

50376  
1977  
182  
No d'ordre 395

50376  
1977  
182

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES  
ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

**Jacques MARCHANT**

Ingénieur I. S. E. N.




ETUDE DE PROPRIETES ELECTROMAGNETIQUES DE MILIEUX  
DE STRUCTURE ALEATOIRE DISCRETE OU CONTINUE

RELATION AVEC LES PHENOMENES DE PERCOLATION ET  
APPLICATION A L'ETUDE DES MILIEUX POREUX



Soutenue le 23 septembre 1977 devant la COMMISSION D'EXAMEN

PRESIDENT : M. P. GRIVET  
EXAMINATEURS : MM. R. GABILLARD  
G. MATHERON  
G. SALMER  
J. FONTAINE  
F. LOUAGE

B.U. LILLE 1  
  
D 030 119798 3

ETUDE DE PROPRIETES ELECTROMAGNETIQUES  
DE MILIEUX DE STRUCTURE ALEATOIRE  
DISCRETE OU CONTINUE

---

RELATION AVEC LES  
PHENOMENES DE PERCOLATION  
ET APPLICATION A L'ETUDE DES  
MILIEUX POREUX

## REMERCIEMENTS

C'est à Monsieur le Professeur GABILLARD que je dois mon initiation à la recherche.

C'est encore à lui que je dois l'impulsion de départ qui m'a permis d'orienter ce travail vers l'investigation électromagnétique des milieux poreux.

Je lui suis particulièrement reconnaissant d'avoir continué à s'intéresser à ce travail alors que les conditions d'éloignement rendaient difficile tout contact suivi.

Monsieur le Professeur GRIVET m'a fait l'honneur de participer à ce jury.

Je lui en suis extrêmement reconnaissant et le remercie particulièrement pour les conseils qu'il m'a prodigués, qui m'ont permis de ramener ce travail à un volume raisonnable.

Il m'est très agréable de remercier ici Monsieur le Professeur MATHERON pour l'intérêt tout particulier qu'il a manifesté pour ce travail, pour les remarques constructives qu'il a pu me faire, et pour la compréhension qu'il m'a témoignée.

Monsieur le Professeur SALMER a accepté de participer à ce jury et m'a apporté son amical soutien. Qu'il en soit ici remercié.

Monsieur le Professeur FONTAINE m'a prodigué tout au long de ce travail ses encouragements et son attention et m'a ainsi aidé à atteindre le terme de ce travail. Je l'en remercie très sincèrement.

Je remercie également le Professeur BAUDET qui, m'ayant accueilli au Laboratoire de Physique de l'Université d'Abidjan m'a assuré les conditions matérielles propices à ce travail de recherche.

De même, je remercie tous mes collègues et le personnel du Laboratoire de Physique pour l'ambiance chaleureuse qu'ils savent y faire régner.

Je remercie enfin Madame STECK dont la compétence et la gentillesse ont grandement facilité la réalisation matérielle de cette thèse et Monsieur AKA qui en a réalisé avec soin les illustrations.

J. M.

# S O M M A I R E

---

## INTRODUCTION

### PREMIERE PARTIE : PRINCIPE DE MOINDRE ACTION ET CALCUL DES COEFFICIENTS PHENOMENOLOGIQUES DES PHENOMENES DE TRANSPORT

#### I.1.- GENERALITES - PRINCIPE DE MOINDRE PRODUCTION D'ENTROPIE

I.1.1.- Cas d'un milieu homogène

I.1.2.- Cas d'un milieu hétérogène

I.1.2.1.- Puissance dissipée quand le flux est conservatif  
et la force irrotationnelle

I.1.2.2.- Conditions aux limites imposées par le générateur

I.1.3.- Exemples de phénomènes physiques régis par les principes  
de moindre production d'entropie

#### I.2.- APPLICATION AUX PHENOMENES DE TRANSPORT ELECTRIQUE

#### I.3.- RELATION ENTRE L'APPROXIMATION SUR LES DISTRIBUTIONS DE PO.ENTIEL ET L'ERREUR RESULTANTE SUR LA RESISTANCE MACROSCOPIQUE

### DEUXIEME PARTIE : ETUDE DES RESEAUX DE RESISTANCE

#### II.1.- DEFINITIONS

#### II.2.- CONSTRUCTION DE RESEAUX DE STRUCTURE ALEATOIRE

II.2.1.- Réseaux de structure régulière

II.2.2.- Réseaux de structure aléatoire

#### II.3.- APPLICATION DES PRINCIPES DE MOINDRE PRODUCTION D'ENTROPIE AUX RESEAUX DE RESISTANCES

#### II.4.- ETUDE D'UN RESEAU DE STRUCTURE ALEATOIRE A RESISTANCES IDENTIQUES

II.4.1.- Utilisation d'un plan de coupe

II.4.2.- Utilisation d'un chemin entre les faces extrêmes

II.5.- EXPRESSIONS GEOMETRIQUES DE  $\langle m \rangle$  ET  $\langle n \rangle$

II.6.- RELATION ENTRE LA RESISTANCE EQUIVALENTE ET LE DEGRE MOYEN  
D'UN RESEAU

II.7.- ETUDE DE RESEAUX DE STRUCTURE REGULIERE A RESISTANCES ALEATOIRES

II.7.1.- Réseau de résistances en série mises en parallèle

II.7.2.- Réseau de résistances en parallèle mises en série

II.7.3.- Réseau planaire de structure carrée de résistances  
aléatoires

II.8.- ETUDE D'UN RESEAU DE STRUCTURE ALEATOIRE "CARREE EN MOYENNE" COMPOSE  
DE RESISTANCES ALEATOIRES

II.9.- APPLICATION DE LA THEORIE DES GRAPHES AUX RESEAUX ALEATOIRES  
DE RESISTANCES

II.9.1.- Introduction

II.9.2.- Théorie statistique des graphes appliquée aux réseaux  
aléatoires de résistances

II.9.3.- Réseaux se composant de résistances identiques

II.9.3.1.- Réseaux réguliers

II.9.3.2.- Réseaux de structure aléatoire

II.9.4.- Réseaux composés de résistances aléatoires

II.9.4.1.- Procédé d'évaluation de la valeur moyenne des  
arbres du graphe

II.9.4.2.- Distribution binaire des résistances

II.9.4.3.- Distribution quelconque des résistances

II.9.5.- Conclusion

II.10.- LA THEORIE DU MILIEU EFFECTIF

II.10.1.- La théorie de BRUGGEMAN

II.10.2.- Application de la théorie du milieu effectif à un  
réseau régulier

II.10.3.- Application de la théorie du milieu effectif à des  
réseaux de structure irrégulière

II.10.4.- Application de la théorie du milieu effectif à un  
réseau de degré moyen égal à 4

II.10.5.- Relation entre la théorie du milieu effectif et la  
théorie des arbres

## II.11.- VERIFICATIONS EXPERIMENTALES

- II.11.1.- Réseaux réguliers de résistances identiques -  
Résultats exacts et approchés
  - II.11.1.1.- Le réseau de structure carrée
  - II.11.1.2.- Le réseau de structure hexagonale -  
Résultats exacts
  - II.11.1.3.- Le réseau de structure triangulaire -  
Résultats exacts
  - II.11.1.4.- Réseau hexagonal - Résultats approchés
  - II.11.1.5.- Réseau triangulaire - Résultats approchés
- II.11.2.- Etude analogique d'un réseau irrégulier de petite taille
- II.11.3.- Etude analogique de réseaux de grande taille
  
- II.11.4.- Etude sur ordinateur de grands réseaux par  
méthode de Monte-Carlo
  - II.11.4.1.- Les calculs de RINK et SCHOPPER
  - II.11.4.2.- Les calculs de KIRKPATRICK

## II.12.- CONCLUSION DE LA SECONDE PARTIE

## TROISIEME PARTIE : APPLICATION AUX MILIEUX POREUX DE RESULTATS OBTENUS SUR DES RESEAUX

### III.1.- PROBLEMES MACROSCOPIQUES

### III.2.- PROBLEMES MICROSCOPIQUES

- III.2.1.- Synthèse des travaux antérieurs
- III.2.2.- Etude des courbes de pression capillaire en drainage
  - III.2.2.1.- Représentation sous forme de réseau du milieu poreux
  - III.2.2.2.- Les conditions d'entrée du fluide déplaçant
  - III.2.2.3.- Les conditions de sortie du fluide déplacé
  - III.2.2.4.- Pressions inférieures à la pression de percolation
  - III.2.2.5.- Pressions supérieures à la pression de percolation
- III.2.3.- Etude des courbes de pression capillaire en imbibition
  - III.2.3.1.- Courbes d'injection de mercure
  - III.2.3.2.- Courbes de pression capillaire utilisant un fluide mouillant incompressible

QUATRIEME PARTIE : ETUDE DES RELATIONS ENTRE LES PROPRIETES HYDRAULIQUES ET  
LES PROPRIETES ELECTRIQUES DES MILIEUX POREUX - APPLICA-  
TION A UNE METHODE DE DIAGRAPHIE DE PERMEABILITE.

IV.1.- LA LOI DE DARCY

- IV.1.1.- Conductivité hydraulique, perméabilité
- IV.1.2.- Unités de perméabilité
- IV.1.3.- Expression différentielle de la loi de DARCY
- IV.1.4.- Limitations de la loi de DARCY
- IV.1.5.- Analogie entre la loi de DARCY et la loi d'OHM
- IV.1.6.- Les bases théoriques de la loi de DARCY

IV.2.- LES EQUATIONS MICROSCOPIQUES DANS LES MILIEUX POREUX

- IV.2.1.- Les équations électriques
- IV.2.2.- Les équations hydrauliques

IV.3.- L'ANALOGIE MAGNETOSTATIQUE DES EQUATIONS MICROSCOPIQUES  
DE CIRCULATION D'UN FLUIDE VISQUEUX

- IV.3.1.- Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  de l'électromagnétisme
- IV.3.2.- Calcul du potentiel vecteur dans un cylindre indéfini
- IV.3.3.- Application de l'analogie magnétostatique à un  
cylindre circulaire - Loi de POISEUILLE
- IV.3.4.- Relation entre coefficient de self induction et  
flux du potentiel vecteur

IV.4.- L'ANALOGIE MAGNETODYNAMIQUE

- IV.4.1.- L'analogie magnétodynamique microscopique
- IV.4.2.- L'analogie magnétodynamique macroscopique
- IV.4.3.- Obtention de la perméabilité  $k$  à l'aide des deux  
analogies

IV.5.- PROJET D'UNE METHODE DE DIAGRAPHIE ELECTRIQUE DE PERMEABILITE  
HYDRAULIQUE

IV.6.- CONCLUSION DE LA CINQUIEME PARTIE

CONCLUSION GENERALE



## ANNEXES

ANNEXE 1.- PRINCIPES D'ERGODICITE

ANNEXE 2.- PROBABILITES GEOMETRIQUES

ANNEXE 3.- MOYENNES ARITHMETIQUES, GEOMETRIQUES, HARMONIQUES

ANNEXE 4.- THEORIE DES GRAPHES APPLIQUEE AUX RESEAUX  
ELECTRIQUES

ANNEXE 5.- DISTRIBUTIONS HYPERGEOMETRIQUES

ANNEXE 6.- LOI DE DISTRIBUTION "LOG-UNIFORME"

ANNEXE 7.- STRUCTURE INTERNE DES MILIEUX POREUX - COURBES DE  
PRESSION CAPILLAIRE ET D'INJECTION DE MERCURE

ANNEXE 8.- PHENOMENES DE PERCOLATION

ANNEXE 9.- CHARGE MOTRICE, PRESSION MOTRICE

## BIBLIOGRAPHIE

## INTRODUCTION

---

Ce travail est une contribution à l'étude des milieux de structure aléatoire.

Nous avons voulu essayer de jeter un regard neuf sur les milieux de structure aléatoire envisagés du point de vue de leurs rapports avec l'électromagnétisme et la mécanique des fluides.

Notre premier intérêt, qui fut le point de départ de cette thèse, était l'étude des milieux poreux et en particulier de leur résistivité et de leur perméabilité hydraulique avec comme but final la conception d'une sonde de diagraphie permettant la mesure in situ de la perméabilité des roches traversées par un forage pétrolier.

L'énorme littérature consacrée aux milieux poreux et à leur perméabilité nous a montré que si le sujet n'était pas neuf, il était loin d'être épuisé puisque chaque année, de nouveaux auteurs venaient apporter une pierre à l'édifice, retirant au besoin celles que leurs prédécesseurs avaient posées.

La diversité des approches dans l'étude des milieux poreux en particulier et des milieux de structure aléatoire en général provient du large éventail des utilisateurs potentiels : géophysiciens, géologues, hydrogéologues, pétroliers, agronomes, céramistes, chimistes, physiciens du solide, thermiciens, spécialistes de la pollution.... et cette liste est loin d'être limitative.

Chacun de ces utilisateurs a, en général, en fonction de son centre d'intérêt, introduit ses propres grandeurs, ses propres unités et a établi ses propres formules, empiriques, de précision suffisante pour l'usage qu'il en fait : il semble aussi ignorer tout de la littérature et des théories employées dans les branches voisines.

En essayant de faire la synthèse des résultats épars dans toutes ces littératures, nous avons découvert à plusieurs reprises que certains résultats bien établis et utilisés dans certains domaines étaient inconnus dans d'autres ou commençaient à peine à être redécouverts alors que la transposition pure et simple était souvent possible d'un domaine dans l'autre.

De l'ensemble de cette littérature se dégage l'un des buts principaux de l'étude des milieux poreux : déduire les propriétés macroscopiques du milieu de ses propriétés microscopiques. Ceci se concrétise par le calcul ou la mesure de coefficients macroscopiques caractérisant pour les besoins technologiques les propriétés globales des milieux : résistivité électrique, conductivité thermique, perméabilité hydraulique, constante diélectrique, perméabilité magnétique..... etc.

Pour la technologie, la recherche des relations pouvant être établies entre ces coefficients et la structure microscopique du matériau ou entre coefficients caractérisant diverses propriétés du même matériau est de première importance : elle peut en effet donner lieu à des applications aussi utiles que l'amélioration du rendement d'exploitation des gisements pétrolifères ou la découverte de nouveaux matériaux isolants thermiques ou acoustiques.

Mathématiquement, tout ce qui suit peut se ramener à la recherche d'une moyenne spatiale des solutions de l'équation de Laplace ou de l'équation de Poisson dans un milieu de structure aléatoire statistiquement homogène et isotrope soumis à un gradient macroscopique de potentiel.

La simplicité apparente de l'énoncé du problème posé ne doit pas faire oublier qu'il n'a jamais été résolu théoriquement et il est fort possible qu'aucune solution exacte n'en existe. L'une des difficultés, et non la moindre, est qu'une multitude de paramètres peuvent servir à définir le milieu aléatoire, parmi tous ceux-là seuls certains sont d'une utilité pour le problème posé, et à priori il n'est nullement évident de choisir ceux-ci parmi ceux-là.

Le problème posé ayant forcément une solution physique puisque les isolants thermiques hétérogènes isolent, que les conducteurs électriques formés de grains comprimés conduisent bien l'électricité et obéissent apparemment à la loi d'Ohm, nous avons délibérément choisi le point de vue du physicien et non celui du mathématicien c'est-à-dire que nous avons, par exemple, utilisé des principes d'ergodicité, là où ils nous semblaient utiles, sans démontrer que les passages à la limite étaient licites. Nous avons supposé qu'il existait des milieux "statistiquement" homogènes et qu'ils pouvaient devenir de dimensions infinies, de façon à utiliser les principes d'ergodicité.

Comme pour tous les problèmes mathématiques ou physiques ardu, ce sont des solutions approximatives qui apparaissent en premier. Nous ne faisons pas exception à cette règle mais dans certains cas particuliers nous avons établi des résultats théoriques nouveaux que nous croyons exacts. Dans le cas général nous avons montré qu'il était possible d'encadrer le résultat exact par des solutions approximatives.

De la diversité des origines scientifiques des auteurs traitant de milieux aléatoires découle une grande diversité de méthodes d'approche et de formalismes utilisés : nous avons repris certaines théories existantes en les approfondissant ou en les améliorant, mais la diversité des modes d'approche utilisés risque de disperser l'attention du lecteur aussi avons-nous regroupé, quand c'était possible, en annexe, les notions nécessaires à la compréhension des théories utilisées.

Enfin ne perdant pas de vue l'étude des milieux poreux et de leur perméabilité, nous donnerons finalement les principes permettant de concevoir une méthode de mesure in situ de la perméabilité d'un forage.

Cette méthode nouvelle devra faire l'objet de recherches technologiques que nous n'avons pas entreprises, qui permettront de vérifier son bien fondé et de déterminer ses possibilités d'exploitation.

L'ensemble de ce travail, s'il ouvre beaucoup de portes (et de directions de recherches futures) n'en ferme que quelques unes, c'est-à-dire n'aboutit qu'à un nombre limité de résultats rigoureux. Mais nous pensons que les autres résultats que nous avons obtenus par des approximations plus ou moins larges n'en sont pas moins utilisables. Si l'on songe que MAXWELL en 1887 avait déjà commencé à étudier l'électromagnétisme dans des milieux aléatoires et que les progrès depuis cette date n'ont été que lents et partiels, nous pensons qu'il est normal que notre travail n'ait pas résolu tous les problèmes mais qu'il constitue néanmoins une étape importante vers leur solution.

PREMIERE PARTIE

---

PRINCIPES DE MOINDRE ACTION  
ET  
CALCUL DES COEFFICIENTS PHENOMENOLOGIQUES  
DES PHENOMENES DE TRANSPORT

## I.1. GENERALITES - PRINCIPE DE MOINDRE PRODUCTION D'ENTROPIE

Les principes de moindre action permettent d'expliquer une bonne partie des phénomènes physiques.

Les principes de la thermodynamique des phénomènes irréversibles appliqués aux phénomènes de transport conduisent à définir des "forces" généralisées  $\vec{X}$  et des "flux" généralisés  $\vec{J}$  que relie un coefficient phénoménologique  $L$  (DE GROOT [1]).

$$\vec{J} = L \vec{X} \quad (1.1)$$

Cette formule définit une relation entre  $\vec{J}$  et  $\vec{X}$  à l'échelle des phénomènes étudiés, c'est-à-dire qu'elle peut aussi bien s'appliquer à des phénomènes microscopiques qu'à des phénomènes macroscopiques observables expérimentalement.

Une production d'entropie  $s$  par unité de volume et par unité de temps résulte de la présence simultanée d'un flux  $\vec{J}$  et d'une force  $\vec{X}$  au sein du milieu matériel :

$$s = \vec{J} \cdot \vec{X} = L \vec{X} \cdot \vec{X} = \frac{\vec{J} \cdot \vec{J}}{L} \quad (1.2)$$

La présence en un point du milieu, d'un flux  $\vec{J}$  et d'une force  $\vec{X}$  ne peut se concevoir que si le milieu est relié à un "générateur" c'est-à-dire si une force externe ou un flux externe lui est imposé sur certaines frontières.

Dans un élément de volume  $dv$  suffisamment petit pour que flux et forces y soient considérés comme constants, l'énergie dissipée par unité de temps, c'est-à-dire la puissance est :

$$dP = s \, dv = \vec{J} \cdot \vec{X} \, dv = L \vec{X}^2 \, dv = \frac{\vec{J}^2}{L} \, dv \quad (1.3)$$

Dans le volume  $v$ , la puissance totale dissipée est alors :

$$P = S v = \int_v s \, dv = \int_v \vec{J} \cdot \vec{X} \, dv = \int_v L \vec{X}^2 \, dv = \int_v \frac{\vec{J}^2}{L} \, dv \quad (1.4)$$

Le principe de moindre action consiste ici à dire, que, en état permanent, la production d'entropie totale  $S$  dans le système est minimum.

Ceci signifie que, les conditions extérieures étant précisées, c'est-à-dire la façon dont le système est connecté au "générateur", les flux ou les forces s'ajustent à l'intérieur du système, pour que la production totale d'entropie soit minimum.

### I.1.1. Cas d'un milieu homogène

Si le milieu matériel, siège d'un phénomène de transport, est homogène c'est-à-dire si le coefficient phénoménologique caractérisant le milieu est constant en tout point, (1.4) s'écrit :

$$P = Sv = L \int_V \vec{X}^2 dv = \frac{1}{L} \int_V \vec{J}^2 dv \quad (1.5)$$

Il est ici indifférent de dire que ce sont les flux internes plutôt que les forces internes qui se répartissent pour que la puissance soit minimum puisque flux et force, en tout point sont reliés par le facteur constant L.

Nous allons voir dans ce qui suit, qu'il n'en est plus de même si le milieu n'est plus homogène, et qu'il faut préciser la façon dont il est connecté au "générateur".

### I.1.2. Cas d'un milieu hétérogène

Par milieu hétérogène, nous entendons un milieu dont le coefficient phénoménologique L est une fonction de point L(x, y, z).

Nous supposons que le milieu occupe un cube connecté au "générateur" par deux faces opposées, et que sur les faces latérales, non connectées au générateur, le vecteur "flux" est tangent en tout point à la surface ; c'est-à-dire qu'aucun "flux" ne peut traverser les faces latérales.

#### I.1.2.1. Puissance dissipée quand le flux est conservatif et la force irrotationnelle

Dans la plupart des phénomènes physiques rencontrés, le "flux"  $\vec{J}$  est une grandeur conservative :

$$\text{div } \vec{J} = 0$$

(1.6)



Supposons également, que la grandeur "force"  $\vec{X}$  soit irrotationnelle c'est-à-dire qu'elle dérive d'un potentiel scalaire  $\varphi$  :

$$\text{rot } \vec{X} = 0 \quad \vec{X} = - \text{grad } \varphi \quad (1.7)$$

La puissance dissipée dans le milieu s'écrit alors :

$$P = \int_V \vec{J} \cdot \vec{X} \, dv = - \int_V \vec{J} \cdot \text{grad } \varphi \, dv \quad (1.8.)$$

et en utilisant l'identité :

$$\text{div} (\varphi \vec{J}) = \text{div } \vec{J} + \text{grad } \varphi \cdot \vec{J}$$

et la relation (1.6), (1.8) devient, en utilisant le théorème de Gauss :

$$P = - \int_V \text{div} (\varphi \vec{J}) \, dv = - \int_S \varphi \vec{J} \cdot \vec{ds} \quad (1.9.)$$

où  $S$  est la surface externe du volume  $v$  cubique.

En désignant par  $S_1$  et  $S_2$  les surfaces terminales connectées au générateur et par  $S_L$  la surface latérale (1.9) s'écrit :

$$P = - \int_{S_1} \varphi \vec{J} \cdot \vec{ds} - \int_{S_2} \varphi \vec{J} \cdot \vec{ds} - \int_{S_L} \varphi \vec{J} \cdot \vec{ds}$$

Comme sur  $S_L$  le flux  $\vec{J}$  est orthogonal au vecteur surface  $\vec{ds}$ , la troisième intégrale s'annule et il vient :

$$P = - \int_{S_1} \varphi \vec{J} \cdot \vec{ds} - \int_{S_2} \varphi \vec{J} \cdot \vec{ds} \quad (1.10)$$

### I.1.2.2. Conditions aux limites imposées par le générateur

On peut concevoir deux types de "générateurs" connectés au milieu :

- a) Un générateur qui impose des potentiels constants sur les surfaces  $S_1$  et  $S_2$

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_{10} \text{ sur } S_1 \\ \varphi &= \varphi_{20} \text{ sur } S_2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

- b) Un générateur qui impose la valeur  $I_0$  de l'intégrale du "flux" sur les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  (il faudrait dire flux du "flux")

$$\int_{S_1} \vec{J} \cdot \vec{ds} = - \int_{S_2} \vec{J} \cdot \vec{ds} = I_0 \quad (1.12)$$

REMARQUE

Les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont orientées en sens inverse, ce qui entraîne la présence du signe - dans la seconde intégrale. L'égalité des deux intégrales résulte du fait que le flux est conservatif.

Voyons ce que deviennent la puissance et le principe du minimum d'entropie dans chacun de ces cas.

Dans le cas -a- la puissance (1.10) s'écrit :

$$P = -\varphi_{10} \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{s} - \varphi_{20} \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (1.13)$$

Puisque le flux est conservatif on a d'après le théorème de Gauss :

$$\int_V \operatorname{div} \vec{J} \, dv = 0 = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

D'où on tire :

$$\int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (1.14)$$

et (1.13) s'écrit finalement :

$$P = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) \int_{S_1} L \vec{X} \cdot d\vec{S} \quad (1.15)$$

La différence des potentiels  $(\varphi_{20} - \varphi_{10})$  est ici une constante imposée par le générateur.

Tout plan  $i$  qui coupe le cube parallèlement aux faces externes délimite une surface  $S_i$  égale à  $S_1$  et  $S_2$  et puisque le flux est conservatif, on a en orientant  $S_i$  comme  $S_1$

$$\int_{S_i} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{P}{(\varphi_{20} - \varphi_{10})} \quad (1.16)$$

Minimiser la puissance  $P$  revient à minimiser les intégrales étendues à tout plan de coupe, mais on a =

$$\int_{S_i} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{S_i} L \vec{X} \cdot d\vec{S}$$

c'est-à-dire que sur tout élément de surface où  $L$  est imposé il faudra que ce soit  $\vec{X}$  qui soit minimum.

On en conclut :

*Dans un matériau hétérogène où le coefficient phénoménologique  $L$  est une fonction de point, ce sont les forces internes  $\vec{X}$  qui s'ajustent pour minimiser la puissance produite quand le système est connecté à un "générateur de potentiel".*

Examinons maintenant le second cas qui est celui du générateur qui impose la grandeur  $I$ , définie en (1.12) et que nous appellerons "générateur de courant".

Par suite du caractère conservatif du vecteur "flux", on peut encore écrire pour toute surface interne  $S_i$  de forme quelconque coupant les faces latérales du cube :

$$\int_{S_i} \vec{J} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{J} d\vec{S} = I. \quad (1.17)$$

L'équation (1.10) est toujours valable :

$$P = - \int_{S_1} \varphi \vec{J} d\vec{S} - \int_{S_2} \varphi \vec{J} d\vec{S} \quad (1.10)$$

Comme les faces terminales du cube constituent des surfaces équipotentielles aux potentiels  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , on peut écrire d'après (1.10) et (1.12) :

$$P = (\varphi_2 - \varphi_1) \int_{S_1} \vec{J} d\vec{S} = (\varphi_2 - \varphi_1) I. \quad (1.18)$$

La différence de potentiel  $\varphi_2 - \varphi_1$  est égale à la circulation du vecteur  $\vec{X}$ , irrotationnel de la face 1 à la face 2 et elle ne dépend pas du chemin suivi :

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \oint_{\Gamma} \vec{X} d\vec{l} = \int_{\Gamma} L^{-1} \vec{J} d\vec{l} \quad (1.19)$$

Dans la formule (1.18) le terme  $I_0$  étant imposé par le générateur, la minimisation de  $P$  se fera en minimisant  $\varphi_2 - \varphi_1$  et d'après l'intégrale (1.19) on voit que, quelque soit le trajet  $\Gamma$  suivi de  $S_1$  à  $S_2$ , puisque les coefficients phénoménologiques locaux  $L^{-1}$  sont fixés par la structure du milieu, c'est le vecteur flux  $\vec{J}$  qui doit être minimum en tous points. On en conclut donc :

*Dans un milieu hétérogène dont le coefficient phénoménologique  $L^{-1}$  est une fonction de point, ce sont les flux internes  $\vec{J}$  qui s'ajustent pour minimiser la puissance produite quand le système est connecté à un "générateur de courant".*

**REMARQUE** : Pour un milieu homogène, on peut sortir le coefficient  $L$  des intégrales :

$$P = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) \cdot L \cdot \int_{S_1} \vec{X} d\vec{s}$$

$$P = I_0 \cdot L^{-1} \oint_{\Gamma} \vec{J} d\vec{l}$$

Il est alors indifférent de dire que ce sont les flux où les forces internes qui s'ajustent.

**I.1.3. Exemples de phénomènes physiques régis par les principes de moindre production d'entropie.**

Nous donnons ci-dessous sous forme de tableau, quelques phénomènes physiques en régime permanent susceptibles de bénéficier du traitement précédent. Les grandeurs homologues se situent dans les mêmes colonnes.

"Force"	Potentiel	"Flux"	Flux du "Flux"	Coefficient phénoménologique	Nom de la loi physique
$\vec{X}$	$\psi$	$\vec{J}$	$\iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$	L	Formulation générale thermodynamique irréversible.
$\vec{E}$ champ électrique	V potentiel électrique	$\vec{i}$ densité du courant	$I = \iint Ids$ courant	$\sigma$ conductivité électrique	Loi d'Ohm
$\vec{E}$ champ électrique	V potentiel électrique	$\vec{D}$ induction électrique		$\epsilon$ permittivité diélectrique	équations de Maxwell de l'électrostatique
$\vec{H}$ champ magnétique	$\vec{v}$ potentiel scalaire magnétique	$\vec{B}$ induction magnétique	$\varphi = \iint Bds$ flux magnétique	$\mu$ perméabilité magnétique	équations de Maxwell de la magnétostatique
$\vec{\text{grad}} T$ gradient de température	T température	$\vec{J}$ vitesse du flux de chaleur	$Q = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$ flux de chaleur	$\lambda$ conductivité thermique	Loi de Fourier
$\vec{\text{grad}} C$ gradient de concentration	C concentration	$\vec{J}$ vitesse du flux de masse	$\iint \vec{J} \cdot d\vec{s}$ flux de masse	D coefficient de diffusion	Loi de Fick
$\vec{\text{grad}} v$ gradient de vitesse	v vitesse	$\tau$ contrainte tangentielle de cisaillement		$\eta$ viscosité	Loi de Newton
$\vec{\text{grad}} x = \frac{dx}{dl}$ tension	x déplacement	$\sigma$ contrainte		1/E module d'Young	Loi de Hooke
$\vec{\text{grad}} P$ gradient de pression	P pression	$\vec{u}$ vitesse de filtration	$Q = \iint \vec{u} \cdot d\vec{s}$ débit volumique	K perméabilité	Loi de Darcy



## 1.2. APPLICATION AUX PHENOMENES DE TRANSPORT ELECTRIQUE

Pour les phénomènes de transport électrique, le flux  $\vec{J}$  est représenté par la densité de courant  $\vec{i}$ , la force  $\vec{X}$  par le champ électrique  $\vec{E}$ , le potentiel  $\varphi$  est le potentiel électrique  $\varphi^{(2)}$  et le coefficient phénoménologique est la conductivité  $\sigma$ .

Les équations (1.1) à (1.4) deviennent ici :

$$\vec{i} = \sigma \vec{E} \quad \vec{E} = - \text{grad } \varphi \quad (1.20)$$

$$\vec{i} = - \sigma \text{grad } \varphi$$

$$s = \vec{i} \cdot \vec{E} = \sigma \vec{E}^2 = \frac{i^2}{\sigma} \quad (1.21)$$

$$P = Sv = \int_V \vec{i} \cdot \vec{E} \, dv = \int_V \sigma \vec{E}^2 \, dv = \int_V \frac{i^2}{\sigma} \, dv \quad (1.22)$$

Cependant il y a une symétrie parfaite au niveau des formules entre  $\vec{i}$  et  $\vec{E}$  si on introduit comme coefficient phénoménologique la résistivité  $\rho = 1/\sigma$  au lieu de  $\sigma$ .

$$\vec{E} = \rho \vec{i} \quad \vec{I} = \int_S \vec{i} \, ds \quad (1.23)$$

$$s = \vec{E} \cdot \vec{i} = \rho i^2 = \sigma \vec{E}^2 \quad (1.24)$$

$$P = \int_V \vec{E} \cdot \vec{i} \, dv = \int_V \rho i^2 \, dv = \int_V \frac{\vec{E}^2}{\rho} \, dv \quad (1.25)$$

Si on connecte le système à un générateur de courant, on sait d'après ce qui précède que les densités de courant  $\vec{i}$  se répartiront à l'intérieur pour minimiser la puissance  $P$ . Si on connecte le système à un générateur de tension, on sait de même que ce sont les champs électriques internes qui vont s'ajuster pour minimiser  $P$ .

Considérons alors un milieu de conductivité inhomogène dont la conductivité et la résistivité microscopique sont des fonctions  $\sigma = \sigma(x, y, z)$  ;  $\rho = \rho(x, y, z) = \sigma^{-1}(x, y, z)$ , et dont la conductance macroscopique est  $G$  et la résistance macroscopique est  $R = G^{-1}$ .

Si on maintient une différence de potentiel constante  $V_0$  aux bornes de ce milieu la puissance dissipée est :

$$P = G V_0^2 = V_0^2/R \quad (1.26)$$

et en écrivant cette puissance en fonction des champs internes à minimiser dans ce cas on obtient :

$$G = \frac{P}{V_0^2} = \frac{\int_V \vec{E}^2 \sigma \, dv}{V_0^2} = \frac{\int_V \text{grad}^2 \varphi \, \sigma \, dv}{V_0^2} \quad (1.27)$$

(2) Nous gardons  $\varphi$  pour le potentiel électrique pour qu'il n'y ait pas de confusion possible avec la force électromotrice  $V$  du générateur.

Si on alimente le milieu par un générateur de courant  $I_0$ , la puissance dissipée est :

et en exprimant cette puissance en fonction des densités de courant internes à minimiser, on obtient :

$$R = \frac{P}{I_0^2} = \frac{\int_V \vec{i}^2 \rho \, dv}{I_0^2} \quad (1.29)$$

Le calcul de  $G$  selon la formule (1.27) nécessite de connaître parfaitement la répartition du potentiel  $\varphi$  dans le système de volume  $v$  (ou celle du champ  $\vec{E}$ ) mais, en général, le calcul de la répartition exacte de  $\varphi$  ou  $\vec{E}$  demande un travail tellement considérable que l'utilisation de la formule (1.27) pour calculer la conductance macroscopique  $G$  à partir de la conductivité microscopique  $\sigma$  est impraticable. Il en est de même pour la formule (1.29).

Supposons alors qu'on ne connaisse qu'une répartition approchée  $\varphi'$  du potentiel  $\varphi$  (ou  $\vec{E}'$  du champ  $\vec{E}$ ), à l'intérieur de  $v$ , satisfaisant néanmoins aux conditions aux limites.

posons :

$$\varphi' = \varphi + f \quad \vec{E}' = \vec{E} + \vec{e} \quad G' = G + g \quad (1.30)$$

$\varphi$ ,  $\vec{E}$  et  $G$  sont les valeurs exactes du potentiel, du champ et la conductance macroscopique exacte qui en résulte.

$\varphi'$ ,  $\vec{E}'$ ,  $G'$  sont les valeurs approchées correspondantes.

$f$ ,  $\vec{e}$ ,  $g$  sont les erreurs commises sur  $\varphi$ ,  $E$  et l'erreur qui en résulte sur  $G$  en calculant  $G'$  selon la formule (1.27) avec la valeur approchée  $\varphi'$  (ou  $\vec{E}'$ ).

Le numérateur de (1.27) est l'intégrale représentant la puissance dissipée et on sait qu'elle doit être minimum pour la répartition correcte de  $\varphi$  : toute répartition incorrecte telle que  $\varphi'$  la majore et la conductance approchée  $G'$  sera supérieure à la conductance exacte  $G$ .

$$G' > G \quad g > 0 \quad (1.31)$$

On peut faire le même raisonnement avec l'autre formule (1.29) quand le milieu est connecté à un générateur de courant et qu'on minimise les densités de courant internes.

Soit  $\vec{i}$  et  $R$  la densité exacte de courant interne et la résistance macroscopique qui en résulte,  $\vec{i}'$ ,  $R'$  les valeurs approchées correspondantes,  $\vec{j}$  et  $r$  les erreurs commises en utilisant les valeurs approchées :

$$\vec{i}' = \vec{i} + \vec{j} \\ R' = R + r \quad (1.32)$$

L'intégrale de la puissance figurant au numérateur de (1.29) est minimum pour la répartition exacte de la densité de courant  $\vec{i}$  ; toute répartition incorrecte majore cette intégrale et on trouve ainsi puisque le dénominateur  $I_0^2$  est imposé :

$$R' > R \quad r > 0 \quad (1.33)$$

Mais le milieu dans lequel on a approximé cette fois la répartition des courants au lieu de la répartition des potentiels est bien le même dans les deux cas et de (1.33) on peut choisir de tirer la conductance approchée équivalente à  $R'$  :

$$G_i^{**} = \frac{1}{R'} < G = \frac{1}{R} \quad (1.34)$$

et on tire finalement de (1.31) et (1.34) :

$$\boxed{G_i^{**} < G < G_\psi} \quad (1.35)$$

en désignant par  $G_i^{**}$  la conductance approchée obtenue en approximant les densités de courant  $\vec{i}$  et par  $G_\psi$  la conductance approchée obtenue en approximant les potentiels internes .

On pourra de même écrire en posant :

$$R'_\psi = \frac{1}{G_\psi}$$

$$\boxed{R'_\psi < R < R'_i} \quad (1.36)$$

On peut tirer de ceci un théorème fort utile pour les cas où on ne sait trouver que des valeurs approchées pour  $\psi$ ,  $\vec{E}$  ou  $\vec{i}$ .

**THEOREME** : *On encadre la valeur exacte de la conductance G ou de la résistance R d'un milieu hétérogène par des valeurs approchées obtenues d'une part en approximant la distribution interne des potentiels (ou des champs) d'autre part, en approximant la distribution interne des densités de courant. Les bornes supérieures et inférieures de R ou G sont données par les formules (1.35) et (1.36).*

Nous n'avons pas connaissance d'une formulation de ce théorème en électricité mais le fait de l'avoir obtenu après une étude plus générale sur des phénomènes de transport nous a incité à rechercher s'il n'avait pas été formulé dans d'autres branches de la physique.

Nous avons trouvé dans un ouvrage de MANDEL [2] sur la mécanique des milieux continus un résultat pouvant s'apparenter à celui-ci, relatif au calcul des constantes de torsion appliqué à un prisme de section carrée. L'approximation est faite à l'intérieur du prisme tantôt sur un potentiel de déformation  $\varphi(x,y)$  [ $\vec{\epsilon} = k \text{ grad } \varphi$ ] tantôt sur un potentiel de contrainte  $\psi$  tel que  $\vec{\sigma} = \text{grad } \psi$ . La contrainte  $\vec{\sigma}$  et la déformation  $\vec{\epsilon}$  étant reliées par le module de cisaillement  $\mu$  :

$$\vec{\sigma} = \mu \vec{\epsilon}$$

MANDEL introduit deux fonctionnelles I et K qui expriment l'énergie respectivement en fonction de  $\varphi$  et  $\psi$  et qui doivent être minimisées en vertu du principe des travaux virtuels dans le cas où les déplacements sont imposés aux limites et dans le cas où ce sont les contraintes qui sont fixées.

Il choisit pour  $\varphi$  et  $\psi$  des variations arbitraires mais satisfaisant néanmoins aux conditions aux limites et aux conditions de symétrie du problème et encadre de cette façon la valeur exacte de la constante de torsion du prisme par deux valeurs approchées.

En fait, pour les fonctions  $\varphi(x,y)$  et  $\psi(x,y)$ , MANDEL utilise des expressions fonctions de plusieurs paramètres dont il cherche le minimum absolu en fonction des paramètres (Méthode de RITZ) ce qui donne avec seulement deux paramètres des bornes supérieures et inférieures très proches de la valeur exacte connue par le calcul ( $\pm 0,1 \%$ ).

Il s'agit chez MANDEL de calculer un coefficient macroscopique, relatif à un milieu dont la forme relativement simple, parfaitement définie, ne permet pas néanmoins un traitement analytique simple du problème.

Nous avons trouvé même très récemment d'autres exemples d'encadrement d'une valeur macroscopique par des bornes supérieures et inférieures déduites de la minimisation de fonctionnelles complémentaires [3] mais il ne semble pas qu'on ait cherché à appliquer ces principes à des cas où la difficulté ne réside pas seulement dans une approche analytique difficile mais surtout dans une structure aléatoire du milieu qui défie toute formulation exacte et n'est abordable que par voie statistique.

C'est ce que nous allons étudier dans ce qui suit, en cherchant d'abord quel est le degré d'approximation obtenu sur le coefficient macroscopique cherché, en fonction de l'erreur relative commise sur les distributions approchées utilisées : nous aboutirons au résultat très intéressant que l'erreur commise sur la valeur exacte est du second ordre par rapport à l'approximation faite sur les potentiels où les courants.



1.3. RELATION ENTRE L'APPROXIMATION SUR LES DISTRIBUTIONS DE POTENTIEL ET L'ERREUR RESULTANTE SUR LA RESISTANCE MACROSCOPIQUE

On peut intuitivement prévoir que l'approximation obtenue sur la résistance macroscopique sera meilleure que celle faite sur la distribution des potentiels internes.

D'après (1.29), en effet, R est proportionnel à la puissance P quand le générateur impose un courant I<sub>0</sub>. Or, on sait que, pour la répartition correcte des potentiels, la puissance P est minimum. Comme toute fonction passant par un minimum, P varie peu autour de son minimum et une répartition incorrecte de  $\vec{i}$  approchée au premier ordre ne fera varier qu'au second ordre, ou mieux, la puissance P et donc la résistance R.

Il en est de même pour G déduit de (1.33) pour une répartition incorrecte de  $\varphi$ .

Nous allons préciser ceci par une démonstration inspirée de FEYNMAN [4] et de SMYTHE [5].

Supposons une répartition approchée  $\varphi'$  du potentiel dans un milieu hétérogène de conductivité  $\sigma(x, y, z)$  dont on veut calculer la conductance équivalente : en reprenant les notations (1.30) :

$$\varphi' = \varphi + f \quad G' = G + g \quad (1.30)$$

que nous reportons dans l'intégrale (1.27), nous obtenons :

$$G' = \frac{1}{V_0^2} \int_V \sigma \vec{\text{grad}}^2 \varphi' dv = \frac{1}{V_0^2} \int_V \sigma \vec{\text{grad}}^2 (\varphi + f) dv \quad (1.37)$$

En développant l'intégrant, on obtient :

$$\vec{\text{grad}}^2 (\varphi + f) = (\vec{\text{grad}} \varphi + \vec{\text{grad}} f)^2 = \vec{\text{grad}}^2 \varphi + 2 \vec{\text{grad}} \varphi \vec{\text{grad}} f + \vec{\text{grad}}^2 f$$

D'où on tire :

$$G' = G + g = \frac{1}{V_0^2} \left[ \int_V \sigma \vec{\text{grad}}^2 \varphi dv + 2 \int_V \sigma \vec{\text{grad}} \varphi \vec{\text{grad}} f dv + \int_V \sigma \vec{\text{grad}}^2 f dv \right]$$

La première intégrale représente la valeur exacte G d'où :

$$g = \frac{1}{V_0^2} \left[ 2 \int_V \sigma \vec{\text{grad}} \varphi \cdot \vec{\text{grad}} f dv + \int_V \sigma \vec{\text{grad}}^2 f dv \right] \quad (1.38)$$

En remplaçant  $\sigma \vec{\text{grad}} \varphi$  par  $-\vec{i}$  dans la première intégrale, celle-ci devient :

$$g = \int_V \sigma \vec{\text{grad}} \varphi \cdot \vec{\text{grad}} f dv = - \int_V \vec{i} \cdot \vec{\text{grad}} f dv$$

En utilisant l'identité :

$$\vec{i} \cdot \vec{\text{grad}} f = \text{div} (f \vec{i}) - f \text{div} \vec{i}$$

et compte tenu de :

$$\operatorname{div} \vec{i} = 0$$

l'intégrale s'écrit, d'après la formule de Gauss :

$$J = -\int_V \vec{i} \cdot \operatorname{grad} f \, dv = -\int_V \operatorname{div} (f \vec{i}) \, dv = -\int_S f \vec{i} \cdot \vec{ds} \quad (1.39)$$

où  $S$  est la surface externe du volume  $v$ .

L'intégrale  $J$  peut se décomposer en trois intégrales étendues aux surfaces terminales  $S_1$  et  $S_2$  et à la surface latérale  $S_L$  (fig. 1).

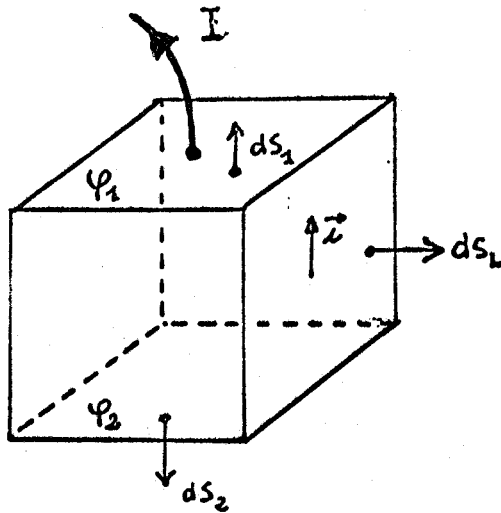


Figure 1

Sur la surface latérale  $S_L$ , le vecteur  $\vec{i}$  est constamment tangent à la surface et donc orthogonal au vecteur  $\vec{ds}_L$  : l'intégrale correspondante s'annule et il reste :

$$J = -\int_S \vec{i} \cdot \vec{ds} = -\int_{S_1} \vec{i} \cdot \vec{ds} - \int_{S_2} \vec{i} \cdot \vec{ds} \quad (1.40)$$

Nous avons supposé que, puisqu'il s'agissait de minimiser les potentiels internes, le milieu était relié à un générateur de tension  $V_0$ . Les potentiels sur les faces  $S_1$  et  $S_2$  sont donc parfaitement connus puisque imposés par le générateur et l'erreur  $f$  commise sur ces faces est nulle. D'où :

$$J = \int_{S_1} f \vec{i} \cdot \vec{ds} + \int_{S_2} f \vec{i} \cdot \vec{ds} = 0$$

Et nous reportant à (1.38), il reste :

$$g = \frac{1}{V_0^2} \int_V \sigma \operatorname{grad}^2 f \, dv > 0 \quad (1.41)$$

La formule (1.41) montre bien que l'erreur commise sur  $g$  est positive ce qui signifie qu'en introduisant une erreur  $f$  sur la distribution des potentiels,  $V_0$  étant imposé, la puissance a été majorée.

Sur le simple plan du calcul et des valeurs numériques, on constate que l'erreur commise  $g$  ou  $r$  est du second ordre par rapport à l'erreur  $f$  faite sur les potentiels :

évaluons les erreurs relatives sur  $G$  et  $R$

$$\frac{g}{G} = \frac{\int_V \sigma \text{grad}^2 f \, dv}{\int_V \sigma \text{grad}^2 \varphi \, dv} \quad (1.42)$$

$$\frac{g}{G} = \frac{\frac{1}{V} \int_V \sigma \vec{E}^2 \, dv}{\frac{1}{V} \int_V \sigma \vec{E}^2 \, dv} = \frac{\langle \sigma \vec{E}^2 \rangle_V}{\langle \sigma \vec{E}^2 \rangle_V} \quad (1.43)$$

La formule (1.43) exprime l'erreur relative sous forme d'un rapport de moyennes de  $\sigma \vec{E}^2$  à  $\sigma \vec{E}^2$  prises sur le volume  $v$ , et montre que l'erreur commise sur  $G$  est grosso modo proportionnelle au carré de l'erreur relative commise en approximant les champs  $E$ .

Dans le cas particulier où le milieu est composé d'un volume  $v_1$  de conductivité nulle et d'un volume  $v_2$  de conductivité  $\sigma$ , ce qui serait le cas d'un milieu poreux de matrice isolante rempli d'un fluide conducteur de conductivité  $\sigma$ , on peut dans l'expression (1.41)

sortir  $\sigma$  de l'intégrale étendue au volume  $v_2$  : on obtient :

$$g = \frac{\sigma}{V_0^2} \int_{v_2} \text{grad}^2 f \, dv \quad (1.44)$$

$$\frac{g}{G} = \frac{\langle \vec{E}^2 \rangle_{v_2}}{\langle \vec{E}^2 \rangle_{v_2}} \quad (1.45)$$

Il apparait ici plus nettement que : *l'erreur relative commise sur les coefficients macroscopiques à déterminer est du second ordre par rapport à l'erreur faite en approximant les champs internes.*

Voyons maintenant le cas où le générateur est un générateur de courant et où il faut donc minimiser les densités de courant interne.

La résistance équivalente  $R$  sera calculée par la formule (1.29).

$$R = \frac{P}{I_0^2} = \frac{\int_V \vec{i}^2 \rho \, dv}{I_0^2} \quad (1.29)$$

Appliquons une distribution incorrecte  $\vec{i}' = \vec{i} + \vec{j}$  de la densité de courant et évaluons la résistance approchée  $R'$  :

$$R' = \frac{1}{I_0^2} \int_V \rho (\vec{i} + \vec{j})^2 \, dv = \frac{1}{I_0^2} \left[ \int_V \rho \vec{i}^2 \, dv + 2 \int_V \rho \vec{i} \cdot \vec{j} \, dv + \int_V \rho \vec{j}^2 \, dv \right] \quad (1.46)$$

La première intégrale représentant encore la valeur exacte  $R$  on obtient l'erreur  $r$  commise sur  $R$  sous la forme :

$$r = \frac{2}{I_0^2} \int_V \rho \vec{i} \cdot \vec{j} \, dv + \frac{1}{I_0^2} \int_V \rho \vec{j}^2 \, dv \quad (1.47)$$

Remplaçons dans la première intégrale  $\vec{i}$  par  $-\sigma \text{grad } \varphi$  elle s'écrit alors :

$$K = \int_V \rho \vec{i} \cdot \vec{j} \, dv = - \int_V \rho \cdot \sigma \text{grad } \varphi \cdot \vec{j} \, dv = - \int_V \text{grad } \varphi \cdot \vec{j} \, dv$$

en appliquant l'identité :

$$-\vec{j} \cdot \text{grad } \varphi = \varphi \text{div } \vec{j} - \text{div} (\varphi \vec{j}) \quad (1.48)$$

Si la distribution de courant approchée  $\vec{i}'$  satisfait

$$\text{div } \vec{i}' = 0$$

On a :

$$\text{div } \vec{j} = \text{div} (\vec{i}' - \vec{i}) = \text{div } \vec{i}' - \text{div } \vec{i} = 0$$

et on obtient pour l'intégrale K en appliquant la formule de Gauss :

$$K = - \int_V \text{grad } \varphi \cdot \vec{j} \, dv = - \int_V \text{div} (\varphi \vec{j}) \, dv = - \int_S \varphi \vec{j} \cdot \vec{ds}$$

On peut encore décomposer K en trois intégrales étendues à  $S_1, S_2, S_L$ . L'intégrale étendue à  $S_L$  sera encore nulle car  $\vec{i}$  et  $\vec{i}'$  donc  $\vec{j}$  sont orthogonaux à  $\vec{ds}$  sur  $S_L$ . Il reste :

$$K = - \left[ \int_{S_1} \varphi \vec{j} \cdot \vec{ds} + \int_{S_2} \varphi \vec{j} \cdot \vec{ds} \right]$$

Les faces  $S_1$  et  $S_2$  étant équipotentiellles de potentiel respectif  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , on a :

$$K = - \left[ \varphi_1 \int_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{ds} + \varphi_2 \int_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{ds} \right] \quad (1.49)$$

Et comme on a connecté le milieu à un générateur de courant I, et que la densité de courant approchée  $\vec{i}'$  satisfait aux conditions aux limites, on a :

$$\int_{S_1 \text{ ou } S_2} \vec{j} \cdot \vec{ds} = \int_{S_1 \text{ ou } S_2} (\vec{i}' - \vec{i}) \cdot \vec{ds} = \int_{S_1 \text{ ou } S_2} \vec{i}' \cdot \vec{ds} - \int_{S_1 \text{ ou } S_2} \vec{i} \cdot \vec{ds} = I_0 - I_0 = 0$$

et l'intégrale K s'annule.

On obtient donc d'après (1.49) :

$$r = \frac{1}{I_0^2} \int_V \rho \vec{j}^2 \, dv > 0 \quad (1.50)$$

La résistance  $R'$  approchée est supérieure à la résistance exacte R ce qui d'après (1.29) montre que la puissance approchée  $P'$  est supérieure à P exacte. Le principe de moindre entropie est bien satisfait.

Pour résumer ce qui précède, en affectant en indice  $\bar{I}$  ou  $\psi$ ,  $I_0$  ou  $V_0$  selon les grandeurs employées pour le calcul, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} R'_{\psi, V_0} = \frac{1}{G'_{\psi, V_0}} < R < R'_{\bar{I}, I_0} = R + r \end{array} \right. \quad (1.51)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G'_{\bar{I}, I_0} = \frac{1}{R'_{\bar{I}, I_0}} < G < G'_{\psi, V_0} = G + g \end{array} \right. \quad (1.52)$$

Tout ce qui précède, permet de comprendre pourquoi, pour l'obtention de coefficients macroscopiques tels que conductivité, perméabilité, permittivité, etc.... dans des milieux hétérogènes, des calculs très approchés en apparence donnent finalement des valeurs très proches des valeurs exactes. Ce n'est qu'une conséquence du principe de moindre action qui permet d'obtenir une précision du second ordre sur le coefficient quand la précision sur les champs ou courants utilisés n'est que du premier ordre.

Réciproquement, le fait qu'un coefficient macroscopique calculé à l'aide d'une théorie donnée se rapproche bien de valeurs expérimentales n'est pas l'indication que la distribution de potentiels ou de champs utilisés dans cette théorie était exacte mais n'est qu'une conséquence du principe de moindre action.

Ceci justifie, à posteriori, de nombreuses théories, en partie corroborées par l'expérience, mais critiquées parce qu'utilisant des hypothèses trop sommaires.

Ces considérations montrent que pour l'étude des milieux de structure aléatoire, il est tout à fait légitime, et il n'y a d'ailleurs pas d'autres ressources, que d'utiliser des théories approchées, consistant à faire des moyennes de distributions approchées de champs ou de potentiels.

En combinant les cas a) et b) on voit qu'il se présente quatre possibilités :

- 1) Des résistances égales disposées sur un réseau régulier.
- 2) Des résistances aléatoires disposées au hasard dans un réseau de structure régulière.
- 3) Des résistances égales disposées dans un réseau de structure aléatoire.
- 4) Des résistances aléatoires disposées au hasard dans un réseau de structure aléatoire.

## II.2. CONSTRUCTION DE RESEAUX DE STRUCTURE ALEATOIRE

Avant de définir des réseaux de structure aléatoire, nous définissons rapidement leur opposé, c'est-à-dire des réseaux de structure régulière.

### II.2.1. Réseaux de structure régulière

Ils sont caractérisés par un "motif" régulier se répétant indéfiniment à la manière d'une tapisserie. Les nœuds sont en général tous de même degré.

Nous portons dans le tableau ci-dessous les noms des réseaux les plus utilisés avec le degré de leurs nœuds et nous renvoyons le lecteur aux figures qui suivent pour une représentation graphique de ces réseaux :

Nom du réseau	Degré des noeuds
<u>Réseaux planaires</u>	
hexagonal	3
carré	4
kagomé	4
triangulaire	6
double hexagonal	{ 1/3 noeuds : 6 2/3 noeuds : 3
<u>Réseaux à 3 dimensions</u>	
diamant	4
cubique simple	6
cubique centré	8
cubique à faces centrées	12

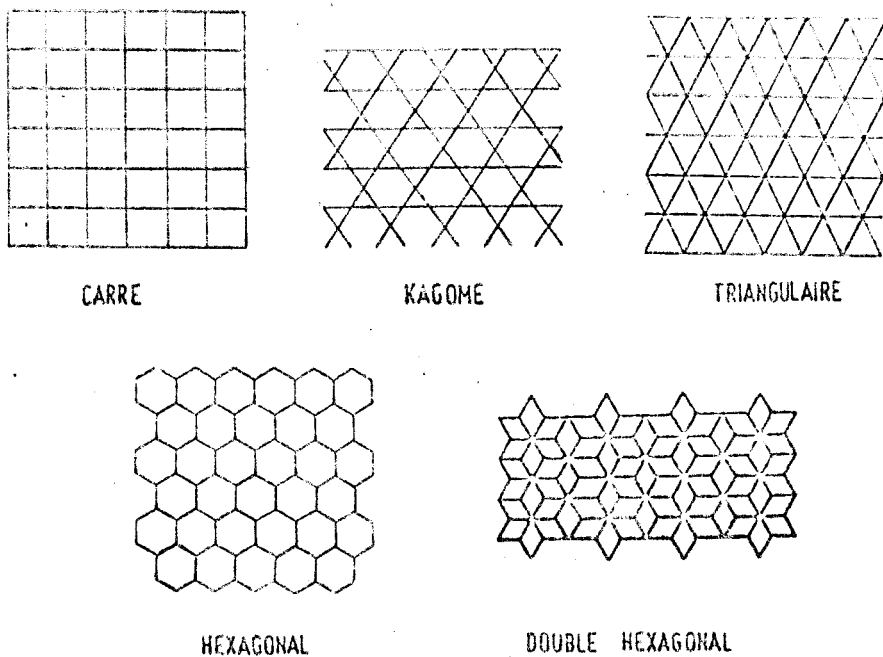


Figure 3 : Réseaux réguliers planaires

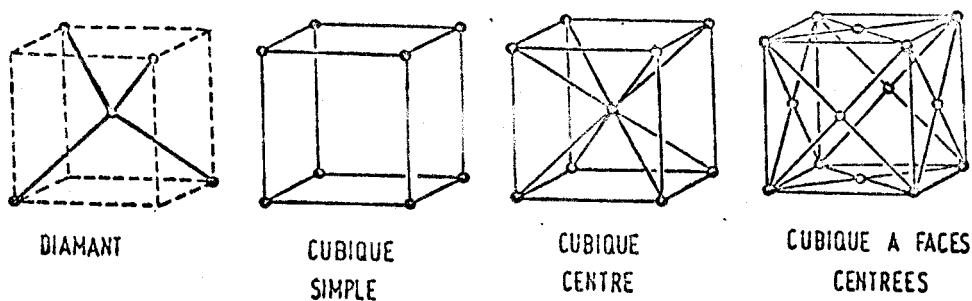


Figure 4 : Réseaux réguliers tridimensionnels (mailles élémentaires)

### II.2.2. Réseaux de structure aléatoire

Pour obtenir un réseau de structure aléatoire, on peut désorganiser progressivement des réseaux réguliers soit en retirant au hasard un nombre plus ou moins grand de branches, soit en retirant, toujours au hasard un nombre plus ou moins grand de nœuds, enlevés avec les branches qui leur sont connectées : ces procédés ont été popularisés récemment par des théoriciens du solide et sont connus sous le nom général de "processus de percolation" [6] [7].

Le premier procédé est baptisé "percolation par branches" et le second "percolation par nœuds" (\*\*).

Ce procédé de création d'un réseau aléatoire par désorganisation d'un réseau régulier peut être qualifié de processus destructif.

On peut envisager des processus constructifs de création de réseaux aléatoires.

(\*\*) Les termes correspondants consacrés par l'usage en anglais sont : "Bond percolation" et "Site percolation".

Les nœuds servent de points de départ : ils ne sont plus régulièrement agencés mais aléatoirement répartis dans un plan où dans l'espace. On peut utiliser une distribution de Poisson à deux ou trois dimensions, c'est-à-dire une distribution de points dont les coordonnées sont des variables aléatoires suivant une loi uniforme sur un segment donné. Pour obtenir les branches, on peut choisir au hasard des couples de nœuds et les relier par une branche : si le nombre de branches ainsi tracées n'est pas très grand, on obtiendra plutôt un enchevêtrement de segments de droites qui ne formeront pas un réseau.

On peut aussi connecter chaque nœud à ses  $n$  plus proches voisins par  $n$  branches : on obtient ainsi un réseau de degré minimum  $n$ .

On peut aussi ne connecter à chaque nœud que les nœuds qui se trouvent plus près qu'une distance donnée  $d$  max. La longueur des branches est alors bornée supérieurement par  $d$  max et le degré est aléatoire (Fig. 5 et 6).

Il existe d'autres modes constructifs de réalisation d'un réseau de structure aléatoire - nous ne les aborderons pas ici.

Le choix d'un processus destructif ou constructif, et parmi ces deux catégories le choix d'un procédé particulier est lié au processus physique que doit simuler le réseau aléatoire. Par exemple, pour l'étude d'un cristal présentant des défauts on s'adressera au processus destructif et pour l'étude d'un matériau amorphe où les atomes (représentés par les nœuds) sont disposés au hasard, on envisagera un processus constructif.

### II.3. APPLICATION DES PRINCIPES DE MOINDRE PRODUCTION D'ENTROPIE AUX RESEAUX DE RESISTANCES

Parmi les méthodes de calcul que nous utiliserons pour les réseaux de résistances, figurent les techniques d'approximation décrites dans la première partie et nécessitant soit de connecter le réseau à un générateur de courant, et de minimiser les densités de courant internes, soit de connecter le réseau à un générateur de tension et de minimiser les différences de potentiel internes.

La difficulté pour un réseau, est que le milieu n'est pas continu mais discret, c'est-à-dire que le courant ne circule que dans des portions filiformes de l'espace que constituent les branches du réseau.

Il faut donc transposer au cas du réseau, les principes précédents.

Si on réécrit les équations définissant la conductance équivalente et la résistance équivalente : (1.27) et (1.29) :



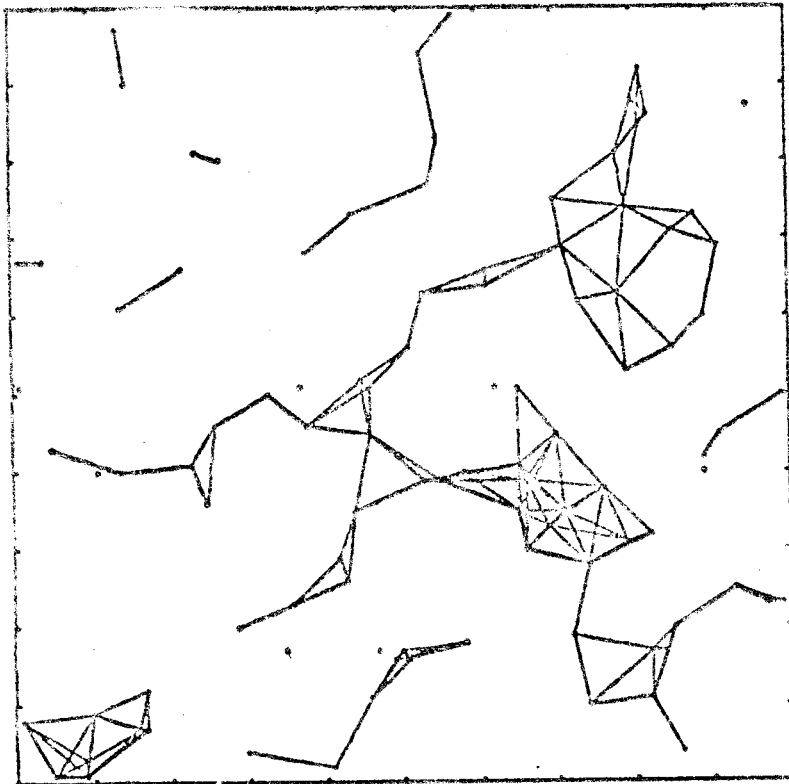


Figure 5 : Distribution de Poisson de 100 points  
 Les points séparés par  $d \leq 2/\sqrt{\pi}$  cm  
 sont reliés.

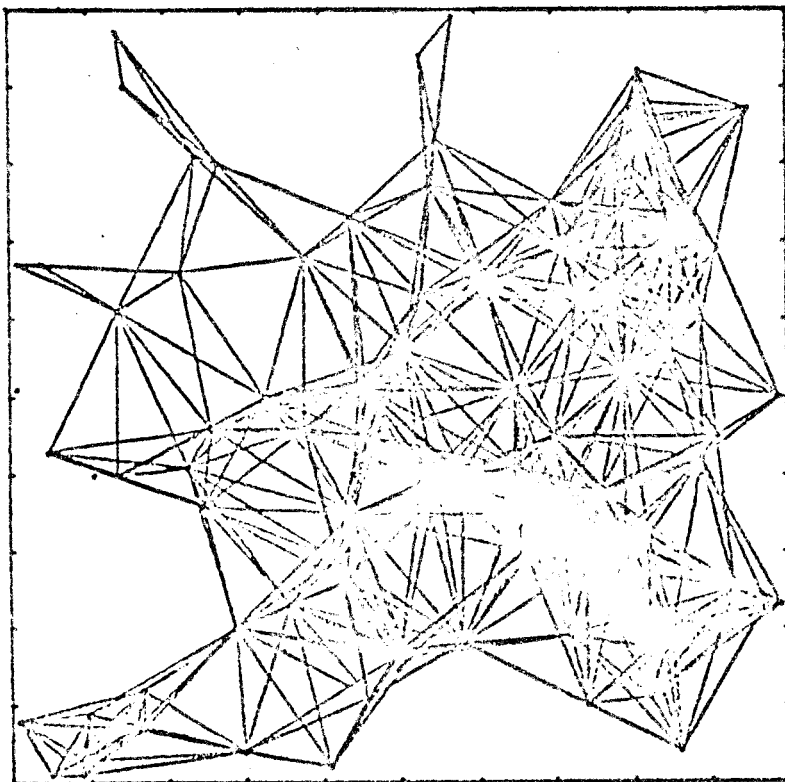


Figure 6 : Distribution de Poisson de 100 points  
 Les points séparés par  $d \leq 4/\sqrt{\pi}$  cm  
 sont reliés



$$R = \frac{\int_V \vec{i}^2 \sigma^{-1} dv}{I_0^2} \quad (1.29)$$

$$G = \frac{\int_V \vec{E}^2 \sigma dv}{V_0^2} \quad (1.27)$$

on voit que dans le premier cas on est conduit pour minimiser l'intégrale du numérateur à minimiser dans tous les éléments de volume  $dv$  le produit  $\vec{i}^2 \sigma^{-1}$ , et dans le second cas il faut minimiser dans tous les éléments de volume le produit  $\vec{E}^2 \sigma = \sigma \text{grad}^2 \varphi$ .

Dans le cas d'un milieu continu les éléments de volume sont en nombre infini et juxtaposés - pour le réseau, la plus petite partie dissociable du réseau est la branche et le nombre de branches est fini.

Pour parfaire l'analogie, on considèrera donc que l'"élément de volume" du réseau est constitué par la branche et que le réseau est de très grande taille pour que le nombre de branches tende vers l'infini.

Cherchons alors quels sont en termes de variables du réseau les équivalents des expressions  $\sigma^{-1} \vec{i}^2 dv$  et  $\sigma \text{grad}^2 \varphi dv$  pour les branches.

Si la branche représente une résistance de volume  $dv = dl ds$  on a pour la première expression :

$$\frac{(\vec{i})^2}{\sigma} dl ds = \frac{(dI)^2}{\sigma ds^2} dl ds = dI^2 \frac{dl}{\sigma ds} = dR \cdot (dI)^2 = dP \quad (2.1)$$

et pour la seconde :

$$\sigma \text{grad}^2 \varphi dv = \sigma \cdot \left(\frac{dV}{dl}\right)^2 \cdot dl ds = (dV)^2 \frac{\sigma ds}{dl} = \frac{(dV)^2}{dR} = dP \quad (2.2)$$

Il s'agit bien sûr des puissances élémentaires dissipées par chaque branche de résistance  $dR = R_k$  traversée par le courant  $dI = I_k$  et ayant à ses bornes la tension  $dV = V_k$ .

Pour un réseau, les expressions (1.27) et (1.29) seront donc remplacées par :

$$R = \frac{\sum_{k=1}^B R_k (I_k)^2}{I_0^2} \quad (2.3)$$

$$G = \frac{\sum_{k=1}^B (V_k)^2 / R_k}{V_0^2} \quad (2.4)$$

et les grandeurs à minimiser seront  $R_k \cdot I_k^2$  quand le réseau est connecté à un générateur de courant  $I_0$  et  $V_k^2 / R_k$  quand le réseau est connecté à un générateur de tension  $V_0$ .

#### II.4. ETUDE D'UN RESEAU DE STRUCTURE ALEATOIRE A RESISTANCES IDENTIQUES

Soit un réseau à trois dimensions, inscrit dans un cube d'arête  $L$ , composé de  $B$  résistances identiques de valeur  $r_0$ , réparties de façon aléatoire mais macroscopiquement homogène et isotrope dans le cube. Ces résistances sont reliées par  $N$  nœuds également répartis de façon macroscopiquement homogène.

On suppose qu'il n'y a pas de branches pendantes, c'est-à-dire de branches qui ne seraient connectées que par une extrémité. On suppose en outre que toutes les  $B$  branches du réseau sont effectivement parcourues par un courant. Le réseau est, comme tous ceux que nous considérerons désormais, supposé très grand c'est-à-dire que  $B$  et  $N$  sont des nombres tendant vers l'infini.

Les résistances des faces supérieures et inférieures sont reliées à des plans conducteurs et connectées selon le cas à un générateur de tension  $V_0$  ou à un générateur de courant  $I_0$ .

Le principe de moindre entropie appliqué au réseau conduit à minimiser la puissance dissipée qui s'écrit d'après (2.3) et (2.4) :

$$P = \sum_{k=1}^B R_k I_k^2 = RI_0^2 \quad (2.5)$$

$$P = \sum_{k=1}^B V_k^2 / R_k = GV_0^2 \quad (2.6)$$

Toutes les résistances étant identiques on a :

$$R = \frac{r_0}{I_0^2} \sum_{k=1}^B I_k^2 \quad (2.7)$$

$$G = \frac{1}{r_0 V_0^2} \sum_{k=1}^B V_k^2 \quad (2.8)$$

La structure du réseau étant aléatoire, les courants  $I_k$  dans les branches et les tensions  $V_k$  aux bornes des branches peuvent être considérées comme des variables aléatoires dont on peut définir la moyenne, le moment d'ordre deux et la variance  $\sigma^2$ (\*\*).

$$\langle I_k \rangle = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B I_k \quad (2.9)$$

$$\langle V_k \rangle = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B V_k \quad (2.10)$$

$$\langle I_k^2 \rangle = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B I_k^2 = \langle I_k \rangle^2 + \sigma^2(I_k) \quad (2.11)$$

$$\langle V_k^2 \rangle = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B V_k^2 = \langle V_k \rangle^2 + \sigma^2(V_k) \quad (2.12)$$

(\*\*) Nous utilisons la notation standardisée  $\sigma^2$  pour la variance en nous excusant de la confusion possible avec la conductivité  $\sigma$

Les expressions (2.7) et (2.8) de G et R peuvent alors s'écrire en fonction de (2.9) - (2.12) :

$$R = \frac{r_0}{I_0^2} \cdot B \langle I_k^2 \rangle = \frac{B r_0}{I_0^2} \langle I_k \rangle^2 \left[ 1 + \frac{\sigma^2(I_k)}{\langle I_k \rangle^2} \right] \quad (2.13)$$

$$G = \frac{B}{r_0 V_0^2} \langle V_k^2 \rangle = \frac{B}{r_0 V_0^2} \langle V_k \rangle^2 \left[ 1 + \frac{\sigma^2(V_k)}{\langle V_k \rangle^2} \right] \quad (2.14)$$

#### II.4.1. Utilisation d'un plan de coupe

Considérons la première formule (2.13).

Nous avons introduit la variable aléatoire  $I_k$  mais nous n'avons pas défini son signe : ceci peut être fait de la façon suivante.

Soit un plan  $P_i$  parallèle aux faces terminales du cube et qui coupe le réseau : on convient de compter positivement les courants  $I_k$  qui traversent ce plan du haut vers le bas et négativement les courants en sens inverse (fig. 7). Le signe de chaque courant  $I_k$  est ainsi défini sans ambiguïté en translatant le plan  $P_i$ .

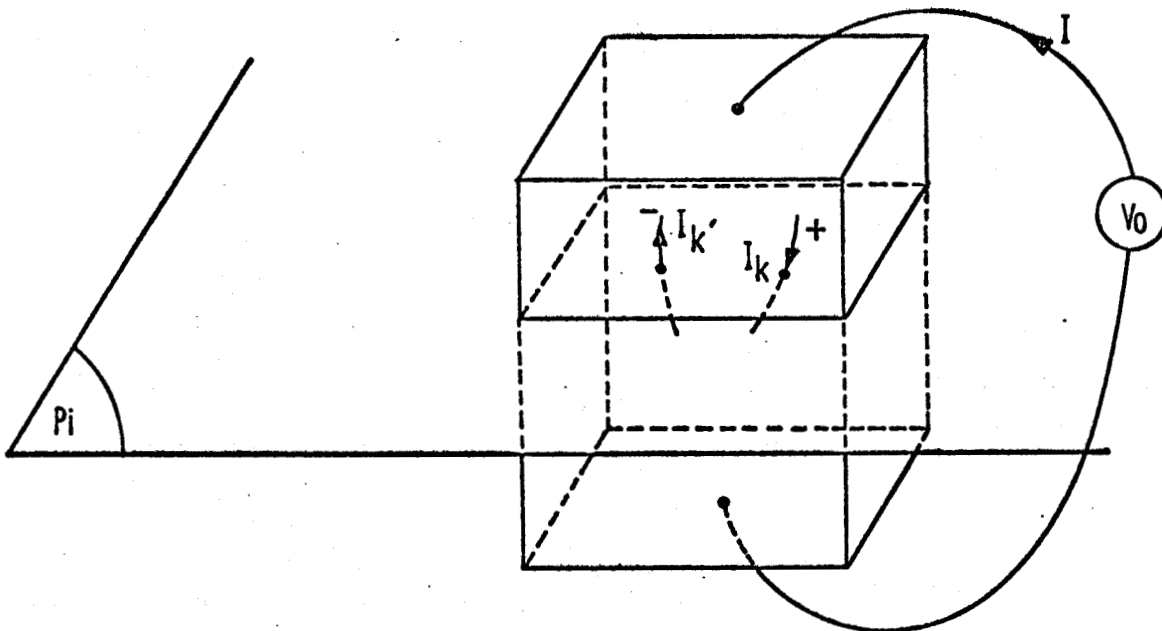


Figure 7 : Orientation des courants  $I_k$

Soit  $n_i$  le nombre de résistances qui coupent le plan  $P_i$  : si  $I_0$  est le courant débité par le générateur tel que :

$$I_0 = G V_0 \quad (2.15)$$

on aura quelque soit le plan  $P_i$  :

$$\sum_{k=1}^{n_i} I_k = I_0 \quad (2.16)$$

et en notant  $\langle I_k \rangle_i$  la moyenne des  $n_i$  courants coupés par  $P_i$  on pourra écrire :

$$n_i \langle I_k \rangle_i = I_0 \quad (2.17)$$

Le réseau étant de structure homogène, nous supposons que la variable aléatoire  $n_i$ , nombre de branches coupées par un plan  $P_i$  est ergodique ainsi qu'il est défini en Annexe I. Ainsi, si la section du cube est suffisamment importante, le nombre  $n_i$  de résistances coupées est très grand et est équivalent à la moyenne du nombre de résistances coupées par un grand nombre de plans indépendants qu'on peut noter  $\langle n \rangle$  ce que nous écrirons :

$$\frac{n_i}{\langle n \rangle} \xrightarrow[n_i \rightarrow \infty]{} 1 \quad (2.18)$$

Mais l'échantillonnage consistant à prélever les courants  $I_k$  rencontrés par une section de coupe perpendiculaire à l'axe est biaisé à cause de l'inclinaison des branches car un courant  $I_k$  est rencontré par la coupe avec une probabilité proportionnelle à  $|\cos \theta_k|$ ,  $\theta_k$  étant l'angle de cette branche  $k$  avec l'axe.

Au lieu que la moyenne  $\langle I_k \rangle_i$  des courants prélevés par la coupe  $i$  représente la moyenne des courants  $I_k$  du réseau, elle sera une moyenne pondérée par les  $\cos \theta_k$  en supposant que la distribution des  $\theta_k$  de l'échantillon est représentative de celle du réseau entier :

$$\langle I_k \rangle_i = \frac{\langle I_k |\cos \theta_k| \rangle}{\langle |\cos \theta_k| \rangle} \quad (2.19)$$

et comme cette moyenne est égale à  $I_0/n_i$ , on obtiendra en identifiant  $n_i$  et  $\langle n \rangle$  par ergodicité,

$$\frac{I_0}{\langle n \rangle} = \frac{\langle I_k |\cos \theta_k| \rangle}{\langle |\cos \theta_k| \rangle} \quad (2.20)$$

on peut tirer de ceci une limite inférieure pour  $\langle I_k^2 \rangle$  en utilisant l'inégalité de Schwartz :

$$\frac{I_0^2}{\langle n \rangle^2} = \frac{\langle I_k |\cos \theta_k| \rangle^2}{\langle |\cos \theta_k| \rangle^2} \leq \frac{\langle I_k^2 \rangle \langle \cos^2 \theta_k \rangle}{\langle \cos^2 \theta_k \rangle^2}$$

soit :

$$\langle I_k^2 \rangle \geq \frac{I_0^2}{\langle n \rangle^2} \frac{\langle |\cos \theta_k| \rangle^2}{\langle \cos^2 \theta_k \rangle} \quad (2.21)$$

on en déduit :

$$R = \frac{B_{r_0}}{I_0^2} \langle I_k^2 \rangle \geq \frac{B_{r_0}}{\langle n \rangle^2} \frac{\langle |\cos \theta_k| \rangle^2}{\langle \cos^2 \theta_k \rangle} = \frac{B_{r_0}}{\langle n \rangle^2} \cdot C \quad (2.22)$$

avec  $C = \langle |\cos \theta_k| \rangle^2 / \langle \cos^2 \theta_k \rangle \leq 1$

**REMARQUE 1** : Il est relativement surprenant de trouver une résistance approchée  $R'$  inférieure à la résistance exacte  $R$  en approximant les répartitions internes de courant alors que, dans la première partie, l'égalité (1.36) prévoit que la résistance approchée obtenue de cette façon doit être supérieure à la valeur exacte.

Ceci tient à la méthode d'approximation des courants. Si on avait arbitrairement imposé des courants  $i_k$  dans toutes les branches et qu'on calculait la puissance en résultant on trouverait évidemment une puissance  $P'$  supérieure à la puissance réelle  $P$  ce qui avec un générateur de courant  $I_0$  entraîne :

$$P = RI_0^2 \quad P' = R'I_0^2 > P$$

$$R' > R$$

Mais ici on a fait une hypothèse sur la moyenne des courants en remplaçant la moyenne des carrés des courants par le carré de la moyenne qui lui est inférieur. On aboutit donc à une puissance  $P''$  approchée inférieure à la puissance  $P$  et on trouve alors une valeur  $R''$  plus petite que  $R$ .

**REMARQUE 2** : Cette formule approchée n'est valable que dans l'hypothèse d'un réseau homogène et de variables aléatoires ergodiques. L'homogénéité en particulier, nécessite que si des plans  $P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}, \dots$  coupent le réseau de façon indépendante, on ait quelles que soient leurs positions, l'équivalence du nombre de branches coupées  $n_{i1}, n_{i2}, n_{i3}, \dots$  quand le réseau devient très grand c'est-à-dire :

$$\frac{n_{i1}}{n_{i2}}, \frac{n_{i2}}{n_{i3}}, \frac{n_{i3}}{n_{i1}} \text{ etc } \dots \rightarrow 1$$

**REMARQUE 3** : Dans un réseau, où les branches joignant une extrémité à l'autre du réseau sont en ligne droite et se coupent donc en des nœuds de degré pair (réseau carré, triangulaire, réseau de droites poissonniennes), les courants dans les branches sont proportionnels au cosinus de l'angle de cette branche avec la verticale si les résistances des branches sont proportionnelles à leur longueur : on a eu en effet les relations suivantes correspondant aux équations de KIRCHOFF :

En un nœud :

$$\sum \cos \theta_k = 0 \quad \sum I_k = 0$$

Autour d'une maille :

$$\sum I_k \cos \theta_k = 0 \quad \sum r_k I_k = 0$$

Dans ce cas, puisque  $I_k$  et  $\cos \theta_k$  sont proportionnels on a :

$$\langle I_k \cos \theta_k \rangle^2 = \langle I_k^2 \rangle \langle \cos^2 \theta_k \rangle$$

et on peut écrire :

$$R = \frac{B \langle r_k I_k^2 \rangle}{I_0^2} = \frac{B}{\langle n \rangle^2} \frac{\langle r_k I_k^2 \rangle \langle |\cos \theta_k| \rangle^2}{\langle I_k \cos \theta_k \rangle^2}$$

$$= \frac{B}{\langle n \rangle^2} \frac{\langle r_k I_k^2 \rangle \langle |\cos \theta_k| \rangle}{\langle I_k^2 \rangle \langle \cos^2 \theta_k \rangle}$$

Si toutes les branches sont de même longueur,  $r_k = r_0$  et on a :

$$R = \frac{B r_0}{\langle n \rangle^2} \frac{\langle |\cos \theta_k| \rangle^2}{\langle \cos^2 \theta_k \rangle} \quad (2.23)$$

La borne inférieure de (2.22) constitue ici une valeur exacte.

**REMARQUE 4** : La formule (2.22) est valable quel que soit le nombre de dimensions du réseau c'est-à-dire pour un "réseau" linéaire (une dimension), pour un réseau inscrit dans un carré (deux dimensions) ou pour un réseau inscrit dans un cube (trois dimensions).

En utilisant les résultats de probabilités géométriques donnés en annexe 2, pour le nombre moyen de branches coupées, dont nous rappelons les notations :

$$\left( \begin{array}{l} L_B = \text{longueur totale de branches dans le réseau} \\ B = \text{nombre de branches du réseau} \\ b = \text{densité de branches (} b/L^2 \text{ en deux dimensions,} \\ \quad \quad \quad b/L^3 \text{ en trois dimensions)} \\ \bar{l}_B = L_B/B = \text{longueur moyenne d'une branche.} \end{array} \right.$$

On peut écrire la formule (2.22) en fonction des paramètres géométriques du réseau .

Réseau à 1 dimension : B résistances en série :

$$\langle n \rangle = 1 \quad R'_{1/C} = r_0 B \quad (C=1) \quad (2.24)$$

Réseau à 2 dimensions : B résistances dans un carré de côté L

$$\langle n \rangle = \frac{2B\bar{l}_B}{\pi L} = \frac{2bL\bar{l}_B}{\pi} \quad R'_{2/C} = \frac{r_0 L^2 \pi^2}{4B\bar{l}_B^2} = \frac{\pi^2}{4} \frac{r_0}{b\bar{l}_B^2} \quad (2.25)$$

Réseau à 3 dimensions : B résistances dans un cube de côté L

$$\langle n \rangle = \frac{B\bar{l}_B}{2L} = \frac{bL^2\bar{l}_B}{2} \quad R'_{/C} = r_0 \frac{4L^2}{B\bar{l}_B^2} = \frac{4r_0}{L\bar{l}_B^2 b} \quad (2.26)$$

REMARQUE 5 : Si on écrit la formule classique donnant la résistance  $R = \rho L / S$  en introduisant le volume  $v = L \cdot S$  de la résistance on obtient :

$$R = \rho \frac{v}{S^2} \quad (2.27)$$

En comparant (2.27) avec 2.22) on voit qu'on peut identifier

- la résistivité  $\rho$  avec la valeur commune  $r_0$  des résistances du réseau
- le volume  $v$  du conducteur avec le nombre de branches B présentes dans ce volume
- la section S du conducteur avec  $\langle n \rangle$ , valeur moyenne du nombre de branches coupées par un plan selon une section S.
- le coefficient C est fonction de la structure du réseau

#### II.4.2. Utilisation d'un chemin entre les faces extrêmes

Nous allons faire un raisonnement dual du raisonnement précédent : plutôt que de couper le réseau par des plans parallèles aux faces extrêmes nous allons chercher à relier ces faces extrêmes par un "chemin" de résistances. Partons de la face inférieure et rejoignons la face supérieure en suivant un chemin de résistances et en ajoutant les différences de potentiel rencontrées algébriquement.

Si la différence de potentiel entre les faces extrêmes est  $V_0$  et si le chemin utilisé comporte  $m_i$  résistances on aura :

$$\sum_{k=1}^{m_i} V_{ki} = V_0 \quad (2.28)$$

Cette relation est algébrique car on peut emprunter des branches où la différence de potentiel est en sens inverse du sens de parcours.

La relation (2.28) peut s'écrire en introduisant la moyenne des différences de potentiel rencontrée dans le parcours i :

$$m_i \langle V_k \rangle_i = V_0 \quad (2.29)$$

Appliquons encore ici un principe d'ergodicité : si le réseau est suffisamment grand, ergodique, homogène nous identifierons le nombre  $m_i$  de branches utilisé pour un parcours i avec la moyenne des  $m_i$  d'un grand nombre de parcours qui constitueront l'espérance de la variable aléatoire m.



On écrira donc :

$$\frac{m_i}{\langle m \rangle} \xrightarrow{m_i \rightarrow \infty} 1 \quad (2.30)$$

La difficulté est ici de déterminer la façon de tracer le chemin d'une extrémité à l'autre, la relation (2.28) étant valable quel que soit le nombre de pas : on pourrait prendre des chemins tortueux sans cesser de vérifier (2.28) - mais ces chemins emprunteraient forcément des branches avec des différences de potentiel négatives et la moyenne  $\langle V_k \rangle_i$  obtenue sur ce parcours serait beaucoup plus petite que la moyenne obtenue sur un chemin ne comportant que des différences de potentiel positives.

Or que cherchons-nous à obtenir : comme dans le paragraphe précédent nous voulons estimer la moyenne des carrés de la variable  $V_k$  à partir de la moyenne de  $V_k$  en négligeant l'écart type, c'est-à-dire écrire :

$$\langle V_k^2 \rangle = \langle V_k \rangle^2 + \sigma^2(V_k) \gg \langle V_k \rangle^2 \quad (2.31)$$

Pour que l'erreur faite en négligeant l'écart-type soit minimale il faut que  $\langle V_k \rangle^2$  soit maximal.

Or, si on introduit dans la distribution des  $V_k$  des valeurs négatives en inversant le signe de certains  $V_k$  - le second moment  $\langle V_k^2 \rangle$  sera inchangé mais la moyenne  $\langle V_k \rangle$  va diminuer et l'écart type augmenter.

L'approximation de  $\langle V_k^2 \rangle$  par  $\langle V_k \rangle^2$  sera donc la meilleure possible si toutes les variables  $V_k$  sont positives et ceci conduit à prendre pour  $m$  le plus court chemin d'une extrémité à l'autre car on est sûr qu'il ne comportera que des variables  $V_k$  positives.

Mais on se heurte à la même difficulté que pour le plan de coupe car l'échantillon constitué par les  $m_i$  variables  $V_{k_i}$  du chemin  $i$  est biaisé par rapport à la distribution des  $V_k$  de l'ensemble du réseau : en effet, la recherche des plus courts chemins fait que les branches proches de la verticale sont privilégiées par rapport aux branches qui s'en écartent : de ce fait, la distribution des angles  $\theta_{k_i}$  des branches du chemin avec la verticale est biaisée par rapport à celle des  $\theta_k$  du réseau, ce qui ne se produisait pas avec le plan de coupe. Une formule similaire à (2.20) utilisant les  $\cos \theta_k$  comme coefficient de pondération ne sera donc qu'approximative puisque les angles des branches de l'échantillon avec la verticale ne sont pas représentatifs de la distribution des angles du réseau, et on écrira :

$$\frac{V}{\langle m \rangle} \sim \frac{\langle V_k |\cos \theta_k| \rangle}{\langle \cos \theta_k \rangle} \quad (2.32)$$

Dans les cas où cette approximation peut être utilisée (certains réseaux réguliers, par exemple), on peut tirer, comme en (2.21) une borne inférieure pour  $\langle v_k^2 \rangle$  :

$$\langle v_k^2 \rangle \geq \frac{v_0^2}{\langle m \rangle^2} \frac{\langle |\cos \theta_k| \rangle^2}{\langle \cos^2 \theta_k \rangle} \quad (2.33)$$

et on obtient cette fois, une borne supérieure pour R :

$$R \leq \frac{r_0 \langle m \rangle^2}{B} \frac{\langle \cos^2 \theta_k \rangle}{\langle |\cos \theta_k| \rangle^2} = \frac{r_0 \langle m \rangle^2}{B \cdot C} \quad (2.34)$$

où le coefficient  $C \leq 1$  a la même signification que précédemment.

REMARQUE 1 : Ici encore si on compare l'approximation (2.34) avec la formule classique donnant la résistance  $R = \rho L / S$ , où on introduit le volume  $v$  de la résistance, on obtient :

$$R = \rho L / S \quad (2.35)$$

$$\boxed{R = \rho \frac{L^2}{v}} \quad (2.36)$$

On voit en comparant avec (2.34) que :

- .  $r_0$  joue le rôle de la résistivité  $\rho$
- .  $\langle m \rangle$  joue le rôle de la longueur  $L$  de la résistance
- .  $B$  joue le rôle du volume  $v$  de la résistance

Si on réunit les relations (2.22) et (2.35) on obtient des bornes supérieures et inférieures pour la résistance équivalente exacte du réseau :

$$\boxed{R'' = \frac{C B r_0}{\langle n \rangle^2} < R < R' = \frac{r_0 \langle m \rangle^2}{B C}} \quad (2.37)$$

Puisque la résistance exacte  $R$  se trouve quelque part entre ses bornes inférieures et supérieures, si on prend comme nouvelle estimation la moyenne géométrique de ces bornes on obtiendra une valeur approchée  $R''$  qui sera moins éloignée que la plus éloignée des bornes.

On aura alors :

$$R'' = \sqrt{R'' \cdot R'} = \sqrt{\frac{C B r_0}{\langle n \rangle^2} \cdot \frac{r_0 \langle m \rangle^2}{B C}}$$

$$\boxed{R'' = r_0 \frac{\langle m \rangle}{\langle n \rangle}} \quad (2.38)$$

REMARQUE 1 : La formule (2.38) est cette fois une généralisation de

$R = \rho L / S$  avec les correspondances :

- .  $\langle m \rangle \leftrightarrow L$
- .  $\langle n \rangle \leftrightarrow S$
- .  $r_0 \leftrightarrow \rho$

REMARQUE 2 : On peut obtenir directement la formule (2.38), en combinant les modes d'évaluation de  $\langle n \rangle$  et  $\langle m \rangle$ . On a en effet :

$$\frac{I_0}{\langle n \rangle} = \frac{\langle I_k |\cos \theta_k| \rangle}{\langle \cos \theta_k \rangle} \quad \text{et} \quad \frac{V_0}{\langle m \rangle} \approx \frac{\langle V_k |\cos \theta_k| \rangle}{\langle |\cos \theta_k| \rangle}$$

Comme toutes les résistances valent  $r_0$ , on a :

$$\langle V_k |\cos \theta_k| \rangle = \langle r_0 I_k |\cos \theta_k| \rangle = r_0 \langle I_k |\cos \theta_k| \rangle$$

et

$$\frac{V_0}{\langle m \rangle} \approx \frac{r_0 \langle I_k |\cos \theta_k| \rangle}{\langle |\cos \theta_k| \rangle} = r_0 \frac{I_0}{\langle n \rangle} \quad (2.39)$$

On en tire une relation identique à (2.38) :

$$R_{eq} = \frac{V_0}{I_0} \approx r_0 \frac{\langle m \rangle}{\langle n \rangle}$$

## II.5. EXPRESSIONS GEOMETRIQUES DE $\langle m \rangle$ ET $\langle n \rangle$

La valeur moyenne  $\langle m \rangle$  du plus petit nombre de pas reliant une extrémité du réseau à l'autre est fonction de la géométrie de celui-ci.

Appelons  $l_i$  la longueur d'une branche et  $\theta_i$  le plus petit angle que fait cette branche avec l'axe du réseau (\*\*).

Dans un parcours donné "k" comprenant  $m_k$  pas, on peut écrire si L est la distance en ligne droite parcourue selon l'axe :

$$\sum_{i=1}^{m_k} l_{ik} \cos \theta_{ik} = L \quad (2.40)$$

qui peut encore s'écrire :

$$m_k \langle l_{ik} \cos \theta_{ik} \rangle = m_k \langle l_i \cos \theta_i \rangle_k = L \quad (2.41)$$

Appliquant encore un principe d'ergodicité, si  $m_k$  est suffisamment grand et si on suppose l'échantillon de  $m_k$  branches représentatif, en longueur et direction, des B branches, on a :

$$\frac{m_k}{\langle m \rangle} \xrightarrow{m_k \rightarrow \infty} 1 \quad \frac{\langle l_i |\cos \theta_i| \rangle_k}{\langle l_i |\cos \theta_i| \rangle} \rightarrow 1 \quad (2.42)$$

(\*\*) Nous appelons "axe du réseau" toute droite reliant une extrémité du réseau à l'autre, orthogonalement aux électrodes collectrices de courant situées aux limites du réseau.

et (2.41) s'écrit alors :

$$\langle m \rangle = \frac{L}{\langle l_i |\cos \theta_i| \rangle} \quad (2.43)$$

Si toutes les branches ont même longueur  $l$ , on a :

$$\langle m \rangle = \frac{L}{l \langle |\cos \theta_i| \rangle} \quad (2.44)$$

Le nombre moyen  $\langle n \rangle$  de branches coupées par un plan peut également s'exprimer géométriquement.

La droite de longueur  $L$  parcourt le réseau parallèlement à elle-même : une branche particulière de longueur  $l_i$  faisant un angle  $\theta_i$  avec l'axe du réseau ne sera coupée par la droite  $L$ , que dans un déplacement vertical de celle-ci de  $l_i \cos \theta_i$ .

On obtiendra donc le même nombre d'intersections que si toutes les branches du réseau étaient verticales et de longueur  $l_i \cos \theta_i$ .

Si on donne à une branche l'épaisseur infinitésimale  $\epsilon$  et si  $n(z)$  est le nombre de branches coupées lorsque la droite  $L$  effectue un déplacement  $dz$  à l'ordonnée  $z$ , la somme  $dS(z)$  des surfaces découpées sur les branches est

$$dS(z) = n(z) \cdot dz \cdot \epsilon \quad (2.45)$$

Lorsque la droite balaie la longueur  $L$ , toutes les branches redressées verticalement seront coupées et la somme des surfaces élémentaires  $dS(z)$  représentera la surface de toutes ces branches on aura donc :

$$\int_0^L dS(z) = \epsilon \int_0^L n(z) dz = \epsilon \sum^B l_i |\cos \theta_i| \quad (2.46)$$

Si on désigne par  $\langle n \rangle$  la valeur moyenne du nombre de branches coupées par la droite, on pourra écrire :

$$L \cdot \frac{1}{L} \int_0^L n(z) dz = L \langle n \rangle = \sum^B l_i |\cos \theta_i| = B \left( \frac{1}{B} \sum^B l_i |\cos \theta_i| \right)$$

d'où :

$$\langle n \rangle = \frac{B}{L} \langle l_i |\cos \theta_i| \rangle \quad (2.47)$$

qui peut encore s'écrire si toutes les branches ont même longueur  $l$  :

$$\langle n \rangle = \frac{Bl}{L} \langle |\cos \theta_i| \rangle \quad (2.48)$$

et en réunissant (2.43) et (2.47) on obtient la formule remarquable :

$$\langle m \rangle \langle n \rangle = B \quad (2.49)$$

qui n'est valable que si  $\langle \cos \theta_i \rangle$  est le même pour les angles rencontrés sur une coupe et sur un chemin.

## II.6. RELATION ENTRE LA RESISTANCE EQUIVALENTE ET LE DEGRE MOYEN D'UN RESEAU

La formule (2.38) donnant la résistance équivalente approchée  $R''$ , permet d'obtenir pour un réseau à deux dimensions un résultat intéressant, par sa simplicité d'une part, et parce qu'il généralise un résultat obtenu par la théorie du "milieu effectif" que nous analyserons plus loin.

Considérons un réseau de grande taille, inscrit dans un carré de cote  $L$ , composé de  $B$  branches reliées par  $N$  nœuds.

Coupons ce réseau par deux segments de longueur  $L$ , parallèles au côté du carré et perpendiculaires entre eux (fig. 8).

Par suite de l'homogénéité du réseau, le nombre  $n_V$  et  $n_H$  de branches coupées par ces deux segments sera équivalent c'est-à-dire qu'on aura :

$$\frac{n_V}{n_H} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 1$$

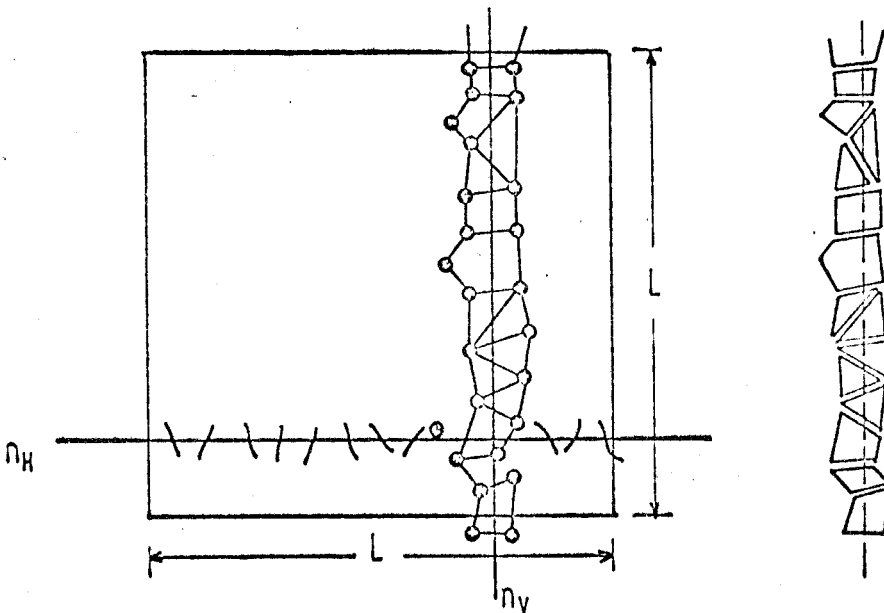


Figure 8

Evaluons maintenant le nombre  $m$  de branches reliant les extrémités supérieures et inférieures du carré. Puisque ces branches doivent constituer un plus court chemin, nous allons considérer les branches qui descendent de part et d'autre du segment vertical  $L$  et qui en sont les plus proches.

Les  $n_V$  branches qui coupent la ligne verticale  $L$  sont reliées à des nœuds de part et d'autre de ce segment et appartiennent à des polygones partagés en deux parties sur la ligne  $L$  (fig. 8).

Ces polygones sont tous adjacents et leurs côtés qui ne sont pas en commun forment de part et d'autre de L une chaîne de branches qui joint les côtés supérieurs et inférieurs : calculons en fonction de  $n_V$  le nombre moyen de branches de cette chaîne.

Le réseau est planaire et ses B branches et N nœuds forment un nombre de polygones indépendants égal à  $B - N + 1$  [8].

Le nombre moyen de côtés par polygone est donc :

$$\bar{c} = \frac{2 B}{B-N+1} \quad (2.50)$$

car chaque branche est commune à deux polygones. Considérons les polygones coupés par L comme artificiellement séparés en dédoublant leurs  $n_V$  branches coupées : il y aura  $n_V$  polygones coupés dont le nombre total de côtés sera en moyenne :

$$n_V \cdot \frac{2 B}{B-N+1} \quad (2.51)$$

Le nombre de côtés non coupés par L sera obtenu en retirant les  $2n_V$  côtés dédoublés coupés par L soit :

$$n_V \cdot \frac{2B}{B-N+1} - 2n_V = 2n_V \left( \frac{B}{B-N+1} - 1 \right) = 2n_V \cdot \frac{N-1}{B-N+1} \neq 2n_V \cdot \frac{N}{B-N}$$

Le nombre de côtés non coupés formant une chaîne de part et d'autre de L sera la moitié du nombre total précédent et est égal au nombre minimal m de pas cherché :

$$m \neq n_V \cdot \frac{N}{B-N} \quad (2.52)$$

Le degré moyen du réseau est le nombre moyen de branches par nœud : il vaut :

$$\bar{d} = 2B / N \quad (2.53)$$

La relation (2.52) s'écrit alors en fonction de  $\bar{d}$  :

$$m \neq \frac{n_V}{\frac{\bar{d}}{2} - 1} = n_V \frac{2}{\bar{d} - 2} \quad (2.54)$$

Appliquons alors la relation (2.38) avec  $\langle n \rangle = n_H$

$$R^{**} = r_0 \frac{\langle m \rangle}{\langle n \rangle} = r_0 \frac{m}{n_H} = r_0 \frac{n_V}{n_H} \frac{2}{\bar{d}-2}$$

et par suite de l'équivalence de  $n_V$  et  $n_H$  on obtient :

$$\boxed{R^{**} = r_0 \frac{2}{\bar{d}-2}} \quad (2.55)$$

ce qui s'écrit en conductances :

$$G^{**} = g (\bar{d} / 2 - 1) \quad (2.56)$$

La relation (2.55), fort simple, obtenue par une méthode également simple est identique au résultat déduit de la théorie du milieu effectif par KIRKPATRICK [9] dans les cas particuliers qu'il a étudiés et qui sont bien vérifiés expérimentalement pour le réseau de structure carrée ( $d = 4$ ) et pour le réseau de structure cubique ( $d = 6$ ).

La relation (2.55) prévoit que la résistance du réseau devient infinie lorsque son degré moyen est égal à 2. Ce résultat est obtenu pour un réseau à deux dimensions. Il est difficile de le transposer dans un réseau tridimensionnel car il faudrait pouvoir y dénombrer le nombre de polyèdres internes au réseau, le nombre de faces de ces polyèdres, etc... et nous n'avons pas trouvé de formules permettant de calculer ces grandeurs. La seule formule de ce genre est la formule d'EULER [8] qui donne le nombre de faces d'un polyèdre isolé, inutilisable ici ( $F = B - N + 2$ ).

## II.7. ETUDE DE RESEAUX DE STRUCTURE REGULIERE A RESISTANCES ALEATOIRES

### II.7.1. Réseau de résistances en série mises en parallèle

Considérons un réseau planaire inscrit dans un carré. Un cas extrême de structure est celle qu'on obtient en mettant en parallèle  $k$  chaînes de  $k$  résistances (fig. 9).

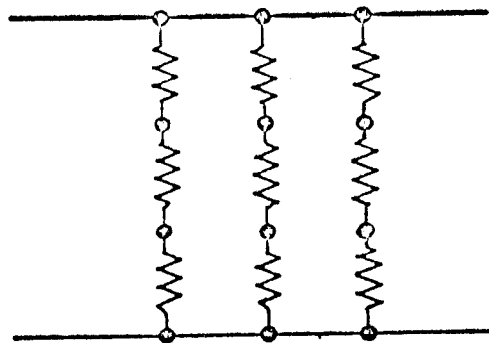


Figure 9 : Réseau de résistances séries en parallèle ( $k = 3$ )

Le degré moyen d'un tel réseau est 2 mais il est fortement anisotrope. Ce réseau contient  $k^2$  résistances, dont la valeur suit une loi de distribution connue, réparties au hasard dans le réseau.

En supposant que  $k$  tende vers l'infini, la valeur moyenne de la résistance  $R_s$  d'une chaîne de  $k$  résistances est :

$$R_s = \sum_{i=1}^k r_i = k E(r)$$

et la résistance équivalente aux  $k$  chaînes en parallèle est donc :

$$R^{SP} = \frac{R_s}{k} = E(r) = \bar{r}^A \quad (2.58)$$

avec  $\bar{r}^A$  désignant la moyenne arithmétique de la distribution des résistances du réseau.

**THEOREME** : La résistance équivalente au réseau de résistances séries mises en parallèles est la moyenne arithmétique de la distribution des valeurs des résistances du réseau.

### II.7.2. Réseau de résistances en parallèles mises en série

L'autre cas extrême de structure répartie est celui d'un réseau de  $k^2$  résistances obtenu en mettant en série  $k$  groupements de  $k$  résistances en parallèle (fig. 10).

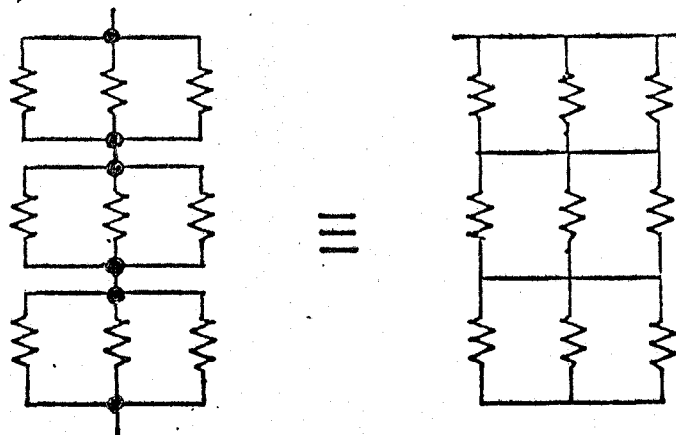


Figure 10 : Réseau de résistances parallèles en série ( $k = 3$ )

Quand  $k$  tend vers l'infini, le degré moyen de ce réseau tend également vers l'infini puisque  $2k$  résistances sont connectées à chaque nœud interne.

La valeur moyenne de la résistance  $R_p$  d'un groupement de  $k$  résistances en parallèle vaut :

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{r_i}$$

La résistance équivalente au réseau est donc :

$$R^{PS} = k R_p = \frac{1}{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{r_i}} = \bar{r}^H \quad (2.59)$$

en désignant par  $\bar{r}^H$  la moyenne harmonique de la distribution des résistances du réseau.

**THEOREME** : La résistance équivalente au réseau de résistances parallèles mises en série est la moyenne harmonique de la distribution des valeurs des résistances du réseau.



REMARQUE 1 : La moyenne arithmétique des résistances est égale à l'inverse de la moyenne harmonique des conductances et réciproquement : on peut donc écrire indifféremment :

$$\text{Réseau série/parallèle} \quad R^{SP} = \bar{r}^A = \frac{1}{\bar{g}^H} \quad G^{SP} = \bar{g}^H = \frac{1}{\bar{r}^A} \quad (2.60)$$

$$\text{Réseau parallèle/série} \quad R^{PS} = \bar{r}^H = \frac{1}{\bar{g}^A} \quad G^{PS} = \bar{g}^A = \frac{1}{\bar{r}^H} \quad (2.61)$$

REMARQUE 2 : Les résultats précédents ont déjà été établis par SCHOPPER [46].

Il est bien connu que les moyennes arithmétiques et harmoniques constituent les deux moyennes extrêmes d'une distribution de variables aléatoires positives, la moyenne harmonique étant toujours inférieure à la moyenne arithmétique [annexe 3].

Comme la moyenne harmonique des conductances  $\bar{g}^H$  correspond au réseau de degré 2 et la moyenne arithmétique des conductances  $\bar{g}^A$  au réseau de degré infini, il est intuitif de penser que tout réseau de degré moyen entre 2 et l'infini, inscrit dans un carré aura une conductance équivalente comprise entre la moyenne harmonique et la moyenne arithmétique des conductances du réseau.

La moyenne géométrique [annexe 3] étant elle aussi comprise entre les moyennes harmoniques et arithmétiques, on s'adresse surtout à elle comme moyenne intermédiaire

On peut cependant se demander à quelle structure de réseau, régulier ou non, de résistances aléatoires, s'appliquerait rigoureusement la moyenne géométrique. Nous montrons ci-dessous que pour un réseau de structure régulière, carrée c'est-à-dire de degré 4, puis pour un réseau de structure irrégulière mais de degré moyen 4, la résistance équivalente est égale à la moyenne géométrique de la distribution des résistances si celle-ci est log-symétrique [annexe 3].

### II.7.3.- Réseau planaire de structure carrée de résistances aléatoires

Soit un réseau plan de résistances,  $C$ , de structure carrée comportant  $m$  branches verticales par rangée et  $m$  branches verticales par colonne (fig. 11).

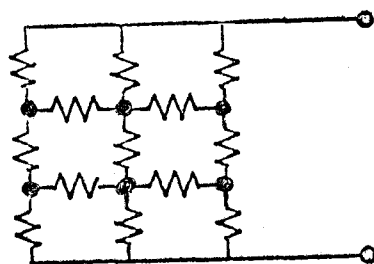


Figure 11 : Réseau de structure carrée  
( $m = 3$ )

Nous rappelons, sans démonstration, les résultats obtenus concernant ce type de réseau que nous avons déjà publiés en [10].

**THEOREME** : Un réseau de structure carrée de grandes dimensions comportant des résistances  $R$  aléatoirement réparties dans le réseau dont la densité de probabilité  $f(R)dR$  est log-symétrique, a pour résistance équivalente la moyenne géométrique de la distribution.

Si le réseau se compose de résistances  $R_A$  et  $R_B$  en proportion  $p$  et  $1-p$  respectivement, si  $R(p)$  est sa résistance équivalente, on a :

$$R(0) = R_B, \quad R(1) = R_A, \quad R(1/2) = \sqrt{R_A R_B} \quad (2.66)$$

et pour  $p \neq 1/2$

$$R(p) \neq R_A^p R_B^{1-p} \quad (2.67)$$

Pour  $p$  quelconque, on a :

$$R(p) \cdot R(1-p) = R_A R_B \quad (2.68)$$

## II.8.- ETUDE D'UN RESEAU DE STRUCTURE ALEATOIRE "CARREE EN MOYENNE" COMPOSE DE RESISTANCES ALEATOIRES

Le résultat précédent, n'est valable que pour un réseau de structure régulière carrée : ceci restreint sa portée pratique car les phénomènes physiques que l'on peut simuler par un réseau de résistances aléatoires s'accompagnent souvent d'une structure aléatoire.

On peut étendre ce résultat à un réseau de structure irrégulière à condition qu'il soit "carré en moyenne" c'est-à-dire que, s'il comporte  $B$  branches et  $N$  nœuds, son degré moyen  $\bar{d} = 2B/N$  soit égal à 4.

Nous avons publié en [13] ce résultat que nous rappelons ici sans démonstration

**THEOREME** : Un réseau planaire "carré en moyenne", de forme carrée, composé de résistances dont la distribution des logarithmes est symétrique par rapport à une valeur  $R_0$  a pour résistance équivalente  $R_0$ , moyenne géométrique de cette distribution.

**COROLLAIRE 1** : Si toutes les résistances du réseau sont identiques et égales à  $R$ , la résistance équivalente du réseau "carré en moyenne" vaut  $R$ .

Le réseau dual d'un réseau hexagonal en moyenne ( $\bar{d} = 3$ ) étant un réseau triangulaire en moyenne ( $\bar{d} = 6$ ) on a :

**COROLLAIRE 2** : Si la distribution des logarithmes des résistances reste symétrique par rapport à  $R_0$ ,

$$\overline{R_{\text{hex}}} \cdot \overline{R_{\text{tri}}} = R_0^2 = \overline{R_{\text{car}}}^2 \quad (2.69)$$

en désignant par  $\overline{R_{\text{hex}}}$ ,  $\overline{R_{\text{tri}}}$ ,  $\overline{R_{\text{car}}}$  les résistances équivalentes aux réseaux hexagonaux triangulaires, carrés en moyenne.

## II.9.- APPLICATION DE LA THEORIE DES GRAPHES AUX RESEAUX ALEATOIRES DE RESISTANCES

### II.9.1.- Introduction

Le calcul rigoureux de la résistance équivalente d'un réseau quelconque ne peut être abordé que par des méthodes matricielles. Cependant pour que les calculs faits aient une signification statistique, il faut traiter ainsi des réseaux de grande dimension : les matrices utilisées sont alors très grandes et leur inversion sur ordinateur conduit à des temps de calcul très longs [25].

Mais utiliser de telles méthodes, c'est méconnaître le caractère fondamental du problème qui est aléatoire : en effet les termes de la matrice décrivant le réseau sont aléatoires et seule leur distribution statistique a un sens.

Aussi, nous avons adapté des méthodes de calcul de la théorie des graphes appliquée aux réseaux électriques au problème statistique du calcul de la résistance équivalente d'un réseau de grande taille, composé de résistances aléatoires.

Nous prions le lecteur de se reporter à l'annexe 4 pour un rappel des définitions et des résultats déjà connus de la théorie des graphes appliquée aux réseaux électriques.

### II.9.2.- Théorie statistique des graphes appliquée aux réseaux aléatoires de résistances.

Les résultats de la théorie des graphes appliquée aux réseaux électriques, décrits dans l'annexe 4, n'ont à notre connaissance été utilisés que pour des réseaux de structure déterminée.

Pour des réseaux de petite taille, tels que celui que nous avons donné en exemple dans l'annexe 4, le dénombrement des arbres du graphe "original" et du graphe "replié" est relativement aisé et on obtient rapidement un résultat.

Pour des réseaux de grande taille, des programmes de recherche d'arbres sur ordinateur sont nécessaires : dès lors, les moyens mis en œuvre deviennent presque aussi lourds que les méthodes classiques d'inversion de matrice.

L'avantage des méthodes topologiques de calcul des déterminants à partir des valeurs des arbres est qu'on ne fait qu'une somme de monomes positifs : tous les termes de signes contraires qui apparaissent dans les méthodes classiques de calcul des déterminants et se simplifient, n'apparaissent pas ici. Le désavantage, par contre, est qu'il faut mettre au point un algorithme de recherche systématique des arbres du graphe, et le nombre d'arbres devient énorme dès que la taille du réseau augmente.

Nous avons remarqué, pour des réseaux de grande taille, remplis de résistances aléatoirement réparties dans ce réseau, qu'il était possible de donner aux formules de l'annexe 4 (A4.16) et (A4.17) donnant la résistance équivalente au réseau une interprétation statistique en écrivant :

$$R_{eq} = \frac{\sum_{l=1}^{T'} V'_l}{\sum_{k=1}^T V_k} = \frac{T' \left( \frac{1}{T'} \sum_{l=1}^{T'} V'_l \right)}{T \left( \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T V_k \right)} = \frac{T'}{T} \cdot \frac{\langle V'_l \rangle}{\langle V_k \rangle} \quad (2.70)$$

où T et T' désignent respectivement le nombre d'arbres du réseau "original" et du réseau "replié" et où  $\langle V_k \rangle$  et  $\langle V'_l \rangle$  représentent les moyennes des valeurs des arbres du réseau "original" et du réseau "replié".

Pour trouver  $R_{eq}$  à partir de la formule (2.70) nous sommes ramenés aux problèmes suivants :

- a) évaluer le rapport  $T'/T$
- b) évaluer le rapport  $\langle V'_l \rangle / \langle V_k \rangle$

Le premier problème se rattache à la seule structure du réseau :

- . Pour des réseaux de structure régulière, on peut calculer  $T'/T$  sans difficulté.
- . Pour des réseaux de structure aléatoire, le calcul de  $T'/T$  se ramène au calcul de la résistance d'un réseau de structure identique contenant des résistances de même valeur.

Le second problème est le calcul du rapport des valeurs moyennes des arbres du réseau "replié" et du réseau "original" : il est d'un degré de complexité supérieur car il dépend à la fois de la distribution des résistances qui ont été disposées dans le réseau et de la structure du réseau comme nous le montrerons plus loin.

Nous envisagerons donc par ordre de complexité croissante les problèmes suivants dont certaines solutions approchées ont été données dans les paragraphes précédents:

- a) Un réseau de structure quelconque composé de résistances identiques
- b) Un réseau de structure régulière composé de résistances aléatoires
- c) Un réseau de structure aléatoire composé de résistances aléatoires.

### II.9.3.- Réseaux se composant de résistances identiques

Le réseau comporte B branches et N nœuds et se compose de résistances toutes identiques  $r = 1/g$ .

La valeur de tous les arbres du réseau est identique et vaut :

$$V_k = v = g^{N-1} \quad (2.71)$$

et pour le réseau "replié" :

$$V'_1 = v' = g^{N-2} \quad (2.72)$$

La résistance équivalente vaut donc :

$$R_{eq} = \frac{\sum_{V_k}^{T'} V'_1}{T} = \frac{T' \cdot V'}{T \cdot V} = \frac{T'}{T} \cdot \frac{1}{g} = \frac{T'}{T} \cdot r \quad (2.73)$$

Nous sommes ramenés au calcul du rapport  $T'/T$  qui dépend de la structure du réseau.

### II.9.3.1.- Réseaux réguliers

Pour des réseaux réguliers planaires, on a :

- Réseau de structure hexagonale :  $T'/T = \sqrt{3}$
- Réseau de structure carrée :  $T'/T = 1$
- Réseau de structure triangulaire :  $T'/T = 1/\sqrt{3}$

Pour un réseau de structure cubique, tridimensionnel, composé de  $3m^3 - 4m^2 + 2m$  branches (réseau contenu dans un cube portant  $m$  branches en arête), on peut montrer que  $T'/T = 1/m$ .

Pour les réseaux plans, on remarque que le rapport  $T'/T$  va diminuant quand le degré des nœuds du réseau augmente.

Pour le réseau cubique de degré 6, le rapport  $T'/T$  tend vers zéro quand la taille du réseau augmente.

### II.9.3.2.- Réseaux de structure aléatoire

Pour obtenir un réseau de structure aléatoire, on peut utiliser le processus destructif du paragraphe II.2.2. en effectuant sur un réseau régulier de résistances identiques une "percolation par branches".

Enlever des branches d'un réseau régulier, c'est remplacer un certain nombre de résistances par des résistances dont la valeur tend vers l'infini.

On peut donc considérer un réseau aléatoire de résistances identiques  $r$ , comme le résultat d'un processus de percolation par branches sur un réseau régulier, comprenant une proportion  $p$  de résistances  $r$  et une proportion  $1-p$  de résistances  $r'$  dont la valeur tend vers l'infini, la position des  $r$  et des  $r'$  étant aléatoire dans le réseau.

On sait que la destruction d'un réseau par un tel processus de percolation par branches mène à un seuil pour la résistance c'est-à-dire qu'au delà d'une certaine proportion de résistances retirées au hasard, la résistance du réseau devient infinie.

Si on considère que le réseau a une structure aléatoire et des résistances identiques, d'après la formule (2.73), c'est le rapport  $T'/T$  qui tend vers l'infini au seuil de percolation.

Si on considère que le réseau a une structure régulière et une distribution de résistances  $r$  et  $r' \rightarrow \infty$ , le rapport  $T'/T$  est constant puisque la structure du réseau reste régulière quand  $r'$  tend vers l'infini et dans la formule (2.70) c'est le rapport  $\langle V'_1 \rangle / \langle V_k \rangle$  qui tend vers l'infini quand la proportion de résistance  $r'$  atteint le seuil de percolation.

Nous traiterons dans ce qui suit le réseau aléatoire de résistances identiques comme la limite d'un réseau régulier contenant une distribution binaire de résistances  $r$  et  $r'$  lorsque  $r'$  tend vers l'infini - ce qui revient à choisir le processus destructif de percolation par branches comme mode de construction d'un réseau de structure aléatoire.

Remarquons néanmoins dès maintenant, que si  $p$  est la proportion de résistances  $r$  dans le réseau et  $R(p)$  la résistance équivalente correspondante, on a :

$$R(p) = \frac{T'}{T} \frac{\langle V'_1(p) \rangle}{\langle V_k(p) \rangle} \quad (2.74)$$

$$R(1) = \frac{T'}{T} \cdot r \quad (2.75)$$

d'où

$$\frac{R(p)}{R(1)} = \frac{1}{r} \frac{\langle V'_1(p) \rangle}{\langle V_k(p) \rangle} \quad (2.76)$$

et en exprimant la conductance équivalente  $G(p) = 1/R(p)$  en fonction de  $g = 1/r$  :

$$\frac{G(p)}{G(1)} = \frac{1}{g} \frac{\langle V_k(p) \rangle}{\langle V'_1(p) \rangle} \quad (2.77)$$

#### II.9.4.- Réseaux composés de résistances aléatoires

##### II.9.4.1.- Procédé d'évaluation de la valeur moyenne des arbres du graphe.

Nous avons fait l'hypothèse que la répartition des  $B$  résistances de différentes valeurs avait été faite au hasard dans le réseau.

Un arbre est un ensemble de  $N-1$  résistances du réseau répondant à certaines considérations d'ordre topologique (il doit passer par tous les nœuds et ne pas comporter de cycles).

Les résistances étant disposées au hasard dans le réseau, on peut fort bien considérer l'arbre comme un échantillon aléatoire de  $N-1$  résistances prises parmi les  $B$  résistances du réseau.

Certes, tous les échantillons de  $N-1$  résistances ne sont pas des arbres car certains forment des cycles : le nombre  $C$  de combinaisons de  $N-1$  résistances prises parmi  $B$  étant :

$$C = \binom{B}{N-1} = \frac{B!}{(N-1)! (B-N+1)!} \quad (2.78)$$

on a certainement :

$$T < C$$

où  $T$  est le nombre d'arbres du graphe.

Mais les  $C-1$  combinaisons interdites sont aussi composées de  $N-1$  résistances aléatoires issues de la même distribution que les  $T$  combinaisons permises si bien qu'il devrait y avoir identité entre la moyenne des valeurs des arbres calculée sur les  $T$  combinaisons exactes et la moyenne calculée sur les  $C$  combinaisons possibles de  $N-1$  résistances, les nombres  $T$  et  $C$  étant très grands dès que le réseau est de taille suffisante. Nous verrons plus loin que ceci n'est qu'une approximation mais qu'elle conduit à des résultats intéressants.

Les résistances sont disposées aléatoirement, de façon indépendante dans le réseau, c'est-à-dire que la présence d'une résistance d'une certaine valeur en un point du réseau est indépendante de la valeur de la ou des résistances voisines : ceci est vrai à l'échelle du réseau mais ne l'est pas pour un échantillon de  $(N-1)$  résistances prises parmi les  $B$  résistances. En effet, le tirage au hasard de  $(N-1)$  branches parmi une population totale finie de  $B$  branches pour constituer un arbre est un tirage exhaustif - ce qui signifie qu'une branche d'arbre une fois choisie ne peut plus être choisie puisque toutes les branches d'un arbre sont distinctes. En assimilant le réseau à une urne, remplie de branches, le tirage des branches qui constituent un arbre se fait donc sans remise dans l'urne. L'effectif de la population diminue au fur et à mesure du tirage des branches et sa composition se modifie donc en fonction de l'échantillon déjà tiré.

Le cas contraire serait celui du tirage non exhaustif dans lequel chaque tirage ne modifie pas la population, soit parce que celle-ci est infinie, soit parce que le nombre  $N$  d'éléments tirés est très petit devant l'effectif  $B$  de la population.

C'est donc en fait le rapport du nombre d'éléments tirés  $N$  à l'effectif de la population  $B$  qui permet de considérer le processus comme exhaustif ou non exhaustif. Ceci est directement lié au degré moyen du réseau car on a :

$$d = \frac{2B}{N}$$

si le degré moyen du réseau est très grand,  $N \ll B$  et le tirage peut être considéré comme non exhaustif. Dans le cas contraire, il faut le considérer comme exhaustif.

#### II.9.4.2.- Distribution binaire des résistances

Nous supposons un réseau de structure quelconque où sont réparties aléatoirement des conductances  $x$  en proportion  $p$  et des conductances  $y$  en proportion  $1-p = q$ .

Soit  $R(p)$  la résistance équivalente au réseau.

Lorsque  $p = 1$  le réseau ne contient que des conductances  $x$  et sa résistance est  $R(1)$ .

Le calcul de la résistance équivalente au réseau se fait d'après la formule (2.70) en calculant le rapport des valeurs moyennes des arbres du réseau "replié" et du réseau "original"

$$R(p) = \frac{T'}{T} \cdot \frac{\langle V'_1 \rangle}{\langle V_k \rangle} \quad (2.79)$$

$$R(1) = \frac{T'}{T} \cdot \frac{x^{N-2}}{x^{N-1}} = \frac{T'}{T} \cdot \frac{1}{x}$$

soit :

$$\frac{R(p)}{R(1)} = \frac{\langle V'_1 \rangle}{\langle V_k \rangle} \cdot x \quad (2.80)$$

Le réseau comporte  $B$  branches, il y a donc  $Bp$  conductances  $x$  et  $B(1-p)$  conductances  $y$ .

La probabilité d'obtenir  $k$  conductances  $x$  dans un tirage exhaustif d'un échantillon de  $(N-1)$  branches parmi les  $B$  est donnée par la distribution hypergéométrique [annexe 5] :

$$P(k) = \frac{\binom{Bp}{k} \binom{B(1-p)}{N-1-k}}{\binom{B}{N-1}} \quad (2.81)$$

L'arbre ainsi constitué comporte  $k$  conductances  $x$  et  $N-1-k$  conductances  $y$  : sa valeur est donc :

$$V_k = x^k y^{N-1-k} \quad (2.82)$$

L'espérance de la valeur d'un tel arbre sera :

$$E(V_k) = \sum_{k=0}^{N-1} V_k \cdot p(k) = \sum_{k=0}^{N-1} x^k y^{N-1-k} \cdot \frac{\binom{Bp}{k} \binom{B(1-p)}{N-1-k}}{\binom{B}{N-1}} \quad (2.83)$$

avec la probabilité (2.81)



Si on pose  $z = x/y$ , (2.83) devient :

$$E(V_k) = y^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} z^k \frac{\binom{Bp}{k} \binom{B(1-p)}{N-1-k}}{\binom{B}{N-1}} \quad (2.84)$$

Cette expression est le développement de la fonction génératrice de  $F(k)$  qui est une fonction hypergéométrique de Gauss.

Ainsi, on peut écrire, tous calculs effectués [annexe 5] et [A3,11] :

$$E(V_k) = y^{N-1} \frac{Bq^{[N-1]}}{B^{[N-1]}} {}_2F_1(-Bp, 1-N, Bq-N+2 ; z) \quad (2.85)$$

où  $Bq^{[N-1]}$  représente un polynome factoriel :

$$x^{[N]} = \binom{x}{n} n! = x(x-1)(x-2) \dots (x-n+1)$$

et  ${}_2F_1(a, b, c ; z)$  est la fonction hypergéométrique de Gauss.

On écrira de même pour la valeur moyenne des arbres du réseau replié qui comportent  $(N-2)$  branches :

$$E(V'_1) = y^{N-2} \frac{Bq^{[N-2]}}{B^{[N-2]}} {}_2F_1(-Bp, 2-N, Bq-N+3 ; z) \quad (2.86)$$

L'expression (2.86) s'écrit alors :

$$\frac{R(p)}{R(1)} = x \cdot \frac{y^{N-2}}{y^{N-1}} \frac{Bq^{[N-2]}}{Bq^{[N-1]}} \cdot \frac{B^{[N-1]}}{B^{[N-2]}} \frac{{}_2F_1(-Bp, 2-N, Bq-N+3 ; z)}{{}_2F_1(-Bp, 1-N, Bq-N+2 ; z)} \quad (2.87)$$

on peut simplifier le rapport des polynômes factoriels :

$$\frac{x^{[N-1]}}{x^{[N-2]}} = \frac{x(x-1)(x-2) \dots (x-n+3)(x-n+2)}{x(x-1)(x-2) \dots (x-n+3)} = (x-n+2)$$

et (2.87) s'écrit :

$$\frac{R(p)}{R(1)} = \frac{x}{y} \cdot \frac{B-N+2}{Bq-N+2} \cdot \frac{{}_2F_1(-Bp, 2-N, Bq-N+3 ; z)}{{}_2F_1(-Bp, 1-N, Bq-N+2 ; z)} \quad (2.88)$$

qui s'exprime en fonction de  $z$  et de  $p$  :

$$\frac{R(p)}{R(1)} = \frac{z}{1 - \frac{Bp}{B-N+2}} \cdot \frac{{}_2F_1(a, b+1, c+1 ; z)}{{}_2F_1(a, b, c ; z)} \quad (2.89)$$

en posant :

$$a = -Bp \quad ; \quad b = 1-N \quad ; \quad c = Bq-N+2$$

Cas particulier d'un réseau de structure carrée ou carrée en moyenne

Si le réseau est de structure carrée (fig. 11), on a :

$$B = 2N - 3 \quad (2.90)$$

Cette relation peut également s'appliquer à un réseau carré en moyenne tel qu'il est défini en II.8.1..

Supposons en outre que  $p = q = 1/2$  et reportons ces valeurs dans l'expression générale (2.89) on obtient :

$$\frac{R(1/2)}{R(1)} = \frac{z}{1 - \frac{N-3/2}{N-1}} \cdot \frac{{}_2F_1(-N+3/2, 2-N, 3/2; z)}{{}_2F_1(-N+3/2, 1-N, 1/2; z)} \quad (2.90)$$

Les fonctions hypergéométriques peuvent alors se simplifier à l'aide des formules données par LUKE [15]

$${}_2F_1(1/2-\alpha, -\alpha, 1/2; x^2) = \frac{(1+x)^{2\alpha} + (1-x)^{2\alpha}}{2} \quad (2.91)$$

$${}_2F_1(1/2-\alpha, 1-\alpha, 3/2; x^2) = \frac{(1+x)^{2\alpha} - (1-x)^{2\alpha}}{4\alpha x} \quad (2.92)$$

Si on pose  $\alpha = N-1$  et  $x^2 = z$ , on obtient :

$${}_2F_1(-N+3/2, 1-N, 1/2; z) = \frac{(1+\sqrt{z})^{2(N-1)} + (1-\sqrt{z})^{2(N-1)}}{2} \quad (2.93)$$

$${}_2F_1(-N+3/2, 2-N, 3/2; z) = \frac{(1+\sqrt{z})^{2(N-1)} - (1-\sqrt{z})^{2(N-1)}}{4(N-1)\sqrt{z}} \quad (2.94)$$

et en reportant (2.93) et (2.94) dans (2.90) :

$$\frac{R(1/2)}{R(1)} = \frac{z}{1 - \frac{N-3/2}{N-1}} \cdot \frac{2 \frac{(1+\sqrt{z})^{2(N-1)} + (1-\sqrt{z})^{2(N-1)}}{2}}{4(N-1)\sqrt{z} \frac{(1+\sqrt{z})^{2(N-1)} - (1-\sqrt{z})^{2(N-1)}}{4(N-1)\sqrt{z}}}$$

$$\frac{R(1/2)}{R(1)} = \sqrt{z} \frac{(1+\sqrt{z})^{2(N-1)} + (1-\sqrt{z})^{2(N-1)}}{(1+\sqrt{z})^{2(N-1)} + (1-\sqrt{z})^{2(N-1)}} \quad (2.95)$$

(2.95) s'écrit encore en divisant numérateur et dénominateur par  $(1+\sqrt{z})^{2(N-1)}$

$$\frac{R(1/2)}{R(1)} = \sqrt{z} \frac{1 + \frac{(1-\sqrt{z})^{2(N-1)}}{(1+\sqrt{z})^{2(N-1)}}}{1 + \frac{(1-\sqrt{z})^{2(N-1)}}{(1+\sqrt{z})^{2(N-1)}}} \quad (2.96)$$

Le terme  $(1-\sqrt{z})/(1+\sqrt{z})$  est inférieur à 1 en valeur absolue et lorsque N tend vers l'infini les termes  $((1-\sqrt{z})/(1+\sqrt{z}))^{2(N-1)}$  tendent vers zéro. On obtient donc :

$$\frac{R(1/2)}{R(1)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sqrt{z} \quad (2.97)$$

Pour le réseau de structure carrée on sait que pour  $p = 1$  (conductances  $x$  seulement) :

$$R(1) = \frac{1}{x}$$

on obtient donc :

$$R(1/2) = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{1}{\sqrt{x \cdot y}} \quad (2.98)$$

Dans le cas simple où il n'y a que deux types de résistances  $x$  et  $y$  en proportions égales, on obtient donc une résistance égale à la moyenne géométrique de la distribution des résistances.

Ce résultat est obtenu pour un réseau tel que  $B = 2N - 3$  de structure carrée ou carrée en moyenne et rejoint le résultat obtenu par d'autres méthodes en II.7.3. et II.8.

Dans le cas général, reprenons la formule (2.89) pour obtenir un résultat plus utilisable.

Le rapport des fonctions hypergéométriques du second membre de (2.89) peut se mettre sous la forme d'un développement en fraction continue du à Gauss [16].

$$\frac{{}_2F_1(a, b, c; z)}{{}_2F_1(a, b+1, c+1; z)} = 1 - \frac{u_1 z}{1 - \frac{v_1 z}{1 - \frac{u_2 z}{1 - \frac{v_2 z}{1 - \frac{u_3 z}{\dots}}}}} \quad (2.99)$$

avec :

$$u_k = \frac{(a+k-1)(c-b+k-1)}{(c+2k-2)(c+2k-1)} \quad (2.100)$$

$$v_k = \frac{(b+k)(c-a+k)}{(c+2k-1)(c+2k)}$$

en remplaçant  $a, b, c$ , par leurs expressions, on obtient :

$$u_k = \frac{(k-Bp-1)(k+Bq)}{(2k+Bq-N)(2k+Bq-N+1)} \quad (2.101)$$

$$v_k = \frac{(k-N+1)(k+B-N+2)}{(2k+Bq-N+1)(2k+Bq-N+2)}$$

Si on introduit le degré moyen  $d = 2B / N$ , on obtient en divisant  $u_k$  et  $v_k$  par  $N^2$  au numérateur et au dénominateur :

$$u_k = \frac{-(dq+2k/N)(dp - \frac{2}{N}(k-1))}{(dq+4k/N-2)(dq-2 + \frac{2(2k+1)}{N})} \quad (2.102)$$

$$v_k = \frac{-(2 - \frac{2(k+1)}{N})(d-2 + \frac{2(k+2)}{N})}{(dq-2 + \frac{2(2k+1)}{N})(dq-2 + \frac{2(2k+2)}{N})}$$

Dans le développement (2.99) en fractions continues, les derniers termes, correspondant aux grandes valeurs de k, apportent peu de modifications au résultat final.

Lorsque le réseau est très grand ( $N \rightarrow \infty$ ) les termes en  $k/N$  de (2.102) peuvent être considérés comme infiniment petits et les  $u_k$  et  $v_k$  deviennent donc indépendants de k :

$$u = \frac{-dq \cdot dp}{(dq-2)(dq-2)} = \frac{-pq}{(q-2/d)^2} \quad (2.103)$$

$$v = \frac{-2(d-2)}{(dq-2)(dq-2)} = \frac{-2/d(1-2/d)}{(q-2/d)^2}$$

L'expression (2.89) peut alors s'écrire quand  $N \rightarrow \infty$

$$\frac{R(p)}{R(1)} = \frac{z}{1 - \frac{dp}{d-2} \left( 1 - \frac{uz}{1 - \frac{vz}{1 - \frac{uz}{\dots}}}} \right)} \quad (2.104)$$

Nous exprimerons par la suite le rapport  $G(p) / G(1)$  inverse de  $R(p) / R(1)$  car c'est sous cette forme que les vérifications expérimentales ont été faites :

$$\frac{G(p)}{G(1)} = \frac{1}{z} \left( 1 - \frac{dp}{d-2} \right) \left( 1 - \frac{uz}{1 - \frac{vz}{1 - \frac{uz}{\dots}}} \right) \quad (2.105)$$

La limite C du développement en fractions continues est obtenue en écrivant :

$$1 - \frac{uz}{1 - \frac{vz}{c}} = c \quad (2.106)$$

En développant (2.106) on obtient une équation du second degré dont c est solution :

$$c^2 - c(z(v-u) + 1) + vz = 0 \quad (2.107)$$

on obtient :

$$c = \frac{z(v-u)+1 \pm \sqrt{z^2(v-u)^2 - 2z(v+u) + 1}}{2} \quad (2.108)$$

En remplaçant dans (2.108), u et v par leurs valeurs (2.103) et en reportant dans (2.105) on tire :

$$\frac{G(p)}{G(1)} = \frac{1}{z} \left( \frac{dq-2}{d-2} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{2} \frac{(pq-2/d+4/d^2)}{(q-2/d)^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z^2(pq-2/d+4/d^2)^2}{(q-2/d)^4} + \frac{2z(pq+2/d-4/d^2)}{(q-2/d)^2} + 1} \right)$$

$$\frac{G(p)}{G(1)} = \frac{dq-2}{d-2} \left( \frac{1}{2z} + \frac{1}{2} \frac{(pq-2/d+4/d^2)}{(q-2/d)^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(pq-2/d+4/d^2)^2}{(q-2/d)^4} + \frac{2(pq+2/d-4/d^2)}{z(q-2/d)^2} + \frac{1}{z^2}} \right)$$

(2.109)

Si la conductance  $y$  tend vers 0, ce qui équivaut à retirer la branche qui la porte, le rapport  $z = x / y$  tend vers l'infini et (2.109) devient :

$$\frac{G(p)}{G(1)} \underset{z \rightarrow \infty}{=} \frac{dq-2}{2(d-2)} \left( \frac{pq-2/d+4/d^2}{(q-2/d)^2} \pm \frac{pq-2/d+4/d^2}{(q-2/d)^2} \right)$$

en retenant la solution qui ne s'annule pas, on obtient, après simplification :

$$\frac{G(p)}{G(1)} \underset{z \rightarrow \infty}{=} \frac{(dq-2)}{(d-2)} \frac{(pq-2/d+4/d^2)}{(q-2/d)^2} = \frac{dp-2}{d-2} \quad (2.110)$$

L'expression asymptotique (2.110) prévoit une décroissance linéaire de  $G(p) / G(1)$  depuis la valeur 1 pour  $p = 1$  jusqu'à la valeur 0 pour  $p = 2/d$ .

Pour des valeurs de  $z$  non infinies, nous avons tracé pour plusieurs valeurs de  $d$  les courbes  $G(p) / G(1)$  - d'après la formule (2.109)

La figure 12 montre pour  $z = 2, 5, 10, 100, 1000, \infty$  la variation du rapport  $G(p) / G(1)$  pour  $d = 4$ .

La figure 13 est relative à  $d = 6$ .

La figure 14 montre les valeurs asymptotiques pour  $d = 3, 4, 6, 8$ .

On remarquera que pour  $p = 0,5$ , toutes les courbes  $G(p) / G(1)$  passent par  $1/\sqrt{z}$ , et que pour  $p = 0$   $G(0) / G(1)$  vaut  $1/z$ .

L'interruption du trait sur les courbes correspond à une annulation du radical dans la formule (2.109) et au changement de signe qu'il faut effectuer.

Si on compare les courbes asymptotiques avec les courbes  $G(p)/G(1)$  expérimentales trouvées dans la littérature, on s'aperçoit :

- qu'il y a une excellente coïncidence entre courbes théoriques et points expérimentaux dans la zone  $p > 2/d$  dans le cas où des études expérimentales ont été faites ( $d = 4, d = 6$ ) [9].
- que l'annulation de la conductivité pour  $P_c = 2/d$  donne un seuil de percolation par branches différent des seuils généralement admis.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs théoriques ou généralement admises des seuils de percolation pour quelques réseaux réguliers, avec les valeurs critiques  $p_c = 2/d$  que nous trouvons :

La comparaison entre les résultats de notre méthode et celle des résultats expérimentaux -(que nous reportons à un paragraphe ultérieur)- montre que la méthode des arbres donne des résultats de plus en plus inexacts au fur et à mesure que l'on s'approche du seuil de percolation c'est-à-dire lorsqu'on a retiré suffisamment de branches du réseau pour qu'il cesse d'être conducteur.

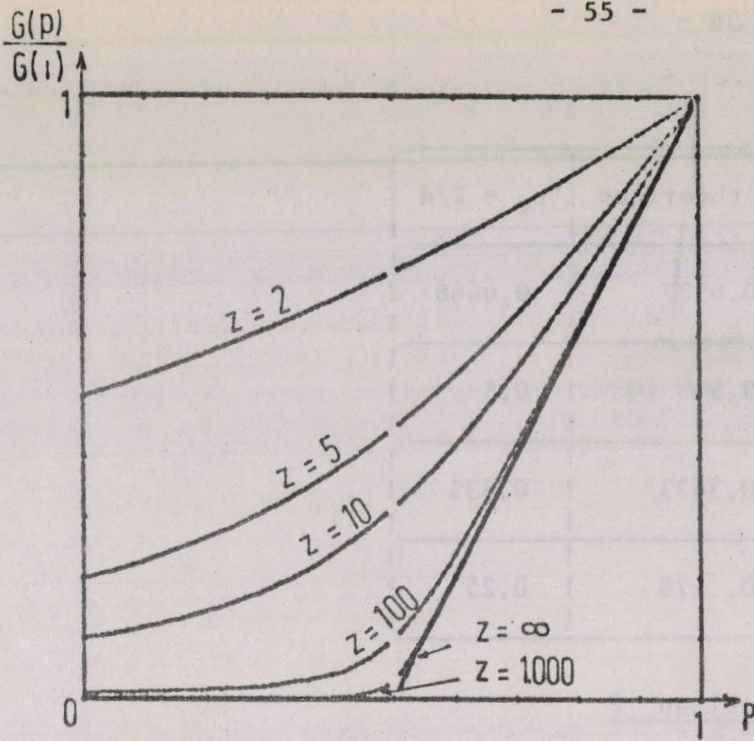


Figure 12

$d = 4$

$z = 2,5;10;100;1000;\infty$

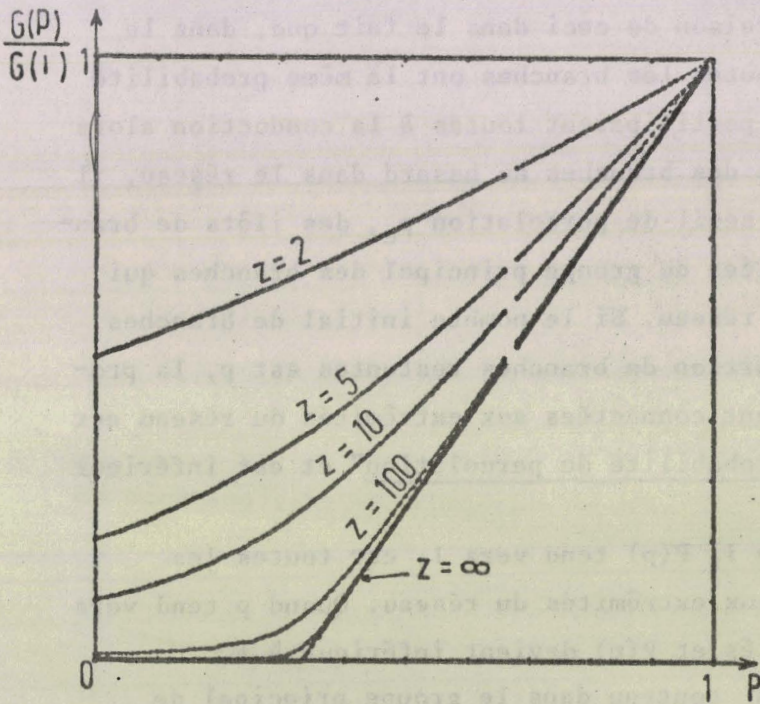


Figure 13

$d = 6$

$z = 2,5;10;100;1000;\infty$

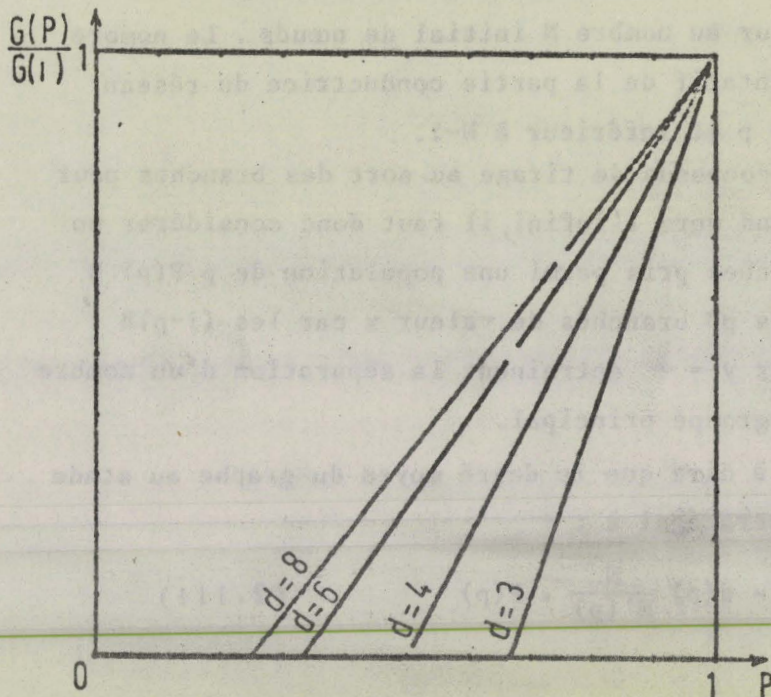


Figure 14

$d = 3, 4, 6, 8$



$d = \frac{2B}{N}$	$p_c = \text{théorique}$	$p_c = 2/d$
3	0,6527	0,6666
4	0,5	0,5
6	0,3473	0,333
8	0,178	0,25

Tableau 2

Il faut chercher la raison de ceci dans le fait que, dans le tirage des arbres au hasard, toutes les branches ont la même probabilité d'être choisies comme si elles participaient toutes à la conduction alors que, en réalité, lorsqu'on retire des branches au hasard dans le réseau, il se forme, quand on approche du seuil de percolation  $p_c$ , des îlots de branches assemblées (clusters) isolées du groupe principal des branches qui relie les deux extrémités du réseau. Si le nombre initial de branches du réseau est B, quand la proportion de branches restantes est p, la proportion de branches effectivement connectées aux extrémités du réseau est  $p \cdot P(p)$  où  $P(p)$  est dénommé "probabilité de percolation" et est inférieur à 1.

Quand p est proche de 1,  $P(p)$  tend vers 1, car toutes les branches sont connectées aux deux extrémités du réseau. Quand p tend vers  $p_c$ , apparaissent des îlots isolés et  $P(p)$  devient inférieur à 1.

Le nombre de nœuds  $N'$  contenu dans le groupe principal de branches, est lui-même inférieur au nombre N initial de nœuds. Le nombre de branches de l'arbre représentatif de la partie conductrice du réseau est donc également fonction de p et inférieur à N-1.

Si on considère le processus de tirage au sort des branches pour constituer un arbre, quand y tend vers l'infini, il faut donc considérer un échantillon de  $N'-1 < N-1$  branches pris parmi une population de  $p \cdot P(p) \cdot B$  branches de valeur x au lieu de  $pB$  branches de valeur x car les  $(1-p)B$  branches qui prennent la valeur  $y = \infty$  entraînent la séparation d'un nombre supplémentaire de branches du groupe principal.

Ceci revient encore à dire que le degré moyen du graphe au stade p, au lieu d'être  $d(p) = 2pB/N$  sera égal à :

$$d'(p) = \frac{2p P(p) B}{N'(p)} = d(p) \frac{N}{N'(p)} \cdot P(p) \quad (2.111)$$

La fonction  $P(p)$  n'ayant jusqu'ici pu être connue qu'après expérimentation sur de très grands réseaux - par méthode de Monte Carlo - il en est de même de  $N'(p)$  nombre de nœuds présents dans le groupe principal de branches - et il semble qu'il y ait peu d'espoir d'obtenir pour l'instant une formulation exacte du produit  $P(p) \cdot N / N'(p)$  - et donc une allure exacte pour la courbe  $G(p) / G(1)$  jusqu'au seuil de percolation  $p_c$ .

Néanmoins, comme l'expérience montre que les résultats obtenus par la théorie ci-dessus sont très proches des valeurs exactes tant que  $p$  n'atteint pas  $p_c$ , nous allons les étendre à une distribution quelconque de conductances - plus générale que la distribution binaire  $x$  et  $y$  que nous venons d'utiliser.

#### II.9.4.3.- Distribution quelconque de résistances

Nous considérons maintenant un réseau peuplé de conductances de valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en proportions respectives  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ( $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ ) dont nous cherchons la conductance équivalente.

La composition d'un échantillon de  $N-1$  conductances simulant un arbre, tirées parmi les  $B$  branches est maintenant donnée par une loi hypergéométrique à  $n$  dimensions [annexe 5].

Le produit de la valeur de ces  $N-1$  conductances constitue la valeur de l'arbre et nous en cherchons la valeur moyenne.

Résoudre analytiquement ce problème, c'est-à-dire introduire la distribution théorique des conductances  $x$  dans la loi hypergéométrique et calculer la valeur moyenne du produit des valeurs de l'échantillon résultant d'un tirage exhaustif de  $N-1$  éléments parmi  $B$  est extrêmement ardu dans le cas général, aussi, nous avons utilisé une voie différente, faisant appel à la théorie des équations algébriques.

Ce n'est que pour des valeurs particulières de  $N-1$  vis-à-vis de  $B$  que nous utiliserons des résultats de probabilités établis sur la loi hypergéométrique à  $n$  dimensions.

Considérons une équation algébrique du  $B$ ième degré  $f(x) = 0$ , dont les racines sont  $x_1, x_2, \dots, x_B$ , identiques aux valeurs des conductances peuplant le réseau.

S'il y a  $k$  conductances  $x_j$ , la racine  $x_j$  sera considérée comme une racine multiple d'ordre  $k$ .

On considère les fonctions symétriques des racines qui sont :

$\sigma_m$  = somme des produits  $m$  à  $m$  des racines

$S_m$  = somme des puissances  $m$ èmes des racines.



Le nombre de combinaisons des racines  $m$  à  $m$  est égal au coefficient binomial  $\binom{B}{m}$  et  $\sigma_m$  est donc une somme de  $\binom{B}{m}$  termes.

La somme  $S_m$  est, elle, une somme de  $B$  termes puisqu'il y a  $B$  racines à l'équation  $f(x) = 0$ .

Si on considère la distribution statistique des racines  $x_1, x_2 \dots \dots x_B$ , on aura donc :

$$S_m = \sum_{k=1}^B x_k^m = B \left( \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B x_k^m \right) = B \mu'_m \quad (2.112)$$

où  $\mu'_m$  est le moment d'ordre  $m$  de la distribution des racines c'est-à-dire des conductances du réseau.

Pour le produit  $\sigma_m$ , on aura :

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{\binom{B}{m}} \left( \prod_{i=1}^m x_{k_i} \right) = \binom{B}{m} E \left( \prod_{i=1}^m x_i \right) \quad (2.113)$$

La moyenne arithmétique du produit d'un échantillon de  $m$  conductances du réseau peut donc être considérée comme la somme  $\sigma_m$  de tous les produits  $m$  à  $m$  possibles divisée par le nombre  $\binom{B}{m}$  de ces combinaisons.

La valeur moyenne d'un arbre de  $(N-1)$  conductances s'exprimera donc par :

$$\langle V_k \rangle = \frac{\sigma_{N-1}}{\binom{B}{N-1}} \quad (2.114)$$

et pour un arbre extrait du réseau replié de  $N-2$  branches :

$$\langle V'_1 \rangle = \frac{\sigma_{N-2}}{\binom{B}{N-2}} \quad (2.115)$$

Ce qui donne pour la résistance équivalente d'après la formule (2.70) :

$$Req = \frac{T'}{T} \cdot \frac{\sigma_{N-2} \binom{B}{N-1}}{\sigma_{N-1} \binom{B}{N-2}} = \frac{T'}{T} \frac{\sigma_{N-2}}{\sigma_{N-1}} \frac{B-N+2}{N-1} \quad (2.116)$$

Il est théoriquement possible de relier les valeurs de  $\sigma_{N-1}$  et  $\sigma_{N-2}$  aux moments  $\mu'_m$  de la distribution des conductances grâce aux formules de Newton qui relient les fonctions symétriques des racines  $\sigma_m$  et  $S_m$  par l'intermédiaire des coefficients de l'équation  $f(x) = 0$ .

En effet, si on écrit l'équation  $f(x) = 0$  sous la forme :

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \dots (x-x_B) = 0$$

on obtient en développant :

$$x^B + a_1 x^{B-1} + a_2 x^{B-2} + \dots + a_{B-1} x + a_B = 0 \quad (2.117)$$

avec :

$$\sigma_1 = -a_1, \sigma_2 = a_2, \dots \sigma_p = (-1)^p a_p \quad (2.118)$$

$$S_1 + a_1 = 0$$

$$S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 = 0 \quad (2.119)$$

$$S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3a_3 = 0$$

⋮

Mais la nécessité de résoudre le système d'équations (2.119) pour obtenir les  $\sigma_p$  en fonction de  $S_1, S_2, \dots, S_n$  rend difficile l'expression de  $\langle V_k \rangle$  ou  $\langle V'_1 \rangle$  en fonction des moments de la distribution des conductances.

Il est plus simple d'utiliser les seules formules (2.118) qui permettent d'exprimer  $\langle V_k \rangle$  ou  $\langle V'_1 \rangle$  en fonctions des coefficients de l'équation (2.117) - coefficients qu'il restera à calculer connaissant la distribution des conductances.

On obtiendra alors d'après (2.116) et (2.118) :

$$Req = \frac{T'}{T} \cdot \frac{(-1)^{N-2} a_{N-2}}{(-1)^{N-1} a_{N-1}} \cdot \frac{B-N+2}{N-1} = -\frac{T'}{T} \cdot \frac{a_{N-2}}{a_{N-1}} \frac{B-N+2}{N-1} \quad (2.120)$$

Pour un réseau composé de résistances identiques  $r = 1/g$ , on a :

$$\sigma_m / \binom{B}{m} = g^m \quad (2.121)$$

et (2.116) s'écrit :

$$Req(r) = R_r = \frac{1}{Gg} = \frac{T'}{T} \frac{g^{N-2}}{g^{N-1}} = \frac{T'}{T} \cdot \frac{1}{g} \quad (2.122)$$

et le rapport  $Req / R_r$  que nous appellerons "résistance équivalente réduite" peut s'écrire d'après (2.120) et (2.122) :

$$\frac{Req}{R_r} = -\frac{a_{N-2}}{g^{N-2}} \cdot \frac{g^{N-1}}{a_{N-1}} \cdot \frac{B-N+2}{N-1} \quad (2.123)$$

Si on introduit une variable réduite pour les conductance du réseau, normalisée par rapport à la conductance  $g$

$$z = x / g$$

l'équation (2.117) devient :

$$z^B + \alpha_1 z^{B-1} + \alpha_2 z^{B-2} + \dots + \alpha_{B-1} z + \alpha_B = 0 \quad (2.124)$$

et les  $B+1$  coefficients  $\alpha_n$  sans dimension s'expriment en fonction des  $a_n$  de (2.117) par :

$$\alpha_n = \frac{a_n}{g^n} \quad (2.125)$$

Nous allons désormais utiliser la population des variables réduites  $z$  et nous noterons par  $Z_N$  le produit de  $N$  éléments  $z_i$  tirés de la population finie  $B$  et par  $Z_{B-N}$ , le produit des  $B-N$  éléments restant après tirage de  $N$  éléments parmi  $B$ .

On montre en annexe 5 que dans ce cas on a :

$$\bar{Z}_N^A \cdot \bar{Z}_{B-N}^H = (\bar{z}^G)^B = \left(\frac{\bar{x}^G}{g}\right)^B = \frac{(\bar{x}^G)^B}{g^B} \quad (2.126)$$

$$\bar{Z}_N^H \cdot \bar{Z}_{B-N}^A = (\bar{z}^G)^B \quad (2.127)$$

où  $\bar{Z}_N^A$  est la moyenne arithmétique du produit  $Z_N$

$\bar{Z}_{B-N}^H$  est la moyenne harmonique du produit  $Z_{B-N}$

$\bar{z}^G$  est la moyenne géométrique de la variable réduite  $z$

$\frac{\bar{x}^G}{g}$  est la moyenne géométrique des conductances  $x$ .

Pour  $N = 1$ , on aura :

$$\bar{Z}_1^H = \bar{z}^H \quad \bar{Z}_1^A = \bar{z}^A$$

(2.126) et (2.127) s'écrivent dans ce cas :

$$\bar{z}^A \cdot \bar{Z}_{B-1}^H = \bar{z}^H \cdot \bar{Z}_{B-1}^A = (\bar{z}^G)^B = \frac{(\bar{x}^G)^B}{g^B} \quad (2.128)$$

Avec ces notations (2.113), (2.118) et (2.125) s'écrivent :

$$\alpha_m = \binom{B}{m} \bar{Z}_m^A \cdot g^m = (-1)^m a_m = (-1)^m \alpha_m g^m$$

d'où on déduit :

$$\alpha_m = (-1)^m \binom{B}{m} \bar{Z}_m^A \quad (2.129)$$

La "résistance équivalente réduite"  $Req / R_r$  donnée par (2.123) s'écrit en fonction des  $\alpha_n$  :

$$\frac{Req}{R_r} = - \frac{\alpha_{N-2}}{\alpha_{N-1}} \cdot \frac{B-N+2}{N-1} \neq - \frac{\alpha_{N-2}}{\alpha_{N-1}} \cdot \frac{d-2}{2} \quad (2.130)$$

Dans trois cas particuliers,  $N = 2$ ,  $N = B + 1$ ,  $B = 2N - 3$ , le rapport  $\alpha_{N-2} / \alpha_{N-1}$ , et donc la résistance équivalente réduite, est susceptible d'une interprétation simple en fonction de la distribution des variables réduites  $z$ .

Examinons d'abord le cas  $N = 2$  : c'est par exemple celui d'un réseau composé de  $B$  branches en parallèle : son degré moyen tend vers l'infini avec  $B$ .

On a dans ce cas d'après (2.129) :

$$\alpha_{N-1} = \alpha_1 = -B \bar{Z}_1^A = -B \cdot \bar{z}^A$$

$$\alpha_{N-2} = \alpha_0 = 1 \quad (2.131)$$

et (2.174) s'écrit alors :

$$\frac{R_{eq}}{R_r} = \frac{1}{z^A} \cdot \frac{B-N+2}{B(N-1)} = \frac{1}{z^A} = \frac{g}{x^A} \quad (2.132)$$

ou si on choisit d'exprimer la "conductance équivalente réduite" :

$$\frac{G_{eq}}{G_g} = \frac{R_r}{R_{eq}} = z^A = \frac{x^A}{g} \quad (2.132')$$

La résistance  $R_r$  équivalente au réseau de même structure rempli de résistances identiques  $r = 1/g$  vaut ici :

$$R_r = \frac{r}{B} = \frac{1}{gB}$$

on a donc :

$$R_{eq} = \frac{R_r g}{x^A} = \frac{1}{B x^A} = \frac{1}{B} \left(\frac{1}{x}\right)^A \quad (2.133)$$

$$G_{eq} = B x^A \quad (2.133')$$

On peut donc énoncer la propriété suivante :

*Un réseau de degré moyen tendant vers l'infini a pour conductance équivalente réduite, la moyenne arithmétique des conductances réduites du réseau.*

En utilisant dans (2.132) la relation [annexe 3]

$$\frac{R_{eq}}{R_r} = \frac{1}{z^A} = \left(\frac{1}{z}\right)^A \quad (2.134)$$

on pourra énoncer pour la résistance équivalente réduite :

*Un réseau de degré moyen tendant vers l'infini a pour résistance équivalente réduite la moyenne harmonique des résistances réduites du réseau.*

On retrouve les résultats obtenus au paragraphe II.7.2. pour un réseau régulier de degré infini.

L'autre cas extrême est celui où  $N = B + 1$ . C'est celui d'une chaîne de B résistances en série : le degré moyen tend vers 2.

On a dans ce cas d'après (2.129) et (2.128) :

$$\alpha_{N-2} = \alpha_{B-1} = (-1)^{B-1} \binom{B}{B-1} \bar{z}_{B-1}^A = (-1)^{B-1} \cdot B \cdot (\bar{z}^G)^B / z^H$$

$$\alpha_{N-1} = \alpha_B = (-1)^B \binom{B}{B} \bar{z}_B^A = (-1)^B \cdot (\bar{z}^G)^B \quad (2.135)$$

et (2.130) s'écrit :

$$\frac{R_{eq}}{R_r} = \frac{B}{z^H} \cdot \frac{B-(B+1)+2}{B} = \frac{1}{z^H} = \frac{g}{x^H} \quad (2.136)$$

et en exprimant la conductance équivalente réduite :

$$\frac{G_{eq}}{G_g} = z^H = \frac{x^H}{g} \quad (2.136')$$

La résistance équivalente au réseau de même structure rempli de résistances identiques  $r$  vaut ici :

$$R_r = B \cdot r = B / g$$

et on a donc :

$$R_{eq} = \frac{R_r \cdot g}{\frac{-H}{x}} = \frac{B}{\frac{-H}{x}} = B \left( \frac{-1}{x} \right)^A \quad (2.137)$$

soit encore :

$$G_{eq} = \frac{\frac{-H}{x}}{B} \quad (2.137')$$

On peut ici énoncer de même que précédemment :

*Un réseau de degré moyen tendant vers 2 a pour conductance équivalente réduite la moyenne harmonique des conductances réduites du réseau.*

*Un réseau de degré moyen tendant vers 2 a pour résistance équivalente réduite la moyenne arithmétique des résistances réduites du réseau.*

On retrouve cette fois les résultats obtenus au paragraphe II.7.1. pour le réseau régulier de degré 2.

Le cas intermédiaire est enfin celui où  $B = 2N - 3$  : c'est celui d'un réseau carré ou carré en moyenne.

On a alors d'après (2.129) et (2.128) :

$$\alpha_{N-1} = \alpha_{B-N+2} = \alpha_{B-(N-2)} = (-1)^{B-(N-2)} \binom{B}{B-(N-2)} \bar{z}_{B-(N-2)}^A$$

$$\alpha_{N-2} = (-1)^{N-2} \binom{B}{N-2} \bar{z}_{N-2}^A = (-1)^{B-(N-2)} \binom{B}{N-2} \bar{z}_{B-N-2}^A$$

et (2.130) s'écrit cette fois :

$$\frac{R_{eq}}{R_r} = \frac{-(-1)^{N-2} \bar{z}_{N-2}^A}{(-1)^{B-(N-2)} \bar{z}_{B-(N-2)}^A} \cdot \frac{B-N+2}{(B-N+3)-1} = \frac{\bar{z}_{N-2}^A}{\bar{z}_{B-(N-2)}^A} \quad (2.138)$$

Mais d'après (2.127), on a :

$$\bar{z}_{B-(N-2)}^A = (\bar{z}^G)^B / \bar{z}_{N-2}^N$$

et (2.138) s'écrit :

$$\frac{R_{eq}}{R_r} = \frac{\bar{z}_{N-2}^A \cdot \bar{z}_{N-2}^H}{(\bar{z}^G)^B} \quad (2.139)$$

D'après l'annexe 5, il y a identité entre une moyenne prise sur un échantillon de  $(N-2)$  éléments pris parmi  $B$  et la même moyenne prise sur les  $(N-2)$  éléments restant après tirage de  $B-(N-2)$  éléments, on a donc :

$$\bar{z}_{N-2}^H = \bar{z}_{N-2}^H$$

et (2.139) devient :

$$\frac{R_{eq}}{R_r} = \frac{\bar{z}_{N-2}^A \cdot \bar{z}_{N-2}^H}{(\bar{z}^G)^B} \quad (2.140)$$

Cette formule s'applique à un réseau carré ou carré en moyenne pour une distribution quelconque de conductances.

Dans le cas particulier où la distribution des conductances est log symétrique, on sait d'après l'annexe 3 que le produit de (N-2) variables suivant une loi log-symétrique suit lui-même une loi de distribution log-symétrique et on a donc d'après (A3.43) :

$$\bar{z}_{N-2}^A \cdot \bar{z}_{N-2}^H = (\bar{z}_{N-2}^G)^2 = (\bar{z}^G)^{(N-2)2} = (\bar{z}^G)^{2N-4}$$

La formule (2.140) s'écrit alors dans ce cas :

$$\frac{R_{eq}}{R_r} = \frac{(\bar{z}^G)^{2N-4}}{(\bar{z}^G)^{2N-3}} = \frac{1}{\bar{z}^G} = \frac{g}{x} \quad (2.141)$$

Soit pour la conductance équivalente réduite :

$$\frac{G_{eq}}{G_g} = \frac{\bar{z}^G}{z^G} = \frac{x}{g} \quad (2.142)$$

Pour un réseau carré ou carré en moyenne, la conductance équivalente au réseau peuplé uniquement de conductances g étant :

$$G_g = g$$

(2.142) permet d'écrire :

$$G_{eq} = \frac{\bar{z}^G}{x} \quad (2.143)$$

Nous retrouvons ici, la propriété remarquable démontrée aux paragraphes II.7.3. et II.8.1. *pour un réseau carré et un réseau carré en moyenne : si la distribution des conductances x du réseau est log-symétrique, la conductance équivalente au réseau est égale à la moyenne géométrique des conductances du réseau.*

Hormis les trois cas particuliers que nous venons d'étudier et qui se rapportent à des réseaux de degré moyen 2.4. et ∞ avec des conductances équivalentes réduites égales respectivement aux moyennes harmoniques géométriques et arithmétiques de la distribution des conductances réduites individuelles, il est nécessaire de pouvoir prévoir la conductance équivalente à un réseau de degré moyen quelconque.

Nous supposons dans ce qui suit (et dans ce qui précède) que les B branches du réseau sont toutes reliées au générateur et qu'il n'y a donc pas de branches ou d'ensembles de branches isolés pour éviter les problèmes dus aux probabilités de percolation.

Pour une valeur quelconque de N par rapport à B, c'est-à-dire pour un degré moyen quelconque du réseau, le problème consiste à trouver le rapport des deux coefficients successifs  $\alpha_{N-2}$  et  $\alpha_{N-1}$  qui font partie des B coefficients de l'équation (2.124) dont les conductances réduites  $z_1, z_2, \dots, z_B$  sont les racines.

Une construction graphique va permettre d'illustrer la solution de ce problème :

Portons en abscisse B graduations équidistantes et en ordonnée, correspondant à l'abscisse entière m le terme  $\sigma_m / \binom{B}{m} = |\alpha_m| / \binom{B}{m}$  représentant la valeur moyenne du produit de m éléments de la distribution des B conductances réduites.

On graduera logarithmiquement l'axe des ordonnées de façon que la grandeur portée en ordonnée linéaire soit en fait  $\text{Log} (\sigma_m / \binom{B}{m})$ .

Deux points successifs correspondant aux abscisses m et m+1 auront donc comme ordonnées linéaires  $\text{Log}[\sigma_{m+1} / \binom{B}{m+1}]$  et  $\text{Log}[\sigma_m / \binom{B}{m}]$  et si on trace la droite qui les joint, sa pente sera d'après (2.116):

$$\text{Log} \left[ \frac{\sigma_{m+1}}{\sigma_m} \cdot \frac{\binom{B}{m}}{\binom{B}{m+1}} \right] = \text{Log} \left[ \frac{\text{Geq}(m)}{\text{Gg}} \right] \quad (2.144)$$

Pour une valeur particulière N correspondant au degré moyen  $d = 2B / N$ , on tracera donc la droite joignant les points d'abscisse (N-1) et (N-2) : sa pente représentera le logarithme de la conductance équivalente réduite du réseau.

Le réseau étant supposé de très grande taille, le nombre B de branches tend vers l'infini : le nombre de graduations en abscisse devient infiniment grand et la droite joignant les points d'abscisses N-1 et N-2 se transforme en tangente en (N-3/2) à la courbe enveloppe des points d'ordonnée  $\text{Log}[\sigma_N / \binom{B}{N}]$  qui deviennent infiniment rapprochés (fig. 15).

### CAS PARTICULIER N = 2

On a alors d'après (2.131) :

$$\alpha_{N-2} = \alpha_0 = 1 \quad |\alpha_{N-1}| = \alpha_1 = B \bar{z}^A$$

Les ordonnées des points correspondants sont respectivement

$$\text{Log} \left[ \frac{\alpha_0}{\binom{B}{0}} \right] = \text{Log} 1 = 0 \quad \text{Log} \left[ \frac{|\alpha_1|}{\binom{B}{1}} \right] = \text{Log} (|\alpha_1| / B) = \text{Log} (\bar{z}^A)$$

et la droite qui joint le point d'ordonnée  $\text{Log} (|\alpha_1| / B)$  à l'origine a donc pour pente le logarithme de la moyenne arithmétique des conductances réduites  $\bar{z}^A$  du réseau.

Quand B tend vers l'infini, la longueur de l'axe des abscisses restant inchangée, le point d'abscisse  $N-1 = 1$  tend asymptotiquement vers le point d'abscisse  $N-2 = 0$  et la droite précédente devient la tangente à l'origine de la courbe enveloppe des points d'ordonnée  $\log\{\sigma_m / \binom{B}{m}\}$  : sa pente qui est le logarithme de la moyenne arithmétique des conductances réduites du réseau représente donc le logarithme de la conductance équivalente réduite d'un réseau de degré tendant vers l'infini puisque :

$$d = \frac{2B}{N} \xrightarrow[N=2]{B \rightarrow \infty} \infty$$

On retrouve graphiquement le résultat obtenu plus haut.

### CAS PARTICULIER $N = B + 1$

A l'autre extrêmité de la courbe enveloppe, on trouve dans ce cas les points d'ordonnée :

$$\begin{aligned} \text{Log}(|\alpha_{N-2}| / \binom{B}{N-2}) &= \text{Log}(|\alpha_{B-1}| / \binom{B}{B-1}) = \text{Log}(|\alpha_{B-1}| / B) \\ \text{Log}(|\alpha_{N-1}| / \binom{B}{N-1}) &= \text{Log}(|\alpha_B| / \binom{B}{B}) = \text{Log}|\alpha_B| \end{aligned}$$

or on sait que le dernier coefficient  $\alpha_B$  de l'équation du  $B^{\text{ième}}$  degré,  $f(z) = 0$ , est égal au produit des racines, d'où, par définition de la moyenne géométrique de ces racines :

$$\alpha_B = \prod_{i=1}^B z_i = (\bar{z}^G)^B \quad (2.145)$$

Le coefficient  $|\alpha_{B-1}|$  peut s'écrire d'après (2.113), (2.118) et (2.120) :

$$|\alpha_{B-1}| = \frac{\sigma_{B-1}}{g^{B-1}} = \sum_{k=1}^B \binom{B-1}{i=1} z_{ik} = \sum_{k=1}^B \left( \frac{\prod_{i=1}^B z_i}{z_k} \right) = \sum_{k=1}^B \frac{(\bar{z}^G)^B}{z_k}$$

et par définition de la moyenne harmonique des  $z_k$ , on aura :

$$\frac{|\alpha_{B-1}|}{B} = (\bar{z}^G)^B \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B \frac{1}{z_k} = (\bar{z}^G)^B / \bar{z}^H \quad (2.146)$$

La droite qui joint les points d'ordonnée  $\text{Log}(|\alpha_{B-1}| / B)$  et  $\text{Log}|\alpha_B|$  a donc comme pente :

$$\text{Log}|\alpha_B| - \text{Log}(|\alpha_{B-1}| / B) = \text{Log}\left(\frac{\alpha_B \cdot B}{|\alpha_{B-1}|}\right) = \text{Log}\left(\frac{(\bar{z}^G)^B}{(\bar{z}^G)^B} \cdot \bar{z}^H\right) = \text{Log} \bar{z}^H \quad (2.147)$$

Quand B tend vers l'infini, le point d'abscisse  $N-2 = B-1$  tend asymptotiquement vers le point d'abscisse  $N-1 = B$  et la droite précédente devient la tangente à l'extrêmité de la courbe enveloppe des points d'ordonnée  $\log(\sigma_m / \binom{B}{m})$ . Sa pente égale au logarithme de la moyenne harmonique des conductances réduites du réseau représente donc le logarithme de la conductance équivalente réduite d'un réseau de degré tendant vers 2 puisque :

$$d = \frac{2B}{N} \xrightarrow[N=B+1]{B \rightarrow \infty} 2$$

on retrouve encore graphiquement un résultat simple établi plus haut.



REMARQUE : Les conductances réduites  $z$  s'obtiennent en normalisant la conductance  $x$  par rapport à une conductance arbitraire  $g$ . On peut choisir comme conductance de normalisation la moyenne géométrique des conductances du réseau :

$$g = \bar{x}^G$$

et dans ce cas, compte tenu de la relation classique (A3.5)

$$\bar{x}^H < \bar{x}^G < \bar{x}^A$$

on aura pour les moyennes harmoniques, géométriques, arithmétiques de la variable réduite  $z$  :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}^H}{z^H} &= \frac{\bar{x}^H}{g} = \frac{\bar{x}^H}{\bar{x}^G} < 1 & \text{Log } z^H < 0 \\ \frac{\bar{x}^G}{z^G} &= \frac{\bar{x}^G}{g} = \frac{\bar{x}^G}{\bar{x}^G} = 1 & \text{Log } z^G = 0 \\ \frac{\bar{x}^A}{z^A} &= \frac{\bar{x}^A}{g} = \frac{\bar{x}^A}{\bar{x}^G} > 1 & \text{Log } z^A > 0 \end{aligned} \quad (2.148)$$

La tangente à l'origine ( $N=0$ ), de pente  $\text{Log}(z^A)$ , a donc une pente positive et la tangente à l'extrémité ( $N = B$ ), de pente  $\text{Log } z^H$ , une pente négative (fig. 15).

L'introduction de la moyenne géométrique  $\bar{x}^G$  comme conductance de normalisation présente également l'intérêt d'annuler l'ordonnée de l'extrémité de la courbe enveloppe : on a en effet pour  $m = B$  d'après (2.145) :

$$\text{Log}(\sigma_B / \binom{B}{B}) = \text{Log}|\alpha_B| = \text{Log}(z^G)^B = B \text{Log}(z^G) = 0$$

La courbe enveloppe des points d'ordonnée  $\text{Log}(\sigma_m / \binom{B}{m})$  passe donc par zéro à ses deux extrémités et, étant données les pentes des tangentes à ses deux extrémités, elle passe par un maximum pour  $0 < N < B$  c'est-à-dire pour un degré moyen

$$Z < d < \infty$$

En ce maximum, la tangente est horizontale et a donc comme pente :

$$\text{Log } z^G = 0$$

Ce maximum est obtenu pour une abscisse correspondant au degré moyen d'un réseau dont la conductance équivalente réduite sera alors la moyenne géométrique des conductances réduites du réseau. Ce maximum est nécessairement unique car la conductance doit varier de façon monotone de  $\bar{x}^H$  à  $\bar{x}^A$  en passant par  $\bar{x}^G$  quand le degré du réseau passe de 2 à l'infini : ceci est physiquement justifiable puisque dans un réseau quelconque, le fait d'ajouter une branche entre deux nœuds quelconques augmente le degré moyen et fait croître, ou laisse inchangée, la conductance équivalente du réseau.

Pour une distribution quelconque de conductances, on a :

$$\frac{\bar{x}^H}{\bar{x}^G} \neq \frac{\bar{x}^A}{\bar{x}}$$

c'est-à-dire, d'après (2.148) :

$$\text{Log}(\bar{z}^H) \neq -\text{Log}(\bar{z}^A)$$

Les valeurs absolues des tangentes aux deux extrêmités de la courbe enveloppe sont alors différentes (fig. 15).

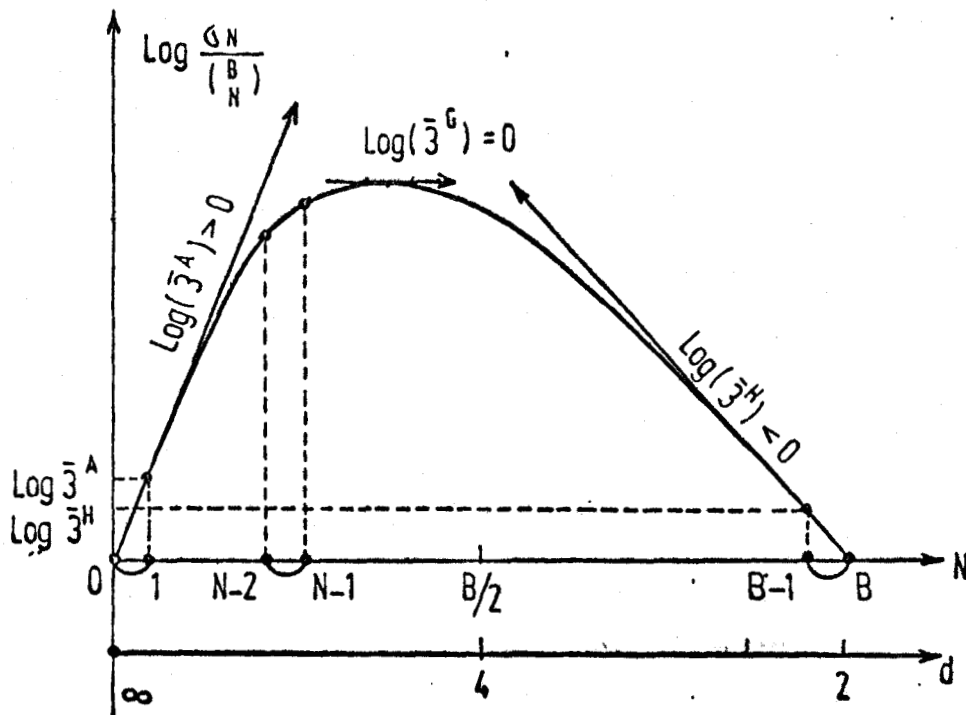


Figure 15

Pour une distribution log-symétrique, [annexe 3] on sait que :

$$\bar{x}^H \cdot \bar{x}^A = (\bar{x}^G)^2$$

d'où :

$$\frac{\bar{x}^H}{\bar{x}^G} = \frac{\bar{x}^A}{\bar{x}} \quad \text{Log}(\bar{z}^H) = -\text{Log}(\bar{z}^A)$$

Les valeurs absolues des pentes des tangentes aux deux extrêmités sont cette fois identiques (fig. 16) et la courbe enveloppe présente un axe de symétrie en  $B/2$  où se trouve le maximum et la tangente y est donc horizontale.

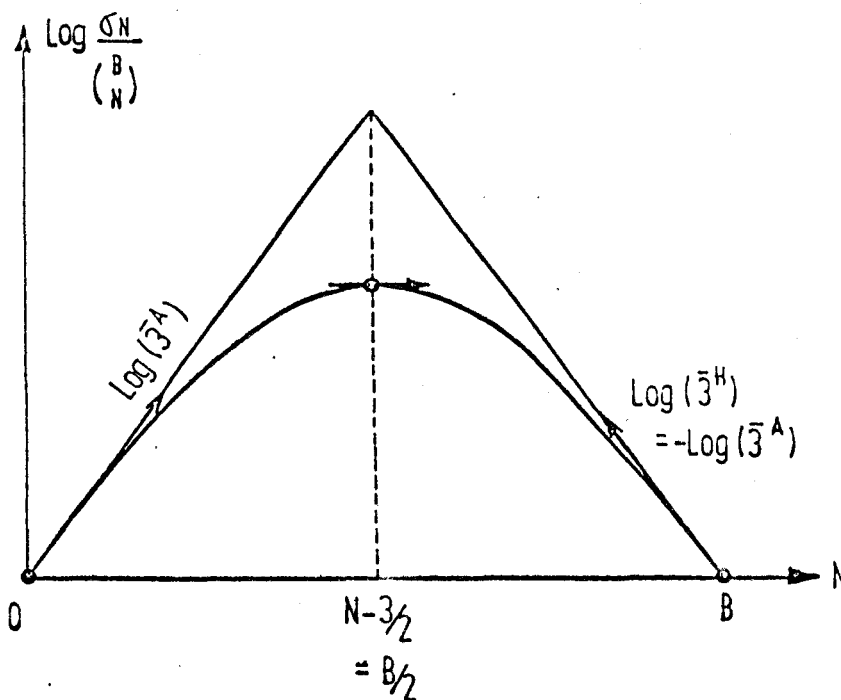


Figure 16

On sait que pour un nombre  $N$  de nœuds, lorsque  $B$  tend vers l'infini, le logarithme de la conductance équivalente réduite est le logarithme de la pente de la tangente à l'abscisse  $N-3/2$ .

La tangente horizontale correspondant à une conductance équivalente réduite égale à la moyenne géométrique des conductances réduites se trouve donc à l'abscisse :

$$N - 3/2 = B/2$$

D'où on déduit :

$$B = 2N - 3$$

Cette relation est caractéristique d'un réseau de structure carrée ou carrée en moyenne et on retrouve donc simplement ici le résultat :

*La conductance équivalente réduite d'un réseau de grande taille de structure carrée ou carrée en moyenne dont la distribution des conductances des branches est log-symétrique, est égale à la moyenne géométrique des conductances réduites du réseau.*

Nous n'avons fait jusqu'ici que retrouver et illustrer par une construction géométrique des résultats déjà établis précédemment mais cette construction géométrique peut permettre de déterminer la conductance équivalente réduite d'un réseau de degré moyen quelconque si on peut tracer avec suffisamment de précision la courbe enveloppe ou sa dérivée pour une distribution donnée de conductances.

La méthode suivie est la suivante :

On part de la distribution des  $B$  conductances réduites  $z_i$  et on suppose, pour simplifier, qu'elle sont normalisées par rapport à la moyenne géométrique de la distribution  $g$  de sorte que :

$$g = \frac{\bar{G}}{x} = 1 \quad ; \quad \frac{\bar{G}}{z} = \frac{\bar{x}}{g} = 1$$

Il faut alors calculer les coefficients  $\sigma_m$  pour  $0 \leq m \leq B$  : le calcul direct est difficile puisqu'il faudrait sommer  $\binom{B}{m}$  produits des conductances réduites prises  $m$  à  $m$ , ce qui donnerait un nombre d'additions énorme dès que  $B$  est un peu grand.

Mais puisque d'après (2.118) on a :

$$\sigma_m = (-1)^m \alpha_m$$

il suffit de calculer les coefficients de l'équation  $f(z) = 0$  dont les signes des coefficients sont alternés puisque toutes ses racines sont positives.

Nous avons programmé sur un calculateur Hewlett-Packard 9820 ce calcul relativement simple.

Les racines  $z_1, z_2, \dots, z_B$  de moyenne géométrique 1 étant mises en mémoire, l'algorithme de calcul de  $\alpha_m$  est basé sur le développement de l'équation  $f(z) = 0$  sous la forme

$$f(z) = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) \dots (z-z_B)$$

Les  $B+1$  coefficients  $\alpha_m$  sont imprimés et comme le résultat finalement cherché est :

$$\frac{Geq}{Gg} = \frac{|\alpha_{N-1}|}{|\alpha_{N-2}|} \cdot \frac{\binom{B}{N-2}}{\binom{B}{N-1}} = \frac{\alpha_{N-1}}{\alpha_{N-2}} \frac{N-1}{B-N+2}$$

on peut calculer immédiatement  $Geq(N)/Gg$  pour  $1 < N < B$ .

Pour obtenir des résultats significatifs, il faudrait faire tendre  $B$  vers l'infini, c'est-à-dire remplacer la distribution discrète des  $B$  conductances par une distribution continue. Ceci est bien sûr impossible, mais nous avons vérifié que pour  $B = 48$  la précision atteinte est suffisante pour que la courbe  $\log(Geq/Gg)$  en fonction de  $N$  atteigne une précision de tracé suffisante. La figure 17 montre un exemple tracé pour  $B = 24, 36, 48, 60, 72$  et on constate que sur la majeure partie du tracé les courbes sont confondues pour  $B \geq 48$ .

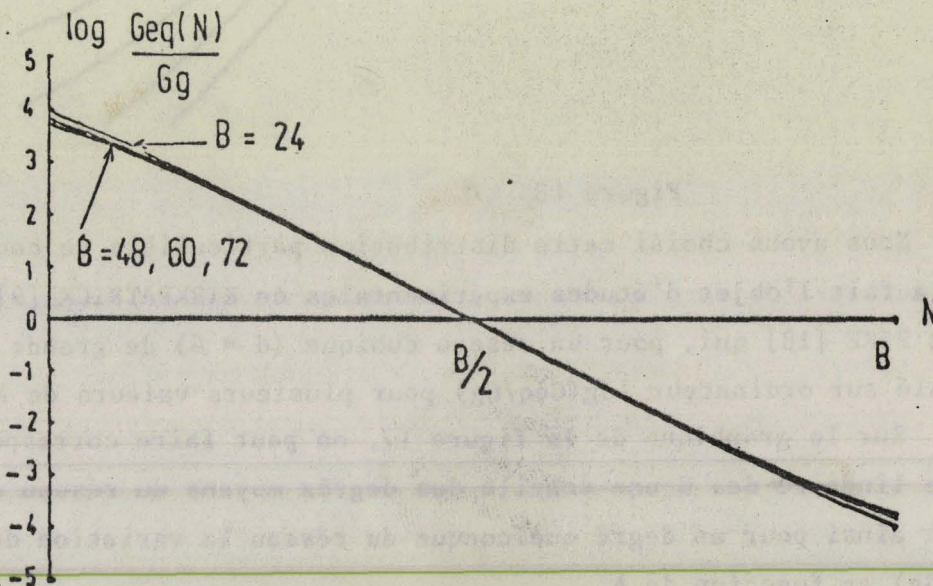


Figure 17

Nous avons utilisé ce procédé pour une distribution de conductances suivant une loi log-uniforme [annexe 7] de moyenne géométrique égale à 1, dont les valeurs s'échelonnent entre  $10^{-A}$  et  $10^A$  pour A variant de 0 à 8.

La figure 18 montre les courbes  $\text{Log}(\text{Geq}/\text{Gg})$  en fonction de N ( $0 < N < B$ ) avec A comme paramètre : elles décroissent de  $\text{Log}(\bar{z}^A)$  jusqu'à  $\text{Log}(\bar{z}^{-H})$  en passant par la moyenne géométrique ( $\text{Log} \bar{z}^G = 0$ ).

Pour des petites valeurs de A ( $A < 1$ ) la courbe  $\text{Log}(\text{Geq}/\text{Gg})$  est pratiquement une droite joignant  $\text{Log} \bar{z}^A$  pour  $N=0$  à  $\text{Log} \bar{z}^{-H}$  pour  $N = B$ , ce qui donne comme équation approchée :

$$\text{Geq}/\text{Gg} = \bar{z}^{-A(1 - N/B)} \cdot \bar{z}^{-H(N/B)}$$

Mais quand la largeur de la distribution augmente, tout en continuant de passer par  $\bar{z}^G$ , pour  $N = B/2$  ( $d = 4$ ), les courbes prennent une allure sigmoïde.

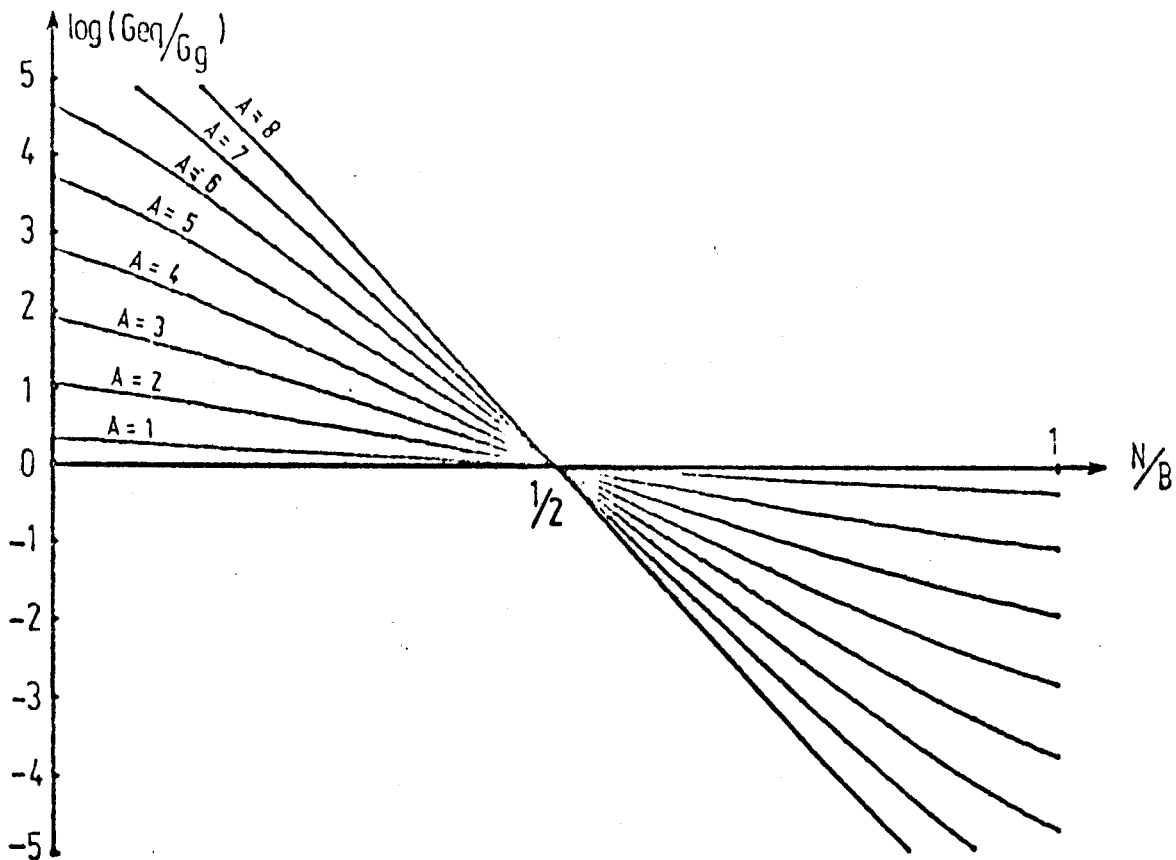


Figure 18

Nous avons choisi cette distribution particulière de conductances car elle a fait l'objet d'études expérimentales de KIRKPATRICK [9] et SEAGER et PIKE [18] qui, pour un réseau cubique ( $d = 6$ ) de grande taille ont calculé sur ordinateur  $\log(\text{Geq}/\text{Gg})$  pour plusieurs valeurs de A.

Sur le graphique de la figure 17, on peut faire correspondre à l'échelle linéaire des N une échelle des degrés moyens du réseau  $a = 2B/N$  et trouver ainsi pour un degré quelconque du réseau la variation de  $\log(\text{Geq}/\text{Gg})$  en fonction de A.

C'est ce qui est représenté sur la figure 19 pour le cas particulier  $d = 6$  : on voit que pour  $A > 2$  la courbe est asymptotique à une droite de pente  $1/3$ .

Nous avons reporté sur ce graphique les points expérimentaux de Kirkpatrick et Seager et Pike : on constate pour  $A > 2$  une divergence entre les pentes des asymptotes.

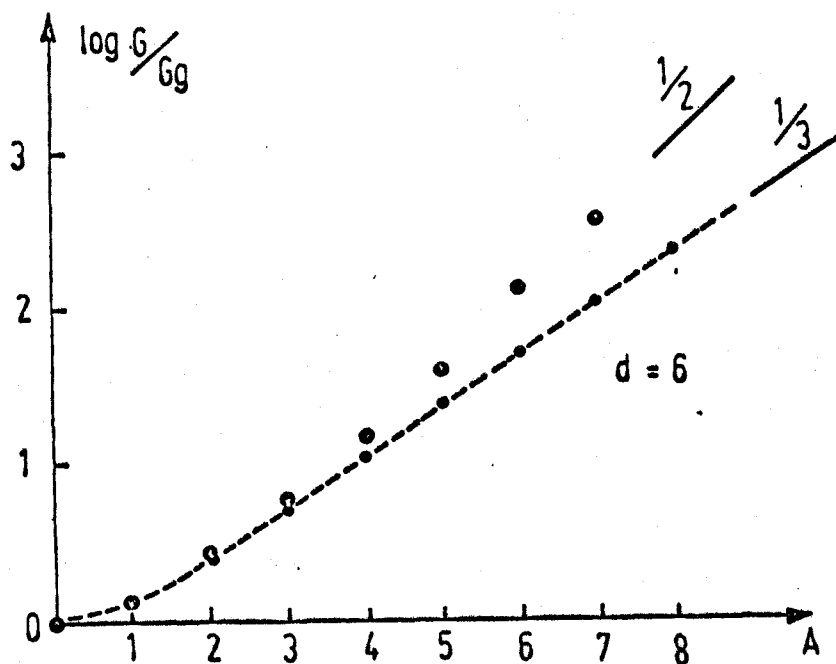


Figure 19

KIRKPATRICK [9] a comparé dans son étude ses résultats expérimentaux avec ceux déduits de la théorie approchée du milieu effectif : l'asymptote déduite de cette théorie est donnée par la formule :

$$G_{eq}/G_g = \frac{1}{2} 10^{A/3}$$

soit avec des ordonnées logarithmiques :

$$\log (G_{eq}/G_g) = -0,301 + A/3$$

Cette équation correspond parfaitement à celle de notre asymptote déduite de la théorie des "arbres" (fig. 19), ce qui laisse à penser que la théorie du milieu effectif et la théorie des arbres coïncident tout au moins au point de vue des résultats.

#### II.9.5.- CONCLUSION

La méthode ci-dessus peut s'appliquer à une distribution quelconque de conductances en utilisant le programme de calcul mis au point - ceci pour un réseau de degré quelconque - elle devient malheureusement inexacte dès que la distribution des conductances est trop étalée ce qui dans le cas précédent limitait sa validité à des conductances variant de  $10^{-3}$  à  $10^3$  environ - ce qui donne déjà une gamme relativement large.

Nous avons déjà observé cette inexactitude avec la distribution binaire au paragraphe II.9.4.2. :

- ou bien on utilisait des conductances identiques et des conductances nulles (branches retirées) et on se heurtait à des problèmes de probabilité de percolation
- ou bien on utilisait des conductances  $x$  constantes et des conductances  $y$  tendant vers 0, mais les résultats devenaient inexacts pour des valeurs grandes du rapport  $x/y$  quand la proportion de conductances  $y$  devenait suffisante

A la base de ces erreurs il y a le fait que la théorie des "arbres" ignore toute corrélation entre les conductances des différentes branches - c'est-à-dire que nous avons considéré les  $N-1$  conductances des branches constituant un arbre comme des variables indépendantes, elles ne le sont pas en réalité puisque la définition d'un arbre impose certaines contraintes topologiques, ceci explique que n'intervienne pas ici la dimension du réseau: avec un degré 6 par exemple on peut avoir un réseau triangulaire en deux dimensions ou un réseau cubique en trois dimensions : la théorie des arbres donnera le même résultat pour la conductance équivalente réduite de ces deux réseaux.

Tant que les distributions des conductances utilisées ne sont pas trop étalées, ne pas tenir compte de la corrélation introduite par la structure fixe d'un arbre, revient, par exemple, à remplacer dans l'opération de tirage au sort une conductance exacte de petite valeur par une conductance trop grande tirée au sort ou à faire l'erreur inverse.

L'erreur qui en résulte sur les moyennes des produits va croître d'autant plus que la distribution utilisée est étalée.

Cette erreur systématique due à l'emploi de la théorie des arbres jette un doute sur les résultats "exacts" que nous avons obtenus comme cas particuliers pour  $d = \infty$ ,  $d = 2$  et  $d = 4$ .

De toute évidence les deux premiers résultats (moyenne arithmétique pour  $d = \infty$  et moyenne harmonique pour  $d = 2$ ) ne peuvent être mis en doute car on les retrouve très simplement par d'autres méthodes (§ II.7.1. et II.7.2).

Le troisième résultat obtenu pour  $d = 4$ , qui donne la moyenne géométrique des conductances réduites pour conductance équivalente réduite quand la distribution est log-symétrique peut être justifié de la façon suivante :

Au lieu de tracer la courbe de  $\log(\sigma_N / \langle \frac{b}{N} \rangle)$  en fonction de  $N$ , représentons les valeurs réelles prises par la moyenne des valeurs des arbres du réseau (en supposant qu'on puisse les calculer).

Si on a encore employé des conductances réduites, normées par rapport à la moyenne géométrique, on obtiendra encore une courbe dont la pente positive en  $N = 0$  sera toujours égale au logarithme de la moyenne arithmétique des conductances réduites, et dont la pente négative en  $N = B$  sera égale au logarithme de la moyenne harmonique des conductances réduites.

Pour  $0 < N < B$ , cette courbe se séparera de la courbe tracée précédemment -elle sera probablement au-dessus- mais elle passera également par un maximum unique.

Si la distribution des conductances est toujours log-symétrique, il y aura identité des valeurs absolues des pentes en  $N = 0$  et  $N = B$  et, par symétrie, le maximum de la courbe se trouvera encore en  $B/2$ , correspondant à un réseau de degré moyen 4 dont la conductance équivalente réduite sera donc égale à la moyenne géométrique des conductances réduites.

## II.10.- LA THEORIE DU MILIEU EFFECTIF

### II.10.1.- La théorie de Bruggeman

La théorie du milieu effectif est ancienne : elle a été formulée pour la première fois par BRUGGEMAN en 1935 [19]. Elle a pour but de calculer les constantes macroscopiques relatives à des matériaux hétérogènes en fonction de leur composition. Bruggeman a développé cette théorie, en vue du calcul de la constante diélectrique équivalente d'un mélange de substances diélectriques de permittivités connues.

Les hypothèses de Bruggeman sont les suivantes :

- a) le corps se compose de deux types d'éléments homogènes et isotropes
- b) tous ces éléments sont de petite dimension vis-à-vis de celle de l'ensemble
- c) les éléments sont aléatoirement disposés
- d) les éléments sont de forme comparable
- e) les conditions aux limites entre diélectriques différents sont :
  - composantes tangentielles du champ  $\vec{E}$  continues
  - composantes normales du déplacement  $\vec{D}$  continues

La méthode consiste à supposer un milieu homogène dit "milieu effectif" dont on ajuste la constante diélectrique de façon qu'une composante donnée du champ à l'intérieur du milieu effectif soit égale à la moyenne de la même composante du champ prise en tous les points du milieu hétérogène.



Pour pouvoir calculer la moyenne de ces champs, on suppose qu'en tout point du milieu hétérogène le champ dans un élément  $x$  est le même que si cet élément  $x$  était plongé dans le "milieu effectif" dont la constante diélectrique serait la constante équivalente cherchée et où le champ loin de l'élément  $x$  serait égal au champ moyen.

Pour être utilisée, cette méthode nécessite que tous les éléments que nous appellons  $x$  aient même forme et même orientation pour que puisse être calculé le champ dans chaque élément quand il est plongé dans le milieu effectif.

Ainsi, Bruggeman a étudié des agrégats de lamelles plates, de cylindres ou de prismes identiques à axes parallèles.

Cette théorie, reprise en 1952 par LANDAUER [20] pour l'étude des mélanges de matériaux conducteurs a été récemment étendue par KIRKPATRICK [21] à des réseaux de résistances, de structure régulière, carrée ou cubique.

Dans ce cas, en effet, les conditions sont remplies pour appliquer la théorie de Bruggeman, à des réseaux de résistances

- les résistances représentent des éléments de même taille et de forme identique : le champ électrique entre deux points peut être remplacé par la tension entre extrémités d'une résistance élémentaire.
- le réseau est grand c'est-à-dire se compose d'un grand nombre de résistances.
- les résistances peuvent être de deux types différents (Bruggeman n'avait prévu que des mélanges de deux composants) mais la théorie peut s'étendre à des distributions continues.
- la répartition des valeurs des résistances dans le réseau est aléatoire.
- à la jonction de plusieurs résistances (nœud) il y a identité du potentiel et continuité du courant (lois de Kirchoff).

Kirkpatrick qui n'a utilisé que des réseaux réguliers carrés ou cubiques ne s'intéresse qu'à la composante verticale du champ c'est-à-dire aux tensions aux bornes des résistances verticales du réseau qui restera de structure régulière.

Nous allons dans ce qui suit reprendre la théorie du milieu effectif telle qu'elle a été remaniée et utilisée par Kirkpatrick - montrer qu'elle peut parfaitement s'appliquer à des réseaux de structure irrégulière puisque seul le degré moyen du réseau intervient et qu'en définitive elle se ramène à la théorie approchée des arbres - ce qui explique l'identité des résultats auxquels on parvient par ces deux méthodes. Nous établirons au passage quelques théorèmes nouveaux sur les réseaux.

### II.10.2.- Application de la théorie du milieu effectif à un réseau régulier

Nous reprenons dans ce paragraphe la démonstration de Kirkpatrick [18]

Soit un réseau régulier de structure carrée ou cubique, comprenant des conductances suivant une certaine distribution, réparties aléatoirement dans le réseau.

Nous supposons que le "milieu effectif" correspondant à ce réseau est un réseau de structure identique comportant des conductances toutes identiques  $g_m$  telles que la conductance équivalente aux deux réseaux soit la même. On alimente le réseau "effectif" par un générateur de courant  $I$ , toutes les conductances verticales orientées selon le champ ont à leurs bornes une tension  $V$ , la tension aux bornes des conductances horizontales perpendiculaires au champs étant nulle.

Si on s'intéresse à une conductance  $g_m$  verticale, on peut représenter le réseau vu de cette conductance par un générateur de Norton équivalent composé d'une source de courant  $i$  en parallèle avec une conductance  $G$  représentant la conductance équivalente mesurée des bornes de  $g_m$  une fois  $g_m$  et le générateur de courant retirés (fig. 20).

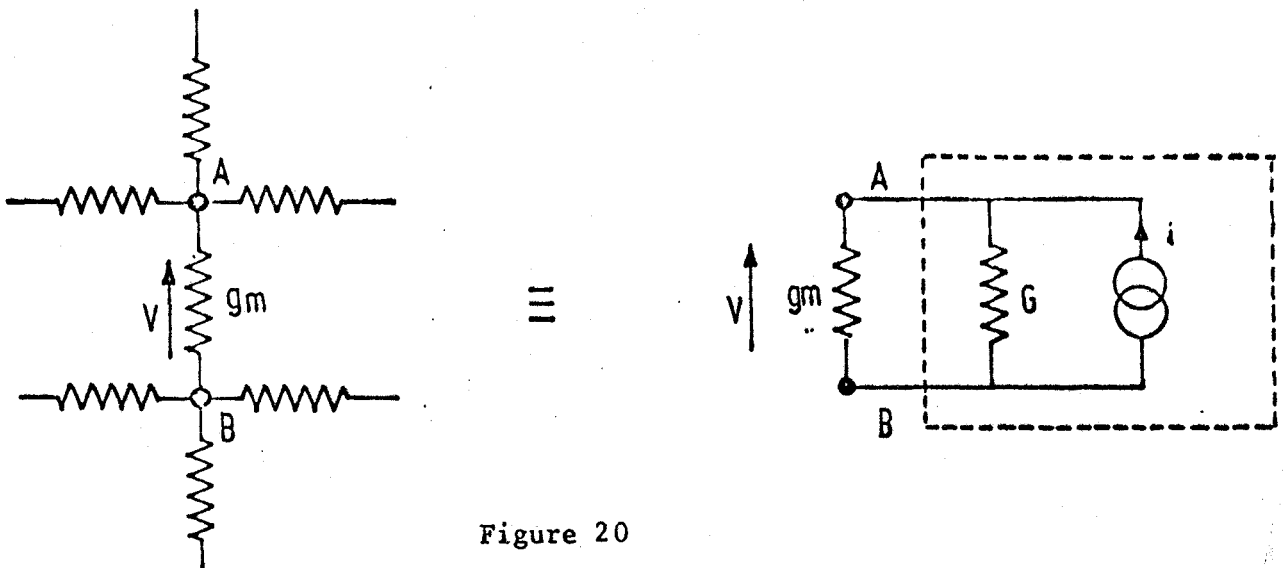


Figure 20

Si  $V$  est la différence de potentiel aux bornes de  $g_m$  on a :

$$i = (G + g_m)V \quad (2.149)$$

Remplaçons, alors dans ce "réseau effectif" la conductance  $g_m$  par une conductance aléatoire  $g$  du réseau, le reste du réseau restant inchangé ; la tension aux bornes de  $g$  devient  $V'$  telle que :

$$i = (G + g)V' \quad (2.150)$$

La conductance  $G$  vue de chaque conductance  $g_m$  peut être calculée simplement : dans le réseau régulier de degré  $d$  ( $d = 4$  ou  $6$ ), non alimenté appliquons aux bornes d'une conductance  $g_m$  un générateur de courant  $i$  (fig. 21)

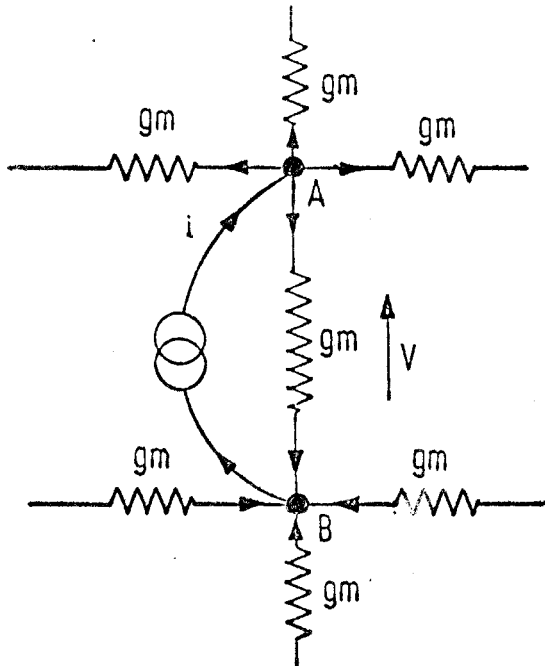


Figure 21

Le courant injecté en A se partage en  $d$  parties égales et le courant  $i/d$  circule dans AB.

Le courant collecté en B provient de  $d$  courants égaux à  $i/d$  indépendants des précédents.

Le courant qui passe dans la branche AB est donc égal à  $2i/d$  et la tension  $V$  aux bornes AB est donc :

$$V = \frac{2i}{d g_m} \quad (2.151)$$

Mais de (2.149) on tire :

$$\frac{i}{V} = G + g_m = \frac{d}{2} g_m$$

d'où on déduit  $G$  :

$$G = g_m (d/2 - 1) \quad (2.152)$$

et (2.149) et (2.150) peuvent s'écrire :

$$i = \frac{d}{2} g_m V = (g_m (\frac{d}{2} - 1) + g) V'$$

d'où on déduit  $V'$  aux bornes de  $g$  en fonction de  $V$  :

$$V'(g) = \frac{g_m \frac{d}{2} V}{g_m (d/2 - 1) + g} \quad (2.153)$$

La théorie du milieu effectif consiste à écrire que la moyenne de toutes les différences de potentiel  $V'$  aux bornes de toutes les conductances aléatoires  $g$ , calculées selon la méthode précédente, est égale à la différence de potentiel  $V$  qui est la même aux bornes de toutes les conductances  $g_m$  du milieu effectif : on obtient  $g_m$  sous forme d'une équation intégrale en écrivant :

$$\langle V' \rangle = \int_0^\infty V'(g) f(g) dg = \frac{g_m^d}{2} \cdot V \int_0^\infty \frac{f(g) dg}{g_m (d/2 - 1) + g} = V \quad (2.154)$$

où  $f(g)dg$  est la distribution des conductances aléatoires  $g$ . Après simplification (2.154) se ramène à l'équation intégrale où  $g_m$  est l'inconnue :

$$\int_0^{\infty} \frac{f(g)dg}{(d/2 - 1) + g/g_m} = \frac{2}{d} \quad (2.155)$$

Pour une distribution  $f(g)dg$  donnée analytiquement on peut calculer  $g_m$ . Le calcul est particulièrement simple pour une distribution binaire de conductances  $x$  et  $y$ , en proportions  $p$  et  $1-p$  : (2.155) s'écrit alors :

$$\frac{p}{(d/2-1) + x/g_m} + \frac{(1-p)}{(d/2-1) + y/g_m} = \frac{2}{d} \quad (2.156)$$

ce qui développé donne une équation du second degré dont la solution est :

$$g_m = \frac{(pd/2 - 1)x + ((1-p)d/2 - 1)y \pm \sqrt{(x(1-pd/2) + y(1-(1-p)d/2))^2 + 4xy(d/2-1)}}{d-2} \quad (2.157)$$

Si la conductance  $y$  tend vers 0, le réseau gardant la même structure, on obtient :

$$g_m \underset{y \rightarrow 0}{=} \frac{dp-2}{d-2} x \quad (2.158)$$

On obtient une formule similaire à (2.110) obtenue dans les mêmes conditions à partir de la théorie des "arbres" et similaire également à (2.55), obtenue à partir des méthodes de moindre action de la première partie, pour un réseau carré.

Sous cette présentation, la théorie du milieu effectif ne semble applicable qu'à des réseaux de structure régulière et, effectivement, Kirkpatrick qui l'a utilisée de cette façon n'en a entrepris la vérification que sur ces réseaux de structure carrée et cubique calculés par ordinateur pour diverses distributions de conductances  $f(g)dg$ .

Nous montrons ci-dessous que cette théorie peut très bien s'appliquer à des réseaux de structure irrégulière car le degré  $d$  qui intervient est en fait le degré moyen du réseau.

### II.10.3.- Application de la théorie du milieu effectif à des réseaux de structure irrégulière

La résolution du problème du milieu effectif pour un réseau quelconque peut être considérablement simplifiée si on utilise deux relations établies par FOSTER [22] relativement peu connues mais qu'on peut retrouver dans CHEN [A4.2] et SPINEI [23].

Soit un réseau de  $B$  branches et  $N$  nœuds dont la branche  $h$  porte l'impédance  $z_h$  (ou l'admittance  $y_h = 1/z_h$ ). Si on désigne par  $Z_{hh}$  l'impédance vue aux bornes de la branche  $h$ , celle-ci étant en place et  $Y_{hh}$  l'admittance vue aux bornes d'une coupure faite en ouvrant la branche  $h$ , on a les

deux relations duales :

$$\sum^B z_h Y_{hh} = B - N + 1 \quad (2.159)$$

$$\sum^B y_h Z_{hh} = N - 1 \quad (2.160)$$

En désignant par  $Z_h$  l'impédance vue des bornes de  $z_h$ ,  $z_h$  étant retirée, on peut exprimer  $Z_{hh}$  et  $Y_{hh}$  en fonction de  $z_h$  et  $Z_h$  (figure 22).



Figure 22

$$Z_{hh} = \frac{z_h \cdot Z_h}{z_h + Z_h} \quad Y_{hh} = \frac{1}{z_h + Z_h} \quad (2.161)$$

En utilisant (2.161) on peut donc écrire les relations (2.159) et (2.160) sous la forme :

$$\sum^B \frac{z_h}{Z_h + z_h} = B - N + 1 \quad (2.162)$$

$$\sum^B \frac{Z_h}{Z_h + z_h} = N - 1 \quad (2.163)$$

Et pour un réseau de grande taille, on pourra écrire :

$$\frac{1}{B} \sum^B \frac{z_h}{Z_h + z_h} = \frac{B-N+1}{B} \neq 1 - \frac{N}{B} = 1 - \frac{2}{d}$$

$$\frac{1}{B} \sum^B \frac{Z_h}{Z_h + z_h} = \frac{N-1}{B} \neq \frac{N}{B} = \frac{2}{d}$$

en désignant par  $d$  le degré moyen du réseau.

D'où les moyennes :

$$\left\langle \frac{z_h}{Z_h + z_h} \right\rangle = 1 - \frac{2}{d} \quad (2.164)$$

$$\left\langle \frac{Z_h}{Z_h + z_h} \right\rangle = \frac{2}{d} \quad (2.165)$$

Ces relations peuvent être simplifiées dans différents cas.

a) Réseau de structure régulière

Pour un réseau régulier de degré  $d$  contenant des impédances identiques  $z_h = z$ , les impédances internes  $Z_h$  seront également identiques et égales à  $Z$  et (2.164) s'écrira :

$$\left\langle \frac{z_h}{Z_h + z_h} \right\rangle = \frac{z}{Z + z} = 1 - \frac{2}{d}$$

ce qui donne :

$$Z = z \left( \frac{2}{d-2} \right) \quad (2.166)$$

ou encore :

$$Y = y(d/2 - 1) \quad (2.167)$$

On retrouve bien la relation (2.152) obtenue pour un réseau régulier.

### b) Réseau de structure irrégulière

Dans un réseau de structure irrégulière, même si toutes les impédances de branches sont égales à  $z_m$ , les impédances  $Z_h$  vues de ces branches sont différentes et on aura d'après (2.164) et (2.165) en fonction du degré moyen  $d$  :

$$\left\langle \frac{z_m}{Z_h + z_m} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{1 + \frac{Z_h}{z_m}} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{1 + \frac{y_m}{Y_h}} \right\rangle = 1 - \frac{2}{d} \quad (2.168)$$

$$\left\langle \frac{Z_h}{Z_h + z_m} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{1 + \frac{z_m}{Z_h}} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{1 + \frac{Y_h}{y_m}} \right\rangle = \frac{2}{d} \quad (2.169)$$

on a ici introduit les admittances  $y_m = \frac{1}{z_m}$  et  $Y_h = \frac{1}{Z_h}$ .

Lorsque, enfin, le réseau possède des impédances  $z_h$  différentes, les formules générales (2.164) et (2.165) s'appliquent et on a :

$$\left\langle \frac{1}{1 + \frac{z_h}{Z_h}} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{1 + \frac{y_h}{Y_h}} \right\rangle = 1 - \frac{2}{d} \quad (2.170)$$

$$\left\langle \frac{1}{1 + \frac{Z_h}{z_h}} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{1 + \frac{Y_h}{y_h}} \right\rangle = \frac{2}{d} \quad (2.171)$$

Les relations ci-dessus sont exactes. Les moyennes indiquées ne peuvent être explicitées plus avant même si on connaît la distribution des admittances  $y_h$  car on ignore celle des admittances  $Y_h$  vues des bornes des  $y_h$ .

Mais ces relations vont permettre de comprendre quelle est l'approximation réellement faite dans la théorie du milieu effectif. Dans la théorie du milieu effectif on va remplacer la distribution des  $Y_h$  qu'on ignore par une valeur unique  $Y$  obtenue en considérant le réseau effectif de même structure ne comportant que des admittances identiques  $y_m$ . Dans le cas où le réseau est régulier - ce qui est le seul cas traité par Kirkpatrick - on remplacera donc la distribution des  $Y_h$  par la valeur unique  $Y$  déduite de (2.167)

$$Y = y_m \left( \frac{d}{2} - 1 \right) \quad (2.172)$$

et la relation (2.170) par exemple s'écrira :

$$\left\langle \frac{1}{1 + \frac{y_h}{y_m(\frac{d}{2} - 1)}} \right\rangle \sim 1 - \frac{2}{d} \quad (2.173)$$

Ce qui peut se simplifier et donne :

$$\left\langle \frac{1}{\frac{d-2}{2} + \frac{y_h}{y_m}} \right\rangle \sim \frac{2}{d} \quad (2.174)$$

Ayant ainsi éliminé la distribution inconnue des  $Y_h$ , on peut introduire la distribution des  $y_h$  dans le calcul de la moyenne selon la formule (2.174) et tirer  $y_m$  en résolvant l'équation intégrale qui en résulte : ceci n'est autre que le résultat (2.155) qu'on retrouve à partir des formules de Foster.

On voit ainsi à quel niveau se situe l'erreur commise dans la théorie du milieu effectif : remplacer la distribution des  $Y_h$  par une valeur unique  $Y$ , amènera une erreur d'autant plus grande que la distribution des  $Y_h$  sera plus étalée - et ceci se produira d'autant plus vite que la distribution des admittances de branches  $y_h$  sera elle même plus étalée - on conçoit donc que les résultats de la théorie du milieu effectif pour un réseau dont on fait tendre l'une des admittances vers 0, soient de plus en plus inexacts quand cette admittance devient plus petite et conduise ainsi à un seuil inexact de percolation.

Dans le cas où le réseau n'est plus régulier, dans le réseau effectif de même structure il n'y a plus de valeur unique pour  $Y_h$  mais une distribution, certainement plus étroite que celle des  $Y_h$  du réseau d'origine, et on commet une erreur supplémentaire en remplaçant dans la formule (2.169)  $Y_h$  par  $Y = y_m (d/2 - 1)$ .

En outre, seul le degré moyen  $d$  du réseau intervient dans la théorie du milieu effectif et on y fait complètement abstraction de la dimension 2 ou 3 du réseau.

Il y a néanmoins un cas particulier où la méthode du milieu effectif donne des résultats qui semblent exacts : c'est celui du réseau de degré moyen 4.

Les relations précédentes vont permettre de préciser pourquoi .

II.10.4.- Application de la théorie du milieu effectif à un réseau de degré moyen égal à 4

Il s'agit ici d'un réseau tel que :

$$B - N + 1 = N - 1$$

ce qui entraîne :

$$B = 2N - 2 \quad d = \frac{2B}{N} \neq 4$$

Les relations (2.170) et (2.171) s'écrivent dans ce cas, puisque  $\frac{2}{d} = 1/2$

$$\left\langle \frac{1}{1 + \frac{y_h}{Y_h}} \right\rangle = \frac{1}{2} \quad (2.175)$$

$$\left\langle \frac{1}{1 + \frac{Y_h}{y_h}} \right\rangle = \frac{1}{2}$$

en posant  $x = z_h / Z_h$ , (2.175) s'écrira :

$$\left\langle \frac{1}{1+x} \right\rangle = \left\langle \frac{x}{1+x} \right\rangle = \frac{1}{2} \quad (2.176)$$

Reprenons maintenant la méthode qui conduit au calcul de la conductance effective  $y_m$  à placer dans le réseau effectif, on constate qu'elle est basée sur l'identification des formules (2.173) et (2.170).

$$\left\langle \frac{1}{1 + \frac{y_h}{Y_h}} \right\rangle = 1 - \frac{2}{d} \sim \left\langle \frac{1}{1 + \frac{y_h}{y_m(\frac{d}{2} - 1)}} \right\rangle \quad (2.177)$$

La valeur trouvée pour  $y_m$  n'est qu'approximative car la deuxième égalité de (2.177) n'est qu'approchée puisque la distribution des  $Y_h$  a été remplacée par la valeur unique  $y_m (d/2 - 1)$ .

Pour un réseau de degré moyen  $d = 4$ , (2.177) va s'écrire :

$$\frac{1}{2} \sim \left\langle \frac{1}{1 + \frac{y_h}{y_m}} \right\rangle$$

Mais, si la distribution des  $y_h$  est log-symétrique, et si on prend pour  $y_m$  la moyenne géométrique de cette distribution, cette relation devient exacte,



En effet, la distribution de  $y_h/y_m = x'$  est également log-symétrique de moyenne géométrique  $x'_0 = 1$ .

Montrons que ceci entraîne :

$$\left\langle \frac{1}{1+x'} \right\rangle = \left\langle \frac{x'}{1+x'} \right\rangle = 1/2 \quad (2.178)$$

Soit  $f(x')dx'$  la distribution de  $x'$  : puisqu'elle est log-symétrique on a (annexe 3) :

$$x' f(x') = \frac{1}{x'} f\left(\frac{1}{x'}\right) \quad (2.179)$$

Développons alors le second terme de (2.178) :

$$\left\langle \frac{x'}{1+x'} \right\rangle = \int_0^{\infty} \frac{x' f(x')}{1+x'} dx' \quad (2.180)$$

En posant  $y = 1/x'$ , (2.180) s'écrit en utilisant (2.179) :

$$\left\langle \frac{x'}{1+x'} \right\rangle = \int_0^{\infty} \frac{y f(1/y)}{(1+y)y} dy = \int_0^{\infty} \frac{f(x')}{1+x'} dx' = \left\langle \frac{1}{1+x'} \right\rangle$$

et comme on a :

$$\left\langle \frac{x'}{1+x'} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{1+x'} \right\rangle = \left\langle \frac{1+x'}{1+x'} \right\rangle = 1$$

On obtient :

$$\left\langle \frac{x'}{1+x'} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{1+x'} \right\rangle = \frac{1}{2}$$

Soit encore :

$$\left\langle \frac{1}{1 + \frac{y_h}{y_m}} \right\rangle = \frac{1}{2}$$

et dans (2.177) on a cette fois deux égalités rigoureuses :

$$\left\langle \frac{1}{1 + \frac{y_h}{Y_h}} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{1 + \frac{y_h}{y_m}} \right\rangle = \frac{1}{2}$$

Ceci explique, une nouvelle fois, par une méthode différente, que la méthode du milieu effectif conduit à un résultat exact pour un réseau de degré moyen 4 et de grande taille contenant des conductances de distribution log-symétrique : la conductance  $y_m$  à introduire dans le réseau effectif de même structure que le réseau original, est la moyenne géométrique des conductances de ce réseau.

L'inconvénient de la méthode est que la dimension du réseau n'intervient pas - et nous avons montré précédemment par d'autres méthodes que ce résultat s'appliquait à un réseau planaire - donc de dimension 2. Il existe des réseaux de dimensions trois de degré moyen 4 (structure diamant) et il semble que le résultat ci-dessus ne s'applique pas.

En particulier, le seuil de percolation trouvé expérimentalement pour un tel réseau est voisin de 0,39 qui diffère notablement du seuil de 0,5 trouvé par la méthode du milieu effectif et qui est un résultat exact pour un réseau de structure carrée.

#### II.10.5.- Relation entre la théorie du milieu effectif et la théorie des "arbres"

Le fait qu'on obtienne des résultats similaires en utilisant la théorie des "arbres" et la théorie du milieu effectif est dû à l'utilisation d'hypothèses - approchées - voisines.

La théorie du milieu effectif cherche à identifier la moyenne des différences de potentiel aux bornes des branches du réseau effectif avec une moyenne des différences de potentiel des branches du réseau réel, mais ces différences de potentiel sont calculées de façon inexacte en supposant que la différence de potentiel aux bornes d'une impédance  $z$  du réseau est la même que si cette impédance  $z$  était disposée seule dans le réseau effectif ne comportant que des impédances  $z_m$ .

Ceci constitue ce qu'on appelle "approximation de la branche unique" (single bond approximation) dans la littérature anglo-saxonne ce qui revient à dire que chaque branche est considérée de façon indépendante de toutes les autres. Cette ignorance volontaire de la corrélation qui existe entre toutes les branches et entre les tensions à leurs bornes est tout à fait similaire à l'hypothèse qu'on utilise dans la théorie des arbres - qui consiste à considérer un arbre comme constitué de  $(N-1)$  branches indépendantes prises parmi  $B$  sans tenir compte de la structure réelle du réseau.

Ceci explique la similitude des résultats obtenus.

## II.11.- VERIFICATIONS EXPERIMENTALES

Les vérifications expérimentales que l'on peut faire des théories précédentes se heurtent au fait que les résultats théoriques sont asymptotiques c'est-à-dire obtenus pour des réseaux de taille tendant vers l'infini et, par conséquent, l'expérimentation doit se faire sur de très grands réseaux.

Nous avons envisagé trois voies d'approche de ce problème.

- a) On peut chercher à confronter les résultats théoriques obtenus, avec des prévisions, également théoriques, qu'on peut faire sur des réseaux réguliers : ce qui est valable pour un réseau de structure aléatoire devrait l'être, à fortiori, pour le problème plus simple du réseau de structure régulière

L'expérimental se résume ici à des considérations géométriques et topologiques.

- b) On peut effectuer une simulation analogique consistant à construire effectivement un réseau en assemblant des résistances de distribution connue selon une structure préalablement définie.

Si la phase de construction est très laborieuse, le résultat en est par contre instantanément connu puisqu'un ohmmètre permet d'obtenir, avec toute la précision souhaitable, la résistance équivalente au réseau.

Des réseaux de résistance de très grande taille ont été construits - par d'autres que nous - : nous utiliserons leurs résultats. Nous avons cependant construit un petit réseau de résistances identiques qui permet de préciser l'importance des différents facteurs entrant en jeu.

- c) Enfin, en travaillant sur ordinateur, on peut calculer la résistance équivalente à un réseau de structure aléatoire - ou non - comportant des résistances de distribution donnée.

Il faut trouver des algorithmes de calculs adéquats tels qu'avec une taille de mémoire donnée, le calcul de très grands réseaux puisse être fait en des temps qui ne soient pas prohibitifs. En général, on se livre à plusieurs calculs sur des réseaux similaires et on en moyenne les résultats. Nous appelons cette méthode, Méthode de

Monte-Carlo, car il faut préalablement au calcul fait par des voies classiques d'analyse numérique introduire en machine l'aléatoire dans la structure du réseau et (ou) dans la distribution des résistances.

Plusieurs auteurs ont abordé, avec des moyens très puissants, ce type de calcul. Nous n'avons pas essayé de refaire - avec des moyens modestes - ce qui avait été bien fait dans ce domaine mais nous tirerons profit de leurs résultats.

Dans ce qui suit, nous passons donc en revue les méthodes précédentes, en faisant le point des résultats connus, en y ajoutant les nôtres et en les confrontant avec nos résultats théoriques.

### II.11.1.- Réseaux réguliers de résistances identiques - Résultats exacts et approchés

#### II.11.1.1.- Le réseau de structure carrée

Nous supposons ce réseau inscrit dans un carré c'est-à-dire qu'il comporte  $m$  branches verticales par rangée et  $n = m$  branches verticales par colonne (Fig. 23-a). Pour  $m = 2$ , il s'agit d'une structure en pont bien connue (Fig. 23-b).

Si toutes les résistances sont identiques, les nœuds d'une même ligne horizontale sont équipotentiels et aucun courant ne circule dans les branches horizontales qu'on peut donc supprimer ou court-circuiter sans modifier la répartition des potentiels et la résistance équivalente.

On voit aisément que si on retire les résistances horizontales (fig. 23-c) la résistance équivalente est égale à la valeur commune  $r$  des résistances du réseau.

$$R_{eq} = r \quad G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = g = \frac{1}{r}$$

REMARQUE : Cette relation n'est valable que pour un réseau de structure carrée inscrit dans un carré. S'il n'en était pas ainsi et si le réseau comportait  $m$  résistances verticales par colonne et  $n$  résistances verticales par rangée (réseaux  $m \times n$ ) on aurait :

$$R_{eq} = r \cdot \frac{m}{n} \quad G_{eq} = g \cdot \frac{n}{m}$$

Considérons alors les formules approximatives établies en II.3 que nous rappelons ci-dessous :

$$R^* = \frac{C r B}{\langle n \rangle^2} < R_{eq} < R^* = \frac{r \langle m \rangle^2}{B C} \quad (2.181)$$

$$R_{eq} \sim r \frac{\langle m \rangle}{\langle n \rangle} \quad (2.182)$$

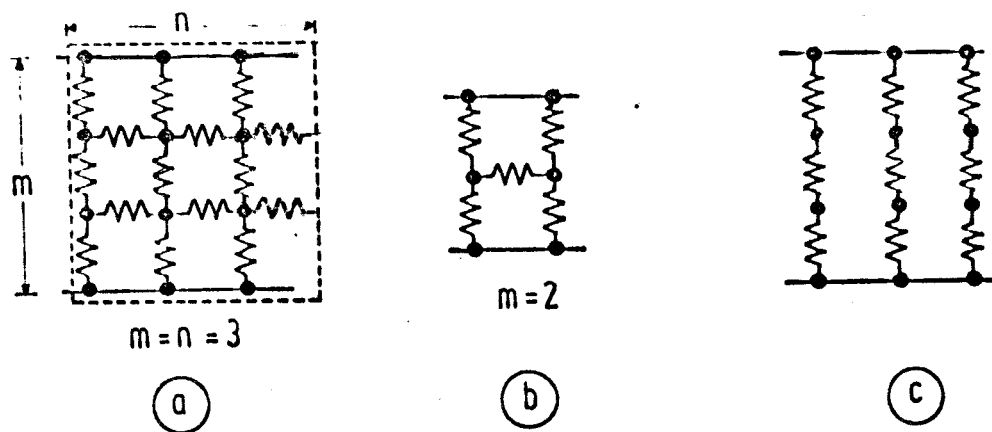


Figure 23 - Réseau carré

et appliquons les au réseau de structure carrée ( $m \times n$ ).

Le nombre de branches coupées par une droite parallèle aux extrémités sera ici toujours égal à  $n$ . On a donc :

$$\langle n \rangle = n \quad (2.183)$$

Le nombre de branches d'une extrémité à l'autre est constant et égal à  $m$  d'où :

$$\langle m \rangle = m \quad (2.184)$$

Dans le réseau carré, la moitié des branches fait un angle nul avec la verticale et l'autre moitié un angle de  $\pi/2$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \langle \cos \theta_k \rangle &= \frac{1}{2} (\cos \pi/2 + \cos 0) = 1/2 & \langle \cos^2 \theta_k \rangle &= 1/2 \\ C = \langle \cos \theta_k \rangle^2 / \langle \cos^2 \theta_k \rangle &= 1/2 \end{aligned} \quad (2.185)$$

Le nombre de branches  $B$  vaut  $2mn$  (fig. 23).

Les formules approchées (2.181) et (2.182) s'écrivent alors :

$$R^* = \frac{C \cdot r \cdot B}{\langle n \rangle^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r \cdot 2mn}{n^2} = r \frac{m}{n} \quad (2.186)$$

$$R^* = \frac{r \langle m \rangle^2}{B \cdot C} = \frac{2 \cdot r \cdot m^2}{2 \cdot m \cdot n} = r \frac{m}{n} \quad (2.187)$$

$$R_{eq} \sim r \frac{\langle m \rangle}{\langle n \rangle} = r \cdot \frac{m}{n} \quad (2.188)$$

Elles donnent toutes des résultats exacts.

### II.11.1.2.- Le réseau de structure hexagonale - Résultats exacts

Ce réseau est anisotrope d'apparence (Fig.24), aussi nous examinerons sa résistance équivalente vue entre les extrémités A et B et celle vue entre les extrémités C et D.

Nous le supposons encore inscrit dans un carré.

La figure 24-b montre qu'il peut se ramener à un réseau de structure carrée dont on aurait retiré des résistances verticales en quinconce.

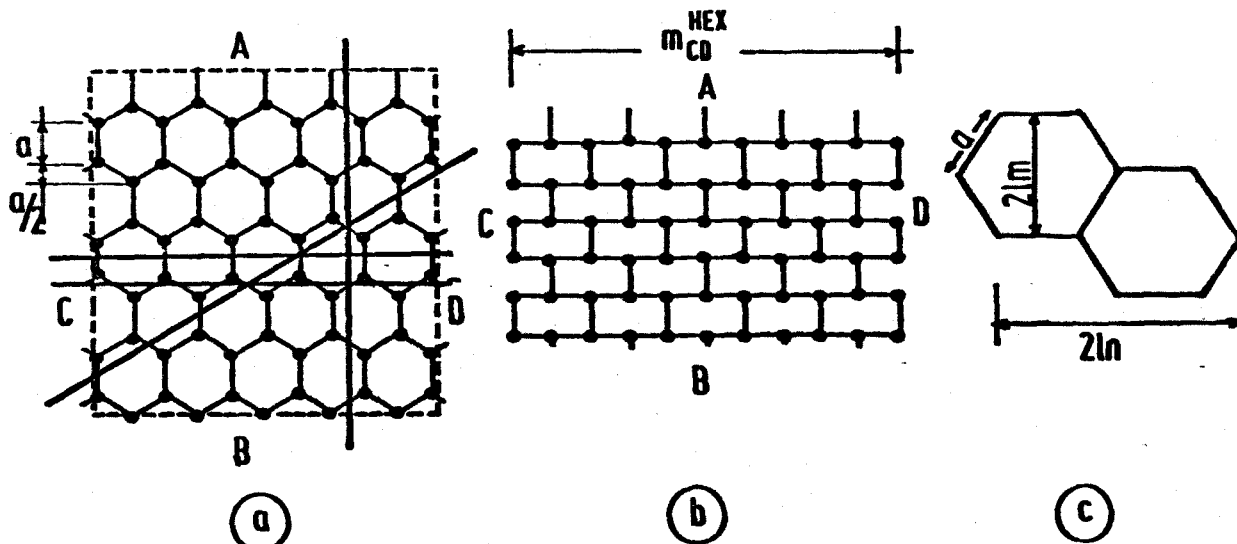


Figure 24

Si on mesure sa résistance entre les côtés C et D, on voit, en considérant le réseau carré auquel il équivaut, que les branches retirées sont celles qui ne conduisent aucun courant quand les côtés C et D constituent les extrémités du dipole.

La résistance entre CD est donc :

$$R_{CD}^{HEX} = r \cdot \frac{m_{CD}^{HEX}}{n_{AB}^{HEX}} \quad (2.189)$$

où  $m_{CD}$  est le nombre de résistances joignant le côté C au côté D et  $n_{CD}$  le nombre de chaînes de  $m_{CD}$  résistances entre les côtés A et B.

On peut calculer  $m_{CD}$  et  $n_{CD}$  pour un réseau très grand de côté L constitué d'hexagones de côté a.

On voit d'après la figure 24-c que :

$$m_{CD}^{HEX} = \frac{L}{l_m} = \frac{L}{a \cos \pi/6} = \frac{2L}{a\sqrt{3}} \quad (2.190)$$

$$n_{AB}^{HEX} = \frac{L}{l_n} = \frac{L}{\frac{1}{2} [2a + 2a \cos \pi/3]} = \frac{2L}{3a} \quad (2.191)$$

On en tire :

$$R_{CD}^{HEX} = r \cdot \frac{2L}{a\sqrt{3}} \cdot \frac{3a}{2L} = r\sqrt{3} \quad (2.192)$$

II.11.1.3.- Le réseau de structure triangulaire - Résultats exacts

Il est également d'apparence anisotrope (fig.25) aussi nous calculerons sa résistance équivalente entre les faces A et B et entre les faces C et D.

Nous le supposons encore inscrit dans un carré.

La figure 25b montre qu'il peut se ramener à un réseau de structure carrée dont on aurait court-circuité en quinconce des résistances horizontales.

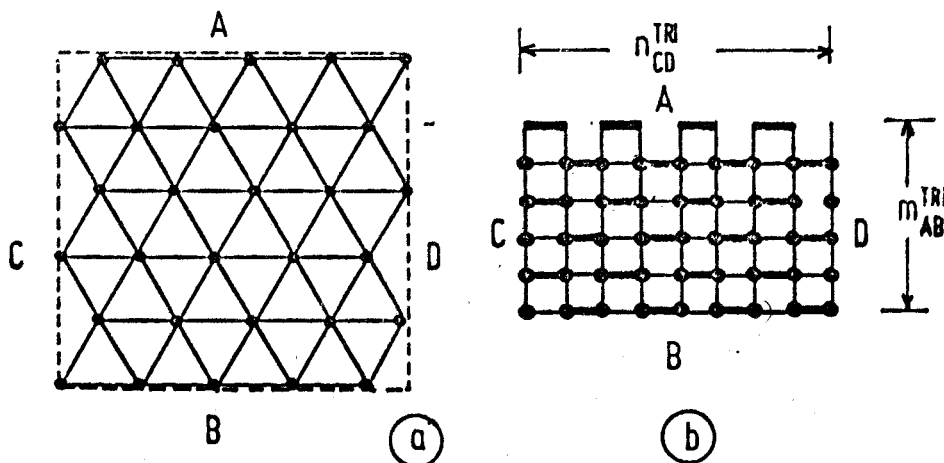


Figure 25 : Réseau triangulaire

En connectant un générateur entre A et B, on s'aperçoit que les branches horizontales sur le réseau carré équivalent ne sont parcourues par aucun courant, qu'elle soient court-circuitées ou non.

Si  $m_{AB}^{TRI}$  est le nombre de résistances qui joignent A à B et  $n_{CD}^{TRI}$  le nombre de chaînes  $m_{AB}^{TRI}$  résistances situées entre C et D, on aura encore :

$$R_{AB}^{TRI} = r \cdot \frac{m_{AB}^{TRI}}{n_{CD}^{TRI}} \quad (2.193)$$

De même que pour le réseau hexagonal, on peut calculer  $m_{AB}^{TRI}$  et  $n_{CD}^{TRI}$  pour un réseau très grand, inscrit dans un carré de côté L et constitué de triangles de côté a : on aura :

$$m_{AB}^{TRI} = \frac{L}{a \cos \pi/6} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L}{a} \quad (2.194)$$

$$n_{CD}^{TRI} = \frac{L}{a \cos \pi/3} = \frac{2L}{a} \quad (2.195)$$

On en tire d'après (2.193) :

$$R_{AB}^{TRI} = r / \sqrt{3} \quad (2.196)$$

Cependant, les réseaux hexagonaux et triangulaires sont duaux [11] et aux côtés A et B de l'un, correspondent les côtés C et D de l'autre et vice-versa (fig. 26).

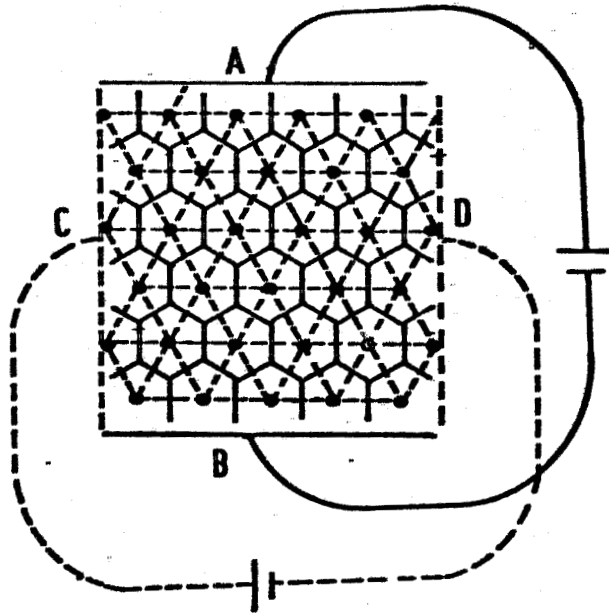


Figure 26 : Dualité des réseaux triangulaires et hexagonaux.

Les résistances des deux réseaux étant identiques et égales à  $r$ , on a [11] pour les résistances équivalentes les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{AB}^{HEX} \cdot R_{CD}^{TRI} = r^2 \\ R_{CD}^{HEX} \cdot R_{AB}^{TRI} = r^2 \end{array} \right. \quad (2.197)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{CD}^{HEX} \cdot R_{AB}^{TRI} = r^2 \\ R_{AB}^{HEX} \cdot R_{CD}^{TRI} = r^2 \end{array} \right. \quad (2.198)$$

Les résistances  $R_{AB}^{TRI}$  et  $R_{CD}^{HEX}$ , trouvées en (2.196) et (2.192) satisfont bien à la relation (2.198).

Pour calculer  $R_{CD}^{TRI}$  et  $R_{AB}^{HEX}$  on peut remarquer qu'une transformation étoile-triangle permet de passer du réseau hexagonal au réseau triangulaire (fig 27a) : du réseau hexagonal composé de résistances  $r$  on passe au réseau triangulaire composé de résistances  $3r$  (fig. 27 b), ces deux réseaux ont donc même résistance équivalente.

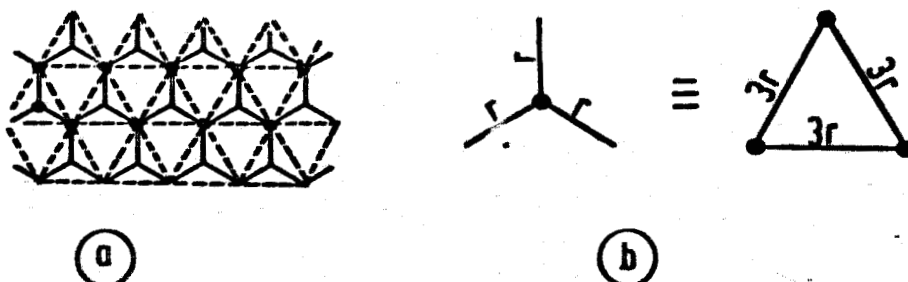


Figure 27 : Passage du réseau hexagonal au réseau triangulaire par transformation étoile-triangle



On a donc d'après (2.245) :

$$R_{AB}^{HEX}(r) = R_{AB}^{TRI}(3r) = \frac{3r}{\sqrt{3}} = r\sqrt{3} \quad (2.248)$$

et d'après (2.197), on obtient :

$$\frac{R_{CD}^{TRI}}{R_{AB}^{HEX}} = \frac{r^2}{r\sqrt{3}} = \frac{r^2}{r\sqrt{3}} = \frac{r}{\sqrt{3}} \quad (2.200)$$

et en résumant, on a finalement :

$$\frac{R_{CD}^{TRI}}{R_{AB}^{TRI}} = R_{AB}^{TRI} = r / \sqrt{3} \quad (2.201)$$

$$\frac{R_{CD}^{HEX}}{R_{AB}^{HEX}} = R_{AB}^{HEX} = r\sqrt{3} \quad (2.202)$$

L'anisotropie des réseaux hexagonaux et triangulaires n'est donc qu'apparente puisque leur résistance équivalente est identique mesurée selon deux directions orthogonales.

Examinons maintenant comment nous pouvons appliquer les formules approximatives (2.230) et (2.182) au réseau hexagonal considéré selon deux directions orthogonales.

#### II.11.1.4.- Réseau hexagonal - Résultats approchés

Les formules approchées que l'on peut tenter de vérifier s'écrivent pour les résistances équivalentes  $R_{AB}^{HEX}$  et  $R_{CD}^{HEX}$  :

$$R_{AB}^{HEX} \sim r \frac{\langle \overset{HEX}{\underset{AB}{\parallel}} \rangle}{\langle \overset{HEX}{\underset{CD}{\parallel}} \rangle} \quad \frac{r_{BC}}{\langle \overset{HEX}{\underset{CD}{\parallel}} \rangle} \leq R_{AB}^{HEX} \leq \frac{r \langle \overset{HEX}{\underset{AB}{\parallel}} \rangle}{BC}$$

$$R_{CD}^{HEX} \sim r \frac{\langle \overset{HEX}{\underset{CD}{\parallel}} \rangle}{\langle \overset{HEX}{\underset{AB}{\parallel}} \rangle} \quad \frac{r_B}{\langle \overset{HEX}{\underset{AB}{\parallel}} \rangle} \leq R_{CD}^{HEX} \leq \frac{r \langle \overset{HEX}{\underset{CD}{\parallel}} \rangle}{BC}$$

Dans le réseau hexagonal mesuré selon AB (fig. 24) 1/3 des branches sont verticales et 2/3 inclinées de  $\pi/3$  sur l'axe vertical AB, on a donc :

$$\langle \cos \theta_k \rangle = \frac{1}{3} \cos 0 + \frac{2}{3} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\langle \cos^2 \theta_k \rangle = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$C_{AB} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 / \frac{1}{2} = 8/9$$

Pour le réseau mesuré selon CD, 2/3 des branches font un angle de  $\pi/6$  avec CD et 1/3 un angle de  $\pi/2$  avec CD, on a donc :

$$\langle \cos \theta_k \rangle = \frac{2}{3} \cos \pi/6 + \frac{1}{3} \cos \pi/2 = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} 0 = 1/\sqrt{3}$$

$$\langle \cos^2 \theta_k \rangle = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} (0) = 1/2$$

$$C_{CD} = \frac{1}{3} / \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

L'évaluation des différents  $\langle n \rangle$  et  $\langle m \rangle$  donne :

$$\langle n_{AB} \rangle = 2L/3a \quad \langle m_{CD} \rangle = 2L/a\sqrt{3} \quad \langle m_{AB} \rangle = 4L/3a$$

Pour  $\langle n_{CD} \rangle$  qui doit représenter la moyenne du nombre de branches coupées par une droite joignant CD, on pourra utiliser la formule (2.47) :

$$\langle n_{CD} \rangle = \frac{Ba}{L} \langle \cos \theta_i \rangle = \frac{2L^2}{\sqrt{3} a^2} \cdot \frac{a}{L} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{L}{a}$$

on obtient alors, pour les formules approchées :

$$R_{AB}^{1x} = \frac{C_{AB} r_B}{\langle n_{CD} \rangle^2} = \frac{8}{9} \cdot r \cdot \frac{2L^2}{\sqrt{3} a^2} \cdot \frac{9.3 a^2}{16L^2} = r\sqrt{3}$$

$$R_{AB}^{2x} = \frac{r \langle m_{AB} \rangle^2}{B \cdot C_{AB}} = \frac{r\sqrt{3} \cdot a^2}{2L^2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{16L^2}{9a^2} = r \cdot \sqrt{3}$$

$$R_{AB} \approx \frac{r \langle m_{AB} \rangle}{\langle n_{CD} \rangle} = r \cdot \frac{4L}{3a} \cdot \frac{3\sqrt{3}a}{4L} = r\sqrt{3}$$

$$R_{CD}^{1x} = \frac{C_{CD} r_B}{\langle n_{AB} \rangle^2} = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{2L^2}{\sqrt{3} a^2} \cdot \frac{9a^2}{4L^2} = r\sqrt{3}$$

$$R_{CD}^{2x} = \frac{r \langle m_{CD} \rangle^2}{BC_{CD}} = \frac{r \cdot \sqrt{3} a^2}{2L^2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4L^2}{3a^2} = r\sqrt{3}$$

Elles donnent toutes des résultats exacts.

### II.11.1.5.- Réseau triangulaire. Résultats approchés

Pour le réseau triangulaire, on obtient de la même façon pour la résistance entre A et B :

$$C_{AB} = 2/3 \quad B = 2\sqrt{3} L^2/a^2$$

$$n_{CD} = 2L/a \quad m_{AB} = 2L/\sqrt{3}a$$

Ce qui, une fois utilisé dans les formules approchées précédentes donne :

$$R_{AB}^1 = R_{AB}^{2x} = R_{ABeq} = r/\sqrt{3}$$

Ici encore, les formules approchées donnent des résultats exacts. Pour la résistance entre les côtés C et D on obtient :

$$C_{CD} = 8/9 \quad n_{AB} = 4L/3a \quad \text{et} \quad R_{AB} = \frac{rB \cdot C_{CD}}{\langle n_{AB} \rangle^2} = r\sqrt{3}$$

Par  $m_{CD}$ , si on prend le plus court chemin de C à D, il emprunte uniquement des branches dirigées selon l'axe et la distribution de ces angles par rapport à celle du réseau n'est pas représentative puisqu'il y a 2/3 des branches qui font un angle de  $\pi/3$  avec l'axe CD : on a dans ce cas

$m_{CD} = L/a$  ce qui donne :

$$R_{AB}^{2x} = \frac{r \langle m_{CD} \rangle^2}{BC} = \frac{r}{2\sqrt{3}} \frac{9}{8} = \frac{0,5625r}{\sqrt{3}} < R_{AB}$$

Si on prend pour  $m_{CD}$  la moyenne d'un chemin court et d'un chemin tortueux on aura alors une représentation correcte de la valeur moyenne des  $V_k$ .

$$m_{CD} = \frac{1}{2} \left( \frac{L}{a} + \frac{2L}{a} \right) = \frac{3}{2} \frac{L}{a}$$

On obtient alors un sens correct d'inégalité conforme à (2.34) :

$$R_{AB}^{\infty} = \frac{r}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{4} = \frac{1,265r}{\sqrt{3}} > R_{AB}$$

Dans le cas des réseaux planaires, nous avons établi la formule approchée (2.55) :

$$R^{\infty} = r \frac{2}{d-2} \quad (2.55)$$

Pour le réseau hexagonal de degré 3, on obtient :

$$R^{\infty} = r \cdot \frac{2}{3-2} = 2r > R = r\sqrt{3} = 1,732r$$

Pour le réseau triangulaire de degré 6, on obtient :

$$R^{\infty} = r \cdot \frac{2}{6-2} = 0,5r < R = \frac{r}{\sqrt{3}} = 0,577r$$

Ces valeurs sont relativement proches des valeurs théoriques (13,5 %) ce qui est intéressant compte tenu de la simplicité de la formule.

### II.11.2.- Etude analogique d'un réseau irrégulier de petite taille

Nous avons construit un réseau planaire composé de 140 résistances de  $150 \Omega \pm 1 \%$ , assemblées selon une structure irrégulière, autant que possible homogène, et grossièrement inscrite dans un carré, que représente la figure 28.

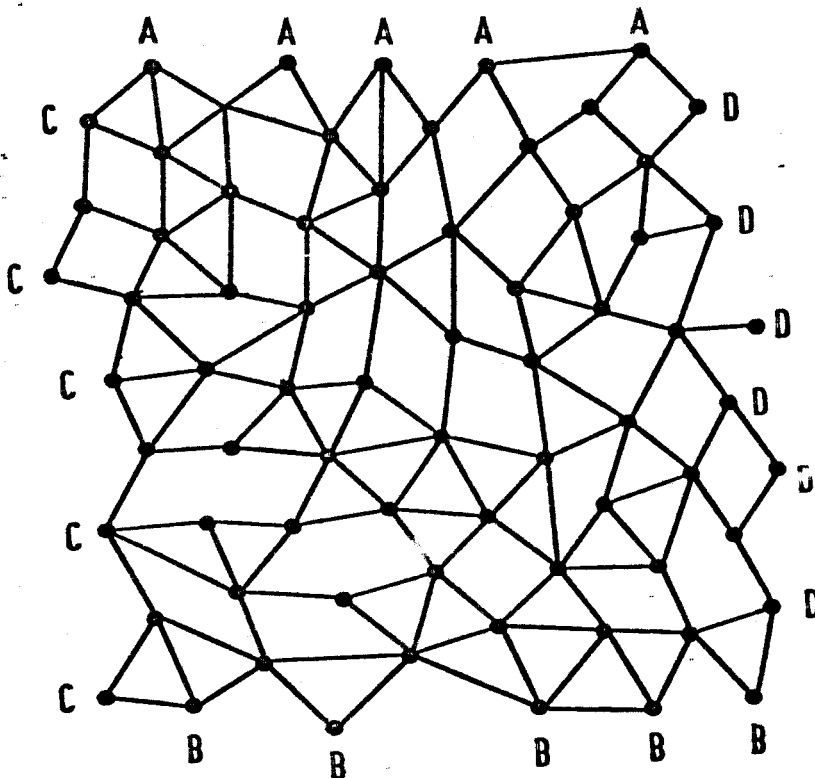


Figure 28 : Réseau planaire de structure irrégulière

Deux mesures de résistance équivalente ont été faites sur ce réseau d'une part entre les points A et B, d'autre part entre les points C et D : on obtient :

$$R_{AB} = 127 \Omega \quad R_{CD} = 111 \Omega$$

Ce qui dénote une certaine anisotropie dans ce réseau.

Nous allons évaluer sur ce réseau, les résistances approchées :  $R'_{AB}$ ,  $R''_{AB}$ ,  $R'''_{AB}$ ,  $R'_{CD}$ ,  $R''_{CD}$ ,  $R'''_{CD}$  introduite dans la première partie.

Les grandeurs à évaluer sont  $\langle m \rangle$  et  $\langle n \rangle$  selon les deux axes AB et CD.

On trouve comme nombre moyen de pas menant de A à B, en moyennant 7 chemins :

$$\langle m_{AB} \rangle = 9$$

et entre C et D, en moyennant 6 chemins :

$$\langle m_{CD} \rangle = 8,16$$

En coupant le réseau par des droites et en dénombrant les branches coupées, on trouve en moyenne :

$$\langle n_{AB} \rangle = 13,1 \quad \langle n_{CD} \rangle = 12,4$$

Le nombre de branches réellement utilisées quand on connecte le réseau entre A et B est 140, et 138 quand on le connecte entre C et D.

Une mesure de  $\langle \cos \theta \rangle$  et  $\langle \cos^2 \theta \rangle$  faite sur toutes les branches de la figure 34 donne :

$$\begin{aligned} \langle \cos \theta \rangle_{AB} &= 0,637 & \langle \cos^2 \theta \rangle_{AB} &= 0,503 & C_{AB} &= 0,809 \\ \langle \cos \theta \rangle_{CD} &= 0,627 & \langle \cos^2 \theta \rangle_{CD} &= 0,490 & C_{AB} &= 0,803 \end{aligned}$$

Les résistances approchées qu'on en déduit sont :

$$\begin{aligned} R'''_{AB} &= r.B.C_{AB} / \langle n_{CD} \rangle^2 = 110,5 \Omega \\ R'_{AB} &= r \langle m_{AB} \rangle^2 / B.C_{AB} = 107,3 \Omega \\ R''_{AB} &= r \langle m_{AB} \rangle / \langle n_{CD} \rangle = 108,9 \Omega \\ R'''_{CD} &= r.B.C_{CD} / \langle n_{CD} \rangle^2 = 96,8 \Omega \\ R_{CD} &= r \langle m_{CD} \rangle^2 / B.C_{CD} = 90,1 \Omega \\ R''_{CD} &= r \langle m_{CD} \rangle / \langle n_{AB} \rangle = 93,4 \Omega \end{aligned}$$

Si on a bien  $R'''_{AB} < R_{AB} = 127 \Omega$  et  $R'_{CD} < R_{CD} = 111 \Omega$  comme prévu, on a par contre  $R_{AB} > R''_{AB} > R'''_{AB}$  et  $R_{CD} > R''_{CD} > R'''_{CD}$ , ce qui est en sens inverse des inégalités prévues.

Ceci tient au fait que les tensions  $V_k$  relevées sur les plus courts chemins utilisés constituent des échantillons biaisés de la distribution des  $V_k$  du réseau. Nous avons relevé les différences de potentiel aux bornes de toutes les branches et calculé  $\langle V_k \rangle$   $\langle V_k^2 \rangle$  : ceci donne en imposant  $V_0 = 10$  volt entre A et B :

$$\langle V_k \rangle = 0,815V \quad \langle V_k^2 \rangle = 0,850V^2$$

Ceci donnerait pour résistance approchée  $R'$  en appliquant la formule approchée tirée de (2.14) utilisant  $\langle V_k \rangle$  :

$$R' = \frac{r_0 V_0^2}{B \langle V_k \rangle^2} = \frac{150}{140} \cdot \frac{100}{(0,815)^2} = 161,3\Omega$$

L'erreur relative commise en faisant cette approximation est :

$$\frac{\sigma^2(V_k)}{\langle V_k \rangle^2} = \frac{\langle V_k^2 \rangle - \langle V_k \rangle^2}{\langle V_k \rangle^2} = \frac{0,850}{(0,815)^2} - 1 = 27,9 \%$$

On obtient donc bien avec une valeur expérimentale correcte pour  $\langle V_k \rangle$ ,  $R' > R$  comme prévu.

Mais si on utilise l'expression :

$$\langle V_k \rangle = V_0 / \langle m \rangle$$

avec la valeur expérimentale  $\langle m \rangle = 9$ , on trouve  $\langle V_k \rangle = 1,11$  trop grand de 36 % par rapport à la valeur expérimentale  $\langle V_k \rangle = 0,815$ .

Si on essayait de pondérer les  $V_k$  de l'échantillon, en utilisant l'expression (2.33) contenant les  $\cos\theta$  du réseau, on devrait avoir :

$$\langle V_k^2 \rangle \geq \frac{V_0^2 C}{\langle m \rangle^2} = \frac{100}{81} \cdot 0,809 = 0,998$$

Ce qui est visiblement inexact puisque  $\langle V_k^2 \rangle$  vaut 0,850.

Le mode d'évaluation de  $\langle m \rangle$  est donc en cause.

Mais si on exprime  $\langle m \rangle$  à partir de la formule (2.43) utilisant la moyenne des cosinus du réseau, on obtient :

$$\langle m \rangle = \frac{L}{1 \langle \cos\theta \rangle} = \frac{10}{1,2 \cdot 0,637} \sim 13$$

Ce qui, reporté dans les formules précédentes donne :

$$\langle V_k \rangle = \frac{10}{13} = 0,76 \neq \langle V_k \rangle_{\text{exp}} = 0,815$$

C'est donc ici la formule :

$$R'_{AB} = \frac{rB \cdot C}{\langle n \rangle^2}$$

qui donne les résultats théoriques les plus proches des résultats expérimentaux par suite de la difficulté de trouver expérimentalement une valeur correcte pour  $\langle m \rangle$  dans le cas général.

On peut encore ici essayer d'appliquer la formule

$$R^e = r \cdot \frac{2}{d-2}$$

Le réseau utilisé comportant 140 branches et 57 nœuds, son degré moyen est :

$$\bar{d} = \frac{2B}{N} = \frac{2 \cdot 140}{57} = 4,91$$

et on obtient :

$$R^e = r \cdot \frac{2}{4,91 - 2} = 150 \cdot 0,686 = 103 \Omega$$

Cette valeur est proche de  $R_{CD} = 111 \Omega$  mais le réseau est légèrement anisotrope puisque on a :  $R_{AB} = 127 \Omega$

### II.1.3.- Etude analogique de réseaux de grande taille.

La construction de grands réseaux de résistance n'a à notre connaissance été entreprise que par SHANKLAND et WAFF [24]. Pour étudier la conductivité de milieux poreux imbibés de fluide conducteur en fonction de leur porosité, ils ont construit des réseaux de structure carrée et cubique composés de résistances identiques et ont étudié la loi de décroissance de la conductance équivalente au réseau quand on retire au hasard des branches du réseau.

Le réseau de structure carrée comprend 1034 résistances et celui de structure cubique 2340 résistances de  $702 \pm 15 \Omega$ . Les résistances étant numérotées, elles sont retirées à partir d'une table de nombres aléatoires.

En appelant  $G(p)$  la conductance équivalente au réseau qui ne contient qu'une proportion  $p$  de branches et  $G(1) = G_0$  la conductance équivalente au réseau complet, Shankland et Waff ont tracé les courbes  $G(p) / G(1)$  qui sont portées sur les figures 30 et 29 pour les réseaux carrés et cubiques respectivement.

On est frappé par le fait que pendant la plus grande partie des courbes  $G(p) / G(1)$  celles-ci sont assimilables à des droites.

Pour le réseau cubique, Shankland et Waff trouvent pour équation de cette droite expérimentale :

$$G(p) / G(1) = \frac{p - 0,31}{1 - 0,31}$$

et pour le réseau carré :

$$G(p) / G(1) = \frac{p - 0,5}{1 - 0,5}$$

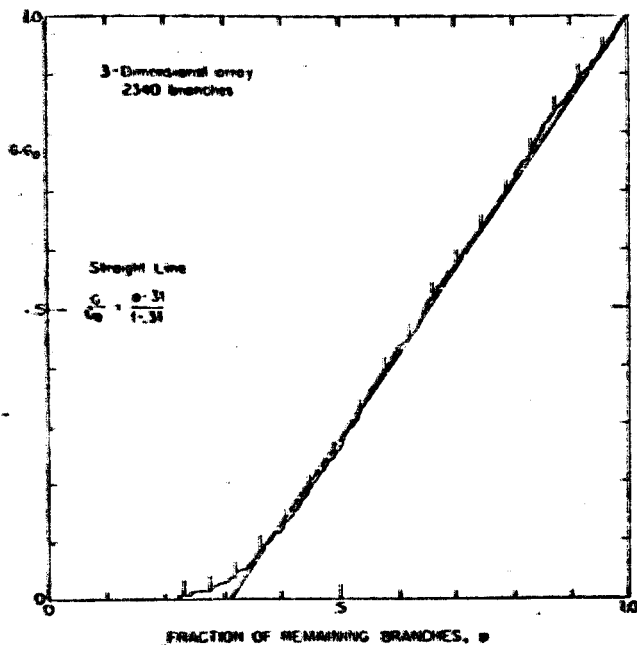


Figure 29 : Réseau cubique - Conductance équivalente

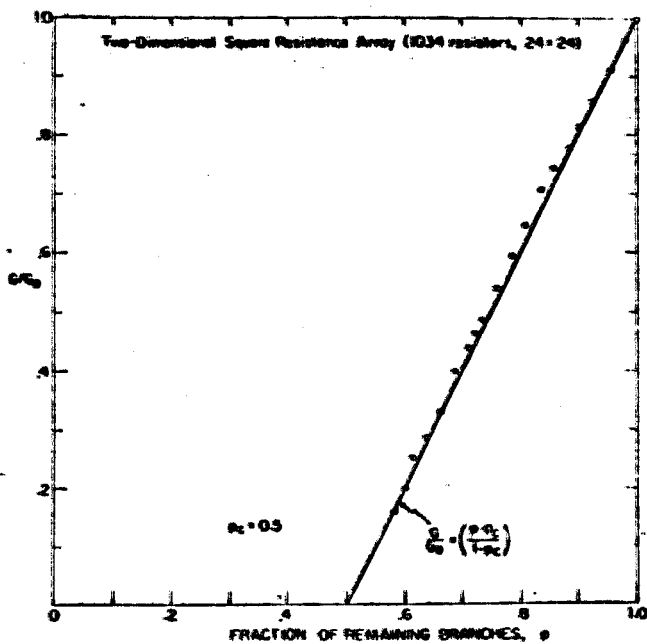


Figure 30 : Réseau carré - Conductance équivalente



Si on rapproche ces courbes et équations des résultats théoriques obtenus par la méthode des arbres ou par la méthode du milieu effectif, pour un réseau contenant des conductances  $x$  et  $y$  en proportion  $p$  et  $1-p$  quand  $y$  tend vers zéro, on a la formule théorique (2.110):

$$G(p) / G(1) = \frac{dp-2}{d-2} = \frac{p - 2/d}{1 - 2/d} \quad (2.110)$$

ce qui donne pour les réseaux cubiques et carrés respectivement :

$$G(p) / G(1) = \frac{p - 0,333}{1 - 0,333} \quad (d = 6)$$

$$G(p) / G(1) = \frac{p - 0,5}{1 - 0,5} \quad (d = 4)$$

La coïncidence avec les résultats expérimentaux de Shankland et Waff est remarquable sauf dans la "queue" de la courbe pour le réseau cubique au voisinage du seuil de percolation.

On voit en effet la courbe expérimentale se séparer de la droite théorique au voisinage du seuil de percolation : pour le réseau cubique le seuil de percolation expérimental est trouvé voisin de  $p_c = 0,22$  alors que la droite théorique coupe l'axe en  $p'_c = 0,333$ . (Le seuil de percolation généralement admis pour des réseaux cubiques est  $p_c \approx 0,25$ ).

Ceci est dû à l'effet de corrélation entre branches qui devient important lorsque la majeure partie de celles-ci a été enlevée et la théorie des arbres comme celle du milieu effectif, nous l'avons vu, considère les branches comme indépendantes les unes des autres.

Pour le réseau carré, par contre, le seuil théorique  $p_c = 0,5$  (résultat exact) est corroboré par la courbe expérimentale et la courbe théorique déduite de (2.110).

#### II.11.4.- Etude sur ordinateur de grands réseaux par méthode de Monte-Carlo

La nécessité d'utiliser des réseaux de taille très grande pour obtenir des résultats statistiquement significatifs a conduit à envisager leur calcul exact sur ordinateur.

##### II.11.4.1.- Les calculs de RINK et SCHOPPER

Le premier essai, à notre connaissance, de calcul de la résistance équivalente d'un réseau aléatoire par ordinateur semble être celui de RINK et SCHOPPER [25] en 1968.



Ils utilisent des réseaux plans de structure régulière, remplis de résistances suivant une distribution uniforme comprise entre  $0,5 r_0$  et  $2 r_0$ .

Le calcul est fait en inversant par la méthode de CHOLESKY la matrice symétrique des impédances de maille du réseau dont tous les termes ont été introduits en mémoire.

La taille de la mémoire de l'ordinateur utilisé (IBM 7090) limite celle du réseau à  $120 \times 120$  mailles et le temps de calcul est alors en moyenne de 5h.

Ce calcul est fait pour des réseaux planaires de structure hexagonale, carrée, triangulaire.

SCHOPPER a supposé que la résistance équivalente R pouvait approximativement s'exprimer sous la forme :

$$R = \alpha r_0 \left( 1 - \frac{\epsilon \sigma^2(r)}{r_0^2} \right)$$

où  $\alpha$  est un facteur de forme lié à la structure du réseau,  $r_0$  est la moyenne arithmétique de la distribution des résistances et  $\sigma^2(r)$  est la variance de cette distribution ( $\epsilon$  est défini ci-dessous).

Si on appelle  $R_0$  la résistance du réseau ne comportant que des résistances identiques  $r_0$ , on aura :

$$R_0 = \alpha r_0$$

d'où

$$R / R_0 = 1 - \frac{\epsilon \sigma^2(r)}{r_0}$$

avec la distribution de résistances utilisées, on a  $\sigma^2(r) / r_0 = 1 / 12$   
d'où :

$$R / R_0 = 1 - \frac{\epsilon}{12}$$

Le coefficient  $\epsilon$  est déterminé expérimentalement à partir des résultats du calcul sur ordinateur qui donnent  $R/R_0$ .

Les résultats obtenus par RINK et SCHOPPER sont résumés dans le tableau 3 ci-dessous :

RESEAU	$\epsilon$	$\Delta\epsilon$	$R/R_0$	$R/R_0$ min - $R/R_0$ MAX	$R/R_0$ théorique
hexagonal	0,364	0,037	0,9696	0,9665-0,9727	0,9703
carré	0,500	0,038	0,9583	0,9551-0,9615	0,9555
triangulaire	0,677	0,124	0,943	0,9332-0,9539	0,9393

Tableau 3

Pour retrouver théoriquement ces résultats on peut procéder de plusieurs façons.

- a) Le réseau carré a pour résistance équivalente théorique la moyenne géométrique de la distribution des résistances lorsque celle-ci est log-symétrique : ce n'est pas le cas ici, mais, la distribution n'étant pas très étalée, l'erreur commise en la supposant log-symétrique doit être faible.

La moyenne géométrique théorique de la distribution uniforme précédente est égale à 0,95578 : ceci est très proche de la valeur expérimentale de 0,958 trouvée par RINK et SCHOPPER.

- b) Le réseau triangulaire et le réseau hexagonal étant duaux l'un de l'autre et la distribution des résistances sur les réseaux carrés triangulaires et hexagonaux étant les mêmes, on devrait avoir, si cette distribution était log-symétrique d'après le corollaire 2 du paragraphe II.7.1. :

$$R_{\text{HEX}} \cdot R_{\text{TRI}} = R_{\text{CAR}}^2$$

Avec les valeurs numériques trouvées par RINK et SCHOPPER, on trouve :

$$\sqrt{R_{\text{HEX}} \cdot R_{\text{TRI}}} = \sqrt{0,969 \cdot 0,943} = 0,9559$$

$$R_{\text{CAR}} = 0,958$$



Les deux valeurs trouvées sont très proches car la distribution non log-symétrique est néanmoins peu étalée.

- c) On peut enfin utiliser la théorie des "arbres" exposée plus haut pour calculer à l'aide du programme décrit précédemment avec la distribution uniforme utilisée par RINK-SCHOPPER, les valeurs de la résistance équivalente réduite des réseaux de degré moyen 3, 4 et 6.

Le programme étant initialement conçu pour accepter des distributions de conductances, il faut le modifier légèrement pour y introduire une distribution de résistances : en fait nous partons d'une distribution de 60 résistances régulièrement réparties entre 0,5 et 1,5 et nous introduisons en mémoire les inverses de leurs valeurs.

Les valeurs de  $R/R_0$  qu'on déduit de ce calcul sont portées dans la dernière colonne du tableau 3 : on voit qu'elles se trouvent toutes à l'intérieur des fourchettes expérimentales de RINK-SCHOPPER.

#### II.11.4.2.- Les calculs de KIRKPATRICK

KIRKPATRICK [9][21] a entrepris l'étude sur ordinateur de grands réseaux de structure carrée et cubique afin de vérifier que la théorie du milieu effectif qu'il avait appliquée à des réseaux donnait des résultats corrects.

Sa méthode de calcul de la conductance équivalente d'un réseau est basée sur une procédure de relaxation visant à attribuer à chaque branche des courants de sens et d'intensité convenable et à chaque nœud des potentiels tels que les lois de Kirchoff soient satisfaites, ceci est obtenu après de nombreuses itérations. La différence de potentiel externe étant imposée, la somme des courants entrant par le nœud externe permet de calculer la conductance équivalente.

Les réseaux étudiés comportaient 750 nœuds pour le réseau carré et 3375 nœuds pour le réseau cubique.

KIRKPATRICK a utilisé d'abord une distribution binaire de conductances  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 < \sigma_1$  en proportions respectives  $p$  et  $1-p$  en donnant à  $\sigma_2$  des valeurs tendant progressivement vers 0.

Pour une valeur de  $\sigma_2$  considéré comme paramètre, KIRKPATRICK calcule la conductance équivalente réduite  $\sigma(p)/\sigma(1)$  pour différentes valeurs de  $p$ .

La courbe tracée pour  $\sigma_2$  tendant vers 0 ( $\sigma_2 = 10^{-5}$ ) en joignant les points expérimentaux montre un seuil de percolation.

Les figures 31 et 32 tirées de [9] montrent la très bonne coïncidence obtenue entre courbes théoriques résultant de la théorie du milieu effectif et points expérimentaux. Pour le réseau cubique, cependant, au voisinage du seuil de percolation, les points expérimentaux s'écartent de la droite donnée par la théorie du milieu effectif, qui donne un mauvais seuil de percolation comme nous l'avons déjà remarqué dans l'étude expérimentale de SHANKLAND et WAFF.

Notre théorie des "arbres" donnant des résultats identiques à celle du milieu effectif, ce que confirment les figures 12, 13, 14 nous considérons que les données expérimentales de KIRKPATRICK la vérifient également, avec les mêmes restrictions que la théorie du milieu effectif.

Pour le réseau de structure carrée, planaire, nous avons établi que la conductance équivalente était égale à la moyenne géométrique de la distribution des conductances quand celle-ci était log-symétrique : pour une distribution binaire ceci n'a lieu que pour  $p = 0,5$  et on peut alors écrire d'après (2.66)

$$\frac{\sigma(1/2)}{\sigma(1)} = \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}$$

en outre on a :

$$\frac{\sigma(0)}{\sigma(1)} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

Ces deux relations sont parfaitement vérifiées par les données de KIRKPATRICK (fig. 31).

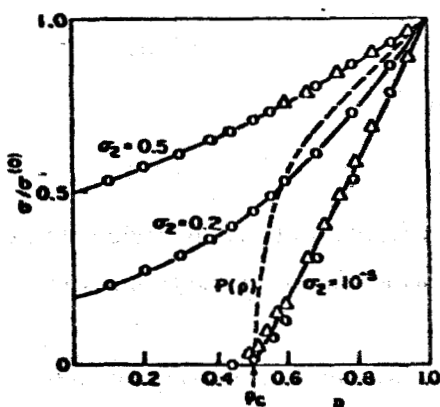


Figure 31

Réseau de structure carrée

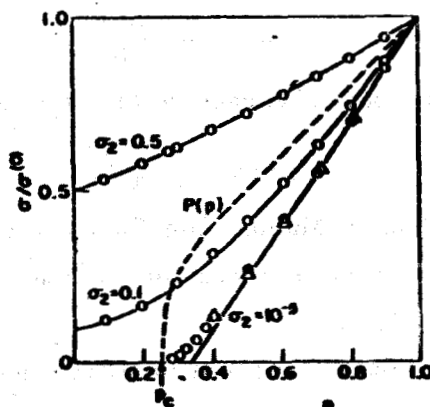


Figure 32

Réseau de structure cubique

En dehors du point  $p = 1/2$  nous faisons remarquer au paragraphe II.7.3. que la distribution n'étant plus log-symétrique, le résultat donné par la moyenne géométrique ne pouvait plus s'appliquer rigoureusement, cependant, pour des distributions pas trop étalées ( $\sigma_2/\sigma_1 < 0,2$ ) il doit y avoir une différence assez faible entre la courbe exacte  $\sigma(p)/\sigma(1)$  et la courbe résultant de la moyenne géométrique :

$$\frac{\sigma(p)}{\sigma(1)} = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{1-p} \quad (2.67)$$

La courbe exacte n'étant pas connue analytiquement mais celle déduite de la théorie du milieu effectif en étant visiblement une bonne approximation, nous avons tracé sur le même graphique la courbe donnée par la théorie du milieu effectif d'équation (2.157) et la courbe donnée par la moyenne géométrique d'équation (2.67) (fig. 33).

On peut vérifier que pour  $p = 1/2$  ces deux courbes sont confondues, ce qui signifie que la théorie du milieu effectif prévoit bien pour une distribution log-symétrique dans un réseau de structure carrée une conductance équivalente égale à la moyenne géométrique des conductances.

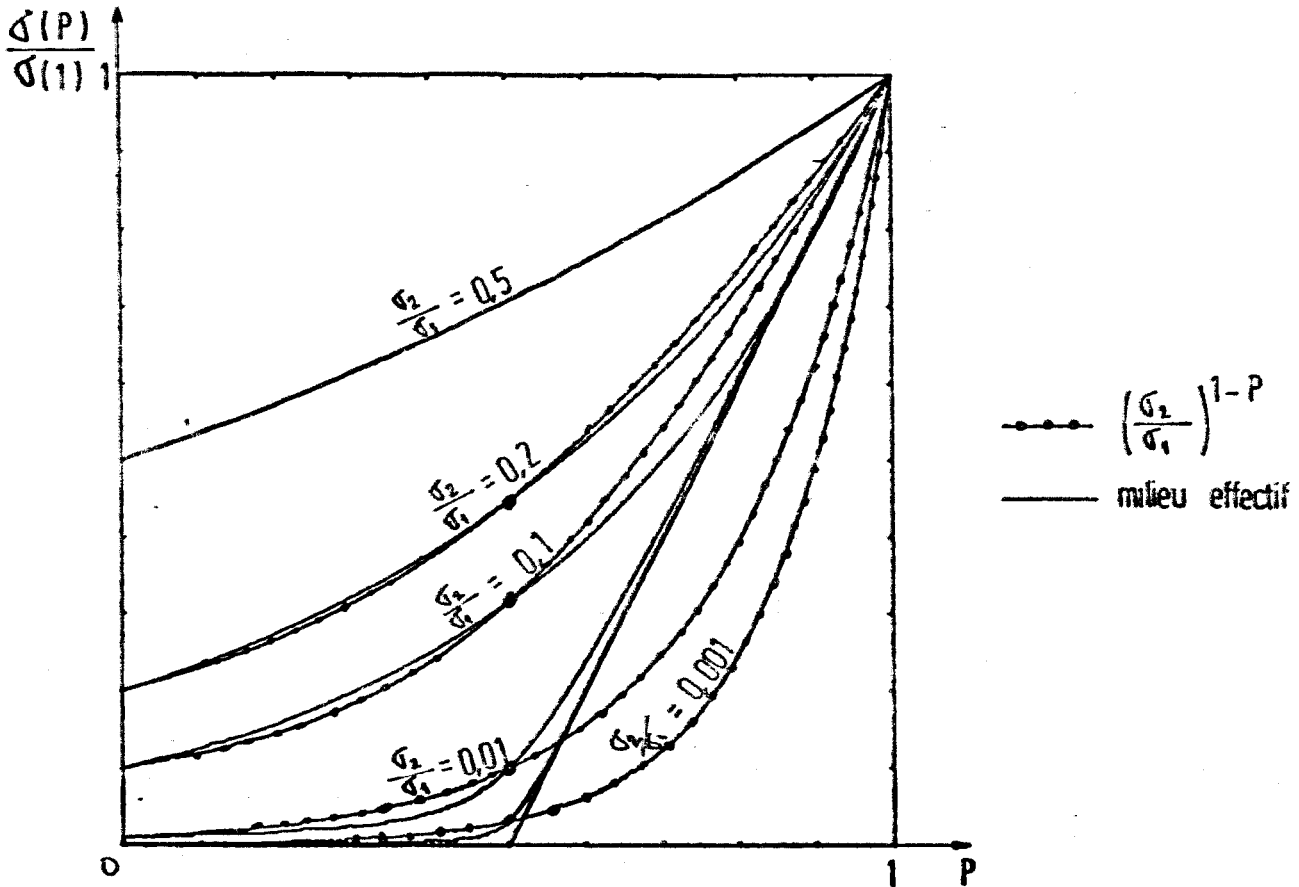


Figure 33

Ce résultat, cependant, n'a pas été mentionné par KIRKPATRICK. Pour des rapports  $\sigma_2/\sigma_1$  compris entre 1 et 0,2, les courbes "milieu effectif" et "moyenne géométrique" sont proches l'une de l'autre mais dès que la distribution des conductances devient trop étalée, la divergence s'accroît, la courbe "moyenne géométrique" ne tendant vers aucune asymptote oblique ni vers aucun seuil de percolation.

KIRKPATRICK s'est également intéressé à des distributions continues de conductances dans un réseau cubique, en particulier à une distribution log-uniforme de moyenne géométrique 1, comprise entre  $1/A$  et  $A$  : il a comparé ses résultats expérimentaux avec ceux qu'il a déduit de la théorie du milieu effectif, en traçant la courbe  $\sigma(A)/\sigma(1)$ .

Nous avons déjà, à propos de la théorie des "arbres", examiné au paragraphe II.9.4.3. les résultats obtenus dans ce cas et nous en avons conclu à l'identité des résultats entre théorie des arbres et théorie du milieu effectif.

## II.12.- CONCLUSION DE LA SECONDE PARTIE

Nous avons dans cette seconde partie étudié les réseaux de résistance, aléatoires, par leur structure ou par les résistances dont ils se composent.

Nous avons mis au point pour des réseaux contenant des résistances identiques une méthode basée sur la topologie de ces réseaux permettant d'encadrer la valeur exacte de la résistance équivalente. La méthode utilisée consiste à faire une approximation sur la moyenne des courants et des tensions de branche

Ces résultats sont nouveaux et constituent une généralisation de la loi d'ohm à des réseaux de structure aléatoire.

Pour des réseaux contenant des résistances aléatoires, nous avons mis en évidence le cas particulier des réseaux planaires, de structure carrée ou "carrée en moyenne".

Nous avons montré dans ce cas que leur résistance équivalente est la moyenne géométrique de la distribution des résistances, si celle-ci est log-symétrique. Ces résultats sont également nouveaux.

Dans le cas d'un réseau de structure quelconque nous avons utilisé des principes de la théorie des graphes appliquée aux réseaux électriques pour obtenir une méthode approchée de calcul de la résistance équivalente que nous avons appelée "théorie des arbres".

Nous l'avons complétée par une méthode de calcul simple qui permet quelle que soit la distribution des résistances utilisées, de calculer la résistance équivalente réduite d'un réseau connaissant son degré moyen.

La théorie des arbres se révèle au point de vue des hypothèses et des résultats similaire à la théorie du milieu effectif dont nous rappelons l'origine et que nous prolongeons en montrant qu'elle peut s'appliquer à des réseaux non réguliers, en considérant leur degré moyen, et en montrant que, pour le réseau de degré moyen 4, de grande taille, porteur d'une distribution log-symétrique, elle permet de retrouver le résultat rigoureux précédent.

L'examen des résultats expérimentaux trouvés dans la littérature a permis de vérifier que les théories approchées des arbres et du milieu effectif donnent de bons résultats tant que la distribution des résistances du réseau n'est pas trop étalée.

TROISIEME PARTIE



APPLICATION AUX MILIEUX POREUX  
DE RESULTATS OBTENUS SUR DES RESEAUX

### III.1.- PROBLEMES MACROSCOPIQUES

L'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux sous l'effet d'un gradient de pression est décrit par la loi macroscopique de DARCY, analogue dans sa formulation à la loi d'Ohm.

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = \frac{k}{\mu} \frac{S}{L} \Delta P \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I = \sigma \frac{S}{L} \Delta V \end{array} \right. \quad (3.2)$$

où  $Q$  est le débit volumique de l'écoulement,  $S$  la section du milieu poreux,  $L$  sa longueur,  $\Delta P$  la différence de pression entre extrémités du milieu,  $k$  sa perméabilité et  $\mu$  la viscosité du fluide.

On voit en comparant les équations (3.2) et (3.1) que la conductivité électrique  $\sigma$  est l'analogie de la perméabilité  $k$  du milieu poreux si on fait correspondre  $Q$  à  $I$  et  $\Delta P$  à  $\Delta V$ .

Un des problèmes posés en hydrogéologie, en exploitation pétrolière, par exemple, est de calculer la perméabilité équivalente d'un milieu poreux composite formé d'un certain nombre de blocs accolés de perméabilités différentes et d'arrangement aléatoire.

Un certain nombre d'auteurs ont étudié ces problèmes, tant théoriquement qu'expérimentalement.

MORINEAU, SIMANDOUX et DUPUY [26] ont mesuré les variations de perméabilité locale à l'échelle centimétrique dans un échantillon et vérifié que la distribution des perméabilités locales était sensiblement log-normale.

HOUPEURT [27] cite plusieurs travaux de simulation [28] ou d'expérimentation [29] qui concluent que la perméabilité équivalente est très proche de la moyenne géométrique de la distribution des perméabilités utilisées.

MATHERON [A2.9], enfin, dans le cas des écoulements plans, a établi théoriquement que pour un milieu infini, à deux dimensions, caractérisé par une perméabilité locale  $k(x)$  aléatoire et stationnaire, de loi spatiale invariante par rotation de  $90^\circ$ , la perméabilité macroscopique était égale à la moyenne géométrique des perméabilités locales, à condition que les distributions des perméabilités locales  $k$  et de leurs inverses  $h = 1/k$ , réduites par rapport à leurs moyennes arithmétiques respectives  $E(k)$  et  $E(h)$  possèdent la même loi.

Ce résultat est tout à fait semblable au nôtre, obtenu pour un réseau planaire, carré, composé de conductances suivant une loi log-symétrique.



Il y a en effet dans notre cas, invariance par rotation de 90° puisque le réseau carré est son propre dual et le milieu hétérogène peut toujours être représenté par un damier de carrés infinitésimaux, de perméabilité constante, dont la représentation sous forme de réseau équivalent sera le réseau de structure carrée que nous utilisons.

MATHERON étudiant ensuite les milieux en trois dimensions établit une loi approximative donnant pour perméabilité équivalente pour un espace de dimension D :

$$k_{eq} = \frac{D-1}{D} \overline{k^A} + \frac{1}{D} \overline{k^H} \quad (3.3)$$

Ce qui pour l'espace à trois dimensions devient :

$$k_{eq} = \frac{2}{3} \overline{k^A} + \frac{1}{3} \overline{k^H} \quad (3.4)$$

et MATHERON énonce que "dans l'espace à trois dimensions la perméabilité se situe aux deux tiers du chemin entre moyenne harmonique et moyenne arithmétique".

Cette loi, obtenue par une approximation au second ordre ne peut être valable que pour des distributions extrêmement resserrées : en effet, en deux dimensions, elle s'écrit :

$$k_{eq} = \frac{1}{2} (\overline{k^A} + \overline{k^H}) \quad (3.5)$$

alors que la loi de la moyenne géométrique, considérée comme exacte dans ce cas, donne pour une loi log-symétrique :

$$k_{eq} = \sqrt{\overline{k^A} \cdot \overline{k^H}} \quad (3.6)$$

Ce n'est que pour des distributions très étroites qu'il peut y avoir équivalence de (3.5) et (3.6).

MATHERON envisage ensuite pour la perméabilité équivalente d'un milieu à D dimensions une autre formulation :

$$k_{eq} = (\overline{k^A})^{\frac{D-1}{D}} \cdot (\overline{k^H})^{\frac{1}{D}} \quad (3.7)$$

Cette formulation est meilleure que la précédente car elle permet de retrouver le résultat exact (3.6) pour un milieu à deux dimensions. Dans le cas général, puisqu'un milieu à deux dimensions est simulable par un réseau carré de degré 4, un milieu à D dimensions est simulable par un réseau de degré 2D.

Appliquons à ce problème la construction géométrique étudiée en deuxième partie à propos de la théorie des arbres.

On trace  $G_{eq}/G_g$  en fonction de  $N/B$  : l'axe des abscisses peut être gradué directement en degrés moyens et la conductance approchée réduite  $G_{eq}/G_g$  d'un réseau de degré  $2D$  se situera à l'abscisse  $N/B = 1/D$ , soit en  $N = B / 3$  pour un réseau à trois dimensions.

Mais dans l'étude des distributions log-symétriques uniformes, de largeur croissante comprise entre  $10^{-A}$  et  $10^A$ , faite au paragraphe II.9.4.3., nous avons vu que pour des distributions pas trop étalées ( $A \leq 1$ ), on pouvait effectivement obtenir l'approximation :

$$G_{eq}/G_g = \frac{z^{-A(1-N/B)}}{z^{-H(N/B)}} = \frac{z^{-A \left(\frac{D-1}{D}\right)}}{z^{-H(1/D)}} \quad (3.8)$$

On retrouve alors la formulation (3.7) de MATHERON.

Cette approximation consiste, en fait, sur le graphique  $\text{Log}(G_{eq}/G_g)$  à joindre par une droite  $\text{Log}z^{-A}$  à  $\text{Log}z^{-H}$  et à prendre l'ordonnée correspondant à l'abscisse  $N/B$ , mais, comme la courbe exacte n'est pas une droite mais une sigmoïde passant par  $N/B = 1/2$  ( $\frac{d=4}{D=2}$ ), on aura avec cette approximation, pour  $d > 4$  ( $D > 2$ ) une conductance trop faible et pour  $d < 4$  ( $D < 2$ ) une conductance trop forte par rapport à la valeur prévue par la théorie des arbres. Or on sait, que pour  $D = 3$ , la théorie des arbres identiques à celle du milieu effectif donne déjà une conductance trop faible par rapport à la valeur exacte.

En conclusion, la formule (3.7) de MATHERON, meilleure de toute façon que la formule (3.3), n'est qu'une formule approchée valable pour des distributions de perméabilités locales relativement resserrées.

### III.2.- PROBLEMES MICROSCOPIQUES

#### III.2.1.- Synthèse des travaux antérieurs.

Depuis longtemps, déjà, des auteurs ont essayé de simuler le comportement d'un milieu poreux par un réseau de capillaires interconnectés en cherchant à expliquer par ce modèle les différents résultats et paramètres obtenus par l'étude expérimentale des milieux poreux :

- Injection de mercure dans le milieu poreux [annexe 7] qui consiste à faire pénétrer sous des pressions croissantes du mercure, fluide non mouillant, dans les pores : on mesure le volume de mercure injecté en fonction de la pression appliquée.
- Courbes de pression capillaire [annexe 7] similaires aux courbes d'injection de mercure elles sont obtenues avec des couples de fluide mouillant-non mouillant tels que : eau-air, eau-huile.

- Perméabilité monophasique du milieu poreux : c'est le coefficient macroscopique, caractéristique du milieu, qui apparaît dans la loi de Darcy lorsqu'un seul fluide circule dans le milieu.
- Perméabilités relatives en écoulement biphasique lorsque deux phases non miscibles, l'une mouillante, l'autre non mouillante circulent dans le milieu poreux.
- Facteur de formation : c'est le rapport de la résistivité macroscopique d'un milieu poreux imbibé de liquide conducteur à la résistivité de ce liquide seul.

La première tentative, et la plus complète, est celle de FATT [30] qui a étudié tous ces phénomènes à l'aide de réseaux de résistances mais cette étude est uniquement expérimentale et faite sur de petits réseaux réguliers plans.

FATT a étudié l'influence de paramètres tels que la distribution des diamètres des capillaires, la distributions de leurs largeurs, la forme du réseau utilisé.

Les courbes qu'il a tracées simulent l'injection de mercure, les perméabilités relatives et les conductivités relatives en phase mouillante et non mouillante.

Les courbes obtenues sont d'allure similaire aux courbes habituellement obtenues expérimentalement mais l'étude de FATT n'étant suivie d'aucun essai d'interprétation théorique ne peut que montrer qualitativement que le mode de simulation utilisé représente assez bien le phénomène réel.

A la suite de FATT, DODD et KIEL [31] étudièrent à nouveau à l'aide de réseaux de structure régulière représentant des capillaires de diamètre aléatoire, les courbes de désaturation d'un fluide mouillant par un fluide mouillant mais à la différence de FATT qui introduisait par les quatre côtés de son réseau plan le fluide non mouillant et aboutissait à un remplissage complet des pores par le fluide non mouillant, DODD et KIEL introduisent le fluide non mouillant par trois côtés, en laissant s'échapper le fluide mouillant par le quatrième côté : ils trouvent ainsi une saturation irréductible en fluide mouillant.

On trouve en outre, indépendamment de FATT, un essai de PROBINE [33] de simulation d'un milieu poreux non saturé, par un réseau de résistances, dans le but de calculer sa perméabilité relative.

Plus récemment, SIMON et KELSEY [32] (1971) utilisèrent un ordinateur pour étudier le dépalcement d'un fluide par un autre fluide, miscible et de même viscosité dans un réseau de capillaires de structure régulière en cherchant quel est le volume d'un des fluides à injecter pour qu'il traverse le milieu.

Enfin, HARRIS [34] utilise un "carré latin" comme substitut d'un réseau plan où chaque pore est connecté à ses quatre voisins et ses quatre plus proches voisins, de sorte que dans chaque ligne et colonne, il y ait la même distribution de tailles de "pores" et il étudie le nombre de pores envahis par la phase déplaçante (non mouillante) selon qu'elle pénètre par 1, 2 ou 3 faces du carré, la phase déplacée (mouillante) s'échappant par 3, 2 ou 1 faces : cette expérience simple montre que la saturation irréductible en fluide mouillant à la fin de la pénétration du fluide non mouillant est fonction du nombre de faces dont dispose la phase mouillante pour s'échapper.

Bien que l'ensemble de ces études se rattache à des modèles simplifiés de la réalité complexe d'un milieu poreux, ils ont permis de faire progresser la connaissance des phénomènes physiques mis en jeu et de prévoir, au moins qualitativement dans quel sens ils évoluaient.

L'obstacle auquel on se heurte quand on veut raffiner l'étude de ces réseaux ou envisager des réseaux de plus grande taille est le manque de théorie générale sur les réseaux aléatoires et les milieux aléatoires en général.

Cependant depuis quelque temps, sont apparues en physique du solide, des théories connues sous le nom de "théories des phénomènes de Percolation" [annexe 8] : ces théories, extrêmement fécondes, permettent d'aborder les problèmes liés aux milieux aléatoires avec un regard neuf et de regrouper des phénomènes jusqu'ici traités séparément.

A notre connaissance, leur application aux milieux poreux n'a jamais été faite : GANOULIS [35] (1974) cite simplement BROADBENT et HAMMERSLEY [A8.8] (1957) qui sont à l'origine de l'étude des phénomènes de percolation mais n'envisage pas la possibilité d'utiliser leurs résultats.

Nous n'allons pas entreprendre une étude exhaustive des phénomènes de percolation mais montrer en utilisant des résultats déjà établis comment ils permettent d'expliquer, au moins qualitativement, des résultats obtenus dans l'étude des milieux poreux.

La difficulté est ici de simuler le milieu poreux par un réseau, car, pour l'instant, les théories de percolation ne peuvent s'appliquer qu'à des réseaux ; les tentatives d'applications à des milieux continus s'étant révélées infructueuses.

Les résultats que nous obtiendrons de cette façon ne sont que partiels ou approchés car les études jusqu'ici entreprises sur les phénomènes de percolation n'ont servi qu'à simuler des phénomènes concernant la physique de solide et un certain nombre de fonctions qui nous seraient

utiles pour simuler des phénomènes relatifs au milieu poreux, n'ont pas encore été étudiées théoriquement. Aussi nous espérons, que l'application possible des phénomènes de percolation aux milieux poreux stimulera une recherche dans ce sens.

### III.2.2.- Etude des courbes de pression capillaire en drainage

#### III.2.2.1.- Représentation sous forme de réseau du milieu poreux.

Nous avons montré en annexe 7 comment il était possible de subdiviser théoriquement le milieu poreux en une infinité de volumes élémentaire égaux, caractérisés chacun par une pression  $p_i^*$  d'ouverture à laquelle un fluide déplaçant, d'angle de mouillage  $\theta = 0$ , présent à une extrémité ou l'autre de l'élément de volume, peut le traverser en chassant le fluide mouillant qui l'occupe.

Cette distribution théorique en éléments de volume de pression d'ouverture  $p_i^*$  permet de tracer un "graphe" en deux ou trois dimensions : chaque élément de volume constituant une branche du graphe et portant la valeur de la pression d'ouverture correspondante.

La structure de ce graphe et son degré moyen sont fonctions du type de milieu considéré :

Pour un milieu de structure microscopiquement hétérogène, c'est-à-dire présentant une "granulométrie" de rayons hydrauliques très étalée, on supposera que deux éléments de volumes adjacents sont peu corrélés et ont donc des pressions d'ouverture (figure 34) considérées comme des variables aléatoires indépendantes :

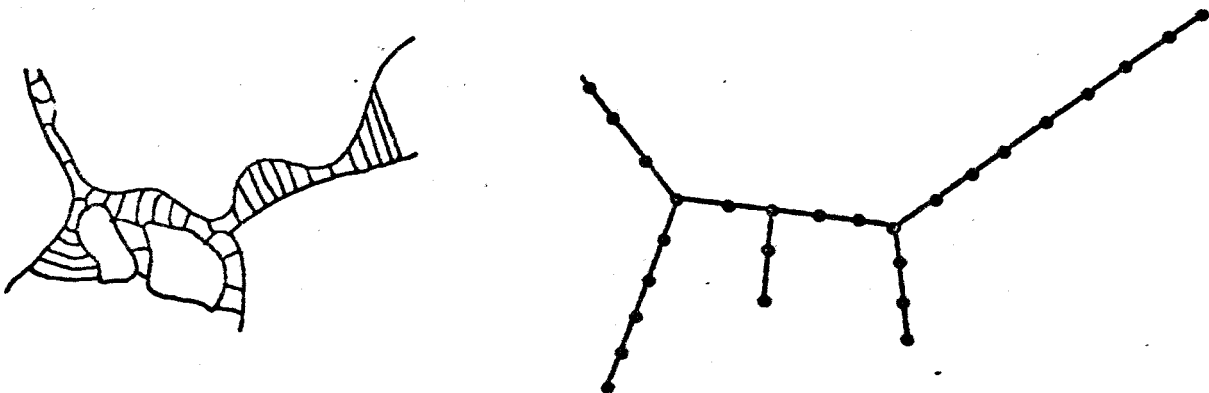


Figure 34

Entre deux nœuds où se rencontrent plusieurs branches, il y aura donc un certain nombre de branches en série et le degré moyen du graphe sera proche de 2.

Pour un milieu plus régulier, c'est-à-dire dont la "granulométrie" des rayons hydrauliques serait plus resserrée on peut envisager des éléments de volume de longueur plus grande car la variation de rayon hydraulique des pores sera moins rapide : le nombre de branches en série entre deux pores diminuera et le degré moyen s'éloignera de 2 en augmentant (fig. 35)

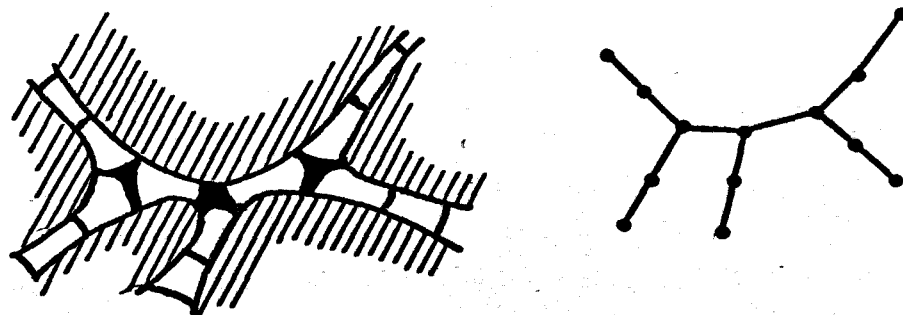


Figure 35

Le graphe étant tracé avec ses branches et leurs pressions d'ouverture, on supposera, étant donné le caractère aléatoire des milieux poreux, que la position relative des branches munies de leur pression d'ouverture est également aléatoire.

Le milieu poreux, représenté par le graphe va être soumis par l'extérieur à une pression  $p_i^*$  croissante de 0 à  $p_{i\max}^*$  qui va s'appliquer selon une, plusieurs ou toutes les faces externes de l'échantillon.

A une pression donnée,  $p_i^*$ , on ne considèrera comme présentes que les  $n_i^*(p_i^*)$  branches dont la pression d'ouverture est inférieure ou égale à  $p_i^*$  [annexe 7] mais le nombre  $n_i(p_i^*)$  de branches réellement accessibles au fluide déplaçant à cette pression, correspondra à la fraction de  $n_i^*(p_i^*)$  qui est accessible en partant des "faces" du graphes par lesquelles le fluide peut envahir l'échantillon.

Si ce graphe contient B branches, on obtiendra la saturation effective  $s(p_1^{\times})$  en fluide déplaçant, inférieure à la saturation théorique  $s^{\times}(p_1^{\times})$  :

$$s(p_1^{\times}) = \frac{n(p_1^{\times})}{B} < s^{\times}(p_1^{\times}) = \frac{n^{\times}(p_1^{\times})}{B} \quad (3.9.)$$

$$(3.10)$$

Si on considère que les branches qu'on ajoute en augmentant la pression  $p_1^{\times}$  sont disposées au hasard, le processus ainsi défini appartient à la classe des phénomènes de percolation [annexe 8].

La saturation théorique  $s^{\times}(p_1^{\times})$  représente la proportion p de branches présentes dans le réseau ( $0 < p < 1$ ) à la pression  $p_1^{\times}$  alors que la saturation effective  $s(p_1^{\times})$  est représentée par la fonction  $pP(p)$  [annexe 8] où P(p) est la probabilité de percolation ( $0 < P(p) < 1$ ) c'est-à-dire le rapport du nombre de branches connectées à l'amas infini au nombre de branches présentes dans le réseau au stade p.

Pour déduire la courbe de saturation effective  $s(p_1^{\times})$  de la courbe de saturation théorique  $s^{\times}(p_1^{\times})$  il faut donc connaître P(p), probabilité de percolation, relative au réseau considéré, qui dépend surtout de la dimension et du degré moyen du réseau [annexe 8].

On aura alors :

$$s(p_1^{\times}) = p \cdot P(p) = s^{\times}(p_1^{\times}) \cdot P(s^{\times}(p_1^{\times})) \quad (3.11)$$

Le seuil de percolation [annexe 8] sera atteint pour une pression critique telle que le nombre de branches placées soit suffisant pour qu'il existe un chemin continu reliant une extrémité à l'autre du milieu.

Ce seuil correspond à l'existence d'une conductivité non nulle à travers le milieu si le fluide déplaçant est conducteur et le fluide déplacé ne l'est pas et à l'établissement d'une perméabilité relative non nulle pour la phase déplaçante.

### III.2.2.2.- Les conditions d'entrée du fluide déplaçant

Avant que soit atteinte la pression correspondant au seuil de percolation, il y a déjà du fluide déplaçant qui a pénétré dans le milieu par les faces d'accès et qui forme des "amas finis" reliés à ces faces. Ceci n'est pas prévu habituellement dans la théorie des phénomènes de percolation : en effet, la fonction  $P(p)$  est nulle quand la concentration  $p$  en branches posées est inférieure au seuil de percolation  $p_c$  car elle ne prend en compte que les branches de l'amas infini.

Il faudrait donc ajouter à  $P(p)$  une fonction  $P'(p)$  représentant la proportion de branches placées, connectées aux faces d'accès, en fonction de  $p$ . Cette fonction sera définie pour  $p$  variant de 0 à 1, car même quand l'amas infini existe ( $p > p_c$ ) il peut y avoir des branches qui se connectent à des amas finis reliés aux faces d'accès et non encore reliés à l'amas infini.

On devra donc écrire plutôt :

$$s(p_i^{\infty}) = p(P(p) + P'(p)) \quad (3.12)$$

La fonction  $P'(p)$  est difficile à évaluer : on peut avancer qu'elle est proportionnelle au nombre de faces par lesquelles le fluide déplaçant peut avoir accès au milieu par suite de l'homogénéité et de l'isotropie du milieu et on peut donc écrire, si on note par  $P'(p)$  la probabilité d'entrée du fluide sur toute la surface externe  $S$  de l'échantillon, et par  $P''(p)$  la même fonction quand la surface d'accès est  $S_A < S$ :

$$P''(p) = P'(p) \cdot \frac{S_A}{S} \quad (3.13)$$

$$s(p_i^{\infty}) = p(P(p) + P''(p)) = p(P(p) + P'(p) \frac{S_A}{S}) \quad (3.14)$$

$pP'(p)$  représente alors la saturation partielle due aux branches accessibles par tout le pourtour du réseau.

Si  $pP(p) \cdot B$  est le nombre de branches appartenant à l'amas infini au stade  $p$ , le nombre de branches appartenant à des amas finis est égal



à  $pB(1-P(p))$  et parmi ces branches, certaines sont connectées à la périphérie du réseau.

Lorsque  $p$  croît à partir de zéro, les branches accessibles à partir de la frontière sont d'abord des branches isolées dont le nombre croît proportionnellement à  $p$  ; lorsque  $p$  augmente, il vient se greffer sur ces branches des branches supplémentaires et il apparaît alors des amas périphériques de 2 branches puis 3 branches ..... etc .....

La croissance du nombre de branches connectées à la périphérie devient alors plus rapide qu'une croissance linéaire mais on aura toujours :

$$pP'(p) < p(1 - P(p))$$

car  $p(1 - P(p))$  représente la totalité des amas finis, y compris ceux qui ne sont pas reliés à la périphérie.

### III.2.2.3.- Les conditions de sortie du fluide déplacé

Le début de la courbe de pression capillaire dépend des conditions d'entrée du fluide déplaçant mais la fin de la courbe de pression capillaire (fortes pressions) va être reliée aux conditions de sortie du fluide déplacé. Il faut alors envisager deux cas qui ne semblent pas suffisamment séparés dans la littérature :

a) Le fluide déplacé est le "vide".

Le fluide déplaçant pénètre dans un élément de volume "ouvert" à une pression  $p_i^*$  s'il existe un chemin reliant cet élément de volume aux faces d'entrée du fluide déplaçant.

b) Le fluide déplacé est un fluide matériel incompressible : le fluide déplaçant pénètre dans un élément de volume ouvert à une pression  $p_i^*$ .

- s'il existe un chemin reliant cet élément de volume aux faces d'entrée du fluide capillaire.

- et s'il existe un chemin permettant au fluide déplacé qui occupe cet élément de volume de sortir par les faces de sortie réservées au fluide déplacé.

Le cas a) est celui de l'injection de mercure : on a préalablement fait le vide dans l'échantillon, il n'y a donc pas de fluide déplacé à chasser matériellement et il suffit d'augmenter suffisamment la pression pour que tous les pores du milieu finissent par s'emplier : la saturation résiduelle en fluide déplacé est nulle dans l'injection de mercure. Si elle semble parfois se produire, c'est qu'on n'a pas atteint des pressions suffisantes.

Le cas b) est celui de la mesure de pression capillaire par la méthode dite "des états restaurés" ou par des méthodes similaires : le fluide déplaçant (non mouillant) pénètre par la surface latérale et le dessus de l'échantillon cylindrique et le fluide déplacé (mouillant) s'échappe par le fond du cylindre mais ici, le fluide déplacé étant incompressible, il est nécessaire qu'il puisse s'échapper d'un élément de volume pour que le fluide non mouillant puisse y entrer.

Si un élément de volume empli de fluide mouillant se trouve entouré d'éléments de volume emplis de fluide non mouillant, il lui sera impossible d'être empli de fluide non mouillant à des pressions supérieures et il contribuera à créer une saturation résiduelle en fluide mouillant.

Le fluide non mouillant continuera donc de repousser le fluide mouillant jusqu'à ce que la saturation en fluide mouillant soit assez petite pour qu'il n'y ait plus de connexion entre le fluide mouillant interne et les faces externes par lesquelles il peut sortir mais seulement des amas finis internes de fluide mouillant.

Ceci se produit lorsque la saturation en fluide mouillant devient égale ou inférieure au seuil de percolation du réseau  $p_c$ .

Si on appelle respectivement  $S_M$  et  $S_{NM}$  les saturations en fluide mouillant et non mouillant, on a donc :

$$S_M = p_c$$

$$S_{NM} = 1 - S_M = 1 - p_c$$

*La saturation résiduelle en fluide mouillant est égale au seuil de percolation  $p_c$  du réseau équivalent au milieu poreux et la saturation limite en fluide non mouillant atteinte lorsque la pression tend vers l'infini est  $1-p_c$ .*

La simplicité de ce résultat ne doit pas faire oublier qu'il est idéalisé : la façon dont le fluide mouillant peut quitter le milieu poreux est en effet tributaire de la géométrie du système de mesure : ce type de raisonnement pourrait s'appliquer si le fluide non mouillant était introduit au centre de l'échantillon car la probabilité de percolation en fluide mouillant représente la probabilité qu'une branche interne soit connectée à la périphérie, mais pour les géométries habituellement utilisées le fluide non mouillant est introduit par certaines faces et le fluide mouillant s'échappe par d'autres.

D'ailleurs, MARLE, ALBET, LARDE [36] ont montré que les résultats de mesure de pression capillaire pouvaient varier dans de grandes proportions selon le type d'appareillage utilisé et la méthodologie de mesure.

La plupart des résultats sur les phénomènes de percolation ayant été obtenus par simulation sur ordinateur, il n'est pas impossible d'envisager qu'on puisse recalculer certains résultats avec des conditions aux limites qui correspondraient aux configurations utilisées dans la mesure des pressions capillaires : on pourrait alors étudier la fonction  $P'(p)$  introduite plus haut ou plutôt la somme  $P^*(p) = P(p) + P'(p)$  en essayant d'en dégager des paramètres universels tels que ceux qui ont récemment été trouvés pour la fonction  $P(p)$  [annexe 8].

En l'absence de tels résultats, nous n'étudierons pas plus avant la forme de la courbe de pression capillaire obtenue lorsque le fluide mouillant est incompressible ; nous nous contentons d'établir la saturation résiduelle en fluide mouillant, en drainage et en imbibition.

Examinons maintenant les relations entre la courbe de pression capillaire  $s(p_1^*)$  et la courbe de saturation théorique  $s^*(p_1^*)$ .

### III.2.2.4.- Pressions inférieures à la pression de percolation

La pression croissant à partir de zéro, elle devra atteindre la pression d'entrée minimum  $p_{\min}^*$  [annexe 7] pour que le fluide déplaçant puisse pénétrer sur la périphérie de l'échantillon : la saturation en fluide déplaçant va d'abord augmenter avec la pression sans qu'il se crée d'amas infini, la proportion de branches posées égale à la saturation théorique  $s^*(p_i^*)$  étant inférieure à la concentration critique  $p_c$ . La saturation en fluide déplaçant sera en outre proportionnelle à la surface d'accès et sera donc maximum dans la méthode d'injection de mercure traditionnelle où le fluide déplaçant entre par toutes les faces de l'échantillon.

La pression critique  $p_i^*$  correspondant au seuil de percolation est obtenue lorsque  $s^*(p_i^*) = p_c$ .

On peut évaluer le seuil de percolation en utilisant le résultat approché [annexe 8] :

$$p_c = \frac{1}{d} \frac{D}{D-1} \quad \overline{D=2} \quad \frac{2}{d} \quad \overline{D=3} \quad \frac{3}{2d} \quad (3.15)$$

Nous avons, en construisant le graphe représentatif du milieu poreux, indiqué que le degré moyen de ce réseau était supérieur à 2, d'autant plus que le milieu avait une "granulométrie" étalée de rayons hydrauliques.

Le seuil de percolation est donc inférieur à 0,75 en trois dimensions d'après (3.15) et avant qu'il soit atteint, la saturation effective est :

$$s(p_i^*) \quad p = s^*(p_i^*) < p_c \quad p(P(p) + P'(p) \frac{S_A}{S}) = \frac{pP'(p)S_A}{S} \quad (3.16)$$

A la saturation critique  $s_c(p_i^*)$ , obtenue pour  $p = p_c$ , correspond l'établissement d'un chemin continu de fluide déplaçant d'une extrémité à l'autre du réseau : il s'agit du seuil de perméabilité relative en fluide non mouillant en drainage, qui est aussi le seuil de conductivité du fluide non mouillant.

La seule expérimentation à notre connaissance qui permette de mettre en évidence cet effet est celle de PACSTRICKY, GAULTIER, MARLE [37] qui ont injecté du mercure par une face terminale d'un cylindre poreux, et, tout en mesurant la saturation en mercure en fonction de la pression, ont noté à quelle pression s'établissait une phase conductrice continue de mercure, d'une extrémité à l'autre de l'échantillon.

Les figures 36 a et b (tirées de [37]) montrent la saturation en mercure en fonction de la pression pour 6 échantillons de roches poreuses.

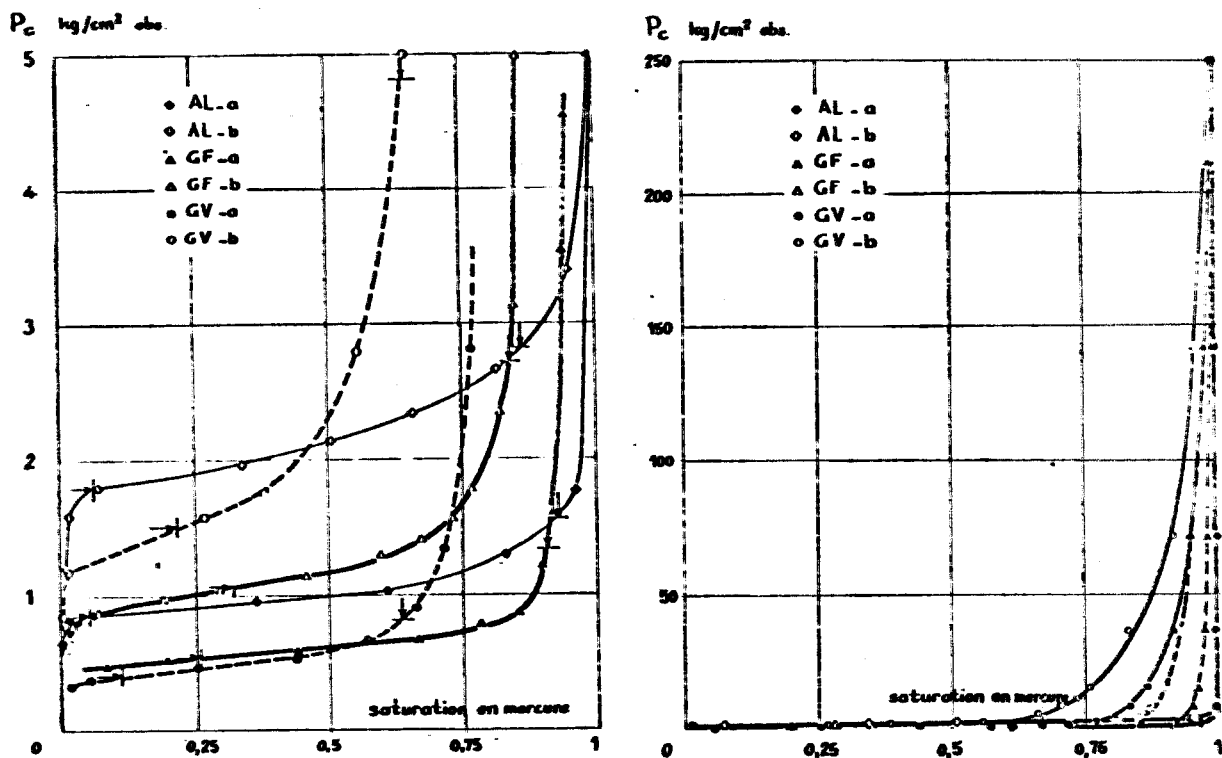


Figure 36

On constate qu'il suffit d'augmenter la pression pour atteindre une saturation complète en fluide non mouillant (fig. 36b).

Les flèches horizontales sur les courbes de la figure 36a indi-

quent la pression à laquelle le mercure traverse le milieu, pression qu'on peut identifier à la pression de percolation.

Selon les échantillons, la saturation correspondant à la pression de percolation varie de 5 à 31 %, l'accès du fluide déplaçant ayant lieu par la face inférieure de l'échantillon.

Dans les expériences de PACSIRSKY et alii [37], la configuration d'entrée du fluide non mouillant était toujours la même pour des milieux poreux différents, et on peut donc comparer d'un milieu à l'autre les "seuils de percolation" en fonction de la structure du milieu.

Si la surface d'accès du fluide déplaçant varie on doit obtenir d'après la formule (3.16) des saturations variant avec la surface d'accès, pour des pressions inférieures à la pression de percolation.

GANOULIS [35] a effectué des expériences corroborant qualitativement ce résultat en étudiant l'influence de la géométrie d'accès du milieu poreux par le fluide non mouillant : il a tracé plusieurs courbes d'injection de mercure dans des échantillons poreux de même nature soumis à la phase non mouillante sur des parties croissantes de leur surface externe.

On constate (fig. 37) que pour une pression donnée la saturation est d'autant plus grande que la surface d'entrée du fluide non mouillant augmente, mais le début des courbes est trop resserré pour qu'on puisse en déduire une éventuelle proportionnalité de la saturation avec la surface d'entrée pour  $p_i < p_{i_c}$ .

On constate en outre que la pression de percolation est d'autant plus petite que le nombre de faces d'accès est grand car le fluide entré par une face rencontre alors plus facilement le fluide entré par d'autres faces.

Pour vérifier ceci sur un modèle, nous avons utilisé un réseau carré pouvant contenir 612 branches sur lequel celles-ci sont déposées au hasard.

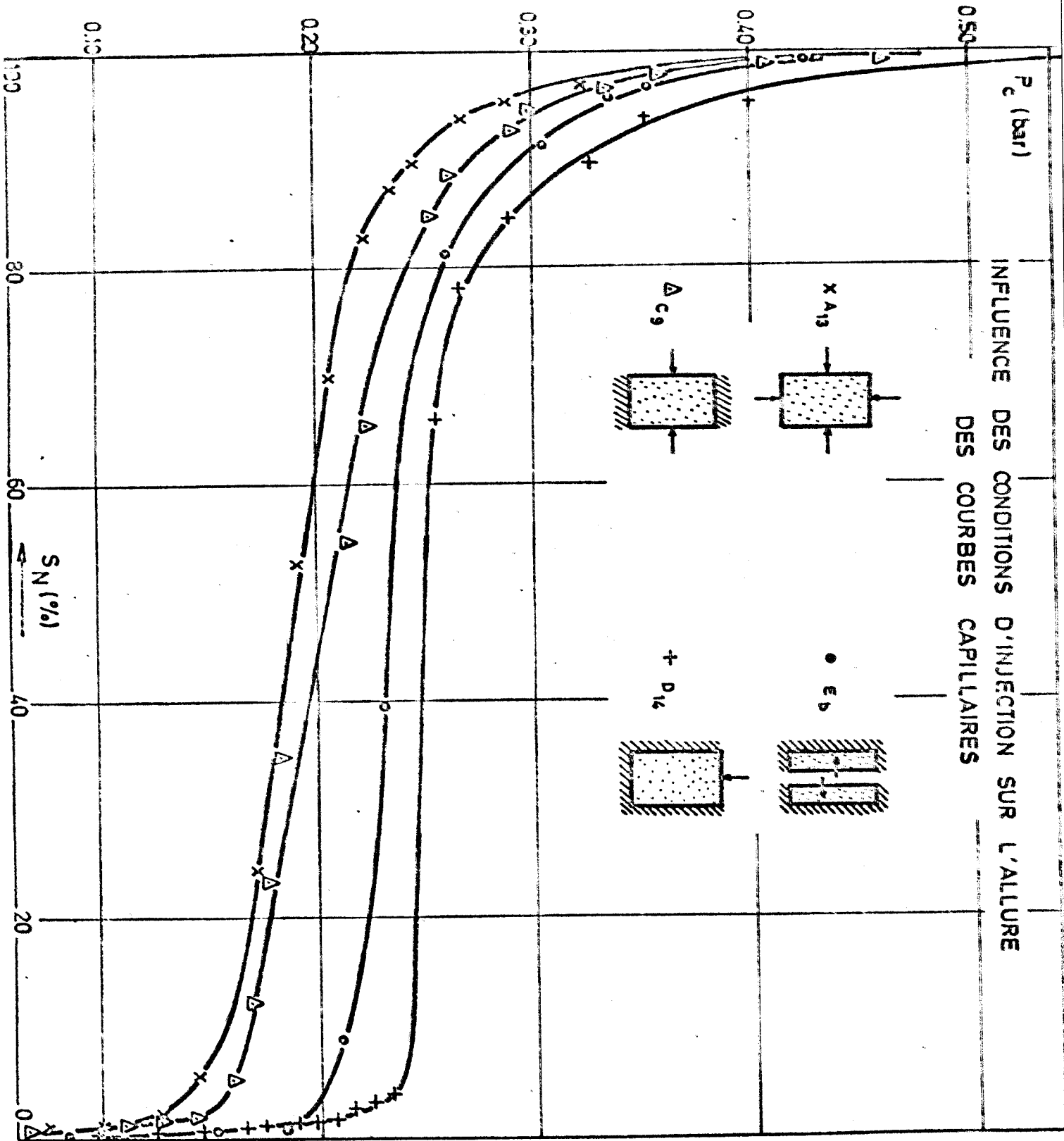


Figure 37  
d'après GANOULIS [35]

La simulation est faite à l'aide d'un calculateur 9820 Hewlett-Packard, les branches posées étant dessinées par la table traçante associée au calculateur, à la position déterminée par un générateur de nombres aléatoires.

Le décompte des branches connectées se fait "manuellement" au fur et à mesure que se remplit le réseau.

La figure 38 montre l'état du réseau pour  $p = 0,25$  et  $p = 0,50$  qui est le seuil théorique de percolation du réseau carré.

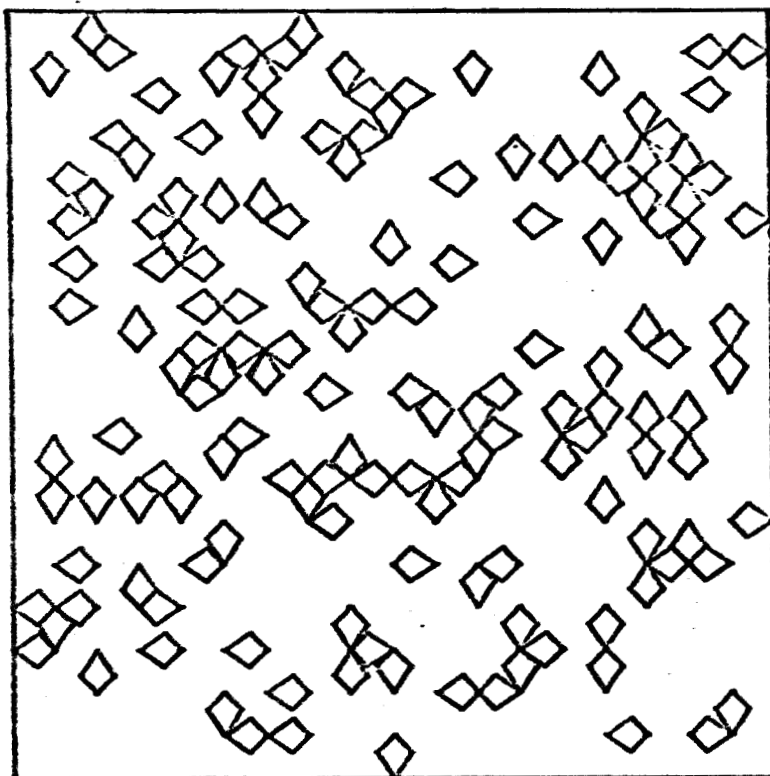
La figure 39 montre le résultat des mesures faites donnant la "saturation" en branches connectées à 1, 2, 3 ou 4 faces en fonction de la proportion  $p$  de branches posées pour  $0 < p < 0,5$ .

On voit que ces courbes vérifient assez bien la formule (3.16) : la saturation, pour  $p < p_c$ , augmente de façon sensiblement proportionnelle au nombre de côtés d'accès du fluide non mouillant et croît avec le nombre de branches posées, jusqu'au seuil de percolation. Cependant, les fluctuations dans le nombre des branches comptées dues à la petite taille du réseau utilisé, masquent un peu la loi de croissance de la saturation.

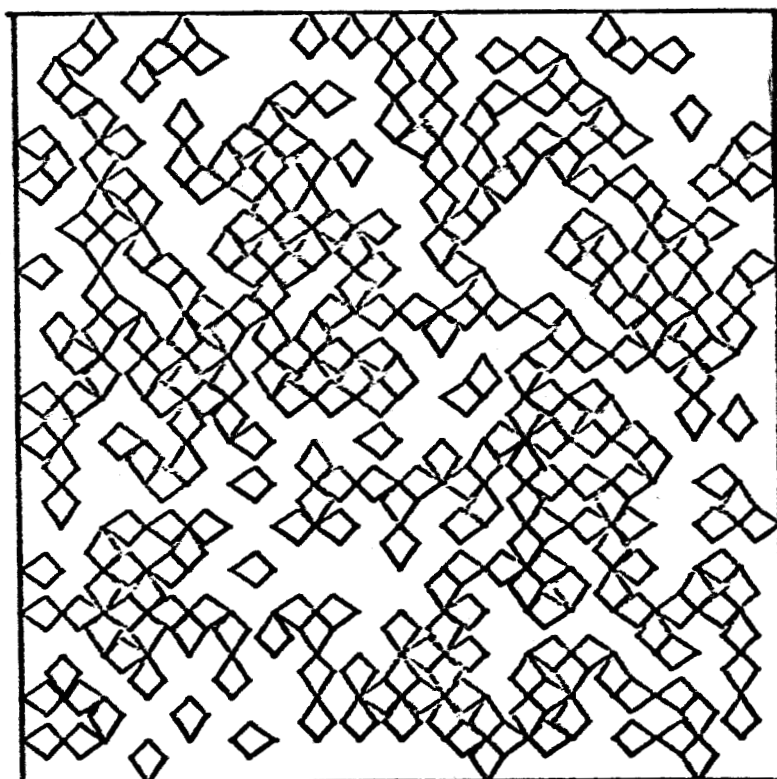
Les seuils expérimentaux de percolation augmentent quand la surface d'accès diminue mais ceci est peu visible à l'échelle utilisée.

Le début de la courbe d'injection de mercure exprimant  $s(p_1^{\times})$  se déduira donc de la formule (3.16) en remplaçant  $p$  par  $s^{\times}(p_1^{\times})$ , saturation théorique, ce qui permet de déduire la pression  $p_1^{\times}$  à laquelle la saturation réelle en fluide non mouillant vaut  $s(p_1^{\times}) = pP'(p) S_A/S$ .





$p = 0,25$



$p = 0,5$



Figure 38

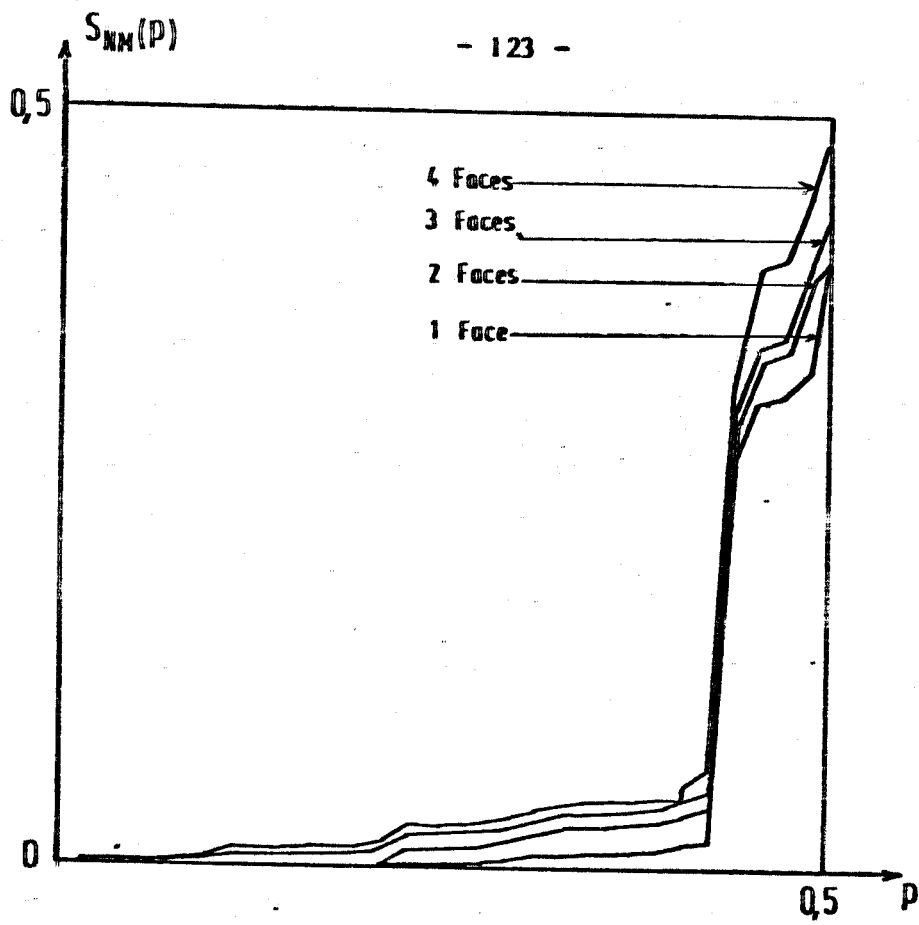


Figure 39

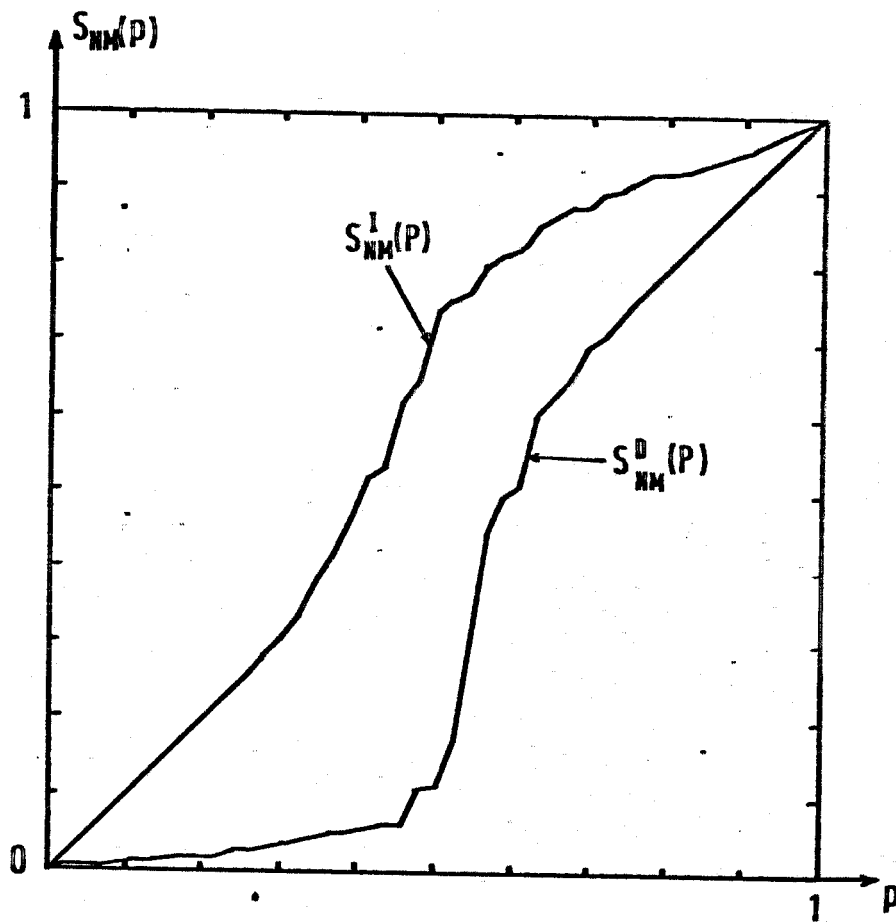


Figure 40



### III.2.2.5.- Pressions supérieures à la pression de percolation

C'est la saturation théorique  $s^*(p_i^*)$  qui représente le pourcentage  $p$  de branches poudées.

La région de percolation, où  $P(p)$  tend vers zéro quand  $p$  tend vers  $p_c$ , est très étroite et, pour  $p > p_c$ ,  $P(p)$  tend très rapidement

La fonction  $pP(p)$  qui décrit la saturation en fluide non mouillant est donc très peu différente de  $p$  dès que  $p > 1,2p_c$  et la saturation effective vaut d'après (3.11) :

$$s(p_i^*) = pP(p) \underset{p > p_c}{\approx} p = s^*(p_i^*)$$

La partie de la courbe de  $s(p_i^*)$  correspondant à des pressions supérieures à la pression de percolation est donc une réplique assez fidèle de la courbe théorique  $s^*(p_i^*)$  qui peut donc, ainsi, être déduite de la courbe expérimentale d'injection de mercure pour des pressions supérieures à la pression de percolation.

Sur les figures 36a et b, on peut très bien s'apercevoir de la différence de comportement des milieux étudiés pour des pressions très grandes : certains, tels que l'alundum ont atteint leur saturation pour des pressions très faibles telles que  $5 \text{ kg/cm}^2$  alors que pour le grès des Vosges, par exemple, il faut une pression d'environ  $250 \text{ kg/cm}^2$  pour atteindre la saturation complète.

Ceci correspond, pour le grès des Vosges, à un très grand nombre d'éléments de volume de forte pression d'ouverture et selon notre hypothèse de constitution du réseau, l'élargissement de la distribution des pressions d'ouverture s'accompagne d'une diminution du degré moyen du réseau c'est-à-dire d'un seuil théorique de percolation plus important.

Si le seuil de percolation correspond à la saturation à laquelle s'établit une phase continue de fluide non mouillant d'une extrémité à l'autre du réseau, alors cette saturation doit être plus importante pour le matériau dont la courbe "porométrique" est plus étalée.

C'est ce qu'on constate sur les courbes de la figure 36 : la saturation de percolation correspondant à la flèche horizontale, est de 5 Z pour l'alundum et devient nettement plus importante pour le grès des Vosges (22 Z) et pour le grès de Fontainebleau (32 Z) dont la distribution porométrique est plus étalée.

On constate en outre, que pour deux matériaux de même origine (grès de Fontainebleau a et b, par exemple) celui dont la courbe d'injection de mercure indique une porométrie plus étalée a la plus grande saturation de percolation, c'est-à-dire le degré moyen du réseau équivalent le plus petit.

Ces considérations, pour qualitatives qu'elles soient, permettent de relier les seuils de perméabilité relative avec la structure du milieu grâce à l'emploi des théories de percolation, ce qui ne semblait pas avoir été étudié jusqu'ici.

### III.2.3.- Etude des courbes de pression capillaire en imbibition

#### III.2.3.1.- Courbes d'injection de mercure

Si la pression est suffisamment élevée, la saturation résiduelle en fluide mouillant est nulle dans l'injection de mercure, c'est-à-dire que le milieu est entièrement saturé en fluide non mouillant.

Si on laisse décroître la pression, le mercure sort des "pores" de l'échantillon dont la pression d'ouverture est supérieure à la pression appliquée, s'il existe un chemin joignant ces pores aux faces externes.

Lors de la désaturation, les branches représentant les "pores" emplis de fluide non mouillant doivent se retirer dans l'ordre inverse de celui de remplissage mais comme l'ordre de remplissage a été simulé par une pose au hasard de branches sur le réseau, on simulera de même la désaturation en retirant au hasard des branches de fluide non mouillant, ou ce qui revient au même en posant au hasard des branches de fluide mouillant représentant des pores vidés de leur mercure.

Les pores qui pourront commencer à se vider sont ceux qui sont connectés à la périphérie et le processus sera identique au processus d'injection en remplaçant la pose de branches "non mouillantes" par la pose de "branches mouillantes".

A la pression  $p_1^*$  où une proportion  $p$  de branches non mouillantes étaient posées lors de l'injection, une proportion  $(1-p)$  de branches non mouillantes est posée lors de la désaturation.

La saturation en branches mouillantes connectées au pourtour est alors :

$$s_M = (1-p) P^{**}(1-p)$$

elle représente les pores qui se sont vidés et la saturation en fluide non mouillant est donc, en imbibition :

$$s_{NM}^I(p) = 1 - s_M(p) = 1 - (1-p) P^{**}(1-p)$$

Comme en drainage on avait (3.11) :

$$s_{NM}^D(p) = p P^{**}(p)$$

on peut donc écrire :

$$s_{NM}^D(p) + s_{NM}^I(1-p) = 1 \quad (3.17)$$

Pour vérifier cette relation nous avons, pour un réseau de structure hexagonale, retiré, au hasard, des branches en comptant, d'une part, la proportion de branches restantes connectées à l'extérieur, d'autre part, la proportion des places laissées par les branches retirées et qui sont connectées à l'extérieur.

La figure 40 montre le résultat de cette simulation.

La symétrie des courbes  $s_{NM}^D(p)$  et  $s_M(p)$  n'y est pas parfaite mais il s'agit d'une mesure unique faite sur un échantillon de petite taille.

On voit néanmoins apparaître une boucle d'hystérésis très visible, large parce que le seuil de percolation pour un réseau hexagonal est de 0,65 (il est en réalité ici plus petit à cause de la petite taille du réseau [A8.3]).

La partie montante du cycle (drainage) correspondant à  $p_c < p < 1$  et la partie descendante (imbibition) correspondant à  $0 < p < 1-p_c$  sont asymptotiques à la diagonale  $s(p) = p$ .

Des réseaux de degré moyen plus important donneraient des cycles d'hystérésis plus étroits, la courbe de drainage étant néanmoins toujours en dessous de la droite  $s(p) = p$  et la courbe d'imbibition toujours au dessus.

Afin d'obtenir une courbe de saturation fonction de la pression et non plus de la proportion de branches connectées nous avons simulé la saturation  $s^*(p_i)$  par la fonction :

$$s^*(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-2}{5}\right)^{1,2}}$$

et la fonction  $pP(p)$  par la fonction :

$$pP(p) = p e^{-(3(1-p))^{1,2}}$$

qui donne un seuil de percolation voisin de 0,66.

Nous avons donc tracé  $s^*(p_i)$  et  $s^*(p_i) P(s^*(p_i))$  en fonction de  $p$  : (figure 41).

On obtient de part et d'autre de la courbe théorique  $s^*(p_i)$  la courbe  $s_{NM}^D(p_i)$  en drainage qui est en dessous de  $s^*(p_i)$  et la courbe  $s_{NM}^I(p_i)$  en imbibition qui est au-dessus de  $s^*(p_i)$ . On constate que, au-dessus de la pression de percolation  $p_{ic}$ , la courbe  $s_{NM}^D(p_i)$  est équivalente à la courbe théorique  $s^*(p_i)$  et que en imbibition en dessous de la pression  $p_i$  telle que  $s^*(p_i) = 1-p_c$ , la courbe  $s_{NM}^I(p_i)$  est également équivalente à la courbe théorique  $s^*(p_i)$ .

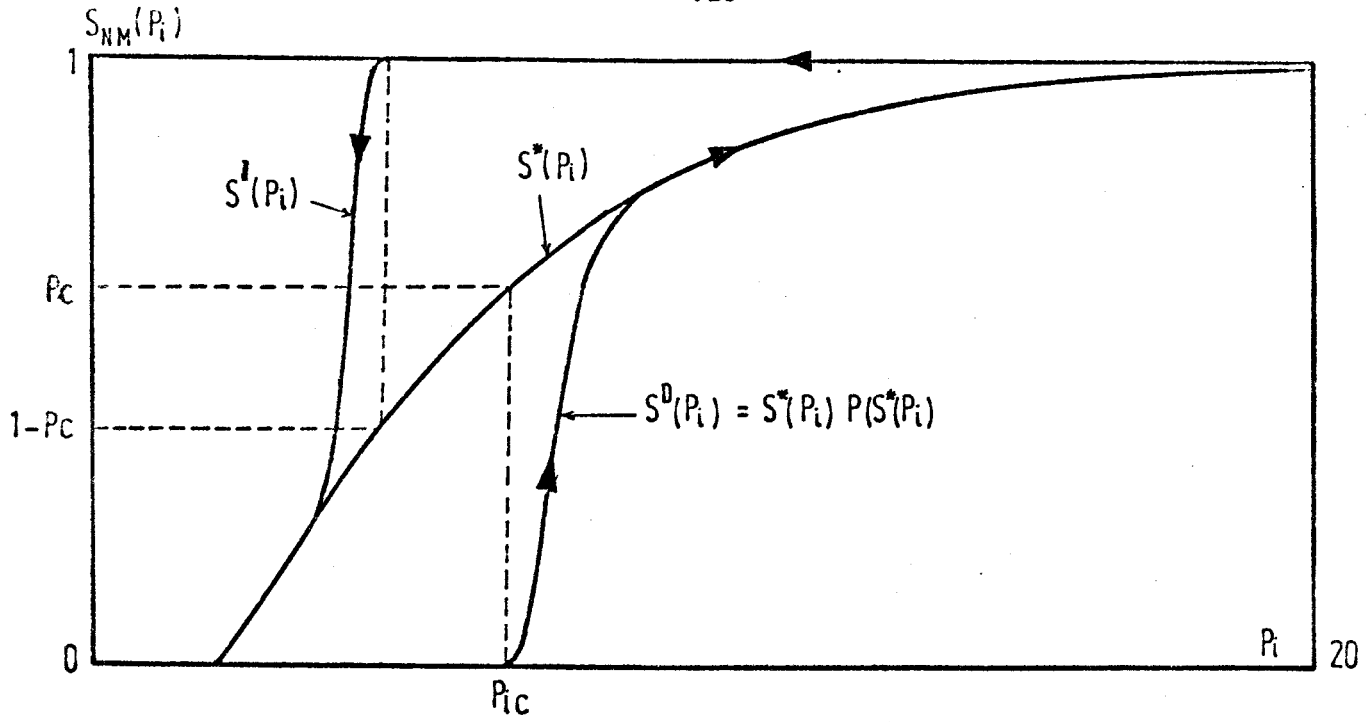


Figure 41

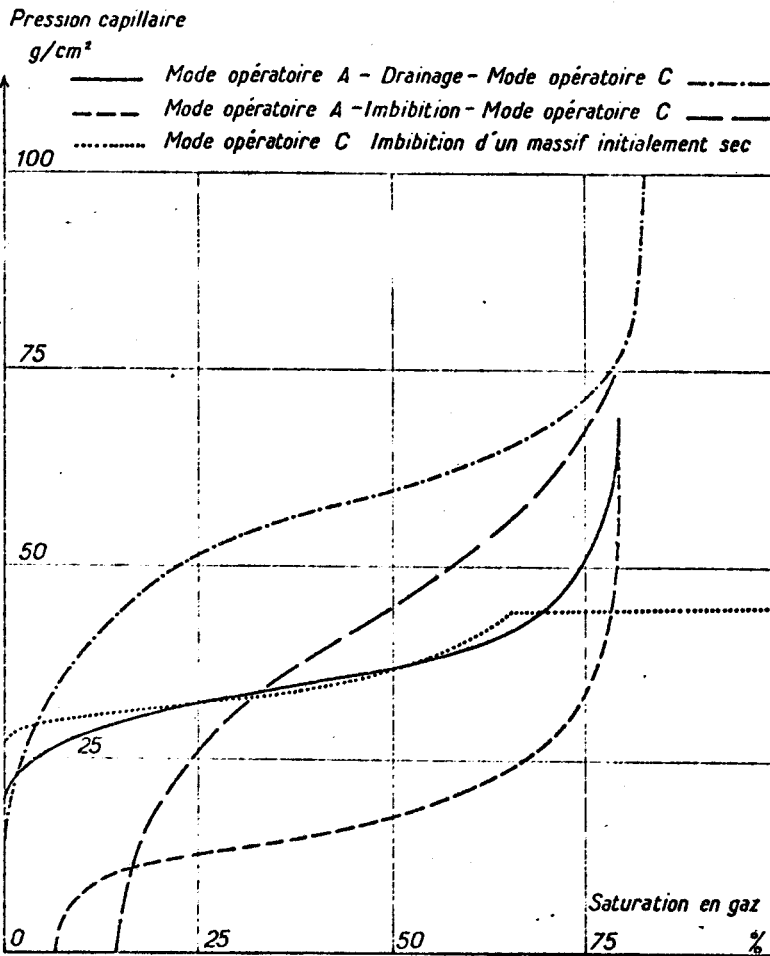


Figure 42

Nous n'avons pas trouvé dans la littérature de courbes d'injection de mercure tracées en drainage et en imbibition qui se prêtent à la comparaison avec nos prévisions théoriques, la plupart des courbes montrant des cycles d'hystérésis sont en effet tracées en utilisant de l'eau comme fluide mouillant et présentent des saturations résiduelles.

Le tracé de telle courbes permettrait le cas échéant, à l'aide des saturations auxquelles se produisent les seuils de percolation montants et descendants, de déterminer un degré moyen du réseau équivalent au milieu poreux.

### III.2.3.2.- Courbes de pression capillaire utilisant un fluide mouillant incompressible

Nous avons vu en III.2.2.3. que si le fluide mouillant était incompressible, il ne pouvait s'échapper, chassé par le fluide non mouillant que si sa saturation était supérieure au seuil de percolation  $p_c$  du réseau, ce qui donnait une saturation résiduelle en fluide mouillant égale à  $p_c$ , cette prévision théorique étant sujette à modifications en fonction de la géométrie d'entrée et de sortie des fluides non mouillants et mouillants.

Lors de la désaturation en fluide non mouillant (imbibition en fluide mouillant), le réseau part du stade où il possède déjà une saturation  $p_c$  en branches mouillantes, cette saturation est formée d'ilots finis de fluide mouillant non connectés à la face reliée au fluide mouillant.

La désaturation en fluide non mouillant peut être simulée en retirant au hasard des branches non mouillantes : seules représenteront des branches non mouillantes réellement supprimées, les branches non mouillantes retirées qui sont reliées par une extrémité aux faces de sortie du fluide non mouillant et par l'autre aux faces d'entrée du fluide mouillant. Quand on aura retiré suffisamment de branches non mouillantes pour que les branches non mouillantes restantes forment des amas isolés non connectés aux faces de sortie on obtiendra une saturation irréductible en fluide non mouillant.

On peut supposer que ceci se produira lorsque la proportion de branches non mouillantes restantes, par rapport aux branches initialement présentes et retirables, sera inférieure à  $p_c$ .

Le degré moyen initial de l'amas infini initial de branches mouillantes étant supposé égal au degré moyen du réseau complet [annexe 8], les seuils de percolation, liés approximativement au degré moyen initial du réseau seront pratiquement les mêmes pour le réseau avant drainage et pour le réseau avant imbibition.



Comme la proportion de branches non mouillantes était en fin de drainage égale à  $(1-p_c)$  la saturation irréductible en fin d'imbibition sera égale à la fraction  $p_c$  de cette quantité initiale soit :

$$\begin{aligned} s_{NMirr}^I &= p_c (1-p_c) < p_c & (3.18) \\ &= s_{Mres}^D (1-s_{Mres}^D) < s_{Mres}^D \end{aligned}$$

Cependant, il faut encore être très prudent dans l'utilisation de cette prévision théorique car la surface de sortie du fluide mouillant en drainage est en général différente de la surface de sortie du fluide non mouillant en imbibition et le seuil de percolation dans ces conditions peut être différent du seuil  $p_c$  trouvé dans les théories de physique du solide : les courbes expérimentales de GANOULIS (fig. 37) montrent bien que la montée rapide en saturation qui correspond au seuil de percolation est située à des pressions croissantes quand la surface d'accès du fluide déplaçant diminue.

Les courbes de notre figure 39 vont également dans ce sens mais l'effet est peu marqué à cause de la petitesse du réseau.

Parmi les nombreuses courbes de pression capillaire publiées en drainage et en imbibition on trouve en général une saturation irréductible en fluide non mouillant, inférieure à la saturation résiduelle en fluide mouillant comme prévu par la formule (3.18).

Nous avons extrait de la littérature des courbes publiées par MARLE, ALBET, LARDE [36] (fig. 42) de pression capillaire en imbibition et en drainage.

Ces courbes sont intéressantes car mesurées par deux méthodes différentes, les courbes marquées A sur la figure sont mesurées par la méthode classique des états restaurés (sortie du fluide mouillant par la base de l'échantillon et entrée du fluide non mouillant par le reste de la surface externe), les courbes marquées C sont mesurées sur une colonne où le fluide mouillant baigne une extrémité et le fluide non mouillant l'autre.

On s'aperçoit sur ces courbes que la "pression de percolation" en drainage est plus faible quand la surface relative d'entrée du fluide non mouillant est plus grande (mode A) ainsi qu'on pouvait déjà le remarquer sur les courbes de GANOULIS (fig. 37) et on remarque, sur la courbe tracée selon le mode C, où les surfaces d'entrée du fluide mouillant et du fluide non mouillant sont identiques, que la saturation résiduelle en fluide mouillant est de 17 %, et la saturation irréductible en fluide non mouillant de 14 % : ces saturations vérifient parfaitement l'équation (3.18).

Ceci montre en tous cas l'importance de la géométrie d'entrée des fluides dans les expériences de pression capillaire et confirme la diversité des résultats qu'on obtient lorsque le fluide mouillant et le fluide non mouillant ne jouent pas des rôles symétriques.

### III.3.- Conclusion de la troisième partie

Cette troisième partie a eu pour but de montrer que l'utilisation des réseaux pouvait être d'un intérêt certain dans l'étude de milieux continus tels que les milieux poreux.

Nous avons d'abord, pour l'étude de problèmes macroscopiques dont le formalisme se ramène à celui de la loi d'Ohm montré qu'on parvenait, en utilisant les résultats que nous avons obtenus dans la seconde partie, à retrouver des résultats déjà publiés concernant la perméabilité équivalente de milieux hétérogènes.

Dans l'étude de problèmes microscopiques, nous avons, à la suite de nombreux auteurs remplacé le milieu poreux par un réseau équivalent, mais à la différence de ces auteurs nous avons indiqué une méthode pour faire correspondre à chaque branche du réseau un élément de volume du milieu, de "pression d'ouverture" donnée, et appliqué à ce réseau aléatoire des résultats connus récents des théories sur les phénomènes de percolation. Notre étude a surtout eu pour but de montrer qu'il était possible de retrouver, tout au moins qualitativement, en utilisant les théories de percolation, un certain nombre de résultats expérimentaux, concernant en particulier les courbes de pression capillaire, avec leurs particularités liées à la méthode de mesure utilisée.

La fécondité des théories de percolation est telle que nous pensons qu'il est possible de traiter, grâce à elle, la plupart des phénomènes dont sont le siège les milieux aléatoires.

Notre approche présente - appliquée aux milieux poreux - que nous croyons originale - est pour l'instant limitée par les résultats théoriques publiés des théories de percolation et nous pensons que l'intérêt du sujet pourrait justifier que des calculs théoriques sur les phénomènes de percolation soient entrepris avec l'étude des milieux poreux comme finalité, alors que jusqu'ici, ils n'avaient pour seul but que l'explication de phénomènes propres à la physique du solide.

QUATRIEME PARTIE

---

ETUDE DES RELATIONS ENTRE LES PROPRIETES HYDRAULIQUES  
ET LES PROPRIETES ELECTRIQUES DES MILIEUX POREUX

---

APPLICATION A UNE METHODE DE  
DIAGRAPHIE DE PERMEABILITE

---

#### IV.1.- LA LOI DE DARCY

##### IV.1.1.- Conductivité hydraulique, perméabilité.

En 1856, Henri DARCY, étudiant l'écoulement de l'eau à travers un filtre à sable vertical trouva expérimentalement que le débit volumique d'eau Q traversant le filtre était :

- proportionnel à la surface S du sable
- proportionnel à la perte de charge motrice  $\Delta h^m$  [annexe 9] entre les extrêmités du filtre.
- inversement proportionnel à la longueur L du filtre

Il rassembla ces résultats expérimentaux en une formule qui devint la "loi de DARCY" :

$$Q = K S \frac{\Delta h^m}{L} \quad (4.1)$$

Le coefficient K introduit par DARCY porte le nom de "perméabilité" du milieu poreux.

Les hydrauliciens utilisent la loi de Darcy sous cette forme en donnant au rapport  $\Delta h/L$  sans dimensions, le nom de "gradient hydraulique" J.

La perméabilité de dimensions  $LT^{-1}$ , est alors identique à une vitesse et s'exprime couramment en cm/s, on la nomme plutôt actuellement "conductivité hydraulique" :

$$Q = K S J \quad (4.2)$$

Q en  $cm^3/s$ , K en cm/s, S en  $cm^2$ .

Si on relie le débit en volume à la chute de pression motrice entre extrêmités du milieu, l'équation (1) s'écrit :

$$Q = K' S \frac{\Delta p^m}{L} \quad (4.3)$$

Le coefficient K' est de dimensions  $M^{-1}L^3T$  et était appelé "constante de perméabilité".

Si on divise par la surface d'écoulement S les deux membres des équations précédentes, on obtient la "vitesse de filtration" U, équivalente à la vitesse moyenne du fluide qui s'écoulerait dans un tuyau de même section S avec le même débit.

$$U = \frac{Q}{S} = K \frac{\Delta h^m}{L} = K J \quad (4.4)$$

$$U = K' \frac{\Delta p^m}{L} \quad (4.5)$$

Le fluide utilisé dans les expériences de Darcy était de l'eau dont la viscosité est de 1 centipoise à 20°C.

Les équations (4.1) à (4.5) ne font pas intervenir la viscosité du fluide et les hydrauliciens, hydrologues et hydrogéologues les utilisent telles quelles à la température ambiante.

C'est surtout sous l'influence des pétroliers que fut introduite la viscosité  $\mu$  du fluide, car ils s'intéressent à des fluides aussi variés que gaz, eau, pétrole à des températures très variables : le coefficient de perméabilité précédent ( $K$  ou  $K'$ ) s'écrit alors de diverses façons :

$$K' = \frac{k}{\mu} \quad \text{où } \mu \text{ est la viscosité dynamique} \quad (4.6)$$

$$K = \frac{kg}{\nu} \quad \text{où } \nu = \frac{\mu}{\rho} \text{ est la viscosité cinématique} \quad (4.7)$$

$$K = \frac{k\rho g}{\mu} \quad g \text{ est la masse volumique du fluide} \quad (4.8)$$

Dans ces formules dont la première est la plus usitée chez les pétroliers intervient le coefficient  $k$  qu'on appelle "perméabilité spécifique" ou "perméabilité géométrique" : il est indépendant du fluide utilisé et ne dépend que des propriétés du milieu poreux. Il est homogène au carré d'une longueur.

Ceci conduit pour l'équation de Darcy aux diverses formules :

$$Q = \frac{kS}{\mu} \frac{\Delta p^2}{L} \quad (4.9)$$

$$U = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta p^2}{L} \quad (4.10)$$

$$Q = \frac{kgS}{\nu} \frac{\Delta h^2}{L} = \frac{kgS}{\nu} J \quad (4.11)$$

$$U = \frac{kg}{\nu} J \quad (4.12)$$

$$Q = \frac{k\rho g}{\mu} S \frac{\Delta h^2}{L} = \frac{k\rho g S}{\mu} J \quad (4.13)$$

$$U = \frac{k\rho g}{\mu} J \quad (4.14)$$

#### IV.1.2.- Unités de perméabilité

Les unités proposées et utilisées pour la perméabilité ont été nombreuses : le tableau 4 les résume avec les unités correspondant aux autres grandeurs intervenant dans la loi de Darcy.

Actuellement, le "darcy" et son sous-multiple le "millidarcy" sont surtout employés dans l'industrie pétrolière. Les hydrologues emploient le  $\text{cm}^2$  pour  $k$  et le  $\text{cm/s}$  pour  $K$ .

nom du coefficient	dimensions	symbole	unité	débit volumique	surface	vitesse de filtration	gradient hydraulique	pression longueur	viscosité	utilisateurs
conductivité hydraulique	$LT^{-1}$	K	cm/s	$cm^3/s$	$cm^2$	cm/s	J=1			Etude des sols
conductivité hydraulique	$LT^{-1}$	K	m/jour	$m^3/jour$	$m^2$	m/jour	J=1			Hydrologie
conductivité hydraulique standard	$LT^{-1}$	K	meinzer gallon/ jour/ pied carré	gallon/jour	pied carré		J=1		eau à 60°F	Hydrologie (USA)
conductivité hydraulique d'aquifère	$LT^{-1}$	K	gallon/ jour/ pied carré	gallon/jour	1 pied épaisseur 1 mile de large		un pied par mile		eau à la température de l'aqui- fère	Hydrologie (USA)
coefficient de perméabilité	$M^{-1}L^3T$	K'								pas utilisé pratiquement
perméabilité	$L^2$	k	Darcy milli- darcy	$cm^3/s$ $mm^3/s$	$cm^2$ $cm^2$	cm/s cm/s		atmosphère/ cm "	centipoise centipoise	pétroliers pétroliers
perméabilité	$L^2$	k	Darce ( $\mu^2m$ )	$cm^3/s$	$cm^2$	cm/s		Bar/cm	centipoise	1 Darce = 1,013 Darcy
perméabilité	$L^2$	k	perm ( $cm^2$ )	$cm^3/s$	$cm^2$	cm/s		Barye/cm	Poise	1 Darce = $9,87 \cdot 10^{-9} cm^2 =$ $9,61 \cdot 10^{-4} cm/s$ (eau à 20°)



TABLEAU 4 : UNITES DE PERMEABILITE

#### IV.1.3.- Expression différentielle de la loi de DARCY

Les équations précédentes supposaient un écoulement unidimensionnel : la généralisation se fait aisément à des écoulements volumiques ou surfaciques et on écrit sous forme différentielle :

$$\vec{U} = -K' \text{ grad } p^* \quad (4.15)$$

$$\vec{U} = -k/\mu \text{ grad } p^* \quad (4.16)$$

$$\vec{U} = -K \text{ grad } \varphi = K \vec{J}$$

#### IV.1.4.- Limitations de la loi de DARCY

Les hypothèses implicitement faites pour l'énoncé de la loi de DARCY sont les suivantes :

- Le fluide est incompressible ( $\rho = \text{cste}$ )
- Sa viscosité  $\mu$  est constante
- L'écoulement est lent
- Le fluide est newtonien
- Le milieu poreux n'est pas le siège de phénomènes électro-chimiques dus par exemple à la présence d'argiles.

En outre, pour définir une perméabilité  $k$  scalaire il faut supposer que le milieu est homogène et isotrope c'est-à-dire que la perméabilité d'un élément infiniment petit pris au sein de ce milieu est indépendante de sa position et de son orientation. C'est loin d'être le cas pour des milieux naturels de grande dimension mais on peut se rapprocher autant qu'on le désire de la condition d'homogénéité en travaillant sur des échantillons de petite dimension.

En ce qui concerne l'isotropie, la taille de l'échantillon ne la modifie pas et si le matériau est anisotrope la perméabilité  $k$  devient une grandeur tensorielle.

Dans ce qui suit, nous ne considérons que des milieux macroscopiquement homogènes et isotropes et nous supposons les autres hypothèses de validité satisfaites.

#### IV.1.5.- Analogie entre la loi de DARCY et la loi d'OHM

La loi de DARCY est une loi macroscopique dont l'expression est tout à fait identique à celle de la loi d'OHM. En effet, en écrivant les équations (4.15) et (4.16)

$$\vec{U} = -K' \text{ grad } p^* \quad (4.15)$$

$$\vec{U} = -K \text{ grad } \varphi = K \vec{J} \quad (4.16)$$

et en écrivant la loi d'Ohm sous forme différentielle :

$$\vec{i} = -\sigma \text{ grad } V = \sigma \vec{E} \quad (4.17)$$

On constate une analogie de formulation que précise le tableau 5 ci-dessous :

Loi de DARCY	Loi de DARCY	Loi d'OHM
charge motrice $h^m$	pression motrice $p^m$	potentiel $V$
différence de charge motrice $\Delta h^m$	différence de pression motrice $\Delta p^m$	différence de potentiel $V$
débit volumique $Q = \frac{dv}{dt}$	débit volumique $Q = \frac{dv}{dt}$	courant $I = \frac{dq}{dt}$
volume $v$	volume $v$	charge électrique $q$
conductivité hydraulique $K$	coefficient de perméabilité $K' = \frac{k}{\mu}$	conductivité électrique $\sigma$
gradient hydraulique $\vec{J} = -\text{grad } \varphi$	gradient de pression motrice : $-\text{grad } p^m$	champ électrique : $\vec{E} = -\text{grad } V$
vitesse de filtration $\vec{U} = \frac{Q}{S}$	vitesse de filtration $\vec{U} = \frac{Q}{S}$	densité de courant $\vec{i} = \frac{I}{S}$

Tableau 5

#### IV.1.6.- Les bases théoriques de la loi de DARCY

Le caractère macroscopique de la loi de DARCY et la linéarité de l'équation reliant la vitesse de l'écoulement avec le gradient de pression ont conduit comme nous l'avons vu plus haut à une analogie avec la loi d'OHM électrique.

Cette analogie est d'ailleurs très féconde puisqu'elle permet la simulation électrique des écoulements macroscopiques dans les milieux poreux par l'intermédiaire de cuves à équipotentielles.

Mais si cette analogie est parfaite au niveau macroscopique, il n'en est plus de même au niveau microscopique.

On a essayé depuis longtemps, en effet, de relier la conductivité macroscopique d'un milieu poreux imbibé de fluide conducteur à la perméabilité hydraulique de ce matériau.

La loi d'Archie relie de façon approximative le facteur de formation  $F$  du milieu saturé en liquide conducteur à sa porosité par la formule :

$$F = \frac{\sigma_{\text{fluide}}}{\sigma_{\text{milieu}}} \sim \frac{a}{\phi^m} \quad (4.18)$$



Mais tous les efforts de corrélation entre porosité et perméabilité, et par conséquent entre conductivité macroscopique et perméabilité se sont avérés infructueux en général ; les seules corrélations acceptables avaient lieu pour des échantillons de roche de même origine et donc de même structure

Il n'y a à ceci rien d'étonnant et MATHERON [A2.9] montre qu'au niveau microscopique, les équations de la mécanique des fluides et celles de la conduction de l'électricité sont totalement différentes. Si le fluide "électrique" et le fluide "hydraulique" circulent bien dans les mêmes canaux du milieu poreux, l'un sous l'influence d'un gradient de potentiel, l'autre sous l'influence d'un gradient de pression, les équations locales régissant leur mouvement sont différentes et il ne peut être question au niveau macroscopique de relier complètement des phénomènes microscopiquement différents : ceci explique l'échec de toutes les tentatives de corrélation entre facteur de formation et perméabilité.

La clef du problème se trouve au niveau des équations microscopiques que nous allons étudier soigneusement dans ce qui suit.

#### IV.2.- LES EQUATIONS MICROSCOPIQUES DANS LES MILIEUX POREUX

##### IV.2.1.- Les équations électriques

La circulation du fluide "électrique" dans le milieu poreux satisfait localement aux équations de l'électrocinétique.

$$\begin{cases} \vec{i} = \sigma \vec{E} = -\sigma \text{grad } V \\ \text{div } \vec{i} = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

$\vec{i}$  est la densité de courant locale,  $\sigma$  la conductivité du fluide saturant les canaux du milieu poreux,  $\vec{E}$  est le champ électrique local dérivant du potentiel électrique  $V$  qui satisfait localement à l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0 \quad (4.20)$$

A l'interface d'un milieu conducteur et d'un milieu non conducteur, la composante normale de  $\vec{i}$  s'annule :  $i_N = 0$ .

Le champ électrique local  $\vec{E}$  ne doit pas être confondu avec le champ électrique macroscopique équivalent  $\vec{E}_M$  résultant de l'application d'une différence de potentiel  $V$  externe aux bornes d'un échantillon de longueur  $L$  tel que :

$$|\vec{E}_M| = \frac{V}{L} \quad (4.21)$$

#### IV.2.2.- Les équations hydrauliques

Les équations régissant l'écoulement d'un fluide visqueux sont celles de NAVIER-STOKES qu'on peut écrire sous la forme [14] :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\mu}{\rho} \Delta u \quad (4.22)$$

- $\vec{u}$  est le vecteur vitesse local
- $\rho$  la masse volumique du fluide supposée constante (fluide incompressible)
- $\mu$  la viscosité dynamique du fluide supposée indépendante des coordonnées
- $p$  la pression
- $\vec{f}$  la force s'exerçant à distance par unité de volume de fluide (force de pesanteur par exemple)

Si les composantes en coordonnées cartésiennes de la vitesse locale  $\vec{u}$  sont  $u_x, u_y, u_z$ , on a d'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{u}}{Dt} = & \vec{x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ & + \vec{y} \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ & + \vec{z} \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Si l'écoulement considéré est permanent, la vitesse  $\vec{v}$  est indépendante du temps et les dérivées de ses composantes par rapport au temps s'annulent dans (4.23).

Les termes quadratiques qui dans (4.23) suivent les dérivées par rapport au temps représentent l'accélération due aux forces d'inertie.

On fait intervenir en mécanique des fluides un nombre sans dimensions appelé nombre de Reynolds :

$$R = \frac{u\rho l}{\mu} \quad (4.24)$$

$u, \rho, \mu$  ont les significations précédentes et  $l$  est une longueur caractéristique de l'écoulement.

On constate expérimentalement que pour des petites valeurs du nombre de Reynolds, l'écoulement est laminaire c'est-à-dire que les filets fluides glissent les uns sur les autres parallèlement, sans former de tourbillons : ceci peut être réalisé pour une vitesse  $u$  très petite, ou une viscosité très grande pour le fluide ou pour une dimension transversale petite pour le tuyau où s'écoule le fluide (tube capillaire).

La petitesse du nombre de Reynolds traduit que les forces d'inertie proportionnelles à la masse et au carré de la vitesse du fluide sont négligeables par rapport aux forces de frottement introduites par la viscosité du fluide.

Dans un milieu poreux où un fluide visqueux circule dans des canaux extrêmement étroits, ces conditions sont remplies aux faibles gradients de pression où la vitesse du fluide est petite, d'autant mieux que le fluide est plus visqueux.

On peut dans ce cas simplifier les équations de Navier Stokes en négligeant les termes quadratiques d'inertie ce qui revient en régime permanent à annuler le membre de gauche de (4.22) qui s'écrit alors :

$$\mu \Delta \vec{u} = \text{grad } p - \rho \vec{f} \quad (4.25)$$

$\rho \vec{f}$  est la résultante des forces agissant par unité de volume sur le fluide : elle se réduit pratiquement aux forces de pesanteur.

Ces forces dérivant d'un potentiel de pesanteur, il est toujours possible de poser :

$$\vec{f} = -\text{grad } \varphi \quad (4.26)$$

et le deuxième membre de (4.25) devient :

$$\text{grad } p - \rho \vec{f} = \text{grad } p + \rho \text{grad } \varphi = \text{grad } (p + \rho \varphi)$$

Pour un écoulement horizontal le potentiel de pesanteur  $\varphi$  est une constante et son gradient s'annule : il n'a aucun pouvoir moteur sur le fluide.

Pour un écoulement non horizontal, on introduira la pression "motrice" :

$$p^* = p + \rho \varphi = p + \rho g z \quad (4.27)$$

$g$  est le module de l'accélération de la pesanteur

$z$  est l'altitude du point considéré, par rapport à une référence arbitrairement choisie.

Les hydrologues introduisent également la charge hydraulique  $h$  homogène à une hauteur :

$$h = \frac{p^*}{\rho g} = \left( z + \frac{p}{\rho g} \right) \quad (4.28)$$

Dans tout ce qui suit nous supposerons l'écoulement horizontal de sorte que l'équation du mouvement s'écrive d'après (5.25) :

$$\Delta \vec{u} = \frac{1}{\mu} \text{grad } p \quad (4.29)$$

A cette équation qui décrit le mouvement d'un fluide visqueux sous l'effet d'un gradient de pression il faut ajouter l'équation de conservation de la masse qui s'écrit :

$$\operatorname{div} \rho \vec{u} + \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (4.30)$$

Cette équation se réduit pour un fluide incompressible ( $\rho = \text{cste}$ ) à :

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (4.31)$$

Sur les parois solides en contact avec le fluide il faut en outre ajouter comme condition aux limites l'immobilité du fluide :

$$\vec{u} = 0 \text{ sur les parois et dans le solide} \quad (4.32)$$

L'ensemble des équations encadrées et de la condition aux limites constituent les équations "microscopiques" de circulation du fluide dans un milieu poreux.

Si on compare (4.29), (4.31) et (4.32) aux équations microscopiques électriques (4.19) on s'aperçoit qu'elles n'ont rien de commun alors que les équations macroscopiques sont quasiment identiques.

Le tableau 6 résume ceci en opposant les deux systèmes d'équations.

	EQUATIONS ELECTRIQUES	EQUATIONS HYDRAULIQUES
<b>EQUATIONS MACROSCOPIQUES</b>	$\vec{i}_M = -\sigma_{eq} \operatorname{grad} V$ <p><math>\operatorname{grad} V</math> : gradient de potentiel externe</p> <p><math>\sigma_{eq}</math> : conductivité équivalente au milieu saturé en fluide</p>	$\vec{u}_M = \frac{-k}{\mu} \operatorname{grad} P \text{ (loi de Darcy)}$ <p><math>\operatorname{grad} P</math> : gradient de pression externe</p> <p><math>k</math> : perméabilité du matériau</p> <p><math>\mu</math> : viscosité du fluide</p>
<b>EQUATIONS MICROSCOPIQUES</b>	$\left( \begin{array}{l} \vec{i} = -\sigma \operatorname{grad} V \\ \operatorname{div} \vec{i} = 0 \\ \Delta v = 0 \\ i_N = 0 \text{ sur les parois} \\ v = \text{potentiel interne local} \\ \sigma = \text{conductivité du fluide} \\ i_N = \text{composante normale de } \vec{i} \end{array} \right.$	$\left( \begin{array}{l} \Delta \vec{u} = \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} p \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \\ \vec{u} = 0 \text{ sur les parois} \\ \Delta p = 0 \\ p = \text{pression interne locale} \\ \mu = \text{viscosité du fluide} \end{array} \right.$

Tableau 6 : Equations électriques et hydrauliques dans un milieu poreux

### IV.3.- L'ANALOGIE MAGNETOSTATIQUE DES EQUATIONS MICROSCOPIQUES DE CIRCULATION D'UN FLUIDE VISQUEUX

#### IV.3.1.- Le potentiel vecteur $\vec{A}$ de l'électromagnétisme

Ce qui précède montre qu'au niveau microscopique les équations de conduction de l'électricité et celles de circulation d'un fluide diffèrent totalement. MATHERON l'avait déjà montré [A2.9] et en avait déduit qu'il était vain de chercher à relier au niveau macroscopique la conductivité équivalente et la perméabilité d'un milieu poreux.

Il y a cependant une analogie qui semble avoir échappé à tous les investigateurs qui permet de relier les propriétés électriques du milieu à sa perméabilité : il s'agit cette fois de comparer avec les équations de la mécanique des fluides, non plus les équations de l'électrocinétique, mais les équations de la magnétostatique.

Il existe en effet un être physique dont on va voir que les propriétés sont tout à fait identiques à celles de la vitesse  $\vec{u}$  de circulation du fluide : c'est le potentiel vecteur  $\vec{A}$ .

On sait que le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est introduit à la suite du champ magnétique  $\vec{B}$  : celui-ci devant satisfaire à :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (4.33)$$

on en déduit que  $\vec{B}$  dérive d'un potentiel "vecteur"  $\vec{A}$  tel que :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (4.34)$$

puisque  $\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{A}) = 0 \quad (4.35)$

Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  n'est pas lui-même défini de façon unique mais au gradient d'un scalaire près puisque :

$$\operatorname{rot} (\vec{A} + \operatorname{grad} f) = \operatorname{rot} \vec{A} + 0$$

Il est possible de traiter les problèmes de magnétostatique à l'aide du seul potentiel vecteur  $\vec{A}$  qui est relié à la densité de courant  $\vec{i}$ , qui en est la source, par l'équation de Poisson vectorielle :

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{i} \quad (4.36)$$

où  $\mu$  est la perméabilité magnétique du milieu.

On impose en outre au potentiel vecteur  $\vec{A}$  de satisfaire :

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (4.37)$$

Les équations (4.36) et (4.37) bien connues ne présentent aucune originalité. Cependant si on se penche sur l'origine de la densité de courant  $\vec{i}$  qui crée le potentiel vecteur  $\vec{A}$ , on conçoit aisément qu'elle n'est différente de zéro que dans un milieu conducteur où s'applique la loi d'Ohm :

$$\vec{i} = \sigma \vec{E} = -\sigma \text{grad } V \quad (4.19)$$

où  $\sigma$  est la conductivité du milieu.

En combinant les équations (4.36) et (4.19) on obtient donc :

$$\Delta \vec{A} = -\mu \sigma \vec{E} = \mu \sigma \text{grad } V$$

Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  relié cette fois au gradient de potentiel qui en est la source satisfait donc les équations locales :

$$\begin{cases} \Delta \vec{A} = \mu \sigma \text{grad } V \\ \text{div } \vec{A} = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

Si on compare ce système avec les équations microscopiques de la mécanique des fluides (4.29) et (4.31) :

$$\begin{cases} \Delta \vec{u} = 1/\mu \text{grad } p \\ \text{div } \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

$$\begin{cases} \Delta \vec{u} = 1/\mu \text{grad } p \\ \text{div } \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

On constate cette fois une analogie parfaite entre le potentiel vecteur  $\vec{A}$  et la vitesse  $\vec{u}$ , entre le potentiel électrique  $V$  et la pression  $p$ , entre l'inverse de la viscosité  $1/\mu$  et le produit  $\mu\sigma$ .

**REMARQUE** : il apparaît dès maintenant un risque de confusion entre le symbole  $\mu$  désignant la viscosité et le même symbole désignant la perméabilité magnétique : nous l'éviterons dorénavant en désignant par  $\eta$  la viscosité. Cette dénomination étant d'ailleurs utilisée en chimie physique.

La seconde condition qui n'apparaisse pas dans les équations du potentiel vecteur, c'est l'équivalent de " $\vec{u} = 0$  sur et dans les parois".

Nous allons donc examiner un exemple simple en comparant l'écoulement laminaire d'un fluide dans un cylindre indéfini avec le phénomène magnétostatique homologue.

#### IV.3.2. Calcul du potentiel vecteur dans un cylindre indéfini.

Soit un cylindre conducteur indéfini dont la section droite est une surface  $S$  limitée par un contour  $C$  (fig. 43).

La densité de courant  $\vec{i}$  dans ce cylindre est supposée constante dans la section et orientée selon l'axe  $\vec{z}$  du cylindre :

$$\vec{i} = \vec{z} \cdot i_z$$

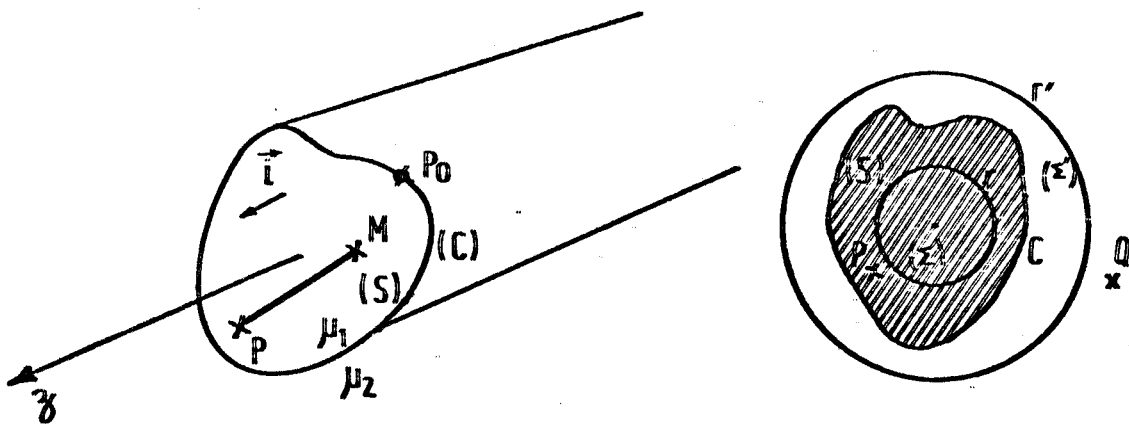


Figure 43

A l'extérieur du cylindre  $\vec{i} = 0$ .

Soit  $\mu_1$  la perméabilité magnétique du cylindre,  $\mu_2$  celle du milieu extérieur.

Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  satisfait aux équations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \vec{A} = -\mu_1 \vec{i} & \text{à l'intérieur du cylindre} \\ \Delta \vec{A} = 0 & \text{à l'extérieur du cylindre} \end{array} \right. \quad (4.39)$$

$\vec{A}$  ne possède qu'une composante dirigée selon oz comme le courant  $\vec{i}$  qui en est la cause et on aura donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta A_z = -\mu_1 i_z & \text{intérieur} \\ \Delta A_z = 0 & \text{extérieur} \end{array} \right. \quad (4.40)$$

Le champ magnétique  $\vec{B}$  qui dérive de  $\vec{A}$  d'après (4.34) est de ce fait confiné dans le plan perpendiculaire à oz et n'a pas de composante selon oz.

Puisque le potentiel vecteur n'est défini qu'à une constante près, on peut choisir celle-ci de façon que le potentiel vecteur s'annule en un point particulier du contour du cylindre.

Pour une distribution de courant invariante par translation comme c'est ici le cas, la solution générale de l'équation (4.36) s'écrit pour un point P intérieur au cylindre (DURAND [38]) :

$$A_z(P) = \frac{-\mu_1}{2\pi} \iint_{S_M} i_z \text{Log}(PM) dS_M = \frac{-\mu_1}{2\pi} i_z \iint_{S_M} \text{Log}(PM) dS_M \quad (4.41)$$

$dS_M$  étant l'élément de surface qui entoure le point courant M.  
 PM étant la distance du point P, où l'on calcule  $A_z$ , au point M et l'intégrale étant étendue à tous les points M de la surface S de la section droite du cylindre.

Si on désire que le potentiel vecteur  $A_z$  s'annule en un point  $P_0$  du contour  $C$ , il suffira d'écrire :

$$A'_z(P) = \frac{-\mu_1}{2\pi} i_z \iint_{S_M} \text{Log} \left( \frac{PM}{P_0M} \right) dS_M \quad (4.42)$$

Ce qui revient à retrancher de l'équation (4.41) une constante égale au potentiel vecteur qu'elle aurait donné en  $P_0$  :

$$A_z(P_0) = \frac{-\mu_1}{2\pi} i_z \iint_{S_M} \text{Log} (P_0M) dS_M \quad (4.43)$$

Cependant le fait que  $A'_z(P)$  s'annule en  $P_0$  sur le contour  $C$  ne signifie aucunement qu'il va s'annuler sur tout le contour  $C$ .

Considérons alors les conditions aux limites sur l'interface entre les milieux de perméabilité  $\mu_1$  et  $\mu_2$  pour le potentiel vecteur  $\vec{A}$  et les champs magnétiques  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{z1} = A_{z2} \\ \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_{z1}}{\partial n} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_{z2}}{\partial n} \end{array} \right. \quad (4.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{1t} = H_{2t} \\ \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n} \end{array} \right. \quad (4.45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{B_1 \sin \theta_1}{\mu_1} = \frac{B_2 \sin \theta_2}{\mu_2} \\ B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2 \end{array} \right. \quad (4.46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2} \\ \vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n} \end{array} \right. \quad (4.47)$$

L'angle  $\theta_1$  et l'angle  $\theta_2$  sont respectivement les angles que font  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  avec la normale à  $C$  : ils sont liés par :

$$\mu_1 \cotg \theta_1 = \mu_2 \cotg \theta_2 \quad (4.48)$$

Si la perméabilité  $\mu_1$  est beaucoup plus grande que  $\mu_2$  ( $\mu_1 \rightarrow \infty$ ), comme le courant ne circule que dans le cylindre, le champ magnétique  $\vec{H}$  à l'intérieur du cylindre satisfait toujours au théorème d'Ampère et si  $\Gamma$  est un contour intérieur à  $C$  délimitant une surface  $\Sigma$  intérieure à la section  $S$  (fig. 43) on obtiendra en appliquant le théorème d'Ampère :



$$\int_{\Gamma} \vec{H}_1 dl = \vec{i} \Sigma = I \frac{\Sigma}{S} \quad (4.49)$$

Pour l'induction  $\vec{B}_1$  on obtiendrait de même :

$$\int_{\Gamma} \vec{B}_1 dl = \mu_1 I \frac{\Sigma}{S} \quad (4.50)$$

et si  $\mu_1$  tend vers l'infini,  $B_1$  tend vers l'infini également.

A l'extérieur du cylindre par contre, en appliquant le théorème d'Ampère à un contour  $\Gamma'$  extérieur à C (fig. 43), on a :

$$\int_{\Gamma'} \vec{B}_2 dl = \mu_2 I \quad (4.51)$$

$\mu_2$  étant fini ainsi que I,  $\vec{B}_2$  ne peut être infini.

Mais d'après (4.46) les composantes normales de  $B_1$  et  $B_2$  doivent être identiques :

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \quad (4.52)$$

Ceci n'est possible  $B_1$  tendant vers l'infini que si  $\theta_1$  tend vers  $\pi/2$  c'est-à-dire si le vecteur  $\vec{B}_1$  est en tout point tangent au contour C.

La composante normale de  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{B}_{n1}$  est donc nulle et en tout point de C :

$$\vec{B}_{n1/C} = \frac{\partial A_z}{\partial S/C} = 0 \quad (4.53)$$

( $\vec{S}$  est un vecteur unitaire tangent à C)

La condition (4.53) entraîne que  $A_z = \text{cste}$  sur le contour C, et comme on a fixé  $A'_z = 0$  en un point  $P_0$  de C par l'équation (4.42) on voit que lorsque  $\mu_1$  tend vers l'infini, le potentiel vecteur tend à s'annuler sur le contour C.

En posant  $\mu_1 = \mu_r \cdot \mu_0$  l'expression (4.42) peut s'écrire :

$$A_z^{\ddot{}}(P) = \frac{A'_z(P)}{\mu_r} = \frac{\mu_0}{2\pi} i_z \iint_{S_M} \text{Log} \left( \frac{PM}{P_0M} \right) dS_M \quad (4.54)$$

Le potentiel vecteur réduit  $A_z^{\ddot{}}(P)$  est identique au potentiel vecteur  $A'_z(P)$  qu'on aurait à l'intérieur de S si la perméabilité y était  $\mu_0$  mais en outre il s'annulera sur C et ne sera plus infini dans S si  $\mu_r$  tend vers l'infini.

A l'extérieur du cylindre, le potentiel vecteur  $A_{z_2}$  n'est pas nul car  $\vec{B}_2$  ne l'est pas : il sera donné par l'expression (4.42) en remplaçant  $\mu_1$  par  $\mu_2$ .

$$A_{z_2}(Q) = \frac{-\mu_2}{2\pi} i_z \iint_S \text{Log} \left( \frac{QM}{Q_0M} \right) dS_M \quad (4.55)$$

Q est un point extérieur à S,  $Q_0$  un point de C, M un point intérieur à S.

$A_z$  étant continu sur C on a  $A_{z_1} = A_{z_2}$  sur C et si  $\mu_1 \rightarrow \infty$ ,  $A_{z_1} \rightarrow 0$  sur C avec  $A_{z_2}$ .

Lorsque Q s'éloigne de S, le rapport  $QM/Q_0M$  dans (4.55) devient très grand et l'intégrale de  $A_{z_2}$  tend vers  $-\infty$  comme  $-\text{Log} (QM/Q_0M)$ , en effet le conducteur étant indéfini selon l'axe des z, le potentiel vecteur  $A_{z_2}(Q)$  est du type logarithmique qui ne s'annule pas quand on s'éloigne indéfiniment du conducteur de même que le potentiel électrique crée par une ligne chargée indéfinie.

Si on se reporte à l'analogie avec la vitesse de circulation du fluide dans les canaux d'un milieu poreux il semble qu'il y ait incompatibilité entre  $\vec{A}$  et  $\vec{u}$  car, si le vecteur  $\vec{u}$  est bien nul en dehors du canal d'un milieu poreux (il ne peut y avoir de circulation de fluide dans la partie solide) le potentiel vecteur  $\vec{A}$  n'est pas nul en dehors du conducteur et tend même vers l'infini si on s'éloigne suffisamment.

Remarquons d'abord que la croissance vers l'infini est lente car elle se fait en  $\text{Log } r$ .

Mais dans l'équation (4.54) plutôt que  $A'_z$  nous avons considéré un potentiel vecteur réduit  $A''_{z_2} = A'_z / \mu_r$ .

Si  $\mu_r$  tend vers l'infini  $A''_{z_1} = \lim_{\mu_r \rightarrow \infty} \frac{A'_z}{\mu_r}$  est fini.

Si on considère de même à l'extérieur de S le potentiel vecteur réduit obtenu en divisant  $A_{z_2}$  par  $\mu_r$  on aura :

$$A''_{z_2} = \frac{-\mu_2}{\mu_r} \frac{i_r}{2\pi} \iint_S \text{Log} \left( \frac{QM}{Q_0M} \right) dS_M \quad (4.56)$$

et, si, à l'extérieur du conducteur de perméabilité relative  $\mu_r$  tendant vers l'infini, la perméabilité est  $\mu_2 = \mu_0$ , on aura :

$$A''_{z_2} = \lim_{\mu_r \rightarrow \infty} \frac{-\mu_0}{\mu_r} \frac{i_r}{2\pi} \iint_S \text{Log} \left( \frac{QM}{Q_0M} \right) dS_M \quad (4.57)$$

A une distance finie du cylindre, le potentiel vecteur réduit  $A''_{z_2}$  pourra être aussi petit que l'on veut si  $\mu_r$  tend vers l'infini.

Tout ceci revient en fait à dire, que si la perméabilité du cylindre tend vers l'infini, tout le flux du champ magnétique se concentre à l'intérieur du cylindre et qu'aucune ligne de force ne s'en échappe (conducteur magnétique parfait).

Le remplacement du potentiel vecteur  $\vec{A}$  par un potentiel vecteur réduit  $\vec{A}^* = \frac{\vec{A}}{\mu_r}$  permet cette fois de satisfaire à des conditions aux limites identiques à celles du vecteur vitesse  $\vec{u}$  :

$$\vec{A}^* = 0 \quad \text{sur les parois} \\ \text{et dans les parois.}$$

Nous allons maintenant par un exemple simple vérifier qu'on peut obtenir, par les lois de l'électromagnétisme s'appliquant au potentiel vecteur réduit, des résultats identiques à des résultats classiques de la mécanique des fluides.

#### IV.3.3.- Application de l'analogie magnétostatique à un cylindre circulaire-Loi de Poiseuille

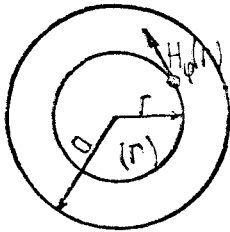


Figure 44

Soit un cylindre circulaire, indéfini de rayon  $a$ , de perméabilité

$\mu_1 = \mu_r \mu_0$  parcouru par un courant  $I$  (fig. 44).

La densité de courant  $\vec{i}$  à l'intérieur est :

$$\vec{i} = \vec{z} i_z = \vec{z} \cdot \frac{I}{\pi a^2} \quad (4.58)$$

Le champ magnétique  $H$  en un point intérieur distant de  $r$  du centre est donné par le théorème d'Ampère, il est à symétrie radiale :

$$\int_{\Gamma} H(r) dl = 2\pi r H(r) = I \cdot \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = I \frac{r^2}{a^2}$$

$$H_{\varphi}(r) = \frac{I}{2\pi r} \frac{r^2}{a^2} = \frac{I r}{2\pi a^2} = \vec{i}_z \cdot \frac{r}{2} \quad (4.59)$$

$$B_{\varphi}(r) = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot H_{\varphi}(r) = \mu_r \mu_0 \cdot \vec{i}_z \frac{r}{2}$$

Le potentiel vecteur  $A_z$  est donné par :

$$B = \text{rot } A \quad B_{\varphi}(r) = \frac{-\partial A_z(r)}{\partial r}$$

$$A_z(r) = -\int B_{\varphi}(r) dr = -\mu_r \mu_0 \cdot \frac{\vec{i}_z}{2} \left( \frac{r^2}{2} + \text{cste} \right) \quad (4.60)$$

$$\text{En } r = 0 \quad B(r) = \frac{-\partial A_z}{\partial r} = 0$$

$$\left. \frac{\partial B_{\varphi}(r)}{\partial r} = \frac{-\partial^2 A_z}{\partial r^2} = \frac{-\mu_r \mu_o i_z}{2} < 0 \right\} A_z(r) \text{ est maximum en } r = 0$$

Si on choisit la constante dans (4.60) de façon que  $A_z$  s'annule en un point du contour externe ( $r = a$ ), il sera nul en tout point du contour par symétrie et on aura pour  $r < a$  :

$$A_z(r) = \frac{\mu_r \mu_o i_z}{4} (a^2 - r^2) = \frac{\mu_r \mu_o I}{4\pi} \left[ 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right] \quad (4.61)$$

$$A_z^*(r) = \frac{A_z(r)}{\mu_r} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \left[ 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right] \quad (4.62)$$

A l'extérieur du cylindre circulaire, la perméabilité est  $\mu_o$ .

La circulation du champ H sur un contour extérieur circulaire  $r > a$  est :

$$\int_{\Gamma'} H(r) dl = 2\pi r H(r) = I$$

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} \quad r > a$$

$$B(r) = \frac{\mu_o I}{2\pi r} = \frac{-\partial A_z(r)}{\partial r}$$

$$A_z(r) = \frac{-\mu_o I}{2\pi} \int \frac{dr}{r} = \frac{-\mu_o I}{2\pi} (\text{Log } r + \text{cste}) \quad r > a \quad (4.63)$$

Puisque  $A_z(a) = 0$ , on aura :

$$A_z(r) = \frac{-\mu_o I}{2\pi} \text{Log} \left(\frac{r}{a}\right) \quad r > a \quad (4.64)$$

$$A_z^*(r) = \frac{-\mu_o}{\mu_r} \frac{I}{2\pi} \text{Log} \left(\frac{r}{a}\right) \quad r > a \quad (4.65)$$

La figure 45 montre l'allure de  $A_z(r)$  et de  $A_z^*(r)$  pour des valeurs de  $\mu_r$  allant de 1 à 10 et montre comment  $A_z^*(r)$  pour  $r > a$  tend vers zéro quand  $\mu_r$  tend vers l'infini.

Relions maintenant le courant I à la différence de potentiel qui le fait circuler : si le conducteur circulaire a une longueur L, une conductivité  $\sigma$  sa résistance est :

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{\pi a^2}$$

le courant I créé par une différence de potentiel  $V_2 - V_1$  appliquée entre les extrémités du conducteur est donc :

$$I = \frac{V_2 - V_1}{R} = \frac{(V_2 - V_1) \sigma \pi a^2}{L} \quad (4.66)$$

Le potentiel vecteur (4.62) s'écrit en remplaçant I par (4.66)

$$\vec{A}_z(r) = \frac{\mu_0 \sigma}{4} \frac{V_2 - V_1}{1} a^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad r < a \quad (4.67)$$

Calculons le flux du vecteur  $\vec{A}_z$  à travers la section du cylindre :

$$\Phi_{\vec{A}_z} = \iint_S \vec{A}_z \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 \sigma}{4} \cdot \frac{V_2 - V_1}{1} \cdot a^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] r \, dr \, d\theta$$

$$\Phi_{\vec{A}_z} = \mu_0 \sigma \cdot \frac{\pi}{8} \cdot \frac{V_2 - V_1}{1} \cdot a^4 \quad (4.68)$$

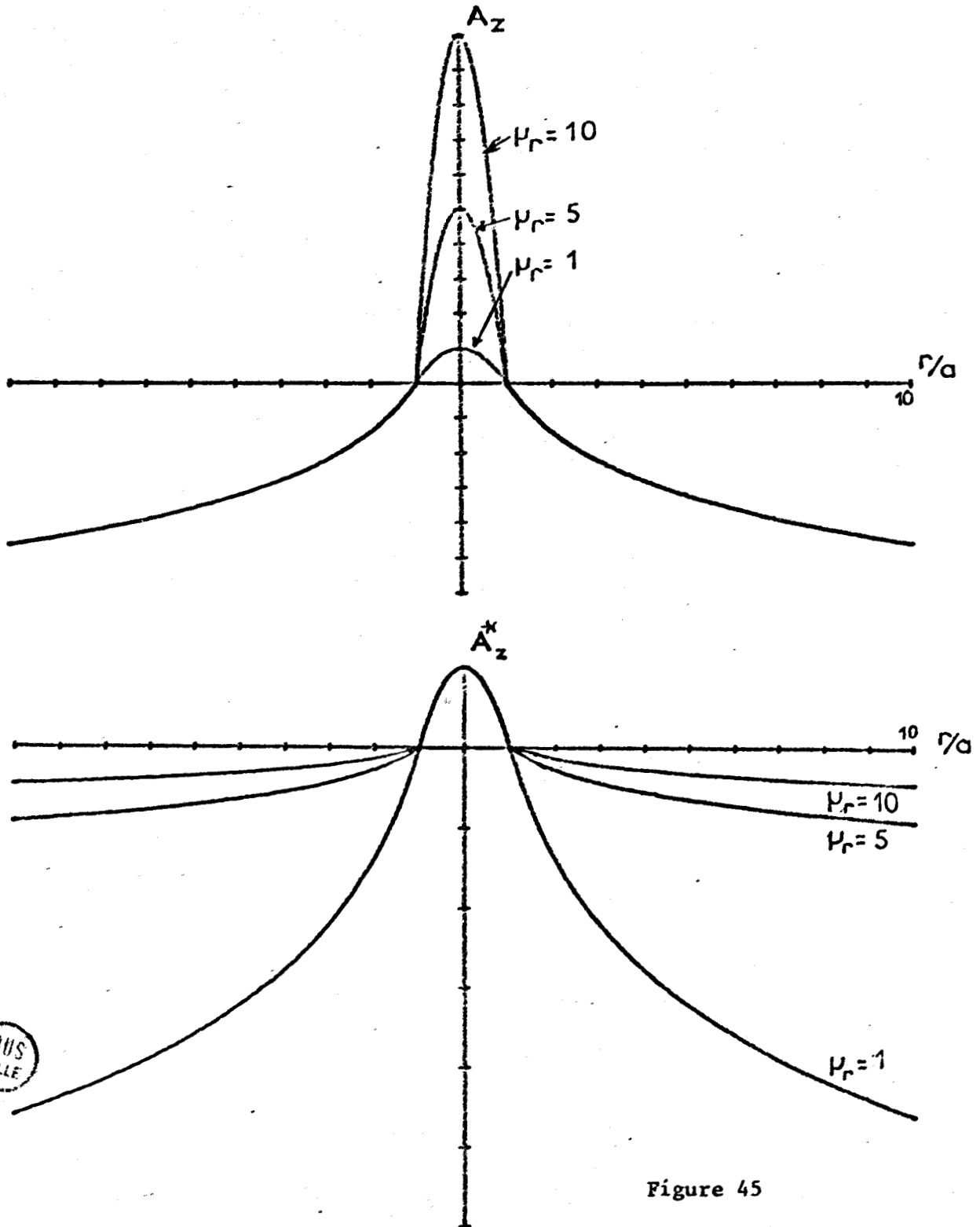


Figure 45

Calculons également la valeur moyenne du potentiel vecteur réduit  $\bar{A}^z$  sur la surface  $S = \pi a^2$

$$\bar{A}^z = \frac{1}{S} \iint A^z ds = \frac{\Phi_{A^z}}{S} = \frac{\mu_0 \sigma}{8} \cdot \frac{(V_2 - V_1)}{1} a^2 = \frac{A^z_{z \text{ max}}}{2} \quad (4.69)$$

Comparons maintenant les résultats (4.67), (4.68), (4.69) avec les résultats, classiques en mécanique des fluides, concernant l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux dans une conduite circulaire et connus sous le nom de loi de Poiseuille.

On obtient : (BRUN , MARTINOT-LAGARDE et MATHIEU [14])

Profil des vitesses dans le tuyau :

$$u(r) = u(0) [1 - (\frac{r}{a})^2] = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{P_2 - P_1}{1} \cdot a^2 [1 - (\frac{r}{a})^2] \quad (4.70)$$

Débit en volume

$$Q = \iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\eta} \frac{\pi}{8} \frac{P_2 - P_1}{1} a^4 \quad (4.71)$$

Vitesse moyenne du fluide dans le tuyau :

$$\bar{u} = \frac{1}{8\eta} \frac{P_2 - P_1}{1} a^2 \quad (4.72)$$

La comparaison des équations (4.67), (4.68), (4.69) d'une part et (4.70), (4.71), (4.72) d'autre part permet de vérifier sur l'exemple de la loi de Poiseuille le bien fondé de l'analogie magnétostatique de l'écoulement d'un fluide visqueux.

Le tableau 7 résume quelles sont les grandeurs homologues dans cette analogie.

MAGNETOSTATIQUE	ECOULEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX
Potentiel vecteur réduit :	vitesse : $\vec{u}$
$\vec{A}^x = \lim_{\mu_r \rightarrow \infty} (\frac{\vec{A}}{\mu_r})$	
potentiel scalaire $V$	pression : $p$
$\frac{1}{\mu_0 \sigma} = \frac{\rho}{\mu_0}$	viscosité dynamique : $\eta$
flux du potentiel vecteur réduit :	débit en volume : $P = \iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S}$
$\Phi_{A^z} = \iint_S \vec{A}^z \cdot d\vec{S}$	
potentiel vecteur réduit moyen :	vitesse moyenne : $\bar{u} = \frac{Q}{S}$
$\bar{A}^z = \frac{\Phi_{A^z}}{S}$	
$\Delta \vec{A}^z = \mu_0 \sigma \text{ grad } V$	$\Delta \vec{u} = 1/\eta \text{ grad } p$

Tableau 7 : Grandeurs homologues dans l'analogie magnétostatique de l'écoulement d'un fluide visqueux

#### IV.4.- RELATION ENTRE SELF ET FLUX DU POTENTIEL VECTEUR

Le flux du potentiel vecteur réduit  $\Phi_{A^*}$  et le potentiel vecteur réduit moyen jouent ici un rôle important puisqu'ils sont les analogues respectivement du débit en volume et de la vitesse moyenne du fluide, mais ils ne sont pas des grandeurs qu'on étudie classiquement en électromagnétisme : aussi nous allons les rattacher à des grandeurs plus connues.

On sait que l'énergie magnétique emmagasinée dans un conducteur parcouru par un courant  $I$  peut s'écrire (DURAND [38]) :

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{i} \cdot \vec{A} \, dv \quad (4.73)$$

Cette relation permet de définir la self  $L$  du conducteur à partir de considérations énergétiques.

Comme nous travaillons avec un potentiel vecteur réduit,  $A^*$  nous utiliserons de même une énergie magnétique réduite  $W^*$  et une self réduite  $L^*$ , car lorsque  $\mu_r$  tend vers l'infini  $W$  et  $L$  tendent également vers l'infini.

$$W^* = \lim_{\mu_r \rightarrow \infty} \left( \frac{W}{\mu_r} \right) = \frac{1}{2} L^* I^2 = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{i} \cdot \vec{A}^* \, dv \quad (4.74)$$

Si le conducteur est un cylindre de longueur  $l$ , de section de forme quelconque mais de surface  $S$ , la densité de courant  $\vec{i}$  est constante dans la section et indépendante de l'abscisse.  $\vec{A}$  est également indépendant de l'abscisse, et en intégrant par rapport à la longueur (4.74) devient :

$$W^* = \frac{1}{2} L^* I^2 = \frac{1}{2} \iint_S \vec{i} \cdot \vec{A}^* \, dS = \frac{1}{2} \vec{i} \cdot \iint_S \vec{A}^* \, dS = \frac{1}{2} \frac{I}{S} \iint_S A^* \, dS \quad (4.75)$$

On obtient, en simplifiant, la self réduite  $L^*$  :

$$L^* I = 1 \cdot \frac{1}{S} \iint_S A^* \, dS$$

En posant  $\lambda^* = L^*/l$  : self réduite par unité de longueur, on a :

$$\lambda^* I = \frac{L^* I}{l} = \frac{1}{S} \iint_S A^* \, dS = \frac{\Phi_{A^*}}{S} = \bar{A}^*$$

Le flux qu'on considère habituellement en électromagnétisme est le flux de l'induction magnétique  $B$  : il sert également à la définition de la self car on a :

$$\Phi_B = L \cdot I$$

soit ici :

$$\Phi_{B^*} = \lim_{\mu_r \rightarrow \infty} \left( \frac{\Phi_B}{\mu_r} \right) = L^* I$$

On obtient finalement en réunissant les expressions égales à  $\frac{L^* I}{l}$

$$\bar{A}^* = \frac{\Phi_{A^*}}{S} = \frac{\Phi_{B^*}}{l} = \frac{L^* I}{l} = \lambda^* I \quad (4.76)$$

REMARQUE 1 : La self  $L^*$  calculée de la façon ci-dessus est identique à ce qu'on nomme parfois la "self interne" [5] en effet l'opération consistant à faire tendre  $\mu_r$  vers l'infini et à diviser par  $\mu_r$  les grandeurs obtenues revient à concentrer le flux  $\Phi_B$  dans le conducteur en annulant le flux extérieur.

En effet, en affectant d'un indice  $\circ$  les grandeurs obtenues avec un conducteur de perméabilité  $\mu_\circ$ , et en séparant le flux total en flux interne et flux externe au conducteur, on obtient deux contributions pour la self totale  $L_\circ$ , la self interne  $L_{\circ,int}$  et la self externe  $L_{\circ,ext}$  ; cette dernière est habituellement prépondérante.

$$\Phi_{B_\circ} = \Phi_{\circ,int} + \Phi_{\circ,ext} = L_\circ I = (L_{\circ,int} + L_{\circ,ext}) I \quad (4.77)$$

Si le conducteur est maintenant de perméabilité relative  $\mu_r \gg 1$  la self interne va devenir prépondérante :

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \mu_r \Phi_{\circ,int} + \Phi_{\circ,ext} = L I = (\mu_r L_{\circ,int} + L_{\circ,ext}) I = (L_{int} + L_{ext}) I \\ L_{int} &= \mu_r L_{\circ,int} \qquad L_{ext} = L_{\circ,ext} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Si on utilise les valeurs réduites en divisant par  $\mu_r$ .

$$\Phi_{B^*} = \lim_{\mu_r \rightarrow \infty} \left( \frac{\Phi_B}{\mu_r} \right) = \Phi_{\circ,int} + \lim_{\mu_r \rightarrow \infty} \left( \frac{\Phi_{\circ,ext}}{\mu_r} \right) = L^* I = (L_{\circ,int} + \lim_{\mu_r \rightarrow \infty} \frac{L_{\circ,ext}}{\mu_r}) I$$

d'où :

$$\boxed{L^* = L_{\circ,int}} \quad (4.79)$$

La notion de self interne est habituellement d'ordre académique car les conducteurs usuellement utilisés sont en matériau non magnétique et leur self interne est négligeable par rapport à leur self externe. Mais pour un matériau conducteur de grande perméabilité magnétique ce serait l'inverse et la self interne serait prépondérante.

Si on reporte les résultats précédents dans l'exemple du cylindre circulaire qui avait servi à retrouver la loi de Poiseuille on tire de l'équation (4.69) et de l'équation (4.66) :

$$\bar{A}^* = \frac{\mu_\circ}{8\pi} I$$

$$\text{Soit : } L^* = L_{\circ,int} = \frac{\mu_\circ}{8\pi} l \quad \lambda^* = \frac{\mu_\circ}{8\pi} \quad (4.80)$$

La self interne du conducteur circulaire est proportionnelle à sa longueur mais ne dépend pas de sa section.



**REMARQUE 2** : La loi de Poiseuille n'est valable que pour des tuyaux de section circulaire, pour des tuyaux de forme différente il faut intégrer pour chaque cas : on a néanmoins cherché à obtenir des formules approximatives en se basant sur le fait que les pertes d'énergie par viscosité avaient surtout lieu à la périphérie du tuyau au contact avec la paroi et devaient dans une certaine mesure dépendre du périmètre mouillé par le fluide : on introduit ainsi un rayon hydraulique  $m$  :

$$m = \frac{\text{section du tuyau}}{\text{périmètre du tuyau}}$$

et on écrit la formule de Poiseuille sous la forme :

$$\vec{u} \sim \frac{m^2}{2\eta} \cdot \frac{P_2 - P_1}{l} \quad (4.81)$$

Pour une section circulaire de rayon  $a$  le rayon hydraulique vaut  $m = a/2$  et on retrouve la formule (4.72).

La précision de la formule approximative (4.79) est mauvaise dès que la section du tuyau s'éloigne de la forme circulaire et en particulier dès qu'apparaissent des angles morts où la vitesse du fluide est peu élevée.

Puisque l'analogie magnétostatique permet d'identifier self interne d'un conducteur et "perméabilité" d'une conduite, on peut imaginer qu'elle est transposable, telle quelle, à un milieu poreux et qu'en emplissant les pores d'un corps qui serait électriquement conducteur et de grande perméabilité magnétique, il suffira de mesurer la self réduite par unité de longueur de ce milieu pour obtenir une grandeur proportionnelle à sa perméabilité hydraulique.

Mais la définition de self interne réduite n'a de sens que pour un conducteur cylindrique et ne peut être transposée à un milieu poreux qui constitue un conducteur de forme très particulière.

En effet, d'après la définition énergétique (4.74) de la self réduite, ce n'est que pour un conducteur cylindrique que la densité de courant  $\vec{i}$  est constante dans la section du conducteur et peut être sortie de l'intégrale (4.75).

Pour un milieu poreux, en supposant une tranche d'épaisseur  $dl$ , de section totale  $S$ , percée par  $n$  canalicules de section élémentaire  $S_k$ , la densité de courant  $\vec{i}_k$  dans chaque canalicule est fonction du gradient local de potentiel, différent du gradient macroscopique et, en supposant cette densité de courant constante dans la section  $S_k$ , on aura :

$$dW^z = \frac{1}{2} dL^z I^2 = \frac{dl}{2} \sum_{k=1}^n \iint_{S_k} \vec{i}_k \cdot \vec{A}_k^z dS_k = \frac{dl}{2} \sum_{k=1}^n i_k \iint_{S_k} A_k^z dS_k \quad (4.82)$$

et si on veut, comme précédemment, exprimer  $dL^z/dl = \lambda^z$ , on aura :

$$\frac{dL^z}{dl} \cdot I = \frac{\sum_k i_k \iint_{S_k} A_k^z dS_k}{I} = \frac{\sum_k i_k S_k \frac{1}{S_k} \iint_{S_k} A_k^z dS_k}{I} = \frac{\sum_k I_k \bar{A}_k^z}{I} \quad (4.83)$$

où  $\bar{A}_k^z$  représente la valeur moyenne de  $A_k^z$  sur la section du canalicule  $k$ .

Cette expression est visiblement différente de (4.76) où on trouvait :

$\lambda^z I$  égal à  $\bar{A}^z$

La seule façon de trouver, par l'analogie magnétostatique, l'analogie du coefficient  $k$ , pour un milieu poreux est d'appliquer directement la définition issue de l'analogie magnétostatique de l'équation de Darcy.

$$k \equiv \frac{\frac{1}{S_M} \iint_{S_M} A^z dS}{\mu_0 \sigma \text{ Grad } V} \quad (4.84)$$

où  $S_M$  est la section du milieu poreux macroscopique,  $\text{Grad } V$  le gradient macroscopique de tension,  $\sigma$  la conductivité du liquide saturant les pores et l'intégrale du numérateur représentant le flux total, à travers les sections des pores, du potentiel vecteur réduit  $A^z$ .

(Il est implicite ici que nous supposons le milieu homogène, c'est-à-dire que le flux de  $A^z$  à travers toute section  $S_M$  est le même).

#### IV.4.- L'ANALOGIE MAGNETODYNAMIQUE

Le but de notre étude étant de définir une méthode de mesure électrique de la perméabilité hydraulique, on peut se demander par quel moyen il est possible d'évaluer le flux du potentiel  $\vec{A}^z$  à travers la section  $S_M$  du milieu poreux, la quantité  $A^z$  n'étant pas habituellement accessible aux mesures.

Pour contourner cette difficulté, nous allons envisager une nouvelle analogie, entre deux grandeurs électriques, cette fois, qui va nous permettre de remplacer la mesure du flux de  $\vec{A}^z$ ,  $\Phi_{A^z}$  par celle du flux de l'induction magnétique  $\vec{B}^z$ ,  $\Phi_{B^z}$ , qui elle, est plus aisée à faire.

Cette analogie est basée sur la correspondance formelle existant entre phénomènes de translation et phénomènes de rotation.

##### IV.4.1.- L'analogie magnétodynamique microscopique

Si nous partons de l'équation vectorielle de Poisson définissant le potentiel vecteur  $A^z$  microscopique :

$$\Delta \vec{A}^{\ddot{}} = -\mu_0 \vec{i} = -\mu_0 \sigma \vec{E} \quad (4.85)$$

en prenant le rotationnel des deux membres nous obtiendrons une équation de Poisson vectorielle pour l'induction magnétique  $\vec{B}^{\ddot{}}$  :

$$\begin{aligned} \text{rot} (\Delta \vec{A}^{\ddot{}}) &= \Delta(\text{rot} \vec{A}^{\ddot{}}) = \Delta \vec{B}^{\ddot{}} = -\mu_0 \text{rot} \vec{i} \\ \Delta \vec{B}^{\ddot{}} &= -\mu_0 \sigma \text{rot} \vec{E} \end{aligned} \quad (4.86)$$

Si le champ  $\vec{E}$  est un champ électrostatique, constant, son rotationnel est nul et (4.86) devient :

$$\Delta \vec{B}^{\ddot{}} = 0 \quad (4.87)$$

Ce qui ne présente aucune analogie avec (4.85).

Mais si le champ électrique est variable dans le temps, on aura<sup>(\*\*)</sup> :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\dot{\vec{B}} \quad (4.88)$$

et l'équation (4.86) devient alors :

$$\Delta \vec{B}^{\ddot{}} = \mu_0 \sigma \dot{\vec{B}} \quad (4.89)$$

qui présente cette fois une analogie avec (4.85).

Comme le temps intervient, nous appellerons "magnétodynamique" cette analogie.

Dans cette analogie microscopique entre grandeurs magnétostatiques et magnétodynamiques, les grandeurs homologues sont précisées par le tableau 8 suivant :

MAGNETOSTATIQUE	MAGNETODYNAMIQUE
$\vec{A}^{\ddot{}} = \vec{A} / \mu_r$	$\vec{B}^{\ddot{}} = \vec{B} / \mu_r$
$\iint_S \vec{A}^{\ddot{}} d\vec{S} = \Phi_{A^{\ddot{}}} = \Phi_A / \mu_r$	$\iint_S \vec{B}^{\ddot{}} d\vec{S} = \Phi_{B^{\ddot{}}} = \Phi_B / \mu_r$
$\vec{E}$	$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\dot{\vec{B}} = \text{rot} \vec{E}$
$\vec{i} = \sigma \vec{E}$	$\dot{\vec{H}} = -\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \dot{\vec{B}}$
$\iint_S \vec{i} d\vec{S} = I$	$\iint_S \dot{\vec{H}} d\vec{S} = \frac{-1}{\mu_0 \mu_r} \iint_S \dot{\vec{B}} d\vec{S} = \frac{-\dot{\Phi}_B}{\mu_0 \mu_r}$
	$= \frac{-1}{\mu_0} \iint_S \dot{\vec{B}}^{\ddot{}} d\vec{S} = \frac{-\dot{\Phi}_{B^{\ddot{}}}}{\mu_0}$

Tableau 8 : Analogie microscopique

(\*\*) Pour simplifier les notations, nous notons la dérivée par rapport au temps d'un point :  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$

La figure 46 indique la correspondance géométrique entre les grandeurs analogues.

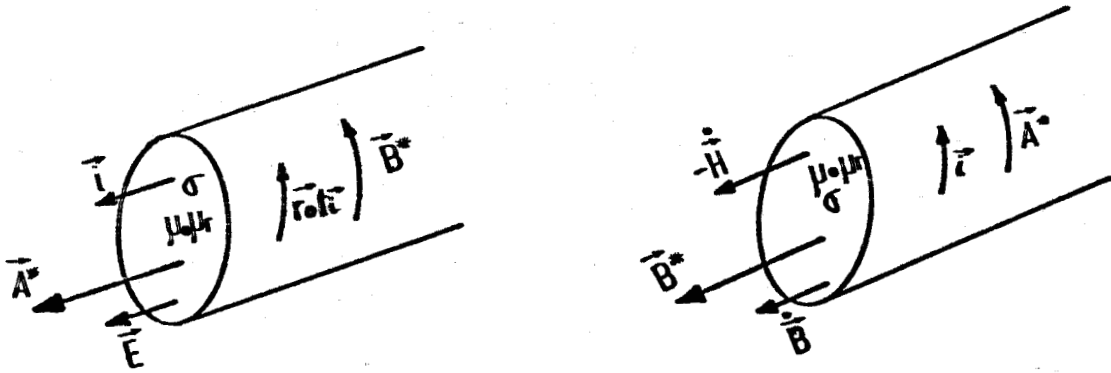


Figure 46

IV.4.2.- L'analogie magnétodynamique macroscopique

Cette analogie peut cette fois être poursuivie jusqu'au niveau macroscopique dans un milieu de structure complexe tel qu'un milieu poreux.

Si le milieu poreux d'origine est constitué d'un cylindre de longueur L, de section S\_M, de conductivité équivalente sigma\_eq et qu'on lui applique une différence de potentiel externe V créant un champ macroscopique E\_M faisant circuler un courant I\_M, on peut transposer ceci à un cylindre de même dimensions du même milieu poreux, dont la perméabilité magnétique relative sera mu\_eq et qui sera soumis, sur sa longueur L à une force magnétomotrice Ni créée par un enroulement de N spires parcouru par un courant i : cette force magnétomotrice crée une induction magnétique interne macroscopique B\_M homologue de E\_M faisant circuler le flux de H\_M, phi\_H\_M.

Le tableau 9 montre alors quelles sont les grandeurs macroscopiques homologues et la figure 47 illustre cette analogie macroscopique.

MAGNETOSTATIQUE	MAGNETODYNAMIQUE
$V$	$Ni = NdI/dt$
$\vec{E}_M = V/L$	$-\vec{B}_M = -\mu_0 \mu_{eq} \dot{\vec{H}}_M = -\mu_0 \mu_{eq} \frac{Ni}{L}$
$I_M = \sigma_{eq} S_M E_M = \frac{\sigma_{eq} S_M V}{L}$	$-\dot{\Phi}_{H_M} = -S_M \dot{H}_M = \frac{-S_M Ni}{L}$
$\frac{1}{S_M} \iint \vec{A}_M \cdot d\vec{S} = \frac{\Phi_A}{S_M \mu_r} = \vec{A}_M$	$\frac{1}{S_M} \iint \vec{B}_M \cdot d\vec{S} = \frac{\Phi_{B_M}}{S_M} = \frac{\Phi_{B_M}}{S_M \mu_r} = \frac{B_M}{\mu_r}$

Tableau 9 : Analogie macroscopique

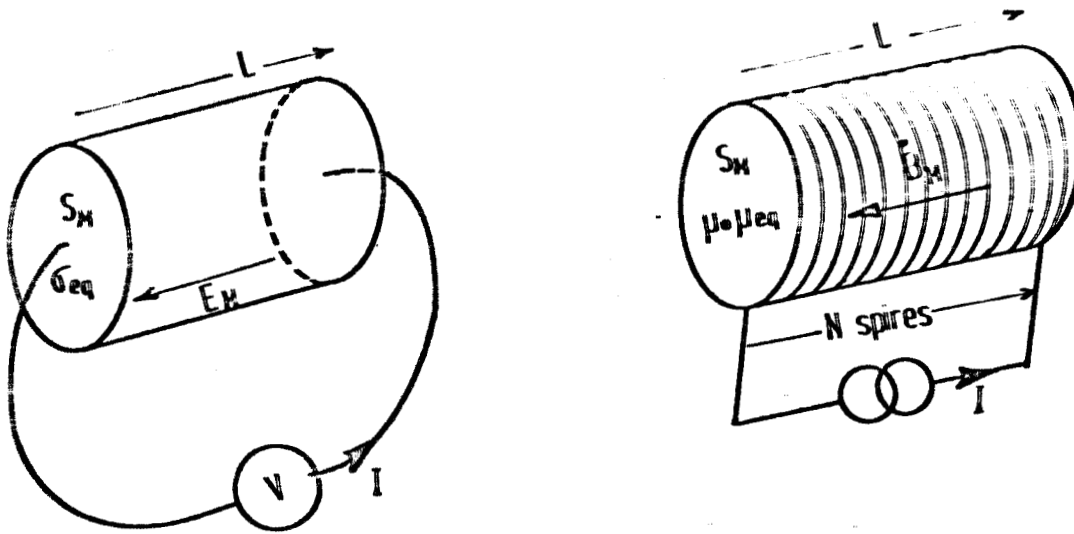


Figure 47

IV.4.3.- Obtention de la perméabilité k à l'aide des deux analogies

Si on calcule le flux total du vecteur  $\vec{A}^z$  sortant de tous les canaux de la section  $S_M$ , il aura pour analogue magnétodynamique par définition de l'induction macroscopique  $B_M$  :

$$\frac{1}{S_M} \iint_{S_M} \vec{A}^z dS = \frac{1}{S_M} \iint_{S_M} \vec{B}^z dS = \frac{1}{S_M \mu_r} \iint_{S_M} \vec{B} dS = \frac{B_M}{\mu_r} \quad (4.90)$$

et la perméabilité hydraulique k, à la suite des deux analogies successives aura comme analogue d'après (4.84) et (4.90) :

$$k \equiv \frac{\frac{1}{S_M} \iint_{S_M} \vec{A}^z dS}{\mu_0 \sigma \vec{E}_M} = \frac{-\vec{B}_M}{\mu_r \mu_0 \sigma \mu_0 \mu_{eq} \vec{H}_M} \quad (4.91)$$

Ce sont les courants de Foucault tourbillonnaires, créés à l'intérieur des pores remplis de matériau conducteur par la variation de  $H_M$ , qui créent l'induction macroscopique  $B_M$  : la mesure de k nécessite donc, connaissant  $H_M(t)$  imposée par un générateur, de mesurer  $B_M(t)$ .

Si on place une bobine captrice de N spires, de section S de façon qu'elle soit traversée par l'induction  $B_M(t)$ , on obtiendra à ses bornes une tension e(t) telle que :

$$e(t) = \frac{-N S dB_M(t)}{dt} \quad (4.92)$$

Si le courant I(t) dans le solénoïde externe comportant n spires par unité de longueur est sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , on aura :

$$e(t) = -j\omega N S B_M(t) \quad (4.93)$$

$$H_M(t) = j\omega n I(t) \quad (4.94)$$

d'où on déduit en portant (4.93) et (4.94) dans (4.91) :

$$k = \frac{e(t)}{\omega^2 \sigma \mu_0 \mu_r \mu_0 \mu_{eq} n N S I(t)} \quad (4.95)$$

La tension  $e(t)$  est sinusoïdale en phase avec  $I(t)$ .

Mais il existe une tension  $e'(t)$  obtenue directement par mutuelle induction entre la bobine excitatrice et la bobine captrice couplées par le matériau de perméabilité macroscopique  $\mu_0 \mu_{eq}$  :

$$e'(t) = -NS \mu_0 \mu_{eq} \frac{dH_M}{dt} = -NS \mu_0 \mu_{eq} j \omega n I(t) \quad (4.96)$$

Cette tension  $e'(t)$  est en quadrature avec le courant  $I$ .

Le rapport de ces deux tensions donne :

$$\frac{e(t)}{e'(t)} = \frac{e_P}{e_Q} = k \mu_0 \mu_r \sigma \omega \quad (4.97)$$

d'où :

$$k = \frac{e_P}{e_Q} \frac{1}{\mu_0 \mu_r \sigma \omega} = \frac{e_P}{e_Q} \cdot \frac{\delta^2}{2} \quad (4.98)$$

où  $e_P$  et  $e_Q$  représentent respectivement la tension en phase et la tension en quadrature induite aux bornes de la bobine captrice et  $\delta$  l'épaisseur de peau relative au matériau  $\sigma$ ,  $\mu_r$  présent dans les pores, à la pulsation  $\omega$ .

Cependant nous avons exigé, pour la validité des analogies, que  $\mu_r$  soit très grand pour que le flux magnétique soit canalisé dans les pores : ceci conduit à une épaisseur de peau tendant vers zéro - et les courants de Foucault tourbillonnaires ne circulent plus alors qu'à la périphérie des pores. Il faut donc trouver un compromis entre perméabilité  $\mu_r$  et fréquence de travail pour que l'épaisseur de peau soit supérieure à la dimension des plus gros pores.

Ce calcul, très simplifié, suppose que le matériau poreux est disposé dans un solénoïde de grande longueur - ce qui ne sera pas évidemment la disposition utilisée dans une diagraphie in situ pour laquelle une géométrie adéquate de sonde devra être trouvée.

La validité de la formule (4.98) devra être testée expérimentalement avec des échantillons de roche de perméabilité connue, afin de vérifier l'influence relative de  $\mu_r$  et  $\omega$ .

#### IV.5.- PROJET D'UNE METHODE DE DIAGNOSTIC ELECTRIQUE DE PERMEABILITE HYDRAULIQUE

Le but de ce qui précède était de trouver des paramètres électriques susceptibles d'être reliés à la perméabilité hydraulique d'un milieu poreux afin de pouvoir disposer d'une méthode de diagraphe permettant de mesurer in situ dans un forage pétrolier la perméabilité de la roche en fonction de la profondeur.

La théorie que nous venons de développer nécessite de saturer les pores de la roche d'un corps qui soit à la fois conducteur de l'électricité (conductivité  $\sigma \neq 0$ ) et de grande perméabilité magnétique ( $\mu_r \gg 1$ ).

On sait que pendant le forage d'un puits pétrolier, circule en permanence une boue dont le rôle est à la fois de lubrifier et refroidir l'outil de forage, de remonter les débris de forage et de maintenir les parois du forage en empêchant leur éboulement [39].

Cette boue sous pression dans le puits, s'infiltré dans les premiers centimètres de la roche autour du puits, dont elle colmate plus ou moins les pores (mud-cake interne) puis forme une croûte externe (mud-cake externe) sur les parois du forage [39].

Cette boue conductrice de l'électricité a une perméabilité magnétique relative égale à 1.

Puisque de toutes façons, la boue doit colmater les premiers centimètres de roche, on peut imaginer de lui incorporer des produits magnétiques susceptibles de lui donner une perméabilité relative supérieure à 1, qui iront se fixer dans les pores de la roche, réalisant ainsi notre hypothèse de départ.

Le problème se pose donc d'obtenir pour la boue, la plus grande perméabilité magnétique possible, dans des conditions acceptables de rentabilité, et sans changer les autres paramètres physico-chimiques de cette boue.

En cherchant des matériaux de grande perméabilité magnétique, et conducteurs, on trouve des alliages tels que le permalloy, le supermalloy, etc.... mais leur prix semble devoir les écarter de ce genre d'usage.

Parmi les matériaux de grande perméabilité magnétique se trouvent également les ferrites, mais ils ne sont pas conducteurs de l'électricité.

Ces ferrites se trouvent facilement à l'état pulvérulent puisque les noyaux en ferrite utilisés en électronique sont obtenus par frittage de cette poudre.

Le prix de la ferrite semble à première vue prohibitif pour notre utilisation ; cependant notre attention a été récemment attirée par les résultats d'une lutte contre la pollution industrielle menée à bien dans une usine française de ferrites, qui permettait de récupérer des particules de ferrite, résidus de fabrication qui s'échappaient jusqu'alors dans l'eau des égouts et dans l'air.

Le résultat de cette opération est une boue ferritique qui, étant un déchet de fabrication doit pouvoir être obtenue en quantités importantes dans des conditions avantageuses.

Renseignements pris, sa densité est de  $1,9 \pm 0,2$  et sa composition moyenne approximative est la suivante :

$Fe_2O_3$	72 %
$MnO_x$	18 %
ZnO	8 %
$CuO, SiO_2, NiO$	< 1 % chacun

Nous n'avons pu cependant obtenir sa perméabilité relative.

La densité de cette boue ferritique est proche de celle des boues de forage : elle peut donc être incorporée sans modification profonde de ce paramètre important d'une boue.



Le fait que les ferrites ne soient pas des conducteurs électriques n'est pas gênant puisque l'incorporation de la boue ferritique à la boue de forage se ferait en remplaçant une partie des solides qui constituent la boue et qui ne sont pas conducteurs (barytine) par des ferrites qui ne le sont pas plus : la résistivité de la boue qui dépend en grande partie de sa teneur en bentonite et en sels minéraux ne serait donc pas changée ce qui est nécessaire pour que ne soient pas modifiées les autres diagraphies dont la résistivité de la boue est un paramètre important.

La seule inconnue est la perméabilité relative globale de la boue additionnée de particules de ferrite et le pourcentage en volume de ferrite qu'il faudrait ajouter pour obtenir une perméabilité relative  $\mu_r$  suffisante pour effectuer la mesure décrite plus haut.

On sait que la perméabilité magnétique d'un matériau pulvérulent est toujours inférieure à celle du même matériau massif ceci d'autant plus que la taille des particules est petite et s'approche de celle des domaines élémentaires.

Il y a donc une optimisation à obtenir pour la taille des particules de ferrite nécessaire :

- de façon qu'elles ne soient pas trop petites pour obtenir une perméabilité relative suffisante.
- de façon qu'elles ne soient pas trop grosses pour pouvoir pénétrer dans les pores de la roche.

Cependant, la perméabilité hydraulique étant surtout fonction des plus gros pores de la roche, on pourra se contenter de ne remplir que ceux-là de ferrite pour avoir une valeur approchée de la perméabilité hydraulique cherchée.

Nous ne pouvons pas pour l'instant affirmer que le principe que nous avons trouvé conduit à une méthode de mesure réellement utilisable : il faut en effet maîtriser de nombreux paramètres matériels et technologiques relatifs à l'incorporation de ferrites dans la boue de forage.

Mais nous pensons qu'une étude préalable en laboratoire sur des échantillons de roches, de perméabilité connue, imprégnés de boue ferritique, permettra de vérifier si la perméabilité relative  $\mu_r$  obtenue permet d'appliquer la théorie précédente et si les perméabilités hydrauliques ainsi trouvées ont une précision acceptable pour un usage en diagrapie.

#### V.7.- CONCLUSION DE LA QUATRIEME PARTIE

Cette quatrième et dernière partie fut primitivement à l'origine de notre intérêt pour les milieux poreux puisque, nous avons cherché initialement les moyens de concevoir une diagrapie de perméabilité.

Aussi son intérêt est centré, non pas, comme dans les parties précédentes, sur l'établissement d'une relation théorique entre perméabilité et caractéristiques du milieu, mais sur l'obtention d'analogies électriques utilisables entre équations microscopiques et macroscopiques dans le milieu poreux et équations microscopiques et macroscopiques électriques équivalentes.

Ainsi par le biais de deux analogies successives, nous parvenons à une méthode de mesure électrique de la perméabilité.

Cependant, cette méthode nécessite d'introduire dans les pores de la roche un corps de grande perméabilité magnétique et nous discutons de la possibilité d'effectuer ceci en introduisant une proportion à déterminer, de particules de ferrite dans la boue de forage.

Ce sont finalement des mesures en laboratoire, que nous ne pouvons effectuer, qui diront si ce procédé présente un intérêt économique, en ne perdant pas de vue, toutefois, qu'il n'existe actuellement pas de méthode de diagrapie de perméabilité, et que les pétroliers seraient déjà satisfaits si une méthode permettait de classer les roches en trois classe de perméabilité :

- 0 - 10 m Darcys
- 10 - 100 m Darcys
- 100 - 1000 m Darcys

## CONCLUSION GÉNÉRALE

---

Ce travail, qui était primitivement destiné à l'étude des seuls milieux poreux a pris finalement une orientation plus générale vers les milieux de structure aléatoire, dont les milieux poreux constituent un cas particulier.

Nous l'avons divisé en quatre parties dont les deux dernières sont plus spécialement consacrées aux milieux poreux : nous avons en effet constaté, que les problèmes posés dans l'étude des milieux poreux se retrouvaient dans d'autres domaines, sans que la liaison ait apparemment été faite entre les résultats obtenus dans ces différents domaines.

Le point commun entre ces problèmes étant la nature aléatoire du milieu matériel utilisé, nous avons, dans une première partie, en nous basant sur la terminologie de la thermodynamique des phénomènes irréversibles, montré que le principe de moindre action qui sous-tend tous les phénomènes de transport, conduit, selon que le "générateur" externe applique au milieu aléatoire étudié un flux constant ou une différence de potentiel constante, à une minimisation des flux ou des forces internes respectivement.

L'application du principe de moindre production d'entropie aux phénomènes de transport électrique permet de montrer qu'on peut encadrer la valeur du coefficient phénoménologique macroscopique (résistance ou conductance équivalente) en utilisant deux approximations, l'une sur les densités de courant interne avec un générateur de courant externe, l'autre sur les champs internes avec un générateur de tension externe.

Nous montrons que l'erreur faite sur le coefficient macroscopique est alors du second ordre par rapport à l'approximation faite.

Dans la seconde partie, qui est la plus importante de ce travail, nous étudions les réseaux aléatoires de résistances

Après avoir mentionné quelques modes de construction de ces réseaux, nous étudions des réseaux de structure aléatoire composés de résistances identiques et aboutissons à une approximation généralisant la loi d'Ohm pour ces réseaux

Dans l'étude de réseaux composés de résistances aléatoires, nous obtenons d'abord un résultat exact pour des réseaux planaires de structure carrée ou "carrée en moyenne", reliant leur résistance équivalente à la moyenne géométrique de la distribution de leurs résistances, pourvu que celle-ci soit log-symétrique.

Appliquant ensuite la théorie des graphes au circuit que constitue le réseau aléatoire, nous obtenons, par des considérations statistiques sur la valeur moyenne des arbres du réseau, la résistance équivalente à un réseau de degré moyen quelconque, comportant une distribution binaire de résistances, puis une distribution quelconque. Ceci se fait à l'aide d'un algorithme se prêtant au calcul numérique.

Nous vérifions en outre que les résultats précédents pour un réseau de degré moyen 4 sont bien retrouvés si la distribution des résistances est log-symétrique et nous montrons que notre "théorie des arbres" conduit aux mêmes résultats que la "théorie du milieu effectif" utilisée en physique du solide.

Examinant ensuite cette théorie du milieu effectif, nous en dégageons les bases théoriques liées à un théorème de la théorie des circuits, donnant à cette théorie une base plus sûre que les hypothèses habituellement utilisées et montrant qu'elle peut s'appliquer à des réseaux non réguliers. Nous expliquons alors pourquoi la théorie des arbres conduit aux mêmes résultats approchés que celle du milieu effectif. Nous terminons la seconde partie par une vérification expérimentale des théories précédentes.

Les études faites sur de grands réseaux, tirées de la littérature, que nous rappelons, confirment nos résultats.

La troisième partie est consacrée aux milieux poreux et montre comment l'étude précédente des réseaux peut être profitable dans ce cas que ce soit pour l'étude de phénomènes macroscopiques ou microscopiques.

Dans l'étude macroscopique de l'assemblage aléatoire de blocs poreux, nous montrons que nos résultats généralisent avec une précision supérieure des résultats trouvés dans la littérature.

Nous montrons ensuite que l'étude microscopique des milieux poreux peut être faite dans le cadre des "phénomènes de percolation" jusqu'ici utilisés en physique du solide.

Nous interprétons, à l'aide de ces théories les courbes d'injection de mercure et pression capillaire en montrant l'importance de la géométrie du système utilisé pour l'interprétation de ces courbes.

Nous montrons comment les théories de percolation expliquent l'existence d'un cycle d'hystérésis dans les courbes de pression capillaire en drainage puis, imbibition, l'existence d'une saturation résiduelle en fluide mouillant et d'une saturation irréductible en fluide non mouillant, et la présence de seuils de perméabilité relative en fluide mouillant et en fluide non mouillant.

Les résultats obtenus ne sont, pour l'instant, que qualitatifs, les probabilités de percolation utilisées en physique du solide ayant besoin d'être recalculées avec les conditions aux limites, habituelles dans l'étude des courbes de pression capillaire.

La quatrième partie, enfin, est consacrée à l'étude de la perméabilité hydraulique d'un milieu poreux et à la façon d'en tirer une analogie électrique permettant d'obtenir une méthode de mesure de cette perméabilité.

Après avoir montré que les équations microscopiques de l'écoulement d'un fluide visqueux dans un capillaire étaient différentes de celles de l'électrocinétique alors que les formulations macroscopiques de la loi d'Ohm et de la loi de Darcy étaient identiques, nous montrons l'analogie qui existe entre la vitesse locale de l'écoulement d'un fluide dans un capillaire et le potentiel vecteur réduit, à l'intérieur d'un conducteur de même forme et de grande perméabilité magnétique soumis à un gradient externe de potentiel.

Cette analogie magnétostatique n'étant pas susceptible de conduire à une méthode de mesure macroscopique de la perméabilité, nous établissons une seconde analogie entre phénomènes magnétostatiques et magnétodynamiques qui permet, cette fois, par l'intermédiaire de la mesure du flux d'induction de retrouver la perméabilité équivalente au milieu poreux.

Nous donnons alors le principe d'une méthode de diagraphie de perméabilité qui nécessite l'introduction dans les pores de la roche d'un milieu de perméabilité magnétique grande pouvant être constitué de particules de ferrite mêlées à la boue de forage.

Dans cette étude, nous nous sommes volontairement attachés au cas particulier des milieux poreux et à leur utilisation dans le domaine pétrolier.

Il est certain que les méthodes utilisées peuvent être transposées à d'autres phénomènes de transport dans des matériaux de structure aléatoire et à l'étude d'autres coefficients macroscopiques tels que la conductivité thermique, le module d'Young, etc....

Nous pensons en outre, qu'il est nécessaire d'étendre le formalisme des "phénomènes de percolation" à l'ensemble des domaines physiques où ils peuvent intervenir, car ils sont susceptibles, non seulement d'expliquer des résultats connus, mais aussi de prévoir l'existence de seuils dont on connaît mal, actuellement, la position, et qui sont de première importance, s'il s'agit par exemple de seuils de rupture.

Comme nous le précisons dans l'introduction, ce travail ne résout qu'une partie des problèmes posés mais, par la mise au point de méthodes approchées de calcul dans des domaines où les solutions exactes sont peu probables il permet une prévision, parfois excellente, du comportement macroscopique des phénomènes étudiés.

Les résultats obtenus sont essentiellement théoriques car nous n'avons pas la possibilité de mener à bien les expérimentations nécessaires pour les corroborer, cependant, à chaque fois que c'était possible, nous les avons comparés à des résultats expérimentaux tirés de la littérature qui montrent que, dans bien des cas, nos prévisions rejoignent la réalité et permettent parfois d'expliquer des comportements expérimentaux qui n'avaient pas reçu jusqu'ici de justifications théoriques.

On peut faire aux réseaux que nous utilisons le reproche de n'être que des modèles imparfaits d'une réalité physique complexe : nous pensons avoir montré que, dans bien des cas, le nombre de paramètres utiles pour l'explication des phénomènes réels est suffisamment petit pour qu'ils puissent être transposés en réseaux pour lesquels nous avons donné des méthodes de calcul générales permettant avec une précision souvent suffisante, d'en obtenir la conductance équivalente. Les réseaux présentent, en outre l'intérêt de pouvoir être étudiés dans le cadre des phénomènes de percolation.

L'étude des milieux de structure aléatoire n'en est encore qu'à ses débuts faute d'un formalisme mathématique adéquat et de la grande diversité des phénomènes physiques dont ils peuvent être le siège.

En introduisant la théorie statistique des graphes appliquée aux réseaux et la théorie des phénomènes de percolation appliquée aux milieux poreux, nous pensons avoir facilité en partie cette étude et nous espérons que d'autres domaines que ceux que nous avons étudiés, pourront tirer profit des méthodes que nous avons utilisées.

## ANNEXE 1

### PRINCIPES D'ERGODICITE

---

La théorie ergodique est habituellement appliquée à des phénomènes aléatoires stationnaires dans le temps et permet d'identifier des moyennes temporelles avec des moyennes en probabilité [A1.1] [A1.2].

Ainsi, si  $n(t)$  est une fonction aléatoire du temps  $t$ , l'espérance mathématique de  $n(t)$  peut être obtenue en faisant la moyenne d'un nombre très grand d'échantillons  $n(t_1), n(t_2) \dots n(t_k)$  pris à des instants  $t_1, t_2 \dots t_k$  suffisamment espacés pour que les valeurs des échantillons  $n(t_i)$  puissent être considérées comme indépendantes.

$$E[n(t)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k n(t_i)$$

Si on dispose de plusieurs processus identiques  $n_1(t), n_2(t) \dots n_k(t)$ , indépendants mais de même loi, ou bien de plusieurs "enregistrements" du processus  $n(t)$ , on peut de même, pour une valeur  $t_1$  de la variable temps obtenir

$$E[n(t_1)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k n_i(t_1)$$

On peut calculer la même espérance pour un autre instant  $t_2 \dots$  etc et si le processus est stationnaire on a

$$E[n(t_1)] = E[n(t_2)] = \dots = E[n(t)]$$

La moyenne temporelle  $\overline{n(t)}$  sera obtenue en intégrant sur un intervalle  $T$  très grand,  $n(t)$

$$\overline{n(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} n(t) dt$$



Ici encore si le processus est stationnaire,  $\overline{n(t)}$  est indépendant de l'instant d'origine  $t_0$ .

Enfin on dit que le processus est ergodique s'il y a identité entre les moyennes temporelles et l'espérance probabiliste c'est-à-dire si

$$\overline{n(t)} = E[n(t)]$$

Ici nous ne nous intéressons pas à des phénomènes fonction du temps mais à des phénomènes spatiaux et il faut transposer les définitions précédentes.

La notion de stationnarité peut être aisément transposée en homogénéité pour des phénomènes spatiaux.

L'homogénéité suppose en effet que les propriétés statistiques d'un échantillon d'un milieu aléatoire sont indépendantes de la position de cet échantillon dans le milieu.

On peut ajouter l'isotropie du milieu qui suppose que les propriétés statiques d'un échantillon sont indépendantes de son orientation. Il n'y a pas d'équivalent à l'isotropie pour les phénomènes temporels car le temps est unidimensionnel. Quant à l'ergodicité d'un milieu aléatoire elle suppose l'existence d'un milieu d'étendue infinie puisque la variable temps étant remplacée par une variable d'espace, les moyennes temporelles prises sur des intervalles infiniment longs devront être remplacées par des moyennes spatiales prises sur des longueurs, des surfaces ou des volumes infiniment grands.

Nous allons sur un exemple se rapportant aux milieux poreux, effectuer la transposition entre un phénomène temporel ergodique et un phénomène spatial ergodique.

Imaginons un milieu poreux, homogène et isotrope, taillé en forme de prisme infiniment long de section carrée unité.

Si on coupe ce milieu par un plan perpendiculaire à l'axe du prisme, ce plan rencontre et coupe un nombre  $n$  de "pores" disjoints c'est-à-dire de parties non solides du milieu (Fig. 1). Ce nombre  $n$  est une variable aléatoire qui dépend de la position du plan.

Déplaçons selon l'abscisse  $x$  ce plan : on obtient le processus aléatoire  $n(x)$  dont la figure A1.1 donne une illustration, et qui est une transposition de  $n(t)$  où  $x$  joue le rôle de  $t$ .

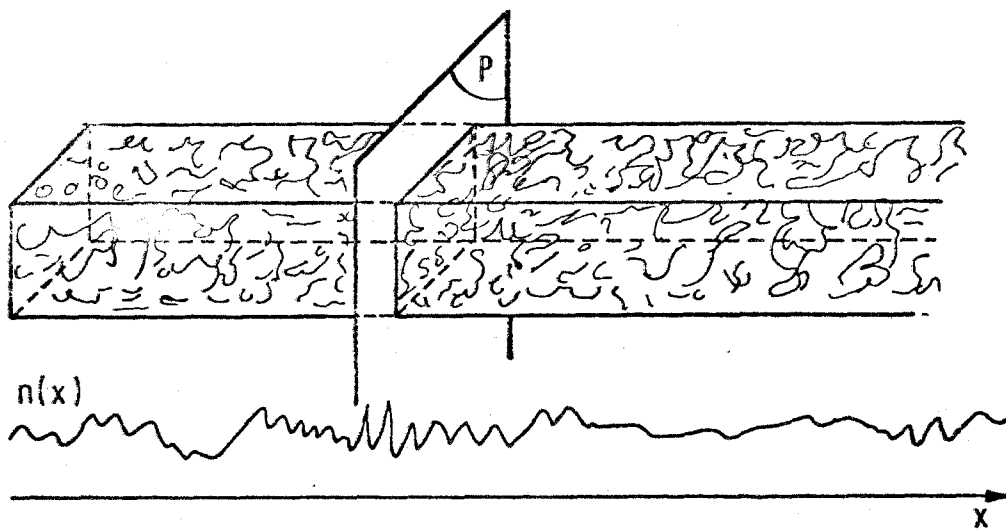


Figure A1.1

La moyenne probabiliste de  $n(x)$  sera obtenue en positionnant le plan à des abscisses  $x_1, x_2, \dots, x_k$  suffisamment espacées à l'échelle des pores pour que les grandeurs  $n(x_1), n(x_2), \dots, n(x_k)$  puissent être supposées indépendantes.

En faisant la moyenne des  $k$  échantillons obtenus et si  $k$  est très grand on obtient :

$$E[n(x)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k n_i(x_i)$$

Si le milieu poreux est homogène, on peut couper les  $k$  prismes à d'autres abscisses  $x_2, x_3, \dots$  on obtiendra :

$$E[n(x_1)] = E[n(x_2)] = \dots = E[n(x)]$$

Quant à la moyenne spatiale, elle est obtenue en déplaçant le plan  $x$  de façon continue sur une distance  $X$  tendant vers l'infini

$$\overline{n(x)} = \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{X} \int_0^X n(x) dx$$

Dire que le milieu poreux est homogène et ergodique revient à poser :

$$\overline{n(x)} = E[n(x)] = E[n(x_1)]$$

Les propriétés d'homogénéité du milieu, permettent de juxtaposer les  $k$  tranches prismatiques de section unité pour constituer un prisme de section  $k$  qui constituera encore un milieu homogène (Fig. A1.2).

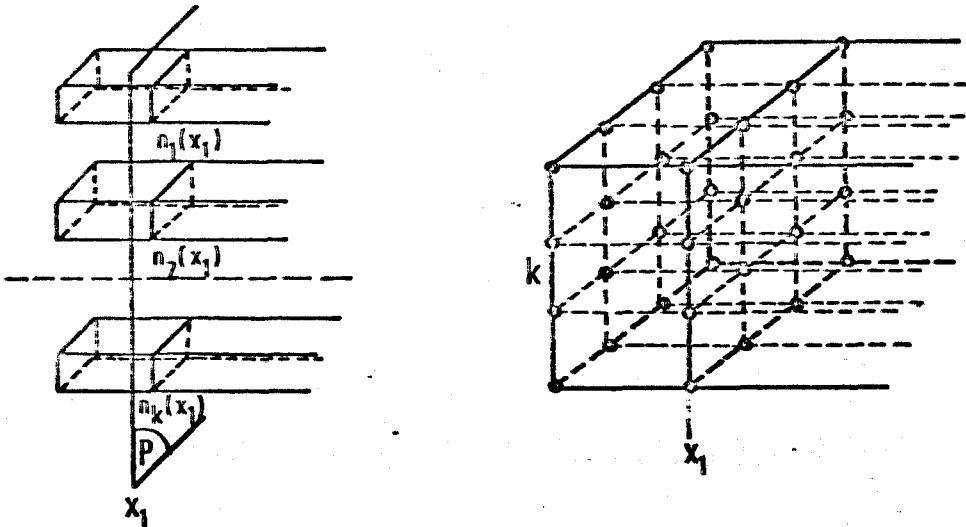


Figure A1.2

L'intersection de cet ensemble de prismes accolés par le plan  $P$  situé à l'abscisse  $x_1$  donne alors comme nombre de pores rencontrés :

$$N(x_1) = n_1(x_1) + n_2(x_1) + \dots + n_k(x_1)$$

et quand le nombre  $k$  de prismes accolés devient très grand on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N(x_1)}{k} = \frac{N(x_1)}{S} = E[n(x)] = \overline{n(x)}$$

Ainsi pour un milieu poreux homogène et ergodique il est équivalent de calculer le nombre moyen de pores coupés par unité de surface :

- en déplaçant un plan selon  $x$  dans un prisme de section unité : on obtient alors la moyenne spatiale  $\overline{n(x)}$
- en coupant par un plan quelconque un milieu de section  $S$  grande et en évaluant le nombre de pores coupés par unité de surface de ce plan,  $\frac{N(x_1)}{S}$ , qui doit être indépendant de

l'abscisse  $x_1$  si le milieu est homogène.

## ANNEXE 2

### PROBABILITES GEOMETRIQUES

#### I.- SYNTHÈSE DES RESULTATS EXISTANTS

Les probabilités géométriques sont une partie de la théorie des probabilités relativement peu développées mais qui semble trouver un regain d'intérêt si on en juge par quelques publications récentes [A2.4]-[A2.8][A2.10] traitant d'ensembles aléatoires.

Comme son nom l'indique, la théorie des probabilités géométriques se propose -dans les cas les plus simples- de déterminer la probabilité de certains événements liés à la rencontre aléatoire de plusieurs êtres géométriques et dans les cas plus complexes d'évaluer la moyenne, ou certains moments, voire la loi de distribution de la "mesure" de l'intersection de plusieurs êtres géométriques.

La théorie des probabilités géométriques est jalonnée des travaux des mathématiciens suivants : CROFTON, DELTHEIL (1936) [A2.1], KENDALL-MORAN (1963) [A2.2], MILES (1964)-(1975) [A2.3]-[A2.8], MATHERON (1975) [A.2.10]

Les applications pratiques des théories précédentes ont été peu nombreuses mais elles se sont révélées fructueuses. On peut citer : CHALKLEY, CORNFIELD, PARK [A2.11] qui appliquent à la numération globulaire les résultats théoriques de CROFTON sur la surface spécifique d'un corps, PEREZ-ROSALES [A2.12]-[A2.14] qui, prolongeant les résultats de CHALKLEY et al., trouve une méthode d'étude de milieux poreux en lame mince au microscope permettant de déduire la porosité, la surface spécifique, la largeur moyenne des pores etc... par voie statistique. MILES [A2.3] applique ses propres résultats sur les polygones formés par des droites enchevêtrées sur un plan, à la structure fibreuse du papier. PIEKAAR et CLARENBURG [A2.15] utilisent les résultats de MILES, pour l'étude de filtres pour aérosols et déterminent que la distribution des surfaces de pores est sensiblement log normale.

Enfin MATHERON [A2.9] partant d'une étude de lames minces de milieux poreux tente de rattacher un certain nombre de propriétés du milieu poreux à des moyennes qu'on peut obtenir par l'étude statistique automatique de lames minces à l'aide d'un "analyseur de structures" (DELFINER, ETIENNE, FONCK [A2.16]).

Dans ce qui suit, nous rappelons un certain nombre de résultats connus que nous modifions pour obtenir quelques relations nouvelles qui nous seront utiles.

Donnons d'abord le résultat original de CROFTON.

Soit un contour fermé de périmètre  $P$  entourant une surface  $S$  situé sur un plan : si on jette au hasard des droites indéfinies sur la surface, la longueur  $\lambda$  de la corde interceptée est en moyenne :

$$E(\lambda) = \frac{\pi S}{P} = \frac{\pi}{P_s} \quad (\text{A2.1})$$

en notant  $P_s$  le périmètre spécifique de la surface  $S$ , c'est-à-dire son périmètre par unité de surface.

Ce résultat de CROFTON est établi pour des figures convexes du plan.

CHALKLEY et al. [A2.11] étendent ce résultat à des figures planes convexes ou non, en considérant, au lieu de droites indéfinies, des segments de droite de longueur  $L$ , jetés au hasard : si  $h$  est le nombre de fois où une extrémité du segment tombe à l'intérieur de la surface et  $c$  le nombre de fois où le segment coupe le contour, on a après un grand nombre de jets.

$$L \frac{h}{c} = \frac{\pi S}{P} = \frac{\pi}{P_s} \quad (\text{A2.3})$$

Cette méthode appliquée en trois dimensions à un volume  $V$  de surface externe  $S$  donne :

$$L \frac{h}{c} = \frac{4V}{S} = \frac{4}{S_s} \quad (\text{A2.4})$$

en notant  $S_s$  la surface spécifique du volume  $V$ , c'est-à-dire la surface par unité de volume.

Jeter au hasard un segment  $L$  dans un volume, est identique au fait de couper le volume au hasard par un plan  $P$  puis jeter le segment  $L$  sur le plan.

A chaque fois que le segment  $L$  est intérieur au volume il est intérieur au contour découpé par le volume sur le plan. Il en est de même à chaque fois que le segment coupe le volume : Il est alors extérieur au contour.

Le rapport  $Lh/c = 4V/S$  est donc aussi égal à  $\pi/\overline{P_s}$ ,  $\overline{P_s}$  étant le périmètre spécifique moyen des surfaces découpées par le plan aléatoire  $P$  sur le volume  $V$ ,

$$L \frac{h}{c} = \frac{4V}{S} = \frac{4}{S_s} = \frac{\pi}{E\left(\frac{P}{S}\right)} = \frac{\pi}{\overline{P_s}} \quad (\text{A2.5})$$

S'il n'y a plus un seul volume mais un ensemble de volumes  $V_i$  et des surfaces  $S_i$  disjoints, on aura encore :

$$L \frac{h}{c} = \frac{4 \sum V_i}{\sum S_i} = \frac{4}{S_s} \quad (A2.6)$$

en considérant  $\sum V_i$  comme le volume total dont  $\sum S_i$  est la surface.

En deux dimensions pour un ensemble de contours plans de périmètre  $P_i$  et de surface  $S_i$ , on a de même :

$$L \frac{h}{c} = \pi \frac{\sum S_i}{\sum P_i} = \frac{4}{P_s} \quad (A2.7)$$

## II.- APPLICATION DES RESULTATS PRECEDENTS A DES RESEAUX ALEATOIRES

Nous allons appliquer les résultats précédents au cas particulier de milieu aléatoire que constituent des réseaux aléatoires en deux ou trois dimensions.

### RESEAU PLAN

Considérons d'abord un réseau plan (Fig. A2.1) Réseau I : ses branches et ses nœuds constituent une mosaïque de polygones, considérons les, pour les besoins de la démonstration légèrement disjoints de façon que toutes les branches soient dédoublées (fig. A2.2) (Réseau II).

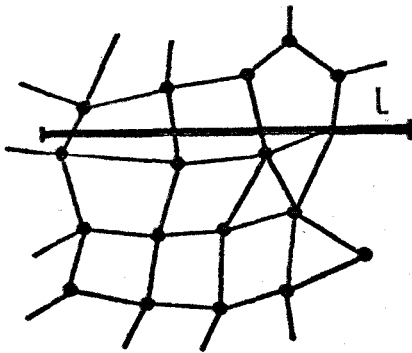


Figure A2.1  
Réseau I

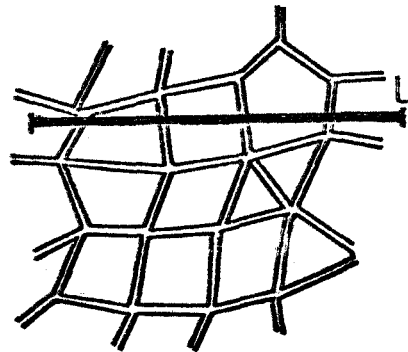


Figure A2.2  
Réseau II

Posons un segment de longueur  $L$  sur le réseau dont la structure est supposée aléatoire : soit  $n$  le nombre de branches que coupe  $L$  dans le réseau I, le nombre de branches coupées sera  $2n$  dans le réseau 2.

Considérons le réseau II comme un assemblage de surfaces sur un plan et appliquons lui les résultats de CHALKLEY : Dans un grand nombre  $N$  de jets de la ligne  $L$ , si  $n_i$  est le nombre de branches coupées dans le réseau I, le nombre de coupures du contour des surfaces du réseau II est :

$$c = \sum_{i=1}^N 2n_i$$

Les contours étant aussi rapprochés que l'on veut, à chaque jet de la ligne L ses deux extrémités tombent dans des surfaces et on a donc, avec les définitions précédentes :  $h = 2N$

On obtient donc après un grand nombre N de jets d'après la formule (7) :

$$\frac{\pi \sum S_j}{\sum P_j} = L \frac{h}{c} = L \cdot \frac{2N}{2 \sum_{i=1}^N n_i} = \frac{L}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i} = \frac{L}{E(n_i)} \quad (\text{A2.8})$$

$\sum S_j$  qui représente la somme de toutes les surfaces des polygones est égale à la surface du réseau puisque les polygones sont infiniment proches.  $\sum P_j$  somme des périmètres des polygones est égal à deux fois la longueur de toutes les branches du réseau puisqu'elles ont été dédoublées.

On a donc en notant  $L_B$  la longueur totale des branches

$$\frac{\pi S}{2L_B} = \frac{L}{E(n_i)} \quad (\text{A2.9})$$

Si le réseau est inscrit dans un carré de côté L et de surface  $L^2$  (9) devient :

$$E(n_i) = \frac{2L_B}{\pi L} \quad (\text{A2.10})$$

Si le réseau comporte B branches, la longueur moyenne d'une branche est :

$$\bar{l}_B = \frac{L_B}{B}$$

et (10) s'écrit :

$$E(n_i) = \frac{2B\bar{l}_B}{\pi L} \quad (\text{A2.11})$$

On peut encore introduire la densité de branches par unité de surface b :

$$b = \frac{B}{S}$$

et (10) s'écrit encore :

$$E(n_i) = \frac{2b \bar{l}_B \cdot L}{\pi} \quad (\text{A2.12})$$

### RESEAU TRIDIMENSIONNEL

Reprenons cette démonstration pour un réseau tridimensionnel inscrit dans un volume V.

Les branches du réseau constituent les arêtes de polyèdres adjacents - séparons les encore en dédoublant leurs faces communes.

Si on jette une ligne L dans le réseau un nombre N de fois, le nombre de coupures de faces de polyèdres est :

$$c = 2 \sum_{i=1}^N m_i$$

Le nombre de fois où les extrémités de la ligne tombent à l'intérieur des polyèdres est encore :  $h = 2N$   
 et la surface spécifique des polyèdres est :

$$\frac{4\sum V_i}{\sum S_i} = L \frac{h}{c} = L \frac{2N}{2\sum m_i} = \frac{L}{E(m)}$$

d'où on déduit :

$$E(m) = \frac{L\sum S_i}{4\sum V_i} = \frac{L \cdot S_f}{2V} \quad (A2.13)$$

où  $S_f$  est la surface de toutes les faces de polyèdres du volume  $V$ . Si le volume  $V$  est un cube d'arête  $L$  et de volume  $L^3$ , on a :

Coupons maintenant le réseau tridimensionnel par un plan  $P$ , l'intersection des polyèdres avec le plan dessinera sur celui-ci une mosaïque pleine de polygones adjacents similaire à celle des figures 1 et 2 : les traces des branches coupées sur le plan constituent les nœuds du réseau plan, les faces des polyèdres coupés donnent les branches.

$$E(m) = \frac{S_f}{4L^2} \quad (A2.14)$$

Le nombre de branches coupées par le plan  $P$  est donc égal au nombre de nœuds dans le réseau plan induit sur  $P$ .

Nous allons obtenir ce nombre de branches coupées en considérant les branches intérieures au volume  $V$  comme des segments aléatoirement répartis en position et en orientation - hypothèse raisonnable puisque nous supposons le réseau tridimensionnel de structure aléatoire.

Supposons pour simplifier que toutes les branches ont même longueur  $l$ , soit  $S$  la surface externe du volume  $V$ ,  $h$  le nombre d'extrémités de branches intérieures au volume et  $c$  le nombre de branches qui coupent la surface externe  $S$ , en appliquant la formule de CHALKLEY (5) on obtient :

$$l \frac{h}{c} = \frac{4V}{S} \quad (A2.15)$$

et le nombre de coupures de la surface  $S$  par unité de surface est donc :

$$\frac{c}{S} = \frac{lh}{4V} \quad (A2.16)$$

s'il y a  $B$  branches dans le volume  $V$  on a :  $h = 2B + c$

car les  $c$  branches qui ont coupé la surface externe  $S$  avaient une extrémité à l'intérieur.

Si le volume est suffisamment grand, on peut négliger  $c$  vis-à-vis de  $h$ , car  $c$  est proportionnel à la surface externe,  $h$  au volume interne et :

$$\frac{c}{h} \approx \frac{S}{V} = \frac{L^2}{L^3} = \frac{1}{L} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$



on a donc  $h \neq 2B$  et (16) s'écrit :

$$\frac{c}{S} = \frac{2B1}{4V} = \frac{L_B}{2V} \quad (A2.17)$$

où  $L_B = 1.B$  est la longueur totale des branches dans le volume  $V$ .

Si on appelle  $\lambda_V$  la longueur de branches par unité de volume :

$$\lambda_V = \frac{L_B}{V} \quad (A2.18)$$

on obtient pour le nombre de coupures par unité de surface :

$$\gamma_S = \frac{c}{S} = \frac{\lambda_V}{2}$$

Les branches étant réparties de façon isotrope dans le volume  $V$ , la densité  $\gamma_S$  des coupures par unité de surface est la même pour tout plan de coupe.

Si le volume  $V$  est un cube de volume  $L^3$  et si les plans de coupe sont parallèles aux faces de surface  $L^2$ , le nombre moyen de coupures par un plan est :

$$c = E(n) = \gamma_S \cdot L^2 = \frac{\lambda_V}{2} L^2 = \frac{L_B}{2L^3} \cdot L^2 = \frac{L_B}{2L}$$

D'où les relations :

$$E(n) = \frac{L_B}{2L} = \frac{B\bar{1}_B}{2L} = \frac{b\bar{1}_B}{2L^2} \quad (A2.19)$$

où on a posé cette fois :

$$b = \frac{B}{L^3} = \text{densité de branches par unité de volume.}$$

## ANNEXE 3

### MOYENNES ARITHMETIQUES, GEOMETRIQUES, HARMONIQUES

---

#### I. - PROPRIETES DES MOYENNES ARITHMETIQUES, HARMONIQUES, GEOMETRIQUES POUR DISTRIBUTIONS QUELCONQUES

La moyenne la plus utilisée en statistique est la moyenne arithmétique qui se confond avec l'espérance mathématique de la variable aléatoire.

La plupart des ouvrages de statistiques et probabilités ([A3.1] à [A3.10]) ne définissent que la moyenne arithmétique et ignorent totalement les moyennes harmoniques et géométriques.

Seuls quelques ouvrages [A3.11][A3.12] définissent la moyenne géométrique et la moyenne harmonique mais les propriétés énoncées en sont peu nombreuses.

Nous noterons dans ce qui suit pour simplifier l'écriture :

$\bar{x}^A$  = moyenne arithmétique de la variable  $x$ ,

$\bar{x}^H$  = moyenne harmonique de la variable  $x$ ,

$\bar{x}^G$  = moyenne géométrique de la variable  $x$ .

Les définitions de ces moyennes sont, respectivement pour des distributions discrètes et pour des densités de probabilité continues de variables  $x$  positives :

$$\bar{x}^A = E(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \int_0^{\infty} x f(x) dx \quad (A3.1)$$

$$\text{Log } (\bar{x}^G) = E(\text{Log } x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Log } x_i = \int_0^{\infty} \text{Log } x f(x) dx \quad (A3.2)$$

soit encore :

$$\bar{x}^G = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} = e^{\int_0^{\infty} \text{Log } x f(x) dx} \quad (A3.3)$$

$$\bar{x}^H = \frac{1}{E(1/x)} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1/x_i)} = \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \quad (A3.4)$$

La relation "classique" entre ces moyennes est: (A3.5)

$$\frac{1}{x^H} \leq \frac{1}{x^G} \leq \frac{1}{x^A} \quad (A3.5)$$

il n'y a égalité que si la distribution de  $x$  est concentrée en un point c'est-à-dire si tous les  $x_i$  sont égaux.

#### IV.- DISTRIBUTIONS "LOG-SYMETRIQUES" - LEURS PROPRIETES

Nous dirons que la fonction de distribution d'une variable aléatoire  $x$  est "log-symétrique" si la fonction de distribution de la variable  $y = \text{Log } x$  est symétrique.

Soit  $dF = f(y) dy$  la densité de probabilité de  $y = \text{Log } x$ , on peut écrire en revenant à la variable  $x$  :

$$dF = f(\text{Log } x) \frac{dx}{x} = g(x) dx \quad (A3.6)$$

Si la distribution  $f(y)$  est symétrique par rapport à une valeur  $y_0$ , on a :

$$f(y) = f(2y_0 - y)$$

$$\text{ou } f(y_0 + \alpha) = f(y_0 - \alpha) \quad (A3.7)$$

et la distribution  $x g(x) = f(\text{Log } x) = f(y)$  est également symétrique par rapport à la valeur  $x_0$  telle que  $y_0 = \text{Log } x_0$ .

$y_0$  est moyenne arithmétique de la distribution  $f(y)$  et  $x_0$  est moyenne géométrique de la distribution  $g(x)$  en effet, :

$$y_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y) dy = \int_0^{\infty} \text{Log } x \frac{f(\text{Log } x)}{x} dx = \int_0^{\infty} \text{Log } (x) g(x) dx = \text{Log } x_0 \quad (A3.8)$$

Montrons maintenant que si une distribution est log-symétrique sa moyenne géométrique est moyenne géométrique de sa moyenne arithmétique et de sa moyenne harmonique.

La distribution étant log-symétrique on a d'après (7) :

$$f(y_0 + \alpha) = f(y_0 - \alpha) \quad \text{avec } y_0 = \text{Log } x_0 = \frac{1}{y}$$

Posons :  $\alpha = \text{Log } k$ , on obtient :

$$f(\text{Log } x_0 + \text{Log } k) = f(\text{Log } k x_0) = f(\text{Log } x - \text{Log } k) = f(\text{Log } \left(\frac{x_0}{k}\right))$$

et en remplaçant  $f(\text{Log } x)$  par  $x g(x)$  d'après (6) on obtient :

$$k x_0 g(k x_0) = \frac{x_0}{k} g\left(\frac{x_0}{k}\right)$$

soit :

$$g(k x_0) = \frac{1}{k^2} g\left(\frac{x_0}{k}\right) \quad (A3.9)$$

La moyenne arithmétique  $\bar{x}^A$  de  $g(x)$  est :

$$\bar{x}^A = \int_0^{\infty} x g(x) dx \quad (A3.10)$$

Posons  $x = yx_0$ , (10) s'écrit alors :

$$\bar{x}^A = \int_0^{\infty} yx_0 g(yx_0)x_0 dy = x_0^2 \int_0^{\infty} y g(yx_0) dy \quad (A3.11)$$

Si on remplace  $g(yx_0)$  par  $g(x_0/y) / y^2$  tiré de (9), (11) devient :

$$\bar{x}^A = x_0^2 \int_0^{\infty} \frac{g(x_0/y)}{y} dy \quad (A3.12)$$

Posons alors  $x' = x_0/y$ , (12) s'écrit :

$$\bar{x}^A = x_0^2 \int_0^{\infty} \frac{x' g(x')x_0 dx'}{x_0 x'^2} = x_0^2 \int_0^{\infty} \frac{g(x') dx'}{x'} \quad (A3.13)$$

et comme par définition de la moyenne harmonique on a :

$$\frac{1}{\bar{x}^H} = \int_0^{\infty} \frac{g(x) dx}{x}$$

on obtient finalement :

$$\boxed{\bar{x}^A \cdot \bar{x}^H = x_0^2 = (\bar{x}^G)^2} \quad (A3.14)$$

D'où le théorème :

**THEOREME** : *La moyenne géométrique d'une distribution log symétrique est moyenne géométrique de la moyenne arithmétique et de la moyenne harmonique de cette distribution.*

THEORIE DES GRAPHES APPLIQUEE  
AUX RESEAUX ELECTRIQUES (\*\*)

---

I.- DEFINITIONS

On appelle graphe d'un réseau électrique, l'ensemble des B branches (qui portent des résistances ou des générateurs) et des N nœuds (qui les connectent).

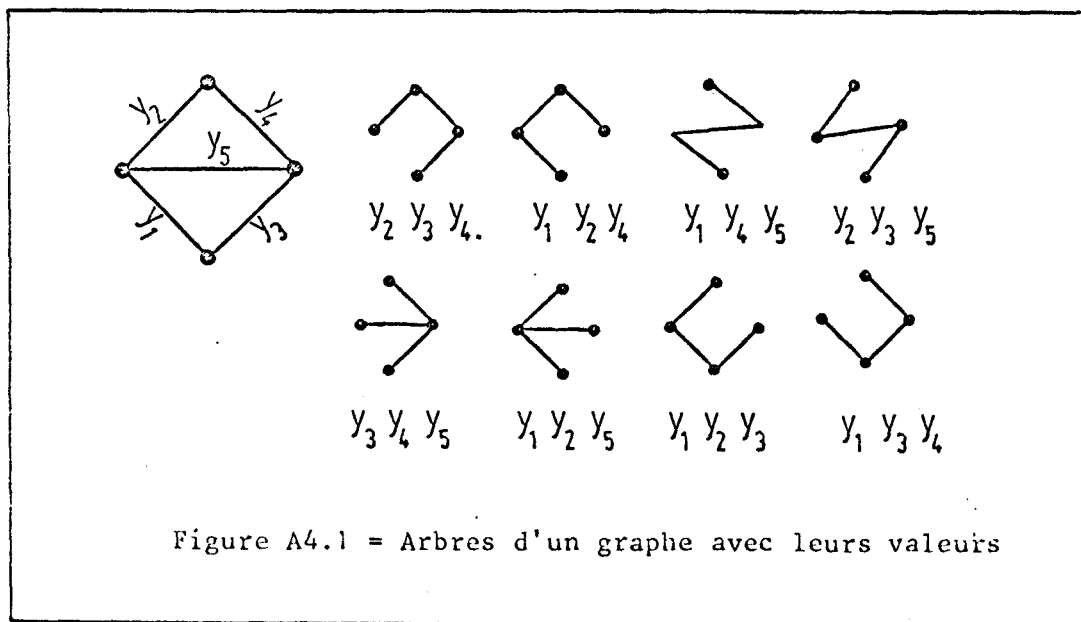
La valeur d'une branche est selon le cas égale à l'impédance ou à l'admittance qu'elle supporte.

Un arbre d'un graphe de N nœuds est un ensemble de (N-1) branches joignant tous les nœuds du graphe sans former de chemin fermé (cycle).

On appelle cordes d'un arbre les B-N+1 branches qui n'appartiennent pas à cet arbre.

Nous appellerons valeur d'un arbre le produit des admittances de ses (N-1) branches.

La figure A4.1 montre les arbres du graphe d'un réseau simple avec leurs valeurs.



(\*\*) Nous ne donnons ici que des résultats essentiels pour la compréhension de notre méthode de calcul. Pour un exposé plus complet, nous renvoyons le lecteur aux références [A4.1][A4.2][A4.3].

## II.- MATRICE DES ADMITTANCES DE NŒUDS

Soit un réseau de  $N$  nœuds dont les nœuds numérotés  $N-1$  et  $N$  sont reliés à un générateur de courant d'impédance interne infinie.

On appelle matrice des admittances de nœuds  $Y^{(*)}$  une matrice carrée, symétrique de  $N-1$  lignes et colonnes dont les termes diagonaux  $Y_{ii}$  représentent la somme des admittances aboutissant au nœud  $i$  et dont les termes  $Y_{ij}$  sont négatifs et représentent les admittances reliant le nœud  $i$  au nœud  $j$ .

Les lois de Kirchoff s'écrivent sous forme matricielle :

$$(J) = (Y) (V) \quad (A4.1)$$

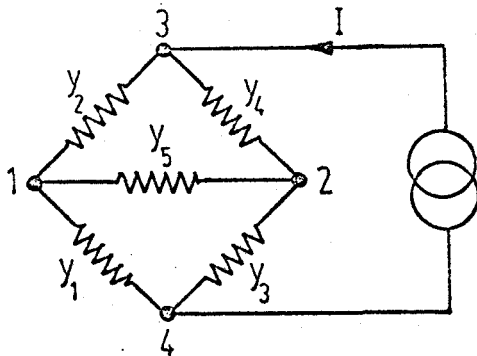
où  $(J)$  est une matrice colonne des courants de source de nœuds dont l'élément  $J_{,k}$  représente le courant de source injecté au nœud  $k$ .

Dans le cas présent, la seule source de courant étant reliée aux nœuds  $N-1$  et  $N$  ( $N$  est pris comme référence), on a :

$$J_k = I \delta_{k,N-1} \quad (A4.2)$$

$(V)$  est la matrice colonne des tensions de nœuds,  $V_j$  est donc la tension du nœud  $j$  prise par rapport au nœud  $N$  de référence.

La figure A4.2 montre un réseau simple à 4 nœuds et l'équation  $(J) = (Y)(V)$  correspondante :



$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_5 & -Y_5 & -Y_2 \\ -Y_5 & Y_3 + Y_4 + Y_5 & -Y_4 \\ -Y_2 & -Y_4 & Y_2 + Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{14} \\ V_{24} \\ V_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Figure A4.2 : Matrice  $Y$  des admittances de nœuds

Les tensions de nœud sont obtenues par inversion de la matrice  $Y$  :

$$(V) = (Y)^{-1} (J) \quad (A4.3)$$

En particulier, la tension du nœud  $N-1$  par rapport au nœud de référence  $N$  est donnée par :

(\*\*) Cette matrice est habituellement notée  $(Y_N)$  dans les ouvrages de théorie des graphes appliquée aux réseaux électriques. Comme nous n'employons que cette matrice nous la notons  $(Y)$  pour simplifier.

$$V_{N-1,N} = \frac{Y_{N-1,N-1}}{|Y|} \cdot I \quad (A4.4)$$

où  $|Y|$  est le déterminant de la matrice  $Y$  et  $Y_{N-1,N-1}$  le mineur de  $(Y)$  obtenu en rayant la  $(N-1)^{\text{ème}}$  ligne et la  $(N-1)^{\text{ème}}$  colonne de  $Y$ .

La résistance équivalente du réseau entre les nœuds  $N-1$  et  $N$  est donc :

$$R_{eq} = \frac{V_{N-1,N}}{J} = \frac{Y_{N-1,N-1}}{|Y|} \quad (A4.5)$$

#### IV.- CALCUL DE LA RESISTANCE EQUIVALENTE DU RESEAU A PARTIR DES VALEURS DE SES ARBRES.

Un certain nombre de théorèmes ont été établis [A4.1][A4.2][A4.3] qui permettent de calculer les déterminants  $Y_{N-1,N-1}$ ,  $|Y|$ , à partir des valeurs des arbres du réseau.

THEOREME 1 : Le déterminant  $|Y|$  de la matrice des admittances de nœuds d'un réseau sans impédances mutuelles est égal à la somme des valeurs des arbres du réseau.

THEOREME 3 : Le mineur  $Y_{jj}$  de la matrice des admittances de nœuds s'obtient à partir du réseau "replié" obtenu en court circuitant le nœud  $j$  au nœud de référence : il est égal à la somme des valeurs des arbres de ce réseau "replié".

On peut déduire de ce qui précède la résistance équivalente vue entre les bornes  $N$  et  $N-1$ ,

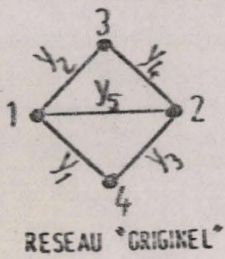
$$R_{eq} = \frac{Y_{N-1,N-1}}{|Y|} = \frac{\text{somme des valeurs des arbres du réseau "replié"}}{\text{somme des valeurs des arbres du réseau "originel"}} \quad (A4.6)$$

Si on appelle  $T$  le nombre d'arbres du réseau originel,  $T'$  le nombre d'arbres du réseau replié, et si on note  $V_k$  la valeur d'un arbre du réseau originel,  $V'_1$  la valeur d'un arbre du réseau replié

$$R_{eq} = \frac{Y_{N-1,N-1}}{|Y|} = \frac{\sum_{l=1}^{T'} V'_1}{\sum_{k=1}^T V_k} = \frac{\sum_{l=1}^{T'} \sum_{j=1}^{N-2} (\pi_{g_{jl}})}{\sum_{k=1}^T \sum_{i=1}^{N-1} (\pi_{g_{ik}})} \quad (A4.7)$$

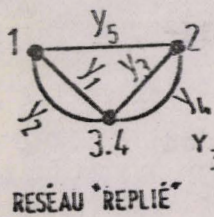
Les  $g_{jl}$  et  $g_{ik}$  sont des conductances du réseau appartenant respectivement aux arbres du réseau "replié", et aux arbres du réseau "originel".

La figure A4.3 illustre le calcul de Req par ces deux méthodes pour le réseau de la figure A4.2



$$|Y| = Y_2 Y_3 Y_4 + Y_1 Y_2 Y_4 + Y_1 Y_4 Y_5 + Y_2 Y_3 Y_5 + Y_1 Y_2 Y_5 + Y_1 Y_2 Y_3 + Y_1 Y_3 Y_4$$

(somme des valeurs des arbres de la figure A4.1)



$$Y_{33} = Y_1 Y_5 + Y_2 Y_5 + Y_3 Y_5 + Y_4 Y_5 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_4 + Y_2 Y_3 + Y_1 Y_4$$

$$R_{eq} = \frac{Y_{33}}{|Y|}$$

Figure A4.3 : Calcul de la résistance équivalente au réseau



## DISTRIBUTIONS HYPERGEOMETRIQUES

I. - DISTRIBUTION HYPERGEOMETRIQUE A UNE DIMENSION

Soit une population de  $N$  éléments comportant deux types d'éléments  $x_1$  et  $x_2$  en proportions respectives  $p_1$  et  $p_2 = 1 - p_1$ .

On tire de cette population un échantillon de  $n$  éléments et on cherche la probabilité d'avoir  $k$  éléments  $x_1$  dans cet échantillon.

Le nombre de façons de prélever  $n$  éléments distincts parmi  $N$  est donné par le coefficient binomial.

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n! (N-n)!} \quad (A5.1)$$

Le nombre d'éléments  $x_1$  dans la population est  $Np_1$  et le nombre d'éléments  $x_2$  est  $Np_2$ .

$k$  éléments  $x_1$  peuvent être choisis parmi les  $Np_1$  de  $\binom{Np_1}{k}$  façons et s'il y a  $k$  éléments  $x_1$  dans l'échantillon il y aura  $(n-k)$  éléments  $x_2$  qui peuvent être choisis parmi les  $Np_2$  de  $\binom{Np_2}{n-k}$  façons différentes. Puisqu'un choix de  $k$  éléments  $x_1$  peut être combiné avec  $n-k$  n'importe quel choix d'éléments  $x_2$ , le nombre de façons de tirer  $k$  éléments  $x_1$  dans l'échantillon  $n$  est :

$$\binom{Np_1}{k} \binom{Np_2}{n-k} \quad (A5.2)$$

et la probabilité de  $k$  éléments  $x_1$  dans l'échantillon  $n$  est obtenue en divisant (2) par le nombre total de choix de l'échantillon :

$$p_{(n)}^k = \frac{\binom{Np_1}{k} \binom{Np_2}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (A5.3)$$

Le système de probabilités  $P_{(n)}^k$  est appelé "distribution hypergéométrique" car sa fonction génératrice est une fonction hypergéométrique.

Si  $x_1$  et  $x_2$  représentent des valeurs attachées aux éléments de même nom, évaluons le produit  $Z_n$  des valeurs des  $n$  éléments tirés :

$$Z_n = x_1^k x_2^{n-k} \quad (A5.4)$$

On peut calculer l'espérance de la variable aléatoire  $Z_n$  :

$$E(Z_n) = \sum_{k=0}^n x_1^k x_2^{n-k} \cdot \frac{\binom{Np_1}{k} \binom{Np_2}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (A5.5)$$

$$E(Z_n) = x_2^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^k \frac{\binom{Np_1}{k} \binom{Np_2}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (A5.6)$$

et en posant  $x_1/x_2 = z$

$$E(Z_n) = x_2^n \sum_{k=0}^n z^k \frac{\binom{Np_1}{k} \binom{Np_2}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (A5.7.)$$

L'expression (7) n'est autre que la fonction génératrice de la probabilité  $p_{(n)}^k$  multipliée par  $x_2^n$  : montrons qu'il s'agit du développement d'une fonction hypergéométrique, ce qui n'est pas évident à première vue.

Les coefficients binomiaux de (7) peuvent s'exprimer en fonction du coefficient de Pochhammer par la formule suivante (LUKE [15]) :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(-1)^k (-n)_k}{k!} \quad (A5.8)$$

où  $(-n)_k$  est un coefficient de Pochhammer tel que :

$$(a)_r = \frac{\Gamma(a+r)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \dots (a+r-1) \quad (A5.9)$$

Nous attirons cependant l'attention sur la confusion facile à faire entre le coefficient de Pochhammer  $(a)_r$  et le coefficient  $(n)_r$  utilisé par Feller [A3.3] noté  $[n]_r$  par Berge [A5.1] et  $n^{[r]}$  par Kendall [A3.11] et qui vaut :

Nous utilisons ici le développement (8), qui est relativement peu courant, car les fonctions hypergéométriques sont définies habituellement à partir des coefficients de Pochhammer.

$$(n)_r = [n]_r = n^{[r]} = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) \quad (A5.10)$$

Le coefficient de Pochhammer est noté par Berge [A5.1] :

$$(a)_r = [a]^r$$

et on voit donc avec les notations de Berge que :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(-1)^k [-n]^k}{k!} = \frac{[n]_k}{k!} \quad (A5.11)$$

d'où on déduit :

$$[n]_k = (-1)^k [-n]^k$$

Nous n'utiliserons pas cependant la notation de BERGE, celle de Pochhammer étant consacrée par l'usage dans l'étude des fonctions hypergéométriques.

Avec la notation de Pochhammer, (7) s'écrit d'après (8) :

$$E(Z_n) = x_2^n \sum_{k=0}^n z^k \frac{(-Np_1)_k (-Np_2)_{n-k} (-1)^{n-k} (-1)^k n!}{k! (n-k)! \cdot (-N)_n (-1)^n} \quad (A5.12)$$

$$= \frac{x_2^n}{(-N)_n} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} (-Np_1)_k (-Np_2)_{n-k} (-n)_k (-1)^k \quad (A5.13)$$

et en appliquant l'identité (LUKE [15])

$$(a)_{n-k} = \frac{(-1)^k (a)_n}{(1-a-n)_k} \quad (A5.14)$$

$(-Np_2)_{n-k}$  s'écrit :

$$(-Np_2)_{n-k} = \frac{(-1)^k (-Np_2)_n}{(1+Np_2-n)_k}$$

et (13) s'écrit alors :

$$E(Z_n) = x_2^n \cdot \frac{(-Np_2)_n}{(-N)_n} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{(-Np_1)_k (-n)_k}{(Np_2-n+1)_k} \quad (A5.15)$$

La fonction hypergéométrique de Gauss  ${}_2F_1(a, b, c; z)$  admettant le développement suivant en polynôme lorsque  $a$  est un entier négatif :

$${}_2F_1(a, b, c; z) = {}_2F_1(-n, b, c; z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}$$

(15) peut à la fin s'écrire :

$$E[Z_n] = x_2^n \frac{(-Np_2)_n}{(-N)_n} \cdot {}_2F_1(-n, -Np_1, Np_2-n+1; z) \quad (A5.16)$$

## II.- DISTRIBUTION HYPERGEOMETRIQUE A PLUSIEURS VARIABLES

Examinons maintenant le cas où il y a plusieurs types d'éléments dans la population  $N$ , soit les éléments  $x_1, x_2, x_i, x_m$  en proportions respectives  $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_m$  telles que :  $\sum p_i = 1$

En suivant le même raisonnement que précédemment, la probabilité d'avoir dans un échantillon de  $n$  éléments, pris parmi  $N$ , un nombre  $k_1$  d'éléments  $x_1$ , un nombre  $k_2$  d'éléments  $x_2, \dots, k_m$  d'éléments  $x_m$ , tels que :

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n \quad (\text{A5.17})$$

est

$$p_{(n)}^{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{\binom{Np_1}{k_1} \binom{Np_2}{k_2} \dots \binom{Np_m}{k_m}}{\binom{N}{n}} \quad (\text{A5.18})$$

La distribution de probabilités (18) est appelée distribution hypergéométrique à  $(m-1)$  dimensions (WILKS [A3.4]) car il n'y a que  $m-1$  variables indépendantes, puisque, d'après (17) :

$$k_m = n - (k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1})$$

Soit encore  $Z_n$  le produit des valeurs des éléments de l'échantillon, on aura :

$$Z_n = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{m-1}^{k_{m-1}} x_m^{k_m} \quad (\text{A5.19})$$

avec la probabilité (18)

L'espérance de  $Z_n$  s'écrit alors :

$$E[Z_n] = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m=0}^n x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m} \frac{\binom{Np_1}{k_1} \binom{Np_2}{k_2} \dots \binom{Np_m}{k_m}}{\binom{N}{n}} \quad (\text{A5.20})$$

### III.- DISTRIBUTION DES ELEMENTS RESTANT APRES TIRAGE EXHAUSTIF

La loi hypergéométrique à une dimension donne la probabilité qu'on obtienne  $r$  éléments  $x$  dans un tirage de  $n$  éléments fait parmi une population de  $N$  éléments contenant une proportion  $p$  d'éléments  $x$  et  $q = 1-p$  d'éléments  $y$ .

Cette probabilité s'énonce (A5.3) :

$$P_n(r) = \frac{\binom{Np}{r} \binom{Nq}{n-r}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{n}{r} \binom{N-n}{Np-r}}{\binom{N}{Np}} \quad (\text{A5.21})$$

Quand on tire un échantillon de  $n$  éléments, il reste  $N-n$  éléments non tirés de la population.

Si on tirait un échantillon de  $N-n$  éléments, il resterait  $n$  éléments non tirés.

Il est intuitif de penser que la proportion d'éléments  $x$  dans un échantillon  $n$  tiré de la population au hasard est identique à la proportion d'éléments  $x$  restant dans les  $n$  éléments non tirés quand on a prélevé un échantillon de  $N-n$  éléments également au hasard : montrons le simplement.

La population  $N$  contient  $Np$  éléments  $x$ , aussi la probabilité de tirer  $r$  éléments  $x$  dans un échantillon  $n$  est identique à la probabilité de trouver  $(Np-r)$  éléments  $x$  dans les  $N-n$  éléments restants ce que nous noterons par :

$$P_n(r) = \bar{P}_{N-n}(Np-r) \quad (A5.22)$$

Dans un tirage de  $N-n$  éléments, par conséquent, la probabilité d'avoir  $r$  éléments  $x$  dans les  $n$  éléments non tirés sera :

$$\bar{P}_n(r) = P_{N-n}(Np-r) \quad (A5.23)$$

et en remplaçant dans (1)  $n$  par  $N-n$  et  $r$  par  $Np-r$ , on obtient :

$$P_{N-n}(Np-r) = \frac{\binom{N-n}{Np-r} \binom{n}{r}}{\binom{N}{Np}} = P_n(r) \quad (A5.24)$$

On déduit de (23) et (24) que :

$$P_n(r) = \bar{P}_n(r)$$

On peut donc affirmer que :

**THEOREME** : La probabilité de tirer  $r$  élément  $x$  dans un échantillon de  $n$  pris dans une population de  $N$  est identique à la probabilité de laisser  $r$  éléments  $x$  dans les éléments restants après tirage de  $N-n$  éléments dans la même population.

Ce théorème peut s'étendre à une loi hypergéométrique à plusieurs dimensions lorsqu'il y a dans la population  $N$  des éléments  $x_1, x_2, \dots, x_m$  en proportions  $p_1, p_2, \dots, p_m$ .

La probabilité de tirer  $r_1$  éléments  $x_1, r_2$  éléments  $x_2, \dots, r_m$  éléments  $x_m$  dans un échantillon  $n$  s'écrit (A5.18) :

$$P_n(r_1, r_2, \dots, r_m) = \frac{\binom{Np_1}{r_1} \binom{Np_2}{r_2} \dots \binom{Np_m}{r_m}}{\binom{N}{n}} \quad (A5.25)$$

On peut effectuer la même démonstration en écrivant que la probabilité de trouver  $(Np_1-r_1)$  éléments  $x_1, (Np_2-r_2)$  éléments  $x_2, \dots, (Np_m-r_m)$  éléments  $x_m$ , dans les  $(N-n)$  éléments non tirés est la même que (18) :

$$\bar{P}_n(r_1, r_2, \dots, r_m) = \bar{P}_{N-n}(Np_1-r_1, Np_2-r_2, \dots, Np_m-r_m)$$

Et dans un tirage de  $(N-n)$  éléments, la probabilité d'avoir  $r_1$  éléments  $x_1$  dans les  $n$  éléments restants est donc :

$$\bar{P}_n(r_1, r_2, \dots, r_m) = P_{N-n}(Np_1-r_1, Np_2-r_2, \dots, Np_m-r_m)$$

Et en remplaçant dans (4) n par N-n et les  $r_i$  par  $r_i$  on obtient :

$$P_{N-n}^{(Np_1-r_1, \dots, Np_m-r_m)} = \frac{\binom{Np_1}{Np_1-r_1} \binom{Np_2}{Np_2-r_2} \dots \binom{Np_m}{Np_m-r_m}}{\binom{N}{N-n}} \quad (A5.26)$$

et en raison de l'identité pour les coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

(25) et (26) sont égaux et par conséquent on a encore pour la distribution hypergéométrique à plusieurs variables :

$$P_n(r_1 r_2 \dots r_m) = \bar{P}_n(r_1, r_2 \dots r_m) \quad (A5.27)$$

Puisque les probabilités d'avoir des éléments  $x_1, x_2, \dots, x_m$  en proportion  $r_1, r_2, \dots, r_m$  sont identiques dans l'échantillon n et dans les n éléments restants après tirage de N-n éléments on peut en conclure de façon plus générale que la distribution des variables x dans l'échantillon n ou dans les n éléments restants est la même.

#### IV.- MOYENNE DU PRODUIT DES VALEURS D'UN ECHANTILLON RESULTANT D'UN TIRAGE EXHAUSTIF

Supposons que les caractères  $x_1, x_2, \dots, x_m$  qui étaient attachés aux éléments tirés sont des nombres positifs et calculons le produit de ces nombres.

On notera  $Z_n$  le produit des valeurs de n éléments tirés

$$Z_n = \prod_{i=1}^n x_i \quad (A5.28)$$

et  $Z_{N-n}$  le produit des valeurs des N-n éléments restants non tirés :

$$Z_{N-n} = \prod_{i=n+1}^N x_i \quad (A5.29)$$

Supposons la population N fixe : la moyenne géométrique des valeurs x des éléments de la population sera :

$$\bar{x}^G = \left( \prod_{i=1}^N x_i \right)^{1/N} \quad (A5.30)$$

et par conséquent :

$$\prod_{i=1}^N x_i = (\bar{x}^G)^N = \text{constante} \quad (A5.31)$$

On peut donc écrire :

$$Z_n \cdot Z_{N-n} = \prod_{i=1}^n x_i \cdot \prod_{i=n+1}^N x_i = \prod_{i=1}^N x_i = (\bar{x}^G)^N$$

soit :

$$Z_n = \frac{(\bar{x}^G)^N}{Z_{N-n}} \quad (A5.32)$$

$Z_n$  étant la valeur du produit d'un échantillon de  $n$  éléments, si on tire un grand nombre d'échantillons et qu'on effectue la moyenne des  $Z_n$  obtenus, on peut écrire, puisque  $(\bar{x}^G)^N$  est une constante de la population :

$$E(Z_n) = (\bar{x}^G)^N E\left(\frac{1}{Z_{N-n}}\right) \quad (A5.33)$$

Ce qui s'écrit en introduisant  $\bar{Z}_n^A$  moyenne arithmétique des  $Z_n$  et  $\bar{Z}_{N-n}^H$  moyenne harmonique des  $Z_{N-n}$ .

$$\bar{Z}_n^A \cdot \bar{Z}_{N-n}^H = (\bar{x}^G)^N \quad (A5.34)$$

Mais (A5.32) peut aussi s'écrire :

$$Z_{N-n} = \frac{(\bar{x}^G)^N}{Z_n}$$

et en passant aux espérances on obtient :

$$E(Z_{N-n}) = (\bar{x}^G)^N E\left(\frac{1}{Z_n}\right)$$

D'où on déduit, avec les mêmes notation que précédemment :

$$\boxed{\bar{Z}_{N-n}^A \cdot \bar{Z}_n^H = (\bar{x}^G)^N} \quad (A5.35)$$

En appliquant les résultats du paragraphe précédent, puisque la distribution des valeurs de  $x$  au sein d'un échantillon de  $n$  est la même qu'au sein des  $n$  restants après tirage d'un échantillon de  $N-n$ , on peut écrire :

$$E(Z_n) = E(Z_{N-n}) \quad \text{soit} \quad \bar{Z}_n^A = \bar{Z}_{N-n}^A \quad (A5.36)$$

$$E(1/Z_n) = E(1/Z_{N-n}) \quad \text{soit} \quad \bar{Z}_n^H = \bar{Z}_{N-n}^H \quad (A5.37)$$

$$E(\log Z_n) = E(\log Z_{N-n}) \quad \text{soit} \quad \bar{Z}_n^G = \bar{Z}_{N-n}^G \quad (A5.38)$$

L'ensemble de ces relations est valable quelque soit  $0 \leq n \leq N$ .

La réunion de (34) et (35) permet d'écrire :

$$\bar{Z}_n^A \cdot \bar{Z}_{N-n}^H = \bar{Z}_{N-n}^A \cdot \bar{Z}_n^H = (\bar{x}^G)^N \quad (A5.39)$$

soit :

$$\frac{\bar{Z}_n^A}{\bar{Z}_n^H} = \frac{\bar{Z}_{N-n}^A}{\bar{Z}_{N-n}^H} \quad (A5.40)$$

et pour  $n = 1$ , on obtient, puisque  $Z_1$  est la valeur d'une seule variable tirée :

$$\frac{\bar{Z}_{N-1}^A}{\bar{Z}_{N-1}^H} = \frac{\bar{Z}_1^A}{\bar{Z}_1^H} \quad (\text{A5.41})$$

Même si les variables  $x_i$  ne sont pas indépendantes, on peut toujours écrire :

$$\text{Log } Z_n = \text{Log } (x_1 x_2 \dots x_n) = \text{Log } x_1 + \text{Log } x_2 + \dots + \text{Log } x_n$$

et

$$\begin{aligned} \text{Log } \bar{Z}_n^G &= E(\text{Log } Z_n) = E\left(\sum_{i=1}^n \text{Log } x_i\right) = \sum_{i=1}^n E(\text{Log } x_i) = n E(\text{Log } x) \\ &= n \text{Log } \bar{x}^G \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\bar{Z}_n^G = (\bar{x}^G)^n \quad (\text{A5.42})$$

(39) peut donc s'écrire sous la forme :

$$\bar{Z}_n^A \cdot \bar{Z}_{N-n}^H = (\bar{x}^G)^n (\bar{x}^G)^{N-n} = \bar{Z}_n^G \cdot \bar{Z}_{N-n}^G \quad (\text{A5.43})$$

soit encore d'après (37) :

$$\frac{\bar{Z}_n^A}{\bar{Z}_n^G} = \frac{\bar{Z}_{N-n}^G}{\bar{Z}_{N-n}^H} = \frac{\bar{Z}_{N-n}^G}{\bar{Z}_{N-n}^H} \quad (\text{A5.44})$$



## ANNEXE 6

### LOI DE DISTRIBUTION "LOG-UNIFORME"

---

Par analogie avec la loi "log-normale" nous appelons loi "log-uniforme" la loi de distribution d'une variable aléatoire positive  $x$  dont le logarithme  $y$  est distribué selon une loi uniforme.

La figure A6.1 donne la forme la plus générale de la distribution de  $y$  dont la moyenne arithmétique est  $M$

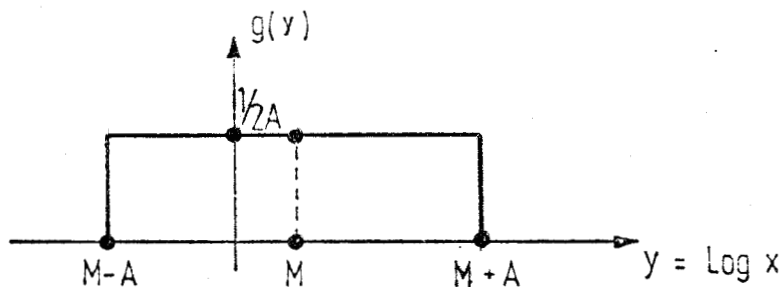


Figure A6.1

L'équation en est :

$$g(y) = \frac{1}{2A} \quad M-A < y < M+A \quad (\text{A6.1})$$

La loi de distribution  $f(x)$  de la variable  $x$  est obtenue en identifiant les densités de probabilité :

$$f(x) dx = g(y) dy = \frac{1}{2A} dy = \frac{1}{2A} \frac{dx}{x}$$

On en déduit :

$$f(x) dx = \frac{1}{2A} \cdot \frac{dx}{x} \quad e^{(M-A)} < x < e^{(M+A)} \quad (\text{A6.2})$$

et si on pose  $m = e^M$  et  $A = \text{Log } a$  on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{2 \text{Log } a} \cdot \frac{1}{x} \quad \frac{m}{a} < x < m \cdot a \quad (\text{A6.3})$$

La figure A6.2 représente la distribution  $f(x)$

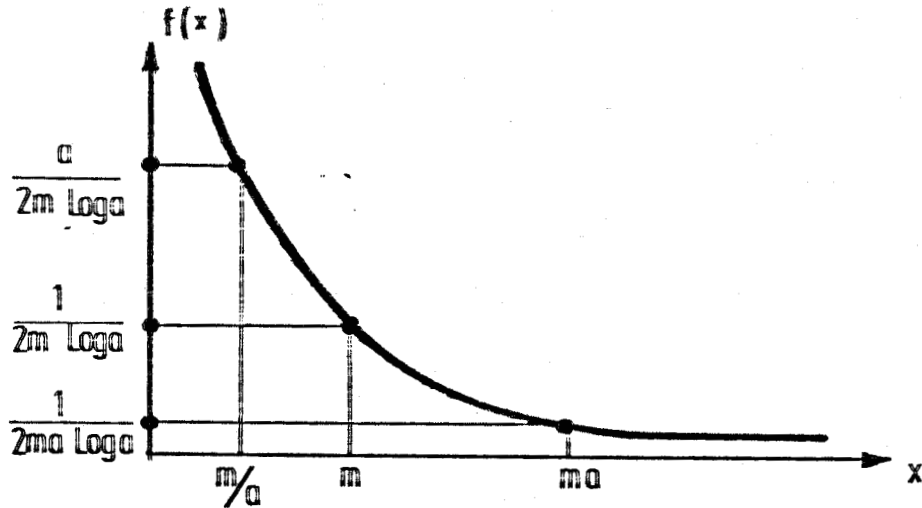


Figure A6.2

$\bar{M}$  est la moyenne arithmétique de la distribution de  $y$ ,  $m = e^{\bar{M}}$  est donc la moyenne géométrique de celle de  $x = e^y$ .

$$\bar{x}^G = m \quad (\text{A6.4})$$

La moyenne arithmétique de  $f(x)$  est donnée par :

$$\bar{x}^A = E(x) = \frac{1}{2 \text{Log } a} \int_{m/a}^{ma} x \cdot \frac{dx}{x} = \frac{ma - m/a}{2 \text{Log } a}$$

d'où

$$\bar{x}^A = \frac{m(a-1/a)}{2 \text{Log } a} \quad (\text{A6.5})$$

La moyenne harmonique de  $f(x)$  sera telle que :

$$\frac{1}{\bar{x}^H} = E\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2 \text{Log } a} \int_{m/a}^{ma} \frac{1}{x} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2 \text{Log } a} \left[ -\frac{1}{x} \right]_{m/a}^{ma} = \frac{a-1/a}{2m \text{Log } a}$$

d'où :

$$\bar{x}^H = \frac{2m \text{Log } a}{a-1/a} \quad (\text{A6.6})$$

La distribution étant log-symétrique [annexe 3] on peut vérifier qu'on a bien :

$$\bar{x}^A \cdot \bar{x}^H = (\bar{x}^G)^2$$

quand  $a$  tend vers 1,  $\bar{x}^A \rightarrow \bar{x}^H \rightarrow 1$ .

quand  $a$  tend vers l'infini,  $\bar{x}^H$  tend vers 0 et  $\bar{x}^A$  vers l'infini.

STRUCTURE INTERNE DES MILIEUX POREUX  
 COURBES DE PRESSION CAPILLAIRE  
 ET D'INJECTION DE MERCURE

---

I. - METHODES DE MESURE - DEFINITIONS

Une des méthodes d'investigation des propriétés d'un milieu poreux consiste à faire pénétrer dans ce milieu un fluide non mouillant sous une pression externe croissante, ce fluide chassant un fluide mouillant qui occupait primitivement la totalité des pores.

Si la porosité du milieu poreux est  $\phi$  et son volume  $V$ , le volume des pores est  $V_p = \phi V$  et on appelle saturation  $s$  la fraction de ce volume remplie par un fluide : si  $V_f$  est le volume de fluide occupant les pores on a donc :

$$s = V_f / V_p = V_f / \phi V$$

On désigne sous le nom de "courbes de pression capillaire" les courbes reliant la saturation en fluide non mouillant  $s_N$  à la pression imposée à ce fluide pour le faire pénétrer.

Si, au lieu de mesurer le volume de fluide non mouillant entré, on mesure le volume de fluide mouillant chassé des pores, on tracera la courbe de saturation en fluide mouillant  $s_M$  en fonction de la pression : on aura évidemment :  $s_N + s_M = 1$

Si la courbe est tracée pour des pressions croissantes en partant de  $s_N = 0$  ( $s_M = 1$ ), on l'appelle courbe de drainage et si on fait redécroître la pression, à partir d'un maximum atteint, jusque zéro, le fluide mouillant chassé, repénètre et on obtient alors la courbe d'imbibition.

Dans la méthode d'Injection de mercure, le milieu poreux est préalablement vidé d'air et le rôle du fluide mouillant est donc joué par le vide : on force du mercure, fluide non mouillant à pénétrer : seule la saturation  $s_N$  en fluide non mouillant peut être mesurée, en drainage, comme en imbibition.

Dans les méthodes classiques de mesure de pressions capillaires, telle que celle des "états restaurés" le fluide mouillant est habituellement de l'eau et le fluide non mouillant de l'huile ou du gaz.

On utilise un échantillon cylindrique de milieu poreux : le fluide non mouillant pénètre par la surface latérale et par le dessous du cylindre, chassant le fluide mouillant qui est évacué par la base du cylindre.

Dans cette méthode il est plus fréquent de mesurer le volume du fluide mouillant évacué ou entré d'où on déduit la saturation  $s_M$  en drainage, comme en imbibition.

Quelle que soit la méthode utilisée, la progression du fluide non mouillant est considérée comme quasi-statique c'est-à-dire infiniment lente.

## II.- LOIS DE LAPLACE - LOI DE WHASBURN

A la base des méthodes de mesure de pression capillaire se trouve la propriété physique suivante :

L'interface séparant deux fluides non miscibles est une surface dont la forme est telle que son énergie libre soit minimum, compte tenu des conditions aux limites imposées par le récipient contenant les deux fluides.

Cette surface est une surface à courbure moyenne constante en tous points donnée par la loi de LAPLACE :

$$p_c = \sigma_{12} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2\sigma_{12}}{R_m} \quad (A7.1)$$

où  $p_c$  est la différence de pression régnant de part et d'autre de la surface (pression capillaire).

$\sigma_{12}$  est la tension interfaciale entre les liquides 1 et 2, fonction du couple de liquides utilisés.

$R_1$  et  $R_2$  sont les rayons de courbure principaux selon des plans perpendiculaires, en tout point de la surface.

(Le rayon de courbure moyen  $R_m$  est la moyenne harmonique des rayons de courbure principaux).

La loi de Laplace est relative aux propriétés de l'interface fluide 1 - fluide 2 mais ne dit rien sur les conditions de raccordement avec un éventuel solide enfermant les deux phases fluides.

Si on considère l'interaction entre les deux fluides et une paroi solide, on fait intervenir les tensions interfaciales suivantes :

$\sigma_{1S}$  = tension interfaciale entre fluide 1 et solide

$\sigma_{2S}$  = tension interfaciale entre fluide 2 et solide

$\sigma_{12}$  = tension interfaciale entre fluide 1 et fluide 2.

La composition de ces tensions (fig. A7.1) à l'endroit où se rencontrent les trois phases donne un équilibre de l'interface si on a :

$$\sigma_{1S} = \sigma_{2S} + \sigma_{12} \cos \theta \quad (A7.2)$$

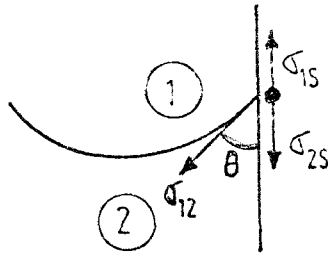


Figure A7.1

$\theta$  étant l'angle sous lequel se fait le raccordement de l'interface avec le solide.

Cette relation dite relation d'Young, [A7.1][A7.2] donne :

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{1S} - \sigma_{2S}}{\sigma_{12}} \quad (A7.3)$$

et montre que le raccordement de l'interface avec les parois solides se fait avec un angle de contact constant  $\theta$  qui ne dépend que des propriétés relative du triplet fluide 1, fluide 2, solide.

Avec notre notation, le fluide 1 est non mouillant et le fluide 2 mouillant si  $\theta$  est inférieur à  $\pi/2$ .

Dans le cas très simple d'un tube capillaire cylindrique de section circulaire, on peut calculer exactement la forme de l'interface.

Si le rayon du capillaire est  $r$ , le raccordement du ménisque de l'interface avec la paroi solide se fait selon un cercle et la surface de courbure moyenne constante qui s'appuie sur ce cercle ne peut être qu'une calotte sphérique dont les deux rayons de courbure sont égaux :

$$R_1 = R_2 = R \quad (A7.4)$$

Si l'angle de contact est  $\theta$ , on a (fig. A7.2) :  $R \cos \theta = r$

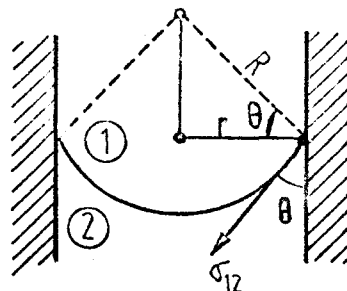


Figure A7.2

et la différence de pression de part et d'autre de l'interface est :

$$p_c = p_1 - p_2 = \sigma_{12} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2\sigma_{12}}{R} = \frac{2\sigma_{12} \cos\theta}{r} \quad (\text{A7.5})$$

Si le capillaire était conique, de demi-angle au sommet  $\alpha$  (fig. A7.3)

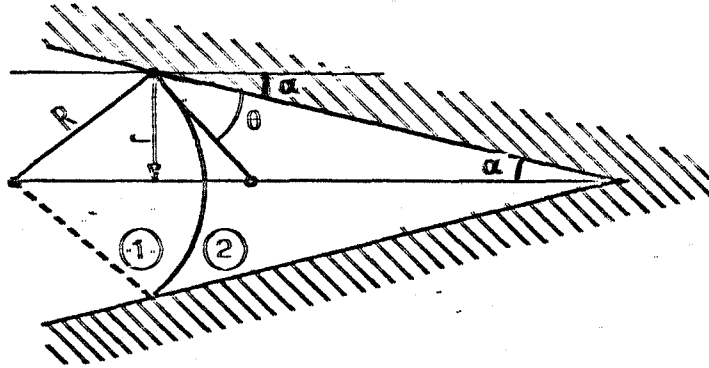


Figure A7.3

on aurait cette fois :

$$R \cos(\theta + \alpha) = r$$

$r$  étant le rayon du cône au niveau du haut du ménisque.

$$\text{d'où : } p_c = p_1 - p_2 = \frac{2\sigma_{12} \cos(\theta + \alpha)}{r} \quad (\text{A7.5'})$$

Le ménisque étant partout en contact avec le solide, on peut donner une interprétation mécanique simple de ces relations en écrivant que la force exercée par la différence de pression  $p_1 - p_2$  sur l'interface de section  $s$  est équilibrée par la composante verticale de la force exercée par la tension interfaciale  $\sigma_{12}$  sur le contour de raccordement de l'interface avec le solide c'est-à-dire le "périmètre mouillé"  $L$ .

On obtient ainsi pour le capillaire cylindrique circulaire,

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 = \sigma_{12} \cos\theta \cdot 2\pi r$$

et pour le capillaire conique de section circulaire :

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 = \sigma_{12} \cos(\theta + \alpha) 2\pi r$$

relations qui, une fois simplifiées redonnent les formules (A7.5) et (A7.5').

Dans le cas général pour une section non circulaire et à condition qu'il y ait partout contact entre le pourtour de l'interface et le solide, on voit qu'il suffit d'écrire :

$$(p_1 - p_2) s = \sigma_{12} \cos(\theta + \alpha) L$$

$$\text{soit : } (p_1 - p_2) = \sigma_{12} \cos(\theta + \alpha) \frac{L}{s} \quad (\text{A7.6})$$

où  $L/s$  va représenter le périmètre par unité de surface, c'est-à-dire le périmètre spécifique, de la section droite du capillaire à l'endroit où est arrêté le ménisque de l'interface.

Le "rayon hydraulique"  $m$  d'un capillaire étant défini habituellement par [A7.3][A7.4]

$$m = \frac{s}{L}$$

On écrira (A7.6) sous la forme :

$$p_1 - p_2 = \frac{\sigma_{12} \cos(\theta + \alpha)}{m} \quad (\text{A7.7})$$

La loi de Washburn utilise la relation (A7.5) en sens inverse et énonce que, pour faire pénétrer un fluide non mouillant dans un capillaire cylindrique circulaire de rayon  $r$ , rempli de fluide mouillant, si l'angle de contact est  $\theta$  et la tension interfaciale entre le fluide  $\sigma_{12}$ , il faut exercer sur le fluide non mouillant une surpression par rapport au fluide mouillant (pression d'entrée) telle que :

$$p_c = p_1 - p_2 \geq \frac{2\sigma_{12} \cos\theta}{r} \quad (\text{A7.8})$$

relation qu'on peut généraliser à un capillaire cylindrique non circulaire en remplaçant  $2/r$  par  $1/m$  à condition que les fluides mouillent la totalité du périmètre du capillaire.

Une fois la condition (A7.8) remplie, le fluide non mouillant pénètre, l'interface progresse et ne s'arrêtera qu'en une position où le rayon hydraulique  $m$  est tel que la relation A7.8 n'est plus satisfaite à la pression  $p_c$ .

Cette relation n'est valable rigoureusement que pour un capillaire cylindrique (non conique) dont la section est entièrement occupée par l'interface entre les fluides : c'est loin d'être le cas dans les milieux naturels.

En effet si le capillaire, supposé cylindrique et rectiligne, présente dans sa section droite, des parties du périmètre dont le rayon de courbure est inférieur au rayon de courbure minimum accessible à la pression considérée, et, en particulier, s'il y a des parties anguleuses dans la section droite, le fluide non mouillant ne peut y pénétrer (fig. A7.4.)

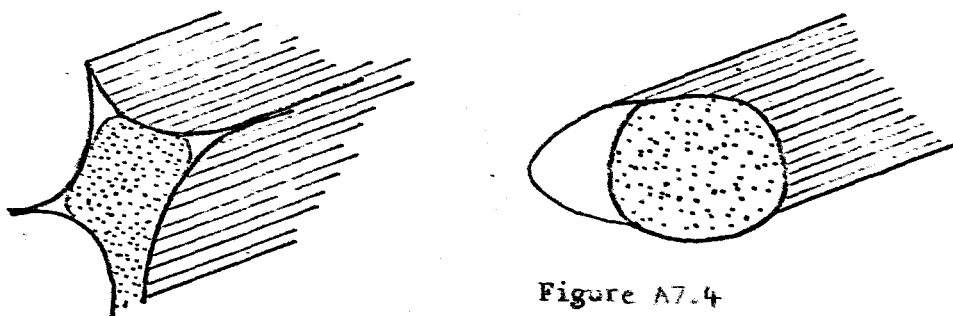


Figure A7.4

A chaque augmentation infinitésimale de pression, l'interface progresse atteignant des sections de canaux de rayon hydraulique  $m_i$  plus petit, d'angle de conicité  $\alpha_i$ , dont on pourra définir la "pression d'ouverture" :

$$p_i = \frac{\alpha_{i2} \cos(\theta + \alpha_i)}{m_i} \quad (A7.9)$$

En outre, dans des sections déjà occupées par le fluide non mouillant l'interface prend un rayon de courbure moyen plus petit qui lui permet d'occuper des anfractuosités étroites qui n'étaient pas encore emplies à des pressions inférieures.

Théoriquement, on peut donc diviser le milieu poreux en une infinité d'éléments de volumes  $\Delta V$ , qu'on peut prendre égaux, caractérisés chacun par un angle de conicité  $\alpha_i$  et un rayon hydraulique  $m_i$ , dont la pression d'ouverture  $p_i$  est donnée par (A7.9).

Si  $V_p$  est le volume total des pores, le nombre de ces éléments de volume sera :

$$N = \frac{V}{\Delta V}$$

La distribution du nombre  $n_i$  de ces éléments de volumes en fonction de leur pression d'ouverture  $p_i$ , permettrait de caractériser utilement la structure interne du milieu poreux. Cependant, dans la pratique, des éléments de volume internes théoriquement accessibles à la pression  $p_i$  ne pourront être envahis par le fluide non mouillant que s'ils communiquent déjà avec celui-ci, par une extrémité ou par une autre.

Si on trace donc la courbe expérimentale du nombre de volumes élémentaires envahis à la pression  $p_i$ , c'est-à-dire la saturation effective en fluide non mouillant  $s(p_i)$ , on obtient la courbe classique d'injection de mercure ou de pression capillaire différente de la courbe :

$$s^*(p_i) = \frac{n_i(p_i)}{N} \quad (A7.10)$$

Et pour cette courbe expérimentale, les conditions aux limites, c'est-à-dire les faces par lesquelles entrent ou sortent les fluides mouillants et non mouillants, et qui sont fonction de l'appareillage utilisé, sont de première importance.

La saturation théorique  $s^*(p_i)$  pourrait être obtenue par les méthodes précédentes si on utilisait comme échantillon de milieu poreux une lame infiniment mince.



Les problèmes de connexité entre pores qui font différer  $s(p_i)$  et  $s^*(p_i)$  ne joueraient alors plus et  $n_i$  éléments de volumes pourraient effectivement se remplir à leur pression  $p_i$  d'ouverture.

Malheureusement, sans doute à cause des difficultés expérimentales, nous n'avons jamais entendu parler d'une telle mesure, faite sur des lames minces.

Certains auteurs (DULLIEN BATRA [A7.5] pour avoir accès à la véritable "granulométrie" des pores ont imprégné des milieux poreux de métal à bas point de fusion puis dissous la matière solide du milieu poreux, obtenant ainsi un "squelette" solide du volume des pores.

Une étude microphotographique sur une coupe de ce "squelette" leur a permis d'obtenir une courbe de distribution des "largeurs de pores" effectivement très différente de celle qu'on pourrait déduire des courbes d'injection de mesure.

Cependant, ce genre de mesures ne permet pas d'accéder à la courbe  $s^*(p_i)$  car il faudrait mesurer les périmètres spécifiques des pores.

### III.- OBTENTION DE LA COURBE $s^*(p_i)$ SUR UNE LAME MINCE

On peut, pourtant, envisager d'utiliser une coupe de milieu poreux pour mesurer  $s^*(p_i)$  de la façon suivante.

Imaginons que dans le milieu poreux, en trois dimensions on ait pu remplir de fluide non mouillant, à une pression donnée  $p_i$ , tous les éléments de volume accessibles à cette pression ou à des pressions inférieures sans tenir compte des relations de connexité entre pores intérieurs.

Coupons alors par un plan le milieu poreux, on trouvera comme trace sur le plan de coupe la section des "pores" avec certains pores emplis plus ou moins complètement de fluide non mouillant et certains pores vides de ce fluide.

Si la surface des pores apparaissant sur le plan de coupe de section  $S$  est  $S_p$  et si la surface totale de fluide non mouillant est  $S_N(p_i) < S_p$ , on en déduira, si le milieu est homogène et stationnaire pour qu'on puisse appliquer une hypothèse d'ergodicité, que :

$$\Phi = S_p / S$$

$$s(p_i) = \frac{S_N(p_i)}{S_p} \quad (A7.11)$$

Mais la pression  $p_i$  d'ouverture d'un élément de volume est fonction de l'angle de mouillage  $\theta$ , dépendant des propriétés relatives des fluides et du milieu.

Pour s'affranchir de ces propriétés relatives et obtenir un résultat qui ne soit fonction que de la structure interne du milieu on peut introduire une pression réduite  $p^*$  telle que :

$$p^* = \frac{P}{\cos\theta} \quad (A7.12)$$

ceci revient à supposer que la pression  $p^*$  est relative à l'injection d'un fluide déplaçant d'angle de mouillage  $\theta = 0$  ( $\cos\theta = 1$ ), c'est-à-dire d'un fluide mouillant, dans un milieu déjà saturé en fluide mouillant non miscible avec le précédent (couple eau-air par exemple).

PURCELL [A7.6] a vérifié dans ces conditions qu'en utilisant la pression réduite  $p^*$  et compte tenu des tensions interfaciales  $\sigma_{12}$  différentes, on pouvait pratiquement superposer les courbes de pression capillaire relatives au couple eau-air ( $\theta = 0$ ) et les courbes d'injection de mercure ( $\theta = 140^\circ$ ).

Une approche similaire a conduit ETIENNE et LE FOURNIER [A7.7] à imprégner un milieu poreux de deux résines différemment colorées, toutes deux mouillantes, l'une jouant le rôle de fluide déplaçant, l'autre de fluide déplacé.

En travaillant ensuite sur des plaques minces du matériau imprégné ils déterminèrent la saturation en résine "déplaçante" en fonction de la pression.

Une comparaison avec une courbe d'injection de mercure dans le même matériau a permis de voir que les deux courbes étaient très proches l'une de l'autre si on corrigeait les échelles de pression de façon à avoir :

$$\frac{P_r}{\sigma_r} = \frac{P_m}{\sigma_m \cos\theta_m}$$

les indices r se rapportant à la résine et les indices m au mercure.

Mais l'imprégnation ayant été faite initialement dans le matériau massif et non pas sur la plaque mince, la courbe  $s^*(p_i)$  ne peut être obtenue à partir de cette mesure.

REMARQUE : La relation exacte pour la "pression d'ouverture" d'un capillaire conique étant (A7.9) :

$$p_i = \frac{\sigma_{12}}{m_i} \cos(\theta + \alpha_i)$$

l'introduction de la pression  $p_i^*$  devrait donner :

$$p_i^* = \frac{\sigma_{12}}{m_i} \frac{\cos(\theta + \alpha_i)}{\cos\theta}$$

mais le fait que, dans les deux expériences précédentes de PURCELL et ETIENNE et LE FOURNIER, quand on ne tient compte que d'angles  $\theta$  constants et de tensions interfaciales  $\sigma_{12}$  différentes, on obtienne une bonne coïncidence entre les courbes obtenues pour des fluides différents, montre que l'angle de conicité  $\alpha_1$  joue, tout au moins sur un matériau macroscopique, un rôle de peu d'importance.

La forme des ménisques qui terminent la phase non mouillante dans les étranglements où elle n'a pas encore pénétré n'est pas très éloignée d'une calotte sphérique si les sections de pores ne sont pas trop allongées, aussi, à la pression  $p_i^* = \sigma_{12} \cdot 2/R_m$ , on pourra évaluer la saturation  $s^*(p_i)$  en fluide non mouillant, sur la coupe en deux dimensions, en cherchant à placer dans les sections des pores, des surfaces de rayon de courbure minimum  $R_m$  constituées par l'enveloppe de la famille de cercles de rayon  $R_m$  qu'on aurait pu introduire dans les sections des pores.

Plus la pression  $p_i^*$  augmente, plus le rayon  $R_m$  diminue et plus les contours des surfaces de rayon de courbure minimum  $R$  s'approchent des contours irréguliers des sections de pores.

Ce mode de remplissage par des cercles de la section du milieu poreux a été défini par MATHERON [A2.9] de façon mathématique, à l'aide d'un formalisme que nous n'aborderons pas ici, comme "l'ouverture des pores" selon des cercles de rayon  $R$  décroissants et nous l'utilisons ici en supposant que les sections des ménisques de fluide non mouillant sont assimilables à des portions de cercles tangents aux parois puisque l'usage de  $p^*$  entraîne  $\theta = 0$ .

L'analogie de cette opération mathématique avec le remplissage des pores par du mercure a été signalée par DELFINER, ETIENNE, FONCK [A7.8] qui ont remarqué que l'opération "d'ouverture" n'était pas tributaire de la connexité entre pores alors que l'injection de mercure l'était fortement, c'est ce qui conduit aux saturations différentes  $s^*(p_i)$  et  $s(p_i)$  que nous avons définies plus haut.

La figure A7.5 tirée de [A7.8] illustre cette différence dans le cas où le mercure pénètre par le haut de la figure de gauche.

À la suite des travaux de MATHERON, un appareil dénommé "Analyseur de textures" commercialisé par LEITZ, a été mis au point par DELFINER [A7.8].

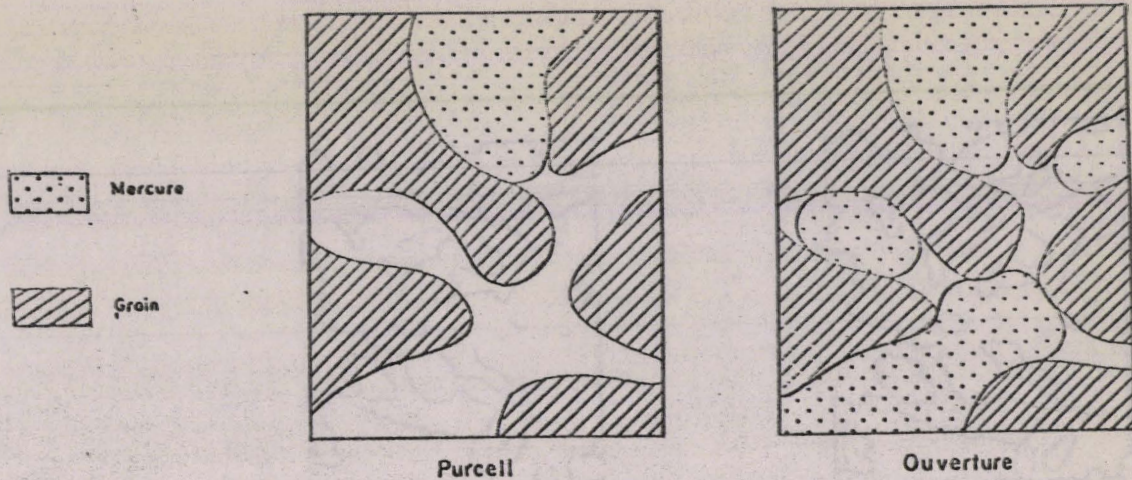


Figure A7.5

Cet appareil réalise, par traitement vidéo, à partir de microphotographies de lames minces de milieu poreux dont les pores sont imprégnés de résines fluorescentes, l'opération mathématique "d'ouverture" des sections de pores par des cercles de rayons décroissants : pour un rayon donné  $R_i$  de cercles, l'appareil ne rend visible que l'ouverture des pores selon les cercles  $R_i$ .

La figure A7.6, tirée de [A7.8] montre ainsi une section de milieu poreux et son ouverture selon des hexagones de taille croissante (le résultat est peu différent de celui qu'on obtiendrait avec des cercles).

On voit qu'il suffit de mesurer la surface de "l'ouverture des pores" (apparaissant en blanc sur la figure) correspondant à un rayon de cercle donné  $R_i$  pour connaître la saturation théorique  $s^*(p_i^*)$  à la pression  $p_i^* = \sigma_{12} / R_i$ .

La valeur de  $R_i$  la plus grande permettant à un cercle de pénétrer dans l'un des pores de la section définira une pression d'entrée minimum :

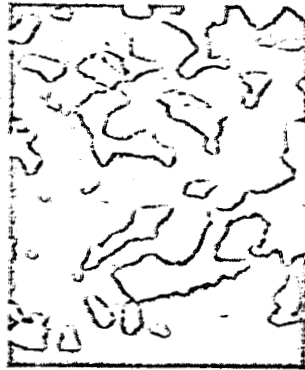
$$p_{\min}^* = \sigma_{12} / R_{\max}$$

et en faisant décroître  $R_i$ , c'est-à-dire en augmentant  $p_i^*$ , on pourra tracer de cette façon toute la courbe  $s^*(p_i^*)$ .

Une limite supérieure à  $p_i^*$  est néanmoins imposée par le pouvoir de résolution de l'appareil limité à un cercle de rayon minimum  $R_{\min}$ .



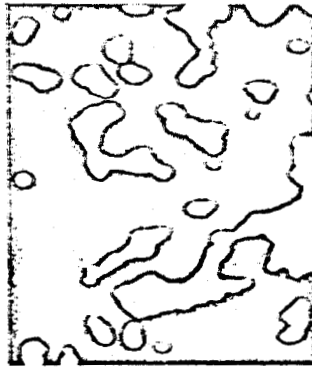
a



b



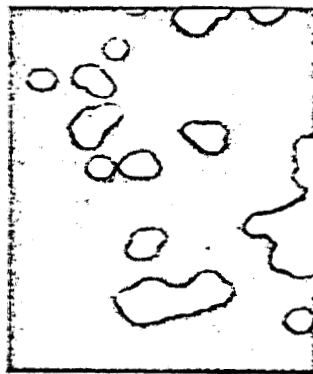
c



d



e



f

Évolution de pores par ouvertures hexagonales.

Figure A7.6



## PHENOMENES DE PERCOLATION

L'étude des phénomènes de percolation, que l'on ne sait faire pour l'instant que sur des réseaux, prend pour point de départ un réseau de structure donnée, dont on retire au hasard des branches (percolation par branches) ou des nœuds (percolation par nœuds).

Nous ne nous intéressons ici qu'à la percolation par branches.

On désigne par  $p$  la proportion de branches restant dans le réseau et on définit une probabilité de percolation  $P(p)$  [7] comme la probabilité qu'un nœud intérieur du réseau soit connecté à  $N$  autres nœuds quand  $N$  tend vers l'infini.

$$P(p) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(p) \quad (\text{A8.1})$$

en effet, quand on continue à retirer des branches du réseau, pour une proportion critique  $p = p_c$ , il n'existe plus de possibilité de passer d'une extrémité à l'autre du réseau : ceci définit le seuil de percolation  $p_c$  où la probabilité qu'un nœud intérieur soit connecté à un nombre très grand de nœuds s'annule

$$P(p_c) = 0 \quad (\text{A8.2})$$

Si on considère l'ensemble des branches et des nœuds connectés qui relie deux extrémités opposées du réseau, on voit que c'est cet ensemble qui devient non connexe quand  $p$  atteint  $p_c$ . On lui donne le nom d'amas (cluster) infini [A8.1] car le réseau est supposé de très grande taille.

Si cet amas comporte  $N$  nœuds, chacun des  $N$  nœuds peut être relié à tous les autres : le rapport du nombre de nœuds présents dans l'amas infini au nombre total de nœuds présents dans le réseau peut donc être identifié avec la probabilité de percolation  $P_N(p)$  définie ci-dessus.

La forme de la courbe  $P(p)$  obtenue d'après cette définition n'a pu être définie comme limite de  $P_N(p)$  qu'après des études par méthode de Monte-Carlo sur des réseaux de plus en plus grands en donnant à  $N$  des valeurs croissantes [A8.2][A8.3] : elle dépend de la dimension du réseau et de sa structure.

Les seuils  $p_c$  de percolation sont maintenant connus avec une assez bonne précision ( $< 1\%$ ) : seules trois valeurs sont connues rigoureusement : elles correspondent aux réseaux planaires de structure hexagonale, carrée, triangulaire [A8.4].

Il a été trouvé récemment [A8.5][A8.6] de façon expérimentale, que les courbes  $P(p)$ , au voisinage du seuil de percolation pouvaient se décrire par la fonction :

$$P(p) = B(p-p_c)^\beta \quad (\text{A8.3})$$

L'exposant  $\beta$  vaut environ 0,14 en deux dimensions et 0,42 en trois dimensions et le coefficient  $B$  est voisin de 1,54 [A8.5] pour des réseaux en deux dimensions, quelle que soit leur structure.

La formule (A8.3) semble valable aussi bien pour des percolations par branches que pour des percolations par nœuds.

En trois dimensions la même conjecture a été faite mais n'a pu encore être vérifiée expérimentalement.

Enfin, on a constaté [A8.2] une relation empirique reliant le seuil de percolation  $p_c$  au degré moyen  $d$  du réseau et à sa dimension  $D$  qui permet de prévoir  $p_c$  avec une précision de quelques pour cents :

$$dp_c \approx \frac{D}{D-1}$$

ce qui donne en deux dimensions :

$$p_c \approx \frac{2}{d}$$

et en trois dimensions :

$$p_c \approx \frac{3}{2d}$$

Dans la définition précédente de la probabilité de percolation n'interviennent que les nœuds et, s'il est logique lors d'une percolation par nœuds, de dénombrer les nœuds de l'amas infini et l'ensemble des nœuds restants pour obtenir leur rapport  $P(p)$ , par contre lors d'une percolation par branches, il est moins évident de faire le même dénombrement car on connaît surtout le nombre de branches restantes.

Il serait donc plus intéressant d'utiliser comme probabilité de percolation le rapport :

$$P^*(p) = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{\text{nombre de branches de l'amas infini}}{\text{branches restant dans le réseau}} = pB \quad (\text{A8.4})$$

Mais y a-t-il alors identité entre  $P(p)$  défini plus haut et  $P^*(p)$  ?

La plupart des auteurs se contente de définir  $P(p)$  à partir des nœuds : seul KIRKPATRICK, dans un seul article [A8.7], donne pour une percolation par branches la définition suivante de  $P(p)$  :

*"La fraction des branches qui sont à la fois présentes et connectées par une chaîne complète de branches à l'une des surfaces d'un réseau infiniment grand".*

Ceci coïncide avec notre définition (A8.4).

L'identification des deux définitions conduit à :

$$P^*(p) = \frac{B_a(p)}{B(p)} = P(p) = \frac{N_a(p)}{N(p)} \quad (\text{A8.4})$$

où  $B_a(p)$  est le nombre de branches de l'amas infini

$B(p) = Bp$  le nombre de branches présentes dans le réseau

$N_a(p)$  le nombre de nœuds de l'amas infini

$N(p)$  le nombre de nœuds présents dans le réseau.

Si l'égalité (A8.4) est vraie, on a :

$$\bar{d}_a(p) = \frac{2B_a(p)}{N_a(p)} = \frac{2B(p)}{N(p)} = \frac{2pB}{N(p)} = \bar{d}(p) \quad (\text{A8.5})$$

en notant par  $\bar{d}_a(p)$  le degré moyen de l'amas infini et par  $\bar{d}(p)$  le degré moyen du réseau au stade  $p > p_c$ .

L'identité (A8.5) est vraisemblable pour  $p$  proche de 1 car, alors, l'amas infini renferme une fraction importante des branches et des nœuds du réseau, et le rapport  $2B_a/N_a$  relatif à cet amas est proche du degré moyen  $2B/N$  du réseau.

Lorsque  $p$  s'approche du seuil de percolation, par contre, l'amas infini est formé de la réunion par quelques branches d'un certain nombre d'amas plus petits.

Si on appelle  $b$  la moyenne du nombre de branches des amas du réseau et  $n$  la moyenne du nombre de nœuds des amas et si pour  $p < p_c$  il y a  $m$  amas séparés, on a :

$$\frac{B(p)}{N(p)} = \frac{m \cdot b}{m \cdot n} = \frac{b}{n} \quad (\text{A8.6})$$

Si on réunit  $k$  amas de  $B_i$  branches et  $N_i$  nœuds par  $k$  branches pour former l'amas infini, s'il comporte  $B_a(p)$  branches et  $N_a(p)$  nœuds, on aura :



$$\frac{B_a(p)}{N_a(p)} = \frac{\sum_{k=1}^k B_i + k}{\sum_{i=1}^k N_i} \xrightarrow{k \gg} \frac{k[E(B_i) + 1]}{k E(n_i)} = \frac{b+1}{n} \neq \frac{b}{n} = \frac{B(p)}{N(p)} \quad (A8.7)$$

On a donc également, près du seuil de percolation, identité entre le degré moyen de l'amas infini et celui du réseau et cette identité se poursuit lorsque cet amas infini vient se grossir d'amas finis.

On peut donc identifier  $P(p)$  et  $P^*(p)$  et ceci permet d'utiliser les courbes de  $P(p)$  établies expérimentalement pour calculer le nombre de branches dans l'amas infini puisque d'après (A8.4) et (A8.5) :

$$B_a(p) = B(p) \cdot P^*(p) = B \cdot p \cdot P(p) \quad (A8.8)$$

et quand on identifiera les branches d'un réseau avec des éléments de volume de fluide à l'intérieur d'un milieu poreux, la saturation effective en fluide rapport du nombre de branches connectées à l'amas infini sur le nombre total de branches sera d'après (A.8.8) représentée par la fonction :

$$s(p) = \frac{B_a(p)}{B} = p \cdot P(p) \quad (A8.9)$$

PRESSION MOTRICE, CHARGE MOTRICE

---

Pour tenir compte de l'effet de la pesanteur sur le fluide circulant dans le milieu poreux, il est nécessaire de faire intervenir la "pression motrice" plutôt que la pression simple, car selon l'inclinaison du milieu poreux, les forces de pesanteur interviennent différemment.

La pression motrice  $p^*$  dans un fluide de masse spécifique  $\rho$  en un point où le potentiel de pesanteur est  $\varphi$ , est :

$$p^* = p + \rho\varphi \quad (\text{A9.1})$$

Le potentiel de pesanteur  $\varphi$  n'étant défini qu'à une constante près, on peut se fixer arbitrairement un niveau de référence et compter les distances  $z$  à partir de ce niveau : on a alors :

$$\varphi = gz \quad (\text{A9.2})$$

$g$  étant l'intensité uniforme du champ de pesanteur et :

$$p^* = p + \rho gz \quad (\text{A9.3})$$

Les hydrauliciens emploient de préférence à la pression motrice la "charge"  $h$  égale à la pression divisée par le poids spécifique du fluide : on a alors :

$$h = \frac{p}{\rho g} \quad h^* = \frac{p^*}{\rho g} = h + z \quad (\text{A9.4})$$

La "charge" est homogène à une longueur et comme le poids spécifique de l'eau est 1, les valeurs numériques de  $p$  et  $h$  sont les mêmes exprimés en unités correspondantes.

- Si l'écoulement est horizontal, le potentiel de pesanteur est identique en tous points et la différence de pression motrice est identique à la différence de pression simple.
- Si l'écoulement est vertical comme dans l'expérience de Darcy il n'y a plus identité entre  $p^*$  et  $p$ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DE GROOT.- Thermodynamic of irreversible process.- North-Holland, Amsterdam, 1961.
- [2] MANDEL (J.).- Cours de mécanique des milieux continus. T. 2.- Gauthier-Villars, Paris, 1966.
- [3] SRIVASTAVA (G.P.).- Derivation and calculation of complementary variational principles for the lattice thermal conductivity.- Journal of Physics, C : Solid State Physics, Vol 9. pp. 3037-3053. Août 1976.
- [4] FEYNMAN.- The FEYNMAN lectures on physics.- Addison Wesley Ed., 1963.
- [5] SMYTHE.- Static and dynamic electricity.- Mc Graw-Hill, 1968 (3e Ed.).
- [6] FRISCH (H.L.) et HAMMERSLEY (J.M.).- Percolation processes and related topics.- J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 11, n° 4, pp. 894-918, décembre 1963.
- [7] SHANTE (V.K.S.) et KIRKPATRICK (S.).- An introduction to percolation theory. Advances in Physics, vol. 20, n° 85, pp. 325-357.- 1971.
- [8] BERGE (C.).- Graphes et hypergraphes.- Dunod, Paris, 1973.
- [9] KIRKPATRICK (S.).- Classical transport in disordered media : Scaling and effective medium theories.- Phys. Rev. Lett., vol. 27, n° 25.- pp. 1722-1725.- 1971.
- [10] MARCHANT (J.), GABILLARD (R.).- Sur le calcul d'un réseau résistif aléatoire.- C. R. Acad. Sc. t. 281. Série B.- pp 261-264.- Octobre 1975.
- [11] BAUDOUX (P.) et BEAUFAYS (O.).- Théorie des circuits.- Dunod, 1968.
- [12] SYKES (M.F.), ESSAM (J.W.).- Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions.- J. Math. Phys., Vol. 5, n° 8, pp. 1117-1127.- Août 1964.

- [13] MARCHANT (J.). - Sur la résistance équivalente d'un réseau aléatoire de structure irrégulière. - C.R.Acad.Sc. t.234 Série B. - PP 85-88.- Février 1977
- [14] BRUN (E.A.), MARTINOT-LAGARDE (A.), MATHIEU (J.). - Mécanique des fluides. III.- Dunod, 1970.
- [15] YUDELL L. LUKE. - The special functions and their approximations.- Academic Press, 1969.-
- [16] ERDELYI, MAGNUS, OBERHETTINGER. - Higher transcendental functions.- Mac Graw Hill, 1953.
- [17] PIKE (G.E.), SEAGER (C.H.). - Percolation and conductivity : A computer Study. I.- Phys. Rev. B, Vol. 10, n° 4, pp. 1421-1434.- Août 1974.
- [18] SEAGER (C.H.), PIKE (G.E.). - Percolation and conductivity : A computer Study. II.- Phys. Rev. B, Vol. 10, n° 4, pp. 1435-1446.- Août 1974.
- [19] BRUGGEMAN (D.A.G.). - Ann. Phys. (Leipz.), Vol. 34, p. 636.- 1935.
- [20] LANDAUER (R.). - J. Appl. Phys., Vol. 23, p. 779.- 1952.
- [21] KIRKPATRICK (S.). - Percolation and conduction.- Rev. Mod. Phys., Vol. 45, n° 4, pp. 574-588.- Oct. 1973.
- [22] FOSTER (R.M.). - An extension of a network theorem. IEEE Trans. Circ. Theory CT8, pp. 75-76.- Mars 1961.
- [23] SPINEI (F.). - On some theorems of the electrical network theory.- Rev. Roum. Sci. Techni. Ser. Electrotechn. et Energ.- Vol. 20, n° 2, pp. 175-183.- 1975.
- [24] SHANKLAND (T.J.), WAFF (H.S.). - Conductivity in fluid-bearing rocks.- J. Geoph. Res., Vol. 79, n° 32, pp. 4863-4868.- Nov. 1974.
- [25] RINK (H.), SCHOPPER (J.R.). - Computations of network models of porous media.- Geoph. Prosp., Vol. 16, n° 2, pp. 277-294.- 1968.
- [26] MORINEAU (Y.), SIMANDOUX (P.), DUPUY (M.). - Etude des hétérogénéités de perméabilité dans les milieux poreux.- Comptes-rendus du 2ème Colloque ARTFP.- pp. 273-299.- Editions Technip, juin 1965.

- [27] HOUPEURT (A.). - Mécanique des fluides dans les milieux poreux, critiques et recherches. - Editions Technip, 1974.
- [28] CARDWELL (W.T. Jr.), PARSONS (R.L.). - Average permeabilities of heterogeneous oil sands. - Trans. AIME, Vol. 160, p. 34. - 1945.
- [29] WARREN (J.F.), PRICE (H.S.). - Flow in heterogeneous porous media. - SPEJ, Sept. 1961.
- [30] FATT (I.). - The network model of porous media. - Pet. Trans. AIME, Vol. 207. - pp. 144-181. - 1956.
- [31] DODD (C.G.), KIEL (O.G.). - Evaluation of Monte-Carlo methods in studying fluid. fluid displacement and wettability in porous rocks. - J. Phys. Chem., Vol. 63, p. 1646. - 1959.
- [32] SIMON (R.), KELSEY (F.J.). - The use of capillary tube networks in reservoir performance studies. 1-Equal viscosity miscible displacements. - Soc. Pet. Eng. Journ., pp. 99-112. - juin 1971.
- [33] PROBINE (M.C.). - An electrical analogue method of predicting the permeability of unsaturated porous materials. - Brit. Journ. Appl. Phys., Vol. 9, pp. 144-148. - Avril 1958.
- [34] HARRIS (C.C.). - Latin square as a network model of random packing. - Nature, n° 4959. - pp. 353-356. - Janvier 1965.
- [35] GANOULIS (J.). - Remplacement d'un fluide par un autre dans des domaines de géométrie aléatoire ou non cylindrique. - Thèse. Toulouse, Juin 1974.
- [36] MARLE (Ch.), ALBET (R.), LARDE (M.). - Etude du mode de répartition de deux phases immiscibles dans un milieu poreux au moyen des mesures de pression capillaire. - Rev. Inst. Franç. Pet. Hors série, pp. 162-183. - 1963.
- [37] PACSIRSKY (J.), GAULIER (C.), MARLE (C.). - Etude de la perméabilité relative d'un milieu poreux à une phase non mouillante en relation avec les pressions capillaires et la conductivité électrique de cette phase. Etude expérimentale de la perméabilité du mercure. Comptes-rendus du 2ème colloque ARTFP. - Mai-juin 1965, Technip Ed., Paris.
- [38] DURAND (E.). - Magnétostatique. - Masson.
- [39] Les fluides de forages (Collectif). - Edition Technip, Paris, 1968.

## ANNEXE 1

- [A1.1] ROUBINE.- Introduction à la théorie de la communication.- Masson, 1970.
- [A1.2] BLANC-LAPIERRE.- Modèles statistiques pour l'étude des phénomènes de fluctuations.- Masson, 1963.

## ANNEXE 2

- [A2.1] DELTHEIL (R.).- Probabilités géométriques.- Gauthier-Villars, Paris, 1926.
- [A2.2] KENDALL-MORAN.- Geometrical Probabilities.- Hafner, New-York, 1963.
- [A2.3] MILES (R.E.).- Random polygons determined by random lines in a plane.- Proc. Natl. Acad. Sci. (U.S.A.), 52, pp. 901-907 et 1157-1160.- 1964.
- [A2.4] MILES (R.E.).- Poisson flats in euclidean spaces.- Part I : A finite number of random uniform flats.- Adv. Appl. Prob. 1.- pp. 211-237.- 1969.
- [A2.5] MILES (R.E.).- On the homogeneous planar Poisson point process.- Math. Biosciences 6. pp. 85-127.- 1970.
- [A2.6] MILES (R.E.).- Poisson flats in euclidean spaces.- Part II.: Homogeneous poisson flats and the complementary theorem.- Adv. Appl. Prob. 3., pp. 1-43.- 1971.
- [A2.7] MILES (R.E.).- Random points sets and tessellations on the surface of a sphere.- SANKHYĀ, Série A, Vol. 33, pt 2, pp. 145-174.- 1971.
- [A2.8] MILES (R.E.).- The various aggregates of random polygons determined by random lines in a plane.- Adv. in Math. 10, pp. 256-290.- 1973.
- [A2.9] MATHERON (G.).- Eléments pour une théorie des milieux poreux.- Masson, Paris, 1967.
- [A2.10] MATHERON (G.).- Random sets and Integral geometry.- Wiley and sons, 1975.
- [A2.11] CHALKLEY, CORNFIELD, PARK.- Method for estimating volume - surface ratios.- Science, Vol. 110.- pp. 295-297.- 23 septembre 1949.

- [A2.12] PEREZ-ROSALES (C.).- A simplified method for determining specific surface.- J. Pet. Tech., pp. 1081-1084.- Août 1967.
- [A2.13] PEREZ-ROSALES (C.).- Simultaneous determination of basic geometrical characteristics of porous media.- Soc. Pet. Eng. J..- pp. 414-416.- Déc. 1969.
- [A2.14] PEREZ-ROSALES (C.).- Structural characteristics of granular porous media.- Soc. Pet. Eng. J..- pp. 363-366.- Déc. 1971.
- [A2.15] PIEKAAR (H.W.), CLARENBURG (L.A.).- Aerosol filters : pore size distribution in fibrous filters.- Chem. Eng. Sc., Vol. 22.- pp. 1399-1408.- 1967.
- [A2.16] DELFINER, ETIENNE, FONCK.- Application de l'analyseur de textures à l'étude morphologique des réseaux poreux en lames minces.- Rev. Inst. Fr. Petr., Vol. 27, n° 4, pp. 535-558.- 1972.

### ANNEXE 3

- [A3.1] FRECHET (M.).- T. 1, Fasc. III, Premier livre : Généralités sur les probabilités, éléments aléatoires.- Gauthier-Villars, 1950 (2ème éd.).
- [A3.2] KORN (G.A), KORN (T.M.).- Mathematical Handbook for scientists and engineers.- Mac Graw Hill.- 1961.
- [A3.3] FELLER (W.).- An introduction to probability theory and its application.- Vol. 1.- Wiley and sons, 1962 (2nd ed.).
- [A3.4] WILKS (S.).- Mathematical statistics.- Wiley and sons.- 1962.
- [A3.5] GIRAULT (M.).- Calcul des probabilités en vue des applications.- Dunod, 1964 (2ème éd.).
- [A3.6] ANGOT (A.).- Compléments de mathématiques.- Editions de la revue d'optique, 1965 (5ème éd.).
- [A3.7] KAUFMANN (A.).- Cours moderne de calcul des probabilités.- Albin Michel, 1965.
- [A3.8] SVESHNIKOV (A.A.).- Problems in probability theory, mathematical statistics and theory of random functions.- Saunders Co. Philadelphie, 1965.
- [A3.9] BASS (J.).- Eléments de calcul des probabilités.- Masson, 1967.

- [A3.10] TORTRAT (A.). - Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires. - Masson, 1971.
- [A3.11] KENDALL (M.G.), STUART (A.). - The advanced theory of statistics, Vol. 1. - Griffin, Londres, 1962 (2nd ed.).
- [A3.12] ABRAMOWITZ (M.), SEGUN (I.A.). - Handbook of mathematical functions. - Dover Publ., New-York, 1968 (7th ed.).

#### ANNEXE 4

- [A4.1] BEAUDOUX (P.), BEAUFAYS (O.). - Théorie des circuits. - Dunod, 1968.
- [A4.2] CHEN (W.K.). - Applied graph theory. - North-Holland, 1971.
- [A4.3] SESHU (S.), REED (M.B.). - Linear graph and electrical networks. - Addison-Wesley, 1961.
- [A4.4] BALABANIAN (N.), BICKART (T.). - Electrical network theory. - Wiley and sons, 1969.

#### ANNEXE 5

- [A5.1] BERGE (C.). - Principes de combinatoire. - Dunod, 1968.

#### ANNEXE 7

- [A7.1] COLLINS (R.E.), COOKE (C.E.). - Fundamental basis for the contact angle and capillary pressure. - Trans. Farad. Soc. - pp. 1602-1606. - 1958.
- [A7.2] MAYER (R.P.), STOWE (R.A.). - Mercury porosimetry. Breakthrough pressure for penetration between packed spheres. - J. Coll. Sc., Vol. 20. - pp. 893-911. - 1965.
- [A7.3] CARMAN (P.C.). - Capillary rise and capillary movement of moisture in fine sands. - Soil Science, Vol. 52. - pp. 1-14. - 1941.
- [A7.4] HARMSSEN (G.J.). - The concept "hydraulic radius" in porous media. - Pet. Trans. AIME, Vol. 204. - pp. 274-277. - 1955.
- [A7.5] DULLIEN (F.A.L.), BATRA (U.K.). - Determination of the structure of porous media. - Ind. Eng. Chemi., Vol. 62, n° 10. - pp. 25-53. - Octobre 1970.
- [A7.6] PURCELL (W.R.). - Capillary pressure. Their measurement using mercury and the calculation of permeability therefrom. - Pet. Trans. AIME. - pp. 39-48. - Février 1949.



- [A7.7] ETIENNE (F.), LE FOURNIER (J.).- Application des résines synthétiques colorées pour l'étude des propriétés réservoir des roches en lames minces.- Rev. Inst. Franç. Pet., Vol. XXII, n° 4.- pp. 595-629.- Avril 1967.
- [A7.8] DELFINER (P.), ETIENNE (J.), FONCK (J.M.).- Application de l'analyseur de textures à l'étude morphologique des réseaux poreux en lames minces.- Rev. Inst. Franç. Pet., Vol. XXVII, n° 4.- pp. 535-558.- Juillet 1972.

#### ANNEXE 8

- [A8.1] DE GENNES (P.G.).- La percolation, un concept unificateur.- La Recherche, Vol. 7.- pp. 919-927.- Novembre 1976.
- [A8.2] VISSOTSKY (V.A.), GORDON (S.B.), FRISCH (H.L.), HAMMERSLEY (J.M.).- Critical percolation probabilities (Bond problem).- Phys. Rev., Vol. 123, n° 5.- pp. 1566-1567.- 1961.
- [A8.3] FRISCH (H.L.), HAMMERSLEY (J.M.), WELSH (D.J.A.).- Monte-Carlo estimate of percolation probabilities for various lattices.- Phys. Rev., Vol. 126, n° 3.- pp 949-951.- 1962.
- [A8.4] SYKES (M.F.), ESSAM (J.W.).- Some exact critical percolation probabilities for bond and site problems in two dimensions.- Phys. Rev. Lett., Vol. 10, N° 1.- pp. 3-4.- 1963.
- [A8.5] SYKES (M.F.), GAUNT (D.S.), GLEN (M.).- Percolation processes in two dimensions IV. Percolation probability.- J. Phys. A : Math. Gen., Vol. 9.- pp. 725-730.- 1976.
- [A8.6] SYKES (M.F.), GAUNT (D.S.), ESSAM (J.W.).- The percolation probability for the site problem on the face-centered cubic lattice.
- [A8.7] KIRKPATRICK (S.).- Percolation and conduction.- Tech. Rep. ISSP. Ser. B, n° 15.- Mars 1973.
- [A8.8] BROADBENT (S.R.), HAMMERSLEY (J.M.).- Percolation processes.- I : Crystal and Mazes.- Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 53.- pp. 629-641.- 1957.