UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

le grade de DOCTEUR ES-SCIENCES
en MATHEMATIQUES

par

Jean-Claude DOUAI

2-COHOMOLOGIE GALOISIENNE DES GROUPES SEMI-SIMPLES

MEMBRES DU JURY

Messieurs les Professeurs
Ph. ANTOINE, Rapporteur
P. DEDECKER, Directeur de Recherche
S. FAKIR, Examinateur
J. GIRAUD, Rapporteur principal
D. LEHMANN, Examinateur
T.A. SPRINGER, Rapporteur

Soutenue le 22 Juin 1976

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance

à Monsieur le Professeur J. Giraud pour la générosité avec laquelle il m'a prodigué son temps et ses encouragements,

à Monsieur le Professeur P. Dedecker qui m'a initié à la cohomologie non abélienne,

à Monsieur le Professeur T.A. Springer pour ses conversations toujours si utiles,

à Monsieur le Professeur D. Lehmann qui a accepté de me donner un deuxième sujet de thèse,

à Messieurs les Professeurs Ph. Antoine et S. Fakir qui ont bien voulu faire partie du jury.

Tous mes remerciements enfin au secrétariat de l'U.E.R de Mathématiques de Lille I et en particulier à Mesdames Bérat et Lengaigne sans qui cette édition n'aurait pas vu le jour.

TABLE DES MATIERES

Pages

INTRODUCTION

. Un des objectifs de ce travail est d'établir un certain nombre de résultats du type suivant dont plusieurs ont été conjecturés par J.P. Serre dans "Cohomologie Galoisienne" [28] et qui sont liés à la notion de dimension cohomologique ≤ 2 :

A) Soient $\tilde{G}$ un groupe semi-simple simplement connexe défini sur un corps K complet pour une valuation discrète dont le corps résiduel k est de dimension cohomologique ≤ 1, μ le centre de G, alors l'application

$$H^1(K,\tilde{G}/\mu) \to H^2(K,\mu)$$

est surjective (*).

B) Soient k un corps fini, $K = k((T))$, G un K-groupe réductif, l'ensemble $H^1(K,G)$ est fini.

C) Même résultat qu'en A), K étant cette fois un corps global (i.e. un corps de fonctions en une variable sur un corps fini ou un corps de nombres).

D) Soient A l'anneau des entiers d'un corps de nombres, X son spectre ; toute X-gerbe localement (pour la topologie étale) liée par un X-groupe semi-simple simplement connexe est triviale.

(*) Dans le cas où k est un corps fini, Tits m'a indiqué qu'il connaissait déjà A).

Pour établir A), B), C) nous avons évidemment besoin de la théorie du H^2 galoisien non abélien de T.A. Springer [32]. Cependant, comme il est bien connu (de Shatz [30], par exemple, pour le cas abélien), une telle théorie ne rend pas compte des phénomènes infinitésimaux. Pour y remédier, on munit le spectre des corps K de topologies plus fines que la topologie étale (cette dernière correspondant au cas galoisien), par exemple les topologies f.p.p.f ou f.p.q.c. Même dans le cas des corps, nous sommes donc obligés de travailler sur un site et par conséquent d'utiliser les $H^i (i = 0,1,2)$ décrits par J. Giraud dans [16]. Or, dans le cas du H^2, J. Giraud ne calcule pas véritablement la 2-cohomologie des groupes mais celle des liens. D'autre part, si $u : L \to L'$ est un morphisme de liens, u n'induit pas en général une application de $H^2(L)$ dans $H^2(L')$ mais seulement une relation $H^2(L) \multimap H^2(L')$, un élément de $H^2(L)$ pouvant n'être relié à aucun élément de $H^2(L')$. Si ceci ne constitue pas à proprement parler un inconvénient pour l'étude des classes triviales, c'en est un cependant quand on veut établir la finitude de certains ensembles de 2-cohomologie. Enfin la théorie de [16], dans le cas non abélien, ne permet pas une description en termes de 2-cocycles. Tout en utilisant [16], nous avons donc été amenés à établir parallèlement une théorie fonctorielle pour le H^2 substituant à la notion de lien la notion de système de coefficients. Notre théorie trouve sa motivation dans les propriétés (P_1) et (P_2) suivantes valables pour une gerbe $\underset{\sim}{C}$ quelconque : L désigne le lien de $\underset{\sim}{C}$, G un faisceau de groupes représentant localement L, U un objet quelconque du site de base, x un U-objet quelconque de $\underset{\sim}{C}$,

(P_1) : le faisceau $p(x) = \underline{Aut}_{\underset{\sim}{C}}(x)$ des U-morphismes de x dans $\underset{\sim}{C}$ est localement isomorphe à G, i.e. est une U-forme de G.

(P_2) : si y est un deuxième U-objet de $\underset{\sim}{C}$, le faisceau $\underline{Hom}_{\underset{\sim}{C}}(x,y)$ des U-morphismes de x vers y dans $\underset{\sim}{C}$ est un U-torseur sous $p(x)$.

Nous sommes naturellement conduits à considérer d'abord à cause de (P_1) le faisceau $\underline{\Gamma}(G)$ de groupoïdes ayant pour U-objets les U-formes de G et pour U-morphismes les U-isomorphismes entre U-formes, puis remarquant que $\underline{\Gamma}(G)$ s'enrichit naturellement d'une structure de faisceau de 2-groupoïdes $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$ tel que $\underline{\underline{\Gamma}}(G)_{o1} = \underline{\Gamma}(G)$, à traduire la propriété (P_2) en termes d'action de $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$ sur $\underline{C}$. Plus généralement, nous sommes conduits à considérer certains faisceaux de 2-groupoïdes $\underline{\underline{\Gamma}}$ appelés systèmes de coefficients et à les faire opérer sur les gerbes ; de là, la notion de $\underline{\underline{\Gamma}}$-objets, puis les définitions de $H^2(\underline{\underline{\Gamma}})$ et $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}})$ correspondant respectivement à des relations d'équivalence forte et faible. Evidemment l'introduction des 2-groupoïdes ne se justifie que dans la mesure où elle permet d'exprimer proprement (P_2). Voici deux cas où l'utilisation des systèmes de coefficients s'impose :

1) Calcul du H^2 $(\underline{\underline{\Gamma}}(G))$ quand G est un groupe unipotent défini sur un corps parfait et de manière plus générale quand G admet une suite de composition à quotients simples.

2) Soient G un groupe réductif sur un préschéma quelconque, B un sous-groupe de Borel de G. Reprenant un argument de conjugaison de Springer, A. Grothendieck a montré que pour toute gerbe $\underline{C}$ à lien localement(*) représentable par G, il existe une gerbe $\underline{C}_B$ à lien localement(*) représentable par B et un morphisme $\underline{C}_B \to \underline{C}$ de gerbes localement(*) lié par l'injection $B \to G$. Nous obtenons ici un résultat plus précis : au couple (B,G), nous associons de manière naturelle un système $\underline{\underline{\Gamma}}(G,B)$ [le faisceau de groupoïdes $(\underline{\underline{\Gamma}}(G,B))_{o1}$ est déjà suggéré dans le § 6 - S.G.A.D. - chap. XXIV] et à $(G,B) \to G$ un morphisme $\underline{\underline{\theta}}$ de $\underline{\underline{\Gamma}}(G,B)$ dans $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$. Nous montrons alors que $\underline{\underline{\theta}}$ induit un isomorphisme (d'ensembles) de $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G,B))$ sur $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G))$. Si G est semi-simple, on peut montrer qu'il y a en plus équivalence entre $\underline{\underline{\Gamma}}(G,B)$ et $\underline{\underline{\Gamma}}(B)$, d'où une chaîne d'isomorphismes :

(*) pour la topologie étale.

$$\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(B)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G,B) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G)),$$

qui réduit complètement la 2-cohomologie de G à celle de B. Le fait d'avoir de tels isomorphismes nous sera utile pour la finitude de certaines classes.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir A) et B). Nous avons à notre disposition deux méthodes de calcul du H^2 à valeurs dans un groupe réductif valables indifféremment que l'on utilise les liens de [16] ou les systèmes de coefficients précédents :

1) La première consiste à passer par l'intermédiaire des tores maximaux dont on sait qu'ils constituent les ingrédients essentiels pour le calcul du H^1 galoisien : on réduit ainsi complètement la 2-cohomologie (étale, f.p.p.f., f.p.q.c...) des groupes réductifs sur un préschéma quelconque à celle des tores maximaux ; en particulier, nous obtenons :

Théorème.- Soient K un corps local à corps résiduel fini, G un K-groupe semi-simple, T un K-tore maximal compact de G (il en existe d'après un résultat de M. Kneser énoncé pour K de caractéristique 0 mais valable plus généralement en caractéristique p). Alors toute K-gerbe localement (pour la topologie étale, f.p.p.f, f.p.q.c) liée par G est triviale. De plus, toute classe de $H^2(G)$ (= $H^2(\underline{\text{lien}}(G))$ contient une gerbe de la forme $\underline{\text{Tors}}\ G'$ où G' est une forme intérieure de G admettant un K-tore maximal isomorphe à T.

. Ce théorème admet la traduction suivante : toute catégorie tannakienne sur K localement de la forme $\underline{\text{Rep}}(G)$ est globalement de la forme $\underline{\text{Rep}}(G')$ où G' est une K-forme de G. De plus, toute catégorie tannakienne sur K définissant une classe de $H^2(G)$ admet un foncteur fibre possédant une graduation du type M où M est le groupe des caractères de T.

2) Dans le cas où le corps résiduel k du corps K est seulement de dimension cohomologique ≤ 1, le résultat de M. Kneser mentionné ci-dessus n'est plus valable. Il nous faut utiliser une autre méthode basée sur les résultats de Bruhat-Tits [8] qui consiste à descendre toute K-gerbe sur le corps résiduel k et à la remonter ensuite. Les ingrédients essentiels employés sont ici les sous-groupes d'Iwahori, substituts naturels des sous-groupes de Borel et auxquels on peut appliquer la technique donnée plus haut pour les sous-groupes de Borel.

. Compte tenu des résultats précédents, nous pouvons reformuler ainsi la conjecture II p. III, 23 de Serre [28] :

Conjecture : "Soient K un corps tel que $Gal(K_s/K)$ soit de dimension cohomologique ≤ 2 (resp. de type (C_2), resp. de type (C_2')), G un K-groupe semi-simple simplement connexe, alors $H^1(G) = 0$ et toute K-gerbe localement liée par G est triviale".

. Dans la dernière partie de ce travail, par une technique purement non abélienne,nous globalisons A) établissant ainsi C). Conjuguant C) et un résultat de T. Ono, nous pouvons en déduire la relation précise entre le nombre de Tamagawa d'un groupe semi-simple G défini sur un corps de nombres et la validité du Principe de Hasse en dimension 1 pour G (cf. Remarque n° 2, p. III, 44 de [28]). Nous terminons enfin en étudiant la 2-cohomologie des groupes semi-simples définis sur les anneaux de Dedekind, établissant en particulier D). D) permet de retrouver par voie purement cohomologique les résultats de Harder (n° 4.2 de [18]).

CHAPITRE I

SYSTEMES DE COEFFICIENTS.

§ 1 - *Rappels et notations.*

1.1. - Soient $\mathcal{B}$ une catégorie, $\underset{\sim}{C}$ une $\mathcal{B}$-catégorie fibrée scindée, U un objet de $\mathcal{B}$, x, y des U-objets de $\underset{\sim}{C}$. On définit ([16]-chap. I, n° 2.6.2) le préfaisceau d'ensembles $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underset{\sim}{C}}(x,y)$ (noté encore $\underline{\mathrm{Hom}}_U(x,y)$) sur U par :

$$(u : U' \to U) \rightsquigarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\underset{\sim}{C}}(x,y)(U') = \mathrm{Hom}_{U'}(x^u,y^u)$$

où x^u et y^u représentent les images inverses de x et y par u et $\mathrm{Hom}_{U'}(x^u,y^u)$ l'ensemble des U'-morphismes de $\underset{\sim}{C}$ de x^u vers y^u.

1.2. - De manière immédiate, on définit aussi le préfaisceau $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underset{\sim}{C}}(x)$ (noté encore $\underline{\mathrm{Aut}}_U(x)$) des U-automorphismes d'un U-objet x de $\underset{\sim}{C}$, $U \in \mathrm{ob}(\mathcal{B})$.

1.3. - *Proposition.*- Soient $\mathcal{B}$ un site, $\underset{\sim}{C}$ un $\mathcal{B}$-préchamp scindé. Pour tout objet U de $\mathcal{B}$ et tout couple (x,y) de U-objets de $\underset{\sim}{C}$, les préfaisceaux $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underset{\sim}{C}}(x,y)$ et $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underset{\sim}{C}}(x)$ sont des faisceaux.

On se ramène au cas $\underset{\sim}{C}$ scindé par la technique décrite en 3.5.2., chap. II de [16].

1.4. - Pour tout site $\mathcal{B}$, nous notons $\underline{\mathrm{FAGR}}(\mathcal{B})$ le champ de groupoïdes sous-jacents (cf. [16], chap. II, n° 3.5.1.) au champ scindé des faisceaux sur $\mathcal{B}$ à valeurs dans les groupes (cf. [16], chap. II, prop. 3.4.4.).

Pour tout $U \in \mathrm{ob}(\mathcal{B})$, les U-objets de $\underline{\mathrm{FAGR}}(\mathcal{B})$ sont donc les U-faisceaux de groupes et les U-morphismes les U-isomorphismes entre faisceaux de groupes.

1.5. - Sous les hypothèses de la proposition 1.3., on notera $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(.)$ le $\mathcal{B}$-morphisme de préchamp de $\underline{C}$ dans $\underline{\mathrm{FAGR}}(\mathcal{B})$ qui, à chaque U-objet x de $\underline{C}$, $U \in \mathrm{ob}(\mathcal{B})$, associe le U-faisceau $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(x)$ (= $\underline{\mathrm{Aut}}_{U}(x)$) et à chaque U-morphisme $f : x \to y$ le U-morphisme $\underline{\mathrm{Int}}(f) : \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(x) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\underline{C}}(y)$ défini par $\underline{\mathrm{Int}}(f)(\alpha) = f \circ \alpha \circ f^{-1}$. Si $\underline{C}$ est un $\mathcal{B}$-champ, $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(.)$ est évidemment un $\mathcal{B}$-morphisme de champs. Si $\underline{\Phi} : \underline{C} \to \underline{C}'$ est un morphisme de champs, on notera $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\Phi}}$ le $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}'}(.)$ vers $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}'}(.) \circ \underline{\Phi}$ dont la valeur en un U-objet x quelconque de $\underline{C}$ est le U-morphisme $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(x) \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}'}(\underline{\Phi}(x))$ induit par $\underline{\Phi}$.

1.6. - <u>Quelques notations</u> :

- Si $\underline{\underline{C}}$ est une 2-catégorie quelconque, nous désignerons resp. par $\underline{\underline{C}}_i$, $\underline{\underline{C}}_{ij}$, $i,j = 0,1,2$, $i < j$, l'ensemble des objets, des 1-flèches, des 2-flèches de $\underline{\underline{C}}$ et la catégorie ayant $\underline{\underline{C}}_i$ pour ensemble d'objets et $\underline{\underline{C}}_j$ pour ensemble de flèches. Si $\underline{\underline{\Phi}} : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{C}}'$ est un 2-foncteur, nous noterons $\underline{\underline{\Phi}}_{ij}$ la restriction de $\underline{\underline{\Phi}}$ à $\underline{\underline{C}}_{ij}$.

- Etant donné un préfaisceau $\underline{\underline{\mathfrak{C}}}$ de 2-catégories sur une catégorie $\mathcal{B}$, nous noterons $\underline{\mathfrak{C}}$ le préfaisceau de catégories sur $\mathcal{B}$ dont la fibre au-dessus d'un objet quelconque de $\mathcal{B}$ est $\underline{\mathfrak{C}}(U) = (\underline{\underline{\mathfrak{C}}}(U))_{01}$.

Dans toute la suite, sauf mention expresse, $\mathcal{B}$ désignera un site quelconque.

§ 2 - $\mathcal{B}$-*<u>système de coefficients</u>*.

2.1. - *<u>Définition</u>*.- Un <u>2-groupoïde</u> est une 2-catégorie dans laquelle les 1-flèches et les 2-flèches sont inversibles.

2.2. - *<u>Définition</u>*.- Nous dirons qu'un 2-groupoïde $\underline{\underline{G}}$ <u>satisfait à la condition</u> (I) si le foncteur source $\underline{s} : \underline{\underline{G}}_{02} \to \underline{\underline{G}}_{01}$ est fibrant.

2.3. - La condition (I) est équivalente à la condition (I)' suivante qui exprime que id_f est cartésienne pour tout $f \in F\ell(G_{o1})$:
"Pour tout couple (x,y) d'objets et toute 2-flèche $x \underset{f}{\overset{g}{\Uparrow\sigma}} y$ de $\underline{\underline{G}}$, il existe une unique 2-flèche $x \underset{id}{\overset{h}{\Uparrow\tau}} x$ telle que $f * \tau = \sigma$ (en particulier $f \circ h = g$)".

Il est clair qu'un 2-groupoïde ne satisfait pas en général à la condition (I) (prendre par exemple le 2-groupoïde $\underline{\underline{Top}}_{iso}$ des espaces topologiques avec pour morphisme les homéomorphismes et pour 2-morphismes les homotopies).

2.4. - Observons que si $\underline{\underline{G}}$ satisfait à la condition (I)', pour tout objet x de G, le monoïde (pour la composition $*$ de Godement) $\Omega_{\underline{\underline{G}}}(x)$ constitué des 2-flèches de $\underline{\underline{G}}$ de source l'identité de x est un groupe ; si $x \underset{id}{\overset{f}{\Uparrow\sigma}} x$ est une 2-flèche de G, l'inverse $\check{\sigma}$ de σ pour la loi $\circ$ est $\check{\sigma} = \sigma^{-1} * f$ où σ^{-1} est l'inverse de σ pour la loi $*$.

2.5. - Si la condition (I) est satisfaite, $\underline{s}$ admet un scindage naturel, celui qui à chaque 1-flèche f de $\underline{\underline{G}}$ fait correspondre la 2-flèche identité de source f.

Lemme.- Soient $\theta : G \to G'$ un 2-foncteur entre 2-groupoïdes satisfaisant à la condition (I), s' le foncteur source $\underline{\underline{G}}'_{o2} \to \underline{\underline{G}}'_{o1}$.

$\underline{\underline{\theta}}_{o1}$ transforme un morphisme cartésien relativement à $\underline{s}$ en un morphisme cartésien relativement à $\underline{s}'$.

Immédiat puisque les morphismes cartésiens de s sont précisément les 2-flèches identités de G associées aux 1-flèches.

2.6. - *Définition*.- On appelle B-système de coefficients (et on note, en général, par la lettre $\underline{\underline{\Gamma}}$) tout B-faisceau de 2-groupoïdes satisfaisant à la condition (I).

2.7. - *Proposition*.- Soit $\underline{\underline{\Gamma}}$ un $\mathcal{B}$-système de coefficients. Pour tout couple (x,x') de U-objets de $\underline{\underline{\Gamma}}$, $U \in ob(\mathcal{B})$, le U-préfaisceau de catégories $\underline{Hom}_U(x,x')$ est un faisceau.

2.8. - *Définition*.- Un $\mathcal{B}$-morphisme de $\mathcal{B}$-systèmes de coefficients est simplement un $\mathcal{B}$-morphisme entre les faisceaux de 2-groupoïdes correspondants.

2.9. - *Un exemple de $\mathcal{B}$-système de coefficients* : $\underline{\underline{FAGR}}(\mathcal{B})$.

Soient $U \in ob(\mathcal{B})$, $F \in ob(\underline{\underline{FAGR}}(\mathcal{B})_U)$, α une U-section de F. α induit un automorphisme interne $\underline{int}(\alpha)$ de F et une 2-transformation naturelle de source l'identité de F et de but $\underline{int}(\alpha)$ (2-transformation naturelle que, par abus de langage, on pourra confondre avec la section α elle-même). Ceci conduit à la construction du 2-groupoïde suivant $\underline{\underline{FAGR}}(\mathcal{B})_U$, $U \in ob(\mathcal{B})$:

Objets de $\underline{\underline{FAGR}}(\mathcal{B})_U$ = $\{$U-faisceaux de groupes F,G,...$\}$.

1-morphismes de " = $\{$U-isomorphismes entre U-faisceaux de groupes précédents .

2-morphismes de " = $\{$Pour tout U-diagramme $F \overset{g}{\underset{f}{\rightrightarrows}} G$, une 2-flèche de f vers g est une U-section α de F telle que $\underline{int}(\alpha) \circ f = g$.

. Le 2-groupoïde $\underline{\underline{FAGR}}(\mathcal{B})_U$ ainsi obtenu satisfait évidemment à la condition (I)'.

. $\underline{\underline{FAGR}}(\mathcal{B})_U$ est la fibre au-dessus de U d'un préfaisceau de 2-groupoïdes $\underline{\underline{FAGR}}(\mathcal{B})$.

2.10. - *Proposition*.- $\underline{\underline{FAGR}}(\mathcal{B})$ est un $\mathcal{B}$-système de coefficients.

. $\underline{\underline{FAGR}}(\mathcal{B})$ est un $\mathcal{B}$-champ de groupoïdes, donc un $\mathcal{B}$-préchamp. $\underline{\underline{FAGR}}(\mathcal{B})$ est aussi un $\mathcal{B}$-faisceau de catégories. Pour voir ce dernier point directement, puisque $\underline{\underline{FAGR}}(\mathcal{B})$ est déjà un $\mathcal{B}$-préchamp, il suffit de vérifier que si U est un objet de $\mathcal{B}$, R un raffinement de U, pour tout faisceau de groupes F sur R, $F'(U) = \varprojlim(F/R)$ est un U-faisceau de groupes, ce qui est, par exemple, vérifiés dans la démonstration de la proposition 3.4.4., chap. II de [16]. La proposition 2.10 s'ensuit alors, puisque, par construction même, les 2-flèches se recollent dans $\underline{\underline{FAGR}}(\mathcal{B})$.

2.11. - *Définition*.- Soient $\underline{\underline{\Gamma}}$ un $\mathcal{B}$-faisceau de 2-groupoïdes, U un objet de $\mathcal{B}$, x un U-objet de $\underline{\underline{\Gamma}}$. On notera $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(x)$ le U-faisceau qui à tout $u : U' \to U \in ob(\mathcal{B}/U)$ associe le monoïde pour la composition $*$ de Godement constitué des 2-flèches de $\underline{\underline{\Gamma}}$ dont la source est l'identité de ${}^{u}x$.

2.12. - *Proposition*.- Soient $\underline{\underline{\Gamma}}$ un $\mathcal{B}$-système de coefficients, U un objet de $\mathcal{B}$. Pour tout U-objet x de $\underline{\underline{\Gamma}}$, le U-faisceau de monoïdes $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(x)$ est un U-faisceau de groupes (Cf. n° 2.4.).

. On dira qui $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(x)$ est le "faisceau des lacets de $\underline{\underline{\Gamma}}$ en x", appellation qui sera justifiée par le chapitre II.

2.13. - La proposition 2.10 permet de définir un 2-foncteur de représentation $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}$ de $\underline{\underline{\Gamma}}$ dans $\underline{\underline{FAGR}}(\mathcal{B})$ comme suit :

$\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}$:

- $U \in ob(\mathcal{B})$,
- U-objet x de $\underline{\underline{\Gamma}}$ $\rightsquigarrow$ U-faisceau des lacets de $\underline{\underline{\Gamma}}$ en x.
- $(x \to y) \in 1\text{-}F\ell(\underline{\underline{\Gamma}}_U)$ $\rightsquigarrow$ U-morphisme $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(f) : \Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(x) \to \Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(y)$ dont la valeur en U

  $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(f)(U) : \Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(x)(U) \to \Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(y)(U)$

  est définie par :

  $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(f)(U)(\sigma)$ = l'unique élément τ de $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(y)(U)$ tel que $f^{-1} * \tau = \sigma * f^{-1}$ (cf. condition (I)'). En particulier, si $f = \text{but}(\alpha)$, $\alpha \in \Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(x)(U)$, $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(f)$ s'identifie à l'automorphisme intérieur de $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(x)$ induit par α.
- $\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"'] \arrow[r, bend left=60, "g"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Uparrow\sigma"] & y \end{tikzcd} \in 2\text{-}F\ell(\underline{\underline{\Gamma}}_U)$ $\rightsquigarrow$ la 2-transformation naturelle de $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(f)$ vers $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(g) = \underline{\text{int}}(\tau) \circ \Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(f)$ définie par l'unique élément τ de $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(y)(U)$ tel que $\sigma = \tau * f$.

Observons que $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}$ est un $\mathcal{B}$-morphisme de systèmes de coefficients.

2.14. - *Proposition*.- <u>La représentation</u> $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}$ <u>est 2-pleine i.e. pour tout U-diagramme</u> $\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "f"'] & y \end{tikzcd}$ <u>dans</u> $\underline{\underline{\Gamma}}$, $U \in ob(\mathcal{B})$, <u>l'application</u>

$$\text{Hom}_{\underline{\underline{\Gamma}}}(f,g) \longrightarrow \text{Hom}_{\underline{\underline{FAGR}}(\mathcal{B})}(\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(f),\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(g))$$

<u>est bijective</u>.

§ 3 - *Deuxième définition d'un système de coefficients*.

3.1. - *Définition* (deuxième définition d'un $\mathcal{B}$-système de coefficients) :

Un $\mathcal{B}$-<u>système de coefficients</u> est un triple (Γ,Ω,b) constitué :

a) d'un $\mathcal{B}$-faisceau de groupoïdes $\underline{\Gamma}$,

b) d'un $\mathcal{B}$-morphisme de préchamps $\Omega : \underline{\Gamma} \longrightarrow \underline{\mathrm{FAGR}}(\mathcal{B})$,

c) d'un $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel $b : \Omega \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\Gamma}}(.)$,

ces données étant assujetties à satisfaire la condition suivante :

(*) $\forall\, U \in \mathrm{ob}(\mathcal{B})$, $\forall\, x \in \mathrm{ob}\, \underline{\Gamma}_U$, pour toute U section α de $\Omega(x)$, l'image par Ω du U-automorphisme $b_x(\alpha)$ de x coïncide avec le U-automorphisme interne de $\Omega(x)$ induit par α, autrement dit le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[d, "b"'] \arrow[drr, "\underline{\mathrm{Int}}"] & & \\
\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\Gamma}}(.) \arrow[rr, "\underline{\mathrm{Aut}}_{\Omega}"'] & & \underline{\mathrm{Aut}}(\Omega)
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

. La notion de $\mathcal{B}$-<u>morphisme</u> de système de coefficients (cf. définition 2.8.) se traduit ainsi : un $\mathcal{B}$-<u>morphisme</u> de $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$ vers $(\underline{\Gamma}',\Omega',b')$ est un couple $(\underline{\theta},\omega)$ constitué d'un $\mathcal{B}$-morphisme de faisceaux $\underline{\theta} : \underline{\Gamma} \to \underline{\Gamma}'$ et d'un $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel $\omega : i.\Omega \to i.\Omega'.\underline{\theta}$ (1) tels que la relation

$$(b' * \underline{\theta}) \circ \omega = \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\theta}} \circ b$$

soit vérifiée, [$\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\theta}}$ est le $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\Gamma}}(.)$ vers $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\Gamma}'}(.) \cdot \underline{\theta}$ dont la valeur en U-objet x quelconque de $\underline{\Gamma}$ est le U-morphisme $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\Gamma}}(x) \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\Gamma}'}(\underline{\theta}(x))$ induit par $\underline{\theta}$]. Le calcul suivant montre que deux $\mathcal{B}$-morphismes $(\theta,\omega) : (\underline{\Gamma},\Omega,b) \longrightarrow (\underline{\Gamma}',\Omega',b')$, $(\underline{\theta}',\omega')$: $(\underline{\Gamma}',\Omega',b') \longrightarrow (\underline{\Gamma}'',\Omega'',b'')$ se composent par la formule $(\underline{\theta}',\omega').(\underline{\theta},\omega) = (\underline{\theta}' \cdot \underline{\theta}, (\omega' * \underline{\theta}) \circ \omega)$:

$[b'' * (\underline{\theta}' \cdot \theta)] \circ [(\omega' * \underline{\theta}) \circ \omega] = [(b'' * \underline{\theta}') * \underline{\theta}] \circ [(\omega' * \underline{\theta}) \circ \omega] =$
$([(b'' * \underline{\theta}') \circ \omega'] * \underline{\theta}) \circ \omega = (\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\theta}'} * \underline{\theta}) \circ (b' * \underline{\theta}) \circ \omega =$
$(\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\theta}'} * \underline{\theta}) \circ \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\theta}} \circ b = \mathrm{Aut}_{\underline{\theta}'.\underline{\theta}} \circ b.$

----

(1) i désigne l'injection de $\underline{\mathrm{FAGR}}(\mathcal{B})$ dans le $\mathcal{B}$-champ scindé des $\mathcal{B}$-faisceaux à valeurs dans les groupes ; nous nous permettrons de l'omettre dans la suite.

. La définition 3.1. est expliquée par le théorème suivant :

3.2. - *Théorème*.- Tout $\mathcal{B}$-système de coefficients dans le sens de la définition 2.4. détermine un unique $\mathcal{B}$-système de coefficients dans le sens précédent. Réciproquement, étant donné un $\mathcal{B}$-système de coefficients dans le sens de la définition 3.1., il existe, à isomorphisme unique près, un $\mathcal{B}$-faisceau de 2-groupoïdes $\underline{\underline{\Gamma}}$ satisfaisant à (I) tel que $\underline{\Gamma} = \underline{\underline{\Gamma}}_{o1}$, $\Omega = (\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}})_{o1}$ et b égal au $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel dont la valeur en un U-objet x quelconque de $\underline{\Gamma}$, $U \in ob(\mathcal{B})$, est le U-homomorphisme but $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(x) \to Aut_{\underline{\underline{\Gamma}}}(x)$.

1) Soit $\underline{\underline{\Gamma}}$ un $\mathcal{B}$-faisceau de 2-groupoïdes satisfaisant à (I). On associe à $\underline{\underline{\Gamma}}$ le triple $((\underline{\underline{\Gamma}})_{o1}, \Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}, b)$ où b est le $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel dont la valeur en l'objet x de $\underline{\underline{\Gamma}}_U$, $U \in ob(\mathcal{B})$, est le U-homomorphisme qui à une 2-flèche de source id_x associe son but.

2) Réciproquement, donnons-nous un triple $(\underline{\Gamma}, \Omega, b)$ pour lequel la condition (*) est satisfaite. Définissons alors le $\mathcal{B}$-faisceau de 2-groupoïdes $\underline{\underline{\Gamma}}$ par :

i) $\underline{\underline{\Gamma}}_{o1} = \underline{\Gamma}$,

ii) Pour tout $U \in ob(\mathcal{B})$, les U-2-flèches de $\underline{\underline{\Gamma}}$ sont les couples (f,α) où $f : x \to y$ est un U-morphisme de $\underline{\Gamma}$ et α une U-section du faisceau $\Omega(y)$. La source de (f,α) est f, son but le U-morphisme $[b_y(\alpha)] \circ f$. On identifiera un couple de la forme (id_x,α), $x \in ob(\underline{\Gamma})$, à la U-section correspondant de $\Omega(x)$. Le composé $\star$ de Godement de deux U-flèches (g,β), (f,α) est défini, chaque fois que $f \cdot g$ l'est, par

$$(f,\alpha) * (g,\beta) = (f \cdot g, \alpha . \Omega(f)(\beta)).$$

Si x et y sont deux U-objets quelconques de $\underline{\Gamma}$, $U \in ob(\mathcal{B})$, la composition $\circ$ dans $\underline{\underline{\Gamma}}(x,y)$ est défini par :

$$(f',\beta) \circ (f,\alpha) = (f,\beta.\alpha)$$

chaque fois que $f' = but(f,\alpha) = b_y(\alpha) \circ f$, le $.$ dans $\beta.\alpha$ désignant la composition dans $\Omega(y)(U)$.

. Avec les définitions précédentes, pour tout U-diagramme, $U \in ob(\mathcal{B})$,

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "g'"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\bar\beta"] & y \arrow[r, bend left, "f'"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\bar\alpha"] & z \end{tikzcd}$$

où l'on a posé $\bar\beta = (g,\beta)$, $\bar\alpha = (f,\alpha)$, on a la chaîne suivante d'égalités :

$$(f' * \bar\beta) \circ (\bar\alpha * g) = (f' . g,\Omega(f)(\beta)) \circ (f . g,\alpha)$$
$$= (f.g,\alpha.\Omega(f)(\beta)) = (f.g',\alpha) \circ (f.g,\Omega(f)(\beta))$$
$$= (\bar\alpha * g') \circ (f * \bar\beta), \text{ qui implique}$$
$$(f' * \bar\beta) \circ (\bar\alpha * g) = (\bar\alpha * g') \circ (f * \bar\beta).$$

. $\underline{\underline{\Gamma}}$ satisfait à la condition (I), car, pour tout U-morphisme $f : x \to y$, $U \in ob(\mathcal{B})$, quelle que soit la U-section α de $\Omega(y)$,

$$f * \Omega(f^{-1})(\alpha) = (f,id_f) * (id_x,\Omega(f^{-1})(\alpha))$$
$$= (f,\alpha),$$

par la définition de la composition $*$.

. Montrons maintenant que $(\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}})_{o1} = \Omega$. Il est clair que l'égalité est vraie sur les objets. Reste alors à montrer que, pour tout U-morphisme $f : x \to y$ dans $\underline{\underline{\Gamma}}_{o1} = \underline{\Gamma}$, $(\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}})(f) = \Omega(f)$. Or, $\forall\, \alpha \in \underline{\underline{\Gamma}}_2$ de source id_x,

$$\begin{aligned}\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(f)(\alpha) &= f * \alpha * f^{-1} \quad (\text{cf. n° } 2.13)\\ &= (f,\Omega(f)(\alpha)) * (f^{-1},\mathrm{id}_x)\\ &= (\mathrm{id}_y,\Omega(f)(\alpha)) = \Omega(f)(\alpha),\end{aligned}$$

compte tenu de l'identification faite plus haut. D'où l'égalité cherchée.

. Pour terminer la démonstration du théorème 3.2., remarquons que $\Omega = (\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}})_{o1}$ se prolonge en le 2-foncteur représentation $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}} : \underline{\underline{\Gamma}} \to \underline{\underline{\mathrm{FAGR}}}(\mathcal{B})$ si et seulement si, $\forall$ le U-objet x de $\underline{\underline{\Gamma}}$, $U \in \mathrm{ob}(\mathcal{B})$, $\forall \beta \in \underline{\underline{\Gamma}}_2$ de source l'identité de x et de but f, $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(f)$ s'identifie à l'automorphisme intérieur de $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(x) = \Omega(x)$ induit par β. Or, c'est précisément ce que garantit la condition (*).

§ 4 - *Systèmes de coefficients 1-complets.*

4.1. - *Définition*.- Nous dirons qu'un $\mathcal{B}$-système de coefficients $\underline{\underline{\Gamma}}$ est 1-complet si le faisceau $\underline{\Gamma}$ est un $\mathcal{B}$-champ.

. La définition précédente revient à dire que dans le triple $(\underline{\Gamma},\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}},b)$ déterminé par $\underline{\underline{\Gamma}}$ (Théorème 3.2.), $\underline{\Gamma}$ est un $\mathcal{B}$-champ. Des résultats standard de [16], chap. II, § 2, p. 176, il résulte immédiatement :

4.2. - *Proposition*.- Soit $\underline{\underline{\Gamma}}$ un $\mathcal{B}$-système de coefficients. Il existe un couple universel (dans un sens évident) $(\hat{\underline{\underline{\Gamma}}},\Delta)$ constitué d'un $\mathcal{B}$-système de coefficients 1-complet $\hat{\underline{\underline{\Gamma}}}$ et d'un $\mathcal{B}$-morphisme $\Delta : \underline{\underline{\Gamma}} \to \hat{\underline{\underline{\Gamma}}}$ dont la restriction $\Delta_{o1} : \underline{\Gamma} \longrightarrow \hat{\underline{\Gamma}}$ est bicouvrante.

. En effet, il suffit de prendre pour $\hat{\underline{\underline{\Gamma}}}$ le $\mathcal{B}$-système de coefficients correspondant au triple $(\hat{\underline{\Gamma}},\hat{\Omega}_{\underline{\underline{\Gamma}}},\hat{b})$ où $\hat{\underline{\Gamma}},\hat{\Omega}_{\underline{\underline{\Gamma}}},\hat{b}$ sont respectivement le $\mathcal{B}$-champ associé à $\underline{\Gamma}$, le $\mathcal{B}$-morphisme de champs associé à $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}$, le $\mathcal{B}$-morphisme foncto-riel associé à b.

§ 5 - *Quelques systèmes de coefficients.*

5.1. - Supposons le site de base $\mathcal{B}$ réduit à un point avec une seule flèche, l'identité. Un "module croisé" (H,ρ,Π,Φ) au sens de [11] définit un $\mathcal{B}$-système de coefficients $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$ où

- $\underline{\Gamma}$ est le groupoïde à un unique objet e dont Π est l'ensemble des morphismes,

- Ω est le foncteur de $\underline{\Gamma}$ dans $\underline{\mathrm{FAGR}}(\mathcal{B})$ défini par :

  a) $\Omega(e) = H$

  b) $\Omega(f) = \Phi(f)$, $f \in \Pi$.

- b est l'homomorphisme $\rho : H \to \Pi = \underline{\mathrm{Aut}}(e)$.

La première condition de "module croisé" est équivalente à la condition (*) de 3.1., la deuxième revient à exprimer que b est un morphisme fonctoriel.

Réciproquement, un système de coefficients (Γ,Ω,b) sur Γ, possédant un seul objet e, détermine un module croisé (H,ρ,Π,Φ) pour lequel $H = \Omega(e)$, $\Pi = \underline{\mathrm{Aut}}(e)$, $\rho = b_e : H \to \Pi$, $\Phi : \Pi \times H \to H$, $(f,\alpha) \rightsquigarrow \Omega(f)(\alpha)$.

. Dans les exemples qui suivent, $\mathcal{B}$ désignera de nouveau un site quelconque.

5.2. - $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$.

5.2.1. - *Définition.* - Soient G un $\mathcal{B}$-faisceau de groupes, $\underline{\mathrm{Aut}}\ G$ son $\mathcal{B}$-faisceau d'automorphismes. $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$ est le $\mathcal{B}$-système de coefficients dont le fibre, au-dessus de $U \in \mathrm{ob}(\mathcal{B})$, est le 2-groupoïde $\underline{\underline{\Gamma}}(G)_U$ défini par :

a) Ses objets sont les U-formes de G.

b) Ses 1-morphismes les U-isomorphismes entre U-formes de [$\Gamma(G)_U$ coïncide donc avec le groupoïde $Z^1(U,\underline{\mathrm{Aut}}\ G)$].

c) Pour tout diagramme $\begin{tikzcd} G' \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, "f"'] & G'_1 \end{tikzcd}$ où G', G'_1 sont deux U-formes de G, f, g deux U-isomorphismes, les 2-morphismes de f vers g sont les U-sections α de G'_1 telles que $\underline{\mathrm{int}}(\alpha) \circ f = g$.

. Par construction même des 2-morphismes, $\underline{\underline{\Gamma}}(G)_U$ satisfait à la condition (I)'.

. Sous la traduction du § 3, $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$ correspond au triple $(\underline{\Gamma}(G),\Omega,b)$ où Ω est l'injection de $\underline{\Gamma}(G)$ dans $\underline{\mathrm{FAGR}}(\mathcal{B})$ et où b est le $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel qui à la U-section α de G, $U \in \mathrm{ob}(\mathcal{B})$, associe $\underline{\mathrm{int}}(\alpha)$.

5.2.2. - <u>*Proposition*</u>.- $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$ <u>est un</u> $\mathcal{B}$-<u>système de coefficients</u> 1-<u>complet</u>.

5.2.3. - Nous pouvons aussi obtenir $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$ par la construction suivante ; définissons le $\mathcal{B}$-faisceau de 2-groupoïdes $\underline{\underline{\Sigma}}(G)$ par : $U \in \mathrm{ob}(\mathcal{B})$,

a)' $\underline{\underline{\Sigma}}(G)(U)_o$ se réduit à l'unique objet G/U.

b)' les 1-morphismes de $\underline{\underline{\Sigma}}(G)(U)$ sont les U-sections du faisceau $\underline{\mathrm{Aut}}\, G$, i.e. les éléments de $(\underline{\mathrm{Aut}}\, G)(U) = \underline{\mathrm{Aut}}(G/U)$.

c)' les 2-morphismes de $\underline{\underline{\Sigma}}(G)(U)$ de f vers g, $f, g \in \underline{\underline{\Sigma}}(G)(U)_1$, sont les U-sections α de G pour lesquelles $\underline{\mathrm{int}}(\alpha) \circ f = g$.

5.2.4. - <u>*Proposition*</u>.- $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$ <u>est</u> $\mathcal{B}$-<u>équivalent à</u> $\hat{\underline{\underline{\Sigma}}}(G)$.

5.3. - $\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)$.

5.3.1. - Soit H un sous-faisceau de G (non nécessairement invariant dans G). Associons au couple (G,H) le $\mathcal{B}$-faisceau $\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)$ de 2-groupoïdes déterminé par : $U \in \mathrm{ob}(\mathcal{B})$,

$\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)_o$ $\left\{\begin{array}{l}\text{les U-objets de } \underline{\underline{\Gamma}}(G,H) \text{ sont les couples } (G',H') \text{ de} \\ \text{U-faisceaux, } H' \text{ sous-faisceau de } G', \text{ localement isomorphes} \\ \text{au couple } (G,H)/U.\end{array}\right.$

$(G,H)_1$ $\left\{\begin{array}{l}\text{étant donné } (G',H'),\ (G'_1,H'_1) \text{ deux U-objets de } \underline{\underline{\Gamma}}(G,H),\\ \text{les U-1-morphismes de source } (G',H') \text{ et de but } (G'_1,H'_1)\\ \text{sont les U-isomorphismes de } G' \text{ vers } G'_1 \text{ transformant}\\ H' \text{ en } H'_1.\end{array}\right.$

$(G,H)_2$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Pour tout U-diagramme } (G',H') \overset{g}{\underset{f}{\rightrightarrows}} (G'_1,H'_1) \text{ dans } \underline{\underline{\Gamma}}(G,H),\\ \text{les U-2-morphismes } \alpha \text{ de source } f \text{ et de but } g \text{ sont les}\\ \text{U-sections } \alpha \text{ de } G'_1 \text{ normalisant } H'_1 \text{ et telles que}\\ \underline{\mathrm{int}}(\alpha) \circ f = g.\end{array}\right.$

. Vu la forme des 1-morphismes, chaque 2-groupoïde fibre de $\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)$ satisfait à la condition (I)'. $\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)$ constitue donc un $\mathcal{B}$-système de coefficients. Le foncteur $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)}$ n'est pas, en général, fidèle ; cependant,

5.3.2. - il l'est dans les deux cas importants suivants :

1°) H est invariant dans G,

2°) $\mathcal{B}$ est le site étale X_{et} d'un préschéma X,

$\mathbf{G}$ un X-groupe semi-simple, $H = B$ un sous-groupe de Borel de G. En effet, dans ce cas, pour tout objet U de X_{et}, par le corollaire 6.4. de l'exposé XXIV de [13], on sait que le foncteur $(G,B) \rightsquigarrow B$ de la catégorie des couples (U-groupes semi-simples, groupe de Borel) dans la catégorie des U-préschémas en groupes (les morphismes sont les isomorphismes) est pleinement fidèle.

5.3.3. - Notons $\underline{\mathrm{Aut}}(G,H)$ le sous-faisceau de $\underline{\mathrm{Aut}}\, G$ des automorphismes préservant H. Pour tout $U \in ob(\mathcal{B})$, la U-fibre de $\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)$ coïncide précisément avec le groupoïde $Z^1(U,\underline{\mathrm{Aut}}(G,H))$. On en déduit que $\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)$ est 1-complet.

CHAPITRE II

Γ-*OBJETS PRINCIPAUX*.

. Dans toute la suite, le site de base $\mathcal{B}$ sera supposé quelconque. Nous ne considérons plus que des $\mathcal{B}$-systèmes de coefficients $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$ pour lesquels $\underline{\Gamma}$ est une gerbe (donc 1-complet) auxquels cas Ω est un morphisme de champs. Cette condition est satisfaite pour les systèmes de coefficients décrits dans le § 5 du chapitre I.

§ *1* - Γ-*objets*.

1.1. - *Définition*.- Soit $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$ un $\mathcal{B}$-système de coefficients. Un $\underline{\Gamma}$-objet (resp. $\underline{\Gamma}$-champs) est un triple $(\underline{C},p,\bar{b})$ constitué :

i) d'une $\mathcal{B}$-gerbe (resp. en $\mathcal{B}$-champ de groupoïdes) $\underline{C}$,

ii) d'un $\mathcal{B}$-morphisme de gerbes (resp. champs) $p : \underline{C} \to \underline{\Gamma}$,

iii) d'un $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel $\bar{b} : \Omega.p \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(.)$, ces données devant rendre commutatif le diagramme

(1)
$$\begin{tikzcd}
 & \Omega \circ p \arrow[dl, "\bar{b}"'] \arrow[dr, "b * p"] & \\
\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(.) \arrow[rr, "\underline{\mathrm{Aut}}_p"] & & \mathrm{Aut}_{\underline{\Gamma}}(.) \circ p
\end{tikzcd}$$

. Au lieu de Γ-objet (resp. $\underline{\Gamma}$-champ), on dira aussi $\mathcal{B}$-objet (resp. $\mathcal{B}$-champ) avec opérateur $\underline{\Gamma}$.

1.2. - Soient $\underline{C}$ un $\mathcal{B}$-champ, $\underline{\underline{\Gamma}}$ un $\mathcal{B}$-système de coefficients $p : \underline{C} \to \underline{\underline{\Gamma}}_{o1}$ un $\mathcal{B}$-morphisme de champs. Par la condition (I) du chapitre I, on sait que le foncteur $\underline{s} : \underline{\underline{\Gamma}}_{o2} \to \underline{\underline{\Gamma}}_{o1}$ est une fibration. Considérons alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \overline{\underline{C}} \arrow[r, "\overline{p}"] \arrow[d] & \underline{\underline{\Gamma}}_{o2} \arrow[d, "\underline{s}"] \\ \underline{C} \arrow[r, "p"] & \underline{\Gamma}_{o1} \end{tikzcd}$$

où $\overline{\underline{C}}$ est le produit fibré de $\underline{C}$ et de $\underline{\underline{\Gamma}}_{o2}$ au-dessus de $\underline{\Gamma}_{o1}$. Les objets de $\overline{C}$ coïncident avec ceux de $\underline{C}$, ses morphismes sont les couples $(f,\alpha) \in F\ell(\underline{C}) \times \underline{\underline{\Gamma}}_2$ tels que $\underline{s}(\alpha) = p(f)$ et sa loi de composition notée $\square$ est donnée par :

$$(f,\alpha) \,\square\, (g,\beta) = (g \cdot f, \beta * \alpha)$$

chaque fois $g \cdot f$ existe dans C et $\beta * \alpha$ dans $\underline{\underline{\Gamma}}_{o2}$.

1.3. - *Proposition*.- $\overline{\underline{C}}$ <u>est un</u> $\mathcal{B}$-<u>préchamp</u>.

$\overline{\underline{C}}$ est $\mathcal{B}$-fibrée comme composée de deux fibrations. Le fait que les morphismes se recollent dans $\overline{\underline{C}}$ résulte alors du fait qu'ils se recollent dans $\underline{C}$ et dans $\underline{\underline{\Gamma}}_{o2}$ (pour $\underline{\underline{\Gamma}}_{o2}$, cf. prop. 2.7., chap. I).

. Nous pouvons maintenant traduire en termes de 2-groupoïdes la notion de $\underline{\Gamma}$-objet (cf. définition 1.1.) :

1.4. - *Définition*.- Soient $\underline{\underline{\Gamma}}$ un $\mathcal{B}$-système de coefficients. Un <u>$\underline{\underline{\Gamma}}$-objet</u> (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}$-champ) est un triple $(\underline{C},p,\overline{b})$ constitué :

i)' d'une $\mathcal{B}$-gerbe (resp. d'un $\mathcal{B}$-champ) $\underline{C}$,

ii)' d'un $\mathcal{B}$-morphisme de champ $p : \underline{C} \to \underline{\underline{\Gamma}}_{o1}$,

iii)' d'un $\mathcal{B}$-morphisme de préchamp $\overline{b} : \overline{\underline{C}} \to \underline{C}$ valant l'identité sur les objets de $\overline{C}$ (= ob(C)) et tel que

iii)$'_a$ $\overline{b}$ rend commutatif le diagramme :

$$\text{(1)}' \qquad \begin{array}{ccc} \underline{C} & \longrightarrow & \underline{\underline{\Gamma}}_{o2} \\ {\scriptstyle \bar{b}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ C & \longrightarrow & \underline{\underline{\Gamma}}_{o1} \end{array}$$

iii)$'_b$ si l'on pose ${}^{\alpha}f = \bar{b}(f,\alpha)$, chaque fois que (f,α) (donc aussi $({}^{\alpha}f,\alpha')$ par iii)$_a$) définit un morphisme de $\bar{\underline{C}}$, l'égalité

$$\alpha'({}^{\alpha}f) = \alpha' \cdot {}^{\alpha}f$$

est vérifiée.

1.5. - Un $\underline{\underline{\Gamma}}$-objet $(\underline{C},p,\bar{b})$ détermine un 2-groupoïde $\underline{\underline{C}}$ par :

a) $(\underline{\underline{C}})_{o1} = \underline{C}$;

b) pour tout U-diagramme $x \overset{g}{\underset{f}{\rightrightarrows}} y$ dans $\underline{C}$, $U \in ob(\mathcal{B})$, une 2-flèche dans $\underline{\underline{C}}$ de source f et de but g est un élément α de $\underline{\underline{\Gamma}}_2$ tel que $g = {}^{\alpha}f$.

Comme le triple $(\underline{C},\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}} \circ p,\bar{b})$ satisfait à la condition (*) de la définition 3.1. du chapitre I, par le théorème 3.2. de ce même chapitre, on sait qu'il existe alors un $\mathcal{B}$-faisceau de 2-groupoïdes satisfaisant à (I) et induisant le triple $(\underline{C}, \Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}} \circ p,\bar{b})$. Ce dernier coïncide, à isomorphisme unique près, avec $\underline{\underline{C}}$.

1.6. - *Remarque*.- Dans la traduction de la définition 1.1. sous la forme de la définition 1.4., la commutativité de (1)' correspond à la commutativité de (1) ; la donnée de $\bar{b}$ dans la définition 1.4. satisfaisant à iii)$'_b$ correspond à la donnée du $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel $\bar{b}$ de la définition 1.1. (compte tenu évidemment de la condition (I) du chapitre I).

§ 2 - *Γ-objets principaux.*

2.1. - *Définition.*- Nous dirons que le $\underline{\Gamma}$-objet (resp. $\underline{\Gamma}$-champ) $(\underline{C},p,\bar{b})$ est principal si $\bar{b}$ est un isomorphisme.

. En termes de $\underline{\underline{\Gamma}}$-objet, ceci revient à dire que le $\mathcal{B}$-morphisme de préchamp $\bar{b} : \bar{\underline{C}} \to \underline{C}$ de la définition 1.4., iii)' est une équivalence.

2.2. - *Exemples de Γ-objets principaux.*

2.2.1. - Toute $\mathcal{B}$-gerbe $\underline{C}$ est munie canoniquement d'une structure de $\underline{\mathrm{FAGR}}(\mathcal{B})$-objet $(\underline{C},\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(.),\bar{b})$ où $\bar{b}$ est le $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel identité.[1]

2.2.2. - *Proposition.*- Soient $\underline{C}$ une $\mathcal{B}$-gerbe dont le lien est localement représentable par un groupe G, $(\underline{\Gamma}(G),\Omega,b)$ le $\mathcal{B}$-système de coefficients introduit en 5.2.1., chap. I. $\underline{C}$ est munie canoniquement d'une structure de $\underline{\Gamma}(G)$-objet principal $(\underline{C},p,\bar{b})$ où p associe à chaque U-objet x de $\underline{C}$, $U \in ob(\mathcal{B})$, la U-forme $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(x)$ de G/U et où $\bar{b}$ est le $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel identité $\Omega \circ p \Longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(.)$.

. Soit x un U-objet de $\underline{C}$, $U \in ob(\mathcal{B})$. Pour tout U-automorphisme f de x dans $\underline{C}$, $\underline{\mathrm{Aut}}_p(f) = \underline{\mathrm{Int}}(f)$, d'où la commutativité du diagramme ①

$$\begin{tikzcd}
& \Omega \circ p \arrow[dl, "id."'] \arrow[dr, "b * p"] & \\
\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(.) \arrow[rr, "\underline{\mathrm{Aut}}_p"] & & \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\Gamma}(G)}(.) \circ p
\end{tikzcd}$$

§ 3 - *Morphismes de $\underline{\Gamma}$-objets.*

3.1. - *Définition.*- Soient $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$, $(\underline{\Gamma}',\Omega',b')$ deux $\mathcal{B}$-systèmes de coefficients, $(\underline{\theta},\omega)$ un $\mathcal{B}$-morphisme de $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$ vers $(\underline{\Gamma}',\Omega',b')$

(1) On fait évidemment ici une exception à notre convention de ne prendre pour $\underline{\Gamma}$ que des gerbes.

(cf. n° 3.1., chap. I), $(\underline{C},p,\bar{b})$, $(\underline{C}',p',\bar{b}')$ respectivement des $\underline{\Gamma}$ et $\underline{\Gamma}'$-objets (resp. $\underline{\Gamma}$ et $\underline{\Gamma}'$-champs). Nous appellerons $\mathcal{B}$-<u>morphisme</u> de $(\underline{C},p,\bar{b})$ vers $(\underline{C}',p',\bar{b}')$ (ou plus simplement de $\underline{C}$ vers $\underline{C}'$) un couple (Φ,q) constitué

1°) d'un $\mathcal{B}$-morphisme de gerbes (resp. de champs) $\underline{\Phi} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$,

2°) d'un $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel $q : \underline{\theta} \circ p \Longrightarrow p' \circ \underline{\Phi}$,

le couple $(\underline{\Phi},q)$ étant soumis à la condition $(\mathcal{C})$ de rendre commutatif le diagramme suivant, pour tout U-objet x, de $\underline{C}$, $\forall\, U \in ob(\mathcal{B})$:

(2)
$$\begin{tikzcd}
\Omega(p(x)) \arrow[rr, "\bar{b}_x"] \arrow[d, "\omega_{p(x)}"] & & \underline{\mathrm{Aut}}_U(x) \arrow[dd, "(\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\Phi}})_x"] \\
\Omega'(\theta(p(x))) \arrow[d, "\Omega'(q_x)"] & & \\
\Omega'(p'(\underline{\Phi}(x))) \arrow[rr, "\bar{b}'_{\underline{\Phi}(x)}"] & & \underline{\mathrm{Aut}}_U(\underline{\Phi}(x))
\end{tikzcd}$$

où q_x représente la valeur en l'objet x du morphisme fonctoriel q.

Dans la définition précédente, supposons que ω soit un isomorphisme, alors :

1°) si Ω' est fidèle, la condition $(\mathcal{C})$ détermine q ;

2°) si Ω' est pleinement fidèle, $\underline{\Phi} : \underline{C} \to \underline{C}'$ étant donné, il existe toujours un et un seul q tel que, pour tout U-objet x de $\underline{C}$, q_x rende commutatif le diagramme (2) .

3.2. - $(\mathcal{C})$ exprime la compatibilité de (Φ,q) avec les "actions" respectives de $\underline{\Gamma}$ et $\underline{\Gamma}'$ sur $(\underline{C},p,\bar{b})$ et $(\underline{C}',p',\bar{b}')$.

Dans le cas où $(\underline{\Gamma},\Omega,b) = (\underline{\Gamma}',\Omega',b')$, $\underline{\theta}$ = morphisme identité, ω = morphisme fonctoriel identité, un $\mathcal{B}$-morphisme de $(\underline{C},p,\bar{b})$ vers $(\underline{C}',p',\bar{b}')$ sera appelé un $\underline{\Gamma}$-morphisme.

. Si l'on exprime la notion de $\underline{\Gamma}$ -objet en termes de 2-groupoïde comme il est fait dans la définition 1.4., la notion de $\mathcal{B}$-morphisme d'objets avec opérateurs se traduit ainsi de manière plus agréable :

(3.1.)' - *Définition*.- Soient $\underline{\underline{\Gamma}}$, $\underline{\underline{\Gamma}}'$ deux $\mathcal{B}$-systèmes de coefficients, $\underline{\underline{\theta}} : \underline{\underline{\Gamma}} \to \underline{\underline{\Gamma}}'$ un $\mathcal{B}$-morphisme de systèmes de coefficients, $(\underline{C},p,\bar{b})$, $(\underline{C}',p',\bar{b}')$ respectivement des $\underline{\underline{\Gamma}}$ et $\underline{\underline{\Gamma}}'$-objets (resp. $\underline{\Gamma}$ et $\underline{\Gamma}'$-champs). Un $\mathcal{B}$-morphisme de $(\underline{C},p,\bar{b})$ vers $(\underline{C}',p',\bar{b}')$ est un couple $(\underline{\Phi},q)$ constitué

1°) d'un $\mathcal{B}$-morphisme $\underline{\Phi} : \underline{C} \to \underline{C}'$ de gerbes (resp. champs),

2°) d'un $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel $q : \underline{\underline{\theta}}_{o1} \circ p \Longrightarrow p' \circ \underline{\Phi}$,

$(\underline{\Phi},q)$ étant soumis à la condition suivante :

(C)' : Pour tout U-morphisme $f : x \to y$ dans C, $\forall\, U \in ob(\mathcal{B})$, et toute 2-flèche α de source $p(f)$ dans $\underline{\underline{\Gamma}}$, l'égalité

$$\bar{b}'(\underline{\Phi}(f), q_y * \underline{\underline{\theta}}_{o2}(\alpha) * q_x^{-1}) = \underline{\Phi}\bar{b}(f,\alpha)$$

est vérifiée.

. Si $\underline{\underline{\theta}}$ = 2-foncteur identité, on dira évidemment que (Φ,q) est un $\underline{\underline{\Gamma}}$-morphisme.

3.3. - *Proposition*.- Soient $\underline{\underline{\Gamma}}$, $\underline{\underline{\Gamma}}'$, $\underline{\underline{\Gamma}}''$ des $\mathcal{B}$-systèmes de coefficients, $\underline{\underline{\theta}} : \underline{\underline{\Gamma}} \to \underline{\underline{\Gamma}}'$, $\underline{\underline{\theta}}' : \underline{\underline{\Gamma}}' \to \underline{\underline{\Gamma}}''$ des $\mathcal{B}$-morphismes de systèmes de coefficients, $(\underline{C},p,\bar{b})$, $(\underline{C}',p',\bar{b}')$, $(\underline{C}'',p'',\bar{b}'')$ respectivement des $\underline{\Gamma}$, $\underline{\Gamma}'$, $\underline{\Gamma}''$-objets (resp. $\underline{\Gamma}$, $\underline{\Gamma}'$, $\underline{\Gamma}''$-champs), $(\underline{\Phi},q) : (\underline{C},p,\bar{b}) \to (\underline{C}',p',\bar{b}')$, $(\Phi',q') : (\underline{C}',p',\bar{b}') \to (\underline{C}'',p'',\bar{b}'')$ des $\mathcal{B}$-morphismes. Le couple $(\underline{\Phi}' \cdot \Phi, q' \cdot \underline{\theta}'_{o1}(q))$ où $q' \cdot \underline{\theta}'_{o1}(q)$ désigne le $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel $\underline{\underline{\theta}}'_{o1} \cdot \underline{\underline{\theta}}_{o1} \cdot p \Longrightarrow p'' \cdot \underline{\Phi}' \cdot \Phi$ dont la valeur en le U-objet x de C, $U \in ob(\mathcal{B})$, est $q'_{\Phi(x)} \cdot \underline{\theta}'_{o1}(q_x)$ est un $\mathcal{B}$-morphisme de $(\underline{C},p,\bar{b})$ vers $(\underline{C}'',p'',\bar{b}'')$. En d'autres termes, les $\mathcal{B}$-objets (resp. $\mathcal{B}$-champs) avec opérateurs constituent une catégorie.

. Pour montrer la proposition 3.3., il suffit d'établir que le couple $(\Phi' \cdot \Phi,\ q' \cdot \underline{\underline{\theta}}'_{o1}(q))$ satisfait à (C)', ce qui résulte de la chaîne suivante d'égalités dans laquelle $f : x \to y$ est un U-morphisme quelconque de C, $U \in ob(B)$, et α une 2-flèche de $\underline{\underline{\Gamma}}$ de source $p(f)$:

$$\underline{\Phi}' \cdot \underline{\Phi}[\bar{b}(f,\alpha)] = \underline{\Phi}'[\bar{b}'(\underline{\Phi}(f), q_y * \underline{\underline{\theta}}_{o2}(\alpha) * q_x^{-1})]$$

$$= \bar{b}''\{\underline{\Phi}' \cdot \underline{\Phi}(f),\ q'_y * \underline{\underline{\theta}}_{o1}(q_y) * (\underline{\underline{\theta}}'_{o2} \cdot \underline{\underline{\theta}}_{o2})(\alpha) * [\underline{\underline{\theta}}'_{o1}(q_x)]^{-1} * q'^{-1}_{\underline{\Phi}(x)}\}.$$

3.4. - *Proposition*.- <u>Tout $\underline{\Gamma}$-morphisme de $\underline{\Gamma}$-objets principaux est une $\underline{\Gamma}$-équivalence.</u>

. Soit $(\underline{\Phi},q) : (\underline{C},p,\bar{b}) \to (\underline{C}',p',\bar{b}')$ un $\underline{\Gamma}$-morphisme de $\underline{\Gamma}$-objets principaux. Il résulte du diagramme 2 que pour tout U-objet x de $\underline{C}$, $\forall\ U \in ob(B)$, $(\underline{Aut}_{\underline{\Phi}})_x : \underline{Aut}_U(x) \to \underline{Aut}_U(\Phi(x))$ est un U-isomorphisme. Comme, pour tout autre U-objet y de $\underline{C}$, $\underline{Hom}_U(x,y)$ est un U-pseudo-torseur sans $\underline{Aut}_U(x)$ (cf. Théorème 2.5.1., chap. III, p. 151 de [16]), $\underline{\Phi}$ est localement bijectif sur les flèches. Comme, en outre, $\underline{C}$ et $\underline{C}'$ sont des gerbes, Φ est aussi localement surjectif sur les objets. Donc $\underline{\Phi}$ est bicouvrant, donc une équivalence par la proposition 1.4.5., chap. II de [16], i.e. $(\underline{\Phi},q)$ est une $\underline{\Gamma}$-équivalence.

§ 4 - *Définition des 2-morphismes dans la catégorie des B-objets (resp. B-champs) à opérateurs.*

4.1. - Soient $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$, $(\underline{\Gamma}',\Omega',b')$ deux B-systèmes de coefficients $(\underline{\theta},\omega)$ un B-morphisme du premier dans le second, $(\underline{C},p,\bar{b})$, $(\underline{C}',p',\bar{b}')$ respectivement des $\underline{\Gamma}$ et $\underline{\Gamma}'$-objets (resp. $\underline{\Gamma}$ et $\underline{\Gamma}'$-champs), $(\underline{\Phi},q)$, $(\underline{\Phi}_1,q_1)$ deux B-morphismes de $(\underline{C},p,\bar{b})$ vers $(\underline{C}',p',\bar{b}')$.

Définition.- Nous appellerons 2-<u>morphisme</u> de $(\underline{\Phi},q)$ vers $(\underline{\Phi}_1,q_1)$ un B-morphisme fonctoriel $m : \underline{\Phi} \to \underline{\Phi}_1$ qui, pour tout U-objet x de C,

$\forall\, U \in ob(\mathcal{B})$, rend commutatif le diagramme :

$$\text{(3)} \qquad \begin{tikzcd} & \underline{\theta}\, p(x) \arrow[dl, "q_x"'] \arrow[dr, "(q_1)_x"] & \\ p' \circ \Phi(x) \arrow[rr, "p'(m_x)"'] & & p' \circ \Phi_1(x) \end{tikzcd}$$

. Un 2-morphisme est évidemment inversible. Remarquons que si Ω' est fidèle et ω un isomorphisme, la condition (3) est automatiquement satisfaite.

4.2. - *Proposition*.- Les $\mathcal{B}$-objets (resp. $\mathcal{B}$-champs) à opérateurs constituent une 2-catégorie dont les 1-flèches sont les $\mathcal{B}$-morphismes définies en 3.1. et les 2-flèches les 2-morphismes précédents.

4.3. - *Exemple*.- Le $\mathcal{B}$-morphisme $(\underline{C},p,\bar{b}) \to \underline{C}$ de la 2-catégorie des $\underline{\Gamma}(G)$-objets dans la 2-catégorie des gerbes dont le lien est localement représentable par G est une équivalence de 2-catégories.

Son inverse se construit grâce à la proposition 2.2.2.

§ 5 - *Le champ* $\underline{Hom}_{\underline{\Gamma}}(\underline{C},\underline{C}')$.

5.1. - Soient $(\underline{C},p,\bar{b})$, $(\underline{C}',p',\bar{b}')$ deux $\underline{\Gamma}$-objets principaux. Posons, pour tout $U \in ob(\mathcal{B})$,

$$\underline{Hom}_{\underline{\Gamma}}(\underline{C},\underline{C}')_U = \underline{Hom}_{\underline{\Gamma}}(\underline{C}/U,\underline{C}'/U) = \text{groupoïde des } \underline{\Gamma}/U\text{-morphismes}$$

de $(\underline{C}/U,p/U,\bar{b}/U)$ vers $(\underline{C}'/U,p'/U',\bar{b}'/U)$ (par la proposition 3.4., nous savons qu'un tel morphisme est une $\underline{\Gamma}/U$-équivalence).

$\underline{Hom}_{\underline{\Gamma}}(\underline{C},\underline{C}')_U$ est la fibre au-dessus de U d'un $\mathcal{B}$-groupoïde fibré scindé que nous noterons $\underline{Hom}_{\underline{\Gamma}}(\underline{C},\underline{C}')$.

5.2. - *Proposition*.- $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\Gamma}}(C,C')$ est un $\mathcal{B}$-champ (canoniquement scindé).

. On sait déjà que $\underline{\mathrm{CART}}(\underline{C},\underline{C}')$ est un $\mathcal{B}$-champ (n° 2.1.5 - chap. II [16]). Appelons p'_* le morphisme de champ

$$\underline{\mathrm{CART}}(\underline{C},\underline{C}') \to \underline{\mathrm{CART}}(\underline{C},\underline{\Gamma})$$

défini par
$$\underline{\Phi} \to p' \circ \underline{\Phi}$$

$\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\Gamma}}(\underline{C},\underline{C}')$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie fibrée des relèvements de p relativement à p'_*. C'est donc un préchamp. Mais d'autre part, la condition (C) du n° 3.1 [commutativité du diagramme (2)] est clairement de nature locale. Donc $\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\Gamma}}(\underline{C},\underline{C}')$ est un champ.

5.3. - *Définition*.- Soit $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$ un $\mathcal{B}$-système de coefficients, nous appellerons Ω_c le $\mathcal{B}$-morphisme de $\underline{\Gamma}$ dans $\underline{\mathrm{FACR}}(\mathcal{B})$ qui associe à chaque U-objet x de $\underline{\Gamma}$, $U \in \mathrm{ob}(\mathcal{B})$, $\underline{\mathrm{Ker}}(b_x)$ et à chaque U-morphisme $f : x \to y$ de $\underline{\Gamma}$ le U-morphisme $\underline{\mathrm{Ker}}\, b_x \to \underline{\mathrm{Ker}}\, b_y$ déduit de $\Omega(f)$ par la propriété universelle du noyau.

. Observons que $\underline{\mathrm{Ker}}\, b_x$ est toujours inclus dans le centre de $\Omega(x)$, mais, en général différent. Cependant dans le cas où Ω est fidèle, les deux coïncident ; en effet, pour tout objet x de $\underline{\Gamma}$, nous avons le diagramme suivant (cf. définition 3.1., chap. I, diagramme de la condition (*)) :

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega(x) \arrow[dl, "b_x"'] \arrow[dr, "\underline{\mathrm{Int}}_x"] & \\
\underline{\mathrm{Aut}}_{\Gamma}(x) \arrow[rr, "(\underline{\mathrm{Aut}}_{\Omega})_x"'] & & \underline{\mathrm{Aut}}(\Omega(x))
\end{tikzcd}$$

et $(\underline{\mathrm{Aut}}_{\Omega})_x$ injectif $\Longrightarrow$ $\underline{\mathrm{Ker}}\, b_x = \mathrm{Ker}\, \underline{\mathrm{Int}}_x$.

. La proposition suivante est l'équivalent du théorème 2.3.2., chap. IV de [16].

5.4. - *Proposition*.- Supposons que $\underline{C}$ admette une section σ. Alors le U-faisceau $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{Hom}_{\underline{\Gamma}}(\underline{\Phi},q')}(\Phi,q)$ des automorphismes d'un U-objet quelconque (Φ,q) de $\mathrm{Hom}_{\underline{\Gamma}}(\underline{C},\underline{C}')$, $U \in \mathrm{ob}(\mathcal{B})$, est U-isomorphe à $\Omega_c(p' \circ \underline{\Phi}(\sigma(U)))$, cela de manière fonctorielle en $(\underline{\Phi},q)$.

. Soit m un U-automorphisme de $(\underline{\Phi},q)$. Pour toute U-section f de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(\sigma(U))$, nous avons l'égalité suivante dans $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}'}(\Phi(\sigma(U))(U)$:

$$(1) \qquad \underline{\Phi}(f) \,.\, m_{\sigma(U)} = m_{\sigma(U)} \,.\, \underline{\Phi}(f).$$

Puisque $(\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\Phi}})_{\sigma(U)} : \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\underline{C}'}(\ (U))$ est un U-isomorphisme (cf. prop. 3.4.), quand f décrit toutes les U-sections de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(\sigma(U))$, $\Phi(f)$ décrit toutes les U-sections de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}'}(\Phi(\sigma(U))$. Si l'on transporte alors l'égalité (1) dans $\Omega(p' \circ \Phi(\sigma(U))$ au moyen de l'isomorphisme $\bar{b}'^{-1}_{\Phi(\sigma(U))}$, on en déduit que $\bar{b}'^{-1}_{\Phi(\sigma/U))}(m_{\sigma(U)})$ commute avec toute U-section de $\Omega(p' \circ \Phi(\sigma(U))$, i.e. appartient au centre de $\Omega(p' \circ \Phi(\sigma(U))$.
Mais la commutativité de 3 n° 4.2. implique que $p'(m_{\sigma(U)}) = \mathrm{id}_{p'\circ\Phi(\sigma(U))}$ d'où il résulte par la commutativité de 1 n° 1.1. que $b'^{-1}_{\Phi(\sigma(U))}(m_{\sigma(U)})$ appartient en fait au noyau de la valeur de U de $b_{p'\circ\Phi(\sigma(U))}$.
Notons $\bar{c}_{(\Phi,q)}$ le U-morphisme fonctoriel de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{Hom}_{\underline{\Gamma}}(\underline{C},\underline{C}')}$ dans $\underline{\mathrm{Ker}}\ b_{p'\circ\Phi(\sigma(U))}$ dont la valeur en U fait correspondre au $\bar{U}$-automorphisme m de (Φ,q) la U-section $\bar{b}'^{-1}_{\Phi(\sigma(U))}(m_{\sigma(U)}).\bar{c}_{(\Phi,q)}$ est un U-isomorphisme ; montrons qu'il est inversible. Une U-section quelconque de $\underline{\mathrm{Ker}}\ b_{p'\circ\Phi(\sigma(U))}$ détermine une U-section du centre de $\Omega(p'\circ\Phi(\sigma(U))$ puisque $\underline{\mathrm{Ker}}\ b_{-} \subset$ centre $(\Omega(-))$, donc un U-section du centralisateur de $\Omega(q_{\sigma(U)}) : \Omega(p(\sigma(U)) \overset{\sim}{\to} \Omega(p'\circ\underline{\Phi}(\sigma(U))$, i.e. une U-section du centralisateur de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(\sigma(U) \overset{\sim}{\to} \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}'}(\underline{\Phi}(\sigma(U))$, donc une U-section de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\mathrm{CART}}(\underline{C},\underline{C}')}(\underline{\Phi})$ [par le corollaire 2.2.3., chap. III de [16]] qui est, en fait, une U-section

de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\Gamma}}(\underline{C},\underline{C}')}(\Phi,q)$ car la condition de commutativité du diagramme (3) de 4.1. se trouve alors trivialement satisfaite pour tout U-objet x de $\underline{C}$ (cependant, nous n'avons pas supposé Ω fidèle).

5.5. - Supposons maintenant Ω fidèle, mais $\underline{C}$ quelconque. $\underline{C}$ possède localement une section et deux telles sections sont localement isomorphes. Pour tout objet U de $\mathcal{B}$, il existe donc une famille couvrante $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ dans $\mathcal{B}$ telle que $\underline{C}/U_i$ admette une section σ_i.

Par 5.4., le faisceau $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\Gamma}}(\underline{C},\underline{C}')}(\underline{\Phi},q)$ est alors U_i-isomorphe à $\Omega_c(p'o\underline{\Phi}(\sigma_i(U_i))$. Or, Ω étant fidèle, ce dernier faisceau s'identifie au centre de $\Omega(p'\ o\underline{\Phi}(\sigma_i(U_i))$. Il en résulte d'une part que si σ_i' est une autre U_i-section de $\underline{C}$ (nécessairement localement isomorphe à σ_i), $\Omega_c(p'o\underline{\Phi}(\sigma_i(U_i)) = \Omega_c(p'o\Phi(\sigma_i'(U_i))$, d'autre part, compte tenu de la proposition 1.2.3., chap. IV, p. 192 de [16] que les faisceaux abéliens $\Omega_c(p'o\underline{\Phi}(\sigma_i(U_i))$ se recollent définissant ainsi un unique U-faisceau $F_{(\underline{\Phi},q)}$ de groupes abéliens.

Proposition.- Ω étant supposé fidèle, mais $\underline{C}$ quelconque, pour tout U-objet $(\underline{\Phi},q)$, $U \in ob(\mathcal{B})$, $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{\Gamma}}(\underline{C},\underline{C}')}(\underline{\Phi},q)$ est U-isomorphe au faisceau $F_{(\underline{\Phi},q)}$ précédent.

§ 6 - *Extension structurale*.

. Nous adopterons ici le point de vue des 2-groupoïdes pour les systèmes de coefficients. Soient $\underline{\underline{\Gamma}}$, $\underline{\underline{\Gamma}}'$ deux $\mathcal{B}$-systèmes de coefficients, $\underline{\underline{\theta}} : \underline{\underline{\Gamma}} \to \underline{\underline{\Gamma}}'$ un $\mathcal{B}$-morphisme.

6.1. - *Théorème*.- Pour tout $\underline{\underline{\Gamma}}$-objet principal $(\underline{C},p,\bar{b})$, il existe un $\underline{\Gamma}'$-objet principal $(\underline{C}'_{\theta},p'_{\theta},\bar{b}'_{\theta})$ et un $\mathcal{B}$-morphisme $(\varepsilon,id) : (\underline{C},p,\bar{b}) \to$

$(\underline{C}'_{\underline{\underline{\theta}}}, p'_{\underline{\underline{\theta}}}, \bar{b}'_{\underline{\underline{\theta}}})$ satisfaisant à la propriété universelle suivante :

"Soit $(\underline{C}'_1, p'_1, \bar{b}_1)$ un $\underline{\underline{\Gamma}}'$-objet principal quelconque. Tout $\mathcal{B}$-morphisme $(\underline{\Phi}, q) : (\underline{C}, p, \bar{b}) \to (\underline{C}'_1, p'_1, \bar{b}'_1)$ se factorise de manière unique par (ε, id) comme suit :

$$\begin{tikzcd}
(\underline{C},p,\bar{b}) \arrow[rr, "(\underline{\Phi},q)"] \arrow[drr, "(\varepsilon,id)"'] & & (\underline{C}'_1,p'_1,\bar{b}'_1) \\
& & (\underline{C}'_{\underline{\underline{\theta}}},p'_{\underline{\underline{\theta}}},\bar{b}'_{\underline{\underline{\theta}}}) \arrow[u, "(\underline{\Phi}',q')"']
\end{tikzcd}$$

où (Φ', q') est une $\underline{\underline{\Gamma}}'$-équivalence.

. Le théorème est encore vrai si $(\underline{C}, p, \bar{b})$ (resp. $(\underline{C}'_1, p'_1, b'_1)$) est seulement un $\underline{\underline{\Gamma}}$-champ (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}'$-champ) à ceci près que (Φ', q') n'est plus alors une $\underline{\underline{\Gamma}}'$-équivalence.

. Construisons d'abord le $\mathcal{B}$-préchamp intermédiaire $\underline{A}'_{\underline{\underline{\theta}}}$ comme suit :

a) $ob(\underline{A}'_{\underline{\underline{\theta}}}) = ob(\underline{C})$

b) Pour $x, y \in ob(C_U)$, $U \in ob(\mathcal{B})$,

$Hom_{A'_{\underline{\underline{\theta}}}}(x,y) = \{(f,\alpha),\ f \in \underline{Hom}_C(x,y)(U),\ \alpha \in \underline{\underline{\Gamma}}'\}$ telle que $\underline{s}(\alpha) = \underline{\underline{\theta}}_{o1} \circ \bar{p}(f)$, 2 couples (f,α) et (g,β) étant identifiés s'il existe une 2-flèche γ de $\underline{\underline{\Gamma}}$ telle que $\underline{\underline{\theta}}_{o2}(\gamma) : f \Longrightarrow g$, $\alpha = \beta \circ \underline{\underline{\theta}}_{o2}(\gamma)\}$.

Le composé de deux morphismes de $\underline{A}'_{\underline{\underline{\theta}}}$ définis par des représentants $(f,\alpha), (f',\alpha')$ est naturellement défini par : ($[(f,\alpha)]$ signifie classe de (f,α))

$$[(f,\alpha)] . [(f',\alpha')] = [(f' . f,\ \alpha' * \alpha)]$$

(on voit immédiatement que ceci a bien un sens). Le morphisme $\underline{\underline{\theta}}_{o1}$ o p se prolonge en un morphisme ℓ' : $\underline{\underline{A}}'_{\theta} \to \underline{\underline{\Gamma}}'_{o1}$ associant à toute classe $[(f,\alpha)]$ le but de α dans $\underline{\underline{\Gamma}}'_{o1}$, opération qui est indépendante du représentant (f,α) choisi, cela par la définition même de la relation d'équivalence.

On définit alors $\underline{\underline{C}}'_{\theta}$ comme étant le champ associé à $\underline{\underline{A}}'_{\theta}$, puis $p'_{\underline{\underline{\theta}}}$ comme le $\mathcal{B}$-morphisme de champs associé à ℓ'. ε vaut l'identité sur les objets de $\underline{C}$ et envoie toute flèche f de $\underline{C}$ sur la classe de $(f,id_{\underline{\underline{\theta}}_{o1}\cdot p(f)})$. Etablissons maintenant la propriété universelle. Soit $(\underline{C}'_1,p'_1,\bar{b}'_1)$ un $\underline{\underline{\Gamma}}'$-objet principal quelconque et $(\underline{\Phi},q)$ un $\mathcal{B}$-morphisme de $(\underline{C},p,\bar{b})$ vers $(\underline{C}'_1,p'_1,\bar{b}'_1)$. Construisons le $\underline{\underline{\Gamma}}'$-morphisme $(\underline{\Phi}',q')$ ainsi :

a) $\underline{\Phi}' = \underline{\Phi}$ sur les objets,

b) sur les morphismes, $\underline{\Phi}'$: $[(f,\alpha)] \rightsquigarrow \bar{b}'_1(\Phi(f),q_y*\alpha*q_x^{-1})$

(x = source de f, y = but de f)

Vérifions que b) a un sens : soit (g,β) un autre représentant de $[(f,\alpha)]$, il existe une 2-flèche γ de $\underline{\underline{\Gamma}}$ telle que $\underline{\underline{\theta}}_{o2}(\gamma)$: f $\Longrightarrow$ g, $\alpha = \beta \circ \underline{\underline{\theta}}_{o2}(\gamma)$. D'où :

$$\begin{aligned}\bar{b}'_1(\Phi(g),q_y*\beta*q_x^{-1}) &= \bar{b}'_1(\Phi(\bar{b}(f,\gamma)),q_y*\beta*q_x^{-1})\\ &= \bar{b}'_1(\Phi(f),q_y*\beta\circ\underline{\underline{\theta}}_{o2}(\gamma)*q_x^{-1})\end{aligned}$$

par la compatibilité de Φ avec les actions respectives de $\underline{\underline{\Gamma}}$ et $\underline{\underline{\Gamma}}'$

$$= \bar{b}'_1(\Phi(f),q_y*\alpha*q_x^{-1}) .$$

c) q' est le $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel qui à chaque objet x de $\underline{\underline{C}}'_{\theta}$ (donc de $\underline{C}$) fait correspondre le morphisme $q'_x = q_x$.

Par la proposition 3.4., (Φ',q') est une $\underline{\underline{\Gamma}}'$-équivalence.

6.2. - *Remarque*.- Soient $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$, $(\underline{\Gamma}',\Omega',b')$ les triples déterminés respectivement par $\underline{\underline{\Gamma}}$ et $\underline{\underline{\Gamma}}'$ (théorème 3.2., chap. I), $(\underline{\theta},\omega)$ le $\mathcal{B}$-morphisme du premier vers le second associé à $\underline{\underline{\theta}}$. Alors $\underline{A}'_{\underline{\underline{\theta}}}$ correspond au $\mathcal{B}$-préchamp $\underline{A}'_{(\underline{\theta},\omega)}$ qui a les mêmes objets que $\underline{C}$ et dont les U-morphismes de x vers y, pour tout couple (x,y) de U-objets de $\underline{C}$, $\forall\, U \in ob(\mathcal{B})$, sont les U-sections du torseur $\underline{Hom}_{\underline{A}'(\underline{\theta},\omega)}(x,y)$ où $\underline{Hom}_{\underline{A}'(\underline{\theta},\omega)}(x,y)$ est le $\Omega'(\underline{\theta} \circ p(x))$-torseur déduit du $\Omega(x)$-torseur $\underline{Hom}_{\underline{C}}(x,y)$ par l'extension structurale $\omega_x : \Omega(x) \to \Omega'(\underline{\theta} \circ p(x))$.

CHAPITRE III

COHOMOLOGIE A VALEURS DANS UN SYSTEME DE COEFFICIENTS.

. Comme dans le chapitre II, $\mathcal{B}$ désignera un site quelconque et nous ne considérerons que des systèmes de coefficients $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$ pour lesquels $\underline{\Gamma}$ est une gerbe. Dans toute la suite, si $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$ est un $\mathcal{B}$-système de coefficients, $\underline{\underline{\Gamma}}$ désignera le $\mathcal{B}$-faisceau de 2-groupoïdes associé à $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$ (cf. théorème 3.2. chap. I).

§ 1 - $H^2(\underline{\Gamma})$ (resp. $H^2(\underline{\underline{\Gamma}})$).

1.1. - *Définitions*.- Soit $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$ un $\mathcal{B}$-système de coefficients. Nous noterons $Z^2(\underline{\Gamma})$ (resp. $Z^2(\underline{\underline{\Gamma}})$) le 2-groupoïde des $\underline{\Gamma}$-objets principaux (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}$ -objets principaux) [cf. déf. 2.1. (resp. déf.(2.1.)'), chap. II].

. Les 1-morphismes de $Z^2(\underline{\Gamma})$ (resp. $Z^2(\underline{\underline{\Gamma}})$) ont été définis en 3.1. (resp. (3.1.)'), chap. II, les 2-morphismes en 4.1. du même chapitre.

. Evidemment, les 2-groupoïdes $Z^2(\underline{\Gamma})$ et $Z^2(\underline{\underline{\Gamma}})$ sont les mêmes. On utilisera l'une ou l'autre notation suivant le point de vue choisi pour le $\mathcal{B}$-système de coefficients.

. Nous <u>noterons</u> $H^2(\underline{\Gamma})$ (resp. $H^2(\underline{\underline{\Gamma}})$) l'ensemble des classes d'équivalence de $\underline{\Gamma}$-objets (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}$ -objets) principaux pour la relation "il existe un $\underline{\Gamma}$-morphisme (resp. un $\underline{\underline{\Gamma}}$-morphisme)" i.e. l'ensemble des composantes connexes de $Z^2(\underline{\Gamma})_{o1}$ (resp. $Z^2(\underline{\underline{\Gamma}})_{o1}$) [Par la proposition 3.4. du chapitre II, on sait qu'un $\underline{\Gamma}$-morphisme (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}$-morphisme) est une $\underline{\Gamma}$-équivalence (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}$-équivalence)].

1.2. - Le groupoïde $Z^2(\underline{\Gamma})_{o1}$ (resp. $Z^2(\underline{\underline{\Gamma}})_{o1}$) possède une sous-famille d'objets triviaux, ceux qui admettent une section. $H^2(\underline{\Gamma})$ (resp. $H^2(\underline{\underline{\Gamma}})$)

possède donc un sous-ensemble privilégié noté $H^2(\underline{\Gamma})'$ (resp. $H^2(\underline{\underline{\Gamma}})'$) constitué des classes qui contiennent un $\underline{\Gamma}$-objet (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}$-objet) trivial.

1.3. - Du théorème 6.1., chap. II, on déduit immédiatement :

Proposition.- Soient $(\underline{\theta},\omega) : (\underline{\Gamma},\Omega,b) \to (\underline{\Gamma}',\Omega,b')$ (resp. $\underline{\underline{\theta}} : \underline{\underline{\Gamma}} \to \underline{\underline{\Gamma}}'$) un $\mathcal{B}$-morphisme de systèmes de coefficients. Il existe une unique application $H^2(\underline{\theta},\omega) : H^2(\underline{\Gamma}) \to H^2(\underline{\Gamma}')$ (resp. $H^2(\underline{\underline{\theta}}) : H^2(\underline{\underline{\Gamma}}) \to H^2(\underline{\underline{\Gamma}}')$) induite par $(\underline{\theta},\omega)$ (resp. $\underline{\underline{\theta}}$). $H^2(\underline{\theta},\omega)$ (resp. $H^2(\underline{\underline{\theta}})$) transforme une classe triviale en une classe triviale.

. L'application $H^2(\underline{\theta},\omega)$ (resp. $H^2(\underline{\underline{\theta}})$) fait correspondre à la classe d'un $\underline{\Gamma}$-objet $(C,p,\bar{b})$ la classe du $\underline{\Gamma}'$-objet $(\underline{C}'_{\theta},\underline{p}'_{\theta},\underline{\bar{b}}'_{\theta})$ (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}'$-objet $(\underline{\underline{C}}'_{\theta},\underline{\underline{p}}'_{\theta},\underline{\underline{\bar{b}}}'_{\theta})$) du théorème 6.1., chap. II. On dira encore que $(\underline{C}'_{\theta},\underline{p}'_{\theta},\underline{\bar{b}}'_{\theta})$ (resp. $\underline{\underline{C}}'_{\theta},\underline{\underline{p}}'_{\theta},\underline{\underline{\bar{b}}}'_{\theta}$) est le $\underline{\Gamma}'$-objet (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}'$-objet) obtenu à partir de $(\underline{C},p,\bar{b})$ par l'extension structurale $(\underline{\theta},\omega) : \underline{\Gamma} \to \underline{\Gamma}'$ (resp. $\underline{\underline{\theta}} : \underline{\underline{\Gamma}} \to \underline{\underline{\Gamma}}'$) de systèmes de coefficients.

§ 2 - *Calcul de* $H^2(\underline{\Gamma})'$ (resp. $H^2(\underline{\underline{\Gamma}})'$).

2.1. - *Proposition*.- Une condition nécessaire et suffisante pour que $H^2(\underline{\Gamma})$ (resp. $H^2(\underline{\underline{\Gamma}})$) possède une classe triviale est que $\underline{\Gamma}$ (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}$) admette une section.

La condition est nécessaire : une classe triviale de $H^2(\underline{\Gamma})$ est représentée par un $\underline{\Gamma}$-objet $(\underline{C},p,\bar{b})$ pour lequel $\underline{C}$ admet une section σ ; $p \circ \sigma$ est alors une section de $\underline{\Gamma}$.

La condition est suffisante : soit τ une section de $\underline{\Gamma}$; montrons que la gerbe $\underline{\text{Tors}}(\Omega\tau)$ des torseurs sans $\Omega\tau$ admet une structure canonique de $\underline{\Gamma}$-objet principal définissant ainsi une classe de $H^2(\underline{\Gamma})'$. Pour cela, remarquons d'abord qu'il existe un $\mathcal{B}$-morphisme d'extension structurale $(b_\tau)_* : \underline{\mathrm{Tors}}(\Omega\tau) \to \underline{\mathrm{Tors}}(\underline{\mathrm{Aut}}(\tau))$ induit par $b_\tau : \Omega\tau \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(\tau)$.

Comme $\underline{\Gamma}$ est une $\mathcal{B}$-gerbe munie d'une section τ, il existe une $\mathcal{B}$-équivalence m de $\underline{\Gamma}$ sur $\underline{\mathrm{Tors}}(\underline{\mathrm{Aut}}(\tau))$ (corollaire 2.2.6, III - [16]).

Soit k le $\mathcal{B}$-morphisme de $\underline{\mathrm{Tors}}(\Omega\tau)$ dans $\underline{\Gamma}$ égal à $(b_\tau)_* m^{-1}$. Pour tout U-objet x de $\underline{\mathrm{Tors}}(\Omega\tau)$, $U \in ob(\mathcal{B})$, posons ${}^x\tau = k(x)$. La condition (*) sur $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$ (cf. chap. I) implique alors la relation $\Omega({}^x\tau) = {}^x\Omega\tau$ (ce qui justifie l'écriture ${}^x\tau$) où, suivant la notation du chapitre III, n° 2.3 de [16], ${}^x\Omega\tau$ signifie "faisceau $\Omega\tau$ tordu par x". D'autre part, par la proposition 2.3.7. chap. III de loc. citado, on sait que, pour tout U-torseur x de $\underline{\mathrm{Tors}}(\Omega\tau)$, il existe un U-isomorphisme, fonctoriel en x : $\underline{\mathrm{Aut}}_U(x) \simeq {}^x\Omega\tau$. On en déduit l'existence d'un U-isomorphisme aussi fonctoriel en x, $\bar{c}_x^{\,-1} : \underline{\mathrm{Aut}}_U(x) \simeq \Omega({}^x\tau) = \Omega(k(x))$. D'où le caractère principal du $\underline{\Gamma}$-objet $(\underline{\mathrm{Tors}}(\Omega\tau),k,\bar{c})$. Dans la suite, quand on parlera du $\underline{\Gamma}$-objet $\underline{\mathrm{Tors}}(\Omega\tau)$, il s'agira de celui-ci.

§ 3 - *Application* : *Détermination de* $H^2(\underline{\Gamma}(G))'$, $H^2(\underline{\Gamma}(G,H))'$.

. Reprenons les systèmes de coefficients $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$ et $\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)$ introduits aux n^{os} 5.2.1. et 5.3.1. du chapitre I.

3.1. - *Lemme*.- Soient G un faisceau de groupes, H un sous-faisceau de G (non nécessairement invariant). Supposons que $\underline{\underline{\Gamma}}$ soit de la forme $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$ ou de la forme $\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)$. Tout $\underline{\Gamma}$-objet principal $(\underline{C},p,\bar{b})$ pour lequel $\underline{C}$ admet une section σ est $\underline{\Gamma}$-équivalent au $\underline{\Gamma}$-objet $(\underline{\mathrm{Tors}}(\Omega p\sigma),k,\bar{c})$ où $\Omega = \Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}$ et k et $\bar{c}$ sont définis en 2.1.

. Soit x un U-objet quelconque de $\underline{C}$, $U \in ob(\mathcal{B})$. Associons-lui le U-faisceau d'ensembles $\Phi(x) = \underline{\mathrm{Hom}}_U(x,\sigma(U))$.

. $\Phi(x)$ est un U-torseur sous $\Omega p\sigma_{/U}$ par l'intermédiaire de $\bar{b}_{\sigma/U}$. Φ définit donc un $\mathcal{B}$-morphisme de $\underline{C}$ dans $\underline{\mathrm{Tors}}(\Omega p\sigma)$ qui est une $\mathcal{B}$-équivalence. D'autre part, par définition $k(\Phi(x)) = {}^{x}p.\sigma$, et vu la forme de $\underline{\Gamma}$, $p(x)$ coïncide avec ${}^{x}p.\sigma$ [Dans le cas où $\underline{\Gamma} = \underline{\Gamma}(G,H)$, la notation ${}^{x}(G',H')$ signifie évidemment "couple (G',H') tordu par x", ceci ayant un sens quand x est un U-torseur sous le normalisateur de H' dans G']. Soit alors $q : p \Longrightarrow k.\Phi$ le morphisme fonctoriel identité. Vérifions que $(\Phi,q) = (\Phi,\mathrm{id})$ est un $\underline{\Gamma}$-morphisme ; pour cela il suffit de vérifier que pour tout U-objet x de $\underline{\mathrm{Tors}}(\Omega p\sigma)$, $U \in \mathrm{ob}(\mathcal{B})$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\Omega(p(x)) = \Omega({}^{x}p.\sigma) & \xrightarrow{\quad \bar{b}_x \quad} & \underline{\mathrm{Aut}}_U(x) \\
\Big\| \, \Omega(q_x) & & \Big\downarrow (\underline{\mathrm{Aut}}_{\Phi})_x \\
{}^{x}\Omega(p.\sigma) = \Omega({}^{x}p.\sigma) & \xrightarrow{\quad \bar{c}_x \quad} & \underline{\mathrm{Aut}}_U(\Phi(x))
\end{array}$$

est commutatif. Or, localement, c'est vrai car $\Omega p\sigma$ opère respectivement sur x et $\Phi(x)$ évidemment de manière compatible avec Φ.

3.2. - *Proposition*.- <u>Soient</u> G <u>un</u> $\mathcal{B}$-<u>faisceau de groupes</u>. <u>Il existe une application surjective</u> J <u>de</u> $H^1(\underline{\mathrm{Aut}}\ G)$ <u>sur</u> $H^2(\underline{\Gamma}(G))'$. <u>Deux formes</u> G' <u>et</u> G'' <u>définissent des classes appartenant à une même fibre de</u> J <u>si et seulement si il existe un</u> G''-<u>torseur</u> t <u>tel que</u> $G' \simeq {}^{t}G''$.

. En particulier, la classe nulle de $H^1(\underline{\mathrm{Aut}}\ G)$ détermine dans $H^2(\underline{\Gamma}(G))'$ la classe de $\underline{\mathrm{Tors}}\ G$ munie de sa structure de $\underline{\Gamma}(G)$-objet principal que l'on appellera "classe unité" de $H^2(\underline{\Gamma}(G))$.

. En vertu du lemme 3.1., un représentant d'une classe triviale de $H^2(\underline{\Gamma}(G))$ est $\underline{\Gamma}(G)$-équivalent à un $\underline{\Gamma}(G)$-objet principal $\underline{\mathrm{Tors}}\ G'$ où G' est une forme de G. De plus si G' et G'' sont isomorphes, $\underline{\mathrm{Tors}}\ G'$ et

Tors G" sont évidemment $\underline{\Gamma}(G)$-équivalentes d'où l'application surjective J. Supposons maintenant que Tors G' et Tors G" définissent la même classe triviale dans $H^2(\underline{\Gamma}(G))$; il existe alors une $\underline{\Gamma}(G)$-équivalence (Φ,q) : Tors G' $\to$ Tors G". Soit t l'image par Φ du G'-torseur trivial (identifié à G') ; t est un G"-torseur et $q_{G'}$ un isomorphisme de G' sur ${}^tG''$. Réciproquement, si G' et G" sont tels que $G' \simeq {}^tG''$, on prend pour Φ le foncteur "torsion par t" et on détermine q par la condition que $q_{G'}$ soit précisément l'isomorphisme $G' \simeq {}^tG''$ donné. Compte-tenu de la proposition 2.6.1., chap. III de [16], on voit que (Φ,q) est une $\underline{\Gamma}(G)$-équivalence.

. De manière similaire, nous obtenons :

3.3. - *Proposition*.- Soient G un faisceau de groupes, H un sous-faisceau de G (non nécessairement invariant). $H^2(\underline{\Gamma}(G,H))'$ est un quotient de $H^1(\underline{\mathrm{Aut}}(G,H))$. Deux couples (G',H'), (G",H") définissent des classes appartenant à une même fibre de $H^1(\underline{\mathrm{Aut}}(G,H)) \to H^2(\underline{\Gamma}(G,H))'$ si et seulement si il existe un objet t de $Z^1(\underline{\mathrm{Norm}}_{G''}(H''))$ tel que $(G',H') \simeq {}^t(G'',H'')$.

. En particulier, la classe nulle de $H^1(\underline{\mathrm{Aut}}(G,H))$ détermine une classe triviale privilégiée, la classe de $\underline{\mathrm{Tors}}(\underline{\mathrm{Norm}}_G(H))$ munie de sa structure de $\underline{\Gamma}(G,H)$-objet principal, que l'on appellera classe "unité".

§ 4 - *Calcul de* $H^2(\underline{\Gamma}(G))$. 2-*cohomologie maigre*.

4.1. - Par la proposition 2.2.2. du chapitre II, on sait déjà que toute $\mathcal{B}$-gerbe $\underline{C}$ dont le lien est localement représentable par un groupe G est munie canoniquement d'une structure de $\underline{\Gamma}(G)$-objet principal $(\underline{C},p,id_p)$ où p associe à chaque U-objet x de $\underline{C}$, $U \in ob(\mathcal{B})$, la U-forme $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(x)$ de G/U. Dans la suite de ce paragraphe, p (resp. p') désignera toujours ce morphisme.

4.2. - *Proposition*.- Soit G un $\mathcal{B}$-faisceau de groupes. Deux $\mathcal{B}$-gerbes $\underline{C}$ et $\underline{C}'$ à liens localement représentables par G sont $\mathcal{B}$-équivalentes si et seulement si les $\underline{\Gamma}(G)$-objets principaux correspondants $(\underline{C},p,id_p)$, $(\underline{C}', p', id_{p'})$ sont $\underline{\Gamma}(G)$-équivalents.

Il est clair que toute $\underline{\Gamma}(G)$-équivalence est une $\mathcal{B}$-équivalence. Réciproquement, soit $\Phi : \underline{C} \to \underline{C}'$ une $\mathcal{B}$-équivalence. Pour tout U-objet x de $\underline{C}$, $U \in ob(\mathcal{B})$, Φ induit un 1-morphisme $(\underline{Aut}_{\Phi})_x : \underline{Aut}_{\underline{C}}(x) \to \underline{Aut}_{\underline{C}'}(\Phi(x))$ de $\underline{\Gamma}(G)$. La famille des $(\underline{Aut}_{\Phi})_x$, $x \in ob(C)$, définit un $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel q de $\underline{Aut}_{\underline{C}}(.)$ vers $Aut_{\underline{C}'}(.)\circ\Phi$. En effet, pour tout U-morphisme $f : x \to y$ de $\underline{C}$, le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\underline{Aut}_{\underline{C}}(x) \arrow[r, "\underline{Int}(f)"] \arrow[d, "q_x"'] & \underline{Aut}_{\underline{C}}(y) \arrow[d, "q_y"] \\
\underline{Aut}_{\underline{C}'}(\Phi(x)) \arrow[r, "\underline{Int}(\Phi(f))"] & \underline{Aut}_{\underline{C}'}(\Phi(y))
\end{tikzcd}$$

est commutatif, comme il résulte des égalités suivantes valables pour toute U-section α de $\underline{Aut}_{\underline{C}}(x)$:

$$q_y(f \,.\, \alpha \,.\, f^{-1}) = \Phi(f \,.\, \alpha \,.\, f^{-1}) = \Phi(f) \,.\, q_x(\alpha) \,.\, \Phi(f^{-1})$$
$$= \Phi(f) \,.\, q_x(\alpha) \,.\, \Phi(f)^{-1}.$$

4.3. - *Corollaire*.- Soit G un $\mathcal{B}$-faisceau de groupes. Il existe une bijection de $H^2(\underline{\Gamma}(G))$ sur $\coprod_L \frac{H^2(L)}{\underline{Aut}\ L}$, L décrivant un système de représentants de classes de liens localement représentables par G (i.e. un système de représentants des classes de $H^1(\text{Autext } G)$ [corollaire 1.1.7.3, chap. IV de [16]]). Cette bijection ainsi que son inverse respecte les ensembles de classes triviales.

. Le $H^2(L)$ qui apparaît ici est celui de [16][1] : il représente l'ensemble des classes à L-équivalence près de L-gerbes. $\dfrac{H^2(L)}{\underline{\mathrm{Aut}}\ L}$ représente l'ensemble des classes de L-gerbes qui sont congrues modulo $\underline{\mathrm{Aut}}\ L$, c'est-à-dire qui sont seulement $\mathcal{B}$-équivalentes (non plus L-équivalentes).

. Si $(\underline{C},p,\bar{b})$ et $(\underline{C}',p',\bar{b}')$ sont $\underline{\Gamma}(G)$-équivalentes, les gerbes sous-jacentes $\underline{C}$ et $\underline{C}'$ sont $\mathcal{B}$-équivalentes. Si L est le lien de $\underline{C}$, $\underline{C}$ et $\underline{C}'$ définissent donc dans $H^2(L)$ des classes qui sont congrues modulo l'action de $\underline{\mathrm{Aut}}\ L$. Réciproquement, si deux $\mathcal{B}$-gerbes $\underline{C}$ et $\underline{C}'$ définissent la même classe dans $\dfrac{H^2(L)}{\underline{\mathrm{Aut}}\ L}$, c'est qu'elles sont $\mathcal{B}$-équivalentes (proposition 2.2.6., chap. IV de [16]). Les $\underline{\Gamma}(G)$-objets correspondants sont alors $\underline{\Gamma}(G)$-équivalents par la proposition 4.2. D'où le corollaire 4.3.

4.4. - *Corollaire*.- <u>Si</u> G <u>est un</u> $\mathcal{B}$-<u>faisceau de groupes abéliens, il y a une bijection de l'ensemble</u> $H^2(\underline{\Gamma}(G))$ <u>sur l'ensemble</u> $\coprod_{G'} \dfrac{H^2(G')}{\underline{\mathrm{Aut}}\ G'}$, G' <u>décrivant un système de représentants de classes de formes de</u> G.

4.5. - 2-*cohomologie maigre*.- Examinons les résultats précédents quand $\mathcal{B} = \mathcal{B}_g$ est le topos des g-ensembles à gauche, g désignant un groupe quelconque. Soient G un faisceau de groupes sur $\mathcal{B}_g$, $\underline{G}$ l'objet de $\mathcal{B}_g$ représentant G. Selon les résultats de [16] - chap. VIII, n° 7.4., à toute $\mathcal{B}$-gerbe $\underline{C}$ dont le lien est localement représentable par G correspond une extension $E_{\underline{C}}$ de g par $\underline{G}$ et réciproquement. Soient $\underline{C}'$ une autre $\mathcal{B}$-gerbe et (Φ,q) une $\underline{\Gamma}(G)$-équivalence entre les $\underline{\Gamma}(G)$-objets $(\underline{C},p,id_p)$, $(\underline{C}',p',id_{p'})$; à Φ correspond un isomorphisme d'extensions $\underline{\Phi} : E_{\underline{C}} \to E_{\underline{C}'}$, lequel induit un automorphisme $\underline{q}$ de $\underline{G}$ qui correspond précisément au morphisme fonctoriel q. Dire que $(\underline{C},p,id_p)$, $(\underline{C}',p',id_{p'})$ sont $\underline{\Gamma}(G)$-équivalents signifie donc que les extensions $E_{\underline{C}}$ et $E_{\underline{C}'}$ s'insèrent dans le diagramme suivant où $\underline{\Phi}$ est un isomorphisme et où tous les carrés sont commutatifs :

----
(1) comme dans toute la suite de ce travail.

$$
(*) \qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d] & & 1 \arrow[d] \\
\underline{G} \arrow[rr, "\underline{q}"] \arrow[d] & & \underline{G} \arrow[d] \\
E_{\underline{C}} \arrow[rr, "\underline{\Phi}"] \arrow[d] & & E_{\underline{C}'} \arrow[d] \\
g \arrow[rr, equal] \arrow[d] & & g \arrow[d] \\
1 & & 1
\end{tikzcd}
$$

On reconnaît là la relation d'équivalence associée à la 2-cohomologie maigre introduite par Dedecker dans [12]. D'où

4.6. - *Proposition*.- *Soient* $\mathcal{B} = \mathcal{B}_g$, G *un* $\mathcal{B}$-*faisceau de groupes*, $\underline{G}$ *l'objet de* $\mathcal{B}$ *qui représente* G. *Alors l'ensemble* $H^2(\underline{\Gamma}(G))$ *est isomorphe à l'ensemble des classes d'extensions de* g *par* G *pour la relation d'équivalence qui identifie deux extensions quand elles s'insèrent comme précédemment dans un diagramme du type* (*) (i.e. pour la relation d'équivalence associée à la 2-cohomologie maigre). *Les classes triviales se correspondent par l'isomorphisme en question.*

4.7. - *Application*.- Le cas que nous avons en vue est celui où $g = \underline{\mathrm{Gal}}(k_{s/k})$ est le groupe de Galois de la clôture séparable k_s d'un corps k quelconque. Par le théorème fondamental de la théorie de Galois (cf. exposé VII - n° 2 - fascicule 2 de [1]), nous savons que le topos étale k_{et} de speck est équivalent au topos des ensembles sur lesquels g opère continûment à gauche. Dans l'équivalence précédente, à un faisceau

F de k_{et} correspond le $\underline{\mathrm{Gal}}(k_{s/k})$-ensemble $F(k_s)$. En particulier, au faisceau d'automorphismes $\underline{\mathrm{Aut}}\ G$ d'un k_{et}-faisceau de groupe G correspond le $\underline{\mathrm{Gal}}(k_{s/k})$-groupe $(\underline{\mathrm{Aut}}\ G)(k_s)$ des $k_{s/k}$-automorphismes de G.

. Considérons alors le 2-groupoïde suivant $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}\ G$ défini par :

$\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}\ G$ $\left\{\right.$
- un unique objet, le groupe $G(k_s)$.
- les 1-flèches sont les $k_{s/k}$-automorphismes de G.
- les 2-flèches sont les transformations naturelles entre $k_{s/k}$-automorphismes de G induites par les éléments de $G(k_s)$.

Soient $\underline{C}$ une gerbe dont le lien est localement représentable par G, munie de sa structure de $\underline{\Gamma}(G)$-objet principal $(\underline{C},p,id_p)$, $E_{\underline{C}}$ l'extension de $\underline{\mathrm{Gal}}(k_{s/k})$ par $G(k_s)$ correspondante. $E_{\underline{C}}$ détermine un 2-cocycle $(f_s,g_{s,t})$ de $\underline{\mathrm{Gal}}(k_{s/k})$ à valeurs dans $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}\ G$ et réciproquement :

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f_s"'] \arrow[rr, bend left, "f_{st}"] & \cdot \arrow[r, "f_t"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow g_{s,t}"] & \cdot \end{tikzcd} \quad s,\ t \in \underline{\mathrm{Gal}}(k_{s/k}).$$

L'opération de $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$ sur $\underline{C}$ (cf. définition 1.4., chap. II) correspond à une opération de même nature de $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}\ G$ sur $E_{\underline{C}}$ (cf. [33]). Dire que des $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$-objets principaux $(\underline{C},p,id_p)$, $(\underline{C}',p',id_{p'})$ correspondant à des 2-cocycles respectifs $(f_s,g_{s,t})$, $(f'_s,g'_{s,t})$, $s,\ t \in \underline{\mathrm{Gal}}(k_{s/k})$ sont $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$-équivalents revient à dire que $(f_s,g_{s,t})$, $(f'_s,g'_{s,t})$ sont $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}\ G$-équivalents, i.e. qu'il existe :

i) une 1-flèche q de $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}\ G$,

ii) une fonction m de $\underline{\mathrm{Gal}}(k_{s/k})$ dans $(\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}\ G)_2$ dont la valeur en s a pour source $q \circ f_s \circ q^{-1}$ et pour but f'_s,

le tout soumis à la relation :

$$q * g_{s,t} * q^{-1} = m_{st}^{-1} \circ g'_{s,t} \circ (m_s * m_t).$$

Si c'est le cas, on dira que les 2-cocycles $(f_s, g_{s,t})$, $(f'_s, g'_{s,t})$ sont équivalents au sens "maigre". Notons $H^2(\underline{\mathrm{Gal}}(k_{s/k}), \underline{\underline{\mathrm{Aut}}}\ G)$ l'ensemble des classes d'équivalence "maigre" de 2-cocycles de $\underline{\mathrm{Gal}}(k_{s/k})$ à valeurs dans le 2-groupoïde $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}$ G.

4.8. - *Proposition*.- $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G)) \simeq H^2(\underline{\mathrm{Gal}}(k_{s/k}), \underline{\underline{\mathrm{Aut}}}\ G)$, les ensembles de classes triviales se correspondant par l'isomorphisme.

. On pourrait exprimer le résultat précédent en disant que le 2-groupoïde $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}$ G "représente" le système de coefficients $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$. De manière strictement analogue, si H est un sous-faisceau de G, $\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)$ est "représenté" par le 2-groupoïde $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}(G,H)$ construit comme le 2-groupoïde $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}$ G, mais en se restreignant aux $k_{s/k}$-automorphismes de G qui préservent H et en prenant donc pour 2-flèches celles qui sont induites par les éléments de $(\underline{\mathrm{Norm}}_G H)(k_s)$.

4.9. - Si dans l'équivalence maigre entre deux cocycles $(f_s, g_{s,t})$, $(f'_s, g'_{s,t})$ de $\underline{\mathrm{Gal}}(k_{s/k})$ à valeurs dans $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}$ G, q est l'identité de l'objet de $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}$ G, on dira que $(f_s, g_{s,t})$ et $(f'_s, g'_{s,t})$ sont équivalents au sens "épais". Ceci signifie qu'entre les $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$-objets principaux $(\underline{C}, p, id_p)$, $(\underline{C}', p', id_{p'})$ correspondants, il existe un $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$morphisme (Φ, q) pour lequel q est lié par l'identité (autrement dit, les gerbes $\underline{C}$ et $\underline{C}'$ définissent le même lien L et sont L-équivalentes). Nous noterons $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G))$, $\mathbb{H}^2(\underline{\mathrm{Gal}}(k_{s/k}, \underline{\underline{\mathrm{Aut}}}\ G)$ les ensembles de 2-cohomologie associés à la relation d'équivalence "épaisse". On voit que $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G))$ (resp. $\mathbb{H}^2(\underline{\mathrm{Gal}}(k_{s/k}), \underline{\underline{\mathrm{Aut}}}\ G)$) est isomorphe à la somme directe $\coprod_L H^2(L)$, L décrivant l'ensemble des liens (et non plus seulement des classes de liens) localement représentables par G.

§ 5 - *Calcul de* $H^2(\underline{\Gamma}(G,H))$.

. Soient G un $\mathcal{B}$-faisceau de groupes, H un sous-faisceau de G. La proposition suivante est l'équivalent du corollaire 4.3.

5.1. - *Proposition*.- Supposons H invariant dans G. Il existe alors une bijection respectant les ensembles de classes triviales de $H^2(\underline{\Gamma}(G,H))$ sur $\coprod_L \frac{H^2(L)}{\underline{\mathrm{Aut}}_H L}$, L décrivant un système de représentants des classes d'isomorphie d'objets du groupoïde $Z^1(\underline{\mathrm{Autext}}(G,H))$, $\mathrm{Aut}_H L$ désignant le groupe des automorphismes de L calculé dans $Z^1(\underline{\mathrm{Autext}}(G,H))$.

. $\underline{\mathrm{Autext}}(G,H)$ désigne le faisceau $\underline{\mathrm{Aut}}(G,H)$ des automorphismes de G préservant H divisé par les automorphismes intérieurs de G induits par les éléments du normalisateur de H dans G.

a) L'application $H^2(\underline{\Gamma}(G,H)) \to \coprod_L \frac{H^2(L)}{\underline{\mathrm{Aut}}_H L}$ est injective.

Soient $(\underline{C},p,\bar{b})$, $(\underline{C}',p',\bar{b}')$ deux $\underline{\Gamma}(G,H)$-objets principaux tels que $\underline{C}$ et $\underline{C}'$ tombent dans une même classe de $\coprod_L \frac{H^2(L)}{\underline{\mathrm{Aut}}_H L}$; il existe alors une $\mathcal{B}$-équivalence $\underline{\Phi} : \underline{C} \to \underline{C}'$ telle que l'isomorphisme $j = \underline{\mathrm{lien}}(\Phi)$: $\underline{\mathrm{lien}}(\underline{C}) \to \underline{\mathrm{lien}}(\underline{C}')$ induit par $\underline{\Phi}$ soit une flèche du groupoïde $Z^1(\underline{\mathrm{Autext}}(G,H))$. Il nous faut construire sur $\underline{\Gamma}(G,H)$-équivalence $(\underline{\Phi},q)$ de $\underline{C}$ vers $\underline{C}'$. Construisons q ; il suffit de le faire localement. Or, soient $x \in \mathrm{ob}(\underline{C})$, $(\underline{\Phi}_*)_x = (\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\Phi}})_x : \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(x) \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}'}(\Phi(x))$, dire que $(\Phi_*)_x$ est lié par j revient précisément à dire qu'il existe localement des couples (G',H'), (G'',H'') [isomorphes à (G,H)] tels que

$$\bar{b}_x : \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(x) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Norm}}_{G'}(H') = G'$$

$$\bar{b}'_{\underline{\Phi}(x)} : \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}'}(\underline{\Phi}(x)) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Norm}}_{G''}(H'') = G''$$

et un morphisme $q_x : (G',H') \to (G'',H'')$ tel que

$$\Omega(q_x) = \bar{b}'_{\underline{\Phi}(x)} \circ (\underline{\Phi}_*)_x \circ b_x^{-1} .$$

Observons que si $(q_1)_x$ est un autre morphisme satisfaisant à la même condition, la fidèlité de Ω implique $(q_1)_x = q_x$.

b) L'application $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)) \to \coprod_{L} \frac{H^2(L)}{\underline{\mathrm{Aut}_H}L}$ est surjective :

en effet, soient $\underline{C}$ une gerbe représentant une classe de l'ensemble but, $L = \mathrm{lien}(\underline{C})$, $L \in \mathrm{ob}\ Z^1(\underline{\mathrm{Autext}}(G,H))$; la difficulté est de construire le morphisme $p : \underline{C} \to \underline{\Gamma}(G,H)$ permettant de définir la structure de $\underline{\Gamma}(G,H)$-objet de $\underline{C}$. Pour cela, considérons les deux gerbes suivantes :

$\overline{K(L)}$: gerbe des relèvements de L relativement au morphisme composé $\underline{\Gamma}(G,H) \xrightarrow{\Omega} \underline{\mathrm{FAGR}}(\mathcal{B}) \longrightarrow \underline{\mathrm{LIEN}}(\mathcal{B})$ (avec les notations du n° 3.2., chap. IV de [16])

$K(L)$: gerbe des relèvements de L relativement au morphisme $\underline{\mathrm{FAGR}}(\mathcal{B}) \longrightarrow \underline{\mathrm{LIEN}}(\mathcal{B})$.

. Il existe un morphisme naturel de $\overline{K(L)}$ dont on constate immédiatement, compte tenu de l'invariance de H dans G, qu'il est lié par l'identité de $\underline{\mathrm{Int}}\ L$. $\overline{K(L)}$ est donc $\underline{\mathrm{Int}}\ L$-équivalente à $K(L)$. Or, par la proposition 3.2.2. (iii), chap. IV de [16], on sait qu'il existe un $\mathcal{B}$-morphisme de gerbes $\underline{C} \to K(L)$, donc aussi un $\mathcal{B}$-morphisme $\underline{C} \to \overline{K(L)}$ qui par composition avec le morphisme canonique $\overline{K(L)} \to \underline{\Gamma}(G,H)$ fournit p. On conclut alors immédiatement.

§ 6 - *Cohomologie de Čech.*

. Soient $\mathcal{B}$ un site admettant un objet final e et où les produits fibrés finis existent, $\underline{\underline{\Gamma}}$ un $\mathcal{B}$-système de coefficients, $(\underline{C},p,\bar{b})$ un $\underline{\underline{\Gamma}}$-objet principal. Soient $\mathcal{U} = \{U_i \to e\}_{i\in I}$ une famille couvrante de e,

$\mathbb{U}$ le complexe simplicial associé, $\{x_i\}_{i\in I}$ une famille d'objets telle que, pour chaque $i \in I$, x_i appartienne à la fibre de $\underline{C}$ au-dessus de U_i. - Supposons d'abord la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ munie d'une donnée de recollement relativement à $\mathcal{U}$, c'est-à-dire d'une famille d'isomorphismes $\varepsilon_{ij} : x_i^j \simeq x_j^i$ où x_i^j (resp. x_j^i) désigne l'image inverse de x_i (resp. x_j) par $U_{ij} \to U_i$ (resp. $U_{ij} \to U_j$) suivant les notations usuelles. Désignons par $\varepsilon'_{ij}, \varepsilon'_{jk}, \varepsilon'_{ik}$ les images inverses de $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{jk}, \varepsilon_{ik}$ respectivement par $U_{ijk} \longrightarrow U_{ij}$, $U_{ijk} \longrightarrow U_{jk}$, $U_{ijk} \longrightarrow U_{ik}$. $\varepsilon'_{ij}, \varepsilon'_{jk}, \varepsilon'_{ik}$ s'insèrent dans un U_{ijk}-diagramme

(*,*)
$$\begin{tikzcd} x_i^{jk} \arrow[rr, "\varepsilon'_{ij}"] \arrow[dr, "\varepsilon'_{ik}"'] & & x_j^{ik} \arrow[dl, "\varepsilon'_{jk}"] \\ & x_k^{ij} & \end{tikzcd}$$

dans lequel x_i^{jk} désigne par exemple l'image inverse de x_i^j par $U_{ijk} \to U_{ij}$. (*,*) n'est pas, en général, commutatif, sauf si la donnée de recollement dont nous sommes partis est déjà une donnée de descente. Mais, par la structure de $\underline{\underline{\Gamma}}$-objet principal de $\underline{C}$, il existe une unique U_{ijk}-section α_{ijk} de $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(p(x_i^{jk}))$ telle que $\varepsilon'_{ik} = {}^{\alpha_{ijk}}(\varepsilon'_{jk} \cdot \varepsilon'_{ij})$ [la notation ${}^{\alpha}f$ est celle du n° 1.4, chap. II]. Le couple $(\varepsilon'_{ij}, \alpha_{ijk})$ est un 2-cocycle de $\mathcal{U}$ à valeurs dans $\underline{\underline{\Gamma}}$, définissant ainsi une classe de $H^2(\mathcal{U}, \underline{\underline{\Gamma}})$ [notation usuelle].

. Mais, en général, il n'existe pas de donnée de recollement sur les x_i, car il n'existe pas nécessairement de U_{ij}-isomorphismes $\varepsilon_{ij} : x_i^j \simeq x_j^i$. Cependant, par la propriété de gerbe, on sait que deux objets d'une même fibre de $\underline{C}$ sont toujours localement isomorphes. Il existe donc un raffinement $(U_{ij\alpha})_\alpha$ de U_{ij} tel que les restrictions $x_j^i|_{U_{ij\alpha}}$ et $x_i^j|_{U_{ij\alpha}}$ sont isomorphes. Ceci signifie précisément qu'il existe un hyperecouvrement, $\mathbb{K} = HR(\mathbb{U})$ associé à $\mathbb{U}$ (i.e. tel que $\mathbb{U}_2 = \mathrm{cosk}_1(\mathbb{K})_2$, $\mathbb{U}_3 = \mathrm{cosk}_2(\mathbb{K})_3, \ldots$) au-dessus des objets duquel la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ admet une donnée de recollement. A partir de cette donnée de recollement, par la méthode décrite précédemment, on construit une section de $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}(p(x_i^{jk}|U_{ijk\alpha}))$ au-dessus des petits ouverts du raffinement $(U_{ijk})_\alpha$ de U_{ijk}, d'où une $\mathbb{K}_2$-section de $\underline{\underline{\Gamma}}$. Cette section est un 2-cocycle de $\mathbb{K}$ à valeurs dans $\underline{\underline{\Gamma}}$.

. On a ainsi montré qu'à tout représentant d'une classe α de $H^2(\underline{\underline{\Gamma}})$, il est possible d'associer un hyperecouvrement $\mathbb{K}_\alpha$ de e et un 2-cocycle de $\mathbb{K}_\alpha$ à valeurs dans $\underline{\underline{\Gamma}}$ tel que α appartienne à l'image de $H^2(\mathbb{K}_\alpha,\underline{\underline{\Gamma}}) \to H^2(\underline{\underline{\Gamma}})$. On en déduit :

6.1. - *Proposition*.- $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}) = \varinjlim H^2(\mathbb{K},\underline{\underline{\Gamma}})$, $\mathbb{K}$ <u>décrivant les hyper-recouvrements de</u> e.

On comparera avec le corollaire 3.5.2., chap. IV, p. 269 de [16] pour lequel les gerbes considérées ont dû être supposées abéliennes.

§ 7 - *Le* Γ-*objet principal des relèvements d'un torseur.*

7.1. - *Définition*.- Soit $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$ (resp. $\underline{\Gamma}',\Omega',b')$) un $\mathcal{B}$-système de coefficients. Nous dirons que $(\underline{\Gamma}',\Omega',b')$ est un <u>sous-$\mathcal{B}$-système</u> de (Γ,Ω,b) si

(i) $\underline{\Gamma}' = \underline{\Gamma}$,

(ii) Ω' est un sous-$\mathcal{B}$-morphisme de Ω,

(iii) le diagramme

$$(***)\qquad \begin{array}{ccc} \Omega' & \hookrightarrow & \Omega \\ {\scriptstyle b'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\Gamma}'}(.) & \overset{=}{\hookrightarrow} & \underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\Gamma}}(.) \end{array}$$

commute.

Il revient au même de dire que $\underline{\underline{\Gamma}}'$ est un sous-faisceau de $\underline{\underline{\Gamma}}$ tel que $\underline{\underline{\Gamma}}'_{o1} = \underline{\underline{\Gamma}}_{o1}$.

7.2. - *Définition*.- Un sous-$\mathcal{B}$-système $(\underline{\Gamma}',\Omega',b')$ (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}'$) de $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$ (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}$) est dit <u>invariant</u> dans $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$ (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}$) si pour tout U-objet x de $\underline{\Gamma} = \Gamma'$, $\forall$ U $\in$ ob($\mathcal{B}$), $\Omega'(x)$ est un sous-faisceau invariant dans $\Omega(x)$.

7.3 - Soient $(\underline{\Gamma}',\Omega',b')$ un sous-$\mathcal{B}$-système invariant de $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$, $\underline{\underline{\theta}}$ l'injection de $\underline{\underline{\Gamma}}'$ dans $\underline{\underline{\Gamma}}$. Appelons Ω'' le $\mathcal{B}$-morphisme dont la valeur α) en un U-objet x de Γ, U $\in$ ob($\mathcal{B}$), est $\Omega''(x) = \dfrac{\Omega(x)}{\Omega'(x)}$,

β) en un U-morphisme $f : x \to y$ de $\underline{\Gamma}$, est le U-morphisme $\Omega''(f)$ déduit de $\Omega(f)$ par un passage au quotient rendu possible par le fait que $\Omega'(f)$ transforme $\Omega'(x)$ en $\Omega'(y)$.

Construisons alors le morphisme fonctoriel b'' à partir de b par passage au quotient dans le diagramme (*,*,*) en tuant l'image $\underline{\text{Im}}(b')$ de b' :

$$(*,*,*,*)\qquad \begin{tikzcd} \Omega' \arrow[r, hook] \arrow[d, "b'"'] & \Omega \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & \Omega'' \arrow[d, "b''"'] \\ \underline{\text{Aut}}_{\underline{\Gamma}}(.) \arrow[r, hook] & \underline{\text{Aut}}_{\underline{\Gamma}}(.) \arrow[r] & \underline{\text{Aut}}_{\underline{\Gamma}}(.) / \underline{\text{Im}}\, b' \end{tikzcd}$$

ceci n'est possible que si nous vérifions l'invariance de $\underline{\text{Im}}$ b' dans $\underline{\text{Aut}}_{\underline{\Gamma}}(.)$. Or, soit $f : x \to x$ un U-automorphisme quelconque de $\underline{\Gamma}$; le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Omega'(x) \arrow[r, "\Omega'(f)"] \arrow[d, "b'_x"'] & \Omega'(x) \arrow[d, "b'_x"] \\ \underline{\text{Aut}}_{\underline{\Gamma}}(x) \arrow[r, "\underline{\text{Int}}(f)"'] & \underline{\text{Aut}}_{\underline{\Gamma}}(x) \end{tikzcd}$$

est commutatif. Pour toute U-section α de $\Omega(x)$, nous avons donc l'égalité : $f.b'_x(\alpha).f^{-1} = b'_x[\Omega(f)(\alpha)]$ qui implique $f.\underline{\mathrm{Im}}(b'_x).f^{-1} = \underline{\mathrm{Im}}(b'_x)$. $\underline{\mathrm{Im}}(b')$ est donc invariante dans $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{\Gamma}}(.)$. Nous pouvons alors identifier dans $\underline{\Gamma}$ deux U-morphismes $f,g : x \to y$, quand ils diffèrent d'un élément de $\underline{\mathrm{Im}}(b'_x)$ (i.e. $g = f.\vartheta$, $\vartheta \in \underline{\mathrm{Im}}(b'_x)$). On obtient ainsi un $\mathcal{B}$-groupoïde fibré dont on prendra le $\mathcal{B}$-champ associé $\underline{\Gamma}''$. $\underline{\Gamma}''$ est une $\mathcal{B}$-gerbe et $(\underline{\Gamma}'',\Omega'',b'')$ (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}''$) un $\mathcal{B}$-système de coefficients. Il existe un morphisme naturel $\underline{\underline{\mu}}$ de $\underline{\underline{\Gamma}}$ sur $\underline{\underline{\Gamma}}''$.

7.4. - $\underline{\underline{\Gamma}}''$ ainsi construit, nous dirons que la suite de systèmes de coefficients

$$* \to \Gamma' \xrightarrow{\underline{\underline{\theta}}} \Gamma \xrightarrow{\underline{\underline{\mu}}} \underline{\underline{\Gamma}}'' \longrightarrow *$$

est <u>exacte</u>.

7.5. - Soient $1 \to H \to G \xrightarrow{j} F \to 1$ une suite exacte de $\mathcal{B}$-faisceaux de groupes, $\underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{\Gamma}}(G,H)$ (n° 5.3.1., chap. I), $(\underline{\Gamma},\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}},b)$ le triple déterminé par $\underline{\underline{\Gamma}}$. Puisque H est un sous-faisceau invariant de G, le foncteur $\Omega = \Omega_{\underline{\Gamma}}$, à un U-objet quelconque (G',H') de $\underline{\underline{\Gamma}}$, $U \in ob(\mathcal{B})$, fait correspondre $\Omega(G',H') = G'$ [en particulier (cf. n° 5.3.2., chap. I), Ω est fidèle]. Soit $\Omega' : \underline{\Gamma} = \underline{\Gamma}(G,H) \to \underline{\mathrm{FAGR}}(\mathcal{B})$ le sous-foncteur de Ω qui, à un U-objet quelconque (G',H'), $U \in ob(\mathcal{B})$, fait correspondre le U-faisceau H' et à un U-morphisme $f : (G',H') \to (G'',H'')$ le U-morphisme restriction de f à H'. Désignons par b' la restriction à Ω' de b. $(\underline{\Gamma},\Omega',b')$ constitue alors un sous-système invariant de $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$ (n° 7.2). Soit $\underline{\underline{\Gamma}}'$ le $\mathcal{B}$-faisceau de 2-groupoïdes correspondant à $(\underline{\Gamma},\Omega',b')$ (théorème 3.2., chap. I) ; conformément au n° 7.3 précédent, l'injection $\underline{\underline{\theta}}$ de $\underline{\underline{\Gamma}}'$ dans $\underline{\underline{\Gamma}}$ conduit à une suite exacte dans le sens de 7.4.

$$(1) \qquad \begin{array}{ccccccccc} * & \to & \underline{\underline{\Gamma}}' & \xrightarrow{\underline{\underline{\theta}}} & \underline{\underline{\Gamma}} & \xrightarrow{\underline{\underline{\mu}}} & \underline{\underline{\Gamma}}'' & \longrightarrow & * \\ & & & & \| & & & & \\ & & & & \underline{\underline{\Gamma}}(G,H) & & & & \end{array}$$

7.6. - Gardons les notations de 7.5. et désignons par j_* le morphisme d'extension structurale $\underline{\text{Tors}}$ G → Tors F. Un F-torseur t détermine une section σ_t de $\underline{\text{Tors}}(F)$ et la donnée de t est équivalente à celle de σ_t. Montrons que la gerbe $\mathcal{R}_t$ des relèvements de σ_t relativement à j_* admet une structure de $\underline{\underline{\Gamma}}'$-objet principal. Rappelons (chap. IV, n° 2.5., [16]) que les objets de $\mathcal{R}_t$ de projection U, $U \in ob(\mathcal{B})$, sont les couples (x,a) constitués d'un U-objet x de $\underline{\text{Tors}}$ G et d'un U-isomorphisme $a : j_*(x) \simeq \sigma_t(U)$, les U-morphismes dans $\mathcal{R}_t$ de source (x,a) et de but (x',a') étant précisément les U-morphismes $f : x \to x'$ de $\underline{\text{Tors}}$ G tels que $a'.j_*(f) = a$. Définissons dans ces conditions le morphisme

$$p : \mathcal{R}_t \to \underline{\Gamma}'$$

sur les objets en posant, pour tout U-objet (x,a) , p(x,a) = $(\underline{\text{Aut}}_{\underline{\text{Tors}}\ G}(x), \underline{\text{Aut}}_{\mathcal{R}_t}(x,a))$. Comme ce dernier couple est localement isomorphe au couple (G,H), p(x,a) définit bien un objet de $\underline{\Gamma}(G,H)$ donc de $\underline{\Gamma}'$. On définit maintenant p sur les U-morphismes de $\mathcal{R}_t$ en posant, pour tout U-morphisme $\bar{f} : (x,a) \to (x',a')$ correspondant à un U-morphisme $f : x \to x'$ de $\underline{\text{Tors}}$ G, $p(\bar{f}) = \underline{\text{Int}}(f).\underline{\text{Int}}(f)$, étant intérieur, transforme $\underline{\text{Aut}}_{\mathcal{R}_t}(x,a)$ en $\underline{\text{Aut}}_{\mathcal{R}_t}(x',a')$ et définit de ce fait un 1-morphisme de $\underline{\Gamma}' = \underline{\Gamma}$.

7.7. - *Proposition*.- <u>Utilisons les notations précédentes de</u> 7.5. <u>et</u> 7.6. <u>Soient</u> $1 \to H \to G \to F \to 1$ <u>une suite exacte de faisceaux de groupes</u> t <u>un</u> <u>F-torseur</u>, $\mathcal{R}_t$ <u>la gerbe des relèvements de</u> t <u>relativement au morphisme</u> <u>Tors</u> G → <u>Tors</u> F. <u>Alors le triple</u> $(\mathcal{R}_t, p, id)$ <u>constitue un</u> Γ'-<u>objet principal</u>.

. Il suffit de remarquer que $\Omega'(p(x,a)) =$

$$\Omega'(\underline{\text{Aut}}_{\underline{\text{Tors}}\ G}(x), \underline{\text{Aut}}_{\mathcal{R}_t}(x,a)) = \underline{\text{Aut}}_{\mathcal{R}_t}(x,a).$$

7.8. - *Remarques.*-

1°) Par l'extension structurale $\underline{\underline{\Gamma}}' \hookrightarrow \underline{\underline{\Gamma}}(G,H) \hookrightarrow \underline{\underline{\Gamma}}(G)$, la classe de $(\mathcal{R}_t, p, id)$ dans $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}')$ est transformée en la classe de Tors G dans $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G))$ munie de sa structure de $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$-objet principal (Prop. 2.2.2. chap. II).

2°) Il existe un morphisme naturel 2-plein $\underline{\underline{\nu}} : \underline{\underline{\Gamma}}' \to \underline{\underline{\Gamma}}(H)$ (cf. la définition de Ω' en 7.5.). $H^2(\underline{\underline{\nu}})$ envoie la classe de $(\mathcal{R}_t, p, id)$ dans $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}')$ sur la classe de la gerbe $\mathcal{R}_\sigma$ munie de sa structure de $\underline{\underline{\Gamma}}(H)$-objet principal dans $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(H))$. Si cette dernière est triviale, c'est que $(\mathcal{R}_\sigma, p, id)$ est déjà triviale.

§ 8 - *Suite exacte de 2-cohomologie.*

8.1. - *Lemme.*– Soient $* \to \underline{\underline{\Gamma}}' \xrightarrow{\underline{\underline{\theta}}} \underline{\underline{\Gamma}} \xrightarrow{\underline{\underline{\mu}}} \underline{\underline{\Gamma}}'' \to *$ une suite exacte (dans le sens de 7.4.) quelconque de $\mathcal{B}$-systèmes de coefficients, $(\underline{\mathcal{C}}, p, \bar{b})$ un objet de $Z^2(\underline{\underline{\Gamma}})$, $(\underline{\mathcal{C}}_{\underline{\underline{\mu}}}, p_{\underline{\underline{\mu}}}, \bar{b}_{\underline{\underline{\mu}}})$ le $\underline{\underline{\Gamma}}''$-objet principal obtenu de $(\underline{\mathcal{C}}, p, \bar{b})$ par l'extension structurale $\underline{\underline{\mu}}$. Supposons que $\underline{\mathcal{C}}_{\underline{\underline{\mu}}}$ possède une section σ. Alors la catégorie fibrée $\mathcal{R}_\sigma$ des relèvements de σ relativement au morphisme $\underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{C}}_{\underline{\underline{\mu}}}$ possède une structure de $\underline{\underline{\Gamma}}'$-objet principal définissant ainsi une classe dans $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}')$ dont l'image par $H^2(\underline{\underline{\theta}})$ est précisément la classe de $(\underline{\mathcal{C}}, p, \bar{b})$.

La démonstration est très voisine de celle de 7.7. : on définit d'abord $p' : \mathcal{R}_\sigma \to \underline{\Gamma}' = \underline{\Gamma}$ sur les objets (x,a) par $p'(x,a) = p(x)$ et sur les morphismes de manière immédiate. Pour tout objet (x,a) de $\mathcal{R}_\sigma$ $\bar{b}'_{(x,a)}$ est alors uniquement déterminée par la condition de boucler le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\Omega p'(x,a) = \Omega(p(x)) \arrow[r, "\bar{b}_x"] & \mathrm{Aut}_{\underline{\mathcal{C}}}(x) \\
\Omega' p'(x,a) \arrow[u, hook] \arrow[r, dashed, "\bar{b}'_{(x,a)}"'] & \mathrm{Aut}_{\mathcal{R}_\sigma}(x,a) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

.$(\mathcal{R}_{\sigma},p',\bar{b}')$ est un $\underline{\underline{\Gamma}}'$-objet principal qui détermine une classe dans $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}')$ dont l'image par $H^2(\underline{\underline{\theta}})$ dans $H^2(\underline{\underline{\Gamma}})$ est évidemment la classe de $(\underline{C},p,\bar{b})$.

8.2. - *Proposition*.- <u>Soit</u> $* \to \underline{\underline{\Gamma}}' \overset{\underline{\underline{\theta}}}{\to} \underline{\underline{\Gamma}} \overset{\underline{\underline{\mu}}}{\to} \underline{\underline{\Gamma}}'' \to *$ <u>une suite exacte quelconque de</u> $\mathcal{B}$<u>-systèmes de coefficients</u>. <u>Alors la suite d'ensembles</u>

$$H^2(\underline{\underline{\Gamma}}') \xrightarrow{H^2(\underline{\underline{\theta}})} H^2(\underline{\underline{\Gamma}}) \xrightarrow{H^2(\underline{\underline{\mu}})} H^2(\underline{\underline{\Gamma}}'')$$

<u>pointés par les classes triviales est exacte.</u>

. Supposons que $\mathcal{B}$ possède un objet final e. Compte tenu du lemme 8.1., il reste à montrer que si $(\underline{C}',p',b')$ est un $\underline{\underline{\Gamma}}'$-objet principal, le $\underline{\underline{\Gamma}}''$-objet principal $(\underline{C}''_{\underline{\underline{\mu}}\circ\underline{\underline{\theta}}},p''_{\underline{\underline{\mu}}\circ\underline{\underline{\theta}}},b''_{\underline{\underline{\mu}}\circ\underline{\underline{\theta}}})$ étendue à l'aide de $\underline{\underline{\mu}} \circ \underline{\underline{\theta}}$ admet une section. Pour cela, remarquons d'abord que toute donnée de recollement dans $\underline{C}'$ relative à un hyperecouvrement $\mathbb{K}$ de e (cf. § 6) se transforme par passage à $\underline{C}''_{\underline{\underline{\mu}}\circ\underline{\underline{\theta}}}$ en une donnée de descente. En effet, à une telle donnée, on sait associer, par le paragraphe 6, un 2-cocycle de $\mathbb{K}$ à valeurs dans $\underline{\underline{\Gamma}}'$ dont l'image par $\underline{\underline{\mu}} \circ \underline{\underline{\theta}}$ dans $\underline{\underline{\Gamma}}''$ est évidemment triviale ; la donnée de recollement image dans $\underline{C}''_{\underline{\underline{\mu}}\circ\underline{\underline{\theta}}}$ est donc de descente. Puisque $\underline{C}''_{\underline{\underline{\mu}}\circ\underline{\underline{\theta}}}$ est un champ, toute donnée de descente y est effective. La fibre finale de $\underline{C}''_{\underline{\underline{\mu}}\circ\underline{\underline{\theta}}}$ est donc non vide. i.e. $C''_{\underline{\underline{\mu}}\circ\underline{\underline{\theta}}}$ admet une section. On vérifie immédiatement que la classe d'isomorphie de σ est indépendante de la donnée de recollement de départ dans $\underline{C}'$.

8.3. - <u>*Remarque*</u>.- Si, dans la démonstration précédente, $(\underline{C}_{\underline{\underline{\theta}}},p_{\underline{\underline{\theta}}},\bar{b}_{\underline{\underline{\theta}}})$ désigne le $\underline{\underline{\Gamma}}$-objet principal obtenu de $(\underline{C}',p,\bar{b}')$ par l'extension structurale $\underline{\underline{\theta}}$, $(\underline{C}',p',b')$ est $\underline{\underline{\Gamma}}'$-équivalent au $\underline{\underline{\Gamma}}'$-objet principal des relèvements de σ relativement au morphisme $\underline{C}_{\underline{\underline{\theta}}} \to \underline{C}''_{\underline{\underline{\mu}}\circ\underline{\underline{\theta}}}$. On remarque, en effet, que le morphisme $\underline{C}' \longrightarrow \underline{C}_{\underline{\underline{\theta}}} \longrightarrow \underline{C}''_{\underline{\underline{\mu}}\circ\underline{\underline{\theta}}}$ se factorise par la section σ de $\underline{C}''_{\underline{\underline{\mu}}\circ\underline{\underline{\theta}}}$ (corollaire 2.3.16, chap. IV de [16]), d'où un morphisme $\underline{C}' \to \mathcal{R}_{\sigma}$ qui est une $\underline{\underline{\Gamma}}'$-équivalence.

8.4. - Appliquant 8.2. à la suite exacte (1) particulière de 7.5., on obtient :

Corollaire.- La suite d'ensembles

$$(2) \qquad H^2(\underline{\underline{\Gamma}}') \xrightarrow{H^2(\underline{\underline{\theta}})} H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)) \xrightarrow{H^2(\underline{\underline{\mu}})} H^2(\underline{\underline{\Gamma}}'')$$

pointés par les classes triviales est exacte.

§ 9 - *Suite exacte longue de cohomologie*.

9.1. - Soient G un $\mathcal{B}$-faisceau de groupes, H un sous-faisceau invariant de G, $1 \to H \to G \to F \xrightarrow{j} 1$ la suite exacte correspondante. Nous avons à notre disposition la suite ci-dessous (3) de groupoïdes munis de leurs objets triviaux, exacte en un sens évident :

$$(3) \qquad Z^1(H) \longrightarrow Z^1(G) \xrightarrow{j_*} Z^1(F).$$

D'autre part, par 7.6. et 7.7., nous savons que si t est un F-torseur, la gerbe $\mathcal{R}_{\sigma_t}$ des relèvements de σ_t relativement à j_* possède une structure de $\underline{\underline{\Gamma}}'$-objet principal définissant ainsi une classe de $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}')$. D'où une application

$$\delta^1 : \mathrm{ob}(Z^1(F)) \longrightarrow H^2(\underline{\underline{\Gamma}}')$$

reliant (3) et (2). Si l'on remplace t par un F-torseur équivalent t' (i.e. si t et t' sont liés par un morphisme dans $Z^1(F)$), $\mathcal{R}_{\sigma_t}$ se change en $\mathcal{R}_{\sigma_{t'}}$ et l'on constate immédiatement (c'est d'ailleurs l'un des avantages de la 2-cohomologie maigre) que $\mathcal{R}_{\sigma_t}$ et $\mathcal{R}_{\sigma_{t'}}$ sont $\underline{\underline{\Gamma}}'$-équivalents. $\mathcal{R}_{\sigma_t}$ et $\mathcal{R}_{\sigma_{t'}}$ définissent donc la même classe dans $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}')$, d'où une application (encore notée δ^1) de $H^1(F)$ dans $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}')$.

9.2. - *Théorème*.- Soit $1 \to F \to G \to H \to 1$ une suite exacte de $\mathcal{B}$-faisceaux de groupes. La suite ci-dessous d'ensembles pointés par les classes triviales

$$(4) \qquad \ldots \to H^1(H) \to H^1(G) \xrightarrow{(j_*)_1} H^1(F) \xrightarrow{\delta^1} H^2(\underline{\underline{\Gamma}}')$$
$$\xrightarrow{H^2(\underline{\underline{\theta}})} H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)) \xrightarrow{H^2(\underline{\underline{\mu}})} H^2(\underline{\underline{\Gamma}}'')$$

est G-*exacte*, i.e.

a) *Une classe* α *de* $H^1(F)$ *appartient à l'image de* $(j_*)_1$ *si et seulement si* $\delta^1(\alpha)$ *est triviale*,

b) *Une classe* α *de* $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}')$ *appartient à l'image de* δ^1 *si et seulement si* $H^2(\underline{\underline{\theta}})(\alpha)$ *est la classe unité de* $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G,H))$ (cf. 3.3.),

c) *Une classe* α *de* $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G,H))$ *appartient à l'image de* $H^2(\underline{\underline{\theta}})$ *si et seulement si* $H^2(\underline{\underline{\mu}})(\alpha)$ *est triviale*.

. c) n'est pas autre chose que la répétition du corollaire 8.4. Il suffit d'établir b). Si α appartient à l'image de δ^1, alors il existe un représentant de α qui est le $\underline{\underline{\Gamma}}'$-objet principal des relèvements d'un F-torseur. Soit $(\underline{C}',p',id)$ un tel représentant ; par construction même, $(\underline{C}'_{\underline{\underline{\theta}}},p'_{\underline{\underline{\theta}}},id.)$ est alors $\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)$-équivalente à la gerbe *Tors* G muni de sa structure de $\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)$-objet principal (en fait $\underline{C}'_{\underline{\underline{\theta}}}$ est même *lien*(G)-équivalente à *Tors* G).

Réciproquement, soit $(\underline{C}',p',\bar{b}')$ un $\underline{\underline{\Gamma}}'$-objet principal ; supposons que $(\underline{C}'_{\underline{\underline{\theta}}},p'_{\underline{\underline{\theta}}},b'_{\underline{\underline{\theta}}})$ soit $\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)$-équivalent à *Tors* G muni de sa structure de $\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)$-objet principal. Nous avons alors des morphismes

$$\underline{C}' \xrightarrow{\Psi} \underline{\text{Tors}}\ G \xrightarrow{j_*} \underline{\text{Tors}}\ F \quad \text{d'objets à opérateurs}$$

tels que le composé $j_* \circ \Psi$ se factorise par une section σ de *Tors* F (corollaire 2.3.16 - chap. IV de [16]) ; $(\underline{C}',p',b')$ est alors $\underline{\underline{\Gamma}}'$-équivalent au $\underline{\underline{\Gamma}}'$-objet principal des relèvements de σ relativement à j_* (cf. la remarque 8.3). La classe de $(\underline{C}',p',\bar{b}')$ appartient donc à l'image de δ^1.

9.3. - *Remarque.*- Si H n'est plus supposé invariant dans G, utilisant la méthode décrite par T.A. Springer dans [32] - § 1, il est possible de définir un ensemble $H^1(G,H)$ et une relation $H^1(G) \multimap H^1(G,H)$ substituts naturels respectivement de l'ensemble $H^1(G/H)$ et de l'application $H^1(G) \to H^1(G/H)$ du cas invariant de telle manière que la suite

$$(5) \qquad H^1(H) \longrightarrow H^1(G) \multimap H^1(G,H) \xrightarrow{\delta^1} H^2(\underline{\underline{\Gamma}}') \longrightarrow H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G))$$

soit encore exacte.

Ici $\underline{\underline{\Gamma}}'$ est construit exactement comme en 7.5 à ceci près que l'on remplacera l'égalité $\Omega(G',H') = G'$ par $\Omega(G',H') = \underline{\mathrm{Norm}}_{G'}(H')$.

Appendice I : Une condition nécessaire et suffisante pour que deux classes soient en relation (déf. 3.1.4., chap. IV de [16]).

. Soient G un $\mathcal{B}$-faisceau de groupes, H un sous-faisceau non nécessairement invariant de G, $\underline{C}$, $\underline{C}'$ deux $\mathcal{B}$-gerbes dont les liens sont localement représentables respectivement par H, G. Supposons qu'il existe un $\mathcal{B}$-morphisme $\Psi : \underline{C}' \to \underline{C}$ tel que $\underline{\mathrm{lien}}(\Psi)$ soit localement représentable par l'injection $H \to G$. Pour tout U-morphisme $f : x \to y$ dans $\underline{C}'$, $U \in ob(\mathcal{B})$, nous avons le diagramme commutatif

$$(*,*,*,*,*) \qquad \begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Aut}}_U(x) & \xrightarrow{(\Psi_*)_x} & \underline{\mathrm{Aut}}_U(\Psi(x)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \underline{\mathrm{Int}}(f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \underline{\mathrm{Int}}(\Psi(f))} \\ \underline{\mathrm{Aut}}_U(y) & \xrightarrow{(\Psi_*)_y} & \underline{\mathrm{Aut}}_U(\Psi(y)) \end{array}$$

Considérons de nouveau le sous-système $\underline{\underline{\Gamma}}'$ de $\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)$ (cf. remarque 9.3.) et définissons le morphisme $p : \underline{C}' \to \underline{\Gamma}'$ en faisant correspondre à un U-objet x le couple $(\underline{\mathrm{Aut}}_U(\Psi(x)),\underline{\mathrm{Aut}}_U(x))$ localement isomorphe au couple (G,H) et à une U-flèche $f : x \to y$, le U-morphisme $\underline{\mathrm{Int}}(\Psi(f))$ qui par la commutativité de (*,*,*,*,*) transforme $\underline{\mathrm{Aut}}_U(x)$ en $\underline{\mathrm{Aut}}_U(y)$. A l'aide de p, on munit $\underline{C}'$ d'une structure de $\underline{\Gamma}'$-objet principal. Par ailleurs, $\underline{C}$ possède une structure de $\underline{\Gamma}(G)$-objet (cf. prop. 2.2.2., chap. II) dont la classe dans $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G))$ est l'image par le morphisme composé

$$\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}') \xrightarrow{H^2(\underline{\underline{\theta}})} \mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)) \longrightarrow \mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G))$$

de la classe de $\underline{C}'$ ($\underline{\underline{\theta}}$ est l'inclusion de $\underline{\underline{\Gamma}}'$ dans $\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)$). D'où :

Proposition.- <u>Désignons par</u> $\underline{\underline{\nu}}$ (resp. $\underline{\underline{\iota}}$) <u>le morphisme naturel</u> $\underline{\underline{\Gamma}}' \to \underline{\underline{\Gamma}}(H)$ (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}(G,H) \to \underline{\underline{\Gamma}}(G)$). <u>Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un morphisme de liens</u> $L' \to L$ <u>localement représentable par</u> $H \to G$ <u>et des classes</u> $\alpha' \in H^2(L')$, $\alpha \in H^2(L)$ <u>telles que</u> $\alpha' \multimap \alpha$ <u>est qu'il existe des représentants</u> $\underline{C}'$ <u>et</u> $\underline{C}$ <u>de</u> α' <u>et</u> α <u>dont les classes dans</u> $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(H))$ <u>et</u> $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G))$ <u>se remontent en des classes</u> β <u>et</u> γ <u>appartenant respectivement à</u> $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}')$ <u>et</u> $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G,H))$ <u>telles que</u> $\gamma = H^2(\underline{\underline{\theta}})(\beta)$, <u>en d'autres termes tels que nous ayons le diagramme</u>

$$\begin{array}{ccccc}
\beta \in & \mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}') & \xrightarrow{\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\theta}})} & \mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)) & \ni \gamma \\
\wr\downarrow & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{H}^2(\underline{\underline{\nu}})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{H}^2(\underline{\underline{\iota}})} & \downarrow\wr \\
[C'] \in & \mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(H)) & & \mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G)) & \ni [C]
\end{array}$$

Dans cet énoncé, $\mathbb{H}^2(.)$ dénote l'ensemble de 2-cohomologie associé à la relation d'équivalence épaisse, c'est-à-dire correspondant à la structure de catégorie pour laquelle les morphismes $(\underline{\Phi},q)$ sont tels que q est lié par une identité (cf. n° 4.9).

Appendice II : <u>Comparaison des applications cobord</u> δ^1 <u>du § 9 et</u> d <u>de [16] p. 283</u>.

. Soit $1 \to H \to G \xrightarrow{j} F \to 1$ une suite exacte de $\mathcal{B}$-faisceaux de groupes. Dans [16], J. Giraud construit un ensemble $O(j)$ d'obstruction au relèvement d'un F-torseur en un G-torseur. Rappelons la construction de $O(j)$: $O(j) = \frac{N(j)}{\mathcal{R}}$ où

- $N(j)$ est l'ensemble des triples (K,L,u) comprenant une gerbe K, L son lien, $u : L \to \underline{\text{lien}}(G)$ un morphisme de liens tel que la suite

$$1 \longrightarrow L \longrightarrow \underline{\text{lien}}(G) \longrightarrow \underline{\text{lien}}(F) \longrightarrow 1$$

soit exacte.

- $\mathcal{R}(K,L,u)(K',L',u')$ est la relation : "il existe un morphisme de gerbes $\underline{a} : K \to K'$ tel que le morphisme $\alpha : L \to L'$ qui lie $\underline{a}$ vérifie $u'\alpha = u$.

Lemme.- <u>Soient</u> (K,L,u), (K',L',u') <u>deux triples tels que</u> $\mathcal{R}(K,L,u)(K',L',u')$, $\underline{a}$ <u>et</u> α <u>comme précédemment</u>. <u>Alors</u> α <u>est un isomorphisme de liens et</u> $\underline{a}$ <u>une</u> $\mathcal{B}$-<u>équivalence de gerbes</u>.

[16] - chap. IV, n° 4.2.4.2., p. 281.

. Considérons maintenant le sous-ensemble $N'(j)$ de $N(j)$ constitué des triples (K,L,u) pour lesquels K est muni d'un morphisme $\Psi : K \to \underline{\text{Tors}}\ G$ lié par u. Alors, par la proposition 4.2.8., chap. IV de [16] p. 283, K est la gerbe des relèvements d'un certain F-torseur et (cf. n° 7.6. ou encore l'appendice I) possède une structure de $\underline{\underline{\Gamma}}'$-objet principal, $\underline{\underline{\Gamma}}'$ désignant le sous-système de $\underline{\underline{\Gamma}}(G,H)$ défini en 7.5. d'où une application de $N'(j)$ dans $H^2(\underline{\underline{\theta}})^{-1}([\underline{\text{Tors}}\ G])$ qui, par le lemme précédent est compatible avec la relation induite par $\mathcal{R}$ sur $N'(j)$ définissant ainsi une application c de $\frac{N'(j)}{\mathcal{R}}$ dans $H^2(\underline{\underline{\theta}})^{-1}([\underline{\text{Tors}}(G)])$. Comme l'application $d : H^1(F) \to O(j)$ de [16] se factorise évidemment par $\frac{N'(j)}{\mathcal{R}}$, nous obtenons :

Proposition.- <u>Avec les notations précédentes, le diagramme</u> :

$$\begin{tikzcd}
H^1(F) \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "\delta^1"'] & \frac{N'(j)}{R} \arrow[r, hook] \arrow[d, "c"] & O(j) \\
 & H^2(\underline{\underline{\theta}})^{-1}([\underline{\mathrm{Tors}}(G)]) \arrow[r, hook] & H^2(\underline{\underline{\Gamma}}')
\end{tikzcd}$$

<u>est commutatif</u>, <u>i.e.</u> δ^1 <u>se factorise par</u> d.

Remarque.- L'application c ne s'étend pas en une application de $O(j)$ vers $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}')$ car un représentant d'une classe de $O(j)$ ne possède pas nécessairement de structure de $\underline{\underline{\Gamma}}'$-objet principal.

CHAPITRE IV

APPLICATIONS : 2-cohomologie galoisienne des groupes algébriques définies sur un corps de base parfait.

. Seule la topologie étale interviendra dans ce chapitre et on écrira $H^i(.)$ au lieu de $H^i_{et}(.)$. La notation $H^2(L)$ est celle de [16]. Quand un ensemble de 2-cohomologie a toutes ses classes triviales, on dira encore qu'il est "inessentiel".

§ 1 - *Groupes unipotents.*

1.1. - *Lemme.*- Soit K un corps parfait ; tout K-groupe algébrique G qui est une forme de $(G_a)^r$ est isomorphe à $(G_a)^r$ (r entier > 0).

Cf. Lemme 4.1.5. - exposé XVII de S.G.A.D. [13].

Le lemme 1.1. implique $H^1(\underline{\mathrm{Aut}}(G_a^r)) = 0$. Il en résulte que le K_{et}-système de coefficients $\underline{\underline{\Gamma}}(G_a)$ a la forme suivante très simple : pour un objet V quelconque de K_{et}, la V-fibre de $\underline{\underline{\Gamma}}(G_a)$ possède un unique objet, G_a, et ses 1-morphismes sont les éléments de $G_m(V)$.

1.2. - *Proposition.*- $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G_a)) = 0$.

Il est, en effet, bien connu que G_a est cohomologiquement trivial. Comme $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G_a))$ s'identifie à un quotient de $H^2(G_a)$ (corollaire 4.4., chap. III), $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G_a)) = 0$.

1.3. - *Théorème.*- Soient K un corps parfait, U un K-groupe algébrique, connexe, unipotent. L'ensemble $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(U))$ se réduit à un seule classe et celle-ci est triviale.

. On exprimera ce fait en écrivant $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(U)) = 0$.

Posons $\underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{\Gamma}}(U)$, $\Omega = \Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}}$; rappelons (cf. n° 5.2.1., chap. I) que dans le triple $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$ associé à $\underline{\underline{\Gamma}}$, b est le $\mathcal{B}$-morphisme fonctoriel qui à toute V-section α de U', $V \in ob(K_{et})$, U' V-forme de U, associe $\underline{int}(\alpha)$.

U étant unipotent et K parfait, il existe (cf. prop. 4.1. - exposé XVII de [13]) une suite finie de composition $\{U_i\}_{i\leq 0\leq n}$ constituée de sous-groupes U_i de U tels que :

a) $U_o = U$, $U_n = e$ = élément neutre de U,

b) U_i est caractéristique dans U_{i-1}, $i \geq 1$

c) les quotients $\dfrac{U_{i-1}}{U_i}$ sont isomorphes sur K à G_a, $i \geq 1$.

Définissons alors la chaîne $\{\underline{\Gamma},\Omega_i,b_i\}_{0\leq i\leq n}$ de sous-systèmes de $(\underline{\Gamma},\Omega,b)$ par :

1°) $(\underline{\Gamma},\Omega_o,b_o) = (\underline{\Gamma},\Omega,b)$

2°) Pour tout objet V de K_{et}, Ω_i/V est le sous-foncteur de Ω/V défini par : α) <u>sur les V-objets</u> U', $\Omega_i(U') = U'_i$ où U'_i est la V-forme de U_i associée à U' par l'extension structurale $Z^1(V,\underline{Aut}(U)) \to Z^1(V,\underline{Aut}(U_i))$ induite par le V-morphisme restriction $\underline{Aut}(U) \to \underline{Aut}(U_i)$ [U_i est caractéristique dans $U_{i-1},\ldots,$ donc dans U ; évidemment U'_i est aussi caractéristique dans $U'_{i-1},U'_{i-2},\ldots,U'$].

β) <u>sur les</u> V-<u>morphismes</u> $f : U' \to U''$, $\Omega_i(f) = f_i$ où $f_i : U'_i \to U''_i$ est le V-morphisme image de f par l'extension structurale précédente.

3°) b_i = restriction de b à Ω_i.

Pour tout $1 \leq i \leq n$, Ω_i est un sous-foncteur invariant de Ω_{i-1} dans le sens du n° 7.2., chap. III. Pour tout $1 \leq i \leq n$, nous pouvons alors considérer le système quotient $(\underline{\Gamma}''_i,\Omega''_i = \dfrac{\Omega_{i-1}}{\Omega_i}, b''_i)$ rendant exacte (cf. n° 7.4., chap. III) la suite de systèmes de coefficients, $1 \leq i \leq n$,

(1) $$* \longrightarrow \underline{\underline{\Gamma}}_i \longrightarrow \underline{\underline{\Gamma}}_{i-1} \longrightarrow \underline{\underline{\Gamma}}''_i \longrightarrow *$$ (1)

Par la proposition 8.2. chap. III, on en déduit la suite exacte d'ensembles (pointés par les classes triviales) :

$$H^2(\underline{\underline{\Gamma}}_i) \longrightarrow H^2(\underline{\underline{\Gamma}}_{i-1}) \longrightarrow H^2(\underline{\underline{\Gamma}}''_i), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Or, il résulte de 1.2. que tout $\underline{\underline{\Gamma}}''_i$-objet principal, $1 \leqslant i \leqslant n$, est trivial ; pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, toute classe de $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}_{i-1})$ se remonte donc en une classe de $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}_i)$. Mais évidemment $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}_n) = 0$, d'où $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}_i) = 0$, $0 \leqslant i \leqslant n$, et $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}_o) = H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(U)) = H^2(\underline{\underline{\Gamma}}) = 0$.

1.4. - *Corollaire*.- H^1(Autext U) = 0. En particulier, il y a une unique classe de liens localement représentable par U, celle de lien(U).

Se déduit du corollaire 4.3., chap. III.

1.5. - *Corollaire*.- H^1(Aut U) = 0.

En effet, par la proposition 3.2., chap. III, $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(U))'$ est un quotient de H^1(Aut U). Or, il est immédiat que la relation d'équivalence correspondante est triviale. Ceci implique que $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(U))'$ est en bijection avec H^1(Aut U), d'où H^1(Aut U) = 0. On aurait pu aussi utiliser la suite exacte :

$$1 \to \underline{\mathrm{Int}}\ U \to \underline{\mathrm{Aut}}\ U \to \underline{\mathrm{Autext}}\ U \to 1.$$

§ 2 - *Calculs galoisiens*.

. Nous avons indiqué en 4.7., chap. III qu'à un faisceau G de K_{et} correspondait un Gal(K_s/K)-ensemble $G(K_s)$. De la même façon (n° 7.4., chap. VIII de [16]), tout K_{et}-lien L localement représentable par un groupe (disons algébrique, affine) G définit un K_s/K-noyau λ à valeurs dans G ([32] - § 2 - p. 176). En outre, il existe une correspondance

---

(1) $\underline{\underline{\Gamma}}_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, désigne évidemment le faisceau de 2-groupoïdes correspondant au triple $(\underline{\Gamma}, \Omega_i, b_i)$ par le théorème 3.2. du chap. I.

biunivoque respectant les sous-ensembles de classes triviales entre le $H^2(K_s/K,G,\lambda)$ défini en [32] et le $H^2(L)$ de [16]. Le corollaire 4.3. du chapitre III s'écrit alors :

2.1. - *Proposition*.- <u>Il existe une bijection respectant les ensembles de classes triviales de</u> $H^2(\underline{\Gamma}(G))$ ($\simeq H^2(\underline{\mathrm{Gal}}(K_s/K), \underline{\mathrm{Aut}}\ G)$ <u>par le n° 4.7.- chap. III) sur</u> $\coprod_{\lambda} H^2\left(\dfrac{K_s/_K,G,\lambda}{\underline{\mathrm{Aut}}\ \lambda}\right)$, λ <u>décrivant un système de représentants des classes de</u> K_s/K-<u>noyaux dans</u> G.

2.2. - Supposons à partir de maintenant K parfait. $G(K_s)$ s'identifie alors à $G(\bar{K})$. Soit $(B(\bar{K}), T(\bar{K}))$ un couple (dit de Killing) constitué d'un sous-groupe de Borel $B(\bar{K})$ de $G(\bar{K})$ et d'un tore maximal $T(\bar{K})$ de $B(\bar{K})$. Sur $\bar{K}$, on sait qu'il en existe toujours et $T(\bar{K})$ est aussi un tore maximal de $G(\bar{K})$. Si $\alpha = (f_s, g_{s,t})$ (notations de 4.7.- chap. III) est un 2-cocycle de g (1) à valeurs dans $G(\bar{K})$ (n° 1.14 - [32]) de g-noyau λ, pour tout $s \in g$, l'automorphisme f_s transforme $B(\bar{K})$ en un sous-groupe de Borel $f_s(B(\bar{K}))$ de $G(\bar{K})$; il existe donc une application $h_\cdot : g \to G(\bar{K})$ telle que $f_s(B(\bar{K})) = h_s.B(\bar{K}).h_s^{-1}$. Le cocycle α est équivalent au cocycle $\alpha' = (f'_s, g'_{s,t})$ pour lequel $f'_s = h_s^{-1}.f_s.h_s$ stabilise $B(\bar{K})$. Il résulte alors de l'égalité $f'_s(f'_t(B(\bar{K}))) = g'_{s,t}.f'_{st}(B(\bar{K})).g'^{-1}_{s,t}$ que $g'_{s,t}$ normalise $B(\bar{K})$, donc appartient à $B(\bar{K})$. Cet argument est dû à T.A. Springer ([32] - § 3). Appelons λ_B le g-noyau à valeurs dans $B(\bar{K})$ induit par l'automorphisme $s \to f'_s$; λ_B dépend non seulement de λ mais aussi de α. La classe α appartient à l'image de $H^2(g,B(\bar{K}),\lambda_B)$ par la relation

$$H^2(g,B(\bar{K}),\lambda_B) \longrightarrow H^2(g,G(\bar{K}),\lambda).$$

Or, si $B^u(\bar{K})$ désigne la partie unipotente de $B(\bar{K})$, $B^u(\bar{K})$ est caractéristique dans $B(\bar{K})$. Le g-noyau λ_B définit donc une action λ_T de g sur

---

(1) $g = \underline{\mathrm{Gal}}(K_s/_K)$

$T(\bar{K})$. En particulier, si T est défini sur K et si $\lambda = \mu$ = g-noyau défini par l'action naturelle de g sur $G(\bar{K})$, $\lambda_T = \mu_T$ n'est autre que l'action naturelle de g sur $T(\bar{K})$ et

$$H^2(g,T(\bar{K}),\mu_T) = H^2(g,T(\bar{K})) = H^2(K,T).$$

Du théorème 1.3., nous déduisons alors :

2.3 - *Théorème*.- Soient K un corps parfait, G un K-groupe algébrique, affine, connexe, $(B(\bar{K}),T(\bar{K}))$ un couple de Killing de $G(\bar{K})$, λ un K_s/K-noyau dans G, α une classe de $H^2(K,G,\lambda)$, α' une classe de $H^2(g,B(\bar{K}),\lambda_B)$ en relation avec α (une telle classe existe toujours d'après ce que l'on vient de dire). Si l'image de α' dans $H^2(g,T(\bar{K}),\lambda_T)$ est triviale, alors la classe α elle-même l'est.

2.4. - *Corollaire*.- Soient K un corps parfait de dimension cohomologique ≤ 1, G un K-groupe algébrique, affine, connexe. Toutes les classes de $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G))$ sont triviales et correspondent biunivoquement aux éléments de $H^1(\mathrm{Aut}\ G)$.

La première assertion découle du corollaire à la proposition 1.1., chap. X - § 7 de [27] - p. 170, la deuxième de la proposition 3.2. du chap. III, l'hypothèse $\dim K \leq 1$ impliquant en particulier que la fibre de J se réduit à un unique élément (n° 2.3 - p. III - 14 de [28] ou n° 2.4 de [29]).

2.5. - Le corollaire 2.4. précédent contient en particulier le théorème de Grothendieck (Théorème 3.5. de [32]).

2.6. - *Corollaire*.- Soient K un corps parfait, G un K-groupe algébrique, affine, connexe, T un K-tore maximal de G (il en existe toujours d'après un théorème bien connu de Grothendieck). Supposons $H^2(K,T) = 0$, alors $H^2(G) = H^2(\mathrm{lien}(G))$ est inessentiel.

. Dans le chapitre suivant, pour G réductif, T K-tore maximal quelconque de G, nous étudierons complètement la relation $H^2(K,T) \multimap H^2(G)$.

§ 3 - *Un premier résultat sur les corps locaux.*

3.1. - *Proposition.*- Soient K un corps parfait de dimension cohomologique $\leqslant 2$, G un K-groupe algébrique, affine, connexe. Supposons que G possède un K-tore maximal T qui se déploie sur une extension (nécessairement galoisienne finie) K' pour laquelle $Br(K') = 0$. Alors $H^2(G)$ est inessentiel.

En effet, montrons que $H^2(K,T) = 0$ et l'on appliquera le corollaire 2.6. Soit n le degré de K' ; comme $H^2(K',G_m) = 0$, $H^2(K',T) = 0$ et toute classe de $H^2(K,T)$ est annulée par n. Considérons alors la suite exacte de cohomologie

$$H^2(K,T_n) \to H^2(K,T) \xrightarrow{n} H^2(K,T) \to H^3(K,T_n)$$

déduite de $0 \to T_n \to T \xrightarrow{n} T \to 0$. L'application $H^2(K,T_n) \to H^2(K,T)$ est surjective ; comme d'autre part, $\dim K \leqslant 2$, $H^3(K,T_n) = 0$. On en tire $H^2(K,T) = 0$.

. La proposition 3.1. s'applique, en particulier, quand $K = k((T))$ avec k de caractéristique 0, non algébriquement clos, de dimension 1 et n'admettant aucune extension abélienne non triviale. K est alors un corps local à corps résiduel quasi-fini. J.P. Serre a montré ([28] p. S.2) que $Br(K) = 0$, $\dim K = 2$ et qu'il existe des extensions galoisiennes finies K' telles que $Br(K') = 0$ (si toutes satisfaisaient à cette propriété, K serait de dimension cohomologique $\leqslant 1$ et on retomberait dans le cadre du corollaire 2.4.).

3.2. - *Corollaire*.- <u>Soient</u> K <u>un corps local du type</u> k((T)), k <u>satisfaisant aux conditions précédentes</u>, G <u>un</u> K-<u>groupe algébrique</u>, <u>affine</u>, <u>connexe</u>. <u>Supposons que</u> G <u>possède un</u> K-<u>tore maximal</u> T <u>qui se déploie sur une extension</u> (<u>galoisienne</u>, <u>finie</u>) K' <u>pour laquelle</u> Br(K') = 0 (<u>ce qui est le cas</u>, <u>par exemple</u>, <u>si</u> G <u>est déployé sur</u> K). <u>Alors l'ensemble</u> $H^2(G)$ <u>est inessentiel</u>.

. Dans le cas où G est semi-simple, nous obtiendrons au chapitre VII un résultat beaucoup plus général.

CHAPITRE V

2-COHOMOLOGIE DES GROUPES REDUCTIFS - THEOREMES DE REDUCTION.

. Dans ce chapitre, X désigne un préschéma quelconque, X_{et}, $X_{f.p.p.f}$, $X_{f.p.q.c.}$ les sites étale, f.p.p.f, f.p.q.c. correspondants. On écrira $H^i(X)$, $H^i_{f.p.p.f}(X)$, $H^i_{f.p.q.c.}(X)$ selon que le site de base est X_{et}, $X_{f.p.p.f}$, $X_{f.p.q.c.}$.

§ 1 - *Réduction à un sous-groupe de Borel.*

1.1. - Rappelons d'abord le résultat suivant de [13], corollaire 5.5.5 - exposé XXII :

1.1.1. - *Proposition.*- Soient X un préschéma, G un X-groupe réductif, alors G possède localement pour la topologie étale (donc aussi pour les topologies f.p.p.f, f.p.q.c) des groupes de Borel (resp. des tores maximaux, des couples de Killing). Si T est un tore maximal de G, il existe localement pour la topologie étale (donc aussi pour les topologies f.p.p.f, f.p.q.c) des groupes de Borel contenant T.

. A un X-groupe réductif G, nous pouvons associer une gerbe β dite "gerbe des sous-groupes de Borel de G" sur le site étale X_{et} (resp. f.p.p.f, f.p.q.c) de X : pour $U \in \mathrm{ob}\, X_{et}$, (resp. $X_{f.p.p.f}$, $X_{f.p.q.c}$) les U-objets de β sont les sous-groupes de Borel B de G/U ; les U-morphismes entre deux tels B et B' sont les U-automorphismes intérieurs de G/U transformant B en B'. Il s'agit bien d'une gerbe car :

1°) les fibres sont localement non vides ;

2°) deux B et B' sont localement isomorphes (car localement conjugués pour la topologie étale, donc f.p.p.f et f.p.q.c).

. On construit de manière analogue les gerbes τ et κ associées respectivement aux tores maximaux et couples de Killing.

1.1.2. - *Corollaire*.- Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un sous-groupe de Borel (resp. d'un tore maximal, d'un couple de Killing) dans un X-groupe réductif est que la gerbe β (resp. τ, κ) soit triviale.

1.2.

1.2.1. - Soient X un préschéma muni de la topologie étale, (resp. f.p.p.f., f.p.q.c.), G un X-groupe réductif. Nous définissons le X-système de coefficents $\underline{\underline{\Gamma}}_\beta$ (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}_\kappa$) déduit de la gerbe β (resp. κ) de la manière suivante :

Pour tout objet U de X_{et} (resp. $X_{f.p.p.f}$, $X_{f.p.q.c}$),

- les U-objets de $\underline{\underline{\Gamma}}_\beta$ (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}_\kappa$) sont les couples (G',B') (resp. (G',B',T')) constitués d'une U-forme G' de G et d'un sous-groupe de Borel B' (resp. d'un couple de Killing (B',T')) de G'.

- les U-1-morphismes de $\underline{\underline{\Gamma}}_\beta$ (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}_\kappa$) de (G',B') vers (G'_1,B'_1) (resp. (G',B',T') vers (G'_1,B'_1,T'_1)) sont les U-isomorphismes f de G' vers G'_1 transformant B' en B'_1 (resp. (B',T') en (B'_1,T'_1)).

- étant donné deux U-1-morphismes

$$(G',B') \overset{g}{\underset{f}{\rightrightarrows}} (G'_1,B'_1) \quad (\text{resp. } (G',B',T') \overset{g}{\underset{f}{\rightrightarrows}} (G'_1,B'_1,T'_1))$$

de $\underline{\underline{\Gamma}}_\beta$ (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}_\kappa$), un U-2-morphisme de f vers g est une U-section α de G'_1 normalisant B'_1 (resp. (B'_1,T'_1)), α étant soumis à la condition $\underline{\mathrm{int}}(\alpha) \cdot f = g$. Dans le premier cas, les U-2-morphismes sont donc les U-sections de B'_1 lui-même, dans le cas resp. ce sont les U-sections de T'_1 puisque le normalisateur de T'_1 dans B'_1 se réduit à T'_1, G'_1 étant réductif.

1.2.2. - Remarques.-

1°) Si G possède un X-groupe de Borel B (resp. un X-couple de Killing (B,T)), $\underline{\underline{\Gamma}}_\beta$ (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}_\kappa$) n'est autre que le X-système de coefficients $\underline{\underline{\Gamma}}(G,B)$ (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}$ (G,B,T)) construit en 5.3.1. chap. I.

2°) Nous avons déjà observé en 5.3.2. - chap. I que dans le cas où G est un X_{et}-groupe semi-simple et B un X-Borel de G, le foncteur $\Omega_{\underline{\underline{\Gamma}}(G,B)}$ était pleinement fidèle. Or ce dernier se factorise précisément par le plongement de $\underline{\underline{\Gamma}}(G,B)$ dans $\underline{\underline{\Gamma}}(B)$. De plus, si U est un objet quelconque du site étale de X, B' une U-forme de B, d'après le corollaire 6.5. - chap. XXIV de S.G.A.D, il existe une U-forme G' de G dont B' soit un groupe de Borel, G' étant unique à un unique isomorphisme près induisant l'identité sur B'.
Il en résulte qu'alors $\underline{\underline{\Gamma}}(G,B)$ et $\underline{\underline{\Gamma}}(B)$ sont des systèmes de coefficients X_{et}-équivalents.

. La proposition suivante est une forme de l'argument de conjugaison de T.A. Springer (cf. chap. IV - n° 2.2).

1.2.3. - Proposition.- <u>Soient</u> X <u>un préschéma muni de la topologie étale</u> (resp. f.p.p.f, f.p.q.c), G <u>un</u> <u>X-groupe réductif</u>, $\underline{\underline{\theta}}_\beta$ (resp. $\underline{\underline{\theta}}_\kappa$) <u>le</u> <u>X-morphisme évident de</u> $\underline{\underline{\Gamma}}_\beta$ (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}_\kappa$) <u>vers</u> $\underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{\Gamma}}(G)$ <u>qui envoie l'objet</u> (G',B') (resp. (G',B',T')) <u>sur l'objet</u> G'. <u>Alors</u> $\underline{\underline{\theta}}_\beta$ (resp. ...) <u>induit une application surjective</u> $H^2(\underline{\underline{\theta}}_\beta)$ (resp. ...) <u>de</u> $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}_\beta)$ (resp. ...) <u>sur</u> $H^2(\underline{\underline{\Gamma}})$.

. Faisons la démonstration pour $\underline{\underline{\theta}}_\beta$. Montrons que toute classe α de $H^2(\underline{\underline{\Gamma}})$ provient d'une classe de $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}_\beta)$. Appliquons, pour cela, la technique donnée par A. Grothendieck. Soit $\underline{C}$ la gerbe sous-jacente à un représentant de α. Associons à $\underline{C}$ la gerbe $\underline{C}_\beta$ définie comme suit : ses U-objets, $U \in \mathrm{Ob}\, X_{et}$ (resp. $\mathrm{Ob}\, X_{f.p.p.f}$, $\mathrm{Ob}\, X_{f.p.q.c}$) sont les couples (x,B) constitués d'un U-objet x de $\underline{C}$ et d'un sous-groupe de Borel B de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(x)$; les U-morphismes de (x,B) vers (x_1,B_1) sont les U-morphismes f de x vers x_1 de C tels que $\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(f)(B) = B_1$.

. Il existe un morphisme naturel p de $\underline{C}_\beta$ vers $(\underline{\underline{\Gamma}}_\beta)_{01}$ qui associe à chaque U-objet (x,B) le U-objet $(\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(x),B)$. Comme tout U-automorphisme de (x,B) dans $\underline{C}_\beta$ définit une section de B , i.e. une 2-flèche de $\underline{\underline{\Gamma}}_\beta$ de source l'identité de l'objet $(\underline{\mathrm{Aut}}_{\underline{C}}(x),B)$, et réciproquement, on voit que $\underline{\underline{\Gamma}}_\beta$ opère sur $\underline{C}_\beta$ à l'aide de p et en fait un $\underline{\underline{\Gamma}}_\beta$-objet principal. Il est alors immédiat que la classe de $\underline{C}_\beta$ dans $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}_\beta)$ a précisément pour image dans $H^2(\underline{\underline{\Gamma}})$ la classe α de départ. $H^2(\underline{\underline{\Theta}}_\beta)$ est donc surjective.

1.2.4. - *Corollaire*.- <u>Supposons que</u> G <u>admette un sous-groupe de Borel</u> B (resp. un couple de Killing $K = (B,T)$), <u>alors l'application</u> $H^2(\underline{\underline{\Theta}}_B) : H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G,B)) \longrightarrow H^2(\underline{\underline{\Gamma}})$ (resp. $H^2(\underline{\underline{\Theta}}_K) : H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G,B,T)) \longrightarrow H^2(\underline{\underline{\Gamma}})$) <u>est surjective</u>.

1.2.5. - *Corollaire*.- <u>Le résultat du corollaire 2.4. chap. IV, et, en particulier, le théorème de Grothendieck</u> (cf. 2.5 chap. IV) <u>est encore valable si l'on retire l'hypothèse</u> K <u>parfait et ajoute celle</u> G <u>réductif</u>.

. En effet, puisque $\dim K \leq 1$, le corollaire à la proposition 1.1 du chapitre X - § 7 de [27] p. 170 s'applique encore. On en déduit que toutes les classes de $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}_K)$ donc de $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G))$ sont triviales. On applique alors le résultat de la remarque 2 - n° 2.4 de Serre p. 58 de [29] selon lequel, pour tout K-groupe réductif G , $H^1(G) = 0$, ce dernier point entraînant l'injectivité de l'application $J : H^1(\underline{\mathrm{Aut}}\, G) \longrightarrow H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G))'$.

1.2.6. - *Corollaire*.- Soient X le spectre d'un anneau A de valuation discrète hensélien à corps résiduel k parfait et quasi-fini, G un X-groupe réductif. Alors toutes les classes de $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G))$ sont triviales et en correspondance biunivoque avec les éléments de $H^1(\mathrm{Aut}\ G)$.

. Remarquons d'abord que puisque k est parfait et de dimension cohomologique ≤ 1 , G admet sur k un groupe de Borel. Or, par application du critère valuatif de propreté ([23] - Mumford - prop. 3 - p. 240 - chap. II) au schéma des groupes de Borel de G, on en déduit l'existence d'un X-groupe de Borel B dans G et par le corollaire 5.9.8 - chap. XXII de S.G.A.D. [13] l'existence d'un X-couple de Killing (B,T) dans G. Or, par 2.6. de Br III [15], nous savons que, pour tout X-groupe commutatif lisse H, $H^i(X,H) = H^i(k,H)$, $i > 0$. Comme $\dim k \leq 1$, on en tire que toutes les classes de $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G,B,T))$, donc de $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G))$, sont triviales. D'autre part, par la proposition 8.1 - chap. XXIV de S.G.A.D, on sait que pour tout groupe algébrique, affine, lisse, connexe H, $H^1(X,H) = H^1(k,H) = 0$. On conclut alors comme précédemment dans le corollaire 1.2.5.

1.3. - *Utilisation de la cohomologie épaisse. Le théorème principal*.-

1.3.1. - Dans le chapitre III, nous avons introduit l'ensemble de 2-cohomologie épais $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}})$, ensemble des classes d'isomorphie d'objets de $Z^2(\underline{\underline{\Gamma}})$ où $Z^2(\underline{\underline{\Gamma}})$ a mêmes objets que $Z^2(\underline{\underline{\Gamma}})$, mais pour morphismes les $\underline{\underline{\Gamma}}$-morphismes $(\underline{\Phi},q)$ pour lesquels q est lié par une identité. Nous avons le théorème suivant qui précise le corollaire 1.2.4. :

Théorème.- Soient X un préschéma quelconque, G un X-groupe réductif. Supposons que G admette un sous-groupe de Borel B (resp. un couple de Killing K = (B,T)). Le morphisme $\underline{\underline{\theta}}_B : \underline{\underline{\Gamma}}(G,B) \to \underline{\underline{\Gamma}}(G)$.

(resp. $\underline{\underline{\theta}}_K : \underline{\underline{\Gamma}}(G,B,T) \to \underline{\underline{\Gamma}}(G)$) <u>induit une bijection</u> $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\theta}}_B)$ (resp. $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\theta}}_K)$) <u>de</u> $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G,B))$ (resp. $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G,B,T)$ <u>sur</u> $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G))$.

. Par les bijections précédentes, une classe triviale est envoyée sur une classe triviale, mais l'image inverse d'une classe triviale n'est pas nécessairement triviale.

. Montrons le théorème pour $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\theta}}_B)$; la démonstration serait similaire pour $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\theta}}_K)$. Montrons-le dans le cas particulier où $X = \operatorname{Spec} K$, K corps quelconque ; représentant tout $\underline{\underline{\Gamma}}$-objet principal ($\underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{\Gamma}}(G,B)$ ou $\underline{\underline{\Gamma}}(G)$) par un 2-cocycle de Čech à valeurs dans $\underline{\underline{\Gamma}}$ suivant la méthode du § 6 - chap. III, on montrerait le théorème dans toute sa généralité. Compte tenu de la proposition 1.2.3, $\mathbb{H}^2(\Theta_B)$ est clairement surjective. Soient alors $c = (f_s, g_{s,t})$, $c' = (f'_s, g'_{s,t})$ deux 2-cocycles de $\underline{\mathrm{Gal}}(K_s/K)$ à valeurs dans le 2-groupoïde $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}(G,B)$ (cf. chap. III. § n° 4.7) ; établir l'injectivité de $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\theta}}_B)$ revient à montrer que, si, après avoir injecté $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}(G,B)$ dans $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}G$, c et c' deviennent équivalents (au sens de la cohomologie épaisse), alors c et c' sont déjà équivalents (au sens épais) dans $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}(G,B)$. Or dire que c et c' sont équivalents dans $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}G$ signifie que, pour tout $s \in \underline{\mathrm{Gal}}(K_s/K)$ il existe un 2-morphisme $m_s : f_s \Longrightarrow f'_s$ dans $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}G$ tel que $f'_{s,t} = m_{st}^{-1} \circ f_{s,t} \circ (m_s * m_t)$. Mais f_s et f'_s provenant de $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}(G,B)$ sont des automorphismes de G qui stabilisent B. La suite exacte (prop. 2.1 - S.G.A.D. - XXIV) :

$$1 \longrightarrow B_{ad} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}(G,B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Autext}}\ G \longrightarrow 1$$

montre alors que, pour tout $s \in \underline{\mathrm{Gal}}(K_s/K)$, l'automorphisme intérieur de G défini par m_s appartient à B_{ad} , i.e. c et c' sont déjà équivalents dans $\underline{\underline{\mathrm{Aut}}}(G,B)$.

1.3.2. - *Corollaire*.- Soient G un X-groupe réductif, B et B' deux X-Borel de G, il existe alors un B-torseur x tel que ${}^{x}B \simeq B'$, la classe de x appartenant au noyau de l'application
$H^1(B) \longrightarrow H^1(\underline{\mathrm{Int}}\ B) \longrightarrow H^1(\underline{\mathrm{Int}}\ G)$.

. Se déduit de la proposition 3.3 - chap. III. Par les résultats du § 2 - chap. XXIV de [13], on savait déjà que B et B' étaient des formes intérieures l'un de l'autre (dans le cas où $X = \operatorname{spec} K$, K corps quelconque, B et B' sont même conjugués par le théorème de conjugaison des K-sous-groupes paraboliques minimaux (Borel - Tits - Théorème 4.13 - b) de [4])).

1.3.3. - *Corollaire*.- Sous les hypothèses du théorème 1.3.1 si G est en outre supposé semi-simple, nous avons la chaîne d'isomorphismes :

$$\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(B)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G,B)) \xrightarrow[\sim]{\mathbb{H}^2(\theta_B)} \mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G))$$

En effet, sous l'hypothèse G semi-simple, on sait que $\underline{\underline{\Gamma}}(G,B)$ et $\underline{\underline{\Gamma}}(B)$ sont X-équivalents (remarque 2°) de 1.2.2.).

§ 2 - *Réduction à un tore maximal. Etude de la relation* $H^2(T) \longleftrightarrow H^2(G)$.

2.1.

. De la proposition 1.2.3, on tire l'existence d'une X-gerbe $\underline{C}_K$ localement (pour la topologie étale, f.p.p.f, f.p.q.c) liée par un tore maximal de G et d'un X-morphisme $\underline{C}_K \longrightarrow \underline{C}$ de gerbes localement (pour la topologie étale, ...) lié par l'injection de ce dernier dans G. Dans le cas où il existe globalement un tore maximal dans G, nous obtenons le résultat plus précis suivant :

2.1.1. - *Proposition*.- Soient X un préschéma muni de la topologie étale (resp. f.p.p.f, f.p.q.c), G un X-groupe réductif. Supposons que G possède un X-tore maximal T. Pour toute X-gerbe $\underline{C}$ localement pour la topologie étale (resp. f.p.p.f, f.p.q.c) liée par G, il existe une X-gerbe

$\underline{C}_T$ <u>localement liée par</u> T <u>et un</u> X-<u>morphisme</u> $\underline{C}_T \longrightarrow \underline{C}$ <u>de gerbes localement lié par l'inclusion</u> $T \hookrightarrow G$.

. On construit la catégorie fibrée $\underline{C}_T$ à partir de $\underline{C}$ comme suit :

- les U-objets de $\underline{C}_T$, $U \in ob(X_{et})$ (resp. $ob(X_{f.p.p.f})$, $ob(X_{f.p.q.c})$) , sont les triples (x',B',T) constitués

i) d'un U-objet x' de $\underline{C}$,

ii) d'un Borel B' de $\underline{Aut}_{\underline{C}}(x)$ contenant T.

- les U-morphismes de $\underline{C}_T$ de source (x',B',T) et de but (x'',B'',T) sont les U-morphismes f de $\underline{C}$ tels que $\underline{Aut}$ (f) transforme (B',T) en (B'',T).

. Par la proposition 1.1.1, on sait que, dans G, localement pour la topologie étale (resp. f.p.p.f, f.p.q.c), il existe des sous-groupes de Borel B contenant T. Ainsi $\underline{C}_T$ est une gerbe et comme pour tout objet (x',B',T) le normalisateur de T dans B' se réduit à T, $\underline{C}_T$ est localement lié par T et le morphisme naturel de $\underline{C}_T$ dans $\underline{C}$ par l'injection de T dans G.

2.1.2. - La proposition 2.1.1. s'applique, en particulier, quand X = spec K, K corps quelconque ; on sait qu'alors G possède un X-tore maximal (exposé XIV - théorème 1.1 de [13]).

2.1.3. - Si, dans la proposition 2.1.1, $\underline{C}$ est globalement liée par G, $\underline{C}_T$ est globalement liée par T. D'où :

Corollaire.- <u>Soient</u> X <u>un préschéma muni de la topologie étale</u> (resp. f.p.p.f, f.p.q.c), G <u>un</u> X-<u>groupe réductif admettant un tore maximal</u> T, <u>toute classe de</u> $H^2(G) = H^2(\underline{lien}(G))$ (resp. $H^2_{f.p.p.f}(G)$, $H^2_{f.p.q.c}(G)$) <u>appartient à l'image de</u> $H^2(T)$ $(= H^2_{f.p.p.f}(T) = H^2_{f.p.q.c}(T)$

cf. n° 5 de Groupe de Brauer III de [15] et 3.1.3 - chap. III de [26]) par la relation $H^2(T) \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\ominus\ H^2(G)$ (resp. ......).

2.2. - *Etude de la relation* $H^2(T) \ominus\!\!\rightarrow H^2(G)$.

2.2.1. - Nous la mènerons pour la topologie étale. Puisque G est réductif, ses sous-groupes de Cartan sont réduits aux tores maximaux eux-mêmes. En particulier, tout tore maximal T coïncide avec son centralisateur $Z_G(T)$ dans G. De plus le centre $Z(G)$ de G coïncide avec l'intersection des tores maximaux de G (S.G.A.D. - [13] - exposé XXII - corollaire 4.1.7. p. 173). Dans ces conditions, l'accouplement décrit dans la proposition 3.3.8. - chap. IV de [16] fournit une application.

$$\underline{\mathrm{Acc.}} : H^2(T) \times H^2(G) \longrightarrow H^2(T)$$

satisfaisant aux conditions suivantes : $p \in H^2(T)$, $q \in H^2(G)$,

i) p et q sont reliés par la relation $H^2(T) \ominus\!\!\rightarrow H^2(G)$ si et seulement si $\underline{\mathrm{Acc.}}(p,q)$ est la classe nulle de $H^2(T)$.

ii) Désignons par $i_*^{(2)}$ l'homomorphisme $H^2(Z(G)) \longrightarrow H^2(T)$ induit par l'inclusion $Z(G) \hookrightarrow T$. Alors pour tout $\alpha \in H^2(Z(G))$, on a :

$$\underline{\mathrm{Acc.}}\ (p,\alpha.q) = i_*^{(2)}(\alpha) + \underline{\mathrm{Acc.}}\ (p,q)$$

iii) Pour tout $\beta \in H^2(T)$,

$$\underline{\mathrm{Acc.}}\ (\beta + p,q) = - \beta + \underline{\mathrm{Acc}}\ (p,q)$$

2.2.2. - La classe unité ε de $H^2(G)$ définie par $\underline{\mathrm{Tors}}\ G$ étant évidemment reliée à la classe nulle de $H^2(T)$, nous avons $\mathrm{Acc.}(0,\varepsilon) = 0$. Or, toute classe q de $H^2(G)$ est de la forme $\alpha.\varepsilon$, i.e. transformée de ε par l'action d'un élément unique α de $H^2(Z(G))$, d'où

$$\underline{\mathrm{Acc.}}(0,q) = \underline{\mathrm{Acc.}}(0,\alpha.\varepsilon) = i_*^{(2)}(\alpha) + \underline{\mathrm{Acc.}}(0,\varepsilon) \quad \text{par ii)}$$

D'autre part, par iii),

$$\underline{\mathrm{Acc}}.(i_*^{(2)}(\alpha),\alpha.\varepsilon) = - i_*^{(2)}(\alpha) + \underline{\mathrm{Acc}}.(0,\alpha.\varepsilon)$$

D'où : $\underline{\mathrm{Acc}}.(i_*^{(2)}(\alpha), q) = \underline{\mathrm{Acc}}.(i_*^{(2)}(\alpha),\alpha.\varepsilon) = \underline{\mathrm{Acc}}.(0,\varepsilon) = 0$

qui montre que q est en relation avec la classe $i_*^{(2)}(\alpha)$.

. Réciproquement, cherchons à déterminer les éléments p de $H^2(T)$ qui sont en relation avec une classe q de $H^2(G)$:

$$\underline{\mathrm{Acc}}.(p,q) = 0 = \underline{\mathrm{Acc}}.(p,\alpha.\varepsilon) = i_*^{(2)}(\alpha) + \underline{\mathrm{Acc}}.(p,\varepsilon)$$

Or, par iii), $\underline{\mathrm{Acc}}.(p,\varepsilon) = - p$. D'où :

$$\mathrm{Acc}.(p,q) = 0 = i_*^{(2)}(\alpha) - p$$

et

$$p = i_*^{(2)}(\alpha)$$

2.2.3. - On obtient en résumé :

Proposition.- Soient G un X-groupe réductif, T un X-tore maximal de G. Toute classe q de $H^2(G)$ est en relation avec une classe p de $H^2(T)$: si nous écrivons q sous la forme $q = \alpha.\varepsilon$ pour un certain $\alpha \in H^2(Z(G))$, q est en relation avec la classe $p = i_*^{(2)}(\alpha)$ de $H^2(T)$. Réciproquement, si une classe p de $H^2(T)$ est reliée à l'élément $\alpha.\varepsilon$ de $H^2(G)$, $p = i_*^{(2)}(\alpha)$.

(En particulier, le domaine de la relation $H^2(T) \leftrightarrow H^2(G)$ est précisément l'image de $i_*^{(2)}$, i.e. le noyau de $H^2(T) \longrightarrow H^2(T_{ad}))$.

2.2.4. - *Remarques*.-

1°) Le diagramme

$$\begin{tikzcd} H^2(Z(G)) \arrow[rr, "i_*^{(2)}"] \arrow[dr] & & H^2(T) \arrow[dl] \\ & H^2(G) & \end{tikzcd}$$

n'est pas nécessairement commutatif. Par exemple 0 dans $H^2(Z(G))$ est en relation avec toute classe triviale de $H^2(G)$ par le corollaire 3.3.7 (i) - chap. IV de [16] , mais clairement il n'en est pas de même du 0 dans $H^2(T)$.

2°) Dans le cas où $X = \mathrm{spec}\, K$ avec K corps parfait et où G admet un couple de Killing (B,T), le § 2 du chap. IV permettait d'associer à toute classe de $H^2(G)$ une classe α' de $H^2(B)$ et ensuite une classe de $H^2(T)$ en prenant l'image α'' de α' par l'application $H^2(B) \longrightarrow H^2(T)$. Comme cette dernière est compatible avec l'action de $H^2(Z(B)) = H^2(Z(G))$ sur $H^2(B)$ (corollaire 3.3.4. - chap. IV - [16]), on voit immédiatement que α'' coïncide avec la classe $i_*^{(2)}(\alpha)$ introduite plus haut.

2.2.5. - *Corollaire*.- Si α appartient à l'image de l'homomorphisme $H^1(T_{ad}) \longrightarrow H^2(Z(G))$, la classe $q = \alpha.\varepsilon$ de $H^2(G)$ est triviale.

2.2.6. - *Corollaire*.- Soit G un X-groupe réductif. S'il existe dans G un tore maximal T pour lequel l'homomorphisme $i_*^{(2)} : H^2(Z(G)) \longrightarrow H^2(T)$ est nul, alors toute classe de $H^2(G)$ est triviale. Nous avons, en outre, le diagramme suivant dans lequel tous les carrés et triangles sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
(1) & H^1(T) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(T_{ad}) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & H^2(Z(G)) \arrow[r, "i_*^{(2)}"] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\circ"] & 0 \arrow[d, "\circ"] \\
(2) & H^1(G) \arrow[r] & H^1(\underline{\mathrm{Int}}G) \arrow[r, two heads, "\delta^1"] & H^2(Z(G)) \arrow[r, "\circ"] \arrow[ur] & H^2(G) \arrow[r] & H^2(\underline{\mathrm{Int}}G)
\end{tikzcd}$$

<u>De plus, l'application</u> δ^1 <u>de (2) est surjective et toute classe de</u> $H^2(G)$ <u>contient une gerbe de la forme</u> <u>Tors</u> G' <u>où</u> G' <u>est une forme intérieure de</u> G <u>admettant un tore maximal isomorphe à</u> T.

(Dans ce diagramme, (2) est exacte dans le sens de la proposition 4.2.8. - chap. IV de [16]).

. En effet toute classe de $H^2(G)$ est triviale par le corollaire 2.2.5. Donc toute classe de $H^2(G)$ contient une gerbe de la forme <u>Tors</u> G' où G' est une forme intérieure de G. D'autre part, puisque le 0 de $H^2(T)$ est en relation avec toute classe de $H^2(G)$, le morphisme de gerbes <u>Tors</u> T $\longrightarrow$ <u>Tors</u> G' représente l'inclusion $T \hookrightarrow$ lien(G), i.e. G' contient un tore maximal isomorphe à T.

2.3. - *Applications*.

2.3.1. - Soit G un X-groupe semi-simple.

Notons $H^2(G)'$ le sous-ensemble de $H^2(G)$ constitué des classes triviales et $H^2(Z(G))'$ le sous-ensemble de $H^2(Z(G))$ constitué des α pour lesquels la classe $\alpha.\varepsilon$ appartient à $H^2(G)'$. La suite exacte

(3) $$H^1(G) \longrightarrow H^1(\underline{\mathrm{Int}}G) \longrightarrow H^2(G)' \longrightarrow 1$$

(cf. prop. 3.2.6. (iii) - chap. IV de [16]) est équivalente à

(4) $$H^1(G) \longrightarrow H^1(\underline{\mathrm{Int}}G) \longrightarrow H^2(Z(G))' \longrightarrow 1$$

Toute classe de $H^2(Z(G))'$ se relève donc en une classe de $H^1(\underline{\mathrm{Int}}G)$. Par la proposition 4.2.8. (ii) - chap. IV de [16] , on en déduit que toute classe de $H^2(Z(G))'$ est en relation avec la classe unité ε de $H^2(G)$.

Cela étant, considérons le cas où X est le spectre d'un corps parfait K, hypothèse de perfection sans doute superflue, G contenant un sous-groupe de Borel. Soient α une classe de $H^2(Z(G))'$, β une classe de $H^1(\underline{\mathrm{Int}}G)$ relevant α. Par le théorème 11.1.. de Steinberg "Regular elements of semi-simple algebraic groups" I.H.E.S. n° 25 [31] il existe dans $\underline{\mathrm{Int}}\,G$ un K-tore maximal T'_α tel que β appartienne à l'image de $H^1(T'_\alpha) \longrightarrow H^1(\underline{\mathrm{Int}}G)$. Par la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} H^1(T'_\alpha) \arrow[rr] \arrow[d] & & H^2(Z(G)) \arrow[d, equal] \\ H^1(\underline{\mathrm{Int}}G) \arrow[rr, "\delta^1"] & & H^2(Z(G)) \end{tikzcd} ,$$

on en déduit que α appartient à l'image de l'homomorphisme $H^1(T'_\alpha) \longrightarrow H^2(Z(G))$.

. Soit φ l'isogénie $G \longrightarrow \underline{\mathrm{Int}}G$; posons $T_\alpha = \varphi^{-1}(T'_\alpha)$. On obtient alors la proposition ci-dessous qui constitue en quelque sorte une réciproque au corollaire 2.2.5. :

Proposition.- <u>Soient</u> K <u>un corps parfait</u>, G <u>un</u> K-<u>groupe semi-simple contenant un</u> K-<u>sous-groupe de Borel. Pour toute classe</u> α <u>de</u> $H^2(Z(G))'$, <u>il existe un</u> K-<u>tore maximal</u> T_α <u>dans</u> G <u>tel que l'image de</u> α <u>par l'homomorphisme</u> $i_*^{(2)} : H^2(Z(G)) \longrightarrow H^2(T_\alpha)$ <u>soit nul. De plus, la classe</u> $\alpha.\varepsilon$ <u>contient une gerbe de la forme</u> <u>Tors</u> G' <u>où</u> G' <u>est une forme intérieure de</u> G <u>contenant un tore maximal isomorphe à</u> T_α.

. L'hypothèse "G contient un Borel" peut facilement être levée. Il suffira de remplacer G par sa forme intérieure quasi-déployée $G_{q.\acute{e}p}$ puisqu'alors $H^1(\underline{\mathrm{Int}}G) \simeq H^1(\underline{\mathrm{Int}}(G_{q.\acute{e}p}))$, $H^2(G) = H^2(G_{q.\acute{e}p})$.

2.3.2. - *Application à la 2-cohomologie des extensions radicielles.*-

Soient K un corps de caractéristique p, $\tilde{G}$ un K-groupe semi-simple simplement connexe déployé, $\tilde{T}$ un K-tore maximal déployé de $\tilde{G}$. L'application $H^2(K,Z(\tilde{G})) \longrightarrow H^2(K,\tilde{T})$ est injective et, par la proposition 2.2.3, la relation $H^2(\tilde{T}) \rightarrow H^2(\tilde{G})$ est bijective. Supposons, pour simplifier, que $\tilde{T}$ soit de rang 1 ; $\tilde{T}$ est alors isomorphe à G_m et $Z(\tilde{G})$ à un groupe de racines de l'unité. Considérons maintenant une extension radicielle $K' = K(a)$ engendrée par un élément a tel que $a^p \in K$, $a^p \notin K^p$.

2.3.2.1. - Lemme.- Sous les hypothèses précédentes, l'application $H^2(K,\tilde{G}) \longrightarrow H^2(K',\tilde{G})$ est surjective.

En effet, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{lccc}
 & 0 & \longrightarrow & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
(1) & H^2(K,Z(\tilde{G})) & \longrightarrow & H^2(K',Z(\tilde{G})) & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
(2) & H^2(K,G_m) & \longrightarrow & H^2(K',G_m) & \longrightarrow 0 \\
 & \updownarrow\wr & & \updownarrow\wr & \\
(3) & H^2(K,\tilde{G}) & \longrightarrow & H^2(K',\tilde{G}) &
\end{array}$$

dans lequel la ligne (2) est exacte à cause de la surjectivité bien connue de $Br(K) \longrightarrow Br(K')$ démontrée par Albert-Hochschild. On en déduit la surjectivité de (1) et par conséquent celle de (3).

2.3.2.2. - Soient N le noyau de l'application $H^2(K,G_m) \longrightarrow H^2(K',G_m)$ et M celui de $H^2(K,Z(\tilde{G})) \longrightarrow H^2(K',Z(\tilde{G}))$. M s'identifie à un sous-groupe de N. Par Hochsehild [19], th. 6, N (resp. M) s'identifie à un sous-groupe de $\underline{\mathrm{Ext}}$ (1) $(T, \mathrm{Lie}(G_m) \otimes_K K')$ (resp. $\underline{\mathrm{Ext}}(T, \mathrm{Lie}\,(Z(\tilde{G})) \otimes_K K')$). Or on sait que

---

(1) T = p-algèbre de Lie des dérivations de $K'/_K$.

$\underline{\mathrm{Lie}}(\tilde{G}_m) = \mathrm{Lie}({}_F\tilde{G}_m)$ et $\underline{\mathrm{Lie}}(Z(\tilde{G})) = \mathrm{Lie}({}_F Z(\tilde{G})) = 0$ où ${}_F G$ désigne le groupe de hauteur 1 associé à G (cf. notation de 1.4 - II - § 7 n° 1 de Gabriel - Demazure [14]; en particulier si $G = G_m$, ${}_F G = \mu_p = \mathrm{Spec}\,(\frac{K[t, t^{-1}]}{(t-1)^p})$). D'où $M = 0$ et

Proposition.- L'application $H^2(K,\tilde{G}) \longrightarrow H^2(K',\tilde{G})$ est bijective.

§ 3 - *Réduction au cas quasi-déployé.*

3.1. - Le but de ce paragraphe est de montrer que le calcul de $H^2(L)$ où L est un lien localement (pour la topologie étale, f.p.p.f, f.p.q.c.) représentable par un X-groupe réductif se ramène au calcul de $H^2(\underline{\mathrm{lien}}(G))$ avec G réductif, quasi-déployé. Par le fait même, on sera ramené à la situation du n° 2.2.

. Soient X un préschéma quelconque, G un X-groupe réductif, L un lien localement (pour la topologie étale, ... , ...) représentable par G. L est aussi localement représentable par un X-groupe réductif déployé G_o de même type que G. L définit donc un élément $[L]$ de $H^1(\underline{\mathrm{Autext}}\ G_o)$ (resp. $H^1_{f.p.p.f}(\underline{\mathrm{Autext}}\ G_o)$, $H^1_{f.p.q.c}(\underline{\mathrm{Autext}}\ G_o)$). Or la suite exacte

$$1 \longrightarrow (G_o)_{ad} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}\ G_o \underset{\curvearrowleft s}{\longrightarrow} \underline{\mathrm{Autext}}\ G_o \longrightarrow 1$$

sur le site f.p.q.c de X possède un scindage s dont l'image dans $\underline{\mathrm{Aut}}\ G_o$ est précisément constitué des éléments qui laissent invariant le quasi-épinglage sous-jacent de G_o (cf. S.G.A.D. - exposé XXIV n° 3.10). La classe $[L]$ de $H^1_{f.p.q.c}(\underline{\mathrm{Autext}}\ G_o)$ définit donc par l'intermédiaire de s un torseur G_L sous $\underline{\mathrm{Aut}}\ G_o$, pour la topologie f.p.q.c. Par construction même, G_L est quasi-déployé. Ce qui précède est encore vrai pour les topologies étales et f.p.p.f, car nous avons les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\underline{\text{Autext}}\ G_o) & \hookrightarrow & H^1_{f.p.p.f}(\underline{\text{Autext}}\ G_o) & \hookrightarrow & H^1_{f.p.q.c}(\underline{\text{Autext}}\ G_o) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s_*^{(1)}} \\ H^1(\underline{\text{Aut}}\ G_o) & \hookrightarrow & H^1_{f.p.p.f}(\underline{\text{Aut}}\ G_o) & \hookrightarrow & H^1_{f.p.q.c}(\underline{\text{Aut}}\ G_o) \end{array}$$

Les deux inclusions horizontales de gauche résultent de S.G.A.D. - exposé XXIV p. 324, celles de droite de la proposition 3.1.2. - chap. III de [26].

3.2. - *Proposition*.- <u>Tout</u> X-<u>lien</u> L <u>localement représentable pour la topologie étale</u> (resp. f.p.p.f, f.p.q.c) <u>par un</u> X-<u>groupe réductif est représentable par un</u> X-<u>groupe réductif quasi-déployé</u> G_L.

3.3. - *Une application* : Soient X un schéma semi-local, connexe, G un X-groupe réductif, L un lien localement représentable par G , (B,T) un couple de Killing du groupe quasi-déployé G_L. Par le corollaire 6.11 p. 499 de S.G.A.D. - exposé XXVI, T qui est un sous-groupe de Lévi de B est le centralisateur dans G_L d'un tore maximal déployé S , $T = Z_{G_L}(S)$, et l'accouplement de la proposition 3.3.8 - chap. IV de [16] conduit à une application

$$\underline{\text{Acc}}.\ :\ H^2(S) \times H^2(G_L) \longrightarrow H^2(T)$$

permettant d'étudier la relation $\begin{array}{c} H^2(S) \\ \| \\ \mathrm{Br}(X)^d \end{array} \multimap H^2(G_L) = H^2(L)$ (d = dimension du tore S). <u>Acc</u>. se factorise par l'application

$$H^2(T) \times H^2(G_L) \longrightarrow H^2(T)$$

de 2.2.1.

§ 4 - X *est une courbe algébrique, affine, définie sur un corps algébriquement clos.*

. Soient X une courbe algébrique définie sur un corps K algébriquement clos de caractéristique p, G un X-groupe réductif. Par le corollaire 1.2. - p. 89 de Br. III - Groth. [15], on sait que $Br(X) = 0$.

a) G est déployé sur X : on peut prendre pour T le tore maximal trivial et appliquer les résultats de 2.2. Comme $Br(X) = 0$, $H^2(T) = 0$; toutes les classes de $H^2(G)$ sont donc triviales. Le centre $Z(G)$ de G est extension du tore $\underline{rad}(G)$ par un groupe fini F. $H^2(\underline{rad}(G)) = 0$. D'autre part, F est sans p-torsion et dans le cas où X est, en plus, affine, le corollaire 5.9 - exposé IX de S.G.A.A implique que $H^2(F) = 0$. Finalement $H^2(Z(G)) = 0$ et l'on a :

4.1. - *Proposition*.- Soient X une courbe algébrique, affine, définie sur un corps algébriquement clos, G un X-groupe réductif, déployé. Alors $H^2(G) = 0$.

. Si X n'est plus affine (par exemple si X est complète), $H^2(Z(G))$ n'est plus nécessairement nulle (cf. le corollaire 4.7 - exposé IX de [1] où l'on montre que $H^2(\mu_{n_X})$ est $\neq 0$). $H^2(G)$ contient alors plusieurs classes triviales.

b) Cas général : Soit L un lien sur X localement, (pour la topologie étale disons) représentable par G.

Par la proposition 3.2, il existe un groupe quasi-déployé G_L qui représente L : $H^2(L) = H^2(G_L)$. G_L contient un couple de Killing (B,T). Il existe un recouvrement étale de X de degré n (n premier à p) sur lequel T se déploie. Toutes les classes de $H^2(T)$ sont donc de n-torsion. Or, nous avons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T_n \longrightarrow T \xrightarrow{n} T \longrightarrow 0$$

de faisceaux pour la topologie étale où T_n est le noyau de la multiplication par n. On sait, en effet, que la puissance $n^{\text{ième}}$ (n premièr à p) est un morphisme surjectif en topologie étale (cf. n° 3.1 - exposé IX de Artin - [1] S.G.A.A.). Si X est une courbe affine, par le corollaire 5.9 - exposé IX de loc-citado, $H^2(X,T_n) = 0$. De l'exactitude de la suite

$$H^2(T_n) \longrightarrow H^2(T) \xrightarrow{n_*^{(2)}} H^2(T) \ ,$$

on déduit alors la nullité de $H^2(T)$. D'où :

4.2. - *Proposition*.- <u>Soient X une courbe algébrique, affine, définie sur un corps algébriquement clos, G un X-groupe réductif. Alors l'ensemble</u> $H^2(\underline{\Gamma}(G))$ <u>est inessentiel. De plus, pour tout lien L localement (pour la topologie étale) représentable par G ,</u> $H^2(L) = 0$.

. Reste à établir la deuxième assertion. Pour cela, il suffit de montre que si C_L est le centre de G_L , $H^2(C_L) = 0$. Or C_L est extension du tore $\underline{rad}(G_L)$ par un groupe fini F sans p-torsion. $H^2(F)$ est nul pour la raison indiquée en a). On démontre alors $H^2(\underline{rad}(G_L))$ de la même manière que l'on a démontré en b) l'égalité $H^2(T) = 0$.

. Si, dans la proposition 4.2, on susbtitue à l'hypothèse "K algébriquement clos" l'hypothèse "K séparablement clos", $H^2(T)$ est seulement nul modulo la p-torsion ; le résultat n'est donc pas valable.
On peut seulement dire que toute classe de $H^2(L)$ trivialisée par une extension de degré premier à p est déjà triviale.

CHAPITRE VI

2-COHOMOLOGIE DES GROUPES SEMI-SIMPLES DEFINIS SUR LES CORPS LOCAUX A CORPS RESIDUELS FINIS. GLOBALISATION.

§ 1 - Dans tout ce paragraphe, sauf mention, K désignera un corps complet pour une valuation discrète, non archimédienne, à corps résiduel fini. En particulier, K est localement compact.

1.1. - *Proposition*.- Tout K-groupe semi-simple simplement connexe contient un K-tore maximal compact.

. Dans le cas d'un corps local de caractéristique 0, cette proposition est contenue dans l'article [21] de M. Kneser p. 271. Mais on constate immédiatement (*) que la démonstration est indépendante de la caractéristique de K. Elle montre même que si $K = \mathbb{R}$, donc K archimédien, tout K-groupe semi-simple simplement connexe de l'un des types

$$^2A_n,\ B_n,\ C_n,\ ^1D_{2n},\ ^2D_{2n+1},\ ^2E_6,\ E_7,\ E_8,\ F_4,\ G_2$$

contient un K-tore maximal compact. Ceci est encore vrai si G est seulement semi-simple.

1.2. - Soit L un lien localement [pour la topologie étale (resp. f.p.p.f., f.p.q.c.)] représentable par un groupe semi-simple G. Par la proposition 3.2., chap. V, L est représentable par un groupe semi-simple G_L.

a) K est de caractéristique 0.

- Si $G = \tilde{G}$ est simplement connexe, il en est de même de G_L ; en vertu de la proposition 1.1., G_L contient donc un tore maximal anisotrope

(*) La démonstration de M. Kneser utilise de théorème 9.8 de [31], dans lequel on suppose K parfait. Mais compte tenu de l'observation qui le précède, on peut retirer cette hypothèse.

$\tilde{T}$. Par application du théorème de dualité de Tate-Nakayama sous la forme donnée par Serre dans [28] - Théorème 6, p. II, 40, on obtient $H^2(\tilde{T}) = 0$.

- Si G_L n'est plus simplement connexe, on considère un revêtement universel $\tilde{G}_L$ de G_L ; soit $\mu_{\tilde{T}}$ le noyau de l'isogénie $\tilde{T} \to T$ où T est l'image de $\tilde{T}$ par l'isogénie $\tilde{G}_L \to G_L$. La suite

$$1 \longrightarrow \mu_{\tilde{T}} \longrightarrow \tilde{T} \longrightarrow T \longrightarrow 1$$

est exacte. Puisque la dimension cohomologique stricte de K est égale à 2, $H^2(\tilde{T}) = 0$ implique $H^2(T) = 0$.

Par application du corollaire 2.2.6. du chapitre V, on en déduit alors que toutes les classes de $H^2(G_L)$ (resp. $H^2_{f.p.p.f}(G_L)$, $H^2_{f.p.q.c}(G_L)$) sont triviales, quelque soit le lien L localement représentable par G pour la topologie étale (resp. f.p.p.f, f.p.q.c.).

1.3. - Désignons par E le groupe des automorphismes extérieurs du groupe G_o déployé qui a même type que G ; on sait que E s'identifie à un sous-groupe du groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin de G_o (resp. s'identifie à ce dernier quand $G_o = \tilde{G}_o$ est simplement connexe). Puisque K est un corps de type (F) (cf. [28], p. III - 29 - n° 4.2),

$$\underline{\mathrm{Hom}}(K_s/K,E) \quad \text{et} \quad H^1(\underline{\mathrm{Autext}}\ G) = \frac{\underline{\mathrm{Hom}}(K_s/K,E)}{\text{conjugaison}}$$

sont finis. Sur K, il n'y a donc qu'un nombre fini de liens (resp. de classes de liens) localement représentables par G pour la topologie étale. D'autre part la caractéristique de K étant nulle, nous avons l'égalité $H^1(\underline{\mathrm{Autext}}\ G) = H^1_{f.p.p.f}(\underline{\mathrm{Autext}}\ G)$ qui implique par 3.1.2., chap. III, b) de [26] la chaîne d'égalités :

$$H^1(\text{Autext } G) = H^1_{f.p.p.f}(\underline{\text{Autext}}\ G) = H^1_{f.p.q.c}(\underline{\text{Autext}}\ G).$$

Enfin, la proposition 14, p. II - 21 de [28] donne la finitude de $H^2(C_L) = H^2_{f.p.p.f}(C_L) = H^2_{f.p.q.c}(C_L)$ pour tout lien L (1) (C_L = centre de L) et la remarque 3.1.4.3., chap. III de [26] les isomorphismes

$$\underline{\text{Aut}}_{et} L \simeq \underline{\text{Aut}}_{f.p.p.f.} L \simeq \underline{\text{Aut}}_{f.p.q.c} L.$$

Regroupant les renseignements précédents de 1.2. et 1.3., nous obtenons :

1.4. - *Théorème*.- Soient K un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, non archimédienne, à corps résiduel fini, G un K-groupe semi-simple. Alors les trois ensembles $H^2(\underline{\Gamma}(G))$, $H^2_{f.p.p.f.}(\underline{\Gamma}(G))$, $H^2_{f.p.q.c}(\underline{\Gamma}(G))$ sont inessentiels, finis et ont même nombre d'éléments. De plus, les trois ensembles $\mathbb{H}^2(\underline{\Gamma}(G)$, $\mathbb{H}^2_{f.p.p.f}(\underline{\Gamma}(G))$, $\mathbb{H}^2_{f.p.q.c}(\underline{\Gamma}(G))$ sont inessentiels, le premier étant fini.

b) K est de caractéristique $p > 0$.

1.5. - Il résulte toujours de la proposition 1.1. que si $G_L = \tilde{G}_L$ est un K-groupe semi-simple simplement connexe, $\tilde{G}_L$ possède un K-tore maximal $\tilde{T}$. Seulement, le théorème de dualité de Tate-Nakayama sous la forme donnée par Serre et utilisé en a) n'est plus applicable. Suivant SHATZ [30] - Théorème 4.5., il le redevient si on substitue à la topologie étale la topologie f.p.p.f. On en déduit encore :

$$H^2_{f.p.p.f}(G) = 0 = H^2(T) = H^2_{f.p.q.c}(\tilde{T}) .$$

Si G_L n'est plus simplement connexe, on procède évidemment comme dans a).

---

(1) localement représentable par G.

1.6. - *Théorème*.- Soient K un corps de caractéristique $p > 0$, complet pour une valuation discrète, non archimédienne, à corps résiduel fini, G un K-groupe semi-simple. Les ensembles $H^2(\underline{\Gamma}(G))$, $H^2_{f.p.p.f}(\underline{\Gamma}(G))$, $H^2_{f.p.q.c}(\underline{\Gamma}(G))$ (resp. $\mathbb{H}^2(\underline{\Gamma}(G))$, $\mathbb{H}^2_{f.p.p.f}(\underline{\Gamma}(G))$, $\mathbb{H}^2_{f.p.q.c}(\underline{\Gamma}(G))$) sont inessentiels.

1.7. - Sous les hypothèses du théorème 1.6., les ensembles $H^2(\underline{\Gamma}(G)),\ldots,$ ne sont pas nécessairement finis. Nous sommes donc amenés à considérer l'hypothèse supplémentaire suivante :

$$(H)\quad \begin{cases} p \text{ premier à } 2 \text{ si } G \text{ est de type } A_n\ (n \geq 1),\ D_n\ (n > 4),\ E_6. \\ p \text{ premier à } 2 \text{ et } 3 \text{ si } G \text{ est de type } D_4. \end{cases}$$

1.8. - Pour tout lien L localement (pour la topologie étale, f.p.p.f, f.p.q.c.) représentable par G, C_L est sans p-torsion, donc lisse, d'où les égalités :

$$H^2(C_L) = H^2_{f.p.p.f}(C_L) = H^2_{f.p.q.c}(C_L).$$

Or, en vertu de la proposition 80 de Shatz [30], $H^2_{f.p.p.f.}(C_L)$ est fini. Les ensembles $H^2(G_L)$, $H^2_{f.p.p.f}(G_L)$, $H^2_{f.p.q.c}(G_L)$ sont donc finis et ont même cardinalité.

1.9. - Il résulte de la proposition 45 de loc. citado, appliquant la méthode standard de la proposition 8 p. III - 27 de [28], que le H^1 calculé dans la topologie étale (donc aussi dans la topologie f.p.p.f. et f.p.q.c.) d'un groupe fini défini sur un corps local K de caractéristique p est fini quand son ordre est premier à la caractéristique p. Sous l'hypothèse (H) précédente, les ensembles

$$H^1(\underline{\mathrm{Autext}}\ G),\ H^1_{f.p.p.f}(\underline{\mathrm{Autext}}\ G),\ H^1_{f.p.q.c}(\underline{\mathrm{Autext}}\ G)$$

sont donc finis et ont même cardinalité. 1.8. et 1.9. permettent d'énoncer :

1.10. - *Corollaire*.- Sous les hypothèses du théorème 1.6., si, en plus, la condition (H) est satisfaite, les trois ensembles inessentiels $H^2(\underline{\Gamma}(G))$, $H^2_{f.p.p.f}(\underline{\Gamma}(G))$, $H^2_{f.p.q.c}(\underline{\Gamma}(G))$ sont finis et ont même nombre d'éléments.

1.11. - *Corollaire*.- Soient K un corps complet pour une valuation discrète à corps résiduel fini, $G = \tilde{G}$ un K-groupe semi-simple simplement connexe. Alors l'application surjective $J : H^1(\underline{\mathrm{Aut}}\ \tilde{G}) \to H^2(\underline{\Gamma}(G))'$ du n° 3.2, chap. III est un isomorphisme.

$$H^2(\underline{\Gamma}(G))' \cong H^2(\underline{\Gamma}(G))$$

Même résultat si l'on remplace la topologie étale par la topologie f.p.p.f. ou f.p.q.c.

Soit R la relation d'équivalence définie par J. Suivant le résultat du corollaire 2 de [7] de Bruhat-Tits généralisant un résultat de M. Kneser dans le cas p-adique, pour tout K-groupe semi-simple simplement connexe $\tilde{G}'$, $H^1(\tilde{G}') = 0$. Appliquant ceci à toutes les formes $\tilde{G}'$ de $\tilde{G}$, on voit que la relation d'équivalence R est triviale. J est donc un isomorphisme.

1.12. - *Corollaire*.- Soient K un corps complet pour une valuation discrète à corps résiduel fini, $G = \tilde{G}$ un K-groupe semi-simple simplement connexe. Supposons l'une des conditions suivantes satisfaite :

- ou K est de caractéristique 0,
- ou K est de caractéristique p et la condition (H) est satisfaite.

Alors les trois ensembles $H^1(\underline{\mathrm{Aut}}\ G)$, $H^1_{f.p.p.f}(\underline{\mathrm{Aut}}\ G)$, $H^1_{f.p.q.c}(\underline{\mathrm{Aut}}\ G)$ sont finis et isomorphes entre eux.

Dans le cas où K est de caractéristique 0, le corollaire précédent est vrai tout simplement parce que K est de type (F).

. Sous les hypothèses du corollaire 1.12. précédent, on peut déjà déduire la finitude de $H^1(\underline{\mathrm{Int}}\ \tilde{G})$. Nous obtiendrons plus loin (proposition 1.19.) un résultat plus général. En effet, nous avons la suite exacte de faisceaux de groupes :

$$1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Int}}\ \tilde{G} \xrightarrow{i} \mathrm{Aut}\ \tilde{G} \longrightarrow E \longrightarrow 1$$

qui donne la suite exacte d'ensembles :

$$H^0(E) \longrightarrow H^1(\underline{\mathrm{Int}}\ \tilde{G}) \xrightarrow{i_*^{(1)}} H^1(\underline{\mathrm{Aut}}\ \tilde{G}).$$

La finitude de $H^1(\mathrm{Int}\ \tilde{G})$ s'ensuit alors de la finitude évidente de $H^0(E)$ et de celle de $H^1(\underline{\mathrm{Aut}}\ \tilde{G})$ (on passe de la fibre de $i_*^{(1)}$ au-dessus de 0 à la fibre de $i_*^{(1)}$ au-dessus d'un élément quelconque α de $H^1(\underline{\mathrm{Aut}}\ \tilde{G})$ en tordant, suivant la technique usuelle, $\tilde{G}$ par un cocycle appartenant précisément à la classe de α).

1.13. - La trivialité de toute classe de $H^2(G)$ pour G semi-simple a les conséquences suivantes :

Proposition.- Soient K un corps complet pour une valuation discrète à corps résiduel fini, G un K-groupe semi-simple, $\tilde{G}$ un revêtement universel de G, $\phi : \tilde{G} \to G$ l'isogénie correspondante, μ son noyau, $\tilde{T}$ un K-tore maximal compact de G (il en existe par la proposition 1.1), T son image par ϕ dans G. Supposons l'isogénie ϕ centrale (ce qui est toujours le cas si $p = 1$ ou si $p > 3$ et si G ne possède pas de sous-groupes distingués de type A_n avec $p|n+1$ - cf. [5], n° 9.2.).

Nous avons le diagramme suivant dans lequel tous les carrés sont commutatifs.

$$
\begin{tikzcd}
(1) & H^1(\tilde{T}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(T) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\mu) \arrow[r, "i_*^{(2)}"] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\circ" marking] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\circ" marking] & 0 \arrow[d, equal] \\
(2) & 0 \arrow[r] & H^1(G) \arrow[r, "\delta^1"] & H^2(\mu) \arrow[r, "\circ" marking] & H^2(G)' \arrow[r, "\psi_*^{(2)}"] & H^2(G)' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\quad (*)
$$

. cf. le corollaire 2.2.6., chap. V. L'isogénie étant supposée centrale, la relation $H^2(\mu) \;\circ\!\!\rightarrow\; H^2(\tilde{G})'$ se factorise comme suit :

$$
\begin{tikzcd}
H^2(\mu) \arrow[r] \arrow[dr] & H^2(Z(\tilde{G})) \arrow[d, "\circ" marking] \\
& H^2(\tilde{G})'
\end{tikzcd}
$$

Or, toute classe de $H^2(Z(\tilde{G})) = H^2(Z(\tilde{G}))'$ est en relation avec la classe unité ε de $H^2(\tilde{G})$ (n° 2.3.1., chap. V). Donc toute classe de $H^2(\mu)$ est en relation avec la classe unité de $H^2(\tilde{G})$. D'autre part, l'application $\psi_*^{(2)}$ est un morphisme d'espaces homogènes compatibles avec les actions respectives de $H^2(Z(\tilde{G}))$ et $H^2(G)$ et il résulte de la suite exacte :

$$H^2(\mu) \longrightarrow H^2(Z(\tilde{G})) \longrightarrow H^2(Z(G)) \longrightarrow H^3(\mu) = 0$$

($H^3(\mu) = 0$ car $scd(K) = 2$) que l'homomorphisme $H^2(Z(\tilde{G})) \to H^2(Z(G))$ est surjectif, donc aussi l'application $\psi_*^{(2)}$. La ligne (2) du diagramme (*) est donc exacte (dans le sens de la proposition 4.2.8., chap. IV de [16]).

1.14. - *Corollaire*.- Sous les hypothèses et notations de la proposition 1.13., l'application $H^1(T) \to H^1(G)$ est surjective. De plus, toute classe de $H^2(\tilde{G}) = H^2(\tilde{G})'$ contient un représentant de la forme Tors $\tilde{G}'$ où la forme intérieure $\tilde{G}'$ de $\tilde{G}$ contient un K-tore maximal isomorphe à $\tilde{T}$ (donc compact).

1.15. - *Remarque*.- Dans la proposition 1.13., on peut facilement ôter l'hypothèse que ψ est centrale. Pour cela, on remarque que par le corollaire 4.2.8. exposé XXII, p. 180 de S.G.A.D., le noyau μ de ψ se décompose en un produit $\prod_{r\in R^-} \alpha_{q(r)} \cdot \mu_T \cdot \prod_{r\in R^+} \alpha_{q(r)}$ où les $q(r)$ sont les exposants radiciels de ψ et où μ_T désigne la partie centrale de μ. On en tire immédiatement, compte tenu du corollaire à la proposition 77 de [30], que $H^2(\mu) = H^2(\mu_T)$.

Dans les corollaires suivants, l'isogénie ψ n'est plus nécessairement supposée centrale.

1.16. - *Corollaire*.- L'application $\delta^1 : H^1(G) \to H^2(\mu)$ est bijective.

(Dans le cas où $G = \underline{\mathrm{Int}}\, \tilde{G}$, l'application δ^1 fait correspondre à la classe d'une forme intérieure $\tilde{G}'$ de $\tilde{G}$ l'élément α de $H^2(\mu)$ définie par $q = \alpha.\varepsilon$ où q est dans $H^2(\tilde{G})$ la classe de la gerbe Tors $\tilde{G}'$).

. Le corollaire 1.16. apporte ainsi une réponse affirmative à la question 3.3. a) - III p. 26 de C.G. de Serre [28]. Dans le chapitre suivant, nous établirons un résultat plus général.

1.17. - *Corollaire*.- $H^1(G)$ est fini.

. Le diagramme (*) écrit pour la topologie étale peut aussi s'écrire pour la topologie f.p.p.f ; en particulier, la ligne (2) reste exacte :

$$(2)' \quad H^1_{f.p.p.f}(\tilde{G}) \to H^1_{f.p.p.f}(G) \xrightarrow{\delta^1} H^2_{f.p.p.f}(\mu) \longrightarrow H^2_{f.p.p.f}(\tilde{G})$$

Comme toutes les classes de $H^2_{f.p.p.f}(\tilde{G})$ sont aussi triviales, l'application δ^1 de (2)' est surjective. Or $H^1_{f.p.p.f}(\tilde{G}) = H^1(\tilde{G}) = 0$. Donc, $\delta^1 : H^1_{f.p.p.f}(G) \to H^2_{f.p.p.f}(\mu)$ est bijective. Mais, par la proposition 80 de Shatz [30], $H^2_{f.p.p.f}(\mu)$ est fini et, par conséquent, il en est de même de $H^1(G) = H^1_{f.p.p.f}(G)$.

. Chemin faisant, nous avons d'ailleurs obtenu :

1.18. - *Corollaire*.- $H^2(\mu) = H^2_{f.p.p.f}(\mu) (= H^2_{f.p.q.c}(\mu))$.

1.19. - *Proposition*.- Soient K un corps complet pour une valuation discrète à corps résiduel fini, G un K-groupe réductif. Alors l'ensemble $H^1(G)$ est fini.

. Nous avons, en effet, la suite exacte

$$1 \longrightarrow \underline{rad}(G) \longrightarrow G \longrightarrow G/\underline{rad}(G) \longrightarrow 1$$

où $\underline{rad}(G)$ est le tore maximal contenu dans $Z(G)$. Par le corollaire 1.17. $H^1(G/rad(G))$ est fini ; par le théorème 45, b) de Shatz [30], $H^1(\underline{rad}\ G)$ l'est. D'où la finitude de $H^1(G)$ (pour obtenir la finitude de la fibre de $v : H^1(G) \to H^1(G/rad(G))$ au-dessus d'un élément α de $H^1(G/rad(G))$, on choisira un élément β dans $H^1(G)$ tel que $v(\beta) = \alpha$ et on tordra G par β suivant la méthode bien connue). En particulier, la proposition 1.19. établit le résultat conjecturé par Serre dans la remarque 2°), p. III - 32, de [28].

1.20. - *Traduction en termes de catégories Tannakiennes* [26] :

La trivialité de toute classe du $H^2(\underline{\Gamma}(G))$ dans les théorèmes 1.4. et 1.6. admet la traduction suivante :

"Toute catégorie Tannakienne sur K localement de la forme <u>Rep</u>(G) est globalement de la forme <u>Rep</u>(G') où G' est une K-forme de G". Si T est un K-tore maximal compact de G, le corollaire 1.14. nous dit alors que toute catégorie Tannakienne sur K définissant une classe de $H^2(G)$ admet un foncteur fibre possédant une graduation de type M où M est le groupe des caractères de T.

§ *2* - Dans le cas où le corps de base est $\mathbb{R}$, donc archimédien, nous avons le résultat suivant :

2.1. - <u>*Théorème*</u>.- <u>Soit</u> G <u>un</u> $\mathbb{R}$-<u>groupe algébrique semi-simple</u>. <u>Supposons que</u> G <u>satisfasse l'une des conditions suivantes</u> :

(i) <u>ou</u> G <u>est de l'un des types</u> ${}^2A_n$, B_n, C_n, ${}^1D_{2n}$, ${}^2D_{2n+1}$, ${}^2E_6$, E_7, E_8, F_4, G_2.

(ii) <u>ou</u> $G = \tilde{G}$ <u>est simplement connexe</u>.

<u>Alors toutes les classes de</u> $H^2(\underline{\Gamma}(G))$ <u>sont triviales et évidemment en nombre fini</u>.

. Dans le cas (i), nous avons en effet observé à la suite de la proposition 1.1. que si G est de l'un des types indiqués, G possède un $\mathbb{R}$-tore maximal compact T, donc tel que $H^2(T) = 0$. Ceci s'applique, en particulier, à toutes les formes quasi-déployées G_L de G (§ 3 - chap. V). Dans le cas (ii), la démonstration 4.2.3. de Harder [18] établit l'existence d'un $\mathbb{R}$-tore maximal $\tilde{T}$ dans $\tilde{G}$ tel que $H^2(\tilde{T}) = 0$ [$\tilde{T} = B \cap {}^{\sigma}B$, B $\mathbb{C}$-Borel de $\tilde{G}$, σ élément non trivial de <u>Gal</u>(C/R)] ; comme précédemment, on applique ceci à toutes les formes quasi-déployées G_L de G. Dans les deux cas, on conclut comme pour les théorèmes 1.4. et 1.6. à l'aide corollaire 2.2.6. du chap. V.

2.2. - Nous obtenons sur $\mathbb{R}$ des résultats analogues à ceux de la proposition 1.13. et du corollaire 1.14.

Proposition.- Soient G un $\mathbb{R}$-groupe semi-simple, $\tilde{G}$ un revêtement universel de G, $\psi : \tilde{G} \to G$ l'isogénie (centrale) correspondante, μ son noyau, $\tilde{T}$ le $\mathbb{R}$-tore maximal de la démonstration du théorème 2.1., T son image par ψ dans G. Nous avons alors le diagramme suivant dans lequel tous les carrés sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
H^1(\tilde{T}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(T) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\mu) \arrow[r, "i_*^{(2)}"] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^1(\tilde{G}) \arrow[r] & H^1(G) \arrow[r, "\delta^1"] & H^2(\mu) \arrow[r] & H^2(\tilde{G}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^2(G) \\
 & & & H^2(\tilde{G})' &
\end{tikzcd}$$

δ^1 est surjective (on retrouve ainsi le lemme de Harder 4.2.3. de [18]). De plus, toute classe de $H^2(\tilde{G})$ contient une gerbe de la forme $\mathrm{Tors}\ \tilde{G}'$ où $\tilde{G}'$ est une forme intérieure de $\tilde{G}$ admettant un $\mathbb{R}$-tore maximal isomorphe à $\tilde{T}$.

§ 3 - *Globalisation*.

3.1. - Soient K un corps de nombres, G un K-groupe semi-simple. Par la proposition 1.1., nous savons que dans le localisé G_v de G en une place finie v quelconque, il existe un K_v-tore maximal compact.

Lemme.- Soient K un corps de nombres, $\tilde{G}$ un K-groupe semi-simple simplement connexe, $\{v_1,\ldots,v_m\}$ un ensemble fini de places de K (non toutes infinies). <u>Il existe dans</u> $\tilde{G}$ <u>un</u> K-<u>tore maximal</u> $\tilde{T}$ <u>satisfaisant aux conditions suivantes</u> :

i) <u>sur</u> K_{v_i} , $i = 1,\dots,m$, $\tilde{T}$ <u>est compact quand</u> v_i <u>est finie</u>, <u>isomorphe au tore</u> $\tilde{T}$ <u>de la démonstration du théorème</u> 2.1. <u>quand</u> v_i <u>est infinie</u>.

ii) $\tilde{T}$ <u>satisfait au principe de Hasse pour la dimension</u> 2, i.e. <u>l'homomorphisme</u> $H^2(K,\tilde{T}) \to \prod_{\text{tous } v} H^2(K_v,\tilde{T})$ <u>est injectif</u>.

i) est démontré dans le lemme 5.5.3. de l'article [17] "uber die Galois Kohomologie Halbenifacher Matrizgruppen II" de G. Harder, ii) est une conséquence de l'appendice 1 du même article.

3.2. - Par la proposition 21 - p. II - 45 de C.G de Serre, l'homomorphisme $H^2(K,Z(\tilde{G})) \to \prod_{\text{tous } v} H^2(K_v,Z(\tilde{G}))$ applique $H^2(K,Z(\tilde{G}))$ dans $\coprod_{\text{tous } v} H^2(K_v,Z(\tilde{G}))$. Il s'ensuit que les localisés α_v de α sont nuls pour presque tous v. Soit $V = \{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ un ensemble fini de places v contenant toutes les places v en lesquelles α_v est non nul et au moins une place non archimédienne. Par le lemme 3.1., il existe un K-tore maximal $\tilde{T}_\alpha$ dans $\tilde{G}$ tel que $H^2(K_v,\tilde{T}_\alpha) = 0$ pour tout $v \in V$; $\alpha_v, v \in V$, est donc tué par l'injection de $Z(\tilde{G})$ dans $\tilde{T}_\alpha$. Comme $\tilde{T}_\alpha$ satisfait, en outre, principe de Hasse, l'image $i_*^{(2)}(\alpha)$ de α par l'homomorphisme $i_*^{(2)} : H^2(K,Z(\tilde{G})) \to H^2(K,\tilde{T}_\alpha)$ est donc nulle. Par la proposition 2.2.3. du chap. V, on en déduit que la classe $q = \alpha.\varepsilon$ (ε = classe unité de $H^2(\tilde{G})$) de $H^2(\tilde{G})$ est reliée à la classe nulle de $H^2(K,\tilde{T}_\alpha)$. q est donc triviale et sa classe contient une gerbe de la forme <u>Tors</u> $\tilde{G}'$, $\tilde{G}'$ admettant un tore maximal isomorphe à $\tilde{T}_\alpha$. Comme toute classe de $H^2(\tilde{G})$ est de la forme $q = \alpha.\varepsilon$, on a ainsi démontré :

Théorème 3.2. - *Soient* K *un corps de nombres,* $\tilde{G}$ *un* K-*groupe semi-simple simplement connexe. L'ensemble* $H^2(\underline{\Gamma}(\tilde{G}))$ *est inessentiel. En particulier, toutes les classes de* $H^2(\tilde{G})$ *sont triviales.*

Corollaire 3.3. - *Soient* K *un corps de nombres,* G *un* K-*groupe semi-simple,* $\tilde{G}$ *un revêtement universel de* G, μ *le noyau de l'isogénie* (évidemment centrale) $\varphi : \tilde{G} \to G$. *Nous avons alors la suite exacte*

$$H^1(K,\tilde{G}) \longrightarrow H^1(K,G) \xrightarrow{\ \delta^1\ } H^2(K,\mu) \longrightarrow 0$$

qui implique la surjectivité de δ^1. *Si, en plus,* K *est purement imaginaire et* G *sans facteur de type* E_8, δ^1 *est bijective.*

Corollaire 3.4. - *Soient* K *un corps de nombres purement imaginaire,* G *un* K-*groupe semi-simple* (non nécessairement simplement connexe). *Alors l'ensemble* $H^2(\underline{\Gamma}(G))$ *est inessentiel. En particulier, toutes les classes de* $H^2(G)$ *sont triviales.*

. Il suffit d'établir la deuxième partie du corollaire. Pour cela, considérons à nouveau la suite exacte (dans le sens de la prop. 4.2.8, chap. IV de [16]) :

$$H^2(\mu) \longrightarrow H^2(G) \xrightarrow{\ \varphi_*^{(2)}\ } H^2(G) \longrightarrow H^3(\mu).$$

où $\tilde{G}$ est un revêtement universel de G. L'application $\varphi_*^{(2)}$ est un morphisme d'espaces homogènes principaux compatible avec les actions respectives de $H^2(Z(\tilde{G}))$ et $H^2(Z(G))$ sur $H^2(\tilde{G})$ et $H^2(G)$. D'autre part, nous avons l'autre suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & H^2(Z(\tilde{G})/\mu) & & \\ & & & & \| & & \\ H^2(\mu) & \longrightarrow & H^2(Z(\tilde{G})) & \longrightarrow & H^2(Z(G)) & \longrightarrow & H^3(\mu) \end{array}$$

et $cd(k) \leq 2$ implique $H^3(\mu) = 0$, d'où la surjectivité de l'homomorphisme $H^2(Z(\tilde{G})) \to H^2(Z(G))$ et, par conséquent, de $\psi_*^{(2)}$. Comme toute classe de $H^2(\tilde{G})$ est triviale, il en est de même pour $H^2(G)$.

CHAPITRE VII

UTILISATION DES RESULTATS DE BRUHAT-TITS.

. L'objet de ce chapitre est d'étudier les conséquences de la théorie de Bruhat-Tits sur la 2-cohomologie galoisienne des groupes semi-simples. En particulier, les résultats de [7], [8], [9] permettent de montrer que si K est un corps local à corps résiduel k de dimension cohomologique ≤ 1 (par exemple k quasi-fini), $\tilde{G}$ un K-groupe semi-simple, simplement connexe, alors l'ensemble $H^2(\underline{\Gamma}(\tilde{G}))$ est inessentiel.

. Dans ce chapitre, sauf mention expresse, seule la topologie étale interviendra.

§ 1 - *Rappels.*

1.1. - Pour la définition des (B,N)-systèmes de Tits dans un groupe abstrait, nous renvoyons à [8] et à [9], ainsi que pour les définitions des sous-groupes d'Iwahori et parahoriques. Les exemples suivants de (B,N)-systèmes de Tits interviendront directement dans la suite.

i) Un exemple standard : Soient K un corps quelconque, G un K-groupe algébrique, réductif, B un sous-groupe de Borel du groupe $G(K_s)$ des K_s-points rationnels de G, N le normalisateur d'un tore maximal contenu dans B de $G(K_s)$. (B,N) constitue un système de Tits dans $G(K_s)$. Posons $g = \underline{\mathrm{Gal}}\ (K_s/K)$; g opère sur $G(K_s)$.

1.1.1. - *Proposition.*- g opère sur $G(K_s)$ en respectant la bornologie, i.e. l'homomorphisme $\emptyset$: $g \to (\underline{\mathrm{Aut}}\ G)(K_s)$ se factorise par

$g \to (\mathrm{Aut}_B G)(K_s)$ <u>où</u> <u>$\mathrm{Aut}_B G$</u> <u>est le sous-faisceau de</u> <u>Aut</u> G <u>des automorphismes</u> <u>préservant la bornologie.</u>

. Pour tout $s \in g$, $\vartheta(s)(B)$ et B sont conjugués ; les systèmes de Tits (B,N) et $(\vartheta(s)(B),\vartheta(s)(N))$ sont donc équivalents.

En vertu du théorème 3.5.1 de [9], ils définissent donc la même bornologie.

On déduit, en particulier, de la proposition précédente le fait que g opère sur l'immeuble de Tits associé au (B,N)-pair.

ii) Soient K un corps fini, G un K-groupe algébrique réductif. Puisque G est affine, G se réalise comme sous-groupe fermé d'un groupe linéaire $GL(n,\bar{K})$ pour un certain entier n. On obtient un (B,N)-système de Tits dans le groupe $G(K)$ des K-points rationnels de G en prenant

- <u>pour sous-groupe d'Iwahori</u> B : le sous-groupe des éléments de $G(K)$ représentés par des matrices dont les éléments en dessous de la diagonale sont tous nuls.

- <u>pour</u> N, le normalisateur dans $G(K)$ de l'ensemble des matrices diagonales de $G(K)$, i.e. l'ensemble des matrices monomiales de $G(K)$.

B est l'ensemble des points K-rationnels d'un K-sous-groupe de Borel de G dont l'existence est assurée par le fait que K est fini, donc de dimension cohomologique ≤ 1 [28]. Le sous-groupe U de B constitué des matrices n'ayant que des 1 sur la diagonale c'est-à-dire le sous-groupe unipotent maximal de B (donc de $G(K)$) est alors un p-sous-groupe de Sylow de $G(K)$ où p est le nombre d'éléments de K. B est précisément le normalisateur de U dans $G(K)$.

iii) Soient K un corps complet pour une valuation discrète, non archimédienne, à corps résiduel parfait [(1)] k (non nécessairement fini),

---

(1) Cette hypothèse est mineure. Il est possible de la lever.

$G = \tilde{G}$ un K-groupe semi-simple, simplement connexe. Par descente galoisienne à partir de la donnée radicielle affine construite dans le n° 1 de [8] du cas déployé (le groupe de Galois sur K de la plus petite extension galoisienne de K qui déploie $\tilde{G}$ opère sur l'immeuble de Tits du cas déployé), on montre ([8] - n° 4) l'existence d'une donnée radicielle affine bien déterminée ; cette dernière est associée à une (B,N)-pair dans $\tilde{G}(K)$. Ceci permet de définir les sous-groupes d'Iwahori et les sous-groupes parahoriques de $\tilde{G}(K)$. Deux sous-groupes d'Iwahori quelconques sont toujours conjugués ; deux sous-groupes parahoriques le sont si et seulement si ils sont de même type.

. Si K' est une extension galoisienne finie de K, le groupe de Galois <u>Gal</u>(K'/K) opère sur $\tilde{G}(K')$ en respectant la bornologie associée au (B,N)-système de Tits de $\tilde{G}(K')$, donc sur l'immeuble de Tits de $\tilde{G}(K')$.

1.2. - Continuons l'exemple (iii) précédent. Soient maintenant K_{nr} l'extension maximale non ramifiée de K, (B,N) le système de Tits de $\tilde{G}(K_{nr})$ obtenu par la méthode précédente (iii), P un k-groupe parahorique maximal relatif à (B,N) [dans le n° 5 de [8], on montre comment en obtenir]. P est une limite projective de groupes algébriques P_n, $n \geq 0$, connexes, définis sur k, les morphismes de transition $P_{n+1} \to P_n$ étant définis sur k à noyaux connexes, unipotents, caractéristiques (n° 5 de loc. citado). P possède ainsi une structure naturelle de k-groupe pro-algébrique extension d'un k-groupe réductif par un k-groupe pronilpotent (n° 4, § 6 de [9]). Cette dernière propriété est d'ailleurs valable quelque soit le k-sous-groupe parahorique considéré. Soient $\bar{P}$ le quotient de P_o par son radical unipotent et $\rho : P \to \bar{P}$ l'application canonique.

1.2.1. - *Proposition*.- <u>Il y a une bijection</u> $Q \to \rho^{-1}(Q)$ <u>de l'ensemble des sous-groupes paraboliques</u> <u>(resp. des sous-groupes de Borel)</u> <u>définis sur</u> k <u>de</u> $\bar{P}$ <u>sur l'ensemble des sous-groupes parahoriques</u> <u>(resp. des sous-groupes d'Iwahori)</u> <u>définis sur</u> k <u>de</u> $\tilde{G}(K_{nr})$ <u>contenus dans</u> P.

1.2.2. - *Définition*.- On dira que $\tilde{G}$ est résiduellement quasi-déployé sur K si $\tilde{G}(K_{nr})$ possède un sous-groupe d'Iwahori défini sur k.

1.2.3. - *Corollaire* (cf. prop. 2 de [7]).- Supposons $\dim k \leq 1$; alors $\tilde{G}$ est résiduellement quasi-déployé sur k.

. En effet, $\bar{P}$, qui est défini sur k, possède des sous-groupes de Borel $\bar{B}$ définis sur k, en vertu de l'hypothèse $\dim k \leq 1$. Par la proposition 1.2.1., l'image réciproque par ρ d'un tel sous-groupe de Borel est précisément un sous-groupe d'Iwahori de $\tilde{G}(K_{nr})$ défini sur k.

1.2.4. - Si c'est le cas, B possède une structure de groupe pro-algébrique, pro-résoluble, connexe défini sur k.

1.2.5. - Supposons le corps résiduel k fini, c'est-à-dire K localement compact. Ecrivons $\bar{B}$ sous la forme $\bar{B} = U.T$ où U est un p-groupe de Sylow de $\bar{B}$ (p = nombre d'éléments de k ; cf. (ii) du n° 1.1.) $\rho^{-1}(U)$ est un p-groupe de Sylow de P et B est précisément le normalisateur de $\rho^{-1}(U)$ dans P. On peut montrer ([20] - proposition du § 3) que B est aussi le normalisateur de $\rho^{-1}(U)$ dans $\tilde{G}(K_{nr})$ au moins quand $\tilde{G}$ est déployé sur K.

Proposition.- Supposons le corps résiduel k fini et $\tilde{G}$ déployé sur K. Alors le sous-groupe d'Iwahori B est le normalisateur dans $\tilde{G}(K_{nr})$ d'un p-groupe de Sylow de $\tilde{G}(K_{nr})$.

. Remarquons que, k étant supposé fini, un p-sous-groupe de Sylow de $\tilde{G}(K_{nr})$ est compact, donc borné et par conséquent contenu dans un sous-groupe parahorique maximal.

1.2.6. - Indiquons, enfin, que le sous-groupe $\tilde{G}(\mathcal{D})$ de $\tilde{G}(K_{nr})$ où $\mathcal{D}$ est l'anneau des entiers de K_{nr} est précisément un sous-groupe parahorique maximal de $\tilde{G}(K_{nr})$, cela quand $\tilde{G}$ se déploie sur K_{nr} (Théorème 5 - n° 5, de [8]). Il s'identifie au stabilisateur du réseau $g_Z = g_{s.c}$ de Chevalley dans l'algèbre de Lie g de $\tilde{G}$ (cf. notations de [3], cf. [20] n° 2).

§ 2 - *Quelques conséquences immédiates.*

2.1. - Reprenons le k-sous-groupe parahorique du n° 1.2. : $P = \varprojlim P_n$, $n \geq 0$. Pour tout $n \geq 0$, nous avons une suite exacte :

$$(1) \qquad 1 \to U_n \to P_{n+1} \to P_n \to 1$$

définie sur k de k-groupes algébriques, dans laquelle U_n est unipotent et caractéristique dans P_{n+1}. Ce dernier point implique $\underline{\underline{\Gamma}}(P_{n+1},U_n) = \underline{\underline{\Gamma}}(P_{n+1})$. Appliquons à (1) les résultats du n° 7.5. du chapitre III, avec les notations qui y sont employées ; pour tout $n \geq 0$, nous avons une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} * \longrightarrow & \underline{\underline{\Gamma}}'_n & \longrightarrow & \underline{\underline{\Gamma}}(P_{n+1}) & \longrightarrow & \underline{\underline{\Gamma}}''_n & \longrightarrow * \\ & & & \Vert & & & \\ & & & \underline{\underline{\Gamma}}(P_{n+1},U_n) & & & \end{array}$$

qui conduit à la suite exacte :

$$H^2(\underline{\underline{\Gamma}}'_n) \to H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(P_{n+1})) \to H^2(\underline{\underline{\Gamma}}''_n).$$

Si k est parfait, il résulte presque immédiatement du théorème 1.3. du chapitre IV que $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}'_n)$ se réduit à une seule classe triviale.

2.1.1. - *Proposition*.- Si k est parfait, toute classe de $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(P_{n+1}))$ qui est envoyée sur une classe triviale de $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}''_n)$ est triviale.

2.1.2. - *Corollaire*.- Si k est parfait tel que $\dim k \leqslant 1$, alors, $\forall n \geqslant 0$, toutes les classes de $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(P_n))$ sont triviales et $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(P)) \simeq \ldots \simeq H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(P_1)) \simeq H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(P_o))$.

En effet, par le corollaire 2.4. du chapitre IV, toutes les classes de $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}''_o)$ sont triviales.

2.1.3. - *Proposition*.- Soient K un corps local de corps résiduel k, $\tilde{G}$ un K-groupe semi-simple simplement connexe résiduellement quasi-déployé, B un k-sous-groupe d'Iwahori de $\tilde{G}(K_{nr})$, P un k-sous-groupe parahorique de $\tilde{G}(K_{nr})$ contenant B. Il existe une bijection de $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(P,B))$ sur $\mathbb{H}^2(\underline{\underline{\Gamma}}(P))$.

cf. le théorème 1.3.1., chap. V.

2.2. - *Réduction à un sous-groupe d'Iwahori*.

2.2.1. - Soient g un groupe profini, G un g-groupe i.e. un groupe du topos $\mathcal{B}_g$ des ensembles munis de la topologie discrète sur lesquels g opère continûment à gauche. Supposons G muni d'un (B,N)-système de Tits. Désignons par $\underline{\mathrm{Autext}}_B(G)$ le sous-faisceau image de $\underline{\mathrm{Aut}}_B(G)$ par l'homomorphisme $\underline{\mathrm{Aut}}(G) \to \underline{\mathrm{Autext}}(G)$.

Définition.- On dira qu'un lien L de $\mathcal{B}_g$ localement représentable par G respecte la bornologie de G associée au système de Tits (B,N) si la classe de L appartient à l'image de $H^1(\underline{\mathrm{Autext}}_B(G))$ dans $H^1(\underline{\mathrm{Autext}}\ G)$.

. Nous savons ([16], p. 452 - chap. VIII - N° 7.4) que la donnée d'un lien L sur $\mathcal{B}_g$ localement représentable par G revient à celle d'un homomorphisme de g dans $\underline{\mathrm{Autext}}\ G$. Dans ces conditions, la donnée d'un lien L sur $\mathcal{B}_g$ localement représentable par G et respectant la bornologie de G revient à celle d'un homomorphisme de g dans $\underline{\mathrm{Autext}}_B G$.

2.2.2. - *Proposition*.- <u>Avec les notations précédentes, soit</u> L <u>un lien de</u> $\mathcal{B}_g$ <u>localement représentable par</u> G <u>et respectant la bornologie de</u> G. <u>Alors, pour toute classe</u> α <u>de</u> $H^2(L)$, <u>il existe un lien</u> L_B <u>à valeurs dans</u> B, <u>un morphisme de liens</u> $L_B \to L$ <u>localement représentable par l'injection</u> $B \hookrightarrow G$ <u>tel que</u> α <u>appartienne à l'image de</u> $H^2(L_B) \to H^2(L)$.

On reprend la méthode du n° 2.2. - chap. IV : il existe un représentant $(f_s, g_{s,t}), s,t \in g$, de α pour lequel f_s respecte la bornologie ; $f_s(B)$ et B sont alors conjugués. Comme dans loc. citado, on conclut en utilisant le fait que B est égal à son propre normalisateur.

2.2.3. - Revenons à la situation du début de iii) n° 1.1. : si K' est une extension galoisienne finie du corps local K, le groupe de Galois $g = \underline{\mathrm{Gal}}(K'/K)$ opère sur $\tilde{G}(K')$ en respectant la bornologie ; la proposition précédente s'applique donc si l'on prend pour L le lien représentable sur $\mathcal{B}_g$ défini par le g-groupe $\tilde{G}(K')$ lui-même.

2.2.4. - Un autre cas d'application de la proposition 2.2.2. est le suivant : soit g un groupe profini opérant sur un groupe fini G continûment. Supposons G muni d'un (B,N)-pair scindé ([10]) ; alors g opère sur G en respectant la bornologie. En effet, B se décompose sous la forme $B = U.H$; en vertu du corollaire 3.5. - B - 14 de [10], U est un p-groupe de Sylow de G. On déduit de là que B est le normalisateur de U dans G. Soient $s \in g$, f_s l'automorphisme de G déterminé par s, (B^s, N^s) l'image par f_s du pair (B,N). $B^s = U^s.H^s$. U^s et U sont des p-sous-groupes de Sylow de G, donc nécessairement conjugués et il en est de même de leurs normalisateurs i.e. $B^s = f_s(B)$ et B sont conjugués.

2.2.5. - Nous avons à notre disposition deux méthodes de réduction ; une, c'est la précédente, qui consiste en une réduction de la cohomologie galoisienne de $\tilde{G}(K_{nr})$ à celle d'un sous-groupe d'Iwahori. Une autre consisterait à passer l'intermédiaire des p-sous-groupes de Sylow de $\tilde{G}(K_{nr})$ (p = nombre d'éléments de k) et à réduire la 2-cohomologie en question au normalisateur d'un tel p-groupe de Sylow. La proposition 1.2.5. nous dit alors que les deux méthodes coïncident.

§ 3 - *Le théorème fondamental.*

. Dans toute la suite de ce chapitre, K désignera un corps complet pour une valuation discrète, non archimédienne, à corps résiduel k.

3.1. - *Théorème.*- Supposons que k soit parfait et de dimension cohomologique $\leqslant 1$. Soit $\tilde{G}$ un K-groupe semi-simple simplement connexe. Alors l'ensemble $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G))$ est inessentiel. En particulier, toutes les classes de $H^2(\tilde{G})$ sont triviales.

. Par la proposition 3.2., chap. V, nous sommes, comme toujours, ramenés au cas représentable, c'est-à-dire, en fait, à démontrer la dernière partie du théorème. Dans un premier temps, nous allons montrer que $H^2(K_s/K,\tilde{G}(K_s))$ se réduit à $H^2(K_{nr}/K,\tilde{G}(K_{nr}))$. Pour cela, considérons le diagramme commutatif suivant dans lequel $\tilde{T}$ désigne un K-tore maximal de $\tilde{G}$.

$$\begin{tikzcd}
(2) & H^2(K_{nr}/K,\tilde{G}(K_{nr})) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] & H^2(K_s/K,\tilde{G}(K_s)) \arrow[r] & H^2(K_s/K_{nr},\tilde{G}(K_s)) \\
(3) & H^2(K_{nr}/K,\tilde{T}(K_{nr})) \arrow[r] \arrow[u] & H^2(K_s/K,\tilde{T}(K_s)) \arrow[r] \arrow[u] & H^2(K_s/K_{nr},\tilde{T}(K_s)) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Or, il est bien connu que le corps K_{nr} est (C_1), bien que non complet, (Théorème de Lang - théorème 27 p. 116 de [30]), donc de dimension cohomologique $\leqslant 1$. D'où

(i) $H^2(K_s/K_{nr},\tilde{T}(K_s)) = 0$ } par l'application de la page 170 - chap. X - § 7 de [27].

ii) $H^1(K_s/K_{nr},\tilde{T}(K_s)) = 0$ }

iii) $H^2(K_s/K_{nr},\tilde{G}(K_s)) = 0$ par le théorème de Grothendieck (cf. n^{os} 2.4. et 2.5. du chap. IV).

Par ii), la ligne (3) s'insère dans :

$$0 \longrightarrow H^2(K_{nr}/K,T(\tilde{K}_{nr})) \xrightarrow{\sim} H^2(K_s/K,\tilde{T}(K_s)) \longrightarrow 0$$

(qui est d'ailleurs un morceau de la suite spectrale de groupes - voir prop. 5 - chap. VII - § 6 - p. 126 de [27]), ce qui donne le diagramme commutatif

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} H^2(K_{nr}/K,\tilde{G}(K_{nr})) \arrow[r, "\mathrm{Inf}"] & H^2(K_s/K,\tilde{G}(K_s)) \arrow[r] & 0 \\ H^2(K_{nr}/K,\tilde{T}(K_{nr})) \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "\sim"] & H^2(K_s/K,\tilde{T}(K_s)) \arrow[u, "\phi"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Par le corollaire 2.1.3. ou la proposition 2.2.3 du chapitre V, toute classe de $H^2(K_s/K,\tilde{G}(K_s))$ est en relation avec une classe de $H^2(K_s/K,\tilde{T}(K_s))$, donc avec une classe de $H^2(K_{nr}/K,\tilde{T}(K_{nr}))$. Du diagramme (*), il résulte alors que toute classe de $H^2(K_s/K,\tilde{G}(K_s))$ est reliée à une classe de $H^2(K_{nr}/K,\tilde{G}(K_{nr}))$ par l'Inflation. Le théorème 3.1. résultera alors la proposition suivante :

3.2. - *Proposition*.- <u>Gardons les hypothèses du théorème</u> 3.1. <u>Pour tout</u> K-<u>groupe semi-simple simplement connexe</u> $\tilde{G}$, <u>l'ensemble</u> $H^2(K_{nr}/K,\tilde{G}(K_{nr}))$ <u>est inessentiel</u>.

. Puisque la dimension cohomologique du corps résiduel k est ≤ 1, $\tilde{G}$ est résiduellement quasi-déployé sur K (corollaire 1.2.3.). $\tilde{G}(K_{nr})$ possède donc des k-sous-groupes d'Iwahori dont on sait (1.2.4.) qu'ils peuvent être considérés comme des groupes pro-algébriques pro-résolubles sur k. Soit B l'un d'eux ; puisque $\underline{\mathrm{Gal}}(K_{nr}/K)$ opère sur $\tilde{G}(K_{nr})$ en respectant la bornologie, la proposition 2.2.2. s'applique, ce qui prouve que toute classe de $H^2(K_{nr}/K,\tilde{G}(K_{nr}))$ est reliée à au moins une classe de $H^2(K_{nr}/K,B)$ par la relation $H^2(K_{nr}/K,B) \multimap H^2(K_{nr}/K,\tilde{G}(K_{nr}))$ induite par l'inclusion $B \hookrightarrow \tilde{G}(K_{nr})$. Mais $B = \varprojlim B_n$, chaque B_n étant résoluble et défini sur k, les morphismes de transition $B_{n+1} \to B_n$ définis sur k, à noyaux connexes unipotents (1.2.). D'où : $H^2(K_{nr}/K,B) = \varprojlim_n H^2(K_{nr}/K,B_n) = \varprojlim_n H^2(\bar{k}/k,B_n)$. Une nouvelle application du théorème de Grothendieck (cf. aussi le corollaire 2.1.2.) assure alors que, pour chaque n, $H^2(\bar{k}/k,B_n) = 0$. On en déduit que toutes les classes de $H^2(K_{nr}/K,\tilde{G}(K_{nr}))$ sont triviales. La proposition 3.2. est donc établie et par conséquent le théorème 3.1.

3.3. - *Remarque*.- Dans le cas où le corps résiduel k n'est plus de dimension cohomologique ≤ 1, $\tilde{G}$ n'est plus résiduellement quasi-déployé ; la proposition 3.2. n'est plus vraie. On peut cependant sauver de la situation précédente les éléments suivants : on considère dans $\tilde{G}(K_{nr})$ un k-sous-groupe parahorique minimal P (qui n'est donc plus un k-sous-groupe d'Iwahori). Utilisant la conjugaison des k-sous-groupes parahoriques minimaux (proposition 7) - C.R. Acad. Sci. Paris t. 263 (28 nov. 1966) de Bruhat-Tits [6]), on obtient : "Toute classe de $H^2(K,\tilde{G})$ appartient à l'image de

$$H^2(K_{nr}/K,P) \multimap H^2(K_{nr}/K,\tilde{G}(K_{nr})) \multimap H^2(K,\tilde{G})".$$

3.4. - Le théorème 3.1. permet de compléter la conjecture II, p. III. 23 de [28] comme suit :

Conjecture : "Soient K un corps tel que $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ soit de dimension cohomologique ≤ 1 (resp. de type (C_2), resp. de type (C_2')), $\tilde{G}$ un K-groupe semi-simple simplement connexe, alors $H^1(\tilde{G}) = 0$ et toute K-gerbe localement liée par $\tilde{G}$ est triviale.

. En tout cas, nous avons vu au chapitre précédent que cette conjecture était vraie pour les corps de nombres purement imaginaire.

3.5. - Gardons les hypothèses du théorème 3.1., mais ne supposons plus G simplement connexe. Soient $\tilde{G}$ un revêtement universel de G, $\wp : \tilde{G} \to G$ l'isogénie correspondante, μ son noyau, μ_T la partie centrale de μ. La suite :

$$(4) \qquad \begin{array}{ccccccc} H^2(\mu_T) & \longrightarrow & H^2(Z(\tilde{G})) & \longrightarrow & H^2(Z(G)) & \longrightarrow & H^3(\mu_T) \\ \| & & & & & & \| \\ H^2(\mu) & & & & & & H^3(\mu) \end{array}$$

est exacte. Comme $cd(K) \leqslant 2$, $H^3(\mu_T) = 0$, d'où la surjectivité de $H^2(Z(\tilde{G})) \to H^2(Z(G))$ et par conséquent celle de $\wp_*^{(2)} : H^2(\tilde{G}) \to H^2(G)$ qui implique la trivialité de toute classe de $H^2(G)$ compte tenu du théorème 3.1. En appliquant ceci à tous les groupes G_L associés aux liens L localement (pour la topologie étale) représentable par G, on obtient :

(3.1.)' - *Théorème*.- Soient K un corps complet pour une valuation discrète non archimédienne, à corps résiduel parfait de dimension cohomologique $\leqslant 1$, G un K-groupe semi-simple. Alors l'ensemble $H^2(\underline{\Gamma}(G))$ est inessentiel. En particulier, toutes les classes de $H^2(G)$ sont triviales.

3.6. - Dans l'esprit de la proposition 3.2. utilisant la structure pro-algébrique de P, on obtient encore :

Proposition.- Supposons k parfait et de dimension cohomologique $\leqslant 1$. Soient K' une extension galoisienne finie non ramifiée de K, $\tilde{G}$ un K-groupe semi-simple simplement connexe, P un sous-groupe parahorique de $\tilde{G}(K_{nr})$. Alors, pour tout lien L localement représentable par P, $H^2(K'/K,L) = 0$. En particulier si P est défini sur k, $H^2(K'/K,P(K')) = 0$.

cf. le corollaire 2.1.2.

§ 4 - *Applications - Théorèmes de finitude.*

4.1. - *Proposition*.- Soient K un corps complet pour une valuation discrète, non archimédienne, à corps résiduel parfait de dimension cohomologique ≤ 1, G un K-groupe semi-simple, $\tilde{G}$ un revêtement universel de G, μ le noyau de l'isogénie ϑ correspondante. La suite

$$
(1)\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
H^1(\tilde{G}) & \longrightarrow & H^1(G) & \xrightarrow{\delta^1} & H^2(\mu) & \text{-o}\rightarrow & H^2(\tilde{G}) & \xrightarrow{\vartheta_*^{(2)}} & H^2(G) & \longrightarrow & 1 \\
\| & & & & \| & & \| & & & & \\
0 & & & & H^2(\mu)' & & H^2(\tilde{G})' & & & &
\end{array}
$$

est exacte (toujours dans le sens de la proposition 4.2.8., chap. IV de [16]). L'application δ^1 est bijective.

($H^2(\mu)'$ désigne, comme il se doit, l'ensemble des éléments α de $H^2(\mu)$ tels que $\alpha.\varepsilon \in H^2(G)'$).

. On répond ainsi affirmativement à la question 3.3. a) p. 26 - III - de C.G que Serre pose à la suite de sa conjecture II, p. III - 23, au moins pour les corps du type précédent, donc dans une situation plus générale qu'au chapitre précédent.

L'injectivité de δ^1 résulte de l'égalité $H^1(\tilde{G}) = 0$ (cf. Corollaire 2 de [7]) ; sa surjectivité vient du fait que toute classe de $H^2(\mu)$ est en relation avec la classe unité ε de $H^2(\mu)$ (cf. la démonstration de la proposition 1.13. du chap. VI).

4.2. - *Corollaire*.- Sous les hypothèses de la proposition 4.1., $H^2(\mu) = H^2_{f.p.p.f}(\mu) = H^2_{f.p.q.c}(\mu)$.

4.3. - Un exemple : Soient K un corps local, de caractéristique $\neq 2$, k de dimension cohomologique ≤ 1, f une forme quadratique sur K non dégénérée en n variables, $n \geqslant 3$, $SO(n)$ le groupe orhtogonal unimodulaire correspondant, $\underline{Spin}(n)$ sur revêtement universel. Nous avons la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow \underline{Spin}(n) \longrightarrow SO(n) \longrightarrow 1$$

qui conduit à la suite exacte :

$$0 \rightarrow H^1(K,SO(n)) \xrightarrow{\widetilde{\delta^1}} H^2(K,\mu_2) \longrightarrow \varepsilon$$

où ε désigne la classe unité de $H^2(K,\underline{Spin}(n))$.

. Pour toute forme quadratique en n variables sur k, f', de même discriminant que f, on sait que $\delta^1([f']) = w_2([f']) = w_2(f')$ n'est autre que la deuxième classe de Stiefel-Whitney de f' ou, si l'on veut encore, l'invariant de Hasse-Witt de la forme quadratique f'.

. Comme $H^2(K,\mu_2) = Br(K)_2$ possède seulement deux éléments, il en est de même de $H^1(K,SO(n))$.

. Supposons maintenant K de caractéristique 0 (hypothèse non indispensable). Le résultat de Steinberg rappelé en 2.3.1. - chap. V - s'applique. Il existe donc dans $SO(n)$ un K-tore maximal T tel que l'application $H^1(T) \to H^1(SO(n))$ soit surjective. L'homomorphisme cobord $\delta^1 : H^1(T) \to Br(K)_2$ est donc surjectif. Soit $\tilde{T}$ l'image réciproque de T dans $\underline{Spin}(n)$. L'homomorphisme $H^2(K,\mu_2) \to H^2(\tilde{T})$ est nul. Nous nous trouvons ainsi dans la situation du corollaire 2.2.6. du chap. V, i.e. tous les carrés et triangles de

$$\begin{tikzcd}
H^1(K,\tilde{T}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(K,T) \arrow[r] \arrow[d] & Br(K)_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^1(K,SO(n)) \arrow[r] & Br(K)_2 \arrow[r] \arrow[ur] & H^2(\underline{Spin}(n))' \arrow[r] & H^2(SO(n))
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs ; la forme intérieure $\tilde{G}'$ de Spin(n) non triviale contient un tore K-isomorphe à $\tilde{T}$ et la classe différente de la classe Tors(Spin(n)) est de la forme Tors $\tilde{G}'$

4.4. - *Proposition*.- Sous les hypothèses de la proposition 3.6., si P est supposé, en outre, défini sur k, $H^1(K'/K,\tilde{G}(K'),P(K')) = 0$. En particulier, si B est un k-sous-groupe d'Iwahori de $\tilde{G}(K_{nr})$ (il en existe toujours puisque dim k $\leq$ 1), $H^1(K'/K,\tilde{G}(K'),B(K')) = 0$.

. Pour les définitions de $H^1(K'/K,\tilde{G}(K'),P(K'))$, on renvoie à [32]. Par l'exactitude de 1.28. [32] (1), compte tenu du résultat de la proposition 3.6., tout élément de $H^1(K'/K,\tilde{G}(K'),P(K'))$ est relié à un élément de $H^1(K'/K,\tilde{G}(K'))$ donc à 0 puisque $H^1(K,\tilde{G}) = 0$. $H^1(K'/K,\tilde{G}(K'),P(K'))$ s'identifie donc à l'ensemble $p_*^1(0)$ de [32]. Or, d'après la proposition 1.8. de [32], il existe une application surjective de $H^1(K'/K,P(K'))$ vers $p_*^1(0)$. Mais, toujours puisque dim k $\leq$ 1,, $H^1(K'/K,P(K')) = \varprojlim_n H^1(k'/k,P_n(k')) = 0$. D'où $p_*^1(0) = 0$, c.q.f.d.

4.5. - *Proposition*.- Soient K un corps de nombres, $\tilde{G}$ un K-groupe semi-simple simplement connexe, K' une extension galoisienne finie de K suffisamment grande pour que $\tilde{G}$ se déploie sur K'. Désignons par $\mathcal{D}'$ l'anneau des entiers algébriques de K'. Alors l'ensemble $H^1(K'/K,\tilde{G}(K'),G(\mathcal{D}'))$ est fini.

. En effet, désignons par S (resp. A) l'ensemble fini des places v de K en lesquelles K' se ramifie (resp. des places archimédiennes de K). $\tilde{G}(\mathcal{D}')$ est un sous-groupe arithmétique de $\tilde{G}(K')$. Soit $v \notin S \cup A$; choisissons une place w qui prolonge v à K' (clairement ce qui suit est indépendant du prolongement w choisi). Le localisé $\tilde{G}(\mathcal{D}')_w$ est un sous-groupe parahorique maximal de $\tilde{G}(K')_w$ défini sur le corps résiduel de K_v (cf. n° 1.2.6. ; on a supposé $\tilde{G}$ déployé sur K'). Pour tout

(1) ou encore par l'exactitude de (5) remarque 9.3. - chap. III.

$v \notin S \cup A$, puisque K'_w/K_v est non ramifiée, la proposition 4.4. donne : $H^1(K'_w/K_v, \tilde{G}(K'), \tilde{G}(\mathcal{D}')) = 0$. Or, en vertu du n° 4.4. p. 182 de [32], pour tout ensemble S' fini, l'application

$$H^1(K'/K, \tilde{G}(K'), \tilde{G}(\mathcal{D}')) \longrightarrow \prod_{v \in S'} H^1(K'_w/K_v, \tilde{G}(K'), \tilde{G}(\mathcal{D}'))$$

est propre. Faisant $S' = S \cup A$, on en déduit la finitude de $H^1(K'/K, \tilde{G}(K'), \tilde{G}(\mathcal{D}'))$.

4.6. - *Proposition*.- <u>Soient</u> K <u>un corps complet pour une valuation discrète non archimédienne à corps résiduel</u> k <u>parfait de dimension cohomologique</u> ≤ 1, G <u>un</u> K-<u>groupe semi-simple</u>, B <u>un</u> K-<u>sous-groupe de Borel de</u> G. <u>Tout espace homogène sous</u> G <u>de groupe d'isotropie</u> B <u>est dominé par un espace principal homogène sous</u> G <u>donc est trivial si</u> $G = \tilde{G}$ <u>est simplement connexe</u> . <u>Si</u>, <u>de plus</u>, k <u>est fini</u>, <u>l'ensemble</u> $H^1(K,G,B)$ <u>est fini</u>.

. Par la remarque 9.3. - chap. III, nous savons qu'il existe une application cobord $\delta^1 : H^1(K,G,B) \to H^2(\underline{\Gamma}(G,B))$. Il résulte de la construction de δ^1 dans le § 9 du chapitre III que δ^1 provient d'une application (encore notée δ^1) $\delta^1 : Z^1(K,G,B) \to \mathbb{H}^2(\underline{\Gamma}(G,B))$ qui à chaque objet t de $Z^1(K,G,B)$ associe la classe d'équivalence (au sens épais) dans $\mathbb{H}^2(\underline{\Gamma}(G,B))$ du $\underline{\Gamma}(G,B)$-champ principal $\mathcal{R}_t$ des relèvements de t. Par construction même de $\mathcal{R}_t$, il existe un morphisme de $\mathcal{R}_t$ dans <u>Tors</u> G compatible avec les actions respectives de $\underline{\Gamma}(G,B)$ et $\underline{\Gamma}(G)$. Or, puisque, par le théorème 1.3.1. du chapitre V, l'application $\mathbb{H}^2(\underline{\Gamma}(G,B)) \to \mathbb{H}^2(\underline{\Gamma}(G))$ est une bijection, la classe de $\mathcal{R}_t$ dans $\mathbb{H}^2(\underline{\Gamma}(G,B))$ coïncide avec la classe triviale définie par le couple (G,B) lui-même (cette dernière étant aussi d'ailleurs la classe de <u>Tors</u> B ; cf. l'équivalence $\underline{\Gamma}(G,B) \simeq \underline{\Gamma}(B)$, remarque 1.2.2. 2°) et corollaire 1.3.3. - chap. V). Ainsi, le champ $\mathcal{R}_t$ est trivial et l'application $\delta^1 : H^1(K,G,B) \to H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G,B))$ fait correspondre à toute classe de $H^1(K,G,B)$ la classe triviale de $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G,B))$ défini par <u>Tors</u> B. Par l'exactitude de (5) - remarque 9.3. - chap. III, il en résulte que toute classe de $H^1(K,G,B)$ est reliée à une classe de $H^1(K,G)$ (1) d'où la première partie de la proposition 4.6. Supposons maintenant k fini. Soient alors α un élément de $H^1(K,G)$ représenté par un cocycle a, $p_*^1(\alpha)$ l'ensemble des éléments de $H^1(K,G,B)$ qui sont reliés à α. Il existe une application surjective de $\underline{\mathrm{Ker}}(H^1(K,B_a) \to H^1(K,G_a))$ sur $p_*^1(\alpha)$ (prop. 1.8. de [32]). Mais $H^1(K,B_a) = H^1(K,T_a)$ est fini par le théorème 45, b) de [30] ; il en est de même de $p_*^1(\alpha)$. Comme par le corollaire 1.17., chap. VI, $H^1(K,G)$ est fini, $H^1(K,G,B)$ l'est aussi, c.q.f.d.

----

(1) ce fait est d'ailleurs général et pourrait figurer comme corollaire au théorème 1.3.1. du chapitre V.

CHAPITRE VIII

GLOBALISATION

. Dans la suite, on entendra par "corps global" un corps de nombres ou un corps de fonctions en une variable sur un corps fini.

§ 1 - Dans ce paragraphe, nous étendrons au cas d'un corps de fonctions sur un corps fini les résultats du § 3 du chapitre VI obtenus dans le cas d'un corps de nombres.

1.1. - *Lemme*.- Soient X un préschéma, G un X-groupe réductif. Toute classe triviale de $H^2(G)$ est en relation avec la classe 0 de $H^2(Z(G))$.

. On sait, en effet, par le corollaire 3.3.7. (i) - chap. IV de [16] que si $q \in H^2(G)'$, quelque soit $\alpha \in H^2(Z(G))$, $\alpha \multimap \alpha.q$ par la relation $H^2(Z(G)) \multimap H^2(G)$. En particulier, $0 \multimap q$, c.q.f.d.

1.2. - *Théorème*.- Soient K un corps global, $\tilde{G}$ un K-groupe semi-simple simplement connexe. Les ensembles $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(\tilde{G}))$, $H^2_{f.p.p.f}(\underline{\underline{\Gamma}}(\tilde{G}))$, $H^2_{f.p.q.c}(\underline{\underline{\Gamma}}(\tilde{G}))$ sont inessentiels.

Montrons-le pour $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(\tilde{G}))$. Chemin faisant, on se rendra compte que le résultat est aussi vrai pour $H^2_{f.p.p.f}(\underline{\underline{\Gamma}}(\tilde{G}))$ et $H^2_{f.p.q.c}(\underline{\underline{\Gamma}}(\tilde{G}))$. Comme dans les chapitres précédents, on est ramené à montrer que toutes les classes de $H^2(\tilde{G})$ sont triviales, $\tilde{G}$ pouvant même être supposé quasi-déployé (cf. prop. 3.2. - chap. V). Soit $(\tilde{B},\tilde{T})$ un couple de Killing de G. Par la proposition 3.13. - exposé XXIV de [13], on sait que $\tilde{T}$ est isomorphe à une tore induit : il existe une extension galoisienne finie K_1 de K telle que $H^2(K,\tilde{T}) = H^2(K_1,G_m)$. L'application $H^2(K,\tilde{T}) \longrightarrow \prod_{\text{tous } v} H^2(K_v,\tilde{T})$ s'identifie alors à l'application $H^2(K_1,G_m) \longrightarrow \prod_{\text{tous } v} H^2((K_1,G_m)$ qui est injective puisque l'application $Br(K_1) \longrightarrow \prod_{\text{tous } v} Br((K_1)_v)$ l'est (ce dernier point étant une conséquence de l'égalité $H^1(C_{K_1}) = 0$, C_k désignant le groupe des classes d'idèles de K_1). $\tilde{T}$ satisfait donc au principe de Hasse. De plus, l'image $\tilde{T}_{ad}$ de $\tilde{T}$ par l'isogénie "normale" $\psi : \tilde{G} \to \tilde{G}_{ad}$ (cf. par exemple Halbenifache gruppenschenata über Dedekindringen [18] p. 173) est aussi un tore induit. On en déduit le diagramme suivant où tous les carrés sont commutatifs, toutes les lignes et colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} j^{(2)}_{Z(\tilde{G})} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
H^1(\tilde{T}_{ad}) \arrow[r, "\delta^1"] \arrow[d, "j^{(1)}_{\tilde{T}_{ad}}"] & H^2(Z(\tilde{G})) \arrow[r] \arrow[d, "j^{(2)}_{Z(\tilde{G})}"] & H^2(\tilde{T}) \arrow[d, "j^{(2)}_{\tilde{T}}"] \\
\prod_{\text{tous } v} H^1((\tilde{T}_{ad})_v) \arrow[r, "\Pi(\delta^1)_v"] & \prod_{\text{tous } v} H^2(Z(\tilde{G})_v) \arrow[r] & \prod_{\text{tous } v} H^2(\tilde{T}_v)
\end{tikzcd}$$

D'où $\operatorname{Ker} j^{(2)}_{Z(\tilde{G})} = 0$ i.e. l'homomorphisme $j^{(2)}_{Z(\tilde{C})}$ est injectif (cf. aussi l'article de T. ONO sur le "nombre de Tawagawa" n° 2.3. - [24]).

. Soit maintenant q une classe quelconque de $H^2(\tilde{G})$, q_v son localisé en la place v. Par les résultats du chapitre VI (Théorème 1.4. pour les places v non archimédiennes et Théorème 2.1. (ii) pour les places archimédiennes), on sait que q_v est triviale pour toute place v. Par le lemme 1.1., q_v est donc en relation avec la classe 0 de $H^2(Z(\tilde{G})_v)$ pour toute place v. Puisque $j^{(2)}_{Z(\tilde{G})}$ est injectif, il résulte immédiatement du diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^2(Z(\tilde{G})) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, hook, "j^{(2)}_{Z(\tilde{G})}"'] & H^2(\tilde{G}) \arrow[d] \\
\prod\limits_{\text{tous } v} H^2(Z(\tilde{G})_v) \arrow[r, "\circ"] & \prod\limits_{\text{tous } v} H^2(\tilde{G}_v)
\end{tikzcd}$$

que q est en relation avec le 0 de $H^2(Z(\tilde{G}))$, donc est triviale.

1.3. - *Remarque*.- Il ressort de la démonstration précédente que le théorème 1.2. est encore valable quand K est un corps de nombres et G semi-simple (non nécessairement simplement connexe) de l'un des types

$$^2A_n,\ B_n,\ C_n,\ ^1D_{2n},\ ^2E_6,\ E_7,\ E_8,\ F_4,\ G_2.$$

On sait, en effet, que, si c'est le cas, par le théorème 2.1. (i) du chapitre VI, pour toute place archimédienne v, donc pour toute place v (compte tenu du théorème 1.4. de loc. citado), q_v est triviale.

1.4. - *Corollaire*.- Supposons que K désigne ou un corps de nombres purement imaginaire ou un corps de fonctions en une variable sur un corps fini. Soit G un K-groupe semi-simple. Alors toutes les classes de $H^2(K,G)$ sont triviales (par conséquent l'ensemble $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(G))$ est inessentiel).

. Soient $\tilde{G}$ un revêtement universel de G et $\mathcal{J}$ l'isogénie $\tilde{G} \to G$. Comme dans la proposition 1.13. du chapitre VI, compte tenu de la remarque 1.15 du même chapitre, on démontre que $\mathcal{J}^{(2)}_* : H^2(\tilde{G}) \to H^2(\tilde{G})$ est surjective $[\mathrm{cd}(K) \leq 2]$, ce qui implique la trivialité de toute classe de $H^2(G)$.

. Dans le cas où K est un corps de nombres purement imaginaire, on réobtient le corollaire 3.4. du chapitre VI.

1.5. - *Corollaire*.- Soient K un corps global, G un K-groupe semi-simple, $\tilde{G}$ un revêtement universel de G, μ le noyau de l'isogénie correspondante. Alors l'application cobord $\delta^1 : H^1(K,G) \to H^2(K,\mu)$ est surjective. Même résultat si l'on substitue à la topologie étale la topologie f.p.p.f ou f.p.q.c. De plus, $H^2(\mu) = H^2_{f.p.p.f}(\mu) = H^2_{f.p.q.c}(\mu)$.

La dernière partie du corollaire résulte de l'exactitude de

$$H^1(K,\tilde{G}) \longrightarrow H^1(G) \longrightarrow H^2(\mu) \longrightarrow 0$$

et du fait que $H^1(\tilde{G}) = H^1_{f.p.p.f}(\tilde{G}) = H^1_{f.p.q.c}(\tilde{G})$ (resp. $H^1(G) = H^1_{f.p.p.f}(G) = H^1_{f.p.q.c}(G)$).

1.6. - Considérons maintenant le diagramme suivant dans lequel toutes les lignes et colonnes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^1(K,\tilde{G}) \arrow[r] \arrow[d, "j^{(1)}_{\tilde{G}}"] & H^1(K,G) \arrow[r] \arrow[d, "j^{(1)}_{\tilde{G}}"] & H^2(K,\mu) \arrow[r, "\delta^1"] \arrow[d, "j^{(2)}_{\mu}"] & 0 \\
\prod_{\text{tous } v} H^1(K_v,\tilde{G}) \arrow[r] & \prod_{\text{tous } v} H^1(K_v,G) \arrow[r] & \prod_{\text{tous } v} H^2(K_v,\mu) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

- Si K est un corps de nombres et G sans facteur de type E_8, on sait que $M = 0$ [22].

- Si K est un corps de fonction en une variable sur un corps fini, un récent résultat de G. Harder nous dit que M est encore nul.

Dans chacun des deux cas, on a donc $N \simeq P$. D'où :

1.6. - *Proposition*.- Soient K un corps global, G un K-groupe semi-simple. Supposons l'une des conditions suivantes satisfaites :

(i) ou K est un corps de nombres de G sans facteur de type E_8.

(ii) ou K est un corps de fonctions en une variable sur un corps fini.

Alors, la validité du principe de Hasse pour G (en dimension 1) est équivalente à sa validité pour μ (en dimension 2).

1.7. - *Remarques*.-

1°) La proposition 1.6. pourrait servir à démontrer la finitude de N puisque, en vertu d'un résultat bien connu de Tate-Poitou, P l'est [cf. proposition 3 - exposé XV de [25] pour le cas des corps de nombres]. Si K est un corps de nombres, la finitude de N résulte du théorème 6.8. de [2].

2°) Si K est un corps de nombres, dans [24], T. ONO a relié le nombre de Tamagawa $\tau(G)$ de G au nombre d'éléments de P par la formule

$$[P] = \frac{[H^o(K,\hat{\mu})]}{\tau(G)} .$$

Si G ne contient pas de facteur du type E_8, on obtient donc

$$N = \frac{[H^o(K,\hat{\mu})]}{\tau(G)} .$$

Ce résultat est à rapprocher de la question posée par J.P. Serre dans la remarque 2 du n° 4.7. - chap. III de [28] : y-a-t-il une relation entre le nombre de Tamagawa de G et la validité du principe de Hasse (pour G) ?

§ 2 - Le schéma de base est le spectre de l'anneau A des entiers d'un corps de nombres ou de l'anneau des fonctions régulières d'une courbe lisse, irréductible, complète, définie sur un corps fini.

2.1. - On pose $X = \underline{\text{spec}}\ A$.

Proposition 2.1. (cf. prop. 2.1. - exposé Br III de [15]) : Soient A un anneau de l'un des deux types précédents, K le corps des fractions de A. La suite

$$(1)\qquad 0 \to H^2(X,G_m) \to H^2(K,G_m) \to \coprod_{\substack{\text{points } x \\ \text{fermés de } X}} Br(K_x) \longrightarrow H^3(X,G_m)$$

est exacte.

. Dans cet énoncé, K_x désigne le corps local complété de K en la place x.

2.2. - *Corollaire.*- Si T est un X-tore induit, l'homomorphisme $H^2(X,T) \to H^2(K,T)$ induit par $\underline{\text{Spec}}\ K \to \underline{\text{Spec}}\ A$ est injectif.

2.3. - *Corollaire.*- Soient A l'anneau des entiers d'un corps de nombres, G un X-groupe réductif admettant un tore maximal T induit : $T \simeq \prod_{A_1/A} G_m^r$. Si le corps des fractions K_1 de A_1 est purement imaginaire ou n'a qu'une seule place réelle, toutes les classes de $H^2(X,G)$ (resp. $H^2_{f.p.p.f}(X,G)$, $H^2_{f.p.q.c}(X,G)$) sont triviales.

. En effet, sous les hypothèses du corollaire 2.3., $H^2(X,T) = H^2(A_1,G_m^r) = Br(A_1)^r = 0$ $(= H^2_{f.p.p.f.}(X,T) = H^2_{f.p.q.c}(X,T))$, l'égalité $Br(A_1) = 0$ provenant de l'exactitude de (1) appliquée à A_1. On conclut à l'aide du corollaire 2.2.6. du chapitre V.

2.4. - *Théorème.*- Supposons que A soit a) l'anneau des entiers d'un corps de nombres ou b) l'anneau des fonctions régulières d'une courbe lisse, irréductible, complète, définie sur un corps fini. Soit $\tilde{G}$ un A-groupe semi-simple simplement connexe. Alors les ensembles $H^2(\underline{\Gamma}(\tilde{G}))$, $H^2_{f.p.p.f}(\underline{\Gamma}(\tilde{G}))$, $H^2_{f.p.q.c}(\underline{\Gamma}(\tilde{G}))$ sont inessentiels.

. Montrons-le pour $H^2(\underline{\underline{\Gamma}}(\tilde{G}))$. Par notre réduction standard (§ 3 - chap. V), on est ramené à montrer la trivialité de toute classe de $H^2(\tilde{G})$ pour $\tilde{G}$ semi-simple, simplement connexe, quasi-déployé.

A) Pour commencer, établissons ce dernier point dans le cas particulier où A est soit l'anneau des entiers d'un corps de nombres purement imaginaire soit un anneau du type b). Soit $(\tilde{B},\tilde{T})$ un couple de Killing de $\tilde{G}$; $\tilde{T}$ est alors isomorphe à un tore induit. Donc, par le corollaire 2.2., l'homomorphisme $H^2(A,\tilde{T}) \to H^2(K,\tilde{T})$ est injectif. Notons A_x le complété local de A en la place x, $x \in X$. Le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
H^2(A,\tilde{T}) \arrow[rr, hook] \arrow[d] & & H^2(K,\tilde{T}) \arrow[dd, "j^{(2)}_{\tilde{T}}"] \\
\prod\limits_{\substack{\text{points } x \\ \text{fermés de } X}} H^2(A_x,\tilde{T}) \arrow[d, equal] & & \\
\prod\limits_{\substack{\text{tous points} \\ x \text{ de } X}} H^2(A_x,\tilde{T}) \arrow[rr] & & \prod\limits_{\substack{\text{tous points} \\ \text{de } X}} H^2(K_x,\tilde{T})
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Or, en vertu de la proposition 8.1. - exposé XXIV de [13] ou encore par (2.6.) de Br III - Groth. [15], $H^2(A_x,\tilde{T}) = H^2(k_x,\tilde{T})$ où k_x désigne le corps résiduel de l'anneau local hensélien A_x ; k_x est un corps fini, donc de dimension cohomologique ≤ 1. D'où $H^2(A_x,\tilde{T}) = 0$ pour tout $x \in X$. $H^2(A,\tilde{T})$ est donc inclus dans le noyau de $j^{(2)}_{\tilde{T}}$. Or ce dernier est nul puisque $\tilde{T}$ est induit (cf. démonstration du théorème 1.2.). $H^2(A,\tilde{T})$ est donc nul et toutes les classes de $H^2(A,\tilde{G})$ triviales (corollaire 2.2.6. - chap. V). De plus toute classe de $H^2(A,\tilde{G})$ contient une gerbe de la forme <u>Tors</u> $\tilde{G}'$ où $\tilde{G}'$ admet un tore maximal isomorphe à $\tilde{T}$.

B) A est l'anneau des entiers d'un corps de nombres quelconqque (donc un anneau de Dedekind). Considérons le diagramme suivant dans lequel les deux lignes et la 3ème colonne sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] \\
H^1(A,\tilde{T}_{ad}) \arrow[r, "\delta^1"] \arrow[d] & H^2(A,Z(\tilde{G})) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(A,\tilde{T}) \arrow[d, hook] \\
H^1(K,\tilde{T}_{ad}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^2(K,Z(\tilde{G})) \arrow[r] & H^2(K,\tilde{T}) \\
0 & &
\end{tikzcd}$$

On en tire immédiatement que le quotient de $H^2(A,Z(\tilde{G}))$ par $\mathrm{Im}\ \delta^1$ s'injecte dans $H^2(K,Z(\tilde{G}))$. Or, par le théorème 1.2., toute classe de $H^2(K,\tilde{G})$ est reliée à la classe 0 de $H^2(K,Z(\tilde{G}))$. Si nous notons $\dfrac{H^2(A,\tilde{G})}{\mathrm{Im}\ \delta^1}$ l'ensemble obtenu en identifiant dans $H^2(A,\tilde{G})$ deux classes quand on passe de l'une à l'autre par l'action d'un élément de $H^2(A,Z(\tilde{G}))$ appartenant à l'image de δ^1, il en résulte que toutes les classes de $\dfrac{H^2(A,\tilde{G})}{\mathrm{Im}\ \delta^1}$ sont triviales.

Mais par le corollaire 2.2.5. du chapitre V, on sait que toute classe de $H^2(A,\tilde{G})$ qui est reliée à une classe de $\mathrm{Im}\ \delta^1$ est triviale. On en déduit facilement que toutes les classes de $H^2(A,\tilde{G})$ le sont aussi, c.q.f.d.

2.5. - *Corollaire*.- Soient A un anneau de l'un des types a) ou b), G un A-groupe semi-simple, $\tilde{G}$ un recouvrement universel de G, $\psi : \tilde{G} \to G$ l'isogénie correspondante, μ son noyau. Alors l'application $H^1(A,G) \to H^2(A,\mu)$ (resp. $H^1_{f.p.p.f}(A,G) \to H^2_{f.p.p.f}(A,\ ),\ldots\ldots$) est surjective.

. On retrouve ainsi par voie purement cohomologique le résultat de Harder (prop. 4.2.2. de [18]

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARTIN et A. GROTHENDIECK - *Cohomologie étale des schémas*, Séminaire de Géométrie algébrique, 1963-1964, cité S.G.A.A.

[2] A. BOREL - *Some Finiteness Properties of Adels Groups over Number Fields*, I.H.E.S., n° 16.

[3] A. BOREL - *Properties and Linear Representations*, p. A - 1 à A - 55, Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups, Lecture Notes in Math., n° 131, Springer-Verlag.

[4] A. BOREL et J. TITS - *Groupes réductifs*, I.H.E.S., n° 27.

[5] A. BOREL et J. TITS - *Homomorphismes "abstraits" de groupes algébriques simples*, Annals of Math. 97 (1973), p. 499-571.

[6] F. BRUHAT et J. TITS - C.R. Acad. Sc. Paris, t. 263 (28 nov. 1966) série A, p. 822-825.

[7] F. BRUHAT et J. TITS - C.R. Acad. Sc. Paris, t. 263 (7 décembre 1966), série A, p. 867-869.

[8] F. BRUHAT et J. TITS - *Groupes algébriques simples sur un corps local*, Proceedings of a conference on local fields, Springer-Verlag, 1967, p. 23-36.

[9] F. BRUHAT et J. TITS - I.H.E.S., n° 41, 1972.

[10] C.W. CURTIS - *Groups with* (B,N)-*Pairs*, p. B-1 à B-39, Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups, Lecture Notes in Math., n° 131, Springer-Verlag.

[11] P. DEDECKER - *Cohomologie non abélienne*, Séminaire de l'Institut Mathématique de Lille, 1963-1964.

[12] P. DEDECKER - C.R. Acad. Sc. Paris, t. 258 (20 mai 1964). Groupe 1, p. 4.891 - 4.894.

[13] M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK - *Schémas en groupes*, Séminaire de Géométrie algébrique du Bois Marie, 1963-1964, cité S.G.A.D.

[14] M. DEMAZURE et P. GABRIEL - *Groupes algébriques*, Tome I, Masson and North-Holland, 1970.

[15] A. GROTHENDIECK - *Groupe de Brauer III*, Dix exposés sur la Cohomologie des Schémas, Masson and North-Holland, 1968.

[16] J. GIRAUD - *Cohomologie non Abélienne*, Springer-Verlag (Grundlheren), 1971.

[17] G. HARDER - Math. Zeitschr. 92 (1966), 396-415.

[18] G. HARDER - Inv. Math., 4, 1967, p. 165-191.

[19] G. HOCHSCHILD - *Simple Algebras with purely inseparable splitting fields*, Trans. Amer. Math. Soc., 79, 1955, p. 477-489.

[20] N. IWAHORI - Amer. Math. Soc., IX, 1966, p. 71-83.

[21] M. KNESER - Math. Zeitschr. 89, p. 250-272 (1965).

[22] M. KNESER - Amer. Math. Soc., IX, 1966, p. 159-163.

[23] D. MUMFORD - *Introduction to algebraic topology*, Preliminary version of first 3 chapters.

[24] T. ONO - Ann. of Math., 82, 1965, p. 88-111.

[25] G. POITOU - *Cohomologie galoisienne des modules finis*, Dunod, 1967.

[26] SAAVEDRA Néantro Rivano - *Catégories Tannakiennes*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, n° 265, 1972.

[27] J.P. SERRE - *Corps locaux*, Hermann, 1968.

[28] J.P. SERRE - *Cohomologie galoisienne*, Lectures Notes in Math., Springer-Verlag, n° 5, 1965, cité C.G.

[29] J.P. SERRE - *Cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires*, p. 53, Colloque sur la théorie des groupes algébriques (Bruxelles - 1962).

[30] S.S. SHATZ - *Profinite Groups Arithmetic and Geometry*, n° 67, Princeton University Press.

[31] R. STEINBERG - *Regular Elements of semi-simple algebraic Groups*, I.H.E.S. - n° 25.

[32] T.A. SPRINGER - Amer. Math. Soc., IX, 1966, p. 164-182.

[33] J. VALDERRAMA et J.C. DOUAI - C.R. Acad. Sc. Paris, t. 271, (5 oct. 1970) p. 632-634.

[34] *La Condition (I) apparaîtra dans un article en collaboration avec* P. DEDECKER et J. VALDERRAMA.

DEUXIEME THESE :

"MODELES MINIMAUX ET HOMOTOPIE RATIONNELLE"