

50376
1976
80

50376
1976
80

THESE DE TROISIEME CYCLE

SPECIALITE MECANIQUE DES FLUIDES

présentée

**à l'Université des Sciences et Techniques
- Lille I -**

**et au Centre Universitaire de Valenciennes
et du Hainaut Cambrésis**

par

A. DESSEAUX



Sujet de la Thèse :

**« CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'ECOULEMENT INSTATIONNAIRE
D'UN FLUIDE REEL »**

Soutenu le 2 Juillet 1976 devant le jury composé de :

M. G. GONTIER	Président
M. R. ZEYTOUNIAN	} Examineurs
M. A. DYMENT	
M. DINH N. NGUYEN	Invité - Université Laval Quebec
M. P. FLORENT	Directeur du Travail et Rapporteur

Ce travail a été effectué sous la direction de Monsieur
le Professeur P. FLORENT.

Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance
pour les conseils, l'aide et les encouragements qu'il n'a cessé de
me prodiguer au cours de ma formation.

Je remercie vivement, Monsieur le Professeur G. GONTIER,
Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille,
Messieurs les Professeurs R. Kh. ZEYTOUNIAN et A. DYMENT, de l'Université
des Sciences et Techniques de Lille, et Monsieur le Professeur Dinh
N. NGUYEN, Professeur au Département de Génie Mécanique de l'Université
Laval à Québec d'avoir bien voulu accepter de juger ce travail.

Je remercie amicalement toutes les personnes des différents
laboratoires dans lesquels s'est déroulé ce travail, pour l'aide qu'ils
m'ont apportée et pour la bonne ambiance qu'ils ont su faire régner en
toutes circonstances.

Une attention plus particulière pour Monsieur TRONEL qui a pu
m'initier à l'informatique et le personnel du C.I.T.I. de l'Université
de Lille I, pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans la résolution des
problèmes numériques.

Je tiens à remercier Madame PÉTIAUX pour le goût et la
patience avec lesquels elle a réalisé la dactylographie et
Monsieur O. COTE du Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Université
Laval à Québec où ont été effectuées les expériences pour l'assistance
technique qu'il m'a apportée dans la réalisation de l'installation
expérimentale.

TABLE DES MATIERES

	Pages
CHAPITRE I	
TRAVAUX ANTERIEURS ET DONNEES THEORIQUES.	
I.1. TRAVAUX ANTERIEURS	1
I.1.1. Introduction	1
I.1.2. ARIURA /1/ et la théorie de la lubrification..	1
I.1.3. Ecoulement en fluide parfait /3/	3
I.2. ECOULEMENT EN FLUIDE REEL	5
I.2.1. Introduction	5
I.2.2. Remarques sur le domaine D	6
I.2.3. Hypothèses	7
I.2.4. Conditions	9
I.3. EQUATIONS GENERALES	11
I.3.1. Transformations des équations de NAVIER	12
I.3.2. Détermination du second membre de I.23	12
I.4. CAS LIMITES	13
I.4.1. Cas de la "viscosité infinie" ($R_e = 0$)	13
I.4.2. Cas du fluide "parfait"	15
CHAPITRE II	
DETERMINATION DE LA VITESSE PAR LA METHODE DES PREMIERS INSTANTS.	
II.1. METHODE D'APPROXIMATION	18
2.1.1. Linéarisation	18
2.1.2. Itérations successives	19

	Pages
II.2. DETERMINATION DE LA PREMIERE APPROXIMATION	21
II.3. DETERMINATION DE LA FONCTION $G(\eta)$	23
II.4. DETERMINATION DES INCONNUES AUXILIAIRES	24
 CHAPITRE III	
ETUDE NUMERIQUE.	
III.1. REMARQUES SUR LES CONDITIONS LIMITES	28
3.1.1. Formulation du problème	28
3.1.2. Résolution numérique de I.27	29
3.1.3. Points imaginaires	32
III.2. METHODE NUMERIQUE	33
III.3. REMARQUES	34
 CHAPITRE IV	
ANALYSE DES DIFFERENTS RESULTATS.	
IV.1. LA METHODE DES PREMIERS INSTANTS	39
IV.2. LA METHODE NUMERIQUE	40
IV.3. LA METHODE EXPERIMENTALE	42
 CHAPITRE V	
ANEMOMETRIE.	
V.1. THEORIE DES MESURES ANEMOMETRIQUES	44
5.1.1. Généralités	44
5.1.2. La conductivité thermique et la température	45
5.1.3. La loi de KING	47

	Pages
V.2. ETUDE DU FILM CHAUD DANS L'EAU	48
5.2.1. La dérive	49
5.2.2. La résistance des sondes	51
V.3. CORRECTION DES MESURES	52
5.3.1. Formulation générale	52
5.3.2. Discussion des simplifications classiques dans les cas de l'air et de l'eau	54
5.3.3. Analyse des corrections	55
V.4. INTRODUCTION D'UNE NOUVELLE METHODE DE CALIBRATION.	57
5.4.1. Généralités	57
5.4.2. Calibration au sein de la cuve d'essai. Limitations	58
V.5. CONCLUSIONS	60
CONCLUSION	62
REFERENCES	63
ANNEXE A	70
ANNEXE B	73
ANNEXE C	75
ANNEXE D	78
FIGURES	IV
PRINCIPAUX SYMBOLES	VI

LISTE DES FIGURES

- 1 } Modèle géométrique et système de coordonnées
 2 }
- 3 Organigramme
- 4 Grille de calcul
- 5 $t = 0,5 \text{ s}$ } Comparaison de conditions et de
 6 $t = 1 \text{ s}$ } formules aux différences finies
 7 $t = 1,5 \text{ s}$ }
- 8 Variation du profil de u_1 - influence de la viscosité
- 9 Influence du pas de calcul
- 10 Méthode des premiers instants - détermination du paramètre λ
- 11 $t = 0,5 \text{ s}$ } Comparaison des résultats analytiques,
 12 $t = 1 \text{ s}$ } numériques et expérimentaux.
 13 $t = 1,5 \text{ s}$ }
- 14 Variation du profil de u_1 : $t = 2, 2,5$ et 3 s
- 15 Variation du profil de u_1 : $t = 4$ et $4,5 \text{ s}$
- 16 Propriétés physiques comparées de l'eau et de l'air
- 17 Variation de la résistance (température et temps)
- 18 Etalonnage : représentation logarithmique
- 19 Représentation logarithmique ($T_a = 5,9^\circ \text{ C}$)

- 20 Variation de la tension en fonction de x_3
- 21 Variation de la tension à vitesse nulle et vérification de (5.22)
- 22 Variation de la tension en fonction de la surchauffe
- 23 $T_a = 11^\circ \text{ C}$ } Etalonnage de la sonde - Variation de la
- 24 $T_a = 19,7^\circ \text{ C}$ } température du fluide ambiant
- 25 Comparaison des formules de correction
- 26 Enregistrement de la tension - Variation de la période
- 27' Relation vitesse-tension
- 28 Comparaison de la vitesse théorique et de la vitesse mesurée par étalonnage

PRINCIPAUX SYMBOLES

a, b	quantité intervenant dans la loi de déplacement du piston $l_3(t) = a \cos 2 \pi \frac{t}{T} + b$
A(t)	fonction caractéristique de la pression
B(t)	fonction intervenant dans la composante u_3 de la vitesse
c_p	chaleur spécifique
d	diamètre caractéristique des sondes
E	énergie
f	fonction caractéristique de la vitesse (f (x;t))
g	accélération de la pesanteur
h	coefficient de transfert de chaleur
l	dimension de la cuve d'essai ou longueur de l'élément sensible d'une sonde
m	constante intervenant dans la détermination de la vitesse
M(x)	fonction intervenant dans le développement du potentiel ϕ
M	intervalle de temps réduit $M = \frac{2t}{T}$
n	puissance dans la loi de KING
N	nombre de pas d'intégration (numérique) ou constante inconnue
p	pression ou valeur de f à l'instant antérieur ($p_{j+1} = f_j$)
P	force totale sur le piston
r	constantes du développement de u_1

VII

R	résistance de la sonde
t	temps
T	période
T(t)	fonction intervenant dans le développement du potentiel ϕ
u	composante de la vitesse \vec{U}
x	distance le long des axes de coordonnées
V	tension
V _v	volume de fluide $V = 2l_1 l_2 \Delta l_3$
Z	pas d'intégration $Z1 = 1/(N+1)$
Nu	nombre de NUSSELT = hd/k
Re	nombre de REYNOLDS = Ud/ν
Gr	nombre de GRASHOF = $\mu c_p/\nu$
Pr	nombre de PRANDTL = $(T_f - T_a) g \rho^2 d^3 \beta/\mu^2$
γ	rapport des nombres de PRANDTL = Pr_m/Pr_e
ε	écart relatif de la température ambiante
ϕ	potentiel des vitesses en fonction de variables discrètes $\phi_1(f_1, f_2, f_3)$
η	rapport de chauffage η_a ou variable réduite $x_3/2\sqrt{vt}$
ν	viscosité cinématique
μ	viscosité dynamique

VIII

ρ	masse volumique
ξ	rapport des viscosités ν_m/ν_e ou variable réduite $x_3/\ell_3(t)$
λ	rapport des constantes r_o/r_1 dans l'expression analytique de u_1
σ	écart relatif de température
χ	rapport des conductivités k_m/k_e
τ	tension de frottement à la paroi

INDICES

(·)	indice relatif à une dérivation par rapport au temps
(')	... dérivation par rapport à x_3 ou η
() _{,1}	... dérivation par rapport à x_1
() _a	... au fluide ambiant
() _e	... à un étalonnage ou à une mesure immuable ou à l'écoulement extérieur
() _f	... sonde en fonctionnement
() _g	... au développement de la fonction f (recherche de la vitesse)
() _i	... aux axes de coordonnées ou à l'espace $f_i = f(Z = i \Delta Z)$
() _j	... au temps $f_j = f(M = j \Delta M)$
() _m	... mesure expérimentale
() _o	... point de coordonnée nulle ou température de référence (0°C)
() _p	... piston

INTRODUCTION

De nombreux problèmes de couche limite ont été introduits par l'étude des phénomènes déduits de la technologie. On peut citer en exemple le cas de l'écoulement entre deux dents d'engrenage (/1/ et /3/) ou l'écoulement dans une butée fluide (/18/). Les travaux que nous présentons dans ce mémoire portent sur un écoulement instationnaire d'un fluide visqueux entre deux parois parallèles dont l'une est animée d'un mouvement dans une direction normale à son plan. Cette étude fait suite aux travaux de ARIURA (/1/).

Chronologiquement, le problème a été étudié en deux phases. Tout d'abord, sur le dispositif expérimental que nous avons construit au département de Génie Mécanique de l'Université Laval, nous avons exploré finement, en mesures moyennes, la couche limite qui se développe au-dessus de la plaque fixe. Nous avons ensuite mis au point une méthode de mesure pour répondre à nos besoins : les vitesses, sur la paroi considérée, sont inférieures à 40 cm/s et les mesures ne doivent pas varier avec la température de l'eau, fluide que nous avons utilisé dans notre modèle. Cette étude est un complément aux travaux entrepris sur l'étude systématique des transferts de chaleur parasites en anémométrie (/26/) et a fait l'objet d'une publication partielle (/13/).

La seconde phase de ce problème a consisté en la recherche de solutions analytiques et numériques que nous présentons aux chapitres II et III.

Les exemples les plus communs de couches limites stationnaires sont ceux induits par des écoulements ou périodiques ou initialement au repos. Nous nous sommes intéressés à la seconde de ces classes et nous avons cherché, dans notre cas particulier, une solution semi-similaire : la vitesse normale à la paroi ne devant dépendre que d'une seule variable spatiale. Cette hypothèse de départ permet, par extrapolation, sans hypothèses abusives de connaître et vérifier les écoulements, dans le même modèle, des types lubrification (/1/) ou fluide parfait (/3/). La résolution analytique a fait appel à la méthode "des premiers instants" tandis que pour la résolution numérique, nous avons employé la méthode de NEWTON. Dans l'un et l'autre cas, les résultats groupés au chapitre IV montrent une bonne concordance avec les résultats expérimentaux et prouvent, de ce fait, la véracité de notre hypothèse de semi-similarité.

CHAPITRE I

TRAVAUX ANTERIEURS ET DONNEES THEORIQUES

I.1. TRAVAUX ANTERIEURS

I.1.1. Introduction

Considérons un parallélépipède rectangle fermé sur quatre côtés, tel que le plan de symétrie longitudinal porte les axes de référence Ox_1 et Ox_3 (fig. 1). Par raison de symétrie, nous n'utiliserons que le domaine D ($x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$) en remplaçant le plan $Ox_2 x_3$ par une paroi fixe. Lors du déplacement de la surface $x_3 = \ell_3(t)$, le fluide est éjecté au travers de la surface $x_1 = \ell_1$.

Notre but est de donner les caractéristiques de la couche limite qui se développe sur le plancher $x_3 = 0$ en nous limitant à la zone II (fig. 2) où l'influence des parois $x_2 = \pm \ell_2$ peut être supposée négligeable.

I.1.2. ARIURA/1/ et la théorie de la lubrification

Nous trouvons en /1/ une étude de la perte de puissance dans les engrenages. Recherchant à décrire analytiquement ces pertes Y. ARIURA et al. ont schématisé les deux dents d'engrenage en prise par une forme parallélépipédique. A partir des équations de NAVIER :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} \right)$$

et de l'équation de continuité

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

ARIURA considère un écoulement laminaire, permanent, tel que les forces d'inertie et de gravité soient négligeables vis-à-vis des forces de pression et de celles dues à la viscosité. Ceci permet de négliger le premier membre des équations de NAVIER. Les auteurs négligent en plus u_3 devant u_1 et u_2 ainsi que les variations de ces dernières composantes sauf les gradients dans la direction normale (Ox_3). Ainsi, en appliquant toutes les simplifications de la théorie de la lubrification, dont la quasi-stationnarité, l'on aboutit aux équations de REYNOLDS /2/

$$I.01 \quad a) \quad \frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}$$

$$b) \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$$

$$c) \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}$$

Avec des hypothèses complémentaires, ARIURA se sert de la première équation uniquement et remplace le gradient $p_{,1}$ par la dérivée totale dp/dx_1 (écoulement unidirectionnel; la pression est invariante au travers du film visqueux).

On remarquera que l'on obtient aussi ces équations de REYNOLDS en supportant simplement que le champ de vitesse bidimensionnel ne dépend que de la variable x_3 :

$$\vec{U} = \vec{U}(u_1, u_2) = \vec{U}(u_1(x_3); u_2(x_3))$$

Alors la résolution de l'équation (I;01) permet de calculer la force totale qui s'exerce sur la moitié du canal

$$I.02 \quad P = 2 l_2 \int_0^{x_1} p dx_1 = - 8 \mu l_2 \left(\frac{x_1}{l_3}\right)^3 \frac{dl_3}{dt}$$

En considérant le problème sous l'angle de la quasi-stationnarité, on en déduit l'énergie nécessaire à l'évacuation du lubrifiant :

$$I.03 \quad E = \int_{\ell_3(t_1)}^{\ell_3(t_2)} P. d\ell_3$$

I.1.3. Ecoulement en fluide parfait /3/

Considérant le même modèle géométrique, DESSEAUX-LABOISSE sous la direction de Monsieur le Professeur EICHELBRENNER, a proposé une expression pour la vitesse dans le cas où les phénomènes liés à la lubrification sont inexistantes. Celà se traduit par le fait que tous les gradients de vitesse sont constants ou, à la rigueur, dépendent du temps. On peut en déduire ensuite la pression par l'intermédiaire des équations d'EULER.

Dans ce rapport de maîtrise, il est montré qu'à partir de la seule équation de continuité et d'hypothèses déduites à la configuration du domaine D , le potentiel des vitesses s'écrit sous la forme

$$I.04 \quad \phi = \phi_a(x_3; t) + \phi_b(x_1, x_2; t)$$

On suppose qu'il existe un système de séparation des variables, que l'on peut écrire

$$I.05 \quad \begin{aligned} a) \quad \phi_a &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t) x_3^i \\ b) \quad \phi_b &= \bar{\phi}_b - a_2(t) \left\{ \frac{n}{m} x_1^2 + \frac{m-n}{m} x_2^2 \right\} \\ c) \quad \bar{\phi}_b &= M_1(x_1) M_2(x_2) T(t), \end{aligned}$$

dans lequel les fonctions inconnues $a_i(t)$, $M_1(x_1)$ et $T(t)$ sont à déterminer ainsi que la valeur des réels m et n . Les conditions initiales et aux limites sont :

- I.06 a) $t = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 = u_3 = 0$
 b) $x_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0$
 c) $x_2 = 0 \Rightarrow u_2 = 0$ (par raison de symétrie)
 d) $x_3 = 0 \Rightarrow u_3 = 0$
 e) $x_3 = \ell_3(t) \Rightarrow u_3 = \frac{d\ell_3}{dt} = u_{3p}$ (vitesse du piston).

On en déduit que les composantes de la vitesse ont pour formes générales

- I.07 a) $u_1 = -2 a_2(t) x_1 + \sum_k (\theta_k(t) \cdot \frac{k\pi}{\ell_2} \cdot \text{sh} \frac{k\pi x_1}{\ell_2} \cdot \cos \frac{k\pi x_2}{\ell_2})$
 b) $u_2 = \sum_k (\theta_k(t) \cdot \frac{-k\pi}{\ell_2} \cdot \text{ch} \frac{k\pi x_1}{\ell_2} \cdot \sin \frac{k\pi x_2}{\ell_2})$
 c) $u_3 = 2 a_2(t) x_3$.

Ces composantes sont simplifiées en imposant les hypothèses complémentaires suivant lesquelles le vecteur vitesse \vec{U} est indépendant de la variable x_2 dans les zones I et II (fig. 2), et le plan de sortie dépourvu d'obstacles (ce qui imposerait des conditions particulières). En réalité, la première hypothèse est incluse dans le fait que, au départ, les gradients $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ sont imposés constants ou fonctions du temps. Les composantes s'écrivent alors

- I.08 a) $u_1 = -2 a_2(t) x_1$
 b) $u_3 = + 2 a_2(t) x_3$

Une visualisation (/3/) confirme ce résultat dans la zone I du domaine D . Les égalités (I.08) sont alors introduites dans les équations d'EULER. La composante u_3 étant indépendante de x_1 , on a pour première équation

$$I.09 \quad -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2 \partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$$

Une simple quadrature donne

$$I.10 \quad p - p_2(t) = \rho \left[\dot{a}_2 (x_1^2 - x_3^2) - 2 a_2^2 (x_1^2 + x_3^2) \right]$$

où $a_2(t)$ est une fonction déduite de la loi de déplacement du piston mobile et $\dot{a}_2(t)$ sa dérivée par rapport au temps. D'après (I;06 c) et (I.07 c) on a :

$$I.11 \quad a) \quad a_2(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{l}_3(t)}{l_3(t)}$$

$$b) \quad l_3(t) = a \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T} + b$$

La détermination du champ des vitesses et de la pression indiquée s'applique au cas d'un fluide parfait. Une manière de se rapprocher des travaux précédents et d'en faire la jonction serait de considérer dans le même modèle géométrique, l'écoulement d'un fluide réel.

I.2. ECOULEMENT EN FLUIDE REEL

I.2.1. Introduction

Dans le cas d'un écoulement laminaire d'un fluide incompressible, de viscosité constante, les équations à employer sont celles de NAVIER-STOKES que l'on peut écrire sous la forme

$$\rho \vec{\gamma} = - \overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \text{lap } \vec{u}$$

et de continuité : $\text{div } \vec{u} = 0$

Du fait du mouvement du piston, il se développe une couche limite le long des parois, film dont l'épaisseur varie avec le temps. Si le domaine

d'influence du régime visqueux est relativement restreint comparé aux dimensions de la cuve d'essai, il existe dans la partie centrale de l'écoulement, une zone dans laquelle les gradients de vitesse sont indépendants des coordonnées (fluide parfait). Dans ce noyau central I (fig. 2) la solution est connue (§ I.1.3). Par la suite, nous serons en mesure de déterminer l'étendue de l'influence du frottement au voisinage des parois, cette influence cessant au moment où les résultats que nous obtiendrons seront comparables à ceux exposés en /3/, à savoir :

$$I.12 \quad u_3 = u_{3e} = f_e(x_3; t) = x_3 \dot{\ell}_3 \ell_3^{-1}$$

I.2.2. Remarques sur le domaine \mathcal{D}

Le domaine \mathcal{D} peut se scinder en cinq ensembles :

- I - un noyau central où l'écoulement est du type fluide parfait.
- II et III - deux nappes voisines des parois $x_3 = 0$ et $x_2 = \ell_2$ où l'on doit tenir compte de l'influence de la viscosité et du frottement.
- IV et IV' - les dièdres aux intersections des différentes parois où, en plus, l'on doit tenir compte des écoulements limitrophes et où les définitions classiques d'épaisseur de la couche limite sont caduques dans le système classique des coordonnées.

Les écoulements dans les deux nappes II et III sont différents. Le long des parois verticales, l'écoulement à la frontière de la couche limite dépend des deux variables x_1 et x_3 et l'écoulement à l'intérieur de la couche limite dépend alors, outre du temps, des trois composantes x_1 . A la frontière de la couche limite qui se développe sur le plancher, dans le noyau central I, l'écoulement est, en première approximation unidirectionnel (le module de la vitesse est, à toute fin pratique, égal à la valeur de la composante u_1). Le problème, dans cette couche limite, est

décrit seulement par deux des trois équations de quantité de mouvement : u_2 est supposé identiquement nul (ce qui est convenablement vérifié par l'expérience). La seconde équation de quantité de mouvement se réduit à $\partial p / \partial x_2 = 0$.

Nous noterons que le cas de la paroi mobile revient à celui de la paroi fixe par un changement convenable des variables. Nous limiterons, alors, notre étude au seul cas de la paroi fixe $x_3 = 0$.

Quand on suppose qu'il n'y a aucun effet de température et que l'on s'intéresse aux premiers instants du mouvement (le piston étant proche de sa position d'équilibre), il est raisonnable de penser que les écoulements au contact des deux parois horizontales n'ont aucune influence mutuelle. Ceci ne peut être le cas dans le cadre de la théorie de la lubrification où il est supposé que la distance entre ces deux parois est petite devant la quantité v/U . Il existe donc un facteur d'échelle entre ces deux phénomènes.

Le point O ($x_1 = 0$) de cette face inférieure est par raison de symétrie, un point d'arrêt de l'écoulement. Certaines hypothèses seront formulées dans cette optique au vu de certains travaux antérieurs dont /4/, /5/ et /6/. On supposera que ces hypothèses formulées autour de ce point d'arrêt resteront valables jusqu'à l'endroit des mesures expérimentales.

1.2.3. Hypothèses

Dans le domaine d'étude, nous faisons les hypothèses suivantes ;

- l'écoulement est laminaire;
- les propriétés physiques du fluide sont invariables;
- on néglige tout transfert de chaleur;

- on néglige la composant u_2 de la vitesse ($u_2 \equiv 0$) et, tout comme pour la vitesse extérieure \vec{U}_e , on écrit la vitesse sous la forme $\vec{U}(P;t) = \vec{U}(x_1, x_3; t)$;

- l'équation de continuité est vérifiée dans tout le domaine D .

Dans les cas particuliers exposés précédemment, on remarque qu'il est possible de poser à priori, une forme pour le champ des vitesses.

I.13
$$u_3 = u_3(x_3;t) = f(x_3;t)$$

cette formulation s'applique à de nombreux cas :

- lorsque l'écoulement est stationnaire, pour un fluide idéal, aux abords d'un point d'arrêt /7/, /8/ ;
- dans le cas d'un écoulement instationnaire de fluide visqueux /1/, aux abords d'un point d'arrêt amont ou aval /4/, /6/.

Nous allons utiliser cette relation (I;13) préconisée pour la première fois par K. HIEMENZ /9/ pour simplifier les équations de quantité de mouvement. En effet, l'équation de continuité montre (I.22) que l'on pourra écrire $u_1 = -x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3}$. Cela entraîne que certaines dérivées partielles ($\partial u_3 / \partial x_1$, $\partial^2 u_1 / \partial x_1^2$...) disparaîtront des équations de NAVIER. Par la suite, l'on sera amené à n'utiliser dans les équations qu'une seule variable spatiale.

Bien que nous ayons supposé la vitesse indépendante de la coordonnée x_2 , rien ne nous indique l'influence que peuvent avoir les parois latérales. Sur les plans verticaux $x_2 = \pm \ell_2$, les conditions de non glissement imposent $u_1 = u_3 = 0$. Or, ces composantes ne sont pas nulles à la frontière de la couche limite (dans la zone I). Tout au moins aux abords de ces parois, les gradients $\partial u_1 / \partial x_2$ et $\partial u_3 / \partial x_2$ existent.

Aussi, dans un but de simplifications, nous allons supposer en plus que les dimensions latérales de la cuve ($2\ell_2$) sont suffisamment grandes pour qu'aux approximations de la couche limite près, il soit possible de négliger l'influence des parois latérales. L'expérience montre qu'à une distance supérieure à 40 mm des parois la vitesse u_1 demeure constante (fig. 3). La solution exposée sera donc celle du seul cas où l'hypothèse (I;13) est valable.

I.2.4. Conditions

Introduisons l'hypothèse (I.13) dans l'équation de continuité ($\text{div } \vec{u} = 0$). Il vient :

$$\text{I.14} \quad u_1 = -x_1 f'(x_3; t) + g(x_3; t)$$

La symétrie par rapport au plan $x_1 = 0$ montre que la fonction g doit être identiquement nulle :

$$\forall x_3 \quad u_1(x_1) = -u_1(-x_1) \Rightarrow$$

$$\forall x_3 \quad x_1 f' + g = -\{(-x_1) f' + g\} \Rightarrow g \equiv 0.$$

D'où

$$\text{I.15} \quad u_1 = -x_1 f'(x_3; t)$$

Connaissant la forme des vitesses, les conditions se transforment comme suit

$$\text{I.16} \quad \text{a) } t = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \Rightarrow f'(x_3; 0) = 0$$

$$\text{b) } t = 0 \Rightarrow u_3 = 0 \Rightarrow f(x_3; 0) = 0$$

Nous verrons ultérieurement que ces deux conditions seront vérifiées.

Comme il est dit précédemment, nous nous intéressons à la couche limite sur le plancher. Viennent alors les deux conditions de non glissement à la paroi :

$$\begin{aligned} 1.17 \quad a) \quad x_3 = 0 &\Rightarrow u_1 = 0 \Rightarrow f'(0;t) = 0 \\ b) \quad x_3 = 0 &\Rightarrow u_3 = 0 \Rightarrow f(0;t) = 0 \end{aligned}$$

Il vient à l'esprit de dire ensuite que la composante u_1 tend asymptotiquement vers la valeur de la vitesse de l'écoulement extérieur u_{1e} au fur et à mesure que l'on s'éloigne du plan $x_3 = 0$. C'est la notion même de couche limite. Cette formulation amène plusieurs remarques :

- le domaine \mathcal{D} est un domaine borné, variable dans le temps et on ne peut formuler de condition à l'infini.
- nous sommes en présence d'un écoulement interne et à chaque instant l'influence de la couche limite (diminution de la vitesse) impose une accélération du fluide afin de vérifier l'équation de conservation de la masse.

Utilisons cette équation de conservation de la masse en considérant une certaine quantité de fluide éjectée à un instant donné. A l'instant t , le piston se trouve à la cote $l_3(t)$ et à l'instant ultérieur à la cote $l_3(t+\Delta t)$. Le fluide étant incompressible, le volume

$$V = (l_3(t) - l_3(t + \Delta t)) 2 l_1 l_2$$

est éjecté pendant l'intervalle de temps Δt . On retrouve ce volume dans le plan de sortie de l'écoulement (supposé indépendant de x_2).

$$V = 2 l_2 \Delta t \int_0^{l_3(t)} u_1(l_1, x_3; t) dx_3$$

comme u_1 s'écrit $u_1 = -x_1 f'(x_3;t)$ (I.15)

$$V = -2 l_1 l_2 \Delta t \int_0^{l_3(t)} f'(x_3;t) dx_3$$

$$= 2 l_1 l_2 \Delta t (f(0;t) - f(l_3(t);t))$$

Or $f(0;t)$ est une de nos conditions connues et il vient l'égalité

$$-2 l_1 l_2 f(l_3(t);t) = -2 l_1 l_2 \frac{l_3(t+\Delta t) - l_3(t)}{\Delta t}$$

En passant à la limite, nous obtenons la condition

I.18 $f(l_3(t);t) = \dot{l}_3$

I.3. EQUATIONS GENERALES

Dans la théorie exposée par ARIURA/1/ et d'une façon générale dans celle de la lubrification /2/, l'on suppose des écoulements unidirectionnels et l'on ignore la composante u_3 de la vitesse dans la direction normale à l'écoulement général et à la surface lubrifiée.

Dans notre cas, nous devons chercher la solution (u_1, u_3, p) bidimensionnelle, vérifiant les quatre équations suivantes :

- équations de quantité de mouvement

I.19 $\rho (u_{1,t} + u_1 u_{1,1} + u_3 u_{1,3}) = -p_{,1} + \mu (u_{1,11} + u_{1,33})$

I.20 $\rho (u_{3,t} + u_1 u_{3,1} + u_3 u_{3,3}) = -p_{,3} + \mu (u_{3,11} + u_{3,33})$

la troisième se réduisant à $p_{,2} = 0$

- équation de conservation de la masse

$$I.21 \quad u_{1,1} + u_{3,3} = 0$$

compte tenu des hypothèses et des conditions exprimées auparavant (1.16; 17;18)

1.3.1. Transformations des équations de NAVIER

L'on peut adopter la convention d'écriture

$$I.22 \quad a) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \dot{f}$$

$$b) \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = f'$$

Avec (I.13) et (I.15) les équations (I.19) et (I.20) s'écrivent respectivement :

$$I.23 \quad \dot{f}' - f'^2 + f \cdot f'' - \nu f'''' = \frac{1}{\rho x_1} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_1}$$

$$I.24 \quad \dot{f} + f f'' - \nu f'''' = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_3}$$

1.3.2. Détermination du second membre de I.23

Dérivons l'équation (I.24) par rapport à x_1 . Le premier membre s'annule identiquement compte tenu de (I.13). Il en résulte que l'on peut écrire la pression sous la forme

$$I.25 \quad p(x_1, x_3; t) = p_1(x_1; t) + p_3(x_3; t) .$$

Le second membre de (I.23) s'écrivant alors

$$I.26 \quad \frac{1}{\rho x_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{1}{\rho x_1} \frac{\partial p_1(x_1; t)}{\partial x_1} ,$$

représente une fonction indépendante de la variable x_3 .

En comparant (I.26) et (I.23) il en résulte que le second membre (I.26) ne peut être égal qu'à une fonction dépendant uniquement du temps; soit $A(t)$. Alors, nous pouvons déterminer son expression en considérant un point en dehors de "la couche limite". D'après /3/, nous connaissons une expression de la pression dans le "corps potentiel" I (fig. 2).

$$I.10 \quad p-p_2(t) = \rho \{ \dot{a}_2 (x_1^2 - x_3^2) - 2 a_2^2 (x_1^2 + x_3^2) \}$$

D'où, les formes équivalentes du second membre de l'équation (I.27)

$$I.27 \quad \dot{f}' - f'^2 + f \cdot f'' - \nu f''' = A(t)$$

sont

$$I.28 \quad a) \quad A(t) = 2 \dot{a}_2 - 4 a_2^2$$

avec $a_2 = \dot{l}_3 / 2 l_3$ (I.11)

$$b) \quad A(t) = \dot{f}'_e - f_e'^2$$

avec $f_e' = x_3 \dot{l}_3 / l_3$ (I.12)

I.4. CAS LIMITES

Il est possible de ne pas utiliser la connaissance du second membre de (I.27). Par l'intermédiaire de (I.25), on voit que la quantité $\partial^2 p / \partial x_1 \partial x_3$ doit être nulle puisque u_3 (donc f) est indépendant de x_1 (I.13). Décrivons alors l'équation I.23 et analysons ses différents termes.

I.4.1. Cas de la "viscosité infinie" ($R_e = 0$)

Considérons l'équation déduite de (I.23) par dérivation. Soit :

$$I.30 \quad \dot{f}'' - f' f''' + f f'''' = \nu f^{(IV)} \quad (IV)$$

lorsque l'on fait tendre v vers l'infini, il est nécessaire que $f^{(IV)}$ tende vers 0

$$I.31 \quad f^{(IV)} = 0$$

Les conditions relatives à ce cas devront être

$$1.16 \quad t = 0 \quad f' = 0 \quad \text{et} \quad f = 0$$

$$1.17 \quad x_3 = 0 \quad f' = 0 \quad \text{et} \quad f = 0$$

$$1.18 \quad x_3 = \dot{\ell}_3(t) \quad f = \dot{\ell}_3$$

complétées par une condition de non glissement sur la surface du piston

$$1.32 \quad x_3 = \dot{\ell}_3(t) \quad f' = 0$$

On peut essayer une solution de I.31 sous la forme d'un polynôme du troisième degré : $f(x_3; t) = f_0 + f_1 x_3 + f_2 x_3^2 + f_3 x_3^3$ dans lequel les f_k représentent des fonctions du temps que nous allons déterminer. Les deux conditions sur le plancher annulent les deux premiers termes f_k . En définitive, on obtient à l'aide des autres conditions :

$$1.32 \quad f(x_3; t) = \dot{\ell}_3 (3 - 2\xi) \xi^2 \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{x_3}{\dot{\ell}_3}$$

et l'on en déduit la composante u_1 de la vitesse non indiquée en /1/

$$1.33 \quad u_1 = + 12 \cdot x_1 \cdot \xi(\xi-1) \cdot a_2(t)$$

On remarquera que les deux conditions (I.16) sont ici vérifiées.

Dans les références /1/, /2/ et /7/, on trouve l'équation de REYNOLDS s'appliquant à la théorie de la lubrification (I.01). Elle est soumise aux hypothèses exposés précédemment et on remarquera plus particulièrement l'indépendance de la pression au regard de x_3 . Le champ des

vitesse est alors connu par une double quadrature. En utilisant les conditions (I.17), on obtient

$$I.34 \quad u_1 = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{dp}{dx_1} x_3 (x_3 - l_3)$$

Il est aisé d'éliminer la pression et la viscosité dynamique en utilisant l'équation de continuité. En effet

$$I.35 \quad \frac{dl_3}{dt} = \int_0^{l_3(t)} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_3$$

Or

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{d^2 p}{dx_1^2} x_3 (x_3 - l_3)$$

donc

$$\frac{dl_3}{dt} = \int_0^{l_3(t)} \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{d^2 p}{dx_1^2} x_3 (x_3 - l_3) dx_3$$

soit

$$\frac{dl_3}{dt} = \frac{1}{2\mu} \cdot \frac{d^2 p}{dx_1^2} \int_0^{l_3(t)} (x_3^2 - x_3 l_3) dx_3$$

et

$$\frac{dl_3}{dt} = \frac{-l_3^3}{12\mu} \cdot \frac{d^2 p}{dx_1^2}$$

après intégration et transformation, on retrouve l'expression (I.34). Cela veut dire que la solution proposée en /1/, par le biais de la théorie de la lubrification est analogue à une solution limite de notre équation du type "couche limite".

1.4.2. Cas du fluide "parfait"

Ce second cas limite a été exposé en /3/. On trouve notamment

$$I.08 \quad u_{1e} = -x_1 \frac{\dot{l}_3}{l_3} = -x_1 f'_e$$

Si la viscosité est nulle, le premier membre de l'équation (I.10) doit l'être aussi. On cherche une solution sous la forme du développement

$$I.36 \quad f(x_3; t) = \sum f_k(x_3) t^k$$

qui devra vérifier les conditions (I.16), (I.17b) et (I.18). Nous utiliserons comme troisième condition limite le fait que, le frottement étant inexistant, la composante u_1 est constante dans un plan $x_1 = \text{cst}$.

On remarquera, avec la seconde condition initiale, que la première fonction f_0 doit être nulle ainsi que toutes ses dérivées. Il en résulte, par identification des termes de même puissance en temps que f_1'' est nul et que f_1 s'écrit alors sous la forme d'un polynôme du premier degré en x_3 . De proche en proche, il en est de même pour toutes les autres fonctions $f_k(x_3)$. Celles-ci vérifiant la condition relative à u_1 car f_k' et f_k sont respectivement une constante et une fonction du premier degré en x_3 . A partir des deux conditions limites sur la fonction f , il vient

$$(I.17) \quad \text{et} \quad f_k = \alpha_{k0} + \alpha_{k1} x_3 \Rightarrow \alpha_{k0} = 0$$

$$(I.18) \quad \text{et} \quad f = \sum \alpha_{k1} x_3 t^k \Rightarrow \sum \alpha_{k1} t^k = \frac{\dot{l}_3}{l_3}$$

On trouve donc comme solution.

$$I.37 \quad f = x_3 \frac{\dot{l}_3}{l_3} l_3^{-1} = (I.12)$$

$$I.38 \quad u_1 = -x_1 \frac{\dot{l}_3}{l_3} l_3^{-1} = (I.08)$$

Cette solution (I.38) vérifie la condition de symétrie dans le plan $x_1 = 0$. Elle est une solution particulière de l'équation (I.27). Encore une fois les deux conditions initiales sont vérifiées. La connaissance de l'écoulement extérieur (zone I) nous permet, ou d'apprécier l'étendue de la couche limite, ou de formuler une condition limite différente de (I.18) dans le cas d'une analyse numérique aux abords du plancher $x_3 = 0$.

Nous voulons maintenant résoudre le problème en dehors de deux cas limites (fluide infiniment visqueux /1/ et fluide parfait /3/) dont les résultats ont été retrouvés sous une présentation moins restrictive.

CHAPITRE II

DETERMINATION DE LA VITESSE PAR LA METHODE DES PREMIERS INSTANTS

II.1. METHODE D'APPROXIMATION

2.1.1. Linéarisation

Nous devons résoudre l'équation (I.27), aux dérivées partielles, avec second membre. Ce dernier est déterminé par la connaissance d'une solution particulière caractérisant l'écoulement à l'extérieur de la couche limite (I.08, I.12, I.28). Notre but est d'utiliser simultanément cette solution et une méthode d'approximations successives pour pouvoir se départir du second membre et rechercher des solutions d'équations linéaires déduite de (I.27).

Soit f_e la solution de l'écoulement extérieur (fluide parfait). Nous pouvons introduire le changement de fonction défini par

$$2.01 \quad f = f_e + \bar{f}_g$$

L'équation résultante (I.27, I.29, 2.01) peut être linéarisée en utilisant la méthode dite des premiers instants (/10/,/11/) : à partir du repos, considéré comme instant initial, la couche limite est très fine et le terme visqueux ν est d'un ordre de grandeur supérieur à celui des termes convectifs. Ce terme visqueux doit être contrebalancé, dans le cadre des hypothèses avancées, par le terme provenant de l'accélération instationnaire. Alors, en négligeant les termes convectifs en f_e et \bar{f}_g (hypothèse que l'expérience permettra de valider) nous devons résoudre l'équation

2.02

$$\bar{f}'_g - v \bar{f}''''_g = 0$$

avec les conditions

- 2.03 a) $t = 0 \Rightarrow \bar{f}'_g(x_3; 0) = \bar{f}''_g(x_3; 0) = 0 ; \forall x_3$
 b) $x_3 = 0 \Rightarrow \bar{f}'_g(0; t) = 0 ; \bar{f}''_g = -2 a_2(t) ; \forall t$
 c) $x_3 \rightarrow \infty \Rightarrow \bar{f}'_g \rightarrow 0$

On remarquera que deux conditions initiales sont données. Toutes les deux correspondent à des réalités physiques (nullité des composantes u_1 et u_3 à l'instant initial). Le choix entre l'une et l'autre sera fait ultérieurement. Ne cherchant qu'une approximation de la vitesse u_1 , la condition (2.03 c), traduisant un rattrapage asymptotique au loin du plancher, sera fixée moins arbitrairement dans la suite de cet exposé.

2.1.2. Itérations successives

Nous pouvons essayer d'évaluer l'erreur commise par l'application de la méthode précédente en introduisant dans l'équation de départ un développement de fonctions f_i de telle manière que

- 2.04 a) $f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_N$
 b) conditions sur $f_0 =$ conditions sur f_e (I.06)
 c) conditions sur f_1 $\left. \begin{array}{l} t \approx 0 \\ x_3 = 0 \\ x_3 \rightarrow \infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} f_1 = f'_1 = 0 \\ f_1 = - \int_0^t B(u) du \\ f'_1 = -2 a_2 t \\ f_1 \rightarrow 0 \end{array} \right\} (2.09)$

$$\begin{aligned}
 \text{d) conditions sur } f_i \quad (i \geq 2) \quad t = 0 \quad & f_i = f'_i = 0 \\
 & x_3 = 0 \quad f_i = f'_i = 0 \\
 & x_3 \rightarrow \infty \quad f_i \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

Il vient alors avec (I.27) et (I.29)

$$\begin{aligned}
 2.05 \quad & [\dot{f}'_0 - f'_0{}^2 - \dot{f}'_e{}^2 + f'_e{}^2 + \{ f_0 f''_0 - v f_0''' \}] \\
 & + [\dot{f}'_1 - v f_1'''] \\
 & + [\dot{f}'_2 - v f_2''' + (- f_1{}^2 - 2 f_0 f'_1 + f_1 f''_1 + f_0 f''_1 + \{ f_1 f''_0 \})] \\
 & + [\dot{f}'_3 - v f_3''' + (- 2 f_0 f'_2 - 2 f_1 f'_2 - f_2{}^2 + f_2 f''_1 + f_1 f''_2 + f_0 f''_2 \\
 & + \{ f_2 f''_0 \}] + [\dot{f}'_4 - v f_4''' + (\dots)] + \dots = 0
 \end{aligned}$$

On remarquera que

- la solution proposée précédemment est incluse dans les deux premiers termes f_0 et f_1 .
- les quantités entre crochets sont nulles si $f_0 = f_e$ (cf. I.12)
- les termes entre parenthèses sont des termes quadratiques négligés d'itérations successives.

Dès lors, il nous suffit de résoudre les équations linéaires

$$\begin{aligned}
 (2.06) \quad \text{a) } & \dot{f}'_0 - \dot{f}'_e - f'_0{}^2 + f'_e{}^2 = 0 \\
 \text{b) } & \dot{f}'_1 - v f_1''' = 0 \\
 \text{c) } & \dot{f}'_2 - v f_2''' = f_1{}^2 + 2 f_0 f'_1 - f_1 f''_1 - f_0 f''_1 \\
 & \text{etc.}
 \end{aligned}$$

avec les conditions exprimées précédemment. On remarquera que les seconds membres de ces diverses équations sont ou nuls ou connus lors d'itérations précédentes.

Cette méthode de recherche des approximations complémentaires nous est dictée par ASKOVIC en /10/ où l'on trouve la remarque suivante :

" Bien qu'une démonstration générale de convergence de ce procédé, pour $N \rightarrow \infty$ n'existe pas, on peut espérer que pour t suffisamment petit f_2, f_3, \dots deviennent rapidement négligeables, non seulement à cause de la petitesse des termes convectifs dont une petite erreur n'affectera que peu les seconds membres, mais aussi en raison du choix des conditions aux limites identiquement nulles à partir de f_2 " .

Dans une autre remarque ASKOVIC présage le fait que l'on pourra se limiter à la première itération. Ce résultat sera corroboré en comparant notre approximation aux résultats expérimentaux.

II.2. DETERMINATION DE LA PREMIERE APPROXIMATION.

On peut aisément abaisser l'ordre de l'équation (2.02). Une quadrature introduit la fonction $B(t)$, constante d'intégration. Cela se produit également lors de la recherche de la solution générale des équations (2.06). Introduisons le changement de fonction.

$$2.07 \quad \bar{f}_g = f_g + \int_0^t B(u) du$$

on obtient

$$2.08 \quad \dot{f}_g - \nu f_g'' = 0$$

La solution de cette équation doit vérifier des conditions déduites de 2.03 et en particulier

- 2.09 a) $t = 0$ $f_g(x_3;0) = f'_g(x_3;0) = 0$ (conditions liées)
- b) $x_3 = 0$ $f_g(0;t) = - \int_0^t B(u) du$
 $f'_g(0;t) = - 2 a_2(t)$
- c) $x_3 \rightarrow \infty$ $f_g \rightarrow 0$

et ainsi une condition (en x_3) est excédentaire.

Alors, si l'on introduit la variable de similitude η

$$2.10 \quad \eta = \frac{x_3}{2 \sqrt{vt}}$$

on obtient pour solution de (2.08) la fonction d'erreur (/11/) qui ne peut vérifier simultanément les conditions (2.09). Nous allons donc développer une solution de type polynomial en η .

Introduisons dans l'équation (2.08) le changement de fonction

$$2.11 \quad f_g = T(t) e^{-\eta^2} G(\eta)$$

η étant défini par (2.10), $T(t)$ et $G(\eta)$ ne pouvant être identiquement nul.

Alors, après réarrangement et simplifications, on obtient

$$2.12 \quad \frac{4t \dot{T}}{T} = \frac{G'' - 2\eta G' - 2G}{G}$$

Les deux membres de cette égalité dépendent de variables indépendantes et nous les égalons à une constante numérique m à déterminer. D'où le système des deux équations différentielles.

$$2.13 \quad 4t \dot{T}_m - m T_m(t) = 0$$

$$2.14 \quad G_m''(\eta) - 2\eta G_m'(\eta) - (2+m) G_m(\eta) = 0$$

La solution générale de la première est

$$2.15 \quad T_m(t) = \alpha t^{m/4}$$

et vérifie les conditions (2.09 a) si $G(\eta)$ est borné par e^{η^2} et si m est positif. On reconnaît dans la seconde équation différentielle une analogie avec l'équation des polynômes d'HERMITE-CHEBICHEFF (/12/Annexe).

II.3. DETERMINATION DE LA FONCTION $G(\eta)$

Cherchons une solution sous la forme d'une série polynomiale

$$2.16 \quad G_m(\eta) = r_0 + r_1 \eta + r_2 \eta^2 + \dots + r_N \eta^N$$

que nous introduisons dans (2.14). On obtient alors le système d'égalités suivant

$$2.17 \quad (S) \left\{ \begin{array}{l} 2 r_2 - (2 + m) r_0 = 0 \\ 6 r_3 - (2 + m) r_1 - 2 r_1 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ (k + 1) (k + 2) r_{k+2} - (2 + m) r_k - 2 k r_k = 0 \end{array} \right.$$

qui permet de calculer chaque coefficient à partir des précédents :

$$2.18 \quad r_{k+2} = \frac{2 + 2k + m}{(k+1)(k+2)} r_k$$

Par un calcul de proche en proche (annexe A) on peut écrire la fonction G sous la forme

$$\begin{aligned}
 2.19 \quad a) \quad G_m(\eta) &= \mathcal{P}_{2k}(r_0) + \mathcal{P}_{2k+1}(r_1) \\
 b) \quad \mathcal{P}_{2k}(r_0) &= r_0 \left(1 + \sum_{k \geq 1} p_k \eta^{2k} \right) \\
 c) \quad p_k &= \prod_{k \geq 1} \frac{n-2+4k}{2k(2k-1)} = \frac{r_{2k}}{r_0} \\
 d) \quad \mathcal{P}_{2k+1}(r_1) &= r_1 \eta \left(1 + \sum_{k \geq 1} q_k \eta^{2k} \right) \\
 e) \quad q_k &= \prod_{k \geq 1} \frac{n-4k}{2k(2k+1)} = \frac{r_{2k+1}}{r_1}
 \end{aligned}$$

et il vient alors pour la première approximation de la fonction f

$$2'.20 \quad f(x_3; t) = f_e + \int_0^t B(u) du + \alpha t^{m/4} e^{-\eta^2} \left(\mathcal{P}_{2k}(r_0) + \mathcal{P}_{2k+1}(r_1) \right).$$

II.4. DETERMINATION DES INCONNUES AUXILIAIRES

A l'aide de (2.16) ou (2.20) la composante u_1 de la vitesse s'écrit, en intégrant la constante α dans les constantes r_k définies par (2.18).

$$\begin{aligned}
 2.21 \quad u_1 &= -x_1 \frac{\partial f(x_3; t)}{\partial x_3} \\
 u_1 &= -x_1 \left\{ \dot{l}_3 \dot{l}_3^{-1} + \frac{t^{m/4}}{2\sqrt{vt}} e^{-\eta^2} \left(r_1 - 2r_0\eta + [2+m]r_0\eta \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2r_1\eta^2 + \frac{4+m}{2}r_1\eta^2 - [2+m]r_0\eta^3 + \dots \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

le terme général entre parenthèses ayant la forme suivante (grâce à (2.18))

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (r_{k+1} \eta^{k+1}) - 2\eta (r_{k-1} \eta^{k-1}) = \frac{m}{k} r_{k-1} \eta^k.$$

La solution (2.21) n'est valable que dans les tout premiers instants du mouvement. En se limitant à une certaine incertitude fixée à l'avance, il est possible de développer le terme $\dot{\ell}_3 \ell_3^{-1}$ sous la forme d'une série. A partir de (I.11) et des conditions expérimentales, l'on obtient

$$2.22 \quad \dot{\ell}_3 \ell_3^{-1} = - \frac{15 \pi^2}{8 T^2} t + o(t^3)$$

Compte tenu des remarques du paragraphe II.2, la condition temporelle sur u_1 sera encore vérifiée dans les proches instants du mouvement en écrivant

$$2.23 \quad u_1 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\ell}_3}{\ell_3} + \frac{t^{(m-2)/4}}{2\sqrt{v}} r_1 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

Il n'existe pas de valeur de r_1 telle que cette somme soit nulle pour toutes les valeurs du temps. Néanmoins, en utilisant le principe des premiers instants et la relation (2.22) on obtient :

$$2.24 \quad \begin{array}{ll} \text{a)} & m = 6 \\ \text{b)} & r_1 = \frac{15 \pi^2 \sqrt{v}}{4 T^2} \end{array}$$

Il nous reste à déterminer la fonction $B(t)$. Ne pas considérer cette fonction $B(t)$ est en contradiction avec la théorie (annexe B) et avec l'expérience. Pour la calculer, on introduit dans l'expression de f la condition limite sur le plancher ($x_3 = \eta = 0$). Alors, il vient

$$2.25 \quad f(0;t) = \int_0^t B(u) du + r_0 t^{m/4} = 0 .$$

Nous en déduisons immédiatement l'expression de la constante d'intégration $B(t)$

$$2.26 \quad B(t) = - \frac{m}{4} r_0 t^{(m-4)/4}$$

expression dans laquelle la constante m a été déterminée auparavant.

On remarquera que les conditions aux limites sont toutes vérifiées et que, néanmoins la constante r_0 n'est pas déterminée. Par des considérations d'ordre de grandeur nous allons simplifier l'expression (2.21) et en déduire la valeur du coefficient r_0 . Le frottement pariétal étant défini positif, l'on peut marquer

$$2.27 \quad \tau_p = \mu \left(-x_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \right)_{x_3=0} = -\frac{3}{2} r_0 \frac{\mu}{\nu} x_1 \sqrt{t}$$

Par suite, le coefficient r_0 est strictement négatif. La valeur de r_0 sera déterminée ultérieurement par comparaison avec certains résultats expérimentaux.

Les deux polynômes \mathcal{P}_k peuvent être comparé au développement de e^{η^2} . Du fait du principe des premiers instants, en notant la convergence du développement de u_1 (série alternée de terme général équivalent à $1/k!$), la valeur de u_1 tend asymptotiquement vers celle qui fut trouvée en fluide parfait pour les grandes valeurs de la variable η . Ceci n'a guère d'intérêt et nous devons chercher une approximation valable pour des faibles valeurs de x_3 (domaine de la couche limite). On trouve en annexe que le développement considéré à partir du second terme est majoré par e^{η^2} . On tronque alors le développement dès le second terme et l'on a

$$2.28 \quad u_1 \approx -x_1 \left\{ \frac{1}{\ell_3} \ell_3^{-1} + \frac{t}{2\sqrt{\nu}} e^{-\eta^2} r_1 (1 + 6\lambda\eta) \right\}$$

avec

$$2.24 \quad r_1 = \frac{15 \pi^2 \sqrt{\nu}}{4 T^2} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{r_0}{r_1} < 0$$

Après détermination de r_0 par des considérations expérimentales (chap. V) nous présenterons les résultats (chap. IV) obtenus par cette approximation des premiers instants en comparaison avec le traitement direct de l'équation (I.27) par une méthode numérique que nous allons présenter.

CHAPITRE III

ETUDE NUMERIQUE

Nous étudions ici l'écoulement laminaire instationnaire d'un fluide visqueux incompressible dans la zone II (fig. 2) comprise entre une paroi imperméable ($x_3 = 0$) et une région I où le fluide peut être considéré comme parfait et où l'écoulement a été déterminé et vérifié expérimentalement. Nous résolvons numériquement le problème dans le cas d'une variation sinusoïdale du piston (I.11 b). Bien que la période du mouvement puisse varier, nous nous sommes limités au seul cas $T = 16,8$ s.

III.1. REMARQUES SUR LES CONDITIONS LIMITES

3.1.1. Formulation du problème

Rappelons l'équation à résoudre

$$I.27 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \frac{\partial f}{\partial t} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 + f \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} - \nu \frac{\partial^3 f}{\partial x_3^3} = A(t)$$

dans laquelle $A(t)$ est une fonction connue et donnée par (I.29). Les conditions auxquelles doivent satisfaire les quantités $f(x_3; t)$ et $f'(x_3; t)$ sont les suivantes :

- conditions de paroi

$$I.17 \quad \begin{array}{ll} \text{a)} & x_3 = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(0; t)}{\partial x_3} \\ \text{b)} & x_3 = 0 \Rightarrow u_3 = 0 \Rightarrow f(0; t) = 0 \end{array}$$

l'expérience /13/ montre qu'à aucun moment, les couches limites qui se développent sur le plancher ($x_3 = 0$) et sur le piston ($x_3 = \ell_3(t)$) n'interfèrent entre elles. Ceci se traduit par l'existence réelle de la zone I (fig. 2) à tout instant et en particulier au moment où le piston atteint sa cote minimum :

$$3.01 \quad \ell_3 \text{ min} = b - a = 2 \text{ cm}$$

Nous pouvons donc changer la condition infinie (2.03) au profit d'une condition à distance finie déduite de la présence d'un écoulement extérieur de fluide non visqueux :

- condition extérieure

$$3.02 \quad x_3 = \frac{\ell_3 \text{ min}}{2} \Rightarrow f = \frac{b-a}{2} \frac{\dot{\ell}_3}{\ell_3} \quad (\text{I.12})$$

(ℓ_3 étant toujours supérieur à $\delta_1 + \delta_2$, épaisseurs respectives des couches limites qui se développent sur le plancher et sur le piston).

- condition initiale

$$\text{I.16} \quad t = 0 \Rightarrow u_3 = 0 \Rightarrow f = 0$$

ce qui, nous le savons, entraîne $f'(x_3;0) = 0$

3.1.2. Résolution numérique de I.27

Introduisons tout d'abord les deux variables réduites suivantes :

$$3.03 \quad \text{a) } Z = \frac{x_3}{(b-a)/2} = \frac{x_3}{1}$$

$$\text{b) } M = \frac{t}{T/2} = \frac{t}{8,4}$$

Considérons le grillage (fig. 4) limité à l'intérieur d'un carré de côté unité. On désignera par ΔZ et ΔM les dimensions des mailles de ce grillage suivant les axes spatial Z et temporel M .

3.04 a) $\Delta Z = Z_1 = \frac{1}{N+1}$

b) $\Delta M = M_1$

A partir du système (I.27, I.16, I.17, 3.02) il s'agit de calculer les valeurs $f_{i,j}(Z;M)$ au point $Z = Z_i = i \Delta Z$ et $M = M_j = j \Delta M$. Pour calculer ces valeurs discrètes $f_{i,j}$, nous devons traduire les dérivées partielles sous forme de différences finies. Dans le cas des dérivées spatiales, d'ordre supérieur, notre choix s'est porté sur les différences centrales. On peut écrire /14/

3.05 a)
$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial Z^2} = \frac{f_{i+1,j} - 2 f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta Z)^2}$$

b)
$$\frac{\partial^3 f_{i,j}}{\partial Z^3} = \frac{f_{i+2,j} - 2 f_{i+1,j} + 2 f_{i-1,j} - f_{i-2,j}}{2(\Delta Z)^3}$$

Quant aux dérivées premières nous avons utilisé des formules à quatre points : /15/

3.06 a) BACKWARD
$$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial Z} = \frac{f_{i-2,j} - 6 f_{i-1,j} + 3 f_{i,j} + 2 f_{i+1,j}}{6 \Delta Z}$$

b) FORWARD
$$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial Z} = \frac{-2 f_{i-1,j} - 3 f_{i,j} + 6 f_{i+1,j} - f_{i+2,j}}{6 \Delta Z}$$

Des raisons qui nous ont poussé à ne pas utiliser les formules centrales pour f' seront exposés dans la suite de ce chapitre (méthode classique lors du traitement des couches limites). Quant à la dérivée temporelle, nous employerons la notation

3.07
$$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial M} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta M} = \frac{f_{i-p_i} - f_{i,j}}{\Delta M} \quad (\text{CRANK-NICHOLSON /16/})$$

où p_i représente la valeur de la fonction calculée à l'instant précédent.

Nous pouvons alors enlever, sans aucune ambiguïté, le second indice et écrire l'équation (I.27) sous la forme (avec 3.06 a).

3.08 a) $A(t) = \alpha - \beta + \gamma - \delta$

b) $\alpha = \frac{2}{T} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{f_i - p_i}{\Delta M} \right)$

$$\alpha = \frac{1}{6T\Delta Z\Delta M} (f_{i-2} - 6 f_{i-1} + 3 f_i + 2 f_{i+1} - p_{i-2} + 6 p_{i-1} - 3 p_i - 2 p_{i+1})$$

c) $\beta = \left(\frac{\partial f}{\partial Z} \right)^2$

$$\beta = \frac{1}{36(\Delta Z)^2} (f_{i-2} - 6 f_{i-1} + 3 f_i + 2 f_{i+1})^2$$

d) $\gamma = f_i \cdot \frac{\partial^2 f_i}{\partial Z_i^2}$

$$\gamma = \frac{f_i}{(\Delta Z)^2} (f_{i+1} - 2 f_i + f_{i-1})$$

e) $\delta = v \frac{\partial^3 f_i}{\partial Z^3}$

$$\delta = \frac{v}{2(\Delta Z)^3} (f_{i+2} - 2 f_{i+1} + 2 f_{i-1} - f_{i-2})$$

Quant aux conditions, nous obtenons pour

- Le non glissement à la paroi (I.17)

3.09 a) $\forall j \quad f_{0,j} = 0 \Rightarrow f_0 = 0$

b) $\forall j \quad f_{-2} - 6 f_{-1} + 2 f_1 = 0$

- Le rattrapage à la frontière de la couche limite (3.02)

$$3.10 \quad f_{N+1,j} = - \frac{2\pi}{T} \frac{\sin \pi M_j}{\left(\frac{17}{15} + \cos \pi M_j\right)}$$

- La condition initiale

$$3.11 \quad \forall i \quad p_{i,0} = 0$$

3.1.3. Points imaginaires

Les équations (3.08) peuvent prendre la forme suivante :

$$3.12 \quad \phi_i = \alpha - \beta + \gamma - \delta - A = 0$$

A chaque instant, l'on doit vérifier N équations

$\phi_i = 0$ ($i \in [1, N]$) . La méthode numérique choisie nécessite l'introduction de deux axes imaginaires $Z = (-1)\Delta Z$ et $Z = (N+2)\Delta Z$. Les N équations ϕ_i dépendent donc en principe de (N+4) fonctions inconnues f_i .

Deux de ces quatre fonctions surabondantes sont connues par l'intermédiaire des conditions (3.09) et (3.10) et seront introduites dans les équations correspondantes. Du au choix des formules numériques, la seconde condition à la paroi ne détermine pas complètement f-1. Nous léverons le problème en introduisant une condition physique.

Il n'en reste pas moins que nous devons formuler encore une hypothèse complémentaire pour l'inconnue excédentaire f_{N+2} . Ce sera par exemple une condition de rattrapage à la frontière de la couche limite

$$3.13 \quad \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial Z^2} \right)_{Z=1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (3.10) \\ (3.05) \end{cases} \quad f_{N+2} = 2 f_{N+1} - f_N$$

A chaque instant nous avons un ensemble de N inconnues (f_1, f_2, \dots, f_N) dans les N équations ($\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$). On peut alors, à

partir des valeurs des fonctions p_i au temps $M = M_j$, connues, calculer les valeurs des fonctions f_i au temps $M = M_{j+1} = M_j + \Delta M$. Le système ainsi obtenu étant non linéaire, on peut s'attendre à plusieurs solutions possibles et nous adoptons la méthode itérative suivante :

III.2. METHODE NUMERIQUE

Ne pouvant utiliser une méthode du type RUNGE-KUTTA, en nous inspirant de /17/ et de /14/ ainsi que des résultats de FLORENT et al /18/, nous employerons la méthode itérative de NEWTON /19/, /20/ pour résoudre le système S_1 formé par les équations ϕ_i . En tenant compte des remarques précédentes nous avons remplacé dans ces équations, les fonctions connues par leur valeur. Le système S_1 s'écrit alors

$$3.14 \quad S_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_1 (f_1, f_2, f_3) = 0 \\ \phi_2 (f_1, f_2, f_3, f_4) = 0 \\ \phi_i (f_{i-2}, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, f_{i+2}) = 0 \quad (3 \leq i \leq N-2) \\ \phi_{N-1} (f_{N-3}, f_{N-2}, f_{N-1}, f_N) = 0 \\ \phi_N (f_{N-2}, f_{N-1}, f_N) = 0 \end{array} \right.$$

On suppose au départ que les variables f_i sont connues comme première approximation de la solution du système S_1 et que cette approximation est située à une distance $(\delta f_1, \delta f_2, \dots, \delta f_N)$ de la solution exacte $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_N)$.

$$3.15 \quad \bar{f}_i = f_i + \delta f_i \quad 1 \leq i \leq N$$

En écrivant les développements en série de TAYLOR des fonctions ϕ_i , les distances δf_i peuvent être obtenues approximativement par la résolution d'un système linéaire S_2 . Les valeurs ainsi calculées par

(3.15) sont une meilleure approximation que l'approximation originale. On utilise ces nouvelles valeurs et on répète ce procédé jusqu'à ce que toutes les fonctions ϕ_i deviennent individuellement plus faibles, en valeurs absolue, qu'un certain ϵ fixé à l'avance.

Le système linéaire S_2 permettant de calculer les distances δf_i s'écrit :

$$3.16 (S_2) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial f_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial f_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_N}{\partial f_1} & \frac{\partial \phi_N}{\partial f_N} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \phi_N} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi_N}{\partial f_N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \vdots \\ \delta f_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les calculs relatifs à la matrice $(\phi_{i,j})$ se trouvent regroupés dans l'annexe C .

III.3. REMARQUES

Avant de comparer les différents résultats (analytiques, numériques et expérimentaux) obtenus, nous avons à expliciter les différents choix exposés précédemment.

Avant de comparer les différents résultats (analytiques, numériques et expérimentaux) obtenues, nous avons à expliciter les différents choix exposés précédemment.

L'organigramme du calcul est exposé sur la figure 3. Les résultats présentés ont été obtenus avec des ordinateurs H.P et C.I.I. Sur les figures, les résultats décrivent le profil de la vitesse longitudinale $u_1 = x_1 f' (x_3; t)$ (équation I-15) dans le plan de sortie de l'écoulement ($x_1 = 100$ cm)

Le choix du pas de calcul temporel est le suivant : les deux coefficients G1 et G2 (formules C.01), provenant des termes dus à l'accélération instationnaire et à la viscosité, ont été supposés du même ordre de grandeur. Ainsi, pour décrire une demi-période du mouvement (phase descendante du piston correspondant à l'expulsion du fluide), nous nous sommes limité à 170 pas de calculs temporels pour 25 points d'intégration spatiaux.

Dans le paragraphe 3.13, nous avons remarqué l'introduction de points imaginaires. A l'origine, une formule centrale à trois points a été choisie pour la dérivée f' , quantité proportionnelle à la composante longitudinale u_1 et à sa dérivée $\frac{\partial u_1}{\partial t}$. La condition de non glissement à la paroi permet d'éliminer l'inconnue f_{-1} qui est introduite dans le terme visqueux de l'équation $\phi_A = 0$. Si l'on a

$$\forall x_1, \quad \forall t \quad u_{1, \text{ paroi}} = -x_1 \cdot f'_{\text{ paroi}} = 0$$

$$f'_{\text{ paroi}} = f' (i=0) = \frac{1}{2 \cdot \Delta Z} (f_{-1} - f_1) = 0$$

$$f_{-1} = f_1$$

Au départ, les résultats apparaissent plausibles. Mais, rapidement, les calculs divergent et laissent présager un manque de finesse des formules employées. Nous avons recherché d'autres formules aux différences finies pour la dérivée première f' qui semble primordiale pour l'évolution du calcul.

Il est possible d'utiliser la formule à quatre points (3.06b). Les conditions d'adhérence à la paroi (I.17) donnent, pour la fonction f_{-1} exédentaire

$$3.17 \quad \begin{aligned} f_0 &= 0 \quad \text{et} \quad \frac{-2 f_{-1} - 3 f_0 + 6 f_1 - f_2}{6 \Delta Z} = 0 \\ f_{-1} &= \frac{6 f_1 - f_2}{2} \end{aligned}$$

Avec cette condition (3.17), nous avons obtenu une bonne convergence des

résultats. Les valeurs sont plus faibles que celles trouvées avec la méthode des premiers instants. Nous allons faire apparaître maintenant l'influence de la viscosité aux abords de la paroi.

On peut utiliser enfin, la relation (3.06a). Cette dernière a permis l'écriture de la condition d'adhérence à la paroi ($u_1 = 0$) introduisant une inconnue numérique f_{-2} . Nous avons alors besoin d'une condition numérique supplémentaire. Considérons l'équation de quantité de mouvement selon l'axe Ox_1 . A la paroi, les composantes u_1 et u_3 s'annulent et l'on en déduit

$$x_3 = 0 \quad \nabla f''' (x_1 , 0 , t) + A (t) = 0$$

Cette égalité s'écrit, après introduction de la formule centrale (3.05b)

$$f_2 - 2 f_1 + 2 f_{-1} - f_{-2} = \frac{2 (z)^3 \cdot A(t)}{\nu} = - C(t)$$

Si on lui ajoute l'équation de non glissement

$$2 f_1 - 6 f_{-1} + f_{-2} = 0$$

l'on obtient

$$f_2 - 4 f_{-1} = - C(t)$$

$$3.18 \quad f_{-1} = \frac{f_2 + C(t)}{4}$$

Nous avons également résolu l'équation I.27 en utilisant cette relation. Les figures 5, 6 et 7 représentent des résultats obtenus avec chacune des expressions (3.17) et (3.18) qui encadrent, à chaque fois, les résultats obtenus avec la méthode des premiers instants. Nous remarquerons que ces deux formulations, toutes deux numériquement valables, présentent de notables différences surtout aux faibles valeurs de x_3 . D'autre part, elles nécessitent un nombre élevé d'itérations. L'influence de la viscosité est évoqué

dans la dernière expression de f_{-1} . Nous avons résolu notre problème en considérant différentes valeurs pour la viscosité cinématique. L'on retrouve rapidement la solution limite ("fluide parfait") exposée au premier chapitre. Les résultats sont exposés sur la figure 8

Les remarques suivantes concernent les différentes optimisations opérées pour parvenir aux résultats exposés au chapitre IV. Il s'agit tout d'abord de l'initialisation de départ. Dans le tableau suivant sont résumés quelques résultats relatifs à ces initialisations.

Tableau 1 : différentes initialisations

	x_3 [0,10]	$t = 0,5$ s		$t_{init} = 0,05$ s	
i	x_3	$f' = k/x_3^2$	$f' = 1$	$f' = (1-x_3) f'_e$	$f' = x_3^2 f'_e$
1	0,4	0,53480	0,53484	0,53485	0,53485
2	0,8	0,73758	0,73769	0,73770	0,73770
3	1,2	0,87418	0,87425	0,87426	0,87426
4	1,6	0,94260	0,94264	0,94265	0,94265
5	2,0	0,97390	0,97393	0,97393	0,97393
8	3,2	0,99927	0,99928	0,99928	0,99928
10	4	1,00146	1,00146	1,00146	1,00146

L'on remarquera que ces initialisations deviennent sans importance au bout de dix intervalles de temps. Nous n'avons pu utiliser l'initialisation déduite de l'expression (2.28) : pour des temps très faibles, l'exponentielle négative réduit l'initialisation sur f' à la valeur f'_e , tandis que pour des temps élevés, les erreurs

spécifiques au calcul ne permettent pas de retrouver les résultats obtenus avec d'autres initialisations

Un point important est celui du pas de calcul (ΔZ) ou du nombre de pas d'intégration (N) . Le temps de calcul étant d'autant plus long que ce nombre est élevé, et n'ayant pu trouver de relation entre ce dernier et les oscillations rencontrées dans les calculs à partir de l'ordonnée réduite $Z = 0,5$, nous avons limité nos investigations ultérieures au seul cas $\Delta Z = 0,04$. La figure 9 montre néanmoins la faible incidence du pas de calcul sur le profil des vitesses.

Enfin, l'équation (3.12) ne peut être vérifiée exactement. Il a fallu se fixer une incertitude ϵ arbitrairement petite, influençant le nombre d'itérations. Cette incertitude a été prise, après différents essais, égale à 10^{-6} .

CHAPITRE IV.

ANALYSE DES DIFFERENTS RESULTATS

Les différentes solutions à notre problème ont été obtenues par les méthodes suivantes :

- méthode des premiers instants.
- méthode numérique.
- méthode expérimentale (anémométrie à film chaud).

IV.1. LA METHODE DES PREMIERS INSTANTS

Nous avons vu au cours du second chapitre qu'il est possible de décrire le profil de la composante u_1 aux abords du plan de référence $x_3 = 0$ par une relation tronquée (2.28; 2.24) telle que

$$u_1 \approx -x_1 \left\{ \dot{\ell}_3 \ell_3^{-1} + \frac{t}{2\sqrt{v}} e^{-\eta^2} r_1 (1 + 6 \lambda \eta) \right\}$$

dans laquelle le coefficient λ est caractéristique du frottement à la paroi (annexe B) et ne peut donc pas être nul.

Dans une première étape, en se limitant à des temps infimes (par rapport à la période du mouvement du piston), la solution obtenue en négligeant le frottement peut s'écrire (B.04)

$$u_1 \approx -x_1 \left\{ \dot{\ell}_3 \ell_3^{-1} + \frac{t}{2\sqrt{v}} e^{-\eta^2} r_1 (1 - 2 \eta^2) \right\} .$$

Cette solution est assez proche des résultats expérimentaux sur la figure 11. Cette solution pourrait être intéressante lors de la recherche d'une initialisation pour une méthode numérique. Son intérêt sera évoqué dans un paragraphe ultérieur. Il faut remarquer que cette simplification

a pour conséquence de ne pas vérifier certaines conditions limites (en particulier le non glissement à la paroi). Il ne faut donc pas s'étonner des divergences avec les autres résultats dès le temps $t = 1$ s.

On peut remarquer que le paramètre λ est caractéristique du profil de u_1 . En effet, à l'aide de (2.28) et de (2.24) l'on obtient :

$$4.01 \quad \left. \begin{array}{c} \frac{\partial(u_1 - u_{1e})}{\partial x_3} \\ \hline u_1 - u_{1e} \end{array} \right\} \text{ paroi} \quad :: \quad \frac{\lambda}{\sqrt{\nu t}}$$

et cela montre l'importance relative de λ avec le temps (fig. 11 et 12).

Les conditions imposées pendant l'étude de la méthode des premiers instants ne permettent pas de calculer, à chaque instant, la valeur du paramètre λ . Compte tenu de la proportion (4.01) et des erreurs inhérentes à la méthode expérimentale, pour pouvoir obtenir une référence plausible nous n'avons eu d'autre alternative que de rechercher une valeur moyenne de λ . La figure 10 montre que pour $t = 1,5$ secondes cette valeur est proche de $-0,2$ et, avec cette valeur, les résultats déduits de la méthode des premiers instants sont comparables aux résultats anémométriques jusqu'à des temps réduits $2 t / T = 0,6$ (cf. (5.41)).

IV.2. LA METHODE NUMERIQUE

Cette méthode a été décrite au chapitre trois. Le problème le plus important a été de définir un choix de formules aux différences finies. La traduction de l'équation (I.27)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \frac{\partial f}{\partial t} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 + f \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} - \nu \frac{\partial^3 f}{\partial x_3^3} = A(t)$$

à l'aide de différences finies introduit un système S_1 de fonctions ϕ_i (3.14) dépendant de variables discrètes f_i . Nous avons vu que toutes ces variables f_i sont connues en utilisant la relation (3.06b) et que la résolution du problème nécessite une condition supplémentaire si l'on choisit la formule 3.06a, pour la dérivée f' , qui introduit l'inconnu $f-2$. Le doute est levé en considérant les conditions de paroi

$$\begin{cases} f(0; t) = f'(0; t) = 0 \\ + \nu f''(0; t) + A(t) = 0 \end{cases}$$

La majorité de nos résultats numériques ont été obtenus en utilisant cette condition. Il resterait à confirmer notre choix de formules aux différences finies par l'utilisation de formules plus élaborées et l'obtention de résultats homologues.

Considérons la relation (4.01). Elle nous apprend que le paramètre λ , donc le frottement à la paroi, est en relation directe avec le temps et la viscosité. La figure 9 confirme ce dernier résultat. Considérons maintenant les courbes 11, 12 et 13. Il faut tenir compte des erreurs expérimentales qui se situent aux niveaux de la mesure exacte de la position de la sonde par rapport à la paroi, de l'influence de la paroi sur le transfert thermique et de la calibration (voir chapitre 5). Cette précision étant faite, l'on peut dire que la correspondance entre les résultats numériques et anémométriques est bonne.

On remarquera que l'utilisation de la condition de paroi déduite de l'équation J.27 permet alors d'introduire uniquement des formules centrales pour toutes les dérivées spatiales. Soit, par exemple, pour la première dérivée, une relation telle que :

$$f' (z=0) = \frac{1}{12 \Delta Z} [f_{-2} - 8 f_1 + 8 f_1 - f_2]$$

Nous obtiendrons alors

$$f_{-1} = \frac{6f_1 + C(t)}{6}$$

au lieu de l'expression (3.18)

$$f_{-1} = \frac{f_2 + C(t)}{6}$$

En complément à ce rapport, nous nous proposons d'étudier ultérieurement cette nouvelle formulation.

IV.3. LA METHODE EXPERIMENTALE

Cette méthode a été nécessaire pour déterminer le paramètre λ (2.24). Nous détaillerons, dans le chapitre suivant, les différents problèmes que nous avons dû résoudre : méthode de correction des mesures, calibration etc...

Dans le cadre d'une comparaison des différents résultats présentés nous devons mettre l'accent sur la limitation de cette méthode. Certaines limitations seront décrites ultérieurement. Les plus importantes sont dues :

- à la calibration directe dans la cuve d'essai (fig. 28) lorsque le piston atteint la phase de décélération. Alors, on ne retrouve plus la vitesse déduite de l'équation (I.38) (cas du fluide parfait).
- à la dégradation de la surface de l'élément sensible ce qui perturbe son transfert thermique.

Aux erreurs ci-dessus mentionnées, s'ajoutent les erreurs de positionnement de la sonde (vibrations causées par le déplacement du piston et l'écoulement du fluide; (fig. 20), difficultés des mesures de distance dans l'eau) et le transfert thermique perturbé par la présence

de la paroi. Pour toutes ces raisons, nous considérons que le domaine d'erreur des points expérimentaux présentés sur les figures suivantes peut être évalué à 0,2 mm dans le positionnement et 1 cm/s dans les valeurs des vitesses.

En conclusion, cela nous permet de dire que notre hypothèse de départ (I.12) est raisonnablement vérifiée par tous les résultats qui en sont déduits.

CHAPITRE V

ANEMOMETRIE

V.1. THEORIE DES MESURES ANEMOMETRIQUES

5.1.1. Généralités

De nombreux ouvrages généraux traitent de la question des mesures anémométriques /7/, /8/. Le principe de base de cette méthode est de chauffer un fil ou un film conducteur par passage d'un courant électrique. Cela revient à un problème de transfert de chaleur entre l'élément chauffé et le fluide environnant.

La sonde est constituée par un fil très fin assimilable à un cylindre de longueur "infinie" (rapport de la longueur au diamètre très grand). Le fluide qui la baigne est souvent de l'air. Le théorème de VASCHY sur la similitude physique /21/ permet de traduire la loi de refroidissement du fil par une relation du type

$$5.01 \quad Nu = Nu (Re, Pr, Gr)$$

où les quantités Nu, Re, Pr et Gr sont les nombres sans dimension de NUSSELT, REYNOLDS, PRANDTL et GRASHOF.

Ces nombres sans dimension sont caractéristiques des propriétés physiques de la sonde, du fluide (fig. 16) et de l'écoulement. Ils s'écrivent

$$5.02 \quad Nu = \frac{hd}{k}$$

$$5.03 \quad Re = \frac{Ud}{\nu}$$

$$5.04 \quad Pr = \frac{\mu c_p}{k}$$

5.05
$$Gr = (T_f - T_a) \frac{g \rho^2 d^3 \beta}{\mu^2}$$

(voir dans la table des notations pour la signification des diverses quantités).

Lorsqu'il est possible de négliger les effets de la convection naturelle, on utilise la relation empirique due à KRAMERS (/22/) s'écrivant

5.06
$$Nu = A.Pr^{m_1} + B.Pr^{m_2} Re^{m_3} + C$$

où les constantes A, B et C et les exposants m_k sont généralement déterminés par l'expérience, pour une sonde donnée. RESCH et COANTIC en /23/ ont calculé ces constantes dans le cas d'une sonde "conique" (/24/). La détermination de la loi de KRAMERS n'est valable que pour une sonde bien définie. Comme elle doit être vérifiée pour deux sondes de même type et recalculée pour deux sondes de types différents et que les auteurs n'emploient pas les mêmes grandeurs de référence, il n'existe guère d'homogénéité dans les résultats.

5.1.2. La conductivité thermique et la température

Les quantités h, d et k qui interviennent dans le nombre de NUSSELT (5.02) représentent respectivement le coefficient de transfert de chaleur, une longueur caractéristique et la conductivité thermique. Cette dernière quantité est donnée dans les tables (fig. 16). Nous prendrons comme longueur caractéristique la largeur projetée de l'élément sensible de la sonde sur un plan normal à l'écoulement (/24/). Mais comme le coefficient h ne peut être aisément déterminé, l'on calculera le nombre de NUSSELT par l'intermédiaire du transfert thermique. Soit

5.07
$$Nu = \frac{v_f^2}{R_f (T_f - T_a) k_m \ell}$$

Dans cette expression, la tension V_f et la résistance R_f sont données par l'anémomètre. On détermine la température T_f par une calibration (fig. 17) et l'on mesure la longueur sensible de la sonde ℓ . Quant à la conductivité thermique k_m , l'on considèrera la température moyenne (dite de film)

$$5.08 \quad T_m = \frac{T_f + T_a}{2}$$

La relation (5.07) montre l'influence du coefficient de surchauffe η_a

$$5.09 \quad \eta_a = \frac{R(T_f)}{R(T_a)}$$

Pour des raisons de sensibilité, d'erreur de mesures, de dérive etc... on doit se fixer un certain écart de température $\Delta T = T_f - T_a$ (donc une certaine surchauffe η_a) en fonction de la gamme des vitesses. Dans le cas d'un liquide (l'eau par exemple) le coefficient ne peut être trop élevé au risque d'un dégazage et d'une vaporisation sur la surface de la sonde (/25/). Dans notre cas, nous nous sommes limités à des surchauffes de dix pour cent.

Nous nous sommes penchés sur la façon de pouvoir corriger les erreurs dues à un transfert de chaleur parasite, provenant d'une variation de la température ambiante. Nous avons remarqué que

- le réseau des caractéristiques $V_f = V_f(V, \eta_a)$ demeure un faisceau de parallèle (fig. 18) et que le nombre de NUSSELT à une vitesse donnée (/23/ fig. 13) ne varie pas lors de variations de la température ambiante du fluide.

- le nombre de NUSSELT ne varie pas (/24/) fig. 4.22 A) en faisant varier le coefficient de surchauffe par l'intermédiaire de la résistance de fonctionnement.

Ainsi, pour faire suite aux travaux de FLORENT et NGUYEN DUY VINH (/26/), BEARMAN (/27/) et KANEVCE et OKA (/28/) nous avons explicité les termes intervenant dans la loi de KING.

5.1.3. La loi de KING

On peut faire intervenir dans la relation (5.06) certaines quantités connues. La quantité de chaleur transférée à un écoulement (température T_a) par une sonde anémométrique (longueur ℓ , diamètre d , température T_f) est

$$5.10 \quad h \pi \ell d (T_f - T_a) = k_a \pi \ell (T_f - T_a) Nu .$$

A l'équilibre thermique, pour un fil de résistance électrique R_a , et un rapport de chauffage η_a la puissance de chauffage est égale à $\eta_a R_a I^2$. Alors, en faisant intervenir le carré dans la tension aux bornes de l'élément sensible on obtient la relation classique : loi de KING

$$5.11 \quad V^2 = A + B U^{1/n}$$

dans laquelle les quantités A et B valent respectivement

$$5.12 \quad A = \pi k \eta_a R_a \ell \Delta T \alpha Pr^{m_1}$$

et

$$5.13 \quad B = \pi k \eta_a R_a \ell \Delta T \beta Pr^{m_2} \left(\frac{d}{v} \right)^{1/n}$$

Isolons les grandeurs où intervient toute variation de température :

$$5.14 \quad A = A_0 \{ k \eta_a R_a \Delta T Pr^{m_1} \}$$

$$5.15 \quad B = B_0 \{ k \eta_a R_a \Delta T Pr^{m_1} v^{-1/n} \}$$

Comme nous adopterons le mode d'opération dit "à température constante", ce qui signifie que la température de fonctionnement sera invariable quelque soient les phénomènes extérieurs, comme une variation de température correspond à une variation du coefficient de surchauffe

$$5.09 \quad \Rightarrow \quad R_f = R_a \eta_a = R_a, \eta_a,$$

l'on peut écrire les coefficients A et B sous la forme

$$5.16 \quad A = A_1 \{k(T_f - T_a) \text{Pr}^{m_1}\}$$

$$5.17 \quad B = B_1 \{k(T_f - T_a) \text{Pr}^{m_2} v^{-1/2}\}$$

où, A_1 et B_1 sont des constantes numériques bien définies, pour une sonde particulière et une expérience donnée.

Si l'on connaît la tension à vitesse nulle V_0 , caractéristique d'une sonde, dépendant des températures ambiante et de fonctionnement, l'on obtient à l'aide de (5.11)

$$5.18 \quad V^2 - V_0^2 = (A - V_0^2) + B U^{1/n}$$

Si l'on néglige le terme entre parenthèses, ce qui est une façon courante de procéder (dans le cas de l'air cette approximation est vérifiée en /26/) on obtient, alors, la représentation linéaire suivante (fig. 19).

$$5.19 \quad \text{Log}(V^2 - V_0^2) = \frac{1}{n} \text{Log} U + \text{Log} B$$

V.2. ETUDE DU FILM CHAUD DANS L'EAU

Le but de cette étude est de pouvoir analyser correctement les résultats de l'anémométrie à film chaud en application au problème théorique exposé précédemment. Pour ce faire, nous nous sommes servis des résultats que l'on peut trouver dans la littérature et plus particulièrement ceux

de MORROW et KLINE /24/ et de RESCH et COANTIC /23/. Cela nous a permis d'établir une certaine marche à suivre dans le cas où le fluide utilisé est de l'eau.

Néanmoins, cette utilisation ne va pas sans poser quelques problèmes. Ceux-ci sont décrits, entre autres, dans la référence /24/ et y sont groupés de la façon suivante :

- la dérive
- la sensibilité
- la calibration de la vitesse moyenne, des fluctuations
- le bruit.

Bien que notre problème envisagé soit un problème instationnaire, nous passerons sous silence les deux derniers points cités ainsi que celui du temps de réponse des appareils. L'on notera quand même que la bande des fréquences dans laquelle se produisent les fluctuations est plus étroite dans le cas de l'eau que dans celui de l'air. Quant à l'origine du bruit, elle provient de l'électronique des appareils et des vibrations mécaniques de la sonde. Cette dernière remarque s'applique plus particulièrement dans notre cas, surtout aux basses vitesses : les fluctuations apparentes sur la fig. (20) sont sans contexte causées par le mécanisme d'entraînement du piston (fig. 3 /3/).



5.2.1. La dérive

Les phénomènes de dérive sont importants dans la réponse à la question : comment obtenir des résultats reproductibles ? Les causes de cette dérive se situent dans trois catégories.

a) l'instabilité électronique des instruments. Ceci peut être évité en permettant aux appareils de mesure de chauffer quelques instants avant la mise en route de l'expérience et ainsi de se stabiliser.

b) les transports parasites. Ils peuvent être d'origines électrique ou chimique. Les fabricants ont permis de diminuer cette cause d'erreur en employant un même métal noble pour toute la sonde. De plus, dans le cas de l'eau, il est nécessaire d'isoler l'élément sensible par un revêtement (pellicule de quartz par exemple), que le fluide soit à la masse et que, dans la mesure du possible, ce fluide soit purifié (chimiquement et physiquement).

c) les matières dissoutes ou en suspension. Durant l'expérience elles viennent se déposer sur la surface de la sonde et perturbant son transfert de chaleur (d'où la nécessité d'une purification). Certaines géométries de sonde se prêtent mal à ces dépôts; c'est le cas des sondes coniques et c'est une des raisons pour laquelle on trouve de nombreuses études avec ce type de sonde /29/, /30/ et /23/.

Néanmoins, avec toutes ces précautions prises, une dérive apparaît encore. Il semble alors que l'on soit en face d'une fatigue du matériau.

Comme la "dérive" qui a trait au transfert de chaleur est primordiale, permettons-nous de nous y attarder en la détaillant encore. En utilisant les discussions des résultats dans le cas de l'air /26/, nous allons analyser comparativement les causes d'erreurs dans le cas de l'eau.

5.2.2. La résistance des sondes

Dans le cas de l'équilibre thermique, nous avons vu, en considérant la puissance de chauffage fournie, que les coefficients A et B de la loi de KING (5.11) dépendent d'une température et de la résistance du conducteur (5.14), (5.15). En suivant les indications de BOUVARD et DUMAS (/31/), nous avons employé la méthode dite "à température constante". Il est alors nécessaire de connaître la variation de résistance de la sonde en fonction de la température (fig. 17) qui peut s'exprimer, au départ, avec un développement tel que

$$5.20 \quad R_f(T_f) = R(0) \{1 + \alpha T_f + \beta T_f^2 + \dots\}$$

Ce développement se réduit aux deux premiers termes lorsque la température de fonctionnement reste faible (surchauffe inférieure à dix pour cent). Or dans le cas de l'eau, cette température T_f ne dépasse la température ambiante que de quelques dizaines de degrés et la surchauffe (ou écart relatif de température) utilisée est quatre ou cinq fois plus faible que dans le cas de l'air. D'où l'égalité

$$5.21 \quad \frac{R_f - R_a}{R_a} = \frac{\Delta R}{R_a} = \frac{\alpha \Delta T}{1 + \alpha T_a}$$

obtenue après avoir vérifié la relation (fig. 21)

$$5.22 \quad R_f = R_0 (1 + \alpha T_f)$$

L'importance de la résistance se situe également au niveau de la correction de la dérive. RICHARDSON et Mc QUIVEY /32/ ont en effet émis l'hypothèse suivant laquelle la dérive causée par l'encrassement de la sonde équivaut à une diminution du transfert de chaleur donc de la surchauffe et par voie de conséquence la résistance. La vérification de cette hypothèse a été faite en /23/ par l'étude des réseaux de caracté-

ristiques $V_f(\eta_a)$ et $V_f(V)$.

Enfin, l'on a remarqué une variation de la résistance de la sonde (fig. 17) quand celle-ci se trouve en permanence dans le fluide. On ne peut imputer ce phénomène de "vieillissement" à l'oxydation du métal puisque l'élément sensible est protégé. Par contre cela peut être du à des fissures imperceptibles (/31/, p. 226) qui peuvent provoquer une érosion du film métallique et le bris ultérieur de la sonde (fig. 17).

V.3. CORRECTION DES MESURES

5.3.1. Formulation générale

Reprenons le loi de KING (5.11) avec les expressions (5.16) et (5.17).

Dans le cas d'un anémomètre non linéarisé, pour une expérience considérée comme un étalonnage immuable, où la température ambiante est connue (égale à T_{ae}), la loi de KING devient :

$$5.23 \quad V_e^2 = A_e + B_e U^{1/n}$$

Considérons une température ambiante différente telle que

$$5.24 \quad \epsilon = \frac{T_{ae} - T_{am}}{T_{ae}}$$

pour la même vitesse, le voltmètre branché sur la sonde indiquerait (fig. 22)

$$5.25 \quad V_m^2 = A_m + B_m U^{1/n}$$

Il nous faudrait pouvoir corriger cette indication pour pouvoir profiter des courbes de calibration (23) ou (24). Notons que le changement de température (5.24) influe sur les propriétés physiques du fluide et que ces propriétés sont déterminées à la température moyenne dite de film (5.08).

En convenant que l'indice "m" représente une "mesure" pendant laquelle la température du fluide est différente de celle de l'étalonnage (indice "e"), en introduisant les variables réduites suivantes

$$5.26 \quad a) \quad \chi = \frac{k_m}{k_e}$$

$$b) \quad \zeta = \frac{v_m}{v_e}$$

$$c) \quad \gamma = \frac{Pr_m}{Pr_e},$$

en utilisant l'expression

$$5.27 \quad \sigma = \frac{T_f - T_{ae}}{T_{ae}}$$

Les égalités (5.16) et (5.17) deviennent :

$$5.28 \quad A_m = A_e \chi \left(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \gamma^{m_1}$$

$$5.29 \quad B_m = B_e \chi \left(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \gamma^{m_2} \zeta^{-1/n}$$

Si on reprend les méthodes employées dans le cas où le fluide est de l'air et préconisées par FLORENT (/26/) et BEARMAN (/27/), en tenant compte de toutes les variations, la correction apportée à la tension mesurée V_m doit se rapprocher de la valeur de la tension d'étalonnage. D'où :

$$5.30 \quad V_e^2 \neq V_{cor} = \frac{A_m}{\chi \left(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma}\right)} \left\{ \frac{1}{\gamma^{m_1}} - \frac{\zeta^{1/n}}{\gamma^{m_2}} \right\} + \frac{V_m^2 \zeta^{1/n}}{\chi \left(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \gamma^{m_2}}$$

ou encore, en remplaçant le premier facteur connu par l'étalonnage

$$5.31 \quad v_e^2 \neq v_{cor}^2 = A_e \gamma^{m_1} \left\{ \frac{1}{\gamma^{m_1}} - \frac{\zeta^{1/n}}{\gamma^{m_2}} \right\} + \frac{v_m^2 \zeta^{1/n}}{\chi \left(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \gamma^{m_2}}$$

5.3.2. Discussion des simplifications classiques dans les cas de l'air et de l'eau.

La formulation générale (5.31) admet des simplifications dans le cas de fluides particuliers.

Examinons le cas de l'air. Quoique l'exposant du nombre de REYNOLDS dans la loi de KING soit considéré comme une constante universelle, il ne tend vers cette valeur ($n = 2$) qu'avec des conditions particulières (/33/). Ainsi, cette valeur peut varier avec la vitesse de l'écoulement (/34/) et la température de référence, dans la gamme de $1/n = 0,45$ (/35/) à $1/n = 0,52$ (/36/). Avec la valeur moyenne précédemment citée, on remarque sur la figure (16) que

- la variation du nombre de PRANDTL est négligeable vis à vis des erreurs de mesure et donc

$$5.32 \quad v_c^2 \neq A_e \chi \left(\frac{1}{\chi} - \frac{\zeta^{1/2}}{\chi} \right) + \frac{v_m^2 \zeta^{1/2}}{\chi \left(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma}\right)}$$

- la variation du rapport $\chi \zeta^{-1/2}$ (correspondant au rapport de la conductivité thermique et de la viscosité) oscille très faiblement autour de 1, ce qui donne alors

$$5.33 \quad v_c^2 \neq A_e (1 - \chi) + v_m^2 \left(\frac{\sigma}{\sigma + \varepsilon} \right)$$

ainsi, on retrouve la formule de correction donnée en (/26/), formule qui peut se réduire à celle de BEARMAN (/27/) quand on ne tient pas compte des effets de la conductivité.

Examinons le cas de l'eau. L'exposant n de l'équation (5.11) varie notablement avec la géométrie : $1/n = 0,26$ en /23/, $0,19$ en /24/ et $0,36$ en /29/. On doit en plus tenir compte de la valeur classique $1/n = 1/2$ de la loi de KING. Alors, on remarquera qu'il est possible de simplifier l'expression générale (5.31) dans le cas où la calibration détermine une valeur de n proche de celle de BONIS /29/. En effet, dans la gamme des températures moyennes rencontrées, le nombre de PRANDTL a une variation très importante (du simple au quadruple) tandis que la quantité $\gamma^{0,33} \zeta^{1/2,7}$ (l'exposant $0,33$ provenant de la loi de KRAMERS /37) et peut être remplacé raisonnablement par 1. La relation (5.31) devient alors

$$5.34 \quad v_{\text{cor}}^2 \neq A_e (1 - \gamma^{0,22}) + \frac{v_m^2}{\chi (1 + \frac{\epsilon}{\sigma})}$$

Dans le cas où les variations de température ($T_{\text{am}} - T_{\text{ae}}$) restent faibles en comparaison de la surchauffe ($T_f - T_a$), on aura une faible variation de γ et on pourra négliger la tension à vitesse nulle ($A_e \neq v_{\text{oe}}^2$) devant v_m^2 . Alors, il vient, à partir de la relation précédente

$$5.35 \quad v_{\text{cor}}^2 \neq v_m^2 \chi^{-1} (1 + \frac{\epsilon}{\sigma})^{-1}$$

5.3.3. Analyse des corrections

Par le biais de l'expérience, KANEVCE et OKA /28/ montrent l'importance d'une correction supplémentaire à celle de BEARMAN /27/ dans le cas des faibles vitesses. Dans le cas de l'air, cette correction repose sur les hypothèses suivantes :

- une faible variation du nombre de PRANDTL
- certains rapports de température, de viscosité et de conductivité thermique peuvent être négligés.

La première hypothèse est totalement vérifiée (fig. 16) mais la seconde ne l'est que si l'on considère la quantité globale

$$\chi \zeta^{-1/2}$$

De toutes les formules de correction présentées, il reste à en choisir la plus simple et la plus fiable d'utilisation en égard aux erreurs de mesures systématiques. Pour une sonde utilisée dans l'eau, dans le cas courant d'une augmentation de température, on remarquera sur la figure (25) que la correction de BEARMAN

$$5.36 \quad \frac{\epsilon}{\sigma} \ll 1 ; \chi = 1 ; V_c \neq V_m \left(1 - \frac{\epsilon}{2\sigma} \right)$$

apportée à une mesure, ne rejoint les valeurs d'étalonnage qu'à partir d'écart de température incompatibles avec la majorité des expériences. Il en résulte, au vu des trois autres types de correction, l'importance fondamentale des variations de la conductivité thermique et ce, indépendamment des autres quantités intervenant dans le transfert de chaleur (tension à vitesse nulle, nombre de PRANDTL, etc...). Nous ferons remarquer que cette conductivité thermique a pour température de référence celle exprimée par la relation (5.08) et que, du aux faibles écarts entre les températures T_f et T_a , nous n'avons pu déceler, comme en /26/, d'améliorations sensibles des corrections en changeant cette référence. Ainsi, pour une augmentation de la température ambiante, nous ne considérerons que la forme la plus simple de ces corrections, à savoir (5.35), tout en étant assuré de ne commettre au plus que quelques pour cent d'erreur.

Quant à l'expression (5.19) elle nous a permis de simplifier la relation (5.31) et d'en déduire la formule de correction (5.34).

Un autre avantage de cette représentation se situe au niveau de sa simplicité d'utilisation lorsque les variations de températures sont négligeables au regard de la vitesse (fig. 1, /26/). Enfin, il semble que la linéarité rencontrée (fig. 23 et 24) devrait permettre une vérification de notre correction proposée, en se basant alors sur une variation de la résistance. En effet, en opérant d'une façon analogue à celle employée pour écrire l'équation (5.34), mais en notant que la résistance influe sur la température de fonctionnement et que la température ambiante reste constante, on obtient

$$5.37 \quad V_e^2 \neq V_{cor}^2 = A_e (1 - \gamma^{0,22}) + \frac{V_m^2}{\chi} \frac{R_{fe} (T_{fe} - T_a)}{R_{fm} (T_{fm} - T_a)}$$

si l'on se réfère au premier tableau de l'annexe D, dont les valeurs sont issues de la fig. (19), on remarquera que l'expression (5.37) est parfaitement vérifiée si

- la température de référence est la température définie en (5.08) pour le terme dépendant du nombre de PRANDTL (γ).

- l'on prend la température du fluide ambiant comme référence pour le terme dépendant de la conductivité thermique (χ).

Cette dernière condition entraîne alors que l'équation (5.37) devient

$$5.38 \quad V_c^2 \neq A_e (1 - \gamma^{0,22}) + \gamma_m^2 \frac{R_{fe} (T_{fe} - T_a)}{R_{fm} (T_{fm} - T_a)}$$

V.4. INTRODUCTION D'UNE NOUVELLE METHODE DE CALIBRATION

5.4.1. Généralités

Nous venons de voir que dans de nombreux cas, il est possible de corriger certaines mesures faussées par des écarts de température. Ces erreurs ne proviennent, généralement, que par un changement de milieu de la sonde. Le cas le plus fréquent est celui du déplacement de la sonde

de la soufflerie calibrée où l'on procède à l'étalonnage à la veine de mesures, ces deux endroits apportant des erreurs causées par les variations des caractéristiques du fluide. D'autre part, il est à remarquer que ces corrections deviennent inutiles lorsqu'au moins, la température du fluide est maintenue constante ou varie dans des proportions infimes, et d'autant plus indispensables que les vitesses diminuent.

Nous avons donc été amené, dans notre cas où il s'agissait d'un phénomène instationnaire et où les vitesses sont généralement petites, à calibrer les sondes anémométriques dans un milieu plus proche de celui où se pratiquent les mesures.

5.4.2. Calibration au sein de la cuve d'essai. Limitations.

Il est à remarquer que l'expression de la vitesse trouvée en /3/ doit être valable en dehors de la couche limite qui se développe sur les parois de la cuve. Il est normal de présager que la vitesse u_1 , dans la couche limite, dépende, pour un même point de l'espace, de la vitesse de descente du piston, donc de la période T de son mouvement. Inversement, si nous nous plaçons en dehors de la zone précitée, la théorie du fluide parfait doit être applicable, même lorsque la période T varie.

Considérons une série d'enregistrements anémométriques où la sonde reste à une cote x_3 (fig. 26). Auparavant, il faut vérifier que la vitesse ne varie plus (fig. 20) et par mesure de sécurité, nous nous sommes placé au-dessus de cette cote critique soit en $x_3 = 35$ mm. Alors l'on peut faire varier la période du mouvement ($14s \leq T \leq 59,2s$). Ceci nous a donné plusieurs profils de vitesse (d'ailleurs inversement proportionnels aux périodes) superposables (fig. 27).

a) Vérification du maximum de la vitesse.

Si ce que nous supposons est vrai, c'est-à-dire que la loi de variation de la vitesse en dehors de la couche limite est donnée par (I.08) alors le maximum de cette vitesse s'obtient pour (avec (I.11))

$$5.39 \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2 \pi \frac{t}{T} = - \frac{b}{a} ,$$

donc au temps caractéristique (voir fig. 26)

$$5.40 \quad t_c = \frac{T}{2\pi} \text{ Arc cos } \left(- \frac{a}{b} \right) .$$

Il doit en être de même pour la tension aux bornes de la sonde. La figure et le tableau mis en annexe D vérifient notre hypothèse.

b) Correspondance de la relation vitesse-tension

Lorsque la période T varie, il est aisé de voir que les ordres de grandeur de la vitesse extérieure se chevauchent. Si donc, notre hypothèse est vérifiée, les courbes tension-vitesse doivent se correspondre là où les vitesses se chevauchent. La courbe que nous présentons (fig. 27) montre bien cette correspondance.

c) Limitation

Néanmoins, l'on remarquera sur les deux profils de vitesse de la figure (T = 39 et 59 s) que cette méthode est limitée. Nous apercevons une divergence des courbes dans la phase finale du piston. Notre hypothèse est que les appareils anémométriques deviennent "insensibles" après une baisse de l'accélération et ce d'autant plus que les vitesses sont faibles. Cette supposition est corroborée par le dernier tableau de l'annexe D. Calculons l'instant où débute la décélération :

$$5.41 \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{2t}{T} = \frac{1}{\pi} \text{Arc cos } \frac{b^2 - 2a^2}{ab} \approx 0,717.$$

Cette dernière valeur correspond assez fidèlement aux valeurs expérimentales. Elle constitue le temps limite à ne pas dépasser pour pouvoir profiter du mouvement instationnaire du piston pour la calibration des sondes anémométriques (fig. 28).

d) Méthode

Avec les deux vérifications précédentes, nous en déduisons une nouvelle méthode de calibration des sondes anémométriques valable plus particulièrement aux basses vitesses ($u_1 \leq 50$ cm/s). Cette méthode est basée sur la connaissance d'un écoulement instationnaire d'un fluide parfait. Pour les investigations de la couche limite, nous avons procédé de la manière suivante :

- on place la sonde à une cote où l'on soit sûr d'être en dehors de la couche limite,

- on procède à un enregistrement de la tension; la période T du mouvement étant choisie de telle manière que la gamme des vitesses soit similaire à celle que l'on trouve dans la zone étudiée,

- on procède à un enregistrement de la tension dans la zone étudiée,

- grâce à la solution en fluide parfait, la relation vitesse-tension du premier enregistrement nous permet d'en déduire la relation tension-vitesse du second.

V.5. CONCLUSIONS

Il a été mis l'accent sur les difficultés de mesure anémométriques dans l'eau. L'étude systématique du problème à partir d'hypothèses vérifiées nous a permis de dégager des critères de mesures fiables.

La bonne concordance entre les divers résultats nous a permis d'envisager une nouvelle méthode de calibration basée sur le mouvement instationnaire du piston. Cette méthode cumule les avantages suivants : libre choix de la gamme des vitesses, diminution des erreurs causées par les variations de température et diminution de la dérive due aux matières en suspension (le mouvement alternatif du piston n'avantage pas le dépôt des impuretés).

CONCLUSION

L'étude des problèmes de couche limite instationnaire peut s'effectuer au moyen de la méthode itérative appelée "méthode des premiers instants". Les conditions aux limites déduites du problème physique ne permettent pas de déterminer un paramètre λ caractéristique du profil de vitesse. Une valeur moyenne de ce paramètre peut être déterminée par comparaison avec certains résultats anémométriques. Avec ce paramètre moyen la méthode des premiers instants vérifie raisonnablement l'ensemble des résultats expérimentaux.

A été envisagée la résolution de ce problème sur ordinateur. Le calcul nous enseigne la méfiance vis-à-vis des méthodes aux différences finies; l'emploi de différentes formules donnant des résultats assez différents. La technique finale que nous avons utilisée fut d'analyser les termes intervenant dans les équations et de se référer sans cesse à l'expérience.

Les résultats expérimentaux ont été obtenus par l'utilisation de l'anémométrie à film chaud. Une étude détaillée du transfert thermique entre la sonde et le fluide ambiant nous a permis d'en dégager les causes usuelles d'erreur, une méthode de correction des mesures dans le cas d'une variation de température du fluide et d'innover une méthode de calibration basée sur l'existence d'un écoulement à potentiel. Cette nouvelle méthode est limitée aux basses vitesses et est, d'autant plus appropriée à l'étude des couches limites.

La concordance très satisfaisante entre ces différents résultats corrobore l'hypothèse de départ. Cette dernière spécifie que, au sein de la couche limite sur le plancher, l'écoulement est décrit, pour la composante normale, par une fonction d'une seule variable spatiale.

REFERENCES

- 1 Y. ARIURA, T. UENO, T. SUNAGA, S. SUNAMOTO
The lubricant churning loss in spur gear systems.
Bulletin of J.S.M.E., Vol. 16, N° 95, may 1973,
p. 881-892.
- 2 Paul R. TRUMPLER
Design of film bearings. The Mac Millan Company
New York 1966.
- 3 A. DESSEAUX-LABOISSE
Etude théorique et expérimentale de l'écoulement
instationnaire d'un fluide idéal, provoqué par
un piston en mouvement.
Rapport Maîtrise 1973. Département de Génie
Mécanique. Université Laval.
- 4 R.E. KELLY
The final approach to steady, viscous flow near
a stagnation point following a change in
stream velocity.
Journal of fluids mechanics. Vol. 13, p.449.
- 5 I. PROUDMAN et K. JOHNSON
Boundary layer growth near a rear stagnation point.
Journal of fluid mechanics. Vol. 12, 1962, p. 161.

- 6 A. ROBINS et J. HOWART
Boundary layer development at a two dimensional rear stagnation point.
Journal of fluid mechanics. Vol. 56, 1972,
p. 161-171.
- 7 E.A. BRUN, A. MARTINOT-LAGARDE et J. MATHIEU
Mécanique des Fluides. Dunod.
- 8 V. STREETER
Fluid mechanics. 4ème édition, Mc. Graw Hill.
- 9 K. HIEMENZ
Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder. These Göttingen 1911. Dingt. Polytech. J. 326, 321.
- 10 R. ASKOVIC
Etude de la couche limite laminaire tridimensionnelle en régime instationnaire.
Rapport A 9. Août 1967. Laboratoire d'aérodynamique
Département de Génie Mécanique. Université Laval
Quebec Canada.
- 11 H. SCHLICHTING
Boundary layer theory. 6ème édition 1968. Mc.Graw Hill.
- 12 R.Kh. ZEYTOUNIAN
Contribution à l'étude de la couche limite tridimensionnelle laminaire incompressible en régime instationnaire.
O.N.E.R.A. Note technique 131 (1968).

13 A. DESSEAUX

Contribution à l'étude théorique et expérimentale
de l'écoulement instationnaire d'un fluide réel
provoqué par un piston en mouvement.

Rapport de Maîtrise N° 2834. 1974. Université Laval.

14 MITCHELL

Computational methods in partial differential
equations. 1976. J. Wiley.

15 M.G. SALVADORI et M.L. BARON

Numerical methods in engineering. Prentice Hall
international 520 Ellesmere Road Scarborough Ontario.
2ème édition 1961.

16 G.D. SMITH

Numerical solution of partial differential equation.
Oxford Mathematical Handbooks. Oxford University
Press 1974.

17 D.U. VON ROSENBERG

Methods for the numerical solution of partial
differential equations. Vol. 16. Modern analytic
and computational methods in science and mathematics
American Elsevier Publishing Company New York 1969.

18 P. FLORENT, N.N. DINH et V.N. DINH

Écoulement instationnaire entre disques coaxiaux.
Journal de Mécanique. Vol. 12, N° 4, Dec. 1973.
p. 555-580

19 P. ARDOUIN

Eléments d'analyse numérique. P.U.L. 1971.

20 G. HACQUES

Mathématiques pour l'informatique. Algorithmique
numérique. Armand Colin 1971.

21 A. MARTINOT-LAGARDE

Similitude physique. Cours professé à l'I.D.N. et
l'E.N.S.E.L. Juin 1962.

22 L.J.F. BROER, C.J. HOOGENDORN et A. KORTLEVEN

Some investigations on low-speed anemometry.
Appl. Sci. Res., Section A, Vol. 7, p. 1-13.

23 F. RESCH et M. COANTIC

Etude sur le fil chaud et le film chaud dans l'eau.
La Houille blanche, N° 2, 1969, p. 151-161.

24 T.B. MORROW et S.J. KLINE

The evaluation and use of hot-wire and hot film
anemometers in liquids.
Report M.D. 25, août 1971, Thermosciences Division
Department of mechanical engineering Stanford
University. Standford, California.

25 C.G. RASMUSSEN

The air bubble problem in water flow hot film
anemometry. Disa information. N° 5, 1967, p. 21-26.

26 P. FLORENT et NGUYEN DUY VINH

Sur les corrections des mesures anémométriques dans les écoulements d'air à température lentement variable.

C.R. Acad. Sc. Paris. t. 277 (2 Juillet 1973).

Série A, p. 65-68.

27 P.W. BEARMAN

Corrections for the effect of ambient temperature drift on hot-wire measurements in incompressible flow.

Disa Information, N° 11, Mai 1971.

28 G. KANEVCE et S. OKA

Correction hot wire readings for influence of fluid temperature variations.

Disa Information, N° 15, Oct. 1973.

29 M. BONIS et N. VAN THINH

A Heat transfer law for a conical hot film probe in water.

Disa Information, N° 14, Mars 1973.

30 P.E. BRUNELLE, M. GAUTIER et J. PICHON

Calibration d'une sonde à film chaud dans de l'eau en rotation.

Rapport de laboratoire. Département de Génie Civil. Faculté des Sciences Appliquées. Université de Sherbrooke.

31 M. BOUVARD et H. DUMAS

Application de la méthode du fil chaud à la
mesure de la turbulence dans l'eau. 1ère partie
mise au point de la méthode.

La Houille Blanche, N° 3, 1967, p. 257-270.

32 E.V. RICHARDSON et R.S. Mc QUIVEY

Measurement of turbulence in water. A.S.C.E.

Journal of the hydraulics division. Vol. 94, 1968,

p. 411-430.

33 G. MEYER et A. STEINER

Sur les mesures par anémométrie à fil chaud de
température constante.

C.R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 12.1.1970, p. 155-157.

34 J. ELSNER et W.R. GUNDLACH

Some remarks on the thermal equilibrium equation
of hot wire probes.

Disa Information, N° 14, 1973, p. 21-24.

35 D.C. COLLIS et M.J. WILLIAMS

Two dimensional convection from heated wires at low
Reynolds members.

Journal of Fluid Mechanics, Vol. 6, 1959, p. 357.

36 W.H. Mc ADAMS

Transmission de la chaleur.

Editions Dunod. Paris 1964.

37 VAN DER HEGGE ZIJNEN

Modified correlation formulae for the heat
transfers by natural and by forced convection
from horizontal cylinders.

Appl. Sci. Res. Section A, Vol. 6, p. 129-140.

ANNEXE A

CALCULS ANNEXES A LA DETERMINATION DE LA VITESSE

La formule (2.18) permet de calculer tous les coefficients r_k :

- A.01 a) $k = 0 \Rightarrow r_2 = \frac{2+m}{2} r_0$
 b) $k = 1 \Rightarrow r_3 = \frac{4+m}{2} r_1$
 c) $k = 2 \Rightarrow r_4 = \frac{6+m}{12} r_2 = \frac{(6+m)(2+m)}{24} r_0$
 d) $k = 3 \Rightarrow r_5 = \frac{8+m}{20} r_3 = \frac{(8+m)(4+m)}{120} r_1$

En notant $\frac{r_{2k}}{r_0} = p_k$, on montre par récurrence l'égalité (2.19). Nous avons déjà $p_1 = \frac{2+m}{2}$. Supposons la relation (2.19 c) vraie jusqu'à l'ordre k.

Alors

$$\begin{aligned}
 p_{k+1} &= \frac{r_{2k+2}}{r_0} = \frac{r_{2k+2}}{r_{2k}} \times \frac{r_{2k}}{r_0} = \frac{2+4k+m}{(2k+1)(2k+2)} \prod_{(1)}^{(k)} \frac{m-2+4k}{2k(2k-1)} \\
 &= \frac{m-2+4(k+1)}{[2(k+1)-1][2k+2]} \prod_{(1)}^{(k)} \frac{m-2+4k}{[2(k)-1][2k]} \\
 &= \prod_{(1)}^{(k+1)} \frac{m-2+4k}{2k(2k-1)}
 \end{aligned}$$

La série $G_m(\eta) = \sum r_k \eta^k$ avec $\eta = \frac{x_3}{2\sqrt{vt}}$ est absolument convergente.

A partir d'un certain ordre k_0 (nous verrons par la suite que k_0 vaut 1 lorsque m est égal à 6), le facteur $(m-2+4k)/(2k [2k-1])$ peut être majoré par $1/2k$ et l'on obtient

$$P_N = \prod_{(1)}^{(n)} \frac{m-2+4k}{2k(2k-1)} \leq \frac{1}{2k_0} \frac{1}{2(k_0+2)} \cdots \frac{1}{2N} \prod_{(1)}^{(k_0)} \frac{m-2+4k}{2k(2k-1)}$$

Ce qui pour $k_0 = 1$ et $m = 6$ donne

$$A.02 \quad P_N \leq \frac{4.2^{k_0-1} k_0!}{2^N N!} = \frac{1}{2^{N-2} N!}$$

et une formule analogue pour q_k . Nous pouvons alors réarranger les termes de la série $G_m(\eta)$ et écrire

$$2.19 \quad G_m(\eta) = \mathcal{P}_{2k}(\tilde{r}_0) + \mathcal{P}_{2k+1}(r_1) \\ = \{r_0(1 + p_1 \eta^2 + \dots)\} + \{r_1 \eta(1 + q_1 \eta^2 + \dots + q_k \eta^{2k} + \dots)\}$$

Du fait de la convergence pour tout η des polynomes \mathcal{P}_k nous pouvons, dans un but de simplification, tronquer ces polynomes dans les limites des conditions imposées et d'une correspondance acceptable avec l'expérience. Comme nous nous intéressons à la composante u_1 , nous écrivons, à l'aide de (I.22), (2.21) et (A.01)

$$A.03 \quad u_1 = -x_1 \left\{ \frac{\dot{l}_3}{l_3} + \frac{t^{m/4}}{2\sqrt{vt}} e^{-\eta^2} r_1 (1+m\lambda\eta + \frac{m}{2}\eta^2 + \frac{m}{3} \cdot \frac{2+m}{2} \lambda \eta^3 + \dots) \right\}$$

La série (entre parenthèses) est absolument convergente et peut être regroupée en deux polynomes

$$A.04 \quad Q_{2k} = 1 + \frac{m}{2} \eta^2 + \dots + ([2k+1] r_{2k+1} - 2 r_{2k-1}) \eta^{2k} + \dots$$

$$Q_{2k+1} = m \lambda \eta (1 + \frac{2+m}{6} \eta^2 + \dots + \frac{1}{2k+1} \frac{r_{2k}}{r_0} \eta^{2k} + \dots)$$

Introduisons dans ces expressions la valeur de m (2.24) et comparons ces expressions au développement de e^{η^2} :

$$A.06 \quad e^{\eta^2} = 1 + \frac{1}{1!} \eta^2 + \frac{1}{2!} \eta^4 + \dots + \frac{1}{k!} \eta^{2k} + \dots$$

$$A.07 \quad Q_{2k+1} = 6\lambda\eta \left(1 + \frac{4}{3} \eta^2 + \frac{4}{5} \eta^4 + \dots + \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{r_{2k}}{r_0} \cdot \eta^{2k} + \dots \right)$$

On remarque que $\frac{4}{3} > \frac{1}{1!}$. Supposons que les autres relations homologues soient vérifiées jusqu'à l'ordre k :

$$\frac{1}{2k+1} \cdot \frac{r_{2k}}{r_0} > \frac{1}{k!}$$

Il vient pour le terme suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(k+1)+1} \cdot \frac{r_{2(k+1)}}{r_0} &= \frac{1}{2k+3} \cdot \frac{r_{2k+2}}{r_0} = \frac{1}{2k+3} \cdot \frac{r_{2k+2}}{r_{2k}} \cdot \frac{r_{2k}}{r_0} \\ &\geq \frac{1}{2k+3} \times \frac{4k+8}{(2k+1)(2k+2)} \times \frac{2k+1}{k!} > \frac{1}{(k+1)!} \end{aligned}$$

Pour vérifier la dernière inégalité, il est nécessaire de remarquer que l'égalité

$$\frac{1}{(k+1)!} = \frac{8+4k}{(2k+2)(2k+3)} \cdot \frac{1}{k!} \quad \text{n'est vrai que pour } k = -1.$$

Comme nous nous intéressons à une approximation de u_1 dans une zone où x_3 est très petit, en analysant également le second polynome Q_{2k} nous pouvons tronquer le développement (A.03) pour ne garder que les deux premiers termes. Soit :

$$A.08 \quad u_1 \approx -x_1 \left\{ \frac{\dot{l}_3}{l_3} + \frac{t}{2\sqrt{v}} e^{-\eta^2} r_1 (1 + 6\lambda\eta) \right\}$$

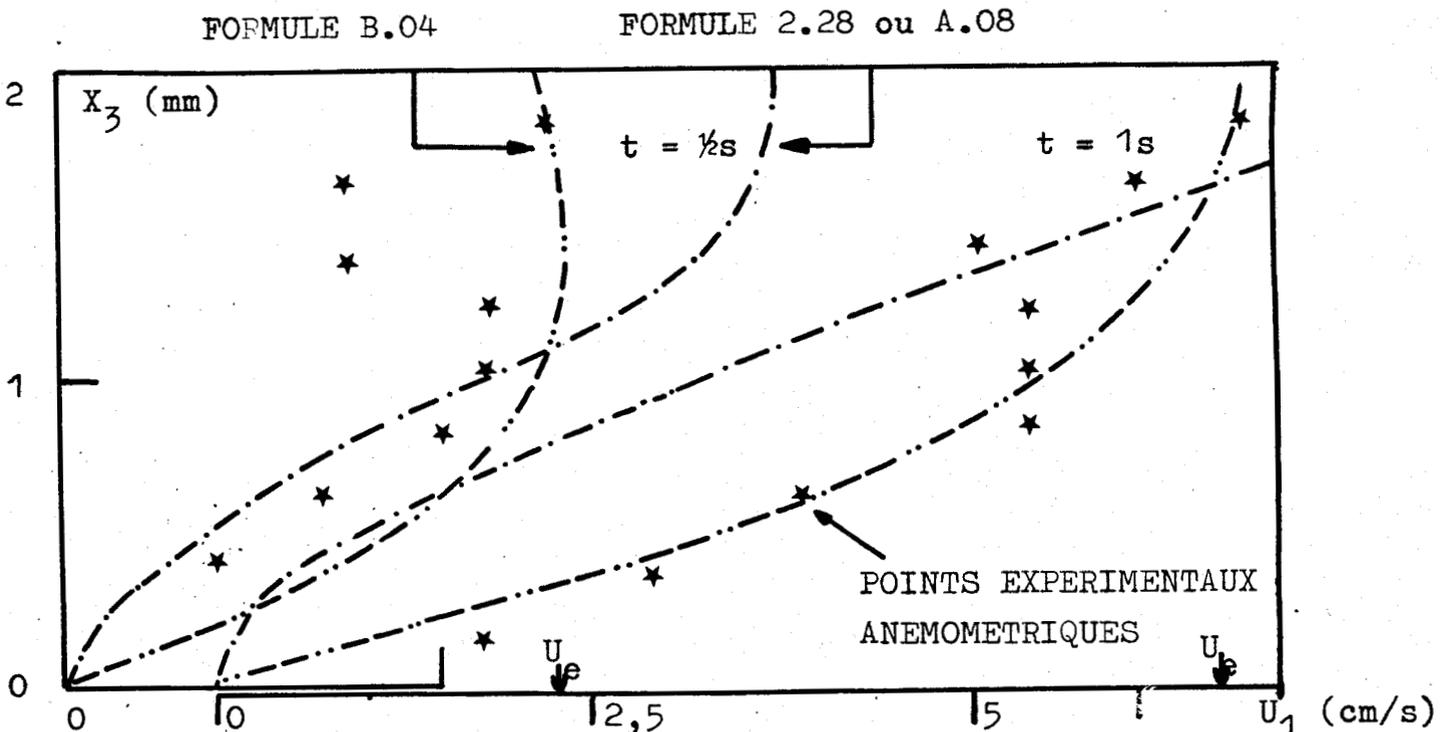
particulier caractérisé par la nullité de la fonction B(t).

Dans une première étape, nous avons comparé un résultat déduit de ce cas particulier avec deux des profils de vitesse expérimentaux. En négligeant les termes de puissance supérieure à 3 en η . La formule d'approximation analogue à (2.28) s'écrit :

$$B.04 \quad u_1 \neq - x_1 \left\{ \frac{\ell_3}{\ell_3} + \frac{t}{2\sqrt{\nu}} e^{-\eta^2} r_1 (1-2 \eta^2) \right\}$$

Il existe, aux abords de la paroi, une légère concordance dans le cas de la première courbe expérimentale ($t = 0,5s$; $T = 16,8s$). Cette concordance est due au fait que le frottement pariétal doit être négligeable à l'instant initial et le reste durant les tout premiers instants du mouvement. Ces premiers instants, nous le constatons sur la seconde courbe expérimentale ($t = 1s$) sont limités à bien moins de 1 seconde.

Pour toutes ces raisons, nous devons tenir compte des termes en r_0 ; nous avons alors cherché une autre approximation.



ANNEXE C

DETERMINATION DE LA MATRICE $\frac{\partial \phi_i}{\partial f_j}$

On remarquera que dans le système S_2 , compte tenu de (3.14) que la matrice en question est pentadiagonale. Si nous introduisons les coefficients

$$a) \quad G_1 = \frac{\nu}{(Z1)^3}$$

$$b) \quad G_2 = \frac{1}{3 \times T \times M1 \times Z1}$$

$$d) \quad G_3 = \frac{1}{6(Z1)^2}$$

les termes généraux de cette matrice pentadiagonale s'écrivent

$$a) \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial f_{i-2}} = G_2 + \frac{G_1}{2} + G_3 (-f_{i-2} + 6f_{i-1} - 3f_i - 2f_{i+1})/3$$

$$b) \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial f_{i-1}} = -G_1 - 6.G_2 + 2.G_3 (f_{i-2} - 6f_{i-1} + 6f_i + 2f_{i+1})$$

$$c) \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial f_i} = 3.G_2 + G_3 (-f_{i-2} + 12f_{i-1} - 27f_i + 4f_{i+1})$$

$$d) \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial f_{i+1}} = G_1 + 2G_2 + 2.G_3 (-f_{i-2} + 6f_{i-1} + 6f_i - 2f_{i+1})/3$$

$$e) \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial f_{i+2}} = -\frac{G_1}{2}$$

puisque à partir de (3.12) nous pouvons écrire

$$C.03 \quad \phi_i = G_2(f_{i-2} - 6f_{i-1} + 3f_i + 2f_{i+1} - p_{i-2} + 6p_{i-1} - 3p_i - 2p_{i+1}) - \frac{G_3}{6} (f_{i-2} - 6f_i + 3f_i + 2f_{i+1})^2 + 6.G_3 (f_i)(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) - \frac{G_1}{2} (-f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2}) - A(M_j).$$

Certains termes ne peuvent s'exprimer par ces formules. Dans le cas des

des deux premières équations nous avons à l'aide de (3.09)

$$\begin{aligned} \text{C.04} \quad \phi_1 = & G_2(2f_2 + \frac{10}{3} f_1 - 2p_2 - \frac{10}{3} p_1) + 6.G_3 f_1(f_2 - 2f_1) \\ & - \frac{G_3}{6} (2f_2 + \frac{10}{3} f_1)^2 - \frac{G_1}{6} (3f_3 - 6f_2 - f_1) - A(m_j) \end{aligned}$$

d'où

$$\text{C.05} \quad \text{a) } \frac{\partial \phi_1}{\partial f_1} = \frac{10.G_2}{3} + \frac{G_1}{6} + \frac{G_3}{9} (34f_2 - \frac{748}{3} f_1)$$

$$\text{b) } \frac{\partial \phi_1}{\partial f_2} = 2.G_2 + G_1 + \frac{G_3}{9} (34f_1 - 12f_2)$$

$$\text{c) } \frac{\partial \phi_1}{\partial f_3} = - \frac{G_1}{2}$$

tandis que les deux autres termes n'existent pas. Pour la seconde équation :

$$\begin{aligned} \text{C.06} \quad \phi_2 = & G_2(2f_3 + 3f_2 - 6f_1 + 6p_1 - 3p_2 - 2p_3) - \frac{G_3}{6} (-6f_1 + 3f_2 + 2f_3)^2 \\ & - G_1(2f_1 - 2f_3 + f_4) + 6.G_3.f_2(f_1 - 2f_2 + f_3) - A(M_j) \end{aligned}$$

les dérivées partielles deviennent

$$\text{C.07} \quad \text{a) } \frac{\partial \phi_2}{\partial f_1} = - G_1 - 6.G_2 + 4.G_3(-3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

$$\text{b) } \frac{\partial \phi_2}{\partial f_2} = 3.G_2 + G_3 (12f_1 - 27f_2 + 4f_3)$$

$$\text{c) } \frac{\partial \phi_2}{\partial f_3} = G_1 + 2.G_2 + 4.G_3(3f_1 + 3f_2 + f_3)/3$$

$$\text{d) } \frac{\partial \phi_2}{\partial f_4} = - \frac{G_1}{2}$$

Quant aux deux dernières équations, nous sommes amenés à calculer à chaque instant, les fonctions connues f_{N+1} et f_{N+2} (3.10 et 3.13). Soient $Y1$ la valeur de la fonction f_{N+1} à un instant donné et $Y3$ la valeur de cette même fonction à l'instant antérieur (soit p_{N+1}). Alors les deux dernières équations ϕ_i deviennent

$$\begin{aligned} \text{C.08} \quad \text{a)} \quad \phi_{N-1} = & G2(f_{n-3} - 6f_{n-2} + 3f_{n-1} + 2f_n - p_{n-3} + 6p_{n-2} - 3p_{n-2} - 2p_n) \\ & - \frac{G3}{6} (f_{n-3} - 6f_{n-2} + 3f_{n-1} + 2f_n)^2 + 6G3 f_{n-1} (f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_n) \\ & - \frac{G1}{2} (-f_{n-3} + 2f_{n-2} - 2f_n + Y1) - A(M_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C.08} \quad \text{b)} \quad \phi_N = & G2(f_{n-2} - 6f_{n-1} + 3f_n + 2Y1 - p_{n-2} + 6p_{n-1} - 3p_n - 2Y3) \\ & - \frac{G3}{6} (f_{n-2} - 6f_{n-1} + 3f_n + 2Y1)^2 + 6.G3(f_n)(f_{n-1} - 2f_n + Y1) \\ & - \frac{G1}{2} (-f_{n-2} + 2f_{n-1} - f_n) - A(M_j) \end{aligned}$$

Par rapport aux égalités (C.02) les seules différences sont :

$$\begin{aligned} \text{C.09} \quad \text{a)} \quad \frac{\partial \phi_N}{\partial f_{n+2}} = \frac{\partial \phi_N}{\partial f_{n+1}} = \frac{\partial \phi_{N-1}}{\partial f_n} = 0 \\ \text{b)} \quad \frac{\partial \phi_N}{\partial f_n} = 3.G2 + \frac{G1}{2} - G3 (f_{n-2} - 12f_{n-1} + 27f_n - 4Y1) \\ \text{c)} \quad \frac{\partial \phi_N}{\partial f_{n-1}} = -6G2 - G1 + 2.G3 (f_{n-2} - 6f_{n-1} + 6f_n + 2Y1) \\ \text{d)} \quad \frac{\partial \phi_N}{\partial f_{n-2}} = G2 + \frac{G1}{2} - \frac{G3}{3} (f_{n-2} - 6f_{n-1} + 3f_n + 2Y1) \end{aligned}$$

L'inversion de cette matrice pentadiagonale ne pose aucun problème. Le schéma du calcul que l'on trouve dans le programme ainsi que les algorithmes nécessaires proviennent de Von ROSENBERG /17/

ANNEXE D

TABLEAU DES MESURES RELATIF A LA FIGURE (19)
CORRECTION DES MESURES
DE LA REPRESENTATION LOGARITMIQUE

$R_f (\Omega)$	$T_f - T_a (^\circ C)$	$V_{mes} (V)$	$V_{cor} (V)$	erreur relative
32,30	57,28	8,19	Référence 8,19	0
31,80	49,85	7,765	8,36	2×10^{-2}
31,3	42,56	7,01	8,196	7×10^{-4}
31,03	38,4	6,635	8,182	1×10^{-3}
30,75	34,24	6,275	8,212	3×10^{-3}
30,47	30,07	5,86	8,199	1×10^{-3}
30,18	25,76	5,425	8,218	$3,5 \times 10^{-3}$
29,90	21,6	4,935	8,186	5×10^{-4}
29,62	17,44	4,43	8,189	1×10^{-4}
29,34	13,28	3,85	8,158	4×10^{-3}
29,05	8,96	3,155	8,163	3×10^{-3}

Formule de Correction (5.38)

$$V_{o_e} (ref) = 5,08 V$$



Vérification du maximum de la vitesse

<u>tableau de mesures</u>			
Période T (seconde)	Vitesse (cm/s)	Temps calculé (seconde)	Temps mesuré (seconde)
14	84,15	5,91	6 - 6,4
15	78,54	6,33	6,6
16,4	71,83	6,92	6,8 - 7,3
18,4	64,03	7,76	7,8
21,2	55,57	8,95	8,8
25	47,12	10,55	10,5
30	39,27	12,67	12 - 12,8
39	30,21	16,46	16 - 16,8
59,2	19,90	24,98	21,8 - 24,8



TABLEAU DES MESURES RELATIF A LA FIGURE 26
COMPARAISON DE LA VITESSE
ENTRE LA THEORIE ET LA CALIBRATION

T = 21,2s					
t/T	0,651	0,745	0,840	0,934	
u_1 (réel)	38,96	48,68	55,55	39,44	
u_1 (cal.)	39,8	49	56,4	22,6	
T = 30,2s					
t/T	0,669	0,735	0,801	0,867	0,934
u_1 (réel)	28,60	33,44	37,77	38,46	27,74
u_1 (cal.)	28	33,3	37,6	35,5	19,5
T = 39s					
t/T	0,687	0,738	0,790	0,841	0,892
u_1 (réel)	23,17	26,08	28,76	30,20	28,14
u_1 (cal.)	22,6	26	28	29	26
T = 59s					
t/T	0,717	0,786	0,855	0,924	0,958
u_1 (réel)	16,72	19,23	20,25	15,82	10,83
u_1 (cal.)	16,6	19,4	19,4	12,8	4,6



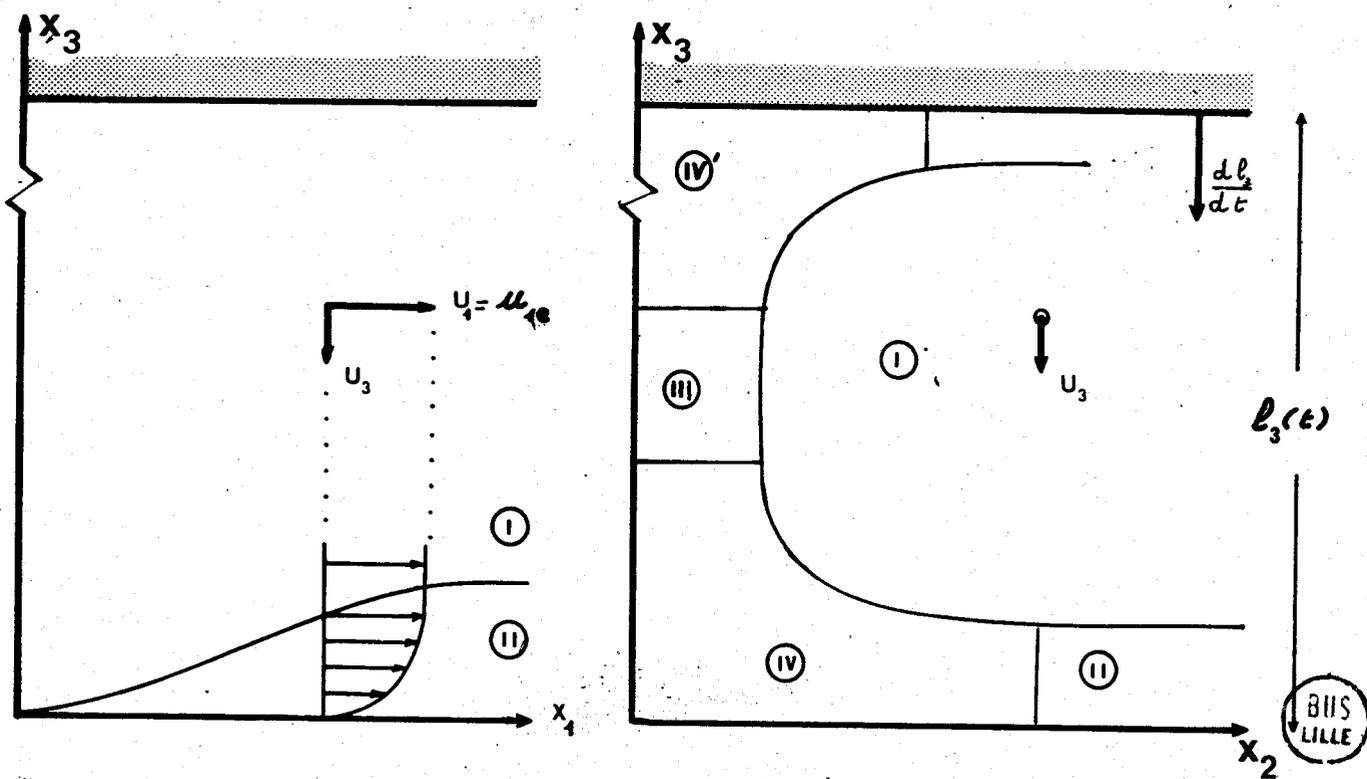
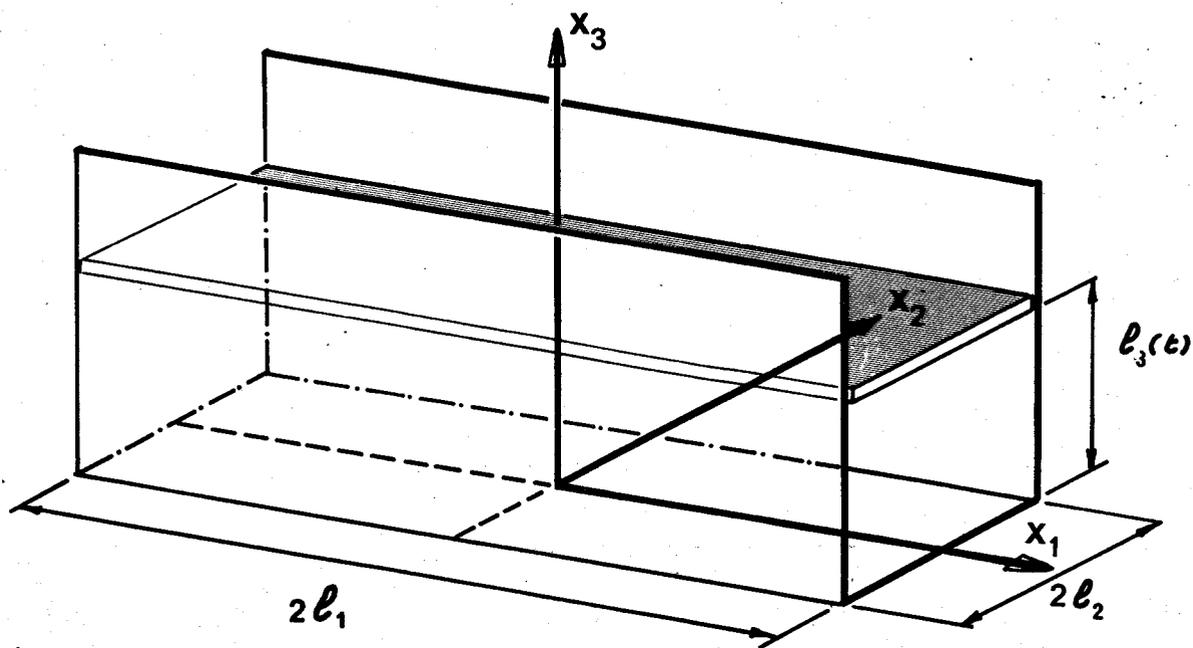
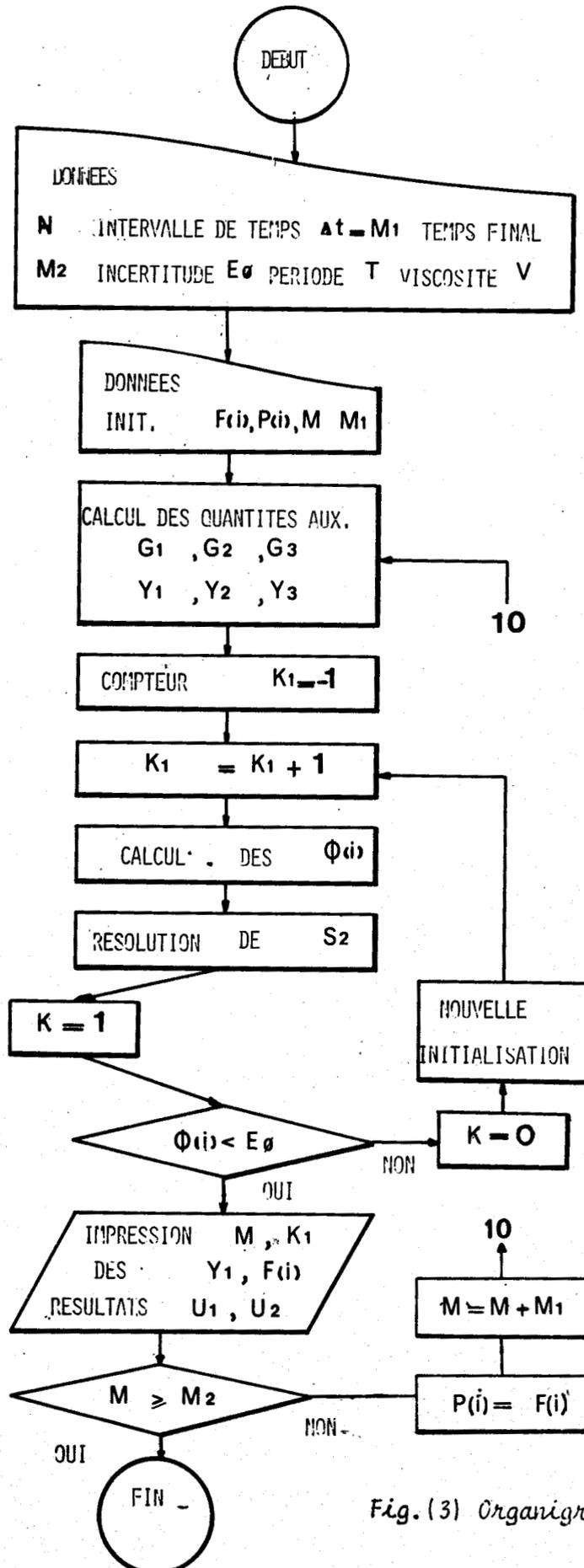


Fig. (1 et 2) Modèle géométrique et système de coordonnées

ORGANIGRAMME



BUS LILLE

Fig. (3) Organigramme

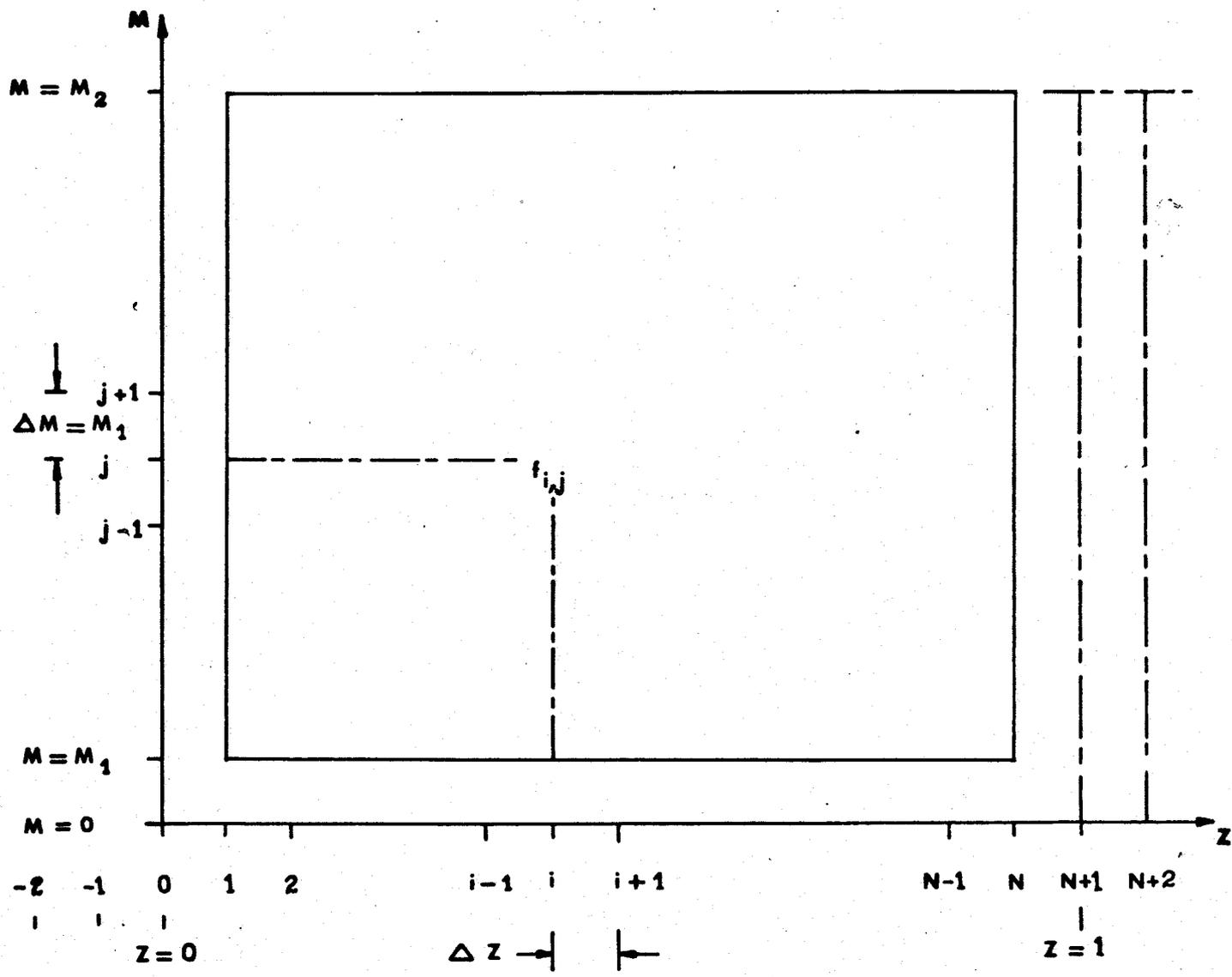


fig. (4) Grille de calcul



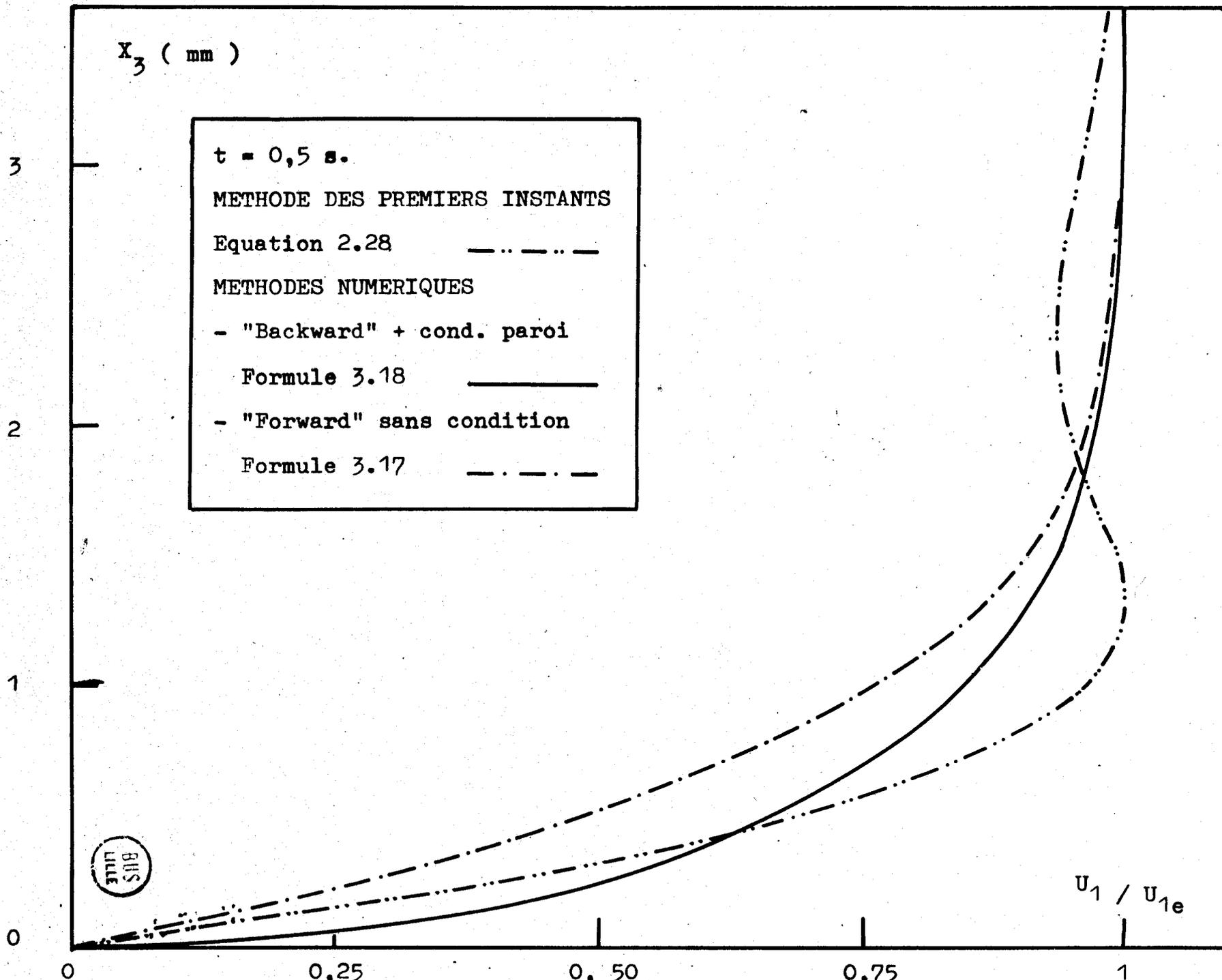


Fig. 5 METHODES NUMERIQUES ET METHODE DES PREMIERS INSTANTS : RESULTATS

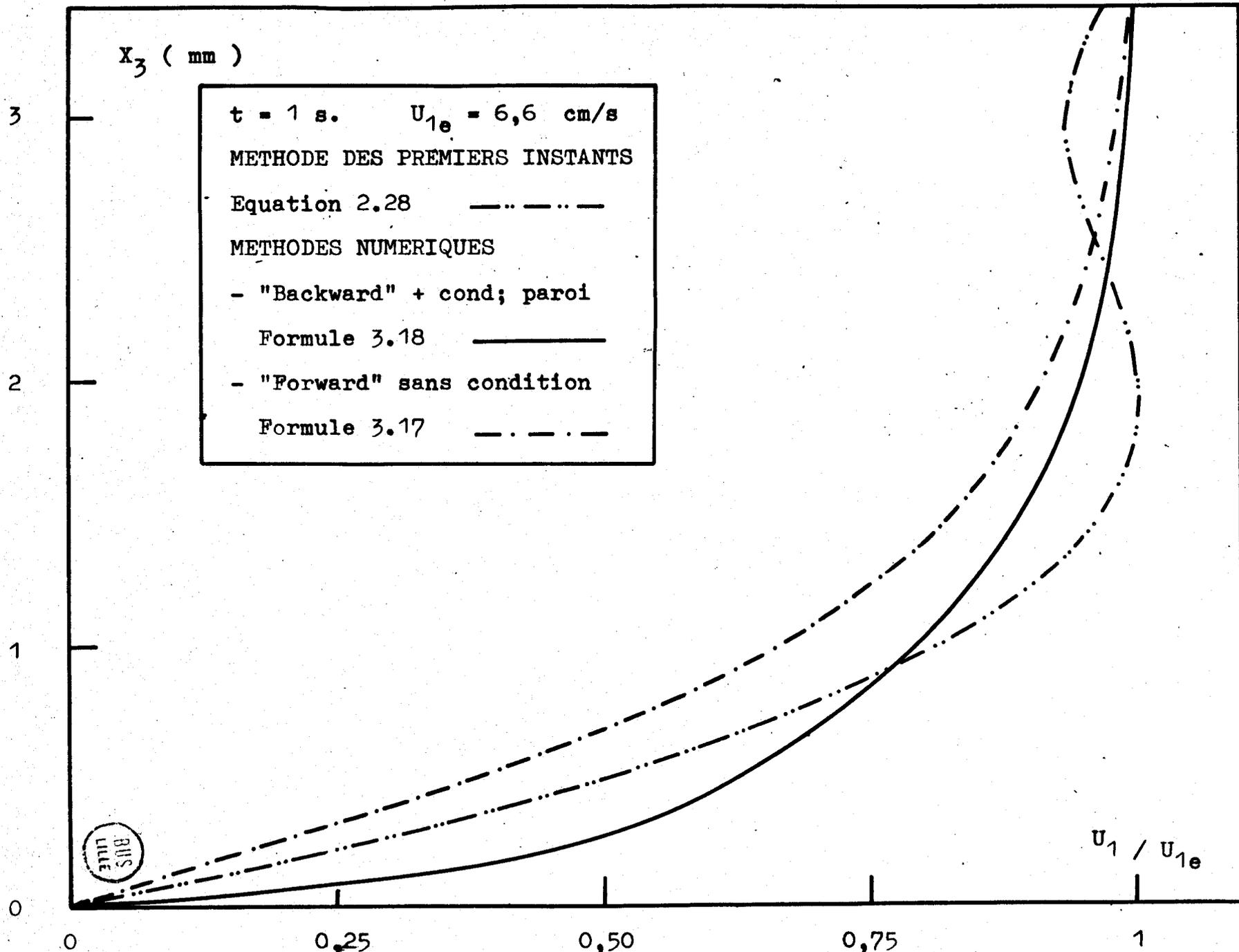


Fig. 6 METHODES NUMERIQUES ET METHODE DES PREMIERS INSTANTS: RESULTATS

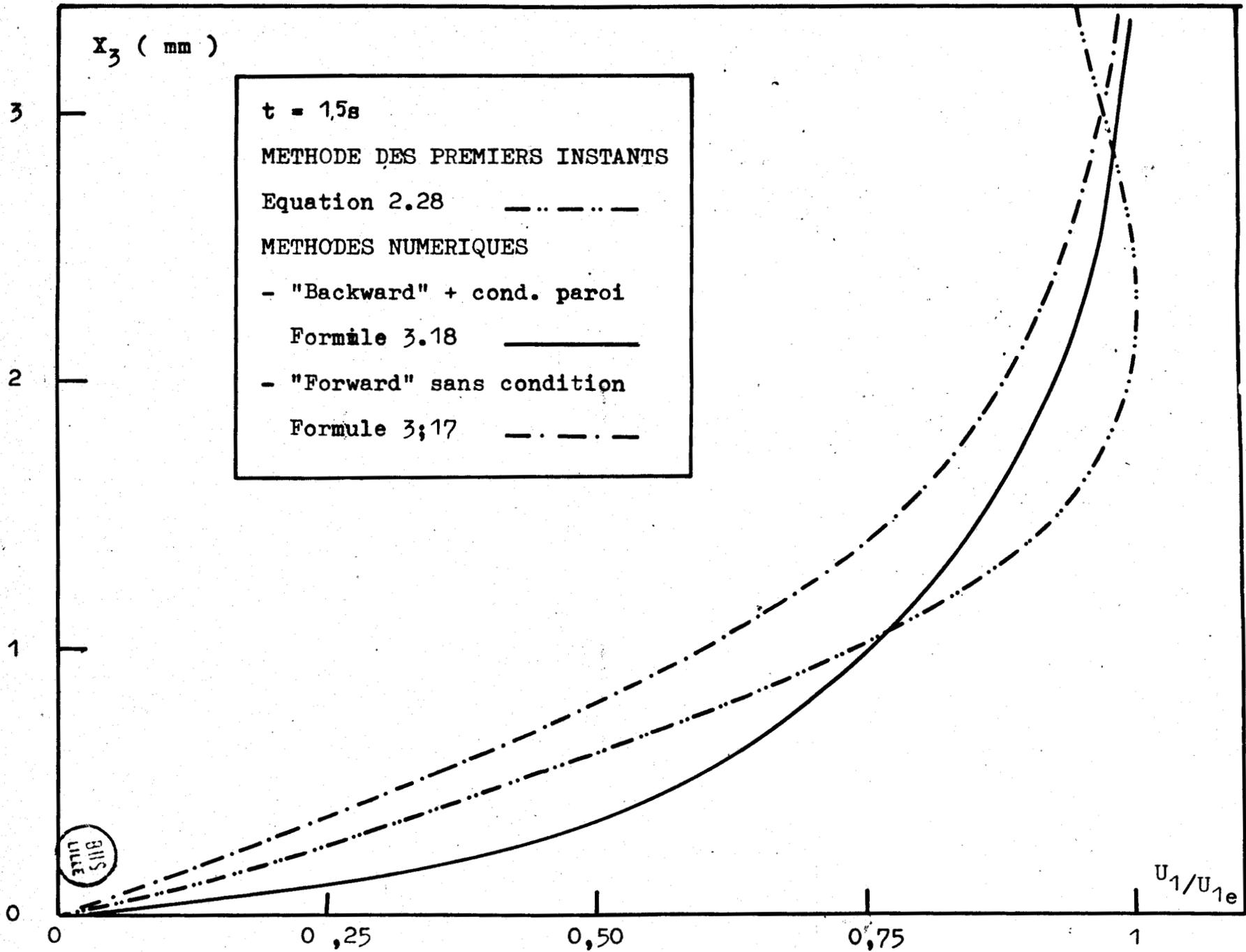


Fig. 7 METHODES NUMERIQUES ET METHODE DES PREMIERS INSTANTS: RESULTATS

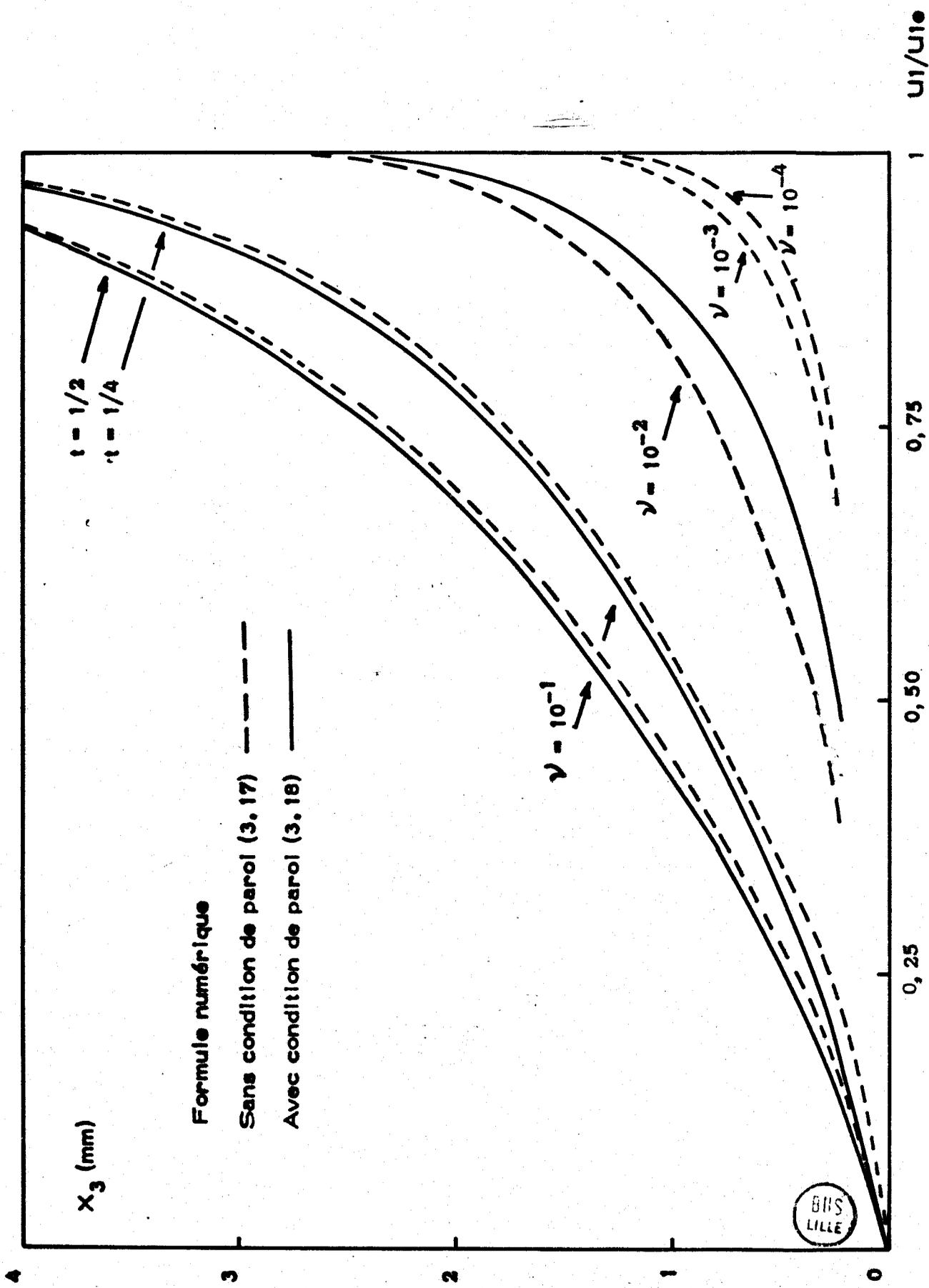


Fig 8 VARIATION DU PROFIL DE U_1 - INFLUENCE DE LA VISCOSITE

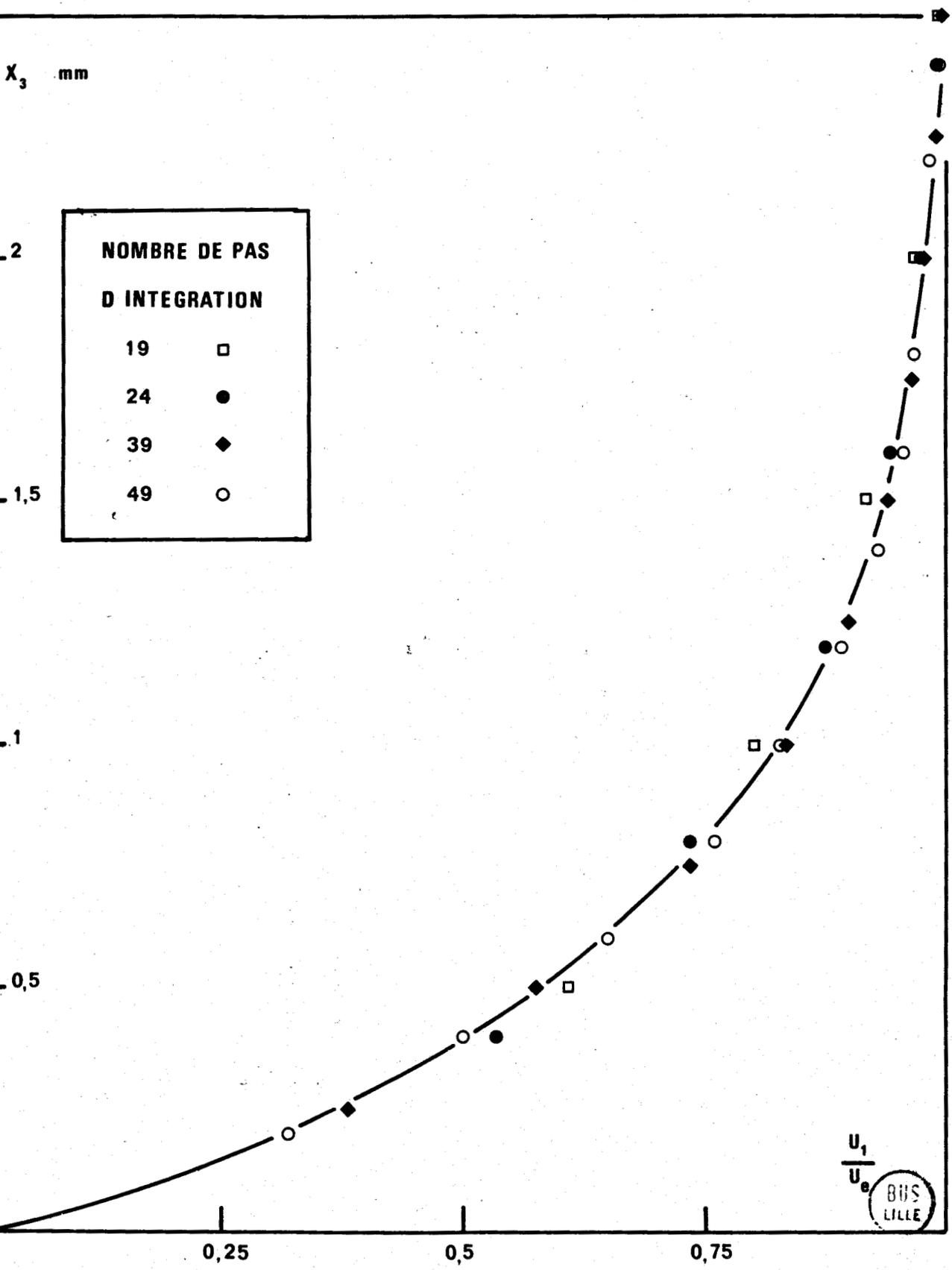


Fig. (9) Influence du pas de calcul

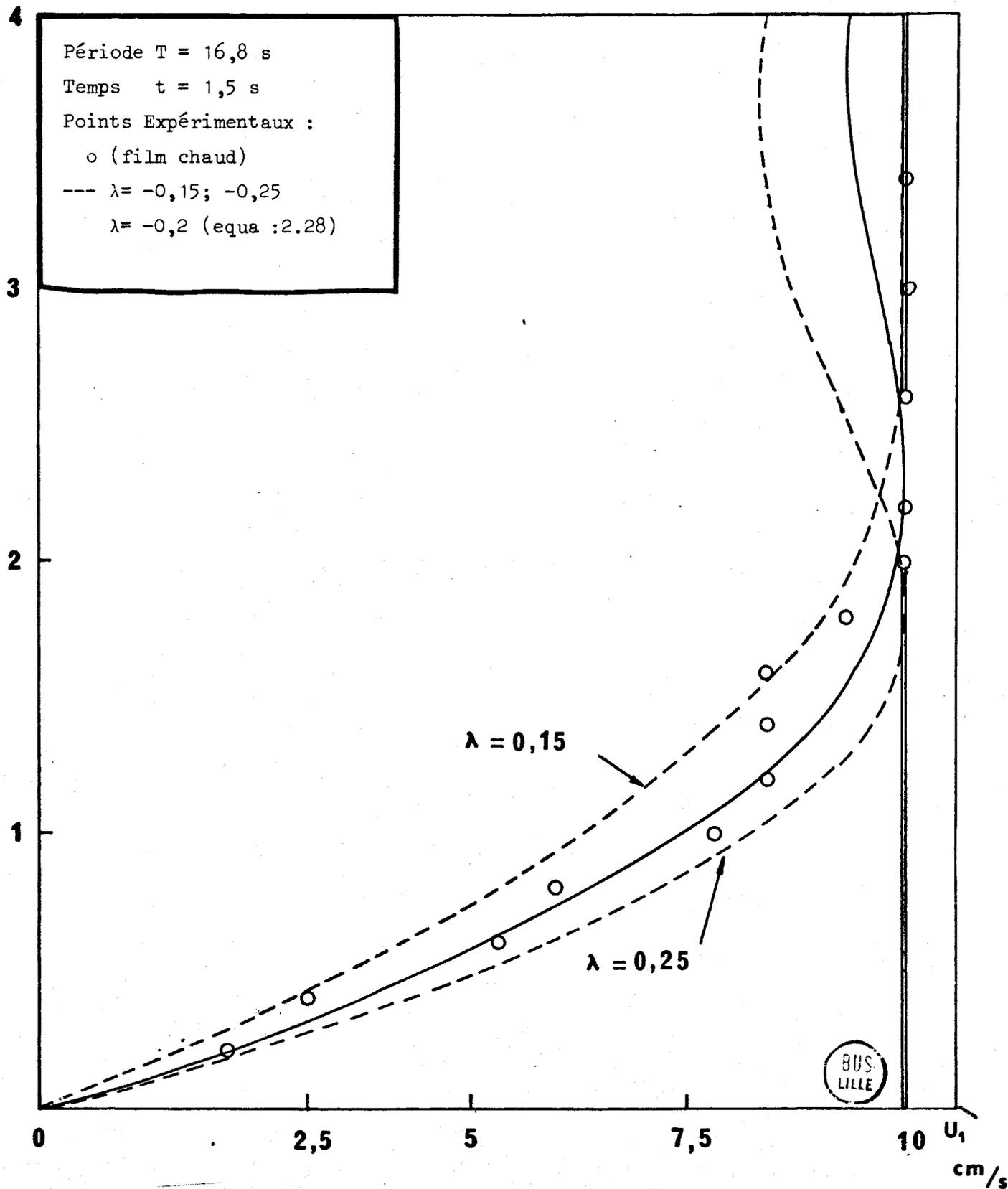


fig. (10) Profil de la vitesse U_1

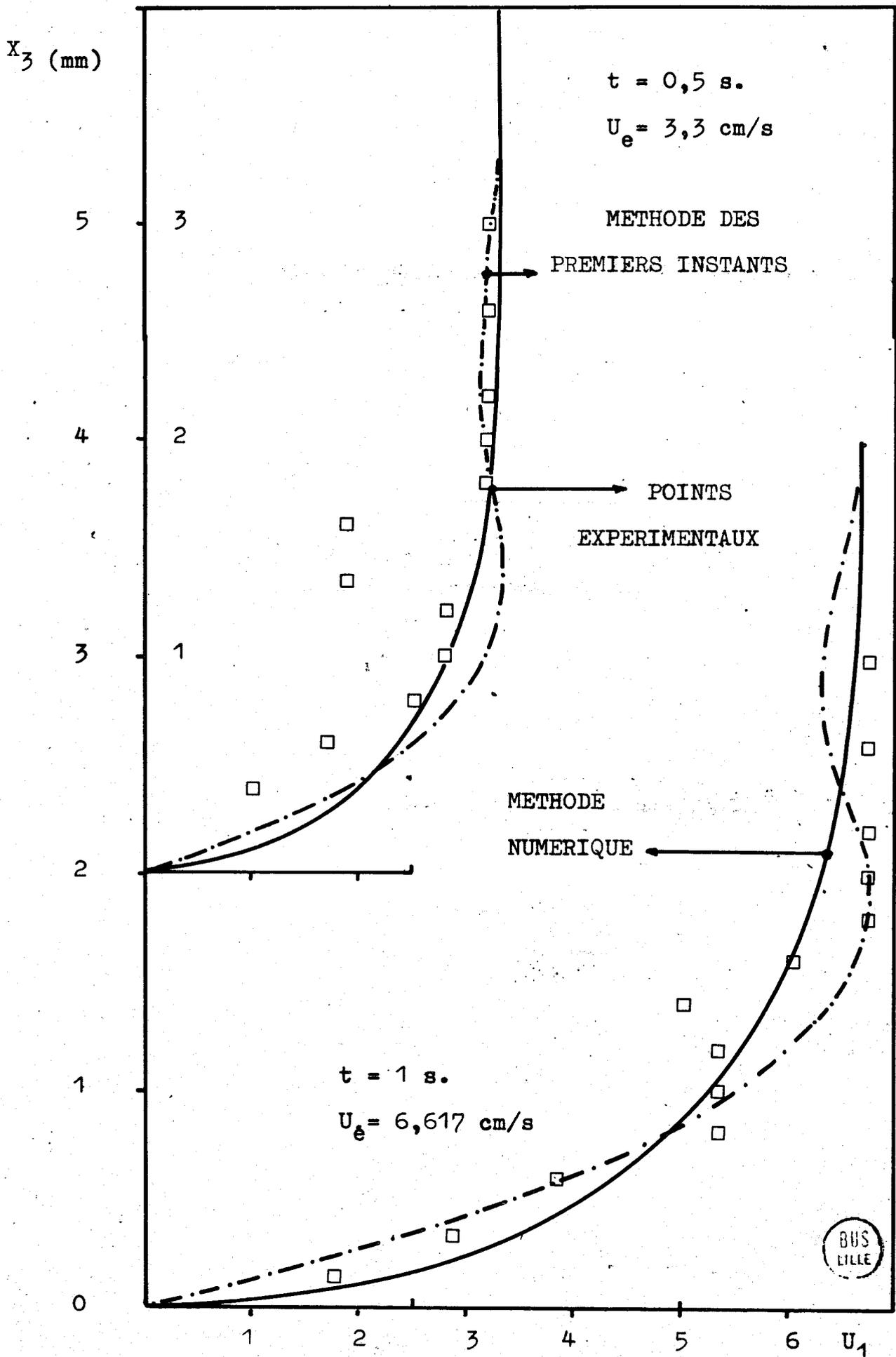


Fig. 11 et 12 COMPARAISON DES RESULTATS ANALYTIQUES,
 NUMERIQUE ET EXPERIMENTAUX

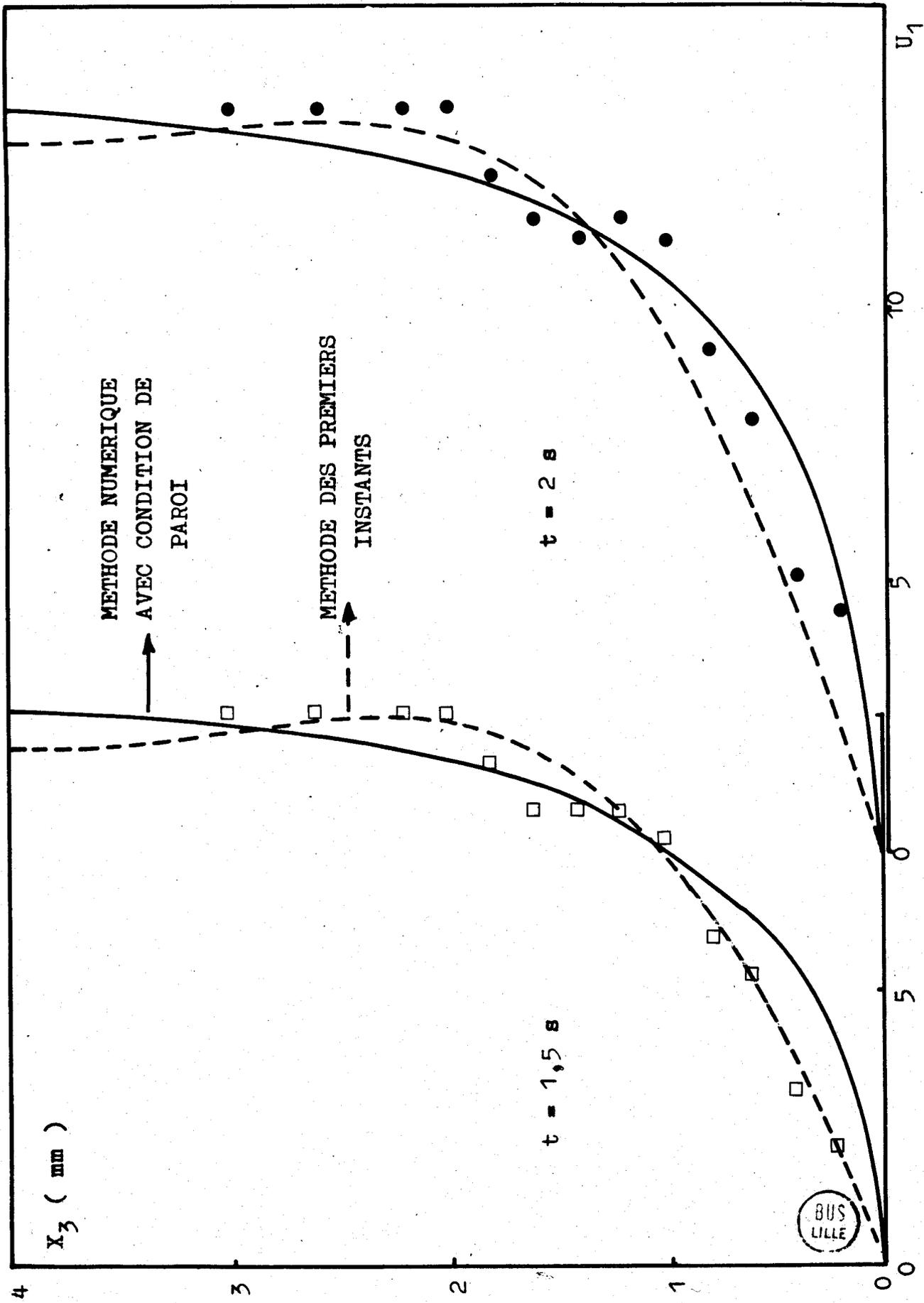


Fig. 13 PROFIL DES VITESSES - COMPARAISON DES RESULTATS

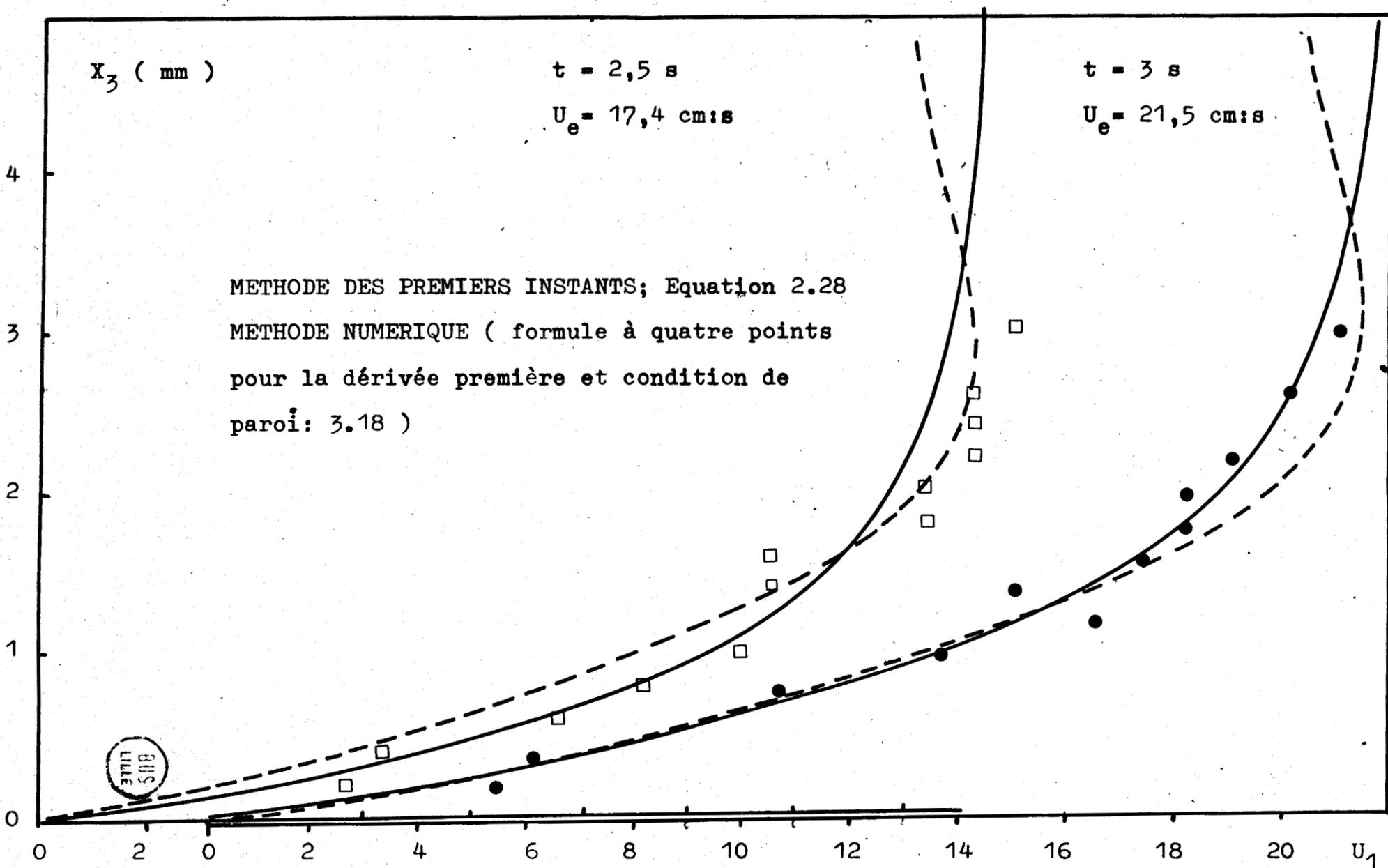


Fig. 14 VARIATION DU PROFIL DE U_1 . $t = 2,5$ et 3 s.

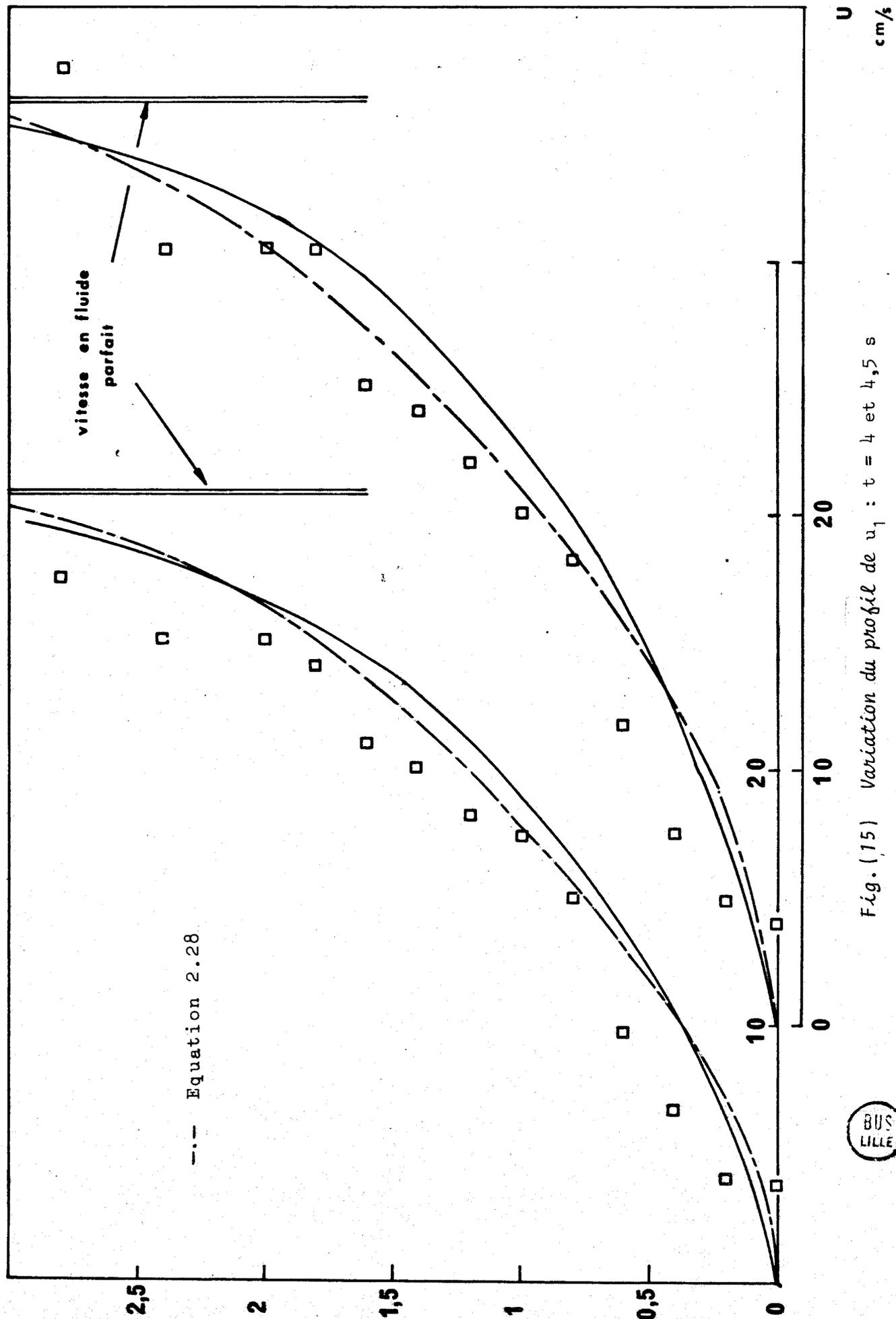


Fig. (15) Variation du profil de u_1 : $t = 4$ et $4,5$ s



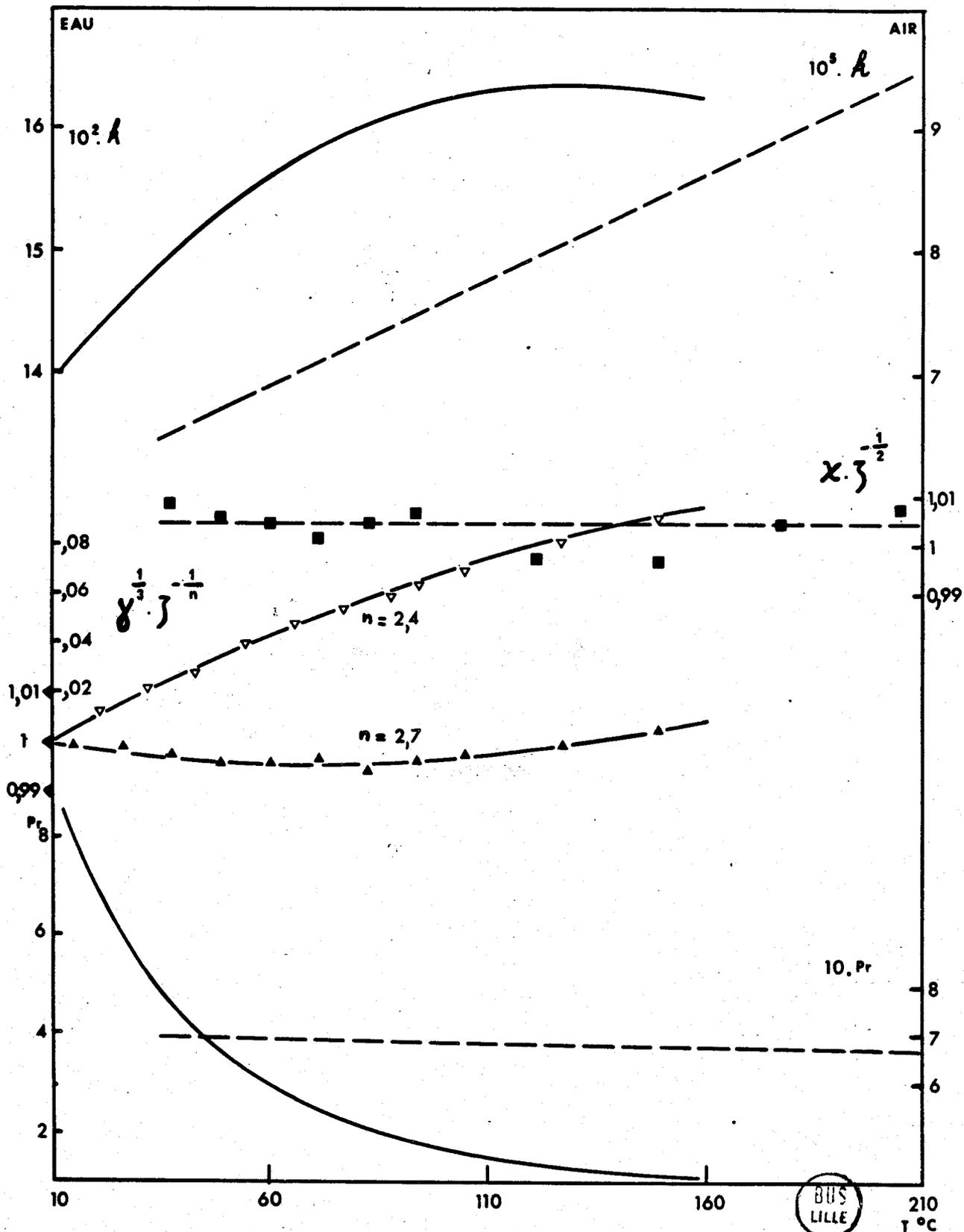


Fig (16) Propriétés Physiques Comparées de l'Eau et de l'Air

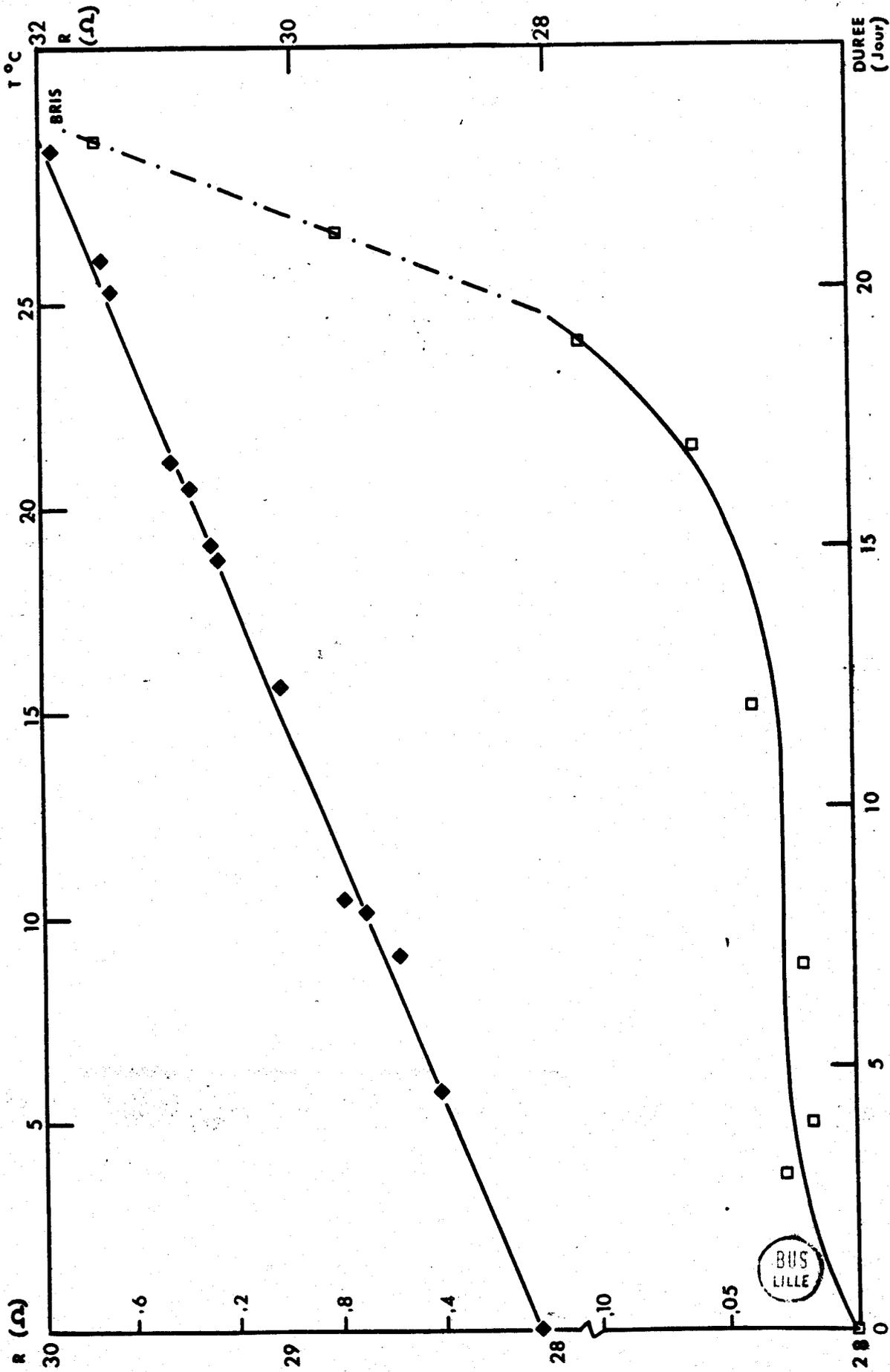


Fig (17) Variation de la Résistance en Fonction de la Température et en Fonction du Temps

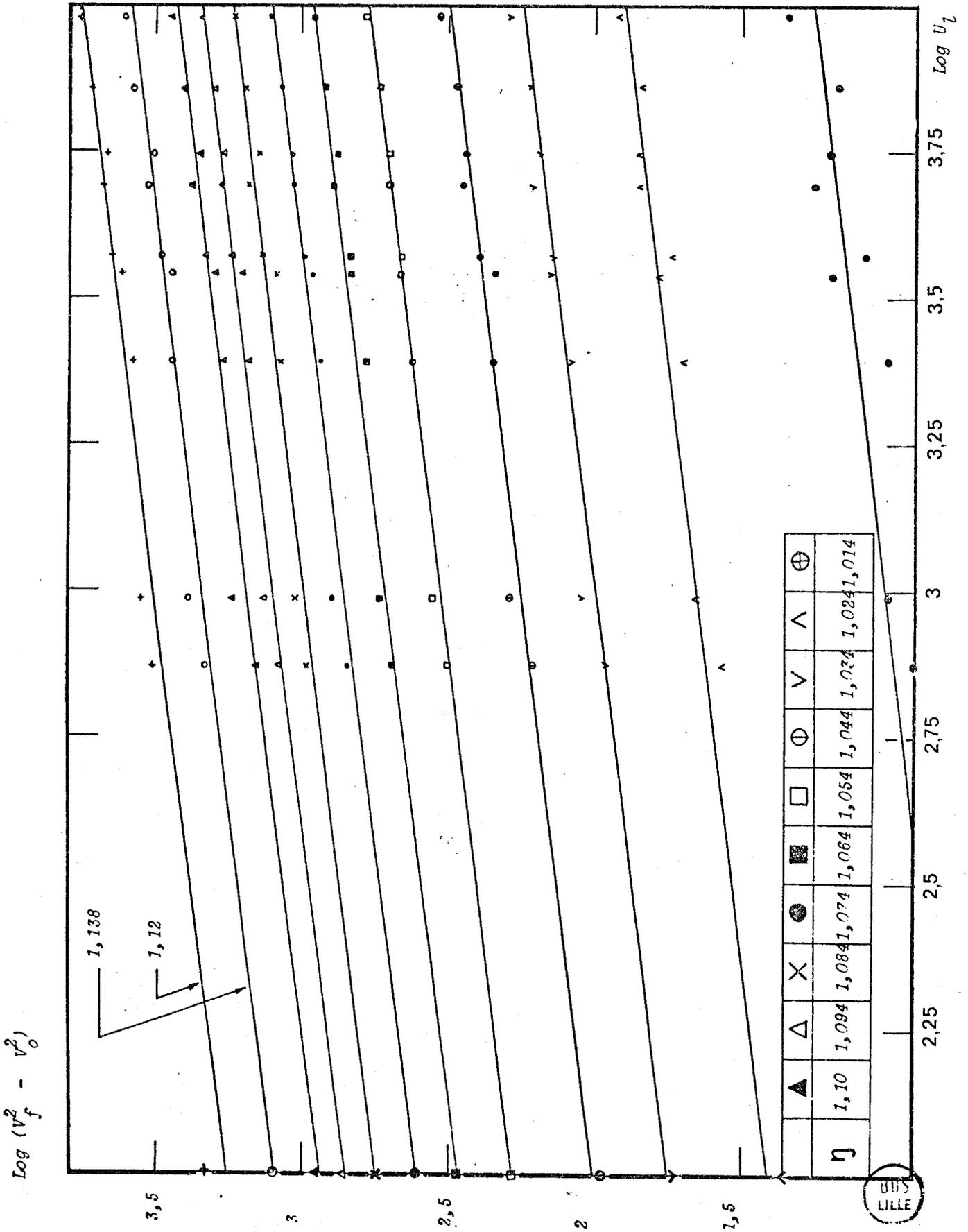


fig. (19) Représentation logarithmique ($T_a = 5,9^\circ C$)

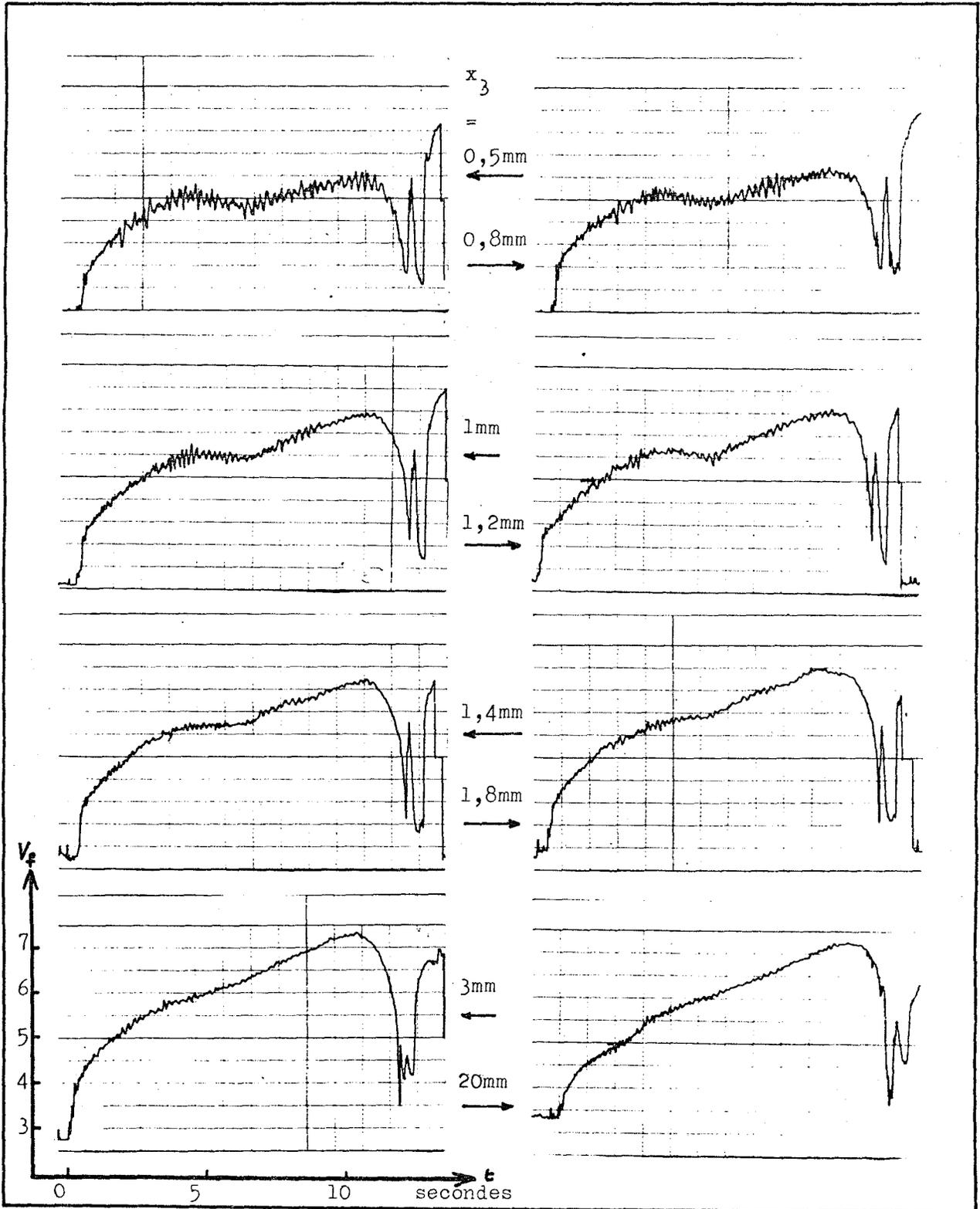


Fig (20) Variations de la Tension aux Bornes
 de la Sonde en fonction de X_3



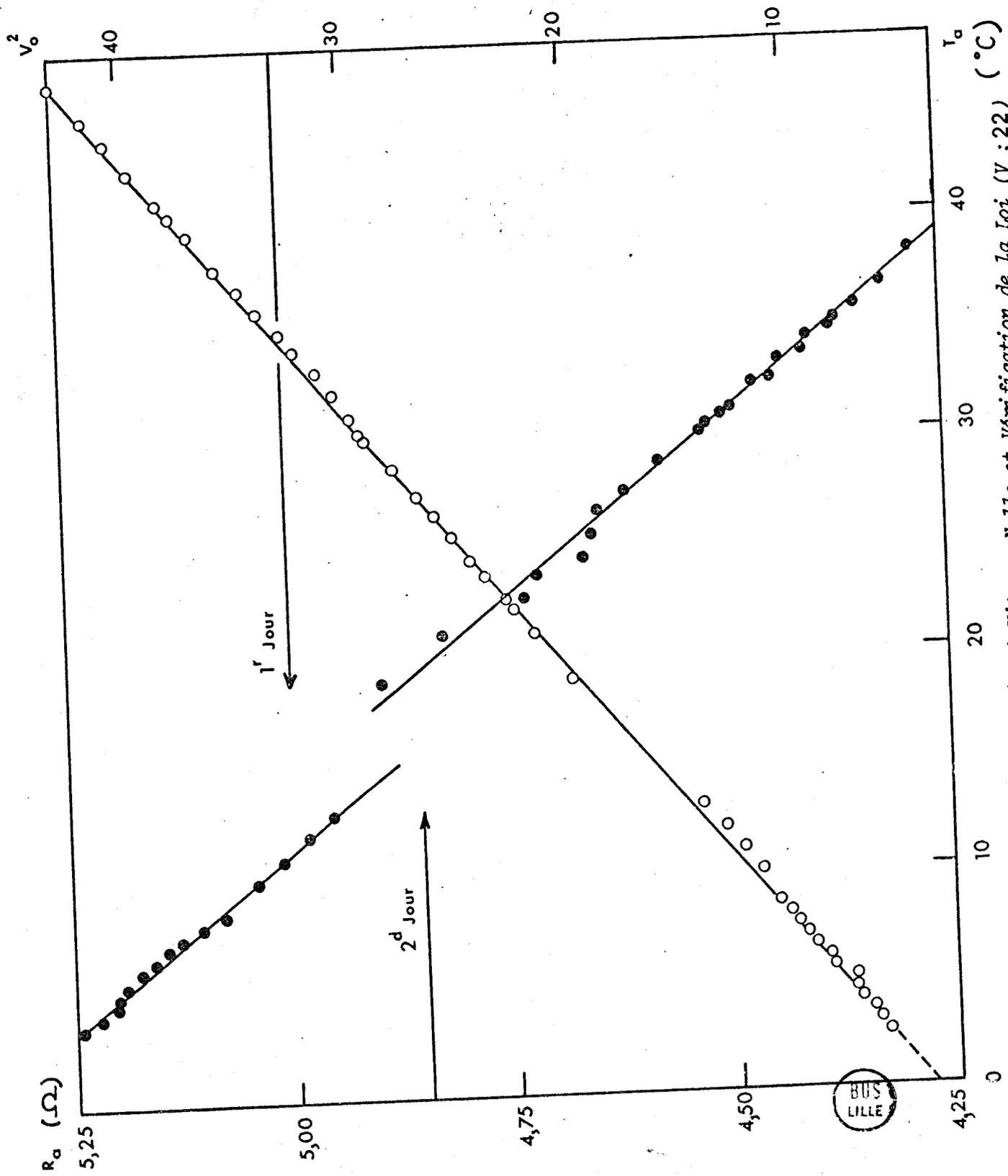
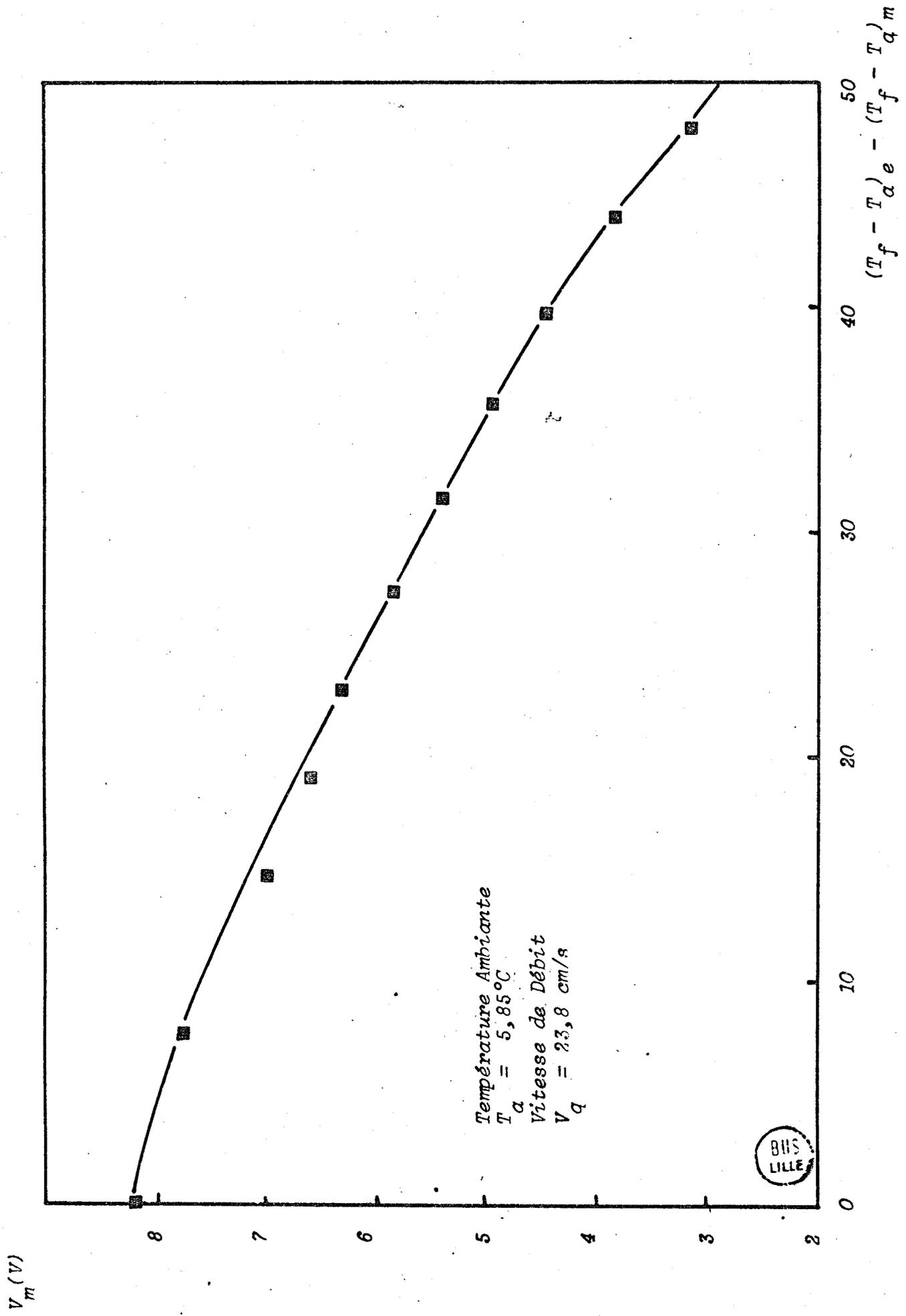


Fig (21) Variation de la Tension à Vitesse Nulle et Vérification de la Loi (V ; 22)



Fig(22) Variation de la Tension en fonction de la Surchauffe

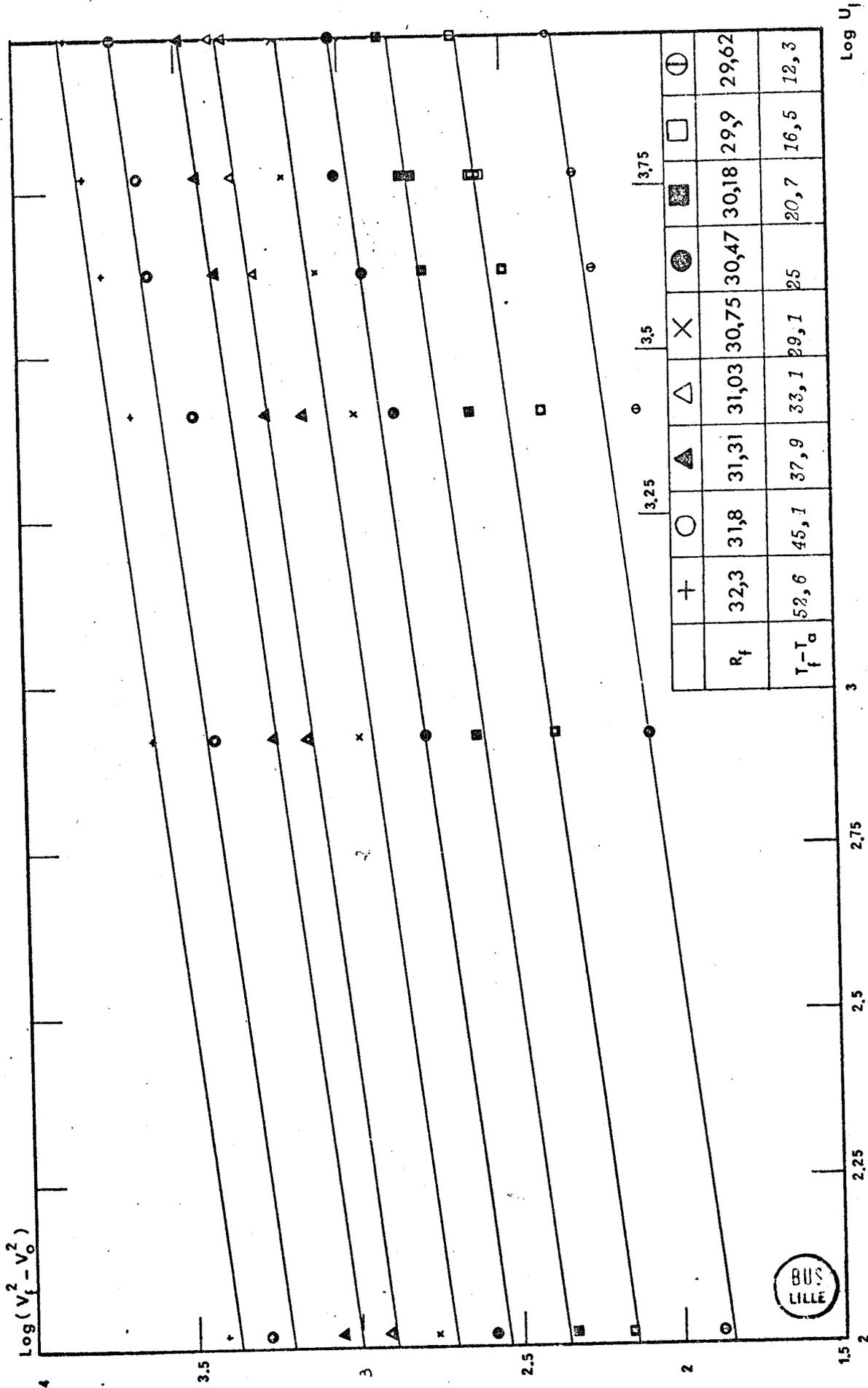


Fig (23) Etalonnage de la Sonde : $T_a = 11^\circ C$



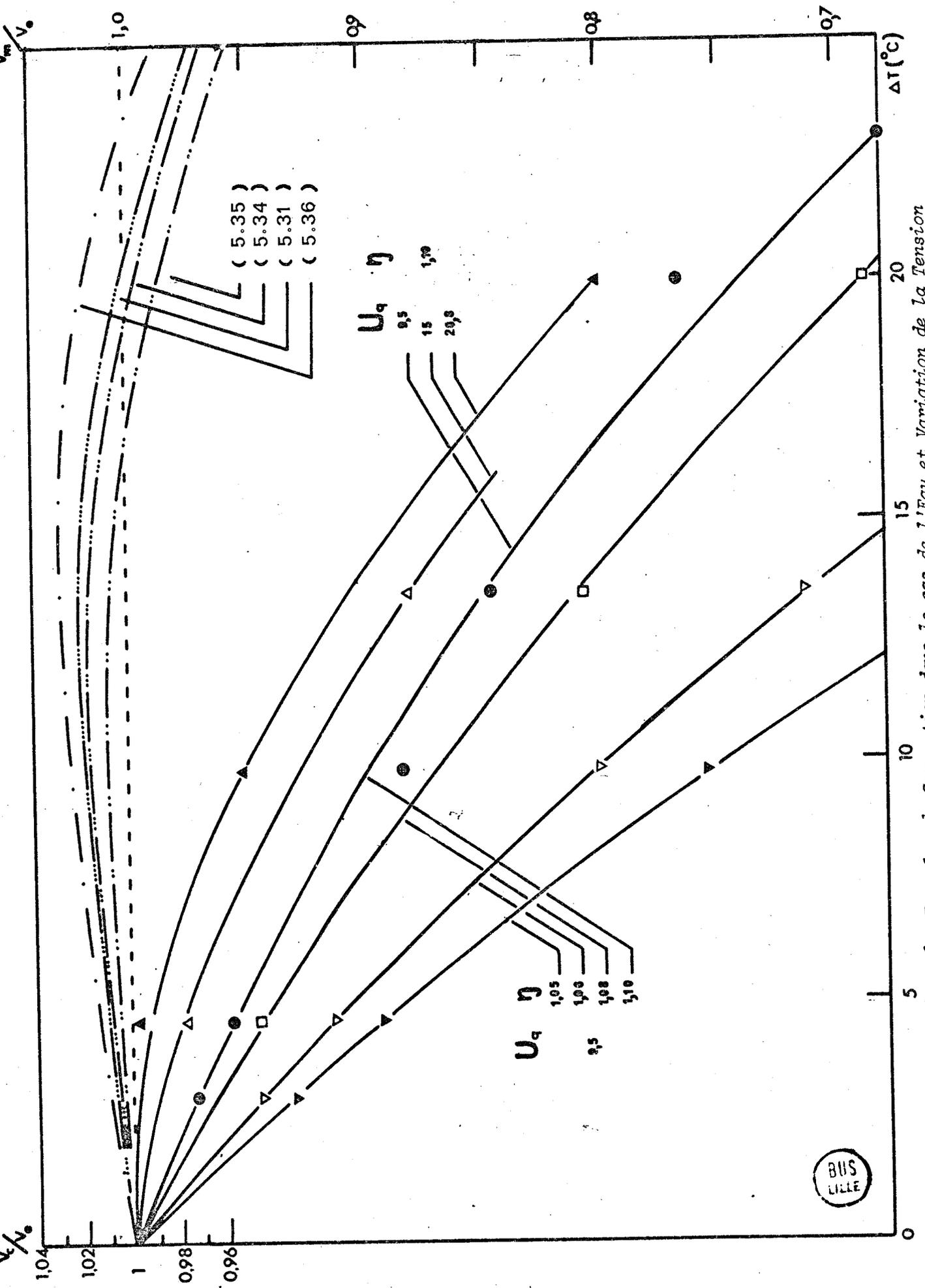


Fig (25) Comparaison des Formules de Correction dans le cas de l'Eau et Variation de la Tension

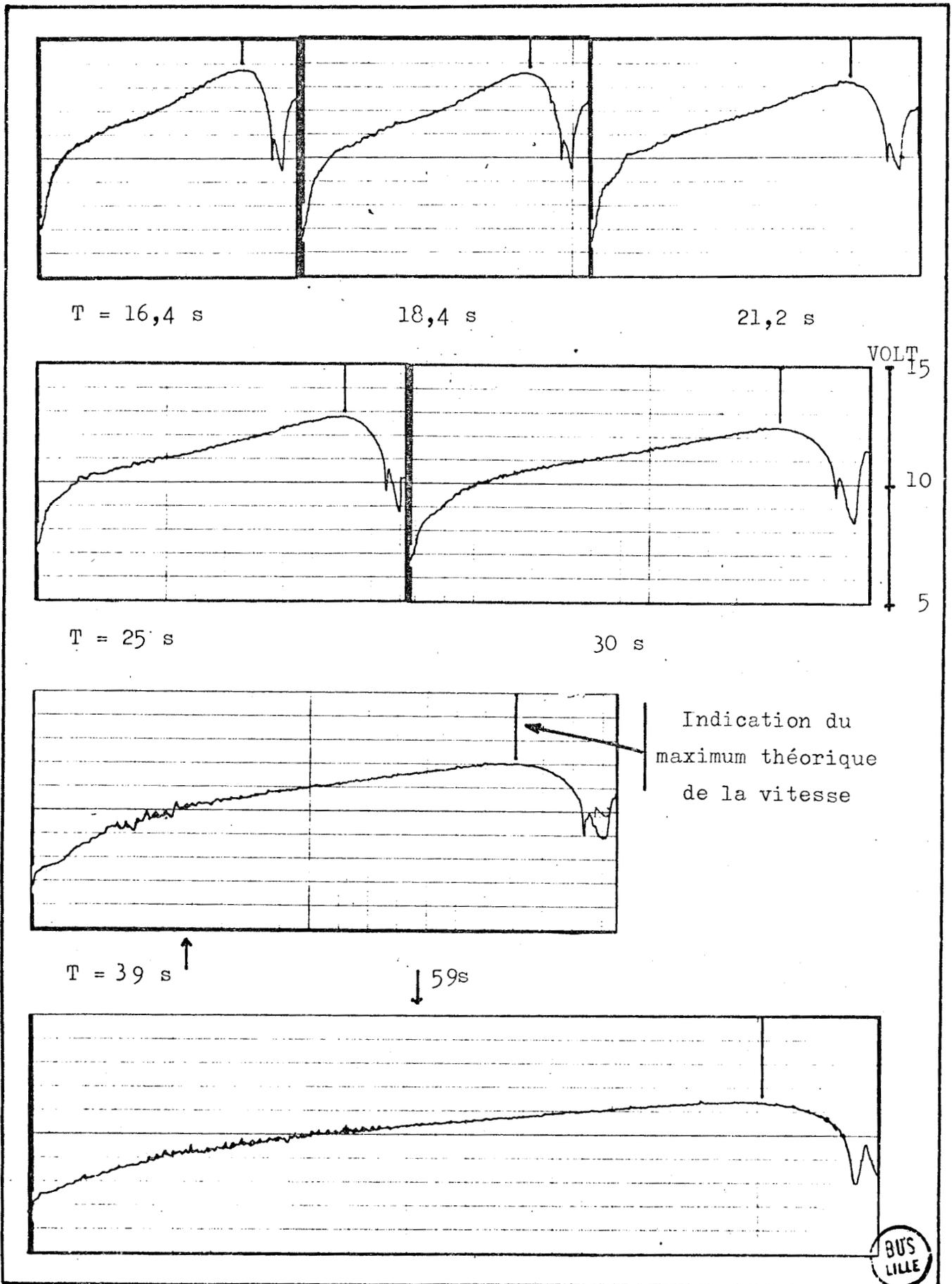


Fig (26) Enregistrements de la Tension
en Fonction de la Période T

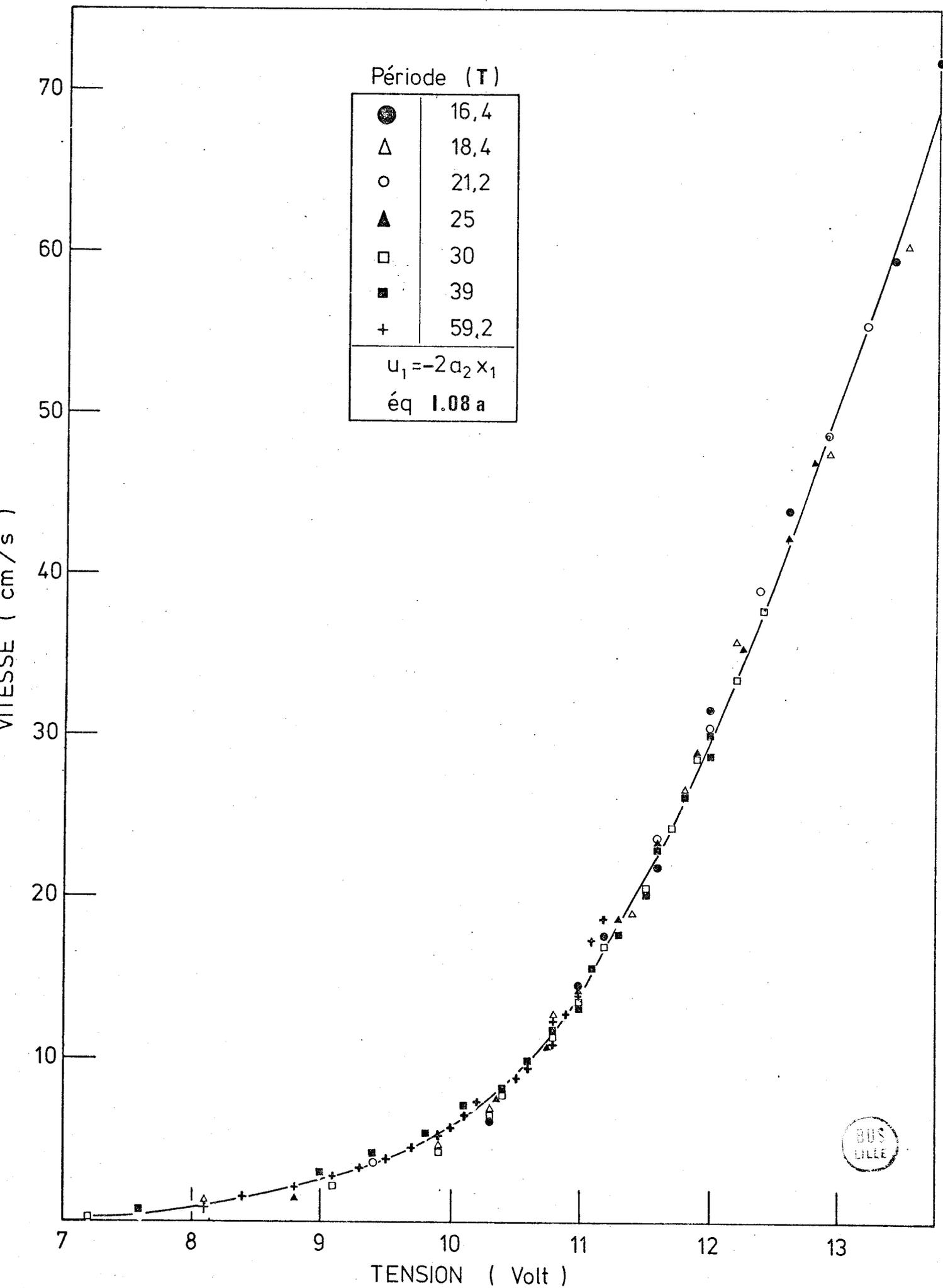


Fig :27 RELATION VITESSE-TENSION (Enregistrements)

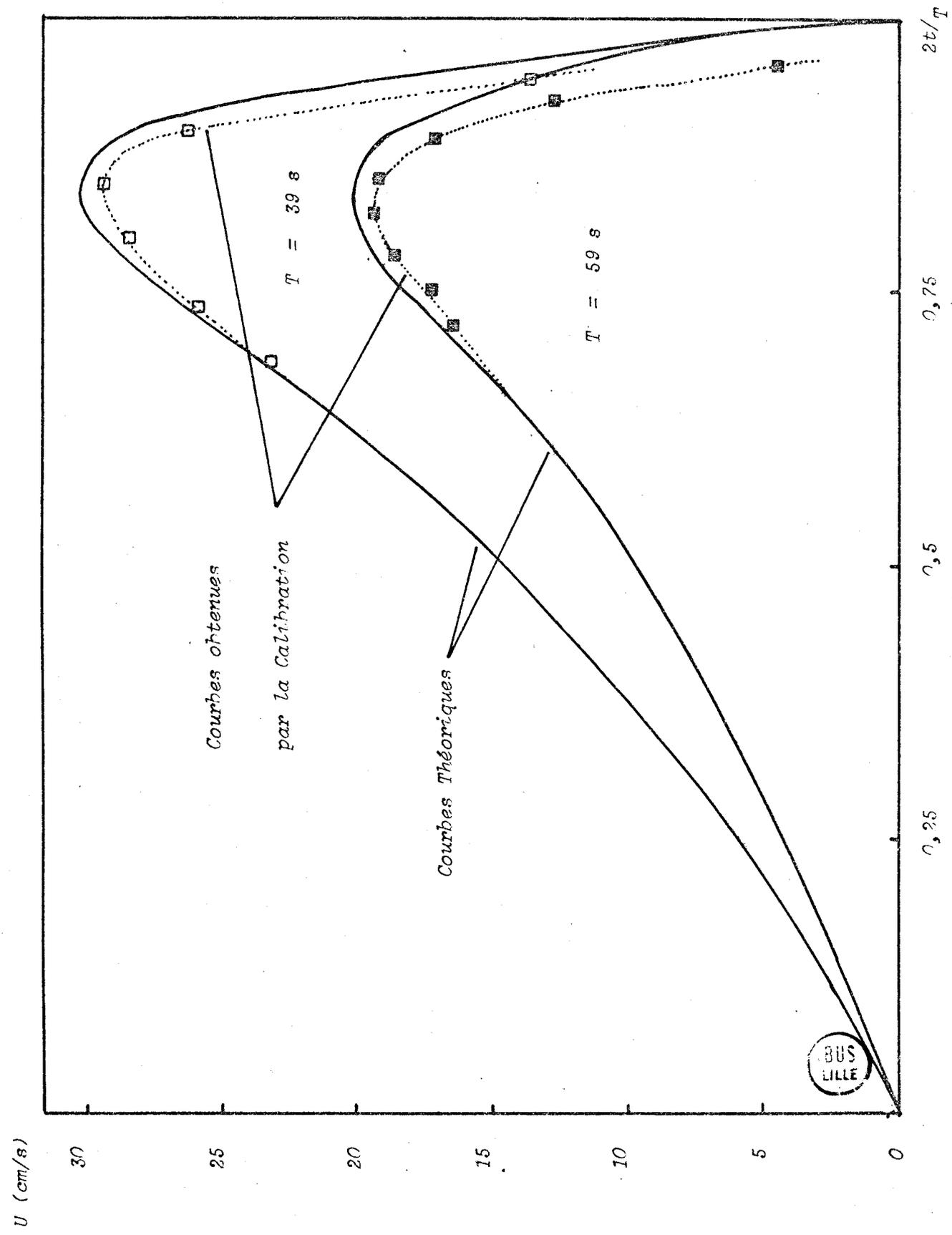


Fig (28) Comparaison de la Vitesse Théorique et de la Vitesse Mesurée par Etalonnage

ERRATUM

- page 12 equ. (I.24) lire $\dot{f} + f \cdot f' - \nu \cdot f'' = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}$
- 13 ligne 7 (I.23) au lieu de (I.27)
- 13 12 rajouter I . 29
- 13 20 rajouter: la distance caractéristique pourrait être l_3^2 / l_1
- 15 equ. (I.35) $\frac{dt_3}{dt} = - \int_0^{t_3(t)} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_3$
- 16 ligne 2 (I.30) au lieu de (I.10)
- 36 12 $- C(t) = \frac{2 (\Delta z)^3 A(t)}{\nu}$
- 39 20 changer figure 11 en figure de l'annexe B (t = 0,5 s)
- 41 5 f_{-2} au lieu de f-2
- 41 8 ν au lieu de v
- 41 22 I.27 au lieu de J.27
- 42 5 f_2 au lieu de f2