

50376
1976
78

50376
1976
78

THESE

présentée

à l'Université des Sciences et Techniques
- Lille I -

et au Centre Universitaire de Valenciennes
et du Hainaut Cambrésis

par

J.P. RIBAUT

INGENIEUR DE L'ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES DE PARIS



Sujet de la Thèse:

«CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'ECOULEMENT RADIAL ENTRE DEUX DISQUES»

Soutenu le 2 Juillet 1976 devant le jury composé de :

- | | | |
|-------------------|---|------------------------------------|
| M. G. GONTIER | | Président |
| M. R. ZEYTOUNIAN | } | Examineurs |
| M. A. DYMENT | | |
| M. DINH N. NGUYEN | | Invité-Université Laval Quebec |
| M. P. FLORENT | | Directeur du Travail et Rapporteur |



REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance à mon Directeur de Recherche, Monsieur le Professeur P. FLORENT, qui tant au Canada qu'en France m'a constamment guidé au cours de cette étude et sans qui cette recherche n'aurait pas abouti.

Je ne saurais non plus oublier le Professeur NGUYEN N DUIH du département de Génie Mécanique de l'Université Laval à Québec qui a accepté, non seulement de juger ce travail mais dont les conseils m'ont toujours été précieux.

Je tiens à remercier également Messieurs les Professeurs G. GAUTIER, A. DYMENT et R. ZEYTOUNIAN de l'Université de Lille I qui ont accepté de bien vouloir juger ce travail.

La partie expérimentale de ce travail a été menée au département de Génie Mécanique de l'Université à Laval où j'étais comme boursier du Conseil des Arts du Canada. Je tiens à remercier le personnel technique du département de Génie Mécanique et le Conseil National de Recherche du Canada qui a fourni les moyens pour la réalisation des dispositifs expérimentaux.

Enfin, je ne saurais oublier Mademoiselle BERA du Centre Universitaire de Valenciennes pour le soin qu'elle a apporté à la dactylographie et la mise en page de ce travail.

NOTATIONS

a	: distance entre les disques
$f, g (T, z)$: solutions du cas instationnaire, fonctions de T et z
$f_s, g_s (z)$: solutions du cas stationnaire, fonctions de z
f_{ij}, g_{ij}	: valeurs numériques de $f (T, z), g (T, z)$
n	: $= 1/\Delta z$; Δz : pas de calcul sur z
$p (r, z, T)$: pression statique, non dimensionnelle
$p_0 (z, T)$: pression sur l'axe des disques, non dimensionnelle
$\overline{p_a}$: pression atmosphérique
r, z, θ	: coordonnées cylindriques, non dimensionnelles
R_d	: rayon des disques
$R_{er} (T)$: nombre de Reynolds de rotation du disque supérieur, fonction du temps : $R_{er} (T) = \frac{\Omega (T) a^2}{\nu}$
R_{ero}	: nombre de Reynolds de rotation du disque supérieur, constante : $R_{ero} = \frac{\Omega a^2}{\nu}$
T	: temps non dimensionnel
u, v, w	: composantes radiale, tangentielle, axiale de la vitesse, non dimensionnelles
$\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$: composantes dimensionnelles de la vitesse ; valeurs moyennes de ces composantes en régime turbulent
Δx	: accroissement de x
ϵ	: constante d'erreur
ν	: viscosité cinématique du fluide

- ρ : masse volumique du fluide
- $\phi (T), \psi (T, z)$: fonctions définissant la répartition de pression
- ϕ_{th}, ϕ_{exp} : valeurs théorique et expérimentale de ϕ
- $\Omega_1 (T), \Omega(T)$: vitesse de rotation du disque supérieur, fonction du temps
- Ω_1, Ω : vitesse de rotation du disque supérieur, constante
- Ω_2 : vitesse de rotation du disque inférieur, constante

TABLE DES MATIERES

NOTATIONS

INTRODUCTION

CHAPITRE I	Problème théorique	Page 1
I - 1	Equations de Navier-Stokes	
I - 2	Choix des grandeurs de références	
I - 3	Hypothèse de Von Karman - Equations du problème	
I - 4	Calcul de la pression et du frottement	
CHAPITRE II	Résolution numérique	Page 8
II - 1	Méthode de Newton	
II - 2	Programmation	
II - 3	Précision de la méthode	
CHAPITRE III	Résultats numériques	Page 16
III - 1	Résultats déjà obtenus	
III - 2	Discussion sur les divers types de solutions obtenues	
III - 3	Résultats généraux pour des nombres de Reynolds supérieurs à 1000	
III - 4	Conclusion des calculs numériques	
CHAPITRE IV	Etude expérimentale	Page 24
IV - 1	Introduction	
IV - 2	Installation expérimentale	
IV - 3	Mesures de pressions pariétales - Influence des conditions aux limites	
IV - 3 - 1	Préliminaire	

IV - 3 - 2	Résultats expérimentaux	
IV - 3 - 3	Remarque sur l'interprétation des courbes de pression	
IV - 3 - 4	Conclusion des mesures de pressions	
IV - 4	Etude du régime "non décroché" (Régime II)	
IV - 4 - 1	Introduction	
IV - 4 - 2	Mesures menées pour $a/R_d = 1/24$	
IV - 4 - 3	Résultats généraux pour différentes distances et différents nombres de Reynolds	
IV - 4 - 4	Conclusion	
IV - 5	Etude de la multiplicité régime I - Régime II	
IV - 6	Conclusion de l'étude expérimentale : validité des hypothèses de base de la théorie	
CONCLUSION	 Page 50
ANNEXE I	Organigrammes Page 52
A - I - 1	Programme stationnaire	
A - I - 1 - 1	Programme principal	
A - I - 1 - 2	Sous-programme ITERATION	
A - I - 2	Programme instationnaire	
A - I - 2 - 1	Programme principal	
A - I - 2 - 2	Sous-programme ITERATION	
ANNEXE II	Mesures anémométriques Page 60
A - II - 1	Utilisation des sondes de paroi	
A - II - 2	Examen des ordres de grandeur relatifs de \bar{u} , \bar{v} , \bar{w}	
A - II - 3	Etalonnage des sondes	
A - II - 4	Mesures de turbulence	
BIBLIOGRAPHIE	 Page 69

INTRODUCTION

On se propose d'étudier théoriquement, puis expérimentalement, l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux incompressible entre deux disques coaxiaux dont l'un tourne à une vitesse angulaire qui peut être une fonction arbitraire du temps.

La partie numérique fait suite à des travaux précédents [1] [2], qui ont déjà montré que les solutions, dans le cas stationnaire, peuvent être multiples, possibilité envisagée aussi par d'autres auteurs, tels que Greenspan [12], ou Mellor, Chappel et Stokes [19]. Nous discutons plus en détail ce problème de multiplicité, en analysant en particulier l'influence des différents paramètres de calcul qui déterminent la forme de la solution fournie par la méthode itérative de Newton utilisée, ainsi qu'en comparant les résultats stationnaires obtenus avec ceux trouvés comme limites d'évolutions instationnaires quand le temps T tend vers l'infini.

L'étude expérimentale a été effectuée en régime stationnaire. Elle repose essentiellement sur des mesures de pressions et de vitesses. Il existe dans la littérature très peu de déterminations systématiques des champs de vitesses entre deux disques, et le problème de la multiplicité des solutions théoriques à des nombres de Reynolds élevés n'a, à notre connaissance, jamais été soumis à l'expérience.

Notre étude, en premier lieu, met en relief l'influence des conditions aux limites imposées. Ce fait était prévisible, mais, de façon

inattendue, il apparaît que, selon le choix de la géométrie périphérique des disques, deux formes d'écoulement sont possibles ; l'une d'entre elles, qui ne dépend pas des conditions limites imposées lorsqu'elle existe, est correctement décrite par la solution de type Boedwadt obtenue numériquement. L'autre est "turbulente" et n'a aucun lien avec la théorie.

Cette étude permet donc de définir des conditions assez générales sous lesquelles les solutions dites "exactes" trouvées aux équations de Navier-Stokes s'appliquent au cas de disques finis. Dans cette optique, elle permet d'aborder le problème de l'étalonnage des sondes anémométriques aux faibles vitesses, en présence d'une paroi et d'un gradient de vitesse connu. D'autre part, les problèmes de disques tournants présentent un grand intérêt pratique : étude des paliers à air, étude des pompes et compresseurs à entraînement visqueux, etc.

CHAPITRE I

PROBLEME THEORIQUE

I - 1 - Equations de Navier-Stokes

Soient deux disques parallèles, coaxiaux, infinis, de cotes $\bar{z} = 0$, $\bar{z} = a$. Le disque supérieur tourne à une vitesse angulaire Ω , fonction arbitraire du temps t . Le fluide entre les disques est supposé incompressible, de masse volumique ρ , et sa viscosité cinématique ν est constante (fig. 1).

L'écoulement résultant, supposé laminaire, est régi par les équations de Navier-Stokes, écrites en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} - \frac{\bar{v}^2}{\bar{r}} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}}{\bar{r}} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (1. a)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} + \frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{r}} = \nu \left[\frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \right) + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (1. b)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right] \quad (1. c)$$

$$\frac{\partial (\bar{r} \bar{u})}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial (\bar{r} \bar{w})}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2)$$

\bar{u} , \bar{v} , \bar{w} sont les composantes radiale, tangentielle, axiale de la vitesse du fluide en un point de coordonnées radiale et axiale \bar{r} , \bar{z} . La pression en ce point est \bar{p} .

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\bar{z} = 0 \quad \bar{u} = 0 \quad \bar{v} = 0 \quad \bar{w} = 0 \\
\bar{z} = a \quad \bar{u} = 0 \quad \bar{v} = r \Omega (t) \quad \bar{w} = 0
\end{aligned}
\tag{3. a}$$

La résolution du système (1.a.b.c) (2) exige la connaissance des champs de vitesses et de pressions au temps $t = 0$, donc la connaissance d'un état stationnaire de départ, caractérisé par la vitesse de rotation $\Omega = \Omega (0)$. Cet état stationnaire initial pourra être éventuellement l'état de repos. Les conditions initiales s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\Omega (0) &= \Omega \\
\bar{u} (\bar{r}, \bar{z}, t = 0) &= \bar{u}_s (\bar{r}, \bar{z}) \\
\bar{v} (\bar{r}, \bar{z}, t = 0) &= \bar{v}_s (\bar{r}, \bar{z}) \\
\bar{w} (\bar{r}, \bar{z}, t = 0) &= \bar{w}_s (\bar{r}, \bar{z}) \\
\bar{p} (\bar{r}, \bar{z}, t = 0) &= \bar{p}_s (\bar{r}, \bar{z})
\end{aligned}
\tag{3. b}$$

où $\bar{u}_s, \bar{v}_s, \bar{w}_s, \bar{p}_s$ sont solutions du système (1.a.b.c) (2), dans lequel on a supprimé les dérivées temporelles, avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned}
\bar{z} = 0 \quad \bar{u}_s = 0 \quad \bar{v}_s = 0 \quad \bar{w}_s = 0 \\
\bar{z} = a \quad \bar{u}_s = 0 \quad \bar{v}_s = \bar{r} \Omega \quad \bar{w}_s = 0
\end{aligned}$$

I - 2 - Choix des grandeurs de référence

Les vitesses $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, la pression \bar{p} sont fonctions des variables du problème, qui sont : le temps t , les longueurs \bar{z}, \bar{r} . Les paramètres sont

$\rho, v, \Omega, a.$

Dans la suite de l'étude, nous prendrons "a" comme longueur de référence. Comme Ω est dans le cas général fonction du temps, on prendra comme vitesse de référence $\frac{v}{a}$, qui est une constante pour le problème considéré.

On en déduit un temps de référence $\frac{a^2}{v}$ et une pression de référence $\rho \frac{v^2}{2}$. Le problème se trouve alors ramené aux grandeurs adimensionnelles :

$$\begin{aligned} r &= \frac{\bar{r}}{a} & z &= \frac{\bar{z}}{a} \\ u &= \frac{a}{v} \bar{u} & v &= \frac{a}{v} \bar{v} & w &= \frac{a}{v} \bar{w} \\ p &= \frac{a^2}{\rho v^2} \bar{p} & T &= \frac{v}{a^2} t \end{aligned} \quad (4)$$

Les équations (1.a.b.c) (2) deviennent :

$$\frac{\partial u}{\partial T} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (5. a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial T} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (5. b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial T} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (5. c)$$

$$\frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial (rw)}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} z = 0 \quad u = 0 \quad v = 0 \quad w = 0 \\ z = a \quad u = 0 \quad v = r \frac{\Omega(T) a^2}{\nu} \quad w = 0 \end{aligned} \quad (7. a)$$

On fait apparaître ainsi le paramètre $R_{er}(T) = \frac{\Omega(T) a^2}{\nu}$, que l'on appellera "nombre de Reynolds" de rotation, et qui définit le problème.

Les conditions initiales s'écrivent :

$$\begin{aligned} R_{er}(0) &= R_{ero} \\ u(r, z, T=0) &= u_s(r, z) \\ v(r, z, T=0) &= v_s(r, z) \\ w(r, z, T=0) &= w_s(r, z) \\ p(r, z, T=0) &= p_s(r, z) \end{aligned} \quad (7. b)$$

où u_s, v_s, w_s, p_s sont solutions du système (5.a.b.c.) (6), dans lequel on a supprimé les dérivées temporelles, avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} z = 0 \quad u_s = 0 \quad v_s = 0 \quad w_s = 0 \\ z = 1 \quad u_s = 0 \quad v_s = r R_{ero} \quad w_s = 0 \end{aligned}$$

I - 3 - Hypothèse de Von Karman. Equations du problème

On cherche à ramener le problème à une seule variable spatiale, en utilisant une hypothèse du type Von Karman en ce qui concerne la vitesse axiale : on suppose, comme en régime stationnaire, que la vitesse axiale est indépendante de la coordonnée radiale, soit :

$$w = f(z, T) \tag{8}$$

De l'équation de continuité (6), on tire :

$$u = -\frac{r}{2} f'_z(z, T) \tag{9}$$

puis de (5.a.b.c) :

$$v = r g(z, T) \tag{10}$$

En éliminant la pression statique entre les équations (5.a) et (5.c), on trouve que f et g doivent satisfaire le système :

$$-\frac{f'''}{Tz^2} - f \frac{f'''}{z^3} - 4 g g'_z + f \frac{f^{(4)}}{z^4} = 0 \tag{11}$$

$$g'_T - f'_z g + f g'_z - g''_{z^2} = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$f(T, 0) = 0 \quad f'_z(T, 0) = 0 \quad g(T, 0) = 0 \tag{12}$$

$$f(T, 1) = 0 \quad f'_z(T, 1) = 0 \quad g(T, 1) = \frac{\Omega(T) a^2}{\nu} = R_{er}(T)$$

La résolution du système (11) nécessite la connaissance de conditions initiales, donc, à $T = 0$, d'un état stationnaire à partir duquel le mouvement évolue. Cet état stationnaire est caractérisé par son nombre de Reynolds de rotation $R_{er}(T = 0)$, ainsi que les solutions $f(z)$ et $g(z)$ du cas stationnaire correspondant, que nous désignerons par $f_s(z)$ et $g_s(z)$. Autrement dit, nous avons les conditions initiales suivantes :

$$R_{er}(0) = R_{ero} \quad f(0, z) = f_s(z) \quad g(0, z) = g_s(z) \quad (13)$$

Les fonctions $f_s(z)$ et $g_s(z)$ sont solutions du système :

$$f_s f_s'''' + 4 g_s g_s' - f_s^{(4)} = 0 \quad (14)$$

$$f_s g_s' - f_s' g_s - g_s'' = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$f_s(0) = 0 \quad f_s'(0) = 0 \quad g_s(0) = 0 \quad (15)$$

$$f_s(1) = 0 \quad f_s'(1) = 0 \quad g_s(1) = R_{ero}$$

I - 4 - Calcul de la pression et du frottement

A partir du champ des vitesses, on peut calculer la répartition des pressions. Des équations (5. a) et (5. c); on tire en effet l'expression suivante pour la pression :

$$p = \frac{r^2}{2} \phi(T, z) + \Psi(T, z)$$

Les fonctions ϕ et Ψ vérifient :

$$2\phi - f''_{zT} + \frac{1}{2} f'^2_z - f f''_{z^2} + f'''_{z^3} - 2g^2 = 0$$

$$\Psi + f'_T + \frac{1}{2} f^2 - f'_z = 0 \quad (16)$$

$$\phi'_z = 0$$

On a $\phi'_z = 0$, c'est à dire que, dans le cas général instationnaire, ϕ ne dépend que de T, et donc :

$$p = \frac{r^2}{2} \phi(T) + \psi(T, z) \quad (17)$$

Dans le cas stationnaire, ϕ est une constante qui dépend du paramètre Ω . La distribution des pressions en fonction de r s'écrit alors :

$$p(z) - p_0(z) = \frac{r^2}{2} \phi(\Omega) \quad (18)$$

où $p_0(z)$ est la pression sur l'axe à la cote z . Cette loi parabolique reste la même quelle que soit la cote z et est valable en particulier aux parois, ce qui permet une comparaison facile entre la théorie et l'expérience, en régime stationnaire.

Enfin, les composantes tangentielles du frottement $\tau_{z\theta} = \rho v \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$ à $\bar{z} = 0$ et $\bar{z} = a$, donc les moments des forces agissant sur les disques, sont respectivement proportionnels à $g'_z(T, 0)$ et $g'_z(T, 1)$.

CHAPITRE II

RESOLUTION NUMERIQUE

La résolution numérique du système (11) obtenu en supposant $w = f(T, z)$ affecté des conditions aux limites (12) et des conditions initiales (13), peut être abordée, en stationnaire et en instationnaire, par la recherche de développements en série de $R_{er}(T)$ pour chacune des fonctions inconnues f et g . Toutefois, des études précédentes [1] [3] [4] ont montré que, dans des cas semblables (rotation du disque supérieur, soufflage au travers du disque inférieur), le domaine de validité de ces solutions se limite à de très faibles nombres de Reynolds, ce qui en réduit considérablement l'intérêt. Tout au plus peuvent-ils éventuellement servir à initialiser des calculs numériques par d'autres méthodes, quand la forme de la solution à obtenir est totalement inconnue.

D'autre part, des tentatives de résolution en régime stationnaire par la méthode analogique ou par la méthode de Runge-Kutta ont révélé une précision généralement insuffisante aux grands nombres de Reynolds [1]. De plus, la méthode de Runge-Kutta n'est pas applicable aux calculs en régime instationnaire. C'est pourquoi nous utiliserons la méthode de Newton, déjà décrite dans [1].

Nous en rappellerons brièvement le principe et nous en discuterons surtout la précision. Puis nous l'utiliserons pour le traitement du problème posé.

II - 1 - Méthode de Newton

Décrivons les grandes lignes de la méthode de Newton, que nous adoptons pour résoudre le système (11) (12) (13).

A partir du système (11) (12) (13), il s'agit de calculer les valeurs f_{ij} et g_{ij} de $f(T, z)$ et $g(T, z)$ au point $z = z_j$ et au temps $T = T_i$. Découpons l'intervalle $z = 0, z = 1$ en n éléments de longueur $\Delta z = \frac{1}{n}$, et l'axe des temps en éléments de longueur ΔT . Le schéma en différences finies du système (11) peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 F1_j = & \frac{1}{12 \Delta T (\Delta z)^2} \left[f_{i+1,j-2} - f_{i,j-2} - 16 (f_{i+1,j-1} - f_{i,j-1} \right. \\
 & \left. + f_{i+1,j+1} - f_{i,j+1}) + 30 (f_{i+1,j} - f_{i,j} + f_{i+1,j+2} - f_{i,j+2}) \right] \\
 & + \frac{1}{2 (\Delta z)^3} f_{i+1,j} \left[f_{i+1,j-2} - f_{i+1,j+2} + 2 (f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}) \right] \\
 & + \frac{2}{\Delta z} g_{i+1,j} (g_{i+1,j-1} - g_{i+1,j+1}) \tag{19. a} \\
 & + \frac{1}{(\Delta z)^4} \left[f_{i+1,j-2} + f_{i+1,j+2} - 4 (f_{i+1,j-1} + f_{i+1,j+1}) + 6 f_{i+1,j} \right] \\
 = & 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F2_j &= \frac{1}{\Delta T} (g_{i+1,j} - g_{i,j}) + \frac{1}{12 \Delta z} g_{i+1,j} \left[f_{i+1,j+2} - f_{i+1,j-2} \right. \\
 &\quad \left. + 8 (f_{i+1,j-1} - f_{i+1,j+1}) \right] + \frac{1}{2 \Delta z} f_{i+1,j} (g_{i+1,j+1} - g_{i+1,j-1}) \\
 &\quad + \frac{1}{(\Delta z)^2} (2 g_{i+1,j} - g_{i+1,j-1} - g_{i+1,j+1}) \qquad (19. b) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

pour $3 \leq j \leq n+1$.

L'utilisation du schéma implicite ci-dessus nécessite l'introduction des abscisses fictives $z_1 = -\frac{1}{n}$ et $z_{n+3} = 1 + \frac{1}{n}$. Les nouvelles inconnues $f_{i,1}$ et $f_{i,n+3}$ le long de ces axes sont déduites des conditions aux limites (12) qui s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 f_{i,2} = 0 \qquad f_{i,1} = f_{i,3} \qquad g_{i,2} = 0 \\
 f_{i,n+2} = 0 \qquad f_{i,n+1} = f_{i,n+3} \qquad g_{i,n+2} = R_{er}(T_i)
 \end{aligned} \qquad (20)$$

A chaque instant il y a donc un ensemble de $(n+3)$ inconnues $f_{i+1,j}$ et $(n+1)$ inconnues $g_{i+1,j}$. Or, le système (19) et les conditions (20) fournissent $2(n+2)$ équations. On peut alors, à partir des valeurs connues de f et g au temps $T = T_i$, calculer toutes leurs valeurs au temps $T_{i+1} = T_i + \Delta T$. Le système obtenu étant non linéaire, on peut s'attendre à une multiplicité de solutions, et nous adoptons la méthode itérative suivante :

En substituant (20) dans (19), les 2 $(n-1)$ fonctions $F1_j$ et $F2_j$ sont des fonctions des 2 $(n-1)$ variables $f_{i+1,3}, \dots, f_{i+1,n+1}, g_{i+1,3}, \dots, g_{i+1,n+1}$. On suppose au départ que ces valeurs sont connues comme première

approximation de la solution du système, et que cette approximation est située à une distance $(\Delta f_{i+1,3}, \dots, \Delta f_{i+1,n+1}, \Delta g_{i+1,3}, \dots, \Delta g_{i+1,n+1})$ de la solution exacte $(\bar{f}_{i+1,3}, \dots, \bar{f}_{i+1,n+1}, \bar{g}_{i+1,3}, \dots, \bar{g}_{i+1,n+1})$, soit :

$$\begin{aligned} \bar{f}_{i+1,j} &= f_{i+1,j} + \Delta f_{i+1,j} \\ \bar{g}_{i+1,j} &= g_{i+1,j} + \Delta g_{i+1,j} \end{aligned} \tag{21}$$

En écrivant les développements en série de Taylor des fonctions $F1_j$ et $F2_j$, les distances $\Delta f_{i+1,j}$, $\Delta g_{i+1,j}$ peuvent être obtenues approximativement par la solution du système linéaire :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F1_3}{\partial f_{i+1,3}} \dots \frac{\partial F1_3}{\partial f_{i+1,n+1}} \frac{\partial F1_3}{\partial g_{i+1,3}} \dots \frac{\partial F1_3}{\partial g_{i+1,n+1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial F1_{n+1}}{\partial f_{i+1,3}} \dots \frac{\partial F1_{n+1}}{\partial g_{i+1,n+1}} \\ \frac{\partial F2_3}{\partial f_{i+1,3}} \dots \frac{\partial F2_3}{\partial g_{i+1,n+1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial F2_{n+1}}{\partial f_{i+1,3}} \dots \frac{\partial F2_{n+1}}{\partial g_{i+1,n+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta f_{i+1,3} \\ \vdots \\ \Delta f_{i+1,n+1} \\ \Delta g_{i+1,3} \\ \vdots \\ \Delta g_{i+1,n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F1_3 \\ \vdots \\ F1_{n+1} \\ F2_3 \\ \vdots \\ F2_{n+1} \end{bmatrix} = 0 \tag{22}$$

Les valeurs alors calculées par (21) sont une meilleure approximation de la solution que l'approximation originale. On utilise ces nouvelles valeurs, et on itère ce processus jusqu'à ce que toutes les fonctions $F1_j$ et $F2_j$ soient

plus faibles, en valeur absolue, qu'un certain ϵ fixé.

II - 2 - Programmation

La méthode de Newton décrite en II.1 a été programmée en FORTRAN IV (annexe I), dans le cas stationnaire et dans le cas instationnaire, et les programmes correspondants ont été traités sur ordinateur IBM 370-155.

En raison de la forme de la matrice du premier membre, le système (22) n'a pu être résolu par la méthode de Gauss-Seidel [5], et l'a donc été dans tous les cas par la méthode de Gauss-Jordan [5], malheureusement beaucoup plus lourde.

En conséquence, les temps de calcul sont assez importants. Dans le cas $n = 20$, par exemple, le système (22) est d'ordre 38 et chaque itération dure en moyenne 2.5 sec. CPU. Pour $n = 50$, les temps de calcul sont sensiblement multipliés par 16 * et deviennent prohibitifs, du moins en ce qui concerne le programme instationnaire.

II - 3 - Précision de la méthode

Elle est liée d'une part au schéma en différences finies choisi (19), et d'autre part au choix des paramètres $\Delta z = \frac{1}{n}$ et ϵ , auxquels s'ajoute l'échelle de temps ΔT dans le cas instationnaire.

* Le temps de résolution numérique d'un système d'ordre n par la méthode de Gauss-Jordan est sensiblement proportionnel à n^3 .

La principale difficulté réside dans la présence des dérivées d'ordres 3 et 4 en f dans le système (11). Le schéma en différences finies adopté assure en principe une précision convenable, sauf peut-être dans les régions à gradients de vitesse élevés, c'est à dire surtout au voisinage des disques.

a - Le choix du paramètre $\Delta z = \frac{1}{n}$ résulte d'un compromis entre précision du résultat et temps de calcul (cf. II.2).

Des résultats complètement différents peuvent être obtenus suivant la valeur de n choisie. Pour des nombres de Reynolds faibles, par exemple aussi longtemps que R_{ero} ne dépasse pas 100, le calcul ne nécessite pas une grande finesse du pas Δz , et même $\Delta z = 0.1$ fournit une solution comparable, voire identique, à celle donnée par $\Delta z = 0.05$, (fig. 3). En revanche, pour $R_{ero} = 400$, à partir de la même initialisation sur f et g ($f \equiv 0$, g linéaire), des pas de calcul $\Delta z = 0.05$ ($n = 20$) et $\Delta z = 0.1$ ($n = 10$) fournissent des solutions de types différents (fig. 2). Pour des nombres de Reynolds plus élevés ($R_{ero} = 1000$), il n'est même plus trouvé de solution avec $\Delta z = 0.1$, ce qui n'est pas surprenant, en raison de l'existence de gradients de vitesse aussi importants. Toutefois, le pas de calcul $\Delta z = 0.05$ ($n = 20$) semble suffisant dans ce cas, puisque par comparaison avec l'utilisation du pas $\Delta z = 0.02$ ($n = 50$), il fournit des résultats identiques en g et des écarts maximum de 15 % sur f , la forme de la solution restant la même (fig. 4).

Une étude systématique a été menée, pour des nombres de Reynolds supérieurs à 1000, établissant une relation directe entre la valeur du nombre de Reynolds à atteindre et celle du pas de calcul nécessaire. Elle est résumée sur la figure (5) qui représente les variations de ϕ en fonction du nombre

de Reynolds, pour différents pas de calcul *. Cette figure montre que lorsque R_{ero} croît, il est nécessaire d'augmenter la finesse du calcul, déterminée par la valeur de Δz , et qu'il pourrait être défini, pour chaque valeur de pas de calcul, un certain nombre de Reynolds limite au-delà duquel la détermination de la solution devient par trop imprécise. Ainsi le pas $\Delta z = 0.05$ ($n = 20$) donne des résultats corrects jusque vers $R_{ero} = 1500$, le pas $\Delta z = 0.03$ ($n = 30$) reste utilisable jusque vers $R_{ero} = 3000$ etc... A titre d'exemples la figure (6) précise la figure (5), dans le cas $R_{ero} = 4000$, en montrant qu'un pas de calcul $\Delta z = 0.25$ ($n = 40$) est effectivement suffisant dans ce cas, puisqu'il fournit des résultats en g sensiblement identiques à ceux donnés par un pas $\Delta z = 0.20$ ($n = 50$), ce que laissait prévoir la figure (5).

b - Dans tous les calculs numériques présentés, on a fixé $\epsilon = 0.5$. Cependant, afin de s'assurer d'une précision raisonnable des résultats, des calculs ont été effectués avec $\epsilon \leq 0.05$. Les résultats ne diffèrent pratiquement pas d'un cas à l'autre, même pour des cas comme $R_{ero} = 1000$, où les gradients de vitesse sont très importants.

c - L'influence du pas de calcul ΔT dans le cas instationnaire est beaucoup plus complexe à analyser. Elle dépend en grande partie de la loi

* Rappelons que la valeur de ϕ est indépendante de z , donc liée uniquement à la valeur du paramètre R_{ero} du cas traité (cf § I-4). C'est donc une caractéristique de l'écoulement. Le programme FORTRAN fournit les valeurs de ϕ calculées pour chaque valeur de z_j ($j = 3, n+1$) par la formule (16) exprimée en différences finies, et on constate que dans tous les cas calculés, la constance de ϕ est effectivement assez bien assurée.

de variation $R_{er}(T)$ imposée, c'est à dire plus précisément de la valeur de

$\Delta R_{er} \sim \frac{\partial R_{er}(T)}{\partial T} \Delta T$, qui, pour un ΔT donné, varie avec T . Elle dépend aussi de la forme de la solution du système (11) au temps T qui, elle, est inconnue a priori.

Dans les calculs présentés par la suite, nous avons souvent adopté des lois de variation du type $R_{er}(T) = R_1 + (R_1 - R_2) e^{-KT}$ qui permettent, à partir de la solution stationnaire connue à un nombre de Reynolds R_1 , de tendre asymptotiquement vers la solution au nombre de Reynolds R_2 . Des calculs systématiques ont été menés avec une loi $R_{er}(T) = 1000(1 - e^{-KT})$, pour différentes valeurs de K comprises entre 1 et 100, et des pas de calcul $\Delta T = 0.01$ et $\Delta T = 0.005$. Pour les valeurs de K étudiées, même pour $K = 100$ (qui est presque le cas d' l'impulsion), les écarts entre les profils de vitesse instantanés obtenus avec $\Delta T = 0.01$ et $\Delta T = 0.005$ sont faibles. Ils diminuent rapidement quand T augmente, et tendent vers zéro quand T tend vers l'infini. Dans tous les calculs instationnaires qui suivent, on a donc pris $\Delta T = 0.01$, qui semble assurer une précision convenable.

Cette étude de l'influence des paramètres de calcul semble montrer que la précision du calcul dépend surtout de l'importance des gradients de vitesse en présence, donc a priori de la vitesse de rotation du disque supérieur. Pratiquement, tous les résultats présentés par la suite ont été obtenus avec $\epsilon \leq 0.05$, $\Delta T = 0.01$, $\Delta z = 20, 30, 40, 50$ selon la valeur du nombre de Reynolds du cas traité. Avec ces valeurs des paramètres de calcul, le ϕ calculé numériquement en fonction de z reste sensiblement constant, conformément à la remarque présentée en I-4, sauf peut être au voisinage des disques, où les gradients de vitesses sont élevés et où le schéma en différences finies adopté devient probablement insuffisant.

CHAPITRE III

RESULTATS NUMERIQUES

Nous allons maintenant présenter les résultats fournis par la méthode numérique précédemment décrite, dans les cas d'évolutions stationnaires et instationnaires. Nous rappellerons les résultats déjà obtenus dans d'autres études pour des nombres de Reynolds R_{ero} couvrant la gamme 0-1000, et nous les compléterons jusqu'à des nombres de Reynolds de 10000.

Tout au long de ce chapitre, comme dans le chapitre suivant, le seul paramètre du problème théorique est le nombre de Reynolds de rotation du disque supérieur, soit $R_{er}(T) = \frac{\Omega(T) a^2}{\nu}$, que nous écrivons R_{ero} dans le cas stationnaire. Rappelons de plus que les profils de vitesses en régime stationnaire peuvent être obtenus, soit directement par un calcul stationnaire à partir des conditions initiales sur f et g , soit indirectement comme limites, pour $T \rightarrow \infty$, d'une évolution instationnaire à partir d'un cas stationnaire connu.

III - 1 - Résultats déjà obtenus

Nous avons précédemment mis en relief le fait que le système (11) à résoudre n'est pas linéaire, et qu'il faut donc s'attendre à une multiplicité de solutions. Une fois fixés les paramètres de calcul Δz et ϵ , la solution obtenue peut dépendre des fonctions f et g imposées au départ du calcul itératif (cf. II-1). Ce problème a déjà été discuté en détail dans [1] [2] [6] [7],

Brièvement, nous allons résumer ces divers résultats obtenus à partir des mêmes équations (11) et au moyen de plusieurs méthodes de résolution numérique. Ils ne concernent que les nombres de Reynolds inférieurs ou égaux à 1000.

La gamme $0 < R_{ero} \leq 1000$ peut être divisée en trois régions approximativement délimitées par les valeurs 200 et 300 [1] [2]:

- Une région $0 < R_{ero} \leq 200$, où une seule solution est trouvée, pour de multiples conditions de départ imposées à f et g. Cette solution est d'ailleurs donnée par différents autres auteurs (fig. 3).

- Une région correspondant à des nombres de Reynolds supérieurs à 300 ou voisins de 300, où deux solutions sont trouvées. L'une, préconisée par Batchelor G.K. [8], décrit le fluide comme tournant en bloc entre les couches limites au voisinage des disques et est identique à celle obtenue par Boedewadt U.T. dans le cas d'un volume de fluide semi-infini tournant au-dessus d'un disque fixe [9]. L'autre, préconisée par Stewartson K. [10], est analogue à celle obtenue par Von Karman T. dans le cas d'un disque en rotation dans un fluide au repos s'étendant à l'infini [11], et est caractérisée par une vitesse tangentielle pratiquement nulle sauf au voisinage du disque. Ces deux types de solution sont mis en évidence sur la figure 7, dans le cas $R_{ero} = 500$ (sur cette figure, plusieurs initialisations différentes sont présentées ; les lettres V, B, D indiquent qu'avec l'initialisation correspondante, le calcul a conduit à une solution de type Von Karman, de type Boedewadt, ou a divergé, respectivement).

- Une région comprise approximativement entre 200 et 300, où seule une solution de type Boedewadt est trouvée, soit par un calcul stationnaire effectué à partir de conditions initiales très voisines de la solution finale (sans quoi le calcul diverge), soit par une évolution instationnaire à partir d'une solution stationnaire obtenue dans l'une des deux régions précédentes.

D'autres auteurs ont également obtenu des solutions qui n'appartiennent à aucun des deux types précédemment décrits. La solution proposée par Greenspan D. [12] pour $R_{\text{ero}} = 1000$ n'a pu être trouvée avec notre algorithme, même en se replaçant dans les mêmes conditions de calcul ($\Delta z = 0.02$, même initialisation sur f) (fig. 8). Jones D.J. obtient, toujours pour $R_{\text{ero}} = 1000$, deux solutions, dont l'une est de type Von Karman, et dont l'autre n'a pu être trouvée par nous que pour certains nombres de Reynolds particuliers, d'ailleurs différents de 1000 (fig. 8). Cette solution décrit le fluide comme tournant en sens inverse du sens de rotation du disque, ce qui, physiquement, semble pour le moins douteux. Cette multiplicité des résultats numériques proposés montre les difficultés du problème théorique, difficultés qui rendent nécessaire une investigation expérimentale, destinée à confirmer ou infirmer la validité physique de certaines de ces diverses solutions.

Les précédents résultats sont résumés sur la figure 9. On y a représenté les variations de $g'_z(0)$ en fonction du nombre de Reynolds R_{ero} . D'après les résultats obtenus en I-4, $g'_z(0)$ est proportionnel au moment des forces agissant sur le disque inférieur fixe. Ainsi, pour une solution de type Von Karman ($\tilde{g} \approx 0$, sauf au voisinage du disque inférieur), le couple s'exerçant sur le disque inférieur est pratiquement nul. En revanche, pour une solution de type Boedewadt, il croît en même temps que le nombre de Reynolds et prend des valeurs toujours mesurables.

Sur cette figure, les trois régions précédemment définies et décrites ont été représentées par les notations I, II, III.

III - 2 - Discussion sur les divers types de solutions obtenus

En dehors de la solution Boedewadt, trouvée dans tous les cas, la solution Von Karman est la seule que nous ayons obtenue de façon systématique à partir de $R_{ero} \approx 300$. Aussi limiterons-nous la discussion qui suit à la possibilité d'existence physique de cette dernière.

Notons en premier lieu qu'il n'est pas possible de discuter, en fonction de la distance a entre disques, de la possibilité d'observer physiquement l'une ou l'autre des solutions décrites, car la théorie suppose le diamètre des disques infini. Il est probable que la solution Von Karman existe dans le cas de deux disques très éloignés l'un de l'autre, mais ce cas sort du cadre de notre étude théorique.

Remarquons que :

- Seule la solution Boedewadt existe continûment de $R_{ero} = 0$ à $R_{ero} = 1000$. Ceci est évident sur la courbe de la figure 9. Or il semble difficilement concevable que le couple s'exerçant sur le disque inférieur puisse "tomber" brutalement à une valeur voisine de zéro, pour un nombre de Reynolds supérieur à 300. Numériquement, d'ailleurs, toute évolution instationnaire à partir de la solution unique à un nombre de Reynolds inférieur à 200 conduit à une solution de type Boedewadt |1| |2|.

- Une évolution instationnaire à partir d'une solution stationnaire de type Von Karman fournit toujours une solution de type Boedewadt. En particulier, le calcul instationnaire ($R_{er}(T) = 1000$ pour $T \neq 0.04$; $R_{er}(T) = 970$ pour $T = 0.04$), à partir de la solution Von Karman à $R_{ero} = 1000$, conduit rapidement à la solution de type Boedewadt à $R_{ero} = 1000$ (fig. 10). Ce qui semble prouver l'instabilité numérique de cette solution, qui traduit peut-être une instabilité physique, si elle est susceptible d'exister physiquement.

Notons aussi que la détermination numérique de la solution de type Von Karman est entachée de beaucoup plus d'imprécision que celle de la solution de type Boedewadt. Le ϕ calculé numériquement (cf. II-3) varie considérablement en fonction de z (fig. 11), et les valeurs de g en dehors de la couche limite supérieure ne sont pas en fait nulles, mais légèrement négatives, ce qui, là encore, semble physiquement peu raisonnable.

La solution Von Karman apparaît donc à priori comme une solution numérique singulière du système (11), plutôt que comme une solution physiquement acceptable, ce que l'expérience confirmera.

III - 3 - Résultats généraux pour des nombres de Reynolds supérieurs à 1000

Pour l'étude de cette gamme de nombres de Reynolds, on ne s'est pas attaché à déterminer dans chaque cas les divers types de solutions numériques existant, compte tenu de ce qui a été dit précédemment (cf. III-2). D'un point de vue pratique, rappelons d'ailleurs que la finesse de calcul nécessaire, et donc le temps de calcul, croissent en même temps que le nombre

de Reynolds (cf. II-3-b).

Une dizaine de cas stationnaires ont été étudiés, pour des nombres de Reynolds allant jusqu'au delà de 5000, avec différents types d'initialisation et ils ont été confirmés par le calcul d'évolutions instationnaires. La solution de type Boedewadt a été trouvée dans tous les cas calculés (fig. 12), et pour cette solution, la vitesse de rotation du fluide entre les couches limites supérieure et inférieure reste égale au tiers environ de la vitesse de rotation du disque supérieur. Les oscillations de la fonction $g(z)$ constatées dans la couche limite inférieure ne traduisent vraisemblablement aucun phénomène physique, mais sont plutôt un phénomène numérique dû au manque de finesse du pas de calcul dans cette région à gradient de vitesse très élevé, ou à l'insuffisance du schéma en différences finies utilisé *. Pourtant, contrairement à ce que l'on observe pour la couche limite supérieure, ces oscillations ne sont pas supprimées par une augmentation de la finesse du pas de calcul (cf. fig. 6). Si l'on devait s'intéresser à la couche limite au voisinage du disque fixe, un calcul particulier de cette zone devrait être mené à part, soit en adaptant la méthode de Newton et en améliorant son traitement numérique, soit par une méthode plus spécifique du calcul des couches limites.

* Autre possibilité : l'accumulation des erreurs d'arrondis dans la construction et la résolution du système (22). Ce point est toutefois bien difficile à vérifier, vu que tous les calculs ont été menés avec 16 chiffres significatifs (cf. annexe I).

III - 4 - Conclusion des calculs numériques

Rappelons que la théorie présentée repose sur plusieurs hypothèses : incompressibilité, laminarité, hypothèse de Von Karman, disques de dimensions infinies.

La résolution des équations de Navier-Stokes, sous ces hypothèses, fait apparaître une multiplicité de solutions, du moins pour une certaine gamme de nombres de Reynolds, multiplicité prévisible en raison de la non-linéarité des équations. Nous avons de plus constaté qu'avec notre algorithme de résolution des équations de base, le choix des formes de départ imposées à f et g a une influence déterminante sur la forme de la solution finale. Toutefois, un grand nombre de choix différents de ces formes de départ n'a toujours fourni que deux catégories bien distinctes de solutions, celles de type Boedewadt et celles de type Von Karman, sauf peut-être dans certains cas très particuliers.

Il n'est pas possible, au stade actuel de développement de l'analyse numérique du cas stationnaire, de valider directement l'un de ces deux types de solutions. Néanmoins, nous avons observé que, si l'on imprime au disque un mouvement instationnaire quelconque $\Omega(T)$, tendant pour T infini vers un état stationnaire arbitraire, la solution finale obtenue est toujours de type Boedewadt. Cette constatation, de même que certaines autres considérations, nous fait supposer que c'est cette solution qui représente effectivement le phénomène physique.

D'autre part, il n'est pas possible de prévoir dans quelle mesure les hypothèses de base de la théorie peuvent s'appliquer au problème physique, et donc sous quelles conditions l'une des solutions obtenues numériquement

sous les hypothèses rappelées plus haut représente effectivement le phénomène étudié. C'est ce problème que l'expérimentation va maintenant tenter de résoudre.

CHAPITRE IV

ETUDE EXPERIMENTALE

Il n'existe dans la littérature que peu de résultats expérimentaux concernant directement notre problème. Les auteurs se sont le plus souvent intéressés aux problèmes du soufflage ou de l'injection au centre des disques, qui offrent plus de débouchés pratiques. Le fluide choisi est dans la plupart des cas un liquide, et les mesures effectuées sont généralement des mesures de pressions [13] [14] [15] [16]. Il existe aussi des déterminations de la transition laminaire-turbulent, par exemple par des mesures de couples [17], ou par l'utilisation d'autres techniques [18].

On ne trouve pas de déterminations systématiques des profils de vitesses par l'anémométrie pour de larges gammes de nombres de Reynolds. Par exemple, Mellor G.L., Chappel P.J. et Stokes V.K. proposent une vérification expérimentale de leur théorie par le tracé des profils de vitesses, mais uniquement pour de faibles nombres de Reynolds [19].

Nous avons nous-mêmes procédé à des essais de détermination de la transition par l'utilisation d'enduits de suie et de pétrole déposés sur le disque fixe. Ceux-ci se sont avérés peu convaincants en raison des difficultés d'interprétation des résultats obtenus. Aussi nos mesures seront-elles essentiellement des mesures de pressions et de vitesses par l'anémométrie.

IV - 1 - Introduction

On ne trouve rien non plus dans la littérature concernant le problème général de l'influence sur l'écoulement des conditions aux limites qui lui sont imposées, c'est à dire en particulier, dans le cadre d'une installation expérimentale, de la géométrie donnée à la périphérie des disques. Cette question, dans notre cas, se pose de façon capitale, puisqu'il s'agit d'appliquer une théorie des disques de diamètre infini à une expérimentation menée avec des disques finis.

A priori, l'influence sur l'écoulement des conditions aux limites imposées expérimentalement est liée, pour des disques de diamètre donné, à la valeur de la distance "a". De plus la validité de l'hypothèse de Von Karman, qui nous a permis de déterminer une solution "exacte" aux équations de N.S., est elle-même probablement liée aux conditions aux limites.

Le but de l'expérimentation sera donc de déterminer sous quelles conditions (géométrie imposée à la périphérie des disques, distance entre les disques, autres) il est possible d'obtenir un écoulement qui, en tout ou en partie, est correctement représenté par la théorie proposée, ce qui définira son domaine de validité. Ces conditions étant une fois déterminées, un des avantages de la théorie serait, par exemple, de permettre l'étalonnage des sondes anémométriques, de façon rigoureuse, grâce à la solution "exacte" qu'elle fournit.

IV - 2 - Installation expérimentale

Elle consiste en deux disques coaxiaux, de diamètre 30 cm, rigoureusement parallèles, car un défaut de parallélisme pourrait entraîner une modification non négligeable de la forme de l'écoulement entre les disques. Le disque supérieur peut tourner à une vitesse continûment réglable de 0 à 150 tours/sec. Le disque inférieur est de même susceptible d'être entraîné par un moteur à vitesse variable, possibilité qui ne sera pas exploitée dans la présente étude. La distance entre les disques est ajustable jusqu'à des valeurs du même ordre de grandeur que le diamètre des disques (fig. 13 et 14). Le fluide utilisé est l'air ambiant.

Les mesures effectuées grâce à cette installation sont principalement :

- des mesures de pressions à la paroi du disque inférieur, grâce à des séries de prises de pression statique équidistantes de 12,5 mm (12,5 mm = 1/12 rayon) sur deux diamètres perpendiculaires (ce qui permet de contrôler le parallélisme des disques, par simple comparaison des mesures faites en quatre prises équidistantes du centre). Chaque prise de pression est un trou dans la paroi de 0.25 mm de diamètre, qui peut être relié à un manomètre.

Les pressions ont été mesurées, suivant leur ordre de grandeur, tantôt au moyen d'un multimanomètre à alcool, qui permet d'observer simultanément les pressions fournies par toutes les prises, tantôt au moyen d'un capteur, plus sensible et plus précis.

- des mesures de vitesses entre les disques, au moyen de sondes à fil chaud amenées dans l'écoulement au travers du disque inférieur, grâce à un système qui permet de positionner le fil parallèlement à la paroi, tant en distance par rapport à la paroi (mesurable au cathétomètre), qu'en orientation (fig. 15). La distance d'une sonde au centre du disque peut de plus être choisie de façon arbitraire de zéro jusqu'à 80 % du rayon du disque. Il est en outre possible de placer plusieurs sondes à différentes distances du centre, ce qui permet d'étudier leur influence réciproque.

Ce système de mesure supprime les perturbations apportées à l'écoulement par un support de sonde dont le diamètre n'est pas négligeable par rapport à la distance entre les disques (annexe II). Toutefois, à titre comparatif, certaines séries de mesures ont été aussi effectuées à l'aide d'une sonde amenée de l'extérieur par un support de sonde classique.

Ces sondes sont reliées à un anémomètre qui permet de déterminer les vitesses et les taux de turbulence. Toutes les mesures ont été interprétées par comparaison directe avec les courbes d'étalonnage des sondes, étalonnées de 0 à 10 m/s grâce à une soufflerie d'étalonnage (annexe II).

Dans toute l'étude expérimentale qui va suivre, les distances sont généralement rapportées au rayon des disques R_d ($R_d = 15$ cm), et non à la distance "a" qui a dû être choisie comme longueur de référence dans l'étude théorique, car R_d est expérimentalement un paramètre essentiel a priori.

IV - 3 - Mesures de pressions pariétales - influence des conditions aux limites

Les mesures de pressions sont simples à réaliser de façon systématique avec notre installation. De plus un profil de pressions pariétales en fonction de la distance au centre est une caractéristique globale de l'écoulement entre les disques. Ce sont donc les mesures de pression qui vont, dans un premier temps, nous permettre de "dégrossir" le problème, par l'étude de l'influence sur l'écoulement du type de configuration géométrique donnée à la périphérie des disques.

IV - 3 - 1 - Préliminaire

En premier lieu, rappelons qu'en régime stationnaire, la répartition des pressions à la paroi du disque fixe s'écrit (cf. I-4, (18)):

$$p(r) - p(0) = \frac{1}{2} r^2 \phi_{th}$$

en notant ϕ_{th} la valeur théorique de ϕ , fournie dans chaque cas par la résolution du système (11). Expérimentalement, on est donc amené à tracer, pour différentes valeurs de R_{cro} , les courbes $[p(r) - p(0)] \cdot vs. r^2$. Elles sont conformes à la théorie :

- a - si elles sont linéaires, au moins en partie ;
- b - si de plus la pente de la partie linéaire est $\frac{1}{2} \phi_{th}$.

La condition b exprime que le gradient de pression $\partial p / \partial r$ est conforme à la théorie dans un domaine délimité par la partie linéaire des

courbes.

Initialement, nous avons effectivement tracé les courbes :

$$\frac{P - P_0}{\frac{1}{2} \phi_{th}} \text{ vs } r^2$$

la courbe théorique étant la droite de pente 1. Cependant, elles sont assez difficiles à utiliser, à cause de l'échelle non linéaire des abscisses, et de plus la plupart ne présentent pas de partie linéaire. Aussi avons-nous plutôt adopté la représentation suivante * :

$$\left[\frac{P - P_0}{\frac{1}{2} \phi_{th}} \right]^{1/2} \text{ vs } r \text{ soit } \left[\frac{\bar{P} - \bar{P}_0}{\frac{1}{2} \rho \frac{v^2}{a} \phi_{th}} \right]^{1/2} \text{ vs } \frac{\bar{P}}{a}$$

Ces courbes sont toutefois d'une interprétation plus compliquée que les précédentes. En effet, soit :

$$\left[\frac{P - P_0}{\frac{1}{2} \phi_{th}} \right]^{1/2} = x(r)$$

* Il n'est guère possible de représenter directement des courbes du type $[\partial p / \partial r]$ vs r , car les courbes de pression se prêtent mal au lissage nécessaire, en raison du faible nombre de points expérimentaux qu'elles contiennent.

la courbe expérimentale obtenue. Sur une telle courbe, les dérivées de la pression s'expriment :

$$\partial p / \partial r = \phi_{th} x x' \quad , \quad \partial^2 p / \partial r^2 = \phi_{th} (x'^2 + x'')$$

On voit qu'un $\partial p / \partial r$ conforme à la théorie ($\partial p / \partial r = r \phi_{th}$) ne se traduit pas nécessairement par une portion de courbe expérimentale linéaire. Notons cependant qu'une portion de courbe linéaire est caractérisée par un $\partial^2 p / \partial r^2$ constant, et que si de plus cette partie linéaire est parallèle à la droite théorique, mais non confondue avec elle ($x(r) = r + \alpha$, $\alpha \neq 0$), elle traduit un gradient de pression qui diffère du gradient théorique par une constante :

$$\partial p / \partial r = \phi_{th} r + \phi_{th} \alpha$$

et un $\partial^2 p / \partial r^2$ conforme à la théorie, soit :

$$\partial^2 p / \partial r^2 = \phi_{th}$$

IV - 3 - 2 - Résultats expérimentaux

Plusieurs types de configurations limites ont été réalisés à partir de l'installation expérimentale décrite, par modification de la géométrie périphérique du disque supérieur. Ces configurations sont décrites sur la figure 14. Par raison de commodité nous les désignons par les lettres A, B, C.

- Configuration A : une paroi cylindrique a été fixée sur le pourtour de chaque disque, perpendiculairement à son plan, sans obturation, même partielle, de la section de sortie. Les profils de pression correspondant à cette configuration sont représentés sur les courbes 16-a-b-c, pour différentes distances "a" et différents nombres de Reynolds.

Les points expérimentaux s'écartent nettement de la droite théorique, et d'autant plus que la distance "a" est plus grande, ce qui est logique puisque la validité de l'hypothèse théorique "disques infinis" est a priori liée à la valeur de a/Rd .

Nous pouvons interpréter ce désaccord entre théorie et expérience par un phénomène de "décrochage" de l'écoulement, qui doit s'adapter aux conditions extérieures de pressions et de vitesses. Nous pouvons d'ailleurs remarquer que l'écoulement induit par la portion de cylindre qui limite le disque supérieur crée au voisinage de la périphérie de ce disque une zone de dépression (due au terme d'inertie centrifuge dans le système de Navier Stokes), dépression qui tend à accroître la valeur de la composante radiale de vitesse u au voisinage du disque supérieur. Pour obtenir une meilleure concordance il faut donc soit rapprocher les disques (comme le montre la figure 16-a par exemple, comparée aux figures 16-b ou 16-c), soit modifier la section de sortie de façon à réaliser un entrainement partiel du fluide, ce qui revient à modifier les conditions aux limites. C'est cette dernière solution que nous allons maintenant présenter.

- Configuration B : la section de sortie a été partiellement obturée par un rebord cylindrique solidaire du disque tournant, de hauteur égale à environ $0.4 a$.

Les profils obtenus sont présentés sur les figures (17-a-b). Ils révèlent une très bonne concordance entre la théorie et l'expérience, pour les distances et nombres de Reynolds étudiés.

Interprétation de cette bonne concordance : le rebord ajouté au disque tournant évite le "décrochage" de l'écoulement en imposant au fluide une vitesse périphérique égale à celle du disque supérieur, au moins au voisinage de ce disque. Le rebord ne fait qu'assurer un entraînement du fluide, et d'ailleurs sa hauteur n'est pas critique.

- Configuration C : elle correspond en fait au montage de base du du système expérimental. Il s'avère qu'elle fournit des résultats expérimentaux "intermédiaires" entre ceux donnés par les deux autres configurations étudiées (A, B).

En effet les profils des figures 18 -a-b-c-e présentent une partie linéaire parallèle à la droite théorique. Dans la région annulaire, comprise entre les disques, délimitée par cette partie linéaire, on peut affirmer (cf. IV-3-1) que $\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}$ est conforme à la théorie, et que le gradient $\partial p / \partial r$ diffère du gradient théorique par une constante. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

L'interprétation de ces faits est à rechercher dans la géométrie du disque supérieur : il se produit un entraînement partiel du fluide en rotation entre les disques par l'écoulement hélicoïdal qui se crée sur la surface supérieure conique du disque tournant. Le remplacement du disque supérieur décrit sur la figure 14 par un autre de géométrie semblable mais dont la partie conique forme un angle un peu différent, a pour effet de modifier

l'étendue de la partie linéaire des profils de pression.

Le caractère intermédiaire de cette configuration par rapport aux configurations A et B se révèle plus nettement sur les courbes 18-d-f. Il apparaît en effet, quand la distance "a" est supérieure à une certaine limite ($a/Rd > 5/96$), et pour certaines gammes de nombres de Reynolds, une deuxième répartition possible des pressions (pour une même a, et un même R_{ero}). Les deux types d'écoulements possibles sont physiquement stables et le passage de l'un à l'autre peut s'effectuer au moyen d'une perturbation extérieure. Le premier, déjà observé sur les figures 18-a-b-c-e, est dû, comme nous l'avons vu, à l'entraînement partiel du fluide par l'écoulement induit par la partie supérieure du disque tournant. Nous l'appellerons régime "non décroché" ou régime II. Le second, qui fournit des profils analogues à ceux observés avec la configuration A, est "décroché" et sera numéroté I.

IV - 3 - 3 - Remarque sur l'interprétation des courbes de pression

Nous allons maintenant tenter de relier les profils de pression précédemment présentés au champ des vitesses existant entre les disques.

a - A priori, il semble que le fait que le gradient de pression $\partial p/\partial r$ ne soit pas conforme au gradient calculé théoriquement, sur la plupart des courbes présentées, devrait exclure une bonne concordance théorie - expérience sur les profils de vitesses correspondants que l'on mesurera, puisque c'est le gradient $\partial p/\partial r$ qui intervient dans les équations de base du problème (cf. I-2, (5-a-b-c) (6)).

Or le système (11), qui permet de calculer f et g , donc le champ des vitesses, est obtenu en éliminant la pression entre les équations de Navier-Stokes. D'autre part, le ϕ_{th} est calculé à partir de (16), une fois résolu le système (11), soit, en régime stationnaire :

$$\left[\partial^2 p / \partial r^2 \right]_{th} = \phi_{th} = g^2 - \frac{1}{4} f'_z{}^2 + \frac{1}{2} f f''_z - \frac{1}{2} f^3_z$$

En conséquence, un champ de vitesses expérimental conforme à la théorie implique un $\partial^2 p / \partial r^2$ conforme à la théorie, mais un $\partial p / \partial r$ conforme seulement à une constante près :

$$\left[\partial^2 p / \partial r^2 \right]_{exp} = \phi_{th} \Rightarrow \left[\partial p / \partial r \right]_{exp} = \phi_{th} r + \text{constante}$$

Réciproquement, pour que le champ des vitesses d'un écoulement à un nombre de Reynolds donné soit celui prédit par la théorie exposée en I, au moins dans une certaine zone comprise entre les disques, il est nécessaire que le $\partial^2 p / \partial r^2$ mesuré soit constant dans cette zone et égal à ϕ_{th} , mais le gradient $\partial p / \partial r$ peut n'être égal à $r\phi_{th}$ qu'à une constante additive près.

b - Cette remarque montre en fait l'intérêt de la représentation $\left[(p - p_0) / \frac{1}{2} \phi_{th} \right] \frac{1}{2}$. vs . r . Mais elle montre surtout que, en configuration , c'est dans la zone déterminée par la partie linéaire des courbes de régime II que l'on devra s'attendre à ce que le champ des vitesses soit conforme au champ théorique, ce qui se vérifiera expérimentalement.

IV - 3 - 4 - Conclusion des mesures de pressions

Les mesures de pressions que nous venons d'analyser montrent que l'écoulement mesuré est en tout ou partie conforme à la théorie, quel que soit le nombre de Reynolds R_{ero} ,

- Si "a" est suffisamment faible, auquel cas les conditions aux limites imposées interviennent peu,

- Ou si on empêche l'écoulement de "décrocher" en jouant sur la configuration limite, donc en fait en rétablissant dans la section de sortie des conditions limites suffisamment proches des valeurs théoriques des pressions et des vitesses dans cette section. Nous avons pu réaliser ces conditions dans deux types de configuration : celles désignées B et C, tandis que la configuration A donne lieu à un "décrochage" complet de l'écoulement.

En fait la configuration C apparaît comme intermédiaire entre les configurations A et B, car elle permet de réaliser, pour certaines conditions sur "a" et R_{ero} , et pour un même nombre de Reynolds R_{ero} , les deux types d'écoulement, décroché (I) et non décroché (II).

C'est donc cette configuration qui va maintenant nous permettre d'étudier par l'anémométrie (vitesses et taux de fluctuation) le régime "non décroché", c'est à dire celui décrit par la théorie en ce qui concerne son champ de pressions.

IV - 4 - Etude du régime "non décroché" (Régime II)

IV - 4 - 1 - Introduction

La plupart des mesures anémométriques ont été menées dans le cas de la configuration limite C, qui, d'après les résultats des mesures de pressions présentés en IV-3-2 permet d'observer le régime I et le régime II. Dans ce chapitre, c'est au régime non décroché, c'est à dire à celui pour lequel les profils de pressions présentent une partie linéaire parallèle à la droite théorique, que nous nous intéresserons, en particulier dans les cas où les deux régimes sont possibles.

Les vitesses et les taux de turbulence ont été mesurés au moyen du dispositif expérimental décrit en IV-2. Les vitesses radiale (\bar{u}) et axiale (\bar{w}) sont faibles par rapport à la vitesse tangentielle (\bar{v}), fait prédit par la théorie et confirmé par l'expérience (annexe II). En utilisant plusieurs orientations de la sonde, il a été possible dans plusieurs cas de déterminer simultanément \bar{u} et \bar{v} , en supposant \bar{w} négligeable *. Toutefois, les mesures ont porté essentiellement sur la composante tangentielle \bar{v} , que l'on obtient directement, avec une bonne précision, en plaçant le fil de la sonde dans un plan contenant l'axe des disques.

De même, les mesures de turbulence ont consisté en l'évaluation de la fluctuation moyenne de la composante tangentielle, soit $\overline{v'^2}$, qui fournit une indication convenable sur ce qui se passe à l'intérieur de

* ce qui exclut d'emblée toute possibilité de vérification directe de l'hypothèse de Von Karman.

l'écoulement, puisque la fluctuation $\overline{u'^2}$ est toujours du même ordre de grandeur, et que la fluctuation $\overline{w'^2}$ lui est inférieure (annexe II).

Les profils de vitesse tangentielle permettent une comparaison facile avec la théorie en ce qui concerne le problème principal, qui est de déterminer la forme de la solution obtenue pour des valeurs de R_{ero} , de a et de r fournissant un $\partial^2 p / \partial r^2$ conforme à la théorie, au moins dans une certaine zone.

Enfin, des mesures systématiques de taux de turbulence ont été menées parallèlement à ces mesures de vitesses ; elles permettent de préciser d'une part la différence de nature entre les régimes d'écoulement décroché et non décroché étudiés précédemment à partir des mesures de pressions, d'autre part le domaine de validité des hypothèses de base de la théorie élaborée.

IV - 4 - 2 - Mesures menées pour $a/R_d = 1/24$

a - Profils de vitesse à $a/R_d = 1/24$, $\bar{r}/R_d = 1/3$

Rappelons que $a = R_d/24$ est une valeur pour laquelle les mesures de pressions n'ont montré l'existence que d'un seul régime d'écoulement, et que la sonde, placée à une distance $\bar{r} = R_d/3$ du centre, se trouve située dans la partie linéaire des profils de pression, où $\partial^2 p / \partial r^2$ est conforme à la théorie (fig. 18-b).

Les courbes de vitesse obtenues au moyen des sondes de paroi sont présentées sur les figures 19-a-b-c-d-e-f-g-h. On a représenté

$$g_{\text{exp}} = \bar{v}_{\text{exp}} \frac{a^2}{vr} \quad \text{et} \quad f'_{z \text{ exp}} = - 2 \bar{u}_{\text{exp}} \frac{a^2}{vr} \quad (\text{exp. signifie : expérimental}),$$

afin de permettre une comparaison directe avec les profils théoriques de f et g.

Les profils de vitesse tangentielle sont en parfait accord avec la seule solution trouvée par la résolution numérique du système (11) pour $R_{\text{ero}} < 300$, et en parfait accord avec la solution Boedewadt pour $300 \leq R_{\text{ero}} \leq 1000$. Les profils de vitesse radiale sont plus vagues, ce qui s'explique par le fait que les valeurs de \bar{u} dépassent rarement 1 m/s pour la valeur de \bar{r} adoptée ($\bar{r} = R_d/3 = 5 \text{ cm}$), tandis que les valeurs de \bar{v} correspondantes atteignent 7 m/s (annexe II), et l'on se trouve en présence d'un des problèmes principaux des mesures anémométriques.

En revanche, une sonde amenée de l'extérieur au moyen d'un support de sonde de diamètre sensiblement égal au tiers de la distance entre les disques a fourni des indications systématiquement plus faibles que celles données par les sondes de paroi en accord avec les résultats théoriques (fig. 19-a-b-c-d-e-f-g-h). On en déduit que la présence d'un support de sonde dans l'écoulement a pour effet principal de ralentir globalement la vitesse de rotation du fluide entre les disques (effet de blocage). Toutefois, l'écoulement mesuré reste toujours caractérisé par l'existence d'un palier sur les profils de g.

b - L'écoulement mesuré entre les disques n'est en réalité de type Boedewadt que si, outre le fait de présenter le palier de vitesses tangentielles observé en a- il vérifie de plus la propriété de similitude des profils en fonction de v, c'est à dire si la vitesse tangentielle \bar{v} à une cote z donnée et proportionnelle au rayon r.

Cette propriété, déjà vérifiée partiellement dans les cas des figures 19-e-h (sonde placée en des points $\bar{r}/R_d = 1/4, 1/2$), l'a été plus systématiquement pour différents nombres de Reynolds et des distances au centre s'étageant de $.21 R_d$ ($\bar{r}/a \approx 5$) à $.80 R_d$ ($\bar{r}/a \approx 19$) : les courbes 20-a-b-c montrent que la similitude est correctement vérifiée, à la précision des mesures.

c - Les mesures de fluctuation tangentielle $(\overline{v'^2}/\bar{v}^2)^{1/2}$, menées simultanément aux mesures de profils de vitesse montrent, toujours pour les mêmes valeurs des différents paramètres, que le taux de turbulence décroît quand z croît (fig. 19-e-h, 20-a-b-c), à l'intérieur de la couche limite au voisinage du disque fixe, ce qui était prévisible, et reste sensiblement constant dans toute la partie médiane des profils g . vs . z , correspondant au palier de ces profils.

Elles révèlent aussi (fig. 21) un certain accroissement du taux de turbulence lorsque l'on se rapproche de l'axe des disques, et un léger accroissement à la périphérie. Ces accroissements du taux de fluctuation ont donc lieu dans les zones où les profils de pression perdent leur linéarité, ce qui permettrait si les deux phénomènes sont bien liés, de relier la constance du $\partial^2 p / \partial r^2$ à la laminarité de l'écoulement. Nos mesures toutefois ne mettent pas en évidence de transition laminaire-turbulent pour un certain rayon ; cette transition apparaîtrait probablement si la vitesse de rotation Ω prenait des valeurs beaucoup plus élevées, ou si l'on effectuait des mesures systématiques près de la paroi tournante, où la vitesse tangentielle de l'écoulement est plus élevée que dans la partie médiane. Les possibilités de notre installation ne nous ont pas permis de mener des vérifications systématiques en ce sens.

IV - 4 - 3 - Résultats généraux pour différentes distances
et différents nombres de Reynolds

D'autres profils de vitesse ont été mesurés pour des valeurs différentes de a et R_{ero} , et de façon générale pour les valeurs de ces paramètres déjà explorées en ce qui concerne les mesures de pressions.

a - Dans tous les cas où la théorie prévoit deux solutions possibles, c'est la solution de type Boedewadt qui décrit correctement l'écoulement en régime non décroché, même lorsqu'il existe deux régimes d'écoulement possibles ($a/R_d \geq 5/96$).

Dès lors, l'écoulement du fluide, pour un $R_{ero} > 300$ et un "a" donnés, peut être caractérisé par la vitesse de rotation en bloc du fluide entre ses couches limites, ou, ce qui revient au même, par la position du palier des courbes $g(z)$. Ce palier pourrait être défini, par exemple, comme valeur moyenne de $g(z)$ pour toutes les valeurs de z comprises entre 0.3 et 0.8. Pratiquement, pour des raisons de commodité, la valeur $g(0.4)$ a été choisie, avec une approximation suffisante, comme position de ce palier.

b - Tentons de relier alors la pente des courbes de pression à la paroi à la position du palier des profils de vitesse.

Dans la région où le fluide tourne en bloc, les forces de viscosité sont négligeables par rapport aux forces de pression et d'inertie. De même, les composantes de vitesse \bar{u} et \bar{w} le sont par rapport à \bar{v} , et l'équation I - a du mouvement permet d'écrire :

$$\bar{p}(\bar{r}, \bar{z}) - \bar{p}(0, \bar{z}) = \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2(\bar{r}, \bar{z})$$

soit, en écriture adimensionnelle :

$$p(r, z) - p(0, z) = \frac{1}{2} v^2(r, z)$$

et d'après (17) :

$$r^2 \phi = v^2$$

d'où :

$$g(0.4) = \sqrt{\phi} \tag{23}$$

d'après la précédente définition du palier des courbes $g(z)$. Notons que cette expression approchée aurait pu être obtenue à partir des expressions (16), en supposant nulles $f(z)$ et ses dérivées.

L'expression (23) permet ainsi de relier la vitesse de rotation du fluide entre les disques à la pente des profils de pression à la paroi par application de l'hypothèse de Prandtl dans la couche limite du disque fixe.

c - Toutes les courbes de pressions obtenues en régime non décroché (régime II) présentent, on l'a vu, une partie linéaire sensiblement parallèle à la droite théorique, qui définit un ϕ conforme à la théorie ; il est donc à prévoir que le palier des profils $g(z)$ sera celui prévu par la théorie, quel que soit R_{ero} .

C'est ce que vérifie la figure 22. On constate cependant un léger écart entre la théorie et l'expérience pour des valeurs de R_{ero} relativement élevées. Si cet écart est significatif, il peut correspondre au fait que la partie linéaire des courbes de pressions n'est plus

exactement parallèle à la droite théorique. Il se produirait donc un certain glissement de l'écoulement (ralentissement par rapport à la vitesse de rotation théorique) qui tendrait à "décrocher". Le fait que pour accroître la valeur du nombre de Reynolds R_{ero} , on a dû augmenter la distance "a" entre les disques (puisque l'on était limité en vitesse de rotation) jouerait en faveur de cette interprétation.

Sur cette même figure 22, on a reporté les taux de fluctuation tangentielle correspondants. On constate encore que pour le régime II "non décroché" le taux de turbulence ne dépend pas de façon très sensible de la vitesse de rotation, mais semble croître légèrement, pour un nombre de Reynolds donné, avec la distance "a".

A ce stade intervient un problème de structures de la turbulence entre les disques. En effet, une augmentation de la valeur de l'intervalle "a" accroît la sensibilité de l'écoulement aux perturbations extérieures, et de plus rend possible le développement de tourbillons d'axe normal à l'axe des disques. Une étude de ce dernier point n'a pu, à ce jour, être menée à bien, aussi ne développerons-nous pas ce point.

IV - 4 - 4 - Conclusion

L'étude du champ des pressions entre les disques avait montré que, selon les conditions aux limites imposées physiquement à l'écoulement, deux régimes d'écoulement pouvaient être observés.

L'étude du champ des vitesses, appliquée au régime dit "non décroché", ou régime II, a montré que celui-ci est décrit correctement par

la théorie proposée, au moins dans une certaine zone annulaire entre les disques, tant qu'il est possible de la maintenir, quel que soit le nombre de Reynolds imposé.

On en déduit que les différentes hypothèses de base de la théorie sont donc vérifiées, au moins dans un certain domaine, par l'écoulement "non décroché". En particulier, la théorie repose sur l'hypothèse de laminarité de l'écoulement. En conséquence, l'écoulement en régime non décroché pourra être considéré comme "laminaire", au moins dans la zone annulaire définie, même si les valeurs mesurées des taux de fluctuations semblent un peu élevées. Une étude plus précise du régime décroché va en effet faire apparaître entre les deux régimes une différence nette dans l'ordre de grandeur de fluctuations.

IV - 5 - Etude de la multiplicité : régime I - régime II

On a vu (cf. IV - 3 - 2) que la multiplicité de régimes, c'est à dire la possibilité de "décrochage" de l'écoulement pour certaines valeurs des paramètres, est liée essentiellement à la configuration limite adoptée. Le régime "décroché" n'a donc pas de valeur en soi, puisque a priori, l'écoulement correspondant dépend de la configuration limite. En particulier, les profils de pressions obtenues en régime "décroché" avec les configurations A et C respectivement ne sont pas comparables (cf. fig. 16 - 18).

En revanche, le régime "non décroché" a une valeur intrinsèque, lorsqu'il est possible de l'obtenir, ce qui se vérifie a posteriori,

puisque'il est alors conforme à la théorie présentée.

a - La différence entre régime "décroché" et "non décroché" est d'abord visible sur les courbes de pressions. Nous les comprendrons mieux en étudiant le phénomène de changement de régime, que nous allons maintenant décrire succinctement, dans le cas de la configuration C.

Pour toutes les distances "a" expérimentées, il existe une répartition de pressions à la paroi sensiblement parabolique en fonction de r, et toutes les pressions croissent de façon continue quand le nombre de Reynolds R_{ero} augmente, ou ce qui revient au même lorsque croît la vitesse de rotation Ω . Ce régime d'écoulement a été appelé régime II.

Mais pour une distance a telle que $a/R_d \geq 5/96$, il existe une deuxième solution expérimentale (p . vs . r), que l'on n'obtient cependant que pour des nombres de Reynolds compris entre deux valeurs limites R_{min} et R_{max} , correspondant à des vitesses de rotation Ω_{min} et Ω_{max} . L'écoulement correspondant à cette solution est dit de régime I ; il présente des différences de pression $\bar{p} - \bar{p}_0$ globalement plus faibles que celles du régime II, et le profil (p . vs . r) n'est plus parabolique.

Ce phénomène est représenté sur la figure 23 qui montre, pour différentes distances a, l'évolution en fonction de Ω de la pression \bar{p}_0 au centre du disque inférieur, rapportée à la pression atmosphérique \bar{p}_a . (En fait, la zone comprise entre les disques est en dépression par rapport à l'extérieur, donc $\bar{p}_0 - \bar{p}_a < 0$).

Entre les deux limites Ω_{min} et Ω_{max} , les deux régimes sont possibles et stables, et une perturbation suffisante apportée de l'extérieur

à l'écoulement peut le faire "basculer" d'une configuration sur l'autre. Il est à noter que le régime I peut être établi en apportant à l'écoulement en régime II une perturbation qui le ralentit, comme par exemple l'introduction d'un support de sonde de diamètre non négligeable par rapport à la distance "a", qui provoque ainsi un effet de blocage de l'écoulement. Ce phénomène sera relié ultérieurement à la nature des deux types d'écoulement obtenus *.

* Tous ces phénomènes sont parfaitement reproductibles, et ont pu être bien observés grâce à l'utilisation du multimanomètre, qui enregistre simultanément toutes les pressions à la paroi du disque inférieur. L'intervalle de vitesse $|\Omega_{\min}, \Omega_{\max}|$ croît rapidement avec la distance "a". Les limites Ω_{\min} et Ω_{\max} , sont difficiles à déterminer ; de toutes façons, elles n'ont pas de valeur intrinsèque et sont vraisemblablement liées à la géométrie du disque supérieur. A titre indicatif, on a obtenu le tableau suivant (valeurs approximatives) :

a/R_d	Ω_{\min}	Ω_{\max}	R_{\min}	R_{\max}
5/96	30	34	790	905
6/96	23	38	875	1460
7/96	21	45	1090	2350
8/96	18	60	1220	4100
9/96	18	80	1550	6900
	t/s	t/s		

La différence de nature entre les deux régimes est particulièrement visible sur les courbes du type $\left| \frac{(\bar{p} - \bar{p}_0)}{(\bar{p}_a - \bar{p}_0)} \right|^{1/2}$. vs . (\bar{r}/R_d) (fig. 24) ; on n'observe en régime I ni linéarité, ni superposabilité des profils.

b - Il est donc prévisible que les profils de vitesse, en accord avec la théorie pour le régime II, ne le seront pas pour le régime I, puisque la pente des profils de pressions est liée directement à la position du palier des profils de vitesse (cf. IV - 4 - 3 - b). C'est ce que l'on constate en particulier sur la figure 25, et de façon globale sur la figure 22. De plus, toujours d'après cette même remarque, le régime I ne présente pas de similitude en fonction de r , ce qui se confirme sur la figure 26.

Notons que la figure 25 montre que le régime non décroché concorde bien avec la théorie dans les deux cas de configurations présentés (A et C) ce qui confirme la valeur intrinsèque de ce régime.

c - Le passage du régime I au régime II correspond à une accélération de l'écoulement, ce que montrent les mesures de vitesses, donc à une laminarisation. Effectivement, les taux de fluctuation tangentielle mesurés en régime I sont deux fois plus élevés qu'en régime II (fig. 22-25-26). De même que le régime non décroché a été considéré comme laminaire au regard de la théorie établie (cf. § IV - 4 - 4), le régime décroché peut donc être considéré comme le régime turbulent.

IV - 6 - Conclusion de l'étude expérimentale : validité des hypothèses de base de la théorie

Rappelons que la théorie présentée repose sur les hypothèses suivantes :

- a - Le fluide est incompressible
- b - L'écoulement est laminaire
- c - Les disques sont de dimensions infinies
- d - La composante axiale de vitesse \bar{w} ne dépend que de la coordonnée axiale (hyp. de Von Karman).

a - L'hypothèse a (incompressibilité) reste valable dans tous les cas que nous avons traités expérimentalement, puisque la vitesse périphérique du disque tournant ne dépasse pas 100 m/s. D'ailleurs la variation relative de la pression statique entre le centre et la périphérie ne dépasse pas 1 % en valeur mesurée, ce qui implique une variation relative de masse volumique du même ordre de grandeur en supposant l'écoulement isotherme. Ceci aurait pu ne plus être le cas si l'on avait cherché à atteindre des nombres de Reynolds élevés pour de très faibles distances "a", donc de grandes vitesses de rotation.

b - Les hypothèses b, c, d sont liées a priori, le fait que les disques, pratiquement, puissent être considérés comme infinis, conditionnant la validité des hypothèses b et d.

Les disques étant finis, l'écoulement a tendance à "décrocher",

afin de s'adapter aux conditions aux limites, c'est à dire aux conditions de pressions et de vitesses régnant à la périphérie. Néanmoins, il est possible d'éviter le décrochage de l'écoulement, auquel cas il est alors conforme, dans une certaine zone annulaire, à la théorie proposée. Le résultat peut être obtenu de deux façons :

- soit en rapprochant suffisamment les disques (configuration A, fig. 16), donc en assurant la validité de l'hypothèse c de la façon la plus logique.

- soit en adoptant une configuration limite adéquate, non critique (configurations B, C) de façon à réaliser un entrainement partiel de l'écoulement à la périphérie des disques, donc en fait à y assurer des conditions limites suffisamment proches des valeurs que fourniraient la théorie à cette distance du centre. Cette deuxième méthode revient donc, là encore, à jouer sur l'hypothèse c.

L'écoulement "non décroché" alors obtenu vérifie la théorie proposée en ce qui concerne le champ de vitesses et le $\partial^2 p / \partial r^2$ au moins dans une certaine zone annulaire pour les nombres de Reynolds envisagés. Dans cette zone, on peut affirmer que les hypothèses de base b, d de la théorie sont valables et qu'en particulier l'écoulement peut y être considéré comme laminaire. En revanche, en dehors de cette zone (région centrale et périphérie dans le cas général), l'écoulement devient plus turbulent et il est probable que l'hypothèse de Von Karman ne soit plus valable.

c - Le régime décroché, lorsqu'il est obtenu, ne présente aucune concordance, même locale, avec la théorie. L'écoulement correspondant ne

présente pas de similitude en fonction de r , le $\partial^2 p / \partial r^2$ n'est pas constant, et de plus il est caractérisé par des taux de fluctuation beaucoup plus élevés que ceux du régime non décroché.

Le régime décroché est donc un régime turbulent, qui n'a pas de valeur intrinsèque puisqu'il dépend de la configuration limite adoptée, contrairement au régime laminaire.

CONCLUSION

L'étude théorique présentée repose sur des hypothèses bien précises : laminarité et incompressibilité de l'écoulement. De plus, une hypothèse supplémentaire nous a permis de ramener le système d'équations de base à une seule variable spatiale et nous imposant corollairement de considérer les disques comme infinis.

disques infinis (hyp de von Karman) \Rightarrow syst d'équation à une seule variable spatiale

Le caractère instationnaire de notre étude a rendu nécessaire l'utilisation d'une méthode numérique de type Newton, au lieu d'une méthode habituelle de type Runge-Kutta.

Elle a permis de mettre en évidence une solution physiquement plausible, qui décrit le fluide comme tournant en bloc entre les deux disques.

1) Expérimentalement, dans le cas de disques finis, la vérification a été faite de cette rotation en bloc, donc de la similitude radiale de l'écoulement, tout au moins dans une région annulaire incluse entre les disques. Toutefois, un point beaucoup plus important a été mis en relief, qui ne se rattache plus au phénomène de multiplicité des solutions théoriques dû à la nature des algorithmes utilisés ou au caractère non linéaire des équations de Navier-Stokes : l'importance des conditions aux limites imposées expérimentalement.

La solution théorique est retrouvée expérimentalement pour certaines configurations, celles qui recréent à la périphérie des disques les conditions de pressions qui existeraient à ce rayon si les disques étaient

infinis. Si ces conditions ne sont pas respectées expérimentalement, l'écoulement observé ne présente plus de similitude, et l'hypothèse de départ n'est donc plus valable. Dans un tel cas, le système d'équations de base devrait être traité par d'autres méthodes (nécessitant la connaissance des conditions aux limites sur un domaine fermé).

2) Notre étude expérimentale a montré que la validité de la solution trouvée est associée à certains caractères de l'écoulement, laminarité, similitude. Mais elle a de plus permis de dégager un critère simple de laminarité où du moins de similitude et donc de validité de l'hypothèse de base de la théorie : la linéarité des profils de pression pariétale tels qu'ils ont été définis. Ainsi, la forme de l'écoulement obtenu pour des conditions aux limites données peut être contrôlée de façon simple.

3) D'autre part, il est apparu qu'une perturbation momentanée des conditions aux limites peut changer ce régime d'écoulement, et que le nouveau régime obtenu peut subsister et être stable même après suppression de la perturbation.

On s'aperçoit aussi que bien que le cas traité ici soit relativement simple par sa définition, il permet néanmoins de mettre en évidence des phénomènes tels que celui que nous venons de décrire et qui peuvent se manifester à fortiori dans le cas de systèmes plus complexes. La portée pratique de cette étude apparaît donc en ce qu'elle devrait permettre d'éclaircir certaines questions mal connues, comme, par exemple, le fonctionnement et la stabilité, sous certaines conditions d'utilisation, de systèmes tels que les butées fluides ou les paliers à gaz, pour ne citer que ceux-ci.

ANNEXE I : ORGANIGRAMMES

Nous présentons ici, de façon schématique, les organigrammes à partir desquels les programmes FORTRAN stationnaire et instationnaire ont été écrits.

La partie essentielle de chacun de ces programmes est le sous-programme ITERATION, qui applique exactement la méthode de Newton décrite en II.1, et fournit les valeurs f_j et g_j ($j = 2, n+2$). Il met en oeuvre et itère le processus de résolution du système (22) par la méthode de Gauss-Jordan [5].

Dans les deux programmes, les sous-programmes utilisés sont les mêmes :

- Le s.p. ITERATION fournit la solution f_j, g_j ($j = 2, n+2$) ainsi que le nombre d'itérations nécessaires IC et le diagnostic suivant :

LL = 0 : le processus converge ;
LL = 1 : le processus diverge ;
LL = -1 : la matrice à inverser est singulière.

- Le s.p. MATRICE calcule la matrice premier membre du système (22) à partir des formules (19.a.b).

- Le s.p. GAUSS-JORDAN résout le système (22) par la méthode de

GAUSS-JORDAN à pivots maximum et fournit s'il y a lieu la solution Δf_j , Δg_j ($j = 3, n+1$), ainsi que le diagnostic suivant :

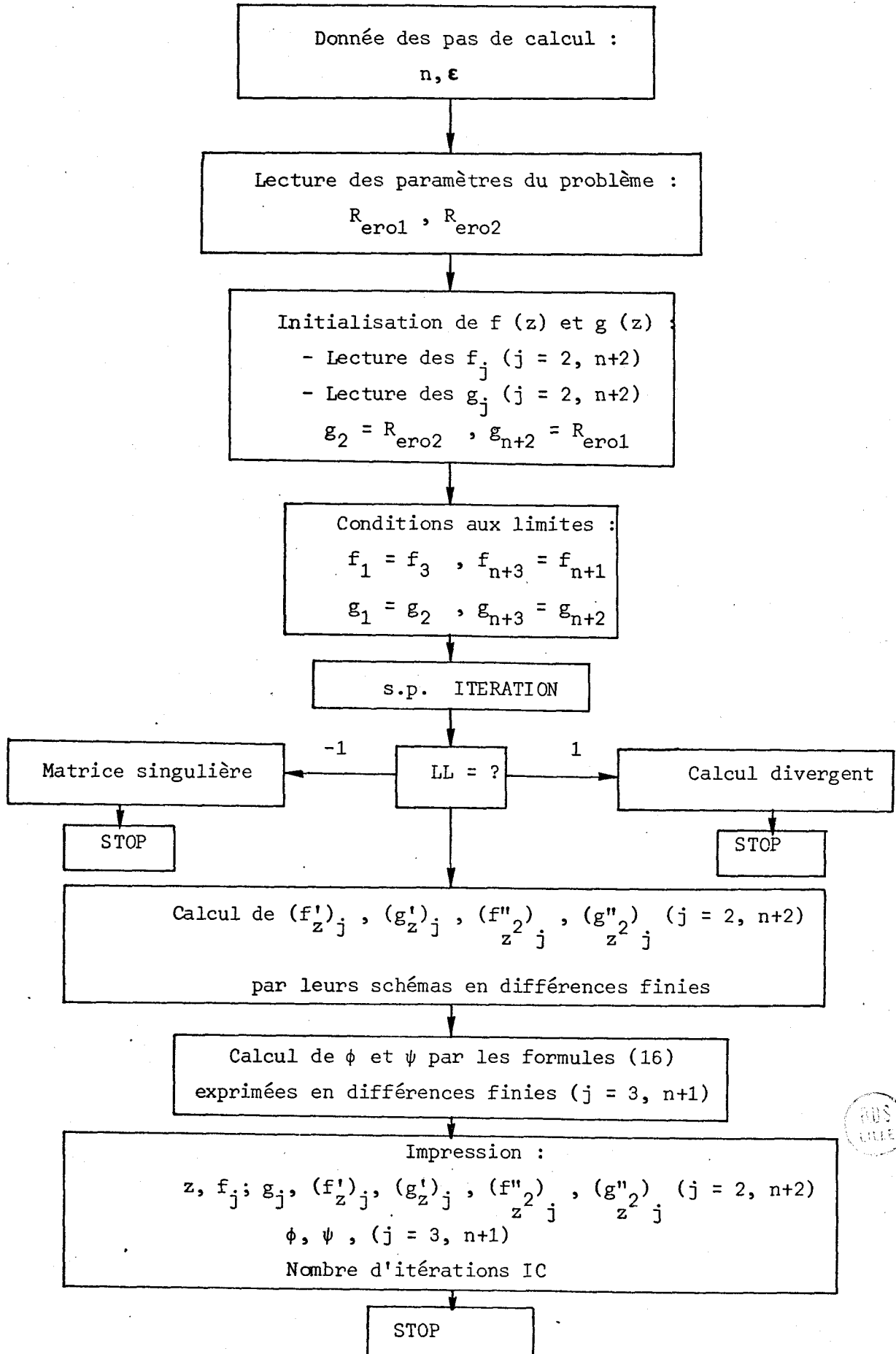
KS = 0 : la matrice a été inversée ;

KS = 1 : la matrice est singulière (ou du moins n'a pas pu être inversée par la méthode de GAUSS-JORDAN).

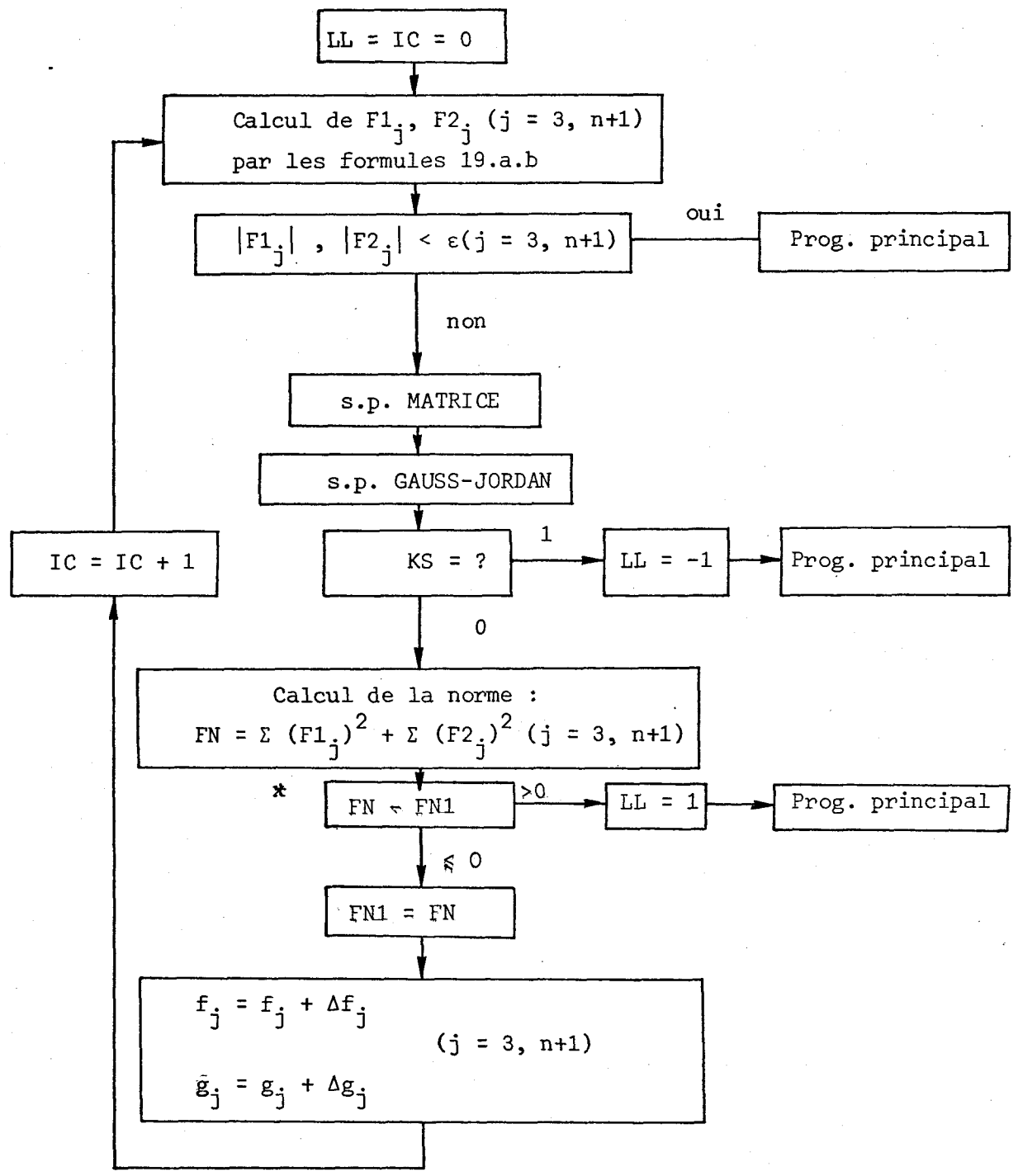
Tous les calculs ont dû être effectués en double précision (16 chiffres significatifs). En effet, en simple précision (8 chiffres significatifs), les erreurs d'arrondis qui s'accumulent au cours de la construction et de la résolution du système (22) deviennent rapidement du même ordre de grandeur que les valeurs Δf_j et Δg_j calculées, et il n'est plus possible de faire converger vers zéro les $F1_j$ et $F2_j$.

A - I - 1 - Programme stationnaire

A - I - 1 - 1 - Programme principal



A - I - 1 - 2 - Sous-programme ITERATION



* Ce test n'est effectué qu'à partir d'une certaine valeur du nombre d'itérations IC, les premières itérations n'étant pas significatives, pour ce qui est de la convergence ou de la non-convergence du processus.

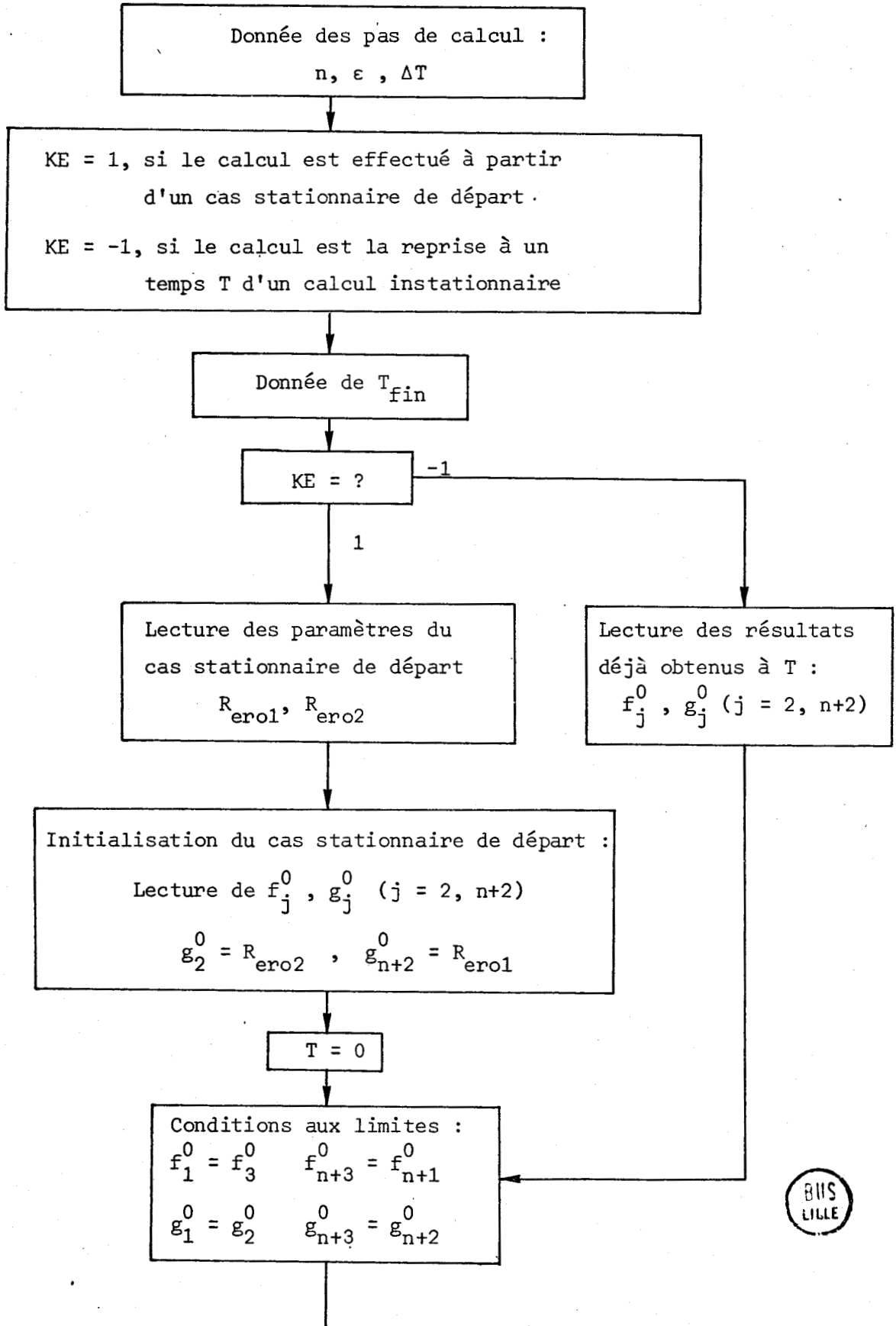


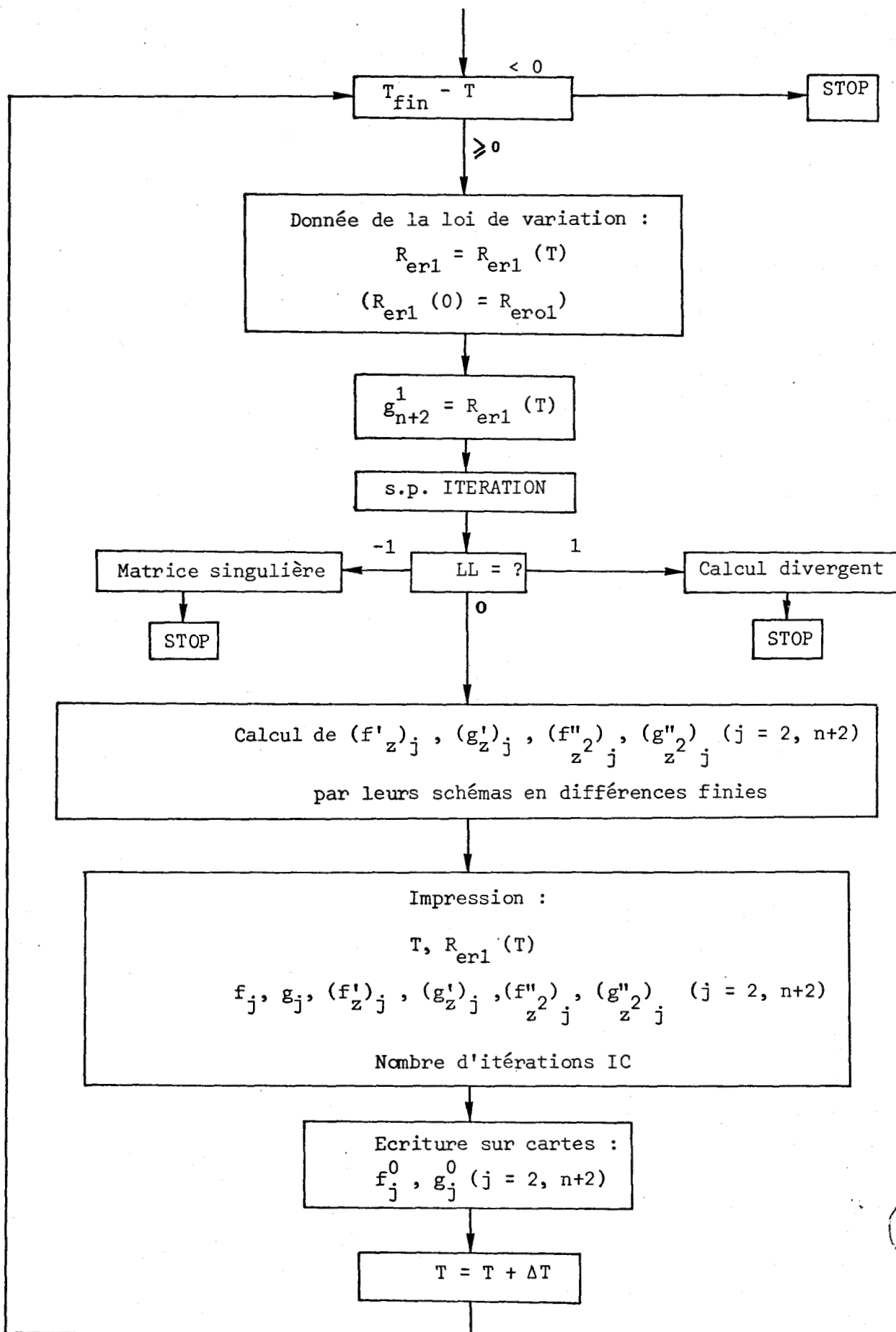
A - I - 2 - Programme instationnaire

Le calcul de l'évolution instationnaire est effectué à partir d'un cas stationnaire de départ. Toutefois, le calcul, stoppé à un temps $T = T_{fin}$ donné, peut être relancé à partir d'un temps quelconque $T_i \leq T_{fin}$, par exemple avec d'autres valeurs des paramètres $n, \epsilon, \Delta T$, ou pour continuer le calcul au-delà de T_{fin} . A cet effet, les valeurs de f_{ij} et g_{ij} sont perforées sur cartes à chaque étape T_i .

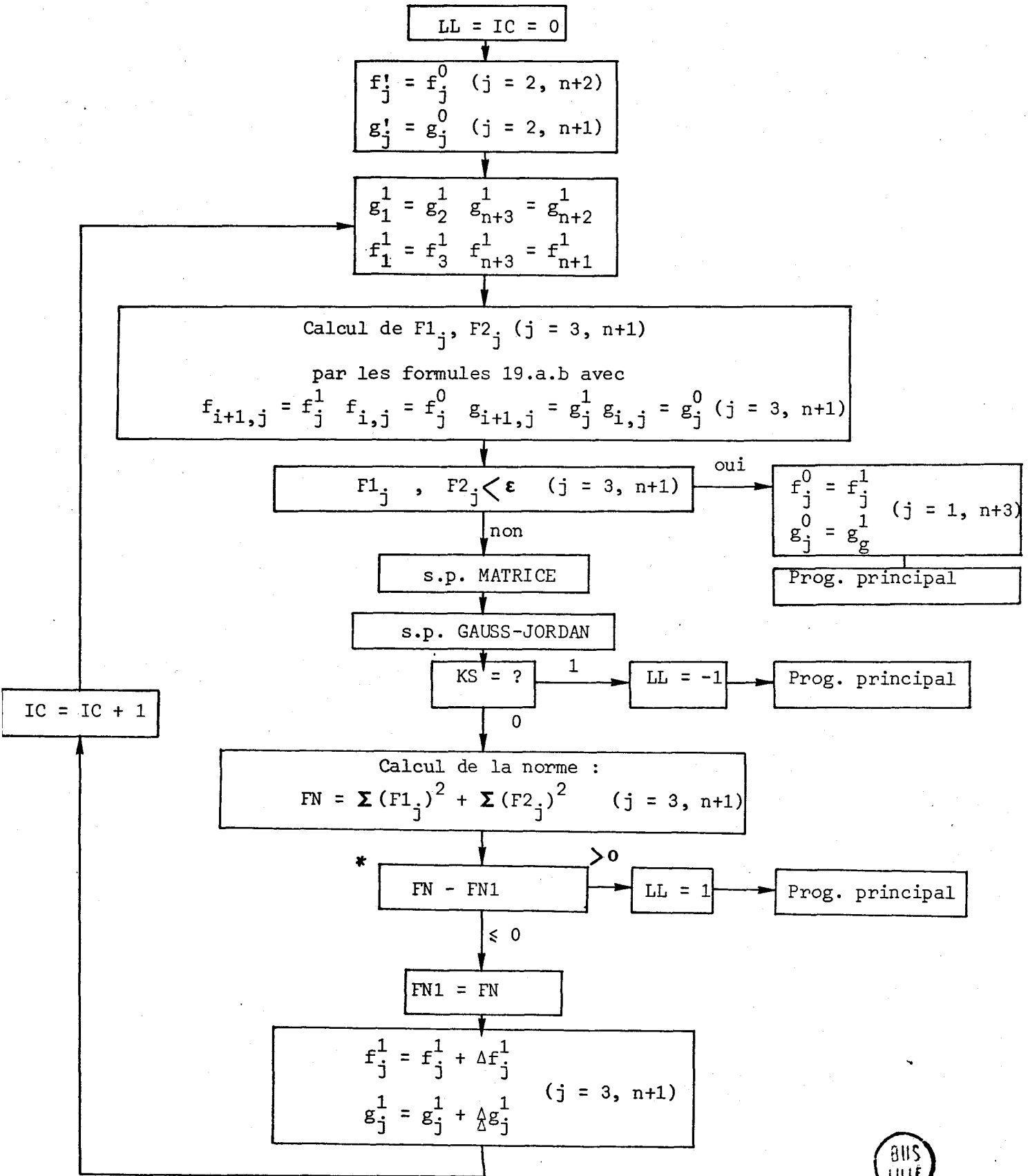
Notons d'autre part que, moyennant quelques modifications à l'organigramme ci-dessous, il est toujours possible de substituer au pas de calcul ΔT un pas de calcul ΔR_{er1} , si ce dernier est plus adéquat.

A - I - 2 - 1 - Programme principal





A - I - 2 - 2 - Sous-programme ITERATION



* Meme remarque qu'en A - I - 1 - 2.

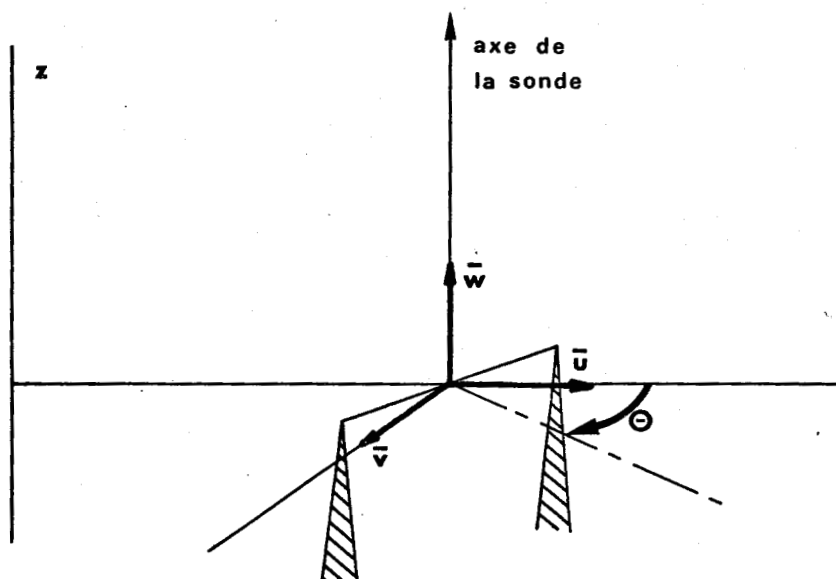


ANNEXE II : MESURES ANEMOMETRIQUES

Nous allons donner ici quelques précisions sur la méthode de mesure des vitesses au moyen de sondes à fil chaud que nous avons utilisée. Le but des mesures étant surtout de déterminer la forme de la solution expérimentale obtenue, nous nous sommes généralement limité à mesurer avec précision la composante tangentielle \bar{v} de la vitesse du fluide qui, comme nous le verrons, est la plus facile à déterminer. Nous allons donc en premier lieu montrer comment nous avons utilisé les sondes de paroi, puis nous justifierons les approximations faites concernant l'exploitation des résultats fournis par ces sondes par une étude des ordres de grandeur comparés des différentes composantes de la vitesse. Nous donnerons aussi quelques précisions sur la méthode d'étalonnage des sondes. Enfin, nous discuterons sommairement de la validité des mesures de turbulence présentées.

A - II - 1 - Utilisation des sondes de paroi

Le fil chaud utilisé pour établir les profils de vitesse présentés est amené dans l'écoulement au travers du disque inférieur. Les broches de la sonde sont perpendiculaires à la paroi. Le positionnement du fil chaud parallèlement aux paroi peut être défini par rapport aux composantes \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} de la vitesse du fluide comme indiqué sur la figure ci-dessous :



Dans le cas d'une sonde amenée dans l'écoulement par un support de sonde, la vitesse apparente U enregistrée par la sonde est liée à la vitesse réelle V obtenue en position d'étalonnage par la relation suivante [20] :

$$U^2 = V_N^2 \left[1 - (1 - b^2) \sin^2 \alpha \right] + a^2 b_s^2 V_p^2 \quad (A - 1)$$

où V_N représente la composante normale au fil de la vitesse réelle V , composante qui fait un angle α avec l'axe de la sonde.

a est une constante, pour une sonde donnée, qui tend vers zéro lorsque le rapport de la longueur du fil à son diamètre tend vers l'infini. Ceci est convenablement vérifié quand ce rapport est supérieur à 600, donc pour nos expériences, et nous n'aurons pas à tenir compte de ce phénomène de refroidissement longitudinal.

Dans le cas de la sonde de paroi [20], b (facteur d'augmentation de vitesse dû aux broches et au corps de sonde) prend la valeur 1. Dans ce cas, (A - 1) devient :

$$U = V_N$$

Si l'on désigne par θ la position du fil chaud par rapport aux composantes \bar{u} et \bar{v} de la vitesse du fluide, on a :

$$V_N^2 = (\bar{u} \cos \theta + \bar{v} \sin \theta)^2 + \bar{w}^2$$

A - II - 2 - Examen des ordres de grandeur relatifs de \bar{u} , \bar{v} , \bar{w}

Les ordres de grandeur des composantes \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} sont très différents. Notons de plus que les mesures essentielles que nous avons effectuées concernent les régions où le fluide tourne en bloc, c'est à dire où \bar{u} est voisin de zéro.

A - II - 2 - 1 - La composante qui nous intéresse essentiellement est la composante tangentielle \bar{v} . Si l'on positionne la sonde de façon que $\theta = 90^\circ$, on mesure :

$$U^2 = \bar{v}^2 + \bar{w}^2 = \bar{v}^2 \left(1 + \frac{\bar{w}^2}{\bar{v}^2}\right)$$

Or, les calculs numériques à partir des équations du problème nous permettent d'évaluer la valeur relative de \bar{w} par rapport à \bar{v} . On a en effet :

$$\frac{\bar{w}}{\bar{v}} = \frac{a}{r} \cdot \frac{f(z)}{g(z)}$$

A titre d'exemple, dans le cas $R_{ero} = 496.9$, $a/\bar{r} = .13$ *, la théorie fournit le tableau suivant :

z	f(z)/g(z)	\bar{w}/\bar{v}	$\frac{\bar{w}^2}{\bar{v}^2}$
.1	.087	.0113	$1.27 \cdot 10^{-4}$
.2	.117	.0153	2.33 "
.3	.118	.0154	2.37 "
.4	.127	.0165	2.72 "
.5	.118	.0154	2.37 "
.6	.118	.0154	2.37 "
.7	.115	.0149	2.22 "
.8	.118	.0154	2.37 "
.9	.099	.0128	1.64 "
1.0	.0	.0	.0

soit, en gros, pour toutes les cotes z comprises entre 0 et 1 :

$$\frac{\bar{w}^2}{\bar{v}^2} < 3 \cdot 10^{-4}$$



* Ce qui correspond expérimentalement, compte tenu du positionnement de la sonde, à un rapport $a/R_d = 1/24$ (cf. IV.3.2).

Les résultats théoriques fournissent un ordre de grandeur similaire pour tous les autres cas traités expérimentalement. Nous ferons donc l'hypothèse que, expérimentalement, \bar{w} est faible par rapport à \bar{v} , hypothèse très raisonnable dans le cas présent de deux disques très rapprochés l'un de l'autre. Elle sera considérée comme valable quand les profils de vitesse concorderont bien avec la théorie. Elle sera discutée dans le cas contraire (notamment pour $R_{ero} > 2500$).

En conséquence, la vitesse \bar{v} peut être mesurée directement en plaçant le fil parallèlement à la paroi, suivant un rayon.

A - II - 2 - 2 - En ce qui concerne la mesure de \bar{u} , elle peut se faire en faisant varier l'angle θ . Toutefois, les résultats ne sont pas très significatifs, car les vitesses radiales sont faibles, voire du même ordre de grandeur que les erreurs de mesure.

A titre d'exemple, nous présentons ci-après les résultats théoriques et expérimentaux, toujours dans le cas $R_{ero} = 496.9$:

z	$(\bar{u}/\bar{v})_{th}$	$(\bar{u}/\bar{v})_{exp}$	\bar{u}_{exp} (m/s)
.1	-.52	.12	.40
.2	-.14	-.12	-.44
.3	.08	-.01	-.04
.4	.12	.12	.34
.5	.04	.14	.38
.6	-.02	.12	.30
.7	-.02	.15	.37
.8	.01	.50	1.17

A - II - 3 - Etalonnage des sondes

Les sondes utilisées ont été mises en oeuvre au moyen d'un anémomètre à température constante, et ont été étalonnées au moyen d'une soufflerie d'étalonnage qui permet de vérifier que la tension E_v à la sortie de l'anémomètre est liée à la vitesse mesurée par la loi en puissance classique, valable pour les vitesses moyennes :

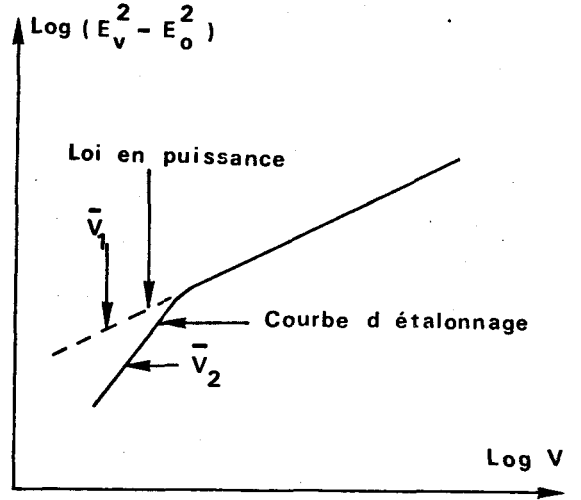
$$E_v^2 - E_0^2 = BV^m \quad (A - 2)$$

et on peut alors déterminer la valeur des coefficients B et m.

Toutefois, comme on a affaire à des vitesses très faibles quand la vitesse de rotation du disque supérieur est faible (vitesses inférieures

à 2 m/s), la loi (A-2) peut ne plus être valable (figure ci-contre).

C'est pourquoi on a déterminé les vitesses par comparaison directe de la quantité $E_v^2 - E_0^2$ avec la courbe d'étalonnage.



Les écarts entre les résultats fournis par les deux méthodes peuvent être assez

importants. Ainsi, dans le cas $R_{\text{ero}} = 110.4$ ($a/R_d = 1/24$), en notant avec l'indice 1 les résultats obtenus par l'utilisation de la loi en puissance et avec l'indice 2 les résultats obtenus en tenant compte de la correction nécessaire aux basses vitesses, on obtient le tableau suivant :

z	\bar{v}_1 (m/s)	\bar{v}_2 (m/s)	$g_1(z)$	$g_2(z)$	g_{th}
.1	.11	.24	5.9	12.8	9.51
.2	.19	.33	10.2	17.6	18.25
.3	.29	.49	15.4	26.1	25.13
.4	.31	.51	16.5	27.2	29.53
.5	.31	.51	16.5	27.2	31.35
.6	.36	.52	19.4	27.7	31.20
.7	.51	.54	27.2	28.8	30.71
.8	.55	.57	29.3	30.4	34.69

On voit d'ailleurs que les résultats trouvés en tenant compte du changement de pente de la courbe $\text{Log} (E_v^2 - E_0^2)$. vs . $\text{Log } v$ aux faibles vitesses concordent bien avec la théorie. Toutefois cette correction n'est nécessaire que pour les très faibles vitesses de rotation, puisque le changement de pente a lieu, avec les sondes utilisées, au voisinage de 2 m/s.

A - II - 4 - Mesures de turbulence

Si dans un écoulement la vitesse moyenne fait un angle ψ avec le fil chaud, la relation $E_v^2 = E_0^2 + Bv^m$ donne :

$$\frac{E_v^2 - E_0^2}{B} = v^m (\sin^2 \psi + a^2 \cos^2 \psi)^{m/2}$$

où a traduit le refroidissement longitudinal.

Après transformation et différentiation, on obtient la forme classique reproduite par exemple dans [21] :

$$\frac{4 E_v^2}{(E_v^2 - E_0^2)^2} \overline{(dE_v)^2} = \frac{m^2}{v^2} \left| \overline{v'^2} + 2 \frac{(1 - a^2) \overline{u'v'}}{\text{tg } \psi + a^2 \text{cotg } \psi} + \frac{(1 - a^2) \overline{u'^2}}{(\text{tg } \psi + a^2 \text{cotg } \psi)^2} \right|$$

Dans le cas de nos expériences, $\psi = 90^\circ$ et dans la zone où le fluide tourne en bloc on mesure donc directement la fluctuation $\overline{v'^2}$ de la

vitesse tangentielle. En faisant varier l'angle ψ , on peut avoir un ordre d'idée sur la grandeur des tensions de Reynolds, et l'on trouve alors que $\overline{u'^2}$ reste sensiblement du même ordre de grandeur que la fluctuation $\overline{v'^2}$.

BIBLIOGRAPHIE

- |1| VO, N.D. "Contribution à l'étude des écoulements radiaux en régime instationnaire".
Thèse de Maîtrise, Univ. Laval ; Déc. 1972.
- |2| FLORENT, P. "Ecoulement instationnaire entre disques coaxiaux".
NGUYEN, N.D. J. de Mécanique, Vol. 12, No 4 ; Déc. 1973.
VO, N.D.
- |3| FLORENT, P. "Ecoulement instationnaire entre un disque fixe
NGUYEN, N.D. poreux et un disque tournant".
Congrès Canadien de Méc. Appl., p. 1216, Québec ;
1971.
- |4| PEUBE, J.L. "Ecoulement entre un disque fixe poreux et un disque
tournant".
Congrès Canadien de Méc. Appl., Québec ; 1967.
- |5| MOURSUND, D.G. "Elementary theory and application of numerical
DURIS, C.S. analysis".
Mc Graw Hill 4350T, International Series in Pure
and Applied Math.
- |6| FLORENT, P. "Sur la multiplicité des solutions de l'écoulement
NGUYEN, N.D. radial".
VO, N.D. Quatrième Congrès de Méc. Appl., Montréal ; Mai 1973.

- | 7| FLORENT, P. "Multiple solutions in flow between two coaxial
NGUYEN, N.D. disks".
RIBAULT, J.P. J. Fluid Mech. Vol. 68, part 2, p. 369 - 388 ; 1975.
- | 8| BATCHELOR, G.K. "Note on a class of solutions of the Navier-Stokes
equations representing rotationally symmetric flow".
Quart. S. Mech. Appl. Math., 4, p. 29-51 ; 1951.
- | 9| BOEDEWADT, U.T. "Die Drehströmung über festem Grunde".
ZAMM 20, 241 ; 1940.
- |10| STEWARTSON, K. "On the flow between two rotating coaxial disks".
Proc. Cambridge Phil. Soc. 3, p. 333-341 ; 1953.
- |11| VON KARMAN, T. "Laminar und turbulente Reibung".
ZAMM 1, 233 ; 1921.
- |12| GREENSPAN, D. "Numerical studies of flow between rotating coaxial
disks".
J. Inst. Math. Applics. 9, p. 370-377 ; 1972.
- |13| KAWAGUCHI, T. "Entrance loss for turbulent flow without swirl
between parallel disks".
Bulletin of the JSME, Vol. 14, No 70 ; 1971.
- |14| MERIGOUX, J. "Contribution à l'étude d'un écoulement d'un fluide
visqueux compressible entre un disque fixe et un
disque en rotation".
J. de Mécanique, Vol. 10, No 4 ; Déc. 1971.

- X |15| CHEN, C.P. "Contribution à l'étude expérimentale de l'écoulement radial d'un fluide visqueux entre deux disques parallèles".
J. de Mécanique, Vol. 5, No 2 ; Juin 1966.
- |16| DAILY, J.W. "Chamber dimension effects on induced flow and
NECE, R.E. frictional resistance of enclosed rotating disks".
J. of Basic Engineering, p. 217-233 ; Mars 1960.
- |17| SCHULTZ-GRUNOW, F. "Der Reibungswiderstand rotierender Scheiben".
ZAMM 15, p. 191-204 ; 1935.
- |18| GREGORY, N. "On the stability of three-dimensional boundary
STUART, J.T. layers with application to the flow due to a
WALKER, W.S. rotating disk".
Jet Propulsion Laboratory, Vol. 248, A. 293 ;
Juil. 1955.
- |19| MELLOR, G.L. "On the flow between a rotating and a stationary
CHAPPEL, P.J. disk".
STOKES, V.K. J. Fluid Mech., Vol. 31, p. 95-112 ; 1968.
- |20| FLORENT, P. "Importance de l'orientation du support de sonde à
THIOLET, G. fil chaud par rapport à une paroi sur la détermination des vitesses moyennes dans une couche limite turbulente".
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 269, p. 405-408 ; 1969.
- |21| THIOLET, G. "Contribution à l'étude des mesures au voisinage des parois planes lisses".
Thèse de Doctorat, Poitiers ; 1970.

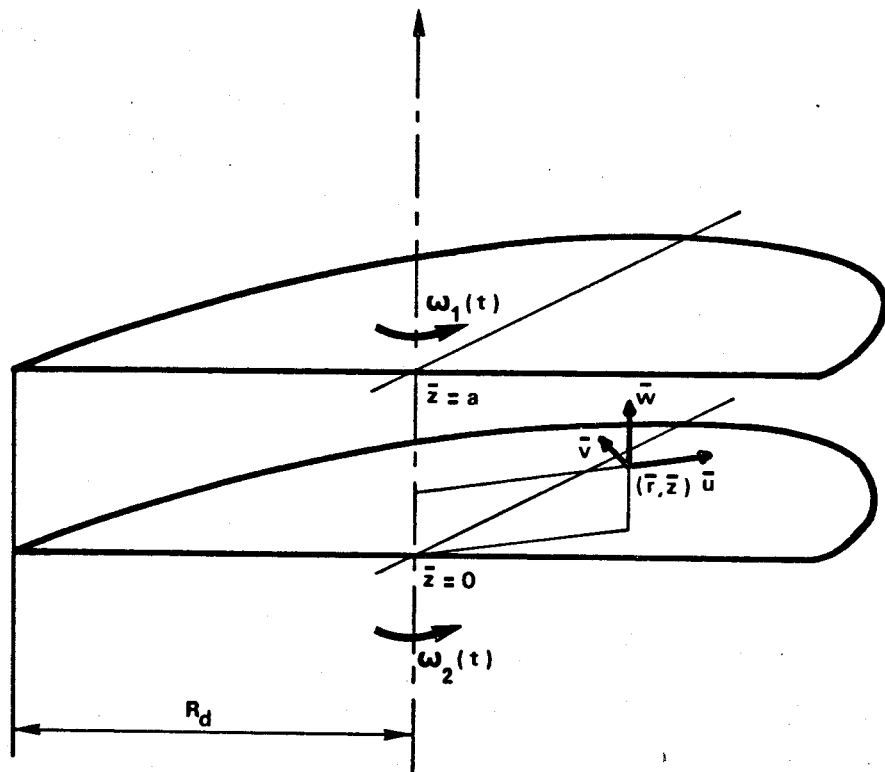


Fig. 1

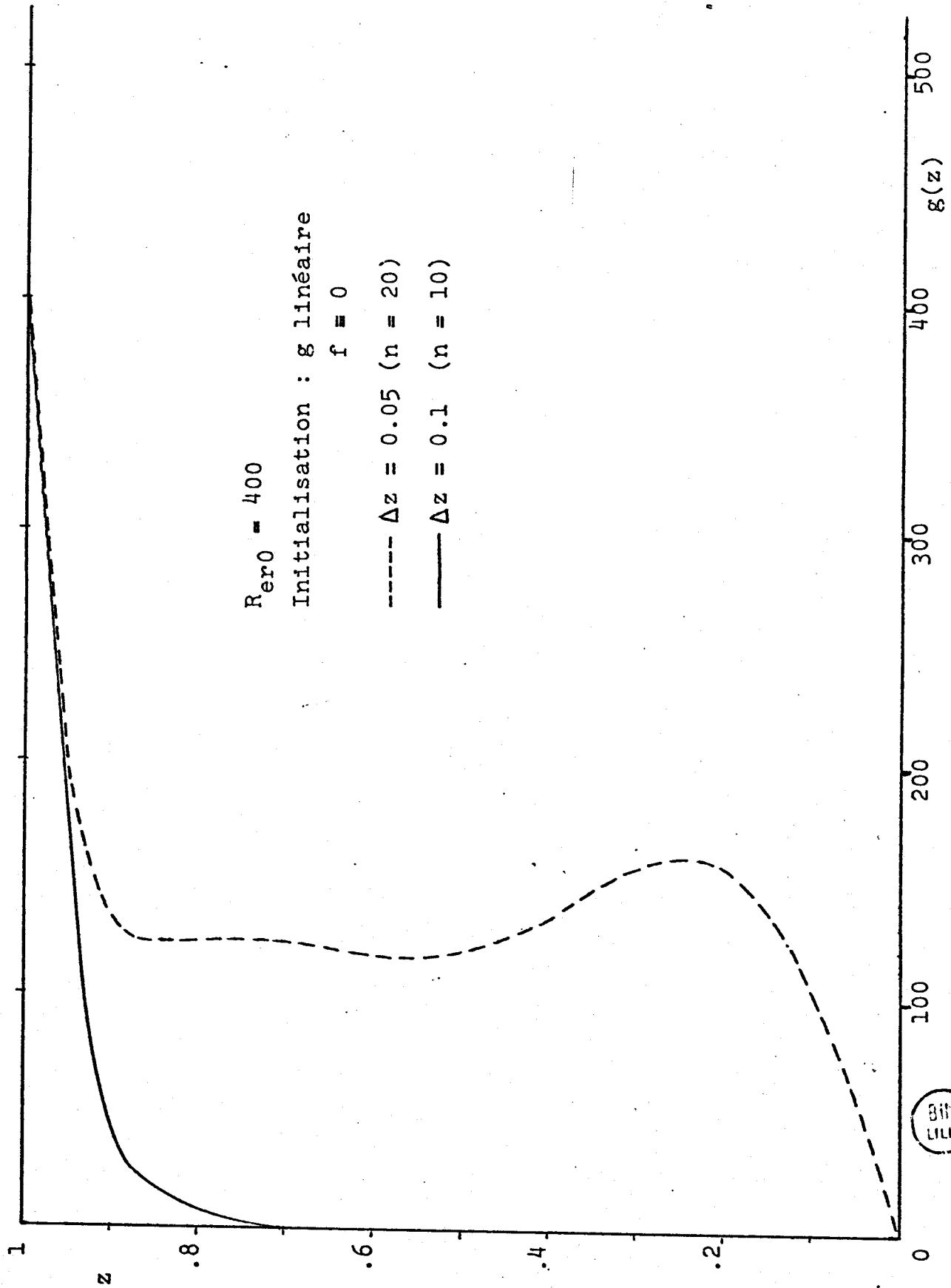


Fig. 2



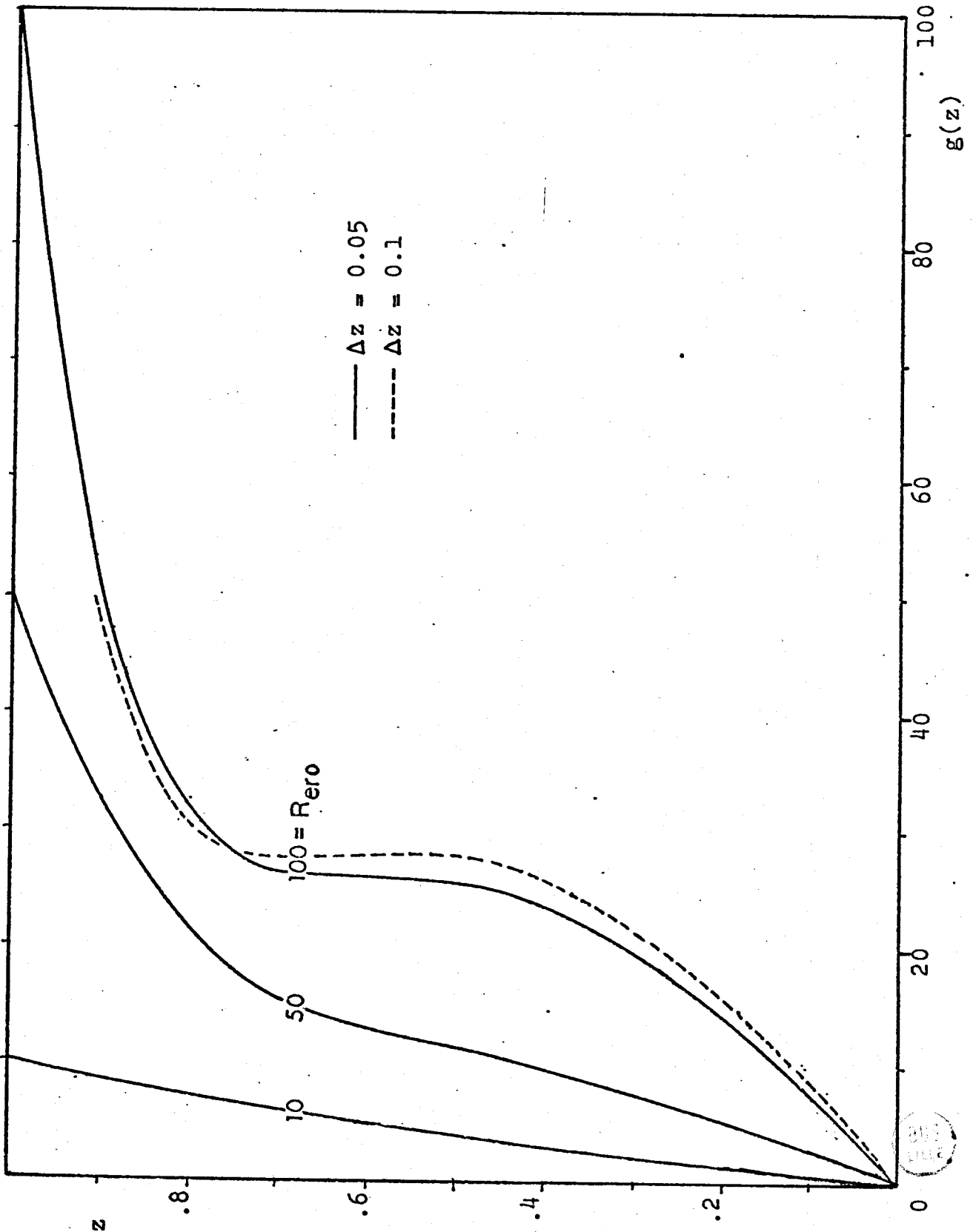


Fig. 3

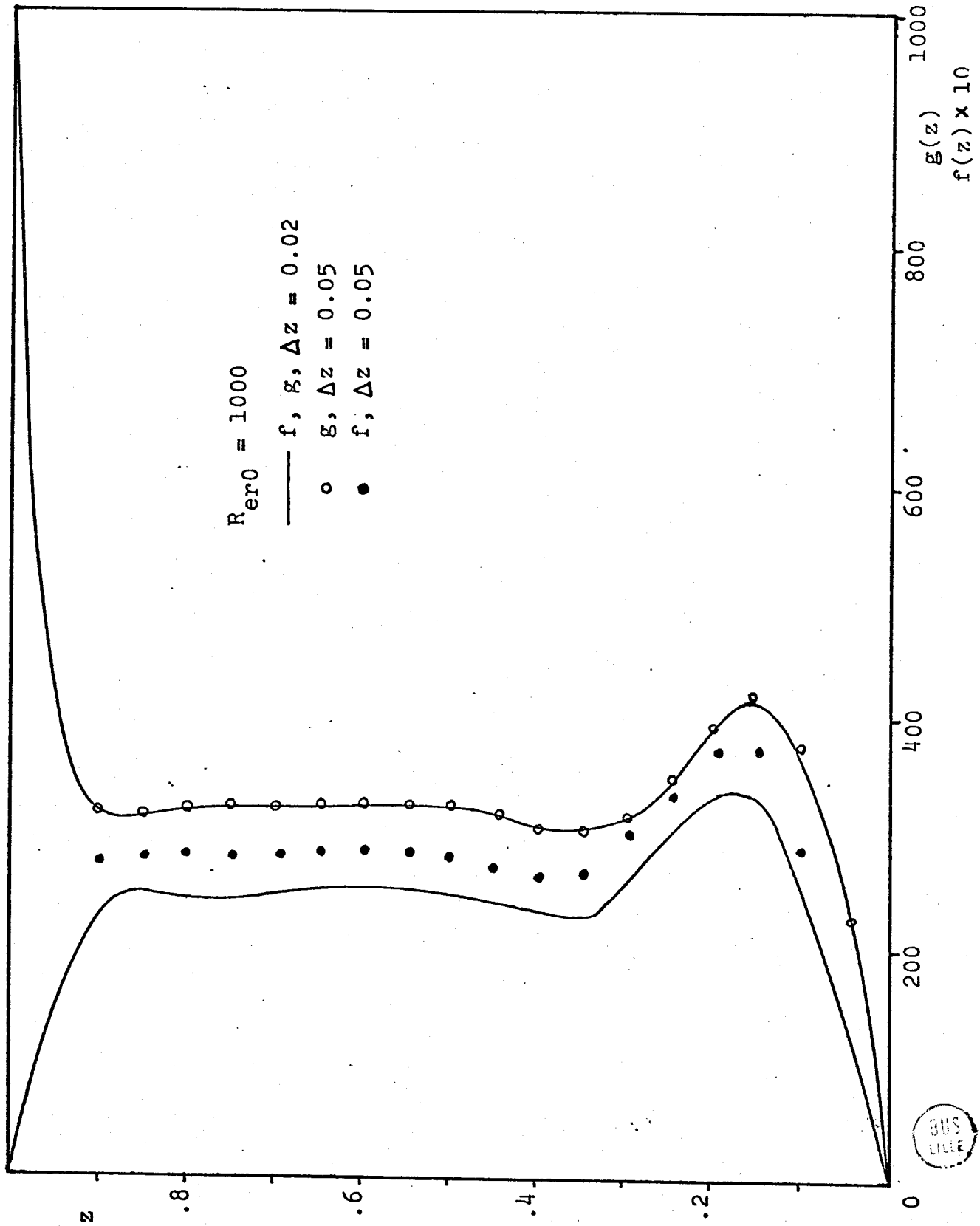


Fig. 4



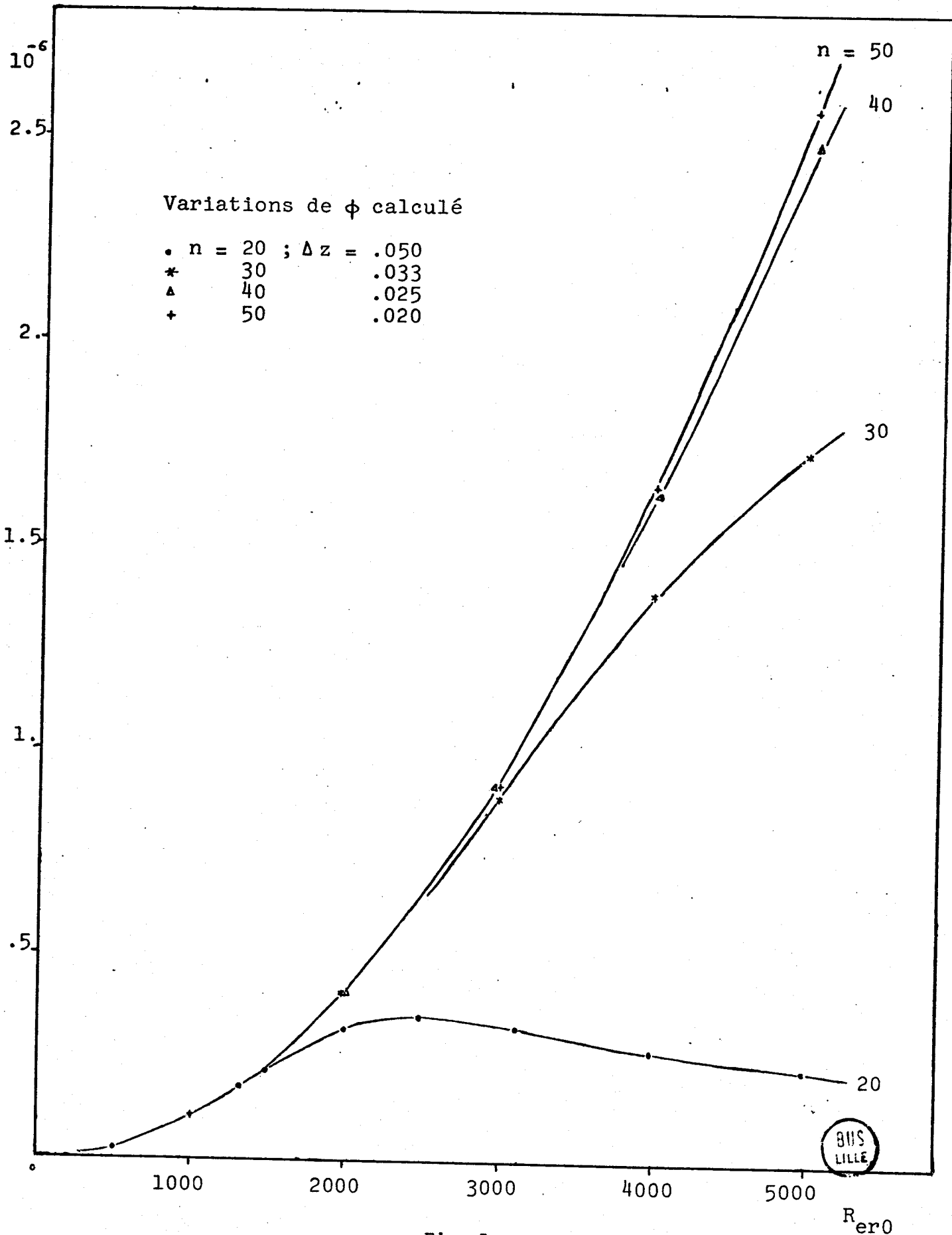


Fig. 5

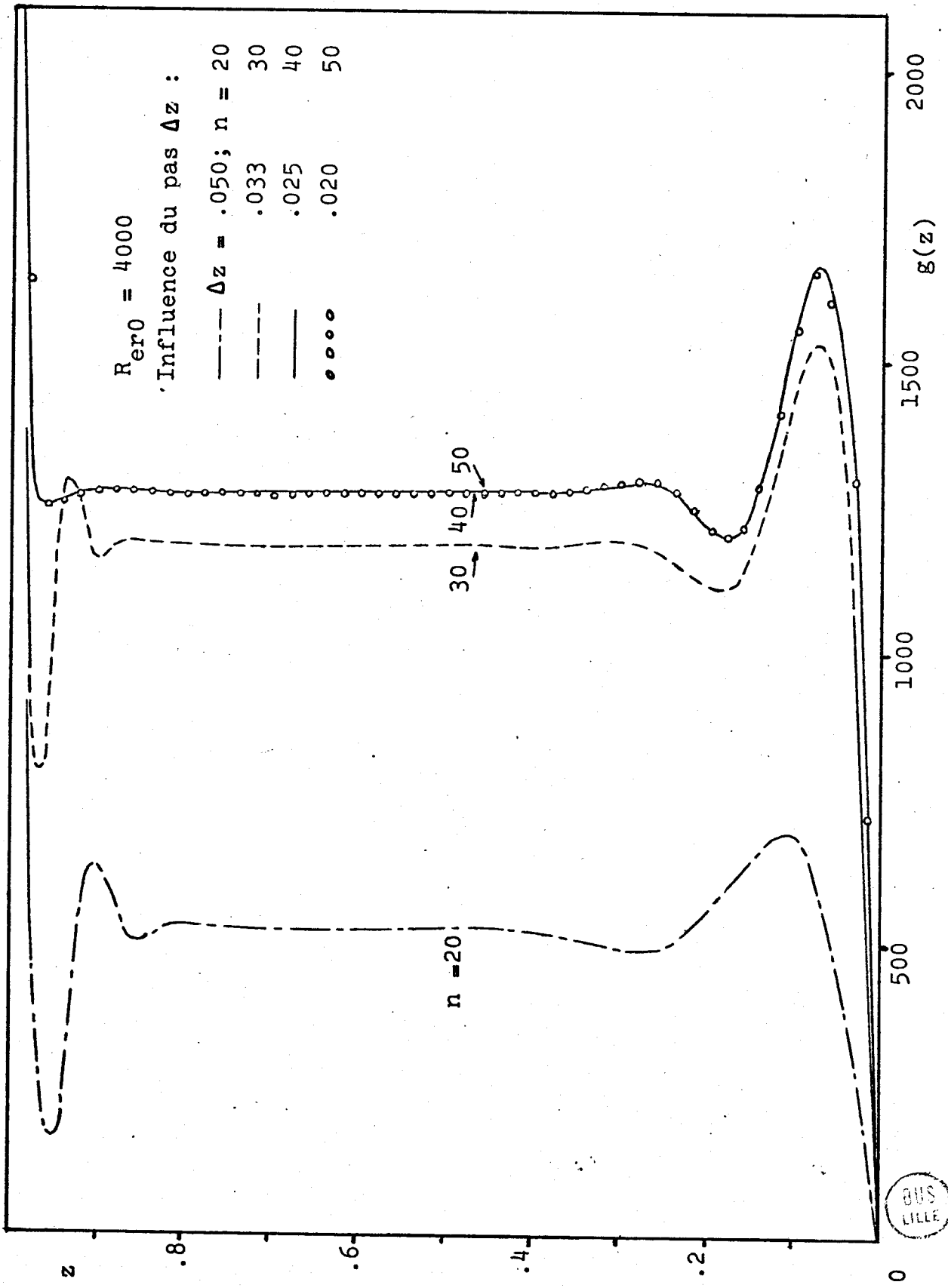


Fig. 6

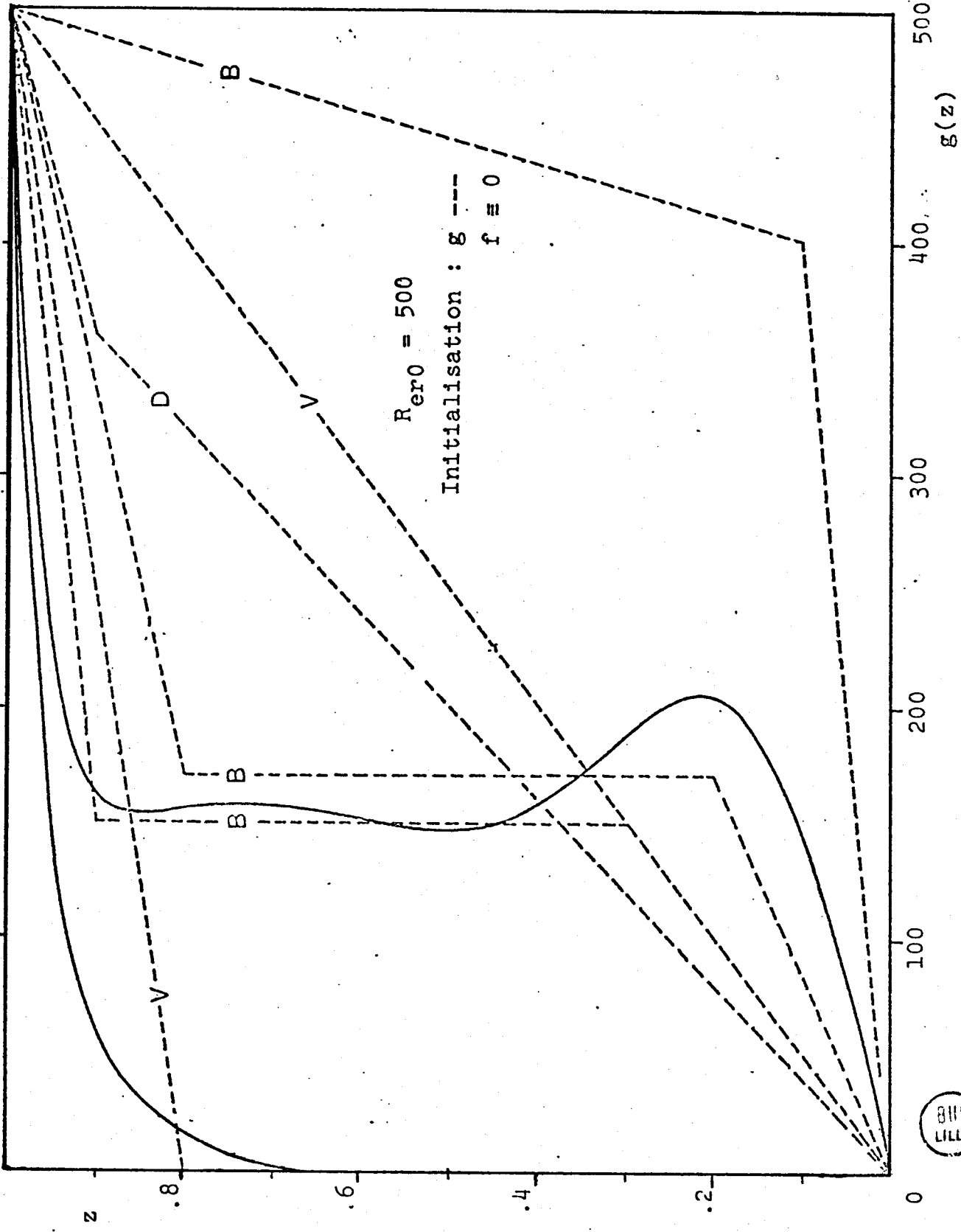


Fig. 7



$Re\sigma = 1000$

- nos solutions
- - - Greenspan D.
- - - Jones D.J.

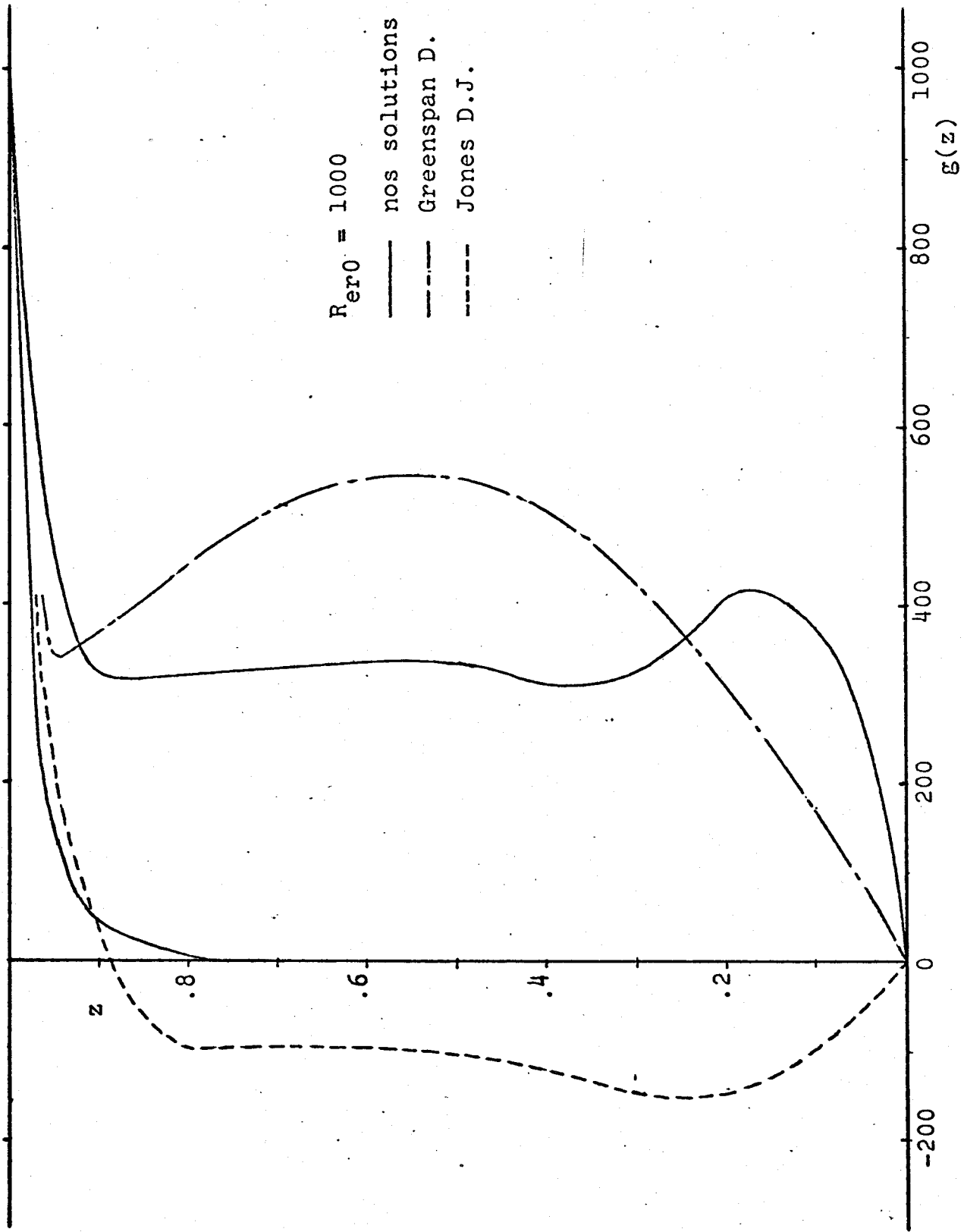


Fig. 8



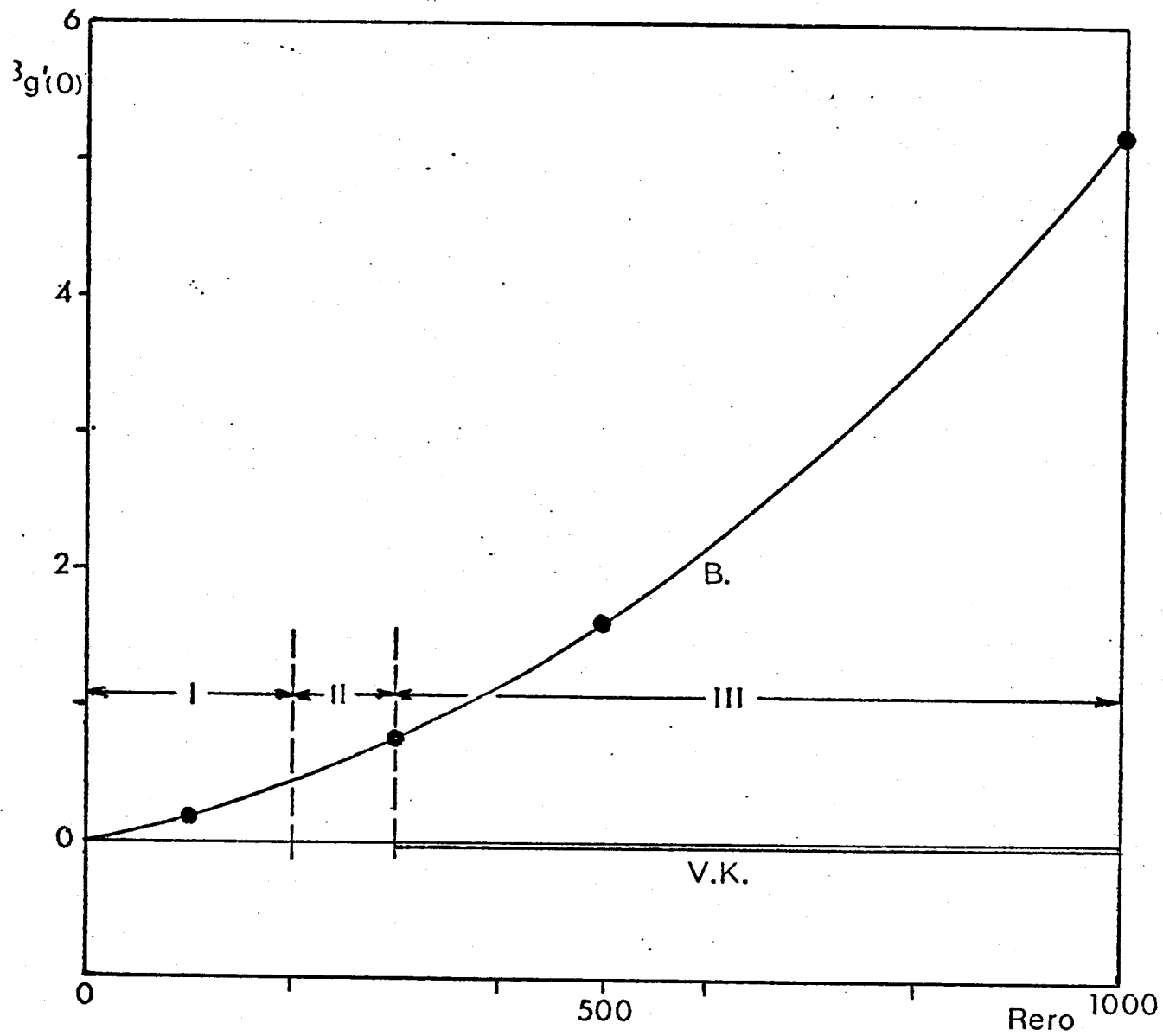


Fig. 9



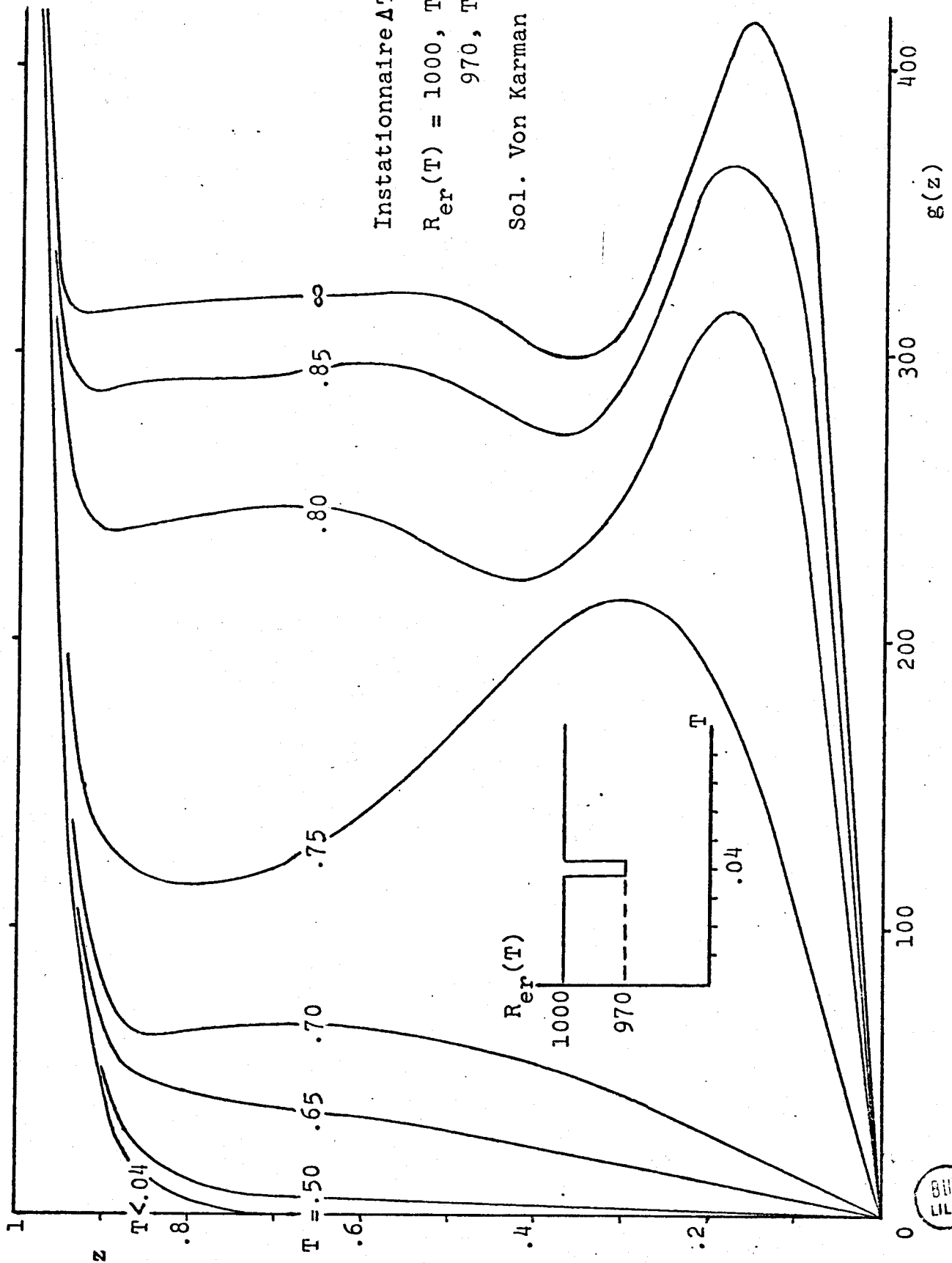


Fig. 10



Variations de ϕ calculé

$R_{er0} = 500$

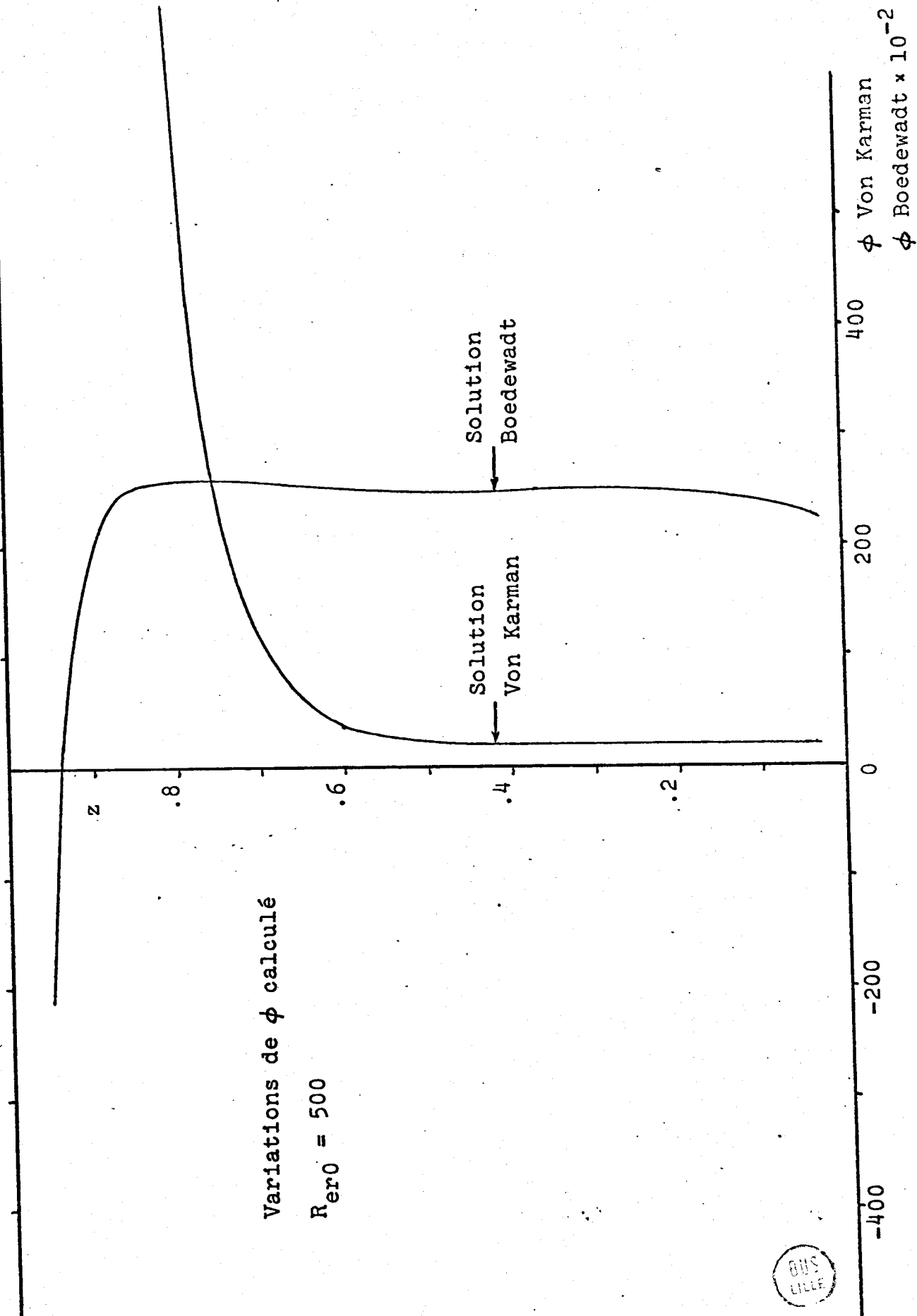


Fig. 11

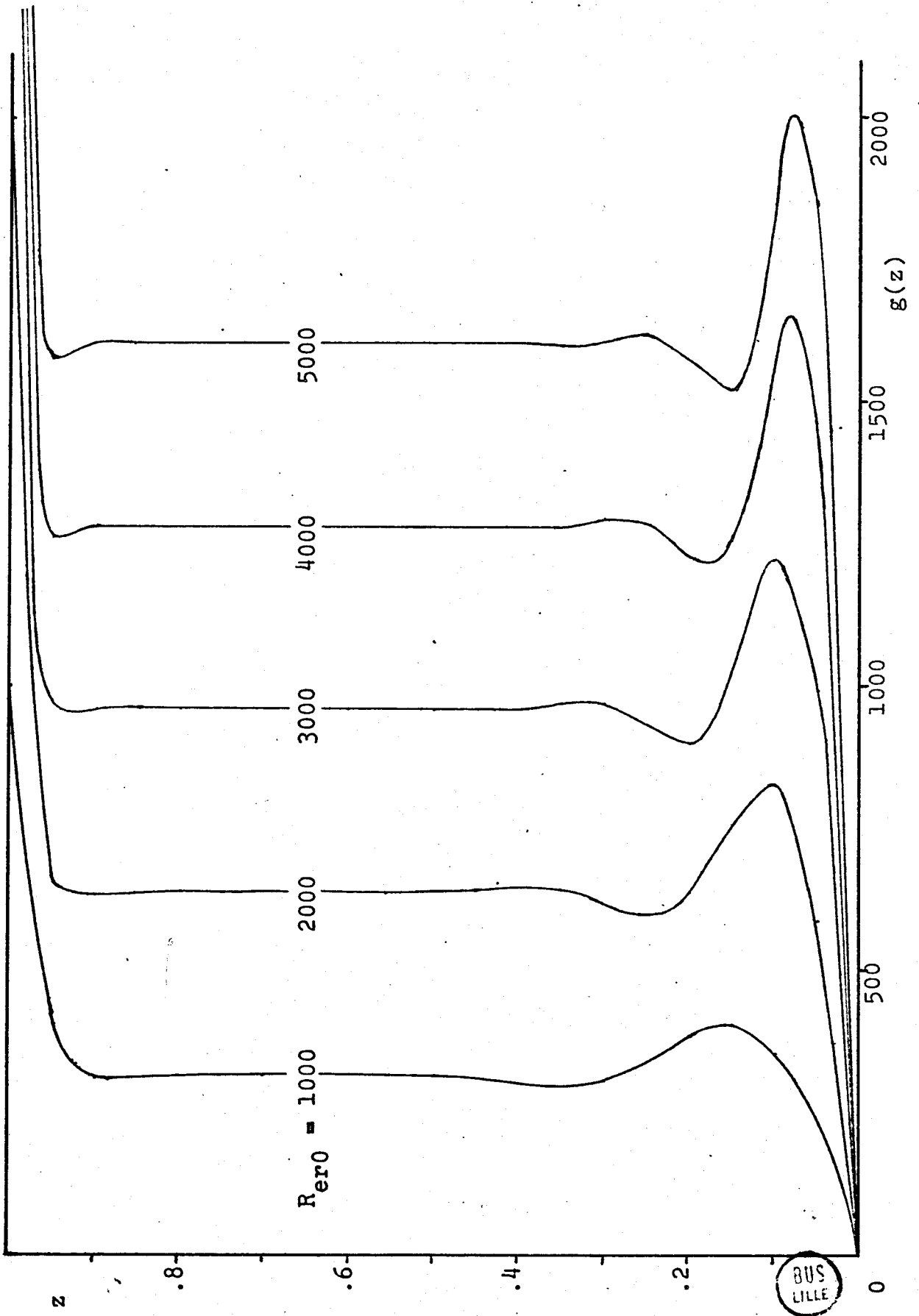


Fig. 12

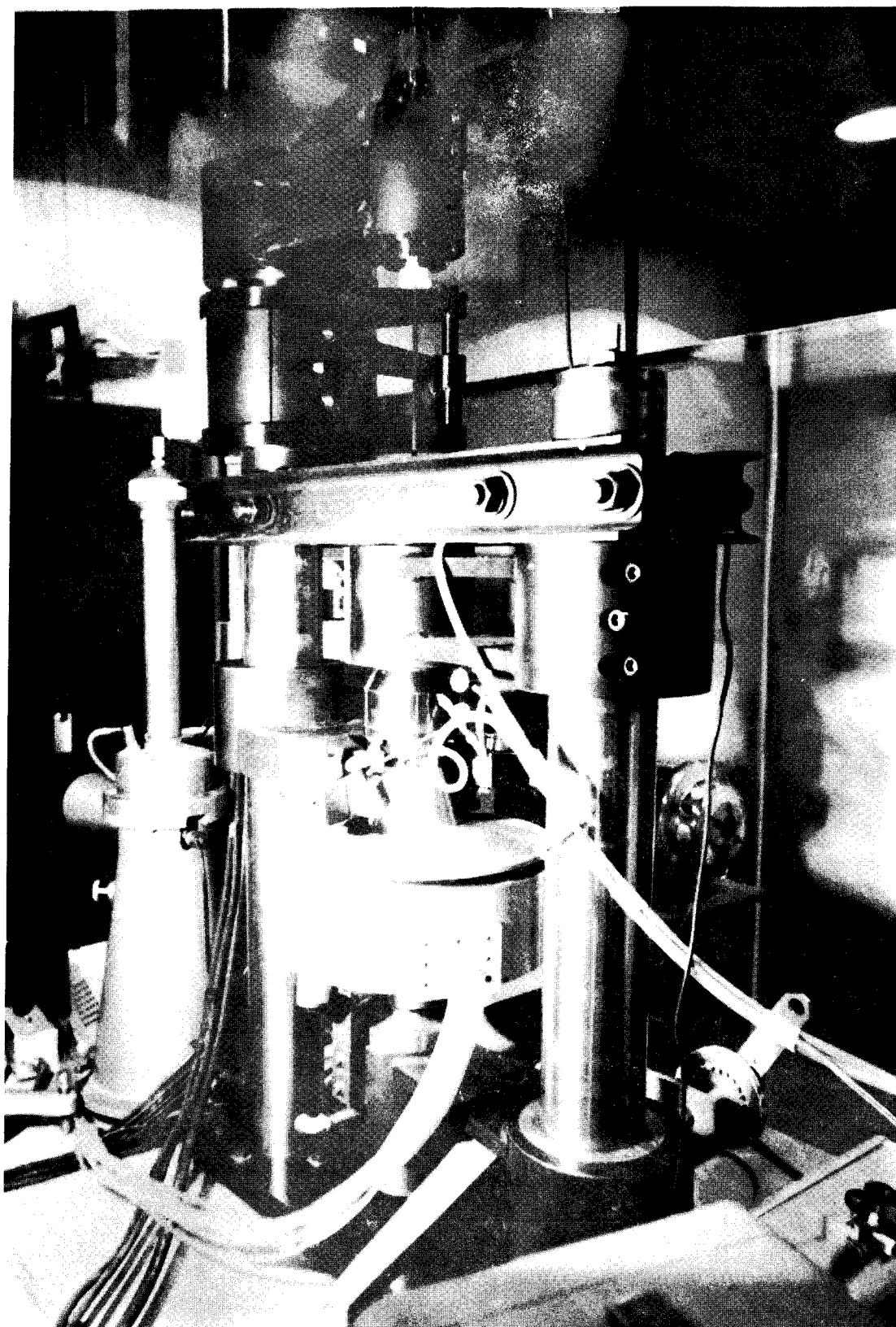
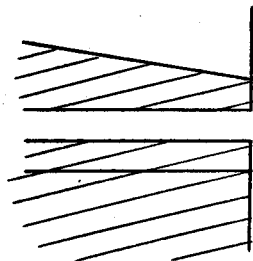
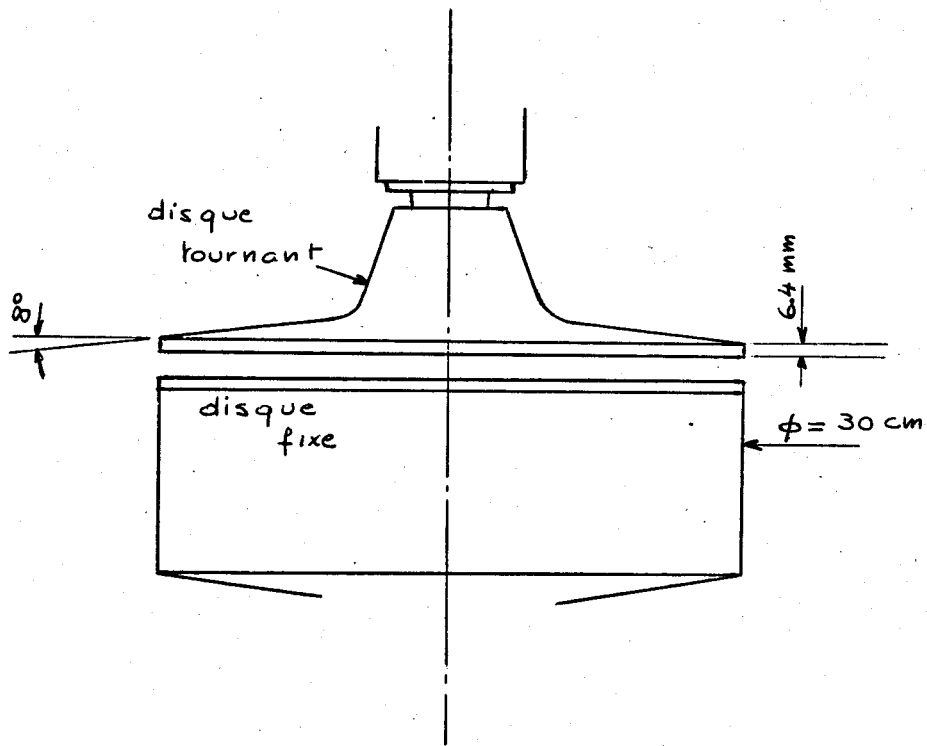


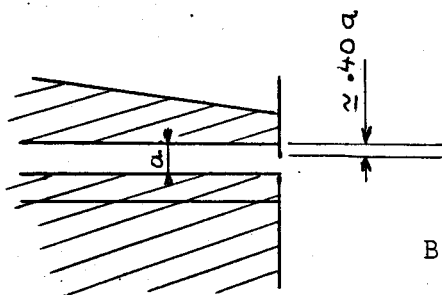
FIG. 13-

U.S.
LITTLE

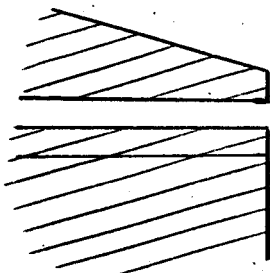


A

Configurations :



B



C



Fig. 14

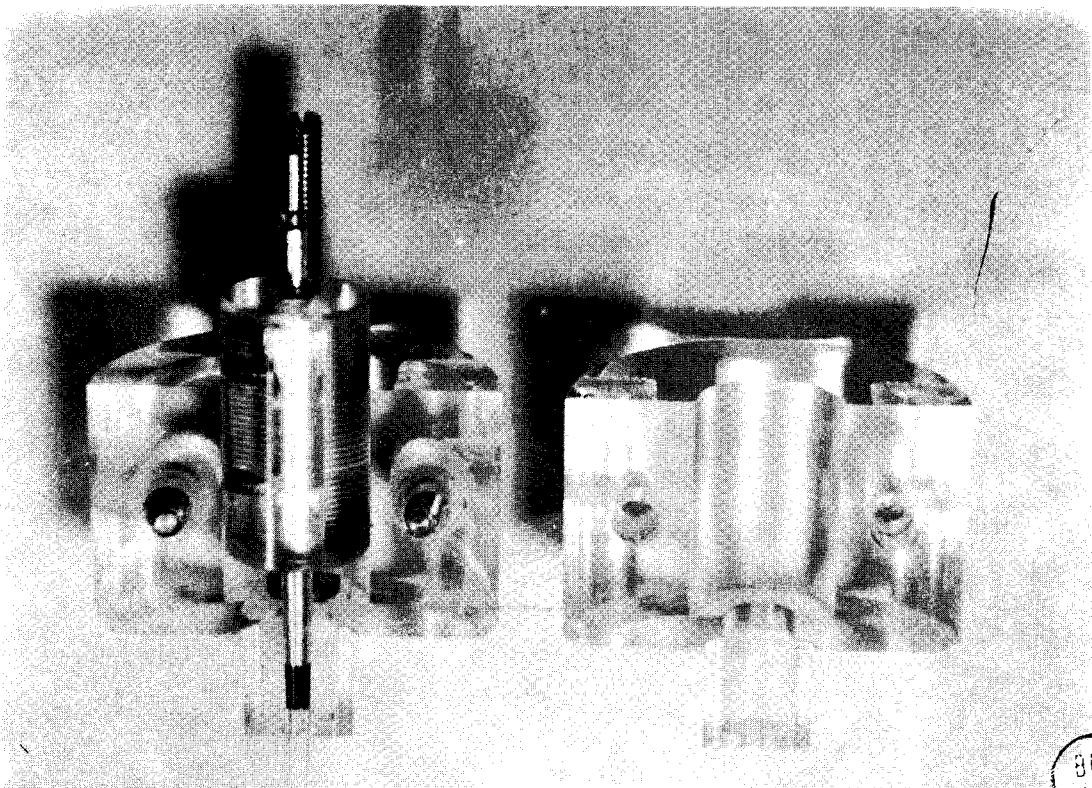
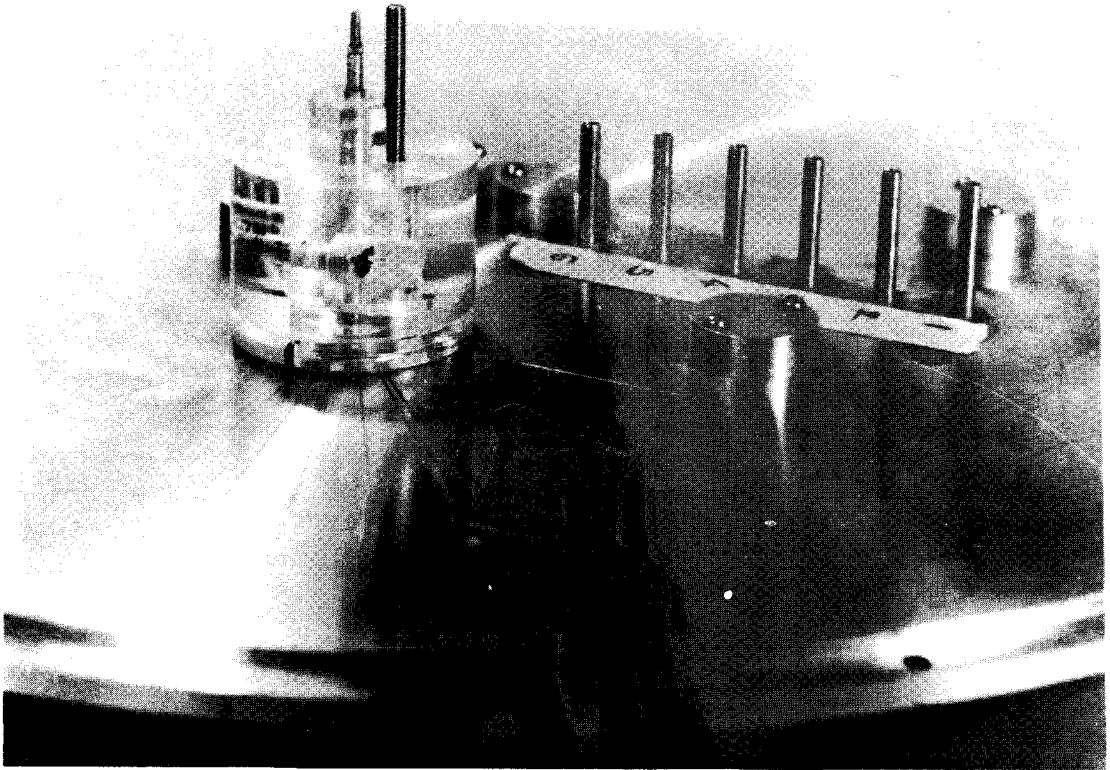


FIG 15.

BHS
LITTLE

$$\left| \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \phi} \right|^{1/2}$$

$$a/R_d = 1/48$$

(A)

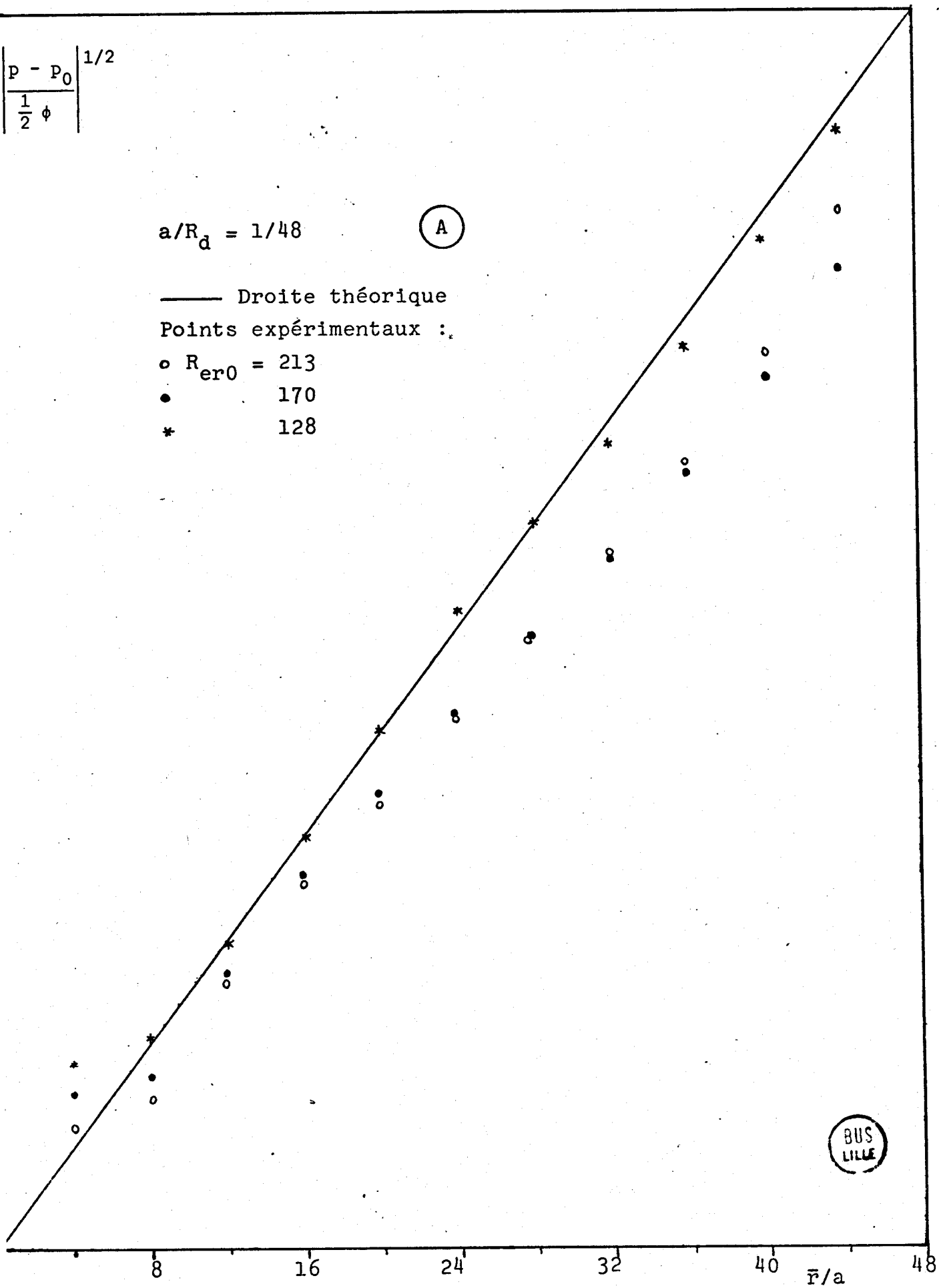
— Droite théorique

Points expérimentaux :

○ $R_{er0} = 213$

● 170

* 128



BUS
LILLE

Fig. 16 - a

$$\left| \frac{P - P_0}{\frac{1}{2} \phi} \right|^{1/2}$$

$$a/R_d = 1/24$$

(A)

— Droite théorique

Points expérimentaux :

- ▼ $R_{er0} = 852$
- 681
- 511
- △ 341

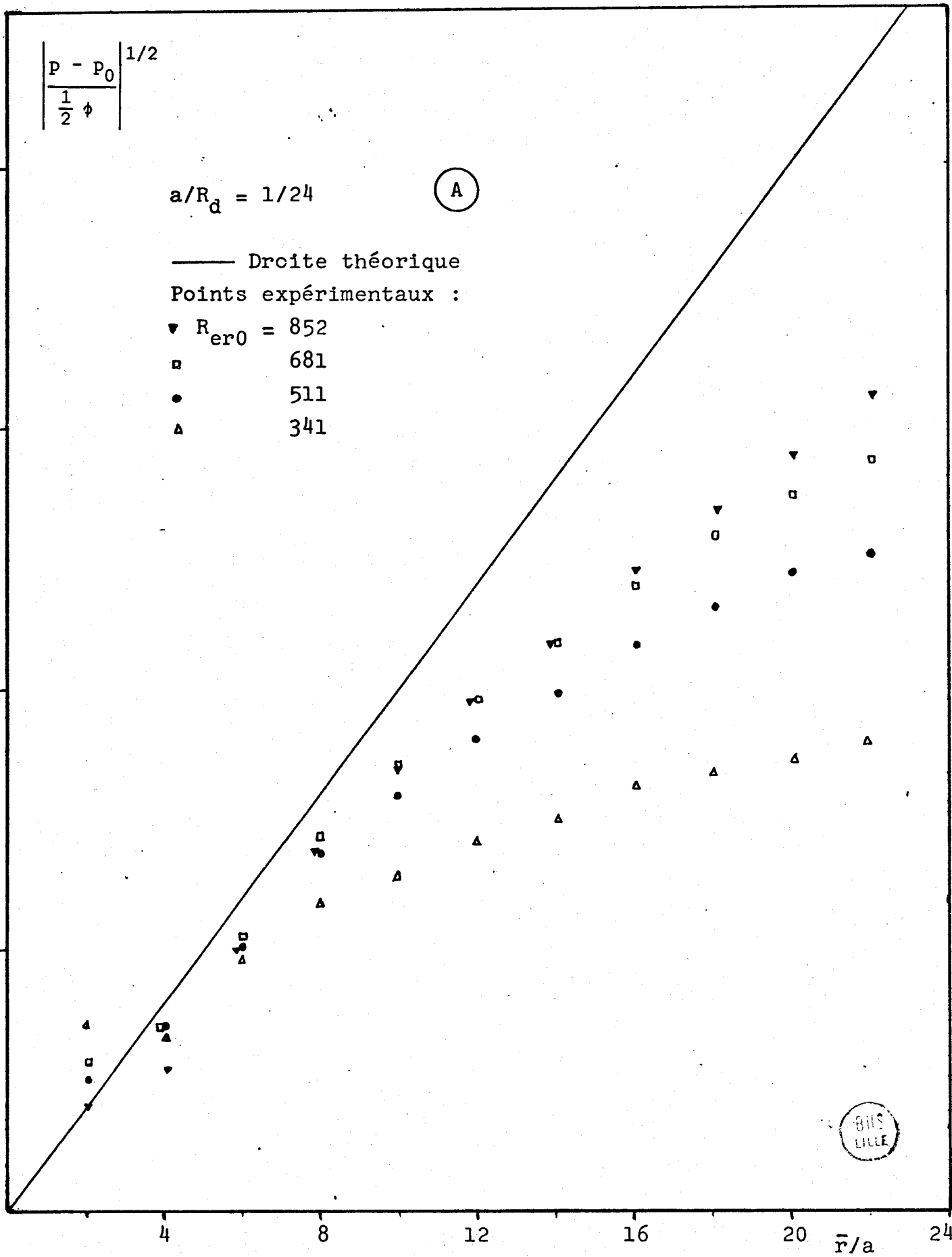


Fig. 16 - b

$$\left| \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \phi} \right|^{1/2}$$

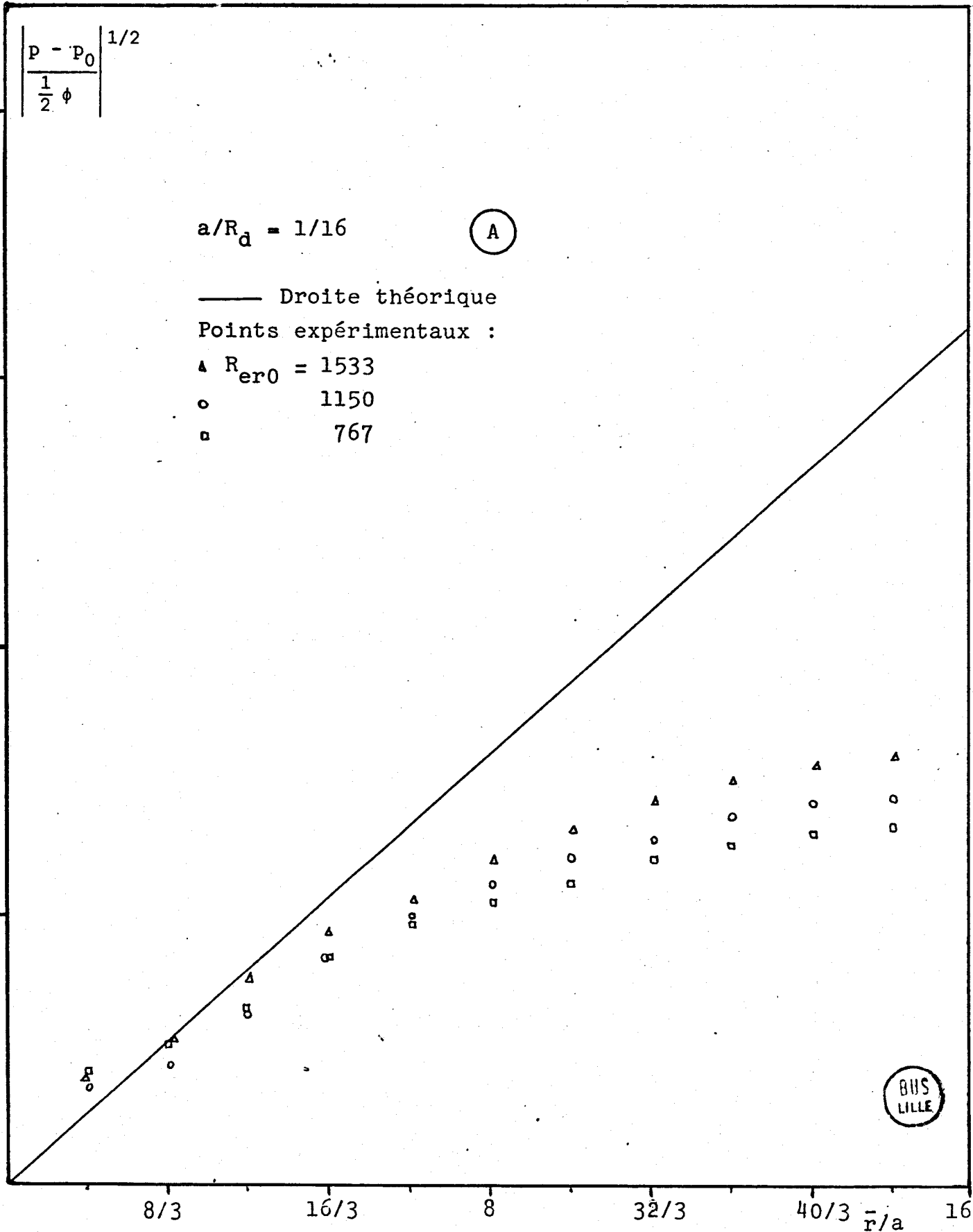
$$a/R_d = 1/16$$

(A)

— Droite théorique

Points expérimentaux :

- △ $R_{er0} = 1533$
- 1150
- 767



8/3 16/3 8 32/3 40/3 16

\bar{r}/a

Fig. 16 - c

$$\left| \frac{P - P_0}{\frac{1}{2} \phi} \right|^{1/2}$$

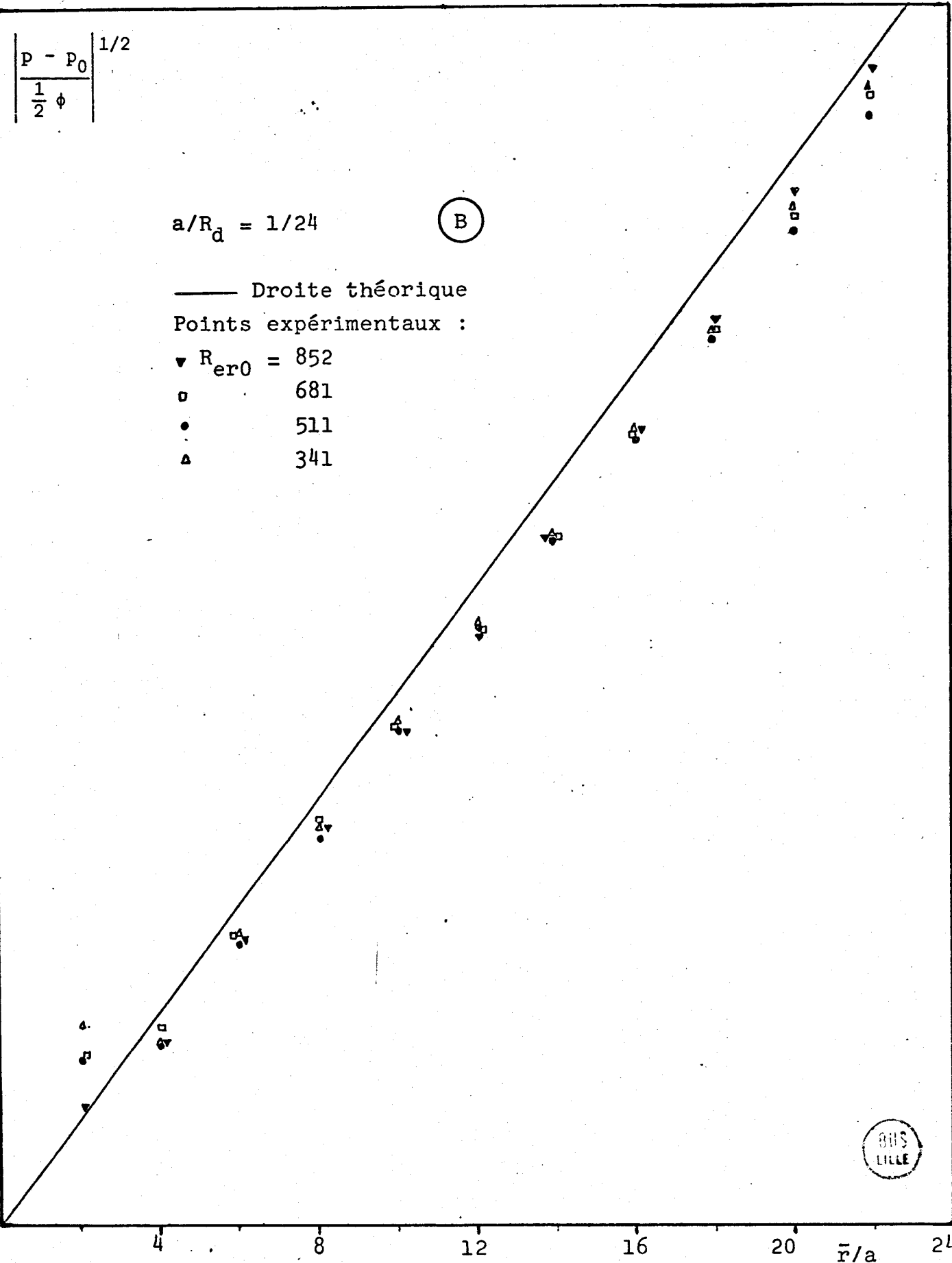
$$a/R_d = 1/24$$

(B)

— Droite théorique

Points expérimentaux :

- ▼ $R_{er0} = 852$
- 681
- 511
- △ 341



BIS
LILLE

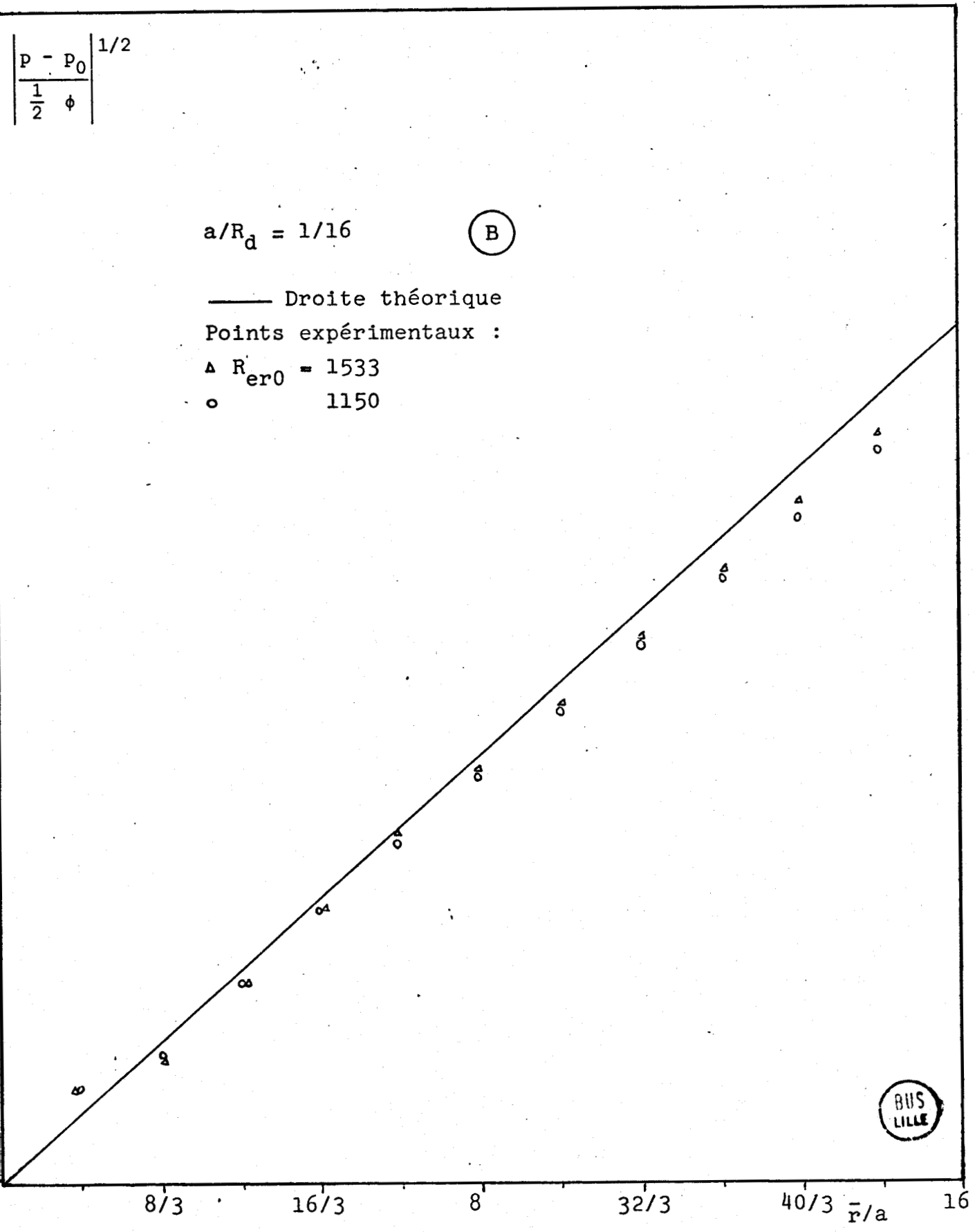
Fig. 17 - a

$$\left| \frac{P - P_0}{\frac{1}{2} \phi} \right|^{1/2}$$

$$a/R_d = 1/16$$

(B)

— Droite théorique
 Points expérimentaux :
 Δ $R_{er0} = 1533$
 ○ 1150



BUS LILLE

Fig. 17 - b

$$\left| \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \phi} \right|^{1/2}$$

$a/R_d = 1/48 \text{ \& } 1/32$

(C)

— Droite théorique

Points expérimentaux :

▼ $a/R_d = 1/48, R_{er0} = 314$
 ▲ $1/32 \quad 314$
 ◻ $1/32 \quad 628$

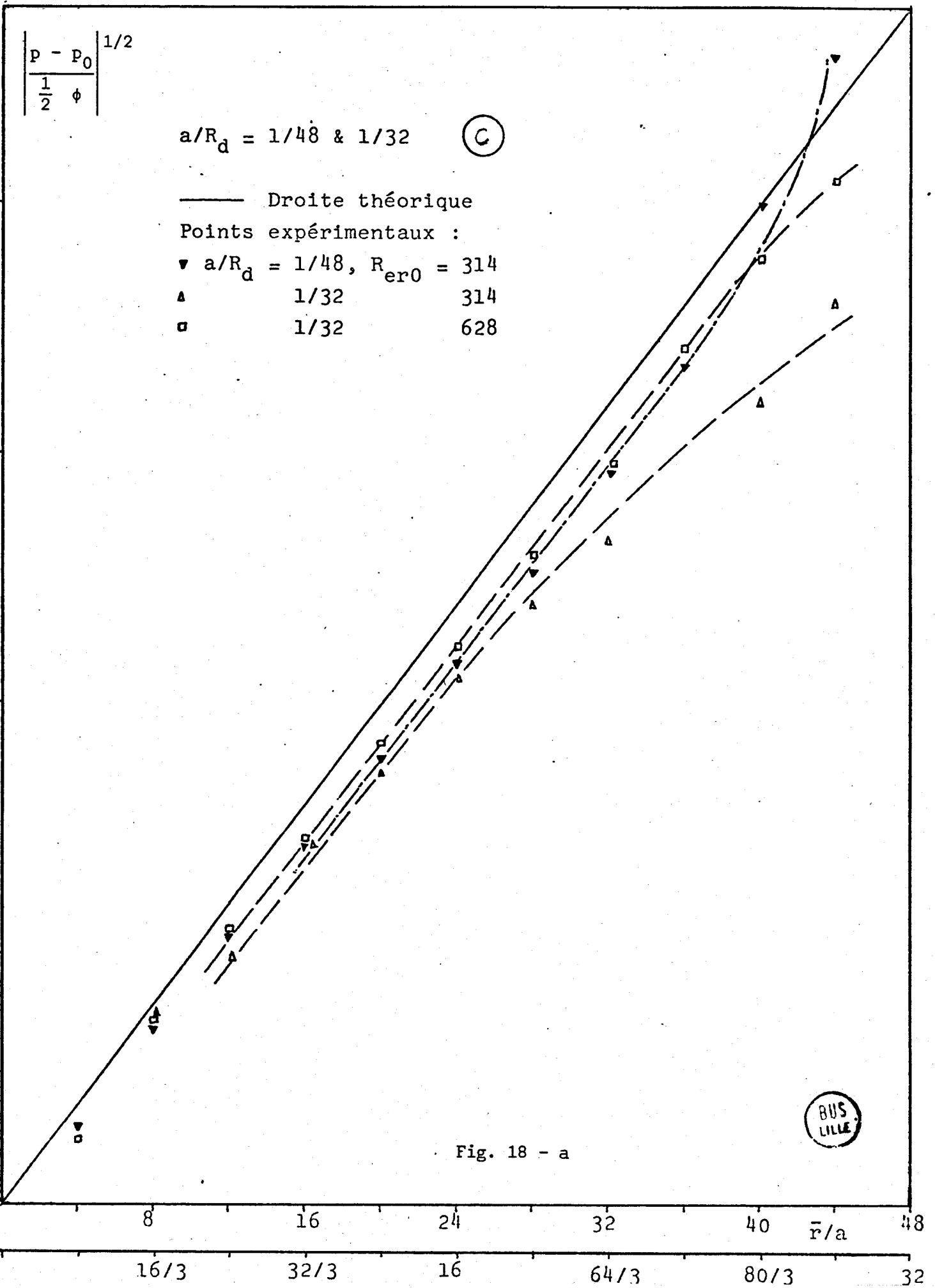


Fig. 18 - a

BUS LILLE

$$\left| \frac{P - P_0}{\frac{1}{2} \cdot \phi} \right|^{1/2}$$

$$a/R_d = 1/24$$

(C)

— Droite théorique

Points expérimentaux :

- $R_{er0} = 1256$
- ▼ 942
- 628
- 392
- △ 308

4 8 12 16 20 24 \bar{r}/a



Fig. 18 - b

$$\left| \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \phi} \right|^{1/2}$$

$$a/R_d = 5/96$$

(C)

— Droite théorique

Points expérimentaux :

▼ $R_{er0} = 1884$

□ 1570

○ 1256

16/5

32/5

48/5

64/5

16

\bar{r}/a

96/5

BUS
LILLE

Fig. 18 - c

$$\left| \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \phi} \right|^{1/2}$$

$$a/R_d = 1/16$$

(C)

— Droite théorique

Points expérimentaux :

- $R_{er0} = 2512$
- Δ 2198
- ▼ 1884
- ◻ 1570
- 1256, rég. I & II

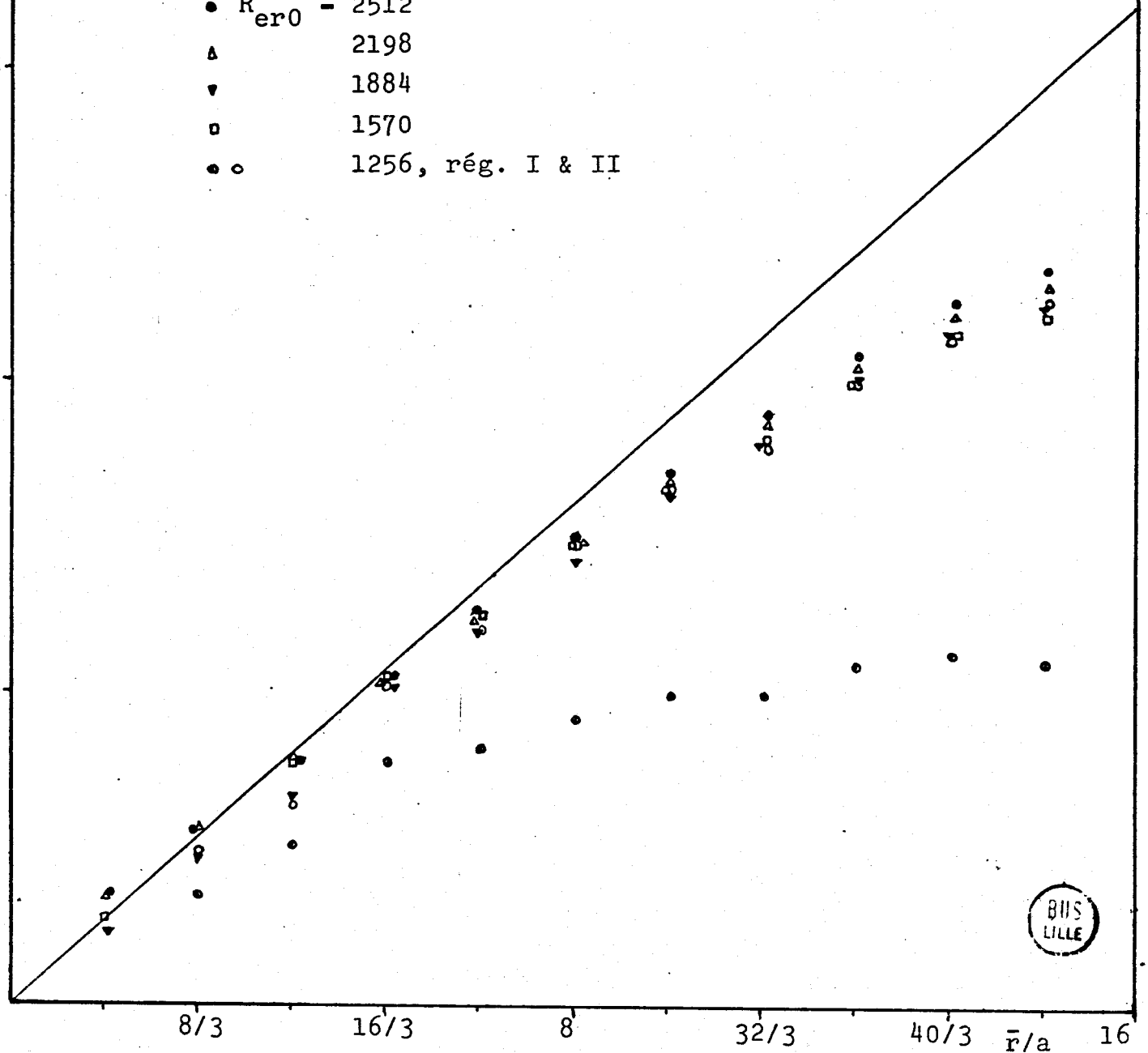


Fig. 18 - d

$$\left| \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \phi} \right|^{1/2}$$

$$a/R_d = 7/96$$

(C)

— Droite théorique

Points expérimentaux :

- ▷ $R_{er0} = 3768$
- 3140
- 2512
- ▼ 1884

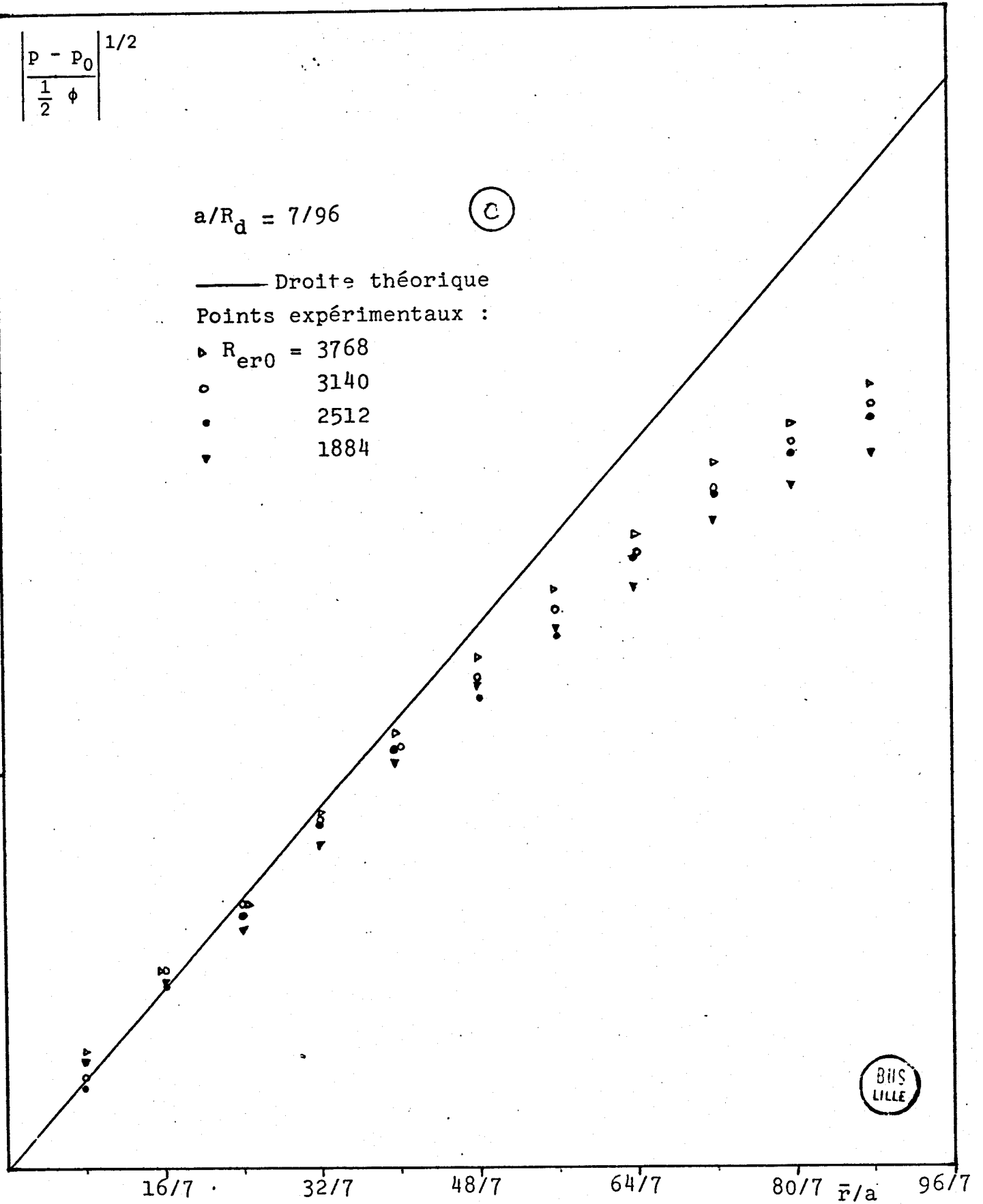


Fig. 18 - e

$$\left| \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \phi} \right|^{1/2}$$

$$a/R_d = 1/12$$

(C)

— Droite théorique
 Points expérimentaux :

- ▼ $R_{er0} = 5024$
 - 4082
 - ◻ 3454
 - ◊ 3140
 - ▽ 2826
- rég. I & II

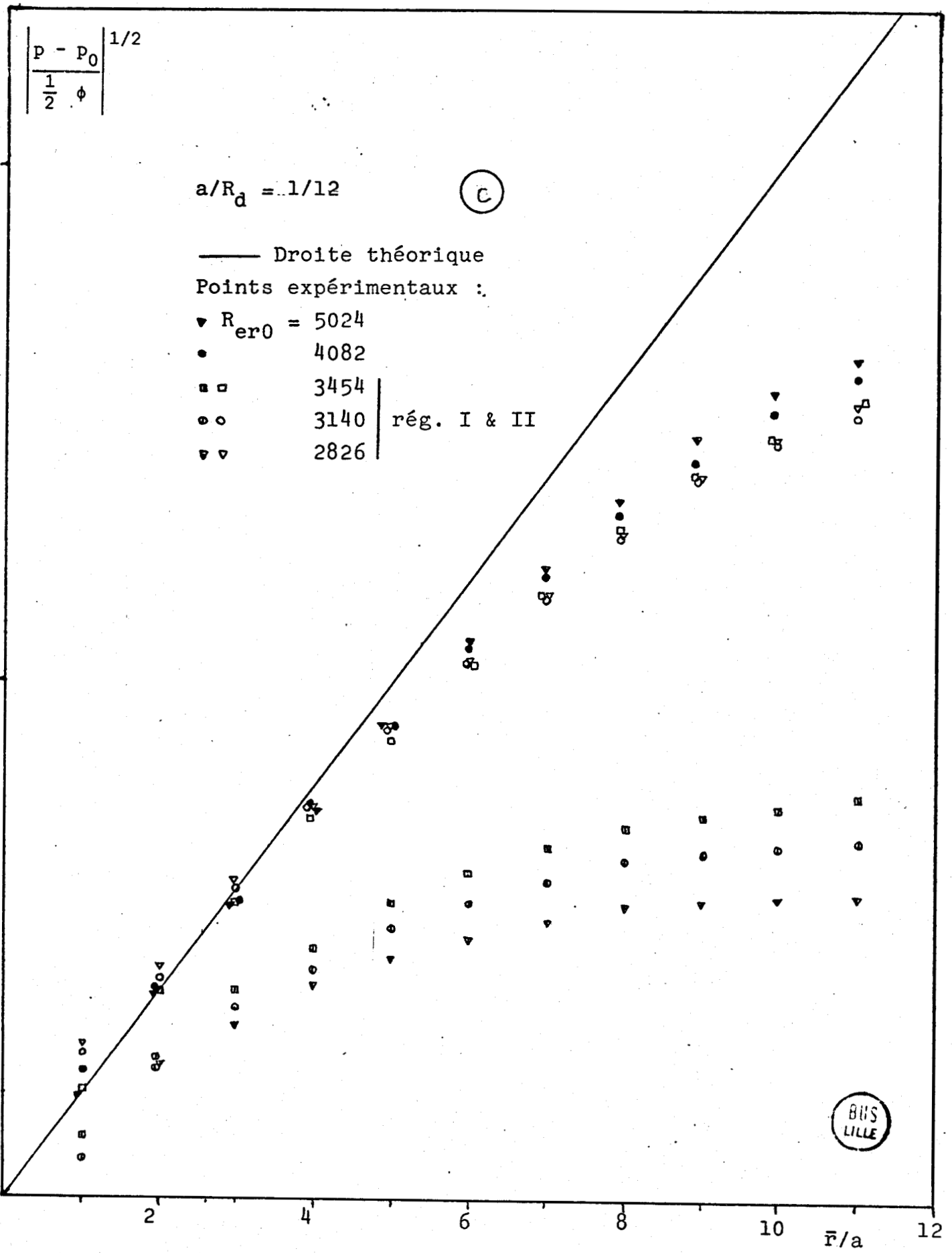


Fig. 18 - f

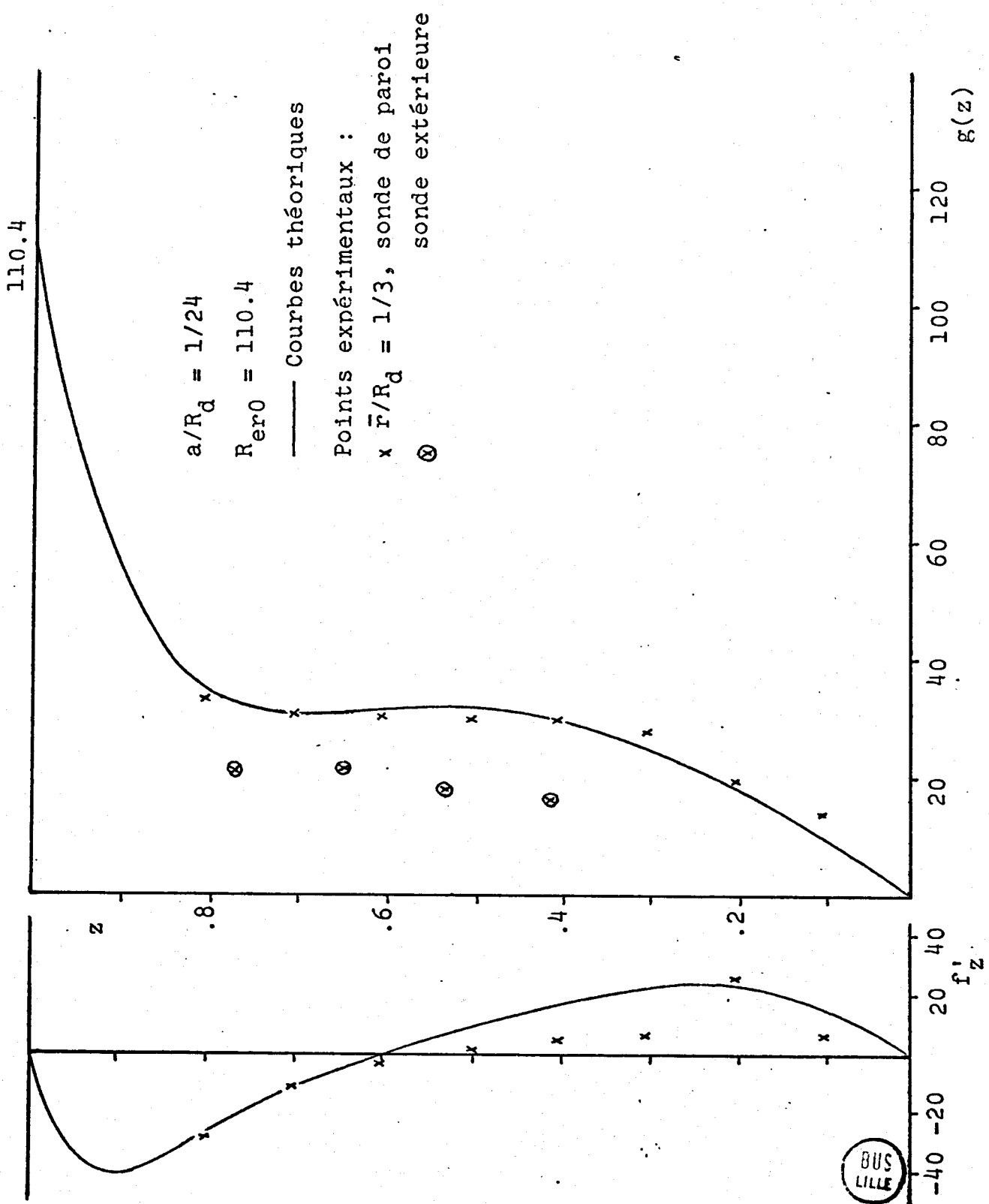
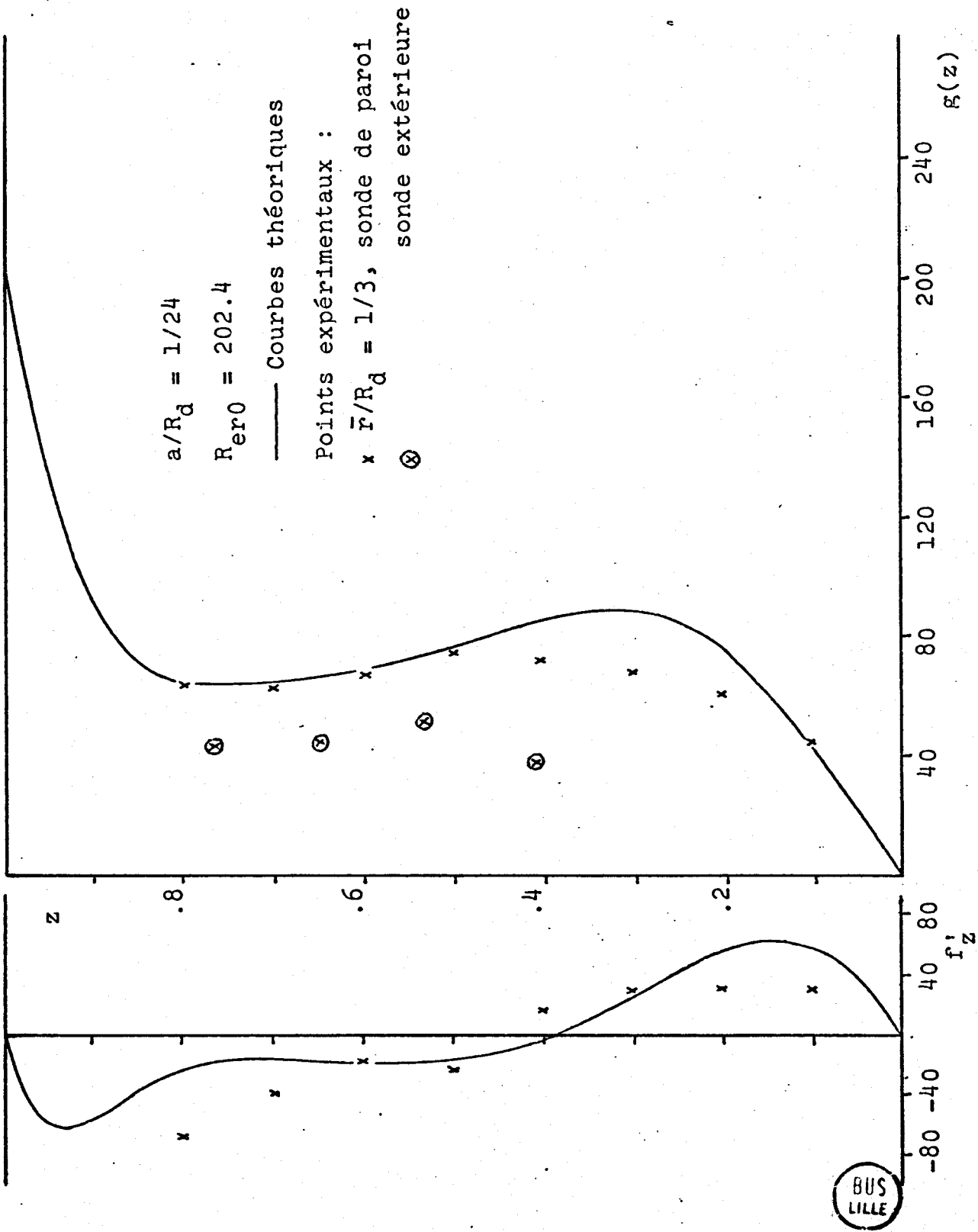


Fig. 19 - a





BUS LILLE

FIG. 19 - b

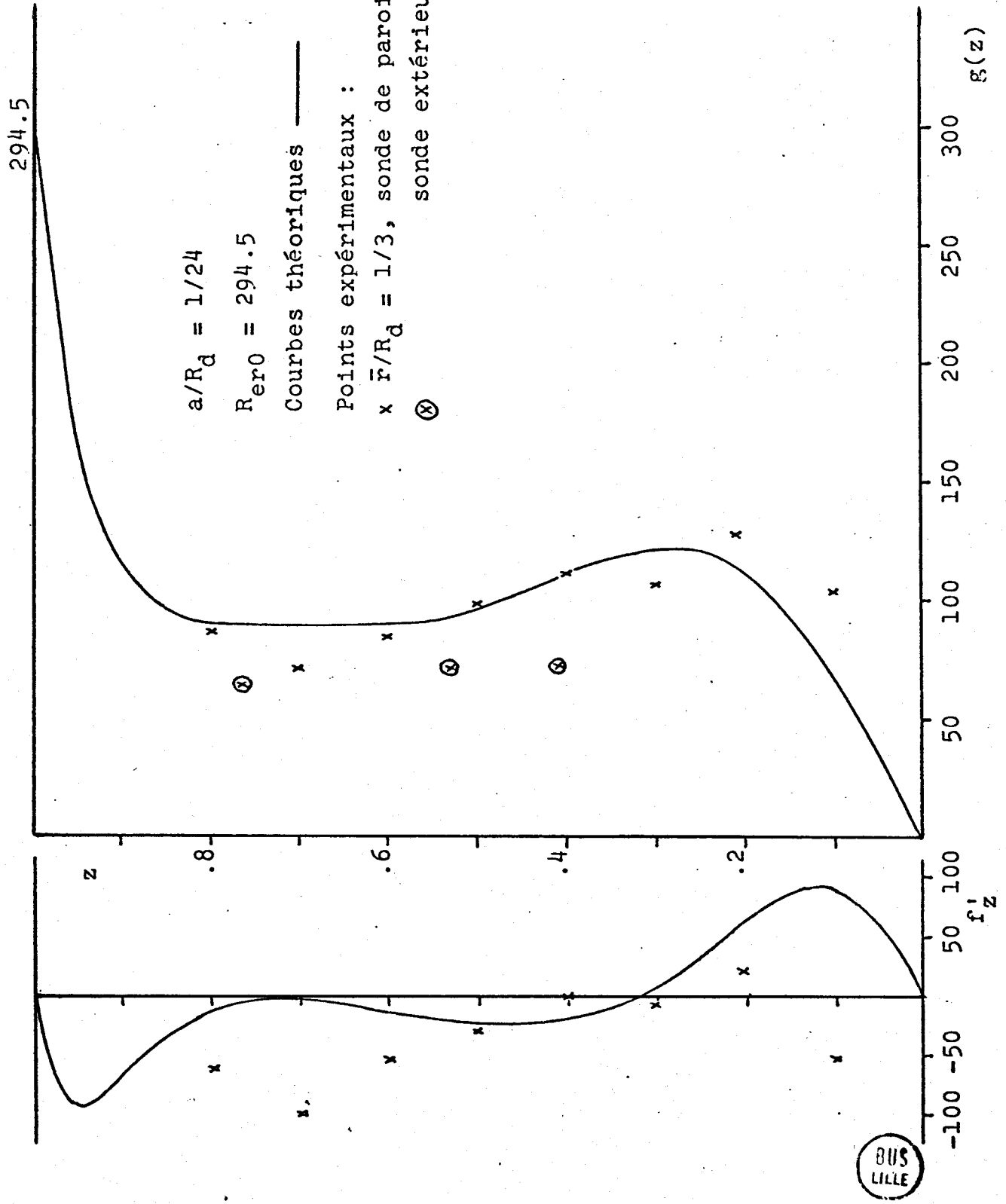


Fig. 19 - c

$a/R_d = 1/24$

$Re_{r0} = 404.9$

Courbes théoriques ———

Points expérimentaux :

x $\bar{r}/R_d = 1/3$, sonde de paroi
⊗ sonde extérieure

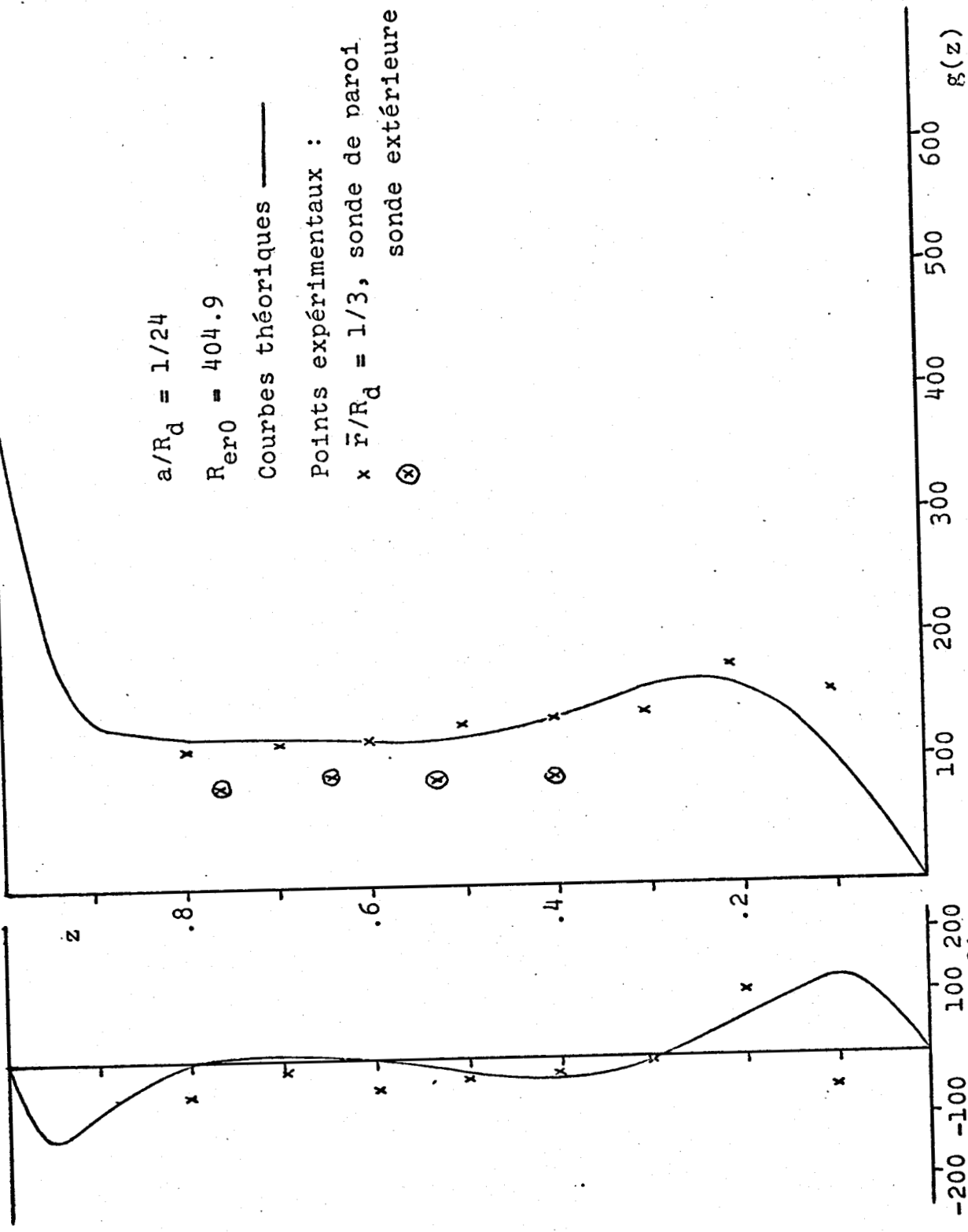


Fig. 19 - d



$a/R_d = 1/24; R_{er0} = 496.9$

— Courbes théoriques

Points expérimentaux :

- $\bar{r}/R_d = 1/4$ sonde de paroi
- x $1/3$
- + $1/2$
- ⊗ $1/3$, sonde extérieure

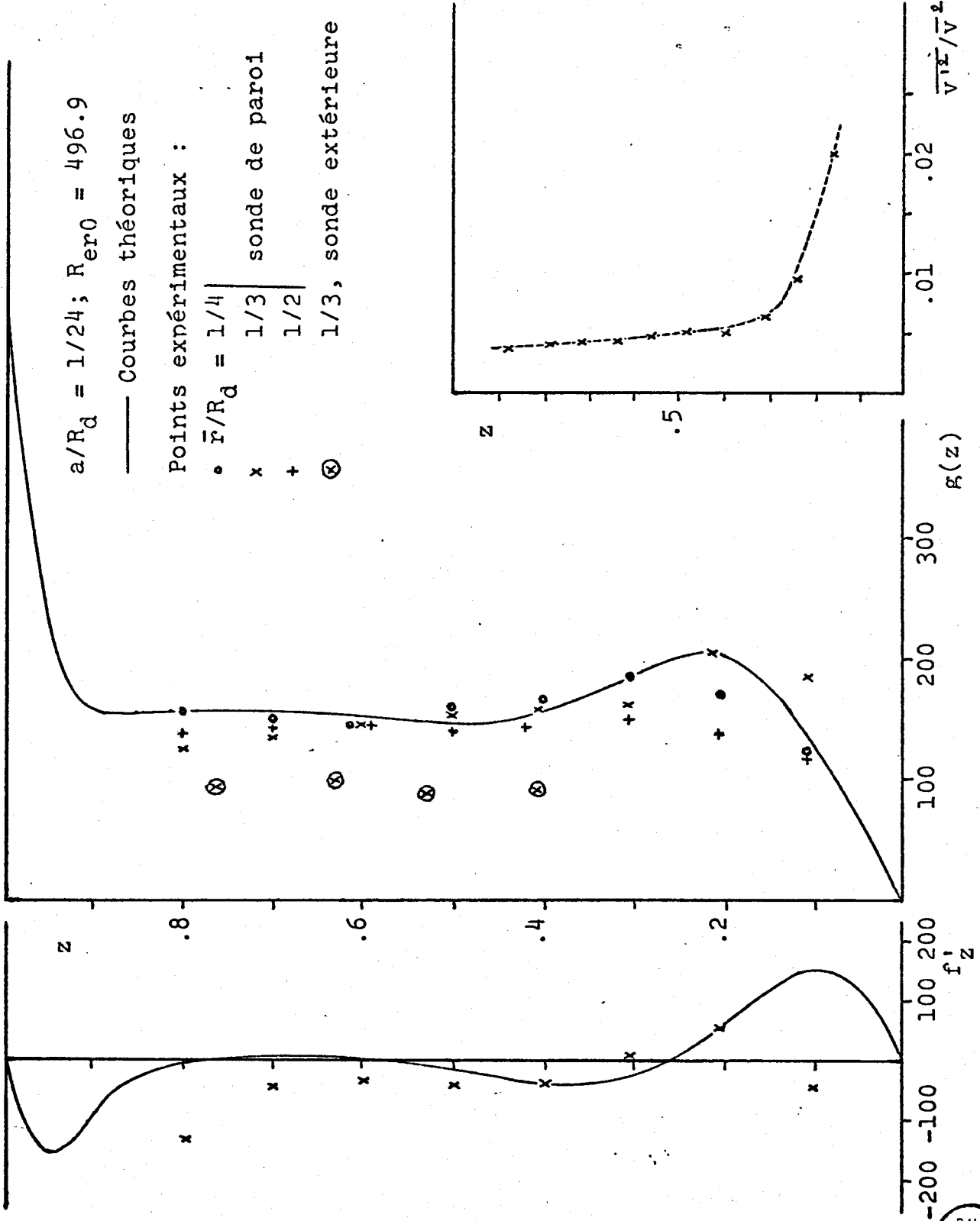


Fig. 19 - e



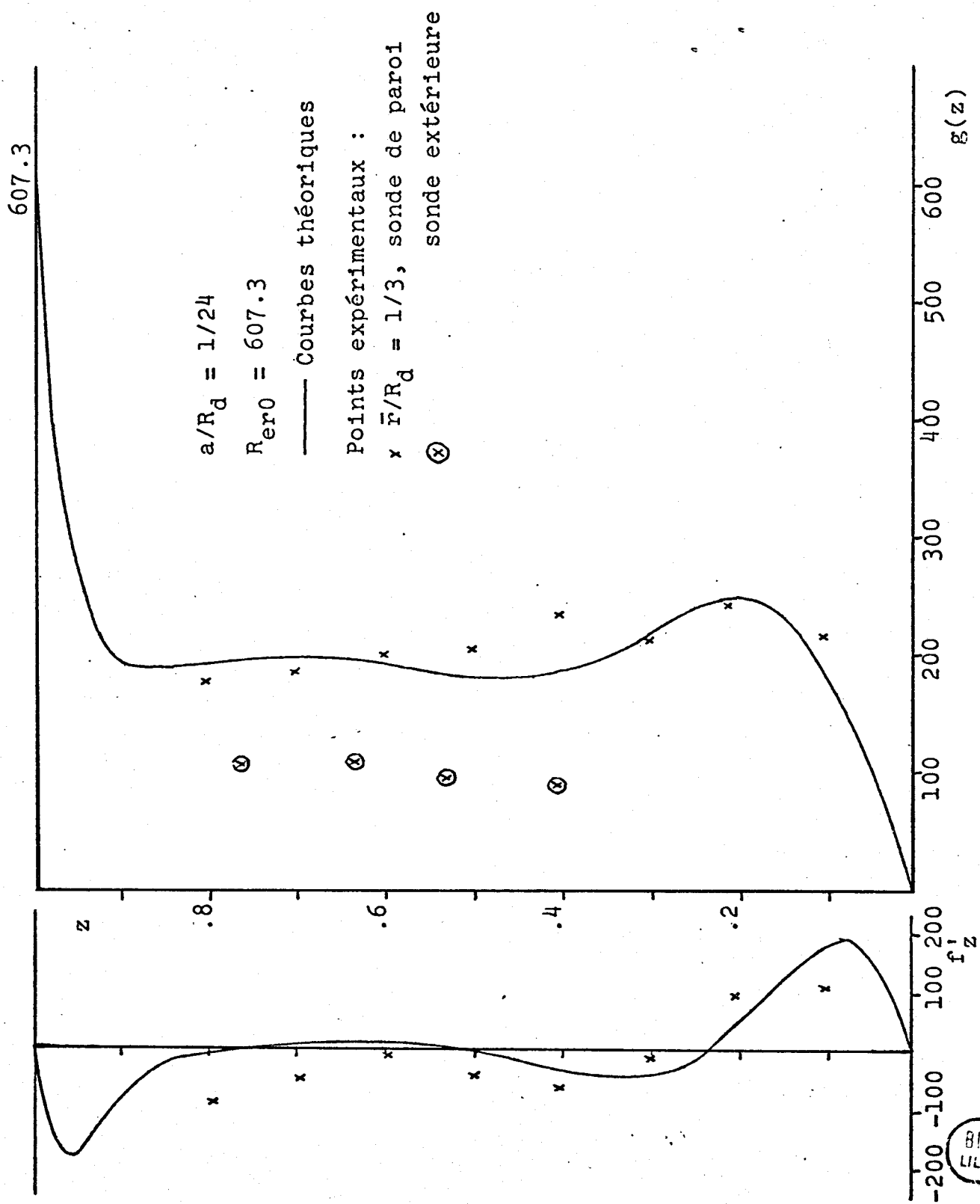


Fig. 19 - f



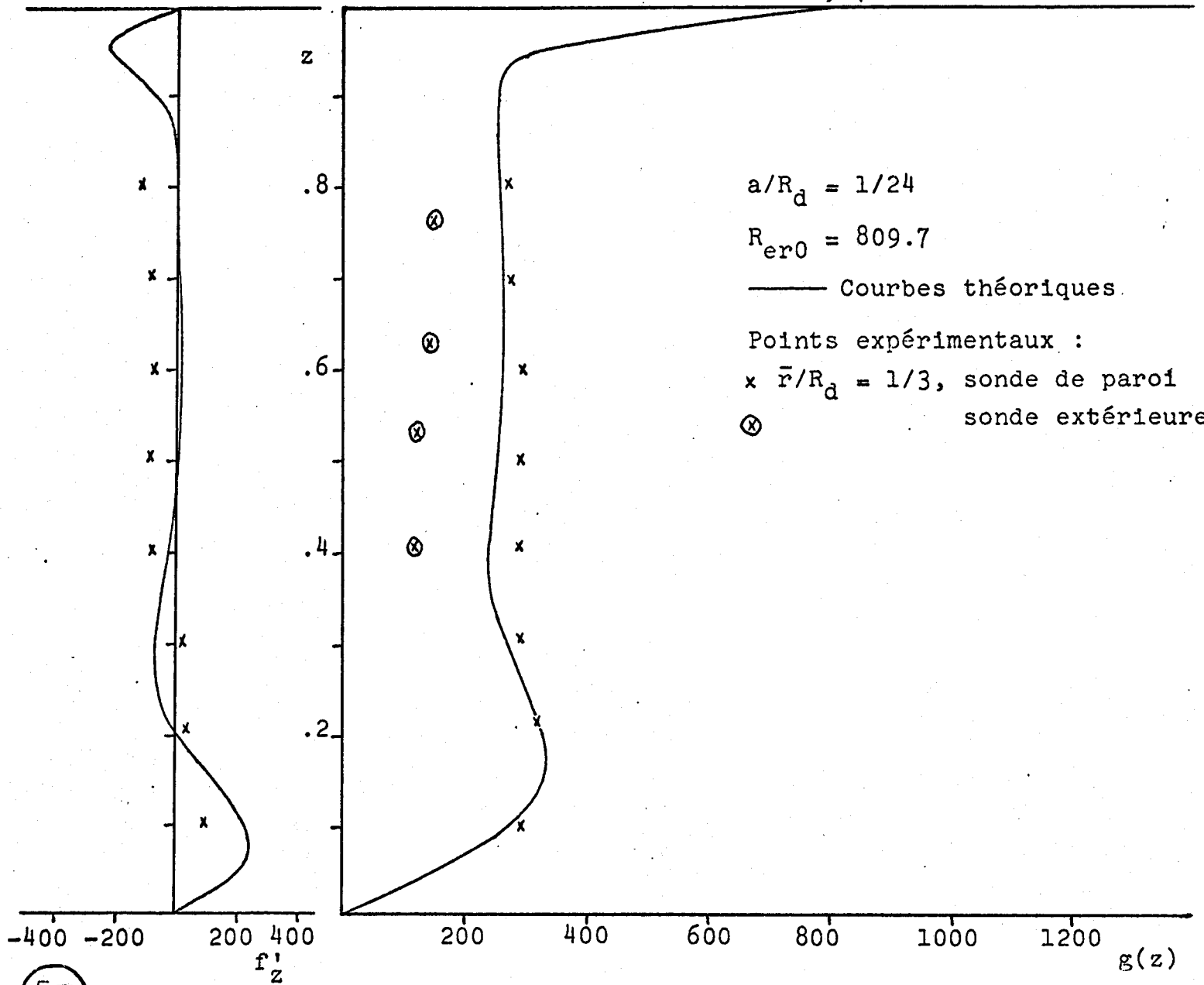
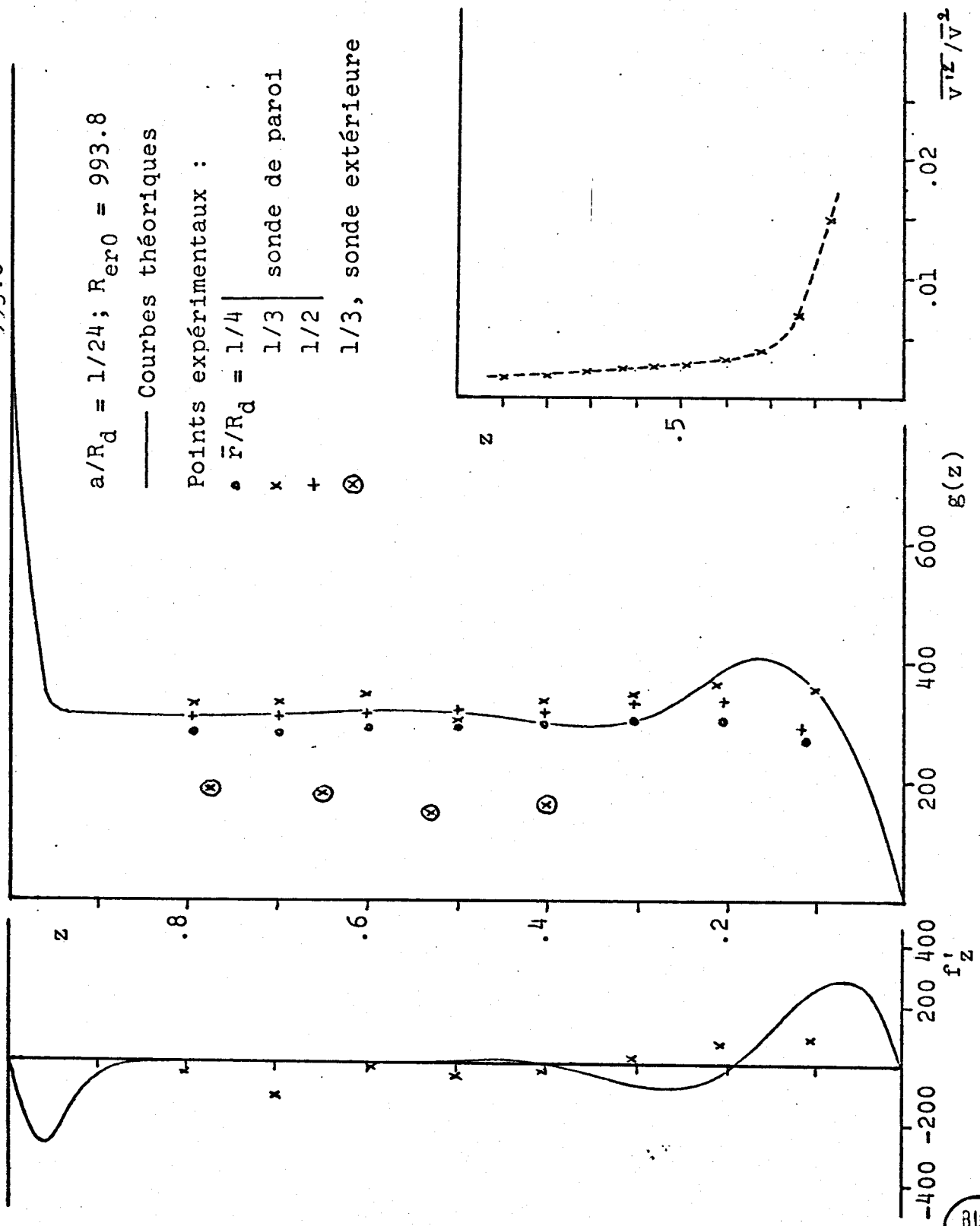


Fig. 19 - 9



BUS LILLE

Fig. 19 - h

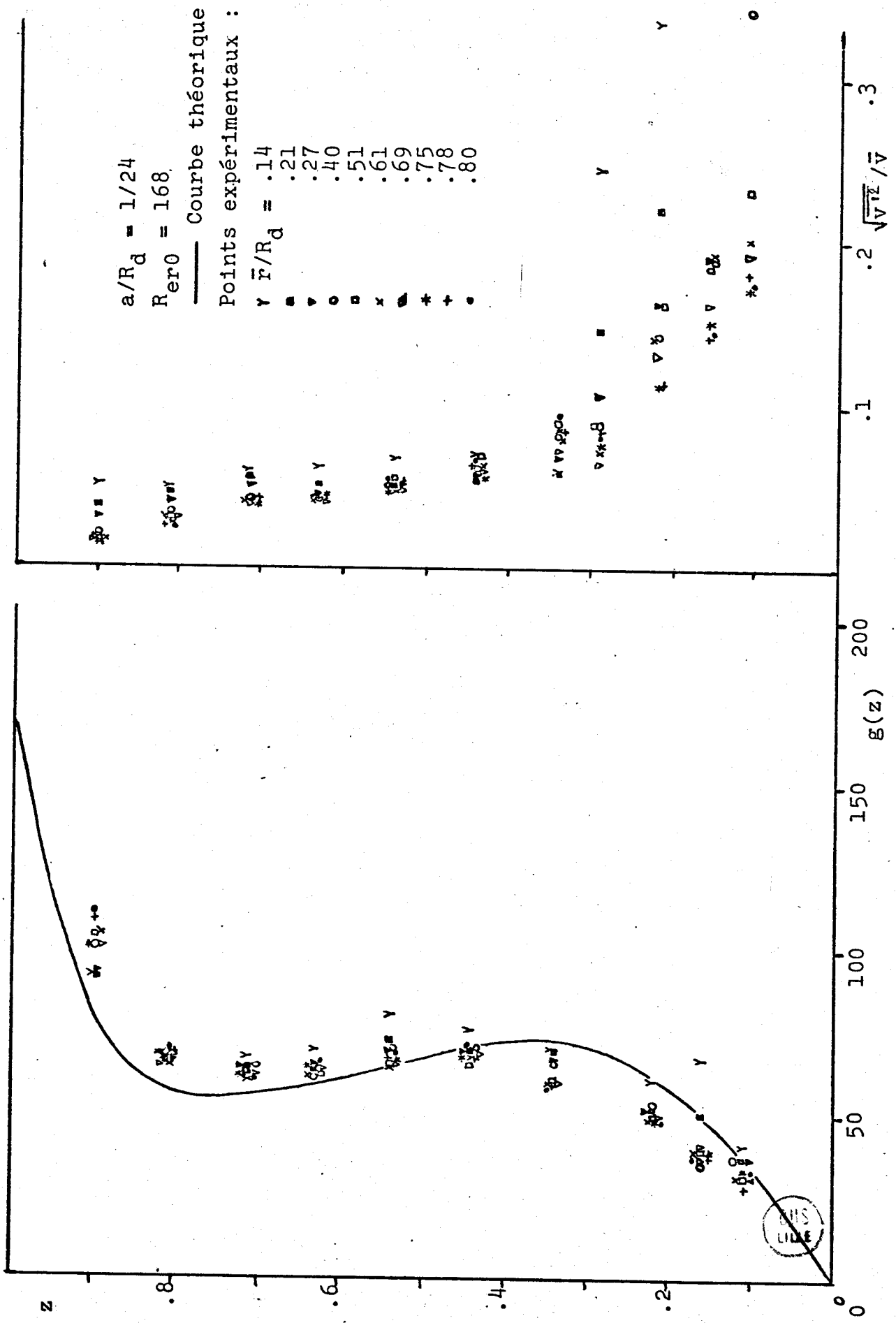


Fig. 20 - a

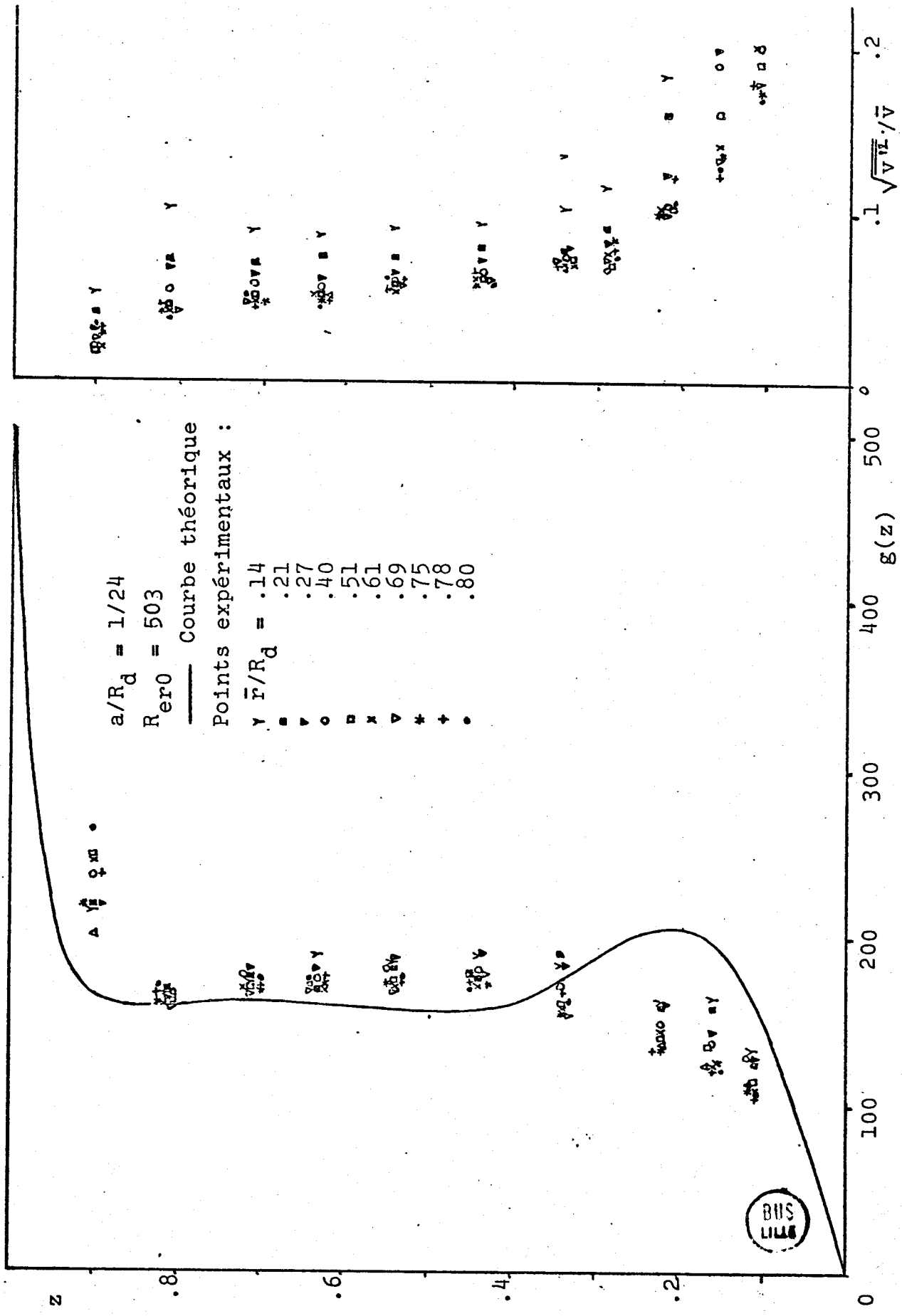


Fig. 20 - b

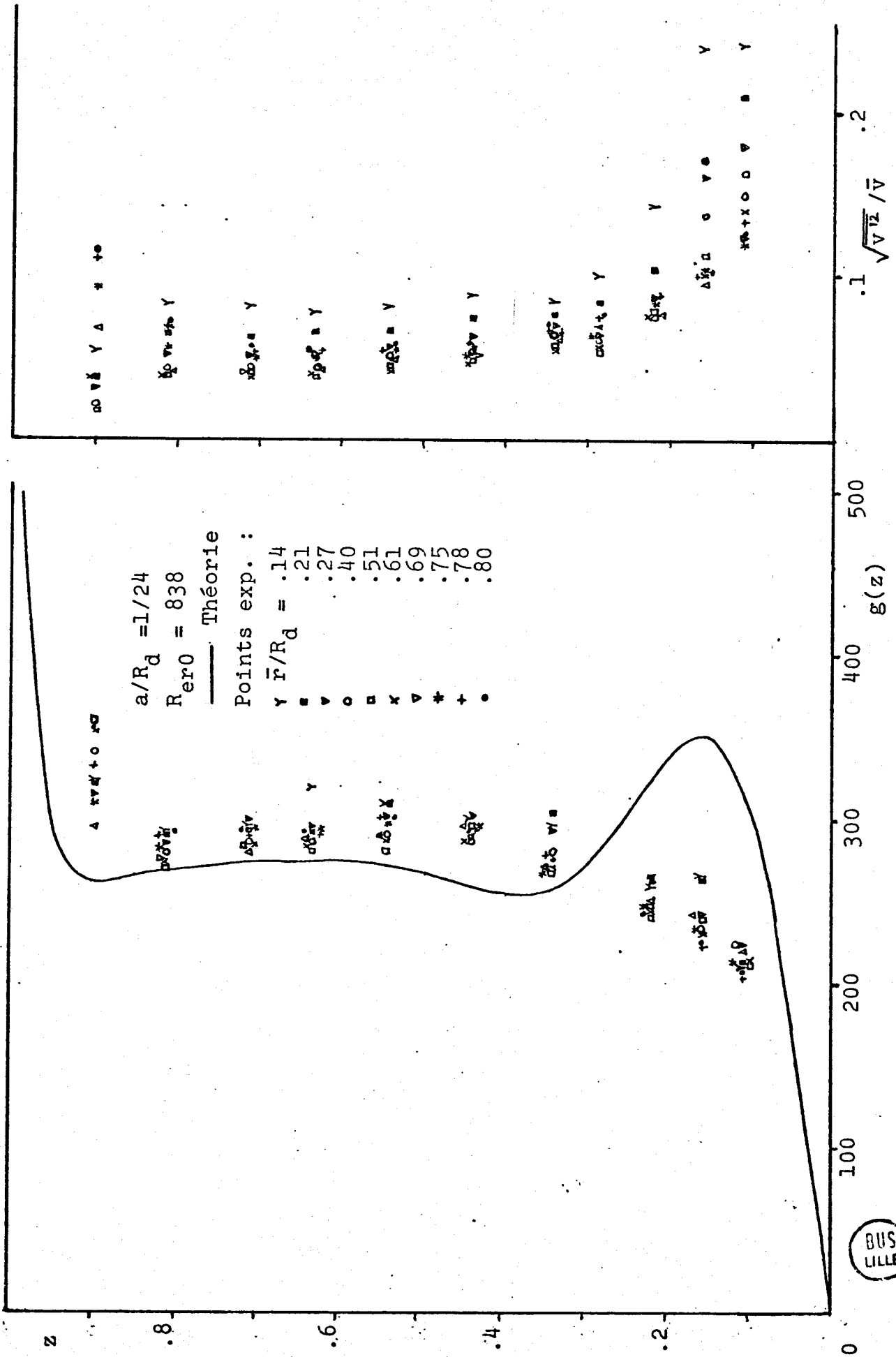


Fig. 20 - c

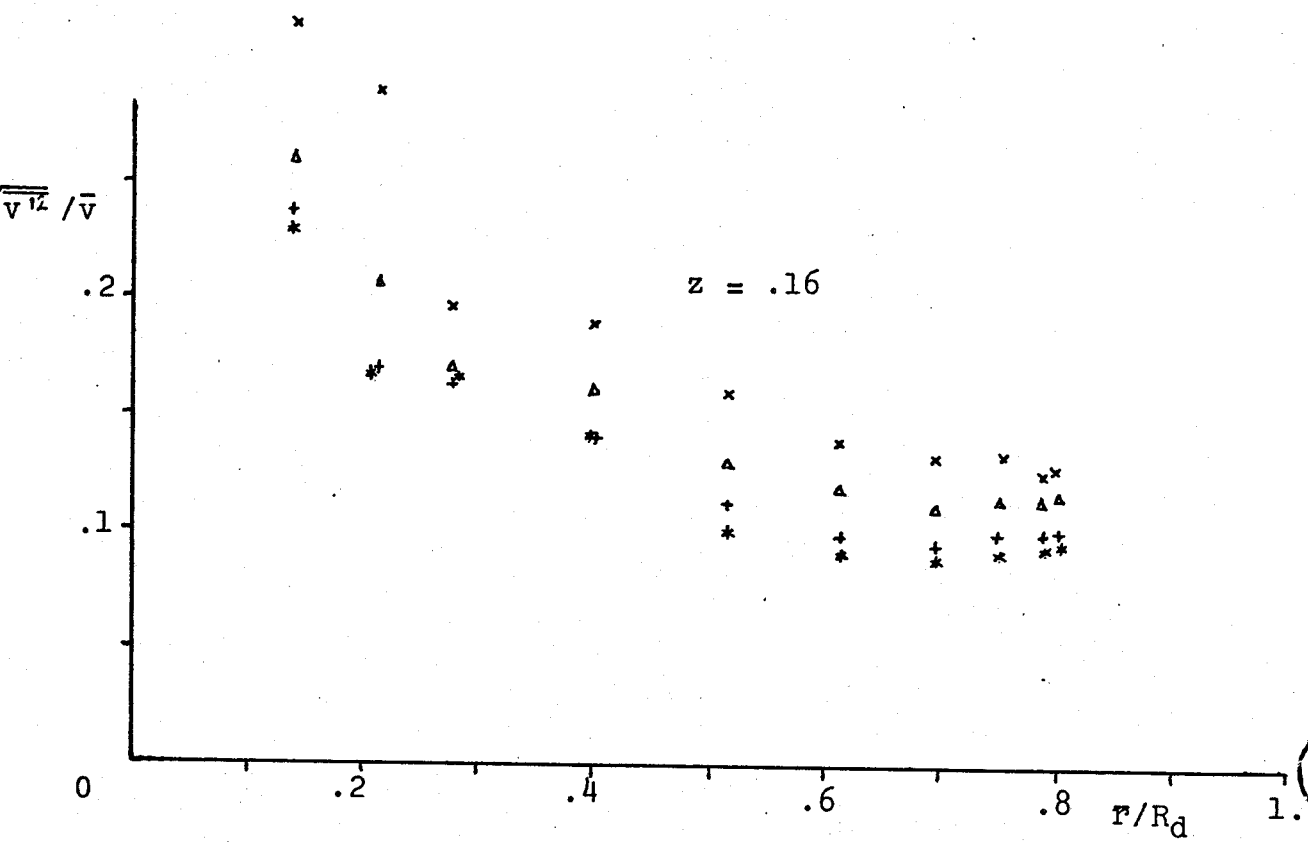
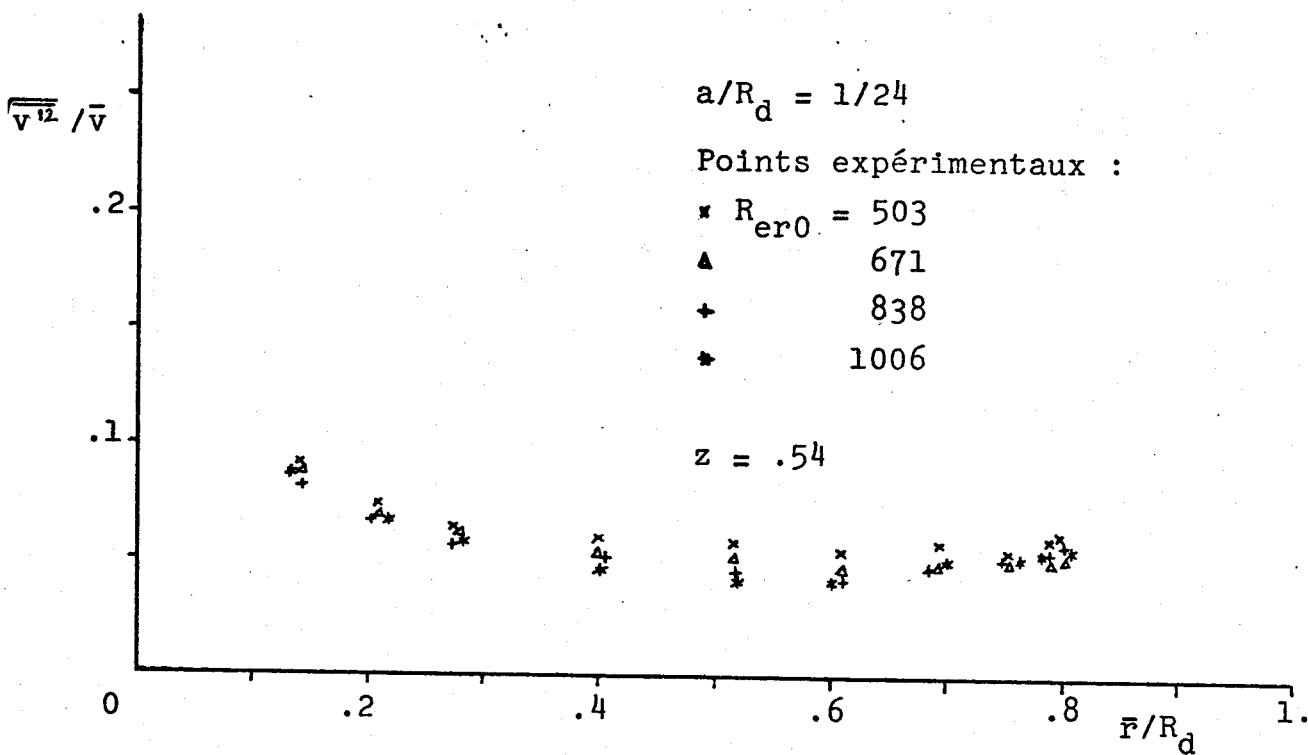
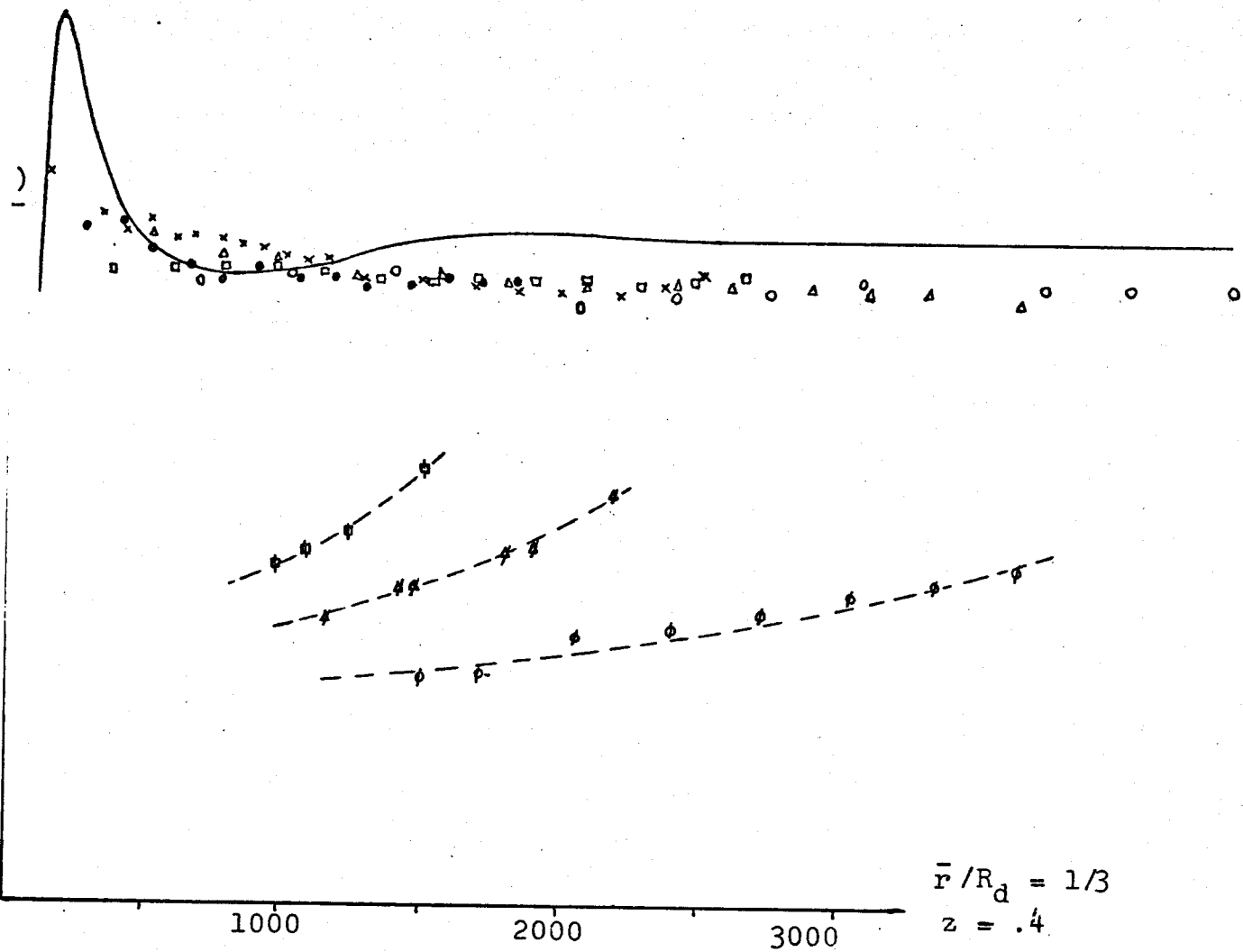


Fig. 21



— Théorie

Points exp. :

x $a/R_d = 1/24$

• 5/96

◻ 1/16

△ 7/96

○ 1/12

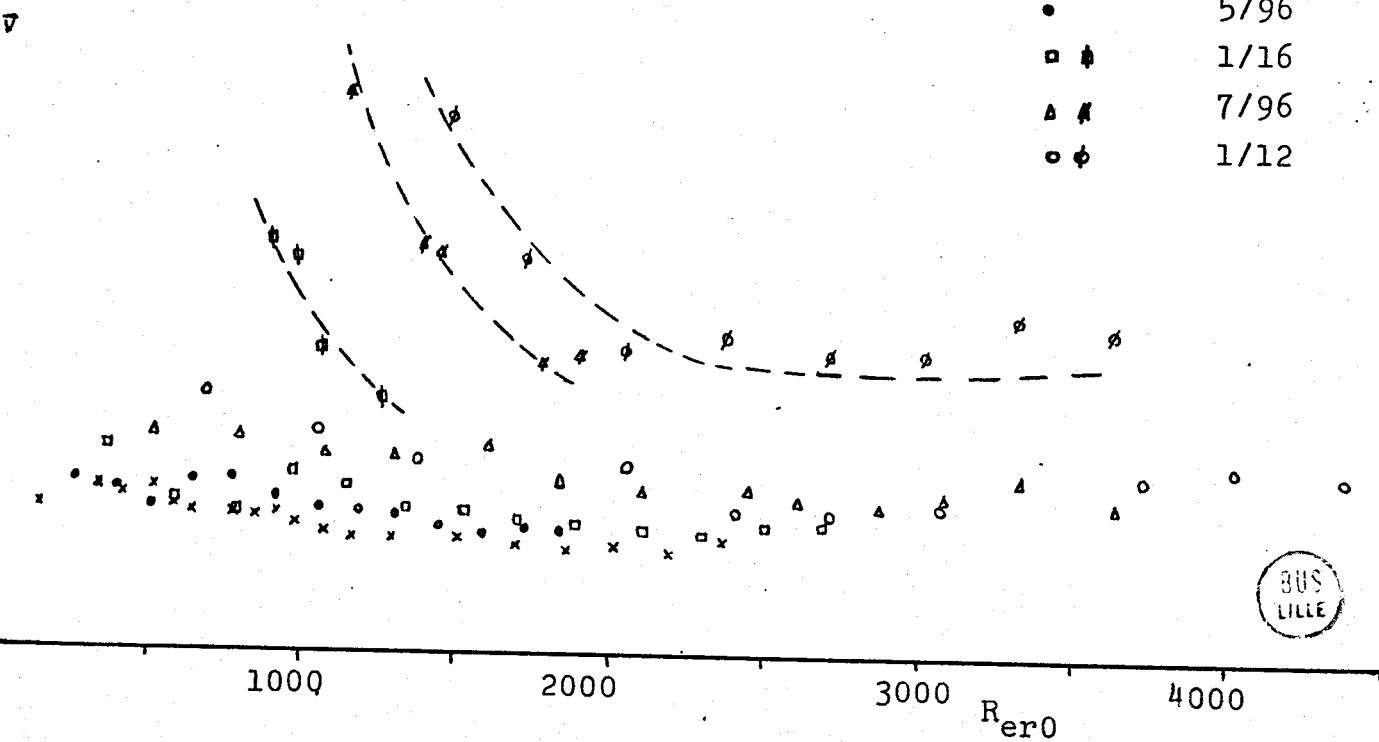


Fig. 22

Points expérimentaux :

○ $a/R_d = 4/96$ (1 seul régime)

× 6/96

+ 8/96 (2 régimes)

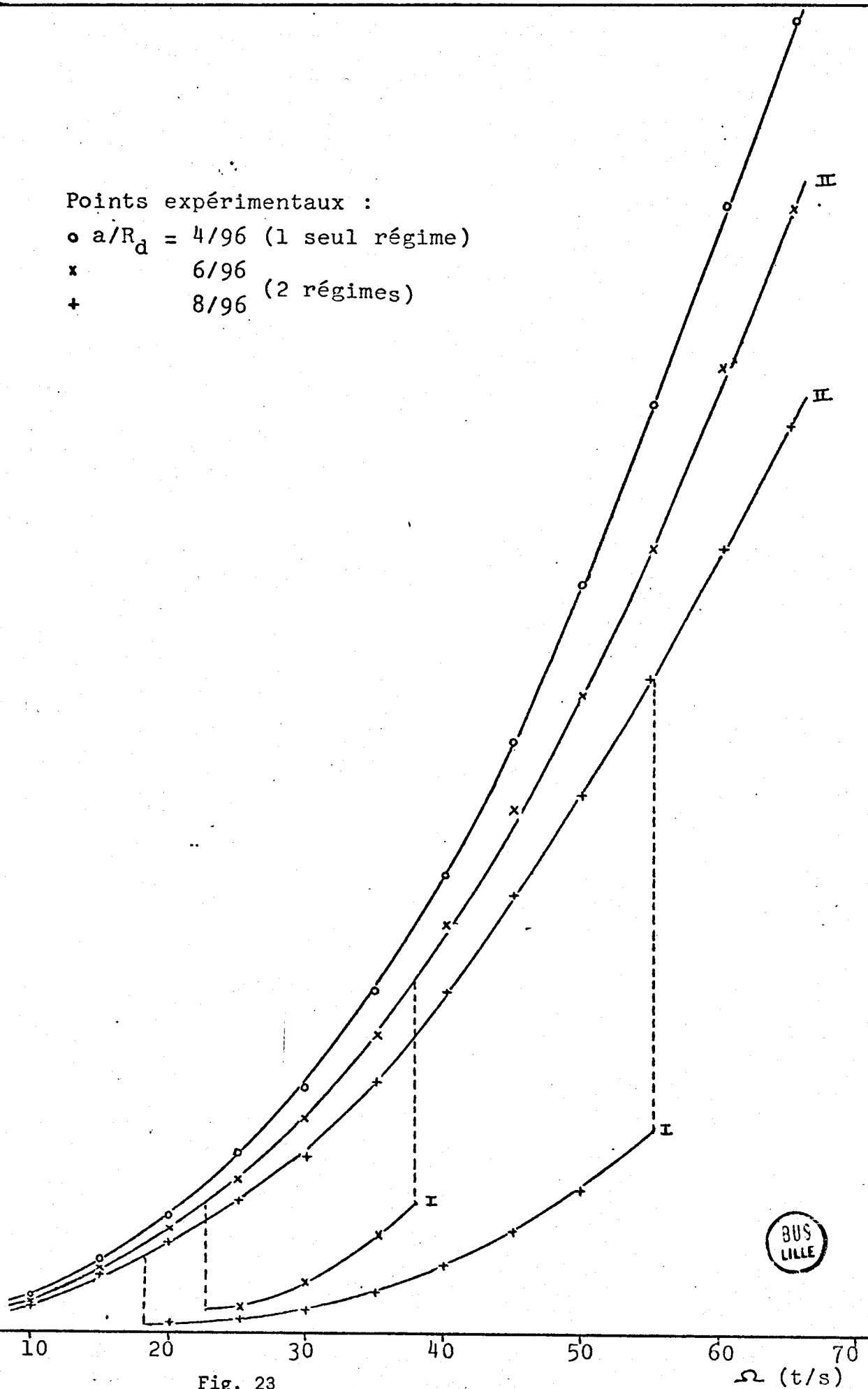


Fig. 23

Ω (t/s)

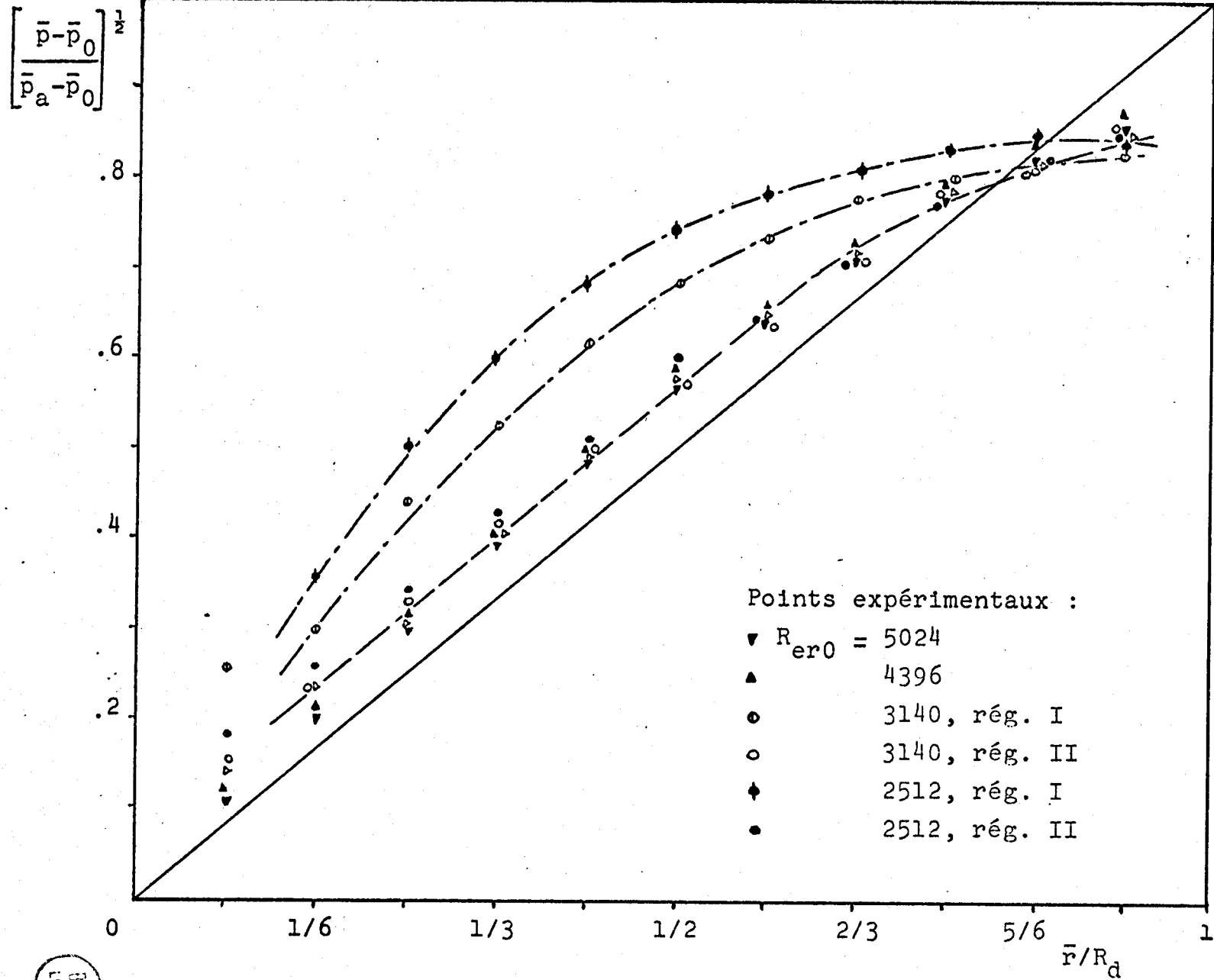


Fig. 24



$$a/R_d = 1/16; \bar{r}/R_d = .40$$

$$Re_0 = 1533$$

Théorie

Points exp. :

- configuration A
- △ B
- C rég. II
- ◇ C rég. I

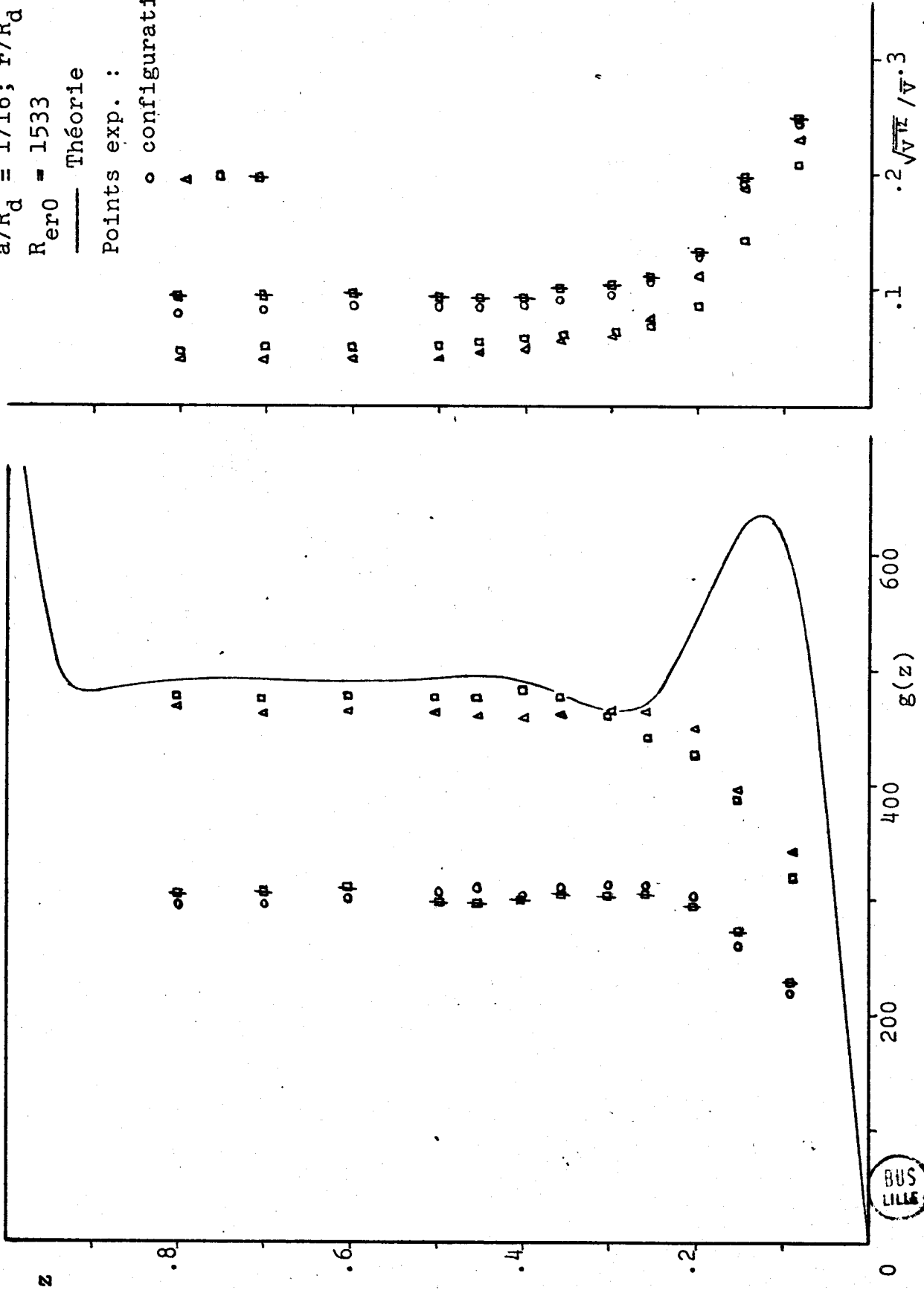


Fig. 25

$a/R_d = 1/16; R_{er0} = 1100$

— Courbe théorique

Points expérimentaux :

ϕ $\bar{r}/R_d = 1/4$, régime I
 o 1/4 II
 ϕ 1/2 I
 □ 1/2 II

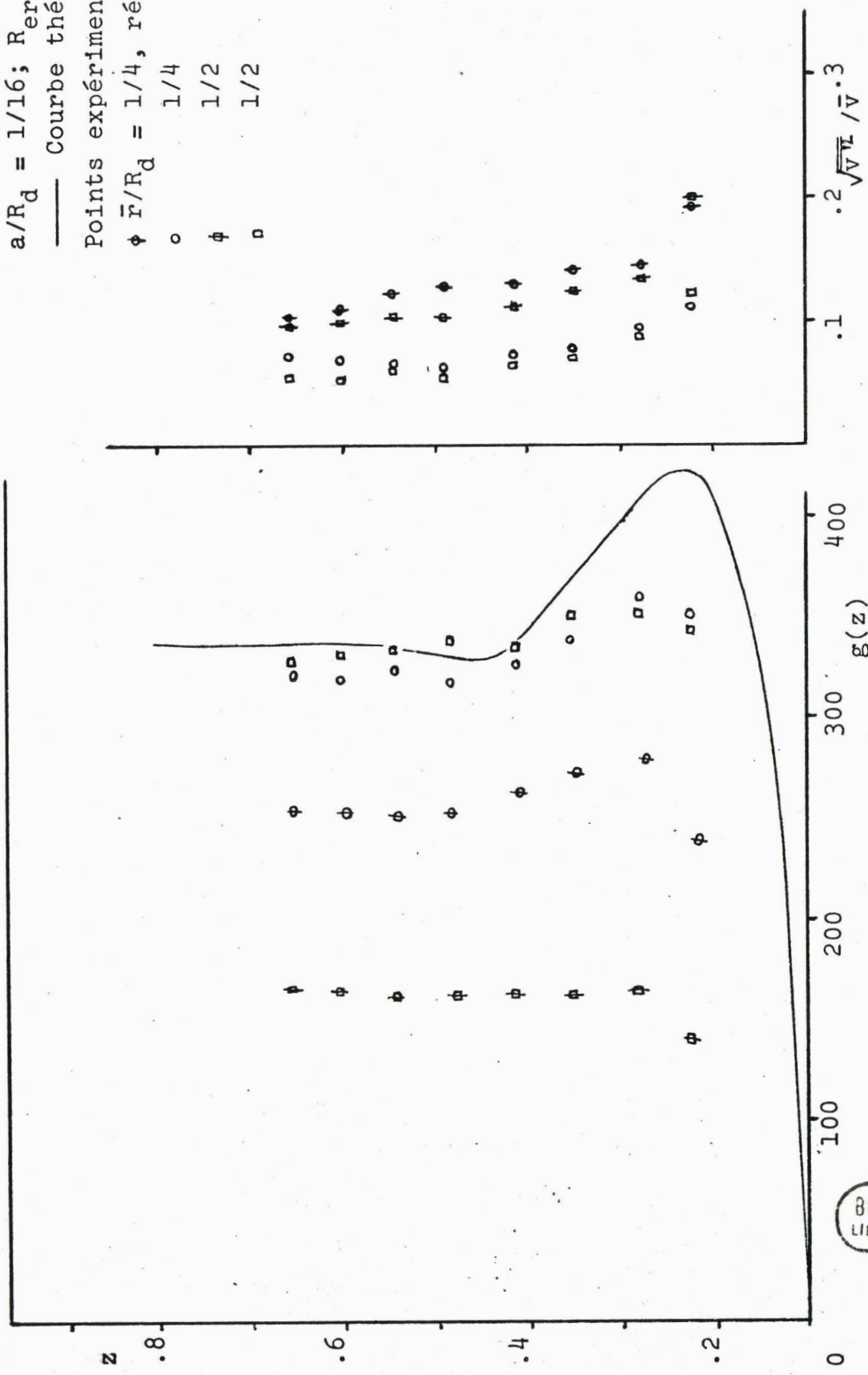


Fig. 26

