

50376
1977
13

N° d'ordre : 381

50376
1977
13

THESES

présentées à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Jean-Paul BRASSELET

Première Thèse

**SUITE SPECTRALE DES APPLICATIONS C^0 -STRATIFIÉES
(HOMOLOGIE DES FIBRÉS A SINGULARITÉS)**

Deuxième Thèse

SUR LES POLYNÔMES DE BERNSTEIN ET LA MONODROMIE d'après B. MALGRANGE



Thèses soutenues le 11 Mai 1977 devant la Commission d'Examen :

MM. H. CARTAN,
D. LEHMANN,
Mme M.H. SCHWARTZ,
MM. M. SEBASTIANI,
W. SHIH,

Président, Rapporteur,
Rapporteur,
Examineur,
Rapporteur,
Directeur de Recherche, Rapporteur.

Aux suites spectrales,

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Henri Cartan pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse. Ses remarques pertinentes et ses précieux conseils m'ont permis d'améliorer considérablement la présentation et la rédaction de ce travail.

Daniel Lehmann, par ses nombreux séminaires et cours à l'Université de Lille I, m'a permis d'approfondir mes connaissances en topologie algébrique et de travailler dans une ambiance amicale et fructueuse. Grâce à ses nombreuses suggestions, j'ai pu compléter, entre autres, le chapitre VI de ce mémoire.

Madame Marie-Hélène Schwartz n'a cessé, tout au long de leur élaboration, de prêter attention à mes travaux. Elle a fait preuve, à mon égard, d'un appui enthousiaste et désintéressé. Qu'elle en soit ici très sincèrement remerciée.

Mes remerciements vont tout particulièrement à Weishu Shih. Malgré sa modestie bien connue, les innombrables discussions que j'ai eues avec lui ont toujours été très fécondes. Je suis particulièrement heureux de montrer ici l'intérêt des techniques qu'il a introduites dans l'étude des fibrés. Ses encouragements et son optimisme ont eu une importance décisive sur l'achèvement de ce travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Marcos Sébastiani. Il m'a initié aux mystères de la monodromie et de la connexion de Gauss-Manin. Son amical soutien m'a permis de faire ma seconde thèse dans les meilleures conditions.

Je n'oublierai pas Bernard Callenaere, Stephen Halperin, Jean-Claude Thomas et tous les collègues et amis de l'U.E.R. de Mathématiques de Lille qui à des degrés variés, m'ont aidé par leurs utiles conversations, même extra-mathématiques.

C'est avec plaisir que je remercie tout spécialement Chin Cheng Chou, Geneviève et André Didierjean, Jacques Dunau, Claude et André Legrand et Jean-André Marti pour leur appui amical et efficace. Je n'aurai jamais pu mener à bien cette thèse sans leur aide et surtout sans l'enthousiasme qu'ils ont porté à l'isomorphisme de Thom en homologie de Borel Moore.

Cette thèse est aussi le fruit du travail de Raymonde Bérat et Arlette Lengaigne qui l'ont dactylographiée, de Françoise Wdowczyk, Albert Gournay et Michel Provost qui l'ont imprimée. Je les remercie très vivement de la rapidité et de la compétence avec lesquelles ils ont assuré la réalisation matérielle de ce travail.

DOYENS HONORAIRES de l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit
et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DECUYPER
DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, GLACET, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE
KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT,
MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SAVARO, WATERLOT, WIEMAN,
ZAMANSKI.

PRESIDENTS HONORAIRES DE L'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R. DEFRETIN, M. PARREAU.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. M. MIGEON.

PROFESSEURS TITULAIRES

| | |
|---------------------------|----------------------------------|
| M. BACCHUS Pierre | Astronomie |
| M. BEAUFILS Jean-Pierre | Chimie Physique |
| M. BECART Maurice | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. BILLARD Jean | Physique du Solide |
| M. BIAYS Pierre | Géographie |
| M. BONNEMAN Pierre | Chimie Appliquée |
| M. BONNOT Ernest | Biologie Végétale |
| M. BONTE Antoine | Géologie Appliquée |
| M. BOUGHON Pierre | Algèbre |
| M. BOURIQUET Robert | Biologie Végétale |
| M. CELET Paul | Géologie Générale |
| M. COEURE Gérard | Analyse |
| M. CONSTANT Eugène | Electronique |
| M. DEBOURSE Jean-Pierre | Gestion des Entreprises |
| M. DELATTRE Charles | Géologie Générale |
| M. DELHAYE Michel | Chimie Physique |
| M. DERCOURT Jean | Géologie Générale |
| M. DURCHON Maurice | Biologie Expérimentale |
| M. FAURE Robert | Mécanique |
| M. FOURET René | Physique du Solide |
| M. GABILLARD Robert | Electronique |
| M. GONTIER Gérard | Mécanique |
| M. GRANELLE Jean-Jacques | Sciences Economiques |
| M. GRUSON Laurent | Algèbre |
| M. GUILLAUME Jean | Microbiologie |
| M. HEUBEL Joseph | Chimie Minérale |
| M. LABLACHE-COMBIER Alain | Chimie Organique |
| M. LACOSTE Louis | Biologie Végétale |
| M. LANSRAUX Guy | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. LAVEINE Jean-Pierre | Paléontologie |
| M. LEBRUN André | Electronique |
| M. LEHMANN Daniel | Géométrie |

| | |
|---------------------------|-----------------------------------|
| Mme LENOBLE Jacqueline | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. LINDER Robert | Biologie et Physiologie Végétales |
| M. LOMBARD Jacques | Sociologie |
| M. LOUCHEUX Claude | Chimie Physique |
| M. LUCQUIN Michel | Chimie Physique |
| M. MAILLET Pierre | Sciences Economiques |
| M. MONTARIOL Frédéric | Chimie Appliquée |
| M. MONTREUIL Jean | Biochimie |
| M. PARREAU Michel | Analyse |
| M. POUZET Pierre | Analyse numérique |
| M. PROUVOST Jean | Minéralogie |
| M. SALMER Georges | Electronique |
| M. SCHILTZ René | Physique Atomique et Moléculaire |
| Mme SCHWARTZ Marie-Hélène | Géométrie |
| M. SEGUIER Guy | Electrotechnique |
| M. TILLIEU Jacques | Physique Théorique |
| M. TRIDOT Gabriel | Chimie Appliquée |
| M. VIDAL Pierre | Automatique |
| M. VIVIER Emile | Biologie Cellulaire |
| M. WERTHEIMER Raymond | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. ZEYTOUNIAN Radyadour | Mécanique |

PROFESSEURS SANS CHAIRE

| | |
|------------------------|-------------------------------------|
| M. BELLET Jean | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. BKOUCHE Rudolphe | Algèbre |
| M. BODARD Marcel | Biologie Végétale |
| M. BOILLET Pierre | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. BOILLY Bénoni | Biologie Animale |
| M. BRIDOUX Michel | Chimie Physique |
| M. CAPURON Alfred | Biologie Animale |
| M. CORTOIS Jean | Physique Nucléaire et Corpusculaire |
| Mme DACHARRY Monique | Géographie |
| M. DEPREZ Gilbert | Physique Théorique |
| M. DEVRAINNE Pierre | Chimie Minérale |
| Mme EVRARD Micheline | Chimie Appliquée |
| M. GOSSELIN Gabriel | Sociologie |
| M. GOUDMAND Pierre | Chimie Physique |
| M. GUILBAULT Pierre | Physiologie Animale |
| M. HERMAN Maurice | Physique Spatiale |
| Mme LEHMANN Josiane | Analyse |
| M. LENTACKER Firmin | Géographie |
| M. LEROY Jean-Marie | Chimie Appliquée |
| M. LOUAGE Francis | Electronique |
| M. MAIZIERES Christian | Automatique |
| Mme MARQUET Simone | Probabilités |
| M. MIGEON Michel | Chimie Physique |
| M. MONTEL Marc | Physique du Solide |
| M. MONTUELLE Bernard | Biologie Appliquée |
| M. NICOLE Jacques | Chimie Appliquée |
| M. PAQUET Jacques | Géologie Générale |
| M. RACZY Ladislas | Electronique |
| M. ROUSSEAU Jean-Paul | Physiologie Animale |
| M. SLIWA Henri | Chimie Organique |
| M. WATERLOT Michel | Géologie Générale |

MAITRES DE CONFERENCES (Et Chargés d'Enseignement)

| | |
|---------------------|----------------------|
| M. ADAM Michel | Sciences Economiques |
| M. ANTOINE Philippe | Analyse |
| M. BART André | Biologie Animale |
| Mme BATTIAU Yvonne | Géographie |

| | |
|---------------------------|----------------------------------|
| M. BEGUIN Paul | Mécanique |
| M. BONNELLE Jean-Pierre | Chimie |
| M. BOSCO Denis | Probabilités |
| M. BREZINSKI Claude | Analyse Numérique |
| M. BRUYELLE Pierre | Géographie |
| M. CARREZ Christian | Informatique |
| M. COQUERY Jean-Marie | Psycho-Physiologie |
| M. CORDONNIER Vincent | Informatique |
| M. COUTURIER Daniel | Chimie Organique |
| M. CRAMPON Norbert | Géologie |
| M. CROSNIER Yves | Electronique |
| M. DEBRABANT Pierre | Géologie Appliquée |
| M. DEGAUQUE Pierre | Electronique |
| M. DELORME Pierre | Physiologie Animale |
| M. DE PARIS Jean-Claude | Mathématiques |
| M. DHAINAUT André | Biologie Animale |
| M. DELAUNAY Jean-Claude | Sciences Economiques |
| M. DERIEUX Jean-Claude | Microbiologie |
| M. DOUKHAN Jean-Claude | Physique du Solide |
| M. DUBOIS Henri | Physique |
| M. DUEE Gérard | Géologie |
| M. DYMENT Arthur | Mécanique |
| M. ESCAIG Bertrand | Physique du Solide |
| M. FAKIR Sabah | Algèbre |
| M. FLAMME Jean-Marie | Technologie de Construction |
| M. FOCT Jacques | Génie Mécanique |
| M. FONTAINE Hubert | Physique |
| M. FONTAINE Jacques | Electronique |
| M. FOURNET Bernard | Biochimie |
| M. GAMBLIN André | Géographie |
| M. GERVAIS Michel | Gestion des Entreprises |
| M. GOBLOT Rémi | Algèbre |
| M. HECTOR Joseph | Géométrie |
| M. JACOB Gérard | Informatique |
| M. JOURNAL Gérard | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. KREMBEL Jean | Biochimie |
| M. LAURENT François | Automatique |
| Mlle LEGRAND Denise | Algèbre |
| Mlle LEGRAND Solange | Algèbre |
| M. LEROY Yves | Electronique |
| M. LHENAFF René | Géographie |
| M. LOCQUENEUX Robert | Physique théorique |
| M. MACKE Bruno | Physique |
| M. MAHIEU Jean-Marie | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. MESSELYN Jean | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. MIGNOT Fulbert | Analyse Numérique |
| M. N'GUYEN VAN CHI Régine | Géographie |
| M. NOTELET Francis | Electrotechnique |
| M. NUSSEMBAUM Maurice | Sciences Economiques |
| M. PARSY Fernand | Mécanique |
| M. PAUPARDIN Colette | Biologie Physiologie Végétales |
| M. PECQUE Marcel | Chimie Physique |
| M. PERROT Pierre | Chimie Appliquée |
| M. PERTUZON Emile | Physiologie Animale |
| M. PETIT Francis | Chimie Organique |
| M. PONSOLLE Louis | Chimie Physique |
| M. POVY Lucien | Automatique |
| M. RICHARD Alain | Biologie |
| M. ROGALSKI Marc | Analyse |
| M. ROY Jean-Claude | Psycho-Physiologie |
| M. SIMON Michel | Sociologie |
| M. SOMME Jean | Géographie |

M^{lle} SPIK Geneviève
M. STANKIEWICZ François
M. STERBOUL François
M. TAILLEZ Roger
M. THERY Pierre
M. TOP Gérard
M. TOULOTTE Jean-Marc
M. TREANTON Jean-René
M. VANDORPE Bernard
M. VILLETTE Michel
M. WALLART Francis
M. WERNER Georges
M^{me} ZIN-JUSTIN Nicole

Biochimie
Sciences Economiques
Informatique
Biologie
Electronique
Sciences Economiques
Automatique
Sociologie
Chimie Minérale
Mécanique
Chimie
Informatique
Algèbre

PREAMBULE

L'objet de ce travail est de construire, pour les fibrés à singularités, une suite spectrale généralisant la suite spectrale de Serre. En fait, la construction sera valable pour une classe d'applications plus large que celle des fibrés à singularités, nous les avons appelées applications C^0 -stratifiées pour des raisons explicitées au chapitre I.

Cette étude permet une réponse partielle aux problèmes posés par les fibrés à singularités (Montgomery et Samelson [37]), entre autres celui des relations entre les propriétés homologiques des espaces en cause. Les résultats obtenus dans ce domaine complètent ceux de Bredon [10], Conner et Dyer [19], Antonelli [3], que l'on retrouve d'ailleurs. Certains d'entre eux proviennent de généralisations des suites exactes de Wang, Smith et Gysin.

La méthode utilisée permet d'énoncer des théorèmes de non existence de fibrations à singularités. Elle s'applique aussi au calcul des invariants locaux de Hu [30] et à l'étude d'actions semi-libres de groupes.

L'essentiel de la construction de la suite spectrale se fait dans la théorie de l'homologie singulière. Cependant, les propriétés topologiques des applications C^0 -stratifiées amènent à travailler également en homologie simpliciale, à partir d'une triangulation de l'espace "de base". Nous n'utilisons donc pas la notion de faisceau.

Parmi les propriétés de la suite spectrale, signalons la dualité avec la suite spectrale de I. Fáy [24] dans l'intersection de leurs domaines de définition et plusieurs propriétés héritées de celles de la suite spectrale des fibrés (J.P. Serre [38]).

Une première rédaction de plusieurs chapitres de cette thèse
a été publiée aux Publications Internes de l'U.E.R. de Mathématiques,
Université de LILLE I :

- n° 28 - *Suite spectrale des pseudo-fibrés*, (τ_1) - Mai 1974.
n° 33 - *Suite spectrale des pseudo-fibrés*, (τ_2) - Aout 1974.
n° 36 - *Sur la suite exacte de Thom*, (τ_3) - Octobre 1974.
n° 39 - *Suite spectrale des pseudo-fibrés*, (τ_4) - Janvier 1975.

S O M M A I R E.

| | <u>Pages</u> |
|---|--------------|
| <u>INTRODUCTION.</u> | |
| <u>CHAPITRE I - APPLICATIONS C^r-STRATIFIEES.</u> | 8 |
| 1 - Définitions | 8 |
| 2 - Exemples | 10 |
| 3 - Fibrés à singularités | 13 |
| <u>CHAPITRE II - PRELIMINAIRES ALGEBRIQUES.</u> | 16 |
| 1 - Somme tordue de modules différentiels gradués | 16 |
| 2 - Morphismes d'extensions de MDG | 19 |
| 3 - Sur les constructions d'extensions de MDG | 23 |
| 4 - Suite spectrale associée à une somme tordue | 25 |
| <u>CHAPITRE III - LE THEOREME DE SHIH POUR LES COMPLEXES SIMPLICIAUX.</u> | 32 |
| 1 - Préliminaires | 32 |
| 2 - Le théorème de Shih | 34 |
| 3 - Le théorème de Shih pour les complexes simpliciaux | 37 |
| <u>CHAPITRE IV - ISOMORPHISME DE THOM.</u> | 43 |
| 1 - Fibrés Λ -orientables | 43 |
| 2 - Morphisme de Thom au niveau des complexes des chaînes singulières | 46 |
| 3 - Démonstration de la proposition 1 (Introduction) | 49 |
| <u>CHAPITRE V - LA SUITE SPECTRALE.</u> | 52 |
| 1 - Somme tordue de MDG associée à une application C^0 -stratifiée | 52 |
| 2 - Somme tordue à l'aide des complexes simpliciaux | 54 |
| 3 - Filtrations | 56 |
| 4 - La suite spectrale | 59 |
| 5 - La suite spectrale en cohomologie | 62 |

| | <u>Pages</u> |
|---|--------------|
| <u>CHAPITRE VI - PROPRIETES ET APPLICATIONS DE LA SUITE SPECTRALE</u> <u>DES APPLICATIONS C^0-STRATIFIEES.</u> | 65 |
| <u>I - PROPRIETES</u> | 65 |
| 1 - Cas d'un fibré de Serre | 65 |
| 2 - Suite spectrale du premier quadrant | 68 |
| 3 - Propriétés de la suite spectrale du premier quadrant La transgression - La suite exacte des termes de bas degré - Finitude des groupes d'homologie - Cas où les homologies de Y-N, N, F et F_0 sont nulles en grande dimension - Suite exacte de Serre - Morphisme de suites spectrales - | 68 |
| 4 - Filtration de $H_*(X)$ | 72 |
| 5 - Comparaison avec la suite spectrale de I. Fáy | 74 |
| 6 - Cas de plusieurs strates | 78 |
| <u>II - APPLICATIONS</u> | 81 |
| 7 - Cas où $\tilde{H}_*(N) = \tilde{H}_*(Y-N) = 0$ (Suite de Wang généralisée) | 81 |
| 8 - Cas où $\tilde{H}_*(F_0) = 0$ et $H_*(F) = H_*(S^n)$ | 83 |
| 9 - Suite exacte de Smith-Gysin | 86 |
| 10 - Fibrés sur des bouquets de sphères | 90 |
| 11 - Invariants locaux de Hu | 93 |
| 12 - Cas d'une application holomorphe $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ admettant un point singulier isolé. | 94 |
| <u>III- APPLICATIONS AUX ACTIONS DE GROUPES</u> | 96 |
| 13 - Voisinages tubulaires | 96 |
| 14 - G-variétés à deux types d'orbites | 97 |
| 15 - Actions de S^1 , S^3 et des tores. | 97 |

| | <u>Pages</u> |
|---|--------------|
| <u>CHAPITRE VII - TRIANGULATIONS ADAPTEES : CONSTRUCTION ET APPLICATIONS.</u> | 101 |
| 1 - Construction du cycle $\psi' : C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(X-M)$ | 101 |
| 2 - Un premier lemme | 105 |
| 3 - Un second lemme | 108 |
| 4 - Fibrés sur fibrés | 110 |
| 5 - Triangulations adaptées | 113 |
| 6 - Démonstration de la proposition 7 (introduction) | 118 |
| <u>APPENDICE I - FIBRES SUR FIBRES EN THEORIE SEMI-SIMPLICIALE.</u> | 120 |
| 1 - Définitions préliminaires | 120 |
| 2 - Définition d'un fibré sur fibré | 123 |
| 3 - Etude des atlas d'un fibré sur fibré | 125 |
| 4 - Etude des fonctions tordantes d'un fibré sur fibré | 128 |
| 5 - Une propriété des fibrés sur fibrés | 137 |
| <u>APPENDICE II - ISOMORPHISME DE THOM EN HOMOLOGIE DE BOREL-MOORE.</u> | 139 |
| 1 - Suites spectrales de Leray | 140 |
| 2 - Cap-produits | 142 |
| 3 - Isomorphisme de Thom | 145 |
| 4 - Applications | 148 |
| <u>BIBLIOGRAPHIE</u> | 150 |

INTRODUCTION.

=====

Cette introduction est destinée à exposer succinctement le contenu des cinq premiers chapitres.

I - On se donne une fois pour toutes un anneau commutatif unitaire Λ . Les homologies seront calculées à valeurs dans Λ .

Définition 1. - Soit N un sous-espace fermé d'un espace topologique Y , on dit que le couple (Y, N) est un espace C^0 -stratifié si N et $Y-N$ sont des variétés topologiques paracompactes, connexes et si N admet dans Y un voisinage tubulaire au sens suivant :

Un voisinage fermé U de N dans Y est appelé voisinage tubulaire s'il existe une rétraction par déformation $\omega : U \rightarrow N$, qui fait de U un fibré topologique localement trivial (de base N), et dans laquelle chaque fibre reste stable.

On dira que le couple (Y, N) est un espace C^0 -stratifié à voisinage orientable si, de plus, le faisceau d'orientation du fibré $\omega : U \rightarrow N$ est constant (si Y est une variété, les faisceaux d'orientation de Y et de N coïncident donc sur N).

Définition 2. - Soient (X, M) et (Y, N) deux espaces C^0 -stratifiés ; une application C^0 -stratifiée $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ de fibres (F, F_0) est une application continue et surjective de X sur Y telle que $M = f^{-1}(N)$ et que :

(i) les restrictions de f à $(X-M)$ et M soient des projections d'espaces fibrés topologiques (de Serre) de fibres respectives F et F_0 .

(ii) N admette dans Y un voisinage tubulaire dont l'image réciproque par f soit un voisinage tubulaire de M dans X .

II - Pour tout espace Y , on notera $C(Y)$ le complexe des chaînes singulières normalisé de Y à coefficients dans Λ , $C_p(Y)$ le sous-groupe des chaînes de dimension p et $H_p(Y)$ le groupe d'homologie à coefficients dans Λ en dimension p .

Soit (X, M) un espace C^0 -stratifié à voisinage orientable, notons $\mu = \dim(X-M) - \dim M$, l'isomorphisme de Thom $H_{n-\mu}(M) \rightarrow H_n(X, X-M)$ est induit par un morphisme de modules différentiels gradués

$$\delta : C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(X, X-M)$$

où $C^{(-\mu)}(M)$ désigne le complexe $C(M)$ gradué comme suit : $C_n^{(-\mu)}(M) = C_{n-\mu}(M)$ ([2]).

Notons ρ un relèvement (morphisme de modules gradués) de la surjection p dans la suite exacte courte de modules différentiels gradués :

$$0 \rightarrow C(X-M) \rightarrow C(X) \xrightarrow{p} C(X, X-M) \rightarrow 0.$$

Le morphisme $d\rho - \rho d : C(X, X-M) \rightarrow C(X-M)$ diminue le degré d'une unité et anticommute avec les différentielles. Il induit l'homomorphisme $H_n(X, X-M) \rightarrow H_{n-1}(X-M)$ de la suite exacte d'homologie.

Soit ψ' le morphisme composé $(d\rho - \rho d) \circ \delta : C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(X-M)$, on peut former la somme tordue $D = C(X-M) \oplus_{\psi'} C^{(-\mu)}(M)$ munie de la différentielle $d_{\psi'}(a, b) = (da + \psi'b, db)$ ([39]).

Proposition 1. - Le morphisme de modules différentiels gradués

$$\phi' : C(X-M) \oplus_{\psi'} C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(X)$$

défini par $\phi'(a,b) = a + \rho\delta(b)$ rend commutatif le diagramme de suites exactes courtes de modules différentiels gradués :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C(X-M) & \longrightarrow & D & \longrightarrow & C^{(-\mu)}(M) \longrightarrow 0 \\
 & & \text{id} \downarrow & & \phi' \downarrow & & \delta \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C(X-M) & \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & C(X, X-M) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

et induit un isomorphisme en homologie.

III - Théorème (Shih [39]).- Soit $f : E \rightarrow B$ un fibré localement trivial de base B connexe par arcs, de fibre F et de groupe structural G , on peut lui associer une cochaîne fondamentale $\tilde{\tau} : C(B) \rightarrow C(G)$ de degré -1 et un produit tensoriel tordu $C(B) \otimes_{\tau} C(F)$ muni de la différentielle

$$d^{\tau}(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^{\text{deg}x} x \otimes dy + \tilde{\tau} \cap (x \otimes y).$$

Il existe alors une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes :

$$\begin{array}{ccc}
 C(B) \otimes_{\tau} C(F) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\nabla^{\tau}} \\ \xleftarrow{f^{\tau}} \end{array} & C(E)
 \end{array}$$

Soient (X,M) et (Y,N) deux espaces C^0 -stratifiés et $f : (X,M) \rightarrow (Y,N)$ une application C^0 -stratifiée de fibres (F, F_0) . Supposons pour simplifier, que les fibrés $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ et $f|_M : M \rightarrow N$ soient des fibrés topologiques localement triviaux. On a donc des équivalences d'homotopie :

$$\begin{array}{ccc}
 C(Y-N) \otimes_{\tau_1} C(F) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\nabla^{\tau_1}} \\ \xleftarrow{f^{\tau_1}} \end{array} & C(X-M) & \quad & C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\nabla^{\tau_0}} \\ \xleftarrow{f^{\tau_0}} \end{array} & C(M) .
 \end{array}$$

Notons $[C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)]^{(-\mu)}$ le complexe $C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)$ gradué comme suit :

$$[C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)]_p^{(-\mu)} = \sum_{i+j=p-\mu} C_i(B) \otimes C_j(F_0)$$

Proposition 2.- Si (X, M) est un espace C^0 -stratifié à voisinage orientable et $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C^0 -stratifiée de fibres (F, F_0) , posons $\mu = \dim(X-M) - \dim M$ et $\psi'' = f^{\tau_1} \circ \psi' \circ \nabla^{\tau_0}$; le complexe de chaînes $C(X)$ est homotopiquement équivalent au complexe :

$$(1) \quad [C(Y-N) \otimes_{\tau_1} C(F)] \otimes_{\psi''} [C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)]^{(-\mu)}.$$

Les suites spectrales de Serre des fibrés $f|_{X-M}$ et $f|_M$ s'obtiennent en filtrant de manière convenable chacun des deux termes de la somme tordue (1). Malheureusement, la différentielle $d_{\psi''}$ ne respecte pas, à notre connaissance, ces filtrations. Nous sommes conduits à faire la construction ci-dessous :

IV - Pour tout espace Y muni d'une triangulation, $K(Y)$ désignera le complexe (normalisé) des chaînes simpliciales orientées défini par la triangulation de Y , $K_p(Y)$ le sous-ensemble des chaînes simpliciales de dimension p et $\bar{\alpha}$ l'injection canonique $\bar{\alpha} : K(Y) \rightarrow C(Y)$.

Proposition 3.- Soit $f : E \rightarrow B$ un fibré localement trivial de fibre F et de groupe G . On suppose que la base B est munie d'une triangulation. Si $\tilde{\tau} : C(B) \rightarrow C(G)$ désigne une cochaîne fondamentale pour le fibré F , $\tilde{\tau} \circ \bar{\alpha}$ est une cochaîne fondamentale (encore notée $\tilde{\tau}$) définie sur $K(B)$ et le morphisme $\bar{\alpha} \otimes 1 : K(B) \otimes_{\tau} C(F) \rightarrow C(B) \otimes_{\tau} C(F)$ réalise une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes.

Etant donné une application C^0 -stratifiée $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ de fibres

(F, F_0) , il vient comme corollaires au théorème de Shih :

Proposition 4. - Si N est triangulé, on a une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes :

$$K(N) \underset{\tau_0}{\otimes} C(F_0) \underset{\underset{f}{\uparrow} \tau_0}{\overset{\downarrow \tau_0}{V}} \rightleftarrows C(M) .$$

Proposition 5. - Soit U un voisinage tubulaire de N dans Y et $\overset{\circ}{U}$ l'intérieur de U dans Y , si $(Y-\overset{\circ}{U})$ est triangulé, on a une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes :

$$K(Y-\overset{\circ}{U}) \underset{\tau_1}{\otimes} C(F) \underset{\underset{f}{\uparrow} \tau_1}{\overset{\downarrow \tau_1}{V}} \rightleftarrows C(X-M) .$$

On en déduit un analogue à la proposition 2 :

Proposition 6. - Soient (X, M) et (Y, N) deux espaces C^0 -stratifiés, et $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C^0 -stratifiée de fibres (F, F_0) . Posons $\mu = \dim(X-M) - \dim M$. Si (X, M) est à voisinage orientable et si Y et N sont triangulables, pour tout voisinage tubulaire U de N dans Y et pour toute triangulation de Y admettant N et $Y-\overset{\circ}{U}$ pour sous-complexes, le complexe de chaînes $C(X)$ est homotopiquement équivalent au complexe :

$$(2) \quad [K(Y-\overset{\circ}{U}) \underset{\tau_1}{\otimes} C(F)] \underset{\Psi}{\otimes} [K(N) \underset{\tau_0}{\otimes} C(F_0)]^{(-\mu)} \quad \text{où}$$

$$(3) \quad \Psi = \underset{f}{\uparrow} \tau_1 \circ \Psi' \circ \underset{V}{\downarrow} \tau_0 .$$

V - Pour tout espace Y muni d'une triangulation, on note $Y^{(p)}$ le p -squelette de Y , ensemble des simplexes de dimension inférieure ou égale à p .

La suite spectrale associée à la filtration

$F_p(B) = K(N^{(p)}) \otimes C(F_0)$ de $B = K(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)$ est isomorphe, à partir du terme E^2 , à la suite spectrale de Serre du fibré $f|_M : M \rightarrow N$. On note $E_{p,q}^r(M)$ son terme E^r de bidegré (p,q) .

De même, la suite spectrale associée à la filtration

$F_p(A) = K((Y-\overset{\circ}{U})^{(p)}) \otimes C(F)$ de $A = K(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes C(F)$ est isomorphe, à partir du terme E^2 , à la suite spectrale de Serre du fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$. On note $E_{p,q}^r(X-M)$ son terme E^r de bidegré (p,q) .

On a la proposition fondamentale :

Proposition 7. - Posons $v = \dim(Y-N) - \dim N$. On peut construire une triangulation de Y admettant N et $Y-\overset{\circ}{U}$ pour sous-complexes, et un morphisme de modules différentiels gradués homotope à Ψ (et encore noté Ψ) tels que :

$$\Psi [K(N^{(p)}) \otimes C(F_0)] \subset K((Y-\overset{\circ}{U})^{(p+v-1)}) \otimes C(F) .$$

Dans les conditions de la proposition 7, et pour tout entier k , on peut filtrer la somme tordue (2) de la manière suivante :

$${}^{(k)}F_p = [K((Y-\overset{\circ}{U})^{(p)}) \otimes C(F)] \otimes [K(N^{(p-k)}) \otimes C(F_0)]^{(-k)} .$$

Corollaire de la proposition 7. - Pour tout entier $k \geq v-1$, la différentielle d_Ψ définie sur la somme tordue (2) respecte la filtration

$${}^{(k)}F_p .$$

Cette filtration induit donc, pour $k \geq v-1$, une filtration de $H_*(X)$, notée :

$$(4,k) \quad {}^{(k)}F_p [H_*(X)] .$$

VI - Théorème.- Soient (X,M) et (Y,N) deux espaces C^0 -stratifiés, supposons (X,M) à voisinage orientable et (Y,N) triangulable. Soit $f : (X,M) \rightarrow (Y,N)$ une application C^0 -stratifiée de fibres (F,F_0) . Posons $\mu = \dim(X-M) - \dim M$ et $\nu = \dim(Y-N) - \dim N$. Pour tout entier $k \geq \nu-1$, il existe une suite spectrale convergeant vers le gradué associé à la filtration $(4,k)$ de $H_*(X)$. Notons $(k)E_{p,q}^r(X)$ les termes de cette suite spectrale, pour tout $r \leq k-(\nu-1)$, le terme $(k)E_{p,q}^r(X)$ entre dans la suite exacte courte (compatible avec les différentielles d^r) :

$$(5) \quad 0 \rightarrow E_{p,q}^r(X-M) \longrightarrow (k)E_{p,q}^r(X) \longrightarrow E_{p-k,q+k-\mu}^r(M) \rightarrow 0$$

Posons $\alpha = k-(\nu-1)$, pour $r = \alpha$, la différentielle d^α définie sur $(k)E^\alpha(X) \simeq E^\alpha(X-M) \oplus E^\alpha(M)$ est donnée par

$$d^\alpha(x,y) = (d^\alpha(x) + \psi^\alpha(y), d^\alpha(y)) \quad \text{où} \quad \psi^\alpha : E_{p,q}^\alpha(M) \rightarrow E_{p+\nu-1,q+\mu-\nu}^\alpha(X-M)$$

est induit par ψ (défini en (3)).

Remarque 1.- Pour $r < k-(\nu-1)$, le terme $(k)E_{p,q}^r(X)$ est, en tant que module différentiel, somme directe des deux autres termes intervenant dans la suite exacte (5).

Remarque 2.- Si, de plus, on a $k \leq \mu$, la suite spectrale est du premier quadrant.

Remarque 3.- Dans le cas où les données sont des variétés topologiques orientées localement compactes, la suite spectrale obtenue pour $k = \nu+1$ est, à partir du terme E^2 duale de la suite spectrale de I. Fáy.

CHAPITRE I

APPLICATIONS C^r -STRATIFIÉES.

1 - Définitions.

Définition 1.1.- Soit N un sous-espace fermé d'un espace topologique Y , on dit que le couple (Y, N) est un espace C^r -stratifié ($r \geq 1$) si N et $Y - N$ sont des variétés différentiables de classe C^r , paracompactes et connexes et si N admet dans Y un voisinage tubulaire au sens de la définition 1 (introduction), qui soit un fibré différentiable de classe C^r .

Un espace C^r -stratifié est C^j -stratifié, pour $0 \leq j \leq r$.

Soit (Y, N) un espace C^0 -stratifié et U un voisinage tubulaire de N dans Y . U est homéomorphe à un fibré de base N , de fibre D contractile sur son point base $\{0\}$. De même, $U - N$ est une sous-variété à bord de $Y - N$, homéomorphe à un fibré de base N et de fibre $D - \{0\}$. Celle-ci est une variété topologique de dimension $v = \dim(Y - N) - \dim N$, non nécessairement connexe. On notera $\overset{\circ}{U}$ l'intérieur de U dans Y et $\partial U = U - \overset{\circ}{U}$ (appelé bord de U au chapitre VII).

Propriété 1.2.- ∂U est une sous-variété de $Y - N$ homéomorphe à un fibré localement trivial de base N et de fibre notée ∂D . Celle-ci est une sous-variété de D , de codimension 1.

Remarque 1.3.- La définition de voisinage tubulaire adoptée ici est plus générale que les définitions classiques (voir C. Morlet, C.R.A.S., t. 262, pp. 740-743 et A. Douady Sém. H. Cartan, ENS, 1961/62, exposé 1). Par exemple, un voisinage collier du bord d'une variété est un voisinage tubulaire (exemple 1.6).

Remarque 1.4.- L'appellation "espace C^0 -stratifié" est justifiée par la situation suivante : si $(N, Y-N)$ est une stratification d'un ensemble analytique complexe Y vérifiant les conditions (a) et (b) de Whitney, il existe une rétraction locale d'un voisinage de N dans Y sur N (R. Thom, Séminaire Bourbaki n° 281, décembre 1964). (voir aussi [41]).

Exemple 1.5.- Soient Y une variété différentiable de classe C^r , connexe, paracompacte et N une sous-variété différentiable de Y , de classe C^r et connexe, le couple (Y, N) est un espace C^j -stratifié, pour $0 \leq j \leq r$.

Exemple 1.6.- Soit Y une variété à bord ∂Y , ∂Y admet un voisinage "collier" U dans Y homéomorphe à $\partial Y \times [0, 1]$, l'image de ∂Y par cet homéomorphisme étant $\partial Y \times \{0\}$ ([13]). Un tel voisinage est un voisinage tubulaire et, si ∂Y est une variété connexe, le couple $(Y, \partial Y)$ est un espace C^0 -stratifié.

Définition 1.7.- Soient (X, M) et (Y, N) deux espaces C^r -stratifiés, une application C^r -stratifiée $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ de fibres (F, F_0) est une application continue et surjective de X sur Y telle que $M = f^{-1}(N)$ et que :

i) les restrictions de f à $(X-M)$ et M soient des projections d'espaces fibrés de Serre, de fibres respectives F et F_0 , et soient différentiables de classe C^r .

ii) N admette dans Y un voisinage tubulaire dont l'image réciproque par f soit un voisinage tubulaire de M dans X .

Les points de M sont appelés points singuliers, ceux de N , valeurs singulières. La fibre F est appelée fibre régulière et F_0 fibre singulière.

Propriété 1.8.- Soit $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C^0 -stratifiée de fibres (F, F_0) , il existe un voisinage tubulaire U de N dans Y tel que $T = f^{-1}(U)$ soit un voisinage tubulaire de M dans X , et que la restriction de f à $\partial T = T - \overset{\circ}{T}$ soit la projection d'un fibré de base $\partial U = U - \overset{\circ}{U}$ et de fibre F (restriction du fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ à ∂U).

De plus, on a un diagramme commutatif dans lequel toutes les flèches sont des projections de fibrés :

$$\begin{array}{ccc}
 M & \longleftarrow & \partial T \\
 \downarrow F_0 & & \downarrow F \\
 N & \longleftarrow & \partial U \\
 & \partial D &
 \end{array}$$

Notons $\mu = \dim(X-M) - \dim M$ et $\nu = \dim(Y-N) - \dim N$, on en déduit :

Corollaire 1.9.- Si F et F_0 sont des variétés topologiques, on a :

$$\dim F - \dim F_0 = \mu - \nu$$

2 - Exemples.

On donne ci-dessous quelques exemples d'applications C^0 -stratifiées (voir aussi le chapitre VI).

Exemple 2.1.- Soit G un groupe de Lie compact opérant de manière C^∞ sur une variété différentiable C^∞ et connexe X . On suppose que G opère semi-librement sur X , c'est-à-dire librement en dehors de l'ensemble M des points de X laissés fixes par l'action de G . La projection canonique de X sur l'espace des orbites $Y = X/G$ est une application C^0 -stratifiée (voir paragraphe 13 du chapitre VI). Citons comme cas particuliers :

a) L'application $f : S^n \rightarrow I$, où S^n désigne la sphère unité de \mathbb{R}^{n+1} et $I = [-1, +1]$, définie par $f(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0$ pour tout point (x_0, \dots, x_n) de S^n . (Si l'on veut que M et N soient connexes, il convient d'enlever l'un des pôles de S^n).

b) L'application de Hopf $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie en faisant agir S^1 sur $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ par :

$$S^1 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

$$z \times (x, y) \rightsquigarrow (zx, zy)$$

De même, les applications de \mathbb{R}^8 sur \mathbb{R}^5 et de \mathbb{R}^{16} sur \mathbb{R}^9 obtenues en faisant agir respectivement les quaternions et les nombres de Cayley sont des applications C^0 -stratifiées. ([40], § 20). Dans ces trois cas, M et N sont les origines des espaces euclidiens et les fibres régulières sont isomorphes respectivement à S^1 , S^3 et S^7 .

c) L'application $f : S^2 \rightarrow D^1$, où D^1 désigne le disque unité de \mathbb{R}^2 , définie par $f(x_0, x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.

Exemple 2.2.- L'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \sqrt{x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2}$ et l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(z) = z^d$ (en identifiant \mathbb{R}^2 à \mathbb{C}) sont des applications C^0 -stratifiées.

Exemple 2.3.- Les morphismes stratifiés surjectifs (au sens de Thom) $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ d'ensembles stratifiés en deux strates, sont des applications C^0 -stratifiées. (Il suffit que l'image réciproque du lambeau d'incidence $L_N Y$ soit le lambeau d'incidence $L_M X$: [41], Définition 1.E et théorème 1.G.1).

Exemple 2.4.- Il existe des applications C^0 -stratifiées pour lesquelles les fibres F et F_0 sont isomorphes sans que l'application soit elle-même projection de fibré. Par exemple :

a) Les fibrés de Seifert (H. Seifert, Acta Math, 60, 1933, pp. 147-238 et M.C. Thornton, Ill. J. Math, 11, 1967, pp. 189-201).

b) Soit D^1 le disque unité de \mathbb{R}^2 paramétré par $(r, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi[$. On considère l'application du tore plein $X = D^1 \times S^1$ sur $Y = D^1$ définie par $f(r, \varphi, \theta) = (r, \theta)$. Les fibres F et F_0 sont toutes deux isomorphes à S^1 , M est S^1 et N est l'origine de \mathbb{R}^2 . (On a une application similaire de la bouteille de Klein "pleine" sur D^1).

c) Soit X un fibré vectoriel en $(n+1)$ -plans, de base $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ et muni d'une métrique euclidienne, on considère l'application de X sur $Y = \mathbb{R}^{n+1}$ qui, à un vecteur de longueur λ et d'origine (x_0, \dots, x_n) dans S^n , fait correspondre le point $(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$ de \mathbb{R}^{n+1} . M et les fibres F et F_0 sont isomorphes à S^n , N est l'origine de \mathbb{R}^{n+1} .

Exemple 2.5.-

a) Prenons, dans l'exemple précédent, pour X un fibré en $(k+1)$ -plans, on obtient de la même manière une application C^0 -stratifiée $f : (X, S^n) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$ de fibres (S^k, S^n) . En particulier, si X est le fibré tangent à S^n , on a $\dim F_0 > \dim F$.

b) L'hélicoïde (ou vis sans fin) donne lieu à un autre exemple d'application C^0 -stratifiée pour laquelle $\dim F_0 > \dim F$: Notons X la surface de \mathbb{R}^3 définie paramétriquement par $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = \theta$, avec $-1 < r < +1$ et $\theta \in \mathbb{R}$. L'application f de X sur le disque unité ouvert de \mathbb{R}^2 définie par $f(x, y, z) = (x, y)$ est une application C^0 -stratifiée. M est l'axe de z , N est l'origine de \mathbb{R}^2 et les fibres sont : $F \simeq \mathbb{Z}$ et $F_0 = M \simeq \mathbb{R}$.

3 - Fibrés à singularités.

Nous rappelons la notion de fibré à singularités, voisine de celle d'application C^0 -stratifiée, et énonçons les principaux résultats connus dans ce domaine.

Définition 3.1.- On dit que $f : X \rightarrow Y$, application continue, ouverte et surjective d'espaces topologiques est un fibré à singularités s'il existe un sous-ensemble fermé M de X tel que $f|_M$ soit un homéomorphisme de M sur $N \subset Y$, et que $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ soit la projection d'un fibré localement trivial de fibre F .

Sauf indication du contraire, on suppose que X, M, Y, N et F sont des variétés connexes, fermées, orientables et triangulables.

On dit que le fibré à singularités est de classe C^r si tous les espaces sont des variétés de classe C^r et si les inclusions $M \hookrightarrow X$ et $N \hookrightarrow Y$ sont de classe C^r .

Les exemples 2.1 et 2.2 ci-dessus sont des fibrés à singularités.

De la définition même d'un fibré à singularités découle le fait que tout point singulier (c'est-à-dire tout point de M) admet des voisinages arbitrairement petits invariants, c'est-à-dire que s'ils contiennent un point, ils contiennent toute la fibre passant par ce point [37]. Les applications C^0 -stratifiées possèdent également cette propriété.

D'autre part, Hu [31] introduit la notion de fibré à singularité convergent :

Définition 3.2.- On dit que le fibré à singularités $f : X \rightarrow Y$ est convergent en un point singulier x_0 si, pour tout voisinage ouvert V de x_0 dans X , il existe un voisinage ouvert U de $f(x_0)$ dans Y tel que $f^{-1}(U) \subset V$.

Intuitivement, le fibré à singularités $f : X \rightarrow Y$ est convergent en un point singulier x_0 si et seulement si les fibres au-dessus des points proches de $y_0 = f(x_0)$ sont proches du point x_0 .

Proposition 3.3.- Si $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ est une application C^0 -stratifiée dont la fibre singulière est un point et $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ est un fibré localement trivial, alors f est un fibré à singularités convergent au sens de Hu. La réciproque est vraie si X est une variété différentiable connexe et paracompacte.

On se propose d'étudier, dans le cas des applications C^0 -stratifiées comme dans le cas des fibrés à singularités, le rapport entre les propriétés homologiques des espaces en cause. Nous généraliserons, entre autres, les résultats de Conner et Dyer, Mahowald, Antonelli qui, pour des cas particuliers de fibrés à singularités, ont prouvé la conjecture de Montgomery et Samelson [37] : si X est une sphère (co)-homologique, M est une sphère (co)-homologique :

Théorème 3.4.- (Conner et Dyer [19]) - Soit $f : (X^n, M) \rightarrow (Y, N)$ un fibré à singularités de fibre régulière S^r et tel que X soit une n -sphère cohomologique modulo 2, alors il existe k tel que M soit une $n-k(r+1)$ -sphère cohomologique modulo 2.

Théorème 3.5.- (Mahowald [35]) - Si $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ est un fibré à singularités tel que X soit une n -sphère cohomologique modulo 2, ($n \leq 4$), alors M est une sphère cohomologique modulo 2.

Théorème 3.6.- (Antonelli [3]) - Si $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ est un fibré à singularités tel que X et F soient des \mathbb{Z} -sphères homologues et N "tame" dans Y , alors M est une \mathbb{Z} -sphère homologue.

Théorème 3.7.- (Antonelli [4]) - Si $f : (S^n, M) \rightarrow (Y^p, N)$ est un fibré à singularités C^∞ , et si une Y est une variété sans bord, alors M est une $(2p-n-2)$ \mathbb{Z} -sphère homologue.

La conjecture de Montgomery et Samelson n'est cependant pas vérifiée dans toute sa généralité. Il en existe de nombreux contre-exemples, ([11], p. 45), notamment celui de Bredon-Hirzebruch ([11], p. 54 et [43], p. 59): Pour tout d impair, il existe une action différentiable du groupe cyclique à d éléments sur S^5 dont l'ensemble des points fixes soit difféomorphe à $P^3(\mathbb{R})$.

Dans un autre point de vue, Timourian et Antonelli ont obtenu une classification des fibrés à singularités pour lesquels M consiste en points singuliers isolés :

Théorème 3.8.- (Timourian [42]) - Si $f : (X^n, M) \rightarrow (Y^p, N)$ est un fibré à singularités tel que f soit propre et M consiste en des points isolés, alors :

$$(n,p) = (n,1) , (2,2), (4,3), (8,5) \text{ ou } (16,9)$$

et, pour tout point x de M , il existe un voisinage ouvert V de x tel que $f|_V$ soit topologiquement équivalent à l'une des applications :

- i) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2}$ (Exemple 2.2)
- ii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(z) = z^d$ (Exemple 2.2)
- iii) l'une des applications de Hopf (Exemple 2.1 (b))

L'équivalence topologique est entendue au sens suivant :

$f : X \rightarrow Y$ est équivalente à $g : A \rightarrow B$ s'il existe des homéomorphismes $\alpha : X \rightarrow A$ et $\beta : Y \rightarrow B$ tels que $\beta \circ f \circ \alpha^{-1} = g$.

On trouvera une bibliographie complète concernant les fibrés à singularités dans les bibliographies de Antonelli [4] et dans celles des articles de P.T. Church et J.G. Timourian :

- Fiber bundles with singularities (J. Math. Mech., 18 (1968), pp. 71-90).

- Maps with 0-dimensional critical set (Pacific J. Math, 57 (1975), pp. 59-66).

CHAPITRE II

PRELIMINAIRES ALGEBRIQUES.

On établit les préliminaires algébriques nécessaires pour la suite : on rappelle la notion de somme tordue de modules différentiels gradués (MDG), celle-ci permet d'obtenir quelques résultats sur les constructions et morphismes d'extensions de MDG ([18], [39]), enfin, on explicite la suite spectrale associée à une somme tordue ([16]).

1 - Somme tordue de modules différentiels gradués.

On se donne une fois pour toutes un anneau commutatif unitaire Λ , tous les modules et morphismes de modules considérés seront des Λ -modules et des Λ -homomorphismes de modules.

On rappelle que, si (A, d_A) et (B, d_B) sont deux modules différentiels gradués (en abrégé MDG), l'espace $\text{Hom}(A, B)$ peut être muni d'une structure de MDG comme suit :

$$\text{Hom}^{-r}(A, B) = \text{Hom}_r(A, B) = \prod_i \text{Hom}(A_i, B_{i+r})$$

$$(df)(a) = d_B(f(a)) - (-1)^{\text{deg} f} f(d_A(a)) .$$

Les cycles de degré zéro de $\text{Hom}(A, B)$ sont les morphismes de MDG de A dans B .

Deux morphismes f et g de $\text{Hom}_r(A, B)$ sont dits homotopes par une homotopie ϕ (et on écrit $\phi : f \simeq g$) s'il existe $\phi \in \text{Hom}_{r+1}(A, B)$ tel que :

$$g - f = d\phi = d_B\phi + (-1)^r \phi d_A$$

Deux morphismes homotopes induisent le même homomorphisme en homologie.

Si l'on se donne deux MDG, (A, d_A) et (B, d_B) , une extension de MDG

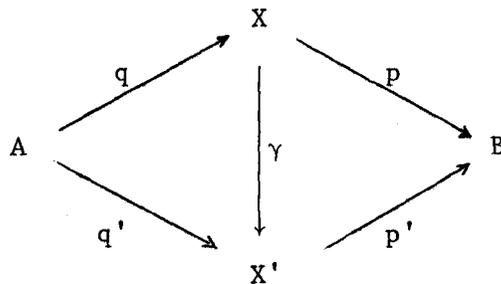
sur B , de noyau A , est une suite exacte de MDG :

$$(E) \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{q} X \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0.$$

L'extension (E) est dite équivalente à l'extension

$$(E') \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{q'} X' \xrightarrow{p'} B \longrightarrow 0$$

s'il existe un morphisme de MDG, γ , tel que le diagramme :



soit commutatif. γ est alors un isomorphisme.

On dit que l'extension (E) est triviale si elle est équivalente à l'extension

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A \oplus B \longrightarrow B \longrightarrow 0.$$

Pour tout cycle Ψ de $\text{Hom}_{-1}(B,A)$, nous désignerons par $A \oplus_{\Psi} B$, et nous appellerons somme tordue de A et B par Ψ , le MDG défini comme suit :

$$(A \oplus_{\Psi} B)_n = A_n \oplus B_n$$

$$d_{\Psi}(a,b) = (d_A a + \Psi b, d_B b)$$

on remarque de d_{Ψ} est une différentielle si et seulement si Ψ est un cycle de $\text{Hom}_{-1}(B,A)$.

Lemme 1.1. ([39], p. 18).- A tout cycle Ψ de $\text{Hom}_{-1}(B,A)$ correspond l'extension de MDG :

$$(E_{\Psi}) \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A \underset{\Psi}{\oplus} B \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

où les morphismes i et π sont induits par l'injection et la projection canoniques. L'extension (E_{Ψ}) est triviale si et seulement si Ψ est homologue à zéro ([39], proposition 1, p. 18).

Lemme 1.2.- Pour tout module projectif B et pour toute extension

$$(E) \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$$

il existe un cycle Ψ de $\text{Hom}_{-1}(B,A)$ tel que les extensions de MDG (E) et (E_{Ψ}) soient équivalentes.

Démonstration.- La surjection p peut se relever en un morphisme de modules gradués $\rho \in \text{Hom}(B,X)$ tel que $p \circ \rho = 1_B$ (identité sur B).

Le morphisme $\Psi = d_X \rho - \rho d_B$ est un cycle de $\text{Hom}_{-1}(B,A)$ donc l'extension (E_{Ψ}) est bien définie. Le morphisme $\phi \in \text{Hom}_0(A \underset{\Psi}{\oplus} B, X)$ défini par $\phi(a,b) = i(a) + \rho(b)$ est un morphisme de MDG rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \underset{\Psi}{\oplus} B & & \\
 & \nearrow i & \downarrow \phi & \searrow \pi & \\
 A & & & & B \\
 & \searrow i & & \nearrow p & \\
 & & X & &
 \end{array}$$

il réalise l'équivalence entre les extensions (E) et (E_{Ψ}) . Son inverse ϕ^{-1} est défini par :

$$\phi^{-1}(x) = (x - \rho p(x), p(x)) .$$

Remarque 1.3.- Deux relèvements ρ_1 et ρ_2 de p induisent des cycles Ψ_1 et Ψ_2 homologues et les extensions (E_{Ψ_1}) et (E_{Ψ_2}) sont équivalentes ([39], p. 18).

Remarque 1.4.- Toute extension

$$(E_{\Psi}) \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A \underset{\Psi}{\oplus} B \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$$

donne lieu à une suite exacte d'homologie :

$$(6) \quad \dots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(A \underset{\Psi}{\oplus} B) \xrightarrow{\pi_*} H_n(B) \xrightarrow{\Psi_*} H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

où Ψ_* est l'homomorphisme déduit de Ψ par passage à l'homologie des différentielles d_A et d_B .

Proposition 1.5.- L'extension (E_{Ψ})

$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} A \underset{\Psi}{\oplus} B \xrightarrow{\pi} B \longrightarrow 0$ est triviale si et seulement si elle induit, pour tout n , une suite exacte :

$$(7) \quad 0 \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(A \underset{\Psi}{\oplus} B) \xrightarrow{\pi_*} H_n(B) \longrightarrow 0.$$

Démonstration.- La suite (7) est exacte si et seulement si Ψ_* est nul (dans (6)), d'où le résultat par le lemme 1.1.

Corollaire 1.6.- Si B est projectif, l'extension

(E) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$ est triviale si et seulement si elle induit, pour tout n , une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{p_*} H_n(B) \longrightarrow 0.$$

2 - Morphismes d'extensions de MDG.

Proposition 2.1. ([18], p. 73).- Soit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 (E_\Psi) & & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus_{\Psi} B & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \alpha \downarrow & & & & \beta \downarrow & & \\
 (E_{\Psi'}) & & 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A' \oplus_{\Psi'} B' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

où les flèches sont des morphismes de MDG. Pour qu'il existe un morphisme de MDG, $\xi : A \oplus_{\Psi} B \rightarrow A' \oplus_{\Psi'} B'$ rendant commutatif ce diagramme, il faut et il suffit qu'il existe une homotopie :

$$\Phi : \Psi' \circ \beta \simeq \alpha \circ \Psi .$$

Proposition 2.2.- Soit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X & \xrightarrow{p} & B & \longrightarrow & 0 \\
 & & \alpha \downarrow & & \xi \downarrow & & \beta \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{p'} & B' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

où les flèches sont des morphismes de MDG et les lignes horizontales sont exactes. Si B et B' sont des modules projectifs, pour tous cycles Ψ et Ψ' de $\text{Hom}_{-1}(B,A)$ et $\text{Hom}_{-1}(B',A')$ respectivement et induits par des relèvements de p et p',

i) il existe une homotopie $\Phi : \alpha \circ \Psi \simeq \Psi' \circ \beta$

ii) le morphisme $\theta : A \oplus_{\Psi} B \rightarrow A' \oplus_{\Psi'} B'$ défini par

$\xi(a,b) = (\alpha(a) - \Phi(b), \beta(b))$ est un morphisme de MDG rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A \oplus_{\Psi} B & \xrightarrow{\quad \theta \quad} & X \\
 \xi \downarrow & & \downarrow \gamma \\
 A' \oplus_{\Psi'} B' & \xrightarrow{\quad \theta' \quad} & X'
 \end{array}$$

où les isomorphismes ϕ et ϕ' proviennent du lemme 1.2 (démonstration).

Démonstration. - B est un module projectif, tout relèvement ρ de p induit, d'après le lemme 1.2., un cycle Ψ de $\text{Hom}_{-1}(B, A)$ et un isomorphisme de MDG :

$$\phi : (A \oplus B, d_{\Psi}) \longrightarrow (X, d_X).$$

De même, tout relèvement ρ' de p' induit un cycle Ψ' de $\text{Hom}_{-1}(B', A')$ et un isomorphisme de MDG

$$\phi' : (A' \oplus B', d_{\Psi'}) \longrightarrow (X', d_{X'}).$$

En notant $\Phi = \gamma\rho - \rho'\beta$, on a le résultat cherché.

Par la suite, il sera intéressant de considérer des cas particuliers de la proposition 2.2. dans lesquels le cycle Ψ' est construit explicitement en fonction d'un morphisme $\beta' \in \text{Hom}_0(B', B)$. Ces cas particuliers font l'objet des corollaires 2.3. et 2.5. ci-après. Auparavant on précise les notations employées :

Dans les hypothèses de la proposition 2.2., s'il existe un morphisme non nul $\beta' \in \text{Hom}_0(B', B)$ (non nécessairement morphisme de MDG), on notera h et h' les morphismes définis par

$$\beta \circ \beta' = 1_{B'} + h' \quad \beta' \circ \beta = 1_B + h$$

on a :

$$\beta \circ h = h' \circ \beta \quad h \circ \beta' = \beta' \circ h' .$$

D'autre part, si Ψ est un cycle de $\text{Hom}_{-1}(B, A)$ induit par un relèvement ρ de p , et si $\bar{\rho}$ est un relèvement de p' , le morphisme $\rho' = \gamma\rho\beta' - \bar{\rho}h'$ est encore un relèvement de p' . Posons :

(8)
$$\Psi' = d_{X, \rho'} - \rho'd_{B'}$$

Le morphisme $\Phi = \gamma\rho - \rho'\beta = -(\gamma\rho - \bar{\rho}\beta)h$ réalise l'homotopie $\Phi : \alpha\Psi \approx \Psi'\beta$.

Corollaire 2.3. - Dans les hypothèses de la proposition 2.2., et s'il existe un morphisme $\beta' \in \text{Hom}_0(B', B)$ tel que $\beta' \circ \beta = 1_B$, le cycle Ψ' construit ci-dessus (8) satisfait à :

$$\alpha\Psi = \Psi'\beta$$

et ξ est alors défini par $\xi(a, b) = (\alpha(a), \beta(b))$.

Remarque 2.4. - Si Ψ est un cycle de $\text{Hom}_{-1}(B, A)$ induit par un relèvement ρ de p et si β est un morphisme surjectif admettant pour relèvement un morphisme de MDG, β' , on peut choisir pour relèvement de p' le composé $\rho' = \gamma\rho\beta'$ et dans ce cas, on a $\Psi' = \alpha\Psi\beta'$.

Si de plus $\beta' \circ \beta$ est homotope à l'identité, on obtient le résultat suivant, qui est aussi une conséquence de la proposition 2 bis de [39] :

Corollaire 2.5. - Soit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X & \xrightarrow{p} & B & \longrightarrow & 0 \\
 & & \alpha \downarrow & & \gamma \downarrow & & \beta \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

où les flèches sont des morphismes de MDG et les lignes horizontales sont exactes. Dans les hypothèses suivantes :

B est un module projectif et Ψ un cycle de $\text{Hom}_{-1}(B, A)$ induit par un relèvement de p ,

β est un morphisme surjectif admettant pour relèvement un morphisme de MDG β' satisfaisant à :

$$\beta \circ \beta' = 1_B, \quad \beta' \circ \beta = 1_B + d_B k + k d_B$$

avec $k \in \text{Hom}_{+1}(B, B)$, on a :

- i) $\psi' = \alpha \psi \beta'$ est un cycle de $\text{Hom}_{-1}(B', A')$
- ii) le morphisme $\phi' = -\alpha \psi k$ réalise une homotopie

$$\phi' : \psi' \beta \approx \alpha \psi$$

iii) le morphisme $\theta : A \oplus B \rightarrow A' \oplus B'$ défini par

$$\theta(a, b) = (\alpha(a) + \alpha \psi k(b), \beta(b))$$

est un morphisme de MDG rendant le diagramme suivant commutatif à homotopie près (au sens où il existe $\zeta \in \text{Hom}_1(B, X')$ tel que $\phi' \theta = \gamma \phi + (d\zeta + \zeta d)\pi$)

$$\begin{array}{ccc} A \oplus B & \xrightarrow{\phi} & X \\ \psi \downarrow & & \downarrow \gamma \\ A' \oplus B' & \xrightarrow{\phi'} & X' \end{array}$$

3 - Sur les constructions d'extensions de MDG.

Comme application de la proposition 2.1., on a :

Proposition 3.1. - Etant donnée la situation suivante :

$$(E_\psi) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & B' & & \\ & & & & \downarrow \beta' & & \\ & & & & B & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \beta & & \\ & & & & B' & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus B & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \psi & & & & \\ & & A' & & & & & & \end{array}$$

où les flèches sont des morphismes de MDG, posons $\Psi' = \alpha\Psi\beta'$ et $\beta'\beta = 1_B + h$.
 Pour qu'il existe un morphisme de MDG, θ , rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus B & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \theta & & \downarrow \beta & & \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A' \oplus B' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow \Psi' & & & &
 \end{array}$$

il faut et il suffit que $\alpha\Psi h$ soit homotope à zéro dans $\text{Hom}_{-1}(B, A')$.

Corollaire 3.2. ([39], Proposition 2 bis).- Dans les hypothèses de la proposition 3.1., si on a une homotopie $k : \beta' \circ \beta \simeq 1_B$, le morphisme θ est donné par $\theta(a, b) = (\alpha(a) + \alpha\Psi k(b), \beta(b))$.

De la même façon, on a :

Proposition 3.3.- Etant donnée la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & A' & & & & \\
 & & \uparrow \alpha & & & & \\
 (E_\Psi) & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus B & \xrightarrow{p} & B & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \alpha' & & & & \uparrow \beta' & & \\
 & & A' & & & & B' & &
 \end{array}$$

où les flèches sont des morphismes de MDG, posons $\Psi' = \alpha\Psi\beta'$ et $\alpha'\alpha = 1_A + h'$.
 Pour qu'il existe un morphisme de MDG, θ' , rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \oplus B & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \alpha' & & \uparrow \theta' & & \uparrow \beta' & & \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A' \oplus B' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow \Psi' & & & &
 \end{array}$$

il faut et il suffit que $h'\psi\beta'$ soit homotope à zéro dans $\text{Hom}_{-1}(B',A)$.

Corollaire 3.4. ([39], Proposition 2).- Dans les hypothèses de la proposition 3.3., si on a une homotopie $k' : \alpha' \circ \alpha \approx 1_A$, le morphisme θ' est donné par $\theta'(a',b') = (\alpha'(a') + k'\psi\beta'(b'), \beta'(b'))$.

Corollaire 3.5.- Dans les hypothèses de la proposition 3.3., si $A' = A$ et $\alpha' = \alpha = 1_A$, le morphisme θ' est défini par $\theta'(a,b') = (a, \beta'(b'))$. De plus, si ψ est induit par un relèvement ρ de p , ψ' l'est par $\rho\beta'$.

Corollaire 3.6. ([39], Proposition 3).- Dans les hypothèses des propositions 3.1. et 3.3., si on a des homotopies $k : \beta' \circ \beta \approx 1_B$ et $k' : \alpha' \circ \alpha \approx 1_A$, le morphisme $\theta' \circ \theta$ est homotope à l'identité de $A \underset{\psi}{\oplus} B$ au moyen de $k'' : A \underset{\psi}{\oplus} B \rightarrow A \underset{\psi}{\oplus} B$ défini par :

$$k''(a,b) = (k'(a) + k'\psi k(b), k(b)).$$

4 - Suite spectrale associée à une somme tordue ([16], Exposé 3).

4.1. - Soit (A, d_A) , un module différentiel gradué, somme directe des sous-modules A_n . Nous dirons que A est un MDG filtré si, pour tout entier p , on a un sous-module $F_p A$ de A tel que :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_p A \subset F_{p+1} A \quad \quad \quad F_p A = 0 \quad \text{si } p < 0 \\ F_p A \text{ est stable par } d_A \\ F_p A = \bigoplus_n F_p(A_n) \quad \text{où } F_p(A_n) = F_p A \cap A_n \\ \text{Pour tout } n, \text{ il existe } u(n) \text{ tel que } F_p(A_n) = A_n \\ \text{si } p \geq u(n) \end{array} \right.$$

(la filtration est régulière)

Il existe alors une suite spectrale dont on note $E^r(A) = \bigoplus_{p,q} E_{p,q}^r(A)$ les modules bigradués et d_A^r les différentielles. $E^\infty(A)$ est le module

bigradué associé au module gradué $H(A)$, filtré de la manière suivante :

$F_p(H_n(A))$ est l'image dans $H_n(A)$ des cycles de $F_p(A_n)$. D'où :

$$E_{p,q}^{\infty}(A) = F_p(H_{p+q}(A)) / F_{p-1}(H_{p+q}(A)).$$

4.2. - Soit (B, d_B) un second module différentiel gradué filtré, Ψ désigne toujours un cycle de $\text{Hom}_{-1}(B, A)$, donc un homomorphisme de MDG satisfaisant à :

$$(10) \quad \begin{cases} \Psi(B_n) \subset A_{n-1} & \text{pour tout } n \\ d_A \Psi + \Psi d_B = 0 \end{cases}$$

mais de plus, on suppose qu'il existe α , entier positif, tel que :

$$(11) \quad \Psi(F_p B) \subset F_{p-\alpha}(A)$$

Ψ induit alors, pour $r \geq \alpha$, un homomorphisme

$$\Psi^r : E_{p,q}^r(B) \rightarrow E_{p-\alpha, q+\alpha-1}^r(A)$$

et Ψ^{r+1} se déduit de Ψ^r par passage à l'homologie des différentielles d_A^r et d_B^r .

4.3. - De même que pour le "mapping cylinder" ([16], exposé 3), on construit la suite spectrale d'une somme tordue de la façon suivante :

Définissons sur $A \underset{\Psi}{\otimes} B$ la filtration croissante :

$$(12) \quad F_p(A \underset{\Psi}{\otimes} B) = F_p A \otimes F_p B.$$

Lemme. - Si $\Psi(F_p B) \subset F_{p-\alpha} A$ avec $\alpha \geq 0$ et si les filtrations de A et B satisfont aux relations (9), la filtration de $A \underset{\Psi}{\otimes} B$ satisfait également à (9).

En autres, la différentielle $d_\psi = (d_A + \psi, d_B)$ respecte la filtration (12). On en déduit une suite spectrale dont on note $E_{p,q}^r$ les modules gradués et d^r les différentielles. Le terme $E_{p,q}^0$ se décompose en somme directe :

$$E_{p,q}^0 = E_{p,q}^0(A) \oplus E_{p,q}^0(B).$$

Si $\alpha > 0$ (dans (11)), la différentielle d_ψ définie sur $A \oplus B$ induit sur E^0 l'opérateur $d^0 = (d_A^0, d_B^0)$. En tant que MDG, le terme E^1 est une extension :

$$(13) \quad 0 \longrightarrow E^1(A) \longrightarrow E^1 \longrightarrow E^1(B) \longrightarrow 0$$

Explicitons l'opérateur d^1 :

Un élément $z = (z', z'')$ de $E_{p,q}^1$ est représenté par un cycle de sa classe d'homologie, soit $\xi = (\xi', \xi'') \in E_{p,q}^0$ avec $d^0(\xi) = 0$.

On note $x = (x', x'')$ un représentant de ξ dans $F_p(A \oplus B)_\psi$.

On a :

$$d_\psi(x) = (d_A(x') + \psi(x''), d_B(x'')) \in F_{p-1}(A \oplus B)_\psi$$

et la classe de $d_\psi(x)$ dans $G_{p-1}(A \oplus B)_\psi$ est un cycle de $E_{p-1,q}^0$ dont la classe d'homologie dans $E_{p,q}^1$ est $d^1(z)$.

Supposons $\alpha = 1$ (dans (11)), il vient :

$$d^1(z) = (d_A^1(z') + \psi^1(z''), d_B^1(z''))$$

autrement dit $d^1(z', z'') = d_{\psi^1}^1(z', z'')$. On a l'identification :

$$E_{p,q}^1 = E_{p,q}^1(A) \oplus_{\psi^1} E_{p,q}^1(B).$$

La suite exacte d'homologie (6) associée à l'extension (13) s'écrit :

$$\dots \longrightarrow E_{p+1,q}^2(A) \longrightarrow E_{p+1,q}^2 \longrightarrow E_{p+1,q}^2(B) \xrightarrow{\psi^2} E_{p,q}^2(A) \longrightarrow \dots$$

où ψ^2 est l'homomorphisme induit par ψ , déduit de ψ^1 par passage à l'homologie des différentielles d_A^1 et d_B^1 .

Supposons $\alpha > 1$, il vient :

$$d^1(z) = (d_A^1(z'), d_B^1(z'')) ,$$

et l'extension (13) est triviale. Le terme E^2 s'obtient comme extension :

$$0 \longrightarrow E^2(A) \longrightarrow E^2 \longrightarrow E^2(B) \longrightarrow 0.$$

Par le même raisonnement, cette extension est non triviale si $\alpha = 2$ et triviale si $\alpha > 2$.

En poursuivant le calcul des différentielles d^r , on obtient la proposition suivante :

Proposition 4.4. - Soient A et B deux modules différentiels gradués filtrés, la donnée d'un cycle ψ de $\text{Hom}_{-1}(B, A)$ satisfaisant à (11) implique l'existence d'une suite spectrale associée à la filtration (12) du MDG $A \oplus_{\psi} B$ et convergeant vers $H_* \left(A \oplus_{\psi} B \right)$ convenablement filtré. Pour $r \leq \alpha$, ses termes E^r s'obtiennent comme extension de MDG :

$$0 \longrightarrow E^r(A) \longrightarrow E^r \longrightarrow E^r(B) \longrightarrow 0$$

triviale pour $r < \alpha$, non triviale pour $r = \alpha$.

Autrement dit, sur $E_{p,q}^r = E_{p,q}^r(A) \oplus E_{p,q}^r(B)$, la différentielle est :

$$d^r = (d_A^r, d_B^r) \quad \text{pour } r < \alpha$$

et

$$d^\alpha = (d_A^\alpha + \psi^\alpha, d_B^\alpha)$$

où ψ^α est induit par ψ . La suite exacte d'homologie associée à l'extension :

$$0 \longrightarrow E^\alpha(A) \longrightarrow E^\alpha \longrightarrow E^\alpha(B) \longrightarrow 0$$

s'écrit :

$$\dots \longrightarrow E_{p,q}^{\alpha+1}(A) \longrightarrow E_{p,q}^{\alpha+1} \longrightarrow E_{p,q}^{\alpha+1}(B) \longrightarrow E_{p-\alpha, q+\alpha-1}^{\alpha+1}(A) \longrightarrow \dots$$

où $\psi^{\alpha+1}$ se déduit de ψ^α par passage à l'homologie des différentielles d_A^α et d_B^α .

4.5. - La suite spectrale en cohomologie.

On désigne toujours par A un module différentiel gradué filtré. La différentielle d_A induit une différentielle δ_A , de degré $+1$, sur $\text{Hom}(A; \Lambda)$ telle que $\delta_A(f) = f \circ d_A$. D'autre part, la filtration de A induit la filtration suivante sur $\text{Hom}(A; \Lambda)$:

$$(14) \quad F^p \text{Hom}(A; \Lambda) = \text{Hom}(A/F_{p-1}A; \Lambda).$$

Notons $E_p^0(A)$ l'ensemble des éléments de degré filtrant p du terme E^0 de la suite spectrale d'homologie déduite de la filtration de A , on a un isomorphisme :

$$E_p^0(A) = F^p \text{Hom}(A; \Lambda) / F^{p+1} \text{Hom}(A; \Lambda) \cong \text{Hom}(E_p^0(A); \Lambda).$$

On note $E_r^{p,q}(A)$ et d_r^A les termes et les différentielles de la suite spectrale de cohomologie déduite de la filtration (14) de $\text{Hom}(A; \Lambda)$.

Etant donnée une somme tordue $A \underset{\Psi}{\otimes} B$ de deux MDG, on définit alors une différentielle et une filtration sur $\text{Hom}(A \otimes B; \Lambda)$ comme suit :

Soit $\psi^* : \text{Hom}(A; \Lambda) \rightarrow \text{Hom}(B; \Lambda)$ l'application définie par $\psi^*(f) = f \circ \psi$, la différentielle δ_ψ , de degré $+1$, est donnée par :

$$\delta_\psi(f, g) = (\delta_A(f), \delta_B(g) + \psi^*(f)).$$

La filtration est donnée par :

$$(15) \quad F^p \text{Hom}(A \otimes B; \Lambda) = F^p(\text{Hom}(A; \Lambda)) \otimes F^p(\text{Hom}(B; \Lambda))$$

Si ψ satisfait à la relation (11), la différentielle δ_ψ respecte la filtration (15). Il vient alors une suite spectrale en cohomologie, de terme E_0^P :

$$E_0^P = \text{Hom}(E_p^0; \Lambda) = E_0^P(A) \oplus E_0^P(B).$$

Dans le cas $\alpha > 0$, la différentielle d_0 de la suite spectrale en cohomologie est égale à $d_0 = (d_0^A, d_0^B)$. De même qu'en homologie, on a :

$$E_1^P = E_1^P(A) \oplus E_1^P(B).$$

Si α est égal à 1, la différentielle d_1 est donnée par $d_1(f, g) = (d_1^A(f), d_1^B(g) + \psi_1^*(f))$ où ψ_1^* se déduit de ψ^* par passage à l'homologie des différentielles d_0^A et d_0^B .

Si on a $\alpha > 1$, la différentielle d_1 est égale à (d_1^A, d_1^B) .

De façon générale, on obtient :

Proposition 4.6. - Soient A et B deux MDG filtrés, la donnée d'un cycle ψ de $\text{Hom}_{-1}(B, A)$ satisfaisant à (11) implique l'existence d'une suite spectrale de cohomologie associée à la filtration (15) de $\text{Hom}(A \oplus B; \Lambda)$ et convergant vers $H^*(\text{Hom}(A \oplus B; \Lambda))$ convenablement filtré. On a :

$$E_r^{P, Q} = E_r^{P, Q}(A) \oplus E_r^{P, Q}(B) \quad \text{pour } r \leq \alpha$$

$$d_r = (d_r^A, d_r^B) \quad \text{pour } r < \alpha$$

$$d_\alpha = (d_\alpha^A, d_\alpha^B + \psi_\alpha^*)$$

où ψ_α^* est induit par ψ^* .

La suite exacte de cohomologie associée à la somme tordue

$$E_\alpha^{P, Q}(A) \oplus_{\psi_\alpha^*} E_\alpha^{P, Q}(B) \text{ s'écrit :}$$

$$\dots \rightarrow E_{\alpha+1}^{P-\alpha, q+\alpha-1}(A) \xrightarrow{\Psi_{\alpha+1}^*} E_{\alpha+1}^{P, q}(B) \longrightarrow E_{\alpha+1}^{P, q} \longrightarrow E_{\alpha+1}^{P, q}(A) \rightarrow \dots$$

où $\Psi_{\alpha+1}^*$ se déduit de Ψ_{α}^* par passage à l'homologie des différentielles d_{α}^A
et d_{α}^B .

CHAPITRE III

LE THEOREME DE SHIH POUR LES COMPLEXES SIMPLICIAUX.

Le but de ce chapitre est, essentiellement, de démontrer la proposition 3 de l'introduction.

1 - Préliminaires.

Λ désigne toujours un anneau commutatif unitaire. On dira DGA-algèbre (resp. DGA-coalgèbre) pour MDG avec produit (resp. co-produit) et augmentation ([16] exposé 2 et [28]).

On considère les données suivantes :

K et K' sont des DGA-coalgèbres, avec coproduit noté Δ ,
 $\bar{\alpha} : K \rightarrow K'$ est un morphisme de DGA-coalgèbres.

G est une DGA-algèbre avec produit ψ .

L est un MDG sur lequel opère G par le morphisme de MDG :

$$\bar{\sigma} : G \times L \rightarrow L .$$

Si $\tilde{\tau}$ est un élément de $\text{Hom}_{-1}(K, G)$, on définit :

$$\tilde{\tau} \cap (k \otimes \ell) = (1 \otimes \bar{\sigma}) \circ (1 \otimes \tilde{\tau} \otimes 1) \circ (\Delta \otimes 1)(k \otimes \ell)$$

pour $k \in K$ et $\ell \in L$. 1 désigne l'application identité du module considéré.

Supposons $K_i = G_i = 0$ pour $i < 0$ et définissons $\tilde{\tau}_i \cup \tilde{\tau}_j$ par :

$$(\tilde{\tau}_i \cup \tilde{\tau}_j)(k) = \psi \circ (\tilde{\tau}_i \otimes \tilde{\tau}_j) \circ \Delta(k)$$

On dit que $\tilde{\tau}$ est une cochaîne tordante si on a :

$$(16) \quad d \tilde{\tau}_n + \tilde{\tau}_{n-1} d + \sum_{i=1}^n \tilde{\tau}_i \cup \tilde{\tau}_{n-i} = 0$$

Dans ce cas, l'homomorphisme $d^\tau : K \otimes L \rightarrow K \otimes L$ tel que

$$d^\tau(k \otimes l) = d(k \otimes l) + \tilde{\tau} \cap (k \otimes l) = dk \otimes l + (-1)^{\text{deg}k} k \otimes dl + \tilde{\tau} \cap (k \otimes l)$$

est une différentielle. On note $K \otimes_\tau L$ le produit tensoriel $K \otimes L$ muni de la différentielle d^τ .

Soit alors $\tilde{\tau}' \in \text{Hom}_{-1}(K', G)$ satisfaisant à $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}' \circ \bar{\alpha}$, il vient d'après [28] :

$$(17) \quad (\bar{\alpha} \otimes 1) [\tilde{\tau}' \cap (k \otimes l)] = \tilde{\tau} \cap (\bar{\alpha} \otimes 1)(k \otimes l)$$

Lemme 1.1.- Si $\tilde{\tau}'$ est une cochaîne tordante, $\tilde{\tau}$ est une cochaîne tordante.

Lemme 1.2.- Si K et K' sont des modules libres, si $H_0(G) = \Lambda$ et si $\bar{\alpha}$ est une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes, $\bar{\alpha} \otimes 1$ est une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes entre $K \otimes_\tau L$ et $K' \otimes_{\tau'} L$ munis des différentielles d^τ et $d^{\tau'}$ respectivement.

Démonstration.- On définit des filtrations croissantes sur $K \otimes_\tau L$ et $K' \otimes_{\tau'} L$ par :

$$F_p [K \otimes_\tau L] = \sum_{i=0}^p K_i \otimes L \quad F_p [K' \otimes_{\tau'} L] = \sum_{i=0}^p K'_i \otimes L$$

$\bar{\alpha}$ est un morphisme de DGA-coalgèbres et $\bar{\alpha} \otimes 1$ respecte les filtrations ci-dessus. On en déduit un homomorphisme des suites spectrales respectivement définies par ces filtrations. On a :

$$E_{p,q}^1 = K_p \otimes H_q(L) \quad E'_{p,q}{}^1 = K'_p \otimes H_q(L)$$

$$E_{p,q}^2 = H_p(K; H_q(L)) \simeq E'_{p,q}{}^2$$

en vertu des hypothèses faites sur K, K' et $H_0(G)$. Le lemme découle alors d'un argument classique sur les suites spectrales.

Remarque 1.3. - Si $\bar{\beta} : K' \rightarrow K$ est un morphisme de DGA-coalgèbres réalisant avec $\bar{\alpha}$ l'équivalence d'homotopie entre K et K' , l'équivalence d'homotopie de complexes de chaînes entre $K \otimes_{\tau} L$ et $K' \otimes_{\tau'} L$ est réalisée par $\bar{\alpha} \otimes 1$ mais a priori ne l'est pas par $\bar{\beta} \otimes 1$. Ce dernier n'est, en général, pas un morphisme de MDG. En effet, on a : $(\bar{\beta} \otimes 1) \circ d = d \circ (\bar{\beta} \otimes 1)$, mais il vient :

$$(\bar{\beta} \otimes 1) \circ (\tilde{\tau}' \cap) = (\tilde{\tau}' \cap) \circ (\bar{\beta} \otimes 1) + d \circ \psi^{\tau} + \psi^{\tau} \circ d + (\bar{\beta} \otimes 1) \circ [((\tilde{\tau}' \cup \tilde{\tau}) \circ \psi) \cap]$$

où ψ est donné par $\bar{\alpha} \circ \bar{\beta} = 1 + d\psi + \psi d$ et ψ^{τ} par :

$$\psi^{\tau} = (\bar{\beta} \otimes \bar{\sigma}) \circ (1 \otimes \tilde{\tau}' \psi \otimes 1) \circ (\Delta \otimes 1).$$

Si L est un sous-MDG de L' , on suppose qu'il existe une rétraction par déformation r de L' sur L réalisant avec l'injection $i : L \rightarrow L'$ une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes. L'action $\bar{\sigma}$ de G sur L s'étend à L' par $\bar{\sigma}(g, l') = \bar{\sigma}(g, r(l'))$ et le produit tensoriel tordu $K \otimes_{\tau} L'$ est bien défini.

Lemme 1.4. - Si K est libre, l'injection $1 \otimes i$ et la rétraction $1 \otimes r$ réalisent une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes entre les complexes $K \otimes_{\tau} L$ et $K \otimes_{\tau} L'$.

Démonstration. - Elle est identique à celle du lemme 1.2.

([28], Lemme 3.3.).

2 - Le théorème de Shih.

Les ensembles simpliciaux sont notés \underline{B} , \underline{F} , etc... $C(\underline{B})$ désigne le module A -libre ayant pour base l'ensemble simplicial \underline{B} . On note $\underline{F} \times_{\tau} \underline{B}$ le produit cartésien tordu de \underline{F} et \underline{B} à l'aide d'une fonction tordante $\tau : \underline{B} \rightarrow \underline{G}$ prenant ses valeurs dans un groupe simplicial, sous-monoïde du monoïde simplicial $\text{Hom}(\underline{E}, \underline{F})$ ([17], exposés 1 et 3).

Théorème 2.1. (Shih [39]).- A tout produit cartésien tordu $\underline{F} \times_{\tau} \underline{B}$, on peut associer une cochaîne tordante de degré -1 , $\overset{\sim}{\tau} : C(\underline{B}) \rightarrow C(\underline{G})$ appelée cochaîne fondamentale. Il existe une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes entre les complexes $C(\underline{F} \times_{\tau} \underline{B})$ et $C(\underline{B}) \otimes_{\tau} C(\underline{F})$.

La démonstration de Shih consiste à construire explicitement des morphismes de MDG

$$\begin{array}{ccc} \nabla^{\tau} : C(\underline{B}) \otimes_{\tau} C(\underline{F}) & \longrightarrow & C(\underline{F} \times_{\tau} \underline{B}) \\ f^{\tau} : C(\underline{F} \times_{\tau} \underline{B}) & \longrightarrow & C(\underline{B}) \otimes_{\tau} C(\underline{F}) \end{array}$$

tels que $f^{\tau} \circ \nabla^{\tau} = 1$ et $\nabla^{\tau} \circ f^{\tau} = 1 + d^{\tau} \phi^{\tau} + \phi^{\tau} d^{\tau}$ où ϕ^{τ} est un morphisme de $C(\underline{F} \times_{\tau} \underline{B})$ dans lui-même.

Cas d'un fibré de Serre :

Pour tout espace X , on notera (en principe, sans ambiguïté) \underline{X} l'ensemble simplicial des simplexes singuliers de X . On a, par définition $C(X) = C(\underline{X})$. Si $p : E \rightarrow B$ est un fibré de Serre, de fibre F , $p : \underline{E} \rightarrow \underline{B}$ est une fibration de Kan (appelée fibré de Kan dans [17]), de fibre \underline{F} . On peut lui faire correspondre une fibration minimale $p' : \underline{E}' \rightarrow \underline{B}$ qui en est un rétracte par déformation ([5], III Théorème 4.1). La fibre F' de $p' : \underline{E}' \rightarrow \underline{B}$ est un complexe minimal de \underline{F} , rétracte par déformation de \underline{F} .

Si B est connexe, il en est de même de \underline{B} et dans ce cas, $p' : \underline{E}' \rightarrow \underline{B}$ est un fibré de Kan (au sens "fibre bundle" [5], IV Proposition 2.2). Il est isomorphe à un produit cartésien tordu $\underline{F}' \times_{\tau} \underline{B}$ ([5], [17]). On appelle encore cochaîne fondamentale associée au fibré $p : E \rightarrow B$ la cochaîne fondamentale associée à la fonction tordante τ . Comme \underline{E}' est un rétracte par dé-

formation de \underline{E} , il vient d'après le théorème de Shih et le lemme 1.4. (appliqué à $L' = C(\underline{F}) = C(F)$ et $L = C(\underline{F}')$) :

Proposition 2.2.- Soit $p : E \rightarrow B$ un fibré de Serre de base B connexe et de fibre F , on peut lui associer une cochaîne fondamentale $\overset{\sim}{\tau}$ et un produit tensoriel tordu $C(B) \underset{\tau}{\otimes} C(F)$ tels qu'on ait une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes entre les complexes $C(E)$ et $C(B) \underset{\tau}{\otimes} C(F)$.

Par abus de notation, on notera encore ∇^τ et f^τ les morphismes $\nabla^\tau : C(B) \underset{\tau}{\otimes} C(F) \rightarrow C(E)$ et $f^\tau : C(E) \rightarrow C(B) \underset{\tau}{\otimes} C(F)$ réalisant cette équivalence d'homotopie. (On n'a plus $f^\tau \circ \nabla^\tau = 1$).

Sous-fibrés.- Soit $p : E \rightarrow B$ un fibré localement trivial de fibre F et de groupe structural G et F' un sous-espace de F stable par l'action de G , on peut construire un fibré localement trivial $p' : E' \rightarrow B$ de fibre F' , sous-fibré de $p : E \rightarrow B$. L'ensemble simplicial \underline{F}' est un sous-ensemble simplicial de \underline{F} stable par l'action de \underline{G} . Les fibrés simpliciaux correspondant à $p : E \rightarrow B$ et $p' : E' \rightarrow B$ sont associés au même fibré principal, on peut donc leur attribuer même fonction tordante τ et même cochaîne tordante $\overset{\sim}{\tau}$ (Appendice 1). Le complexe $C(B) \underset{\tau}{\otimes} C(F')$ est un sous-complexe de $C(B) \underset{\tau}{\otimes} C(F)$ et on a une suite exacte de MDG :

$$0 \longrightarrow C(B) \underset{\tau}{\otimes} C(F') \longrightarrow C(B) \underset{\tau}{\otimes} C(F) \longrightarrow C(B) \underset{\tau}{\otimes} C(F)/C(B) \underset{\tau}{\otimes} C(F') \longrightarrow 0.$$

En notant $C(F, F') = C(F)/C(F')$ et les classes d'équivalence dans les quotients $C(F, F')$ et $C(B) \underset{\tau}{\otimes} C(F)/C(B) \underset{\tau}{\otimes} C(F')$ par des crochets, on a :

Proposition 2.3.- Le complexe quotient $C(B) \underset{\tau}{\otimes} C(F)/C(B) \underset{\tau}{\otimes} C(F')$ est isomorphe à $C(B) \underset{\tau}{\otimes} C(F, F')$, la différentielle étant définie par :

$$\begin{aligned} d^\tau(b \otimes [f]) &= d(b \otimes [f]) + [\overset{\sim}{\tau} \cap (b \otimes f)] \\ &= d(b \otimes [f]) + \overset{\sim}{\tau} \cap (b \otimes [f]) \end{aligned}$$

où $f \in C(F)$ et $b \in C(B)$.

Démonstration.- On a, pour tout $b \in C(B)$ et $f \in C(F)$,
 $[d(b \otimes f)] = d(b \otimes [f])$, c'est-à-dire que la différentielle du produit tensoriel $C(B) \otimes C(F, F')$ est induite par la différentielle de $C(B) \otimes C(F)$. Il suffit donc de montrer que l'on peut définir $\tilde{\tau} \cap (b \otimes [f]) = [\tilde{\tau} \cap (b \otimes f)]$. Or ceci vient de ce que F' , sous-ensemble simplicial de F , est stable par les opérateurs de dégénérescence, que F' est stable par l'action de G et enfin de la définition de $\tilde{\tau} \cap$.

3 - Le théorème de Shih pour les complexes simpliciaux.

Pour tout espace topologique B muni d'une triangulation, $B^{(p)}$ désigne le p -squelette de B , ensemble des simplexes de dimension inférieure ou égale à p . On note $K(B)$ le complexe des chaînes simpliciales orientées défini par la triangulation de B et $K_p(B)$ le sous-ensemble des chaînes de dimension p . L'inclusion canonique $\bar{\alpha} : K(B) \rightarrow C(B)$ induit un isomorphisme en homologie.

On se propose de montrer la proposition 3 de l'introduction que l'on formule comme suit :

Proposition 3.1.- Soit B un espace topologique muni d'une triangulation (K) et base d'un fibré $p : E \rightarrow B$ de fibre F . On peut munir le produit tensoriel $K(B) \otimes C(F)$ d'une différentielle, encore notée d^T , telle que l'on ait une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes entre le complexe obtenu, noté $K(B) \otimes_{\tau} C(F)$, et le complexe $C(B) \otimes_{\tau} C(F)$ respectant les filtrations suivantes :

$$F_p [K(B) \otimes_{\tau} C(F)] = K(B^{(p)}) \otimes_{\tau} C(F)$$

$$F_p [C(B) \otimes_{\tau} C(F)] = C(B^{(p)}) \otimes_{\tau} C(F).$$

On note $\beta : K(B) \otimes_{\tau} C(F) \rightarrow K(B) \otimes_{\tau} C(F)$ un morphisme réalisant avec l'injection $\alpha = \bar{\alpha} \otimes 1 : K(B) \otimes_{\tau} C(F) \rightarrow C(B) \otimes_{\tau} C(F)$ cette équivalence d'homotopie de complexes de chaînes.

Démonstration. - D'après un résultat classique ([14], exposé 9 ou [21]), il existe une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes entre $K(B)$ et $C(B)$. En reprenant par exemple la démonstration de [21], on vérifie que les morphismes

$$\bar{\alpha} : K(B) \rightarrow C(B) \quad \text{et} \quad \bar{\beta} : C(B) \rightarrow K(B)$$

réalisant cette équivalence d'homotopie respectent les filtrations suivantes :

$$F_p [K(B)] = K(B)^{(p)} \quad F_p [C(B)] = C(B)^{(p)} .$$

Soit alors $\tilde{\tau}$ une cochaîne fondamentale associée au fibré $p : X \rightarrow B$, d'après le lemme 1.1., $\tilde{\tau} \circ \bar{\alpha}$ est une cochaîne tordante et il vient (voir (17)) :

$$(\bar{\alpha} \otimes 1) ((\tilde{\tau} \circ \bar{\alpha}) \cap (k \otimes f)) = \tilde{\tau} \cap (\bar{\alpha} \otimes 1) (k \otimes f).$$

On note $K(B) \otimes_{\tau} C(F)$ le produit tensoriel $K(B) \otimes C(F)$ muni de la différentielle $d^{\tau}(k \otimes f) = d(k \otimes f) + (\tilde{\tau} \circ \bar{\alpha}) \cap (k \otimes f)$ et gradué comme suit :

$$(K(B) \otimes_{\tau} C(F))_p = \sum_{i+j=p} K_i(B) \otimes C_j(F).$$

Le morphisme $\alpha = (\bar{\alpha} \otimes 1) : K(B) \otimes_{\tau} C(F) \rightarrow C(B) \otimes_{\tau} C(F)$ est, d'après le lemme 1.2., une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes.

En considérant la restriction du fibré E au p -squelette de B , on définit, par restriction, des cochaînes tordantes sur $C(B)^{(p)} \otimes C(F)$ et $K(B)^{(p)} \otimes C(F)$ et un morphisme :

$$\alpha_p : K(B)^{(p)} \otimes_{\tau} C(F) \rightarrow C(B)^{(p)} \otimes_{\tau} C(F)$$

induisant un isomorphisme en homologie. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 K(B) \otimes_{\tau} C(F) & \xrightarrow{\alpha} & C(B) \otimes_{\tau} C(F) \\
 \uparrow i & & \uparrow j \\
 K(B^{(P)}) \otimes_{\tau} C(F) & \xrightarrow{\alpha_p} & C(B^{(P)}) \otimes_{\tau} C(F)
 \end{array}$$

où i et j sont les injections canoniques. La proposition 3.1. est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 3.2.- Soient K, K', L et L' des complexes de chaînes composés de groupes abéliens libres, $f : K \rightarrow L$ et $f' : K' \rightarrow L'$ des morphismes induisant des isomorphismes en homologie et $i : K' \rightarrow K, j : L' \rightarrow L$ des injections rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{f} & L \\
 \downarrow i & & \downarrow j \\
 K' & \xrightarrow{f'} & L'
 \end{array}$$

on peut alors choisir les application g et g' réalisant avec f et f' respectivement une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes de manière à ce que $g' \circ j = i \circ g$.

Démonstration.- Elle consiste à montrer que, dans la démonstration classique (par exemple [23], p. 154), tous les morphismes commutent avec les injections :

On note $C_q(f) = K_{q-1} \oplus L_q$ le complexe de chaînes muni de la différentielle $d_q(x,y) = (-d_{q-1}(x), d_q(y) + f_{q-1}(x))$. On a $H_q(f) = 0$. En dé-

finissant de même $C_q(f')$ et d'_q sur $C_q(f')$, l'injection de $C_q(f')$ dans $C_q(f)$ définie par $k(x,y) = (i(x),j(y))$ est un morphisme de complexes de chaînes.

Soit Z_q (resp. B_q) le sous-complexe des cycles (resp. bords) de C_q , k envoie $Z_q(f')$ dans $Z_q(f)$, il existe donc des décompositions en somme directe respectées par k :

$$C_q(f) = Z_q(f) \oplus W_q \quad C_q(f') = Z_q(f') \oplus W'_q$$

(on a des groupes abéliens libres). On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} W_q & \xrightarrow{d_q} & B_{q-1}(f) = Z_{q-1}(f) \\ \uparrow k & & \uparrow k \\ W'_q & \xrightarrow{d'_q} & B_{q-1}(f') = Z_{q-1}(f') \end{array}$$

où d_q et d'_q sont ici des isomorphismes.

On définit $D_q : C_q(f) \rightarrow C_{q+1}(f)$ par $D_q(z) = 0$ si $z \in W_q$ et $D_q(z) = d_{q+1}^{-1}(z)$ pour $z \in Z_q(f)$. On définit de même

$D'_q : C_q(f') \rightarrow C_{q+1}(f')$. Il vient :

- i) $D_q \circ k = k \circ D'_q$
- ii) $d_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ d_q = 1_{C_q(f)}$
- iii) $d'_{q+1} \circ D'_q + D'_{q-1} \circ d'_q = 1_{C_q(f')}$

On en déduit des morphismes $g_q : L_q \rightarrow K_q$ et $g'_q : L'_q \rightarrow K'_q$ réalisant avec f_q et f'_q respectivement des équivalences d'homotopie (par (ii) et (iii)) et commutant avec i et j (par (i)), ce qui démontre le lemme.

Proposition 3.3.- Soit B un espace topologique muni d'une triangulation (K) et base d'un fibré $p : E \rightarrow B$ de fibre F . Si E^P désigne $p^{-1}(B^{(P)})$, restriction du fibré au p -squelette de B , il existe une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes

$$(18) \quad K(B) \underset{\tau}{\otimes} C(F) \underset{\substack{\xrightarrow{\nu^\tau} \\ \xleftarrow{f^\tau}}}{\quad} C(E)$$

respectant les filtrations suivantes :

$$\begin{aligned} F_p \left[\underset{\tau}{K(B)} \underset{\tau}{\otimes} C(F) \right] &= \underset{\tau}{K(B^{(P)})} \underset{\tau}{\otimes} C(F) \\ F_p \left[C(E) \right] &= C(E^P) \end{aligned}$$

Démonstration.- Le fibré minimal $p' : \underline{E}' \rightarrow \underline{B}$ associé à $p : E \rightarrow B$ est isomorphe au produit cartésien tordu $\underline{F}' \times_{\tau} \underline{B}$ (voir page 35).

Notons $B^{(P)}$ le p -squelette de B et $\underline{B}^{(P)}$ l'ensemble simplicial des simplexes singuliers de $B^{(P)}$. Par restriction du fibré $p : E \rightarrow B$ à $B^{(P)}$, on obtient un fibré $p : E^P \rightarrow B^{(P)}$. Il lui est associé un fibré minimal $p' : \underline{E}'^P \rightarrow \underline{B}^{(P)}$, sous-fibré de $p' : \underline{E}' \rightarrow \underline{B}$ et isomorphe au produit cartésien tordu $\underline{F}' \times_{\tau} \underline{B}^{(P)}$, la fonction tordante étant définie par restriction de la précédente à $\underline{B}^{(P)}$.

Les restrictions des morphismes de MDG ν^τ et f^τ du théorème 2.1. à $\underset{\tau}{C(\underline{B}^{(P)})} \underset{\tau}{\otimes} C(\underline{F}')$ et $C(\underline{F}' \times_{\tau} \underline{B}^{(P)})$ réalisent une équivalence d'homotopie entre ces complexes de chaînes (on peut utiliser, pour montrer cela, une démonstration identique à celle de [39], p. 32). On en déduit que les restrictions des morphismes de MDG de la proposition 2.2. (encore notés ν^τ et f^τ) à $\underset{\tau}{C(B^{(P)})} \underset{\tau}{\otimes} C(F)$ et $C(E^P)$ réalisent une équivalence d'homotopie entre ces complexes de chaînes.

Les morphismes $\tilde{v}^\tau = v^\tau \circ \alpha$ et $\tilde{f}^\tau = \beta \circ f^\tau$ (où α et β sont définis dans la proposition 3.1.) réalisent l'équivalence d'homotopie cherchée et respectent les filtrations définies plus haut.

CHAPITRE IV

ISOMORPHISME DE THOM.

Soit (X, M) un espace C^0 -stratifié à voisinage orientable. Notons $\mu = \dim(X-M) - \dim M$ et $C^{(-\mu)}(M)$ le module $C(M)$ gradué comme suit :
 $C_P^{(-\mu)}(M) = C_{P-\mu}(M)$. Nous démontrons dans ce chapitre la proposition 1 de l'introduction, c'est-à-dire l'existence d'un homomorphisme de MDG :

$$(19) \quad \phi' : C(X-M) \oplus_{\psi'} C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(X)$$

induisant un isomorphisme en homologie.

La suite exacte de Thom est une conséquence immédiate de cette proposition, comme suite exacte associée à une somme tordue. (Remarque 1.4. du chapitre II). Il vient en effet :

$$\dots \rightarrow H_P(X-M) \rightarrow H_P(X) \rightarrow H_{P-\mu}(M) \xrightarrow{\psi'_*} H_{P-1}(X-M) \rightarrow \dots$$

où ψ'_* est le morphisme induit en homologie par le cycle ψ' de $\text{Hom}_{-1}(C^{(-\mu)}(M), C(X-M))$.

1 - Fibrés Λ -orientables.

Soit $\lambda : T \rightarrow M$ un fibré localement trivial de base M et de fibre D . On suppose que D est un espace à point base $\{0\}$ tel que :

$$(20) \quad \begin{cases} \text{(i)} & \text{l'homologie réduite } \check{H}_*(D) \text{ est nulle en tous degrés.} \\ \text{(ii)} & H_q(D, D-\{0\}) = \begin{cases} 0 & q \neq \mu \\ \Lambda & q = \mu \end{cases} \end{cases}$$

M s'identifie à une section de T . Notons $T^0 = T-M$ et $\lambda^0 = \lambda|_{T^0}$. Le faisceau de Leray de λ modulo λ^0 est appelé faisceau

d'orientation du fibré λ et noté $H^*(\lambda, \lambda^0; \Lambda)$ [10]. C'est le faisceau engendré par le faisceau :

$$\Omega \rightarrow H^*(\lambda^{-1}(\Omega), \lambda^{-1}(\Omega) \cap T^0; \Lambda), \quad (\Omega \text{ ouvert de } M).$$

C'est un faisceau localement constant de fibre :

$$H^q(D, D - \{0\}) = \begin{cases} 0 & q \neq \mu \\ \Lambda & q = \mu. \end{cases}$$

On dit que le fibré $\lambda : T \rightarrow M$ est orientable si son faisceau d'orientation est constant. Dans ce cas, les faisceaux d'orientation de M et de X coïncident sur M . Une orientation du fibré est une section u de $H^\mu(\lambda, \lambda^0; \Lambda)$ au-dessus de M telle que, pour tout x de M , $u(x) = u_x$ soit un générateur de la fibre en x . Si on se donne une orientation u , on dit que le fibré $\lambda : T \rightarrow M$ est orienté. La section u définit alors un élément de $H^\mu(T, T-M)$, encore noté u et appelé classe fondamentale du fibré. L'application :

$$(21) \quad t_* = \lambda_*(u \cap .) : H_p(T, T-M) \rightarrow H_{p-\mu}(M)$$

est un isomorphisme, appelé isomorphisme de Thom.

On va montrer, en suivant [2], que l'isomorphisme de Thom est induit par un morphisme de MDG au niveau des chaînes singulières.

Tout d'abord, la donnée d'une orientation de $\lambda : T \rightarrow M$ est équivalente à la donnée d'un système cohérent de générateurs en un sens que l'on précise ci-dessous :

A) Si le fibré est trivial, $H_*(D, D-\{0\})$ étant Λ -libre de base finie, le cup-produit externe donne lieu à des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} H^0(M) \otimes H^\mu(D, D-\{0\}) & \xrightarrow{\cong} & H^\mu(T, T-M) \\ \Lambda & & \\ H^0(\{x\}) \otimes H^\mu(D, D-\{0\}) & \xrightarrow{\cong} & H^\mu(D_x, D_x-\{0\}) \\ \Lambda & & \end{array}$$

Considérons l'injection canonique $\{x\} \rightarrow M$, par functorialité de cup-produit externe, il vient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 H^0(M) \otimes H^\mu(D, D-\{0\}) & \xrightarrow{\cong} & H^\mu(T, T-M) \\
 \downarrow \Lambda & & \downarrow \\
 H^0(\{x\}) \otimes H^\mu(D, D-\{0\}) & \xrightarrow{\cong} & H^\mu(D_x, D_x-\{0\}) .
 \end{array}$$

Fixons un générateur v de $H^\mu(D, D-\{0\})$. A tout générateur u_x de $H^\mu(D_x, D_x-\{0\})$ correspond un unique générateur z_x de $H^0(\{x\})$ tel que $z_x \cup v = u_x$.

Définition 1.1.- On dira que la famille $\{u_x\}_{x \in M}$ forme un système cohérent de générateurs (pour le fibré trivial $\lambda : T \rightarrow M$) si les $\{z_x\}$ sont restriction d'une même classe $z \in H^0(M)$.

Autrement dit, l'application $M \rightarrow \Lambda$ définie par $x \rightsquigarrow z_x$ est constante sur les composantes connexes par arcs.

Etant donné un système cohérent de générateurs, la classe fondamentale du fibré (trivial) $\lambda : T \rightarrow M$ est l'unique élément u de $H^\mu(T, T-M)$ dont l'image dans $H^\mu(D_x, D_x-\{0\})$ soit z_x . On a $u = z \cup v$. Un choix différent de v conduit à un z différent, mais u est indépendant de ce choix (pour un système $\{u_x\}_{x \in M}$ donné).

B) Dans le cas général, on pose :

Définition 1.2.- Soit $\lambda : T \rightarrow M$ un fibré localement trivial dont la fibre D satisfait à (20). On dira que le système de générateurs $\{u_x\}_{x \in M}$ est cohérent si, pour tout point $x_0 \in M$, il existe un ouvert de trivialisations U_0 du fibré $\lambda : T \rightarrow M$ tel que le système $\{u_x\}_{x \in U_0}$ soit cohérent pour le fibré

trivial $\lambda : T|_{U_0} \rightarrow U_0$.

2 - Morphisme de Thom au niveau des complexes de chaînes singulières.

Par exception, les complexes de chaînes singulières considérés dans ce paragraphe seront les complexes non normalisés.

On montre d'abord comment le cap-produit par u (dans (21)) est induit par un morphisme de MDG au niveau des complexes de chaînes singulières :

Soit $U = \{U_i\}_{i \in I}$ un atlas de M composé d'ouverts de trivialisations du fibré $\lambda : T \rightarrow M$, on note $T_i = \lambda^{-1}(U_i)$ et $E = \{T_i\}_{i \in I}$. $C^E(T)$ désigne le complexe des chaînes singulières petites d'ordre E ([14], exposé 8). Enfin, par abus de notation, on note u un μ -cocycle représentant la classe fondamentale du fibré.

Proposition 2.1. [2].- L'application $\pi : C_q^E(T, T-M) \rightarrow C_{q-\mu}^E(T)$ définie par $\pi(y) = u \cap y$ est surjective et induit un isomorphisme en homologie.

Démonstration.-

a) surjectivité : comme on opère sur des chaînes petites d'ordre E , il suffit de la montrer pour un fibré trivial.

Or, par définition d'un système cohérent, la classe u s'écrit $z \cup v$ avec $z \in H^0(M)$ et v générateur de $H^\mu(D, D-\{0\})$. Désignons encore par z et v des cocycles représentant les classes z et v , les applications

$$C_\alpha(M) \otimes_{\Lambda} C_\beta(D, D-\{0\}) \xrightarrow{(z \otimes v) \cap} C_\alpha(M) \otimes_{\Lambda} C_{\beta-\mu}^{\prime}(D)$$

sont surjectives, d'où le résultat.

b) Isomorphisme en homologie (cas du fibré trivial) : $H^*(D, D-\{O\})$

est Λ -libre, il vient un isomorphisme :

$$H_q(M) \otimes_{\Lambda} H_{\mu}(D, D-\{O\}) \xrightarrow{\cong} H_{q+\mu}(T, T-M)$$

d'où, par functorialité du cap-produit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H_q(M) \otimes_{\Lambda} H_{\mu}(D, D-\{O\}) & \xrightarrow{\cong} & H_{q+\mu}(T, T-M) \\ \downarrow (z \otimes v) \cap & & \downarrow u \cap \\ H_q(M) \otimes_{\Lambda} H_0(D) & \xrightarrow{\cong} & H_q(T) \end{array}$$

Il suffit donc de montrer que $(z \otimes v) \cap$ est un isomorphisme. Or $(z \otimes v) \cap$ rentre dans la composition :

$$H_q(M) \xrightarrow{\alpha} H_q(M) \otimes_{\Lambda} H_{\mu}(D, D-\{O\}) \xrightarrow{(z \otimes v) \cap} H_q(M) \otimes_{\Lambda} H_0(D) \xrightarrow{\beta} H_q(M)$$

où α et β sont définis comme suit :

$\alpha(\xi) = \xi \otimes \underline{v}$ où \underline{v} est le générateur de $H_{\mu}(D, D-\{O\})$ associé à v et tel que $v(\underline{v}) = e$, élément unité de Λ .

$\beta(\xi \otimes k\underline{e}) = k.\xi$ où \underline{e} désigne, dans $H_0(D)$ (isomorphe à Λ), la classe du cocycle valant e en tout point et où $k \in \Lambda$.

Par composition, on obtient le morphisme $\xi \rightsquigarrow z.\xi$ qui, de même que α et β , est un isomorphisme, d'où le résultat.

c) Isomorphisme en homologie (cas général) : Montrons que la proposition, vraie au-dessus des ouverts de E , est encore vraie pour la réunion de deux ouverts de E . Pour cela soient U_1 et U_2 deux ouverts de E et $U = U_1 \cup U_2$.

On note T, T_1, T_2 et T_{12} les restrictions du fibré à U, U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ et u, u_1, u_2 et u_{12} les classes fondamentales correspondant respectivement à ces restrictions. Les suites de Mayer-Vietoris respectives donnent lieu à un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots \rightarrow H_q(T_{12}, T_{12}-U_{12}) & \rightarrow & H_q(T_1, T_1-U_1) \oplus H_q(T_2, T_2-U_2) & \rightarrow & H_q(T, T-U) & \rightarrow & H_{q-1}(T_{12}, T_{12}-U_{12}) \rightarrow \dots \\
 \downarrow u_{12} \cap \textcircled{1} & & \downarrow u_1 \cap \oplus u_2 \cap \textcircled{2} & & \downarrow u \cap \textcircled{3} & & \downarrow u_{12} \cap \\
 \dots \rightarrow H_{q-\mu}(T_{12}) & \longrightarrow & H_{q-\mu}(T_1) \oplus H_{q-\mu}(T_2) & \rightarrow & H_{q-\mu}(T) & \longrightarrow & H_{q-\mu-1}(T_{12}) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Les carrés $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$ commutent par functorialité du cap-produit et $\textcircled{3}$ est anticommutatif (composé de cap-produits et bords). D'après le lemme des cinq, $u \cap$ est un isomorphisme puisque les autres flèches verticales le sont.

On a vu en (b) que la proposition est vraie au-dessus des ouverts U_i , comme le foncteur homologie commute aux limites inductives strictes, on en déduit la proposition.

Proposition 2.2. [2].- La projection d'un fibré Λ -orientable, $\lambda : T \rightarrow M$, induit un morphisme surjectif $\lambda : C(T) \rightarrow C(M)$ donnant lieu à un isomorphisme en homologie.

La projection λ se relève par la section canonique, ce qui assure la surjectivité. Dans la suite, nous n'envisagerons, en fait, que des fibrés Λ -orientables de fibre D contractile et pour lesquels la proposition est évidente.

Proposition 2.3.- Soit $\lambda : T \rightarrow M$ un fibré Λ -orienté, l'isomorphisme de Thom (21), $t_* : H_*(T, T-M) \rightarrow H_*(M)$ composé du cap-produit par la classe fondamentale et de la projection est induit par un homomorphisme de MDG au niveau des complexes de chaînes singulières.

Démonstration.- Soient ε' l'injection canonique $\varepsilon' : C^E(T) \rightarrow C(T)$ et π' la surjection $\pi' : C(T) \rightarrow C^E(T)$ induite par l'opérateur de subdivision barycentrique ([14], exposé 8 ou [23] chap. VII, théorèmes 8.2. et 9.1.). π' réalise avec ε' une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes.

La composition des morphismes de MDG :

$$C_q(T, T-M) \xrightarrow{\pi'} C_q^E(T, T-M) \xrightarrow{\pi} C_{q-\mu}^E(T) \xrightarrow{\varepsilon'} C_{q-\mu}(T) \xrightarrow{\lambda} C_{q-\mu}(M)$$

que l'on notera t induit t_* en homologie, d'où le résultat.

Par application directe d'un théorème classique ([23], chap. V, théorème 13.3.), il vient :

Corollaire 2.4.- Il existe un morphisme de MDG :

$$s : C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(T, T-M)$$

réalisant avec t une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes et induisant en homologie l'isomorphisme inverse de t_* .

Nous donnerons au chapitre VII une expression explicite du morphisme s .

Remarque 2.5.- Par la suite, on notera encore s et t les morphismes de MDG définis au niveau des complexes de chaînes normalisées :

$s : C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(T, T-M)$, $t : C(T, T-M) \rightarrow C^{(-\mu)}(M)$ et déduits des précédents au moyen de l'équivalence d'homotopie entre complexes de chaînes normalisé et non normalisé (voir par exemple S. Eilenberg et S. Mac Lane, Annals of Math., 58 (1953), p. 61).

3 - Démonstration de la proposition 1 (Introduction).-

Considérons la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow C(X-M) \longrightarrow C(X) \xrightarrow{P} C(X, X-M) \longrightarrow 0$$

où tous les MDG sont libres. Pour tout relèvement ρ de la projection p , le morphisme $\bar{\Psi} = d\rho - \rho d$ est un cycle de $\text{Hom}_{-1}(C(X, X-M), C(X-M))$ et on a un isomorphisme de MDG :

$$\bar{\phi} : C(X-M) \oplus_{\bar{\Psi}} C(X, X-M) \longrightarrow C(X)$$

défini par $\bar{\phi}(x, y) = x + \rho(y)$ (lemme 1.2. du chapitre II).

On note T un voisinage tubulaire de M dans X et $\lambda : T \rightarrow M$ la projection de T sur M . C'est un fibré Λ -orientable de base M . Le choix d'une orientation de $\lambda : T \rightarrow M$ donne lieu à un morphisme $s : C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(T, T-M)$ induisant en homologie l'isomorphisme inverse de l'isomorphisme de Thom (Remarque 2.5.).

D'autre part, l'injection $\varepsilon : (T, T-M) \rightarrow (X, X-M)$ induit un morphisme de MDG (homomorphisme d'excision) encore noté ε

$$\varepsilon : C(T, T-M) \longrightarrow C(X, X-M) .$$

Comme $\overline{X-T} \subset \overset{0}{X-M}$ (intérieur de $X-M$), ε est une équivalence d'homotopie.

Le morphisme composé

$$(22) \quad C^{(-\mu)}(M) \xrightarrow{s} C(T, T-M) \xrightarrow{\varepsilon} C(X, X-M)$$

noté $\delta = \varepsilon \circ s$, induit un isomorphisme en homologie. Posons $\Psi' = \bar{\Psi} \circ \delta$, l'application

$$(23) \quad \theta' : C(X-M) \oplus_{\Psi'} C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(X-M) \oplus_{\bar{\Psi}} C(X, X-M)$$

définie par $\theta'(x, y) = (x, \delta(y))$ est un morphisme de MDG, elle induit un isomorphisme en homologie (proposition 3.3. du chapitre II). Le morphisme composé

$\phi' = \bar{\phi} \circ \theta'$ est un morphisme :

$$\phi' : C(X-M) \underset{\psi'}{\oplus} C^{(-\mu)}(M) \longrightarrow C(X),$$

il est défini par $\phi'(a,b) = a + \rho\delta(b)$ et induit un isomorphisme en homologie, on en déduit la proposition.

CHAPITRE V

LA SUITE SPECTRALE.

Ce chapitre est consacré à la construction de la suite spectrale.

Nous avons cependant renvoyé au chapitre VII la démonstration, plus technique, de la proposition VII de l'introduction.

1 - Somme tordue de MDG associée à une application C^0 -stratifiée.

Soit (X, M) un espace C^0 -stratifié à voisinage orientable et $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C^0 -stratifiée de fibres (F, F_0) . D'après la proposition 2.2 du chapitre III, on peut associer au fibré $f|_M : M \rightarrow N$ de fibre F_0 une cochaîne fondamentale $\tilde{\tau}_0 \in \text{Hom}_{-1}(C(N), C(\underline{G}_0))$ (où \underline{G}_0 est un groupe simplicial d'automorphismes du complexe minimal de \underline{F}_0) et des morphismes de MDG :

$$\nabla^{\tau_0} : C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0) \longrightarrow C(M) \quad f^{\tau_0} : C(M) \longrightarrow C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)$$

réalisant une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes. On notera $\nabla^{\tau_0} \circ f^{\tau_0} = 1 + d\phi^{\tau_0} + \phi^{\tau_0}d$ avec $\phi^{\tau_0} \in \text{Hom}_1(C(M), C(M))$.

De même, on peut associer au fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$, de fibre F , un cochaîne fondamentale $\tilde{\tau}_1 \in \text{Hom}_{-1}(C(\underline{Y-N}), C(\underline{G}))$ et des morphismes de MDG :

$$\nabla^{\tau_1} : C(\underline{Y-N}) \otimes_{\tau_1} C(F) \longrightarrow C(X-M) \quad f^{\tau_1} : C(X-M) \longrightarrow C(\underline{Y-N}) \otimes_{\tau_1} C(F)$$

réalisant une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes. On notera $\nabla^{\tau_1} \circ f^{\tau_1} = 1 + d\phi^{\tau_1} + \phi^{\tau_1}d$ avec $\phi^{\tau_1} \in \text{Hom}_1(C(X-M), C(X-M))$.

Notons $[C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)]^{(-\mu)}$ le module différentiel $C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)$ gradué comme suit :

$$[C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)]_p^{(-\mu)} = \sum_{i+j=p-\mu} C_i(N) \otimes C_j(F_0)$$

Soit ψ' le morphisme

$$\psi' : C^{(-\mu)}(M) \longrightarrow C(X-M)$$

défini au paragraphe 3 du chapitre IV, en posant $\psi'' = f^{\tau_1} \circ \psi' \circ \nabla^{\tau_0}$, on forme la somme tordue :

$$(24) \quad [C(Y-N) \otimes_{\tau_1} C(F)] \oplus_{\psi''} [C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)]^{(-\mu)}$$

On déduit alors directement du corollaire 3.6 du chapitre II, la proposition :

Proposition 1.1. - Les morphismes

$$\nabla_2 : [C(Y-N) \otimes_{\tau_1} C(F)] \oplus_{\psi''} [C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)]^{(-\mu)} \longrightarrow C(X-M) \oplus_{\psi'} C^{(-\mu)}(M)$$

$$f_2 : C(X-M) \oplus_{\psi'} C^{(-\mu)}(M) \rightarrow [C(Y-N) \otimes_{\tau_1} C(F)] \oplus_{\psi''} [C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)]^{(-\mu)}$$

définis par $\nabla_2(a,b) = (\nabla^{\tau_1}(a) + \phi^{\tau_1} \psi' \nabla^{\tau_0}(b), \nabla^{\tau_0}(b))$

et $f_2(x,y) = (f^{\tau_1}(x) + f^{\tau_1} \psi' \phi^{\tau_0}(y), f^{\tau_0}(y))$

sont des morphismes de MDG induisant un isomorphisme en homologie. On a :

$$\nabla_2 \circ f_2 = 1 + d_{\psi'} \circ \phi^2 + \phi^2 \circ d_{\psi'}$$

où $\phi^2(x,y) = (\phi^{\tau_1}(x) + \phi^{\tau_1} \circ \psi' \circ \phi^{\tau_0}(y), \phi^{\tau_0}(y))$.

Corollaire 1.2. (Proposition 2 de l'introduction).- Le morphisme de MDG :

$$\phi' \circ \nabla_2 : \left[C(Y-N) \underset{\tau_1}{\otimes} C(F) \right] \underset{\psi''}{\otimes} \left[C(N) \underset{\tau_0}{\otimes} C(F_0) \right]^{(-\mu)} \longrightarrow C(X)$$

réalise une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes. Il induit un isomorphisme en homologie.

2 - Somme tordue à l'aide des complexes simpliciaux.

On démontre, dans ce paragraphe, la proposition 6 de l'introduction.

Les hypothèses sont les mêmes qu'au paragraphe précédent.

2.1. - Supposons N muni d'une triangulation, la cochaîne fondamentale $\tilde{\tau}_0$ du fibré $f|_M : M \rightarrow N$ induit par restriction une cochaîne fondamentale $\tilde{\tau}_0 \circ \bar{\alpha}$ sur $K(N)$ et on peut former le produit tensoriel tordu $K(N) \underset{\tau_0}{\otimes} C(F_0)$. Il résulte de la proposition 3.1 du chapitre III :

Proposition 2.1.- Le morphisme $\alpha_0 = \bar{\alpha} \otimes 1 : K(N) \underset{\tau_0}{\otimes} C(F_0) \rightarrow C(N) \underset{\tau_0}{\otimes} C(F_0)$ réalise une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes.

On note $\beta_0 : C(N) \underset{\tau_0}{\otimes} C(F_0) \rightarrow K(N) \underset{\tau_0}{\otimes} C(F_0)$ un morphisme de MDG réalisant avec α_0 cette équivalence d'homotopie.

2.2. - Soit U un voisinage tubulaire de N dans Y , $Y-\overset{\circ}{U}$ est un rétracte par déformation de $Y-N$. L'inclusion $\bar{i} : C(Y-\overset{\circ}{U}) \rightarrow C(Y-N)$ induit un isomorphisme en homologie. La cochaîne fondamentale $\tilde{\tau}_1$ du fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ induit par restriction une cochaîne fondamentale $\tilde{\tau}_1 \circ \bar{i}$ sur $C(Y-\overset{\circ}{U})$. D'après le lemme 1.2 du chapitre III, on a :

Proposition 2.2.- Le morphisme $\bar{i} \otimes 1 : C(Y-\overset{\circ}{U}) \underset{\tau_1}{\otimes} C(F) \rightarrow C(Y-N) \underset{\tau_1}{\otimes} C(F)$ est un morphisme de MDG, il réalise une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes.

On note j un morphisme de MDG :

$j : C(Y-N) \otimes_{\tau_1} C(F) \rightarrow C(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes_{\tau_1} C(F)$ réalisant avec $\bar{i} \otimes 1$ cette équivalence d'homotopie.

2.3.- Supposons le sous-espace $Y-\overset{\circ}{U}$ muni d'une triangulation, en notant encore $\bar{\alpha}$ l'inclusion $K(Y-\overset{\circ}{U}) \rightarrow C(Y-\overset{\circ}{U})$, on a, de même qu'en 2.1 :

Proposition 2.3.- Le morphisme

$\alpha_1 = \bar{\alpha} \otimes 1 : K(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes_{\tau_1} C(F) \rightarrow C(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes_{\tau_1} C(F)$ réalise une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes.

On note $\beta_1 : C(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes_{\tau_1} C(F) \rightarrow K(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes_{\tau_1} C(F)$ un morphisme de MDG réalisant avec α_1 cette équivalence d'homotopie.

2.4.- Le morphisme :

$$(25) \quad \Psi : K(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0) \rightarrow K(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes_{\tau_1} C(F)$$

obtenu comme composition $\Psi = \beta_1 \circ j \circ \Psi'' \circ \alpha_0$ est un cycle de degré -1 .

Il vient, d'après la proposition 3 de [39] ou le corollaire 3.6 du chapitre II :

Proposition 2.4.- Il existe une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes

$$[K(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes_{\tau_1} C(F)] \otimes_{\Psi} [K(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)]^{(-\mu)} \xrightleftharpoons[\beta']{\alpha'} [C(Y-N) \otimes_{\tau_1} C(F)] \otimes_{\Psi''} [C(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)]^{(-\mu)}.$$

décrite de la manière suivante :

Posons, pour $i = 0, 1$, $\alpha_i \circ \beta_i = 1 + d\phi_i + \phi_i d$. α' et β' sont définis

par : $\alpha'(a, b) = (\alpha_1(a) + \phi_1 \Psi'' \alpha_0(b), \alpha_0(b))$

et $\beta'(x, y) = (\beta_1(x) + \beta_1 \Psi'' \phi_0(y), \beta_0(y))$.

On a : $\alpha' \circ \beta' = 1 + d_{\psi''} \phi_2 + \phi_2 d_{\psi''}$, où ϕ_2 est défini par :

$$\phi_2(x,y) = (\phi_1(x) + \phi_1 \psi'' \phi_0(y), \phi_0(y)) .$$

Corollaire 2.5.- (Proposition 6 de l'introduction) - Le morphisme $\phi' \circ \nabla_2 \circ \alpha'$ réalise une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes entre $C(X)$ et le complexe :

$$(26) \quad [K(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes C(F)] \oplus_{\Psi} [K(N) \otimes C(F_0)]^{(-\mu)} .$$

$\tau_1 \qquad \qquad \qquad \tau_0$

3 - Filtrations.

On explicite dans ce paragraphe la filtration permettant de construire la suite spectrale.

Rappelons que $\partial U = U - \overset{\circ}{U}$ est l'espace total d'un fibré de base N et de fibre une variété topologique de dimension $\nu-1 = \dim(Y-N) - \dim(N) - 1$. (Propriété 1.2 du chapitre I). On note $\omega : \partial U \rightarrow N$ la restriction à ∂U de la projection de U sur N en tant que fibré.

Définitions 3.1.- Soit (Y,N) un espace C^0 -stratifié et U un voisinage tubulaire de N dans Y ;

On dit que (Y,N) est un espace C^0 -stratifié triangulable si Y,N et ∂U sont des espaces topologiques triangulables et si la fibre ∂D de ∂U est compacte.

On dit qu'une triangulation (K) de Y est une triangulation adaptée au triple (Y,N,U) si (K) est compatible avec une triangulation (K_1) de N et une triangulation (K_2) de ∂U et si de plus, pour tout simplexe s_q de $K_1^{(q)}$, $\omega^{-1}(s_q)$ est un sous-complexe de dimension $q+\nu-1$ de (K_2) .

Lemme 3.2.- Soit (Y,N) un espace C^0 -stratifié triangulable, pour tout voisinage tubulaire U de N dans Y , le triple (Y,N,U) admet des triangulations adaptées.

Démonstration. - Proposition 5.1 du chapitre VII.

Le résultat fondamental :

Proposition 3.3. - (Proposition 7 de l'introduction) - Soient (X, M) un espace C^0 -stratifié à voisinage orientable, (Y, N) un espace C^0 -stratifié triangulable et $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C^0 -stratifiée de fibres (F, F_0) . Posons $\nu = \dim(Y-N) - \dim N$, pour toute triangulation adaptée au triple (Y, N, U) , le morphisme ψ est homotope à un morphisme encore noté ψ et tel que :

$$(27) \quad \psi [K(N^{(p)}) \otimes C(F_0)] \subset K[(Y-U)^{(p+\nu-1)}] \otimes C(F)$$

Démonstration. - Paragraphe 6 du chapitre VII.

Dans toute la suite, nous noterons

$$(28) \quad A = K(Y-U)^{\circ} \otimes_{\tau_1} C(F) \quad B = [K(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)]^{(-\mu)}$$

en tant que MDG. Pour un entier $k \geq 0$ fixé, on filtre A et B comme suit :

$$F_p(A) = K[(Y-U)^{\circ(p)}] \otimes_{\tau_1} C(F)$$

$$(k) F_p(B) = K[N^{(p-k)}] \otimes_{\tau_0} C(F_0)$$

La suite spectrale associée à la filtration $F_p(A)$ de A est, à partir du terme E^2 , isomorphe à la suite spectrale de Serre (en homologie) du fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$. Son terme E^r de bidegré (p, q) est noté $E_{p,q}^r(X-M)$, sa différentielle d_{X-M}^r . On a :

$$E_{p,q}^0(X-M) = K_p(Y-U)^{\circ} \otimes C_q(F)$$

$$E_{p,q}^1(X-M) = K_p(Y-U)^{\circ} \otimes H_q(F)$$

$$E_{p,q}^2(X-M) \simeq H_p(Y-N ; H_q(F))$$

où l'homologie est prise à valeurs dans le système local formé par l'homologie de la fibre.

Considérons la suite spectrale associée à la filtration

$F_p = K[N^{(p)}] \otimes C(F_0)$ de $K(N) \otimes C(F_0)$. Elle est isomorphe, à partir du terme E^2 , à la suite spectrale de Serre (en homologie) du fibré $f|_M : M \rightarrow N$. On note $E_{p,q}^r(M)$ son terme E^r de bidegré (p,q) et d_M^r sa différentielle.

Il vient :

$$E_{p,q}^0(M) = K_p(N) \otimes C_q(F_0)$$

$$E_{p,q}^1(M) = K_p(N) \otimes H_q(F_0)$$

$$E_{p,q}^2(M) \approx H_p(N ; H_q(F_0))$$

Si $(k)E_{p,q}^r(B)$ désigne le terme E^r de bidegré (p,q) de la suite spectrale associée à la filtration $(k)F_p(B)$ de B , on a la relation :

$$(k)E_{p,q}^r(B) = E_{p-k, q+k-\mu}^r(M)$$

D'après le chapitre II,4-3, on déduit des filtrations de A et de B la filtration suivante de la somme tordue $A \otimes_{\Psi} B$:

$$(29,k) \quad (k)F_p^{\Psi}(A \otimes B) = F_p(A) \otimes (k)F_p(B)$$

Lemme 3.4. - Pour que la différentielle d_{Ψ} définie sur $A \otimes_{\Psi} B$ respecte la filtration (29,k) ci-dessus, il suffit que l'on ait $k \geq v-1$.

Démonstration. - Les différentielles de A et B respectent les filtrations définies sur ces MDG. D'autre part, d'après la proposition 3.3, pour tout entier $k \geq v-1$ on a :

$$\Psi[(k)F_p(B)] \subset F_{p-(k-v+1)}(A)$$

avec $v = \dim(Y-N) - \dim N$. On en déduit le lemme.

Corollaire 3.5.- La filtration $(29, k)$ de $A \underset{\Psi}{\otimes} B$ induit une filtration de $H_*(X)$ notée :

$$(30, k) \quad (k) \underset{p}{F} (H_*(X)) .$$

Démonstration.- D'après le lemme 3.4, la filtration $(29, k)$ de $A \underset{\Psi}{\otimes} B$ induit une filtration de $H_*(A \underset{\Psi}{\otimes} B)$. Ce dernier, étant isomorphe à $H_*(X)$, on a le résultat.

4 - La suite spectrale.

Lemme 4.1.- Pour que la suite spectrale déduite de la filtration $(k) \underset{p}{F} (A \underset{\Psi}{\otimes} B)$ du MDG $A \underset{\Psi}{\otimes} B$ converge, il suffit que l'on ait $k \geq \nu - 1$.

Démonstration.- La proposition 3.3. montre que Ψ satisfait à la relation (11) du chapitre II. La filtration de $A \underset{\Psi}{\otimes} B$ est donc régulière (lemme, 4.3 du chapitre II). On a entre autres :

$$\begin{aligned} (k) \underset{p}{F} [(A \underset{\Psi}{\otimes} B)_i] &= 0 \quad \text{pour } p \leq -1 \\ (k) \underset{p}{F} [(A \underset{\Psi}{\otimes} B)_i] &= (A \underset{\Psi}{\otimes} B)_i \quad \text{pour } p \geq i - \mu + k \end{aligned}$$

d'où le lemme.

Notons $(k) \underset{p, q}{E}^r$ le terme E^r de bidegré (p, q) de la suite spectrale déduite de la filtration $(k) \underset{p}{F} (A \underset{\Psi}{\otimes} B)$ de $A \underset{\Psi}{\otimes} B$. On peut appliquer la proposition 4.4 du chapitre II. Il vient :

Théorème 4.2.- Soient (X, M) un espace C^0 -stratifié à voisinage orienté, (Y, N) un espace C^0 -stratifié triangulable et $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C^0 -stratifiée de fibres (F, F_0) . Posons $\mu = \dim(X-M) - \dim M$ et $\nu = \dim(Y-N) - \dim N$. Pour tout entier $k \geq \nu-1$, il existe une suite spectrale convergeant vers le gradué associé à la filtration $(30, k)$ de $H_*(X)$. Pour tout $r \leq k - (\nu-1)$, son terme $(k)E_{p,q}^r$ entre dans la suite exacte courte (compatible avec les différentielles d^r) :

$$(31) \quad 0 \longrightarrow E_{p,q}^r(X-M) \longrightarrow (k)E_{p,q}^r \longrightarrow E_{p-k, q+k-\mu}^r(M) \longrightarrow 0$$

Remarques.- Pour $r < k - (\nu-1)$, l'extension (31) est triviale et le terme $(k)E_{p,q}^r$ est, en tant que MDG, somme directe des deux autres termes intervenant dans la suite exacte (31). (corollaire 1.6 du chapitre II).

Pour $r = k - (\nu-1) = \alpha$, l'extension (31) est non triviale. La différentielle d^α sur $(k)E^\alpha = E^\alpha(X-M) \oplus E^\alpha(M)$ est donnée par $d^\alpha(x, y) = (d^\alpha(x) + \psi^\alpha(y), d^\alpha(y))$ où ψ^α est induit par ψ . Le morphisme ψ^α est indépendant du relèvement ρ de p (proposition 1 de l'introduction) et, pour $\alpha \geq 2$, du voisinage tubulaire U de N dans Y et de la triangulation de Y .

La suite exacte longue d'homologie associée à l'extension non triviale :

$$0 \longrightarrow E^\alpha(X-M) \longrightarrow (k)E^\alpha \longrightarrow E^\alpha(M) \longrightarrow 0$$

s'écrit :

$$(32) \quad \dots \longrightarrow E_{p,q}^{\alpha+1}(X-M) \longrightarrow (k)E_{p,q}^{\alpha+1} \longrightarrow E_{p-k, q+k-\mu}^{\alpha+1}(M) \xrightarrow{\psi^{\alpha+1}} E_{p-\alpha, q+\alpha-1}^{\alpha+1}(X-M) \longrightarrow \dots$$

où $\psi^{\alpha+1}$ se déduit de ψ^α par passage à l'homologie des différentielles d_{X-M}^α et d_M^α .

Pour $k = \nu$, la suite exacte (32) s'écrit :

$$(33) \quad \dots \rightarrow H_p(Y-N ; H_q(F)) \rightarrow (\nu)E_{p,q}^2 \rightarrow H_{p-\nu}(N ; H_{q-(\mu-\nu)}(F_0)) \xrightarrow{\psi^2} H_{p-1}(Y-N ; H_q(F)) \rightarrow \dots$$

Pour $k \geq v+1$, le terme E^2 est égal à :

$$(34) \quad (k)E_{p,q}^2 = H_p(Y-N; H_q(F)) \oplus H_{p-k}(N; H_{q+k-\mu}(F_0))$$

C'est, en tant que MDG, une somme directe si $k > v+1$ et une somme tordue (par ψ^2) si $k = v+1$.

Remarque 4.3.- La suite spectrale obtenue est somme directe des suites spectrales de Serre des fibrés $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ et $f|_M : M \rightarrow N$ jusqu'à un certain rang α . Le choix de k détermine ce rang. Nous interpréterons au chapitre VI (paragraphe 1 et 5) le morphisme ψ^α perturbant la somme directe. Il est, brièvement parlant, induit par l'inverse d'un isomorphisme de Thom et un bord. Il est facile d'en faire le calcul dans les exemples du chapitre I et de voir qu'il exprime la manière dont sont "rattachés" les deux fibrés.

Remarque 4.4.- Nous avons construit la suite spectrale en supposant M et N connexes. Nous avons fait cette hypothèse dans un but de simplification des calculs, mais on peut généraliser le théorème 4.2 au cas où l'une des variétés M ou N (ou les deux) n'est pas connexe. Il est évident que, si N n'est pas connexe (ce qui implique M non connexe), on aura éventuellement à considérer des fibres singulières distinctes pour chacune des composantes connexes de N .

Remarque 4.5.- La filtration $(30, k)$ de $H_*(X)$ peut également s'obtenir en filtrant $C(X)$ de la manière suivante :

Le morphisme $\delta = \varepsilon \circ s : C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(X, X-M)$, défini en (22), induit un isomorphisme en homologie. On appelle δ' un morphisme de MDG réalisant avec δ une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes $h : \delta \circ \delta' \simeq 1$ (identité de $C(X, X-M)$).

D'après les corollaires 3.5 et 3.6 du chapitre II, le morphisme

$$\theta : C(X-M) \underset{\bar{\Psi}}{\oplus} C(X, X-M) \longrightarrow C(X-M) \underset{\Psi'}{\oplus} C^{(-\mu)}(M)$$

défini par :

$$\theta(x, y) = (x + \bar{\Psi} h(y), \delta'(y))$$

est un morphisme surjectif de MDG. Il induit en homologie l'isomorphisme inverse de celui induit par le morphisme θ' ((23) du chapitre IV).

Si $\bar{\phi}$ désigne toujours l'isomorphisme

$\bar{\phi} : C(X-M) \underset{\bar{\Psi}}{\oplus} C(X, X-M) \rightarrow C(X)$ défini au paragraphe 3 du chapitre IV et f_2 et β' les morphismes surjectifs définis dans les propositions 1.1 et 2.4 respectivement, on définit une filtration de $C(X)$ comme suit :

$$({}_k F_p [C(X)]) = \bar{\phi} \circ (\beta' \circ f_2 \circ \theta)^{-1} [({}_k F_p (A \underset{\Psi}{\oplus} B))] .$$

Cette filtration respecte la différentielle de $C(X)$ et induit par passage à l'homologie la filtration $(30, k)$ de $H_*(X)$.

5 - La suite spectrale en cohomologie.

On utilise ici les résultats du paragraphe 4-5 du chapitre II.

Les modules différentiels gradués $K(Y-U) \underset{\tau_1}{\oplus} C(F)$ et $[K(N) \underset{\tau_0}{\oplus} C(F_0)]^{(-\mu)}$

sont toujours notés respectivement A et B . Les filtrations définies sur

A et B au paragraphe précédent permettent de définir une filtration

$({}_k F^p (\text{Hom}(A \underset{\Psi}{\oplus} B ; \Lambda)))$ de $\text{Hom}(A \underset{\Psi}{\oplus} B ; \Lambda)$ (voir (15) du chapitre II).

La suite spectrale déduite de la filtration $F^p (\text{Hom}(A ; \Lambda))$

de $\text{Hom}(A ; \Lambda)$ est isomorphe, à partir du terme E_2 , à la suite spectrale de

Serre (en cohomologie) du fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$. On note $E_r^{p,q}(X-M)$ son terme E_r de bidegré (p, q) et d_r^{X-M} sa différentielle.

De même, la suite spectrale déduite de la filtration

$({}_k F^p (\text{Hom}(B ; \Lambda)))$ de $\text{Hom}(B ; \Lambda)$ est isomorphe, à partir du terme E_2 , à

la suite spectrale de Serre (en cohomologie) du fibré $f|_M : M \rightarrow N$. On

note $(k)E_r^{p,q}(B) = E_r^{p-k, q+k-\mu}(M)$ (voir page 58) son terme E_r de bidegré (p,q) et d_r^M sa différentielle.

La filtration $(k)F_p[C(X)]$ de $C(X)$ définit une filtration :

$$(k)F^p[C^*(X)] = \text{Hom}\left[C(X) / (k)F_p[C(X)] ; \Lambda\right]$$

de $C^*(X)$ compatible avec la différentielle, d'où une filtration

$$(k)F^p[H^*(X)] \text{ de } H^*(X).$$

Enfin, $\Psi^* : \text{Hom}(A ; \Lambda) \rightarrow \text{Hom}(B ; \Lambda)$ désigne le morphisme transposé de Ψ (paragraphe 4.5 du chapitre II). On a, d'après la proposition 3.3. :

$$\Psi^*[\text{F}^p(\text{Hom}(A ; \Lambda))] \subset (k)F^{p+k-(v-1)}(\text{Hom}(B ; \Lambda)).$$

On peut appliquer la proposition 4.6 du chapitre II. Il vient :

Théorème 5.1. - Soient (X,M) un espace C^0 -stratifié à voisinage orientable, (Y,N) un espace C^0 -stratifié triangulable et $f : (X,M) \rightarrow (Y,N)$ une application C^0 -stratifiée de fibres (F,F_0) . Posons $\mu = \dim(X-M) - \dim M$ et $v = \dim(Y-N) - \dim N$. Pour tout entier $k \geq v-1$, il existe une suite spectrale convergeant vers le gradué associé à la filtration $(k)F^p[H^*(X)]$ de $H^*(X)$. Ses termes et différentielles sont donnés par :

$$(k)E_r^{p,q} = E_r^{p,q}(X-M) \oplus E_r^{p-k, q+k-\mu}(M) \text{ pour } r \leq k-(v-1)$$

$$d_r = (d_r^{X-M}, d_r^M) \text{ pour } r < k-(v-1) = \alpha.$$

$$d_\alpha = (d_\alpha^{X-M}, \Psi_\alpha^* + d_\alpha^M)$$

où Ψ_α^* est induit par Ψ^* .

La suite exacte longue de cohomologie, associée à la somme tordue E_α , s'écrit :

$$\dots \rightarrow E_{\alpha+1}^{p-\alpha, q+\alpha-1}(X-M) \xrightarrow{\psi_{\alpha+1}^*} E_{\alpha+1}^{p-k, q+k-\mu}(M) \rightarrow (k)E_{\alpha+1}^{p, q} \rightarrow E_{\alpha+1}^{p, q}(X-M) \rightarrow \dots$$

où $\psi_{\alpha+1}^*$ est induit par ψ_{α}^* par passage à l'homologie des différentielles d_{α}^{X-M} et d_{α}^M .

Pour $k = \nu$, la suite exacte devient :

$$\dots \rightarrow H^{p-1}(Y-N ; H^q(F)) \xrightarrow{\psi_2^*} H^{p-\nu}(N ; H^{q-(\mu-\nu)}(F_0)) \rightarrow (v)E_2^{p, q} \rightarrow H^p(Y-N; H^q(F)) \rightarrow \dots$$

De façon analogue à ce qui se passe en homologie, pour $k \geq \nu+1$, le terme $(k)E_2^{p, q}$ est égal à :

$$(k)E_2^{p, q} = H^p(Y-N ; H^q(F)) \oplus H^{p-k}(N ; H^{q+k-\mu}(F_0))$$

En tant que MDG, la somme est directe si $k > \nu+1$ et tordue si $k = \nu+1$.

CHAPITRE VI

PROPRIETES ET APPLICATIONS

DE LA SUITE SPECTRALE DES APPLICATIONS C^0 -STRATIFIEES.

Ce chapitre comporte trois parties. Les deux premières rassemblent les principales propriétés et applications de la suite spectrale des applications C^0 -stratifiées. Dans une troisième partie, on donne quelques résultats concernant les actions (semi-libres) de groupes.

Dans tout le chapitre, (X,M) désignera un espace C^0 -stratifié à voisinage orientable, (Y,N) un espace C^0 -stratifié triangulable et $f : (X,M) \rightarrow (Y,N)$ une application C^0 -stratifiée de fibres (F,F_0) . Sauf indication du contraire, on suppose que les fibres F et F_0 sont connexes. On pose $\mu = \dim(X-M) - \dim M$ et $\nu = \dim(Y-N) - \dim N$.

I - PROPRIETES.

1 - Cas d'un fibré de Serre.

Proposition 1.1.- Soit $f : X \rightarrow Y$ un fibré de Serre, de fibre F , et N un sous-espace fermé de Y , notons $M = f^{-1}(N)$; si les données $(X,M), (Y,N)$ et f satisfont aux hypothèses énoncées ci-dessus, le terme E^2 de la suite spectrale (obtenue pour $k = \nu$) de l'application C^0 -stratifiée $f : (X,M) \rightarrow (Y,N)$ est isomorphe au terme E^2 de la suite spectrale de Serre du fibré $f : X \rightarrow Y$ [38].

Démonstration.- On donne deux démonstrations de cette proposition, elles utilisent toutes deux des résultats démontrés dans les paragraphes qui suivent :

Munissons Y de la triangulation cellulaire (D) définie au lemme 5.6. du chapitre VII : Si U désigne un voisinage tubulaire de N dans Y , $Y-\overset{\circ}{U}$ est un sous-complexe de (D) et il existe une triangulation (K_1) de N telle que, pour toute cellule σ^q de (D) rencontrant N , $\sigma^q \cap N$ soit un sous-complexe de dimension $q-v$ de (K_1) .

L'équivalence d'homotopie $C(X) \xrightarrow{\cong} K(Y) \underset{\tau}{\otimes} C(F)$ démontrée à la proposition 3.3. du chapitre III donne lieu à une équivalence d'homotopie

$$K(Y) \underset{\tau}{\otimes} C(F) \xrightarrow{\cong} \left[\overline{K(Y-\overset{\circ}{U})} \underset{\tau}{\otimes} C(F) \right] \underset{\psi}{\otimes} \left[\overline{K(N)} \underset{\tau}{\otimes} C(F) \right]^{(-v)}.$$

Le lemme 4.3. ci-dessous permet de montrer que cette équivalence d'homotopie respecte la filtration $F_p \left[\overline{K(Y)} \underset{\tau}{\otimes} C(F) \right] = K(Y^{(p)}) \underset{\tau}{\otimes} C(F)$ de $K(Y) \underset{\tau}{\otimes} C(F)$ et la filtration $(29, v)$ de la somme tordue. Un calcul facile, mais très long, montre que l'homotopie est d'ordre $r \leq 1$, d'où le résultat ([18], chap. XV, prop. 3.1.).

Donnons une deuxième démonstration de cette proposition, dans le cas où (Y, N) est un espace C^0 -stratifié à voisinage orientable :

La suite exacte longue (33) déduite de la suite spectrale s'écrit :

$$(35) \quad \dots \rightarrow H_p(Y-N; H_q(F)) \rightarrow E_{p,q}^2 \rightarrow H_{p-v}(N; H_q(F)) \xrightarrow{\psi^2_{p-1,q}} H_{p-1}(Y-N; H_q(F)) \rightarrow \dots$$

Elle rentre dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow H_p(Y-N; H_q(F)) & \longrightarrow & E_{p,q}^2 & \longrightarrow & H_{p-v}(N; H_q(F)) & \longrightarrow & H_{p-1}(Y-N; H_q(F)) \rightarrow \dots \\ & & \uparrow \text{id} & & \uparrow \alpha & & \uparrow \text{id} \\ \dots \rightarrow H_p(Y-N; H_q(F)) & \rightarrow & H_p(Y; H_q(F)) & \rightarrow & H_p(Y, Y-N; H_q(F)) & \rightarrow & H_{p-1}(Y-N; H_q(F)) \rightarrow \dots \\ & & & & \uparrow t & & \end{array}$$

dans lequel la seconde ligne est la suite exacte longue d'homologie de la paire $(Y, Y-N)$ à coefficients dans le système local $H_p(F)$ ([15], exposé 20), le

morphisme α est induit par l'équivalence d'homotopie $C(Y) \otimes_{\tau} C(F) \xrightarrow{\quad} C(X)$ et le morphisme t est un isomorphisme de Thom en homologie de Borel-Moore (Proposition 6 de l'Appendice 2). La commutativité du diagramme provient de la construction du morphisme ψ et de la proposition 5.3. ci-dessous. Il résulte du "lemme des cinq" que α est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Remarque 1.2.- La suite exacte longue (35) montre que, si $p < \nu-1$, on a $E_{p,q}^2 = H_p(Y-N; H_q(F))$. De plus, si N est un point, on a $E_{p,q}^2 = H_p(Y-N; H_q(F))$ pour p différent de ν et $\nu-1$.

Remarque 1.3.- Dans le cas où les restrictions du fibré au-dessus de N et $Y-N$ sont triviales, la différentielle $d_{p,q}^2$ de la suite spectrale se réduit à un morphisme d'un sous-groupe de $H_{p-\nu}(N; H_q(F))$ dans un quotient de $H_{p-2}(Y-N; H_{q+1}(F))$. Plus précisément, notons $\psi_{p-1,q}^2$: $H_{p-\nu}(N; H_q(F)) \rightarrow H_{p-1}(Y-N; H_q(F))$ le morphisme induit par ψ et intervenant dans la suite exacte longue (35), on a :

$$d_{p,q}^2 : \text{Ker } \psi_{p-1,q}^2 \longrightarrow H_{p-2}(Y-N; H_{q+1}(F)) / \text{Im } \psi_{p-2,q+1}^2 .$$

Remarque 1.4.- Même dans le cas où $f : X \rightarrow Y$ est un fibré trivial, ψ^2 n'est, en général, pas nul.

Un exemple simple illustre, d'ailleurs, le rôle du morphisme ψ dans le "rattachement" des fibrés au-dessus de N et de $Y-N$: On pourra, à titre d'exercice, écrire la suite exacte (35) dans le cas où N est un point de $Y = S^1$ et les fibrés au-dessus de N et $Y-N$ sont les fibrés triviaux de fibre $F = 2$ points. On a, bien entendu, deux rattachements possibles pour former ou bien le fibré trivial au-dessus de S^1 , ou bien le fibré de Hopf $f : S^1 \rightarrow S^1$.

2 - Suite spectrale du premier quadrant.

La suite spectrale d'une application C^0 -stratifiée $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ converge si $k \geq \dim(Y-N) - \dim(N) - 1$ (Lemme 4.1. du chapitre V). C'est une suite spectrale du premier quadrant si la graduation de $A \underset{\Psi}{\oplus} B$ est inférieure à la filtration. Autrement dit, si on a :

$${}^{(k)}F_p \left[(A \underset{\Psi}{\oplus} B)_i \right] = (A \underset{\Psi}{\oplus} B)_i \quad \text{pour } p \geq i.$$

Comme cette égalité est réalisée si et seulement si $p \geq i+k-\mu$, il vient :

Proposition 2.1.- Pour que la suite spectrale d'une application C^0 -stratifiée $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ de fibres (F, F_0) soit du premier quadrant, il faut et il suffit que l'on ait $\nu-1 \leq k \leq \mu$.

Remarquons que, pour pouvoir choisir k satisfaisant à cette condition, il faut que l'on ait $\mu \geq \nu - 1$. Ceci n'est pas sans rapport avec les dimensions des fibres. En effet, si F et F_0 sont des variétés topologiques, on a : $\dim F - \dim F_0 = \mu - \nu$ (corollaire 1.9. du chapitre I). On en déduit :

Corollaire 2.2.- Si F et F_0 sont des variétés, pour pouvoir choisir un entier k tel que la suite spectrale soit du premier quadrant, il faut que l'on ait :

$$\dim F - \dim F_0 \geq -1 .$$

Rappelons d'autre part que, si la suite spectrale est du premier quadrant, la filtration de $H_* (A \underset{\Psi}{\oplus} B)$, donc aussi celle de $H_* (\overset{\cdot}{X})$, est bornée : on a $F_p (H_p (X)) = H_p (X)$.

3 - Propriétés de la suite spectrale du premier quadrant.

Dans le cas où elle est du premier quadrant, la suite spectrale d'une

application C^0 -stratifiée hérite de plusieurs propriétés de la suite spectrale de Serre. Nous renvoyons à Serre [38] pour les démonstrations de ces propriétés :

1°) La "transgression".

Considérons l'une des suites spectrales obtenues pour $k = (v+1), \dots, \mu$. La transgression est par définition la différentielle $d^n : E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n$ ([38]). Elle applique, pour $n \geq 2$, un sous-groupe de $E_{n,0}^2 = H_n(Y-N)$ dans un quotient de $E_{0,n-1}^2 = H_{n-1}(F)$. On remarque qu'elle coïncide avec la transgression du fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$.

2°) La suite exacte des termes de bas degré.

Pour une suite spectrale du premier quadrant, la suite exacte des termes de bas degré s'écrit :

$$H_2(X) \rightarrow E_{2,0}^2 \xrightarrow{d^2} E_{0,1}^2 \rightarrow H_1(X) \rightarrow E_{1,0}^2 \rightarrow 0.$$

Les suites spectrales obtenues pour $k = (v+1), \dots, \mu$ donnent lieu, pour $\mu > 2$, à une suite exacte :

$$H_2(X) \rightarrow H_2(Y-N; H_0(F)) \xrightarrow{d^2} H_0(Y-N; H_1(F)) \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(Y-N; H_0(F)) \rightarrow 0$$

où la différentielle d^2 est celle de la suite spectrale de Serre du fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$.

Pour $\mu = 2$ ($v = 1$), la suite exacte s'écrit :

$$H_2(X) \rightarrow H_2(Y-N; H_0(F)) \oplus H_0(N; H_0(F_0)) \xrightarrow{d^2} H_0(Y-N; H_1(F)) \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(Y-N; H_0(F)) \rightarrow 0.$$

3°) Finitude des groupes d'homologie.

Proposition 3.1.- Si Λ est un anneau principal, si les systèmes locaux formés par $H_i(F; \Lambda)$ et $H_i(F_0; \Lambda)$ sur $Y-N$ et N respectivement sont triviaux pour tout i , et si les groupes d'homologie de F , F_0 , $Y-N$ et N sont des Λ -modules de type fini en toutes dimensions, il en est de même pour X .

En effet, ([38], Proposition 1 du chapitre III), chacun des termes $E_{p,q}^2$ des suites spectrales obtenues pour $k = (\nu+1), \dots, \mu$ est de type fini, de même les $E_{p,q}^r$ et les $E_{p,q}^\infty$ d'où $H_*(X)$.

4°) Cas où les homologies de $Y-N$, N , F et F_0 sont nulles en grande dimension.

Proposition 3.2. (Voir [38], proposition 3 du chapitre III).- Soit $f : (X,M) \rightarrow (Y,N)$ une application C^0 -stratifiée de fibres (F, F_0) , si Λ est un corps et si les systèmes locaux formés par $H_i(F; \Lambda)$ et $H_i(F_0; \Lambda)$ sur $Y-N$ et N respectivement sont triviaux pour tout $i \geq 0$, supposons que l'on ait :

$$\begin{aligned} H_p(Y-N) &= 0 \text{ pour } p > n & H_p(N) &= 0 \text{ pour } p > n-\nu-1 \\ H_p(F) &= 0 \text{ pour } p > m & H_p(F_0) &= 0 \text{ pour } p > m-(\mu-\nu) + 1 \end{aligned}$$

alors $H_p(X) = 0$ pour $p > m+n$ et $H_{m+n}(X)$ est isomorphe à :

$$H_{m+n}(X) \simeq [H_n(Y-N) \otimes H_m(F)] \otimes [H_{n-\nu-1}(N) \otimes H_{m-(\mu-\nu)+1}(F_0)].$$

On remarquera que les conditions portant sur les degrés ne sont pas naturelles puisque, si $Y-N$ est de dimension n , N est de dimension $n-\nu$ et si F est de dimension m , F_0 est de dimension $m-(\mu-\nu)$. D'autre part, le corollaire de [38], p. 467, n'est plus valable pour une application C^0 -stratifiée.

5°) Suite exacte de Serre.

Proposition 3.3.- Soit $f : (X,M) \rightarrow (Y,N)$ une application C^0 -stratifiée de fibres (F, F_0) , si Λ est un anneau principal, supposons que le système local formé par $H_i(F; \Lambda)$ sur $Y-N$ soit trivial pour tout $i \geq 0$ et qu'il existe un entier k , compris entre $\nu-1$ et μ , tel que

- (i) $H_i(Y-N; \Lambda) = 0$ pour $0 < i < p \leq k$
- (ii) $H_i(F; \Lambda) = 0$ pour $0 < i < q \leq \mu - k$.

On a alors la suite exacte :

$$H_{p+q-1}(F; \Lambda) \rightarrow H_{p+q-1}(X; \Lambda) \rightarrow H_{p+q-1}(Y-N; \Lambda) \rightarrow H_{p+q-2}(F; \Lambda) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow H_2(Y-N; \Lambda) \rightarrow H_1(F; \Lambda) \rightarrow H_1(X; \Lambda) \rightarrow H_1(Y-N; \Lambda) \rightarrow 0.$$

Ce résultat est une généralisation de la suite exacte de Serre ([38], Proposition 5 du chapitre III). L'homomorphisme $d^n : H_n(Y-N; \Lambda) \rightarrow H_{n-1}(F; \Lambda)$, $0 \leq n \leq p+q-1$ est la transgression d^n . En posant $q = 1$, on a :

Corollaire 3.4. - Soit $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C^0 -stratifiée de fibres (F, F_0) , si Λ est un anneau principal et si le système local formé par $H_i(F; \Lambda)$ sur $Y-N$ est trivial pour tout $i \geq 0$, supposons que $H_i(X; \Lambda) = 0$ pour tout $i > 0$ et que $H_i(Y-N; \Lambda) = 0$ pour $0 < i < p \leq \mu - 1$, alors on a $H_i(F; \Lambda) = 0$ pour $0 < i < p - 1$.

6°) Morphisme de suites spectrales.

On note toujours $A = K(Y-U) \overset{0}{\oplus} C(F)$ en tant que MDG (paragraphe 3 du chapitre V). L'injection $X-M \rightarrow X$ induit l'injection naturelle $i : A \rightarrow A \overset{\psi}{\oplus} B$. Celle-ci, définie par $i(a) = (a, 0)$, est un morphisme de MDG compatible avec les filtrations $F_p(A)$ et $(k)_p^F(A \overset{\psi}{\oplus} B)$ (formule (29,k)). On en déduit des homomorphismes :

$$i_*^r : E^r(A) \rightarrow (k)E^r$$

$$i_* : E^\infty(A) \rightarrow (k)E^\infty$$

$$i_* : H_*^r(X-M) \rightarrow H_*^r(X)$$

tels que $d^r i_*^r = i_*^r d_A^r$ et où la suite spectrale $(E^r(A), d_A^r)$ est la suite spectrale de Serre du fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$.

4 - Filtration de $H_*(X)$ (pour $k = v$).

Proposition 4.1.- Dans le cas de la suite spectrale obtenue pour $k = v$, on peut construire une triangulation cellulaire (D) de Y telle que la filtration (30,v) de $H_*(X)$ soit donnée par $F_p(H_*(X)) = H_*(f^{-1}(D^{(p)}))$ où $D^{(p)}$ désigne le p-squelette de (D).

Cette proposition résulte des deux lemmes suivants :

Lemme 4.2.- Soit (Y,N) un espace C^0 -stratifié triangulable, on note U un voisinage tubulaire de N dans Y, ∂U son bord et $\omega : \partial U \rightarrow N$ la restriction à ∂U de la projection du fibré $\omega : U \rightarrow N$. Il est possible de construire une triangulation cellulaire (D) de Y satisfaisant aux conditions suivantes :

- (i) (D) est compatible avec une triangulation (K_2) de ∂U .
- (ii) toute cellule de (D) est transverse à N (autrement dit, il existe une triangulation (K_1) de N telle que, pour toute q-cellule σ de (D), $\sigma^q \cap N$ soit un sous-complexe de dimension $q-v$ de (K_1) .
- (iii) pour tout q-simplexe s de (K_1) , $\omega^{-1}(s^q)$ est un sous-complexe de dimension $q+v-1$ de (K_2) .
- (iv) toute cellule de (D) est contractile.

Démonstration.- Lemme 5.6. du chapitre VII.

Lemme 4.3.- La triangulation définie sur Y étant celle du lemme 4.2., l'équivalence d'homotopie entre $C(X)$ et

$$A \underset{\Psi}{\otimes} B = \left[\underset{\tau_1}{K(Y-U)} \underset{\tau_1}{\otimes} C(F) \right] \underset{\Psi}{\otimes} \left[\underset{\tau_0}{K(N)} \underset{\tau_0}{\otimes} C(F_0) \right]^{(\tau_1)}$$

décrite au corollaire 2.5. du chapitre V respecte les filtrations suivantes :

$$F_p[C(X)] = C(X^p) = C(f^{-1}(D^{(p)}))$$

et
$$F_p [A \underset{\Psi}{\oplus} B] = [K((Y-U)^{\circ}(P)) \otimes C(F)] \underset{\Psi}{\oplus} [K(N^{(P-\nu)}) \otimes C(F_0)]^{(-\mu)} .$$

Démonstration. - La triangulation (K_1) de N n'est pas compatible avec (D) , cependant si $N^{(P)}$ désigne le p -squelette de (K_1) et $M^P = f^{-1}(N^{(P)})$ la restriction de M à $N^{(P)}$, on vérifie que l'on a :

$$(36) \quad M^P = X^{P+\nu} \cap f^{-1}(N) .$$

L'équivalence d'homotopie entre $C(X)$ et $A \underset{\Psi}{\oplus} B$ est composée de trois équivalences d'homotopie que nous étudions successivement :

1) Soit ρ un relèvement de la projection $C(X) \rightarrow C(X, X-M)$, on a défini un isomorphisme $\bar{\phi} : C(X-M) \underset{\Psi}{\oplus} C(X, X-M) \rightarrow C(X)$ par $\bar{\phi}(a, b) = i(a) + \rho(b)$ (Paragraphe 3 du chapitre IV).

Définissons une filtration sur la somme tordue $C(X-M) \underset{\Psi}{\oplus} C(X, X-M)$ par :

$$F_p [C(X-M)] = C((X-M)^P) = C(X-M) \cap C(X^P)$$

$$F_p [C(X, X-M)] = C(X^P) / C((X-M)^P)$$

et (12) du chapitre II. On vérifie que l'on a bien une filtration, en particulier, on a :

$$F_p [C(X, X-M)] \subset F_{p+1} [C(X, X-M)] \quad \text{puisque} \quad C((X-M)^P) = C((X-M)^{P+1}) \cap C(X^P) .$$

A condition de construire le relèvement ρ de manière compatible avec des relèvements des projections $C(X^P) \rightarrow F_p [C(X, X-M)]$, (ce qui est toujours possible), l'isomorphisme $\bar{\phi}$ et son inverse respectent les filtrations définies sur $C(X)$ et sur $C(X-M) \underset{\Psi}{\oplus} C(X, X-M)$.

2) L'application $\theta' : C(X-M) \underset{\Psi'}{\oplus} C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(X-M) \underset{\Psi}{\oplus} C(X, X-M)$ définie par $\theta'(x, y) = (x, \delta(y))$ (formule (23) du chapitre IV) est une équivalence d'homotopie.

Soit sur $C^{(-\mu)}(M)$ la filtration :

$$F_p [C^{(-\mu)}(M)] = C(M^{p-\nu})$$

on en déduit, à l'aide de la filtration précédente de $C(X-M)$ et de la formule (12) du chapitre II, une filtration de la somme tordue $C(X-M) \underset{\Psi'}{\oplus} C^{(-\mu)}(M)$. Le morphisme δ et les morphismes réalisant avec δ une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes respectent les filtrations définies sur $C(X, X-M)$ et $C^{(-\mu)}(M)$ (lemmes 2.1. et 3.2. du chapitre VII, lemme 4.2. et formule (36) ci-dessus). On en déduit que θ' et le morphisme θ réalisant avec θ' une équivalence d'homotopie (corollaire 3.6. du chapitre II) respectent les filtrations définies sur les sommes tordues $C(X-M) \underset{\Psi'}{\oplus} C^{(-\mu)}(M)$ et $C(X-M) \underset{\Psi}{\oplus} C(X, X-M)$.

3) Soient \tilde{v}_2 et \tilde{f}_2 les morphismes réalisant l'équivalence d'homotopie de complexes de chaînes :

$$C(X-M) \underset{\Psi'}{\oplus} C^{(-\mu)}(M) \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{f}_2} \\ \xleftarrow{\tilde{v}_2} \end{array} [K(Y-\tilde{U}) \underset{\tau_1}{\oplus} C(F)] \underset{\Psi}{\oplus} [K(N) \underset{\tau_0}{\oplus} C(F_0)]^{(-\mu)}$$

(Proposition 1.1. et 2.4. du chapitre V). Ces morphismes sont définis à l'aide des morphismes $\tilde{v}_0^\tau, \tilde{v}_1^\tau, \tilde{f}_0^\tau$ et \tilde{f}_1^τ de la proposition 3.3. du chapitre III de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{v}_2(\alpha, \beta) &= (\tilde{v}_1^\tau(\alpha) + \tilde{f}_1^\tau \Psi \tilde{v}_0^\tau(\beta), \tilde{v}_0^\tau(\beta)) \\ \tilde{f}_2(x, y) &= (\tilde{f}_1^\tau(x) + \tilde{f}_1^\tau \Psi \tilde{f}_0^\tau(y), \tilde{f}_0^\tau(y)). \end{aligned}$$

Le respect des filtrations définies sur chacune des sommes tordues résulte de la proposition 3.3. du chapitre III.

5 - Comparaison avec la suite spectrale de I. Fáry.

La suite spectrale obtenue pour $k = \nu+1$ est, sous certaines hypothèses,

duale de la suite spectrale de I. Fáry [24]. Nous indiquerons ici simplement comment montrer ce résultat.

On se place dans les hypothèses suivantes :

- (a) F et F_0 sont des variétés topologiques.
- (b) Le couple (Y, N) est un espace C^0 -stratifié à voisinage orientable.
- (c) X et Y sont localement compacts.
- (d) Y est une variété topologique, N et $Y-N$ sont des variétés

topologiques orientées.

Soit F le faisceau de Leray de l'application $f : X \rightarrow Y$, c'est le faisceau engendré par le préfaisceau $\Omega \rightarrow H_c^*(f^{-1}\Omega; \Lambda)$ (Ω ouvert de Y).

(L'indice c signifie que l'on considère la cohomologie à supports compacts).

On note F_0 et F_1 les faisceaux induits par F sur N et $Y-N$ respectivement.

Théorème 5.1. (I. Fáry [24]).- Soit $f : X \rightarrow Y$ application continue de X dans Y , espaces localement compacts et N un fermé de Y tel que les restrictions de f au-dessus de N et $Y-N$ soient des projections de fibrés, il existe une suite spectrale convergeant vers le gradué associé à $H_c^*(X)$ convenablement filtré. Ses termes $E_2^{p,q}$ sont égaux à :

$$E_2^{p,q} = H_c^p(Y-N; F_1^q) \oplus H_c^{p+1}(N; F_0^{q-1})$$

et sa différentielle d_2 est donnée par :

$$d_2(x, y) = (d'(x) + d''(y), d'(y))$$

où les différentielles d' sont celles des suites spectrales de Leray des applications $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ et $f|_M : M \rightarrow N$ respectivement et où d'' est l'homomorphisme cobord de la suite exacte de cohomologie de Y à valeurs dans la suite exacte courte de faisceaux :

$$0 \rightarrow F_{Y-N}^{q-1} \rightarrow F^{q-1} \rightarrow F_N^{q-1} \rightarrow 0$$

(on a noté, pour tout sous-espace Z de Y , F_Z l'unique faisceau induisant $F|_Z$ sur Z et 0 sur $Y-Z$, naturellement défini par $F|_Z \cup (Y \times \{0\})$).

Proposition 5.2. - Posons $n = \dim(Y-N)$ et $a = \dim F$. Dans les hypothèses (a) à (d), le terme $E_{p,q}^2$ de la suite spectrale obtenue pour $k = v + 1$ est isomorphe, en tant que MDG, au terme $E_2^{n-p, a-q}$ de la suite spectrale de I. Fáry.

Avant d'établir la proposition 5.2., on démontre quelques isomorphismes. On notera a et $a_0 = a - (\mu - \nu)$ les dimensions respectives de F et F_0 .

Dans l'hypothèse (c), les faisceaux F_0 et F_1 sont localement constants, de fibres respectives $H_c^*(F_0)$ et $H_c^*(F)$. Par dualité de Poincaré, on a, pour tout entier q , des isomorphismes :

$$H_q(F_0) \simeq H_c^{a_0 - q}(F_0) \quad H_q(F) \simeq H_c^{a - q}(F)$$

Considérons le module d'homologie singulière de N à coefficients dans F_0 ([15], exposé 20 ou [10], V. 11-16), il en résulte, pour tous entiers p et q , des isomorphismes :

$$H_p(N; F_0^{a_0 - q}) \simeq H_p(N; H_c^{a_0 - q}(F_0)) \simeq H_p(N; H_q(F_0))$$

de même, on a :

$$H_p(Y-N; F_1^{a - q}) \simeq H_p(Y-N; H_c^{a - q}(F)) \simeq H_p(Y-N; H_q(F)),$$

Par la même méthode qu'en cohomologie à coefficients dans un faisceau, on peut définir un isomorphisme de Thom en homologie de Borel-Moore (Proposition 6 de l'Appendice 2), d'où un isomorphisme :

$$H_p(N; F_0) \rightarrow H_{p+\nu}((Y, Y-N); F).$$

Le morphisme $\psi^2 : H_{p-(\nu+1)}(N; H_{q+(\nu+1)-\mu}(F_0)) \rightarrow H_{p-2}(Y-N; H_{q+1}(F))$ entrant dans la différentielle $d^2 : E_{p,q}^2 \rightarrow E_{p-2,q+1}^2$ de la suite spectrale devient donc un morphisme, encore noté ψ^2 :

$$\psi^2 : H_{p-1}(Y, Y-N; F^{a-q-1}) \rightarrow H_{p-2}(Y-N; F_1^{a-q-1}) ;$$

Proposition 5.3. (admis). - Dans les hypothèses (a), (b) et (c), ψ^2 est l'homomorphisme bord dans la suite exacte d'homologie de la paire $(Y, Y-N)$ à valeurs dans le faisceau F (suite exacte de [15], exposé 20)

$$\dots \rightarrow H_{p-1}(Y; F^{a-q-1}) \rightarrow H_{p-1}(Y, Y-N; F^{a-q-1}) \xrightarrow{\psi^2} H_{p-2}(Y-N; F_1^{a-q-1}) \rightarrow \dots$$

Démonstration de la proposition 5.2. - Tout d'abord, par dualité des variétés ([15], exposé 20), il vient :

$$H_p(Y-N; H_q(F)) \simeq H_p(Y-N; F_1^{a-q}) \simeq H_c^{n-p}(Y-N; F_1^{a-q})$$

et :

$$H_{p-(\nu+1)}(N; H_{q+(\nu+1)-\mu}(F_0)) \simeq H_{p-1}(Y, Y-N; F^{a-q-1}) \simeq H_c^{n-p+1}(N; F_0^{a-q-1}) ,$$

d'où l'isomorphisme $E_{p,q}^2 \simeq E_2^{n-p, a-q}$ en tant que modules gradués.

La différentielle $d_{p,q}^2$ de la suite spectrale de Serre en homologie du fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ se transforme, par dualité, en la différentielle $d_2^{n-p, a-q}$ de la suite spectrale de Serre (en cohomologie à supports compacts) du même fibré, celle-ci coïncide avec la différentielle d' de la suite spectrale de Leray de l'application $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$. On a le même résultat pour le fibré $f|_M : M \rightarrow N$.

Enfin, l'homomorphisme ψ^2 se transforme, par dualité des variétés en d'' . En effet, d'après ([15], p. 20-04), la suite exacte d'homologie de la paire $(Y, Y-N)$ à coefficients dans le faisceau F se transforme, par dualité des variétés, en la suite exacte de cohomologie de Y à coefficients dans la suite exacte courte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow F_{Y-N}^{a-q-1} \longrightarrow F^{a-q-1} \longrightarrow F_N^{a-q-1} \longrightarrow 0 .$$

Autrement dit, on a un isomorphisme de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow H_{p-1}(Y; F^{a-q-1}) & \rightarrow & H_{p-1}(Y, Y-N; F^{a-q-1}) & \xrightarrow{\psi^2} & H_{p-2}(Y-N; F_1^{a-q-1}) & \rightarrow & \dots \\ & & \uparrow \approx & & \uparrow \approx & & \\ & & H_c^{n-p+1}(Y; F^{a-q-1}) & \rightarrow & H_c^{n-p+1}(N; F_0^{a-q-1}) & \xrightarrow{d''} & H_c^{n-p+2}(Y-N; F_1^{a-q-1}) \rightarrow \dots \end{array}$$

6 - Cas de plusieurs strates.

Nous ne donnerons pas d'application du cas de plusieurs strates, aussi nous nous contenterons de donner l'équivalent du théorème obtenu pour $k = \nu+1$. Dans le cas général, les notations deviennent très compliquées.

Définition 6.1.- Soit $X = X_0$ un espace topologique, on dit que le h -uple (X_0, X_1, \dots, X_h) est un espace C^0 -stratifié si on a $\emptyset = X_{h+1} \subset X_h \subset \dots \subset X_0$ et si plus, pour tout $i = 0, \dots, h$, on a :

- (i) X_{i+1} est fermé dans X_i .
- (ii) $X_i - X_{i+1}$ est une variété topologique.
- (iii) X_{i+1} admet dans X_i un voisinage tubulaire.

Définition 6.2.- Soient (X_0, X_1, \dots, X_h) et (Y_0, Y_1, \dots, Y_h) deux espaces C^0 -stratifiés, une application C^0 -stratifiée

$f : (X_0, X_1, \dots, X_h) \rightarrow (Y_0, Y_1, \dots, Y_h)$ de fibres (F_0, F_1, \dots, F_h) est une application continue et surjective de $X = X_0$ sur $Y = Y_0$ telle que pour tout $i = 0, \dots, h$ on ait :

(i) $X_i = f^{-1}(Y_i)$;

(ii) la restriction $f|_{X_i - X_{i+1}} : X_i - X_{i+1} \rightarrow Y_i - Y_{i+1}$ est une projection de fibré topologique (de Serre) de fibre F_i ;

(iii) Y_{i+1} admet dans Y_i un voisinage tubulaire U_i dont l'image réciproque par f est un voisinage tubulaire de X_{i+1} dans X_i .

Proposition 6.3. - Soit $f : (X_0, X_1, \dots, X_h) \rightarrow (Y_0, Y_1, \dots, Y_h)$ une application C^0 -stratifiée de fibres (F_0, F_1, \dots, F_h) , on suppose que chaque couple (X_i, X_{i+1}) est un espace C^0 -stratifié à voisinage orientable et que chaque couple (Y_i, Y_{i+1}) est un espace C^0 -stratifié triangulable. Il existe une suite spectrale convergeant vers le gradué associé à $H_*(X)$ convenablement filtré, ses termes E^2 sont donnés par :

$$E_{p,q}^2 = \bigoplus_{i=0}^h H_{p-\alpha(i)}(Y_i - Y_{i+1}; H_{q-\beta(i)}(F_i))$$

avec :

$$\alpha(0) = 0 \qquad \alpha(i) = \sum_{j=1}^i (\nu_j + 1) \text{ pour } i > 0$$

$$\beta(0) = 0 \qquad \beta(i) = \sum_{j=1}^i (\mu_j - \nu_j - 1) \text{ pour } i > 0$$

$$\nu_j = \dim(Y_{j-1} - Y_j) - \dim(Y_j - Y_{j+1})$$

$$\mu_j = \dim(X_{j-1} - X_j) - \dim(X_j - X_{j+1})$$

La différentielle d^2 est définie comme suit :

Soit $x_i \in H(Y_i - Y_{i+1}; H(F_i))$, alors :

$$d^2(x_i) = d'(x_i) + \sum_{j=0}^i \psi_{j,i}(x_i)$$

où d' est la différentielle d^2 de la suite spectrale de Serre du fibré

$$f|_{X_i - X_{i+1}} : X_i - X_{i+1} \rightarrow Y_i - Y_{i+1} \quad \text{et où} \quad \psi_{j,i} : H(Y_i - Y_{i+1}; H(F_i)) \rightarrow H(Y_j - Y_{j+1}; H(F_j))$$

est induit par le cycle $\psi'_i : C^{(-\mu_i)}(X_i) \rightarrow C(X_{i-1} - X_i)$ (ce dernier étant construit de la même manière que ψ' (Proposition 1 de l'introduction)).

Démonstration. - Elle consiste à écrire les équivalences d'homotopie de complexes de chaînes :

$$C(X_0) \simeq C(X_0 - X_1) \underset{\psi'_0}{\oplus} C^{(-\mu_1)}(X_1) \simeq C(X_0 - X_1) \underset{\psi'_0}{\oplus} [C^{(-\mu_1)}(X_1 - X_2) \underset{\psi'_1}{\oplus} C^{(-\mu_1 - \mu_2)}(X_2)] \quad \text{etc...}$$

puis à suivre la démonstration du théorème 4.2. du chapitre V dans le cas où $k = v+1$.

II - APPLICATIONS.

La plupart des résultats qui suivent sont exprimés en homologie. Il est facile d'en écrire l'équivalent en cohomologie (Théorème 5.1. du chapitre V).

Dans tout le paragraphe II, et sauf indication du contraire, on suppose que N et $Y-N$ sont connexes par arcs et que les systèmes locaux formés par $H_i(F_0)$ et $H_i(F)$ sur N et $Y-N$ respectivement sont triviaux pour tout i . S'il n'est pas mentionné explicitement, l'anneau des coefficients est Λ .

7 - Cas où $\tilde{H}_*(N) = \tilde{H}_*(Y-N) = 0$ (Suite de Wang généralisée).-

Proposition 7.1.- Si Λ est un anneau principal, supposons $\tilde{H}_*(N) = 0$ et $\tilde{H}_*(Y-N) = 0$, on a la suite exacte :

$$(37) \quad \dots \rightarrow H_q(F) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_{q-\mu}(F_0) \xrightarrow{d^{\nu+1}} H_{q-1}(F) \rightarrow \dots$$

Démonstration.- Si Λ est un anneau principal, le terme $E_{p,q}^2$ de la suite spectrale obtenue pour $k = \nu+1$ est égal à :

$$[H_p(Y-N) \otimes H_q(F)] \oplus [H_{p-(\nu+1)}(N) \otimes H_{q+\nu+1-\mu}(F_0)]$$

(formule (34) et Proposition 8 du chapitre II de [38]).

E^2 ne contient, pour q fixé, que deux termes éventuellement non nuls :

$$E_{0,q}^2 = H_q(F)$$

$$E_{\nu+1,q}^2 = H_{q-(\mu-\nu)+1}(F_0).$$

La suite exacte (37) résulte du "lemme des deux colonnes" ([18], XV, Théorème 5.10.).

Remarque 7.2.- Dans les hypothèses de la proposition 7.1., on a $H_q(F) \approx H_q(X)$ pour tout $q \leq \mu-2$. Si, de plus, F_0 est contractile, il vient $H_q(F) \approx H_q(X)$ pour q différent de μ et $\mu-1$.

On notera $F_0 = \{\text{pts}\}$ si F_0 est un ensemble fini de points, un espace réduit à un point sera noté 0 .

Au vu de la remarque 4.4. du chapitre V, on a :

Proposition 7.3.- Soit Y une ν -sphère homologique et $f : (X^\mu, M) \rightarrow (Y^\nu, 0)$ une application C^0 -stratifiée de fibres $(F, \{\text{pts}\})$, alors $H_q(X; Z) = H_q(F; Z)$ pour $q \neq \mu, \mu-1$.

Remarquons que si N est vide, X est un fibré de base contractile et on sait qu'on a alors $H_q(X; Z) = H_q(F; Z)$ pour tout q .

Corollaire 7.4.- Si X est une μ -sphère homologique et Y une ν -sphère homologique, il est impossible de trouver une application C^0 -stratifiée $f : (X, M) \rightarrow (Y, 0)$ de fibres F , une sphère homologique de dimension strictement inférieure à $\mu-1$, et $F_0 = \{\text{pts}\}$.

Remarquons qu'il existe des applications C^0 -stratifiées $f : (S^\mu, M) \rightarrow (S^\nu, 0)$ de fibres $(S^{\mu-1}, \{\text{pts}\})$: par exemple, soit $\tilde{f} : X \rightarrow \tilde{Y}$ l'application $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \tilde{Y}$ de la sphère unité de \mathbb{R}^3 sur $[-1, +1]$ définie par $\tilde{f}(x_0, x_1, x_2) = x_0$. L'application f considérée est l'application $f : X \rightarrow S^1$ obtenue à partir de \tilde{f} en identifiant les points -1 et $+1$ dans \tilde{Y} (mais sans identifier les pôles $(-1, 0, 0)$ et $(1, 0, 0)$ dans S^2).

On déduit directement de (37) les résultats suivants :

Corollaire 7.5.- Soit $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (S^\nu, 0)$ une application C^0 -stratifiée de fibres $(F, 0)$, alors $H_*(F; Z) = H_*(S^{n-1}, Z)$.

Corollaire 7.6.- Soit $f : (P^n(\mathbb{R}), 0) \rightarrow (S^v, 0)$ une application C^0 -stratifiée de fibres $(F, 0)$, alors :

$$\text{si } n \text{ est impair, } H_q(F; \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & q = n \\ H_q(P^n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) & q \neq n \end{cases}$$

$$\text{si } n \text{ est pair, } H_q(F; \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & q = n \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & q = n-1 \\ H_q(P^n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) & q \neq n, n-1 \end{cases}$$

Corollaire 7.7.- Soit $f : (P^n(\mathbb{C}), 0) \rightarrow (S^v, 0)$ une application C^0 -stratifiée de fibres $(F, 0)$, alors $H_{2n}(F; \mathbb{Z})$ est un sous-module de \mathbb{Z} , $H_{2n-1}(F; \mathbb{Z})$ en est un quotient et $H_q(F; \mathbb{Z}) = H_q(P^n(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ pour $q \neq 2n-1, 2n$.

On voit facilement qu'on peut remplacer, dans les énoncés de ces trois derniers corollaires \mathbb{R}^n, S^v, \dots par des espaces de même type d'homologie entière.

8 - Cas où F_0 a le type d'homologie d'un point et F celui d'une sphère.

Proposition 8.1.- Si $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ est une application C^0 -stratifiée de fibres (F, F_0) telle que F_0 ait le type d'homologie d'un point et F celui d'une sphère (de dimension $\mu - \nu$), supposons que $H_p(Y-N) = 0$ pour $p \geq \alpha$, alors $H_{p+\mu}(X) \cong H_p(M)$ pour $p \geq \alpha - \nu + 1$.

Démonstration.- Le terme $E_{p,q}^1$ de la suite spectrale obtenue pour $k = \nu$ est égal à :

$$E_{p,q}^1 = K_p(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes H_q(F) \quad \text{pour } q \neq \mu - \nu$$

$$E_{p, \mu - \nu}^1 = [K_p(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes H_{\mu - \nu}(F)] \otimes K_{p - \nu}(N).$$

La suite exacte d'homologie (33) obtenue à partir de l'extension :

$$0 \rightarrow K_p(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes H_q(F) \rightarrow E_{p,q}^1 \rightarrow K_{p-\nu}(N) \otimes H_{q-(\mu-\nu)}(F_0) \rightarrow 0$$

s'écrit :

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow H_p(Y-N; H_q(F)) \rightarrow E_{p,q}^2 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

si $q \neq \mu - \nu$ et :

$$(38) \quad \dots \rightarrow H_p(Y-N; H_{\mu-\nu}(F)) \rightarrow E_{p,\mu-\nu}^2 \rightarrow H_{p-\nu}(N) \rightarrow \dots$$

si $q = \mu - \nu$. Pour p fixé, le terme $E_{p,q}^2$ de la suite spectrale est donc nul sauf éventuellement $E_{p,0}^2 = H_p(Y-N)$ et $E_{p,\mu-\nu}^2$.

D'après le "lemme des deux lignes" ([18], XV, théorème 5.11.), on a la suite exacte :

$$(39) \quad \dots \rightarrow E_{p,\mu-\nu}^2 \rightarrow H_{p+\mu-\nu}(X) \rightarrow H_{p+\mu-\nu}(Y-N) \rightarrow E_{p-1,\mu-\nu}^2 \rightarrow \dots$$

On déduit la proposition des suites exactes (38) et (39).

On notera que le résultat de cette proposition est comparable à celui du corollaire 9.2. ci-après.

On a immédiatement :

Corollaire 8.2. - Dans l'hypothèse de la proposition 8.1., supposons que $Y-N$ soit contractile, alors $H_{p+\mu}(X) \approx H_p(M)$ pour $p \geq 2-\nu$.

Corollaire 8.3. - Dans l'hypothèse de la proposition 8.1., supposons que $H_p(Y-N) = 0$ pour tout $p \geq \nu-1$, alors l'homologie de M est entièrement déterminée par celle de X .

Théorèmes de non existence :

Théorème 8.4. - Il est impossible de trouver une application C^1 -stratifiée $f : (S^n, M) \rightarrow (Y, N)$ de fibres $(S^{\mu-\nu}, 0)$ et telle que $H_p(Y-N) = 0$ pour tout $p \geq \nu-1$.

En effet, s'il existe une telle application, M et N sont composés d'un seul point, ce qui est en contradiction avec le théorème 1 de [37].

Remarquons que l'exemple 2.1. (c) du chapitre I est un exemple d'application C^1 -stratifiée $f : (S^n, M) \rightarrow (Y, N)$ de fibres $(S^{\mu-\nu}, 0)$ telle que $H_p(Y-N) = 0$ pour tout $p > \nu-1$.

Théorème 8.5.- Il est impossible de trouver une application C^0 -stratifiée $f : (X^n, M) \rightarrow (Y, N)$ de fibres $(S^{\mu-\nu}, 0)$ telle que $H_n(X) = 0$ et $H_p(Y-N) = 0$ pour tout $p \geq \nu-1$.

Cette proposition s'applique naturellement à $X = \mathbb{R}^n$ et à $X = P^n(\mathbb{R})$, pour n pair.

Deux inégalités.

Dans le cas où Λ est un corps, notons :

$$a_p = \dim H_p(Y-N) ; b_p = \dim H_p(N) ; \alpha_p = \dim H_p(X).$$

Des suites exactes (38) et (39), on déduit pour tout entier p :

$$(40) \quad \alpha_{p+\mu-\nu} \leq a_p + b_{p-\nu} + a_{p+\mu-\nu}$$

$$(41) \quad a_{p+\mu-\nu} \leq \alpha_{p+\mu-\nu} + b_{p-\nu+1}$$

On a donc :

Corollaire 8.6.- Dans l'hypothèse de la proposition 8.1., et si Λ est un corps, il vient :

$$\dim H_p(Y-N) - \dim H_{p-(\mu-\nu)-1}(Y-N) - \dim H_{p-\mu-1}(N) \leq \dim H_p(X)$$

et
$$\dim H_p(X) \leq \dim H_{p-(\mu-\nu)}(Y-N) + \dim H_p(Y-N) + \dim H_{p-\mu}(N).$$

9 - Suite exacte de Smith-Gysin.

Proposition 9.1.- Soit $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C^0 -stratifiée de fibres (F, F_0) telle que F_0 ait le type d'homologie d'un point et F celui d'une sphère (de dimension $\mu - \nu > 0$), on a la suite exacte de Smith-Gysin :

$$(42) \quad \dots \rightarrow H_p(Y-N) \rightarrow H_{p+\mu-\nu}(X) \rightarrow H_{p+\mu-\nu}(Y-N) \oplus H_{p-\nu}(N) \xrightarrow{d^{\mu-\nu+1}} H_{p-1}(Y-N) \rightarrow \dots$$

Démonstration.- Le terme $E_{p,q}^2$ de la suite spectrale obtenue pour $k = \mu$ est égal à :

$$E_{p,q}^2 = H_p(Y-N; H_q(F)) \oplus H_{p-\mu}(N; H_q(F_0)) .$$

Pour tout entier p fixé, il est nul sauf éventuellement :

$$E_{p,0}^2 = H_p(Y-N) \oplus H_{p-\mu}(N)$$

$$\text{et } E_{p,\mu-\nu}^2 = H_p(Y-N) .$$

En appliquant le lemme classique de deux lignes ([18], XV, Théorème 5.11.), on obtient la suite exacte (42).

Cette proposition, ainsi que les corollaires 9.2. et 9.6. ont été obtenus par Bredon dans les cadres suivants : en cohomologie à supports compacts, à l'aide de la suite spectrale de Fáy ([10] ; IV, 12) et en cohomologie de Čech, dans le cas d'actions de S^1 sur une variété différentiable X avec nombre fini de types d'orbites ([11] ; p. 161). Dans les hypothèses du paragraphe 5, les résultats de [10] et ceux de ce paragraphe sont duaux.

Ces différentes suites exactes sont distinctes de la suite exacte, également dite "de Smith-Gysin", de Conner et Floyd (Bull. Amer. Math. Soc. 66, (1960), pp. 416-441 et [20], p. 84).

On suppose que le fibré en sphères $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ est orientable et muni d'une orientation. On note $\omega \in H^n(Y-N)$ la classe d'Euler associée à cette orientation. Posons $m = \mu - \nu + 1$, la première composante de la différentielle :

$$d^m : H_{p+m}(Y-N) \otimes H_{p-\nu+1}(N) \rightarrow H_p(Y-N)$$

est le cap-produit par ω . On en déduit :

Corollaire 9.2. (voir aussi la proposition 8.1.)- Supposons, en plus des hypothèses de la proposition 9.1. que Y est localement compact et que le fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ est orientable. Dans ces conditions, on a :

a) si $H_p(X) = 0$ pour $p > \alpha$, alors $H_p(N) = 0$ pour $p > \alpha + \mu - 1$ et $H_p(Y-N) = 0$ pour $p > \alpha + (\mu - \nu) + 1$.

b) si $H_p(X) = 0$ pour $p < \beta$, alors $H_p(N) = 0$ pour $p < \beta - \mu$ et $H_p(Y-N) = 0$ pour $p < \beta$.

La démonstration, suggérée par ([10], p. 172), utilise essentiellement le fait que, pour toute classe γ de $H_1(Y-N)$, il existe un entier q tel que $\gamma \cap (\omega^q) = 0$.

Du corollaire 9.2., on déduit le théorème démontré en cohomologie modulo 2 par Conner et Dyer ([19], Théorème 1.1.).

Théorème 9.3.- Soit $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C^0 -stratifiée de fibres $(S^{\mu-\nu}, 0)$, si X est compact et tel que $H^p(X) = 0$ pour $p \geq \alpha$, alors $H^p(M) = 0$ pour $p \geq \alpha$ et $H^p(Y) \simeq H^p(N)$ pour $p \geq \alpha + (\mu - \nu)$.

Puisque les espaces sont supposés compacts, le théorème 9.3. se déduit du corollaire 9.2. par dualité des variétés. De la même façon, on peut retrouver le résultat de Mahowald, qui a la même formulation mais en remplaçant $S^{\mu-\nu}$ par

une fibre F quelconque de dimension $\mu - \nu$. Cependant, la démonstration étant aussi longue que celle de Mahowald, nous ne faisons que signaler le résultat.

Par une démonstration en tous points analogue à celle de Conner et Dyer [19], on peut alors généraliser les théorèmes 3.4. et 3.6. du chapitre I, comme suit :

Théorème 9.4.- Soit $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C^0 -stratifiée de fibres $(S^r, 0)$, si X est une n -sphère homologique et si le fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ est Λ -orientable, alors il existe k tel que M soit une $n-k(r+1)$ -sphère homologique.

Fibrations de Hopf.

On déduit immédiatement de la suite exacte (42) :

Corollaire 9.5.- Soit $f : (\mathbb{R}^\mu, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^\nu, 0)$ une application C^0 -stratifiée de fibres $(S^{\mu-\nu}, 0)$, alors $\mu = 2(\nu-1)$.

La question se pose de savoir si l'on ne retrouve dans ce cas que les fibrations à singularités de Hopf, c'est-à-dire

$$f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0) \text{ de fibre } (S^0, 0)$$

et les exemples 2.1. (b) du chapitre I.

Autrement dit, étant donnés X^μ et Y^ν de même type d'homologie que \mathbb{R}^μ et \mathbb{R}^ν respectivement et une application C^0 -stratifiée $f : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$ de fibres $(S^{\mu-\nu}, 0)$, a-t-on obligatoirement :

$$(\mu, \nu) = (2, 2), (4, 3), (8, 5) \text{ ou } (16, 9) ?$$

Il ne semble pas que cela soit vrai en général. Le résultat de Timourian (Théorème 3.8. du chapitre I) apporte cependant une réponse positive si f est propre.

Inégalité de Bredon.

Corollaire 9.6.- Dans l'hypothèse de la proposition 9.1. et si Λ est un corps, posons $m = \mu - \nu + 1$. Il vient, pour tout entier p :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \dim H_{p-\mu+jm}(N) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \dim H_{p+jm}(X) + \dim H_{p-m}(Y-N)$$

Démonstration.- Notons comme plus haut :

$$a_p = \dim H_p(Y-N), \quad b_p = \dim H_p(N) \quad \text{et} \quad \alpha_p = \dim H_p(X).$$

On déduit de la suite exacte (42) l'inégalité :

$$(43) \quad a_p + b_{p-\mu} \leq \alpha_p + a_{p-(\mu-\nu+1)}.$$

Si Y est de dimension homologique finie, a_p et b_p sont nuls pour p grand. La suite exacte (42) implique que α_p est également nul pour p grand.

En remplaçant p par $p+j(\mu-\nu+1) = p+jm$ dans (43) et en sommant de $j = 0$ à $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_{p-\mu+jm} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{p+jm} + a_{p-m}$$

d'où le résultat.

On trouvera les équivalents cohomologiques de cette inégalité dans Bredon ([10]; IV, 12) et ([11]; Théorème 10.9., p. 163).

Signalons d'autre part que la suite exacte (42) permet aussi de retrouver l'inégalité (40).

Remarque 9.7.- La suite exacte de Gysin du fibré en sphères

$f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ et la suite exacte (42) entrent dans un diagramme commutatif (voir le paragraphe 3.6 ci-dessus) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \rightarrow & H_p(Y-N) & \rightarrow & H_{p+\mu-\nu}(X) & \rightarrow & H_{p+\mu-\nu}(Y-N) \oplus H_{p-\nu}(N) \rightarrow H_{p-1}(Y-N) \rightarrow \dots \\
 & & \uparrow \text{id} & & \uparrow i_* & & \uparrow (\text{id}, 0) & & \uparrow \text{id} \\
 \dots & \rightarrow & H_p(Y-N) & \rightarrow & H_{p+\mu-\nu}(X-M) & \longrightarrow & H_{p+\mu-\nu}(Y-N) & \longrightarrow & H_{p-1}(Y-N) \rightarrow \dots
 \end{array}$$

On retrouve, bien entendu, le fait que si $M = N = S^n$, alors $H_q(X-M) \simeq H_q(X)$ pour $q \neq \mu, \mu-1, \mu+n, \mu+n-1$.

10 - Fibrés sur des bouquets de sphères (Deuxième généralisation de la suite exacte de Wang).

Proposition 10.1.- Soit $f : X \rightarrow S^n \vee S^n$ un fibré de fibre F , on a la suite exacte :

$$(44) \quad \dots \rightarrow H_p(F) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \rightarrow H_{p-n}(F) \oplus H_{p-n}(F) \rightarrow H_{p-1}(F) \rightarrow \dots$$

De façon plus générale, on a :

Proposition 10.2.- Soit $f : X \rightarrow S^{n_1} \vee \dots \vee S^{n_k}$ un fibré de fibre F , on a la suite exacte :

$$(45) \quad \dots \rightarrow H_p(F) \rightarrow H_p(X) \rightarrow H_{p-n_1}(F) \oplus \dots \oplus H_{p-n_k}(F) \rightarrow H_{p-1}(F) \rightarrow \dots$$

Proposition 10.3.- Soit B un espace ayant le type d'homologie d'un bouquet de k sphères S^n et $f : X \rightarrow S^n \vee B$ un fibré de fibre F , on a la suite exacte :

$$(46) \quad \dots \rightarrow H_p(F) \rightarrow H_p(X) \rightarrow \underbrace{H_{p-n}(F) \oplus \dots \oplus H_{p-n}(F)}_{(k+1) \text{ termes}} \rightarrow H_{p-1}(F) \rightarrow \dots$$

Corollaire 10.4.- Soit $f : X \rightarrow S^n \vee S^n$ un fibré de fibre S^r , si $r \neq n$, on a $H_0(X;Z) = H_r(X;Z) = Z$ et $H_n(X;Z) = H_{n+r}(X;Z) = Z \oplus Z$; si $r = n$, on a $H_0(X;Z) = Z$, $H_n(X;Z) = Z \oplus Z \oplus Z$ et $H_{2n}(X;Z) = Z \oplus Z$.

Nous démontrerons la proposition 10.1. par deux méthodes : Une première méthode apparentée à celle de Wang, et en utilisant la suite spectrale. La première méthode permet aussi de démontrer la proposition 10.2., la seconde permet aussi de montrer la proposition 10.3. (en posant $N = S^n - \{\text{pt}\}$ et $Y-N = B$).

Démonstration 1. - Notons x le point base commun aux deux exemplaires de S^n . La suite exacte d'homologie de la paire (X, F_x) s'écrit :

$$(47) \quad \dots \rightarrow H_p(F_x) \rightarrow H_p(X) \rightarrow H_p(X, F_x) \rightarrow H_{p-1}(F_x) \rightarrow \dots$$

Il suffit donc de montrer l'isomorphisme

$H_p(X, F_x) \simeq H_{p-n}(F) \oplus H_{p-n}(F)$. Pour cela, supposons $S^n \vee S^n$ plongé dans \mathbb{R}^{n+1} de la manière suivante : Les deux sphères S^n ont un diamètre égal à 1, leurs centres sont situés aux points de coordonnées $(0, 0, \dots, 0, 1/2)$ et $(0, 0, \dots, 0, -1/2)$. Le point x est donc à l'origine de \mathbb{R}^{n+1} et les pôles qui lui sont opposés sont les points : $y_1 = (0, 0, \dots, 0, +1)$ et $y_2 = (0, 0, \dots, 0, -1)$.

Pour tout intervalle I , nous noterons $X|_I$ la restriction de X à $(S^n \vee S^n) \cap \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; z_n \in I\}$. Ainsi, on a :

$$F_x = X|_{(0)}, \quad F_{y_1} = X|_{(+1)} \quad \text{et} \quad F_{y_2} = X|_{(-1)}.$$

On a des isomorphismes successifs :

$$\begin{aligned} H_p(X, F_x) &\simeq H_p(X, X|_{[-2/3, +2/3]}) \quad \text{par rétraction } X|_{[-2/3, +2/3]} \rightarrow X|_{(0)} \\ &\simeq H_p(X|_{[-1, -1/3]} \cup [1/3, 1], X|_{[-2/3, -1/3]} \cup [1/3, 2/3]) \\ &\quad \text{par excision par } X|_{]-1/3, +1/3[} \\ &\simeq H_p(X|_{[-1, -1/3]} \cup [1/3, 1], X|_{(-1/3)} \cup (1/3)) \\ &\quad \text{par rétraction de } X|_{[-2/3, -1/3]} \cup [1/3, 2/3] \text{ sur } X|_{(-1/3)} \cup (1/3) \\ &\simeq H_{p-n}(X|_{(-1)}) \oplus H_{p-n}(X|_{(+1)}) \quad \text{par exemple, par isomorphisme de Thom.} \end{aligned}$$

Démonstration 2.- Soient S_1^n le premier exemplaire de S^n et S_2^n le second exemplaire de S^n dans $S^n \vee S^n$, on note $N' = S_1^n - \{x\}$ et $Y-N' = S_2^n$, $M' = X|_{N'}$. Les couples (X, M') et (Y, N') ne sont pas des espaces C^0 -stratifiés, néanmoins nous allons montrer que la technique de démonstration de la suite spectrale est encore valable. Il suffit en effet de montrer qu'on a une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes :

$$(48) \quad C_p(X, X-M') \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{matrix} C_{p-n}(F_{y_1}).$$

Ceci étant montré (lemme 10.5. ci-dessous), on peut suivre la construction de la suite spectrale, à partir de la proposition 1 de l'introduction en posant :

$$N = \{y_1\} \quad Y-N = Y-N' = S_2^n \quad M = X|_N = F_{y_1} \quad \text{et} \quad X-M = X-M' = X|_{S_2^n}$$

Les fibres F et F_0 sont toutes deux égales à F . Le terme $E_{p,q}^2$ de la suite spectrale obtenue pour $k = \mu = \nu = n$ est, pour q fixé, nul sauf éventuellement :

$$E_{0,q}^2 = H_q(F)$$

$$E_{n,q}^2 = H_q(F) \oplus H_q(F)$$

(formule 33). On en déduit la proposition par application du "lemme des deux colonnes" ([18] ; XV, Théorème 5.10.).

Lemme 10.5.- Montrons (48) :

En employant les notations de la démonstration 1, on a :

$C_p(X, X-M') = C_p(X, X|_{[-1,0]})$. Par excision par $X|_{]-1,-1/2[}$ puis par rétraction de $X|_{[-1/2,0]}$ sur $X|_{(0)}$, on a des équivalences d'homotopie :

$$C_p(X, X | [-1, 0]) \rightleftarrows C_p(X | [-1/2, 1], X | [-1/2, 0]) \rightleftarrows C_p(X | [0, 1], X | (0)).$$

En suivant des étapes similaires à celles de la démonstration 1, on peut alors écrire les équivalences d'homotopie successives :

$$C_p(X | [0, 1], X | (0)) \rightleftarrows C_p(X | [0, 1], X | [0, 2/3]) \rightleftarrows C_p(X | [1/3, 1], X | [1/3, 2/3])$$

$$C_p(X | [1/3, 1], X | (1/3)) \rightleftarrows C_{p-n}(X | (1)) = C_{p-n}(F_{y_1})$$

ce qui prouve le lemme.

11 - Invariants locaux de Hu.

Soit Y une variété topologique, connexe par arcs et triangulable. On munit l'ensemble $W(Y)$ de tous les chemins de Y de la topologie de la convergence compacte. On note $T(Y, y_0)$ le sous-espace de $W(Y)$ constitué des chemins $\sigma : [0, 1] \rightarrow Y$ tels que $\sigma(t) = y_0$ si et seulement si $t = 0$.

Le chemin dégénéré en y_0 est noté e_0 . Le sous-espace $X = \{e_0\} \cup T(Y, y_0)$ de $W(Y)$ est contractile sur e_0 [31].

L'application $f : X \rightarrow Y$ définie par $f(\sigma) = \sigma(1)$, pour tout chemin σ de X , est continue. Sa restriction à $X - \{e_0\}$, $f|_{X - \{e_0\}} : X - \{e_0\} \rightarrow Y - \{y_0\}$ est la projection d'un fibré de Serre de fibre F [31]. F_y est le sous-espace de $W(Y)$ dont les éléments sont les chemins σ tels que $\sigma(1) = y$ et $\sigma^{-1}(y_0) = 0$.

Soit G un groupe abélien, Hu considère les groupes d'homologie et d'homotopie locaux $L_n(Y, y_0; G) = H_n(T(Y, y_0); G)$ et $\lambda_n(Y, y_0) = \pi_n(T(Y, y_0))$ [30]. Ces invariants de $T(Y, y_0)$ et de $Y - \{y_0\}$ sont directement liés à ceux de la fibre F .

L'application $f : (X, \{e_0\}) \rightarrow (Y, \{y_0\})$ n'est pas toujours une application C^0 -stratifiée de fibres $(F, 0)$. Cependant dans certains cas particuliers, nous pouvons compléter les résultats de Hu [31] :

L'anneau des coefficients est $\Lambda = \mathbb{Z}$.

Si $Y = S^\nu$, $\nu > 1$, en appliquant le corollaire 7.5., on trouve $H_*(F) = H_*(S^{\nu-1})$. Réciproquement, si F est une sphère homologique, on a $H_p(Y - \{y_0\}) = 0$ pour $p > 0$ (corollaire 9.2.).

Si $Y = \mathbb{R}^\nu$, $\nu > 1$, on a $\tilde{H}_*(F) = 0$. Réciproquement, si $\tilde{H}_*(F) = 0$, il vient $\tilde{H}_*(Y) = 0$. En effet, considérons la suite spectrale obtenue pour $k = \nu$. La suite exacte (33) est dégénérée pour tout entier $q \neq 0$. Pour $q = 0$, elle donne lieu, avec la suite exacte d'homologie de la paire $(Y, Y-N)$ à un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dots & \rightarrow & H_p(Y-N) & \rightarrow & H_p(X) & \rightarrow & H_{p-\nu}(N) & \rightarrow & H_{p-1}(Y-N) & \rightarrow & \dots \\
 & & \downarrow \text{id} & & \downarrow f_* & & \downarrow (\text{Thom})^{-1} & & \downarrow \text{id} & & \\
 \dots & \rightarrow & H_p(Y-N) & \rightarrow & H_p(Y) & \rightarrow & H_p(Y, Y-N) & \rightarrow & H_{p-1}(Y-N) & \rightarrow & \dots
 \end{array}$$

on déduit, du "lemme des cinq", que f_* est un isomorphisme, d'où le résultat.

Si $Y = P^\nu(\mathbb{R})$, $\nu > 2$, on a $H_n(F) = 0$, pour $n \geq 1$, et $H_0(F) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

12 - Cas d'une application holomorphe $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ admettant un point singulier isolé.

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe et surjective d'une variété analytique complexe X sur \mathbb{C} , admettant un point critique isolé a (où toutes les dérivées premières de f s'annulent). On note $F_\alpha = f^{-1}(\{f(a)\})$, F_α n'est pas une sous-variété différentiable de X . Cependant, si a n'est pas un point double de F_α , F_α possède un voisinage tubulaire T image réciproque d'un disque de \mathbb{C} centré en $f(a)$, [25], Proposition 1, p. 54. L'application $f : (X, F_\alpha) \rightarrow (\mathbb{C}, \{f(a)\})$ est une application C^0 -stratifiée de fibres (F, F_α) pour laquelle on peut écrire la suite spectrale.

On obtient, en prenant $k = \nu$, une suite spectrale dont, pour q fixé, tous les termes $E_{p,q}^2$ sont nuls sauf éventuellement :

$$E_{0,q}^2 = H_0(\mathbb{C} - \{f(a)\}; H_q(F))$$

et $E_{1,q}^2$ et $E_{2,q}^2$ rentrant dans la suite exacte :

$$0 \rightarrow E_{2,q}^2 \rightarrow H_q(F_\alpha) \rightarrow H_1(\mathbb{C} - \{f(a)\}; H_q(F)) \rightarrow E_{1,q}^2 \rightarrow 0.$$

D'autre part, on retrouve, en prenant $k = \nu+1$, la suite spectrale que Fáy a étudiée dans le cas de singularités quadratiques [25].

Les termes $E_{p,q}^2$ de cette suite spectrale sont tous nuls sauf :

$$E_{0,q}^2 = H_0(\mathbb{C} - \{f(a)\}; H_q(F)) \quad E_{1,q}^2 = H_1(\mathbb{C} - \{f(a)\}; H_q(F))$$

$$E_{2,q}^2 = H_{q+1}(F_\alpha).$$

Nous renvoyons à Fáy pour l'étude de cette suite spectrale.

III - APPLICATIONS AUX ACTIONS DE GROUPES.

Dans ce paragraphe III, différentiable signifiera différentiable de classe C^∞ .

13 - Voisinages tubulaires ([11] ; VI, 2 et [20] ; § 22).

Soient G un groupe de Lie compact, et M une variété différentiable sur laquelle G agit différentiablement. On dira qu'un fibré vectoriel différentiable E , de base M , est un G -fibré (différentiable) si G agit différentiablement sur E , linéairement sur les fibres, et si la projection $\pi : E \rightarrow M$ est équivariante.

Considérons une variété différentiable X et une action différentiable de G sur X . Il existe une métrique riemannienne sur X pour laquelle G un groupe d'isométries.

L'ensemble des points fixes par l'action de G , noté $M = X^G$, est une sous-variété de X non nécessairement connexe. Toute composante connexe A de X^G admet un voisinage tubulaire ouvert invariant Ω au sens suivant : il existe un G -fibré vectoriel différentiable E , de base A , et un difféomorphisme équivariant

$$\psi : E \rightarrow \Omega$$

tel que la restriction de ψ à la section nulle de E soit l'inclusion de A dans Ω .

Puisque G est compact, tout voisinage tubulaire ouvert invariant de A contient un voisinage tubulaire T fermé et invariant. T est un voisinage tubulaire de A dans X au sens de la définition 1 de l'introduction.

Notons $f : X \rightarrow X/G = Y$ la projection de X sur l'espace des orbites et N l'image de X^G par f . Si X^G est connexe et l'action de G sur X est semi-libre, c'est-à-dire libre en dehors de X^G , l'application $f : (X, X^G) \rightarrow (X/G, N)$ est une application C^∞ -stratifiée de fibres $(G, \{e\})$.

14 - G-variétés à deux types d'orbites.

L'action d'un groupe de Lie compact G sur une variété différentiable X et admettant deux types d'orbites a été étudiée par K. Jänich ([43], p. 135). Le rattachement des deux fibrés, donné aussi par le morphisme ψ , peut s'expliquer comme suit :

On suppose que X est la réunion de deux variétés M et $X-M$, connexes et admettant chacune un type d'orbite. Notons $f : X \rightarrow X/G = Y$ la projection de X sur l'espace des orbites et supposons que l'image de M par f soit $N = \partial Y$.

M admet dans X un voisinage tubulaire fermé invariant qui est un voisinage tubulaire au sens de la définition 1 de l'introduction. L'application $f : (X, M) \rightarrow (X/G, N)$ est une application C^∞ -stratifiée de fibres (G_1, G_2) .

Le fibré principal associé au fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ peut naturellement être étendu (et compactifié) en un fibré E sur tout $Y = X/G$. Le fibré $f|_M : M \rightarrow N$ s'obtient par une réduction σ de $E|_N$ à un groupe structural plus petit. La donnée du couple (E, σ) détermine non seulement les deux fibrés, mais aussi la manière dont ils sont rattachés ; en fait, les classes d'isomorphisme des couples (E, σ) classifient ces G -variétés particulières (voir [43]).

15 - Actions de S^1 , S^3 et des tores.

Dans tout ce paragraphe, où il s'agit d'action semi-libres de G sur X , on suppose que X^G et $X/G - X^G$ sont connexes par arcs et que le système local formé par $H_1(F)$ (où F est homéomorphe à G) est trivial sur $X/G - X^G$.

La suite exacte de Smith-Gysin (proposition 9.1.) et ses corollaires s'appliquent au cas d'actions semi-libres de S^1 et de S^3 (groupe des quaternions de norme 1). On obtient :

Proposition 15.1. - Soit $G = S^n$ l'un des groupes S^1 ou S^3 ; supposons qu'il existe une action semi-libre de G sur une variété différentiable X et que l'ensemble des points fixes X^G soit connexe. Posons

$v = \dim X/G - \dim X^G$. Dans ces conditions, on a la suite exacte :

$$(49) \dots \rightarrow H_p(X/G - X^G) \rightarrow H_{p+n}(X) \rightarrow H_{p+n}(X/G - X^G) \oplus H_{p-v}(X^G) \rightarrow H_p(X/G - X^G) \rightarrow \dots$$

Corollaire 15.2.- Dans les hypothèses de la proposition 15.1., posons $\mu = \dim X - \dim X^G$, si $H_p(X) = 0$ pour $p \geq \alpha$, alors $H_p(X^G) = 0$ pour $p \geq \alpha + \mu - 1$ et $H_p(X/G - X^G) = 0$ pour $p \geq \alpha + (\mu - v) + 1$.

Corollaire 15.3. (comparer à Bredon [11], Chapitre III, Théorème 10.9.)-

Dans les hypothèses de la proposition 15.1., on a pour tout entier p :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \dim H_{p-\mu+j(n+1)}(X^G; \mathbb{Q}) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \dim H_{p+j(n+1)}(X; \mathbb{Q}) + \dim H_{p-(n+1)}(X/G - X^G; \mathbb{Q}).$$

Par dualité des variétés, on retrouve, pour $G = S^1$, le résultat suivant de Bredon :

Théorème 15.4. (Bredon [11], Chapitre III, Théorème 10.9.)- Si $H^*(X; \mathbb{Q})$ est de dimension finie sur \mathbb{Q} , il en est de même de $H^*(X^G; \mathbb{Q})$ et $H^*(X/G; \mathbb{Q})$ et on a :

$$\chi(X) = \chi(X/G).$$

Par des démonstrations analogues à celles de Bredon ([11], chapitre III), la proposition 15.1. permet de montrer, dans le cas de deux types d'orbites et avec $\Lambda = \mathbb{Q}$, les résultats suivants :

Corollaire 15.5.- Supposons qu'il existe une action semi-libre de $G = S^1$ sur une variété différentiable X et que $H_j(X) = 0$ pour tout j impair (respectivement pair), posons $\mu = \dim X - \dim X^G$. Dans ces conditions, on a

$H_{j-\mu}(X^G) = 0$ pour tout j impair (respectivement pair) et :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \dim H_j(X) = \sum_{j=0}^{\infty} \dim H_j(X^G).$$

Théorème 15.6.- Supposons que le tore $G = T^k$ opère sur une n -sphère homologique avec deux types d'orbites et sans points fixes. Pour tout sous-tore $H \subset T^k$ de dimension $k-1$, notons $r(H)$ l'entier, compris entre -1 et n pour lequel X^H est une $r(H)$ -sphère homologique. Si H décrit l'ensemble des sous-tores de T^k de dimension $k-1$, on a :

$$n + 1 = \sum_H (r(H) + 1) .$$

On a, bien entendu, convenu que l'ensemble vide est une (-1) -sphère.

Ce théorème a été démontré par Borel dans un cas beaucoup plus général (cas de plusieurs types d'orbites et avec points fixes) ([6]; XIII).

Les résultats du paragraphe 8 s'appliquent aussi aux actions de S^1 et de S^3 . En particulier, on a :

Théorème 15.7.- Il est impossible de construire une action semi-libre de $G = S^1$ (ou S^3) sur une sphère $X = S^m$ et telle que X^G soit connexe et $H_p(X/G - X^G) = 0$ pour tout $p \geq \dim X - \dim X^G - (n+1)$; $n = 1$ (ou 3).

Théorème 15.8.- Soit X^m une variété différentiable telle que $H_m(X) = 0$, est impossible de construire une action semi-libre de $G = S^1$ (ou S^3) sur X^m , et telle que X^G soit connexe et $H_p(X/G - X^G) = 0$ pour tout $p \geq \dim X - \dim X^G - (n+1)$; $n = 1$ (ou 3).

On trouvera de nombreux exemples des situations précédentes dans [11] et [43] notamment.

BHS
LILLE

Remarque sur les actions de groupes finis.

La suite spectrale paraît moins bien adaptée à la situation d'actions semi-libres de groupes finis que les méthodes du type de la suite spectrale de Swan (Commentarii Math. Helv. 34 (1960), 1-16). En effet, les hypothèses sous lesquelles on peut appliquer la suite spectrale sont, dans ce cas, très strictes et les résultats que l'on obtient peuvent être démontrés par ailleurs. On obtient par exemple :

Proposition.- Si un groupe fini G opère semi-librement sur une variété différentiable X connexe et simplement connexe, telle que X^G soit connexe par arcs et $X/G - X^G$ connexe et simplement connexe, alors $G = \mathbb{Z}_2$, $v = \dim X - \dim X^G = 1$ et si $X/G - X^G$ est contractile $H_{p+1}(X) \simeq H_p(X^G)$ pour $p \geq 1$.

Démonstration.- Les termes $E_{p,q}^2$ de la suite spectrale, obtenue pour $k = v$, sont, pour p fixé, tous nuls sauf éventuellement pour $q = 0$ (voir (33)). La suite exacte (33) s'écrit donc :

$$(50) \quad \dots \rightarrow H_{p-v+1}(X^G) \rightarrow H_p(X/G - X^G; H_0(G)) \rightarrow H_p(X) \rightarrow H_{p-v}(X^G) \rightarrow \dots$$

En posant $p = 0$, on en déduit la proposition.

CHAPITRE VII

TRIANGULATIONS ADAPTEES : CONSTRUCTION et APPLICATIONS.

La proposition 7 de l'introduction est une conséquence de la commutativité à homotopie près d'un "grand" diagramme (Page 119). On en construit successivement les éléments. Les principales étapes sont :

- Une construction du cycle $\psi' : C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(X-M)$ au moyen d'un relèvement particulier $\rho' : C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(X)$, (paragraphe 1).
- Une construction explicite du morphisme $s : C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(T, T-M)$ induisant en homologie l'inverse de l'isomorphisme de Thom (paragrapes 2 et 3).
- Un équivalent du théorème de Shih pour les fibrés sur fibrés, (paragraphe 4) (voir aussi Appendice 1).

On conclut en montrant l'existence de triangulations adaptées.

1 - Construction du cycle $\psi' : C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(X-M)$.

Dans ce paragraphe, (X, M) désigne un espace C^0 -stratifié à voisinage orientable et T un voisinage tubulaire de X dans M . On note $\mu = \dim(X-M) - \dim M$.

Le voisinage T et son bord ∂T sont les espaces totaux de deux fibrés de base M associés au même fibré principal, et de fibres respectives D et ∂D . On peut leur attribuer la même cochaîne fondamentale τ . On a, d'après Shih, des équivalences d'homotopie de complexes de chaînes :

$$C(T) \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} C(M) \underset{\tau}{\otimes} C(D) \qquad C(\partial T) \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} C(M) \underset{\tau}{\otimes} C(\partial D).$$

Les morphismes ∇^τ et f^τ réalisant cette équivalence passent au quotient et définissent une équivalence d'homotopie (Proposition 2.3. du chapitre III) :

$$C(T, \partial T) \begin{array}{c} \xrightarrow{f^\tau} \\ \xleftarrow{\nabla^\tau} \end{array} C(M) \underset{\tau}{\otimes} C(D, \partial D).$$

D'autre part, ∂T est un rétracte par déformation de $T-M$. Le morphisme de MDG, $r : C(T, \partial T) \rightarrow C(T, T-M)$, défini par l'inclusion $\partial T \rightarrow T-M$, induit donc un isomorphisme en homologie.

Enfin, l'homomorphisme d'excision, $\varepsilon : C(T, T-M) \rightarrow C(X, X-M)$ induit un isomorphisme en homologie (Paragraphe 3 du chapitre IV).

On peut donc écrire le diagramme commutatif de MDG :

$$(51) \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C(X-M) & \longrightarrow & C(X) & \xrightarrow{p} & C(X, X-M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \varepsilon & & \uparrow \varepsilon & & \uparrow \varepsilon & & \\ 0 & \longrightarrow & C(T-M) & \longrightarrow & C(T) & \xrightarrow{p_3} & C(T, T-M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow i & & \uparrow 1 & & \uparrow r & & \\ 0 & \longrightarrow & C(\partial T) & \longrightarrow & C(T) & \xrightarrow{p_2} & C(T, \partial T) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow \nabla^\tau & & \uparrow \nabla^\tau & & \uparrow \nabla^\tau & & \\ 0 & \longrightarrow & C(M) \underset{\tau}{\otimes} C(\partial D) & \longrightarrow & C(M) \underset{\tau}{\otimes} C(D) & \xrightarrow{p_1} & C(M) \underset{\tau}{\otimes} C(D, \partial D) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dans lequel, les homomorphismes de la colonne de droite sont des isomorphismes en homologie.

On va construire successivement un relèvement ρ_i de chacune des projections p_i du diagramme ci-dessus, à l'aide d'un relèvement ρ_0 de la surjection p_0 dans la suite exacte courte :

$$(52) \quad 0 \longrightarrow C(D) \longrightarrow C(\partial D) \xrightarrow{p_0} C(D, \partial D) \longrightarrow 0.$$

On en déduira à chaque étape un cycle ψ_i puis un cycle $\bar{\psi} = d\rho - \rho d$ de $\text{Hom}_{-1}(C(X, X-M), C(X-M))$ et enfin ψ' .

(i) Détermination de ρ_1 et de ψ_1 à l'aide de ρ_0 :

Etant donné le relèvement ρ_0 de p_0 dans la suite exacte courte (52) on définit un relèvement ρ_1 de p_1 en posant :

$$\rho_1(x \otimes [y]) = x \otimes \rho_0[y] \quad \text{où } y \in C(D, \partial D)$$

En notant $\psi_0 = d\rho_0 - \rho_0 d$ et $\psi_1 = d^\tau \rho_1 - \rho_1 d^\tau$, il vient :

$$(53) \quad \psi_1(x \otimes [y]) = (-1)^{\text{deg } x} x \otimes \psi_0[y] + \tilde{\tau} \cap (x \otimes \rho_0[y]) - \rho_1(\tilde{\tau} \cap (x \otimes [y])).$$

Proposition 1.1.- Le morphisme ψ_1 induit par le relèvement $\rho_1 = 1 \otimes \rho_0$ satisfait à $\psi_1(x \otimes [y]) = (-1)^{\text{deg } x} x \otimes \psi_0[y]$ dans les deux cas suivants :

+ le fibré $\lambda : T \rightarrow M$ est trivial

+ ψ_0 est induit par un relèvement ρ_0 de p_0 commutant à la fois avec les opérateurs de dégénérescence et l'action du groupe du fibré minimal $\lambda : \underline{T}' \rightarrow \underline{M}$ associé à $\lambda : \underline{T} \rightarrow \underline{M}$.

Démonstration : Le premier cas est évident, puisque dans ce cas la cochaîne fondamentale $\tilde{\tau}$ du fibré $\lambda : T \rightarrow M$ est nulle.

Dans le second cas, la différence des deux derniers termes de (53) est égale à :

$$(54) \quad \tilde{\tau} \cap (x \otimes \rho_0[y]) - \rho_1(\tilde{\tau} \cap (x \otimes [y])) = (1 \otimes ([\bar{\sigma}(1 \otimes \rho_0) - \rho_0 \bar{\sigma}] \circ (\tilde{\tau} \otimes 1))) (\Delta(x) \otimes [y])$$

avec les notations du paragraphe 1 du chapitre III. Or $\bar{\sigma} = C(\sigma) \circ \nabla$ où $\sigma : \underline{G} \times \underline{D} \rightarrow \underline{D}$ désigne l'action du groupe \underline{G} sur la fibre du \underline{G} -fibré $\lambda : \underline{T}' \rightarrow \underline{M}$ et où ∇ est l'opérateur d'Eilenberg-Mac Lane $\nabla : C(\underline{G}) \otimes C(\underline{D}) \rightarrow C(\underline{G} \times \underline{D})$, défini à l'aide des opérateurs de dégénérescence. Dans le cas où ρ_0 commute à la fois avec l'action de \underline{G} et les opérateurs de dégénérescence, il vient $\bar{\sigma}(1 \otimes \rho_0) = \rho_0 \bar{\sigma}$ d'où la proposition.

Remarquons qu'il est facile de montrer l'existence de relèvements commutant avec l'action de \underline{G} ou avec les opérations de dégénérescence mais nous ne savons en construire commutant avec les deux.

(ii) Détermination de ρ_2 et de ψ_2 :

Soit ρ_1 le relèvement de p_1 construit en (i) et ρ_2' un relèvement quelconque de la projection $p_2 : C(T) \rightarrow C(T, \partial T)$, le morphisme

$$\rho_2 = \nabla^T \rho_1 f^T - \rho_2' (\nabla^T f^T - 1)$$

est encore un relèvement de p_2 et définit un cycle $\psi_2 = d\rho_2 - \rho_2 d$ de $\text{Hom}_{-1}(C(T, \partial T), C(\partial T))$. D'après le corollaire 2.3. du chapitre II, on a : $\nabla^T \psi_1 = \psi_2 \nabla^T$.

(iii) Détermination de ρ_3 et de ψ_3 :

L'injection canonique $\delta_r : C(T, T-M) \rightarrow C(T, \partial T)$ est un morphisme de MDG de degré 0 tel que $r \circ \delta_r$ soit l'identité de $C(T, T-M)$. Le composé $\rho_3 = \rho_2 \circ \delta_r$ est un relèvement de $p_3 : C(T) \rightarrow C(T, T-M)$ et induit un cycle $\psi_3 = d\rho_3 - \rho_3 d$ de $\text{Hom}_{-1}(C(T, T-M), C(T-M))$. D'après le corollaire 2.5. du chapitre II, on a une homotopie : $\phi_3 : i \circ \psi_2 \approx \psi_3 \circ r$.

(iv) Détermination de ρ et de $\bar{\psi}$:

Soit C^F le complexe des chaînes singulières petites d'ordre

$F = \{T, X-M\}$, notons δ_ε la projection $\delta_\varepsilon : C(X, X-M) \rightarrow C(T, T-M)$ composée de la projection canonique $\pi' : C(X, X-M) \rightarrow C^F(X, X-M)$ et de l'isomorphisme $C^F(X, X-M) \rightarrow C(T, T-M)$. $\delta_\varepsilon \circ \varepsilon$ est l'identité de $C(T, T-M)$.

Pour tout relèvement ρ' de p , le morphisme

$$\rho = \varepsilon \rho_2 \delta_r \delta_\varepsilon - \rho'(\varepsilon \delta_\varepsilon - 1)$$

est encore un relèvement de p et définit un cycle $\bar{\Psi} = d\rho - \rho d$ de $\text{Hom}_{-1}(C(X, X-M), C(X-M))$. D'après le corollaire 2.3. du chapitre II, il vient : $\varepsilon \circ \Psi_3 = \bar{\Psi} \circ \varepsilon$.

(v) Détermination de Ψ' :

Soit δ le morphisme composé :

$$C^{(-\mu)}(M) \xrightarrow{s} C(T, T-M) \xrightarrow{\varepsilon} C(X, X-M)$$

(formule (22)). On a défini $\Psi' : C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(X-M)$ comme étant le cycle de degré -1 , $\Psi' = \bar{\Psi} \circ \delta$.

En vertu de la construction précédente, il vient $\Psi' = d\rho' - \rho'd$ où $\rho' : C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(X)$ est égal à : $\rho' = \varepsilon \circ (\nabla^\tau \circ \rho_1 \circ f^\tau - \rho_2') \circ (\delta_r \circ s)$, et on a une homotopie :

$$\Phi' : \Psi' \simeq \varepsilon \circ i \circ \nabla^\tau \circ \Psi_1 \circ f^\tau \circ \delta_r \circ s$$

(voir le diagramme (51)).

2 - Un premier lemme.

Dans un premier temps, on explicite un morphisme de MDG,

$s : C^{(-\mu)}(M) \rightarrow C(T, T-M)$ induisant en homologie l'inverse de l'isomorphisme de Thom.

On rappelle que s réalise une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes avec le morphisme t , composé des morphismes de MDG :

$$C(T, T-M) \xrightarrow{\pi'} C^E(T, T-M) \xrightarrow{\pi} C^{E(-\mu)}(T) \xrightarrow{\varepsilon'} C^{(-\mu)}(T) \xrightarrow{\lambda} C^{(-\mu)}(M)$$

(Proposition 2.3. du chapitre IV).

Les morphismes ε' et π' réalisent une équivalence d'homotopie entre les complexes de chaînes C et C^E . On note γ un morphisme de MDG réalisant avec π une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes. Enfin, le morphisme $i : C(M) \rightarrow C(T)$ défini par l'injection (section) canonique réalise avec λ une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes. s est alors le composé $s = \varepsilon' \circ \gamma \circ \pi' \circ i$.

Définissons les morphismes de MDG $i' : C(M) \rightarrow C(M) \otimes_{\tau} C(D)$ et $j' : C(M) \otimes_{\tau} C(D) \rightarrow C(M) \otimes_{\tau} C(D, \partial D)$ par :

$$i' = f^{\tau} \circ i \quad j' = f^{\tau} \circ \delta_r \circ \varepsilon' \circ \gamma \circ \pi' \circ \nabla^{\tau}.$$

Lemme 2.1. - Le diagramme suivant est commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} C(M) & \xrightarrow{1} & C(M) \\ i' \downarrow & & \downarrow i \\ C(M) \otimes_{\tau} C(D) & \xrightarrow{\nabla^{\tau}} & C(T) \\ j' \downarrow & & \downarrow \delta_r \circ \varepsilon' \circ \gamma \circ \pi' \\ C(M) \otimes_{\tau} C(D, \partial D) & \xrightarrow{\nabla^{\tau}} & C(T, \partial T) \end{array}$$

De plus, le morphisme composé $j' \circ i'$ respecte les filtrations suivantes de $C(M)$ et $C(M) \otimes_{\tau} C(D, \partial D)$:

$$F_p [C(M)] = C(M^p)$$

$$F_p [C(M) \otimes_{\tau} C(D, \partial D)] = C(M^p) \otimes C(D, \partial D).$$

Démonstration : La commutativité à homotopie près du diagramme est évidente.

La différentielle d^τ respecte la filtration définie sur $C(M) \otimes C(D, \partial D)$, ceci en vertu de la définition de d^τ et plus précisément du cap-produit $\overset{\sim}{\tau} \cap$. Celui-ci ne fait, en effet, intervenir sur le terme $C(M)$ que l'opérateur de face.

Pour montrer le respect des filtrations, on regarde comment est transformé un simplexe singulier de $C(M)$ par chacun des morphismes de la composition $f^\tau \circ \delta_r \circ \varepsilon' \circ \gamma \circ \pi' \circ i$.

Soit σ un simplexe singulier, élément de $C(M^p) = C(f^{-1}(N^{(p)}))$, $i(\sigma)$ est un simplexe singulier de $C(T)$ tel que $\lambda(i(\sigma)) = \sigma$ et $f \circ \lambda(i(\sigma)) \in C(N^{(p)})$. De même, par l'opérateur π' de subdivision barycentrique, on reste dans les simplexes singuliers qui, composés avec f , sont dans $C(N^{(p)})$.

Le morphisme $\gamma : C^E(T) \rightarrow C^E(T, T-M)$ a été défini ci-dessus comme relèvement de π . (Proposition 2.1. du chapitre IV). Comme on raisonne sur des chaînes petites d'ordre E (recouvrement de M par des ouverts de trivialisations du fibré $\lambda : T \rightarrow M$), on peut se placer dans le cas d'un fibré trivial. Si u désigne la classe fondamentale dans $H^H(T, T-M)$ du fibré $\lambda : T \rightarrow M$, u s'écrit $z \cup v$ (cup-produit externe) avec $z \in H^0(M)$ et v générateur de $H^H(D, D-\{0\})$. En notant encore z et v des cocycles représentant respectivement les classes z et v , le morphisme π est un morphisme :

$$\pi : C_\alpha(M) \otimes_{\Lambda} C_\beta(D, D-\{0\}) \longrightarrow C_\alpha(M) \otimes_{\Lambda} C_{\beta-\mu}(D)$$

défini par $\pi(a \otimes b) = z.a \otimes (v \cap b)$ (Proposition 2.1. du chapitre IV). On en déduit que π respecte la filtration en $C(M^P)$ (autrement dit, si la première composante de $a \otimes b$ est dans $C(M^P)$, il en est de même de son image $\pi(a \otimes b)$).

Le lemme 3.2 du chapitre III permet de montrer que le morphisme γ respecte aussi cette filtration. Enfin, par les inclusions ε' et δ_r , puis par le morphisme f^τ (qui ne fait intervenir que des opérateurs de face dans la composante en $C(M)$), on obtient un élément de $C(M) \otimes_{\tau} C(D, \partial D)$ dont la première composante est dans $C(M^P)$. On en déduit le lemme.

3 - Un second lemme.

En plus des hypothèses énoncées au début du paragraphe 1, on suppose que M est l'espace total d'un fibré $f : M \rightarrow N$ de fibre F_0 et de base un espace N muni d'une triangulation simpliciale.

On note $N^{(p)}$ le p -squelette de la triangulation donnée de N et $M^P = f^{-1}(N^{(p)})$ la restriction du fibré $f : M \rightarrow N$ à $N^{(p)}$. Enfin $\tilde{\tau}_0$ et $\tilde{\tau}$ désignent des cochaînes fondamentales associées aux fibrés $f : M \rightarrow N$ et $\lambda : T \rightarrow M$ respectivement.

Proposition 3.1. - On peut construire une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes

$$\left[\begin{array}{c} \underline{K(N)} \\ \tau_0 \end{array} \otimes \begin{array}{c} \underline{C(F_0)} \\ \tau \end{array} \right] \otimes \begin{array}{c} \underline{C(D)} \\ \tau \end{array} \xrightleftharpoons[\hat{f}^{\tau_0}]{\tilde{v}^{\tau_0} \otimes 1} \begin{array}{c} \underline{C(M)} \\ \tau \end{array} \otimes \begin{array}{c} \underline{C(D)} \\ \tau \end{array}$$

respectant les filtrations suivantes :

$$F_p \left[\begin{array}{c} \underline{K(N)} \\ \tau_0 \end{array} \otimes \begin{array}{c} \underline{C(F_0)} \\ \tau \end{array} \right] \otimes \begin{array}{c} \underline{C(D)} \\ \tau \end{array} = \left(\underline{K(N^{(p)})} \otimes \begin{array}{c} \underline{C(F_0)} \\ \tau \end{array} \right) \otimes \begin{array}{c} \underline{C(D)} \\ \tau \end{array}$$

$$F_p \left[\begin{array}{c} \underline{C(M)} \\ \tau \end{array} \otimes \begin{array}{c} \underline{C(D)} \\ \tau \end{array} \right] = \underline{C(M^P)} \otimes \begin{array}{c} \underline{C(D)} \\ \tau \end{array}$$

Démonstration. - $\tilde{\nu}^{\tau_0} \otimes 1$ est une équivalence d'homotopie (Lemme 1.2.

du chapitre III) et respecte les filtrations précédentes (Proposition 3.3. du chapitre III). D'après le lemme 3.2 du chapitre III, il existe un morphisme de MDG, noté \hat{f}^{τ_0} , réalisant avec $\tilde{\nu}^{\tau_0} \otimes 1$ l'équivalence d'homotopie et respectant ces filtrations, d'où la proposition.

La proposition est encore valable en remplaçant $C(D)$ par $C(\partial D)$ ou $C(D, \partial D)$. Dans chacun des cas, on note \hat{f}^{τ_0} un morphisme réalisant l'équivalence d'homotopie avec $\tilde{\nu}^{\tau_0} \otimes 1$.

Posons :

$$i'' = \hat{f}^{\tau_0} \circ i' \circ \tilde{\nu}^{\tau_0} \quad j'' = \hat{f}^{\tau_0} \circ j' \circ (\tilde{\nu}^{\tau_0} \otimes 1) \quad \tilde{\psi} = \hat{f}^{\tau_0} \circ \psi_1 \circ (\tilde{\nu}^{\tau_0} \otimes 1)$$

où ψ_1 est le cycle de $\text{Hom}_{-1} \left[\underset{\tau}{C(M) \otimes C(D, \partial D)}, \underset{\tau}{C(M) \otimes C(\partial D)} \right]$ défini au (i) du paragraphe 1.

Lemme 3.2. - Le diagramme suivant est commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc}
 K(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0) & \xrightarrow{\tilde{\nu}^{\tau_0}} & C(M) \\
 \downarrow i'' & & \downarrow i' \\
 \left[\underset{\tau_0}{K(N)} \otimes_{\tau} C(F_0) \right] \otimes_{\tau} C(D) & \xrightarrow{\tilde{\nu}^{\tau_0} \otimes 1} & \underset{\tau}{C(M)} \otimes_{\tau} C(D) \\
 \downarrow j'' & & \downarrow j' \\
 \left[\underset{\tau_0}{K(N)} \otimes_{\tau} C(F_0) \right] \otimes_{\tau} C(D, \partial D) & \xrightarrow{\tilde{\nu}^{\tau_0} \otimes 1} & \underset{\tau}{C(M)} \otimes_{\tau} C(D, \partial D) \\
 \downarrow \tilde{\psi} & & \downarrow \psi_1 \\
 \left[\underset{\tau_0}{K(N)} \otimes_{\tau} C(F_0) \right] \otimes_{\tau} C(\partial D) & \xrightarrow{\tilde{\nu}^{\tau_0} \otimes 1} & \underset{\tau}{C(M)} \otimes_{\tau} C(\partial D) .
 \end{array}$$

De plus, le morphisme composé $\tilde{\Psi} \circ j'' \circ i''$ respecte les filtrations suivantes :

$$F_p \left[\overline{K(N)} \otimes_{\tau_0} C(F_0) \right] = K(N^{(p)}) \otimes C(F_0)$$

$$F_p \left[(K(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0)) \otimes_{\tau} C(\partial D) \right] = (K(N^{(p)}) \otimes C(F_0)) \otimes C(\partial D)$$

Démonstration. - Soit $\tilde{\tau}$ une cochaîne fondamentale associée au fibré $\lambda : T \rightarrow M$, on sait que $\tilde{\tau} \circ \tilde{\nu}^{\tau_0}$ est une cochaîne fondamentale pour $\left[K(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0) \right] \otimes_{\tau} C(D)$ et les deux termes de la colonne de gauche (lemme 1.1. du chapitre III). La commutativité à homotopie près du diagramme est immédiate.

Le respect des filtrations pour i'' et j'' résulte de la proposition 3.3. du chapitre III et de la proposition 3.1 ci-dessus. Pour le morphisme $\tilde{\Psi}$, il suffit de vérifier que, si on a :

$$x \otimes [y] \in F_p \left[C(M) \otimes C(D, \partial D) \right] = C(M^p) \otimes C(D, \partial D)$$

alors $\Psi_1(x \otimes [y]) \in F_p \left[C(M) \otimes C(\partial D) \right] = C(M^p) \otimes C(\partial D)$. Or, d'après les formules (53) et (54) du paragraphe 1, on a :

$$\Psi_1(x \otimes [y]) = (-1)^{\deg x} x \otimes \Psi_0[y] + (1 \otimes (\bar{\sigma}(1 \otimes \rho_0) - \rho_0 \bar{\sigma})(\tilde{\tau} \otimes 1)) (\Delta(x) \otimes [y])$$

Suivant la première composante du produit tensoriel, c'est-à-dire suivant $C(M)$, n'interviennent que des opérateurs bords (par Δ), d'où le résultat.

4 - Fibrés sur fibrés.

Nous revenons à la situation donnée par une application C^0 -stratifiée $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ de fibres (F, F_0) pour laquelle (X, M) est un

espace C^0 -stratifié à voisinage orientable et (Y, N) un espace C^0 -stratifié triangulable. Par définition, il existe un voisinage tubulaire U de N dans Y dont l'image réciproque $T = f^{-1}(U)$ soit un voisinage tubulaire de M dans X .

En plus, des notations des paragraphes précédents, on désigne par $\tilde{\tau}_1$ et $\tilde{\tau}'$ des cochaînes fondamentales associées aux fibrés $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ et $\omega : U \rightarrow N$ respectivement.

Le fibré $f|_{\partial T} : \partial T \rightarrow \partial U$ est restriction du fibré $f|_{X-M} : X-M \rightarrow Y-N$ à ∂U (Propriété 1.8. du chapitre I), il est isomorphe au fibré induit par l'injection $i : \partial U \rightarrow Y-N$. La cochaîne fondamentale de $f|_{\partial T} : \partial T \rightarrow \partial U$ est donc la restriction de $\tilde{\tau}_1$ à ∂U .

On désigne toujours par $j : C(Y-N) \otimes_{\tau_1} C(F) \rightarrow C(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes_{\tau_1} C(F)$ et $\beta_1 : C(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes_{\tau_1} C(F) \rightarrow K(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes_{\tau_1} C(F)$ les morphismes définis aux propositions 2.2. et 2.3. du chapitre V. Il vient, par définition de f^{-1} :

Lemme 4.1. - Pour toute triangulation de Y compatible avec ∂U et $Y-\overset{\circ}{U}$, le diagramme suivant (dans lequel les injections canoniques sont notées i) est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 C(\partial T) & \xrightarrow{\quad i \quad} & C(X-M) \\
 \downarrow f^{\tau_1} & & \downarrow f^{\tau_1} \\
 C(\partial U) \otimes_{\tau_1} C(F) & \xrightarrow{\quad i \otimes 1 \quad} & C(Y-N) \otimes_{\tau_1} C(F) \\
 \downarrow \beta_1 & & \downarrow \beta_1 \circ j \\
 K(\partial U) \otimes_{\tau_1} C(F) & \xrightarrow{\quad i \otimes 1 \quad} & K(Y-\overset{\circ}{U}) \otimes_{\tau_1} C(F)
 \end{array}$$

Notons D' la fibre du fibré $\omega : U \rightarrow N$. La restriction de ω à ∂U , $\omega|_{\partial U} : \partial U \rightarrow N$, est la projection d'un fibré de fibre $\partial D'$. C'est un sous-fibré de $\omega : U \rightarrow N$ et il admet même cochaîne fondamentale $\tilde{\tau}'$. On a un diagramme commutatif dans lequel toutes les flèches sont des projections de fibrés (Propriété 1.8. du chapitre I) :

$$(55) \quad \begin{array}{ccc} \partial T & \xrightarrow{\lambda} & M \\ \downarrow f|_{\partial T} & & \downarrow f|_M \\ \partial U & \xrightarrow{\omega} & N \end{array}$$

autrement dit, ∂T est l'espace total d'un fibré sur fibré de base N de deux manières différentes.

Notons g le morphisme de MDG :

$$g : \left[\underset{\tau_0}{K(N)} \otimes \underset{\tau}{C(F_0)} \right] \otimes \underset{\tau}{C(\partial D)} \rightarrow \left[\underset{\tau'}{K(N)} \otimes \underset{\tau'}{C(\partial D')} \right] \otimes \underset{\tau_1}{C(F)}$$

obtenu par composition $g = \hat{f}^{\tau'} \circ f^{\tau_1} \circ \nabla^{\tau} \circ (\tilde{\nu}^{\tau_0} \otimes 1)$.

Lemme 4.2.- Le diagramme suivant est commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccccc} \left[\underset{\tau_0}{K(N)} \otimes \underset{\tau}{C(F_0)} \right] \otimes \underset{\tau}{C(\partial D)} & \xrightarrow{\tilde{\nu}^{\tau_0} \otimes 1} & \underset{\tau}{C(M)} \otimes \underset{\tau}{C(\partial D)} & \xrightarrow{\nabla^{\tau}} & \underset{\tau}{C(\partial T)} \\ \downarrow g & & & & \downarrow f^{\tau_1} \\ \left[\underset{\tau'}{K(N)} \otimes \underset{\tau'}{C(\partial D')} \right] \otimes \underset{\tau_1}{C(F)} & \xrightarrow{\tilde{\nu}^{\tau'} \otimes 1} & & & \underset{\tau_1}{C(\partial U)} \otimes \underset{\tau_1}{C(F)} \end{array}$$

De plus, le morphisme composé $(\tilde{\nu}^{\tau'} \otimes 1) \circ g$ respecte les filtrations suivantes :

$$\begin{aligned} F_p \left[\underset{\tau_0}{K(N)} \otimes \underset{\tau}{C(F_0)} \right] \otimes \underset{\tau}{C(\partial D)} &= \left[\underset{\tau_0}{K(N^{(p)})} \otimes \underset{\tau}{C(F_0)} \right] \otimes \underset{\tau}{C(\partial D)} \\ F_p \left[\underset{\tau'}{C(\partial U)} \otimes \underset{\tau_1}{C(F)} \right] &= \underset{\tau_1}{C(\partial U^{(p)})} \otimes \underset{\tau_1}{C(F)} \end{aligned}$$

où ∂U^p désigne $\omega^{-1}(N^{(p)})$ (restriction du fibré $\omega : \partial U \rightarrow N$ au p -squelette de N).

Démonstration.- On montre d'abord que l'on peut encore écrire le diagramme (55) en remplaçant chacun des fibrés par un fibré minimal associé (chapitre III). Le lemme est alors une conséquence directe de la proposition 3.1 ci-dessus et de la proposition 5 de l'Appendice 1.

5 - Triangulations adaptées.

Le but de ce paragraphe est de montrer le lemme 3.2 du chapitre V que l'on formule ainsi :

Proposition 5.1 - (lemme 3.2 du chapitre V) - Soient (Y, N) un espace C^0 -stratifié triangulable et U un voisinage tubulaire de N dans Y , notons $\omega : \partial U \rightarrow N$ la projection de ∂U sur N en tant que fibré et posons $v = \dim(Y-N) - \dim N$. Le triple (Y, N, U) admet une triangulation adaptée, c'est-à-dire compatible avec des triangulations (K_1) de N et (K_2) de ∂U et telle que, pour tout simplexe σ de dimension q de (K_1) , $\omega^{-1}(\sigma)$ soit un sous-complexe de dimension $q+v-1$ de (K_2) .

On utilisera, pour la démonstration, les lemmes suivants relatifs aux extensions de triangulations :

Lemme 5.2.- ($[32]$, $[34]$) - Soit Y un espace triangulable et Y' un sous-espace triangulable non nécessairement connexe de Y , pour toute triangulation simpliciale (K) de Y' , il existe une triangulation simpliciale de Y coïncidant sur Y' avec une sous-triangulation (K') de (K) .

Lemme 5.3.- ($[1]$) - Soit Y une variété P.L. compacte et Y' une sous-variété P.L. compacte de Y , toute triangulation de Y' peut être étendue à une triangulation de Y .

Lemme 5.4.- ([1]) - Soit Y une variété P.L., à bord, compacte, toute triangulation du bord de Y peut être étendue à Y .

Lemme 5.5.- Soient (Y, N) un espace C^0 -stratifié triangulable et U un voisinage tubulaire de N dans Y . Posons $v = \dim(Y-N) - \dim N$. On peut construire des triangulations (K_1) et (K_2) de N et ∂U respectivement, telles que, pour tout simplexe σ de dimension q de (K_1) , $\omega^{-1}(\sigma)$ soit un sous-complexe de dimension $q+v-1$ de (K_2) .

Démonstration.- On appelle (K_1) une triangulation simpliciale de N assez fine pour que tout simplexe de (K_1) soit contenu dans un ouvert de trivialisatation du fibré $\omega : \partial U \rightarrow N$. On construit (K_2) au-dessus des squelettes de dimensions successives de (K_1) :

Au-dessus de tout sommet x de (K_1) , on se donne une triangulation de la fibre $\omega^{-1}(x)$.

Supposons construite la triangulation de ∂U au-dessus de $(q-1)$ -squelette de (K_1) . Au-dessus de tout simplexe σ de dimension q de (K_1) , le fibré $\omega : \partial U \rightarrow N$ est trivial, $\omega^{-1}(\sigma)$ est homéomorphe à une variété produit dont le bord est triangulé. D'après le lemme 5.4., il existe une triangulation de $\omega^{-1}(\sigma)$ compatible avec la triangulation de son bord.

On obtient ainsi une triangulation (K_2) de ∂U . Comme la fibre de $\omega : \partial U \rightarrow N$ est de dimension $v-1$ (Propriété 1.2 du chapitre I), pour tout simplexe σ de dimension q de (K_1) , $\omega^{-1}(\sigma)$ est un sous-complexe de dimension $q+v-1$ de (K_2) .

Démonstration de la proposition 5.1.- Nous la faisons dans le cas non nécessairement compact. Si Y et N sont compacts, le lemme 5.3 simplifie plusieurs passages de la démonstration.

On se donne une triangulation (K') de U compatible avec une triangulation de N et satisfaisant à la condition suivante :

Tout simplexe σ de (K') ayant au moins un sommet dans N ne rencontre pas ∂U .

Ceci peut se faire en prenant arbitrairement une triangulation (K'_1) de N que l'on étend à U en une triangulation compatible avec une subdivision (K_1) de (K'_1) (lemme 5.2). Afin de satisfaire à la condition ci-dessus, on subdivise au besoin la triangulation de U .

En prenant au départ, pour (K'_1) , une triangulation assez fine pour que chaque simplexe soit contenu dans un ouvert de trivialisatation du fibré $\omega : \partial U \rightarrow N$, il en sera de même de (K_1) . On construit alors, comme au lemme 5.5, une triangulation (K_2) de ∂U telle que, pour tout simplexe de dimension q de (K_1) , $\omega^{-1}(\sigma)$ soit un sous-complexe de dimension $q+v-1$ de (K_2) .

Notons V l'ensemble des simplexes fermés de (K') dont au moins un sommet est situé dans N et V' le sous-complexe de V composé des simplexes de V n'ayant pas de sommet dans N . V' ne rencontre pas ∂U . On sait construire une triangulation (K) de $Y-\overset{0}{V}$ compatible avec une sous-triangulation de V' sur V' et de (K_2) sur ∂U .

Soit σ un simplexe de V et σ' la partie de σ située dans V' . Pour tout sommet a de σ situé dans N , on joint a aux sommets de la sous-triangulation de σ' (en faisant d'abord cette construction dans un simplexe type de \mathbb{R}^n homéomorphe à σ). On obtient ainsi une sous-triangulation de V compatible avec (K_1) sur N . La réunion de cette triangulation sur V et de (K) sur $Y-V$ fournit une triangulation, encore notée (K) , de Y satisfaisant à la proposition.

Lemme 5.6.- (Lemme 4.2 du chapitre VI) - Pour tout espace C^0 -stratifié triangulable (Y, N) et tout voisinage tubulaire U de N dans Y , on peut construire une triangulation cellulaire (D) de Y satisfaisant aux conditions suivantes :

- i) (D) est compatible avec une triangulation (K_2) sur $\partial U = U - \overset{\circ}{U}$,
- ii) toute cellule de (D) est transverse à N au sens suivant : il existe une triangulation (K_1) de N telle que, pour toute q -cellule σ de (D) , $\sigma^q \cap N$ soit un sous-complexe de dimension $q-v$ de (K_1) .
- iii) pour tout q -simplexe s de (K_1) , $\omega^{-1}(s)$ est un sous-complexe de dimension $q+v-1$ de (K_2) .
- iv) toute cellule de (D) est contractible.

Démonstration.- On considère d'abord une triangulation (K') de Y compatible avec une triangulation de N , assez fine pour que tout simplexe situé dans N soit contenu dans un ouvert de trivialisatation du fibré $\omega : \partial U \rightarrow N$ et pour que tout simplexe de (K') ayant un sommet dans N soit entièrement contenu dans $\overset{\circ}{U}$.

On appelle (D') la triangulation cellulaire duale de (K') construite à l'aide d'une subdivision barycentrique de (K') . (D') satisfait à (ii) et (iv). La réunion des cellules fermées de (D') qui rencontrent N est notée D'_1 . Dans le complexe cellulaire D'_1 , certaines cellules ne rencontrent pas N , on note leur réunion D_1 et $D''_1 = D'_1 - D_1$. D_1 est le bord de $Y - D''_1$. La restriction de la subdivision barycentrique de (K') à D_1 est notée (K'') .

On appelle (K_1) la restriction à N de la subdivision barycentrique de (K') et (K_2) une triangulation simpliciale de ∂U construite à partir de (K_1) (lemme 5.5) et satisfaisant à (iii). On construit alors, d'après le lemme 5.2, une triangulation simpliciale (K) de $Y - D''_1$ compatible avec une

sous-triangulation de (K'') sur D_1 et de (K_2) sur ∂U .

La réunion des cellules de (D') contenues dans D'_1 et des simplexes de (K) fournit une triangulation cellulaire (D) satisfaisant aux conditions de l'énoncé, d'où le lemme.

Application des triangulations adaptées.

On rappelle que $\tilde{\tau}'$ désigne une cochaine fondamentale associée au fibré $\omega : \partial U \rightarrow N$, de fibre $\partial D'$. Etant donnée une triangulation adaptée au triple (Y, N, U) , notons ζ le morphisme de MDG obtenu par composition :

$$K(N) \otimes_{\tau'} C(\partial D') \xrightarrow{\forall \tau'} C(\partial U) \xrightarrow{\bar{\beta}} K(\partial U) \xrightarrow{i} K(Y-\overset{\circ}{U})$$

dans laquelle $\bar{\beta}$ réalise avec l'injection canonique $\bar{\alpha} : K(\partial U) \rightarrow C(\partial U)$ une équivalence d'homotopie de complexes de chaînes et i est induit par l'injection canonique de ∂U dans $Y-\overset{\circ}{U}$.

Proposition 5.7.- Soit (K) une triangulation adaptée au triple (Y, N, U) , on a :

$$\zeta [K(N)^{(p)} \otimes C(\partial D')] \subset K((Y-\overset{\circ}{U})^{(p+v-1)}) .$$

Démonstration.- $\forall \tau'$ envoie $K(N)^{(p)} \otimes C(\partial D')$ dans $C(\partial U^p)$ (Proposition 3.3 du chapitre III). Le lemme 3.2 du chapitre III permet de montrer que $\bar{\beta}$ envoie $C(\partial U^p)$ dans $K(\partial U^p)$. Enfin, la triangulation (K) étant adaptée au triple (Y, N, U) , ∂U^p est un sous-complexe de dimension $p+v-1$ de la restriction de (K) à ∂U . On en déduit $K(\partial U^p) \subset K((\partial U)^{(p+v-1)})$ et la proposition.

6 - Démonstration de la proposition 7 (Introduction)-

Soit (X, M) un espace C^0 -stratifié à voisinage orientable, (Y, N) un espace C^0 -stratifié triangulable et $f : (X, M) \rightarrow (Y, N)$ une application C^0 -stratifiée de fibres (F, F_0) . On note U un voisinage tubulaire de N dans Y et (K) une triangulation adaptée au triple (Y, N, U) . Avec les notations des paragraphes 2, 3 et 4, on définit un morphisme

$$\hat{\Psi} : K(N) \otimes_{\tau_0} C(F_0) \rightarrow K(Y-U) \otimes_{\tau_1} C(F) \text{ par la composition :}$$

$$\hat{\Psi} = (i \otimes 1) \circ \beta \circ (\hat{V}^{\tau_1} \otimes 1) \circ g \circ \hat{\Psi} \circ j'' \circ i''$$

(voir le "grand" diagramme page 119). Le morphisme Ψ étant celui défini en (25) du chapitre V, on a :

Proposition 6.1.- Les morphismes Ψ et $\hat{\Psi}$ sont égaux à homotopie près (autrement dit, le "grand" diagramme commute à homotopie près).

Démonstration.- Ceci résulte des (ii), (iii) et (iv) du paragraphe 1 et des lemmes 2.1, 3.2, 4.1 et 4.2 ci-dessus

Proposition 6.2.- Le morphisme $\hat{\Psi}$ satisfait à :

$$\hat{\Psi}[K(N^{(p)}) \otimes C(F_0)] \subset K((Y-U)^{(p+v-1)}) \otimes C(F) .$$

Démonstration.- La proposition est une conséquence de la proposition 3.1 du chapitre III, des lemmes 3.2 et 4.2 et de la proposition 5.7 ci-dessus.

La proposition 7 de l'introduction (proposition 3.3 du chapitre V) est une conséquence directe des propositions 6.1 et 6.2.

APPENDICE 1

FIBRES SUR FIBRES EN THÉORIE SEMI-SIMPLICIALE.

La plupart des notations employées dans cet appendice lui sont particulières.

On se propose d'étudier les relations entre les fonctions tordantes d'un fibré sur fibré. La proposition 5 sert, dans le paragraphe 4 du chapitre VII, à établir certains résultats concernant le respect de filtrations.

1 - Définitions préliminaires [5].

On rappelle ici quelques définitions classiques dans le but de préciser les notations utilisées par la suite.

Pour tout ensemble simplicial K , l'ensemble des p -simplexes sera noté K_p .

On définit la catégorie Δ^* dont les objets, notés Δ_n , sont les suites d'entiers $\Delta_n = (0, 1, \dots, n)$, $n \geq 0$, et les morphismes, les applications croissantes (au sens large) $\mu : \Delta_m \rightarrow \Delta_n$.

On utilisera les morphismes $\delta_i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$ et $\sigma_i : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$, $0 \leq i \leq n$, définis comme suit :

$$\delta_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j+1 & \text{si } j \geq i \end{cases} \quad \sigma_i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ j-1 & \text{si } j > i \end{cases}$$

Définition 1.- L'ensemble simplicial $\Delta[n]$, n -ème modèle classique de la théorie semi-simpliciale, est défini par :

$$(\Delta[n])_m = \text{Hom}(\Delta_m, \Delta_n)$$

les opérateurs face $\partial_i : (\Delta[n])_m \rightarrow (\Delta[n])_{m-1}$ et dégénérescence $s_i : (\Delta[n])_m \rightarrow (\Delta[n])_{m+1}$ étant donnés par :

$$\partial_i(\lambda) = \lambda \circ \delta_i \quad s_i(\lambda) = \lambda \circ \sigma_i .$$

Les opérateurs δ_i et σ_i induisent des applications simpliciales :

$$\delta_i : \Delta[n-1] \longrightarrow \Delta[n] \quad \sigma_i : \Delta[n+1] \longrightarrow \Delta[n]$$

$$\delta_i(\lambda) = \delta_i \circ \lambda \quad \sigma_i(\lambda) = \sigma_i \circ \lambda$$

En identifiant $\lambda \in \text{Hom}(\Delta_m, \Delta_n)$ avec son image $\lambda(\Delta_m)$, on note encore $\Delta_n \in \Delta([n])_n$ l'élément $\lambda = \text{identité de } \Delta_n$. On rappelle que si K est un ensemble simplicial et x un élément de K_n , il existe une et une seule application simpliciale $\bar{x} : \Delta[n] \rightarrow K$ telle que $\bar{x}(\Delta_n) = x$. Si ∂_i désigne également l'opérateur face de l'ensemble simplicial K , on a : $\overline{\partial_i x} = \bar{x} \circ \delta_i$

Définition 2.- Si $p : E \rightarrow B$ et $f : A \rightarrow B$ sont deux applications, on définit : $E^f = \{(x,a) \mid p(x) = f(a)\} \subset E \times A$ et les applications :

$$\begin{aligned} p^f : E^f &\longrightarrow A \quad , \quad p^f(x,a) = a \\ \tilde{f} : E^f &\longrightarrow E \quad , \quad \tilde{f}(x,a) = x . \end{aligned}$$

Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E^f & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ p^f \downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

est appelé produit fibré de p et f , et p^f est appelée application induite de p par f .

Définition 3.- Soit F un ensemble simplicial donné, une application simpliciale $p : E \rightarrow B$ est appelée fibré de fibre F si p est surjective et si pour tout $b \in B_n$, il existe un isomorphisme $\alpha(b)$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 F \times \Delta[n] & \xrightarrow{\alpha(b)} & E_{\bar{b}} & \xrightarrow{\sim b} & E \\
 \searrow p^* & & \swarrow p_{\bar{b}} & & \downarrow p \\
 & & \Delta[n] & \xrightarrow{\bar{b}} & B
 \end{array}$$

où p^* est l'application définie par $p^*(f,u) = u$, pour tout $f \in F$ et $u \in \Delta[n]$.

On appelle atlas du fibré, la donnée des isomorphismes $\{\alpha(b)\}$. Définissons $\beta(b) : F \times \Delta[n] \rightarrow E$ par la composition $\beta(b) = \sim b \circ \alpha(b)$, on a :

$$\alpha(b)(f,u) = (\beta(b)(f,u), u).$$

les données $\{\alpha(b)\}$ et $\{\beta(b)\}$ sont donc équivalentes.

G étant un groupe simplicial, on renvoie à [5] pour la définition des G -atlas, des G -fibrés et des fonctions tordantes. Dans toute la suite, on dira G -atlas pour G -atlas régulier au sens de [5], IV, lemme 2.5.

Soit $\hat{p} : Y \rightarrow B$ un G -fibré principal. Si G opère à gauche sur l'ensemble simplicial F , on note $F \times_G Y$ le quotient de $F \times Y$ par la relation d'équivalence suivante :

$$(56) \quad (f,y) \sim (f',y') \iff \exists g \in G, f = g.f', y' = y.g$$

Définition 4. - Le G -fibré de fibre F associé au fibré principal

$\hat{p} : Y \rightarrow B$ est le fibré $p : F \times Y \rightarrow B$ défini par $p(f,y) = \hat{p}(y)$.

Notons $E = F \times Y$, si $\{\hat{\alpha}(b)\}$ désigne un G -atlas du G -fibré principal $\hat{p} : Y \rightarrow B$, on définit un G -atlas de $p : E \rightarrow B$ par $\beta(b)(f,u) = [f, \hat{\beta}(b)(e_q, u)]$ où $u \in (\Delta[n])_q$, $b \in B_n$, $f \in F_q$, e_q est l'élément neutre de G_q et où le crochet signifie que l'on prend la classe d'équivalence pour la relation (56).

Réciproquement, si $\{\alpha(b)\}$ désigne un G -atlas de $p : E \rightarrow B$, on choisit pour tout $(f,u) \in (F \times \Delta[n])_q$ un représentant (f',y) de $x = \beta(b)(f,u)$ dans $F \times Y$. On définit un G -atlas du G -fibré principal auquel est associé $p : E \rightarrow B$ en posant $\hat{\beta}(b)(e_q, u) = y \cdot g$ (où $g \cdot f = f'$).

D'autre part, on sait que tout G -fibré simplicial $p : X \rightarrow B$ de fibre F peut être identifié à un produit cartésien tordu $F \times B$ au moyen d'une fonction tordante τ . Tous les G -fibrés associés à un même G -fibré principal admettent même fonction tordante τ dès que l'on se donne des G -atlas définis comme ci-dessus à partir d'un même G -atlas du fibré principal.

2 - Définition d'un fibré sur fibré (voir [8], P. 478).

Soit $p : X \rightarrow B$ un G -fibré de fibre F , on suppose que la fibre F est la base d'un G' -fibré $\pi : E \rightarrow F$ de fibre F' et que G est un groupe d'automorphismes du G' -fibré principal $\hat{\pi} : \hat{E} \rightarrow F$ auquel est associé $\pi : E \rightarrow F$.

Cela signifie qu'il existe un homomorphisme de G dans le groupe des homéomorphismes de $\hat{\pi} : \hat{E} \rightarrow F$ qui commutent avec l'action de G' . On note \hat{g} l'image de $g \in G$ par cet homomorphisme. Les homéomorphismes induits sur F (en tant que base de $\hat{\pi} : \hat{E} \rightarrow F$) sont ceux qui définissent l'action de G sur F dans le G -fibré $p : X \rightarrow B$.

L'homéomorphisme $1 \times \hat{g} : F' \times \hat{E} \rightarrow F' \times \hat{E}$ est compatible avec la relation d'équivalence qui définit $E = F' \times_{G'} \hat{E}$. G est alors un groupe d'homéomorphismes de E qui commute avec π .

On peut définir un G -fibré $\omega : T \rightarrow B$ de fibre E , associé au même G -fibré principal $\hat{p} : \hat{X} \rightarrow B$ que le G -fibré $p : X \rightarrow B$, en posant $T = E \times_G \hat{X}$. Comme l'action de G sur E commute avec π , π induit une application $\lambda : T \rightarrow X$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 E \times \hat{X} & \xrightarrow{\pi \times 1} & F' \times \hat{X} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T = E \times_G \hat{X} & \xrightarrow{\lambda} & F' \times_G \hat{X} = X
 \end{array}$$

où les flèches verticales sont les projections canoniques sur le quotient.

Les opérations de G et de G' sur \hat{E} commutent, l'espace $E \times_G \hat{X} = \hat{Z}$ peut être considéré comme espace d'un G' -fibré principal de base X , l'action de G' sur \hat{Z} étant définie par l'action de G' sur \hat{E} .

On a un isomorphisme :

$$F' \times_{G'} (\hat{E} \times_G \hat{X}) \simeq (F' \times_{G'} \hat{E}) \times_G \hat{X}$$

et $\lambda : T \rightarrow X$ est un G' -fibré de fibre F' associé au G' -fibré principal $\hat{\lambda} : \hat{Z} \rightarrow X$.

Dans les paragraphes suivants, on construit, pour le fibré sur fibré défini ci-dessus, des fonctions tordantes τ , τ' et τ'' telles que l'on ait un isomorphisme :

$$F' \times_{\tau''} (F \times_{\tau} B) \simeq (F' \times_{\tau'} F) \times_{\tau} B$$

et on établit les relations existant entre ces fonctions tordantes.

3 - Etude des atlas d'un fibré sur fibré.

Soit $\{\alpha(b)\}$ un G -atlas du G -fibré $p : X \rightarrow B$ de fibre F et $\{\alpha(f)\}$ un G' -atlas du G' -fibré $\pi : E \rightarrow F$ de fibre F' .
On définit, en fonction de $\{\alpha(b)\}$ et $\{\alpha(f)\}$, des atlas pour les fibrés $\omega : T \rightarrow B$ et $\lambda : T \rightarrow X$.

Atlas de $\omega : T \rightarrow B$

A l'aide du G -atlas $\{\alpha(b)\}$, on sait construire un G -atlas $\{\hat{\alpha}(b)\}$ pour le G -fibré principal $\hat{p} : \hat{X} \rightarrow B$ auquel est associé $p : X \rightarrow B$.
On définit alors un G -atlas $\{\alpha'(b)\}$ pour le G -fibré $\omega : T \rightarrow B$ comme suit :

Pour tout $b \in B_n$, on définit $\beta'(b) : E \times \Delta[n] \rightarrow T$ par :

$$\beta'(b)(y, u) = [y, \hat{\beta}(b)(e_q, u)]$$

où $y \in E_q$, $u \in (\Delta[n])_q$, e_q est l'élément neutre de G_q et où le crochet signifie que l'on prend la classe d'équivalence pour la relation (56).

$\alpha'(b) : E \times \Delta[n] \rightarrow T^{\bar{b}}$ est donc défini par $\alpha'(b)(y, u) = [(y, \hat{\beta}(b)(e_q, u)), u]$.

Du fait que l'action de G commute avec π , il vient :

Lemme 1.- Les atlas $\{\alpha(b)\}$ et $\{\alpha'(b)\}$ sont liés par la relation :

$$(57) \quad (\lambda \times 1) \circ \alpha'(b) = \alpha(b) \circ (\pi \times 1) .$$

autrement dit : $\lambda \circ \beta'(b) = \beta(b) \circ (\pi \times 1)$.

Atlas de $\lambda : T \rightarrow X$.

Il s'agit, pour tout x de X_n , de définir un isomorphisme

$$\alpha(x) : F' \times \Delta[n] \longrightarrow T^{\bar{x}}$$

dont la restriction à $\Delta[n]$ soit l'identité.

Etant donné $x \in X_n$, il lui correspond un élément unique b de B_n tel que $b = p(x)$ et un élément unique f de F_n tel que $(f, \Delta_n) = (\alpha(b))^{-1}(x, \Delta_n)$. On en déduit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 F' \times \Delta[n] & \xrightarrow{1 \times D} & F' \times \Delta[n] \times \Delta[n] & \xrightarrow{\alpha(f) \times 1} & E^{\bar{f}} \times \Delta[n] & \xrightarrow{\tilde{f} \times 1} & E \times \Delta[n] & \xrightarrow{\alpha'(b)} & T^{\bar{b}} & \xrightarrow{\tilde{b}} & T \\
 \downarrow p_2 & & \searrow \pi^* \times 1 & \swarrow \pi \bar{f} \times 1 & & & \downarrow \pi \times 1 & & \downarrow \lambda \times 1 & & \downarrow \lambda \\
 \Delta[n] & \xrightarrow{D} & \Delta[n] \times \Delta[n] & \xrightarrow{\bar{f} \times 1} & F \times \Delta[n] & \xrightarrow{\alpha(b)} & X^{\bar{b}} & \xrightarrow{\tilde{b}} & X & & \downarrow p \\
 & & & & \searrow p^* & \swarrow p \bar{b} & & & \Delta[n] & \xrightarrow{\bar{b}} & B
 \end{array}$$

(58)

où $p_2(f', u) = u$ pour tout $(f', u) \in F' \times \Delta[n]$ et où D désigne l'application diagonale.

Lemme 2. - \bar{x} coïncide avec la composition $\tilde{b} \circ \alpha(b) \circ (\bar{f} \times 1) \circ D$.

Démonstration. - Il suffit de montrer que l'image de Δ_n par l'application composée est x , ce qui est immédiat.

Lemme 3. - $E^{\bar{f}}$ est isomorphe à $T^{\bar{x}}$.

Démonstration. - On va montrer que $\alpha'(b)$ réalise cet isomorphisme.

On a :

$$E^{\bar{f}} = \{(y,u) \in E \times \Delta[n] \mid \pi(y) = \bar{f}(u)\}$$

et $\alpha'(b) : E \times \Delta[n] \rightarrow T^{\bar{b}}$ est un isomorphisme.

Soit $(y,u) \in E \times \Delta[n]$, on note $t = \beta'(b)(y,u)$.

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad \lambda(t) &= \lambda \circ \beta'(b)(y,u) = \beta(b) \circ (\pi \times 1)(y,u) \\ &= \beta(b)(\bar{f}(u), u) = \bar{x}(u). \end{aligned}$$

$\alpha'(b)$ est donc une application simpliciale de $E^{\bar{f}}$ dans $T^{\bar{x}}$, elle est injective. Reste à montrer la surjection.

Soit $(t,u) \in T^{\bar{x}}$, on a $\lambda(t) = \bar{x}(u)$, donc :

$$p \circ \lambda(t) = \omega(t) = p \circ \bar{x}(u) = \bar{b}(u)$$

et $(t,u) \in T^{\bar{b}}$. Notons $(y,u) = (\alpha'(b))^{-1}(t,u)$. Il s'agit de montrer que $\pi(y) = \bar{f}(u)$. En vertu de (57), il vient :

$$\alpha(b)(\pi(y), u) = (\lambda(t), u) = (\bar{x}(u), u). \text{ Mais on a aussi}$$

$\alpha(b)(\bar{f}(u), u) = (\bar{x}(u), u)$ et $\alpha(b)$ est un isomorphisme, on voit que $\pi(y) = \bar{f}(u)$ d'où $(y,u) \in E^{\bar{f}}$ et le résultat.

Proposition 1.- Soient $x \in X_n$, $b = p(x)$ et $f \in F_n$ tel que $(f, \Delta_n) = (\alpha(b))^{-1}(x, \Delta_n)$, la famille $\{\alpha(x)\}$ définie par :

$$\alpha(x) = \alpha'(b) \circ \alpha(f)$$

détermine un atlas de $\lambda : T \rightarrow X$.

Démonstration.- Au vu des lemmes précédents, la composition

$$F' \times \Delta[n] \xrightarrow{\alpha(f)} E^{\bar{f}} \xrightarrow{\alpha'(b)} T^{\bar{x}}$$

est un isomorphisme. D'autre part, sa restriction à $\Delta[n]$ est l'identité puisque :

$$\alpha(x)(f',u) = \alpha'(b) \circ \alpha(f)(f',u) = (\beta'(b)(\beta(f)(f',u), u), u)$$

Remarque 1.- Cette dernière égalité montre que la famille $\{\beta(x)\}$ correspondant à $\{\alpha(x)\}$ et telle que $\beta(x) : F' \times \Delta[n] \rightarrow T$ est définie par :

$$\beta(x)(f',u) = \beta'(b)(\beta(f)(f',u),u)$$

où $x \in X_n$, $b \in B_n$, $f \in F_n$, $f' \in F_q$ et $u \in (\Delta[n])_q$. $\beta(x)$ n'est autre que la composition des applications figurant dans la ligne horizontale supérieure du diagramme (58).

4 - Etude des fonctions tordantes d'un fibré sur fibré.

Les hypothèses étant celles du paragraphe 2, nous précisons ci-dessous les notations employées :

$p : X \rightarrow B$ est un G -fibré, de fibre F , d'atlas $\{\alpha(b)\}$ et de fonction tordante $\tau : B \rightarrow G$.

$\pi : E \rightarrow F$ est un G' -fibré, de fibre F' , d'atlas $\{\alpha(f)\}$ et de fonction tordante $\tau' : F \rightarrow G'$.

$\omega : T \rightarrow B$ est un G -fibré, de fibre E , d'atlas $\{\alpha'(b)\}$ défini ci-dessus et de fonction tordante $\tau''' : B \rightarrow G$

$\lambda : T \rightarrow X$ est un G' -fibré, de fibre F' , d'atlas $\{\alpha(x)\}$ décrit dans la proposition 1 et de fonction tordante $\tau'' : X \rightarrow G'$.

Rappelons la définition de la fonction tordante τ :

Soit $\alpha_o(b)$ l'isomorphisme défini par la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 F \times \Delta[n] & \xrightarrow{\alpha(b)} & X^{\bar{b}} \\
 \uparrow 1 \times \delta_o & & \uparrow 1 \times \delta_o \\
 F \times \Delta[n-1] & \xrightarrow{\alpha_o(b)} & X^{\partial_o b}
 \end{array}$$

On définit $\tilde{\tau}(b)$ comme étant l'isomorphisme rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 F \times \Delta[n-1] & & \\
 \downarrow \tilde{\tau}(b) & \searrow \alpha_o(b) & \\
 & X^{\partial_o b} & \xrightarrow{\beta_o(b)} X \\
 \uparrow \alpha(\partial_o b) & \nearrow \beta(\partial_o b) & \\
 F \times \Delta[n-1] & &
 \end{array}$$

La fonction tordante τ du G -fibré $p : X \rightarrow B$, associée à l'atlas $\{\alpha(b)\}$, est déterminée par $(\tau(b) \cdot (f,u), u) = \tilde{\tau}(b) (f,u)$.

Proposition 2.- Les atlas du fibré sur fibré étant ceux définis ci-dessus, on a $\tau = \tau''$.

Démonstration.- Les fibrés $p : X \rightarrow B$ et $\omega : T \rightarrow B$ sont deux G -fibrés associés au même G -fibré principal $\hat{p} : \hat{X} \rightarrow B$. La proposition découle de la remarque faite au paragraphe 1.

Soient $x \in X_n$ et $b = p(x)$, on détermine f et f_0 par :

$$(59) \quad \begin{cases} (f, \Delta_n) = (\alpha(b))^{-1} (x, \Delta_n) \\ (f_0, \Delta_{n-1}) = (\alpha(\partial_0 b))^{-1} (\partial_0 x, \Delta_{n-1}) \end{cases}$$

Définissons pour tout x le morphisme $\tilde{\tau}(b, f)$ par la composition :

$$\tilde{\tau}(b, f) = (\alpha(f_0))^{-1} \circ \tilde{\tau}(b) \circ \alpha(\partial_0 f)$$

Nous allons montrer, dans la suite du paragraphe, les résultats suivants :

Lemme 4.- Pour tout $x \in X_n$, $\tilde{\tau}(b, f)$ est un isomorphisme de $F' \times \Delta[n]$ dans lui-même.

Proposition 3.- Les atlas du fibré sur fibré étant ceux décrits au paragraphe 3, la fonction tordante $\tau'' : X \rightarrow G'$ du G' -fibré $\lambda : T \rightarrow X$ est définie par :

$$\tilde{\tau}''(x) = \tilde{\tau}(b, f) \circ \tilde{\tau}'(f)$$

pour tout $x \in X_n$, $b = p(x)$ et f défini en (59).

La démonstration de la proposition va consister à calculer $\tilde{\tau}''(x) = (\alpha(\partial_0 x))^{-1} \circ \alpha_0(x)$ où $\alpha(x)$ est déterminé par la proposition 1. Pour cela, on calcule successivement $\alpha(\partial_0 x)$ et $\alpha_0(x)$, puis on définit les isomorphismes $\tilde{\tau}(b, f)$ (lemme 4), enfin on démontre la proposition.

4.1. - Calcul de $\alpha(\partial_o x)$.-

Par définition (proposition 1), on a : $\alpha(\partial_o x) = \alpha'(b_o) \circ \alpha(f_o)$
 où $b_o = p(\partial_o x) = \partial_o b$ et $f_o \in F_{n-1}$ est donné en (59). Mais

$$(\partial_o x, \Delta_{n-1}) = \alpha(\partial_o b) (\tau(b)(\partial_o f, \Delta_{n-1}), \Delta_{n-1})$$

d'où $f_o = \tau(b) (\partial_o f, \Delta_{n-1})$

Lemme 5.- $\alpha'(\partial_o b)$ est un isomorphisme de $E^{\overline{f_o}}$ sur $T^{\overline{\partial_o x}}$.

Démonstration.- Soit $(y, u) \in E^{\overline{f_o}} \subset E \times \Delta[n-1]$, on a :

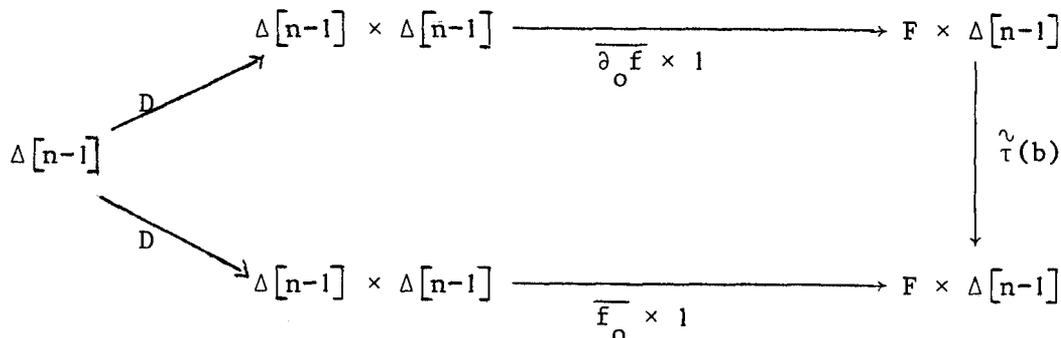
$$\alpha'(\partial_o b) (y, u) = (\beta'(\partial_o b)(y, u), u) = (t, u)$$

en notant $t = \beta'(\partial_o b) (y, u)$. Il vient :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \beta(\partial_o b) (\pi \times 1) (y, u) = \beta(\partial_o b) (\overline{f_o}(u), u) \\ &= \beta(\partial_o b) (\tilde{\tau}(b) (\overline{\partial_o f}(u), u)) \end{aligned}$$

d'après le lemme 6 ci-dessous. Les applications simpliciales $\overline{\partial_o x} : \Delta[n-1] \rightarrow X$
 et $\beta(\partial_o b) \circ \tilde{\tau}(b) \circ (\overline{\partial_o f} \times 1) \circ D : \Delta[n-1] \rightarrow X$ coïncident pour $u = \Delta_{n-1}$,
 elles sont donc égales. On a : $\lambda(t) = \overline{\partial_o x}(u)$ donc, $(t, u) \in T^{\overline{\partial_o x}}$. De même
 qu'au lemme 3 on montre la surjection.

Lemme 6.- Le diagramme suivant est commutatif :



4.2. - Calcul de $\alpha_o(x)$.-

Par définition, $\alpha_o(x)$ est l'isomorphisme $\alpha_o(x) : F' \times \Delta[n-1] \rightarrow T^{\frac{\partial_o x}{}}$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 F' \times \Delta[n] & \xrightarrow{\alpha(x)} & T^{\bar{x}} \\
 \uparrow 1 \times \delta_o & & \uparrow 1 \times \delta_o \\
 F' \times \Delta[n-1] & \xrightarrow{\alpha_o(x)} & T^{\frac{\partial_o x}{}}
 \end{array}$$

On sait que $\alpha(x) = \alpha'(b) \circ \alpha(f)$ et on a les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 F' \times \Delta[n] & \xrightarrow{\alpha(f)} & E^{\bar{f}} \\
 \uparrow 1 \times \delta_o & & \uparrow 1 \times \delta_o \\
 F' \times \Delta[n-1] & \xrightarrow{\alpha_o(f)} & E^{\frac{\partial_o f}{}}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 E \times \Delta[n] & \xrightarrow{\alpha'(b)} & T^{\bar{b}} \\
 \uparrow 1 \times \delta_o & & \uparrow 1 \times \delta_o \\
 E \times \Delta[n-1] & \xrightarrow{\alpha'_o(b)} & T^{\frac{\partial_o b}{}}
 \end{array}$$

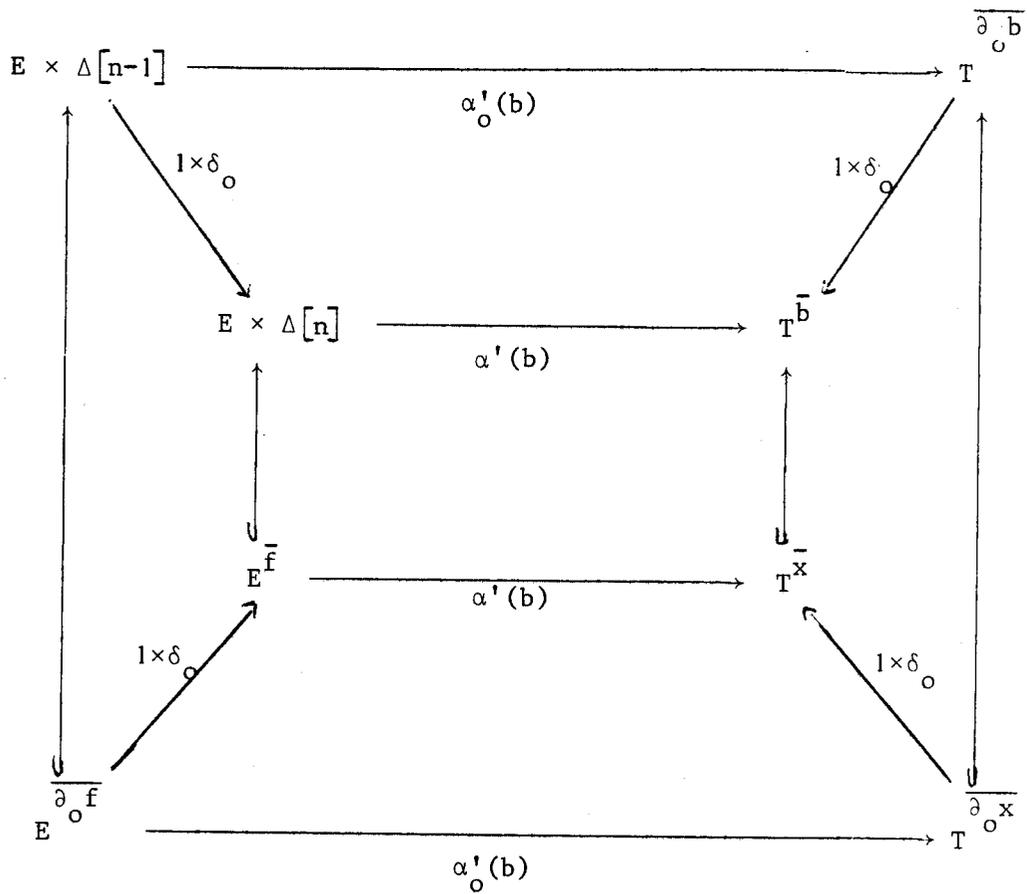
$\alpha_o(x)$ est donné par la proposition ci-dessous, conséquence directe des deux lemmes qui la suivent :

Proposition 4.- $\alpha_o(x)$ est le composé des isomorphismes :

$$F' \times \Delta[n-1] \xrightarrow{\alpha_o(f)} E^{\frac{\partial_o f}{}} \xrightarrow{\alpha'_o(b)} T^{\frac{\partial_o x}{}}$$

Lemme 7.- La restriction de $\alpha'_o(b) : E \times \Delta[n-1] \rightarrow T^{\frac{\partial_o b}{}}$ à $E^{\frac{\partial_o f}{}}$ est un isomorphisme sur $T^{\frac{\partial_o x}{}}$.

Démonstration.- On sait déjà (lemme 3) que la restriction de $\alpha'(b) : E \times \Delta[n] \rightarrow T^{\bar{b}}$ à $E^{\bar{f}}$ est un isomorphisme sur $T^{\bar{x}}$. Il suffit de montrer la commutativité du diagramme suivant :



Or, ceci vient de ce que, si (y, u) est dans $E^{\frac{\partial_0 f}{\partial_0 x}}$, $\alpha'_0(b)(y, u)$ est dans $T^{\frac{\partial_0 x}{\partial_0 x}}$. En effet, par définition de $\alpha'_0(b)$, on a :

$$\alpha'_0(b)(y, u) = (\beta'(b)(y, \delta_0 u), u)$$

Posons $t' = \beta'(b)(y, \delta_0 u)$, il vient :

$$\begin{aligned} \lambda(t') &= \beta(b) \circ (\pi \times 1)(y, \delta_0 u) = \beta(b) \left(\overline{\partial_0 f}(u), \delta_0 u \right) \\ &= \beta(b) \circ (\overline{\partial_0 f}, \delta_0) \circ D(u) . \end{aligned}$$

Pour $u = \Delta_{n-1}$, on a :

$$\lambda(t') = \beta(b) \left(\partial_0 f, \delta_0 \Delta_{n-1} \right) = \partial_0 (\beta(b)(f, \Delta_n)) = \partial_0 x$$

d'où le résultat.

Lemme 8. - Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 F' \times \Delta[n] & \xrightarrow{\alpha(f)} & E^{\bar{f}} & \xrightarrow{\alpha'(b)} & T^{\bar{x}} \\
 \uparrow 1 \times \delta_o & & \uparrow 1 \times \delta_o & & \uparrow 1 \times \delta_o \\
 F' \times \Delta[n-1] & \xrightarrow{\alpha_o(f)} & E^{\frac{\partial_o f}{o}} & \xrightarrow{\alpha'_o(b)} & T^{\frac{\partial_o x}{o}}
 \end{array}$$

4.3. - Définition de $\tilde{\tau}(b, f)$.-

La situation présente est un cas particulier d'une situation plus générale que nous étudions en premier lieu :

a) Cas d'un fibré principal.

Soit $\hat{\pi} : P \rightarrow F$ un G' -fibré principal pour lequel on s'est donné un G' -atlas $\{\hat{\alpha}(f)\}$. Soit G un groupe d'automorphismes de $\hat{\pi} : P \rightarrow F$. On a un homomorphisme $g \rightsquigarrow \hat{g}$ de G dans le groupe des homéomorphismes de $\hat{\pi} : P \rightarrow F$ qui commutent avec l'action de G' .

Si $f \in F_n$, on définit $\overline{gf} : \Delta[n] \rightarrow F$ comme étant l'unique application simpliciale telle que $\overline{gf}(\Delta_n) = \hat{g}f$. L'application $\hat{g} \times 1 : P^{\bar{f}} \rightarrow P^{\overline{gf}}$ est un isomorphisme puisque $\hat{g} : P \rightarrow P$ et $\hat{g} : F \rightarrow F$ le sont. On en déduit donc, pour tout couple $(g, f) \in G \times F$, un isomorphisme :

$$\tilde{\varphi}_{(g, f)} = (\hat{\alpha}(\hat{g}f))^{-1} \circ (\hat{g} \times 1) \circ (\hat{\alpha}(f)) : G' \times \Delta[n] \rightarrow G' \times \Delta[n] .$$

il dépend a priori de f .

b) Cas d'un fibré associé à un fibré principal.

Soit $\pi : E \rightarrow F$ un G' -fibré de fibre F' , associé au G' -fibré principal $\hat{\pi} : P \rightarrow F$. Soit G un groupe d'automorphismes de $\hat{\pi} : P \rightarrow F$.

On définit une opération de G comme groupe d'homéomorphismes de

$\pi : E \rightarrow F$ par :

$$1 \times \hat{g} : F' \times P \longrightarrow F' \times P$$

D'autre part, la donnée d'un G' -atlas $\{\hat{\alpha}(f)\}$ de $\hat{\pi} : P \rightarrow F$ détermine un G' -atlas $\{\alpha(f)\}$ de $\pi : E \rightarrow F$ (paragraphe 1).

On note toujours le passage à la classe d'équivalence de la relation (56) par un crochet. Dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} F' \times_{G'} (G' \times \Delta[n]) & \xrightarrow{[1 \times \hat{\alpha}(\hat{g}f)]} & F' \times_{G'} \overline{P}^{\hat{g}f} \\ \uparrow [1 \times \tilde{\psi}_{(g,f)}] & & \uparrow [1 \times \hat{g} \times 1] \\ F' \times_{G'} (G' \times \Delta[n]) & \xrightarrow{[1 \times \hat{\alpha}(f)]} & F' \times_{G'} \overline{P}^{\hat{f}} \end{array}$$

l'image par $1 \times \tilde{\psi}_{(g,f)}$ d'une classe représentée par un élément (f', e, u) (avec e élément neutre de G') est la classe de :

$$(1 \times \tilde{\psi}_{(g,f)})(f', e, u) = (f', \psi_{(g,f)}(e, u), u)$$

c'est-à-dire la classe de $(\psi_{(g,f)}(e, u) \cdot f', e, u)$.

Définissons les applications :

$$\mu : F' \times \Delta[n] \longrightarrow F' \times_{G'} (G' \times \Delta[n]) \quad \text{et} \quad \nu : E^{\hat{f}} \longrightarrow F' \times_{G'} \overline{P}^{\hat{f}}$$

par :

$$\mu(f', u) = [f', (e_q, u)] \quad \nu(x, u) = [f'_1, (y, u)]$$

où $f' \in F'_q$, $u \in (\Delta[n])_q$, e_q est l'élément neutre de G'_q , $x \in E_q$, $y \in P_q$ et où (f'_1, y) représente $x \in E$ dans $F' \times P$. Ces applications sont des isomorphismes. On a $\alpha(f)(f', u) = \nu^{-1} [f, \hat{\alpha}(f)(e_q, u)]$. Le diagramme précédent s'identifie donc au diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 F' \times \Delta[n] & \xrightarrow{\alpha(\widehat{g}f)} & E^{\overline{g}f} \\
 \uparrow \tilde{\Psi}_{(g,f)} & & \uparrow [1 \times \widehat{g} \times 1] \\
 F' \times \Delta[n] & \xrightarrow{\alpha(f)} & E^{\overline{f}}
 \end{array}$$

Il vient, pour tout $g \in G_n$ et tout $f \in F_n$, un isomorphisme

$$\tilde{\Psi}_{(g,f)} = [1 \times \tilde{\Psi}_{(g,f)}] : F' \times \Delta[n] \longrightarrow F' \times \Delta[n]$$

tel que :

$$\tilde{\Psi}_{(g,f)}(f', u) = (\Psi_{(g,f)}(e, u) \cdot f', u)$$

c) Cas d'un fibré sur fibré.

Dans les hypothèses du début du paragraphe, le groupe simplicial G est un groupe d'automorphismes du fibré principal auquel est associé le fibré $\pi : E \rightarrow F$. Pour tout $b \in B_n$, on a $\tau(b) \in G_{n-1}$. On peut appliquer la construction précédente avec, entre autres, pour $f \in F_n$ et $g = \tau(b)$:

$$\widehat{g} \cdot \partial_0 f = \tau(b) (\partial_0 f, \Delta_{n-1}) = f_0$$

Il vient un isomorphisme $[1 \times \widehat{\tau}(b) \times 1] : E^{\overline{\partial_0 f}} \longrightarrow E^{\overline{f_0}}$ qui

n'est autre que $\tilde{\tau}(b)$. En effet, par les lemmes 5 et 7, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 E^{\overline{\partial_0 f}} & \xrightarrow{\alpha'_0(b)} & T^{\overline{\partial_0 x}} & \xrightarrow{(\alpha'(\partial_0 b))^{-1}} & E^{\overline{f_0}} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 E \times \Delta[n-1] & \xrightarrow{\alpha'_0(b)} & T^{\overline{\partial_0 b}} & \xrightarrow{(\alpha'(\partial_0 b))^{-1}} & E \times \Delta[n-1] \\
 & & & & \nearrow \tilde{\tau}(b)
 \end{array}$$

$\tilde{\tau}(b, f) = \tilde{\psi}_{(\tau(b), \partial_0 f)}$ est un isomorphisme de $F' \times \Delta[n-1]$ dans lui-même.

Il est égal à

$$(\alpha(f_0))^{-1} \circ \tilde{\tau}(b) \circ \alpha(\partial_0 f)$$

On en déduit le lemme 4.

4.4. - Démonstration de la proposition 3. -

Par définition, $\tilde{\tau}''(x)$ est égal à $(\alpha(\partial_0 x))^{-1} \circ \alpha_0(x)$, où $\alpha(\partial_0 x) = \alpha'(\partial_0 b) \circ \alpha(f_0)$ et $\alpha_0(x) = \alpha'_0(b) \circ \alpha_0(f)$. Il vient donc :

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}''(x) &= (\alpha(f_0))^{-1} \circ (\alpha'(\partial_0 b))^{-1} \circ \alpha'_0(b) \circ \alpha_0(f) \\ &= (\alpha(f_0))^{-1} \circ \tilde{\tau}(b) \circ \alpha(\partial_0 f) \circ \tilde{\tau}'(f) \\ &= \tilde{\tau}(b, f) \circ \tilde{\tau}'(f) \quad \text{d'où la proposition.} \end{aligned}$$

5 - Une propriété des fibrés sur fibrés.

Soit $\pi : E \rightarrow F$ un fibré de fibre F' sur le fibré $p : X \rightarrow B$ de fibre F , les fonctions tordantes étant celles du paragraphe précédent, on a des isomorphismes :

$$C\left(\underset{\tau'}{(F' \times F)} \times B\right) \underset{\tau}{\cong} C(E \times B) \underset{\tau}{\cong} C(T) \underset{\tau''}{\cong} C\left(\underset{\tau''}{(F' \times X)}\right) \underset{\tau''}{\cong} C\left(\underset{\tau}{(F' \times (F \times B))}\right) .$$

Ces isomorphismes respectent toute filtration $F_p(B) = B^{(p)}$ de l'ensemble simplicial B , on a donc :

Proposition 5.- Les complexes de chaînes : $C((F' \times_{\tau'} F) \times_{\tau} B)$

et $C(F' \times_{\tau''} (F \times_{\tau} B))$ sont isomorphes. De plus, si $F_p(B) = B^{(p)}$ est une filtration de B , l'isomorphisme respecte les filtrations suivantes :

$$F_p \left[C((F' \times_{\tau'} F) \times_{\tau} B) \right] = C((F' \times_{\tau'} F) \times_{\tau} B^{(p)})$$

$$F_p \left[C(F' \times_{\tau''} (F \times_{\tau} B)) \right] = C(F' \times_{\tau''} (F \times_{\tau} B^{(p)}))$$

APPENDICE II

ISOMORPHISME DE THOM EN HOMOLOGIE DE BOREL-MOORE.

Cet appendice est un résumé d'un travail portant le même titre et publié aux Publications internes de l'UER de Mathématiques de l'Université de Lille I, n° 100. On renvoie à cette publication pour le détail des démonstrations.

L'objet de cet appendice est de montrer l'existence d'un isomorphisme de Thom en homologie de Borel-Moore. Les notations sont celles de [9], [10] et [27].

On se fixe une fois pour toutes un anneau principal Λ . Tous les faisceaux considérés sont des faisceaux de Λ -modules. Les espaces sont localement compacts. On note $f : X \rightarrow Y$ une application continue et $i : A \rightarrow X$ l'inclusion d'un sous-espace localement fermé de X dans X . Les familles de supports (ϕ, ψ, \dots) sont des familles de supports au sens de Cartan (paracompactifiantes). c désigne la famille de tous les compacts de X .

Pour tout espace X , F^*X désigne la résolution simpliciale de Godement du faisceau constant Λ sur X ([26] ; Chapitre II, 6.4.) et I^*X la résolution injective canonique du faisceau constant Λ sur X [9].

Pour tout faisceau F sur X et pour toute famille ϕ de supports sur X , $\Gamma_\phi(F)$ désigne l'ensemble des sections de F dont le support est un élément de la famille ϕ .

1 - Suites spectrales de Leray.

a) en cohomologie.

Notons $i(F^*A)$ le faisceau de base X , image directe de F^*A par i ([26] ; Chapitre II, 2.12.) et M^* le faisceau de base X , noyau de l'homomorphisme naturel

$$\alpha^* : F^*X \rightarrow i(F^*A).$$

Les groupes de cohomologie relative ([10] ; II, 12) sont définis par :

$$H_\phi^*(X, A; \Lambda) = H^*(\Gamma_\phi(M^*)).$$

L'image directe de M^* par f relativement à une famille ψ de supports sur X (c'est-à-dire le préfaisceau $U \rightarrow \Gamma_{\psi(U)}(M^*|_{f^{-1}(U)})$) ([27] ; 3.7.) est un faisceau de base Y , noté $f_\psi M^*$. Comme M^* est un faisceau flasque ([10] ; II, 12), $f_\psi M^*$ est ϕ -acyclique ([27] ; lemme 3.7.1.).

Le faisceau de Leray, en cohomologie, de f modulo $f|_A$ relativement à ψ et à coefficients dans le faisceau constant Λ est le faisceau dérivé du faisceau $f_\psi M^*$, on le note $H_\psi^*(f, f|_A; \Lambda)$.

Considérons le complexe double

$$(60) \quad C^{*,*} = \Gamma_\phi(F^*Y \otimes f_\psi M^*).$$

Théorème 1. - La suite spectrale du complexe double $C^{*,*}$ est la suite spectrale de Leray (en cohomologie) de f modulo $f|_A$ à coefficients dans le faisceau constant Λ :

$$E_2^{p,q}(C) = H_\phi^p(Y; H_\psi^q(f, f|_A; \Lambda)) \implies H_{\phi(\psi)}^{p+q}(X, A; \Lambda).$$

b) en homologie de Borel-Moore.

Notons $\mathcal{D}_*(I^*X)$ le faisceau différentiel gradué, dual de I^*X [9].

C'est un faisceau flasque et sans torsion.

Soit A un faisceau de base X , les groupes d'homologie de Borel-Moore de X relativement à la famille ϕ et à coefficients dans le faisceau A sont, par définition, les groupes :

$$H_p^\phi(X;A) = H_p(\Gamma_\phi(\mathcal{D}_*(I^*X) \otimes A)).$$

L'application naturelle $\alpha_* : i_c \mathcal{D}_*(I^*A) \rightarrow \mathcal{D}_*(I^*X)$ est une injection et son conoyau, noté N_* , est sans torsion ([9] et [10] ; V, 5).

Les groupes d'homologie relative sont définis par :

$$H_p^\phi(X,A;A) = H_p(\Gamma_\phi(N_* \otimes A)).$$

Le faisceau de Leray, en homologie, de f modulo $f|_A$, relativement à ψ et à coefficients dans le faisceau A est le faisceau dérivé de $f_\psi(N_* \otimes A)$, on le note $H_*^\psi(f, f|_A; A)$.

Considérons le complexe double

$$(61) \quad B_{*,*} = \Gamma_\phi(\mathcal{D}_*(I^*Y) \otimes f_\psi(N_* \otimes A)).$$

En se servant du fait que la résolution $f_\psi(N_* \otimes A)$ est ϕ -fine ([10] ; II, Théorème 9.12.) donc ϕ -acyclique, et de l'isomorphisme de dualité des variétés ([15] ; exposé 20), on montre :

Théorème 2.- Si Y est une n -variété homologique (n - hm_Λ de [9]) orientée, la suite spectrale du complexe double $B_{*,*}$ est la suite spectrale de Leray (en homologie) de f modulo $f|_A$ à coefficients dans le faisceau A . On a :

$$E_{p,q}^2(B) = H_p(Y; H_q^\psi(f, f|_A; A)) \implies H_{p+q-n}^{\phi(\psi)}(X,A;A).$$

2 - Cap-produits.

a) Cap-produit absolu.

Borel et Haefliger ([7], voir aussi [10]) ont défini, dans le cas absolu, un cap-produit :

$$(62) \quad H_p^\phi(X;A) \otimes H_\psi^q(X;B) \longrightarrow H_{p-q}^{\phi \cap \psi}(X;A \otimes B)$$

comme suit : en étendant la multiplication dans F^*X en un morphisme de résolutions $F^*X \otimes I^*X \rightarrow I^*X$, on obtient un accouplement

$$(63) \quad h : \mathcal{D}_*(I^*X) \otimes F^*X \rightarrow \mathcal{D}_*(I^*X)$$

et, pour tous faisceaux A et B sur X , une application bilinéaire :

$$(64) \quad \Gamma_\phi(\mathcal{D}_p(I^*X) \otimes A) \otimes \Gamma_\psi(F^qX \otimes B) \xrightarrow{\cap} \Gamma_{\phi \cap \psi}(\mathcal{D}_{p-q}(I^*X) \otimes A \otimes B)$$

satisfaisant à

$$(65) \quad d(f \cap s) = df \cap s + (-1)^p f \cap ds$$

b) Cap-produit relatif.

$\mathcal{D}_*(I^*A)$ est un faisceau différentiel gradué, c-mou et sans torsion [9]. On a donc un isomorphisme :

$$i_c(\mathcal{D}_*(I^*A) \otimes F^*A) \cong i_c(\mathcal{D}_*(I^*A)) \otimes i(F^*A)$$

([10] ; V, lemme 4.2.). On en déduit un accouplement (voir (63))

$$h_A : i_c(\mathcal{D}_*(I^*A)) \otimes i(F^*A) \rightarrow i_c(\mathcal{D}_*(I^*A)) .$$

Il satisfait à : $h(\alpha_*(a) \otimes b) = \alpha_*(h_A(a \otimes \alpha^*(b)))$,
pour tout $a \in i_c(\mathcal{D}_*(I^*A))$ et $b \in F^*X$.

Notons β^* l'injection canonique

$$\beta^* : M^* \rightarrow F^*X$$

et β_* la surjection canonique :

$$\beta_* : \mathcal{D}_*(I^*X) \rightarrow N_* .$$

Si $a' \in N_*$, $b' \in M^*$ et si a est un élément quelconque de $\mathcal{D}_*(I^*X)$ tel que $\beta_*(a) = a'$, on pose $h'(a' \otimes b') = \beta_*(h(a \otimes \beta^*(b')))$.

Proposition 1. - h' est une application bilinéaire bien définie $h' : N_* \otimes M^* \rightarrow N_*$.

On en déduit, pour tout faisceau A sur X , un accouplement :

$$(66) \quad (N_* \otimes A) \otimes M^* \longrightarrow N_* \otimes A$$

$$\text{d'où} \quad \Gamma_\phi(N_* \otimes A) \otimes \Gamma_{\psi|_{X-A}}(M^*) \rightarrow \Gamma_\phi \cap \psi|_{X-A}(N_* \otimes A)$$

et une application bilinéaire :

$$H_p^\phi(X, A; A) \otimes H_{\psi|_{X-A}}^q(X, A; \Lambda) \rightarrow H_{p-q}^{\phi \cap \psi|_{X-A}}(X, A; A).$$

Lemme 1. ([10] ; II, théorème 12.1). - Si A est ψ -rigide (" ψ -taut"), on a isomorphisme naturel

$$H_\psi^*(X, A; \Lambda) \simeq H_{\psi|_{X-A}}^*(X; \Lambda) = H_{\psi|_{X-A}}^*(X, A; \Lambda).$$

Il en résulte :

Théorème 3. - Soit A un sous-espace localement fermé et ψ -rigide (" ψ -taut") de X , la construction précédente définit un cap-produit relatif :

$$(67) \quad H_p^\phi(X, A; A) \otimes H_{\psi|_{X-A}}^q(X, A; \Lambda) \rightarrow H_{p-q}^{\phi \cap \psi|_{X-A}}(X; A)$$

compatible avec la restriction à un ouvert et avec l'agrandissement des familles de supports.

Propriété. - Soit $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ une application continue, A et B étant localement fermés dans X et Y respectivement, si B est ψ -rigide et A est $f^{-1}(\psi)$ -rigide, les applications naturelles

$$f_* : H_p^{\phi(c)}(X, A; f^*A) \rightarrow H_p^{\phi}(Y, B; A) \quad \text{et} \quad f^* : H_{\psi}^q(Y, B; \Lambda) \rightarrow H_{f^{-1}(\psi)}^q(X, A; \Lambda)$$

satisfont à :

$$f_*(a \cap f^*b) = f_*(a) \cap b .$$

c) Cap-produit des faisceaux de Leray :

Le cap-produit (67), écrit pour le couple $(f^{-1}(U), f^{-1}(U) \cap A)$, est compatible avec les restrictions dans U et définit un cap-produit des faisceaux engendrés :

$$(68) \quad H_p^{\phi}(f, f|_A; A) \otimes H_{\psi}^q(f, f|_A; \Lambda) \rightarrow H_{p-q}^{\phi \cap \psi}|_{X-A}(f; A).$$

Si A est vide, on peut faire la construction précédente en remplaçant le faisceau constant Λ par un faisceau B quelconque. Si $p = q = 0$, ceci montre que l'application naturelle :

$$(69) \quad f_{\phi}(A) \otimes f_{\psi}(B) \longrightarrow f_{\phi \cap \psi}(A \otimes B)$$

est un cap-produit.

d) Cap-produit des suites spectrales de Leray :

Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux familles de supports sur Y , ψ_1 et ψ_2 deux familles de supports sur X et A un faisceau sur X . Les applications (64), (69) et (66) donnent lieu à une application bilinéaire :

$$\Gamma_{\phi_1}(\mathcal{D}_*(I^*Y) \otimes f_{\psi_1}(N_* \otimes A)) \otimes \Gamma_{\phi_2}(F^*Y \otimes f_{\psi_2}(M^*)) \xrightarrow{\cap} \Gamma_{\phi_1 \cap \phi_2}(\mathcal{D}_*(I^*Y) \otimes f_{\psi_1 \cap \psi_2}(N_* \otimes A))$$

satisfaisant un analogue à (65) et notée, en termes de complexes doubles

$$\text{(voir (60) et (61)) : } B_{*,*} \otimes C^{*,*} \longrightarrow D_{*,*} .$$

Notons B_* , C^* , D_* les complexes totaux des complexes doubles correspondants, et filtrons ces complexes comme suit :

$$'F^t(B_n) = \sum_{p \leq t} B_{p, n-p} \quad 'F_t(C^n) = \sum_{p \geq t} C^{p, n-p} \quad 'F^t(D_n) = \sum_{p \leq t} D_{p, n-p}$$

On obtient sur les suites spectrales correspondant à ces filtrations un produit :

$$E_{p,q}^r(B) \otimes E_r^{s,t}(C) \rightarrow E_{p-s, q-t}^r(D) .$$

Sur les termes E^2 , le produit coïncide avec l'application :

$$H_p^{\phi_1}(Y; H_q^{\psi_1}(f, f|_A; A)) \otimes H_{\phi_2}^s(Y; H_{\psi_2}^t(f, f|_A; \Lambda)) \xrightarrow{\cap} H_{p-s}^{\phi_1 \cap \phi_2}(Y; H_{q-t}^{\psi_1 \cap \psi_2}|_{X-A}(f; A))$$

obtenue par composition des cap-produits (62) et (68).

Les suites spectrales correspondant aux filtrations :

$$''F^t(B_n) = \sum_{q \leq t} B_{n-q, q} \quad ''F_t(C^n) = \sum_{q \geq t} C^{n-q, q} \quad ''F^t(D_n) = \sum_{q \leq t} D_{n-q, q}$$

dégénèrent. Sur les termes E^∞ , le produit est compatible avec le cap-produit (67) :

$$H_u^{\phi_1(\psi_1)}(X, A; A) \otimes H_{\phi_2}^v(\psi_2)(X, A; \Lambda) \rightarrow H_{u-v}^\theta(X; A)$$

où $\theta = (\phi_1 \cap \phi_2)(\psi_1 \cap \psi_2|_{X-A})$.

3 - Isomorphisme de Thom.

Soit ξ un fibré localement trivial, en k -plans, sur une variété topologique Y orientée et de dimension n . On note X l'espace total du fibré et $f : X \rightarrow Y$ la projection dans ξ . Y s'identifie à la section nulle du fibré. On note $A = X-Y$, c la famille des compacts de X et $c' = c|_Y$.

Proposition 2.- $H_*^{c'}(f; \Lambda)$ est localement constant de fibres $H_*^{c'}(X, X - \{f^{-1}(y)\}; \Lambda)$.

En utilisant la suite exacte d'homologie de la triade propre $(X, A, X - f^{-1}(\bar{U}))$ (pour tout ouvert U de Y) et les propriétés des espaces HLC ([15] ; exposé 20), on montre que le faisceau $H_p^c(f, f|_A; \Lambda)$ est le faisceau engendré par le préfaisceau $U \rightarrow H_p(X, A \cup (X - f^{-1}(\bar{U})))$ (homologie singulière classique). On en déduit un isomorphisme naturel :

$$H_p^c(f, f|_A; \Lambda)_y \cong H_p(X, A \cup (X - \{f^{-1}(y)\})).$$

On en déduit :

Proposition 3.- $H_*^c(f, f|_A; \Lambda)$ est localement constant de fibres $H_*^c(X, X - \{y\}; \Lambda)$.

A l'aide de la formule de Künneth, on démontre la :

Proposition 4.- Soit B un faisceau sur Y , si, pour tout $y \in Y$, on a $\text{Tor}(H_{p-1}(X, X - \{f^{-1}(y)\}), B_y) = 0$, et si θ désigne l'une des familles de supports c ou c' , il vient un isomorphisme :

$$H_p^\theta(f; \Lambda) \otimes B = H_p^\theta(f; f^*B)$$

Corollaire.- Pour tout faisceau B sur Y , on a :

$$H_q^{c'}(f; f^*B) \cong \begin{cases} B & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases} \quad H_q^c(f, f|_A; f^*B) \cong \begin{cases} B & q = k + n \\ 0 & q \neq k + n \end{cases}$$

Posons $\phi_1 = \phi$, $\phi_2 = \{\text{fermés de } Y\}$, $\psi_1 = c$, $\psi_2 = \{\text{fermés de } X\}$ et $A = f^*B$. Les différentes suites spectrales de Leray de l'application f s'écrivent :

$$E_{p,q}^2(B) = H_p^\phi(Y ; H_q^c(f, f|_A; f^*B)) \implies H_{p+q-n}^{\phi(c)}(X, A; f^*B)$$

$$E_2^{p,q}(C) = H^p(Y ; H^q(f, f|_A; \Lambda)) \implies H^{p+q}(X, A; \Lambda)$$

$$E_{p,q}^2(D) = H_p^\phi(Y ; H_q^{c'}(f ; f^*B)) \implies H_{p+q-n}^{\phi(c')}(X ; f^*B)$$

Ces suites spectrales n'ont qu'un degré "fibre" non trivial. Il en résulte des isomorphismes :

$$H_p^\phi(Y; B) \cong H_{p+k}^{\phi(c)}(X, A; f^*B)$$

$$H^p(Y; \Lambda) \cong H^{p+k}(X, A; \Lambda)$$

$$H_p^\phi(Y; B) \cong H_p^{\phi(c')}(X ; f^*B)$$

Ce dernier isomorphisme est réalisé par l'application naturelle $f_* : H_p^{\phi(c')}(X; f^*B) \rightarrow H_p^\phi(Y; B)$.

Si le fibré ξ est orienté, le faisceau $H^q(f, f|_A; \Lambda)$ est un faisceau constant de fibres $H^q(F, F-\{0\}; \Lambda)$ (isomorphes à Λ pour $q = k$ et à 0 pour $q \neq k$) (voir le chapitre IV). Etant donnée une orientation de ξ , c'est-à-dire une section $\tau \in H^0(Y ; H^k(f, f|_A; \Lambda))$ telle que, pour tout $y \in Y$, $\tau(y)$ engendre la fibre en y , l'application $\cdot \cap \tau : E_{p, k+n}^r(B) \rightarrow E_{p, n}^r(D)$ est un isomorphisme pour $r = 2$, donc pour tout $r \geq 2$ et sur les aboutissants.

En notant encore τ l'élément de $H^k(X, A; \Lambda)$ déterminé par τ , et appelé classe de Thom de ξ , l'application :

$$\cdot \cap \tau : H_{p+k}^{\phi(c)}(X, A; f^*B) \rightarrow H_p^{\phi(c')}(X; f^*B).$$

est un isomorphisme.

Théorème 4.- Soit $f : X \rightarrow Y$ un fibré orienté en k -plans, de base une variété topologique orientée, l'application :

$$f_*(\cdot \cap \tau) : H_{p+k}^{\phi(c)}(X, X-Y; f^*B) \rightarrow H_p^\phi(Y; B)$$

est un isomorphisme, appelé isomorphisme de Thom. La classe $\tau \in H^k(X, A; \Lambda)$ est appelée classe de Thom de ξ .

4 - Applications.

a) Suite exacte de Gysin.

Soient $j^* : H^*(X, A; \Lambda) \rightarrow H^*(X; \Lambda)$ et $i^* : H^*(X; \Lambda) \rightarrow H^*(Y; \Lambda)$ (induite par l'injection $i : Y \rightarrow X$) les applications définies de façon naturelle. L'élément $\omega = i^* j^* \tau$ de $H^k(Y; \Lambda)$ est appelé classe d'Euler du fibré ξ .

Proposition 5.- Si $\pi : X \rightarrow Y$ est un fibré orientable en $(k-1)$ -sphères, pour toute famille ϕ , on a une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow H_p^\phi(Y; B) \xrightarrow{\cdot \cap \omega} H_{p-k}^\phi(Y; B) \rightarrow H_{p-1}^{\pi^{-1}(\phi)}(X; \pi^* B) \xrightarrow{\pi_*} H_{p-1}^\phi(Y; B) \rightarrow \dots$$

b) Cas où $B = A|_Y$.

Dans ce cas, on a un isomorphisme

$$H_*^{\phi(c)}(X, X-Y; f^* B) \cong H_*^{\phi(c)}(X, X-Y; A)$$

Proposition 6.- Si B est la restriction à Y d'un faisceau A sur X , l'isomorphisme de Thom s'écrit :

$$f_* (\cdot \cap \tau) : H_{p+k}^{\phi(c)}(X, X-Y; A) \xrightarrow{\cong} H_p^\phi(Y; A|_Y) .$$

Remarque.- Ceci est faux en cohomologie à valeurs dans un faisceau.

c) Suite exacte de Wang.

On l'obtient comme application de la suite spectrale de Leray :

Soit $\pi : X \rightarrow S^n$ un fibré localement trivial, de fibre F , on note c la famille des compacts de S^n , ψ une famille de supports sur X et θ

une famille de supports sur F telles que $c(\theta) \subset \psi$ et que, pour tout ouvert de trivialisatation U assez petit, on ait : $\psi \cap f^{-1}(U) \cong U \times \theta$.

Proposition 7.- Soit $\pi : X \rightarrow S^n$ un fibré de fibre F , on a une suite exacte longue :

$$\dots \rightarrow H_{q+1}^{\psi}(X) \rightarrow H_{q-n+1}^{\theta}(F) \xrightarrow{\Delta} H_q^{\theta}(F) \rightarrow H_q^{\psi}(X) \rightarrow \dots$$

B I B L I O G R A P H I E.

- [1] ARMSTRONG M.A. - *Extending triangulations*,
Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967), 701-704.
- [2] ANTOINE P. - *Notes sur les isomorphismes de Thom*,
d'après un cours de H. Cartan
Multigraphié, Lille 1964-65.
- [3] ANTONELLI P.L. - *Structure theory for Montgomery-Samelson
fiberings between manifolds I*,
Canadian J. Math., 21 (1969), 170-179.
- [4] ANTONELLI P.L. - *Montgomery-Samelson singular fiberings
of spheres*,
Proc. Amer. Math. Soc., 22 (1969), 247-250.
- [5] BARRATT-GUGENHEIM-MOORE - *On semisimplicial fibre-bundles*,
Am. J. Math., 81, (1959), 639-657.
- [6] BOREL A. - *Seminar on transformation groups*,
Annals of Mathematics Studies, 46,
Princeton University Press, 1960.
- [7] BOREL A. et HAEFLIGER A. - *La classe d'homologie fondamentale d'un
espace analytique (appendice)*,
Bull. Soc. Math. France, 89, (1961), 461-513.
- [8] BOREL A. et HIRZEBRUCH F. - *Characteristic Classes and Homogeneous Spaces*,
Am. J. Math., 80, (1958), 458-538.
- [9] BOREL A. et MOORE J.C. - *Homology theory for locally compact spaces*,
Michigan Math. Jour., 7, (1960), 137-159.
- [10] BREDON G.E. - *Sheaf Theory*,
Mac Graw Hill Series in Higher Mathematics, 1967.
- [11] BREDON G.E. - *Introduction to compact transformation groups*,
Academic Press, 1972.

- [12] BROWN E.H. - *Twisted tensor products*,
Ann. of Math., 69, (1959), 223-246.
- [13] BROWN M. - *Locally flat imbeddings of topological manifolds*,
Ann. of Math., 75 (1962), 331-341.
- [14] CARTAN H. - *Topologie Algébrique*,
Séminaire E.N.S., 1948-49.
- [15] CARTAN H. - *Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux*,
Séminaire E.N.S., 1950-51.
- [16] CARTAN H. - *Algèbres d'Eilenberg-Mac Lane et homotopie*,
Séminaire E.N.S., 1954-55.
- [17] CARTAN H. - *Quelques questions de topologie*,
Séminaire E.N.S., 1956-57.
- [18] CARTAN H. et EILENBERG S. - *Homological Algebra*,
Princeton Mathematical Series, 1956.
- [19] CONNER P.E. et DYER E. - *On singular fiberings by spheres*,
Mich. Math. J. 6, (1959), 303-311.
- [20] CONNER P.E. et FLOYD E.E. - *Differentiable periodic maps*,
Ergebnisse der Mathematik, Band 33,
Springer-Verlag, 1964.
- [21] EILENBERG S. - *Singular Homology Theory*,
Ann. of Math. 45, (1944), 407-447.
- [22] EILENBERG S. et MAC LANE S. - *Acyclic Models*,
Am. J. Math., 75, (1953), 189-199.
- [23] EILENBERG S. et STEENROD N. - *Foundations of Algebraic Topology*,
Princeton Mathematical Series, 1952.
- [24] FÁRY I. - *Valeurs critiques et Algèbres spectrales d'une application*,
Ann. of Math. 63, (1956), 437-490.

- [25] FÁRY I. - *Cohomologie des variétés algébriques*,
Ann. of Math. 65, (1957), 21-73.
- [26] GODEMENT R. - *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*,
Hermann, Paris, 1958.
- [27] GROTHENDIECK A. - *Sur quelques points d'algèbre homologique*,
Tohoku Math. Jour., 9, (1957), 119-221.
- [28] GUGENHEIM V.K.A.M. - *On a theorem of E.H. Brown*,
Ill. J. Math. 4, (1960), 292-311.
- [29] HIRSCH G. - *Sur les groupes d'homologie des espaces fibrés*,
Bull. Soc. Math. Belg. 6, (1954), 79-96.
- [30] HU S.T. - *Algebraic local invariants of topological spaces*,
Compositio Math. 13 (1958), 173-218.
- [31] HU S.T. - *On fiberings with singularities*,
Mich. Math. J. 6, (1959), 131-149.
- [32] HUDSON J.F.P. - *Piecewise linear Topology*,
Benjamin, 1969.
- [33] LEFSCHETZ S. - *Introduction to Topology*,
Princeton Mathematical Series, 1951.
- [34] LEFSCHETZ S. et WHITEHEAD J.H.C. - *On analytical complexes*,
Trans. Amer. Math. Soc., 35, (1933), 510-517.
- [35] MAHOWALD M. - *On singular fiberings*,
Canadian J. Math. 15, (1963), 214-219.
- [36] MILNOR J.W. et STASHEFF J.D. - *Characteristic classes*,
Annals of Mathematics Studies, 76
Princeton University Press, 1974.
- [37] MONTGOMERY D. et SAMELSON H. - *Fiberings with singularities*,
Duke Math. J. 13, (1946), 51-56.

- [38] SERRE J.P. - *Homologie singulière des espaces fibrés*,
Ann. of Math. 54, (1951), 425-505.
- [39] SHIH W. - *Homologie des espaces fibrés*,
Publications Mathématiques, IHES, n° 13.
- [40] STEENROD N. - *The topology of fibre bundles*,
Princeton University Press (1951).
- [41] THOM R. - *Ensembles et morphismes stratifiés*,
Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), 240-284.
- [42] TIMOURIAN J.G. - *Fiber bundles with discrete singular set*,
J. Math. Mech., 18, (1968), 61-70.
- [43] Proceedings of the conference on transformation groups
New-Orleans, (1967) - Springer-Verlag, 1968.



SECONDE THÈSE :

SUR LES POLYNÔMES DE BERNSTEIN
ET LA MONODROMIE, D'APRÈS B. MALGRANGE.

*CETTE SECONDE THESE FAIT L'OBJET D'UNE
PUBLICATION INTERNE DE L'UER DE MATHEMATIQUES,
UNIVERSITE DE LILLE I, n° 113*

