

50376
1976
76

No d'ordre : 186

50376
1976
76

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR INGENIEUR

par

Mohamed BENREJEB

Ingénieur I.D.N.

SYNCHRONISATION DES SYSTEMES CONTINUS NON LINEAIRES EN REGIME FORCE.



Soutenue le 10 Juin 1976 devant le Jury d'Examen

MM.	C. MAIZIERES	Président
	P. BORNE	Rapporteur
	F. LAURENT	Examineur
	R. BOSSUT	Invité
	M. ANNABI	Invité

A mes Frères
A ma Soeur
A mes Parents

AVANT PROPOS

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire de Systématique de l'Université des Sciences et des Techniques de Lille I.

Nous sommes particulièrement sensible au grand honneur que Monsieur le Professeur Maizieres nous a fait en acceptant de présider notre Jury de Thèse. Qu'il trouve ici l'expression de notre profonde reconnaissance.

C'est un agréable devoir pour nous d'exprimer notre très vive reconnaissance à Monsieur Laurent, Maître de Conférences à l'Université de Lille I, qui a bien voulu nous accueillir au sein de son équipe. Qu'il trouve ici l'expression de notre très profonde gratitude pour l'enseignement qu'il a su nous dispenser, l'intérêt qu'il a porté à nos travaux et les conseils éclairés qu'il nous a prodigués.

Nous tenons à exprimer notre très vive reconnaissance à Monsieur Borne, Maître Assistant à Lille I et Chargé de Cours à l'Institut Industriel du Nord pour nous avoir guidé durant l'élaboration de cette thèse avec le sérieux et la compétence qui le caractérisent. Qu'il trouve ici le témoignage de notre très profonde gratitude.

Monsieur le Professeur Bossut, Directeur de l'Institut Industriel du Nord, nous a, à tout moment, apporté son soutien et plus particulièrement en acceptant de participer à notre Jury de Thèse. Nous tenons à ce qu'il reçoive ici le témoignage de notre très respectueuse reconnaissance ainsi que l'expression de notre sincère dévouement.

Nous sommes profondément touché que Monsieur Annabi, Directeur de l'Ecole Normale de l'Enseignement Technique de Tunis, ait bien voulu participer à notre Jury de Thèse. Nous lui exprimons ici toute notre reconnaissance.

Enfin, nous tenons à rendre hommage à l'esprit d'équipe qui règne dans le Laboratoire où nous avons travaillé : les chercheurs et le personnel ont toujours répondu avec empressement à nos sollicitations et par leur amicale présence nous ont aidé dans notre travail. Nous exprimons plus particulièrement toute notre sympathie à Monsieur Gentina, Maître Assistant à Lille I et Chargé de Cours à l'Institut Industriel du Nord, qui a su être à tout moment un interlocuteur intéressé et bienveillant, à l'esprit critique exercé. Nous adressons aussi à chacun nos remerciements les plus vifs.

Introduction Générale :

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent la détermination d'une condition suffisante, permettant l'application de la méthode du premier harmonique aux processus continus non linéaires de grande dimension en régime forcé.

Après avoir montré sur un exemple simple relatif au circuit ferro-résonnant série, qu'il est parfois possible de mettre en défaut la méthode du premier harmonique, nous avons recherché, dans le premier chapitre, des conditions permettant de conclure à l'unicité de réponse, condition nécessaire à la validité de cette méthode en vue de l'étude du régime forcé d'un processus.

Les travaux de Ljapunov /40/, Kotelyanski /30/, Laurent et Maizières /7/, Gentina et Borne /15/ nous ont permis, dans le deuxième chapitre, de mettre en évidence des conditions suffisantes d'unicité.

La recherche systématique de conditions qui tiennent compte des caractéristiques linéaire et non linéaire d'un processus, conduit à l'énoncé de théorèmes d'application simple.

Une troisième partie concerne l'extension des résultats obtenus aux systèmes interconnectés. Le rôle des interactions entre les divers sous systèmes dans l'analyse de la propriété d'unicité est ainsi mis en évidence par le choix d'une représentation particulière. Celle-ci permet une généralisation au cas des circuits couplés des résultats présentés au chapitre II et ce qu'elle que soit la nature, linéaire ou non linéaire, des interactions.

L'étude de la stabilité et son application à la synthèse des systèmes asservis ainsi que l'amélioration des caractéristiques dynamiques d'un processus, sont envisagées dans un quatrième chapitre.

CHAPITRE I

Statique et Dynamique des systèmes asservis non linéaires.

1 - Introduction

Les méthodes d'étude des systèmes linéaires à partir de la notion de fonction de transfert et de ses représentations constituent un outil puissant pour l'analyse et la synthèse des systèmes asservis. L'extension de ces méthodes aux processus présentant des organes non-linéaires pose souvent des problèmes concernant la validité de leur application.

Ce chapitre a pour but d'étudier les limitations de l'approximation du premier harmonique, qui constitue une méthode très utilisée dans les bureaux d'étude pour l'analyse et la synthèse des systèmes non-linéaires

L'idée de base de cette méthode consiste à représenter une non-linéarité par une fonction de transfert définie comme le rapport entre le fondamental du développement en série de Fourier du signal de sortie et le signal d'entrée de la non-linéarité. L'analyse des processus non-linéaires peut donc être effectuée en remplaçant chaque non-linéarité par une approche linéaire et en étudiant le système linéaire résultant. Ainsi les effets des harmoniques supérieurs et des sous harmoniques du signal extérieur sont supposés négligeables. Cette méthode peut donc s'appliquer lorsque les amplitudes des harmoniques sont relativement petites en comparaison de celles du fondamental, ou encore lorsque le système produit une atténuation suffisante des harmoniques. Les résultats obtenus, évaluation des fréquences et des amplitudes des oscillations, sont estimés par cette méthode à 5% près /22/. Toutefois la relation entre les performances du système non-linéaire et du système linéarisé dépend de la validité de l'approximation. En effet, plusieurs exemples /3/4/10/20/ ont illustré que les résultats obtenus peuvent être totalement erronés. En fait, il est difficile de préciser une jus-

tification à priori des hypothèses validant une telle approximation, en effet les utilisateurs de l'approximation du premier harmonique n'en vérifient généralement pas la validité.

Pour Gilles, Decaulnes, Pelegrin la raison essentielle est à rechercher dans l'énergique filtrage des hautes fréquences que réalise l'étage de puissance de tout servomécanisme / 22 /
L'étude de l'exemple de Dewey /5/ a montré que dans la justification de la méthode, il faut tenir compte à la fois des caractéristiques des non-linéarités et du filtre linéaire.
Kon & Han proposent /5/ d'effectuer dans un premier temps une analyse préliminaire de Fourier du signal de sortie de la non-linéarité et une analyse du filtre linéaire à partir des diagrammes de Bode dans un deuxième temps, pour que la méthode du premier harmonique conduise à des résultats valables.

C'est dans cet esprit que nous avons orienté notre travail : en recherchant en particulier des conditions suffisantes d'expression simple permettant de conclure à la validité de la méthode du premier harmonique. La condition obtenue que nous appellerons condition d'unicité s'exprimera directement à partir d'un modèle du processus défini dans l'espace d'état.

2 - Condition d'unicité des systèmes continus non linéaires.

2.1. Mise en équation

Le processus étudié est décrit par l'équation d'état non-linéaire :

$$(1) \quad \overset{\circ}{x} = a(x, e, t)$$

t : variable qui évolue à partir de l'instant initial t_0

$$t \in \mathcal{T} = [t_0, +\infty] \quad \text{avec } t_0 \in]-\infty, +\infty[$$

e : vecteur d'entrée de dimension r défini dans l'espace vectoriel \mathcal{U} des entrées admissibles, $r < q$

$$\forall t \in \mathcal{T} \rightarrow e(t) = \{e_1(t), \dots, e_k(t), \dots, e_r(t)\} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^r$$

x : vecteur définissant l'état du système à l'instant t

$$\forall t \in \mathcal{T} \rightarrow x(t) = \{x_1(t), \dots, x_q(t)\} \in \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^q$$

$a(x, e, t)$: vecteur d'éléments $a_i(x, e, t)$ qui dépendent à tout instant $t \in \mathcal{T}$, du vecteur état x , de l'entrée e et de t , $\forall i \in \{1, 2, \dots, q\}$.

Nous désignons par $x^1(t_0)$ et $x^2(t_0)$ deux vecteurs conditions initiales (pour $t = t_0$) auxquels correspondent pour la même loi d'entrée $e(t)$, les solutions respectives de l'équation (1) : $x^1(t, t_0, x(t_0), e(t))$ et $x^2(t, t_0, x(t_0), e(t))$.

L'évolution de l'écart de ces réponses peut être définie par la relation suivante :

$$(2) \quad \overset{\circ}{x}^1(t) - \overset{\circ}{x}^2(t) = a(x^1, e, t) - a(x^2, e, t)$$

Dans certains cas la relation (2) peut se ramener à la forme matricielle

(3); /24/

$$(3) \quad \overset{\circ}{y} = B^* y^*$$

dans laquelle nous noterons :

y : le vecteur écart

$\forall t \in \mathcal{T} \rightarrow y = x^1(t) - x^2(t) \in \mathcal{E}$

B^* : la matrice d'éléments b_{ij} , [$\forall i \in \{1, \dots, q+r\}$,

$\forall j \in \{1, \dots, q\}$] , définis à partir de (2) :

$$B^* = \begin{bmatrix} \Delta_i(a_j) & \Delta_k(a_j) \\ \frac{1}{x_j^1 - x_j^2} & \frac{1}{e_k^1 - e_k^2} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_i(a_j) = \left\{ \begin{array}{l} a_j [x_1^2, \dots, x_{i-1}^2, x_i^1, \dots, x_q^1, e_{q+1}, \dots, e_{q+r}] \\ - a_j [x_1^2, \dots, x_i^2, x_{i+1}^1, \dots, x_q^1, e_{q+1}, \dots, e_{q+r}] \end{array} \right\}$$

$\forall i \in \{1, 2, \dots, q\}$

$\forall j \in \{1, 2, \dots, q\}$

$\forall k \in \{q+1, \dots, q+r\}$

$$y^{*T} = [y^T, \Delta e^T] \in \mathcal{R}^{q+r}$$

2.2. Définition de la notion d'unicité

L'état de sortie d'un système asservi dépend à l'instant $t \in \mathcal{T}$

de deux grandeurs :

- le signal d'entrée auquel le servomécanisme est soumis
- l'ensemble des conditions initiales à l'instant $t = t_0$

Définition :

La réponse d'un système asservi présente la propriété d'unicité lorsqu'au bout d'un temps suffisant le signal de sortie ne dépend plus que de l'entrée, l'effet des conditions initiales étant devenu négligeable

$$\forall x^1(t_0), x^2(t_0) \in \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^q \text{ et } \forall \varepsilon > 0 \exists t_1 \in \mathcal{T},$$

$$\forall t > t_1 \Rightarrow \|x(t, t_0, x^1(t_0), e(t)) - x(t, t_0, x^2(t_0), e(t))\| < \varepsilon$$

La notion d'unicité exprime donc que l'effet des conditions initiales sur le comportement du processus soumis à une entrée donnée devient de moins en moins sensible avec le temps. Le problème initial d'unicité peut donc se ramener à l'étude de la stabilité d'un système de la forme (3) avec $\Delta e = 0$.

La stabilité du système ainsi défini, à entrée fixée, entraîne l'unicité des réponses du processus dont l'évolution est définie à partir de la relation (1).

3 - Application aux systèmes asservis non linéaires usuels :

3.1. Description du système

De tels processus sont en général définis à partir de l'équation d'état telle que :

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + b f(\varepsilon) \\ \varepsilon = e - C^T x \end{cases}$$

x : vecteur appartenant à \mathcal{E} dont les q composantes x_i définissent l'état du système à tout instant $t \in \mathcal{T}$

e : entrée du processus défini sur \mathcal{R} pour tout $t \in \mathcal{T}$

b : vecteur constant d'ordre q d'éléments b_i

ϵ : variable de commande

$f(\epsilon)$: non-linéarité inhérente au processus étudié

A : matrice carrée $q \times q$, à éléments constants caractérisant le régime libre de la partie linéaire du système à asservir.

C : vecteur constant d'ordre q définissant les paramètres de la régulation intervenant dans la chaîne de retour

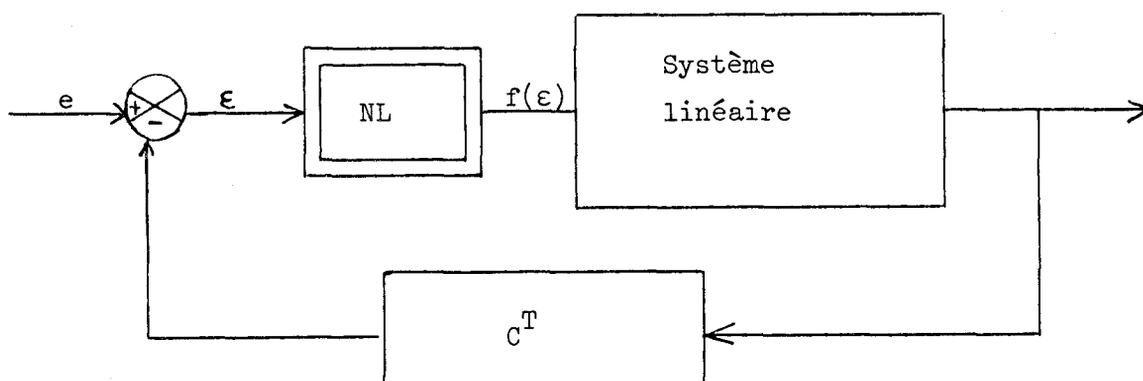


figure 1

3.2. Choix d'une représentation matricielle

L'étude de l'unicité, dans le cas des systèmes monovariabiles peut être simplifiée en adoptant une représentation dans laquelle les éléments non linéaires sont isolés dans une seule rangée de la matrice définissant l'évolution du système en boucle fermée.

Une nouvelle représentation peut être obtenue en substituant à la première composante du vecteur état la commande scalaire $\epsilon / 2/$, on localise ainsi les éléments non linéaires dans la première colonne.

Un simple changement de base conduit alors à une représentation de la forme :

$$(5) \quad \overset{\circ}{u} = B u + h(e)$$

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1r+1} & \dots & \alpha_{1q} \\ \alpha_{12} & \mu_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{13} & 0 & \mu_3 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\alpha_{1r+1}) & 0 & \dots & \mu_r & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mu_{r+1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (-\alpha_{1q}) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \mu_q \end{bmatrix}$$

h : vecteur d'ordre q , fonction de l'entrée

α_{1i} et μ_i , $\forall i$: constantes ne dépendant que des caractéristiques linéaires du système et de la représentation adoptée.

Celle-ci est choisie telle que l'on ait :

$$\alpha_{1j} \geq 0 \quad \forall j = \{2, \dots, q\}$$

3.3. Détermination d'une condition suffisante d'unicité

a) Méthode

Soit y le vecteur définissant l'écart entre deux solutions de l'équation (4) évoluant pour une entrée donnée à partir de conditions initiales distinctes, il vient :

$$(6) \quad \overset{\circ}{y} = My$$

$$\text{avec : } y = u_1 - u_2$$

$$M = \left\{ \begin{array}{l} m_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j \neq 1 \\ m_{11} = \alpha_{11} + \beta_{11} f^* \end{array} \right\}$$

$$f^* = \frac{f(\varepsilon_2) - f(\varepsilon_1)}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$$

lorsque la fonction $f(\varepsilon)$ est dérivable, le coefficient flottant f^* prend ses valeurs parmi celles de la dérivée de la caractéristique de la non-linéarité.

En effet, si cela est possible, d'après le théorème des accroissements finis, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\varepsilon_2) - f(\varepsilon_1) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{df}{d\varepsilon}(\varepsilon) \\ \varepsilon_2 < \varepsilon < \varepsilon_1 \end{array} \right.$$

f^* peut donc être interprété, dans certains cas, comme étant le gain instantané en tout point de la caractéristique de la non-linéarité

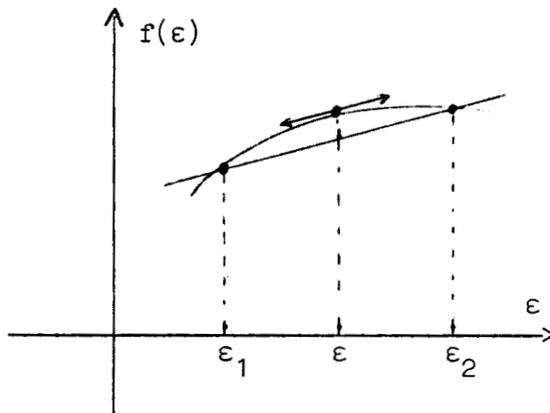


figure 2

La convergence asymptotique des solutions de (6) est assurée $\forall y(0)$, si la fonction $V = y^T y$ est de Ljapunov c'est-à-dire si l'inégalité (7) est vérifiée $\forall y \in \mathcal{R}^q$

$$(7) \quad y^T (M+M^T) y < 0$$

b) Mise en oeuvre :

La matrice $\frac{1}{2}(M+M^T)$ est symétrique, il suffit donc que les valeurs propres de cette matrice soient à partie réelle

négative pour conclure à la stabilité du système (6). De plus les éléments hors diagonaux étant positifs ou nuls /1/15/14/ ces conditions prennent la forme suivante qui correspond aux conditions de Kotelyanski :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_{11} + \beta_{11} f^*) < 0 \\ \begin{vmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} f^* & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} > 0 \\ \dots \\ (-1)^q \Delta_q = (-1)^q \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} f^* & \alpha_{12} \dots \alpha_{1r} & 0 \dots 0 \\ \alpha_{12} & \mu_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{1r} & & & \mu_r \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \mu_{r+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_q \end{vmatrix} > 0 \end{array} \right.$$

ou encore plus simplement :

$$(9) \begin{cases} \mu_i < 0 & \forall i \in \{2, \dots, q\} \\ (-1)^q \Delta_q > 0 \end{cases}$$

En développant cette dernière relation on obtient :

$$(10) \begin{cases} \mu_i < 0 & \forall i \in \{2, \dots, q\} \\ \sum_{i=2}^q \frac{(\alpha_{1i})^2}{\mu_i} - \alpha_{11} - \beta_{11} f^* > 0 \end{cases}$$

c) Condition suffisante d'unicité de la réponse :

Un processus régi par une équation d'état du type (4) qui admet une équation aux écarts de la forme :

$$(11) \quad \begin{matrix} \circ \\ y = \end{matrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} f^* & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \dots & \alpha_{q1} \\ \alpha_{12} & \mu_2 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{13} & 0 & \mu_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1q} & 0 & 0 & \dots & \mu_q \end{vmatrix} y$$

possède la propriété d'unicité de la réponse si :

$$(12) \begin{cases} \mu_i < 0 & \forall i \in \{2, \dots, q\} \\ \sum_{i=2}^q \left\{ \frac{[\text{Réel}(\alpha_{1i} \alpha_{i1})^{\frac{1}{2}}]^2}{\mu_i} \right\} - \alpha_{11} - \beta_{11} f^* > 0 \end{cases}$$

avec : $(\alpha_{1i} \alpha_{i1})^{\frac{1}{2}}$ nombre réel ou complexe tel que : $((\alpha_{1i} \alpha_{i1})^{\frac{1}{2}})^2 = \alpha_{1i} \alpha_{i1}$

démonstration :

La relation (12) est obtenue à partir de (10) en remarquant que :

$$\text{si } \alpha_{1i} \alpha_{i1} < 0 \Rightarrow \left[\text{Réel}((\alpha_{1i} \alpha_{i1})^{\frac{1}{2}}) \right]^2 = 0$$

$$\text{si } \alpha_{1i} \alpha_{i1} > 0 \Rightarrow \left[\text{Réel}((\alpha_{1i} \alpha_{i1})^{\frac{1}{2}}) \right]^2 = \alpha_{1i} \alpha_{i1}$$

$$\text{alors } \sum_{i=2}^q \frac{\left[\text{Réel}((\alpha_{1i} \alpha_{i1})^{\frac{1}{2}}) \right]^2}{\mu_i} = \sum_{i=2}^r \frac{\alpha_{1i} \alpha_{i1}}{\mu_i}$$

La formulation de la condition d'unicité (12) généralise ainsi celle proposée en (10)

d) exemple

Le système asservi étudié est à retour tachymétrique réalisant la régulation d'un filtre linéaire du second ordre constitué d'une double intégration (figure 3)./20/

L'écart entre deux réponses du système proposé, continu non-linéaire a non linéarité séparable, est caractérisé pour une entrée donnée et des conditions initiales distinctes par le vecteur $y(t)$ d'ordre 2, tel que :

$$(13) \quad \overset{\circ}{y} = \begin{bmatrix} \frac{1-\lambda^2 f^*}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda} \\ -\frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} y$$

L'application de la condition définie en (12) donne :

$$(14) \begin{cases} -\frac{1}{\lambda} < 0 \\ 1 - \lambda^2 f^{*2} < 0 \end{cases} \quad \text{Soit (15)} \begin{cases} \lambda > 0 \\ \xi^* > 0.5 \end{cases}$$

avec $\xi^{*2} = \frac{\lambda^2 f^{*2}}{4}$ coefficient qui peut s'interpréter comme un coefficient d'amortissement instantané.

Ainsi un amortissement instantané suffisant, supérieur à 0.5, garantit l'unicité de la réponse du processus.

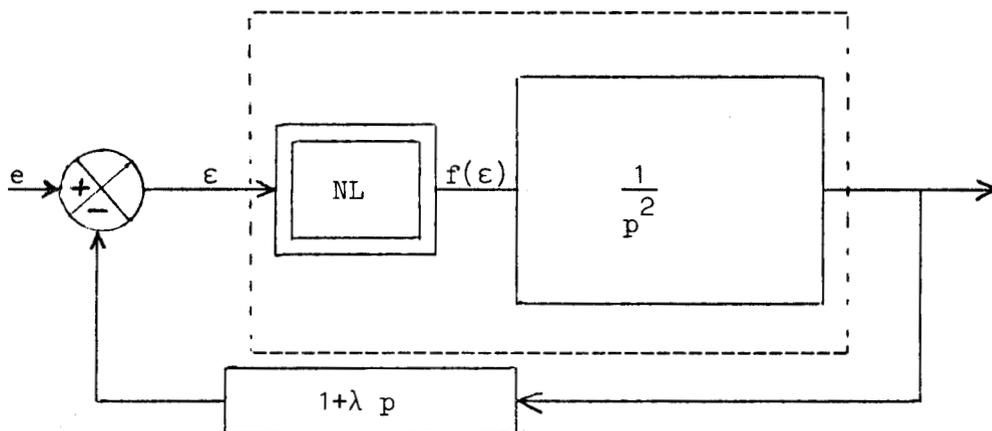


figure 3

4 - Analyse des réponses d'un système asservi du second ordre à une entrée sinusoïdale

4.1. Modèle mathématique du circuit ferrorésonnant série étudié :

Des travaux antérieurs /20/ ont montré que l'on peut assimiler le circuit ferrorésonnant série (figure 4) à un système asservi.

Le circuit RLC à inductance non linéaire régi par les équations :

$$(13) \quad \begin{cases} R \cdot i + \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{C} \int i \, dt = u \\ \phi = \phi(i) \end{cases}$$

peut donc être étudié comme un système asservi à retour tachymétrique réalisant la régulation d'un filtre linéaire du second ordre constitué d'une double intégration et précédé d'une non-linéarité (figure 6).

Cette représentation correspond au schéma bloc de la figure 3 en posant :

$$e = \int u \, dt, \quad \varepsilon = \varphi, \quad \lambda = RC, \quad \text{et} \quad f(\varepsilon) = \frac{1}{C} g(\phi).$$

Ainsi le coefficient d'amortissement instantané ξ^* /20/ qui vaut :

$$\xi^{*2} = \frac{R^2 C^2}{4} f^* \quad \text{dans le premier cas de figure s'exprime par} \quad \xi^{*2} = \frac{\lambda^2 f^*}{4}$$

dans le deuxième cas de figure ; f^* désignant le gain instantané de la

caractéristique de la non-linéarité qui est dans ce cas du type dure (figure 5).

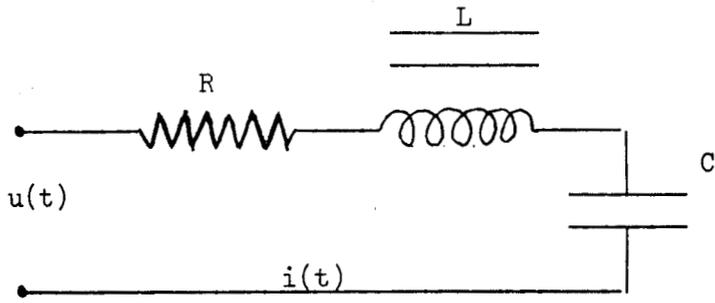


figure 4

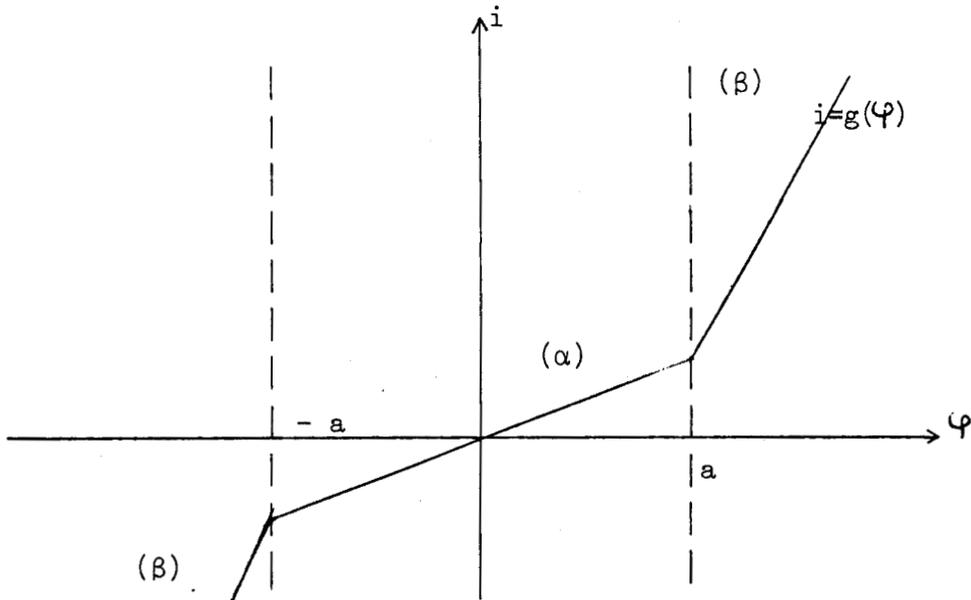


figure 5

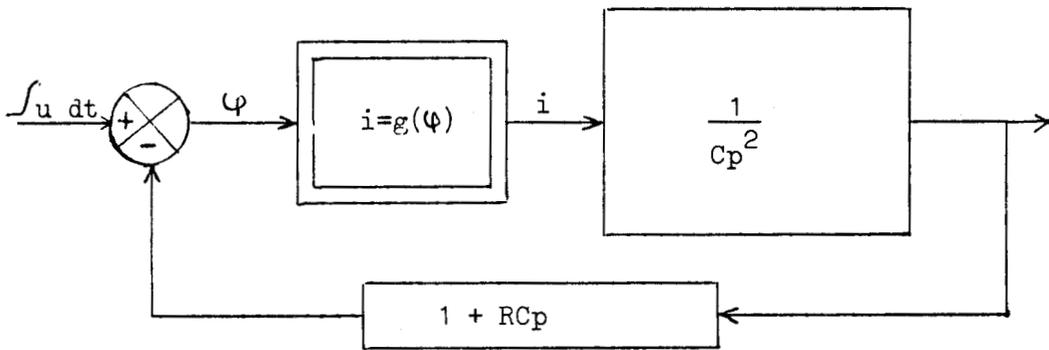


figure 6



4.2. Méthode d'estimation de la réponse du processus par la méthode du premier harmonique :

Le système étant soumis à une entrée sinusoïdale $e = e_h \sin \omega t$, la méthode du premier harmonique permet une détermination simple de la sortie s ou encore plus simplement, du signal ϵ de commande du processus non linéaire : $\epsilon = \epsilon_h \sin(\omega t - \phi)$.

La méthode suppose que la réponse du processus à un signal sinusoïdal est un signal sinusoïdal de même fréquence dont l'amplitude ϵ_h est définie de la façon suivante : /16/22/ .

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\epsilon_h}{E} = \left| \frac{1}{1+K^*(\epsilon_h)W(j\omega)} \right| \\ \varphi = \arg \left(\frac{1}{1+K^*(\epsilon_h)W(j\omega)} \right) \end{array} \right.$$

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} K^*(\epsilon_h) = \alpha \quad \text{si } a \geq \epsilon_h \\ K^*(\epsilon_h) = \frac{2}{\pi}(\alpha-\beta) \left[\arcsin\left(\frac{a}{\epsilon_h}\right) + \frac{a}{\epsilon_h} \sqrt{1-\left(\frac{a}{\epsilon_h}\right)^2} \right] + \beta \quad \text{si } a < \epsilon_h \end{array} \right.$$

$$W(j\omega) \text{ étant : } \frac{1+\lambda(j\omega)}{(j\omega)^2}$$

$a, \alpha, \beta, \lambda, \omega$ et E étant connues, ϵ_h est tel que

$$E = \epsilon_h K^*(\epsilon_h) \left| \left(\frac{1}{K^*(\epsilon_h)} - \frac{1}{\omega^2} \right)^2 + \left(\frac{-\lambda}{\omega} \right) j \right|$$

$$(16) \text{ ou encore } \epsilon_h = \frac{E\omega^2}{\sqrt{(K^*(\epsilon_h)-\omega^2)^2 + (\lambda K^*(\epsilon_h)\omega)^2}}$$

Pour résoudre cette dernière équation en ϵ_h , il suffit /22/ de tracer la courbe $E = g(\epsilon_h)$. Ainsi pour chaque amplitude de l'entrée du système, on pourra aisément déterminer l'amplitude correspondante de l'entrée de la non-linéarité.

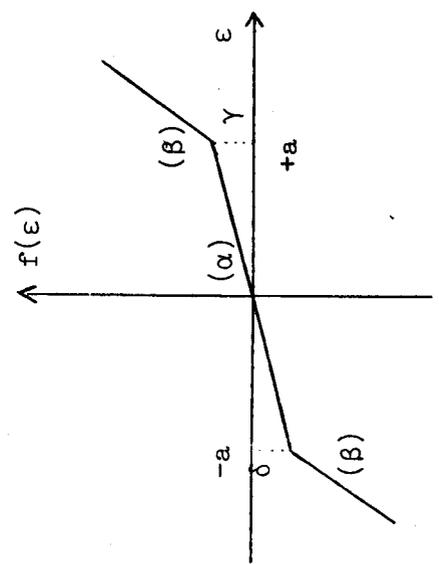
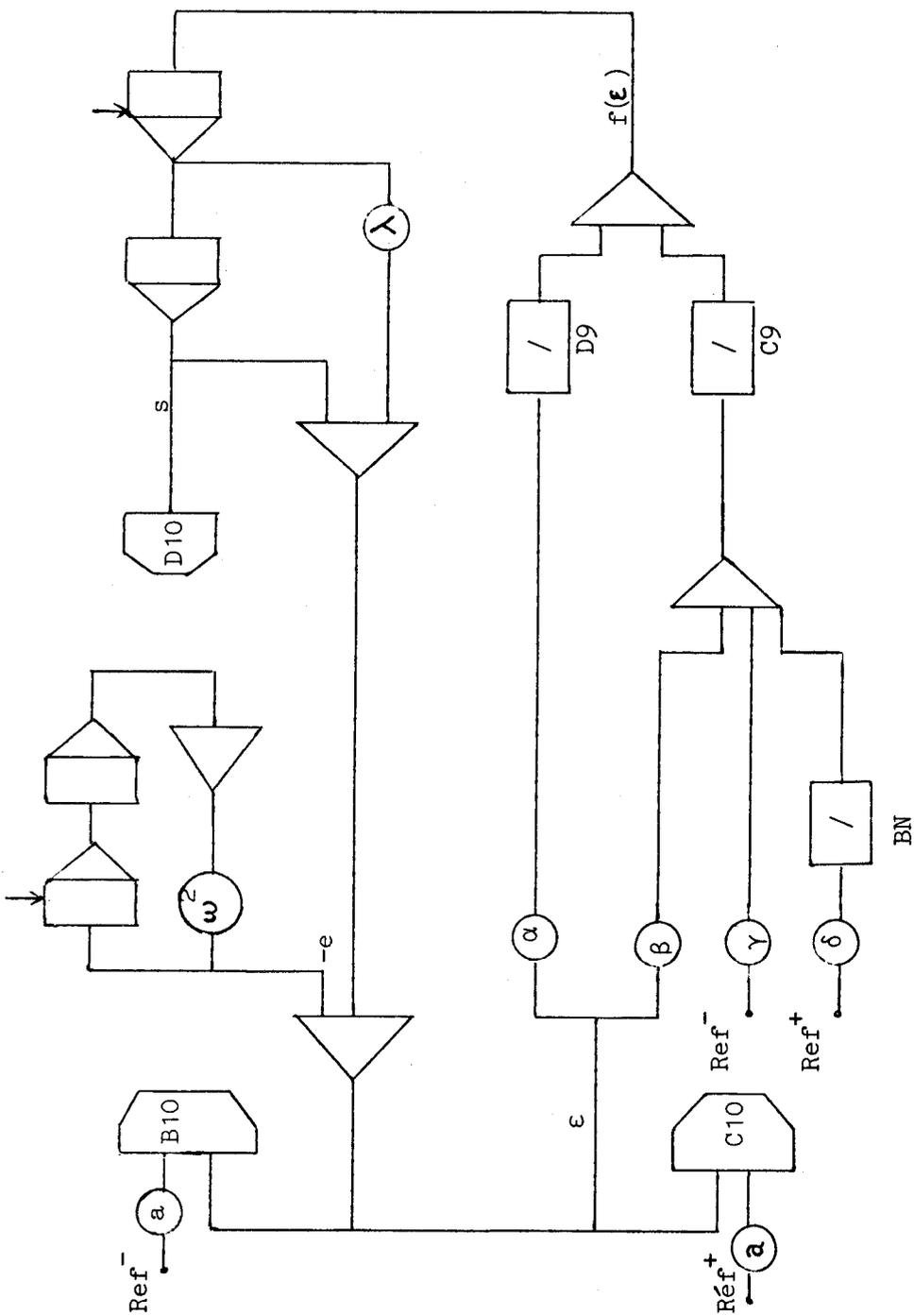
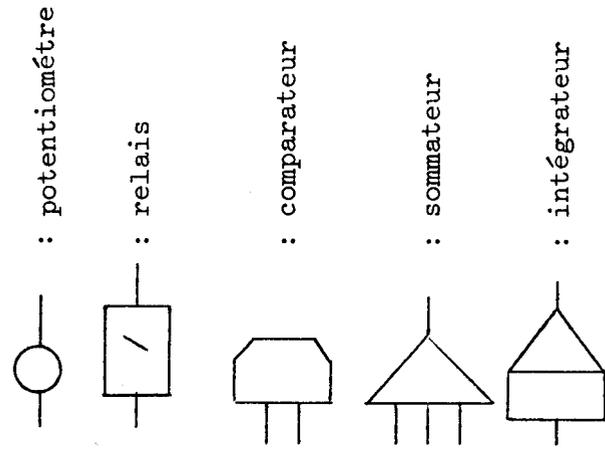
Une ambiguïté, concernant le choix de la réponse du système, apparaît dans le cas où plusieurs amplitudes ϵ_n sont possibles.

4.3. Détermination de la réponse par simulation du processus sur ordinateur.

Le processus a été simulé sur un ordinateur hybride AD 32 (figure 7). Une exploration paramétrique dans l'espace des conditions initiales nous a permis de mettre en évidence plusieurs régimes permanents notamment celui qui a lieu à la fréquence fondamentale /17/18/19/. La fréquence et l'amplitude de la sortie (dans le cas de synchronisme) sont comparées avec celles obtenues par le calcul conformément à l'approximation du premier harmonique.

Dans l'application de la méthode du premier harmonique en régime forcé on néglige les termes correspondants aux harmoniques supérieurs de plus on ne tient pas compte des oscillations sous-harmoniques qui ont été observées expérimentalement, dans le cas d'un amortissement instantané de faible valeur (<0.25). Pour une certaine condition initiale nous avons pu enregistrer le sous-harmonique 2 (figure 8/b) ; une simple exploration paramétrique dans l'espace des conditions initiales permettrait l'observation de tout sous-harmonique, pour la même entrée sinusoïdale. /49/

De même que précédemment, c'est-à-dire, dans le cas où une condition suffisante d'unicité n'est pas vérifiée ($\zeta^* \leq 0.5$), l'amplitude de la sortie dans le cas de synchronisme, pour une entrée d'amplitude 6.25 volts, est de 11 volts alors que la méthode du premier harmonique donne une amplitude estimée à 7.79 volts. L'erreur relative ainsi mise en évidence dans le calcul de l'amplitude par l'application abusive de l'approximation proposée est de 29 % (figure 8/a).



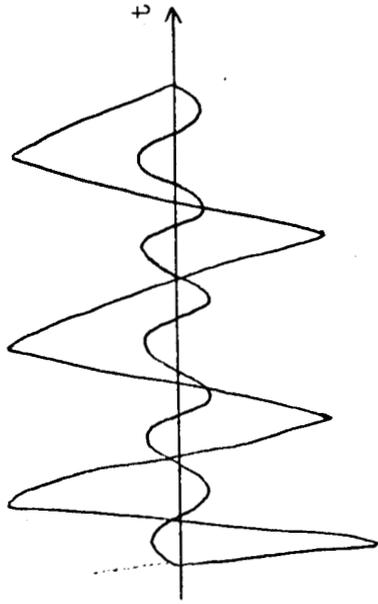
$$\left\{ \begin{array}{l} D9 = \overline{C9} \\ C9 = \frac{C10 + \overline{B10}}{B10 + \overline{C10}} \\ BN = \frac{\overline{B10} + \overline{C10}}{B10 + \overline{C10}} \end{array} \right.$$

Commande des relais
 D9, C9 et BN à partir des sorties
 logiques des comparateurs B10 et
 C10



figure 7

cas de démultiplication de fréquence

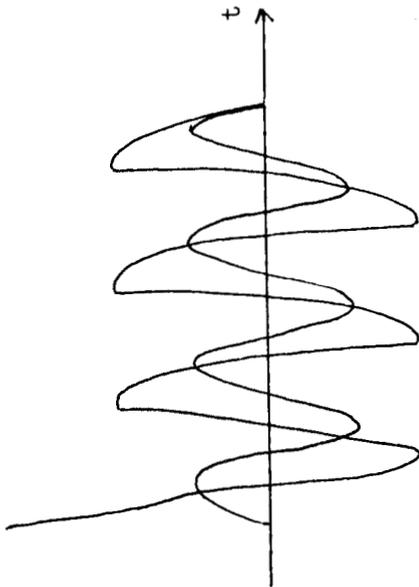


$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 12.2 \end{cases}$$

. Apparition du sous-harmonique 2

(b)

Cas de synchronisation



$$\begin{cases} \alpha = 0.08 \\ \beta = 12.2 \end{cases}$$

. erreur relative estimée à 29 %

(a)

figure 8



6 - Conclusion

La méthode du premier harmonique, pour certains systèmes continus non-linéaires, prévoit des réponses, dans certains cas, très erronées tant au point de vue fréquence qu'au point de vue amplitude.

Vérifier une condition suffisante d'unicité de la réponse garantit d'une part l'absence de tout sous harmonique du signal d'entrée et permet d'autre part de déterminer le régime permanent du système lorsque l'application de l'approximation du premier harmonique indique plusieurs régimes possibles.

Si, dans le cas du circuit ferrorésonnant série, elle s'interprète aisément par une condition d'amortissement, la recherche d'interprétations physiques des conditions d'unicité dans le cas de processus définis par un modèle plus complexe s'avère nettement plus délicate.

Nous envisageons, dans la suite de ce travail, de mettre en évidence une condition suffisante de validité de la méthode du premier harmonique qui se rattache directement aux caractéristiques du processus non-linéaire ou linéarisé.

CHAPITRE II

Condition suffisante de validité de la méthode du premier harmonique

1 - Introduction

Une contribution à l'étude de la dynamique des systèmes asservis en régime forcé est proposée dans ce chapitre.

La recherche de conditions suffisantes d'unicité obtenues directement à partir des caractéristiques fréquentielles de la partie linéaire du processus nous a conduit à distinguer divers cas selon la disposition relative des pôles et des zéros de sa fonction de transfert.

L'étude de l'unicité a été abordée en utilisant la deuxième méthode de Ljapunov /2/ ; ce qui nous a permis d'énoncer plusieurs critères d'unicité d'utilisation simple.

La seconde méthode de Ljapunov conduit le plus souvent à reporter l'étude de la stabilité d'un système sur celle d'un système de comparaison du premier ordre /31/. D'un point de vue distinct, le choix d'un système de comparaison d'ordre égal à celui du système, élargit la classe des systèmes concernés /15/. Ces résultats sont étendus aux systèmes définis sur le corps des complexes. Une méthode de recherche systématique de conditions suffisantes en utilisant les résultats trouvés sous forme numérique est proposée dans un dernier temps.

2 - Condition suffisante d'unicité de la réponse de certaines classes de processus non linéaires

2.1. Système à déphasage minimal

La recherche de conditions suffisantes d'unicité d'un processus admettant une représentation matricielle symétrique nous a conduit, dans le cas de processus dont la partie linéaire $W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$ est à déphasage minimal, à une contrainte qui s'exprime simplement en fonction des résidus relatifs aux divers pôles de $\frac{Q(p)}{R(p)}$, considéré comme une fraction rationnelle en p .

Première condition d'unicité

Un système continu non linéaire à non linéarité séparable d'ordre q dont la partie linéaire est définie par sa fonction de transfert $W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$, possède la propriété d'unicité de la réponse si les conditions suivantes sont vérifiées :

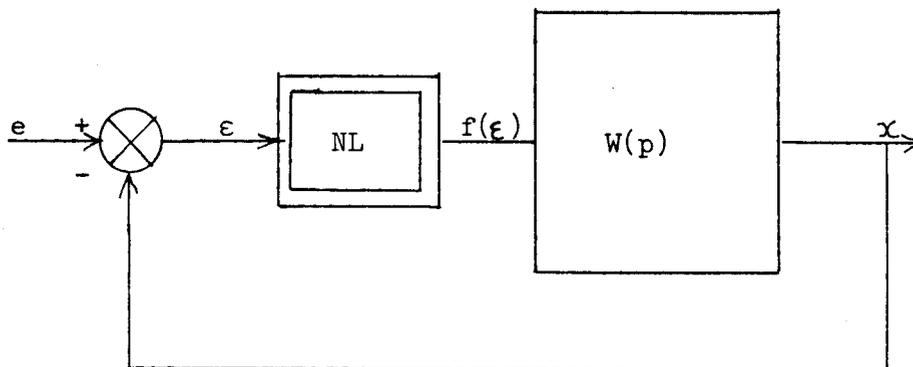
1) Les polynômes $R(p)$ et $Q(p)$ de degrés respectivement égaux à q et $(q-1)$, ont des racines réelles et distinctes.

2) Le filtre linéaire $W(p)$ est entièrement défini par sa courbe de gain dont le diagramme asymptotique est constitué par des segments de pentes successives $0, -20, 0, -20, \dots$ db/décade

3) Le gain instantané de la non-linéarité f^* est supérieur à l'inverse de gain statique de $W(p)$ changé de signe.

En effet, le système étudié (figure 2-1) est régi par une équation d'état non linéaire décrite par la relation (2-1)

$$(2-1) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + b f(\varepsilon) \\ \varepsilon = e - C^T x \end{cases}$$



(figure 2-1)

L'écart entre deux réponses du processus soumis à une entrée donnée est caractérisé à l'instant $t \in \mathcal{T}$ par le vecteur $y(t)$, d'ordre q , dont l'évolution est régie par le système différentiel (2-2) :

$$(2-2) \quad \dot{y} = (A-b C^T f^*).y$$

Le choix d'une représentation particulière (Annexe I) permet de décrire le système (2-2) sous la forme :

$$(2-3) \quad \dot{y} = M. y.$$

avec :

$$M = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \frac{S_{q-1}}{S_q} - \frac{f^*}{S_q} & \dots & \frac{-Q(-\lambda_1)}{S_q} & \dots & \frac{-Q(-\lambda_{q-1})}{S_q} \\ \vdots & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & 0 & \dots & 0 \\ \left(\frac{p+\lambda_i}{R(p)} \right)_{p=\lambda_i} & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \left(\frac{p+\lambda_{q-1}}{R(p)} \right)_{p=\lambda_{q-1}} & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & -\lambda_{q-1} \end{bmatrix}$$

$Q(p)$ et $R(p)$ sont (1) des polynômes en p de degrés respectivement égaux à (q) et $(q-1)$ et dont les racines sont réelles et distinctes

$$(2-4) \quad Q(p) = S_q p^q + S_{q-1} p^{q-1} + \dots + S_1 p + 1 \\ = (1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)(\dots)(1+\tau_q p)$$

$$(2-5) \quad R(p) = p^{q-1} + \sigma_1 p^{q-2} + \dots + \sigma_{q-2} p + \sigma_{q-1} \\ = (p+\lambda_1)(p+\lambda_2)(\dots)(p+\lambda_{q-1})$$

La fonction de transfert du filtre linéaire étant entièrement définie par sa courbe de gain (lieu de Bode) (2) ses pôles et ses zéros sont tous négatifs.

Si cette courbe de gain est constituée dans le diagramme de Bode (2) par des segments de pentes successives 0, -20, 0, -20, ... les pôles et les zéros de $W(p)$ sont donc disposés comme suit :

$$(2-6) \quad 0 < \frac{1}{\tau_1} < \lambda_1 < \frac{1}{\tau_2} < \dots < \lambda_{q-1} < \frac{1}{\tau_q}$$

c'est-à-dire que les deux polynômes $R(p)$ et $Q(p)$ forment une paire positive /30/. Il en résulte les inégalités :

$$(2-7) \quad \left(\frac{-(p+\lambda_i) Q(p)}{R(p)} \right)_p = -\lambda_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, q-1\}$$

L'unicité de la réponse du processus initial (2-1) est assurée si l'équation aux écarts définie en (2-3) correspond à un système stable. Nous avons vu au chapitre I qu'il suffit pour cela que la forme quadratique $y^T(M+M^T)y$ soit définie négative.

Or la matrice M peut être rendue (2-7) symétrique et à éléments non diagonaux positifs à partir d'un simple changement de base de type diagonal. L'application de la condition de Kotelyanski sur la nouvelle représentation ainsi définie donne alors la condition suffisante d'unicité :

$$(2-8) \quad \frac{1}{S_q} \left[f^* + S_{q-1} - \sigma_1 S_q + \sum_{i=1}^{q-1} \left(\frac{(p+\lambda_i)Q(p)}{\lambda_i R(p)} \right)_{p=-\lambda_i} \right] \geq c > 0$$

D'autre part si nous considérons $\frac{Q(p)}{R(p)}$ comme une fraction rationnelle en p , la décomposition en éléments simples de celle-ci donne :

$$(2-9) \quad \frac{Q(p)}{R(p)} = S_q p + S_{q-1} - \sigma_1 S_q + \sum_{i=1}^{q-1} \left[\frac{1}{p+\lambda_i} \left(\frac{(p+\lambda_i)Q(p)}{R(p)} \right)_{p=-\lambda_i} \right]$$

En remarquant que :

$$(2-10) \quad \left(\frac{Q(p)}{R(p)} \right)_{p=0} = S_{q-1} - \sigma_1 S_q + \sum_{i=1}^{q-1} \left(\frac{(p+\lambda_i)Q(p)}{\lambda_i R(p)} \right)_{p=-\lambda_i}$$

la condition (2-8) se réduit à l'inégalité :

$$(2-11) \quad \frac{1}{S_q} \left[f^* + \left(\frac{Q(p)}{R(p)} \right)_{p=0} \right] \geq c > 0$$

les quantités : $S_q = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_q$ et $\left(\frac{Q(p)}{R(p)} \right)_{p=0} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{q-1}}$

étant (3) positives, si en plus $f^*(x) > 0, \forall x \in \mathcal{R}^q$, la relation (2-11) est alors toujours vérifiée.

Exemple d'application

Soit le système continu (figure 2-2) régi par une équation aux écarts non linéaire décrite par la relation :

$$y = \begin{vmatrix} -3 - 15f^* & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & -2 & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & -4 \end{vmatrix} y$$

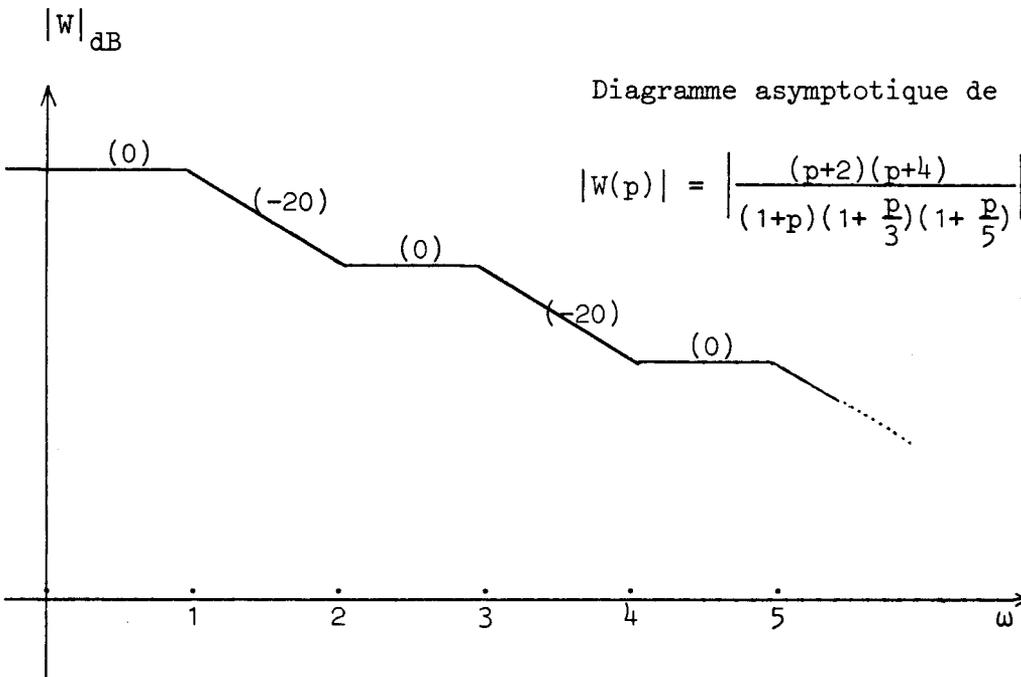
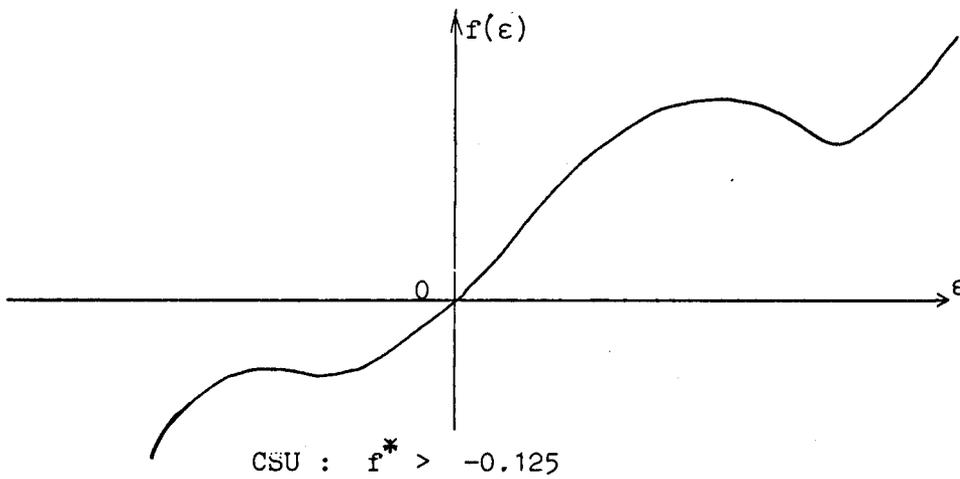
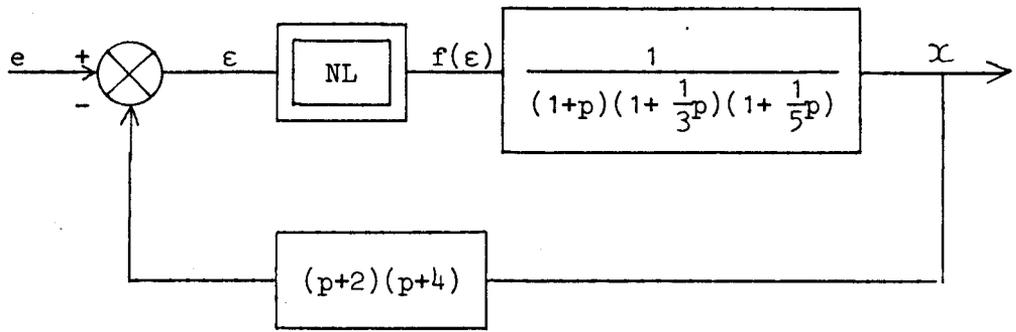
Les conditions de Kotelyanski appliquées à la matrice régissant l'évolution du vecteur écart y s'expriment sous la forme :

$$(-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & -15 & f^* & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & & & -2 & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & & & 0 & -4 \end{vmatrix} \geq c > 0$$

ou plus simplement :

$$\left(\frac{1}{15}\right) \left[f^* + \frac{1}{2 \times 4} \right] \geq c > 0$$

Le processus considéré possède donc la propriété d'unicité si le gain instantané (la pente en tout point de la non linéarité) reste supérieur à (-0.125)



(figure 2-2) - Système à déphasage minimal



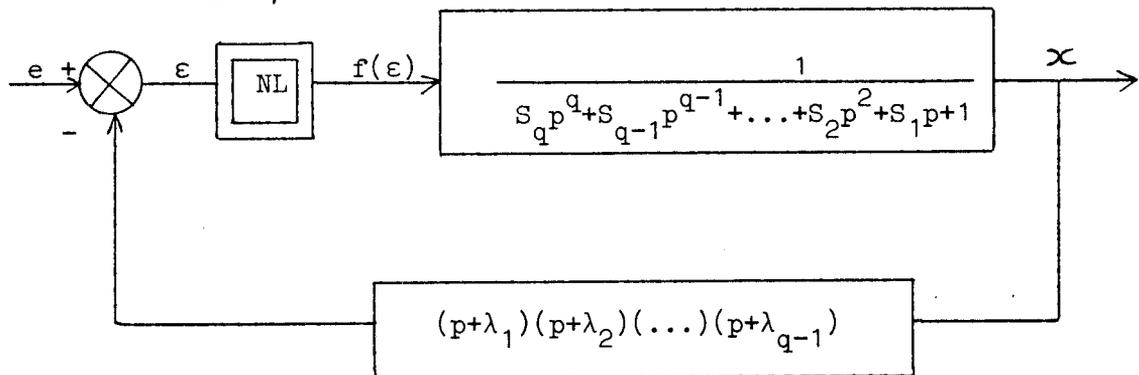
2.2. Système à déphasage non minimal :

Le résultat précédent suppose que les polynômes $R(p)$ et $Q(p)$ forment une paire positive /30/. Nous proposons dans la suite de cet exposé une condition suffisante d'unicité, qui s'applique à une classe plus large de processus.

Théorème I :

Un système continu non-linéaire à non linéarité séparable (figure 2-3) d'ordre q dont la partie linéaire est définie par sa fonction de transfert $W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$, possède la propriété d'unicité de la réponse si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (1) Le polynôme $R(p)$ admet $(q-1)$ racines distinctes réelles négatives.
- (2) Les résidus relatifs aux divers pôles de $\frac{1}{W(p)}$ sont négatifs.
- (3) La somme du gain instantané de la non-linéarité et de $(\frac{1}{W(p)})_{p=0}$ est positive.



(figure 2-3) $S_q > 0$, $\lambda_i > 0 \forall i \in \{1, \dots, q-1\}$

Le théorème I généralise la première condition d'unicité. Il propose une condition pour les systèmes dont la partie linéaire peut être à déphasage non minimal.

En effet, l'équation aux écarts du processus considéré admet une représentation matricielle symétrique et à éléments non diagonaux positifs si les résidus relatifs aux divers pôles de $\frac{1}{W(p)}$ sont négatifs :

$$(2-12) \quad \left(\frac{(p+\lambda_i)Q(p)}{R(p)} \right)_{p=-\lambda_i} < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, q-1\}.$$

Comme précédemment, en appliquant la condition de Kotelyanski à la matrice définissant l'évolution du vecteur écart, il vient la contrainte :

$$(2-11) \quad \frac{1}{S_q} \left[\vec{f}^* + \left(\frac{Q(p)}{R(p)} \right)_{p=0} \right] \geq c > 0.$$

ce qui démontre le théorème I.

Remarques :

a) Le théorème I ne précise aucune condition sur les pôles de $W(p)$. Ils peuvent être aussi bien positifs que négatifs, réels ou imaginaires.

b) Si nous disposons d'intégrateurs purs dans la chaîne d'action du servomécanisme, l'application du théorème I précise une contrainte sur le gain instantané d'expression simple.

En effet le processus à retour unitaire, par exemple, dont la partie linéaire est définie par sa fonction de transfert $W(p) = \frac{p+0.5}{p(1+p)}$ possède la propriété d'unicité de la réponse si le gain instantané de la non linéarité est positif.

Exemple d'application

Afin de préciser le mode d'utilisation de ce deuxième théorème, envisageons le cas d'un système asservi du second ordre (figure 2-4) dont l'évolution du vecteur écart est régi par l'équation différentielle vectorielle du deuxième ordre :

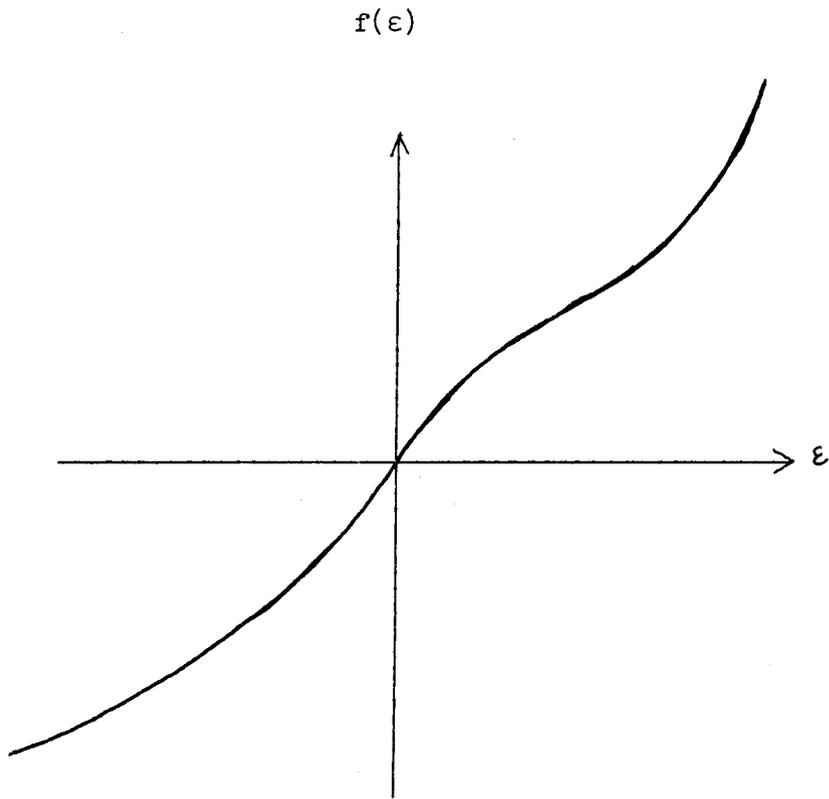
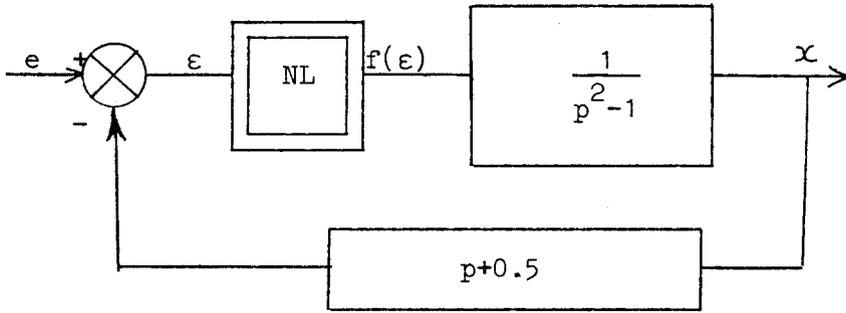
$$\ddot{y} \begin{bmatrix} 0.5-f^* & \sqrt{\frac{3}{4}} \\ \sqrt{\frac{3}{4}} & -0.5 \end{bmatrix} \cdot y$$

L'application du théorème I conduit à la condition suffisante d'unicité :

$$(-1)^2 \begin{bmatrix} 0.5-f^* & \sqrt{\frac{3}{4}} \\ \sqrt{\frac{3}{4}} & -0.5 \end{bmatrix} \geq c > 0$$

Soit $\left[f^* + \frac{(-1)}{0.5} \right] \geq c > 0$

Le système étudié possède donc la propriété d'unicité si la pente en tout point de la non-linéarité reste supérieure à 2.



CSU : $f^* > 2$

(figure 2-4) Système à déphasage non minimal



2.3. Cas des systèmes asservis admettant une représentation matricielle particulière :

2.3.1. $d^{\circ} R(p) < d^{\circ} Q$:

Nous allons d'abord envisager le cas pour lequel la partie linéaire du filtre admet un nombre de zéros inférieur au nombre de pôles.

Théorème II

Un système continu (figure 2-1) non linéaire à non linéarité séparable d'ordre q dont la partie linéaire est définie par sa fonction de transfert :

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{R(p)}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) \dots (1+\tau_q p)}, \quad d^{\circ}[R(p)] < q$$

possède la propriété d'unicité de la réponse si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$(1) \quad \tau_i > 0 \quad \forall i = 1, q-1$$

$$(2) \quad \frac{1}{S_q} \left(1 + \left(\frac{R(p)}{Q(p)} \right)_{p=0} f^* \right) > 0$$

$$(3) \quad \left(\frac{-f^* \left(p + \frac{1}{\tau_q} \right) \left(p + \frac{1}{\tau_i} \right) R(p)}{Q(p)} \right)_{p = -\frac{1}{\tau_i}} > 0 \quad \forall i = 1, q-1$$

Démonstration

L'évolution de l'écart entre deux réponses du processus étudié est caractérisée à l'instant $t \in \mathcal{T}$ par le vecteur $y(t)$ qui vérifie (Annexe I) l'équation vectorielle :

$$(2-13) \overset{\circ}{y} = \left[\begin{array}{cccc} \left(-\frac{1}{\tau_q} - \frac{f^*}{S_q}\right) \dots - f^* \left(\frac{(p + \frac{1}{\tau_q})(p + \frac{1}{\tau_i})R(p)}{Q(p)} \right)_{p = -\frac{1}{\tau_i}} \dots & & & \\ 1 & -\frac{1}{\tau_i} & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & -\frac{1}{\tau_i} \\ \vdots & & & \\ 1 & 0 & & 0 \end{array} \right] \cdot y$$

Si

$$(2-14) \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1, \dots, q-1\} \\ - f^* \left(\frac{(p + \frac{1}{\tau_i})(p + \frac{1}{\tau_q})R(p)}{Q(p)} \right)_{p = -\frac{1}{\tau_i}} > 0 \end{array} \right.$$

la matrice représentative du système asservi non linéaire (2-13) a ses éléments non diagonaux positifs. Nous pouvons donc appliquer le critère de stabilité pratique de J.C Gentina et P. Borne /28/29/ pour vérifier la convergence asymptotique du système aux écarts (2-13).

Les pôles de $W(p)$ étant négatifs, une condition suffisante d'unicité de réponse du processus étudié s'écrit sous la forme :

$$(2-15) (-1)^q \left[\begin{array}{cccc} \left(-\frac{1}{\tau_q} - \frac{f^*}{S_q}\right) \dots - f^* \left(\frac{(p + \frac{1}{\tau_q})(p + \frac{1}{\tau_i})R(p)}{Q(p)} \right)_{p = -\frac{1}{\tau_i}} \dots & & & \\ 1 & -\frac{1}{\tau_1} & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & -\frac{1}{\tau_i} \\ \vdots & & & \\ 1 & 0 & & 0 \end{array} \right] > 0$$

En développant le déterminant précédent, la relation (2-15) devient :

$$(2-16) \quad \frac{1}{S_q} \left(1 + f^* \left(\frac{R(p)}{Q(p)} \right)_{p=0} \right) > 0$$

Ce qui démontre le théorème II.

Il est possible de remarquer que les conditions suffisantes précédentes se simplifient considérablement dans le cas d'un système à déphasage minimal.

Théorème III

Un système continu non linéaire à non linéarité séparable d'ordre dont la partie linéaire est définie par sa fonction de transfert :

$$W(p) = \frac{R_m(p)}{Q(p)} = \frac{(p+\lambda_1)(p+\lambda_2)\dots(p+\lambda_m)}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)\dots(1+\tau_q p)} \quad m \leq q-1$$

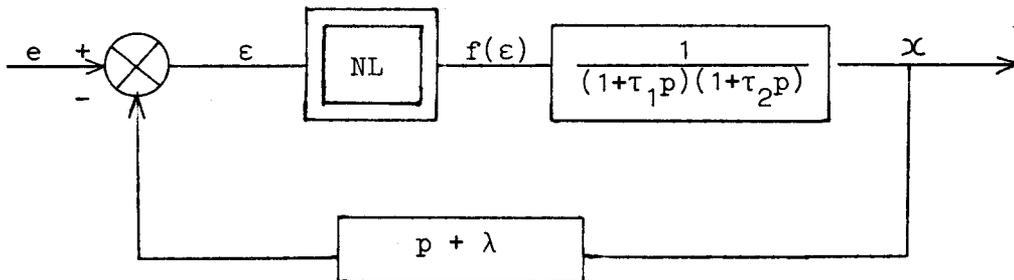
possède la propriété d'unicité de la réponse si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- (1) . *W(p) admet q pôles réels distincts et négatifs*
 - . *R(p) est un polynôme de degré m = q-1*
 - . $0 < \frac{1}{\tau_q} < \lambda_1 < \frac{1}{\tau_1} < \lambda_2 < \dots < \lambda_{q-1} < \frac{1}{\tau_{q-1}}$
 - . *le gain instantané f* est positif.*
- (2) . *W(p) admet q pôles réels et négatifs (distincts)*
 - . *R(p) est un polynôme de degré m = q-2*
 - . $0 < \frac{1}{\tau_1} < \lambda_1 < \frac{1}{\tau_2} < \dots < \lambda_{q-2} < \frac{1}{\tau_{q-1}}$
 - . *le gain instantané de la non linéarité f* est tel que :*

$$- \left(\frac{Q(p)}{R(p)} \right)_{p=0} < f^* < 0$$

Application :

Le théorème II est illustré sur le servomécanisme du second ordre de la (figure 2-5).



- cas 1 : $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$, $\lambda = 0.5$, CSU : $f^* > 0$
 cas 2 : $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = -2$, $\lambda = 0.5$, CSU : $f^* < -2$
 cas 3 : $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$, $\lambda = -0.5$, CSU : $0 < f^* < 2$

(figure 2-5)

Diverses conditions suffisantes d'unicité (CSU) peuvent être proposées selon les signes et la disposition relative des pôles et des zéros de $W(p)$.

Trois cas sont étudiés :

- cas 1 : système à déphasage minimal

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \frac{1}{\tau_1} \\ 0 < \lambda < \frac{1}{\tau_1} \\ 0 < f^* \end{array} \right. \quad \text{par exemple} \quad \left\{ \begin{array}{l} W(p) = \frac{p+0.5}{(1+p)(1+3p)} \\ \text{CSU : } f^* > 0 \end{array} \right.$$

Nous retrouvons la condition suffisante correspondante de l'énoncé de la première condition d'unicité.

- cas 2 : système à déphasage non minimal - pôle instable.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\tau_2} < 0 \\ 0 < \lambda \\ 0 < \frac{1}{\tau_1} \end{array} \right. \quad \text{par exemple} \quad \left\{ \begin{array}{l} W(p) = \frac{p+0.5}{(1+p)(1-3p)} \\ \text{CSU : } f^* < -2 \end{array} \right.$$

- cas 3 : Système à déphasage non minimal - zéro instable

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \frac{1}{\tau_1} \\ 0 < \frac{1}{\tau_2} \\ \lambda < 0 \end{array} \right. \quad \text{par exemple} \quad \left\{ \begin{array}{l} W(p) = \frac{p-0.5}{(1+p)(1+3p)} \\ \text{CSU : } 0 < f^* < 2 \end{array} \right.$$

2.3.2. Cas où tous les résidus relatifs aux pôles de $\frac{Q(p)}{R(p)}$ sont positifs :

Le système étudié (figure 2-1) est régi par une équation d'état non linéaire décrite par la relation (2-1). L'évolution de l'écart entre deux réponses du processus est définie par le système différentiel (2-3). Nous avons vu au chapitre I que l'unicité de la réponse du système initial (2-1) est assurée si la forme quadratique $\frac{1}{2} y^T (M+M^T) y$ est définie négative. Pour certaines classes de systèmes asservis non linéaires, $\frac{1}{2}(M+M^T)$ est une matrice diagonale ; la vérification de la condition suffisante d'unicité devient ainsi immédiate.

En effet si :

$$\alpha_i = -\left(\frac{Q(p)(p+\lambda_i)}{R(p)}\right)_{p=-\lambda_i}, \quad \alpha_i < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, q-1\}$$

alors la matrice $\frac{1}{2}(M+M^T)$ prend la forme :

$$(2-7) \quad \frac{1}{2}(M+M^T) = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \frac{S_{q-1}}{S_q} - \frac{f^*}{S_q} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda_{q-1} \end{bmatrix}$$

avec : $R(p) = (p+\lambda_1)(p+\lambda_2)\dots(p+\lambda_{q-1})$

$Q(p) = S_q p^q + S_{q-1} p^{q-1} + \dots + S_1 p + 1$ et $S_q > 0$

$\lambda_i > 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, q-1\}$

La forme quadratique $\frac{1}{2}y^T(M+M^T)y$ est alors définie négative si :

$$(2-18) \quad f^* > \sigma_1 S_q - S_{q-1}$$

Le second membre de l'inégalité (2-18) apparaît, d'après (2-10) comme le terme constant de la partie entière de la fraction rationnelle $\frac{Q(p)}{R(p)}$, changé de signe.

D'où le théorème IV :

Théorème IV

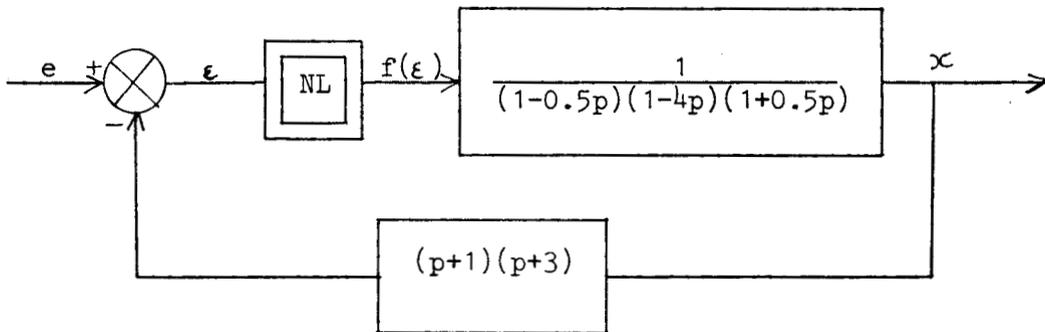
Un système continu non linéaire à non linéarité séparable d'ordre q dont la partie linéaire est définie par sa fonction de transfert $W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$ possède la propriété d'unicité de la réponse si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) Le polynôme $R(p)$ admet $(q-1)$ racines réelles distinctes et négatives.
- 2) Les résidus relatifs aux divers pôles de $\frac{Q(p)}{R(p)}$ sont positifs.
- 3) Le gain instantané de la non linéarité est supérieur au terme constant

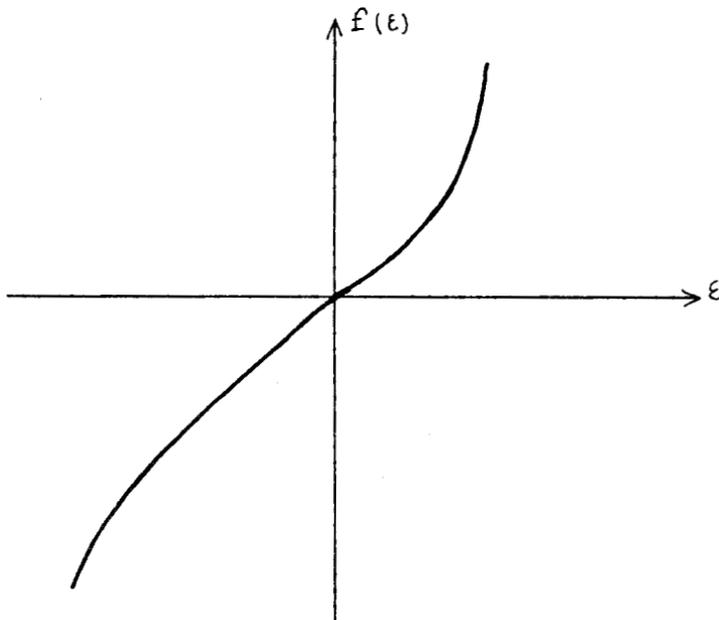
de la partie entière de $\frac{Q(p)}{R(p)}$, changé de signe.

Exemple d'application

Cette étude est illustrée sur un système du troisième ordre comportant deux pôles instables (figure 2-7).



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Q(p)}{R(p)} = p - 4.25 + \frac{10p + 13.75}{(p+1)(p+3)} \\ f^* > 4.25 \end{array} \right.$$



(figure 2-7) Système à déphasage non minimal

Soit $W(p) = \frac{(p+1)(p+3)}{(1-0.5p)(1-4p)(1+0.5p)}$ la fonction de transfert de la partie linéaire ; le processus admet alors l'équation aux écarts :

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 4.25 - f^* & -\sqrt{\frac{15}{8}} & -\sqrt{\frac{65}{8}} \\ \sqrt{\frac{15}{8}} & -1 & 0 \\ \sqrt{\frac{05}{8}} & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot y$$

$y(t)$ étant un vecteur caractérisant l'évolution de l'écart entre deux réponses du processus pour une entrée donnée.

La forme quadratique :

$$y^T \begin{bmatrix} 4.25 - f^* & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} y$$

est définie négative si $f^* > 4.25$.

Or $W(p) = p - 4.25 + \frac{10p+13.75}{(p+1)(p+3)}$

Le système proposé possède donc la propriété d'unicité si le gain instantané reste supérieur au terme constant de la partie entière de $W(p)$, changé de signe.

3 - Cas général - Représentation complexe d'un processus

L'étude de l'unicité des processus de grande dimension a été abordée de deux façons :

- à partir du deuxième théorème de Ljapunov
- à partir des techniques de majoration (transposition de l'étude

initiale de stabilité sur le système de comparaison). L'ensemble des résultats étudiés est donc basé sur l'utilisation des matrices à éléments non négatifs.

Ces résultats peuvent être étendus, sans difficultés, aux systèmes définis sur le corps des complexes.

3.1. Etude de l'unicité à partir d'une fonction de Ljapunov

Théorème V :

Les systèmes continus non linéaires à non linéarité séparable d'ordre q dont la partie linéaire est définie par sa fonction de transfert $W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$, possèdent la propriété d'unicité de réponse si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) Le polynôme $R(p)$ admet $(q-1)$ racines distinctes réelles (ou/et imaginaires) et négatives (ou/et à partie réelle négative)
- 2) Le gain instantané de la non linéarité f^* vérifie la contrainte :

$$f^* > -S_{q-1} + S_q \sum_{i=1}^{q-1} (\lambda_i) + \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\{ \text{Réel} [(-\frac{(p+\lambda_i)Q(p)}{R(p)})_{p=-\lambda_i}] \}^{\frac{1}{2}}}{\text{Réel}(\lambda_i)} \quad 2$$

$$\text{avec : } \begin{cases} S_q > 0 \\ R(p) = (p+\lambda_1)(p+\lambda_2)\dots(p+\lambda_{q-1}) \\ Q(p) = S_q p^q + S_{q-1} p^{q-1} + \dots + S_1 p + 1 \end{cases}$$

démonstration

Le système étudié est régi par une équation d'état non linéaire décrite par la relation (2-1). L'évolution de l'écart entre deux réponses pour une entrée donnée, est définie par (2-2).

Une transformation linéaire sur le corps des complexes \mathbb{C} nous conduit (Annexe I) à une équation aux écarts de la forme :

(2-19) $\overset{\circ}{y} = M y$

la matrice M est définie dans ce cas par :

$(\sigma_1 \frac{S_{q-1}}{S_q} - \frac{f^*}{S_q})$	$(\alpha_1) \dots (\alpha_i) \dots (\alpha_m)$	$(\alpha'_1) \dots (\alpha'_j) \dots (\alpha'_n)$	$\dots (\alpha''_k + i\beta''_k) (\alpha''_k - i\beta''_k) \dots (\alpha''_\ell + i\beta''_\ell) (\alpha''_\ell - i\beta''_\ell)$
(α_1) \vdots (α_i) \vdots (α_m)	\dots $-\lambda_i$ \dots		
$(-\alpha'_1)$ \vdots $(-\alpha'_j)$ \vdots $(-\alpha'_n)$		\dots $-\lambda_j$ \dots	
\vdots $(\alpha''_k + i\beta''_k)$ $(\alpha''_k + i\beta''_k)$ \vdots $(\alpha'' + i\beta''_\ell)$ $(\alpha'' - i\beta''_\ell)$			\dots $-\lambda_k$ \dots $-\lambda_\ell$ \dots $-\lambda_\ell$

avec
$$\begin{cases} Q(p) = S_q p^q + S_{q-1} p^{q-1} + \dots + S_1 p + 1 \\ R(p) = (p+\lambda_1)(\dots)(p+\lambda_i)(\dots)(p+\lambda_j)(\dots)(p+\lambda_k)(p+\lambda_k)(\dots)(p+\lambda_{q-1}) \end{cases}$$

(2-20) $\alpha_i > 0 \forall i \in I = \{1, \dots, m\}$ tel que : $(\alpha_i)^2 = \left(\frac{-(p+\lambda_i)Q(p)}{R(p)} \right)_{p=-\lambda_i}$

(2-21) $\alpha'_j > 0 \forall j \in J = \{1, \dots, n\}$ tel que : $(\alpha'_j)^2 = \left(\frac{(p+\lambda_j)Q(p)}{R(p)} \right)_{p=-\lambda_j}$

(2-22) $\alpha''_k = 0 \forall k \in K = \{1, \dots, \ell\}$ tel que : $(\alpha''_k + i\beta''_k)^2 = \left(\frac{-(p+\lambda_k)Q(p)}{R(p)} \right)_{p=-\lambda_k}$

(2-23) $q = m+n+ 2\ell+1$



La convergence asymptotique de la solution de l'équation aux écarts est assurée si la norme hermitienne $v = \overline{y}^T y$ est une fonction de Ljapunov, c'est-à-dire lorsque l'inégalité (2-24) est vérifiée, la fonction C étant de classe K /40/.

$$(2-24) \quad \frac{1}{2} \overline{y}^T (M + M^T) y < -c (||y||)$$

Nous constatons qu'il suffit que $\frac{1}{2}(M + M^T)$ ait ses éléments non diagonaux (2-19) positifs ou nuls.

Si les racines de R(p) sont à parties réelles négatives, l'application d'une condition de stabilité linéaire /28/29/ montre que la condition suffisante d'unicité de la réponse se réduit à une seule contrainte portant sur le gain instantané :

$$(2-25) \quad (-1)^q \text{dét} \left(\frac{M + M^T}{2} \right) > 0$$

avec :

$$\text{dét} \left(\frac{M + M^T}{2} \right) = \text{dét}$$

σ	$\frac{S_{q-1}}{S_q} - \frac{f^*}{S_q}$	$\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_m$	$0 \dots 0$	$\dots \alpha''_k \alpha''_k \dots$
α_1	\vdots	α_i	\vdots	α_m
0	$ $	0	\vdots	α''_k
0	\vdots	α''_k	\vdots	α''_k
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

$-\lambda_i$ (diagonal dashed line in the first two columns)
 $-\lambda_j$ (diagonal dashed line in the third column)
 $\text{Réel}(-\lambda_k)$ (diagonal dashed line in the fourth column)
 $\text{Réel}(-\lambda_k)$ (diagonal dashed line in the fifth column)

En développant le premier membre de l'inégalité (2-25) ci-dessus, comme nous l'avons vu au chapitre I, il vient :

$$(2-26) \quad \frac{r^*}{S_q} - \sigma_1 \frac{S_{q-1}}{S_q} > \frac{1}{S_q} \left\{ \sum_{i=1}^m \left(\frac{(\alpha_i)^2}{\lambda_i} \right) + \sum_{k=1}^{2\ell} \left(\frac{(\alpha_k'')^2}{\text{Réel}(\lambda_k)} \right) \right\}$$

cette dernière relation peut s'écrire sous la forme condensée :

$$(2-27) \quad \frac{r^*}{S_q} > \sigma_1 - \frac{S_{q-1}}{S_q} + \frac{1}{S_q} \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\left\{ \text{Réel} \left[\left(\frac{-(p+\lambda_i)Q(p)}{R(p)} \right)_{p=\lambda_i} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}}{\text{Réel}(\lambda_i)}^2$$

d'où le théorème V

cas particuliers

Trois cas particuliers du théorème V ont été envisagés :

a) $m = q-1$: les conditions d'unicité du système non linéaire correspondent aux conditions de Kotelyanski appliquées à la matrice définissant l'évolution du vecteur écart ;

$$\frac{1}{S_q} (r^* + \left(\frac{Q(p)}{R(p)} \right)_{p=0}) > 0$$

ce qui correspond aux conditions d'application du théorème I.

b) $n = q-1$: pour assurer l'unicité de la réponse, il suffit que les éléments diagonaux de la matrice représentative du système écart, soient à parties réelles négatives ;

D'où la contrainte :

$$\frac{1}{S_q} (r^* - \sigma_1 S_q + S_{q-1}) > 0$$

ce qui correspond aux conditions d'application du théorème IV.

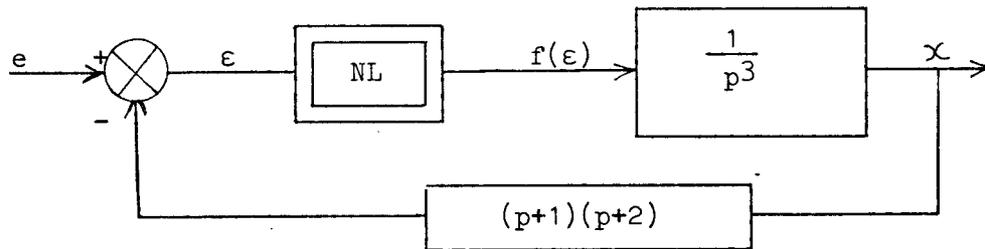
c) $m+n = q-1$: la condition (2-27) devient :

$$(2-28) \quad \frac{1}{S_q} (f^* + \left(\frac{Q(p)}{R(p)} \right)_{p=0}) > \sum_{i=1}^n \left(\frac{Q(p)(p+\lambda_i)}{\lambda_i S_q R(p)} \right)_{p=-\lambda_i}$$

Exemple d'application

Afin d'illustrer cette étude nous allons étudier divers cas susceptibles de se présenter pour un processus du troisième ordre.

1) Soit le système à déphasage non minimal représenté ci-dessous :



(figure 2-8) CSU : $f^* > 4$

Il admet l'équation aux écarts :

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 3 - f^* & 1 & 2\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot y$$

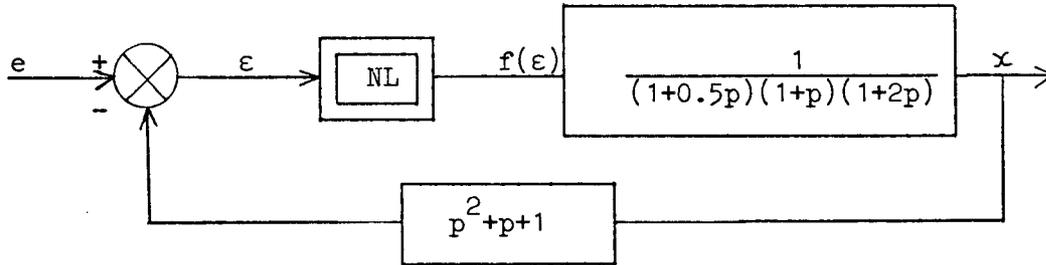
La propriété d'unicité est assurée si la forme quadratique :

$$y^T \begin{bmatrix} 3-f^* & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} y$$

est définie négative c'est-à-dire que si le gain instantané f^* est

supérieur à 4 (2-28).

2) Le cas où $W(p)$ admet des zéros complexes est étudié sur le processus du troisième ordre défini par le schéma bloc de la figure (2-8)



(figure 2-8) $W(p) = \frac{(p-j)(p-j^2)}{(1+0.5p)(1+p)(1+2p)}$

Pour analyser la propriété d'unicité, l'application du théorème V nous amène à l'étude de la forme hermitienne :

$$y^T \begin{bmatrix} -2.5-f^* & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -0.5 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -0.5 \end{bmatrix} y$$

Celle-ci est définie négative si le gain instantané est supérieur à (-0.768)

3.2. Etude de l'unicité à partir d'un système majorant :

En application des techniques de majoration, /21/28/29/31/ ou de transposition de l'étude initiale de stabilité sur un système de comparai-

son contracté, il est possible de proposer une condition suffisante d'unicité des systèmes asservis non linéaires. Celle-ci s'exprime sous la forme des conditions de Kotelyanski appliquées à une matrice pseudo-majorante.

Il vient le théorème :

Théorème VI

Un système continu non linéaire à non linéarité séparable d'ordre q dont la partie linéaire est définie par sa fonction de transfert $W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$ possède la propriété d'unicité si les conditions sont vérifiées :

- (1) $W(p)$ admet q pôles distincts : $-\frac{1}{\tau_1}, \dots, -\frac{1}{\tau_q}$ dont les $(q-1)$ premiers sont à partie réelle négative.

$$(2) \frac{f^*}{S_q} > \text{Réel}\left(-\frac{1}{\tau_q}\right) + \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\left| -\left(\frac{f^* + \frac{1}{\tau_q}\right)\left(p + \frac{1}{\tau_i}\right)R(p)}{Q(p)} \right|_{p = -\frac{1}{\tau_i}}}{\text{Réel}\left(\frac{1}{\tau_i}\right)}$$

Nous allons traiter maintenant un exemple permettant à la fois d'illustrer les techniques de majoration et d'appliquer le théorème précédent.

Soit le système continu non linéaire du second ordre dont l'évolution du vecteur écart $y = [y_1, y_2]^T$ est définie par l'équation différentielle

$$y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau_2} - \frac{f^*}{\tau_1 \tau_2} & -\frac{f^* \left(\lambda - \frac{1}{\tau_1}\right)}{\tau_1 \tau_2} \\ 1 & -\frac{1}{\tau_1} \end{bmatrix} \cdot y$$

Le choix du vecteur de comparaison $z : z = \left[|y_1|, |y_2| \right]^T$, nous conduit au système majorant :

$$\frac{d}{dt}z \leq \begin{bmatrix} -\frac{f^*}{\tau_1\tau_2} - \text{Réel}\left(\frac{1}{\tau_2}\right) & \left| -\frac{f^*(\lambda - \frac{1}{\tau_1})}{\tau_1\tau_2} \right| \\ 1 & \text{Réel}\left(-\frac{1}{\tau_1}\right) \end{bmatrix} \cdot z$$

La stabilité asymptotique du système initial est assurée si les conditions de Kotelyanski appliquées à la matrice pseudo-majorante sont vérifiées.

D'où les contraintes :

$$\begin{cases} \text{Réel}\left(-\frac{1}{\tau_1}\right) < 0 \\ \frac{f^*}{\tau_1\tau_2} > \text{Réel}\left(-\frac{1}{\tau_2}\right) + \frac{\left| -\frac{f^*(\lambda - \frac{1}{\tau_1})}{\tau_1\tau_2} \right|}{\text{Réel}\left(+\frac{1}{\tau_1}\right)} \end{cases}$$

4 - Méthode d'exploitation systématique des résultats précédents sous forme d'un algorithme numérique :

Les théorèmes précédents sont d'application particulièrement simple dans le cas des systèmes de dimensions réduites.

Nous allons maintenant, afin de faciliter l'approche des processus de grandes dimensions, envisager une méthode de recherche systématique de conditions suffisantes d'unicité en utilisant les résultats précédents sous forme numérique.

L'algorithme proposé correspond aux organigrammes représentés sur les figures (2-10-a) et (2-10-b). Il analyse l'unicité successivement à partir des deux modes de représentation utilisés précédemment.

Le premier test, issu de la diagonalisation partielle de la partie linéaire de la matrice régissant l'évolution du vecteur écart, par rapport aux zéros $(-\lambda_i)$, $\forall i = 1, q-1$, de la fonction de transfert $W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$, traite les trois cas correspondant à la première condition suffisante d'unicité et des théorèmes IV et V.

La diagonalisation partielle par rapport aux pôles de $W(p)$, $-\frac{1}{\tau_j}$, $\forall j = 1, q$, est appliquée (théorème III) chaque fois que le premier test^j ne permet pas de conclure relativement à l'unicité.

Notations

$$I = i$$

$$J = j$$

$$\text{LAMDA}(I) = -\lambda_i$$

$$\text{UN/TO}(J) = -\frac{1}{\tau_j}$$

$$\text{COND}(I) = -\left(\frac{Q(p)(p+\lambda_i)}{R(p)}\right)_{p=-\lambda_i}$$

$$\text{COND2}(J) = -\left(\frac{(p+\frac{1}{\tau_q})(p+\frac{1}{\tau_i})R(p)}{Q(p)}\right)_{p=-\frac{1}{\tau_i}}$$

$$\text{SOMME (1)} = -\left(\frac{Q(p)}{R(p)}\right)_{p=0}$$

$$\text{SOMME (2)} = \sum_{i=1}^r \left(-\frac{\text{COND}(I)}{\lambda_i}\right) - \left(\frac{Q(p)}{R(p)}\right)_{p=0}$$

$$\text{SOMME (3)} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 S_q - S_{q-1} \\ + \sum_{i=1}^{q-1} \frac{(\text{Réel}(\text{COND}(I)))^2}{\text{Réel } \lambda_i} \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ 1 \\ 2 \end{array}$$



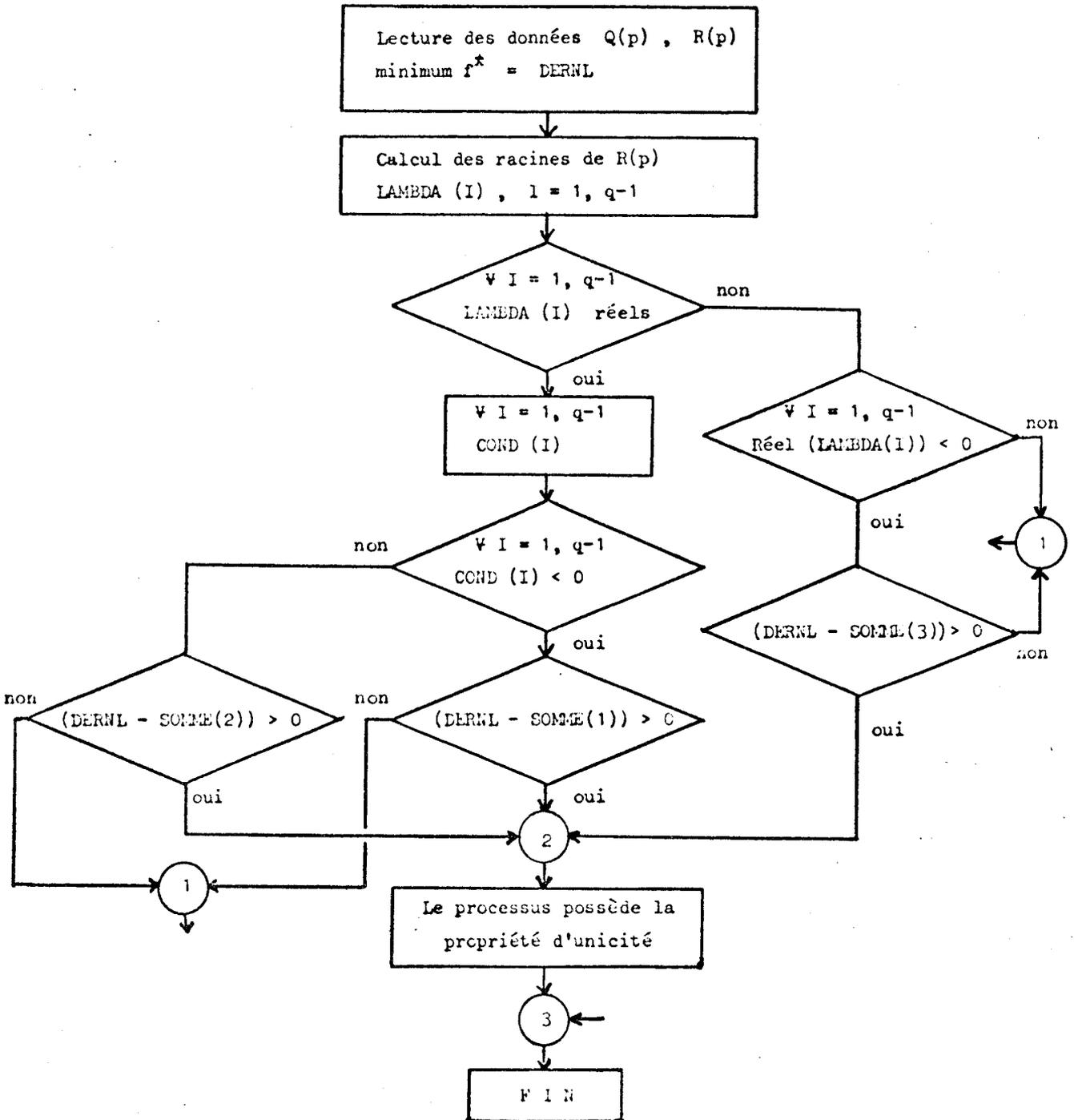


Figure (2-10-a)

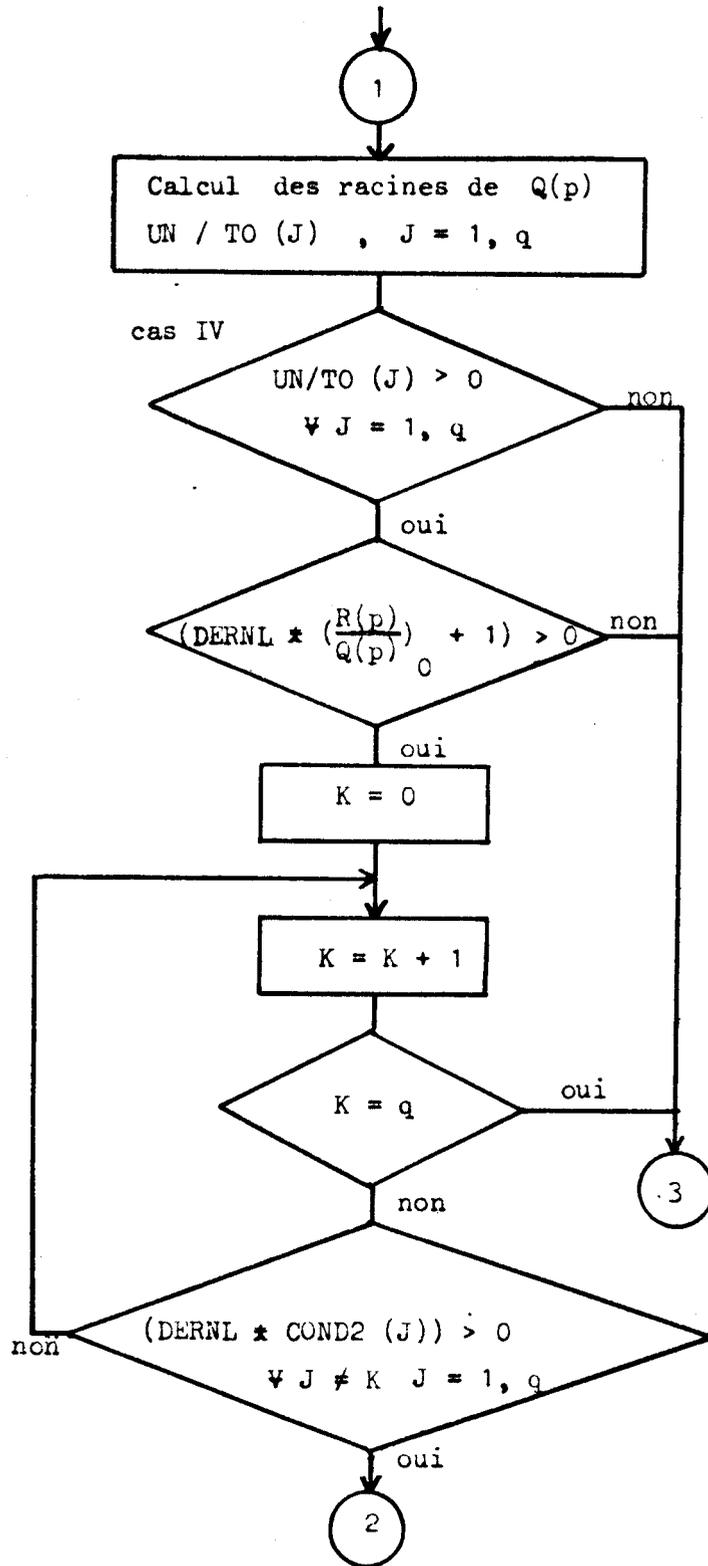


figure (2-10-b)



5 - Conclusion

La définition de deux modes de représentation particuliers nous a conduit à présenter un certain nombre de résultats concernant l'étude de l'indépendance du régime forcé du processus vis à vis des conditions initiales.

L'utilisation des travaux de Laurent et Maizières /7/, Ljapunov /40/ et Kotelyanski /30/ nous a permis de mettre en évidence plusieurs conditions suffisantes d'unicité qui s'expriment à partir des caractéristiques de transfert linéaires et non linéaires d'un processus. Parfois, ces conditions s'interprètent simplement sur le diagramme de Bode de la partie linéaire du système.

Les résultats obtenus s'étendent, sans difficulté, à une classe plus vaste de systèmes en utilisant la notion de système majorant /28/29/.

Afin de faciliter l'approche des processus de grandes dimensions, nous avons présenté une méthode d'exploitation systématique des résultats précédents sous forme d'un algorithme numérique.

L'algorithme proposé permet, en plus, d'envisager l'étude des variations des performances des systèmes asservis en fonction des paramètres de correction.

CHAPITRE III

Extension aux circuits couplés.

1 - Introduction

Des conditions de stabilité d'expressions simples ont déjà été établies en ce qui concerne le cas de plusieurs sous systèmes couplés. Les travaux qui ont été effectués sur ce sujet /50/51/ sont basés, pour la plupart, sur l'utilisation de la méthode directe de Ljapunov. Les plus récentes /52/53/, seulement, développent des conditions portant sur la structure de couplage et des propriétés des sous systèmes.

Dans ce chapitre nous considérerons un couplage particulier de deux sous systèmes continus non linéaires afin de déterminer des conditions d'unicité qui dépendent, d'une façon explicite, des propriétés des sous systèmes et des paramètres de couplage.

Celles-ci sont généralement de vérification aisée, en particulier lorsqu'elles se ramènent à un des cas étudiés dans le chapitre II ; elles constituent ainsi un outil intéressant à utiliser lors de la synthèse des asservissements de ce type.

2 - Description du processus étudié.

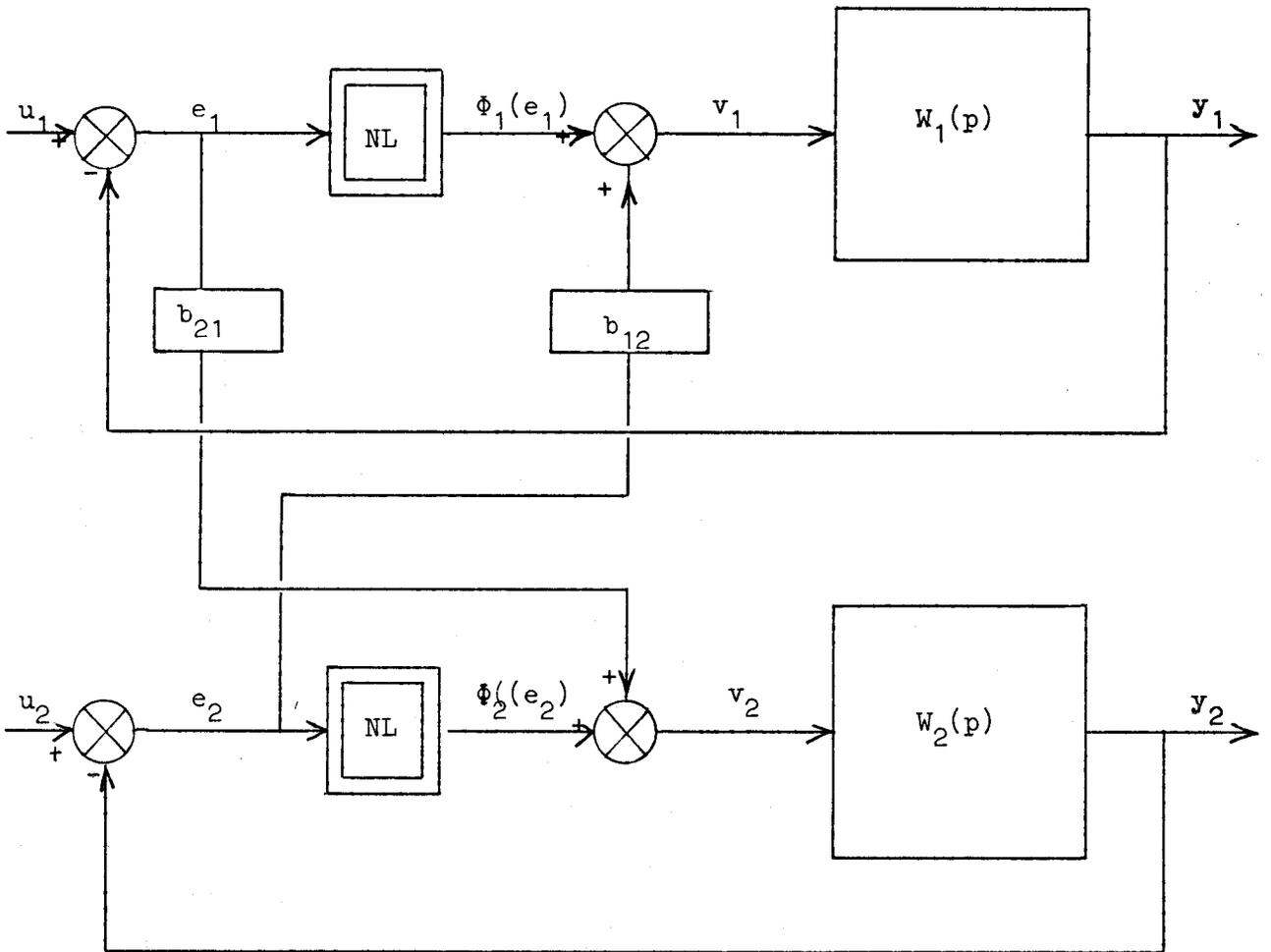
Le système particulier qui nous intéresse est représenté par le schéma bloc de la figure (3-1). Des systèmes similaires ont déjà été étudiés par Harris et Clamroch /27/. Il comporte deux entrées u_1 et u_2 et deux sorties y_1 et y_2 ; les fonctions de transfert de la partie linéaire sont définies par $W_1(p)$ et $W_2(p)$; les paramètres b_{12} et b_{21} sont deux constantes; $\phi_1(e_1)$ et $\phi_2(e_2)$ représentent deux non linéarités sans mémoire, fonctions des variables respectives e_1 et e_2 , et ne dépendent pas explicitement du temps.

$$\text{Si } \overset{\circ}{x} = A_i x_i + b_i v_i, \quad y_i = C_i^T x_i$$

est une représentation minimale de $W_i(p)$, $i = 1, 2$, une description mathématique du système (S) est donnée par :

$$(3 - 1) \quad (S) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{\circ}{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 v_1 \\ y_1 = C_1^T x_1 \\ v_1 = \phi_1(e_1) + b_{12} e_2 \\ e_1 = u_1 - y_1 \\ \overset{\circ}{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 v_2 \\ y_2 = C_2^T x_2 \\ v_2 = \phi_2(e_2) + b_{21} e_1 \\ e_2 = u_2 - y_2 \end{array} \right.$$





(figure 4-1) Systèmes couplés



3 - Etude de l'unicité dans le cas d'un couplage linéaire.

3.1. Généralités.

Nous développerons dans ce chapitre des conditions suffisantes d'unicité de la réponse du système décrit par (3 - 1).

Notons d'abord que tout système admettant une description par un schéma bloc semblable à (3 - 1) peut être considéré comme formé de deux systèmes monovariables.

Ainsi si $b_{12} = b_{21} = 0$ les sous systèmes (S_i) :

$$(S_i) \quad \begin{cases} \circ \\ x_i = A_i x_i + b_i v_i \\ y_i = C_i^T x_i \\ v_i = \phi_i(e_i) \\ e_i = u_i - y_i \end{cases} \quad i = 1, 2$$

ne sont plus couplés et peuvent être analysés séparément et simplement en utilisant les énoncés proposés dans le chapitre II. Dans le cas général, pour étudier l'unicité, nous associerons à (S) le système écart (ΔS) décrit par un modèle mathématique également non linéaire et défini à partir de deux réponses quelconques de (S), soient $(x_1^1, x_2^1)^T$ et $(x_1^2, x_2^2)^T$.

La convergence asymptotique du système aux écarts (ΔS), dont l'état est défini par $y = (x_1^1 - x_1^2, x_2^1 - x_2^2)^T$, implique l'unicité de la réponse pour (S) dont l'état est défini par le vecteur $(x_1, x_2)^T$.

Les résultats obtenus dans le chapitre II concernant l'analyse des systèmes monovariables appliqués à (S_1) et (S_2) , associés à un choix adéquat d'une représentation d'état du système aux écarts (ΔS) nous ont conduit lors de la recherche de conditions suffisantes d'unicité de la réponse du système (S) à distinguer les contraintes sur le couplage, des conditions définies sur les sous systèmes (S_1) et (S_2) pris isolément.

Il est intéressant de noter que les paramètres de couplage n'apparaissent dans la recherche de conditions suffisantes d'unicité que par le produit des coefficients de couplage ($b_{12} \cdot b_{21}$).

Si dans le premier résultat, qui va être présenté, la condition de couplage se ramène à l'étude du signe de ce produit, le second résultat montre que l'unicité du système est fonction de la "totalité" des interactions, et donc de la structure globale des deux sous systèmes couplés.

Des exemples avec valeurs numériques particulières sont présentés pour illustrer les résultats obtenus.

3.2. Système formé de deux sous systèmes à déphasage minimal couplés.

Les conditions suffisantes de non démultiplication de fréquence obtenues au chapitre II, à partir des caractéristiques fréquentielles de la partie linéaire du processus, dans le cas des systèmes monovariabiles, nous ont conduit dans le cas des systèmes multivariabiles, et plus particulièrement, des systèmes admettant une description par un schéma bloc semblable à (3 - 1), à des résultats analogues.

3.2.1. Le produit de couplage $b_{12}b_{21}$ est négatif :

Théorème VII

Soit un système (S), décrit par le schéma bloc de la figure (3 - 1), formé de deux sous systèmes (S_1) et (S_2) couplés tels que :

- $\forall i = 1, 2$ le sous système (S_i) est d'ordre q_i ($q_i > 0$)
- la partie linéaire de (S_i) est définie par sa fonction de transfert $W_i(p) = R_i(p)/Q_i(p)$ telle que les deux polynômes $R_i(p)$ et $Q_i(p)$ forment une paire positive [30].

Le produit des coefficients de couplage étant négatif, l'unicité de réponse du système (S) est vérifiée si les deux sous systèmes (S_1) et (S_2), pris isolément, vérifient les conditions de validité du théorème I.

Démonstration :

Le système étudié (S) défini par le vecteur état $(x_1, x_2)^T$, est décrit par la relation (3 - 1). Le système aux écarts (ΔS) correspondant est régi par le système différentiel suivant :

$$(3 - 2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i^1 - \dot{x}_i^2 = A_i (x_i^1 - x_i^2) + b_i (v_i^1 - v_i^2) \\ y_i^1 - y_i^2 = C_i^T (x_i^1 - x_i^2) \\ v_i^1 - v_i^2 = \phi_i(e_i^1) - \phi_i(e_i^2) + b_{ij} (e_j^1 - e_j^2) \\ e_i^1 - e_i^2 = - (y_i^1 - y_i^2) \\ i = 1 \Rightarrow j = 2 \\ i = 2 \Rightarrow j = 1 \end{array} \right.$$

En posant :

$$\phi_i^* = \frac{\phi_i(e_i^1) - \phi_i(e_i^2)}{e_i^1 - e_i^2} \quad \forall i = 1, 2$$

il vient une représentation matricielle M de (ΔS) (3 - 3) qui fait apparaître les équations aux écarts relatives aux sous systèmes (S_1) et (S_2)

$$\begin{aligned} M_{11} &= A_1 - b_1 C_1^T \phi_1^* \\ M_{22} &= A_2 - b_2 C_2^T \phi_2^* \end{aligned}$$

Le couplage entre (S_1) et (S_2) est alors défini par les matrices $M_{12}(q_1, x_{q_2})$ et $M_{21}(q_2, x_{q_1})$:

$$M_{12} = - b_{12} (b_1 C_2^T)$$

$$M_{21} = - b_{21} (b_2 C_1^T)$$

Il vient :

$$(3 - 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = My \\ M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

(3-3)

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \dots & 0 & m_{1,q_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & m_{q_1-1,q_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_{q_1,1} & \dots & m_{q_1,q_1-1} & m_{q_1,q_1}^* & 0 & 0 & \dots & 0 & m_{q_1,q_1+q_2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m_{q_1+1,q_1+1} & 0 & \dots & 0 & m_{q_1+1,q_1+q_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & m_{q_1+q_2-1,q_1+q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m_{q_1+q_2,q_1} & m_{q_1+q_2,q_1+1} & \dots & m_{q_1+q_2,q_1+q_2-1} & m_{q_1+q_2,q_1+q_2} \end{bmatrix}$$

Dans ce cas précis, les éléments de la matrice $M(m_{ij})$ sont définis par :

(3-4)

$$m_{ii} = \begin{cases} -\lambda_i^1 & \forall i = 1, q_1-1 \\ \sigma_{q_1-1}^1 - \frac{s_{q_1-1}}{s_{q_1}} - \frac{\phi_1^*}{s_{q_1}} & i = q_1 \\ -\lambda_{i-q_1}^2 & \forall i = q_1+1, q_1+q_2-1 \\ \sigma_{q_2-1}^2 - \frac{s_{q_2-1}}{s_{q_2}} - \frac{\phi_2^*}{s_{q_2}} & i = q_1+q_2 \end{cases}$$



$$(3-5) \quad m_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} \left(- \frac{(p+\lambda_i^1) Q_1(p)}{S_{q_1} R_1(p)} \right)_{p=-\lambda_i^1} \frac{1}{2} & j = q_1, \quad \forall i = 1, q_1-1 \\ m_{ji} & j = q_1, \quad \forall i = 1, q_1-1 \\ \left(\frac{-b_{12} b_{21}}{S_{q_1} S_{q_2}} \right) \frac{1}{2} & i = q_1, \quad j = q_1 + q_2 \\ -m_{ji} & i = q_1, \quad j = q_1 + q_2 \\ \left(\frac{-(p+\lambda_{i-q_1}^2) Q_2(p)}{S_{q_2} R_2(p)} \right)_{p=-\lambda_{i-q_1}^2} \frac{1}{2} & i = q_1+q_2, \quad \forall j = q_1+1, q_1+q_2-1 \\ -m_{ji} & i = q_1 + q_2, \quad \forall j = q_1+1, q_1+q_2-1 \end{array} \right.$$

L'unicité de la réponse du processus initial (3-2) est assurée si l'équation aux écarts (3-3) correspond à un système stable. Nous avons vu au chapitre I qu'il suffit pour cela que la forme quadratique $\frac{1}{2} y^T (M+M^T) y$ soit définie négative.

L'application de la condition de Kotelyanski sur la matrice $\frac{1}{2} (M+M^T)$, diagonale par blocs, symétrique et à éléments non diagonaux positifs, donne la condition suffisante d'unicité (3-6) :

$$(3-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{ii} < 0 \\ (-1)^{q_1} \text{déterminant } (M_{11}) > 0 \\ (-1)^{q_2} \text{déterminant } (M_{22}) > 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1, q_1-1 \\ \forall i = q_1+1, q_1+q_2-1 \end{array} \right.$$

Ce qui correspond aux conditions d'application du théorème I aux sous systèmes (S_1) et (S_2) .

Ainsi la propriété d'unicité de (S_1) associée à celle de (S_2) , assure la propriété d'unicité pour le système (S) à la seule condition :

$$b_{12} b_{21} < 0$$

Ce qui démontre le théorème VII.

3.2.2. Le produit des coefficients de couplage $b_{12}b_{21}$ est positif.

Le théorème qui vient d'être présenté ne s'avère plus applicable lorsque le produit des coefficients de couplage est positif. Il convient alors d'envisager l'application du théorème suivant :

Théorème VIII

Soit (S) le système continu non linéaire de la figure (3-1), composé de deux sous systèmes monovariabiles non linéaires (S_1) et (S_2) couplés avec les paramètres b'_{12} et b'_{21} .

Le système (S) possède la propriété d'unicité si les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) $\forall_i = 1, 2$ le sous système (S_i) , d'ordre q_i , est tel que sa partie linéaire est définie par sa fonction de transfert :

$$W_i(p) = \frac{R_i(p)}{Q_i(p)},$$

les deux polynômes $R_i(p)$ et $Q_i(p)$ formant une paire positive - ($S_{q_i} > 0$)

$$(2) \left(\phi_1^* + \frac{Q_1(p)}{R_1(p)} \right)_{p=0} > 0$$

$$(3) \left(\phi_1^* + \frac{Q_1(p)}{R_1(p)} \right)_{p=0} \left(\phi_2^* + \frac{Q_2(p)}{R_2(p)} \right)_{p=0} - b'_{12} b'_{21} > 0$$

Démonstration :

La démonstration du théorème VIII est analogue à celle du théorème VII.

En effet, l'étude de l'unicité se ramène à celle du cas précédent en posant :

$$(3 - 7) \quad b'_{12} = b_{12}$$

$$b'_{21} = -b_{21}$$

Il vient alors les contraintes :

$$(3 - 8) \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ. m_{ii} < 0 \\ 2^\circ. (-1)^{q_1} \text{d\u00e9terminant } (M_{11}) > 0 \\ 3^\circ. (-1)^{q_1+q_2} \text{d\u00e9terminant } (M) > 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \psi_i = 1, q_1^{-1} \\ \psi_i = q_1+1, q_1+q_2 \end{array} \right.$$

En d\u00e9veloppant les diff\u00e9rents d\u00e9terminants, les in\u00e9galit\u00e9s (3-8) deviennent :

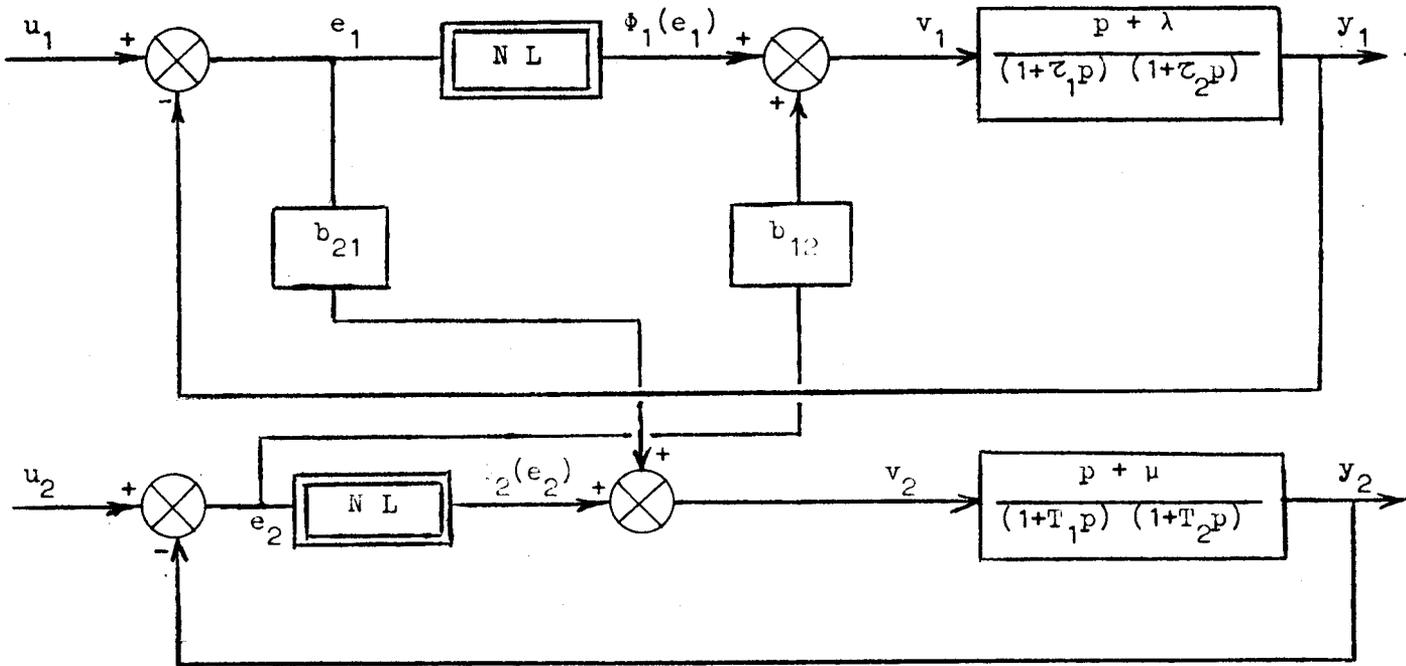
$$(3 - 9) \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ. m_{ii} < 0 \\ 2^\circ. \phi_1^* + \left(\frac{Q_1(p)}{R_1(p)} \right)_{p=0} > 0 \\ 3^\circ. \left(\phi_1^* + \left(\frac{Q_1(p)}{R_1(p)} \right)_{p=0} \right) \left(\phi_2^* + \left(\frac{Q_2(p)}{R_2(p)} \right)_{p=0} \right) - b'_{12} b'_{21} > 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \psi_i = 1, q_1^{-1} \\ \psi_i = q_1+1, q_1+q_2 \end{array} \right.$$

Ce qui d\u00e9montre le th\u00e9or\u00e8me VIII.

Exemple d'application :

Cas de deux syst\u00e8mes du second ordre coupl\u00e9s

Afin d'illustrer la mise en oeuvre des th\u00e9or\u00e8mes VIII et IX, envisageons le cas d'un processus multivariable correspondant au sch\u00e9ma de la figure (3-2) :



$$(S_1) \quad W_1 = \frac{R_1(p)}{Q_1(p)} = \frac{p + \lambda}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \quad 0 < \frac{1}{\tau_1} < \lambda < \frac{1}{\tau_2}$$

$$(S_2) \quad W_2 = \frac{R_2(p)}{Q_2(p)} = \frac{p + \mu}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} \quad 0 < \frac{1}{T_1} < \mu < \frac{1}{T_2}$$

Figure (3-2)

Il vient une représentation matricielle M du système aux écarts de la forme :



$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A_1 - b_{11} C_1^T \phi_1^* & -b_{12} (b_{12} C_2^T) \\ -b_{21} (b_{21} C_1^T) & A_2 - b_{22} C_2^T \phi_2^* \end{bmatrix}$$

a) $b_{21} b_{12} > 0$:

Les matrices M_{11} M_{12} M_{21} et M_{22} s'expriment alors par :

$$M_{11} = \begin{bmatrix} -\lambda & \frac{-Q_1(-\lambda)}{\tau_1 \tau_2} \frac{1}{2} \\ \frac{-Q_1(-\lambda)}{\tau_1 \tau_2} \frac{1}{2} & \lambda - \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} - \frac{\phi_1^*}{\tau_1 \tau_2} \end{bmatrix} \quad M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{+b_{12} b_{21}}{(\tau_1 \tau_2 T_1 T_2)} \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{+b_{12} b_{21}}{(\tau_1 \tau_2 T_1 T_2)} \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad M_{22} = \begin{bmatrix} -\mu & \frac{-Q_2(-\mu)}{T_1 T_2} \frac{1}{2} \\ \frac{-Q_2(-\mu)}{T_1 T_2} \frac{1}{2} & \mu - \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} - \frac{\phi_2^*}{T_1 T_2} \end{bmatrix}$$

La matrice M est symétrique et à éléments non diagonaux positifs

L'unicité de la réponse du processus (figure (3 - 2)) est assurée si la condition de Kotelyanski appliquée à la matrice

$\frac{1}{2} (M + M^T)$, égale à M, est vérifiée, soit :

$$\begin{cases} 1 + \lambda \phi_1^* > 0 \\ (1 + \lambda \phi_1^*) (1 + \mu \phi_2^*) - \lambda \mu b_{21} b_{12} > 0 \end{cases}$$

b) $b_{12} b_{21} < 0$

Il vient la nouvelle représentation matricielle M' du système aux écarts :

$$M' = \begin{bmatrix} M_{11} & M'_{12} \\ M'_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

avec :

$$M'_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{b_{12} b_{21}}{\tau_1 \tau_2^T \tau_1^T \tau_2^T}\right) \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad M'_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{b_{12} b_{21}}{\tau_1 \tau_2^T \tau_1^T \tau_2^T}\right) \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

La matrice $\frac{1}{2} (M + M^T)$ est alors de la forme :

$$\frac{1}{2} (M + M^T) = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}$$

L'unicité de réponse du système global est assurée si chacun des deux sous systèmes composants possède cette même propriété; c'est à dire si :

$$\begin{cases} 1 + \lambda \phi_1^* > 0 \\ 1 + \mu \phi_2^* > 0 \end{cases}$$

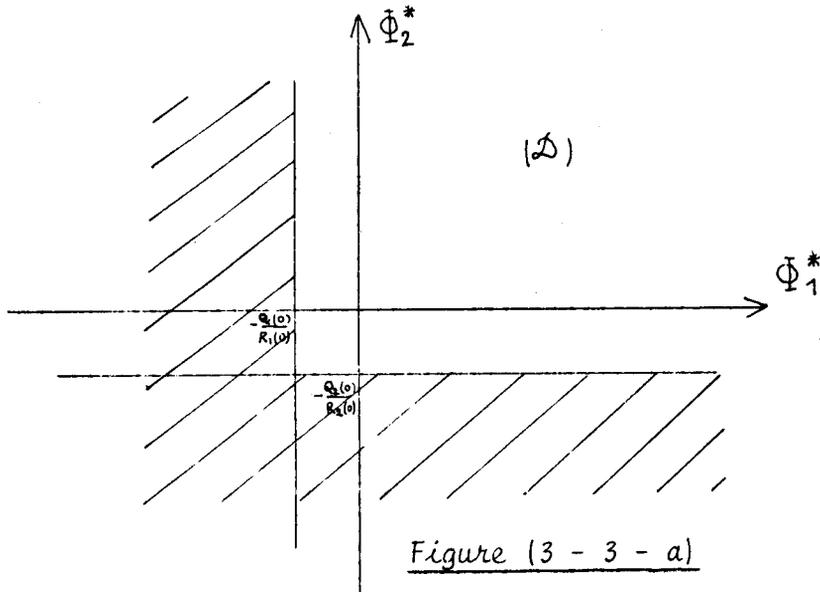
Il est à noter que dans les deux exemples qui viennent d'être présentés, l'application des théorèmes VII et VIII ne nécessite pas la

détermination explicite des matrices M_{ij} d'où l'intérêt de la méthode.

3.2.3. Interprétations graphiques :

Les deux dernières conditions suffisantes (théorème VII et VIII) relatives à l'étude de l'unicité des systèmes couplés peuvent admettre une interprétation graphique simple.

En effet, pour que les conditions d'application du théorème VII soient vérifiées, il suffit (figure (3 - 3 - a)) que les zéros de $W_i(p)$, $\forall i = 1, 2$, soient négatifs et que ϕ_1^* et ϕ_2^* restent à tout instant dans le domaine (\mathcal{D}) (non hachuré) défini dans le plan (ϕ_1^*, ϕ_2^*) .



De même, pour le théorème VIII, la propriété d'unicité est assurée (figure (3 - 3 - b)) si les zéros de $W_i(p)$, $\forall i = 1, 2$ sont négatifs et si ϕ_1^* et ϕ_2^* restent à tout instant dans le domaine (\mathcal{D}') (non hachuré) défini dans le même système de coordonnées que (\mathcal{D})

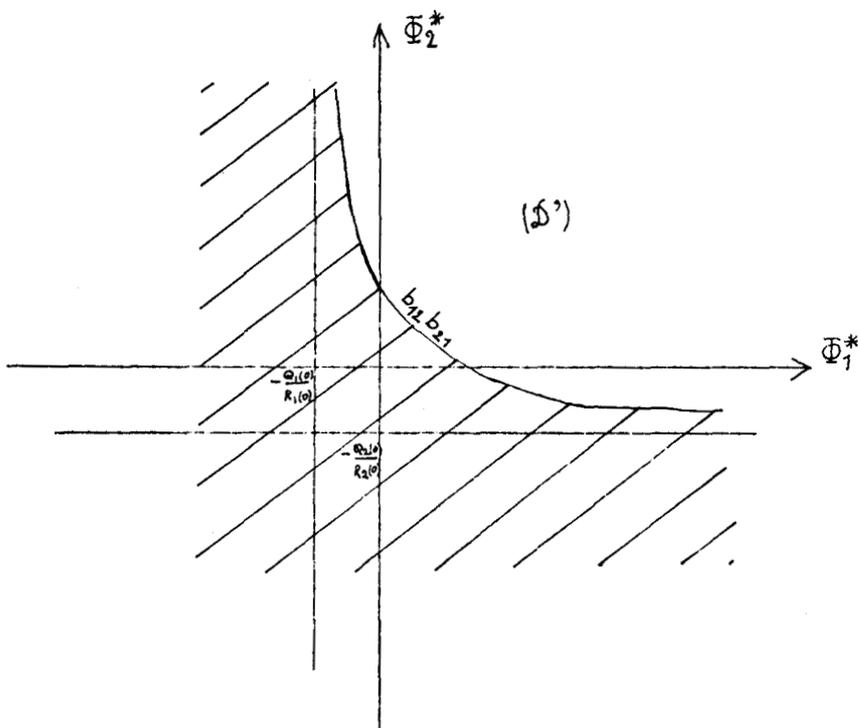


Figure (3 - 3 - b)

3.3. Représentation complexe de deux circuits couplés.

Les résultats précédents concernant l'étude de l'unicité de deux systèmes à déphasage minimal couplés, peuvent être étendus au cas où les systèmes admettent des représentations complexes.

Le processus non linéaire est décrit par l'équation d'état (3 - 3) :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= M \cdot y \\ M &= (m_{ij}) \end{aligned}$$

Les éléments de la matrice caractéristique du système peuvent être réels ou imaginaires.

Dans le cas de couplage de deux systèmes (S_1) et (S_2) qui sont régis par des équations différentielles du type défini au paragraphe (2.19), chapitre II, les éléments de la matrice

$\frac{1}{2} (M + \bar{M}^T) : m'_{ij}$, sont alors définis par les expressions :

$$(3-10) \quad m'_{ii} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Réel } (-\lambda_i^1) & \forall i = 1, q_1-1 \\ \sigma_{q_1-1}^1 - \frac{s_{q_1-1}}{s_{q_1}} - \frac{\phi_1^*}{s_{q_1}} & i = q_1 \\ \text{Réel } (-\lambda_i^2) & \forall i = q_1+1, q_1+q_2-1 \\ \sigma_{q_2-1}^2 - \frac{s_{q_2-1}}{s_{q_2}} - \frac{\phi_2^*}{s_{q_2}} & i = q_1+q_2 \end{array} \right.$$

$$(3-11) \quad m'_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{(Réel } (\frac{-(p + \lambda_i^1) Q_1(p)}{s_{q_1} R_1(p)})_p = -\lambda_i^1 \frac{1}{2} \text{)} & j = q_1, \forall i = 1, q_1-1 \\ m_{ji} & j = q_1, \forall i = 1, q_1-1 \\ \left(\frac{+ b_{12} b_{21}}{s_{q_1} s_{q_2}} \right)^{\frac{1}{2}} & \text{si } b_{12} b_{21} > 0 \\ \left(\frac{- b_{12} b_{21}}{s_{q_1} s_{q_2}} \right)^{\frac{1}{2}} & \text{si } b_{12} b_{21} < 0 \\ m_{ji} \text{ si } b_{12} b_{21} > 0 & i = q_1, j = q_1+q_2 \\ - m_{ji} \text{ si } b_{12} b_{21} < 0 & \\ \text{(Réel } (\frac{-(p + \lambda_{i-q_1}^2) Q_2(p)}{s_{q_2} R_2(p)})_p = -\lambda_{i-q_1}^2 \frac{1}{2} \text{)} & i = q_1+q_2 \\ & \forall j = q_1+1, q_1+q_2-1 \\ m_{ji} & i = q_1+q_2 \\ & \forall j = q_1+1, q_1+q_2-1 \end{array} \right.$$

L'application du théorème V, indique que l'unicité de réponse du système (S_i) , $i = 1, 2$, est assurée si :

$$(3 - 12) \left\{ \begin{array}{l} \text{Réel}(-\lambda_j^i) < 0 \quad \forall j = 1, q_i - 1 \\ (-1)^{q_i} \Delta q_i > 0 \\ \text{avec } (-1)^{q_i} \Delta q_i = \phi_i^* + S_{q_i-1} - S_{q_i} \sigma_1^i - \sum_{j=1}^{q_i-1} \frac{(\text{Réel}(\frac{-(p+\lambda_j^i) Q_i(p)}{R_i(p)})) \frac{1}{2} p = -\lambda_j^i}{\text{Réel}(\lambda_j^i)} \end{array} \right.$$

Cette étude de l'unicité pour les systèmes composants (S_1) et (S_2) nous conduit à l'énoncé du théorème IX établissant une condition suffisante d'unicité pour le processus constitué par (S_1) et (S_2) couplés :

Théorème IX

Le processus (S) constitué de deux systèmes (S_1) et (S_2) , définis au paragraphe 3 - 1 (chapitre II), couplés avec les paramètres b_{12} et b_{21} possède la propriété d'unicité si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(1) (1 - 1) $b_{12} b_{21} < 0$

(1 - 2) Les systèmes (S_1) et (S_2) , pris isolément, vérifient les conditions d'application du théorème V

(2) (2 - 1) Le système (S_1) vérifie les conditions d'application du théorème V

(2 - 2) Les parties réelles des zéros $-\lambda_j^2$, $\forall j = 1, q_2 - 1$, de la fonction de transfert de la partie linéaire de (S_2) sont négatives

$$(2 - 3) \quad 0 < b_{12} b_{21} < (-1)^{q_1 + q_2} \Delta_{q_1} \Delta_{q_2}$$

Démonstration :

La méthode utilisée pour définir les deux conditions suffisantes d'unicité proposées par le théorème IX est semblable à celles utilisées pour démontrer les théorèmes VII et VIII.

En effet, dans le cas où le produit des coefficients de couplage est positif, la propriété d'unicité est assurée si la matrice $\frac{1}{2} (M + \overline{M}^T)$ est définie négative. L'application des conditions de Kotelyanski, ce qui est possible car la matrice $\frac{1}{2} (M + \overline{M}^T)$ est à éléments non diagonaux positifs, donne alors les contraintes :

$$(3 - 13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Réel} (-\lambda_j^i) < 0 \quad \forall i = 1, 2, \quad \forall j = 1, q_i - 1 \\ (-1)^{q_1} \Delta_{q_1} > 0 \\ (-1)^{q_1 + q_2} \det\left(\frac{M + \overline{M}^T}{2}\right) > 0 \end{array} \right.$$

Un système d'inégalité équivalent à (3 - 13) est obtenu en développant les différents déterminants :

$$(3 - 14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Réel} (-\lambda_j^i) < 0 \quad \forall i = 1, 2, \quad \forall j = 1, q_i - 1 \\ (-1)^{q_1} \Delta_{q_1} > 0 \\ (-1)^{q_1 + q_2} \Delta_{q_1} \Delta_{q_2} - b_{12} b_{21} > 0 \end{array} \right.$$

Ce qui démontre le premier volet du théorème IX.

Dans le cas où le produit des coefficients de couplage est négatif, il vient les contraintes :

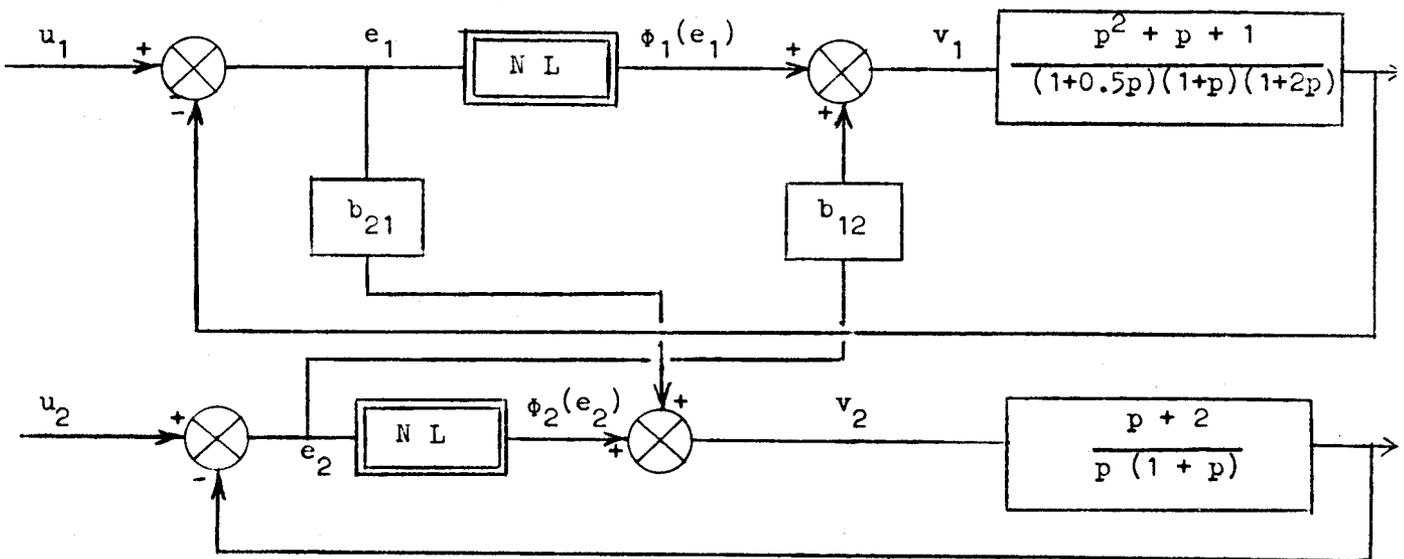
$$(3 - 15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Réel } (-\lambda_j^i) < 0 \quad \forall i = 1, 2 \quad \forall j = 1, q_i - 1 \\ (-1)^{q_1} \Delta q_1 > 0 \\ (-1)^{q_2} \Delta q_2 > 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, pour assurer l'unicité du système (S) il suffit, dans ce cas, que (S_1) et (S_2) satisfassent les conditions d'application du théorème V.

Exemple d'application :

Cas d'un moteur couplé à un système du troisième ordre

Nous proposons de traiter le cas d'un moteur (S_2) couplé à un système monovariante non linéaire (S_1) qui admet un modèle mathématique du troisième ordre (figure 3 - 4)).



(figure 3 - 4)

$$(S_1) \quad W_1 = \frac{R_1(p)}{Q_1(p)} = \frac{(p-j)(p-j^2)}{(1+0.5p)(1+p)(1+2p)}$$

$$(S_2) \quad W_2 = \frac{R_2(p)}{Q_2(p)} = \frac{p+2}{p(p+1)}$$

Deux cas sont étudiés :

- Si le produit des coefficients de couplage est positif, par application du théorème IX il vient les conditions suivantes d'unicité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1^* + 0.768 > 0 \\ 0 < b_{12} b_{21} < (\phi_1^* + 0.768)(\phi_2^* - 1) \end{array} \right.$$

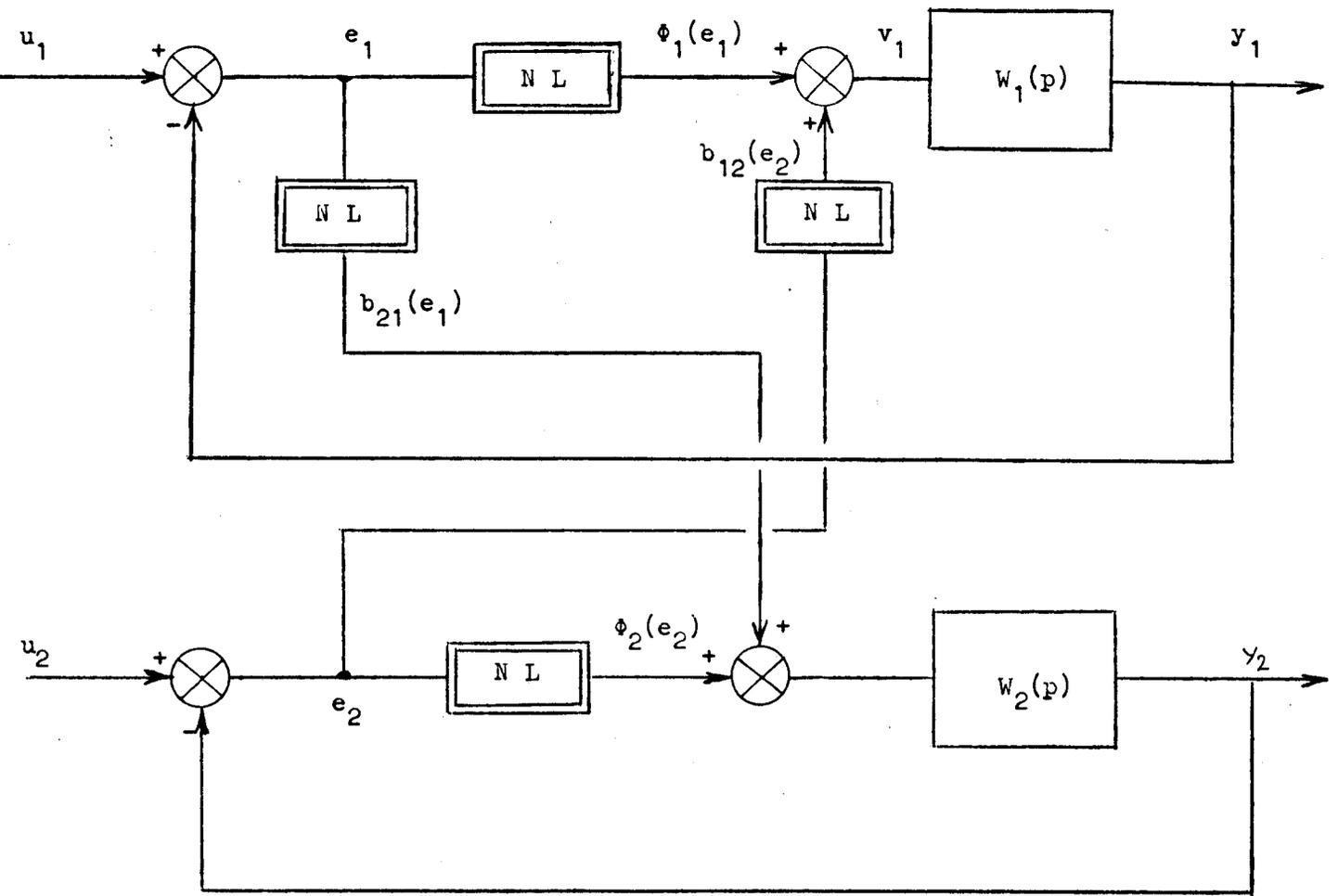
- Si ce produit est négatif, les conditions deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1^* + 0.768 > 0 \\ \phi_2^* - 1 > 0 \end{array} \right.$$

4 - Etude de l'unicité dans le cas d'un couplage non linéaire.

Nous avons recherché jusqu'à présent, dans ce chapitre, des conditions suffisantes d'unicité dans le cas de couplage linéaire de deux sous systèmes monovariabiles non linéaires. Pour compléter cette étude, nous proposons un dernier résultat relatif à l'analyse de l'unicité d'un processus correspondant au schéma bloc de la figure (3 - 5) défini par le couplage non linéaire de deux systèmes continus non linéaires (S_1) et (S_2) qui admettent une représentation complexe (paragraphe 3 - 3 - Chapitre IV)





(figure 3 - 5)

en posant :

$$(3 - 16) \quad b_{12}^* = \frac{b_{12}(e_2^1) - b_{12}(e_2^2)}{e_2^1 - e_2^2}$$

$$(3 - 17) \quad b_{21}^* = \frac{b_{21}(e_1^1) - b_{21}(e_1^2)}{e_1^1 - e_1^2}$$

il vient l'équation aux écarts entre deux réponses :

$$(3 - 18) \quad \overset{\circ}{y} = Ny \quad , \quad N(q_1+q_2 \times q_1+q_2)$$



$y(t)$ étant un vecteur définissant l'évolution de l'écart de ces deux réponses

Les éléments de la matrice $N : n_{ij}$, peuvent être réels ou imaginaires.

La matrice $\frac{1}{2} (N + \overline{N}^T)$, d'éléments n'_{ij} , peut être déduite simplement de la matrice $\frac{1}{2} (M + \overline{M}^T)$ définie au paragraphe(3 - 3) (chapitre III) en prenant :

$$(3 - 19) \quad \left\{ \begin{array}{l} n'_{ij} = m'_{ij} \quad \forall (i,j), (j,i) \neq (q_1, q_1+q_2) \\ n'_{q_1, q_1+q_2} = \frac{b_{12}^* + b_{21}^*}{2 \sqrt{s_{q_1} s_{q_2}}} = n'_{q_1+q_2, q_1} \end{array} \right.$$

Nous remarquons que tous les éléments non diagonaux de $\frac{1}{2} (N + \overline{N}^T)$, sauf n'_{q_1, q_1+q_2} et $n'_{q_1+q_2, q_1}$, sont non négatifs. Les propriétés des matrices pseudo - majorantes nous permettent alors d'énoncer le théorème suivant :

Théorème X

Le processus (S) constitué de deux systèmes (S_1) et (S_2) , couplés avec les paramètres $b_{12}(e_2)$ et $b_{21}(e_1)$ non linéaires, possède la propriété d'unicité de la réponse si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (1) Le système (S_1) vérifie les conditions d'application du théorème V
- (2) Les parties réelles des zéros, $-\lambda_j^2$, $\forall j = 1, q_2-1$, de la fonction de transfert de la partie linéaire de (S_2) sont négatives.

$$(3) \quad \left(\frac{|b_{12}^* + b_{21}^*|}{2} \right)^2 < (-1)^{q_1+q_2} \Delta_{q_1} \Delta_{q_2}$$

Démonstration :

Une condition suffisante d'unicité de la réponse du processus (S) est que la matrice $\frac{1}{2} (N + \bar{N}^T)$ soit définie négative.

Or, une condition suffisante pour que cette matrice ait toutes ses valeurs caractéristiques à parties réelles négatives, est que la matrice pseudo-majorante $(\frac{1}{2} (N + \bar{N}^T))$, relative à la norme p définie par $p(z) = |z|$ avec $|z| = [|z_1|, \dots, |z_q|]^T$, $\forall z = [z_1, \dots, z_q]^T$, d'éléments n''_{ij} , $\forall i, j = 1, q_1+q_2$, soit définie négative (3 - 20)

$$(3 - 20) \quad \left\{ \begin{array}{l} n''_{ij} = n'_{ij} \quad \forall (i,j), (j,i) \neq (q_1, q_1+q_2) \\ n''_{q_1, q_1+q_2} = n''_{q_1+q_2, q_1} = \frac{|b_{12}^* + b_{21}^*|}{2 \sqrt{s_{q_1} s_{q_2}}} \end{array} \right.$$

Les conditions de Kotelyanski appliquées à cette matrice pseudo-majorante, dont les éléments non diagonaux sont rendus non négatifs, comme précédemment, s'exprime par :

$$(3 - 20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Réel} (-\lambda_j^i) < 0 \quad \forall i = 1, 2 \quad \forall j = 1, q_i-1 \\ (-1)^{q_1} \Delta_{q_1} > 0 \\ (-1)^{q_1+q_2} \Delta_{q_1} \Delta_{q_2} - \frac{(|b_{12}^* + b_{21}^*|)^2}{4} > 0 \end{array} \right.$$

Remarque :

Le choix d'une représentation convenable, dans le cas d'interaction de type linéaire, permet par ce théorème de retrouver les résultats des théorèmes énoncés en début de ce chapitre.

5 - Conclusion

Les méthodes proposées dans ce chapitre pour l'étude de l'unicité des processus interconnectés permettent de mettre en évidence le rôle des interactions définies entre les divers sous systèmes.

Dans le cas de sous systèmes à déphasage minimal, l'application de la seconde méthode de Ljapunov nous a conduit à des conditions qui s'expriment simplement en fonction des caractéristiques de transfert linéaires et non linéaires de chacun des sous systèmes.

L'utilisation des propriétés des matrices pseudo-majorantes nous a permis enfin, d'élargir la classe des systèmes concernés, en particulier dans le cas d'interactions de type non linéaire .

CHAPITRE IV

Etude de la stabilité de certains processus non linéaires.

1 - Introduction

Les chapitres précédents avaient pour objet la détermination d'une condition suffisante garantissant la validité de la méthode du premier harmonique dans le cas de processus évoluant en régime forcé. Toutefois, les conditions mises en évidence ne font intervenir les caractéristiques du régime permanent, en particulier, elles ne donnent aucune indication concernant les propriétés de stabilité d'un processus fonctionnant en régulateur. Dans ce sens ce chapitre concerne la détermination de conditions particulières de stabilité et leur application à la synthèse d'un système asservi, ainsi que l'amélioration des performances d'un processus.

2 - Etude de la stabilité des systèmes continus non linéaires.

2.1. Définitions :

Les systèmes que nous nous proposons d'étudier peuvent être rattachés à la classe des processus non linéaires fonctionnant en régime autonome et décrits par l'équation d'état vectorielle (Chapitre I, (1)).

$$(4 - 1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= a(x, t) \\ \forall t \in \mathcal{T} \quad x(x_0, t, t_0) &\in \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^q \end{aligned}$$

$a(x, t)$: vecteur d'éléments $a_i(x, t) : \mathbb{R}^q \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^q$

Nous allons tout d'abord rappeler les principales définitions que nous sommes amenés à utiliser, le point $x = 0$ étant supposé le seul point d'équilibre du système :

$$a(x, t) = 0 \iff x = 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

Stabilité asymptotique

Définition 1

L'équilibre du système décrit par l'équation (4 - 1) est dit stable au sens de Ljapunov

/40/ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ et } \forall t_0 \in \mathcal{T}, \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0 \text{ tel que} \\ \forall x_0, \|x_0\| < \delta \text{ il vient } \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon \\ \forall t > t_0$$

Définition 2

Le point d'équilibre $x = 0$ de l'équation

(4 - 1) est dit *attractif* s'il existe un nombre η tel que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(x_0, t, t_0) = 0 \quad \forall x_0 (||x_0|| < \eta) \\ \forall t_0 \in \mathcal{C}$$

Définition 3

Le point d'équilibre de l'équation (4 - 1) est dit *asymptotiquement stable* au sens de Ljapunov s'il est à la fois stable et attractif.

Stabilité absolue

Les définitions qui viennent d'être proposées caractérisent des propriétés locales, concernant l'origine. Lorsque les propriétés définies en 2 et 3 sont vérifiées pour toute condition initiale x_0 nous pouvons parler de stabilité asymptotique illimitée définissant ainsi une propriété globale.

Si le système converge vers zéro $\forall x_0 \in \mathcal{E} \subset \mathcal{R}^q$, le domaine \mathcal{E} est dit domaine d'attraction vis à vis des conditions initiales.

En plus si $\mathcal{E} = \mathcal{R}^q$ l'équilibre est *absolument stable*.

La notion de stabilité absolue implique donc un ensemble de contraintes relatives aux non linéarités et aux paramètres du système et qui, lorsqu'elles sont vérifiées pour toutes les valeurs de x et de t , permettent de conclure à la stabilité asymptotique globale du processus.

2.2. Systèmes continus non linéaires à non linéarité séparable

L'étude de la stabilité est dans un premier temps limitée aux systèmes monovariabiles, l'extension à certains processus

multivariables, de type interconnecté est ensuite envisagée.

Soit le processus de type (4) (Chapitre I, (3 - 1)) défini par l'équation d'état :

$$(4 - 2) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + b f(\varepsilon) \\ \varepsilon = - C^T x \end{cases}$$

La recherche de conditions suffisantes d'unicité, envisagée aux chapitres précédents, fait intervenir les propriétés de la matrice $(M + M^T)$ avec $M = (A - bC^T f^*)$, f^* étant le gain instantané de la non linéarité. D'une manière semblable, l'étude de la stabilité fait intervenir la matrice $A(t, x) = (A - bC^T f^+)$ avec $f^+ = f(\varepsilon)/\varepsilon$ représentant, lorsque cette expression est définie, le gain équivalent de la non linéarité.

Les conditions de stabilité imposent ainsi des contraintes sur le gain équivalent de la non linéarité, alors que les conditions d'unicité limitent les variations du gain instantané.

Il est donc possible à partir des énoncés des théorèmes relatifs à l'unicité d'exprimer des conditions suffisantes de stabilité.

2.3. Conditions suffisantes de stabilité

Théorème 1

Soit le système continu non linéaire monovarié d'ordre q , à non linéarité séparable (Chapitre II, (2 - 3)) dont la partie non linéaire est caractérisée par son gain équivalent f^+ et la partie linéaire définie par sa fonction de transfert $w(p) = R(p)/Q(p)$ et telle que :

- (1) Le polynôme $R(p)$ admet $(q-1)$ racines distinctes réelles et négatives.
- (2) Les résidus relatifs aux divers pôles de $1/w(p)$ sont négatifs.

- Si l'inégalité :

$$r^+ + \frac{1}{w(0)} > 0$$

est vérifiée $\forall x \in \mathcal{E} \subset \mathcal{R}^q$ alors l'état d'équilibre $x = 0$ du système (Chapitre II, (2 - 3)) est asymptotiquement stable.

- Si l'inégalité précédente est vérifiée $\forall x \in \mathcal{E} = \mathcal{R}^q$ alors la stabilité asymptotique du point d'équilibre est globale.

Théorème 2

Soit le système continu non linéaire, monovarié d'ordre q à non linéarité séparable (Chapitre II, (2 - 3)) dont la partie non linéaire est caractérisée par son gain équivalent r^+ et la partie linéaire définie par sa fonction de transfert :

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{(p + \lambda_1) (p + \lambda_2) (\dots) (p + \lambda_{q-1})}{S_q p^q + S_{q-1} p^{q-1} + \dots + S_1 p + 1}, \quad S_q > 0$$

telle que $R(p)$ admet $(q-1)$ racines distinctes réelles (ou/et imaginaires) et négatives (ou/et à partie réelle négative).

- Si l'inégalité :

$$r^+(x) > S_q \sum_{i=1}^{q-1} (\lambda_i) - S_{q-1} + \sum_{i=1}^{q-1} \frac{(\text{Réal}(\alpha_i) \frac{1}{2})^2}{\text{Réal}(\lambda_i)}$$

avec $\alpha_i = \left(\frac{-(p + \lambda_i) Q(p)}{R(p)} \right)_{p = -\lambda_i} \quad \forall i = 1, q-1$

est vérifiée $\forall x \in \mathcal{E} \subset \mathcal{R}^q$ alors l'état d'équilibre, $x = 0$, du système (Chapitre II, (2 - 3)) est asymptotiquement stable

- Si l'inégalité précédente est vérifiée $\forall x \in \mathcal{E} = \mathcal{R}^q$ alors la stabilité asymptotique du point d'équilibre est globale.

La démonstration de ces théorèmes s'effectue selon un schéma semblable à celui utilisé pour démontrer les théorèmes relatifs à l'unicité.

Le passage de l'énoncé des conditions suffisantes d'unicité à l'énoncé correspondant concernant la stabilité, reste valable dans le cas des circuits couplés définis au chapitre III : les gains instantanés des non linéarités des deux sous systèmes ϕ_1^* et ϕ_2^* étant remplacés respectivement par les gains équivalents ϕ_1^+ et ϕ_2^+ correspondants.

Afin de mettre en évidence l'intérêt de la condition suffisante de stabilité utilisée nous proposons son interprétation relativement à la conjecture d'Aizerman, ainsi que ses liens avec le critère de Popov.

a) Interprétation relative à la conjecture d'Aizerman.

Soit le système défini au théorème 1 ; le choix de la représentation peut être conduit de façon à ce que le système initial et le système de comparaison défini au sens de la norme vectorielle $p(x) = |x|$ /15/ admettent (Annexe I) une description à partir de la même matrice caractéristique $A(x)$:

$$(4-3) \quad A(x) = \left[\begin{array}{ccc|c} -\lambda_1 & 0 & 0 & \sqrt{\alpha_1} \\ 0 & -\lambda_2 & 0 & \sqrt{\alpha_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\alpha_{q-1}} \\ \hline \sqrt{\alpha_1} & \sqrt{\alpha_2} & \dots & \sqrt{\alpha_{q-1}} \end{array} \right] \sigma_1 - \frac{S_{q-1}}{S_q} - \frac{f^+}{S_q}$$

avec : $\alpha_i = \left(\frac{-(p+\lambda_i) Q(p)}{S_q R(p)} \right)_{p=-\lambda_i} \quad \forall i = 1, q-1$

Cette matrice étant symétrique et à éléments non diagonaux positifs, nous pouvons appliquer les conditions linéaires de stabilité sur le processus ainsi défini, ce qui démontre la validité de la conjecture d'Aizerman pour cette classe de processus. Les conditions suffisantes de stabilité s'expriment alors simplement en fonction des seules caractéristiques linéaire (gain statique) et non linéaire (gain équivalent de la non linéarité) du processus.

La classe des systèmes concernés par cette interprétation peut être élargie en considérant les systèmes multivariables définis au chapitre III, (2 - 2).

Pour illustrer ce point de vue, prenons l'exemple du processus défini, en utilisant les notations du chapitre III, par les expressions :

$$(S_1) : W_1(p) = \frac{p+1.5}{(1+p)(1+0.5p)}$$

$$(S_2) : W_2(p) = \frac{p+3}{(1+1.25p)(1+0.25p)}$$

$$b_{12} = 0.1 \quad \text{et} \quad b_{21} = 0.5$$

Le produit de couplage $b_{12} \cdot b_{21}$ étant positif, le processus admet une représentation telle que la matrice caractéristique du régime libre ait pour expression :

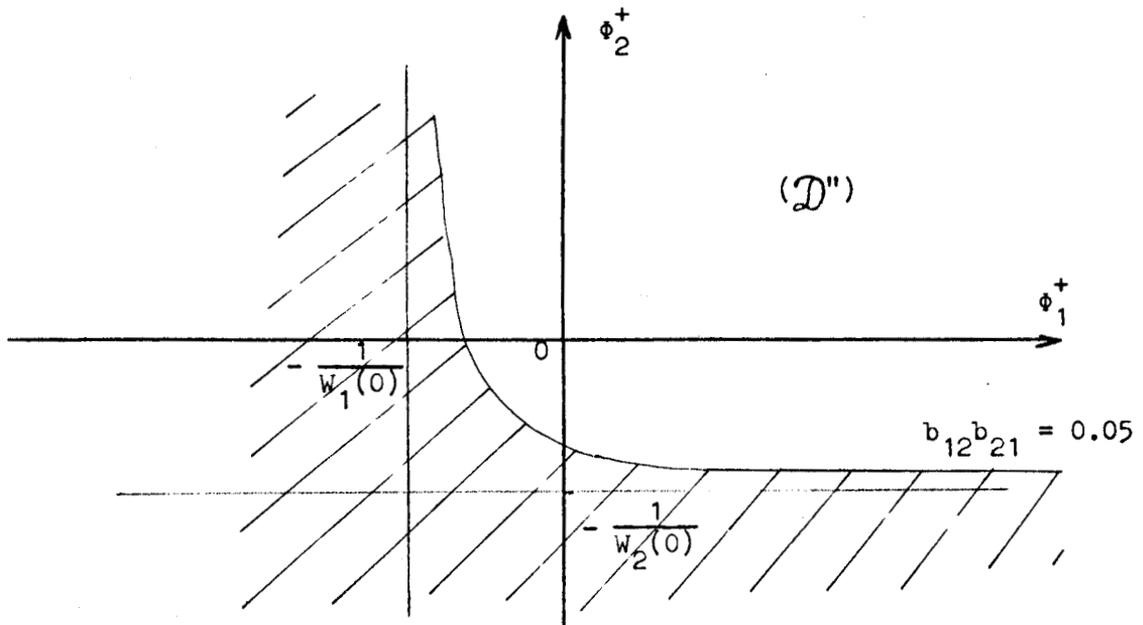
$$\begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -1.5 - 2\phi_1^+ & 0 & \sqrt{0.32} \\ 0 & 0 & -3 & \sqrt{2.2} \\ 0 & \sqrt{0.32} & \sqrt{2.2} & -1.8 - 3.2\phi_2^+ \end{bmatrix}$$

Celle-ci étant symétrique et à éléments non diagonaux positifs, nous pouvons appliquer les conditions de Kotelyanski qui constituent des conditions suffisantes de stabilité. La conjecture d'Aizerman est donc vérifiée dans ce cas ; il vient alors les contraintes :

$$\phi_1^+ > -0.33$$

$$9 \phi_1^+ \phi_2^+ + 3 \phi_1^+ + 6 \phi_2^+ + 155 > 0$$

Ces conditions peuvent admettre une interprétation graphique simple. En effet le système est stable si les gains équivalents des non linéarités ϕ_1^+ et ϕ_2^+ restent à tout instant dans le domaine (\mathcal{D}'') , non hachuré, (figure 4 - 1), défini dans le plan (ϕ_1^+, ϕ_2^+)



(figure 4 - 1)

b) Relation avec le critère de Popov.

Le critère de Popov /41/ correspond à une analyse fréquentielle de la stabilité relative à une certaine classe de processus monovariabiles pour lesquels, en particulier, la partie linéaire est supposée admettre des pôles stables.

L'application du théorème 1 que nous proposons fait intervenir une condition de la forme :

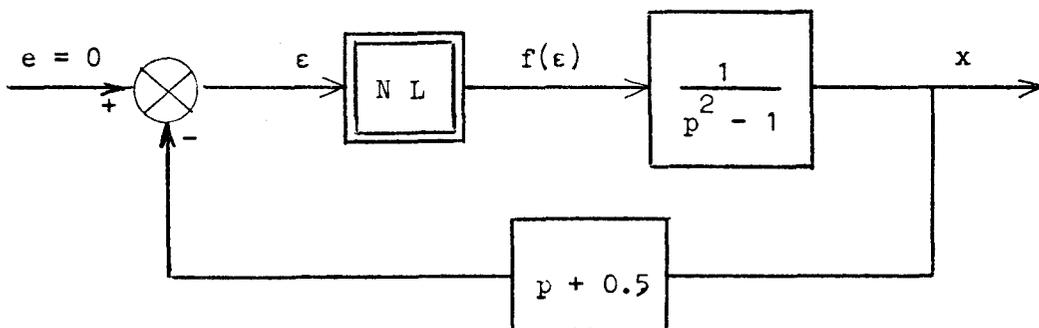
$$f^+ + \frac{1}{W(0)} > 0$$

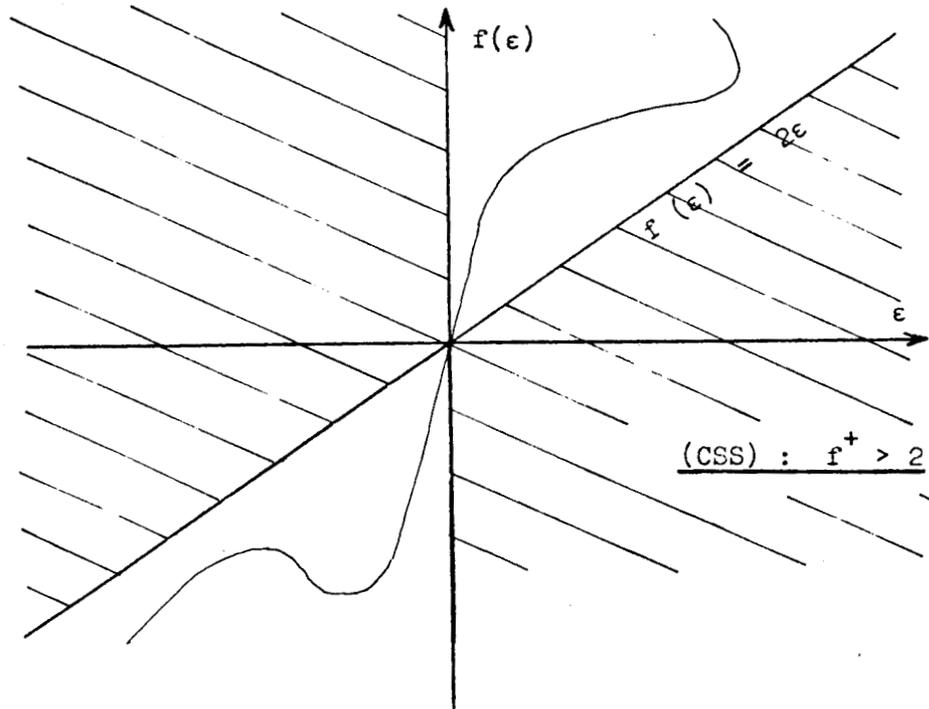
semblable à celle fournie par le critère de Popov ; cette condition étant vérifiée pour la seule pulsation ω égale à zéro.

Toutefois, il est nécessaire d'effectuer une localisation relative préalable des pôles et des zéros de la fonction de transfert $W(p)$. Lorsque celle-ci n'est pas factorisée à priori, il suffit de vérifier que les polynômes $R(p)$ et $Q(p)$, numérateur et dénominateur de $W(p)$, forment une paire positive /30/.

Il convient de préciser que les deux hypothèses de stabilité et de complète commandabilité et observabilité de la partie linéaire requise par le critère de Popov ne doivent plus nécessairement être vérifiées dans l'application du théorème 1 ainsi que l'illustre l'exemple suivant.

En effet, considérons le processus représenté figure (4 - 2)





(figure 4 - 2)

Sa caractéristique linéaire, définie par sa fonction

de transfert $W(p) = \frac{p + 0.5}{p^2 - 1}$ étant instable, nous ne pouvons

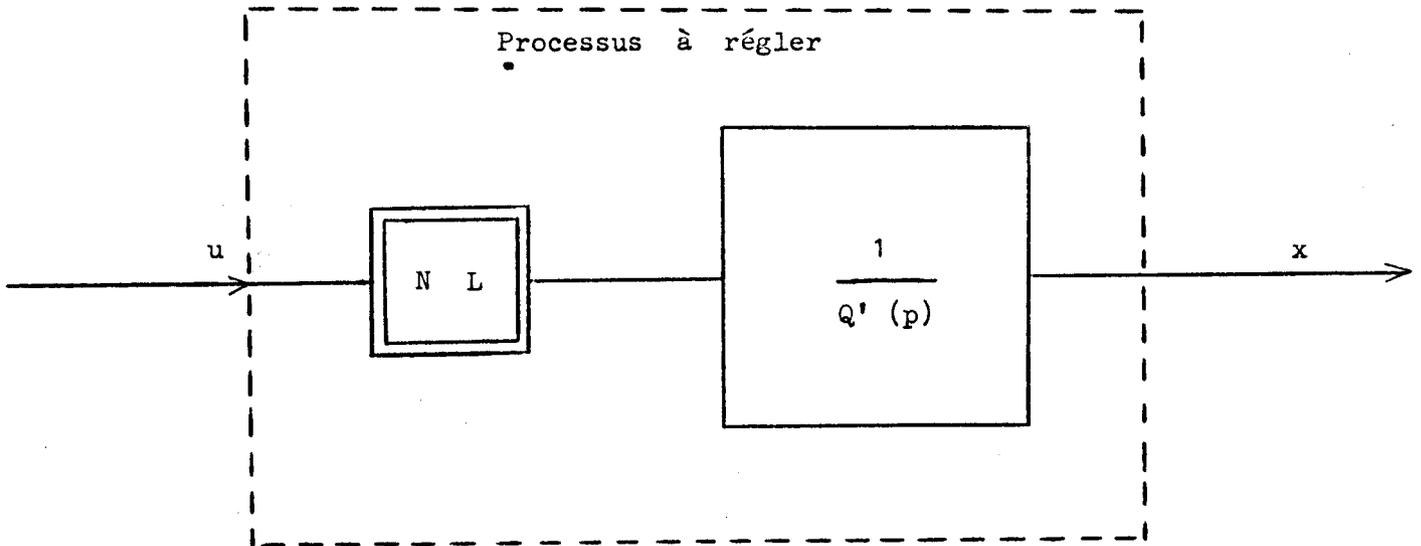
conclure en ce qui concerne la stabilité du processus en utilisant le critère de Popov.

Par contre, il résulte de l'application du théorème 1 la condition suffisante de stabilité absolue :

$$f^+ + \frac{1}{W(0)} > 0 \quad \forall x \in \mathcal{E} = \mathcal{R}^q$$

2.3. Application à la synthèse des asservissements :

Les propriétés dynamiques de stabilité et d'amortissement des systèmes asservis peuvent être modifiées au moyen d'une réaction d'état. Nous envisageons dans ce paragraphe, l'étude d'une méthode de recherche d'une chaîne de correction adaptée à certaines classes de processus stabilisant un système monovarié non linéaire à non linéarité séparable (figure 4 - 3) pour lequel nous supposons que la fonction de transfert $1/Q'(p)$ peut comporter des pôles instables.

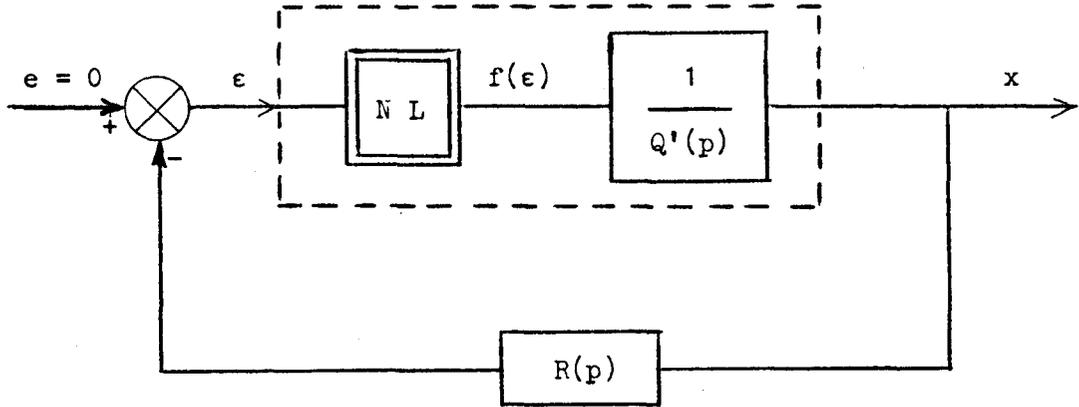


$$Q'(p) = \left(p + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(p + \frac{1}{\tau_2}\right) (\dots) \left(p + \frac{1}{\tau_q}\right)$$

(figure 4 - 3)

Processus non linéaire à asservir

Si nous introduisons des réactions à partir des q variables d'état et une variable de commande ϵ , nous obtenons le système de la figure (4 - 4) :



(figure 4 - 4)

Ainsi nous pouvons modifier les caractéristiques du système à asservir par un choix convenable des $(q - 1)$ coefficients λ_i , $\forall i = 1, q-1$, définissant $R(p)$:

$$R(p) = (p + \lambda_1) (p + \lambda_2) (\dots) (p + \lambda_{q-1})$$

1) S'il existe λ_i , $\forall i = 1, q-1$, tel que :

$$(4 - 4) \quad \left(\frac{-(p + \lambda_i) Q(p)}{R(p)} \right)_{p = -\lambda_i} > 0 \quad \forall i = 1, q-1$$

2) Si de plus il est possible de déterminer parmi les paramètres λ_i distincts satisfaisant les contraintes précédentes, et tels que :

$$(4 - 5) \quad f^+(x) + \frac{1}{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_q \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{q-1}} > 0$$

$\forall x \in \mathcal{E} = \mathcal{R}^q$

le processus bouclé défini figure (4 - 4) est absolument stable.

Cette propriété se déduit directement des théorèmes de stabilité précédemment énoncés.

Exemple :

Afin d'illustrer la technique à utiliser pour déterminer les paramètres de correction λ_i , $\forall i = 1, q-1$, considérons le cas où $1/Q'(p)$ admet un seul pôle positif ; soit $(-1/\tau_1)$ ce pôle instable ($\tau_1 < 0$)

Nous avons déjà démontré au chapitre I qu'une condition suffisante pour que les $(q-1)$ inégalités (4 - 4) soient vérifiées est que :

$$\frac{1}{\tau_1} < 0 < \lambda_1 < \frac{1}{\tau_2} < \dots < \lambda_{q-1} < \frac{1}{\tau_q}$$

Nous choisirons donc, dans un premier temps, le paramètre λ_i défini sur le segment $\left] \frac{1}{\tau_i}, \frac{1}{\tau_{i+1}} \right[$, $\forall i = 1, q-1$.

Pour satisfaire la dernière inégalité (4 - 5) il convient de déterminer parmi les paramètres λ_i admissibles, c'est à dire, ceux pour lesquels est vérifiée l'inégalité :

$$\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_q} < -\tau_1 \tau_2 \dots \tau_q f^+(x)$$

$\forall x \in \mathcal{E} = \mathcal{R}^q$

Il convient dans ce cas que le gain équivalent de la non linéarité soit strictement positif :

$$f^+(x) \geq c > 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}^q$$

3 - Etude des performances dynamiques du processus :

Le caractère non linéaire ainsi que les erreurs de mesure dues aux capteurs et aux bruits, induisent souvent des imperfections dans la réalisation pratique d'une étude.

Il convient donc d'étudier l'influence des variations des paramètres de réglage sur les performances du système lors de la synthèse des asservissements.

La détermination d'une chaîne de correction d'un système fonctionnant en régulateur telle que le processus corrigé satisfasse à une contrainte sur le coefficient d'amortissement fixé à l'avance, peut constituer en ce sens un problème essentiel du point de vue de l'utilisateur.

3.1. Analyse des performances d'un processus non linéaire fonctionnant en régulateur.

Dans le cas de fonctionnement en régulateur, il est possible d'estimer /20/ l'amortissement de l'effet des conditions initiales d'un système, en étudiant la convergence de la distance euclidienne $x^T x$ qui constitue une mesure de l'écart de l'état de l'asservissement par rapport à sa position d'équilibre.

A cette fin, il s'avère intéressant de déterminer une équation de comparaison du premier ordre à convergence de type exponentiel /28/.

3.1.1. Dynamique de la convergence

Soit

$$(4 - 6) \quad \dot{v} \leq - \eta v$$

avec η : coefficient constant positif

un système majorant de l'équation différentielle (4 - 2) est :

$$(4 - 7) \quad \dot{w} = - \eta w$$

le système de comparaison qui s'en déduit.

Il vient après intégration :

$$w = w_0 e^{-\eta(t - t_0)}$$

le coefficient $\tau = \frac{1}{\eta}$ constitue donc une estimation par excès du temps de réponse du système.

3.1.2. Evaluation du "coefficient d'amortissement"

Soit le système défini par l'équation d'état :

$$(4 - 7) \quad \dot{x} = A(x) \cdot x$$

tel que la décroissance du vecteur état soit majorée par une loi de la forme :

$$\psi(x, t) \leq e^{-\eta(t_1 - t_0)} \psi(x, t_0)$$

dans laquelle ψ désigne une mesure de l'écart de l'état du système avec sa position d'équilibre.

Par analogie avec la terminologie utilisée pour le processus du second ordre, nous appellerons coefficient d'amortissement η le coefficient qui caractérise la dynamique de la convergence.

S'il existe η , $\eta > 0$, tel que la forme quadratique :

$$(4 - 8) \quad \dot{v} + \eta v = x^T \left(\frac{1}{2} (A(x) + A^T(x)) + \eta I \right) x$$

soit définie négative, c'est à dire tel que la partie réelle de la valeur caractéristique de la plus grande partie réelle de la matrice $\left(\frac{1}{2} (A + A^T) + \eta I \right)$ soit négative $\forall x \in \mathcal{R}^q$, le coefficient d'amortissement du système est minoré par η .

Il est équivalent de vérifier que la forme (4 - 8) est définie négative et que la matrice $(A(x) + \eta I)$ vérifie les conditions d'application des théorèmes de stabilité 1 ou 2.

Il vient, par exemple dans le cas d'application du théorème 1, les conditions suffisantes :

$$(4 - 9) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i - \eta > 0 \quad \forall i = 1, q-1 \\ \sigma_1 - \frac{S_{q-1}}{S_q} - \frac{f^+}{S_q} + \eta + \sum_{i=1}^{q-1} \frac{1}{\eta - \lambda_i} \left(\frac{-(p + \lambda_i) Q(p)}{S_q R(p)} \right)_{p = -\lambda_i} < 0 \end{array} \right.$$

qui impliquent pour le système un amortissement supérieur à η .

Ces relations sont d'exploitation simple lorsqu'il s'agit de déterminer un coefficient d'amortissement pour un processus dont la régulation est donnée à priori.

Toutefois dans le problème de la synthèse il peut sembler préférable d'utiliser les relations obtenues par majoration à partir de la forme quadratique.

En effet, il vient :

$$(4 - 10) \quad x^T \left(\frac{1}{2} (A(x) + A^T(x)) + \eta I \right) x = x^T \left(\frac{1}{2} (A(x) + A^T(x)) \right) x + \eta x^T x$$

si l'on désigne par r une majorante de la partie réelle de la valeur caractéristique de plus grande partie réelle de $\frac{1}{2}(A(x) + A^T(x))$; une condition suffisante pour que la forme quadratique étudiée soit définie négative, c'est à dire pour que le coefficient d'amortissement du système soit supérieur à η s'exprime alors :

$$(4 - 11) \quad r + \eta < 0$$

Compte tenu de la formulation adoptée, il vient pour

la valeur maxi de r :

$$(4 - 12) \quad r = \text{Max}_i \left[a_{ii}(x) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^q |a_{ij}(x) + a_{ji}(x)| \right]$$

Il résulte de la généralisation des résultats présentés précédemment (Chapitre II, (3 - 1) (*)) que le coefficient η pour un tel processus est déterminé par la relation :

$$(4 - 13) \quad \eta = - \text{Max}_i \begin{cases} \sigma_1 - \frac{S_{q-1}}{S_q} - \frac{f^*}{S_q} + \sum \beta_i \\ \text{Réel} (-\lambda_i) + \beta_i \quad \forall i = 1, q-1 \end{cases}$$

avec $\beta_i = \text{Réel} \left[\left(\frac{-(p+\lambda_i) Q(p)}{S_q R(p)} \right)_{p=-\lambda_i}^{\frac{1}{2}} \right]$

Nous en déduisons deux cas particuliers lorsque R(p) admet (q-1) racines réelles et négatives :

- Si les résidus α_i relatifs aux divers pôles de $\frac{Q(p)}{R(p)}$ sont négatifs, la relation (4 - 13) devient :

$$(4 - 14) \quad \eta = - \text{Max}_i \begin{cases} \sigma_1 - \frac{S_{q-1}}{S_q} - \frac{f^+}{S_q} + \sum_{i=1}^{q-1} \left(\frac{-(p+\lambda_i) Q(p)}{S_q R(p)} \right)_{p=-\lambda_i}^{\frac{1}{2}} \\ -\lambda_i + \left(\frac{-(p+\lambda_i) Q(p)}{S_q R(p)} \right)_{p=-\lambda_i}^{\frac{1}{2}} \quad \forall i = 1, q-1 \end{cases}$$

(*) Système continu non linéaire à non linéarité séparable

d'ordre q dont la partie linéaire est définie par sa fonction de transfert $W(p) = R(p)/Q(p)$ telle que le polynôme R(p) admette (q-1) racines distinctes réelles (ou/et imaginaires) et négatives (ou/et à partie réelle négative)

- Si les résidus α_i sont positifs, il vient :

$$(4 - 15) \quad \eta = - \underset{i}{\text{Max}} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 - \frac{S_{q-1}}{S_q} - \frac{f^+}{S_q} \\ - \lambda_i \quad \forall i = 1, q-1 \end{array} \right.$$

Remarques :

- a) La connaissance à priori du domaine de variation de f^+ définit la valeur la plus sévère du gain équivalent, par exemple si f^+ est situé dans le premier et le troisième quadrant, du système de coordonnées $(f(\epsilon), \epsilon)$ la valeur de f^+ la plus restrictive, en ce qui concerne le calcul du coefficient d'amortissement η est zéro.
- b) Le temps de réponse est directement lié au coefficient d'amortissement. Ce terme suffit pour caractériser la dynamique du système asservi fonctionnant en régulateur.

3.2. Amélioration des performances d'un processus.

Position du problème :

Soit le système continu non linéaire à non linéarité séparable dont la partie non linéaire est définie par son gain équivalent f^+ et la partie linéaire par les matrices A et b (Chapitre IV, 3.1.3.).

Parmi les chaînes de correction possibles qui stabilisent un tel système, nous recherchons celle définie par le vecteur C telle que le processus en boucle fermée :

$$\dot{x} = A(x) x$$

$$A(x) = (A - bC^T f^+)$$

admette le coefficient d'amortissement η fixé à l'avance.

Ce problème revient en fait à déterminer le vecteur C tel que le système correspondant défini par sa matrice caractéristique :

$$\frac{1}{2} (A(x) + A^T(x)) + \eta I$$

soit stable.

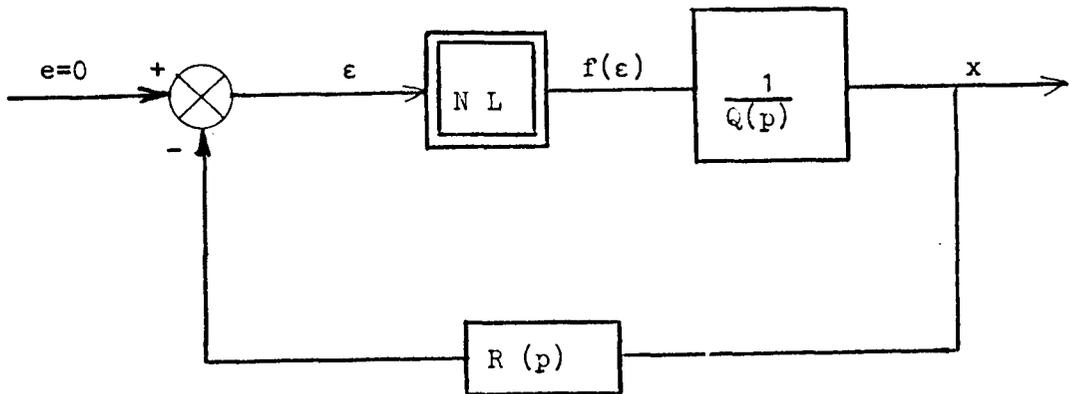
L'approche de la solution de ce problème a déjà fait l'objet de nombreux travaux /Lur'e/Popov/, et est généralement délicate ; il s'agit ici de rechercher les paramètres λ_i , $\forall i = 1, q-1$, tels que la relation (4 - 13) soit vérifiée.

Nous avons proposé (Annexe III) un algorithme numérique permettant de faciliter le choix d'une chaîne de régulation C qui assure la stabilité du processus et l'amortissement des conditions initiales selon un taux de décroissance η fixé à l'avance.

Cette étude est illustrée pour un processus du sixième ordre.

3.3. Mise en oeuvre :

La technique d'amélioration des performances d'un système asservi est illustrée sur un système monovariante non linéaire à non linéarité séparable d'ordre 6, figure (4 - 5), fonctionnant en régulateur :



$$Q(p) = \frac{1}{720} (p+1) (p+2) (p+3) (p+4) (p+5) (p+6)$$

$$R(p) = p^5 + \sigma_1 p^4 + \sigma_2 p^3 + \sigma_3 p^2 + \sigma_4 p + \sigma_5$$

(figure 4 - 6)

a) Estimation du coefficient d'amortissement η pour $R(p)$ fixée :

Pour une chaîne de retour $R(p)$ définie par :

$$R(p) = (p + 1.5) (p + 2.5) (p + 3.5) (p + 4.5) (p + 5.5)$$

et un gain équivalent $f^+(\epsilon) > - 0.003 \forall \epsilon \in \mathcal{R}$ le processus fonctionnant en régulateur, admet (Annexe III) un coefficient d'amortissement supérieur à 0.715

b) Détermination de $R(p)$ pour η fixé :

Recherchons maintenant une chaîne de retour $R(p)$ définie par :

$$R(p) = p^5 + \sigma_1 p^4 + \sigma_2 p^3 + \sigma_3 p^2 + \sigma_4 p + \sigma_5$$

et telle que le processus admette un coefficient d'amortissement

$\eta \geq 1$, la non linéarité f^+ satisfaisant la contrainte :

$$f^+(\epsilon) > 0 \quad \forall \epsilon \in \mathcal{R}$$

L'étude par le théorème 1 de la stabilité du système asservi permet de localiser les zéros $(-\lambda_i)$, $\forall i = 1, 5$ de $R(p)$. En effet les conditions suffisantes de stabilité qui en découlent s'expriment sous la forme :

$$\lambda_i \in]i, i+1[\quad \forall i = 1, 5$$

$$f^+ + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5} \geq c > 0$$

L'étude de l'influence de la variation des paramètres de réglage, sur les performances du processus, et plus particulièrement sur le coefficient d'amortissement permet la détermination des coefficients λ_i tels que $\eta \geq 1$; ceux-ci doivent vérifier la condition supplémentaire :

$$1 = - \underset{i}{\text{Max}} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 - \frac{S_5}{S_6} - \frac{f^+}{S_5} + \sum_{i=1}^5 \left(\frac{-(p+\lambda_i) Q(p)}{S_6 R(p)} \right)_{p=-\lambda_i} \frac{1}{2} \\ - \lambda_i + \left(\frac{-(p+\lambda_i) Q(p)}{S_6 R(p)} \right)_{p=-\lambda_i} \frac{1}{2} \quad \forall i = 1, 5 \end{array} \right.$$

Si nous imposons au système d'avoir un amortissement supérieur ou égal à 1, il apparaît qu'une action sur le seul coefficient λ_1 , les autres restant situés au milieu du segment représentant leur variation admissible, suffit à assurer cette propriété.



Il vient pour l'exemple proposé :

$$\lambda_1 = 1.8$$

$$\lambda_2 = 2.5$$

$$\lambda_3 = 3.5$$

$$\lambda_4 = 4.5$$

$$\lambda_5 = 5.5$$

$$\text{Soit } R(p) = (p+1.8)(p+2.5)(p+3.5)(p+4.5)(p+5.5)$$

Une démarche semblable en agissant sur la totalité des λ_i permettrait une détermination de la chaîne de retour en vue d'assurer un amortissement maximum.

4 - Conclusion

L'étude de la stabilité à partir des résultats obtenus antérieurement et présentés au cours des chapitres précédents, nous a permis de démontrer pour une classe particulière de systèmes la validité de la conjecture d'Aizerman et, également, d'effectuer une comparaison de la condition proposée avec le critère fréquentiel de Popov.

Nous avons ensuite envisagé dans cet esprit la synthèse des asservissements. L'étude est ensuite menée en vue de l'amélioration des performances d'un processus fonctionnant en régulateur. Il en résulte une méthode adaptée à une large classe de processus qui permet de localiser les paramètres possibles de réglage et de les déterminer de façon à répondre aux exigences de l'utilisateur, et plus particulièrement lorsque celui-ci s'impose une contrainte à priori sur le coefficient d'amortissement.

Conclusion Générale

La définition d'une représentation matricielle particulière, nous a conduit à présenter un certain nombre de résultats concernant l'étude de l'indépendance vis à vis des conditions initiales du régime forcé d'un processus.

Il résulte d'une étude de la méthode du premier harmonique la mise en évidence d'une condition nécessaire à la validité de cette méthode : condition d'"unicité".

Celle-ci garantit que la réponse du système à une sollicitation sinusoïdale donnée est un signal périodique de même fréquence, l'amplitude du fondamental pouvant être déterminée avec une approximation satisfaisante par la méthode du premier harmonique.

Ce résultat constitue à notre sens une contribution essentielle de nos travaux.

La recherche systématique de conditions qui tiennent compte des caractéristiques linéaire et non linéaire d'un processus, a conduit à l'énoncé de théorèmes d'application simple.

Un autre apport important concerne une approche de la stabilité des systèmes à non linéarité séparable. La forme particulière des conditions de stabilité présentées permet leur utilisation en vue de la synthèse de régulation de type continu.

La mise en oeuvre des résultats obtenus est facilitée par la présentation d'un algorithme permettant une exploitation sous forme numérique.

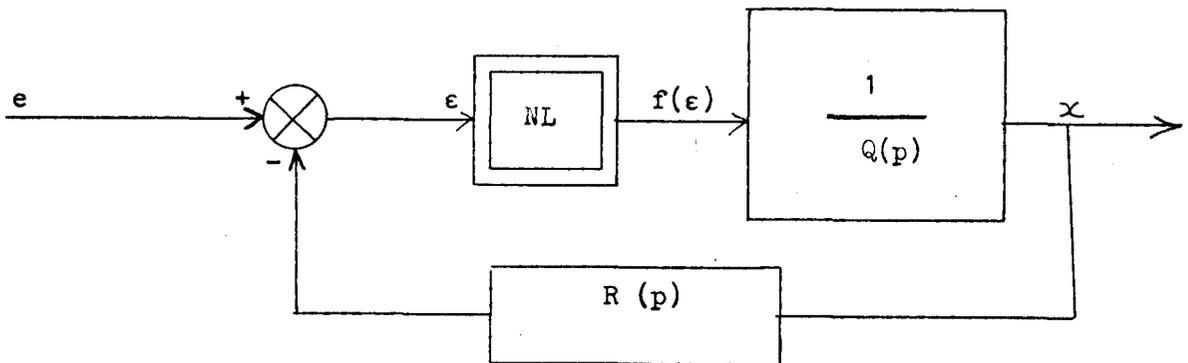
Nous avons supposé dans ce mémoire que la matrice caractéristique des systèmes étudiés ne dépend pas explicitement du temps et que les non linéarités sont séparables. Il conviendrait d'étendre les résultats obtenus à une classe plus générale de processus. C'est dans cette voie que nous envisageons de poursuivre nos travaux.

ANNEXE I

REPRESENTATIONS PARTICULIERES DES SYSTEMES CONTINUS
NON LINEAIRES A NON LINEARITE SEPARABLE

Un processus dynamique étant supposé parfaitement identifié, une représentation dans l'espace d'état permet de le décrire complètement.

La représentation d'état apparaissant comme un outil mathématique particulièrement intéressant, nous allons définir un système différentiel, de forme particulière, que régit l'évolution du système continu non linéaire de la figure 1 :



$$Q(p) = S_q p^q + S_{q-1} p^{q-1} + \dots + S_1 p + 1$$

$$R(p) = \lambda_0 p^{q-1} + \lambda_1 p^{q-2} + \dots + \lambda_{q-2} p + \lambda_{q-1}$$

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$$

(figure 1)

Le système monovariante dont la structure est définie par un tel schéma admet comme équation de fonctionnement en régime autonome :

$$(I - 1) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + b f(\epsilon) \epsilon \\ \epsilon = - C^T x \end{cases}$$

d'où la relation :

$$(I - 2) \quad \dot{x} = (A - bC^T)x$$

Si le vecteur état $x^T = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ est choisi tel que :

$$(I - 3) \quad x_i = s^{(i-1)} \quad \forall i \in \{1, \dots, q\}$$

Les matrices A, b et C, à coefficients constants, admettent les expressions :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline 1 & s_1 & \dots & s_{q-2} & s_{q-1} \\ s_q & s_q & \dots & s_q & s_q \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ s_q \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_{q-1} \\ \sigma_{q-2} \\ \vdots \\ \sigma_1 \\ \sigma_0 \end{bmatrix}$$

La matrice M s'exprime dans la nouvelle base par M_1 telle que :

$$(I - 5) \quad M_1 = \left[\begin{array}{cccc} -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -\lambda_j & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda_{q-1} \end{array} \right] \begin{array}{l} \left(\frac{(p + \lambda_1)}{R(p)} \right)_{p = -\lambda_1} \\ \vdots \\ \left(\frac{(p + \lambda_j)}{R(p)} \right)_{p = -\lambda_j} \\ \vdots \\ S_{q-1} \quad f \\ \sigma_1 - \frac{S_{q-1}}{S_q} - \frac{f}{S_q} \end{array}$$

$$(x^1)^T = \{x_1^1, \dots, x_q^1\}$$

$$(I - 6) \quad \begin{cases} \forall i = 0, q-2 & s^{(i)} = (-\lambda_1)^i x_1^1 + \dots + (-\lambda_{q-1})^i x_{q-1}^1 \\ \text{et} & s^{(q-1)} = (-\lambda_1)^{q-1} x_1^1 + \dots + (-\lambda_{q-1})^{q-1} x_{q-1}^1 + x_q^1 \end{cases}$$

$$(I - 7) \quad x^0 = M_1 \cdot x^1$$

Soit
$$\alpha_j = \left(\frac{-Q(p) (p + \lambda_j)}{S_q R(p)} \right)_{p = -\lambda_j}$$

Aussi nous pouvons choisir une représentation du processus : Symétrique ou antisymétrique, selon le signe de α_j , conformément aux relations (I - 8), (I - 9) et (I - 10).

$$\forall j = 1, q-1 \quad \alpha_j > 0$$

(I - 8)

$$M_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} -\lambda_1 & 0 & 0 & \sqrt{\alpha_1} \\ 0 & \text{---} & 0 & \vdots \\ 0 & \text{---} & 0 & \sqrt{\alpha_j} \\ 0 & \text{---} & 0 & \vdots \\ 0 & \text{---} & -\lambda_{q-1} & \sqrt{\alpha_{q-1}} \end{array} \right]$$

$-\lambda_j$

$$\sigma_1 - \frac{S_{q-1}}{S_q} - \frac{f}{S_q}$$

$$\forall j \quad \alpha_j < 0$$

(I - 9)

$$M_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} -\lambda_1 & 0 & 0 & \sqrt{-\alpha_1} \\ 0 & \text{---} & 0 & \vdots \\ 0 & \text{---} & 0 & \sqrt{-\alpha_j} \\ 0 & \text{---} & 0 & \vdots \\ 0 & \text{---} & -\lambda_{q-1} & \sqrt{-\alpha_{q-1}} \end{array} \right]$$

$-\lambda_j$

$$-\sqrt{-\alpha_1} \dots \dots \dots -\sqrt{-\alpha_j} \dots \dots -\sqrt{-\alpha_{q-1}} \quad \sigma_1 - \frac{S_{q-1}}{S_q} - \frac{f}{S_q}$$



$$\forall j = 1, r \quad \alpha_j > 0$$

$$\forall j = r+1, q-1 \quad \alpha_j < 0$$

(I - 10)

$$M_1 = \left[\begin{array}{cccc} -\lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & & \\ & & -\lambda_r & \\ & & & -\lambda_{r+1} \\ & & & \dots \\ 0 & & & -\lambda_{q-1} \end{array} \right] \begin{array}{c} \sqrt{\alpha_1} \\ \vdots \\ \sqrt{\alpha_r} \\ \sqrt{(-\alpha_{r+1})} \\ \vdots \\ \sqrt{(-\alpha_{q-1})} \end{array}$$

$$\sqrt{\alpha_1} \dots \sqrt{\alpha_r} \quad -\sqrt{(-\alpha_{r+1})} \dots -\sqrt{(-\alpha_{q-1})} \quad \sigma_1 - \frac{S_{q-1}}{S_q} - \frac{f}{S_q}$$

L'extension de ces résultats au cas où les racines sont complexes, à parties réelles négatives, peut être étudiée, sans restreindre à la généralité du problème sur le processus d'ordre 3 suivant :

$$(I - 11) \quad \overset{\circ}{x} = M_3 x = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \left(-\frac{Q(p)(p+\lambda)}{S_3 R(p)} \right)_{p=-\lambda} \\ 0 & -\bar{\lambda} & \left(-\frac{Q(p)(p+\bar{\lambda})}{S_3 R(p)} \right)_{p=-\bar{\lambda}} \\ 1 & 1 & \sigma_1 - \frac{S_2}{S_3} - \frac{f}{S_3} \end{bmatrix} \cdot x$$

λ étant le conjugué de λ , si $\left(-\frac{Q(p)(p+\lambda)}{S_3 R(p)} \right)_{p=-\lambda}$ s'écrit $(\gamma + i\delta)^2$

alors $\left(-\frac{Q(p)(p+\lambda)}{S_3 R(p)} \right)_{p=-\lambda}$ est égal à $(\gamma - i\delta)^2$

Remarque :

Si $\overset{\circ}{x} = M \cdot x$ est le système différentiel définissant l'évolution de la sortie dans le temps, nous remarquons que, dans tous les cas, l'étude de la stabilité peut être effectuée en appliquant des conditions linéaires de stabilité sur la représentation : $\frac{1}{2} (M + \overline{M}^T)$, matrice réelle dont les éléments non diagonaux sont positifs ou nuls.

$$\frac{1}{2} (M + \overline{M}^T) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & a_{q1} \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & a_{q2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{q, q-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{q, q-1} \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{q, q-2} & a_{q, q-1} & a_{qq} \end{bmatrix}$$

$$(a_{ij}) = \begin{cases} a_{qq} \text{ scalaire dépendant de la non linéarité} \\ \forall i, j = 1, q, i \neq j \quad a_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

2 - Factorisation par rapport aux pôles de W(p) :

La représentation précédente des processus monovariables est intéressante pour l'étude de la stabilité asymptotique dans le cas où les zéros de la fonction de transfert W(p) sont à parties réelles négatives. Or une large classe de processus présente des chaînes de retour Rm(p) d'ordre quelconque m (0 ≤ m ≤ q-1).

Dans ce paragraphe nous proposons une nouvelle représentation matricielle déduite de (I - 1) en choisissant un vecteur état du processus, dont les composantes, ∀ i = 1, q, x_i, vérifient le système linéaire suivant :

$$(I - 13) \quad \left\{ \begin{array}{l} s = x_2 + x_3 + \dots + x_q \\ s^{(1)} = \left(-\frac{1}{\tau_1}\right) x_2 + \left(-\frac{1}{\tau_2}\right) x_3 + \dots + \left(-\frac{1}{\tau_{q-1}}\right) x_q \\ \vdots \\ s^{(q-1)} = x_1 + \left(-\frac{1}{\tau_1}\right)^{q-1} x_2 + \left(-\frac{1}{\tau_2}\right)^{q-1} x_3 + \dots + \left(-\frac{1}{\tau_{q-1}}\right)^{q-1} x_q \end{array} \right.$$

s, s⁽¹⁾, ..., s^(q-1) : sortie du système et ses dérivées successives.

$\left(-\frac{1}{\tau_i}\right)$: ∀ i = 1, ..., q : pôles de W(p) supposés finis et distincts (pour i = 1, ..., q-1)

Il vient la représentation :

$$\left[\begin{array}{cccc}
 -\frac{1}{\tau_q} - \frac{f}{S_q} & -f \left(\frac{(p + \frac{1}{\tau_q})(p + \frac{1}{\tau_1}) R_m(p)}{Q(p)} \right)_{p = -\frac{1}{\tau_1}} & \dots & -f \left(\frac{(p + \frac{1}{\tau_q})(p + \frac{1}{\tau_{q-1}}) R_m(p)}{Q(p)} \right)_{p = -\frac{1}{\tau_{q-1}}} \\
 1 & -\frac{1}{\tau_1} & 0 & 0 \\
 1 & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \dots & \dots & \dots \\
 1 & 0 & \dots & 0 \\
 1 & 0 & \dots & -\frac{1}{\tau_{q-1}}
 \end{array} \right] \cdot x$$

(I - 14)

Nous avons factorisé la partie linéaire de la matrice représentative du système en boucle fermée par rapport à $(q - 1)$ pôles parmi les q pôles possibles; q représentations différentes de ce type peuvent donc être envisagées lorsque les q pôles de la fonction de transfert sont distincts.

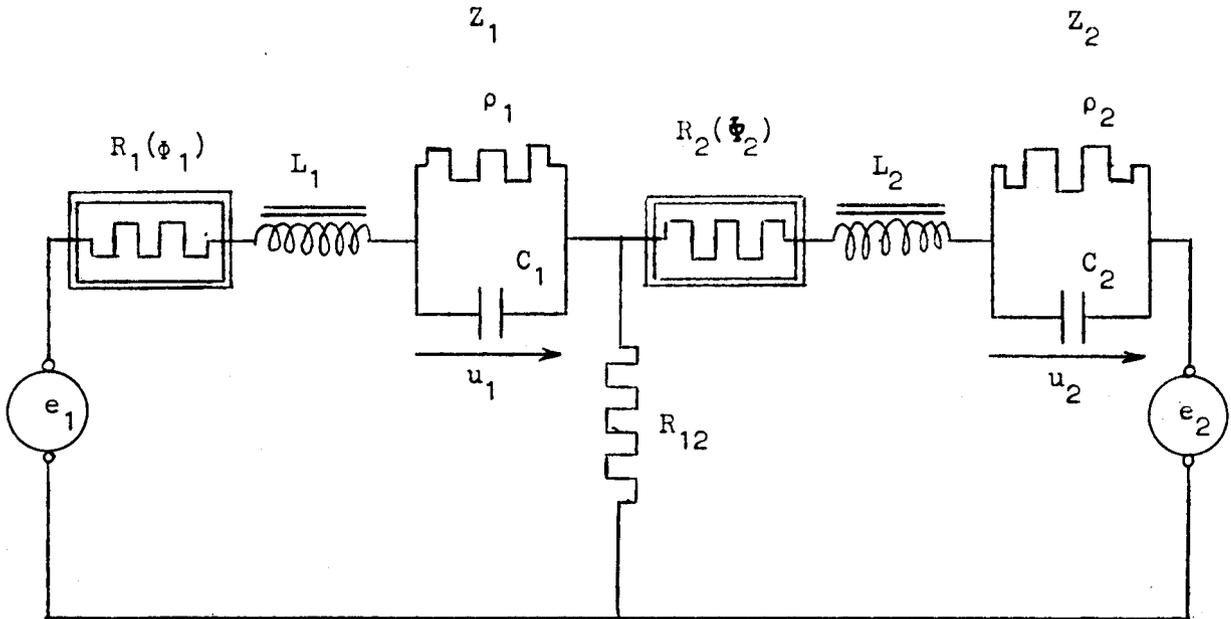
ANNEXE II

CONDITION SUFFISANTE D'UNICITE DE LA REPOSE

D'UN RESEAU ELECTRIQUE

Les variables choisies définissant l'état du système de la figure (II - 1) sont ϕ_1 et ϕ_2 les flux des selfs L_1 et L_2 , u_1 et u_2 les tensions aux bornes des impédances Z_1 et Z_2 .

R_1 et R_2 sont deux fonctions non linéaires dépendant respectivement de ϕ_1 et ϕ_2 .



(figure II - 1)

L'équation d'état régissant l'évolution de ce réseau / 3/28/
est de la forme :

$$x = [u_1, \phi_1, u_2, \phi_2]^T$$

$$e = [0, e_1, 0, e_2]^T$$

$$(II - 1) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\rho_1 C_1} & \frac{1}{L_1 C_1} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{-(R_1 + R_{12})}{L_1} & 0 & \frac{-R_{12}}{L_2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\rho_2 C_2} & \frac{1}{L_2 C_2} \\ 0 & \frac{-R_{12}}{L_1} & -1 & \frac{-(R_1 + R_{12})}{L_2} \end{bmatrix} x + e$$

La différence entre deux réponses $x_1 = [u_1^1, \phi_1^1, u_2^1, \phi_2^1]^T$
et $x_2 = [u_1^2, \phi_1^2, u_2^2, \phi_2^2]^T$ à une même entrée, correspondant à des
conditions initiales différentes s'écrit :

$$(II - 2) \quad \dot{y} = M.y$$

avec $y = y_1 - y_2$

$$y_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x_i \quad \forall i = 1, 2$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\rho_1 C_1} & \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \\ \frac{-1}{\sqrt{L_1 C_1}} & \frac{-(R_1^* + R_{12})}{L_1} \end{bmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} \end{bmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\rho_2 C_2} & \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{L_2 C_2}} & \frac{-(R_2^* + R_{12})}{L_1} \end{bmatrix}$$

$$R_1^* = \frac{R_1(\phi_1^1) - R_1(\phi_1^2)}{\phi_1^1 - \phi_1^2} ;$$

$$R_2^* = \frac{R_2(\phi_2^1) - R_2(\phi_2^2)}{\phi_2^1 - \phi_2^2}$$

La convergence asymptotique des solutions de (II - 2) est assurée $\forall y(0)$ si la fonction $v = y^T y$ est de Ljapunov c'est à dire si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$y^T \frac{1}{2} (M + M^T) y < 0 \quad \forall y \in \mathcal{R}^4$$

La matrice à éléments non diagonaux positifs :

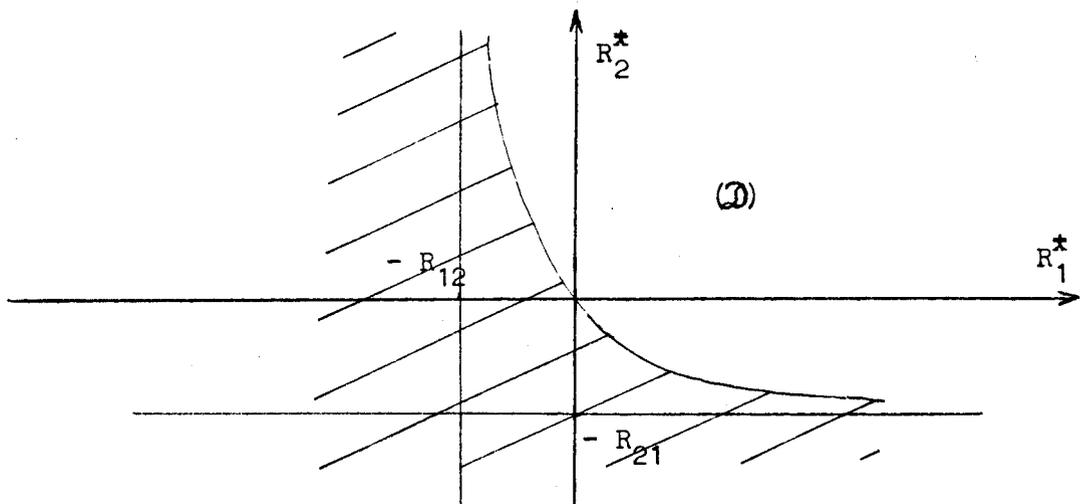
$$\frac{1}{2} (M + M^T) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho_1 C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(R_1^* + R_{12})}{L_1} & 0 & \frac{R_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_2 C_2} & 0 \\ 0 & \frac{R_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} & 0 & \frac{-(R_2^* + R_{12})}{L_2} \end{bmatrix}$$

est définie négative si les conditions de Kotélyanski sont vérifiées. Il vient les contraintes :

$$R_1^* + R_{12} > 0$$

$$R_1^* R_2^* + (R_1^* + R_2^*) R_{12} > 0$$

Ainsi, si R_1^* et R_2^* restent dans le domaine (\mathcal{D}) , figure (II - 2) $\forall y \in \mathcal{R}^4$ alors le système possède la propriété d'unicité.



(figure II - 2)

ANNEXE 111

```

0010 DIMENSION F(5), (C7), CONL(5), FAC(5), P(C5), ((C6)
0020 DIMENSION FFAC(5), FF(C5), COEFAM(6)
0030 COMPLEX FLYC, F, FAC, FC, X, FACS, C, CS, CC
0040 REAL CONL, FFAC, COEFAM, LEFNL, TEST, UN
0050 FLYC(X) = (C7)*(X+(C1))*(X+(C2))*(X+(C3))
0060 & *(X+(C4))*(X+(C5))*(X+(C6))
0070
0080 *** LA FONCTION DE TRANSFERT DU PROCESSUS ETUDIE
0090 EST DEFINIE PAR :
0100
0110 (C-FA(C1))(C-FA(C2))(C-FA(C3))(C-FA(C4))(C-FA(C5))
0120 V(C) = *****
0130 ((C7)(C+(C1))(C+(C2))(C+(C3))(C+(C4))(C+(C5))(C+(C6))
0140
0150 LA NONLINEARITE F(C) EST TELLE QUE :
0160 MINIMUM F(C) = LEFNL
0170
0180 REAL(C) LEFNL
0190 REAL(C) ((C1), I=1,6)
0200 REAL(C) (FA(CJ), J=1,5)
0210
0220 DO 90 I=1,6
0230 ((C1)=-((C1)
0240 90 CONTINUE
0250 WRITE(1,100) (1,((C1), I=1,6)
0260 100 FOR #77(C1A, ZHNCMEE IF ELLE IF V(C) = 6,77,
0270 &14A, ZHI. FEELLE, 7A, 13HI. I#(C1A)IF, /,
0280 &6C6H FULE, 12, ZF16.9, /), /)
0290 WRITE(1,110) (1,FA(C1), I=1,5)
0300 110 FOR #77(C1A, ZHNCMEE IF ZELLE IF V(C) = 5,77,
0310 &14A, ZHI. FEELLE, 7A, 13HI. I#(C1A)IF, /,
0320 &5C6H ZFLE, 12, ZF16.9, /), /)
0330
0340 *** CALCUL DE: ( F(C)/C-FA(C1) ) POUR F=FA(C1) ***
0350
0360 (C7) = 1./((C1)*(C2)+(C3)+(C4)+(C5)+(C6))
0370 F(C1) = (FA(C1)-FA(C2))*(FA(C1)-FA(C3))
0380 & *(FA(C1)-FA(C4))*(FA(C1)-FA(C5))
0390 F(C2) = (FA(C2)-FA(C1))*(FA(C2)-FA(C3))
0400 & *(FA(C2)-FA(C4))*(FA(C2)-FA(C5))
0410 F(C3) = (FA(C3)-FA(C1))*(FA(C3)-FA(C2))
0420 & *(FA(C3)-FA(C4))*(FA(C3)-FA(C5))
0430 F(C4) = (FA(C4)-FA(C1))*(FA(C4)-FA(C2))
0440 & *(FA(C4)-FA(C3))*(FA(C4)-FA(C5))
0450 F(C5) = (FA(C5)-FA(C1))*(FA(C5)-FA(C2))
0460 & *(FA(C5)-FA(C3))*(FA(C5)-FA(C4))
0470
0480 *** DETERMINATION D'UNE CONDITION D'UNICITE ***
0490
0500 DO 190 I=1,5

```

00 AHFAD



```
0500      DO 190 I=1,5
0510          F(I)=1/XY((FAC(I)))
0520      190 CONTINUE
0530      DO 195 K=1,5
0540          F1(FAC(K))=1/FAL(FAC(K))
0550      195 CONTINUE
0560      DO 200 J=1,5
0570          CONI(J)=(1/FAL(C1*(1-F(CJ))/F(CJ))))**2)/F1(FAC(J))
0580      200 CONTINUE
0590      CONIS=CONI(1)+CONI(2)+CONI(3)+CONI(4)+CONI(5)
0600      FACS=FAC(1)+FAC(2)+FAC(3)+FAC(4)+FAC(5)
0610      F1FACS=1/FAL(FACS)
0620      C1=((C1)+(C2)+(C3)+(C4)+(C5)+(C6)
0630      FCS=1/FAL(C1)
0640      SOMME=-((CONIS+(1/FAL((C7))))*(C1C1+FACS))
0650
0660      *** LA CONDITION SUFFISANTE S'EXPRIME PAR L'INEQUALITE:
0670
0680          (1/(C7))*(F(C*)-SOMME) > C      ***
0690
0700      WRITE(1,220) SOMME
0710      220 FORMAT(5X,35HLEVE ASSUREE LA PROBABILITE D'UNICITE,/,
0720          &1X,42HLE GAIN INSTANTANE TOIT ETRE SUPERIEUR A :,
0730          &5X,F10.7,/)
0740      TEST=1/FAL(1/(FAC(1)+1/F(C2)+1/F(C3)+1/F(C4)+1/F(C5)))
0750      UN=1/FAL((C1)+(C2)*(C3)*(C4)*(C5)*C(6)+(C7))
0760
0770      *** ESTIMATION DU COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT *****
0780
0790      DO 210 L=1,5
0800          F(L)=(1/FAL(C1*(1-F(L))/F(L))))**2)
0810      210 CONTINUE
0820      FCS1=F(C1)+F(C2)+F(C3)+F(C4)+F(C5)
0830      COEFAM(6)=(1/FAL(FCS1)/FAL((C7)))
0840          &
0850          &
0860      DO 215 M=1,5
0870          COEFAM(M)=-FAC(M)-S(C1)*F(CM)/FAL((C7))
0880      215 CONTINUE
0890
0900      WRITE(1,230) TEST,UN
0910      230 FORMAT(5X,10H TEST      ,F10.7,5X UN=,F10.7,/)
0920      WRITE(1,235) COEFAM(6)
0930      235 FORMAT(5X,39HLE COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT NL EST : ,
0940          &F10.7,/)
0950      WRITE(1,300) (1,FAC(I),COEFAM(I),CONI(I),I=1,5)
0960      300 FORMAT(69(1H*),/,1H*,7X,1H*,3(19X,1H*),/,
0970          &1H*,3X,1H1,3X,1H*,6X,7H1/FAC(1),6X,1H*,5X,9HCOEFAM(1),
0980          &5X,1H*,6X,7HCONI(1),6X,1H*,/,1H*,7X,1H*,C
0990          &3(19X,1H*),/,69(1H*),/,1H*,7X,1H*,3(19X,1H*),/,
1000          &5(1H*,1X,3X,1H*,3(4X,F10.7,4X,2H *),/,1H*,7X,
1010          &1H*,3(19X,1H*),/),69(1H*))
1020      STOP
1030      END
```

GO AHEAD

0
1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0
-1.5, 0, -2.5, 0, -3.5, 0, -4.5, 0, -5.5, 0

NOMBRE DE POLES DE W(f) = 6

		P. REELLE	P. IMAGINAIRE
POLE	1	-0.100000000E 01	0.000000000E 00
POLE	2	-0.200000000E 01	0.000000000E 00
POLE	3	-0.300000000E 01	0.000000000E 00
POLE	4	-0.400000000E 01	0.000000000E 00
POLE	5	-0.500000000E 01	0.000000000E 00
POLE	6	-0.600000000E 01	0.000000000E 00

NOMBRE DE ZEROS DE W(f) = 5

		P. REELLE	P. IMAGINAIRE
ZERO	1	-0.150000000E 01	0.000000000E 00
ZERO	2	-0.250000000E 01	0.000000000E 00
ZERO	3	-0.350000000E 01	0.000000000E 00
ZERO	4	-0.450000000E 01	0.000000000E 00
ZERO	5	-0.550000000E 01	0.000000000E 00

POUR ASSURER LA PROPRETE D'UNICITE
LE GAIN INSTANTANE DOIT ETRE SUPERIEUR A : -0.0030784

TEST -0.0030784 UN= 0.9999999

LE COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT NE EST : 1.5635095

```
*****
*          *          *          *          *
*  1      *  FRAC(1)  *  (SEFFAC(1)  *  (GNI(1)  *
*          *          *          *          *
*****
*          *          *          *          *
*  1      *  -1.500000  *  0.7156317  *  -0.0005697  *
*          *          *          *          *
*  2      *  -2.500000  *  1.5942898  *  -0.0004557  *
*          *          *          *          *
*  3      *  -3.500000  *  2.5625005  *  -0.0003488  *
*          *          *          *          *
*  4      *  -4.500000  *  3.5942898  *  -0.0002532  *
*          *          *          *          *
*  5      *  -5.500000  *  4.7156324  *  -0.0001554  *
*          *          *          *          *
*****
```

STOP NUMBER 00

GO AHEAD



C
1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0
-1.7, 0, -2.5, 0, -3.5, 0, -4.5, 0, -5.5, 0

NUMBRE DE PÔLES DE $\lambda(C) = 6$

		P. REELLE	P. IMAGINAIRE
PÔLE	1	-0.100000000E 01	0.00000000E 00
PÔLE	2	-0.200000000E 01	0.00000000E 00
PÔLE	3	-0.300000000E 01	0.00000000E 00
PÔLE	4	-0.400000000E 01	0.00000000E 00
PÔLE	5	-0.500000000E 01	0.00000000E 00
PÔLE	6	-0.600000000E 01	0.00000000E 00

NUMBRE DE ZÉROS DE $\lambda(C) = 5$

		P. REELLE	P. IMAGINAIRE
ZÉRO	1	-0.170000000E 01	0.00000000E 00
ZÉRO	2	-0.250000000E 01	0.00000000E 00
ZÉRO	3	-0.350000000E 01	0.00000000E 00
ZÉRO	4	-0.450000000E 01	0.00000000E 00
ZÉRO	5	-0.550000000E 01	0.00000000E 00

POUR ASSURER LA STABILITE L'UNICITE
LE GAIN INSTANTANE DOIT ETRE SUPERIEUR A : -0.0027162

TEST -0.0027162 DN= 0.9999999

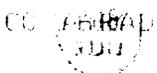
LE COEFFICIENT D'AMPLIFICATION SE EST : 1.2726670

```

*****
*          *          *          *          *
*  1      *  PÔLE(C)      *  COEFF(C)      *  ZÉRO(C)      *
*          *          *          *          *
*****
*          *          *          *          *
*  1      *  -1.70000000 *  0.9372825 *  -0.002751 *
*          *          *          *          *
*  2      *  -2.50000000 *  1.4273558 *  -0.005697 *
*          *          *          *          *
*  3      *  -3.50000000 *  2.5117585 *  -0.003675 *
*          *          *          *          *
*  4      *  -4.50000000 *  3.5825010 *  -0.002716 *
*          *          *          *          *
*  5      *  -5.50000000 *  4.6252556 *  -0.001732 *
*          *          *          *          *
*****

```

STOP NUMBRE 00



0
1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0
-1.8, 0, -2.5, 0, -3.5, 0, -4.5, 0, -5.5, 0

NOMBRE DE POLES DE WCF) = 6

		P. REELLE		P. IMAGINAIRE
POLE	1	-0.100000000E 01	01	0.000000000E 00
POLE	2	-0.200000000E 01	01	0.000000000E 00
POLE	3	-0.300000000E 01	01	0.000000000E 00
POLE	4	-0.400000000E 01	01	0.000000000E 00
POLE	5	-0.500000000E 01	01	0.000000000E 00
POLE	6	-0.600000000E 01	01	0.000000000E 00

NOMBRE DE ZEROS DE WCF) = 5

		P. REELLE		P. IMAGINAIRE
ZERO	1	-0.180000019E 01	01	0.000000000E 00
ZERO	2	-0.250000000E 01	01	0.000000000E 00
ZERO	3	-0.350000000E 01	01	0.000000000E 00
ZERO	4	-0.450000000E 01	01	0.000000000E 00
ZERO	5	-0.550000000E 01	01	0.000000000E 00

POUR ASSURER LA STABILITE L'UNICITE
LE GAIN INSTANTANE DOIT ETRE SUPERIEUR A : -0.0025653

TEST -0.0025653 LN= 0.9999999

LE COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT NE EST : 1.1360211

```
*****
*          *          *          *          *
*  I      *  PFAUCI)  *  COEFFAUCI)  *  CONLCI)  *
*          *          *          *          *
*****
*          *          *          *          *
*  1      *  -1.8000002  *  1.1069573  *  -0.0003765  *
*          *          *          *          *
*  2      *  -2.5000000  *  1.4174665  *  -0.0006510  *
*          *          *          *          *
*  3      *  -3.5000000  *  2.2631390  *  -0.0004103  *
*          *          *          *          *
*  4      *  -4.5000000  *  3.5452976  *  -0.0002813  *
*          *          *          *          *
*  5      *  -5.5000000  *  4.7844530  *  -0.0001680  *
*          *          *          *          *
*****
STOP NUMBER 00
```

GO AHEAD



B I B L I O G R A P H I E

- (1) J.C. GENTINA - P. BORNE - F. LAURENT - MAIZIERES
"Sur une condition suffisante d'unicité de la réponse des systèmes continus non linéaires de grandes dimensions".
Congress National Automatica, Barcelone, 1972
- (2) F. LAURENT - PETTE et NGUYEN
"Critère de stabilité des systèmes continus et échantillonnés non linéaires"
CRAS, t. 270, p. 1637-1640, 15 juin 1970
- (3) REGNIER
"Contribution à l'analyse des régimes dynamiques des systèmes continus. Applications aux circuits non-linéaires"
Thèse Docteur-ingénieur, 1971, Lille
- (4) P. MURDOCH
"Eigenvectors in modal control"
IEEE - Transactions on Automatic Control, juin 1974
- (5) SY KOU and K.W. HAN
"Limitation of the describing function method"
IEEE - Transactions on Automatic Control, p. 291-292, Avril 1975
- (6) I. O'DAY and J.P. HYDE
"Subharmonics and Jump resonance in a third order non linear system"
IEEE - Transactions on automatic control, p. 721-722, Oct. 1972
- (7) MAIZIERES et F. LAURENT
"Sur l'unicité de la réponse d'un système continu non-linéaire"
CRAS, p. 1157-1159, Série A - 1967

- (8) J.C. GENTINA - P. BORNE - F. LAURENT
"Stabilité des systèmes continus non linéaires de grande dimension"
RAIRO, p. 69-77, Aout 1972
- (9) BELLMAN
"Vecteur Ljapunov functions"
J. SIAM Control Serie A-1 , 1962, p.122-166
- (10) R.J. SIMPSON and H.M. POWER
"Stability and subharmonic responses of a nonlinear system with dither injection"
IEEE - Automatic Control, p. 529-530, Oct. 1973
- (11) F.G. CSAKI
"Some notes of the inversion of confluent Vandermonde matrices"
IEEE - Transactions on Automatic control, p. 154-157 , Fev. 1975
- (12) F. LAURENT
"Contribution à l'étude des systèmes échantillonnés non linéaires en régime dynamique" Thèse es Sciences LILLE, 11 mai 1968
- (13) N.H.Me. CLAMROCH and G.D. JANCULESCU
"Global stability of two linearly interconnected nonlinear system"
IEEE - Transactions on Automatic control , p. 678-682, Oct. 1975
- (14) J.C. GENTINA - P. BORNE - F. LAURENT
"On study of stability and sensitivity of large continuous nonlinear system under incertanity".
IFAC - Symposium Ischia, Italy, Juin 1973
- (15) J.C. GENTINA - P. BORNE
"Sur une condition d'application du critère de stabilité linéaire à certaines classes de systèmes continus non linéaires".
CRAS - Paris - N° 7, T. 275, 18-8-72, p. 401-404

- (16) A. GELB and W.E. VANDERVELDE
"Multiple input describing functions and nonlinear system design"
Mac Graw Hill, Electronic Sciences Series
- (17) PANET - F. LAURENT et MAIZIERES
"Sur l'unicité de la réponse des systèmes multivariables non linéaires, applications aux réseaux électriques"
IFAC, Dusseldorf, 1968
- (18) E. ROUELLE
"Sur le démultiplicateur de fréquence"
CRAS, 185, 19 - 12 - 27, p. 1450-1452
- (19) R. DEHORS et HENRY
"Simulation d'un démultiplicateur de fréquence ferromagnétique"
Revue Automatisation - janvier 1964
- (20) MAIZIERES
"Sur quelques méthodes d'étude des systèmes continus non linéaires"
Thèse ès Science physiques - Lille - 1968
- (21) L.T. GRUJIĆ - D.D. SILJAK
"Asymptotic stability and instability of large scale systems"
IEEE - Automatic Control , p. 636-645 , Dec. 1973
- (22) GILLES - DECAULNE et PELLEGRIN
"Méthodes d'étude des systèmes asservis non linéaires"
Dunod (1967).
- (23) F. LAURENT
"Systèmes continus non linéaires"
Polycopié correspondant au cours d'automatique supérieure (Lille I)
- (24) A.N. MICHEL
"Stability analysis of interconnected systems".
SIAM J. Control , Vol. 12, n° 3, p. 554-579 - 1974

- (25) A. FOSSARD
"Commande des systèmes multidimensionnels"
Dunod - 1972
- (26) F. BOERI
"Résonance nonlinéaire du type Duffing d'un ensemble de deux circuits couplés"
Colloques internationaux du CNRS, Marseille, 1964
- (27) E.J. DAVISON
"The stability of the nth-order nonlinear time varying differential system"
IEEE - Transaction on Automatic control, p. 99-102, Fev. 1968
- (28) J.C. GENTINA
"Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension"
Thèse ès Sciences Physique, Lille, 1976
- (29) P. BORNE
"Contribution à l'étude des systèmes discrets non linéaires de grande dimension. Application aux systèmes interconnectés"
Thèse ès Sciences Physiques, Lille, 1976
- (30) GANTMACHER
"Théorie des matrices"
Tome 1 et 2 Dunod, 1966
- (31) N. ROUCHE - J. MAWHIN
"Equations différentielles ordinaires - Stabilité et solutions périodiques. Méthode de comparaison".
Masson et Cie - Tome II - p. 45 - Paris - 1973.

- (32) K.S. NARENDRA and J.H. TAYLOR
"Frequency domain criteria for absolute stability"
Electrical Science Series, Academic Press, New York and London
- (33) R. BELLMAN and K.L. COOKE
"Differential - Difference equations"
Mathematics in Science and engineering - Volume 6 , 1963
- (34) H.H. ROSENBROCK
"State Space and multivariable systems"
Studies in dynamical systems - Nelson , 1970
- (35) N. MINORSKY
"Nonlinear oscillations"
D. VAN NOSTRAND COMPAGNY, INC , 1962
- (36) Colloques internationaux du CNRS (148)
"Les vibrations forcées dans les systèmes non-linéaires"
Marseille 1964 , Editions du CNRS , 1965
- (37) P. NASLIN
"Les systèmes asservis"
- (38) B. PORTER and R. CROSSLEY
"Modal Control - Theory and applications"
Taylor and FRANCIS LTD , 1972
- (39) S. LEFSCHETZ
"Stability of non linear control system"
Mathematics in Science and engineering , Vol. 13 , 1965
- (40) W. HAHN
"Stability of motion"
Dunod Paris , 1966 , Vol. 2

- (41) V.M. POPOV
"Hyperstability of control system"
Springer Verlag, Berlin , 1973
- (42) A.M. AIZERMAN
"On a problem concerning the stability in the large of dynamical system"
en Russe - Usp. Math. Nank , 4 , 1949, pp 187-188
- (43) F. LAURENT et P. VIDAL
"Sur une condition suffisante d'unicité de la réponse d'un système échantillonné non linéaire à une sollicitation quelconque"
C.R.A.S. - T. 264, Série A, 1967, p779
- (44) POPOV
"Absolute stability of nonlinear systems of Automatic control"
Automatic and remote control 22, pp 857-875, 1962
- (45) R.E. KALMAN
"Ljapunov functions for the problem of Lure' in automatic control"
Proc. Nat. Acad. Sci. , 49, 1963, pp 201-205
- (46) B. LALANNE et A. RAULT
"Approche unifiée de la détermination des critères fréquentiels de stabilité des systèmes non linéaires et / ou non stationnaires"
I. RAIRO , fev. 1973, J1 pp 70-96
- (47) F. LAURENT - F. LHOTE
"Sur une condition suffisante de stability asymptotique pour un système continu non-linéaire"
C.R.A.S. , T. 262 , 1966 , pp 35-37
- (48) A.M. LJAPUNOV
"Problème général de la stabilité de mouvement"
Am. Fac. Sci. , Toulouse , 9 , 1907

- (49) DEHORS
"Contribution à l'étude de la démultiplication de fréquence ferromagnétique"
Thèse es Sciences - Lille
- (50) B.D.O. ANDERSON
"Stability of controls systems with multiple nonlinearities"
J. Franklin Inst., Vol. 282, n° 3, pp 155-160, 1966
- (51) S. PARTOVI and N.E. NAHI
"Absolute stability of dynamic systems containing non linear functions of several state variables"
Automatica, Vol. 5, n°4, pp 465-473, 1969
- (52) D.W. PORTER and A.N. MICHEL
"Input-output stability of time varying nonlinear multiloop feedback systems"
presented at the 1974 Joint Automatica Contr. Conf. Austin, Tex
- (53) D.D. SILJAK
"Stability of large scale systems under structural perturbations"
IEEE - Trans. Syst., Man, Cybern, Vol. SMC-2, pp 657-663, Nov 1972.

TABLE DES MATIERES

	Page
<u>Introduction générale</u>	1
<u>CHAPITRE I : Statique et dynamique des systèmes asservis non linéaires</u>	
1 - Introduction	3
2 - Condition d'unicité des systèmes continus non linéaires	
2.1 - Mise en équation	5
2.2 - Définition de la notion d'unicité	6
3 - Application aux systèmes asservis non linéaires usuels	
3.1 - Description du système	7
3.2 - Choix de la représentation matricielle	8
3.3 - Détermination d'une condition suffisante d'unicité . .	9
4 - Analyse des réponses d'un système asservi du second ordre à une entrée sinusoïdale	14
4.1 - Modèle mathématique du circuit ferrorésonnant série étudié	14
4.2 - Méthode d'estimation de la réponse du processus par la méthode du premier harmonique	17
4.3 - Détermination de la réponse par simulation du processus sur calculateur	18
5 - Conclusion	21

CHAPITRE II : Condition suffisante de validité de la méthode du premier harmonique

1 - Introduction	23
2 - Condition suffisante d'unicité de la réponse de certaines classes de processus non linéaires	24
2.1 - Système à déphasage minimal	24
2.2 - Système à déphasage non minimal	30
2.3 - Cas des systèmes asservis admettant une représentation matricielle particulière	34
3 - Cas général - Représentation complexe d'un processus . .	41
3.1 - Etude de l'unicité à partir d'une fonction de Ljapunov	42
3.2 - Etude de l'unicité à partir d'un système majorant	47
4 - Méthode d'exploitation systématique des résultats précédents sous forme d'un algorithme numérique	49
5 - Conclusion	54

CHAPITRE III : Extension aux circuits couplés

1 - Introduction	55
2 - Description du processus étudié	56
3 - Etude de l'unicité dans le cas d'un couplage linéaire . .	58
3.1 - Généralités	58
3.2 - Système formé de deux sous systèmes à déphasage minimal couplés	59

	Page
. Le produit $b_{12}b_{21}$ est négatif	59
. Le produit $b_{12}b_{21}$ est positif	63
. Interprétations graphiques	68
3.3 - Représentation complexe de deux circuits couplés	69
. Cas d'un moteur couplé à un système du troisième ordre	73
4 - Etude de l'unicité dans le cas d'un couplage non linéaire	74
5 - Conclusion	78

CHAPITRE IV : Etude de la stabilité de certains processus non linéaires

1 - Introduction	79
2 - Etude de la stabilité des systèmes continus non linéaires	80
2.1 - Définitions	80
2.2 - Systèmes continus non linéaires à non linéarité séparable	81
2.3 - Conditions suffisantes de stabilité	82
a) Interprétation relative à la conjecture d'Aizerman	84
b) Relation avec le critère de Popov	87
2.4 - Application à la synthèse des asservissements	89
3 - Etudes des performances dynamiques du processus	92
3.1 - Analyse des performances d'un processus non linéaire fonctionnant en régulateur	92
. Dynamique de la convergence	92
. Evaluation du coefficient d'amortissement	93
3.2 - Amélioration des performances d'un processus	96
3.3 - Mise en oeuvre	97
4 - Conclusion	101
<u>Conclusion générale</u>	103

	Page
<u>ANNEXE I</u>	105
<u>ANNEXE II</u>	115
<u>ANNEXE III</u>	119
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	125
<u>TABLE DES MATIERES</u>	133

