DOYENS HONORAIRES de l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, SAVART, WATERLOT, WIEMAN, ZAMANSKI.

PRESIDENTS HONORAIRES DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R. DEFRETIN, M. PARREAU.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. J. LOMBARD.

PROFESSEURS TITULAIRES

M.	BACCHUS Pierre	Astronomie
M.	BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Physique
M.	BECART Maurice	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BILLARD Jean	Physique du Solide
M.	BIAYS Pierre	Géographie
M.	BONNEMAN Pierre	Chimie Appliquée
M.	BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M.	BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M.	BOUGHON Pierre	Algèbre
M.	BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M.	CELET Paul	Géologie Générale
M.	CONSTANT Eugène	Electronique
M.	DECUYPER Marcel	Géométrie
M.	DELATTRE Charles	Géologie Générale
M.	DELHAYE Michel	Chimie Physique
M.	DERCOURT Michel	Géologie Générale
M.	DURCHON Maurice	Biologie Expérimentale
M.	FAURE Robert	Mécanique
M.	FOURET René	Physique du Solide
M.	GABILLARD Robert	Electronique
M.	GLACET Charles	Chimie Organique
M.	GONTIER Gérard	Mécanique
M.	GRUSON Laurent	Algèbre
M.	GUILLAUME Jean	Microbiologie
M.	HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M.	LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique
M.	LANSRAUX Guy	Physique Atomique et Moléculaire
M.	LAVEINE Jean-Pierre	Paléontologie
M.	LEBRUN André	Electronique
M.	LEHMANN Daniel	Géométrie

.../...

Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M.	LINDER Robert	Biologie et Physiologie Végétales
M.	LOMBARD Jacques	Sociologie
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M.	LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M.	MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M.	MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M.	MONTREUIL Jean	Biochimie
M.	PARREAU Michel	Analyse
M.	POUZET Pierre	Analyse Numérique
M.	PROUVOST Jean	Minéralogie
M.	SALMER Georges	Electronique
M.	SCHILTZ René	Physique Atomique et Moléculaire
Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Géométrie
M.	SEGUIER Guy	Electrotechnique
M.	TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée
M.	VIDAL Pierre	Automatique
M.	VIVIER Emile	Biologie Cellulaire
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique Atomique et Moléculaire
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.	BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BODARD Marcel	Biologie Végétale
M.	BOILLET Pierre	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M.	BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M.	CAPURON Alfred	Biologie Animale
M.	CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des entreprises
M.	DEPREZ Gilbert	Physique Théorique
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M.	GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M.	LACOSTE Louis	Biologie Végétale
Mme	LEHMANN Josiane	Analyse
M.	LENTACKER Firmin	Géographie
M.	LOUAGE Francis	Electronique
Mle	MARQUET Simone	Probabilités
M.	MIGEON Michel	Chimie Physique
M.	MONTEL Marc	Physique du Solide
M.	PANET Marius	Electrotechnique
M.	RACZY Ladislas	Electronique
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M.	SLIWA Henri	Chimie Organique

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés d'Enseignement)

M.	ADAM Michel	Sciences Economiques
M.	ANTOINE Philippe	Analyse
M.	BART André	Biologie Animale
M.	BEGUIN Paul	Mécanique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
M.	BOSCQ Denis	Probabilités
M.	BREZINSKI Claude	Analyse Numérique
M.	BRUYELLE Pierre	Géographie

.../...

M. CARREZ Christian	Informatique
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. COQUERY Jean-Marie	Psycho-Physiologie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DEBENEST Jean	Sciences Economiques
M. DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M. DHAINAUT André	Biologie Animale
M. DELAUNAY Jean-Claude	Sciences Economiques
M. DERIEUX Jean-Claude	Microbiologie
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique du Solide
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du Solide
Me EVRARD Micheline	Chimie Appliquée
M. FONTAINE Jacques-Marie	Electronique
M. FOURNET Bernard	Biochimie
M. FORELICH Daniel	Chimie Physique
M. GAMBLIN André	Géographie
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M. GUILLAUME Henri	Sciences Economiques
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JOURNEL Gérard	Physique Atomique et Moléculaire
Mle KOSMAN Yvette	Géométrie
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LAURENT François	Automatique
Mle LEGRAND Denise	Algèbre
Mle LEGRAND Solange	Algèbre
M. LEROY Jean-Marie	Chimie Appliquée
M. LEROY Yves	Electronique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique Théorique
M. LOUCHET Pierre	Sciences de l'Education
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAHIEU Jean-Marie	Physique Atomique et Moléculaire
Me N'GUYEN VAN CHI Régine	Géographie
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MALAUSSENA Jean-Louis	Sciences Economiques
M. MESSELYN Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. MONTUELLE Bernard	Biologique Appliquée
M. NICOLE Jacques	Chimie Appliquée
M. PAQUET Jacques	Géologie Générale
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie Physique
M. PERROT Pierre	Chimie Appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie Animale
M. PONSOLLE Louis	Chimie Physique
M. POVY Lucien	Automatique
M. RICHARD Alain	Biologie
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROY Jean-Claude	Psycho-Physiologie
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SOMME Jean	Géographie
Mle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. STEEN Jean-Pierre	Informatique

.../...

M.	THERY Pierre	Electronique
M.	TOULOTTE Jean-Marc	Automatique
M.	TREANTON Jean-René	Sociologie
M.	VANDORPE Bernard	Chimie Minérale
M.	VILLETTE Michel	Mécanique
M.	WALLART Francis	Chimie
M.	WERNIER Georges	Informatique
M.	WATERLOT Michel	Géologie Générale
Mme	ZINN-JUSTIN Nicole	Algèbre

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur P. Bacchus pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

J'exprime ma plus profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur P. Huard qui a bien voulu me confier ce travail. Le temps qu'il m'a consacré et ses précieux conseils ont contribué de façon décisive à sa réalisation.

Je suis très honoré de la présence parmi les membres du jury de Monsieur le Professeur P. Boughon, qui a favorisé ma venue en France et dont l'aide m'a été précieuse dans le choix du programme d'études que j'ai suivi pendant mon séjour.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur P. Pouzet qui s'est intéressé à ce travail et a bien voulu l'examiner. J'ai suivi avec profit ses enseignements lors de la préparation du D.E.A en Mathématiques Appliquées dont il est le responsable.

Que Messieurs les professeurs P. Huard, J. Vaillant et J.P. Yvon soient également remerciés pour leurs enseignements dans le cadre de cette même préparation.

Je suis très reconnaissant envers Monsieur C. Brezinski, Maître de Conférences au Laboratoire de Calcul, pour avoir accepté de juger ce travail et pour m'avoir accueilli à plusieurs reprises dans le Séminaire d'Analyse Numérique et d'Optimisation qu'il anime.

Je remercie les membres des équipes d'Optimisation et d'Analyse Numérique du Laboratoire de Calcul pour les échanges et encouragements amicaux qui ont jalonné l'élaboration de ce travail. Je suis de plus reconnaissant envers Jean Beuneu dont l'apport constant m'a été précieux pour une meilleure connaissance de la langue française.

Que tous mes amis trouvent ici l'expression de ma gratitude pour leur présence chaleureuse et permanente.

Je voudrais aussi remercier les membres du Laboratoire de Calcul de l'Université des Sciences et Techniques de Lille pour l'accueil qu'ils m'ont réservé et pour les facilités matérielles qu'ils m'ont accordées, ainsi que les membres du Département de Mathématiques de l'Université du Chili pour l'intérêt permanent qu'ils ont montré pour la réalisation de ce travail.

Je tiens enfin à remercier particulièrement Mademoiselle Françoise Desquiens qui a assuré avec soin, diligence et compréhension la tâche ingrate de la frappe de cette thèse, ainsi que Madame H. Debock, Monsieur P. Debock et Monsieur G. Pluquet qui ont assuré avec les mêmes qualités sa réalisation matérielle.

A mes parents Alberto et Lucia
A ma femme Frances
A ma petite Maria Magdalena

INTRODUCTION

Ce travail concerne, d'une façon générale, les cônes et les polyèdres convexes en programmation mathématique (optimisation dans $\mathbb{R}^n$).

Dans une première partie, on étudie les programmes mathématiques avec cône-contraintes. On envisage différentes hypothèses sur ces programmes pour garantir l'existence d'une solution du problème lagrangien associé, ainsi que leurs relations avec d'autres hypothèses connues. On étudie la dualité pour ce type de programmes, et l'on retrouve les résultats de la programmation convexe (en particulier linéaire) avec cône-contraintes, et de la programmation géométrique prototype comme exemples d'applications.

Dans une deuxième partie, on présente la méthode de double description pour la résolution des systèmes d'inégalités linéaires avec détermination des inégalités redondantes, et l'on étudie des critères pour la réduction du volume des calculs. On applique cette méthode à la résolution du problème linéaire complémentaire général, et, en particulier, à la détermination de l'optimum global d'un programme quadratique non-convexe quelconque.

Enfin, on étudie un algorithme général, à convergence finie, pour déterminer la projection (généralisée) d'un point sur un polyèdre convexe défini par l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés, sans aucune hypothèse de régularité sur le polyèdre.

CHAPITRE I

PROGRAMMES MATHÉMATIQUES AVEC CÔNE-CONTRAINTES

I. PROGRAMMES MATHÉMATIQUES AVEC CÔNE-CONTRAINTES.

On considère le programme mathématique dans $\mathbb{R}^n$ de la forme générale :

$$\text{P)} \quad \begin{array}{l} \text{Min } f(x) \\ \Gamma(x) \in C \\ x \in S \end{array}$$

où C est un cône convexe homogène dans $\mathbb{R}^\ell$, S un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}^n$ et f, Γ des fonctions quelconques définies sur S à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^\ell$ respectivement.

On considère, par ailleurs, le problème lagrangien associé au programme P) :

P.L) Déterminer $\bar{x} \in S$, $\bar{w} \in C^*$ (C^*, polaire négatif de C) tels que :

$$\text{i) } \Gamma(\bar{x}) \in C$$

$$\text{ii) } L(\bar{x},w) \leq L(\bar{x},\bar{w}) \leq L(x,\bar{w}) \ ; \ \forall x \in S, \ \forall w \in C^*$$

où $L(x,w) = f(x) + w\Gamma(x)$.

Dans le cas particulier où C est l'orthan négatif de $\mathbb{R}^\ell (C=\mathbb{R}^\ell_-)$, le programme P) est un programme mathématique ordinaire et le problème *P.L.*), le problème de Lagrange habituel associé à ce programme. Dans cette situation, si le problème *P. L.*) admet une solution $(\bar{x},\bar{w})$, $\bar{x}$ est alors une solution optimale du programme P), sans aucune hypothèse supplémentaire sur ce programme. Dans le cas général $(C \neq \mathbb{R}^\ell_-)$ cette propriété est également vérifiée. Par ailleurs, si le programme P) (avec $C = \mathbb{R}^\ell_-$) est convexe, et si les contraintes de ce programme vérifient une certaine condition de régularité, si $\bar{x}$ est une solution optimale de P), il existe $\bar{w} \in \mathbb{R}^\ell_+$ tel que $(\bar{x},\bar{w})$ est solution du problème lagrangien correspondant. Ce dernier résultat est une conséquence des théorèmes classiques de séparation d'ensembles convexes et, en particulier, du théorème d'Inégalités Incompatibles de K. Fan, I. Glicksberg et A.J. Hoffman [11] pour des fonctions convexes (qui généralise le Théorème d'Inégalités Incompatibles de Gordan pour des fonctions linéaires). Dans le cas général ($C \neq \mathbb{R}^{\ell}_{-}$), ce dernier résultat reste vrai si l'on remplace, d'une part, l'hypothèse de convexité sur Γ par la cône-convexité de cette fonction par rapport au cône C et, d'autre part, les conditions de régularité classiques par des conditions de régularité généralisées. La généralisation du Théorème de K. Fan et Al. pour des fonctions cône-convexes a été étudiée par E. Eisenberg [6] dans le cas de $\mathbb{R}^n$ (voir aussi M.S. Bazaraa [1], V.Sposito [20]). Des résultats analogues ont été obtenus par L. Hurwicz [9] L.W. Neudstadt [17] et D.G. Luenberger [15] dans le cas des espaces plus généraux où un ordre partiel est défini au moyen d'un cône convexe homogène. En fait, cette généralisation du Théorème de K. Fan et Al repose sur une hypothèse plus faible que la cône-convexité de la fonction, à savoir la convexité de la projection du C-épigraphe de cette fonction sur l'espace image, comme c'est le cas dans la deuxième démonstration de ce théorème proposée par ses auteurs.

Dans ce travail on étudie la relation entre le programme P) et le problème Lagrangien P. L.). Les différents résultats reposent sur une généralisation du Théorème de Gordan pour des fonctions qui vérifient une certaine hypothèse qui fait intervenir l'enveloppe convexe de ces fonctions. Cette hypothèse peut être considérée comme la généralisation d'une propriété analogue vérifiée par les fonctions convexes habituelles, propriété considérée par K. Fan et Al. dans la première démonstration de leur Théorème de Séparation. Cette hypothèse nous permet de relier différentes hypothèses que l'on trouve dans la littérature. Sous cette hypothèse on examine la condition de régularité générale considérée par Bazaraa, dans le cadre des fonctions cône-convexes, et sa relation avec d'autres conditions de régularité (condition de régularité de Slater, de Uzawa, etc.).

En particulier, on examine l'affaiblissement de la condition de régularité de Uzawa dans le cas où le programme P) comporte des inégalités et des équations linéaires. Cet affaiblissement a été considéré par J.P. Ponstein et Al. [19] dans le cadre des fonctions cône-convexes et par P. Huard [8], O. Mangasarian [16] et T. Rockafellar [2] dans le cadre des fonctions convexes habituelles. Par ailleurs, on envisage la dualité pour les programmes P) de la forme générale ci-dessus. Comme exemple d'application, on retrouve les résultats de la Programmation Géométrique Prototype sous cette formulation générale.

Dans une deuxième partie on étudie une autre condition pour garantir l'existence d'une solution du problème Lagrangien *P.L.*) associé à P). Ce développement est parallèle à celui de S. Karlin [13] pour la dualité des programmes linéaires classiques. Un développement analogue a été présenté par V. Sposito [21] dans le cas général du programme P) ci-dessus. Cependant la condition proposée par Sposito n'est pas suffisante pour garantir l'existence d'une solution de ce problème. Comme exemple d'application de cette nouvelle condition, on considère la dualité pour les programmes linéaires de la forme générale P), où f, Γ sont des fonctions linéaires et C, S des cônes polyèdriques convexes. La dualité pour ces programmes (dans le cas des variables complexes) a été considérée par A. Ben-Israel [2] au moyen d'une généralisation du lemme classique de Farkas.

NOTATIONS - DÉFINITIONS - RAPPELS

Etant donné un sous-ensemble non-vide S de $\mathbb{R}^n$ on notera :

$\bar{S}$: la fermeture de S dans $\mathbb{R}^n$
$\mathring{S}$: l'intérieur de S par rapport à $\mathbb{R}^n$
$\mathring{S}^r$: l'intérieur relatif de S i.e l'intérieur de S par rapport à la variété affine engendrée par S
$[S]$: l'enveloppe convexe de S

Par ailleurs, on notera :

$(\mathbb{R}^n)'$: le dual canonique de $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^n_+$: l'orthan positif de $\mathbb{R}^n$ i.e. $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x \geq 0 \ (\text{i.e. } x_i \geq 0, \ i=1,\dots,n)\}$
$\mathbb{R}^n_-$: l'orthan négatif de $\mathbb{R}^n$ i.e. $\mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x \leq 0 \ (\text{i.e. } x_i \leq 0, \ i=1,\dots,n)\}$

Avec ces notations l'on a :

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x >> 0 \ (\text{i.e. } x_i > 0, \ i = 1,\dots,n)\}$$
$$\mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x << 0 \ (\text{i.e. } x_i < 0, \ i = 1,\dots,n)\}$$

Définition 1 : Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est un *cône homogène* si et seulement si :

$$\left.\begin{array}{l} x \in C \\ \lambda \in \mathring{\mathbb{R}}_+ \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda x \in C$$

Ce cône est dit pointé (resp. épointé) s'il contient (resp. s'il ne contient pas) l'origine 0 de $\mathbb{R}^n$. Si de plus C est convexe, on dira que C est un *cône convexe homogène*.

Définition 2 : Un cône homogène C dans $\mathbb{R}^n$ est dit saillant si et seulement si C vérifie la propriété suivante :

$$x \in C \Longrightarrow -x \notin C$$

Propriété 1 : Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est un cône convexe homogène si et seulement si :

$$\left.\begin{array}{l} x,\ y \in C \\ \lambda,\ \mu \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+ \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda x + \mu y \in C$$

Définition 3 : Si S est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^n$, *l'ensemble polaire négatif (resp. positif) de S* est défini par :

$$S^* = \{y \in (\mathbb{R}^n)' \ / \ yx \leq 0\}$$

$$(\text{resp.}\, S^+ = \{y \in (\mathbb{R}^n)' \ / \ yx \geq 0\}$$

Propriété 2 : Le polaire négatif (resp. positif) de S est un cône convexe homogène fermé (pointé) dans $(\mathbb{R}^n)'$.

Définition 4 : Si S est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^n$, on appelle *cône engendré par S* (qu'on note $S^{\angle}$) le plus petit cône homogène pointé dans $\mathbb{R}^n$ qui contient S i.e.

$$S^{\angle} = \{z \in \mathbb{R}^n \ / \ z = \lambda x,\ x \in S,\ \lambda \in \mathbb{R}_+\}$$

Définition 5 : Si S est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^n$, on appelle *enveloppe conique convexe de S* (qu'on note $\mathcal{P}(S)$) le plus petit cône convexe homogène pointé qui contient S i.e.

$$\mathcal{P}(S) = \{z \in \mathbb{R}^n / z = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x^k,\ x^k \in S,\ \lambda_k \in \mathbb{R}_+,\ k=1,\dots,p ; p \text{ arbitraire}\} = [S^{\angle}]$$

Propriété 3 : Si S est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^n$, on a :

i) $S^* = (\bar{S})^*$

ii) $S^* = ([S])^* = (S^{\angle})^* = (\mathcal{P}(S))^*$

iii) $S \subset S^{**} = (S^*)^*$

iv) $S^{**} = \overline{\mathcal{P}(S)}$

v) $S^{***} = S^*$

(mêmes résultats pour les polaires positifs)

Propriété 4 : Si C est un cône convexe homogène d'intérieur non-vide dans $\mathbb{R}^n$ (i.e. $\overset{o}{C} \neq \Phi$) on a :

i) $C^* = (\overset{o}{C})^*$

ii) $x \in \overset{o}{C}, \lambda \in \overset{o}{\mathbb{R}}_+ \Longrightarrow \lambda x \in \overset{o}{C}$

iii) $x \in \overset{o}{C},\ y \in C \Longrightarrow x + y \in \overset{o}{C}$

iv) $x \in \overset{o}{C},\ y \in C^* \setminus \{0\} \Longrightarrow yx < 0$

Lemme 1 :

Si K_1 et K_2 sont deux cônes homogènes non vides dans $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement, alors :

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}^* = (K_1^*, K_2^*)$$

Dem : soit $u \in \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}^*$. On a alors que $u \in (\mathbb{R}^{p+q})'$

et

$$ux \leq 0 \quad \forall x \in \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$$

i.e.

$$u_1x_1 + u_2x_2 \leq 0 \ ; \forall x_1 \in K_1, \forall x_2 \in K_2 \qquad 1)$$

avec $u_1 \in (\mathbb{R}^p)'$, $u_2 \in (\mathbb{R}^q)'$.

Montrons maintenant que $u_1 \in K_1^*$.
Supposons le contraire i.e. $\exists \bar{x}_1 \in K_1$ tel que $u_1\bar{x}_1 > 0$.

Soit $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$, avec $\bar{x}_2 \in K_2$ fixé arbitrairement.

$$\left.\begin{array}{l} K_1, \text{ cône homogène} \\ \bar{x}_1 \in K_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} \lambda x_1 \in K_1 \ ; \forall\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > o \\ \bar{x}_2 \in K_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{pmatrix} \lambda\bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \\ \forall\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \end{array}\right. \qquad 2)$$

D'après 1) et 2) on a :

$$\lambda\underbrace{u_1\bar{x}_1}_{>0} + u_2\bar{x}_2 \leq 0 \ ; \forall\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$$

ce qui est impossible pour λ suffisamment grand.

Par conséquent $u_1 \in K_1^*$.

Avec un raisonnement identique on peut montrer que : $u_2 \in K_2^*$, et donc :

$$(u_1,\ u_2) \in (K_1^*,\ K_2^*)$$

Réciproquement si $u = (u_1,\ u_2) \in (K_1^*,\ K_2^*)$, alors :

$$u_1 x_1 \leqslant 0 \quad \forall x_1 \in K_1$$

et

$$u_2 x_2 \leqslant 0 \quad \forall x_2 \in K_2$$

d'où :

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 \leqslant 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$$

ce qui complète la démonstration.

Considérons maintenant :

$S \subset \mathbb{R}^n$, $S \neq \Phi$, un sous ensemble non vide quelconque de $\mathbb{R}^n$

$K \subset \mathbb{R}^p$, $K \neq \Phi$, un cône convexe homogène d'intérieur non-vide dans $\mathbb{R}^p$

$L \subset \mathbb{R}^q$, $L \neq \Phi$, un cône convexe homogène non vide dans $\mathbb{R}^q$

$$\left.\begin{array}{l} \phi : S \to \mathbb{R}^p \\ \psi : S \to \mathbb{R}^q \end{array}\right\} \text{ des fonctions vectorielles quelconques définies sur } S$$

$\left[\begin{pmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}_{x \in S}\right]$, enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^{p+q}$ du graphe de la fonction $\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} : S \to \mathbb{R}^{p+q}$

Théorème 1 : *avec les définitions ci-dessus :*

i)

$$\left[\begin{pmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}_{x \in S}\right] \cap \begin{pmatrix} \overset{\circ}{K} \\ L \end{pmatrix} = \Phi \implies \left[\begin{array}{l} \exists (s,t) \in (K^*,\ L^*),\ (s,t) \neq 0 \\ s\phi(x) + t\psi(x) \geqslant 0,\ \forall x \in S \end{array}\right.$$

ii)

$$\left.\begin{array}{l} \exists (s,t) \in (K^*,\ L^*),\ s \neq 0 : \\ s\phi(x) + t\psi(x) \geqslant 0,\ \forall x \in S \end{array}\right\} \implies \left[\begin{pmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}_{x \in S}\right] \cap \begin{pmatrix} \overset{\circ}{K} \\ L \end{pmatrix} = \Phi$$

Dem. i) Etant donné que $\left[\begin{pmatrix}\phi(x)\\ \psi(x)\end{pmatrix}_{x\in S}\right]$ et $\begin{pmatrix}\overset{o}{K}\\ L\end{pmatrix}$ sont des ensembles convexes disjoints dans $\mathbb{R}^{p+q}$, et puisque $\binom{\overset{o}{K}}{L}$ est un cône homogène, il existe un hyperplan homogène dans $\mathbb{R}^{p+q}$ qui les sépare i.e. il existe $(s,t) \subset ((\mathbb{R}^p)', (\mathbb{R}^q)')$, $(s,t) \neq o$, tel que :

1) $sy + tz \geqslant 0 \quad \forall \binom{y}{z} \in \left[\begin{pmatrix}\phi(x)\\ \psi(x)\end{pmatrix}_{x\in S}\right]$

2) $sy + tz \leqslant 0 \quad \forall \binom{y}{z} \in \begin{pmatrix}\overset{o}{K}\\ L\end{pmatrix}$

Compte tenu du lemme 1, on a, d'après 2) :

$$(s,t) \in ((\overset{o}{K})^*, L^*)$$

et puisque $(\overset{o}{K})^* = K^*$:

$$(s,t) \in (K^*, L^*)$$

et d'après 1), la partie i) du théorème est démontrée.

ii) Sous l'hypothèse :

3) $\exists (s,t) \in (K^*, L^*)$, $s \neq 0$ tel que : $s\phi(x) + t\psi(x) \geqslant 0 \; \forall x \in S$,

supposons que :

$$\left[\begin{pmatrix}\phi(x)\\ \psi(x)\end{pmatrix}_{x\in S}\right] \cap \begin{pmatrix}\overset{o}{K}\\ L\end{pmatrix} \neq \Phi$$

Il existe donc $\begin{pmatrix}\bar{y}\\ \bar{z}\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}\overset{\circ}{K}\\ L\end{pmatrix}$ tel que :

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{\gamma} \lambda_i \, \phi(\overset{i}{x})$$

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{\gamma} \lambda_i \, \psi(\overset{i}{x})$$

avec :
$$\left.\begin{array}{l} \overset{i}{x} \in S \\ \lambda_i \geqslant 0 \end{array}\right] \quad i = 1,\ldots,\gamma$$

$$\sum_{i=1}^{\gamma} \lambda_i = 1$$

et puisque, d'après 3) :

$$s\phi(\overset{i}{x}) + t\psi(\overset{i}{x}) \geqslant 0 \text{ pour } i = 1,\ldots,\gamma$$

on a :

$$s \sum_{i=1}^{\gamma} \lambda_i \phi(\overset{i}{x}) + t \sum_{i=1}^{\gamma} \lambda_i \, \psi(\overset{i}{x}) \geqslant 0$$

i.e.

$$s\bar{y} + t\bar{z} \geqslant 0$$

Par ailleurs :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} s \neq 0 \\ s \in \overset{*}{K} \\ \bar{y} \in \overset{\circ}{K} \end{array}\right\} \Longrightarrow s\bar{y} < 0 \\ \\ \left.\begin{array}{l} \bar{z} \in L \\ t \in L^* \end{array}\right\} \Longrightarrow t\bar{z} \leqslant 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow s\bar{y} + t\bar{z} < 0$$

et on aboutit donc à une contradiction. Par conséquent :

$$\left[\begin{pmatrix}\phi(x)\\ \psi(x)\end{pmatrix}_{x \in \mathcal{S}}\right] \cap \begin{pmatrix}\overset{\circ}{K}\\ L\end{pmatrix} = \Phi$$

ce qui complète la démonstration du théorème.

Théorème 2 : Soient :

$S \subset \mathbb{R}^n$, $S \neq \Phi$, *un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}^n$

$K \subset \mathbb{R}^p$, $\overset{o}{K} \neq \Phi$, *cône convexe homogène d'intérieur non vide dans* $\mathbb{R}^p$

$\phi : S \to \mathbb{R}^p$, *fonction vectorielle quelconque.*

Alors :

$[\phi(S)] \cap \overset{o}{K} = \phi \Longleftrightarrow \exists s \in K^*, s \neq o$ *tel que :* $s\phi(x) \geq o, \forall x \in S$

Dem : Analogue à celle du Théorème 1.

Considérons maintenant le programme mathématique P) suivant :

$$\text{P)} \quad \text{Min } f(x)$$
$$\gamma(x) \in C$$
$$x \in S$$

où : $f : S \to \mathbb{R}$ est une fonction numérique quelconque, $\gamma : S \to \mathbb{R}^\ell$ une fonction vectorielle quelconque, S un sous-ensemble non-vide quelconque de $\mathbb{R}^n$ et C, un cône convexe homogène non-vide dans $\mathbb{R}^\ell$.

On associe au programme mathématique P) les problèmes de col suivants :

Problème de Col de Fritz-John (P.C.F.J) :

Déterminer $\bar{x} \in S$, $(\bar{r}_o, \bar{r}) \in (\mathbb{R}_+, C^*)$ tels que :

i) $\gamma(\bar{x}) \in C$

ii) $F(\bar{x},\bar{r}_o,r) \leq F(\bar{x},\bar{r}_o,\bar{r}) \leq F(x,\bar{r}_o,\bar{r})$; $\forall x \in S, \forall r \in C^*$

où : $F(x,r_o,r) = r_o f(x) + r\gamma(x)$

Problème de Col de Kuhn et Tucker (P.C.K.T.) :

Déterminer $\bar{x} \in S$, $\bar{w} \in C^*$ tels que :

i) $\gamma(\bar{x}) \in C$

ii) $L(\bar{x},w) \leq L(\bar{x},\bar{w}) \leq L(x,\bar{w})$; $\forall x \in S, \forall w \in C^*$

où : $L(x,w) = f(x) + w\gamma(x)$

Remarque 1 :

a) Dans le problème P.C.F.J. on peut supprimer la condition i) $\gamma(\bar{x}) \in C$ si le cône homogène convexe C est supposé fermé, car, si la condition ii) de ce problème est vérifiée, on a toujours $\gamma(\bar{x}) \in \bar{C}$. En effet, d'après la première partie de l'inégalité ii) :

$$r\gamma(\bar{x}) \leq \bar{r}\gamma(\bar{x}), \ \forall r \in C^* \qquad 1)$$

d'où nécessairement :

$$r\gamma(\bar{x}) \leq 0 \ ; \ \forall r \in C^* \qquad 2)$$

(Supposons le contraire i.e. $\exists \tilde{r} \in C^*$ tel que $\tilde{r}\gamma(\bar{x}) > 0$. Puisque $\lambda\tilde{r} \in C^*$ pour tout $\lambda > 0$, on aurait d'après 1) : $0 > \lambda\tilde{r}\gamma(\bar{x})$, $\forall\lambda > 0$, ce qui est impossible).

D'après 2) on a finalement : $\gamma(\bar{x}) \in C^{**} = \bar{C}$.

b) Si la condition ii) du problème P.C.F.J. est vérifié, on a nécessairement :

$$\bar{r}\gamma(\bar{x}) = 0$$

En effet :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Remarque 1a)} \Longrightarrow \gamma(\bar{x}) \in \bar{C}\\ \qquad\qquad\qquad \bar{r} \in C^*\\ \qquad\qquad\qquad C^* = (\bar{C})^*\end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{r}\gamma(\bar{x}) \leq 0\\ \\ \left.\begin{array}{l}\text{condition ii) du P.C.F.J.}\\ \\ C^*\text{, pointé} \Longrightarrow 0 \in C^*\end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{r}\gamma(\bar{x}) \geq 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{r}\gamma(\bar{x}) = 0$$

c) Les deux remarques a) et b) sont également valables pour le problème P.C.K.T, avec une démonstration identique.

Hypothèse H) : Si $\bar{x} \in S$, on dira que les fonctions f, γ vérifient l'hypothèse H) en $\bar{x}$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} f(x) - f(\bar{x}) \\ \\ \gamma(x) \end{pmatrix}_{x \in S} \cap \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\mathbb{R}}_- \\ \\ C \end{pmatrix} = \Phi \Longrightarrow \left[\begin{pmatrix} f(x) - f(\bar{x}) \\ \\ \gamma(x) \end{pmatrix}_{x \in S} \right] \cap \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\mathbb{R}}_- \\ \\ C \end{pmatrix} = \Phi$$

Théorème 3 : Soit $\bar{x}$ une solution optimale du programme mathématique P). Alors, sous l'hypothèse H), il existe $(\bar{r}_o, \bar{r}) \in (\mathbb{R}_+, C^*)$, $(\bar{r}_o, \bar{r}) \neq 0$, tel que *$(\bar{x}, \bar{r}_o, \bar{r})$ est solution du problème P. C. F. J. et $\bar{r}\gamma(\bar{x}) = 0$.*

Dem : soit $\alpha(x) = f(x) - f(\bar{x})$. Si $\bar{x}$ est solution optimale du programme P) on a, d'une part, $\bar{x} \in S$, $\gamma(\bar{x}) \in C$ et d'autre part :

$$\nexists x \in S \text{ tel que : } \left| \begin{array}{l} \alpha(x) < 0 \\ \gamma(x) \in C \end{array} \right.$$

ce qui, d'après l'hypothèse H), entraîne que :

$$\left[\begin{pmatrix} \alpha(x) \\ \gamma(x) \end{pmatrix}_{x \in S} \right] \cap \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\mathbb{R}}_- \\ C \end{pmatrix} = \Phi$$

et, d'après le théorème 1 partie i) :

$$\exists (\bar{r}_o, \bar{r}) \text{ c } (\mathbb{R}_+, C^*),\ (\bar{r}_o, \bar{r}) \neq 0 \text{ tel que :}$$

$$\bar{r}_o \alpha(x) + \bar{r}\gamma(x) \geq 0 \ ; \forall x \in S$$

i.e.

$$\bar{r}_o f(x) + \bar{r}\gamma(x) \geq \bar{r}_o f(\bar{x}), \forall x \in S \qquad 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 1) \\ \bar{x} \in S \end{array} \right\} \Longrightarrow \bar{r}\gamma(\bar{x}) \geq 0 \\ \left. \begin{array}{l} \gamma(\bar{x}) \in C \\ \bar{r} \in C^* \end{array} \right\} \Longrightarrow \bar{r}\gamma(\bar{x}) \leq 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \bar{r}\gamma(\bar{x}) = 0 \qquad 2)$$

D'après 1) et 2) on a alors :

$$\bar{r}_o f(x) + \bar{r}\gamma(x) \geq \bar{r}_o f(\bar{x}) + \bar{r}\gamma(\bar{x}) \qquad 3)$$

Par ailleurs

$$\left.\begin{array}{l} r \in C^* \\ \gamma(x) \in C \end{array}\right\} \Longrightarrow r\gamma(x) \leq 0 \qquad 4)$$

et donc, d'après 2) et 4) :

$$\bar{r}_o f(\bar{x}) + r\gamma(\bar{x}) \leq \bar{r}_o f(\bar{x}) = \bar{r}_o f(\bar{x}) + \bar{r}\gamma(\bar{x}),\ \forall r \in C^*.$$

Finalement, d'après 3) et 5) :

$$\bar{r}_o f(\bar{x}) + r\gamma(\bar{x}) \leq \bar{r}_o f(\bar{x}) + \bar{r}\gamma(\bar{x}) \leq \bar{r}_o f(x) + \bar{r}\gamma(x) \ ;\ \forall x \in S,\ \forall r \in C^*$$

d'où le résultat.

Remarque 2 : il est intéressant de remarquer que si $(\bar{x}, \bar{r}_o, \bar{r})$ est une solution du problème P. C. F. J. avec $\bar{r}_o > 0$, $(\bar{x}, \bar{w}) = (\bar{x}, \bar{r}/\bar{r}_o)$ est alors une solution du problème P. C. K. T. (En effet, si $\bar{r}_o > 0$, on peut simplifier par $\bar{r}_o$ la double inégalité ii) du problème P. C. F. J. pour obtenir ensuite la condition ii) du problème P. C. K. T, en tennant compte du fait que $(1/\bar{r}_o)C^* = C^*$.

Par ailleurs, il est clair que si $(\bar{x}, \bar{w})$ est une solution du problème P. C. K. T., $(\bar{x}, \bar{r}_o, \bar{r}) = (\bar{x}, 1, \bar{w})$ est une solution du problème P. C. F. J.

Condition de Régularité (R) : on dira que les contraintes du programme mathématique P) vérifient la condition de régularité (R) si :

$$\nexists r \in C^* \setminus \{0\} \text{ tel que : } r\gamma(x) \geq 0 \quad \forall x \in S$$

Théorème 4 : soit $\bar{x}$ une solution optimale du programme mathématique P). Alors, sous l'hypothèse H), et si la condition de régularité (R) est vérifiée, il existe $\bar{w} \in C^*$ tel que $(\bar{x}, \bar{w})$ est solution du problème P. C. K. T. et $\bar{w}\,\gamma(\bar{x})=0$

Dem : sous l'hypothèse H) on a, d'après le théorème 3 qu'il existe $(\bar{r}_o, \bar{r}) \subset (\mathbb{R}_+, C^*)$, $(\bar{r}_o, \bar{r}) \neq 0$ tels que :

$$\bar{r}_o f(\bar{x}) + r\gamma(\bar{x}) \leq \bar{r}_o f(\bar{x}) + \bar{r}\gamma(\bar{x}) \leq \bar{r}_o f(x) + \bar{r}\gamma(x) \ ; \forall x \in S, \ \forall r \in C^* \qquad 1)$$

avec :

$$\bar{r}\gamma(\bar{x}) = 0 \qquad 2)$$

On va montrer maintenant que, si la condition de régularité (R) est vérifiée, on a nécessairement : $\bar{r}_o > 0$. En effet, si l'on suppose que $\bar{r}_o = 0$ on a d'après la deuxième partie de l'inégalité 1) , et compte tenu de 2), que :

$$\bar{r}\gamma(x) \geq 0 \quad \forall x \subset S$$

avec $\bar{r} \in C^*$, $\bar{r} \neq 0$ (car : $(\bar{r}_o, \bar{r}) \neq 0$, $\bar{r}_o = 0 \Longrightarrow \bar{r} \neq 0$) ce qui contredit l'hypothèse (R), d'où nécessairement $\bar{r}_o > 0$.

Compte tenu de la remarque 2, et du fait que $\gamma(\bar{x}) \in C$, on a donc le résultat.

<u>Remarque 3</u> : a) dans les théorèmes 3 et 4, l'hypothèse H) faite sur les fonctions f et γ est indépendante du point particulier $\bar{x}$ qui réalise l'optimum du programme mathématique P). En fait, elle dépend de la valeur optimale $f(\bar{x})$ de ce programme qui est évidemment unique.

b) dans le théorème 4, la condition de régularité (R) ne concerne, par définition, que les contraintes du programme mathématique P). Sous cette condition, d'après le théorème 4, le problème P. C. K. T. associé au programme mathématique P) a toujours un sens quelle que soit la fonction économique f telle que f et γ vérifient l'hypothèse H).

<u>*Théorème 5*</u> *: si $(\bar{x},\bar{w}) \in (S, C^*)$ est solution du problème P. C. K. T. associé au programme mathématique P), $\bar{x}$ est alors solution optimale de ce programme.*

Dem : si $(\bar{x},\bar{w})$ est solution du problème P. C. K. T. on a d'une part :

i) $\gamma(\bar{x}) \in C$

et d'autre part :

ii) $f(\bar{x}) + w\gamma(\bar{x}) \leq f(\bar{x}) + \bar{w}\gamma(\bar{x}) \leq f(x) + \bar{w}\gamma(x)$; $\forall x \in C$, $\forall w \in C^*$

avec $\bar{w}\gamma(\bar{x}) = 0$ (voir Remarque 1b))

D'après la deuxième partie de l'inégalité ii), on a donc :

$$(f(x) - f(\bar{x})) + \bar{w}\gamma(x) \geq 0,\ \forall x \in S$$

ce qui, d'après la partie ii) du théorème 1 (avec $\overset{o}{K} = \overset{o}{\mathbb{R}}_-, L = C$, $\phi(x) = f(x) - f(\bar{x})$, $\psi(x) = \gamma(x)$), entraîne que :

$$\left[\begin{pmatrix} f(x) - f(\bar{x}) \\ \gamma(x) \end{pmatrix}_{x \in S}\right] \cap \begin{pmatrix} \overset{o}{\mathbb{R}}_- \\ C \end{pmatrix} = \Phi$$

et puisque

$$\begin{pmatrix} f(x) - f(\bar{x}) \\ \gamma(x) \end{pmatrix} \subset \left[\begin{pmatrix} f(x) - f(\bar{x}) \\ \gamma(x) \end{pmatrix}_{x \in S}\right]$$

$$\nexists x \in S \text{ t.q. } f(x) - f(\bar{x}) < 0 \text{ et } \gamma(x) \in C$$

i.e. $\bar{x}$ est une solution optimale du programme mathématique P), d'où le résultat.

Remarque 4 : a) le théorème 5 est vrai sans aucune hypothèse sur les fonctions f et γ du programme mathématique P) et sans aucune condition de régularité sur les contraintes de ce programme.

b) D'après la démonstration du théorème 5, on a que si $(\bar{x},\bar{w})$ est solution du problème P.C.K.T. associé au programme mathématique P), les fonctions f, γ vérifient alors l'hypothèse H) au point $\bar{x}$. L'hypothèse H) est donc une condition nécessaire pour que le problème P.C.K.T associé au programme P) ait un sens.

Dualité.

Etant donné le programme mathématique primal P) défini précédemment

$$\text{P)}\ \text{Min}\ f(x)$$
$$\gamma(x) \in C$$
$$x \in S$$

où, rappelons le, $S \subset \mathbb{R}^n$, $S \neq \Phi$, S quelconque, $C \subset \mathbb{R}^{\ell}$, C cône convexe homogène et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma : S \rightarrow \mathbb{R}^{\ell}$ des fonctions quelconques définies sur S, on lui associe le programme mathématique dual D) défini par :

$$\text{D)}\ \text{Max}\ \theta(w)$$
$$w \in C^*$$
$$w \in T$$

où : $\theta(x) = \inf\limits_{x \in S} \{f(x\ ) + w\ \gamma(x)\}$, $T = \{w \in (\mathbb{R}^{\ell})'/\theta(w) > -\infty\}$

Remarque 5 : si $T \neq \Phi$, T est alors un sous-ensemble convexe de $(\mathbb{R}\ )'$ et $\theta : T \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction concave sur T. En effet, si $T \neq \Phi$, l'hypographe de θ, $\text{hypo}(\theta) = \{(w,z) \in ((\mathbb{R}^{\ell})', \mathbb{R})\ /\ z \leq \theta(w)\}$, est non vide. Par ailleurs, hypo(θ) est convexe comme intersection des hypographes (convexes) des fonctions linéaires affines $\theta_x(w) = f(x) + w\ (x)$, $x \in S$ i.e.

$$\text{hypo}(\theta) = \bigcap_{x \in S} \text{hypo}(\theta_x)$$

Finalement, T est convexe comme projection de hypo(θ) sur $(\mathbb{R}^{\ell})'$.

Par conséquent, si $T \neq \Phi$, le programme dual D), associé au programme primal P), est toujours un programme mathématique convexe.

Théorème 6 : *si x et w sont des solutions réalisables du programme primal P) et du programme dual D) respectivement, on a alors :*

$$-\infty < \theta(w) \leq f(x)$$

Par ailleurs, si $\tilde{x}$ et $\tilde{w}$ sont des solutions réalisables des programmes P) et D) respectivement, telles que $\theta(\tilde{w}) = f(\tilde{x})$, alors : $\tilde{x}$ est solution optimale du programme P) et $\tilde{w}$ est solution optimale du programme D).

Dem :

$$\left.\begin{array}{l} x,\ \text{sol. réal. de P)} \Longrightarrow \left|\, x \in S \right. \\ \left.\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad \left|\, \gamma(x) \in C \right. \\ w,\ \text{sol. réal. de D)} \Longrightarrow \left|\, w \in C^{*} \right. \end{array}\right\} \Longrightarrow w\gamma(x) \leq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \geq f(x) + w\gamma(x) \quad 1)$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad \left|\, w \in T \Longrightarrow \theta(w) = \inf_{x \in S} (f(x) + w\gamma(x)) > -\infty \right. \qquad 2)$$

D'après 1) et 2) on a donc :

$$-\infty < \theta(w) \leq f(x) \qquad\qquad 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \theta(\tilde{w}) = f(\tilde{x}) \\ \tilde{x},\ \tilde{w},\ \text{sol. réal. de P) et D) resp.} \\ \qquad\qquad 3) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} f(\tilde{x}) = \theta(\tilde{w}) \leq f(x) \\ \theta(w) = f(\tilde{x}) \geq \theta(w) \\ \text{où } x,\ w, \text{ sont des solutions réalisables} \\ \text{quelconques de P) et D) respectivement} \end{array}\right.$$

ce qui complète la démonstration du théorème.

Remarque 6 : les résultats du théorème 6 sont vrais sans aucune hypothèse ni sur la fonction économique ni sur les contraintes du programme primal P).

Théorème 7 : si $\bar{x}$ est une solution optimale du programme primal P) alors, sous l'hypothèse H), et si la condition de régularité R) est vérifiée, le problème dual D) admet une solution optimale $\bar{w}$ et l'on a :

$$f(\bar{x}) = \min \{f(x) \ / \ x \in S, \ \gamma(x) \in C\} = \max \{\theta(w)/w \in T, \ w \in C^*\} = \theta(\bar{w})$$

Dem : compte tenu des hypothèses on a, d'après le théorème 4 , qu'il existe $\bar{w} \in C$ tel que, d'une part :

$$f(\bar{x}) \leq f(x) + \bar{w}\gamma(x) \ ; \forall x \in S \qquad 1)$$

et d'autre part :

$$f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}) + w\gamma(\bar{x}), \ \forall w \in C^* \qquad 2)$$

D'après 1) on a alors :

$$-\infty < f(\bar{x}) = \inf_{x \in S} (f(x) + \bar{w}\gamma(x)) = \theta(\bar{w}) \qquad 3)$$

et $\bar{w} \in T$. Finalement, si $w \in C^* \cap T$, on a d'après 3) et 2):

$$\theta(\bar{w}) = f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}) + w\gamma(\bar{x}) \geq \inf_{x \in S} (f(x) + w \ \gamma(x)) = \theta(w)$$

et $\bar{w}$ est donc solution optimale du programme dual D), d'où le résultat.

Remarque 7 : a) relation entre les problèmes en dualité P) et D), et le problème de col de Kuhn et Tucker :

$$\text{I)} \quad \left.\begin{array}{l} (\bar{x},\bar{w}) \text{ solution du} \\ \text{problème P.C.K.T} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \text{II)} \left\{\begin{array}{l} \text{i) } \bar{x}, \text{ solution optimale de P)} \\ \text{ii) } \bar{w}, \text{ solution optimale de D)} \\ \text{iii) } f(\bar{x}) = \theta(\bar{w}) \end{array}\right.$$

Démonstration :

I) $\Longrightarrow$ II) :

I) $\Longrightarrow$ II-i) (voir théorème 5)

$$\text{I)} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l}\text{II-ii)}\\ \text{II-iii)}\end{array}\right. \quad \text{(voir démonstration du théorème 7)}$$

II) $\Longrightarrow$ I) :

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}\text{ sol. opt. de P)} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l}\bar{x}\in S\\ \gamma(\bar{x})\in C\end{array}\right.\\ \bar{w}\text{ sol. opt. de D)} \Longrightarrow \bar{w}\in C^{*}\end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{w}\gamma(\bar{x})\leqslant 0 \qquad \begin{array}{r}1)\\ 2)\end{array}$$

$$f(\bar{x})=\theta(\bar{w})=\inf_{x\in S}(f(x)+\bar{w}\gamma(x)) \Longrightarrow f(\bar{x})\leqslant f(x)+\bar{w}\gamma(x),\ \forall x\in S \qquad 3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}1\\ 2\end{array}\right\}\Longrightarrow \bar{w}\gamma(\bar{x})\geqslant 0\\ \qquad\qquad\quad 2)\end{array}\right\}\Longrightarrow \bar{w}\gamma(\bar{x})=0 \qquad 4)$$

$$\left.\begin{array}{l}4\\ 3\end{array}\right\}\Longrightarrow f(\bar{x})+\bar{w}\gamma(\bar{x})\leqslant f(x)+\bar{w}\gamma(x),\ \forall x\in S \qquad 5)$$

D'autre part :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}w\in C^{*}\\ \gamma(\bar{x})\subset C\end{array}\right\}\Longrightarrow w\gamma(\bar{x})\leqslant 0\\ \qquad\qquad\qquad\quad 4)\end{array}\right\}\Longrightarrow f(\bar{x})+w\gamma(\bar{x})\leqslant f(\bar{x})+\bar{w}\gamma(\bar{x}),\ \forall w\in C^{*} \qquad 6)$$

et $(\bar{x},\bar{w})$ est donc solution du problème P.C.K.T.

b) D'après la remarque 7 a), s'il existe des solutions optimales $\bar{x}$ et $\bar{w}$ des programmes P) et D) respectivement, telles que : $f(\bar{x}) = \theta(\bar{w})$, $\bar{x}$ appartient alors à l'ensemble des solutions optimales du programme mathématique $M)_{\bar{w}}$:

$$M)_{\bar{w}} : \qquad \min_{x \in S} \; f(x) + \bar{w}\gamma(x)$$

Concrètement, sous les hypothèses ci-dessus, si $\bar{w}$ est une solution optimale du programme dual D), l'ensemble des solutions optimales du programme primal P) est le sous-ensemble des solutions optimales du programme $M)_{\bar{w}}$ qui vérifient la condition supplémentaire $\gamma(x) \in C$. Ceci donne alors une façon de déterminer les solutions optimales du programme P) (ou simplement une solution de ce programme) à partir d'une solution optimale du programme D), qui a l'avantage d'être toujours un programme mathématique convexe.

Fonctions cône -convexes:

Considérons : S, un sous-ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$
Λ, un cône convexe homogène pointé dans $\mathbb{R}^q$
$\beta : S \to \mathbb{R}^q$, une fonction vectorielle définie sur S

Définition 1 : avec les définitions ci-dessus, la fonction β est dite Λ-convexe sur l'ensemble S si et seulement si :

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{R} \cap [0,1] \\ x^1, x^2 \in S \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) - \lambda\beta(x^1) - (1-\lambda)\beta(x^2) \in \Lambda$$

Remarque 8 : a) Si $\Lambda = \mathbb{R}^q_- = \{y \in \mathbb{R}^q \; / \; y \leq 0\}$, la fonction est Λ -convexe (resp. $(-\Lambda)$-convexe) sur S si et seulement si β est convexe (resp. concave) au sens habituel sur S.

b) Si Λ est un cône polyédrique dans $\mathbb{R}^q$, $\Lambda = \{y \in \mathbb{R}^q \; / \; Ay \leq 0$, où A est une matrice $(p \times q)\}$, la fonction β est Λ- convexe sur S si et seulement si $A\beta(x)$ est convexe sur S (i.e. si et seulement si les fonctions $A_i\beta(x)$, $i=1,\dots,p$, sont convexes sur S).

c) si $\Lambda = \{0\}$, la fonction β est Λ - convexe sur S si et seulement si β est affine (i.e. convexe et concave à la fois) sur S.

d) si $\Lambda = \mathbb{R}^q$, toute fonction β définie sur S est Λ - convexe

e) si Λ', Λ'' sont des cônes convexes homogènes pointés dans $\mathbb{R}^q$ tels que $\Lambda' \subset \Lambda''$, et si β est Λ'-convexe sur S, β est alors Λ''-convexe sur S.
En particulier, si β est Λ - convexe sur S, β est alors $\bar{\Lambda}$ - convexe sur S.
($\bar{\Lambda}$, fermeture de Λ)

f) si $\Lambda' \subset \mathbb{R}^q$, $\Lambda'' \subset \mathbb{R}^p$ sont des cônes convexes homogènes pointés et si α, β sont des fonctions définies sur S à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement, α est Λ'-convexe sur S et β est Λ'' - convexe sur S si et seulement si $\binom{\alpha}{\beta}$ est $\binom{\Lambda'}{\Lambda''}$ - convexe sur S.

g) la fonction β est Λ - convexe sur S si et seulement si $(-\beta)$ est $(-\Lambda)$ - convexe sur S.

h) Si β est Λ - convexe sur S et si h est un vecteur arbitraire dans $\mathbb{R}^q$, $\beta(x) + h$ est Λ - convexe sur S.

<u>Définition 2</u> : si S est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, Λ un cône convexe homogène pointé dans $\mathbb{R}^q$, β une fonction vectorielle définie sur S à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, on appelle Λ - épigraphe de β, l'ensemble $E_\Lambda(\beta)$ défini par :

$$E_\Lambda(\beta) = \{(x,z) \in S \times \mathbb{R}^q \; / \; \beta(x) - z \in \Lambda\}$$

<u>Lemme 2</u> : la fonction β est Λ - convexe sur S si et seulement si $E_\Lambda(\beta)$ est un ensemble convexe dans $\mathbb{R}^{n+q}$.

Dem : (==>)

$$\left.\begin{array}{l} (x^1, z^1), (x^2,z^2) \in E_\Lambda(\beta) \Longrightarrow \begin{bmatrix} \beta(x^1) - z^1 \in \Lambda \\ \beta(x^2) - z^2 \in \Lambda \end{bmatrix} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda \in]0,1[\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Lambda \text{ , cône convexe homogène} \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad 1)$$

$$1) \quad \left|\begin{array}{l} \lambda(\beta(x^1) - z^1) \in \Lambda \\ (1-\lambda) \; (\beta(x^2) - z^2) \in \Lambda \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta, \Lambda \text{ - convexe sur S} \\ x^1, x^2 \in S \\ \lambda \in]0,1[\end{array}\right\} \Longrightarrow \beta(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) - \lambda\beta(x^1) - (1-\lambda)\beta(x^2) \in \Lambda \qquad 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Lambda\text{, cône convexe homogène} \\ \qquad\qquad 1) \\ \qquad\qquad 2) \\ \lambda \in]0,1[\end{array}\right\} \Longrightarrow \beta(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) - \lambda z^1 - (1-\lambda) \; z^2 \in \Lambda \qquad 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} S,\ \text{convexe} \\ x^1,\ x^2 \in S \\ \lambda \in\ ]0,1[\end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in S \qquad 4)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3) \\ 4) \\ \text{Déf } 2) \\ \lambda \in\ ]0,1[\end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda(x^1,z^1) + (1-\lambda)\ (x^2,z^2) \in E_\Lambda(\beta)$$

Par conséquent, si (x^1, x^2), (x^2,z^2) c $E_\Lambda(\beta)$, on a :

$$\lambda(x^1, z^1) + (1-\lambda)\ (x^2, z^2)\ c\ E_\Lambda(\beta),\ V\lambda \in [0,1]$$

d'où la convexité de $E_\Lambda(\beta)$.

$(\Longrightarrow)$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x^1,\ x^2 \in S \\ \Lambda,\ \text{pointé} \Longrightarrow 0 \in \Lambda \\ \text{Déf } 2) \end{array}\right\} \Longrightarrow (x^1,\ \beta(x^1)),\ (x^2,\beta(x^2)) \in E_\Lambda(\beta) \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad E_\Lambda(\beta),\ \text{convexe} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda \in [0,1] \end{array}\right\} \Longrightarrow \qquad 2')$$

$$\left.\begin{array}{l} 2')\ (\lambda x^1 + (1-\lambda)\ x^2,\ \ \lambda\beta(x^1) + (1-\lambda)\ \beta(x^2)) \in E_\Lambda(\beta) \\ \quad \text{Déf. } 2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \qquad 3')$$

$$3')\left|\begin{array}{l} \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in S \\ \beta(\lambda x^1 + (1-\lambda)\ x^2) - \lambda\beta(x^1) - (1-\lambda)\beta(x^2) \in \Lambda \end{array}\right.$$

et β est donc Λ-convexe sur S.

Lemme 2' : Soit Λ un cône convexe homogène pointé d'intérieur non vide ($\mathring{\Lambda} \neq \phi$). Si la fonction β est Λ - convexe sur S, l'ensemble $\{(x,z) \in S \times \mathbb{R}^q \,/\, \beta(x) - z \in \mathring{\Lambda}\}$ est convexe dans $\mathbb{R}^{n+q}$.

Dem : identique à celle de la condition nécessaire du lemme 2, compte tenu des faits suivants :

i) $\mathring{\Lambda} \subset \Lambda$

ii)
$$\left.\begin{array}{l} \Lambda \text{ cône convexe homogène} \\ u \in \mathring{\Lambda} \\ v \in \Lambda \end{array}\right\} \Longrightarrow u + v \in \mathring{\Lambda}$$

Remarque 9 : dans le cas particulier où $\Lambda = \mathbb{R}_- = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y \leqslant 0\}$, $\beta : S \to \mathbb{R}$, β est Λ - convexe sur S (i.e. convexe sur S) si et seulement si $\{(x,z) \in S \times \mathbb{R} \,/\, \beta(x) - z \in \mathring{\Lambda}$ (i.e. $z > \beta(x)\}$ est convexe.

Remarque 10 : si S est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$, Λ un cône convexe homogène épointé non-vide dans $\mathbb{R}^q$ et si β est une fonction définie sur S à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ telle que :

$$\text{P)} \qquad \left.\begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{R} \cap\,]0,1[\\ x^1,\ x^2 \in S \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) - \lambda\beta(x^1) - (1-\lambda)\beta(x^2) \in \Lambda$$

l'ensemble $\{(x,z) \in S \times \mathbb{R}^q \,/\, \beta(x) - z \in \Lambda\}$ est alors convexe (démonstration identique à celle de la partie nécessaire du lemme 2).

On remarque que, dans le cas particulier où $\Lambda = \overset{o}{\mathbb{R}}{}^q_- = \{y \in \mathbb{R}^q \ / \ y < 0\}$, la fonction β vérifie la propriété P) si et seulement si β est strictement convexe au sens habituel sur S. Par ailleurs, il est clair que si Λ est pointé, β vérifie la propriété P) si et seulement si β est Λ - convexe sur S.

Lemme 3 : soient :

S, sous-ensemble non vide quelconque de $\mathbb{R}^n$

K, cône convexe homogène pointé d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^p$

L, cône convexe homogène pointé dans $\mathbb{R}^q$

$$\left.\begin{array}{l} \phi : S \to \mathbb{R}^p \\ \psi : S \to \mathbb{R}^q \end{array}\right\} \text{ des fonctions vectorielles quelconque définies sur S.}$$

alors, sous l'hypothèse $\tilde{\hat{H}}$)

$\tilde{\hat{H}}$) : l'ensemble $P = \binom{\phi}{\psi}(S) - \binom{K}{L}$ est convexe

on a :

$$A = \binom{\phi}{\psi}(S) \cap \overset{o}{\binom{K}{L}} = \Phi \implies B = [\binom{\phi}{\psi}(S)] \cap \overset{o}{\binom{K}{L}} = \Phi$$

Dem : sous l'hypothèse $\tilde{\hat{H}}$, supposons que l'on ait $A = \Phi$ et $B \neq \Phi$

$$y = \binom{y'}{y''} \in B \implies \left[\begin{array}{ll} \exists \tilde{x}^i \in S, \ \tilde{\lambda}_i \geq 0 \ i = 1, \ldots, p, \ \sum_{i=1}^{p} \tilde{\lambda}_i = 1 & \\ \text{tels que :} & \\ y' = \sum_{i=1}^{p} \tilde{\lambda}_i \phi(\tilde{x}^i) \in \overset{o}{K} & 1) \\ y'' = \sum_{i=1}^{p} \tilde{\lambda}_i \psi(\tilde{x}^i) \in L & 2) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} K, L \text{ pointés} \implies 0 \in \binom{K}{L} \\ \tilde{x}^i \in S \implies \binom{\phi}{\psi}(\tilde{x}^i) \in \binom{\phi}{\psi}(S) \end{array}\right\} \implies \binom{\phi}{\psi}(\tilde{x}^i) \in \binom{\phi}{\psi}(S) - \binom{K}{L} \qquad 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3) \\ \text{hypothèse } \tilde{H}) \\ \sum\limits_{i=1}^{p} \tilde{\lambda}_i = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{p} \tilde{\lambda}_i \binom{\phi}{\psi}(\tilde{x}^i) \in \binom{\phi}{\psi}(S) - \binom{K}{L} \qquad 4)$$

$$4) \Longrightarrow \quad \exists \tilde{x} \in S \text{ tel que : } \left| \begin{array}{ll} -\sum\limits_{i=1}^{p} \tilde{\lambda}_i \phi(\tilde{x}^i) + \phi(\tilde{x}) \in K & 5) \\ \\ -\sum\limits_{i=1}^{p} \tilde{\lambda}_i \psi(\tilde{x}^i) + \psi(\tilde{x}) \in L & 6) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 1) \\ 5) \\ K, \text{ cône convexe homogène} \end{array}\right\} \Longrightarrow \phi(\tilde{x}) \in \overset{\circ}{K} \\ \\ \left.\begin{array}{l} 2) \\ 6) \\ L, \text{ cône convexe homogène} \end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\tilde{x}) \in L \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \tilde{x} \in S \end{array}\right\} \Longrightarrow A \neq \Phi$$

et on aboutit donc a une contradiction, d'où le résultat.

<u>Remarque 11</u> : a) le résultat du lemme 3 est vrai sans aucune hypothèse de convexité ni sur l'ensemble S ni sur les fonctions ϕ et ψ définies sur S.

b) avec les définitions données dans le lemme 3, et sous l'hypothèse $\tilde{H})_\phi$: $\phi(S) - K$, convexe [resp. $\tilde{H})_\psi$: $\psi(S) - L$, convexe], on a que :

$$\phi(S) \cap \overset{o}{K} = \Phi \Longrightarrow [\phi(S)] \cap \overset{o}{K} = \Phi$$

[resp. $\psi(S) \cap L = \Phi \Longrightarrow [\psi(S)] \cap L = \Phi$]

c) Avec les définitions données dans le lemme 3, et sous l'hypothèse $\tilde{H}$ on a, d'après ce lemme et le théorème 1, que :

$$\binom{\phi}{\psi}(S) \cap \binom{\overset{o}{K}}{L} = \Phi \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \exists (s,t) \in (K^*, L^*),\ (s,t) \neq 0 : \\ s\phi(x) + t\psi(x) \geq 0,\ \forall x \in S \end{array} \right.$$

d) D'après le lemme 3, dans le cas particulier où $K = \mathbb{R}_- = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\}$, $L = C \subset \mathbb{R}^\ell$, $\phi(x) = f(x) - f(\bar{x})$, $\psi(x) = \gamma(x)$ (où $f : S \to \mathbb{R}$, $\gamma : S \to \mathbb{R}^\ell$, quelconques) si l'hypothèse $\tilde{H}$) est vérifiée, l'hypothèse H) définie plus loin est alors vérifiée.

Lemme 4 : Soient :

S, sous-ensemble convexe non-vide de $\mathbb{R}^n$

C, cône convexe homogène pointé dans $\mathbb{R}^\ell$

$\Gamma : S \to \mathbb{R}^\ell$, fonction C-convexe sur S, on a alors que :

i) $\Gamma(S)-C$, est convexe dans $\mathbb{R}^\ell$

ii) si $\overset{o}{C} \neq \emptyset$, $\Gamma(S) - \overset{o}{C}$ est convexe dans $\mathbb{R}^\ell$

Dem : i)

$$\Gamma(S) - C = \{z \in \mathbb{R}^\ell \ /\ \Gamma(x) - z \in C, \text{ pour un certain } x \in S\}$$

i.e.

1) $\Gamma(S) - C = E_C(\Gamma)/_{\mathbb{R}^\ell}$ (projection du C-épigraphe de Γ sur $\mathbb{R}^\ell$)

$$\left.\begin{array}{l}\underline{\text{Lemme 2}}\\ \Gamma,\ C\text{-convexe sur } S\end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{array}{c}E_c(\Gamma)\ \text{convexe dans } \mathbb{R}^{n+\ell}\\ 1)\end{array}\right\}\Longrightarrow 2)$$

2) $\Gamma(S) - C$, convexe dans $\mathbb{R}^{\ell}$

ii) Identique à celle de la partie i), compte-tenu du lemme 2'.

<u>Lemme 5</u> : Soient :

S, sous-ensemble convexe non-vide de $\mathbb{R}^n$

K, un cône convexe pointé d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^p$

L, un cône convexe pointé dans $\mathbb{R}^q$

$\phi : S \to \mathbb{R}^p$, fonction K-convexe sur S

$\psi : S \to \mathbb{R}^q$, fonction L-convexe sur S

on a alors :

$$\binom{\phi}{\psi}(S) \cap \binom{\mathring{K}}{L} = \Phi \Longrightarrow \left[\begin{bmatrix}\phi\\ \psi\end{bmatrix}(S)\right] \cap \binom{\mathring{K}}{L} = \Phi$$

Dem : C'est une conséquence directe du lemme 4 (partie i)) et du lemme 3.

<u>Remarque 12</u> : Soient :

S, sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^n$

K, cône convexe homogène pointé d'intérieur non-vide dans $\mathbb{R}^p$

L, cône convexe homogène pointé dans $\mathbb{R}^q$

$$\left.\begin{array}{l}\phi\ : S \to \mathbb{R}^p\\ \psi\ : S \to \mathbb{R}^q\end{array}\right\}\ \text{des fonctions vectorielles définies sur } S$$

on a alors les relations suivantes :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\tilde{H}) : \binom{\phi}{\psi}(S) - \binom{K}{L},\ \text{convexe}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{H) : \begin{bmatrix}\phi\\ \psi\end{bmatrix}(S) \cap \binom{\mathring{K}}{L} = \Phi \Longrightarrow \left[\begin{bmatrix}\phi\\ \psi\end{bmatrix}(S)\right] \cap \binom{\mathring{K}}{L} = \Phi} \\
\boxed{\begin{array}{l} S,\ \text{convexe}\\ \phi,\ \text{fonction } K\text{-convexe sur } S\\ \psi,\ \text{fonction } L\text{-convexe sur } S\end{array}} \arrow[u, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Définition 3 : si Λ est un cône convexe pointé dans $\mathbb{R}^q$, un sous-ensemble non vide E de $\mathbb{R}^q$ est dit Λ -convexe si et seulement $E-\Lambda$ est un ensemble convexe dans $\mathbb{R}^q$.

Remarque 13 : a) si E est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^q$, E est convexe si et seulement si E est $\{0\}$ -convexe.

b) si Λ', Λ'' sont des cônes convexes homogènes pointés dans $\mathbb{R}^q$ tels que $\Lambda' \subset \Lambda''$ et si E est Λ'-convexe dans $\mathbb{R}^q$, E est alors Λ''-convexe dans $\mathbb{R}^q$.

c) Si E est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^q$ tel que $E-\Lambda'$ est convexe, où Λ' est un cône convexe homogène épointé non-vide dans $\mathbb{R}^q$, et si $\Lambda = \Lambda' \cup \{0\}$, alors $E-\Lambda$ n'est pas nécessairement convexe dans $\mathbb{R}^q$. (Considérer par exemple : $E=\{\binom{0}{0},\binom{1}{0}\} \subset \mathbb{R}^2$, $\Lambda' = \mathring{\mathbb{R}}^2_- = \{\binom{y_1}{y_2} \in \mathbb{R}^2 / y_1 < 0, y_2<0\}$ On a alors que $E-\Lambda' = \mathring{\mathbb{R}}^2_+$ est convexe, mais $E-\Lambda = \mathring{\mathbb{R}}^2_+ \cup E$ n'est évidemment pas convexe).

d) D'après la définition 3), et compte tenu du lemme 2), si S est un sous-ensemble non vide $\mathbb{R}^n$, Λ un cône convexe homogène pointé dans $\mathbb{R}^q$ et β, une fonction définie sur S à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ ($\beta : S \to \mathbb{R}^q$), alors : la fonction β est Λ-convexe sur S (définition 2) si et seulement si le graphe de β (i.e. $\binom{x}{\beta(x)}_{x \in S}$) est $\binom{0_{\mathbb{R}^n}}{\Lambda}$-convexe dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$.

Par ailleurs, d'après cette définition, la fonction β vérifie l'hypothèse $\tilde{H}$) : $\beta(S) - \Lambda$ est convexe dans $\mathbb{R}^q$, si et seulement si l'image de S sous β (i.e. $(\beta(x))_{x \in S}$) est Λ-convexe.

e) D'après les remarques c) et d) ci-dessus, il est clair que la propriété réciproque du lemme 2' n'est pas vraie.

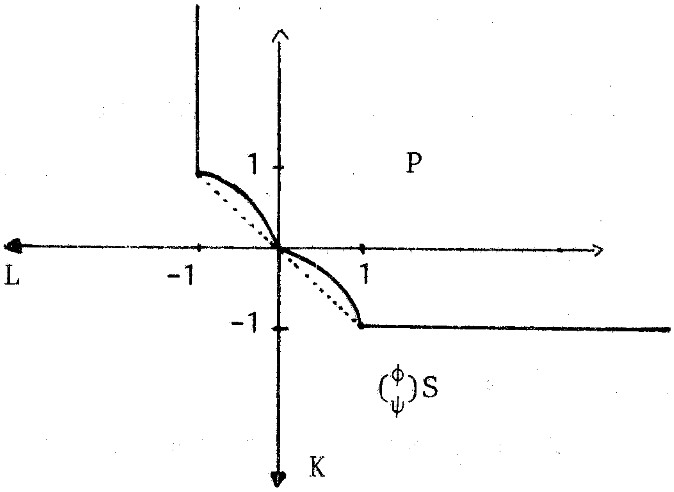
Exemples : a) Soient $K = \mathbb{R}_-$, $L = \mathbb{R}_-$, $S = [-1,1] \subset \mathbb{R}$.

Considérons les fonctions $\phi : S \to \mathbb{R}$, $\psi : S \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\phi(t) = \begin{cases} \sqrt{-t} \text{ si } t \in [-1,0] \\ -t^2 \text{ si } t \in [0,1] \end{cases}$$

$$\psi(t) = t$$

Il est clair que la fonction $\binom{\phi}{\psi}$ (t) n'est pas $\binom{K}{L}$-convexe (i.e. convexe) sur S. Par ailleurs, il est facile de vérifier que l'ensemble $P = \binom{\phi}{\psi}S-\binom{K}{L}$ n'est pas convexe dans $\mathbb{R}^2$:



Par contre, on a que $\binom{\phi}{\psi}S \cap \overset{\circ}{\binom{K}{L}} = \Phi$, $[\binom{\phi}{\psi}S] \cap \overset{\circ}{\binom{K}{L}} = \Phi$ et la propriété H) est donc vérifiée

b) Si dans l'exemple a) l'on considère $S = [-2,2]$ au lieu de $[-1,1]$, il est clair que la propriété H) n'est alors plus vérifiée

c) Soient $K = \mathbb{R}_-$, $L = \mathbb{R}_-$, $S = [0,1]$. Considérons les fonctions $\phi(t) = \sqrt{t}$ et $\psi(t) = t$ définies sur S. Il est clair que la fonction $\binom{\phi}{\psi}(t)$ n'est pas convexe sur S. Par contre, on peut vérifier que $P = \binom{\phi}{\psi}S - \binom{K}{L}$ est alors convexe dans $\mathbb{R}^2$, et la propriété H) est nécessairement vérifiée.

Relation entre la Condition de Régularité (R) et d'autres Conditions de Régularité sur les Contraintes du Programme P)

Considérons le programme mathématique P) défini plus haut :

$$\text{P)}\quad \begin{array}{l} \text{Min } f(x) \\ \gamma(x) \in C \\ x \in S \end{array}$$

Dans ce qui suit on étudira la relation entre la condition de régularité (R) sur les contraintes de P) avec d'autres conditions de régularité que l'on peut considérer sur ces contraintes, lorsqu'on fait des hypothèses supplémentaires sur le programme P) :

I) Le programme P) est tel que le cône convexe homogène C est d'intérieur non-vide (i.e. $\overset{o}{C} \neq \Phi$).

Appelons $P)_I$ ce programme.

Condition de Régularité de Slater (R.S) :

On dit que les contraintes du programme $P)_I$ vérifient la condition de régularité de Slater (R.S.) s'il existe $\hat{x} \in S$ tel que $\gamma(\hat{x}) \in \overset{o}{C}$.

Lemme 6 : Si les contraintes du programme $P)_I$ vérifient la condition de régularité (R.S.), elles vérifient alors la condition de régularité (R) définie plus haut.

Dem : Sous l'hypothèse : (R.S.) vérifiée, supposons que (R) n'est pas vérifiée :

(R), non vérifiée $\Longrightarrow \exists r \in C^*,\ r \neq 0$, tel que $r\gamma(x) \geqslant 0,\ \forall x \in S$

$$\text{(R.S.) vérifiée} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \exists \hat{x} \in S \text{ tel que :} \\ \gamma(\hat{x}) \in \overset{o}{C} \end{array}\right. \\ r \in C^*,\ r \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow r\gamma(\hat{x}) < 0$$

et on a donc une contradiction, d'où nécessairement :

(R.S), vérifie $\Longrightarrow$ (R), vérifiée.

II) Le programme P) est tel que :

$$\gamma(x) = \begin{bmatrix} g(x) \\ h(x) \end{bmatrix}, \ C = \binom{K}{L}$$

où $g : S \rightarrow \mathbb{R}^m$, $h : S \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont des fonctions quelconques définies sur S, K un cône convexe homogène d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^m$ et L, un cône convexe homogène pointé d'intérieur vide dans $\mathbb{R}^p$.

Appelons $P)_{II}$ ce programme.

Condition de Régularité de Slater Modifiée (R.S.M) :

On dit que les contraintes du programme $P)_{II}$ vérifient la condition de régularité (R.S.M.) si :

i) $\exists\ \hat{x} \in S$ tel que $h(\hat{x}) = 0$ et $g(\hat{x}) \in \overset{o}{K}$

ii) $\nexists \lambda \in L^*,\ \lambda \neq 0$, tel que $\lambda h(x) \geq 0,\ \forall x \in S$

Lemme 7 : Si les contraintes du programme $P)_{II}$ vérifient la condition de régularité (R.S.M.) elles vérifient la condition de régularité (R) définie plus haut.

Dem : sous l'hypothèse (R.S.M.) vérifiée, supposons que (R) n'est pas vérifiée :

$$\left.\begin{array}{l} \text{(R), non vérifiée} \\ \text{Lemme 1)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \exists (u,\lambda) \in (K^*, L^*),\ (u,\lambda) \neq 0 \text{ tel que :} \\ ug(x) + \lambda h(x) \geq 0,\ \forall x \in S \end{array}\right. \qquad 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{(R.S.M) i)} \\ \quad 1) \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} ug(\hat{x}) \geq 0 \\ g(\hat{x}) \in \overset{o}{K} \\ u \in K^* \end{array}\right. \hspace{-1em} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ u \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow ug(\hat{x}) < 0$$

Par conséquent on a que u=0 dans 1).

$$\left.\begin{array}{l}1)\\ u=0\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\lambda \in L^*,\ \lambda \neq 0, \text{ tel que } \lambda h(x) \geqslant 0,\ \forall x \in S \qquad 2)$$

et 2) contredit l'hypothèse (R.S.M) ii), d'où nécessairement :

(R.S.M) vérifiée $\Longrightarrow$ (R) vérifiée.

Dans le cas particulier où le cône L du programme $P)_{II}$ est un sous espace vectoriel V de $\mathbb{R}^p$ on peut considérer la condition de régularité suivante sur les contraintes de $P)_{II}$:

Condition de Régularité (R.N.) : On dira que les contraintes du programme $P)_{II}$ (avec L = V) vérifient la condition de régularité (R.N.) si :

i) $\exists\hat{x} \in S$ tel que $h(\hat{x}) = 0$ et $g(\hat{x}) \in \overset{o}{K}$

ii) $0 \in \mathrm{int}_{V_h^{\perp}} (h(S) \cap V_h^{\perp})$, où $V_h^{\perp}$ est l'homologue de $V^{\perp}$ dans $\mathbb{R}^p$.

Lemme 8 : Si les contraintes du programme $P)_{II}$ (avec L = V, V sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$) vérifient la condition de régularité (R.N.), elles vérifient alors la condition de régularité (R.S.M) et donc, la condition de régularité (R).

Dem : Supposons que (R.N.) ii) est vérifiée et que (R.S.M) ii) n'est pas vérifiée :

$$\text{(R.S.M) ii), non vérifiée} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \exists\lambda \in V^{\perp},\ \lambda \neq 0 \text{ tel que :} \\ \lambda h(x) \geqslant 0\ \forall x \in S \end{array}\right. \qquad 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \in \mathrm{int}_{V_h^{\perp}}(h(S) \cap V_h^{\perp}) \\ \lambda \in V^{\perp} \Longrightarrow \lambda^T \in V_h^{\perp} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \exists\varepsilon>0 \text{ t.q.} \\ 0-\varepsilon\lambda^T \in h(S) \end{array}\right. \qquad 2)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2) \Longrightarrow \exists \tilde{x} \in S \text{ tel que } h(\tilde{x}) = -\varepsilon\lambda^T,\ \varepsilon > 0 \\ \lambda \text{ vérifie } 1) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \varepsilon|\lambda|^2 < 0 \\ \varepsilon > 0 \\ \lambda \neq 0 \end{array}\right.$$

et on aboutit donc à une contradiction, d'où le résultat.

Remarque : Dans le cas particulier où V est le sous-espace trivial de $\mathbb{R}^p$ (i.e. $V = \{0\}$) la condition (R.N) ii) s'écrit : $0 \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^p}(h(S)) = \overset{o}{\overline{h(S)}}$.

Considérons le programme mathématique $\tilde{P}$) dans $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{ll} \tilde{P}) & \mathrm{Min}\ f(x) \\ & g(x) \in C \\ & h(x) \leq 0 \\ & e(x) = 0 \\ & x \in S \end{array}$$

où S est un ensemble convexe non-vide dans $\mathbb{R}^n$, C un cône convexe homogène pointé d'intérieur non-vide dans $\mathbb{R}^m$, $f : S \to \mathbb{R}$ et $g : S \to \mathbb{R}^m$ des fonctions quelconques définies sur S, $h : S \to \mathbb{R}^p$ et $e : S \to \mathbb{R}^q$ des fonctions affines définies sur S.

Problème P.C.K.T. associé au programme $\tilde{P}$) : Déterminer $\bar{x} \in S$, $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ $(C^*, \mathbb{R}^p_+, \mathbb{R}^q)$ tels que :

$L(\bar{x}, u, \lambda, \mu) \leqslant L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \leqslant L(x,\bar{u},\bar{\lambda},\bar{\mu})$; $\forall x \in S$, $\forall u \in C^*$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^p_+$, $\forall \mu \in \mathbb{R}^q$

où $L(x, u, \lambda, \mu) = f(x) + ug(x) + \lambda h(x) + \mu e(x)$.

Condition de Régularité de Uzawa (R.U.) : on dit que les contraintes du programme P) vérifient la condition de régularité (R.U.) s'il existe $\hat{x} \in \overset{o}{S}{}^r$ (intérieur relatif de S) tel que :

$$g(\hat{x}) \in \overset{o}{C},\ h(\hat{x}) \leqslant 0,\ e(\hat{x}) = 0.$$

Théorème 8 : Si $\bar{x}$ est une solution optimale du programme $\tilde{P})$, alors sous l'hypothèse H) et si la condition de régularité (R.U.) est vérifiée, il existe $(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in (C^*, \mathbb{R}^p_+, \mathbb{R}^q)$ tel que $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ est solution du problème P.C.K.T associé au programme P) et l'on a $L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = f(\bar{x})$.

Dem : Soient

$\hat{I}_o = \{i \ / \ h_i(\hat{x}) < 0\}$, $I_o = \{i \ / \ h_i(\hat{x}) = 0\}$, $|I_o| = \ell$, où $\hat{x}$ est tel que la condition de régularité (R.U.) est vérifiée.

Définissons :

$$\alpha(x) = f(x) - f(\bar{x})$$

$$G(x) = \begin{pmatrix} g(x) \\ h_{\hat{I}_o}(x) \end{pmatrix} \quad , \quad K = \begin{pmatrix} C \\ \mathbb{R}^{p-\ell}_- \end{pmatrix}$$

$$H(x) = \begin{pmatrix} h_{\bar{I}_o}(x) \\ e(x) \end{pmatrix} \quad , \quad L = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{\ell}_- \\ 0_{\mathbb{R}^q} \end{pmatrix}$$

Avec ces définitions le programme $\tilde{P})$ s'écrit :

$\tilde{P})_o$ Min $f(x)$

$G(x) \in K$

$H(x) \in L$

$x \in S$

et la condition de régularité (R.U.) devient :

$$\exists \hat{x} \in \overset{o}{S}{}^r \text{ tel que } G(\hat{x}) \in \overset{o}{K},\ H(\hat{x}) = 0 \qquad 1)$$

$$\bar{x}\text{, solution optimale de } \tilde{P}) \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \nexists x \in S \text{ tel que :} \\ \alpha(x) < 0 \\ G(x) \in K \\ H(x) \in L \end{array}\right. \qquad 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2) \\ \text{Hypothèse H)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\begin{pmatrix}\alpha \\ G \\ H\end{pmatrix}\right] \cap \begin{pmatrix}\overset{\circ}{\mathbb{R}-} \\ K \\ L\end{pmatrix} = \Phi \qquad 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3) \\ \text{Théorème 1} \\ \text{Lemme 1} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \exists (s,t,r) \in (\mathbb{R}_+^*, K^*, L^*),\ (s,t,r) \neq 0 : \\ s\alpha(x) + t\,G(x) + r\,H(x) \geqslant 0,\ \forall x \in S \end{array}\right. \qquad 4)$$

Faisons momentanément l'hypothèse Q) suivante :

Hypothèse Q) : i) $\nexists(\lambda,\mu) \in (\mathbb{R}_+^\ell, \mathbb{R}^q)$, $\lambda \neq 0$, tel que :

$$\lambda h_{I_o}(x) + \mu e(x) = 0,\ \forall x \in S$$

ii) $\nexists \mu \in \mathbb{R}^q$, $\mu \neq 0$, tel que : $\mu e(x) = 0$, $\forall x \in S$.

On va montrer maintenant que sous l'hypothèse Q) on a nécessairement que $s > 0$ dans 4). Supposons le contraire

$$\left.\begin{array}{l} s = 0 \\ 4) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} (t,r) \neq 0 \text{ et :} \\ t\,G(x) + rH(x) \geq 0,\ \forall x \in S \end{array}\right. \\ \quad 1 \text{ (R.U.)} \end{array}\right\} \Longrightarrow tG(\hat{x}) \geq 0 \qquad 5)$$

$$\left.\begin{array}{l} t \in K^* \\ t \neq 0 \\ G(\hat{x}) \in \overset{\circ}{K} \end{array}\right\} \Longrightarrow tG(\hat{x}) < 0 \qquad 6)$$

$$\left.\begin{array}{l} s = 0 \\ 4), 5), 6) \end{array}\right\} \Longrightarrow t = 0 \qquad 7)$$

Remarque 1 : D'après la démonstration ci-dessus, si le programme $\tilde{P})_o$ est tel que H(x), L ne figurent pas dans sa définition, le théorème est alors démontré. (En effet il suffit de négliger les termes concernant H(x) et L dans les expressions ci-dessus). (Voir aussi théorème 4) avec la condition de régularité de Slater (R.S.) à la place de (R))

$$\left.\begin{array}{l} s=0\\ t=0\\ \quad 4)\end{array}\right\} \Longrightarrow r\in L^*,\ r\neq 0 \text{ et } rH(x)\geq 0,\ \forall x\in S \qquad 8)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} x\in S\\ \hat{x}\in \overset{\circ}{S}{}^r\end{array}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \exists\varepsilon>0 \text{ tel que :}\\ (\hat{x} - \varepsilon(x-\hat{x}))\in S \quad 9)\end{array}\right. \\ \\ H(x), \text{ affine} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} H(x)=L(x)+q\\ L(x), \text{ linéaire}\end{array}\right.\end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} H(\hat{x}-\varepsilon(x-\hat{x})) = (1+\varepsilon)L(\hat{x})-\varepsilon L(x)+q\\ \\ q=(1+\varepsilon)q-\varepsilon q\end{array}\right\} \Longrightarrow 10)$$

$$\left.\begin{array}{l} 10)\ H(\hat{x}-\varepsilon(x-\hat{x})) = (1+\varepsilon)\,H(\hat{x}) - \varepsilon H(x)\\ \hat{x}, \text{ vérifie (R.U.)} \quad 1) \Longrightarrow H(\hat{x})=0\end{array}\right\} \Longrightarrow H(\hat{x}-\varepsilon(x-\hat{x})) = -\varepsilon H(x) \qquad 11)$$

et puisque $\varepsilon > 0$, on a d'après 8), 9) et 11) :

$$x\in S \Longrightarrow rH(x)\leq 0$$

et l'on peut donc reformuler 8) sous la forme :

$$r\in L^*,\ r\neq 0 \text{ et } rH(x)=0,\ \forall s\in S \qquad 12)$$

ou de façon équivalente, d'après la définition de H(x), L :

$$r=(\lambda^o,\mu^o)\in(\mathbb{R}^\ell_+,\mathbb{R}^q),\ (\lambda^o,\mu^o)\neq 0 \text{ et } \lambda^o h_{I_o}(x)+\mu^o e(x)=0,\ \forall x\in S \quad 12')$$

$$\left.\begin{array}{l} 12\,')\\ \\ \text{Hypothèse Qi)}\end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda^o=0$$

et l'on a donc finalement : $\mu^o\in\mathbb{R}^q$, $\mu^o\neq 0$ et $\mu^o\, e(x)=0\ \forall x\in S$, ce qui contredit l'hypothèse Qii). Par conséquent $s>0$ dans 4).

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} t \in K^* \\ \text{Définition de } K \\ \text{Lemme 1}\end{array}\right\} \Longrightarrow t = (u, \lambda_{\hat{I}_o}) \in (C^*, \mathbb{R}_+^{p-\ell}) \\ \\ \left.\begin{array}{l} r \in L^* \\ \text{Définition de } L \\ \text{Lemme 1}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} r = (\lambda_{I_o}, \mu) \in (\mathbb{R}_+^{\ell}, \mathbb{R}^q) \\ \text{Définition de } \alpha(x), G(x), H(x) \\ \lambda = (\lambda_{\hat{I}_o}, \lambda_{I_o}) \\ 4), s > 0 \end{array} \end{array}\right\} \Longrightarrow 13)$$

13)$(\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 1/s(u, \lambda, \mu) \in (C^*, \mathbb{R}_+^p, \mathbb{R}^q)$ et

$$f(x) + \bar{u}g(x) + \bar{\lambda}h(x) + \bar{\mu}e(x) \geq f(\bar{x}), \ \forall x \in S$$

et la démonstration du théorème s'achève de façon analogue à la démonstration du théorème 4).

Remarque 2 : i) Dans le cas où $I_o = \Phi$, on obtient le même résultat si dans la démonstration ci-dessus l'on remplace l'hypothèse Q) par l'hypothèse suivante :

$$\nexists \mu \in \mathbb{R}^q, \ \mu \neq 0 \text{ t.q. } \mu e(x) = 0 \quad \forall x \in S$$

ii) Dans le cas où $I_o \neq \Phi$ et si le programme $\tilde{P})_o$ ne comporte pas d'équations, le théorème est démontré de façon analogue si l'on remplace l'hypothèse Q) par l'hypothèse suivante :

$$\nexists \lambda \in \mathbb{R}_+^{\ell} \text{ tel que } \lambda h_{I_o}(x) = 0, \ \forall x \in S$$

Reste à montrer finalement que le théorème est vrai dans le cas où les contraintes du programme $\tilde{P})$ ne vérifient pas l'hypothèse Q).

d) Supposons que l'hypothèse Q i) n'est pas vérifiée. Soit $(\lambda^o, \mu^o) \in (\mathbb{R}_+^{\ell}, \mathbb{R}^q)$ tel que :

$$\lambda^o \neq 0 \text{ et } \lambda^o h_{I_o}(x) + \mu^o e(x) = 0, \ \forall x \in S \qquad 14)$$

$$\lambda^o \in \mathbb{R}_+, \lambda^o \neq 0 \Longrightarrow \exists_{io} \in I_o \text{ tel que } \lambda_{i_o} > 0$$

$$x, \text{ solution réalisable de } \tilde{P})_o \Longrightarrow \left.\underset{14)}{\begin{bmatrix} h_{I_o}(x) \leq 0 \\ e(x) = 0 \\ x \in S \end{bmatrix}}\right\} \Longrightarrow h_{i_o}(x) = 0$$

i.e. l'inégalité $h_{i_o}(x) \leq 0$ est singulière dans $\tilde{P})_o$. On peut donc définir le programme $\tilde{P})_1$, équivalent à $\tilde{P})_o$, qui résulte de remplacer l'inégalité $h_{i_o}(x) \leq 0$ dans $\tilde{P})_o$ par l'équation $h_{i_o}(x) = 0$.

Soit $(\lambda^1, \alpha^1, \mu^1) \in (\mathbb{R}_+^{\ell-1}, \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^q)$ tel que :

$$\lambda^1 \neq 0 \text{ et } \lambda^1 h_{I_1}(x) + \alpha^1 h_{i_o}(x) + \mu^1 e(x) = 0, \forall x \in S$$

où $I_1 = I_o \setminus \{i_o\}$.

Soit $i_1 \in I_1$ tel que $\lambda^1_{i_1} > 0$. Avec le même raisonnement que ci-dessus, on définit le programme $\tilde{P})_2$, équivalent à $\tilde{P})_1$, qui résulte de remplacer l'inégalité singulière $h_{i_1}(x) \leq 0$ dans $\tilde{P})_1$ par l'équation $h_{i_1}(x) = 0$.

De façon générale, soit $(\lambda^k, \alpha^k, \mu^k) \in (\mathbb{R}_+^{\ell-k}, \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^q)$ tel que : $\lambda^k \neq 0$ et $\lambda^k h_{I_k} + \alpha^k h_{I_o - I_k}(x) + \mu^k e(x) = 0$, $\forall x \in S$ où $I_k = I_{k-1} \setminus \{i_{k-1}\}$.

Soit $i_k \in I_k$ tel que $\lambda^k_{i_k} > 0$. On définit alors le programme $\tilde{P})_{k+1}$, équivalent à $\tilde{P})_k$, qui résulte de remplacer l'inégalité singulière $h_{i_k}(x) \leq 0$ dans $\tilde{P})_k$ par l'équation $h_{i_k}(x) = 0$.

Il est clair maintenant que si l'on applique ce procédé de transformation au programme $\tilde{P})_o$, il existera $\tilde{k}$, $(0 < \tilde{k} < \ell)$, tel que le programme $\tilde{P})_{\tilde{k}+1}$, équivalent à $\tilde{P})_o$, vérifie l'une de deux propriétés suivantes :

i) $I_{\widetilde{k+1}} = \phi$ (i.e. $\widetilde{k+1} = \ell$) et $\hat{\tilde{P}})_{k+1}$ ne comporte pas d'inégalités $h_i(x) \leq 0$, $i \in I_o$.

ii) $I_{\widetilde{k+1}} \neq \phi$ (i.e. $\widetilde{k+1} < \ell$) et $\nexists\ (\lambda, \alpha, \mu) \in (\mathbb{R}_+^{\ell-(\widetilde{k+1})}, \mathbb{R}^{\widetilde{k+1}}, \mathbb{R}^q)$ tel que : $\lambda \neq 0$ et $\lambda h_{I_{k+1}}(x) + \alpha h_{\hat{I}_{\widetilde{k+1}}}(x) + \mu e(x) = 0, \forall x \in S$ où $\hat{I}_{\widetilde{k+1}} = I_o - I_{\widetilde{k+1}}$

Le programme $\hat{P})_{\widetilde{k+1}}$ résulte de remplacer $H(x)$ et L dans la définition de $\tilde{P})_o$ respectivement par :

$$\hat{H}(x) = \begin{pmatrix} h_{I_{\widetilde{k+1}}}(x) \\ h_{\hat{I}_{\widetilde{k+1}}}(x) \\ e(x) \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} \mathbb{R}_-^{\ell-(\widetilde{k+1})} \\ 0_{\mathbb{R}^{\widetilde{k+1}}} \\ 0_{\mathbb{R}^q} \end{pmatrix}$$

ou de façon équivalente :

$$\tilde{H}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{h}(x) \\ \tilde{e}(x) \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} \mathbb{R}_-^{\ell-(\widetilde{k+1})} \\ 0_{\mathbb{R}^{q+(\widetilde{k+1})}} \end{pmatrix}$$

où la fonction $\tilde{h}(x)$ (resp. le cône $\mathbb{R}_-^{\ell-(\widetilde{k+1})}$) ne figure pas dans la définition de $\hat{H}(x)$ (resp. de $\hat{L}$) lorsque $I_{\widetilde{k+1}} = \phi$.

b) Supposons que le programme $\tilde{P})_{\widetilde{k+1}}$ ne vérifie pas l'hypothèse Qii). Soit donc $\mu^o \in \mathbb{R}^{q+(\widetilde{k+1})}$ tel que : $\mu^o \neq 0$ et $\mu^o \tilde{e}_{J_o}(x) = 0$, $\forall x \in S$ où $J_o = \{1, \ldots, q+(k+1)\}$

$$\left.\begin{array}{l} \mu^o \neq 0 \Longrightarrow \exists\, j_o \in J_o \text{ tel que } \mu^o_{j_o} > 0 \\ \tilde{e}_j(x) = 0, \ \forall j \in J_o \setminus \{j_o\} \\ \qquad x \in S \end{array}\right\} \Longrightarrow \tilde{e}_{j_o}(x) = 0$$

i.e. l'équation $\tilde{e}_{j_o}(x)$ est redondante dans $\hat{P})_{\widetilde{k+1}}$. On peut donc définir le programme $\tilde{P})^1_{k+1}$, équivalent à $\tilde{P})_{\widetilde{k+1}}$ qui résulte d'éliminer l'équation $\tilde{e}_{j_o}(x) = 0$ du programme $\hat{P})_{\widetilde{k+1}}$.

Soit $\mu^1 \in \mathbb{R}^{q+k}$ tel que :

$$\mu^1 \neq 0 \text{ et } \mu^1 \tilde{e}_{J_1}(x) = 0, \ \forall x \in S$$

où $J_1 = J_o \setminus \{j_o\}$

On peut donc définir le programme $\tilde{P})^2_{\tilde{k}+1}$ équivalent à $\tilde{P})^1_{\tilde{k}+1}$, qui résulte d'éliminer l'équation $\tilde{e}_{j_1}(x) = 0$ $(\lambda^1_{j_1} > 0)$ du programme $\tilde{P})^1_{\tilde{k}+1}$. Il est clair que si l'on répète ce procédé d'élimination, il existera $\tilde{h}$, $0 < \tilde{h} \leqslant q+(\tilde{k}+1)$, tel que le programme $\tilde{P})^{\tilde{h}}_{\tilde{k}+1}$, équivalent à $\tilde{P})_{\tilde{k}+1}$ (et donc à $\tilde{P})_0$) vérifie l'une des deux propriétés suivantes :

i)' Si $\tilde{h} = q + (\tilde{k}+1)$: $P)^{\tilde{h}}_{\tilde{k}+1}$ ne comporte pas d'équations

ii)" Si $\tilde{h} < q + (k+1)$: $\tilde{P})^{\tilde{h}}_{\tilde{k}+1}$ est tel que : $\nexists \mu \in \mathbb{R}^{q+(\tilde{k}+1)-\tilde{h}}$ tel que $\mu \tilde{e}_{J_{\tilde{h}}}(x) = 0$, $\forall x \in S$.

Remarque 3 : Si le programme $\tilde{P})_0$ vérifie l'hypothèse $Q_i)$ mais ne vérifie pas l'hypothèse $Q_{ii)}$, le procédé d'élimination d'équations b) est appliqué directement au programme $\tilde{P})_0 . (\tilde{k}+1=0)$.

Il est clair maintenant que le programme $\tilde{P})^{\tilde{h}}_{\tilde{k}+1}$, équivalent à $\tilde{P})_0$ qui résulte d'appliquer les transformations a) et b) (dans cet ordre) au programme $\tilde{P})_0$, vérifie l'une des deux situations suivantes :

I) $\tilde{P})^{\tilde{h}}_{\tilde{k}+1}$ est de la forme :

$$\begin{array}{l} \text{Min } f(x) \\ G(x) \in K \\ x \in S \end{array}$$

et $\tilde{P})^{\tilde{h}}_{\tilde{k}+1}$ vérifie la condition de régularité :

$$\exists \hat{x} \in \overset{o}{S}{}^r \text{ tel que } G(\hat{x}) \in \overset{o}{K}$$

II) $\tilde{P})^{\tilde{h}}_{\tilde{k}+1}$, vérifie, d'une part, la condition de régularité (R.U.) : $\exists \hat{x} \in \overset{o}{S}{}^{r}$ t.q. $G(\hat{x}) \in \overset{o}{K}$, $h_{I_{\tilde{k}+1}}(\hat{x}) \leq 0$, $\tilde{e}_{J_{\tilde{h}}}(\hat{x}) = 0$ et, d'autre part, l'hypothèse :

Q) : i) $\nexists(\lambda,\mu) \in (\mathbb{R}_{+}^{\ell-(\tilde{k}+1)}, \mathbb{R}^{q+(\tilde{k}+1)-\tilde{h}})$, $\lambda \neq 0$ tel que :

$$\lambda h_{I_{\tilde{k}+1}}(x) + \mu\tilde{e}_{J_{\tilde{h}}}(x) = 0, \ \forall x \in S$$

ii) $\nexists \mu \in \mathbb{R}^{q+(\tilde{k}+1)-\tilde{h}}$, $\mu \neq 0$ tel que :

$$\mu e_{J_{\tilde{h}}}(x) = 0, \ \forall x \in S$$

où l'hypothèse Qi) coïncide avec Qii) lorsque $I_{\tilde{k}+1} = \phi$, et devient : $\nexists \lambda \in \mathbb{R}_{+}^{\ell-(\tilde{k}+1)}$, $\lambda \neq 0$, tel que $\lambda h_{I_{\tilde{k}+1}}(x)=0$, $\forall x \in S$, lorsque $J_{\tilde{h}} = \phi$.

(Qi) est vérifiée : supposons le contraire. Il existe alors $(\tilde{\lambda},\tilde{\mu}) \in (\mathbb{R}_{+}^{\ell-(\tilde{k}+1)}, \mathbb{R}^{q+(\tilde{k}+1)-h})$, $\tilde{\lambda} \neq 0$ tel que : $\tilde{h}_{I_{\tilde{k}+1}}(x) + \tilde{\mu}\tilde{e}_{J_{\tilde{h}}}(x) = 0$, $\forall x \in S$. i.e. tel que $\tilde{\lambda}h_{I_{\tilde{k}+1}}(x) + \tilde{\mu}\tilde{e}_{J_{\tilde{h}}}(x) + 0\,\tilde{e}_{J_o - J_{\tilde{h}}}(x) = 0$, $\forall x \in S$ et le vecteur $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, 0)$ contredit donc la situation ii) a la fin du procédé de transformation a), d'où le résultat.

Qii) est vérifiée ; d'après le procédé d'élimination b)).

Par ailleurs on peut constater que si le programme $\tilde{P})_o$ vérifie l'hypothèse H), le programme équivalent $\tilde{P})^{\tilde{h}}_{\tilde{k}+1}$ vérifie l'hypothèse du même type correspondante. En effet, $\bar{x}$ est solution optimale de $\tilde{P})_o$ si et seulement si $\bar{x}$ est solution optimale de $\tilde{P})^{h}_{\tilde{k}+1}$ et l'on a donc :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ G \\ h_{I_o} \\ e \end{pmatrix} S \cap \begin{pmatrix} \mathbb{R}_- \\ K \\ \mathbb{R}_-^{\ell} \\ 0_{\mathbb{R}^q} \end{pmatrix} = \Phi \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ G \\ h_{I_{\tilde{k}+1}} \\ \tilde{e}_{J_{\tilde{h}}} \end{pmatrix} S \cap \begin{pmatrix} \mathbb{R}_- \\ K \\ \mathbb{R}_-^{\ell-(\tilde{k}+1)} \\ 0_{\mathbb{R}^{q+(\tilde{k}+1)-\tilde{h}}} \end{pmatrix} = \Phi \qquad 15)$$

où $\alpha(x) = f(x) - f(\bar{x})$. Supposons maintenant qu'il existe $x^r \in S$, $\lambda_r \geq 0$, $r = 1,\dots,r_o$ tels que :

$$\sum_{r=1}^{r_o} \lambda_r = 1 \text{ et } \sum_{r=1}^{r_o} \lambda_r \begin{pmatrix} \alpha(x^r) \\ G(x^r) \\ h_{I_{\tilde{k}+1}}(x^r) \\ \tilde{e}_{J_{\tilde{h}}}(x^r) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathbb{R}_- \\ K \\ \mathbb{R}_-^{\ell-(\tilde{k}+1)} \\ 0_{\mathbb{R}^{q+(\tilde{k}+1)-\tilde{h}}} \end{pmatrix} \qquad 16$$

$$\left.\begin{array}{l} 16) \\ \lambda_r > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \tilde{e}_{J_{\tilde{h}}}(x^r) = 0 \\ x^r \in S \\ \text{Procédé b)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \tilde{e}_{J_h}(x^r) = 0 \\ \\ \tilde{e}_{J_o-J_h}(x^r) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \tilde{e}(x^r) = 0$$

et l'on a donc, d'après la définition de $\tilde{e}(x)$:

$$\sum_{r=1}^{r_o} \lambda_r \begin{pmatrix} \alpha(x^r) \\ G(x^r) \\ h_{I_o}(x^r) \\ e(x^r) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathbb{R}_- \\ K \\ \mathbb{R}_-^{\ell} \\ 0_{\mathbb{R}^q} \end{pmatrix}$$

ce qui est impossible, d'après 15, si $\tilde{P})_o$ vérifie l'hypothèse H), d'où le résultat.

D'après ces résultats, le programme $\tilde{P})_{\tilde{k}+1}^{\tilde{h}}$ vérifie (dans les situations I et II) les hypothèses considérées dans la première partie de la démonstration du théorème.

Il existe donc $(\tilde{u}, \tilde{\lambda}', \tilde{\lambda}'', \tilde{\mu}) \in (C^*, \mathbb{R}_+^{p-\ell}, \mathbb{R}_+^{\ell-(\tilde{k}+1)}, \mathbb{R}^{q+(\tilde{k}+1)-\tilde{h}})$ tel que :

$$\alpha(x) + \tilde{u}g(x) + \tilde{\lambda}'h_{\hat{I}_o}(x) + \tilde{\lambda}''h_{I_{\tilde{k}+1}}(x) + \tilde{\mu}\tilde{e}_{J_{\tilde{h}}}(x) \geq 0$$

ou de façon équivalente :

$$\alpha(x) + \tilde{u}g(x) + \tilde{\lambda}'h_{\hat{I}_o}(x) + \tilde{\lambda}''h_{I_{\tilde{k}+1}}(x) + \tilde{\mu}'h_{I_o-I_{\tilde{k}+1}}(x) + \tilde{\mu}'' e(x) \geq 0 \qquad 17)$$

où l'on convient de définir :

$\tilde{\mu}'_i = 0$, si l'inégalité singulière $h_i(x) \leq 0$ a été éliminée dans b)

$\tilde{\mu}''_i = 0$, si l'équation $e_i(x) = 0$ a été éliminée dans b).

Si le vecteur $\tilde{\mu}'$ dans 17) a toutes ses composantes positives ou nulles, le théorème est alors démontré. Sinon, on choisit parmi les composantes négatives de $\tilde{\mu}'$ celle dont l'indice correspond à la dernière inégalité singulière transformée en équation dans le procédé a). Supposons, pour fixer les idées, que $\tilde{\mu}'_{i_{\tilde{k}}} < 0$: d'après les relations dans le procédé a) l'on a :

$$\lambda^{\tilde{k}} h_{I_{\tilde{k}}}(x) + \alpha^{\tilde{k}}h_{I_o-I_{\tilde{k}}}(x) + \mu^{\tilde{k}} e(x) = 0, \ \forall x \in S \qquad 18)$$

avec $\lambda^{\tilde{k}}_{i_{\tilde{k}}} > 0$, $I_{\tilde{k}} = I_{\tilde{k}+1} \cup \{i_{\tilde{k}}\}$.

Si l'on additionne maintenant l'équation 18), multipliée par $(-\tilde{\mu}'_{i_{\tilde{k}}}/\lambda^{\tilde{k}}_{i_{\tilde{k}}})$, à l'inégalité 17), on pourra définir un nouveau vecteur de multiplicateurs $(\tilde{u}, \tilde{\lambda}', \tilde{\tilde{\lambda}}'', (\tilde{\tilde{\mu}}', \tilde{\tilde{\mu}}'')) \in (C^*, \mathbb{R}_+^{p-\ell}, \mathbb{R}_+^{\ell-\tilde{k}}, \mathbb{R}^{q+\tilde{k}})$ tel que :

$$\alpha(x) + \tilde{u}g(x) + \tilde{\lambda}'h_{\hat{I}_o}(x) + \tilde{\tilde{\lambda}}''h_{I_{\tilde{k}}}(x) + \tilde{\tilde{\mu}}'h_{I_o-I_{\tilde{k}}}(x) + \tilde{\tilde{\mu}}'' e(x) \geq 0 \qquad 19)$$

Si le vecteur $\tilde{\tilde{\mu}}'$ dans 19)a toutes ses composantes positives ou nulles, le théorème est alors démontré. Sinon , on répète le procédé ci-dessus avec $\tilde{\tilde{\mu}}'$ à la place de $\tilde{\mu}'$.

Il est clair qu'avec ce procédé l'on arrivera à construire un vecteur de multiplicateurs vérifiant la propriété du théorème, après un nombre fini de transformations de ce type.

CQFD.

Remarque 14 : Le théorème 8, d'après sa démonstration, est vrai dans le cas particulier où le programme $\tilde{P}$) ne comporte pas d'équations linéaires (resp. d'inéquations linéaires) (Il suffit, dans ce cas là, de négliger les termes concernant e(x) (resp. h(x)) dans le problème P.C.K.T. et dans la condition de régularité (R.U.) considérés plus haut).
Par ailleurs, dans le cas particulier où le programme $\tilde{P}$) ne comporte ni équations linéaires ni inéquations linéaires, le théorème 8 reste vrai si l'on considère la condition de régularité de Slater :

$$\exists \hat{x} \in S \text{ tel que } g(\hat{x}) \in \overset{\circ}{C}.$$

à la place de la condition (R.U.) correspondante :

$$\exists \hat{x} \in \overset{\circ}{S}{}^r \text{ tel que } g(\hat{x}) \in \overset{\circ}{C}$$

Programmation Géométrique.

Considérons le Programme Géométrique Prototype :

$$\text{PG)}\quad \begin{array}{l} \text{Min } g_o(t) \\ g_k(t) \leq 1 \ ;\ k = 1,\dots,p \\ t > 0 \\ t \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

où les fonctions $g_k(t)$ $(k = 0, 1,\dots,p)$ sont des posynômes i.e.

$$\left.\begin{array}{l} g_k(t) = \sum\limits_{i\in J(k)} u_i(t) \\ u_i(t) = c_i \prod\limits_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}},\ c_i \in \overset{o}{\mathbb{R}}_+ \ ;\ i \in J(k) \\ J(k) = \{m_k, m_{k+1}, \dots , n_k\} \\ m_o = 1 \\ m_k = n_{k-1} + 1 \end{array}\right\} \quad k = 0,1,\dots,p$$

Considérons maintenant la transformation de variables définie par :

$$t_j = e^{z_j},\ z_j \in \mathbb{R} \ ;\ j = 1,\dots,m$$

Le programme géométrique PG) est alors équivalent au programme mathématique convexe défini par :

$$\begin{array}{l} \text{Min } g_o(z) \\ g_k(z) \leq 1,\ k = 1,\dots,p \\ z \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

où $g_k(z) = \sum\limits_{i\in J(k)} c_i\, e^{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} z_j}$, $k = 0, 1,\dots,p$

Par ailleurs, si l'on définit de nouvelles variables

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} z_j,\ i \in J(k),\ k = 0, 1, \dots , p,$$

ce dernier programme peut encore être reformulé sous la forme du programme mathématique convexe à variables séparables suivant :

$$\begin{array}{l} \text{Min } g_o(x) \\ g_k(x) \leq 1 \ ;\ k = 1,\dots,p \\ x \in X \subset \mathbb{R}^{n_p} \end{array}$$

où : $g_k(x) = \sum_{i \in J(k)} c_i e^{x_i}, k = 0, 1, \ldots, p$

et X, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n_p}$ engendré par les colonnes de la matrice $[a_{ij}]_{n_p \times m}$.

On s'intéresse maintenant à déterminer le programme dual du programme géométrique PG). D'après les résultats ci-dessus on peut reformuler ce programme sous la forme :

$$\text{P)} \quad \text{Min } f(x)$$

$$\gamma(x) \in C$$

$$x \in \mathbb{R}^{n_p}$$

où $f(x) = g_o(x)$, $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) - 1 \\ g_p(x) - 1 \end{pmatrix}$, $\gamma(x) = \begin{pmatrix} g(x) \\ x \end{pmatrix}$

et $C = \begin{pmatrix} \mathbb{R}^p_- \\ X \end{pmatrix}$.

Le programme dual D) associé à P) est donc défini par :

$$\text{D)} \quad \text{Max } \theta(r,v)$$

$$r \in \mathbb{R}^p_+$$

$$v \in X^{\perp}_h$$

$$(r,v) \in T$$

où $\theta(r,v) = \inf_{x \in \mathbb{R}^{n_p}} \{g_o(x) + \sum_{k=1}^{p} r_k(g_k(x) - 1) - vx\}$

$$T = \{(r,v) \in (\mathbb{R}^{p'}, \mathbb{R}^{n'_p}) \mathbin{/} \theta(r,v) > -\infty\}$$

$$\theta(r,v) = \inf_{x \in \mathbb{R}^{n_p}} \{ \sum_{J(o)} (c_i e^{x_i} - v_i x_i) + \sum_{k=1}^{p} \sum_{J(k)} (r_k c_i e^{x_i} - v_i x_i) - \sum_{k=1}^{p} r_k\}$$

$$= \sum_{J(o)} \inf_{x_i \in \mathbb{R}} (c_i e^{x_i} - v_i x_i) + \sum_{k=1}^{p} \sum_{J(k)} \inf_{x_i \in \mathbb{R}} (r_k c_i e^{x_i} - v_i x_i) - \sum_{k=1}^{p} r_k$$

$$i \in J(o) \ : \ \inf_{x \in \mathbb{R}} (c_i e^{x_i} - v_i x_i) = \begin{cases} 0, \text{ si } v_i = 0 \\ v_i(1-\log(v_i/c_i)), \text{ si } v_i > 0 \\ -\infty, \text{ si } v_i < 0 \end{cases}$$

$$i \in J(k),\ k \geq 1 \ : \ \inf_{x_i \in \mathbb{R}} (r_k c_i e^{x_i} - v_i x_i) = \begin{cases} 0, \text{ si } v_i = 0,\ r_k \geq 0 \\ v_i(1 - \log(v_i/r_k c_i)), \text{ si } v_i > 0, r_k > 0 \\ -\infty, \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Par conséquent :

$T = \{(r,s) \in (\mathbb{R}^p_+, \mathbb{R}_+^{\overset{n}{p}}) \ / \ r_k > 0$ s'il existe $i_o \in J(k)$ tel que $v_{i_o} > 0\}$

et $\theta(r,v) = \sum\limits_{J(o)} v_i \ (1 - \log(v_i/c_i)) + \sum\limits_{k=1}^{p} \sum\limits_{J(k)} v_i(1-\log(v_i/r_k c_i)) - \sum\limits_{k=1}^{p} r_k$

où l'on convient que : $v_i \ \log(v_i/r_k c_i) = 0$ si $v_i = 0$, $r_o = 1$.

Rappelons que le programme dual D) défini ci-dessus est un programme mathématique convexe.

Dans ce qui suit on se propose de retrouver le programme géométrique dual prototype à partir du programme dual D), à l'aide des techniques simples du calcul différentiel pour la maximisation sans contrainte d'une fonction différentiable : si l'on maximise partiellement le programme D) par rapport à r, v restant fixé, le point $\bar{r}(v)$ qui réalise ce maximum est donné par :

$$\left.\begin{array}{l} \bar{r}_k(v) = 0 \text{ si } v_i = 0 \ \ \forall i \in J(k) \\ \bar{r}_k(v) = \sum\limits_{J(k)} v_i, \text{ sinon} \end{array}\right\} \quad k = 1,\dots,p$$

i.e. $\bar{r}_k(v) = \sum\limits_{J(k)} v_i \geq 0 \ ; \ k = 1,\dots,p$

Si l'on définit $\theta(v) = \theta(\bar{r}(v), v)$, le programme dual D) peut donc être reformulé de façon équivalente sous la forme :

$$\begin{array}{l} \text{Max } \theta(v) \\ v \in X_h^{\perp} \\ v \geq 0 \end{array}$$

avec $\theta(v) = \lambda_o(v) - \sum_{k=0}^{p} \sum_{J(k)} v_i \log(v_i/c_i) + \sum_{k=1}^{p} \lambda_k(v) \log \lambda_k(v)$

$$\lambda_k(v) = \sum_{J(k)} v_i \;;\; k = 0, 1, \ldots, p$$

où l'on convient que : $x \log x = 0$ si $x = 0$

Par ailleurs, ce dernier programme est équivalent au programme :

$$\begin{array}{l} \text{Max } \theta(\mu\delta) \\ \sum_{J(o)} \delta_i = 1 \\ \delta \in X_h^{\perp} \\ \delta \geqslant 0 \\ \mu \geqslant 0 \\ \mu \in \mathbb{R} \end{array}$$

où $\theta(\mu\delta) = \mu\lambda_o(\delta) - \mu \sum_{k=0}^{p} \sum_{J(k)} \delta_i \log(\delta_i/c_i) - (\mu \log\mu)\, \lambda_o(\delta) + \mu\sum_{k=1}^{p} \lambda_k(\delta) \log\lambda_k(\delta)$,

$$\lambda_k(\delta) = \sum_{J(k)} \delta_i \;;\; k = 0, \ldots, p$$

Si l'on maximise partiellement ce programme par rapport à μ, δ restant fixé, le point $\bar{\mu}(\delta)$ qui realise ce maximum est donné par :

$\bar{\mu}(\delta)$ tel que : $\log \bar{\mu}(\delta) = \frac{1}{\lambda_o(\delta)} \left[\sum_{k=1}^{p} \lambda_k(\delta) \log\lambda_k(\delta) - \sum_{k=0}^{p} \sum_{J(k)} \delta_i \log(\delta_i/c_i) \right]$

Si l'on définit $\theta(\delta) = \theta(\bar{\mu}(\delta)\delta)$ i.e.

$$\theta(\delta) = \lambda_o(\delta) \exp [1/\lambda_o(\delta)(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k(\delta) \log \lambda_k(\delta) - \sum_{k=0}^{p} \sum_{J(k)} \delta_i \log(\delta_i/c_i))]$$

$$= \lambda_o(\delta) \quad [\prod_{k=0}^{p} \prod_{J(k)} (c_i/\delta_i)^{\delta_i} \prod_{k=1}^{p} \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)}]^{1/\lambda_o(\delta)}$$

ce dernier programme, et donc le programme D), est équivalent au programme géométrique dual prototype :

DG) Max $V(\delta)$

$\lambda_o(\delta) = 1$

$\sum_{i=1}^{n_p} a_{ij} \delta_i = 0$; $j = 1,\dots,m$ (i.e. $\delta \in X_h^{\perp}$)

$\delta \geq 0$

où $V(\delta) = \prod_{k=0}^{p} \prod_{J(k)} (c_i/\delta_i)^{\delta_i} \prod_{k=1}^{p} \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)}$

$\lambda_k(\delta) = \sum_{J(k)} \delta_i$; $k = 0,1,\dots,p$.

Définition : Le programme géométrique (primal) P.G.) est dit superconstitant s'il existe une solution réalisable $\hat{t}$ pour ce programme telle que : $g_k(\hat{t}) < 1$; $k = 1,\dots,p$.

D'après cette définition, si le programme P.G.) est superconsistant, les contraintes du programme convexe P) défini plus haut, P) équivalent a P.G.), vérifient alors la condition de régularité (R) :

$\nexists\ (r,v) \in (\mathbb{R}_+^p, X_h^{\perp})$, $(r,v) \neq 0$ tel que $r\, g(x) - vx \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^{n_p}$

(Supposons le contraire : $\exists (\tilde{r},\tilde{v}) \in (\mathbb{R}_+^p, X_h)$, $(\tilde{r},\tilde{v}) \neq 0$ tel que : $\tilde{r}g(x)-\tilde{v}x \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^{n_p}$ 1).

$$\left.\begin{array}{l}\exists \hat{t} \in \mathbb{R}^m,\ \hat{t} > 0 \text{ tel que } g_k(\hat{t}) < 1 \ ;\ k = 1,\dots,p \\ \text{Définition du programme P)}\end{array}\right] \Longrightarrow \exists \hat{x} \in X \text{ tel que } g(\hat{x}) < 0 \quad 2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{x} \in X \\ 1)\end{array}\right\} \Longrightarrow \tilde{r}g(\hat{x}) \geq 0 \quad 3$$

Supposons que $\tilde{r} \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{r} \neq 0,\ \tilde{r} \in \mathbb{R}_+^p \\ 2)\end{array}\right\} \Longrightarrow \tilde{r}g(\hat{x}) < 0$$

ce qui contredit 3). Par conséquent $\tilde{r} = 0$ et 1 devient donc :

$\exists \tilde{v} \in X_h^{\perp}$, $\tilde{v} \neq 0$, tel que : $\tilde{v}x \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^{n_p}$, ce qui est impossible, d'où le résultat).

D'après le théorème 7, si le programme géométrique P.G.) est superconsistant, et si $\bar{t}$ est une solution optimale de ce programme, le programme géométrique dual D.G.) admet une solution optimale $\bar{\delta}$ et l'on a :

$$g_0(\bar{t}) = V(\bar{\delta})$$

Remarque 15 : a) Le programme géométrique dual D.G.), déterminé initialement par l'intermédiaire de l'Inégalité Géométrique, est un programme mathématique essentiellement convexe. En effet, si l'on remplace la fonction économique $V(\delta)$ dans le programme D.G) par $\log V(\delta)$ l'on obtient alors un programme mathématique convexe à contraintes linéaires.

b) Le programme géométrique dual prototype D.G) présente des avantages, au niveau de la résolution numérique, sur le programme équivalent D) défini plus haut. En effet, le programme D.G) résulte du programme D), lors de la maximisation partielle de ce dernier par rapport à certaines variables, ce qui se traduit finalement par la diminution du nombre total de variables dans la définition de ce programme.

Par ailleurs, l'inégalité géométrique permet d'établir des relations explicites entre les solutions optimales du programme géométrique primal P.G) et les solutions optimales du programme géométrique dual D.G).

Lemme 9 : *Soient :*

$S \subset \mathbb{R}^n$, $S \neq \Phi$, *un sous-ensemble non-vide de* $\mathbb{R}^n$

$K \subset \mathbb{R}^p$, $L \subset \mathbb{R}^q$ *des cônes convexes pointés*

$$\left.\begin{array}{l} \phi : S \to \mathbb{R}^p \\ \\ \psi : S \to \mathbb{R}^q \end{array}\right\} \text{ des fonctions vectorielles définies sur } S$$

$T = \binom{\phi}{\psi} S - \binom{K}{L}$,

tels que l'hypothèse suivante est vérifiée :

$H)_0$ $\exists \tilde{x} \in S$ *tel que* $\psi(\tilde{x}) \in L$ et $\phi(\tilde{x}) = 0$. *On a alors :*

$$\left.\begin{array}{l} \exists (s,t) \in (K^*, L^*),\ s \neq 0 : \\ \\ s\phi(x) + t\psi(x) \geq 0,\ \forall x \in S \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbb{R}^p \\ \\ -\bar{L} \end{bmatrix} \setminus \overline{P(T)} \neq \Phi$$

I) II)

Dem : a) Montrons d'abord que $\binom{-K}{-L} \subset T$:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \binom{k}{\ell} \in \binom{-K}{-L} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} -k \in K \\ -\ell \in L \end{array}\right. \\ \\ L, \text{ cône convexe homogène} \\ \\ \text{hypothèse } H)_0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \psi(\tilde{x}) \in L \end{array}\right. \end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\tilde{x}) - \ell \in K \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \binom{0}{\psi(\tilde{x})} \in \binom{\phi}{\psi} S \end{array}\right\} \binom{k}{\ell} = \binom{0}{\psi(\tilde{x})} - \binom{-k}{\psi(\tilde{x}) - \ell} \in T$$

d'où : $\binom{-K}{-L} \subset T$ 1)

b) Soit $W = \{(s,t\ c\ (K^*, L^*) \ / \ sy + tz \geq 0,\ \forall \binom{y}{z} \in \binom{\phi}{\psi} S\}$.

Montrons que $T^+ = W$, où T^+ est le cône polaire positif de l'ensemble T :

$$T^+ = \{(s,t) \in (\mathbb{R}^{p'}, \mathbb{R}^{q'}) \ / \ sy + tz \geq 0,\ \forall \binom{y}{z} \in T\} \qquad 2)$$

$$\left.\begin{array}{c}\left.\begin{array}{c}1\\2\end{array}\right\} \Longrightarrow T^+ \subset \binom{-K}{-L}^+\\ \text{Lemme 1}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c}T^+ \subset (K^*, L^*)\\ 2)\end{array}\right\} \Longrightarrow 3)$$

3) $T^+ = \{(s,t) \in (K^*, L^*) \ / \ sy + tz \geq 0, \ \forall \binom{y}{z} \in T\}$

K, L pointés $\Longrightarrow \binom{0}{0} \in \binom{K}{L} \Longrightarrow \binom{\phi}{\psi} S \subset T \Longrightarrow T^+ \subset W$ 4)

$$\left.\begin{array}{l}(s,t) \in W \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} st + tz \geq 0, \ \forall \binom{y}{z} \in \binom{\phi}{\psi} S \\ \\ (s,t) \in (K^*, L^*)\end{array}\right.\\ \binom{u}{v} \in T \Longrightarrow \exists \binom{\tilde{y}}{z} \in \binom{\phi}{\psi} S \text{ tel que : } \binom{\tilde{y}-u}{z-v} \in \binom{K}{L}\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad 5)$$

$$5) \left[\begin{array}{l} su + tv \geq 0 \\ (s,t) \in (K^*, L^*)\end{array}\right.$$

d'où : $W \subset T^+$ 6)

D'après 4) et 6) on a donc : $T^+ = W$

c) Montrons finalement que I) est équivalent à II). D'après b), $T^+ = \{(s,t) \in (K^*, L^*) \ / \ s\phi(x) + t\psi(x) \geqslant 0, \ \forall x \in S\}$.

On a alors :

$$\left.\begin{array}{l}\text{i) } \nexists \ (s,t) \in (K^*, L^*), \ s \neq 0 : \\ \quad s\phi(x) + t\psi(x) \geqslant 0, \ V x \in S\end{array}\right\} \Longleftrightarrow T^+ \subset \binom{0}{L^*}$$

Par ailleurs :

ii) $T^+ \subset \binom{0}{L^*} \Longleftrightarrow \binom{\mathbb{R}^p}{-L} \subset T^{++}$

En effet :

$$\left.\begin{array}{r}T^+ \subset \binom{0}{L^*} \Longrightarrow \binom{0}{L^*}^+ \subset T^{++}\\ \text{Lemme 1)}\\ L \text{ cône convexe} \Longrightarrow L^{**} = \overline{L}\end{array}\right\} \Longrightarrow \binom{\mathbb{R}^p}{-\overline{L}} \subset T^{++}$$

Réciproquement :

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix}\mathbb{R}^p\\ -\bar{L}\end{pmatrix} \subset T^{++} \Longrightarrow T^{+++} \subset \begin{pmatrix}\mathbb{R}^p\\ -\bar{L}\end{pmatrix}^+ \\ \qquad\qquad\quad \text{Lemme 1} \\ L \text{ cône convexe} \Longrightarrow (\bar{L})^* = L^* \\ T^+, \text{ cône convexe fermé} \Longrightarrow T^{+++} = (T^+)^{++} = T^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow T^+ \subset \begin{pmatrix}0\\ L^*\end{pmatrix}$$

et ii) est donc vérifié.

Finalement, puisque $T^{**} = \overline{\mathcal{P}(T)}$, on a, d'après les relations i) et ii), que :

$$\left.\begin{array}{l} \nexists (s,t) \in (K^*, L^*),\ s \neq 0 \\ s\phi(x) + t\psi(x) \geq 0,\ \forall x \in S \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}\mathbb{R}^p\\ -\bar{L}\end{pmatrix} \subset \overline{\mathcal{P}(T)}$$

d'où le résultat du lemme.

Théorème 9 : Soient :

$S \subset \mathbb{R}^n$, $S \neq \Phi$, un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^n$

$K \subset \mathbb{R}^p$, un cône convexe homogène pointé dans $\mathbb{R}^p$, $K \neq \{0\}$

$L \subset \mathbb{R}^q$, un cône convexe homogène fermé dans $\mathbb{R}^q$

$$\left.\begin{array}{l} \phi : S \to \mathbb{R}^p \\ \psi : S \to \mathbb{R}^q \end{array}\right\} \text{des fonctions vectorielles définies sur } S$$

$$T = \begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix} S - \begin{pmatrix}K\\ L\end{pmatrix},$$

tels que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

i) $\exists \tilde{x} \in S$ tel que $\psi(\tilde{x}) \in L$ et $\phi(\tilde{x}) = 0$

ii) $\overset{\circ}{K} \neq \Phi$ et $\left[\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix} S\right] \cap \begin{pmatrix}\overset{\circ}{K}\\ L\end{pmatrix} = \Phi$

(resp. ii)' K, saillant et $\left[\begin{pmatrix}\phi\\ \psi\end{pmatrix} S\right] \cap \begin{pmatrix}K\backslash\{0\}\\ L\end{pmatrix} = \Phi$)

iii) $\mathcal{P}(T)$, fermé

alors, il existe $(s,t) \in (K^*, L^*)$, $s \neq 0$, tel que :

$$s\phi(x) + t\psi(x) \geq 0,\ \forall x \in S$$

<u>Dem</u> : Sous les hypothèses i), iii), et du fait que L est fermé, on a d'après le lemme 9 :

$$\left.\begin{array}{l}\exists (s,t) \in (K^*, L^*),\ s \neq 0 : \\ s\phi(x) + t\psi(x) \geqslant 0,\ \forall x \in S\end{array}\right\} \iff \left\{ \binom{\mathbb{R}^p}{-L} \setminus P(T) \neq \phi \right.$$

I) II)

Pour compléter la démonstration du Théorème il suffit donc de montrer que, sous l'hypothèse ii) (resp. ii)') la condition II est vérifiée.

Supposons le contraire i.e. $\binom{\mathbb{R}^p}{-L} \subset P(T)$.

Soit maintenant $\eta_0 \in \overset{o}{K}$ (resp. $\eta_0 \in K \setminus \{0\}$)

$$\binom{\eta_0}{0} \in \binom{\mathbb{R}^p}{-L} \subset P(T) \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \binom{\eta_0}{0} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\left(\binom{y_i}{z_i} - \binom{k_i}{\ell_i}\right) \in \binom{K}{L} \left(\text{resp. } \begin{bmatrix} K \setminus \{0\} \\ L \end{bmatrix}\right) \\ \text{avec :} \\ \left.\begin{array}{l} \binom{y_i}{z_i} \in \binom{\phi}{\psi} S \\ \binom{k_i}{\ell_i} \in \binom{K}{L} \\ \lambda_i \geqslant 0 \\ \text{pour } i = 1,\dots,p \\ \binom{K}{L},\ \text{cône convexe homogène} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \binom{k_i}{\ell_i} \in \binom{K}{L} \end{array}\right. \\ (\text{resp. K, saillant}) \end{array}\right\} \Longrightarrow 1)$$

$$1) \quad \left[\begin{array}{l} \sum \lambda_i \binom{y_i}{z_i} \in \binom{\overset{o}{K}}{L} \cap \left[\binom{\phi}{\psi} S\right] \\ \left(\text{resp. } \sum \lambda_i \binom{y_i}{z_i} \in \binom{K\setminus\{0\}}{L} \cap \left[\binom{\phi}{\psi} S\right]\right) \end{array}\right.$$

ce qui contredit l'hypothèse ii) (resp. ii)'), d'où nécessairement $\binom{\mathbb{R}^p}{-L} \setminus P(T) \neq \Phi$, ce qui complète la démonstration.

Remarque 16 : a) Dans le cas particulier où $p = 1$, $K = \mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$, il est clair que les hypothèses substituables ii) et ii)' du théorème 9 sont alors équivalentes. En effet, on a alors $\overset{o}{K} \neq \Phi$, $\overset{o}{K} = K \setminus \{0\}$ et K saillant.

b) Dans le cas général, si $\overset{o}{K} \neq \Phi$, il est évident que l'on peut supprimer la condition que K soit saillant dans ii)', sans modifier le résultat du théorème 9. Par contre, si $\overset{o}{K} = \Phi$, cette condition est indispensable dans ii)' pour la validité du Théorème 9.

Remarque 17 : le théorème 9 est une généralisation du lemme 5.31 de Karlin [ ], à savoir :

Si S est un polyèdre convexe fermé dans $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ vérifiant les hypothèses suivantes

i) Si $z = (y_1,\dots,y_m, x_1,\dots,x_n)^T = (y,z) \in S$, alors :

$$x \geq 0 \Longrightarrow y \notin \bigcup_{j=1}^{m} \{y \in \mathbb{R}^m \;/\; y \geq 0 \text{ et } y_j > 0\}$$

ii) Il existe $x^o \in \mathbb{R}^n$ tel que $(0,x^o) \in S$ alors, il existe $(v^o,u^o) \in ((\mathbb{R}^m)', (\mathbb{R}^n)')$ tel que :

1) $v^o \gg 0$ (i.e. $v_i^o > 0$, $i = 1,\dots,m$)
$u^o \geq 0$ (i.e $u_i^o \geq 0$, $i = 1,\dots,n$)

2) $v^o y + u^o x \leq 0$, $\forall (y,x)^T \in S$.

En fait, l'hypothèse i) de ce lemme est plus forte que l'hypothèse ii) du théorème 9 , ce qui explique que dans le cas du lemme 5.31 de Karlin l'on ait le résultat plus fort $v^o \gg 0$.

Considérons maintenant le programme mathématique $\bar{P}$) :

$$\bar{P})\quad \begin{array}{l} \text{Min } f(x) \\ \gamma(x) \in C \\ x \in S \end{array}$$

où $f : S \to \mathbb{R}$ est une fonction numérique quelconque, $\gamma : S \to \mathbb{R}$ une fonction vectorielle quelconque, S un sous-ensemble non vide quelconque de $\mathbb{R}^n$ et C, un cône convexe homogène non vide fermé dans $\mathbb{R}^\ell$.

Remarque 18 : La seule différence entre le programme P) défini plus haut et le programme $\bar{P}$) ci-dessus, est que dans ce dernier, le cône convexe homogène C est supposé fermé. Le problème P.C.K.T associé au programme $\bar{P}$) est donc :

Déterminer $\bar{x} \in S$, $\bar{w} \in C^*$ tel que $L(\bar{x},w) \leq L(\bar{x},\bar{w}) \leq L(x,\bar{w})$, $\forall x \in S$, $\forall w \in C^*$ où $L(x,w) = f(x) + w\gamma(x)$.

Condition (R.P.) : On dira que le programme mathématique $\bar{P}$) vérifie la condition de régularité (R.P.) si $\mathcal{P}(T)$ est fermé dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\ell$, où $T = \binom{\alpha}{\gamma}S - \binom{\mathbb{R}^-}{C}$, $\alpha = f(x) - f(\bar{x})$ et $\bar{x}$, une solution optimale quelconque du programme $\bar{P}$).

Théorème 10 : Soit $\bar{x}$ est une solution optimale du programme mathématique $\bar{P}$). Alors, sous l'hypothèse H), et si la condition de régularité (R.P.) est vérifié, il existe $\bar{w} \in C^*$ tel que $(\bar{x},\bar{w})$ est solution du problème P.C.K.T associé à $\bar{P}$).

Dem : Soit $\alpha(x) = f(x) - f(\bar{x})$.

$$\bar{x}\text{, sol. optimale de } \bar{P}) \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \bar{x} \in S,\ \alpha(\bar{x}) = 0,\ \gamma(\bar{x}) \in C \qquad\qquad\qquad\qquad 1) \\ \\ \left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix} S \cap \overset{\circ}{\begin{pmatrix}\mathbb{R}_-\\ C\end{pmatrix}} = \Phi \\ \text{hypothèse H)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix} S\right] \cap \overset{\circ}{\begin{pmatrix}\mathbb{R}_-\\ C\end{pmatrix}} = \Phi \qquad 2) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} 1) \\ 2 \\ \text{Condition (R.P.)} \\ \text{théorème 9} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \bar{w} \in C^* \text{ tel que : } f(x) + \bar{w}\gamma(x) \geq f(\bar{x}),\ \forall x \in S \qquad 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 3) \\ \bar{x} \in S \end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{w}\,\gamma(\bar{x}) \geq 0 \\ \left.\begin{array}{l} \gamma(\bar{x}) \in C \\ \bar{w} \in C^* \end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{w}\gamma(\bar{x}) \leq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{w}\gamma(\bar{x}) = 0 \qquad 4)$$

$$\left.\begin{array}{l} w \in C^* \\ \gamma(\bar{x}) \in C \end{array}\right\} \Longrightarrow w\gamma(\bar{x}) \leq 0 \qquad 5)$$

D'après 3), 4), 5) on a finalement :

$$L(\bar{x},w) \leq L(\bar{x},\bar{w}) \leq L(x,\bar{w}),\ \forall x \in S,\ \forall w \in C^*$$

<u>Remarque 19</u> : On rappelle que si $(\bar{x},\bar{w})$ est solution du problème P.C.K.T associé au programme $\bar{P}$), $\bar{x}$ est solution optimale de $\bar{P}$) sans aucune hypothèse supplémentaire sur ce programme (voir théorème 5).

Considérons maintenant le programme dual $\bar{D}$) associé au programme $\bar{P}$) :

$$\bar{D}) : \text{Max } \theta(w)$$
$$w \in C^*$$
$$w \in T$$

où $\theta(w) = \inf_{x \in S} \{f(x) + w\gamma(x)\}$, $T = \{w \in (\mathbb{R}^{\ell})' \,/\, \theta(w) > -\infty\}$

Théorème 11 : *(Dualité)* : Si $\bar{x}$ est une solution optimale du programme primal ($\bar{P}$) alors, sous l'hypothèse H), et si la condition de régularité (R.P.) est vérifiée, le problème dual $\bar{D}$) admet une solution optimale $\bar{w}$ et l'on a : $f(\bar{x}) = \theta(\bar{w})$.

Dem : Identique à celle du théorème 7, compte tenu du théorème 10.

Remarque 20 : si dans le programme P) considéré plus haut l'on suppose que C est un cône convexe homogène fermé, les théorèmes 4 et 10(resp. les théorèmes 7 et 11) ne diffèrent qu'au niveau de la condition de régularité considérée, à savoir (R) ou (R.P.) :

Lemme 10 : si P est un polyèdre convexe fermé dans $\mathbb{R}^n$ contennant l'origine, l'enveloppe conique convexe $P(P)$ de P est fermée dans $\mathbb{R}^n$.

Dem : Si P est un polyèdre convexe fermé dans $\mathbb{R}^n$, P peut être exprimé sous la forme :

$$P = \Delta + C \qquad 1)$$

où Δ est un polyèdre convexe fermé borné et C, le cône polyédrique fermé homogène des directions d'infinitude de P.

$$P, \text{ convexe} \Longrightarrow \mathcal{P}(P) = P^{\angle}$$

Si P est borné le résultat du lemme est immédiat. En effet : P, borné $\Longrightarrow P^{\angle} = \Delta^{\angle}$, cône polyédrique fermé $\Longrightarrow P^{\angle}$, fermé.

Si P n'est pas borné, on va montrer que :

$$P^{\angle} = \Delta^{\angle} + C$$

$$w \in P^{\angle} \Longrightarrow \left.\begin{bmatrix} \exists u \in P,\ \lambda \geq 0 : \\ w = \lambda u \end{bmatrix}\right\} \underset{1)}{} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \exists x \in \Delta,\ y \in C \text{ tels que :} \\ w = \lambda x + \lambda y \end{array}\right. \\ \\ \left.\begin{array}{l} x \in \Delta \\ \lambda \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda x \in \Delta^{\angle} \\ \\ \left.\begin{array}{l} y \in C \\ \lambda \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda y \in C \end{array}\right\} \Longrightarrow w \in \Delta^{\angle} + C$$

i.e. $P^{\angle} \subset \Delta^{\angle} + C$ 2)

$$\left.\begin{array}{l} y \in C \\ 0 \in P \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 + y = y \in P$$

i.e. $C \subset P$ 3)

$$w \in \Delta^{\angle} + C \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \exists x \in \Delta,\ y \in C,\ \lambda \geq 0 : \\ w = \lambda x + y \end{array}\right. \qquad 4)$$

On considère maintenant les deux cas possibles dans 4):

i) $\lambda = 0$

ii) $\lambda > 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{i)} \\ \\ 4) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} w = y \in C \\ \qquad 3) \end{array}\right\} \Longrightarrow w \in P \\ \qquad\qquad\qquad\quad P \subset P^{\angle} \end{array}\right\} \Longrightarrow w \in P^{\angle}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{ii)}\\ 4)\end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{|l} w = \lambda(x + 1/\lambda\ y) \\ \left.\begin{array}{l} x \in \Delta \\ \left.\begin{array}{l} y \in C \\ \lambda > 0 \\ C,\ \text{cône homogène} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} 1/\lambda y \in C \\ \qquad 1) \end{array} \end{array}\right\} \Longrightarrow x + 1/\lambda y \in P \end{array}\right\} \Longrightarrow w \in P^{\angle}$$

et on a donc $\Delta^{\angle} + C \subset P^{\angle}$ 5)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 2) \\ 5) \end{array}\right\} \Longrightarrow P^{\angle} = \Delta^{\angle} + C \\ \qquad \Delta^{\angle},\ C \text{ cônes polyédriques fermés} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} P^{\angle},\ \text{cône} \\ \text{polyédrique} \end{array}\right\} \Longrightarrow P^{\angle},\ \text{fermé} \\ \text{fermé} \end{array}\right.$$

<u>CQFD</u>.

<u>Remarque 21</u> : D'après la démonstration du lemme 10, si P est un polyèdre convexe fermé dans $\mathbb{R}^n$, l'enveloppe conique convexe $P(P)$ de P est un cône polyédrique fermé dans $\mathbb{R}^n$.

Considérons le programme mathématique linéaire $\bar{P})_L$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$\bar{P})_L \quad \begin{array}{l} \text{Min } cx \\ Ax - b \in C_2 \\ x \in C_1 \end{array}$$

où A est une matrice réelle $(m \times n)$, $c \in \mathbb{R}^{n'}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et C_1, C_2 des cônes polyédriques fermés homogènes dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement.

Remarque 22 : le programme linéaire $\bar{P})_L$ est un cas particulier du programme $\bar{P})$, ci-dessus.

Théorème 12: un vecteur $\bar{x}$ est solution optimale du programme mathématique linéaire $\bar{P})_L$ si et seulement s'il existe $\bar{w} \in C_2^*$ tel que $(\bar{x},\bar{w})$ est solution du problème P.C.K.T. associé au programme $\bar{P})_L$.

Dem : Soit $\bar{x}$ une solution optimale du programme $\bar{P})_L$.
Soit $\alpha(x) = cx - c\bar{x}$, $\gamma(x) = Ax - b$. Il est clair que $\binom{\alpha}{\gamma} C_1$ est un polyèdre convexe fermé dans $\mathbb{R}^{m+1}$

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}\text{, solution}\\ \text{optimale de } \bar{P})_L\end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \bar{x} \in C_1,\ \alpha(\bar{x}) = 0,\ \gamma(\bar{x}) \in C_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1)\\ \left.\begin{array}{l}\binom{\alpha}{\gamma}C_1 \cap \binom{\mathbb{R}^-}{C_2} = \Phi\\ \binom{\alpha}{\gamma}C_1\text{, convexe}\end{array}\right\} \Longrightarrow [\binom{\alpha}{\gamma}C_1)] \cap \overset{\circ}{\binom{\mathbb{R}^-}{C_2}} = \Phi \qquad 2)\end{array}\right.$$

Soit $T = \binom{\alpha}{\gamma}C_1 - \binom{\mathbb{R}^-}{C_2}$:

$$\left.\begin{array}{l}\binom{\alpha}{\gamma}C_1\text{, polyèdre convexe fermé}\\ \binom{\mathbb{R}^-}{C_2}\text{, cône polyédrique fermé}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l}T\text{, polyèdre}\\ \text{convexe fermé}\end{array}\right. \qquad 3)$$

$$\left.\begin{array}{c}\left.\begin{array}{r}1)\Longrightarrow 0\in T\\ 3)\\ \text{Lemme } 10\end{array}\right\}\Longrightarrow \mathcal{P}(T),\ \text{fermé}\\ 1)\\ 2)\\ \text{théorème } 9\end{array}\right\}\Longrightarrow \left[\begin{array}{l}\exists\,\bar{w}\in C_2^*\ \text{tel que :}\\ \\ cx-\bar{w}(Ax-b)\geq c\bar{x},\ \forall x\in C_1\end{array}\right. \qquad 4)$$

et on a donc (voir démonstration du théorème 10):

$$L(\bar{x},w)\leq L(\bar{x},\bar{w})\leq L(x,\bar{w})\ \ ;\ \forall x\in C_1,\ \forall w\in C_2 \qquad 5)$$

et :

$$\bar{w}(A\bar{x}-b)=0 \qquad 6)$$

où $L(x,w) = cx + w(Ax - b)$, ce qui complète la démonstration de la condition nécessaire du théorème. La condition suffisante du théorème est une conséquence du théorème 5 considéré précédemment (voir aussi remarque 19 ci-dessus).

Remarque 23 : D'après la démonstration du théorème 12, l'hypothèse H) et la condition de régularité (R.P.) sont vérifiées dans le cas du programme mathématique linéaire $\bar{P})_L$.

Programmes Linéaires en Dualité.

Etant donné le programme linéaire $\bar{P})_L$, le programme dual $\bar{D})_L$ associé à $\bar{P})_L$ est donné par :

$$\begin{array}{ll}\bar{D})_L & \text{Max } -wb\\ & w\in C_2^*\\ & c+wA\in -C_1^*\end{array}$$

En effet, d'après la définition de $\bar{P})_L$:

$$\theta(w) = \inf_{x\in C_1} \{cx + w(Ax - b)\} = \inf_{x\in C_1}\{(c+wA)x - wb\}$$

et

$$\theta(w) > -\infty \iff \inf_{x\in C_1} (c + wA)x > -\infty$$

et puisque C_1 est un cône homogène :

$$\theta(w) > -\infty \iff (c + wA)x \geq 0, \forall x \in C_1 \iff (c + wA) \in -C_1^*$$

d'où :

$$T = \{w \in (\mathbb{R}^m)' \ / \ c + wA \in -C_1^*\}$$

et

$$\theta(w) = \begin{cases} -wb, \text{ si } w \in T \\ -\infty, \text{ ailleurs} \end{cases}$$

d'où le résultat, d'après la définition générale du programme dual.

Par ailleurs, il est clair que $\bar{D})_L$ est aussi un programme linéaire.

Théorèmes de Dualité pour les programmes linéaires $\bar{P})_L$ et $\bar{D})_L$.

Théorème 1 : Si x et w sont des solutions réalisables du programme primal $\bar{P})_L$ et du programme dual $\bar{D})_L$ respectivement on a alors :

$$-wb \leq cx$$

Par ailleurs, si $\tilde{x}$ et $\tilde{w}$ sont des solutions réalisables des programmes $\bar{P})_L$ et $\bar{D})_L$ respectivement, telles que $-\tilde{w}b = c\tilde{x}$, alors x est solution optimale du programme $\bar{P})_L$ et $\tilde{w}$ est solution optimale du programme $\bar{D})_L$.

Dem : (voir théorème 6).

Théorème 2 : Si $\bar{x}$ est solution optimale du programme primal $\bar{P})_L$, le programme dual $\bar{D})_L$ admet une solution optimale $\bar{w}$ et l'on a : $c\bar{x} = -b\bar{w}$.

Dem : Identique à celle du théorème 7, compte tenu du théorème

Théorème 3 : 1) Si les programmes $\bar{P})_L$ et $\bar{D})_L$ admettent des solutions réalisables, ils admettent chacun une solution optimale, soit respectivement $\bar{x}$ et $\bar{w}$, et l'on a $c\bar{x} = -b\bar{w}$.

2) Si le programme $\bar{P})_L$ (resp. $\bar{D})_2$) n'admet pas de solution réalisable, le programme $\bar{D})_L$ (resp. $\bar{P})_L$) n'admet pas de solution optimale (i.e. ou bien le domaine de $\bar{D})_L$ (resp. $\bar{P})_L$) est vide ou bien ce domaine est non vide et la fonction économique $-wb$ (resp. cx) n'est pas bornée supérieurement (resp. inférieurement) sur ce domaine.

Dem : Identique à celle du théorème homologue pour les programmes linéaires ordinaires.

Remarque 24 : Dans le cas où $C_2 = \mathbb{R}^+_m$, $C_1 = \mathbb{R}^+_n$, l'on retrouve les programmes linéaires ordinaires en dualité dans $\mathbb{R}^n$:

$\bar{P})_L$	Min cx	$\bar{D})_L$	Max $- wb$
	$Ax \geq b$		$w \leq 0$
	$x \geq 0$		$wA \geq -c$

Remarque 25 : Etant donné que les cônes C_1, C_2 (resp. C^*_1, C^*_2) figurant dans le programme $\bar{P})_L$ resp. $\bar{D})_L$ sont des cônes polyédriques, on aurait pu déterminer les résultats ci-dessus à partir des résultats classiques de la Programmation linéaire. En effet, si $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ B_1X \geq 0\}$, $C_2 = \{y \in \mathbb{R}^m \ / \ B_2y \geq 0\}$ où B_1 et B_2 sont des matrices $(p \times n)$ et $(q \times n)$ respectivement, le programme $\bar{P})_L$ est donc équivalent au programme :

$$\begin{array}{l} \text{Min } cx \\ B_2(Ax - b) \geq 0 \\ B_1x \geq 0 \end{array}$$

qui est alors un programme linéaire ordinaire. Néanmoins, dans ce travail on a fait la démarche inverse i.e. retrouver les résultats classiques à partir des résultats plus généraux.

BIBLIOGRAPHIE I

[1] M.S. BAZARAA, *"A Theorem of the Alternative with Application to convex Programming : Optimality, Duality, and Stability"*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 41, 701-715, 1973.

[2] A. BEN-ISRAEL *"Linear Equations and Inequalities on Finite Dimensional, Real or Complex, Vector Spaces : A Unified Theory"*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 27, 367-389, 1969.

[3] A. BERMAN and A. BEN-ISRAEL *"Linear Inequalities Mathematical Programming and Matrix Theory"*, Mathematical Programming 1, 291-30C , 1971.

[4] L. CONTESSE *"Sur la Programmation Géométrique"*, rapport de D.E.A en Mathématique Appliquées, Université des Sciences et Techniques de Lille, Mars 1974.

[5] L. CONTESSE *"Introduction à la Programmation Géométrique"* (première partie de [4]), séminaire d'Analyse Numérique du Laboratoire de Calcul de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, Avril 1974.

[6] E. EISENBERG *"On Cone Functions"*, Recent Advances in Mathematical Programming (R.L. Graves and P. Wolfe, Eds.) Mc Graw Hill, New-York, 1963.

[7] P. HUARD *"Optimisation dans R^n (Programmation Mathématique), première partie : éléments théoriques"*, cours de 3ème cycle, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1972.

[8] P. HUARD "*Optimisation en Contraintes Linéaires*", cours d'Analyse Numérique, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1972

[9] L. HURWICZ "*Programming in Linear Spaces*", Studies in Linear and Nonlinear Programming (K. Arrow, L. Hurwicz and H. Uzawa, Eds.) Stanford University Presse, Stanford, 1958.

[10] J.E. FALK "*Lagrange Multipliers and Nonlinear Programming*", journal of Mathematical Analysis and Applications 19, 141-159, 1967.

[11] K. FAN, I. GLICKSBERG and A.J. HOFFMAN "*Systems of Inequalities Involving Convex Functions*", Proceeding of the American Mathematical Society 8, 617-622, 1957.

[12] C. KALLINA and A.C. WILLIAMS "*Linear Programming in Reflexive Spaces*", SIAM Review 13, 350-376, 1971.

[13] S. KARLIN "*Mathematical Methods and Theory of Games, Programming and Economics*", (Addison-Wesley, Reading Mass. 1959).

[14] R. LEHMANN and W. OETTLI "*The Theorem of the Alternative, the Key-Theorem, and the Vector Maximum Problem*", Mathematical Programming 8, 332-344, 1975.

[15] D.G. LUENBERGER "*Optimization by Vector Space Methods*", John Wiley and Sons, Inc..., New-York, 1969.

[16] O.L. MANGASARIAN *"Nonlinear Programming"*, Mc Graw-Hill, New-York, 1969.

[17] L.W. NEUSTADT *"Sufficiency Conditions and a Duality Theory, for Mathematical Programming Problems in Arbitrery Linear Spaces, Nonlinear Programming"*, (J.B. Rosen, O.L Mangasarian and K. Ritter, Eds), Academic Press, New-York 1970.

[18] E.L. PETERSON *"Geometric Programming"*, SIAM Review Vol 18, n°1, 1-51, 1976.

[19] J. PONSTEIN and W.K. KLEIN HANEVELD *"On a general Saddle-point Condition in Normed Spaces"*, Mathematical Programming 9, 118-122, 1975.

[20] V.A. SPOSITO and H.T. DAVID *"Saddle-point Optimality Criteria of Nonlinear Programming Problems over Cones Without Differentiability"*, SIAM Journal on Applied Mathematics 20, 698-708, 1971.

[21] V.A. SPOSITO *"Modified Regularity Conditions for Nonlinear Programming Problems over mixed cone domains"*, Mathematical Programming 6, 167-179, 1974.

[22] P.L. YU *"Cone Convexity, Cone extreme points, and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives"*, Journal Optimization Theory and Applications, Vol. 14, n°3, 319-377, 1974.

[23] R.T. ROCKAFELLAR *"Convex Analysis"*, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1970.

CHAPITRE II

MÉTHODE DE DOUBLE DESCRIPTION POUR LA RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'INÉGALITÉS LINÉAIRES AVEC DÉTERMINATION DES INÉGALITÉS REDONDANTES

II.MÉTHODE DE DOUBLE DESCRIPTION POUR LA RÉSOLUTION DE SYSTÈMES D'INÉGALITÉS LINÉAIRES AVEC DÉTERMINATION DES INÉGALITÉS REDONDANTES.

Un cône polyédrique convexe homogène K dans $\mathbb{R}^n$ peut être défini indistinctement comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés homogènes ou comme la somme d'un nombre fini de demi-droites homogènes. On dit alors que l'on dispose d'une double description de K si l'on connait, à la fois, un système fini d'inégalités linéaires homogènes dans $\mathbb{R}^n$ dont l'ensemble des solutions est égal à K (système appelé représentation de K) et un ensemble fini de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont l'enveloppe linéaire positive est aussi égale à K (ensemble appelé ensemble de générateurs de K). Il est clair donc que l'on peut associer plusieurs doubles descriptions à un même cône polyédrique.

La Méthode de Double Description (M.D.D.), considérée initialement par T.S. Motzkin dans un but purement théorique, permet de déterminer un ensemble de générateurs d'un cône polyédrique K lorsqu'on connait une représentation de K ou, de façon duale, une représentation de K lorsqu'on connait un ensemble de générateurs de K. En d'autres termes, étant donné un système fini d'inégalités linéaires homogènes, cette méthode permet de déterminer inductivement un ensemble de générateurs du cône polyédrique défini par ce système. Initialement l'on dispose d'un ensemble de générateurs du cône polyédrique défini par certaines inégalités du système d'origine (éventuellement, d'un ensemble de générateurs de l'espace total $\mathbb{R}^n$). A chaque étape de la méthode une nouvelle inégalité du système est incorporée, de sorte que l'on a à déterminer un ensemble de générateurs du cône polyédrique qui résulte de l'intersection du cône polyédrique défini par les Inégalités déjà considérées, et du demi-espace fermé associé à cette nouvelle inégalité. La méthode se termine lorsque toutes les inégalités du système ont été considérées. Cette méthode permet donc une démonstration constructive des théorèmes Fondamentaux pour les Cônes Polyédriques (voir H. Uzawa [18]).

Par la suite, T.S. Motzkin et Al. [15] ont proposé une variante de cette méthode pour la détermination de toutes les solutions d'un système (homogène ou non-homogène) d'inégalités linéaires, variante qui permet de déterminer, à chaque étape, un ensemble essentiel de générateurs du cône polyédrique courant, ce qui réduit considérablement le nombre total de générateurs déterminés au cours de l'algorithme. Cet algorithme a été aussi considéré par N.V. Chernikova [3,4] et V.G. Kuznetsov [13,14] .

Dans ce travail, on se propose, d'une part, de présenter de façon unifiée la Méthode de Double Description pour la détermination de toutes les solutions de systèmes(homogènes ou non-homogènes) d'équations linéaires, d'inégalités linéaires et de systèmes mixtes, et, d'autre part, d'établir des critères pour la détermination des inégalités redondantes. Ces nouveaux critères permettent de ne conserver, à chaque étape de la méthode, qu'une représentation essentielle du cône polyédrique courant, ce qui se traduit par une réduction du volume de calcul demandé par la méthode. Plus généralement, on établit des critères pour la détermination d'une double description essentielle d'un cône polyédrique K, à partir d'une double description quelconque de K. Par ailleurs, étant donné que le nombre total de générateurs déterminés au cours de l'algorithme dépend de l'ordre dans lequel les différentes inégalités sont considérées, on étudie des critères pour le choix de la nouvelle inégalité. Concrètement, à chaque étape, la nouvelle inégalité est choisie, d'une part, de façon à minimiser le nombre de générateurs engendrés et, d'autre part, de façon à rendre redondantes le plus grand nombre d'inégalités parmi celles déjà considérées au cours des étapes précédentes. Un critère analogue pour déterminer a priori les inégalités qui deviennent redondantes après l'introduction d'une nouvelle inégalité, a été étudié par H. Greenberg [11] ; cependant, le critère de Greenberg n'est valable que si le système ne comporte pas d'inégalités singulières. Finalement, on applique la Méthode de Double Description à la détermination de toutes les faces d'un polyèdre convexe fermé défini sous une forme quelconque. Des algorithmes de type simplicial ont été proposés par C.A. Burdet [2], R.J.B. Wets and C. Witzgall [19] pour résoudre ce problème. En particulier, on applique la Méthode de Double à la détermination de tous les points extrêmes (et les directions d'infinitude extrêmes) d'un polyèdre défini par un système fini d'inégalités linéaires. Une méthode du type simplicial a été proposée par M.L. Balinski [1] pour résoudre ce problème. Il est difficile de comparer a priori les performances de cette dernière méthode et de la Méthode de Double Description dont l'esprit est différent. Cependant, lorsque le système qui définit le polyèdre comporte un grand nombre d'inégalités redondantes, la Méthode de Double Description avec Détermination des Inégalités Redondantes peut s'avérer plus intéressante.

Soient $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ deux espaces vectoriels à n dimensions, en dualité pour la forme bilinéaire :

$$YX = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \; ; \; X \in \mathcal{X}, \; Y \in \mathcal{Y}$$

Dans ce qui suit on considérera l'espace $\mathcal{X}$ comme l'espace des vecteurs colonnes à n composantes réelles, l'espace $\mathcal{Y}$ comme l'espace des vecteurs lignes à n composantes réelles, et la forme bilinéaire YX, comme le produit matriciel habituel de deux vecteurs Y,X des espaces $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}$ respectivement. Cependant, pour l'interprétation géométrique des différents résultats, on peut considérer les deux espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ comme en faisant un seul, et la forme bilinéaire YX comme le produit scalaire habituel de deux vecteurs.

1. ENSEMBLES POLYEDRIQUES.

Considérons le système d'inégalités linéaires :

$$AX \geq b \qquad 1.1$$

où A est une matrice m × n, $b \in \mathcal{X}$.

Les solutions de ce système définissent dans $\mathcal{X}$ le *polyèdre P*, intersection des m *demi-espaces fermés*[†] :

$$A_i X \geq b_i \; ; \; i = 1,\ldots,m \qquad 1.2$$

On appelle *représentation d'un polyèdre P*, un ensemble fini d'inégalités linéaires dont l'ensemble des solutions est P. Il est donc évident qu'on peut associer plusieurs représentations à un même polyèdre P.

Etant donné une représentation AX ≥ b d'un polyèdre P, on appelle *hyperplan frontière* l'ensemble des solutions de l'équation :

$$A_i X = b_i \qquad 1.3$$

pour un certain i,

[†] Nota : On dira polyèdre et on sous-entendra polyèdre convexe.

On remarque qu'un hyperplan frontière peut ne contenir aucun point en commun avec le polyèdre P. Par ailleurs, un hyperplan frontière peut contenir le polyèdre P tout entier. Un hyperplan qui satisfait cette dernière propriété est dit *singulier*. De même, on dit qu'une *inégalité est singulière* si l'hyperplan frontière correspondant est singulier.

2. FACES (FERMEES) D'UN POLYEDRE.

On appelle *face d'un polyèdre P*, l'intersection de P avec certains hyperplans frontière. L'ensemble vide est toujours considéré comme une face du polyèdre P.

Si F est une face du polyèdre P, F lui-même est un polyèdre. Par ailleurs, si $\bar{F}$ est une face de F, $\bar{F}$ est aussi une face de P.

Un polyèdre P est toujours une face de lui-même. D'autre part, si F_1 et F_2 sont deux faces de P, $F_1 \cap F_2$ est aussi une face de P.

La définition de face d'un polyèdre fait intervenir les hyperplans frontière et donc, la représentation du polyèdre. Cependant, les faces d'un polyèdre ne dépendent en fait que du polyèdre lui-même. En effet, on a le résultat suivant [21 Théorème 2.4.7] :

Il y a équivalence entre l'ensemble des faces d'un polyèdre P et l'ensemble des parties extrémales de P, où W est une *partie extrémale de P* si :

$$\left.\begin{array}{l} X^1, X^2 \in P \\ \lambda X^1 + (1-\lambda) X^2 \in W \\ 0 < \lambda < 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow X^1, X^2 \in W \qquad 2.1$$

En particulier, si W ne contient qu'un seul point, W est donc un *point extrême du polyèdre P*

D'après la définition d'une face, et du résultat ci-dessus, on a donc que : le nombre de faces d'un polyèdre P est fini et ne dépend pas de la représentation du polyèdre.

3. CÔNES CONVEXES (HOMOGENES).

Un sous-ensemble K de $\mathcal{X}$ est un *cône convexe* si :

$$\left.\begin{array}{l} X^1, X^2 \in K \\ \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda_1 X^1 + \lambda_2 X^2 \in K \qquad 3.1$$

Soit maintenant A un sous-ensemble de $\mathcal{Y}$. On définit alors le *polaire de A, qu'on note A**, par :

$$A^* = \{X \in \mathcal{X} \;/\; AX \geq 0\} = \{X \in \mathcal{X} \;/\; YX \geq 0 \;;\; \forall Y \in A\} \qquad 3.2$$

L'ensemble A* ainsi défini est un cône convexe.

Si B est un sous-ensemble de $\mathcal{X}$, on définit *l'enveloppe conique de B*, qu'on note $B^{\angle}$, comme l'ensemble de toutes les conbinaisons linéaires finies positives (à coefficients positifs ou nuls) d'éléments de B. L'ensemble $B^{\angle}$ est donc, le plus petit cône convexe qui contient l'ensemble B.

Si K est un cône convexe, un ensemble B tel que

$$K = B^{\angle} \qquad 3.3$$

est appelé un *ensemble de générateurs de K.*

Remarque 3.1 : Les définitions ci-dessus se translattent de façon évidente à l'espace $\mathcal{Y}$.

Si K_1 et K_2 sont deux cônes convexes, $K_1 + K_2$ et $K_1 \cap K_2$ sont aussi des cônes convexes. Par ailleurs, si K est un cône convexe, K* (cône dual de K) est aussi un cône convexe, et on a les relations suivantes :

$$K_1 \subset K_2 \Longrightarrow K_2^* \subset K_1^* \qquad 3.4$$

$$(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^* \qquad 3.5$$

En particulier, si le cône convexe K est un sous-espace vectoriel, on a que :

$$K^* = K^{\perp} \tag{3.6}$$

Dans ce qui suit, on s'intéressera en particulier aux cônes convexes qui sont aussi des polyèdres i.e. aux *cônes polyèdriques*.

4. CÔNES POLYEDRIQUES.

L'ensemble des solutions d'un système fini d'inégalités linéaires homogènes :

$$A_i X \geq 0 \ ; \ i = 1, \ldots, m \tag{4.1}$$

est un *cône polyèdrique*. Réciproquement, tout cône polyèdrique est l'ensemble des solutions d'un système d'inégalités homogènes. En particulier, les faces d'un cône polyèdrique sont aussi des cônes polyèdriques (éventuellement réduits à $\{0\}$).

Remarque : Tous les hyperplans frontière d'un cône polyèdrique K ont une intersection non vide avec K (éventuellement réduite à $\{0\}$).

Tout cône polyèdrique K dans $\mathcal{X}$, est donc de la forme :

$$K = A^* \tag{4.2}$$

où A est un ensemble fini d'éléments de $\mathcal{Y}$: $A = \{A_i \in \mathcal{Y} \ ; \ i = 1, \ldots, m\}$.

D'après la relation $(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$, vérifiée par les cônes convexes en général, on a donc que :

$$K = A^* = ((A)^{\angle})^* \tag{4.3}$$

5. THEOREMES FONDAMENTAUX POUR LES CÔNES POLYEDRIQUES.

Lemme de Farkas.

Si A est un ensemble fini d'éléments de $\mathcal{Y}$, alors :

$$A^{**} = (A^*)^* = A^{\angle} \qquad 5.1$$

ou de façon équivalente :

$$\{Y \in \mathcal{Y} \;/\; YX \geq 0 \text{ lorsque } AX \geq 0\} = \{Y \in \mathcal{Y} \;/\; Y = UA,\; U \geq 0\}$$

Théorème de Minkowski.

Etant donné un ensemble fini A *de vecteurs de* $\mathcal{Y}$*, il existe un ensemble fini* B *de vecteurs de* $\mathcal{X}$ *tel que :*

$$A^* = B^{\angle} \qquad 5.2$$

i.e. tout cône polyèdrique a un ensemble fini de générateurs.

Théorème de Weyl.

Etant donné un ensemble fini A *de vecteurs de* $\mathcal{Y}$*, il existe un ensemble fini* B *de vecteurs de* $\mathcal{X}$ *tel que :*

$$A^{\angle} = B^* \qquad 5.3$$

i.e. tout cône convexe avec un ensemble fini de générateurs est un cône polyèdrique.

D'après les théorèmes ci-dessus, on peut définir indistinctement un cône polyèdrique comme l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces homogènes ou comme la somme d'un nombre fini de demi-droites homogènes.

On dira qu'on dispose d'une *double description d'un cône polyèdrique K*, lorsqu'on connait à la fois un ensemble fini $A \subset \mathcal{Y}$ et un ensemble fini $B \subset \mathcal{X}$ tels que :

$$K = A^{*} = B^{\angle} \qquad 5.4$$

D'après le lemme de Farkas et la propriété 4.3 ci-dessus, on a que :

Proposition 5.1

Si K *est un cône polyédrique tel que :*

$$K = A^{*} = B^{\angle}$$

alors :

$$K^{*} = B^{*} = A^{\angle},$$

et réciproquement.

D'après ce résultat, lorsqu'on connait une double description (A^{*}, $B^{\angle}$) d'un cône polyédrique K, on connait en même temps une double description ($A^{\angle}$, B^{*}) de son cône dual K^{*}.

6. DIMENSION ET LINEARITE D'UN CÔNE POLYEDRIQUE.

Soit K un cône polyédrique, et soit [K] *l'enveloppe linéaire de* K i.e. [K], le plus petit sous-espace vectoriel de X qui contient K, on définit alors la *dimension de* K, qu'on note dim(K), par :

$$\dim(K) = \dim([K]) \qquad 6.1$$

Soit par ailleurs,]K[, le plus grand sous-espace vectoriel de X contenu dans K. On appelle]K[la *partie linéaire de* K, et on définit la *linéarité de* K, qu'on note lin(K), par :

$$\mathrm{lin}(K) = \dim(]K[) \qquad 6.2$$

Proposition 6.1

Si K *est un cône polyédrique, alors :*

i) $[K] = K + (-K)$ 6.3

ii) $]K[= K \cap (-K)$ 6.4

D'après cette propriété, si $K = A^* = B^{\angle}$ on a d'une part :

$$[K] = B^{\angle} + (-B)^{\angle} = (B \cup (-B))^{\angle} \qquad 6.5$$

et donc :

$$\dim(K) = \text{rang } B \qquad 6.6$$

et d'autre part :

$$]K[= A^* \cap (-A^*) = A^{\perp} \qquad 6.7$$

d'où :

$$\text{lin }(K) = n - \text{rang}A \qquad 6.8$$

Finalement, on a que la partie linéaire $]K[$ de K est l'ensemble des solutions du système d'équations :

$$AX = 0 (\equiv A^{\perp}) \qquad 6.9$$

et par conséquent, $]K[$ est la face du cône polyèdrique K de dimension minimale.

D'après la proposition 5.1, et les résultats ci-dessus, on a que :

Proposition *6.2*

Si K *est un cône polyèdrique, alors :*

$$\dim(K) + \text{lin}(K^*) = n = \dim(K^*) + \text{lin}(K) \qquad 6.10$$

où n *est la dimension de l'espace.*

D'après cette propriété, dans le cas particulier où le cône polyèdrique K est un sous-espace vectoriel, on a que :

$$\dim K + \dim K^{\perp} = n \ , \tag{6.11}$$

propriété classique des sous-espaces vectoriels.

Un cône polyèdrique K est dit : *solide* si dim(K) = n, *saillant* si lin(K) = 0 (i.e. sommet réduit à l'origine). Par conséquent, d'après la proposition 6.2, un cône polyèdrique K est saillant si et seulement si son polaire K* est solide.

Proposition 6.3

Si K est un cône polyèdrique dans X ; alors :

$$K =]K[\oplus \hat{K} \tag{6.12}$$

où :

$$\hat{K} = K \cap (]K[)^{\perp} \quad (\mathrm{lin}(\hat{K}) = 0) \tag{6.13}$$

i.e. tout cône polyèdrique peut être exprimé comme la somme orthogonale de sa partie linéaire et d'un cône saillant.

7. TABLEAU DE DOUBLE DESCRIPTION.

Soit K un cône polyèdrique, et supposons que l'on dispose d'une double description $(A_I^*, (B^J)^{\angle})$ de K i.e.

$$K = A_I^* = (B^J)^{\angle} \tag{7.1}$$

On définit maintenant une partition de l'ensemble B^J de générateurs de K en une partie linéaire $B^{\bar{J}}$ et une partie conique $B^{\hat{J}}$ suivant que les éléments de B^J appartiennent ou non à la partie linéaire]K[de K.

De même, on définit une partition de l'ensemble d'hyperplans frontière A_I, en une partie singulière $A_{\bar{I}}$ et une partie non-singulière $A_{\hat{I}}$, suivant que les hyperplans frontières soient ou non singuliers. Concrètement, les inégalités singulières correspondent aux inégalités satisfaites en égalité dans le système d'inégalités $AX \geq 0$, dont les solutions définissent K.

D'après les définitions ci-dessus, il est facile de vérifier les relations suivantes :

i) $A_I B^{\bar{J}} = \square$ i.e $A_i B^j = 0$; $\forall i \in I$, $\forall j \in \bar{J}$. 7.2

ii) $A_{\bar{I}} B^J = \square$ i.e $A_i B^j = 0$; $\forall i \in \bar{I}$, $\forall j \in J$. 7.3

iii) $A_{\hat{I}} B^{\hat{J}} = M \geq \square$ i.e $A_i B^j \geq 0$; $\forall i \in \hat{I}$, $\forall j \in \hat{J}$. 7.4

où les $\square$ sont des matrices dont les éléments sont nuls et M est une matrice non-négative dont aucune ligne ni colonne n'est identiquement nulle.

On peut résumer les relations ci-dessus, sous forme du Tableau T :

	$B^{\bar{J}}$	$B^{\hat{J}}$
$A_{\bar{I}}$	$\square$	$\square$
$A_{\hat{I}}$	$\square$	M

avec $M \geq \square$. On appelle T, *le Tableau de Double Description du Cône polyèdrique* K.

Remarque 7.1.

D'après la proposition 5.1, si K est un cône polyèdrique tel que $K = A^* = B^L$ alors $K^* = A^L = B^*$ et réciproquement. Par conséquent, lorsqu'on dispose d'un Tableau de Double Description d'un cône polyèdrique K, on dispose en même temps d'un Tableau de Double Description du cône dual K^*. Par ailleurs, d'après les relations 7.2, 7.3 et 7.4, on peut identifier les générateurs dans la partie linéaire de K [resp. de K^*] et les hyperplans singuliers de K^* [resp. de K] et donc les générateurs de la partie conique de l'un, avec les hyperplans non singuliers de son dual, ce qui justifie la notation "—" et "Λ" pour les différentes ensembles d'indices dans le tableau T.

8. ENSEMBLE ESSENTIEL DE GENERATEURS D'UN CÔNE POLYEDRIQUE.

Soit *K* un cône polyèdrique dans *X* et soit B^J un ensemble (fini) de générateurs de K i.e.

$$K = (B^J)^{L} \qquad 8.1$$

Un élément B^k de B^J est dit <u>*redondant dans*</u> B^J si :

$$(B^J)^{L} = (B^{J-k})^{L} \qquad 8.2$$

<u>*Proposition*</u> *8.1*

Si B^J *est un ensemble de générateurs d'un cône polyèdrique* K, *un élément* $B^k \in B^J$ *est redondant dans* B^J *si et seulement si :*

$$B^k = \sum_{j \in J-k} \lambda_j B^j \qquad 8.3$$

$$\lambda_j \geq 0 \; ; \; j \in J-k \qquad 8.4$$

i.e. si et seulement si, B^k est positivement linéairement dépendant des $\{B^j / j \in J-k\}$.

<u>*Proposition*</u> *8.2*

Si B^J *est un ensemble de générateurs du cône polyèdrique* K, *un élément* $B^k \in B^{\bar{J}}$ *est redondant dans* B^J, *si et seulement si,* B^k *est redondant dans* $B^{\bar{J}}$

i.e. si et seulement si :

$$B^k = \sum_{j \in \bar{J}-k} \lambda_j B^j \qquad 8.5$$

Proposition 8.3

Si B^J *est un ensemble de générateurs d'un cône polyèdrique* K, *alors :*

$$]K[= (B^{\bar{J}})^{\angle}, \qquad 8.6$$

où]K[*est la partie linéaire de* K.

Proposition 8.4

Si B^J *est un ensemble de générateurs d'un cône polyèdrique* K , *un élément* $B^k \in B^{\hat{J}}$ *est redondant dans* B^J si et seulement si :

$$B^k = \bar{X} + \sum_{j \in \hat{J}-k} \lambda_j B^j \qquad 8.7$$

avec $\bar{X} \in]K[$.

Un ensemble B de générateurs d'un cône polyédrique K est dit *essentiel* si aucun de ses éléments n'est redondant dans B. En particulier, si le cône polyédrique K est un sous-espace vectoriel de X, un ensemble essentiel de générateurs de K est appelé une *base positive du sous-espace K*.

9. BASES POSITIVES D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL.

Soit S un sous-espace vectoriel de dimension d de X.
La cardinalité des bases positives de S, contrairement aux bases linéaires (au sens habituel), varie entre d+1 (*bases positives de cardinalité minimale*) et 2d (*bases positives de cardinalité maximale*). Dans ce qui suit, on s'intéressera particulièrement aux bases positives minimales et aux bases positives maximales du sous-espace S.

Proposition 9.1

Si $\{B^1,\dots,B^d\}$ *est une base linéaire (au sens habituel) du sous-espace vectoriel* S *de dimension* d *de* X *alors :*

i) $\{B^1,\dots,B^d,-B^1,\dots,-B^d\}$ *est une base positive de cardinalité maximale de* S.

ii) $\{B^1,\dots,B^d, B^{d+1}\}$ *avec :*

$$B^{d+1} = - \sum_{j=1}^{d} \lambda_j B^j \qquad 9.1$$

$$\lambda_j > 0 \; ; \; j = 1,\dots,d \qquad 9.2$$

est une base positive de cardinalité minimale de S. *En particulier, dans (9.2), on peut considérer :*

$$\lambda_j = 1 \; ; \; j = 1,\dots,d \qquad 9.3$$

Proposition 9.2

Si $B = \{B^1,\dots,B^d, B^{d+1}\}$ *est une base positive (de cardinalité minimale) du sous-espace vectoriel* S *de dimension* d, *alors :*

$$B \setminus \{B^k\}$$

où $B^k \in B$, *est une base linéaire (au sens habituel) de* S.

10. DETERMINATION D'UNE BASE LINEAIRE D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL DEFINI PAR UN SYSTEME D'EQUATIONS HOMOGENES.

Soit S un sous-espace vectoriel de X défini par :

$$S = A_I^{\perp} \qquad 10.1$$

où

$$A_I = \{A_i \in Y \; ; \; i \in I\}, \; I = \{1,\dots,m\}$$

i.e. S est l'ensemble des solutions du système homogène de m équations linéaires :

$$A_iX = 0 \; ; \; i = 1,\dots,m \qquad 10.2$$

Proposition 10.1 :

$A^{\perp}_{p+1}$ est redondante dans $A^{\perp}_{I(p)}$ (i.e. $A^{\perp}_{p+1} \supset A^{\perp}_{I(p)}$) si et seulement si $A_{p+1} \in [A_{I(p)}]$ (i.e. A_{p+1} linéairement dépendant dans $A_{I(p)}$).

On définit maintenant un algorithme pour déterminer une base linéaire du sous-espace vectoriel S :

ALGORITHME :

Supposons qu'à la fin de l'étape p ($p>m$) l'on dispose d'une base linéaire $B^{L(p)}$ du sous-espace $A^{\perp}_{I(p)}$ des solutions des p premières équations du système (10.2) ($B^{L(0)}$, base linéaire (canonique par exemple) de l'espace total X) :

Etape p+1 :

i) Si $A_{p+1}B^{L(p)} \neq 0$, aller en ii). Sinon : $A_{p+1}B^{L(p)} = 0$, l'équation $A_{p+1}\ X = 0$ est redondante (i.e. $A^{\perp}_{I(p+1)} = A^{\perp}_{I(p)}$) et donc :
- Faire : $B^{L(p+1)} = B^{L(p)}$
- Aller en iii).

ii) $A_{p+1}B^{L(p)} \neq 0$. Choisir $B^k \in B^{L(p)}$ tel que : $A_{p+1}B^k \neq 0$ et construire $B^{L(p+1)}$ de la façon suivante :

1- $B^j \in B^{L(p+1)}$ si $B^j \in B^{L(p)}$ et $A_{p+1}B^j = 0$

2- $B^j \in B^{L(p+1)}$ si B^j est combinaison linéaire de B^k et B^{ℓ} ($B^{\ell} \in B^{L(p)-k}$, $A_{p+1}B^{\ell} \neq 0$) telle que :

$$A_{p+1}B^j = 0$$

iii) Si $B^{L(p+1)} \neq \emptyset$, passer à l'étape suivante avec p = p+1
Si $B^{L(p+1)} = \emptyset$, Fin : $\{0\}$ est la seule solution du système (10.2).

Interprétation de l'Algorithme.

Considérons le système d'équations homogènes dans R^n :

$$A_i X = 0 \; ; \; i \in I = \{1,\dots,m\} \qquad 10.3$$

où la matrice A_I est de rang r $(r \leq n)$.

Supposons d'abord que les r premières équations du système (10.3) soient linéairement indépendantes, et considérons le tableau initial $\overset{(o)}{T}$:

$$\overset{(o)}{T} = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{A_I B^{L(o)}}}^{m} \\ \left[\begin{array}{c} B^{L(o)} \\ \hline A_I B^{L(o)} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \}\, n \\ \}\, m \end{array} \qquad 10.4$$

dont la partie supérieure est une base linéaire quelconque de l'espace total $\mathbb{R}^n$ et dont la partie inférieure est le produit matriciel de la matrice des coefficients du système et la matrice de base $B^{L(o)}$.

Etape 1 : supposons que le vecteur pivot soit la première colonne de $B^{L(o)}$ i.e. $\overset{(o)}{T}{}^{1}_{n+1} = A_1 (B^{L(o)})^1 \neq 0$ (i.e pivot non nul) (quitte à faire éventuellement une permutation de collonnes de $\overset{(o)}{T}$). Formons alors le Tableau $\overset{(1)}{T}$ de la façon suivante :

$$j=1 : \quad \overset{(1)}{T}{}^{1} = \overset{(o)}{T}{}^{1} \qquad 10.5$$

$$j>1 : \left\{ \begin{array}{l} \overset{(1)}{T}{}^{j} = \overset{(o)}{T}{}^{j}, \text{si } \overset{(o)}{T}{}^{j}_{n+1} = 0 \qquad 10.6 \\ \left. \begin{array}{l} \overset{(1)}{T}{}^{j} = \alpha_1 \overset{(o)}{T}{}^{1} + \alpha_j \overset{(o)}{T}{}^{j} \\ \alpha_1, \alpha_j \in \mathbb{R} \; (\alpha_1, \alpha_j \neq 0) \text{ tels que : } \overset{(1)}{T}{}^{j}_{n+1} = 0 \end{array} \right] \text{si } \overset{(o)}{T}{}^{j}_{n+1} \neq 0 \qquad 10.7 \end{array} \right.$$

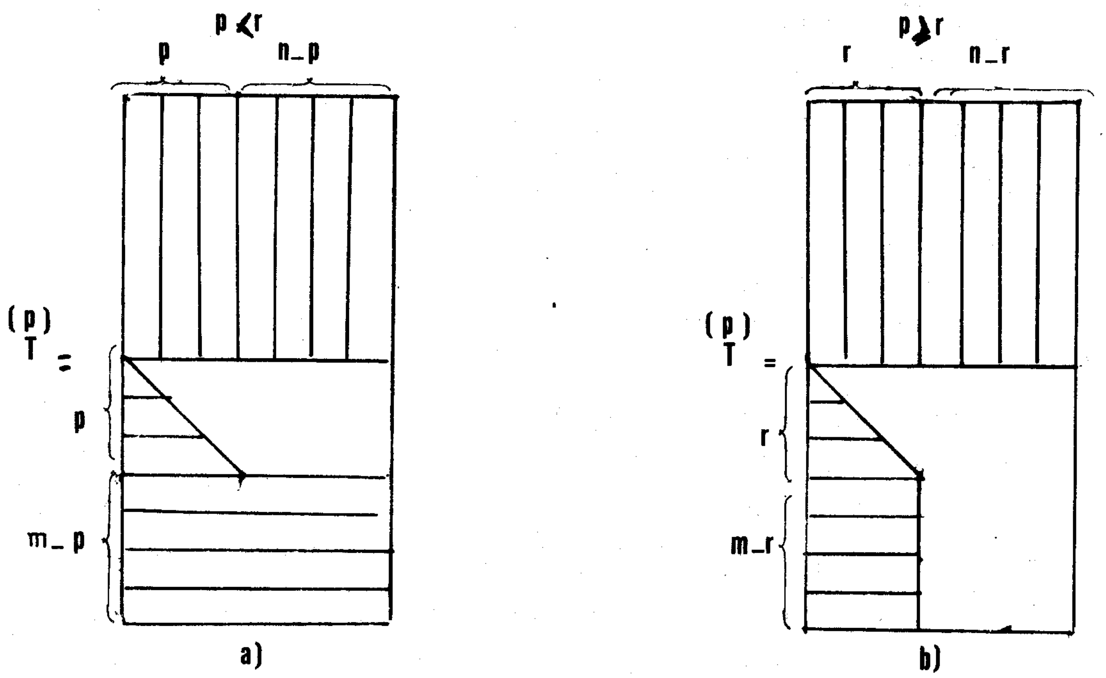
et de façon générale :

Etape p+1 : Si $0 \leq p \leq r-1$, on peut supposer que $\overset{(p)}{T}{}^{p+1}_{n+(p+1)} \neq 0$ (i.e. pivot non nul) (quitte à faire éventuellement une permutation dans les n-p dernières colonnes de $\overset{(p)}{T}$). Formons donc le tableau $\overset{(p)}{T}$ de la façon suivante :

$$1 \leq j \leq p+1 \; : \; \overset{(p+1)}{T}{}^{j} = \overset{(p)}{T}{}^{j} \qquad 10.8$$

$$j > p+1 \; : \left\{ \begin{array}{l} \overset{(p+1)}{T}{}^{j} = \overset{(p)}{T}{}^{j}, \text{ si } \overset{(p)}{T}{}^{j}_{n+(p+1)} = 0 \\ \overset{(p+1)}{T}{}^{j} = \alpha_{p+1} \overset{(p)}{T}{}^{p+1} + \alpha_j \overset{(p)}{T}{}^{j} \\ \left. \begin{array}{l} \alpha_{p+1}, \alpha_j \in R \; (\alpha_{p+1}, \alpha_j \neq 0) \text{ tels que:} \\ \overset{(p+1)}{T}{}^{j}_{n+(p+1)} = 0 \end{array} \right] \text{si } \overset{(p)}{T}{}^{j}_{n+(p+1)} \neq 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{r} 10.9 \\ 10.10 \end{array}$$

A la fin de l'étape p on aura donc un Tableau $\overset{(p)}{T}$ de la forme :



10.11

dont les n-p dernières colonnes du Tableau 10.11 a) définissent une base linéaire $B^{L(p)}$ du sous-espace vectoriel déterminé par les p (p < r) premières équations du système 10.3 et dont les n-r colonnes du Tableau 10.11 b) définissent une base linéaire $B^{L(r)}$ de sous-espace vectoriel déterminé par les r premières (et donc par toutes) les équations du système 10.3.(En fait, les m-r dernières équations du systèmes (10.3) sont donc redondantes).

Si $B^{L(o)} = I_{n\times n}$ (base canonique de $\mathbb{R}^n$), à la fin de l'étape r (p=r), la partie supérieure du tableau $\overset{(r)}{T}$ nous donne la matrice de post-multiplication de Gauss pour la triangularisation inférieure de la matrice A_I du système (10.3), toujours sous l'hypothèse que les r premières lignes de A_I sont linéairement indépendantes (Méthode d'Elimination par Colonnes de Gauss). En outre, la partie supérieure du Tableau $\overset{(p)}{T}$ est, à une permutation de colonnes près, une matrice triangulaire supérieure, à diagonale unitaire lorsque $B^{L(o)} = I_{n\times n}$. En fait, elle est exactement une matrice triangulaire supérieure à diagonale unitaire si dans l'algorithme ci-dessus on ne fait pas de permutations de colonnes pour déterminer un pivot non nul.

Exemple : considérons le système d'équations homogènes :

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\
x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \qquad\qquad 10.12 \\
2x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{|ccc|}
\hline
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
\hline
\textcircled{1} & 2 & 3 \\
1 & 2 & 5 \\
2 & 4 & 8 \\
\hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|c:cc|}
\hline
1 & -2 & -3 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 2 \\
2 & 0 & 2 \\
\hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|cc|c|}
\hline
1 & -3 & -2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 \\
1 & \textcircled{2} & 0 \\
2 & 2 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Remarquons, par ailleurs, que la dernière colonne de la partie supérieure du tableau final, $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, est une base du sous-espace vectoriel défini par le système d'équations 10.12.

Cas général : Si le système (10.3) est de rang r mais les r premières équations ne sont pas nécessairement linéairement indépendantes, on a les mêmes résultats que ci-dessus si l'on convient de remettre à la fin du Tableau $\overset{(p)}{T}$ la ligne $\overset{(p)}{T}_{n+(p+1)}$ lorsqu'à l'étape p+1 ($p+1 \leq r$) $\overset{(p)}{T}{}^{j}_{n+(p+1)} = 0$ $\forall j \in \{p+1,\dots,n\}$, et de considérer donc, à l'étape p+1, la ligne n+(p+1) du nouveau tableau. On repète ce procédé jusqu'à l'obtention d'une ligne n+(p+1) telle que : $\exists j \in \{p+1,\dots,n\}$: $\overset{(p)}{T}{}^{j}_{n+(p+1)} \neq 0$, où $\overset{(p)}{T}$ est le dernier tableau $\overset{(p)}{T}$ considéré dans ce procédé. Autrement dit, si à l'étape p+1 ($p+1 \leq r$) on a que $\overset{(p)}{T}{}^{j}_{n+(p+1)} = 0$ $\forall j \in \{p+1,\dots,n\}$, on convient de remettre la (p+1)ème équation (qui devient en fait redondante) à la fin du système (10.3), jusqu'à l'obtention d'un pivot non nul.

Remarque 10.1 : Dans l'algorithme décrit précédemment pour la détermination d'une base $B^{L(m)}$ du sous-espace vectoriel défini par le système de m équations linéaires homogènes (10.2), on ne conserve en fait, à la fin de l'étape p+1, que les colonnes du tableau $\overset{(p+1)}{T}$ dont la partie supérieure est un élément de $B^{L(p+1)}$ i.e. les colonnes définies dans (10.9) et (10.10). D'autre part, on peut utiliser le même schéma de calcul que ci-dessus (10.4) pour déterminer une telle base linéaire $B^{L(m)}$, sans effectuer nécessairement les permutations de colonnes lorsqu'on détermine un pivot non nul.

Exemple : Déterminer une base linéaire du sous-espace vectoriel défini par le système d'équations :

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$$

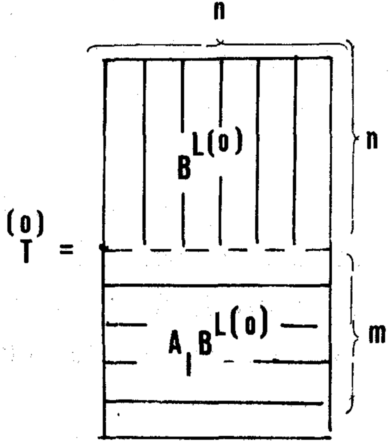
$$2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline \textcircled{1} & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] *$$

et la base linéaire de sous-espace est : $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Méthode d'Elimination Complète.

Soient $B^{L(o)}$ une base quelconque de l'espace total $\mathbb{R}^n$ et considérons le tableau :



10.13

où A_I est la matrice des coefficients du système (10.3), rang $(A_I) = r$.

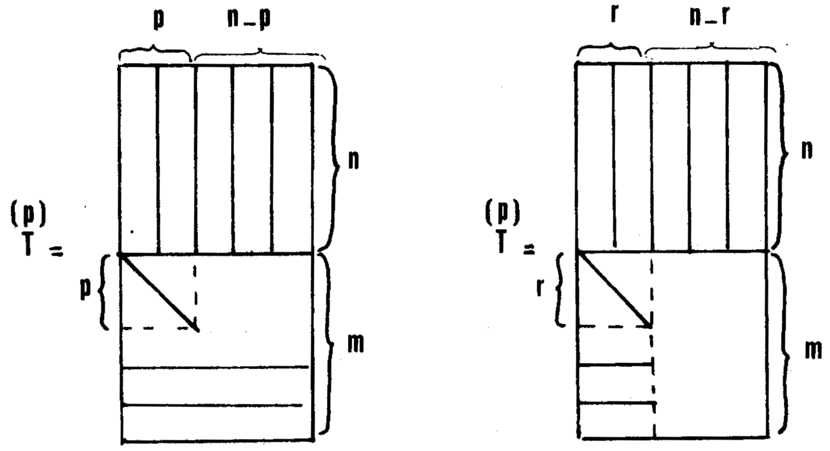
Supposons d'abord que les r premières équations du système (10.3) soient linéairement indépendantes, et définissons l'algorithme suivant :

Etape p+1 : si $o \leq p \leq r-1$, on peut supposer que : ${}^{(p)}T^{p+1}_{n+(p+1)} \neq 0$ i.e. pivot non nul (quitte à faire une permutation dans les (n-p) dernières colonnes de ${}^{(p)}T$). Formons donc le tableau ${}^{(p+1)}T$ de la façon suivante :

$$j = p+1 : {}^{(p+1)}T^j = {}^{(p)}T^j \qquad 10.14$$

$$j \neq p+1 : \begin{cases} {}^{(p+1)}T^j = {}^{(p)}T^j \text{, si } {}^{(p)}T^j_{n+(p+1)} = 0 & 10.15 \\ \left.\begin{array}{l} {}^{(p+1)}T^j = \alpha_{p+1}\,{}^{(p)}T^{p+1} + \alpha_j\,{}^{(p)}T^j \\ \alpha_{p+1}, \alpha_j \in \mathbb{R}\ (\alpha_{p+1}, \alpha_j \neq 0) \text{ t.q. } {}^{(p+1)}T^j_{n+(p+1)} = 0 \end{array}\right] \text{ si } {}^{(p)}T^j_{n+(p+1)} \neq 0 & 10.16 \end{cases}$$

A la fin de l'étape p on aura donc un tableau ${}^{(p)}T$ de la forme :



a) p<r b) p≥r

10.17

dont les (n-p) dernières colonnes de la partie supérieure du tableau 10.17 a) définissent une base linéaire $B^{L(p)}$ du sous-espace vectoriel déterminé par les p(p<r) premières équations du système (10.3). Par ailleurs, les (n-r) dernières colonnes du tableau 10.17 b) définissent une base linéaire du sous-espace vectoriel déterminé par le système (10.3).

Si le système (10.3) est de rang n, et ne comporte que n équations, la partie supérieure du tableau ${}^{(n)}T$ nous donne (si $B^{L(o)} = I_{n\times n}$, base canonique de $\mathbb{R}^n$) la matrice de post multiplication de Jordan pour la diagonalisation de la matrice A_I des coefficients du système (10.3).

Cas général : Si le système (10.3) est de rang r mais les r premières équations ne sont pas linéairement indépendantes, on a les mêmes résultats que ci-dessus si l'on convient, comme dans le cas général de la méthode de triangularisation, de remettre à la fin du tableau $T^{(p)}$ la ligne $T^{(p)}_{p+1}$ lorsqu'à l'étape p+1 ($p+1 \leq r$) : $T^{(p)j}_{p+1} = 0 \ \forall j \in \{p+1,\dots,n\}$ et cela, jusqu'à l'obtention d'un pivot non nul, ce qui revient à remettre à la fin du système (10.3) les équations qui deviennent redondantes au cours de l'algorithme.

Exemple : Considérons le système d'équations homogènes :

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccc|} & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline & \textcircled{1} & -2 & 3 \\ & 2 & -4 & 6 \\ & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & -3 & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ \hdashline & 1 & 0 & 0 & \\ * & 2 & 0 & 0 & \curvearrowleft \\ & 1 & 2 & -2 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & -3 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & \textcircled{2} & -2 \\ * & 2 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccc|} & 0 & 2 & -1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline & -2 & 0 & 0 \\ & 0 & 2 & 0 \\ * & -4 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

et on a bien :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de sous-espace des solutions du système.

Nota : on a signalé avec (*) l'équation qui devient redondante au cours de l'algorithme.

On verra maintenant des applications de ces méthodes à la résolution de systèmes d'équations linéaires non homogènes.

Résolution de Systèmes Non-Homogènes d'Equations linéaires.

Considérons le système non-homogène d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^n$:

$$A_I X = b_I \qquad 10.18$$

où A_I est une matrice (m×n) et $b_I \in \mathbb{R}^m$. Les solutions du système (10.18) définissent une variété linéaire V (éventuellement vide) dans $\mathbb{R}^n$.

Théorème 10.1

La règle :

$$\{X \mid AX = b\} \leftrightarrow \{\binom{X}{t} \mid AX - bt = 0\} \qquad 10.19$$

définit une correspondance biunivoque, monotone par rapport à l'inclusion, entre les variétés linéaires non-vides V dans X *et les sous-espaces vectoriels* S *de* (X,t) *dont l'intersection avec l'hyperplan* $\{\binom{X}{t} \mid t = 1\}$ *de ce dernier espace est non-vide.*

Démonstration.

a) Soit V une variété linéaire non vide dans X définie par :

$$V = \{X \mid AX = b\}$$

Soit $\overset{o}{X} \in V$. Il est clair que $(\overset{o}{X},1)$ appartient au sous-espace vectoriel S de (X,t) défini par :

$$S = \{\binom{X}{t} \mid AX - bt = 0\}$$

dont l'intersection avec l'hyperplan $\{\binom{X}{t} \mid t = 1\}$ est non-vide. Réciproquement, si le sous-espace vectoriel S de (X,t) défini ci-dessus contient un point $(\overset{o}{X},1)$, alors $\overset{o}{X} \in \{X \mid AX = b\}$ et V est non-vide.

b) Montrons maintenant que la transformation

$$\{X \mid AX = b\} \rightarrow \{\binom{X}{t} \mid AX - bt = 0\}$$

est monotone par rapport à l'inclusion. Soit donc $\{X \mid AX = b\}$ un sous-ensemble non-vide de $\{X \mid CX = d\}$, et considérons

$$\begin{bmatrix} \overset{o}{X} \\ \overset{o}{t} \end{bmatrix} \in \{\binom{X}{t} \mid AX - bt = 0\}.$$

Si $\overset{o}{t} \neq 0$, alors $\overset{o}{X}/\overset{o}{t} \in \{X \mid AX = b\} \subset \{X \mid CX = d\}$ et donc : $(\overset{o}{X},\overset{o}{t}) \in \{\binom{X}{t} \mid CX - dt = 0\}$. Si $\overset{o}{t} = 0$, alors $A\overset{o}{X} = 0$ et on a que : $\tilde{X} + \lambda\overset{o}{X} \in \{X \mid AX = b\}$ $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, où $\tilde{X}$ est un vecteur arbitraire de $\{X \mid AX = b\}$, et donc : $\tilde{X} + \lambda\overset{o}{X} \in \{X \mid CX = d\}$ $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ i.e. $C\tilde{X} + \lambda C\overset{o}{X} = d$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$.
Par conséquent, puisque $\tilde{X} \in \{X \mid CX = d\}$, on a que $C\overset{o}{X} = 0$ et finalement : $(\overset{o}{X},0) \in \{\binom{X}{t} \mid CX - dt = 0\}$.

c) D'après la partie b) la transformation :

$$\{X \mid AX = b\} \to \{\binom{X}{t} \mid AX - bt = 0\}$$

est bien définie. En effet, si $\{X \mid AX = b\} = \{X \mid CX = d\}$ alors $\{\binom{X}{t} \mid AX - bt = 0\} = \{\binom{X}{t} \mid CX - dt = 0\}$.

d) La transformation $\{\binom{X}{t} \mid AX - bt = 0\} \to \{X \mid AX = b\}$ est monotone par rapport à l'inclusion. En effet :

$$X \in \{X \mid AX = b\} \text{ si et seulement si } \binom{X}{1} \in \{\binom{X}{t} \mid AX - bt = 0\}$$

e) D'après d) la transformation $\{\binom{X}{t} \mid AX - bt = 0\} \to \{X \mid AX = b\}$ est donc bien définie.
Le théorème est donc démontré.

Remarque : Etant donné une variété linéaire non-vide V dans $\mathcal{X}$, on peut, d'après le théorème 10.1, lui associer un sous-espace vectoriel S unique dans $(\mathcal{X},t)$ dont l'intersection avec l'hyperplan $\{\binom{X}{t} \mid t = 1\}$ de cet espace est non-vide, et réciproquement. On peut donc exprimer la correspondance induite par (10.19), sous la forme :

$$V \to S(V) = S \qquad 10.20$$

$$S \to V(S) = V \qquad 10.21$$

où :

$$V(S) = \{X \mid \binom{X}{1} \in S\} \qquad 10.22$$

Les résultats ci-dessus nous permettent de ramener le problème de résolution d'un système non-homogène d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^n$ à un problème de résolution d'un système homogène dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Concrètement, dans la résolution du système non-homogène (10.18), on considère le système homogène :

$$A_I X - b_I t = 0 \qquad 10.23$$

qui résulte du système (10.18) lors de l'adjonction d'une variable supplémentiare $t \in \mathbb{R}$.

Remarque : D'après le théorème 10.1, il est clair que si le système non-homogène (10.18) est consistent (i.e. $V \neq \emptyset$) ; une équation quelconque de ce système est linéairement dépendante si et seulement si l'équation homogène correspondante est linéairement dépendante dans le système homogène associé (10.23).

Par ailleurs, le système d'origine (10.18) est consistent si et seulement si $b_I \in [\{A_I^j \mid j = 1,\dots,n\}]$ i.e. si et seulement si :

$$\text{rang } (A_I) = \text{rang } (A_I, b_I) \qquad 10.24$$

Supposons maintenant que le système (10.18) soit de rang r ($r \leq n$). L'algorithme défini précédemment pour la détermination d'une base linéaire d'un sous-espace vectoriel défini par un système d'équations homogènes, nous permet de déterminer une base B^L, de cardinalité $(n-r+1)$, du sous-espace vectoriel $S(V)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par le système (10.23). D'autre part, le système (10.18) est consistent si et seulement s'il existe au moins un vecteur $B^{\ell_o} \in B^L$ tel que $B^{\ell_o}_{n+1} \neq 0$. Par conséquent, d'après (10.22), la solution générale du système d'origine (supposé consistent) est de la forme :

$$X_i = \frac{\sum_{\ell=1}^{n-r+1} \alpha_\ell B^\ell}{\sum_{\ell=1}^{n-r+1} \alpha_\ell B^\ell_{n+1}} \quad ; i = 1,\dots,n \qquad 10.25$$

$$\alpha_\ell \in R \quad ; \ell = 1,\dots,(n-r+1)$$

Par ailleurs, on peut considérer, sans perte de généralité, que tous les vecteurs $B^\ell \in B^L$ sont tels que $B^\ell_{n+1} \neq 0$. En effet, s'il existe $B^k \in B^L$ tel que $B^k_{n+1} = 0$, il suffit alors de remplacer B^k par (B^k+B^j) où $B^j \in B^L$, $B^j_{n+1} \neq 0$ (si le système d'origine (10.18) est consistent il existe au moins un $B^j \in B^L$ avec $B^j_{n+1} \neq 0$). La solution générale du système (10.18) est donc de la forme :

$$\left.\begin{aligned} & X = \sum_{\ell=1}^{n-r+1} \alpha_\ell \hat{B}^\ell \\ & \hat{B}^\ell = \frac{B^\ell}{B^\ell_{n+1}} \qquad ; \ell = 1,\dots,(n-r+1) \\ & \sum_{\ell=1}^{n-r+1} \alpha_\ell = 1 \\ & \alpha_\ell \in \mathbb{R} \qquad ; \ell = 1,\dots,(n-r+1) \end{aligned}\right| \qquad 10.26$$

<u>Exemple</u> : Déterminer la solution générale du système non-homogène :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 \qquad &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_2 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Considérons le système homogène associé :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 \qquad - x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{|ccccc|c}
(1) & (2) & (3) & (4) & (5) & \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline
1 & -1 & -2 & 0 & \textcircled{-1} & \\
1 & 2 & -1 & 1 & -1 & \\
2 & 1 & -3 & 1 & -2 & * \\ \hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|cccc|c}
(1)=(4) & (2)=(5)+(1) & (3)=(5)+(2) & (4)=2(5)+(3) & \\ \hline
0 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & -1 & -2 & \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & \\
\textcircled{1} & 0 & 3 & 1 & \\
1 & 0 & 3 & 1 & * \\ \hline
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{|ccc|}
(1)=(2) & (2)=3(1)+(3) & (3)=-(1)+(4) \\ \hline
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & -3 & -1 \\
1 & -1 & -2 \\ \hline
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\ \hline
\end{array}
$$

Nota : Au-dessus de chaque tableau on a détaillé les différentes opérations réalisées sur les colonnes du tableau précédent. D'autre part, on a signalé avec (*) l'équation qui devient redondante dans le système homogène, et donc dans le système d'origine, lors de l'introduction d'une nouvelle équation du système au cours de l'algorithme.

La partie supérieure du dernier tableau nous donne une base linéaire du sous-espace vectoriel S de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par le système homogène associé au système d' d'origine. La variété linéaire V (de dimension 2) est donc constitué des vecteurs X de $\mathbb{R}^n$ de la forme :

$$X = \sum_{\ell=1}^{3} \alpha_\ell \hat{B}^\ell$$

$$\alpha_\ell \in \mathbb{R} \ ; \ \ell = 1,\dots,3$$

$$\sum_{\ell=1}^{3} \alpha_\ell = 1$$

où :

$$\hat{B}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \hat{B}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad \hat{B}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \\ +1/2 \end{pmatrix}$$

Commentaires :

Dans la résolution de systèmes d'équations linéaires (homogènes ou non-homogènes) au moyen des méthodes décrites précédemment, il est intéressant de choisir la ligne de pivotage dans le tableau $\overset{(p)}{T}$ (i.e. la nouvelle équation à l'étape p+1) comme celle qui comporte le plus grand nombre d'éléments nuls, de façon à diminuer le nombre total de combinaisons linéaires de paires de colonnes calculées au cours de l'algorithme. Par ailleurs, il est évident que les équations caractérisées redondantes au dours de l'algorithme peuvent être éliminées du système.

11. REPRESENTATION ESSENTIELLE D'UN SYSTEME D'INEGALITES LINEAIRES. (†)

Soit K un cône polyédrique dans X défini par :

$$K = A^*_I \qquad 11.1$$

Une contrainte A^*_r, $r \in I$, est dite *redondante dans* A^*_I si :

$$A^*_I = A^*_{I-r} \qquad 11.2$$

Proposition 11.1 [Lemme de Farkas]

Une contrainte A^*_r, $r \in I$, *est redondante dans* A^*_I *si et seulement si :*

$$A_r = \sum_{i \in I-r} \lambda_i A_i \qquad 11.3$$

$$\lambda_i \geq 0 \; ; \; i \in I-r \qquad 11.4$$

(†) Nota : Désormais on dira indistinctement inégalité ou contrainte.

Remarque 11.1 :

Si K est un cône polyédrique, alors :

$$K = A^*_I \text{ si et seulement si } K^* = (A_I)^{\angle}$$

Par conséquent, d'après les propositions 8.1 et 11.1, on a que :

Une contrainte A^*_r, $r \in I$, est redondante dans A^*_I, si et seulement si, A_r est redondant dans A_I.

Par ailleurs, du fait qu'on peut identifier les contraintes singulières [resp. non-singulières] de $K = A^*_I$, aux générateurs de la partie linéaire [resp. conique] de $K^* = A^{\angle}_I$, on a des résultats analogues à ceux de la Section 8, pour caractériser les différentes contraintes qui définissent un cône polyédrique :

Proposition 11.2

Soit K *un cône polyédrique tel que*

$$K = A^*_I$$

Une contrainte A^*_r, $r \in \bar{I}$, *est redondante dans* A^*_I, *si et seulement si,* A^*_r *est redondante dans* $A^*_{\bar{I}}$.

Par ailleurs, du fait que $]K^*[= A^{\angle}_{\bar{I}}$, on a que :

Proposition 11.3

Si K *est un cône polyédrique tel que :*

$$K = A^*_I$$

alors :

$$[K] = A^*_{\bar{I}} = A^{\perp}_{\bar{I}} \tag{11.5}$$

i.e. le sous-espace engendré $[K]$ est l'intersection des demi-espaces singuliers.

Si K est un cône polyédrique tel que $K = A^*_I$, on dira que A^*_I est une *représentation essentielle du cône polyédrique* K, si aucune contrainte A^*_r, $r \in I$, n'est redondante dans A^*_I.

12. TRANSFORMATION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES EN UN SYSTEME D'INEGALITES LINEAIRES.

Considérons le système d'équations linéaires homogènes:

$$A_iX = 0 \; ; \; i \in I = \{1,\dots,m\} \tag{12.1}$$

dont l'ensemble de solutions est le sous-espace $A_I^{\perp}$, $A_I^{\perp} = [A_I]^{\perp}$, où $[A_I]$, est le sous-espace engendré par les lignes de la matrice A_I.

Soit maintenant B un ensemble de générateurs (au sens positif) du sous-espace vectoriel $[A_I]$ i.e. $[A_I] = B^{\angle}$. On a donc : $A_I^{\perp} = [A_I]^* = (B^{\angle})^* = B^*$ i.e B^* est une représentation du sous-espace vectoriel $A_I^{\perp}$. Par ailleurs, si B est une base positive du sous-espace vectoriel $[A_I]$, B^* est une représentation essentielle du sous-espace vectoriel $A_I^{\perp}$.

D'après la proposition 9.1, deux représentations essentielles du sous-espace $A_I^{\perp}$ sont particulièrement intéressantes :

Représentation Essentielle Maximale de $A_I^{\perp}$:

$$\left| \begin{array}{l} A_iX \geq 0 \quad i \in \tilde{I} \\ \\ -A_iX \geq 0 \quad i \in \tilde{I} \end{array} \right. \tag{12.2}$$

Représentation Essentielle Minimale de $A_I^{\perp}$

$$\left| \begin{array}{l} A_iX \geq 0 \quad i \in \tilde{I} \\ \\ -\sum_{i \in \tilde{I}} \lambda_i A_i X \geq 0 \end{array} \right. \tag{12.3}$$

où $A_{\tilde{I}}$ est un sous-ensemble de rang maximal de A_I, et les $\lambda_i (i \in \tilde{I})$ des constantes strictement positives fixées arbitrairement (éventuellement, $\lambda_i = 1$; $\forall i \in \tilde{I}$).

Remarque 12.1.

Les résultats ci-dessus nous permettent de transformer les systèmes d'équations homogènes en un système d'inégalités homogènes équivalent.

13. DETERMINATION D'UN ENSEMBLE DE GENERATEURS D'UN CÔNE POLYEDRIQUE : IDEES DE BASE DE LA METHODE DE DOUBLE DESCRIPTION

Soit K un cône polyédrique dans X défini par le système d'inégalités linéaires homogènes :

$$A_i X \geq 0 \ ; \ i \in I = \{1,\dots,m\} \qquad 13.1$$

Supposons que l'on dispose d'un ensemble $B^{J(p)}$ $(B^{J(p)} \neq \emptyset)$ de générateurs du cône polyédrique $A^*_{I(p)}$, défini par les p premières inégalités du système (13.1) (si p = 0, $B^{J(o)}$ est un ensemble de générateurs au sens positif, de l'espace total X). Un ensemble $B^{J(p+1)}$ de générateurs du cône polyédrique $A^*_{I(p+1)}$ peut être défini par :

i) Si A^*_{p+1} [resp. $A^{\perp}_{p+1}$] est redondante dans $A^*_{I(P+1)}$ (i.e $A^*_{I(p+1)} = A^*_{I(p)}$), alors :

$$B^{J(p+1)} = B^{J(p)}$$

ii) Si A^*_{p+1} [resp. $A^{\perp}_{p+1}$] n'est pas redondante dans $A^*_{I(p+1)}$, alors :

$$B^{J(p+1)} = \left\{ \begin{array}{l} B^j \in B^{J(p)} : A_{p+1}B^j \geq 0 \quad [\text{resp. } A_{p+1} B^j = 0] \\ B^{j(k,h)} : \left| \begin{array}{l} B^{j(k,h)} = |A_{p+1}B^h|B^k + |A_{p+1}B^k|B^n \ ; \ B^h, B^k \in B^{J(p)} \\ A_{p+1}B^h < 0 \\ A_{p+1}B^k > 0 \end{array} \right. \end{array} \right\},$$

i.e. $B^{J(p+1)}$ est constitué d'une part des générateurs B^j, $B^j \in B^{J(p)}$, qui sont dans le demi-espace fermé A^*_{p+1}, (resp. dans l'hyperplan $A^{\perp}_{p+1}$), et d'autre part, des combinaisons linéaires positives $B^{j(k,h)}$, des vecteurs B^k et B^h (B^k, $B^h \in B^{J(p)}$) situés de part et d'autre de l'hyperplan frontière A_{p+1}, combinaisons telles que $A^{\perp}_{p+1} \cdot B^{j(k,h)} = 0$.

Remarque 13.1.

Si $A_{p+1} B^j < 0 \ \forall B^j \in B^{J(p)}$, l'ensemble $B^{J(p+1)}$ déterminé en ii) est vide, et {0} est la seule solution du système 13.1.

L'ensemble $B^{J(p)}$ (de générateurs du cône polyédrique $A^*_{I(p)}$) considéré ci-dessus, n'est pas nécessairement essentiel. Par ailleurs, même dans le cas où $B^{J(p)}$ est essentiel, et du fait qu'on considère dans ii) toutes les combinaisons linéaires positives $B^{j(k,h)}$, l'ensemble $B^{J(p+1)}$ qui en résulte, n'est pas nécessairement essentiel. On verra plus loin, des critères qui permettent de déterminer, à chaque étape de la méthode ci-dessus, un ensemble essentiel de générateurs.

14. CARACTERISATION DES FACES D'UN CÔNE POLYEDRIQUE.

Soit K un cône polyédrique dans X défini par

$$K = A^*_I = (B^J)^{\angle} \qquad 14.1$$

Les faces (fermées) F d'un cône polyédrique K sont-elles aussi des cônes polyédriques, contenus dans K. Par ailleurs, étant donné que les faces d'un cône polyédrique K correspondent aux sous ensembles extrémaux de K, on a que :

$$\left.\begin{array}{l} X = \sum\limits_{j\in J} \lambda_j B^j \in F \\ \lambda_j \geq 0 \ ; \ \forall j \in J \\ \lambda_{j_o} > 0 \ ; \ j_o \in J \end{array}\right\} \Longrightarrow B^{j_o} \in F \qquad 14.2$$

où F est une face quelconque de K.

Définition 14.1

Soit $B^H \subset B^J$. *On dit que* B^H *détermine une face de* K $(K = (B^J)^{\angle})$ *si la plus petite face de* K *qui contient* B^H *ne contient aucun autre élément de* B^J.

Proposition 14.1

Soit $B^H \subset B^J$ *tel que* B^H *détermine une face de* K. *Alors, si* F *est la plus petite face de* K *qui contient* B^H, *on a que :*

i) $B^H = B^J \cap F$

ii) $F = (B^H)^{\angle}$

Dem : La propriété i) est une conséquence immédiate de la définition 14.1.

La propriété ii) résulte du caractère extrémal de F.

Proposition 14.2

Si F *est une face de* K, *alors* B^H *défini par :*

$$B^H = F \cap B^J$$

détermine F.

Dem : En effet, si $B^H = F \cap B^J$ alors : $F = (B^H)^{\angle}$

i.e. F est la plus petite face de K qui contient B^H.

Remarque 14.1 : Une condition nécessaire pour que B^H, $B^H \subset B^J$, détermine une face de $K(K = (B^J)^{\angle})$ est que $B^H \supset B^{\bar{J}}$, où $B^{\bar{J}}$ est la partie linéaire de B^J.

Remarque 14.2 : Soit $K = (B^J)^{\angle}$. Il est clair que B^J détermine K. Par ailleurs, si $B^{\bar{J}}$ est la partie linéaire de B^J, $B^{\bar{J}}$ détermine]K[(partie linéaire de K), et on a bien $]K[= (B^{\bar{J}})^{\angle}$.

Remarque 14.3 : Si F est une face fermée de K telle F = $(B^H)^{\angle}$, alors la face ouverte $\overset{o}{F}$ correspondante, est donnée par :

$$\overset{o}{F} = \{X / X = \sum_{j \in H} \lambda_j B^j,\ \lambda_j > 0\ \forall_j \in H\}.$$

Proposition 14.3

Soit B^J un ensemble quelconque de générateurs d'un cône polyédrique K. Soit, par ailleurs, $B^H \subset B^J$ tel que B^H détermine une face F de K. Alors : $B^j \in B^H$ est redondant dans B^H si et seulement si B^j est redondant dans B^J.

Dem :

$$\left.\begin{array}{l} B^j \in B^H \\ B^j \text{ redondant dans } B^H \\ B^H \subset B^J \end{array}\right\} \Longrightarrow B^j \text{ redondant dans } B^J$$

réciproquement :

$$\left.\begin{array}{l} B^j \in B^H \\ B^H = F \cap B^J \\ B^j = \displaystyle\sum_{\substack{\ell \in H \\ \ell \neq j}} \lambda_\ell B^\ell + \sum_{\ell \in J-H} \lambda_\ell B^\ell \\ \lambda_\ell \geqslant 0 \quad \ell \subset J-\{j\} \\ F, \text{ extrémal} \end{array}\right\} \Longrightarrow B^j = \sum_{\substack{\ell \in H \\ \ell \neq j}} \lambda_\ell B^\ell$$

Remarque 14.4 : Si B^H, $B^H \subset B^J$, détermine une face F de K, alors

$$\dim F = \dim [B^H]$$

où $[B^H]$ est l'espace vectoriel engendré par B^H. D'après la remarque 14.1, si F est une face de K alors :

$$\dim F \geqslant \dim \,]K[\, = \mathrm{lin}(K) = d.$$

Théorème 14.1

Si K est un cône polyédrique de linéarité d, *K est égal soit à sa seule face de dimension* d *soit à l'enveloppe convexe de ses faces de dimension* d+1.

Lemme 14.2

Un ensemble essentiel de générateurs d'une face F de dimension d+1 de K est constitué, d'une part, d'un ensemble essentiel de générateurs de la partie linéaire de K et, d'autre part, d'un seul élément X^F contenu dans F et non contenu dans]K[. ($X^F \in F$ est déterminé modulo un vecteur arbitraire de]K[. En particulier, si]K[= {0}, X^F est déterminé de façon unique).

Théorème 14.2

Si K est un cône polyédrique de linéarité d, $K \neq \{0\}$, *un ensemble essentiel de générateurs de K est constitué, d'une part, des vecteurs* X^F *choisis dans chacune de différentes faces F de dimension* d+1 *de K (de sorte que* $X^F \in F$ *et* $X^F \notin\,]K[$) *et, d'autre part, (si* d>0) *d'un ensemble essentiel de générateurs de la partie linéaire]K[de K. Par ailleurs tout ensemble* B^J *de générateurs de K contient un sous-ensemble essentiel de générateurs de K.*

15. DETERMINATION DE TOUTES LES FACES D'UN CÔNE POLYEDRIQUE A PARTIR DE SON TABLEAU DE DOUBLE DESCRIPTION.

Supposons que l'on dispose d'un Tableau de Double Description (A_I, B^J) d'un cône polyédrique K (et donc d'un Tableau (B^J, A_I) de K*) :

$$\begin{array}{c|c|c|} & B^{\bar{J}} & B^{\hat{J}} \\ \hline A_{\bar{I}} & \square & \square \\ \hline A_{\hat{I}} & \square & M \end{array} \qquad \begin{array}{l} T = A_I B^J \\ \\ M = A_{\hat{\bar{I}}} B^{\hat{J}} \geqslant 0 \end{array} \qquad 15.1$$

où certaines des sous matrices peuvent être éventuellement vides.

Les faces (fermées) F de K sont des cônes polyédriques contenus dans K, et donc dans $A^{\perp}_{\bar{I}}$, et qui résultent de l'intersection de K avec un sous-ensemble $A_{\hat{I}_H}$ ($A_{\hat{I}_H}$, éventuellement vide) de ses hyperplans frontière non-singuliers (i.e. $F = K \cap A^{\perp}_{\hat{I}_H}$).

Remarque : Si (A_I, B^J) est un Tableau de Double Description quelconque de K, une même face F de K peut être caractérisée par différentes sous-ensembles $A_{\hat{I}_H}$ de $A_{\hat{I}}$.

Proposition 15.1

Soit $(A_I^*, (B^J)^{\angle})$ *une Double Description quelconque d'un cône polyèdrique* K. *Si* F *est une face fermée de* K *donnée par :* $F = K \cap A^{\perp}_{\hat{I}_H}$, *alors* B^H *défini par :*

$$B^H = \{B^j \in B^J \;/\; A_{\hat{I}_H} B^j = 0\}$$

détermine F.

Dem : C'est une conséquence directe de la proposition 14.2.

Remarque 15.1 : Si $A_{\hat{I}_H} = \emptyset$, alors : $F = K$, $B^H = B^J$ et B^J détermine K.

Si $A_{\hat{I}_H} = A_{\hat{I}}$, alors : $F =]K[$, $B^H = B^{\bar{J}}$ et $B^{\bar{J}}$ détermine K.

On s'intéresse maintenant au problème réciproque i.e. à caractériser, à partir du Tableau (A_I, B^J) de K, les sous-ensembles B^H de B^J qui déterminent des faces F de K :

Théorème 15.1

Soit $(A_I, (B^J)^{\angle})$ *une Double Description quelconque d'un cône polyèdrique* K. *Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que* B^H *détermine une face* F *de* K *est que :*

I) si $F =]K[$: $B^H = B^{\bar{J}}$

II) si $F \neq]K[$, *d'une part :*

i) $B^H \supset B^{\bar{J}}$, $B^H \neq B^{\bar{J}}$ et, d'autre part, si l'on définit :

$B^{\hat{H}} = B^H \cap B^{\hat{J}}$

$\hat{I}_{\hat{H}} = \{i \in \hat{I} \mid A_i B^{\hat{H}} = 0\}$

ii) *si* $\hat{I}_{\hat{H}} = \emptyset$: $B^{\hat{J}-\hat{H}} = \emptyset$

si $\hat{I}_{\hat{H}} \neq \emptyset$: $B^{\hat{J}-\hat{H}} \neq \emptyset$ et $\nexists\ B^j \in B^{\hat{J}-\hat{H}}$ *tel que*

$A_i B^j = 0\ \forall i \in \hat{I}_{\hat{H}}$

Dem : C'est une conséquence directe de la définition 14.1 et des résultats ci-dessus compte-tenu du fait que .

$$F = K \cap A^{\perp}_{\hat{I}_{\hat{H}}}$$

est la plus petite face de K qui contient B^H.

Remarque 15.2 : En fait, on peut reformuler le théorème 15.3 sous une forme plus synthétique, avec la convention suivante sur l'hypothèse :

Convention :

H) : $\nexists\ B^j \in B^{\hat{J}-\hat{H}}$ tel que $A_i B^j = 0\ \forall i \in \hat{I}_{\hat{H}}$

i) si $B^{\hat{J}-\hat{H}} = \emptyset$, H) est alors satisfaite.

ii) si $\hat{I}_{\hat{H}} = \emptyset$, H) devient : $\nexists B^j \in B^{\hat{J}-\hat{H}}$ (i.e. $B^{\hat{J}-\hat{H}} = \emptyset$).

Théorème 15.1 (bis)

Si $(A^*_I, (B^J)^{\angle})$ *est une Double Description quelconque du cône polyédrique* K, *une condition nécessaire et suffisante pour que* B^H, $B^H \subset B^J$, *détermine une face* F *de* K *est que, d'une part :*

i) $B^H \supset B^{\bar{J}}$

et, d'autre part :

ii) $\nexists B^j \in B^{\hat{J}-\hat{H}}$ *tel que* : $A_i B^j = 0\ \forall i \in \hat{I}_{\hat{H}}$

avec :

$$\hat{H} = H \cap \hat{J}$$
$$\hat{I}_{\hat{H}} = \{i \in \hat{I} \mid A_i B^{\hat{H}} = 0\}$$

et compte tenu de la convention ci-dessus.

Le théorème 15.1 nous permet de caractériser les différents sous-ensembles B^H de B^J qui déterminent des faces du cône polyédrique $K(K = A_I^* = (B^J)^{\angle})$ à partir du tableau (A_I, B^J) de K (de la forme 15.1) et plus concrètement, à partir de la matrice M du tableau (A_I, B^J). En effet on peut encore reformuler le théorème 15.1 sous la forme :

Théorème 15.1 (*ter*)

Si $(A_I^*, (B^J)^{\angle})$ *est une Double Description quelconque de* K, *une condition nécessaire et suffisante pour que* B^H, $B^H \subset B^J$, *détermine une face* F *de* K *est que, d'une part* $B^H \supset B^{\bar{J}}$ *et que, d'autre part, il n'existe pas de colonne* M^j, $j \in \hat{J}-\hat{H}$, *de* M *dont l'ensemble des indices des composantes nulles contienne l'ensemble des indices des composantes simultanément nulles pour toutes les colonnes* M^j, $j \in \hat{H}$, *où* $\hat{H} = H \cap \hat{J}$.

Par ailleurs, du fait que $K = A_I^* = (B^J)^{\angle}$ si et seulement si $K^* = (B^J)^* = (A_I)^{\angle}$, les résultats ci-dessus nous permettent aussi de caractériser les faces F de K^*, à partir du tableau (A_I, B^J).

Théorème 15.2

Si $(A_I^*, (B^J)\angle)$ *est une Double Description quelconque du cône polyédrique* K, *une condition nécessaire et suffisante pour que* A_H, $A_H \subset A_I$, *détermine une face* F *de* K^* *est que, d'une part* $A_H \supset A_{\bar{I}}$ *et que, d'autre part, il n'existe pas de ligne* M_i, $i \in \hat{I} - \hat{H}$, *de* M, *dont l'ensemble des indices des composantes nulles contienne l'ensemble des indices des composantes simultanément nulles pour toutes les lignes* M_i, $i \in \hat{H}$, *où* $\hat{H} = H \cap \hat{I}$.

Remarque 15.3 : Dans le théorème 15.2 [resp. Théorème 15.1], et d'après la convention de la remarque 15.2, la seconde condition est satisfaite immédiatement lorsque $\hat{I} - \hat{H} = \emptyset$ [resp. $\hat{J} - \hat{H} = \emptyset$], et elle devient : "il n'existe pas de ligne M_i, $i \in \hat{I} - \hat{H}$, de M" [resp. "il n'existe pas de colonne M^j, $j \in \hat{J} - \hat{H}$, de M"] lorsque l'ensemble des indices des composantes simultanément nulles pour toutes les lignes M_i, $i \in \hat{H}$ [resp. pour toutes les colonnes M^j, $j \in \hat{H}$] est vide.

Remarque 15.4 : D'après les résultats ci-dessus pour caractériser les différents sous-ensembles qui déterminent des faces d'un cône polyédrique, il suffit de disposer d'un Tableau de Double Description **Binaire** d'un tel cône i.e d'un Tableau où l'on signale seulement si un élément de la matrice T (de la sous-matrice M, concrètement) est positif (+) ou nul (0).

Remarque 15.5 : On remarque finalement que si on s'intéresse à une détermination "efficace" de toutes les faces de K (resp. de K*) à partir des sous-ensembles B^H de B^J (resp. A_H de A_I) qui déterminent ces faces de K (resp. K*), il est avantageux de disposer d'un ensemble B^J (resp. A_I) dont tout les éléments de $B^{\hat{J}}$ (resp. $A_{\hat{I}}$) soient essentiels dans B^J (resp. A_I).

16. REDUCTION D'UN TABLEAU DE DOUBLE DESCRIPTION
(DÉTERMINATION DES GÉNÉRATEURS ET DES CONTRAINTES REDONDANTES)

Etant donné un Tableau de Double Description quelconque (A_I, B^J) d'un cône polyédrique K, on s'intéresse maintenant à déterminer un ensemble essentiel B^J de générateurs de K et, de façon duale, un ensemble essentiel A_I de générateurs de K* (i.e. une représentation essentielle A_I^* de K)

Théorème 16.1

Si B^J *est un ensemble quelconque de générateurs d'un cône polyédrique* K, *une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément* B^k, $B^k \in B^{\hat{J}}$, *soit essentiel dans* B^J *est que* $B^{\bar{J}} \cup \{B^k\}$ *détermine une face* F *de* K.

Dem : Soit $B^k \in B^{\hat{J}}$, B^k essentiel dans B^J et supposons que $B^{\bar{J}} \cup \{B^k\}$ ne détermine pas une face F de K.

Soit $\tilde{F}$ la plus petite face de K qui contient $B^{\bar{J}} \cup \{B^k\}$. Il existe donc $B^\ell \in B^{\hat{J}-k}$ tel que $B^\ell \in \tilde{F}$. Par ailleurs, puisque $B^k \in B^{\hat{J}}$, dim $\tilde{F} \geq d+1$. Considérons d'abord le cas où dim $\tilde{F} = d+1$. On a donc que : $\tilde{F} = (B^{\bar{J}} \cup \{B^\ell\})^\perp$ et B^k est alors redondant dans B^J. Considérons ensuite : dim $\tilde{F} > d+1$. Puisque $\tilde{F}$ est la plus petite face de K qui contient $B^{\bar{J}} \cup \{B^k\}$, on a que $B^k \in \overset{\circ}{\tilde{F}}$ (intérieur relatif de $\tilde{F}$). B^k peut donc être exprimé comme combinaison linéaire positive de vecteurs de B^{J-k} appartenant à des faces de dimension d+1 de K (voir théorème 14.1). Donc une contradiction et, par conséquent, si B^k est essentiel dans B^J, $B^{\bar{J}} \cup \{B^k\}$ détermine une face F de K.

Réciproquement si $B^{\bar{J}} \cup \{B^k\}$ détermine une face F de K, alors dim(F) = d+1 et B^k est essentiel dans $B^{\bar{J}} \cup \{B^k\}$. B^k est donc essentiel dans B^J (voir proposition 14.3)

Si on dispose maintenant d'un Tableau de Double Description (A_I, B^J) de K de la forme (15.1), on peut reformuler le théorème 16.1 sous la forme :

Théorème 16.1 (bis)

Si $(A_I^*, (B^J)^{\angle})$ est une Double Description quelconque d'un cône polyédrique K, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément B^k, $B^k \in B^J$, soit essentiel dans B^J est qu'il n'existe pas de colonne M^j, $j \in \hat{J}-k$, de M dont l'ensemble des indices des composantes nulles contienne l'ensemble des indices des composantes nulles de la colonne M^k de M i.e. $B^k \in B^{\hat{J}}$ est essentiel dans B^J si et seulement si :

$$\nexists\ B^j \in B^{\hat{J}-k} \text{ tel que : } A_i \in A_{\hat{I}},\ A_i B^k = 0 \Longrightarrow A_i B^j = 0 \qquad 16.1$$

Nota : i) Si $A_i B^k > 0\ \forall i \in \hat{I}$, la condition 16.1 devient : $\nexists\ B^j \in B^{\hat{J}-k}$

ii) Lorsque $B^{\hat{J}-k} = \emptyset$, la condition 16.1 est immédiatement satisfaite.

Remarque 16.1.

On peut montrer, de façon plus directe, le résultat particulier suivant :

Propriété 16.1

Dans le cas particulier où l'une des hypothèses suivantes est satisfaite :

i) B^k *linéairement indépendant dans* B^J

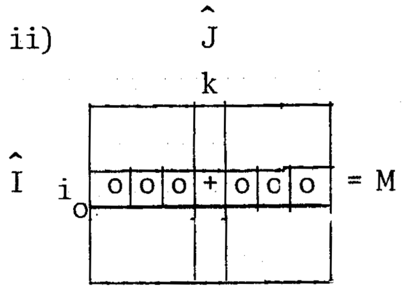
ii) $\exists A_{i_o} \in A_{\hat{I}}$ tel que $A_{i_o} B^k > 0$ et $A_{i_o} B^j = 0\ \forall j \in \hat{J}-k$

(*iii)* $\exists A_{i_o} \in A_{\hat{I}}$ tel que $A_{i_o} B^k = 0$ et $A_{i_o} B^j > 0\ \forall j \in \hat{J}-k$)

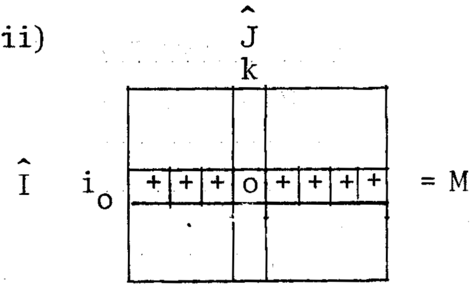
B^k est alors essentiel dans B^J.

Dem : La condition i) est une conséquence directe de la proposition 8.1. Il en est de même de ii) compte tenu de la proposition 8.3. Par contre, iii) n'est qu'une particularisation directe de 16.1.

ii)



iii)



Exemple : Tous les générateurs canoniques (vecteurs unitaires) de l'orthant positif de $\mathbb{R}^n$ sont essentiels d'après i) [resp. ii)].

Théorème 16.2

Si $(A^*_{\hat I},(B^{\hat J})^L)$ *est une Double Description quelconque du cône polyédrique* K, *une condition nécessaire et suffisante pour que* A^*_ℓ, $\ell \in \hat I$, *soit essentielle dans* $A^*_{\hat I}$ *est qu'il n'existe pas de ligne* M_i, $i \in \hat I - \ell$, *de* M *dont l'ensemble des indices des composantes nulles contienne l'ensemble des indices des composantes nulles de la ligne* M_ℓ *de* M *i.e.* A^*_ℓ *est essentielle dans* $A^*_{\hat I}$ *si et seulement si :*

$\nexists A_i \in A_{\hat I-\ell}$ *tel que* : $B^j \in B^{\hat J},\ A_\ell B^j = 0 \Longrightarrow A_i B^j = 0$ 16.2

Nota : i) Si $A_\ell B^j > 0\ \forall j \in \hat J$ la condition 16.2 devient : $\nexists A_i \in A_{\hat I-\ell}$

ii) Lorsque $A_{\hat I-\ell} = \emptyset$, la condition 16.2 est immédiatement satisfaite.

On peut montrer, de façon plus directe, le résultat particulier suivant :

Propriété 16.2

Dans le cas particulier où l'une des hypothèses suivantes est satisfaite :

i) A_ℓ *linéairement indépendant dans* A_I

ii) $\exists B^{j_o} \in B^{\hat{J}}$ *tel que* $A_\ell B^{j_o} > 0$ *et* $A_i B^{j_o} = 0 \ \forall i \in \hat{I}-\ell$

[*iii)* $\exists B^{j_o} \in B^{\hat{J}}$ *tel que* $A\ B^{j_o} = 0$ *et* $A_i B^{j_o} > 0 \ \forall i \in \hat{I}-\ell$]

Dem : Voir démonstration de la propriété 16.1.

ii)

$$\begin{array}{cc|c|c|c|}
 & & & \hat{J} & \\
 & & & j_o & \\ \cline{3-5}
 & & & 0 & \\ \cline{3-5}
 & & & 0 & \\ \cline{3-5}
 & & & 0 & \\ \cline{3-5}
\hat{I} & \ell & & + & \\ \cline{3-5}
 & & & 0 & \\ \cline{3-5}
 & & & 0 & \\ \cline{3-5}
\end{array} = M$$

iii)

$$\begin{array}{cc|c|c|c|}
 & & & \hat{J} & \\
 & & & j_o & \\ \cline{3-5}
 & & & + & \\ \cline{3-5}
 & & & + & \\ \cline{3-5}
\hat{I} & \ell & & 0 & \\ \cline{3-5}
 & & & + & \\ \cline{3-5}
 & & & + & \\ \cline{3-5}
\end{array} = M$$

Exemple : Toutes les contraintes $x_i \geq 0$; $i = 1,\ldots n$ sont essentielles d'après i) [resp. ii)].

On peut encore reformuler le théorème 16.2 sous la forme équivalente suivante :

Théorème 16.2 (bis)

Une condition nécessaire et suffisante pour que A^*_r, $r \in \hat{I}$, *soit redondante dans* A^*_I *est que, d'une part,* A_r *soit linéairement dépendant dans* A_I *et que, d'autre part, l'une de deux situations suivantes soit vérifiée : ou bien :*

i) $A_r B^j > 0 \ \forall B^j \in B^{\hat{J}}$

ou bien :

ii) $\exists A_s \in A_{\hat{I}-r}$ *tel que :* $B^j \in B^{\hat{J}}$, $A_r B^j = 0 \Longrightarrow A_s B^j = 0$.

Remarque 16.3 : Le théorème 16.2 (bis) a été démontré de façon directe dans [5] à l'aide du lemme de Farkas et de la méthode de Double Description.

Si on considère les hypothèses suivantes :

H1) : $A_r \in A_{\hat{I}}$, $A_r B^j > 0 \ \forall B^j \in B^{\hat{J}}$

H2) : $A_r \in A_{\hat{I}}$, $\exists A_s \in A_{\hat{I}-r}$ tel que : $B^j \in B^{\hat{J}}$, $A_r B^j = 0 \Longrightarrow A_s B^j = 0$

On peut établir, d'après l'équivalence des théorèmes 16.2 et 16.2(bis), les relations suivantes :

i)

$$\left[\begin{array}{l} H1) \\ A_r \in [A_{I-r}] \end{array}\right] \overset{\text{Théo. 16.2(bis)}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{c} H1) \\ A^*_r \text{ redondante dans } A^*_I \end{array}\right] \overset{\text{Théo. 16.2}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{c} H1) \\ A_{\widehat{I-r}} \neq \phi \end{array}\right]$$

ii)

$$\left[\begin{array}{l} H2) \\ A_r \in [A_{I-r}] \end{array}\right] \overset{\text{Théo. 16.2(bis)}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{c} H2) \\ A^*_r \text{ redondante dans } A^*_I \end{array}\right] \overset{\text{Théo. 16.2}}{\Longleftrightarrow} \left[H2) \right]$$

où : $A_r \in [A_{I-r}] \Longleftrightarrow A_r$ linéairement dépendant dans A_I.

Remarque 16.4 : On peut reformuler le Théorème 16.1 (bis) de façon analogue au théorème 16.2 (bis).

Remarque 16.5 : D'après les résultats ci-dessus la situation $A_\ell B^j > 0 \ \forall B^j \subset B^{\hat{J}}$ [resp. $A_i B^k > 0 \ \forall A_i \in A_{\hat{I}}$] et A^*_ℓ essentielle dans A^*_I [resp. B^k essentiel dans B^J] n'est possible que si A_ℓ est le seul élément de $A_{\hat{I}}$ [resp. B^k le seul élément de B^J].

Exemple : Soit K un cône polyédrique dans R^3 défini par :

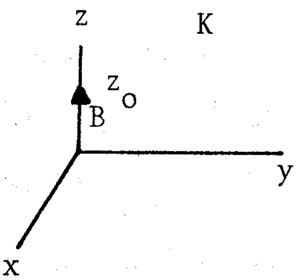
A^*_I :

$A^*_1 : x \geq 0$

$A^*_2 : y \geq 0$

$A^*_3 : -x-y \geq 0$

$A^*_4 : z \geq 0$



$K = A_I = (B^{z_o})^{\angle}$

$B^{z_o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_o \end{pmatrix}, \ z_o > 0$

$A_{\hat{I}} = \{A_4\}$, $B^{\hat{J}} = \{B^{z_o}\}$, $A_4 B^{z_o} > o$ et A_4 est essentielle dans A_I [resp. B^{z_o} essentiel dans B^J].

Remarque 16.6 : Les résultats ci-dessus nous donnent des critères pour déterminer toutes les contraintes non singulières redondantes [resp. tous les générateurs dans la partie conique redondants] d'un cône polyédrique, à partir de son Tableau de Double Description.

Il va sans dire que la détermination de telles contraintes [resp. générateurs] doit être faite une à une i.e une fois qu'une contrainte A_r [resp. un générateur B^r] est caractérisée comme étant redondante, la ligne M_r [resp. la colonne M^r] de la matrice M du Tableau, ne doit plus être considérée dans la recherche d'autres contraintes redondantes [resp. d'autres générateurs redondants]. En fait, la redondance de A_r^* dans A_I^* [resp. de B^r dans B^J] est une propriété de A_r [resp. B^r] relativement à l'ensemble A_I [resp. B^J] tout entier.

Exemple : Considérons le cône polyédrique $K = A_I^*$ dans R^2 où $A_I = \{(1,0), (0,-1), (1,1), (1,-1)\}$. Il est clair que $\{(1,1)\}^*$ est redondante dans A_I^*. De même, $\{(1,-1)\}^*$ est redondante dans A_I^*. Cependant, $\{(1,-1)\}^*$ n'est plus redondante dans $(A_I \setminus \{(1,1)\})^*$

Remarque 16.7 : Les critères de détermination des contraintes non singulières redondantes [resp. des générateurs dans la partie conique redondants] sont indépendants de l'ensemble particulier $A_{\bar{I}}$ [resp. $B^{\bar{J}}$] qui définit $[K] = A_{\bar{I}}^{\perp}$ (resp. $]K[= (B^{\bar{J}})^{\angle}$).

Détermination des Contraintes Singulières Redondantes [resp. des Générateurs dans la Partie Linéaire Redondants] :

Etant donné que si $K = A_I^* = (B^J)^{\angle}$, alors $]K^*[= (A_{\bar{I}})^{\angle}$ (resp. $]K[= (B^{\bar{J}})^{\angle}$), déterminer un ensemble essentiel $A_{\bar{I}}$ de contraintes singulières (resp. un ensemble essentiel $B^{\bar{J}}$ de générateurs dans la Partie Linéaire) revient à déterminer une base positive de $]K^*[$ (resp. $]K[$). Par ailleurs, ce dernier problème est intimément lié (voir section 9) à la détermination du plus grand sous-ensemble de vecteurs linéairement indépendants dans $A_{\bar{I}}$ (resp. dans $B^{\bar{J}}$), ce qu'on peut aborder par une méthode d'orthogonalisation, par exemple.

D'autre part, puisque A^*_r, $r \in \bar{I}$ (resp. B^r, $r \in \bar{J}$) est redondante dans A^*_I (resp. dans B^J) si et seulement si A^*_r (resp. B^r) est redondante dans $A^*_{\bar{I}}$ (resp. dans $B^{\bar{J}}$), et compte tenu de la remarque 16.6, on peut faire la détermination des éléments singuliers redondants indépendamment de la détermination des éléments non-singuliers redondants, et vice versa.

17 DETERMINATION DE TOUTES LES FACES D'UN CÔNE POLYEDRIQUE K DEFINI COMME L'ENVELOPPE CONVEXE D'UN ENSEMBLE FINI DE DEMI DROITES.

Soit K un cône polyédrique donné sous la forme $K = (B^J)^{\angle}$, où B^J est un ensemble (fini) de générateurs de K, et considérons le cône dual K* de K, $K^* = (B^J)^*$. Soit, par ailleurs, $((B^J)^*, A^{\angle}_I)$ une Double Description du cône polyédrique K*. On sait alors que $(A^*_I, (B^J)^{\angle})$ est une Double Description du cône polyédrique $(K^*)^* = K$. Par conséquent, si l'on dispose d'une Double Description $((B^J)^*, A^{\angle}_I)$ du cône polaire K* de K, déterminer toutes les faces (fermées) de $K = (B^J)^{\angle}$ revient à déterminer, à partir du Tableau de Double Description associé à K*, tous les sous-ensembles B^H de B^J qui déterminent des faces (fermées) de $(K^*)^* = K$. Concrètement, pour la détermination de toutes les faces de $K = (B^J)^{\angle}$ on procède de la façon suivante :

i) On détermine d'abord, au moyen de la Méthode de Double Description (section 13) et des Critères pour la détermination des Contraintes et des Générateurs Redondants (section 16), une Double Description Essentiel $((B^{\tilde{J}})^*, A^{\angle}_{\tilde{I}})$ du cône polyédrique $K^* = (B^J)^*$ i.e. d'une part une représentation essentielle $(B^{\tilde{J}})^*$ de K* et d'autre part, un ensemble $A^{\sim}_I$ essentiel de générateurs de K*.

ii) On caractérise ensuite, à partir du Tableau Réduit déterminé dans ii), et à l'aide du Théorème 15.3 (section 15), tous les sous-ensembles B^H de $B^{\tilde{J}}$ qui déterminent des faces F de $(K^*)^* = K$.

<u>Rappel</u> : Si B^H détermine une face F de K, alors $F = (B^H)^{\angle}$.

Remarque 17.1 : La détermination d'une Double Description Essentiel $((B^J)^*, A^{\angle}_I)$ de K (et donc, d'un Tableau Réduit de K*) dans i), permet une détermination "efficace" des sous-ensembles B^H de B^J qui déterminent de faces de K, dans ii). D'autre part, il est convenable d'appliquer les Critères de Redondance à Posteriori (section 16) après chaque étape de la Méthode de

Double Description (section 13) pour éviter que les différents tableaux deviennent trop encombrants. A ce propos, il est avantageux de remplacer la partie i) ci-dessus, par la Méthode de Double Description pour la Détermination d'un Ensemble Essentiel de Générateurs avec Détermination des Contraintes Redondantes, méthode qu'on verra plus loin (Sections 19-20-21).

18. CRITERE A PRIORI POUR DETERMINER LES CONTRAINTES REDONDANTES DANS LA METHODE DE DOUBLE DESCRIPTION

I) Cas où le Système ne comporte que des Inégalités.

A la fin de l'étape p de la Méthode de Double Description (Section 13) l'on dispose d'un ensemble $B^{J(p)}$ de générateurs du cône polyédrique $A^*_{I(p)}$ des solutions des p premières inégalités du système (13.1). L'étape p+1 de la méthode consiste à adjoindre la contrainte A^*_{p+1} aux p premières contraintes $\{A_i \; ; \; i \in I(p)\}$ et à déterminer ensuite un ensemble $B^{J(p+1)}$ de générateurs du cône polyédrique $A^*_{I(p+1)}$ des solutions des (p+1) premières inégalités du système (13.1). Dans la détermination de $B^{J(p+1)}$ on distingue les deux situations suivantes :

i) A^*_{p+1} redondante dans $A^*_{I(p+1)}$

ii) A^*_{p+1} non-redondante dans $A^*_{I(p+1)}$

Dans la situation i) : $A^*_{I(p)} = A^*_{I(p+1)}$, $B^{J(p+1)} = B^{J(p)}$, et A^*_{p+1} n'est plus considérée dans les étapes ultérieures de la Méthode.

Par contre, dans la situation ii), $B^{J(p+1)}$ est déterminé au moyen de la méthode de la Section 13

Sous l'hypothèse ii) on s'intéresse maintenant à caractériser les contraintes non-redondantes dans $A^*_{I(p)}$ qui deviendront redondantes dans $A^*_{I(p+1)}$ i.e. lors de l'adjonction de la contrainte A^*_{p+1}

Lemme 18.1.

Soit $A_r \in A_{I(p)}$, A^*_r non redondante dans $A^*_{I(p)}$. Si A^*_{p+1} est non redondante dans $A^*_{I(p+1)}$, alors :

Une condition nécessaire pour que A^*_r devienne redondante dans $A^*_{I(p+1)}$ est que A_{p+1} soit linéairement dépendant des $\{A_i \;/\; i \in I(p)\}$ i.e.

soit : $B^{\bar{J}(p)} = \emptyset$ soit : $A_{p+1} \; B^j = 0 \quad , \quad \forall B^j \in B^{\bar{J}(p)}$ 18.1

Dem :

Supposons que A^*_r devienne redondante dans $A^*_{I(p+1)}$.

D'après le Lemme de Farkas, on a donc que :

$$A_r = \sum_{\substack{i \in I(p) \\ i \neq r}} \lambda_i A_i + \lambda_{p+1} A_{p+1} \qquad ①$$

avec :

$$\lambda_i \geq 0 \; ; \; i \in I(p), \; i \neq r$$

$$\lambda_{p+1} \geq 0$$

Par ailleurs, du fait que A^*_r n'est pas redondante dans $A^*_{I(p)}$, on a, d'après le Lemme de Farkas, que :

$$\lambda_{p+1} > 0$$

dans ① , et par conséquent :

$$A_{p+1} = \frac{1}{\lambda_{p+1}} A_r - \frac{1}{\lambda_{p+1}} \sum_{\substack{i \in I(p) \\ i \neq r}} \lambda_i A_i$$

d'où le résultat.

Remarque 18.1.

D'après la Proposition 10.1 :

$$A_{p+1} \in [A_{I(p)}]$$

(i.e. A_{p+1} linéairement dépendant des $\{A_i, i \in I(p)\}$) si et seulement si $A^{\perp}_{p+1} \supset A^{\perp}_{I(p)}$.

Par ailleurs, $]A^*_{\bar{I}(p)}[\; = A^{\perp}_{I(p)} = (B^{\bar{J}(p)})^{\angle}$, et par conséquent $A_{p+1} \in [A_{I(p)}]$ si et seulement si soit : $B^{\bar{J}(p)} = \emptyset$ soit :

$$A_{p+1} B^{\bar{J}(p)} = 0,$$

d'où la condition équivalente (18.1).

Lemme 18.2.

Soit $B^{\hat{J}(p)} = \emptyset$ (i.e. $A^*_{\bar{I}(p)} = A^{\perp}_{I(p)} = (B^{\bar{J}(p)})^{\angle}$) et soit A^*_{p+1} non redondante dans $A^*_{\bar{I}(p+1)}$. Alors, si A^*_r est non redondante dans $A^*_{\bar{I}(p)}$, A^*_r est non redondante dans $A^*_{\bar{I}(p+1)}$.

Dem :

Supposons que A_r soit redondante dans $A^*_{\bar{I}(p+1)}$. D'après le lemme 18.1 on a donc que :

$$A^{\perp}_{p+1} \supset A^{\perp}_{I(p)} = A^*_{\bar{I}(p)}$$

ce qui contredit que A^*_{p+1} soit non redondante dans $A^*_{\bar{I}(p+1)}$, d'où le résultat.

Théorème 18.1.

Soit A^*_{p+1} *non-redondante dans* $A^*_{I(p+1)}$ *et soit* $A_r \in A_{I(p)}$ *tel que* A^*_r *est non-redondante dans* $A^*_{I(p)}$. *Alors :*

Une condition nécessaire pour que A^*_r *devienne redondante dans* $A^*_{I(p+1)}$ *est que :*

i) $B^{\hat{J}(p)} \neq \emptyset$

ii) ou bien $B^{\bar{J}(p)} = \emptyset$ *ou bien* $A_{p+1}B^{\bar{J}(p)} = 0$
(*i.e.* A_{p+1} *linéairement dépendant des* $\{A_i \ ; \ i \in I(p)\}$
$A_{p+1} \in \ [A_{I(p)}]$)

iii) a) $\exists B^k \in B^{\hat{J}(p)}$ *tel que* $A_r B^k = 0$
et
b) $B^j \in B^{\hat{J}(p)}, \ A_r B^j = 0 \Longrightarrow A_{p+1}B^j \leq 0$

Dem :

Les conditions i) et ii) ne sont autres que le lemme 18.2 et 18.1 respectivement.

Montrons maintement que iii) a) est nécessaire.
Supposons le contraire i.e. $B^{\hat{J}(p)} \neq \emptyset$ et

$$A_r B^j > 0 \quad \forall_j \in \hat{J}(p) \tag{18.2}$$

D'après le théorème 16.2, si A^*_r est essentielle dans $A^*_{I(p)}$ et si (18.2) est vérifié, $A_{\hat{I}(p)}$ est constitué du seul élément A_r.

Par conséquent :

$$A_i B^{\hat{J}(p)} = 0 \; ; \; \forall i \in I(p)-r \qquad 18.3$$

Par ailleurs, d'après ii) on a que :

$$\text{soit } B^{\bar{J}(p)} = \emptyset \quad \text{soit } A_{p+1} \cdot B^{\bar{J}(p)} = 0 \qquad 18.4$$

et par conséquent, du fait que A^*_{p+1} est non redondante dans $A^*_{I(p+1)}$, il existe $B^{j_o} \subset B^{\hat{J}(p)}$ tel que :

$$A_{p+1} B^{j_o} < 0 \qquad 18.5$$

Finalement, étant donné que A^*_r est supposée redondante dans $A^*_{I(p+1)}$ et que, par ailleurs, A^*_r est non-redondante dans $A^*_{I(p)}$, on a donc que :

$$A_r = \sum_{\substack{i \in I(p) \\ i \neq r}} \lambda_i A_i + \lambda_{p+1} A_{p+1} \qquad 18.6$$

avec :

$$\lambda_i \geq 0 \; ; \; i \in I(p) - r$$

$$\lambda_{p+1} > 0$$

ce qui, avec (18.2), (18.3) et (18,5), entraîne que :

$$0 < A_r B^{j_o} = \sum_{\substack{i \in I(p) \\ i \neq r}} \lambda_i \underbrace{A_i B^{j_o}}_{=0} + \underbrace{\lambda_{p+1}}_{>0} \underbrace{A_{p+1} B^{j_o}}_{<0} < 0$$

donc une contradiction, et la condition iii) a) est bien nécessaire.

Montrons maintenant que la condition iii) b) est nécessaire :

En effet, soit $B^j \in B^{\hat{J}(p)}$ tel que :

$$A_r B^j = 0$$

D'après (18.6), on a que :

$$0 = A_r B^j = \sum_{\substack{i \in \bar{I}(p) \\ i \neq r}} \underbrace{\lambda_i}_{\geqslant 0} \underbrace{A_i B^j}_{\geqslant 0} + \underbrace{\lambda_{p+1}}_{>0} A_{p+1} B^j$$

d'où nécessairement :

$$A_{p+1} B^j \leqslant 0$$

et le théorème est donc démontré.

Corollaire 18.1.

Sous les hypothèses du théorème 18.1, si $A_r \in A_{\bar{I}(p)}$ alors

$$A_{p+1} \in A_{\bar{I}(p+1)}$$

Dem :

En effet, si $A_r \in A_{\bar{I}(p)}$ alors :

$$A_r B^{J(p)} = 0$$

Par ailleurs, d'après ii) on a que soit $B^{\bar{J}(p)} = \emptyset$ soit $A_{p+1} B^{\bar{J}(p)} = 0$. Par conséquent d'après iii) b), on a que $A_{p+1} B^{J(p)} \leqslant 0$ et donc (Méthode de Double Description) :

$$A_{p+1} B^{J(p+1)} = 0.$$

Remarque 18.2.

Le théorème 18.1 nous donne une condition nécessaire pour qu'une contrainte A_r, $r \in I(p)$, essentielle dans $A^*_{I(p)}$, devienne redondante dans $A^*_{I(p+1)}$ lors de l'adjonction de la contrainte A^*_{p+1}. Cependant, cette condition n'est pas suffisante pour garantir la redondance de A^*_r dans $A^*_{I(p+1)}$, comme le montrent les exemples suivantes :

Exemple 1 : Soit :

$$A^*_{I(3)} \quad \begin{array}{l} A^*_1 : X_1 \geq 0 \\ \\ A^*_2 : X_2 \geq 0 \\ \\ A^*_3 : X_3 \geq 0 \end{array}$$

et considérons $B^{J(3)} = \hat{B}^{J(3)} = \{e^1, e^2, e^3\}$ où les e^i sont les vecteurs unitaires dans $\mathbb{R}^3$.

Soit $A^*_4 : - X_2 \geq 0$. Il est clair que A^*_4 est non-redondante dans $A^*_{I(4)}$.

a) Considérons $A_2 \in A_{I(3)}$. A^*_2 est essentielle dans $A^*_{I(3)}$. D'autre part, la condition nécessaire (i) →iii)) du théorème 18.1 est vérifiée et cependant A^*_2 n'est pas redondante dans $A^*_{I(4)}$.

(Il est facile de vérifier dans cet exemple que : A_2, $A_4 \in A_{\bar{I}(4)}$).

b) Considérons $A_1 \in A_{I(3)}$. A^*_1 est essentielle dans $A^*_{I(3)}$, la condition nécessaire du théorème 18.1 est vérifiée et cependant A^*_1 n'est pas redondante dans $A^*_{I(4)}$.

(Il est facile de vérifier dans cet exemple que : $A_1 \in A_{\hat{I}(4)}$, $A_4 \in A_{\bar{I}(4)}$).

Nota. Dans l'exemple ci-dessus on a choisi $B^{J(3)}$ essentiel seulement pour simplifier l'interprétation géométrique des résultats.

On va donner maintenant des conditions suffisantes pour garantir la redondance de A^*_r (essentielle dans $A^*_{\hat{I}(p)}$) dans $A^*_{\hat{I}(p+1)}$.

Théorème 18.2.

Soit A_r, $A_r \in A_{\hat{I}(p)}$, *tel que* A^*_r *est non redondante dans* $A^*_{\hat{I}(p)}$. *Si* A^*_{p+1} *est non redondante dans* $A^*_{\hat{I}(p+1)}$, *une condition suffisante, pour que* A^*_r *devienne redondante dans* $A^*_{\hat{I}(p+1)}$ *est que :*

i) *ou bien* $B^{\bar{J}(p)} = \emptyset$ *ou bien* $A_{p+1}B^{\bar{J}(p)} = 0$
(*i.e.* A_{p+1} *linéairement dépendant des* $\{A_i \; ; \; i \in I(p)\}$)

ii) $\exists B^k \in B^{\hat{J}(p)}$ *tel que* $A_rB^k = 0$

iii)

I) *Si :* $\exists B^{h_o} \in B^{\hat{J}(p)}$ *tel que* $A_{p+1} B^{h_o} > 0$, *alors :*
$B^j \in B^{\hat{J}(p)}$, $A_rB^j = 0 \Longrightarrow A_{p+1}B^j \leq 0$

II) *Si :* $A_{p+1}B^{\hat{J}(p)} \leq 0$, *alors :*

1) $\exists$ $A_s \in A_{I(p)-r}$, $B^{\tilde{h}} \in B^{\hat{J}(p)}$ *tels que :*
$A_sB^{\tilde{h}} > 0$ *et* $A_{p+1}B^{\tilde{h}} = 0$

et l'une des situations suivantes soit vérifiée :
ou bien :

2) $B^j \in B^{\hat{J}(p)}$, $A_rB^j = 0 \Longrightarrow A_{p+1}B^j < 0$

ou bien :

2') $B^j \in B^{\hat{J}(p)}$, $A_rB^j = 0$ *et* $A_{p+1} B^j = 0 \Longrightarrow A_sB^j = 0$

<u>Nota</u> : On rematque que A_r^* est non singulière dans $A_{I(p)}^*$ i.e. $A_r \in A_{\hat{I}(p)}$.

<u>Dem</u> : On remarque d'abord que si la condition i), ii), iii)-I) [resp. iii)-II)] est vérifiée, la condition nécessaire du théorème 18.1 est alors vérifiée.

<u>Hypothèse H</u> : On supposera dans tout ce qui suit que les conditions i) et ii) sont vérifiées.

D'après la Méthode de Double Description (Section 13), l'ensemble $B^{J(p+1)}$ défini par :

$$B^{J(p+1)} = \left\{ \begin{array}{l} B^j \in B^{J(p)} : A_{p+1} B^j \geq 0 \\ \\ B^{j(k,h)} : \left[\begin{array}{l} B^j(k,h) = |A_{p+1} B^h| B^k + |A_{p+1} B^k| B^h \ ; \ B^k, B^h \in B^{J(p)} \\ A_{p+1} B^k > 0 \\ A_{p+1} B^h < 0 \end{array} \right. \end{array} \right\} \qquad 18.7$$

est un ensemble de générateurs du cône polyédrique $A_{I(p+1)}^*$.

On rappelle maintenant que :

$$B^j \in B^{\hat{J}(p)} \cap B^{J(p+1)} \Longrightarrow B^j \in B^{\hat{J}(p+1)} \qquad 18.8$$

En effet, $]A_{I(p+1)}^*[\subseteq]A_{I(p)}^*[$ et donc :

$$B^j \in B^{\hat{J}(p)} \cap B^{J(p+1)} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} B^j \in B^{\hat{J}(p)} \Longrightarrow B^j \notin]A_{I(p)}^*[\supseteq]A_{I(p+1)}^*[\\ \\ B^j \in B^{J(p+1)} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} \Longrightarrow B^j \in B^{\hat{J}(p+1)}$$

Par ailleurs, si $A_{p+1} \in [A_{I(p)}]$ i.e. A_{p+1} linéairement dépendans des $\{A_i \; ; \; i \in I(p)\}$, alors :

$$B^j \in B^{\hat{J}(p+1)} \cap B^{J(p)} \Longrightarrow B^j \in B^{\hat{J}(p)} \qquad 18.9$$

En effet : $A_{p+1} \in [A_{I(p)}] \Longleftrightarrow A^{\perp}_{p+1} \supset A^{\perp}_{I(p)}$.

Par conséquent : $]A^*_{I(p+1)}[\; = A^{\perp}_{I(p+1)} = A^{\perp}_{I(p)} = \;]A^*_{I(p)}[$ et donc :

$$B^j \in B^{\hat{J}(p+1)} \cap B^{J(p)} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} B^j \in B^{\hat{J}(p+1)} \Longrightarrow B^j \notin \,]A^*_{I(p+1)}[\; = \;]A^*_{I(p)} \\ \\ B^j \in B^{J(p)}. \end{array}\right\} \Longrightarrow B^j \in B^{\hat{J}(p)}$$

On va montrer d'abord que, sous l'hypothèse H),iii)-I est suffisante pour que A^*_r devienne redondante dans $A^*_{I(p+1)}$:

Supposons donc : $\exists B^{h_o} \in B^{\hat{J}(p)}$ tel que $A_{p+1}B^{h_o} > 0$

$$\left.\begin{array}{l} B^{h_o} \in B^{\hat{J}(p)} \\ A_{p+1} \; B^{h_o} > 0 \\ (18.7) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} B^{h_o} \in B^{\hat{J}(p)} \cap B^{J(p+1)} \\ (18.8) \end{array}\right\} \Longrightarrow B^{h_o} \in B^{\hat{J}(p+1)} \qquad 18.10$$

$$\left.\begin{array}{l} B^j \; B^{\hat{J}(p)} \\ A_{p+1}B^j > 0 \\ \text{iii)-I} \end{array}\right\} \Longrightarrow A_r B^j > 0 \qquad 18.11$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ B^{h_o} \in B^{\hat{J}(P)} \\ (18.11) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} B^{h_o} \in B^{\hat{J}(p+1)} \\ A_{p+1}B^{h_o} > 0 \\ A_r B^{h_o} > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} A_r, \; A_{p+1} \in A^{\hat{}}_{I(p+1)} \\ \\ B^{\hat{J}(p+1)} \neq \emptyset \end{array}\right. \qquad 18.12$$

D'autre part :

$$\left.\begin{array}{l} B^j \in B^{\hat{J}(p+1)} \\ (18.7) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\text{Soit : } B^j = B^{j(k,h)} \\ \qquad (18.11) \\ \qquad (18.7)\end{array}\right\} \Longrightarrow A_r B^{j(k,h)} > 0 \\ \left.\begin{array}{l}\text{Soit : } B^j \in B^{\hat{J}(p+1)} \cap B^{J(p)} \\ \qquad A_{p+1} \subset [A_{I(p)}] \\ \qquad (18.9)\end{array}\right] \quad ① \end{array}\right. \qquad 18.13$$

$$① \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} B^j \in B^{\hat{J}(p)} \\ A_r B^j \geq 0 \\ A_{p+1} B^j \geq 0 \\ (18.11) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} \text{Soit : } A_r B^j > 0 \\ \\ \text{Soit : } A_r B^j = 0 \text{ et } A_{p+1} B^j = 0 \end{array}\right.$$

Par conséquent, d'après 18.13, on a l'une des deux situations suivantes :

Soit : $A_r B^j > 0 \ \forall B^j \in B^{\hat{J}(p+1)}$

Soit : $B^j \in B^{\hat{J}(p+1)}$, $A_r B^j = 0 \Longrightarrow A_{p+1} B^j = 0$

ce qui entraîne, d'après (18.12) et le théorème 16.2 que A^*_r est redondante dans $A^*_{I(p+1)}$.

Montrons ensuite que, sous l'hypothèse H, iii)-II est suffisante pour que A^*_r devienne redondante dans $A^*_{I(p+1)}$:

D'après l'hypothèse II-1) : $\exists A_s \in A_{\hat{I}(p)-r}$, $B^{\tilde{h}} \in B^{\hat{J}(p)}$ tels que : $A_s B^{\tilde{h}} > 0$ et $A_{p+1} B^{\tilde{h}} = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} B^{\tilde{h}} \in B^{\hat{J}(p)} \\ A_{p+1} B^{\tilde{h}} = 0 \\ (18.7),\ (18.8) \end{array}\right\} \Longrightarrow B^{\tilde{h}} \in B^{\hat{J}(p+1)} \\ \left.\begin{array}{l} \text{II-1)} \\ \text{II-2) (resp. II-2')} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} A_s B^{\tilde{h}} > 0 \\ A_r B^{\tilde{h}} > 0 \end{array} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} A_r,\ A_s \in A_{\hat{I}(p+1)} \\ \\ B^{\hat{J}(p+1)} \neq \emptyset \end{array}\right. \qquad 18.14$$

$$\left.\begin{array}{l} B^j \in B^{\hat{J}(p+1)} \\ A_{p+1}B^{J(p)} \leq 0 \\ (18.7) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\left.\begin{array}{l} A_{p+1}B^j = 0 \\ B^j \in B^{\hat{J}(p+1)} \cap B^{J(p)} \\ (18.9) \end{array}\right\} \Longrightarrow B^j \in B^{\hat{J}(p)} \right] \qquad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_{p+1}\ B^j = 0 \\ B^j \in B^{\hat{J}(p)} \end{array}\right. \\ \text{II-2)} \end{array}\right\} \Longrightarrow A_rB^j > 0 \qquad 18.15$$

Par conséquent, d'après (18.15) :

$$A_rB^j > 0 \quad \forall B^j \in B^{\hat{J}(p+1)}$$

ce qui entraîne, d'après (18.14) et le théorème 16.2, que A^*_r est redondante dans $A^*_{\hat{I}(p+1)}$.

Finalement :

$$\textcircled{2} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_{p+1}\ B^j = 0 \\ B^j \in B^{\hat{J}(p)} \end{array}\right. \\ \text{II-2')} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Soit : } A_rB^j > 0 \\ \\ \text{Soit : } A_rB^j = 0 \text{ et } A_sB^j = 0 \end{array}\right. \qquad 18.16$$

et par conséquent, d'après 18.16, on a l'une de deux situations suivantes :

soit : $A_rB^j > 0 \quad \forall B^j \in B^{\hat{J}(p+1)}$

soit : $B^j \in B^{\hat{J}(p+1)}$, $A_rB^j = 0 \Longrightarrow A_sB^j = 0$

ce qui entraîne, d'après (18.14) et le Théorème 16.2, que A^*_r est redondante dans $A^*_{\hat{I}(p+1)}$.

CQFD.

Remarque 18.3 : Dans [5], on a démontré, à l'aide du Théorème 16.2 bis, un Théorème analogue au Théorème 18.2 où l'on avait considéré l'hypothèse supplémentaire:

0) $A_r \in [A_{I(p)-r}, A_{p+1}]$ i.e. A_r linéairement dépendant dans $A_{I(p+1)}$ et où l'on avait remplacé l'hypothèse II-1 par :

$$\exists B^{\tilde{\hat{h}}} \in B^{\hat{J}(p)} \text{ tel que } A_r B^{\tilde{\hat{h}}} > 0 \text{ et } A_{p+1} B^{\tilde{\hat{h}}} = 0.$$

On remarque, par ailleurs, que l'hypothèse 0) ci-dessus est bien nécessaire pour la redondance de A_r^* dans $A_{I(p+1)}^*$, d'après le Lemme de Farkas.

II) Cas où K est défini par des Inégalités et des Equations Linéaires Homogènes :

Si K est défini à la fois par des inégalités et des équations linéaires homogènes, à la fin de l'étape p le Tableau de Double Description de $A_{I(p)}$ contiendra aussi un ensemble $A_{\bar{\bar{I}}(p)}$ correspondant aux équations linéaires introduites au cours des différentes étapes. En effet, il faut distinguer les équations des inégalités singulières $A_{\bar{I}(p)}$. Néanmoins, pour la continuité des différents résultats, et compte tenu du fait que : $A_iX = 0 \Longleftrightarrow A_iX \geqslant 0$ et $(-A_i)X \geqslant 0$, on conviendra d'enregistrer A_i et $-A_i$ dans $A_{\bar{I}(p)}$ au lieu d'enregistrer A_i dans $A_{\bar{\bar{I}}(p)}$.

Lemme 18.3 :

Soit $A_r \in A_{I(p)}$, A_r^* non redondante dans $A^*_{I(p)}$. Si $A^{\perp}_{p+1}$ ne contient pas $A^*_{I(p)}$ (i.e $A_{p+1}B^{J(p)} \neq 0$), une condition nécessaire pour que A_r^* devienne redondante dans $A^*_{I(p+1)}$ est que A_{p+1} soit linéairement dépendant des $\{A_i \mid i \in I(p)\}$ i.e. soit $B^{\bar{J}(p)} = \emptyset$ soit :

$$A_{p+1}B^{\bar{J}(p)} = 0.$$

Dem : Si A_r^* devient redondante dans $A^*_{I(p)}$ lors de l'introduction de A_{p+1}, on a alors :

$$A_r = \sum_{\substack{i\in I(p)\\ i\neq r}} \lambda_i A_i + \lambda_{p+1} A_{p+1}$$

$$\lambda_i \geqslant 0 \; ; \; i \in I(p) - r$$

$$\lambda_{p+1} \in R, \; \lambda_{p+1} \neq 0$$

et : $A_{p+1} \in [\{A_i \mid i \in I(p)\}]$, d'où le résultat

Lemme 18.4 :

Soit $A_r \in A_{I(p)}$, A_r^* non redondante dans $A^*_{I(p)}$. Si $A^{\perp}_{p+1}$ ne contient pas $A^*_{I(p)}$ (i.e. $A_{p+1}\ B^{J(p)} \neq 0$), une condition nécessaire pour que A_r^* devienne redondante dans $A^*_{I(p+1)}$ est que $B^{\hat{J}(p)} \neq \emptyset$.

Dem : Supposons $B^{\hat{J}(p)} = \emptyset$ i.e $B^{J(p)} = B^{\bar{J}(p)}$.

D'après le lemme 18.3 on a donc soit $B^{J(p)} = \emptyset$ soit $A_{p+1}B^{J(p)} = 0$, ce qui contredit l'hypothèse sur $A^{\perp}_{p+1}$, d'où le résultat.

Théorème 18.3

Soit $A_r \in A_{I(p)}$, A^*_r *non redondante dans* $A^*_{I(p)}$. *Si* A_{p+1} *ne contient pas* $A^*_{I(p)}$ (*i.e.* $A_{p+1}B^{J(p)} \neq 0$), *une condition nécessaire pour que* A^*_r *devienne redondante dans* $A^*_{I(p)}$ *est que :*

i) $B^{\hat{J}(p)} \neq \emptyset$

ii) $B^{\bar{J}(p)} = \emptyset$ ou $A_{p+1}B^{\bar{J}(p)} = 0$

iii) a) $\exists\, B^k \in B^{\hat{J}(p)}$ *tel que* $A_rB^k = 0$

et

b) *ou bien :* $B^j \in B^{\hat{J}(p)}$, $A_rB^j = 0 \Longrightarrow A_{p+1}B^j \leq 0$

ou bien : $B^j \in B^{\hat{J}(p)}$, $A_rB^j = 0 \Longrightarrow A_{p+1}B^j \geq 0$

Dem : Les conditions i) et ii) ne sont autres que les lemmes 18.4 et 18.3 respectivement. Sous l'hypothèse $A_{p+i}B^{J(p)} \neq 0$ on a donc les trois situations possibles suivantes :

1) $A_{p+1}\, B^{J(p)} \leq 0$

2) $A_{p+1}\, B^{J(p)} \geq 0$

3) $\exists B^{j_o}$, $B^{k_o} \in B^{\hat{J}(p)}$ tels que $A_{p+1}B^{j_o} < 0$ et $A_{p+1}B^{k_o} > 0$.

Par ailleurs : $A_{p+1}\, X = 0 \Longleftrightarrow A_{p+1}\, X \geq 0, (-A_{p+1})X \geq 0$.

Dans la situation 1 $(-A_{p+1})X \geq 0$ est redondante et on peut donc remplacer $A^{\perp}_{p+1}$ par A^*_{p+1} et le théorème résulte du théorème 18.1. De même, dans la situation 2), $A_{p+1}X \geq 0$ est redondante et on peut remplacer $A^{\perp}_{p+1}$ par $(-A_{p+1})^*$ et le théorème résulte donc du théorème 18.1.

Situation 3): Montrons d'abord que iii)a) est bien nécessaire :

Supposons le contraire i.e.

$$A_r B^j > 0 \;\forall j \in \hat{J}(p) \tag{18.19}$$

D'après le théorème 16.2 et du fait que A_r^* est essentielle dans $A^*_{I(p)}$, si (18.19) est vérifiée $A_{\hat{I}(p)}$ est constitué du seul élément A_r^*.
Par conséquent, on a que :

$$A_i B^{\hat{J}(p)} = 0 \;;\; \forall i \in I(p) - r \tag{18.20}$$

D'autre part, du fait que A_r devient redondante dans $A^*_{I(p+1)}$ lors de l'introduction de $A^{\perp}_{p+1}$, on a que :

$$A_r = \sum_{\substack{i \in I(p)\\ i \neq r}} \lambda_i A_i + \lambda_{p+1} A_{p+1} \tag{18.21}$$

avec :

$$\lambda_i \geqslant 0 \;;\; i \in I(p) - r$$

$$\lambda_{p+1} \neq 0.$$

Supposons d'abord : $\lambda_{p+1} > 0$. Alors, d'après (18.19), (18.20) et (18.21) :

$$0 < A_r B^{j_o} = \sum_{\substack{i \in I(p)\\ i \neq r}} \lambda_i \underbrace{A_i B^{j_o}}_{=0} + \underbrace{\lambda_{p+1}}_{>0} \underbrace{A_{p+1} B^{j_0}}_{<0} < 0$$

donc une contradiction et (18.19) est impossible.

Supposons ensuite : $\lambda_{p+1} < 0$. Alors :

$$0 < A_r B^{k_o} = \sum_{\substack{i \in I(p)\\ i \neq r}} \lambda_i \underbrace{A_i B^{k_o}}_{=0} + \underbrace{\lambda_{p+1}}_{<0} \underbrace{A_{p+1} B^{k_o}}_{>0} < 0$$

et (18.19) est impossible. Par conséquent iii)a) est bien nécessaire.

Montrons finalement que la condition iii)b) est nécessaire : en effet, soit $B^j \in B^{\hat{J}(p)}$ tel que : $A_r B^j = 0$.

D'après (18.21) on a que :

$$0 = A_r B^j = \sum_{\substack{i \in \bar{I}(p) \\ i \neq r}} \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \underbrace{A_i B^j}_{\geq 0} + \underbrace{\lambda_{p+1}}_{\neq 0} A_{p+1} B^j$$

et on a donc que $A_{p+1} B^j \leqslant 0$ [resp. $\geqslant 0$] si $\lambda_{p+1} > 0$ [resp. <0], et le théorème est donc démontré.

On va donner maintenant des conditions suffisantes pour que A_r^*, non redondant dans $A^*_{\bar{I}(p)}$, devienne redondante dans $A^*_{\bar{I}(p+1)}$ lors de l'introduction de $A^{\perp}_{p+1}$:

Théorème 18.4

Soit $A_r \in A_{\hat{I}(p)}$, A_r^* *non redondante dans* $A^*_{\bar{I}(p)}$. *Si* $A^{\perp}_{p+1}$ *ne contient pas* $A^*_{\bar{I}(p)}$ (*i.e* $A_{p+1} B^{J(p)} \neq 0$), *une condition suffisante pour que* A_r^* *devienne redondante dans* $A^*_{\bar{I}(p+1)}$ *est que :*

i) *ou bien* $B^{\bar{J}(p)} = \emptyset$ *ou bien* $A_{p+1} B^{\bar{J}(p)} = 0$

ii) $\exists B^k \in B^{\hat{J}(p)}$ *tel que* $A_r B^k = 0$

iii)

I) *Si* $\exists\ B^{j_o}, B^{k_o} \in B^{\hat{J}(p)}$ *tel que :* $A_{p+1} B^{j_o} < 0$ *et* $A_{p+1} B^{k_o} > 0$, *l'une des situations suivantes soit vérifiée :*

Soit :

1) $B^j \in B^{\hat{J}(p)},\ A_r B^j = 0 \Longrightarrow A_{p+1} B^j \leqslant 0$

soit :

2) $B^j \in B^{\hat{J}(p)},\ A_r B^j = 0 \Longrightarrow A_{p+1} B^j \geqslant 0$.

II) Si $A_{p+1}B^{\hat{J}(p)} \leqslant 0$ [resp. $A_{p+1}B^{\hat{J}(p)} \geqslant 0$], alors

1) $\exists\ A_s \in A_{\hat{I}(p)-r}$, $B^{\tilde{h}} \in B^{\hat{J}(p)}$ tels que :

$$A_sB^{\tilde{h}} > 0 \text{ et } A_{p+1}\ B^{\tilde{h}} = 0$$

et l'une des situations suivantes soit vérifiée :
ou bien :

2) $B^j \in B^{\hat{J}(p)}$, $A_rB^j = 0 \Longrightarrow A_{p+1}B^j < 0$ [resp. $A_{p+1}B^j > 0$]

ou bien :

2') $B^j \in B^{\hat{J}(p)}$, $A_rB^j = 0$ et $A_{p+1}B^j = 0 \Longrightarrow A_sB^j = 0$

Nota:

On remarque que A^*_r est non singulière dans $A^*_{\bar{I}(p)}$ i.e. $A_r \in A_{\hat{I}(p)}$.

Dem : C'est une conséquence directe du théorème 18.2 du théorème 18.3 et du fait que : $A_{p+1}X = 0 \Longleftrightarrow A_{p+1}\ X \geqslant 0$ et $(-A_{p+1})X \geqslant 0$

Remarque 18.4 : lorsque $A^*_{p+1} = A^{\perp}_{p+1}$ (i.e. lorsque A^*_{p+1} est une équation) si $A_{p+1}\ B^{J(p)} \leqslant 0$ [resp. $A_{p+1}B^{J(p)} \geqslant 0$], il suffit d'enregistrer seulement A_{p+1} [resp. $(-A_{p+1})$] dans $A_{\bar{I}(p+1)}$ car $A_{p+1}\ X \geqslant 0$ [resp. $(-A_{p+1})X \geqslant 0$] est alors redondante.

Remarque 18.5 : on remarque que la caractérisation "a priori" des contraintes redondantes doit être faite séquentiellement i.e. lorsqu'une contrainte est signalée à priori redondante elle ne doit plus être considérée dans le test de redondance pour les autres contraintes.

19 METHODE DE DOUBLE DESCRIPTION POUR LA DETERMINATION D'UN ENSEMBLE ESSENTIEL DE GENERATEURS D'UN CÔNE POLYEDRIQUE DEFINI PAR UN SYSTEME D'(IN)EGALITES LINEAIRES HOMOGENES.

Soit K un cône polyédrique dans X défini par le système d'inégalités linéaires homogènes :

$$A_i X \geqslant 0 \ ; \ i \in I = \{1,\ldots,m\} \qquad 19.1$$

Méthode de Double Description :

Algorithme : supposons qu'à la fin de l'étape d'ordre $p(0 \leqslant p < m)$ l'on dispose d'un ensemble essentiel $B^{J(p)}$ de générateurs du cône polyédrique $A^*_{\bar{I}(p)}$ des solutions des p premières inégalités du sytème homogène 19.1 (si p=0, $B^{J(o)}$ est une base positive de l'espace total X) et donc, d'un Tableau de Double Description $(A_{I(p)}, B^{J(p)})$ de $A^*_{\bar{I}(p)}$:

	$B^{\bar{J}(p)}$	$B^{\hat{J}(p)}$
$A_{\bar{I}(p)}$	☐	☐
$A_{\hat{I}(p)}$	☐	M

19.2

Etape p+1 : L'étape d'ordre p+1 de la méthode consistera à adjoindre l'inégalité $A_{p+1} X \geqslant 0$ [resp. l'équation $A_{p+1}X = 0$] au système $A_{I(p)}X \geqslant 0$ et à déterminer donc un ensemble essentiel $B^{J(p+1)}$ de générateurs du cône polyédrique $A^*_{\bar{I}(p+1)}$ à partir de l'ensemble essentiel $B^{J(p)}$ de générateurs de $A^*_{\bar{I}(p)}$.

On distingue alors les deux situations suivantes :

I) $A_{p+1}B^{J(p)} \geqslant 0$ [resp. $A_{p+1}B^{J(p)} = 0$]

II) $\exists\ B^j \in B^{J(p)}$ tel que : $A_{p+1}B^j < 0$ [resp. $A_{p+1}B^j \neq 0$]

I) A^*_{p+1} [resp. $A^{\perp}_{p+1}$] est singnalée redondante dans $A^*_{\bar{I}(p+1)}$ et on passe à l'étape suivante avec :

$$B^{J(p+1)} = B^{J(p)} \tag{19.3}$$

II) A^*_{p+1} [resp. $A^{\perp}_{p+1}$] n'est pas redondante dans $A^*_{\bar{I}(p+1)}$. On distingue alors les deux situations suivantes :

a) $A_{p+1}\ B^{\bar{J}(p)} = 0$ ou $B^{\bar{J}(p)} = \emptyset$

b) $B^{\bar{J}(p)} \neq \emptyset$ et $A_{p+1}B^{\bar{J}(p)} \neq 0$.

Situation a : ($A_{p+1}B^{\bar{J}(p)} = 0$ ou $B^{\bar{J}(p)} = \emptyset$). Un ensemble essentiel $B^{J(p+1)}$ de générateurs de $A^*_{\bar{I}(p+1)}$ est défini par :

$$B^{J(p+1)} = B^{\bar{J}(p+1)} \cup B^{\hat{J}(p+1)} \tag{19.4}$$

où :

$$B^{\bar{J}(p+1)} = B^{\bar{J}(p)} \tag{19.5}$$

et :

$$B^{\hat{J}(p+1)} = \left\{ \begin{array}{ll} \text{i) } B^j \in B^{\hat{J}(p)} : A_{p+1}B^j \geqslant 0 \ \text{[resp. } A_{p+1}B^j = 0\text{]} & \\ \text{ii) } B^{j(k,h)} & \left[\begin{array}{l} B^{j(k,h)} = |A_{p+1}B^h|\ B^k + |A_{p+1}B^k|\ B^h \ (*) \\ B^k,\ B^h \in B^{\hat{J}(p)} \\ A_{p+1}B^k > 0 \\ A_{p+1}B^h < 0 \\ B^k,\ B^h \text{ adjacents dans } B^{J(p)} \qquad (\dagger) \end{array} \right. \end{array} \right\} \tag{19.6}$$

(*) Nota : De façon générale $B^{j(k,h)} = \lambda_K B^k + \lambda_h B^h$ où $\lambda_k,\ \lambda_h > 0$ tels que $A_{p+1}B^{j(k,h)} = 0$

(†) B^k, $B^h \in B^{\hat{J}(p)}$ sont adjacents dans $B^{J(p)}$ si et seulement si $B^{\bar{J}(p)} \cup \{B^k,B^h\}$ détermine une face de $A^*_{\bar{I}(p)}$ i.e. si et seulement s'il n'existe pas de colonne M^j, $j \in \hat{J}- \{k,h\}$, de la matrice M du Tableau (19.2) dont l'ensemble des indices des composantes nulles contienne l'ensemble des indices des composantes simultanément nulles pour les colonnes M^k et M^h de M.

<u>Nota</u> : L'ensemble $B^{\hat{J}(p+1)}$ [resp. $B^{\bar{J}(p+1)}$] défini dans (19.6) [resp. (19.5)] peut être éventuellement vide.

Si $B^{J(p+1)} = \emptyset$ (i.e. $B^{\bar{J}(p+1)} = B^{\bar{J}(p)} = \emptyset$ et $B^{\hat{J}(p+1)} = \emptyset$), l'algorithme se termine : $K = A^*_{\bar{I}} = \{0\}$.

Si $B^{J(p+1)} \neq \emptyset$ (i.e. $B^{\bar{J}(p+1)} = B^{\bar{J}(p)} \neq \emptyset$ ou $B^{\hat{J}(p+1)} \neq \emptyset$), on passe à l'étape suivante avec p = p+1.

<u>**Situation b**</u> : ($B^{\bar{J}(p)} \neq \emptyset$ et $A_{p+1}\, B^{\bar{J}(p)} \neq 0$).

On suppose que $B^{\bar{J}(p)}$ est une base positive de cardinalité maximale de la partie linéaire $]A^*_{\bar{I}(p)}[$ i.e. si $\ell in(A^*_{\bar{I}(p)}) = \dim(]A^*_{\bar{I}(p)}[) = d(>0)$ alors :

$$B^{\bar{J}(p)} = \{B^1,-B^1,\ldots,B^d,-B^d\}.$$

Sous l'hypothèse b), il existe donc $B^{j_o} \in B^{\bar{J}(p)}$ tel que :

$$A_{p+1}B^{j_o} > 0. \qquad 19.7$$

Considérons <u>B^{j_o} fixé</u> : un ensemble essentiel $B^{J(p+1)}$ de générateurs de $A^*_{\bar{I}(p+1)}$ est défini par :

$$J(p+1) = B^{\bar{J}(p+1)} \cup B^{\hat{J}(p+1)} \qquad 19.8$$

où :

$$B^{\bar{J}(p+1)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } B^j \in B^{\bar{J}(p)} : A_{p+1}B^j = 0 \\ \text{ii) } B^{j(j_o,\ell)} : \left[\begin{array}{l} B^{j(j_o,\ell)} = |A_{p+1}B^{\ell}|\, B^{j_o} + |A_{p+1}B^{j_o}|\, B^{\ell} \\ B^{\ell} \in B^{\bar{J}(p)},\ B^{\ell} \neq -B^{j_o} \\ A_{p+1}\, B^{\ell} < 0 \end{array} \right. \\ \text{iii) } -B^{j(j_o,\ell)} \quad (B^{j(j_o,\ell)} \text{ déterminé dans ii)}). \end{array} \right\} \qquad 19.9$$

et :

$$B^{\hat{J}(p+1)} = \left\{ \begin{array}{lll} \text{i) } B^{j_o} & & [\text{sauf si } A^*_{p+1} = A^{\perp}_{p+1}] \\ \text{ii) } B^{j(j_o,h)} & : & \left[\begin{array}{l} B^{j(j_o,h)} = |A_{p+1}B^h|\ B^{j_o} + |A_{p+1}B^{j_o}|\ B^h \\ B^h \in B^{\hat{J}(p)} \\ A_{p+1}B^h < 0 \end{array} \right. \\ \text{iii) } B^{j(k,-j_o)} & : & \left[\begin{array}{l} B^{j(k,-j_o)} = |A_{p+1}B^{j_o}|\ B^k + |A_{p+1}B^k|\ (-B^{j_o}) \\ B^k \in B^{\hat{J}(p)} \\ A_{p+1}B^k > 0 \end{array} \right. \\ \text{iv) } B^j \in B^{\hat{J}(p)} & \text{tels que} & A_{p+1}\ B^j = 0 \end{array} \right\} \quad 19.10$$

Si $B^{J(p+1)} = \emptyset$, l'algorithme se termine : $K = A^*_I = \{0\}$.

Si $B^{J(p+1)} \neq \emptyset$, on passe à l'étape suivante avec $p = p+1$.

Remarques sur l'algorithme de Double Description.

-1- Sous l'hypothèse b), la façon de déterminer $B^{\bar{J}(p+1)}$ varie suivant le type de base positive $B^{\bar{J}(p)}$ considérée. Ci-dessus, on a considéré le cas où $B^{J(p)}$ est une base positive du type maximale de $]A^*_{I(p)}[$. La façon de déterminer $B^{\bar{J}(p+1)}$ est donc essentiellement la méthode de la section 10 pour la détermination d'une base linéaire (au sens habituel) d'un sous-espace vectoriel défini par un système d'équations linéaires homogènes. De façon générale, si $B^{\bar{J}(p)}$ est une base positive quelconque de $]A^*_{I(p)}[$, la détermination de $B^{\bar{J}(p+1)}$ est toujours intimement liée à la détermination d'une base linéaire, d'après le résultats de la section 9. Toutefois, il est avantageux de considérer une base positive $B^{\bar{J}(p)}$ de type maximale, compte tenu de la symétrie de cette dernière, et donc, de la simplicité des différents calculs dans la détermination de $B^{J(p+1)}$.

-2- Toujours sous l'hypothèse b), dans la détermination de $B^{j(j_o,h)}$ (19.10ii)) [resp. $B^{j(k,-j_o)}$ (19.10 iii))] on peut considérer, de façon générale, un vecteur arbitraire $X^o_h \in (B^{\bar{J}(p)})^{\perp}$ [resp. $X^o_k \in (B^{\bar{J}(p)})^{\perp}$] tel que $A_{p+1}X^o_n > 0$ [resp. $A_{p+1}\ X^o_k < 0$], au lieu du vecteur B^{j_o} [resp. $-B^{j_o}$]. Il en est de même pour B^{j_o} dans (19.10i)). Il est intéressant de tenir compte de ce choix possible dans la mise en oeuvre numérique de la Méthode.

-3- On remarque finalement que sous l'hypothèse a), le critère pour déterminer l'adjacence de deux vecteurs n'est applicable que si tous les vecteurs $B^j \in B^{\hat{J}(p)}$ sont essentiels dans $B^{J(p)}$. En fait, si on appliquait ce critère sur un ensemble $B^{J(p)}$ non essentiel, l'ensemble $B^{\hat{J}(p+1)}$ déterminé à l'étape p+1 serait incomplet i.e. $A^*_{\bar{I}(p+1)} \neq (B^{J(p+1)})^{\angle}$.

Schéma Général de Calcul pour l'Algorithme de Double Description.

Soit $T(p) = A_{I(p)} \; B^{J(p)}$ le Tableau de Double Description associé au cône polyèdrique $A^*_{\bar{I}(p)}$ défini par les p premières (in)égalités du système homogène 19.1) :

$$\begin{array}{cc|c|c}
 & & \multicolumn{2}{c}{B^{J(p)}} \\
 & & B^{\bar{J}(p)} & B^{\hat{J}(p)} \\ \hline
A_{I(p)} & A_{\bar{I}(p)} & \square & \square \\ \hline
 & A_{\hat{I}(p)} & \square & M(p)
\end{array}$$

où $B^{J(p)}$ est un ensemble essentiel de générateurs du cône polyédrique $A^*_{\bar{I}(p)}$.

L'étape (p+1) de la Méthode de Double Description consiste à adjoindre l'inégalité $A_{p+1}X \geq 0$ [resp. l'équation $A_{p+1} X = 0$] au système $A_{I(p)}X \geq 0$, et à déterminer donc un ensemble essentiel $B^{J(p+1)}$ de générateurs du cône polyédrique $A^*_{\bar{I}(p+1)}$.

Détermination du Tableau T(p+1) :

Dans la détermination du Tableau T(p+1) on écrit d'abord les coefficients de l'hyperplan $A^{\perp}_{p+1}$ comme une ligne additionnelle de la matrice $A_{I(p)}$ du Tableau T(p), et on détermine ensuite les produits scalaires de A_{p+1} avec les différentes colonnes de $B^{J(p)}$. On distingue alors les situations suivantes :

I) Si $A_{p+1}B^{J(p)} \geq 0$ [resp. $A_{p+1}B^{J(p)} = 0$], l'inégalité $A_{p+1}X \geq 0$ [resp. l'équation $A_{p+1} X = 0$] est redondante, la ligne additionnelle peut être éliminée et on a que : T(p+1) = T(p).

II)

a) Si $A_{p+1}B^{\bar{J}(p)} = 0$, ou bien $B^{\bar{J}(p)} = \emptyset$, mais il existe des colonnes de $B^{\hat{J}(p)}$ dont les produits scalaires avec A_{p+1} est négatif [resp. non nul] , chacune de ces dernières colonnes doit être éliminée. Cepedant, avant de les éliminer on détermine toutes les combinaisons linéaires positives $B^{j(k,h)}$ des vecteurs B^k et B^h, qui se trouvent de part et d'autre de l'hyperplan $A^{\perp}_{p+1}$ (i.e. dont les produits scalaires avec A_{p+1} sont de signe opposé) et qui sont adjacents† dans $B^{J(p)}$, combinaisons telles que : $A_{p+1}\ B^{j(k,h)} = 0$. Concrètement, $B^{j(k,h)} = \lambda_k B^k + \lambda_n B^h$ où B^k, $B^h \in B^{\hat{J}(p)}$: $A_{p+1}B^k > 0$ et $A_{p+1}B^h < 0$; B^k, B^h adjacents† dans $B^{J(p)}$, et λ_k, λ_n des coefficients réels positifs tels que : $A_{p+1}B^{j(k,h)} = 0$ ($\lambda_k = |A_{p+1}B^h|$, $\lambda_n = |A_{p+1}B^k|$, par exemple). L'ensemble essentiel $B^{J(p+1)}$ est donc constitué, d'une part, des vecteurs $B^j \in B^{J(p)}$ tels que $A_{p+1}B^j \geqslant 0$ [resp. $A_{p+1}B^j = 0$] et, d'autre part, des combinaisons linéaires positives $B^{j(k,h)}$ définies ci-dessus.

(†) Deux vecteurs B^k, $B^h \in B^{\hat{J}(p)}$ sont adjacents dans $B^{J(p)}$ si et seulement s'il n'existe pas de colonne $(M(p))^j$ ($j \in \hat{J}(p)$, $j \neq k,h$) de la matrice $M(p)$ de $T(p)$ dont l'ensemble des indices des composantes nulles contienne l'ensemble des indices des composantes simultanément nulles pour les colonnes $(M(p))^k$ $(M(p))^h$ de $M(p)$.

II)

b) Supposons maintenant que $B^{\bar{J}(p)} \neq \emptyset$ et $A_{p+1}B^{\bar{J}(p)} \neq 0$. Si $B^{\bar{J}(p)}$ est une base positive du type maximale de la partie linéaire de $A^*_{\bar{I}(p)}$, il existe alors au moins un $B^{j_o} \in B^{\bar{J}(p)}$ tel que $A_{p+1}B^{j_o} > 0$ (s'il en existent plusieurs, on en choisit un). Une base positive $B^{\bar{J}(p+1)}$ (du même type que $B^{\bar{J}(p)}$) est déterminée par :

i) les $B^j \in B^{\bar{J}(p)}$ tels que $A_{p+1}\ B^j = 0$

ii) les combinaisons linéaires positives $B^{j(j_o,\ell)} = \lambda_{j_o} B^{j_o} + \lambda_\ell B^\ell$ où $B^\ell \in B^{\bar{J}(p)}$ ($B^\ell \neq -B^{j_o}$), $A_{p+1}B^\ell < 0$, et dont les coefficients λ_{j_o}, λ_ℓ sont des réels positifs tels que : $A_{p+1}B^{j(j_o,\ell)} = 0$($\lambda_{j_o} = |A_{p+1}B^\ell|$, $\lambda_\ell = |A_{p+1}B^{j_o}|$, par exemple)

iii) les négatifs des combinaisons $B^{j(j_o,\ell)}$ déterminées dans ii) (i.e. $-B^{j(j_o,\ell)}$).

Par ailleurs, un ensemble essentiel $\hat{B}^{J(p+1)}$ est déterminé par :

i) le vecteur B^{j_o} [sauf si A^*_{p+1} est une équation]

ii) les combinaisons linéaires positives

$B^{j(j_o,h)} = \lambda_{j_o} B^{j_o} + \lambda_h B^h$

où $B^h \in \hat{B}^{J(p)}$, $A_{p+1} B^h < 0$, et dont les coefficients λ_{j_o}, λ_h sont des réels positifs tels que : $A_{p+1} B^{j(j_o,h)} = 0$

iii) les combinaisons linéaires positives $B^{j(k,-j_o)} = \lambda_k B^k + \lambda_{j_o} (-B^{j_o})$

où $B^k \in \hat{B}^{J(p)}$, $A_{p+1} B^k > 0$, et dont les coefficients λ_k, λ_{j_o} sont des réels positifs tels que : $A_{p+1} B^{j(k,-j_o)} = 0$.

iv) les $B^j \in \hat{B}^{J(p)}$ t.q. $A_{p+1} B^j = 0$

Remarque 1 : d'après les résultats ci-dessus, l'ensemble des colonnes du tableau T(p+1) est donc constitué, d'une part, des colonnes $(T(p))^j$ du Tableau T(p) correspondant aux générateurs $B^j \in B^{J(p)}$ tels que $B^j \in B^{J(p+1)}$ et, d'autre part, des combinaisons linéaires positives $(T(p+1))^{j(k,h)} = \lambda_k (T(p))^k + \lambda_h (T(p))^h$ correspondant aux générateurs $B^{j(k,h)} = \lambda_k B^k + \lambda_h B^h$ (en effet, on a que : $A_i B^{j(k,h)} = \lambda_k (A_i B^k) + \lambda_h (A_i B^h) = \lambda_k (T(p))^k + \lambda_h (T(p))^h$).

Remarque 2 : si à l'étape (p+1) on s'intéresse à déterminer un ensemble quelconque $B^{J(p+1)}$ de générateurs de $A^*_{I(p+1)}$ (i.e. $B^{J(p+1)}$ non nécessairement essentiel) le schéma de calcul est analogue avec la seule différence qu'on détermine alors toutes les combinaisons des paires de générateurs qui se trouvent de part et d'autre de l'hyperplan A_{p+1}. Par ailleurs, on remarque que pour la détermination de $B^{J(p+1)}$ essentiel il faut absolument que $B^{J(p)}$ soit essentiel.

Remarque 3 : à chaque étape p de la méthode de Double Description les éléments de $B^{J(p)}$, et donc les colonnes respectives du Tableau T(p), sont déterminés à une constante multiplicative positive près. Il faut tenir compte de ce fait là dans la mise en oeuvre numérique de la méthode, pour éviter que les éléments des différents tableaux deviennent trop grands. En particulier, les coefficients positifs λ_k, λ_h des combinaisons $\lambda_k B^k + \lambda_h B^h$ doivent être choisis convenablement.

Lemme 19.1.

Soit B^J un ensemble essentiel de générateurs du cône polyèdrique $K = A_I^* \; \mathrm{lin}\,(K) = d$, et soit F une face de K. Alors, F est une face de dimension d+2 de K si et seulement s'il existe $B^k, B^h \in B^{\hat{J}}$ tels que $B^{\bar{J}} \cup \{B^k, B^h\}$ détermine F.

Nota : Il suffit de supposer ci-dessus que $B^{\hat{J}}$ est essentiel.

Dem : Soit F une face de dimension d+2 de K et soit $B^F = B^J \cap F$. Etant donné que $]K[\subset F$, on a que $B^{\bar{J}} \subset B^F$. D'autre part, puisque dim(F) = d+2, il existe $B^k, B^h \in B^{\hat{J}}$ tels que :

$$\dim\,(B^{\bar{J}} \cup \{B^k, B^h\}) = d+2$$

Soit $B^{j_o} \in B^F \cap B^{\hat{J}-\{k,h\}}$. On a alors :

$$B^{j_o} = X + \alpha_k B^k + \alpha_h B^h$$

avec $\alpha_k, \alpha_h \in \mathbb{R}$, $X \in \;]K[\; = (B^{\bar{J}})^{\perp}$. Par ailleurs, du fait que $B^j \in B^{\hat{J}}$, il existe $A_{i_o} \in A_{\hat{I}}$ tel que :

$$A_{i_o} B^{j_o} > 0 \quad \text{i.e.}$$

$$0 < A_{i_o} B^{j_o} = \underbrace{A_{i_o} X}_{=0} + \alpha_k \underbrace{A_{i_o} B^k}_{\geq 0} + \alpha_h \underbrace{A_{i_o} B^h}_{\geq 0}$$

Par conséquent, l'un au moins des coefficients α_k, α_h est strictement positif. Supposons donc que $\alpha_k > 0$. Si $\alpha_h \geq 0$ [resp. $\alpha_h > 0$] B^{j_o} [resp. B^k] est alors redondant dans B^J (d'après la proposition 8.4) ce qui contredit que $B^{\hat{J}}$ soit essentiel. Par conséquent $B^F = B^{\bar{J}} \cup \{B^k, B^h\}$, d'où le résultat.

Réciproquement, soient $B^k, B^h \in B^{\hat{J}}$ tels que $B^{\bar{J}} \cup \{B^k, B^h\}$ détermine F. Il est clair donc que $d+1 \leq \dim\,(F) \leq d+2$. Si dim (F) = d+1, alors l'un des générateurs B^k, B^h est redondant dans B^J (voir lemme 14.2) ce qui contredit l'hypothèse sur B^J, d'où dim (F) = d+2.

Corollaire 19.1.

Soit B^J un ensemble essentiel de générateurs du cône polyédrique $K = A_I^*$, lin (K) = d. Une condition nécessaire et suffisante pour que B^k, $B^h \in B^{\hat{J}}$ soient adjacents dans B^J est que :

$$\text{rang } (A_{I(k,h)}) = n - (d+2)$$

où :

$$I(k,h) = \{i \in I \ / \ A_iB^k = 0 \text{ et } A_iB^h = 0\}$$

Nota : Il suffit de supposer ci-dessus que $B^{\hat{J}}$ est essentiel.

Dem : C'est une conséquence directe du lemme 19.1, de la définition d'adjacence de deux générateurs et du fait que la dimension une face F est la dimension du plus petit sous-espace vectoriel qui la contient.

Remarque : Le corollaire 19.1 nous donne un critère alternatif pour caractériser l'adjacence de deux générateurs B^k, $B^h \in B^{\hat{J}}$, où B^J est essentiel. Contrairement au critère d'adjacence présenté précédemment, à savoir : si B^J est essentiel ; B^k, $B^h \in B^{\hat{J}}$ sont adjacents dans B^J si et seulement si $\nexists \ B^j \in B^{\hat{J}-\{k,h\}}$ tel que $I(k,h) \subset I(j)$ où $I(j) = \{i \in I \ / \ A_iB^j = 0\}$, le critère du corollaire 19.1 fait intervenir le rang de $A_{I(k,h)}$ et ne permet donc pas de caractériser l'adjacence de deux générateurs à partir de la seule connaissance du Tableau de Double Description. Néanmoins la condition nécessaire du corollaire 19.1 nous donne un critère qui peut être intéressant , si $B^{\hat{J}}$ est essentiel : "Une condition nécessaire pour que B^k, $B^h \in B^{\hat{J}}$ soient adjacents dans B^J est que :

$$\text{Card } (I(k,h)) \geq n - (d+2)$$

i.e. que les colonnes T^k et T^h du Tableau de Double Description associées aux générateurs B^k et B^h aient au moins n - (d+2) zéros en commun.

Théorème 19.1.

Si $B^{J(p)}$ *est un ensemble essentiel de générateurs du cône polyédrique* $A^*_{I(p)}$ *des solutions des* p *premières inégalités du système homogène 19.1, l'ensemble* $B^{J(p+1)}$ *déterminé à l'étape* p+1 *de la Méthode de Double Description (Section 19) est un ensemble essentiel de générateurs du cône polyédrique* $A^*_{I(p+1)}$ *des solutions des* p+1 *premières inégalités de ce système.*

Dem : Le cône polyédrique $A^*_{I(p+1)}$ résulte de l'intersection du cône polyédrique $A^*_{I(p)}$ avec le demi-espace fermé A^*_{p+1} (resp. avec l'hyperplan $A^{\perp}_{p+1}$) défini par l'inégalité $A_{p+1}X \geq 0$ (resp. par l'équation $A_{p+1}X = 0$) i.e.

$$A^*_{I(p+1)} = A^*_{I(p)} \cap A^*_{p+1} \quad (\text{resp. } A^*_{I(p+1)} = A^*_{I(p)} \cap A^{\perp}_{p+1})$$

Toute face de $A^*_{I(p+1)}$ est donc l'intersection d'une face de $A^*_{I(p)}$ avec une face de A^*_{p+1} (resp. de $A^{\perp}_{p+1}$). Par ailleurs, les seules faces (différentes de $\{0\}$) de A^*_{p+1} (resp. de $A^{\perp}_{p+1}$) sont le demi-espace fermé A^*_{p+1} et l'hyperplan frontière $A^{\perp}_{p+1}$ (resp. le seul hyperplan $A^{\perp}_{p+1}$).

I) Si A^*_{p+1} (resp. $A^{\perp}_{p+1}$) est redondante dans $A^*_{I(p+1)}$ i.e. $A^*_{I(p+1)} = A^*_{I(p)}$, alors $B^{J(p+1)} = B^{J(p)}$ et le résultat est vrai de façon évidente.

II) Si A^*_{p+1} (resp. $A^{\perp}_{p+1}$) n'est pas redondante dans $A^*_{I(p+1)}$, on distingue alors les deux situations suivantes :

a) $A^{\perp}_{p+1} \supset \,]A^*_{I(p)}[$ i.e. $B^{\bar{J}(p)} = \emptyset$ ou $A_{p+1}B^{\bar{J}(p)} = 0$

b) $A_{p+1} \not\supset \,]A^*_{I(p)}[$ i.e. $B^{\bar{J}(p)} \neq \emptyset$ et $A_{p+1}B^{\bar{J}(p)} \neq 0$

Soient $d = \text{lin}\ (A^*_{I(p)})$, $d' = \text{lin}\ (A^*_{I(p+1)})$

Situation a) :

Il est clair que $]A^*_{I(p+1)}[\ =\ ]A^*_{I(p)}[$ i.e. la partie linéaire de $A^*_{I(p+1)}$ coïncide avec la partie linéaire de $A^*_{I(p)}$, $B^{J(p+1)} = B^{J(p)}$ et d=d'. L'ensemble des faces de dimension d'+1 de $A^*_{I(p+1)}$ est donc constitué, d'une part, des faces de dimension d+1 de $A^*_{I(p)}$ contenues dans le demi-espace fermé A^*_{p+1} (resp. dans l'hyperplan $A^{\perp}_{p+1}$) et, d'autre part, des faces qui résultent de l'intersection de chacune des faces de dimension d+2 de $A^*_{I(p)}$ (non contenues dans $A^{\perp}_{p+1}$, et dont l'intérieur relatif à une intersection non vide avec A_{p+1})(†) avec l'hyperplan $A^{\perp}_{p+1}$. Par ailleurs, puisque $B^{J(p)}$ est un ensemble essentiel de générateurs de $A^*_{I(p)}$, les faces de dimension d+1 de $A^*_{I(p)}$ sont de la forme (théorème 14.2) :

$$F(j) = (B^{\bar{J}} \cup \{B^j\})^{\angle},\ B^j \in B^{\hat{J}(p)}$$

et les faces de dimension d+2 de $A^*_{I(p)}$, de la forme (lemme 19.1) :

$$F(k,h) = (B^{\bar{J}} \cup \{B^k, B^h\})^{\angle}\ ;\ B^k, B^h \in B^{\hat{J}(p)}$$

avec B^k et B^h adjacents dans $B^{J(p)}$.

On a donc :

$$F(j) \subset A^*_{p+1}\ (\text{resp. } F(j) \subset A^{\perp}_{p+1}) \Longleftrightarrow A_{p+1}B^j \geq 0\ \ (\text{resp. } A_{p+1}B^j = 0)$$

$$\overset{o}{F}(k,h) \cap A^{\perp}_{p+1} \neq \emptyset \text{ et } F(k,h) \not\subset A_{p+1} \Longleftrightarrow A_{p+1}B^k > 0,\ A_{p+1}B^h < 0$$

(†) Remarque : Si F(k,h) est une face de dimension d+2 de $A^*_{I(p)}$ telle que $F(k,h) \not\subset A^{\perp}_{p+1}$, $F(k,h) \cap A^{\perp}_{p+1} \neq \emptyset$ mais $\overset{o}{F}(k,h) \cap A^{\perp}_{p+1} = \emptyset$ (où $\overset{o}{F}(k,h)$ est l'intérieur relatif de F(k,h)), alors $F(k,h) \cap A^{\perp}_{p+1}$ = F(k) ou F(h) i.e. $F(k,h) \cap A^{\perp}_{p+1}$ est une face de dimension d+1 de $A^*_{I(p)}$ contenue dans $A^{\perp}_{p+1}$.

D'après cette remarque, et compte tenu que les intérieurs relatifs des différentes faces de $A^*_{I(p)}$ sont disjoints (i.e. les faces ouvertes de $A^*_{I(p)}$ sont disjointes), toutes les faces de dimension d'+1 de $A^*_{I(p+1)}$ considérées ci-dessus sont différentes. Par conséquent, sous l'hypothèse a), l'ensemble $B^{J(p+1)}$ déterminé dans la Méthode de Double Description (section 19) est, d'après le théorème 14.2, un ensemble essentiel de générateurs du cône polyédrique $A^*_{I(p+1)}$.

Situation b) :

Sous l'hypothèse b) on a que : $]A^*_{I(p+1)}[\ = \ ]A^*_{I(p)}[\cap A^{\perp}_{p+1} \subset \ ]A^*_{I(p)}[$, $d' = d-1$, et l'ensemble $B^{J(p+1)}$ déterminé par la Méthode de Double Description (section 19) est, d'après les résultats des sections 9-10, une base positive de $]A^*_{I(p+1)}[$. Par ailleurs, du fait que $d' = d-1$, l'ensemble des faces de dimension $d'+1$ de $A^*_{I(p+1)}$ est constitué, d'une part, des faces qui résultent de l'intersection de chacune des faces de dimension $d+1$ de $A^*_{I(p)}$, avec l'hyperplan $A^{\perp}_{p+1}$ et, d'autre part, si la (p+1)ème inégalité n'est pas une équation, de la face qui résulte de l'intersection de la partie linéaire $]A^*_{I(p)}[$ de $A^*_{I(p)}$ avec le demi-espace fermé A^*_{p+1}. Par ailleurs, étant donné que les intérieurs relatifs des différents faces de $A^*_{I(p)}$ sont disjoints, toutes les faces de dimension $d'+1$ considérées ci-dessus sont différentes. Par conséquent, sous l'hypothèse b), l'ensemble $B^{J(p+1)}$ déterminé dans la Méthode de Double Description est, d'après le théorème 14.2, un ensemble essentiel de générateurs de $A^*_{I(p+1)}$, ce qui complète la démonstration du théorème.

Corollaire 19.2 :

Si $B^{J(p)}$ est un ensemble (quelconque) de générateurs du cône polyédrique $A^*_{I(p)}$ des solutions des p premières inégalités du système homogène 19.1, l'ensemble $B^{J(p+1)}$ déterminé à l'étape p+1 de la Méthode de Double Description (section 13) est un ensemble (quelconque) de générateurs du cône polyédrique $A^*_{I(p+1)}$.

Dem : C'est une conséquence directe du théorème 19.1 et de la façon de déterminer $B^{J(p+1)}$ dans la Méthode de Double Description (section 13) compte tenu du fait que si $B^{J(p)}$ est un ensemble de générateurs de $A^*_{I(p)}$, $B^{J(p)}$ contient alors un ensemble essentiel de générateurs de $A^*_{I(p)}$.

Remarque : Pour une démonstration directe du corollaire 19.1 le lecteur est renvoyé à [18].

Lemme 19.2 :

Soient $B^{j_1}, B^{j_2} \in B^{\hat{J}(p+1)}$. Si F est la plus petite face (fermée) de $A^*_{I(p)}$ qui contient B^{j_1} et B^{j_2} et si $\tilde{F}$ est la plus petite face de $A^*_{I(p+1)}$ qui contient B^{j_1} et B^{j_2}, alors :

i) $\tilde{F} = F \cap A^{\perp}_{p+1}$, si $\{B^{j_1}, B^{j_2}\} \subset A^{\perp}_{p+1}$

ii) $\tilde{F} = F \cap A^*_{p+1}$, si $\{B^{j_1}, B^{j_2}\} \not\subset A^{\perp}_{p+1}$

Nota : La situation ii) n'est possible que si la (p+1)ème inégalité n'est pas une équation.

Dem : Etant donné que $A^*_{I(p+1)} = A^*_{I(p)} \cap A^*_{p+1}$ (resp. $A^*_{I(p+1)} = A^*_{I(p)} \cap A^{\perp}_{p+1}$), toute face de $A^*_{I(p+1)}$ est l'intersection d'une face de $A^*_{I(p)}$ avec une face de A^*_{p+1} (resp. de $A^{\perp}_{p+1}$). Par ailleurs, les seules faces (différentes de {0}) de A^*_{p+1} (resp. de $A^{\perp}_{p+1}$) sont le demi-espace fermé A^*_{p+1} et l'hyperplan frontière $A^{\perp}_{p+1}$ (resp. le seul hyperplan $A^{\perp}_{p+1}$).

i) Supposons d'abord que $\{B^{j_1}, B^{j_2}\} \subset A_{p+1}$. $F \cap A^{\perp}_{p+1}$ est donc une face de $A^*_{I(p+1)}$ qui contient B^{j_1} et B^{j_2} et on a que : $\tilde{F} \subset F \cap A^{\perp}_{p+1}$.
D'autre part, $\tilde{F} = F' \cap A^{\perp}_{p+1}$ où F' est une face de $A^*_{I(p)}$ qui contient B^{j_1} et B^{j_2} et on a donc $F \cap A^{\perp}_{p+1} \subset F' \cap A^{\perp}_{p+1} = \tilde{F}$, d'où finalement $\tilde{F} = F \cap A^{\perp}_{p+1}$.

ii) Si $\{B^{j_1}, B^{j_2}\} \not\subset A^{\perp}_{p+1}$, la démonstration est analogue.

Théorème 19.2 :

Soient $B^{J(p)}$ *un ensemble essentiel de générateurs du cône polyédrique* $A^*_{I(p)}$, A^*_{p+1} *non redondante dans* $A^*_{I(p+1)}$, *et* $B^{J(p+1)}$ *l'ensemble essentiel de générateurs de* $A^*_{I(p+1)}$ *déterminé par la Méthode de Double Description (section 19) (il suffit de supposer ci-dessus que* $B^{\hat{J}(p)}$ *et* $B^{J(p+1)}$ *sont essentiels).*

a) *Si* $A_{p+1}^{\perp} \supset]A^{*}_{I(p)}[$ (i.e $B^{\bar{J}(p)} = \emptyset$ *ou* $A_{p+1}B^{\bar{J}(p)} = 0$), *alors :*

i) *si* $B^{\ell}, B^{m} \in B^{\hat{J}(p)} \cap B^{J(p+1)}$, *une condition nécessaire et suffisante pour que* B^{ℓ} *et* B^{m} *soient adjacents dans* $B^{J(p+1)}$ *est :*

1) *si* $\{B^{\ell}, B^{m}\} \not\subset A_{p+1}^{\perp}$, *que* B^{ℓ} *et* B^{m} *soient adjacents dans* $B^{J(p)}$.

2) *si* $\{B^{\ell}, B^{m}\} \subset A_{p+1}^{\perp}$, *que la plus petite face* F *de* $A^{*}_{I(p)}$ *qui contient à la fois* B^{ℓ} *et* B^{m} *vérifie les deux conditions suivantes :*

- $\nexists\ B^{j} \in B^{\hat{J}(p)} - \{\ell,m\} \cap F$ *tel que* $B^{j} \in A_{p+1}^{\perp}$
- $\nexists\ B^{k}, B^{h} \in B^{\hat{J}(p)} \cap F$, *adjacents dans* $B^{J(p)}$ *et de part et d'autre de l'hyperplan* $A_{p+1}^{\perp}$.

ii) *Si* $B^{\ell} \in B^{\hat{J}(p)} \cap B^{J(p+1)}$ *et* $B^{j(k,h)} \in B^{J(p+1)}$, *une condition nécessaire et suffisante pour que* B^{ℓ} *et* $B^{j(k,h)}$ *soient adjancents dans* $B^{J(p+1)}$ *est*

1) *si* $B^{\ell} \notin A_{p+1}^{\perp}$, *que* $\ell = k$ *(i.e.* $B^{\ell} \equiv B^{k}$*)*

2) *si* $B^{\ell} \in A_{p+1}^{\perp}$, *que la plus petite face* F *de* $A^{*}_{I(p)}$ *qui contient à la fois les vecteurs* $B^{\ell}, B^{k}, B^{h} \in B^{J(p)}$ *vérifie :*

- $\nexists\ B^{j} \in B^{\hat{J}(p)-\ell} \cap F$ *tel que* $B^{j} \in A_{p+1}^{\perp}$
- $\nexists\ B^{m}, B^{n} \in B^{\hat{J}(p)} \cap F$, $(m,n) \neq (k,h)$, *adjacents dans* $B^{J(p)}$ *et de part et d'autre de* $A_{p+1}^{\perp}$.

iii) *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $B^{j(k,h)}$, $B^{j(m,n)} \in B^{J(p+1)}$ *soient adjacents dans* $B^{J(p+1)}$ *est que la plus petite face* F *de* $A^{*}_{I(p)}$ *qui contient à la fois* $B^{k}, B^{h}, B^{m}, B^{n}$ *vérifie :*

- $\nexists\ B^{j} \in B^{\hat{J}(p)} \cap F$ *tel que* $B^{j} \in A_{p+1}^{\perp}$
- $\nexists\ B^{q}, B^{p} \in B^{\hat{J}(p)} \cap F$, $(q,p) \neq (k,h)$ *et* $(q,p) \neq (m,n)$, *adjacents dans* $B^{J(p)}$ *et de part et d'autre de* $A_{p+1}^{\perp}$.

b) *Si* $A^{\perp}_{p+1} \not\supset]A^*_{I(p)}[$ (i.e. $B^{\bar{J}(p)} \neq \emptyset$ *et* $A_{p+1}B^{\bar{J}(p)} \neq 0$), *alors :*

1) $B^{\ell}, B^{m} \in B^{\hat{J}(p)} \cap B^{\hat{J}(p+1)}$ *sont adjacents dans* $B^{J(p+1)}$ *si et seulement si* B^{ℓ} *et* B^{m} *sont adjacents dans* $B^{J(p)}$.

2) $B^{\ell} \in B^{\hat{J}(p)} \cap B^{\hat{J}(p+1)}$ *et* $B^{j(j_o,h)} \in B^{\hat{J}(p+1)}$ (*resp.* $B^{j(k,-j_o)} \in B^{\hat{J}(p+1)}$) *sont adjacents dans* $B^{J(p+1)}$ *si et seulement si* B^{ℓ} *et* B^{h} (*resp.* B^{j} *et* B^{k}) *sont adjacents dans* $B^{J(p)}$.

3) $B^{j(j_o,h)}, B^{j(j_o,\ell)} \in B^{\hat{J}(p+1)}$ (*resp.* $B^{j(k,-j_o)}, B^{j(m,-j_o)} \in B^{J(p+1)}$, *sont adjacents dans* $B^{J(p+1)}$ *si et seulement si* B^{h}, B^{ℓ} (*resp.* B^{k}, B^{m}) *sont adjacents dans* $B^{J(p)}$.

4) $B^{j(j_o,h)} \in B^{\hat{J}(p+1)}$ *et* $B^{j(k,-j_o)} \in B^{\hat{J}(p+1)}$ *sont adjacents dans* $B^{J(p+1)}$ *si et seulement si* B^{k} *et* B^{h} *sont adjacents dans* $B^{J(p)}$.

5) *Si* $B^{j_o} \in B^{\hat{J}(p+1)}$ (*i.e. si la (p+1)ième inégalité n'est pas une équation*), B^{j_o} *est adjacent à tous les* $B^{j} \in B^{J(p+1)-j_o}$.

Démonstration : Soient $d = \mathrm{lin}(A^*_{I(p)})$, $d' = \mathrm{lin}\,(A^*_{I(p+1)})$. Considérons d'abord la situation a) i.e. $A_{p+1} \supset]A_{I(p)}[$. On a alors : $d' = d$.

Rappelons par ailleurs, que :

$$B^{\bar{J}(p+1)} = B^{\bar{J}(p)} \qquad 19.5$$

$$B^{\hat{J}(p+1)} = \left\{ \begin{array}{lll} \text{i)} & B^{j} \in B^{\hat{J}(p)} & : A_{p+1}B^{j} \geqslant 0 \text{ (resp. } A_{p+1}B^{j} = 0) \\ \text{ii)} & B^{j(k,h)} & : \left[\begin{array}{l} B^{j(k,h)} = \lambda_k B^k + \lambda_h B^h \\ B^{k}, B^{h} \in B^{\hat{J}(p)} \\ A_{p+1}B^{k} > 0,\ A_{p+1}B^{h} < 0 \\ B^{k}, B^{h} \text{ adjacents dans } B^{J(p)} \\ \lambda_k, \lambda_h > 0 \text{ tels que : } B^{j(k,h)} \in A^{\perp}_{p+1} \end{array} \right. \end{array} \right\} \qquad 19.6$$

où la (p+1)ième inégalité est de la forme $A_{p+1}X \geq 0$ (resp. $A_{p+1}X = 0)$

a.i) $B^{\ell}, B^m \in B^{\hat{J}(p)} \cap B^{J(p+1)}$ (i.e. $B^{\ell}, B^m \in B^{\hat{J}(p)} \cap B^{\hat{J}(p+1)}$). Soit F (resp. $\tilde{F}$) la plus petite face de $A^*_{I(p)}$ (resp. de $A^*_{I(p+1)}$) qui contient B^{ℓ} et B^m.

a.i.1) $\{B^{\ell}, B^m\} \not\subset A_{p+1}$

D'après le lemme 19.2 : $\tilde{F} = F \cap A^*_{p+1}$.

<u>Condition Suffisante</u> :

Soient B^{ℓ} et B^m adjacents dans $B^{J(p)}$ i.e $\nexists\ B^k \in B^{\hat{J}(p)-\{\ell,m\}} \cap F$ et supposons que B^{ℓ} et B^m ne soient pas adjacents dans $B^{J(p+1)}$ i.e. $\exists B^{\ell_o} \in B^{\hat{J}(p+1)-\{\ell,m\}} \cap \tilde{F}$. On a donc que $B^{j_o} \in F$ et, par conséquent B^{ℓ_o} est nécessairement de la forme $B^{\ell_o} = B^{j(k,h)}$ (19.6 ii)). Par ailleurs, $B^{j(k,h)} \in F \Longrightarrow B^k, B^h \in F$, et on a finalement, d'après 19.6 :

$$B^h \in B^{\hat{J}(p)-\{\ell,m\}} \cap F$$

ce qui contredit l'hypothèse sur B^{ℓ} et B^m.

<u>Condition Nécessaire</u> :

Soient B^{ℓ}, B^m adjacents dans $B^{J(p+1)}$. Etant donné que $\tilde{F} = F \cap A^*_{p+1}$, $\tilde{F} \not\subset A^{\perp}_{p+1}$, on a que $\dim(\tilde{F}) = \dim(F)$ et, d'après le lemme 19.1 (pour $A^*_{I(p+1)}$) :

$$d+2 = \dim(\tilde{F}) = \dim(F).$$

Par conséquent, d'après le lemme 19.1 (pour $A^*_{I(p)}$), B^{ℓ} et B^m sont adjacents dans $B^{J(p)}$.

a.i.2) $\{B^{\ell}, B^m\} \subset A^{\perp}_{p+1}$

D'après le lemme 19.2 : $\tilde{F} = F \cap A^{\perp}_{p+1}$.

Par conséquent, d'après 19.6, la condition est clairement nécessaire.

Condition Suffisante :

Supposons que sous les hypothèses i.2) B^{ℓ} et B^{m} ne soient pas adjacents dans $B^{J(p+1)}$ i.e. $\exists B^{\ell_o} \in B^{\hat{J}(p+1)-\{\ell,m\}} \cap \tilde{F}$. Il est clair donc que $B^{\ell_o} \in F$. Par conséquent, B^{ℓ_o} est nécessairement de la forme $B^{\ell_o} = B^{j(k,h)}$ (19.6 ii)). Par ailleurs, étant donné le caractère extrémal de $\hat{F}$, $B^{j(k,h)} \in F$ si et seulement si B^{k}, $B^{h} \in F$. On a alors B^{k}, $B^{h} \in B^{\hat{J}(p)} \cap F$, adjacents dans $B^{J(p)}$ et de part et d'autre de $A_{p+1}^{\perp}$, ce qui est impossible d'après les hypothèses, et la condition est donc suffisante.

a.ii.1) $\quad B^{\ell} \notin A_{p+1}^{\perp}$

Soit F (resp. $\tilde{F}$) la plus petite face de $A^{*}_{I(p)}$ (resp. de $A^{*}_{I(p+1)}$) que contient B^{ℓ} et $B^{j(k,h)}$. On a alors, d'après le lemme 19.2, que : $\tilde{F} = F \cap A^{*}_{p+1}$.

Condition Suffisante :

Soit $\ell = k$. Etant donné que B^{k} et B^{h} sont adjacents dans $B^{J(p)}$, on a que $\nexists B^{j} \in B^{\hat{J}(p)-\{k,h\}} \cap F$. Supposons que B^{k} et $B^{j(k,h)}$ ne soient pas adjacents dans $B^{J(p+1)}$. On a alors $\exists B^{\ell_o} \in B^{\hat{J}(p+1)-\{k,j(k,h)\}} \cap \tilde{F}$. Par ailleurs, puisque $B^{\ell_o} \in F$, B^{ℓ_o} est donc nécessairement de la forme $B^{\ell_o} = B^{j(m,n)}$ avec $(m,n) \neq (k,h)$. Supposons par exemple que $m \neq k$. Alors, du fait que $B^{j(m,n)} \in F$ si et seulement si B^{m} et $B^{n} \in F$ et puisque $m \neq h$ (car $A_{p+1}B^{m} > 0$ et $A_{p+1}B^{h} < 0$), on a finalement que :

$$B^{m} \in B^{\hat{J}(p)-\{k,h\}}$$

ce qui contredit que B^{k} et B^{h} soient adjacents dans $B^{J(p)}$. De façon analogue, si $n \neq h$, on obtient $B^{n} \in B^{\hat{J}(p)-\{k,h\}}$ ce qui complète la démonstration.

Condition Nécessaire :

Soient B^{ℓ} et $B^{j(k,h)}$ adjacents dans $B^{\hat{J}(p+1)}$ et supposons $\ell \neq k$. Etant donné que, d'une part, $B^{\hat{J}(p)}$ est essentiel et que, d'autre part, B^{k} et B^{h} sont adjacents dans $B^{J(p)}$, on a d'après le lemme 19.1 (pour $A^{*}_{I(p)}$) que :

$$\dim(F) \geq d+3.$$

Par ailleurs, du fait que $\tilde{F} = F \cap A^*_{p+1}$ et $\tilde{F} \not\subset A_{p+1}$, on a que $\dim(\tilde{F}) \geq d+3 = d'+3$ ce qui contredit, d'après le lemme 19.1 (pour $A^*_{\tilde{I}(p+1)}$), que B^{ℓ} et $B^{j(k,h)}$ soient adjacents dans $B^{J(p+1)}$. La démonstration de a.ii.2) est analogue à celle de a.i.2). Il en est de même pour a.iii).

Considérons finalement la situation b) i.e. $A^{\perp}_{p+1} \not\supset]A^*_{\tilde{I}(p)}[$. On a alors que $d' = d-1$. Rappelons, par ailleurs, que :

$$B^{\hat{J}(p+1)} = \left\{ \begin{array}{lll} \text{i)} & B^{j_o} \ (\text{sauf si } A_{p+1} X = 0) & \\ \text{ii)} & B^j \in B^{\hat{J}(p)} \ \text{t.q. } A_{p+1} B^j = 0 & \\ \text{iii)} & B^{j(j_o,h)} : & \left[\begin{array}{l} B^{j(j_o,h)} = \lambda_{j_o} B^{j_o} + \lambda_h B^h \\ B^h \in B^{\hat{J}(p)} \\ A_{p+1} B^h < 0 \\ \lambda_{j_o}, \lambda_h > 0 \text{ tels que : } B^{j(j_o,h)} \in A_{p+1} \end{array} \right. \\ \text{iv)} & B^{j(k,-j_o)} : & \left[\begin{array}{l} B^{j(k,-j_o)} = \lambda_k B^k + \lambda_{j_o} (-B^{j_o}) \\ B^k \in B^{\hat{J}(p)} \\ A_{p+1} B^k > 0 \\ \lambda_k, \lambda_{j_o} > 0 \text{ tels que : } B^{j(k,-j_o)} \in A^{\perp}_{p+1} \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad 19.10$$

où $B^{j_o} \in B^{\bar{J}(p)}$, $A_{p+1} B^{j_o} > 0$, B^{j_o} fixé arbitrairement.

b.1) $\quad B^{\ell}, B^m \in B^{\hat{J}(p)} \cap B^{\hat{J}(p+1)}$.

Soit F (resp. $\tilde{F}$) la plus petite face de $A^*_{\tilde{I}(p)}$ (resp. $A^*_{\tilde{I}(p+1)}$) qui contient B^{ℓ} et B^m. D'après 19.10, et compte tenu du lemme 19.2, on a que :

$$\tilde{F} = F \cap A^{\perp}_{p+1}$$

Condition Suffisante :

Soient B^{ℓ} et B^{m} adjacents dans $B^{J(p)}$ et supposons que B^{ℓ} et B^{m} ne soient pas adjacents dans $B^{J(p+1)}$. On a alors :

$$\exists B^{\ell_o} \in B^{\hat{J}(p+1)-\{\ell,m\}} \cap \tilde{F}.$$

Etant donné que $B^{\ell_o} \in F$, on a que B^{ℓ_o} est nécessairement de la forme :

$$B^{\ell_o} = B^{j(j_o,h)} \quad (\text{ou } B^{\ell_o} = B^{j(k,-j_o)}).$$

Par ailleurs, puisque $B^{j_o} \in]A^*_{I(p)}[\subset F$, $B^{j(j_o,h)} \in F$ (resp. $B^{j(k,-j_o)} \in F$) si et seulement si $B^{h} \in F$ (resp. $B^{k} \in F$). Par conséquent, on a, d'après 19.10 :

$$B^{h} \in B^{\hat{J}(p)-\{\ell,m\}} \cap F \quad (\text{ou } B^{k} \in B^{\hat{J}(p)-\{\ell,m\}} \cap F)$$

ce qui contredit que B^{ℓ} et B^{m} soient adjacents dans $B^{J(p)}$, d'où le résultat.

Condition Nécessaire :

Soienr B^{ℓ} et B^{m} adjacents dans $B^{J(p+1)}$. D'après le lemme 19.1 (pour $A^*_{I(p+1)}$) on a que :

$$\dim(\tilde{F}) = d'+2$$

Par ailleurs, étant donné que $\tilde{F} = F \cap A^{\perp}_{p+1}$ et que $F \not\subset A^{\perp}_{p+1}$ on a que $\dim(\tilde{F}) = \dim(F) - 1$. D'où :

$$\dim(F) = (d'+2) + 1 = d+2$$

ce qui d'après le lemme 19.1 (pour $A^*_{I(p)}$) entraîne que B^{ℓ} et B^{m} sont adjacents dans $B^{J(p)}$.

b.2) $B^\ell \in B^{\hat J(p)} \cap B^{\hat J(p+1)}$, $B^{j(j_o,h)} \in B^{\hat J(p+1)}$

Soit F (resp. $\hat F$) la plus petite face de $A^*_{I(p)}$ (resp. de $A^*_{I(p+1)}$) qui contient B^ℓ et $B^{j(j_o,h)}$. On a alors, d'après 19.10 et le lemme 19.2, $\hat F = F \cap A^\perp_{p+1}$. Par ailleurs, étant donné le caractère extrémal de F et du fait que $B^{j_o} \in]A^*_{I(p)}[\subset F$, on a que : $B^{j(j_o,h)} \in F$ si et seulement si $B^h \in F$. Par conséquent, F est la plus petite face de $A^*_{I(p)}$ qui contient B^ℓ et B^h.

Condition Suffisante :

Soient B^ℓ et B^h adjacents dans $B^{J(p)}$ et supposons que B^ℓ et $B^{j(j_o,h)}$ ne soient pas adjacents dans $B^{J(p+1)}$. On a donc que : $\exists B^{\ell_o} \in B^{J(p+1)-\{\ell,j(j_o,h)\}} \cap \hat F$. Il est clair que $B^{\ell_o} \notin B^{\hat J(p)}$. En effet $B^{\ell_o} \in F \cap A^\perp_{p+1}$ et $\ell_o \neq \ell$ Par ailleurs, $\ell_o \neq h$ car $B^h \notin A^\perp_{p+1}$. Par conséquent, si $B^{\ell_o} \in B^{\hat J(p)}$ alors :

$$B^{\ell_o} \in B^{\hat J(p)\ -\{\ell,h\}} \cap F$$

ce qui contredit que B^ℓ et B^h soient adjacents dans $B^{J(p)}$. D'après 19.10, B^{ℓ_o} est donc de la forme $B^{\ell_o} = B^{j(j_o,m)}$ (ou $B^{\ell_o} = B^{j(n,-j_o)}$). Supposons d'abord $B^{\ell_o} = B^{j(j_o,m)}$. Il est clair donc que, d'une part, $m \neq h$ et, d'autre part, puisque $A_{p+1}B^\ell = 0$ et $A_{p+1}B^m < 0$, $m \neq \ell$. Par conséquent, étant donné que $B^{j(j_o,m)} \in F$ si et seulement si $B^m \in F$, on a finalement :

$$B^m \in B^{\hat J(p)-\{\ell,h\}} \cap F$$

ce qui contredit que B^ℓ, B^h soient adjacents dans $B^{J(p)}$.

Si $B^{\ell_o} = B^{j(n,-j_o)}$, on a, d'une part, $n \neq h$ (car $A_{p+1}B^n > 0$ et $A_{p+1}B^h < 0$) et, d'autre part, $n \neq \ell$ (car $A_{p+1}B^n > 0$ et $A_{p+1}B^\ell = 0$) et on obtient alors, de façon analogue :

$$B^n \in B^{\hat J(p)-\{\ell,h\}} \cap F$$

donc une contradiction, d'où finalement le résultat.

Condition Nécessaire :

Soient B^{ℓ} et $B^{j(j_o,h)}$ adjacents dans $B^{J(p+1)}$ et supposons que B^{ℓ} et B^{h} ne soient pas adjacents dans $B^{J(p)}$. Etant donné que $B^{j_o} \in]A^*_{I(p)}[\subset F$, alors $B^{j(j_o,h)} \in F$ si et seulement si $B^{h} \in F$ et F est donc la plus petite face de $A^*_{I(p)}$ qui contient B^{ℓ} et B^{h}.

Par ailleurs, d'après le lemme 19:1, on a que $\dim(F) > d+2$ et donc $\dim(\tilde{F}) = \dim(F) -1 > d+1 = d'+2$, ce qui d'après le lemme 19.1 (pour $A^*_{I(p+1)}$) contredit que B^{ℓ} et $B^{j(j_o,h)}$ soient adjacents dans $B^{J(p+1)}$, d'où le résultat.

La démonstration des parties b.3) et b.4) est analogue à celle de b.2), compte tenu du fait que : $B^{j(j_o,h)} \in F$ (resp. $B^{j(k,-j_o)} \in F$) si et seulement si $B^{h} \in F$ (resp. $B^{k} \in F$), où F est une face de $A^*_{I(p)}$.

b.5) Si $B^{j_o} \in B^{\hat{J}(p+1)}$, B^{j_o} est adjacent à tous les $B^{j} \in B^{\hat{J}(p+1)-j_o}$.

Soit $B^{j} \in B^{\hat{J}(p+1)-j_o}$. Soit F (resp. $\tilde{F}$) la plus petite face de $A^*_{I(p)}$ (resp. de $A^*_{I(p+1)}$) qui contient B^{j} et B^{j_o}. Etant donné que $A_{p+1}B^{j_o} > 0$ on a que $\tilde{F} = F \cap A^*_{p+1}$. Par ailleurs, du fait que $B^{j_o} \in]A^*_{I(p)}[\subset F$, F est donc la plus petite face de $A^*_{I(p)}$ qui contient B^{j}. D'après 19.10 on a que soit $B^{j} \in B^{\hat{J}(p)}$ soit $B^{j} = B^{j(j_o,h)}$ (ou $B^{j} = B^{j(k,-j_o)}$). Par conséquent, du fait que $B^{\hat{J}(p)}$ est essentiel, on a que $\dim(F) = d+1$ (en effet, c'est évident si $B^{j} \in B^{\hat{J}(p)}$. Si $B^{j} = B^{j(j_o,h)}$ (resp. $B^{j} = B^{j(k,-j_o)}$), cela résulte du fait que $B^{j(j_o,h)} \in F$ (resp. $B^{j(k,-j_o)} \in F$) si et seulement si $B^{h} \in F$ (resp. $B^{k} \in F$)). Finalement, puisque $\tilde{F} = F \cap A^*_{p+1}$ et $\tilde{F} \not\subset A_{p+1}$, on a que :

$$\dim(\tilde{F}) = \dim(F) = d+1 = d'+2$$

ce qui entraîne, d'après le lemme 19.1 (pour $A^*_{I(p+1)}$), que B^{j} et B^{j_o} sont adjacents dans $B^{J(p+1)}$.

Le théorème est donc démontré.

20 METHODE DE DOUBLE DESCRIPTION AVEC DETERMINATION DES CONTRAINTES REDONDANTES.

Dans la section 13 on a présenté la Méthode de Double Description pour la détermination d'un ensemble quelconque de générateurs d'un cône polyédrique défini par un système d'inégalités linéaires homogènes et donc, pour la détermination d'une Double Description (quelconque) d'un tel cône polyédrique. Par ailleurs, dans la section 16 on a présenté des critères qui permettent la réduction d'un Tableau de Double Description (quelconque) d'un cône polyédrique et donc, la détermination, d'une part, d'un ensemble essentiel de générateurs et, d'autre part, d'une représentation essentielle d'un tel cône polyédrique. On appelera ces critères : "Critères de Redondance a posteriori".

D'autre part, dans la section 18, on a présenté des critères pour caractériser les contraintes non-redondantes à la fin de l'étape p de la Méthode de Double Description, qui deviennent redondantes lors de l'introduction d'une nouvelle contrainte (il est clair que les contraintes redondantes à la fin de l'étape p sont toujours redondantes dans les étapes ultérieures). On appelera ces critères : "Critères de Redondance a priori". Finalement, dans la section 19 on a présenté la Méthode de Double Description pour la détermination d'un ensemble essentiel $B^{J(p+1)}$ de générateurs de $A^*_{I(p+1)}$ à partir de d'un ensemble essentiel $B^{J(p)}$ de générateurs de $A^*_{I(p)}$.

En fait, puisque les lignes [resp. colonnes] du Tableau de Double Description qui correspondent aux contraintes singulières [resp. générateurs dans la partie linéaire] ne comportent que des éléments nuls, on peut s'intéresser à déterminer seulement un ensemble essentiel de contraintes non-singulières [resp. de générateurs dans la partie conique], c'est-à-dire, à déterminer une matrice M ayant la plus petite taille, compte tenu du fait que, d'après les résultats des sections 10 et 8, la redondance de A^*_I (non-singulière) dans A^*_I [resp. B^j (dans la partie conique) dans B^J] ne dépend pas de l'ensemble particulier $A_{\bar{I}}$ [resp. $B^{\bar{J}}$] considéré dans la définition de $[A^*_I] = A^*_I$ [resp. de $]A^*_I[= (B^{\bar{J}})$]. Un ensemble essentiel $A_{\bar{I}}$ [resp. $B^{\bar{J}}$] peut donc être déterminé à la fin de l'algorithme ou éventuellement au bout d'un certain nombre d'étapes .

Dans l'exemple ci-dessous on montre la façon d'intégrer les Critères de Détermination des Contraintes Redondantes dans le Schéma de Calcul de la Méthode de Double Description décrit précédemment. (Section 19).

Exemple : Déterminer toutes les solutions et une représentation essentielle du système homogène d'inégalités linéaires dans R^4 :

$$\left.\begin{array}{rrrrl}
3x_1 & -\ 4x_2 & +\ x_3 & & \geqslant 0 \\
2x_1 & & +\ 4x_3 & -\ x_4 & \geqslant 0 \\
-4x_1 & -\ 7x_2 & +\ 2x_3 & +\ 4x_4 & \geqslant 0 \\
-\ x_1 & & +\ 20x_3 & +\ 2x_4 & \geqslant 0 \\
6x_1 & -\ 5x_2 & -\ 4x_3 & +\ 2x_4 & \geqslant 0 \\
x_1 & & & & \geqslant 0 \\
 & x_2 & & & \geqslant 0 \\
 & & x_3 & & \geqslant 0 \\
 & & & x_4 & \geqslant 0
\end{array}\right\} \qquad 1)$$

Remarque : Etant donné que le système 1) contient les contraintes de signe sur les variables (i.e. $x_i \geqslant 0$; $i=1,\dots,4$) il est clairement de rang maximal.

$$\begin{array}{r|rrrr|}
\hline
(1) & 1 & 0 & 0 & 0 \\
(2) & 0 & 1 & 0 & 0 \\
(3) & 0 & 0 & 1 & 0 \\
(4) & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hdashline
 & 3 & -4 & 1 & 0 \\
 & 2 & 0 & 4 & -1 \\
\rightarrow & -4 & -7 & 2 & 4 \\
 & -1 & 0 & 20 & 2 \\
 & 6 & -5 & -4 & 2 \\
\hline
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{r|rrrrrr|}
 & (1)=(3) & (2)=(4) & (3)=(1)+2(3) & (4)=(1)+(4) & (5)=2(2)+7(3) & (6)=4(2)+7(4) \\
\hline
(1) & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
(2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\
(3) & 1 & 0 & 2 & 0 & 7 & 0 \\
(4) & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 7 \\
\hdashline
 & 1 & 0 & 5 & 3 & -1 & -16 \\
 & 4 & -1 & 10 & 1 & 28 & -\ 7 \\
(5) & + & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\
*(6) & 20 & 2 & 39 & 1 & 140 & 14 \\
\rightarrow & -4 & 2 & -2 & 8 & -38 & -6 \\
\hline
\end{array}
\overset{\#}{\Longrightarrow}$$

T(4) T(5) = T(6)

Tableau Initial

	(1)=(2)	(2)=(4)	(3)=(1)+2(2)	(4)=4(3)+(4)	(5)=(6)+3(2)	(6)=4(6)+3(4)	
(1)	0	1	0	5	0	3	
(2)	0	0	0	0	4	16	
(3)	0	0	1	8	0	0	
(4)	1	1	2	1	10	31	*
	0	*3*	*1*	*23*	*-16*	*-55*	
→	*-1*	*1*	*2*	*41*	*-10*	*-25*	
(5)	+	0	+	0	+	0	
(6)	×	×	×	×	×	×	
(7)	+	+	0	0	0	0	

T(7)

⟹

	(1)=(2)	(2)=(3)	(3)=(4)	(4)=(1)+(2)	(5)=2(1)+(3)	(6)=(5)+5(3)	$(7)=\frac{1}{4}[(6)+25(2)]$	$(8)=\frac{1}{8}[41(6)+25(4)]$	
(1)	1	0	5	1	0	0	7	31	
(2)	0.	0	0	0	0	4	4	82	
(3)	0	1	8	0	1	5	0	25	
(4)	1	2	1	2	4	20	14	162	*
→	*3*	*1*	*23*	*3*	*1*	*-11*	*5*	*-210*	
(8)	+	+	+	0	0	0	0	0	
(5)	0	+	0	+	+	+	0	0	
* (6)	×	×	×	×	×	×	×	×	
(7)	+	0	0	+	+	0	+	0	

T(8)

⟹

	(1)=(1)	(2)=(2)	(3)=(3)	(4)=(4)	(5)=(5)	(6)=(7)	$(7)=\frac{1}{2}[(6)+11(2)]$	$(8)=\frac{1}{4}[(6)+11(5)]$	$(9)=\frac{1}{41}[23(8)+210(3)]$	$(10)=\frac{1}{25}[(8)+42(7)]$	
(1)	1	0	5	1	0	7	0	0	43	13	
(2)	0	0	0	0	0	4	2	1	46	10	
(3)	0	1	8	0	1	0	8	4	55	1	
(4)	1	2	1	2	4	14	21	16	96	30	*
(9)	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0	
(8)	+	+	+	0	0	0	+	0	+	0	
(5)	0	+	0	+	+	0	+	+	0	0	
(6)	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	
(7)	+	0	0	+	+	+	0	+	0	+	

T(9)

Tableau Final.

Explication des différents tableaux.

Dans la résolution du système 1) ci-dessus, on a utilisé essentiellement le Schéma Général de Calcul (II-a)) pour la Méthode de Double Description décrit dans la section 1.9. A la fin de l'étape p $(4 \leq p \leq 9)$, le Tableau T(p) est constitué, d'une part, du Tableau de Double Description $\overset{(p)}{T}$ correspondant aux p premières inégalités déjà considérées au cours de l'algorithme ($\overset{(p)}{T}$ est le sous-tableau de T(p) formé des lignes numérotées (1), (2), ... , (p) sur la partie gauche de T(p) et, d'autre part, des lignes correspondant aux inégalités à considérer dans les étapes ultérieures de l'algorithme. Par ailleurs, on a signalé avec une flèche dans la partie gauche du Tableau T(p) la contrainte à considérer à l'étape p+1. L'ensemble des colonnes du Tableau T(p+1) est constitué, d'une part, des colonnes de T(p) dont l'intersection avec la ligne signalée avec (→) dans T(p) est nulle et, d'autre part, des combinaisons linéaires positives des paires de colonnes adjacentes [†] de T(p) dont les intersections avec cette même ligne sont de signe opposé, combinaisons telles que l'intersection de la colonne engendrée avec la ligne correspondante dans T(p+1) est nulle. On a explicité sur la partie supérieure de chaque tableau T(p+1), la façon de déterminer ses différentes colonnes à partir des colonnes de T(p) (les coefficients (positifs) des différents combinaisons ont été choisis de sorte que les éléments de T(p+1) soient tous entiers). Les colonnes de la partie supérieure de chaque tableau T(p) constituent donc un ensemble essentiel de générateurs du cône polyédrique défini par les p inégalités déjà considérées au cours de l'algorithme. En effet, c'est évident pour le Tableau Initial, où les colonnes de la matrice unité I_4 constituent un ensemble essentiel de générateurs de l'orthant positif de R^4, défini par les conditions de signe sur les variables dans le système 1) ; pour les autres tableaux, cela résulte de la façon de les générer.

(†) Deux colonnes du Tableau T(p) sont adjacents si elles correspondent à des générateurs adjacents.

Remarque : le critère pour déterminer l'adjacence de deux générateurs doit être appliqué sur le sous-tableau de T(p) correspondant aux Tableau de Double Description $\overset{(p)}{T}$ (sous-tableau de T(p) formé des lignes (1), (2) ... (p)).

A l'étape (6), l'inégalité $-x_1 + 20x_3 + 2x_4 \geq 0$ est immédiatement sayisfaite, donc redondante (i.e. T(6) = T(5)) et elle n'est plus considérée dansles étapes ultérieures de l'algorithme (elle a été signalée par (*) sur la gauche du tableau T(6)). A l'étape (7), la contrainte $x_4 \geq 0$ (signalée par (#) sur la droite du Tableau T(6)) est caractérisée "a priori redondante" d'après les théorèmes 18.1 - 18.2 de la section 18, et n'est plus considérée dans les étapes ultérieures de l'algorithme. Cependant, on conserve la ligne correspondant à cette contrainte dans les tableaux ultérieurs puisque ses éléments sont les dernières composantes des générateurs (on l'a donc signalée par ( ) sur la droite de ces derniers tableaux). On remarque, par ailleurs, que la contrainte x_4 0 pourrait aussi bien être caractérisée comme étant redondante au moyen des Critères de Redondance à Postériori appliqués sur l'un quelconque des tableaux qui suivent le Tableau T(6).

Finalement, un ensemble essentiel de générateurs du cône polyédrique défini par le système 1) est donné par :

$$B^j {}_{j=1}^{10} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 43 \\ 46 \\ 55 \\ 96 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 1 \\ 30 \end{pmatrix} \right\}$$

et la solution générale du système 1) est donc

$$X = \sum_{j=1}^{10} \lambda_j B^j$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1,\dots,10.$$

Par ailleurs, le système :

$$\begin{array}{rrrrl}
3x_1 & -\ 4x_2 & +\ x_3 & & \geq\ 0 \\
2x_1 & & +4x_3 & -\ x_4 & \geq\ 0 \\
-4x_1 & -\ 7x_2 & +2x_3 & +4x_4 & \geq\ 0 \\
6x_1 & -\ 5x_2 & -4x_3 & +2x_4 & \geq\ 0 \\
x_1 & & & & \geq\ 0 \\
 & x_2 & & & \geq\ 0 \\
 & & x_3 & & \geq\ 0
\end{array}$$

est une Représentation Essentielle du Système 1).

Remarque : On peut vérifier à l'aide des Critères de Redondance a Posteriori que le Tableau Final T(q) privé des lignes (4) et (6) est effectivement essentiel.

Commentaires. Le système 1) ci-dessus a été considéré par Chernikova [ ] comme exemple d'application de la Méthode de Double Description (sans Détermination des Contraintes Redondantes) pour la détermination d'un ensemble essentiel de générateurs du cône polyédrique défini par ce système. Dans cet exemple, Chernikova choisit comme nouvelle contrainte à l'étape p+1 (parmi les contraintes non satisfaites) celle qui est "la plus satisfaite" i.e. celle qui est satisfaite par le plus grand nombre de générateurs déjà déterminés. Par contre, dans la résolution du système 1) ci-dessus, on a choisi comme nouvelle contrainte à l'étape p+1, celle qui est "la moins satisfaite par l'ensemble de générateurs déjà déterminés" (i.e. celle dont la ligne correspondante du tableau T(p) a le plus d'éléments négatifs) de façon à rendre redondantes le plus grand nombre de contraintes déjà considérées. Ce dernier critère nous a permis d'une part, de gagner une étape par rapport à Chernikova (i.e. de réduire d'un le nombre total de tableaux) et, d'autre part, de réduire d'un le nombre total de combinaisons linéaires de paires de colonnes adjacentes (i.e. 17 contre 18). Ce critère n'est évidemment pas valable de façon générale.

21. MÉTHODE DE DOUBLE DESCRIPTION POUR LES SYSTÈMES DE RANG MAXIMAL.

I). Système d'Inégalités linéaires (homogènes) de Rang Maximal.

Considérons le système d'inégalités linéaires homogènes dans R^n :

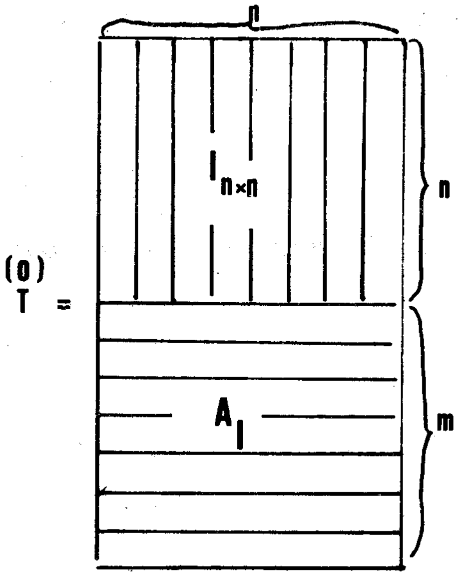
$$A_iX \geq 0 \ ; \ i \in I = \{1,\dots,m\} \qquad 21.1$$

où la matrice A_I est de rang maximal i.e. rang $(A_I) = n$. La partie linéaire du cône polyédrique des solutions du système (21.1) est donc réduite à $\{0\}$.

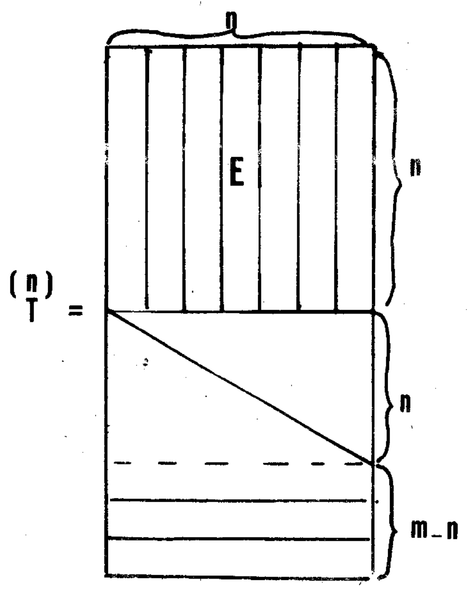
Considérons maintenant le système d'équations homogènes associé au système (21.1) :

$$A_iX = 0 \; ; \; i \in I = \{1,\ldots,m\} \qquad 21.2$$

La Méthode d'Elimination Complète de la section 10 nous permet de déterminer, d'une part, un sous-système de 21.2 formé de n équations linéairement indépendantes et, d'autre part, la matrice de post-multiplication de Jordan pour la diagonalisation de la matrice des coefficients de ce sous-système. En effet, si on considère à l'étape initiale de cette méthode le tableau $\overset{(0)}{T}$:



on obtient, à la fin de l'étape n, un tableau $\overset{(n)}{T}$ de la forme suivante :

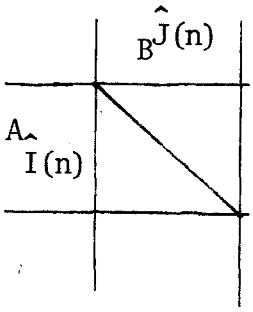


21.3

dont : la partie supérieure E est la matrice de post-multiplication de Jordan pour la diagonalisation de la matrice du sous-système régulier de 21.2 déterminé au cours de l'algorithme, les n premières lignes constituent la matrice diagonalisée de ce sous-système et les (m-n) dernières lignes correspondent aux équations linéairement dépendantes. Considérons ensuite le système d'inégalités équavalente au système (21.1) :

$$A_i X \geq 0 \; ; \; i \in \tilde{I} = \{1,\ldots,m\} \qquad 21.4$$

où l'ensemble d'indices $\tilde{I}$ est l'ensemble des indices des lignes de la partie inférieure du tableau $\overset{(n)}{T}$ dans (21.3). Les n premières inégalités du système (21.4) sont donc linéairement indépendantes. Par conséquent, les colonnes de la partie supérieure E du tableau $\overset{(n)}{T}$ (21.3) constituent (à des changements éventuels de signe près) un ensemble essentiel $B^{\hat{J}(n)}$ de générateurs du cône polyédrique $A^{*}_{I(n)}$, défini par les n premières inégalités du système (21.4). Par suite, pour la détermination d'un ensemble essentiel de générateurs du cône polyédrique des solutions du système complet (21.4) (et donc du système équivalent (21.1)) on peut appliquer la Méthode de Double Description (section 19) pour incorporer les m-n dernières inégalités du système (21.4). On considère pour cela le Tableau de Double Description initial :



21.5

où rappelons le $A_{\hat{I}(n)}$ est l'ensemble des n premières inégalités du système (21.4) et $B^{\hat{J}(n)}$ l'ensemble essentiel de générateurs de $A^{*}_{\hat{I}(n)}$ déterminé par :

$$B^j \in B^{\hat{J}(n)} \Longleftrightarrow B^j = \begin{cases} E^j \text{ si } \overset{(n)}{T}{}^{j}_{n+j} > 0 \\ (-E^j) \text{ si } \overset{(n)}{T}{}^{j}_{n+j} < 0 \end{cases} \qquad 21.6$$

où E est la partie supérieure du tableau $\overset{(n)}{T}$ dans 21.3.

Remarque 21.1 : Dans le cas particulier où le système (21.1) contient les contraintes de signe ($x_i \geq o$; $i \in \{1,\dots,n\}$), $B^{\hat{J}(n)} = I_{n\times n}$ et l'on dispose donc du tableau (21.5) de façon immédiate.

II) Système d'(In)égalités linéaires (homogènes) de Rang maximal.

Si le système (21.1) (de rang maximal) comporte aussi un ensemble A_{I_e} d'équations linéaires ($A_{I_e} \subset A_I$), on peut toujours appliquer la variante de la Méthode de Double Description ci-dessus (au système d'(In)égalités (21.1)), moyennant les modifications suivantes : une fois déterminé le Tableau $\overset{(n)}{T}$ (21.3) on doit distinguer parmi les n premières lignes de la partie inférieure de $\overset{(n)}{T}$, l'ensemble $\overset{(n)}{T}_{\bar{\bar{I}}(n)}$ des lignes qui correspondent à des équations du système (21.1) de l'ensemble $\overset{(n)}{T}_{\hat{I}(n)}$ des lignes qui correspondent aux inégalités du système (21.1). D'autre part, l'ensemble essentiel $B^{\hat{J}(n)}$ de générateurs du cône polyédrique $A^*_{\bar{I}(n)}$ défini par les n premières (in)égalités du système (21.4) est égal (à des changements éventuels de signe près) à l'ensemble de colonnes E^j de E telles que :

$$A_{\bar{\bar{I}}(n)} \; E^j = \overset{(n)}{T}{}^{j}_{\bar{\bar{I}}(n)} = 0 \qquad 21.7$$

Concrètement :

$$B^j \in B^{\hat{J}(n)} \Longleftrightarrow B^j = \begin{cases} E^j, \text{ si } \overset{(n)}{T}{}^{j}_{\bar{\bar{I}}(n)} = 0 \text{ et } \overset{(n)}{T}{}^{j}_{n+j} > 0 \\ \\ (-E^j), \text{ si } \overset{(n)}{T}{}^{j}_{\bar{\bar{I}}(n)} = 0 \text{ et } \overset{(n)}{T}{}^{j}_{n+j} < 0 \end{cases} \qquad 21.8$$

Pour la détermination d'un ensemble essentiel de générateurs du système complet d'(In)égalités (21.4), il ne nous reste donc qu'appliquer la Méthode de Double Description (Section 19), pour incorporer les (m-n) dernières (in)égalités du système (21.4), avec le tableau de Double Description Initial :

$$\begin{array}{c|c|} & B^{\hat{J}(n)} \\ \hline A_{\bar{\bar{I}}(n)} & \\ \hline A_{\hat{I}(n)} & \diagdown \\ \hline \end{array} \qquad 21.9$$

Remarque 21.2 : si dans le système d'(In)égalités (21.1), l'ensemble A_{I_e} d'équations corresponde aux premières inégalités du système (ce qui est toujours le cas après une permutation de lignes de la matrice A_I des coefficients du système), dans la détermination du tableau $\overset{(n)}{T}$ (21.3) on peut éliminer définitivement (i.e. ne pas remettre à la fin du système) une équation du système (21.1) (i.e. $A_i x = 0$; $i \in I_e$) qui est signalée redondante au cours de cet algorithme.

Cette remarque concerne, en particulier, le cas où le système (21.1) ne comporte que des équations linéaires homogènes.

Remarque 21.3 : On remarque que dans le cas où le système (21.1) comporte aussi des équations linéaires homogènes (situation II) on peut toujours se ramener à la situation I) lors d'une transformation du sous système $A_{I_e} X = 0$ dans un sous système d'inégalités équivalent. On peut considérer, entr'autres, les sous systèmes essentiels équivalents :

1)

$$\left.\begin{array}{r} A_{I_e} X \geq 0 \\ (-\sum\limits_{i\in I_e} A_i)X \geq 0 \end{array}\right| \quad \text{représentation essentielle minimale de } A_{I_e}^{\perp} \qquad 21.10$$

2)

$$\left.\begin{array}{r} A_{I_e} X \geq 0 \\ (-A_{I_e})X \geq 0 \end{array}\right| \quad \text{représentation essentielle maximale de } A_{I_e}^{\perp} \qquad 21.11$$

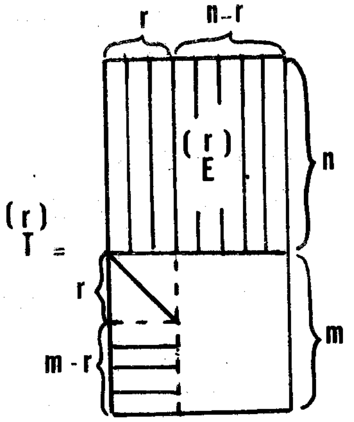
III)Système d'Inégalités Linéaires (Homogènes) de Rang r (r<n)

Si le système d'(in)égalités (21.1) est de ang r (r<n) on peut toujours se ramener à la résolution d'un système de rang maximal. En effet, on a vu plus loin (section 6, proposition 6.3) que tout cône polyédrique K peut être exprimé comme la somme orthogonale d'un cône polyédrique saillant $\hat{K}$ et de sa partie linéaire]K[i.e.

$$K = \,]K[\, \oplus \hat{K} \qquad 21.12$$

où : $\hat{K} = K \cap (]K[)^{\perp}$.

On procède donc (comme dans les situations I) et II)) à la diagonalisation de la matrice A_I des coefficients du système par la Méthode d'Elimination Complète de la section 10. A la fin de cet algorithme on obtient donc un tableau de la forme :



dont les (n-r) dernières colonnes de la partie supérieure $\overset{(r)}{E}$ constituent une base linéaire $B^{L(r)}$ de la partie linéaire]K[du cône polyédrique K des solutions du système d'inégalités (21.1) (i.e. une base linéaire du sous-espace vectoriel défini par le système d'équations homogènes (21.2) associé à (21.1)). Le cône saillant $\hat{K}$ (21.12) est donc défini par le système d'(in)égalités de rang maximal :

$$\left.\begin{array}{l} A_I X \geqslant 0 \\ {}^T B^{L(r)} X = 0 \end{array}\right| \qquad 21.14$$

où ${}^T B^{L(r)}$ est une matrice (n-r,n), transposée de la matrice $B^{L(r)}$, dont les colonnes constituent une base de]K[. On a donc ramené le problème de résolution du système d'(in)égalités (21.1) de rang r (r<n) à la résolution du système d'(in)égalités (21.14) de rang maximal n (situation II ci-dessus). Par ailleurs, pour la détermination du tableau $\overset{(n)}{T}$ (de la forme (21.3)) correspondant au système (21.14), il suffit en fait d'intercaler les n-r lignes $({}^T B^{L(r)} \cdot \overset{(r)}{E})$ dans le tableau $\overset{(r)}{T}$ (21.13) (à la suite des r premières lignes de sa partie inférieure) pour compléter ensuite la diagonalisation de la matrice des coefficients du système (21.14), au moyen la Méthode d'Elimination Complète (section 10). Finalement, pour la détermination d'un ensemble essentiel $B^{\mathcal{J}}$ de générateurs de $\hat{K}$, on procède comme dans la situation II) ci-dessus.

Remarque 21.4 : dans la situation III) on peut aussi remplacer le système (21.14) par l'un de deux systèmes d'(in)égalités équivalents suivants :

$$\text{i)}\quad \left.\begin{array}{l} A_I X \geqslant 0 \\ {}^{T}B^{L(r)} X \geqslant 0 \\ (-\sum\limits_{j \in L(r)} {}^{T}B^{j}) X \geqslant 0 \end{array}\right| \qquad \text{ii)}\quad \left.\begin{array}{l} A_I X \geqslant 0 \\ {}^{T}B^{L(r)} X \geqslant 0 \\ -{}^{T}B^{L(r)} X \geqslant 0 \end{array}\right| \qquad 21.15$$

et on peut toujours déterminer le tableau $\overset{(n)}{\underset{(r)}{T}}$ correspondant au système 21.15 i) [resp. 21.15 ii)] à partir du tableau $\overset{(r)}{T}$ (21.13) de façon analogue à ce qui précède. Par ailleurs, si le système $A_I X \geqslant 0$ ne comporte que des inégalités (ce qui est toujours le cas lors de la transformation des équations en inégalités (voir Remarque 21.3)), le système de rang maximal 21.15 i) [resp. 21.15 ii)] ne comporte que des inégalités et on est donc ramené à la situation I ci-dessus.

Remarque 21.5 : dans la situation III) le cône K des solutions du système (21.1) est donné par :

$$K = [B^{L(r)}] + (B^{\hat{J}})^{L} \qquad 21.16$$

i.e.

$$K = \{X \mid X = \sum_{j \in L(r)} \alpha_j B^j + \sum_{j \in \hat{J}} \lambda_j B^j \; ; \; \alpha_j \in R (j \in L(r)),\ \lambda_j \geqslant 0 \ (j \in \hat{J})\}$$

Proposition *21.1 : Considérons le système d'(in)égalités linéaires homogènes :*

$$A_I X \geqslant 0. \qquad 21.17$$

Alors, une inégalité $A_r X \geqslant 0$ (r∈I) *[resp. une équation* $A_r X = 0$ (r∈I)] *est redondante dans le système* (21.17) *si et seulement si elle est redondante dans le système (21.14) :*

$$\left.\begin{array}{l} A_I X \geqslant 0 \\ {}^{T}B^{L(r)} X = 0 \end{array}\right|$$

Nota : même résultat si au lieu du système (21.14) on considère l'un des systèmes équivalents (21.15).

Dem : il est clair que si une (in)égalité est redondante dans le système (21.17) elle est aussi, à plus forte raison, redondante dans le système (21.14).

La réciproque résulte du fait que : $A_I^{\perp} = [B^{L(r)}]$. En effet, si $A_r X \geqslant 0$ est redondant dans le système (21.14) alors :

$$A_r = \sum_{\substack{i \in I_{\geqslant} \\ i \neq r}} \lambda_i A_i + \sum_{i \in I_{=}} \alpha_i A_i + \sum_{j \in L(r)} \alpha_j \, {}^T B^j$$

$$\lambda_i \geqslant 0 \; ; \; i \in I_{\geqslant}$$

$$\alpha_i \in R \; ; \; i \in I_{=}$$

$$\alpha_j \in R \; ; \; j \in L(r)$$

et on a donc nécessairement : $\sum_{j \in L(r)} \alpha_j \, {}^T B^j = 0$, d'où le résultat. Par ailleurs, $A_r X = 0$ est redondante dans le système (21.14) si et seulement si $A_r X \geqslant 0$ et $(-A_r)X \geqslant 0$ sont séparément redondantes dans le système qui résulte lors de remplacer dans (21.14) $A_r X = 0$ par $A_r X \geqslant 0$ et $(-A_r)X \geqslant 0$ respectivement, ce qui complète la démonstration de la proposition.

Remarque 21.6 : D'après la Proposition 21.1 ci-dessus, le problème de détermination d'une représentation essentielle du système (21.1) est équivalent au problème de détermination d'une représentation essentielle du système 21.14 (resp. 21.15 i) ou ii)). Par conséquent, on peut intégrer *les critères pour la détermination des inégalités redondantes* dans la résolution de l'un quelconque de ces derniers systèmes (situation III) pour la détermination d'une représentation essentielle du système d'origine (21.1).

22 METHODE DE DOUBLE DESCRIPTION ET SYSTEMES D'(IN)EGALITES NON-HOMOGENES.

Considérons le système d'inégalités non-homogènes dans $\mathbb{R}^n$:

$$A_I X \geq b_I \qquad 22.1$$

où $I = \{1,\dots,m\}$, $b_I \in \mathbb{R}^m$. Les solutions de ce système définissent un polyèdre (éventuellement vide) dans $\mathbb{R}^n$.

On se propose maintenant d'étendre les résultats des sections précédentes pour les systèmes d'inégalités homogènes, aux systèmes non-homogènes, au moyen des procédés d'homogénéisation classiques, à savoir :

Théorème 22.1

La règle :

$$\{X \mid AX \geq b\} \Longleftrightarrow \{\binom{X}{t} / AX - bt \geq 0,\ t \geq 0\} \quad 22.2$$

induit une correspondance biunivoque (monotone par rapport à l'inclusion) entre les polyèdres convexes non-vides P *dans l'espace* X *et les cônes polyédriques (homogènes)* K *contenus dans le demi-espace* $\{\binom{X}{t} / t \geq 0\}$ *de l'espace* (X,t), *dont l'intersection avec l'hyperplan* $\{\binom{X}{t} / t = 1\}$ *de ce dernier espace est non-vide.*

Démonstration :

Analogue à celle du théorème 10.1. (voir [10]). On peut exprimer cette correspondance par :

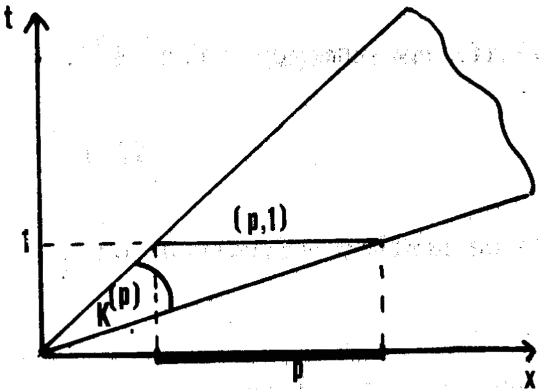
$$P \to K(P) = K$$

$$K \to P(K) = P$$

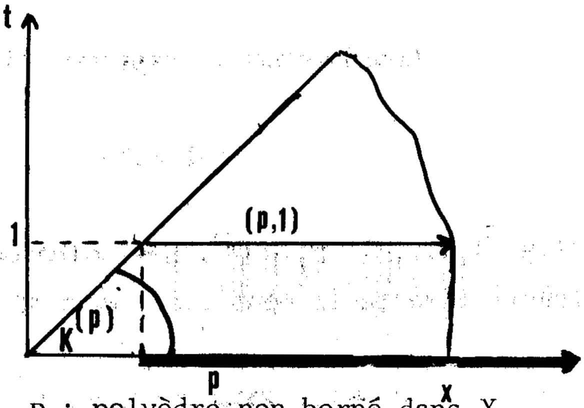
où :

$$K(P) = \{\binom{X}{1} / X \in P\}^{**}$$

$$P(K) = \{X / \binom{X}{1} \in K\}$$



P : polyèdre borné dans X



P : polyèdre non borné dans X

22.3

La relation définie dans le théorème 22.1 permet d'étendre de façon générale les résultats classiques pour les cônes polyédriques (homogènes) aux polyèdres convexes (non-homogènes). En particulier, on a le résultat suivant :

Théorème 22.2

Si P *est un polyèdre (convexe) non-vide dans* X *défini par :*

$$P = \{X \mid AX \geq b\} \qquad 22.4$$

P *peut alors être exprimé par :*

$$P = (P^H)^\Delta + (Q^L)^\angle \qquad 22.5$$

où $(P^H)^\Delta$ *est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini* P^H *de points de* P *et* $(Q^L)^\angle$, *un cône polyédrique. Par ailleurs, dans toute décomposition de la forme (22.5) on a que :*

$$(Q^L)^\angle = \{X \mid AX \geq 0\}.$$

Réciproquement, tout ensemble de la forme $(P^H)^\Delta + (Q^L)^\angle$ *est un polyèdre convexe.*

Démonstration.

a) Considérons le cône polyèdrique K(P) dans le demi-espace $\{t \geq 0\}$ de (X,t), associé à P par la relation (22.2) du théorème 22.1. D'après le théorème de Minkowski, il existe un ensemble fini B^J de générateurs du cône polyédrique K(P). Soit $B^J = B^H \cup B^L$ où :

$$B^H = \{B^j \in B^J \;/\; B^j_{n+1} > 0\}$$

$$B^L = \{B^j \in B^J \;/\; B^j_{n+1} = 0\}$$

Notons que, puisque K(P) rencontre l'hyperplan $\{t=1\}$ dans (X,t), l'ensemble B^H est non vide. Le cône K(P) est donc constitué des vecteurs $\begin{pmatrix}X\\t\end{pmatrix}$ définis par :

$$\begin{pmatrix}X\\t\end{pmatrix} = \sum_{j\in H} \lambda_j \begin{pmatrix}P^j\\1\end{pmatrix} + \sum_{j\in L} \mu_j \begin{pmatrix}Q^j\\0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_j \geq 0 \;;\; \forall j \in H$$

$$\mu_j \geq 0 \;;\; \forall j \in L$$

où $\begin{pmatrix}P^j\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{t_j} B^j \; \forall_j \in H$, $\begin{pmatrix}Q^j\\0\end{pmatrix} = B^j \; \forall j \in L$.

Par conséquent, du fait que :

$$P = \{X \in \mathcal{X} \;|\; \begin{pmatrix}X\\1\end{pmatrix} \in K(P)\},$$

P est donc constitué des vecteurs définis par :

$$X = \sum_{j\in H} \lambda_j P^j + \sum_{j\in L} \mu_j Q^j$$

avec : $\lambda_j \geq 0 \; \forall j \in H$, $\sum_{j\in H} \lambda_j = 1$ et $\mu_j \geq 0 \; \forall j \in L$ i.e.

$$P = (P^H)^{\Delta} + (Q^L)^{\angle}$$

b) Réciproquement, supposons qu'on ait un ensemble de la forme $(P^H)^\Delta + (Q^L)^\angle$ dans X. On construit donc le cône polyédrique K dans (X,t) dont les éléments sont de la forme :

$$\binom{X}{t} = \sum_{j \in H} \lambda_j \binom{P^j}{1} + \sum_{j \in L} \mu_j \binom{Q^j}{0}$$

$$\lambda_j \geqslant 0 \ \forall j \in H$$

$$\mu_j \geqslant 0 \ \forall j \in L.$$

Il est clair donc que $(P^H)^\Delta + (Q^L)^\angle = \{X \in X / \ (X,1) \in K\}$. Par ailleurs, le cône K est, d'une part, contenu dans le demi-espace $\{t \geqslant 0\}$ de (X,t) et a, d'autre part, une intersection non vide avec l'hyperplan $\{t = 1\}$ dans (X,t) (en effet, $P^H \neq \emptyset$). D'après le théorème 22.1, $(P^H)^\Delta + (Q^L)^\angle$ est donc un polyèdre convexe non vide dans X.

c) Reste à montrer maintenant que si P est de la forme :

$$P = \{X \in X \ / \ AX \geqslant b\} = (P^H)^\Delta + (Q^L)^\angle$$

alors :

$$(Q^L)^\angle = \{X \in X \mid AX \geqslant 0\}.$$

En effet, considérons le cône K de la partie b) ci-dessus. D'après le théorème 22.1 on a que :

$$K = K(P) = \{\binom{X}{t} \mid AX - bt \geqslant 0, \ t \geqslant 0\}$$

et donc :

$$(Q^L)^\angle = \{X \in X \mid \binom{X}{0} \in K\} = \{X \in X \mid \binom{X}{0} \in K(P)\} = \{X \in X \mid AX \geqslant 0\}$$

cqfd.

Remarque 22.1 : Dans la décomposition $(P^H)^\Delta + (Q^L)^\angle$ d'un polyèdre convexe P non vide on a que $(Q^L)^\angle = \{X \in X \mid AX \geqslant 0\} = \{X \in X \mid \binom{X}{0} \in K(P)\}$ est le cône polyèdrique des directions d'infinitude du polyèdre P.

Par ailleurs, la partie linéaire $](Q^L)^{\angle}[= \{X \in \mathcal{X} \mid AX = 0\}$ de ce cône est le sous-espace vectoriel sous-jacent à la variété linéaire (éventuellement vide) contenue dans le polyèdre P. Concrètement, on a que :

$$](Q^L)^{\angle}[= \{X \in \mathcal{X} \mid AX = 0\} = \{X \in \mathcal{X} \mid \binom{X}{0} \in]K(P)[\} \qquad 22.7$$

où $]K(P)[$ est la partie linéaire du cône polyèdrique K(P) (homogénéisé de P) associé à P par la relation (22.2).

Corollaire 22.1

Si $P = \{X \in \mathcal{X} \mid AX \geq b\}$ est un polyèdre convexe non vide tel que $\{X \in \mathcal{X} \mid AX = 0\} = \{0\}$ (i.e. rang (A) = n, et le cône des directions d'infinitude est donc saillant) alors :

i) $P^j \in P$ est un point extrême de P si et seulement si $\binom{P^j}{1}$ est dans une arête de K(P).

ii) $Q^j \in Q^L$ est une direction d'infinitude extrémale de P si et seulement si $\binom{Q^j}{0}$ est dans une arête de K(P).

Démonstration. C'est une conséquence directe de la relation (22.2) compte tenu du fait que, si rang (A) = n, alors :

$$\text{lin } (Q^L)^{\angle} = \text{lin } K(P) = 0.$$

Remarque 22.2 : Dans le cas général où rang (A) < n (i.e. $](Q^L)^{\angle}[\neq \{0\}$) on peut décomposer le polyèdre P de sorte que :

$$P = (P^J)^{\Delta} + C + S \qquad 22.8$$

où $(P^J)^{\Delta}$ est un polyèdre borné et C+S est une décomposition du cône $(Q^L)^{\angle}$ des directions d'infinitude de P (cône asymtotique de P) en une somme d'un cône saillant C et d'un sous-espace vectoriel S (i.e. $(Q^L)^{\angle} = C+S$ où $S =](Q^L)^{\angle}[$).

Résolution du système d'inégalités non homogènes $A_I X \geq b_I$.

D'après les résultats ci-dessus on peut ramener le problème de détermination de toutes les solutions du système d'inégalités non-homogènes (22.1) :

$$A_I X \geqslant b_I \qquad 22.9$$

au problème de détermination de toutes les solutions du système homogène associé :

$$\left. \begin{aligned} A_I X - b_I X_{n+1} &\geqslant 0 \\ X_{n+1} &\geqslant 0 \\ X \in X,\ X_{n+1} &\in \mathbb{R} \end{aligned} \right| \qquad 22.10$$

D'autre part, on a que :

Corollaire 22.2 : Une inégalité $A_{i_o} X \geqslant b_{i_o}$ $(i_o \in I)$ est redondante dans le système non-homogène (22.9) (supposé consistant) si et seulement si $A_{i_o} X - b_{i_o} X_{n+1} \geqslant 0$ est redondante dans le système homogène (22.10).

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème 22.1.

Par ailleurs, la Méthode de Double Description permet de déterminer un ensemble $B^J (B^J = B^{\bar{J}} \cup B^{\hat{J}})$ de générateurs du cône polyédrique K(P) des solutions du système (22.10).

Définissons, de façon générale :

$$B^{\hat{J}}+ = \{B^j \in B^{\hat{J}} \ / \ B^j_{n+1} > 0\}$$

$$B^{\hat{J}}o = \{B^j \in B^{\hat{J}} \ / \ B^j_{n+1} = 0\}$$

où $B^{\hat{J}} \subset B^J$ est l'ensemble des générateurs dans la partie conique de K(P). D'autre part, il est clair que si $B^j \in B^{\bar{J}}$, alors $B^j_{n+1} = 0$. On a alors les résultats suivants :

i) Si $B^J = B^{\bar{J}} \cup B^{\hat{J}}o$ (i.e. $B^{\hat{J}}+ = \emptyset$) le polyèdre P défini dans (22.9) est vide i.e. le système (22.9) est inconsistent.

ii) Si $B^{\hat{J}}+ \neq \emptyset$, toute solution du système 22.9 est de la forme :

$$X = \sum_{j \in \hat{J}_+} \lambda_j P^j + \sum_{j \in \hat{J}_o} \mu_j Q^j + \sum_{j \in \bar{J}} \mu_j Q^j \qquad 22.11$$

avec :

$$\lambda_j \geq 0,\ \forall j \in \hat{J}_+$$

$$\sum_{j \in \hat{J}_+} \lambda_j = 1$$

$$\mu_j \geq 0,\ \forall j \in \hat{J}_o \cup \bar{J}$$

et où :

$$\begin{pmatrix} P^j \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{B^j_{n+1}} B^j \quad \text{pour } j \in \hat{J}_+$$

$$\begin{pmatrix} Q^j \\ 0 \end{pmatrix} = B^j \qquad \text{pour } j \in \hat{J}_o \cup \bar{J}$$

i.e. $P = (P^{\hat{J}_+})^{\Delta} + C + S$ 22.12

avec :

$$(P^{\hat{J}_+})^{\Delta} = \{X \in \mathcal{X} \mid X = \sum_{j \in \hat{J}_+} \lambda_j P^j,\ \sum_{j \in \hat{J}_+} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0\ \forall j \in \hat{J}_+\} \qquad 22.13$$

$$C = \{X \in \mathcal{X} \mid X = \sum_{j \in \hat{J}_o} \mu_j Q^j,\ \mu_j \geq 0\ \forall j \in \hat{J}_o\} \qquad 22.14$$

$$S = \{X \in \mathcal{X} \mid X = \sum_{j \in \bar{J}} \mu_j Q^j,\ \mu_j \geq 0\ \forall j \in \bar{J}\} \qquad 22.15$$

Remarque 22.3 : Si B^J est un ensemble essentiel de générateurs de K(P) (déterminé, par exemple, au moyen de la Méthode de Double Description [section 19]), la décomposition $(P^{\hat{J}_+})^{\Delta} + C + S$ de P ci-dessus est essentielle. Par ailleurs, si le système (22.9) est de rang maximal (i.e. rang $(A_I) = n$ et donc : $B^{\bar{J}} = \emptyset$) d'après le Corollaire 22.1, les vecteurs P^j $(j \in J_+)$ [resp. Q^j $(j \in \hat{J}_o)$] sont les points extrémaux [resp. les directions d'infinitude extrémales] du polyèdre P.

Remarque 22.4 : Si dans la résolution du système homogène (22.10) associé au système d'origine (22.9), on utilise la variante de la Méthode de Double Description de la Section 21, pour des Systèmes de Rang Maximal, on déterminera alors, d'une part, une base linéaire du sous-espace vectoriel S sous-jacent à la variété linéaire contenue dans le polyèdre P, et, d'autre part, un polyèdre borné $(P^{\hat{J}_+})^{\Delta}$ et un cône polyédrique $C = (Q^{\hat{J}_o})^{\angle}$ tels que :

$$P = (P^{\hat{J}_+}) + (C \oplus S) \qquad 22.16$$

où $C \oplus S$ est la somme orthogonale de C et S.

Remarque 22.5 : De façon générale, si B^J est un ensemble de générateurs du cône polyédrique $K(P)$ des solutions du système (22.10) et si le système (22.9) est consistant (i.e. $B^J + \neq \emptyset$), la solution générale $X = (X_i)_{i=1}^{n}$ du système (22.9) est de la forme :

$$X_i = \frac{\sum_{j \in J} \lambda_j B_i^j}{\sum_{j \in J} \lambda_j B_{n+1}^j} \quad ; i = 1,\ldots,n \qquad 22.17$$

$$\lambda_j \geq 0 \ \forall j \in J$$

Remarque 22.6 : D'après le Corollaire 22.2, on peut appliquer les critères pour la Détermination des Contraintes Redondantes sur le système homogène (22.10) pour déterminer une représentation essentielle du polyèdre P défini par le système non-homogène (22.9).

Détermination des faces du polyèdre P.

Les faces fermées F d'un polyèdre convexe P sont aussi des polyèdres convexes, contenus dans P, et déterminés par l'intersection de P avec des hyperplans frontière. Les résultats ci-dessus nous permettent aussi de déterminer les faces F de P sous la forme $F = (P_F^H)^{\Delta} + (Q_F^L)^{\angle}$ du théorème 22.2 à partir des faces $\tilde{F}$ de K(P). En effet, on a le résultat suivant :

Corollaire 22.3 : Il existe une correspondance biunivoque (monotone par rapport à l'inclusion) entre les faces non-vides F du polyèdre P, et les faces $\tilde{F}$ du cône polyédrique K(P) dont l'intersection avec l'hyperplan $\{\binom{X}{t} \mid t=1\}$ est non vide.

Démonstration.

Soit F une face de P donnée par :

$$F = \{X \mid A_{I \setminus H} X \geq b_{I \setminus H}, A_H X = b_H\}$$

i.e.

$$F = \{X \mid A_I X \geq b_I, -A_H X \geq -b_H\}$$

D'après le théorème 22.1, si F est non-vide, on peut lui associer un cône polyédrique unique K(F) ($K(F) \cap \{t=1\} \neq \emptyset$) défini par :

$$K(F) = \{ \binom{X}{t} \mid A_I X - b_I t \geq 0,\ -A_H X + b_H t \geq 0 \}$$

i.e.

$$K(F) = \{ \binom{X}{t} \mid A_{I \setminus H} X - b_{I \setminus H} t \geq 0,\ A_H X - b_H t = 0 \}$$

qui est bien une face de K(P).

Réciproquement, si $\tilde{F}$ est une face de K(P) qui rencontre l'hyperplan $\{t=1\}$ de (X,t), on peut lui associer (toujours d'après le théorème 22.1) un polyèdre non vide $P(\tilde{F})$ défini par :

$$P(\tilde{F}) = \{ X \in X \mid \binom{X}{1} \in \tilde{F} \}$$

Il est clair que $P(\tilde{F}) \subset P$. Il nous reste donc à montrer que $P(\tilde{F})$ est extrémal :

$$\left.\begin{array}{l} X, Y \in P \\ \\ Z \in (X,Y) \cap P(\tilde{F}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \binom{X}{1}, \binom{Y}{1} \in K(P) \\ \binom{Z}{1} \in \tilde{F} \\ \binom{Z}{1} \in (\binom{X}{1}, \binom{Y}{1}) \end{array}\right. \\ \tilde{F} \text{ extrémal} \end{array}\right\} \Longrightarrow \binom{X}{1}, \binom{Y}{1} \in \tilde{F} \Longrightarrow ①$$

① $X, Y \in P(\tilde{F})$, d'où le résultat.

<u>Corollaire</u> 22.4 : Si P est un polyèdre borné, il existe une correspondance biunivoque, monotone par rapport à l'inclusion, entre les faces non-vides de P et les faces non-vides de K(P).

<u>Démonstration.</u>

En effet, si P est borné, alors :

$$(Q^L)^{\angle} = \{ X \in X \mid \binom{X}{0} \in K(P) \} = \{0\}$$

i.e. le cône asymptotique de P est réduit à {0}, et toutes les faces non-vides $\tilde{F}$ de K(P) rencontrent l'hyperplan $\{\binom{X}{t} \mid t=1\}$ de (X,t).

Remarque 22.7 : On peut exprimer la correspondance entre les faces F de P et les faces $\tilde{F}$ de K(P) par :

$$F \to K(F) = \tilde{F} \qquad 22.18$$

$$\tilde{F} \to P(\tilde{F}) = F \qquad 22.19$$

où :

$$K(F) = \{\binom{X}{1} \mid X \in F\}^{**} \qquad 22.20$$

et

$$P(\tilde{F}) = \{X \mid \binom{X}{1} \in \tilde{F}\} \qquad 22.21$$

Par ailleurs, si $\tilde{F} = (B^H)^{\angle}$, $P(\tilde{F})$ est non vide si et seulement si B^H contient au moins un générateur dont la dernière composante (i.e. la composante t) est strictement positive .

Exemple 1. Déterminer toutes les faces du polyèdre P dans $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\left.\begin{array}{r} X+Y \geqslant 1 \\ X \geqslant 0 \\ Y \geqslant 0 \end{array}\right| \qquad 1)$$

Considérons le système homogène associé au système 1) :

$$\left.\begin{array}{r} X+Y-Z \geqslant 0 \\ X \geqslant 0 \\ Y \geqslant 0 \\ Z \geqslant 0 \end{array}\right| \qquad 2)$$

dont l'ensemble des solutions définit le cône polyédrique K(P) dans $\mathbb{R}^3$. La Méthode de Double Description (section 19) nous permet de déterminer un ensemble essentiel B^J de générateurs de K(P). En effet, si on considère le tableau initial :

$$\begin{array}{|ccc|}
(1) & (2) & (3) \\
\hline
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
\hdashline
1 & 1 & -1 \\
\hline
\end{array} \qquad 3)$$

dont les colonnes de la partie supérieure constituent un ensemble essentiel de générateurs de l'orthant positif dans $\mathbb{R}^3$ i.e. un ensemble essentiel de générateurs du cône polyèdrique dans $\mathbb{R}^3$ défini par les contraintes de signe dans le système 2, on obtient, lors de l'introduction de la contrainte $X+Y-Z \geqslant 0$ le tableau final :

$$\begin{array}{|cccc|}
(1)=(1) & (2)=(2) & (3)=(2)+(3) & (4)=(1)+(3) \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
\hdashline
1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array} \qquad 4)$$

dont les colonnes de la partie supérieure constituent un ensemble essentiel $B^{\hat{J}}$ de générateurs du cône polyèdrique K(P) i.e.

$$B^{\hat{J}} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \qquad 5)$$

Par ailleurs, d'après les résultats de la section 15, on peut caractériser tous les sous-ensembles B^H de B^J qui déterminent des faces F de K(P) (et donc : $F = (B^H)^{\perp}$). Concrètement :

$$B^{H_1} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}, \; B^{H_2} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}, \; B^{H_3} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}, \; B^{H_4} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

déterminent les différentes arêtes du cône K(P) (faces de dimension 1 de K(P)),

$$B^{H_{1,2}} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}, \; B^{H_{1,4}} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}, \; B^{H_{2,3}} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}, \; B^{H_{3,4}} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

déterminent les différentes faces de dimension 2 de K(P) et finalement l'ensemble B^J détermine K(P), face de dimension 3 de K(P).

D'après les résultats ci-dessus, dans la détermination des faces de P il faut considérer seulement les sous-ensembles B^H de B^J qui contiennent au moins un générateur dont la dernière composante (i.e. la composante t) est strictement positive.

Les faces de P sont donc :

$$F^{(3)} = \{\binom{0}{1}\},\ F^{(4)} = \{\binom{1}{0}\}$$

i.e. les points extrêmes de P,

$$F^{(1,4)} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid X = \binom{1}{0} + \lambda\binom{1}{0},\ \lambda \geq 0\}$$

$$F^{(2,3)} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid X = \binom{0}{1} + \lambda\binom{0}{1},\ \lambda \geq 0\}$$

i.e. les arêtes extrémales infinies de P,

$$F^{(3,4)} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid X = \lambda\binom{0}{1} + (1-\lambda)\ \binom{1}{0},\ \lambda \in [0,1]\}$$

i.e. l'arête extrémale finie de P, et finalement :

$$P = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid X = \underbrace{\lambda\binom{0}{1} + (1-\lambda)\binom{1}{0}}_{\in P^\Delta} + \underbrace{\mu_1\binom{0}{1} + \mu_2\binom{1}{0}}_{\in Q^\angle},\ \lambda \in [0,1],\ \mu_1, \mu_2 \geq 0\}$$

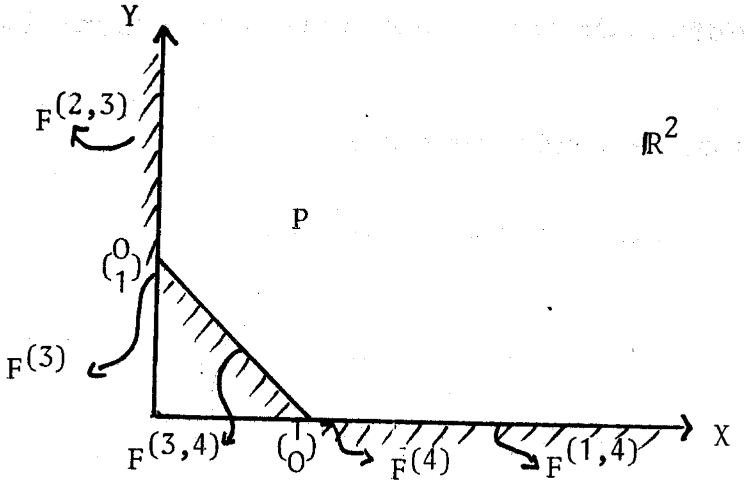
ce qui donne la solution générale du système 1) :

$$X = (1-\lambda) + \mu_2$$

$$Y = \lambda + \mu_1$$

avec $\lambda \in [0,1]$, $\mu_1, \mu_2 \geq 0$.

Graphiquement on a :



et on voit bien que les vecteurs $\binom{1}{0}$, $\binom{0}{1}$ sont les directions d'infinitude extrémales du polyèdre P.

Exemple 2 : Déterminer la solution générale du système non-homogène

$$\begin{array}{rrrrl}
-3x_1 & -2x_2 & +x_3 & \geq & -6 \\
-3x_1 & -2x_2 & -4x_3 & \geq & -16 \\
-3x_1 & & +4x_3 & \geq & -3 \\
-9x_1 & -16x_2 & -12x_3 & \geq & -68 \\
-x_1 & -2x_2 & -x_3 & \geq & -10 \\
x_1 & & & \geq & 0 \\
 & x_2 & & \geq & 0 \\
 & & x_3 & \geq & 0
\end{array} \qquad 1)$$

Nota : Etant donné que le système non-homogène 1) contient les contraintes de signe sur les variables ($x_i \geq 0$; $i = 1,\ldots,3$), il est clairement de rang maximal i.e. le polyèdre P défini par le système 1) ne contient pas de droites.

Considérons le système homogène associé :

$$\begin{array}{rrrrl}
-3x_1 & -2x_2 & +x_3 & +6x_4 & \geq 0 \\
-3x_1 & -2x_2 & -4x_3 & +16x_4 & \geq 0 \\
-3x_1 & & +4x_3 & +3x_4 & \geq 0 \\
-9x_1 & -16x_2 & -12x_3 & +68x_4 & \geq 0 \\
-x_1 & -2x_2 & -x_3 & +10x_4 & \geq 0 \\
x_1 & & & & \geq 0 \\
 & x_2 & & & \geq 0 \\
 & & x_3 & & \geq 0 \\
 & & & x_4 & \geq 0
\end{array} \qquad 2)$$

	(1)	(2)	(3)	(4)	
(1)	1	0	0	0	
(2)	0	1	0	0	
(3)	0	0	1	0	
(4)	0	0	0	1	#
	-3	-2	1	6	
	-3	-2	-4	16	
	-3	0	4	3	
	-9	-16	-12	68	
→	-1	-2	-1	10	

T(4)

Tableau Initial

⟹

	(1)=(4)	(2)=(4)+10(1)	(3)=(4)+5(2)	(4)=(4)+10(3)	
(1)	0	10	0	0	
(2)	0	0	5	0	
(3)	0	0	0	10	
(4)	1	1	1	1	*
	6	-24	-4	16	
	16	-14	6	-24	
	3	-27	3	43	
→	68	-22	-12	-52	
(5)	+	0	0	0	#

T(5)

	$(1) = (1)$	$(2) = \frac{1}{5}[11(1)+34(2)]$	$(3) = \frac{1}{5}[3(1)+17(3)]$	$(4) = \frac{1}{10}[13(1)+17(4)]$	
(1)	0	68	0	0	
(2)	0	0	17	0	
(3)	0	0	0	17	
(4)	1	9	4	3	*
	6	-150	-10	35	
	16	-60	30	-20	
→	3	-177	12	77	
(6)	+	0	0	0	
(5)	×	×	×	×	

T(6)

	$(1) = (1)$	$(2) = (3)$	$(3) = \frac{1}{17}[15(1)+4(2)]$	$(4) = \frac{1}{17}[(2) + 2(3)]$	$(5) = \frac{1}{17}[5(1) + 4(4)]$	$(6) = \frac{1}{17}[2(3) + 3(4)]$	
(1)	0	0	16	4	0	0	
(2)	0	17	0	2	0	2	
(3)	0	0	0	0	4	3	
(4)	1	4	3	1	1	1	*
→	6	-10	-30	-10	10	5	
(7)	+	+	0	0	0	0	
	3	12	-39	- 9	19	15	
(6)	+	0	+	0	+	0	
(5)	×	×	×	×	×	×	

T(7)

	$(1)=(1)$	$(2)=(4)$	$(3)=(5)$	$(4)=\frac{1}{17}[5(1)+3(2)]$	$(5)=\frac{1}{3}[(2)+2(6)]$	$(6)=\frac{1}{8}[5(1)+(3)]$	$(7)=\frac{1}{2}[(3)+3(5)]$	$(8)=(4)+2(6)$	
(1)	0	0	0	0	0	2	8	4	
(2)	0	0	2	3	7	0	0	6	
(3)	0	4	3	0	2	0	6	6	
(4)	1	1	1	1	2	1	3	3	*
(8)	+	+	+	0	0	0	0	0	
(7)	+	0	0	+	+	+	0	0	
→	3	19	15	3	14	-3	9	21	
(6)	+	+	0	+	0	+	+	0	
(5)	×	×	×	×	×	×	×	×	

T(8)

	$(1)=(1)$	$(2)=(2)$	$(3)=(3)$	$(4)=(4)$	$(5)=(5)$	$(6)=(7)$	$(7)=(8)$	$(8)=\frac{1}{2}[(1)+(6)]$	$(9)=(4)+(6)$	$(10)=\frac{1}{2}[3(6)+(7)]$	
(1)	0	0	0	0	0	8	4	1	2	7	
(2)	0	0	2	3	7	0	6	0	3	0	
(3)	0	4	3	0	2	6	6	0	0	3	
(4)	1	1	1	1	2	3	3	1	2	3	*
(8)	+	+	+	0	0	0	0	+	0	0	
(7)	+	0	0	+	+	0	0	+	+	+	
(9)	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	
(6)	+	+	0	+	0	+	0	+	+	+	
(5)	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	

T(9)

Tableau Final

Explication des Différents Tableaux.

Pour la résolution du système homogène 2) associé au Système non homogène 1), on a appliqué le Schéma de Calcul pour la Méthode de Double Description décrit dans la Section 19. A la fin de l'étape p, le Tableau T(p) est constitué, d'une part, des lignes correspondant aux inégalités déjà considérées au cours de l'algorithme (lignes numérotées (1),...(p) sur la gauche de T(p)) et, d'autre part, des lignes correspondant aux inégalités à considérer dans les étapes ultérieures de cet algorithme. Par ailleurs, les colonnes de la partie supérieure du Tableau T(p) consituent un ensemble essentiel de générateurs du cône polyédrique défini par les p inégalités déjà considérées.

A l'étape (5) la contrainte $X_4 \geq 0$ est caractérisée "a priori redondante" d'après les résultats de la Section 18, et n'est plus considérée dans les étapes ultérieures de l'algorithme. Cependant, on conserve la ligne correspondante à cette contrainte dans les tableaux ultérieurs puisque ses éléments sont les dernières composantes des générateurs (on l'a signalée avec (*) sur la droite de ces derniers tableaux). De même, à l'étape (6) la contrainte $-x_1 - 2x_2 - x_3 + 10x_4 \geq 0$ (numérotée (5) sur la gauche de T(5)) est caractérisée "a priori redondante" et n'est plus considérée dans les étapes ultérieures.

On a signalé avec "↳" dans chaque tableau la contrainte à considérer à l'étape (p+1).

Finalement, les colonnes de la partie supérieure du Tableau Final T(9) définissent les arêtes du cône polyédrique K(P) des solutions du système (2). K(P) est le cône homogénéisé du polyèdre P défini par le système non-homogène 1). L'ensemble des points extrêmes de P est donc (Voir Remarque 22.3):

$$\left\{P^j\right\}_{j=1}^{10} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\7/2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8/3\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4/3\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3/2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7/3\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

et une Représentation Essentielle du système non-homogène (1) est donné par :

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 - 2x_2 + x_3 & \geq & -6 \\ -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 & \geq & -16 \\ -3x_1 + 4x_2 & \geq & -3 \\ -9x_1 - 16x_2 - 12x_3 & \geq & -68 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \\ x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

La solution générale du système 1) est donc :

$$X = \sum_{j=1}^{10} \lambda_j P^j$$

$$\sum_{j=1}^{10} \lambda_j = 1 \ ; \ \lambda_j \geq 0 \quad j=1,\ldots,10$$

Commentaires : Le système non-homogène 1) ci-dessus a été considéré par Balinski [1] comme exemple d'application de sa méthode, (du type simplicial) pour la détermination de tous les sommets d'un polyèdre. Les sommets du polyèdre P défini par le système 1) ont été déterminés après le calcul de 15 tableaux simpliciaux. Ce même système a été considéré par Kuznetsov [14] comme exemple d'application de la Méthode de Double Description à la résolution de systèmes d'inégalités linéaires quelconques. Les sommets du polyèdre P ont été déterminés après le calcul de 4 tableaux de double description. Dans la détermination de ces différents tableaux, Kutznetsov choisit la nouvelle inégalité à chaque étape de façon à déterminer le moindre nombre de nouveaux générateurs i.e. de façon à calculer le minimum de combinaisons linéaires positives de paires de colonnes adjacentes à chaque étape de l'algorithme.

Pour la résolution du système non-homogène 1), on a considéré ci-dessus la Méthode de Double Description avec Détermination des Inégalités Redondantes. A chaque étape de l'algorithme la nouvelle inégalité à considérer a été choisie de façon à rendre redondantes le plus grand nombre de contraintes parmi celles déjà considérées dans les étapes précédentes. Une représentation essentielle du système 1) est alors déterminé à la fin de l'étape (5) de l'algorithme (i.e. après le calcul du premier tableau de double description, $T^{(5)}$) alors que l'application des critères pour la détermination des inégalités redondantes sur les différents tableaux calculés par Kuznetsov nous permettrait de déterminer une représentation essentielle du système 1) seulement à la fin de la dernière étape considéré par ce dernier (i.e. après le calcul du quatrième tableau de double description considéré par Kuznetsov). Par contre, pour le schéma de calcul ci-dessus, le nombre total de combinaisons linéaires de paires de colonnes déterminés au cours de l'algorithme a été de 18 contre 15 pour Kuznetsov.

Remarquons finalement qu'il est difficile de faire une comparaison entre les performances entre la Méthode de Balinski [1] et la Méthode de Double Description dont l'esprit est différent. Cependant, lorsque le système d'inégalités comporte un grand nombre d'inégalités redondantes cette dernière méthode peut s'avérer plus intéressante.

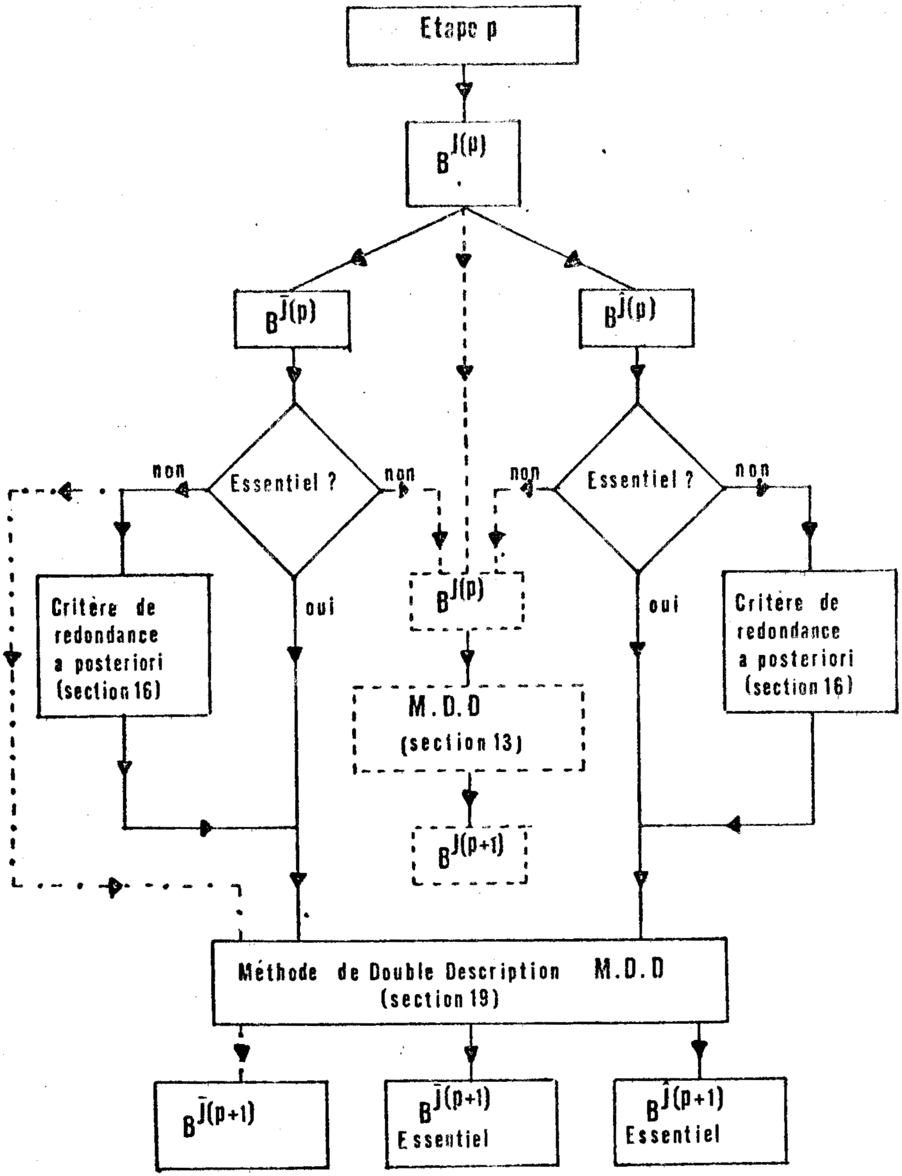
Détermination de Toutes les Faces d'un Polyèdre Convexe P donné sous la forme : $P = (P^H)^\Delta + (Q^L)^\angle$.

D'après les résultats précédents, si P est un polyèdre (convexe) non-vide dans X, on peut déterminer les faces de P à partir des faces du cône polyédrique K(P) dans (X,t) associé à P par la correspondance biunivoque définie dans le Théorème 22.1. Par ailleurs, si P est donné sous la forme : $P = (P^H)^\Delta + (Q^L)^\angle$, le cône polyédrique K(P) est donné par : (voir démonstration du Théorème 22.2) :

$$K(P) = \{ \binom{X}{t} \ / \ \binom{X}{t} = \sum_{j \in H} \lambda_j \binom{P^j}{1} + \sum_{j \in L} \mu_j \binom{Q^j}{0} \ ; \ \lambda_j \geq 0 \ \forall j \in H, \ \mu_j \geq 0 \ \forall j \in L \}$$

Par conséquent, dans la détermination de toutes les faces de P au moyen de la Méthode de Double Description on est ramené à déterminer toutes les faces du cône polyédrique K(P) donné comme l'enveloppe conique d'un ensemble fini de générateurs. Ce dernier problème a été étudié dans la Section 17.

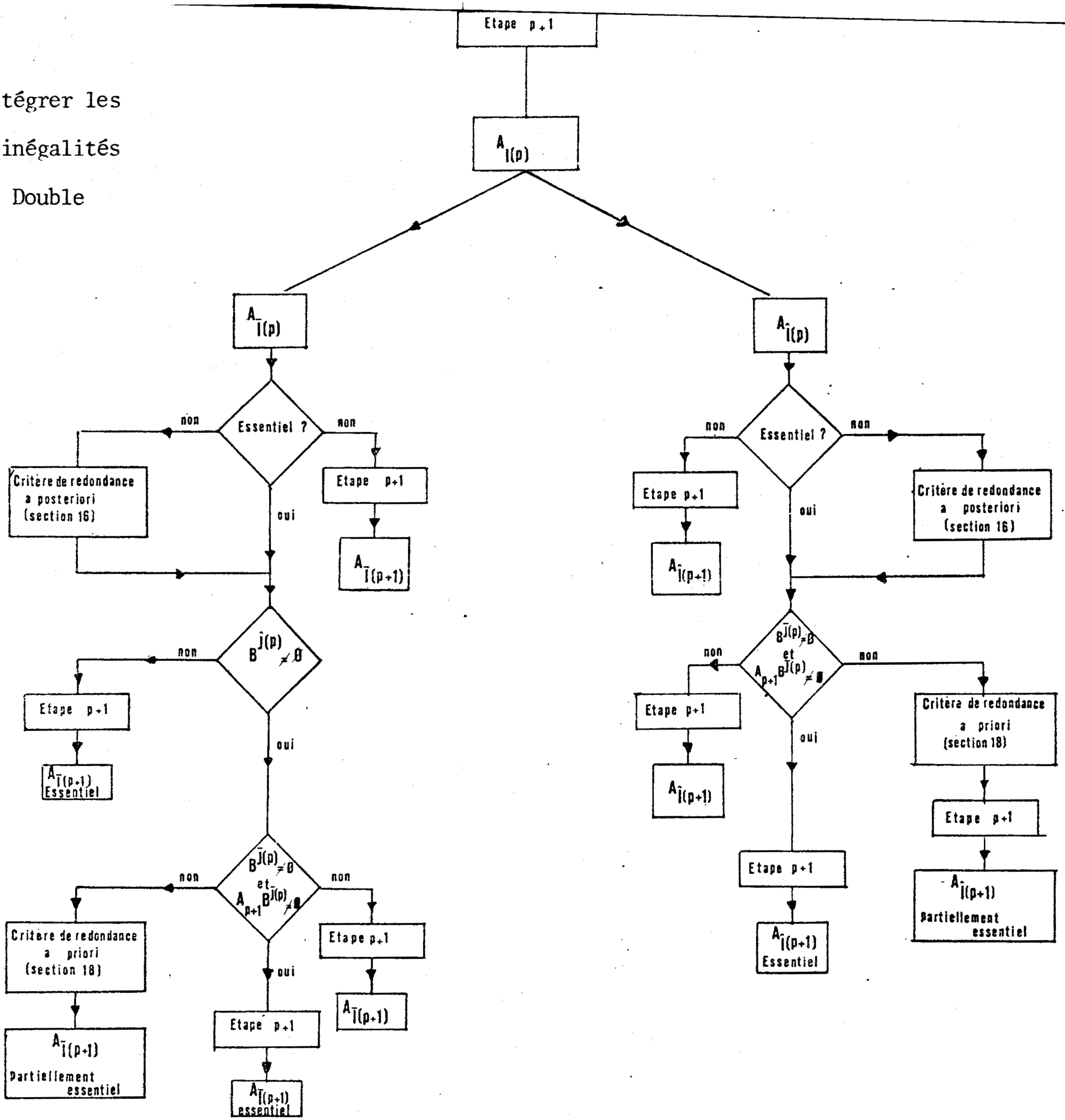
SCHEMA I



Ce schéma montre la façon d'intégrer les critères de détermination d'un ensemble essentiel de générateurs dans la Méthode de Double Description.

SCHEMA II

Ce schéma montre la façon d'intégrer les critères de détermination des inégalités redondantes dans la Méthode de Double Description.



BIBLIOGRAPHIE II

[1] M.L. BALINSKI "*An algorithm for Finding all Vertices of Convex Polyhedral Sets*", J. Soc. Indust. Appl. Mathem. Vol 9, n°1, 72-88, 1961.

[2] C.A. BURDET "*Generating all the Faces of a Polyedron*", SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol 26, n°3, 479-489, 1974.

[3] N.V. CHERNIKOVA "*Algorithm for Finding a General Formula for the Nonnegative Solutions of a System of Linera Equations*", U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 4, n°4, 151-158, 1964.

[4] N.V. CHERNIKOVA "*Algorithm for Finding a General Formula for the Non-Negative Solutions of a System of Linear Inequalities*", U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol 5 n°2, 228-233 1965.

[5] L. CONTESSE "*Méthode de Double Description pour la Résolution de Systèmes d'Inégalités Linéaires avec Détermination des Inégalités Redondantes*", Séminaire d'Analyse Numérique, Laboratoire de Calcul de L'Université des Sciences et Techniques de Lille, Janvier 1976. (Communication présentée au Colloque d'Analyse Numérique de Port Bail, mai 1976).

[6] Ch. DAVIS "*Theory of Positive Linear Dependance*", Amer. J. Math. 76, 733-746, 1954.

[7] L.E. DUBINS *"On Extreme Points of Convex Sets"*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 5, 237-244, 1962.

[8] D. GALE *"Convex Polyhedral Cones and Linear Inequalities"*, Cowles Commission Monograph n°13, 287-297, 1951.

[9] A.J. GOLDMAN *"Resolution and Separation Theorems for Polyhedral Convex Sets"*, Linear Inequalities and Related Systems (H.W. Kuhn and A.W. Tucker, Eds),Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1956.

[10] A.J. GOLDMAN and A.W. TUCKER *"Polyhedral Convex Cones"*, Linear Inequalities and Related Systems (H.W. Kuhn and A.W. Tucker, Eds), Princeton, New Jersey, 1956.

[11] H. GREENBERG *"An Algorithm for Determining Redundant Inequalities and all Solutions to Convex Polyhedra"*, Numerische Mathematick 24, 19-26, 1975.

[12] P. HUARD *"Notions sur $\mathbb{R}^n$"*, cours de Programmation Linéaire (Chapitre V), Publication du laboratoire de Calcul de l'Université des Sciences et Techniques de Lille 1963-1965.

[13] V.G. KUZNETSOV *"Solutions of Systems of Linear Equations"*,U.S.S.R Computational Mathematics and Mathematical Physics Vol 7, n°1, 205-209, 1967.

[14] V.G. KUZNETSOV *"Algorithms for Finding the General Solution of a System of Linear Inequalities"*, U.S.S.R. Computational Mathematics and mathematical Physics, n°2, 197-205, 1966.

[15] T.S. MOTZKIN, H. RAIFFA, G.L. THOMPSON, and R.M. THRALL, *"The Double Description Method"*, Contribution to the Theory of Games (vol.2), H.W. Kuhn and A.W. Tucker, Annals of Mathematics Study, n°28, 51-73, Princeton University Press, Princeton 1953.

[16] K. MURTY "*Adjacency on Convex Polyhedra*", SIAM Review, vol 13, n°3, 377-386, 1971.

[17] G. THOMPSON, F.M. TONGE and S. ZIONTS "*Thecniquès for Removing Non-binding Constraints and Extrancous Variables from Linear Programming Problems*", Management Science (série verte), vol 12, n°7, 588-606, 1966.

[18] H. UZAWA "*A theorem on Convex Polyhedral Cones*", dans Studies in Linear and Nonlinear Programming (K. Arrow, L.Hurwicz and H. Uzawa, Eds.) Stanford University Press, Stanford, 1958.

[19] R.J.B. WETS and C. WITZGALL "*Algorithms for Frames and Lineality Spaces of Cones*", J. Res. NBS, Math. and Math. Phys. 71 B, 1-7, 1967.

[20] R.J.B. WETS and C. WITZGALL "*Towards an Algebraic Characterization of Convex Polyhedral Cones*", Numérische Mathematik 12, 134-138, 1968.

[21] J. STOER and C. WITZGALL "*Convexity and Optimization in finite dimensions I*", (Springer, Heidelberg, 1970).

CHAPITRE III

APPLICATION
DE LA
MÉTHODE DE DOUBLE DESCRIPTION
AU
PROBLÈME LINÉAIRE COMPLÉMENTAIRE GÉNÉRAL

III. APPLICATION DE LA MÉTHODE DE DOUBLE DESCRIPTION AU PROBLÈME LINÉAIRE COMPLÉMENTAIRE GÉNÉRAL.

On applique la méthode de double description à la détermination de toutes les solutions du problème linéaire complémentaire général défini par :

$$\left.\begin{array}{r} Ax + b = \lambda \\ \lambda \geqslant 0 \end{array}\right| \qquad 1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{e_{i\ell}} = 0 \\ \\ e_{i\ell} = 0 \text{ ou } 1 \end{array}\right| \quad \ell = 1,\ldots,q \qquad 2)$$

i.e. à la détermination de toutes les solutions du système 1) qui vérifient les conditions de complémentarité de la forme générale 2).

La méthode de double description est modifiée de sorte qu'à la fin de chaque étape on ne conserve que les générateurs du cône polyédrique courant qui vérifient les conditions de complémentarité associées au sous-système correspondant. De ce fait, l'algorithme qui en résulte sera d'autant plus performant que les conditions de complémentarité seront plus restrictives. D'autre part, des critères supplémentaires permettent la simplification du problème au cours de l'algorithme.

Une application analogue de cette méthode a été considérée par K. Tone [7] dans le cas où le système 1) comporte des conditions de non-négativité sur toutes les variables, et, en particulier, dans le cas du problème linéaire complémentaire classique.

Etant donné un programme quadratique non-convexe (i.e. non nécessairement convexe) admettant une solution optimale, on peut ramener le problème de la détermination de sa valeur optimale à la détermination de la valeur optimale de la forme quadratique sur l'ensemble des solutions complémentaires du problème complémentaire classique qui lui est associé. L'algorithme ci-dessus permet donc de déterminer en un nombre fini d'itérations la valeur optimale de ce programme. Contrairement aux méthodes de pivotage pour résoudre ce problème, la convergence finie de cet algorithme est assurée sans aucune hypothèse sur la matrice du problème linéaire complémentaire correspondant. Un exemple d'application est considéré. Si au cours de cet algorithme on introduit la fonction économique comme une contrainte supplémentaire chaque fois qu'une meilleure solution complémentaire est déterminée, on retrouve essentiellement la méthode de E. Balas [1] pour la détermination de l'optimum d'un programme quadratique non-convexe ; cette dernière méthode est une méthode de type simplicial avec activation des contraintes. Par ailleurs, une application analogue de la méthode de double description au problème linéaire avec contraintes de cardinalité sur les variables a été considérée par D.S. Rubin [6] Ce dernier problème englobe plusieurs autres problèmes que l'on trouve dans la littérature.

Enfin, une application de la méthode de double description à la détermination de toutes les solutions optimales d'un programme linéaire a été considérée entre autres par H. Uzawa [8] et N.V. Chernikova [2], mais cette application ne présente pas en général les avantages de la méthode simpliciale.

Problème Linéaire Complémentaire Homogène Général :

Considérons le système d'inégalités linéaires homogènes dans $\mathbb{R}^{n+m}$ défini par :

$$\left.\begin{array}{l} Ax = \lambda \\ \lambda \geq 0 \end{array}\right| \qquad 1)$$

où A est une matrice $(m\times n)$, et des conditions de complémentarité de la forme générale :

$$\left.\begin{array}{l} \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{e_{i\ell}} = 0 \\ \\ e_{i\ell} = 0 \text{ ou } 1 \ ; \ i = 1,\ldots,m \end{array}\right] \ \ell \in L = \{1,\ldots,q\} \qquad 2)$$

Toute solution $(x,\lambda) \in \mathbb{R}^{n+m}$ du système 1) vérifiant les conditions de complémentarité 2) est appelée une solution complémentaire de ce système.

Dans ce qui suit on se propose de déterminer, au moyen de la Méthode de Double Description, toutes les solutions complémentaires du système 1).

Considérons le système d'inégalités linéaires homogènes dans $\mathbb{R}^n$:

$$A_i x \geq 0 \ ; \ i \in I = \{1,\ldots,m\} \qquad 3)$$

Remarque 1 : Il est clair que si $x \in \mathbb{R}^n$ est une solution du système 3) (x,λ), avec $\lambda = A_I x$, est une solution du système 1), et réciproquement. Par ailleurs, si X^J est un ensemble (essentiel) de générateurs du cône polyédrique convexe K défini par le système 3), $\bar{X}^J = \binom{X^J}{\Lambda_I^J}$, avec $\Lambda_I^J = A_I X^J$, est un ensemble (essentiel) de générateurs du cône polyédrique convexe $\bar{K}$ défini par le système 1), et réciproquement.

Par extension, une solution x du système 3) telle que (x,λ), avec $\lambda = A_I x$, est solution complémentaire du système 1), est appelée solution complémentaire du système 3).

Lemme 1 : Si $\bar{X}^J$ est un ensemble (essentiel) de générateurs du cône polyédrique convexe $\bar{K}$ défini par le système 1), toute solution complémentaire du système 1) appartient à l'enveloppe conique des générateurs complémentaires dans $\bar{X}^J$ (+).

Dem : Soit $(\tilde{x},\tilde{\lambda}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ une solution complémentaire du système 1) :

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{\lambda}\end{pmatrix} \text{ solution du système 1) } \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{\lambda}\end{pmatrix} = \sum\limits_{j\in J} \tilde{\mu}_j \begin{pmatrix}x^j\\ \lambda^j\end{pmatrix} \\ \\ \left.\begin{array}{l}\tilde{\mu}_j \geq 0\\ \lambda^j \geq 0\end{array}\right\} j \in J\end{array}\right. \qquad \text{I)}$$

Supposons qu'il existe $j_o \in J$ tel que, d'une part, $\mu_{j_o} > 0$ et, d'autre part, λ^{j_o} ne vérifie pas les conditions de complémentarité. D'après I), on a que, à plus forte raison, $\tilde{\lambda}$ ne vérifie pas les conditions de complémentarité, ce qui contredit l'hypothèse.

(+) Nota : En général, l'ensemble des solutions complémentaires est strictement inclus dans l'enveloppe conique des générateurs complémentaires dans $\bar{X}^J$.

Remarque 2 : Si $]\bar{K}[$ est la partie linéaire du cône polyédrique $\bar{K}$ (i.e. $]\bar{K}[= \{(x,\lambda) / Ax = 0, \lambda = 0\}$), $]\bar{K}[$ est contenu dans l'ensemble des solutions complémentaires du système 1). Par ailleurs, si X^J est un ensemble de générateurs de K, $X^j \in X^J$ est dans la partie linéaire (resp. conique) de K si et seulement si $\bar{X}^j \in \bar{X}^J$ est dans la partie linéaire (resp. conique) de $\bar{K}$.

Notation : Si $\bar{X}^J$ est un ensemble de générateurs du cône polyédrique $\bar{K}$, on notera par $\bar{X}^{\bar{J}}$ (resp. $\bar{X}^{\hat{J}}$) le sous-ensemble de $\bar{X}^J$ des générateurs qui sont dans la partie linéaire (resp. conique) de $\bar{K}$ ($J = \bar{J} \cup \hat{J}$ et $\bar{J} \cap \hat{J} = \emptyset$) .

Considérons maintenant le sous-système du système 3) comportant p inégalités de ce système :

$$A_i x \geq 0 \; ; \; i \in I(p) \qquad 3)_{I(p)}$$

avec Card. $(I(p)) = p \leq m$.

Soit $X^{J(p)}$ un ensemble essentiel de générateurs du cône polyédrique $K(p)$ défini par le système $3)_{I(p)}$ (si p=0, $X^{J(o)}$ est un ensemble essentiel de générateurs de $\mathbb{R}^n$ i.e. une base positive de $\mathbb{R}^n$).

D'après la Remarque 1, $\bar{X}^{J(p)} = \begin{pmatrix} X^{J(p)} \\ \Lambda^{J(p)}_{I(p)} \end{pmatrix}$, avec $\Lambda^{J(p)}_{I(p)} = A_{I(p)} X^{J(p)}$, est un ensemble essentiel de générateurs du cône polyédrique $\bar{K}(p)$ défini par le système :

$$\left.\begin{array}{l} A_i X = \lambda_i \\ \lambda_i \geq 0 \end{array}\right| \; i \in I(p) \qquad 1)_{I(p)}$$

On associe maintenant au système $1)_{I(p)}$, toutes les conditions de complémentarité dans 2) qui font intervenir uniquement les variables λ_i, $i \in I(p)$ i.e. les conditions de complémentarité dans 2) de la forme :

$$\left.\begin{array}{l} \prod\limits_{i \in I(p)} \lambda_i^{e_{i\ell}} = 0 \\ e_{i\ell} = 0 \text{ ou } 1 \; ; \; i \in I(p) \end{array}\right] \; \ell \in L(p) \subset L$$

On appelle ces conditions : Conditions de $I(p)$-complémentarité.

<u>Notation</u> : Si $\bar{X}^{J(p)}$ est un ensemble essentiel de générateurs du cône polyédrique $\bar{K}(p)$, on notera par $\bar{X}^{J_c(p)}$ l'ensemble de tous les générateurs $I(p)$-complémentaires dans $\bar{X}^{J(p)}$

L'ensemble $\bar{X}^{J_c(p)}$ est appelé *ensemble essentiel de solutions complémentaires du système* $1)_{I(p)}$.

Algorithme général pour la Détermination d'un Ensemble Essentiel $\bar{X}^{J_c(m)}$ de Solutions Complémentaires du Système 1).

Initialement $\bar{X}^{J_c(0)} = X^{\bar{J}(0)}$, où $X^{\bar{J}(0)}$ est une base positive de $\mathbb{R}^n$ (ici, on considérera la base positive canonique de cardinalité maximale de $\mathbb{R}^n$).

A la fin de l'étape p ($0 \leq p \leq m$) on dispose d'un ensemble essentiel $\bar{X}^{J_c(p)}$ de solutions I(p)-complémentaires du système $1)_{I(p)}$

$$\left(\bar{X}^{J_c(p)} = \begin{bmatrix} X^{J_c(p)} \\ \Lambda^{J_c(p)}_{I(p)} \end{bmatrix}, \text{ avec } \Lambda^{J_c(p)}_{I(p)} = A_{I(p)} X^{J_c(p)}\right)$$

- Si p=m, fin de l'algorithme : on a déterminé $\bar{X}^{J_c(m)}$.
- Si p<m : Choisir $i_o \in I \setminus I(p)$, définir $I(p+1) = I(p) \cup \{i_o\}$ et déterminer $\bar{X}^{J_c(p+1)}$ de la façon suivante :

0) Définir $U = \begin{bmatrix} X^{J_c(p)} \\ \Lambda^{J_c(p)}_{I(p)} \\ A_{i_o} X^{J_c(p)} \end{bmatrix}$

1) Si $U_{n+p+1} \geq 0$, faire : $\bar{X}^{\bar{J}(p+1)} = U^{\bar{J}(p)}$, $V = U^{\hat{J}(p)}$. Aller en 4).

2) Si ou bien $\bar{J}(p) = \Phi$ ou bien $U^{\bar{J}(p)}_{n+p+1} = 0$, faire : $\bar{X}^{\bar{J}(p+1)} = U^{\bar{J}(p)}$ et déterminer V de la façon suivante :

$$V = \left\{ \begin{array}{l}
\text{i) } U^j,\ j \in \hat{J}_c(p) : U^j_{n+p+1} \geqslant 0 \text{ (resp. } U^j_{n+p+1} = 0)^{(\dagger)} \\
\text{ii) } U^{j(k,h)} = |U^h_{n+p+1}| U^k + |U^k_{n+p+1}|\, U^h, \text{ avec } U^k,\ U^h \in U^{\hat{J}_c(p)} \\
\qquad \text{tels que :} \\
\qquad \text{a) } U^k_{n+p+1} > 0 \\
\qquad \text{b) } U^h_{n+p+1} < 0 \\
\qquad \text{c) } \nexists \ell \in \hat{J}_c(p) \setminus \{k,h\} \text{ tel que } I_{\{k,h\}} \subset I_{\{\ell\}}, \text{ où :} \\
\qquad\quad I_{\{k,h\}} = \{i \in I(p) \mid \lambda^k_i = 0 \text{ et } \lambda^h_i = 0\} \\
\qquad\quad I_{\{\ell\}} = \{i \in I(p) \mid \lambda^\ell_i = 0\} \\
\text{Remarque : Si } \hat{J}_c(p) = \{k,h\}, \text{ la condition c) est immédiatement} \\
\qquad\qquad \text{satisfaite.}
\end{array} \right\}$$

Aller en 4).

3) Si $\bar{J}(p) \neq \Phi$ et $U^{\bar{J}(p)}_{n+p+1} \neq 0$, déterminer $\bar{X}^{\bar{J}(p+1)}$ et V de la façon suivante :

Soit $j_o \in \bar{J}(p)$ tel que $U^{j_o}_{n+p+1} > 0$. Avec j_o fixé :

$$\bar{X}^{\bar{J}(p+1)} = \left\{ \begin{array}{l}
\text{i) } U^j,\ j \in \bar{J}(p) : U^j_{n+p+1} = 0 \\
\text{ii) } U^{j(j_o,\ell)} = |U^\ell_{n+p+1}|\, U^{j_o} + |U^{j_o}_{n+p+1}|\, U^\ell, \text{ avec } U^\ell \in U^{\bar{J}(p)} \\
\qquad \text{tel que : } U^\ell_{n+p+1} < 0 \text{ et } U^\ell \neq -U^{j_o} \\
\text{iii) } -U^{j(j_o,\ell)} \quad (U^{j(j_o,\ell)} \text{ déterminé dans ii))}
\end{array} \right\}$$

et

$$V = \left\{ \begin{array}{l}
\text{i) } U^{j_o} \text{ (Sauf si } A_{i_o} x = \lambda_{i_o} \text{ avec } \lambda_{i_o} = 0)^{(\dagger)} \\
\text{ii) } U^{j(j_o,h)} = |U^h_{n+p+1}|\, U^{j_o} + |U^{j_o}_{n+p+1}|\, U^h, \text{ avec } U^h \in U^{\hat{J}_c(p)} \\
\qquad \text{tel que : } U^h_{n+p+1} < 0 \\
\text{iii) } U^{j(k,-j_o)} = |U^{j_o}_{n+p+1}|\, U^k + |U^k_{n+p+1}|\, (-U^{j_o}) \text{ avec} \\
\qquad U^k \in U^{\hat{J}_c(p)} \text{ tel que : } U^k_{n+p+1} > 0 \\
\text{iv) } U^j \in U^{\hat{J}_c(p)} \text{ tel que : } U^j_{n+p+1} = 0
\end{array} \right\}$$

4) Définir : $\bar{X}^{\hat{J}_c(p+1)} = \{V^j \in V \ / \ V^j$ est I(p+1) - complémentaire$\}$
$\bar{X}^{J_c(p+1)} = \bar{X}^{\bar{J}(p+1)} \cup \bar{X}^{\hat{J}_c(p+1)}$

5) - Si $\bar{X}^{J_c(p+1)} = \Phi$, fin de l'algorithme : le vecteur $0 \in \mathbb{R}^{n+m}$ est la seule solution complémentaire du système 1).

- Sinon, passer à l'étape suivante avec p+1 au lieu de p.

(†) On a signalé entre "crochets" les modifications à effectuer à l'étape p+1 de l'algorithme général lorsque dans le problème complémentaire 1)-2) l'on a : $A_{i_o} x = \lambda_{i_o}$ avec $\lambda_{i_o} = 0$.

Théorème 1 : L'ensemble $\bar{X}^{J_c(m)}$ déterminé par l'algorithme général est un ensemble essentiel de solutions complémentaires du système 1).

Dem : C'est une conséquence directe de la façon de déterminer un ensemble essentiel de générateurs du cône polyédrique $\bar{K}$ au moyen de la méthode de double description, compte tenu des considérations suivantes :

a) La partie linéaire de $\bar{K}$ est contenue dans l'ensemble des solutions complémentaires du système 1).

b) Si à la fin de l'étape p de la méthode de double description le générateur $\bar{X}^{j_o}$, $j_o \in \hat{J}(p)$, n'est pas I(p)-complémentaire, tout générateur déterminé à partir de $\bar{X}^{j_o}$, à l'étape p+1, ne sera pas I(p+1) - complémentaire.

c) Si dans la partie 2) de l'étape p+1 de l'algorithme on détermine $V^j = |U^k_{n+p+1}|\ U^h + |U^h_{n+p+1}|\ U^k$, et s'il existe $j_o \in \hat{J}(p) \setminus \{k,h\}$ $(j_o \notin \hat{J}_c(p))$ tel que $I_{\{k,h\}} \in I_{\{j_o\}}$, on a que, d'une part, V^j n'est pas essentiel mais, d'autre part, V^j n'est pas I(p+1) - complémentaire.

CQFD.

Variante de l'Algorithme Général

Considérons maintenant les modifications suivantes dans l'algorithme général :

i) Dans la partie 2) de l'étape p+1 on remplace la condition c) par la condition suivante :

c') : $\mathrm{Card}(I_{\{k,h\}}) \geq n-(d_p+2)$, où d_p est la dimension de la partie linéaire $]K(p)[$ de $K(p)$. ($d_p = \frac{1}{2}\,\mathrm{Card}\,(\bar{J}(p))$, si $X^{\bar{J}(p)}$ est une base positive de cordinalité maximale de $]K(p)[$, comme c'est le cas dans la description ci-dessus de l'algorithme général.

ii) Dans la partie 4) de l'étape p+1, avant de définir $\bar{X}^{J_c(p+1)}$, on introduit le critère supplémentaire suivant pour réduire l'ensemble $\bar{X}^{\hat{J}_c(p+1)}$: $\bar{X}^j$, $j \in \hat{J}_c(p+1)$, est éliminé (de $\bar{X}^{J_c(p+1)}$) si :

$\exists \ell \in \hat{J}_c(p+1) \setminus \{j\}$ tel que : $\tilde{I}_{\{j\}} \subset \tilde{I}_{\{\ell\}}$ où $\tilde{I}_{\{j\}} = \{i \in I(p+1) \;/\; \tilde{\lambda}_i^j = 0\}$ ($\tilde{I}_{\{\ell\}}$, défini de façon analogue) avec $\tilde{\lambda} = \Lambda^{\hat{J}_c(p+1)}_{I(p+1)}$.

<u>Remarque</u> : si X^j est éliminé, on redéfinit $\hat{J}_c(p+1)$ avant d'appliquer à nouveau le critère.

Théorème 1' : L'ensemble $\bar{X}^{J_c(m)}$ déterminé par l'algorithme général modifié est un ensemble essentiel de solutions complémentaires du système 1).

<u>Dem</u> : Analogue à celle du théorème 1 : en fait, la condition c') est une condition nécessaire pour que X^k, X^h soeint adjacents dans $X^{J(p)}$. Par ailleurs, l'ensemble $X^{\hat{J}_c(p+1)}$, qui résulte de l'application du critère supplémentaire de réduction, est l'ensemble essentiel de générateurs I(p+1)-complémentaires dans $X^{\hat{J}(p+1)}$: en effet, supposons que X^j, $j \in \hat{J}_c(p+1)$,

soit redondant dans $X^{J(p+1)}$. Il existe alors $j_o \in J(p+1)-\{j\}$, $j_o \notin \hat{J}_c(p+1)$, tel que : $\check{I}_{\{j\}} \subset \check{I}_{\{j_o\}}$. Ceci entraîne que $j \notin \hat{J}_c(p+1)$, donc une contradiction.

Remarque 3 : Dans la partie 2) de l'étape p+1 de l'algorithme général, on peut aussi considérer la condition c') comme critère supplémentaire dans la définition de l'ensemble V, de sorte que cette condition précède la condition c) dans la définition de cet ensemble.

Remarque 4 : a) L'algorithme général pour déterminer un ensemble essentiel de solutions complémentaires du système 1), n'est autre que la Méthode de Double Description pour déterminer un ensemble essentiel $X^{J(m)}$ de générateurs du cône polyédrique K défini par le système 3) (et donc, un ensemble essentiel $\bar{X}^{J(m)}$ de générateurs du cône polyédrique $\bar{K}$ défini par le système 1)) modifiée de sorte qu'à la fin de l'étape p de cette méthode on ne conserve en fait que l'ensemble $X^{J_c(p)}$ de générateurs I(p) - complémentaires dans $X^{J(p)}$.

b) Pour simplifier la description de l'algorithme, on a considéré la Méthode de Double Description sous sa forme canonique. En particulier, on a considéré à chaque étape une base positive de cardinalité maximale pour définir la partie linéaire du cône polyédrique courant. D'autre part, rappelons que les éléments d'un ensemble essentiel de générateurs de $\bar{K}(p)$ (et, donc les éléments d'un ensemble essentiel de solutions complémentaires) sont définis modulo une constante multiplicative positive et modulo l'addition d'un vecteur arbitraire dans la partie linéaire de $\bar{K}(p)$.

c) Comme dans la Méthode de Double Description, la cardinalité de l'ensemble $\bar{X}^{J_c(p+1)}$ déterminé à l'étape p+1 de l'algorithme général, dépendra de l'inégalité activée dans cette étape. A ce propos, si P, N et Z sont respectivement le nombre de composantes positives, négatives et nulles du vecteur $U^{\hat{J}_c(p)}_{n+p+1}$, $P + Z + P \cdot N$ (resp. $Z + P \cdot N$) est une borne supérieure de la cardinalité de l'ensemble V à déterminer dans la partie 2) de l'étape p+1 ($P \cdot N$ est une borne supérieure du nombre total de combinaisons linéaires de paires de colonnes de $U^{J_c(p)}$ à déterminer dans la partie 2) de cette étape). Par ailleurs, suivant les conditions de complémentarité particulières considérées, on peut introduire des critères supplémentaires, dans chaque étape de l'algorithme, de façon à diminuer le nombre total d'opérations à effectuer.

d) Supposons que l'on dispose d'une base linéaire $B = \{B^j\}_{j=1}^{d}$ de la partie linéaire $]K[$ de K ($]K[= \{X \,/\, A_I X = 0\}$. On peut ramener le problème de détermination de toutes les solutions complémentaires du système 3) au problème de détermination de toutes les solutions complémentaires du système :

$$\begin{aligned} {}^{T}BX &= 0 \\ A_I X &\geq 0 \end{aligned} \qquad \tilde{3})$$

qui est de rang maximal, et considérer donc la variante de la Méthode de Double Description pour ce type de système. L'ensemble des solutions complémentaires du système $\tilde{3}$) est la somme de l'ensemble des solutions complémentaires du système 3) et de la partie linéaire $]K[$ de K.

Réduction du Problème Complémentaire 1)-2)

a) Si à la fin de l'étape p de l'algorithme général l'on a :

$$\exists i_o \in I(p) \text{ tel que : } \lambda^j_{i_o} > 0 \;;\; \forall j \in \hat{J}_c(p)$$

le problème complémentaire 1)-2) peut être modifié de la façon suivante :

i) On élimine du système 1) l'inégalité $A_{i_o} x = \lambda_{i_o}$, $\lambda_{i_o} \geq 0$

ii) On simplifie chacune des conditions de complémentarité par λ_{i_o}.

b) Si à la fin de l'étape p de l'algorithme général l'on a :

$$\exists_{i_o} \in I(p) \text{ tel que : } \lambda^j_{i_o} = 0 \;;\; \forall j \in \hat{J}_c(p)$$

le problème complémentaire 1)-2) peut être modifié de la façon suivante :

i) On élimine du système 1) l'inégalité $A_{i_o} x = \lambda_{i_o}$, $\lambda_{i_o} \geq 0$

ii) On élimine toutes les conditions de complémentarité dans 2) qui font intervenir λ_{i_o}.

Remarque : Rappelons que, comme dans la Méthode de Double Description, à l'étape p+1 de l'algorithme général il suffit de connaître le tableau $\Lambda^{J_c(p)}_{I(p)}$ sous forme d'un tableau binaire où l'on signale seulement si un élément de ce tableau est strictement positif ou nul.

Problèmes Linéaires Complémentaires Particuliers.

I) Considérons le système d'inégalités linéaires homogènes :

$$\begin{aligned} \tilde{A}x &= \tilde{\lambda} \\ x &\geqslant 0 \\ \tilde{\lambda} &\geqslant 0 \end{aligned} \qquad \tilde{1})$$

où $\tilde{A}$ est une matrice ($s\times n$) avec des conditions de complémentarité sur les variables de la forme :

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{r=1}^{n} \prod_{i=1}^{s} x_r^{\delta_{r\ell}} \tilde{\lambda}_i^{e_{i\ell}} = 0 \\ &\delta_{r\ell} = 0 \text{ ou } 1 \;;\; r = 1,\dots,n \\ &e_{i\ell} = 0 \text{ ou } 1 \;;\; i = 1,\dots,s \end{aligned}\right| \quad \ell \in L = \{1,\dots,q\} \qquad \tilde{2})$$

Considérons maintenant le problème de détermination de toutes les solutions complémentaires du système $\tilde{1}$).

Ce problème peut être reformulé sous la forme du problème complémentaire (homogène) équivalent :

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda \\ \lambda &\geqslant 0 \end{aligned} \qquad \tilde{3})$$

où $A = \begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ A \end{bmatrix}$, $\lambda = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\lambda}} \\ \tilde{\lambda} \end{bmatrix}$, avec les conditions de complémentarité (de la forme générale 2)) qui résultent de substituer x_r par λ_r dans les conditions de complémentarité 2) ci-dessus. L'algorithme général pour la détermination d'un ensemble essentiel de solutions complémentaires du système $\tilde{3}$) (et donc, du système $\tilde{1}$)) se particularise de la façon suivante :

Initialement, on dispose de l'ensemble essentiel $\bar{X}^{\hat{J}_c(n)} = \begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ I_{n\times n} \end{bmatrix}$ de solutions I(n) - complémentaires du sous-système $\tilde{3})_{I(n)}$:

$$\left.\begin{array}{l} A_{ix} = \lambda_i \\ \lambda_i \geq 0 \end{array}\right| \quad i \in I(n) = \{1,\dots,n\}$$

où $A_{I(n)} = I_{n\times n}$. (En effet, si parmi les conditions de complémentarité $\tilde{2})$ il y a une de la forme $x_{r_o} = 0$, on peut ramener la résolution du problème complémentaire $\tilde{1})$ -$\tilde{2})$ à la résolution du problème qui résulte de supprimer, d'une part, la variable x_{r_o} du système $\tilde{1})$ et, d'autre part, toutes les conditions de complémentarité dans $\tilde{2})$ qui font intervenir cette variable). L'ensemble $\bar{X}^{\hat{J}_c(n)}$ ainsi défini peut être considéré comme le résultat donné par l'algorithme général au bout des n premières étapes.

Ensuite, dans la partie 2) de l'étape n+t $(1 \leq t \leq s)$, on détermine un ensemble essentiel $\bar{X}^{\hat{J}_c(n+t)}$ de solutions I(n+t) - complémentaires du sous-système $\tilde{3})_{I(n+t)}$. (Noter que $\bar{X}^{\bar{J}_c(n+t)} = \Phi \ \forall t \geq 0$).

<u>Remarque</u> : Dans la partie 0) de l'étape n+t il suffit de considérer le tableau U défini par :

$$U = \begin{bmatrix} \Lambda^{\hat{J}_c(n+t)}_{I(n+t)} \\ A_{p+1} \ \Lambda^{\hat{J}_c(n+t)}_{I(n)} \end{bmatrix}$$

En effet, on a $X^{\hat{J}_c(n+t)} = \Lambda^{\hat{J}_c(n+t)}_{I(n)}$, $\forall t \geq 0$.

Par ailleurs, la partie 3) de l'étape n+t peut être négligée, car $\bar{J}_c(n+t) = \Phi : \forall t \geq 0$.

Remarque 5 : Le problème complémentaire $\tilde{1}$) -$\tilde{2}$) a été étudié par Tone [ ]. Si l'on considère la variante de l'algorithme général (avec les particularisations ci-dessus) on retrouve essentiellement l'algorithme proposé par Tone pour résoudre ce problème.

II) Considérons le système linéaire homogène

$$\begin{aligned} Cx &= \lambda \\ Dx &= 0 \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned} \qquad \tilde{1})$$

(où C et B sont des matrices (r×n) et (s×n) respectivement) avec des conditions de complémentarité de la forme :

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{e_{i_\ell}} = 0 \\ &e_{i_\ell} = 0 \text{ ou } 1 \ ; \ i = 1,\ldots,r \end{aligned}\right] \ \ell \in L = \{1,\ldots,q\} \qquad 2)$$

Considérons maintenant le problème de détermination de toutes les solutions complémentaires du système $\tilde{1}$). Il est clair que ce problème peut être reformulé sous la forme du problème complémentaire homogène général 1) -2). (En effet, il suffit de remplacer, d'une part, Dx = 0 par $Dx = \tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda} \geq 0$ dans $\tilde{1}$), et d'incorporer, d'autre part, les conditions de complémentarité additionnelles $\tilde{\lambda}_i = 0$, i = 1,...,s, dans $\tilde{2}$)). L'algorithme général nous permet donc de déterminer un ensemble essentiel de solutions complémentaires pour ce dernier problème et donc, pour le problème d'origine $\tilde{1}$) - $\tilde{2}$). Cependant, si dans la définition de l'algorithme général on considère la méthode de Double Description adaptée à la résolution de systèmes comportant, à la fois, des inégalités et des équations linéaires homogènes, (ici : $Cx \geq 0$, $Dx = 0$) on peut appliquer directement cet algorithme à la résolution du problème complémentaire d'origine $\tilde{1}$) -$\tilde{2}$).

(L'algorithme correspondant résulte de considérer les modifications signalées entre crochets dans la définition de l'algorithme général).

Problème Linéaire Complémentaire Non-Homogène Général :

Considérons le système non-homogène d'inégalités linéaires dans $\mathbb{R}^{n+m}$ défini par :

$$\left.\begin{array}{l} AZ + b = \lambda \\ \quad \lambda \geqslant 0 \end{array}\right. \qquad 1')$$

(où A est une matrice m n, b $\mathbb{R}^m$) avec les relations de complémentarité de la forme générale :

$$\left.\begin{array}{l} \prod\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^{e_{i_\ell}} = 0 \\ \\ e_{i_\ell} = 0 \text{ ou } 1 \; ; \; i = 1,\ldots,m \end{array}\right] \; \ell \in L = \{1,\ldots,q\} \qquad 2')$$

Considérons maintenant le système homogénéisé du système 1') défini par :

$$\left.\begin{array}{l} AZ + b\xi = \lambda \\ \quad \lambda \geqslant 0 \\ \quad \xi \geqslant 0 \; (\xi \in \mathbb{R}) \end{array}\right. \qquad 1')_h$$

D'après les relations classiques entre les solutions du système 1') et les solutions du système homogénéisé correspondant $1')_h$, et compte tenu de l'homogénéité des conditions de complémentarité, on peut ramener le problème de détermination de toutes les solutions complémentaires du système 1') au problème de détermination de toutes les solutions du système $1')_h$ qui vérifient les conditions de complémentarité 2'). En effet, si $\bar{X}^J = \bar{X}^{\bar{J}} \cup \bar{X}^{\hat{J}}$

(où $\bar{X}^j = \begin{pmatrix} Z^j \\ \xi^j \\ \chi^j \end{pmatrix}$, $\forall j \in J$) est un ensemble essentiel de générateurs du cône polyédrique (homogène) K défini par le système $1')_h$ et si P est le polyèdre convexe défini par le système 1'), on a :

$$P = \{\binom{Z}{\lambda} \in \mathbb{R}^{n+m} / \binom{Z}{\lambda} = \sum_{j\in J^+} \lambda_j [1/\xi^j \binom{Z^j}{\lambda^j}] + \sum_{j \in J^o} \mu_j \binom{Z^j}{\lambda^j} \ ; \ \sum_{j\in J^+} \lambda_j = 1,\ \mu_j \geq 0\ \forall j \in J_o\}$$

où $J^+ = \{j \in J \ / \ \xi^j > 0\}$, $J^o = J \setminus J^+$. Concrètement, $P = \Delta + C$, où Δ est le polyèdre convexe borné dont l'ensemble des points extrêmes est $\{1/\xi^j \binom{Z^j}{\lambda^j}\}_{j\in J+}$ et C, le cône polyédrique convexe des directions d'infinitude de P, engendré par l'ensemble essentiel de générateurs $\{\binom{Z^j}{\lambda^j}\}_{j\in Jo}$ (Rappelons que Δ n'est défini de façon unique que si le cône C (ou équivalemment K) est saillant i.e. si $\bar{J}=\Phi$).

Par ailleurs, il est facile de vérifier que toute solution complémentaire du système 1') appartient au polyèdre convexe $\Delta^c + C^c$, où Δ^c est le polyèdre borné engendré par les points extrêmes complémentaires de Δ et C^c, le cône polyédrique engendré par les générateurs complémentaires dans C i.e. si $\binom{Z}{\lambda}$ est

$$\binom{Z}{\lambda} = \sum_{j\in J_c^+} \lambda_j \ [1/\xi^j \binom{Z^j}{\lambda^j}] + \sum_{j\in J_c^o} \mu_j \binom{Z^j}{\lambda^j}$$

avec $\sum_{J_c^+} \lambda_j = 1$; $\lambda_j \geq 0$, $\forall j \in J_c^+$; $\mu_j \geq 0$, $\forall j \in J_c^o$,

$J_c^+ = \{j \in J^+ \ / \ 1/\xi^j \binom{Z^j}{\lambda^j}$ est complémentaire$\}$ et $J_c^o = \{j \in J^o \ / \ \binom{Z^j}{\lambda^j}$ est complémentaire$\}$.

Finalement, puisque $J_c^+ = (J_c)^+ = \{j \in J_c \ / \ \xi^j > 0\}$ et $J_c^o = (J_c)^o = \{j \in J_c \ / \ \xi^j = 0\}$ où $J_c = \{j \in J \ / \ \bar{X}^j$ vérifie 2')$\}$, on voit que l'on peut ramener la résolution du Problème Complémentaire Non-Homogène 1') -2') à la résolution du problème homogène $1')_h$ -2') correspondant.

Remarque : Il est clair que si]C[est la partie linéaire du cône polyédrique C (i.e.]C[$= \{\binom{z}{\lambda} \ / \ Az = 0, \ \lambda = 0)$ et si $\binom{\bar{z}}{\bar{\lambda}}$ est une solution complémentaire du système 1'), alors $\binom{\bar{x}}{\bar{\lambda}}$ +]C[est contenu dans l'ensemble des solutions complémentaires du système 1').

Exemple d'Application : Programmation Qaudratique Non-Convexe.

Considérons le programme quadratique dans $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\begin{aligned} &\text{Min } f(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x \\ &Ax \geqslant b \\ &x \geqslant 0 \end{aligned} \qquad 1)$$

où Q est une matrice (n × n) symétrique quelconque et A_1 une matrice (m × n).

Si $\bar{x}$ est un minimum local du programme quadratique 1), il existe $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tel que $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{y})$ vérifie les conditions nécessaires d'optimalité de Kuhn et Tucker :

$$\left.\begin{aligned} &c + Qx - A^T u = v \\ &Ax - b = y \\ &u^T y = 0 \\ &v^T x = 0 \\ &x, u, v, y \geqslant 0 \end{aligned}\right| \qquad 2)$$

Si l'on définit maintenant :

$$M = \begin{bmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}, \ q = \binom{c}{-b}, \ z = \binom{x}{u}, \ w = \binom{v}{y}$$

Le système 2) peut être reformulé sous la forme du problème linéaire complémentaire non-homogène :

$$Mz + q = w$$

$$z \geq 0 \qquad 3)$$

$$w \geq 0$$

$$z_i w_i = 0 \; ; \; i = 1,\ldots,n+m \text{ (Conditions de Complémentarité)} \qquad 4)$$

Nota : Ce problème est connu dans la littérature comme Problème Linéaire Complémentaire.

Si $(z,w) = (x, u, v, y)$ est une solution complémentaire du système 3), x est alors une solution réalisable du programme 1) et l'on a :

$$f(x) = \frac{1}{2}(c^T x + b^T u) = hz, \qquad 5)$$

avec $h = \frac{1}{2}\,(c^T b^T)$.

Théorème 2 : Si le programme quadratique 1) admet une solution optimale $\hat{x}$ (qui n'est pas nécessairement unique), il existe un point extrême complémentaire $(\hat{z}, \hat{x})$ du polyèdre convexe défini par le système 3) tel que :

$$f(\hat{x}) = h\hat{z} = \min \{hz \;/\; (z,w) \text{ solution complémentaire de } 3)\}$$

Dem : Etant donné que $\hat{x}$ est évidemment aussi un minimum local du programme 1), il existe une solution complémentaire $(\bar{z}, \bar{w})$ du système 3) telle que :

$$f(\hat{x}) = \bar{h}\binom{\bar{z}}{\bar{w}}, \text{ où } \bar{h} = (h,0)$$

Par ailleurs :

$$\left.\begin{array}{l}(z,w)=(x,u,v,y),\ \text{solution complémentaire de 3)}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{5)}\end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l}x,\ \text{solution réalisable}\\ \text{du programme 1)}\\ f(x) = \bar{h}\binom{z}{w}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{x},\ \text{minimum global du programme 1)}\\ x,\ \text{solution réalisable du programme 1)}\end{array}\right\} \Longrightarrow f(\hat{x}) \leqslant f(x)$$

On a donc :

$$f(\hat{x}) = \bar{h}\binom{\bar{z}}{\bar{w}} = \min \left\{\bar{h}\binom{z}{w} \ /\ (z,w)\ \text{solution complémentaire de 3)}\right\} \qquad \text{I)}$$

D'autre part, puisque toute solution complémentarie du système 3) appartient au polyèdre convexe $P^C = \Delta^C + C^C$, où Δ^C est le polyèdre borné engendré par les points extrêmes complémentaries du polyèdre P défini par le système 3) et C^C, le cône polyédrique engendré par les directions d'infinitude extrêmes complémentaries de P, on a :

$$(\bar{z},\ \bar{w}) = (\tilde{z},\ \tilde{w}) + (\mathring{z},\ \mathring{w}) \qquad \text{II)}$$

où $(\tilde{z},\ \tilde{w}) \in \Delta^C$, et $(\mathring{z},\ \mathring{w}) \in C^C$.

Etant donné que tout point de la forme $(z,w) = (\tilde{z},\tilde{w}) + \lambda(\mathring{z},\mathring{w})$, avec $\lambda \geqslant 0$, est encore une solution complémentaire au système 3), on a nécessairement $\bar{h}\begin{pmatrix}\mathring{z}\\ \mathring{w}\end{pmatrix} \geqslant 0$ (sinon, on aurait $\bar{h}\binom{z}{w} = \bar{h}\binom{\tilde{z}}{\tilde{w}} + \lambda\bar{h}\begin{pmatrix}\mathring{z}\\ \mathring{w}\end{pmatrix} \longrightarrow -\infty$ si $\lambda \to +\infty$, ce qui contredit I)). Par conséquent, d'après I) et II), on a $\bar{h}\begin{pmatrix}\mathring{z}\\ \mathring{w}\end{pmatrix} = 0$ (en effet, si $\bar{h}\begin{pmatrix}\mathring{z}\\ \mathring{w}\end{pmatrix} > 0$, on aurait $\bar{h}\begin{pmatrix}\tilde{z}\\ \tilde{w}\end{pmatrix} < \bar{h}\binom{\bar{z}}{\bar{w}}$, ce qui contredit I)) et donc $f(\hat{x}) = \bar{h}\begin{pmatrix}\tilde{z}\\ \tilde{w}\end{pmatrix}$, avec $\binom{\tilde{z}}{\tilde{w}} \in \Delta^C$. Il est clair qu'il existe donc un point extrême $\begin{pmatrix}\hat{z}\\ \hat{w}\end{pmatrix}$ de Δ^C tel que $\bar{h}\begin{pmatrix}\hat{z}\\ \hat{w}\end{pmatrix} = h\hat{z}$.

CQFD.

Remarque : D'après le théorème 2, si le programme quadratique 1) admet une solution optimale, pour déterminer la valeur optimale (et une solution optimale) de ce programme il suffit de déterminer le minimum de la fonction (linéaire) hz sur l'ensemble des points extrêmes complémentaires du polyèdre P défini par le système 3) (en fait, sur les points extrêmes complémentaires du polyèdre $\tilde{P}$ défini par le système $Mz + q \geq 0$, $z \geq 0$)

Exemple : Considérons le programme quadratique non-convexe dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ll} \text{Min } f(x) = x_1 - 1/2x_2 - 2/3x_1^2 + 1/2\,x_2^2 & \\ -2x_1 + x_2 \geq -3 & \qquad\qquad 1) \\ x_1 \geq 0 & \\ x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Etant donné que le polyèdre convexe non-vide défini par les contraintes du programme 1) est borné, le programme 1) admet une solution optimale (non-nécessairement unique).

Considérons :

$$M = \begin{bmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} -4/3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline -2 & 1 & 0 \end{array}\right], \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le problème complémentaire non-homogène [resp. homogénéisé] correspondant est défini par :

$$\begin{array}{l} -4/3z_1 \qquad + 2z_3 + 1 \;[\xi] = w_1 \\ \qquad\qquad z_2 - z_3 - 1/2[\xi] = w_2 \qquad\qquad 2) \\ -\;2z_1 + z_2 \qquad + 3 \;[\xi] = w_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} z_i \geq 0 \;;\; i = 1,\ldots,3 \\ w_i \geq 0 \;;\; i = 1,\ldots,3 \\ [\xi \geq 0] \end{array}$$

$$z_i w_i = 0 \;;\; i = 1,\ldots,3 \text{ (Cond. de Compl.)} \qquad\qquad 3)$$

On détermine maintenant, au moyen de l'algorithme général (avec les particularisations correspondantes), un ensemble essentiel de solutions complémentaries du système homogénéisé 2) :

	(1)	(2)	(3)	(4)	
Z_1	1	0	0	0	
Z_2	0	1	0	0	
Z_3	0	0	1	0	
	0	0	0	1	
W_1	-4/3	0	2	1	
W_2 →	0	1	-1	-1/2	
W_3	-2	1	0	3	→

$\overset{(o)}{T}$

tableau initial

θ	-1/2	1/4	3/2	0
Δ				
θ − Δξ				

(1)=(1)	(2)=(2)	(3)=(2)+(3)	(4)=(2)+2(4)	
1	0	0	0	
0	1	1	1	
0	0	1	0	
0	0	0	2	
-4/3	0	2	2	
0	+	0	0	o
-2	1	1	7	
	x			

$\overset{(1)}{T}$

-1/2	1/4	7/4	1/4
	x		
			1/8
-1/2	1/4	7/4	0
	x		s

→

(1)=(3)	(2)=(4)	(3)=(1)+2(3)	(4)=7(1)+2(4)	
0	0	1	7	
1	1	2	2	
1	0	2	0	
0	2	0	4	
2	2	8/3	-16/3	
0	0	0	0	o
+	+	0	0	
x				

$\overset{(2)}{T}$

7/4	0	3	-7/2
x	s		

(1)=(2)	(2)=(3)	(3)=8(2)+3(4)	(4)=2(3)+(4)	
0	1	21	9	
1	2	14	6	
0	2	0	4	
2	0	28	4	
+	+	0	0	
0	0	0	0	o
+	0	+	0	
	x			

$\overset{(3)}{T}$

tableau final

0	3	-21/2	5/2
	x		
			5/8
-5/4	3	-28	0
	x		s

$$\Delta = \max_{j \in J_c} \{\frac{\theta^j}{\xi^j} \ / \ \theta^j > 0\} \ , \ J_c = \{j \ / \ \xi^j > 0 \text{ et } w_i^j \geq 0, \ z_i^j w_i^j = 0 \ ; \ i=1,\dots,3\}$$

Explication des Différents Tableaux :

Initialement $I(o) = \Phi$ et les colonnes dans la partie supérieur du tableau $T^{(o)}$ constituent un ensemble essentiel de générateurs du cône polyédrique défini par les conditions de signe sur les variables z_i $(i=1,\dots,3)$ et ξ du système homogénéisé 2). Ensuite, on active l'inégalité $w_2 \geq 0$ (signalée avec "↳" dans le tableau $T^{(o)}$) et l'on définit $I(1) = \{2\}$. Les colonnes (1), (3) et (4) dans la partie supérieure du tableau $T^{(1)}$ constituent un ensemble essentiel de solutions I(1)-complémentaires (i.e. vérifiant la condition de complémentarité $z_2 w_2 = 0$ du sous-système :

$$z_i \geq 0 \ ; \ i = 1,\dots,3$$
$$\xi \geq 0$$
$$z_2 - z_3 - 1/2\xi \geq 0$$

La colonne (2) du tableau $T^{(1)}$ (signalée avex "x") correspond à un générateur qui n'est pas I(1)-complémentaire. Cette colonne doit être en fait éliminée de ce tableau.

Les tableaux $T^{(2)}$ et $T^{(3)}$ sont déterminés après avoir activé successivement les inégalités $w_3 \geq 0$ et $w_1 \geq 0$. On a signalée avec "o" dans le tableau $T^{(2)}$ la ligne qui peut être éliminée de ce tableau (et des tableaux ultérieurs) d'après les critères de réduction. Les colonnes (1), (3) et (4) dans la partie supérieure du tableau $T^{(3)}$ constituent un ensemble essentiel de solutions complémentaires du système :

$$\begin{array}{rcl}
-\,4/3\, z_1 \quad + 2\, z_3 + \quad \xi & \geq & 0 \\
z_2 - \;\; z_3 - 1/2\xi & \geq & 0 \\
-\;\; 2\, z_1 + z_2 \qquad + \;\; 3\xi & \geq & 0 \\
z_i & \geq & 0 \; ; \; i = 1,\ldots,3 \\
\xi & \geq & 0
\end{array}$$

Les points extrêmes complémentaires du polyèdre défini par le système non-homogène correspondant sont donc :

$$\overset{1}{Z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} , \; \overset{2}{Z} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} , \; \overset{3}{Z} = \begin{pmatrix} 9/4 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs :

$$h = \frac{1}{2}\,(1,\ -1/2,\ -3) = (1/2,\ -1/4,\ -3/2)$$

$$h\overset{1}{Z} = -1/8,\ h\overset{2}{Z} = \frac{1}{4},\ h\overset{3}{Z} = -\,\frac{3}{4}$$

et on a donc :

$$h\overset{3}{Z} = -\frac{3}{4} = \min\,\{h\overset{i}{Z} \;/\; i = 1,\ldots,3\}$$

Par conséquent, le programme quadratique 1) admet le point $(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2) = (9/4, 3/2)$ comme solution optimale et la valeur optimale de ce programme est -3/4.

Remarque : Dans la partie inférieure des différents tableaux on a considéré l'inégalité $-hz \geq -h\overset{o}{Z}$ où $\overset{o}{Z}$ est un point extrême complémentaire du polyèdre défini par le système $Mz + q \geq 0$, $z \geq 0$, déterminé au cours de l'algorithme.

Il est clair que $h\overset{o}{Z}$ constitue une borne supérieure pour la valeur optimale du programme quadratique 1). Dans le tableau $\overset{(1)}{T}$, le point $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un point extrême complémentaire de ce polyèdre et l'on a donc $hz \leqslant -1/8$. Cette inégalité est mise à jour chaque fois que l'on détermine un point extrême complémentaire qui donne une meilleure borne supérieure, et elle se transforme comme une ligne quelconque du tableau. Il est clair que cette inégalité peut aussi être activée au cours de l'algorithme. Avec cette modification, l'algorithme ci-dessus coïncide essentiellement avec l'algorithme de type simplicial, avec activation de contraintes, proposé par Balas [ ] pour déterminer la valeur optimale d'un programme quadratique non-convexe. (Noter que, dans cette situation, le point extrême complémentaire est donné par le dernier $\overset{o}{Z}$ considéré (ici $\begin{pmatrix} 9/4 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$) et le valeur optimale du programme, par $-(\frac{1}{8} + \frac{5}{8}) = - \frac{3}{4}$.

BIBLIOGRAPHIE III

[1] E. BALAS *"Nonconvex Quadratic Programming Via Generalized Polars"*, SIAM J. Appl. Math., vol 28, n°2, 335-349, 1975.

[2] N.V. CHERNIKOVA *"Algorithm for Discovering the set of all the Solutions of a Linear Programming Problem"*, U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics, vol 8, n°6, 282-293, 1967.

[3] L. CONTESSE *"Application de la Méthode de Double Description à la Programmation Quadratique Non-convexe"*, Séminaire d'Analyse Numérique du Laboratoire de Calcul de l'Université des Sciences et Techniques de Lille, Mars 1976.

[4] R.W. COTTLE and G.D. DANTZIG *"Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming"*, Linear Algebra and Its Applications, vol 1, 103-125, 1968.

[5] K. MURTY *"On the Number of Solutions to the Complementarity Problem and Spanning Properties of Complementary Cones"*, Linear Algebra and Its Applications, vol. 5, 65-108, 1972.

[6] D.S. RUBIN *"Vertex Generation and Cardinality Linear Programs"*, Opns. Res 23, 555-565, 1975.

[7] K. TONE *"An Algorithm for Finding all Extremal Rays of Polyhedral Convex Cones with some Complementary Conditions"*, J. Operations Research Soc. of Japan, Vol 18, n°1 et 2, 1975.

[8] H. UZAWA *"An Elementary Method for Linear Programming"*, in Studies in Linear and Nonlinear Programming (K. Arrow, L. Aurwicz and H. Uzawa, Eds.) Stanford University Press, Stanford 1958.

CHAPITRE IV

PROJECTION (GÉNÉRALISÉE) D'UN POINT SUR UN POLYÈDRE CONVEXE FERMÉ DÉFINI PAR L'INTERSECTION D'UN NOMBRE FINI DE DEMI-ESPACES

IV. PROJECTION (GÉNÉRALISÉE) D'UN POINT SUR UN POLYÈDRE CONVEXE FERMÉ DÉFINI PAR L'INTERSECTION D'UN NOMBRE FINI DE DEMI-ESPACES.

On définit un algorithme général à convergence finie pour déterminer la projection d'un point sur un polyèdre convexe fermé défini par un système fini d'inégalités linéaires, et, plus généralement, pour déterminer le minimum du programme quadratique dans $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} &\text{Min } q(x) = c^T x + 1/2 x^T Q x \\ &A_I x \geq b_I \end{aligned} \qquad 1)$$

où Q est une matrice définie positive.

Ce problème a été abondamment étudié dans la littérature où plusieurs algorithmes ont été proposés pour sa résolution. En général, la convergence finie de ces algorithmes est assurée sous une certaine hypothèse de régularité sur le polyèdre convexe défini par les contraintes du programma 1), comme c'est le cas lorsqu'on applique la méthode du gradient conjugué de D. Goldfarb [3] (resp. la méthode du gradient projeté de J.B. Rosen [5], lorsque Q = I).

L'algorithme général proposé ici consiste essentiellement à ramener la résolution du programme 1) à la résolution d'une suite finie de sous-programmes réguliers élémentaires, comportant au plus n+1 contraintes du programme d'origine. A chaque itération, on détermine le minimum de la forme quadratique q(x) sur le polyèdre régulier élémentaire courant, au moyen d'une méthode quelconque dont la convergence est finie dans le cas d'un programme régulier. Si ce minimum est réalisable pour le programme d'origine, c'est la solution optimale de ce programme. Sinon, on définit un nouveau sous-programme régulier élémentaire en activant une des contraintes non-satisfaites par ce minimum. La convergence finie de l'algorithme général (sans aucune hypothèse de régularité)est assurée compte tenu du fait que, d'une part, le minimum de chaque sous-programme régulier est déterminé en un nombre fini d'itérations et que, d'autre part, on ne peut pas considérer deux fois un même sous-programme régulier (car la valeur optimale des différents sous-programmes augmente strictement) et ceux-ci sont en nombre fini.

Lorsqu'on dispose initialement d'une solution réalisable du programme d'origine, on considère en particulier la méthode de Goldfarb [3](resp. de Rosen [5], si $Q = I$) pour la résolution des différents sous-programmes réguliers. L'algorithme qui en résulte est de nature semblable à l'algorithme proposé par P. Wolfe [6] pour la minimisation d'une forme quadratique strictement convexe sur un polyèdre convexe fermé défini comme enveloppe convexe d'un ensemble fini de points. Par contre, dans le cas où l'on ne dispose pas initialement d'une solution réalisable du programme d'origine, on considère en particulier la Méthode de H. Theil-C.Van de Panne [1] (à convergence finie sans aucune hypothèse de régularité sur le polyèdre) pour la résolution des différents sous-programmes réguliers. L'algorithme qui en résulte peut présenter des avantages sur cette méthode appliquée directement au problème d'origine, si le nombre des contraintes actives à l'optimum est assez élevé.

I INTRODUCTION, RAPPELS ET DÉFINITIONS.

Considérons le programme quadratique convexe dans $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{l} \text{Min } q(x) = c^T x + 1/2 x^T Q x \\ A_I x \geq b_I \end{array} \qquad 1)_I$$

où Q est une matrice symétrique définie positive, $I = \{1,\ldots,m\}$.

Nota : La condition Q symétrique n'est pas restrictive. En effet, si Q ne l'est pas, on peut remplacer Q par $1/2\ (Q+Q^T)$, qui est alors symétrique, sans modifier la forme quadratique $q(x)$.

Remarque 1 : Etant donné que Q est une matrice définie positive, la forme quadratique $q(x)$ est strictement convexe dans $\mathbb{R}^n$. Par conséquent, si le polyèdre convexe K_I défini par les contraintes du programme $1)_I$ est non vide, il existe une solution optimale unique $\hat{x}$ pour ce programme. Par ailleurs, $\hat{x}$ est la solution optimale du programme $1)_I$ si et seulement si, d'une part, $\hat{x}$ est une solution réalisable pour ce programme (i.e. $\hat{x} \in K_I$) et, d'autre part, il existe $u \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$\left.\begin{array}{l} u \geq 0 \\ c + Q\hat{x} - A_I^T u = 0 \\ u^T[A_I\hat{x} - b_I] = 0 \end{array}\right| \quad \text{Conditions de Kuhn et Tucker}$$

Si $S \subset I$, on considère le programme $2)_s$ défini par(†) :

$$\begin{array}{l} \text{Min } q(x) = c^T x + 1/2 x^T Q x \\ A_s x = b_s \end{array} \qquad 2)_s$$

Nota : Si $S = \Phi$, le programme $2)_s$ est défini par : $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} q(x)$

(†) Désormais, l'ensemble S sera noté s lorsqu'il apparaîtra en indice.

<u>Remarque 2</u> : La forme quadratique étant strictement convexe, si la variété linéaire V_s définie par le programme $2)_s$ est non-vide, il existe une solution optimale unique pour ce programme. Par ailleurs, $\overset{s}{x}$ est la solution optimale du programme $2)_s$ si et seulement si, d'une part, $\overset{s}{x}$ est une solution réalisable pour ce programme (i.e. $\overset{s}{x} \in V_s$) et, d'autre part, il existe $u \in \mathbb{R}^{|s|}$ tel que :

$$c + Q\overset{s}{x} - A_s^T u = 0 \qquad \text{(Condition de Lagrange)}$$

<u>Nota</u> : On peut en fait considérer les conditions d'optimalité classiques ci-dessus comme une particularisation des conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker. Si rang $(A_s) = |S|$, avec $S \neq \Phi$ (i.e. si les lignes de A_s sont linéairement indépendantes) et si $\overset{s}{x}$ est la solution optimale du programme $2)_s$, le vecteur $u \in \mathbb{R}^{|s|}$ vérifiant $c + Q\overset{s}{x} - A_s^T u = 0$ est défini de façon unique et on le notera $\overset{s}{u}$. En effet :

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{rang}(A_s) = |S| \\ \\ Q, \text{ défini positive} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{bmatrix} Q & -A_s^T \\ & \\ A_s & 0 \end{bmatrix}, \text{ régulière}$$

et le vecteur $\begin{pmatrix} \overset{s}{x} \\ \overset{s}{u} \end{pmatrix}$ est la solution unique du système (régulier) d'équations linéaires :

$$\begin{bmatrix} Q & -A_s^T \\ & \\ A_s & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ \\ b_s \end{pmatrix}$$

Dans ces conditions :

$$x = \underbrace{-Q^{-1}c}_{\overset{\Phi}{x}} + Q^{-1} A_s^T u = \overset{\Phi}{x} + Q^{-1} A_s^T u$$

$$b_s = A_s x = A_s \overset{\Phi}{x} + \underbrace{A_s Q^{-1} A_s^T}_{P(s)} u$$

et puisque :

$$\left.\begin{array}{l} \text{rang } (A_s) = |S| \\ \\ Q \text{ (symétrique) définie positive} \end{array}\right\} \Longrightarrow P(s), \text{ (symétrique) définie positive},$$

P(s) est régulière et :

$$\overset{S}{u} = (A_s \, Q^{-1} \, A_s^T)^{-1} \, (b_s - A_s \overset{\Phi}{x})$$

$$\overset{S}{x} = \overset{\Phi}{x} + Q^{-1} \, A_s^T \, (A_s \, Q^{-1} \, A_s^T)^{-1} \, (b_s - A_s \overset{\Phi}{x})$$

<u>Nota</u> : $\overset{\Phi}{x} = -Q^{-1}c$ est le point qui minimise $q(x)$ sur $\mathbb{R}^n$.

<u>Lemme 1</u> : Si $S \neq \Phi$, alors :

$$\text{rang } (A_s) = |S| \iff \left\{\begin{array}{l} \text{rang}([A_s b_s]) = |S| \\ \\ A_s x = b_s, \text{ compatible} \end{array}\right.$$

<u>Dem</u> : C'est une conséquence du résultat classique suivant :

$$A_s x = b_s, \text{ compatible} \iff \text{rang } (A_s) = \text{rang } ([A_s b_s])$$

Définition 1 : Un sous-ensemble S de I tel que $\overset{S}{x}$, solution optimale unique du programme $2)_S$, est la solution optimale du programme $1)_I$, est appelé un ensemble solution pour le programme $1)_I$.

Remarque 3 : Si $\hat{x}$ est la solution optimale du programme $1)_I$, l'ensemble $E = \{i \in I \ / \ A_i \hat{x} = b_i\}$ est un ensemble solution pour ce programme . Par ailleurs, si $E \neq \Phi$, il existe en général plusieurs ensembles solution pour le programme $1)_I$. (Remarquons que si S est un quelconque de ces ensembles on a $\overset{S}{x} = \hat{x}$).

Convention : $\text{rang}(\Phi) = \text{card}(\Phi) = 0$.

Lemme 2 : Soit $\hat{x}$ la solution optimale du programme $1)_I$ et soit $E = \{i \in I \ / \ A_i\hat{x} = b_i\}$ l'ensemble des contraintes actives à l'optimum de ce programme. Alors, sous l'hypothèse $\text{rang}(A_E) = |E|$, S est un ensemble solution pour le programme $1)_I$ si et seulement si, d'une part :

i) $A_{I-S} \overset{S}{x} \geq B_{I-S}$

et, d'autre part, (si $S \neq \Phi$) :

ii) $\overset{S}{u} \geq 0$

Dem : C'est une conséquence directe des Remarques 1) et 2), compte tenu de l'hypothèse $\text{rang}(A_E) = |E|$ et du fait que $S \subset E$.

Le lemme 2 peut reformulé sous la forme équivalente suivante :

Lemme 2' : Soit $\hat{x}$ la solution optimale du programme $1)_I$ et soit $E = \{i \in I \ / \ A_i\hat{x} = b_i\}$. Alors, sous l'hypothèse $\text{rang}(A_E) = |E|$, S est un ensemble solution pour le programme $1)_I$ si et seulement si, d'une part, $A_{I-S}\overset{S}{x} \geq b_{I-S}$ et, d'autre part, (si $S \neq \Phi$) $\overset{S}{x}$ est solution optimale du sous-programme $1)_S$:

$$\text{Min } q(x)$$
$$A_S x \geq b_S$$

Remarque 4 : Si $S = \Phi$, $\overset{\Phi}{x}$ est la solution optimale du programme $1)_I$ si et seulement si $A_I\overset{\Phi}{x} \geq b_I$.

Remarque 5 : La condition suffisante du lemme 2 (resp. du lemme 2') est vraie sans aucune hypothèse sur le rang de A_E.

Lemme 3 : Soit $\hat{x}$ la solution optimale du programme $1)_I$ et soit $E = \{i \in I \ / \ A_i\hat{x} = b_i\}$. Alors, sous l'hypothèse $\text{rang}(A_E) = |E|$ il existe un ensemble solution de cardinalité minimale unique $\hat{S}$ pour ce programme . Par ailleurs, si S est un ensemble solution pour le programme $1)_I$, S est de cardinalité minimale si et seulement si soit $S = \Phi$ soit $S \neq \Phi$ et $\overset{S}{u} > 0$.

Dem : C'est une conséquence directe du lemme 2 et des remarques 1, 2 et 4.

Remarque 6 : Sous l'hypothèse $\text{rang}(A_E) = |E|$, si $\tilde{S}$ est un ensemble solution pour le programme $1)_I$, l'ensemble solution de cardinalité minimale $\hat{S}$ pour ce programme est défini par :

$$\hat{S} = \Phi, \text{ si } \tilde{S} = \Phi$$
$$\hat{S} = \{i \in \tilde{S} \ / \ \overset{\tilde{S}}{u}_i > 0\}, \text{ si } \tilde{S} \neq \Phi$$

Par conséquent, sous cette hypothèse, lorsqu'on connait un ensemble solution $\tilde{S}$ pour le programme $1)_I$, on connait tous les ensembles solutions pour ce programme. En effet, S est un ensemble solution pour le programme $1)_I$ si et seulement si, d'une part, $S \subset E$ et, d'autre part, $S \supset \hat{S}$.

Remarque 7 : Si $\text{rang}(A_E) < |E|$, la condition ii) du lemme 2 n'est plus nécessaire i.e. si S est un ensemble solution pour le programme $1)_I$ on n'a pas nécessairement $\overset{S}{u} \geq 0$. Par ailleurs, dans cette situation on peut avoir plusieurs ensembles solution de cardinalité minimale pour le programme $1)_I$, et ceux-ci ne sont plus caractérisés par le signe des multiplicateurs de Lagrange associés. En fait, dans cette situation, une condition nécessaire pour que S ($S \neq \Phi$) soit un ensemble solution de cardinalité minimale est que, d'une part, $\mathrm{rang}(A_s) = |S|$ et, d'autre part, $\overset{S}{u}_i \neq 0 \; \forall i \in S$. Cependant, puisque les conditions de Kuhn et Tucker sont toujours nécessaires pour le programme $1)_I$, si $\hat{x} \neq \overset{\Phi}{x}$, il existera toujours au moins un ensemble S pour le programme $1)_I$ tel que $\mathrm{rang}(A_S) = |S|$ et $\overset{S}{u} > 0$ (en effet, puisque le système $A_E^T u = \nabla q(\hat{x})$, $u \geqslant 0$, avec $q(\hat{x}) \neq 0$, admet une solution, il existe $S \subset E$ tel que $A_S^T \overset{S}{u} = \nabla q(\hat{x})$, $\overset{S}{u} > 0$ et $\mathrm{rang}(A_S^T) = |S|$. d'après le théorème Fondamental de la Programmation Linéaire), mais un tel ensemble ne sera pas nécessairement un ensemble solution de cardinalité minimale pour le programme $1)_I$.

<u>Définition 2</u> : On dira que le polyèdre $K_I = \{x \,/\, A_I x \geqslant b_I\}$ est régulier si et seulement si $K_I \neq \Phi$ et

$$x \in K_I \Longrightarrow \mathrm{rang}(A_{I_x}) = |I_x|,$$

où $I_x = \{i \in I \,/\, A_i x = b_i\}$. (Rappelons que par convention $\mathrm{rang}(\Phi) = |\Phi| = 0$).

<u>Définition 3</u> : Le programme $1)_I$ est ait régulier si K_I est régulier.

<u>Remarque</u> 8 : D'après la définition 2, si le polyèdre K_I est régulier on a $\mathrm{rang}(A_E) = |E|$, où E est l'ensemble des contraintes actives à l'optimum $\hat{x}$ du programme $1)_I$.

Par ailleurs, une condition suffisante pour que le polyèdre K_I ($K_I \neq \Phi$) soit régulier est que $\mathrm{rang}([A_I b_I]) = |I|$. En effet, soit $\tilde{x} \in K_I$ et $\tilde{I} = \{i \in I \,/\, A_i \tilde{x} = b_i\}$:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \Phi \neq \tilde{I} \subset I \\ \mathrm{rang}([A_I b_I]) = I \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{rang}([A_{\tilde{I}} b_{\tilde{I}}]) = |\tilde{I}| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad A_{\tilde{I}} \tilde{x} = b_{\tilde{I}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \tilde{I} \neq \Phi \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{Lemme } 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{rang}(A_{\tilde{I}}) = |\tilde{I}|$$

<u>Définition 4</u> : Si K_I ($K_I \neq \Phi$) est tel que $\text{rang}([A_I b_I]) = |I|$, le polyèdre K_I (resp. le programme $1)_I$) est dit régulier élémentaire.

<u>Lemme 4</u> : (théorème 5.6 dans [1]) Soit $\hat{x}$ la solution optimale du programme $1)_I$ et soit $E = \{i \in I \ / \ A_i\hat{x} = b_i\}$. Alors, sous l'hypothèse $\text{rang}(A_E) = |E|$, si $\hat{S}$ est l'ensemble solution de cardinalité minimale pour le programme $1)_I$ on a :

$$S \subset \hat{S}, \ \hat{S} - S \neq \Phi \Longrightarrow A_{\hat{S}-S} \overset{S}{x} \not\geq b_{\hat{S}-S}$$

<u>Lemme 5</u> : [théorème 5.1 dans [1]]

i) Si $\text{rang}(A_{S+r}) = |S+r|$, où $r \in I-S$, alors :

$$A_r\overset{S}{x} \begin{pmatrix} < \\ = \\ > \end{pmatrix} b_r \Longleftrightarrow \overset{S+r}{u}_r \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} 0$$

ii) Si $\text{rang}(A_S) = |S|$ et si $t \in S$, alors :

$$\overset{S}{u}_t \begin{pmatrix} > \\ = \\ < \end{pmatrix} 0 \Longleftrightarrow A_t \overset{S-t}{x} \begin{pmatrix} < \\ = \\ > \end{pmatrix} b_t$$

<u>Remarque 9</u> : D'après la Remarque 8, les résultats des lemmes 2, 3 et 4 sont, à plus forte raison, vrais si l'on remplace l'hypothèse $\text{rang}(A_E) = |E|$ par l'hypothèse K_I régulier ou, en particulier, K_I régulier élémentaire.

II ALGORITHME GÉNÉRAL POUR DÉTERMINER LA SOLUTION OPTIMALE DU PROGRAMME $1)_I$.

Algorithme A :

Initialement : $L[0] = \Phi$

$S[0] = \Phi$

$\overset{[0]}{x} = \overset{\Phi}{x} = -Q^{-1}c$ (le point qui minimise $q(x)$ sur $\mathbb{R}^n$)

Etape [p+1] : On connait un ensemble solution S[p] et la solution optimale $\overset{[p]}{x}$ ($\overset{[p]}{x} = \overset{s[p]}{x}$) du sous-programme régulier élémentaire $1)_{L[p]}$:

$$\min q(x)$$

$$A_{L[p]}\, x \geq b_{L[p]}$$

où $L[p] \subset I$

- Si $A_{I-L[p]} \overset{[p]}{x} \geq b_{I-L[p]}$, fin de l'algorithme : $\overset{[p]}{x}$ est la solution optimale du programme $1)_I$.

Sinon :

On choisit $r(p+1) \in I - L[p]$ tel que : $A_{r(p+1)} \overset{[p]}{x} < b_{r(p+1)}$.

On définit $L[p+1] = S[p] + r(p+1)$.

On applique le sous-algorithme S.A. (à convergence finie) à la résolution du sous-programme $1)_{L[p+1]}$:

i) Si le sous-algorithme S.A. signale que le domaine du sous-programme $1)_{L[p+1]}$ est vide, fin de l'algorithme : le domaine du programme $1)_I$ est vide.

ii) Sinon, on a déterminé un ensemble solution S[p+1] et la solution optimale $\overset{[p+1]}{x} = \overset{s[p+1]}{x}$ du sous-programme régulier élémentaire $1)_{L[p+1]}$: on passe à l'étape suivante avec p+1 au lieu de p.

Nota : Si initialement l'on dispose d'une solution réalisable du programme $1)_I$, le domaine du sous-programme $1)_{L[p+1]}$ est nécessairement non-vide. La partie i) de l'algorithme peut donc être négligée.

Lemme 1(A) : Si le sous-programme $1)_{L[p+1]}$ est réalisable, ce programme est régulier élémentaire.

Dem : Montrons que rang($[A_{L[p+1]}\ b_{L[p+1]}]$) = $|L[p+1]|$.

Pour p=0, le résultat est évident. En effet, L[1] = r(1) et $[A_{r(1)}\ b_{r(1)}] \neq 0$.

Supposons que : rang($[A_{L[p]}\ b_{L[p]}]$) = $|L[p]|$

$$\left.\begin{array}{l} A_{s[p]}\overset{[p]}{x} = b_{s[p]} \\ \\ A_{r(p+1)}\overset{[p]}{x} < b_{r(p+1)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} [A_{r(p+1)}b_{r(p+1)}] \text{ linéairement indépendant des} \\ \{[A_i b_i]\}_{i \in S[p]} \end{array}\right. \qquad 1)$$

$$S[p] \subset L[p] \Longrightarrow \text{rang}([A_{s[p]}b_{s[p]}) = |S[p]| \qquad 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} L[p+1] = S[p] + r(p+1) \\ \qquad 1) \\ \qquad 2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{rang } ([A_{L[p+1]}\ b_{L[p+1]}]) = |L[p+1]| \qquad 3)$$

d'où le résultat.

Remarque 1(A) : Si initialement l'on dispose d'une solution réalisable $\tilde{x}$ du programme $1)_I$, tout sous-programme $1)_{L[p+1]}$ est régulier élémentaire (En effet $\tilde{x} \in K_I \subset K_{L[p+1]}$).

Théorème 1 : Si l'on applique l'algorithme A à la résolution du programme $1)_I$ cet algorithme détermine en un nombre fini d'étapes soit la solution optimale $\hat{x}$ du programme $1)_I$ soit que le programme $1)_I$ n'admet pas de solution.

Dem : Soient S[p], $\overset{[p]}{x}$, un ensemble solution et la solution optimale du programme régulier élémentaire $1)_{L[p]}$ respectivement.

Si $A_{I-L[p]}\overset{[p]}{x} \geq b_{I-L[p]}$, $\overset{[p]}{x}$ est la solution optimale du programme $1)_I$ (Cela résulte du fait que, d'une part, $\overset{[p]}{x}$ est une solution réalisable pour le programme $1)_I$ et que, d'autre part, le domaine du programme $1)_{L[p]}$ contient le domaine du programme $1)_I$).

Sinon, soit $r(p+1) \in I - L[p]$ tel que $A_{r(p+1)}\overset{[p]}{x} < b_{r(p+1)}$.

On définit : $L[p+1] = S[p] + r(p+1)$.

On applique le sous-algorithme S.A. (à convergence finie) à la résolution du sous-programme $1)_{L[p+1]}$. Si le domaine $K_{L[p+1]}$ du sous-programme $1)_{L[p+1]}$ est vide, le domaine K_I du programme $1)_I$ est vide (en effet $K_I \subset K_{L[p+1]}$) et l'algorithme se termine.

Sinon, soient $S[p+1]$, $\overset{[p+1]}{x}$ un ensemble solution et la solution optimale du sous programme $1)_{L[p+1]}$ respectivement. On va montrer que $q(\overset{[p]}{x}) < q(\overset{[p+1]}{x})$:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{[p]}{x} \text{ solution optimale du programme régulier } 1)_{L[p]} \\ \overset{[p]}{x} = \overset{s[p]}{x} \\ \\ \text{Lemme 2')} \end{array}\right\} \Longrightarrow (1)$$

$$(1)\ \ \overset{[p]}{x} \text{ solution optimale (unique) du programme } 1)_{s[p]}$$

$$L[p+1] = S[p] + r(p+1) \Longrightarrow \overset{[p+1]}{x} \in \{x / A_{s[p]}x \geq b_{s[p]}\} \qquad (2)$$

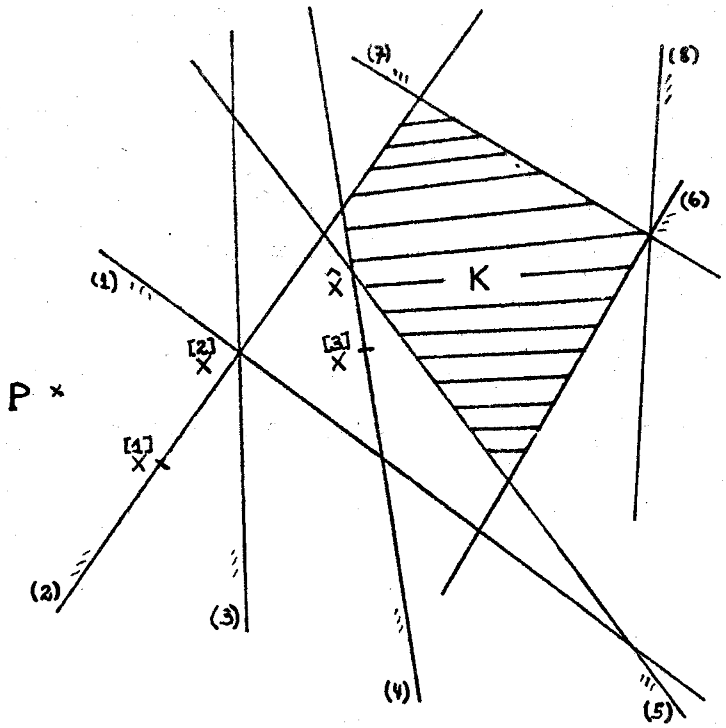
$$\left.\begin{array}{l} A_{r(p+1)}\overset{[p]}{x} < b_{r(p+1)} \\ \\ A_{r(p+1)}\overset{[p+1]}{x} \geq b_{r(p+1)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{[p]}{x} \neq \overset{[p+1]}{x} \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} q(x),\ \text{strictement convexe} \\ 1),\ 2),\ 3) \end{array}\right\} \Longrightarrow q(\overset{[p]}{x}) < q(\overset{[p+1]}{x}) \qquad (4)$$

Etant donné que le nombre total de sous-programmes du programme $1)_I$ que l'on peut envisager est fini, et puisque, d'après (4) on ne peut pas rencontrer un même sous-programme au cours des différentes étapes, l'algorithme A détermine en un nombre fini d'étapes soit la solution optimale du programme $1)_I$ soit que le programme $1)_I$ n'admet pas de solution.

Remarque 2(A) : Si $S[p+1]$ est un ensemble solution quelconque pour le programme $1)_{L[p+1]}$ on a : $r(p+1) \in S[p+1]$ i.e. l'inégalité $A_{r(p+1)}X \geq b_{r(p+1)}$ est strictement active à l'optimum $\overset{[p+1]}{x}$ du sous-programme régulier $1)_{L[p+1]}$.

Exemple : Déterminer la projection euclidienne du point P sur le polyèdre K au moyen de l'algorithme général A.



$\hat{x}$ est la projection euclidienne de P sur le polyèdre K.

p	L[p]	S[p]
0	∅	∅
1	{(2)}	{(2)}
2	{(2), (1)}	{(2), (1)}
3	{(2), (1), (4)}	{(4)}
4	{(4), (5)}	{(4), (5)}

Exemples de Sous-Algorithme S.A. :

I) Si l'on ne dispose pas initialement d'une solution réalisable du programme 1)

Sous-Algorithme S.A. (T.V.P.).

On définit $j_o = r(p+1)$.

On calcule ${}^{\{j_o\}}$.

Si $A_i \, {}^{\{j_o\}}x \geq b_i$, $\forall i \in L[p+1] - \{j_o\}$, fin : ${}^{[p+1]}x = {}^{\{j_o\}}x$, $\hat{S}[p+1] = \{j_o\}$.

Sinon, soit $R(j_o) = \{k \in L[p+1] - \{j_o\} / A_k \, {}^{\{j_o\}}x < b_k\}$.

On calcule successivement ${}^{\{j_o,k\}}x$, ${}^{\{j_o,k\}}u$, $k \in R(j_o)$:

- S'il existe $k_o \in R(j_o)$ tel que, d'une part :

i) $A_i \, {}^{\{j_o,k_o\}}x \geq b_i$, $\forall i \in L[p+1] - \{j_o, k_o\}$

et, d'autre part :

ii) ${}^{\{j_o,k_o\}}u > 0$,

fin : ${}^{[p+1]}x = {}^{\{j_o,k_o\}}x$, $\hat{S}[p+1] = \{j_o,k_o\}$

- Sinon, soit $R(j_o,k) = \{\ell \in L[p+1]-\{j_o,k\}/A_\ell \, {}^{\{j_o,k\}}x < b_\ell\}$, $\forall k \in R(j_o)$

On calcule successivement ${}^{\{j_o,k,\ell\}}x$, ${}^{\{j_o,k,\ell\}}u$, $k \in R(j_o)$, $\ell \in R(j_o,k)$:

- S'il existe $k_o \in R(j_o)$, $\ell_o \in R(j_o,k_o)$ tel que, d'une part :

i) $A_i \, {}^{\{j_o,k_o,\ell_o\}}x \geq b_i$, $\forall i \in L[p+1] - \{j_o, k_o, \ell_o\}$

et, d'autre part :

ii) ${}^{\{j_o,k_o,\ell_o\}}u > 0$,

fin : ${}^{[p+1]}x = {}^{\{j_o,k_o,\ell_o\}}x$, $\hat{S}[p+1] = \{j_o,k_o,\ell_o\}$

- Sinon, ...

Remarque 1 : Dans la définition du sous-algorithme S.A. (T.V.P),

${}^{\{j_o,\dots\}}x = \overset{S}{x}$ avec $S = \{j_o,\dots\}$ i.e. ${}^{\{j_o,\dots\}}x$ est la solution optimale du programme 2)$_{\{j_o,\dots\}}$.

Théorème 2 : Si l'on applique le sous-algorithme S.A. (T.V.P) à la résolution du sous-programme $1)_{L[p+1]}$, cet algorithme détermine en un nombre fini d'itérations soit la solution optimale $\overset{[p+1]}{x}$ et l'ensemble solution de cardinalité minimale $\hat{S}[p+1]$ pour ce sous-programme soit que le sous-programme $1)_{L[p+1]}$ n'admet pas de solution optimale (i.e $K_{L[p+1]} = \Phi$).

Dem : Si le sous-programme $1)_{L[p+1]}$ admet une solution optimale (i.e si $K_{L[p+1]} \neq \Phi$) l'ensemble solution de cardinalité minimale $\hat{S}[p+1]$ pour ce sous-programme est défini de façon unique. ($\hat{S}[p+1]$ est caractérisé par le lemme 3). Initialement on considère $S = \{j_o\}$, avec $j_o = r(p+1)$, car cet inégalité est strictement active à l'optimum $\overset{[p+1]}{x}$ du sous-programme $1)_{L[p+1]}$. Si $\overset{\{j_o\}}{x}$ est une solution réalisable du sous-programme $1)_{L[p+1]}$, $\overset{\{j_o\}}{x}$ est la solution optimale de ce sous-programme, $\hat{S}[p+1] = \{j_o\}$ et le sous-algorithme se termine (en effet, on a alors que $\overset{\{j_o\}}{u} > 0$). Sinon, d'après le lemme 4, au moins une des inégalités violées par $\overset{\{j_o\}}{x}$ appartient à $\hat{S}[p+1]$. On calcule donc successivement $\overset{\{j_o,k\}}{x}$, $\overset{\{j_o,k\}}{u}$, $k \in R(j_o)$. S'il existe $k_o \in R(j_o)$ tel que d'une part $\overset{\{j_o,k_o\}}{x}$ est une solution réalisable du sous-programme $1)_{L[p+1]}$ et, d'autre part, $\overset{\{j_o,k_o\}}{u} > 0$ alors $\overset{[p+1]}{x} = \overset{\{j_o,k_o\}}{x}$, $\hat{S}[p+1] = \{j_o,k_o\}$ (d'après les lemmes 2 et 3) et le sous-algorithme se termine. Sinon, d'après le lemme 4, au moins une des inégalités violées par $\overset{\{j_o,k\}}{x}$ pour un certain $k \in R(j_o)$ appartient à $\hat{S}\,[p+1]$. On calcule successivement $\overset{\{j_o,k,\ell\}}{x}$, $k \in R(j_o)$, $\ell \in R(j_o,k)$ et ainsi de suite. Si le sous-programme admet une solution optimale, le sous-algorithme déterminera $\overset{[p+1]}{x}$ et $\hat{S}[p+1]$, au plus tard, au bout de n itérations. Si le domaine $K_{L[p+1]}$ du sous-programme $1)_{L[p+1]}$ est vide, le sous-algorithme se termine lorsqu'à une itération donnée, tous le programmes $2)_S$ sont incompatibles.

Remarque 3(A) : Le sous-algorithme S.A. (T.V.P.) pour résoudre le programme $1)_{L[p+1]}$ est une modification de la méthode de Theil-Van de Panne pour résoudre ce programme, compte tenu du fait que l'inégalité $A_{r(p+1)}x \geq b_{r(p+1)}$ est strictement active à l'optimum ${}^{[p+1]}x$ de ce dernier. Si le domaine du programme $1)_{L[p+1]}$ est non-vide, ce programme est régulier élémentaire et l'ensemble solution de cardinalité minimale $\hat{S}[p+1]$ est défini de façon unique, et il est caractérisé par la stricte positivité des multiplicateurs de Lagrange associés à cet ensemble (i.e. ${}^{\hat{S}[p+1]}u > 0$).

Si l'on applique directement la méthode de Theil Van de Panne à la résolution du programme $1)_I$, cette méthode détermine en un nombre fini d'itérations soit l'optimum de ce programme, soit que le domaine de ce programme est vide. En effet, d'après la Remarque 7, si le programme $1)_I$ admet une solution optimale il existera toujours au moins un ensemble solution $\tilde{S}$ pour ce programme tel que $\text{rang}(A_{\tilde{S}}) = |\tilde{S}|$ et $\overset{\tilde{S}}{u} > 0$ (rappelons qu'un ensemble $\tilde{S}$ vérifiant ces propriétés n'est pas nécessairement de cardinalité minimale). Par ailleurs, le lemme 4 est toujours vrai si l'on supprime l'hypothèse $\text{rang}(A_E) = |E|$ et si l'on considère un quelconque de ces ensemble $\tilde{S}$ à la place de $\hat{S}$. Finalement, puisque dans la méthode de Theil Van de Panne les différents ensembles S sont choisis de sorte que la cardinalité de ces ensembles augmente (au sens large) à chaque itération, avec $S = \Phi$ initialement, cette méthode déterminera en un nombre fini d'itérations un ensemble solution $\hat{\tilde{S}}$ pour le programme $1)_I$, qui est de cardinalité minimale parmi tous les ensembles solutions $\tilde{S}$ tels que $\text{rang}(A_{\tilde{S}}) = |\tilde{S}|$ et $\overset{\tilde{S}}{u} > 0$. Par contre, si l'on applique l'algorithme général, avec cette méthode au niveau du sous-algorithme, à la résolution du programme $1)_I$, cet algorithme convergera en général vers un quelconque des ensembles solution $\tilde{S}$ ci-dessus.

Il est en fait difficile de comparer à priori ces deux algorithmes par rapport à leur efficacité. Cependant, compte tenu des considérations ci-dessus, l'algorithme général (avec le sous-algorithme S.A. (T.V.P)) peut présenter des avantages sur la méthode de Theil Van de Panne, lorsque de contraintes actives à l'optimum du programme $1)_I$ est élevé (en particulier, si cet optimum est un sommet du polyèdre K_I). Par contre, si le nombre de ces contraintes est faible, la méthode de Theil Van de Panne semble plus avantageuse.

II) Si l'on dispose initialement d'une solution réalisable du programme $1)_I$.

Sous-algorithme S.A (G.P.)

Soit $K[p+1] = \{x \,/\, A_{L[p+1]}x \geqslant b_{L[p+1]}\}$.

On détermine $\overset{o}{x} \in K[p+1]$: $[\overset{o}{x},\tilde{x}] = K[p+1] \cap [\overset{[p]}{x}, \tilde{x}]$, $E_o = \{i \in L[p+1] \,/\, A_i\overset{o}{x} = b_i\}$.

Itération $k(k \geqslant 0)$: on a $\overset{k}{x} \in K[p+1]$, $E_k = \{i \in L[p+1] \,/\, A_i\overset{k}{x} = b_i\}$

(1) Calculer : $\overset{k}{u} = (A_{E_k} Q^{-1} A_{E_k}^T)^{-1} A_{E_k} (\overset{k}{x} - \overset{\Phi}{x})$,

$\overset{k}{x}' = \overset{\Phi}{x} + Q^{-1} A_{E_k}^T \overset{k}{u}$ ($\overset{k}{x}'$, minimum de $q(x)$ sur $V_{E_k} = \{x/A_{E_k}x = b_{E_k}\}$)

(2) Si $\overset{k}{x}' \neq \overset{k}{x}$: déterminer $\overset{k+1}{x}$ tel que : $[\overset{k+1}{x},\overset{k}{x}] = K[p+1] \cap [\overset{k}{x}', \overset{k}{x}]$,

$E_{k+1} = \{i \in L[p+1] \setminus E_k \,/\, A_i\overset{k+1}{x} = b_i\} \cup E_k$.

Passer à l'étape suivante avec k+1 au lieu de k.

(3) Si $\overset{k}{x}' = \overset{k}{x}$:

i) Si $\overset{k}{u} \ngeqslant 0$: Choisir $i_o \in E_k$ tel que $\overset{k}{u}_{i_o} < 0$

Reféfinir E_k : $E_k = E_k - i_o$

Aller en (1)

ii) Si $\overset{k}{u} \geqslant 0$, fin du sous-algorithme : Définir $\overset{[p+1]}{x} = \overset{k}{x}$,

$\hat{S}[p+1] = \{i \in E_k \,/\, \overset{k}{u}_i > 0\}$

Théorème 3 : Le sous-algorithme S.A. (G.P.) fournit l'ensemble solution de cardinalité minimale $\hat{S}[p+1]$ (et donc tous les ensembles solution) et la solution optimale ${}^{[p+1]}\overset{*}{x}$ du sous-programme régulier élémentaire $1)_{L[p+1]}$, en un nombre fini d'itérations.

Dem : A) Montrons d'abord que, si $\overset{k}{x} \neq {}^{[p+1]}\overset{*}{x}$, alors $q(\overset{k+1}{x}) < q(\overset{k}{x})$

$$\left.\begin{array}{l} K \subset K[p+1] \\ \\ \tilde{x} \in K \end{array}\right\} \Longrightarrow \tilde{x} \in K[p+1]$$

et $\overset{o}{x} \in K[p+1]$ est alors bien défini.

Soit $\overset{k}{x} \in K[p+1]$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} E_k = \{i \in L[p+1]/A_i\overset{k}{x}=b_i\} \\ 1)_{L[p+1]}, \text{ régulier} \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{rang}(A_{E_k}) = |E_k| \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{Remarque 2b)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \overset{k}{x} = \overset{E_k}{x} \text{ est bien} \\ \\ \text{défini dans (1)} \end{array}\right.$$

i) Considérons d'abord $\overset{k}{x}' \neq \overset{k}{x}$.

a) Si $\overset{k}{x}' \in K[p+1]$, alors $\overset{k+1}{x} = \overset{k}{x}'$ dans (2) et $\overset{k+1}{x} \neq \overset{k}{x}$.

b) Si $\overset{k}{x}' \notin K[p+1]$, alors $T = \{i \in L[p+1] / A_i\overset{k}{x}' < b_i\} \neq \Phi$.

$$\left.\begin{array}{l} E_k = \{i \in L[p+1] / A_i\overset{k}{x} = b_i\} \\ A_{E_k}\overset{k}{x}' = b_{E_k} \\ \overset{k}{x} \in K[p+1] \\ \text{Définition de } T \end{array}\right\} \Longrightarrow A_i\overset{k}{x} > b_i \;;\; \forall i \in T$$

Considérons maintenant $x(\lambda) = \overset{k}{x} + \lambda\underbrace{(\overset{k}{x}' - \overset{k}{x})}_{\neq 0}$, $\lambda \geq 0$

$i \in L[p+1] - T \Longrightarrow A_i x(\lambda) \geq b_i$, $\forall\lambda \geq 0$

$$i \in T \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} A_i\overset{k}{x}' - b_i < 0 \\ A_i\overset{k}{x} - b_i > 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow A_i(\overset{k}{x}'-\overset{k}{x}) < 0$$

Déterminons maintenant la plus grande valeur de λ telle que $x(\lambda) \in K[p+1]$, $\forall\lambda \in [0, \tilde{\lambda}]$. Considérons donc :

$$\lambda_i = -\frac{\overbrace{A_i\overset{k}{x} - b_i}^{>0}}{\underbrace{A_i(\overset{k}{x}' - \overset{k}{x})}_{<0}} \qquad ; \quad \forall i \in T$$

$$\lambda_i = +\infty \qquad ; \quad \forall i \in L[p+1] - T$$

(λ_i est la plus grande valeur de λ telle que : $A_i x(\lambda) \geq b_i$, $\forall\lambda \in [0,\lambda_i]$).

On a alors :

$$0 < \tilde{\lambda} = \min_{i \in T} \lambda_i$$

$$\overset{k}{x}' \notin K[p+1) \Longrightarrow \tilde{\lambda} < 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{k+1}{x} = \overset{k}{x} + \tilde{\lambda}\underbrace{(\overset{k}{x}' - \overset{k}{x})}_{\neq 0} \\ \\ 0 < \tilde{\lambda} < 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \overset{k+1}{x} \in K[p+1] \\ \\ \overset{k+1}{x} \neq \overset{k}{x} \end{array}\right.$$

Dans la situation i) on a : $\overset{k+1}{x} = \overset{k}{x} + \tilde{\mu}\underbrace{(\overset{k}{x}' - \overset{k}{x})}_{\neq 0}$, avec $0 < \tilde{\mu} \leq 1$

Montrons maintenant que $q(\overset{k+1}{x}) < q(\overset{k}{x})$:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \overset{k}{x}', \overset{k}{x} \in V_{E_k} \\ \overset{k}{x}' \neq \overset{k}{x} \\ \overset{k}{x}' \text{ minimise } q(x) \text{ sur } V_{E_k} \\ q(x), \text{ strictement convexe} \end{array}\right\} \Longrightarrow q(\overset{k}{x}') < q(\overset{k}{x}) \\ \\ \left.\begin{array}{l} \overset{k+1}{x} = \overset{k}{x} + \tilde{\mu}(\overset{k}{x}' - \overset{k}{x}) \\ 0 < \tilde{\mu} \leq 1 \\ q(x) \text{ convexe} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} q(\overset{k+1}{x}) \leq \tilde{\mu}\, q(\overset{k}{x}') + (1-\tilde{\mu}) q(\overset{k}{x}) \\ 0 < \tilde{\mu} \leq 1 \end{array}\right. \end{array}\right\} \Longrightarrow q(\overset{k+1}{x}) < q(\overset{k}{x})$$

ii) Considérons ensuite $\overset{k}{x}' = \overset{k}{x}$

a) Si $\overset{k}{u} \geq 0$, alors :

$$\left.\begin{array}{l} \overset{k}{x}' = \overset{k}{x} \in K[p+1] \\ \overset{k}{u} \geq 0 \\ \text{lemme 2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{[p+1]}{x} = \overset{k}{x}, \text{ solution optimale de } 1)_{L[p+1]}.$$

b) Si $\overset{k}{u} \not\geq 0$, soit $i_o \in E_k$ t.q. $\overset{k}{u}_{i_o} < 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{k}{u}_{i_o} < 0 \\ \text{rang}(A_{E_k}) = |E_k| \\ \text{lemme 5 ii)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} A_{i_o} \overset{E_k - i_o}{x} > b_{i_o} \\ \text{où } \overset{E_k - i_o}{x} \text{ minimise } q(x) \text{ sur la variété } V_{E_k - i_o} \end{array}\right.$$

Par conséquent, si l'on définit $E_{\bar{k}}$: $E_{\bar{k}} = E_k - i_o$, on obtiendra dans (1) un nouveau point $\overset{\bar{k}}{x}' = \overset{E_{\bar{k}}}{x}$ tel que $\overset{\bar{k}}{x}' \neq \overset{k}{x}$.

Si $\overset{\bar{k}}{x}' \in K[p+1]$, on aura alors $\overset{k+1}{x} = \overset{\bar{k}}{x}' \in K[p+1]$ et $\overset{k+1}{x} \neq \overset{k}{x}$.

Si $\overset{\bar{k}}{x}' \notin K[p+1]$, alors $\bar{T} = \{i \in L[p+1] \;/\; A_i \overset{\bar{k}}{x}' < b_i\} \neq \Phi$

$A_{i_o} \overset{\bar{k}}{x}' > b_{i_o} \Longrightarrow i_o \notin \bar{T}$

Montrons maintenant que $A_i \overset{k}{x} > b_i$ $\forall i \in \bar{T}$. Supposons le contraire i.e. $\exists \ell \in \bar{T}$ t.q. $A_\ell \overset{k}{x} = b_\ell$. On a alors $\ell \in E_k$.

Par ailleurs, puisque $i_o \notin \bar{T}$, on a $\ell \neq i_o$ et donc $\ell \in E_{\bar{k}}$, ce qui est impossible d'après la définition de $\bar{T}$.

Comme dans la situation i)b) plus haut, définissons

$$0 < \tilde{\lambda} = \min_{i \in \bar{T}} \lambda_i$$

où :

$$\lambda_i = \frac{\overbrace{A_i \overset{k}{x} - b_i}^{>0}}{\underbrace{A_i(\overset{\bar{k}}{x}' - \overset{k}{x})}_{<0}} > 0 \;;\; \forall i \in \bar{T}$$

$\overset{\bar k}{x}' \in K[p+1] \Longrightarrow \tilde\lambda < 1$

On a alors $\overset{k+1}{x} = \overset{k}{x} + \tilde\lambda \underbrace{(\overset{\bar k}{x}' - \overset{k}{x})}_{\neq 0} \in K[p+1]$ et $\overset{k+1}{x} \neq \overset{k}{x}$.

Dans la situation ii), si $\overset{k}{x} \neq \overset{[p+1]}{x}$, on a :

$$\overset{k+1}{x} = \overset{k}{x} + \tilde\mu \underbrace{(\overset{\bar k}{x}' - \overset{k}{x})}_{\neq 0}, \text{ avec } 0 < \tilde\mu \leq 1,$$

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} E_{\bar k} \subset E_k \Longrightarrow V_{E_k} \subset V_{E_{\bar k}} \\ \overset{k}{x} \in V_{E_k} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{k}{x} \in V_{E_{\bar k}} \\
\overset{\bar k}{x}' \text{ minimise } q(x) \text{ sur } V_{E_{\bar k}} \\
\overset{\bar k}{x}' \neq \overset{k}{x} \\
q(x), \text{ strictement convexe}
\end{array}\right\} \Longrightarrow q(\overset{\bar k}{x}') < q(\overset{k}{x}) \\
\left.\begin{array}{l}
\overset{k+1}{x} = \overset{k}{x} + \tilde\mu(\overset{\bar k}{x}' - \overset{k}{x}) \\
0 < \tilde\mu \leq 1 \\
q(x), \text{ convexe}
\end{array}\right\} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l}
q(\overset{k+1}{x}) \leq \tilde\mu q(\overset{\bar k}{x}') + (1-\tilde\mu) q(\overset{k}{x}) \\
0 < \tilde\mu \leq 1
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \Longrightarrow q(\overset{k+1}{x}) < q(\overset{k}{x})$$

On a donc montré que dans les deux situations possibles (i) et ii)) on a $q(\overset{k+1}{x}) < q(\overset{k}{x})$.

B) Convergence finie du sous-algorithme S.A.(G.P.)

Les différentes étapes k se classent en deux groupes caractérisés par :

i) $\overset{k}{x}' \neq \overset{k}{x}$

ii) $\overset{k}{x}' = \overset{k}{x}$

Une séquence composée uniquement d'itérations du premier groupe ne peut pas être infiniment longue. En fait, une séquence d'itérations telles que $\overset{k}{x}{}' \neq \overset{k}{x}$ et $\overset{k}{x}{}' \neq \overset{k+1}{x}$ (i.e $\overset{k}{x}{}' \notin K[p+1]$) ne peut pas être infiniment longue car à chaque itération au moins une contrainte active nouvelle s'ajoute à E_k et $\mathrm{Card}(E_k) \leq n$, car le polyèdre $K[p+1]$ est régulier. D'autre part, si à l'itération k l'on a $\overset{k}{x}{}' \neq \overset{k}{x}$ et $\overset{k}{x}{}' = \overset{k+1}{x}$ on est assuré d'avoir $\overset{k+1}{x}{}' = \overset{k+1}{x}$ (en effet on a $E_{k+1} \supset E_k$, et $\overset{k}{x}{}'$ ($\overset{k}{x}{}' \in V_{E_{k+1}}$) qui minimise $q(x)$ sur V_{E_k}, minimise donc $q(x)$ sur $V_{E_{k+1}}$ (car $V_{E_{k+1}} \subset V_{E_k}$) et l'on a $\overset{k}{x}{}' = \overset{k+1}{x}{}'$).

Par ailleurs, dans une itération du second groupe on a un point $\overset{k}{x}$ qui minimise $q(x)$ sur V_{E_k}. Si $\overset{k}{x} \neq \overset{[p+1]}{x}$ (i.e. si $\overset{k}{x}$ n'est pas la solution optimale du sous-programme $1)_{L[p+1]}$) on est assuré de déterminer $\overset{k+1}{x}$ tel que $q(\overset{k+1}{x}) < q(\overset{k}{x})$. Par conséquent, puisque la fonction $q(x)$ est diminuée strictement après chaque itération, on ne pourra plus retrouver la variété V_{E_k} au cours des itérations ultérieures du sous-algorithme. Le nombre de variétés V_{E_k} envisageables étant fini, les itérations seront toutes du premier groupe à partir d'un certain rang $\tilde{k}$, ce qui implique que le sous-algorithme est à convergence finie. Finalement, la définition de l'ensemble solution de cardinalité minimale $\hat{S}[p+1]$ résulte du lemme 3 et de la remarque 6.

Remarque 4(A) : a) le sous-algorithme S.A.(G.P.) pour déterminer la solution optimale du programme $1)_{L[p+1]}$ est en fait une méthode de gradient projeté pour déterminer cette solution. Concrètement, dans la partie 2) du sous-algorithme, on minimise la forme quadratique $q(x)$, sous les contraintes du programme $1)_{L[p+1]}$, dans la demi-droite $\overset{k}{x} + \lambda \overset{k}{d}$ $(\lambda \geq 0)$ dans V_{E_k}, où

$$\overset{k}{d} = \overset{k}{x}{}' - \overset{k}{x} = (\overset{\Phi}{x} - \overset{k}{x}) + Q^{-1} A^T_{E_k} (A_{E_k} Q^{-1} A^T_{E_k})^{-1} A_{E_k} (\overset{k}{x} - \overset{\Phi}{x})$$

i.e. $\overset{k}{d} = -[I - Q^{-1} A^T_{E_k} (A_{E_k} Q^{-1} A^T_{E_k})^{-1} A_{E_k}] \, Q^{-1} \nabla q(\overset{k}{x})$, car $\overset{k}{x} - \overset{\Phi}{x} = Q^{-1} \nabla q(\overset{k}{x})$.

Par conséquent, dans le cas où $Q = I$ (resp. $Q \neq I$) le sous-algorithme S.A. (G.P.) est en fait une particularisation de la Méthode de Gradient Projeté de Rosen [5] (resp. de la Méthode de Goldfarb [3]) pour la détermination du minimum ${}^{[p+1]}x$ du sous-programme quadratique convexe régulier $1)_{L_{p+1}}$. On sait que si l'on applique directement la Méthode de Rosen (resp. de Golfarb) à la détermination de la solution optimale $\hat{x}$ du programme d'origine $1)_I$, avec $Q = I$ (resp. $Q \neq I$), cette méthode converge en un nombre fini d'itérations vers $\hat{x}$, pourvu que tous les points $\overset{k}{x}$ du polyèdre K_I déterminés au cours des différentes itérations soient réguliers (i.e. vérifient la condition de régularité : $\text{rang}(A_{I_k}) = |I_k|$ où $I_k = \{i \in I \ / \ A_i \overset{k}{x} = b_i\}$).

b) L'algorithme général A (avec le sous-algorithme S.A.(G.P.)) est de nature semblable à l'algorithme de Wolfe [6] pour la projection d'un point sur un polyèdre convexe défini comme l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points.

BIBLIOGRAPHIE IV

[1] J. BOOT — *"Quadratic Programming"*, Studies in Mathematical and Managerial Economics, vol. 2, North-Holland Publishing Company, Amsterdam Rand Mc Nally and Company - Chicago.

[2] R.W. COTTLE — *"On the Convexity of Quadratic Forms over convex Sets"*, Opns. Res., vol. 15, 170-172, 1967.

[3] D. GOLDFARB — *"A conjugate gradient method for nonlinear Programming"* Doctoral Thesis, Department of Chemical Engineering, Princeton University, 1966.

[4] D. GOLDFARB — *"Extension of Davidon's Vairable Metric Method to Maximisation under Linear Inequality and Equality Constraints"*, SIAM J. App. Math., Vol 17, n°4, 739-764, 1969.

[5] J.B. ROSEN — *"The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming Part I. Linear Constraints"*, J. Soc. Indust. Appl. Math., vol. 8, n°1, 181-217, 1960.

[6] P. WOLFE — *"Finding the Nearest Point in a Polytope"*, Mathematical Programming 11, 128-149, 1976.