mathbb{R}^2$) de quelques problèmes relatifs à l'équation de M. Winants. Mais nous pouvons sans difficulté étendre ce résultat à des équations d'ordre plus élevé. Par exemple, si nous considérons l'équation

$$\text{(II.E.1)} \qquad \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)u = f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p \partial y^q}, \ldots\right)$$

avec $0 \leqslant p \leqslant r$ et $0 \leqslant q \leqslant s$ et si nous la soumettons aux conditions initiales suivantes (supposées compatibles)

$$\text{(II.E.2)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^p u}{\partial x^p}(0,y) = \tau_p(y) & \dfrac{\partial^q u}{\partial y^q}(x,0) = \sigma_q(x) \\[2ex] 0 \leqslant p \leqslant r & 0 \leqslant q \leqslant s-1 \end{cases}$$

$$\text{(II.E.3)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^p u}{\partial x^p}(x,x) = \mu_p(x) & \dfrac{\partial^q u}{\partial y^q}(x,x) = \nu_q(x), & \dfrac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s}(x,x) = \chi(x) \\[2ex] 1 \leqslant p \leqslant r & 1 \leqslant q \leqslant s & u(0,0) = u_o \end{cases}$$

$$\text{(II.E.4)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^p u}{\partial x^p}(0,y) = \tau_p(y) & \dfrac{\partial^q u}{\partial y^q}(x,0) = \sigma_q(x), & u(x,x) = \gamma(x) \\[2ex] 0 \leqslant p \leqslant r-2 & 0 \leqslant q \leqslant s \end{cases}$$

$$\text{(II.E.5)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^p u}{\partial x^p}(0,y) = \tau_p(y) & \dfrac{\partial^q u}{\partial y^q}(x,0) = \sigma_q(x) & u(x,x) = \gamma(x) \\[2ex] 0 \leqslant p \leqslant r-1 & 0 \leqslant q \leqslant s-1 \end{cases}$$

nous obtiendrons facilement le théorème d'existence suivant :

Théorème (II.E.1) :

Avec les hypothèses

(h.E.1) $f \in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \quad |f(x,y,(z_{pq}))| \leqslant \vartheta(x,y,\Sigma|z_{pq}|)$

$$n = (r+1)(s+1) + 2$$

(h.E.2) Les conditions initiales sont suffisamment régulières pour que la solution de l'équation $\frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)u = 0$ soumise à ces données appartienne à $H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

(h.E.3) La fonction f est lipschitzienne par rapport aux $r+s+2$ variables z_{rq}, $0 \leqslant q \leqslant s$ et z_{ps}, $0 \leqslant p \leqslant r$.

Les 4 problèmes précédents (II.E.1, 2, 3, 4, 5) admettent une solution définie sur tout $\mathbb{R}^2$.

Remarque :

On peut concevoir d'autres conditions initiales faisant intervenir les droites $x = 0$, $x = y$ et $y = 0$. D'un autre côté, on peut s'intéresser à l'équation du troisième ordre : $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - a\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = f(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})$ dont les caractéristiques sont $x = 0$, $y = 0$, $x + ay = 0$, ou même à celle du quatrième ordre :

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial y}\right) = f(x,y,U)$$

étudiée par Colombo [1] mais il ne faut pas perdre de vue que la principale difficulté à résoudre pour obtenir cette existence globale dans $\mathbb{R}^2$ est la détermination de la fonction L_λ permettant de définir la topologie de $H(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et d'appliquer le théorème de Tychonoff.

BIBLIOGRAPHIE DE LA PREMIERE PARTIE

ALEXIEWICZ A., ORLICZ W. [1] - *Some remarks on the existence and uniqueness of solutions of the hyperbolic equation* $z_{xy} = f(x,y,z,z_x,z_y)$, Studia Math, 15, 201-215 (1956).

AZIZ J.P., MALONEY A.K. [1] - *An application of Tychonoff's fixed point theorem to hyperbolic partial differential equations*, Math. Ann. 162, 77-82 (1965-66).

BIELECKI A. [1] - *Une remarque sur l'application de la méthode de Banach - Caccioppoli-Tikhonoff dans la théorie de l'équation* $s = f(x,y,z,p,q)$. Bull. Acad. Polon. Sci. Classe III 4 (265-268), 1956.

CILIBERTO C. [1] - *Il problema di Darboux per una equazione di tipo iperbolico in due variabili*, Ric. Math. 4 - (15-29), (1959).

CILIBERTO C. [2] - *Sul problema di Darboux per l'equazione* $s = f(x,y,z,p,q)$, Rend. Acad. Sci. Fis. Mat. Soc. Naz. Sci. Napoli (4), 22, 221-225 (1956).

CINQUINI - CIBRARIO M. - CINQUINI S. [1] - *Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico*, Consiglio Nazionale della Ricerche, Monografie Matematiche, vol. 12, Roma Edizioni Cremonese 1965.

CONLAN J. [1] - *An existence theorem for the equation* $u_{xyz} = f$, Arch. Rational Mech. Anal. 9, 64-76 (1962).

CONLAN J., DIAZ J.B. [1] - *Existence of solutions of an* n^{th} *order hyperbolic partial differential equation*, Contrib. Diff. Equations 2 (277-289), 1963.

CONTI [1] - *Sul problema di Darboux per l'equazione* $z_{xy} = f(x,y,z,z_x,z_y)$, Ann. Univ. Ferrara Sez VII, 2, 129-140 (1953).

DE LUCIA [1] - *Su un problema al contorno per una equazione di tipo iperbolico di ordine* 2m, Ric. Mat. 16 (264-302), 1967.

DIAZ J.B. [1] - *On an analogue of the Euler-Cauchy polygon method for the numerical solution of* $u_{xy} = f(x,y,u,u_x,u_y)$, Arch. Rational Mech. Anal. 1, 357-390 (1958).

DURIKOVIC V. [1] - *Niektore vlastnosti picardovych postupnosti a ich pouzitie pre hyperbolické rovnice,* Acta F.R.N. Univ. Comen. Mathematica XIX 1968 (47-73).

DURIKOVIC V. [2] - *The convergence of successive approximations for boundary value problems of hyperbolic equations in the banach space,* Matematicky casopis 21 (1971), N° 1.

FRASCA M. [1] - *Su un problema di limiti per l'equazione* $u_{xyz} = f(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z)$, Mätematiche (Catania), 21, 396-412 (1966).

GLICK I.I. [1] - *On an analog of the Euler-Cauchy polygon method for the partial differential equation* $u_{x_1,\ldots,x_n} = f$, Contrib. Diff. Equations 2 (1-59) 1963.

HARTMAN P., WINTNER A. [1] - *On hyperbolic partial differential equations,* Amer. J. Math. 74 (834-864), 1952.

HECQUET G. [1] - *Etude de quelques problèmes d'existence globale concernant l'équation*

$$\frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s} = f(x,y,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}, \ldots)$$

Annali di Matematica Pura ed Applicata (à paraître).

KISYNSKI J. [1] - *Sur l'existence et l'unicité des solutions des problèmes classiques relatifs à l'équation* $s = F(x,y,z,p,q)$, Ann. Univ. Mariae Curie - Sklodowska, Lublin-Polonia, Sect. A XI (73-112), 1957.

KISYNSKI J. [2] - *Sur l'unicité de certains problèmes pour l'équation* $z_{xy} = f(x,y,z,z_x,z_y)$, Ann. Univ. Mariae Curie - Sklodowska, Lublin-Polonia, Sect. A XII, 1958.

KISYNSKI J. [3] - *Sur le problème de Picard pour l'équation hyperbolique aux dérivées partielles du second ordre,* Ann. U.M.C.S. (Section A) XIII (5-22), 1959.

KISYNSKI J. [4] - *Remarque sur l'existence des solutions en large de l'équation* $z_{xy} = f(x,y,z,z_x,z_y)$, Ann. U.M.C.S. (Section A) XIII (25-32), 1959.

KISYNSKI J. [5] - *Solutions généralisées du problème de Cauchy-Darboux pour l'équation* $z_{xy} = f(x,y,z,z_x,z_y)$, Ann. U.M.C.S. XIV (87-108), 1960.

KISYNSKI J. - TYM W. [1] - *Sur la convergence des approximations successives pour l'équation* $z_{xy} = f(x,y,z,z_x,z_y)$, Ann. U.M.C.S. XVI (107-120), 1962.

PALCZEWSKI B. [1] - *Existence and uniqueness of solutions of the Darboux problem for the equation*

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = f(x_1,x_2,x_3,u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3})$$

Ann. Pol. Math. 13 (267-277), 1963.

PALCZEWSKI B. [2] - *On boundedness and stability of solution of Darboux problem for abstract equations of hyperbolic type in an unbounded domain,* Zeszyty naukowe Politechniki gdauskiej, 1969, n° 150 (19-51).

PELCZAR A. - *On the existence and uniqueness of solutions of the Darboux problem for the equation* $z_{xy} = f(x,y,z,z_x,z_y)$, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. Phys. 12 (703-707), 1964.

RADOCHOVA Vera - *Die Lösung der partiellen differentialgleichung* $u_{xxtt} = A(t,x)u_{xx} + B(t,x)u_{tt}$ *mit gewissen nebenbedingungen,* Casopis pro pestovani matematiky roc 98 (1973) (388-397).

SHANAHAM J.P. [1] - *On uniqueness for hyperbolic differential equations,*
Pacific J. Math. 10 (677-688), 1960.

SHANAHAM J.P. [2] - *On existence in the large of solution of hyperbolic partial differential equations,*
Rend. Circ. Math. Palermo (2) 11, 225-236 (1962).

TEODORU Georgeta - *The Darboux Problem for a hyperbolic partial differential equation of second order,*
Buletinul institutulin politehnic din Iasi - Tomul XIX (XXIII), fasc. 3-4, 1973, sectia I, Matematica.

WALTER W. [1] - *Über die Differentialgleichung* $u_{xy} = f(x,y,u,u_x,u_y)$,
Teil I. Math. Z. 71 (308-324), 1959.

WALTER W. [2] - *Differential an integral inequalites,*
Ergebnisse der Mathematik und ihrer grenzegebiete Band SJ, Springer Verlag 1970.

M. WINANTS [1] - *Application de la méthode des approximations successives à l'intégration de certaines equations linéaires binômes aux dérivées partielles d'ordre quelconque,*
Bull. de l'Acad. roy de Belgique, cl. des Sc XVI, n° 3 (394-412).

M. WINANTS [2] - *Quelques équations linéaires aux dérivées partielles possédant trois familles distinctes de caractéristiques réelles,*
Bull. de l'Acad. roy de Belgique, cl. des Sc XVI, n° 6 (775-793).

M. WINANTS [3] - *Quelques propriétés des équations hyperboliques du deuxième et du troisième ordre,*
Bull. de l'Acad. roy de Belgique, cl. des Sc XIX, n° 10 (1034-1043).

M. WINANTS [4] - *Résolution d'un nouveau problème à deux courbes pour une certaine équation hyperbolique du troisième ordre,*
Bull. de l'Acad. roy de Belgique, cl. des Sc XX (103-105).

M. WINANTS [5] - *Equations du troisième ordre à caractéristiques réelles.*
Bull. de l'Acad. roy de Belgique, cl. des Sc XX (207-221).

M. WINANTS [6] - *Résolution du problème de Cauchy pour l'équation* $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f(x,y,z)$,
Bull. de l'Acad. roy de Belgique, cl. des Sc. XX (433-438).

M. WINANTS [7] - *Résolution d'un problème à deux courbes pour l'équation semi-parabolique du troisième ordre et de la catégorie IV,*

M. WINANTS [8] - *Equation hyperbolique du 3e ordre à coefficients constants et de la catégorie III : résolution du problème de Cauchy par la méthode des approximations successives,*
Bull. de l'Acad. roy de Belgique, cl. des Sc. XXI (283-293).

M. WINANTS [9] - *Révolution du problème* (a_o, IV, 1°),
Bull. de l'Acad. Roy. de Belgique, cl. des Sc. XXI, (376-384).

M. WINANTS [10] - *Résolution du problème* (a_o,IV,2°),
Bull. de l'Acad. Roy. de Belgique, cl. des Sc. XXI (495-503).

M. WINANTS [11] *Chacun des deux problèmes* (a_o,III,3") *et* (a_o,III,2') *peut être résolu par le moyen d'une équation intégrale ayant un nombre infini de termes,*
Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, cl. des Sc. XXII (8-25).

WONG J.S.W. [1] - *Remarks on the uniqueness theorem of solutions of the Darboux problem,*
Can. Math. Bull. 8 (791-796), 1965.

2ème PARTIE

SOLUTIONS PERIODIQUES D'EQUATIONS DE TYPE HYPERBOLIQUE

ERRATA DE LA SECONDE PARTIE

Page (III.4), dernière ligne lire $\sigma^2(x_1,0) = \sigma^3(x_1,0)$ si $x_1 \in \mathbb{R}$

au lieu de $\sigma^2(x_1,0) = \sigma^1(x_1,0)$ si $x_1 \in \mathbb{R}$

Page (III.6), ligne 16 lire

$$|B^2\theta(x_1,x_2,x_3) - B^2\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3)| \leq |\theta| \frac{T}{2} |x_3-\bar{x}_3| + \alpha'(|x_3-\bar{x}_3|)$$

au lieu de

$$|B^2\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3) - B^2\theta(x_1,x_2,x_3)| \leq |\theta| \frac{T}{2} |x_3-\bar{x}_3| + \alpha'(|x_3-x_3|)$$

Page (III.12), ligne 7 lire

$$|m_1(x_2,x_3,\theta) - m_1(x_2,x_3,\bar{\theta})| \leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |F(s_1,x_2,x_3,\theta) - F(s_1,x_2,x_3,\bar{\theta})| ds_1$$

au lieu de

$$|m_1(x_2,x_3,\theta) - m_1(x_2,x_3,\bar{\theta})| \leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |F(s_1,x_2,x_3,\theta) - F(s_1,x_2,x_3,\theta)| ds_1$$

Page (III.21), ligne 8 lire (h.A.1) , θ

au lieu de (h.A.1) et θ

Page (III.38), ligne 6 lire

$$F(x,q) = f(x_1,0,0,\sigma^2(x_1,0),\sigma_1^2(x_1,0),\sigma_2^3(x_1,0),\sigma_3^2(s_1,0),\sigma_{12}^3(x_1,0),\sigma_{13}^2(x_1,0),q)$$

au lieu de

$$F(x,q) = f(x_1,0,0,\sigma^2(x_1,0),\sigma_1^2(x_1,0),\sigma_2^3(x_1,0),\sigma_{12}^3(x_1,0),\sigma_{13}^2(x_1,0),q)$$

Page (III.42), ligne 11 lire

$$|B^{13}\theta(x_1,x_2,x_3)-B^{13}\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3)| \leq \left|\int_o^{x_2} \rho_3(x_1,s_2,|x_3-\bar{x}_3|) ds_2\right| + \alpha''(|x_3-\bar{x}_3|)$$

au lieu de

$$|B^{13}\theta(x_1,x_2,x_3)-B^{13}\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3)| \leq \left|\int_o^{x_2} \rho_3(x_1,s_2,|x_3-\bar{x}_3|) ds_2 \right. + \alpha''(|x_2-\bar{x}_2|)$$

.../...

Page (III.48), ligne 2 lire

$$\varepsilon = \sup_{A_2} \{\sum_i |\sigma^i(x) - \bar{\sigma}^i(x)| + \sum_{i,j} |\sigma^i_j(x) - \bar{\sigma}^i_j(x)| + \sum_{i,j,k} |\sigma^i_{jk}(x) - \bar{\sigma}^i_{jk}(x)|\}$$

au lieu de

$$\varepsilon = \sup_{A_2} \{\sum_i |\sigma^i(x) - \bar{\sigma}^i(x)| + \sum_{i,j} |\sigma^i_j(x) - \bar{\sigma}^i_j(x) + \sum_{i,j,h} |\sigma^i_{jk}(x) - \bar{\sigma}^i_{jk}(x)|\}$$

Page (III.52), ligne 9 lire

$$N,\ N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_{12},\ N_{13},\ N_{23}$$

au lieu de

$$N,\ N_1,\ N_3,\ N_{12},\ N_{13},\ N_{23}$$

Page (III.63), ligne 3 lire

$$|\sigma^3(x_1,x_2)| \leq n$$

au lieu de

$$|\sigma^3_{12}(x_1,x_2)| \leq n$$

Page (III.69), dernière ligne lire

$$+ P_{123}k_3|\int_o^{x_1}\int_o^{x_2} \rho(s_1,s_2,x_3)ds_1ds_2| + P_{123}k_{12}|\int_o^{x_3} \rho(x_1,x_2,s_3)ds_3| +$$

au lieu de

$$+ P_{123}k_3|\int_o^{x_1}\int_o^{x_2} \rho(x_1,s_2,x_3)ds_1ds_2| + P_{123}k_{12}|\int_o^{x_3} \rho(x_1,x_2,s_3)ds_3|$$

Page (III.76), ligne 16 lire

$$\text{(III.D.11)} \qquad u_{x_1x_2} = x_2 + (1-x_2)(\sin x_1 + \lambda\, u_{x_2}).$$

au lieu de

$$u_{x_1}u_{x_2} = x_2 + (1-x_2)(\sin x_1 + \lambda\, u_{x_2})$$

.../...

Page (III.79), lire $N_\alpha < M_\alpha \qquad N_\mu + LT^2 \leq M_\mu$

au lieu de $N_\alpha < M_\alpha \qquad N_\nu + LT^2 \quad M_\nu$

Page (III.81), lire ligne 6 $|D_\alpha \widetilde{S}(x_1,x_2,0,\ldots,0)| \leq n_\alpha \quad \alpha \in J - \{\nu,\lambda,\mu\}$.

au lieu de $|D_\alpha \widetilde{S}(x_1,x_2,0,\ldots,0)| \leq n \quad \alpha \in J - \{\nu,\lambda,\mu\}$.

lire ligne 12

$$|f(x,y,(z_\alpha)_{\alpha\in J})-f(\bar{x},\bar{y},(\bar{z}_\alpha)_{\alpha\in J}| \leq k|x-\bar{x}| + k_o|y-\bar{y}| + \sum_\alpha k_\alpha|z_\alpha - \bar{z}_\alpha|$$

au lieu de

$$|f(x,y,(z_\alpha)_{\alpha\in J})-f(\bar{x},\bar{y},(\bar{z}_\alpha)_{\alpha\in J}| \leq k|x-\bar{x}| + k_o|y-\bar{y}| + \sum_\alpha k_\alpha|z_\alpha - z_\alpha|$$

Page (III.83), lire ligne 19 $u(x_1,0,x_3) = x_3 + \sin x_1$

au lieu de $u(x_1,x_2,x_3) = x_3 + \sin x_1$

Page (III.84), lire ligne 2 $= \varepsilon\{-1 + q + \vartheta(x_2)q_1 + \Psi(x_1)q_2\}$

au lieu de $= \; -1 + q + \vartheta(x_2)q_1 + \Psi(x_1)q_2$

Page (IV.10), lire ligne 10 $+ \omega_{11}\{\eta_2(\delta) + L^*(\varepsilon)a\delta\} + \omega_{o2}\{\eta_2(\delta) + L^*(\varepsilon)\frac{T}{2}\delta\}$

au lieu de $+ \omega_{11}\{\eta_2(\delta) + L^*(\varepsilon)as\} + \omega_{o2}\{\eta_2(\delta) + L^*(\varepsilon)\frac{T}{2}\delta\}$

Page (IV.13), lire ligne 13 $\rho(x) = 1 + k_{o2}P_1^\sigma\left|\int_o^x (x-s)\rho(s)ds\right| + k_{12}P_1^\sigma\left|\int_o^x \rho(s)ds\right|$

au lieu de $\rho(x) = 1 + k_{o2}P_1^\sigma\left|\int_o^x (x-s)\rho(s)ds\right| + k_{12}P_1^\sigma\left|\int_o^x \rho(s)ds\right.$

Page (IV.14), lire ligne 17 $\rho(x,y) = 1 + k_{oo}P_1^\sigma\left|\int_o^x\int_o^y (x-s)(y-t)\rho(s,t)ds\,dt\right|$

au lieu de $\rho(x,y) = 1 + k_{oo}P_1 \int_o^x\int_o^y (x-s)(y-t)\rho(s,t)ds\,dt|$

.../...

Page (IV.15), lire ligne 1 $+ k_{o2}P_1^{\sigma}\left|\int_o^x (x-s)\rho(s,y)ds\right| + k_{21}P_1^{\sigma}\left|\int_o^y \rho(x,t)dt\right|$

au lieu de $+ k_{o2}P_1^{\sigma}\left|\int_o^x (x-s)\rho(s,y)ds\right| + k_{21}P_1^{\sigma}\left|\int_o^y \rho(x,t)dt\right|$

lire ligne 10 $|f(x,y,(z_{ij})) - f(x,y,(\bar{z}_{ij})| \leqslant \sum k_{ij}|z_{ij} - \bar{z}_{ij}|$

au lieu de $|f(x,y,(z_{ij})) - (x,y,(\bar{z}_{ij})| \leqslant \sum k_{ij}|z_{ij} - \bar{z}_{ij}|$

lire ligne 14 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$

au lieu de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Page (IV.20), lire ligne 10 $\nu = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(s,q(s),q'(s))\sigma(s)ds$

au lieu de $\nu = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(s,q(\nu),q'(s))\sigma(s)ds$

lire ligne 21 $A = \mathbb{R} \times [-M_{o2},M_{o2}] \times [-M_{12},M_{12}]$

au lieu de $A = \mathbb{R} \times [-M_{o2},M_{12}] \times [-M_{12},M_{12}]$

Page (IV.23), lire ligne 2 $\nu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(x,q_n(x),q_n'(x))\sigma(x)dx$

au lieu de $\nu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(x,q_n(x),q_n'(x))\sigma(x)ds$

lire ligne 6 $\varepsilon_n(x) = |q_{n+1}(x) - q_n(x)|$

au lieu de $\varepsilon_n(x) = |q_{n+1} - q_n(x)|$

Page (IV.25), lire ligne 1 $\Delta\nu = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [A(s)\ q(s) + B(s)\Delta q'(s) + \eta(s)]\sigma(s)ds$

au lieu de $\Delta\nu = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [A(s)\ q(s) + B(s)\Delta q'(s) + \eta(\Delta)]\sigma(s)ds$

Page (IV.26), lire ligne 16 $(L,\bar{L}) : (h_1,h_2) \to (\Delta\tilde{q}(x), \bar{\tilde{q}}(x))$

au lieu de $(L_1,\bar{L}) : (h_1,h_2) \to (\Delta\tilde{q}(x), \bar{\tilde{q}}(x))$

.../...

Page (IV.27), lire ligne 18 $f : f(x,y,z_{oo},z_{1o},z_{o1},z_{2o},z_{11},z_{o2},z_{21},z_{12})$

au lieu de $f : f(x,y,z_{oo},z_{1o},z_{o1},z_{2o},z_{11},z_{o2},z_{11},z_{12})$

lire ligne 19 $\mathcal{B}$(h.A.2))

au lieu de (h.A.2)

Page (IV.28), lire ligne 3 $n_{11} < M_{11}$

au lieu de $n_{11} < m_{11}$

lire ligne 6 (h.A.5bis)

au lieu de (h.1.5bis)

lire ligne 19 un nombre a' positif

au lieu de un nombre à positif

Page (IV.30), lire ligne 17

$$\ell(x,y) = x\left[\beta_2(y) - \beta_2(0)\right] + y\left[\alpha_2(x)-\alpha_2(0)\right] - \alpha_2'(0)xy + \alpha_1(x)+\beta_1(y)-\alpha(0)$$

au lieu de

$$\ell(x,y) = x\left[\beta_2(x) - {}_2(0)\right] + y\left[\alpha_2(x)-\alpha_2(0)\right] - \alpha_2'(0)xy + \alpha_1(x)+\beta_1(y)-\alpha(0)$$

Page (IV.32), lire ligne 11 $\nu_1(y,\theta) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(s,y,\theta)\sigma(s)ds$

au lieu de $\nu_1(y,\theta) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(s,y,\theta)\ (s)ds$

Page (IV.36), lire ligne 20

$$9\ \{\frac{k_{oo}T^4}{64} + \frac{k_{o1}+k_{1o}}{16}T^3 + \frac{k_{o2}+2k_{11}+k_{2o}}{8}T^2 + \frac{k_{21}+k_{12}}{2}T\} < 1$$

au lieu de

$$9\ \{\frac{k_{oo}T^4}{64} + \frac{k_{o1}+k_{1o}}{16} + \frac{k_{o2}+2k_{11}+k_{2o}}{8}T^2 + \frac{k_{21}+k_{12}}{2}T\} < 1$$

.../...

Page (IV.40), lire ligne 14 ces fonctions λ_i

au lieu de les fonctions λ_i

Page (IV.43), lire ligne 3 $+ k_{23}\left|\int_o^x (x-s)\rho(s)\right|ds + k_{23}\left|\int_o^x \rho(s)ds\right|\Big]dx$

au lieu de $+ k_{23}\left|\int_o^x (x-s)\rho(s)\right|ds + k_{23}\left|\int_o^x \rho(s)ds\Big]\, dx\right.$

$$\boxed{\text{CHAPITRE III}}$$

SOLUTIONS PERIODIQUES DE L'EQUATION

$$u_{x_1,\dots,x_n} = f(x_1,\dots,x_n,u,u_{x_1},\dots,u_{x_n},\dots,u_{x_2,\dots,x_n})$$

Dans plusieurs articles L. Cesari [1...6] a étudié le problème de l'existence de solutions périodiques du problème de Darboux

$$\text{(III.0)}\qquad \begin{cases} u_{xy} = f(x,y,u,u_x,u_y) \\ \\ u(x,0) = \sigma(x), \quad u(0,y) = \tau(y), \quad \sigma(0) = \tau(0) \ . \end{cases}$$

Il s'est d'abord proposé de trouver, sachant que la fonction f est périodique en x de période T, des conditions suffisantes assurant l'existence, l'unicité et la périodicité en x de la solution dans une bande $\mathcal{B} = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, |y| \leq a\}$.

La méthode élaborée à cette occasion par L. Cesari est appelée depuis méthode de l'équation "modifiée" :

Remarquant que toute solution $\bar{u}$ périodique en x de période T dans la bande $\mathcal{B}$ vérifie la relation :

$$\int_0^T f(x,y,\bar{u}(x,y),\bar{u}_x(x,y),\bar{u}_y(x,y))dx \equiv 0 \quad \text{pour} \quad |y| \leq a$$

L. Cesari a d'abord examiné le problème :

$$\text{(III.1)}\qquad \begin{cases} u_{xy} = f(x,y,u,u_x,u_y) - m(y,u) \\ m(y,u) = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y))dx \\ u(x,0) = \sigma(x), \quad u(0,y) = \tau(y), \quad \sigma(0) = \tau(0) \end{cases}$$

et a donné quelques résultats concernant l'existence l'unicité et la dépendance continue de ses solutions par rapport aux données σ et τ. Une fois ce problème résolu L. Cesari s'est efforcé de déterminer la fonction τ assurant la nullité de la fonction m du problème (III.1.).

Parallèlement à cette étude L. Césari a examiné le problème de la périodicité en x et y et a donné un critère d'existence de solutions périodiques pour l'équation :

$$\text{(III.2) :} \qquad u_{xy} = \varepsilon\left[\Psi(x,y) + Cu + \Psi_1(y)u_x + \Psi_2(x)u_y\right] + \varepsilon^2 g(x,y,u,u_x,u_y).$$

Peu de temps après A.K. Aziz [1] reprenait son étude et simplifiait les démonstrations conduisant à l'existence des solutions du problème modifié. Jack K. Hale [1] considéra tout d'abord l'équation des ondes

$$\text{(III.3)} \qquad u_{xx} - u_{yy} = \varepsilon\, f(x,y,u,u_x,u_y)$$

et déduisit de son étude (inspirée par L. Cesari) quelques résultats concernant l'équation (III.2).

Dans cette partie je me propose d'appliquer la méthode de l'équation modifiée pour le problème aux limites de I.I. Glick

$$\text{(III.4)} \qquad \begin{cases} u_{x_1 \ldots x_n} = f(x_1,\ldots,x_n,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},\ldots,u_{x_2,\ldots,x_n}) \\ u(x_1,\ldots,x_i = 0,\ldots,x_n) = \sigma^i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) \\ \sigma^i(x_1,\ldots,x_j = 0,\ldots,x_n) = \sigma^j(x_1,\ldots,x_i = 0,\ldots,x_n) \qquad i \neq j \end{cases}$$

Dan Petrovanu [1] examina ce problème mais n'aborda pas la recherche des solutions périodiques (si ce n'est que dans des cas triviaux). Je suivrai presque pas à pas la démarche de L. Césari en tenant compte des amélioration de A.K. Aziz et j'obtiendrai des résultats très semblables. En particulier dans l'hypothèse de la périodicité par rapport à une seule variable : x_1 on constate que l'existence d'une solution périodique en x_1 de (III.4) est liée :

1°) A l'existence d'une solution périodique d'une équation différentielle construite à partir de la fonction f et des $(n-1)$ données initiales σ^i $i \geq 2$.

2°) A l'existence de solutions non périodiques de l'équations aux variations associée à la précédente.

Cette deuxième condition provient de l'utilisation du théorème des fonctions implicites de L. Césari [4]. Nous poursuivons notre étude en examinant le cas où la fonction f est périodique en x_1 et x_2 et obtenons des résultats analogues, ce qui nous permet d'indiquer ce qui se passe lorsque la fonction f est périodique par rapport aux p premières variables.

La dernière partie de ce travail sera consacrée à l'étude des solutions périodiques de l'équation :

$$(III.5) \qquad u_{x_1^2,\dots,x_n^2} = f(x_1,\dots,x_n,u,u_{x_1},\dots,u_{x_n},\dots,u_{x_1x_2^2,\dots,x_n^2})$$

et conduira aux mêmes résultats.

Pour la clarté de l'exposé, je me limiterai le plus souvent, comme Dan Petrovanu, au cas $n = 3$.

A - PERIODICITE PAR RAPPORT A UNE VARIABLE

① *Définition du problème modifié.*

Considérons l'équation

$$\text{(III.A.1)} \qquad u_{x_1x_2x_3} = f(x_1,x_2,x_3,u,u_{x_1},u_{x_2},u_{x_3},u_{x_1x_2},u_{x_1x_3},u_{x_2x_3})$$

soumise aux conditions initiales

$$\text{(III.A.2)} \qquad \begin{cases} u(0,x_2,x_3) = \sigma^1(x_2,x_3) \qquad u(x_1,0,x_3) = \sigma^2(x_1,x_3) \\ \qquad\qquad u(x_1,x_2,0) = \sigma^3(x_1,x_2) \end{cases}$$

Dans cette partie A_1 désignera le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ $A_1 = \{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in \mathbb{R},\ |x_2| \leq a_2,\ |x_3| \leq a_3\}$ avec a_2,a_3 des constantes positives.

$C(A_1)$ sera l'ensemble des fonctions définies et continues sur A_1, périodiques en x_1 de période T, à valeurs dans $E = \mathbb{R}^m$, muni de la norme de la convergence uniforme $|\theta| = \sup |\theta(x)|$.

Faisons l'hypothèse :

(h.A.1) Les fonctions σ^1, σ^2, σ^3 définies respectivement sur les ensembles $\{(x_2,x_3) : |x_2| \leq a_2,\ |x_3| \leq a_3\}$, $\{(x_1,x_3) : x_1 \in \mathbb{R},\ |x_3| \leq a_3\}$ et $\{(x_1,x_2) : x_1 \in \mathbb{R},\ |x_2| \leq a_2\}$ sont continues ainsi que leurs dérivées partielles σ^1_2, σ^1_3, $\sigma^1_{2,3}$, σ^2_1, σ^2_3, $\sigma^2_{1,3}$, σ^3_1, σ^3_2, $\sigma^3_{1,2}$ à valeurs dans E et périodiques de période T en x_1.
De plus, les fonctions σ^1, σ^2, σ^3 vérifient les relations

$$\sigma^1(0,x_3) = \sigma^2(0,x_3) \quad \text{si} \quad |x_3| \leq a_3$$

$$\sigma^1(x_2,0) = \sigma^3(0,x_2) \quad \text{si} \quad |x_2| \leq a_2$$

$$\sigma^2(x_1,0) = \sigma^1(x_1,0) \quad \text{si} \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Cette hypothèse définit une fonction $\mathfrak{S}$ de $C(A_1)$ solution de l'équation $\mathfrak{S}_{x_1x_2x_3} = 0$ et satisfaisant :

$\mathfrak{S}(0,x_2,x_3) = \sigma^1(x_2,x_3)$, $\mathfrak{S}(x_1,0,x_3) = \sigma^2(x_1,x_3)$, enfin $\mathfrak{S}(x_1,x_2,0) = \sigma^3(x_1,x_2)$.

Désignons alors par N, N_1, N_2, N_3, N_{12}, N_{13}, N_{23} des constantes positives ou nulles telles que $|\mathfrak{S}| \leq N$, $|\mathfrak{S}_1| \leq N_1$, $|\mathfrak{S}_2| \leq N_2$, $|\mathfrak{S}_3| \leq N_3$,

$$|\mathfrak{S}_{12}| \leq N_{12}, \quad |\mathfrak{S}_{13}| \leq N_{13}, \quad |\mathfrak{S}_{23}| \leq N_{23}.$$

La continuité de la fonction $\mathfrak{S}$ et de ses dérivées permet de définir des fonctions α, α' et α'' numériques continues non décroissantes, sous-additives et nulles à l'origine telles que :

$$\text{(III.A.3)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} |\mathfrak{S}(x) - \mathfrak{S}(\bar{x})| \leq \alpha(|x-\bar{x}|) & \\ |\mathfrak{S}_i(x) - \mathfrak{S}_i(\bar{x})| \leq \alpha'(|x-\bar{x}|) & \text{pour } x, \bar{x} \in A_1 \text{ et} \\ |\mathfrak{S}_{ij}(x) - \mathfrak{S}_{ij}(\bar{x})| \leq \alpha''(|x-\bar{x}|) & i \neq j \quad i, j \in \{1,2,3\} \end{array} \right. .$$

Voulant utiliser le théorème de Schaüder nous allons rechercher un sous-ensemble S de $C(A_1)$ convexe et compact ; nous introduisons pour cela des fonctions ρ_1, ρ_2, ρ_3 numériques explicitées dans la suite et définissons S à partir des fonctions θ de $C(A_1)$ telles que :

$$\text{(III.A.4)} \quad \left\{ \begin{array}{l} |\theta(x_1,x_2,x_3) - \theta(\bar{x}_1,x_2,x_3)| \leq \rho_1(|x_1-\bar{x}_1|,x_2,x_3) \\ |\theta(x_1,x_2,x_3) - \theta(x_1,\bar{x}_2,x_3)| \leq \rho_2(x_1,|x_2-\bar{x}_2|,x_3) \\ |\theta(x_1,x_2,x_3) - \theta(x_1,x_2,\bar{x}_3)| \leq \rho_3(x_1,x_2,|x_3-\bar{x}_3|) \end{array} \right.$$

Soient les opérateurs de S

$$\text{(III.A.5)} \qquad B\theta(x) = \int_o^{x_1}\int_o^{x_2}\int_o^{x_3} \theta(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 + \mathfrak{S}(x)$$

$$\text{(III.A.6)} \qquad B^1\theta(x) = \int_o^{x_2}\int_o^{x_3} \theta(x_1,s_2,s_3)ds_2ds_3 + \mathfrak{S}_{x_1}(x_1,x_2,x_3)$$

$$\text{(III.A.7)} \qquad B^2\theta(x) = \int_o^{x_1}\int_o^{x_3} \theta(s_1,x_2,s_3)ds_1ds_3 + \mathfrak{S}_{x_2}(x_1,x_2,x_3)$$

$$B^3\theta(x) = \int_o^{x_1}\int_o^{x_2}\theta(s_1,s_2,x_3)ds_1ds_2 + \tilde{\mathcal{S}}_{x_3}(x_1,x_2,x_3) \tag{III.A.8}$$

$$B^{12}\theta(x) = \int_o^{x_3}\theta(x_1,x_2,s_3)ds_3 + \tilde{\mathcal{S}}_{x_1x_2}(x_1,x_2,x_3) \tag{III.A.9}$$

$$B^{13}\theta(x) = \int_o^{x_2}\theta(x_1,s_2,x_3)ds_2 + \tilde{\mathcal{S}}_{x_1x_3}(x_1,x_2,x_3) \tag{III.A.10}$$

$$B^{23}\theta(x) = \int_o^{x_1}\theta(s_1,x_2,x_3)ds_1 + \tilde{\mathcal{S}}_{x_2x_3}(x_1,x_2,x_3) \tag{III.A.11}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
&|B\theta(x_1,x_2,x_3) - B\theta(\bar{x}_1,x_2,x_3)| \leq |\theta|a_2a_3|x_1-\bar{x}_1| + \alpha(|x_1-\bar{x}_1|)\\
&|B\theta(x_1,x_2,x_3) - B\theta(x_1,\bar{x}_2,x_3)| \leq |\theta|\frac{T}{2}a_3|x_2-\bar{x}_2| + \alpha(|x_2-\bar{x}_2|)\\
&|B\theta(x_1,x_2,x_3) - B\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3)| \leq |\theta|\frac{T}{2}a_2|x_3-\bar{x}_3| + \alpha(|x_3-\bar{x}_3|)\\
&|B\theta(x)| \leq |\theta|\ \frac{T}{2}\ a_2a_3 + N
\end{aligned}\right. \tag{III.A.12}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&|B^1\theta(x_1,x_2,x_3) - B^1\theta(\bar{x}_1,x_2,x_3)| \leq \left|\int_o^{x_2}\int_o^{x_3}\rho_1(|x_1-\bar{x}_1|,s_2,s_3)ds_2ds_3\right| + \alpha'(|x_1-\bar{x}_1|)\\
&|B^1\theta(x_1,x_2,x_3) - B^1\theta(x_1,\bar{x}_2,x_3)| \leq |\theta|a_3|x_2-\bar{x}_2| + \alpha'(|x_2-\bar{x}_2|)\\
&|B^1\theta(x_1,x_2,x_3) - B^1\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3)| \leq |\theta|a_2|x_3-\bar{x}_3| + \alpha'(|x_3-\bar{x}_3|)\\
&\qquad |B^1\theta(x)| \leq |\theta|a_2a_3 + N_1
\end{aligned}\right. \tag{III.A.13}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&|B^2\theta(x_1,x_2,x_3) - B^2\theta(\bar{x}_1,x_2,x_3)| \leq |\theta|a_3|x_1-\bar{x}_1| + \alpha'(|x_1-\bar{x}_1|)\\
&|B^2\theta(x_1,x_2,x_3) - B^2\theta(x_1,\bar{x}_2,x_3)| \leq \left|\int_o^{x_1}\int_o^{x_3}\rho_2(s_1,|x_2-\bar{x}_2|,s_3)ds_1ds_3\right| + \alpha'(|x_2-\bar{x}_2|)\\
&|B^2\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3) - B^2\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3)| \leq |\theta|\ \frac{T}{2}\ |x_3-\bar{x}_3| + \alpha'(|x_3-\bar{x}_3|)\\
&\qquad |B^2\theta(x)| \leq |\theta|\ \frac{T}{2}\ a_3 + N_2
\end{aligned}\right. \tag{III.A.14}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&|B^3\theta(x_1,x_2,x_3) - B^3\theta(\bar{x}_1,x_2,x_3)| \leq |\theta|a_2|x_1-\bar{x}_1| + \alpha'(|x_1-\bar{x}_1|)\\
&|B^3\theta(x_1,x_2,x_3) - B^3\theta(x_1,\bar{x}_2,x_3)| \leq |\theta|\ \frac{T}{2}\ |x_2-\bar{x}_2| + \alpha'(|x_2-\bar{x}_2|)\\
&|B^3\theta(x_1,x_2,x_3) - B^3\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3)| \leq \left|\int_o^{x_1}\int_o^{x_2}\rho_3(s_1,s_2,|x_3-\bar{x}_3|)ds_1ds_2\right| + \alpha'(|x_3-\bar{x}_3|)\\
&\qquad |B^3\theta(x)| \leq |\theta|\ \frac{T}{2}\ a_2 + N_3
\end{aligned}\right. \tag{III.A.15}$$

$$\text{(III.A.16)}\begin{cases} |B^{12}\theta(x_1,x_2,x_3) - B^{12}\theta(\bar{x}_1,x_2,x_3)| \leq \left|\int_o^{x_3} \rho_1(|x_1-\bar{x}_1|,x_2,s_3)ds_3\right| + \alpha''(|x_1-\bar{x}_1|) \\ |B^{12}\theta(x_1,x_2,x_3) - B^{12}\theta(x_1,\bar{x}_2,x_3)| \leq \left|\int_o^{x_3} \rho_2(x_1,|x_2-\bar{x}_2|,s_3)ds_3\right| + \alpha''(|x_2-\bar{x}_2|) \\ |B^{12}\theta(x_1,x_2,x_3) - B^{12}\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3)| \leq |\theta||x_3-\bar{x}_3| \\ \qquad |B^{12}\theta(x)| \leq |\theta|a_3 + N_{12} \end{cases}$$

$$\text{(III.A.17)}\begin{cases} |B^{13}\theta(x_1,x_2,x_3) - B^{13}\theta(\bar{x}_1,x_2,x_3)| \leq \left|\int_o^{x_2} \rho_1(|x_1-\bar{x}_1|,s_2,x_3)ds_2\right| + \alpha''(|x_1-\bar{x}_1|) \\ |B^{13}\theta(x_1,x_2,x_3) - B^{13}\theta(x_1,\bar{x}_2,x_3)| \leq |\theta||x_2-\bar{x}_2| \\ |B^{13}\theta(x_1,x_2,x_3) - B^{13}\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3)| \leq \left|\int_o^{x_2} \rho_3(x_1,s_2,|x_3-\bar{x}_3|)ds_2\right| + \alpha''(|x_3-\bar{x}_3|) \\ \qquad |B^{13}\theta(x)| \leq |\theta|a_2 + N_{13} \end{cases}$$

$$\text{(III.A.18)}\begin{cases} |B^{23}\theta(x_1,x_2,x_3) - B^{23}\theta(\bar{x}_1,x_2,x_3)| \leq |\theta||x_1-\bar{x}_1| \\ |B^{23}\theta(x_1,x_2,x_3) - B^{23}\theta(x_1,\bar{x}_2,x_3)| \leq \left|\int_o^{x_1} \rho_2(s_1,|x_2-\bar{x}_2|,x_3)ds_1\right| + \alpha''(|x_2-\bar{x}_2|) \\ |B^{23}\ (x_1,x_2,x_3) - B^{23}\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3)| \leq \left|\int_o^{x_1} \rho_3(s_1,x_2,|x_3-\bar{x}_3|)ds_1\right| + \alpha''(|x_3-\bar{x}_3|) \\ \qquad |B^{23}\theta(x)| \leq |\theta| \dfrac{T}{2} + N_{23} \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant introduire l'hypothèse concernant la fonction f.

Soit $\mathcal{B}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{3+7m}$ défini à partir des constantes positives M_i, M_{ij} $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$\mathcal{B} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{3+7m} : x \in A_1,\ |y| \leq M,\ |z_i| < M_i,\ |z_{ij}| \leq M_{ij}\}.$$

(h.A.2) La fonction f : $f(x_1,x_2,x_3,y,z_1,z_2,z_3,z_{12},z_{13},z_{23})$ est définie et continue sur $\mathcal{B}$ à valeurs dans E et périodique en x_1 de période T.

Cette hypothèse entraîne l'existence de fonctions ω, ω_i, ω_{ij} numériques continues, non décroissantes, nulles à l'origine et sous-additives telles que : (III.A.19)

$$|f(x_1,x_2,x_3,y,z_1,z_2,z_3,z_{12},z_{13},z_{23}) - f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\bar{y},\bar{z}_1,\bar{z}_2,\bar{z}_3,\bar{z}_{12},\bar{z}_{13},\bar{z}_{23})|$$

$$\leqslant \omega(|x-\bar{x}|) + \omega_o(|y-\bar{y}|) + \omega_1(|z_1-\bar{z}_1|) + \omega_2(|z_2-\bar{z}_2|) + \omega_3(|z_3-\bar{z}_3|)$$

$$+ \omega_{12}(|z_{12}-\bar{z}_{12}|) + \omega_{13}(|z_{13}-\bar{z}_{13}|) + \omega_{23}(|z_{23}-\bar{z}_{23}|).$$

D'autre part soit

(III.A.20) $$L = \sup_{\mathcal{B}} |f(x,y,z)|.$$

Avec l'hypothèse :

(h.A.3) Les constantes L, M, M_i, M_{ij}, N, N_i, N_{ij} vérifient les inégalités :

$$\begin{cases} LTa_2a_3 + N \leqslant M \\ 2La_2a_3 + N_1 \leqslant M_1 \\ LTa_3 + N_2 \leqslant M_2 \\ LTa_2 + N_3 \leqslant M_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2La_3 + N_{12} \leqslant M_{12} \\ 2La_2 + N_{13} \leqslant M_{13} \\ LT + N_{23} \leqslant M_{23} \end{cases}$$

il est possible de définir pour $\theta \in C(A_1)$

(III.A.22) $$F(x,\theta) = f(x_1,x_2,x_3,B\theta(x),B^1\theta(x),B^2\theta(x),B^3\theta(x),B^{12}\theta(x),B^{13}\theta(x),B^{23}\theta(x))$$

et

(III.A.23) $$m_1(x_2,x_3,\theta) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(x_1,x_2,x_3,\theta)dx_1.$$

Les relations (III.A.12...18,19) permettent d'évaluer les différences suivantes :

$$\Big\{\ |F(x_1,x_2,x_3,\theta) - F(\bar{x}_1,x_2,x_3,\theta)| \leqslant \omega(|x_1-\bar{x}_1|) + \omega_o\{|\theta|a_2a_3|x_1-\bar{x}_1| + \alpha(|x_1-\bar{x}_1|)\} +$$

$$\text{(III.A.24)}\left\{\begin{array}{l}
+ \omega_1\{\alpha'(|x_1-\bar{x}_1|)\} + \omega_2\{|\theta|a_3|x_1-\bar{x}_1| + \alpha'(|x_1-\bar{x}_1|)\} + \omega_3\{|\theta|a_2|x_1-\bar{x}_1| + \alpha'(|x_1-\bar{x}_1|)\} \\
+ \omega_{12}\{\alpha''(|x_1-\bar{x}_1|)\} + \omega_{23}\{|\theta||x_1-\bar{x}_1|\} + \omega_{13}\{\alpha''(|x_1-\bar{x}_1|)\} \\
+ \omega_1\{|\int_o^{x_2}\int_o^{x_3} \rho_1(|x_1-\bar{x}_1|,s_2,s_3)ds_2ds_3|\} + \omega_{12}(|\int_o^{x_3} \rho_1(|x_1-\bar{x}_1|,x_2,s_3)ds_3|\} \\
+ \omega_{13}\{|\int_o^{x_2} \rho_1(|x_1-\bar{x}_1|,s_2,x_3)ds_2|\}.
\end{array}\right.$$

$$\text{(III.A.25)}\left\{\begin{array}{l}
|F(x_1,x_2,x_3,\theta) - F(x_1,\bar{x}_2,x_3,\theta)| \leq \omega(|x_2-\bar{x}_2|) + \omega_o\{|\theta|a_3 \frac{T}{2} |x_2-\bar{x}_2| + \alpha(|x_2-\bar{x}_2|)\} \\
+ \omega_1\{|\theta|a_3|x_2-\bar{x}_2| + \alpha'(|x_2-\bar{x}_2|)\} + \omega_2\{\alpha'(|x_2-\bar{x}_2|)\} + \omega_3\{|\theta|\frac{T}{2}|x_2-\bar{x}_2| + \alpha'(|x_2-\bar{x}_2|)\} \\
+ \omega_{12}\{\alpha''(|x_2-\bar{x}_2|)\} + \omega_{23}\{\alpha''(|x_2-\bar{x}_2|)\} + \omega_{13}\{|\theta||x_2-\bar{x}_2|\} + \\
+ \omega_2\{|\int_o^{x_1}\int_o^{x_3} \rho_2(s_1,|x_2-\bar{x}_2|,s_3)ds_1ds_3|\} + \omega_{12}\{|\int_o^{x_3}\rho_2(x_1,|x_2-\bar{x}_2|,s_3)ds_3|\} \\
+ \omega_{23}\{|\int_o^{x_1} \rho_2(s_1,|x_2-\bar{x}_2|,x_3)ds_1|\}
\end{array}\right.$$

et

$$\text{(III.A.26)}\left\{\begin{array}{l}
|F(x_1,x_2,x_3,\theta) - F(x_1,x_2,\bar{x}_3,\theta)| \leq \omega(|x_3-\bar{x}_3|) + \omega_o\{|\theta| \frac{T}{2} a_2|x_3-\bar{x}_3| + \alpha(|x_3-\bar{x}_3|)\} \\
+ \omega_1\{|\theta|a_2|x_3-\bar{x}_3| + \alpha'(|x_3-\bar{x}_3|)\} + \omega_2\{|\theta| \frac{T}{2} |x_3-\bar{x}_3| + \alpha'(|x_3-\bar{x}_3|)\} \\
+ \omega_3\{\alpha'(|x_3-\bar{x}_3|)\} + \omega_{12}\{|\theta||x_3-\bar{x}_3|\} + \omega_{23}\{\alpha''(|x_3-\bar{x}_3|)\} + \omega_{13}\{\alpha''(|x_3-\bar{x}_3|)\} \\
+ \omega_3\{|\int_o^{x_1}\int_o^{x_2} \rho_3(s_1,s_2,|x_3-\bar{x}_3|)ds_1ds_2|\} + \omega_{23}\{|\int_o^{x_1}\rho_3(s,x_2,|x_3-\bar{x}_3|)ds_1\} \\
+ \omega_{13}\{|\int_o^{x_2} \rho_3(x_1,s_2,|x_3-\bar{x}_3|)ds_2\}.
\end{array}\right.$$

Posons alors :

$$
\text{(III.A.27)}\quad
\begin{cases}
\Omega_1(\delta) = \omega(\delta) + \omega_o\{2La_2a_3\delta + \alpha(\delta)\} + \omega_1\{\alpha'(\delta)\} + \omega_2\{2La_3\delta + \alpha'(\delta)\} \\
\qquad + \omega_3\{2La_2\delta + \alpha'(\delta)\} + \omega_{12}\{\alpha''(\delta)\} + \omega_{23}\{2L\delta\} + \omega_{13}\{\alpha''(\delta)\} \\
\frac{1}{2}\,\Omega_1'(\delta) = \omega(\delta) + \omega_o\{LTa_3\delta + \alpha(\delta)\} + \omega_1\{2La_3\delta + \alpha'(\delta)\} + \omega_2\{\alpha'(\delta)\} \\
\qquad + \omega_3\{LT\delta + \alpha'(\delta)\} + \omega_{12}\{\alpha''(\delta)\} + \omega_{23}\{\alpha''(\delta)\} + \omega_{13}(2L\delta) \\
\frac{1}{2}\,\Omega_1''(\delta) = \omega(\delta) + \omega_o\{LTa_2\delta + \alpha(\delta)\} + \omega_1\{2La_2\delta + \alpha'(\delta)\} + \omega_3\{\alpha'(\delta)\} \\
\qquad + \omega_2\{LT\delta + \alpha'(\delta)\} + \omega_{12}\{2L\delta\} + \omega_{23}\{\alpha''(\delta)\} + \omega_{13}\{\alpha''(\delta)\}.
\end{cases}
$$

(III.A.28) et pour $g \geq 0 \in C(A_1)$ $\quad P_1 g(x) = g(x) + \frac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} g(s_1,x_2,x_3)\,ds_1$

Nous sommes en mesure maintenant d'établir le théorème :

Théorème (III.A.1) (*existence*) :

Avec les hypothèses (h.A.1,2 et 3) et (h.A.4)

(h.A.4) Les équations intégrales :

$$
\text{(III.A.29)}\quad \rho_1(\delta,x_2,x_3) = \Omega_1(\delta) + \omega_1\{\left|\int_o^{x_2}\int_o^{x_3} \rho_1(\delta,s_2,s_3)\,ds_2 ds_3\right|\}
$$
$$
+ \omega_{12}\{\left|\int_o^{x_3} \rho_1(\delta,x_2,s_3)\,ds_3\right|\} + \omega_{13}\{\left|\int_o^{x_2} \rho_1(\delta,s_2,x_3)\,ds_2\right|\}
$$

$$
\text{(III.A.30)}\quad \rho_2(x_1,\delta,x_3) = \Omega_1'(\delta) + P_1\,\omega_2\{\left|\int_o^{x_1}\int_o^{x_3} \rho_2(s_1,\delta,s_3)\,ds_1 ds_3\right|\}
$$
$$
+ P_1\omega_{12}\{\left|\int_o^{x_3} \rho_2(x_1,\delta,s_3)\,ds_3\right|\} + P_1\omega_{23}\{\left|\int_o^{x_1} \rho_2(s_1,\delta,x_3)\,ds_1\right|\}
$$

$$
\text{(III.A.31)}\quad \rho_3(x_1,x_2,\delta) = \Omega_1''(\delta) + P_1\omega_3\{\left|\int_o^{x_1}\int_o^{x_2} \rho_3(s_1,s_2,\delta)\,ds_1 ds_2\right|\}
$$
$$
+ P_1\omega_{23}\{\left|\int_o^{x_1} \rho_3(s_1,x_2,\delta)\,ds_1\right|\} + P_1\omega_{13}\{\left|\int_o^{x_2} \rho_3(x_1,s_2,\delta)\,ds_2\right|\}
$$

admettent des solutions positives tendant vers 0 avec δ uniformément par rapport à x sur A_1.

L'équation $\theta = F(x,\theta) - m_1(x_2,x_3,\theta)$ possède au moins une solution dans $C(A_1)$.

Démonstration :

Soit

$$S_1 = \begin{cases} \theta \in C(A_1) \;:\; |\theta| \leq 2L \quad \text{et pour} \quad |x-\bar{x}| \leq \delta \\ |\theta(x)-\theta(\bar{x})| \leq \rho_1(|x_1-\bar{x}_1|,x_2,x_3) + \rho_2(\bar{x}_1,|x_2-\bar{x}_2|,x_3) + \rho_3(\bar{x}_1,\bar{x}_2,|x_3-\bar{x}_3|) \end{cases}$$

dans lequel les fonctions ρ_i sont définies par (III.A.29,30,31).

S_1 est un convexe, compact pour la topologie de $C(A_1)$ il suffit d'établir que

(III.A.32) $$\theta \in S_1 \implies F(x,\theta) - m_1(x_2,x_3,\theta) \in S_1$$

et que l'application

(III.A.33) $$\theta \to F(x,\theta) - m_1(x_2,x_3,\theta) \quad \text{de } S_1 \text{ dans } S_1$$

est continue.

Comme $|F(x,\theta)| \leq L \implies |m_1(x_2,x_3,\theta)| \leq L$ on voit que

$$|F(x,\theta) - m_1(x_2,x_3,\theta)| \leq 2L.$$

De plus (III.A.24 - 27 et 29) impliquent

$$|F(x_1,x_2,x_3,\theta) - F(\bar{x}_1,x_2,x_3,\theta)| \leq \rho_1(|x_1-\bar{x}_1|,x_2,x_3)$$

puis (III.A.25,27 et 30) donnent

$$|F(x_1,x_2,x_3,\theta) - m_1(x_2,x_3,\theta) - F(x_1,\bar{x}_2,x_3,\theta) + m_1(\bar{x}_2,x_3,\theta)|$$
$$\leq \rho_2(x_1,|x_2-\bar{x}_2|,x_3)$$

enfin (III.A.26,27 et 31)

$$|F(x_1,x_2,x_3,\theta) - m_1(x_2,x_3,\theta) - F(x_1,x_2,\bar{x}_3,\theta) + m_1(x_2,\bar{x}_3,\theta)|$$
$$\leq \rho_3(x_1,x_2,|x_3-\bar{x}_3|)$$

c'est-à-dire (III.A.32).

Quant à la continuité de l'application (III.A.33) elle résulte de l'estimation de

$$|F(x,\theta) - F(x,\bar{\theta})| \quad \text{pour} \quad \theta \quad \text{et} \quad \bar{\theta} \in S_1 .$$

$$|F(x,\theta) - F(x,\bar{\theta})| \leq \omega_o \{\frac{T}{2} a_2 a_3 |\theta-\bar{\theta}|\} + \omega_1\{a_2 a_3|\theta-\bar{\theta}|\} + \omega_2\{ \frac{T}{2} a_3|\theta-\bar{\theta}|\}$$

$$+ \omega_3 \{\frac{T}{2} a_2|\theta-\bar{\theta}|\} + \omega_{12}\{a_3|\theta-\bar{\theta}|\} + \omega_{13}\{a_2|\theta-\bar{\theta}|\} + \omega_{23}\{ \frac{T}{2} |\theta-\bar{\theta}|\}$$

et de

$$|m_1(x_2,x_3,\theta) - m_1(x_2,x_3,\bar{\theta})| \leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |F(s_1,x_2,x_3,\theta) - F(s_1,x_2,x_3,\theta)| ds_1$$

Le théorème de Schaüder permet de conclure en l'existence d'un élément θ_1 tel que

$$\theta_1 = F(x,\theta_1) - m_1(x_2,x_3,\theta_1)$$

et donc en l'existence d'une solution de l'équation modifiée :

$$u_{x_1x_2x_3} = f(x_1,x_2,x_3,u,u_{x_1},u_{x_2},u_{x_3},u_{x_1x_2},u_{x_1x_3},u_{x_2x_3}) -$$

$$- \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x_1,x_2,x_3,u,u_{x_1},u_{x_2},u_{x_3},u_{x_1x_2},u_{x_1x_3},u_{x_2x_3}) dx_1$$

soumise aux conditions initiales (III.A.2).

Remarque :

Si les hypothèses (h.A.1, 2 et 3) paraissent très naturelles pour ce genre de problème, l'hypothèse (h.A.4) est plus obscure, pour l'interpréter nous allons supposer que la fonction f est lipschitzienne et examiner la limitation de ses constantes de lipschitz.

② *Cas lipschitzien.*

Théorème A.2 (existence) :

Sous les hypothèses (h.A.1., 2 bis, 3 et 4 bis),

(h.A.2 bis) : En plus de l'hypothèse (h.A.2) la fonction f est lipschitzienne par rapport aux variables z_i et z_{ij} :

$$|f(x,y,z_1,z_2,z_3,z_{12},z_{13},z_{23}) - f(x,y,\bar{z}_1,\bar{z}_2,\bar{z}_3,\bar{z}_{12},\bar{z}_{13},\bar{z}_{23})| \leq \sum_{i=1}^{3} k_i|z_i-\bar{z}_i| + \sum_{i<j} k_{ij}|z_{ij}-\bar{z}_{ij}| \tag{III.A.34}$$

(h.A.3) et (h.A.4 bis) : La constante k_{23} vérifie la relation

$$e^{k_{23}\,T/2} < k_{23}T + 1 \tag{III.A.35}$$

L'équation $\theta = F(x,\theta) - m_1(x_2,x_3,\theta)$ admet au moins une solution dans $C(A_1)$.

La démonstration de ce théorème repose sur l'explicitation des relations (III.A.29, 30 et 31) qui résulte des lemmes suivants :

Lemme (III.A.1) :

L'équation :

$$\rho_1(x_2,x_3) = 1 + k_1\left|\int_0^{x_2}\int_0^{x_3} \rho_1(s_2,s_3)ds_2ds_3\right| + k_{12}\left|\int_0^{x_3} \rho_1(x_2,s_3)ds_3\right| + k_{13}\left|\int_0^{x_2}\rho_1(s_2,x_3)ds_2\right| \tag{III.A.36}$$

admet une solution continue, positive définie sur tout $\mathbb{R}^2$.

Ce lemme n'est autre que celui étudié par J. Conlan et J.B. Diaz [1] (p. 279) ou si l'on veut une application du théorème (I.C.1) avec

$$\rho_1(x_2,0) = e^{k_{13}|x_2|}$$

$$\rho_2(0,x_3) = e^{k_{12}|x_3|}$$

et $(\rho_1)_{x_2x_3} = k_1\rho_1 + k_{12}(\rho_1)_{x_2} + k_{13}(\rho_1)_{x_3}$.

Lemme (III.A.2) :

L'équation

(III.A.37) $$\rho(x) = 1 + k_{23} \left|\int_o^x \rho(s)ds\right| + \frac{k_{23}}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left|\int_o^x \rho(s)ds\right| dx$$

admet une solution continue positive définie sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ pourvu que $\exp(k_{23}\frac{T}{2}) < k_{23}T + 1$.

En cherchant une solution proportionnelle à $e^{k_{23}|x|}$, par exemple $\rho(x) = \lambda e^{k_{23}|x|}$ nous avons successivement :

$$\lambda e^{k_{23}|x|} = 1 + \lambda e^{k_{23}|x|} - \lambda + \frac{\lambda}{T} \left\{\frac{2\exp(k_{23}\ T/2) - k_{23}T - 2}{k_{23}}\right\}$$

$$\lambda\left\{1 - \frac{2\exp(k_{23}T/2) - k_{23}T - 2}{k_{23}T}\right\} = 1$$

$$\lambda\left\{\frac{2k_{23}T + 2 - 2\exp(k_{23}T/2)}{k_{23}T}\right\} = 1$$

Si donc $k_{23}T + 1 > \exp(k_{23}\ T/2)$ nous avons :

(III.A.38) $$\lambda = \frac{k_{23}T}{2k_{23}T + 2 - 2\exp(k_{23}\frac{T}{2})}$$

et constatons que $\lambda > 1$ pour $k_{23} \neq 0$

Remarque :

Cette relation $\exp(k_{23}\ T/2) < 1 + k_{23}T$ est en fait vérifiée pour :

(III.A.39) $$k_{23}T < 2{,}50.$$

Lemme (III.A.3) :

L'équation

(III.A.40) $$\rho_2(x_1,x_3) = 1 + P_1k_2\left|\int_0^{x_1}\int_0^{x_3}\rho_2(s_1,s_3)ds_1ds_3\right| + P_1k_{12}\int_0^{x_3}\rho_2(x_1,s_3)ds_3\Big|$$
$$+ P_1k_{23}\left|\int_0^{x_1}\rho_2(s_1,x_3)ds_1\right|$$

admet une solution continue positive définie sur tout compact de la forme $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \times [-c,c]$ dès que

$$k_{23}T + 1 > \exp(k_{23}T/2).$$

Soit pour $c > 0$ le compact $A_c = \{(x_1,x_3) : |x_1| \leqslant \frac{T}{2}, |x_2| \leqslant c\}$ et $C(A_c)$ l'ensemble des fonctions continues définies sur A_c et positives.

Soit l'application $G : C(A_c) \to C(A_c)$ définie par

$$\Psi(x_1,x_3) = 1 + k_2P_1\left|\int_0^{x_1}\int_0^{x_3}\emptyset(s_1,s_3)ds_1ds_3\right| + k_{23}P_1\left|\int_0^{x_1}\emptyset(s_1,x_3)\right|ds$$
$$+ k_{12}P_1\left|\int_0^{x_3}\emptyset(x_1,s_3)ds_3\right|$$

$$= G\emptyset(x_1,x_3).$$

Pour établir que G est une contraction, nous allons munir $C(A_c)$ de la topologie suivante. Prenons $k > k_{23}$ tel que $\exp(k\ T/2) < 1 + kT$, désignons par $\mu\, e^{k|x|}$ la solution de l'équation

$$\rho(x) = 1 + k\left|\int_0^x \rho(s)ds\right| + \frac{k}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left|\int_0^x \rho(s)ds\right|dx$$

et considérons pour $\vartheta \in C(A_c)$

$$||\vartheta|| = \sup\{|\vartheta(x_1,x_3)|\ \frac{1}{\mu}\ e^{-k|x_1|-\alpha|x_3|}\} \qquad \alpha > 0.$$

Nous avons alors

$$|\Psi(x_1,x_3) - \bar{\Psi}(x_1,x_3)| \leq k_2 P_1 \left|\int_o^{x_1}\int_o^{x_3} |\vartheta(s_1,s_3) - \bar{\vartheta}(s_1,s_3)|\,ds_1 ds_2\right|$$

$$+ P_1 k_{23} \left|\int_o^{x_1} |\vartheta(s_1,x_3) - \bar{\vartheta}(s_1,x_3)|\,ds_1\right|$$

$$+ P_1 k_{12} \left|\int_o^{x_3} |\vartheta(x_1,s_3) - \bar{\vartheta}(x_1,s_3)|\,ds_3\right|$$

soit $$|\Psi(x_1,x_3) - \bar{\Psi}(x_1,x_3)| \leq \frac{k_2}{k\alpha}\, ||\vartheta-\bar{\vartheta}||\,\mu e^{k|x_1|+\alpha|x_3|}$$

$$+ \frac{k_{23}}{k}\, ||\vartheta-\bar{\vartheta}||\,\mu e^{k|x_1|+\alpha|x_3|}$$

$$+ \frac{k_{12}}{\alpha}\, ||\vartheta-\bar{\vartheta}||\,\mu e^{k|x_1|+\alpha|x_3|}$$

ou encore $$||\Psi-\bar{\Psi}|| \leq \left(\frac{k_2}{k\alpha} + \frac{k_{23}}{k} + \frac{k_{12}}{\alpha}\right)||\vartheta-\bar{\vartheta}||.$$

Il suffit alors de choisir α tel que $\frac{k_2}{k\alpha} + \frac{k_{23}}{k} + \frac{k_{12}}{\alpha} < 1$ pour que l'application G soit une contraction, ou ce qui revient au même que l'équation (III.A.40) admet une solution dans $C(A_c)$.

Avec ce lemme se termine la démonstration du théorème (A.2) puisque l'hypothèse (h.A.4bis) implique l'hypothèse (h.A.4).

Lemme (III.A.4) :

L'équation

(III.A.41) $$\rho(x_1,x_2,x_3) = 1 + P_1k_o\left|\int_o^{x_1}\int_o^{x_2}\int_o^{x_3}\rho(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3\right|$$

$$+ P_1k_1\left|\int_o^{x_2}\int_o^{x_3}\rho(x_1,s_2,s_3)ds_2ds_3\right| + P_1k_2\left|\int_o^{x_1}\int_o^{x_3}\rho(s_1,x_2,s_3)ds_1ds_3\right|$$

$$+ P_1k_3\left|\int_o^{x_1}\int_o^{x_2}\rho(s_1,s_2,x_3)ds_1ds_2\right| + P_1k_{12}\left|\int_o^{x_3}\rho(x_1,x_2,s_3)ds_3\right|$$

$$+ P_1k_{13}\left|\int_o^{x_2}\rho(x_1,s_2,x_3)ds_2\right| + P_1k_{23}\left|\int_o^{x_1}\rho(s_1,x_2,x_3)ds_1\right|$$

admet une solution continue positive définie sur tout compact de la forme $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \times [-a_2,a_2] \times [-a_3,a_3]$ dès que

$$k_{23}T + 1 > \exp(k_{23}\ T/2).$$

La démonstration de ce lemme est la même que celle du lemme (III.A.3).

Grâce à ce lemme nous pouvons énoncer maintenant le théorème d'unicité suivant :

Théorème (A.3) :

Sous les hypothèses du théorème (A.2) et si la fonction f est lipschitzienne par rapport à la variable y :

$$|f(x,y,z) - f(x,\bar{y},z)| \leq k_o|y-\bar{y}|$$

l'équation $\theta = F(x,\theta) - m_1(x_2,x_3,\theta)$ admet une et une seule solution. De plus cette solution est continue par rapport aux données initiales σ^1, σ^2 et σ^3.

Démonstration :

Désignons par $(\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3)$, $(\bar{\sigma}^1,\bar{\sigma}^2,\bar{\sigma}^3)$ deux triplets de fonctions vérifiant l'hypothèse (h.A.1) et désignons par $\mathcal{S}$ et $\bar{\mathcal{S}}$ les solutions correspondantes de l'équation $\mathcal{S}_{x_1x_2x_3} = 0$ qui sont manifestement continues par rapport à ces données initiales. Plus exactement si

$$\varepsilon = \sup_{A_1} \sum_{i=1}^{3} |\sigma^i(x) - \bar{\sigma}^i(x)| + \sum_{i\neq j} |\sigma^i_j(x) - \bar{\sigma}^i_j(x)| + \sum_{\substack{i\neq j\neq k \\ i\neq k}} |\sigma^i_{jk}(x) - \bar{\sigma}^i_{jk}(x)|\}$$

nous pouvons trouver une constante K telle que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}(x) - \bar{\mathcal{S}}(x)| &\leqslant K\varepsilon \\
|\mathcal{S}_i(x) - \bar{\mathcal{S}}_i(x)| &\leqslant K\varepsilon \\
|\mathcal{S}_{ij}(x) - \bar{\mathcal{S}}_{ij}(x)| &\leqslant K\varepsilon \qquad \text{sur} \quad A_1
\end{aligned}$$

Par suite, si nous désignons par θ et $\bar{\theta}$ les solutions correspondantes de l'équation

$$\theta = F(x,\theta) - m_1(x_2,x_3,\theta)$$

et posons

$$||\theta-\bar{\theta}||(x) = k_o|B\theta(x) - B\bar{\theta}(x)| + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{3} k_i|B^i\theta(x) - B^i\bar{\theta}(x)| + \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{3} k_{ij}|B^{ij}\theta(x)-B^{ij}\bar{\theta}(x)|$$

puis

$$||\theta-\bar{\theta}||_1(x_2,x_3) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} ||\theta-\bar{\theta}||(s_1,x_2,x_3)ds_1$$

de sorte que

$$|F(x,\theta) - m_1(x_2,x_3,\theta) - F(x,\bar{\theta}) + m_1(x_2,x_3,\bar{\theta})| \leqslant P_1(||\theta-\bar{\theta}||)(x)$$

La fonction $P_1(||\theta-\bar{\theta}||)$ sera notée χ pour simplifier

Nous avons

$$|B\theta(x) - B\bar{\theta}(x)| \leqslant K\varepsilon + \left|\int_o^{x_1}\int_o^{x_2}\int_o^{x_3} \chi(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3\right|$$

$$|B^1\theta(x) - B^1\bar{\theta}(x)| \leqslant K\varepsilon + \left|\int_o^{x_2}\int_o^{x_3} \chi(x_1,s_2,s_3)ds_2ds_3\right|$$

et ainsi de suite... jusque

$$|B^{23}\theta(x) - B^{23}\bar{\theta}(x)| \leqslant K\varepsilon + \left|\int_o^{x_1} \chi(s_1,x_2,x_3)ds_1\right|$$

On multiplie chacune de ces relations par k_o ou k_1 ou ... k_{23} et on en fait la somme membre à membre.

En appliquant l'opérateur P_1 on voit apparaître alors

$$\chi(x) \leqslant K\varepsilon + P_1k_o\left|\int_o^{x_1}\int_o^{x_2}\int_o^{x_3} \chi(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3\right|$$

$$+ P_1k_1\left|\int_o^{x_2}\int_o^{x_3} \chi(x_1,s_2,s_3)ds_2ds_3\right| + \ldots$$

$$+ P_1k_{23}\left|\int_o^{x_1} \chi(s_1,x_2,x_3)ds_1\right|.$$

Le lemme (III.A.4) permet d'écrire $\chi(x) \leqslant K\varepsilon v(x)$ (v désignant la fonction solution de l'équation (III.A.41). Cette relation entraîne l'unicité pour $\varepsilon = 0$ et la continuité si ε est différent de 0.

3 *Existence de solutions périodiques du problème initial.*

La recherche des solutions périodiques de l'équation (III.A.1) revient à choisir les conditions initiales assurant une solution θ du problème modifié

$$\theta = F(x,\theta) - m_1(x_2,x_3,\theta)$$

telle que $m_1(x_2,x_3,\theta)$ soit nulle. Une réponse à ce problème peut être donnée en fixant les 2 fonctions σ^2 et σ^3 périodiques en x_1 et en déterminant la fonction σ^1, ou compte tenu des relations de compatibilité, la fonction σ^1_{23}.

Pour cela nous utiliserons un théorème de fonctions implicites établi par L. Césari [4] et que nous écrirons sous la forme suivante :

Considérons $H(x_2,x_3,v,z(t_2,t_3))$, $0 \leq t_2 < x_2$, $0 \leq t_3 < x_3$) une fonctionnelle à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ dépendant des variables réelles t_2,t_3, des vecteurs de $\mathbb{R}^m$: $v,z(t_2,t_3)$ définis pour $0 \leq t_2 < x_2$, $0 \leq t_3 < x_3$.

Soient d'autre part $I = \{(x_2,x_3) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_2 < a_2,\ 0 \leq x_3 < a_3\}$, μ un vecteur de $\mathbb{R}^m$, Y_o la boule de $\mathbb{R}^m$ définie par $Y_o = \{v \in \mathbb{R}^m : |v-\mu| \leq \beta\}$ et Z_o l'ensemble des fonctions continues définies sur I à valeurs dans Y_o, muni de la convergence uniforme.

H peut dès lors être considérée comme une application de $I \times Y_o \times Z_o$ dans $\mathbb{R}^m$: $H(x_2,x_3,v,z)$.

Théorème (A.4) (L. Césari) :

Avec les hypothèses :

(h.A.5) La fonctionnelle $H = \{H_i(x_2,x_3,v,z)\}$ est continue, bornée sur $I \times Y_o \times Z_o$, continûment différentiable par rapport à $v = (v_i)$

On pose $a_{ij}(x_2,x_3,v,z) = \dfrac{\partial H_i}{\partial v_j}(x_2,x_3,v,z)$.

(h.A.6) Pour $x_2 = x_3 = 0$, H ne dépend pas de z : $H(0,0,v,\cdot)$. De plus, il existe $\mu \in \mathbb{R}^m$ pour lequel $H(0,0,\mu,\cdot) = 0$ et $\text{dét}\{a_{ij}(0,0,\mu,\cdot)\} \neq 0$.

On peut dès lors trouver des nombres positifs $a'_2 \leqslant a_2$, $a'_3 \leqslant a_3$ $\beta_o < \beta$ et une fonction $\Psi \in Z_o$ telle que :

$$\Psi(0,0) = \mu \qquad |\Psi(x_2,x_3) - \mu| < \beta_o \quad \text{et}$$

$$H(x_2,x_3,\Psi(t_2,t_3),\ 0 \leqslant t_2 < x_2,\ 0 \leqslant t_3 < x_3) = 0$$

$$\text{pour} \quad (x_2,x_3) \in I' = \{(x_2,x_3) \in I : 0 \leqslant x_2 < a'_2,\ 0 \leqslant x_3 < a'_3\}.$$

Pour mieux comprendre l'utilisation de ce théorème, faisons la remarque suivante : soient σ^1, σ^2, σ^3 des conditions initiales vérifiant (h.A.1) et θ et $m_1(x_2,x_3,\theta)$ la solution correspondante du problème modifié. Si pour (x_2^o,x_3^o) point de $\{(x_2,x_3)\ 0 \leqslant x_2 \leqslant a_2,\ 0 \leqslant x_3 \leqslant a_3\}$ nous modifions la fonction σ^1_{23} au point (x_2^o,x_3^o) en lui attribuant une nouvelle valeur v, cette modification ne change pas θ ni m_1 pour $0 \leqslant x_2 < x_2^o$ et $0 \leqslant x_3 < x_3^o$ mais nous obtenons une nouvelle expression pour $B^{23}\theta(x_1,x_2^o,x_3^o) = q(x_1)$ et pour $m_1(x_2^o,x_3^o) = m$. Ces nouveaux éléments q et m sont alors solutions du problème :

$$\text{(III.A.42)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dq}{dx}(x) = F(x,q(x)) - m & q(0) = v \\[2ex] m = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} F(x,q(x))dx & \end{cases}$$

dans lequel

$$F(x_1,q(x_1)) = f\{x_1,x_2^o,x_3^o,\overline{B\theta}(x),\overline{B^1}\theta(x),\overline{B^2}\theta(x),\overline{B^3}\theta(x),\overline{B^{12}}\theta(x),\overline{B^{13}}\theta(x),q(x_1)\}$$

avec

$$\overline{B^i}\theta(x) = \lim_{(x_2,x_3)\to(x_2^o,x_3^o)} B^i\theta(x_1,x_2,x_3)$$

Ce problème fera l'objet des pages qui suivent (Propositions III.A.1, 2 et 3). Conjointement à cette étude nous pouvons examiner ce qui deviennent les fonctions $\theta(x_1,x_2,x_3)$ et $m_1(x_2,x_3,\theta)$ solutions du problème modifié

$$\theta = F(x,\theta) - m_1(x_2,x_3,\theta)$$

lorsqu'on introduit certaines discontinuités dans la fonction σ^1_{23}. Plus exactement considérons l'hypothèse :

(h.A.7) Les fonctions σ^1, σ^2, σ^3 définies respectivement sur les ensembles $\{(x_2,x_3) : |x_2| \leq a_2,\ |x_3| \leq a_3\}$, $\{(x_1,x_3) : x_1 \in \mathbb{R},\ |x_3| \leq a_3\}$ et $\{(x_1,x_2) : x_1 \in \mathbb{R},\ |x_2| \leq a_2\}$ sont continues ainsi que leurs dérivées partielles σ^1_2, σ^1_3, σ^2_1, σ^2_3, σ^2_{13}, σ^3_1, σ^3_2, σ^3_{12} à valeurs dans E et périodiques de période T en x_1.

De plus, ces fonctions vérifient :

$$\sigma^1(0,x_3) = \sigma^2(0,x_3) \quad \text{si} \quad |x_3| \leq a_3$$

$$\sigma^2(x_1,0) = \sigma^3(x_1,0) \quad \text{si} \quad |x_1| \in \mathbb{R}$$

$$\sigma^3(0,x_2) = \sigma^1(x_2,0) \quad \text{si} \quad |x_2| \leq a_2.$$

Enfin la fonction σ^1_{23} présente des points de discontinuité $(\xi_2^{q_2},\xi_3^{q_3})$ en nombre fini pour lesquels :

$$\sigma^1_{23}(\xi_2^{q_2}-0,x_3) = \sigma^1_{23}(\xi_2^{q_2},x_3) \neq \sigma^1_{23}(\xi_2^{q_2}+0,x_3)$$

$$\sigma^1_{23}(x_2,\xi_3^{q_3}-0) = \sigma^1_{23}(x_2,\xi_3^{q_3}) \neq \sigma^1_{23}(x_2,\xi_3^{q_3}+0)$$

$$\sigma^1_{23}(\xi_2^{q_2}-0,\xi_3^{q_3}-0) = \sigma^1_{23}(\xi_2^{q_2},\xi_3^{q_3}) \neq \sigma^1_{23}(\xi_2^{q_2}+0,\xi_3^{q_3}+0)$$

(les inégalités peuvent très bien ne pas avoir toutes lieu).

Enfin, il existe des constantes ℓ_1, ℓ'_1, ℓ_2, ℓ'_2, ℓ_3, ℓ'_3 positives ou nulles telles que :

$$|\sigma^1_{23}(x_2,x_3) - \sigma^1_{23}(\bar{x}_2,\bar{x}_3)| \leq \ell_1|x_2-\bar{x}_2| + \ell'_1|x_3-\bar{x}_3| \quad \text{pour}$$

$$\xi_2^{q_2} \leq x_2,\bar{x}_2 \leq \xi_2^{q_2+1} \qquad \xi_3^{q_3} \leq x_3,\bar{x}_3 \leq \xi_3^{q_3+1}$$

$$|\sigma^2_{13}(x_1,x_3) - \sigma^2_{13}(\bar{x}_1,\bar{x}_3)| \leq \ell_2|x_1-\bar{x}_1| + \ell'_2|x_3-\bar{x}_3| \quad \text{pour}$$

$$x_1,\bar{x}_1 \in \mathbb{R} \qquad \xi_3^{q_3} \leq x_3,\bar{x}_3 \leq \xi_3^{q_3+1}$$

et

$$|\sigma^3_{12}(x_1,x_2) - \sigma^3_{12}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)| \leq \ell_3|x_1-\bar{x}_1| + \ell'_3|x_2-\bar{x}_2| \quad \text{pour}$$

$$x_1,\bar{x}_1 \in \mathbb{R} \qquad \xi_2^{q_2} \leq x_2,\bar{x}_2 \leq \xi_2^{q_2+1}.$$

Comme l'hypothèse (h.A.1) cette hypothèse définit une fonction $\tilde{\mathcal{S}}$ de $C(A_1)$ solution de l'équation $\tilde{\mathcal{S}}_{x_1x_2x_3} = 0$.

Soient $N, N_1, N_2, N_3, N_{12}, N_{13}, N_{23}$ des constantes positives ou nulles telles que

$$|\tilde{\mathcal{S}}| \leq N \qquad |\tilde{\mathcal{S}}_1| \leq N_1 \quad , \quad |\tilde{\mathcal{S}}_2| \leq N_2 \qquad |\tilde{\mathcal{S}}_3| \leq N_3$$

$$|\tilde{\mathcal{S}}_{1,2}| \leq N_{12} \qquad |\tilde{\mathcal{S}}_{1,3}| \leq N_{13} \qquad |\tilde{\mathcal{S}}_{2,3}| \leq N_{23}.$$

(h.A.8) La fonction $f : f(x_1,x_2,x_3,y,z_1,z_2,z_3,z_{12},z_{13},z_{23})$ est définie et continue sur $\mathcal{B} = \{(x,y,z) : x \in A_1, |y| \leq M, |z_i| \leq M_i, |z_{ij}| \leq M_{ij}\}$ à valeurs dans E et période en x_1 de période T. De plus f est lipschitzienne :

$$|f(x,y,z) - f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})| \leq k|x-\bar{x}| + k_o|y-\bar{y}| + \sum_{i=1}^{3} k_i|z_i-\bar{z}_i| + \sum_{i<j} k_{ij}|z_{ij}-\bar{z}_{ij}|$$

Cette hypothèse entraîne l'existence de $L = \sup_{\mathcal{B}} |f(x,y,z)|$

(h.A.9) Les constantes $L, M, M_i, M_{ij}, N, N_i, N_{ij}$ vérifient les inégalités :

$$\left\{\begin{array}{l} N + 2LTa_2a_3 \leq M \\ N_1 + 4La_2a_3 \leq M_1 \\ N_2 + 2LTa_3 \leq M_2 \\ N_3 + 2LTa_2 \leq M_3 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} N_{12} + 4La_3 \leq M_{12} \\ N_{13} + 4La_2 \leq M_{13} \\ N_{23} + LT \leq M_{23} \end{array}$$

Théorème (A.5) :

Sous les hypothèses (h.A.7, 8, 9) et

$$k_{23}T + 1 > \exp(k_{23}\frac{T}{2})$$

L'équation $\theta = F(x,\theta) - m_1(x_2,x_3,\theta)$ admet au moins une solution dans $C(A_1)$ lipschitzienne. (La constante de lipschitz est indépendante du nombre des points de discontinuité et de leur position).

Démonstration (*malheureusement très technique*) :

Nous nous limitons à la bande :

$$\{(x_1,x_2,x_3) : x_1 \in \mathbb{R},\ 0 \leq x_2 \leq a_2,\ 0 \leq x_3 \leq a_3$$

et désignons par $\xi_2^o = 0 < \xi_2^1 < \xi_2^2 < \ldots < \xi_2^{p_2} < \xi_2^{p_2+1} = a_2$

$$\xi_3^o = 0 < \xi_3^1 < \xi_3^2 < \ldots < \xi_3^{p_3} < \xi_3^{p_3+1} = a_3$$

les projections sur les axes Ox_2, Ox_3 des points de discontinuité de la fonction σ_{23}^1. Nous allons appliquer le théorème (A.2) successivement dans chacune des bandes $A_{q_2q_3}$:

$$A_{q_2q_3} = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 \in \mathbb{R},\ \xi_2^{q_2} \leq x_2 \leq \xi_2^{q_2+1},\ \xi_3^{q_3} \leq x_3 \leq \xi_3^{q_3+1}\}.$$

Ce théorème s'applique évidemment dans la bande A_{oo} pour l'appliquer par exemple dans la bande A_{10} ou $A_{q_2q_3}$ il nous faut regarder ce que deviennent les conditions initiales.

Dans A_{oo}, nous avons $\vartheta_{oo}(0,x_2,x_3) = \sigma^1(x_2,x_3)$

$\vartheta_{oo}(x_1,0,x_3) = \sigma^2(x_1,x_3)$

$\vartheta_{oo}(x_1,x_2,0) = \sigma^3(x_1,x_2)$ et

donc dans A_{10}, $\vartheta_{10}(0,x_2,x_3) = \sigma^1(x_2,x_3)$

$x_1 \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant x_3 \leqslant \xi_3^1 :\ \vartheta_{10}(x_1,\xi_2^1,x_3) = \vartheta_{oo}(x_1,\xi_2^1-0,x_3)$

$x_1 \in \mathbb{R},\ \xi_2^1 \leqslant x_2 \leqslant \xi_2^2 :\ \vartheta_{10}(x_1,x_2,0) = \sigma^2(x_1,x_2).$

Nous trouvons alors

$$\text{(III.A.43)} \qquad \mathcal{S}_{10}(x_1,x_2,x_3) = \mathcal{S}_{oo}(x_1,x_2,x_3) + \int_o^{x_1}\int_o^{\xi_2^1}\int_o^{x_3} F(s_1,s_2,s_3,\theta)\,ds_1 ds_2 ds_3$$

De plus si $N^{q_2q_3} \ldots N_{23}^{q_2q_3}$ désignent les majorations analogues à $N, \ldots N_{23}$ sur $A_{q_2q_3}$ nous pouvons écrire :

$$\begin{array}{ll}
N^{10} \leqslant N^{oo} + LT\xi_2^1\xi_3^1 & N_{12}^{10} = N_{12}^{oo} \\
N_1^{10} \leqslant N_1^{oo} + 2L\xi_2^1\xi_3^1 & N_{13}^{10} \leqslant N_{13}^{oo} + 2L\xi_2^1 \\
N_2^{10} = N_2^{oo} & N_{23}^{10} \leqslant N_{23}^{oo} \\
N_3^{10} \leqslant N_3^{oo} + LT\xi_2^1 &
\end{array}$$

et de proche en proche :

$$\begin{array}{llll}
N^{q_2q_3} \leqslant N + LT\xi_2^{q_2}\xi_3^{q_3+1} & \text{ou } N + LT\xi_2^{q_2+1}\xi_3^{q_3} & \Longrightarrow & N^{q_2q_3} \leqslant N+LTa_2a_3 \\
N_1^{q_2q_3} \leqslant N_1 + 2L\xi_2^{q_2}\xi_3^{q_3+1} & \text{ou } N_1 + 2L\xi_2^{q_2+1}\xi_3^{q_3} & \Longrightarrow & N_1^{q_2q_3} \leqslant N_1+2La_2a_3 \\
N_2^{q_2q_3} \leqslant N_2 + LT\xi_3^{q_3+1} & & \Longrightarrow & N^{q_2q_3} \leqslant N_2+LTa_3 \\
N_3^{q_2q_3} \leqslant N_3 + LT\xi_2^{q_2+1} & & \Longrightarrow & N_3^{q_2q_3} \leqslant N_3+LTa_2 \\
N_{12}^{q_2q_3} \leqslant N_{12} + 2L\xi_3^{q_3+1} & & \Longrightarrow & N_{12}^{q_2q_3} \leqslant N_{12}+2La_3 \\
N_{13}^{q_2q_3} \leqslant N_{13} + 2L\xi_2^{q_2+1} & & \Longrightarrow & N_{13}^{q_2q_3} \leqslant N_{13}+2La_2 \\
N_{23}^{q_2q_3} \leqslant N_{23} & & \Longrightarrow & N_{23}^{q_2q_3} = N_{23}.
\end{array}$$

D'un autre côté, les relations (III.A.3) peuvent s'écrire dans le cas présent :

$$|\mathcal{G}^{oo}(x_1,x_2,x_3) - \mathcal{G}^{oo}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)| \leq \alpha_1|x_1-\bar{x}_1| + \alpha_2|x_2-\bar{x}_2| + \alpha_3|x_3-\bar{x}_3|$$

$$|\mathcal{G}_i^{oo}(x_1,x_2,x_3) - \mathcal{G}_i^{oo}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)| \leq \alpha_1^i|x_1-\bar{x}_1| + \alpha_2^i|x_2-\bar{x}_2| + \alpha_3^i|x_3-\bar{x}_3|$$

pour i valant 1, 2 ou 3.

Avec ces notations, les relations (III.A.27) s'écrivent :

$$\Omega_1^{oo}(\delta) = k\delta + k_o\left[2L\xi_2^1\xi_3^1\delta + \alpha_1\delta\right] + k_2\left[2L\xi_3^1\delta + \alpha_1^2\delta\right] + k_1\alpha_1^1\delta$$
$$+ k_3\left[2L\xi_2^1\delta + \alpha_1^3\delta\right] + k_{12}\ell_3\delta + 2k_{23}L\delta + k_{13}\ell_2\delta$$

$$\frac{1}{2}\ \Omega_1'^{oo}(\delta) = k\delta + k_o\left[LT\xi_3^1 + \alpha_2\delta\right] + k_1\left[2L\,\xi_3^1\delta + \alpha_2^1\delta\right] + k_2\alpha_2^1\delta$$
$$+ k_3\left[LT\delta + \alpha_2^3\delta\right] + k_{12}\ell_3'\delta + k_{23}\ell_1\delta + k_{31}2L\delta.$$

$$\frac{1}{2}\ \Omega_1''^{oo}(\delta) = k\delta + k_o\left[LT\xi_2^1\delta + \alpha_3\delta\right] + k_1\left[2L\xi_2^1\delta + \alpha_3^1\delta\right] + k_2\left[LT\delta + \alpha_3^2\delta\right]$$
$$+ k_3\alpha_3^3\delta + k_{12}2L\delta + k_{23}\ell_1'\delta + k_{31}\ell_2'\delta.$$

Désignons par $\Omega_1^{oo}(\delta)\rho_1(x_2,x_3)$, $\Omega_1'^{oo}(\delta)\rho_2(x_1,x_3)$ et $\Omega_1''^{oo}(\delta)\rho_3^{oo}(x_1,x_2)$ les solutions des équations (III.A.29, 30, 31) les différentes constantes ℓ, ℓ' α deviennent par (III.A.43)

$$\begin{aligned}
\ell_1 &\to \ell_1 \\
\ell_2 &\to \ell_2 + \Omega_1^{oo}(\delta)\int_o^{\xi_2^1} \rho_1(s_2,\xi_3^1)ds_2 \\
\ell_3 &\to \ell_3 \\
\alpha_1 &\to \alpha_1 + 2L\xi_3^1\xi_2^1 \\
\alpha_2 &\to \alpha_2 \\
\alpha_3 &\to \alpha_3 + LT\xi_2^1
\end{aligned}$$

$$\alpha_1^1 \to \alpha_1^1 + \int_o^{\xi_2^1}\int_o^{\xi_3^1} \Omega_1^{oo}(\delta)\rho_1(s_2,s_3)ds_2 ds_3$$

$$\alpha_2^1 \to \alpha_2^1$$

$$\alpha_3^1 \to \alpha_3^1 + 2L\xi_2^1$$

$$\alpha_1^2 \to \alpha_1^2$$

$$\alpha_2^2 \to \alpha_2^2$$

$$\alpha_3^2 \to \alpha_3^2$$

$$\alpha_1^3 \to \alpha_1^3 + 2L\xi_2^1$$

$$\alpha_2^3 \to \alpha_2^3$$

$$\alpha_3^3 \to \alpha_3^3 + \int_o^{T/2}\int_o^{\xi_2^1} \Omega_1''^{oo}(\delta)\rho_3(s_1,s_2)ds_1 ds_2$$

$$\ell_1' \to \ell_1'$$

$$\ell_2' \to \ell_2' \quad \int_o^{\xi_2^1} \Omega_1''^{oo}(\delta)\rho_3(\frac{T}{2}, s_2)ds_2$$

$$\ell_3' \to \ell_3' .$$

Ecrivant $\Omega_1^{oo}(\delta)$ sous la forme $\bar{k}\delta + \bar{k}'\xi_2^1\delta$ avec

$$\bar{k}' = k_o 2L\xi_3^1 + k_3 2L \leq 2L(k_o a_3 + k_3)$$

nous constatons que

$$\Omega_1^{10}(\delta) = \bar{k}\delta + \bar{k}'\xi_2^2\delta + \Omega_1^{oo}(\delta)\{\rho_1(\xi_2^1,\xi_3^1)-1-k_{12}\int_o^{\xi_3^1} \rho_1(\xi_2^1,s_3)ds_3\}$$

L'évaluation de l'expression $\rho_1(\xi_2^1,\xi_3^1)-1-k_{12}\int_o^{\xi_3^1} \rho_1(\xi_2^1,s_3)ds_3$ se fait à partir du lemme (III.A.1) dont la solution de l'équation (III.A.36) est $\exp\{k_{12}|x_3| + k_{13}|x_2| + (k_1+k_{12}k_{13})|x_2||x_3|\}$ on trouve alors

$$\Omega_1^{10}(\delta) \leqslant \bar{k}\delta + \bar{k}'\xi_2^2\delta + \frac{(k_1+k_{12}k_{13})\xi_2^1}{k_{12}+(k_1+k_{12}k_{13})\xi_2^1}\,\Omega_1^{oo}(\delta)\{e^{k_{12}\xi_3^1+k_{13}\xi_2^1+(k_1+k_{12}k_{13})\xi_2^1\xi_3^1}-1\}.$$

Moyennant l'hypothèse

$$\text{(III.A.44)} \qquad e^{k_{12}\xi_3^1}\,\frac{(k_1+k_{12}k_{13})\xi_2^1}{k_{12}+(k_1+k_{12}k_{13})\xi_2^1} \leqslant 1$$

équivalente à $(k_1+k_{12}k_{13})\xi_2^1 \leqslant k_{12}\{e^{k_{12}\xi_3^1} - 1\}^{-1}$,

nous aurons

$$\Omega_1^{10}(\delta) \leqslant \bar{k}\delta + \bar{k}'\xi_2^2\delta + \Omega_1^{oo}(\delta)\{e^{[k_{13}+(k_1+k_{12}k_{13})\xi_3^1]\xi_2^1} - 1\}$$

$$\leqslant \bar{k}'(\xi_2^2-\xi_2^1)\delta + \Omega_1^{oo}(\delta)e^{[k_{13}+(k_1+k_{12}+k_{13})\xi_3^1]\xi_2^1} .$$

Le processus ainsi engagé peut se poursuivre et nous aurons successivement $j \geqslant 1$

$$\Omega_1^{jo}(\delta) \leqslant \bar{k}'(\xi_2^{j+1} - \xi_2^j) + \Omega_o^{j-1}(\delta)e^{[k_{13}+(k_1+k_{12}k_{13})\xi_3^1]}(\xi_2^j - \xi_2^{j-1})$$

ce qui implique

$$\Omega_1^{jo}(\delta) \leqslant (k_o a_3 + k_3)2L\delta\xi_2^{j+1}\ \exp[k_{13} + (k_1+k_{12}k_{13})\xi_3^1]\xi_2^j$$

$$+ \Omega_1^{oo}(\delta)\ \exp[k_{13} + (k_1+k_{12}k_{13})\xi_3^1]\xi_2^j$$

moyennant l'hypothèse

$$\text{(III.A.45)} \qquad (k_1 + k_{12}k_{13})(\xi_2^{j+1} - \xi_2^j) \leqslant k_{12}\{e^{k_{12}\xi_3^1} - 1\}^{-1}.$$

De la même façon, nous pourrons écrire

$$\Omega_1^{ji}(\delta) \leq (k_o a_3+k_3)2L\xi_2^{j+1}\delta \exp\left[k_{13} + (k_1+k_{12}k_{13})\xi_3^{i+1}\right]\xi_2^j$$

$$+ (k_o a_2+k_2)2L\xi_3^{i+1}\delta \exp\left[k_{12} + (k_1+k_{12}k_{13})\xi_2^j\right]\xi_3^{i+1}$$

$$+ \Omega_1^{oo}(\delta) \exp\left[k_{12}\xi_3^i + k_{13}\xi_2^j + (k_1+k_{12}k_{13})\xi_2^j\xi_3^i\right]$$

pourvu que pour tout (i,j)

$$\text{(III.1.46)} \quad \begin{cases} (k_1+k_{12}k_{13})(\xi_2^{j+1} - \xi_2^j) \leq k_{12}\{e^{k_{12}(\xi_3^{i+1} - \xi_3^i)} - 1\}^{-1} \\ (k_1+k_{12}k_{13})(\xi_3^{i+1} - \xi_3^i) \leq k_{13}\{e^{k_{13}(\xi_2^{j+1} - \xi_2^j)} - 1\}^{-1} \end{cases}$$

D'un autre côté, $\Omega'^{jo}_1(\delta)$ reste égal à $\Omega'^{oo}_1(\delta)$ et

$$\frac{1}{2}\,\Omega''^{10}_1(\delta) = (k_o LT+2k_1L)\delta(\xi_2^2-\xi_2^1) + \frac{1}{2}\,\Omega''^{oo}_1(\delta) + k_3\Omega''^{oo}_1(\delta)\int_o^{T/2}\int_o^{\xi_2^1}\rho_3(s_1,s_2)ds_1ds_2$$

$$+ k_{31}\Omega''^{oo}_1(\delta)\int_o^{\xi_2^1}\rho_3(\frac{T}{2}, s_2)ds_2.$$

L'évaluation de $k_3\int_o^{T/2}\int_o^{\xi_2^1}\rho_3(s_1,s_2)ds_1ds_2 + k_{31}\int_o^{\xi_2^1}\rho_3(\frac{T}{2}, s_2)ds_2$

peut se faire en remarquant que cette fonction de ξ_2^1 est dérivable, de dérivée à l'origine égale à

$$k_3\int_o^{T/2}\rho_3(s_1,0)ds_1 + k_{31}\rho_3(\frac{T}{2}, 0) = k^*$$

et donc pour ξ_2^1 assez petit on aura :

$$\frac{1}{2}\,\Omega''^{10}_1(\delta) \leq (k_o LT+2k_1L)\delta(\xi_2^2-\xi_2^1) + \frac{1}{2}\,\Omega''^{oo}_1 e^{4k^*\xi_2^1}$$

et pour $\xi_2^2 - \xi_2^1$ assez petit

$$\frac{1}{2}\ \Omega''^{20}(\delta) \leqslant (k_o LT+2k_1 L)\delta(\xi_2^3 - \xi_2^2) + \frac{1}{2}\ \Omega''^{10}_1(\delta)e^{4k^*(\xi_2^2-\xi_2^1)}$$

d'où
$$\Omega''^{jo}_1(\delta) \leqslant (2k_o LT+4k_1 L)\delta\xi_2^{j+1}e^{4k^*\xi_2^j} + \Omega''^{oo}_1(\delta)e^{4k^*\xi_2^j}$$

$$\Omega''^{ji}_1(\delta) \leqslant (2k_o LT+4k_1 L)\delta\xi_2^{j+1}e^{4k^*\xi_2^j} + \Omega''^{oo}_1(\delta)e^{4k^*\xi_2^j}$$

et
$$\Omega'^{ji}_1(\delta) \leqslant (2k_o LT+4k_1 L)\delta\xi_3^{i+1}e^{4k^*\xi_3^i} + \Omega'^{oo}_1(\delta)e^{4k^*\xi_3^i}$$

moyennant l'hypothèse que $\xi_3^{i+1} - \xi_3^i$ ou $\xi_2^{j+1} - \xi_2^j$ soient assez petits pour assurer la condition :

$$\text{(III.A.46)}\quad \left\{\begin{array}{l} k_3 \displaystyle\int_o^{T/2}\int_{\xi_2^j}^{\xi_2^{j+1}} \rho_3(s_1,s_2-\xi_2^j)ds_1 ds_2 + k_{13}\int_{\xi_2^j}^{\xi_2^{j+1}} \rho_3(\frac{T}{2},s_2-\xi_2^j)ds_2 \leqslant 2k^*(\xi_2^{j+1}-\xi_2^j) \\ \\ k_2 \displaystyle\int_o^{T/2}\int_{\xi_3^i}^{\xi_3^{i+1}} \rho_2(s_1,s_3-\xi_3^i)ds_1 ds_3 + k_{12}\int_{\xi_3^i}^{\xi_3^{i+1}} \rho_2(\frac{T}{2},s_3-\xi_3^i)ds_3 \leqslant 2k^*(\xi_3^{i+1}-\xi_3^i) \end{array}\right.$$

Le théorème sera prouvé dès que nous prendrons une subdivision (ξ_2^j) et (ξ_3^i) suffisamment fine pour assurer les conditions (III.A.46). Nous remarquons aussi que les constantes de Lipschitz sont indépendantes du nombre des points de discontinuité et de leur position.

Théorème (A.6) (*unicité*) :

Sous les hypothèses du théorème (A.5) la solution de l'équation $\theta = F(x,\theta) - m_1(x_2,x_3)$ est unique et dépend continûment des conditions initiales.

Il suffit d'appliquer le théorème (A.3) dans chacune des bandes $A_{q_2 q_3}$.

Après cette étude, nous pouvons entreprendre l'examen du problème (III.A.42) différentiel associé pour lequel on a les propositions suivantes :

Proposition (III.A.1) :

Avec les hypothèses suivantes :

(h.A.10) Les constantes positives N_{23}, L, M_{23}, T satisfont à la relation

$$N_{23} + LT \leq M_{23}.$$

(h.A.11) La fonction $F : F(x_1,q)$ définie et continue sur la bande $A = \mathbb{R} \times [-M_{23},M_{23}]$ à valeurs dans $E = \mathbb{R}^m$ est périodique en x_1 de période T.

$$L = \sup_A |F(x_1,q)|$$

L'équation

$$q(x_1) = v + \int_0^{x_1} \left[F(s,q(s)) - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(x,q(x))dx\right]ds \tag{III.A.47}$$

admet pour tout $v : |v| \leq N_{23}$ une solution $\bar{q}$ définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.

Démonstration :

Soit C l'ensemble des fonctions T périodiques définies sur $\mathbb{R}$ telles que $\vartheta(0) = v$, $|\vartheta(x) - \vartheta(\bar{x})| \leq 2L|x-\bar{x}|$ et $|\vartheta| \leq M_{23}$.

On définit l'application $g : \vartheta \to \Psi$

$$\Psi(x_1) = v + \int_0^{x_1} \left[F(s,\vartheta(s)) - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(x,\vartheta(x))dx\right]ds$$

et on vérifie que cette application transforme C en lui-même. Comme $\Psi(0) = v$, $|\Psi(x) - \Psi(\bar{x})| \leq 2L|x-\bar{x}|$ et $x \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$: $|\Psi(x)| \leq |v| + 2L|x| \leq N_{23}+2LT \leq M_{23}$ il suffit de remarquer que g est continue. La fonction F est continue, on peut donc trouver une fonction ω_{23} continue croissante, nulle à l'origine telle que :

$$|F(x,q) - F(x,\bar{q})| \leqslant \omega_{23}(|q-\bar{q}|) \quad \text{pour} \quad (x,q),(x,\bar{q}) \in A$$

et donc

$$|\Psi - \bar{\Psi}| \leqslant 2\omega_{23}(|\vartheta-\bar{\vartheta}|)\,\frac{T}{2} = T\,\omega_{23}(|\vartheta-\bar{\vartheta}|).$$

Le théorème de Schaüder appliqué à C permet de conclure en l'existence d'une fonction $\bar{q}$ telle que

$$\bar{q}(0) = v \quad \text{et} \quad \bar{q}'(x_1) = F(x_1,\bar{q}(x_1)) - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(s,\bar{q}(s))ds$$

Proposition (III.A.2) :

Avec les hypothèses suivantes :

(h.A.10) et

(h.A.11bis) En plus de l'hypothèse (h.A.11) la fonction F est lipschitzienne par rapport à q :

$$|F(x,q) - F(x,\bar{q})| \leqslant k_{23}|q-\bar{q}| \qquad x \in R,\ |q|,|\bar{q}| \leqslant M_{23}$$

avec $k_{23}T + 1 > \exp(k_{23}\,\frac{T}{2})$.

L'équation (III.A.47) possède une et une seule solution dépendant continûment de v sur $[-N_{23},N_{23}]$.

Démonstration :

Soient v et $\bar{v}$ deux conditions initiales et q, $\bar{q}$ deux solutions correspondantes. On peut écrire :

$$|q(x) - \bar{q}(x)| \leqslant |v-\bar{v}| + k_{23}\int_0^x \{|q(s)-\bar{q}(s)| + |q-q|_1\}ds$$

en notant

$$|q-\bar{q}|_1 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |q(s) - \bar{q}(s)|ds .$$

Nous en déduisons :

$$|q(x) - \bar{q}(x)| + |q-q|_1 \leq 2|v-\bar{v}| + P_1 k_{23}\left|\int_o^x \{|q(s) - \bar{q}(s)| + |q-\bar{q}|_1\}ds\right.$$

soit $|q(x) - \bar{q}(x)| + |q-q|_1 \leq 2|v-\bar{v}| \lambda e^{k_{23}|x|}$ en utilisant le lemme (III.A.2).

Remarque 1.-

La solution de l'équation précédente peut être obtenue par la méthode des approximations successives avec

$$q_o = v$$

et q_n $(n > 0)$ solution de l'équation

(III.A.48) $$q_n(x) = v + \int_o^x \{F(s,q_n(s)) - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(x,q_{n-1}(x))dx\}ds.$$

En effet,

$$|q_{n+1}(x) - q_n(x)| \leq k_{23}\left|\int_o^x |q_n(s) - q_{n-1}(s)|ds\right| + k_{23}\frac{T}{2}|q_n-q_{n-1}|_1$$

$$|q_{n+1}(x) - q_n(x)| \leq k_{23}\frac{T}{2}|q_n - q_{n-1}|_1(e^{k_{23}|x|} - 1)$$

d'où $$|q_{n+1} - q_n|_1 \leq k_{23}\frac{T}{2}|q_n - q_{n-1}|_1 \frac{1}{\lambda}$$

avec $$\lambda = \frac{k_{23}T}{2k_{23}T + 2 - 2\exp(k_{23}\frac{T}{2})} > 1$$

c'est-à-dire $$|q_{n+1} - q_n|_1 \leq \frac{1}{\lambda^n}|q_1 - q_o|_1 k_{23}\frac{T}{2} \text{ et}$$

$$||q_{n+1} - q_n|| \leq \frac{1}{\lambda^n}|q_1 - q_o|_1 k_{23}\frac{T}{2}\exp(k_{23}\frac{T}{2}).$$

Remarque 2.-

La fonction $v \to m = m(\bar{q}) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(s,\bar{q}(s))ds$ est continue sur $[-N_{23},N_{23}]$ et même :

Proposition (III.A.3) :

Avec les hypothèses de la proposition (III.A.2), si la fonction F est continûment différentiable par rapport à q sur A la fonction $v \to m$ est différentiable et

(III.A.49) $$\frac{dm}{dv} = \{1 - \exp(-\int_{-T/2}^{T/2} F_q(x,q(x))\,dx)\}\{\int_0^T \exp(-\int_0^t F_q(x,q(x))dx)dt\}^{-1}$$

Démonstration :

La conclusion de cette proposition se traduit par

$$a_{ij} = \frac{\partial m_i}{\partial v_j} = \frac{1 - \exp(-\int_{-T/2}^{T/2} F_{iq_j}(x,q_1(x),q_2(x),\ldots,q_m(x))dx)}{\int_0^T \exp(-\int_0^t F_{iq_j}(x,q_1(x),q_2(x),\ldots,q_m(x))dx)dt}$$

si on désigne par F_i les m composantes de F et par q_i celles de q.

Au lieu de la démonstration de L. Cesari [1] page 47, nous établirons le résultat de la manière suivante.

Désignons par (q,m) la solution correspondante à v et $(q+\Delta q, m+\Delta m)$ celle correspondante à $v+\Delta v$.

On peut écrire :

$$\Delta q(x) = \Delta v + \int_0^x [F(t,q(t) + \Delta q(t)) - F(t,q(t)) - \Delta m]dt$$

et

$$\Delta m = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [F(t,q(t) + \Delta q(t)) - F(t,q(t))]dt.$$

Soit $a(t) = F_q(t,q(t))$, nous avons :

$$F(t,q(t) + \Delta q(t)) = a(t).\Delta q(t) + \varepsilon(t,\Delta q(t))$$

et donc

$$\Delta q(x) = \Delta v + \int_o^x \left[a(t)\Delta q(t) - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} a(\tau)\Delta q(\tau)d\tau\right]dt$$

$$+ \int_o^x \{\varepsilon(t,\Delta q(t)) - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \varepsilon(\tau,\Delta q(\tau))d\tau\}dt.$$

Soit l'équation obtenue à partir de la précédente par linéarisation.

$$\text{(III.A.50)} \qquad \begin{cases} \Delta\tilde{q}(x) = \Delta v + \displaystyle\int_o^x \left[a(t)\Delta\tilde{q}(t) - \Delta\tilde{m}\right]dt \\ \Delta\tilde{m} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} a(t)\Delta\tilde{q}(t)dt. \end{cases}$$

La résolution de ce système conduit à $\Delta\tilde{q}(x) = g(x)\Delta v$

et

$$\Delta\tilde{m} = \frac{1 - \exp(-\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} a(t)dt)}{\displaystyle\int_o^T \exp(-\int_o^x a(t)dt)dx}\,\Delta v.$$

D'autre part, en posant $w(x) = \Delta q(x) - \Delta\tilde{q}(x)$ on a

$$w(x) = \int_o^x \left[a(t)w(t) - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} a(\tau)w(\tau)d\tau\right]dt +$$

$$\int_o^x \left[\varepsilon(t,\Delta\tilde{q}(t)+w(t)) - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \varepsilon(\tau,\Delta\tilde{q}(\tau)+w(\tau))d\tau\right]dt$$

ou

$$w'(x) = a(x)w(x) - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} a(\tau)w(\tau)dt + \varepsilon(x,\Delta\tilde{q}(x)+w(x)) - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \varepsilon(\tau,\Delta\tilde{q}(\tau)+w(\tau))d\tau$$

avec $w(0) = 0$.

Lorsque Δv tend vers 0, il en est de même pour Δq et $\Delta\tilde{q}$. On peut donc écrire grâce à la continuité de la fonction F_q :

$$\forall \alpha > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que : } |\Delta\tilde{q}| + |w| \leqslant \eta \Rightarrow |\varepsilon(t,\Delta\tilde{q}(t)+w(t))| \leqslant \alpha(|\Delta\tilde{q}|+|w|)$$

c'est-à-dire encore :

$$|w'(x)| \leqslant 2\alpha|\Delta\tilde{q}| + 2\alpha|w| + k_{23}\left|\int_0^x |w'(t)|dt\right| + \frac{k_{23}}{T}\left|\int_{-T/2}^{T/2}\left|\int_0^x |w'(t)|dt\right|dx\right|$$

$$|w'(x)| \leqslant 2\alpha\lambda(|\Delta\tilde{q}| + |w|)(e^{k_{23}|x|} - 1)$$

$$\text{ou} \quad |w| \leqslant 4\alpha\lambda(|\Delta\tilde{q}| + |w|)(e^{k_{23}\frac{T}{2}} - k_{23}\frac{T}{2} - 1) = 4\alpha\lambda'(|\Delta\tilde{q}| + |w|)$$

$$|w| \leqslant \frac{4\alpha\lambda'}{1 - 4\alpha\lambda'}|g|\Delta v \quad \text{pour } \alpha \text{ assez petit.}$$

Cette relation permet de conclure, puisque pour tout $\alpha' > 0$ il existe $\eta' > 0$ tel que :

$$|\Delta v| < \eta' \implies |w| \leqslant \alpha'|\Delta v| \quad \text{ou}$$

$$|\Delta v| < \eta' \implies |\Delta\tilde{m} - \Delta m| \leqslant k_{23}\alpha'|\Delta v|.$$

Ainsi l'application $v \to m$ est différentiable et sa différentielle est donnée par la formule (III.A.49).

Remarque : La continuité de cette différentielle résulte immédiatement de la formule (III.A.49).

Ce problème étant examiné, il nous est possible d'énoncer le théorème d'existence d'une solution périodique de l'équation (III.A.1 et 2) après avoir remarqué que la fonction m_1 s'écrivait en fait

$$m_1(x_2,x_3) = H\{x_2,x_3,v,\sigma^1_{23}(t_2,t_3),\ 0 \leqslant t_2 < x_2,\ 0 \leqslant t_3 < x_3\}$$

(h.A.12) Les fonctions σ^2, σ^3 : $\sigma^2(x_1,x_3)$, $\sigma^3(x_1,x_2)$ définies respectivement sur les ensembles :

$$\{(x_1,x_3) : x_1 \in \mathbb{R},\ |x_3| \leqslant a_3\},\ \{(x_1,x_2) : x_1 \in \mathbb{R},\ |x_2| \leqslant a_2\}$$

sont périodiques de période T en x_1, continues ainsi que leurs dérivées partielles σ_1^2, σ_3^2, σ_{13}^2, σ_1^3, σ_2^3, σ_{12}^3, à valeurs dans E et vérifient :

$$\sigma^2(x_1,0) = \sigma^3(x_1,0) \quad \text{pour } x_1 \in \mathbb{R}$$

$$|\sigma_{13}^2(x_1,x_3) - \sigma_{13}^2(\bar{x}_1,\bar{x}_3)| \leqslant \ell_2|x_1-\bar{x}_1| + \ell_2'|x_3-\bar{x}_3|$$

$$|\sigma_{12}^3(x_1,x_2) - \sigma_{12}^3(\bar{x}_1,\bar{x}_2)| \leqslant \ell_3|x_1-\bar{x}_1| + \ell_3'|x_2-\bar{x}_2|$$

Cette hypothèse permet de déterminer des constantes positives ou nulles telles que : si $x_1 \in \mathbb{R}$

$$|\sigma^2(x_1,0)| \leqslant n \qquad |\sigma_1^2(x_1,0)| \leqslant n_1 \qquad |\sigma_2^3(x_1,0)| \leqslant n_2$$

$$|\sigma_3^2(x_1,0)| \leqslant n_3 \qquad |\sigma_{12}^3(x_1,0)| \leqslant n_{12} \qquad |\sigma_{13}^2(x_1,0)| \leqslant n_{13}$$

(h.A.13) La fonction f : $f(x_1,x_2,x_3,y,z_1,z_2,z_3,z_{12},z_{13},z_{23})$ est définie et continue sur $\mathcal{B} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{3+7m}, x \in A_1, |y| \leqslant M, |z_i| \leqslant M_i, |z_{ij}| \leqslant M_{ij}\}$ à valeurs dans E et périodique en x, de période T. De plus, f est lipschitzienne :

$$|f(x,y,z) - f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})| \leqslant k|x-\bar{x}|+k_o|y-\bar{y}|+\sum_i k_i|z_i-\bar{z}_i|+\sum_{ij} k_{ij}|z_{ij}-\bar{z}_{ij}|$$

Posons $L = \sup\limits_{\mathcal{B}} |f(x,y,z)|$ et faisons l'hypothèse :

(h.A.14) Les constantes L, M, M_i, M_{ij}, n, n_i, n_{ij}, k_{23} vérifient les inégalités :

$$n < M \qquad n_{12} < M_{12}$$
$$n_1 < M_1 \qquad n_{13} < M_{13}$$
$$n_2 < M_2 \qquad k_{23}T + 1 > \exp(k_{23}\frac{T}{2})$$
$$n_3 < M_3$$

Soit F la fonction définie par

$$F(x,q) = f(x_1,0,0,\sigma^2(x_1,0),\sigma_1^2(x_1,0),\sigma_2^3(x_1,0),\sigma_{12}^3(x_1,0),\sigma_{13}^2(x_1,0),q)$$

(h.A.15) Il existe $v \in \mathbb{R}^m$ tel que $|v| \leq M_{23}-LT$ pour lequel l'équation $\frac{dq}{dx}(x) = F(x,q(x))$, $q(0) = v$ admet une solution $\bar{q}$ périodique de période T pour laquelle la matrice jacobienne

$$\frac{dm}{dv} = \frac{1 - \exp(-\int_o^t F_q(x,\bar{q}(x))dx)}{\int_o^T \exp(-\int_o^t F_q(x,\bar{q}(x))dx)dt} \qquad \text{est inversible.}$$

Remarque : Dans le cas où $m = 1$, cette hypothèse se traduit par $\int_o^T \frac{\partial F}{\partial q}(x,\bar{q}(x))dx \neq 0$ ou par le fait que l'équation aux variations

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{\partial F}{\partial q}(x,\bar{q}(x))w(x)$$

n'a pas toutes ses solutions périodiques.

Théorème (III.A.7) :

Avec les hypothèses (h.A.12, 13, 14, 15), on peut trouver un nombre $a > 0$ un ensemble $A_1' = \{x \in A_1 : |x_2| \leq a, |x_3| \leq a\}$ une fonction τ définie et continue sur l'ensemble $\{(x_2,x_3) : |x_2| \leq a, |x_3| \leq a\}$ ainsi que ses dérivées τ_2,τ_3,τ_{23} vérifiant $\tau(0,0) = v$, $\tau(x_2,0) = \sigma^3(0,x_2)$ et $\tau(0,x_3) = \sigma^2(0,x_3)$ et une fonction ϕ définie et continue sur A_1' périodique en x_1 de période T telle que :

$$\phi_{x_1x_2x_3} = f(x_1,x_2,x_3,\phi,\phi_{x_1},\phi_{x_2},\phi_{x_3},\phi_{x_1x_2},\phi_{x_1x_3},\phi_{x_2x_3})$$

$$\phi(x_1,x_2,0) = \sigma^3(x_1,x_2) \qquad \phi(x_1,0,x_3) = \sigma^2(x_1,x_3)$$

et : $$\phi(0,x_2,x_3) = \tau(x_2,x_3).$$

De plus, la fonction τ est définie d'une manière unique et dépend continûment des conditions initiales σ^2 et σ^3.

La démonstration de ce théorème suit le même schéma que celle de L. Cesari [3] (théorème V, page 113). Choisissant $N_{23} = M_{23} - LT$ il n'est pas difficile de voir la possibilité de déterminer un nombre positif a assurant sur A_1' l'hypothèse (h.A.3). Les différentes propriétés obtenues sur la fonctionnelle H permettent d'appliquer le théorème (III.A.4) et donc d'établir ce théorème.

Remarque :

Nous donnerons dans la partie D de ce chapitre des exemples d'applications de ce théorème.

D'un autre côté, l'existence d'une solution périodique de l'équation $\frac{dq}{dx} = F(x,q(x))$ est nécessaire puisqu'en fait si ϕ est solution périodique de l'équation

$$u_{x_1x_2x_3} = f(x_1,x_2,x_3,u,u_{x_1},u_{x_2},u_{x_3},u_{x_1x_2},u_{x_1x_3},u_{x_2x_3})$$

$$u(x_1,x_2,0) = \sigma^3(x_1,x_2), \quad u(x_1,0,x_3) = \sigma^2(x_1,x_3), \quad u(0,x_2,x_3) = \sigma^1(x_2,x_3)$$

la fonction $\phi_{x_2x_3}$ qui est elle aussi périodique vérifie

$$\phi_{x_2x_3}(x_1,0,0) = \sigma^1_{23}(0,0) + \int_0^{x_1} f(s_1,0,0,\sigma^2(s_1,0),\sigma^2_1(s_1,0),\sigma^3_2(s_1,0),\sigma^2_3(s_1,0), \sigma^3_{12}(s_1,0),\sigma^2_{13}(s_1,0),\phi_{x_2x_3}(s_1,0,0))ds_1$$

c'est-à-dire $\phi_{x_2x_3}(x_1,0,0) = \sigma^1_{23}(0,0) + \int_0^{x_1} F(s,\phi_{x_2x_3}(s,0,0))ds.$

(B) *PERIODICITE PAR RAPPORT A DEUX VARIABLES.*

1°) *Définition du problème modifié.*

Dans cette partie A_2 désignera le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:
$A_2 = \{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R},\ |x_3| \leq a_3\}$ avec a_3 constante positive.

$C(A_2)$ sera l'ensemble des fonctions définies et continues sur A_2, périodiques en x_1 et x_2 de même période T, à valeurs dans $E = \mathbb{R}^m$, muni de la norme de la convergence uniforme : $|\theta| = \sup|\theta(x)|$.

Faisons l'hypothèse :

(h.B.1) Les fonctions σ^1, σ^2, σ^3 définies respectivement sur les ensembles $\{(x_2,x_3) : x_2 \in \mathbb{R},\ |x_3| \leq a_3\}$, $\{(x_1,x_3) : x_1 \in \mathbb{R},\ |x_3| \leq a_3\}$ et $\{(x_1,x_2) : x_1 \in R,\ x_2 \in R\}$ sont continues ainsi que leurs dérivées partielles σ^1_2, σ^1_3, σ^1_{23}, σ^2_1, σ^2_3, σ^2_{13}, σ^3_1, σ^3_2, σ^3_{12} à valeurs dans E et périodiques de période T en x_1 et x_2.
De plus les fonctions σ^1, σ^2, σ^3 vérifient les relations :

$$\sigma^1(0,x_3) = \sigma^2(0,x_3) \quad \text{si} \quad |x_3| \leq a_3$$

$$\sigma^2(x_1,0) = \sigma^3(x_1,0) \quad \text{si} \quad x_1 \in \mathbb{R}$$

$$\sigma^3(0,x_2) = \sigma^1(x_2,0) \quad \text{si} \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

Cette hypothèse définit comme l'hypothèse (h.A.I) de la partie précédente une fonction $\tilde{\mathfrak{S}}$ de $C(A_2)$ vérifiant : $\tilde{\mathfrak{S}}_{x_1x_2x_3} = 0$,
$\tilde{\mathfrak{S}}(x_1,x_2,0) = \sigma^3(x_1,x_2)$, $\tilde{\mathfrak{S}}(x_1,0,x_3) = \sigma^2(x_1,x_3)$, $\tilde{\mathfrak{S}}(0,x_2,x_3) = \sigma^1(x_2,x_3)$
et nous noterons par les mêmes constantes N_i, N_{ij} les bornes de $\tilde{\mathfrak{S}}$ et de ses dérivées :

$$|\tilde{\mathfrak{S}}| \leq N \qquad |\tilde{\mathfrak{S}}_1| \leq N_1 \qquad |\tilde{\mathfrak{S}}_2| \leq N_2 \qquad |\tilde{\mathfrak{S}}_3| \leq N_3$$

$$|\tilde{\mathfrak{S}}_{1,2}| \leq N_{12} \qquad |\tilde{\mathfrak{S}}_{1,3}| \leq N_{13} \qquad |\tilde{\mathfrak{S}}_{2,3}| \leq N_{23}.$$

De même la continuité de la fonction $\mathfrak{S}$ et de ses dérivées permet de définir des fonctions α, α' et α'', numériques, continues, non décroissantes, sous-additives telles que :

$$\text{(III.B.1)} \quad \begin{cases} |\mathfrak{S}(x) - \mathfrak{S}(\bar{x})| \leqslant \alpha(|x-\bar{x}|) & x, \bar{x} \in A_2 \\ |\mathfrak{S}_i(x) - \mathfrak{S}_i(\bar{x})| \leqslant \alpha'(|x-\bar{x}|) & i,j \in \{1,2,3\} \quad i \neq j \\ |\mathfrak{S}_{ij}(x) - \mathfrak{S}_{ij}(\bar{x})| \leqslant \alpha''(|x-\bar{x}|) & \end{cases}$$

Comme précédemment nous introduisons un sous-ensemble S_2 de $C(A_2)$ de fonctions θ satisfaisant les relations (III.A.4) sur A_2.

Les opérateurs B, B^i et B^{ij} gardent la même signification (III.A.5,...,11) et les propriétés (III.A.12,...,18) se transforment en :

$$\text{(III.B.2)} \quad \begin{cases} |B\theta(x_1,x_2,x_3) - B\theta(\bar{x}_1,x_2,x_3)| \leqslant |\theta| \dfrac{T}{2} a_3|x_1-\bar{x}_1| + \alpha(|x_1-\bar{x}_1|) \\ |B\theta(x_1,x_2,x_3) - B\theta(x_1,\bar{x}_2,x_3)| \leqslant |\theta| \dfrac{T}{2} a_3|x_2-\bar{x}_2| + \alpha(|x_2-\bar{x}_2|) \\ |B\theta(x_1,x_2,x_3) - B\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3)| \leqslant |\theta| \dfrac{T^2}{4} |x_3-\bar{x}_3| + \alpha(|x_3-\bar{x}_3|) \\ \qquad |B\theta(x)| \leqslant |\theta| \dfrac{T^2}{4} a_3 + N \end{cases}$$

$$\text{(III.B.3)} \quad \begin{cases} |B^1\theta(x_1,x_2,x_3)-B^1\theta(\bar{x}_1,x_2,x_3)| \leqslant \left|\displaystyle\int_o^{x_2}\int_o^{x_3} \rho_1(|x_1-\bar{x}_1|,s_2,s_3)ds_2ds_3\right. + \alpha'(|x_1-\bar{x}_1|) \\ |B^1\theta(x_1,x_2,x_3)-B^1\theta(x_1,\bar{x}_2,x_3)| \leqslant |\theta|a_3|x_2-\bar{x}_2| + \alpha'(|x_2-\bar{x}_2|) \\ |B^1\theta(x_1,x_2,x_3)-B^1\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3)| \leqslant |\theta| \dfrac{T}{2} |x_3-\bar{x}_3| + \alpha'(|x_3-\bar{x}_3|) \\ \qquad |B^1\theta(x)| \leqslant |\theta| \dfrac{T}{2} a_3 + N_1 \end{cases}$$

$$\text{(III.B.4)} \quad \begin{cases} |B^2\theta(x_1,x_2,x_3)-B^2\theta(\bar{x}_1,x_2,x_3)| \leqslant |\theta|a_3|x_1-\bar{x}_1| + \alpha'(|x_1-\bar{x}_1|) \\ |B^2\theta(x_1,x_2,x_3)-B^2\theta(x_1,\bar{x}_2,x_3)| \leqslant \left|\displaystyle\int_o^{x_1}\int_o^{x_2} \rho_2(s_1,|x_2-\bar{x}_2|,s_3)ds_1ds_3\right. + \alpha'(|x_2-\bar{x}_2|) \\ |B^2\theta(x_1,x_2,x_3)-B^2\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3)| \leqslant |\theta| \dfrac{T}{2} |x_3-\bar{x}_3| + \alpha'(|x_3-\bar{x}_3|) \\ \qquad |B^2\theta(x)| \leqslant |\theta| \dfrac{T}{2} a_3 + N_2 \end{cases}$$

$$\text{(III.B.5)} \quad \begin{cases} |B^3\theta(x_1,x_2,x_3)-B^3\theta(\bar{x}_1,x_2,x_3)| \leq |\theta| \dfrac{T}{2} |x_1-\bar{x}_1| + \alpha'(|x_1-\bar{x}_1|) \\ |B^3\theta(x_1,x_2,x_3)-B^3\theta(x_1,\bar{x}_2,x_3)| \leq |\theta| \dfrac{T}{2} |x_2-\bar{x}_2| + \alpha'(|x_2-\bar{x}_2|) \\ |B^3\theta(x_1,x_2,x_3)-B^3\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3)| \leq \left|\int_o^{x_1}\int_o^{x_2} \rho_3(s_1,s_2,|x_3-\bar{x}_3|)ds_1 ds_2 + \alpha'(|x_3-\bar{x}_3|)\right. \\ \qquad |B^3\theta(x)| \leq |\theta| \dfrac{T^2}{4} + N_3 \end{cases}$$

$$\text{(III.B.6)} \quad \begin{cases} |B^{12}\theta(x_1,x_2,x_3)-B^{12}\theta(\bar{x}_1,x_2,x_3)| \leq \left|\int_o^{x_3} \rho_1(|x_1-\bar{x}_1|,x_2,s_3)ds_3\right| + \alpha''(|x_1-\bar{x}_1|) \\ |B^{12}\theta(x_1,x_2,x_3)-B^{12}\theta(x_1,\bar{x}_2,x_3)| \leq \left|\int_o^{x_3} \rho_2(x_1,|x_2-\bar{x}_2|,s_3)ds_3\right| + \alpha''(|x_2-\bar{x}_2|) \\ |B^{12}\theta(x_1,x_2,x_3)-B^{12}\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3)| \leq |\theta||x_3-\bar{x}_3| \\ \qquad |B^{12}\theta(x)| \leq |\theta| a_3 + N_{12} \end{cases}$$

$$\text{(III.B.7)} \quad \begin{cases} |B^{13}\theta(x_1,x_2,x_3)-B^{13}\theta(\bar{x}_1,x_2,x_3)| \leq \left|\int^{x_2} \rho_1(|x_1-\bar{x}_1|,s_2,x_3)ds_2\right| + \alpha''(|x_1-\bar{x}_1|) \\ |B^{13}\theta(x_1,x_2,x_3)-B^{13}\theta(x_1,\bar{x}_2,x_3)| \leq |\theta||x_2-\bar{x}_2| \\ |B^{13}\theta(x_1,x_2,x_3)-B^{13}\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3)| \leq \left|\int_o^{x_2} \rho_3(x_1,s_2,|x_3-\bar{x}_3|)ds_2 \quad + \alpha''(|x_2-\bar{x}_2|)\right. \\ \qquad |B^{13}\theta(x)| \leq |\theta| \dfrac{T}{2} + N_{13} \end{cases}$$

$$\text{(III.B.8)} \quad \begin{cases} |B^{23}\theta(x_1,x_2,x_3)-B^{23}\theta(\bar{x}_1,x_2,x_3)| \leq |\theta||x_1-\bar{x}_1| \\ |B^{23}\theta(x_1,x_2,x_3)-B^{23}\theta(x_1,\bar{x}_2,x_3)| \leq \left|\int_o^{x_1} \rho_2(s_1,|x_2-\bar{x}_2|,x_3)ds_1\right| + \alpha''(|x_2-\bar{x}_2|) \\ |B^{23}\theta(x_1,x_2,x_3)-B^{23}\theta(x_1,x_2,\bar{x}_3)| \leq \left|\int_o^{x_1} \rho_3(s_1,x_2,|x_3-\bar{x}_3|)ds_1 \quad + \alpha''(|x_3-\bar{x}_3|)\right. \\ \qquad |B^{23}\theta(x)| \leq |\theta| \dfrac{T}{2} + N_{23}. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{B}_2$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{3+7m}$ défini à partir des constantes positives M, M_i $i \in \{1, 2, 3\}$, M_{ij} $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$:

$$\mathcal{B}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{3+7m} : x \in A_2, \ |y| \leq M, \ |z_i| \leq M_i, \ |z_{ij}| \leq M_{ij}\}$$

Introduisons les hypothèses :

(h.B.2) La fonction f : $f(x_1,x_2,x_3,y,z_1,z_2,z_3,z_{12},z_{13},z_{23})$ est définie et continue sur $\mathcal{B}_2$ à valeurs dans E et périodique en x_1 et x_2 de période T.

Avec cette hypothèse, la fonction f vérifie les propriétés (III.A.19 et 20).

(h.B.3) Les constantes L, M, M_i, M_{ij}, N, N_i et N_{ij} vérifient les inégalités :

$$\text{(III.B.9)} \quad \begin{cases} LT^2 a_3 + N \leq M \\ 2LT\, a_3 + N_1 \leq M_1 \\ 2LT\, a_3 + N_2 \leq M_2 \\ LT^2 + N_3 \leq M_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4L\, a_3 + N_{12} \leq M_{12} \\ 2LT + N_{23} \leq M_{23} \\ 2LT + N_{13} \leq M_{13} \end{cases}$$

qui permettent de définir pour $\theta \in \mathcal{C}(A_2)$

$$\text{(III.B.10)} \quad \mathcal{F}(x,\theta) = f(x_1,x_2,x_3,B\theta(x),B^1\theta(x),B^2\theta(x),B^3\theta(x),B^{12}\theta(x),B^{13}\theta(x),B^{23}\theta(x))$$

et

$$\text{(III.B.11)} \quad m_1(x_2,x_3,\theta) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{F}(x_1,x_2,x_3,\theta)\,dx_1$$

$$\text{(III.B.12)} \quad m_2(x_1,x_3,\theta) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{F}(x_1,x_2,x_3,\theta)\,dx_2$$

$$\text{(III.B.13)} \quad m_{12}(x_3,\theta) = \frac{1}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{F}(x_1,x_2,x_3,\theta)\,dx_1\,dx_2$$

enfin

$$\text{(III.B.14)} \quad \mathcal{F}_{12}(x,\theta) = \mathcal{F}(x,\theta) - m_1(x_2,x_3,\theta) - m_2(x_1,x_3,\theta) + m_{12}(x_3,\theta).$$

Les relations (III.B.2,...,8) permettent d'évaluer les différences analogues aux relations (III.A.24,...,26) (il suffit de remplacer dans ces dernières a_2 par $\frac{T}{2}$), et nous poserons

$$
(\text{III.B.15}) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\Omega_2(\delta) &= \omega(\delta)+\omega_o\{2LTa_3\delta+\alpha(\delta)\}+\omega_1\{\alpha'(\delta)\}+\omega_2\{4La_3\delta+\alpha'(\delta)\}\\
&\quad +\omega_3\{2LT\delta+\alpha'(\delta)\}+\omega_{12}\{\alpha''(\delta)\}+\omega_{23}\{4L\delta\}+\omega_{13}\{\alpha''(\delta)\}\\
\frac{1}{2}\,\Omega_2'(\delta) &= \omega(\delta)+\omega_o\{2LTa_3\delta+\alpha(\delta)\}+\omega_1\{4La_3\delta+\alpha'(\delta)\}+\omega_2\{\alpha'(\delta)\}\\
&\quad +\omega_3\{2LT\delta+\alpha'(\delta)\}+\omega_{12}\{\alpha''(\delta)\}+\omega_{23}\{\alpha''(\delta)\}+\omega_{13}\{4L\delta\}\\
\frac{1}{4}\,\Omega_2''(\delta) &= \omega(\delta)+\omega_o\{LT^2\delta+\alpha(\delta) \;+\omega_1\{2LT\delta+\alpha'(\delta)\}+\omega_2\{2LT\delta+\alpha'(\delta)\}\\
&\quad +\omega_3\{\alpha'(\delta)\}+\omega_{12}\{4L\delta\}+\omega_{13}\{\alpha''(\delta)\}+\omega_{23}\{\alpha''(\delta)\},
\end{aligned}
\right.
$$

et pour $g \geq 0$ de $C(A_2)$

$$(\text{III.B.16}) \qquad P_1 g(x) = g(x) + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(s_1,x_2,x_3)\,ds_1$$

$$(\text{III.B.17}) \qquad P_2 g(x) = g(x) + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(x_1,s_2,x_3)\,ds_2$$

$$(\text{III.B.18}) \qquad P_{12} g(x) = g(x) + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(s_1,x_2,x_3)\,ds_1 + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(x_1,s_2,x_3)\,ds_2$$
$$+ \frac{1}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} g(s_1,s_2,x_3)\,ds_1 ds_2$$

ou si l'on veut $P_{12}g(x) = P_1\{P_2 g(x)\} = P_2\{P_1 g(x)\}$.

Nous sommes en mesure d'établir le théorème :

Théorème (III.B.1) (*existence*) :

Avec les hypothèses (h.B.1, 2, 3, 4)

(h.B.4) : Les équations intégrales :

$$(\text{III.B.19}) \qquad \rho_1(\delta,x_2,x_3) = \Omega_2(\delta) + P_2\omega_1\{\left|\int_o^{x_2}\int_o^{x_3} \rho_1(\delta,s_2,s_3)\,ds_2 ds_3\right|\}$$
$$+ P_2\omega_{12}\{\left|\int_o^{x_3} \rho_1(\delta,x_2,s_3)\,ds_3\right|\} + P_2\omega_{13}\{\left|\int_o^{x_2} \rho_1(\delta,s_2,x_3)\,ds_2\right|\}$$

$$(\text{III.B.20}) \qquad \rho_2(x_1,\delta,x_3) = \Omega_2'(\delta) + P_1\omega_2\{\left|\int_o^{x_1}\int_o^{x_3}\rho_2(s_1,\delta,s_3)\,ds_1 ds_3\right|\} +$$

$$+ P_1\omega_{12}\{|\int_0^{x_3} \rho_2(x_1,\delta,s_3)ds_3|\} + P_1\omega_{23}\{|\int_0^{x_1} \rho_2(s_1,\delta,x_3)ds_1|\}$$

(III.B.21) $$\rho_2(x_1,x_2,\delta) = \Omega_2''(\delta) + P_{12}\omega_3\{|\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} \rho_3(s_1,s_2,\delta)ds_1ds_2|\}$$

$$+ P_{12}\omega_{13}\{|\int_0^{x_2} \rho_3(x_1,s_2,\delta)ds_2|\} + P_{12}\omega_{23}\{|\int_0^{x_1}\rho_3(s_1,x_2,\delta)ds_1|\}$$

admettent des solutions positives qui tendent vers 0 avec δ uniformément sur A_2.

L'équation $\theta = F_{12}(x,\theta)$ admet au moins une solution dans $C(A_2)$.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème (III.A.1).

Traduisons comme précédemment l'hypothèse (h.B.4) dans le cas lipschitzien.

2°) *Cas lipschitzien.*

Théorème (B.2) *existence* :

Sous les hypothèses :

(h.B.1)

(h.B.2bis) En plus de l'hypothèse (h.B.2) la fonction f est lipschitzienne par rapport aux variables z_i et z_{ij}

(III.B.22) $$|f(x,y,z_1,z_2,z_3,z_{12},z_{13},z_{23}) - f(x,y,\bar z_1,\bar z_2,\bar z_3,\bar z_{12},\bar z_{13},\bar z_{23})|$$
$$\leq \sum_i k_i|z_i-\bar z_i| + \sum_{i<j} k_{ij}|z_{ij}-\bar z_{ij}|$$

(h.B.3)

(h.B.4bis) Les constantes k_3, k_{13} et k_{23} positives ou nulles assurent l'existence d'une solution continue et positive sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \times \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ de l'équation

(III.B.23) $$\rho(x_1,x_2) = 1 + P_{12}k_3|\int_0^{x_1}\int_0^{x_2} \rho(s_1,s_2)ds_1ds_2| + P_{12}k_{13}|\int_0^{x_2}\rho(x_1,s_2)ds_2|$$
$$+ P_{12}k_{23}|\int_0^{x_1} \rho(s_1,x_2)ds_1|$$

L'équation $\theta = \mathcal{F}_{12}(x,\theta)$ admet au moins une solution dans $C(A_2)$.

Nous savons en vertu des lemmes (III.A.2 et 3) que les relations (III.B.19 et 20) sont satisfaites pour

$$k_{13}T < 2{,}5 \quad \text{et} \quad k_{23}T < 2{,}5.$$

Quant à (III.B.23) qui n'est autre que la traduction de (III.B.21) on peut l'illustrer de la manière suivante :

Posons pour $g \geq 0$, $P^*_{12}g = P_{12}g - \frac{1}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} g(s_1,s_2)ds_1ds_2$

et isolons dans (III.B.23) les termes constants de sorte que

$$\rho(x_1,x_2) = 1 + A(\rho) + P^*_{12}k_3\left|\int_o^{x_1}\int_o^{x_2} \rho(s_1,s_2)ds_1ds_2\right|$$

$$+ P^*_{12}k_{13}\left|\int_o^{x_2}\rho(x_1,s_2)ds_2\right| + P^*_{12}k_{23}\left|\int_o^{x_1}\rho(s_1,s_2)ds_1\right| .$$

Considérons l'équation

$$\text{(III.B.24)} \quad \rho^*(x_1,x_2) = 1 + P^*_{12}k_3\left|\int_o^{x_1}\int_o^{x_2} \rho^*(s_1,s_2)ds_1ds_2\right|$$

$$+ P^*_{12}k_{13}\left|\int_o^{x_2} \rho^*(x_1,s_2)ds_2\right| + P^*_{12}k_{23}\left|\int_o^{x_1} \rho^*(s_1,x_2)ds_1\right|$$

nous sommes sûrs, tout au moins pour des petites valeurs de k_3, k_{13} et k_{23}, de l'existence d'une solution de cette équation. En écrivant que ρ est proportionnel à ρ^* nous sommes amenés à écrire $\rho = \frac{1}{1-A(\rho^*)}\rho^*$ de sorte que la relation (III.B.23) sera satisfaite pour $A(\rho^*) < 1$.

Avec l'aide d'un ordinateur, il nous a été possible de déterminer une condition suffisante portant sur les constantes k_3T^2, $k_{13}T$ et $k_{23}T$ certifiant l'existence d'une solution de (III.B.23) à savoir

(III.B.25) $$0,163k_3T^2 + 0,88\ (k_{13} + k_{23})T < 1.$$

Cette dernière condition implique évidemment $k_{13}T < 2,5$ et $k_{23}T < 2,5$.

Lemme (III.B.1) :

L'équation

(III.B.26) $$\rho(x_1,x_2,x_3) = 1 + P_{12}k_o\left|\int_o^{x_1}\int_o^{x_2}\int_o^{x_3} \rho(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3\right|$$

$$+ P_{12}k_1\left|\int_o^{x_2}\int_o^{x_3}\rho(x_1,s_2,s_3)ds_2ds_3\right| + P_{12}k_2\left|\int_o^{x_1}\int_o^{x_3}\rho(s_1,x_2,s_3)ds_1ds_3\right|$$

$$+ P_{12}k_3\left|\int_o^{x_1}\int_o^{x_2}\rho(s_1,s_2,x_3)ds_1ds_3\right| + P_{12}k_{12}\left|\int_o^{x_3}\rho(x_1,x_2,s_3)ds_3\right|$$

$$+ P_{12}k_{13}\left|\int_o^{x_2}\rho(x_1,s_2,x_3)ds_2\right| + P_{12}k_{23}\left|\int_o^{x_1}\rho(s_1,x_2,x_3)ds_1\right|$$

admet une solution continue positive définie sur tout compact de la forme $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\times\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\times\left[-a,a\right]$ dès que l'hypothèse (h.B.4bis) est satisfaite.

La démonstration de ce lemme est la même que celle du lemme (III.A.3).

Théorème (III.B.3) :

Sous les hypothèses du théorème (III.B.2) et si la fonction f est lipschitzienne par rapport à la variable y :

$$|f(x,y,(z)) - f(x,\bar{y},(z))| \leq k_o|y-\bar{y}|$$

l'équation $\theta = \mathcal{F}_{12}(x,\theta)$ admet une et une seule solution. De plus, cette solution est continue par rapport aux données initiales σ^1, σ^2 et σ^3.

Démonstration :

Si $(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ et $(\bar{\sigma}^1, \bar{\sigma}^2, \bar{\sigma}^3)$ désignent deux triplets de fonctions vérifiant l'hypothèse (h.B.1), $\mathfrak{S}$ et $\bar{\mathfrak{S}}$ les solutions correspondantes de $u_{x_1x_2x_3} = 0$, on peut écrire comme dans le théorème (III.A.3)

$$\varepsilon = \sup_{A_2}\{\sum_i |\sigma^i(x)-\bar{\sigma}^i(x)| + \sum_{i,j} |\sigma^i_j(x)-\bar{\sigma}^i_j(x)| + \sum_{i,j,h} |\sigma^i_{jk}(x) - \bar{\sigma}^i_{jk}(x)|\}$$

$$|\mathfrak{S}(x) - \bar{\mathfrak{S}}(x)| \leqslant K\varepsilon$$

$$|\mathfrak{S}_i(x) - \bar{\mathfrak{S}}_i(x)| \leqslant K\varepsilon$$

$$|\mathfrak{S}_{ij}(x) - \bar{\mathfrak{S}}_{ij}(x)| \leqslant K\varepsilon.$$

Et si θ et $\bar{\theta}$ sont deux solutions de l'équation $\theta = F_{12}(x,\theta)$ nous poserons encore

$$||\theta - \bar{\theta}||(x) = k_o|B\theta(x)-B\bar{\theta}(x)|+\sum_i k_i|B^i\theta(x)-B^i\bar{\theta}(x)|+\sum_{ij} k_j|B^{ij}\theta(x)-B^{ij}\bar{\theta}(x)|$$

et $\chi(x) = P_{12}||\theta-\bar{\theta}||(x)$.

Nous avons alors :

$$|B\theta(x) - B\bar{\theta}(x)| \leqslant K\varepsilon + |\int_o^{x_1}\int_o^{x_2}\int_o^{x_3} \chi(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3|$$

$$|B^1\theta(x) - B^1\theta(x)| \leqslant K\varepsilon + |\int_o^{x_2}\int_o^{x_3}\chi(x_1,s_2,s_3)ds_2ds_3|$$

.....

$$|B^{23}\theta(x) - B^{23}\bar{\theta}(x)| \leqslant K\varepsilon + |\int_o^{x_1} \chi(s_1,x_2,x_3)ds_1|.$$

Multipliant chacune de ces relations par $k_o, k_1,\ldots,k_{23}$ et appliquant l'opérateur P_{12} nous constatons que

$$\chi(x) \leqslant K\varepsilon + P_{12}k_o|\int_o^{x_1}\int_o^{x_2}\int_o^{x_3} \chi(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3|$$

$$+ \ldots + P_{12}k_{23}|\int_o^{x_1}\chi(s_1,x_2,x_3)ds_1|.$$

Le lemme (III.B.1) permet alors de conclure l'unicité si $\varepsilon = 0$ et la continuité par rapport aux conditions initiales pour $\varepsilon > 0$.

3°) *Existence de solutions périodiques du problème initial.*

La recherche des solutions périodiques en x_1 et x_2 de l'équation (III.B.1) revient à choisir les conditions initiales assurant une solution de l'équation modifiée

$$\theta = F(x,\theta) - m_{12}(x,\theta)$$

telle que $m_{12}(x,\theta)$ soit nulle. Une réponse à ce problème peut être donnée en fixant la fonction σ^3 périodique en x_1 et x_2 de périodique T, et en déterminant les 2 autres fonctions σ^1 et σ^2 (compte tenu des relations de compatibilité σ^1_{23} et σ^2_{13}).

Pour cela nous utiliserons une généralisation du théorème des fonctions implicites de L. Cesari rappelé dans la partie précédente (th. III.A.4).

Considérons

$$H(x_3,\alpha(x_2) + \beta(x_1) - \alpha(0), z_1(x_2,t_3) + z_2(x_1,t_3) - z_1(0,t_3)\ ,\ 0 \leq t_3 < x_3)$$

une fonctionnelle à valeurs dans $\mathbb{R}^m = E$ dépendant de la variable réelle x_3, des fonctions vectorielles de $\mathbb{R}^m$

$\alpha(x_2) + \beta(x_1) - \alpha(0)$ $(\alpha(0) = \beta(0))$ et $z_1(x_2,t_3) + z_2(x_1,t_3) - z_1(0,t_3)$ (avec $z_1(0,t_3) = z_2(0,t_3)$) sur $0 \leq t_3 < x_3$.

Soient $I = \{x_3 \in R : 0 \leq x_3 < a_3\}$, $\mu(x_2) + \nu(x_1) - \mu(0)$ (avec $\mu(0) = \nu(0)$) un élément de R^m, périodique de période T en x_1 et x_2, Y_o la boule de $\mathbb{R}^m$ définie par les fonctions α, β périodiques elles aussi de période T telles que $\alpha(0) = \beta(0)$ et

$$|\alpha(x_2) + \beta(x_1) - \alpha(0) - \mu(x_2) - \nu(x_1) + \mu(0)| \leq \delta.$$

Soit enfin Z_o l'ensemble des fonctions z_{t_3} définies pour $0 \leq t_3 < a_3$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans Y_o :

$$z_{t_3}(x_1,x_2) = z_1(x_2,t_3) + z_2(x_1,t_3) - z_1(0,t_3)$$

H peut dès lors être considérée comme une fonctionnelle $H(x_3, \alpha(x_2) + \beta(x_1) - \alpha(0), z)$ pour laquelle on a :

Théorème (III.B.4) :

Avec les hypothèses

(h.B.5) La fonctionnelle $H(x_3, \alpha(x_2) + \beta(x_1) - \alpha(0), z)$ est continue bornée sur $I \times Y_o \times Z_o$ et continûment différentiable par rapport à $\alpha(x_2) + \beta(x_1) - \alpha(0)$. On notera $L(x_3, \alpha, \beta, z)$ sa différentielle.

(h.B.6) Pour $x_3 = 0$, H ne dépend pas de z : $H(0, \alpha(x_2) + \beta(x_1) - \alpha(0), .)$ il existe de plus (μ, ν), $\mu(x_2) + \nu(x_1) - \mu(0) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$H(0, \mu(x_2) + \nu(x_1) - \mu(0), .) = 0$$

$$L(0, \mu, \nu, .) \text{ inversible dans } L(Y_o, E).$$

On peut dès lors trouver des nombres $a_3' < a_3$ et $\delta_o < \delta$ positifs, et une fonction z de Z_o telle que :

$$z_o(x_1, x_2) = z_1(x_2, 0) + z_2(x_1, 0) - z_1(0,0) = \mu(x_2) + \nu(x_1) - \mu(0)$$

$$|z_1(x_2, t_3) + z_2(x_1, t_3) - z_1(0, t_3) - \mu(x_2) - \nu(x_1) + \mu(0)| \leqslant \beta_o$$

et $$H(x_3, z_{x_3}(x_1, x_2), z_{t_3}(x_1, x_2), \quad 0 \leqslant t_3 < x_3) = 0$$

Ce théorème ressemble au théorème (III.A.4) établi par L. Cesari et se démontre de la même façon.

Comme nous l'avons remarqué dans la partie précédente : si nous désignons par θ et $m = m_1 + m_2 - m_{12}$ la solution correspondante du problème modifié relatif aux données σ^1, σ^2, σ^3 et si pour x_3^o $(0 < x_3^o < a_3)$ nous modifions les fonctions σ_{23}^1 et σ_{13}^2 en leur attribuant une nouvelle expression ν et μ nous constatons que θ et m ne sont pas modifiés sur $0 \leqslant x_3 < x_3^o$ mais que par contre $B^3\theta(x_1, x_2, x_3^o) = q(x_1, x_2)$ est solution d'un problème du type :

$$
(\text{III.B.27}) \quad \left\{
\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) = F(x_1,x_2,q,\frac{\partial q}{\partial x_1},\frac{\partial q}{\partial x_2}) - m_1(x_2) - m_2(x_1) + m_{12} \\
& q(x_1,0) = \nu(x_1), \quad q(0,x_2) = \mu(x_2), \quad \mu(0) = \nu(0) \\
& m_1(x_2) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(s_1,x_2,q,\frac{\partial q}{\partial x_1},\frac{\partial q}{\partial x_2})ds_1 \\
& m_2(x_1) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(x_1,s_2,q,\frac{\partial q}{\partial x_1},\frac{\partial q}{\partial x_2})ds_2 \\
\text{et} \quad & m_{12} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(s_1,s_2,q,\frac{\partial q}{\partial x_1},\frac{\partial q}{\partial x_2})ds_1 ds_2 .
\end{aligned}
\right.
$$

Ce problème sera examiné ultérieurement, nous allons tout de suite examiner ce que deviennent les solutions θ, m du problème modifié $\theta = \mathcal{F}_{12}(x,\theta)$ (III.B.14) lorsqu'on introduit certaines discontinuités dans les fonctions σ^1_{23} et σ^2_{13}. Pour plus de précision, soit :

(h.B.17) Les fonctions σ^1, σ^2, σ^3 définies respectivement sur les ensembles $\{(x_2,x_3) : x_2 \in \mathbb{R}, \ |x_3| \leq a_3\}$, $\{(x_1,x_3) : x_1 \in R \quad |x_3| \leq a_3\}$ et $\{(x_1,x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$ sont continues ainsi que leurs dérivées partielles σ^1_2, σ^1_3, σ^2_1, σ^2_3, σ^3_1, σ^3_2, σ^3_{12} à valeurs dans E et périodiques de période T en x_1 et x_2.

De plus, ces fonctions vérifient :

$$
\begin{aligned}
\sigma^1(0,x_3) &= \sigma^2(0,x_3) && \text{si } |x_3| \leq a_3 \\
\sigma^2(x_1,0) &= \sigma^3(x_1,0) && \text{si } x_1 \in \mathbb{R} \\
\sigma^3(0,x_2) &= \sigma^1(x_2,0) && \text{si } x_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Enfin les dérivées σ^1_{23} et σ^2_{13} présentent des points de discontinuité de première espèce avec

$$\sigma^1_{23}(x_2,\xi_3^{q_3}-0) = \sigma^1_{23}(x_2,\xi_3^{q_3}) \neq \sigma^1_{23}(x_2,\xi_3^{q_3}+0)$$

$$\sigma^2_{13}(x_1,\xi_3^{q_3}-0) = \sigma^2_{13}(x_1,\xi_3^{q_3}) \neq \sigma^2_{13}(x_1,\xi_3^{q_3}+0)$$

et $\quad |\sigma^1_{23}(x_2,x_3) - \sigma^1_{23}(\bar{x}_2,\bar{x}_3)| \leq \ell_1|x_2-\bar{x}_2| + \ell'_1|x_3-\bar{x}_3|$ pour

$$x_2 \in \mathbb{R} \qquad \xi_3^{q_3} \leq x_3,\ \bar{x}_3 \leq \xi_3^{q_3+1}$$

$|\sigma^2_{13}(x_1,x_3) - \sigma^2_{13}(\bar{x}_1,\bar{x}_3)| \leq \ell_2|x_1-\bar{x}_1| + \ell'_2|x_3-\bar{x}_3|$ pour

$$x_1 \in \mathbb{R} \qquad \xi_3^{q_3} \leq x_3,\ \bar{x}_3 \leq \xi^{q_3+1}$$

et $\quad |\sigma^3_{12}(x_1,x_2) - \sigma^3_{12}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)| \leq \ell_3|x_1-\bar{x}_1| + \ell'_3|x_2-\bar{x}_2|$ sur $\mathbb{R}^2$.

Comme l'hypothèse (h.B.1) cette hypothèse définit une fonction $\mathcal{S}$ de $C(A_2)$ solution de $\mathcal{S}_{x_1x_2x_3} = 0$. Soient N, N_1, N_3, N_{12}, N_{13}, N_{23} des constantes positives ou nulles telles que :

$$|\mathcal{S}| \leq N \qquad |\mathcal{S}_1| \leq N_1 \qquad |\mathcal{S}_2| \leq N_2 \qquad |\mathcal{S}_3| \leq N_3$$

$$|\mathcal{S}_{1,2}| \leq N_{12} \qquad |\mathcal{S}_{1,3}| \leq N_{13} \qquad |\mathcal{S}_{2,3}| \leq N_{23}.$$

(h.B.8) La fonction f : $f(x_1,x_2,x_3,y,z_1,z_2,z_3,z_{12},z_{13},z_{23})$ est définie et continue sur

$\mathcal{B} = \{(x,y,z) \in R^{3+7m} \quad x \in A_2,\ |y| \leq M,\ |z_i| \leq M_i,\ \ |z_{ij}| \leq M_{ij}$

à valeurs dans E et périodique en x_1 et x_2 de période T.

De plus, f est lipschitzienne :

$$|f(x,y,z) - f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})| \leq k|x-\bar{x}| + k_o|y-\bar{y}| + \sum_i k_i|z_i-\bar{z}_i| + \sum_{i<j} k_{ij}|z_{ij}-\bar{z}_{ij}|$$

Cette hypothèse entraîne l'existence de $L = \sup\limits_{\mathcal{B}} |f(x,y,z)|$.

(h.B.9) Les constantes L, M, M_i, M_{ij}, N, N_i et N_{ij} vérifient les inégalités :

$$\begin{cases} 2LT^2a_3 + N \leq M \\ 4LTa_3 + N_1 \leq M_1 \\ 4LTa_3 + N_2 \leq M_2 \\ LT^2 + N_3 \leq M_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8La_3 + N_{12} \leq M_{12} \\ 2LT + N_{23} \leq M_{23} \\ 2LT + N_{13} \leq M_{13} \end{cases}$$

Théorème (III.B.5) :

Sous les hypothèses (h.B.4bis, 7, 8, 9) l'équation

$$\theta = F_{12}(x,\theta) = F(x,\theta) - m_1(x_2,x_3,\theta) - m_2(x_1,x_3,\theta) + m_{12}(x_3,\theta)$$

admet au moins une solution dans $C(A_2)$ lipschitzienne. (La constante de Lipschitz est indépendante du nombre des points de discontinuité et de leur position). Cette solution est unique et dépend continûment des conditions initiales.

La démonstration de ce théorème suit le schéma de celle de L. Cesari [3] ou du théorème (III.A.5,6).

Ce résultat étant acquis, nous entreprenons l'examen du problème aux dérivées partielles associé (III.B.27).

Cette étude améliorera les résultats de L. Cesari [2] et complète ceux de A.K. Aziz et J.P. Maloney [1].

Proposition (III.B.1) :

Avec les hypothèses suivantes :

(h.B.10) Les constantes positives N_{13}, N_{23}, N_3, L, T, M_3, M_{13}, M_{23} k_{13} et k_{23} vérifient les relations :

$$LT^2 + N_3 \leq M_3 \qquad 2LT + N_{13} \leq M_{13} \qquad 2LT + N_{23} \leq M_{23}$$

$$2Tk_{23} < 5{,}02 \qquad 2Tk_{13} < 5{,}02$$

(h.B.11) Les fonctions α, β : $\alpha(x_2)$, $\beta(x_1)$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans E, ainsi que leurs dérivées α' et β' et sont de plus périodiques de même période T, avec

$$\alpha(0) = \beta(0) \qquad |\alpha(x_2) + \beta(x_1) - \alpha(0)| \leq N_{13}$$

$$|\alpha'(x_2)| \leq N_{13} \qquad |\beta'(x_1)| \leq N_{23}.$$

(h.B.12) La fonction $F : F(x_1,x_2,q,q_1,q_2)$ est définie et continue sur A_2', à valeurs dans E, périodique de période T en x_1 et x_2, bornée par L et vérifiant sur

$$A_2' = \{(x_1,x_2,q,q_1,q_2) : (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \ |q| \leqslant M_3, \ |q_1| \leqslant M_{13}, \ |q_2| \leqslant M_{23}\}$$

$$|F(x_1,x_2,q,q_1,q_2) - F(x_1,x_2,q,\bar{q}_1,\bar{q}_2)| \leqslant k_{13}|q_1-\bar{q}_1| + k_{23}|q_2-\bar{q}_2|.$$

L'équation (III.B.27) admet une solution définie sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans E, périodique en x_1 et x_2 de période T.

Démonstration :

La démonstration est analogue à celle de A.K. Aziz et J.P. Maloney [1].

Proposition (III.B.2) :

Sous les hypothèses de la proposition (III.B.1), si la fonction F vérifie la condition supplémentaire :

$$|F(x_1,x_2,q,q_1,q_2) - F(x_1,x_2,\bar{q},q_1,q_2)| \leqslant k_3|q-\bar{q}|$$

et si les constantes k_3, k_{13} et k_{23} vérifient l'hypothèse (h.B.4bis).

L'équation (III.B.27) possède une et une seule solution dépendant continûment des conditions initiales μ et ν.

Démonstration :

Elle est calquée sur celle de la proposition (III.A.2) et repose sur l'hypothèse (h.B.4bis) plus précisément sur la relation (III.B.23) satisfaite pour $0,163\ k_3T^2 + 0,88(k_{13}+k_{23})\ T < 1$.

Remarque :

La solution de l'équation précédente peut être obtenue par approximations successives. Posons :

$$q_o(x_1,x_2) = \alpha(x_2) + \beta(x_1) - \alpha(0)$$

$$q_n(x_1,x_2) = q_o(x_1,x_2) + \int_o^{x_1}\int_o^{x_2}[F_{n-1}(s_1,s_2) - m_{(n-1)}(s_1,s_2)]\, ds_1 ds_2$$

pour $n > 0$ avec

$$F_{n-1}(s_1,s_2) = F(s_1,s_2,q_{n-1}(s_1,s_2), \frac{\partial q_{n-1}}{\partial x_1}(s_1,s_2), \frac{\partial q_{n-1}}{\partial x_2}(s_1,s_2))$$

$$m_{(n-1)}(s_1,s_2) = \frac{1}{T}\int_o^T F_{n-1}(s_1,s_2)ds_1 + \frac{1}{T}\int_o^T F_{n-1}(s_1,s_2)ds_2 - \frac{1}{T^2}\int_o^T\int_o^T F_{n-1}(s_1,s_2)ds_1ds_2$$

Soit χ_n la fonction définie par :

$$\chi_n(x_1,x_2) = P_{12}\{k_3|q_n-q_{n-1}|(x_1,x_2) + k_{13}\,|\frac{\partial q_n}{\partial x_1} - \frac{\partial q_n}{\partial x_1}|\,(x_1,x_2) + k_{23}|\frac{\partial q_n}{\partial x_2} - \frac{\partial q_n}{\partial x_2}|(x_1,x_2)\}$$

nous en déduisons tout d'abord :

$$|F_n(s_1,s_2) - m_{(n)}(s_1,s_2) - F_{n-1}(s_1,s_2) + m_{(n-1)}(s_1,s_2)| \leq \chi_n(s_1,s_2)$$

puis

$$|q_n(x_1,x_2) - q_{n-1}(x_1,x_2)| \leq |\int_o^{x_1}\int_o^{x_2}\chi_{n-1}(s_1,s_2)ds_1ds_2|$$

$$|\frac{\partial q_n}{\partial x_1}(x_1,x_2) - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial x_1}(x_1,x_2)| \leq |\int_o^{x_2}\chi_{n-1}(x_1,s_2)ds_2|$$

$$|\frac{\partial q_n}{\partial x_2}(x_1,x_2) - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial x^2}(x_1,x_2)| \leq |\int_o^{x_1}\chi_{n-1}(s_1,x_2)ds_1|\,.$$

Multipliant ces trois inégalités respectivement par k_3, k_{13} et k_{23} et appliquant l'opérateur P_{12} nous pouvons écrire :

$$\chi_n(x_1,x_2) \leqslant k_3\, P_{12}\left|\int^{x_1}\!\!\int^{x_2} \chi_{n-1}(s_1,s_2)ds_1ds_2\right|$$

$$+ k_{13}P_{12}\left|\int_o^{x_2} \chi_{n-1}(x_1,s_2)ds_2\right|$$

$$+ k_{23}P_{12}\left|\int_o^{x_1} \chi_{n-1}(s_1,x_2)ds_1\right|.$$

Il nous reste à choisir une norme assurant la convergence de la suite χ_n. Pour cela nous considérons la fonction ρ : $\rho(x_1,x_2,k_3',k_{13}',k_{23}')$ solution de l'équation semblable à (III.B.23)

$$\rho(x_1,x_2) = 1 + P_{12}\ k_3'\left|\int_o^{x_1}\!\!\int_o^{x_2} \rho(s_1,s_2)ds_1ds_2\right|$$

$$+ P_{12}\ k_{13}'\left|\int_0^{x_2} \rho(x_1,s_2)ds_2\right| + P_{12}\ k_{23}'\left|\int_o^{x_1}\rho(s_1,x_2)ds_1\right|$$

dans laquelle les constantes k_3', k_{13}' et k_{23}' sont respectivement égales à $k_3(1+\gamma)$, $k_{13}(1+\gamma)$ et $k_{23}(1+\gamma)$. En prenant γ suffisamment petit mais positif pour assurer la définition de la fonction ρ et en posant

$$||\chi||_\rho = \sup_{\substack{|x_1|\leqslant T/2\\ |x_2|\leqslant T/2}} \{|\chi(x_1,x_2)|\rho^{-1}(x_1,x_2)\}$$

nous obtenons $||\chi_n||_\rho \leqslant \dfrac{1}{1+\gamma}\ ||\chi_{n-1}||_\rho$

c'est-à-dire $||\chi_{n+1}||_\rho \leqslant (\dfrac{1}{1+\gamma})^n||\chi_1||_\rho$ et $\lim\limits_{n\to\infty} ||\chi_n||_\rho = 0$.

Proposition (III.B.3) :

Avec les hypothèses de la proposition (III.B.2), si la fonction F est continûment différentiable par rapport à q, q_1 et q_2 la fonction $(\alpha,\beta) \to m_1 + m_2 - m_{12}$ est différentiable au sens de Fréchet.

Démonstration :

Désignons par $(\bar{q},m)$ $m = m_1 + m_2 - m_{12}$ le couple solution (III.B.28) de (III.B.27) correspondant aux conditions initiales (α,β) et $(\bar{q} + \Delta q, m + \Delta m)$ celui correspondant au couple $(\alpha + \Delta\alpha,\ \beta + \Delta\beta)$.

Nous avons :

$$\Delta q(x_1,x_2) = \Delta\alpha(x_2) + \Delta\beta(x_1) - \Delta\alpha(0) +$$

$$\int_o^{x_1}\int_o^{x_2}\Big[F(s_1,s_2,\bar{q}+\Delta q,\bar{q}_x+(\Delta q)_x,\bar{q}_y+(\Delta q)_y) - F(s_1,s_2,\bar{q},\bar{q}_x,\bar{q}_y)$$

$$- \Delta m(s_1,s_2)\Big]ds_1 ds_2$$

avec $\Delta m = \Delta m_1 + \Delta m_2 - \Delta m_{12}$

$$\Delta m_1(x_2) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\{F(s_1,x_2,\bar{q} + \Delta q,\bar{q}_x+(\Delta q)_x,\bar{q}+(\Delta q)_y)-F(s_1,x_2,\bar{q},\bar{q}_x,\bar{q}_y)\}ds_1$$

$$\Delta m_2(x_1) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\{F(x_1,s_2,\bar{q}+\Delta q,\bar{q}_x+(\Delta q)_x,\bar{q}+(\Delta q)_y)-F(x_1,s_2,\bar{q},\bar{q}_x,\bar{q}_y)\}ds_2$$

$$\Delta m_{12} = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\Delta m_1(s_2)ds_2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\Delta m_2(s_1)ds_1 .$$

La fonction F étant de classe C_1 on peut écrire :

$$F(x_1,x_2,\bar{q} + \Delta q,\bar{q}_x + (\Delta q)_x,\bar{q}_y + (\Delta q)_y) - F(x_1,x_2,\bar{q},\bar{q}_x,\bar{q}_y) =$$

$$A(x_1,x_2,\bar{q})\Delta q + B(x_1,x_2,\bar{q})(\Delta q)_1 + C(x_1,x_2,\bar{q})(\Delta q)_2 + \varepsilon(x_1,x_2,\bar{q},\Delta q),$$

avec

$$A(x_1,x_2,\bar{q}) = \frac{\partial F}{\partial q}\,(x_1,x_2,\bar{q}(x_1,x_2),\ \frac{\partial\bar{q}}{\partial x_1}\,(x_1,x_2),\ \frac{\partial\bar{q}}{\partial x_2}\,(x_1,x_2))$$

$$B(x_1,x_2,\bar{q}) = \frac{\partial F}{\partial q_1}\,(x_1,x_2,\bar{q}(x_1,x_2),\ \frac{\partial\bar{q}}{\partial x_1}\,(x_1,x_2),\ \frac{\partial\bar{q}}{\partial x_2}\,(x_1,x_2))$$

$$C(x_1,x_2,\bar{q}) = \frac{\partial F}{\partial q_2}\,(x_1,x_2,\bar{q}(x_1,x_2),\ \frac{\partial\bar{q}}{\partial x_1}\,(x_1,x_2),\ \frac{\partial\bar{q}}{\partial x_2}\,(x_1,x_2)).$$

En désignant par $\tilde{F}(x_1,x_2,q,q_1,q_2)$ la fonction définie à partir de l'expression linéaire :

$$\tilde{F}(x_1,x_2,q,q_1,q_2) = A(x_1,x_2,\bar{q})q + B(x_1,x_2,\bar{q})q_1 + C(x_1,x_2,\bar{q})q_2$$

nous voyons que $\tilde{F}$ vérifie les conditions de la proposition (III.B.1) de sorte que l'on peut affirmer l'existence d'une solution $\tilde{\Delta q}$ linéaire et continue par rapport aux conditions initiales $(\Delta\alpha,\Delta\beta)$ $\Delta\alpha(0) = \Delta\beta(0)$

(III.B.29)
$$\Delta\tilde{q}(x_1,x_2) = \Delta\alpha(x_2) + \Delta\beta(x_1) - \Delta\alpha(0) + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\left[\tilde{F}(s_1,s_2,\Delta\tilde{q}(s_1,s_2),(\Delta\tilde{q})_{x_1}(s_1,s_2),(\Delta\tilde{q})_{x_2}(s_1,s_2)) - \Delta\tilde{m}(s_1,s_2)\right]ds_1ds_2$$

avec

(III.B.29bis
$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{m}(x_1,x_2) &= \Delta\tilde{m}_1(x_2) + \Delta\tilde{m}(x_1) - \Delta\tilde{m}_{12} : \\
\Delta\tilde{m}_1(x_2) &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\{\tilde{F}(s_1,x_2,\Delta\tilde{q}(s_1,x_2),(\Delta\tilde{q})_{x_1}(s_1,x_2),(\Delta\tilde{q})_{x_2}(s_1,x_2)\}ds_1 \\
\Delta\tilde{m}_2(x_1) &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\{\tilde{F}(x_1,s_2,\Delta\tilde{q}(x_1,s_2),(\Delta\tilde{q})_{x_1}(x_1,s_2),(\Delta\tilde{q})_{x_2}(x_1,s_2)\}ds_2 \\
\Delta\tilde{m}_{12} &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\Delta\tilde{m}_1(s_2)ds_2.
\end{aligned}$$

Pour établir que $(\Delta\alpha,\Delta\beta) \to (\Delta\tilde{q},\Delta\tilde{m})$ est la différentielle cherchée il suffit de montrer que $\Delta\tilde{q} - \Delta q$ tend vers 0 plus vite que $\Delta\alpha,\Delta\beta$.

Posons $w(x_1,x_2) = \Delta q(x_1,x_2) - \Delta\tilde{q}(x_1,x_2)$

[Δq : (III.B.28) $\Delta\tilde{q}$: III.B.29)]

Nous aurons $w(x_1,0) = w(0,x_2) = 0$ et

$$w_{x_1x_2} = Aw + Bw_{x_1} + Cw_{x_2} + \varepsilon(x_1,x_2,\bar{q},\Delta\tilde{q} + w) - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} Aw + Bw_{x_1} + Cw_{x_2} + \varepsilon(\quad)ds_1$$
$$- \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} Aw + Bw_{x_1} + Cw_{x_2} + \varepsilon(\quad)ds_2 + \frac{1}{T^2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} Aw + Bw_{x_1} + Cw_{x_2} + \varepsilon(\quad)ds_1ds_2$$

Majorant ε (par l'utilisation du fait que F est différentiable), nous pourrons en déduire une majoration de $w_{x_1x_2}$ grâce à l'hypothèse (h.B.4bis) de la forme

$$w_{x_1x_2}(x_1,x_2) \leq ||\Delta\tilde{q} + w||\eta\ \rho(x_1,x_2)$$

(ρ solution de III.B.23). Cette dernière relation permet d'établir que w tend vers 0 plus vite que $\Delta\tilde{q}$ et donc que $\Delta\alpha,\Delta\beta$.

Proposition (III.B.4) :

Moyennant les hypothèses de la proposition (III.B.3) la différentielle de la fonction $(\alpha,\beta) \to m_1 + m_2 - m_{12}$ est en fait continue par rapport aux conditions initiales α,β.

Démonstration :

Soient (α,β) et $(\bar{\alpha},\bar{\beta})$ des conditions initiales voisines (q,m) et $(\bar{q},\bar{m})$ les solutions de l'équation (III.B.27) correspondantes, nous posons alors

$$A(x_1,x_2,q) = F_q(x_1,x_2,q(x_1,x_2), \frac{\partial q}{\partial x}(x_1,x_2), \frac{\partial q}{\partial y}(x_1,x_2))$$
$$\bar{A}(x_1,x_2,\bar{q}) = F_q(x_1,x_2,\bar{q}(x_1,x_2), \frac{\partial \bar{q}}{\partial x}(x_1,x_2), \frac{\partial \bar{q}}{\partial y}(x_1,x_2))$$

puis des expressions analogues pour B, $\bar{B}$, C et $\bar{C}$.

On aura :

$$\Delta\tilde{q}(x_1,x_2) = \Delta\alpha(x_2) + \Delta\beta(x_1) - \Delta\beta(0)$$
$$+ \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} \left[A\Delta\tilde{q} + B(\Delta\tilde{q})_{x_1} + C(\Delta\tilde{q})_{x_2} - \Delta\tilde{m}\right] ds_1 ds_2$$

$$\Delta\tilde{\bar{q}}(x_1,x_2) = \Delta\alpha(x_2) + \Delta\beta(x_1) - \Delta\beta(0)$$
$$+ \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} \left[\bar{A}\Delta\tilde{\bar{q}} + \bar{B}(\Delta\tilde{\bar{q}})_{x_1} + \bar{C}(\Delta\tilde{\bar{q}})_{x_2} - \Delta\tilde{\bar{m}}\right] ds_1 ds_2$$

d'où $$\Delta\tilde{q}_{x_1x_2} - \Delta\tilde{\bar{q}}_{x_1x_2} = A(\Delta\tilde{q} - \Delta\tilde{\bar{q}}) + B(\Delta\tilde{q} - \Delta\tilde{\bar{q}})_{x_1} + C(\Delta q - \Delta\tilde{\bar{q}})_{x_2}$$
$$+ (\bar{A} - A)\Delta\tilde{\bar{q}} + (\bar{B} - B)(\Delta\tilde{\bar{q}})_{x_1} + (\bar{C} - C)(\Delta\tilde{\bar{q}})_{x_2}$$
$$+ \Delta\tilde{\bar{m}} - \Delta\tilde{m}.$$

On utilise alors le fait que si α et $\bar{\alpha}$ sont suffisamment proches ainsi que β et $\bar{\beta}$, A et $\bar{A}$, B et $\bar{B}$, C et $\bar{C}$ sont peu différents.

On obtient alors une majoration pour $\Delta\tilde{q}_{x_1x_2} - \Delta\tilde{\bar{q}}_{x_1x_2}$ et donc pour $\Delta\tilde{q} - \Delta\tilde{\bar{q}}$, ceci montre la continuité de la différentielle $(\alpha,\beta) \to \Delta\tilde{q}$ et donc celle de $(\alpha,\beta) \to \Delta\tilde{m}$.

Remarque :

Dans le cas où E est de dimension 1, on peut essayer de traduire la nullité de la différentielle (ce qui correspond au fait que toutes les solutions de $\Delta q_{x_1,x_2} = A\Delta q + B(\Delta q)_{x_1} + C(\Delta q)_{x_2}$ sont périodiques).

On écrit que pour tout couple (α,β) la solution du problème

(III.B.30) $$\begin{cases} z(x,0) = \beta(x), \quad z(0,y) = \alpha(y), \quad \alpha(0) = \beta(0) \\ z_{xy} = A(x,y)z + B(x,y)z_x + C(x,y)z_y \end{cases}$$ est périodique en x et y.

Désignons par $\mathcal{R}$ la fonction de Riemann associée à l'équation

(III.B.30) $$z_{xy} - B\,z_x - C\,z_y - A\,z = 0$$

On peut écrire

$$z(\xi,\eta) = \alpha(0)\,\mathcal{R}(0,0,\xi,\eta) + \int_0^\eta \mathcal{R}(0,t,\xi,\eta)\left[\beta'(t) - B(0,t)\beta(t)\right]dt$$
$$+ \int_0^\xi \mathcal{R}(s,0,\xi,\eta)\left[\alpha'(s) - C(s,0)\alpha(s)\right]ds.$$

La condition que z est périodique en ξ de période T s'écrit

$z(\xi + T,\eta) = z(\xi,\eta)$ soit :

$$0 = \alpha(0)\left[\mathcal{R}(0,0,\xi+T,\eta) - \mathcal{R}(0,0,\xi,\eta)\right] + \int_0^\eta \left[\mathcal{R}(0,t,\xi+T,\eta) - \mathcal{R}(0,t,\xi,\eta)\right]$$
$$\left[\beta'(t) - B(0,t)\beta(t)\right]dt \; +$$

$$+ \int_{o}^{\xi+T} R(s,0,\xi+T,\eta)\left[\alpha'(s)-C(s,0)\alpha(s)\right]ds - \int_{o}^{\xi} R(s,0,\xi,\eta)\left[\alpha'(s)-C(s,0)\alpha(s)\right]ds.$$

Ceci ayant lieu pour toutes les données initiales, d'où

$$R(0,t,\xi+T,\eta) \equiv R(0,t,\xi,\eta) \quad \text{sur} \quad t \in [0,\eta].$$

Mais comme $R(0,\eta,\xi,\eta) = \exp(-\int_{\xi}^{o} C(s,\eta)ds)$, on voit que

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} C(s,\eta)ds \equiv 0.$$

La condition de périodicité en y s'écrit de la même manière et on est amené aux conditions : $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} C(s,\eta)ds \equiv \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} B(\xi,t)dt \equiv 0$

puis à

$$R(0,t,\xi,\eta+T) \equiv R(0,t,\xi+T,\eta) \equiv R(0,t,\xi,\eta) \quad \text{si} \quad t \in [0,\eta]$$

$$R(s,0,\xi,\eta+T) \equiv R(s,0,\xi,\eta+T) \equiv R(s,0,\xi,\eta) \quad \text{si} \quad s \in [0,\xi]$$

$$\int_{\xi}^{\xi+T} R(s,0,\xi,\eta)\left[\alpha'(s) - C(s,0)\alpha(s)\right]ds = 0$$

$$\int_{\eta}^{\xi+T} R(0,t,\xi,\eta)\left[\beta'(t) - B(0,t)\beta(t)\right]dt = 0.$$

Les deux dernières relations peuvent s'interpréter comme suit :
En désignant par l'ensemble des fonctions périodiques de période T définies et continues ainsi que leurs dérivées. L'équation $\alpha'(s) - C(s,0)\alpha(s) = \gamma(s)$ admet une solution dans X pourvu que γ vérifie
$\int_{\xi}^{\xi+T} \gamma(s)\exp(-\int_{o}^{s} C(s',0)ds')ds = 0$, d'où l'on déduit que

$$R(s,0,\xi,\eta) = \lambda(\xi,\eta)\exp(-\int_{o}^{s} C(s',0)ds')$$

c'est-à-dire compte tenu de $R(\xi,0,\xi,\eta) = \exp\{-\int_{\eta}^{o} B(\xi,t)dt\}$

$$R(s,0,\xi,\eta) = \exp\{\int_{o}^{\eta} B(\xi,t)dt + \int_{s}^{\xi} C(s',0)ds'\}$$

et

$$\mathcal{R}(0,t,\xi,\eta) = \exp\{\int_0^\xi C(s,\eta)ds + \int_t^\eta B(0,t')dt'\}.$$

L'égalité

$$\mathcal{R}(0,0,\xi,\eta) = \mathcal{R}(0,0,\xi,\eta) \quad \text{conduit à}$$

$$C(s,\eta) = C(s,0) \quad \text{pour tout} \quad \eta$$

$$B(\xi,t) = B(0,t) \quad \text{pour tout} \quad \xi.$$

Un raisonnement fait à partir d'un point (x,y) quelconque donne

$$\mathcal{R}(x,y,\xi,\eta) = \exp\{\int_y^\eta B(0,t)dt + \int_x^\xi C(s,0)ds\}$$

et comme $\mathcal{R}$ désigne une fonction de Riemann

on a $\mathcal{R}_{xy} + (B\mathcal{R})_x + (C\mathcal{R})_y - A\mathcal{R} = 0$ c'est-à-dire

$$A(x,y) + B(0,y) \cdot C(x,0) = 0.$$

La différentielle est nulle lorsque les fonctions A, B, C vérifient les relations

$$\text{(III.B.31)} \qquad \begin{cases} A(x,y) + B(0,y) \cdot C(x,0) = 0 \\ B(x,y) = B(0,y) \quad \text{avec} \quad \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} B(0,y)dy = 0 \\ C(x,y) = C(x,0) \quad \text{avec} \quad \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} C(x,0)dx = 0 \end{cases}$$

Pour conclure cette partie, nous allons énoncer le théorème d'existence des solutions périodiques :

(h.B.12) La fonction $\sigma^3 : \sigma^3(x_1,x_2)$ définie sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans E est périodique en x_1 et x_2 de période T, continue ainsi que ses dérivées partielles σ^3_1, σ^3_2 et σ^3_{12} avec en plus

$$|\sigma^3_{12}(x_1,x_2) - \sigma^3_{12}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)| \leq \ell_3|x_1-\bar{x}_1| + \ell'_3|x_2-\bar{x}_2|.$$

Cette hypothèse permet de définir des constantes positives ou nulles telles que si $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$|\sigma^3_{12}(x_1,x_2)| \leqslant n \qquad |\sigma^3_2(x_1,x_2)| \leqslant n_2$$

$$|\sigma^3_1(x_1,x_2)| \leqslant n_1 \qquad |\sigma^3_{12}(x_1,x_2)| \leqslant n_{12}.$$

(h.B.13) La fonction $f : f(x_1,x_2,x_3,y,z_1,z_2,z_3,z_{12},z_{13},z_{23})$ est définie et continue sur

$\mathcal{B} = \{(x,y,z) \in R^{3+7m} : x \in A_2,\ |y| \leqslant M,\ |z_i| \leqslant M_i,\ |z_{ij}| \leqslant M_{ij}\}$

à valeurs dans E et périodique en x_1 et x_2 de période T.

De plus f est lipschitzienne

$$|f(x,y,z) - f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})| \leqslant k|x-\bar{x}| + k_o|y-\bar{y}| + \sum_i k_i|z_i-\bar{z}_i| + \sum_{i<j} k_{ij}|z_{ij}-\bar{z}_{ij}|$$

et $L = \sup_{\mathcal{B}} |f(x,y,z)|$.

(h.B.14) Les constantes L, M, M_i, M_{ij}, n, n_i n_{ij} satisfont les relations

$n < M, \qquad n_1 < M_1, \qquad n_2 < M_2, \qquad LT^2 < M_3$

$LT < M_{13} \qquad LT < M_{23}, \qquad n_{12} < M_{12}.$

Les constantes k_{23}, k_{13} et k_3 vérifient l'hypothèse (h.B.4bis).

Soit alors la fonction construite à partir des fonctions f et σ^3 :

$$F(x_1,x_2,q,q_1,q_2) = f(x_1,x_2,0,\sigma^3(x_1,x_2)\ ,\ \sigma^3_1(x_1,x_2),\sigma^3_2(x_1,x_2),q,\sigma^3_{12}(x_1,x_2),q_1,q_2).$$

(h.B.15) Il existe deux fonctions μ et ν définies sur R, à valeurs dans E periodiques de période T telles que

$$\mu(0) = \nu(0) \qquad |\mu(x_2) + \nu(x_1) - \mu(0)| \leqslant M_3 - LT^2$$

$$|\mu'(x_2)| \leqslant N_{13}-LT \qquad |\nu'(x_1)| \leqslant N_{23}-LT$$

$$q_{x_1x_2} = F(x_1,x_2,q,q_{x_1},q_{x_2}) \qquad q(x_1,0) = \nu(x_1), \qquad q(0,x_2) = \mu(x_2)$$

admette une solution $\bar{q}$ périodique en x_1 et x_2 de période T. De plus, la différentielle de l'application $(\alpha,\beta) \to m$ relative à l'équation aux variations

$$w_{x_1x_2} = F_q(x_1,x_2,\bar{q},\bar{q}_{x_1},\bar{q}_{x_2})w + F_{q_1}(x_1,x_2,\bar{q},\bar{q}_{x_1},\bar{q}_{x_2})w_{x_1} + F_{q_2}(x_1,x_2,\bar{q},\bar{q}_{x_1},\bar{q}_{x_2})w_{x_2}$$

est supposée inversible.

Théorème (III.B.6) :

Avec les hypothèses (h.B.12, 13, 14, 15) on peut trouver un nombre $a > 0$, un ensemble $A_2' = \{x \in A_2 : |x_3| \leq a\}$ deux fonctions $z_1(x_2,x_3)$ et $z_2(x_1,x_3)$ périodiques en x_1 et x_2 telles que :

$$z_1(x_2,0) = \mu(x_2) \qquad z_2(x_1,0) = \nu(x_1)$$
$$z_1(0,x_3) = z_2(0,x_3)$$

$$|z_1(x_2,x_3) - z_1(\bar{x}_2,\bar{x}_3)| \leq \ell(|x_2-\bar{x}_2| + |x_3-\bar{x}_3|)$$

$$|z_2(x_1,x_3) - z_2(\bar{x}_1,\bar{x}_3)| \leq \ell(|x_1-\bar{x}_1| + |x_3-\bar{x}_3|)$$

et une fonction ϕ définie et continue sur A_2' périodique en x_1 et x_2 de période T telle que

$$\phi_{x_1x_2x_3} = f(x_1,x_2,x_3,\phi,\phi_{x_1},\phi_{x_2},\phi_{x_3},\phi_{x_1x_2},\phi_{x_1x_3},\phi_{x_2x_3})$$

$$\phi(x_1,x_2,0) = \sigma^3_{12}(x_1,x_2), \quad \phi(x_1,0,x_3) = z_2(x_1,x_3)$$

$$\phi(0,x_2,x_3) = z_1(x_2,x_3).$$

De plus, les fonctions z_1 et z_2 sont définies d'une manière unique et dépendent continûment de la condition initiale σ^3.

La démonstration de ce théorème ressemble à celle du théorème (III.A.7). Elle repose sur les propriétés de la fonctionnelle $H(x_3,\alpha(x_2) + \beta(x_1) - \alpha(0),z)$.

C - PERIODICITE PAR RAPPORT AUX TROIS VARIABLES.

Dans cette partie A_3 désignera en fait $\mathbb{R}^3$ et $C(A_3)$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur A_3 périodiques en x_1, x_2 et x_3 de même période T, à valeurs dans $E = R^m$ muni de la norme de la convergence uniforme :

$$|\theta| = \sup|\theta(x)|.$$

Faisons l'hypothèse :

(h.C.1) Les fonctions $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ définies sur $\mathbb{R}^2$ sont continues ainsi que leurs dérivées σ^1_2, σ^1_3, σ^1_{23}, σ^2_1, σ^2_3, σ^2_{13}, σ^3_1, σ^3_2 et σ^3_{12}, à valeurs dans E et périodiques de même période T en x_1, x_2 et x_3. De plus, sur $\mathbb{R}$ les fonctions σ^1, σ^2, σ^3 satisfont aux relations :

$$\sigma^1(0,x_3) = \sigma^2(0,x_3) \qquad \sigma^1(x_2,0) = \sigma^3(0,x_2)$$

$$\sigma^2(x_1,0) = \sigma^3(x_1,0).$$

Cette hypothèse définit comme l'hypothèse (h.A.1 ou B.1) une fonction $\mathfrak{S}$ de $C(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $\mathfrak{S}_{x_1x_2x_3} = 0$

$$\mathfrak{S}(x_1,x_2,0) = \sigma^3(x_1,x_2) \qquad \mathfrak{S}(x_1,0,x_3) = \sigma^2(x_1,x_3)$$

$$\mathfrak{S}(0,x_2,x_3) = \sigma^1(x_2,x_3)$$

et nous noterons encore par N, N_i, N_{ij} les bornes de $\mathfrak{S}$ et de ses dérivées :

$$|\mathfrak{S}| \leqslant N, \qquad |\mathfrak{S}_i| \leqslant N_i, \qquad |\mathfrak{S}_{ij}| \leqslant N_{ij} \qquad i \neq j \in \{1,2,3\}.$$

Soit B_3 le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{3+7m}$ défini à partir des constantes positives M, M_i, M_{ij}

$$B_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{3+7m},\ x \in \mathbb{R}^3,\ |y| \leqslant M,\ |z_i| \leqslant M_i,\ \ |z_{ij}| \leqslant M_{ij}\}.$$

(h.C.2) La fonction $f : f(x_1,x_2,x_3,y,z_1,z_2,z_3,z_{12},z_{13},z_{23})$ est définie et continue sur $\mathcal{B}_3$ à valeurs dans E et périodique en x_1, x_2 et x_3 de période T.

(h.C.3) Les constantes L, M, M_i, M_{ij}, N, N_i, N_{ij}, T vérifient les inégalités :

(III.C.1)
$$\begin{gathered} LT^3 + N \leq M \\ 2LT^2 + N_1 \leq M_1, \quad 2LT^2 + N_2 \leq M_2, \quad 2LT^2 + N_3 \leq M_3 \\ 4LT + N_{12} \leq M_{12}, \quad 4LT + N_{13} \leq M_{13}, \quad 4LT + N_{23} \leq M_{23} \end{gathered}$$

Cette hypothèse permet de définir pour $\theta \in C(\mathcal{A}_3)$ la fonction $\mathcal{F}$:

(III.C.2) $$\mathcal{F}(x,\theta) = f(x_1,x_2,x_3,B\theta(x),B^1\theta(x),B^2\theta(x),B^3\theta(x),B^{12}\theta(x),B^{13}\theta(x),B^{23}\theta(x))$$

où les B, B^i et B^{ij} ont la même signification que dans les relations (III.A.5.6,...,11).

De même que dans les relations (III.B.11, 12, 13, 14) nous pouvons écrire :

(III.C.3) $$m_3(x_1,x_2,\theta) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{F}(x_1,x_2,s_3,\theta)ds_3$$

(III.C.4) $$m_{13}(x_2,\theta) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{F}(s_1,x_2,s_3,\theta)ds_1ds_3$$

(III.C.5) $$m_{23}(x_1,\theta) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{F}(x_1,s_2,s_3,\theta)ds_2ds_3$$

(III.C.6) $$m_{123}(\theta) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{F}(s_1,s_2,s_3,\theta)ds_1ds_2ds_3$$

enfin

(III.C.7) $$\begin{aligned} \mathcal{F}_{123}(x,\theta) = \mathcal{F}(x,\theta) &- m_1(x_2,x_3,\theta) - m_2(x_1,x_3,\theta) - m_3(x_1,x_2,\theta) \\ &+ m_{23}(x_1,\theta) + m_{13}(x_2,\theta) + m_{12}(x_3,\theta) - m_{123}(\theta). \end{aligned}$$

Avec les mêmes notations ω que dans les parties précédentes, nous poserons :

(III.C.8)
$$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{4}\ \Omega_3(\delta) &= \omega(\delta) + \omega_o\{2LT^2\delta + \alpha(\delta)\} + \omega_1\{\alpha'(\delta)\} + \omega_2\{4LT\delta + \alpha'(\delta)\}\\
&\quad + \omega_3\{4LT\delta + \alpha'(\delta)\} + \omega_{12}\{\alpha''(\delta)\} + \omega_{23}(8L\delta) + \omega_{13}\{\alpha''(\delta)\}\\
\frac{1}{4}\ \Omega'_3(\delta) &= \omega(\delta) + \omega_o\{2LT^2 + \alpha(\delta)\} + \omega_1\{4LT\delta + \alpha'(\delta)\} + \omega_2\{\alpha'(\delta)\}\\
&\quad + \omega_3\{4LT\delta + \alpha'(\delta)\} + \omega_{12}\{\alpha''(\delta)\} + \omega_{23}\{\alpha''(\delta)\} + \omega_{13}(8L\delta)\\
\frac{1}{4}\ \Omega''_3(\delta) &= \omega(\delta) + \omega_o\{2LT^2 + \alpha(\delta)\} + \omega_1\{4LT\delta + \alpha'(\delta)\} + \omega_2\{4LT\delta+\alpha'(\delta)\}\\
&\quad + \omega_3\{\alpha'(\delta)\} + \omega_{12}(8L\delta) + \omega_{13}\{\alpha''(\delta)\} + \omega_{23}\{\alpha''(\delta)\}
\end{aligned}\right.$$

et pour $g \gtrless 0 \in C(A_3)$ nous définirons comme dans (III.B.16,18)

(III.C.9) $$P_3 g(x) = g(x) + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(s_1,x_2,x_3)ds_1$$

(III.C.10) $$P_{13}g(x) = P_3\{P_1 g(x)\} = P_1\{P_3 g(x)\}$$

(III.C.11) $$P_{23}g(x) = P_3\{P_2 g(x)\}$$

(III.C.12) et $$P_{123}g(x) = P_3\{P_{12}g(x)\} = P_1\{P_{23}g(x)\}.$$

Théorème (III.C.1) (*existence*) :

Sous les hypothèses (h.C.1, 2, 3) et (h.C.4),

(h.C.4) Les solutions positives ou nulles ρ_1, ρ_2, ρ_3 des équations

(III.C.13) $$\rho_1(\delta,x_2,x_3) = \Omega_3(\delta) + P_{23}\omega_1\{\left|\int_o^{x_2}\int_o^{x_3} \rho_1(\delta,s_2,s_3)ds_2ds_3\right|\}$$
$$+ P_{23}\omega_{12}\{\left|\int_o^{x_3} \rho_1(\delta,x_2,s_3)ds_3\right|\} + P_{23}\omega_{13}\{\left|\int_o^{x_2} \rho_1(\delta,s_2,x_3)ds_2\right|\}$$

(III.C.14) $$\rho_2(x_1,\delta,x_3) = \Omega'_3(\delta) + P_{13}\omega_2\{\left|\int_o^{x_1}\int_o^{x_3} \rho_2(s_1,\delta,s_3)ds_1ds_3\right|\}$$

$$+ P_{13}\omega_{12}\{|\int_o^{x_3} \rho_2(x_1,\delta,s_3)ds_3|\} + P_{13}\omega_{23}\{|\int_o^{x_1} \rho_2(s_1,\delta,x_3)ds_1|\}$$

(III.C.15) $$\rho_3(x_1,x_2,\delta) = \Omega_3''(\delta) + P_{12}\omega_3\{|\int_o^{x_1}\int_o^{x_2} \rho_3(s_1,s_2,\delta)ds_1ds_2|\}$$

$$+ P_{12}\omega_{13}\{|\int_o^{x_2} \rho_3(x_1,s_2,\delta)ds_2|\} + P_{12}\omega_{23}\{|\int_o^{x_1} \rho_3(s_1,x_2,\delta)ds_1|\}$$

vérifient $\lim_{\delta\to 0} \rho_1(\delta,x_2,x_3) = \lim_{\delta\to 0} \rho_2(x_1,\delta,x_3) = \lim_{\delta\to 0} \rho_3(x_1,x_2,\delta) = 0$

uniformément par rapport à $x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]^3$.

L'équation $\theta = F_{123}(x,\theta)$ admet au moins une solution dans $C(A_3)$.

Remarque C.1. :

Dans le cas lipschitzien c'est-à-dire :

(h.C.2bis) En plus de l'hypothèse (h.C.2), la fonction f est lipschitzienne par rapport aux variables z_i, z_{ij}.

L'hypothèse (h.C.4) est alors satisfaite pour

(III.C.16) $$\begin{cases} 0,163k_1T^2 + 0,88\ (k_{12} + k_{13})T < 1 \\ 0,163k_2T^2 + 0,88\ (k_{12} + k_{23})T < 1 \\ 0,163k_3T^2 + o,88\ (k_{13} + k_{23})T < 1 \end{cases}$$

Remarque C.2. :

L'unicité et la continuité de la solution par rapport aux conditions initiales font intervenir l'équation :

(III.C.17) $$\rho(x_1,x_2,x_3) = 1 + P_{123}k_o\ \int_o^{x_1}\int_o^{x_2}\int_o^{x_3} \rho(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3|$$

$$+ P_{123}k_1|\int_o^{x_2}\int_o^{x_3} \rho(x_1,s_2,s_3)ds_2ds_3| + P_{123}k_2|\int_o^{x_1}\int_o^{x_3} \rho(s_1,x_2,s_3)ds_1ds_3|$$

$$+ P_{123}k_3|\int_o^{x_1}\int_o^{x_2} \rho(x_1,s_2,x_3)ds_1ds_2| + P_{123}k_{12}|\int_o^{x_3}\rho(x_1,x_2,s_3)ds_3| +$$

$$+ P_{123}k_{13}\left|\int_o^{x_2}\rho(x_1,s_2,x_3)ds_2\right| + P_{123}k_{23}\left|\int_o^{x_1}\rho(s_1,x_2,x_3)ds_1\right|$$

pour laquelle on peut affirmer l'existence d'une solution dès que :

(III.C.18) $$k_oT^3 + 2(k_1 + k_2 + k_3)T^2 + 4(k_{13} + k_{23} + k_{12})T < 1$$

(condition permettant de résoudre (III.C.17) par la méthode des approximations successives).

Néanmoins, une étude analogue à celle faite pour illustrer l'équation (III.B.23) permettrait d'élargir cette condition (III.C.18).

D - EXTENSION AU CAS DE n VARIABLES

Considérons pour terminer ce chapitre l'équation

$$\text{(III.D.1)} \qquad u_{x_1,\dots,x_n} = f(x_1,\dots,x_n,u,u_{x_1},\dots,u_{x_n},\dots,u_{x_2,\dots,x_n})$$

et énonçons les principaux théorèmes analogues à ceux obtenus dans les parties A, B et C pour $n = 3$.

E désignera toujours l'ensemble $\mathbb{R}^m$.

J sera l'ensemble des multi-indices d'entiers $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ avec $1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant n-1$, dont le nombre total est $p = 2^n - 2$.

J_i (indice variant de 1 à n) sera le sous-ensemble de J $\{\alpha \in J \mid 1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \dots < \alpha_j < \dots < \alpha_k \leqslant n$ avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et $\alpha_j \neq i\}$

Les dérivées successives de u intervenant dans l'équation (III.D.1) s'écriront $D_\alpha u$ $(\alpha \in J)$.

1°) *Périodicité par rapport à une variable.*

Les $n-1$ constantes positives a_i (i variant de 2 à n) définissent

$$\text{(III.D.2)} \qquad A_1 = \{x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \in \mathbb{R},\ |x_i| \leqslant a_i,\quad i \geqslant 2\}$$

et ses projections canoniques sur les hyperplans $x_i = 0$

$$\text{(III.D.3)} \qquad \begin{cases} A_1^{(1)} = \{x^1 = (x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : |x_i| \leqslant a_i,\quad i \geqslant 2\} \\ A_1^{(i)} = \{x^i = (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : \\ \qquad\qquad x_1 \in \mathbb{R},\ |x_j| \leqslant a_j,\ j \neq i\}. \end{cases}$$

Les $p+1$ constantes M_o, M_α $(\alpha \in J)$ positives ou nulles définissent le compact

$\mathcal{B}$ de E^{p+1}

(III.D.4) $\qquad \mathcal{B} = \{z = (z_o,(z_\alpha)_{\alpha\in J}) : |z_o| \leq M_o, \quad |z_\alpha| \leq M_\alpha \quad ; \ \alpha \in J\}$

Formulons les hypothèses :

(h.D.1) Les n fonctions $\sigma^1, \sigma^2,\dots,\sigma^n$ définies respectivement sur les ensembles $A_1^{(i)}$ sont continues ainsi que toutes leurs dérivées $D_\alpha\sigma^i$ $(\alpha \in J_i)$, à valeurs dans E et sont périodiques en x_1 de période T. De plus ces fonctions vérifient les relations

$$\sigma^i(x_1,\dots,x_j = 0,\dots,x_n) = \sigma^j(x_1,\dots,x_i = 0,\dots,x_n) \qquad i \neq j$$

Cette hypothèse permet de définir une fonction $\mathfrak{S}$ définie sur A_1, solution de $\mathfrak{S}_{x_1,\dots,x_n} = 0$ et vérifiant les conditions initiales

(III.D.5)
$$\begin{cases} \mathfrak{S}(0,x_2,\dots,x_n) = \sigma^1(x^1) \\ \vdots \\ \mathfrak{S}(x_1,\dots,x_{n-1},0) = \sigma^n(x^n) \end{cases}$$

Désignons alors par N_o, N_α des constantes positives ou nulles telles que :

$$|\mathfrak{S}| \leq N_o \qquad\qquad |D_\alpha\mathfrak{S}| \leq N_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha \in J$$

(h.D.2) La fonction f : $f(x_1,\dots,x_n,z,z_1,\dots,z_n,z_{12},\dots,z_{23,\dots,n})$ ou $f(x,z,(z_\alpha)_{\alpha\in J})$ est définie et continue sur $A_1 \times \mathcal{B}$ à valeurs dans E, périodique en x_1 de période T, lipschitzienne par rapport aux variables $z_\alpha (\alpha \in J)$:

$$|f(x,z,(z_\alpha)_{\alpha\in J}) - f(x,z,(\bar{z}_\alpha)_{\alpha\in J})| \leq \sum_\alpha k_\alpha |z_\alpha - \bar{z}_\alpha| .$$

Nous pouvons définir

(III.D.6) $$L = \sup_{A\times\mathcal{B}} |f(x,z,(z_\alpha)_{\alpha\in J})| .$$

Avec la définition des B^α analogues aux relations (III.A.5...11) puis de $F(x,\theta)$ et m_1 (III.A.22, 23) nous aurons le problème modifié

(III.D.7) $$\theta = F_1(x,\theta) = F(x,\theta) - m_1(x^1,\theta),$$

pour lequel les théorèmes suivants seront valables (ω désignera l'indice 23...n).

Théorème III.D.1 (cf. III.A.2) :

Avec les hypothèses (h.D.1), (h.D.2) et (h.D.3),

(h.D.3) Les constantes N_o, N_α, M_o, M_α, L, T, k_ω satisfont les inégalités

$$N_o < M_o \qquad N_\alpha < M_\alpha \quad \text{si} \quad \alpha \in J - \omega$$

$$N_\omega + LT \leq M_\omega \qquad k_\omega T + 1 > \exp(k_\omega \frac{T}{2}).$$

On peut trouver un nombre $a > 0$, un voisinage tubulaire A_1' de l'axe des x_1 :

$$A_1' = \{x \in A_1 : x_1 \in \mathbb{R},\ |x_i| \leq a \ , \quad i \geq 2\}$$

et une fonction θ définie sur A_1' solution du problème modifié $\theta = F_1(x,\theta)$.

Théorème III.D.2 (Cf. III.A.3) :

Si en plus des hypothèses du théorème (III.D.1) la fonction f est lipschitziennne par rapport à z_o, le problème modifié $\theta = F_1(x,\theta)$ admet une et une solution continue par rapport aux conditions initiales.

Remarque D. 1 :

Ces théorèmes améliorent par leur simplicité les théorèmes analogues de L. Cesari (n = 2) et de Dan Petrovanu (n = 3) [1 p. 331].

Remarque D. 2 :

La condition $k_\omega T + 1 > \exp k_\omega \frac{T}{2}$ satisfaite pour $k_\omega T < 2{,}5$ disparait si nous supposons comme Dan Petrovanu [1] qu'en plus des hypothèses (h.D.1 et 2) les fonctions f et σ^i satisfont pour $i \geq 2$ les relations de parité :

$$\sigma^i(-x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) = -\sigma^i(x^i)$$

$$f(-x_1,x_2,\dots,x_n,z,-z_1,z_2,\dots,z_n,-z_{12},\dots,-z_{1n},\dots,-z_{13\dots n},\dots,z_\omega)$$

$$= - f(x,z,(z_\alpha)_{\alpha\in J}).$$

Mais de plus on constate l'existence des fonctions θ pour lesquelles les fonctions $m(x^1,\theta)$ correspondantes sont nulles (il suffit pour cela de considérer des fonctions θ de $C(A_1)$ telles que $\theta(-x_1,x_2,x_3) = \theta(x_1,x_2,x_3)$).

D'une manière plus générale en fixant les $(n-1)$ les fonctions σ^i $i \geq 2$, il nous est possible de déterminer la fonction σ^1 et d'établir ainsi l'existence de solutions périodiques en x_1 de période T de l'équation (III.D.1).

(h.D.4) Les $(n-1)$ fonctions σ^i $i \geq 2$ définies respectivement sur les ensembles $A_1^{(i)}$ sont périodiques en x_1 de période T à valeurs dans E lipschitziennes ainsi que toutes leurs dérivées $D_\alpha\sigma^i$ $(\alpha \in J_i)$ et vérifient les relations

$$i < j, \quad \sigma^i(x_1,\dots,x_{i+1},\dots,x_j{=}0,\dots\dots,x_n) = \sigma^j(x_1,\dots,x_i{=}0,\dots\dots,x_{j-1},\dots,x_n)$$

Cette hypothèse permet de définir des fonctions $\mathfrak{S}$ solutions sur A_1 de l'équation $\mathfrak{S}_{x_1,\dots,x_n} = 0$ et vérifiant pour $i \geq 2$

$$\mathfrak{S}(x_1,\dots,x_i = 0,\dots,x_n) = \sigma^i(x^i).$$

Toutes ces fonctions et leurs dérivées $D_\alpha\mathfrak{S}$ $(\alpha \in J - \{\omega\})$ coïncident entre elles aux points $(x_1,0,\dots,0)$ de A_1 de sorte que l'on peut définir des constantes n_o, n_α

$$|\mathcal{G}(x_1,0,\dots,0)| \leqslant n_o$$

$$|D_\alpha \mathcal{G}(x_1,0,\dots,0)| \leqslant n_\alpha \qquad \alpha \in J - \{\omega\}.$$

D'autre part avec l'hypothèse :

(h.D.5) La fonction $f : f(x_1,\dots,x_n,y,z_1,\dots,z_n,\dots,z_\omega)$ est définie continue sur $\mathcal{B} = \{(x,y,(z_\alpha)_{\alpha\in J}) : x \in A_1, \ |y| \leqslant M_o, \ |z_\alpha| \leqslant M_\alpha\}$ à valeurs dans E, périodique en x_1 de période T et lipschitzienne

$$|f(x,y,(z_\alpha))-f(\bar{x},\bar{y},(\bar{z}_\alpha))| \leqslant k|x-\bar{x}|+k_o|y-\bar{y}|+\sum_\alpha k_\alpha|z_\alpha-\bar{z}_\alpha|$$

nous pouvons définir une fonction F périodique en x_1 de période T lipschitzienne

$$F(x_1,q) = f\{x_1,0,\dots,0,\mathcal{G}(x_1,0,\dots,0),(D_\alpha\mathcal{G}(x_1,0,\dots,0)_{\alpha\in J-\omega}),q\}$$

et

$$\tilde{L} = \sup|F(x_1,q)| \qquad (\text{pour } x_1 \in \mathbb{R} \quad |q| \leqslant M_\omega).$$

(h.D.6) Il existe un vecteur v de E tel que $|v| < M - \tilde{L}T$ pour lequel l'équation $\frac{dq}{dx_1} = F(x_1,q(x_1))$, $q(0) = v$ admet une solution $\bar{q}$ périodique de période T pour laquelle la matrice jacobienne

(III.D.8) $$\frac{dm}{dv} = \frac{1-\exp\{-\int_o^t F_q(s,\bar{q}(s))ds\}}{\int_o^T \exp\{-\int_o^t F_q(s,\bar{q}(s))ds\}dt}$$ est inversible.

Théorème III.D.3 (cf. III.A.7) :

Avec les hypothèses (h.D.4, 5 et 6) si $k_\omega T + 1 > \exp(k_\omega \frac{T}{2})$ $n_o < M_o$ et $n_\alpha < M_\alpha$ pour $\alpha \in J - \{\omega\}$, on peut trouver un nombre $a > 0$, un ensemble A_1'

$$A_1' = \{x \in A_1 : x_1 \in \mathbb{R}, \ |x_i| \leqslant a \leqslant a_i \ \text{ si } \ i \geqslant 2\}$$

et une fonction τ définie sur $A_1^{(1)} = \{x^1 : |x_i| \leqslant a \text{ si } i \geqslant 2\}$ telle que $D_\omega \tau(0,0,\dots,0) = v$

$$\tau(x_2,\dots,x_i = 0,\dots,x_n) = \sigma^i(0,x_2,\dots,x_{i+1},\dots,x_n) \quad \text{si} \quad i \geqslant 2$$

et une fonction ϑ solution de l'équation (III.D.1) périodique en x_1 de période T et vérifiant :

$$\vartheta(0,x_2,\dots,x_n) = \tau(x_2,\dots,x_n)$$
$$\vartheta(x_1,\dots,x_i = 0,\dots,x_n) = \sigma^i(x^i).$$

La fonction τ est de plus unique et dépend continûment des σ^i.

Rappelons pour conclure les exemples de L. Cesari qui dans le cas $m = 1$, $n = 2$ étudie les équations :

(III.D.9) $$u_{x_1x_2} = \sin x_1 + \lambda\, u_{x_2} \qquad \lambda \neq 0$$

(pour laquelle il détermine la fonction $\tau(x_2) = \sigma(0) - \dfrac{x_2}{1+\lambda^2}$ assurant l'existence d'une solution périodique)

(III.D.10) $$u_{x_1x_2} = \sin x_1 + \lambda\, u_{x_2} + x_2 B(x_1,x_2,u,u_{x_1},u_{x_2})$$

et

(III.D.11) $$u_{x_1}u_{x_2} = x_2 + (1-x_2)(\sin x_1 + \lambda\, u_{x_2}).$$

Ces équations conduisent toutes trois à l'équation différentielle $\dfrac{dq}{dx_1}(x_1) = F(x_1,q(x_1)) = \sin x_1 + \lambda q(x_1)$, pour laquelle on trouve $v = -\dfrac{1}{1+\lambda^2}$ et $\bar{q}(x_1) = \dfrac{1}{1+\lambda^2}(-\lambda \sin x_1 - \cos x_1)$.

Quant à l'équation aux variations elle s'écrit :

$$\frac{dw}{dx_1}(x_1) = \lambda\, w(x_1)$$

dont les solutions $C\exp(\lambda x_1)$ ne sont pas toutes périodiques de période 2π.

L'équation (III.D.11) montre que la solution périodique de période 2π ne peut exister que sur une bande ne contenant pas la droite $x_2 = 1$ puisque l'équation

(III.D.12) $$u_{x_1x_2} = 1$$

n'a aucune solution périodique en x_1.

Remarque D. 3 :

Toujours dans le cas $n = 2$, nous avons donné une autre démonstration du théorème (III.D.1 et 2), G. Hecquet [1] et qui permet de donner une estimation numérique de la solution du problème modifié. Nous pensons poursuivre dans cette voie et donner un algorithme déterminant effectivement la fonction τ.

Remarque D. 4 :

La méthode précédente s'applique à l'équation

$$LU = f(x,U,(D_\alpha U)_{\alpha\in J})$$

où L est un opérateur de type hyperbolique d'ordre n dont l'une des surfaces caractéristiques est l'hyperplan $x_1 = 0$. Les données σ^i seront définies sur les autres caractéristiques et un changement de variables préservant x_1 ramènera l'équation $LU = f(x,U,(D_\alpha U)_{\alpha\in J})$ sous la forme (III.D.1).

2°) *Périodicité par rapport à deux variables.*

Les $n-2$ constantes positives a_i (i variant de 3 à n) définissent

$$A_2 = \{x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\ |x_i| \leq a_i \quad i \geq 3\}$$

et ses projections canoniques sur les hyperplans $x_i = 0$

(III.D.13)
$$\begin{cases} A_2^{(1)} = \{x^1 = (x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : x_2 \in \mathbb{R},\ |x_i| \leq a_i \quad i \geq 3\} \\ A_2^{(2)} = \{x^2 = (x_1,x_3,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1 \in \mathbb{R} \quad |x_i| \leq a_i \quad i \geq 3\} \\ A_2^{(i)} = \{x^i = (x_1,x_2,\dots,x_{i+1},\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \\ \qquad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_j| \leq a_j \quad j \neq i\} \end{cases}$$

Les $p+1$ constantes M_o, M_α $(\alpha \in J)$ positives ou nulles définissent le compact $\mathcal{B}$ de E^{p+1} :

$$\mathcal{B} = \{z = (z_o,(z_\alpha)_{\alpha\in J}) : |z_o| \leq M_o, \quad |z_\alpha| \leq M_\alpha\}.$$

Formulons les hypothèses :

(h.D.7) Les n fonctions $\sigma^1, \sigma^2,\dots,\sigma^n$ définies respectivement sur les ensembles $A_2^{(i)}$ sont continues ainsi que toutes leurs dérivées $D_\alpha\sigma^i$ $(\alpha \in J_i)$, à valeurs dans E et sont périodiques en x_1 et x_2 de période T. De plus ces fonctions vérifient les relations

$$\sigma^i(x_1,\dots,x_j=0,\dots\dots,x_n) = \sigma^j(x_1,\dots,x_i=0,\dots\dots,x_n) \quad i \neq j.$$

Cette hypothèse définit comme l'hypothèse (h.D.1) une fonction $\mathfrak{S}$ solution de $\mathfrak{S}_{x_1,\dots,x_n} = 0$ et vérifiant (III.D.5). Les constantes N_o, N_α gardent la même signification

$$|\mathfrak{S}| \leq N_o \qquad \text{et} \qquad |D_\alpha \mathfrak{S}| \leq N_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha \in J.$$

(h.D.8) La fonction f : $f(x_1,\dots,x_n,z,z_1,\dots,z_n,z_{12},\dots,z_{23\dots n})$ ou $f(x,z,(z_\alpha)_{\alpha\in J})$ est définie et continue sur $A_2 \times \mathcal{B}$ à valeurs dans E, périodique en x_1 et x_2 de même période T, lipschitzienne par rapport aux variables (z_α) $\alpha \in J$:

$$|f(x,z,(z_\alpha)_{\alpha\in J}) - f(x,z,(\bar{z}_\alpha)_{\alpha\in J})| \leq \sum_\alpha k_\alpha |z_\alpha - \bar{z}_\alpha|$$

Soit $L = \sup\limits_{A_2 \times B} |f(x,z,(z_\alpha)_{\alpha \in J}|$ et définissons avec les B^α analogues aux relations (III.A.5,...,11) et $F(x,\theta)$, m_1, m_2, m_{12} (III.B.10, 11, 12, 13) le problème modifié

$$\theta = F_{12}(x,\theta) = F(x,\theta) - m_1(x^1,\theta) - m_2(x^2,\theta) + m_{12}(x^{12},\theta)$$

pour lequel les théorèmes suivants seront valables.

Les multi-indices $(2,3,\ldots,n)$ $(1,3,\ldots,n)$ et $(3,4,\ldots,n)$ seront désignés respectivement par λ, μ et ν.

$$\tilde{L} = \sup|F(x_1,x_2,q,q_1,q_2| \quad (\text{pour} \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \ |q| \leqslant M_\nu, \ |q_1| \leqslant M_\mu, \ |q_2| \leqslant M_\lambda).$$

Théorème (III.D.4) :

Avec les hypothèses (h.D.7), (h.D.8) et (h.D.9),

(h.D.9) Les constantes N_o, N_α, M_o, M_α, L, T, k_ν, k_λ et k_μ satisfont les inégalités

$$N_o < M_o \qquad N_\alpha < M_\alpha \qquad N_\nu + LT^2 \leqslant M_\nu$$
$$N_\lambda + LT \leqslant M_\lambda \qquad N_\mu + LT \leqslant M$$
$$0{,}163 k_\nu T^2 + 0{,}88(k_\lambda + k_\mu)T < 1.$$

On peut trouver un nombre $a > 0$, un voisinage tubulaire de $\mathbb{R}^2$,

$$A'_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \ |x_i| \leqslant a \leqslant a_i \ , i \geqslant 3\}$$

et une fonction θ définie sur A'_2 solution du problème modifié $\theta = F_{12}(x,\theta)$.

Théorème (III.D.5) :

Si en plus des hypothèses du théorème (III.D.4) la fonction f est lipschitzienne par rapport à z_o, le problème modifié $\theta = F_{12}(x,\theta)$ admet une et une seule solution continue par rapport aux données initiales.

Remarque D. 5 :

Même dans le cas $n = 2$ ce théorème améliore les théorèmes analogues de L. Cesari [2 pages 177-178] et complète les résultats de Dan Petrovanu [1].

Remarque D. 6 :

La condition $0{,}163k_\nu T^2 + 0{,}88(k_\lambda + k_\mu)T < 1$ disparaît si nous supposons comme Dan Petrovanu [1, page 345] qu'en plus des hypothèses (h.D.7) et (h.D.8) les fonctions f et σ^i satisfont pour $i \geq 1$ les relations de parité :

$$f(-x_1,x_2,\ldots,x_n,z,-z_1,z_2,\ldots,z_n,-z_{12},\ldots,-z_{1n},\ldots,z_{23\ldots n}) = -f(x,z_o,(z_\alpha))$$

$$= f(x_1,-x_2,\ldots,x_n,z,z_1,-z_2,\ldots,-z_{12},\ldots,z_{2\ldots n})$$

$$\sigma^1(-x_2,x_3,\ldots,x_n) = \sigma^1(x_2,\ldots,x_n)$$

$$\sigma^2(-x_1,x_3,\ldots,x_n) = \sigma^2(x_1,\ldots,x_n)$$

$$\sigma^i(-x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sigma^i(x_1,-x_2,\ldots,x_n) = \sigma^i(x^i) \quad i \geq 3.$$

Mais de plus on constate l'existence de fonctions θ pour lesquelles la fonction $m_1(x^1,\theta) + m_2(x^2,\theta) - m_{12}(x^{12},\theta)$ s'annule.

D'une manière plus générale en fixant les $(n-2)$ fonctions σ^i $i \geq 3$ il nous est possible de montrer l'existence des fonctions σ^1 et σ^2 assurant celle de solution périodique en x_1 et x_2 de l'équation (III.D.1).

Hypothèse (h.D.10) :

Les $(n-2)$ fonctions σ^i $i \geq 3$ définies respectivement sur les ensembles $A_2^{(i)}$ sont périodiques en x_1 et x_2 de même période T à valeurs dans E lipschitziennes ainsi que toutes leurs dérivées $D_\alpha \sigma^i$ $(\alpha \in J_i)$ et vérifient les relations :

$$i < j \qquad \sigma^i(x_1,\ldots,x_{i+1},\ldots,x_j = 0\ldots x_n) = \sigma^j(x_1,\ldots,x_i = 0,\ldots,x_{j-1},\ldots,x_n)$$

Cette hypothèse permet de définir des fonctions $\mathfrak{S}$ solutions sur A_2 de l'équation $\mathfrak{S}_{x_1,\ldots,x_n} = 0$ et vérifiant pour $i \geq 3$,

$$\mathfrak{S}(x_1,x_2,\ldots,x_i=0,\ldots\ldots,x_n) = \sigma^i(x^i).$$

Toutes ces fonctions et leurs dérivées $D_\alpha \mathfrak{S}$ $(\alpha \neq \nu, \lambda, \mu)$ coïncident entre elles aux points $(x_1,x_2,0,\ldots,0)$ de A_2 de sorte que l'on peut définir des constantes

$$|\mathfrak{S}(x_1,x_2,0,\ldots,0)| \leq n_o$$
$$D_\alpha \mathfrak{S}(x_1,x_2,0,\ldots,0)| \leq n \qquad \alpha \in J - \{\nu,\lambda,\mu\} .$$

De plus avec l'hypothèse suivante :

Hypothèse (h.D.11) :

La fonction f : $f(x_1,\ldots,x_n,z,z_1,\ldots,z_n,\ldots,z_\lambda)$ est définie et continue sur $\mathcal{B} = \{(x,z,(z_\alpha)_{\alpha\in J}, \ x\in A_2, \ |z| \leq M_o, \ |z_\alpha| \leq M_\alpha\}$ à valeurs dans E, périodique en x_1 et x_2 de période T et lipschitzienne

$$|f(x,y,(z_\alpha)_{\alpha\in J})-f(\bar{x},\bar{y},(\bar{z}_\alpha)_{\alpha\in J}| \leq k|x-\bar{x}| + k_o|y-\bar{y}| + \sum_\alpha k_\alpha|z_\alpha - z_\alpha|$$

nous pouvons définir une fonction F : $F(x_1,x_2,q,q_1,q_2)$ obtenue à partir de $f(x,u,(D_\alpha u)_{\alpha\in J})$ par le remplacement de u et $D_\alpha u$ pour $\alpha \in J - (\lambda,\mu,\nu)$ par $\mathfrak{S}(x_1,x_2,0,\ldots,0)$ et $D_\alpha\mathfrak{S}(x_1,x_2,0,\ldots,0)$; q, q_1 et q_2 désignent alors les valeurs inconnues de $D_\nu\mathfrak{S}$, $D_\mu\mathfrak{S}$ et $D_\lambda\mathfrak{S}$ aux points $(x_1,x_2,0,\ldots,0)$.

Hypothèse (h.D.12) :

Il existe deux fonctions Ψ et χ définies, dérivables sur R à valeurs dans E, périodiques de période T telles que :

1°) $\quad \Psi(0) = \chi(0) \qquad |\Psi(x_2) + \chi(x_1) - \chi(0)| < n_\nu \leq M_\nu - \tilde{L}T^2$

$\qquad |\Psi'(x_2)| \leq n_\mu < M_\mu - \tilde{L}T \qquad |\chi'(x_1)| < n_\lambda < M_\lambda - \tilde{L}T.$

2°) Le problème

$$q_{x_1x_2} = F(x_1,x_2,q,q_{x_1},q_{x_2}), \quad q(x_1,0) = \chi(x_1), \quad q(0,x_2) = \Psi(x_2)$$

admet une solution $\bar{q}$ périodique en x_1 et x_2 de période T.

3°) De plus, la différentielle de l'application $(\alpha,\beta) \to m$ relative à l'équation aux variations

$$w_{x_1x_2} = \frac{\partial F}{\partial q}(x_1,x_2,\bar{q},\bar{q}_{x_1},\bar{q}_{x_2})w + \frac{\partial F}{\partial q_1}(x_1,x_2,\bar{q},\bar{q}_{x_1},\bar{q}_{x_2})w_{x_1} + \frac{\partial F}{\partial q_2}(x_1,x_2,\bar{q},\bar{q}_{x_1},\bar{q}_{x_2})w_{x_2}$$

est inversible.

Théorème III.D.6 :

Avec les hypothèses (h.D.10, 11, 12) si

$$0,163k_\nu T^2 + (0,88)(k_\lambda + k_\mu)T < 1$$

$n_o < M_o$, $n_\alpha < M_\alpha$ pour $\alpha \in J - \{\nu,\mu,\lambda\}$, on peut trouver un nombre $a > 0$, un ensemble A_2

$$A_2' = \{x \in A_2 : x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R},\quad |x_i| \leqslant a \leqslant a_i \quad i \geqslant 3\}$$

et deux fonctions τ_1, τ_2 définies respectivement sur

$A_2^{(1)} = \{x^1 : x_2 \in \mathbb{R},\ |x_i| \leqslant a\}$ et $A_2^{(2)} = \{x^2 : x_1 \in \mathbb{R},\ |x_i| \leqslant a\}$ $\quad i \geqslant 3$

telles que

$$D_\mu\ \tau_1(x_2,0,\dots,0) = \Psi(x_2)$$

$$D_\lambda\ \tau_2(x_1,0,\dots,0) = \chi(x_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \tau_1(x_2,\dots,x_i = 0,\dots,x_n) = \sigma^i(0,x_2,\dots,x_n) \\ \tau_2(x_1,\dots,x_i = 0,\dots,x_n) = \sigma^i(x_1,0,\dots,x_n) \end{array}\right\} \text{ pour } i \geqslant 3$$

et une fonction $\emptyset$ solution de l'équation (III.D.1) périodique en x_1 et x_2 de période T telle que

$$\emptyset(0,x_2,\dots,x_n) = \tau_1(x^1) \qquad \emptyset(x_1,0,\dots,x_n) = \tau_2(x^2)$$

$$\emptyset(x_1,x_2,\dots,x_i = 0,\dots,x_n) = \sigma^i(x^i) \quad i \geqslant 3.$$

Les fonctions τ_1 et τ_2 sont de plus définies d'une manière unique et dépendent continûment des $(n-2)$ conditions initiales.

<u>*Exemple*</u> $(m = 1, \quad n = 3)$.

Considérons l'équation

$$u_{x_1x_2x_3} = \varepsilon\{-1 + \sin x_1 \cos x_2 - u + u_{x_3} + \varphi(x_2)u_{x_1x_3} + \Psi(x_1)u_{x_2x_3}\}$$

dans laquelle φ et Ψ sont des fonctions continues et périodiques de période 2π et ε assez petit pour assurer les conditions du théorème (III.D.6).

On se donne $\sigma^3(x_1,x_2) = \sin x_1 \cos x_2$ de sorte que de problème différentiel associé s'écrit :

$$q_{x_1x_2} = \varepsilon\{-1 + q + \varphi(x_2)q_{x_1} + \Psi(x_1)q_{x_2}\}.$$

L. Cesari [2 - 5] a examiné cette équation dont la solution est $q = 1$. De plus les conditions

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x_2)dx_2 \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \Psi(x_1)dx_1 \neq 0$$

suffisent à établir que la différentielle de l'application $(\alpha,\beta) \to m$ relative à l'équation aux variations

$$w_{x_1x_2} = w + \varphi(x_2)w_{x_1} + \varphi(x_1)w_{x_2}$$

est inversible. [[5] L. Césari (pages 330-331)].

Dans ces conditions, l'équation examinée possédera une solution périodique en x_1 et x_2 telle que :

$$u(x_1,x_2,0) = \sin x_1 \cos x_2$$

$$u(x_1,x_2,x_3) = x_3 + \sin x_1$$

$$u(0,x_2,x_3) = x_3.$$

On peut compliquer cet exemple en considérant des fonctions f : $f(x_1,x_2,x_3,u,u_{x_1},u_{x_2},u_{x_3},u_{x_1x_2},u_{x_1x_3},u_{x_2x_3})$ qui vérifient pour $x_3 = 0$ la relation :

$$f(x_1,x_2,0,\sigma^3(x_1,x_2),\sigma_1^3(x_1,x_2),\sigma_2^3(x_1,x_2),q,\sigma_{12}^3(x_1,x_2),q_1,q_2)$$

$$= -1 + q + \emptyset(x_2)q_1 + \Psi(x_1)q_2.$$

D'autre part, on peut encore remarquer que cette méthode s'applique à des équations de la forme $Lu = f(x,u(D_\alpha u))$ avec L opérateur hyperbolique admettant x_1 et $x_2 = 0$ comme surfaces caractéristiques.

3°) *Périodicité par rapport à plus de 2 variables.*

La procédure utilisée jusque maintenant peut se généraliser dans le cas où la fonction f est périodique par rapport aux p premières variables $(p > 2)$.

La définition du problème modifié associé à l'équation (III.D.1) ne posera aucun problème et son étude nécessitera l'examen de l'équation intégrale

$$v(x_1,\dots,x_p) = 1 + k_{p+1,\dots,n}P_{12\dots p}\int_0^{x_1}\dots\int_0^{x_p} v(s_1,s_2,\dots,s_p)ds_1,\dots,ds_p$$

$$+ \dots + k_{23\dots n}P_{12\dots p}\int_0^{x_1} v(s_1,x_2,\dots,x_p)ds_1,$$

qui donne une limitation des constantes de Lipschitz.

Je n'insisterai pas sur cette question car on conçoit très bien que les résultats acquis lorsque $p = 1$, $p = 2$ se transposent au cas $p > 2$; en particulier, on revoit une nouvelle fois que la recherche des solutions périodiques de l'équation (III.D.1) se ramène d'une part à l'existence d'une solution périodique d'une équation aux dérivées partielles $u_{x_1,\dots,x_p} = g(x_1,\dots,x_p,u,u_{x_1},\dots,u_{x_2,\dots,x_p})$; d'autre part, à l'examen de l'équation aux variations qui lui est associée.

4°) Conclusion.

Si dans le cas $p = 1$, c'est-à-dire dans le cas d'une équation différentielle il existe de nombreux critères d'existence de solutions périodiques (on pourra consulter par exemple les ouvrages de L. Cesari [7], J. Mawhin [1], M. Roseau [1-2] etc...), il n'en existe que très peu pour les équations aux dérivées partielles. L. Cesari [2] a considéré les équations

$$u_{xy} = \varepsilon\{\Psi(x,y) + Cu + \Psi_1(y)u_x + \Psi_2(x)u_y\} + \varepsilon^2 g(x,y,u,u_x,u_y)$$

et

$$u_{xy} = \Psi(x,y) + Cu + \Psi_1(y)u_x + \Psi_2(x)u_y + \varepsilon g(x,y,u,u_x,u_y)$$

(en supposant que pour $\varepsilon = 0$ les équations admettent une solution périodique en x et y).

J.K. Hale reprit cette étude à partir de l'équation des ondes $u_{xx} - u_{yy} = \varepsilon f(x,y,u,u_x,u_y)$ tandis que A.K. Aziz et M.G. Horak (considérant la transformation de Picone) traitaient l'équation $u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + C(x,y)u = f(x,y,u,u_x,u_y)$.

Signalons d'autre part les travaux de plusieurs auteurs soviétiques (Mitropolski - B.P. Tkach [1] ...) consacrés essentiellement aux équations à arguments retardés. Les résultats obtenus sont comparables à ceux donnés par la méthode du problème modifié.

CHAPITRE IV

SOLUTIONS PERIODIQUES DE L'EQUATION

$$u_{x^2y^2} = f(x,y,u,u_x,u_y,u_{x^2},u_{xy},u_{y^2},u_{x^2y},u_{xy^2})$$

A - SOLUTIONS PERIODIQUES EN x

1°) *Equation modifiée.*

Considérons maintenant l'équation :

(IV.A.1) $$u_{x^2y^2} = f(x,y,u,u_x,u_y,u_{x^2},u_{xy},u_{y^2},u_{x^2y},u_{xy^2})$$

(que nous avons examinée dans le chapitre 1) soumise aux conditions initiales :

(IV.A.2) $$\begin{cases} u(x,0) = \alpha_1(x) \\ u(0,y) = \beta_1(y) \end{cases} \qquad \begin{cases} u_x(0,y) = \beta_2(y) \\ u_y(x,0) = \alpha_2(x) \end{cases}$$ satisfaisant :

(h.A.1) Les fonctions α_1, α_2 définies et continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $E = \mathbb{R}^m$ ainsi que leurs dérivées α_1', α_1'', α_2', α_2'' sont périodiques de même période T. Les fonctions β_1 et β_2 sont définies et continues sur $[-a,a]$ à valeurs dans E ainsi que leurs dérivées β_1', β_1'', β_2' et β_2'' sur $]-a,a[$.

De plus, ces fonctions satisfont les relations :

(IV.A.3) $$\alpha_1(0) = \beta_1(0), \quad \beta_2(0) = \beta_1'(0), \quad \beta_2'(0) = \alpha_2'(0), \quad \beta_2(0) = \alpha_1'(0).$$

Soient $A_1 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, |y| \leq a\}$ et $C(A_1)$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur A_1, périodiques en x de période T, à valeurs dans E, muni de la norme de la convergence uniforme : $|\theta| = \sup\limits_{A_1} |\theta(x,y)|$.

Avec l'hypothèse (h.A.1) on définit une fonction ℓ

(IV.A.4) $$\ell(x,y) = x[\beta_2(y) - \beta_2(0)] + y[\alpha_2(x)-\alpha_2(0)]-\alpha_2'(0)xy+\alpha_1(x)+\beta_1(y)-\alpha_1(0)$$

solution de l'équation $\dfrac{\partial^4\ell}{\partial x^2\partial y^2} = 0$, $\ell(x,0) = \alpha_1(x)$, $\ell(0,y) = \beta_1(y)$, $\dfrac{\partial\ell}{\partial x}(0,y) = \beta_2(y)$ et $\dfrac{\partial\ell}{\partial y}(x,0) = \alpha_2(x)$ qui n'appartiendra à $C(A_1)$ que si

$\beta_2(y) = \alpha_2'(0)y + \alpha_1'(0)$; quoiqu'il en soit on peut définir sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \times [-a,a]$ des constantes N_{ij} telles que

$$|\ell(x,y)| = |\ell_{oo}(x,y)| \leqslant N_{oo}$$

$$|\ell_{ij}(x,y)| = \left|\frac{\partial^{i+j}\ell}{\partial x^i \partial x^j}(x,y)\right| \leqslant N_{ij} \qquad i,j \in \{0,1,2\}$$

La continuité de la fonction ℓ et de ses dérivées permet de définir des fonctions η, η_1, η_2, η_3 numériques, continues, nulles à l'origine et non décroissantes telles que :

$$\text{(IV.A.5)} \quad \begin{cases} |\ell_{oo}(x,y) - \ell_{oo}(\bar{x},\bar{y})| \leqslant \eta(|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}|) & \\ |\ell_{ij}(x,y) - \ell_{ij}(\bar{x},\bar{y})| \leqslant \eta_1(|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}|) & i+j = 1 \\ |\ell_{ij}(x,y) - \ell_{ij}(\bar{x},\bar{y})| \leqslant \eta_2(|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}|) & i+j = 2 \\ |\ell_{ij}(x,y) - \ell_{ij}(\bar{x},\bar{y})| \leqslant \eta_3(|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}|) & i+j = 3 \end{cases}$$

Voulant utiliser comme dans le chapitre III, le théorème de Schaüder, nous devons rechercher un sous-ensemble S de $C(A_1)$ convexe et compact. Pour cela nous introduisons des fonctions numériques ρ_1 et ρ_2, explicitées dans la suite, et définissons S à partir des fonctions θ de $C(A_1)$ telles que :

$$\text{(IV.A.6)} \qquad |\theta(x,y) - \theta(\bar{x},\bar{y})| \leqslant \rho_1(|x-\bar{x}|,y) + \rho_2(\bar{x},|y-\bar{y}|).$$

Soient les opérateurs de S

$$\text{(IV.A.7)} \qquad B^{oo}\theta(x,y) = \ell_{oo}(x,y) + \int_o^x \int_o^y (x-s)(y-t)\theta(s,t)ds\,dt$$

$$\text{(IV.A.8)} \qquad B^{1o}\theta(x,y) = \ell_{1o}(x,y) + \int_o^x \int_o^y (y-t)\theta(s,t)ds\,dt$$

$$\text{(IV.A.9)} \qquad B^{o1}\theta(x,y) = \ell_{o1}(x,y) + \int_o^x \int_o^y (x-s)\theta(s,t)ds\,dt$$

$$\text{(IV.A.10)} \qquad B^{2o}\theta(x,y) = \ell_{2o}(x,y) + \int_o^y (y-t)\theta(x,t)dt$$

$$\text{(IV.A.11)} \qquad B^{11}\theta(x,y) = \ell_{11}(x,y) + \int_0^x \int_0^y \theta(s,t)ds\, dt$$

$$\text{(IV.A.12)} \qquad B^{o2}\theta(x,s) = \ell_{o2}(x,s) + \int_0^x (x,s)\theta(s,y)ds$$

$$\text{(IV.A.13)} \qquad B^{21}\theta(x,y) = \ell_{21}(x,y) + \int_0^y \theta(x,t)dt$$

$$\text{(IV.A.14)} \qquad B^{12}\theta(x,y) = \ell_{12}(x,y) + \int_0^x \theta(s,y)ds$$

qui vérifient les propriétés suivantes sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \times [-a,a]$

$$\text{(IV.A.15)} \qquad \begin{cases} |B^{oo}\theta(x,y) - B^{oo}\theta(\bar{x},y)| \leq \eta(|x-\bar{x}|) + |\theta| \dfrac{T\,a^2}{4} |x-\bar{x}| \\ |B^{oo}\theta(x,y) - B^{oo}\theta(x,\bar{y})| \leq \eta(|y-\bar{y}|) + |\theta| \dfrac{T\,a^2}{4} |y-\bar{y}| \\ |B^{oo}\theta(x,y)| \leq N_{oo} + \dfrac{T^2a^2}{16} |\theta| \end{cases}$$

$$\text{(IV.A.16)} \qquad \begin{cases} |B^{1o}\theta(x,y) - B^{1o}\theta(\bar{x},y)| \leq \eta_1(|x-\bar{x}|) + |\theta| \dfrac{a^2}{2} |x-\bar{x}| \\ |B^{1o}\theta(x,y) - B^{1o}\theta(x,\bar{y})| \leq \eta_1(|y-\bar{y}|) + |\theta| \dfrac{Ta}{2} |y-\bar{y}| \\ |B^{1o}\theta(x,y)| \leq N_{1o} + |\theta| \dfrac{T\,a^2}{4} \end{cases}$$

$$\text{(IV.A.17)} \qquad \begin{cases} |B^{o1}\theta(x,y) - B^{o1}\theta(\bar{x},y)| \leq \eta_1(|x-\bar{x}|) + |\theta| \dfrac{Ta}{2} |x-\bar{x}| \\ |B^{o1}\theta(x,y) - B^{o1}\theta(x,\bar{y})| \leq \eta_1(|y-\bar{y}|) + |\theta| \dfrac{T^2}{8} |y-\bar{y}| \\ |B^{o1}\ (x,y)| \leq N_{o1} + |\theta| \dfrac{T^2a}{8} \end{cases}$$

$$\text{(IV.A.18)} \qquad \begin{cases} |B^{2o}\theta(x,y) - B^{2o}\theta(\bar{x},y)| \leq \eta_2(|x-\bar{x}|) + \left|\displaystyle\int_0^y (y-t)\rho_1(|x-\bar{x}|,t)dt\right| \\ |B^{2o}\theta(x,y) - B^{2o}\theta(x,\bar{y})| \leq \eta_2(|y-\bar{y}|) + |\theta|a|y-\bar{y}| \\ |B^{2o}\theta(x,y)| \leq N_{2o} + |\theta| \dfrac{a^2}{2} \end{cases}$$

$$(\text{IV.A.19}) \quad \begin{cases} |B^{11}\theta(x,y) - B^{11}\theta(\bar{x},y)| \leq \eta_2(|x-\bar{x}|) + |\theta|a|x-\bar{x}| \\ |B^{11}\theta(x,y) - B^{11}\theta(x,\bar{y})| \leq \eta_2(|y-\bar{y}|) + |\theta| \dfrac{T}{2} |y-\bar{y}| \\ |B^{11}\theta(x,y)| \leq N_{11} + |\theta| \dfrac{Ta}{2} \end{cases}$$

$$(\text{IV.A.20}) \quad \begin{cases} |B^{o2}\theta(x,y) - B^{o2}\theta(\bar{x},y)| \leq \eta_2(|x-\bar{x}|) + |\theta| \dfrac{T}{2} |x-\bar{x}| \\ |B^{o2}\theta(x,y) - B^{o2}\theta(x,\bar{y})| \leq \eta_2(|y-\bar{y}|) + \left|\int_o^x (x-s)\rho_2(s,|y-\bar{y}|)ds\right| \\ |B^{o2}\theta(x,y)| \leq N_{o2} + |\theta| \dfrac{T^2}{8} . \end{cases}$$

$$(\text{IV.A.21}) \quad \begin{cases} |B^{21}\theta(x,y) - B^{21}\theta(\bar{x},y)| \leq \eta_3(|x-\bar{x}|) + \left|\int_o^y \rho_1(|x-\bar{x}|,t)dt\right| \\ |B^{21}\theta(x,y) - B^{21}\theta(x,\bar{y})| \leq |\theta| \; |y-\bar{y}| \\ |B^{21}\theta(x,y)| \leq N_{21} + |\theta|a \end{cases}$$

$$(\text{IV.A.22}) \quad \begin{cases} |B^{12}\theta(x,y) - B^{12}\theta(\bar{x},y)| \leq |\theta| \; |x-\bar{x}| \\ |B^{12}\theta(x,y) - B^{12}\theta(x,\bar{y})| \leq \eta_3(|y-\bar{y}|) + \left|\int_o^x \rho_2(s,|y-\bar{y}|)ds\right| \\ |B^{12}\theta(x,y)| \leq N_{12} + |\theta| \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

Introduisons maintenant l'hypothèse concernant la fonction f. Soit $\mathcal{B}$ le sous-ensemble de R^{2+8m} défini à partir des constantes positives M_{ij}, $i,j \in \{0, 1, 2\}$

$$\mathcal{B} = \{(x,y,(z_{ij})) \in \mathbb{R}^{2+8m} : x \in \mathbb{R},\ |y| \leq a,\ |z_{ij}| \leq M_{ij},\ i,\ j \in \{0,1,2\}\}$$

(h.A.2) La fonction $f : f(x,y,z_{oo},z_{1o},z_{o1},z_{2o},z_{11},z_{o2},z_{21},z_{12})$ est définie et continue sur $\mathcal{B}$ à valeurs dans E et périodique en x de période T.

Cette hypothèse entraîne l'existence de fonctions ω, ω_{ij} numériques, continues, nulles à l'origine et non décroissantes telles que :

(IV.A.23) $$|f(x,y,(z_{ij}))-f(\bar{x},\bar{y},(\bar{z}_{ij}))| \leqslant \omega(|x-\bar{x}|+|y-\bar{y}|) + \sum_{i,j}\omega_{ij}(|z_{ij}-\bar{z}_{ij}|)$$

D'autre part soit $L = \sup\limits_{B} |f(x,y,(z_{ij}))|$.

Avec l'hypothèse :

(h.A.3) Les constantes positives L, N_{ij}, M_{ij} vérifient les inégalités :

(IV.A.24) $$\left\{\begin{array}{l} N_{oo} + (3L + \frac{4}{T}N_{12})\,\dfrac{a^2T^2}{16} < M_{oo} \\ N_{1o} + (3L + \frac{4}{T}N_{12})\,\dfrac{a^2T}{4} < M_{1o} \\ N_{o1} + (3L + \frac{4}{T}N_{12})\,\dfrac{a^2T}{4} < M_{o1} \\ N_{2o} + (3L + \frac{4}{T}N_{12})\,\dfrac{a^2}{2} < M_{2o} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} N_{11} + (3L + \frac{4}{T}N_{12})\,\dfrac{aT}{2} < M_{11} \\ N_{o2} + (3L + \frac{4}{T}N_{12})\,\dfrac{T^2}{8} < M_{o2} \\ N_{21} + (3L + \frac{4}{T}N_{12})a < M_{21} \\ 5N_{12} + 3LT < M_{12} \end{array}\right.$$

il est possible de définir pour $\theta \in C(A_1)$ et (x,y) : $|x| \leqslant \frac{T}{2}$, $|y| \leqslant a$

(IV.A.24) $$F(x,y,\theta) = f(x,y,B^{oo}\theta(x,y),B^{1o}\theta(x,y),\ldots\ldots,B^{12}\theta(x,y)).$$

Comme dans le chapitre précédent, il nous faut "modifier" cette équation (IV.A.1 et 2) sous la forme

(IV.A.26) $$\theta = F(x,y,\theta) - m_1(x,y,\theta)$$

de telle sorte que toute solution vérifie

$$B^{ij}\theta(\frac{T}{2}, y) - B^{ij}\theta(-\frac{T}{2}, y) \quad \text{pour} \quad |y| \leqslant a.$$

Si nous écrivons ces différentes formules nous avons tout d'abord :

$$B^{oo}\theta(\frac{T}{2}, y) - B^{oo}\theta(-\frac{T}{2}, y) = T\{\beta_2(y) - \beta_2(0) - \alpha_2'(0)y\} +$$

$$+ \int_0^{T/2} \int_0^y (\frac{T}{2} - s)(y-t) \left[F(s,t,\theta) - m_1(s,t,\theta) \right] ds\ dt$$

$$- \int_0^{-T/2} \int_0^y (- \frac{T}{2} - s)(y-t) \left[F(s,t,\theta) - m_1(s,t,\theta) \right] ds\ dt.$$

Cette expression sera nulle pourvu que :

$$B^{o1}\theta(\frac{T}{2}, y) - B^{o1}\theta(- \frac{T}{2}, y) = T\left[\beta_2'(y) - \alpha_2'(0)\right]$$

$$+ \int_0^{T/2} \int_0^y (\frac{T}{2} - s) \left[F(s,t,\theta) - m_1(s,t,\theta) \right] ds\ dt$$

$$- \int_0^{-T/2} \int_0^y (- \frac{T}{2} - s) \left[F(s,t,\theta) - m_1(s,y,\theta) \right] ds$$

le soit, ce qui sera réalisé pourvu que :

$$B^{o2}\theta(\frac{T}{2}, y) - B^{o2}\theta(- \frac{T}{2}, y) = T\ \beta_2''(y) +$$

$$+ \int_0^{T/2} (\frac{T}{2} - s) \left[F(s,y,\theta) - m_1(s,y,\theta) \right] ds$$

$$- \int_0^{-T/2} (- \frac{T}{2} - s) \left[F(s,y,\theta) - m_1(s,y,\theta) \right] ds$$

soit nulle elle-aussi.

Désignons alors par σ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, périodique de période T valant

$$\text{(IV.A.27)} \qquad \sigma(x) = \begin{cases} - \frac{T}{2} - x & \text{si} \quad - \frac{T}{2} \leq x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{T}{2} - x & \text{si} \quad 0 < x \leq \frac{T}{2} \end{cases} .$$

La condition $B^{oj}\theta(\frac{T}{2}, y) - B^{oj}\theta(-\frac{T}{2}, y) = 0$ se traduit alors par :

(IV.A.28) $$\beta_2''(y) + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sigma(s)\left[F(s,y,\theta) - m_1(s,y,\theta)\right]ds = 0$$

D'un autre côté :

$$B^{1o}\theta(\frac{T}{2}, y) - B^{1o}\theta(-\frac{T}{2}, y) = \int_o^{T/2}\int_o^y (y-t)\left[F(s,t,\theta) - m_1(s,t,\theta)\right]ds\,dt$$
$$- \int_o^{-T/2}\int_o^y \left[F(s,t,\theta) - m_1(s,t,\theta)\right]ds\,dt$$

sera nulle pourvu que

$$B^{11}\theta(\frac{T}{2}, y) - B^{11}\theta(-\frac{T}{2}, y) = \int_o^{T/2}\int_o^y \left[F(s,t,\theta) - m_1(s,t,\theta)\right]ds\,dt$$
$$- \int_o^{-T/2}\int_o^y \left[F(s,t,\theta) - m_1(s,t,\theta)\right]ds\,dt$$

le sera. Mais $B^{11}\theta(\frac{T}{2}, y) - B^{11}\theta(-\frac{T}{2}, y)$ sera nulle dès que nous aurons $B^{12}\theta(\frac{T}{2}, y) = B^{12}\theta(-\frac{T}{2}, y)$ c'est-à-dire

(IV.A.28 bis) $$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left[F(s,y,\theta) - m_1(s,y,\theta)\right]ds = 0$$

Les autres relations $B^{2o}\theta(\frac{T}{2}, y) = B^{2o}\theta(-\frac{T}{2}, y)$ et

$B^{21}\theta(\frac{T}{2}, y) = B^{21}\theta(-\frac{T}{2}, y)$ sont

automatiquement satisfaites.

Avec les définitions de

(IV.A.29) $$\begin{cases} \mu(y,\theta) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} F(s,y,\theta)ds \\ \nu(y,\theta) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \sigma(s)F(s,y,\theta)ds \end{cases}$$

les relations (IV.A.28 et 28bis) deviennent

$$\text{(IV.A.30)}\qquad \begin{cases} \beta_2''(y) + \nu(y,\theta) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} m_1(s,y,\theta)\sigma(s)ds \\ \mu(y,\theta) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} m_1(s,y,\theta)ds. \end{cases}$$

Définissant alors $2m_1^+(s,y,\theta) = m_1(s,y,\theta) + m_1(-s,y,\theta)$ et $2m_1^-(s,y,\theta) = m_1(s,y,\theta) - m_1(-s,y,\theta)$, nous écrirons (IV.A.30) sous la forme :

$$\text{(IV.A.31)}\qquad \begin{cases} \beta_2''(y) + \nu(y,\theta) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} m_1^-(s,y,\theta)\sigma(s)ds \\ \mu(y,\theta) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} m_1^+(s,y,\theta)ds \end{cases}$$

Il est naturel alors d'imposer à m_1^+ et à m_1^- d'être respectivement proportionnelles à $\mu(y,\theta)$ et $\beta_2''(y) + \nu(y,\theta)$ et de norme moindre (au sens de la convergence uniforme).

Nous voyons que $m_1^+(s,y,\theta) = \mu(y,\theta)$ et que $m_1^-(y,\theta)$ devrait s'écrire $\frac{4}{T}\left[\beta_2^{11}(y) + \nu(y,\theta)\right]\text{sign}(s)$

$$\text{avec}\quad \text{sign}(s) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < s < \dfrac{T}{2} \\ 0 & \text{si } s = 0 \text{ ou } \dfrac{T}{2} \\ -1 & \text{si } -\dfrac{T}{2} < s < 0 \end{cases}$$

En fait nous choisirons une fonction voisine de $\frac{4}{T}$ sign(x) mais continue. Plus exactement, faisons l'hypothèse :

(h.A.4) ε étant positif, λ désigne une fonction numérique définie et continue sur $\mathbb{R}$, éventuellement lipschitzienne, impaire périodique en x de période T et vérifiant les relations

$$\text{(IV.A.32)}\qquad |\lambda| < \frac{4}{T}(1+\varepsilon) \qquad \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \lambda(s)\sigma(s)ds = 1.$$

Dans ces conditions, nous définissons

$$m_1(x,y,\theta) = \mu(y,\theta) + \lambda(x)\nu(y,\theta) \tag{IV.A.33}$$

et

$$\mathcal{F}_1(x,y,\theta) = \mathcal{F}(x,y,\theta) - \mu(y,\theta) - \lambda(x)\nu(y,\theta). \tag{IV.A.34}$$

Il nous faut étudier l'équation

$$\theta = \mathcal{F}_1(x,y,\theta)$$

qui est l'équation modifiée du problème (IV.A.1 et 2).

Avec ce choix nous avons évidemment

$$|\mu(y,\theta)| \leqslant L \quad \text{et} \quad |\nu(y,\theta)| \leqslant \frac{T}{4} L \quad \text{donc}$$

$$\begin{aligned}
|m_1(x,y,\theta)| &\leqslant L + \frac{4}{T}(1+\varepsilon)\{N_{12} + \frac{T}{2} L\} \\
&\leqslant (2+\varepsilon)L + \frac{4}{T}(1+\varepsilon) \\
&\leqslant (1+\varepsilon)(2L + \frac{4}{T} N_{12})
\end{aligned}$$

soit

$$|\mathcal{F}_1(x,y,\theta)| \leqslant (1+\varepsilon)(3L + \frac{4}{T} N_{12}) = L^*(\varepsilon) \tag{IV.A.35}$$

Les relations (IV.A.15, 16... 22) jointes à $|\lambda(x) - \lambda(\bar{x})| \leqslant \bar{\omega}(|x-\bar{x}|)$ permettent d'évaluer les quantités suivantes :

$$\text{(IV.A.36)} \quad \left\{ \begin{aligned}
&|\mathcal{F}(x,y,\theta)-\mathcal{F}(\bar{x},y,\theta)| \leqslant \omega(|x-\bar{x}|) + \omega_{oo}\{\eta(|x-\bar{x}|) + |\theta| \frac{T\ a^2}{4} |x-\bar{x}|\} \\
&+ \omega_{10}\{\eta_1(|x-\bar{x}|) + |\theta| \frac{a^2}{2} |x-\bar{x}|\} + \omega_{o1}\{\eta_1(|x-\bar{x}|) + |\theta| \frac{aT}{2} |x-\bar{x}|\} \\
&+ \omega_{20}\{\eta_2(|x-\bar{x}|) + |\int_o^y (y-t)\rho_1(|x-\bar{x}|,t)dt|\} \\
&+ \omega_{11}\{\eta_2(|x-\bar{x}|) + |\theta| a |x-\bar{x}|\} + \omega_{o2}\{\eta_2(|x-\bar{x}|) + |\theta| \frac{T}{2} |x-\bar{x}|\}
\end{aligned} \right.$$

$$\left. + \omega_{21}\{\eta_3(|x-\bar{x}|) + |\int_o^y \rho_1(|x-\bar{x}|,t)dt|\} + \omega_{12}\{|\theta|\ |x-\bar{x}|\} \right.$$

$$\text{(IV.A.37)} \quad \left\{ \begin{aligned} & |F(x,y,\theta)-F(x,\bar{y},\theta)| \leqslant \omega(|y-\bar{y}|) + \omega_{oo}\{\eta(|y-\bar{y}|) + |\theta|\ \frac{T^2a}{8}\ |y-\bar{y}|\} \\ & + \omega_{1o}\{\eta_1(|y-\bar{y}|) + |\theta|\ \frac{Ta}{2}\ |y-\bar{y}|\} + \omega_{o1}\{\eta_1(|y-\bar{y}|) + |\theta|\ \frac{T^2}{8}\ |y-\bar{y}|\} \\ & + \omega_{2o}\{\eta_2(|y-\bar{y}|) + |\theta|a|y-\bar{y}|\} + \omega_{11}\{\eta_2(|y-\bar{y}|) + |\theta|\ \frac{T}{2}\ |y-\bar{y}|\} \\ & + \omega_{o2}\{\eta_2(|y-\bar{y}|) + |\int_o^x (x-s)\rho_2(s,|y-\bar{y}|)ds|\} \\ & + \omega_{21}\{|\theta|\ |y-\bar{y}|\} + \omega_{12}\{\eta_3(|y-\bar{y}|) + |\int_o^x \rho_2(s,|y-\bar{y}|)ds|\}. \end{aligned} \right.$$

Posons alors :

$$\text{(IV.A.38)} \quad \begin{aligned} \Omega_1(\delta) = {} & \omega(\delta) + \omega_{oo}\{\eta(\delta) + L^*(\varepsilon)\ \frac{T\ a^2}{4}\ \delta\} + \omega_{1o}\{\eta_1(\delta) + L^*(\varepsilon)\ \frac{a^2}{2}\ \delta\} \\ & + \omega_{o1}\{\eta_1(\delta) + L^*(\varepsilon)\ \frac{aT}{2}\ \delta\} + \omega_{2o}\{\eta_2(\delta)\} \\ & + \omega_{11}\{\eta_2(\delta) + L^*(\varepsilon)as\} + \omega_{o2}\{\eta_2(\delta) + L^*(\varepsilon)\ \frac{T}{2}\ \delta\} \\ & + \omega_{21}\{\eta_3(\delta)\} + \omega_{12}\{L^*(\varepsilon)\delta\} + \bar{\omega}(\delta)\ \frac{TL^*(\varepsilon)}{4} \end{aligned}$$

et

$$\text{(IV.A.39)} \quad \begin{aligned} \frac{1}{3+\varepsilon}\ \Omega_1'(\delta) = {} & \omega(\delta) + \omega_{oo}\{\eta(\delta) + L^*(\varepsilon)\ \frac{T^2a}{8}\ \delta\} + \omega_{1o}\{\eta_1(\delta) + L^*(\varepsilon)\ \frac{aT}{2}\ \delta\} \\ & + \omega_{o1}\{\eta_1(\delta) + L^*(\varepsilon)\ \frac{T^2}{8}\ \delta\} + \omega_{2o}\{\eta_2(\delta) + L^*(\varepsilon)a\delta\} \\ & + \omega_{11}\{\eta_2(\delta) + L^*(\varepsilon)\ \frac{T}{2}\ \delta\} + \omega_{o2}\{\eta_2(\delta)\} \\ & + \omega_{21}\{L^*(\varepsilon)\delta\} + \omega_{12}\{\eta_3(\delta)\} \end{aligned}$$

et pour $g \geqslant 0$ appartenant à $C(A_1)$

$$\text{(III.A.40)} \qquad P_1^\sigma g(x,y) = g(x,y) + \frac{1}{T}\ (1+\varepsilon) \int_{-T/2}^{T/2} (1 + \frac{4}{T}\ |\sigma(x)|)g(x,y)dx$$

Choisissons ε positif et donc la fonction λ de sorte que l'hypothèse

(h.A.3bis) Les constantes ε, L, m, m_{ij}, M_{ij} vérifient les inégalités :

(IV.A.41)
$$\left\{\begin{array}{l} N_{oo} + L^*(\varepsilon)\dfrac{a^2T^2}{16} \leqslant M_{oo} \\ N_{1o} + L^*(\varepsilon)\dfrac{a^2T}{4} \leqslant M_{1o} \\ N_{o1} + L^*(\varepsilon)\dfrac{aT^2}{8} \leqslant M_{o1} \\ N_{2o} + L^*(\varepsilon)\dfrac{a^2}{2} \leqslant M_{2o} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} N_{11} + L^*(\varepsilon)\dfrac{aT}{2} \leqslant M_{11} \\ N_{o2} + L^*(\varepsilon)\dfrac{T^2}{8} \leqslant M_{o2} \\ N_{21} + L^*(\varepsilon)a \leqslant M_{21} \\ N_{12} + L^*(\varepsilon)\dfrac{T}{2} \leqslant M_{12} \end{array}\right.$$

soit satisfaite.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème suivant :

Théorème IV.A.1. :

Avec les hypothèses h.A.1, 2, 3bis, 4 et 5

(h.A.5) Les équations :

(IV.A.42)
$$\rho_1(\delta,y) = \Omega_1(\delta) + \omega_{2o}\left(\left|\int_o^y (y-t)\rho_1(\delta,t)dt\right|\right) + \omega_{21}\left(\left|\int_o^y \rho_1(\delta,t)dt\right|\right)$$

(IV.A.43)
$$\rho_2(x,\delta) = \Omega_2(\delta) + P_1^\sigma\,\omega_{o2}\left(\left|\int_o^x (x-t)\rho_2(t,\delta)dt\right|\right) + P_1^\sigma\,\omega_{12}\left(\left|\int_o^y \rho_2(t,\delta)dt\right|\right)$$

admettent des solutions positives ou nulles convergentes vers 0 uniformément par rapport à x sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ et y sur $[-a,a]$.

L'équation $\theta = F_1(x,y,\theta)$ admet au moins une solution dans $C(A_1)$.

La démonstration se fait de la même manière que dans les théorèmes d'existence précédents.

Soit $S_1 = \{\theta \in C(A_1) \quad |\theta| \leqslant L^*(\varepsilon)$ et pour $|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}| \leqslant \delta$

$$|\theta(x,y) - \theta(\bar{x},\bar{y})| \leqslant \rho_1(|x-\bar{x}|,y) + \rho_2(\bar{x},|y-\bar{y}|)\}$$

dans lequel les fonctions ρ_i sont définies par (IV.A.42 et 43).

S_1 est convexe compact, il suffit d'établir que

$$\theta \in S_1 \implies \mathcal{F}_1(x,y,\theta) \in S_1$$

et

$\theta \to \mathcal{F}_1(x,y,\theta)$ est continue de S_1 dans S_1.

Ce qui ne pose aucune difficulté.

2°) Cas lipschitzien.

Comme dans le chapitre précédent, nous essayons d'interpréter l'hypothèse (h.A.5) dans le cas où la fonction f est lipschitzienne.

Théorème IV.A.2 :

Avec les hypothèses :

(h.A.1)

(h.A.2bis) En plus de (h.A.2) la fonction f est lipschitzienne par rapport aux variables z_{o2}, z_{2o}, z_{21} et z_{12} :

$$\omega_{ij}(\delta) = k_{ij}|\delta| \quad \text{pour} \quad ij \in \{o2,\ 2o,\ 21,\ 12\}$$

(h.A.3)

(h.A.4)

(h.A.5bis) Les constantes ε et K_1, K_2 solutions de l'équation

$$r^2 - k_{12}r - k_{o2} = 0$$

satisfont la relation

$$\text{(IV.A.44)} \qquad (3+2\varepsilon) - \frac{2(1+\varepsilon)}{(K_1-K_2)T}\left\{e^{K_1T/2} - e^{K_2T/2} + \frac{4}{T}\left(\frac{e^{K_1T/2}-1}{K_1T} - \frac{e^{K_2T/2}-1}{K_2T}\right)\right\} > 0$$

L'équation $\theta = \mathcal{F}_1(x,y,\theta)$ admet au moins une solution dans $C(A_1)$.

La démonstration de ce théorème repose sur l'explicitation des relations (IV.A.42, 43) ; c'est l'objet des deux lemmes :

Lemme IV.A.1 :

L'équation

$$\rho(y) = 1 + k_{2o}\left|\int_o^y (y-t)\rho(t)dt\right| + k_{21}\left|\int_o^y \rho(t)dt\right|$$

admet une solution continue positive définie sur tout R.

Nous avons évidemment $\rho(y) = \rho(-y)$ et pour $y \geq 0$

$\rho''(y) - k_{21}\rho'(y) - k_{2o}\rho(y) = 0, \quad \rho(0) = 1, \quad \rho'(0) = k_{21}.$

La solution de cette équation est positive définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Lemme IV.A.2 :

L'équation

(IV.A.45) $\rho(x) = 1 + k_{o2}P_1^\sigma \left|\int_o^x (x-s)\rho(s)ds\right| + k_{12}P_1^\sigma \left|\int_o^x \rho(s)ds\right.$

admet une solution continue positive définie sur $\left|-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right|$
pourvu que les constantes ε, k_{o2} et k_{12} vérifient (IV.A.44).

Comme dans le lemme précédent on a $\rho(x) = \rho(-x)$ et

$\rho''(x) - k_{12}\rho'(x) - k_{o2}\rho(x) = 0$ si $x > 0$

avec

(IV.A.46) $$\rho(0) + 1 + \frac{1}{T}(1+\varepsilon)\int_{-T/2}^{T/2}\left(1+\frac{4}{T}|\sigma(x)|\right)\left(k_{o2}\left|\int_o^x (x-s)\rho(s)ds\right| + k_{12}\left|\int_o^x \rho(s)ds\right|\right)dx$$

et $\rho'(0) = k_{12}\rho(0)$.

Si nous désignons par $K_1 \leq 0 \leq K_2$ les solutions de

$$r^2 - k_{12}r - k_{o2} = 0, \text{ nous avons :}$$

$$\rho(x) = \rho(0) \left[\frac{K_1}{K_1-K_2} e^{K_1|x|} + \frac{K_2}{K_2-K_1} e^{K_2|x|}\right] \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le lemme sera prouvé si l'équation (IV.A.46) définit $\rho(0)$ comme une quantité positive, c'est-à-dire si

$$1 - \frac{2}{T}(1+\varepsilon) \int_o^{T/2} (3 - \frac{4}{T} x) \{ \frac{K_1}{K_1-K_2} e^{K_1|x|} + \frac{K_2}{K_2-K_1} e^{K_2|x|} - 1\}dx > 0$$

ou

$$(3+2\varepsilon) - \frac{2(1+\varepsilon)}{T} \int_o^{T/2} (3 - \frac{4}{T} x) \{ \frac{K_1}{K_1-K_2} e^{K_1|x|} + \frac{K_2}{K_2-K_1} e^{K_2|x|} \}dx > 0.$$

Cette dernière relation, après intégration donne (IV.A.44).

Remarque :

On peut rechercher les valeurs de $k_{o2}T^2$ et $k_{12}T$ assurant cette condition. On remarque alors que

(IV.A.47) $$\frac{k_{o2}T^2}{13,5} + \frac{k_{12}T}{1,8} < 1$$

est une condition suffisante pour déterminer ε et assurer (IV.A.44).

Dans la lignée du lemme précédent, on peut établir le lemme suivant :

Lemme IV.A.3 :

L'équation :

$$\rho(x,y) = 1 + k_{oo}P_1^\sigma \int_o^x\int_o^y (x-s)(y-t)\rho(s,t)ds\, dt|$$

(III.A.48)
$$+ k_{1o}P_1^\sigma|\int_o^x\int_o^y (y-t)\rho(s,t)ds\, dt| + k_{o1}P_1^\sigma|\int_o^x\int_o^y (x-s)\rho(s,t)ds\, dt|$$

$$+ k_{2o}P_1^\sigma|\int_o^y (y-t)\rho(x,t)dt| + k_{11}P_1^\sigma|\int_o^x\int_o^y \rho(s,t)ds\, dt| +$$

$$+ P_{o2}P_1^{\sigma}\left|\int_0^x (x-s)\rho(s,y)ds\right| + k_{21}P_1^{\sigma}\left|\int_0^y \rho(x,t)dt\right|$$

$$+ k_{12}P_1^{\sigma}\left|\int_0^x \rho(s,y)ds\right|$$

admet une solution continue, positive définie sur tout ensemble de la forme $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \times [-a,a]$ dès que la relation (IV.A.44) est satisfaite.

La démonstration de ce lemme est identique à celle du lemme (III.A.3).

Ce lemme permet d'établir le théorème d'unicité suivant :

Théorème IV.A.3. :

Avec les hypothèses du théorème (IV.A.2), si la fonction f est lipschitzienne par rapport aux variables (z_{ij})

$$|f(x,y,(z_{ij})) - (x,y,(\bar{z}_{ij})| \leq \sum k_{ij}|z_{ij} - \bar{z}_{ij}|$$

l'équation :

$$\theta = F_1(x,y,\theta)$$

admet une et une seule solution. De plus, cette solution est continue par rapport aux données initiales α, β, γ, δ.

Démonstration :

Désignons par $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$, $(\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_2)$ deux quadruplets de fonctions vérifiant l'hypothèse (h.A.1) et désignons par ℓ_{oo} et $\bar{\ell}_{oo}$ les solutions correspondantes de l'équation $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$.

Si χ désigne la quantité

$$\chi = \sum_{i=0}^{2} \left[|\alpha_1^i - \bar{\alpha}_1^i| + |\beta_1^i - \bar{\beta}_1^i| + |\alpha_2^i - \bar{\alpha}_2^i| + |\beta_2^i - \bar{\beta}_2^i|\right]$$

nous pouvons trouver une constante K telle que

$$|\ell_{ij}(x,y) - \bar{\ell}_{ij}(x,y)| \leq K\chi$$

si nous désignerons par θ et $\bar{\theta}$ les solutions correspondantes de l'équation $\theta = F_1(x,y,\theta)$, nous pouvons poser

$$||\theta - \bar{\theta}||(x,y) = \sum_{i,j} k_{ij}|B^{ij}\theta(x,y) - B^{ij}\bar{\theta}(x,y)|$$

et

$$\chi(x,y) = P_1^{\sigma}||\theta - \bar{\theta}||(x,y).$$

Nous avons alors

$$|B^{oo}\theta(x,y) - B^{oo}\bar{\theta}(x,y)| \leq K\chi + \left|\int_o^x \int_o^y (x-s)(y-t)\chi(s,t)ds\ dt\right|$$

...

$$|B^{12}\theta(x,y) - B^{12}\bar{\theta}(x,y)| \leq K\chi + \left|\int_o^x \chi(s,y)ds\right|.$$

Multipliant chacune de ces équations par $k_{oo},\dots,k_{12}$ et appliquant l'opérateur P_1^{σ} nous constatons que

$$\chi(x,y) \leq K\chi + P_1^{\sigma}k_{oo}\left|\int_o^x\int_o^y (x-s)(y-t)\chi(s,t)ds\ dt\right| + \dots + P_1^{\sigma}k_{12}\left|\int_o^x \chi(s,y)ds\right|$$

qui d'après le lemme (IV.A.3) montre que $\chi(x,y)$ est bornée par $K_1\chi$ sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \times [-a,a]$.

Le théorème (IV.A.3) est ainsi établi.

3°) *Existence de solutions périodiques du problème initial.*

Comme précédemment, nous allons montrer la possibilité de déterminer les fonctions β_1 et β_2 de façon à assurer la nullité du terme $m_1(x,y,\theta)$

Considérons

$$H(y,v,z(t),\ 0 \leq t < y) = \begin{cases} H_1(y,v,z(t), & 0 \leq t < y) \\ H_2(y,v,z(t), & 0 \leq t < y) \end{cases}$$

une fonctionnelle à valeurs dans $E \times E$ $(E = \mathbb{R}^m)$ dépendant de la variable t réelle, des vecteurs $v = (v_1,v_2)$ et $z(t) = (z_1(t),z_2(t))$ de $E \times E$ définis pour $0 \leq t < y$.

Soient $I = [0,a]$, w un vecteur de $E \times E$.

$$Y_\delta = \{v \in E \times E \quad |v-w| \leq \delta\}$$

et $Z_\delta = C(I,Y_\delta)$ ensemble des fonctions continues définies sur I, à valeurs dans Y_δ muni de la convergence uniforme. H peut dès lors être considérée comme une application de $I \times Y_\delta \times Z_\delta$ dans $E \times E$ pour laquelle on a le théorème suivant (qui se démontre comme le théorème (III.A.4) de L. Césari).

Théorème IV.A.4. :

Avec les hypothèses :

(h.A.6) La fonctionnelle $H : H(y,v,z)$ est continue bornée sur $I \times Y_\delta \times Z_\delta$ et continûment différentiable par rapport à v $v = (v_1,v_2)$. Soit $L(y,v,z)$ sa différentielle.

(h.A.7) Pour $y = 0$, H ne dépend pas de z : $H(0,v,.)$ il existe de plus $w = (w_1,w_2) \in E \times E$ tel que

(i) $H_1(0,w,.) = 0$, $H_2(0,w,.) + w_2 = 0$

(ii) $L(0,w,.) + (0,i_E)$ est inversible dans $L(E \times E, E \times E)$

($(0,i_E)$ désignant la différentielle de $v \to v_2$).

On peut trouver des nombres positifs $a' \leq a$, $\delta_o \leq \delta$ et une fonction $b = (b_1,b_2)$ de Z_{δ_o} telle que :

$$\text{(IV.A.49)} \quad \begin{cases} b(0) = w & \|b(y) - w\| \leq \delta_o \quad \text{sur} \quad [0,a'] \\ H_1(y,b(y),b(t), & 0 \leq t < y) = 0 \\ H_2(y,b(y),b(t), & 0 \leq t < y) + b_2(y) = 0 \quad \text{pour} \quad y \in [0,a']. \end{cases}$$

Comme dans la partie (III.A), nous allons examiner ce qu'il se passe lorsque la fonction $\beta'' = (\beta_1'',\beta_2'')$ présente des discontinuités. Plus exactement :

(h.A.8) Les fonctions α_1,α_2 définies et continues sur R à valeurs dans E ainsi que leurs dérivées α_1', α_1'', α_2', α_2'' sont périodiques de même période T. Les fonctions β_1, β_2 sont définies et continues sur $[-a,a]$ à valeurs dans E ainsi que leurs dérivées β_1' et β_2' sur $]-a,a[$ et vérifient

$$\alpha_1(0) = \beta_1(0), \qquad \alpha_2(0) = \alpha_1'(0), \qquad \beta_2(0) = \beta_1'(0), \qquad \beta_2'(0) = \alpha_2'(0)$$

D'autre part, les dérivées β_1'' et β_2'' présentent sur $]-a,a[$ des discontinuités de première espèce en nombre fini

$$-a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_p \leq a \qquad \text{avec}$$

$$\beta_1''(t_j - 0) = \beta_1''(t_j) \neq \beta_1''(t_j + 0)$$

$$\beta_2''(t_j - 0) = \beta_2''(t_j) \neq \beta_2''(t_j + 0)$$

et $\quad |\beta_i''(t) - \beta_i''(\bar{t})| \leq \ell_i |t - \bar{t}| \quad$ pour $i = 1, 2 \quad t_j < t < \bar{t} < t_{j+1}$.

Comme l'hypothèse (h.A.1) cette hypothèse définit une fonction ℓ_{oo} de $C(A_1)$ solution de $u_{x^2y^2} = 0$ et nous désignerons encore N_{ij} les constantes positives ou nulles majorant ℓ_{oo} et ses dérivées sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \times [-a,a]$.

De même $\mathcal{B} = \{(x,y,(z_{ij})) : x \in \mathbb{R}, |y| \leq a \quad |z_{ij}| \leq M_{ij}\}$.

(h.A.9) La fonction $f : f(x,y,(z_{ij}))$ est définie sur $\mathcal{B}$, à valeurs dans E périodique en x de période T et lipschitzienne.

$$|f(x,y,(z_{ij})) - f(\bar{x},\bar{y},(\bar{z}_{ij}))| \leqslant k(|x-\bar{x}|+|y-\bar{y}|) + \sum k_{ij}|z_{ij}-\bar{z}_{ij}| \tag{IV.A.50}$$

$$L = \sup_{\mathcal{B}} |f(x,y,(z_{ij}))|. \qquad L^{*}(\varepsilon) = (3L + \frac{4}{T} N_{12})(1+\varepsilon)$$

(h.A.10) Les constantes positives ε, L, N_{ij}, M_{ij}, a, T satisfont les relations :

$$\left\{\begin{array}{l} N_{oo} + L^{*}(\varepsilon)\,\dfrac{3a^2T^2}{16} \leqslant M_{oo} \\ N_{1o} + L^{*}(\varepsilon)\,\dfrac{3a^2T}{4} \leqslant M_{1o} \\ N_{o1} + L^{*}(\varepsilon)\,\dfrac{a\,T^2}{4} \leqslant M_{o1} \\ N_{21} + 2L^{*}(\varepsilon)\,a \leqslant M_{21} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} N_{2o} + L^{*}(\varepsilon)\,\dfrac{3a^2}{2} \leqslant M_{2o} \\ N_{11} + L^{*}(\varepsilon)\,aT \leqslant M_{11} \\ N_{o2} + L^{*}(\varepsilon)\,\dfrac{aT^2}{8} \leqslant M_{o2} \\ N_{12} + L^{*}(\varepsilon)\,\dfrac{T}{2} \leqslant M_{12} \end{array}\right. \tag{IV.A.51}$$

Rappelons que le choix de ε conditionne celui de la fonction λ (voir l'hypothèse h.A.4).

Théorème IV.A.5 :

Avec les hypothèses (h.A.8, 9, 10, 4 bis) l'équation :

$$\theta = F_1(x,y,\theta)$$

admet une et une seule solution dans $C(A_1)$ lipschitzienne. (La constante de Lipschitz est alors indépendante du nombre des points de discontinuité et de leur position).

La démonstration de ce théorème est calquée sur celle du théorème (III.A.5).

Comme dans le chapitre précédent, nous avons établi ce dernier théorème après avoir remarqué qu'avec les fonctions α_1, α_2, β_1, β_2 vérifiant l'hypothèse (h.A.1) la solution θ de l'équation (IV.A.34) : $\theta = F_1(x,y,\theta)$ n'est pas perturbée sur $\mathbb{R} \times [0,y[$ lorsqu'on remplace $(\beta_1''(y),\beta_2''(y))$ par (v_1,v_2). Par contre nous obtenons une nouvelle expression pour $B^{2o}\theta(x,y) = q(x)$ et $B^{21}\theta(x,y) = q'(x)$ et donc pour μ et ν satisfaisant :

$$F(x,q(x),q'(x)) = f(x,y,\overline{B^{oo}\theta(x,y),\ldots,q(x),\ldots,q'(x)})$$

$$\text{(IV.A.52)} \quad \begin{cases} q''(x) = F(x,q(x),q'(x)) - \mu - \lambda(x)(\nu + v_2) \\ \mu = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} F(s,q(s),q'(s))ds \\ \nu = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} F(s,q(\nu),q'(s))\sigma(s)ds \\ q(0) = v_1 \qquad q'(0) = v_2. \end{cases}$$

Pour le problème que l'on peut appeler problème différentiel associé à l'équation (IV.A.1), on a les propositions suivantes :

Proposition IV.A.1 :

Avec les hypothèses suivantes :

(h.A.11) Les constantes positives ou nulles ε, $T > 0$, M_{o2}, M_{12}, N_{o2}, N_{12} et L :

$$N_{o2} + \left[3L + \frac{4}{T}(1+\varepsilon)N_{12}\right]\frac{T^2}{8} \leq M_{o2}$$

$$N_{12} + \left[3L + \frac{4}{T}(1+\varepsilon)N_{12}\right]\frac{T}{4} \leq M_{12} \quad .$$

(h.A.12) La fonction $F : F(x,q,q_1)$ définie et continue sur l'ensemble $A = R \times [-M_{o2},M_{12}] \times [-M_{12},M_{12}]$ à valeurs dans $E = R^m$ est périodique en x de période T, et bornée par L.

(h.A.4) (définition de λ)

L'équation (IV.A.52) admet pour tous les couples (v_1,v_2) tels que $|v_1| + \frac{T}{2}|v_2| \leqslant N_{o2}$, $|v_2| \leqslant N_{12}$ une solution $\bar{q}$ périodique en x de période T.

Démonstration :

Comme $|F(x,q,q_1)| \leqslant L$, $|\nu| \leqslant \frac{T}{4} L$ et $|\mu| \leqslant L$.

Soit $C(A)$ l'ensemble des fonctions T périodiques définies sur R à valeurs dans E telles que :

$$|\phi'(x) - \phi'(\bar{x})| \leqslant \left[3L + \frac{4}{T}(1+\varepsilon)N_{12}\right]|x-\bar{x}|$$

$$\phi(0) = v_1, \quad \phi'(0) = v_2 \qquad |\phi| \leqslant M_{o2} \quad \text{et} \quad |\phi'| \leqslant M_{12}$$

On définit l'application $g : \phi \to \Psi$

$$\Psi(x) = v_1 + v_2 x + \int_o^x (x-s)\{F(s,\phi(s),\phi'(s)) - \mu(\phi) - \lambda(s)(\nu(\phi) + v_2)\}ds$$

avec $$\mu(\phi) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(s,\phi(s),\phi'(s))ds$$

et $$\nu(\phi) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sigma(s)F(s,\phi(s),\phi'(s))ds.$$

On vérifie que g définit bien une application de $C(A)$ dans $C(A)$ et grâce au théorème de Schaüder on montre que cette application admet au moins un point fixe.

Proposition IV.A.2. :

Avec les hypothèses suivantes :

(h.A.11)

(h.A.12bis) En plus de l'hypothèse (h.A.12) la fonction F est lipschitzienne par rapport à q et q_1 :

$$|F(x,q,q_1) - F(x,\bar{q},\bar{q}_1)| \leqslant k_{o2}|q-\bar{q}| + k_{12}|q_1-\bar{q}_1|$$

(les constantes k_{o2} et k_{12} vérifiant le lemme (IV.A.2).

L'équation (IV.A.52) admet alors une et une seule solution continue par rapport aux données (v_1, v_2).

Démonstration :

Elle est analogue à la proposition (III.A.2). Les relations :

$$q(x) = v_1 + v_2 x + \int_0^x (x-s)\{F(s,q(s),q'(s)) - \mu - \lambda(s)(\nu + v_2)\}ds$$

$$\bar{q}(x) = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 x + \int_0^x (x-s)\{F(s,\bar{q}(s),\bar{q}'(s)) - \bar{\mu} - \lambda(s)(\bar{\nu} + \bar{v}_2)\}ds$$

donnent

$$|q(x) - \bar{q}(x)| \leqslant |v_1-\bar{v}_1| + \frac{T}{2}|v_2-\bar{v}_2| +$$

$$\int_0^x (x-s)\{k_{o2}|q(s)-\bar{q}(s)| + k_{12}|q'(s)-\bar{q}'(s)| + |\mu-\bar{\mu}| + \frac{4}{T}(1+\varepsilon)|\nu-\bar{\nu}|\}ds$$

c'est-à-dire en posant :

$$\chi(x) = k_{o2}|q(x)-\bar{q}(x)| + k_{12}|q'(x)-\bar{q}'(x)| + |\mu-\bar{\mu}| + \frac{4}{T}(1+\varepsilon)|\nu-\bar{\nu}|$$

$$\chi(x) \leqslant 4k_{o2}(1+\varepsilon)\{|v_1-\bar{v}_1| + \frac{T}{2}|v_2-\bar{v}_2|\} + P_1^{\sigma}k_{o2}\left|\int_0^x (x-s)\chi(s)ds\right|$$

$$+ 4k_{12}(1+\varepsilon)\{|v_1-\bar{v}_1| + \frac{T}{2}|v_2-\bar{v}_2|\} + P_1^{\sigma}k_{12}\left|\int_0^x \chi(s)ds\right|.$$

. En vertu du lemme (IV.A.2) le résultat est acquis.

Remarque :

La solution de l'équation (IV.A.52) peut être obtenue par approximations successives. Partant de $q_o(x) = v_1 + v_2 x$ et pour $n > 0$

$$q_n(x) = v_1 + v_2 x + \int_0^x (x-s)\{F(s,q_n(s),q_n'(s)) - \mu_{n-1} - \lambda(s)(\nu_{n-1}+v_2)\}ds$$

avec

$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(x,q_n(x),q_n'(x))dx \qquad n \geq 0$$

$$\nu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(x,q_n(x),q_n'(x))\sigma(x)ds \qquad n \geq 0.$$

On obtient :

$$|q_{n+1}(x) - q_n(x)| \leq \int_o^x (x-s)\{k_{o2}|q_{n+1}(s)-q_n(s)| + k_{12}|q_{n+1}'(s)-q_n'(s)|\}ds$$

$$+ \int_o^x (x-s)\{|\mu_n-\mu_{n-1}| + |\lambda(s)||\nu_n-\nu_{n-1}|\}ds$$

c'est-à-dire avec $\varepsilon_n(x) = |q_{n+1} - q_n(x)|$

$$\text{et} \quad \alpha_{n-1} = \{|\mu_n - \mu_{n-1}| + \frac{4}{T}\ |\nu_n - \nu_{n-1}|\}(1+\varepsilon)$$

$$\alpha_n''(x) \leq k_{o2}\ \varepsilon_n(x) + k_{12}\varepsilon_n'(x) + \alpha_{n-1}.$$

En désignant par K_1 et K_2 les solutions de l'équation $r^2 - k_{12}r - k_{o2} = 0$ nous voyons que

$$\text{(IV.A.53)} \qquad \varepsilon_n(x) \leq \frac{\alpha_{n-1}}{k_{o2}}\ \{\frac{K_2}{K_1-K_2}\ e^{K_1|x|} + \frac{K_1}{K_2-K_1}\ e^{K_2|x|} - 1\}$$

puisque

$$k_{o2}\varepsilon_n(x) + k_{12}\varepsilon_n'(x) \leq \alpha_{n-1}\ \{\frac{K_1}{K_1-K_2}\ e^{K_1|x|} + \frac{K_2}{K_2-K_1}\ e^{K_2|x|} - 1\}$$

de sorte que

$$\alpha_n \leq \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \{1 + \frac{4}{T}\ (1+\varepsilon)|\sigma(x)|\}\{k_{o2}\varepsilon_n(x) + k_{12}\varepsilon_n'(x)\}dx$$

$$\alpha_n \leq \alpha_{n-1} \cdot \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\{1 + \frac{4}{T}\ (1+\varepsilon)|\sigma(x)|\}\{\frac{K_1}{K_1-K_2}\ e^{K_1|x|} + \frac{K_2}{K_2-K_1}\ e^{K_2|x|} - 1\}$$

expression que l'on peut écrire $\alpha_n \leqslant \Lambda\, \alpha_{n-1}$ avec $\Lambda < 1$ (cf. Lemme IV.A.2). Ceci établit que la série de terme général α_n et donc $\varepsilon_n(x)$ est convergente ou encore que la suite q_n converge uniformément vers la solution de (IV.A.52).

Proposition IV.A.3 :

Avec les hypothèses de la proposition (IV.A.2) si la fonction F est continûment différentiable par rapport à q et q_1, la fonction $(v_1,v_2) \to (\mu,\nu)$ de $E \times E$ dans lui-même est différentiable.

Démonstration :

Soient $q(x) = v_1 + v_2 x + \int_o^x (x-s)\{F(s,q(s),q'(s)) - \mu - \lambda(s)(\nu + v_2)\}ds$

et $q(x) + \Delta q(x) = v_1 + \Delta v_1 + (v_2 + \Delta v_2)x +$

$$\int_o^x (x-s)\{F(s,q(s),\Delta q(s),q'(s)+\Delta q'(s)) - \mu - \Delta\mu - \lambda(s)(\nu+\Delta\nu+v_2+\Delta v_2)\}ds$$

les solutions correspondantes aux valeurs (v_1,v_2) et $(v_1 + \Delta v_1,\ v_2 + \Delta v_2)$.

Posons $A(x) = F_q(x,q(x),q'(x))$ et

$B(x) = F_{q_1}(x,q(x),q'(x))$.

Nous écrirons alors

$$F(x,q(x) + \Delta q(x),q'(x) + \Delta q'(x)) - F(x,q(x),q'(x)) =$$

$$A(x)\Delta q(x) + B(x)\Delta q'(x) + \eta(x,q,q',\Delta q,\Delta q').$$

(ou plus simplement $\eta(x)$).

Nous avons

$$\Delta q(x) = \Delta v_2 x + \Delta v_1 + \int_o^x (x-s)\{A(s)\Delta q(s) + B(s)\Delta q'(s) + \eta(s)\}$$

$$- (x-s)\{\Delta\mu + \lambda(s)(\Delta\nu + \Delta v_2)\}ds$$

avec $$\Delta\mu = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left[A(s)\Delta q(s) + B(s)\Delta q'(s) + \eta(s)\right]ds$$

et $$\Delta\nu = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [A(s)\Delta q(s) + B(s)\Delta q'(s) + \eta(\Delta)]\sigma(s)ds.$$

Soit l'équation obtenue par linéarisation :

$$\text{(IV.A.54)} \quad \begin{cases} \Delta\tilde{q}(x) = v_1 + v_2 x + \int_0^x (x-s)\{A(s)\Delta\tilde{q}(s)+B(s)\Delta q'(s)-\Delta\tilde{\mu}-\lambda(s)(\Delta\tilde{\nu}+\Delta v_2)\}ds \\ \Delta\tilde{\mu} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \{A(s)\Delta\tilde{q}(s) + B(s)\Delta\tilde{q}'(s)\}ds \\ \Delta\tilde{\nu} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \{A(s)\Delta\tilde{q}(s) + B(s)\Delta\tilde{q}'(s)\}\sigma(s)ds. \end{cases}$$

Cette équation possède évidemment une solution (puisque la fonction $A(x)\Delta\tilde{q}(x) + B(x)\Delta\tilde{q}_1(x)$ vérifie les conditions de la proposition (IV.A.1) mais cette solution est en fait une application linéaire de Δv_1 et Δv_2.

D'autre part en posant $w(x) = \Delta q(x) - \Delta\tilde{q}(x)$, il nous est possible par une procédure analogue à celle utilisée dans la proposition (III.A.3) de montrer que w tend vers 0 plus vite que Δv_1 et Δv_2. En effet :

$$w(x) = \int_0^x (x-s)\{A(s)w(s)+B(s)w'(s)+\eta(s) - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\eta(t)dt-\lambda(s)\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sigma(t)\eta(t)dt\}ds$$

ou $w(0) = w'(0) = 0$

$$w''(x) = A(x)w(x) + B(x)w'(x) + \eta(x) - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\eta(t)dt-\lambda(x)\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\eta(s)\sigma(s)ds.$$

On écrit alors que η tend vers 0 avec Δv_1 et Δv_2 ou $\Delta\tilde{q}$ $\Delta\tilde{q}'$, Δq, $\Delta q'$, c'est-à-dire

$$\forall \alpha > 0 \qquad \exists \gamma > 0 \text{ tel que}$$

$$|\Delta q| + |w| + |\Delta q'| + |w'| < \gamma \implies |\eta(s)| \leq \alpha(|\Delta\tilde{q}| + |\Delta\tilde{q}'| + |w| + |w'|)$$

de sorte que

$$|w''(x)| \leq 3(1+\varepsilon)\alpha(|\Delta\tilde{q}| + |\Delta\tilde{q}'| + |w| + |w'|) + k_{o2}|w(x)| + k_{12}|w'(x)| +$$

$$+ \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (1 + \frac{4}{T}(1+\varepsilon)|\sigma(x)|\{k_{o2}|w(x)| + k_{12}|w(x)|dx$$

c'est-à-dire

$$|w''(x)| \leq 3(1+\varepsilon)\alpha(|\Delta\tilde{q}| + |\Delta\tilde{q}| + |w| + |w'|)\rho(x)$$

avec $\rho(x)$ solution de l'équation (IV.A.45).

La proposition résulte de cette dernière relation puisque l'on pourra écrire :

$$|w| + |w'| \leq \bar{\alpha}(|\Delta\tilde{q}| + |\Delta\tilde{q}'|) \quad \text{avec} \quad \tilde{\alpha} = \frac{3(1+\varepsilon)\alpha(\frac{T}{2} + \frac{T^2}{8})\rho(\frac{T}{2})}{1-3(1+\varepsilon)\alpha(\frac{T}{2}+\frac{T^2}{8})\rho(\frac{T}{2})}$$

Proposition IV.A.4 :

Avec les hypothèses de la proposition (IV.A.3) la fonction $(v_1,v_2) \to (\mu,\nu)$ de $E \times E$ dans lui-même est continûment différentiable.

Désignons par (v_1,v_2), $(\bar{v}_1,\bar{v}_2)$ des conditions initiales voisines (q,μ,ν) et $(\bar{q},\bar{\mu},\bar{\nu})$ les solutions correspondantes nous poserons :

$$A(x) = F_q(x,q(x),q'(x)) \qquad B(x) = F_{q_1}(x,q(x),q'(x))$$

$$\bar{A}(x) = F_q(x,\bar{q}(x),\bar{q}'(x)) \qquad \bar{B}(x) = F_{q_1}(x,\bar{q}(x),q'(x)).$$

Les différentielles $(L_1,\bar{L}) : (h_1,h_2) \to (\Delta\tilde{q}(x), \tilde{\bar{q}}(x))$ seront définies par :

$$\Delta\tilde{q}(x) = h_1+h_2x + \int_o^x (x-s)\{A(s)\Delta\tilde{q}(s) + B(s)\Delta\tilde{q}'(s) - \Delta\tilde{\mu} - \lambda(s)(\Delta\tilde{\nu} + h_2)\}ds$$

$$\Delta\bar{q}(x) = h_1+h_2x + \int_o^x (x-s)\{\bar{A}(s)\Delta\tilde{\bar{q}}(s) + \bar{B}(s)\Delta\tilde{\bar{q}}'(s) - \Delta\tilde{\bar{\mu}} - \lambda(s)(\Delta\tilde{\bar{\nu}} + h_2)\}ds.$$

Il suffira d'exprimer $\Delta\tilde{q}(x) - \Delta\tilde{\bar{q}}(x)$ pour les mêmes valeurs de h_1 et h_2 ; après avoir majoré $A(x) - \bar{A}(x)$, $B(x) - \bar{B}(x)$ sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ puis $\Delta\tilde{\bar{q}}(x)$ par $||\bar{L}||\ ||(h_1,h_2)||$ il nous sera possible par un calcul semblable à ceux qui précédent d'établir que $\Delta\tilde{q}(x) - \Delta\tilde{\bar{q}}(x)$ tend vers 0 avec $A(x) - \bar{A}(x)$ et $B(x) - \bar{B}(x)$.

Avec cette proposition se termine l'étude du problème différentiel associé à l'équation (IV.A.1), nous pouvons alors énoncer le théorème d'existence des solutions périodiques suivant :

(h.A.13) Les fonctions α_1, α_2 définies et continues sur R à valeurs dans $E = R^m$ ainsi que leurs dérivées α_1', α_1'', α_2', α_2'' sont périodiques de même période T avec

$$|\alpha_1''(x) - \alpha_1''(\bar{x})| \leq \ell_1 |x-\bar{x}|$$
$$|\alpha_2''(x) - \alpha_2''(\bar{x})| \leq \ell_2 |x-\bar{x}|.$$

Cette hypothèse définit des constantes positives ou nulles n_{ij} telles que pour $x \in \mathbb{R}$

$$|\alpha_1(x)| \leq n_{oo} \qquad |\alpha_1'(x)| \leq n_{1o} \qquad |\alpha_1''(x)| \leq n_{2o}$$
$$|\alpha_2(x)| \leq n_{o1} \qquad |\alpha_2'(x)| \leq n_{11} \qquad |\alpha_2''(x)| \leq n_{21}.$$

(h.A.14) La fonction $f : f(x,y,z_{oo},z_{1o},z_{o1},z_{2o},z_{11},z_{o2},z_{11},z_{12})$ est définie et continue sur (h.A.2) à valeurs dans E périodique en x de période $T > 0$ et lipschitzienne :

$$|f(x,y,z) - f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})| \leq k(|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}|) + \sum k_{ij}|z_{ij} - \bar{z}_{ij}|$$

Soit $L = \sup_{B} |f(x,y,z)|$.

(h.A.15) Les constantes ε, L, M_{ij}, n_{ij}, k_{o2}, k_{12} satisfont les relations :

$$n_{oo} < M_{oo} \qquad n_{2o} < M_{2o}$$

$$n_{1o} < M_{1o} \qquad n_{11} < n_{11}$$

$$n_{o1} < M_{o1} \qquad n_{o2} + (1+\varepsilon)(3L + \frac{4}{T} n_{12}) \frac{T^2}{8} \leq M_{o2}$$

$$n_{21} < M_{21} \qquad n_{12} + (1+\varepsilon)(3L + \frac{4}{T} n_{12}) \frac{T}{2} \leq M_{12}$$

et l'hypothèse (h.1.5bis).

Désignons alors par F la fonction :

$$F(x,q,q_1) = f(x,0,\alpha_1(x),\alpha_1'(x),\alpha_2(x),\alpha_1''(x),\alpha_2'(x),q,\alpha_2''(x),q_1)$$

et supposons l'existence de

(h.A.16) Il existe $(v_1,v_2) \in E \times E$ tel que $\begin{cases} |v_1| \frac{T}{2} + |v_2| < n_{o2} \\ |v_2| < n_{12} \end{cases}$

pour lesquels l'équation :

$$q''(x) = F(x,q(x),q'(x)), \quad q(0) = v_1, \quad q'(0) = v_2$$

admet une solution $\bar{q}$ périodique de période T. De plus la différentielle de l'application $(v_1,v_2) \to (\mu, \nu + v_2)$ relative à l'équation aux variations :

$$w''(x) = F_q(x,\bar{q}(x),\bar{q}'(x))w(x) + F_{q_1}(x,\bar{q}(x),\bar{q}'(x))w'(x) \quad \text{est inversible.}$$

Théorème IV.A.6 :

Avec les hypothèses (h.A.13, 14, 15, 16) on peut trouver un nombre à positif et donc un ensemble $A' = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, |y| \leq a'\}$ et deux fonctions β_1, β_2 définies sur $[-a,a]$ à valeurs dans E telles que :

$$\beta_1(0) = \alpha_1(0), \quad \beta_1'(0) = \alpha_2(0), \quad \beta_2(0) = \alpha_1'(0), \quad \beta_2'(0) = \alpha_2'(0)$$

et une fonction ϕ : $\phi(x,y)$ définie sur A' périodique de période T en x telle que :

$$\phi_{x^2y^2} = f(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y,\phi_{x^2},\phi_{xy},\phi_{y^2},\phi_{x^2y},\phi_{xy^2})$$

$$\phi(x,0) = \alpha_1(x),\ \phi(0,y) = \beta_1(y),\ \phi_x(0,y) = \beta_2(y) \quad \text{et} \quad \phi_y(x,0) = \alpha_2(x).$$

De plus, les fonctions β_1 et β_2 sont définies d'une manière unique et dépendent continûment des conditions initiales α_1, α_2.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème (III.A.7) il suffit d'étudier les équations

$$H_1(y,\beta_1''(y),\beta_2''(y),\beta_1''(t),\beta_2''(t),\ 0 \leq t < y) \equiv 0$$

$$H_2(y,\beta_1''(y),\beta_2''(y),\beta_1''(t),\beta_2''(t),\ 0 \leq t < y) + \beta_2''(y) \equiv 0$$

sachant que $H_1(y,v_1,v_2,.) = 0$ et

$H_2(y,v_1,v_2,.) + v_2 = 0.$

B - PERIODICITE PAR RAPPORT AUX DEUX VARIABLES

Considérons toujours l'équation

(IV.B.1) $$u_{x^2y^2} = f(x,y,u,u_x,u_y,u_{x^2},u_{xy},u_{y^2},u_{x^2y},u_{xy^2})$$

soumise aux conditions initiales

(IV.B.2) $$u(x,0) = \alpha_1(x) \qquad u(0,y) = \beta_1(y)$$
$$u_y(x,0) = \alpha_2(x) \qquad u_x(0,y) = \beta_2(y)$$ satisfaisant

l'hypothèse :

(h.B.1) Les fonctions α_1, α_2, β_1 et β_2 définies et continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $E = \mathbb{R}^m$ ainsi que leurs dérivées α_1', α_1'', α_2', α_2'', β_1', β_1'', β_2' et β_2'' sont périodiques de même période T. De plus, ces fonctions vérifient :

(IV.B.3) $$\alpha_1(0) = \beta_1(0), \quad \beta_2(0) = \beta_1'(0), \quad \beta_2'(0) = \alpha_2'(0), \quad \alpha_2(0) = \alpha_1'(0).$$

Soit $C(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^2$ périodiques en x et y de période T, à valeurs dans E et muni de la convergence uniforme.

L'hypothèse (h.B.1) définit la fonction ℓ (IV.A.4)

$$\ell(x,y) = x[\beta_2(y) - {}_2(0)] + y[\alpha_2(x)-\alpha_2(0)] - \alpha_2'(0)xy + \alpha_1(x) + \beta_1(y) - \alpha(0)$$

qui n'appartiendra à $C(\mathbb{R}^2)$ que si

$$\beta_2(y) = \alpha_2'(0)y + \alpha_1'(0)$$

et $$\alpha_2(x) = \beta_2'(0)x + \beta_1'(0).$$

Les contantes N_{ij} joueront le même rôle que dans le paragraphe précédent :

$$|\ell(x,y)| = |\ell_{oo}(x,y)| \leqslant N_{oo}$$

et $$|\ell_{ij}(x,y)| = \left|\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}\,\ell(x,y)\right| \leqslant N_{ij} \qquad i,j \in \{0,1,2\} \; .$$

Les fonctions η (IV.A.5) et les opérateurs $B^{oo},\dots,B^{12}$ définis par (IV.A.5), (IV.A.7.8...14) gardent aussi la même signification.

Introduisons l'hypothèse concernant la fonction f

$$\mathcal{B} = \left[(x,y,(z_{ij})) \in \mathbb{R}^{2+8m} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; , \; |z_{ij}| \leqslant M_{ij}, \quad i,j \in \{0,1,2\}\right]$$

(h.B.2) La fonction $f : f(x,y,z_{oo},z_{1o},z_{o1},z_{2o},z_{11},z_{o2},z_{21},z_{12})$ est définie et continue sur $\mathcal{B}$ à valeurs dans E et périodique en x et y de période T.

On écrira encore (IV.A.23) et $L = \sup\limits_{\mathcal{B}} |f(x,y,(z_{ij}))|$

(h.B.3) Les constantes L, N, N_{ij}, M_{ij} vérifient les inégalités :

$$\text{(IV.B.4)} \quad \left\{\begin{array}{l} N_{oo} + (9L + \frac{4}{T}(N_{12}+N_{21}))\,\frac{T^4}{64} < M_{oo} \\ N_{1o} + (9L + \frac{4}{T}(N_{12}+N_{21}))\,\frac{T^3}{16} < M_{1o} \\ N_{o1} + (9L + \frac{4}{T}(N_{12}+N_{21}))\,\frac{T^3}{16} < M_{o1} \\ N_{2o} + (9L + \frac{4}{T}(N_{12}+N_{21}))\,\frac{T^2}{8} < M_{2o} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} N_{11} + (9L + \frac{4}{T}(N_{12}+N_{21}))\,\frac{T^2}{4} < M_{11} \\ N_{o2} + (9L + \frac{4}{T}(N_{12}+N_{21}))\,\frac{T^2}{8} < M_{o2} \\ N_{21} + (9L + \frac{4}{T}(N_{12}+N_{21}))\,\frac{T}{2} < M_{21} \\ N_{12} + (9L + \frac{4}{T}(N_{12}+N_{21}))\,\frac{T}{2} < M_{12} \end{array}\right.$$

Pour $\theta \in C(\mathbb{R}^2)$ nous pouvons définir :

$$\text{(IV.B.5)} \quad F(x,y,\theta) = f(x,y,B^{oo}\theta(x,y),B^{1o}\theta(x,y),\dots,B^{12}\theta(x,y))$$

et rechercher la fonction $m_{12}(x,y,\theta)$ qui "modifie" l'équation (IV.B.1) sous la forme

$$\theta = \mathcal{F}(x,y,\theta) - m_{12}(x,y,\theta). \tag{IV.B.6}$$

D'après l'étude faite précédemment nous avons le système :

$$\text{(IV.B.7)}\quad \begin{cases} \beta_2''(y) + \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \left[\mathcal{F}(s,y,\theta) - m_{12}(s,y,\theta)\right]\sigma(s)ds = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \left[\mathcal{F}(s,y,\theta) - m_{12}(s,y,\theta)\right]ds = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \left[\mathcal{F}(x,t,\theta) - m_{12}(x,t,\theta)\right]dt = 0 \\[2ex] \alpha_2''(x) + \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \left[\mathcal{F}(x,t,\theta) - m_{12}(x,t,\theta)\right]\sigma(t)dt = 0 \end{cases}$$

σ étant toujours la fonction (IV.A.27).

Introduisons les fonctions μ_i et ν_i

$$\text{(IV.B.8)}\quad \begin{cases} \mu_1(y,\theta) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{F}(s,y,\theta)ds \qquad \mu_2(x,\theta) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{F}(x,t,\theta)dt \\[2ex] \qquad \mu_{12}(\theta) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \mu_1(y,\theta)dy = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \mu_2(x,\theta)dx \\[2ex] \nu_1(y,\theta) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{F}(s,y,\theta)\ (s)ds \quad \nu_2(x,\theta) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{F}(x,t,\theta)\sigma(t)dt \\[2ex] \qquad \nu_{12}(\theta) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{F}(s,t,\theta)\sigma(s)\sigma(t)ds\ dt. \\[2ex] \qquad \nu^1(\theta) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \nu_1(y,\theta)dy \quad \nu^2(\theta) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} \nu_2(x,\theta)dx. \end{cases}$$

Ces définitions permettent d'écrire (IV.B.7) sous la forme :

$$\text{(IV.B.9)}\quad \begin{cases} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} m_{12}(s,y,\theta)\sigma(s)ds = \beta_2''(y) + \nu_1(y,\theta) \\[2ex] \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} m_{12}(s,y,\theta)ds = \mu_1(y,\theta) \\[2ex] \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} m_{12}(x,t,\theta)dt = \mu_2(x,\theta) \end{cases}$$

$$\left\lbrace\quad \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} m_{12}(x,t,\theta)\sigma(t)dt = \alpha_2''(x) + \nu_2(x,\theta).\right.$$

Recherchons m_{12} sous la forme

$$m_{12}(x,y,\theta) = \mu_1(y,\theta) + \lambda(x)\left[\beta_2''(y) + \nu_1(y,\theta)\right] +$$

$$+ \mu_2(x,\theta) + \lambda(y)\left[\alpha_2''(x) + \nu_2(x,\theta)\right] + m_{12}^*(x,y,\theta).$$

Le système (IV.B.9) devient alors

$$\text{(IV.B.10)}\quad \begin{cases} \nu^1(\theta) + \lambda(y)\nu_{12}(\theta) + \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} m_{12}^*(s,y,\theta)\sigma(s)ds = 0 \\ \mu_{12}(\theta) + \lambda(y)\ \nu^2(\theta) + \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} m_{12}^*(s,y,\theta)ds = 0 \\ \mu_{12}(\theta) + \lambda(x)\ \nu^1(\theta) + \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} m_{12}^*(x,t,\theta)dt = 0 \\ \nu^2(\theta) + \lambda(x)\nu_{12}(\theta) + \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} m_{12}^*(x,t,\theta)\sigma(t)dt = 0. \end{cases}$$

En choisissant $m_{12}^*(x,y,\theta)$ sous la forme

$$m_{12}^*(x,y,\theta) = \gamma_1(\theta) + \gamma_2(\theta)\lambda(x) + \gamma_3(\theta)\lambda(y) + \gamma_4(\theta)\lambda(x)\lambda(y)$$

le système (IV.B.10) sera vérifié si

$$\text{(IV.B.11)}\quad \begin{cases} \nu^1(\theta) + \lambda(y)\nu_{12}(\theta) + \gamma_2(\theta) + \gamma_4(\theta)\lambda(y) = 0 \\ \mu_{12}(\theta) + \lambda(y)\ \nu^2(\theta) + \gamma_1(\theta) + \gamma_3(\theta)\lambda(y) = 0 \\ \mu_{12}(\theta) + \lambda(x)\ \nu^1(\theta) + \gamma_1(\theta) + \gamma_2(\theta)\lambda(x) = 0 \\ \nu^2(\theta) + \lambda(x)\nu_{12}(\theta) + \gamma_3(\theta) + \gamma_4(\theta)\lambda(x) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire en fait si

$$\text{(IV.B.12)}\quad \begin{cases} \gamma_1(\theta) = -\mu_{12}(\theta) \\ \gamma_2(\theta) = -\nu^1(\theta) \\ \gamma_3(\theta) = -\nu^2(\theta) \\ \gamma_4(\theta) = -\nu_{12}(\theta). \end{cases}$$

Nous choisirons pour fonction $m_{12}(x,y,\theta)$ la fonction

$$\begin{aligned} m_{12}(x,y,\theta) &= \mu_1(y,\theta) + \mu_2(x,\theta) - \mu_{12}(\theta) \\ &+ \lambda(x)\{\beta_2''(y) + \nu_1(y,\theta) - \nu^1(\theta)\} \\ &+ \lambda(y)\{\alpha_2''(x) + \nu_2(x,\theta) - \nu^2(\theta)\} \\ &- \lambda(x)\lambda(y)\nu_{12}(\theta) \end{aligned}$$

(λ définie comme dans la partie A)

et poserons

$$F_{12}(x,y,\theta) = F(x,y,\theta) - m_{12}(x,y,\theta).$$

En utilisant la majoration $|F(x,y,\theta)| \leq L$ nous voyons que

$$|\mu_1(y,\theta)| \leq L, \quad |\mu_2(x,\theta)| \leq L, \quad |\mu_{12}(\theta)| \leq L$$

$$|\nu_1(y,\theta)| \leq \frac{T}{4} L, \quad |\nu_2(x,\theta)| \leq \frac{T}{4} L, \quad |\nu_{12}(\theta)| \leq \frac{T^2}{16} L$$

et $$|\nu^1(\theta)| \leq \frac{T}{4} L, \quad |\nu^2(\theta)| \leq \frac{T}{4} L.$$

Avec $|\lambda(x)| \leq \frac{4}{T}(1+\varepsilon)$, nous trouvons

$$|m_{12}(x,y,\theta)| \leq (8+6\varepsilon+\varepsilon^2)L + \frac{4}{T}(1+\varepsilon)\{|\beta_2''| + |\alpha_2''|\}$$

de sorte que

$$|F_{12}(x,y,\theta)| \leq (9+6\varepsilon+\varepsilon^2)L + (1+\varepsilon)^2 L + (1+\varepsilon)\frac{4}{T}\{N_{12} + N_{21}\}$$

ou

(IV.B.14) $$|F_{12}(x,y,\theta)| \leq L^*(\varepsilon).$$

Avec les opérateurs B^{ij} (IV.A.7.8...14) nous pouvons comme dans (IV.A.36,37) évaluer

$$|F(x,y,\theta) - F(\bar{x},y,\theta)| \quad \text{et} \quad |F(x,y,\theta) - F(x,\bar{y},\theta)|$$

et écrire :

$$\text{(IV.B.15)} \quad |F(x,y,\theta) - F(\bar{x},y,\theta)| \leqslant \Omega_1'(|x-\bar{x}|) + \omega_{2o}\{|\int_o^y (y-t)\rho_1(|x-\bar{x}|,t)dt|\} + \omega_{21}\{|\int_o^y \rho_1(|x-\bar{x}|,t)dt|\}$$

$$\text{(IV.B.16)} \quad |F(x,y,\theta) - F(x,\bar{y},\theta)| \leqslant \Omega_2'(|y-\bar{y}|) + \omega_{o2}\{|\int_o^x (x-s)\rho_2(s,|y-\bar{y}|)ds|\} + \omega_{12}\{|\int_o^x \rho_2(s,|y-\bar{y}|)ds|\}.$$

Choisissons dès lors ε positif et donc la fonction λ tels que l'hypothèse (h.B.3bis) soit satisfaite.

(h.B.3bis) Les constantes L, N, N_{ij}, M_{ij}, ε, vérifient les inégalités

$$\text{(IV.B.17)} \begin{cases} N_{oo} + L^*(\varepsilon)\,\dfrac{T^4}{64} < M_{oo} \\ N_{1o} + L^*(\varepsilon)\,\dfrac{T^3}{16} < M_{1o} \\ N_{o1} + L^*(\varepsilon)\,\dfrac{T^3}{16} < M_{o1} \\ N_{2o} + L^*(\varepsilon)\,\dfrac{T^2}{8} < M_{2o} \end{cases} \qquad \begin{cases} N_{11} + L^*(\varepsilon)\,\dfrac{T^2}{4} < M_{11} \\ N_{o2} + L^*(\varepsilon)\,\dfrac{T^2}{4} < M_{o2} \\ N_{21} + L^*(\varepsilon)\,\dfrac{T}{2} < M_{21} \\ N_{12} + L^*(\varepsilon)\,\dfrac{T}{2} < M_{12} \end{cases}$$

Nous sommes en mesure d'établir le théorème suivant analogue aux différents théorèmes d'existence précédents.

<u>*Théorème*</u> IV.B.1. :

Avec les hypothèses (h.B.1., 2, 3bis, 5) et (h.A.4)

(h.B.5) Les solutions positives ρ_1 et ρ_2 des équations

$$\text{(IV.B.18)} \quad \rho_1(\delta,y) = \Omega_1'(\delta) + P_2^\sigma \omega_{2o}\{\left|\int_o^y (y-t)\rho_1(\delta,t)dt\right|\} + P_2^\sigma \omega_{21}\{\left|\int_o^y \rho_1(\delta,t)dt\right|\}$$

$$\text{(IV.B.19)} \quad \rho_2(x,\delta) = \Omega_2'(\delta) + P_1^\sigma \omega_{o2}\{\left|\int_o^x (x-s)\rho_2(s,\delta)ds\right|\} + P_1^\sigma \omega_{12}\{\left|\int_o^x \rho_2(s,\delta)ds\right|\}$$

vérifient $\lim\limits_{\delta\to o} \rho_1(\delta,y) = \lim\limits_{\delta\to o} \rho_2(x,\delta) = 0$ uniformément par rapport à x ou y sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

L'équation $\theta = F_{12}(x,y,\theta)$ admet au moins une solution dans $C(\mathbb{R}^2)$.

2°) *Cas lipschitzien.*

Théorème IV.B.2 :

Avec les hypothèses :

(h.B.1)

(h.B.2bis) En plus de l'hypothèse (h.B.2) la fonction f est lipschitzienne par rapport aux variables z_{o2}, z_{2o}, z_{12}, z_{21}

(h.B.3bis)

(h.B.4)

(h.B.5bis) $\quad \dfrac{k_{o2}T^2}{13,5} + \dfrac{k_{12}T}{1,8} < 1 \qquad \dfrac{k_{2o}T^2}{13,5} + \dfrac{k_{21}T}{1,8} < 1.$

L'équation $\theta = F_{12}(x,y,\theta)$ admet au moins une solution dans $C(\mathbb{R}^2)$.

Dans ce cas, nous pouvons aussi écrire :

Théorème IV.B.3 :

Avec les hypothèses du théorème (IV.B.2), si les constantes k_{ij} vérifient de plus

$$\text{(IV.B.20)} \quad 9\left\{\frac{k_{oo}T^4}{64} + \frac{k_{o1}+k_{1o}}{16} + \frac{k_{o2}+2k_{11}+k_{2o}}{8}T^2 + \frac{k_{21}+k_{12}}{2}T\right\} < 1.$$

Pour ε assez petit l'application $\theta \to F_{12}(x,y,\theta)$ est une contraction (ce qui implique l'unicité et la dépendance continue de la solution par rapport aux données initiales).

Remarque :

Nous nous sommes restreints dans le théorème précédent à écrire que la fonction $\theta \to F_{12}(x,y,\theta)$ est une contraction mais il est très possible d'écrire ce théorème suivant la démarche utilisée dans les théorèmes d'unicité analogues. Sans entrer dans plus de détails, nous pouvons affirmer que l'étude faite dans cette partie B permet d'examiner les solutions périodiques en x_1 et x_2 de période T de l'équation :

$$u_{x_1^2 x_2^2,\dots,x_n^2} = f(x_1,\dots,x_n,u,u_{x_1},\dots,x_n,\dots,u_{x_1^2,\dots,x_{n-1}^2 x_n}).$$

C - CONCLUSION

Indiquons dans cette dernière partie la marche à suivre pour rechercher les solutions périodiques en x_1, en (x_1 et x_2) ou en ($x_1,x_2,\dots$ et x_p) de l'équation :

$$u_{x_1^q,\dots,x_n^q} = f(x_1,\dots,x_n,u,u_{x_1},\dots,u_{x_n},\dots,u_{x_1^{q-1},\dots,x_n^q}) \tag{IV.C.1}$$

avec q entier et p entier plus petit que n.

I - *Périodicité par rapport à une variable.*

D'après ce que nous avons vu, le nombre de variables influe en fait peu l'existence des solutions périodiques, aussi pouvons-nous nous limiter au cas de deux variables notées x et y. Considérons donc l'équation

$$u_{x^q y^q} = f(x,y,u,u_x,u_y,u_{x^2},\dots,u_{x^q y^{q-1}},u_{x^{q-1}y^q}) \tag{IV.C.2}$$

soumise aux conditions initiales :

$$\left\{\begin{array}{llll} u(x,0) = \alpha_o(x) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \alpha_1(x) & \dots & \dfrac{\partial^{q-1}u}{\partial y^{q-1}}(x,0) = \alpha_{q-1}(x) \\ u(0,y) = \beta_o(y) & \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \beta_1(y) & \dots & \dfrac{\partial^{q-1}u}{\partial x^{q-1}}(0,y) = \beta_{q-1}(y) \end{array}\right. \tag{IV.C.3}$$

avec les conditions de compatibilité généralisant naturellement les relations (IV.A.3) (par exemple : $\dfrac{\partial^j \alpha_o}{\partial x^j}(0) = \beta_j(0)$).

Ces conditions initiales définiront comme dans le cas $q = 1$ ou $q = 2$, une fonction continue sur $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \times [-a,a]$ solution de $\dfrac{\partial^{2q}u}{\partial x^q \partial y^q} = 0$ et notée ℓ_{oo}.

Pour $i, j \in \{0,1,\dots,q\}$ $i + j < 2q$, nous noterons encore

$$\ell_{ij}(x,y) = \frac{\partial^{i+j}\ell_{oo}}{\partial x^i \partial y^j}(x,y)$$

et introduirons les opérateurs analogues à ceux définis par (IV.A.7,...,14)

(IV.C.4) $$B^{ij}\theta(x,y) = \ell_{ij}(x,y) + \int_o^x \int_o^y \frac{(x-s)^{q-1-i}}{(q-1-i)!} \frac{(y-t)^{q-1-j}}{(q-1-j)!} \theta(s,t)dsdt$$

(IV.C.5) $$B^{qj}(x,y) = \ell_{qj}(x,y) + \int_o^y \frac{(y-t)^{q-1-j}}{(q-1-j)!}\theta(x,t)dt$$

$$B^{iq}(x,y) = \ell_{iq}(x,y) + \int_o^x \frac{(x-s)^{q-1-i}}{(q-1-i)!}\theta(s,y)ds.$$

Ce qui nous incite à introduire les fonctions σ_i, $i \in \{0,\dots,q-1\}$ périodiques de période T définies sur $\mathbb{R}$ par

(IV.C.6) $$\sigma_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{i!}\left(-\frac{T}{2} - x\right)^i & \text{si } -\frac{T}{2} \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{i!}\left(\frac{T}{2} - x\right)^i & \text{si } 0 < x \leq \frac{T}{2} \end{cases} .$$

Avec cette définition σ_1 est en fait la fonction σ introduite par la relation (IV.A.27).

Pour écrire le problème modifié associé à l'équation (IV.C.1) sous la forme

(IV.C.7) $$\theta = F(x,y,\theta) - m_1^q(x,y,\theta)$$

il nous faut tout d'abord définir les fonctions

$$\nu_i^q(y,\theta) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(x,y,\theta)\sigma_i(x)dx \qquad \text{(IV.C.8)}$$

(Pour $q = 2$, $\nu_o^2 = \mu$ et $\nu_1^2 = \nu$ (IV.A.29)) et d'écrire le système généralisant (IV.A.31) qui doit être satisfait par m_1^q,

$$\text{(IV.C.9)}\begin{cases} \ell_{o,q-1}(\frac{T}{2},y) - \ell_{o,q-1}(-\frac{T}{2},y) + T\,\nu_{q-1}^q(y,\theta) - \int_{-T/2}^{T/2} m_1^q(s,y,\theta)\sigma_{q-1}(s)ds = 0 \\ \ell_{1,q-1}(\frac{T}{2},y) - \ell_{1,q-1}(-\frac{T}{2},y) + T\,\nu_{q-2}^q(y,\theta) - \int_{-T/2}^{T/2} m_1^q(s,y,\theta)\sigma_{q-2}(s)ds = 0 \\ \\ \ell_{q-1,q-1}(\frac{T}{2},y) - \ell_{q-1,q-1}(-\frac{T}{2},y) + T\,\nu_o^q(y,\ ) - \int_{-T/2}^{T/2} m_1^q(s,y,\theta)ds = 0 \end{cases}$$

et qu'on peut écrire, avec des notations évidentes :

$$\text{(IV.C.10)}\begin{cases} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} m_1^q(s,y,\theta)\sigma_{q-1}(s)ds = \gamma_{q-1}(y,\theta) \\ \ldots \\ \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} m_1^q(s,y,\theta)\sigma_o(s)ds = \gamma_o(y,\theta). \end{cases}$$

La recherche d'une fonction m_1^q satisfaisant aux relations précédentes (IV.C.10) peut se faire de la manière suivante : on écrira

$$m_1^q(x,y,\theta) = \gamma_o(y,\theta)\lambda_o(x) + \gamma_1(y,\theta)\lambda_1(x) + \ldots + \gamma_{q-1}(y,\theta)\lambda_{q-1}(x) \qquad \text{(IV.C.11)}$$

où les fonctions λ_i sont des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$, périodiques de période T satisfaisant aux relations suivantes :

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sigma_i(x)\lambda_j(x)dx = \delta_{ij} \quad \text{pour } i, j \in \{0,1,\ldots,q-1\}. \qquad \text{(IV.C.12)}$$

Comme précédemment on s'arrangera pour que ces fonctions λ_i soient de norme minimale (au sens de la convergence uniforme).

Rappelons que si $q = 1$, $\lambda_o(x) = 1$

et si $q = 2$, $\lambda_o(x) = 1$

$$\lambda_1(x) \simeq \frac{4}{T} \text{ sign } x \quad \text{sur} \quad \left]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[.$$

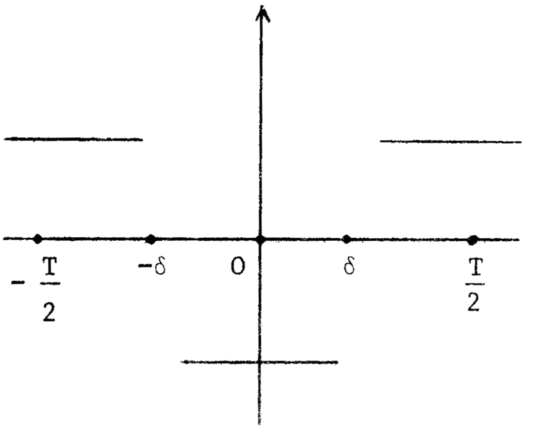
Examinons les cas $q = 3$ et $q = 4$.

Exemple ($q = 3$).

Nous choisirons pour λ_2 une fonction paire, de sorte qu'il faut réaliser :

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \lambda_2(x)\sigma_o(x)dx = 0$$

et $$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \lambda_2(x)\sigma_2(x)dx = 1.$$



On déterminera λ_2 suivant le graphe ci-contre (constante par morceaux donc) donnant intuitivement une norme moindre.

On trouvera alors

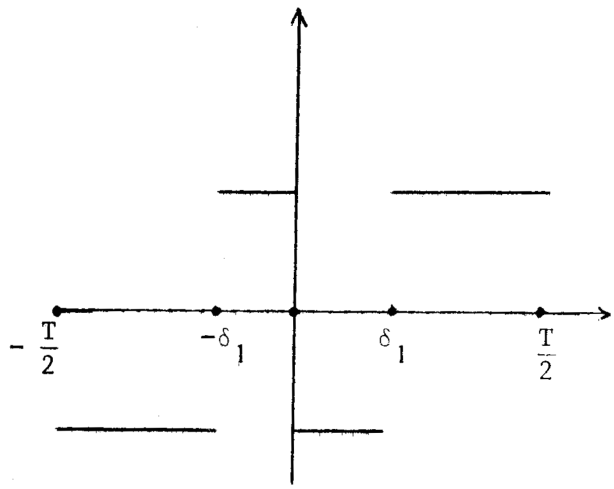
$$\lambda_2(x) \simeq \begin{cases} -\dfrac{16}{T^2} & \text{si } 0 < x < \dfrac{T}{4} \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } \dfrac{T}{4} \text{ ou } \dfrac{T}{2} \\ \dfrac{16}{T^2} & \text{si } \dfrac{T}{4} < x < \dfrac{T}{2}. \end{cases}$$

Exemple ($q = 4$).

λ_3 sera une fonction impaire et devra réaliser :

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \lambda_3(x)\sigma_1(x)dx = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \lambda_3(x)\sigma_3(x)dx = 1$$

en considérant une fonction de la forme ci-contre.



On trouvera alors

$$\lambda_3(x) \approx \begin{cases} -\frac{64}{T^3} & \text{si } 0 < x < \delta_1 \\ 0 & \text{si } x = 0,\ \delta_1 \text{ ou } \frac{T}{2} \\ \frac{64}{T^3} & \text{si } \delta_1 < x < \frac{T}{2} \end{cases}$$

avec $\delta_1 = \frac{T}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Pour des valeurs plus élevées de q on introduira d'autres discontinuités sur le segment $\left[0, \frac{T}{2}\right]$.

Quoiqu'il en soit nous pouvons conclure en l'existence de fonctions λ_i, ou ce qui revient au même, en l'existence d'une fonction m_1^q modifiant l'équation (IV.C.1).

Nous ne détaillerons pas tous les résultats qui peuvent être obtenus, néanmoins en supposant la fonction f lipschitzienne

$$|f(x,y,u,u_x,u_y,\dots,u_{x^{q-1}y^q},u_{x^q y^{q-1}}) - f(x,y,\bar{u},\bar{u}_x,\dots,\bar{u}_{x^q y^{q-1}})|$$

$$\leqslant \sum k_{ij}|u_{x^i y^j} - \bar{u}_{x^i y^j}|$$

nous serons amenés à introduire des relations analogues à (IV.A.45) pour établir l'existence l'unicité et la continuité de la solution par rapport aux conditions initiales. Par exemple si $q = 3$ nous devrons examiner l'équation :

$$\rho(x) = 1 + k_{o3}\left|\int_o^x \frac{(x-s)^2}{2!}\rho(s)ds\right| + k_{13}\left|\int_o^x (x-s)\rho(s)ds\right| + k_{23}\left|\int_o^x \rho(s)ds\right|$$

$$+ \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[1 + \frac{4}{T}(1+\varepsilon)|\sigma_1(x)| + \frac{16}{T^2}(1+\varepsilon)|\sigma_2(x)|\right]\cdot\left[k_{o3}\left|\int_o^x \frac{(x-s)^2}{2!}\rho(s)ds\right|\right.$$

$$\left. + k_{23}\left|\int_o^x (x-s)\rho(s)|ds + k_{23}\left|\int_o^x \rho(s)ds\right]dx.\right.\right.$$

Il nous faudra ensuite poursuivre par l'étude du problème différentiel associé et déterminer une solution périodique de période T d'une équation différentielle d'ordre q.

II - *Périodicité par rapport à plusieurs variables.*

La procédure utilisée dans la partie B peut se poursuivre dans le cas de 2 variables et même dans le cas de plusieurs variables. Il est à retenir que pour rechercher les solutions périodiques de l'équation (IV.C.1) en $x_1,\ldots,x_p$ il convient tout d'abord de définir les conditions initiales :

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^j u}{\partial x_1^j}(0,x_2,\ldots,x_n) = \alpha_j^1(x_2,\ldots,x_n) \\[2ex]
\dfrac{\partial^j u}{\partial x_2^j}(x_1,0,\ldots,x_n) = \alpha_j^2(x_1,x_3,\ldots,x_n) \quad \text{pour} \quad j = 0,\ldots,q-1 \\[2ex]
\ldots, \\[1ex]
\dfrac{\partial^j u}{\partial x_n^j}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},0) = \alpha_j^n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})
\end{array}\right.$$

qui seront supposées périodiques de période T en $x_1, x_2,\ldots,x_p$ et vérifieront en plus des conditions de compatibilité des conditions de régularité.

Il nous faut en outre définir et étudier le problème modifié associé s'écrivant sous la forme

$$\theta = F(x,\theta) - m^q_{12,\dots,p}(x,\theta).$$

La dernière étape consiste à se donner les conditions initiales relatives aux p-premières variables plus exactement $\alpha_j^{p+1}(x_1,\dots,x_{p-1},x_{p+1},\dots,x_n)\dots\ \alpha_j^n(x_1,\dots,x_{n-1})$ et d'essayer de déterminer les autres fonctions $\alpha_j^1,\dots,\alpha_j^p$ en utilisant le théorème des fonctions implicites.

Le principal résultat obtenu par L. Césari est en fait un théorème de réduction (rentrant dans le cadre plus général de la théorie de la bifurcation). La bibliographie non exhaustive que nous donnons à la fin de cette seconde partie donne une idée des travaux faits suivant le schéma de L. Césari. Citons en particulier l'article de A. Haimovici [1] qui étudie les équations aux dérivées partielles de type hyperbolique admettant des solutions périodiques par rapport à l'une de ses variables mais dont la période dépend des autres variables. Mentionnons aussi l'article de Dan Petrovanu [2] concernant les solutions périodiques du problème de Tricomi.

BIBLIOGRAPHIE DE LA SECONDE PARTIE

A.K. AZIZ [1] - *Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations,* Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966) (pages 557-566).

A.K. AZIZ and S.L. BRODSKY [1] - *Periodic solutions of a class of weakly non linear hyperbolic partial differential equations,* Siam J. Math. Anal. Vol. 3, n° 2 may 1972 (300-313).

A.K. AZIZ and M.G. HORAK [1] - *Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in the large,* Siam J. Math. Anal. vol. 3 n° 1 february 1972 (176-182).

A.K. AZIZ and A.M. MEYERS [1] - *Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations in a strip,* Trans. Amer. Math. Soc. 146 (1969) pp. 167-178.

L. CESARI [1] - *Periodic solutions of hyperbolic differential equations,* International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics (Colorado Spring 1961), Academic Press, New-York, 1963 (pp. 33-57).

L. CESARI [2] - *Existence in the large of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations,* Archive Rat. Mech. Anal. 20 (1965) (pp. 170-190).

L. CESARI [3] - *A criterion for the existence in a strip of periodic solutions of hyperbolic partial differential equations,* Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 14 (1965) (pp. 1-24).

L. CESARI [4] - *The implicit function theorem in functional analysis,* Duke Mathematical Journal 33 (1966) (pp. 417-440).

L. CESARI [5] - *Smoothness properties of periodic solution in the large of nonlinear hyperbolic differential systems,* Funkcialaj Ekvacioj 9 (1966)(pp. 325-338).

L. CESARI [6] - *Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations,* C.I.M.E. Bressanone Dal 4 al 13 giugno 1972 (pp. 22-32), Edizioni Cremonese Roma 1973.

L. CESARI [7] - *Functional Analysis and Differential Equations,* Studies in Applied Mathematics 5 (1969) 143-155.

(Ces deux dernières références résument les articles précédents de L. Césari).

L. CESARI [8] - *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations,* 3e ed. Springer, Berlin 1971.

DAN PETROVANU [1] - *Solutions périodiques pour certaines équations hyperboliques,* An. Sti. Univ. Iasi 14-1968 (pp. 327-357).

DAN PETROVANU [2] - *Periodic solutions of the Tricomi Problem,* Michigan Mathematical journal 16 (1969), (pp. 331-348).

A. HAIMOVICI [1] - *Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations,* Annali di Matematica 48 (1974) (pp. 297-309).

J.K. HALE [1] - *Periodic solutions of a class of hyperbolic equations containing a small parameter,* Arch. Rational Mech. Anal. 23 (1966) (pp. 380-398).

J.K. HALE [2] - *Oscillations in nonlinear systems,* Mac Graw-Hill Book Company Inc. 1963.

G. HECQUET [1] - Comptes Rendus, 273 série A - 1971 - p. 712.
[2] Comptes Rendus, 276 série A - 1973 - p. 997.
[3] Comptes Rendus, 276 série A - 1973 - p. 1047.

I. I. GLICK [1] - *On an analog of the Euler Cauchy Polygon method for the partial differential equation* $u_{x_1,\ldots,x_n} = f(x_1,\ldots,x_n,u,\ldots,u_{x_2,\ldots,x_n})$, *Contributions to differential equations,* Vol. II (1963) (pp. 1 - 59).

J. MAWHIN [1] - *Degré topologique et solutions périodiques des systèmes différentiels non linéaires,*

J. MAWHIN - N. ROUCHE [1] - *Equations différentielles ordinaires,*
Tome 2 - Masson et Cie 1973.

M. ROSEAU [1] - *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité,*
Springer Berlin 1966.

M. ROSEAU [2] - *Solutions périodiques ou presque périodiques des systèmes différentiels de la mécanique non linéaire,*
C.I.S.M. Courses and Lectures n° 44, Udine 1970.

DEUXIEME THESE :

PROPOSITIONS DONNEES PAR L'UNIVERSITE