

N° d'ordre : 645

50 376
1 977
114

50376
1977
114

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3^e CYCLE

Spécialité Electronique - Option Electrotechnique

par

Marcel BOULIER

Maître es Sciences



COMPORTEMENT DU MOTEUR ASYNCHRONE TRIPHASE A CAGE COMMANDE PAR CONTACTEUR STATIQUE

Soutenue le 1er Juillet 1977, devant la Commission d'Examen

MM. G. SEQUIER	Président
C. MAIZIERES	Rapporteur
P. TRANNOY	Examineur
F. NOTELET	Examineur
P. VANDEPLANQUE	Directeur du Travail

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Electrotechnique de l'Université des Sciences et Techniques de Lille.

Nous exprimons toute notre gratitude à Monsieur le Professeur MAIZIERES pour nous avoir accueilli dans son équipe et pour l'intérêt constant qu'il a toujours porté à nos recherches.

Nos remerciements s'adressent aussi à Monsieur VANDEPLANQUE pour nous avoir guidé tout au long de notre travail et dont les conseils furent pour nous un guide précieux, qu'il trouve ici l'expression de notre sincère reconnaissance.

Nous tenons enfin à remercier tout le personnel et nos collègues du Laboratoire d'Electrotechnique pour l'aide qu'ils nous ont apportée tant dans nos réalisations expérimentales que dans la préparation de ce mémoire

I N T R O D U C T I O N

LA VITESSE VARIABLE

Les équipements à vitesse variable, de plus en plus demandés dans l'industrie, doivent permettre d'utiliser les moteurs les plus adaptés à leur utilisation.

Malgré les qualités indéniables du moteur à courant continu, les machines alternatives s'installent de plus en plus sur ce marché grâce au développement récent de l'électronique de puissance désormais entrée dans sa maturité industrielle.

A l'heure actuelle, le choix d'un entraînement à vitesse continuellement variable peut être fait :

- soit à partir d'une machine à courant continu, généralement onéreuse, associée à une électronique simple (redresseur ou hacheur),
- soit à partir d'une machine à courant alternatif de prix moins élevé mais nécessitant une électronique plus sophistiquée (onduleurs autonomes).

Il serait intéressant de concevoir, ne fut-ce que pour certaines utilisations, de tels équipements avec des moteurs robustes et peu coûteux associés à une électronique la plus simple possible.

C'est la raison pour laquelle nous avons choisi le moteur asynchrone triphasé à cage qui est actuellement le plus économique, tant par son prix et son entretien réduit que par sa robustesse.

DIVERS MOYENS SIMPLES

L'accès au rotor étant interdit, la commande la plus simple consiste à disposer sur les trois fils d'alimentation trois paires de thyristors tête-bêche qui seront contrôlés de différentes manières.

- Fonctionnement en gradateur triphasé :

W. SHEPHERD [1]* en étudie les courants et le couple à partir des équations triphasées ; BEDFORD et NENE [2] en font une étude analogue après avoir ramené la machine sur deux axes. Des solutions approchées sont obtenues à l'aide d'un ordinateur.

* les chiffres entre [] se rapportent à la bibliographie annexée en fin de cet ouvrage.

TAKEUCHI [3] a proposé une étude globale de l'ensemble gradateur-moteur asynchrone triphasé.

Le glissement, d'autant plus élevé que la tension aux bornes de la machine diminue, accroît les pertes rotoriques et diminue le rendement.

G. SEGUIER et C. ROMBAUT [4] ont montré que cette détérioration est accrue du fait que les tensions d'alimentation du moteur sont riches en harmoniques.

Il existe de plus, des difficultés à travailler dans la zone instable de la caractéristique mécanique.

- Contrôle du temps de passage du courant dans les enroulements statoriques :

Les gachettes des thyristors sont alors commandées par une horloge : l'application de ce dispositif aux moteurs de petite puissance donne des caractéristiques de contrôle présentant, lors d'une marche à couple constant, une partie linéaire étendue intéressante pour de nombreuses applications [5].

- On peut obtenir un fonctionnement à vitesse quasi constante en contrôlant les thyristors par l'intermédiaire d'une réaction en vitesse : le moteur est alimenté ou non selon que sa vitesse croît ou décroît autour de la vitesse moyenne désirée Ω_0 : $\Omega_0 - \Delta\Omega < \Omega < \Omega_0 + \Delta\Omega$.

L'alimentation est donc faite par le gradateur fonctionnant en contacteur statique.

NECESSITE DE L'ETUDE DES REGIMES TRANSITOIRES

De par le principe même de ce variateur, le moteur sera périodiquement soumis à des régimes transitoires dont la fréquence est incohérente avec celle du réseau ; il est alors nécessaire d'effectuer l'étude des régimes transitoires du moteur à cage pour en discerner les paramètres les plus importants.

De nombreuses méthodes ont été proposées pour déterminer le comportement transitoire du moteur à induction triphasé-triphasé dans les hypothèses de non saturation, à pertes fer négligeables et à distribution spatiale sinusoïdale de la force magnéto-motrice.

- En considérant une machine équivalente réduite à deux axes en quadrature, [6,7] l'utilisation de méthodes dérivées de celle de RUNGE-KUTTA permet, grâce à l'ordinateur de prévoir l'évolution des courants et du couple au début des perturbations [8].

Par adjonction de l'équation mécanique du groupe tournant, on peut même tenir compte de l'évolution de la vitesse durant ces régimes [9,10,11].

Ces méthodes, assez lourdes, et basées sur une recherche numérique permettent difficilement de discuter de l'importance des conditions initiales.

- F. NOTELET [12] a établi les expressions générales de ce moteur et propose des essais simples pour relever les paramètres de la machine. Il a mis clairement en évidence le rôle primordial que jouent sur le couple les deux conditions initiales suivantes :

- instant d'alimentation
- position relative du rotor par rapport au stator.

Les études, moins nombreuses, concernant le moteur à cage tendent généralement à ramener le rotor à un système équivalent triphasé [13] ou réduit sur deux axes [14,15,16].

D'une manière plus générale, J. LESENNE [17] a montré que toute machine m - n phasée de constitution symétrique pouvait être ramenée sur deux axes en gardant sa puissance invariante.

Nous montrons ici que le rotor à cage est équivalent à un rotor bobiné triphasé et déterminons les expressions des courants, du couple et de la puissance absorbée pour l'alimentation symétrique à laquelle est soumis le moteur.

APPLICATION AU MODELE PROPOSE

Pouvant s'affranchir de l'instant d'amorçage des thyristors, on s'aperçoit de l'influence réduite de la position du rotor à l'enclenchement, ce qui entraîne une plus grande généralité des résultats concernant l'évolution du couple qui ne dépend pratiquement plus que de la vitesse initiale de rotation.

Cette connaissance des régimes transitoires nous permet dans la dernière partie de prédéterminer le genre d'utilisation convenable pour le variateur essentiellement affecté par son rendement.

Nous avons voulu y présenter une méthode simple de bureau d'étude permettant le choix du moteur pour une charge déterminée pouvant admettre une vitesse d'entraînement quasi constante.

CHAPITRE I

DETERMINATION DES COURANTS ET DU COUPLE TRANSITOIRES LORS DE LA MISE SOUS TENSION D'UN MOTEUR A INDUCTION

L'évolution des courants statoriques, rotoriques et du couple du moteur asynchrone en régime transitoire ne peut se déduire d'une étude séparée des régimes des armatures statorique et rotorique car le couplage magnétique relie entr'elles l'évolution de ces grandeurs.

I.1. HYPOTHESES ET NOTATIONS

Le moteur asynchrone étudié sera supposé de construction symétrique, triphasé au stator et au rotor.

On admettra que l'induction créée dans l'entrefer par chacune des phases, tant du stator que du rotor, présente une répartition spatiale sinusoïdale. Les flux rémanents seront négligés.

Nous supposerons le circuit magnétique non saturé ; ce qui entraîne deux conséquences :

- La perméabilité du fer étant très supérieure à celle de l'air, les surfaces des armatures statorique et rotorique peuvent être supposées équipotentiellles au point de vue magnétique. Les inductions dans l'entrefer dues aux diverses bobines sont alors radiales et peuvent s'ajouter algébriquement.

- La proportionnalité des flux aux courants qui les créent permet de mettre en évidence des coefficients d'auto-induction et de mutuelle-induction.

- Les pertes dans le fer du circuit magnétique et les diverses pertes supplémentaires seront négligées.

De plus, nous supposerons que la vitesse de rotation du moteur reste constante pendant le régime transitoire considéré.

Notations adoptées

p , nombre de paires de pôles

R_1 , résistance d'un enroulement statorique

R_2 , résistance d'un enroulement rotorique

L_1 , inductance propre d'un enroulement statorique

L_2 , inductance propre d'un enroulement rotorique

M_{1ij} , mutuelle inductance entre les enroulements i et j du stator

M_{2ij} , mutuelle inductance entre les enroulements i et j du rotor

Vu la constitution symétrique de la machine, on écrira seulement $M_{1ij} = M_1$

$$M_{2ij} = M_2$$

M , coefficient de mutuelle entre les enroulements s et r lorsque leurs axes sont confondus

i_{1s} , courant dans un fil d'alimentation du stator

j_s , courant dans l'enroulement s du stator avec $s = 1, 2$ ou 3

i_{2r} , courant dans l'enroulement r du rotor avec $r = 1, 2$ ou 3

u_s , tension entre fils du réseau de pulsation ω appliquée à l'enroulement s du stator dans le cas d'un couplage triangle

Ω' , vitesse angulaire de rotation du moteur en rd/sec

θ , angle géométrique que font, à l'instant t , les axes des enroulements 1 du stator et du rotor

α , caractérisant l'instant d'amorçage tel que la tension appliquée à la phase 1 à l'instant initial vaut $\sqrt{3} V_m \sin(\alpha + \pi/6)$

ω' , pulsation correspondant à la vitesse Ω' donc telle que $\omega' = p\Omega'$

Les indices l , f et o ajoutés à la notation d'une variable signifieront qu'on considère respectivement pour celle-ci son régime libre, son régime forcé ou sa valeur initiale.

I.2. EQUATIONS GENERALES DU MOTEUR POUR UNE ALIMENTATION EN TRIANGLE

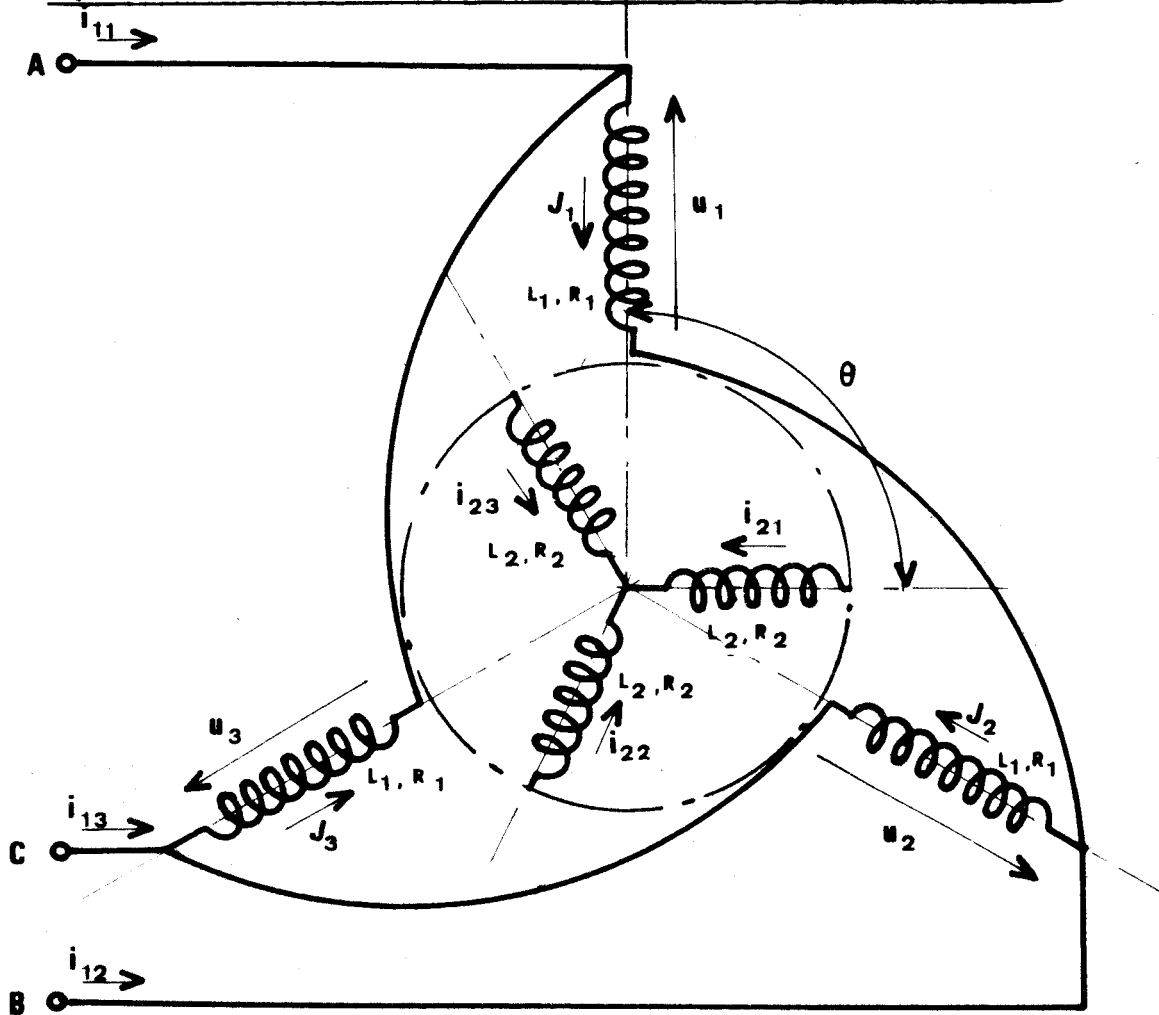


FIGURE 1 : Représentation des enroulements du moteur triphasé idéalisé.

Au stator :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= R_1 j_1 + \frac{d}{dt} L_1 j_1 + M_1 \frac{d}{dt} (j_2 + j_3) + M_1 \frac{d}{dt} (i_{21} \cos p\theta + i_{22} \cos(p\theta + 2\pi/3) + i_{23} \cos(p\theta + 4\pi/3)) \\
 u_2 &= R_1 j_2 + \frac{d}{dt} L_1 j_2 + M_1 \frac{d}{dt} (j_1 + j_3) + M_1 \frac{d}{dt} (i_{21} \cos(p\theta + 4\pi/3) + i_{22} \cos p\theta + i_{23} \cos(p\theta + 2\pi/3)) \\
 u_3 &= R_1 j_3 + \frac{d}{dt} L_1 j_3 + M_1 \frac{d}{dt} (j_1 + j_2) + M_1 \frac{d}{dt} (i_{21} \cos(p\theta + 2\pi/3) + i_{22} \cos(p\theta + 4\pi/3) + i_{23} \cos p\theta)
 \end{aligned}
 \tag{1'}$$

Si la somme des tensions $u_1 + u_2 + u_3$ est nulle, la somme des courants $j_1 + j_2 + j_3$ est nulle.

or

$$u_1 + u_2 + u_3 = R_1 (j_1 + j_2 + j_3) + (L_1 + 2M_1) \frac{d}{dt} (j_1 + j_2 + j_3)$$

entraîne la réciproque.

- Pour une alimentation du moteur par trois conducteurs, la somme des courants dans les enroulements statoriques est nulle quelque soit le mode de couplage.

Au rotor, les trois phases étant en court-circuit,

$$\left. \begin{aligned} 0 &= R_2 i_{21} + L_2 \frac{d}{dt} i_{21} + M \frac{d}{dt} (i_{22} + i_{23}) + M \frac{d}{dt} (j_1 \cos p\theta + j_2 \cos(p\theta + 4\pi/3) + j_3 \cos(p\theta + 2\pi/3)) \\ 0 &= R_2 i_{22} + L_2 \frac{d}{dt} i_{22} + M \frac{d}{dt} (i_{21} + i_{23}) + M \frac{d}{dt} (j_1 \cos(p\theta + 2\pi/3) + j_2 \cos p\theta + j_3 \cos(p\theta + 4\pi/3)) \\ 0 &= R_2 i_{23} + L_2 \frac{d}{dt} i_{23} + M \frac{d}{dt} (i_{21} + i_{22}) + M \frac{d}{dt} (j_1 \cos(p\theta + 4\pi/3) + j_2 \cos(p\theta + 2\pi/3) + j_3 \cos p\theta) \end{aligned} \right\} 1''$$

On a de plus $i_{21} + i_{22} + i_{23} = 0$ vu la configuration du rotor.

1.2.1. Simplification des équations

Définissons les inductances cycliques relatives à chaque enroulement :

$$L_1 = L_1 - M_1 : \text{au stator}$$

$$L_2 = L_2 - M_2 : \text{au rotor}$$

Les considérations précédentes sur les courants permettent de réduire à quatre inconnues le système d'équations représentatif du moteur.

- Au stator

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= R_1 j_1 + L_1 \frac{d}{dt} j_1 + \sqrt{3} M \frac{d}{dt} (i_{21} \sin(p\theta + 2\pi/3) - i_{22} \sin p\theta) \\ u_2 &= R_1 j_2 + L_1 \frac{d}{dt} j_2 + \sqrt{3} M \frac{d}{dt} (i_{21} \sin p\theta + i_{22} \sin(p\theta + (p\theta + \frac{\pi}{3}))) \end{aligned} \right\} (1)$$

- Au rotor

$$\left. \begin{aligned} 0 &= R_2 i_{21} + L_2 \frac{d}{dt} i_{21} + \sqrt{3} M \frac{d}{dt} (j_1 \sin(p\theta + \pi/3) + j_2 \sin p\theta) \\ 0 &= R_2 i_{22} + L_2 \frac{d}{dt} i_{22} + \sqrt{3} M \frac{d}{dt} (-j_1 \sin p\theta + j_2 \sin(p\theta + 2\pi/3)) \end{aligned} \right\} (2)$$

I.3. RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS

Ecrivons les systèmes d'équations (1) et (2) sous forme matricielle.

$$[U] = R_1 [J] + L_1 \left[\frac{d}{dt} J \right] + [M] \left[\frac{d}{dt} I \right] + \left[\frac{d}{dt} M \right] [I]$$

$$[O] = R_2 [I] + L_2 \left[\frac{d}{dt} I \right] + [N] \left[\frac{d}{dt} J \right] + \left[\frac{d}{dt} N \right] [J]$$

avec

$$[U] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} ; \quad \left[\frac{d}{dt} J \right] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} j_1 \\ \frac{d}{dt} j_2 \end{bmatrix}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} i_{21} \\ i_{22} \end{bmatrix} ; \quad \left[\frac{d}{dt} I \right] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} i_{21} \\ \frac{d}{dt} i_{22} \end{bmatrix}$$

$$[M] = \sqrt{3} M \begin{bmatrix} \sin(p\theta + 2\pi/3) & -\sin p\theta \\ \sin p\theta & \sin(p\theta + \pi/3) \end{bmatrix}$$

$$[N] = \sqrt{3} N \begin{bmatrix} \sin(p\theta + \pi/3) & \sin p\theta \\ -\sin p\theta & \sin(p\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix}$$

nous remarquons que la matrice $[N]$ est la matrice adjointe de la matrice $[M]$

$$[N] = [\text{adj } M]$$

L'angle géométrique θ étant une fonction du temps égale à $\Omega t + \theta_0$, on peut développer la matrice $[M]$ sous la forme :

$$[M] = M \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin p\theta [A] - \frac{1}{2} \cos p\theta [B] \right]$$

avec :

$$[A] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} ; \quad [B] = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

de même

$$[N] = M \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin p\theta [\text{adj } A] - \frac{1}{2} \cos p\theta [\text{adj } B] \right]$$

Nous remarquons que les matrices $[A]$ et $[B]$ sont liées par la relation :

$$[A]^2 = [B]$$

La matrice $[A]$ étant diagonalisable, il en est de même de la matrice $[B]$, la relation entre la matrice $[M]$ et $[N]$ entraîne que toutes les matrices $[A]$, $[B]$, $[\text{adj } A]$ et $[\text{adj } B]$ admettent la même matrice de passage $[P]$

Donc si $[A] = [P] [D] [P]^{-1}$, on peut écrire :

$$[M] = M \frac{\sqrt{3}}{2} \sin p\theta [P] [D] [P]^{-1} - \frac{1}{2} M \cos p\theta [P] [D]^2 [P]^{-1}$$

$$[N] = M \frac{\sqrt{3}}{2} \sin p\theta [P] [\text{adj } D] [P]^{-1} - \frac{1}{2} M \cos p\theta [P] [\text{adj } D]^2 [P]^{-1}$$

I.3.1. Matrice diagonale et matrice de passage

Les valeurs propres de $[A]$ sont complexes conjuguées λ_1
 $\lambda_2 = \pm j\sqrt{3}$

Elles déterminent les vecteurs propres :

$$\lambda_1 = j\sqrt{3} ; X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -j\sqrt{3} ; X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} \quad \text{avec } a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+j\sqrt{3}}{2}$$

donc la matrice

$$[D] = \begin{bmatrix} j\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -j\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

la matrice

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & a \end{bmatrix}$$

la matrice

$$[P]^{-1} = \frac{1}{j\sqrt{3}} \begin{bmatrix} a & -1 \\ -a^2 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3.2. Changement de variable

Le système d'équation (3) peut s'écrire en notant $\frac{d\theta}{dt} = \theta^\circ$

$$\begin{aligned} [U] &= R_1 [J] + L_1 \left[\frac{d}{dt} J \right] + [P] \left[M \frac{\sqrt{3}}{2} \sin p\theta [D] - \frac{M}{2} \cos p\theta [D]^2 \right] [P]^{-1} \left[\frac{d}{dt} I \right] \\ &\quad + [P] \left[M \frac{\sqrt{3}}{2} p^\circ \cos p\theta [D] + \frac{M}{2} p^\circ \sin p\theta [D]^2 \right] [P]^{-1} [I] \\ [O] &= R_2 [I] + L_2 \left[\frac{d}{dt} I \right] + [P] \left[M \frac{\sqrt{3}}{2} \sin p\theta [\text{adj } D] - \frac{M}{2} \cos p\theta [\text{adj } D]^2 \right] [P]^{-1} \left[\frac{d}{dt} J \right] \\ &\quad + [P] \left[M \frac{\sqrt{3}}{2} p^\circ \cos p\theta [\text{adj } D] + \frac{M}{2} \sin p\theta [\text{adj } D]^2 \right] [P]^{-1} [J] \end{aligned} \quad (4)$$

en multipliant les équations du système (4) par la matrice $[P]^{-1}$ on fait apparaitre des grandeurs auxiliaires, d'indice "prime" :

$$[P]^{-1}[U] = [U'] = \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} \quad 4'$$

$$[P]^{-1}[J] = [J'] = \begin{bmatrix} j'_1 \\ j'_2 \end{bmatrix} \quad 4''$$

$$[P]^{-1}\left[\frac{d}{dt}J\right] = \left[\frac{d}{dt}J'\right] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}j'_1 \\ \frac{d}{dt}j'_2 \end{bmatrix} \quad 4'''$$

$$[P]^{-1}[I] = [I'] = \begin{bmatrix} i'_{21} \\ i'_{22} \end{bmatrix} \quad 4''''$$

$$[P]^{-1}\left[\frac{d}{dt}I\right] = \left[\frac{d}{dt}I'\right] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}i'_{21} \\ \frac{d}{dt}i'_{22} \end{bmatrix} \quad 4'''''$$

nous obtenons le système matriciel :

$$\left. \begin{aligned} [U'] &= R_1[J'] + L_1\left[\frac{d}{dt}J'\right] + \left[M\frac{\sqrt{3}}{2} \sin p\theta [D] - \frac{M}{2} \cos p\theta [D]^2 \right] \left[\frac{d}{dt}I'\right] \\ &\quad + \left[M\frac{\sqrt{3}}{2} p\theta \cos p\theta [D] + \frac{M}{2} p\theta \sin p\theta [D]^2 \right] [I'] \\ [O] &= R_2[I'] + L_2\left[\frac{d}{dt}I'\right] + \left[M\frac{\sqrt{3}}{2} \sin p\theta [\text{adj } D] - \frac{M}{2} \cos p\theta [\text{adj } D]^2 \right] \left[\frac{d}{dt}J'\right] \\ &\quad + \left[M\frac{\sqrt{3}}{2} p\theta \cos p\theta [\text{adj } D] + \frac{M}{2} p\theta \sin p\theta [\text{adj } D]^2 \right] [J'] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Soit un système d'équations en variable auxiliaires :

$$u'_1 = R_1 j'_1 + L_1 \frac{d}{dt} j'_1 + \frac{3}{2} M e^{j(\omega't + p\theta_0)} \left[\frac{d}{dt} i'_{21} + j\omega' i'_{21} \right] \quad (6)$$

$$u'_2 = R_1 j'_2 + L_1 \frac{d}{dt} j'_2 + \frac{3}{2} M e^{-j(\omega't + p\theta_0)} \left[\frac{d}{dt} i'_{22} - j\omega' i'_{22} \right] \quad (7)$$

$$0 = R_2 i'_{21} + L_2 \frac{d}{dt} i'_{21} + \frac{3}{2} M e^{-j(\omega't + p\theta_0)} \left[\frac{d}{dt} j'_1 - j\omega' j'_1 \right] \quad (8)$$

$$0 = R_2 i'_{22} + L_2 \frac{d}{dt} i'_{22} + \frac{3}{2} M e^{j(\omega't + p\theta_0)} \left[\frac{d}{dt} j'_2 + j\omega' j'_2 \right] \quad (9)$$



- Le système formé par les équations (6) et (8) permet d'obtenir i'_{21} et j'_{11}
- Le système formé par les équations (7) et (9) permet d'obtenir i'_{22} et j'_{22} .

Détermination de $[U]$

Le moteur alimenté en triphasé équilibré de séquence directe :

$$[U] = \begin{bmatrix} \sqrt{3} V_m \sin(\omega t + \alpha + \pi/6) \\ \sqrt{3} V_m \sin(\omega t + \alpha - \pi/2) \end{bmatrix}$$

$$[U'] = \frac{1}{j\sqrt{3}} \begin{bmatrix} a & -1 \\ -a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} V_m \sin(\omega t + \alpha + \pi/6) \\ \sqrt{3} V_m \sin(\omega t + \alpha - \pi/2) \end{bmatrix}$$

d'où

$$[U'] = \begin{bmatrix} -j V_m \frac{\sqrt{3}}{2} e^{j(\omega t + \alpha + \pi/6)} \\ j V_m \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-j(\omega t + \alpha + \pi/6)} \end{bmatrix}$$

On remarque que u'_1 et u'_2 sont des grandeurs conjuguées. Il suffit alors de résoudre un seul système car les équations (6) et (8) sont respectivement conjuguées des équations (7) et (9).

I.3.3. Résolution du système d'équations (relatif aux variables auxiliaires)

La résolution du système (6) et (8) s'effectue simplement en considérant le système différentiel matriciel obtenu en posant :

$$\left. \begin{aligned} j'_{11} &= X e^{\frac{j(\omega't + p\theta_0)}{2}} \\ i'_{21} &= Y e^{\frac{-j(\omega't + p\theta_0)}{2}} \end{aligned} \right] \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\tau_2 + \tau_1 \tau_2 (2-\sigma) j \frac{\omega'}{2}}{\sigma \tau_1 \tau_2} & \frac{3M(1-j\tau_2 \omega')}{2\sigma \tau_1 \tau_2 R_1} \\ \frac{3M(1+j\tau_1 \omega')}{2\sigma \tau_1 \tau_2 R_2} & -\frac{\tau_1 - \tau_1 \tau_2 (2-\sigma) j \frac{\omega'}{2}}{\sigma \tau_1 \tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_2}{\sigma L_1 L_2} \\ -\frac{3M}{2\sigma L_1 L_2} \end{bmatrix} u'_1 e^{-j(\frac{\omega' t + p\theta}{2})} \quad (11)$$

avec $\tau_1 = \frac{L_1}{R_1}$, $\tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$, $\sigma = 1 - \frac{9M^2}{4L_1 L_2}$

La solution de ce système différentiel du 1^{er} ordre est la somme
 - d'une solution générale qui correspond au régime libre $\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix}$

- d'une solution particulière qui correspond au régime forcé $\begin{bmatrix} X_f \\ Y_f \end{bmatrix}$

I.3.3.1. Solution générale

Cette solution résoud le système sans second membre :

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} X_1 \\ \frac{d}{dt} Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\tau_2 + \tau_1 \tau_2 (2-\sigma) j \frac{\omega'}{2}}{\sigma \tau_1 \tau_2} & \frac{3M(1-j\tau_2 \omega')}{2\sigma \tau_1 \tau_2 R_1} \\ \frac{3M(1+j\tau_1 \omega')}{2\sigma \tau_1 \tau_2 R_2} & -\frac{\tau_1 - \tau_1 \tau_2 (2-\sigma) j \frac{\omega'}{2}}{\sigma \tau_1 \tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

dans lequel nous effectuons un nouveau changement de base :

- recherche des valeurs propres.

$$\sigma \tau_1 \tau_2 \lambda^2 + (\tau_1 + \tau_2) \lambda + 1 + j(\tau_1 - \tau_2) \frac{\omega'}{2} + \sigma \tau_1 \tau_2 \frac{\omega'^2}{4} = 0$$

donc $\lambda_{11} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\sigma \tau_1 \tau_2 (1 + \sigma \tau_1 \tau_2 \frac{\omega'^2}{4} + j(\tau_1 - \tau_2) \frac{\omega'}{2})}}{2\sigma \tau_1 \tau_2}$
 λ_{21}

posons $\lambda_{11} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) \pm (a_1 + jb_1)}{2\sigma \tau_1 \tau_2}$
 λ_{21}

avec $A_1 = (\tau_1 + \tau_2)^2 - \sigma \tau_1 \tau_2 (4 + \sigma \tau_1 \tau_2 \omega'^2)$

$$B_1 = 2\sigma \tau_1 \tau_2 (\tau_1 - \tau_2) \omega'$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{A_1 + \sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{2}}$$

$$b_1 = \frac{B_1}{2a_1}$$

- recherche de la matrice de passage

pour $\lambda = \lambda_{11}$

on obtient un vecteur propre
$$\begin{bmatrix} -\frac{3M(1-j\tau_2\omega')}{2R_1} \\ \frac{\tau_1 - \tau_2 - a_1}{2} - j\left(\frac{\tau_1 \tau_2 (2-\sigma)\omega' + b_1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

pour $\lambda = \lambda_{21}$

on obtient le second vecteur propre
$$\begin{bmatrix} -\frac{3M(1-j\tau_2\omega')}{2R_1} \\ \frac{\tau_1 - \tau_2 + a_1}{2} - j\left(\frac{\tau_1 \tau_2 (2-\sigma)\omega' - b_1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

La solution générale du système (12) est donc :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3M(1-j\tau_2\omega')}{2R_1} & -\frac{3M(1-j\tau_2\omega')}{2R_1} \\ \frac{\tau_1 - \tau_2 - a_1}{2} - j\frac{\tau_1 \tau_2 (2-\sigma)\omega' + b_1}{2} & \frac{\tau_1 - \tau_2 + a_1}{2} - j\frac{\tau_1 \tau_2 (2-\sigma)\omega' - b_1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} H_1 e^{\frac{-(\tau_1 + \tau_2) + a_1 + j b_1}{2\sigma \tau_1 \tau_2} t} \\ H_2 e^{\frac{-(\tau_1 + \tau_2) - a_1 - j b_1}{2\sigma \tau_1 \tau_2} t} \end{bmatrix} \quad (13)$$

H_1 et H_2 étant les constantes d'intégration.

1.3.3.2. Solution particulière du système

Cette solution résoud le système d'équations :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_f}{dt} \\ \frac{dy_f}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\tau_2 + \tau_1 \tau_2 (2-\sigma) j \frac{\omega'}{2}}{\sigma \tau_1 \tau_2} & \frac{3M(1-j\tau_2 \omega')}{2\sigma R_1 \tau_1 \tau_2} \\ \frac{3M(1-j\tau_1 \omega')}{2\sigma R_2 \tau_1 \tau_2} & -\frac{\tau_1 - \tau_1 \tau_2 (2-\sigma) j \frac{\omega'}{2}}{\sigma \tau_1 \tau_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_f \\ Y_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{L_2}{\sigma L_1 L_2} \\ -\frac{3M}{2\sigma L_1 L_2} \end{bmatrix} u_1 e^{-j(\frac{\omega' t + p\theta_c}{2})} \quad (14)$$

Compte tenu de la nature du second membre du système (14) nous aurons une solution particulière de la forme :

$$\begin{bmatrix} X_f \\ Y_f \end{bmatrix} = e^{j(\omega - \frac{\omega'}{2})t} \begin{bmatrix} X_{fo} \\ Y_{fo} \end{bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \begin{bmatrix} \frac{dX_f}{dt} \\ \frac{dY_f}{dt} \end{bmatrix} = j(\omega - \frac{\omega'}{2}) \begin{bmatrix} X_f \\ Y_f \end{bmatrix} \quad (15)$$

Le report de cette solution dans le système (14) détermine :

$$\begin{bmatrix} X_{fo} \\ Y_{fo} \end{bmatrix} = \frac{-j\sqrt{3}V_m e^{j(\alpha - \frac{p\theta_o}{2} + \frac{\pi}{6})}}{2R_1 R_2 (1 - \tau_1 \tau_2 \sigma \omega (\omega - \omega') + j(\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega - \omega')))} \begin{bmatrix} R_2 (1 + j\tau_2 (\omega - \omega')) \\ -j\frac{3M(\omega - \omega')}{2} \end{bmatrix}$$

D'où l'on tire la solution forcée :

$$\begin{bmatrix} X_f \\ Y_f \end{bmatrix} = \frac{-j\sqrt{3}V_m e^{j((\omega t - \frac{\omega'}{2})t + \alpha - \frac{p\theta_o}{2} - \frac{\pi}{6})}}{2R_1 R_2 (1 - \tau_1 \tau_2 \sigma \omega (\omega - \omega') + j(\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega - \omega')))} \begin{bmatrix} R_2 (1 + j\tau_2 (\omega - \omega')) \\ -j\frac{3M(\omega - \omega')}{2} \end{bmatrix}$$

1.3.4. Expression des variables auxiliaires

En reprenant les relations (10) :

$$j'_1 = -\frac{3M(1-j\tau_2\omega')}{2R_1} \left[\begin{array}{l} H_1 e^{\left(\frac{-(\tau_1+\tau_2)+a_1+jb_1}{2\sigma\tau_1\tau_2}\right)t} e^{j\left(\frac{\omega't+p\theta_0}{2}\right)} \\ + H_2 e^{\left(\frac{-(\tau_1+\tau_2)-a_1-jb_1}{2\sigma\tau_1\tau_2}\right)t} e^{j\left(\frac{\omega't+p\theta_0}{2}\right)} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} j'_{11} \\ \\ \\ j'_{1f} \end{array} \right] \quad (17)$$

$$-\frac{j\sqrt{3}V_m e^{j(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{6})}}{2R_1 R_2 (1-\tau_1\tau_2\sigma\omega(\omega-\omega')+j(\tau_1\omega+\tau_2(\omega-\omega')))} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ j'_{1f} \end{array} \right]$$

$$i'_{21} = \left[\frac{\tau_1-\tau_2-a_1}{2} - j\frac{\tau_1\tau_2(2-\sigma)\omega'+b_1}{2} \right] \left[\begin{array}{l} H_1 e^{\left(\frac{-(\tau_1+\tau_2)+a_1+jb_1}{2\sigma\tau_1\tau_2}\right)t} e^{-j\left(\frac{\omega't+p\theta_0}{2}\right)} \\ + \left[\frac{\tau_1-\tau_2+a_1}{2} - j\frac{\tau_1\tau_2(2-\sigma)\omega'-b_1}{2} \right] H_2 e^{\left(\frac{-(\tau_1+\tau_2)-a_1-jb_1}{2\sigma\tau_1\tau_2}\right)t} e^{-j\left(\frac{\omega't+p\theta_0}{2}\right)} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} i'_{211} \\ \\ \\ i'_{21f} \end{array} \right] \quad (18)$$

$$-\frac{3\sqrt{3}V_m e^{j((\omega-\omega')t-p\theta_0+\alpha+\pi/6)} M(\omega-\omega')}{4R_1 R_2 (1-\tau_1\tau_2\sigma\omega(\omega-\omega')+j(\tau_1\omega+\tau_2(\omega-\omega')))} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ i'_{21f} \end{array} \right]$$

j'_2 et i'_{22} sont les grandeurs conjuguées de j'_1 et i'_{21} .

I.3.5. Détermination des constantes d'intégrations H_1 et H_2 .

Connaissant les conditions initiales pour les courants j_1, j_2, i_{21} et i_{22} la matrice de passage [P] permet de déterminer les conditions initiales relatives aux variables auxiliaires j'_1, j'_2, i'_{21} et i'_{22} que l'on notera de l'indice 0.

D'après les expressions (17) et (18), nous obtenons à l'instant initial :

$$\begin{aligned}
 j'_{101} = j'_{10} - j'_{10f} &= -\frac{3M(1-j\tau_2\omega')}{2R_1} \left[H_1 e^{j\frac{p\theta_0}{2}} + H_2 e^{j\frac{p\theta_0}{2}} \right] \\
 i'_{2101} = i'_{210} - i'_{210f} &= \left[\frac{\tau_1 - \tau_2 - a_1}{2} - j\frac{\tau_1\tau_2(2-\sigma)\omega' + b_1}{2} \right] \left[H_1 e^{-j\frac{p\theta_0}{2}} \right] \\
 &+ \left[\frac{\tau_1 - \tau_2 + a_1}{2} - j\frac{\tau_1\tau_2(2-\sigma)\omega' - b_1}{2} \right] \left[H_2 e^{-j\frac{p\theta_0}{2}} \right]
 \end{aligned} \tag{19}$$

avec :

$$\begin{bmatrix} j'_{10} - j'_{10f} \\ j'_{20} - j'_{20f} \end{bmatrix} = \frac{1}{j\sqrt{3}} \begin{bmatrix} e^{j\frac{2\pi}{3}} & -1 \\ -e^{j\frac{4\pi}{3}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j'_{10} - j'_{10f} \\ j'_{20} - j'_{20f} \end{bmatrix} \tag{20}$$

et

$$\begin{bmatrix} i'_{210} - i'_{210f} \\ i'_{220} - i'_{220f} \end{bmatrix} = \frac{1}{j\sqrt{3}} \begin{bmatrix} e^{j\frac{2\pi}{3}} & -1 \\ -e^{j\frac{4\pi}{3}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{210} - i'_{210f} \\ i'_{220} - i'_{220f} \end{bmatrix}$$

La résolution du système (19) et (20) donne les constantes H_1 et H_2 qui peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned}
 H_1 &= h_1 + jh_2 \\
 H_2 &= h_3 + jh_4
 \end{aligned} \quad h_1, h_2, h_3, h_4 \in \mathbb{R}^*$$

dont

$$h_1 = \frac{R_1 \sqrt{(\tau_1 - \tau_2 + a_1)^2 + (\tau_1 \tau_2 (2 - \sigma) \omega' - b_1)^2}}{3 \sqrt{3} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} M \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega'^2}} \left[(j_{10} - j_{10f}) \sin\left(\frac{p\theta_o - \zeta - \phi + v}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) - (j_{20} - j_{20f}) \sin\left(\frac{p\theta_o - \zeta - \phi + v}{2}\right) \right] + \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \left[(i_{220} - i_{220f}) \sin\left(\frac{p\theta_o - v}{2}\right) - (i_{210} - i_{210f}) \sin\left(\frac{p\theta_o - v}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$h_2 = \frac{R_1 \sqrt{(\tau_1 - \tau_2 + a_1)^2 + (\tau_1 \tau_2 (2 - \sigma) \omega' - b_1)^2}}{3 \sqrt{3} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} M \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega'^2}} \left[(j_{10} - j_{10f}) \cos\left(\frac{p\theta_o - \zeta - \phi + v}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) - (j_{20} - j_{20f}) \cos\left(\frac{p\theta_o - \zeta - \phi + v}{2}\right) \right] + \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \left[-(i_{220} - i_{220f}) \cos\left(\frac{p\theta_o - v}{2}\right) + (i_{210} - i_{210f}) \cos\left(\frac{p\theta_o - v}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$h_3 = \frac{R_1 \sqrt{(\tau_1 - \tau_2 - a_1)^2 + (\tau_1 \tau_2 (2 - \sigma) \omega' + b_1)^2}}{3 \sqrt{3} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} M \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega'^2}} \left[-(j_{10} - j_{10f}) \sin\left(\frac{p\theta_o - \rho - \phi + v}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) + (j_{20} - j_{20f}) \sin\left(\frac{p\theta_o - \rho - \phi + v}{2}\right) \right] + \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \left[(i_{220} - i_{220f}) \cos\left(\frac{p\theta_o - v}{2}\right) - (i_{210} - i_{210f}) \cos\left(\frac{p\theta_o - v}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$h_4 = \frac{R_1 \sqrt{(\tau_1 - \tau_2 - a_1)^2 + (\tau_1 \tau_2 (2 - \sigma) \omega' + b_1)^2}}{3 \sqrt{3} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} M \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega'^2}} \left[-(j_{10} - j_{10f}) \cos\left(\frac{p\theta_o - \rho - \phi + v}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) + (j_{20} - j_{20f}) \cos\left(\frac{p\theta_o - \rho - \phi + v}{2}\right) \right] + \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \left[(i_{220} - i_{220f}) \cos\left(\frac{p\theta_o - v}{2}\right) - (i_{210} - i_{210f}) \cos\left(\frac{p\theta_o - v}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$



avec

$$t_g \frac{\zeta}{2} = - \frac{\tau_1 \tau_2 (2-\sigma) \omega' - b_1}{\tau_1 - \tau_2 + a_1}$$

$$t_g \frac{\rho}{2} = - \frac{\tau_1 \tau_2 (2-\sigma) \omega' + b_1}{\tau_1 - \tau_2 - a_1}$$

$$t_g \frac{\nu}{2} = \frac{b_1}{a_1}$$

$$t_g \frac{\phi}{2} = \tau_2 \omega'$$

I.3.6. Expression des courants réels

Connaissant toutes les variables auxiliaires ; on peut renasser aux grandeurs réelles par l'intermédiaire de la matrice [P] en effet, nous avons :

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j'_1 \\ j'_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} i_{21} \\ i_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{21} \\ i'_{22} \end{bmatrix}$$

Nous obtenons :

$$j_1 = - \frac{3M}{R_1} \sqrt{1+\tau_2^2 \omega'^2} e^{-\frac{\tau_1+\tau_2}{2\sigma\tau_1\tau_2} t} \left[\begin{aligned} & \sqrt{h_1^2+h_2^2} e^{\frac{a_1}{2\sigma\tau_1\tau_2} t} \cos(\omega_1 t + \frac{p\theta_o + \psi - \phi}{2}) \\ & + \sqrt{h_3^2+h_4^2} e^{-\frac{a_1}{2\sigma\tau_1\tau_2} t} \cos(\omega_2 t + \frac{p\theta_o + \gamma - \phi}{2}) \end{aligned} \right] \quad \left. \begin{array}{l} j_{11} \\ \\ \\ j_{1f} \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{\sqrt{3} \sqrt{1+\tau_2^2 (\omega-\omega')^2} V_m \sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{6} + \epsilon - \beta)}{R_1 \sqrt{(1-\tau_1\tau_2\sigma\omega(\omega-\omega'))^2 + (\tau_1\omega + \tau_2(\omega-\omega'))^2}}$$

$$\begin{aligned}
 i_{21} = & \left[\begin{aligned} & \frac{-(\tau_1 + \tau_2) + a_1}{2\sigma\tau_1\tau_2} t \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \cos(\omega_2 t + \frac{p\theta_0 - \psi - \rho}{2}) \\ & + \frac{-(\tau_1 + \tau_2) - a_1}{2\sigma\tau_1\tau_2} t \sqrt{h_3^2 + h_4^2} \cos(\omega_1 t + \frac{p\theta_0 - \gamma - \zeta}{2}) \end{aligned} \right] i_{211} \\
 & \left[\frac{3\sqrt{3} M(\omega - \omega') V_m \sin((\omega - \omega')t + \alpha + \frac{\pi}{6} - p\theta_0 - \beta)}{2R_1 R_2 \sqrt{(1 - \tau_1 \tau_2 \sigma \omega (\omega - \omega'))^2 + (\tau_1 \omega - \tau_2 (\omega - \omega'))^2}} \right] i_{21F}
 \end{aligned}$$

avec

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\tau_1 \omega - \tau_2 (\omega - \omega')}{1 - \tau_1 \tau_2 \sigma \omega (\omega - \omega')}$$

$$\operatorname{tg} \epsilon = \tau_2 (\omega - \omega')$$

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{h_4}{h_3}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{h_2}{h_1}$$

$$\omega_1 = \frac{\omega'}{2} + \frac{b_1}{2\sigma\tau_1\tau_2}$$

$$\omega_2 = \frac{\omega'}{2} - \frac{b_1}{2\sigma\tau_1\tau_2}$$

Les courants circulant dans les enroulements à la mise sous tensions équilibrées simultanée des trois phases comportent donc :

- des termes sinusoïdaux non amortis de pulsation ω au stator et $\omega - \omega'$ au rotor caractéristiques du régime permanent établi.
- des termes sinusoïdaux de pulsation ω_1 , amortis par les constantes de temps :

$$\frac{2\sigma\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2 - a_1} = T_1 \text{ au stator}$$

$$\frac{2\sigma\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2 + a_1} = T_2 \text{ au rotor}$$

- des termes sinusoïdaux de pulsation ω_2 , amortis par les constantes de temps

T_2 au stator

et

T_1 au rotor

de même

$$j_2 = -\frac{3M}{R_1} \sqrt{1+\tau_2^2 \omega'^2} \left[\begin{aligned} & \sqrt{h_1^2+h_2^2} e^{-\frac{t}{T_1}} \cos\left(\omega_1 t + \frac{p\theta_0 + \psi - \phi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \\ & + \sqrt{h_3^2+h_4^2} e^{-\frac{t}{T_2}} \cos\left(\omega_2 t + \frac{p\theta_0 + \gamma - \phi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \right]$$

$$+ \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+\tau_2^2(\omega-\omega')^2} V_m \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{6} + \varepsilon - \beta - \frac{2\pi}{3}\right)}{R_1 \sqrt{(1-\tau_1\tau_2\sigma\omega(\omega-\omega'))^2 + (\tau_1\omega + \tau_2(\omega-\omega'))^2}}$$

$$i_{22} = \sqrt{(\tau_1 - \tau_2 - a_1)^2 + (\tau_1\tau_2(2-\sigma)\omega' + b_1)^2} \sqrt{h_1^2+h_2^2} e^{-\frac{t}{T_1}} \cos\left(\omega_2 t + \frac{p\theta_0 - \psi - \rho}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$+ \sqrt{(\tau_1 - \tau_2 + a_1)^2 + (\tau_1\tau_2(2-\sigma)\omega' - b_1)^2} \sqrt{h_3^2+h_4^2} e^{-\frac{t}{T_2}} \cos\left(\omega_1 t + \frac{p\theta_0 - \gamma + \zeta}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$- \frac{3\sqrt{3}M(\omega-\omega')V_m \sin\left((\omega-\omega')t + \alpha + \frac{\pi}{6} - p\theta_0 - \beta - \frac{2\pi}{3}\right)}{2R_1R_2 \sqrt{(1-\tau_1\tau_2\sigma\omega(\omega-\omega'))^2 + (\tau_1\omega + \tau_2(\omega-\omega'))^2}}$$

Les courants j_3 et i_{23} peuvent s'obtenir directement à partir des courants réels par les relations :

$$j_3 = -j_1 - j_2$$

$$i_{23} = -i_{21} - i_{22}$$

ou alors à partir des courants auxiliaires j' et i' par les relations :

$$j_3 = aj'_1 + a^2j'_2$$

$$i_{23} = ai'_{21} + a^2i'_{22}$$

I.4. EXPRESSION DU COUPLE MOTEUR

Le circuit du rotor étant indéformable, l'expression du couple est :

$$C = \sum_{s, r} j_s i_{2r} \frac{d}{d\theta} m_{sr} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} s = 1, 2, 3 \\ r = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$m_{sr} = M \cos(p\theta + (r-1)\frac{2\pi}{3} - (s-1)\frac{2\pi}{3})$$

donc

$$\begin{aligned} C = & -pM (j_1 i_{21} + j_2 i_{22} + j_3 i_{23}) \sin(\omega't + p\theta_0) \\ & + (j_1 i_{22} + j_2 i_{23} + j_3 i_{21}) \sin(\omega't + p\theta_0 + \frac{2\pi}{3}) \\ & + (j_1 i_{23} + j_2 i_{21} + j_3 i_{22}) \sin(\omega't + p\theta_0 + \frac{4\pi}{3}) \end{aligned}$$

L'expression du couple en fonction des courants auxiliaires peut s'écrire plus simplement d'après les relations :

$$\begin{aligned} j_1 &= j'_1 + j'_2 & ; & \quad i_{21} = i'_{21} + i'_{22} \\ j_2 &= a^2 j'_1 + a j'_2 & ; & \quad i_{22} = a^2 i'_{21} + a i'_{22} \\ j_3 &= a j'_1 + a^2 j'_2 & \quad i_{23} &= a i'_{21} + a^2 i'_{22} \end{aligned}$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$C = -\frac{9}{2} p M j (j'_1 i'_{22} e^{-j(\omega't + p\theta_0)} - j'_2 i'_{21} e^{j(\omega't + p\theta_0)})$$

Les deux quantités $j'_1 i'_{22} e^{-j(\omega't + p\theta_0)}$ et $-j'_2 i'_{21} e^{j(\omega't + p\theta_0)}$ sont des quantités conjuguées.

Si J la valeur numérique de la partie imaginaire de :

$$j'_1 i'_{22} e^{-j(\omega't + p\theta_0)} \quad \text{nous obtenons : } C = 9 p M J$$

Tous calculs faits :

$$\begin{aligned}
 C = 9pM & \left[\frac{9M(\omega-\omega') V_m^2}{8R_2 R_1^2 (1-\tau_1 \tau_2 \sigma \omega(\omega-\omega'))^2 + (\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega-\omega'))^2} \right. \\
 & - \frac{3M}{4R_1} \sqrt{1+\tau_2^2 \omega'^2} \left[e^{-\frac{2t}{T_1}} (h_1^2+h_2^2) \sqrt{(\tau_1-\tau_2-a_1)^2 + (\tau_1 \tau_2 (2-\sigma)\omega'+b_1)^2} \sin(-\frac{\phi+p}{2}) \right. \\
 & \quad \left. + e^{-\frac{2t}{T_2}} (h_3^2+h_4^2) \sqrt{(\tau_1-\tau_2+a_1)^2 + (\tau_1 \tau_2 (2-\sigma)\omega'-b_1)^2} \sin(-\frac{\phi+\xi}{2}) \right] \\
 & - \frac{3M}{4R_1} \sqrt{1+\tau_2^2 \omega'^2} \sqrt{(h_1^2+h_2^2)(h_3^2+h_4^2)} e^{-\frac{T_1+T_2}{T_1 T_2} t} \left[\frac{\sqrt{(\tau_1-\tau_2+a_1)^2 + (\tau_1 \tau_2 (2-\sigma)\omega'-b_1)^2}}{\sin((\omega_1-\omega_2)t + \frac{\psi-\phi-\gamma-\xi}{2})} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\sqrt{(\tau_1-\tau_2-a_1)^2 + (\tau_1 \tau_2 (2-\sigma)\omega'+b_1)^2}}{\sin((\omega_1-\omega_2)t + \frac{-\gamma+\phi+\psi+\xi}{2})} \right] \\
 & - \frac{9\sqrt{3}\sqrt{(1+\tau_2^2 \omega'^2)(h_1^2+h_2^2)} e^{-\frac{t}{T_1}}}{8R_2 R_1^2 \sqrt{(1-\tau_1 \tau_2 \sigma \omega(\omega-\omega'))^2 + (\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega-\omega'))^2}} V_m M^2 (\omega-\omega') \sin(\omega-\omega_1)t + \frac{-p\theta_o - \psi + \phi}{2} + \alpha + \frac{\pi}{6} - \beta) \\
 & - \frac{\sqrt{3}\sqrt{(h_1^2+h_2^2)((\tau_1-\tau_2-a_1)^2 + (\tau_1 \tau_2 (2-\sigma)\omega'+b_1)^2)(1+\tau_2^2 (\omega-\omega')^2)}}{4R_1 \sqrt{(1-\tau_1 \tau_2 \sigma \omega(\omega-\omega'))^2 + (\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega-\omega'))^2}} V_m e^{-\frac{t}{T_1}} \cos((\omega-\omega_1)t + \alpha + \pi/6 - \beta + \epsilon + \frac{-\psi-p-\theta_o}{2}) \\
 & - \frac{9\sqrt{3}\sqrt{(1+\tau_2^2 \omega'^2)(h_3^2+h_4^2)} e^{-\frac{t}{T_2}}}{8R_2 R_1^2} V_m M^2 (\omega-\omega') \sin((\omega-\omega_2)t + \alpha + \pi/6 - \beta + \frac{-p\theta_o - \gamma + \phi}{2}) \\
 & - \frac{\sqrt{3}\sqrt{(h_3^2+h_4^2)((\tau_1-\tau_2+a_1)^2 + (\tau_1 \tau_2 (2-\sigma)\omega'-b_1)^2)(1+\tau_2^2 (\omega-\omega')^2)}}{4R_1 \sqrt{(1-\tau_1 \tau_2 \sigma \omega(\omega-\omega'))^2 + (\tau_1 \omega + \tau_2 (\omega-\omega'))^2}} V_m e^{-\frac{t}{T_2}} \cos((\omega-\omega_2)t + \alpha + \pi/6 - \beta + \epsilon + \frac{-p\theta_o - \gamma - \xi}{2}) \left. \right]
 \end{aligned}$$

L'expression du couple transitoire fait donc apparaitre, outre le

terme constant correspondant au régime permanent (couple forcé CF)

- 2 termes amortis respectivement par les constantes de temps $\frac{T_1}{2}$ et $\frac{T_2}{2}$
- 2 termes sinusoïdaux de pulsation $(\omega - \omega_1)$ amorti par T_1
- 2 termes sinusoïdaux de pulsation $(\omega - \omega_2)$ amorti par T_2
- 1 terme sinusoïdal de pulsation $(\omega_1 - \omega_2)$ amorti par $\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$

I.5. EXPRESSION DES PUISSANCES

La puissance instantanée du moteur asynchrone triphasé est donnée à tout instant par :

$$p = u_1 j_1 + u_2 j_2 + u_3 j_3$$

Du fait que les sommes des trois tensions et des trois courants sont nulles nous pouvons exprimer la puissance instantanée par :

$$p = u_1 (2j_1 + j_2) + u_2 (2j_2 + j_1)$$

La puissance instantanée peut s'écrire plus simplement en fonction des variables auxiliaires.

D'après les relations 4' et 4'', nous obtenons :

$$p = 3(j'_1 u'_2 + j'_2 u'_1)$$

Les deux quantités $j'_1 u'_2$ et $j'_2 u'_1$ sont des quantités conjuguées. Si R est la valeur numérique de la partie réelle de $j'_1 u'_2$, nous obtenons :

$$p = 6R$$

soit :

$$p = \frac{9\sqrt{3}MV_m}{2R_1} \sqrt{1+\tau_2^2\omega'^2} \left[\sqrt{h_1^2+h_2^2} e^{-\frac{t}{T_1}} \sin((\omega_1-\omega)t + \frac{p\theta_0 + \psi - \phi}{2} - \alpha - \pi/6) + \sqrt{h_3^2+h_4^2} e^{-\frac{t}{T_2}} \sin((\omega_2-\omega)t + \frac{p\theta_0 + \gamma - \phi}{2} - \alpha - \pi/6) \right] + \frac{9V_m^2 \sqrt{1+\tau_2^2(\omega-\omega')^2}}{2R_1 \sqrt{(1-\tau_1\tau_2\sigma\omega(\omega-\omega'))^2 + (\tau_1\omega - \tau_2(\omega-\omega'))^2}} \cos(\epsilon - \beta)$$

L'expression de la puissance instantanée fait donc apparaître :

- 1 terme sinusoïdal de pulsation $(\omega_1 - \omega)$ amorti par T_1
- 1 terme sinusoïdal de pulsation $(\omega_2 - \omega)$ amorti par T_2
- 1 terme constant correspondant à la puissance absorbée par la machine durant le régime forcé.

La puissance absorbée par la machine pendant un temps T découle de la relation :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt \quad (22)$$

pour passer de p à P , il suffit de résoudre une intégrale de la forme

$$I = \int e^{-\frac{t}{b}} \sin ct dt \quad \text{avec } b \neq 0$$

dont la solution est de la forme :

$$I = \frac{-cb^2}{c^2b^2+1} e^{-\frac{t}{b}} \sqrt{1+\left(\frac{1}{bc}\right)^2} \cos(ct-\delta)$$

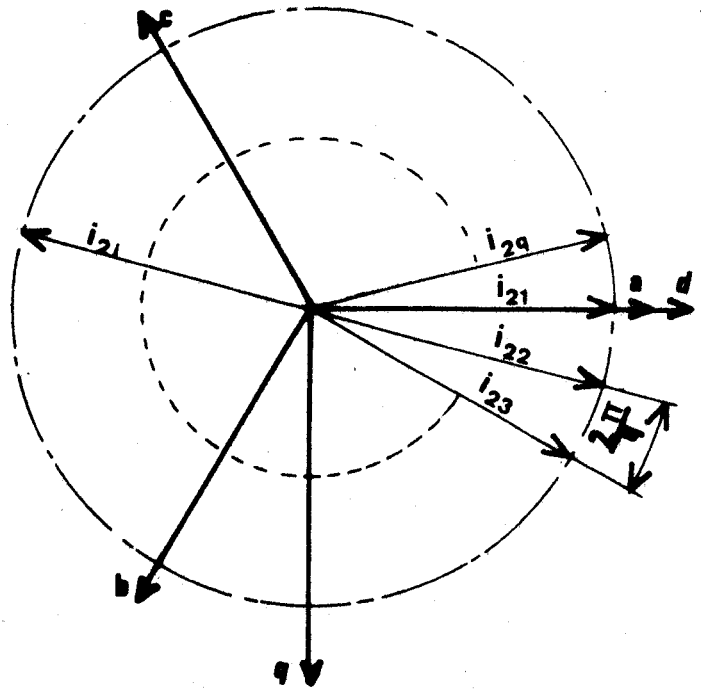
$$\text{avec } \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{bc}$$

en appliquant ce résultat à la formule (22), nous obtenons :

$$P = -\frac{1}{T} \cdot \frac{9\sqrt{3}M V_m \sqrt{1+\tau_2^2 \omega'^2}}{2R_1} \left[\sqrt{h_1^2+h_2^2} \frac{(\omega_1-\omega)T_1^2}{(\omega_1-\omega)^2 T_2^2+1} \sqrt{1-\left(\frac{1}{(\omega_1-\omega)T_1}\right)^2} e^{-\frac{t}{T_1}} \cos((\omega_1-\omega)t) \right. \\ \left. + \frac{p\theta_0 + \psi - \phi}{2} - \alpha - \pi/6 - \delta_1 \right) \\ + \sqrt{h_3^2+h_4^2} \frac{(\omega_2-\omega)T_2^2}{(\omega_2-\omega)^2 T_2^2+1} \sqrt{1+\left(\frac{1}{(\omega_2-\omega)T_2}\right)^2} e^{-\frac{t}{T_2}} \cos((\omega_2-\omega)t) \\ \left. + \frac{p\theta_0 + \gamma - \phi}{2} - \alpha - \pi/6 - \delta_2 \right) \Bigg]_0^T \\ + \frac{9V_m^2 \sqrt{1+\tau_2^2 (\omega-\omega')^2} \cos(\varepsilon-\beta)}{2R_1 \sqrt{(1-\tau_1\tau_2\sigma_m(\omega-\omega'))^2 + (\tau_1\omega + \tau_2(\omega-\omega'))^2}} \quad \text{avec } \operatorname{tg} \delta_1 = \frac{1}{T_1(\omega_1-\omega)} \\ \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{1}{T_2(\omega_2-\omega)}$$

La transformation d'un système qphasé en un système triphasé nécessite le passage intermédiaire sur un système d'axes d, q, o (direct - quadrature - homopolaire) où l'axe de l'enroulement parcouru par I_d est en phase avec celui de l'enroulement parcourue par i_{21} .

Figure 2 : Représentation vectorielle des courants dans les divers systèmes d'axes considérés.



$$\begin{bmatrix} I_d \\ I_q \\ I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 0, \cos \frac{2\pi}{q}, \dots, \cos((q-1)\frac{2\pi}{q}) \\ \sin 0, \sin \frac{2\pi}{q}, \dots, \sin((q-1)\frac{2\pi}{q}) \\ 1, 1, \dots, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{2q} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Le passage d'un système triphasé de courants en un système I_d, I_q, I_o résulte de la matrice précédente en faisant $q = 3$ dans la matrice rectangle :

$$\begin{bmatrix} I_d \\ I_q \\ I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 0, \cos \frac{2\pi}{3}, \cos \frac{4\pi}{3} \\ \sin 0, \sin \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{4\pi}{3} \\ 1, 1, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (25)$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos 0 & \sin 0 & 1/2 \\ \cos \frac{2\pi}{3} & \sin \frac{2\pi}{3} & 1/2 \\ \cos \frac{4\pi}{3} & \sin \frac{4\pi}{3} & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q \\ I_r \\ I_o \end{bmatrix} \quad (26)$$

d'où l'équivalence :

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos 0 & \sin 0 & 1/2 \\ \cos \frac{2\pi}{3} & \sin \frac{2\pi}{3} & 1/2 \\ \cos \frac{4\pi}{3} & \sin \frac{4\pi}{3} & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos \frac{2\pi}{q} & \dots & \cos (q-1)\frac{2\pi}{q} \\ \sin 0 & \sin \frac{2\pi}{q} & \dots & \sin (q-1)\frac{2\pi}{q} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{2q} \end{bmatrix}$$

donc :

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos 0 + 1/2, \dots, \cos (q-1)\frac{2\pi}{q} + 1/2 \\ \cos \frac{2\pi}{3} + 1/2, \dots, \cos (\frac{2\pi}{3} - (q-1)\frac{2\pi}{q}) + 1/2 \\ \cos \frac{4\pi}{3} + 1/2, \dots, \cos (\frac{4\pi}{3} - (q-1)\frac{2\pi}{q}) + 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{2q} \end{bmatrix} \quad (27)$$

nous prendrons donc comme matrice de passage :

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \frac{2K}{3} \begin{bmatrix} \cos 0 + 1/2, \dots, \cos (q-1)\frac{2\pi}{q} + 1/2 \\ \cos \frac{2\pi}{3} + 1/2, \dots, \cos (\frac{2\pi}{3} - (q-1)\frac{2\pi}{q}) + 1/2 \\ \cos \frac{4\pi}{3} + 1/2, \dots, \cos (\frac{4\pi}{3} - (q-1)\frac{2\pi}{q}) + 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{2q} \end{bmatrix} \quad (28)$$

où la constante K sera définie par la suite.

Ainsi :

$$I_a \cos p\theta = \frac{2K}{3} \left[i_{21} \cos p\theta + \frac{i_{22}}{2} (\cos(\frac{2\pi}{q} + p\theta) + \cos(p\theta - \frac{2\pi}{q})) + \dots \dots \dots \right. \\ \left. + \frac{i_{2q}}{2} (\cos((q-1)\frac{2\pi}{q} + p\theta) + \cos(p\theta - (q-1)\frac{2\pi}{q})) \right]$$

$$I_b \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) = \frac{2K}{3} \left[\frac{i_{21}}{2} \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) + \frac{i_{22}}{2} (\cos(p\theta + \frac{2\pi}{q}) + \cos(p\theta + \frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{q})) + \dots \dots \dots \right. \\ \left. + \frac{i_{2q}}{2} (\cos(p\theta + (q-1)\frac{2\pi}{q}) + \cos(p\theta + \frac{4\pi}{3} - (q-1)\frac{2\pi}{q})) \right]$$

$$I_c \cos(p\theta + \frac{4\pi}{3}) = \frac{2K}{3} \left[\frac{i_{21}}{2} \cos(p\theta + \frac{4\pi}{3}) + \frac{i_{22}}{2} (\cos(p\theta + \frac{2\pi}{q}) + \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{q})) + \dots \dots \dots \right. \\ \left. + \frac{i_{2q}}{2} (\cos(p\theta + (q-1)\frac{2\pi}{q}) + \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3} - (q-1)\frac{2\pi}{q})) \right]$$

donc

$$\frac{1}{K} \left[I_a \cos p\theta + I_b \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) + I_c \cos(p\theta + \frac{4\pi}{3}) \right] = i_{21} \cos p\theta + i_{22} \cos(p\theta + \frac{2\pi}{q}) + \dots \dots \dots \\ i_{2q} \cos(p\theta + (q-1)\frac{2\pi}{q})$$

En remplaçant de même $p\theta$ par $p\theta + \frac{4\pi}{3}$ et $p\theta + \frac{2\pi}{3}$, le système d'équation (22) peut se mettre sous la forme :

$$(29) \quad \begin{cases} u_1 = R_1 j_1 + L_1 \frac{d}{dt} j_1 + M_1 \frac{d}{dt} (j_2 + j_3) + \frac{M}{K} \frac{d}{dt} (I_a \cos p\theta + I_b \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) + I_c \cos(p\theta + \frac{4\pi}{3})) \\ u_2 = R_1 j_2 + L_1 \frac{d}{dt} j_2 + M_1 \frac{d}{dt} (j_1 + j_3) + \frac{M}{K} \frac{d}{dt} (I_a \cos(p\theta + \frac{4\pi}{3}) + I_b \cos p\theta + I_c \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3})) \\ u_3 = R_1 j_3 + L_1 \frac{d}{dt} j_3 + M_1 \frac{d}{dt} (j_2 + j_1) + \frac{M}{K} \frac{d}{dt} (I_a \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) + I_b \cos(p\theta + \frac{4\pi}{3}) + I_c \cos p\theta) \end{cases}$$

Pour simplifier le système (23) à q équations, on peut multiplier :

$$\text{chaque équation de rang } i \text{ par } \cos(i-1)\frac{2\pi}{q}$$

le système d'équations (23) peut se mettre sous la forme :

$$(30) \begin{cases} 0 = R_2 I_a + qL \frac{d}{dt} I_a + \frac{qL}{2} \frac{d}{dt} (I_b + I_c) + \frac{qKM}{3} \frac{d}{dt} \left[j_1 \cos(p\theta) + j_2 \cos(p\theta + \frac{4\pi}{3}) + j_3 \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) \right] \\ 0 = R_2 I_b + qL \frac{d}{dt} I_b + \frac{qL}{2} \frac{d}{dt} (I_a + I_c) + \frac{qKM}{3} \frac{d}{dt} \left[j_1 \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) + j_2 \cos p\theta + j_3 \cos(p\theta + \frac{4\pi}{3}) \right] \\ 0 = R_2 I_c + qL \frac{d}{dt} I_c + \frac{qL}{2} \frac{d}{dt} (I_a + I_b) + \frac{qKM}{3} \frac{d}{dt} \left[j_1 \cos(p\theta + \frac{4\pi}{3}) + j_2 \cos(p\theta + \frac{2\pi}{3}) + j_3 \cos p\theta \right] \end{cases}$$

Ainsi les systèmes d'équations (22) et (23) à trois variables primaires et q variables secondaires peuvent se réduire aux systèmes (29) et (30) à trois variables primaires et secondaires.

Détermination de la constante K

L'identification des systèmes (1') et (1'') aux systèmes (29) et (30) nécessite d'écrire :

$$\frac{M}{K} = \frac{q}{3} K M \quad : \text{ les mutuelles entre les enroulements rotoriques et statoriques ou inversement gardent la même valeur.}$$

d'où la valeur de $K = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{q}}$. Ainsi l'étude d'une machine triphasée - q phasée peut être ramenée à l'étude d'une machine triphasée-triphasée.

II.3. CONDITIONS INITIALES

Lors de la mise ou remise sous tension d'un moteur asynchrone, ses conditions initiales sont :

- La vitesse de rotation du rotor appelée ω'/p
- L'écart angulaire entre l'axe de la bobine 1 du stator et l'axe de la bobine 1 du rotor appelée θ_0
- Le déphasage de la tension d'alimentation appelé α
- Les valeurs des courants statoriques et rotoriques.

II.3.1. Domaines de variations des conditions initiales

- a) Les courants statoriques et rotoriques à l'instant de mise sous tension seront considérés nuls.
- b) Du fait de la symétrie de construction du stator, l'angle α varie de 0 à $\frac{2\pi}{3}$; pour d'autres valeurs de α , il suffit d'effectuer une permutation dans l'indice des courants.
- c) Le domaine de variation de la vitesse de rotation du rotor va de sa vitesse nulle à sa vitesse de synchronisme.
- d) La variation de la position angulaire entre rotor et stator est fonction du nombre de barres. En effet, du fait que nous considérons que les courants statoriques et rotoriques sont nuls à l'instant initial, le déphasage angulaire initial de la phase 1 du rotor par rapport à la phase 1 du stator est forcément inférieur ou égal à $\frac{2\pi}{n}$.

II.4. CALCULS NUMERIQUES

Ayant fait l'hypothèse de vitesse constante durant le régime transitoire et nous intéressant surtout à l'établissement du couple et des courants dès la mise sous tension, nous avons donc calculé ces grandeurs sur un intervalle de temps assez court de manière à confirmer les hypothèses choisies. Nous avons limité à 5 périodes du réseau (100 mn) le calcul du régime transitoire*.

- Les moteurs utilisés comportent un rotor à cage d'écureuil de 24 barres, de ce fait l'écart angulaire maximal entre un axe du stator et un axe du rotor est de $\frac{360}{24} = 15^\circ$ donc l'angle θ_0 variera de 0 à 15° . Nous avons donné aux conditions initiales les valeurs :

$$\omega' \rightarrow 0, 157 \text{ rd/s}, 209 \text{ rd/s}, 262 \text{ rd/s}, 314 \text{ rd/s}$$

$$\alpha \rightarrow 0, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$$

$$\theta_0 \rightarrow 0, 5^\circ, 10^\circ$$

* Au bout de cette durée, vérifiée par l'expérience, le régime transitoire électrique est terminé pour les moteurs de fabrication courante.

Les paramètres mesurables du moteur à cage par la méthode exposée en appendice (A) étant R_1 , L_1 , τ_2 et σ ne permettent pas de définir la valeur de la mutuelle M du moteur. De ce fait, certaines grandeurs du moteur ne peuvent être exprimées qu'en fonction de M ; c'est le cas des courants rotoriques et des constantes d'intégration. Le plan du calcul consiste, pour des conditions initiales données, d'abord à définir les nouvelles constantes du moteur T_1 , T_2 , ω_1 , ω_2 et les courants forcés à l'instant initial afin d'en déduire les constantes d'intégration. Puis ensuite, nous calculons en fonction du temps, l'évolution des courants statoriques, du couple, de la puissance instantanée. Le calcul a été effectué sur ordinateur avec l'organigramme.

II.5. PARAMETRES DES MOTEURS UTILISES

II.5.1. Les paramètres déterminés par des essais en régime permanents sont :

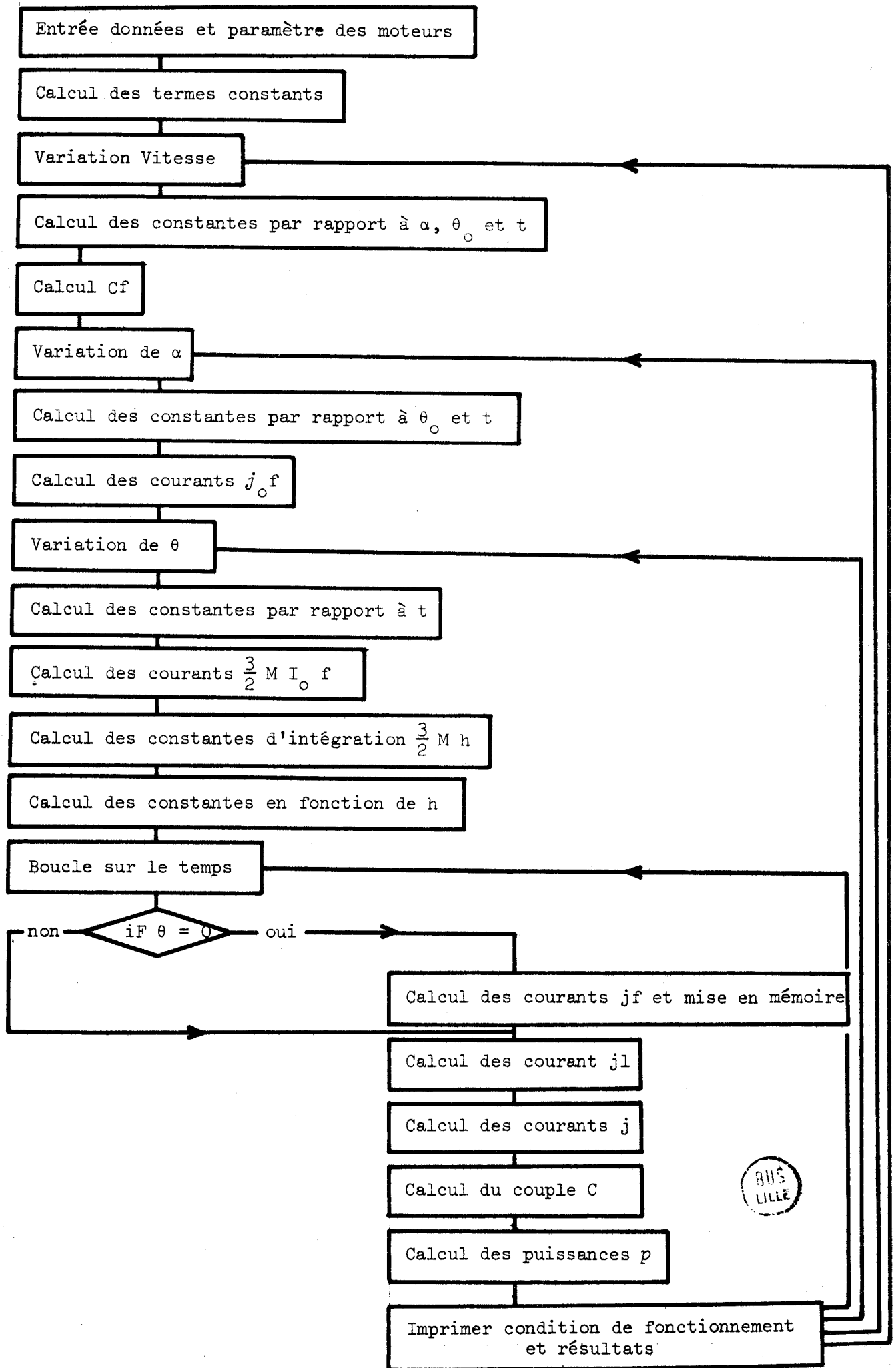
Moteur de puissance	R_1 Ω	L_1 H	τ_2 s	σ	J_n A	C_n mN
1 CV	14,4	0,483	0,059	0,0884	2,09	5
2 CV	7	0,29	0,085	0,1156	3,86	10
3 CV	3,8	0,241	0,1216	0,1247	3,48	15
4 CV	3,07	0,1689	0,0825	0,1246	7,27	20

Les moteurs 1, 2 et 3 CV présentent des dimensions géométriques qui sont en rapport avec leurs puissances utiles, par contre le moteur 4 CV présente les mêmes dimensions géométriques que le moteur de 3 CV, ce qui explique l'absence de proportionnalité des constantes τ_2 et σ .

II.5.2. Paramètres intervenant dans le régime libre

Les constantes de temps T_1 , T_2 et les pseudo pulsations ω_1 et ω_2 sont fonction des paramètres du moteur et de la vitesse de rotation pendant laquelle à lieu le régime transitoire. Nous avons donc tracé les variations de ces grandeurs en fonction de la vitesse de rotation Ω' . Nous pouvons remarquer que la constante de temps T_2 est faible et varie peu en fonction de

II.4.1. Organigramme :



BUS
LILLE

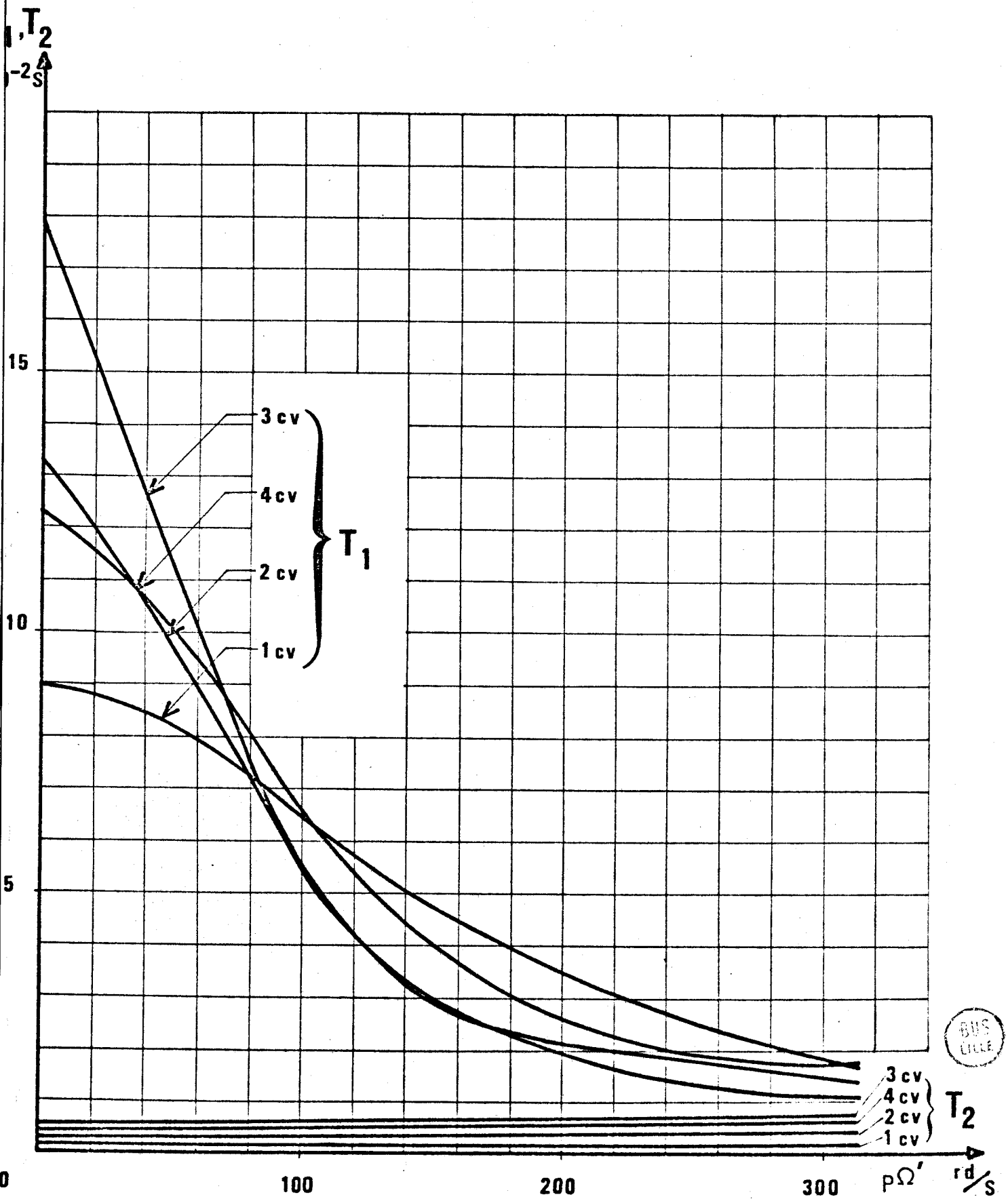


FIGURE 3 : Variation des constantes de temps T_1 , T_2 en fonction de la vitesse pour divers moteurs.

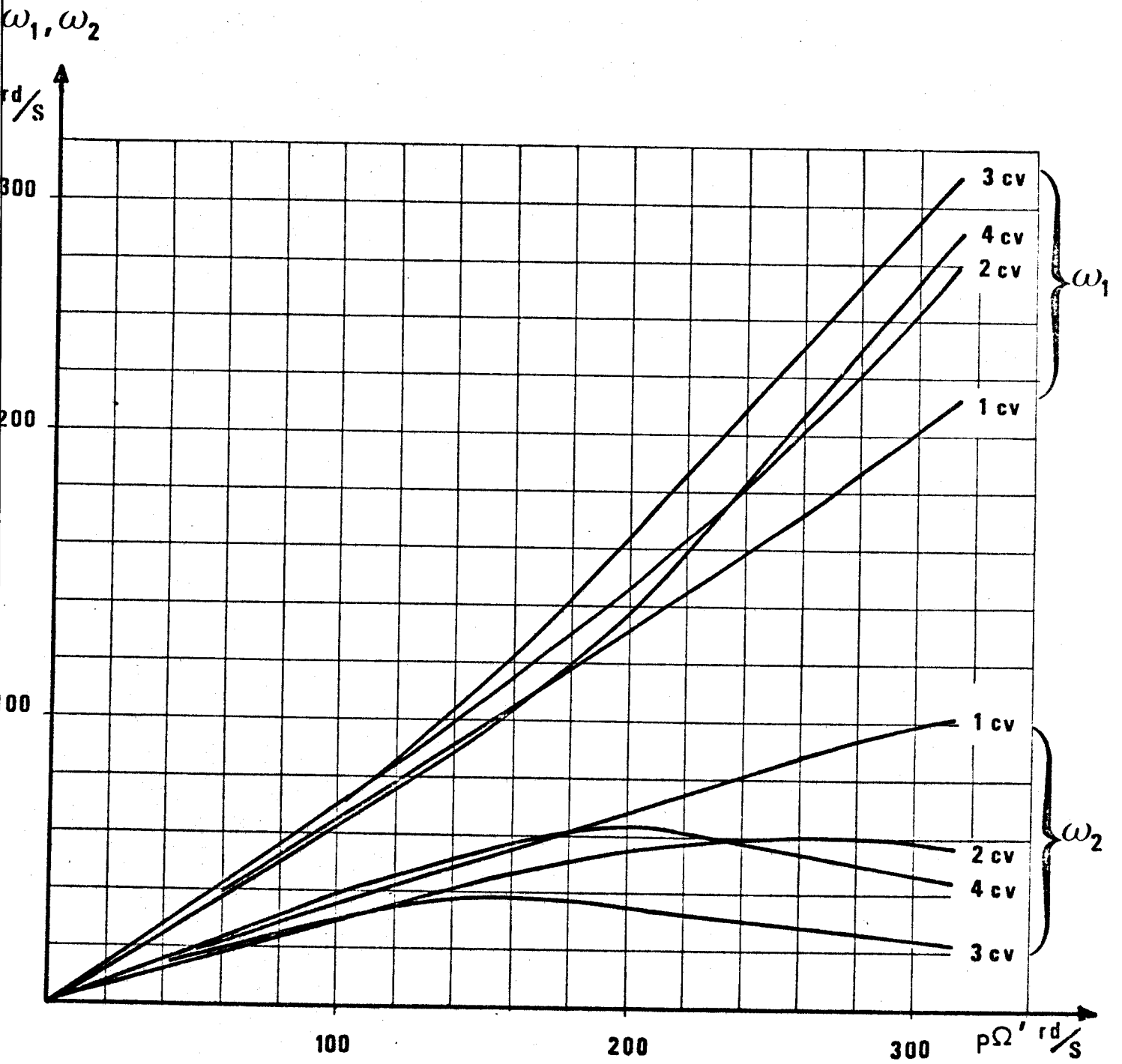


Figure 4 : Variation des pseudo-pulsations ω_1 , ω_2 en fonction de la vitesse pour divers moteurs.



la vitesse. Par contre T_1 est d'une valeur importante à vitesse nulle et décroît en fonction de la vitesse pour devenir du même ordre de grandeur que T_2 . Les pseudo pulsations ω_1 et ω_2 sont reliées entre elles par la relation $\omega_1 + \omega_2 = \omega'$. (figures 3, 4).

II.6. IMPORTANCE DES CONDITIONS INITIALES θ_0 ET α

II.6.1. Influence de l'angle θ_0

Après calculs, nous remarquons que la position angulaire du rotor à l'instant de mise ou de remise sous tension influence peu l'évolution des courants statoriques donc de la puissance instantanée et du couple moteur et cela quelles que soient les valeurs des autres conditions initiales et des paramètres des moteurs.

Voici, par exemple, les valeurs numériques du couple pour trois valeurs de θ_0 et pour deux moteurs de différentes puissances :

temps 10^{-3} s	Moteur 1 CV			Moteur 3 CV		
	$\alpha = 0^\circ$	$\omega' = 262$ rd/s		$\alpha = 0^\circ$	$\omega' = 262$ rd/s	
	$\theta_0 = 0^\circ$	$\theta_0 = 5^\circ$	$\theta_0 = 10^\circ$	$\theta_0 = 0^\circ$	$\theta_0 = 5^\circ$	$\theta_0 = 10^\circ$
0	C= 0,000	C= 0,000	C= 0,000	C= 0,000	C= 0,000	C= 0,000
2	C=-0,126	C=-0,127	C=-0,116	C=-0,094	C=-0,052	C=-0,023
4	C=-0,909	C=-0,905	C=-0,885	C=-1,140	C=-1,043	C=-0,898
6	C=-2,042	C=-2,034	C=-2,010	C=-3,714	C=-3,574	C=-3,382
12	C=-3,582	C=-3,579	C=-3,561	C=-4,813	C=-4,672	C=-4,489
16	C=-2,272	C=-2,275	C=-2,265	C=-4,620	C=-4,544	C=-4,433
20	C= 0,489	C= 0,482	C= 0,484	C= 7,911	C= 7,932	C= 7,980
28	C= 7,284	C= 7,276	C= 7,270	C=25,677	C=25,662	C=25,659
36	C=11,276	C=11,273	C=11,271	C=30,280	C=30,263	C=30,251
44	C=11,261	C=11,263	C=11,265	C=32,278	C=32,265	C=32,252
60	C= 9,028	C= 9,029	C= 9,030	C=30,849	C=30,849	C=30,847

Les couples sont exprimés en mN.

On conçoit que l'importance de θ_0 sur l'établissement du couple diminue avec l'augmentation du nombre de barres (ici 24) ; à la limite, pour un rotor massif ($q \rightarrow \infty$) la position relative du rotor n'intervient plus.

II.6.2. Influence de l'angle α

L'instant de mise ou de remise sous tension par rapport à une tension d'alimentation influence peu l'évolution du couple moteur et cela, quelles que soient les valeurs des autres conditions initiales et des paramètres des moteurs.

Voici, par exemple, les valeurs numériques du couple moteur pour trois valeurs de α et pour deux moteurs de puissance différente. *

Temps 10^{-3} s	Moteur 1 CV			Moteur 3 CV		
	$\omega' = 262 \text{ rd/s}$			$\omega' = 262 \text{ rd/s}$		
	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
0	C= 0,000	C= 0,000	C= 0,000	C= 0,000	C= 0,000	C= 0,000
2	C=-0,1015	C=-0,110	C=-0,143	C=-0,044	C=-0,037	C=-0,078
4	C=-0,874	C=-0,881	C=-0,924	C=-1,056	C=-1,034	C=-1,095
6	C=-2,004	C=-2,009	C=-2,053	C=-3,613	C=-3,578	C=-3,646
12	C=-3,553	C=-3,560	C=-3,598	C=-10,729	C=-10,703	C=-10,761
16	C=-2,252	C=-2,263	C=-2,294	C=-4,572	C=-4,565	C=-4,608
20	C= 0,300	C= 0,487	C= 0,463	C= 7,934	C= 7,929	C= 7,901
28	C= 7,284	C= 7,274	C= 7,265	C=25,682	C=25,674	C=25,661
36	C=11,274	C=11,272	C=11,271	C=30,278	C=30,270	C=30,264
44	C=11,262	C=11,264	C=11,265	C=32,273	C=32,269	C=32,268
60	C= 9,030	C= 9,030	C= 9,028	C=30,847	C=30,848	C=30,850

Les couples sont exprimés en mN.

L'influence de α sur le couple n'est appréciable que durant le régime subtransitoire de la machine.

* les valeurs du couple correspondant à $\alpha = 0$ sont dans le tableau du paragraphe II.6.1.

L'angle α également très peu d'influence sur la puissance instantanée absorbée pendant le régime transitoire. En effet, pour une vitesse constante donnée, l'évolution du couple moteur est indépendante de l'angle α ce qui implique que la puissance fournie au rotor en est également indépendante ; seules les pertes Joule statoriques varient à cause de l'influence de l'angle α sur les courants statoriques.

Voici, par exemple, les valeurs numériques de la puissance instantanée pour trois valeurs de α et pour deux moteurs différents.

Temps 10^{-3} S	Moteur 2 CV			Moteur 4 CV		
	$\omega' = 262 \text{ rd/s}$		$\theta_0 = 0^\circ$	$\omega' = 262 \text{ rd/s}$		$\theta_0 = 0^\circ$
	$\alpha = 0^\circ$	$= 30^\circ$	$= 60^\circ$	$= 0^\circ$	$= 30^\circ$	$= 60^\circ$
0	0	0	0	0	0	0
2	6152 W	6147 W	6153 W	10415 W	10404 W	10415 W
4	8014	8014	8024	14048	14046	14066
6	7270	7274	7285	12641	12649	12672
12	2090	2097	2104	1032	1049	1061
16	748	754	757	-1007	-995	-995
20	953	957	957	1257	1262	1258
28	2916	2916	2914	6605	6604	6602
36	4584	4583	4581	8190	8189	8187
44	5156	5155	5155	8229	8229	8228
60	4549	4549	4549	7545	7545	7545

Nous pouvons donc conclure que, quel que soit l'instant d'alimentation, le moteur présentera toujours le même couple et absorbera sensiblement la même puissance pendant le régime transitoire. La valeur de l'angle α n'influence que les courants statoriques transitoires.

II.7. EVOLUTION DES GRANDEURS

II.7.1. Influence de la vitesse ω' sur l'établissement du couple :

L'établissement du couple lors de la mise sous tension du moteur dépend surtout de sa vitesse initiale. En effet, si l'on reprend la formule du couple (21), nous voyons que celle-ci dépend des constantes de temps, T_1 et T_2 et des pseudo pulsations ω_1 et ω_2 , qui sont fonction de la vitesse ω' .

Selon la valeur de la vitesse, nous pouvons considérer deux cas :

a) Vitesse du rotor inférieure à la moitié de la vitesse de synchronisme.

Dans ce cas, T_1 étant très supérieur à T_2 , seuls les termes amortis par la plus grande constante de temps subsistent. L'évolution du couple rappelle la réponse indicielle d'un système du second ordre où le couple forcé représente l'échelon unité avec un coefficient d'amortissement qui évolue dans le même sens que la vitesse du rotor et une fréquence des oscillations en sens inverse (pour être égale à ω pour une vitesse nulle du rotor).

b) Vitesse du rotor supérieure à la moitié de la vitesse de synchronisme.

Les constantes de temps T_1 et T_2 étant du même ordre de grandeur le couple est la somme de termes amortis par des constantes de temps différentes qui font apparaître des valeurs négatives à l'instant de mise sous tension du moteur ; ces valeurs deviennent de plus en plus importantes quand la vitesse initiale du rotor augmente. L'évolution du couple est toujours semblable à la réponse indicielle d'un système du second ordre mais à déphasage non minimal.* [18]

En considérant l'évolution du couple en grandeur réduite $\frac{C}{C_f}$ (fig.5) nous remarquons que celle-ci dépend essentiellement de la vitesse initiale et non de la puissance du moteur.

Nous avons représenté figure (6) l'évolution du couple des quatre moteurs différents lors d'une remise sous tension à vitesse de synchronisme afin de connaître la limite maximum du couple inverse lors d'une remise sous tension. Ce couple inverse présente une valeur maximum de 3 fois son couple nominal pour le moteur de 1 CV et 1,5 fois son couple nominal pour le moteur de 3 CV.

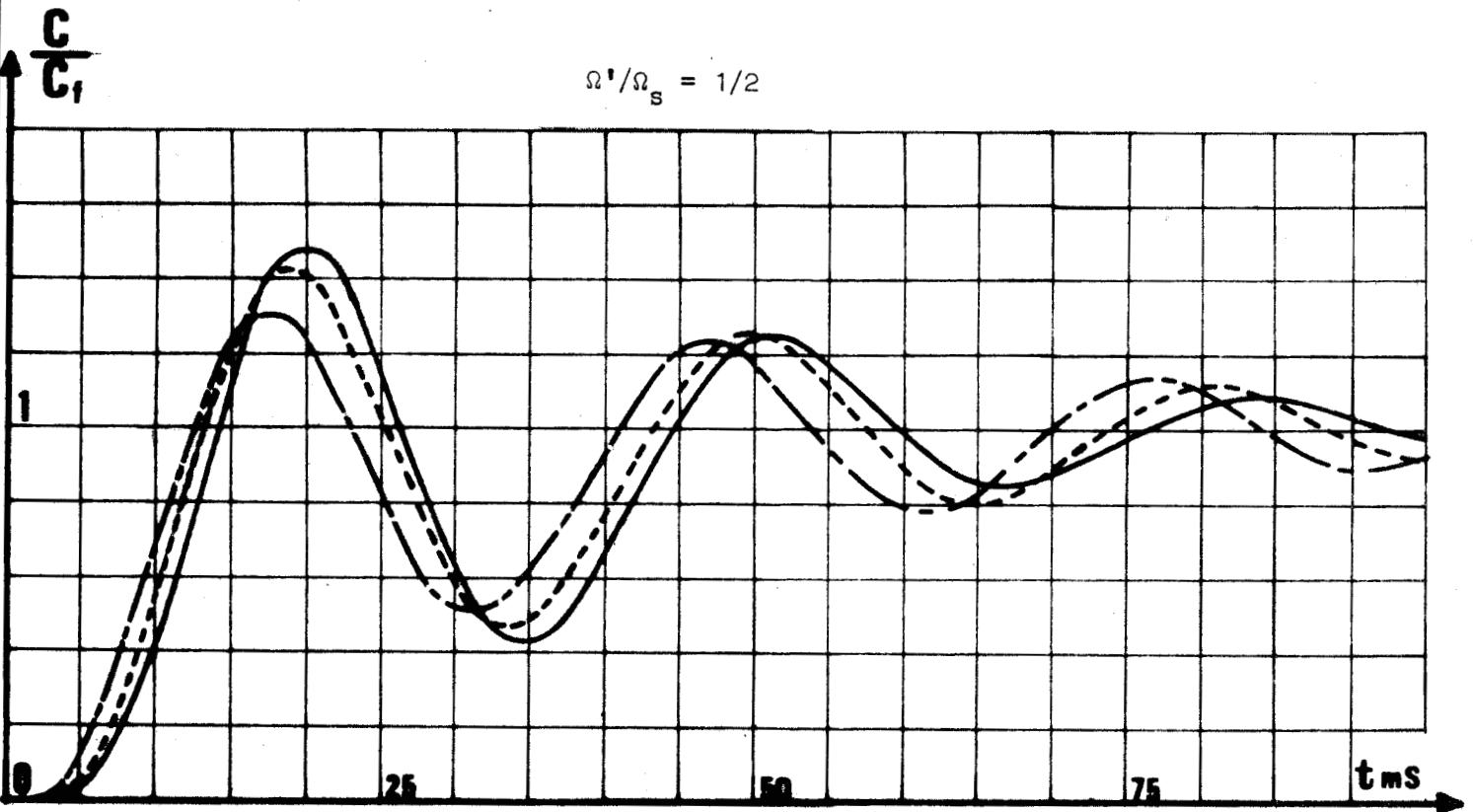


Figure 5 (a)

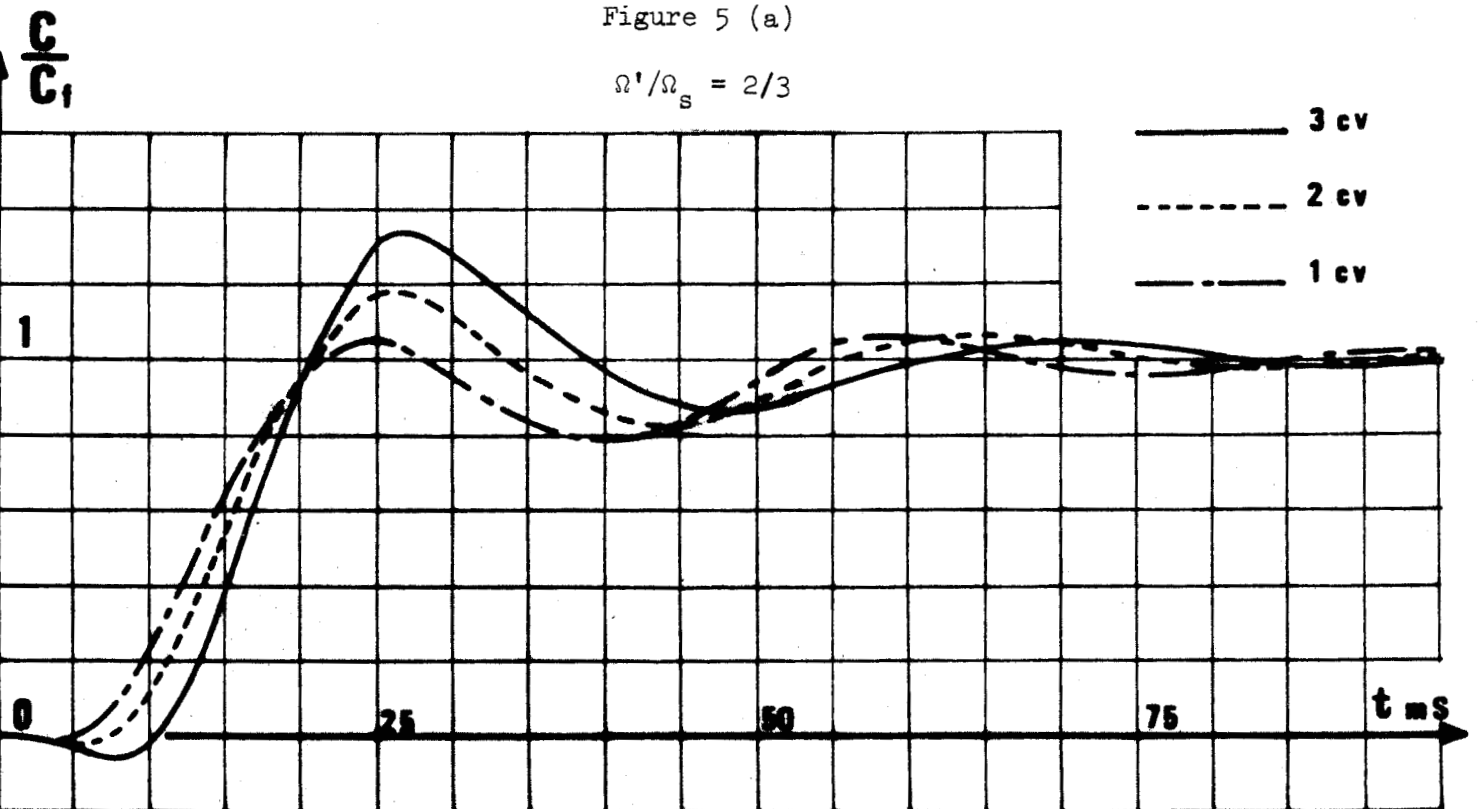


Figure 5 (b)



Figure 5 : Etablissement du couple au réenclenchement pour une gamme de moteurs suivant la vitesse de rotation. $\alpha = 0$, $p\theta_0 = 0$.

$$\Omega' / \Omega_s = 5/6$$

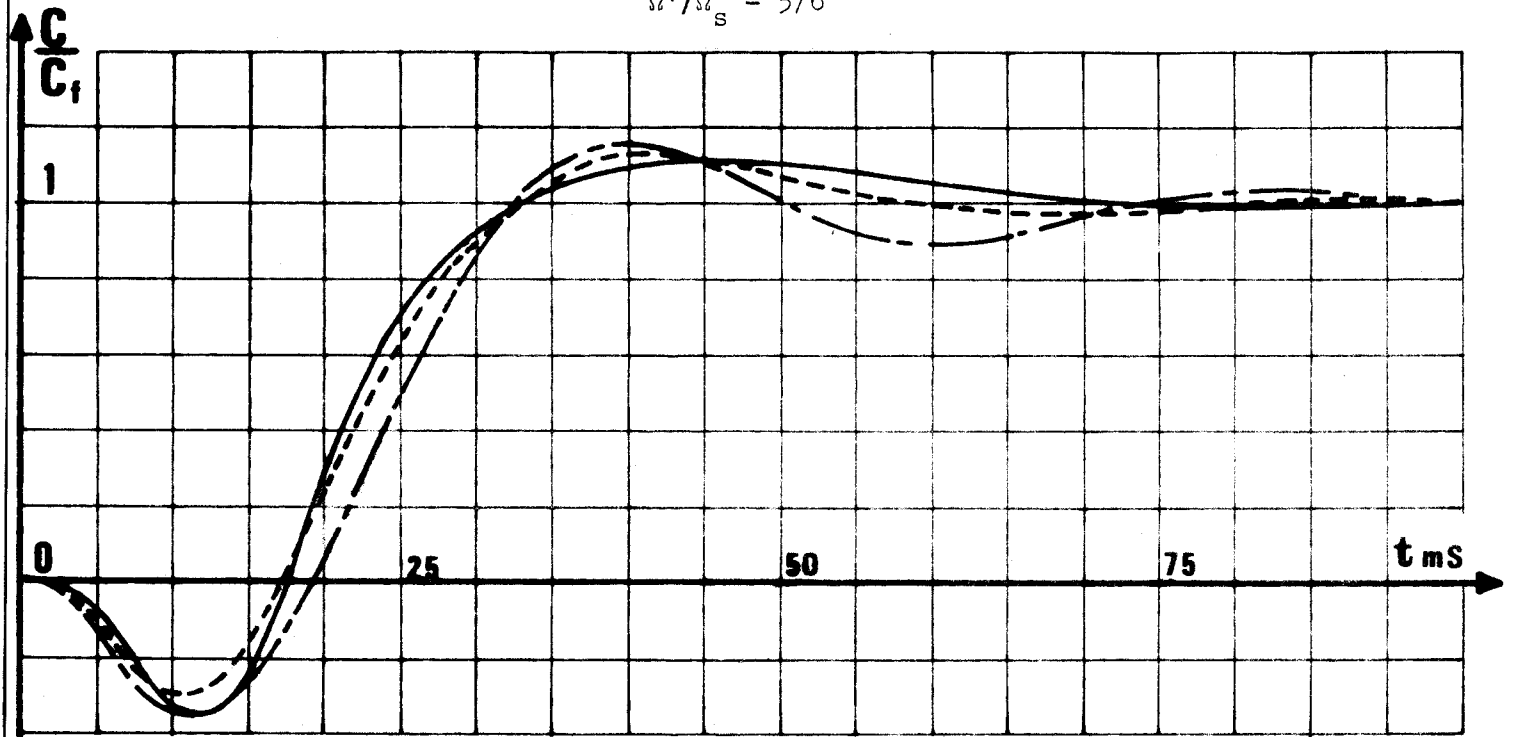


Figure 5 (c)

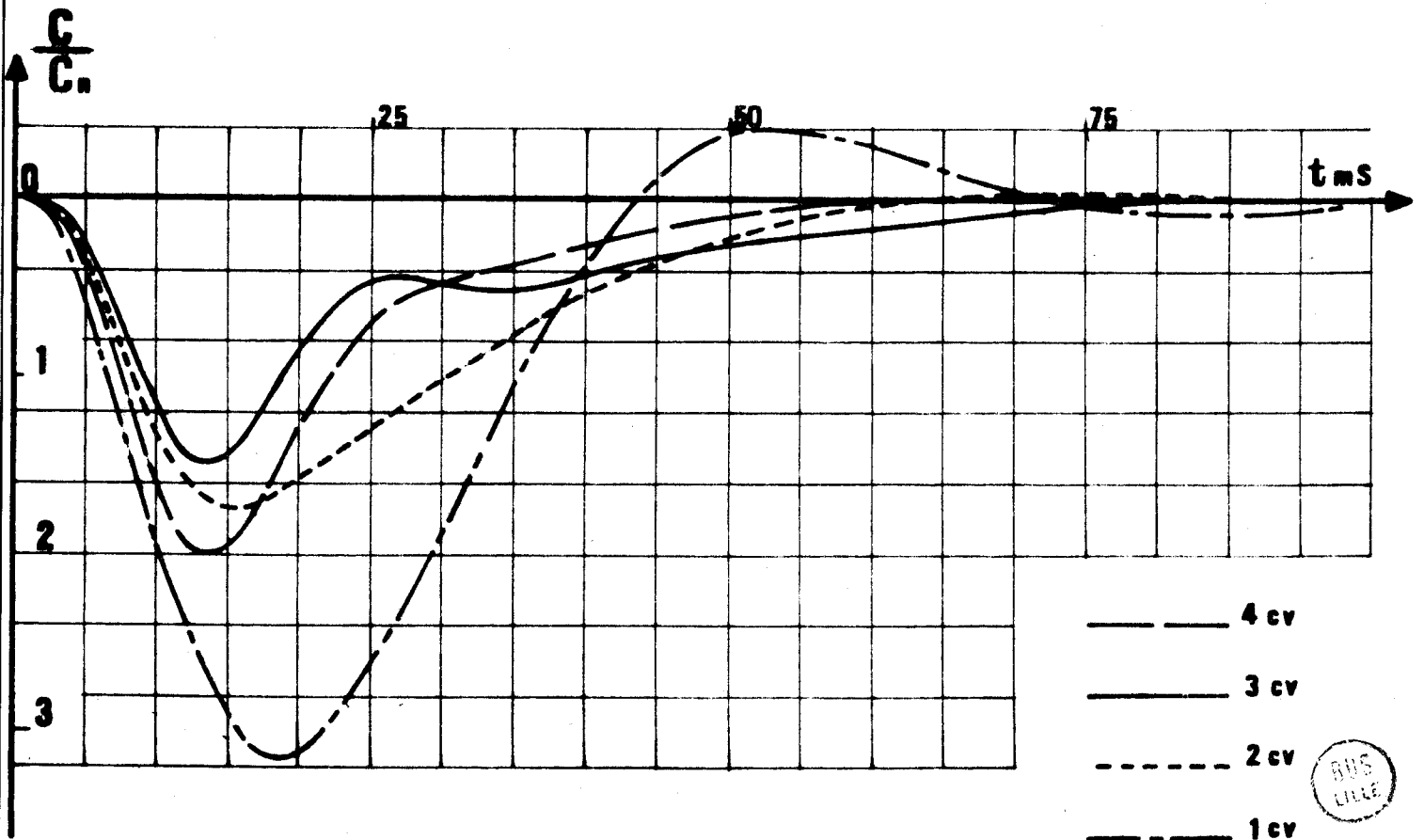


Figure 6 : Evolution du couple lors du réenclenchement à la vitesse synchrone
 $\alpha = 0, p\theta_0 = 0.$

II.7.2. Influence de la vitesse ω' sur l'évolution des courants

D'après les expressions des courants j_1 et j_2 du chapitre précédent, nous retombons sur les mêmes classifications que pour le couple.

a) Vitesses inférieures à la moitié de la vitesse de synchronisme

T_1 étant très supérieur à T_2 , le courant est réduit à son terme permanent et à un terme oscillatoire faiblement amorti de fréquence faible, de plus, le terme permanent présente une amplitude sensiblement du même ordre que le courant de pointe d'où la forme modulée du courant pendant le régime transitoire.

b) Vitesses supérieures à la moitié de la vitesse de synchronisme

Dans ce cas, les deux constantes de temps sont comparables et surtout l'un des deux termes oscillatoires présente une fréquence du même ordre que celle du courant permanent ce qui donne un courant transitoire qui s'éteint très vite (3 à 4 périodes du réseau) et qui altère beaucoup la forme d'onde du courant.

D'après les figures (7 et 8) nous pouvons faire les remarques suivantes :

- pour une vitesse du moteur donnée, l'évolution des courants en grandeur réduite

$\frac{j}{j_n}$ est sensiblement la même quelle que soit la puissance des moteurs, seuls les maximum des courants sont décalés et cela provient du fait que les moteurs ne présentent pas exactement le même facteur de puissance pour une même vitesse en régime permanent.

- quelle que soit la vitesse, l'évolution du courant est sensiblement la même pendant les premières millisecondes, c'est-à-dire que le courant s'établit toujours de la même manière.

II.7.3. Influence de la vitesse ω' sur l'évolution de la puissance instantanée

Dépendant également de T_1 , T_2 , ω_1 et ω_2 , donc de la vitesse ω' , la puissance instantanée est sujette aux mêmes remarques que ci-dessus ; la

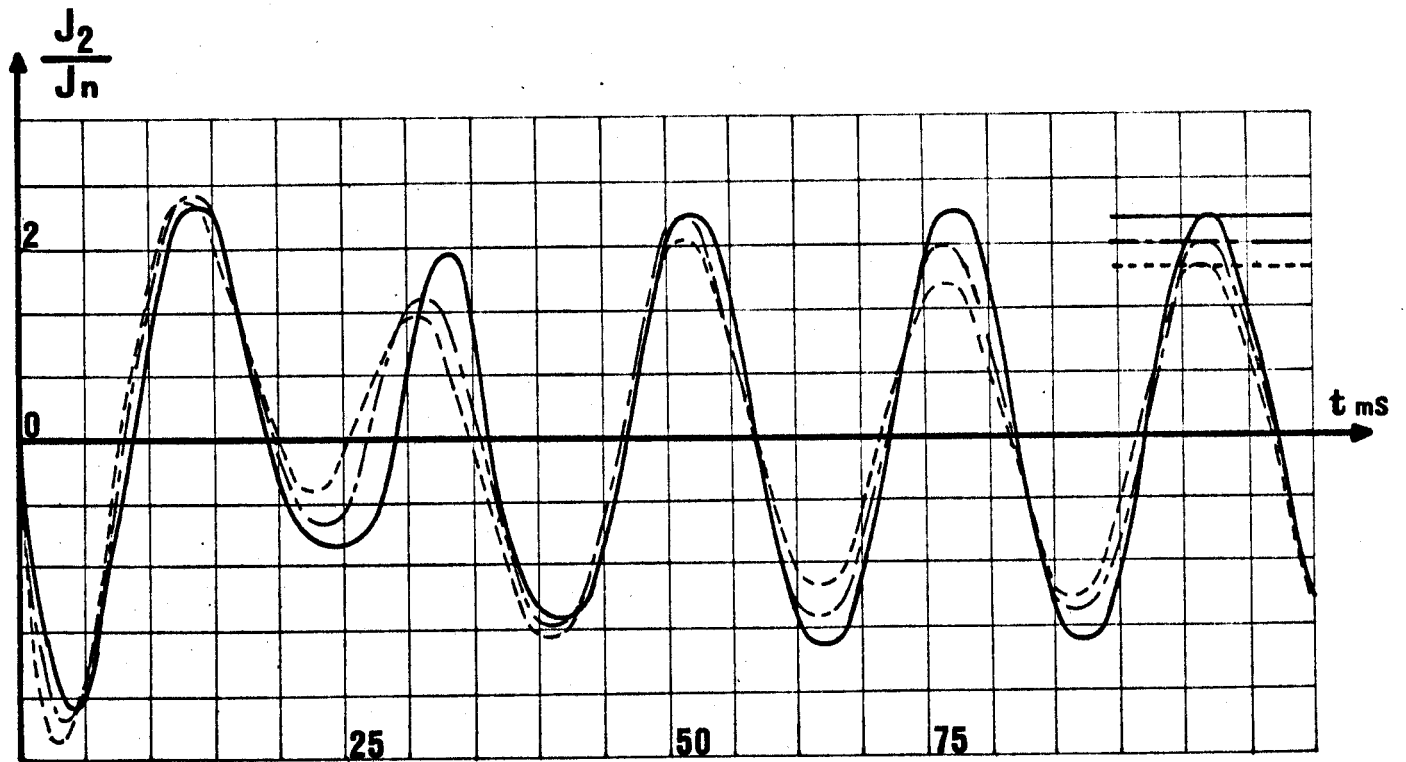
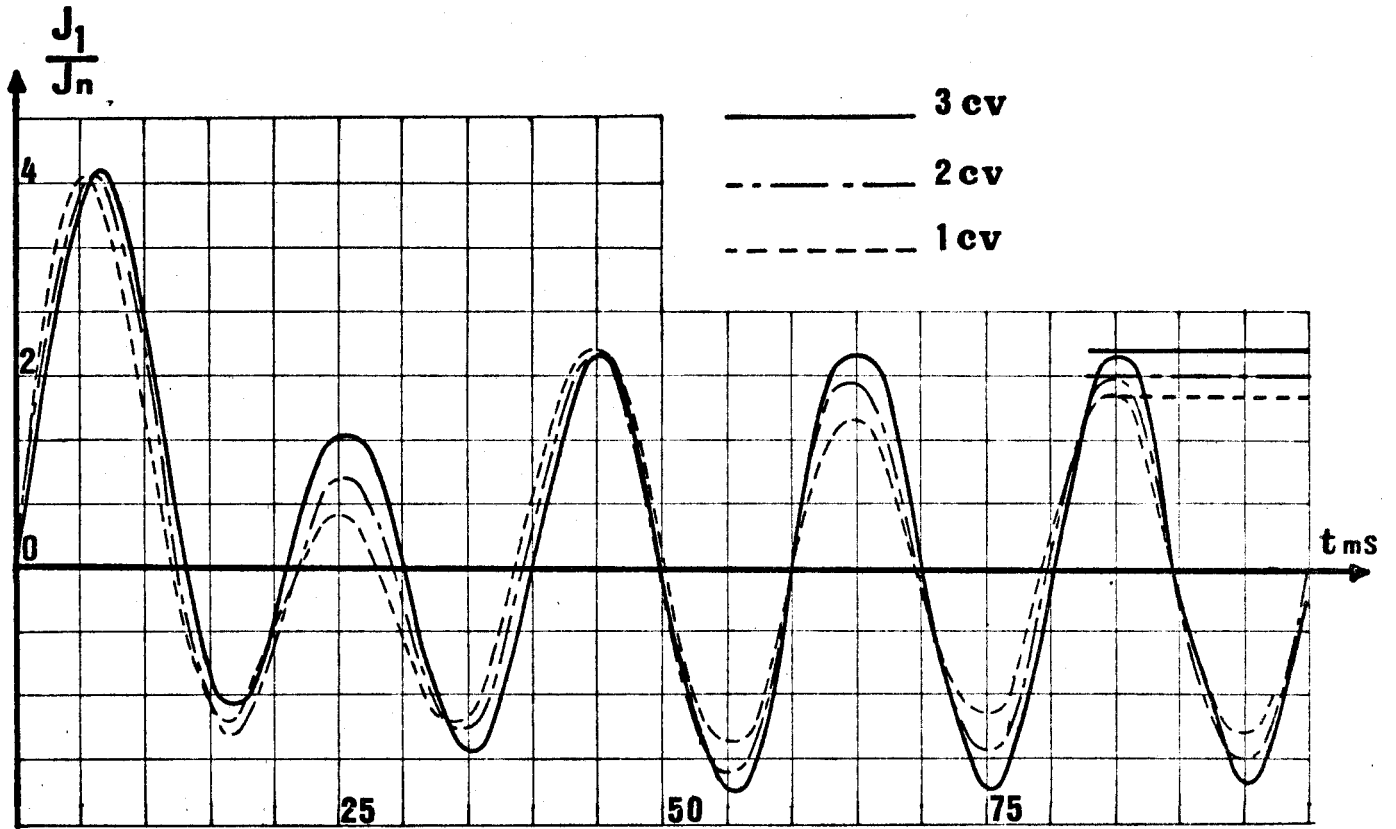


Figure 7 : Etablissement des courants au réenclenchement pour une gamme de moteurs : $\Omega'/\Omega_s = 5/6$, $\alpha = 0$, $p\theta_0 = 0$

Les amplitudes relatives aux régimes permanents sont repérées par les traits horizontaux.



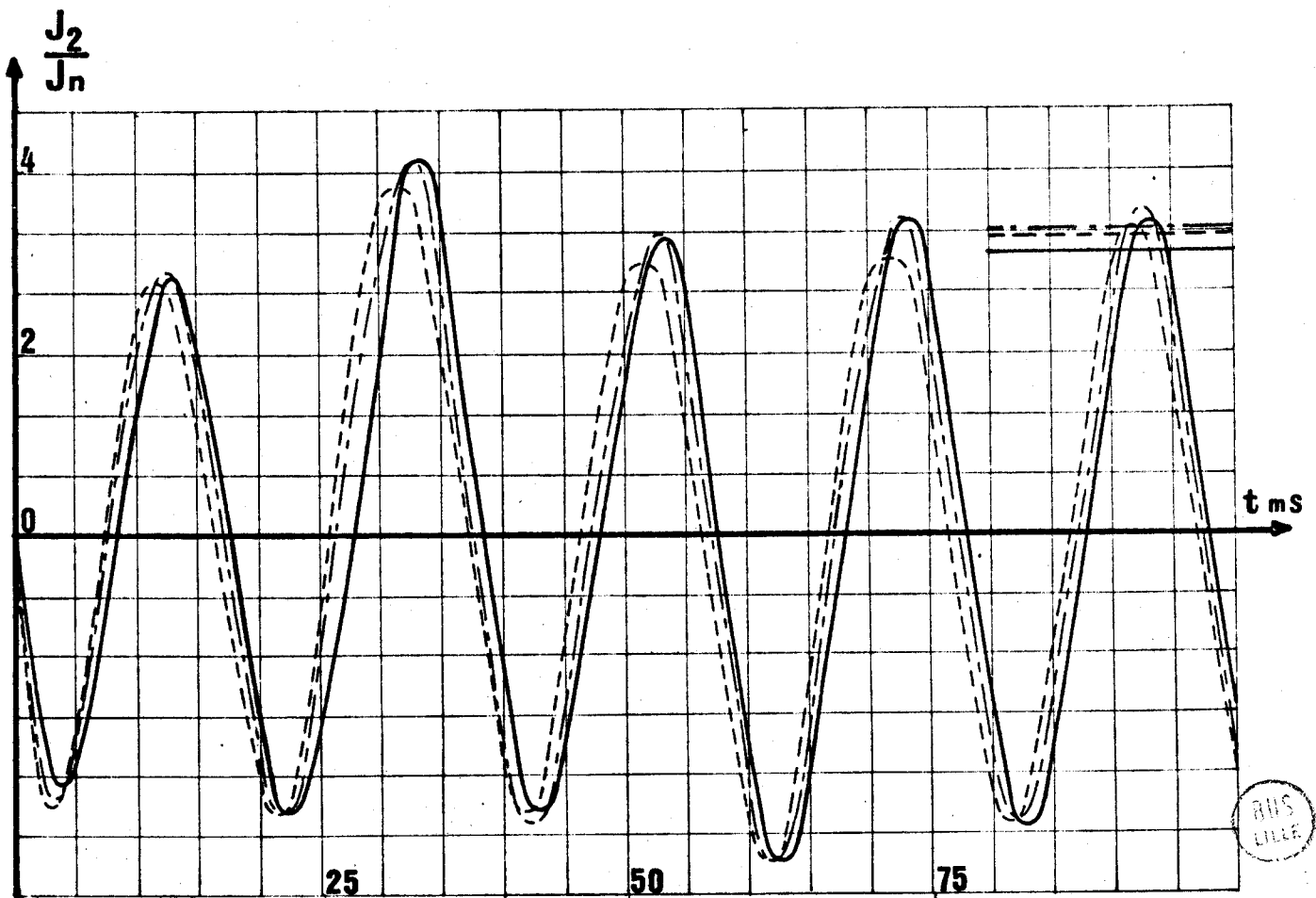
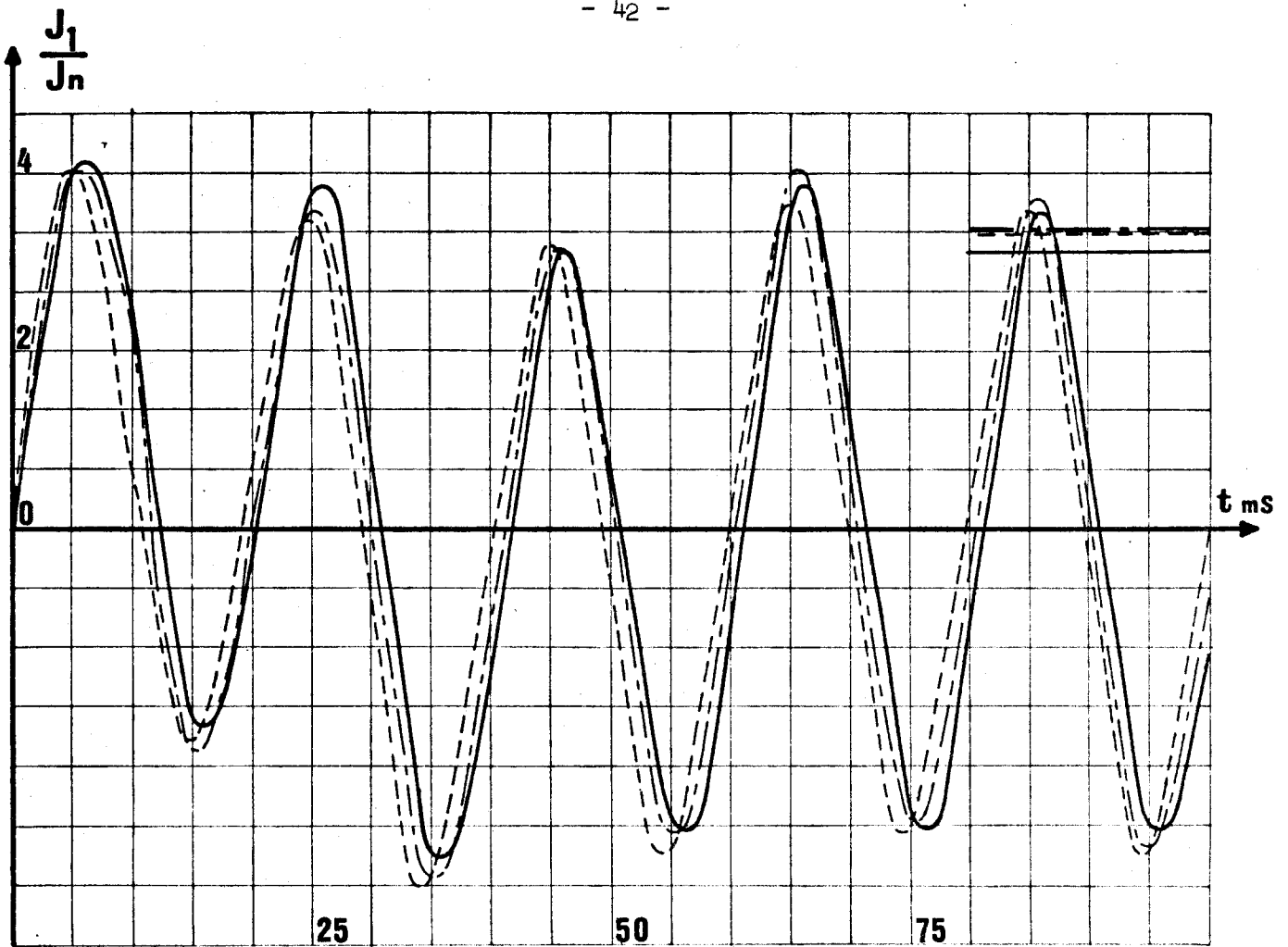


Figure 8 : Etablissement des courants au réenclenchement pour une gamme de moteurs : $\Omega'/\Omega_s = 1/2$, $\alpha = 0$, $p\theta_0 = 0$

RIIS
LILLE

P
kw

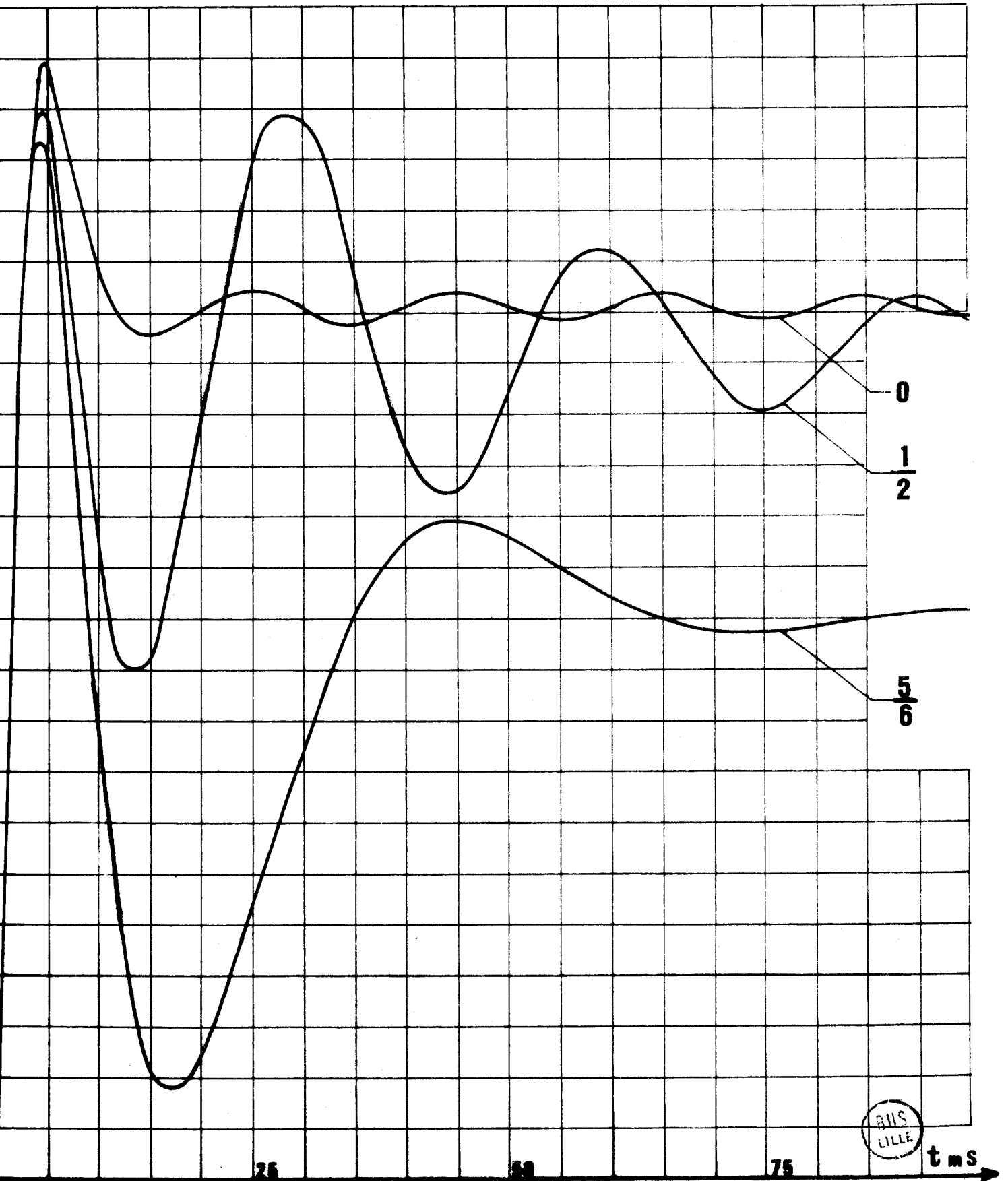


Figure 9 : Evolution de la puissance instantanée absorbée par le moteur de 2 CV avec $\alpha = 0$, $p_{\theta_0} = 0$ et différentes vitesses initiales: $\frac{\Omega'}{\Omega_0} = 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$

figure (9) montre qu'au tout début du réenclenchement, la pointe intantanée est quasiment indépendante de la vitesse du rotor.

II.8. VERIFICATION EXPERIMENTALE DES GRANDEURS DETERMINEES

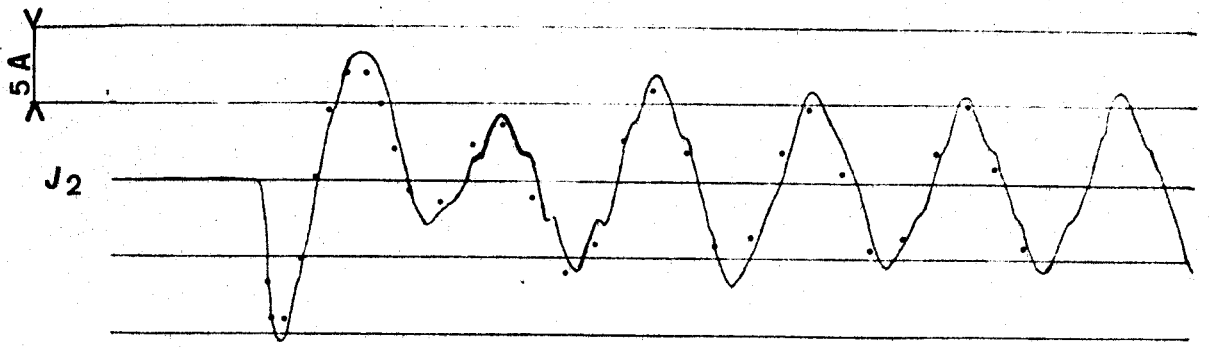
Nous avons enregistré les courants statoriques d'une série de moteurs à cage dont la puissance varie de 1 CV à 4 CV pour différentes conditions initiales.

Il est très difficile de connaître la position angulaire d'une barre rotorique par rapport à un axe quelconque du stator de manière à connaître la condition θ_0 . Donc les conditions initiales qui ont été respectées sont la vitesse du rotor Ω' et l'instant de mise sous tension déterminant α .

Les figures (10 - 11) donnent les enregistrements sur lesquels les points marqués représentent les valeurs obtenues par le calcul théorique.

- La similitude des enregistrements pour des conditions initiales identiques (sauf l'angle θ_0 qui peut être quelconque) permet de conclure que la position initiale du rotor intervient peu sur l'évolution des courants.

La cohérence entre les valeurs pratiques et théoriques des courants vérifie assez bien les hypothèses prises, seul l'effet de la saturation entraîne des écarts aux extrêmes.



teur 1 CV

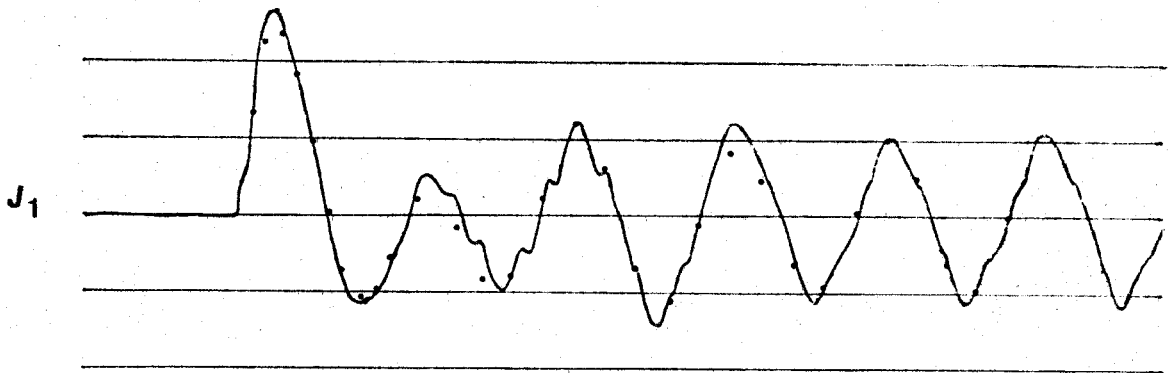
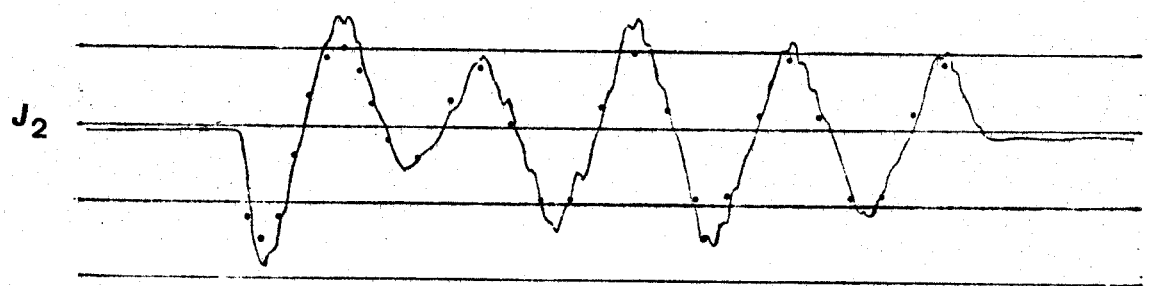


Figure 10 :

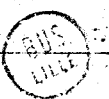
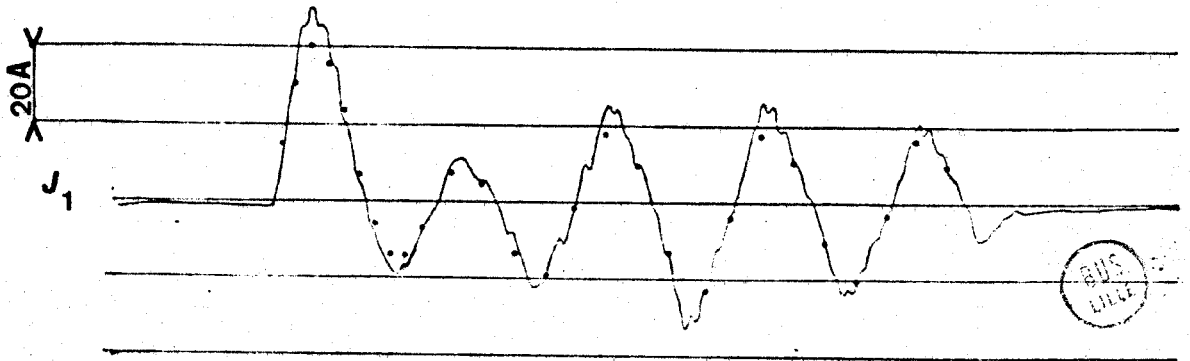
enregistrement
des courants
pour les condi-
tions initiales
 $= 0,$

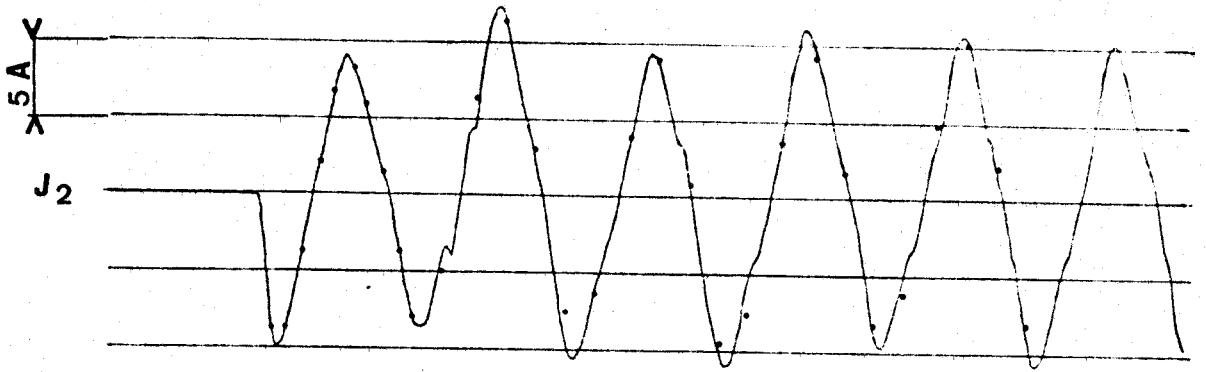
$\Omega'/\Omega_s = 5/6$

itesse de
filement : 1m/s



oteur 4 CV





Moteur 1 CV

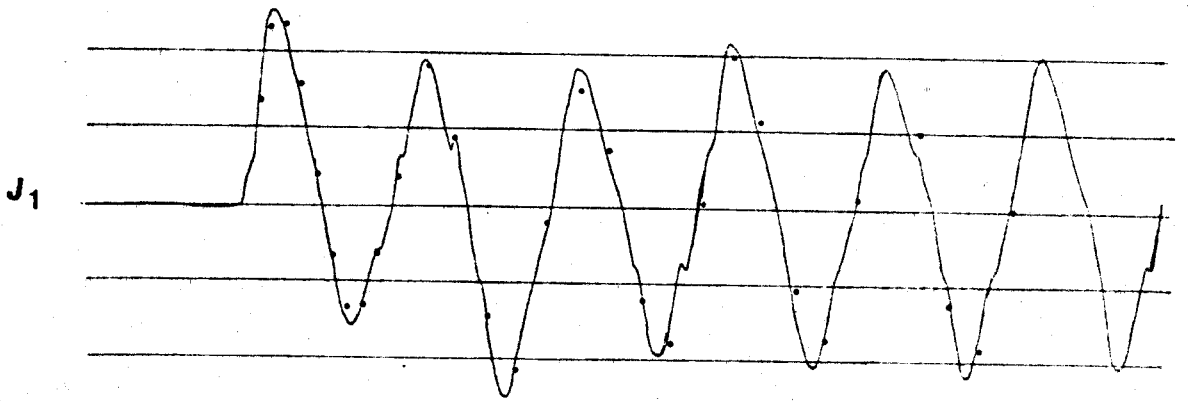
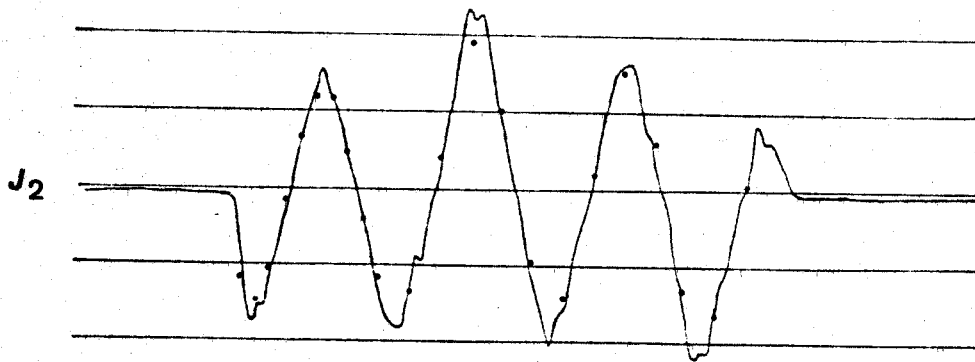
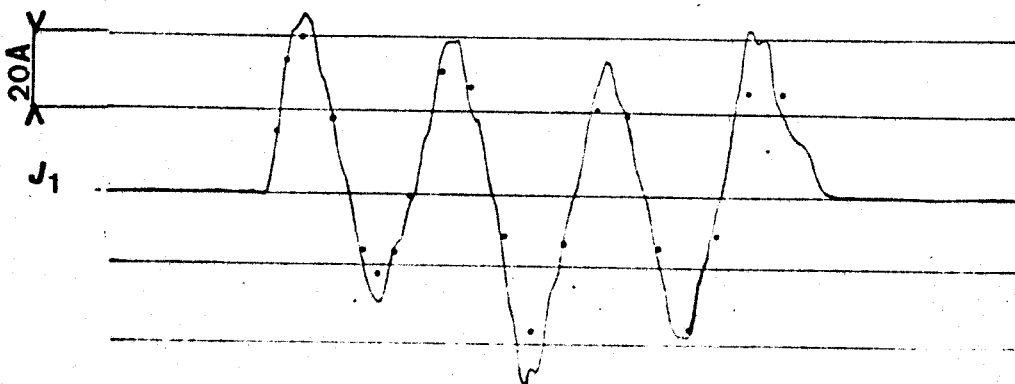


Figure 11 :
enregistrement
des courants pour
des conditions
initiales
 $i = 0,$
 $\Omega' / \Omega_s = 1/2$
vitesse de
défilement : 1 m/s



Moteur 4 CV



CHAPITRE III

LE VARIATEUR DE VITESSE .

III.1. PRINCIPE

Le stator est alimenté par un système de tension équilibrées aux travers de trois paires de thyristors, montés tête bêche, sur chaque fil d'alimentation, ce qui permet le contrôle du temps de passage du courant dans les enroulements statoriques.

L'ensemble des thyristors fonctionne comme un contacteur électromécanique, d'où sa dénomination de "contacteur statique".

La commande de cet interrupteur statique est faite par un système de régulation permettant d'obtenir un fonctionnement à vitesse quasi constante ; ainsi les temps d'ouverture et de fermeture dépendent de la charge.

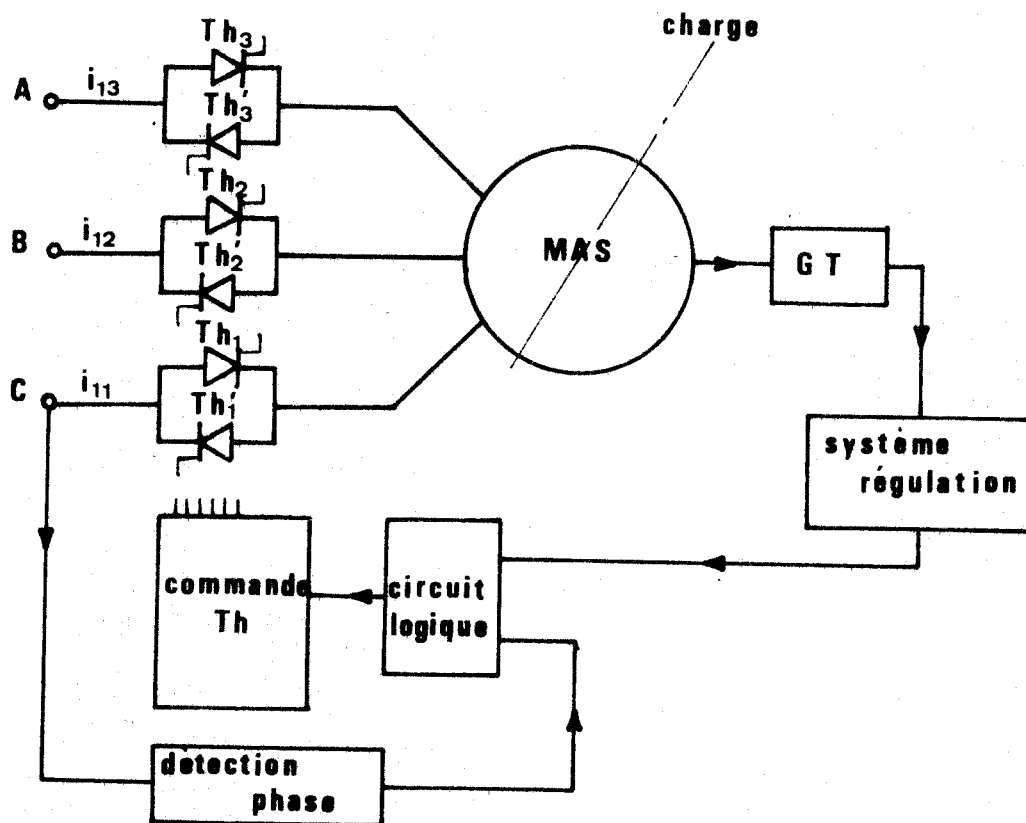


Figure 12 : Schéma de principe du variateur de vitesse.

III.2. REALISATION :

III.2.1. Circuit de puissance.

Les thyristors fonctionnent avec un angle de conduction fixe et égal à π .

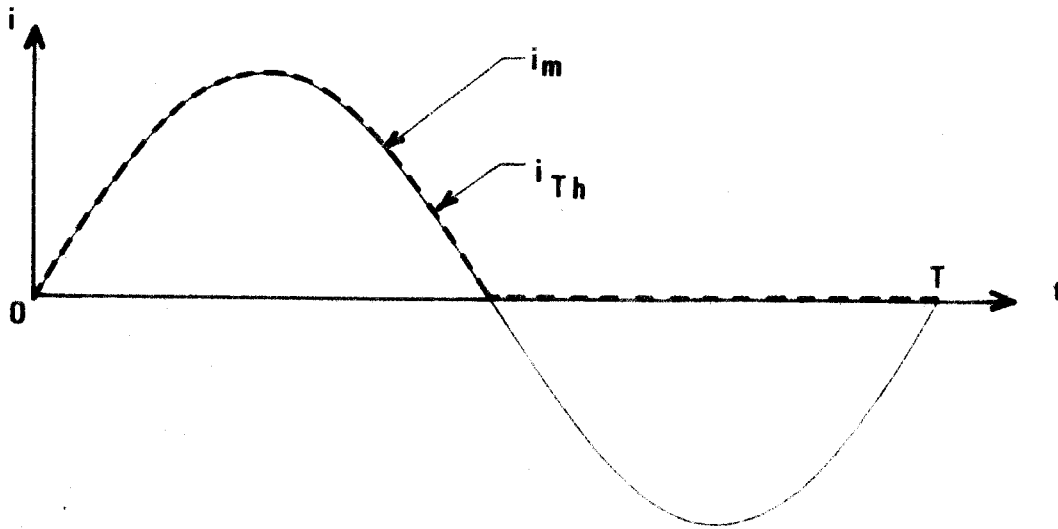
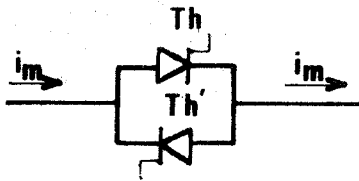


Figure 13 : Allure du courant dans un thyristor en régime permanent.

L'allure théorique des courants faite au chapitre II nous a permis de remarquer que leurs amplitudes pendant le régime transitoire était du même ordre de grandeur que le courant permanent à l'exception des valeurs de la 1ère demie alternance.

Les thyristors pouvant supporter des courants très importants pendant une demie alternance non répétitive, il nous suffit donc de tenir compte du courant permanent i_m pour définir leurs caractéristiques en courant.

- Courants :

Si le moteur absorbe dans un fil de ligne un courant sinusoïdal de valeur efficace I_m ; chaque thyristor devra supporter un courant efficace

$$\frac{I_m}{\sqrt{2}} \text{ et un courant direct moyen de } \frac{I_m \sqrt{2}}{\pi}.$$

- Tension de blocage directe et inverse :

Si l'on suppose que les thyristors sont rigoureusement identiques, c'est-à-dire présentant même résistance de blocage r_i , nous pouvons faire le schéma suivant dans le cas d'un couplage en triangle :

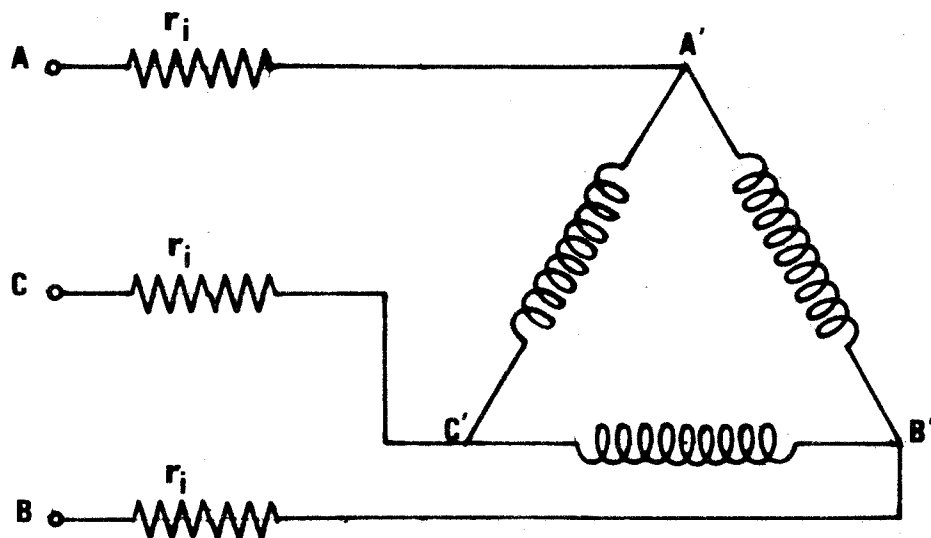


Figure 14 : Représentation des thyristors bloqués par une impédance inverse équivalente.

Les points A', B', C', étant équipotentiels à cause de l'importance des résistances r_i vis à vis de l'impédance du moteur, chaque thyristor doit supporter la tension simple $\sqrt{2} = V_m$.

Dans le cas où les thyristors ne présentent pas la même résistance de blocage, les tensions inverses devront être majorées ; à la limite, nous choisirons des thyristors pouvant supporter la tension composée $\sqrt{3}V_m$.

Ces conditions sont les mêmes pour un couplage étoile.

III.2 1. Commande des thyristors

Le moteur présentant un facteur de puissance variable en fonction de sa vitesse de rotation et compte tenu que tous les thyristors conduisent durant une demie période, chaque thyristor recevra sur sa gachette un train d'impulsions de fréquence élevée qui durera un quart de période et qui sera appliqué dès que sa tension simple devient positive.

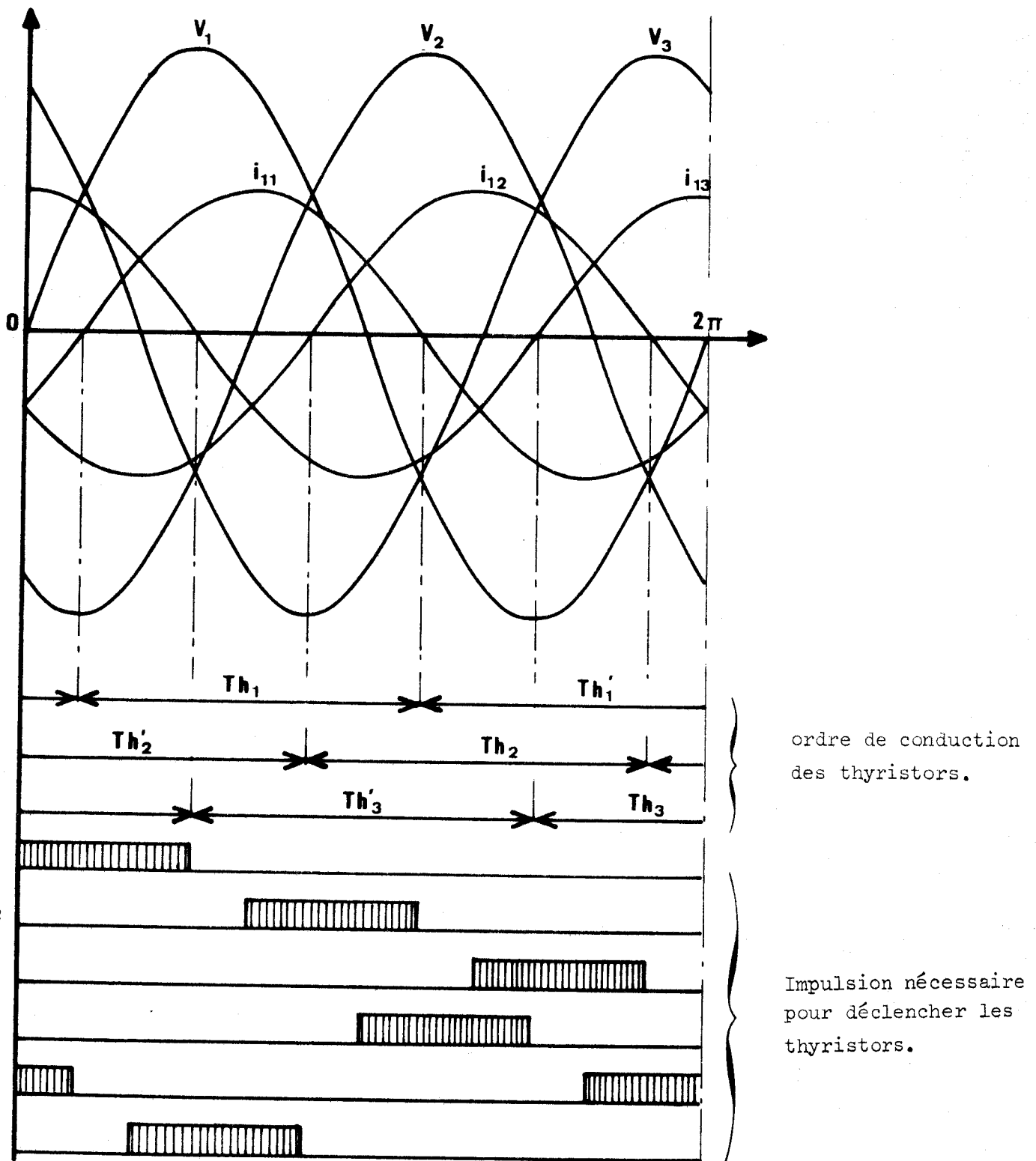


Figure 15 : Positionnement des trains d'impulsion pour l'amorçage à coup sur des thyristors.

Les trains d'impulsions ainsi définis sont obtenus à l'aide de déclencheurs qu'il suffit d'alimenter par la tension alternative (pour obtenir le positionnement du train d'impulsions) et par une tension continue qui permet l'envoi de ces impulsions sur les gachettes.



III.2.3. Circuit de régulation

D'après le principe même du variateur étudié, la vitesse du moteur Ω fluctue autour d'une valeur moyenne égale à la vitesse désirée Ω_0 , cela implique le cycle de régulation et l'évolution de la vitesse ci-dessous :

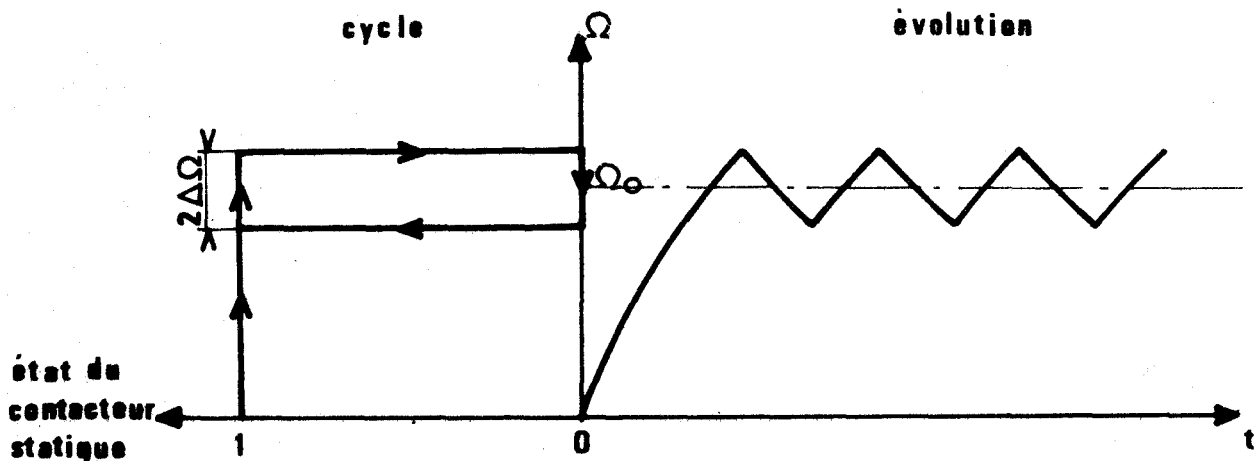


Figure 16 : Effet du circuit de régulation sur l'évolution de la vitesse.

Le système de régulation doit permettre de régler :

- la fourchette de vitesse $\pm\Delta\Omega$
- l'instant d'amorçage des thyristors par rapport à la tension d'alimentation afin que tous les régimes transitoires soient identiques permettant ainsi une meilleure périodicité du fonctionnement (circuit de synchronisation).

Le système de régulation permet de commander les générateurs d'impulsions qui amorcent les thyristors. Ces derniers devraient être amorçés quand la vitesse du moteur est à la valeur minimale $\Omega_0 - \Delta\Omega$ et que la phase de la tension de référence est celle désirée ; mais ces deux phénomènes sont incohérents.

La fluctuation de vitesse présentant une fréquence faible par rapport à la fréquence du réseau, l'amorçage des thyristors se fait donc à l'impulsion de synchronisation qui suit l'instant où la vitesse devient égale à $\Omega_0 - \Delta\Omega$.

Il peut donc s'écouler entre l'instant où la vitesse minimum tolérée est atteinte et l'amorçage une durée maximale de 20 ms, que l'on pourrait réduire à $\frac{20}{3}$ ms en choisissant une autre phase de référence, qui influencera peu le ralentissement supplémentaire du moteur.

III.2.3.1. Fonctionnement et schéma du circuit de régulation

Le capteur de vitesse est une génératrice tachymétrique à la suite de laquelle un filtre actif permet d'éliminer les parasites dus aux contacts balais-collecteur. Ce filtre présente une fréquence de coupure qui est donnée par la formule :

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{2} \pi RC}$$

Vu la constante de temps mécanique de la charge, nous avons pris une fréquence de coupure assez basse (environ 20 Hz) :

$$\text{d'où } R = 10 \text{ K}\Omega$$

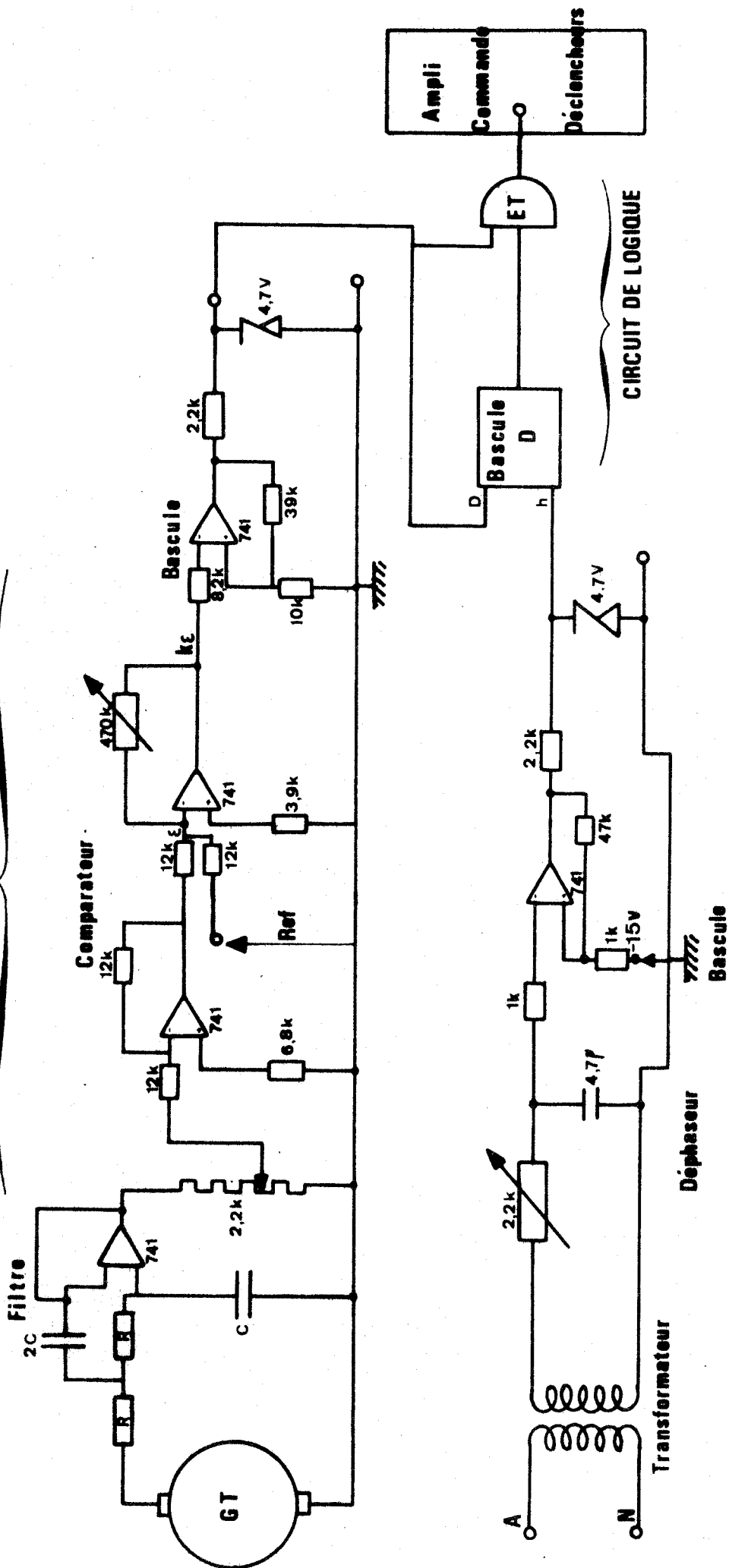
$$C = 0,47 \text{ }\mu\text{F}$$

Une partie du signal délivré par le filtre est comparée à une tension de référence afin de déterminer un signal d'erreur ϵ que l'on peut amplifier à l'aide d'un gain variable K . Une bascule change d'état pour une valeur $K\epsilon = \pm 2,5 \text{ V}$. A la sortie de cette bascule est monté un circuit écréteur afin d'obtenir un niveau logique.

Le circuit de synchronisation est formé d'un transformateur donnant l'image de la tension d'alimentation que l'on déphase à l'aide d'un circuit RC. Le signal déphasé ainsi obtenu attaque une bascule qui change d'état à 0 volt délivrant ainsi un signal en créneaux dont les fronts de montée sont déphasables par rapport au zéro de la tension d'alimentation. Pour les mêmes raisons que précédemment, nous avons monté un circuit écréteur après la bascule.

Le circuit de logique permettant la commande des déclencheurs est réalisé à l'aide d'une bascule D et d'un circuit ET ; le signal de synchronisation étant appliqué à l'entrée horloge de la bascule permettant ainsi l'alimentation des déclencheurs dès l'impulsion du signal de synchronisation ; le circuit ET permet l'extinction des déclencheurs dès l'annula-

CIRCUIT DE REGULATION



CIRCUIT DE SYNCHRONISATION

Figure 17 : Schéma de la régulation logique du variateur.



tion du signal logique issu du signal d'erreur. Figure (17).

III.3. ETUDE DU RENDEMENT DU VARIATEUR DE VITESSE

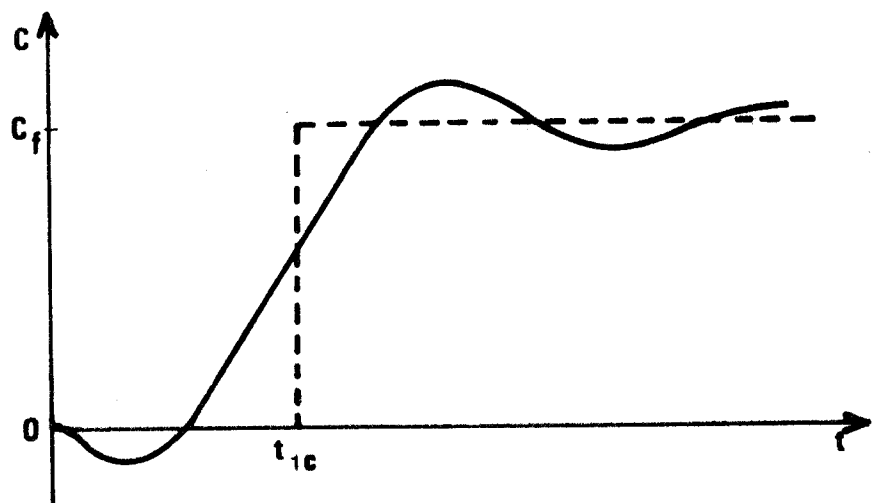
III.3.1. Simplification de l'allure du couple

Nous avons calculé dans le chapitre II l'établissement du couple lors d'une remise sous tension selon la vitesse initiale.

Mais l'expression (21) donnant son évolution est beaucoup trop complexe pour une résolution simple de l'équation différentielle qui régit le système mécanique. Nous supposons que le couple s'établit directement à sa valeur permanente après un temps de retard t_{1c} .

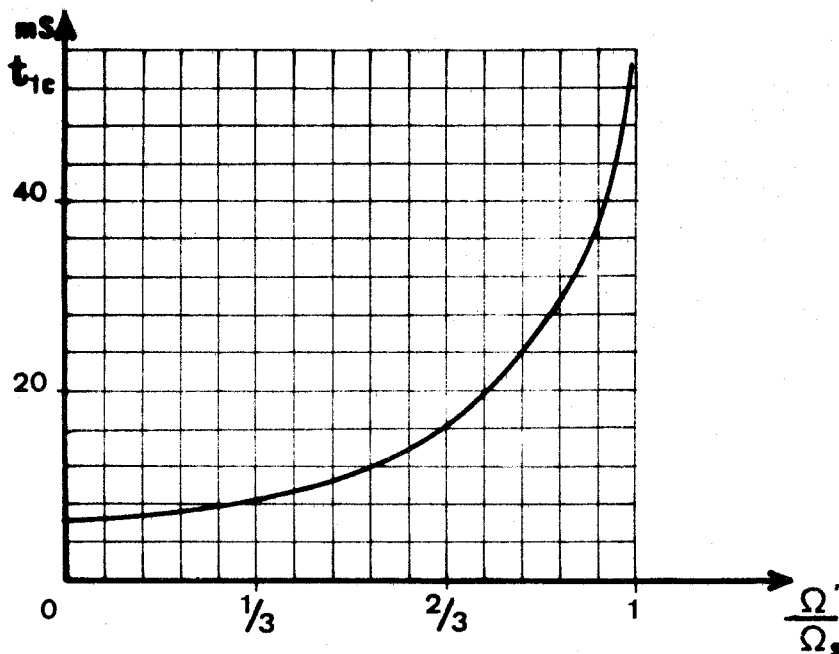
Cette hypothèse conserve sensiblement la valeur moyenne du couple électromagnétique et simplifie le calcul des temps de conduction (fig.18).

Figure 18 : Eche-
lon de couple
équivalent à
même valeur
moyenne s'éta-
blissant après
un retard t_{1c} .



Il a été mis en évidence que le temps de retard t_{1c} ainsi défini dépend surtout de la vitesse initiale et cela quelle que soit la puissance du moteur. Nous pouvons donc représenter la variation de t_{1c} en fonction de la vitesse initiale. Figure (19).

Figure 19 : Allure de t_{1c} en fonction de la vitesse, fréquence d'alimentation 50 Hz.



III.3.2. Expression littérale du rendement

Durant ce temps de retard t_{1c} , le moteur absorbe une puissance p_1 sans fournir de couple. Si t_{2c} est la durée d'application du couple constant, durant l'intervalle de temps t_{2c} le moteur fonctionne en régime permanent et son point de fonctionnement sera fixe sur le diagramme circulaire pour de faibles valeurs de $\Delta\Omega$; la puissance absorbée correspondante est notée P.

Le temps conduction t_c est égal à :

$$t_c = t_{1c} + t_{2c}$$

Le couple électromagnétique durant t_{2c} étant C, le couple utile est :

$$C_u = \frac{C \cdot t_{2c}}{t_c + t_{nc}} - C_p \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} t_{nc} = \text{temps de non conduction} \\ C_p : \text{couple de pertes.} \end{array}$$

Nous pouvons définir la puissance moyenne absorbée par le moteur :

$$P_{ab \text{ moy}} = \frac{p_1 \cdot t_{1c}}{t_c + t_{nc}} + \frac{P \cdot t_{2c}}{t_c + t_{nc}}$$

d'où l'expression du rendement :

$$\eta = \frac{C_u \Omega_o}{P \text{ absorbée moyenne}} \quad (31)$$

soit

$$\eta = \frac{C \Omega_o - C_p \left(\frac{t_c + t_{nc}}{t_{2c}} \right) \Omega_o}{p_1 \frac{t_{1c}}{t_{2c}} + P} \quad (32)$$

En considérant l'évolution de la puissance instantanée précédemment déterminée, nous pouvons connaître la puissance absorbée p_1 (cette puissance est du même ordre de grandeur que P .)

Dans ce mode de fonctionnement, le rendement sera toujours inférieur à celui obtenu en marche continue car :

$$\frac{C \Omega_o - C_p \left(\frac{t_c + t_{nc}}{t_{2c}} \right) \Omega_o}{p_1 \frac{t_{1c}}{t_{2c}} + P} < \frac{C \Omega_o - C_p \Omega_o}{P}$$

III.3.3. Amélioration du rendement

Pour rendre le rendement voisin de celui obtenu en marche continue, les termes à minimiser sont ceux dus au couple de pertes et à la puissance absorbée pendant les premières millisecondes qui suivent la mise sous tension du moteur.

Le couple de pertes ne peut être modifié car c'est une caractéristique propre à la construction du moteur, mais nous pouvons réduire son effet grâce à son facteur multiplicatif.

C'est surtout la puissance absorbée pendant les premières millisecondes qui influe sur l'évolution du rendement. Nous pouvons minimiser son importance en réduisant le nombre d'amorçages par unité de temps donc en réduisant le nombre des régimes transitoires. Le choix entre plusieurs possibilités dépendra de la nature de la charge et des conditions de fonctionnement.

On pourra

- a) Prendre une ondulation de vitesse suffisamment grande.
- b) Entraîner des charges qui ont des inerties importantes.
- c) Diminuer le couple électromagnétique en alimentant le moteur par une tension réduite.

Les deux premières solutions ne sont pas toujours réalisables ; de plus, elles réduisent seulement l'effet de la puissance absorbée pendant le transitoire mais pas l'effet du couple de pertes car le rapport $\frac{t_c + t_{nc}}{t_{2c}}$ reste sensiblement constant puisque l'on agit de la même manière sur t_c , t_{nc} , t_{2c} .

Par contre, le sous voltage de la machine est généralement possible. Le fait de diminuer la tension d'alimentation dans le rapport m revient à diminuer le couple au moins par m^2 (machine supposée linéaire) donc à augmenter le temps de conduction t_{2c} . De ce fait, nous agissons seulement sur la valeur t_{2c} et il s'ensuit une réduction des effets du couple de pertes et de la puissance absorbée pendant le régime transitoire.

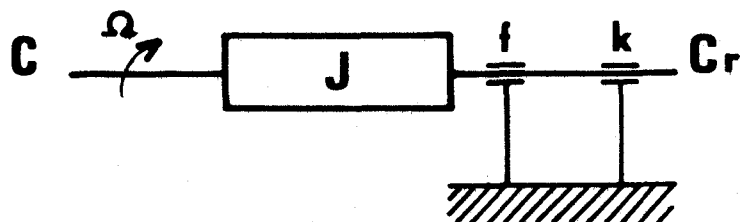
Pratiquement, le sous voltage du moteur ne change pas la puissance maximale qu'il peut fournir à une vitesse donnée. En effet, la décroissance du rendement avec la vitesse limite la puissance maximale utile si l'on désire que les pertes joules rotoriques ne deviennent pas trop importantes. Cela permettra également de diminuer les contraintes mécaniques de l'ensemble et les courants circulant dans les enroulements statoriques du moteur.

III.3.4. Détermination des temps de conduction t_{2c} et de non conduction t_{nc}

Le moteur accouplé à une charge quelconque peut être représenté par le système mécanique :

Figure 20 :

Représentation mécanique du groupe tournant.



avec

J : moment d'inertie des pièces tournantes

f : coefficient de frottement visqueux
 k : coefficient de frottement sec
 C_r : couple résistant de la charge.

$$C = \frac{J}{dt} \frac{d\Omega}{dt} + f\Omega + C_r + k$$

Pour une vitesse moyenne donnée Ω_0
 on peut linéariser les expressions
 des couples

$$\left\{ \begin{array}{l} C = k'\Omega + a \\ C_r = k''\Omega + b \end{array} \right.$$

ce qui donne :

$$\frac{J}{dt} \frac{d\Omega}{dt} + K\Omega + A = 0 \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} K = k'' - k' + f \\ A = b + k - a \end{array} \right.$$

Ω sera donc de la forme :

$$\Omega = -\frac{A}{K} + \left(\frac{A}{K} + \Omega_0 - \Delta\Omega\right)e^{-\frac{K}{J}t} \quad \text{avec } \Omega_0 - \Delta\Omega \text{ vitesse à l'instant initial}$$

pour $t = t_{2c}$, $\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega$ d'où :

$$t_{2c} = \frac{J}{K} \log \frac{\frac{A}{K} + \Omega_0 - \Delta\Omega}{\frac{A}{K} + \Omega_0 + \Delta\Omega}$$

- t_{nc} est le temps pendant lequel la vitesse du système mécanique passe de sa valeur maximale à sa valeur minimale, le couple électromagnétique étant nul.

Soit
$$\Omega = -\frac{A'}{K'} + \left(\frac{A'}{K'} + \Omega_0 + \Delta\Omega\right)e^{-\frac{K'}{J}t}$$

et
$$t_{nc} = \frac{J}{K'} \log \frac{\frac{A'}{K'} + \Omega_0 + \Delta\Omega}{\frac{A'}{K'} + \Omega_0 - \Delta\Omega} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} K' = k'' + f \\ A' = b + k \end{array} \right.$$

Les figures (21 - 22) donnent les temps t_c et t_{nc} en fonction du couple utile pour différentes valeurs de la vitesse moyenne et de ses variations.

Les temps de conduction ont été déterminés pour une tension d'alimentation de 220 volts, le stator étant couplé successivement en triangle et en étoile.

$$\begin{aligned} J &= 0,41 \text{ kg.m}^2 \\ f &= 0,007 \text{ mNs/rd} \\ K &= 0,56 \text{ mN} \\ k' &= 0 = k'' \text{ vu les faibles valeurs de } \Delta\Omega \end{aligned}$$

A couple utile et vitesse moyenne donnés, les valeurs de t_c et t_{nc} sont quasiment proportionnelles à $\Delta\Omega$.

III.3.5. Prédétermination du rendement

- A partir des courbes précédentes, il est possible de prédéterminer le rendement du variateur de vitesse :

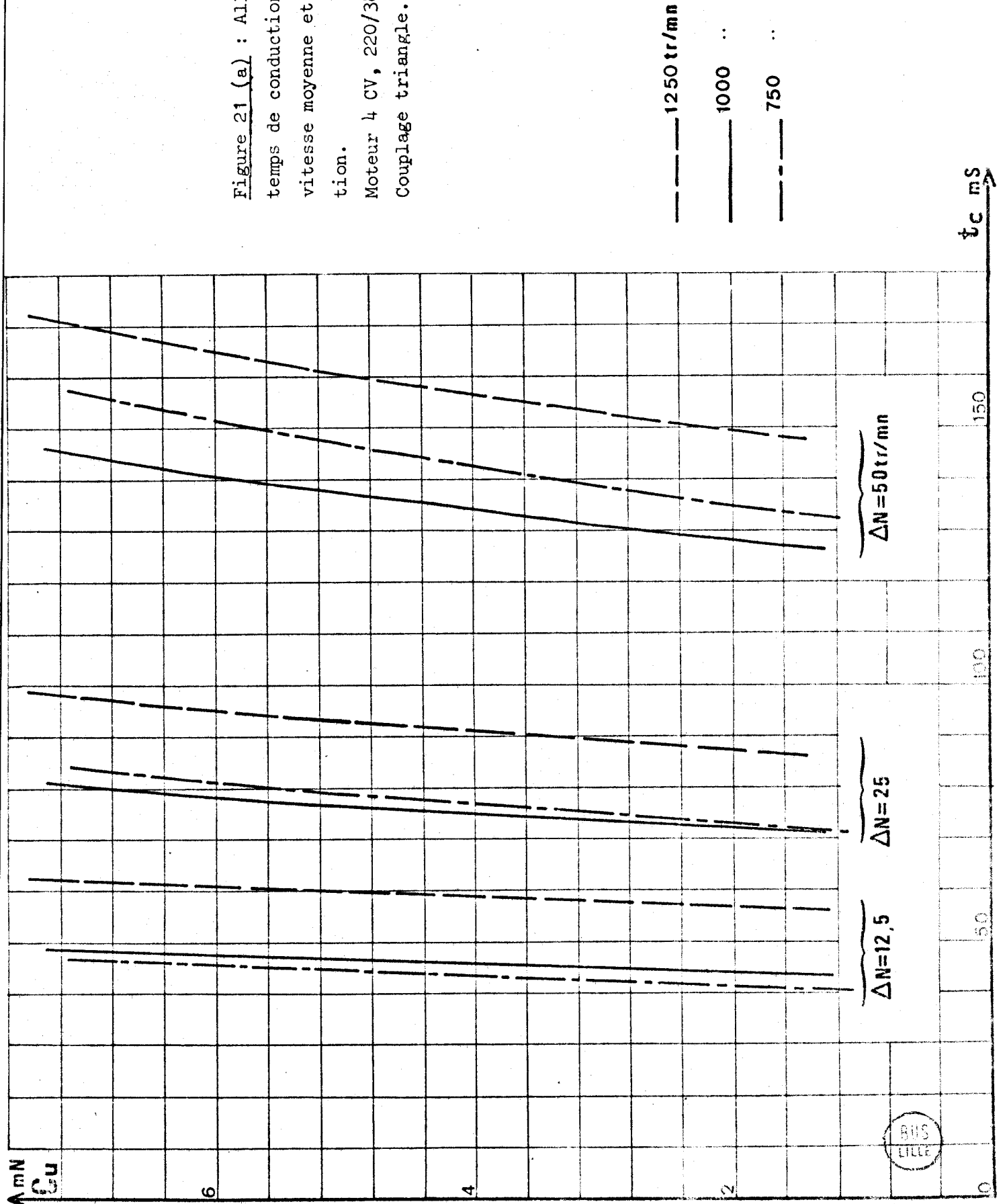
$$\eta = \frac{Cu \Omega_o}{P_1 \frac{t_c}{t_c + t_{nc}}} \quad \text{avec} \quad P_1 = \frac{1}{t_c} \int_0^{t_c} p dt$$

La figure (23) appelle deux remarques :

- L'alimentation sous tension réduite permet un meilleur rendement, et cela d'autant plus que la vitesse est importante.

- L'influence de l'ondulation est beaucoup moindre pour la machine sous voltée ; on pourra donc plus facilement entraîner des charges de faible inertie.

Figure 21 (a) : Allure des
temps de conduction selon la
vitesse moyenne et l'ondula-
tion.
Moteur 4 CV, 220/380, 4 pôles
Couplage triangle.



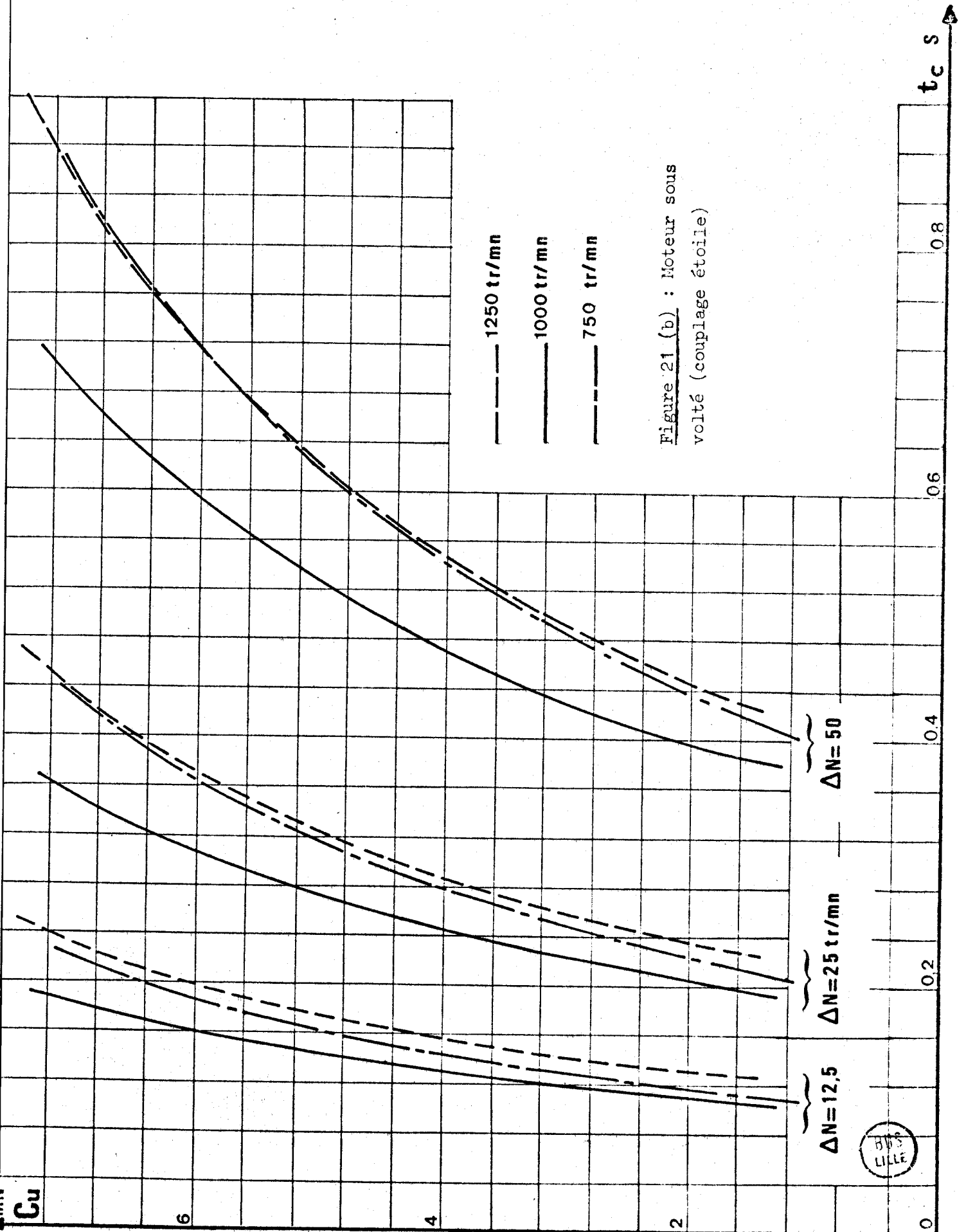
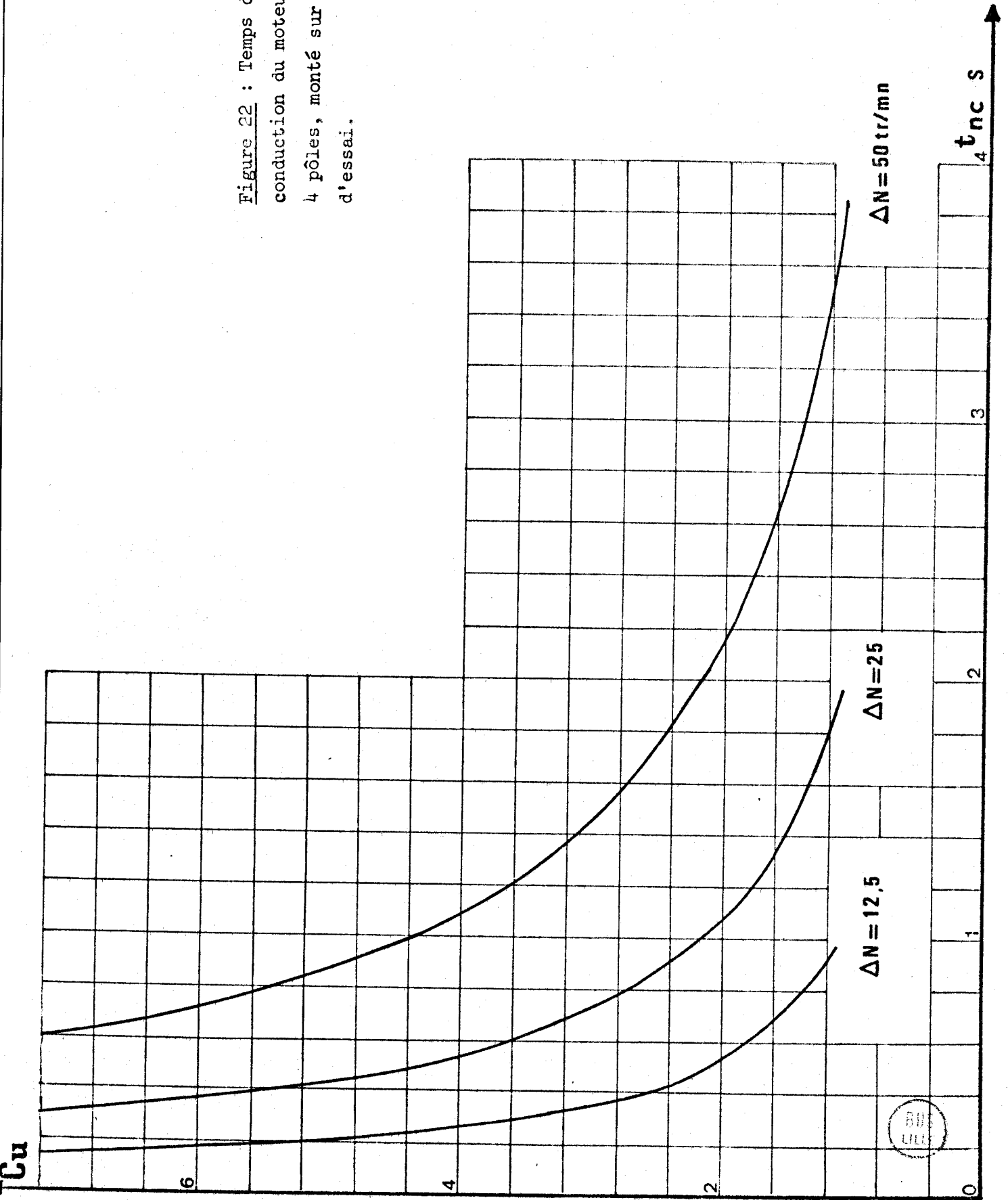


Figure 22 : Temps de non
conduction du moteur 4 CV,
4 pôles, monté sur le banc
d'essai.



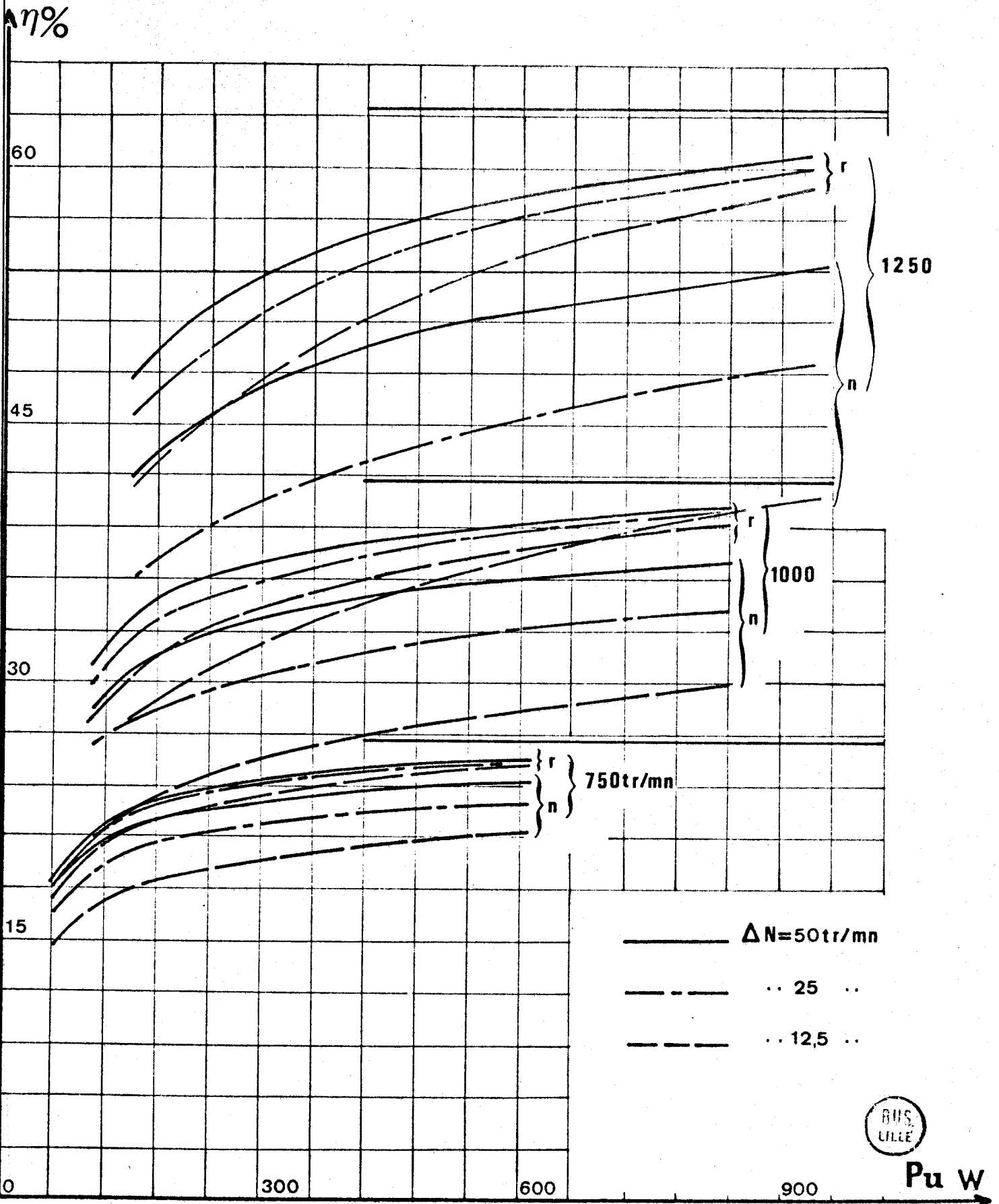


Figure 23 : courbe $\eta = f(P_u)$ pour le moteur précédent en fonction de la vitesse moyenne et de l'ondulation de vitesse. n: alimentation sous tension nominale
r: alimentation sous tension réduite.
Les traits horizontaux représentent les rendements en régime permanent.

CHAPITRE IV

PERFORMANCES DU VARIATEUR

IV.1. LIMITATION DES PERFORMANCES

C'est l'échauffement de la machine, due à la dégradation du rendement aux basses vitesses, qui en limitera le domaine d'utilisation défini dans le plan couple-vitesse.

Ce domaine sera fonction des paramètres du moteur et la nature de la charge.

IV.1.1. Pertes maximales dissipables par la machine

Le suréchauffement d'un moteur entraîne la déformation et la destruction des isolants et abrège donc sa durée de vie ; les moteurs de type industriel présentent des caractéristiques nominales de courant, puissance utile et rendement correspondant à un échauffement interne admissible en service continu, ce qui définit une température maximale θ_1 de la paroi externe du stator.

Une étude théorique de l'échauffement, faisant intervenir un grand nombre de paramètres physiques et géométriques, est assez complexe [19] ; aussi proposons nous de relever directement la puissance dissipable par la machine en fonction de la vitesse.

Il faut effectuer :

- un essai à puissance nominale pour connaître les pertes électriques p_1 dissipables à ce régime ainsi que la température θ_1 maximale admissible.
- un essai à puissance réduite, rotor calé, déterminant la puissance que peut dissiper la machine par convection naturelle p_2 à la température θ_1 .

Pour un régime quelconque, la puissance maximale dissipée par convection et ventilation est de la forme :

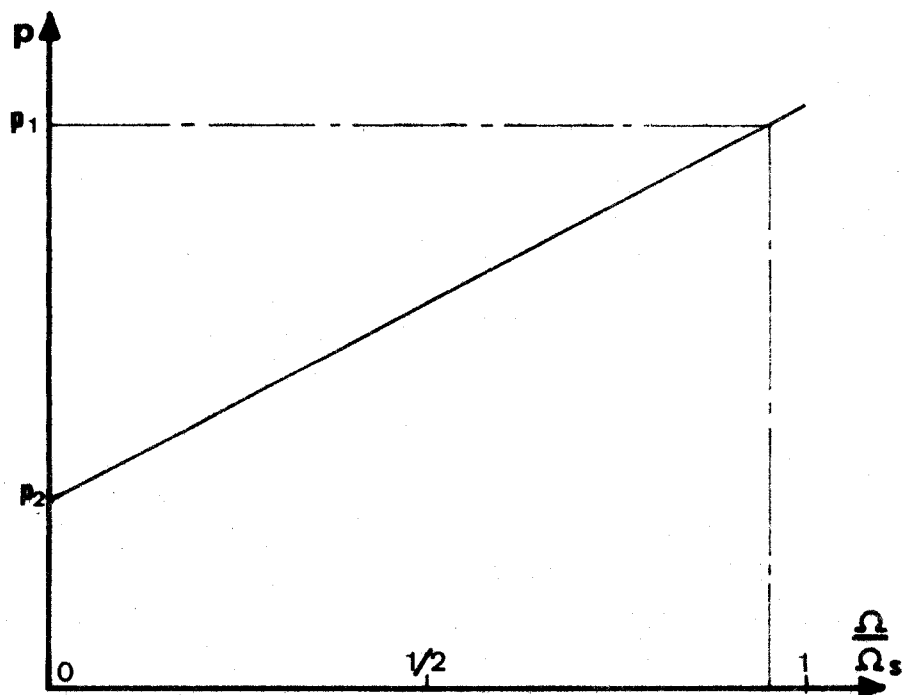
$$p = K_1(1+0,4 V)S \Delta\theta$$

avec K_1 : Coefficient de convection
 V : Vitesse d'écoulement de l'air autour de la carcasse
 S : Surface totale externe du stator
 $\Delta\theta$: Ecart entre θ_1 et la température ambiante.

La vitesse d'écoulement de l'air étant proportionnelle à celle de rotation, on en déduit, pour une température ambiante constante, la puissance maximale dissipable en fonction de la vitesse du moteur. (fig. 24)

Figure 24 :

Puissance calorifique
dissipable par le mo-
teur selon sa vitesse.



IV.1.2. Pertes électriques et puissance utile

L'échauffement est dû aux pertes électriques dont les plus importantes sont, de loin, celles dues à l'effet Joule*.

Les pertes mécaniques p_m , principalement dues à la ventilation, sont déterminées à part.

La prédétermination du rendement, effectuée au chapitre précédent, nécessite de connaître :

- la nature de la charge
- les caractéristiques mécaniques du groupe tournant : J , f , k
- l'ondulation de vitesse tolérée $\Delta\Omega$
- les caractéristiques du moteur en régime permanent, déductibles du diagramme circulaire.

* Ce qui est d'autant plus vrai que l'on s'éloigne de la vitesse synchrone.

On peut alors calculer les temps de conduction et de non conduction selon le couple utile désiré en résolvant l'équation mécanique du groupe.

On n'oubliera pas de corriger les valeurs des temps de conduction en ajoutant le temps de retard t_{1c} , correspondant à l'établissement du couple permanent équivalent, donné par la figure (19).

La figure (9) montrant l'évolution de la puissance instantanée permet d'écrire l'expression :

$$P_{ab.moy} \neq P \cdot \frac{t_c}{t_c + t_{nc}}$$

Le calcul du rendement $\eta = \frac{Cu \cdot \Omega_o}{P_{ab.moy}}$ donne alors les pertes électriques p .

$$p = P_{ab.moy} - p_m - P_u \quad \text{avec} \quad P_u = Cu \cdot \Omega_o$$

On trace alors, pour diverses vitesses, les courbes $p = f(P_u)$ selon $\Delta\Omega$ choisi.

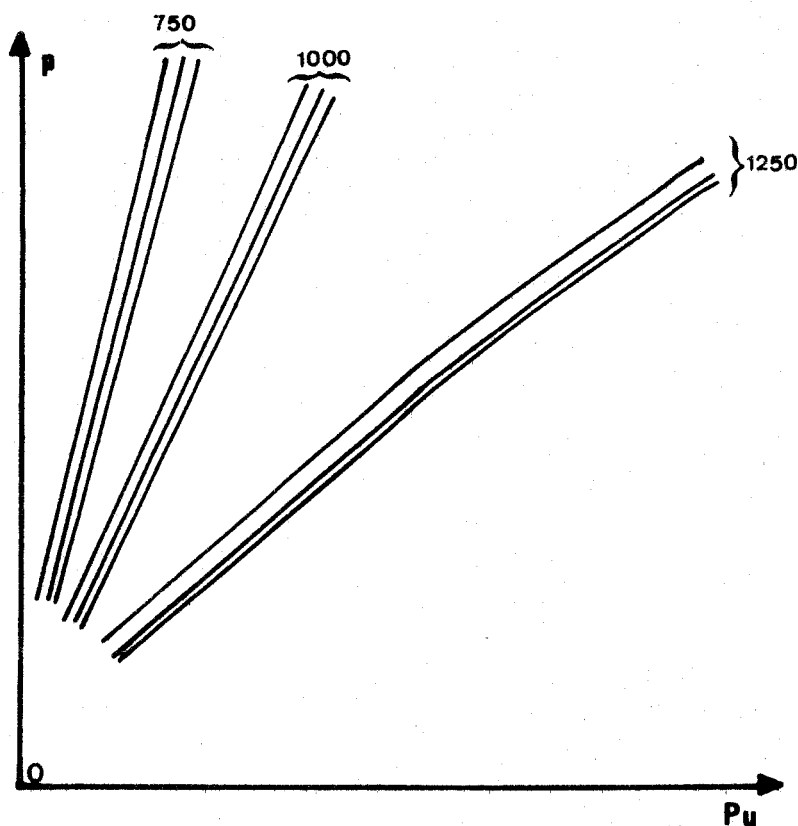


Figure 25 :

Allure des pertes électriques en fonction de la puissance utile pour différentes valeurs de Ω_o et $\Delta\Omega$.

IV.1.3. Domaine d'utilisation

A titre d'exemple, définissons le domaine d'utilisation d'un moteur à cage : 4 CV - 220/380 V - 4 pôles - alimenté en étoile sous 220 V entraînant une charge pour une ondulation en vitesse de ± 25 tr/mn.

Le groupe est caractérisé par :

$$J = 0,41 \text{ Kg.m}^2$$

$$f = 7,05 \cdot 10^{-3} \text{ mN/rd/sec.}$$

On relève :

- à puissance nominale

$$p_1 = 710 \text{ W}$$

$$N = 1420 \text{ tr/mn}$$

$$\theta_1 = 70^\circ\text{C}$$

- à rotor calé pour $\theta_1 = 70^\circ\text{C}$ $p_2 = 250 \text{ W}$

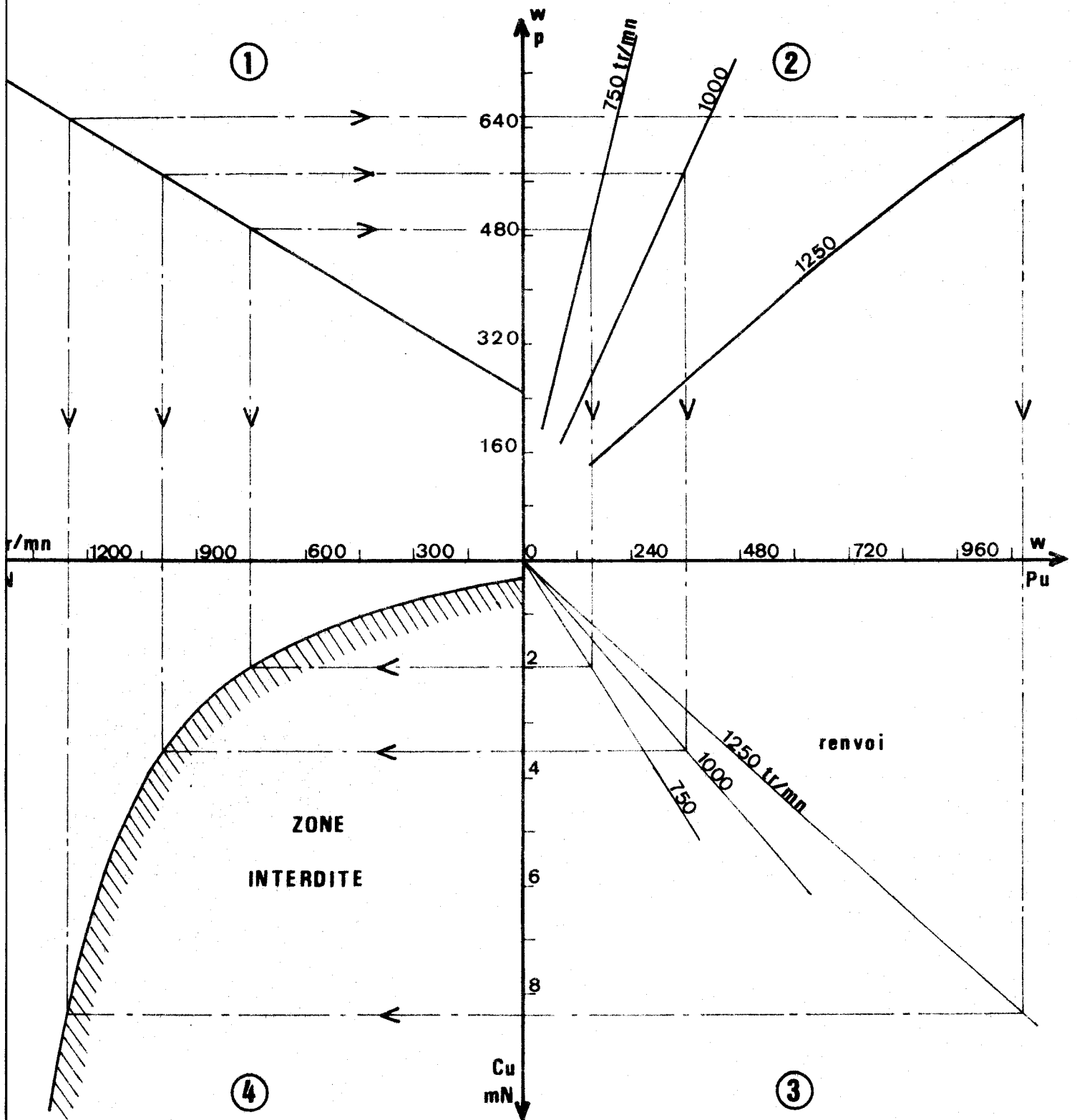
soit $p = f(N)$ sur le premier quadrant de la figure (26)

On trace les courbes $p = f(P_u)$ dans le second quadrant à partir des courbes de rendement établies au chapitre précédent ; le troisième quadrant convertit P_u en C_u selon Ω_o et le domaine d'utilisation est ainsi obtenu dans le dernier quadrant.

Le cas de la figure correspond à un déclassement en tension de $\sqrt{3}$.

La figure (27) montre les allures des divers couples résistants que peut vaincre le moteur de zéro à sa vitesse maximum : il s'accommode des charges en $k_p N^2$ d'autant mieux que p est élevé.

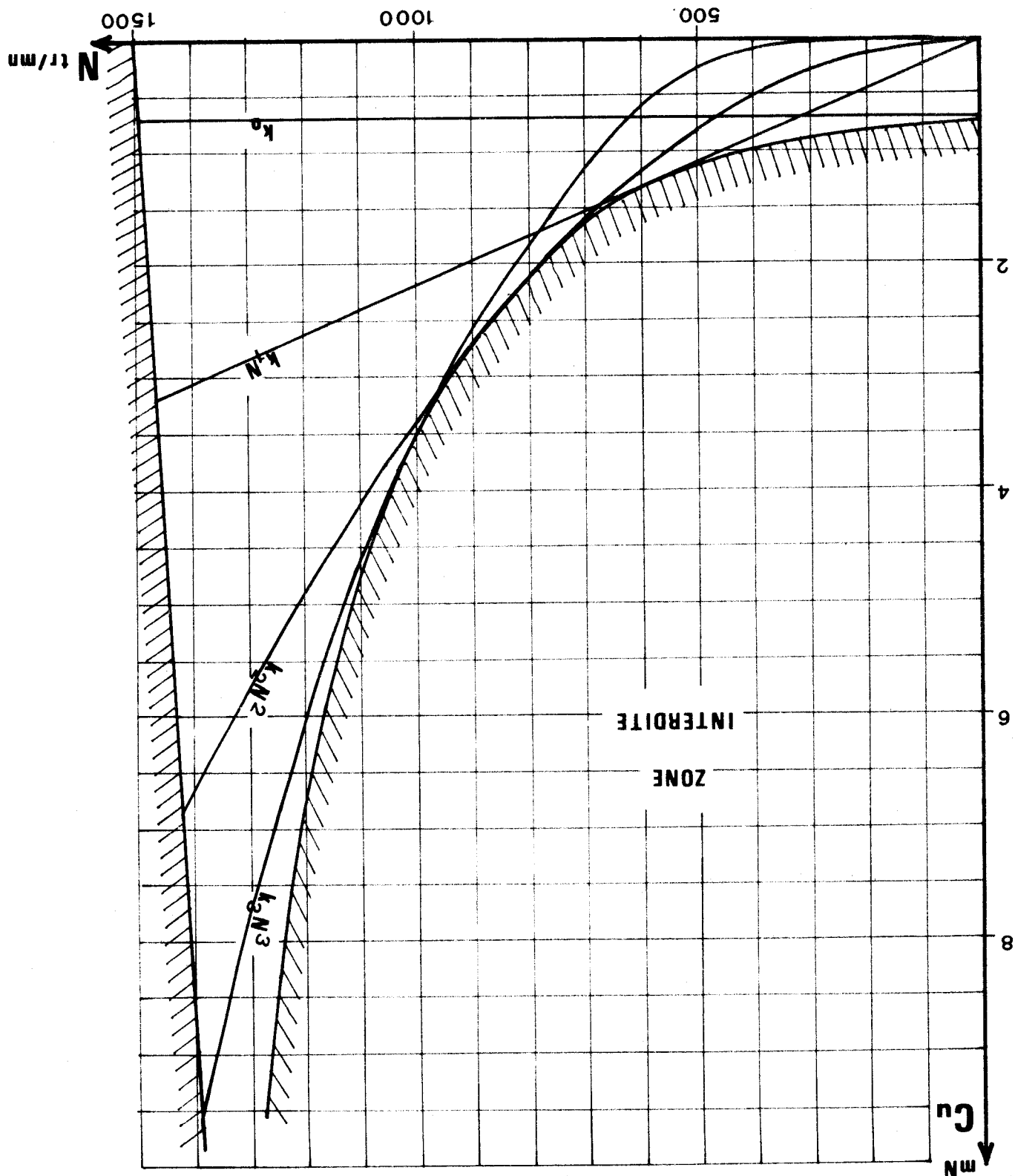
Dans la pratique, ce sera l'entraînement de pompes et ventilateurs que le variateur sera le plus apte à contrôler, l'ondulation de vitesse affectant peu l'effet recherché.



BUS
LILLE

Figure 26 : Construction graphique délimitant le domaine de fonctionnement admissible pour l'échauffement nominal du moteur.
 Moteur 4 CV - 4 pôles - 220/380 - déclassé en tension de $\sqrt{3}$ -
 Ondulation de vitesse ± 25 tr/mn.

Figure 27 : Allure de couples résistants pouvant être entraînées par le moteur correspondant au cas précédent.



IV.1.4. Variations du domaine

De par le principe même du variateur, on peut linéariser l'évolution des couples moteur et résistant autour de la valeur moyenne Ω_0 .

Soient les relations établies précédemment :

$$\left. \begin{aligned}
 t_{2c} &= \frac{J}{K} \text{Log} \frac{\frac{A}{K} + \Omega_0 - \Delta\Omega}{\frac{A}{K} + \Omega_0 + \Delta\Omega} \\
 t_{nc} &= \frac{J}{K'} \text{Log} \frac{\frac{A'}{K'} + \Omega_0 + \Delta\Omega}{\frac{A'}{K'} + \Omega_0 - \Delta\Omega}
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{avec } \frac{A}{K} + \Omega_0 \text{ et } \frac{A'}{K'} + \Omega_0 \\ \text{grands vis à vis de } \Delta\Omega \end{array}$$

Considérons le développement limité du binôme $(\alpha + \beta)^n$ où $\alpha \gg \beta$

$$(\alpha + \beta)^n \approx \alpha^n + n \alpha^{(n-1)} \beta = \alpha^{(n-1)} (\alpha + n\beta)$$

$$(\alpha - \beta)^n \approx \alpha^n - n \alpha^{(n-1)} \beta = \alpha^{(n-1)} (\alpha - n\beta)$$

Soit

$$\text{Log} \left(\frac{\alpha + n\beta}{\alpha - n\beta} \right) = n \text{Log} \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$$

Par identification, il résulte que t_{2c} et t_{nc} restent inchangés si le produit $J \cdot \Delta\Omega$ reste constant*.

* Dans le cas où les couples sont considérés constants, une démonstration plus simple de ce résultat est donnée en Annexe III.

Il en est alors de même du rendement et du domaine d'utilisation.

En partant du principe qu'une gamme de moteurs de même conception doit présenter le même diagramme circulaire en grandeurs réduites, nous avons tracé les domaines d'utilisation pour diverses valeurs du produit $J.\Delta\Omega$ dans le plan $\frac{C_u}{C_n}, \frac{\Omega}{\Omega_s}$. (fig.28) à partir d'un moteur de 1 CV, dans le cas du déclassement en tension^s par $\sqrt{3}$.

Pour un couple résistant m fois plus grand, il faut un moteur de m CV et pour garder le même domaine, le produit $J.\Delta\Omega$ doit être multiplié par m . (cf. Annexe III). Ce qui peut entraîner une variation de l'ondulation de vitesse.

IV.1.5. Exemple d'utilisation

Soit à entraîner une charge telle que $C_r = 2.10^{-4} \Omega^2$ et $J_r = 0,2 \text{ Kg.m}^2$ entre 800 et 1380 tr/mn avec une faible ondulation de vitesse $\Delta N = \frac{30}{\pi} \Delta\Omega$.

- On trace $C_r = f(N)$ sur la figure (29)

- Ayant fait choix d'un produit $J.\Delta\Omega = 0,13$, la figure 29 donne le couple nominal que devrait présenter le moteur pour chaque vitesse soit $C_n = f(N)$. Le moteur doit donc avoir un couple nominal de 15 mN et donc une puissance de 3 CV.

Son moment d'inertie est $J_m = 0,027 \text{ kg.m}^2$

- L'ondulation en vitesse résulte de $m\Delta\Omega(J_c + J_m) = 3.0,227.\Delta\Omega = 0,39$

Soit $\Delta\Omega = 0,175$ et $\Delta N = 17 \text{ tr/mn}$

- Enfin le tracé de la caractéristique naturelle doit permettre de vérifier que l'on atteint effectivement la vitesse maximale désirée.

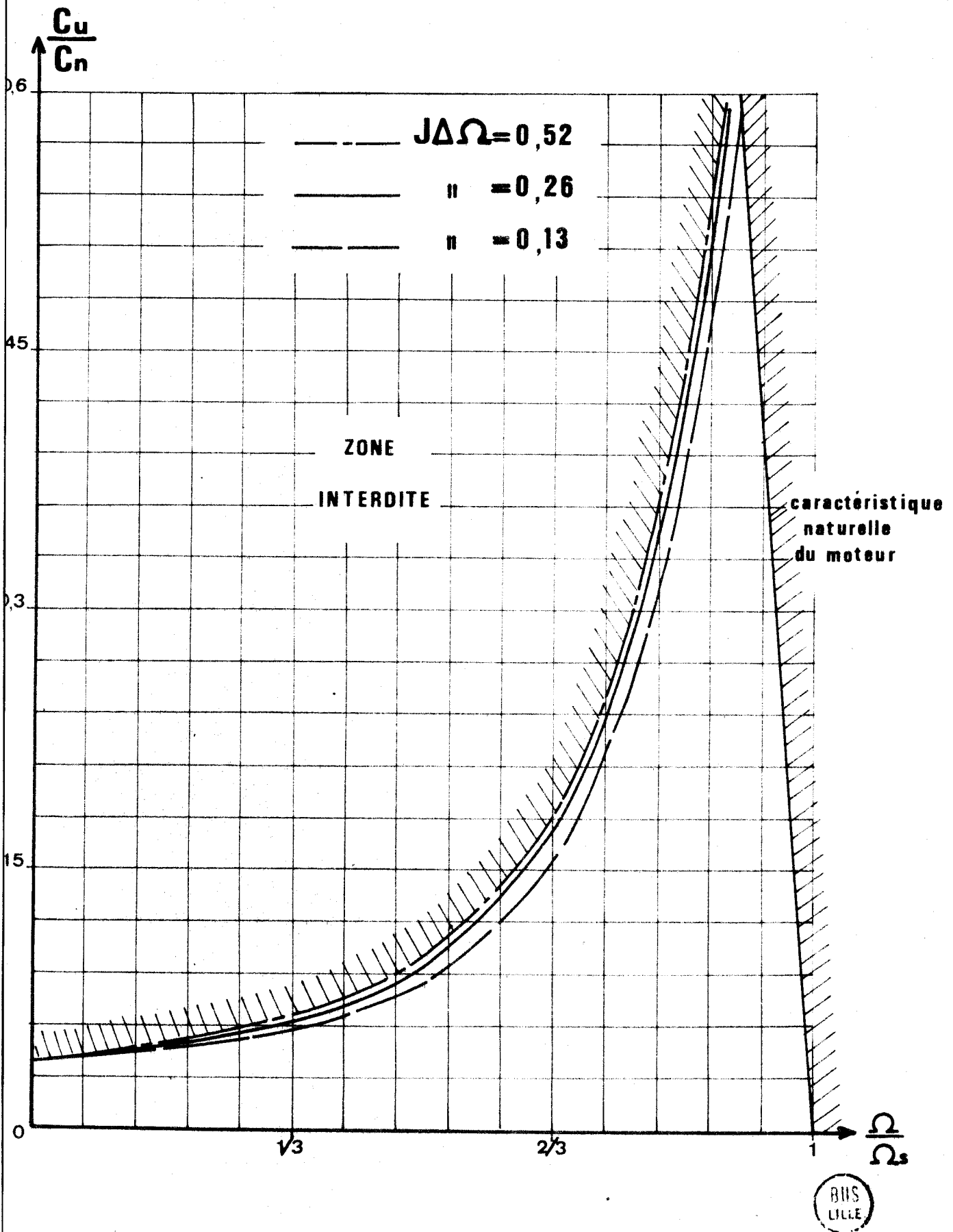


Figure 28 : Domaine d'utilisation pour une gamme de moteur de même conception
220/380 V - 4 pôles - déclassé en tension de $\sqrt{3}$ avec J en m^2kg ,
 $\Delta\Omega$ en rd/s,

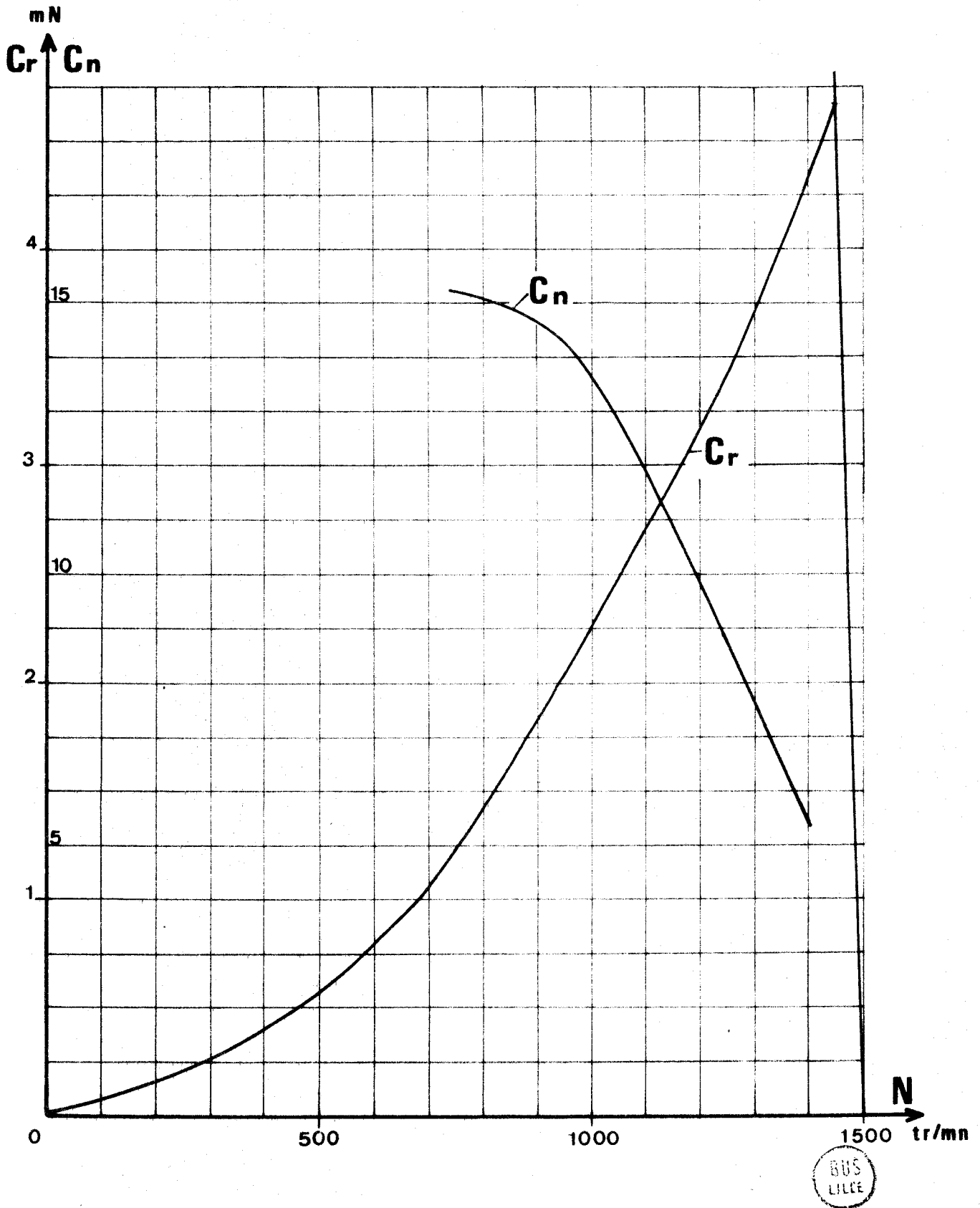


Figure 29 : Détermination de la puissance du moteur nécessaire pour l'exemple IV.1.5.

IV.2. EXTENSION DU DOMAINE D'UTILISATION

Le domaine précédemment déterminé n'autorise que des couples faibles pour des rotations lentes ; par exemple : le couple utile à la moitié de la vitesse de synchronisme n'est plus que le dixième du couple nominal.

Cela peut être amélioré en augmentant la puissance maximale dissipable par refroidissement forcé.

Une solution simple consiste à remplacer le ventilateur solidaire de l'arbre par un autre alimenté indépendamment et tournant donc à vitesse constante. Le rendement du moteur est légèrement accru.

Nous avons envisagé le cas où la ventilation annexe permet de dissiper en permanence la puissance calorifique correspondant aux pertes du régime nominal. La figure (30) présente alors les nouveaux domaines d'utilisation.

Reprenons l'exemple précédent pour ce type de ventilation forcée (figure : 31) : on peut alors se contenter d'un moteur de 2 CV de moment d'inertie $J_m = 0,17 \text{ Kg.m}^2$. Ce qui définit une ondulation minimum de vitesse $\Delta N = 11,5 \text{ tr/mn}$. A ces deux avantages s'ajoute celui de l'utilisation de thyristors de puissances plus faibles.

IV.3. RELEVES EXPERIMENTAUX

Les essais de rendement et d'échauffement en fonction de la puissance utile ont été effectués sur un moteur de 4 CV chargé par un frein électromagnétique, à ventilateur solidaire de l'arbre.

La puissance absorbée par le moteur a été mesurée à l'aide d'un compteur triphasé E.D.F. et la température externe de la carcasse par une sonde à contact en platine.

Les courbes du rendement vérifient celles prédéterminées au chapitre III. (fig. 32(a)).

Les courbes d'échauffement vérifient le domaine d'utilisation déterminé au début de ce chapitre. Figure 32(b))

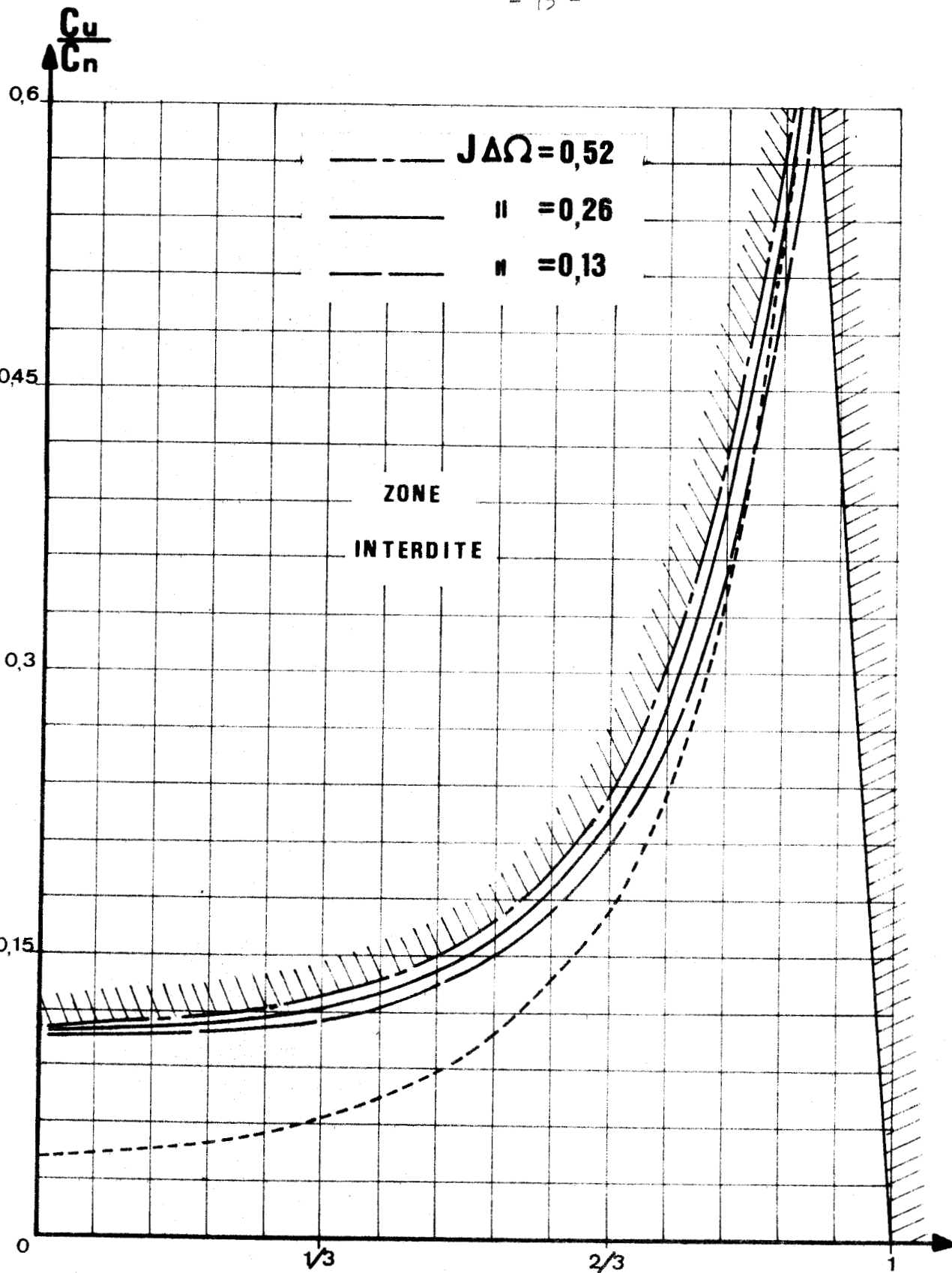


Figure 30 : Domaine d'utilisation pour une gamme de moteur de même conception 220/380 V - 4 pôles déclassés en tension de $\sqrt{3}$ - ventilation indépendante à 1500 tr/mn.

La courbe en pointillé indique le domaine d'utilisation dans le cas d'une ventilation dépendant de la vitesse pour $J\Delta\Omega = 0,26$.

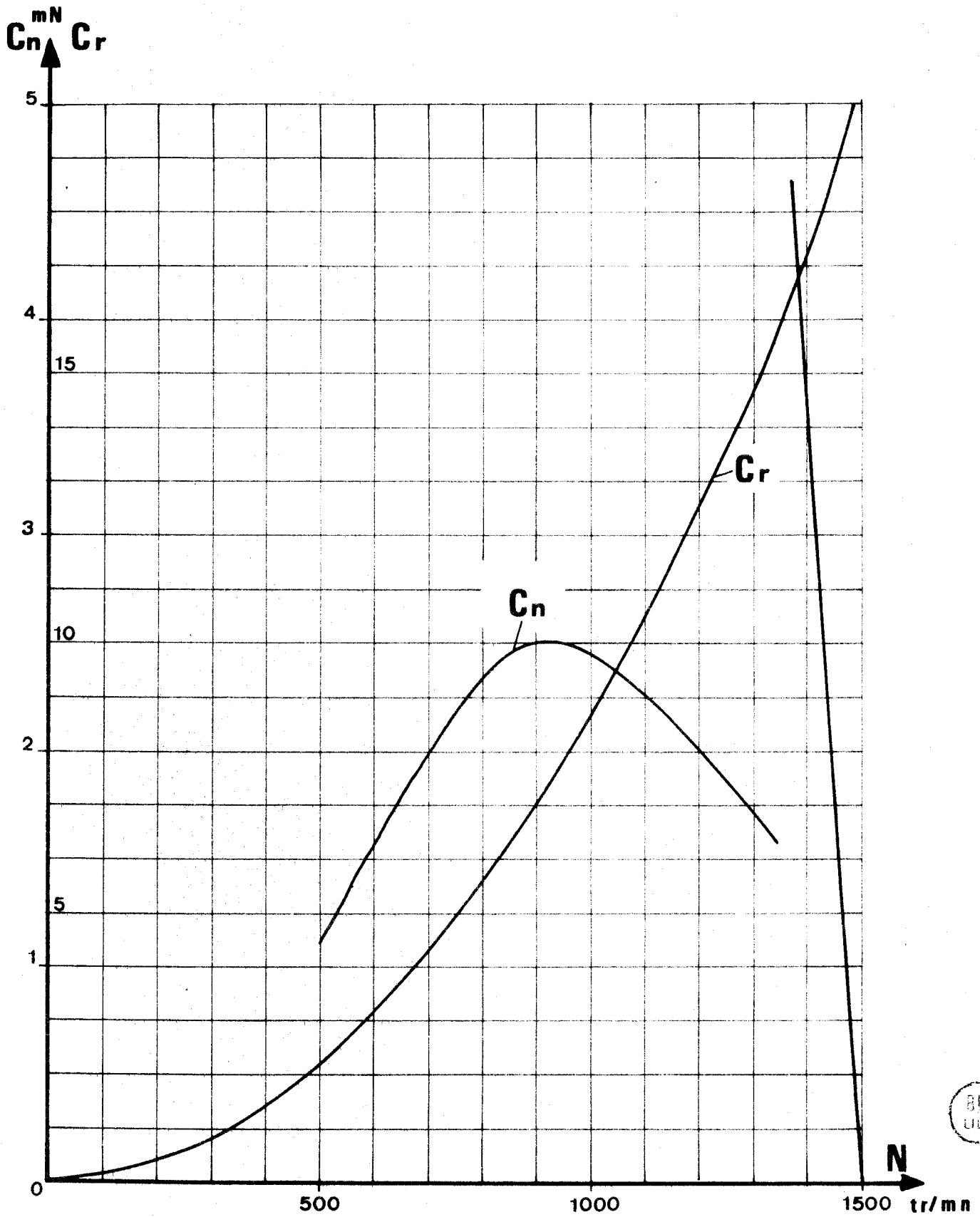


Figure 31 : Détermination de la puissance du moteur nécessaire - Cas de l'exemple IV.1.5. avec ventilation indépendante.

$\eta\%$

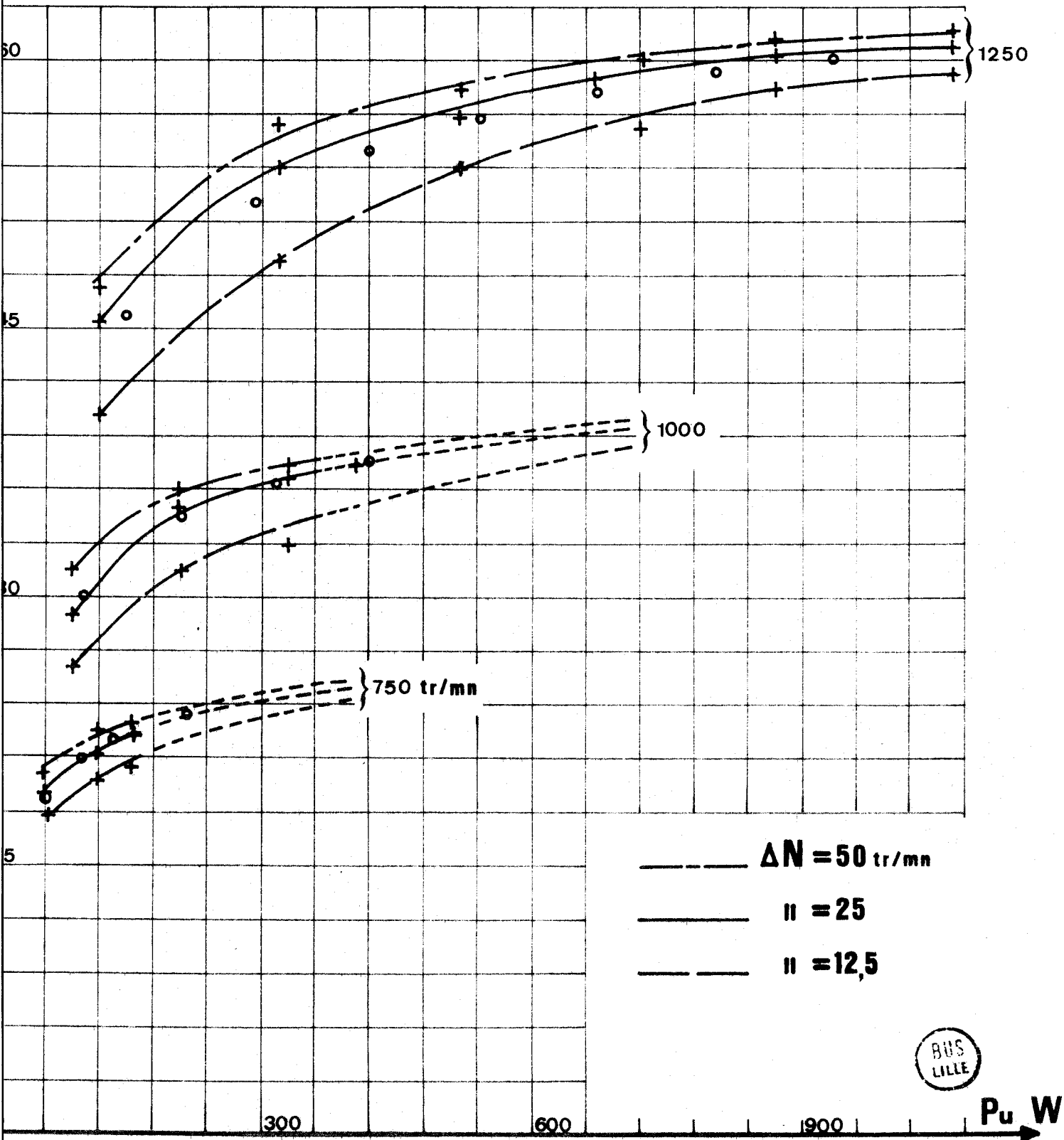


Figure 32 (a) : Relevé expérimental du rendement d'un moteur 4 CV - 220/380 - 4 pôles - alimenté en étoile pour 220 V.

Les o indiquent les points théoriques pour $\Delta N = 25$ tr/mn prédéterminés au chapitre III.



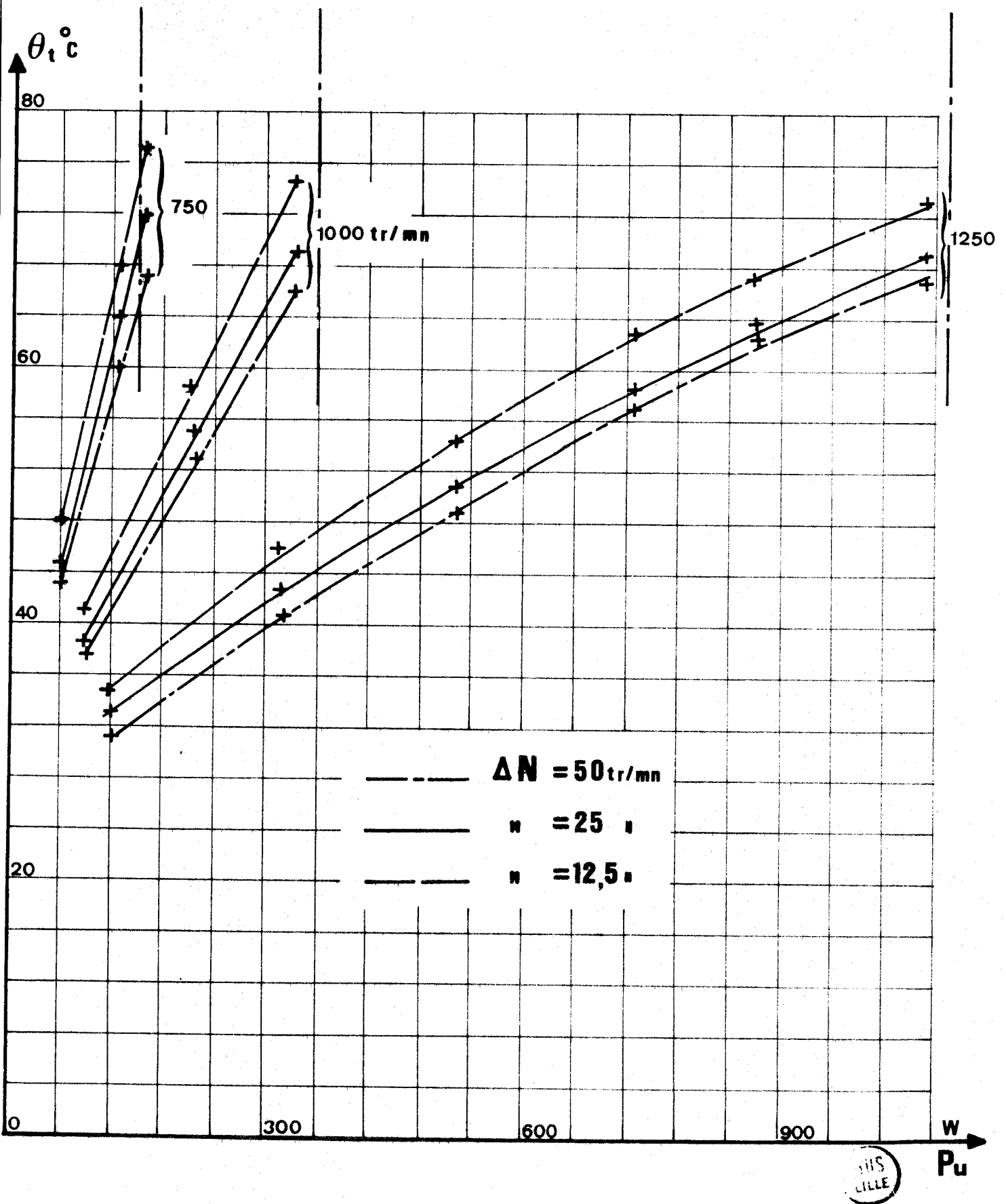


Figure 32 (b) : Relevé des températures de carcasse θ_t en fonction de la puissance utile.

Les traits mixtes verticaux représentent la puissance utile pour l'échauffement maximum θ_1 prédéterminé à la figure 26.

CONCLUSION

L'étude présentée dans ce mémoire nous a d'abord permis de rétablir les expressions des courants, du couple et de la puissance absorbée en régime transitoire pour un moteur asynchrone triphasé-triphasé, de constitution symétrique, lors de l'enclenchement simultané des phases statoriques sous un système de tensions équilibrées.

Ces calculs furent menés en négligeant la saturation et les pertes fer et en considérant que les courants dans les enroulements créent des champs à répartition spatiale sinusoïdale dans l'entrefer.

Nous avons ensuite étendu ces résultats au cas d'un moteur à cage considéré comme comportant q phases rotoriques après avoir montré l'équivalence de ce système vis à vis du précédent en déterminant les coefficients à faire intervenir pour transformer les valeurs des mutuelles inductances et des inductances propres des q phases rotoriques en celles équivalentes relatives à un moteur à rotor triphasé bobiné.

Les calculs effectués sur ordinateur ont alors mis en évidence le rôle joué par les conditions initiales à l'instant d'alimentation :

Les valeurs des tensions du réseau ainsi que la position relative du rotor par rapport au stator, déterminées par les angles α et $p\theta_0$, ont une conséquence tout à fait minime sur l'évolution du couple au regard de la vitesse rotorique à cet instant.

L'évolution du couple, rapporté à sa valeur en régime permanent montre que, pour une gamme de machines de conception identique, celui-ci s'établit sensiblement de la même manière selon la vitesse initiale, avec des oscillations d'autant plus marquées que la rotation est lente.

Les relevés expérimentaux, effectués sur une gamme de machines de 1 à 4 CV vérifient les formes d'onde des courants dont les régimes transitoires n'excèdent pas deux périodes du réseau.

Nous avons alors appliqué ces résultats à un variateur utilisant un moteur à cage dont l'alimentation est contrôlée par sa vitesse.

Cette machine, qu'on ne peut appeler "auto-pilotée" |20| vu que son alimentation se fait par trains d'onde et non par découpage dans la période du réseau, voit sa vitesse osciller autour d'une valeur moyenne et se trouve donc périodiquement être le siège de régimes transitoires à priori tous différents les uns des autres, mais ne dépendant en fait que de la vitesse du moteur, la valeur de l'angle α étant maintenue constante par le circuit de synchronisation.

En considérant que le couple électromagnétique peut être assimilé à sa valeur forcée s'établissant après un temps de retard fonction de la vitesse, et par résolution de l'équation mécanique du groupe tournant, nous avons pu prédéterminer le rendement du moteur, inférieur à celui correspondant à un régime permanent, mais s'en rapprochant d'autant plus que l'ondulation de vitesse est importante, c'est-à-dire que les régimes transitoires sont moins fréquents |21|.

Nous nous sommes enfin proposés de définir le domaine d'utilisation de ce montage qui, de par sa nature, reste limité à l'emploi de moteurs de petite puissance. Tant pour limiter l'amplitude des courants que pour augmenter les temps de conduction (ce qui améliore le rendement) nous avons choisi d'alimenter la machine sous tension réduite dans le cas le plus simple correspondant au branchement étoile sur le réseau prévu pour l'alimentation en triangle.

Connaissant la puissance dissipable sous forme calorifique en fonction de la vitesse ainsi que le moment d'inertie du groupe tournant et l'ondulation de vitesse tolérée, une méthode graphique simple permet de déterminer une zone à échauffement acceptable dans le plan de la caractéristique mécanique.

Cette zone a été déterminée, par une gamme de machines sous-voltées de construction similaire, en fonction du produit $J \cdot \Delta\Omega$ vu l'influence identique qu'ont ces deux grandeurs sur le rendement.

Nous pouvons alors conclure sur la nature des couples résistants les plus aptes à être entraînés, selon la plage de vitesse désirée, ainsi que sur le choix de la puissance du moteur.

Dans la pratique, ce genre de variateur semble assez bien adapté à l'entraînement de machines du type (pompes, ventilateurs, etc...) où le défaut inhérent à la non constance de la vitesse instantanée affecte peu le débit aval du fluide ; la réalisation mécanique devrait comporter un arbre unique pour le moteur et la charge et le capteur de vitesse devrait être plus rustique qu'une génératrice tachymétrique.

Le remplacement de 3 thyristors par 3 diodes n'altérera pas les performances et diminuera le coût.

ANNEXE I

DETERMINATION DES PARAMETRES DU MOTEUR

Quelques essais simples, effectués en régime permanent, permettent de déterminer les trois paramètres τ_1 , τ_2 et σ que le circuit électrique du rotor soit accessible ou non.

PREMIER ESSAI :

On mesure la résistance R_1 d'un enroulement du stator.

DEUXIEME ESSAI :

Le moteur étant alimenté par un système triphasé équilibré de tensions sinusoïdales, à l'aide d'un moteur auxiliaire on fait tourner le rotor dans le sens du champ tournant statorique à la vitesse synchrone.

On mesure l'impédance apparente $\frac{V_1}{I_1}$ d'un enroulement du moteur et on en déduit l'inductance d'un enroulement primaire :

$$L_1 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{V_1^2}{I_1^2} - R_1^2} \quad \text{d'où} \quad \tau_1 = \frac{L_1}{R_1}$$

TROISIEME ESSAI :

Le moteur, alimenté par un système triphasé équilibré de tensions sinusoïdales, entraîne une charge de préférence voisine de sa charge nominale. (Une charge importante apporte plus de précision). On mesure la tension V_1 , le courant dans un enroulement primaire I_1 , la puissance active P , la puissance réactive Q , le glissement $(\frac{\omega - \omega'}{\omega})$.

$$\text{On en déduit une résistance apparente } R'_1 = \frac{P}{3I_1^2}$$

$$\text{et une inductance apparente : } L'_1 = \frac{Q}{3I_1^2 \omega}$$

d'où la valeur de la constante de temps rotorique :

$$\tau_2 = \frac{\omega}{\omega - \omega'} \frac{L_1 - L'_1}{R'_1 - R_1}$$

et la valeur de σ :

$$\sigma = \frac{L'_1}{L_1} - \frac{L_1 - L'_1}{L_1 \tau_2^2 (\omega - \omega')^2}$$

ANNEXE II

```

1      DATA OM1/314/,Q110/0/,Q111/52/,Q112/104/,Q113/157/,Q114/209/,Q115/
2      1262/,Q116/314/
3      IMPLICIT REAL (D,J)
4      REAL NU
5      READ (105,2) X1,R1,T2,Q1,VM,P
6      DIMENSION J1F(21),J3F(21)
7      C      CALCUL DES CONSTANTES
8      SIGMA=1-(Q1/(X1*T2))
9      T1=X1/R1
10     Q7=T1*T2*SIGMA
11     Q40=T1-T2
12     Q20=(T1+T2)/(2*Q7)
13     C      BOUCLE SUR OM2
14     Q50=4*3.14/3
15     Q52=Q50/2
16     REPEAT 1,FOR OM2=Q110,Q111,Q112,Q113,Q114,Q115,Q116
17     C      CALCUL DES CONSTANTES PAR RAPPORT A ALPHA ET PTH
18     Q60=OM1-OM2
19     Q3=1-Q7+OM1*Q60
20     Q4=T2*Q60
21     Q8=T1+OM1+Q4
22     E=ATAN(Q4)
23     B1=ATAN(Q8/Q3)
24     IF (Q3.LT.0) BT=BT+3.1416
25     Q1=SQRT(Q3*Q3+Q8*Q8)
26     Q61=1.732*VM/(R1*Q2)
27     Q5=Q81+SQRT(1+Q4*Q4)
28     Q6=BT+Q1+Q60
29     A1=(Q1-Q2)**2-4*Q7*(1+Q7*OM2*OM2/4)
30     B1=-Q40+OM2+2*Q7
31     A11=SQRT((A1+SQRT(A1*A1+B1*B1))/2)
32     B11=B1/(2+A11)
33     Q41=T1*T2+OM2*(2-SIGMA)
34     Q11=SQRT((Q40+A11)**2+(Q41-B11)**2)/2
35     NU=ATAN(B11/A11)
36     PHI=ATAN(T2*OM2)
37     Z1=Q40+A11
38     D2=ATAN(-(Q41-B11)/Z1)
39     IF (Z1.LT.0) DZ=DZ+3.1416
40     Q12=SQRT(1+T2*T2*OM2*OM2)
41     Q10=1.732*SQRT(A11*A11+B11*B11)
42     Q13=SQRT((Q40-A11)**2+(Q41+B11)**2)/2
43     Z2=Q40-A11
44     RHO=ATAN(-(Q41+B11)/Z2)
45     IF (Z2.LT.0) RHO=RHO+3.1416
46     Q23=A11/2/Q7
47     Q30=B11/2/Q7
48     OM3=OM2/2+Q30
49     OM4=OM2/2-Q30
50     Q26=-Q20-Q23
51     Q76=2*Q26
52     Q145=OM1-OM4
53     Q135=OM1-OM3
54     Q27=-Q20+Q23
55     Q75=2*Q27

```

```

56 Q31=T1*T2*(1-SIGMA)*Q&0
57 Q42=Q11*R1/Q10/Q12
58 Q43=Q13*R1/Q10/Q12
59 Q80=-PHI-RHO
60 Q83=-PHI-DZ
61 Q77=-2*Q20
62 Q78=2*Q30
63 Q70=d*P*Q12/R1
64 CF=1.5*P*Q31*Q&1*Q&1*R1
65 T3=-1/Q27
66 T4=-1/Q3&
67 PAF=4.5*QV*QV*SQRT(1+Q4*Q4)*COS(E-BT)/Q2/R1
68 Q210=(1+1.732*Q12*QV/R1
69 Q200=(Q135*T1*T1/(Q135*Q135*T1*T1+1))*SQRT(1+1/(Q135*Q135*T1*T1))
70 Q101=(Q145*T2*T2/(Q145*Q145*T2*T2+1))*SQRT(1+1/(Q145*Q145*T2*T2))
71 DEL1=ATAN(Q27/(-Q135))
72 IF(-Q135.LT.0)DEL1=DEL1+3.1416
73 DEL2=ATAN(-Q2&/(-Q145))
74 IF(-Q145.LT.0)DEL2=DEL2+3.1416
75 C
76 DO 1 N=1,91,30
77 ALPHA=(N-1)*3.14/180
78 C
79 CALCUL DES CONSTANTES
80 QY=ALPHA+3.1416/6+E-BT
81 Q102=QY+Q50
82 C
83 CALCUL DES COURANTS JO
84 J10F=Q5*SIN(Q102)
85 J30F=Q5*SIN(QY)
86 C
87 DOUBLE SUR HETAO
88 DO 1 N=1,11,5
89 PTH=(N-1)*3.14*P/3&0
90 C
91 CALCUL DES CONSTANTES
92 Q53=PTH+QV
93 Q103=Q53+Q52
94 Q54=PTH+NU-DZ-PHI
95 Q55=PTH+NU-RHO-PHI
96 Q51=-2*PTH+ALPHA+3.1416/6-BT
97 C
98 CALCUL DES COURANTS 3MJOF/2
99 IA0=-Q&*COS(Q51)
100 IB0=-Q&*COS(Q51+Q50)
101 C
102 CALCUL DES 3MH/2
103 S1=SIN(Q53)
104 S2=SIN(Q103)
105 C1=COS(Q53)
106 C2=COS(Q103)
107 Q100=(-IB0*S1+IA0*S2)/Q10
108 Q101=(IB0*C1-IA0*C2)/Q10
109 H1=Q100+Q42*(J10F*SIN(Q54)-J30F*SIN(Q54-Q52))
110 H2=Q101+Q42*(J10F*COS(Q54)-J30F*COS(Q54-Q52))
111 H3=-Q100+Q43*(J30F*SIN(Q55-Q52)-J10F*SIN(Q55))
112 H4=-Q101+Q43*(J30F*COS(Q55-Q52)-J10F*COS(Q55))
113 WRITE(108,3)OM2,ALPHA,PTH
114 WRITE(108,4)CF,J10F,J30F,H1,H2,H3,H4
115 C
116 CALCUL DES CONSTANTES FONCTION DES H
117 Q21=SQRT(H1*H1+H2*H2)
118 Q22=SQRT(H3*H3+H4*H4)

```

```

12     PSI=ATAN(H2/H1)
13     IF (H1.LT.0) PSI=PSI+3.1416
14     GAM=ATAN(H4/H3)
15     IF (H3.LT.0) GAM=GAM+3.1416
16     Q170=-PTH+ALPHA+3.1416/6-BT
17     Q132=Q170-PSI+PHI
18     Q131=3*Q6*Q21*Q12*P/R1
19     Q142=Q170-GAM+PHI
20     Q141=3*Q6*Q22*Q12*P/R1
21     Q150=Q170+E-PSI-RHO
22     Q151=(P*Q5*Q21*Q13
23     Q150=Q170+E-GAM-DZ
24     Q161=3*P*Q5*Q22*Q11
25     Q56=PTH-PHI+PSI
26     Q57=PTH-PHI+GAM
27     Q58=Q56+Q50
28     Q59=Q57+Q50
29     Q81=-PHI+PSI-DZ-GAM
30     Q82=PHI+PSI+RHO-GAM
31     Q71=Q70*Q21*Q21*Q13
32     Q72=Q70*Q21*Q22*Q13
33     Q73=Q70*Q21*Q22*Q11
34     Q74=Q70*Q22*Q22*Q11
35     Q90=Q71*SIN(Q80)
36     Q91=Q74*SIN(Q83)
37     Q24=-2*Q12*Q21/R1
38     Q25=-2*Q12*Q22/R1
39     Q202=3*1.732*UM*Q12*Q21*Q200/R1
40     Q203=3*1.732*UM*Q12*Q22*Q201/R1
41     Q204=ALPHA+3.1416/6+DEL1-Q56
42     Q205=ALPHA+3.1416/6+DEL2-Q57
43     Q211=Q210*Q21
44     Q212=Q210*Q22
45     Q214=Q57-ALPHA-3.1416/6
46     Q213=Q56-ALPHA-3.1416/6
47     PA0=Q202*COS(Q204)+Q203*COS(Q205)
48     WRITE(108,8)PAF,T3,T4,DM3,DM4,PA0
49     LD=1
50 C   BOUCLE SUR LE TEMPS
51     REPEAT 1, FOR L=(1,21,2),(25,61,4)
52     T=(L-1)*1.E-3
53 C   CALCUL DES CONSTANTES
54     Q92=EXP(Q77*T)
55     Q93=Q78*T
56     Q133=EXP(Q27*T)
57     Q143=EXP(Q26*T)
58     Q94=Q133*Q24
59     Q95=Q143*Q25
60     Q130=Q135*T
61     Q140=Q145*T
62     Q96=DM3*T
63     Q97=DM4*T
64     Q104=DM1*T
65 C   CALCUL DES COURANTS JL ET JF
66     J3L=Q94*COS(Q96+Q56)+Q95*COS(Q97+Q57)
67     J1L=Q94*COS(Q96+Q58)+Q95*COS(Q97+Q59)

```


ANNEXE III

MAINTENANCE DU RENDEMENT SELON D'AUTRES HYPOTHESES

Dans le cas d'une charge comprenant seulement une inertie et dont les couples résistants et moteur sont considérés constants autour de Ω_0 , l'équation mécanique devient :

$$\frac{J d\Omega}{dt} + b = a$$

avec b = couple résistant
a = couple moteur

d'où

$$t_{2c} = \frac{2\Delta\Omega J}{a-b}$$

et

$$t_{nc} = \frac{2\Delta\Omega J}{b}$$

Sachant que le moteur à vitesse et couple résistant fixés présente le même rendement si les temps t_{2c} et t_{nc} restent inchangés, il en résulte l'invariance du domaine d'utilisation si l'on garde constant le produit $J\Delta\Omega$.

Avec l'hypothèse prise au Chapitre IV, (moteur d'une même gamme ayant même diagramme circulaire en grandeur réduite), le rendement d'un moteur de 1 CV et de m CV entraînant respectivement des charges de même rapport m est le même pour une vitesse donnée s'ils ont même temps de conduction et de non conduction.

Pour cela, il faut :

- à couples moteur et résistants considérés constants :

<u>Moteur 1 CV</u>	:	<u>Moteur m CV</u>
$t_{2c} = \frac{2\Delta\Omega J}{a-b}$:	$t'_{2c} = \frac{2(\Delta\Omega J)'}{m(a-b)}$
$t_{nc} = \frac{2\Delta\Omega J}{b}$:	$t'_{nc} = \frac{2(\Delta\Omega J)'}{mb}$

pour que $t'_{2c} = t_{2c}$ et $t'_{nc} = t_{nc}$, il suffit que le produit $J\Delta\Omega$ soit multiplié par m dans le cas d'un moteur de m CV.

- à couples moteur et résistants de forme : $K\Omega + \text{constante}$

Moteur 1 CV	Moteur m CV
$t_{2c} = \frac{J}{K} \text{Log} \frac{\frac{A}{K} + \Omega_o - \Delta\Omega}{\frac{A}{K} + \Omega_o + \Delta\Omega}$	$t'_{2c} = \frac{J'}{mK} \text{Log} \frac{\frac{A}{K} + \Omega_o - \Delta\Omega'}{\frac{A}{K} + \Omega_o + \Delta\Omega'}$
$t_{nc} = \frac{J}{K'} \text{Log} \frac{\frac{A'}{K'} + \Omega_o + \Delta\Omega}{\frac{A'}{K'} + \Omega_o - \Delta\Omega}$	$t'_{nc} = \frac{J'}{mK'} \text{Log} \frac{\frac{A'}{K'} + \Omega_o + \Delta\Omega'}{\frac{A'}{K'} + \Omega_o - \Delta\Omega'}$

de même pour que $t'_{2c} = t_{2c}$ et $t'_{nc} = t_{nc}$, il faut que $J'\Delta\Omega' = mJ\Delta\Omega$ (voir paragraphe IV.1.4.).

B I B L I O G R A P H I E

- [1] WILLIAM SHEPHERD.
"On the Analysis of the Three-Phase Induction Motor with Voltage Control by Thyristor Switching".
I.E.E.E. Transactions on Industry and General Applications.
Vol. IGA-4, N°3, Mai/Juin 1968, p.304-311.
- [2] R.E. BEDFORD et VILAS D. NENE.
"Voltage Control of the Three-Phase Induction Motor by Thyristor Switching : a Time-Domain Analysis Using the α - β -0 Transformation".
I.E.E.E. Transactions on Industry and General Applications.
Vol. IGA-6, N°6, Novembre/Décembre 1970, p.553-562.
- [3] TAKEUCHI.
"Theory of S.C.R. (thyristor) circuit and application to motor control".
Tokyo Electrical Engineering College.
- [4] C. ROMBAUT, G. SEGUIER.
"Caractéristiques des gradateurs triphasés".
Revue Jeumont-Schneider (1974), N°17 - p.33-46, N°18 - p.29-46.
- [5] ALONSO, LAJOIE-MAZENC, SURCHAMP, TRANNOY.
"Dispositif statique de réglage de la vitesse d'un moteur asynchrone, utilisant des thyristors au silicium".
Comptes Rendus - Académie des Sciences - Tome 264, 1967, p.1071-1074.
- [6] HANCOCK.
"Matrix analysis of electrical machinery".
1974 - Pergamon Press.
- [7] ADKINS - HARLEY.
"The general theory of alternating current machine".
1975 - Chapman and Hall.
- [8] A. KARPATI - I. IPSITS - I. HERMANN.
"Methode zur digitalen simulation der transienten vorgänge von über drehstromsteller gespeisten asynchronmaschinen".
Period. Polytech., Electr. Engng, Hongr. - Vol.17, N°3, 1973, p.207-216.

- [9] ASISH K. DE SARKAR and GUNNAR J. BERG.
"Digital Simulation of Three-Phase Induction Motors".
I.E.E.E. Transactions on Power Apparatus Systems.
Vol.PAS-89, N° 6, July/August 1970, p.
- [10] J.S. PARIHAR, Dr. M. RAMAMOORTY.
"Digital Model of an Induction Motor for the Study of Switching Transients".
J. Instut. Engrs. (India), Electr. Engng. Div., India.
Vol.52, N° 6, 1972, p.302-307.
- [11] C.F. LANDY
"The prediction of transient torques produced in induction motors due to rapid reconnection of the supply".
The Transactions of the S.A. Institute of Electrical Engineers.
Juillet 1972, p.178-185.
- [12] F. NOTELET.
"Régimes transitoires des courants et du couple du moteur asynchrone tri-phasé".
Thèse de Docteur ès-Sciences Physiques - Numéro 327 - Université des Sciences et Techniques de Lille I - 24 Juin 1975.
- [13] J.F. LINDSAY, T.H. BARTON.
"Parameter identification for squirrel cage induction machines".
I.E.E.E. Transactions on Power Apparatus Systems.
Vol.PAS-92, N° 4, 1973, p.1287-1291.
- [14] SWARM S. KALSI
"Switching Transients in Large deep-bar squirrel cage induction motors".
I.E.E.E. Transactions on Power Apparatus Systems.
Vol.PAS-92, N° 4, 1972, p.1266-1273.
- [15] A.K. WALLACE, A. WRIGHT.
"Novel simulation of cage windings based on mesh circuit model".
I.E.E.E. Transactions on Power Apparatus Systems.
Vol.PAS-93, N° 1, 1974, p.377-382.

[16] H. KAIZU.

"Determination of Equivalent Circuit Parameters for Calculating the Starting Transient Performance of squirrel-Cage Induction Motors".
Electrical Engineering in Japan. Vol.93, N°3, 1973, p.233-240.

[17] J. LESENNE.

"Composantes permettant la simplification de l'étude des machines tournantes en nombres quelconques de phases".
S.R.B.E., N° 12, 1974, p.303-315.

[18] T.A. LIPO, A.B. PLUNKETT.

"A novel approach to induction motor transfer functions".
I.E.E.E. Transactions on Power Apparatus Systems.
Vol.PAS-93, N° 5, 1974, p.1410-1418.

[19] M. MARTY.

"Contribution à l'étude de l'échauffement des machines électriques tournantes".
Thèse de Docteur ès-Sciences Physiques - Numéro 239 - Faculté des Sciences
de l'Université de Toulouse - 6 Avril 1965.

[20] M. BOLDIN

"Régulation de vitesse d'une machine d'induction alimentée par un hacheur-commutateur"
Revue Jeumont-Schneider, (1976), N° 22, p.39-46.

[21] P. GERAT - V. JANKOVSKY

"Influence d'une alimentation en régime non sinusoïdal sur l'échauffement d'un moteur asynchrone"
Elektroteh. Cas. Ceskosl., Vol.27, N° 2, 1976, p.121-134.

TABLE DES MATIERES

Page

INTRODUCTION

I. DETERMINATION DES COURANTS ET DU COUPLE TRANSITOIRES LORS DE LA MISE SOUS TENSION D'UN MOTEUR A INDUCTION	
I.1. Hypothèses et notations	1
I.2. Equations générales du moteur pour une alimentation en triangle	3
Simplification des équations	4
I.3. Résolution des systèmes d'équations	5
I.3.1. Matrice diagonale et matrice de passage	6
I.3.2. Changement de variable	7
I.3.3. Résolution du système d'équations (relatif aux variables auxiliaires)	9
I.3.4. Expression des variables auxiliaires	12
I.3.5. Détermination des constantes d'intégrations H_1 et H_2	13
I.3.6. Expression des courants réels	16
I.4. Expression du couple moteur	19
I.5. Expression des puissances	21
II. CAS D'UN MOTEUR A INDUCTION A CAGE	
II.2. Equivalence d'un rotor à cage et d'un rotor triphasé	23
II.3. Conditions initiales	28
Domaines de variations des conditions initiales	29
II.4. Calculs numériques	29
Organigramme	31
II.5. Paramètres des moteurs utilisés	
II.5.1. Paramètres déterminés par des essais en régimes permanents ..	30
II.5.2. Paramètres intervenant dans le régime libre	30
II.6. Importance des conditions initiales	
II.6.1. Influence de l'angle θ_0	34
II.6.2. Influence de l'angle α	35
II.7. Evolutions des grandeurs	
II.7.1. Influence de la vitesse ω' sur l'établissement du couple	37
II.7.2. Influence de la vitesse ω' sur l'évolution des courants	40
II.7.3. Influence de la vitesse ω' sur l'évolution de la puissance instantanée	40
II.8. Vérification expérimentale des grandeurs déterminées	44
III. VARIATEUR DE VITESSE	
III.1. Principe	47
III.2. Réalisation	
III.2.1. Circuit de puissance	48

	<u>Page</u>
III.2.2. Commande Thyristors	49
III.2.3. Circuit de régulation	51
III.3. Etude du rendement du variateur de vitesse	
III.3.1. Simplification de l'allure du couple	54
III.3.2. Expression littérale du rendement	55
III.3.3. Amélioration du rendement	56
III.3.4. Détermination des temps de conduction et de non conduction	57
III.3.5. Prédétermination du rendement	59
 IV. PERFORMANCE DU VARIATEUR	
IV.1. Limitation des performances	64
IV.1.1. Pertes maximales dissipables par la machine	64
IV.1.2. Pertes électriques et puissance utile	65
IV.1.3. Domaine d'utilisation	67
IV.1.4. Variation du domaine	70
IV.2. Extension du domaine d'utilisation	74
IV.3. Relevés expérimentaux	74
 CONCLUSION	
 ANNEXE I - DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DU MOTEUR	
ANNEXE II - PROGRAMME DE CALCUL	
ANNEXE III - MAINTENANCE DU RENDEMENT SELON D'AUTRES HYPOTHESES	
 BIBLIOGRAPHIE	

