

N° d'ordre 383

50376
1977
126-1

50376
1977
126-1

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

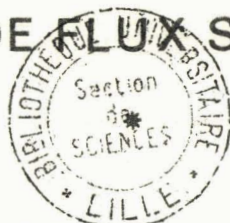
DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

Claude DEVAUX

*

CONTRIBUTION A L'ETUDE
DE LA COUVERTURE NUAGEUSE DE VENUS
PAR L'ANALYSE DES MESURES PHOTOMETRIQUES
ET DES PROFILS DE FLUX SOLAIRE TRANSMIS



Soutenu le 25 Mai 1977 devant la Commission d'examen

Membres du Jury

M. SCHILTZ	<i>Président</i>	
M. DOLLFUS	}	<i>Rapporteurs</i>
M. FYMAT		
M. HERMAN		
Mme LENOBLE	}	<i>Examineurs</i>
M. GEHRELS		

DOYENS HONORAIRES de l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit
et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DECUYPER
DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, GLACET, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE
KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT,
MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SAVARO, WATERLOT, WIEMAN,
ZAMANSKI.

PRESIDENTS HONORAIRES DE L'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R. DEFRETIN, M. PARREAU.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. M. MIGEON.

PROFESSEURS TITULAIRES

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Physique
M. BECART Maurice	Physique Atomique et Moléculaire
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BONNEMAN Pierre	Chimie Appliquée
M. BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M. BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. CELET Paul	Géologie Générale
M. COEURE Gérard	Analyse
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des Entreprises
M. DELATTRE Charles	Géologie Générale
M. DELHAYE Michel	Chimie Physique
M. DERCOURT Jean	Géologie Générale
M. DURCHON Maurice	Biologie Expérimentale
M. FAURE Robert	Mécanique
M. FOURET René	Physique du Solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. GONTIER Gérard	Mécanique
M. GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique
M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M. LANSRAUX Guy	Physique Atomique et Moléculaire
M. LAVEINE Jean-Pierre	Paléontologie
M. LEBRUN André	Electronique
M. LEHMANN Daniel	Géométrie

Mme LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M. LINDER Robert	Biologie et Physiologie Végétales
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M. LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M. MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M. MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. POUZET Pierre	Analyse numérique
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. SALMER Georges	Electronique
M. SCHILTZ René	Physique Atomique et Moléculaire
Mme SCHWARTZ Marie-Hélène	Géométrie
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique
M. TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M. TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. VIVIER Emile	Biologie Cellulaire
M. WERTHEIMER Raymond	Physique Atomique et Moléculaire
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie Végétale
M. BOILLET Pierre	Physique Atomique et Moléculaire
M. BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M. BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M. CAPURON Alfred	Biologie Animale
M. CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
Mme DACHARRY Monique	Géographie
M. DEPREZ Gilbert	Physique Théorique
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
Mme EVRARD Micheline	Chimie Appliquée
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M. HERMAN Maurice	Physique Spatiale
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LENTACKER Firmin	Géographie
M. LEROY Jean-Marie	Chimie Appliquée
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
Mle MARQUET Simone	Probabilités
M. MIGEON Michel	Chimie Physique
M. MONTEL Marc	Physique du Solide
M. MONTUELLE Bernard	Biologie Appliquée
M. NICOLE Jacques	Chimie Appliquée
M. PAQUET Jacques	Géologie Générale
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M. SLIWA Henri	Chimie Organique
M. WATERLOT Michel	Géologie Générale

MAITRES DE CONFERENCES (Et Chargés d'Enseignement)

M. ADAM Michel	Sciences Economiques
M. ANTOINE Philippe	Analyse
M. BART André	Biologie Animale
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie

M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M. BOSCO Denis	Probabilités
M. BREZINSKI Claude	Analyse Numérique
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CARREZ Christian	Informatique
M. COQUERY Jean-Marie	Psycho-Physiologie
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. COUTURIER Daniel	Chimie Organique
M. CRAMPON Norbert	Géologie
M. CROSNIER Yves	Electronique
M. DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DELORME Pierre	Physiologie Animale
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M. DHAINAUT André	Biologie Animale
M. DELAUNAY Jean-Claude	Sciences Economiques
M. DERIEUX Jean-Claude	Microbiologie
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique du Solide
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUEE Gérard	Géologie
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du Solide
M. FAKIR Sabah	Algèbre
M. FLAMME Jean-Marie	Technologie de Construction
M. FOCT Jacques	Génie Mécanique
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. FONTAINE Jacques	Electronique
M. FOURNET Bernard	Biochimie
M. GAMBLIN André	Géographie
M. GERVAIS Michel	Gestion des Entreprises
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JOURNEL Gérard	Physique Atomique et Moléculaire
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LAURENT François	Automatique
M ^{lle} LEGRAND Denise	Algèbre
M ^{lle} LEGRAND Solange	Algèbre
M. LEROY Yves	Electronique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique théorique
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAHIEU Jean-Marie	Physique Atomique et Moléculaire
M. MESSELYN Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. MIGNOT Fulbert	Analyse Numérique
M. N'GUYEN VAN CHI Régine	Géographie
M. NOTELET Francis	Electrotechnique
M. NUSSEMBAUM Maurice	Sciences Economiques
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PAUPARDIN Colette	Biologie Physiologie Végétales
M. PECQUE Marcel	Chimie Physique
M. PERROT Pierre	Chimie Appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie Animale
M. PETIT Francis	Chimie Organique
M. PONSOLLE Louis	Chimie Physique
M. POVY Lucien	Automatique
M. RICHARD Alain	Biologie
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROY Jean-Claude	Psycho-Physiologie
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SOMME Jean	Géographie

M ^{lle} SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. STERBOUL François	Informatique
M. TAILLEZ Roger	Biologie
M. THERY Pierre	Electronique
M. TOP Gérard	Sciences Economiques
M. TOULOTTE Jean-Marc	Automatique
M. TREANTON Jean-René	Sociologie
M. VANDORPE Bernard	Chimie Minérale
M. VILLETTE Michel	Mécanique
M. WALLART Francis	Chimie
M. WERNER Georges	Informatique
M ^{me} ZIN-JUSTIN Nicole	Algèbre

A tous les Enseignants qui ont marqué ma vie
scolaire et plus particulièrement à

Monsieur DEGROISSE, Directeur de l'Ecole Publique
de Mouchin, et à Madame DEGROISSE son adjointe;
à Monsieur DHERBOMEZ, Directeur du C.E.G. d'Orchies
et à Mademoiselle MARTIN, Agrégée de Physique, Professeur
à l'Ecole Normale d'Instituteurs de Douai.

A ma Femme

Ce travail a été effectué au LABORATOIRE D'OPTIQUE
ATMOSPHERIQUE de l'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE
LILLE.

Je tiens tout d'abord à remercier son Directeur
Madame LENOBLE qui m'a accueilli et m'a permis de le mener à
bien.

Je suis heureux d'exprimer ma profonde reconnaissance
à Monsieur HERMAN qui m'a dirigé tout au long de ma Thèse et
dont les précieux conseils et la constante coopération en ont
permis l'aboutissement.

Je remercie Monsieur SCHILTZ d'avoir accepté de
présider mon jury ainsi que Monsieur GEHRELS qui m'a fait
l'honneur d'y participer.

Suggérée par Monsieur FYMAT, cette étude a été
possible grâce à la coopération et aux documents mis à notre
disposition par Monsieur DOLLFUS. Ils ont tous deux accepté
de juger mon travail, qu'ils trouvent ici l'expression de mes
sincères remerciements.

Je remercie également mes Collègues du Laboratoire
d'Optique Atmosphérique pour leur amicale collaboration.

Je ne saurai oublier l'aide que m'a apportée
l'ensemble du personnel du C.I.T.I. et plus particulièrement
Monsieur DELAISSE, et Monsieur GONZALES qui a assuré une partie
de la programmation et les exploitations nécessaires à ce travail.

J'adresse enfin mes remerciements à tout le personnel
Technique et Administratif de l'U.E.R. qui ont contribué à la
confection matérielle de ce mémoire.

INTRODUCTION

PREMIERE PARTIE

Chapitre I Résolution de l'équation de transfert par la méthode des harmoniques sphériques.

I- RAPPEL DE LA METHODE

I-1. Définitions

I-2. Développement en azimut

I-3. Méthode des harmoniques sphériques

II- RESOLUTION NUMERIQUE

II-1. Calcul des racines v_s^i et des coefficients g_s^l

II-2. Calcul des coefficients h_s^l

II-3. Calcul des constantes d'intégration k_s^i

II-4. Amélioration du résultat par itération

II-5. Calcul des flux

III- CAS PARTICULIERS. EXTENSIONS

III-1. Cas d'une couche semi-infinie

III-2. Cas d'un milieu conservatif

III-3. Introduction de l'émission

III-4. Cas d'une réflexion diffuse

III-5. Cas de plusieurs couches diffusantes

III-6. Cas d'un milieu d'absorption variable

IV- PRECISION ET LIMITES DE LA METHODE

IV-1. Résultats obtenus par différentes méthodes

IV-2. Précision des résultats

IV-3. Effet du nombre de termes de la fonction de phase

IV-4. Temps calcul

V- CONCLUSION

APPENDICE I

DEUXIEME PARTIE

Application de la méthode des harmoniques sphériques à l'étude du transfert radiatif dans l'atmosphère de Vénus.

Chapitre II Détermination de la structure de l'atmosphère de Vénus à partir de mesures de flux in situ.

I- MOYENS D'ANALYSE

I-1. Mesures disponibles

I-2. Méthode de noyau exponentiel

II- APPLICATIONS AU SONDAGE DE VENERA 8

III- PREPARATION DE LA MISSION PIONEER-VENUS

III-1. Modèle d'atmosphère de Vénus

III-2. Calcul des flux solaires

III-3. Résultats

ANNEXES

Article n° 1 - VENUS : Cloud Optical Depth and Surface Albedo from Venera 8. C. DEVAUX and M. HERMAN.
Icarus 24, 19-27 (1975)

Chapitre III Etude de la photométrie détaillée sur le disque de Vénus. Application à l'étude de la haute atmosphère.

I- ANALYSE DES COURBES DE PHASE

II- ETUDE DES ISOPHOTES EN LUMIERE JAUNE

II-1. *Cas d'une couche homogène infinie*

II-2. *Modèle à deux couches horizontalement homogènes*

III- VARIATIONS HORIZONTALES DE LA STRUCTURE NUAGEUSE DE VENUS. ANALYSE DES TACHES U.V.

III-1. *Modèle de nuages*

III-2. *Méthode d'analyse*

III-3. *Résultats*

III-4. *Conclusions*

ANNEXES

Article n° 2 - Photometry of Venus V Part II. Theoretical Brightness over the Disk. C. BIGOURD, C. DEVAUX, M. HERMAN and J. LENOBLE. Icarus 26, 73-84 (1975)

Article n° 3 - Interpretation of the Photometric Measurements of Venus by Mariner 10 (Presented at the Conference on the atmosphere of Venus, GODDARD Institute for Space Studies, 15 - 17 October 1974) Journal of Atmospheric Sciences Vol. 32, n° 6, June 1975 ; pp 1177 - 1189

Article n° 4 - Photometry of Venus : Part III. Interpretation of Brightness Distributions over the Disk. M. HERMAN, C. DEVAUX and A. DOLLFUS. (Submitted to Icarus Mai 1977)

CONCLUSION

INTRODUCTION

L'étude détaillée du champ de rayonnement dans un milieu diffusant et absorbant nécessite la mise au point de méthodes numériques suffisamment précises et rapides, pour la résolution de l'équation de transfert. Une première programmation de la méthode des Harmoniques Sphériques avait été faite au Laboratoire dans le but d'étudier le bilan radiatif dans les nuages terrestres (Guillemot, 1966; Marengo, 1967). Elle restait néanmoins à cette époque d'un emploi très lourd et assez limité. Notre premier travail a consisté à reprendre le principe des différentes étapes du calcul pour en tirer un outil mieux adapté. Ce travail est résumé ici dans la première partie. On y indique les principales modifications apportées, moyennant quoi la méthode s'avère très compétitive.

L'essentiel de notre travail s'est ensuite orienté vers l'analyse des sondages optiques de l'atmosphère nuageuse de Vénus et fait l'objet de la seconde partie. Deux raisons principales ont motivé cette direction de recherche.

D'une part l'acquis scientifique du Laboratoire sur ces problèmes du transfert radiatif lui permettait d'être retenu comme co-investigateur d'une expérience de flux pour la Mission Pioneer -Vénus 78

D'autre part à cette même époque débutait une coopération avec M.A. Dollfus qui avait rassemblé au Centre de Photographie Planétaire de Meudon de nombreux négatifs originaux de Vénus, obtenus par divers observateurs à Meudon et au Pic du Midi, et à partir desquels une étude détaillée de la lumière rediffusée par les nuages de Vénus était possible.

La préparation de la mission Pioneer nécessitait une évaluation des ordres de grandeur des flux à détecter au sein de la couche nuageuse de Vénus. Une analyse similaire avait déjà été entreprise pour les nuages terrestres, et nous avait permis de dégager les rôles des principaux paramètres du milieu sur ces mesures : elle avait en outre permis de tester une méthode analytique approchée, établie par Wang (1972) et développée au Laboratoire (Bligourd, 1975). Les principaux résultats de cette étude sont résumés au début de la seconde partie. Vers la même époque, Vénéra 8 effectuait pour la première fois une mesure du flux solaire descendant à travers l'atmosphère de Vénus. Une analyse immédiate de ces premières mesures in situ, à l'aide des méthodes mises au point précédemment, nous permettait de bâtir un premier modèle de la structure nuageuse présenté au chapitre II.2. A partir de ce modèle, il devenait possible de préciser la sensibilité des détecteurs et les gammes spectrales intéressantes pour la mission Pioneer (chapitre II.3).

A partir des mesures en polarisation, Hansen et Arking (1971) avaient pu déduire les caractéristiques des aérosols constituant la brume supérieure de Vénus. Formée plus profondément que la lumière polarisée, la luminance globale rediffusée par la planète pouvait apporter des renseignements complémentaires sur les nuages sous-jacents. Nous avons donc entrepris l'étude photométrique détaillée de Vénus. Celle-ci, faisant l'objet du troisième chapitre, a d'abord porté sur quelques clichés obtenus en lumière jaune à partir d'observations télescopiques. La détermination des paramètres

utiles susceptibles d'influencer la distribution des réseaux d'isophotes a d'abord été testée . Cette première analyse, résumée dans un premier article, mettait en évidence une répartition anormale des isophotes observées en lumière jaune par rapport aux prévisions déduites des résultats en polarisation. Imputé dans un premier temps à la dégradation des images et à leur traitement photométrique, le désaccord constaté se trouvait confirmé par l'étude des clichés à haute résolution obtenus par la sonde Mariner 10 en Février 1974 au cours de son flyby Vénus - Mercure (cf. Article 2). Ainsi donc, même lorsque Vénus semble présenter une très grande homogénéité, l'analyse photométrique mettait en évidence une variation spatiale de la structure nuageuse de Vénus, qu'il était tentant de relier à la présence des taches sombres fréquemment observées en ultra violet. Ceci nous a conduit à l'élaboration de modèles inhomogènes. Nous disposions pour cela d'une série de clichés obtenus presque simultanément à différentes longueurs d'onde. Nous avons alors recherché si l'évolution spectrale des distributions de luminance observées pouvait s'interpréter par l'action d'un mécanisme d'absorption unique, et plus précisément s'il était possible d'en déduire une localisation de la couche nuageuse où cette absorption avait lieu. Ce travail et les premiers résultats auxquels il a abouti font l'objet d'un troisième article.

PREMIERE PARTIE

INTRODUCTION

L'étude du transfert du rayonnement dans un milieu diffusant et absorbant comporte de nombreuses applications. Les caractéristiques de ce rayonnement peuvent donner des informations sur les milieux dans lesquels il s'est propagé et son analyse constituait encore récemment le seul moyen d'investigation des atmosphères planétaires. L'absorption de l'énergie solaire par ces dernières est une quantité fondamentale pour l'étude et la compréhension de la dynamique atmosphérique. Avec le développement des moyens de télédétection embarqués à bord de satellites, cette étude connaît un nouveau centre d'intérêt. La résolution de l'équation de transfert a fait l'objet de nombreux travaux. On trouvera une bibliographie de ces différentes méthodes répertoriées par THE RADIATION COMMISSION OF THE INTERNATIONAL ASSOCIATION OF METEOROLOGY AND ATMOSPHERIC PHYSICS (I.U.G.G) dans STANDARD PROCEDURES TO COMPUTE ATMOSPHERIC RADIATIVE TRANSFER IN A SCATTERING ATMOSPHERE - édité par J.LENOBLE.

Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la méthode des Harmoniques Sphériques (encore appelée P_L approximation). Suggérée par JEANS (1917) pour le transfert radiatif dans les étoiles, elle avait été essentiellement appliquée au transport des neutrons (DAVISON ; 1958). Peu utilisée dans les problèmes de transfert radiatif (LENOBLE; 1961. a-b) elle connaît depuis quelques années un net regain d'intérêt et est utilisée par divers auteurs. Citons CANOSA et PENAFIEL (1973) DAVE (1974). A la différence de ceux-ci, au lieu d'utiliser une méthode numérique directe dans le cas d'une atmosphère homogène, nous avons employé une solution analytique que nous exposons dans le chapitre I..

CHAPITRE I

RESOLUTION DE L'EQUATION DE TRANSFERT

PAR LA METHODE DES HARMONIQUES SPHERIQUES

RAPPEL DE LA METHODEI - 1 - DÉFINITIONS

En un point M d'un milieu diffusant le rayonnement se propageant dans une direction \vec{s} sera caractérisé par sa luminance $I(M; \vec{s})$ ($\text{W.m}^{-2} \text{Sr}^{-1}$). Ce rayonnement est en général polarisé et une étude rigoureuse conduirait à une représentation matricielle de cette grandeur. Toutefois, le fait de négliger la polarisation n'affecte pratiquement pas les résultats du point de vue énergétique auquel nous nous intéressons exclusivement ici (LENOBLE, 1970; DEUZE, DEVAUX, HERMAN, 1975). Nous nous limiterons donc par la suite à une étude scalaire du problème.

Considérons en M, un volume élémentaire dv et la luminance incidente $I(M; \vec{s})$. Le flux diffusé par dv sera proportionnel au nombre de diffuseurs qu'il contient et à l'éclairement reçu par chacun d'eux soit

$$d\phi_d = k(M) dv \int I(M; \vec{s}) d\omega, \quad (1-1)$$

ou $k(M)$ (m^{-1}) est par définition le coefficient de diffusion du milieu. De la même façon, on définira le coefficient d'absorption $b(M)$ (m^{-1}) par la relation

$$d\phi_a = b(M) dv \int I(M; \vec{s}) d\omega, \quad (1-2)$$

ou $d\phi_a$ est le flux absorbé par dv

Considérons le cylindre élémentaire d'axe \vec{s} de hauteur ds et de surface de base $d\sigma$. Le flux élémentaire transmis par cet élément de volume dans la direction \vec{s} et dans un cône d'angle solide $d\omega$ est

$$d\phi_+ = (I(M; \vec{s}) + dI(M; \vec{s})) d\omega d\sigma$$

$$d\phi_+ = I(M; \vec{s}) d\omega d\sigma - k(M) dv \int I(M; \vec{s}) d\omega - b(M) dv \int I(M; \vec{s}) d\omega$$

Soit

$$d I (M; \vec{s}) = - (k(M) + b(M)) I (M; \vec{s}) d\omega$$

On caractérisera l'importance relative de la diffusion par l'albédo de diffusion du milieu

$$\omega_0 (M) = \frac{k(M)}{k(M) + b(M)} \quad (1-3)$$

Si l'élément de volume reçoit par ailleurs de la direction \vec{s}' un rayonnement diffus de luminance $I (M; \vec{s}')$, il diffusera dans la direction \vec{s} un flux

$$d^2 \Phi_d = \frac{k(M)}{4\pi} dv I (M; \vec{s}') d\omega' P (M; \vec{s}, \vec{s}') d\omega ; \quad (1-4)$$

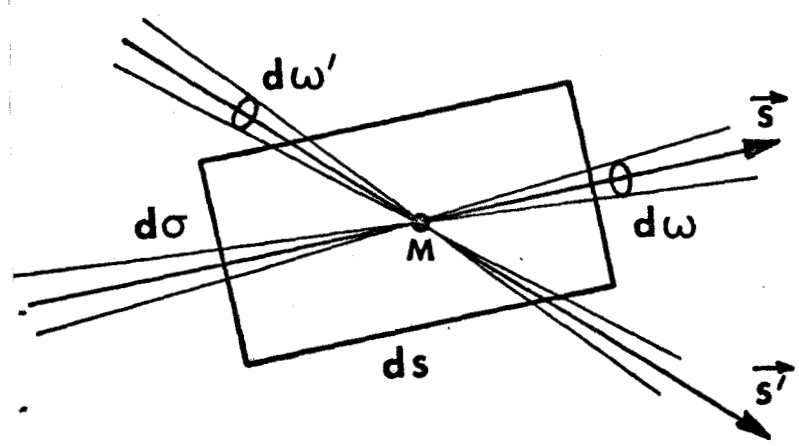
relation qui définit la fonction de phase $P (M; \vec{s}, \vec{s}')$ du milieu. Compte tenu de l'expression du flux diffusé (1-1) cette fonction de phase est normalisée par la relation

$$\iint_{\text{espace}} P (M; \vec{s}, \vec{s}') d\omega = 4\pi \quad (1-5)$$

Si on exprime le rayonnement diffusé dans la direction \vec{s} et provenant de toutes les directions \vec{s}' , le bilan énergétique portant sur le flux élémentaire se propageant dans la direction \vec{s} , dans un cône d'angle solide $d\omega$ s'écrit

$$(I (M; \vec{s}) + d I (M; \vec{s})) d\omega d\sigma = I (M; \vec{s}) d\omega d\sigma$$

$$- (k(M) + b(M)) dv I (M; \vec{s}) d\omega$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{k(M)}{4\pi} dv d\omega \iint_{\text{espace}} I(M; \vec{s}') P(M; \vec{s}, \vec{s}') d\omega' \quad -8- \\
& + \frac{k(M)}{4\pi} dv d\omega \sum_i \text{sources} E_i(M) P(M; s, s_i),
\end{aligned}$$

où l'on a fait apparaître explicitement l'éclairement direct en M dû aux différentes sources éventuelles, $I(M; \vec{s})$ caractérisant alors le rayonnement diffusé au moins une fois. Ceci établit l'équation intégral-différentielle à résoudre

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial s}(M; s) = & - (k(M) + b(M)) \left(I(M; s) - \frac{\omega_0(M)}{4\pi} \iint_{\text{espace}} P(M; s, \vec{s}') I(M; \vec{s}') d\omega \right. \\
& \left. - \frac{\omega_0(M)}{4\pi} \sum_i \text{sources} E_i(M) P(M; \vec{s}, \vec{s}_i) \right). \quad (1-6)
\end{aligned}$$

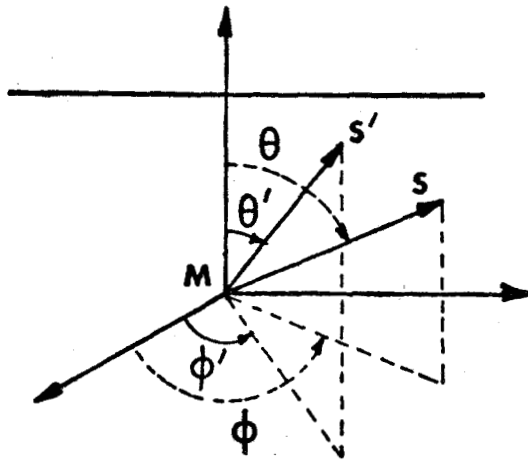
La solution de cette équation dépend avant tout de la forme du noyau $P(M; \vec{s}, \vec{s}')$ et de la géométrie du milieu et des sources. Nous nous limiterons au cas idéalisé d'une couche homogène, limitée par deux plans parallèles, et uniformément éclairée sur sa face supérieure par un faisceau parallèle. Ceci est une bonne approximation de nombreux milieux naturels sous l'éclairement solaire.

La position d'un point M sera donc caractérisée uniquement par sa profondeur géométrique h dans la couche, ou par sa profondeur optique τ définie par

$$\tau = (k + b) h. \quad (1-7)$$

De même la fonction de phase ne dépendra que de l'angle θ entre les directions \vec{s} et \vec{s}' . Celles-ci seront repérées par les angles θ et ϕ respectivement par rapport à la verticale ascendante et à un axe origine arbitraire dans le plan horizontal. D'où

$$P(M; \vec{s}, \vec{s}') = P(\theta) = P(\theta, \phi; \theta', \phi') = P(\mu, \phi; \mu', \phi'),$$



en posant $\mu = \cos \theta$. La direction du faisceau incident, d'éclairement πF , sera définie par μ_0 et ϕ_0 ($\mu_0 < 0$), et l'équation (1-6) s'écrira finalement, avec $ds = -d\tau / \mu$ ($ds > 0$)

$$\mu \frac{\partial I}{\partial \tau} (\tau; \mu, \phi) = I (\tau; \mu, \phi)$$

$$- \frac{\omega_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} P(\mu, \phi; \mu', \phi') I(\tau; \mu', \phi') d\mu' d\phi'$$

$$- \frac{\omega_0}{4\pi} P(\mu, \phi; \mu_0, \phi_0) \pi F \exp(\tau/\mu_0) \tag{1-8}$$

I - 2 - DÉVELOPPEMENT EN AZIMUT

Nous supposons toujours la fonction de phase développée en série de polynômes de LEGENDRE sous la forme

$$P(\theta) = \sum_{\ell=0}^L \beta_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), \tag{1-9}$$

où la condition de normalisation (1-5) donne $\beta_0 = 1$.

Nous discuterons plus loin de l'ordre L nécessaire à une représentation correcte de $P(\theta)$. Le théorème d'addition des fonctions de LEGENDRE donne

$$P_{\ell}(\cos(\mu, \phi; \mu', \phi')) = \sum_{s=0}^{\ell} (2 - \delta_{0s}) \cos s(\phi - \phi') P_s^{\ell}(\mu) P_s^{\ell}(\mu'),$$

où $\delta_{0s} = 0$ si $s \neq 0$,
 $= 1$ si $s = 0$,

et

$$P_s^{\ell}(\mu) = \sqrt{\frac{(\ell-s)!}{(\ell+s)!}} (1-\mu^2)^{s/2} \frac{d^s}{d\mu^s} (P_{\ell}(\mu)), \text{ fonction de LEGENDRE}$$

associée de première espèce, utilisée avec la norme $\sqrt{2/(2\ell+1)}$.

En développant $I(\tau; \mu, \Phi)$ en série de $\cos s(\Phi - \Phi_0)$, soit

$$I(\tau; \mu, \Phi) = \sum_{s=0}^L (2 - \delta_{0s}) \cos s(\Phi - \Phi_0) I^s(\tau; \mu), \quad (1-10)$$

L'intégration sur Φ est immédiate et l'équation de transfert (1-8) se sépare en $L+1$ équations

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I^s}{\partial \tau}(\tau; \mu) &= I^s(\tau; \mu) - \frac{\omega_0}{2} \sum_{\ell=s}^L \beta_\ell P_\ell^s(\mu) \int_{-1}^{+1} P_\ell^s(\mu') I^s(\tau; \mu') d\mu' \\ &- \frac{\omega_0}{4\pi} \pi F \exp(\tau/\mu_0) \sum_{\ell=s}^L \beta_\ell P_\ell^s(\mu) P_\ell^s(\mu_0). \end{aligned} \quad (1-11)$$

I - 3 - MÉTHODE DES HARMONIQUES SPHÉRIQUES

Suivant la procédure classique des "Harmoniques Sphériques"

(Davison, 1958), développons $I^s(\tau; \mu)$ en série de fonctions $P_\ell^s(\mu)$ à

l'ordre $N = 2p - 1 + s$ (avec p entier) soit,

$$I^s(\tau; \mu) = \sum_{\ell=s}^N (2\ell+1) A_\ell^s(\tau) P_\ell^s(\mu). \quad (1-12)$$

Compte tenu de la relation de récurrence

$$(2\ell+1) \mu P_\ell^s(\mu) = ((\ell+s+1)(\ell-s+1))^{1/2} P_{\ell+1}^s(\mu) + ((\ell+s)(\ell-s))^{1/2} P_{\ell-1}^s(\mu),$$

et de l'orthogonalité des fonctions de LEGENDRE

$$\int_{-1}^{+1} P_\ell^s(\mu) P_m^s(\mu) d\mu = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq m, \\ \frac{2}{2\ell+1} & \text{si } \ell = m, \end{cases}$$

on obtient, après substitution de (1-12) dans (1-11), et ce pour chaque valeur de s , un système indépendant de $2p$ équations différentielles du premier ordre en $A_S^\ell(\tau)$:

$$\sqrt{(l+s)(l-s)} \frac{dA_S^{\ell-1}}{d\tau} + \sqrt{(l+s+1)(l-s+1)} \frac{dA_S^{\ell+1}}{d\tau} = (2\ell+1-\omega_0\beta_\ell) A_S^\ell(\tau) - \frac{\omega_0}{4\pi} \pi F \exp(\tau/\mu_0) \beta_\ell P_S^\ell(\mu_0), \quad \ell = s, s+1, \dots, N. \quad (1-13)$$

Si l'on veut tenir compte des L termes du développement (1-9) de $P(\theta)$ il faut prendre $N = 2p-1+s > L$.

On cherchera la solution générale du système homogène associé (1-13) en superposant $2p$ solutions particulières linéairement indépendantes de ce système, solutions que l'on cherchera sous la forme

$$A_S^\ell(\tau) = g_S^\ell(v) \exp(-v\tau). \quad (1-14)$$

En substituant (1-14) dans le système d'équations (1-13), il vient

$$-v \left(\sqrt{(l+s)(l-s)} g_S^{\ell-1} + \sqrt{(l+s+1)(l-s+1)} g_S^{\ell+1} \right) = (2\ell+1-\omega_0\beta_\ell) g_S^\ell. \quad (1-15)$$

Soit, à résoudre un système de $2p$ équations homogènes à $2p$ inconnues qui définira les g_S^ℓ , à partir de g_S^s pris arbitrairement égal à 1, et les $2p$ valeurs v_i^s correspondant aux $2p$ solutions particulières cherchées. Ces racines v_i^s pourront s'obtenir en assurant la comptabilité du système (1-15). La forme récursive de ces équations montre que, partant de $g_S^s = 1$, il suffit pour assurer cette comptabilité, d'annuler le coefficient g_S^{s+2p} qu'on en déduirait soit

$$g_S^{s+2p}(v_i^s) = 0. \quad (1-16)$$

La solution particulière du système complet (1-13) peut se

$$A_s^\ell(\tau) = h_s^\ell \exp(\tau/\mu_0). \quad (1-17)$$

On aboutit alors à un système linéaire de $2p$ équations qui définit les $2p$ inconnues h_s^ℓ soit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \left(\sqrt{(\ell+s)(\ell-s)} h_s^{\ell-1} + \sqrt{(\ell+s+1)(\ell-s+1)} h_s^{\ell+1} \right) &= (2\ell+1-\omega_0 \beta_\ell) h_s^\ell \\ &- \frac{\omega_0}{4\pi} \pi F \beta_\ell P_s^\ell(\mu_0), \end{aligned} \quad (1-18)$$

et la solution générale de (1-13) s'écrira finalement

$$A_s^\ell(\tau) = \sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} (k_s^i g_s^\ell(v_s^i) \exp(-v_s^i \tau)) + h_s^\ell \exp(\tau/\mu_0), \quad (1-19)$$

où les constantes d'intégration k_s^i seront à déterminer à partir des conditions aux limites. La solution cherchée pour $I(\tau; \mu, \Phi)$ s'écrira donc

$$\begin{aligned} I(\tau; \mu, \Phi) &= \sum_{s=0}^L (2-\delta_{0s}) \cos s(\Phi-\Phi_0) \sum_{\ell=s}^{2p-1+s} (2\ell+1) P_s^\ell(\mu) \\ &\times \left(\sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} k_s^i g_s^\ell(v_s^i) \exp(-v_s^i \tau) + h_s^\ell \exp(\tau/\mu_0) \right) \end{aligned} \quad (1-20)$$

II - RESOLUTION NUMERIQUE

II - 1 - CALCUL DES RACINES v_s^i ET DES COEFFICIENTS g_s^ℓ

La principale difficulté numérique est dans l'équation (1-16). On vérifie facilement sur la relation (1-15) que les g_s^ℓ sont des polynômes en $1/v$ de la forme

$$g_s^{s+j} = \sum_{m=0}^{\{j/2\}} \frac{a_m^{s,j}}{v^{j-2m}} = v^{-j} \sum_{m=0}^{\{j/2\}} a_m^{s,j} \cdot v^{2m}, \quad (1-21)$$

où $\{j/2\}$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à $j/2$. En reportant cette expression de g_s^j dans (1-15), l'identification des coefficients de même puissance en $1/v$ conduit à la relation de récurrence

$$\sqrt{j(j+2s)} a_m^{s,j} = -a_{m-1}^{s,j-2} \sqrt{(j-1)(j+2s-1)} + a_m^{s,j-1} (2s+2j-1 - \omega_0 \beta_{s+j-1}), \quad (1-22)$$

initialisée par $a_0^{s,0} = 1$ ($g_s^s = 1$) et $a_{-1}^{s,j} = 0$,

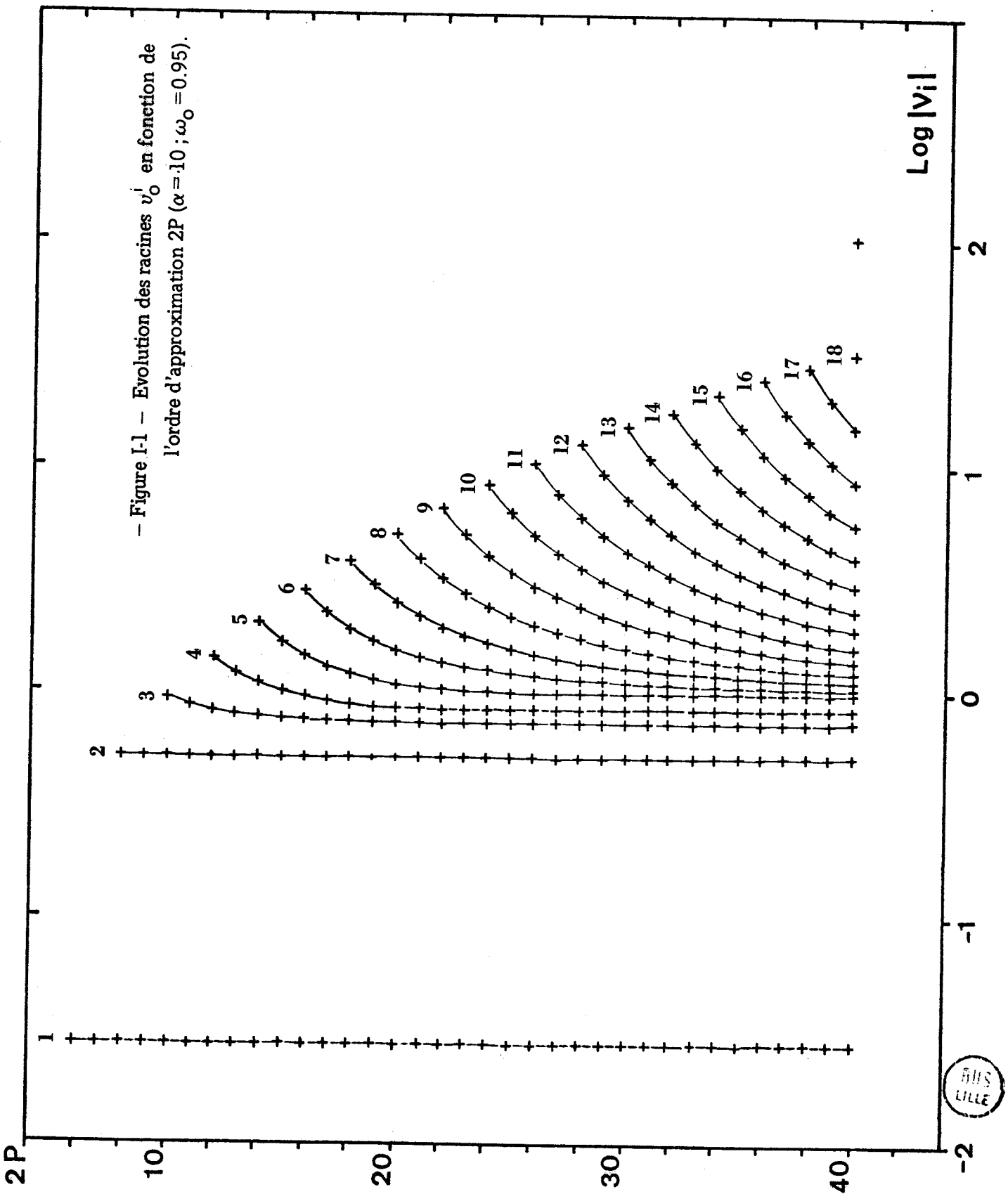
qui permet le calcul numérique des coefficients de l'équation (1-16) à résoudre.

Avec $X = v^2$, posons

$$Y(j) = g_s^{s+j} v^j = \sum_{m=0}^{\{j/2\}} a_m^{s,j} X^m \quad (1-23)$$

Pour des fonctions de phase anisotropes, le développement (1-9) de $P(\theta)$ devient long. Une bonne précision sur I nécessitant un ordre d'approximation $2p$ supérieur à L , la recherche directe des racines de $Y(j)$ à l'ordre $2p$ deviendrait impraticable. Mais il suffit de traiter le problème successivement dans les approximations d'ordre $4, 5, \dots, j, \dots, 2p$ pour tourner la difficulté. On a en effet constaté empiriquement que les $\{j/2-1\}$ racines positives du polynôme $Y(j-1)$, qu'on notera par valeur croissante $X_i^{(j-1)}$, constituent d'excellentes approximations pour les $(\{j/2\}-1)$ plus petites des racines $X_i^{(j)}$, de même indice i , de $Y(j)$. La figure 1-1 illustre clairement ce comportement, où l'on voit que la racine de rang i , apparue dès la résolution de $g_{2i}^{s+j}(v) = 0$ ne varie plus ensuite que très lentement. On remarquera par ailleurs (DEUZE, 1974) qu'une racine $X_i^{(j)}$ est toujours encadrée par les deux racines $X_i^{(j-1)}$ et $X_{i-1}^{(j-1)}$, propriété liée au fait que les polynômes $g_s^{s+j}(v)$ constituent une suite de

- Figure I.1 - Evolution des racines v_0^j en fonction de l'ordre d'approximation 2P ($\alpha = 10 ; \omega_0 = 0.95$).



Sturm (POUZET, 1964; GASTINEL, 1966). On amorce donc la solution en calculant à l'ordre $j = 5$ les deux racines immédiates du polynôme du second degré $Y(5)$. Supposant connues les racines $X_i^{(j-1)}$ du polynôme $Y(j-1)$, on en déduit les racines de même rang i de $Y(j)$ par une méthode de bisection bien adaptée puisque le domaine d'existence de X_i^j est connu. Pour ce qui est de la nouvelle racine $X_{j/2}^{(j)}$ apparaissant pour chaque ordre pair du polynôme $Y(j)$, son calcul est immédiat. En identifiant les coefficients $a_m^{s,2k}$ du polynôme $Y(2k)$ aux coefficients du développement équivalent à (1-21) soit

$$Y(2k) = a_k^{s,2k} \prod_{i=1}^k (X - X_i^{(2k)}),$$

on aura en particulier pour les termes de degré 1 et j en X ,

$$a_{k-1}^{s,2k} = - a_k^{s,2k} S, \quad a_0^{s,2k} = (-1)^k a_k^{s,2k} P,$$

où l'on a noté S et P la somme et le produit des racines. Connaissant $(k-1)$ des racines de $Y(2k)$, une de ces relations suffit en fait pour déterminer la dernière. Sauf au dernier passage, pour $j = 2p$, une faible précision suffit puisqu'il ne s'agit que d'approcher la solution de l'ordre suivant.

La procédure précédente fournit donc les $2p$ valeurs cherchées v_s^i , deux à deux symétriques

$$v_s^i = - v_s^{-i} = \sqrt{X_i^{2p}} \quad (i=1, 2, \dots, p). \tag{1-24}$$

Pour chacune de ces racines, le calcul des coefficients $g_s^{s+j}(v_s^i)$ associés est en principe immédiat à partir de la relation (1-15), initialisée arbitrairement par $g_s^s = 1$ et $g_s^{s-1} = 0$. On constate cependant que cette récurrence s'accompagne d'une propagation d'erreur d'autant plus grande que la racine v_s^i concernée est plus petite et que sa valeur évolue

moins avec l'ordre j . Dans ce cas il devient en effet impossible, au delà d'un certain ordre k , de discerner la racine $v_s^{i,k}$ de $g_s^{s+k}(v)$ de la racine $v_s^{i,2p}$ de $g_s^{j+2p}(v)$. La valeur $v_s^{i,2p}$ ainsi reportée dans la relation (1-15) donnera alors à l'ordre k

$$-v \left(\sqrt{(2s+k)k} g_s^{s+k-1} + \sqrt{(2s+k+1)(k+1)} g_s^{s+k+1} \right) \approx 0$$

soit $g_s^{s+k-1} \approx -g_s^{s+k+1}$

A l'ordre suivant on vérifiera que g_s^{s+k+2} sera proportionnel à g_s^{s+k+1}/v et on aura à partir de cet ordre une divergence de la série d'autant plus rapide que, comme le montre le tableau (1-1) v est plus petit. En écrivant au contraire la relation (1-15) sous la forme décroissante

$$\frac{v_s^{s+k-1}}{g_s} \sqrt{k(2s+k)} = \frac{v_s^{s+k+1}}{g_s} \sqrt{(2s+k+1)(k+1)} - \frac{v_s^{s+k}}{g_s} (2s+2k+1 - \omega_0 \beta_{s+k}) \quad (1-25)$$

avec $\frac{v_s^{s+2p}}{g_s} = 0$ et $\frac{v_s^{s+2p-1}}{g_s} = 1$,

on vérifiera aisément que lorsque k diminue, les coefficients $\frac{v_s^{s+k}}{g_s}$ deviennent de plus en plus grands, et ce d'autant plus vite que v est petit; leur calcul numérique restera alors bien conditionné. Pour retrouver les coefficients g_s^l cherchés, il suffit de renormaliser les coefficients $\frac{v_s^{s+k}}{g_s}$ en les divisant par le coefficient $\frac{v_s^s}{g_s}$ (Tableau (1-1)). Cette renormalisation n'a évidemment d'autre intérêt que de conserver pour les constantes k_s^i des valeurs comparables.

II - 2 - CALCUL DES COEFFICIENTS h_s^l

Le même type de résolution s'étend facilement au système (1-18). Considérant les h_s^l comme des fonctions de h_s^s , on vérifie que

$$h_s^{s+k} = \lambda_k h_s^s + \zeta_k, \quad (1-26)$$

↑ $v_0^1 = 0.210456983$ ↓		↑ $v_0^2 = 0.748084368$ ↓		↑ $v_0^6 = 1.014789865$ ↓	
1.00000000-00	1.00000000-00	1.00000000-00	1.00000000-00	1.00000000-00	1.00000000-00
-2.375782414-01	-2.375782420-01	-6.683738114-02	-6.683725962-02	-4.927128437-02	-4.925950600-02
4.721275586-02	4.721382959-02	-4.566906431-01	-4.566906372-01	-4.764641085-01	-4.764696880-01
-7.103838410-03	-7.107814784-03	4.949034440-01	4.949028671-01	3.792077891-01	3.792044390-01
9.357234608-04	9.552463958-04	-3.698236156-01	-3.698220076-01	-4.501630862-02	-4.500839200-02
-4.886731360-06	-1.203809062-04	2.365127201-01	2.365130925-01	-2.466162241-01	-2.466235080-01
-7.468624814-04	1.460220212-05	-1.398755408-01	-1.398762153-01	3.819266442-01	3.819303340-01
5.371038401-03	-1.745738017-06	8.004481399-02	8.004570702-02	-3.577898700-01	-3.577890240-01
-3.929477693-02	2.073843190-07	-4.509771543-02	-4.509922373-02	2.177074658-01	2.177029320-01
2.939163845-01	-2.461956328-08	2.528836331-02	2.529058604-02	-2.516459968-02	-2.515824900-02
-2.227868829 00	2.931292169-09	-1.419421844-02	-1.419776786-02	-1.557499648-01	-1.557560220-01
1.700919807 01	-3.497893609-10	7.976766974-03	7.982473411-03	2.733601530-01	2.733640960-01
-1.306573971 02	4.191170744-11	-4.496187118-03	-4.505444669-03	-2.995203367-01	-2.995210790-01
1.006599750 03	-5.046633377-12	2.533788549-03	2.548902481-03	2.336920115-01	2.336896180-01
-7.762068893 03	6.057380651-13	-1.407607831-03	-1.432312175-03	-1.014401277-01	-1.014355680-01
6.035680650 04	-7.326352469-14	7.622985921-04	8.030781656-04	-5.198036115-02	-5.198558300-02
-4.677278861 05	8.700527275-15	-3.681236086-04	-4.352474625-04	1.799396551-01	1.799438970-01
3.705026188 06	-1.022518537-15	1.154804211-04	-2.289788993-04	-2.512148379-01	-2.512169790-01
-2.975348303 07	1.161586914-16	8.290269473-05	-1.139280984-04	2.546565235-01	2.546561750-01
2.478837087 08	-1.274879681-17	-3.064623070-04	5.388025756-05	-2.082368892-01	-2.082343380-01
-2.143943671 09	1.367208964-18	6.767582337-04	-2.459796156-05	1.365176734-01	1.365134560-01
1.902729787 10	-1.426912019-19	-1.418797738-03	1.086276609-05	-5.606630029-02	-5.606089500-02
-1.739623644 11	1.487859041-20	3.046249704-03	-4.789178252-06	-2.275338247-02	-2.275973000-02
1.595756414 12	-1.550596311-21	-6.593761238-03	2.109501310-06	9.740802383-02	9.741507100-02
-1.467358655 12	1.616692421-22	1.433198718-02	-9.294804941-07	-1.660649404-01	-1.660724570-01
1.348677391 14	-1.686805909-23	-3.121523742-02	4.098228366-07	2.271897898-01	2.271975650-01
-1.242876197 15	1.761246687-24	6.806601690-02	-1.808264634-07	-2.794573126-01	-2.794650980-01
1.146256081 16	-1.840253690-25	1.485443306-01	7.984158921-08	3.217915335-01	3.217991340-01
-1.057864577 17	1.924049870-26	3.244054841-01	-3.527567467-08	-3.534011028-01	-3.534082870-01
9.769023229 17	-2.012882226-27	-7.089210190-01	1.559488455-08	3.737971368-01	3.738036560-01
-9.026642037 18	2.107000962-28	1.550116723 00	-6.898140781-09	-3.827992249-01	-3.828044910-01
8.345239015 19	-2.206691568-29	-3.391334675 00	3.052884531-09	3.805328208-01	3.805375430-01
-7.719227792 20	2.3122242743-30	7.423374100 00	-1.351768096-09	-3.674185458-01	-3.674221960-01
7.143612025 21	-2.423975261-31	-1.625708605 01	5.988111000-10	3.441541965-01	3.441567030-01
-6.613911873 22	2.542219521-32	3.561903737 01	-2.653685213-10	-3.116899949-01	-3.116913190-01
6.126101315 23	-2.667337038-33	-7.807433880 01	1.176233333-10	2.711977975-01	2.711979350-01
-5.676554456 24	2.799706005-34	1.712027071 02	-5.210067936-11	-2.240351327-01	-2.240341130-01
5.261999297 25	-2.939730600-35	-3.755601366 02	2.296425097-11	1.717050659-01	1.717029490-01
-4.879477783 26	3.087451241-36	8.241495745 02	-9.857397598-12	-1.158129942-01	-1.158098700-01
4.526311125 27	-3.207754880-37	-1.809181375 03	3.640410359-12	5.802154246-02	5.801752600-02
-4.200069588 28	0.000000000 00	3.972831496 03	0.000000000-00	-4.769369500-06	0.000000000-00

- Tableau I-1 - Calcul des $g_0^{\ell}(v_0^i)$ ($i = 1, 2, 6$) par une
 récurrence montante (↑ ; ℓ croissant) et
 descendante (↓ ; ℓ décroissant).
 ($\alpha = 10$; $\omega_0 = 0.95$)



où λ_k et ζ_k vérifient respectivement les relations

$$\begin{aligned} \sqrt{k(k+2s)} \lambda_k &= - \lambda_{k-2} \sqrt{(k-1)(k+2s-1)} \\ &+ \lambda_{k-1} \mu_0 \frac{(2s+2k-1-\omega_0 \beta_{s+k-1})}{\beta_{s+k-1}} \end{aligned} \quad (1-27a)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{k(k+2s)} \zeta_k &= \zeta_{k-2} \sqrt{(k-1)(k+2s-1)} + \zeta_{k-1} \mu_0 \frac{(2s+2k-1-\omega_0 \beta_{s+k-1})}{\beta_{s+k-1}} \\ &- \frac{\omega_0}{4} F \mu_0 P_s^{s+k-1} (\mu_0) \beta_{s+k-1}, \end{aligned} \quad (1-27b)$$

obtenues par identification en portant l'expression (1-26) dans le système (1-18), et initialisées par $\lambda_0 \equiv 1$, $\zeta_0 \equiv 0$, $\lambda_{-1} \equiv \zeta_{-1} \equiv 0$. Il suffit donc de calculer λ_{2p} et ζ_{2p} à l'aide des équations (1-27). La compatibilité de (1-18) sera réalisée si l'on a

$$h_s^{s+2p} = 0, \quad (1-28)$$

d'où
$$h_s^s = - \frac{\zeta_{2p}}{\lambda_{2p}}, \quad (1-29)$$

qui initialise la relation de récurrence (1-18) (avec $h_s^{s-1} \equiv 0$), dont on déduira les coefficients h_s^k cherchés.

II - 3 - CALCUL DES CONSTANTES D'INTÉGRATION k_s^i

Supposons qu'en plus du faisceau parallèle incident des sources diffuses connues $J(0; \mu, \Phi)$ et $J(\tau_1; \mu, \Phi)$ soient imposées, respectivement au sommet et au bas de la couche:

$$I(0; \mu < 0, \Phi) \equiv J(0; \mu < 0, \Phi) ; I(\tau_1; \mu > 0, \Phi) \equiv J(\tau_1; \mu > 0, \Phi), \quad (1-30)$$

soit

$$I^S(0; \mu < 0) \equiv J^S(0; \mu < 0) ; I^S(\tau_1; \mu > 0) \equiv J^S(\tau_1; \mu > 0), (s=0, 1, \dots, L), \tag{1-31}$$

en développant les sources en série de Fourier. Ne disposant que de 2p constantes d'intégration k_s^i , on ne peut pas respecter exactement les conditions (1-30, et 31). On a retenu ici les conditions de MARSHAK (MARSHAK, 1947), qui conduisent à un calcul bien conditionné. Elles consistent à développer, à $\tau = 0$ et $\tau = \tau_1$, I^S et les sources correspondantes imposées, suivant le système des fonctions impaires $P_s^{S+2j-1}(\mu)$ ($j = 1, 2, \dots, p$), complet sur les intervalles $\{0, \pm 1\}$. En identifiant les p premiers termes de ces développements, on est conduit aux 2p équations linéaires en k_s^i

$$\int_0^{+1} I^S(\tau_1; \mu) P_s^{S+2j-1}(\mu) d\mu = \int_0^{+1} J^S(\tau_1, \mu) P_s^{S+2j-1}(\mu) d\mu, \tag{1-32}$$

$j = 1, 2, \dots, p$

$$\int_0^{-1} I^S(0, \mu) P_s^{S+2j-1}(\mu) d\mu = \int_0^{-1} J^S(0, \mu) P_s^{S+2j-1}(\mu) d\mu.$$

Compte tenu de l'expression de $I^S(\tau; \mu)$, le système (1-32) en k_s^i peut se ranger sous la forme matricielle

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A_j^i & B_j^i \\ \hline \hline C_j^i & D_j^i \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline k_s^i \\ \hline \hline k_s^{-i} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline E_j \\ \hline \hline F_j^* \\ \hline \end{array}, \tag{1-33}$$

où les matrices carrées $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$, $\{D\}$ et colonnes $\{E\}$, $\{F\}$ sont d'ordre p. Les constantes k_s^i sont rangées de haut en bas dans l'ordre $i = 1, 2, \dots, p$, et les coefficients s'écrivent

$$A_j^i = \sum_{l=s}^N (2l+1) g_s^l (v_s^i) b_{s,-}^{j,l}, \tag{1-34a}$$

$$B_j^i = \sum_{\ell=s}^N (2\ell+1) g_s^\ell (-v_s^i) b_{s,-}^{j,\ell} \quad (1-34b)$$

$$E_j = - \sum_{\ell}^N (2\ell+1) h_s^\ell b_{s,-}^{j,\ell} + \int_0^{-1} J^s(0;\mu) P_s^{s+2j-1}(\mu) d\mu, \quad (1-34c)$$

$$*F_j = - \exp(-\tau_1/\mu_0) \sum_{\ell=s}^N (2\ell+1) h_s^\ell b_{s,+}^{j,\ell} + \int_0^{+1} J^s(\tau_1;\mu) P_s^{s+2j-1}(\mu) d\mu, \quad (1-34d)$$

$$C_j^i = P_j^i, \quad D_j^i = A_j^i, \quad (1-34e)$$

$$*C_j^i = C_j^i \exp(-v_s^i \tau_1), \quad *D_j^i = D_j^i \exp(v_s^i \tau_1), \quad (1-34f)$$

(i = 1, 2, ---p) ; N = s+2p-1 .

On a posé dans les équations (1-34)

$$b_{s,\pm}^{j,\ell} = \int_0^{\pm 1} P_s^{s+2j-1}(\mu) P_s^\ell(\mu) d\mu$$

et les expressions des C_j^i et D_j^i résultent des parités des $g_s^\ell(v_s^i)$, soit

$$g_s^{s+k}(v_s^i) = (-1)^k g_s^{s+k}(-v_s^i),$$

et de celles des $b_{s,\pm}^{j,\ell}$ (établies en Appendice I), à savoir :

$$b_{s,+}^{j,\ell} = b_{s,-}^{j,\ell} \quad \text{si } \ell = s+2k,$$

$$b_{s,+}^{j,\ell} = b_{s,-}^{j,\ell} \equiv 0 \quad \text{si } \ell = s+2k-1 \quad k \neq j,$$

$$b_{s,+}^{j,\ell} = -b_{s,-}^{j,\ell} \quad \text{si } \ell = s+2j-1.$$

La résolution du système linéaire (1-33) est alors effectuée par la méthode de GAUSS-JORDAN à pivot maximum. On remarquera que si τ_1 n'est pas trop petit ($\tau_1 > 1$), on peut se ramener à des résolutions successives

de systèmes d'ordre p seulement (GUILLEMOT, 1966). En effet, pour une couche semi-infinie ($\tau_1 \rightarrow \infty$), la condition à la limite du fond donne des constantes $k_s^{-i} \equiv 0$. Pour τ_1 grand, on tend vers cette condition et on trouve des constantes d'intégration beaucoup plus petites pour la moitié inférieure $\{K^-\}$ que pour la moitié supérieure $\{K^+\}$ du vecteur colonne en k_s^i du système (1-33). Cette disproportion des constantes d'intégration peut se prévoir à partir de la dissymétrie des coefficients $*C_j^i$ et $*D_j^i$ dans l'équation (1-34e), les coefficients A_j^i et B_j^i étant comparables. Posant

$$*k_s^{-i} = k_s^{-i} \exp(v_s^i \tau_1),$$

et
$$*B_j^i = B_j^i \exp(-v_s^i \tau_1),$$

de façon à éviter des dépassements de capacité mémoire de l'ordinateur si $v_s^i \tau_1$ devient grand, le système (1-33) s'écrit

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A_j^i & *B_j^i \\ \hline *C_j^i & D_j^i \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline k_s^i \\ \hline *k_s^i \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline E_j \\ \hline *F_j \\ \hline \end{array} \quad (1-35)$$

On résoudra d'abord le système linéaire d'ordre p obtenu en négligeant $\{K^-\}$ soit

$$\{A\} \{K^+\} = \{E\} + k_s^i = k_{s(0)}^i \quad (1-36)$$

Substituant ces valeurs approchées $k_{s(0)}^i$ des constantes k_s^i dans $\{K^+\}$ on aura en première approximation pour les constantes $*k_s^{-i}$

$$\{D\} \{*K^-\} = \{*F\} - \{*C\} \{K^+\}_{(0)} \quad (1-37)$$

et il suffit d'itérer les équations (1-36) et (1-37) successivement en complétant (1-37) au second membre par le terme correctif

$$- \{ *B \} \quad \{ *K^- \} ,$$

Une dizaine d'itérations suffisent pour $\tau_1 > 1$ et $\omega_0 < 0.99$. La convergence est plus rapide si τ_1 augmente, mais se ralentit si ω_0 tend vers 1, ce qui correspond à une influence du fond d'autant plus faible que la couche est plus épaisse, et plus absorbante. Pour l'ordre d'approximation $2p$ maximum de l'ordre de 40, auquel nous sommes actuellement limités comme on le verra par la suite, la résolution directe du système linéaire (1-35) est encore réalisable.

II - 4 - AMÉLIORATION DU RÉSULTAT PAR ITÉRATION

Tous les termes de l'expression (1-20) de la luminance sont ainsi déterminés et on peut calculer

$$I(\tau; \mu, \phi) = \sum_{s=0}^L (2-\delta_{0s}) \cos s\phi \left\{ \sum_{\ell=s}^{s+2p-1} (2\ell+1) P_{\ell}^s(\mu) \right. \\ \left. \times \left\{ \exp(\tau/\mu_0) h_s^{\ell} + \sum_{\substack{i=-p \\ i \neq 0}}^{+p} k_s^i \exp(-v_s^i \tau) g_s^{\ell}(v_s^i) \right\} \right\} \quad (1-38)$$

Cette expression approchée donne en fait, surtout à $\tau = 0$, un diagramme qui oscille désagréablement autour de la répartition exacte de la luminance; et d'une utilisation peu pratique pour des interprétations de mesures. Mais on peut effacer ce défaut en améliorant la précision des résultats (KOURGANOFF, 1952), si on procède à une dernière itération. L'équation (1-11) peut s'écrire sous la forme

$$\mu \frac{\partial I^S}{\partial \tau}(\tau; \mu) = I^S(\tau; \mu) - J^S(\tau; \mu) \quad (1-39)$$

où

$$J^S(\tau; \mu) = \omega_0 \exp(\tau/\mu_0) \left\{ \sum_{\ell=S}^L \beta_\ell P_S^\ell(\mu) \left(P_S^\ell(\mu_0) \frac{F}{4} + h_S^\ell \right) \right\} \quad (1-40)$$

$$+ \omega_0 \sum_{\ell=S}^L \beta_\ell P_S^\ell(\mu) \left\{ \sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} k_S^i g_S^\ell(v_S^i) \exp(-v_S^i \tau) \right\},$$

compte tenu de l'expression obtenue pour $I^S(\tau; \mu)$. L'intégration formelle de (1-39) est immédiate et donne

$$I_+^S(\tau; \mu) = I_+^S(\tau_1; \mu) \exp(-(\tau_1 - \tau)/\mu) + \frac{1}{\mu} \int_{\tau_1}^{\tau} J_S(t, \mu) \exp(-(t - \tau)/\mu) dt, \quad (1-41)$$

$$I_-^S(\tau; \mu) = I_-^S(0; \mu) \exp(\tau/\mu) - \frac{1}{\mu} \int_0^{\tau} J^S(t; \mu) \exp(-(t - \tau)/\mu) dt,$$

où l'on a distingué

$$I_+^S(\tau; \mu > 0) \text{ pour le rayonnement montant}$$

et

$$I_-^S(\tau; \mu < 0) \text{ pour le rayonnement descendant.} \quad (1-42)$$

Il est clair que ces expressions satisfont rigoureusement aux conditions aux limites imposées.

La substitution de l'expression (1-40) de $J^S(\tau; \mu)$ dans les seconds membres, après une dernière intégration donne le résultat définitif

$$I_+^S(\tau; \mu) = I_+^S(\tau_1; \mu) \exp(-(\tau_1 - \tau)/\mu) + \frac{\omega_0 \mu_0}{\mu} \left\{ \exp(\tau_1/\mu_0) \exp((\tau - \tau_1)/\mu) - \exp(\tau/\mu_0) \right\}$$

$$\times \sum_{\ell=S}^L \beta_\ell P_S^\ell(\mu) \left(P_S^\ell(\mu_0) \frac{F}{4} + h_S^\ell \right)$$

$$+ \sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} \frac{\omega_0 k_S^i}{1 + \mu v_S^i} \left\{ \exp(-v_S^i \tau_1) \exp((\tau - \tau_1)/\mu) - \exp(-v_S^i \tau) \right\} \quad (1-43a)$$

$$\times \sum_{\ell=S}^L \beta_\ell P_S^\ell(\mu) g_S^\ell(v_S^i). \quad \text{pour } \mu > 0,$$

$$\begin{aligned}
 I_{-}^S(\tau; \mu) &= I_{-}^S(0, \mu) \exp(\tau/\mu) + \frac{\omega_0 \mu_0}{\mu - \mu_0} \left\{ \exp(\tau/\mu) - \exp(\tau/\mu_0) \right\} \\
 &\times \sum_{\ell=S}^L \beta_{\ell} P_S^{\ell}(\mu) \left((P_S^{\ell}(\mu_0) \frac{E}{4} + h_S^{\ell}) \right) \\
 &- \sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} \frac{\omega_0 k_S^i}{1 + \mu v_S^i} \left\{ \exp(\tau/\mu) - \exp(-v_S^i \tau) \right\} \quad (1-43b) \\
 &\times \sum_{\ell=S}^L \beta_{\ell} P_S^{\ell}(\mu) g_S^{\ell}(v_S^i), \text{ pour } \mu < 0,
 \end{aligned}$$

$$I_{\pm}^S(\tau; \mu, \Phi) = \sum_{s=0}^L (2 - \delta_{0s}) \cos s \Phi \cdot I_{\pm}^S(\tau; \mu). \quad (1-43c)$$

Pour des valeurs de μ voisines de $-1/v_S^i$ ou de μ_0 , les expressions (1-43 a et b) risquent de conduire à des indéterminations, et on leur substituera alors des développements limités au premier ordre. On vérifiera facilement que les termes

$$\frac{k_S^{-i}}{1 + \mu v_S^{-i}} \left\{ \exp(v_S^i \tau_1) \exp((\tau - \tau_1)/\mu) - \exp(+v_S^i \tau) \right\}$$

intervenent dans $I_{+}^S(\tau; \mu)$ et

$$\frac{k_S^i}{1 - |\mu| v_S^i} \left\{ \exp(-\tau/|\mu|) - \exp(-v_S^i \tau) \right\}$$

intervenent dans $I_{-}^S(\tau; \mu)$

pourront être remplacés quand $\mu \rightarrow 1/v_S^i$ respectivement par

$$k_S^i \left(\frac{\tau - \tau_1}{\mu} \right) \exp(\tau/\mu)$$

et $k_S^i \frac{\tau}{\mu} \exp(-\tau/|\mu|)$,

et que la quantité

$$\frac{\mu_0}{\mu - \mu_0} \{ \exp(\tau/\mu) - \exp(\tau/\mu_0) \}$$

qui apparait dans l'expression de $I_{-}^S(\tau; \mu)$ est équivalente à

$$- \tau/\mu_0 \exp(\tau/\mu_0) \quad \text{lorsque } \mu \rightarrow \mu_0. \quad (1-40e)$$

II - 5 - CALCUL DES FLUX

Compte tenu de l'expression (1-10) et (1-12) de $I(\tau; \mu, \phi)$, le flux énergétique reçu par une surface unité

$$F(\tau) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \mu I(\tau; \mu, \phi) d\mu d\phi, \quad (1-44)$$

s'écrira ici

$$F(\tau) = 2\pi \int_{-1}^{+1} \mu I^0(\tau; \mu) d\mu = 4\pi A_0^1(\tau),$$

et d'après (1-19)

$$F(\tau) = 4\pi \left\{ \sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} k_0^i g_0^1(v_0^i) \exp(-v_0^i \tau) + h_0^1 \exp(\tau/\mu_0) \right\} \quad (1-45)$$

Le calcul de $F(\tau)$ ne présente donc aucune difficulté.

Il est parfois utile de préparer le flux montant et le flux descendant qu'on notera

$$F^+(\tau) = \int_0^{2\pi} \int_0^{+1} \mu I(\tau; \mu, \phi) d\mu d\phi, \quad (1-46a)$$

$$F^-(\tau) = - \int_0^{2\pi} \int_0^{-1} \mu I(\tau; \mu, \phi) d\mu d\phi. \quad (1-46b)$$

D'après (1-19) les termes intervenant dans (1-46) sont de la forme

$$\sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} k_o^i \exp(-v_o^i \tau) \left\{ \sum_{\ell=0}^{2p-1} (2\ell+1) g_o^\ell(v_o^i) \int_0^{\pm 1} P_\ell(\mu) d\mu \right\} .$$

On identifiera facilement les expressions entre parenthèses aux quantités $A_1^i, B_1^i, C_1^i, D_1^i$ définies précédemment.

Le flux sphérique (ou luminance moyenne au facteur 2π près), à une profondeur optique τ , sera défini par

$$\Phi(\tau) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} I(\tau; \mu, \phi) d\mu d\phi ,$$

soit

$$\Phi(\tau) = 2\pi \int_{-1}^{+1} I^0(\tau; \mu) d\mu = 4\pi A_o^0(\tau) ,$$

qui s'écrit

$$\Phi(\tau) = 4\pi \left\{ \sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} k_o^i \exp(-v_o^i \tau) + h_o^0 \exp(\tau/\mu_o) \right\} . \tag{1-47}$$

III - CAS PARTICULIERS - EXTENSIONS

Nous résumons ci-dessous quelques cas particuliers dans lesquels la méthode précédente se simplifie, ou reste applicable moyennant de légères modifications

III - 1 - CAS D'UNE COUCHE SEMI-INFINIE

Dans le cas particulier d'une couche semi-infinie, $I(\tau; \mu, \phi)$ étant bornée lorsque $\tau \rightarrow \infty$, on annulera les constantes k_s^{-i} du système linéaire (1-33); celui-ci se réduit à un système linéaire de dimension p :

$$\{A_j^i\} \{k_s^i\} = \{E_j\} \tag{1-48}$$

L'expression (1-43a) de $I_+^S(\tau; \mu)$ devient avec $\tau_1 = \infty$,

$$I_+^S(\tau; \mu) = - \frac{\omega_0 \mu_0}{\mu - \mu_0} \exp(\tau/\mu_0) \sum_{l=s}^L \beta_l P_S^l(\mu) \left(P_S^l(\mu_0) \frac{F}{4} + h_S^l \right) - \sum_{i=1}^p \frac{\omega_0 k_0^i}{1 + \mu v_S^i} \exp(-v_S^i \tau) \sum_{l=s}^L \beta_l P_S^l(\mu) g_S^l(v_S^i), \quad (1-49)$$

tandis que (1-43b) reste inchangée à condition de limiter la sommation sur i de 1 à p . On remarquera que pour τ assez grand, seul subsiste le terme correspondant à la plus petite des racines v_S^i obtenues. Celle-ci apparaissant toujours dans l'expression de $I^0(\tau; \mu)$, le rayonnement en grande profondeur sera caractérisé par une décroissance exponentielle pure et possédera la symétrie de révolution autour de la verticale quelle que soit la direction du rayonnement incident (HERMAN, 1968)

III - 2 - CAS D'UN MILIEU CONSERVATIF

Pour un albédo ω_0 unité, ce qui précède reste inchangé, sauf si $s = 0$. Dans ce cas la racine $X_1^{(p)}$ est en effet nulle et on ne dispose plus que de $(2p-2)$ solutions particulières linéairement indépendantes, en $\exp(-v_0^i \tau)$, du système associé à (1-13). Ce système s'écrit ici

$$l \frac{dA_0^{l-1}}{d\tau} + (l+1) \frac{dA_0^{l+1}}{d\tau} = (2l+1-\beta_l) A_0^l, \quad (1-50)$$

soit $\frac{\partial A_0^1}{\partial \tau} = 0,$

$$\frac{\partial A_0^0}{\partial \tau} + \frac{2\partial A_0^2}{\partial \tau} = (3-\beta_1) A_0^1,$$

$$\frac{2\partial A_0^1}{\partial \tau} + \frac{3\partial A_0^3}{\partial \tau} = (5-\beta_2) A_0^2, \text{ etc}$$

une première solution évidente est donnée par

$$A_0^0 = \text{cte} = k_0^1 ; A_0^1 = A_0^2 = \dots = A_0^{2p-1} = 0.$$

On vérifiera facilement qu'une deuxième solution particulière du système homogène (I-50) peut s'écrire

$$A_0^1 = \text{cte} = k_0^{-1} ; \quad A_0^0 = k_0^{-1} (3 - \beta_1) \tau ; \quad A_0^2 = A_0^3 = A_0^{2p-1} \equiv 0$$

En intégrant formellement l'équation (I-11), et compte tenu de la forme des deux solutions particulières introduites, les expressions (I-43a) et (I-43b) sont ici pour $s = 0$,

$$\begin{aligned} I_+^0(\tau, \mu) &= I_+^0(\tau_1; \mu) \exp(-(\tau_1 - \tau)/\mu) \\ &+ \frac{\mu_0}{\mu - \mu_0} \left\{ \exp(\tau_1/\mu_0) \exp((\tau - \tau_1)/\mu) - \exp(\tau/\mu_0) \right\} \\ &\times \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell P_\ell(\mu) (P_\ell(\mu_0) \frac{F}{4} + h_0^\ell) \\ &- \sum_{i=\pm 2}^{\pm p} \frac{k_0^i}{1 + \mu v_0^i} \left\{ \exp(-v_0^i \tau_1) \exp((\tau - \tau_1)/\mu) - \exp(-v_0^i \tau) \right\} \\ &\times \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell P_\ell(\mu) g_0^\ell(v_0^i) \tag{I-51a} \\ &- (\exp(-(\tau_1 - \tau)/\mu) - 1) (k_0^1 + 3\mu k_0^{-1}) \\ &- (\tau_1 \exp(-(\tau_1 - \tau)/\mu) - \tau) ((3 - \beta_1) k_0^{-1}) , \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_-^0(\tau; \mu) &= I_-^0(0; \mu) \exp(\tau/\mu) \\ &+ \frac{\mu_0}{\mu - \mu_0} \left\{ \exp(\tau/\mu) - \exp(\tau/\mu_0) \right\} \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell P_\ell(\mu) (P_\ell(\mu_0) \frac{F}{4} + h_0^\ell) \\ &- \sum_{i=\pm 2}^{\pm p} \frac{k_0^i}{1 + \mu v_0^i} \left\{ \exp(\tau/\mu) - \exp(v_0^i \tau) \right\} \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell P_\ell(\mu) g_0^\ell(v_0^i) \end{aligned}$$

$$- (\exp (\tau / \mu) - 1) (k_0^1 + 3\mu k_0^{-1}) \quad (1-51b)$$

$$+ \tau (3 - \beta_1) k_0^{-1} .$$

III - 3 - INTRODUCTION DE L'ÉMISSION

Pour des études en infrarouge proche, on peut avoir, en plus du rayonnement solaire une émission propre du milieu non négligeable. Si on suppose l'atmosphère en équilibre thermodynamique local, l'équation de transfert (1-8) s'écrira

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I}{\partial \tau} (\tau; \mu, \phi) &= I(\tau; \mu, \phi) - \frac{\omega_0}{4\pi} \int_0^2 \int_{-1}^{+1} P(\mu, \phi; \mu', \phi') I(\tau; \mu', \phi') d\mu' d\phi' \\ &- \frac{\omega_0}{4\pi} P(\mu, \phi; \mu_0, \phi_0) \pi F \exp (\tau / \mu_0) - (1 - \omega_0) B(\tau), \end{aligned} \quad (1-52)$$

où $B(\tau)$ est la luminance du corps noir à la température régnant à la profondeur optique τ .

Dans le développement en série de FOURIER de l'équation de transfert, $B(\tau)$, isotrope n'apparaîtra que dans le terme indépendant de l'azimuth pour lequel l'équation (1-11) prendra la forme

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I^0}{\partial \tau} (\tau; \mu) &= I^0(\tau; \mu) - \frac{\omega_0}{2} \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell P_\ell(\mu) \int_{-1}^{+1} P_\ell(\mu) I_0(\tau; \mu') d\mu' \\ &- \frac{\omega_0}{4\pi} \pi F \exp (\tau / \mu_0) \sum_{\ell=0}^L \beta_\ell P_\ell(\mu) P_\ell(\mu_0) - (1 - \omega_0) B(\tau). \end{aligned} \quad (1-53)$$

La seule modification du système différentiel (1-13) en $A_0^\ell(\tau)$ apparaît donc pour $\ell = 0$ (MARENGO, 1967), avec

$$\begin{aligned} \frac{dA_0^{\ell-1}}{d\tau} + (\ell+1) \frac{dA_0^{\ell+1}}{d\tau} &= (2\ell+1 - \omega_0 \beta_\ell) A_0^\ell - (1 - \omega_0) \delta_0^\ell B(\tau) \\ &- \frac{\omega_0}{\pi} \pi F \exp (\tau / \mu_0) \beta_\ell P_\ell(\mu_0). \end{aligned} \quad (1-54)$$

La solution générale du système homogène associé sera inchangée et le seul problème sera de trouver une solution particulière du système complet.

En cherchant celle ci sous la forme

$$A_o^l(\tau) = h_o^l \exp(\tau/\mu_o) + *A_o^l(\tau), \tag{1-55}$$

on sera conduit au nouveau système homogène

$$l \frac{d *A_o^{l-1}}{d\tau} + (l+1) \frac{d *A_o^{l+1}}{d\tau} = (2l+1-\omega_o \beta_l) *A_o^l - (1-\omega_o) \delta_o^l B(\tau) \tag{1-56}$$

soit

$$\frac{d *A_o^1}{d\tau} = (1-\omega_o) (*A_o^0 - B(\tau)) \quad \text{si } l = 0$$

$$l \frac{d *A_o^{l-1}}{d\tau} + (l+1) \frac{d *A_o^{l+1}}{d\tau} = (2l+1-\omega_o \beta_l) *A_o^l \quad \text{si } l \geq 1$$

Posons $*A_o^0 = B(\tau)$ et $*A_o^1 = 0$.

On vérifiera facilement que les fonctions $*A_o^l(\tau)$ s'expriment facilement à partir des fonctions $*A_o^{l-2}(\tau)$ et de la primitive de la fonction $*A_o^{l-1}(\tau)$.

La possibilité de résoudre un tel système dépendra donc essentiellement de la forme de la fonction $B(\tau)$. Si celle ci peut se représenter par un polynôme ou une série d'exponentielles, les intégrations successives seront simples et les fonctions $*A_o^l(\tau)$ facilement déduites par récurrence.

Dans le cas particulier d'un milieu isotherme la solution est triviale $B(\tau) = B = \text{constante}$; et donc

$$*A_o^0 = B ; *A_o^1 = *A_o^2 = \dots = *A_o^n \equiv 0 .$$

L'intensité $I^0(\tau; \mu)$ s'écrira alors

$$I^0(\tau; \mu) = B + \sum_{\ell=0}^{2p-1} (2\ell+1) P_\ell(\mu) \left\{ \sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} k_0^i g_0^\ell (v_0^i) \exp(-v_0^i \tau) + h_0^\ell \exp(\tau/\mu_0) \right\} .$$

Après intégration formelle de l'équation de transfert, la contribution de l'émission se traduira en ajoutant respectivement aux expressions (1-43a) et (1-43b) les termes correctifs

$$B (1 - \exp(-(\tau_1 - \tau)/\mu)) \text{ et } B (1 - \exp(\tau/\mu)) .$$

III - 4 - CAS D'UNE RÉFLEXION DIFFUSE DU SOL

Dans ce qui précède, la luminance du sol $J(\tau_1; \mu > 0, \Phi)$ était supposée connue. La méthode se généralise sans difficulté au cas d'une réflexion diffuse connue du fond, pour laquelle $J(\tau_1; \mu > 0, \Phi)$ dépendra du rayonnement transmis $I(\tau_1; \mu < 0, \Phi)$. Nous avons plus particulièrement envisagé le cas d'un sol réfléchissant en partie le rayonnement incident suivant la loi de LAMBERT; ce qui constitue en général une bonne approximation des milieux naturels. Le flux reçu par le sol s'écrivant

$$F_{\text{sol}} = \pi F \mu_0 \exp(\tau_1/\mu_0) + 2\pi \int_{-1}^0 \mu I^0(\tau_1; \mu) d\mu, \quad (1-57)$$

le flux réfléchi sera

$$F_{\text{réfléchi}} = -\rho F_{\text{sol}},$$

et la luminance $J(\tau_1; \mu > 0, \Phi)$ étant ici isotrope, on aura

$$J^+(\tau_1; \mu) = -\frac{\rho}{\pi} \left(\mu_0 \pi F \exp(\tau_1/\mu_0) + 2\pi \int_{-1}^0 \mu I^0(\tau_1; \mu) d\mu \right), \quad (1-58)$$

soit compte tenu de (1-20)

$$\begin{aligned}
 J^+(\tau_1; \mu) = & - \frac{\rho}{\pi} \left\{ \mu_0 \pi F \exp(\tau_1/\mu_0) + 2\pi \sum_{\substack{i=-p \\ i \neq 0}}^{+p} k_0^i \exp(-v_0^i \tau_1) \right. \\
 & \times \left(\sum_{\ell=0}^{2p-1} (2\ell+1) g_0^\ell(v_0^i) \int_{-1}^0 \mu P_\ell(\mu) d\mu \right) \\
 & \left. + 2\pi \exp(\tau_1/\mu_0) \sum_{\ell=0}^{2p-1} h_0^\ell \int_{-1}^0 \mu P_\ell(\mu) d\mu \right\}.
 \end{aligned} \tag{1-59}$$

Le système linéaire (1-33) peut alors s'écrire sous la forme

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A_j^i & B_j^i \\ \hline \hline *C_j^i & *D_j^i \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline k_s^i \\ \hline \hline k_s^{-i} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline E_j \\ \hline \hline *F_j^i \\ \hline \end{array} \tag{1-60}$$

où

$$\begin{aligned}
 *C_j^i &= *C_j^i - 2\rho A_1^i \exp(-v_0^i \tau_1) \int_0^{+1} P^{2j-1}(\mu) d\mu, \\
 *D_j^i &= *D_j^i - 2\rho B_1^i \exp(v_0^i \tau_1) \int_0^{+1} P^{2j-1}(\mu) d\mu, \\
 *F_j^i &= *F_j^i - \exp(\tau_1/\mu_0) (\mu_0 F + 2 E_1) \int_0^{+1} P^{2j-1}(\mu) d\mu.
 \end{aligned}$$

Le calcul des termes correctifs ne présente aucune difficulté supplémentaire. Le système (1-60) définit les k_0^i , les autres constantes k_s^i ($s > 1$) restant inchangées.

On pourrait sans grande difficulté de principe, étendre la méthode à des lois de réflexion différentes.

III - 5 - CAS DE PLUSIEURS COUCHES DIFFUSANTES

Dans l'étude du rayonnement rediffusé par Vénus, nous serons amené à considérer le problème de plusieurs couches diffusantes superposées; chacune d'elles sera caractérisée par sa fonction de phase, son albédo pour une diffusion et son épaisseur optique. La luminance I_n^S dans la $n^{\text{ième}}$ couche s'exprimera toujours sous la forme (I-20) ou les $v_s^{i(n)}$, $g_s^{l(n)}$ et $h_s^{l(n)}$ se calculeront comme précédemment. La seule modification vient des conditions aux limites pour le calcul des constantes $k_s^{i(n)}$. Nous ne détaillons les calculs, auxquels conduirait la simple généralisation de ce qui précède, que dans le cas de deux couches, les indices (1) et (2) se rapportant respectivement à la couche supérieure et inférieure.

Les conditions de surface et de sol restent inchangées,

$$I_1^S (\tau=0, \mu < 0) \equiv 0 \text{ et}$$

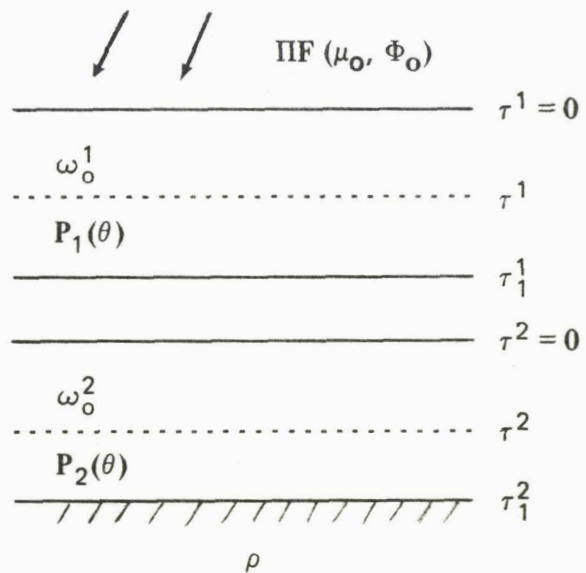
$$I_2^S (\tau_1^2, \mu > 0) = \frac{1}{\pi} \rho F_2(\tau_1^2).$$

Nous devons ajouter la continuité de la luminance à la jonction entre les 2 couches soit

$$I_1^S (\tau_1^1) \equiv I_2^S (0).$$

Avec les notations employées précédemment, on vérifiera aisément que ces conditions conduisent aux systèmes d'équations suivants :
pour la surface

$$\sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0 \\ +p}}^{+p} k_{s1}^i \left\{ \begin{array}{l} A_j^{i1} \quad i > 0 \\ B_j^{i1} \quad i < 0 \end{array} \right\} = E_j^1 \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad (I-61a)$$



pour le sol

$$\sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} k_{s2}^i \left\{ \begin{array}{l} C_j^{i2} \quad i > 0 \\ D_j^{i2} \quad i < 0 \end{array} \right\} = {}^*F_j'^2, \quad (1-61b)$$

avec

$${}^*F_j'^2 = {}^*F_j^2 - \rho \exp(\tau_1^2/\mu_0) \left\{ \mu_0 F \exp(\tau_1^1/\mu_0) + 2 E_j^1 \int_0^1 \rho^{2j-1}(\mu) d\mu \right\};$$

le terme $\mu_0 F \exp(\tau_1^1/\mu_0)$ caractérise l'atténuation du faisceau solaire dans la traversée de la couche supérieure.

A la jonction pour $\mu > 0$

$$\sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} k_{s1}^i \left\{ \begin{array}{l} {}^*C_j^{i1} \quad i > 0 \\ {}^*D_j^{i1} \quad i < 0 \end{array} \right\} = {}^*F_j^1 - F_j^2 + \sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} k_{s2}^i \left\{ \begin{array}{l} C_j^{i2} \quad i > 0 \\ D_j^{i2} \quad i < 0 \end{array} \right\} \quad (1-61c)$$

A la jonction pour $\mu < 0$

$$\sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} k_{s1}^i \left\{ \begin{array}{l} {}^*A_j^{i1} \quad i > 0 \\ {}^*B_j^{i1} \quad i < 0 \end{array} \right\} = {}^*E_j^1 - E_j^2 + \sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} k_{s2}^i \left\{ \begin{array}{l} A_j^{i2} \quad i > 0 \\ B_j^{i2} \quad i < 0 \end{array} \right\} \quad (1-61d)$$

Ce système peut se mettre sous la forme matricielle

A_j^{i1}	B_j^{i1}	o	o	}	k_{s1}^i	}	E_j^1
${}^*C_j^{i1}$	${}^*D_j^{i1}$	$-C_j^{i2}$	$-D_j^{i2}$		k_{s1}^{-i}		${}^*F_j^1 - F_j^2$
${}^*A_j^{i1}$	${}^*B_j^{i1}$	$-A_j^{i2}$	$-B_j^{i2}$		k_{s2}^i		${}^*E_j^1 - E_j^2$
o	o	${}^*C_j^{i2}$	${}^*D_j^{i2}$		k_{s2}^{-i}		${}^*F_j'^2$

$$i = 1, 2, \dots, p \quad j = 1, 2, \dots, p$$

La dimension du système à résoudre est donc doublée par rapport au cas d'une seule couche, et plus généralement pour un problème à n couches la place mémoire retenue croîtrait en n^2 . Les possibilités de cette résolution directe semblent limitées et nous avons préféré une méthode itérative. Si τ_1^1 est assez grand ($>$ quelques unités) l'influence de la couche inférieure sur la couche (1) se réduira à une réflexion diffuse de flux et le rayonnement de la couche supérieure sera donc assez voisin de celui d'une couche unique, ayant les mêmes caractéristiques mais limitée par un sol de coefficient de réflexion ρ' égal à l'albédo de la couche inférieure. Celui-ci pourra être évalué facilement par une méthode approchée (Bigourd ; 1975) sur laquelle nous reviendrons par la suite. La méthode de résolution sera donc la suivante: on cherchera une première approximation en remplaçant la couche inférieure par un sol de coefficient ρ' . Puis on calculera les constantes $k_s^{\pm i}$ en prenant pour I_2^S ($0; \mu < 0$) cette valeur approchée du rayonnement transmis par (1). On itère alors jusqu'à la stabilisation des constantes. Le choix du test pourra éventuellement être modulé selon le résultat cherché. Par exemple, si l'on ne s'intéresse qu'au seul rayonnement émergent de la couche supérieure, on limitera le test aux seules constantes k_s^i et k_s^{-i} . En général, le nombre d'itérations nécessaires est inférieur à une dizaine et il diminue lorsque s augmente. Comme le temps de résolution du système en k_s^i est sensiblement proportionnel au cube de la dimension de celui ci, cette méthode est préférable. L'extension de la méthode à un nombre quelconque de couches serait immédiat.

III - 6 - CAS D'UN MILIEU D'ABSORPTION VARIABLE

L'étude d'une couche inhomogène pourra se ramener au cas précédent en décomposant le milieu en sous couches assez fines pour qu'on puisse les considérer comme homogènes et caractérisées par des valeurs

moyennes de leur albédo de diffusion et de leur fonction de phase. Cette façon de procéder ne peut être envisagée que si l'inhomogénéité du milieu est faible et le nombre nécessaire de sous couches à considérer petit. Sinon la méthode des ordres successifs de diffusion sera mieux adaptée au problème. On peut néanmoins étendre l'utilisation de la méthode des " Harmoniques Sphériques " au cas où l'albédo de diffusion varie avec la profondeur optique, la fonction de phase restant constante.

Soit

$$\omega_0(\tau) = \omega_0 (1 + \epsilon(\tau)) \quad (1-62)$$

On peut alors développer sous forme semi analytique une méthode itérative si $\epsilon(\tau)$ est de forme exponentielle (DEUZE ; 1973 ; DEUZE, DEVAUX, HERMAN ; 1975)

$$\epsilon(\tau) = \epsilon \exp(-b\tau). \quad (1-63)$$

Un tel type d'inhomogénéité verticale étant vraisemblable pour des atmosphères planétaires réelles à certaines longueur d'onde (échelles de hauteur différentes pour un absorbant gazeux et les aérosols) les calculs s'y rapportant ont été développés.

Nous n'exposerons ici que le principe général de la méthode dans le cas de l'incidence normale; l'extension au cas général est immédiate. Seul subsiste donc le terme $\underline{s} = 0$ et on omettra désormais cet indice. Compte tenu de (1-62) et avec $\mu_0 = -1$ l'équation (1-11) s'écrit ici

$$\mu \frac{\partial I}{\partial \tau}(\tau; \mu) = I(\tau; \mu) - \frac{\omega_0}{2} \left(\sum_{\ell=0}^{2p-1} \beta_{\ell} P_{\ell}(\mu) \right)$$

$$\left\{ \frac{E}{2} (-1)^l + \exp(-\tau) + \int_{-1}^{+1} I(\tau; \mu') P_l(\mu') d\mu' \right\} - \frac{\omega_0}{2} \varepsilon(\tau) \left(\sum_{l=0}^{2p-1} \beta_l P_l(\mu) \right) \quad (1-64)$$

$$\left\{ \frac{E}{2} (-1)^l \exp(-\tau) + \int_{-1}^{+1} I(\tau; \mu') P_l(\mu') d\mu' \right\}$$

Si on néglige le terme d'inhomogénéité en $\varepsilon(\tau)$ dans l'équation (1-64) la solution se réduit à l'expression (1-20) établie précédemment soit

$$I^{(0)}(\tau; \mu) = \sum_l^{2p-1} (2l+1) P_l(\mu) \times \left(h_{l,(0)} \exp(-\tau) + \sum_{\substack{i=-p \\ \neq}}^{+p} k_i^{(0)} g_l(v_i) \exp(v_i \tau) \right) \quad (1-65)$$

où l'indice (0) sur I et les constantes k_i précise l'ordre d'approximation.

Pour améliorer la solution sans modifier sa forme il suffit de faire intervenir l'inhomogénéité de façon approchée en remplaçant I par $I^{(0)}$ dans l'intégrale en $\varepsilon(\tau)$ de l'équation (1-64). Si $\varepsilon(\tau)$ est de la forme (1-63) l'équation de transfert pour $I^{(1)}$ à la même forme que pour $I^{(0)}$ mais présente au second membre (2p+2) sources connues en $\exp(-\alpha\tau)$ ($\alpha = 1, 1+b, (v_i + b); i = \pm 1, \dots, \pm p$) au lieu de la seule source en $\exp(-\tau)$.

La solution $I^{(1)}$ s'écrira donc

$$\begin{aligned}
 I^{(1)}(\tau; \mu) = & \sum_{\ell=0}^{2p-1} (2\ell + 1) P_{\ell}(\mu) \left(\sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} k_i^{(1)} g_{\ell}(v_i) \exp(-v_i \tau) \right. \\
 & + h_{\ell,0} \exp(-\tau) + h_{\ell,1} \exp(-(1+b)\tau) \\
 & \left. + \sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} j_{\ell,i,1}^{(1)} \exp(-(v_i+b)\tau) \right) \quad (1-66)
 \end{aligned}$$

La procédure se poursuit en substituant toujours à I dans l'intégrale en $\varepsilon(\tau)$ la dernière approximation obtenue en $I^{(n-1)}$. Finalement dans l'approximation d'ordre (n) on vérifie facilement qu'à la solution inchangée du système homogène dont seules restent à calculer les constantes d'intégration $k_i^{(n)}$, s'ajoutent $\{(n+1) + 2pn\}$ solutions particulières en $\exp(-\tau)$, $\exp(-(1+b)\tau)$, ..., $\exp(-(1+bn)\tau)$ et $\exp(-(v_i+b)\tau)$, ..., $\exp(-(v_i+bn)\tau)$, ($i = \pm p$); d'où l'expression générale de la solution à l'ordre (n) :

$$\begin{aligned}
 I^{(n)}(\tau; \mu) = & \sum_{\ell=0}^{2p-1} (2\ell + 1) P_{\ell}(\mu) \left(\sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} k_i^{(n)} g_{\ell}(v_i) \exp(-v_i \tau) \right. \\
 & + \sum_{k=0}^n h_{\ell,k} \exp(-1+bk)\tau \\
 & \left. + \sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} \sum_{k=1}^n j_{\ell,i,k}^{(n)} \exp(-(v_i+kb)\tau) \right) \quad (1-67)
 \end{aligned}$$

Les coefficients $h_{\ell, k}$ sont en fait indépendants de l'ordre (n) et on peut

les déterminer directement en poussant leur calcul jusqu'à un ordre N tel que l'on ait $h_{\ell,N} \ll h_{\ell,0}$.

D'autre part, en posant

$$j_{\ell,i,k}^{(n)} = k_i^{(n-k)} g_{\ell,i,k}, \quad g_{\ell}(v_i) = g_{\ell,i,0}, \quad (1-68)$$

on peut déterminer les coefficients $g_{\ell,i,k}$ indépendamment des conditions aux limites. En effet lorsque l'ordre d'approximation n augmente les termes supplémentaires introduits dans la solution (1-67) (c'est à dire les termes en $j_{\ell,i,k}^{(n)}$ pour $k > N$) deviennent négligeables. On peut donc écrire

$$I^{(\infty)}(\tau; \mu) = \sum_{\ell=1}^{2p-1} (2\ell+1) P_{\ell}(\mu) \left(\sum_{k=0}^N h_{\ell,k} \exp(-(1+kb)\tau) + \sum_{\substack{i=-p \\ \neq 0}}^{+p} k^i \left\{ \sum_{k=0}^N g_{\ell,i,k} \exp(-(v_i+kb)\tau) \right\} \right), \quad (1-69)$$

où N est tel que $h_{\ell,N}$ et $g_{\ell,i,N}$ soient tous négligeables.

Les constantes k_i seront calculées comme précédemment et les expressions finales de I seront améliorées en les substituant toujours dans les solutions formelles (1-41) de l'équation de transfert.

IV - PRECISION ET LIMITES DE LA METHODE

Quatre méthodes de résolution de l'équation de transfert ont été programmées au Laboratoire (DEVAUX et al 1973)

- a) La méthode des principes d'invariance (CHANDRASEKHAR, 1950) qui n'a été utilisée que pour des couches semi infinies, et qui fournit le rayonnement sortant au sommet de la couche;

- b) La méthode du doublage (VAN DE HULST et GROSSMANN, 1968 ; HANSEN, 1969) dans laquelle, connaissant le rayonnement sortant en haut

et en bas d'une couche d'épaisseur optique τ , on calcule celui réfléchi et transmis par une couche d'épaisseur 2τ (d'où le nom de la méthode). La couche de départ est prise d'épaisseur assez faible ($\tau = 2 \cdot 10^{-16}$) pour que les diffusions multiples soient négligeables.

- c) La méthode des ordres successifs de diffusion (KOURGANOFF, 1952 ; LENOBLE, 1961) calcule la luminance du rayonnement diffusé $(j+1)$ fois à partir du rayonnement diffusé j fois. La solution est ici encore amorcée par un calcul de diffusion primaire.

- d) La méthode des harmoniques sphériques que nous venons d'étudier plus spécialement.

Dans toutes ces méthodes, la fonction de phase est développée en série de polynômes de LEGENDRE, suivant (1-9) pour permettre le développement en série de FOURIER sous la forme (1-10)

IV - 1 - RÉSULTATS OBTENUS PAR CES MÉTHODES

La méthode des principes d'invariance ne peut donner que le rayonnement rétrodiffusé par une couche semi infinie. La méthode de doubling permet d'obtenir le rayonnement en haut, en bas et au milieu de la couche, pour une série d'épaisseurs optiques croissant en progression géométrique de raison 2 ; pour $\omega_0 < 1$, des couches suffisamment épaisses donneront une excellente approximation d'un milieu semi infini.

Les méthodes des harmoniques sphériques et des ordres successifs permettent d'obtenir le rayonnement à toute profondeur dans la couche, en plus du rayonnement sortant, les temps calculs augmentant néanmoins rapidement avec l'épaisseur pour cette dernière méthode.

Dans les méthodes des principes d'invariance, de doubling et des ordres successifs les directions de diffusion considérées sont fixées par les points de la quadrature utilisée pour le calcul des intégrales sur u (points de Gauss en général); des directions supplémentaires peuvent être ajoutées sans difficulté. Contrairement à la méthode des ordres successifs

qui ne permet de traiter qu'une seule direction d'incidence, les principes d'invariance et le doubling donnent simultanément les résultats pour autant de directions d'incidence que de points de quadrature. Les harmoniques sphériques permettent de faire le calcul pour n'importe quelle direction d'incidence et pour toutes les directions de diffusion voulues ; si on veut traiter le même problème pour plusieurs directions d'incidence une partie seulement du calcul doit être reprise à chaque fois comme l'indique l'organigramme.

A priori, si ces différentes méthodes ont donc des possibilités à peu près équivalentes pour analyser le rayonnement rediffusé par une atmosphère diffusante, on voit que des calculs d'échauffement radiatif à l'intérieur du milieu ne seront abordables que par les H.S. et les O.S. Toutefois, on verra que cette dernière méthode est très inférieure, au point de vue du temps calcul, dès que le milieu est optiquement épais.

IV - 2 - PRÉCISION DES RÉSULTATS

Une étude systématique de la précision a été faite sur la méthode des principes d'invariance pour obtenir la luminance à quelques unités près sur la cinquième décimale, de façon à servir de référence pour la comparaison des méthodes.

Dans les méthodes de doubling, des principes d'invariance et des ordres successifs, la précision n'est en principe limitée que par le calcul des intégrales sur μ effectué par une quadrature de Gauss; et l'extrapolation par une série géométrique de la somme d'une série infinie de termes. La précision du résultat peut donc être évaluée en augmentant ce nombre des points de Gauss et en faisant le calcul de la série à un ordre plus élevé. Quelques résultats de comparaison sont donnés dans les tableaux (1.2 à 1.7). Tous les calculs ont été faits avec un éclairement incident égal à π . Ces tableaux montrent un parfait accord entre les méthodes de principes d'invariance et de doubling. La méthode des harmoniques sphériques donne dans tous les cas une précision meilleure que 1%, atteignant

μ	S = 0			S = 1			S = 2			S = 3		
	PI	HS	D	PI	HS	D	PI	HS	D	PI	HS	D
0,01305	0,40436	0,40303	0,40437	0,24655	0,24560	0,34654	0,10645	0,10619	0,10649	0,03090	0,03088	0,03090
0,06747	0,40037	0,39677	0,40038	0,22956	0,22787	0,22956	0,09410	0,09374	0,09414	0,02627	0,02630	0,02633
0,16030	0,37486	0,37219	0,37487	0,19500	0,19388	0,19499	0,07461	0,07439	0,07464	0,01977	0,01975	0,01977
0,28330	0,33501	0,33328	0,33501	0,15270	0,15203	0,15268	0,05371	0,05359	0,05374	0,01314	0,01313	0,01314
0,42556	0,29079	0,28966	0,29079	0,11188	0,11147	0,11185	0,03547	0,03540	0,03549	0,00770	0,00770	0,00770
0,50000	0,26946	0,26854	0,26946	0,09378	0,09345	0,09375	0,02794	0,02789	0,02796	0,00560	0,00560	0,00560
0,57444	0,24949	0,24874	0,24949	0,07764	0,07738	0,07761	0,02154	0,02150	0,02156	0,00392	0,00392	0,00392
0,71670	0,21499	0,21448	0,21498	0,05135	0,05120	0,05133	0,01192	0,01189	0,01193	0,00168	0,00168	0,00168
0,83970	0,18870	0,18834	0,18868	0,03212	0,03203	0,03210	0,00578	0,00576	0,00578	0,00057	0,00057	0,00057
0,93253	0,17077	0,17050	0,17075	0,01810	0,01805	0,01808	0,00217	0,00217	0,00217	0,00013	0,00013	0,00013
0,98695	0,16095	0,16072	0,16092	0,00732	0,00730	0,00731	0,00039	0,00039	0,00039	0,00001	0,00001	0,00001
1	0,15866	0,15845	0,15864	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLEAU I-2: Coefficients $I^{(s)}$ du développement en azimuth de l'intensité rétrodiffusée calculée par les Principes d'Invariance (PI), les Harmoniques Sphériques (HS) et le Doubling (D) pour des particules $\alpha=2, m=1,33$ dans le cas d'une couche semi-infinie avec $\omega_0 = 0,95$ et $\mu = 0,5$



	S = 4		S = 5		S = 6		S = 7	
	PI	HS	PI	HS	PI	HS	PI	HS
0,01305	0,00768	0,00768	0,00128	0,00128	0,00015	0,00015	0,00001	0,00001
0,06747	0,00655	0,00654	0,00110	0,00110	0,00013	0,00013	0,00001	0,00001
0,16030	0,00492	0,00492	0,00083	0,00083	0,00010	0,00010	0,00001	0,00001
0,28330	0,00325	0,00325	0,00054	0,00054	0,00006	0,00006	0,00001	0,00001
0,42556	0,00186	0,00186	0,00030	0,00030	0,00003	0,00003	0,00001	0,00001
0,50000	0,00132	0,00132	0,00021	0,00021	0,00002	0,00002	/	
0,57444	0,00090	0,00090	0,00014	0,00014	0,00001	0,00001	/	
0,71670	0,00035	0,00035	0,00005	0,00005				
0,83970	0,00010	0,00010	0,00001	0,00001				
0,93253	0,00002	0,00002	/	0				
0,98695	0	0	/	0				
1	0	0	0	0	0		0	

TABLEAU I-2: (suite)



μ	$\omega_0 = 0,95$			$\omega_0 = 0,99$		
	PI	HS	D	PI	HS	D
0,013	0,10752	0,10824	0,10747	0,21414	0,21557	0,21404
0,067	0,13438	0,13374	0,13428	0,26927	0,26793	0,26911
0,160	0,16444	0,16390	0,16436	0,33735	0,33624	0,33720
0,283	0,18422	0,18405	0,18428	0,39727	0,39679	0,39723
0,425	0,19221	0,19213	0,19222	0,44066	0,44044	0,44056
0,500	0,19518	0,19506	/	0,45837	0,45816	/
0,574	0,19892	0,19883	0,19885	0,47470	0,47453	0,47451
0,717	0,20622	0,20627	0,20629	0,50087	0,50087	0,50081
0,840	0,20475	0,20468	0,20468	0,51065	0,51054	0,51044
0,933	0,19675	0,19678	0,19679	0,50823	0,50824	0,50812
0,987	0,19438	0,19435	0,19435	0,50822	0,50816	0,50803
1	0,19505	0,19483	0,19483	0,50941	0,50915	0,50902

Temps

150

50

750

300

50

750

TABLEAU I-3: Intensité rétrodiffusée par une couche semi infinie éclairée en incidence normale pour des particules $\alpha=5, m=1.33$ avec $\omega_0 = 0,95$ et $0,99$, calculée par les Principes d'Invariance (PI) les Harmoniques Sphériques (HS) et le Doubling (D)



μ	$\omega_0 = 0,95$			$\omega_0 = 0,99$		
	PI	HS	D	PI	HS	D
0,005	0,15968	0,16054	0,15967	0,26910	0,27051	0,26904
0,028	0,18059	0,17998	0,18057	0,30490	0,30380	0,30481
0,067	0,20268	0,20207	0,20266	0,34618	0,34513	0,34697
0,122	0,21568	0,21527	0,21564	0,37970	0,37914	0,37964
0,191	0,22812	0,22795	0,22819	0,41344	0,41318	0,41342
0,271	0,25867	0,25839	0,27858	0,50775	0,50752	0,50768
0,452	0,28120	0,28110	0,28124	0,52941	0,52926	0,52934
0,500	0,29538	0,29531	/	0,55269	0,55252	/
0,547	0,31333	0,31322	0,31333	0,57907	0,57893	0,57895
0,641	0,30618	0,30609	0,30619	0,58487	0,58479	0,58480
0,729	0,31035	0,31022	0,31031	0,59992	0,59980	0,59979
0,809	0,35769	0,35768	0,35775	0,65750	0,65746	0,65743
0,878	0,30517	0,30512	0,30518	0,60842	0,60832	0,60829
0,933	0,33736	0,33734	0,33739	0,64601	0,64598	0,64593
0,972	0,35167	0,35158	0,35164	0,62005	0,62001	0,62005
0,995	0,30888	0,30886	0,30892	0,62529	0,62510	0,62504
1	0,31383	0,31371	0,31375			

Temps 450 75 1500 900 75 500

TABLEAU I-4: Comme Tableau (1-3) pour $\alpha = 10$



μ	PI	D	HS
0,0024	0,09163	0,09161	0,09181
0,0126	0,09778	0,09776	0,09725
0,0309	0,10590	0,10591	0,10531
0,0568	0,11492	0,11490	0,11455
0,0900	0,12390	0,12391	0,12388
0,1299	0,13224	0,13223	0,13221
0,1760	0,13953	0,13953	0,13927
0,2273	0,14566	0,14566	0,14565
0,2831	0,15054	0,15055	0,15063
0,3425	0,15437	0,15436	0,15417
0,4044	0,15716	0,15717	0,15732
0,4680	0,15927	0,15928	0,15915
0,5000	0,16011	/	0,16002
0,5320	0,16087	0,16088	0,16098
0,5956	0,16230	0,16232	0,16223
0,6575	0,16379	0,16380	0,16388
0,7169	0,16556	0,16553	0,16546
0,7727	0,16758	0,16757	0,16766
0,8240	0,16979	0,16977	0,16967
0,8701	0,17208	0,17208	0,17221
0,9100	0,17524	0,17524	0,17511
0,9432	0,18102	0,18104	0,18116
0,9691	0,18411	0,18409	0,18402
0,9874	0,17054	0,17053	0,17057
0,9976	0,16584	0,16581	0,16581
1	0,17172	0,17175	0,17203

TABLEAU I-5: Comme Tableau (I-3) pour une granulométrie $n(r) = r^6 e^{-1,5r}$
à $\lambda = 4\mu$ avec $m = 1,345 - 0,0065 i$, $\omega_0 = 0,90991$



μ	$\tau=0$				$\tau=8$				$\tau=4$			
	HS		D		HS		D		HS		D	
	I^+		I^-		I^+		I^-		I^+		I^-	
0,01305	0,18807	0,18655	0,19942	0,19867	0,50108	0,50095	0,50735	0,50789				
0,06747	0,23375	0,23458	0,24835	0,25015	0,48609	0,48588	0,52120	0,52180				
0,16030	0,29172	0,29225	0,31930	0,32099	0,45860	0,45825	0,54333	0,54408				
0,28330	0,33836	0,33873	0,40003	0,40099	0,41814	0,41804	0,57167	0,57217				
0,42556	0,36539	0,36538	0,48147	0,48225	0,36755	0,36737	0,60667	0,60725				
0,50000	0,37344	/	0,52192	/	0,33967	/	0,62956	/				
0,57444	0,37976	0,37987	0,56205	0,56248	0,31175	0,31179	0,65865	0,65904				
0,71670	0,38527	0,38523	0,64404	0,64457	0,25936	0,25929	0,75535	0,75585				
0,83970	0,37495	0,37495	0,73266	0,73310	0,21676	0,21678	0,97005	0,97049				
0,93253	0,35694	0,35676	0,82619	0,82680	0,18767	0,18752	1,38400	1,38462				
0,98695	0,34726	0,34722	0,90295	0,90343	0,17181	0,17181	1,85979	1,86028				
1	0,34592	0,34594	0,92503	0,92546	0,16819	0,16822	2,01511	2,01552				

TABLEAU I-6: Intensité rétrodiffusée I^+ ($\tau=0$), transmise I^- ($\tau=8$), et au centre de la couche I^+ et I^- ($\tau=4$) pour une couche d'épaisseur optique $\tau_1 = 8$ éclairée en incidence normale avec des particules $\alpha=5, m=1.33$ et $\omega_0 = 1$, calculée par les Harmoniques Sphériques (HS) et le Doubling (D)



μ	$\omega_0 = 0,95$			$\omega_0 = 0,99$		
	HS	D	OS	HS	D	OS
0,01305	0,10219	0,10145	0,098445	0,16207	0,16092	0,15496
0,06747	0,12618	0,12669	0,012338	0,20120	0,20211	0,19542
0,16030	0,15406	0,15450	0,015255	0,25004	0,25082	0,24610
0,28330	0,17140	0,17162	0,017077	0,28803	0,28844	0,28539
0,42556	0,17627	0,17636	0,017613	0,30824	0,30841	0,30650
0,50000	0,17748	/	/	0,31433	/	/
0,57444	0,17944	0,17948	0,017941	0,31933	0,31941	0,31817
0,71670	0,18323	0,18325	0,018309	0,32422	0,32428	0,32341
0,83970	0,17822	0,17823	0,017790	0,31553	0,31558	0,31496
0,93253	0,16763	0,16765	0,016718	0,29963	0,29967	0,29922
0,98695	0,16360	0,16371	0,016306	0,29175	0,29180	0,29143
1,00000	0,16370	0,16371	/	0,29090	0,29094	/

TABLEAU I-7: Intensité rétrodiffusée par une couche d'épaisseur optique $\tau_1=8$ éclairée en incidence normale pour des particules $\alpha=5, m=1,33$ avec $\omega_0 = 0,95$ et $0,99$, calculée par les Harmoniques Sphériques (HS) le Doubling (D) et les Ordres Successifs (OS)



le plus souvent quelques millièmes. Ces calculs ont été effectués sur un ordinateur C.I.I.10070, ordinateur de gestion qui ne dispose que de 7 chiffres significatifs. Une précision supérieure serait certainement obtenue sur un ordinateur plus précis. On peut néanmoins considérer ces résultats comme entièrement satisfaisants, étant donné la précision habituelle des mesures expérimentales, et on pourra s'abstenir d'employer la double précision qui augmenterait fortement la durée des calculs. On remarquera que l'utilisation des développements limites (1-43d-e) dans les expressions (1-43a-b) donne surtout pour les valeurs de μ voisines de zéro, une précision qui reste excellente contrairement à ce qu'avait laissé paraître une étude précédente (DEVAUX et al ; 1973).

IV - 3 - EFFET DU NOMBRE DE TERMES DE LA FONCTION DE PHASE

Les 3 méthodes qui ont servi de base de comparaison, permettent en principe de traiter des fonctions de phase développées à un ordre L aussi grand que l'on veut. Mais pour maintenir la précision il faut augmenter parallèlement le nombre de points dans la quadrature, afin d'intégrer correctement les fonctions rapidement variables en μ . Le temps calcul augmente ainsi approximativement en L^3 . Ceci joint à l'augmentation des dimensions des tableaux à garder en mémoire, ces méthodes ne sont actuellement pratiquement utilisables que jusqu'à $L = 60$.

Dans la méthode des harmoniques sphériques si L augmente, il faut afin de tenir compte de tous les termes du développement (1-9), augmenter l'ordre d'approximation N dans l'expression (1-12), ce qui minore à priori $(2p)$. Mais on peut se demander comment évoluent les résultats lorsque L étant fixé on augmente N . Divers tests ont été effectués. Le tableau (1-8) présente les résultats obtenus dans le cas d'une couche semi infinie pour des valeurs de $2p$ croissantes. On constate que les résultats dépendent très peu de l'ordre d'approximation $(2p)$ choisi, les

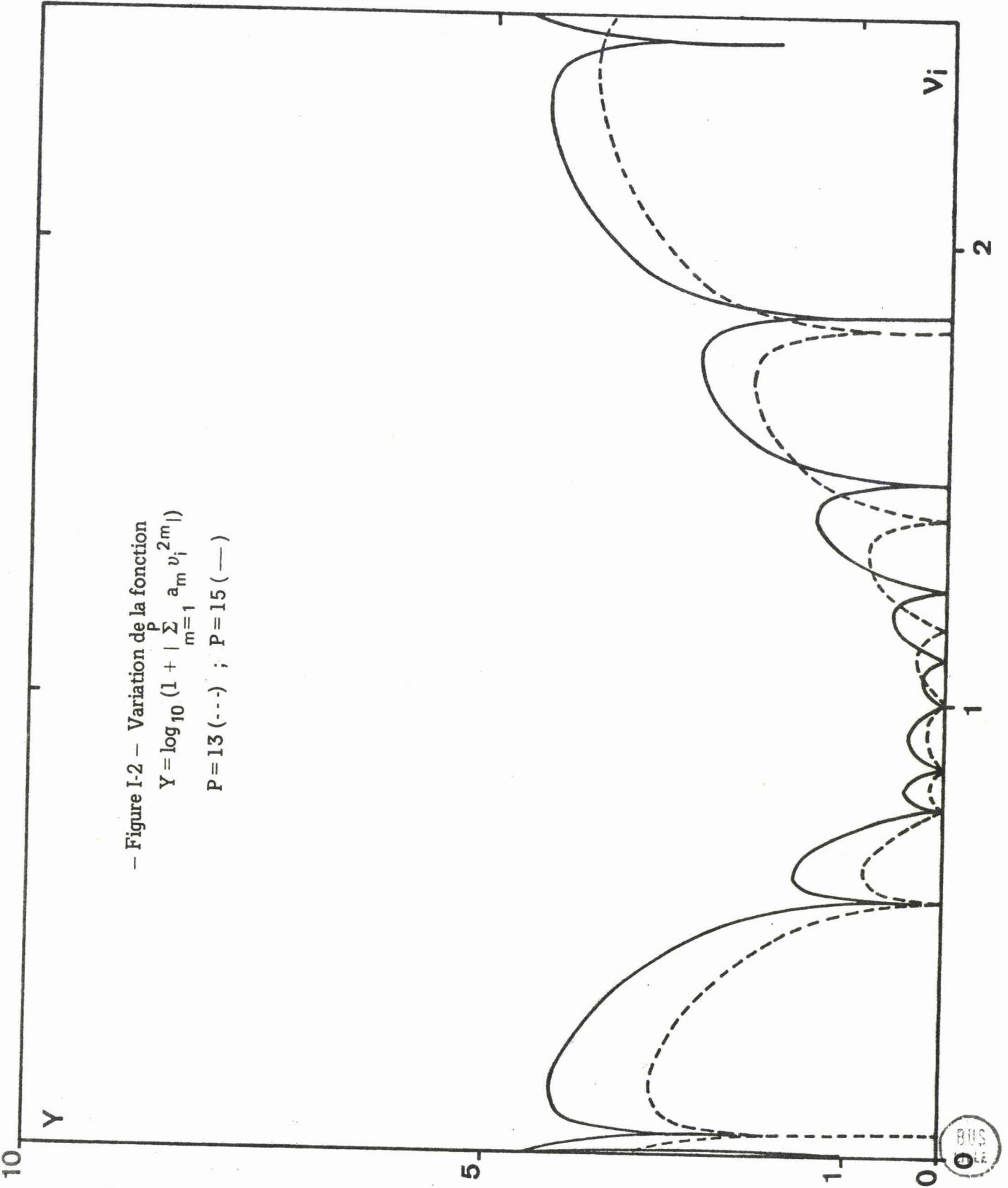
Ordre d'approximation $2p$	Temps en 1/100 de minute sur CII 10070	$\mu = 1$	$\mu = 0.91223$	$\mu = 0.74633$	$\mu = 0.5$	$\mu = 0.37370$	$\mu = 0.07652$	Flux
8	3	.312877	.316477	.320639	.316365	.306521	.246412	.987355
12	4	.313031	.316675	.320944	.316899	.307205	.246728	.986753
16	4	.313077	.316736	.321042	.317084	.307456	.247038	.986541
20	5	.313107	.316773	.321097	.317180	.307586	.247278	.986489
24	7	.313114	.316783	.321116	.317221	.307646	.247429	.986416
28	9	.313135	.316807	.321146	.317265	.307699	.247556	.986452
32	12	.313118	.316791	.321132	.317259	.307696	.247617	.986331
36	15	.313159	.316834	.321180	.317309	.307755	.247706	.986501
40	19	.313019	.316688	.321026	.317149	.307600	.247615	.985808
44	24	.319502	.323443	.328238	.324780	.315235	.253897	1.016889
48	30	-9.544	-9.964	-10.676	-11.358	-11.387	-9.350	-46.610596

TABLEAU I-8: Intensité et flux rétrodiffusés par une couche semi-infinie éclairée en incidence normale pour des particules $\alpha=2, m=1.33$ avec $\omega_0 = 0,95$: Influence de l'ordre d'approximation

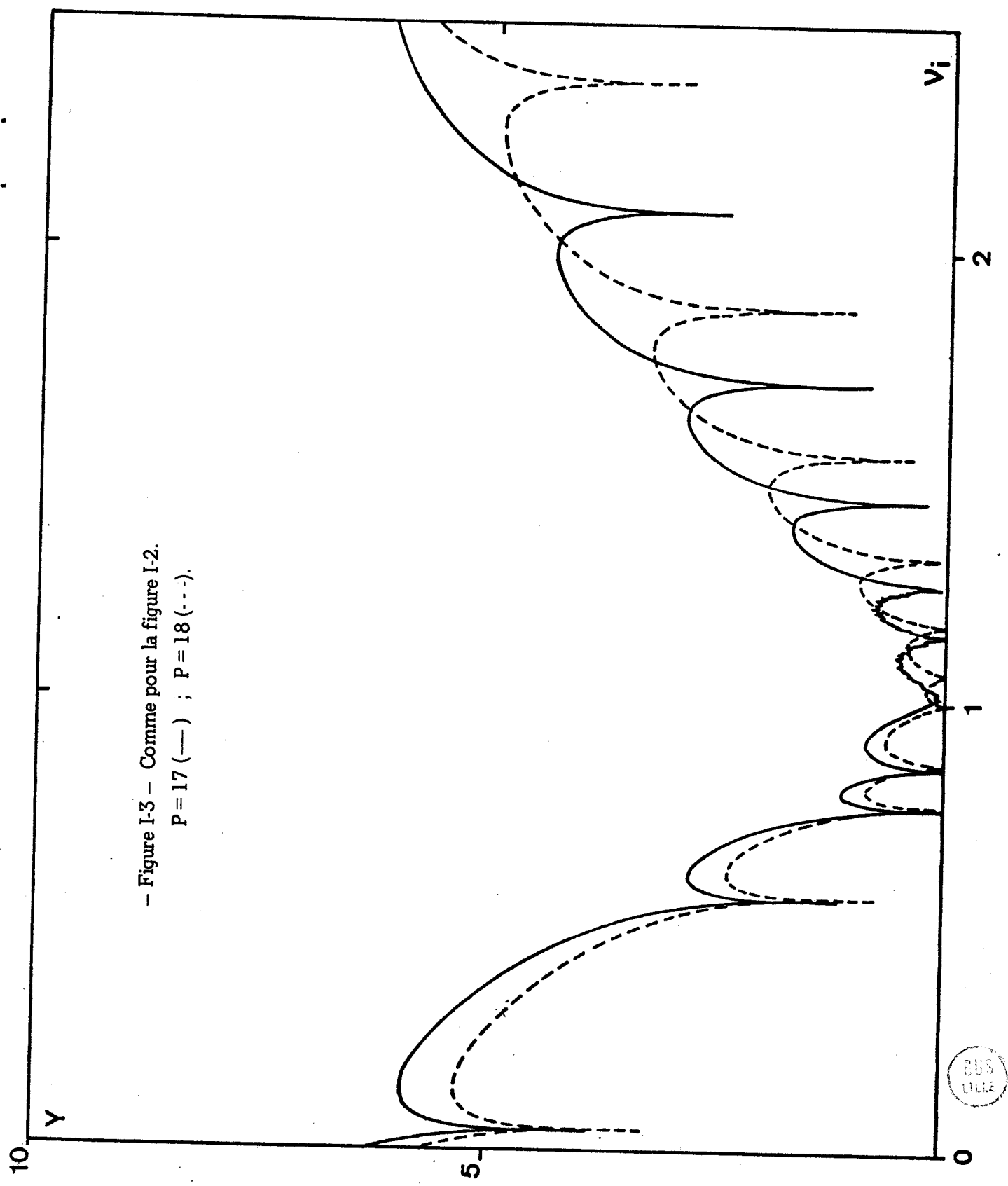


variations étant de l'ordre de grandeur de la précision de la méthode. Cependant lorsque $(2p)$ devient supérieur à 40 on constate une nette divergence pour obtenir des valeurs totalement aberrantes si $(2p)$ est supérieur à 44. Ceci limite l'emploi de la méthode pour des fonctions de phase ayant un développement limité à 40 termes maximum. Cette instabilité aux ordres d'approximation élevé provient de l'impossibilité d'extraire certaines racines du polynôme (1-23) par suite du comportement de la fonction au voisinage de $X = 1$. Les figures (1-2 à 1-4) représentent les variations de cette fonction dans l'intervalle $(0; 2,5)$ et ce pour divers ordres d'approximation; on a porté, en ordonnée la quantité $\text{Log}_{10}(1+|y|)$. On constate que lorsque $2p$ croît, la fonction reste en valeur absolue inférieure à quelques unités lorsque X est voisin de 1 alors que parallèlement les coefficients a_m^{ℓ} deviennent grands. En effet on vérifiera aisément sur la relation de récurrence (1-22) que, lorsque ℓ est supérieur à quelques unités, compte tenu des parités des a_m^{ℓ} , les coefficients a_m^{ℓ} , $a_m^{\ell+1}$, $a_m^{\ell+2}$ croissent au moins aussi vite que les termes d'une progression géométrique de raison 2. Si l'on écrit ces coefficients sous la forme d'une mantisse et d'un exposant, dès que l'un de celui-ci dépasse le nombre de chiffres significatifs, il entraîne pour le calcul de la fonction une incertitude absolue supérieure à l'unité. Une telle erreur est suffisante pour perturber profondément le comportement de la fonction comme le montre la figure (1-4) et rendre impossible l'extraction de certaines racines. De nombreux ordinateurs ayant un compilateur Double Précision, nous avons utilisé cette possibilité et c'est ce qui nous a permis de pousser les calculs jusqu'à un ordre d'approximation $2p = 40$ avant de constater les instabilités mentionnées dans le tableau (1-8). Les calculs effectués en simple précision sur le même ordinateur CII - 10070 (mots de 24 bits mantisse de 7 chiffres) font apparaitre des instabilités à l'ordre $2p = 24$. L'ordinateur BULL M 40 (mots de 32 bits - mantisse de 12 chiffres) ne

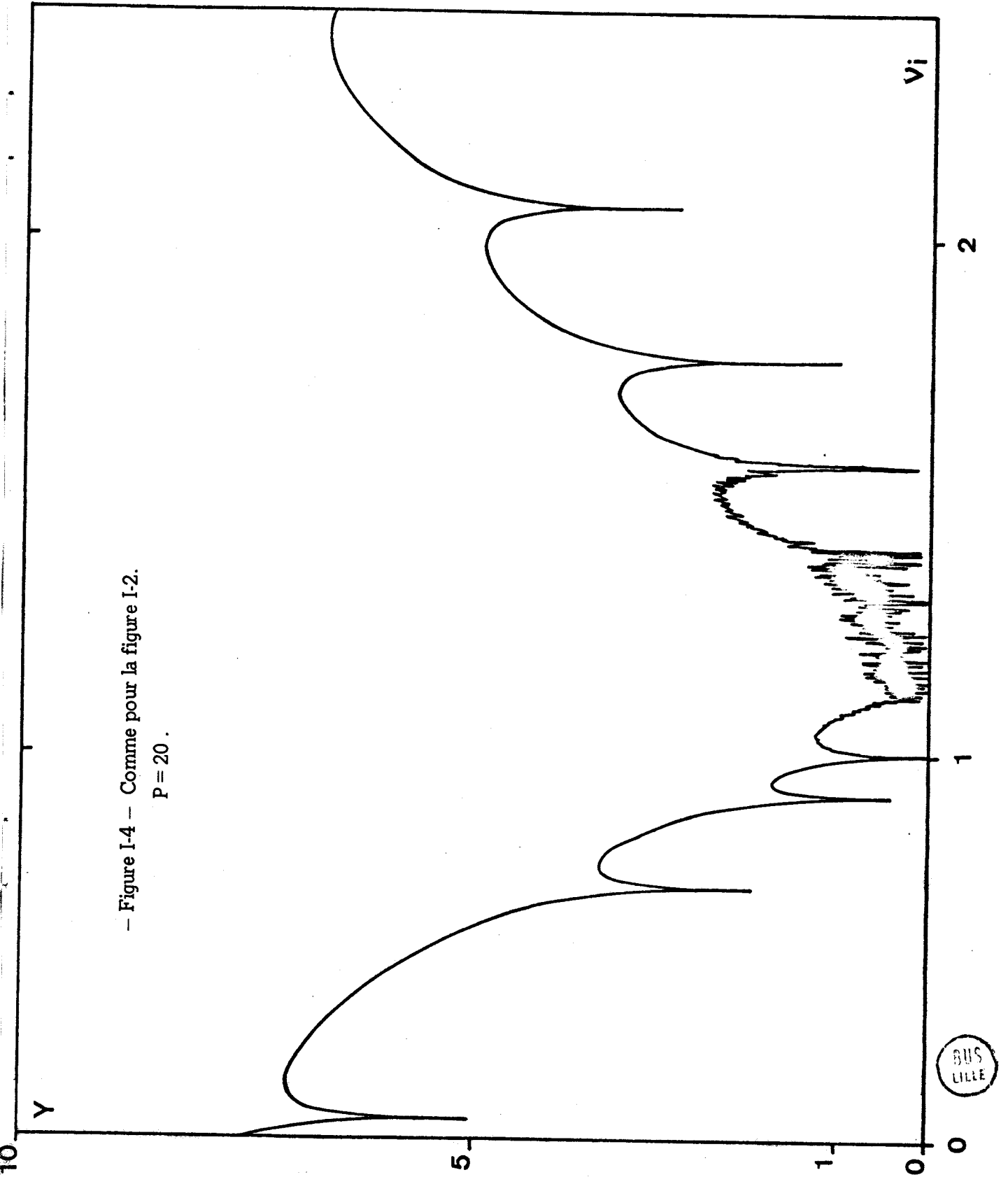
- Figure I-2 - Variation de la fonction
 $Y = \log_{10} (1 + | \sum_{m=1}^P a_m v_i^{2m} |)$
P = 13 (---) ; P = 15 (—)



- Figure I-3 - Comme pour la figure I-2.
P = 17 (—) ; P = 18 (- - -).



- Figure I-4 - Comme pour la figure I-2.
P = 20 .



BUS
LILLE

disposant pas de la double précision nous avait permis auparavant de traiter des fonctions de phase à 30 termes. Certains ordinateurs peuvent effectuer facilement les calculs en multi-précision (triple - quadruple précision) et devraient permettre de résoudre le problème de fonctions de phase encore plus anisotropes, sans augmenter considérablement le temps calcul, étant donné que l'extraction des racines ne représente qu'une petite partie du programme. Si l'on ne dispose pas d'un tel ordinateur cette limitation est néanmoins peu gênante car dans le cas de grosses particules, il est possible de remplacer la fonction de phase réelle qui contient un grand nombre de termes par la somme d'une fonction de DIRAC et d'un développement beaucoup plus court (POTTER; 1968). Dans cette approximation la pointe avant, correspondant au pic de diffraction de l'onde lumineuse par la particule, est tronquée et compensée par un simple changement des caractéristiques du milieu diffusant. Cette façon de procéder, qui donne une précision en général meilleure que 1% sauf pour les directions trop voisines de celle de l'éclairement incident permet en outre un gain de temps considérable. En effet, non seulement comme on peut le constater (tableau I-8) le temps augmente rapidement avec le nombre de termes du développement de $P(\theta)$ mais en outre, pour obtenir la solution complète de l'équation (I-10) il aurait fallu calculer les L composantes $I^S(\tau; \mu)$ qui développent $I(\tau; \mu, \phi)$.

IV - 4 - TEMPS CALCUL

Pour les principes d'invariance et les ordres successifs, le temps calcul augmente rapidement quand ω_0 tend vers 1 alors que pour le doubling et les harmoniques sphériques il est indépendant de ω_0 .

Dans la méthode des harmoniques sphériques le temps calcul est indépendant de l'épaisseur optique du milieu tandis que pour le doubling, il croît d'abord rapidement puis de plus en plus lentement puisqu'on a

une itération supplémentaire chaque fois que l'on doit doubler la couche. Pour les ordres successifs qui exigent une intégration sur τ , le temps calcul croît très rapidement quand l'épaisseur de la couche augmente.

Enfin comme il a été dit ce temps calcul augmente rapidement pour toutes les méthodes avec le nombre de terme de la fonction de phase L.

Le tableau (1-9) donne pour quelques cas une comparaison des temps de calcul exprimés en seconde pour l'ordinateur BULL M 40; ces temps sont à diviser par 15 environ sur IBM 360 65. Il faut noter que cette comparaison concerne les programmes tels qu'ils ont été écrits au Laboratoire et que pour une même méthode des différences peuvent apparaître suivant la plus ou moins grande habilité du programmeur.

Tableau (1-9) - Temps calculs pour divers cas en incidence normale

avec les 4 méthodes :

- Principes d'Invariance (PI)
- Doubling (D)
- Ordres Successifs (OS)
- Harmoniques Sphériques (HS)

Temps M 40 sec.

$\alpha = 2\pi r / \lambda$	τ_1	ω_0	PI	HS	D	OS
5	∞	0,95	150	50	750	
5	∞	0,99	300	50	750	
10	∞	0,95	450	75	1500	
10	∞	0,99	900	75	1500	
5	8	0,99		50	600	750

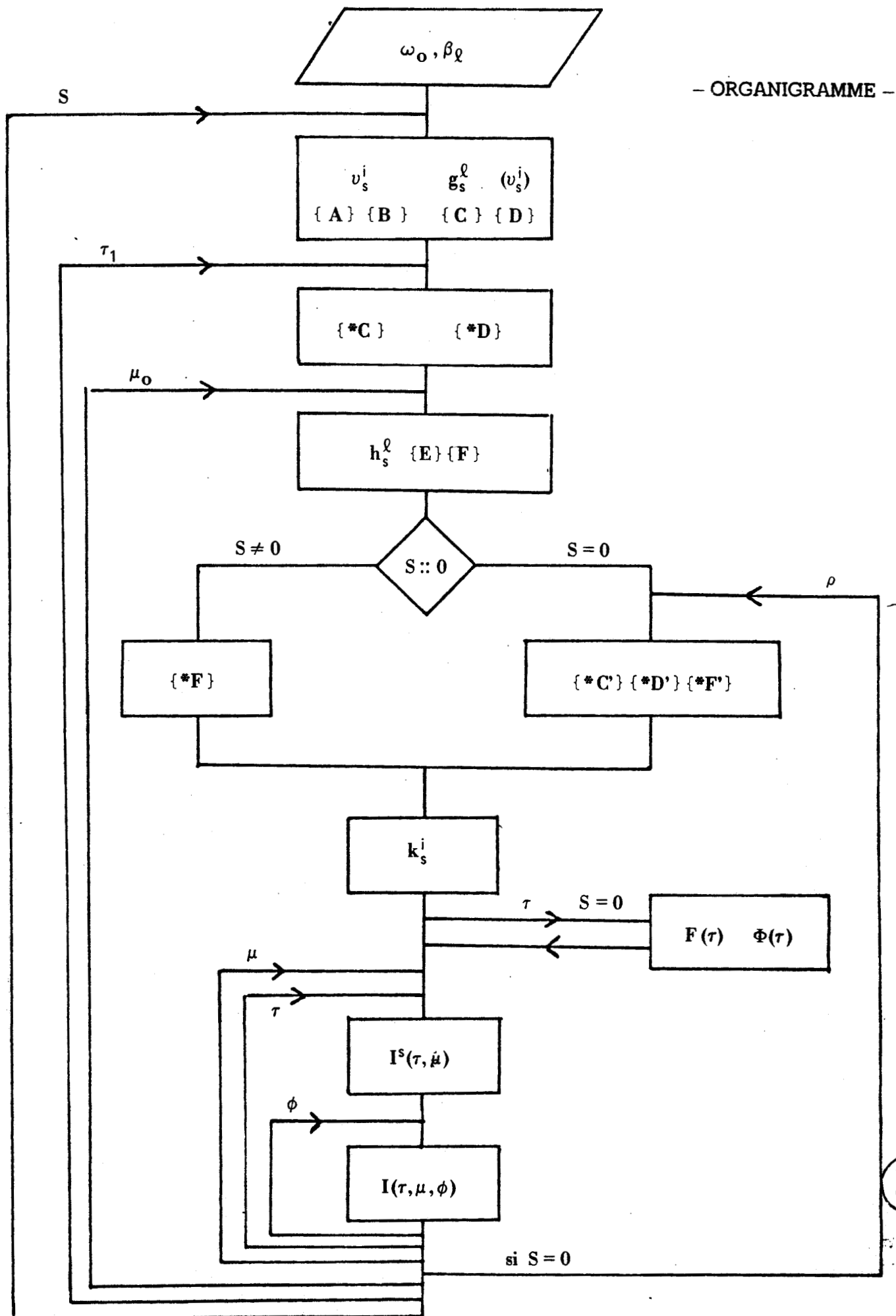
La méthode des harmoniques sphériques semble actuellement de beaucoup la plus rapide des quatres méthodes étudiées.

V-CONCLUSION .

Utilisée au mieux de ses possibilités, la méthode des Harmoniques Sphériques permet, avec des temps calcul très avantageux, d'obtenir des résultats complets (toutes directions, toutes profondeurs) et d'une précision très satisfaisante.

L'analyse que nous venons d'en faire peut paraître compliquée. Mais on constate que la plupart des calculs auxquels on est conduit se formulent sous une forme récursive donc particulièrement bien adaptée aux ordinateurs. La complexité de la méthode provient essentiellement de son caractère semi analytique qui conduit à une subdivision poussée des calculs. Mais pour certaines applications (étude de l'influence du fond, de l'épaisseur optique, ou de la direction d'incidence), il en résulte en fait l'avantage de n'avoir à reprendre qu'une partie des calculs. L'organigramme simplifié ci-après résume les principaux blocs de calcul et permet de préciser ceux qui ne devraient pas être recalculés, dans ce type de résolution si l'on ne s'intéresse qu'aux variations de certains paramètres du problème ($\rho, \mu_0; \tau_1$). C'est encore cette structure de la résolution qui permet comme on l'a vu, de ramener le problème de l'absorption variable à un calcul de solutions particulières et finalement on verra que cette méthode est particulièrement bien adaptée à l'analyse du rayonnement rediffusé par une planète.

- ORGANIGRAMME -



BUS
LILLE

APPENDICE I

Les conditions de MARSHAK appliquées à $I^S(o, \mu < 0)$ et $I^S(\tau_1; \mu > 0)$ nous conduisent à calculer des intégrales du type

$$b_{s, \pm}^{j, \ell} = \int_0^{\pm 1} P_s^{s+2j-1}(\mu) P_s^\ell(\mu) d\mu .$$

Les fonctions associées de LEGENDRE de première espèce $P_m^n(\mu)$ satisfont à l'équation différentielle associée de LEGENDRE ({ROBIN} T1 p 65)

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1-\mu^2) \frac{dP_m^n}{d\mu} \right\} + \left\{ \ell(\ell+1) - \frac{s^2}{1-\mu^2} \right\} P_m^n = 0 \quad (1)$$

Multiplions par $P_s^m(\mu)$ l'équation (1) écrite pour $P_s^\ell(\mu)$, et par $P_s^\ell(\mu)$ celle écrite pour $P_s^m(\mu)$. En soustrayant, il vient

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} (1-\mu^2) \left\{ P_s^\ell(\mu) \frac{dP_s^m}{d\mu}(\mu) - P_s^m(\mu) \frac{dP_s^\ell}{d\mu}(\mu) \right\} \\ = (\ell-m)(\ell+m+1) P_s^\ell(\mu) P_s^m(\mu) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

En intégrant les deux membres de cette équation entre 0 et ± 1 on obtient

$$\begin{aligned} \left[(1-\mu^2) \left\{ P_s^\ell(\mu) \frac{dP_s^m}{d\mu}(\mu) - P_s^m(\mu) \frac{dP_s^\ell}{d\mu}(\mu) \right\} \right]_0^{\pm 1} \\ = (\ell-m)(\ell+m+1) \int_0^{\pm 1} P_s^\ell(\mu) P_s^m(\mu) d\mu . \end{aligned} \quad (3)$$

Soit

$$P_s^\ell(o) \frac{dP_s^m}{d\mu}(o) - P_s^m(o) \frac{dP_s^\ell}{d\mu}(o) = -(\ell-m)(\ell+m+1) \int_0^{\pm 1} P_s^\ell(\mu) P_s^m(\mu) d\mu \quad (4)$$

Si $m = \ell$ et compte tenu de la norme choisie pour P_s^ℓ nous aurons

$$\int_0^{+1} (P_s^\ell)^2 d\mu = - \int_0^{-1} (P_s^\ell)^2 d\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (P_s^\ell)^2 d\mu = \frac{1}{2\ell+1} \quad (5)$$

D'autre part ({ROBIN} T1 p 101) et toujours avec la norme choisie les $P_s^\ell(\mu)$ vérifient la relation

$$(\mu^2 - 1) \frac{dP_s^\ell}{d\mu}(\mu) = \ell\mu P_s^\ell(\mu) - \sqrt{(\ell+s)(\ell-s)} P_s^{\ell-1}(\mu) \quad (6)$$

Soit pour $\mu = 0$

$$\frac{dP_s^\ell}{d\mu}(0) = \sqrt{(\ell+s)(\ell-s)} P_s^{\ell-1}(0) \quad (7)$$

Compte tenu de (7) la relation (4) devient

$$\begin{aligned} & \sqrt{(m-s)(m+s)} P_s^\ell(0) P_s^{m-1}(0) - \sqrt{(\ell-s)(\ell+s)} P_s^m(0) P_s^{\ell-1}(0) \\ &= (m-\ell)(m+\ell+1) \int_0^{\pm 1} P_s^\ell(\mu) P_s^m(\mu) d\mu \end{aligned}$$

Comme

$$P_s^\ell(0) = 0 \quad \text{si } (\ell+s) \text{ est impair} \quad (8)$$

on obtient

$$\int_0^{\pm 1} P_s^\ell(\mu) P_s^m(\mu) d\mu = 0 \quad \text{si } (m+\ell) \text{ est pair } m \neq \ell \quad (9)$$

Puisque nous nous intéressons essentiellement au système des polynômes de degré impair, en remarquant la parité fixe de $m = 2j + s - 1$, on a

$$P_s^{s+2j-1}(0) = 0 \quad (10)$$

d'où

$$b_{s,\pm}^{j,\ell} = \int_0^{\pm 1} P_s^{s+2j-1}(\mu) P_s^\ell(\mu) d\mu = \sqrt{\frac{(2s+2j-1)(2j-1) P_s^\ell(0)}{(s+2j-\ell-1)(s+2j+\ell)}} P_s^{s+2j-2}(0)$$

Les relations suivantes récapitulent les relations utiles

$$b_{s,+}^{j,\ell} = -b_{s,-}^{j,\ell} = \frac{1}{2\ell+1} \quad \text{si } \ell = s + 2j - 1 \quad (11a)$$

$$b_{s,+}^{j,\ell} = b_{s,-}^{j,\ell} \equiv 0 \quad \text{si } (\ell+s) \text{ est impair } \ell \neq s + 2j - 1 \quad (11b)$$

$$b_{s,+}^{j,\ell} = b_{s,-}^{j,\ell} = \frac{\sqrt{(2s+2j-1)(2j-1)}}{(s+2j-\ell-1)(s+2j+\ell)} P_s^\ell(o) P_s^{s+2j-2}(o)$$

$$\text{si } (\ell+s) \text{ est pair soit } \ell = s + 2k \quad (11c)$$

Le calcul des termes $P_s^{s+2k}(o)$ s'effectue très facilement à partir de la relation de récurrence des P_s^ℓ

$$\sqrt{(\ell+s+1)(\ell-s+1)} P_s^{\ell+1}(\mu) = (2\ell+1)\mu P_s^\ell(\mu) - \sqrt{(\ell+s)(\ell-s)} P_s^{\ell-1}(\mu) \quad (12)$$

initialisée à partir de $P_s^s(\mu)$ défini par

$$P_s^s(\mu) = (1-\mu^2)^{s/2} \frac{\sqrt{(2s-1)!!}}{(2s)!!} \quad \text{si } s \neq 0 \quad P_0(\mu) \equiv 1 \quad \text{si } s = 0 \quad (13)$$

et de

$$P_s^{s-1}(\mu) \equiv 0 \quad \text{si } s \neq 0 \quad P_{-1}(\mu) \equiv 0 \quad \text{si } s = 0 \quad (14)$$

Dans le cas particulier ou $\mu = 0$ les relations (12) et (13) deviennent

$$\sqrt{(\ell+s+1)(\ell-s+1)} P_s^{\ell+1}(o) = -\sqrt{(\ell+s)(\ell-s)} P_s^{\ell-1}(o) \quad (15)$$

$$P_s^s(o) = \frac{\sqrt{(2s-1)!!}}{(2s)!!} \quad (16)$$

DEUXIEME PARTIE

APPLICATION DE LA METHODE DES HARMONIQUES SPHERIQUES

A L'ETUDE DU TRANSFERT RADIATIF DANS L'ATMOSPHERE DE VENUS

INTRODUCTION

Bien qu'étant une des plus proches planètes de la Terre, Vénus était jusqu'à ces dernières années assez mal connue en raison de la couverture nuageuse permanente qui la masque aux observations visuelles.

L'analyse des nombreuses observations en polarisation effectuées par LYOT (1929), DOLLFUS (1966), COFFEEN et GEHRELS (1969), DOLLFUS et COFFEEN (1970), avait permis à HANSEN et ARKING (1971) d'établir les caractéristiques des aérosols présents dans la haute atmosphère de Vénus : particules sphériques de rayon effectif moyen de $1\mu\text{m}$ et d'indice de réfraction égal à $1,45 \pm 0,02$. La contribution de la diffusion Rayleigh plaçait le niveau de cette brume à une altitude de 70 km environ (soit une pression de l'ordre de 50 mb). Poursuivie par HANSEN et HOVENIER (1974) cette étude confirmait les suggestions de SILL (1972) et YOUNG (1973) en montrant que parmi toutes les compositions chimiques proposées pour ces aérosols, seule une solution concentrée d'acide sulfurique donnait un bon accord.

Mais la lumière polarisée étant essentiellement formée au sommet de la couche diffusante, une telle méthode d'analyse restait limitée. Moins sensible aux caractéristiques des aérosols que la lumière polarisée, la luminance rétrodiffusée doit permettre par contre de sonder les couches nuageuses sous-jacentes.

Dans le domaine infrarouge, l'étude des raies du CO_2 avait d'ailleurs montré, que le rayonnement **rediffusé** était formé essentiellement dans un milieu diffusant et non en atmosphère claire, (BELTON et al, 1968) et les températures de formation des raies (≈ 250 K) impliquaient l'existence de particules diffusantes au moins jusqu'à une altitude inférieure à 50 km (FOUQUART, 1975). Il était donc intéressant de comparer les répartitions de luminance observées sur le disque de Vénus à celle que l'on pouvait calculer dans l'hypothèse d'un milieu diffusant optiquement dense, les aérosols ayant les caractéristiques déduites de la

polarisation. Avec ce modèle nous avons dans un premier temps analysé les courbes de phase à diverses longueurs d'onde et quelques clichés obtenus en lumière jaune. Cette étude photométrique détaillée a ensuite été étendue à l'étude des taches observées en ultra violet et dont la réapparition cyclique avait permis de mettre en évidence la rotation rétrograde en quatre jours de l'atmosphère nuageuse de Vénus (BOYER et GUERIN, 1966). Etant donné la transparence de l'acide sulfurique dans ce domaine spectral; l'existence de ces inhomogénéités pose en effet un problème intéressant et qui relève directement de l'analyse photométrique. Ces différentes analyses sont développées dans le troisième chapitre.

Pour étudier les couches plus profondes, il est indispensable de faire appel à des mesures in situ à l'aide de sondes. Cette exploration a été entreprise à la fois par les Américains (Mariner 5) et surtout par les Soviétiques (Vénéra 4 à 10 de 1967 à 1974). C'est Vénéra 8 qui pour la première fois mesurait au cours de sa descente le flux solaire transmis dans l'atmosphère de Vénus (AVDUEVSKY et al 1973). Bien que très incomplets, ces premiers résultats ont été l'occasion d'utiliser des données de flux pour remonter à une structure nuageuse et ont permis ainsi de bâtir un premier modèle de l'atmosphère profonde de Vénus (LOU-KACHEVITCH et al, 1973 ; TITARCHOUK, 1973 ; LACIS et HANSEN, 1974; DEVAUX et HERMAN ; 1975). Par ailleurs un des objectifs prioritaires de la mission Pioneer-Vénus est d'établir un bilan radiatif global de la planète et des nuages. La définition des fluxmètres à utiliser nécessitait donc de préciser les ordres de grandeur des flux à mesurer. C'est le modèle d'atmosphère déduit du sondage de Vénéra 8 qui a servi de base à cette estimation. L'étude des flux radiatifs et son application à l'atmosphère de Vénus fait l'objet du second chapitre.

CHAPITRE II

DETERMINATION DE LA STRUCTURE DE L'ATMOSPHERE DE VENUS

A PARTIR DE MESURES DE FLUX IN SITU

I - MOYENS D'ANALYSE

La résolution de l'équation de transfert nécessite de connaître à priori les caractéristiques de la couche nuageuse : fonction de phase, albédo de diffusion simple, épaisseur optique. Pour l'étude des atmosphères planétaires, on se trouve confronté au problème inverse ; connaissant certaines caractéristiques du champ de rayonnement, le but est de remonter aux paramètres qui le régissent. Etant donné la multiplicité de ces paramètres, le problème est complexe et il n'existe pas, sauf pour des cas très simplifiés et peu réalistes, de méthodes d'inversion. Les calculs directs doivent alors être effectués en variant les divers paramètres; ceux ci sont alors finalement ajustés en comparant les valeurs expérimentales aux abaques ainsi construits. La forme semi-analytique très poussée de la méthode des Harmoniques Sphériques facilite beaucoup cette première étape.

I - 1 - MESURES DISPONIBLES

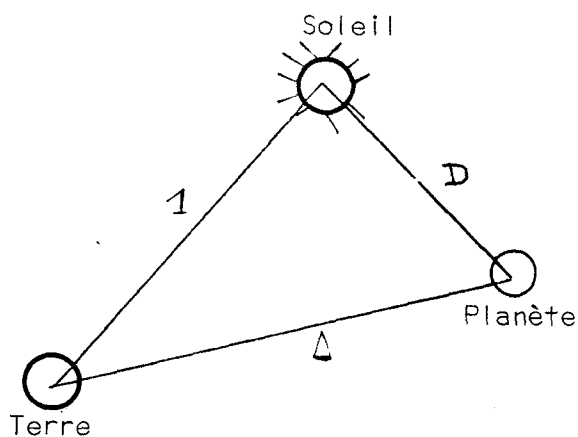
Les mesures de la lumière solaire rediffusée par Vénus sont le plus souvent intégrées sur le disque. On dispose également de mesures résolues en chaque point et celles ci seront analysées plus particulièrement dans le troisième chapitre.

A partir des luminances intégrées, on obtient les courbes de phase à diverses longueurs d'onde ou les courbes de réflectivité spectrale pour divers angles de phase suivant que l'on choisit V ou λ respectivement comme variable. Les observations sont généralement reportées en termes de magnitude. La magnitude visuelle d'une planète est définie à une constante près par la relation

$$m = - 2,5 \log E (\Delta, D, V), \quad 11.1$$

$E (\Delta, D, V)$ étant l'éclairement reçu de la planète située

à la distance Δ de la Terre et D du Soleil. De la même façon, la



magnitude visuelle solaire est définie à la même constante près par

$$m_0 = - 2,5 \log E_0 \quad 11.2$$

ou E_0 est l'éclairement solaire sur la Terre à une unité astronomique soit πF_0 .

On obtient alors :

$$m_V = m_0 - 2,5 \log \frac{E(\Delta, D, V)}{\pi F_0} \quad 11.3$$

En pratique les magnitudes observées sont réduites à certaines valeurs standard de Δ et D (habituellement on choisit $D = \Delta = 1$).

Par application de la loi de l'inverse des carrés, on peut écrire

$$E(\Delta, D, V) = E(1, 1, V) / (D \Delta)^2$$

et l'expression 11.3 devient alors

$$m_V = m_0 + 5 \log D\Delta - 2,5 \log \left(\frac{E(1, 1, V)}{\pi F_0} \right) \quad 11.4$$

qui permet de définir la magnitude réduite par

$$m_V^* = m_V - 5 \log D\Delta = m_0 - 2,5 \log \left(\frac{E(1, 1, V)}{\pi F_0} \right) \quad 11.5$$

La luminance étant proportionnelle à l'éclairement incident, on peut écrire

$$\frac{E(1, 1, V)}{\pi F_0} = \iint l(M) d\omega dS.$$

où $l(M)$ est la luminance diffusée correspondant à un éclairement unité, l'intégrale double étant étendue à la partie éclairée du disque de la planète. Comme le rayon de la planète R est très petit par rapport à 1

unité astronomique, dw peut être considéré comme constant sur tout le disque.

Les magnitudes réduites peuvent alors s'écrire

$$m_V^* = m_0 - 2,5 \log \frac{\pi R^2}{2} (1 + \cos V)$$

11.6

$$- 2,5 \log \left(\frac{1}{S} \iint_S I(M) \cdot dS \right)$$

où S représente la surface éclairée du disque, la luminance étant calculée en résolvant l'équation de transfert.

Une dernière intégration des courbes de phase en fonction de V donne l'albédo sphérique A^* . Celui ci caractérise le rapport du flux total réémis par la planète au flux solaire incident qu'elle intercepte soit

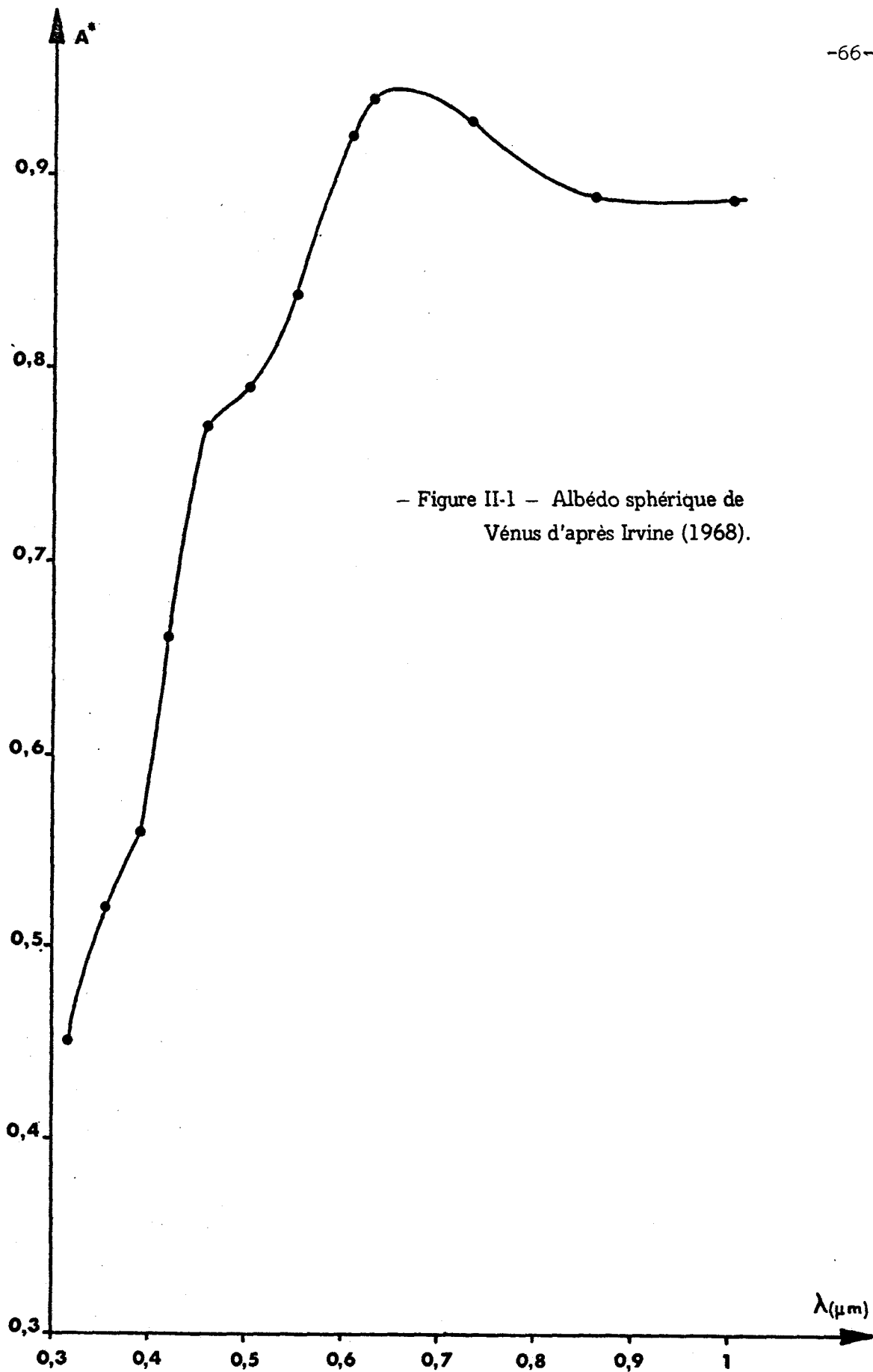
$$A^* = \frac{\phi \text{ réémis}}{\phi \text{ intercepté}} = \frac{\iint_S \phi(M) dS}{\pi R^2 F}$$

La figure 11.1 représente les valeurs des albédos sphériques obtenus par Irvine entre 0,3 μm et 1,1 μm (1968).

Partant du modèle nuageux déduit des mesures de polarisation par Hansen et Arking, l'hypothèse la plus simple était de supposer que ces particules constituaient le seul aérosol présent sur Vénus, avec une échelle de hauteur donnée. Il reste alors à définir l'épaisseur optique des nuages et leur albédo de diffusion, et ce pour diverses réflectivité du sol.

Avec l'hypothèse d'une couverture nuageuse homogène horizontalement et si on se fixe ces paramètres ajustables, le flux réfléchi en un point M de la planète peut être calculé et il ne dépend que de l'angle d'incidence θ_0 du faisceau solaire et on peut alors écrire

$$A = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \phi(\theta_0) R^2 \sin \theta_0 d\theta_0 d\psi}{\pi R^2 F}$$



- Figure II-1 - Albédo sphérique de Vénus d'après Irvine (1968).



soit

$$A^* = \frac{2}{F} \int_0^1 \Phi(\mu_0) d\mu_0.$$

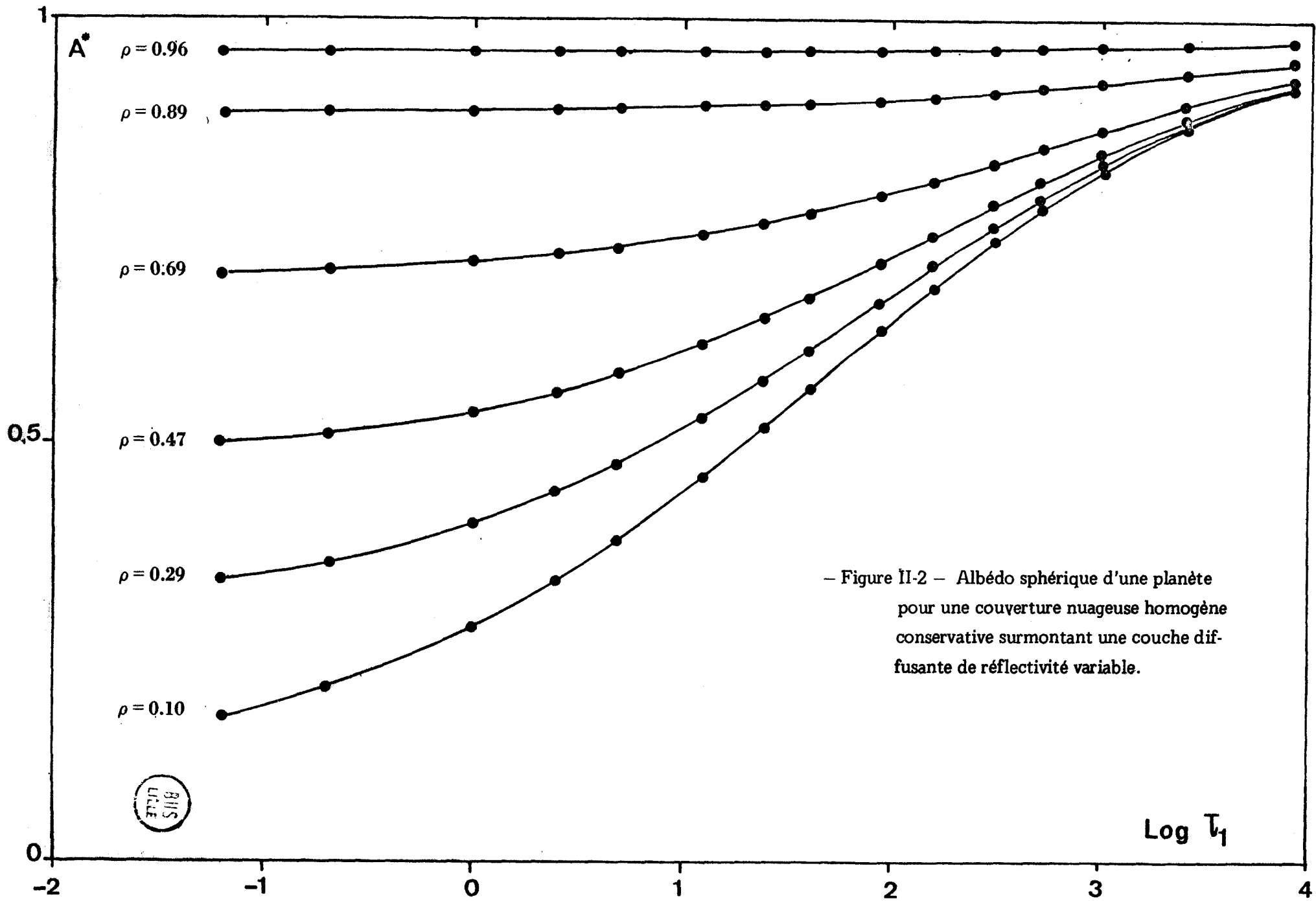
La figure 11.2 présente un exemple de résultats obtenus pour une couche conservative d'épaisseur optique τ_1 variable limitée par un sol de réflectivité ρ variable. Bien que l'établissement de telles abaques soit relativement rapide avec la méthode numérique utilisée, la multiplicité des paramètres rendait souhaitable l'établissement de formules approchées plus simples.

I-2-METHODE DU NOYAU EXPONENTIEL

WANG (1972) ayant montré que la méthode du noyau exponentiel conduisait à une expression très simple de l'albédo sphérique dans le cas d'une couche infinie ou d'une couche conservative limitée par un sol noir, cette méthode a été retenue et étendue aux cas d'une couche finie ou stratifiée pour des réflexions de sols variables. Ce travail a fait l'objet de la Thèse de 3^{ème} cycle de Madame BROGNIEZ, (1975; BROGNIEZ et al, à paraître). La précision de ces formules, largement testée en comparant leurs résultats à ceux obtenus par la méthode des Harmoniques Sphériques est excellente comme on peut le constater sur la Figure 11.3. Le modèle diffusant est le même que pour la figure précédente.

II - APPLICATIONS AU SONDAGE DE VENERA 8

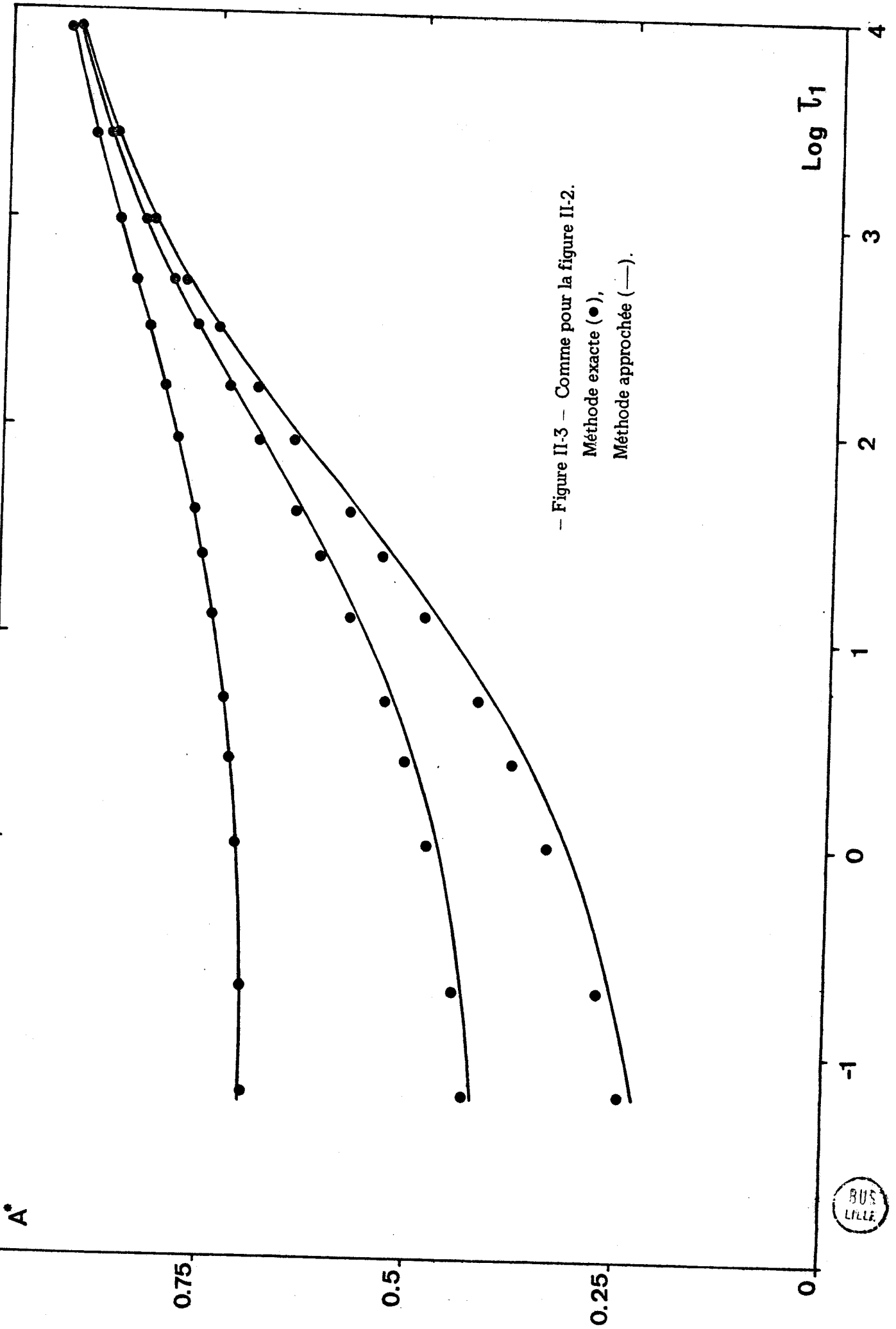
Le 22 Juillet 1972, la sonde Vénéra 8 mesurait le flux solaire descendant dans l'atmosphère de Vénus. Cette mesure s'est effectuée à partir d'une altitude de 50 Km jusqu'au sol avec un détecteur ayant un maximum de sensibilité spectrale à 0,68 μm . En conjugant ces mesures de flux descendant aux données de l'albédo sphérique, il était alors possible moyennant certaines hypothèses de préciser l'épaisseur optique des nuages de Vénus et leur absorption propre pour la longueur d'onde considérée.



- Figure II-2 - Albédo sphérique d'une planète pour une couverture nuageuse homogène conservative surmontant une couche diffusante de réflectivité variable.



$\text{Log } T_1$



-- Figure II-3 -- Comme pour la figure II-2.
Méthode exacte (●),
Méthode approchée (—).



A*

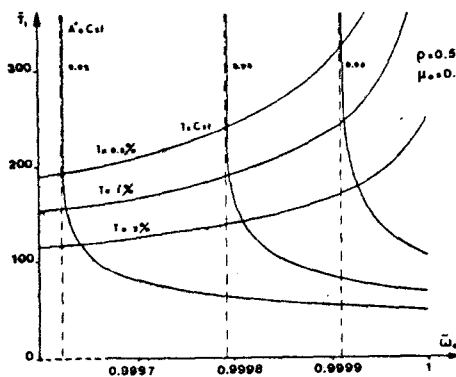
Log T1

Cette étude fait l'objet de l'article n° 1; nous n'en exposerons ici que le principe.

Compte tenu de la haute réflectivité de Vénus à la longueur d'onde moyenne considérée, on doit admettre une épaisseur optique des nuages assez grande, même si ceux ci sont conservatifs. On fera alors l'hypothèse simplificatrice que les nuages sont constitués d'un seul type d'aérosols; ceux ci auront les caractéristiques déduites de la polarisation, et une échelle de hauteur arbitraire, avec toutefois une concentration suffisante pour que l'on puisse négliger l'épaisseur optique provenant de la diffusion moléculaire. On admettra de plus que la couverture nuageuse est homogène. Le problème est alors de déterminer les valeurs de τ_1 et ω_0 compatibles avec les mesures du flux transmis et de l'albédo sphérique. Si on suppose la couche semi infinie à partir de celui ci on peut déduire facilement ω_0^∞ . Les sols plausibles étant moins réfléchissants que les nuages eux mêmes, si l'on diminue τ_1 , il faut alors augmenter ω_0 pour maintenir une réflectivité constante, et la courbe $\tau_1(\omega_0)$ est décroissante pour $A = cte$. Mais il faut au contraire augmenter l'absorption (c'est à dire diminuer ω_0) pour garder le flux transmis et la courbe $\tau_1(\omega_0)$ est croissante pour

$T = constante$. Si ces hypothèses sont cohérentes, la solution cherchée correspond à l'intersection des deux courbes, la condition d'existence est donnée

par



Curves $\bar{\tau}_1(\bar{\omega}_0, A = const)$ and $\bar{\tau}_1(\bar{\omega}_0, T = const)$ for a homogeneous cloud with $\beta_1 = 2.134$, $\mu_0 = 0.1$, ground reflectivity $\rho = 0.5$; assumed values for A and T indicated.

Figure 11.4.

$$\tau_1 (\omega_0 = 1, A = \text{cte}) < \tau_1 (\omega_0 = 1, T = \text{cte})$$

La figure 11.4 extraite de l'article n° 1 illustre ce comportement.

Si l'on envisage maintenant une structure stratifiée et si la couche supérieure est suffisamment épaisse (une épaisseur optique de l'ordre de 5 est très suffisante), les couches inférieures reçoivent un flux suffisamment diffus pour que leur coefficient de réflexion soit assimilable à l'albédo sphérique que présenteraient ces couches inférieures. A une altitude de 32 Km, Vénéra a mis en évidence une brusque discontinuité de la décroissance du flux descendant, les mesures effectuées jusqu'au sol pouvant s'interpréter par de la diffusion moléculaire. (FEIGELSON et al, 1973). Le modèle retenu a donc été un nuage homogène surmontant une atmosphère purement moléculaire s'étendant entre 0 et 32 Km. L'épaisseur

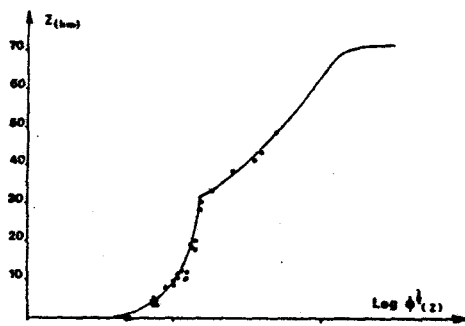


FIG. 2. Comparison between the downward fluxes measured by Venera 8 (experimental points) and computed by the spherical harmonics method; homogeneous upper layer $\bar{\omega}_0 = 0.9998$, $\bar{\tau}_1 = 135$; Rayleigh atmosphere $\bar{\omega}_0 = 1$, $\bar{\tau}_1 = 7$; ground reflectivity $\rho = 0.4$.

Figure 11.5.

optique τ_R de celle ci étant de l'ordre de 7, on peut évaluer son albédo sphérique A à 0,85. On déduit alors pour le nuage homogène supérieur une épaisseur optique de l'ordre de 150, et un albédo de diffusion simple $\omega_0 = 0,9998$. Les flux descendants ont été recal-

culés à partir de cette première solution approchée par la méthode plus précise des Harmoniques Sphériques. Avec les hypothèses retenues le meilleur accord est alors obtenu pour une couche d'épaisseur optique $\tau_1 = 135$, les autres paramètres valant alors $\omega_0 = 0,9998$; $\tau_R = 7$; $\rho_{\text{sol}} = 0,4$.

La comparaison avec les résultats expérimentaux est représentée figure 11.5 (article n°1). Entre 0 et 32 Km, on a admis une variation de la profondeur optique proportionnelle à la pression.

Une structure à deux couches pour les nuages est également discutée dans l'article n°1 : si la couche supérieure est conservative, on aboutit sensiblement aux mêmes conclusions. La possibilité d'existence d'une couche supérieure plus absorbante que la couche inférieure est plus difficile à discuter et nécessiterait des mesures à ces altitudes.

Les derniers résultats des sondes Vénéra 9 et 10 semblent en fait indiquer que la couverture nuageuse, si elle garde dans son ensemble la structure verticale détectée par Vénéra 8, présente des variations horizontales; l'épaisseur optique τ_1 du nuage principal, en particulier semble décroître vers le point subsolaire et des particules singulières apparaissent en basse altitude. Ces résultats rejoignent les conclusions auxquelles nous ont par ailleurs conduit les analyses de la lumière rediffusée, comme on le verra au chapitre suivant. Le type d'analyse utilisé pour Vénéra 8, doit donc être raffiné en considérant que l'albédo sphérique se réfère à une épaisseur optique moyenne $\langle \tau_1 \rangle$ de la couverture nuageuse de la planète, le flux descendant mesuré étant essentiellement relié à l'épaisseur optique τ_1 des nuages au point où s'est effectué le sondage. Ceci nécessite alors de connaître les flux descendants à diverses longueurs d'onde. Ces mesures ayant été effectuées depuis par Vénéra 9 et 10, cette généralisation est actuellement en cours et fait plus spécialement l'objet du travail de Madame BROGNIEZ.

III - PREPARATION DE LA MISSION PIONEER - VENUS

Le modèle d'atmosphère ainsi déduit des mesures de flux de Vénéra 8 nous a permis alors de préciser assez nettement les caractéristiques des flux à mesurer par Pioneer-Vénus pour un modèle d'atmosphère horizon-

talement homogène. Partant du flux mesuré à $0,68 \mu\text{m}$, par Vénéra 8, ce travail a consisté à évaluer celui que l'on peut prévoir dans tout le spectre visible, compte tenu des variations du coefficient d'absorption du milieu que traduisent les variations spectrales de l'albédo sphérique de Vénus.

III - 1 - MODÈLE D'ATMOSPHÈRE DE VÉNUS

a) STRUCTURE VERTICALE

A partir des mesures de Vénéra 8, il semble raisonnable d'admettre une atmosphère purement moléculaire en dessous de 32 Km, surmontée par une couche de nuages s'étendant entre 32 et 70 Km (Fig. 11.6)

b) ROLE DE LA DIFFUSION RAYLEIGH

Pour une longueur d'onde λ , l'épaisseur optique Rayleigh de la tranche d'atmosphère comprise entre les altitudes z_1 et z_2 sera calculée avec l'hypothèse d'une atmosphère de 100% de CO_2 par l'expression (GRAY et al, 1964)

$$\tau_R^\lambda(z_1, z_2) = B(\lambda) \int_{z_1}^{z_2} \rho(z) dz = B(\lambda) \frac{P(z_1) - P(z_2)}{g}$$

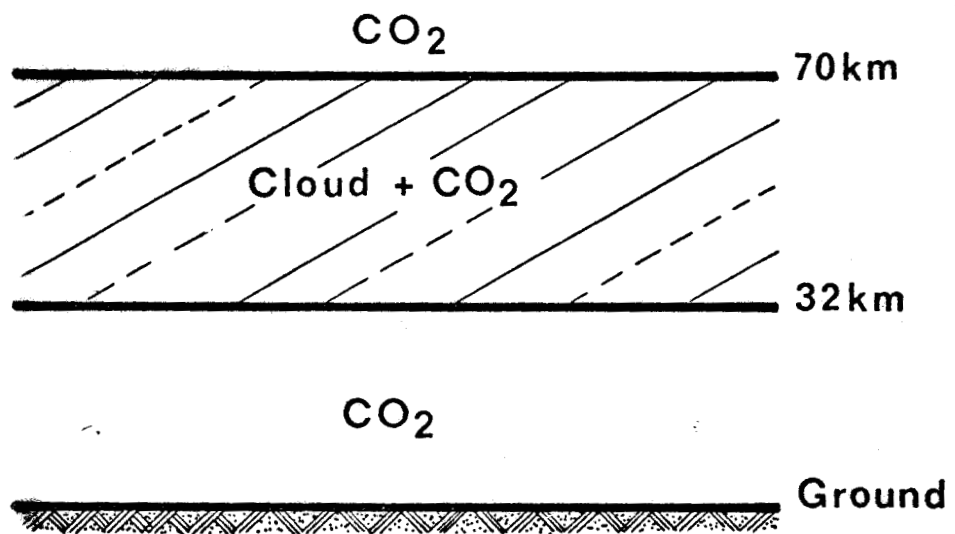
avec $g = 8,78 \text{ m.s}^{-2}$ = accélération de la pesanteur sur Vénus (MAROV, 1972)

$$B(\lambda) = \frac{32}{z} \frac{\pi^3}{\lambda^4} \frac{(n_s - 1)^2}{A_V M A^2}$$

ou

$$A_V = 6,025 \cdot 10^{23} \text{ mole}^{-1} = \text{Nombre d'Avogadro}$$

$$M = 44 \text{ g} = \text{Masse molaire du } \text{CO}_2.$$



- Figure II-6 - Structure verticale de l'atmosphère de Vénus d'après Venera 8.

$$A = \frac{P_s}{RT_s} = 4,4652 \cdot 10^{-5} \text{ mole. cm}^{-3}$$

n_s = indice de réfraction à la température standard T_s et à la pression P_s .

Pour le CO_2 on obtient :

$$n_s - 1 = \frac{0,06905}{156,63 - \lambda^{-2}} \quad (\lambda \text{ en } \mu\text{m})$$

La densité $\rho(z)$ et la pression $P(z)$ sont connues d'après les différents sondages de Vénéra 1 à 8 et à l'occultation radio de Mariner 5 en particulier. Le tableau 1 donne pour une série de longueurs d'onde les épaisseurs Rayleigh dans les 3 couches considérées.

TABLEAU II.1 : τ_R^λ

$\lambda(\mu)$	0-32 km	32 - 70 km	> 70 km
0.32	116	12.2	0.067
0.36	72.5	7.65	0.042
0.42	39.2	4.13	0.023
0.46	27.2	2.87	0.015
0.50	19.5	2.06	0.011
0.63	7.74	1.66	0.004
0.73	4.29	0.45	0.002
0.86	2.23	0.26	0.001
1.00	1.22	0.14	-

On constate que la diffusion moléculaire au dessus des nuages

est négligeable pour les calculs de flux.

c) CARACTERISTIQUES DES NUAGES

Pour la longueur d'onde moyenne de 0,7 μm , on utilisera l'épaisseur optique et l'albédo de diffusion déduits dans l'hypothèse d'un nuage homogène des mesures de Vénéra 8, soit :

$$\tau^{0.7} = 135 \qquad \omega_o^{0.7} = 0.9998$$

Pour des épaisseurs optiques aussi grandes, la réflectivité des nuages est essentiellement reliée à l'absorption propre des particules et ne dépend pratiquement pas de la réflectivité du sol. On peut donc déduire ω_o^λ des mesures de l'albédo sphérique d'Irvine (1968). Les particules auront dans tout le nuage les caractéristiques déduites des mesures de polarisation (HANSEN et ARKING, 1971). La section de diffusion efficace K_λ et la fonction de phase $P_\lambda(\theta)$ sont alors calculées à partir de la théorie de Mie. L'épaisseur optique à une longueur d'onde λ sera alors obtenue par la relation

$$\tau_1^\lambda = \tau_1^{0.7} \frac{\omega_o^{0.7}}{\omega_o^\lambda} \frac{K_\lambda}{K_{0.7}}$$

qui traduit simplement l'invariance du nombre de particules diffusantes, les résultats sont donnés dans le tableau 11.2.

TABLEAU II.2

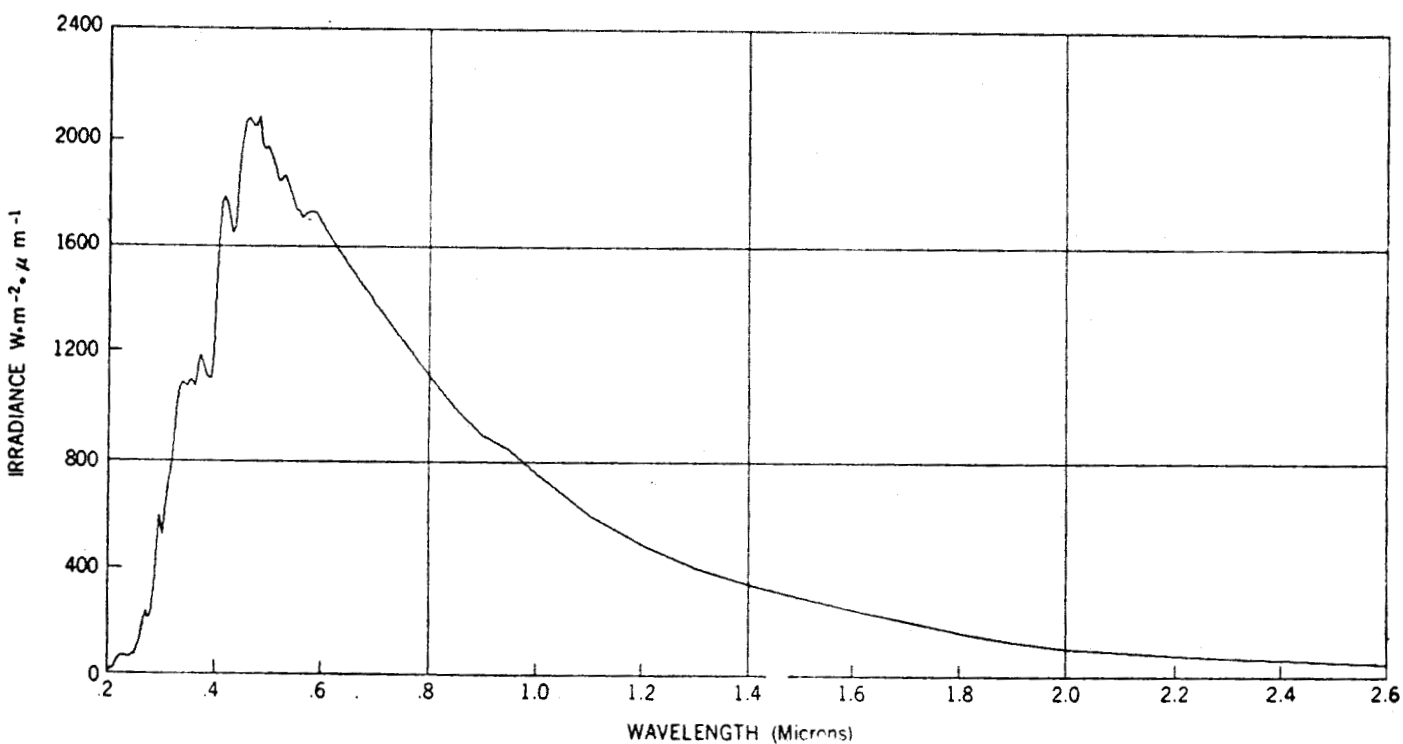
λ μ	ω_o^λ	τ_1^λ
0.32	0.9743	132.4
0.36	0.9812	133
0.42	0.9932	132.9
0.46	0.9967	132.9
0.50	0.9972	133.4
0.58	0.9996	133.5
0.63	0.9998	133
0.73	0.9997	136
0.86	0.9992	149.1
1.00	0.9992	169.1

La comparaison des tableaux II.1 et II.2 montre que l'épaisseur optique Rayleigh est négligeable si λ est supérieure à 0,5 μm . D'autre part, l'absorption étant relativement forte si λ est inférieure à 0,6 μm , le rayonnement correspondant sera absorbé dans les hautes couches des nuages ce qui justifie pleinement le modèle homogène choisi : on négligera donc la diffusion moléculaire et considérera $P_\lambda(\theta)$ comme indépendante de l'altitude.

III - 2 - CALCUL DES FLUX SOLAIRES

La constante et le spectre solaires utilisés sont ceux correspondant à des mesures à haute altitude (N.A.S.A., 1972). Compte tenu de la distance moyenne Soleil-Vénus ; la constante solaire vaut 258,6 mW.cm^{-2} . Le spectre solaire incident est représenté figure II.7 pour l'intervalle

SOLAR SPECTRAL IRRADIANCE



The solar spectral irradiance curve for zero air mass

- Figure II-7 -

Reprinted from OPTICAL SPECTRA March 1972



spectral $0,32 \mu\text{m} - 1 \mu\text{m}$, l'équation de transfert est résolue par la méthode des Harmoniques Sphériques pour une série de longueurs d'onde. Dans la présentation des résultats, les épaisseurs optiques seront reliées aux altitudes z par la relation

$$\frac{\tau_\lambda}{\tau_1} = \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1}$$

ou $z_1 = 32 \text{ Km}$ et $z_2 = 70 \text{ Km}$ sont respectivement les altitudes de la base et du sommet des nuages ; ce qui suppose une répartition de particules constante en altitude. La diffusion Rayleigh étant négligeable, les résultats resteraient inchangés pour tout autre répartition des particules pour laquelle il suffirait de calculer la loi $\tau(z)$ compte tenu de l'échelle de hauteur choisie.

III - 3 - RÉSULTATS

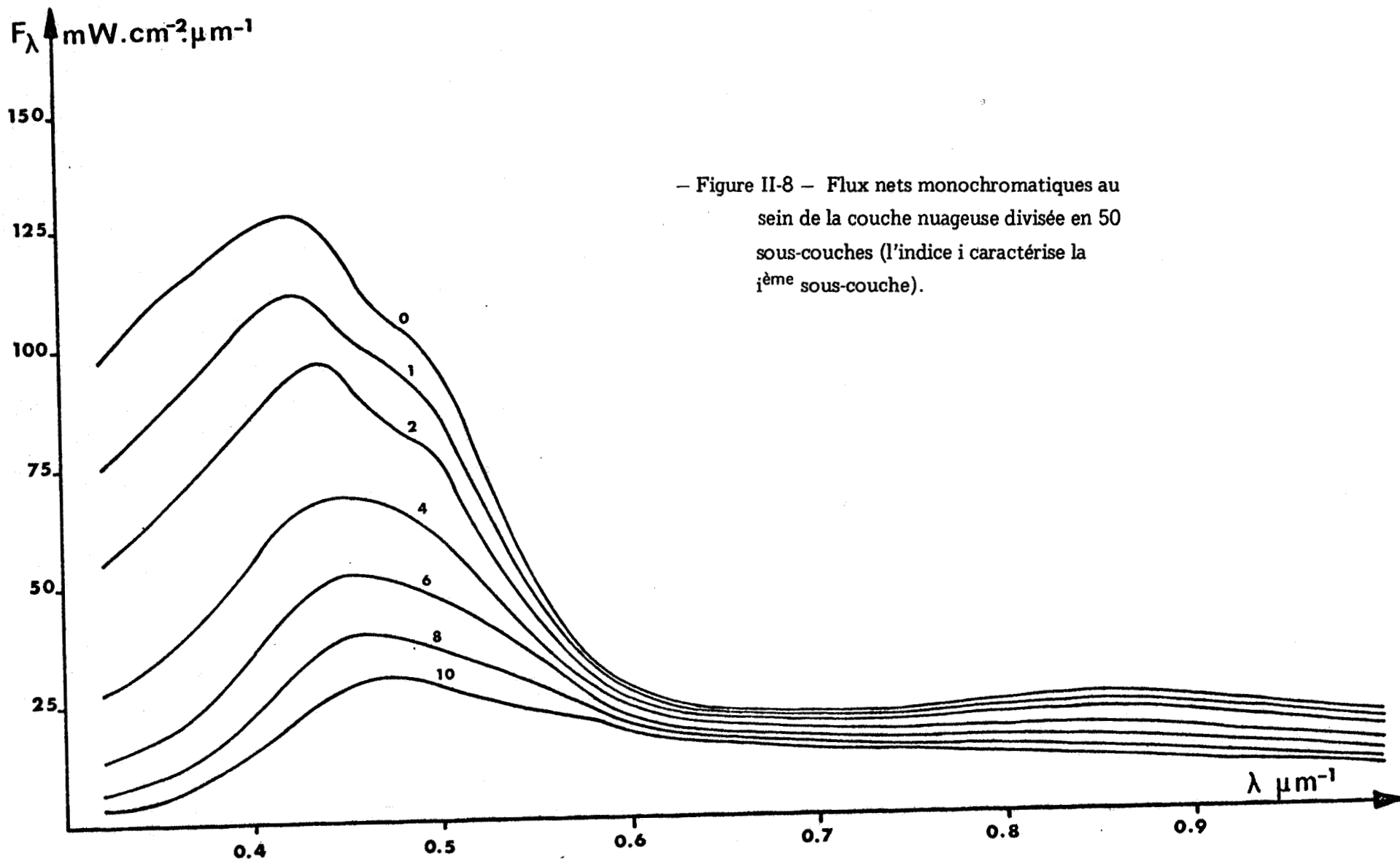
Les figures 11.8 à 11.11 représentent la répartition spectrale des flux nets monochromatiques $F_\lambda(z)$ pour différentes altitudes dans le cas d'une incidence normale. La couche nuageuse a été divisée en 50 sous couches égales (l'indice i se rapportant au sommet de la $i^{\text{ème}}$ sous couche comptée à partir du sommet).

Le flux net total (figure 11.12) correspondant à l'intervalle spectral $0,32 - 1 \mu\text{m}$, soit

$$F(z) = \int_{0,32}^1 F_\lambda(z) d\lambda$$

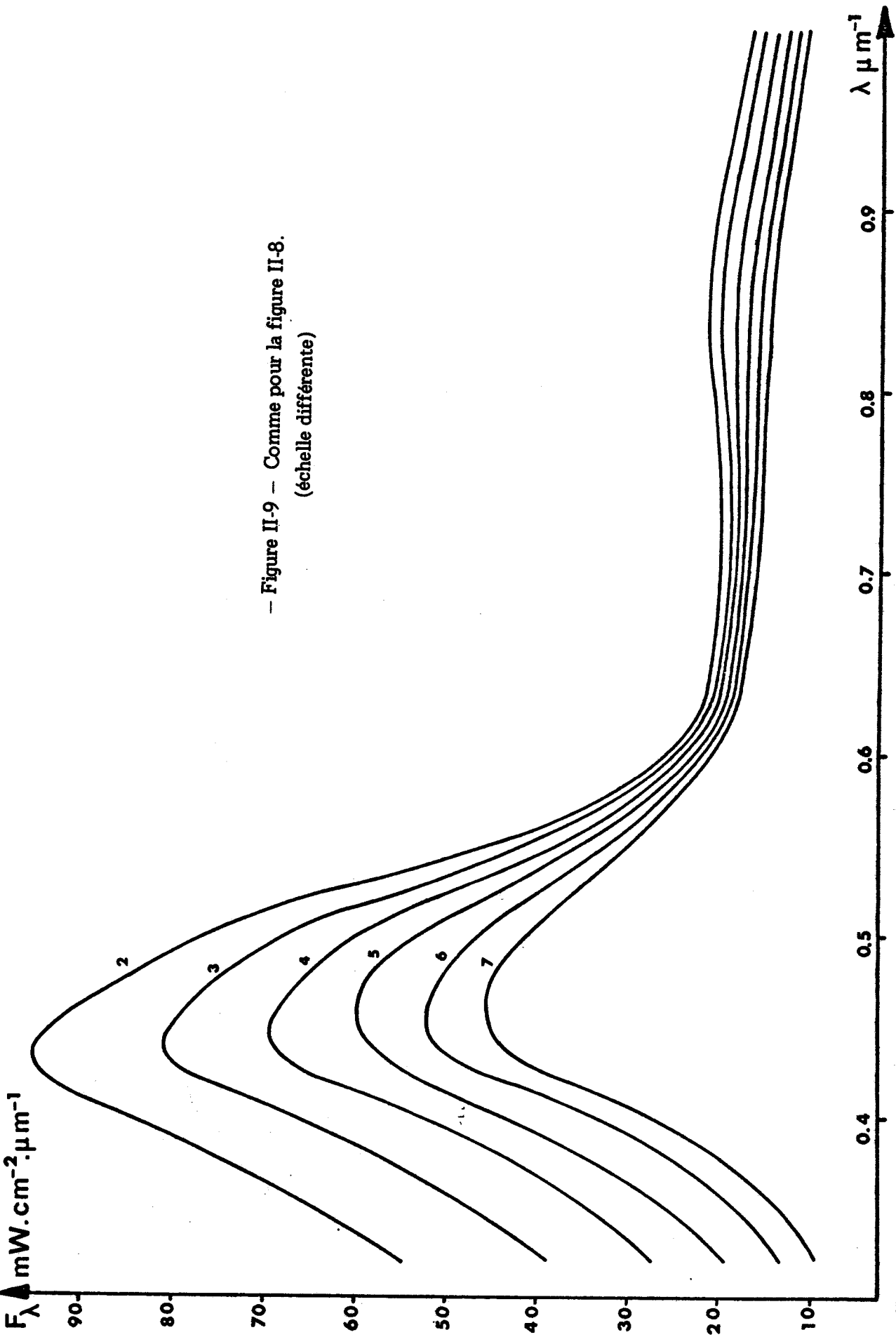
a été obtenu par intégration graphique des courbes 11.8 à 11.11.

Ces résultats font apparaître clairement la disparition très rapide du flux violet dès les premières couches atmosphériques. Cette



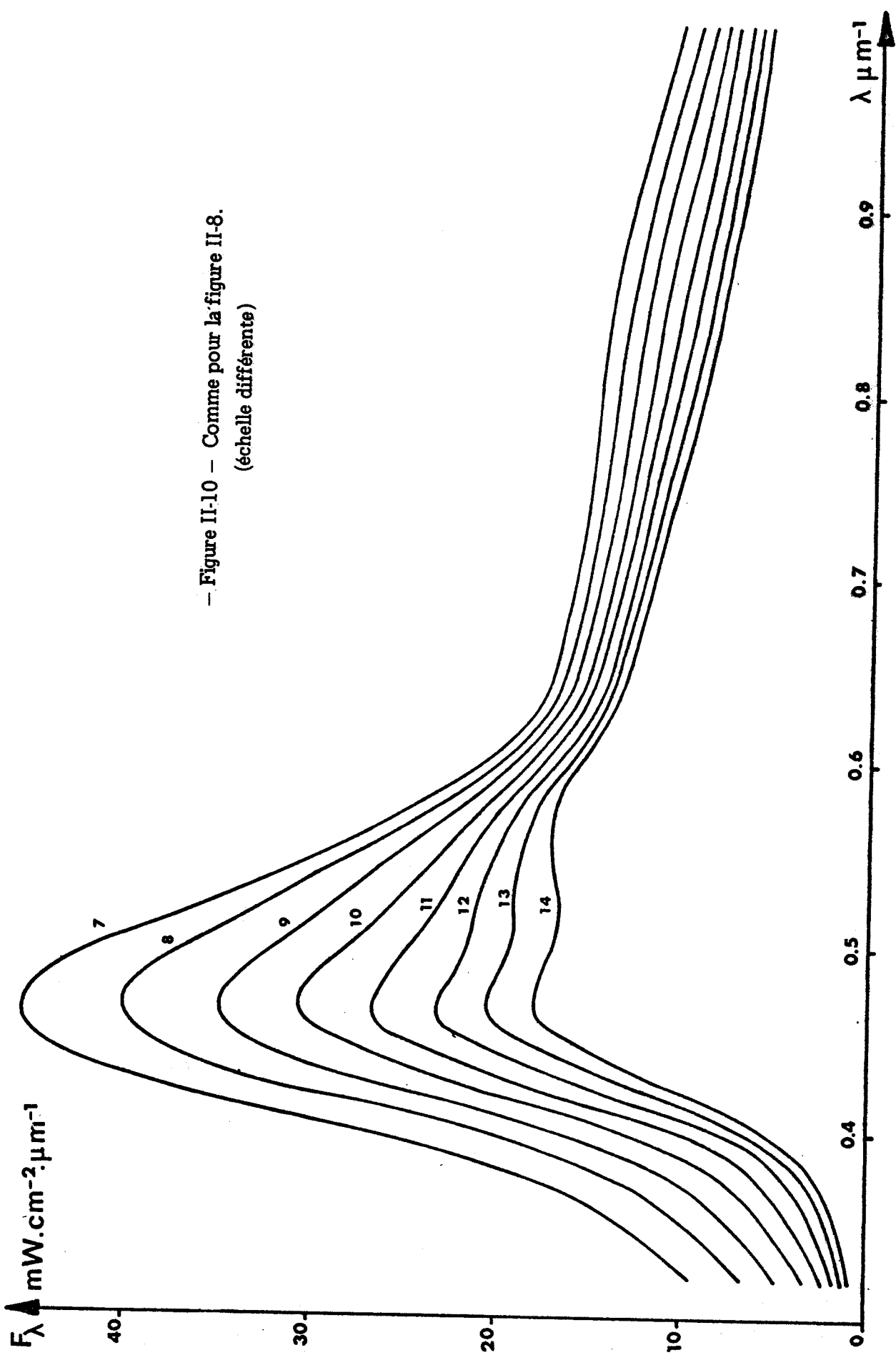
— Figure II-8 — Flux nets monochromatiques au sein de la couche nuageuse divisée en 50 sous-couches (l'indice i caractérise la $i^{\text{ème}}$ sous-couche).



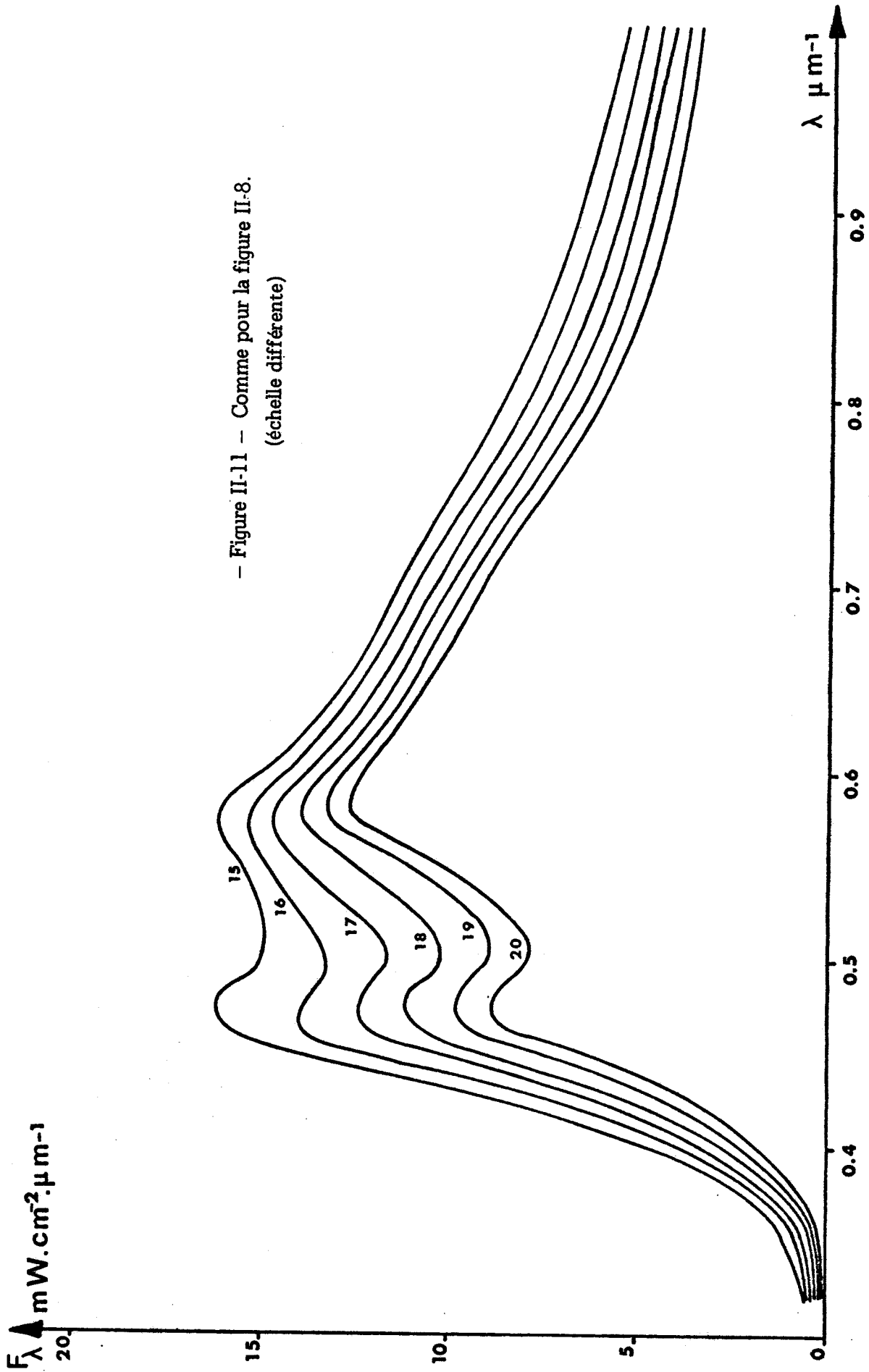


- Figure II-9 - Comme pour la figure II-8.
(échelle différente)



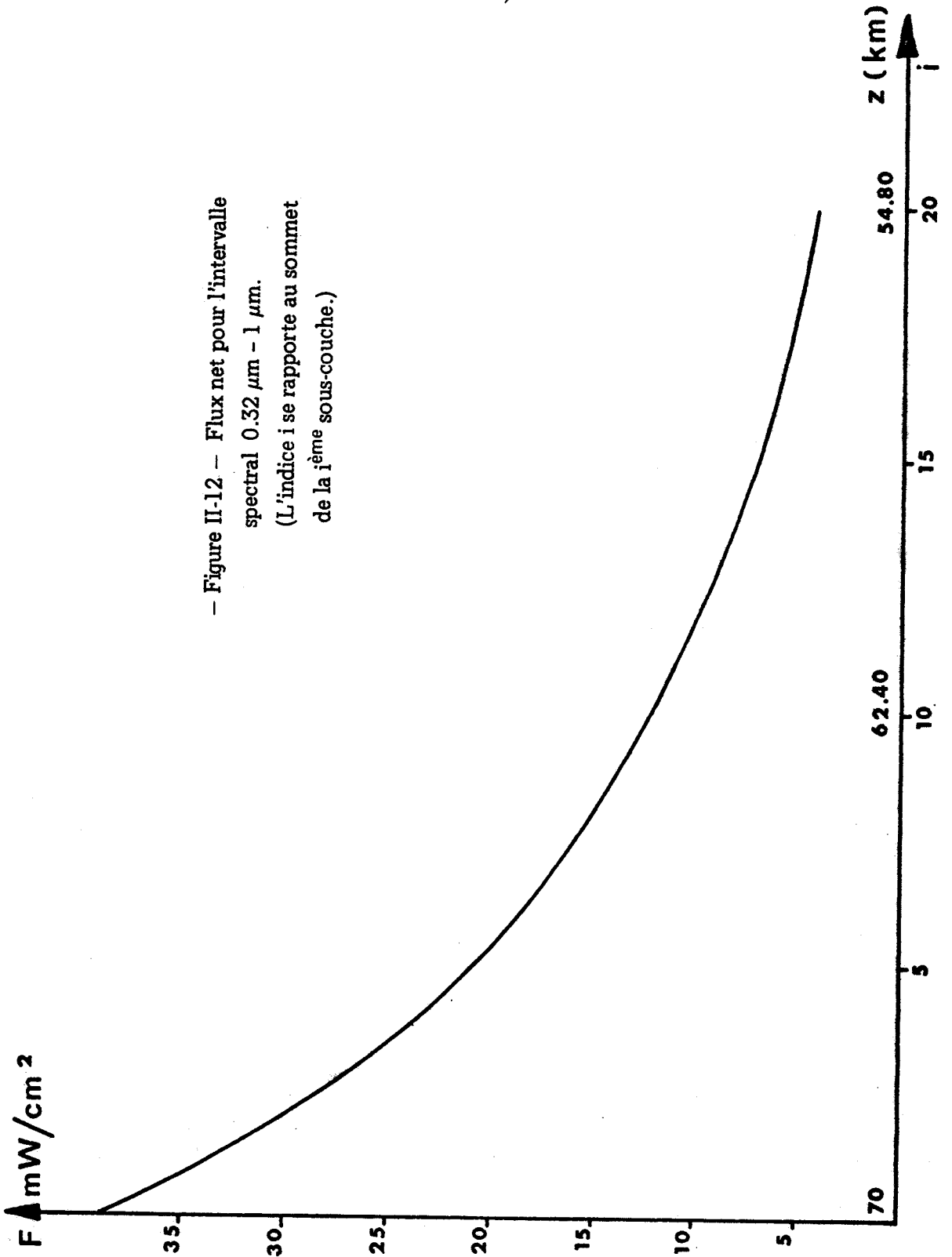


— Figure II-10 — Comme pour la figure II-8.
(échelle différente)



- Figure II-11 - Comme pour la figure II-8.
(échelle différente)



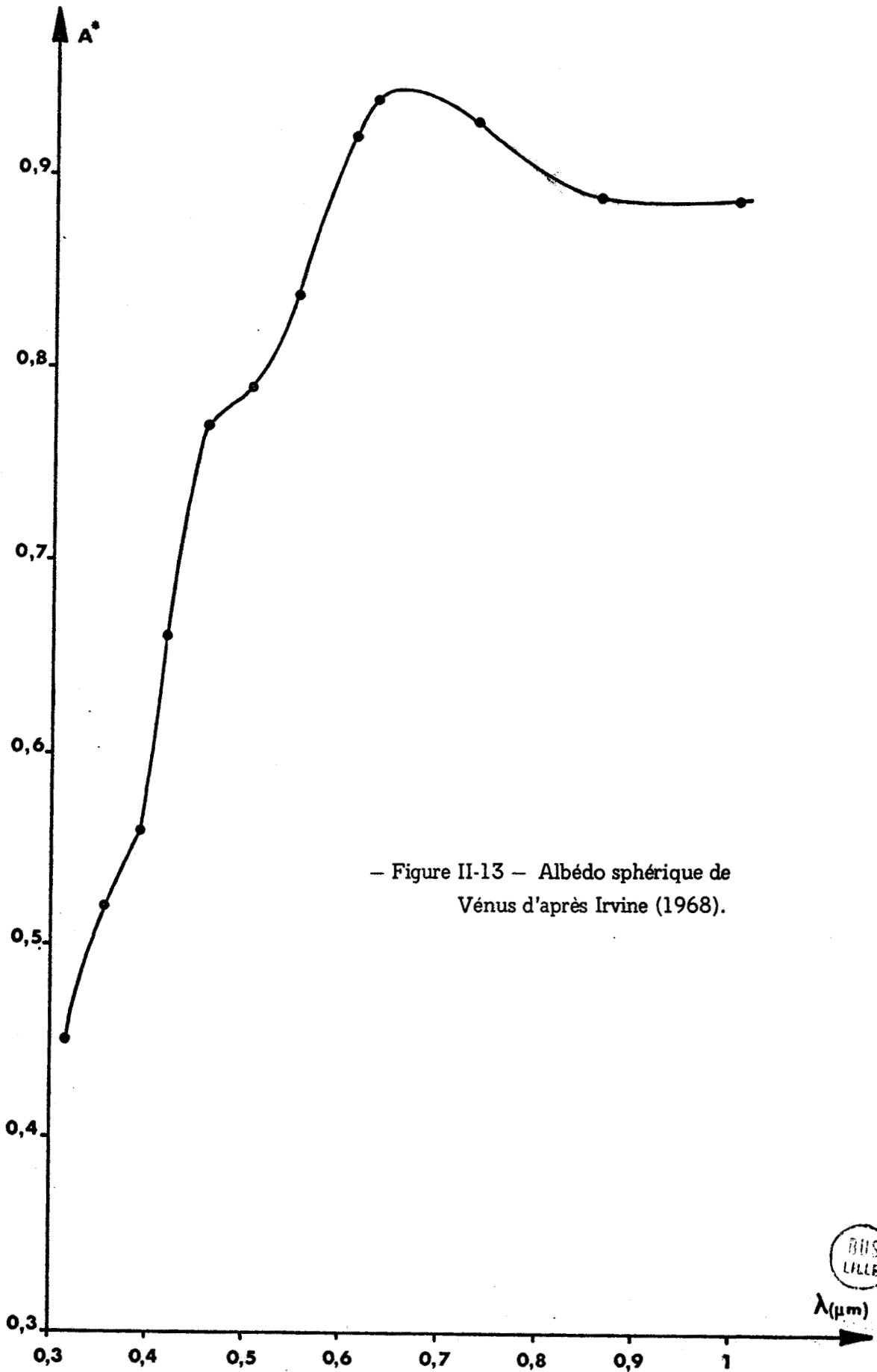


- Figure II-12 - Flux net pour l'intervalle spectral 0.32 μm - 1 μm .
(L'indice i se rapporte au sommet de la i^{ème} sous-couche.)



énergie solaire qui représente entre $0,30 \mu\text{m}$ et $0,45 \mu\text{m}$ environ 20% de l'énergie totale absorbée par Vénus serait donc dans ce modèle absorbée dans les dix premiers kilomètres. Il est possible que ce facteur joue un rôle prépondérant dans la rotation en quatre jours des nuages supérieurs de Vénus.

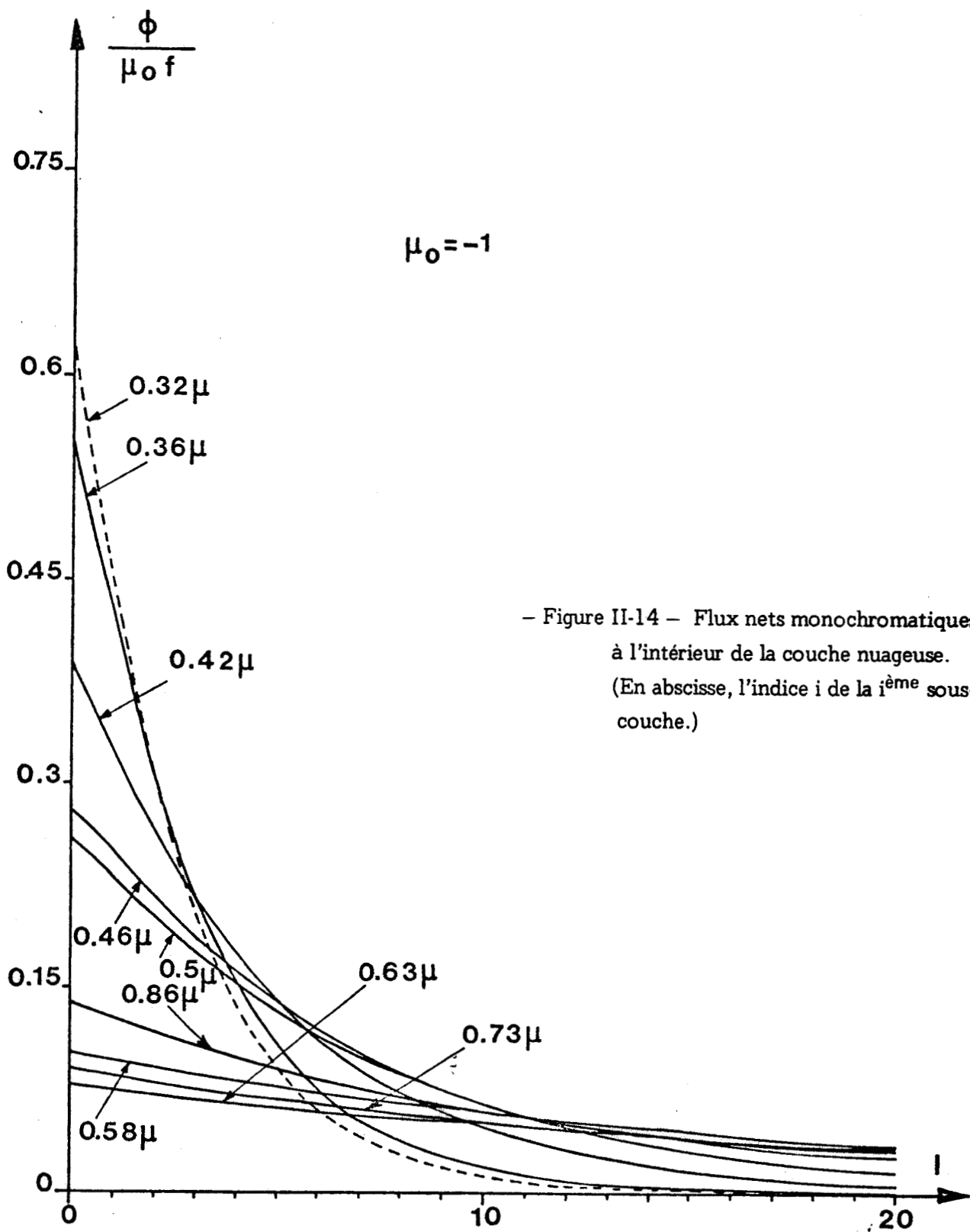
Aux grandes profondeurs, le rayonnement transmis et donc le flux net, se trouvent décalés vers le rouge. L'allure à deux bosses des courbes de flux observée aux bas niveaux correspond simplement à l'amplification de la légère anomalie de la courbe de l'albédo sphérique (Fig. 11.13) autour de $0,5 \mu\text{m}$ et qui se répercute sur la valeur de ω_0^λ . Ce résultat exprime bien la grande capacité des mesures de flux à donner des informations sur la structure verticale et leur caractéristiques d'absorption surtout si l'on sépare les mesures du flux montant et du flux descendant. On a représenté figures 11.14 à 11.16 les variations des flux nets et des flux montant et descendant à l'intérieur de la couche, dans le cas d'une incidence normale et pour quelques longueurs d'onde. Dans l'U.V. et même dans le bleu, ces quantités sont très sensibles à la profondeur optique et leur mesure permettrait dans ce cas de localiser précisément le ou les niveaux des constituants responsables de l'absorption du rayonnement solaire au moyen des algorithmes d'inversion mis au point pour l'étude des sondages des sondes Vénéra 8, 9 et 10.



- Figure II-13 - Albédo sphérique de Vénus d'après Irvine (1968).

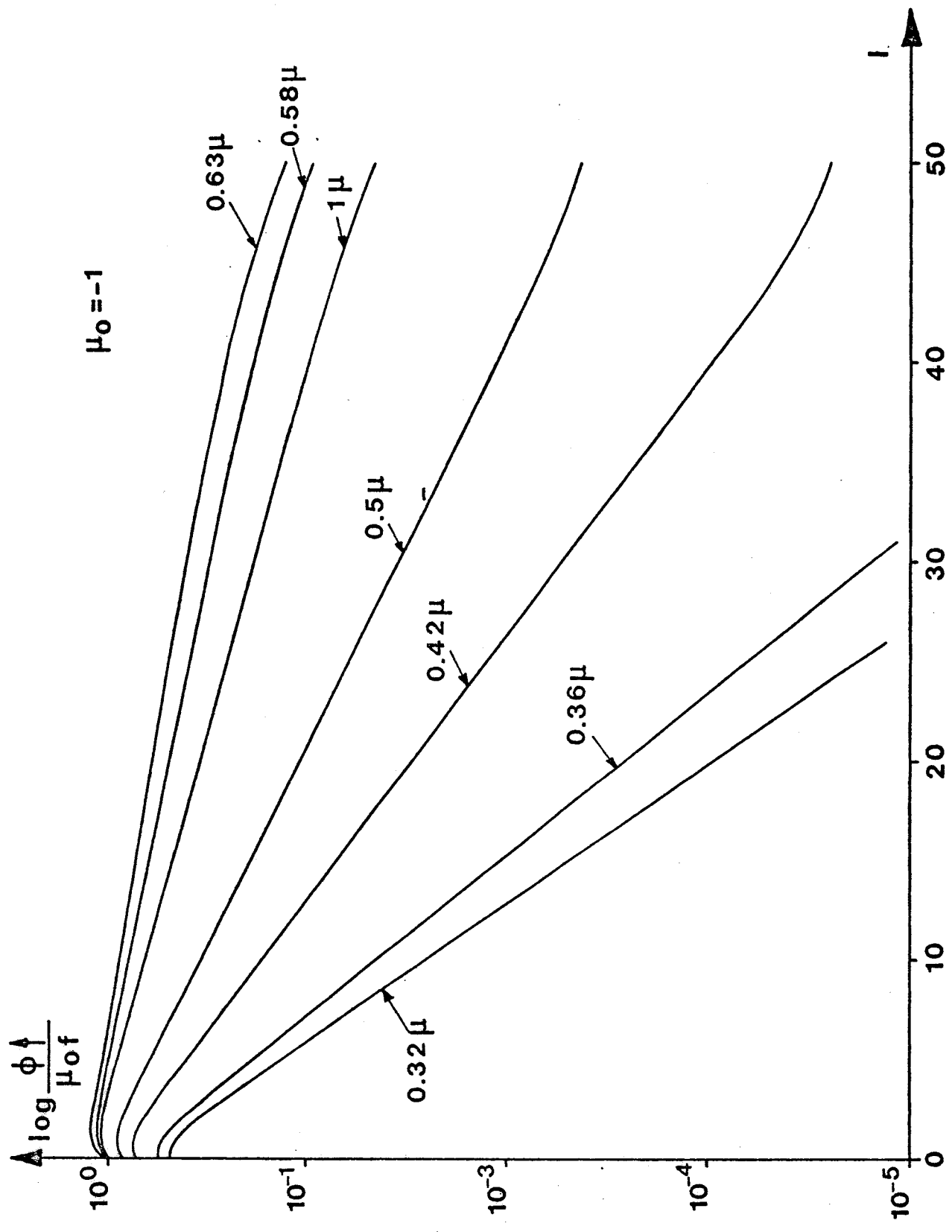


λ (μm)



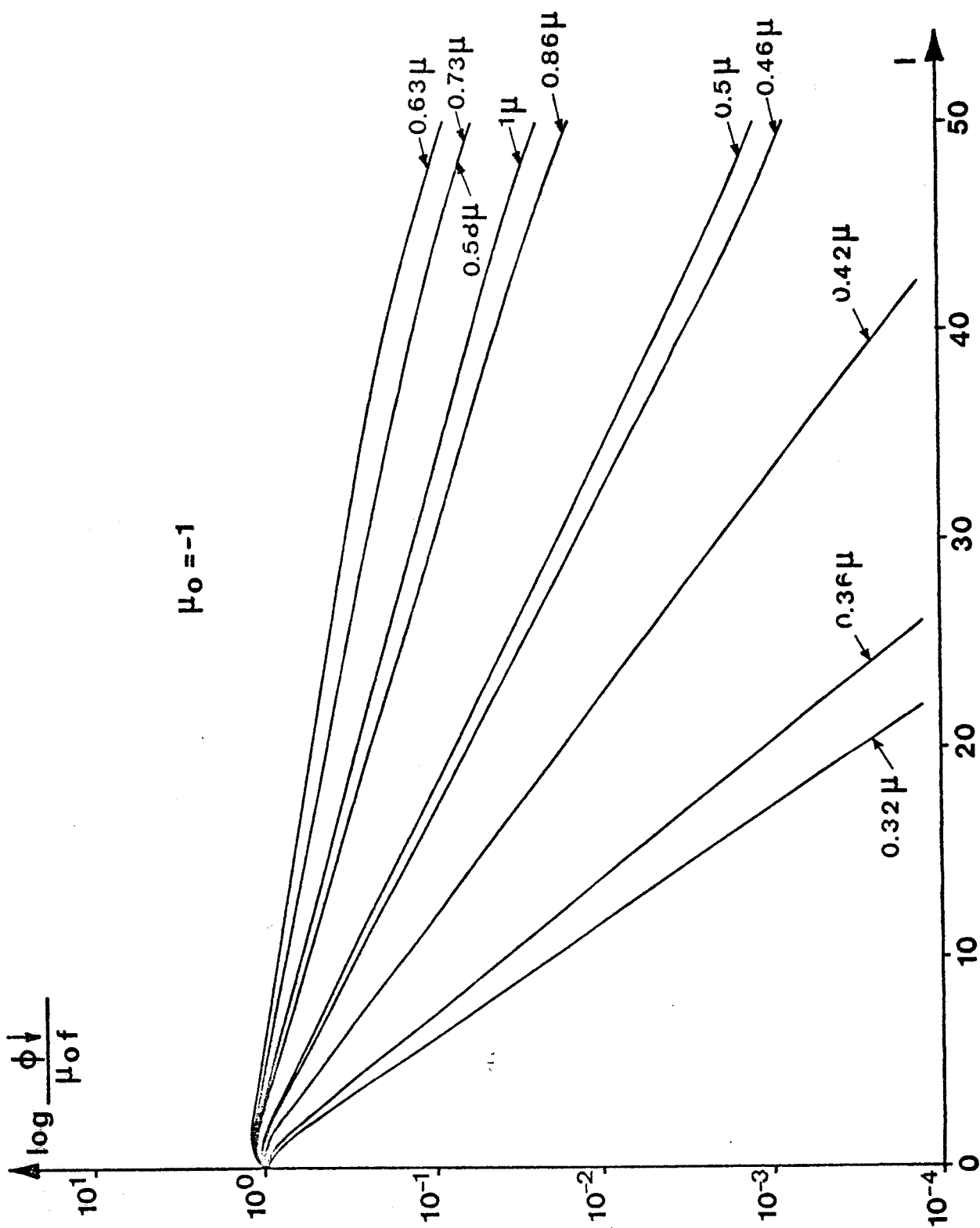
- Figure II-14 - Flux nets monochromatiques à l'intérieur de la couche nuageuse. (En abscisse, l'indice i de la $i^{\text{ème}}$ sous-couche.)





- Figure II-15 - Flux montant à l'intérieur de la couche nuageuse.
(En abscisse, l'indice i de la $i^{\text{ème}}$ sous-couche.)





— Figure II-16 — Flux descendant à l'intérieur de la couche nuageuse.
(En abscisse, l'indice i de la i ème sous-couche.)



Venus: Cloud Optical Depth and Surface Albedo from Venera 8

C. DEVAUX AND M. HERMAN

*Laboratoire d'Optique Atmosphérique,
Université des Sciences et Techniques de Lille, France*

Received May 4, 1974; revised July 25, 1974

We have used the measurements of the solar flux obtained by the Venera 8 spacecraft inside the atmosphere of Venus and the values of the Venus spherical albedo to deduce the characteristics of the clouds and of the ground. The method used is the exponential kernel approximation and the results have been tested by exact computations with the spherical harmonics method.

A cloud layer with an optical thickness $\bar{\tau}_1 \simeq 144$, an albedo for single scattering $\bar{\omega}_0 = 0.9998$ in the rear infrared, above a Rayleigh layer between 0 and 32 km and a ground of reflectivity $\rho = 0.4$, gives a good agreement with the experimental results. A model with two cloud layers is also discussed.

I. INTRODUCTION

The first measurement of the penetration of the solar flux through the Venus clouds was made by the Venera 8 spacecraft in July 1972. The downward flux $\phi_{\downarrow}(z)$ integrated between 0.5 and $0.8 \mu\text{m}$ was recorded starting at altitude $z_0 = 50 \text{ km}$. First it decreases approximately by a factor 3 from z_0 to $z_1 = 32 \text{ km}$, then by a factor 4 from z_1 down to the ground; the intervals (z_0, z_1) and (z_1, ground) correspond to very different laws of extinction (Avduevsky *et al.*, 1973). In terms of the incident solar flux $\mu_0 f$, the results are not very accurate because the landing point is not very well located (Sun at $5^\circ 5' \pm 2^\circ 5'$ above the horizon). However the measurements give approximately $\phi_{\downarrow}(z_0) \simeq 0.15 \mu_0 f$, $\phi_{\downarrow}(z_1) \simeq 0.05 \mu_0 f$ and $\phi_{\downarrow}(\text{ground}) \simeq 0.01$ to $0.015 \mu_0 f$, that is, about 1% of the solar flux is transmitted to the ground.

The first interpretations of these measurements (Avduevsky *et al.*, 1973; Feigelson *et al.*, 1973) have shown that, between the ground and altitude z_1 , the molecular scattering of the CO_2 atmosphere could by itself explain the observed variation of the flux. Between the levels z_1 and z_0 , various models of aerosols can be evolved. Feigelson *et al.* (1973) suggest two solutions: a cloud without absorption, of optical

thickness $\bar{\tau}_1$ between 20 and 50, or a thin cloud ($\bar{\tau}_1 \simeq 2$ or 3) with a rather strong absorption (albedo for single scattering $\omega_0 \simeq 0.95$). The analysis was made using Schwarzschild's approximation and for a mean wavelength. The conclusions of Titarchuk (1973) are rather similar, this author specifying that the higher aerosols transmit mostly red; this is in good agreement with the small value of the spherical albedo of Venus in the blue, which suggests a stronger absorption of the cloud for the short wavelengths.

Here our purpose is to combine these results with the values of the spherical albedo obtained by Irvine (1968), and with the conclusions deduced by Hansen and Arking (1971) and Hansen and Hovenier (1974). With some homogeneity conditions, one can deduce a rough value of the total optical thickness of the Venus cloud layer, of the albedo for single scattering and the ground albedo. We will limit ourselves to a calculation for the mean wavelength $0.7 \mu\text{m}$. The solar flux, the sensitivity of the Venera 8 detector and the Venus spherical albedo (therefore probably the flux extinction) do not vary much around this wavelength, and the approximation must be valid for a first analysis.

The equation of transfer will be solved in the exponential kernel approximation

first proposed by Wang (1972) and then generalized by Herman *et al.* (1973) to a stratified atmosphere. The accuracy is sufficient and of the same order as the one obtained in the Schwarzschild approximation, but it will be seen that the exponential kernel method leads to a very convenient formulation of the problem.

II. APPROXIMATE EXPRESSIONS OF THE SPHERICAL ALBEDO AND OF THE NET FLUX

Let us consider a uniform homogeneous planetary atmosphere, of optical thickness $\bar{\tau}_1$, bounded by a ground following Lambert's law with an albedo ρ . The phase function of the atmosphere is $p(\theta)$ and the albedo for single scattering is $\bar{\omega}_0$. The planetary albedo A^* is given by

$$\frac{1 + A^*}{1 - A^*} = u_\infty = u \left\{ \frac{1 + \delta \tanh \tau_1}{\delta + \tanh \tau_1} \right\} \quad (1)$$

and the net flux $4\pi F(\tau)$ in the atmosphere, at a point where the sun is at the zenith angle $\theta_0 = \arccos \mu_0$, by

$$4\pi F(\tau) \simeq \frac{\mu_0 f \gamma^2 (b^2 \mu_0^2 - 1)}{(b^2 - a\omega_1)(\gamma^2 \mu_0^2 - 1)} \times \left\{ -\exp[-\tau/(\mu_0 \gamma)] + \psi \frac{\sinh(\tau_1 - \tau) + \delta \cosh(\tau_1 - \tau)}{(1 + \delta u) \sinh \tau_1 + (\delta + u) \cosh \tau_1} \right\} \quad (2)$$

These approximate expressions are obtained by replacing the exponential integrals $E_2(t)$ and $E_3(t)$ by ae^{-bt} and ae^{-bt}/b , respectively ($a = 3/4$, $b = 3/2$), in the equation of transfer. The phase function has been first expanded into the very approximate form (Wang, 1972)

$$\bar{\omega}_0 p(\theta) \simeq \omega_0 + \omega_1 \cos \theta. \quad (3)$$

In Eq. (1) and (2), $\mu_0 f$ is the incident solar flux and we have written

$$\begin{aligned} u &= [(b^2 - a\omega_1)(1 - \omega_0 + a\omega_0)] / (1 - \omega_0)^{1/2} / b, \\ \delta &= u(1 - \rho) / (1 + \rho), \\ \gamma &= (b^2 - a\omega_1) / (bu), \\ \psi &= 1 + u(b|\gamma - \gamma\mu_0| / (b\mu_0 - 1)), \\ \tau &= \gamma \bar{\tau}. \end{aligned} \quad (4)$$

We notice that, if the absorption is not too large, the reduced variable τ is much smaller than the real optical thickness $\bar{\tau}$. In relation (2) we have neglected the terms in $\exp(-\bar{\tau}_1/\mu_0)$ which are to be considered only for very thin ($\bar{\tau}_1 < 1$) or very absorbing layers. For the thick layers ($\bar{\tau}_1 > 5$) and the scattering medium which we will have to consider, it will be enough to take in (3) $\omega_0 = \bar{\omega}_0$ and $\omega_1 = \bar{\omega}_0 \beta_1$, where $\beta_1 = 3 \langle \cos \theta \rangle$. In this case, A^* is obtained with an accuracy of about 1% and relation (2) of the flux, which increases in precision as $\bar{\tau}$ and μ_0 increase, remains accurate at 10% for $\mu_0 \simeq 0.1$ and $\bar{\tau}_1 > 5$.

Finally these expressions can be generalized for a stratified atmosphere. In the case of two homogeneous superposed layers, in the same approximation and with the same accuracy, the spherical albedo of the planet is given by the same equation (1), with only the ground albedo, in δ , being replaced by the spherical albedo $A^{*'} of the lower layer, which is given by$

$$\frac{1 + A^{*'}}{1 - A^{*'}} = u' \left\{ \frac{1 + \delta' \tanh \tau_1'}{\delta' + \tanh \tau_1'} \right\}, \quad (5)$$

where $\delta' = (1 - \rho)/(1 + \rho)$.

The same procedure can be applied to the calculation of the net flux by (2), if the upper layer is thick enough and not too absorbing ($\bar{\tau}_1 > 5$, $\bar{\omega}_0 > 0.9$).

More generally in an optically thick layer, under an optical thickness of about 5, the radiation field is diffuse enough to allow us to write

$$\begin{aligned} \Phi \uparrow(\bar{\tau}) / \Phi \downarrow(\bar{\tau}) &= A^*(\bar{\tau}), \\ \Phi \downarrow(\bar{\tau}) &= 4\pi F(\bar{\tau}) / [A^*(\bar{\tau}) - 1], \end{aligned} \quad (6)$$

where $A^*(\bar{\tau})$ is the spherical albedo of the part of the atmosphere contained between the level $\bar{\tau}$ and the ground. Therefore relations (1) and (2) make it possible to calculate the upward flux $\Phi \uparrow(\bar{\tau})$ and the downward flux $\Phi \downarrow(\bar{\tau})$ inside the layer.

III. OPTICAL THICKNESS OF A HOMOGENEOUS CLOUD

An approximate value of the total optical thickness of the Venus clouds is

sought from the Venera 8 sounding. The simplest hypothesis is to assume only one type of aerosol with an arbitrary height profile but with a concentration large enough to give an optical thickness of the cloud such that the optical thickness due to molecular scattering can be neglected. Then all that remains is to determine the values of $\bar{\tau}_1$ and ω_0 which are compatible with measured values of the outgoing flux (that is of A^*) and of the transmitted flux [or $T = \Phi_{\downarrow}(\text{ground})/\mu_0 f$]. There is only a single solution to the problem if it exists. Let us choose the phase function of the medium and the ground albedo ρ . If we first assume a semiinfinite layer from the measured value of A^* and relation (1), which becomes with $\tanh \bar{\tau}_1 = 1$,

$$(1 + A^*)/(1 - A^*) = u_{\infty} = u(\bar{\omega}_0^{\infty}), \quad (7)$$

we can deduce the value $\bar{\omega}_0^{\infty}$ of the albedo for single scattering of the particles corresponding to this case.

Considering the large reflectivity of Venus for the wavelength 0.7μ , it is reasonable to assume a ground less reflecting than the cloud itself. Therefore, if we postulate a higher level for the ground, we must increase $\bar{\omega}_0$ in order to keep the same outgoing flux, and the curve $\bar{\tau}_1(\bar{\omega}_0)$, for $A^* = \text{const}$ will be decreasing with $\bar{\omega}_0 > \bar{\omega}_0^{\infty}$. Simultaneously it is necessary to increase the absorption (or to decrease $\bar{\omega}_0$) to keep the same transmitted flux and the curve $\bar{\tau}_1(\bar{\omega}_0)$ for $T = \text{const}$ will be increasing. If the hypotheses are coherent, the solution sought will correspond to the intersection of the two curves; the condition of existence is immediately obtained and requires

$$\bar{\tau}_1(\bar{\omega}_0 = 1, A^* = \text{const}) < \bar{\tau}_1(\bar{\omega}_0 = 1, T = \text{const}). \quad (8)$$

It is also easy to establish, if we pass to the limit, that for a conservative layer, relations (1) and (2) are turned into

$$\frac{1 + A^*}{1 - A^*} = \frac{(1 + \rho) + (1 - \rho)(3 - \beta_1)\bar{\tau}_1/2}{(1 - \rho)} \quad (9)$$

and

$$\frac{(\rho - 1)\mu_0 f}{4\pi F(\bar{\tau}_1)} = \frac{1}{T} = \frac{2 + (1 - \rho)(3 - \beta_1)\bar{\tau}_1/2}{(b\mu_0 + 1)} \quad (10)$$

and relation (8) can be written

$$\rho > 1 - (b\mu_0 + 1)(1 - A^*)/2T \quad (11)$$

with the assumption $\rho < A^*$.

In our hypothesis of homogeneity the characteristics of the particles can be deduced from the polarization measurements. Hansen and Arking (1971) have shown that these measurements can be explained by spherical particles with a refractive index $m \simeq 1.46$ and a size distribution $n(r) = n_0 r^6 \exp(-7.5r)$. By expanding into Legendre polynomials the corresponding phase function for $\lambda = 0.7\mu\text{m}$, one obtains $\beta_1 \simeq 2.134$. For the same wavelength Irvine (1968) gives $A^* \simeq 0.94$, and the CO_2 molecular atmosphere of Venus has a Rayleigh optical thickness $\bar{\tau}_R \simeq 7$. These values of A^* and β_1 give $\bar{\omega}_0^{\infty} = 0.9998$. The Venera 8 sounding gives $T \simeq 5$ to 2% for $\mu_0 = 0.1$. In these conditions relation (11) is always satisfied and the ground reflection can take any value. We will have to look for the variation of the solution ($\bar{\tau}_1, \bar{\omega}_0$) with ρ .

We have drawn on Fig. 1, for $\rho = 0.5$ and $\beta_1 = 2.134$, a few curves $\bar{\tau}_1(\bar{\omega}_0, A^* = \text{const})$ and $\bar{\tau}_1(\bar{\omega}_0, T = \text{const})$, which show how the imprecision of the measurements

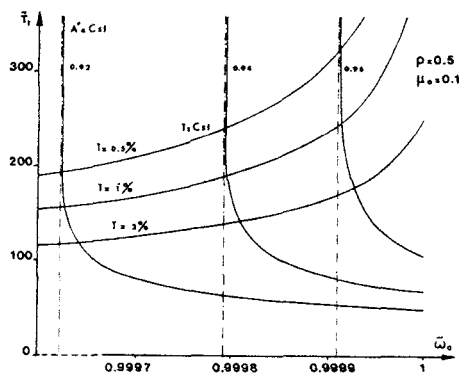


FIG. 1. Curves $\bar{\tau}_1(\bar{\omega}_0, A = \text{const})$ and $\bar{\tau}_1(\bar{\omega}_0, T = \text{const})$ for a homogeneous cloud with $\beta_1 = 2.134$, $\mu_0 = 0.1$, ground reflectivity $\rho = 0.5$; assumed values for A and T indicated.

can affect the result. In our case, where $\bar{\tau}_1$ is large, the influence of the ground on A^* is weak and a good approximation is obtained by simply replacing $\tilde{\omega}_0$ by $\tilde{\omega}_0^\infty$ in (2). For a better accuracy, this result can be improved by iteration; but it is better to establish directly a nearly rigorous solution of the problem. This solution as we have seen corresponds to $\tilde{\omega}_0 > \tilde{\omega}_0^\infty$ and we are sure that $1/\gamma$ is large (>75); the terms in γ^2 and $\exp(-\bar{\tau}_1/\mu_0)$ are negligible in (2) which becomes, for $\bar{\tau} = \bar{\tau}_1$ and after simplification

$$(1 + \delta u) \sinh \tau_1 + (\delta + u) \cosh \tau_1 = u(b\mu_0 + 1)/[T(\rho + 1)]. \quad (12)$$

Equations (1) and (12) then give

$$\cosh \tau_1 = y(\delta - x)/x(\delta^2 - 1), \quad (13)$$

$$\sinh \tau_1 = y(\delta x - 1)/x(\delta^2 - 1), \quad (14)$$

where we have written

$$x = \frac{\mu_\infty}{u} = \frac{(1 + A^*)}{(1 - A^*)} \frac{1}{u},$$

$$y = \frac{(b\mu_0 + 1) u_\infty}{T(1 + \rho) 1 + u_\infty} = \frac{(1 + A^*) (b\mu_0 + 1)}{2T(1 + \rho)}. \quad (15)$$

By squaring relations (13) and (14)

$$x^2 = \frac{y^2 - \delta^2 x^2}{y^2 - 1} \quad \text{and}$$

$$(\delta^2 - 1) = \frac{y^2(\delta^2 x^2 - 1)}{y^2 - \delta^2 x^2},$$

where δx and y are known. We will finally deduce $\tilde{\omega}_0$ from $x^2 \simeq (1 - \tilde{\omega}_0)/1 - \tilde{\omega}_0^\infty$ and τ_1 from $\cosh \tau_1$ or $\sinh \tau_1$. After some

simplifications, we get

$$\tilde{\omega}_0 = \tilde{\omega}_0^\infty + (1 - \tilde{\omega}_0^\infty)[(z^2 - 1)/(y^2 - 1)],$$

$$\bar{\tau}_1 = \frac{1}{\gamma} \operatorname{argcosh} \frac{1}{y} \left(\frac{y^2 + z}{1 + z} \right), \quad (16)$$

where

$$z = \delta x = (1 - \rho)(1 + A^*)/(1 + \rho)(1 - A^*).$$

Table I gives for $\rho = 0.5$ and 0.8 the values of $\bar{\tau}_1$ obtained for $A^* = 0.92, 0.94$ and 0.96 and $T = 0.5, 1.5$ and 2% . The lack of precision of ρ has a very small effect. The inaccuracy of μ_0 is completely negligible if we assume that T is known and let only the factor $(b\mu_0 + 1)$ vary in (16); the error as regards the landing point is important only insofar as it gives an inaccurate value for $T = \phi \downarrow$ (ground)/ $\mu_0 f$. We have not reported for each value of T and ρ the corresponding value of $\tilde{\omega}_0$ which is always very near to $\tilde{\omega}_0^\infty$; we have for

$$A = 0.92, \quad \tilde{\omega}_0^\infty = 0.999624;$$

$$A = 0.94, \quad \tilde{\omega}_0^\infty = 0.999793;$$

$$A = 0.96, \quad \tilde{\omega}_0^\infty = 0.999910.$$

Some comments must be made about these values. First, one can notice the large imprecision of the final result ($\bar{\tau}_1 \sim 100$ to 400). With T between 0.5 and 2% , we can hope the inaccuracy of the Venera 8 measurements is taken into account. But the lack of precision upon A^* is certainly larger than 2% [$\Delta A^* \sim 9\%$, from Irvine (1968)] and it is clear that only very qualitative results can be deduced from the now available data.

It will also be noticed that the assumed homogeneity of the cloud (that is β_1 and $\tilde{\omega}_0$ not dependent of z) is probably not a

TABLE I
OPTICAL THICKNESS $\bar{\tau}_1$ OF A HOMOGENEOUS CLOUD

A	$\rho = 0$			$\rho = 0.5$			$\rho = 0.8$		
	0.92	0.94	0.96	0.92	0.94	0.96	0.92	0.94	0.96
$T = 0.5\%$	160	195	253	193	241	324	233	298	414
1%	123	146	183	155	191	249	194	246	337
1.5%	102	120	146	134	162	207	172	216	292
2%	88	102	122	119	142	178	156	195	260

good hypothesis, with the model of a unique cloud going from the ground to the top of the atmosphere, unless one assume the particles are mostly located near the ground. But this first model is only given to show clearly the principle of the method of analysis. We will see in the next part that the bottom of the cloud probably sits at the level $z = 32$ km; then the molecular atmosphere and the scattering particles are approximately separated, so that one can avoid the difficult problem of choosing a mixing ratio versus z between particles and CO_2 .

IV. EFFECT OF A CLEAR LOWER ATMOSPHERE

An important result of the Venera 8 sounding is to have shown a sharp discontinuity in the decrease of the flux at about an altitude of 32 km. Generally by choosing the density of the particles, their phase function and their single scattering albedo, it is always possible to find an infinity of models representing the only measurement of the downward flux $\phi_{\downarrow}(z)$ between two altitudes. But in the interval (0.32 km) we are sure of the Rayleigh scattering component and it is able by itself to explain the variation of $\phi_{\downarrow}(z)$, as has been shown by Feigelson *et al.* (1973). Therefore it seems unlikely that there could exist an aerosol in this layer, at least with an important number density. If not, we would have to fix this number density versus the altitude in a very particular way to again fit the curve $\phi_{\downarrow}(z)$.

Therefore we will now consider the more realistic model of a homogeneous cloud (always with the Hansen and Arking characteristics) above a pure molecular atmosphere with an optical thickness $\bar{\tau}_R = 7$, and we will use the transmitted flux at $z = 32$ km, which gives $T' \simeq 0.05$.

For our problem, the presence of this Rayleigh layer is very interesting, because it will strongly screen the ground and practically eliminate the uncertainty of ρ . Indeed, we have mentioned before that, inside the medium, the upward flux can be deduced from the spherical albedo A^* of

the lower layer. At the level of 32 km, the spherical albedo of the conservative Rayleigh layer is given by (9) with $\beta_1 = 0$ and $\bar{\tau}_R = 7$, that is,

$$A_R^*(32) = 1 - \frac{2}{(1 + \rho)/(1 - \rho) + (3/2) \bar{\tau}_R + 1} \quad (17)$$

and if ρ varies from 0 to 0.8, it can be noted that $A_R^*(32)$ varies only from 0.83 to 0.90.

But we can push our deductions further. If the lower atmosphere is purely molecular, therefore nearly conservative at $\lambda = 0.7 \mu\text{m}$, the conservation of the flux makes it possible to deduce the reflectivity of the ground from the measurements of the downward flux.

In our approximation $\phi_{\downarrow}(32) - \phi_{\uparrow}(32) = \phi_{\downarrow}(\text{ground}) - \phi_{\uparrow}(\text{ground})$ gives $\phi_{\downarrow}(32) \{1 - A_R^*(32)\} = \phi_{\downarrow}(\text{ground}) (1 - \rho)$ and with (17),

$$\rho \simeq 1 - \left[\frac{\phi_{\downarrow}(32)}{\phi_{\downarrow}(\text{ground})} - 1 \right] \frac{4}{3\bar{\tau}_R}, \quad (18)$$

which gives here $\rho \simeq 0.4 \sim 0.5$.

The accuracy could be rather good, because only relative measurements enter into relation (18) and the dispersion of the Venera 8 measurements seems small. Of course the result depends on the hypothesis that the lower atmosphere is clear. In addition this result is very sensitive to the value $\bar{\tau}_R$, therefore to the mean wavelength adopted as representative of the transmitted solar flux. A more rigorous nonmonochromatic treatment would be worth developing.

Thereafter in order to obtain $\bar{\tau}_1$, we have to replace ρ in (16) by the value (17) of $A_R^*(32)$ (which is $A^* = 0.85$ for $\rho \simeq 0.4$) and to use for T the downward flux at $z = 32$ km (T around 5%). The results obtained are reported in Table II.

Table II shows the important influence of the errors on A^* and on the transmitted flux T at the level of 32 km. The values 2 and 2.3 of the coefficient β_1 would correspond to rather large deviations of the size or the refractive index of the particles from the values corresponding to our basic model. For the given size distribution

TABLE II
OPTICAL THICKNESS $\bar{\tau}_1$ OF A HOMOGENEOUS CLOUD ABOVE A MOLECULAR LAYER

A	0.92			0.94			0.96		
	T%	2	5	10	2	5	10	2	5
$\beta_1 = 2.3$	206	145	100	260	178	120	353	232	150
$\beta_1 = 2.134$	167	117	80	210	144	97	285	188	122
$\beta_1 = 2$	144	101	70	182	125	84	247	163	106

$[r^6 \exp(-7.5\tau)]$, β_1 goes from 2 to 2.3 when m goes from 1.34 to 1.64; for the given refractive index $m = 1.46$, the mean radius of the particles would vary from $0.8\mu\text{m}$ to $1.7\mu\text{m}$. So, it is clear that the precise nature of the aerosol has only a small influence on the result. Nor is the precise value of the reflectivity of the lower atmosphere important. The results given in Table II correspond to $A_R^*(32) = 0.8$; for the case $A^* = 0.94$, $T = 5\%$, $\beta_1 = 2.134$ for instance, $\bar{\tau}_1$ would vary only from 130 to 162 when $A_R^*(32)$ varies from 0.8 to 0.9 (that is, ρ from 0 to 0.8, for a clear atmosphere). Even if there are some particles in the lower atmosphere, the obtained optical depths must be representative ones for the clouds lying above the level 32km. These results show a rather large optical depth in the near infrared, of the order of 150, so that neglecting Rayleigh scattering in this part of the atmosphere seems a justified assumption. The albedos for single scattering have not been reported in Table II; they are always very near to the values obtained in Section III, with an infinite optical depth for the clouds.

To check the validity of our approximations, we have recomputed the downward flux $\phi_\downarrow(z)$ by the more accurate method of spherical harmonics (Deuze *et al.*, 1973), using as input data the results obtained above [$\bar{\omega}_0 = 0.9998$, $\bar{\tau}_1 = 144$, $\bar{\tau}_R = 7$, ρ (ground) = 0.4] and the exact phase function for the aerosol model of Hansen and Arking, to which corresponds $\beta_1 = 2.134$. The fluxes at $z = 32\text{km}$ and $z = 0$ are in a good agreement with the observed values but a better fit is obtained with an optical depth $\bar{\tau}_1 = 135$, which gives an idea of the accuracy of the

approximations. Except for the particular points $z = 0$ and $z = 32\text{km}$, the comparison cannot be definitive because the $\bar{\tau}(z)$ law in the cloud is not known. For the Rayleigh layer it seems reasonable to assume a decrease of τ proportional to the pressure. We have compared in Fig. 2 the measured and computed downward fluxes, using an optical Rayleigh thickness varying exponentially from 0 to 32km, and keeping an extinction coefficient constant in the cloud, determined by $\phi_\downarrow(50) - \phi_\downarrow(32)$. The comparison has only a limited significance, but it can be noticed that a level for the cloud top, between 60 and 70km, would be obtained by decreasing a little the assumed height of the Sun.

V. CASE OF TWO DIFFERENT CLOUD LAYERS

The results given above are dependent on the chosen model of a single cloud

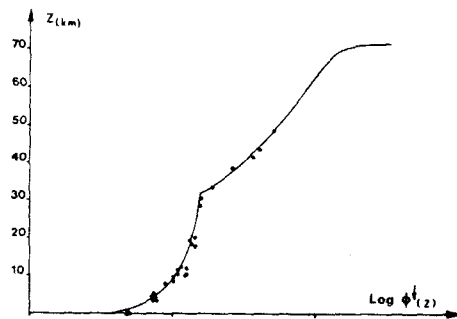


FIG. 2. Comparison between the downward fluxes measured by Venera 8 (experimental points) and computed by the spherical harmonics method; homogeneous upper layer $\bar{\omega}_0 = 0.9998$, $\bar{\tau}_1 = 135$; Rayleigh atmosphere $\bar{\omega}_0 = 1$, $\bar{\tau}_1 = 7$; ground reflectivity $\rho = 0.4$.

layer. If we assume several cloud layers, each of a different nature, the same kind of analysis cannot be applied so easily, but it is possible in some cases to limit the range of possible solutions.

Let us consider two layers above the clear lower atmosphere. As the sizes and the nature of the particles are of secondary importance we will take for the layers the same coefficient $\beta_1 = 2.134$. We will keep for the ground and the Rayleigh atmosphere the former results ρ and $\bar{\tau}_R$. Considering the regular variation of $\phi_{\downarrow}(z)$ between 32 and 50km, it seems reasonable to assume that we remain there in the same cloud and that the boundary between the two layers is above 50km. Then there are four unknowns: $(\bar{\omega}_0^s, \bar{\tau}_1^s)$ and $(\bar{\omega}_0^i, \bar{\tau}_1^i)$ which are the albedo for single scattering and the optical thickness, respectively, for the upper and the lower clouds. We have only three fundamental data: A^* , $\phi_{\downarrow}(32)$ and $\phi_{\downarrow}(50)$ [$\phi_{\downarrow}(\text{ground})$ has been used for the determination of ρ], and there are of course an infinity of solutions. It is unnecessary to look for a review of all possible solutions, but for example we can easily find the extreme model which will limit these solutions if we assume the lower layer to be more absorbing than the upper one. The study of $\phi_{\downarrow}(z)$ between 32 and 50km will allow us to choose $\bar{\omega}_0^i$ nearly as small as we want (except for the small contribution of the conservative molecular scattering), if we reduce simultaneously $\bar{\tau}_1^i$. But such a layer must be compatible with the spherical planetary albedo.

The most absorbing lower layer which can be expected must be associated with a conservative upper cloud ($\bar{\omega}_0^s = 1$) which will transmit downwards a maximum flux and simultaneously maintain the high reflectivity of Venus.

Let us call z_2 the unknown level of the boundary between the two clouds and write

$$y = \frac{1 + A_R^*(32)}{1 - A_R^*(32)},$$

$$(y \simeq 12.5 \text{ with } A^*$$

$$= 0.85 \text{ found in section IV), (19)}$$

$$x = \frac{1 + A^*(z_2)}{1 - A^*(z_2)} = u_i \left[\frac{y + u_i \tanh \tau_1^i}{u_i + y \tanh \tau_1^i} \right]. \quad (20)$$

The upper layer being conservative, the relations (1) and (2) take for it their limiting forms (with $u_s \rightarrow \infty$, $\gamma_s \rightarrow 0$ and $\tau_1^s \rightarrow 0$)

$$u_{\infty} = \frac{1 + A^*}{1 - A^*} = (3 - \beta_1) \frac{\bar{\tau}_1^s}{2} + x, \quad (21)$$

$(u_{\infty} \simeq 32.3),$

$$-4\pi F(\bar{\tau}^s) = \frac{\mu_0 f(3\mu_0 + 2)}{(3 - \beta_1) \tau_1^s + 2(1 + x)} = \text{const} \\ = 2\phi_{\downarrow}(z_2)/(1 + x), \quad (22)$$

with, at the level z_2 ,

$$-4\pi F(\bar{\tau}_1^s) = -\phi_{\uparrow}^{\downarrow}(z_2) + \phi_{\downarrow}^{\downarrow}(z_2) \\ = 2\phi_{\downarrow}^{\downarrow}(z_2)/(1 + x). \quad (23)$$

As we have assumed $z_2 > 50\text{km}$, then

$$\phi_{\downarrow}^{\downarrow}(z_2) > \phi_{\downarrow}^{\downarrow}(50) \quad (24)$$

and x will be bounded from below. (When x decreases, $\bar{\tau}_1^s$ must increase to screen the lower dark layers, but then the transmitted flux will decrease.) It can be established immediately from (21) and (22) that

$$x = \frac{(u_{\infty} + 1)4\phi_{\downarrow}^{\downarrow}(z_2)}{(3\mu_0 + 2)} - 1; \quad (25)$$

this gives

$$x > x_{\min}, \quad (26)$$

where

$$x_{\min} = \frac{(u_{\infty} + 1)4\phi_{\downarrow}^{\downarrow}(50)}{(3\mu_0 + 2)} - 1.$$

The upper layer corresponding to this limiting case is characterized by

$$\omega_0^s = 1 \quad \text{and} \quad \bar{\tau}_1^s \simeq 57. \quad (27)$$

Then we have to study the variations of the characteristics of the lower layer when z_2 varies above 50km; then x varies between x_{\min} and u_{∞} . If z_2 is high enough to give $x > y$ [that is a transmitted flux $\phi(z_2) > (3\mu_0 + 2)(y + 1)/4(u_{\infty} + 1)$], then the reflectivity at the level z_2 is higher than the reflectivity of the lower Rayleigh atmosphere, and from Eq. (20), $x > y$ gives $u_i > y$ and $\omega_0 > 0.996$.

If we now assume z_2 between this limiting level (such that $x = y$) and 50km, then $x < y$, and the lower cloud is slightly diminishing the high reflectivity of the underlying Rayleigh atmosphere. For a given value of x [or $A^*(z_2)$] the optical thickness τ_1^i of the cloud fulfilling this condition increases with $\tilde{\omega}_0^i$ (Fig. 3). The vertical asymptote of the curve $\tau_1^i(\tilde{\omega}_0^i, x = \text{const})$ corresponds to $u_i = x$, therefore to a value $\tilde{\omega}_0^i < 0.996$ as seen above. When x decreases, that is when the level z_2 goes down, the curves $\tau_1^i(\tilde{\omega}_0^i, x = \text{const})$ will be translated upwards. On the other hand let us consider the flux transmitted by this cloud. It will be deduced from (2) (not taking into account, at these depths, the term containing $e^{-\tau/\mu_0}$, which corresponds to the direct solar beam). It is obtained from (2) with (23):

$$\frac{4\pi F(\tau^i = 0)}{4\pi F(\tau^i = \tau_1^i)} = y \frac{\sinh \tau_1^i}{u_i + \cosh \tau_1^i} = \frac{\phi_{\downarrow}(z_2)(y+1)}{\phi_{\downarrow}(32)(x+1)} > \frac{\phi_{\downarrow}(50)(y+1)}{\phi_{\downarrow}(32)(x+1)}. \quad (28)$$

For the same value of z_2 , the solutions $\tau_1^i(\tilde{\omega}_0^i)$ which fulfill the condition of a fixed transmission $T = \phi_{\downarrow}(z_2)/\phi_{\downarrow}(32) = \text{const}$, are also increasing but bounded when $\tilde{\omega}_0^i \rightarrow 1$ and the curve $\tau_1^i(\tilde{\omega}_0^i, T = \text{const})$ cuts the preceding curve $\tau_1^i(\tilde{\omega}_0^i, x = \text{const})$ at the point M corresponding to the solution which is sought, if this solution exists. Now when z_2 decreases, the curve $\tau_1^i(\tilde{\omega}_0^i, T = \text{const})$ is translated downwards. Then it is clear that the solution $(\tau_1^i, \tilde{\omega}_0^i)$ corresponding to the largest possible absorption will be obtained for the minimum possible value of $\phi_{\downarrow}(z_2)$ and of x , that is for $z_2 = 50\text{km}$.

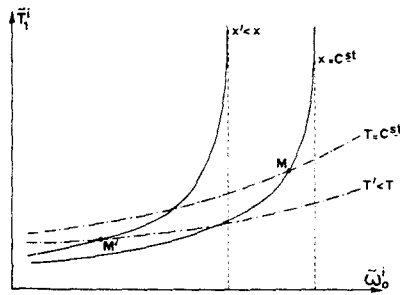


FIG. 3

This solution is easy to obtain; from (20) and (28) we get

$$\cosh \tau_1^i + \frac{u_i}{y} \sinh \tau_1^i = \frac{x_{\min}(y+1)\phi_{\downarrow}(50)}{y(x_{\min}+1)\phi_{\downarrow}(32)} = A, \quad (29)$$

$$\sinh \tau_1^i + \frac{u_i}{y} \cosh \tau_1^i = \frac{(y+1)\phi_{\downarrow}(50)u_i}{(x_{\min}+1)\phi_{\downarrow}(32)y} = \frac{Bu_i}{y}, \quad (30)$$

from which

$$u_i = y \left(\frac{A^2 - 1}{B^2 - 1} \right)^{1/2} = 7.25, \quad (31)$$

$$\omega_{0\min}^i \sim 0.9945, \quad \tau_1^i \simeq 21. \quad (32)$$

In this limiting case the total optical thickness $\tau_1^s + \tau_1^i \simeq 78$ is not very different from the value obtained for a homogeneous cloud (Section IV) and it seems difficult to assume that the deep layers are very absorbing in the near infrared; this cancels one of the possibilities suggested by Feigelson.

The possibility of an upper layer more absorbing than the lower layer is more difficult to discuss and we cannot fix a lower limit for $\tilde{\omega}_0^s$ because we do not have measurements of the flux at these high altitudes.

VI. CONCLUSION

The measurements of the transmitted solar flux with those of the spherical albedo of Venus indicate a rather large value of the optical thickness. The layer sounded seems to have a small absorption in the near infrared, independently of the assumptions, and the ground reflectivity seems rather large.

A homogeneous cloud layer of optical thickness $\tau_1 = 144$ with an albedo for single scattering $\tilde{\omega}_0 = 0.9998$ above a Rayleigh atmosphere of optical thickness $\tau_R = 7$ and a ground with an albedo $\rho = 0.4$ (at the mean wavelength $0.7\mu\text{m}$) gives a good agreement with the experimental results. On the other hand if we are seeking the characteristics of a two layers cloud, with

the stronger absorption in the lower layer, it can be shown that the layer between 50 and 32km must have an albedo for single scattering $\tilde{\omega}_0^i > 0.9945$ with an optical thickness $\tilde{\tau}_1^i > 21$; in this limiting case the upper layer must be conservative ($\tilde{\omega}_0^s = 1$) with an optical thickness $\tilde{\tau}_1^s \sim 57$.

All these numerical values are of course to be taken with caution considering the degree of uncertainty of the few available data. Some of these results are not more valid than the necessary assumptions taken to obtain them. But some of these assumptions could be easily removed if the upward flux was measured. A small accuracy on these fluxes ($\sim 10\%$) would be a sufficient one. The major source of error is certainly the large uncertainty on the spherical albedo of Venus, and the more reflecting is Venus, the more dramatic is this error. So measurements of the fluxes for blue light, where Venus is more absorbing, would give much valuable information.

It is clear that the analysis of the only solar upward and downward flux measured by a probe in the atmosphere, for one or several wavelengths, could give rather accurate information regarding the cloud structure.

Note added in proof. In a recent paper Lacis and Hansen (1974) studied the Venera 8 measurements from the same point of view. We were pleased to see in a preprint they sent us that their conclusions agree with ours in essential respects. There is nevertheless an interesting difference in our papers. Hansen and Lacis assumed a constant mixing ratio of scattering particles and CO₂ molecules. With such an assumption, it seems that at least 2 homo-

geneous clouds above the level 32km are needed to fit the data.

REFERENCES

- AVDUEVSKY, V. S., MAROV, M. YA., MOSHKIN, B. E., AND EKONOMOV, A. P. (1973). Venera 8: Measurements of solar illumination through the atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **30**, 1215-1218.
- BIGOURD, C., DEVAUX, C., AND HERMAN, M. (1973). Internal Report. Laboratoire d'Optique Atmosphérique, Université des Sciences et Techniques, U. E. R. de Physique Lille, France.
- DEUZE, J. L., DEVAUX, C., AND HERMAN, M. (1973). Utilisation de la méthode des harmoniques sphériques dans les calculs de transfert radiatif: Extension au cas de couches diffusantes d'absorption variable. *Nouv. Rev. Optique* **4**, 307-314.
- FEIGELSON, E. M., *et al.* (1973). The interpretation of the measurements of illumination by the automatic interplanetary station Venera 8. Presented at the Copernicus Symposium IV, I. A. U. Symposium 65. Torun, Poland.
- HANSEN, J. E., AND ARKING, A. (1971). Clouds of Venus: Evidence for their nature. *Science* **171**, 669-672.
- HANSEN, J. E., AND HOVENIER, J. W. (1974). Interpretation of the polarization of Venus. *J. Atmos. Sci.* **31**, 1137-1160.
- IRVINE, W. M. (1968). Monochromatic phase curves and albedos for Venus. *J. Atmos. Sci.* **25**, 610-616.
- LACIS, A. A., AND HANSEN, J. E. (1974). Atmosphere of Venus: Implications of Venera 8 sunlight measurements. *Science* **184**, 979-981.
- TITARCHUK, L. G. (1973). Optical properties of the lower atmosphere of Venus: Interpretation of the results obtained by the capsule Venera 8. Academy of Sciences, U.S.S.R.
- WANG, L. (1972). Anisotropic nonconservative scattering in a semi-infinite medium. *Astrophys. J.* **174**, 671-678.