

D'ORDRE 640

50376
1977
19

THESE

PRÉSENTÉE

À

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

POUR OBTENIR LE TITRE

DE

DOCTEUR DE 3^e CYCLE

PAR

CHARLES DEBAILLEUX

ETUDE DU COMPORTEMENT D'UN

PALIER HYDROSTATIQUE



SOUTENUE LE 6 JUIN 1977

PRESIDENT :	M. GONTIER G.	PROFESSEUR (LILLE I)
MEMBRES :	MM. BOUDET R.	MAITRE DE CONFERENCES (TOULOUSE III)
	DYMENT A.	MAITRE DE CONFERENCES (LILLE I)
	FLAMME JM.	MAITRE DE CONFERENCES (LILLE I)
	FRENE J.	MAITRE DE CONFERENCES (POITIERS)
	LEROY A.	PROFESSEUR (MONS)

B.U. LILLE I



D 030 073821 7

DOYENS HONORAIRES DE l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit
et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DECUYPER
DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, GLACET, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE
KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT,
MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SAVARO, WATERLOT, WIEMAN,
ZAMANSKI.

PRESIDENTS HONORAIRES DE L'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R. DEFRETIN, M. PARREAU.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. M. MIGEON.

PROFESSEURS TITULAIRES

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Physique
M. BECART Maurice	Physique Atomique et Moléculaire
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BONNEMAN Pierre	Chimie Appliquée
M. BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M. BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. CELET Paul	Géologie Générale
M. COEURE Gérard	Analyse
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des Entreprises
M. DELATTRE Charles	Géologie Générale
M. DELHAYE Michel	Chimie Physique
M. DERCOURT Jean	Géologie Générale
M. DURCHON Maurice	Biologie Expérimentale
M. FAURE Robert	Mécanique
M. FOURET René	Physique du Solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. GONTIER Gérard	Mécanique
M. GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique
M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M. LANSRAUX Guy	Physique Atomique et Moléculaire
M. LAVEINE Jean-Pierre	Paléontologie
M. LEBRUN André	Electronique
M. LEHMANN Daniel	Géométrie

Mme LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M. LINDER Robert	Biologie et Physiologie Végétales
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M. LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M. MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M. MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. POUZET Pierre	Analyse numérique
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. SALMER Georges	Electronique
M. SCHILTZ René	Physique Atomique et Moléculaire
Mme SCHWARTZ Marie-Hélène	Géométrie
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique
M. TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M. TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. VIVIER Emile	Biologie Cellulaire
M. WERTHEIMER Raymond	Physique Atomique et Moléculaire
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie Végétale
M. BOILLET Pierre	Physique Atomique et Moléculaire
M. BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M. BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M. CAPURON Alfred	Biologie Animale
M. CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
Mme DACHARRY Monique	Géographie
M. DEPRez Gilbert	Physique Théorique
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
Mme EVRARD Micheline	Chimie Appliquée
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M. HERMAN Maurice	Physique Spatiale
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LENTACKER Firmin	Géographie
M. LEROY Jean-Marie	Chimie Appliquée
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
Mlle MARQUET Simone	Probabilités
M. MIGEON Michel	Chimie Physique
M. MONTEL Marc	Physique du Solide
M. MONTUELLE Bernard	Biologie Appliquée
M. NICOLE Jacques	Chimie Appliquée
M. PAQUET Jacques	Géologie Générale
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M. SLIWA Henri	Chimie Organique
M. WATERLOT Michel	Géologie Générale

MAITRES DE CONFERENCES (Et Chargés d'Enseignement)

M. ADAM Michel	Sciences Economiques
M. ANTOINE Philippe	Analyse
M. BART André	Biologie Animale
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie

M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M. BOSCO Denis	Probabilités
M. BREZINSKI Claude	Analyse Numérique
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CARREZ Christian	Informatique
M. COQUERY Jean-Marie	Psycho-Physiologie
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. COUTURIER Daniel	Chimie Organique
M. CRAMPON Norbert	Géologie
M. CROSNIER Yves	Electronique
M. DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DELORME Pierre	Physiologie Animale
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M. DHAINAUT André	Biologie Animale
M. DELAUNAY Jean-Claude	Sciences Economiques
M. DERIEUX Jean-Claude	Microbiologie
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique du Solide
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUEE Gérard	Géologie
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du Solide
M. FAKIR Sabah	Algèbre
M. FLAMME Jean-Marie	Technologie de Construction
M. FOCT Jacques	Génie Mécanique
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. FONTAINE Jacques	Electronique
M. FOURNET Bernard	Biochimie
M. GAMBLIN André	Géographie
M. GERVAIS Michel	Gestion des Entreprises
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JOURNEL Gérard	Physique Atomique et Moléculaire
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LAURENT François	Automatique
Mlle LEGRAND Denise	Algèbre
Mlle LEGRAND Solange	Algèbre
M. LEROY Yves	Electronique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique théorique
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAHIEU Jean-Marie	Physique Atomique et Moléculaire
M. MESSELYN Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. MIGNOT Fulbert	Analyse Numérique
M. N'GUYEN VAN CHI Régine	Géographie
M. NOTELET Francis	Electrotechnique
M. NUSSEMBAUM Maurice	Sciences Economiques
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PAUPARDIN Colette	Biologie Physiologie Végétales
M. PECQUE Marcel	Chimie Physique
M. PERROT Pierre	Chimie Appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie Animale
M. PETIT Francis	Chimie Organique
M. PONSOLLE Louis	Chimie Physique
M. POVY Lucien	Automatique
M. RICHARD Alain	Biologie
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROY Jean-Claude	Psycho-Physiologie
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SOMME Jean	Géographie

M^{le} SPIK Geneviève
M. STANKIEWICZ François
M. STERBOUL François
M. TAILLEZ Roger
M. THERY Pierre
M. TOP Gérard
M. TOULOTTE Jean-Marc
M. TREANTON Jean-René
M. VANDORPE Bernard
M. VILLETTE Michel
M. WALLART Francis
M. WERNER Georges
M^{me} ZIN-JUSTIN Nicole

Biochimie
Sciences Economiques
Informatique
Biologie
Electronique
Sciences Economiques
Automatique
Sociologie
Chimie Minérale
Mécanique
Chimie
Informatique
Algèbre

Nous tenons tout d'abord à exprimer notre reconnaissance à Monsieur le Professeur GONTIER qui nous a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Ce travail est à l'origine d'une collaboration avec le département "Construction des Machines" de la Faculté Polytechnique de MONS (Belgique) dirigé par Monsieur le Professeur LEROY. Que celui-ci reçoive notre plus vive gratitude pour l'accueil qu'il nous a toujours réservé, et pour les conseils qu'il nous a donnés au cours de nos travaux.

Que Monsieur FLAMME trouve ici nos plus vifs remerciements pour avoir dirigé nos travaux et, en outre, permis à notre section de trouver sa place au sein de l'Université des Sciences et Techniques de LILLE.

Nous remercions Messieurs BOUDET, DYMENT, FRENE pour les conseils et les suggestions qu'ils nous ont formulés.

Nous sommes également reconnaissants au personnel du département "Construction des Machines" de la Faculté Polytechnique de MONS pour l'aide qu'il nous a apportée à la réalisation de ce travail.

Nous exprimons notre gratitude à Madame DUBOIS qui s'est acquittée de la tâche ingrate de la dactylographie.

Nous sommes reconnaissants à Monsieur GUENIER du soin qu'il a apporté à la réalisation de certaines figures.

INTRODUCTION

Confronté avec un problème de réalisation d'un guidage en rotation par palier fluide, le constructeur mécanicien peut classiquement recourir à deux familles de fluide et deux principes d'établissement du film lubrifiant.

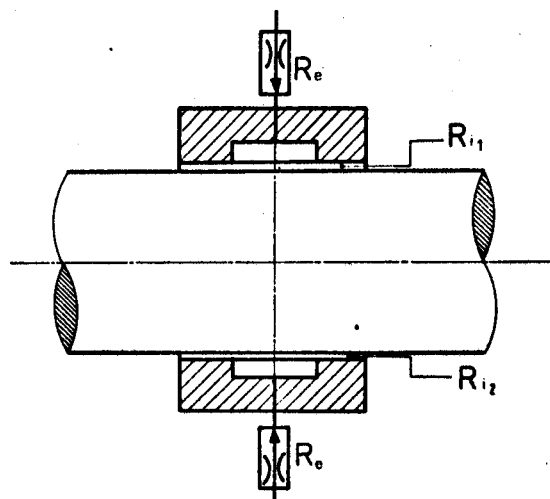
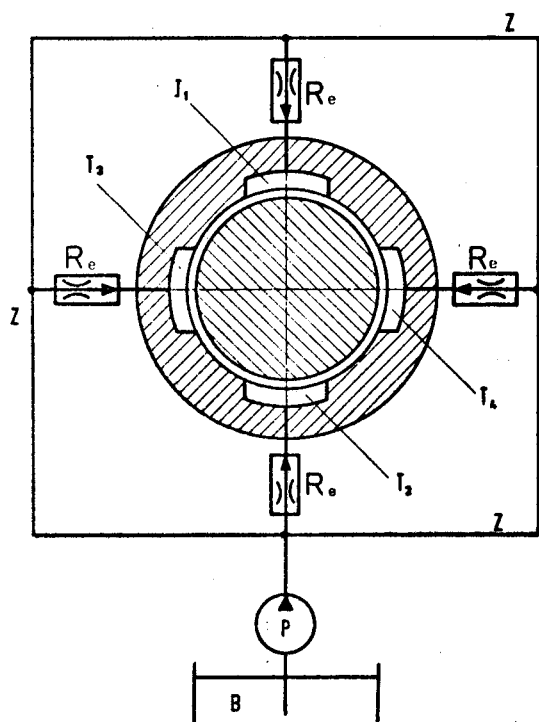
Au premier de ces principes, appliqué exclusivement aux fluides incompressibles, correspond la lubrification hydrodynamique. Dans ce cas, la pression créée dans le film lubrifiant s'établit grâce à l'existence concomitante d'un excentrement du tourillon dans le coussinet, d'une vitesse relative entre ces deux éléments et de forces dues à la viscosité du fluide.

Au second de ces principes, appliqué aux fluides compressibles ou incompressibles, correspondent respectivement les lubrifications aérostati- que et hydrostatique. Selon ce principe, la pression dans le film est créée par un organe extérieur au palier (compresseur ou pompe) et modulée au tra- vers de restrictions d'alimentation fixes ou réglées.

Les paliers hydrodynamiques utilisent le seul principe de la lubri- fication hydrodynamique. Par contre, les paliers hydrostatiques mettent en application non seulement le principe de la lubrification hydrostatique, mais aussi le principe de la lubrification hydrodynamique : en effet dans ces paliers, sauf dans le cas particulier de l'absence de charge radiale, c'est- à-dire aussi d'excentrement du tourillon dans le coussinet, la lubrification hydrodynamique s'établit d'elle même et se superpose à la lubrification hy- drostatique imposée de l'extérieur.

En principe, il existe de nombreuses réalisations possibles de pa- liers hydrostatiques. Ces réalisations se distinguent essentiellement par le type de restrictions d'alimentation ainsi que par le nombre, la géométrie, la position des chambres d'alimentation, et l'éventuelle existence de rai- nures de décharge qui isolent ces chambres.

PALIER HYDROSTATIQUE



P = Pompe , B = Réservoir d'huile ,
 Re = Restrictions, T = Orifices
 Z = Arrivée d'huile ,

De nombreux travaux [1...4] ont été consacrés à l'étude du comportement de la plupart de ces paliers. A notre connaissance, toutes les études conduites jusqu'à présent, à l'exception d'une seule, celle de M. CHARCOSSET, sont relatives à des chambres d'alimentation rectangulaire. Nous avons estimé qu'il était intéressant de recourir à d'autres géométries de chambre, et en particulier à la plus simple d'entr'elles et la plus facile à usiner : le cylindre de révolution. C'est l'objet de notre travail que d'étudier le comportement de paliers hydrostatiques munis de telles chambres disposées dans le coussinet, non séparées par des rainures de décharge et alimentées au travers de restrictions fixes.

Nous plaçant du point de vue du constructeur, nous entendons par étude du comportement d'un palier :

- l'évaluation de la rigidité du palier (rapport de la force portante à l'excentrement relatif du tourillon par rapport au coussinet).
- la détermination des conditions de stabilité (*).

(*) Pour être complet, il faudrait encore étudier le comportement thermique du palier et son incidence sur la variation de viscosité du lubrifiant.

Cette étude du comportement a été conduite, pour la rigidité dans le cas de sollicitations extérieures stationnaires (étude statique) ou variables (étude dynamique) et pour la stabilité dans le cas des sollicitations stationnaires, ainsi que dans l'hypothèse où les conditions d'alimentation à l'entrée du palier restent invariantes.

Notre travail généralise celui de M. CHARCOSSET, qui a déterminé la force portante des paliers de même géométrie que celle que nous avons choisie, mais dans le cas particulier où le diamètre des orifices reste petit.

Sur base de l'équation de Reynolds et de sa résolution pour la géométrie que nous nous sommes imposés (chap. 1 et 2), nous avons déterminé successivement :

- la force portante du palier en tenant compte du diamètre des orifices (chap. 3);
- la rigidité du palier (chap. 4);
- la valeur du couple de frottement (chap. 5).

Tous ces résultats numériques devront, ultérieurement faire l'objet de vérifications expérimentales sur base d'une machine d'essai dont la conception est décrite au chapitre (6).

Enfin dans le dernier chapitre, est abordé le problème de la détermination des conditions de stabilité.

CHAPITRE 1 : EQUATION DE REYNOLDS

1-1) GENERALITES

L'étude qui est ici développée repose sur l'application des équations de Reynolds. Ces équations sont obtenues par simplification des équations de Navier, elles mêmes issues des équations fondamentales de la Mécanique des fluides, selon un raisonnement qui figure à l'annexe (I).

1-2) EQUATIONS DE NAVIER

Les équations de Navier sont valables dans tout système d'axes, en vertu de leur caractère tensoriel.

Nous les écrirons et nous les utiliserons dans un repère cartésien selon l'expression :

$$\rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right] + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \mu}{\partial x_j}$$

en désignant par :

$x_i \rightarrow x, y, z$: les coordonnées précisant la position d'une particule fluide à l'instant t ,

$u_i \rightarrow u, v, w$: les composantes du vecteur vitesse U de cette même particule fluide,

$f_i \rightarrow f_x, f_y, f_z$: les composantes de la force volumique,

ρ : la masse volumique au fluide

μ : la viscosité dynamique du fluide,

Δ : le lapacien.

1-3) TYPE DE PALIER ET SYSTEME DE NOTATIONS UTILISES

Nous considérons un palier radial constitué d'un tourillon (élément n° 1) et d'un coussinet (élément n° 2) dont la représentation est schématisée à la figure 1.1.

Sans limiter la généralité de notre raisonnement, nous faisons les hypothèses suivantes :

- le centre O_2 du coussinet est absolument fixe, et le coussinet tourne autour de O_2 à la vitesse angulaire absolue $\vec{\omega}_2$.

- le centre O_1 du tourillon occupe une position quelconque dans le coussinet, compatible avec les conditions de non interférence du coussinet et de l'arbre; le tourillon tourne autour de son centre O_1 à la vitesse angulaire absolue $\vec{\omega}_1$.

Nous utiliserons :

- Un système d'axes absolument fixe $O_0x_0y_0z_0$ dont l'axe des côtes est parallèle à l'axe du palier et opposé au vecteur $\vec{\omega}$, vecteur rotation relative du tourillon par rapport au coussinet ($\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$).

- Un système d'axes $O_2\xi\eta z$ solidaire de la ligne des centres, centré sur le coussinet, dont l'axe des ordonnées $O_2\eta$ est dirigé selon la ligne des centres de O_1 vers O_2 .

- Un système d'axes $Axyz$ solidaire du tourillon, centré en un point A quelconque de la périphérie du tourillon (A est repéré par rapport à $O_1\eta$ par l'angle polaire θ), et tel que O_2A définisse l'axe des ordonnées Ay .

Nous appellerons B , l'intersection de l'axe Ay avec le coussinet.

Nous adopterons les notations suivantes :

e : distance O_2O_1

l : largeur du palier

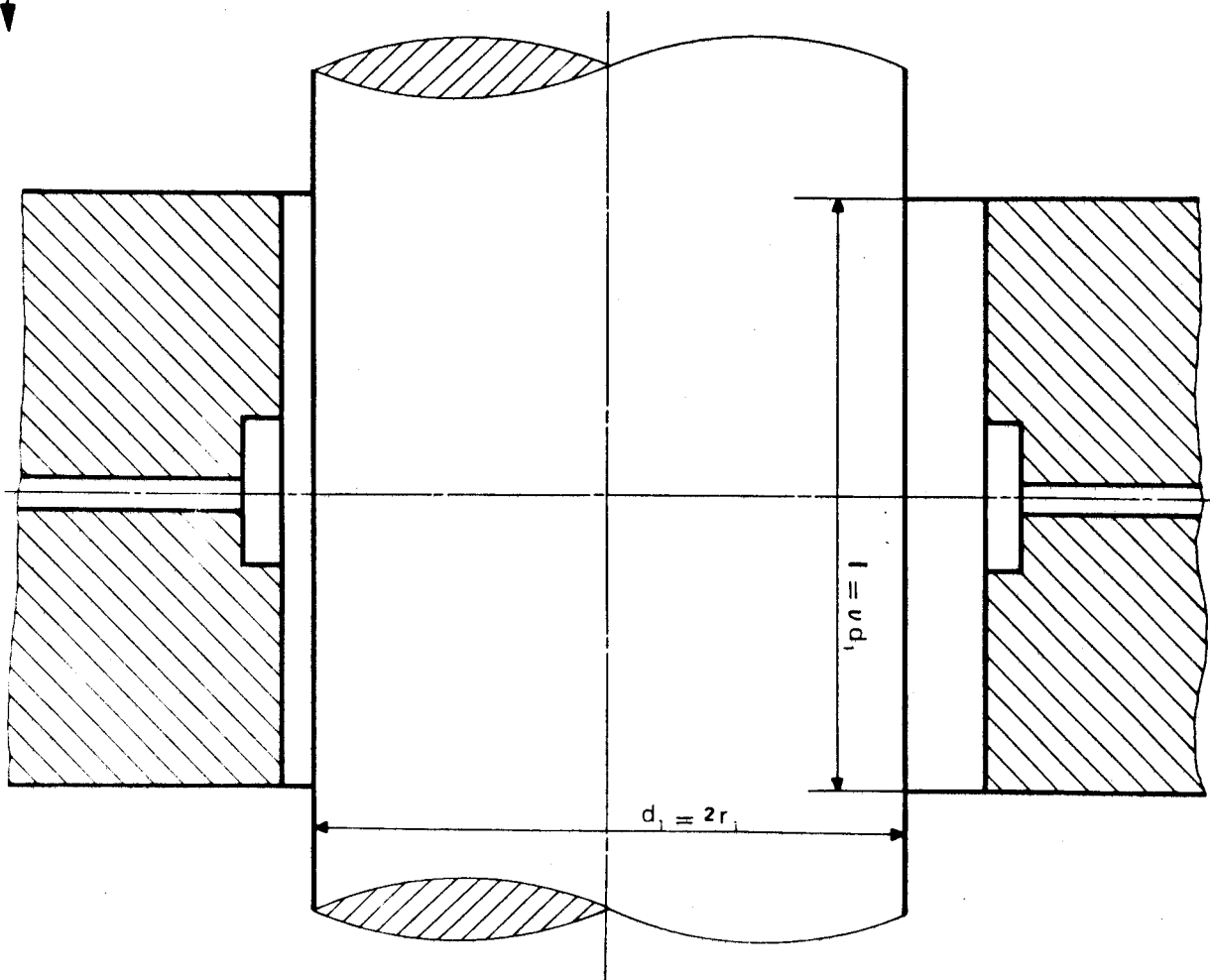
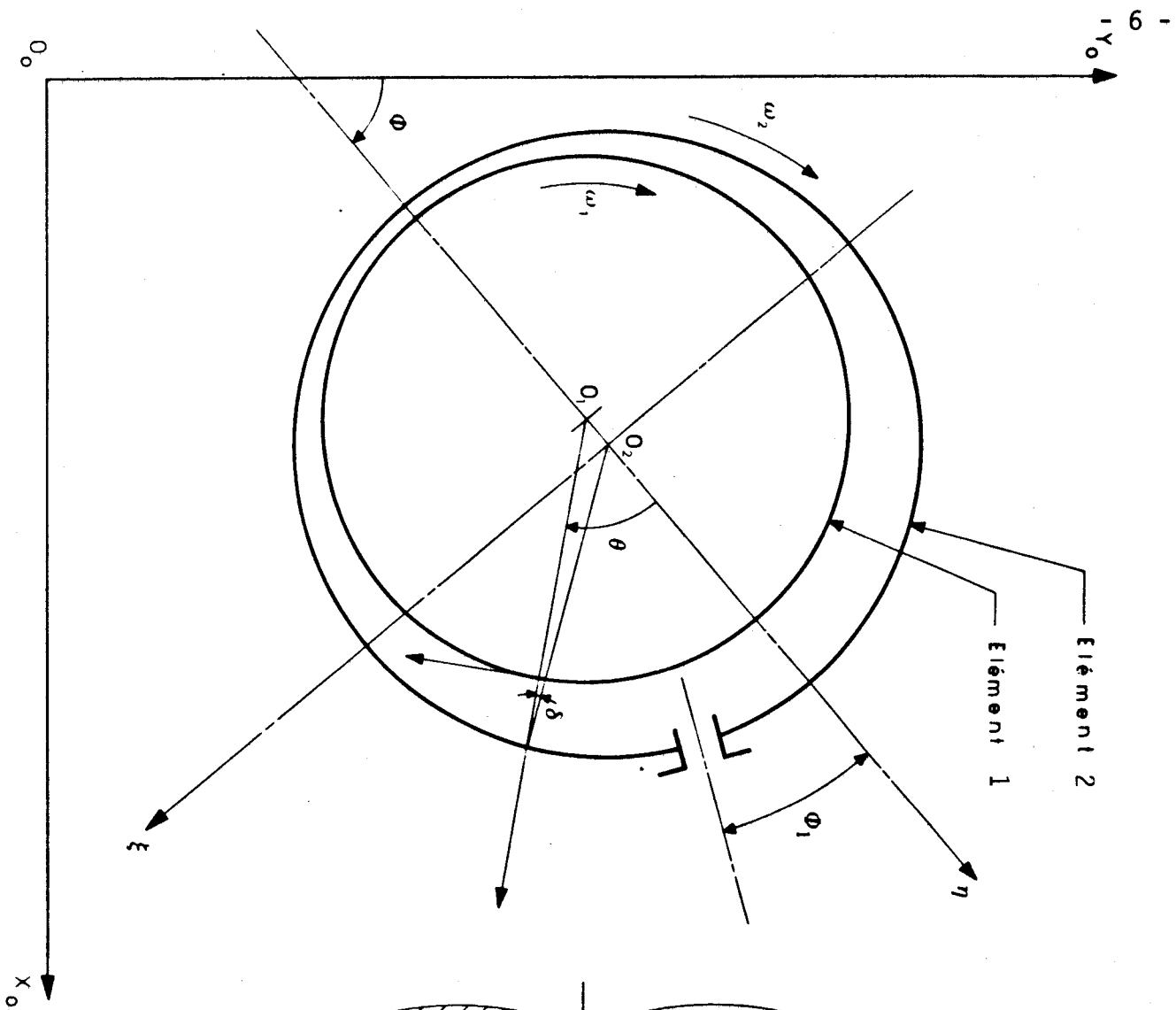
r_1 : rayon du tourillon

r_2 : rayon du coussinet

v : élanement du palier = l/d_1

ϕ : angle $(\vec{O_0y}, \vec{O_2\eta})$

ϕ_1 : angle que fait l'axe du i^{eme} orifice par rapport à l'axe $(\vec{O_2\eta})$



1-4) HYPOTHESES DE L'ETUDE ET EQUATION DE REYNOLDS

La géométrie du palier envisagé ici, conduit classiquement à dégager certaines hypothèses simplificatrices, que nous rappelons ci-dessous.

a) L'épaisseur h du film d'huile est très petite vis à vis de la largeur l du palier et de son périmètre $2 \pi r$ (r désignant le rayon du tourillon). Ceci nous permet de négliger la courbure du film, de substituer à la vitesse rotationnelle du fluide une vitesse de translation, et de déployer le palier selon le schéma représenté à la figure 1.2.

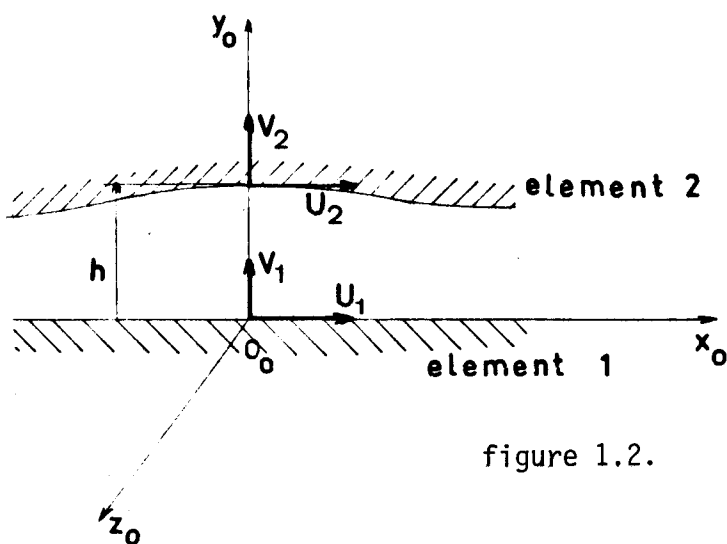


figure 1.2.

b) Le gradient de pression suivant l'épaisseur du film est négligeable :

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

c) L'écoulement du fluide dans le palier est laminaire : il n'y a ni vortex, ni turbulence.

Remarque : Les travaux de GI Taylor [5] ont montré que l'apparition des tourbillons était liée à une valeur critique d'un nombre sans dimension, le nombre de Taylor T , défini pour un palier par l'expression suivante :

$$T = \frac{12 h_0 \omega_1 r_1}{\mu} \sqrt{\frac{h_0}{r_1}}$$

dans laquelle h_0 représente le jeu radial pour un tourillon centré, appelé plus brièvement dans la suite : jeu radial.

La valeur critique qui donne l'apparition des tourillons (T_c) est selon Taylor de 41,2. Il y correspond un nombre de Reynolds critique (Re_c), défini par la relation suivante :

$$Re_c = 41,2 \sqrt{\frac{r_1}{h_0}}$$

d) Aucune force volumique extérieure n'agit sur le film ce qui entraîne :

$$f_x = f_y = f_z = 0$$

e) L'inertie du fluide est faible en comparaison des forces de viscosité.

Ces conditions étant obtenues [6] dans le cas où

$$R \left[\frac{h_0}{r_1} \right]^2 \ll 1$$

f) Les gradients des composantes de la vitesse selon l'épaisseur du film d'huile $\left[\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y} \right]$ sont prépondérants par rapport aux autres gradients, qui peuvent dès lors être négligés.

Toutes les hypothèses précédentes introduites dans les équations de Navier, réduisent celles-ci aux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad ; \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1)$$

soumises aux conditions aux limites :

$$u = U_1 \text{ pour } y = 0$$

$$u = U_2 \text{ pour } y = h$$

$$v = 0 \text{ pour } y = 0$$

$$v = V_2 - V_1 \text{ pour } y = h$$

$$w = W_1 \text{ pour } y = 0$$

$$w = W_2 \text{ pour } y = h$$

Les composantes de la vitesse W_1 et W_2 peuvent être égalées à zéro parce que l'on ne considère pas de mouvement relatif du tourillon par rapport au coussinet suivant la direction axiale du palier :

$$W_1 = W_2 = 0$$

En fluide compressible et barotrope, nous supposons :

- que la viscosité μ , et la masse volumique ρ sont des fonctions de la température et de la pression,
- que la température du fluide est constante dans l'épaisseur du film.

Compte-tenu de l'hypothèse "b", et des conditions aux limites que nous venons d'exprimer, les équations (1) intégrées deux fois s'écrivent dès lors :

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + \left(\frac{h-y}{h}\right)U_1 + \frac{y}{h} U_2 \tag{2}$$

$$w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y (y-h)$$

En remplaçant les composantes de la vitesse u et w par leur valeur dans l'équation de continuité qui s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0,$$

En intégrant cette équation par rapport à y , tout en respectant les conditions aux limites sur la vitesse, énoncées ci-dessus, nous obtenons l'équation de Reynolds qui s'écrit[7]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{1}{\chi} + 1 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{1}{\chi} + 1 \right) \right] = 6 \left(\frac{1}{\chi} + 1 \right) \left\{ h \frac{\partial}{\partial x} \left[p^{\frac{1}{\chi}} (U_2 + U_1) \right] - p^{\frac{1}{\chi}} (U_2 - U_1) \frac{\partial h}{\partial x} + 2(V_2 - V_1) p^{\frac{1}{\chi}} + 2h \frac{\partial p^{\frac{1}{\chi}}}{\partial t} \right\} \tag{3}$$

dans laquelle χ désigne l'exposant de l'évolution polytropique du lubrifiant. supposé être un gaz parfait.

1-5) EXPRESSION DU JEU DANS LE FILM : "h"

L'expression du jeu $h = AB$ s'obtient aisément à partir de considérations géométriques, conformément à la figure 1-1.

Cette expression est classique et s'écrit d'après l'annexe II .

$$h = h_0 (1 + \epsilon \cos \theta) \quad (4)$$

ϵ désignant l'excentricité relative : $\epsilon = e/h_0$

1-6) DETERMINATION DES VITESSES INTERVENANT DANS L'EQUATION DE REYNOLDS

Compte tenu des hypothèses, le centre O_1 du tourillon est animé d'une vitesse \vec{V}_{O_1} .

Les composantes de cette vitesse dans le système d'axes $O_2 \xi \eta z$ ($V_{O_1 n}, V_{O_1 t}, 0$) s'écrivent :

$$V_{O_1 n} = -\epsilon h_0 \dot{\phi}$$

$$V_{O_1 t} = -\dot{\epsilon} h_0$$

Dans le système d'axes $Axyz$, les composantes de \vec{V}_{O_1} ($V_{O_1 x}, V_{O_1 y}, 0$) se déduisent immédiatement des expressions précédentes selon les relations :

$$V_{O_1 x} = \dot{\epsilon} h_0 \sin \theta - \epsilon h_0 \dot{\phi} \cos \theta$$

$$V_{O_1 y} = 0$$

La vitesse absolue du point A (\vec{V}_A) est précisée par la relation suivante dans le repère $Axyz$:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{AO_1A}$$

dans laquelle $\vec{\omega}_1$ est le vecteur vitesse angulaire de rotation du tourillon exprimé dans le repère $Axyz$. La composante de ce vecteur selon l'axe

* : Dans la suite de ce travail, X° et $X^{\circ\circ}$ désigneront les dérivées premières et secondes de X par rapport au temps.

des côtes s'écrit :

$$- (\omega_1 + \dot{\phi}).$$

Les composantes de la vitesse du point A dans le système d'axes Axyz (U_1, V_1) s'écrivent par conséquent selon les expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \dot{\epsilon} h_0 \sin\theta - \epsilon h_0 \dot{\phi} \cos\theta + r_1 \dot{\phi} + r_1 \omega_1 \\ V_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

En procédant de la même façon pour le point B appartenant au cousinet, on obtient les expressions suivantes des composantes (U_2, V_2) de sa vitesse dans le repère Axyz :

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= r_2 \omega_2 + r_1 \dot{\phi} \\ V_2 &= -r_2 \omega_2 \sin\delta + \dot{\epsilon} h_0 \cos\theta + \epsilon h_0 \dot{\phi} \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Dans cette dernière expression, δ désigne l'angle $(\vec{O_2B}, \vec{O_1B})$

1-7) EQUATIONS DE REYNOLDS

Compte tenu de la forme déployée du palier, nous utilisons les variables indépendantes θ et ζ définies comme suit :

$$\theta = \frac{x}{r_1} : \theta \text{ variant de } 0 \text{ à } 2\pi$$

$$\zeta = \frac{z}{r_1} : \zeta \text{ variant de } 0 \text{ à } v = l/d_1$$

L'équation de Reynolds s'écrit alors selon l'expression suivante, après avoir remplacé les vitesses par leurs expressions correspondantes (5) et (6) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \right] &= 6 \left(\frac{1}{x} + 1 \right) r_1^2 \quad x \\ \left\{ h \frac{\partial}{\partial \theta} \left[p^x \left(\frac{\dot{\epsilon} h_0}{r_1} \sin\theta - \frac{\epsilon h_0 \dot{\phi}}{r_1} \cos\theta + 2\dot{\phi} + \omega_1 + \omega_2 \frac{r_2}{r_1} \right) \right] \right. & \\ + p^x \left[\frac{\dot{\epsilon} h_0 \sin\theta}{r_1} - \frac{\epsilon h_0 \dot{\phi} \cos\theta}{r_1} + \omega_1 - \omega_2 \frac{r_2}{r_1} \right] \frac{\partial h}{\partial \theta} & \\ + 2 p^x \left[-r_2 \omega_2 \sin\delta + \dot{\epsilon} h_0 \cos\theta + \epsilon h_0 \dot{\phi} \sin\theta \right] + 2h \frac{\partial p}{\partial t} \frac{1}{x} & \left. \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

Cette équation non simplifiée appelle les remarques suivantes :

- la valeur du rapport $\frac{h_0}{r_1}$ est petite de l'ordre de 0,002 dans la plupart des problèmes étudiés.
- le rapport des rayons de l'arbre et du coussinet peut par conséquent être considéré comme égal à l'unité

$$\frac{r_2}{r_1} = 1 + \frac{h_0}{r_1} \approx 1$$

- l'angle δ peut s'exprimer en fonction de l'angle θ selon :

$$\sin \delta = \frac{e}{r_2} \sin \theta \approx - \frac{1}{r_2} \frac{\partial h}{\partial \theta}$$

d'autre part cet angle (δ) est toujours petit, ce qui nous permet d'écrire d'après l'annexe II, $\cos \delta \approx 1$.

Ces différentes simplifications nous conduisent à l'expression suivante de (7) :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \left(\frac{1}{X} + 1 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{1}{X} + 1 \right) \right] = 6r_1^2 \left(\frac{1}{X} + 1 \right) \times$$

$$\left\{ (\omega_1 + \omega_2 + 2\dot{\phi}) h \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{1}{X} + p \frac{1}{X} (\omega_1 - \omega_2) \frac{\partial h}{\partial \theta} \right.$$

$$\left. + 2p \frac{1}{X} \left(\omega_2 \frac{\partial h}{\partial \theta} + \dot{\epsilon} h_0 \cos \theta + h_0 \dot{\phi} \sin \theta \right) + 2h \frac{\partial p}{\partial t} \frac{1}{X} \right\}$$

en remarquant que

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = - \epsilon h_0 \sin \theta, \text{ et } \frac{\partial h}{\partial t} = \dot{\epsilon} h_0 \cos \theta$$

il vient :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \theta} \left(\frac{1}{X} + 1 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{1}{X} + 1 \right) \right] = 6r_1^2 \left(\frac{1}{X} + 1 \right) \times$$

$$\left\{ (\omega_1 + \omega_2 + 2\dot{\phi}) h \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{1}{X} + (\omega_1 + \omega_2 - 2\dot{\phi}) p \frac{1}{X} \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial (p \frac{1}{X} h)}{\partial t} \right\} \quad (8)$$

Dans le cas particulier de la lubrification par fluides incompressibles, et si nous considérons la viscosité comme indépendante de la tempéra-

ture, cette équation (8) se transforme selon :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[h^3 \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right] = 6\mu r_1^2 \left[(\omega_1 + \omega_2 - 2\dot{\phi}) \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right] \quad (9)$$

ou encore en remplaçant le jeu "h" donné par l'expression (4),
et en considérant que le coussinet est absolument fixe selon :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[(1 + \epsilon \cos \theta)^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(1 + \epsilon \cos \theta)^3 \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right] = 6\mu \frac{r_1^2}{h_0^2} \left[2\epsilon \cos \theta - \epsilon \sin \theta (\omega_1 - 2\dot{\phi}) \right] \quad (10)$$

=====

CHAPITRE 2

RESOLUTION DE L'EQUATION DE REYNOLDS

L'équation de Reynolds (10) obtenue au chapitre précédent s'écrit (coussinet fixe) :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[(1+\epsilon \cos \theta)^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(1+\epsilon \cos \theta)^3 \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right] = 6\mu \frac{r_1^2}{h_0^2} \left[2\epsilon^\circ \cos \theta - \epsilon \sin \theta (\omega_1 - 2\phi^\circ) \right]$$

ou encore en explicitant le premier membre :

$$(1+\epsilon \cos \theta) \left[\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2} \right] - 3\epsilon \sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{6\mu r_1^2}{h_0^2 (1+\epsilon \cos \theta)^2} \left[2\epsilon^\circ \cos \theta - \epsilon \sin \theta (\omega_1 - 2\phi^\circ) \right] \quad (11)$$

Monsieur CHARCOSSET a résolu cette équation notamment dans le cas particulier des paliers radiaux que nous considérons [3] et quelque soit le diamètre des orifices. Il en a déduit l'évaluation de la force portante d'un palier dans le cas où le diamètre des orifices est négligeable.

Nous nous proposons de rappeler succinctement, dans ce chapitre, la méthode qu'il a utilisée pour cette résolution, nous indiquerons les résultats obtenus qui seront utiles pour la suite de notre travail, et nous en dégagerons un domaine de validité.

Dans le chapitre suivant, nous étendrons ces résultats en calculant la force portante du palier dans le cas où le le diamètre des orifices est quelconque mais compatible avec le domaine de validité.

2-1. CONDITIONS AUX LIMITES

1) La pression est nulle aux extrémités du palier, ce qui nous permet d'écrire pour :

$$\zeta = \pm \zeta_0 \text{ avec } \zeta_0 = \frac{1}{2r_1} = \frac{1}{d_1} : p(\theta, \zeta_0) = 0$$

2) A cause de la symétrie du palier, la fonction $p(\theta, \zeta)$ est une fonction paire de ζ , dont la dérivée par rapport à ζ calculée en $\zeta = 0$ est nulle.

3) La pression dans chaque orifice est déterminée par l'équation de continuité de débit traversant la restriction qu'il alimente.

2-2. SOLUTION GENERALE DE L'EQUATION DE REYNOLDS

Nous nous proposons de rechercher la solution de l'équation de REYNOLDS (11) sous la forme :

$$p = \sum_{r=0}^{\infty} p_r \epsilon^r + \sum_{r=1}^{\infty} p_{rv} \epsilon^r$$

dans laquelle les coefficients p_r et p_{rv} sont des fonctions de ζ et θ à déterminer.

En reportant cette expression de la pression dans l'équation (11), nous obtenons :

$$(1 + \cos\theta) \left[\sum_{r=0}^{\infty} \Delta p_r \epsilon^r + \sum_{r=1}^{\infty} \Delta p_{rv} \epsilon^r \right] - 3 \epsilon \sin\theta \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\partial p}{\partial \theta} \epsilon^r + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\partial p_{rv}}{\partial \theta} \epsilon^r \right] = 6\mu \frac{r_1^2}{h_0^2 (1 + \epsilon \cos\theta)^2} \left[- \epsilon \sin\theta (\omega_1 - 2\phi) + 2 \epsilon \cos\theta \right] \quad (12)$$

En développant cette relation, et en se limitant aux faibles excentricités (ce qui nous permet de négliger les termes égaux et supérieurs à ϵ^2), on obtient après identification des deux membres :

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_0 &= 0 \\ \Delta p_1 + \Delta p_0 \cos\theta - 3 \sin\theta \frac{\partial p_0}{\partial \theta} &= - 6 \mu \frac{r_1^2}{h_0^2} \sin\theta (\omega_1 - 2\phi) \\ \Delta p_{1v} &= 12 \mu \frac{r_1^2}{h_0^2} \cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Remarque :

Dans le cas où l'arbre est fixe et centré dans le coussinet $\epsilon=0$ et l'équation de REYNOLDS (11) s'écrit :

$$\Delta p = 0$$

Il y correspond la solution $p = p_0$.

La première des expressions précédentes détermine p_0 , la seconde p_1 et la troisième p_{1v} . Il y correspond la solution générale de l'équation (12) dans le cadre de nos hypothèses :

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \overset{\circ}{\varepsilon} p_{1v} \quad (14)$$

Lorsque l'arbre est centré et ne tourne pas dans le coussinet,
 $\varepsilon = \overset{\circ}{\varepsilon} = 0$ et

$$p = p_0$$

Lorsque l'arbre est sollicité statiquement, $\overset{\circ}{\varepsilon} = 0, \overset{\circ}{\phi} = 0,$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1$$

p_0 est déterminé par la première des relations (13) et l'introduction de son expression dans la seconde des relations (13) détermine p_1 .

Remarquons que si l'arbre ne tourne pas $\omega_1 = 0$ et l'expression particulière de p_1 que nous écrivons $p_1 = p_{1s}$ est fournie par la relation

$$\Delta p_{1s} = 3 \sin \theta \frac{\partial p_0}{\partial \theta} \quad (15)$$

Lorsque ω_1 est différent de zéro, $\overset{\circ}{\phi}$ étant quelconque, p_1 peut être décomposé selon la relation suivante :

$$p_1 = p_{1s} + p_{1d}$$

p_{1d} étant solution de la relation

$$\Delta p_{1d} = -6 \mu \frac{r_1^2}{h_0^2} \sin \theta (\omega_1 - 2\overset{\circ}{\phi}) \quad (16)$$

Nous allons examiner successivement les expressions de p_0, p_{1s}, p_{1d}
 et p_{1v} .

Expression générale de la fonction p_0

L'intégration de la relation $\Delta p_0 = 0$, compte tenu des deux premières conditions aux limites, conduit à l'expression suivante de p_0 :

$$p_0 = -qn \left[\zeta - \zeta_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kn(\theta - \phi_1)}{kn} \times \frac{\operatorname{sh} kn(\zeta - \zeta_0)}{\operatorname{ch} kn \zeta_0} \right] \quad (17)$$

dans laquelle :

q est un coefficient qui sera déterminé par la troisième condition aux limites

n est le nombre d'orifices

ϕ_1 est l'angle que fait l'axe du premier orifice avec l'axe $O\vec{n}$.

Expression particulière de p_0 au droit des orifices : p_{0i}^*

La relation précédente déterminée au droit des orifices s'écrit en faisant apparaître la grandeur $\bar{\rho}$ égale au rapport du diamètre d'un orifice d_0 au diamètre de l'arbre : $\bar{\rho} = \frac{d_0}{d_1}$.

$$p_{0i}^* = -q \left[2 \text{Log} \bar{\rho} - n \zeta_0 + (2 \text{Log} 2) \times (n-1) + 2 \text{Log} \prod_{p=1}^{n-1} \sin \frac{\pi}{n} p + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kn \zeta_0}}{k \text{ch} kn \zeta_0} \right] \quad (18)$$

Pour simplifier les écritures nous poserons :

$$p_{0i}^* = qL$$

L étant égale à la valeur entre crochets de l'expression (18), changer de signe.

Expression générale de la fonction p_{1s}

Nous obtenons en intégrant l'équation (15) l'expression de la fonction p_{1s} , qui s'écrit :

$$p_{1s} = \left(\frac{3}{2} q - q_1 \right) n \frac{\text{sh}(\zeta - \zeta_0)}{\text{ch} \zeta_0} \cos \theta \quad (19)$$

$$+ \frac{3}{2} q n \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\text{sh} kn(\zeta - \zeta_0)}{kn \text{ch} kn \zeta_0} \cos \alpha_1 - \frac{\text{sh}(kn \pm 1)(\zeta - \zeta_0)}{(kn \pm 1) \text{ch}(kn \pm 1) \zeta_0} - \frac{\text{sh} kn(\zeta - \zeta_0)}{kn \text{ch} kn \zeta_0} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} & \left[\frac{\cos \alpha_1}{kn^2 - (kn \pm 1)^2} \right] - q_1 n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sh} m(\zeta - \zeta_0)}{m \text{ch} m \zeta_0} \cos(m\theta - kn\phi_1) \end{aligned} \right\}$$

dans cette relation $\alpha_1 = [(kn \pm 1)\theta - kn\phi_1]$ (20)

et $m = kn \pm 1 > 0$

Expression particulière de p_{1s} au droit des orifices p_{1si}^*

La relation précédente déterminée au droit des orifices s'écrit :

$$\begin{aligned} p_{1si}^* &= \epsilon \cos \theta_i (qM^* - \frac{3}{2} qL + q_1 N) \\ p_{1si}^* &= \epsilon \cos \theta_i N (q_1 - \frac{3}{2} q) \end{aligned} \quad (21)$$

avec

$$\begin{aligned} M^* &= \frac{3}{2} n \left[\zeta_0 - \text{th} \zeta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\text{th} m \zeta_0}{m} - \frac{\text{th} k n \zeta_0}{k n} \right) \frac{1}{(k n)^2 - (k n \pm 1)^2} \right] \\ N &= - \left[\text{Log} \frac{\rho^2}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos \left(\frac{k}{n} \times 2\pi \right) \text{Log} 2 \sin^2 \frac{k\pi}{n} + n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-m \zeta_0}}{m \text{ch} m \epsilon_0} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

expression dans laquelle :

$$\theta_i = \phi_1 + \frac{2\pi}{n} (i-1) : \text{position angulaire de la source "i".}$$

Les expressions générales des pressions p_0 et p_{1s} (17) et (19) définissent la répartition des pressions en tout point du palier pour un comportement statique du palier, dans le cas où la vitesse de rotation de l'arbre est nulle.

2-4. DEBIT DES ORIFICES

En se limitant au 1er ordre, le débit pour un orifice "i", q_{vi} s'écrit selon :

$$q_{vi} = \frac{\pi h_0^3}{3\mu} \left[q + \epsilon \cos \theta_i \left(\frac{3}{2} q + q_1 \right) \right] \quad (23)$$

Le débit total du palier (q_v), compte tenu de tous les orifices ($i=1$ à n), est égal à

$$q_v = n \frac{\pi h_0^3}{3\mu} \times q \quad (24)$$

2-5. FORCE PORTANTE DU PALIER (ARBRE FIXE) DANS L'HYPOTHESE OU LE DIAMETRE DES ORIFICES EST NEGLIGEABLE

La force résultante des pressions (F_s) agissant suivant la ligne des centres s'obtient par la relation suivante :

$$F_s = - \int_S (p_0 + \epsilon p_{1s}) \cos \theta ds \quad (25)$$

dans laquelle S désigne le domaine d'intégration $0 \leq \theta \leq 2\pi$, et $-\zeta_0 \leq z \leq \zeta_0$, obtenu sans défalquer la contribution des orifices supposée négligeable.

La relation (25) se transforme après intégration selon l'expression suivante :

$$F_s = -2\pi r_1^2 n \epsilon \left(\frac{3}{2} q - q_1 \right) \left(\frac{1}{ch \zeta_0} - 1 \right), \quad (26)$$

La force résultante des pressions (F_2) agissant suivant la normale à la ligne des centres s'écrit

$$F_2 = - \int_S p \sin \theta ds = 0 \quad (27)$$

2-6. ALIMENTATION DU PALIER

Le palier est généralement alimenté par une installation délivrant l'huile sous une pression p_t . Chaque orifice, est alimenté par l'intermédiaire d'une restriction extérieure qui est un capillaire ou un diaphragme. Par conséquent la pression est p_t en amont de la restriction et p_{0i}^* en aval. Le débit qui la traverse est q_{vi} .

L'expression (23) de la loi du débit peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$q_{vi} = p_t \frac{e^{*3}}{\mu} (1-\gamma_0)^\alpha \left[1 - \alpha \frac{\gamma_1}{1-\gamma_0}, \epsilon \right] \quad (28)$$

Dans cette expression

1) Si la restriction est un capillaire

$$\alpha = 1 \quad e^{*3} = \frac{\pi d_c^4}{128 l_c} \quad (29)$$

d_c étant le diamètre du capillaire, et l_c sa longueur.

2) Si la restriction est un diaphragme

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad e^{*3} = \mu s_d \left(\frac{2}{\rho p_t} \right)^{1/2}$$

s_d étant la section du diaphragme.

γ_0 : est le rapport des pressions aval, amont dans le cas où le palier n'est pas chargé, $\gamma_0 = \frac{p_{0i}^*}{p_t}$

γ_1 : est le rapport des pressions aval, amont dans le cas où l'arbre est chargé $\gamma_1 = \frac{p_{1si}^*}{p_t}$

2-7. DETERMINATION DES COEFFICIENTS q , q_1 ; VALEUR DE λ

L'égalité des expressions (23) et (28), qui traduit la loi de conservation du débit, définit un coefficient caractéristique de la restriction :

$$\lambda = \frac{\pi h_0^3}{3e^{*3}} = \frac{L(1-\gamma_0)^\alpha}{\gamma_0} \quad (30)$$

ainsi que les valeurs de q^* et q_1^* qui s'écrivent :

$$q^* = \frac{\gamma_0}{L} \quad , \quad q_1^* = \frac{3}{2} \frac{\gamma_0}{L} \frac{\frac{N}{L} \frac{\alpha \gamma_0}{1-\gamma_0} - 1}{\frac{N}{L} \frac{\alpha \gamma_0}{1-\gamma_0} + 1} \quad (31)$$

2-8. DETERMINATION DES FONCTIONS p_{1d} et p_{1v}
EXPRESSION GENERALE DE LA FONCTION p_{1d}

L'intégration de l'équation (16) nous conduit à l'expression suivante :

$$p_{1d} = 6\mu \frac{r_1^2}{h_0^2} (\omega_1 - 2\dot{\phi}) \sin\theta \left[1 - \frac{ch\zeta}{ch\zeta_0} \right] + q_2 n \sum_{k=0}^{\infty} \mp \frac{shm(\zeta - \zeta_0)}{mchm\zeta_0} \left[\sin(m\theta - kn\phi_1) \right] \quad (36)$$

Expression particulière p_{1d} au droit des orifices : $p_{1d}(0_i)$

En utilisant les notations du paragraphe 2-3 on obtient :

$$p_{1di}^* = 6\mu \frac{r_1^2}{h_0^2} (\omega_1 - 2\dot{\phi}) \sin\theta_i \left[1 - \frac{1}{ch\zeta_0} \right] + q_2 N \sin\theta_i \quad (37)$$

Expression générale de p_{1v}

L'intégration de la troisième équation (13) nous conduit à l'expression suivante :

$$p_{1v} = -q_3 n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{shm(\zeta - \zeta_0)}{mchm\zeta_0} \cos(m\theta - kn\phi_1) + 12\mu \frac{r_1^2}{h_0^2} \left(1 - \frac{ch\zeta}{ch\zeta_0} \right) \cos\theta \quad (38)$$

Expression particulière de p_{1v} au droit des orifices : $p_{1v}(0_i)$

$$p_{1vi}^* = -12\mu \frac{r_1^2}{h_0^2} \left(1 - \frac{1}{ch\zeta_0} \right) \cos\theta_i + \cos\theta_i q_3 N \quad (39)$$

2-9. FORCE PORTANTE DU PALIER (ARBRE EN ROTATION), DANS L'HYPOTHESE OU LE DIAMETRE DES ORIFICES EST NEGLIGEABLE

A partir de la relation (14)

$$p = p_0 + \epsilon(p_{1s} + p_{1d}) + \epsilon^\circ p_{1v}$$

on déduit l'expression des forces portantes du palier sous la même hypothèse que celle définie au § 2.5.

1) Force due aux pressions agissant selon la ligne des centres

L'expression générale de la force F due aux pressions, agissant selon la ligne des centres s'écrit :

$$F_3 = - \iint_S p \cos\theta ds = - \iint_S p_0 \cos\theta ds - \iint_S \epsilon p_{1s} \cos\theta ds - \iint_S \epsilon p_{1d} \cos\theta ds - \iint_S p_{1v} \epsilon^\circ \cos\theta ds$$

$$\text{ou encore : } F_3 = F_0 + F_S + F_V + F_D \quad (40)$$

avec $F_0 = 0$ par raison de symétrie de la répartition des pressions p_0

$$F_V = 0$$

F_S a déjà été défini et déterminé par l'expression (27)

F_D , après intégration s'écrit selon :

$$F_D = \left[2\pi r_1^2 n q_3 \left(1 - \frac{1}{\text{ch} \zeta_0}\right) - 24\pi \mu \frac{r_1^4}{h_0^2} (\zeta_0 - \text{th} \zeta_0) \right] \epsilon \quad (41)$$

2) Force due aux pressions, agissant selon la normale à la ligne des centres

De la même manière que précédemment : on déduit l'expression F_4 de la force due aux pressions, agissant selon la normale à la ligne des centres :

$$F_4 = - \iint_S p \sin \theta ds = \iint_S -p_0 \sin \theta ds + \iint_S -\epsilon p_{1s} \sin \theta ds + \iint_S -\epsilon p_{1d} \sin \theta ds + \iint_S -\epsilon^\circ p_{1v} \sin \theta ds$$

$$F_4 = F_{ON} + F_L + F_N + F_M$$

$$F_{ON} = F_L = F_M = 0$$

F_N après intégration s'écrit :

$$F_N = - \left[12\pi \mu \frac{r_1^4}{h_0^2} (\zeta_0 - \text{th} \zeta_0) (\omega_1 - 2\dot{\phi}) + 2\pi r_1^2 n q_2 \left(1 - \frac{1}{\text{ch} \zeta_0}\right) \right] \epsilon \quad (42)$$

2-10. CONDITION DE DEBIT DES ORIFICES

L'expression du débit s'écoulant à travers un orifice d'alimentation du palier déterminée à partir des conditions géométriques définies par le fonctionnement du palier s'écrit :

$$q_{vi} = \frac{\pi h_0^3}{3\mu} \left[q + \epsilon \cos \theta_i \left(\frac{3}{2} q + q_1 \right) + \epsilon \sin \theta_i q_2 + \epsilon^\circ \cos \theta_i q_3 \right] \quad (43)$$

L'expression du débit traversant une restriction extérieure caractérisée par la grandeur e^* définie au § 2-6, s'écrit :

$$q_{vi} = \left[p_t - p_i^* \right] \frac{e^{*3}}{\mu} \quad (44)$$

L'égalité des expressions (43) et (44) qui traduit la loi de conservation du débit, nous conduit à la définition des grandeurs q_2 , et q_3 des ori-

fices, qui s'écrivent :

$$q_3 = 12 \mu \frac{r_1^2}{h_0^2} \left(1 - \frac{1}{\text{ch } \zeta_0}\right) \times \frac{1}{\lambda + N} \quad (45)$$

$$q_2 = -q_3 \times \left(\frac{\omega_1}{2} - \phi\right) \quad (46)$$

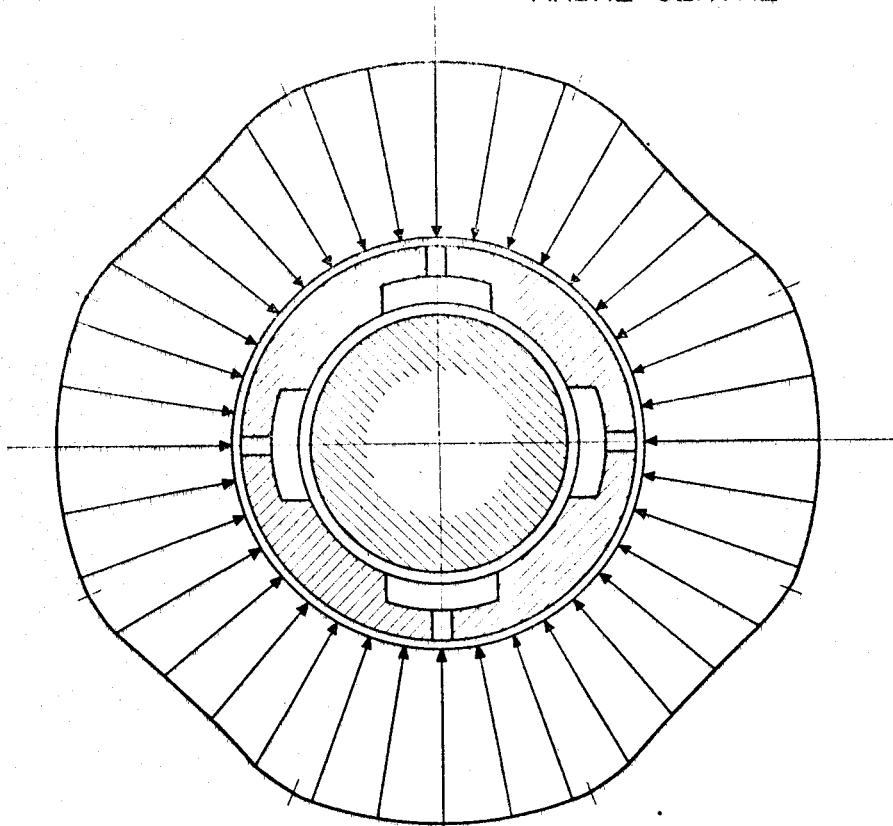
2.11 - RESULTATS NUMERIQUES

A titre d'exemple, nous représentons ci-dessous les résultats de courbes de pression obtenues pour des paliers dont les définitions géométriques et mécaniques sont précisées en regard de chaque figure.

Trois cas particuliers ont été considérés :

- Arbre centré (absence de charge)
vitesse de rotation nulle
(les courbes de pression ont été calculées dans les trois plans de coordonnée $\zeta = \zeta^{te}$).
- Arbre non centré (c'est-à-dire chargé)
vitesse de rotation nulle
(les courbes de pression ont été calculées dans les trois plans de coordonnée $\zeta = \zeta^{te}$).
- Arbre non centré (c'est-à-dire chargé)
vitesse de rotation égale à 3000 tr/mn.

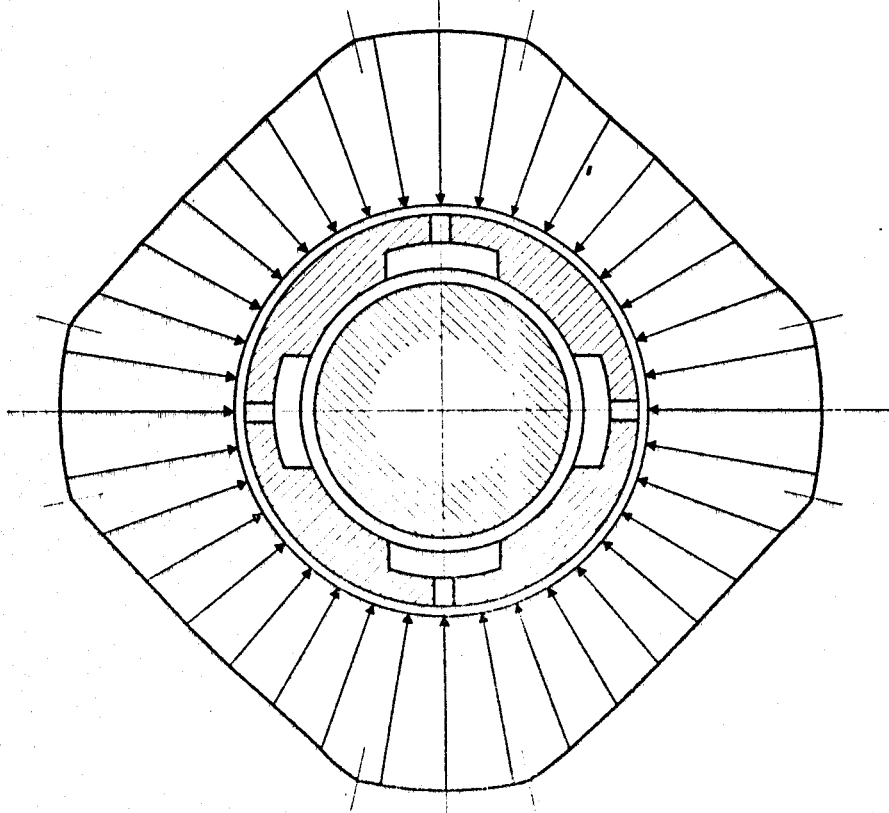
RÉPARTITION DES PRESSIONS ARBRE CENTRÉ



$\bar{p} = 0,4$
 $r_o = 12 \text{ mm}$
 $r_i = 30 \text{ mm}$
 $l = 60 \text{ mm}$
 $n = 4$
 $\phi_1 = 0$
 $h_o = 3/100$
 $\mu = 0,011$
 $\omega_1 = 0$
 $q_v = 0,02 \text{ l/s}$
 Plan $\xi : 0 \text{ mm}$
 $p_t = 140 \text{ bars}$

$\epsilon = 0$
 $\epsilon^\circ = 0$
 $\sigma^\circ = 0$

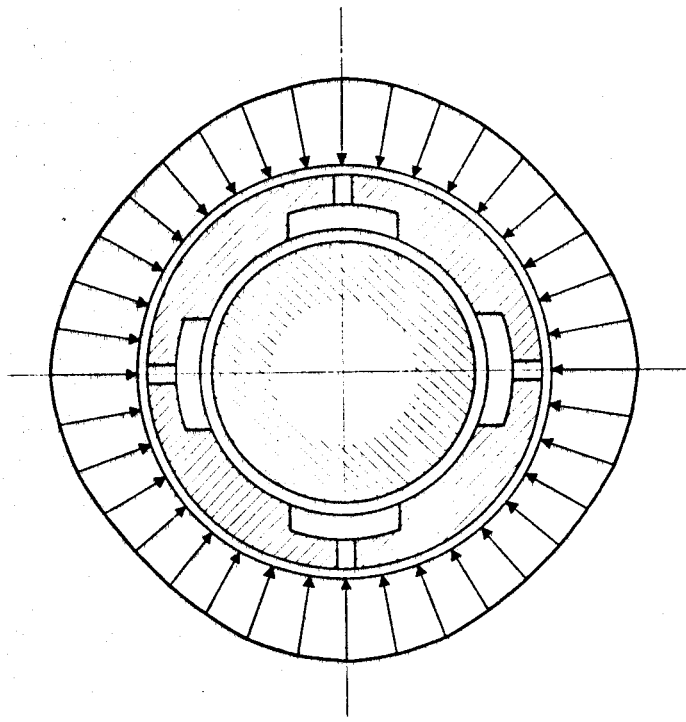
RÉPARTITION DES PRESSIONS ARBRE CENTRÉ



$\bar{p} = 0,4$
 $r_o = 12 \text{ mm}$
 $r_i = 30 \text{ mm}$
 $l = 60 \text{ mm}$
 $n = 4$
 $\Phi_1 = 0$
 $h_o = 3/100$
 $\mu = 0,011$
 $\omega_1 = 0$
 $q_v = 0,025 \text{ l/s}$
 Plan $\xi : 10 \text{ mm}$
 $p_t = 140 \text{ bars}$

$\epsilon = 0$
 $\epsilon^\circ = 0$
 $\sigma^\circ = 0$

RÉPARTITION DES PRESSIONS ARBRE CENTRÉ

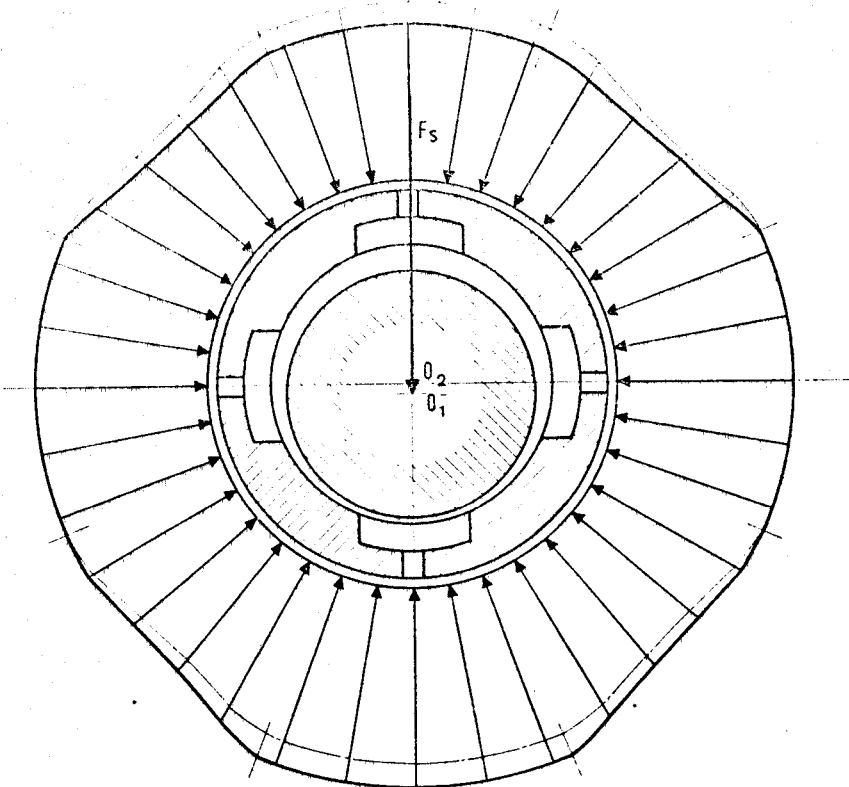


- $\bar{p} = 0,4$
- $r_0 = 12 \text{ mm}$
- $r_1 = 30 \text{ mm}$
- $l = 60 \text{ mm}$
- $n = 4$
- $\Phi_1 = 0$
- $h_0 = 3/100$
- $\mu = 0,011$
- $\omega_1 = 0$
- $q_v = 0,02 \text{ l/s}$
- Plan $\xi : 20 \text{ mm}$
- $p_t = 140 \text{ bars}$

- $\varepsilon = 0$
- $\varepsilon^\circ = 0$
- $\phi^\circ = 0$



RÉPARTITION DES PRESSIONS
CHARGE EXTERIEURE STATIQUE

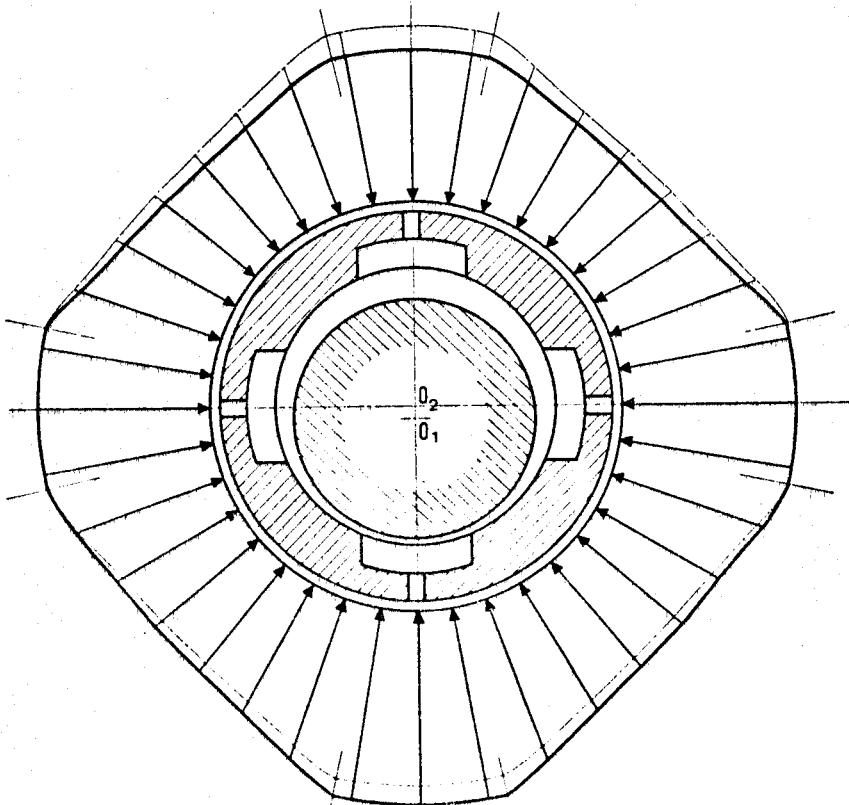


$\bar{p} = 0,4$
 $r_o = 12 \text{ mm}$
 $r_i = 30 \text{ mm}$
 $l = 60 \text{ mm}$
 $n = 4$
 $\Phi_1 = 0$
 $h_o = 3/100$
 $\mu = 0,011$
 $\omega_1 = 0$
 $q_v = 0,02 \text{ l/s}$
 Plan $\xi : 0 \text{ mm}$
 $p_f = 140 \text{ bars}$

 $\epsilon = 0,1$
 $\epsilon^* = 0$
 $\epsilon^o = 0$

 $F_s = 3162 \text{ N}$

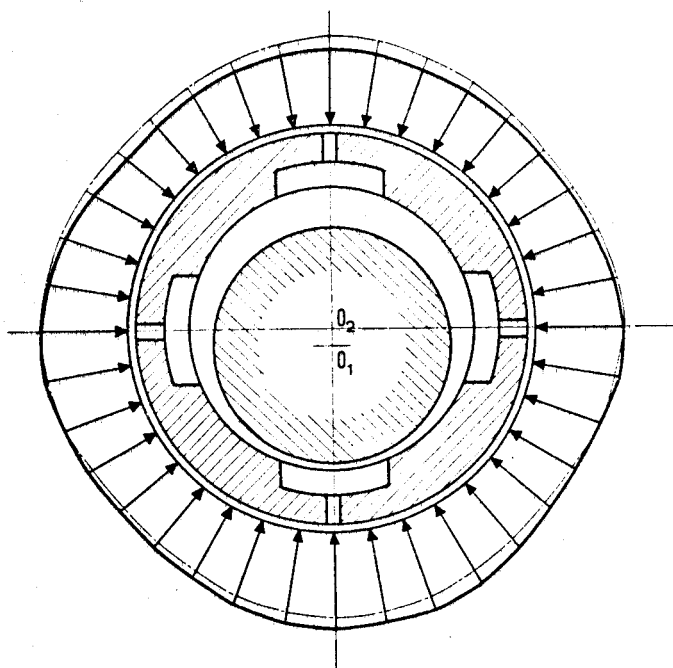
RÉPARTITION DES PRESSIONS
CHARGE EXTERIEURE STATIQUE



$\bar{p} = 0,4$
 $r_o = 12 \text{ mm}$
 $r_i = 30 \text{ mm}$
 $l = 60 \text{ mm}$
 $n = 4$
 $\Phi_1 = 0$
 $h_o = 3/100$
 $\mu = 0,011$
 $\omega_1 = 0$
 $q_v = 0,02 \text{ l/s}$
 Plan $\xi : 10 \text{ mm}$
 $p_f = 140 \text{ bars}$

 $\epsilon = 0,1$
 $\epsilon^* = 0$
 $\epsilon^o = 0$

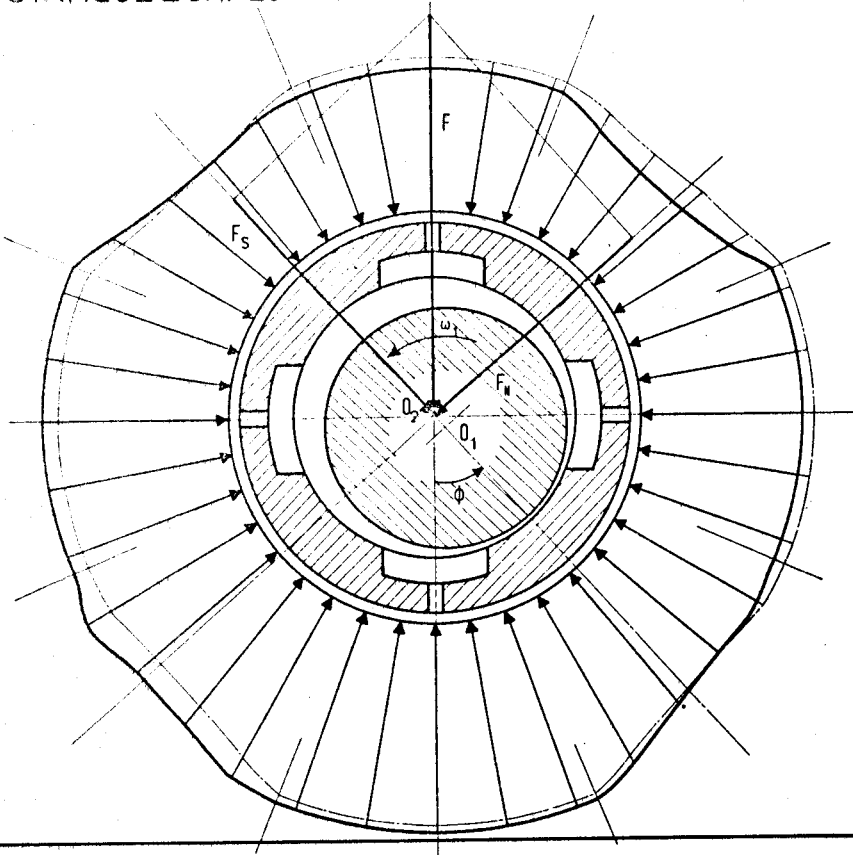
RÉPARTITION DES PRESSIONS
CHARGE EXTERIEURE STATIQUE



$\bar{p} = 0,4$
 $r_0 = 12 \text{ mm}$
 $r_1 = 30 \text{ mm}$
 $l = 60 \text{ mm}$
 $n = 4$
 $\Phi_1 = 0$
 $h_0 = 3/100$
 $\mu = 0,011$
 $\omega_1 = 0$
 $q_v = 0,02 \text{ l/s}$
Plan $\xi : 20 \text{ mm}$
 $p_t = 140 \text{ bars}$

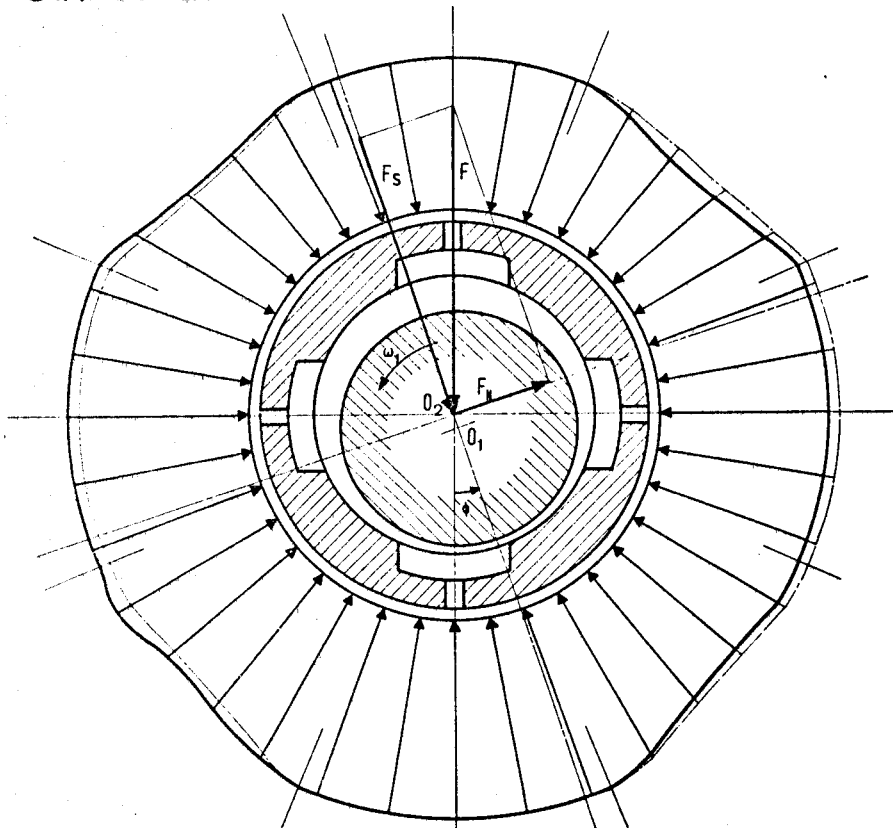
$c = 0,1$
 $c^\circ = 0$
 $\phi^\circ = 0$

RÉPARTITION DES PRESSIONS - CHARGE EXTERIEURE
STATIQUE - INFLUENCE DE LA ROTATION DE L'ARBRE



- $\bar{p} = 0,4$
- $r_o = 12 \text{ mm}$
- $r_i = 30 \text{ mm}$
- $l = 60 \text{ mm}$
- $n = 4$
- $\Phi_1 = 0$
- $h_o = 3/100$
- $\mu = 0,011$
- $\omega_1 = 3000 \text{ tr/mn}$
- $q_v = 0,02 \text{ l/s}$
- Plan $\xi : 0 \text{ mm}$
- $p_t = 140 \text{ bars}$
- $\epsilon = 0,1$
- $\epsilon^* = 0$
- $\phi^* = 0$
- $F_s = 3162 \text{ N}$
- $F = 2920 \text{ N}$
- $F_r = 4304 \text{ N}$
- $\phi = 42^\circ 45'$

RÉPARTITION DES PRESSIONS - CHARGE EXTERIEURE
STATIQUE - INFLUENCE DE LA ROTATION DE L'ARBRE



- $\bar{p} = 0,4$
- $r_o = 12 \text{ mm}$
- $r_i = 30 \text{ mm}$
- $l = 60 \text{ mm}$
- $n = 4$
- $\Phi_1 = 0$
- $h_o = 5/100$
- $\mu = 0,011$
- $\omega_1 = 3000 \text{ tr/mn}$
- $q_v = 0,11 \text{ l/s}$
- Plan $\xi : 0 \text{ mm}$
- $p_t = 140 \text{ bars}$
- $\epsilon = 0,1$
- $\epsilon^* = 0$
- $\phi^* = 0$
- $F_s = 3162 \text{ N}$
- $F_r = 662 \text{ N}$
- $F = 3230 \text{ N}$
- $\phi = 11^\circ 52'$



2.12.2 - Commentaire à propos du diamètre des orifices

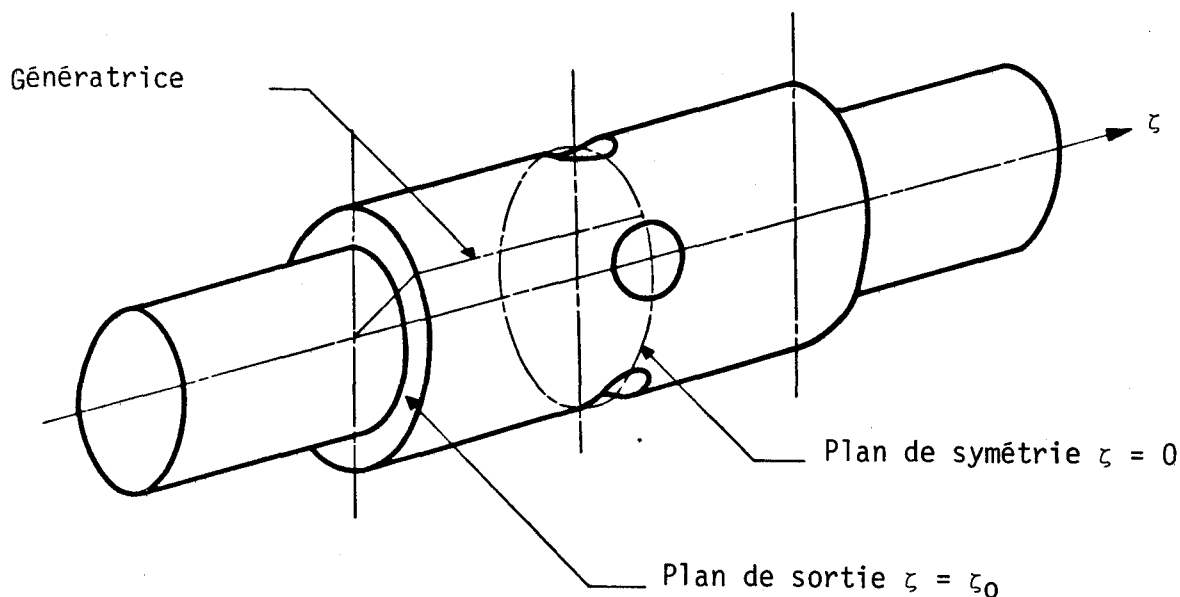
Monsieur CHARCOSSET suppose pour le calcul de la charge portante, que le diamètre des orifices est très petit vis à vis du diamètre de l'arbre.

Le diamètre des orifices influe nécessairement sur cette charge et dans la mesure où cette charge croît avec l'augmentation du diamètre des orifices, il est intéressant de réaliser des paliers qui ne correspondent plus au domaine de validité de la théorie de Monsieur CHARCOSSET de ce seul point de vue.

Par conséquent, notre objectif est d'étendre la théorie de CHARCOSSET et de l'appliquer à des paliers dont le diamètre des orifices est quelconque. Plus précisément nous allons dégager, pour une telle théorie, un domaine de validité, défini par des valeurs extrêmes de l'excentricité relative ϵ et du diamètre réduit $\bar{\rho}$ (quotient du diamètre des orifices au diamètre du tourillon).

Le principe de la détermination du domaine de validité est le suivant :

Pour un palier de jeu radial imposé, fonctionnant à une certaine vitesse ω , et alimenté par un nombre "n" d'orifices, à une pression p_t d'alimentation, la viscosité de l'huile μ étant connue, nous avons pour tous couples $(\epsilon, \bar{\rho})$, calculé la pression en tout point du palier. Lorsque pour un couple $(\epsilon, \bar{\rho})$, la décroissance des pressions entre le plan de symétrie ($\zeta = 0$) et le plan de fuite ($\zeta = \zeta_0$) est assurée pour toute génératrice du palier, ce couple $(\epsilon, \bar{\rho})$ appartient au domaine de validité.

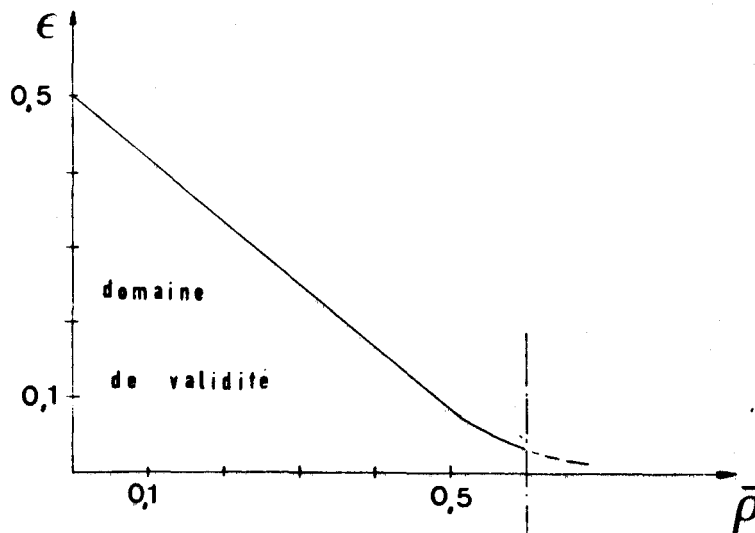


Il s'agit la de toute évidence d'une condition nécessaire. La condition suffisante nous semble ne pouvoir être dégagée analytiquement, et ce serait l'objet essentiel d'une étude expérimentale que de fournir cette condition suffisante.

A titre d'exemple le domaine de validité obtenu pour les valeurs numériques suivantes :

Rayon du tourillon	$r_1 = 30$ mm
Largeur du palier	$l = 60$ mm
Nombre de sources	$n = 4$
Jeu radial	$h_0 = 3/100$
Angle de calage de l'axe du premier orifice	$\phi_1 = 0$
viscosité de l'huile	$\mu = 0,02$
Pression de la pompe	$p_t = 140$ bars
Vitesse de rotation de l'arbre	$\omega_1 = 3000$ tr/mn

se représente comme suit :



Au delà de la valeur de \bar{p} supérieure à 0,6, nous n'avons pas exploré le domaine de validité, pour des raisons qui apparaitront dans la suite de notre travail.

CALCUL DE LA FORCE PORTANTE DU PALIER
EN TENANT COMPTE DU DIAMETRE DES
ORIFICES

3-1) GENERALITES

La force portante du palier, dans l'hypothèse où le diamètre des orifices n'est pas négligeable, s'obtient comme au chapitre précédent par intégration de la loi des pressions

$$p = p_0 + \epsilon(p_{1s} + p_{1d}) + \epsilon p_{1v}$$

Cette loi est limitée aux deux premiers termes lorsque le tourillon est fixe, aux trois premiers termes lorsque le tourillon tourne sous sollicitations statiques, et elle est à considérer dans son ensemble lorsque le tourillon est sollicité dynamiquement.

A la différence du calcul mené précédemment, il importe de noter ici que le domaine d'intégration de la loi des pressions se dissocie en un domaine S_e extérieur aux orifices dans lequel la pression que nous désignerons par p_e varie en tout point (θ, z) et un domaine S_i intérieur aux orifices dans lequel la pression reste constante et égale à p_i^* . La dissociation du domaine d'intégration est légitime en vertu des conditions aux limites précisées au § 2.1. L'intégration des pressions p_e et p_i^* conduit à l'expression des forces portantes F_e et $F_{S_i}^*$ (cas de l'arbre fixe), F_{De} , F_{Di}^* , F_{Ne} et F_{Ni}^* (cas de l'arbre tournant).

Les forces F_{S_e} , F_{De} et F_{Ne} s'obtiennent comme différentes respectives des forces F_S , F_D et F_N calculées sur le domaine S selon les formules (26, 41, 42) de la théorie de CHARCOSSET, et des forces F_{S_i} , F_{Di} et F_{Ni} calculées sur le domaine S_i par intégration des pressions précisées par les expressions (17), (19), (36) et (38). Il importe de remarquer que ces six forces sont le résultat d'intégrations avec les conditions aux limites du § 2.1.

Les forces $F_{S_i}^*$, F_{Di}^* et F_{Ni}^* s'obtiennent aisément puisque dans chaque orifice, la pression est constante. Ce calcul fait l'objet du § 3-4.

Nous caractériserons par l'indice r la force portante résultante :

$$F_e + F_i^*$$

3-2) ETUDE GEOMETRIQUE DU DOMAINE S_i

A titre d'exemple non limitatif, nous considérons un palier muni de quatre orifices de rayon r_0 . Le schéma qui suit, représente le coussinet de ce palier après l'avoir déroulé.

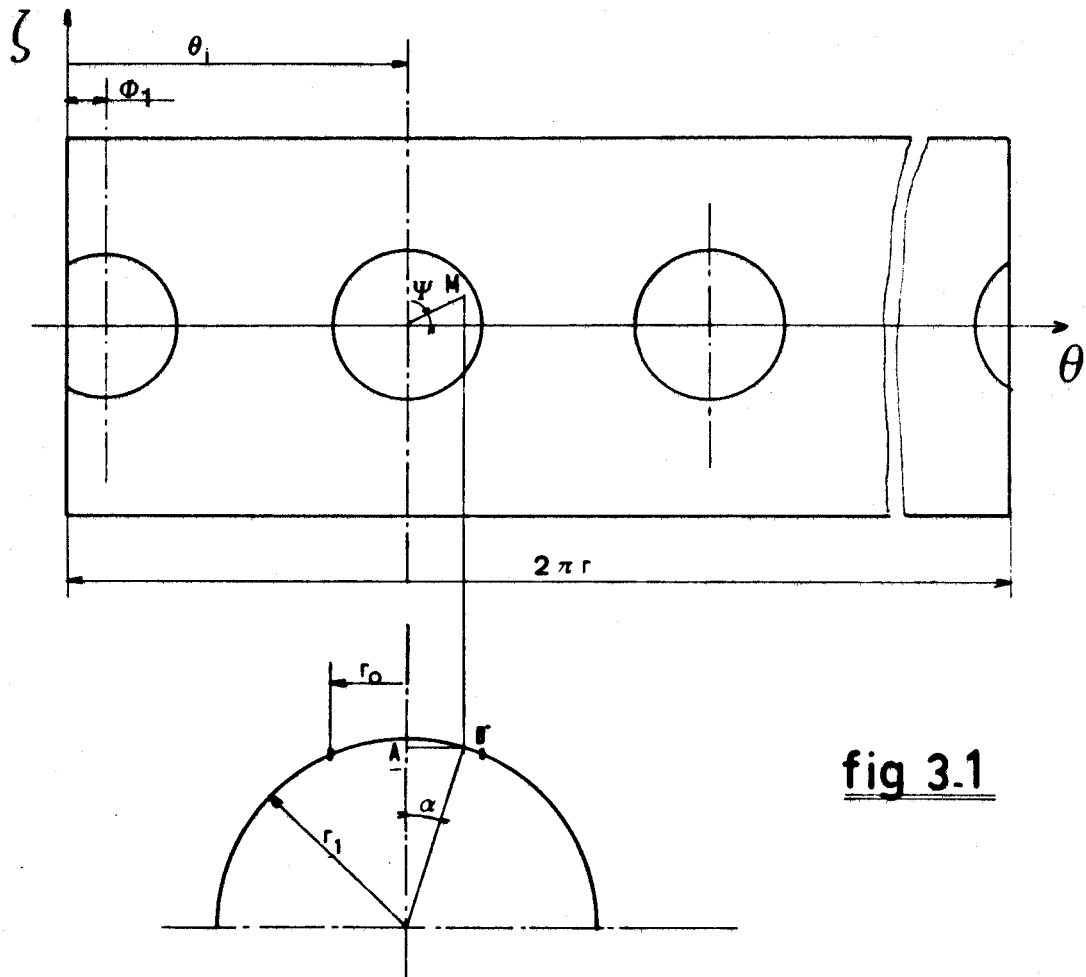


fig 3.1

Figure 3-1

Considérons l'un quelconque de ces orifices, de centre O_i , et un point M de coordonnées polaires δ (rayon) et ψ (angle). Dans le système d'axe $O\zeta\theta$ lié au coussinet, M a pour coordonnées réduites :

$$M \begin{cases} \theta = \theta_i + \text{Arc sin } \frac{\delta}{r_1} \cos \psi \\ \zeta = \frac{\delta}{r_1} \sin \psi \end{cases} \quad (47)$$

avec $\theta_i = \phi_1 + 2 \frac{\pi}{n} (i-1)$

3-3) CALCUL DES FORCES PORTANTES F_{Si} , F_{Di} , F_{Ni}

Avec les notations du paragraphe précédent, le calcul des forces F_{Si} , F_{Di} , F_{Ni} se conduit selon l'expression générale suivante, dans laquelle la somme

est étendue aux "n" orifices :

$$F_i = - \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^{r_0} \int_0^2 p(\delta, \psi) \cdot \delta \cdot d\psi \cdot d\delta \right\} \quad (48)$$

En particulier, la valeur de F_{Si} (cas du tourillon fixe) est obtenue en considérant la loi :

$$p = p_0 + \epsilon p_{1s}$$

dont nous connaissons l'expression en fonction de θ et ζ (relation 17 et 19) et qui s'exprime aisément en fonction de δ et ψ après avoir utilisé la relation (47).

De même la valeur de F_{Di} et F_{Ni} s'obtient à partir de la loi :

$$p = \epsilon p_{1d} + \epsilon^{\circ} p_{1v}$$

définie en fonction de θ et ζ par les relations (36 et 38) que l'on peut également exprimer en fonctions de δ et ψ en y adjoignant la relation (47).

Le calcul détaillé de ces trois forces F_{Si} , F_{Di} et F_{Ni} figure à l'annexe [III]

Les résultats sont les suivants :

$$\left. \begin{aligned} F_{Si} &= + \left(\frac{3}{2} q - q_1 \right) n^2 \pi \operatorname{th} \zeta_0 \gamma \epsilon \\ F_{Di} &= - \left[\pi n^2 q_3 \operatorname{th} \zeta_0 \gamma - 6 \mu n \frac{r_1^2}{h_0^2} \left(\pi r_0^2 - \frac{2\pi}{\operatorname{ch} \zeta_0} \gamma \right) \right] \epsilon^{\circ} \\ F_{Ni} &= + \left[\pi n^2 q_2 \operatorname{th} \zeta_0 \gamma - 3 \pi \mu \frac{r_1^2}{h_0^2} (\omega_1 - 2\phi^{\circ}) \left(r_0^2 - \frac{2}{\operatorname{ch} \zeta_0} \gamma \right) \right] \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

$$\text{avec } \gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_0^{(2k+2)}}{(2k+2)(2r)^{2k}(k!)^2}$$

La signification des autres paramètres qui interviennent dans ces forces a été précisée au chapitre 2.

3-4) CALCUL DES FORCES F_{Si}^* , F_{Di}^* , F_{Ni}^*

L'application de la formule (48) au cas où $p(\delta, \psi)$ s'identifie à la pression p_i^* constante dans le $i^{\text{ème}}$ orifice, conduit à l'expression générale

des forces F_i^* selon la relation :

$$F_i^* = - \sum_{i=1}^n p_i^* \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \delta d\psi d\delta$$

$$F_i^* = - \sum_{i=1}^n p_i^* \pi r_0^2$$
(50)

De cette expression générale, on déduit aisément les expressions particulières de F_{Si}^* , F_{Di}^* et F_{Ni}^* :

$$F_{Si}^* = - \pi r_0^2 \sum_{i=1}^n (p_{0i}^* + \epsilon p_{1Si}^*) \cos \theta_i$$

$$F_{Di}^* = - \pi r_0^2 \sum_{i=1}^n (\epsilon p_{1Vi}^*) \cos \theta_i$$

$$F_{Ni}^* = - \pi r_0^2 \sum_{i=1}^n (\epsilon p_{1Di}^*) \cos \theta_i$$

Ces expressions se transforment comme suit en utilisant la méthode des notations du paragraphe précédent et de l'annexe [IV]:

$$\left. \begin{aligned} F_{Si}^* &= -\frac{1}{2} \pi r_0^2 n N (q_1 - \frac{3}{2} q) \epsilon \\ F_{Di}^* &= - \left[q_3 N - 12 \mu \frac{r_1^2}{h_0^2} \left(1 - \frac{1}{\text{ch} \zeta_0} \right) \right] \frac{\pi r_0^2}{2} n \epsilon \\ F_{Ni}^* &= - \left[q_2 N + 6 \mu \frac{r_1^2}{h_0^2} (\omega_1 - 2\phi) \left(1 - \frac{1}{\text{ch} \zeta_0} \right) \right] \frac{\pi r_0^2}{2} n \epsilon \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

3-5) TABLEAU RECAPITULATIF DES FORCES PORTANTES DU PALIER

En combinant les forces F_e , F_i et F_i^* selon la méthode exposée au § 31, on déduit l'expression générale des différentes forces F_{Sr} , F_{Dr} , et F_{Nr} selon le tableau suivant :

A) Cas de l'arbre fixe

- Force portante selon la direction de la ligne des centres (F_{Sr})

$$F_{Sr} = - \pi n \left(\frac{3}{2} q - q_1 \right) \left[2 r_1^2 \left(\frac{1}{\text{ch} \zeta_0} - 1 \right) - \frac{r_0^2 N}{2} + n \text{th} \zeta_0 \gamma \right] \epsilon \quad (52)$$

Expression dans laquelle :

$$\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_0^{(2k+2)}}{(2k+2)(2r_1)^{2k}(k!)^2}$$

- force portante selon la direction normale à la ligne des centres :
Cette force est nulle.

B) Cas de l'arbre tournant

- Force portante selon la direction de la ligne des centres; ($F_{Sr}+F_{Dr}$)
 F_{Sr} est défini par la formule (52).

$$F_{Dr} = + q_3 \pi n \left[2r_1^2 \left(\frac{1}{\text{ch}\zeta_0} - 1 \right) + n \text{th}\zeta_0 \gamma - \frac{r_0^2 N}{2} \right] \epsilon$$

$$+ 6\pi\mu \frac{r_1^2}{h_0^2} \left[4r_1^2 (\zeta_0 - \text{th}\zeta_0) + \frac{2n\gamma}{\text{ch}\zeta_0} - \frac{nr_0^2}{\text{ch}\zeta_0} \right] \epsilon \quad (53)$$

- Force portante selon la direction normale à la ligne des centres
(F_{Nr}).

$$F_{Nr} = -\pi n q_2 \left[2r_1^2 \left(1 - \frac{1}{\text{ch}\zeta_0} \right) - n\gamma \text{th}\zeta_0 + \frac{r_0^2}{2} N \right] \epsilon$$

$$- 3 \frac{r_1^2}{h_0^2} \pi\mu (\omega_1 - 2\dot{\phi}) \left[4r_1^2 (\zeta_0 - \text{th}\zeta_0) + \frac{2n\gamma}{\text{ch}\zeta_0} - \frac{nr_0^2}{\text{ch}\zeta_0} \right] \epsilon \quad (54)$$

3-6) NATURE DES FORCES PORTANTES DU PALIER

La force portante F_{Sr} est de nature hydrostatique. Sa valeur n'est pas influencée par la valeur de la vitesse de rotation.

Les forces portantes F_{Dr} et F_{Nr} se dissocient chacune en une composante hydrostatique (F'_{Dr} et F'_{Nr} respectivement) et en une composante hydrodynamique (F''_{Dr} et F''_{Nr} respectivement) selon :

$$F'_{Dr} = + q_3 \pi n \left[2r_1^2 \left(\frac{1}{\text{ch}\zeta_0} - 1 \right) + n \text{th}\zeta_0 \gamma - \frac{r_0^2 N}{2} \right] \epsilon \quad (55)$$

$$F'_{Nr} = + q_2 \pi n \left[2r_1^2 \left(\frac{1}{\text{ch}\zeta_0} - 1 \right) + n \text{th}\zeta_0 \gamma - \frac{r_0^2 N}{2} \right] \epsilon \quad (56)$$

$$F''_{Dr} = + 6 \frac{r_1^2}{h_0^2} \pi\mu \left[4r_1^2 (\zeta_0 - \text{th}\zeta_0) + \frac{2n\gamma}{\text{ch}\zeta_0} - \frac{nr_0^2}{\text{ch}\zeta_0} \right] \epsilon \quad (57)$$

$$F''_{Nr} = -3 \frac{r_1^2}{h_0^2} \pi \mu (\omega_1 - 2\dot{\phi}) \left[4r_1^2 (\zeta_0 - th\zeta_0) + \frac{2n\gamma}{ch\zeta_0} - \frac{nr_0^2}{ch\zeta_c} \right] \varepsilon \quad (58)$$

La force portante F_{Dr} , n'est pas influencée par la grandeur de la vitesse de rotation, par contre la force portante F_{Nr} , varie proportionnellement avec la vitesse de rotation, le facteur de proportionnalité étant fonction de la géométrie et du rapport des pressions γ_0 .

La force hydrostatique (F'_{Nr}) s'oppose à la force hydrodynamique (F''_{Nr}).

Cette remarque peut s'expliquer comme suit : la force hydrodynamique tend à déplacer le tourillon selon une direction normale à la ligne des centres, elle diminue donc le jeu subsistant entre le tourillon et le coussinet, ce qui a pour effet d'augmenter la composante hydrostatique. Cette force hydrostatique a tendance à recentrer le tourillon dans son coussinet et s'oppose ainsi à l'effet qui lui a donné naissance.

Dans cet ordre d'idée, il peut être intéressant d'examiner pour un palier de géométrie donnée, comment varient à vitesse de rotation constante, les composantes hydrostatiques (F'_{Nr}) et hydrodynamique (F''_{Nr}) en fonction du rapport des pressions γ_0 . Cet examen fait l'objet du paragraphe (3-8).

3-7) COMPARAISON DES RESULTATS OBTENUS EN NEGLIGEANT LE DIAMETRE DES ORIFICES (METHODE DE M. CHARCOSSET) ET EN CONSIDERANT L'INFLUENCE DE CES DIAMETRES.

Pour une géométrie particulière, nous avons tracé les courbes de forces portantes exercées sur le palier en fonction du rapport des pressions γ_0 .

Sur la planche (3-1) sont représentés les courbes des forces suivant la direction de la ligne des centres pour une vitesse de rotation nulle F_S et F_{Sr} , correspondant respectivement à l'hypothèse de M. CHARCOSSET et à notre hypothèse), en fonction du rapport des pressions à la sortie et l'entrée des restrictions (γ_0). Nous constatons un écart par défaut d'environ 13 % obtenu pour une valeur de γ_0 égale à 0,52.

De même sur cette planche sont représentés les courbes de forces dirigées suivant la normale à la ligne des centres dans le cas d'une vitesse de rotation du tourillon $\omega_1 = 3000$ tr/mn (F_N et F_{Nr} dans les mêmes hypothèses), en fonction du même rapport γ_0 . Nous constatons un écart par excès d'environ 7,6 % obtenu pour la même valeur de γ_0 .

3-8) VARIATION DE LA FORCE PORTANTE DU PALIER SUIVANT LA NORMALE A LA LIGNE DES CENTRES EN FONCTION DU RAPPORT DES PRESSIONS γ_0 .

Pour une géométrie de palier, et une vitesse de rotation du tourillon données, les composantes hydrostatiques (F'_{Nr}) et hydrodynamique (F''_{Nr}) de la force portante (F_{Nr}) s'écrivent selon les expressions suivantes déduites des relations (56) et (58) :

$$F'_{Nr} = + C_3 * \frac{1}{\lambda + N}$$

et

$$F''_{Nr} = - C_4$$

Dans ces expressions C_3 et C_4 sont des paramètres :

- définis par la géométrie, la vitesse de rotation et
- la viscosité du fluide,

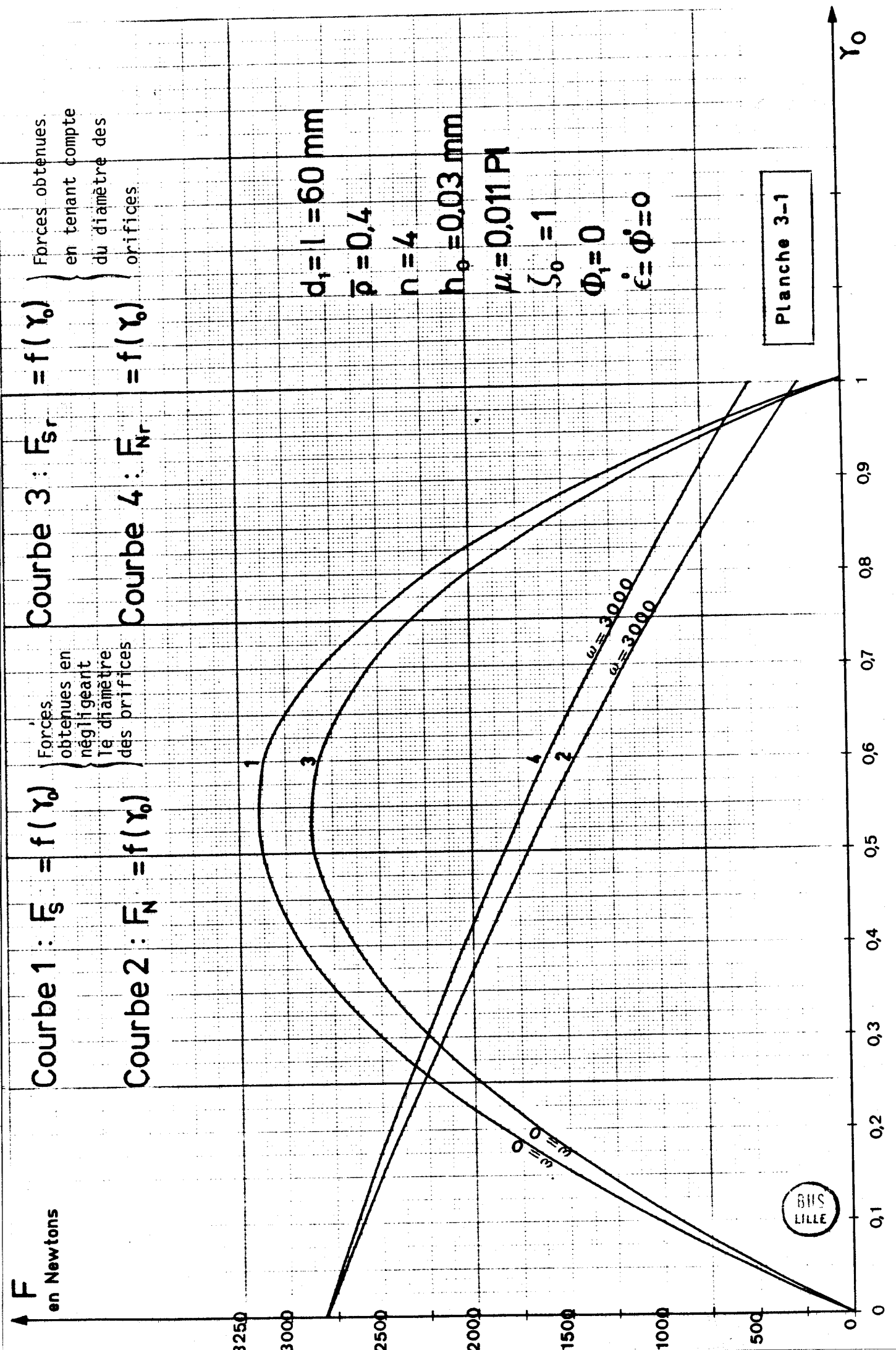
N est une constante géométrique du palier;

λ est un paramètre fonction du rapport des pressions γ_0 qui s'écrit, d'après la relation (30) :

$$\lambda = \frac{L(1-\gamma_0)^\alpha}{\gamma_0}$$

La structure de l'expression de la force portante F_{Nr} , et de la relation (30) montrent que si le rapport des pressions γ_0 décroît, λ croît et F_{Nr} décroît; inversement si γ_0 croît, et à la limite F_{Nr} s'identifie à la suite composante hydrodynamique F''_{Nr} .

Sur la planche (31) où nous avons tracé (courbe 4) l'évolution de la composante (F_{Nr}) en fonction de γ_0 , nous constatons bien la décroissance de la composante (F_{Nr}) avec la croissance du rapport des pressions γ_0 .



CHAPITRE 4 : RIGIDITE DU PALIER

4-1) GENERALITES

La rigidité du palier, est ici étudiée, d'abord dans le cas d'un chargement statique (*), ensuite dans le cas d'un chargement dynamique, pour une vitesse de rotation constante.

Quel que soit le mode de chargement, la force extérieure appliquée au palier et le déplacement n'ont pas la même direction et la rigidité qui en résulte a un caractère vectoriel.

Dans le plan de GAUSS construit sur le repère fixe OXY, la force appliquée et le déplacement se représentent par deux nombres complexes P et D respectivement. Le rapport de ces deux nombres est par définition la rigidité complexe K_c du palier.

Dans le mode de chargement statique P et D ayant des directions fixes, on substitue généralement à la notion de rigidité complexe, la notion de rigidité au sens classique du terme selon la relation suivante :

$$K = \frac{|P|}{|D|}$$

4-2) ETUDE STATIQUE ($\varepsilon = \phi = 0$) A VITESSE DE ROTATION DE L'ARBRE NULLE

Pour le cas statique à vitesse de rotation nulle, on a l'expression suivante de la rigidité complexe K_c :

$$K_{c0} = \frac{P}{D} = \frac{P_{sr}}{\varepsilon h_0} \quad (59)$$

K_{c0} est ici un nombre réel positif qui s'identifie donc à la rigidité au sens classique du terme (K_0) et la force extérieure appliquée sur le palier (P_{sr}) est égale en module et opposée à la force portante du palier (F_{sr}).

Compte tenu de l'expression (52) il vient :

$$K_0 = \frac{\pi n}{h_0} \left(\frac{3}{2} q - q_1 \right) \left[2 r_1^2 \left(1 - \frac{1}{ch \zeta_0} \right) + \frac{r_0^2 N}{2} - nth \zeta_0 \gamma \right] \quad (60)$$

(*) Rappelons que le chargement est qualifié de statique lorsque le déplacement du centre de l'arbre mesuré par l'excentricité relative ε et l'angle ϕ est stationnaire. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, on a à faire à un chargement dynamique ($\varepsilon \neq 0$ ou / et $\phi \neq 0$).

Pour une géométrie et une pression d'alimentation fixées, cette expression prend la forme suivante, lorsqu'on utilise un capillaire comme restriction extérieure :

$$K_0 = C_1 \times \frac{3\gamma_0}{L} \times \frac{1-\gamma_0}{1-\gamma_0(1-\frac{N}{L})} ;$$

Dans cette expression, C_1 , N , L sont des constantes. La valeur maximale de la rigidité K_0 s'obtient dès lors pour la valeur de γ_0 suivante :

$$\gamma_0 = \frac{1 - \sqrt{N/L}}{1 - N/L} \quad (61)$$

Cette expression montre que la raideur K_0 est indépendante de l'angle de calage ϕ_1 que fait le premier orifice avec la direction de la ligne des centres $O_1 O_2$. En outre, K ne dépend pas de l'excentricité relative ε , c'est-à-dire de la position du centre de l'arbre.

Influence des différents paramètres géométriques et hydrauliques sur la valeur de la raideur

Pour une géométrie fixée à l'exclusion du nombre d'orifices (n), nous avons tracé la courbe de rigidité K_0 , en fonction du rapport des pressions γ_0 , et pour différentes valeurs du nombre d'orifices n , (planches 4-1 et 4-2).

La planche (4-1) nous montre qu'il existe un nombre optimal d'orifices conduisant au maximum de rigidité (4 pour la géométrie considérée).

Ce nombre optimal d'orifices varie essentiellement avec le diamètre réduit des orifices $\bar{\rho}$.

La planche (4-2) illustre clairement cette dépendance : pour une valeur faible de $\bar{\rho}$ et pour des paramètres géométriques identiques à ceux du palier considérées à la planche précédente, on voit que le nombre optimal d'orifices est ici de 84.

La planche (4-3) montre d'une manière plus détaillée la dépendance entre le nombre optimal d'orifices et la grandeur $\bar{\rho}$, le domaine usuel de variation du nombre d'orifices n et du diamètre réduit $\bar{\rho}$ peut être défini comme suit :

$$(3 < n < 12 ; 0,1 < \bar{\rho} < 0,5)$$

En outre on voit sur cette planche que la rigidité maximale dépend peu du diamètre réduit $\bar{\rho}$ lorsque l'on a retenu le nombre optimal d'orifices.

La rigidité maximale est obtenue pour un nombre d'orifices $n = 4$ et pour un diamètre réduit $\bar{\rho} = 0,43$. Pour des raisons de réalisation, nous choisissons

$\bar{\rho} = 0,4$, ce qui nous donne une valeur de la rigidité voisine de la valeur maximale.

La structure de l'expression (59) de la rigidité montre que la raideur est, toutes autres choses restant identiques, inversement proportionnelle au jeu radial h_0 . Il est donc souhaitable de choisir le plus petit jeu radial h_0 compatible avec les possibilités de réalisation.

4-3) ETUDE STATIQUE ($\varepsilon = \phi = 0$) A VITESSE DE ROTATION DE L'ARBRE CONSTANTE

Lorsque la vitesse de rotation de l'arbre n'est pas nulle, à la force hydrostatique P_{Sr} correspondant à l'étude précédente, vient s'ajouter une force P_{Nr} (54) normale à la direction de la ligne des centres, égale en module et opposée à la force portante F_{Nr} .

La position de l'arbre est ici précisée par le nombre complexe :

$$e_c = -i \varepsilon h_0 \exp(i\phi) \quad (62)$$

par rapport au système d'axe $0_0 x_0 y_0$ (figure 4-1)

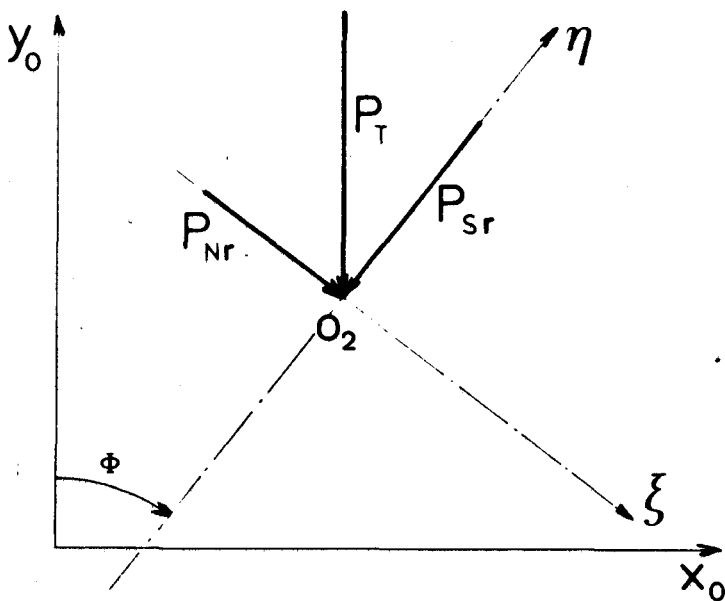


fig 4-1

La force extérieure appliquée au palier s'écrit, dans le même repère en terme complexe :

$$P_T = \left[P_{Nr} - i P_{Sr} \right] \exp(i\phi) \quad (63)$$

La rigidité complexe $K_{C\omega}$ s'exprime dès lors selon :

$$K_{c\omega} = \frac{P_{sr} + iP_{Nr}}{h_0 \epsilon}$$

et son module K_ω selon :

$$K_\omega = \frac{\sqrt{P_{sr}^2 + P_{Nr}^2}}{h_0 \epsilon} \quad (64)$$

En outre puisque :

$$\text{tg}\phi = - \frac{P_{Nr}}{P_{sr}} \quad (65)$$

Il vient

$$K_\omega = \frac{1}{h_0 \epsilon} P_{sr} \sqrt{1 + \text{tg}^2\phi}$$

et d'après l'expression (59)

$$K_\omega = K_0 \sqrt{1 + \text{tg}^2\phi} \quad (66)$$

INFLUENCE DES DIFFERENTS PARAMETRES SUR LA VALEUR DE LA RAIDEUR K_ω

Les différents paramètres intervenant dans l'expression de K_ω sont :

- la rigidité statique K_0 pour une vitesse de rotation de l'arbre nulle, dont nous avons étudié le comportement au paragraphe précédent.

- la valeur de l'angle ϕ qui est liée à la valeur de la vitesse de rotation du tourillon ω_1 . Cette valeur de ϕ est fonction des forces appliquées sur le palier comme l'exprime la relation (65).

Il convient par conséquent d'étudier la raideur k_ω en fonction de la vitesse de rotation ω_1 du tourillon, en tenant compte des variables intervenant dans la détermination des forces extérieures, à savoir :

h_0 , jeu radial;

n , nombre d'orifices

$\bar{\rho}$, rapport du diamètre des orifices au diamètre de l'arbre

γ_0 , rapport des pressions.

Nous avons choisi les valeurs particulières suivantes de ces variables :

- $h_0 = 3/100$ et $5/100$ de millimètre

- $3 \leq n \leq 8$ (pour $n \geq 8$ la réalisation est onéreuse).

- $0,1 \leq \bar{\rho} \leq 0,5$ (la valeur limite $\bar{\rho} = 0,5$ correspond à la limite du domaine de validité défini au paragraphe 2-12-2).

- $\gamma_0 = 0,25; 0,5; 0,75$ (la valeur 0,5 correspond sensiblement au maximum de la raideur à vitesse nulle).

Pour un palier de dimensions particulières définies comme suit :

$$d_1 = 60 \text{ mm}$$

$$l = 60 \text{ mm}$$

Nous avons déterminé, en fonction de la vitesse de rotation du tourillon ω_1 , la raideur K_ω . Ces résultats sont présentés graphiquement sur les planches 4-4 à 4-9 (chaque planche correspond à un couple de valeurs h_0, γ_0).

Sur chaque planche, la raideur due à la seule composante hydrodynamique de la force portante (F_{Nr}) a été tracée. Remarquons que cette raideur ne dépend ni du nombre d'orifices n , ni du diamètre réduit $\bar{\rho}$, ce qui justifie notre séparation des variables (h_0, γ_0) et ($n, \bar{\rho}$).

Sur les graphiques 4-4 à 4-9 représentant la raideur K_ω due à l'ensemble des forces appliquées, on peut remarquer, d'une manière générale, qu'au delà d'une certaine vitesse ω^* , la raideur est toujours inférieure à la raideur qui serait due à la seule composante hydrodynamique. En deçà de ω^* , la raideur due à la seule composante hydrodynamique est inférieure aux raideurs K_ω (fonction de n et de $\bar{\rho}$). Le niveau général de ces raideurs K_ω est suffisamment bien caractérisé par la valeur K_0 correspondant à la vitesse de rotation nulle.

4-4) ETUDE DE LA RAIDEUR DYNAMIQUE

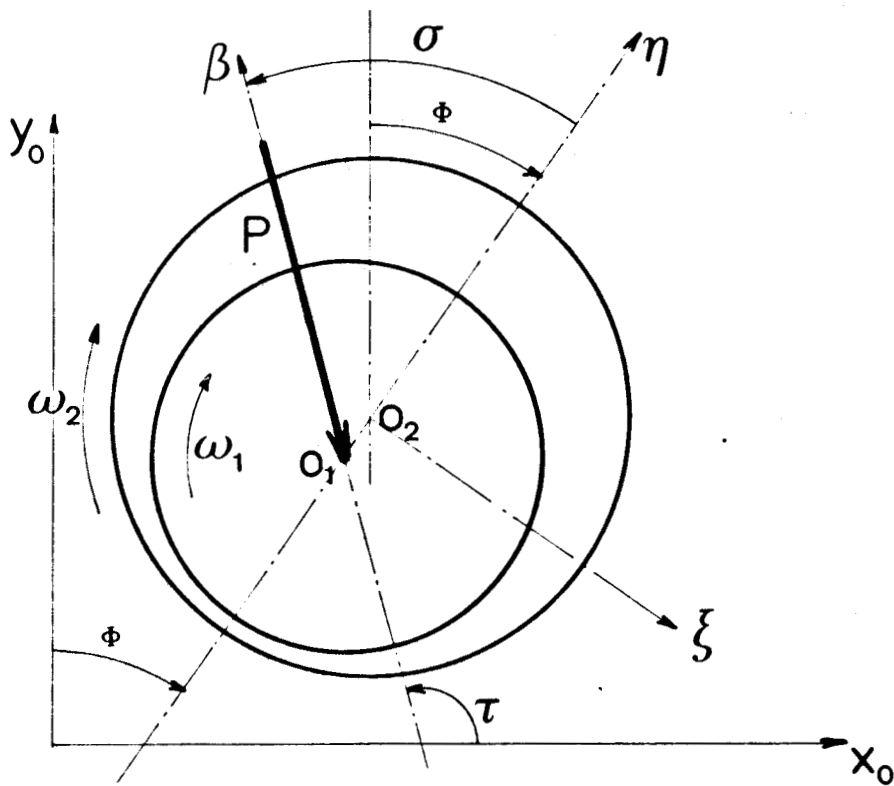
Pour étudier la raideur dynamique d'un palier, nous devons tenir compte des variations de l'excentricité relative ε , de ses dérivées $\dot{\varepsilon}$ et $\ddot{\varepsilon}$, ainsi que de la variation de l'angle ϕ , et de ses dérivées $\dot{\phi}$ et $\ddot{\phi}$.

A la force portante du palier (F_{sr}) agissant suivant la ligne des centres, vient s'ajouter une force portante dynamique (F_{Dr}) qui est précisée par l'expression (53). Ces forces portantes, pour les mêmes caractéristiques de fonctionnement sont, pour F_{sr} fonction de l'excentricité ε , et pour F_{Dr} fonction de la dérivée première de l'excentricité relative $\dot{\varepsilon}$. La force portante F_{Nr} agissant suivant la normale à la ligne des centres, est fonction de l'excentricité relative ε et de la dérivée première de l'angle ϕ .

Pour calculer la valeur de la raideur dynamique que nous noterons K_d , il faut écrire la loi fondamentale de la dynamique, appliquée à l'arbre et en déduire après avoir déterminé l'accélération du centre du tourillon, la force extérieure agissant sur le palier que nous noterons P .

Nous supposerons comme au chapitre 1, que le centre du coussinet O_2 est fixe, et que la vitesse de rotation de l'arbre ω_1 est constante.

Nous utiliserons la figure et les notations suivantes :



$O_1\beta$ est l'axe passant par O_1 , dirigé en opposition de la force extérieure appliquée à l'arbre

σ est l'angle $(\vec{O_1\eta}, \vec{O_1\beta})$
 τ est l'angle $(\vec{O_0x_0}, \vec{O_1\beta})$

De nos conventions, il résulte que l'on peut écrire :

$$\tau = \sigma - \phi + \frac{\pi}{2} \quad (67)$$

Nous noterons :

m_I , la masse de l'arbre afférente au palier.

4-4-1) Détermination des équations régissant le comportement du palier

Dans le repère $O_2\xi\eta z$, nous noterons la valeur de la force extérieure P suivant :

$$\vec{P} = P_n \vec{\xi} + P_t \vec{\eta} \quad (68)$$

et de la même façon :

$$\vec{F} = F_n \vec{\xi} + F_t \vec{\eta} \quad (69)$$

expression dans laquelle :

$$F_n = F_{Nr} \quad (70)$$

et

$$F_t = F_{sr} + F_{Dr} \quad (71)$$

Accélération du centre O_1 du tourillon

Nous avons, au paragraphe 1-6, déterminé la vitesse \vec{V}_{O1} du centre O_1 du tourillon, dans le système d'axes $O_2\xi\eta z$ selon :

$$\vec{V}_{O1} = -\varepsilon h_0 \dot{\phi} \vec{\xi} - \varepsilon h_0 \dot{\phi} \vec{\eta}$$

L'accélération du point O_1 exprimé dans le même système d'axes s'écrit :

$$\vec{\gamma}_{O1} = \begin{bmatrix} -\varepsilon h_0 \ddot{\phi} - h_0 \dot{\varepsilon} \dot{\phi} \\ -\dot{\varepsilon} h_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\phi} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -\varepsilon h_0 \dot{\phi} \\ -\dot{\varepsilon} h_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

qui s'écrit encore :

$$\vec{\gamma}_{O1} = \begin{bmatrix} -2\varepsilon h_0 \ddot{\phi} - \dot{\varepsilon} h_0 \dot{\phi} \\ -\dot{\varepsilon} h_0 + \varepsilon h_0 \dot{\phi}^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (72)$$

La loi fondamentale de la dynamique conduit alors aux équations :

$$-2\varepsilon h_0 \ddot{\phi} - \dot{\varepsilon} h_0 \dot{\phi} = \frac{P_n + F_n}{m_1} \quad (73)$$

$$-\dot{\varepsilon} h_0 + \varepsilon h_0 \dot{\phi}^2 = \frac{P_t + F_t}{m_1} \quad (74)$$

Connaissant la loi de variation de l'excentricité relative ε et de l'angle ϕ , nous pouvons à partir de ces relations calculer les dérivées premières et secondes, ε , $\dot{\varepsilon}$, ϕ , $\dot{\phi}$, et déduire la valeur des composantes de la charge extérieure P_n et P_t .

La force appliquée sur le palier n'étant plus directement proportionnelle à l'excentricité relative, la raideur complexe K_{dc} s'écrit :

$$K_{dc} = \frac{\partial (P_t + iP_n)}{h_0 \partial \varepsilon}$$

et son module

$$K_d = \frac{\partial (P_t^2 + P_n^2)^{1/2}}{h_0 \partial \varepsilon} \quad (75)$$

La valeur de l'angle σ , qui nous donne la position de la force extérieure par rapport à l'axe $\vec{O_2\eta}$ est donnée par la relation :

$$\operatorname{tg}\sigma = - \frac{P_n}{P_t} \quad (76)$$

La valeur de l'angle τ se déduit de cette expression et de la relation (67).

Etant donné que la variation la plus générale de l'excentricité ε ou de l'angle ϕ peut être décomposée en série de Fourier, il convient d'étudier la rigidité sous une variation sinusoïdale des grandeurs ε et ϕ .

On peut considérer que l'on a les expressions suivantes :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \sin(\omega_\varepsilon t + \delta_\varepsilon) \quad (77)$$

$$\phi = \phi_0 + \phi_{10} \sin(\omega_\phi t + \delta_\phi) \quad (78)$$

dans lesquelles la valeur de ϕ_0 est définie par un fonctionnement statique à vitesse de rotation de l'arbre constante, et t représente le temps.

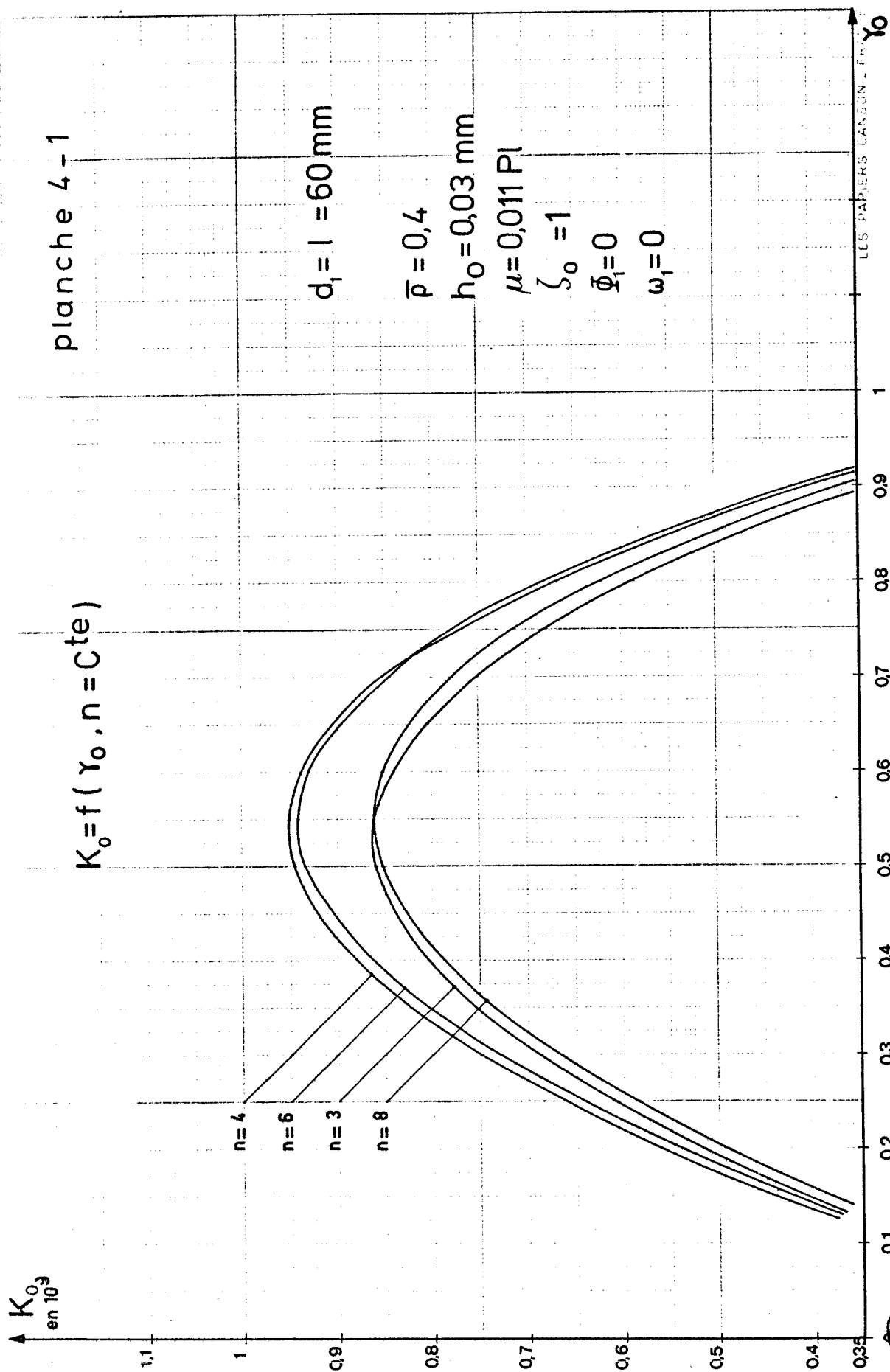
Nous avons déterminé les valeurs de la rigidité pour un palier défini par les valeurs numériques suivantes :

Rayon de l'arbre	$r_1 = 30 \text{ mm}$
Largeur du palier	$l = 60 \text{ mm}$
Nombre d'orifices	$n = 4$
Diamètre réduit	$\bar{\rho} = 0,4$
Angle de calage du premier orifice	$\phi_1 = 0$
Viscosité de l'huile	$\mu = 0,011 \text{ Pl}$
Pression de la pompe	$p_t = 140 \text{ bars}$
Masse de l'arbre	$m_1 = 4 \text{ kg}$

Pour les vitesses de rotation nulle, et égale à 3000 tr/mn et pour les valeurs suivantes de ε_0 , ε_1 , ϕ_{10} , ω_ε , ω_ϕ , δ_ε , δ_ϕ , nous avons tracé les courbes de raideur K_d , et de l'angle τ en fonction du temps :

								Planche	
ϵ_0	ϵ_1	ϕ_{10}	ω_ϵ	ω_ϕ	δ_ϵ	δ_ϕ		4-10	4-11
0,1	0,01	$\pi/12$	600	50	0	0	Courbes I ₁ , I ₂	:	
0,1	0,02	$\pi/12$	600	600	0	0	Courbes II ₁ , II ₂	:	
0,1	0,02	$\pi/12$	600	50	90°	0		:	Courbes III ₁ , III ₂
0,1	0,02	$\pi/12$	600	50	0	90°		:	Courbes IV ₁ , IV ₂

Dans ce tableau, les chiffres I₁, I₂ (par exemple) désignent les courbes tracées dans le cas où respectivement, la vitesse de rotation de l'arbre est nulle, est égale à 3000 tr/mn.



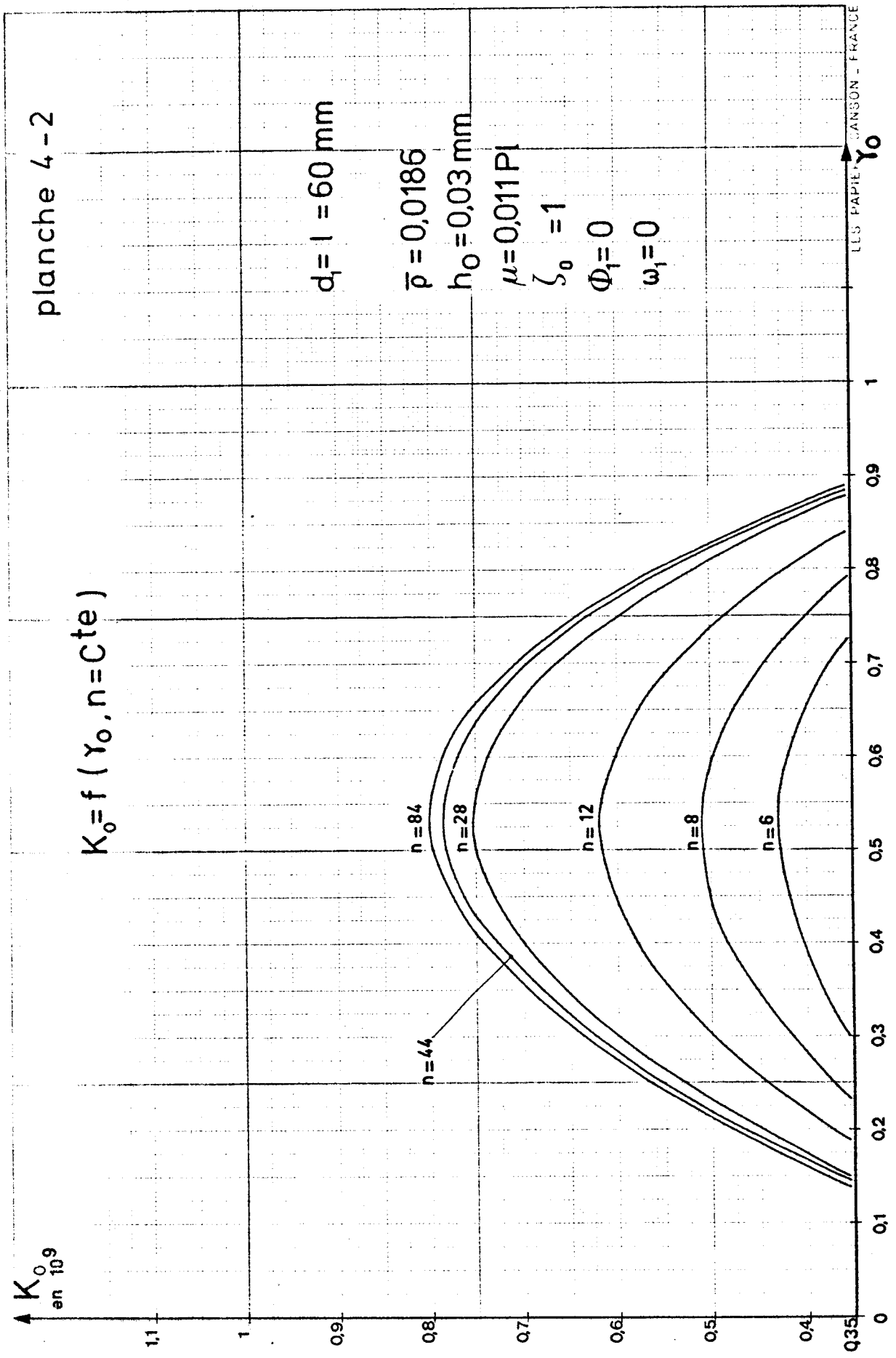


planche 4-2

$d_f = 1 = 60 \text{ mm}$

$\bar{p} = 0,0186$

$h_0 = 0,03 \text{ mm}$

$\mu = 0,011 \text{ PI}$

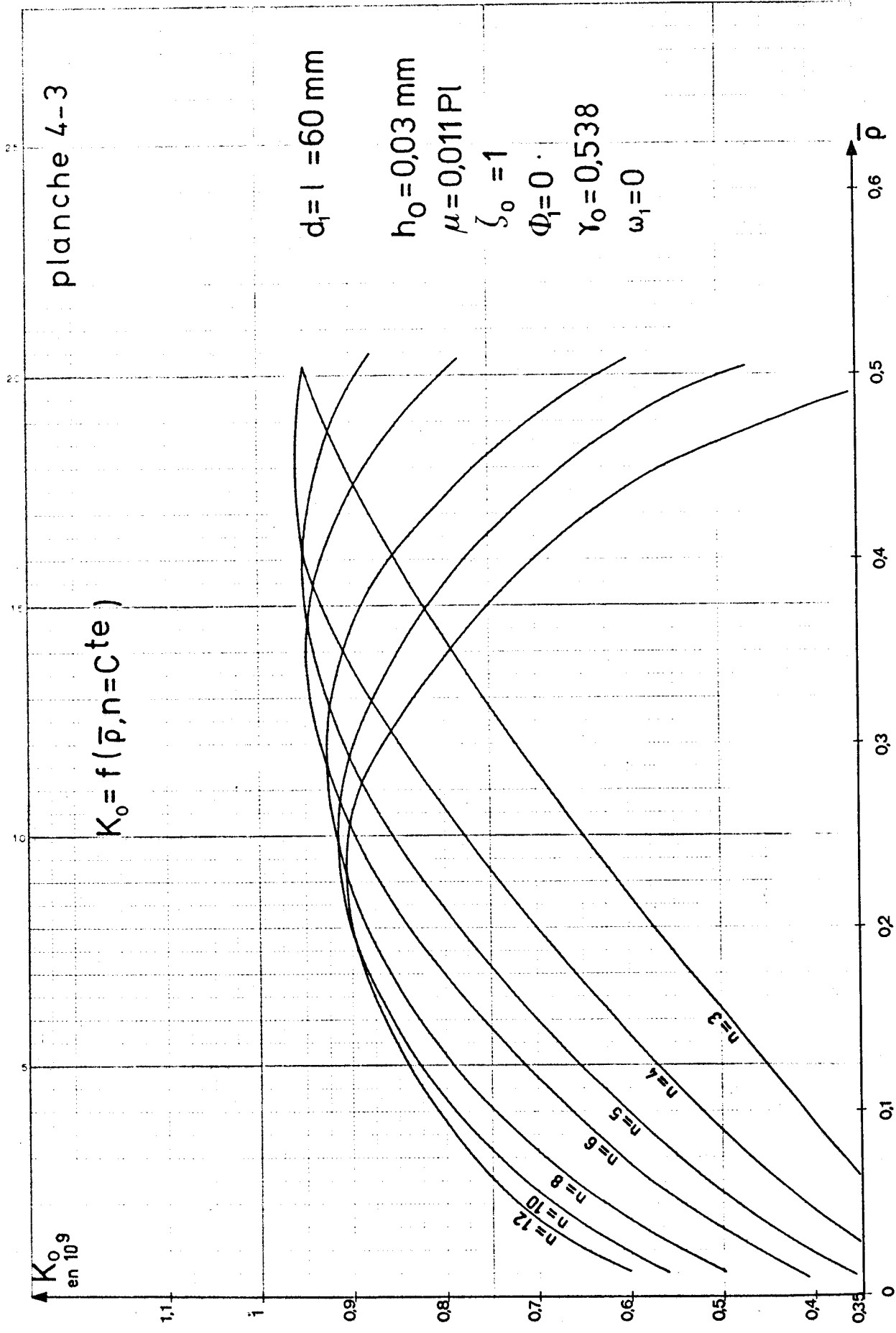
$\zeta_0 = 1$

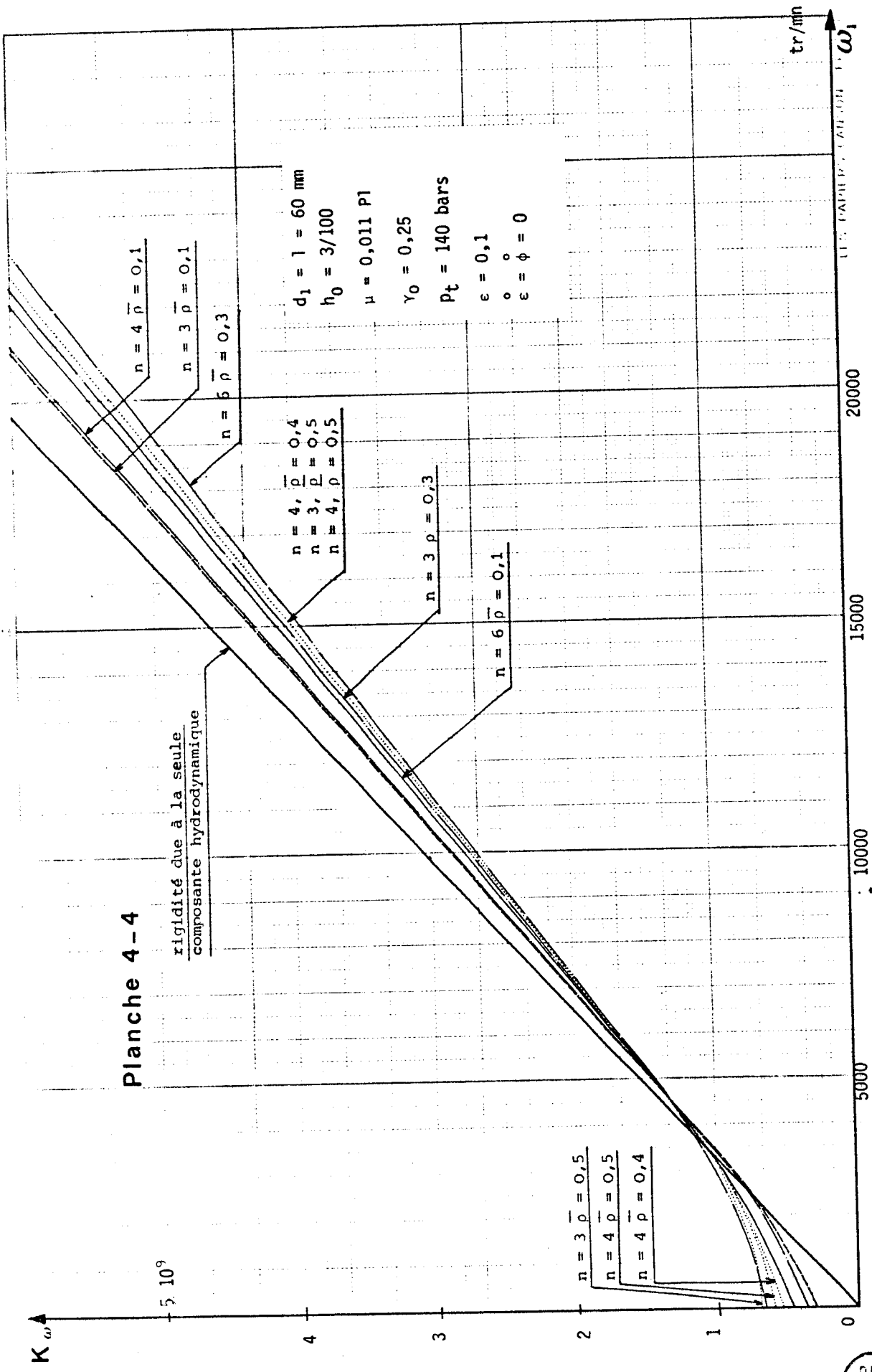
$\Phi_1 = 0$

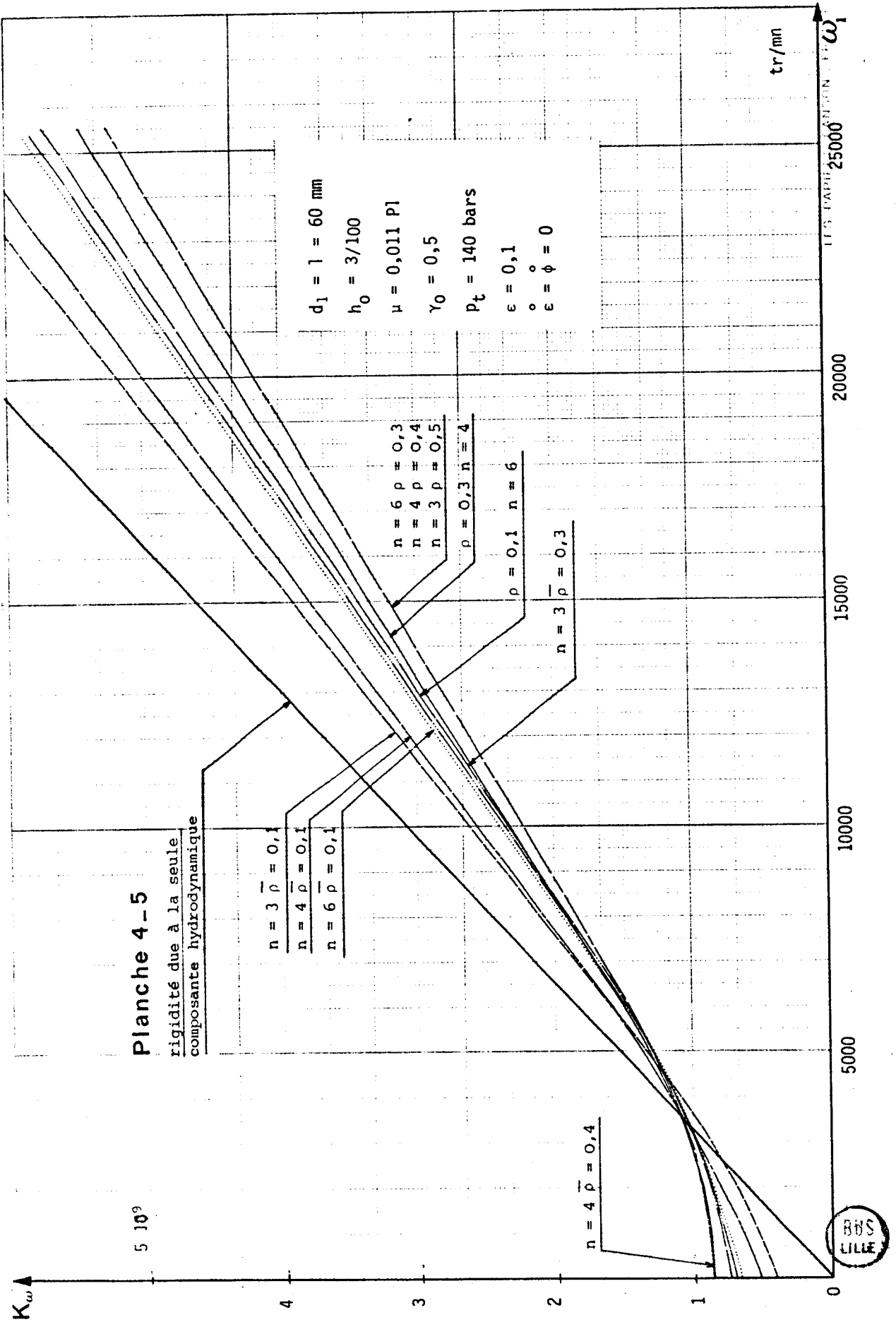
$\omega_1 = 0$

LES PAPIERS GANSON - FRANCE









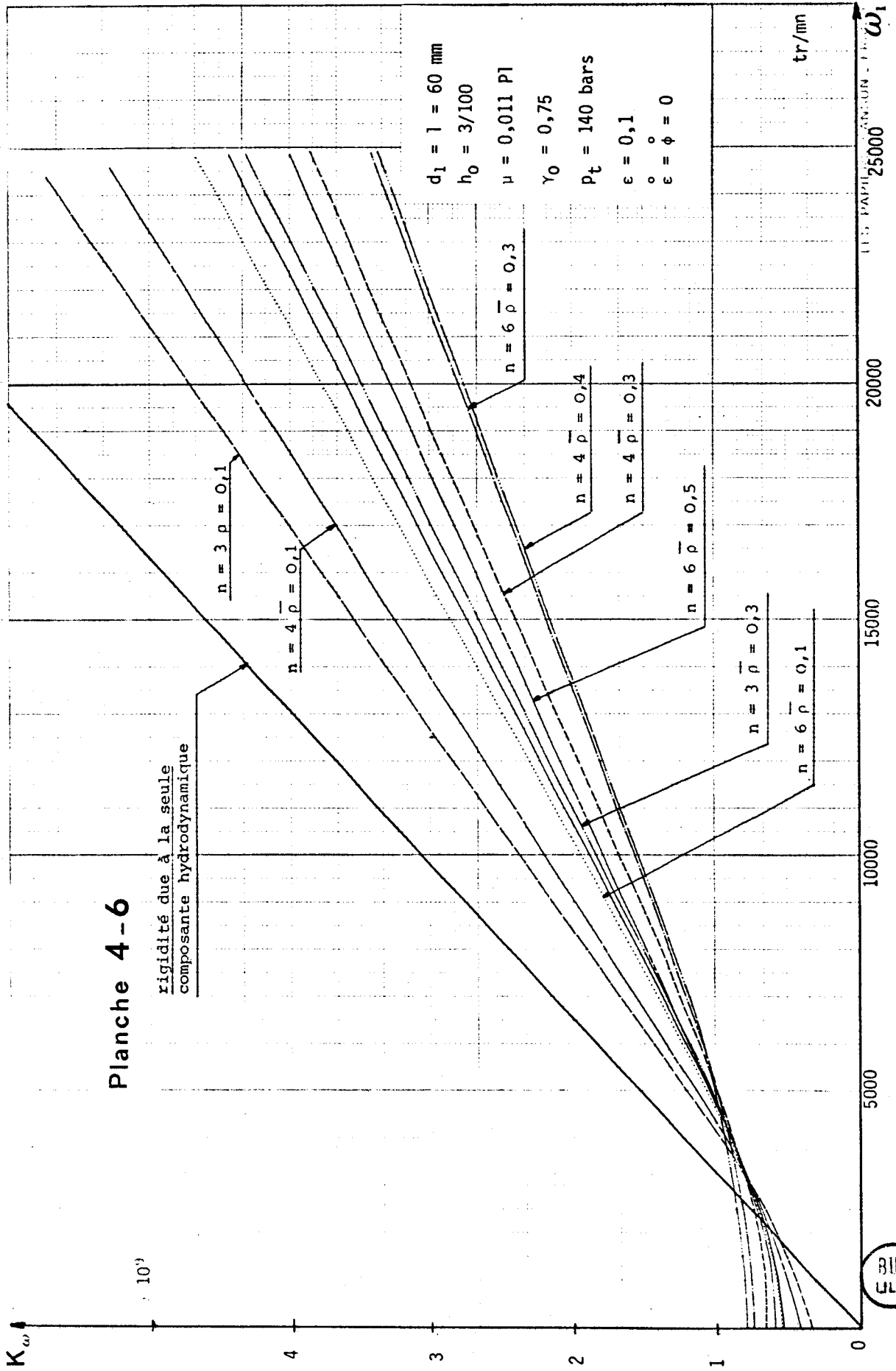
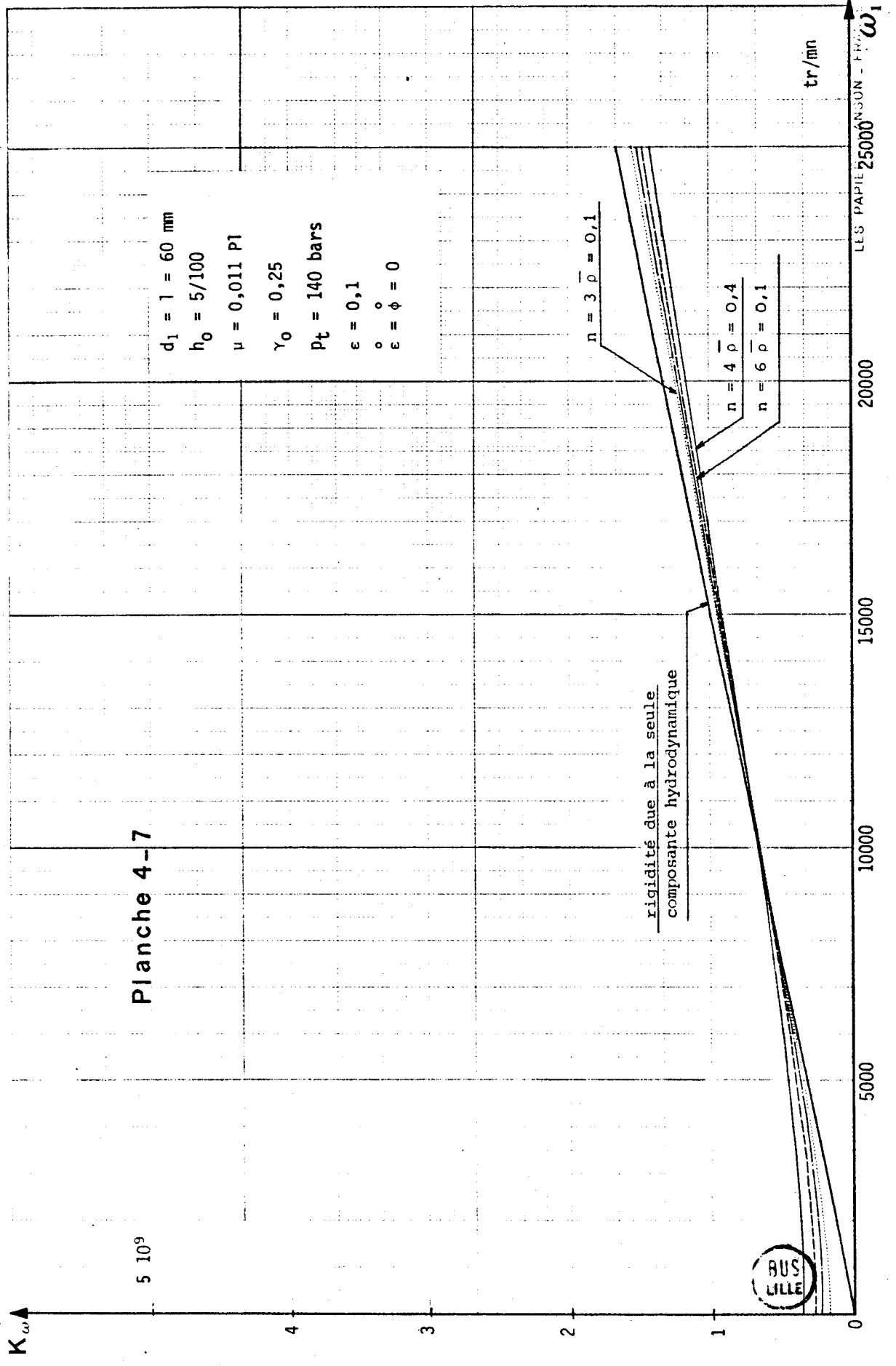
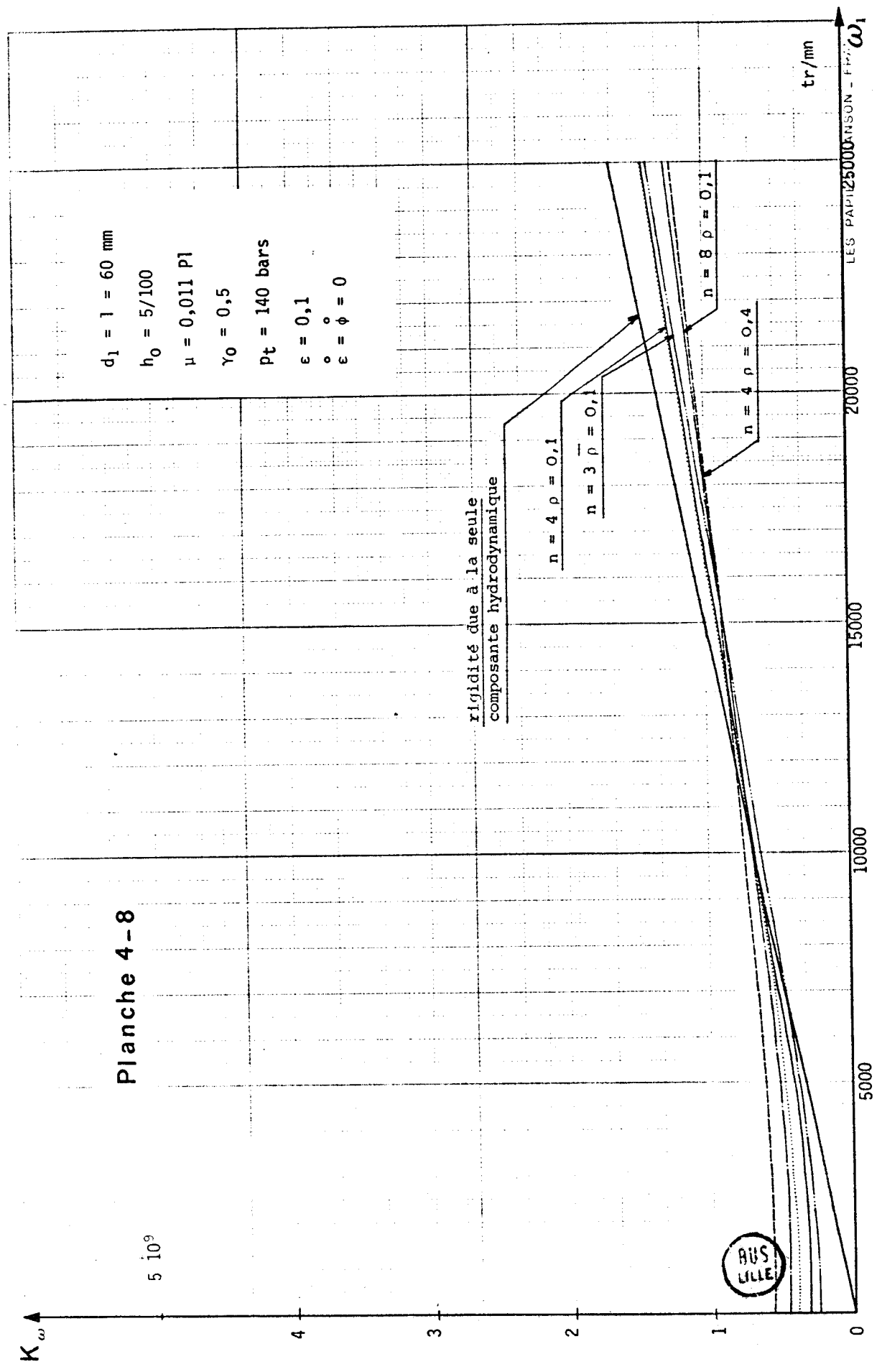


Planche 4-7





$d_1 = 1 = 60 \text{ mm}$
 $h_0 = 5/100$
 $\mu = 0,011 \text{ P1}$
 $\gamma_0 = 0,5$
 $p_t = 140 \text{ bars}$
 $\epsilon = 0,1$
 $\epsilon = \phi = 0$

Planche 4-8



LES PAPIERS PARSONS - F.P.A.

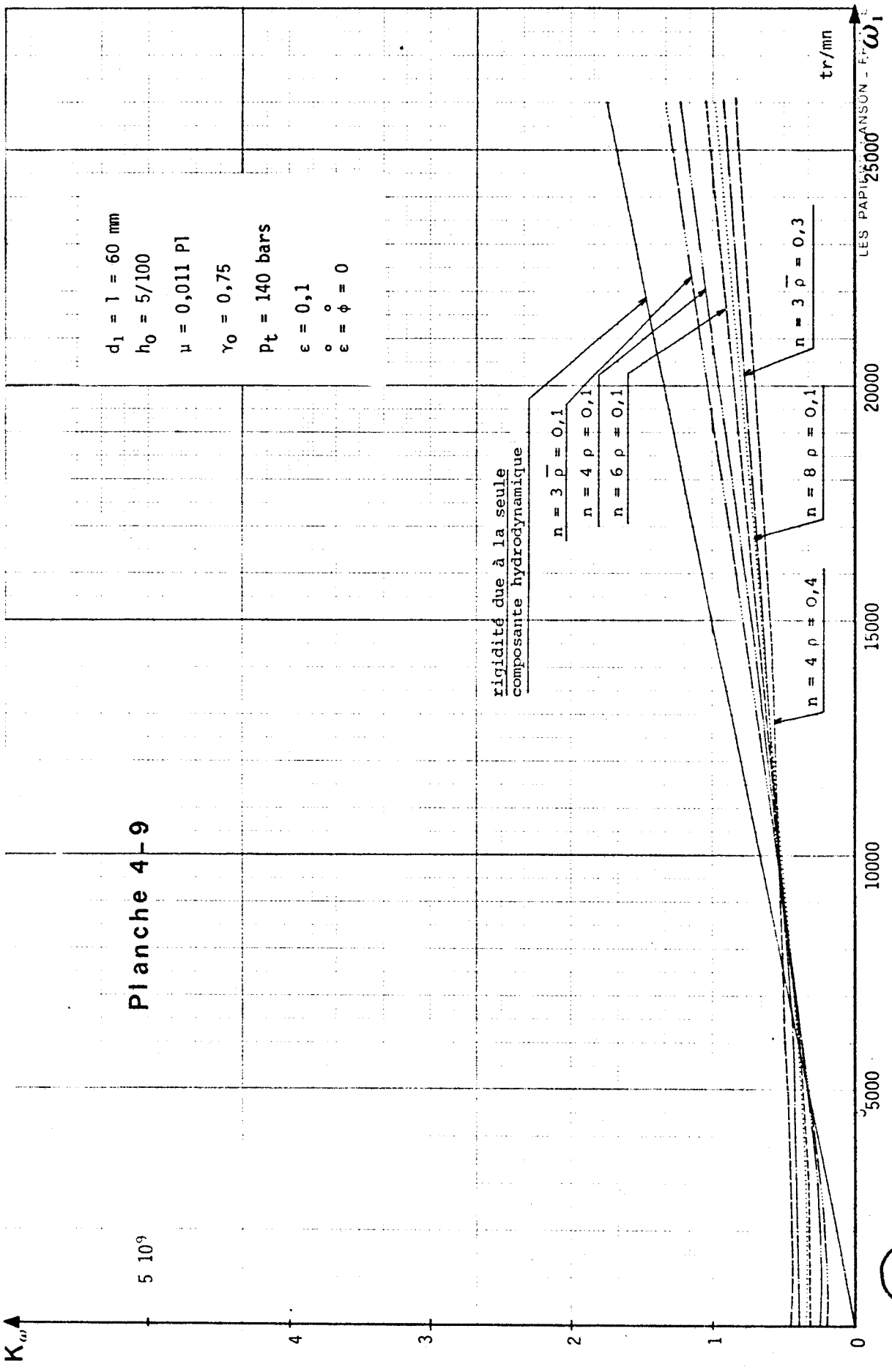


Planche 4-10

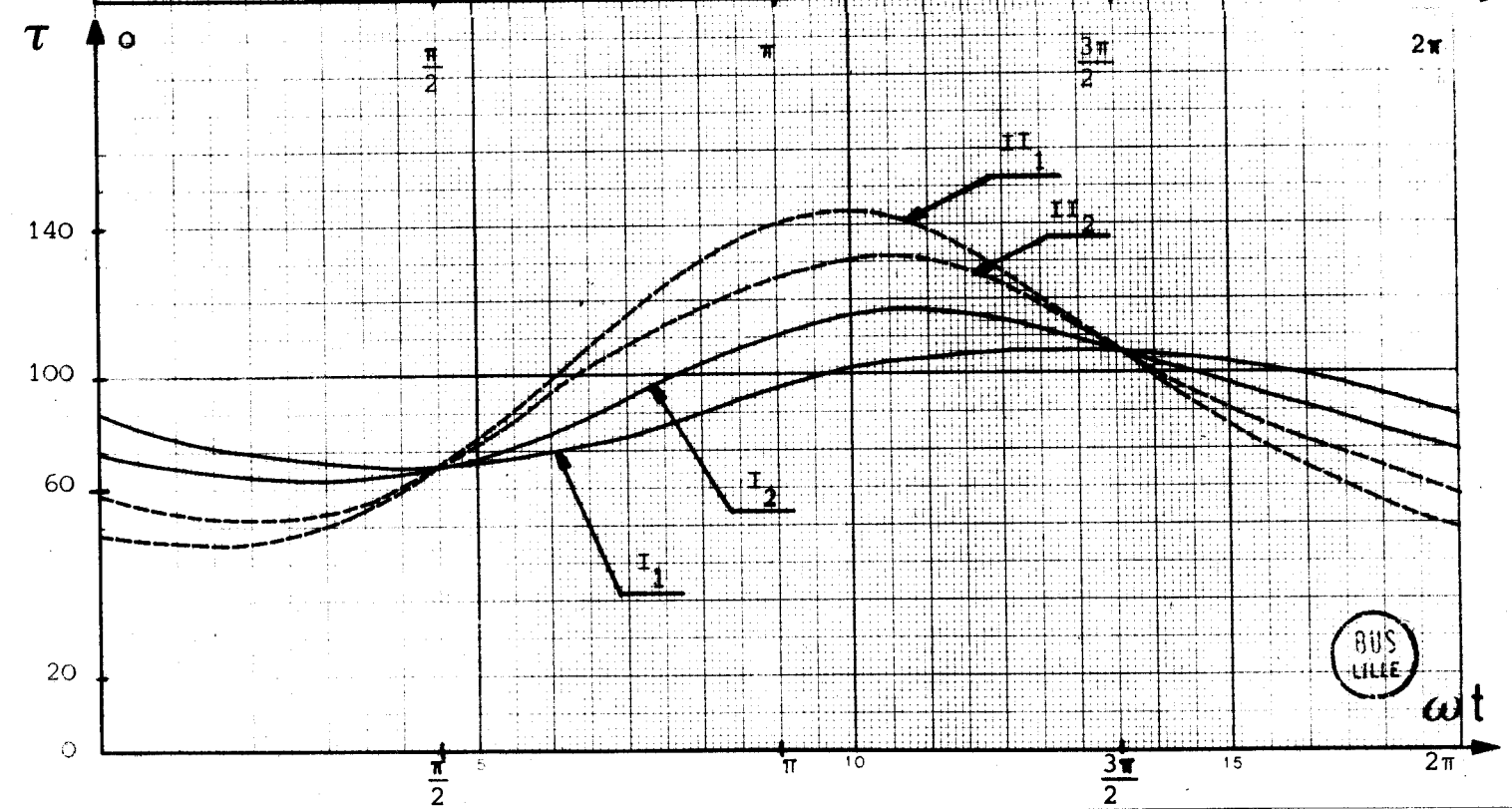
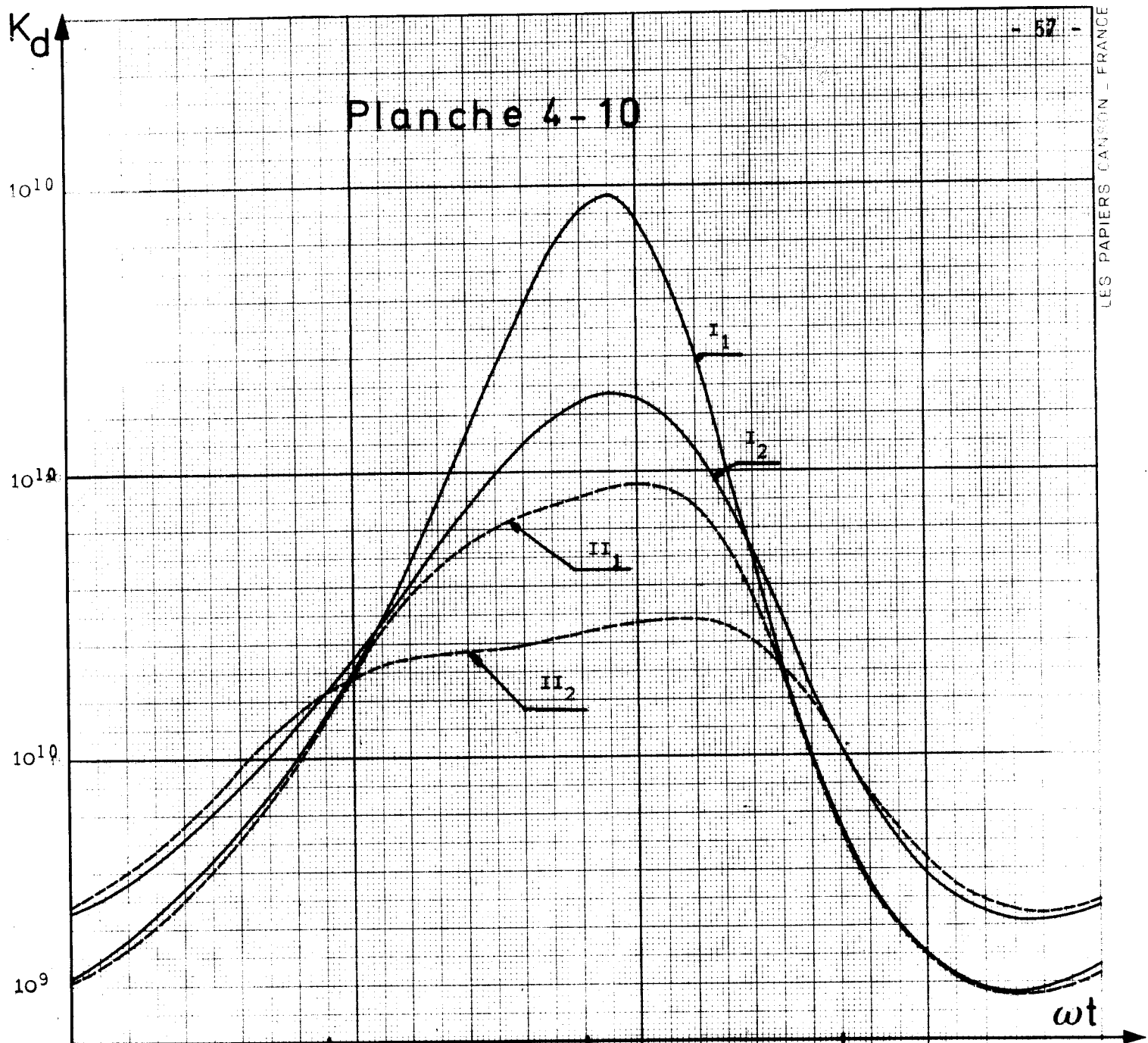
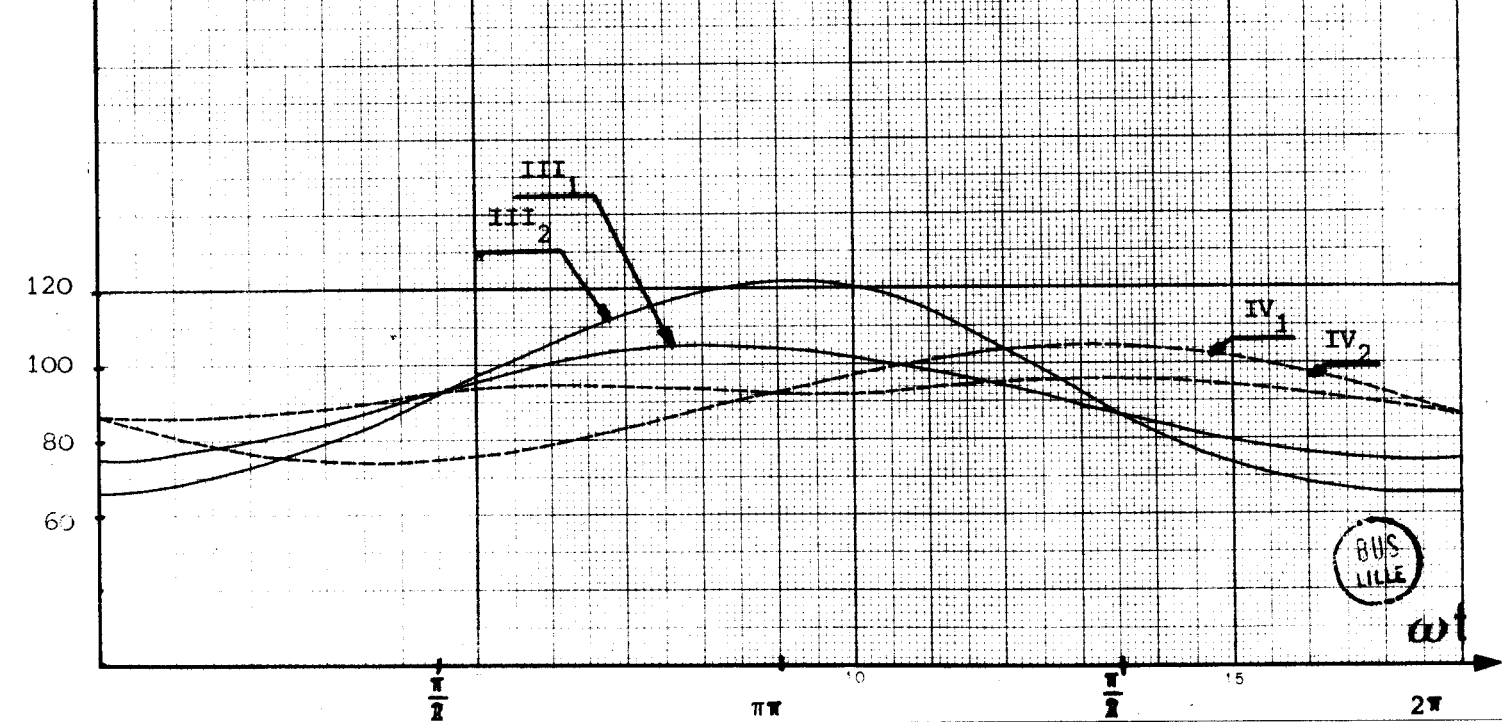
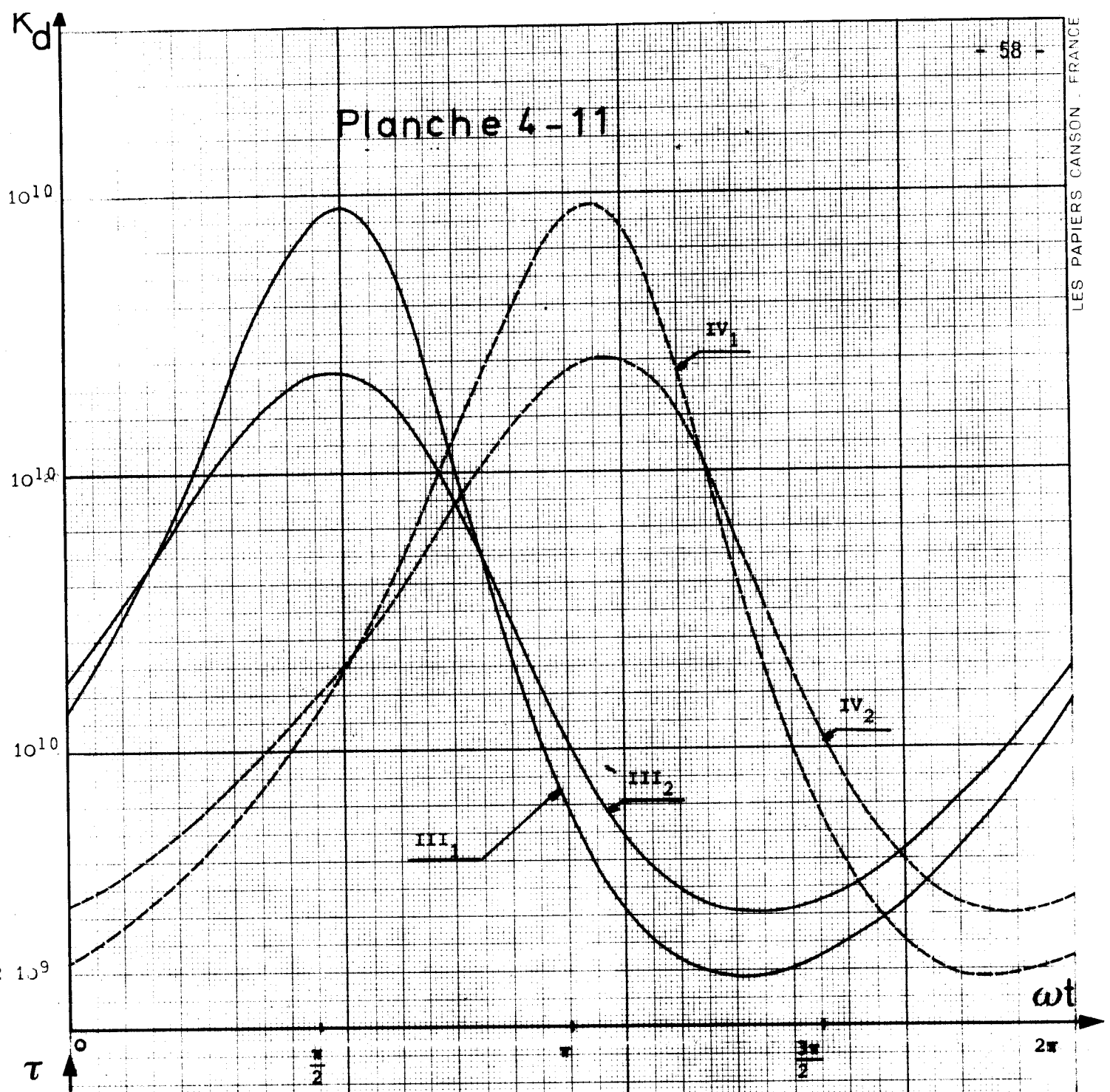


Planche 4-11

LES PAPIERS CANSON - FRANCE



BUS LILLE

CHAPITRE 5 : DETERMINATION DU COUPLE DE FROTTEMENT

HYDRAULIQUE

5-1) ECOULEMENT ET CONTRAINTE DE CISAILLEMENT

Nous avons écrit au paragraphe (1-4) l'expression de la vitesse U d'une particule fluide dans un repère cartésien selon les expressions suivantes :

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + \left(\frac{h-y}{h}\right)U_1 + \frac{y}{h} U_2$$

$$w = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-h)$$

Nous savons que pour un fluide newtonien, la contrainte de cisaillement est donnée par la loi de Newton qui s'écrit :

$$\tau_x = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad , \quad \tau_z = \mu \frac{\partial w}{\partial y}$$

et en remplaçant u, et w par leur valeur, il vient :

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y-h) + \frac{\mu}{h} (U_2 - U_1) \\ \tau_z &= \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (2y-h) \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

5-2) ACTION TANGENTIELLE DUE AU FLUIDE SUR LES SURFACES QUI DELIMITENT LE PALIER

L'action tangentielle d'ue au fluide est équivalente, en l'absence de déplacement axial, a un couple sur l'arbre et sur le coussinet dirigé selon l'axe du palier, dont nous calculerons conventionnellement le moment en choisissant le centre de l'arbre O_1 comme centre de réduction.

Il en résulte l'expression suivante du moment

$$M = \iiint_S \tau_x r_1 dx dz \quad (80)$$

s, désignant la surface du tourillon de l'arbre ou celle du coussinet selon le cas, cette expression s'écrit en remplaçant τ_x par sa valeur (79) et en tenant compte de la valeur nulle de U_2 (coussinet fixe).

$$M = \iint_S \left[\left(\frac{2y-h}{2} \right) \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\mu}{h} U_1 \right] r_1 dx dz$$

Pour le tourillon, $y = 0$ et en appliquant le changement de variable adopté au paragraphe (1-7).

$$\theta = \frac{x}{r_1} \quad , \quad \zeta = \frac{z}{r_1}$$

il vient :

$$M_a = \int_0^{2\pi} \int_0^{\zeta_0} \left(- \frac{h}{2r_1} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{\mu}{h} U_1 \right) r_1^3 d\theta d\zeta \quad (81)$$

De même, pour le coussinet, $y = h$ et l'on obtient :

$$M_c = \int_0^{2\pi} \int_0^{\zeta_0} \left(\frac{h}{2r_1} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{\mu}{h} U_1 \right) r_1^3 d\theta d\zeta \quad (82)$$

5-3) ACTION TANGENTIELLE DUE AU FLUIDE S'EXERCANT SUR LE COUSSINET

Nous calculerons ce couple, en considérant le diamètre des orifices comme négligeable.

Posons : $M_c = M_1 + M_2$

avec :

$$M_1 = \int_0^{\zeta_0} \int_0^{2\pi} \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial \theta} r_1^2 d\theta d\zeta \quad (83)$$

et

$$M_2 = - \int_0^{\zeta_0} \int_0^{2\pi} \frac{\mu}{h} U_1 r_1^3 d\theta d\zeta \quad (84)$$

5-3-1) Valeur du couple M_1

En intégrant par parties l'expression (83) le couple M_1 s'écrit :

$$M_1 = + r_1^2 \int_0^{\zeta} \left\{ \left[hp \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} p \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta \right\} d\zeta$$

Nous poserons par soucis de clarté :

$$M_1 = M_{10} + M_{1s} + M_{1d} + M_{1v}$$

Expression dans laquelle M_{10} , M_{1s} , M_{1d} , M_{1v} correspondant respectivement aux couples dues aux répartitions de pression p_0 , ϵp_{1s} , ϵp_{1d} , ϵp_{1v} .

5.3.1.1. Valeur du couple M_{10}

D'après l'expression (83) le couple M_1 s'écrit :

$$M_1 = + r_1^2 \int_0^{\zeta_0} \left\{ \left[hp_0 \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} p_0 \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta \right\} d\zeta$$

Dans cette expression :

$$p_0 = -qn \left[(\zeta - \zeta_0) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kn(\theta - \phi_1) \operatorname{sh} kn(\zeta - \zeta_0)}{kn \operatorname{ch} kn \zeta_0} \right]$$

nous obtenons :

$$\left[hp_0 \right]_0^{2\pi} = 0$$

Calculons l'expression :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} p_0 \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} + qn \left[(\zeta - \zeta_0) \sin \theta - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} k(\zeta - \zeta_0)}{\operatorname{ch} k \zeta_0} \frac{\sin \theta \cos kn(\theta - \phi_1)}{kn} \right] \epsilon h_0 d\theta \\ &= - 2 \epsilon h_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} k(\zeta - \zeta_0)}{kn \operatorname{ch} k \zeta_0} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos kn(\theta - \phi_1) d\theta \end{aligned}$$

en remarquant que :

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos kn(\theta - \phi_1) d\theta = - \frac{1}{1+kn} \left[\cos(\theta(1-kn) - kn\phi_1) \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{1-kn} \left[\cos(\theta(1-kn) + kn\phi_1) \right]_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos kn(\theta - \phi_1) d\theta = 0$$

nous obtenons pour la valeur du couple M_{10} :

$$M_{10} = 0 \quad (86)$$

5.3.1.2. Valeur du couple M_{1S}

L'expression du couple M_{1S} s'écrit :

$$M_{1S} = + r_1^2 \int_0^{\zeta_0} \left\{ \left[h p_{1S} \varepsilon \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \varepsilon p_{1S} \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta \right\} d\zeta \quad (87)$$

Dans cette expression :

$$p_{1S} = \left(\frac{3}{2} q - q_1 \right) n \frac{\text{sh}(\zeta - \zeta_0) \cos \theta}{\text{ch} \zeta_0}$$

$$+ \frac{3}{2} q n \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\text{sh} k n (\zeta - \zeta_0)}{k n \text{ch} k n \zeta_0} \cos \alpha_1 - \left\{ \frac{\text{sh} (k n \pm 1) (\zeta - \zeta_0)}{(k n \pm 1) \text{ch} (k n \pm 1) \zeta_0} - \frac{\text{sh} k n (\zeta - \zeta_0)}{k n \text{ch} k n \zeta_0} \right\} \frac{\cos \alpha_1}{(k n)^2 - (k n \pm 1)^2} \right]$$

$$- q_1 n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sh} m (\zeta - \zeta_0)}{m \text{ch} m \zeta_0} \cos (m \theta - k n \phi_1)$$

Nous allons poser de la même manière qu'au paragraphe 3.2.1.2.

$$p_{1S} = A + B + C$$

A, B, C représentent dans l'ordre les 3 termes du membre de droite de l'expression précédente.

Calculons d'après la relation (87) la valeur de $\left[h \varepsilon p_{1S} \right]_0^{2\pi}$, nous obtenons successivement pour les 3 grandeurs A, B, C :

$$\left[h A \varepsilon \right]_0^{2\pi} = \varepsilon h_0 \left(\frac{3}{2} q - q_1 \right) \frac{n \text{sh}(\zeta - \zeta_0)}{\text{ch} \zeta_0} \left[\cos \theta - \varepsilon \cos^2 \theta \right]_0^{2\pi}$$

$$\left[h A \varepsilon \right]_0^{2\pi} = 0,$$

$$\left[h B \varepsilon \right]_0^{2\pi} = \text{cte} \times \left[\cos \alpha (1 + \varepsilon \cos \theta) \right]_0^{2\pi}$$

Dans cette expression, $\alpha = \left[(k n \pm 1) \theta - k n \phi_1 \right]$

$$\left[h B \varepsilon \right]_0^{2\pi} = 0,$$

$$\left[h C \varepsilon \right]_0^{2\pi} = \text{cte} \left[\cos (m \theta - k n \phi_1) (1 + \varepsilon \cos \theta) \right]_0^{2\pi}$$

$$\left[h C \varepsilon \right]_0^{2\pi} = 0,$$

d'où il résulte :

$$\left[h_{\epsilon p_{1S}} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (88)$$

De la même façon, calculons d'après la relation (87), la valeur de :

$$\int_0^{2\pi} \epsilon p_{1S} \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta$$

nous obtenons pour le terme A,

$$\begin{aligned} - \int_0^{2\pi} \epsilon h_0 A \sin \theta d\theta &= - \frac{3}{2} (q - q_1) n \frac{\text{sh}(\zeta - \zeta_0)}{\text{ch} \zeta_0} h_0 \epsilon \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 0, \end{aligned}$$

pour le terme B,

$$\begin{aligned} - \int_0^{2\pi} \epsilon h_0 B \sin \theta d\theta &= \text{cte} \int_0^{2\pi} \left[\sin(\alpha + \theta) + \sin(\alpha - \theta) \right] d\theta \\ &= \text{cte} \left\{ - \frac{1}{kn+2} \left[\cos(kn+2)\theta - kn\phi_1 \right]_0^{2\pi} - \frac{2}{kn} \left[\cos kn(\theta - \phi_1) \right]_0^{2\pi} \right\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

Pour le terme C,

$$\begin{aligned} - \int_0^{2\pi} \epsilon h_0 C \sin \theta d\theta &= \text{cte} \int_0^{2\pi} \cos(m\theta - kn\phi_1) \sin \theta d\theta \\ &= - \frac{\text{cte}}{m+1} \left[\cos(m+1)\theta - kn\phi_1 \right]_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$\int_0^{2\pi} \epsilon p_{1S} \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta = 0$$

et compte tenu de (88), la valeur du couple M_{1S} s'écrit :

$$M_{1S} = 0 \quad (89)$$

Remarque

Les résultats précédemment obtenus : $M_{10} = M_{1S} = 0$ peuvent être prévus : en effet, ces deux contributions correspondent à une répartition de pression obtenue dans le cas où l'arbre est absolument fixe.

5.3.1.3. Valeur du couple M_{1d}

L'expression du couple M_{1d} s'écrit :

$$M_{1d} = +r_1^2 \int_0^{\zeta_0} \left\{ \left[h \varepsilon p_{1d} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \varepsilon p_{1d} \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta \right\} d\zeta \quad (90)$$

Dans cette expression :

$$p_{1d} = 6\mu \frac{r_1^2}{h_0^2} (\omega_1 - 2\dot{\phi}) \sin\theta \left[1 - \frac{\text{ch}\zeta}{\text{ch}\zeta_0} \right] - q_2 n \frac{\text{sh}(\zeta - \zeta_0)}{\text{ch}\zeta_0} \sin\theta$$

$$+ q_2 n \sum_{k=1}^{\infty} \pm \frac{\text{shm}(\zeta - \zeta_0)}{\text{mchm}\zeta_0} \sin \left[(kn \pm 1)\theta - kn\phi_1 \right]$$

posons : $p_{1d} = G + H + K$

Ces trois termes G, H, K, représentent dans l'ordre les 3 termes du membre de droite de l'expression précédente.

Calculons d'après (90) la valeur de $\left[\varepsilon h p_{1d} \right]_0^{2\pi}$

Il vient :

$$\left[\varepsilon h G \right]_0^{2\pi} = + 6\mu \frac{r_1^2}{h_0} (\omega_1 - 2\dot{\phi}) \left(1 - \frac{\text{ch}\zeta}{\text{ch}\zeta_0} \right) \left[\sin\theta + \varepsilon \sin\theta \cos\theta \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\left[\varepsilon h H \right]_0^{2\pi} = - q_2 n \frac{\text{sh}\zeta - \zeta_0}{\text{ch}\zeta_0} h_0 \left[\sin\theta + \varepsilon \sin\theta \cos\theta \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\left[\varepsilon h K \right]_0^{2\pi} = q_2 n h_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{shm}(\zeta - \zeta_0)}{\text{mchm}\zeta_0} \left[(\sin(kn \pm 1)\theta - kn\phi_1) (1 + \varepsilon \cos\theta) \right]_0^{2\pi} = 0$$

d'où il résulte :

$$\left[\varepsilon h p_{1d} \right]_0^{2\pi} = 0$$

De la même façon calculons $\int_0^{2\pi} \varepsilon p_{1d} \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta$

Il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \varepsilon G \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta &= -6\mu \frac{r_1^2}{h_0^2} (\omega_1 - 2\phi) \left(1 - \frac{\text{ch}\zeta}{\text{ch}\zeta_0}\right) h_0 \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &= -6\mu \varepsilon^2 \frac{r_1^2}{h_0} (\omega_1 - 2\phi) \left(1 - \frac{\text{ch}\zeta}{\text{ch}\zeta_0}\right) \times \pi \\ \int_0^{2\pi} \varepsilon H \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta &= q_2 n h_0 \varepsilon^2 \frac{\text{sh}(\zeta - \zeta_0)}{\text{ch}\zeta_0} \times \pi \\ \int_0^{2\pi} \varepsilon K \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta &= -q_2 n h_0 \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{shm}(\zeta - \zeta_0)}{m \text{ch} m \zeta_0} \int_0^{2\pi} \sin[(kn+1)\theta - kn\phi_1] \sin \theta d\theta \\ \int_0^{2\pi} \varepsilon K \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta &= 0 \end{aligned}$$

L'intégration de ces résultats suivant la variable ζ ne présente pas de difficulté, le couple M_{1d} s'écrit :

$$M_{1d} = + 6\pi\mu\varepsilon^2 \frac{r_1^4}{h_0} (\omega_1 - 2\phi) (\zeta_0 - \text{th}\zeta_0) - q_2 n \pi h_0 \varepsilon^2 r_1^2 \left(\frac{1}{\text{ch}\zeta_0} - 1\right) \quad (91)$$

5.3.1.4. Valeur du couple M_{1v}

L'expression du couple M_{1v} s'écrit :

$$M_{1v} = + r_1^2 \int_0^{\zeta_0} \left\{ \left[h \varepsilon p_{1v} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \varepsilon p_{1v} \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta \right\} d\zeta$$

Dans cette expression :

$$\begin{aligned} p_{1v} &= + 12\mu \frac{r_1^2}{h_0^2} \left(1 - \frac{\text{ch}\zeta}{\text{ch}\zeta_0}\right) \cos \theta - q_3 n \frac{\text{sh}(\zeta - \zeta_0)}{\text{ch}\zeta_0} \cos \theta \\ &\quad - q_3 n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{shm}(\zeta - \zeta_0)}{m \text{ch} m \zeta_0} \cos(m\theta - kn\phi_1) \end{aligned}$$

En procédant de la même façon que précédemment, on montre que :

$$M_{1v} = 0 \quad (92)$$

En synthèse des résultats précédents, la valeur finale de l'expression du couple M_1 s'écrit :

$$M_1 = + 6\pi\mu\epsilon^2 \frac{r_1^4}{h_0} (\omega_1 - 2\dot{\phi}) (\zeta_0 - th\zeta_0) - q_2 n \pi h_0 \epsilon^2 r_1^2 \left(\frac{1}{ch\zeta_0} - 1 \right) \quad (93)$$

Compte tenu de l'expression (42) de la force portante du palier dirigée suivant la normale à $O_1 O_2$, nous pouvons écrire la grandeur du couple M_1 comme suit :

$$M_1 = - F_N \frac{h_0 \epsilon}{2} \quad (94)$$

et compte tenu de la correction apportée sur la valeur de la charge portante du palier en tenant compte du diamètre des orifices, la valeur réelle du couple M_1 s'écrit :

$$M_1 = - F_N r \frac{h_0 \epsilon}{2} \quad (95)$$

Dans cette expression, $F_N r$ est donnée par la relation (54).

5.3.2. Valeur du couple M_2

En négligeant l'influence des orifices, la valeur du couple M_2 compte-tenu de l'expression (84) s'écrit :

$$M_2 = - \int_0^{\zeta_0} \int_0^{2\pi} \frac{\mu}{h} U_1 r_1^3 d\theta d\zeta$$

Dans cette expression, la vitesse U_1 nous est donnée par la relation (6), et s'écrit :

$$U_1 = \dot{\epsilon} h_0 \sin\theta - \dot{\epsilon} h_0 \dot{\phi} \cos\theta + \omega r_1 + r_1 \dot{\phi}$$

L'expression du couple M_2 devient alors :

$$M_2 = - \frac{\mu r_1^3}{h_0} \int_0^{\zeta_0} \left\{ \dot{\epsilon} h_0 \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{1+\epsilon\cos\theta} d\theta - \dot{\epsilon} h_0 \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{1+\epsilon\cos\theta} \right.$$

$$\left. + (\omega_1 + \dot{\phi}) r_1 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\epsilon\cos\theta} \right\} d\zeta$$

ou encore

$$M_2 = - \frac{\mu r_1^3}{h_0} \int_0^{\zeta_0} \left[\dot{\epsilon} h_0 I_1 - \dot{\epsilon} h_0 \dot{\phi} I_2 + (\omega_1 + \dot{\phi}) r_1 I_3 \right] d\zeta \quad (96)$$

Valeur des intégrales I_1, I_2, I_3

1) Valeur de I_1

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} d\theta$$

Cette expression peut encore s'écrire :

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} d\theta$$

En effectuant le changement de variable $2\pi-\theta = y$,

l'intégrale $\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} d\theta$ est égale à $\int_{2\pi}^{\pi} \frac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} d\theta$,

d'où il vient pour I_1 :

$$I_1 = \int_{2\pi}^{\pi} \frac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} d\theta = 0$$

2) Valeur de I_3

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta} d\theta$$

Cette intégrale a été résolue par Reynolds [9] en posant :

$$\cos\theta = \frac{\cos\alpha - \varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\alpha} \text{ ce qui entraîne } d\theta = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos\alpha} d\alpha$$

ce qui donne pour I_3 :

$$I_3 = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

3) Valeur de I_2

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta} d\theta$$

Cette intégrale s'écrit [10] :

$$I_2 = \frac{1}{\varepsilon} \left[\theta - \int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos\theta} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\varepsilon} (2\pi - I_3)$$

d'où il résulte

$$I_2 = \frac{2\pi}{\varepsilon} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right)$$

L'intégration en ζ de l'expression (96) ne présente aucune difficulté, nous obtenons pour M_2 :

$$M_2 = - \frac{2 \pi \mu r_1^3 \zeta_0}{h_0} \left[-\dot{\phi} h_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right) + \frac{(\omega_1 + \dot{\phi}) r_1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right]$$

Dans cette expression, la valeur du terme $h_0 \dot{\phi} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right)$ est négligeable devant le terme $\frac{(\omega_1 + \dot{\phi}) r_1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, ce qui nous permet d'écrire :

$$M_2 = - \frac{2 \pi \mu r_1^4 \zeta_0 (\omega_1 + \dot{\phi})}{h_0} \times \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad (97)$$

Remarque : Dans cette expression (97), la grandeur $\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ caractérise l'augmentation du couple en fonction de l'excentricité relative.

Si $\varepsilon = 0,1$, $\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = 1,005$

Si $\varepsilon = 0,4$, $\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = 1,091$

Ce qui nous permet de considérer pour de faible valeur de l'excentricité relative, la grandeur

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \approx 1$$

ce qui permet d'écrire :

$$M_2 = - \frac{2 \pi \mu r_1^4 \zeta_0 (\omega_1 + \dot{\phi})}{h_0} \quad (98)$$

La valeur de l'action tangentielle due au fluide, s'exerçant sur le coussinet, s'écrit alors compte tenu des expressions (95) et (98) :

$$M_c = - \frac{2 \pi \mu r_1^4 \zeta_0 (\omega_1 + \dot{\phi})}{h_0} - \frac{F_{Nr} \varepsilon h_0}{2} \quad (99)$$

Remarque : Ce résultat ne tient pas compte de la variation du jeu "h" au droit des orifices.

5-4) ACTION TANGENTIELLE DUE AU FLUIDE S'EXERCANT SUR LE TOURILLON

La valeur de l'action tangentielle exercée sur le tourillon s'écrit d'après les expressions (81), (95) et (97)

$$M_a = - \frac{2 \pi \mu r_1^4 \zeta_0 (\omega_1 + \dot{\phi})}{h_0} + \frac{F_{Nr} \varepsilon h_0}{2} \quad (100)$$

5-5) COUPLE DE FROTTEMENT DANS LE PALIER

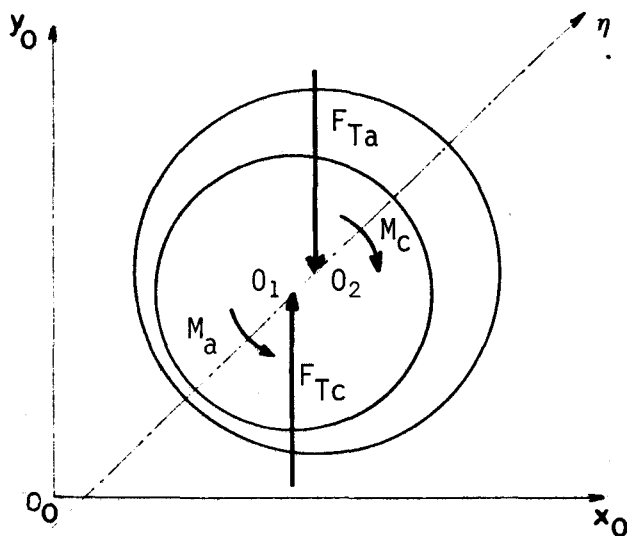
Conventionnellement, nous appellerons couple de frottement dans le palier, l'action tangentielle due au fluide s'exerçant sur le tourillon.

Ce couple de frottement dans le palier s'écrit :

$$M = - \frac{2\pi\mu r_1^4 \zeta_0 (\omega_1 + \dot{\phi})}{h_0} + \frac{F_{Nr} \epsilon h_0}{2} \quad (101)$$

Dans cette expression la force F_{Nr} représente la résultante des forces de pression agissant suivant la direction normale à la ligne des centres.

L'action tangentielle du fluide sur le coussinet diffère du couple de frottement par le terme $F_{Nr} \epsilon h_0$ qui représente le couple dû à l'excentrement de la charge selon la figure ci-dessus [11]



F_{Ta} : Force résultante des actions de contact du fluide sur l'arbre

F_{Tc} : Force résultante des actions de contact du fluide sur le coussinet.

Remarque à propos des actions tangentielles

Comme nous l'avons déjà dit, une des qualités recherchées à propos de paliers hydrostatiques est la précision en rotation (faible valeur de l'excentricité relative).

Le couple de frottement dans le palier peut alors se calculer approximativement par la relation :

$$M = - \frac{2\pi\mu r_1^4 \zeta_0 (\omega_1 + \dot{\phi})}{h_0} \quad (102)$$

Par conséquent, si nous voulons modifier, à vitesse et géométrie imposées, la valeur du couple de frottement dans un palier hydrostatique, il faut modifier la viscosité μ de l'huile, et le jeu radial h_0 . La variation de ces deux paramètres n'entraîne pas de modification de la composante F_{Sr} , mais modifie les autres composantes de la force portante du palier.

Pour diminuer la valeur du couple de frottement dans le palier, il faut :

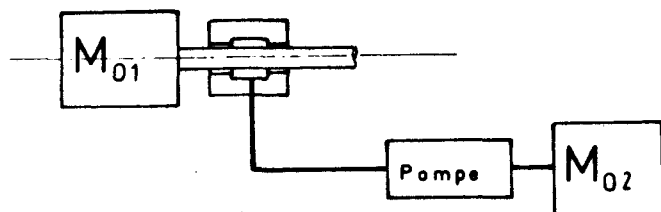
- diminuer la viscosité de l'huile μ , en remarquant cependant que la force portante du palier suivant la normale à la direction de la ligne des centres est aussi diminuée.

- Augmenter le jeu radial h_0 , ce qui a pour effet d'augmenter le débit d'huile à travers les restrictions, et par suite la puissance nécessaire pour la mise en pression du fluide.

Il apparait dès lors opportun de déterminer la variation de puissance perdue en fonction du jeu radial h_0 et de la viscosité μ du fluide, ainsi que la puissance nécessaire à la mise sous pression du palier. L'ensemble de ces deux puissances est nécessaire au bon fonctionnement de ce type d'organe de machine et il s'indique de les minimaliser.

5-6) BILAN DES PUISSANCES

Nous pouvons schématiser le fonctionnement d'un palier hydrostatique de la façon suivante :



M_{01} : Moteur entraînant en rotation l'arbre supporté par les paliers hydrostatiques

M_{02} : Moteur permettant par l'intermédiaire de la pompe la mise sous pression de l'huile.

1) Puissance à fournir par le moteur M_{02} à la pompe (Pup)

$$P_{up} = p_t \times q_v$$

Dans cette expression q_v est le débit global du palier, et p_t la pression délivrée par la pompe. Nous pouvons encore écrire compte tenu de l'expression du débit (24)

$$P_{up} = p_t \times \frac{\pi n h_0^3}{3\mu} q \quad (103)$$

ou encore

$$P_{up} = B' \times \frac{h_0^3}{\mu}$$

expression dans laquelle $B' = \frac{p_t \pi n}{3} q$ est une constante pour un palier de géométrie donnée fonctionnant sous une pression de pompe égale à p_t .

2) Puissance à fournir par le moteur M_{01} pour vaincre la couple de frottement du palier, pour une vitesse de rotation de l'arbre ω_1 constante (P_{uf}).

$$P_{uf} = M \times \omega_1$$

Dans cette expression M est le couple de frottement sur l'arbre d'où on peut écrire :

$$P_{uf} = A' \times \frac{\mu}{h_0} \quad (104)$$

$A' = 2 \pi r_1^4 \zeta_0 \omega_1^2$, désignent une constante pour le palier de géométrie donnée dont l'arbre tourne à une vitesse ω_1 imposée.

3) Puissance totale mise en jeu : P_{ut} .

Cette puissance est égale à :

$$P_{ut} = \frac{A' \mu}{h_0} + \frac{B' h_0^3}{\mu} \quad (105)$$

Nous nous proposons de rechercher le minimum de cette expression qui dépend de deux paramètres :

μ : viscosité de l'huile

h_0 : jeu radial

pour une géométrie et une vitesse de rotation de l'arbre données.

L'existence d'une telle fonction implique la vérification des deux conditions suivantes :

$$\frac{\partial^2 P_{ut}}{\partial \mu^2} > 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial^2 P_{ut}}{\partial \mu^2} \times \frac{\partial^2 P_{ut}}{\partial h_0^2} - \left(\frac{\partial^2 P_{ut}}{\partial \mu \partial h_0} \right)^2 < 0 \quad (b)$$

avec :

$$\frac{\partial^2 P_{ut}}{\partial \mu^2} = \frac{2B' h_0^3}{\mu^3}$$

$$\frac{\partial^2 P_{ut}}{\partial h_0^2} = \frac{2A' \mu}{h_0^3} = \frac{6B' h_0}{\mu}$$

$$\frac{\partial^2 P_{ut}}{\partial \mu \partial h_0} = -\frac{A'}{h_0^2} - \frac{3B' h_0}{\mu^2}$$

La relation (a) est toujours vérifiée, et la condition (b) entraîne la relation :

$$\frac{3B'^2 h_0^4}{\mu^4} < \frac{A'}{h_0^4} + \frac{2A'B'}{\mu^2}$$

qui dépend des deux grandeurs h_0 et μ .

A jeu radial h_0 constant, la dérivée partielle de la puissance Put par rapport à la viscosité μ s'écrit :

$$\frac{\partial Put}{\partial \mu} = \frac{A'}{h_0} - \frac{1}{\mu^2} B' h_0^3$$

Cette expression est nulle, pour la valeur de

$$\mu^* = \left(\frac{B' h_0^4}{A'} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (106)$$

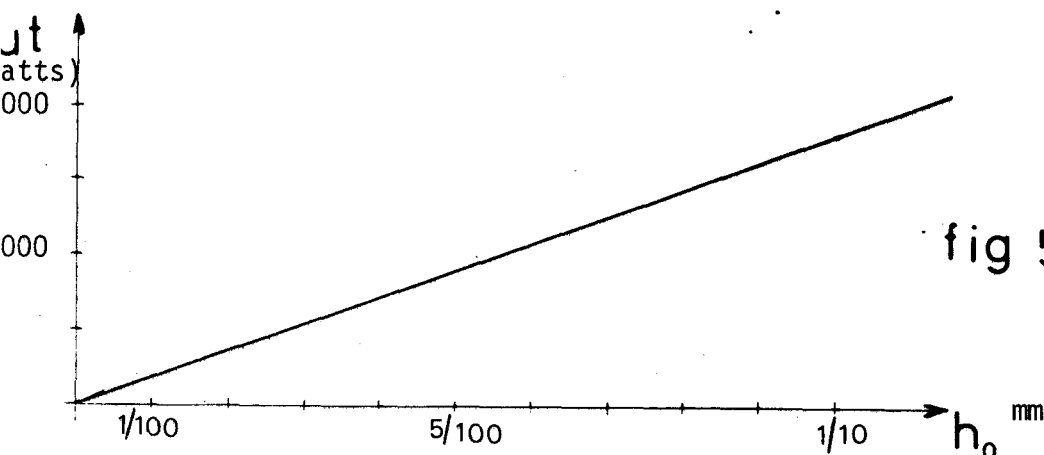
à laquelle correspond la puissance minimale pour le jeu radial h_0 considéré :

$$Put = 2h_0 \sqrt{A'B'}$$

Pour tous les jeux h_0 , le raisonnement précédent conduit à un lieu des minima de la puissance totale, Put à jeu constant. Ce lieu est une courbe monotone croissante, qui passe par l'origine en vertu de la relation (106), le couple de valeurs ($h_0, \mu = 0$) n'étant évidemment pas accessible. En pratique, le minimum de h_0 est imposé par les tolérances d'usinage du tourillon et du coussinet, et du seul point de vue de la minimilisation de la puissance, on a évidemment intérêt à réaliser ce jeu radial.

A titre d'exemple, pour un palier dont les caractéristiques sont les mêmes que celles retenues au paragraphe (4-4-1), et pour une vitesse de tourillon de 3000 tr/mn, on obtient le diagramme de Put en fonction du jeu radial h_0 , la viscosité μ^* étant défini par la relation (106).

Ce diagramme est donné par la figure suivante :



Remarques

1) L'analyse qui précède a été conduite pour une géométrie et une vitesse de rotation ω_1 , données (jeu radial $h_0 = 3/100$, viscosité $\mu^* = 0,011 \text{ PI}$). Cette étude doit évidemment être refaite dans le cas d'un palier de géométrie ou de vitesse différentes.

2) Il faut remarquer en outre qu'il n'est pas possible de définir une viscosité optimale μ^* lorsque les vitesses de rotation ω_1 du tourillon sont variables. Dans ce cas on choisira μ^* pour une vitesse de rotation ω_1 habituelle.

CHAPITRE 6

MACHINE D'ESSAI

6.1. INTRODUCTION

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de décrire une machine d'essai qui nous servira ultérieurement à vérifier expérimentalement le fonctionnement du palier hydrostatique que nous avons choisi. De par la conception de cette machine, la vérification de nos prévisions analytiques se limitera au seul cas du fonctionnement statique.

Rappelons que l'étude analytique, que nous avons développée dans les chapitres précédents, conduit, à partir de l'équation de Reynolds, à l'expression de la loi des pressions dans le film lubrifiant qui s'écrit :

$$p = p_0 + \varepsilon p_1$$

Il convient par conséquent de vérifier expérimentalement la validité de cette méthode vis à vis des circonstances réelles de fonctionnement des paliers hydrostatiques.

Cette vérification doit s'opérer sur les grandeurs mesurées lors d'un essai. Pour atteindre cet objectif, on imposera :

- la pression d'alimentation du palier (pression de la pompe)
- la vitesse de rotation de l'arbre
- la force appliquée au palier (opposée à la résultante des pressions),

et on mesurera l'excentrement ε du tourillon par rapport au coussinet.

L'un des critères recherché lors de l'application des paliers hydrostatiques étant la raideur, un tel essai permettra en outre de vérifier les résultats annoncés à ce propos dans les chapitres précédents.

Plus précisément, il faut s'attendre à ce que la théorie que nous avons développée soit applicable tant que le diamètre réduit des sources $\bar{\rho}$

restera inférieur à une borne dont la valeur pourra être ainsi précisée.

Dans sa conception actuelle notre machine d'essais ne permet pas d'expérimenter en fonctionnement dynamique. C'est essentiellement le souci de développer d'abord un dispositif expérimental simple et relativement peu onéreux qui nous a conduit à ce choix.

L'étude de la machine d'essais dynamiques ne peut s'envisager, que sur la base de la réalisation de cette première machine et de l'expérience que l'on tirera de son utilisation.

6-2. SCHEMA CINEMATIQUE DU PALIER ET PRINCIPE DE REALISATION DU PALIER D'ESSAI

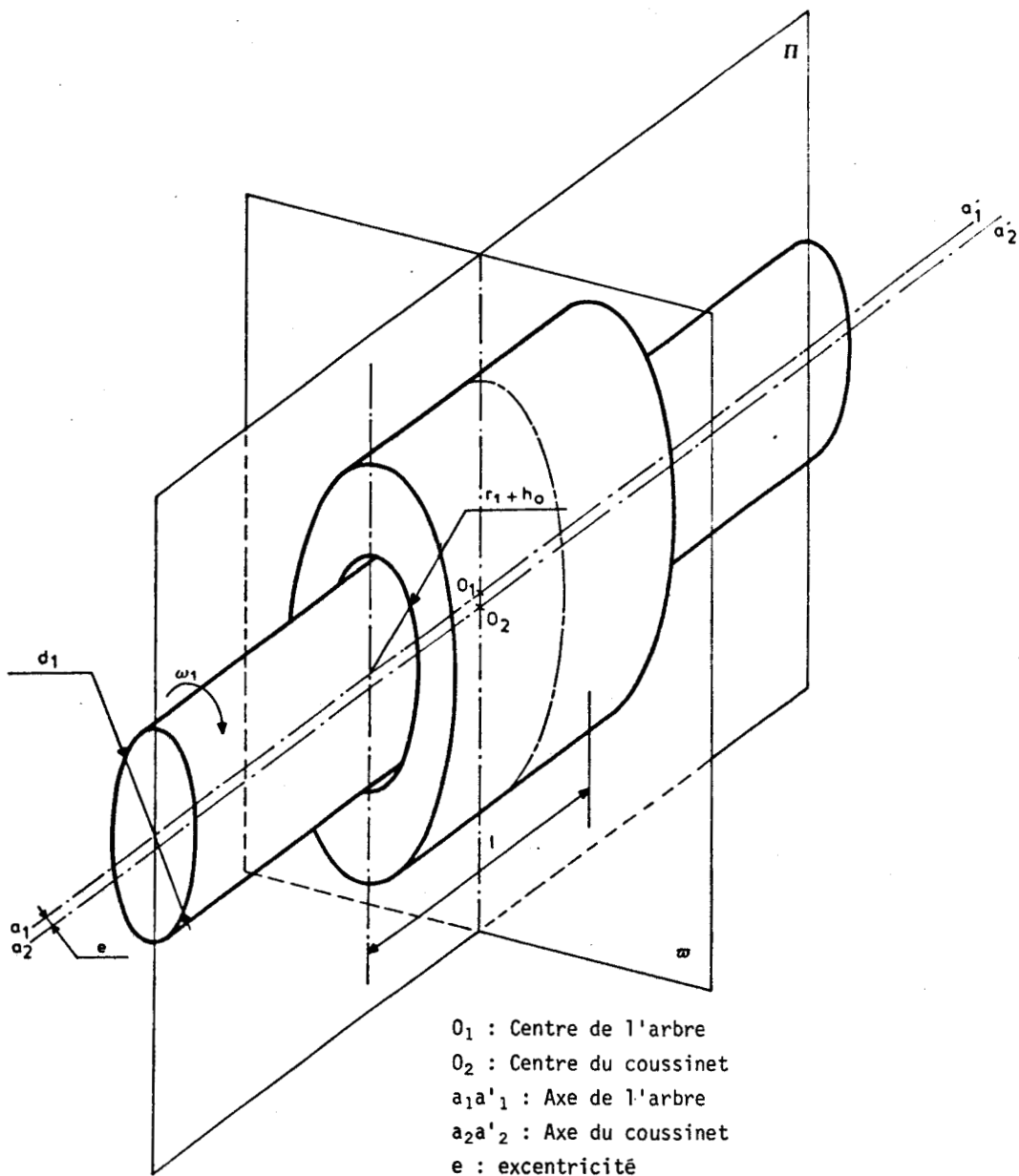


Figure 6-1

La réalisation de la machine d'essai impose que l'arbre soit en appui sur deux coussinets.

Suivant la disposition retenue, nous pouvons envisager deux cas :

- un palier d'essai I, monté entre deux paliers d'appuis J et K,
- deux paliers J et K servant de paliers d'essai et d'appui.

6-3. CHOIX DES MOUVEMENTS ABSOLUS

Le raisonnement que nous développons ici à propos du choix des mouvements absolus du tourillon et du coussinet est précisée dans le plan π perpendiculaire à l'axe du palier.

Dans ce plan le mouvement relatif du tourillon par rapport au coussinet est à trois degrés de liberté (deux translations et une rotation).

En principe, il existe quatre possibilités de partage de ces mouvements entre le coussinet et le tourillon (mouvements absolus de ces éléments).

En ce qui concerne le mouvement de rotation relative, il convient de le communiquer au tourillon et d'empêcher toute rotation du coussinet parce que l'alimentation y est prévue.

En ce qui concerne les translations, comme l'arbre est déjà animé du mouvement de rotation, il est plus simple de permettre ces mouvements sur le coussinet. C'est la solution que nous avons retenue.

6-4. DISPOSITIF DE MISE EN CHARGE

Le dispositif que nous nous proposons de définir a pour fonction :

- d'une part, de pouvoir appliquer l'effort dont l'intensité doit pouvoir être modifiée et réglée avec précision.
- d'autre part, d'empêcher que soit entraîné en rotation le coussinet qui sera soumis à un couple de frottement due au mouvement de l'arbre.

Le système représentant le palier, est normalement en équilibre, ce qui implique l'égalité des deux torseurs statiques appliqués au coussinet et au tourillon. Nous choisissons le centre du tourillon O_1 comme centre de réduction de ce torseur, étant donné qu'il est le seul point privilégié fixe dans le système.

Le tourillon étant fixe en translation, il paraît donc logique, d'imposer la force appliquée au palier (P) sur le coussinet.

Les couples qui s'exercent sur le tourillon (M_a) et sur le coussinet (M_c) diffèrent du couple de frottement qui est perdu dans le palier (voir paragraphe 5-5).

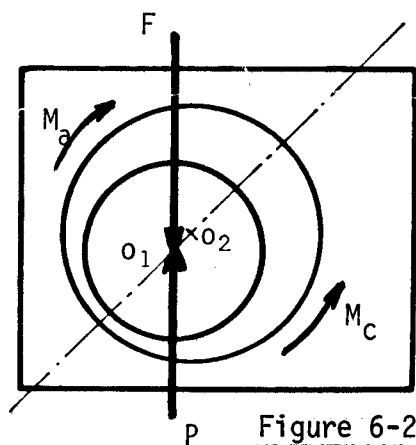


Figure 6-2

- P : Force extérieure appliquée sur le coussinet
- F : Réaction exercée sur l'arbre
- M_a , M_c , couple de frottement due à l'application d'une force extérieure.

Il convient par conséquent de définir un mécanisme qui autorise les mouvements indiqués et qui transmette les efforts qui en résultent. C'est le mécanisme que nous nous proposons de définir dans le paragraphe suivant.

6-5. MECANISME ET GUIDAGE DE COUSSINET

1) Rappel

Considérons le schéma plan suivant qui est celui du parallélogramme de Watt.

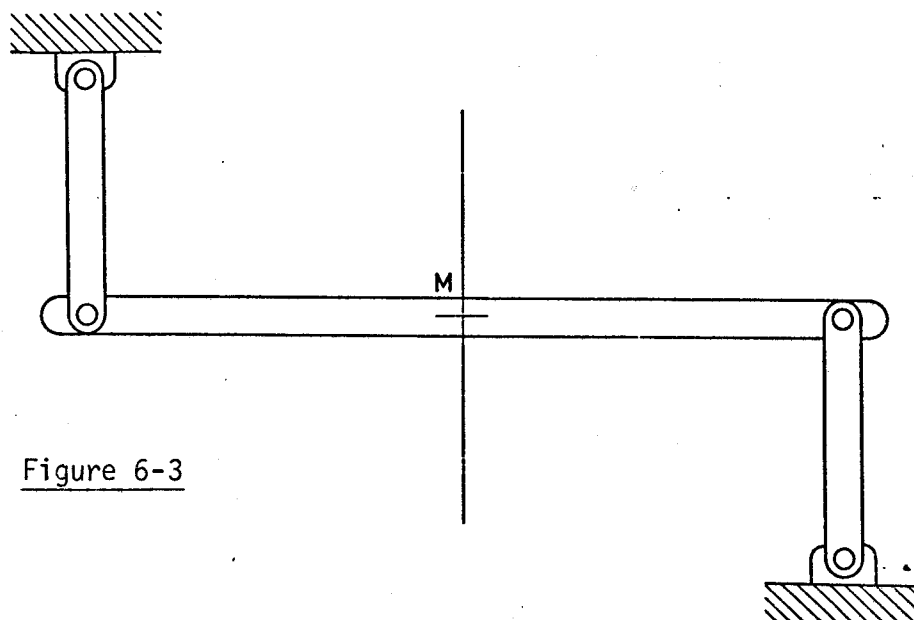


Figure 6-3

Ce système comporte dans le plan :

- 3 pièces, donc 9 degrés de liberté;
- 4 couples cinématiques rotoïdes qui suppriment 8 degrés de liberté.

Le parallélogramme de Watt a par conséquent un degré de liberté dans le plan qui peut être représenté par le déplacement horizontal du point M.

Si l'on ajoute à ce dispositif un deuxième parallélogramme de Watt, en série et calé à 90° par rapport au premier, nous obtenons alors un système à 2 degrés de liberté qui autorise tout déplacement selon deux translations orthogonales. Ceci conduit au schéma suivant, dans lequel :

- A est le bâti;
- B est un anneau intermédiaire;
- C est le support du coussinet.

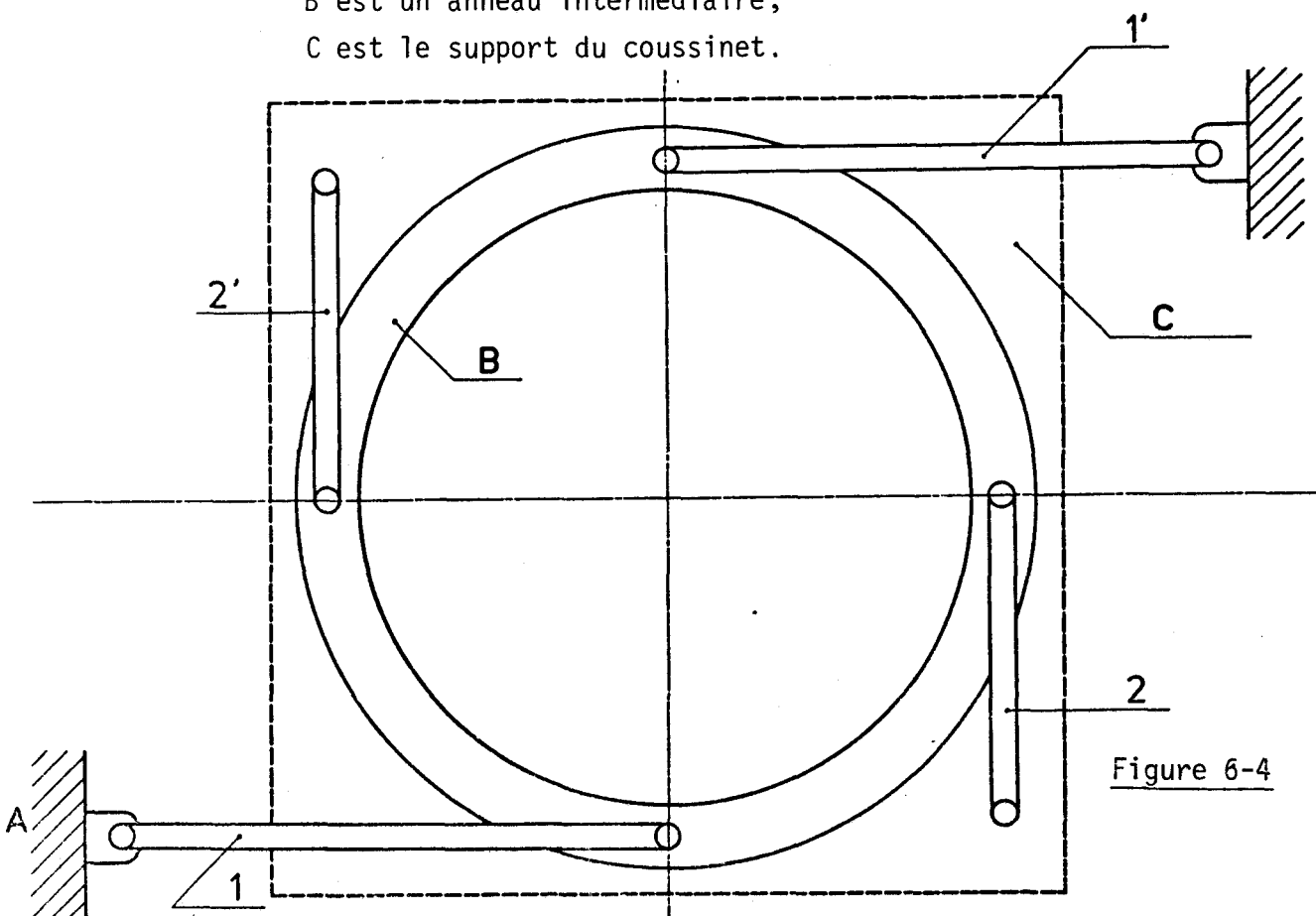


Figure 6-4

Nous devons maintenant satisfaire à la condition d'application de la charge sur le coussinet. La difficulté de cette réalisation, réside dans le fait que la charge qui a une position et une direction fixe, doit être appliquée par l'intermédiaire du coussinet qui est libre en translation.

Nous devons donc définir un système, qui appliquant l'effort au double parallélogramme de Watt, ait une résultante passant par le centre O_1

de l'arbre, et une direction définie par l'intersection des plans $\bar{\omega}$ et π .

Nous obtenons le dispositif suivant :

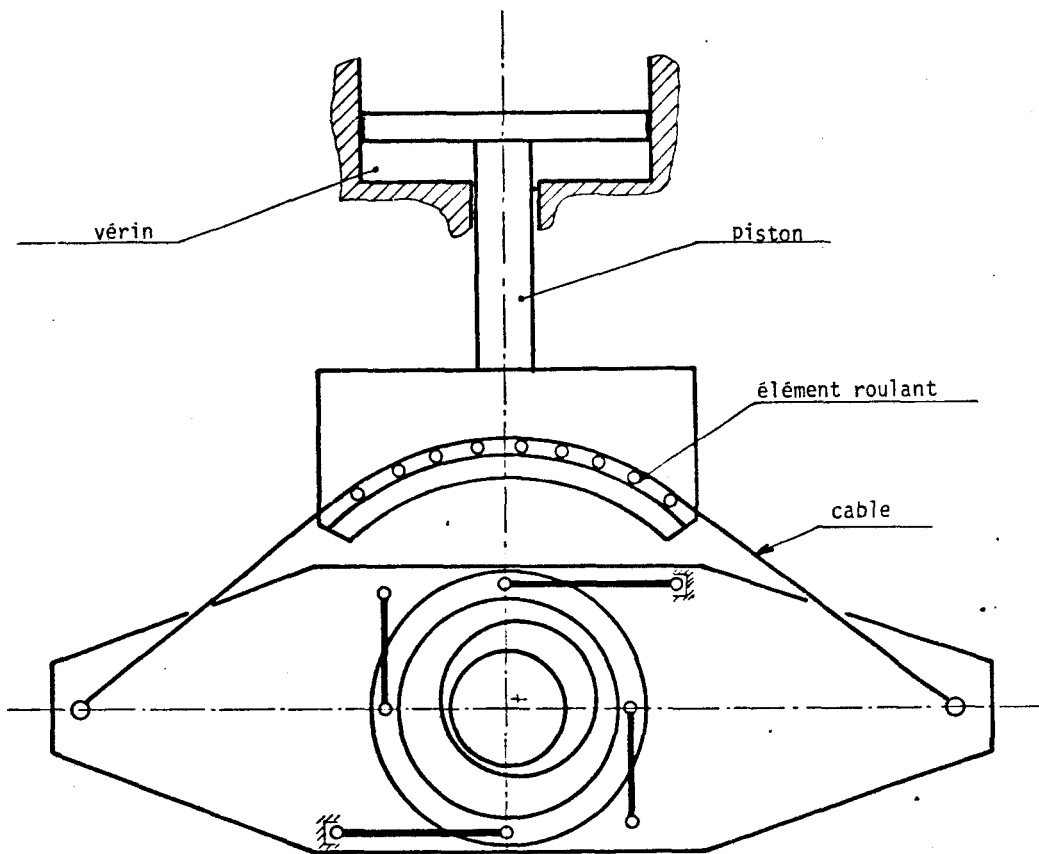


Figure 6-5

Remarque :

Par suite de l'inévitable flexion de l'arbre, et de la précision toujours limitée de réalisation des éléments de machine, le parallélisme des axes du tourillon et du coussinet n'est pas garanti, il convient par conséquent d'autoriser l'auto alignement de ces axes.

Ceci peut être réalisé en remplaçant les couples cinématiques rotoïdes par des couples cinématiques sphériques.

6-6. CHOIX DES RESTRICTIONS EXTERIEURES

6-6.1. Etude des restrictions extérieures

En principe, l'alimentation d'un palier, hydrostatique peut s'effectuer au travers de restrictions extérieures (R_e) de l'un des deux types suivants :

- capillaire
- diaphragme.

A la sortie de ces restrictions, le fluide débouche dans le palier, par les orifices d'alimentation et s'écoule dans les restrictions intérieures (R_i) que constituent le tourillon et le coussinet.

Equations régissant le fonctionnement de ces restrictions

La loi du débit qui s'écoule à travers une restriction extérieure, s'écrit d'après l'expression (28) :

$$q_{v_i} = p_t \frac{e^{*3}}{\mu} (1 - \gamma_0)^\alpha \left[1 - \frac{\alpha \gamma_1}{1 - \gamma_0} \epsilon \right]$$

dans laquelle :

a) si la restriction est un capillaire

$$\alpha = 1, e^{*3} = \frac{s_c^2}{8\pi l_c}$$

s_c étant la section du capillaire, et l_c sa longueur.

b) Si la restriction est un diaphragme

$$\alpha = \frac{1}{2}, e^{*3} = \mu s_d \left(\frac{2}{\rho p_t} \right)^{1/2}$$

s_d : étant la section du diaphragme

ρ : la masse volumique du fluide s'écoulant au travers du diaphragme.

En établissant la loi de conservation de débit entre l'écoulement à travers les restrictions intérieures et extérieures, nous avons obtenu au chapitre 2, la relation (30) qui conduit à l'expression du paramètre caractéristique des restrictions extérieures et qui s'écrit :

$$\lambda = \frac{\pi h_0^3}{3e^{*3}} = \frac{L(1-\gamma_0)^\alpha}{\gamma_0} \tag{108}$$

pour un capillaire

$$\lambda = \frac{8\pi^2}{3} \frac{h_0^3 l_c}{s_c^2} \tag{109}$$

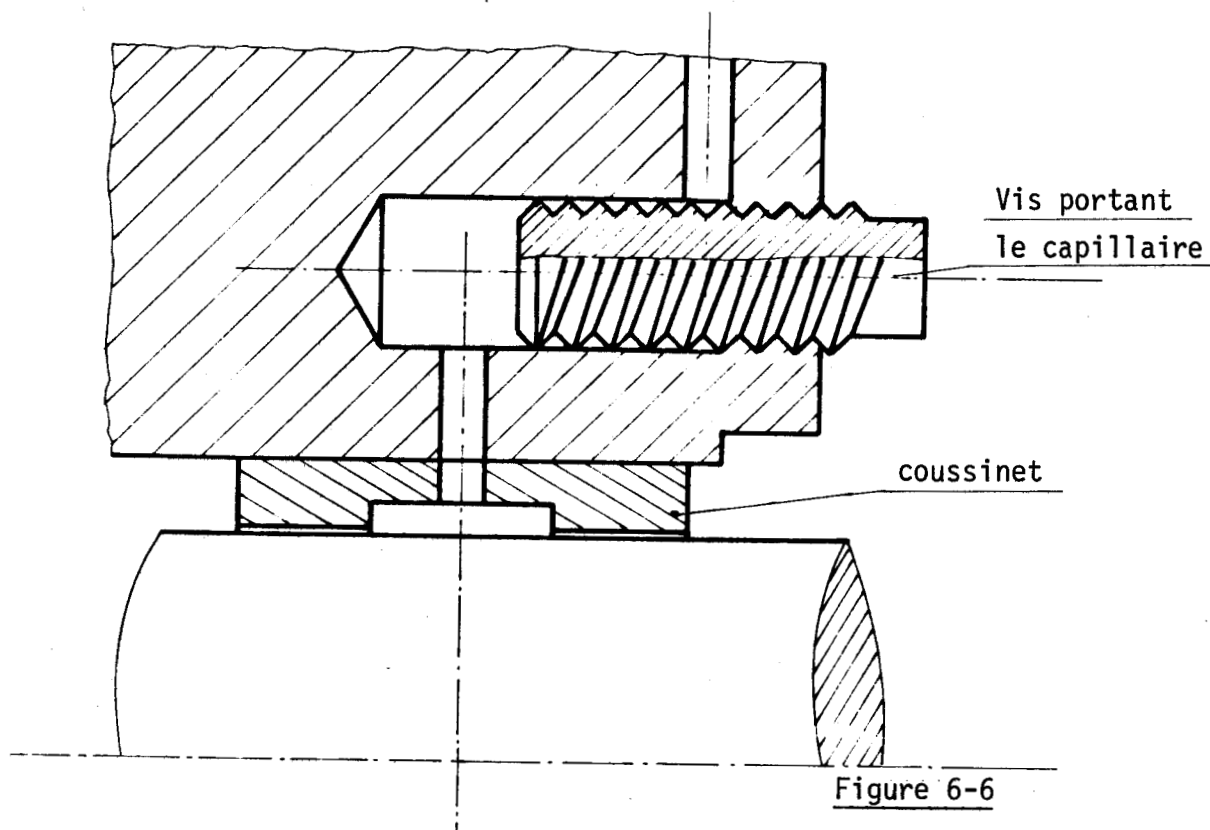
pour un diaphragme

$$\lambda = \frac{\pi h_0^3}{4,242} \sqrt{\frac{\rho p_t}{\mu s_d}} \tag{110}$$

Remarque :

La structure des formules précédentes montre clairement que le coefficient λ est entièrement défini par des paramètres géométriques (la section s_c et la longueur l_c) dans le cas du capillaire. Par contre, dans le cas d'un diaphragme, les paramètres qui régissent la valeur de λ sont la pression d'alimentation de la pompe d'une part et la grandeur de la section du diaphragme d'autre part.

Compte tenu de cette remarque, il paraît judicieux de choisir un capillaire plutôt qu'un diaphragme : le réglage de la pression d'alimentation se trouve ainsi facilité, et la réalisation d'une restriction de coefficient λ peut être obtenue en faisant varier la longueur l_c à section s_c constante. Ceci peut être réalisé commodément par un enroulement hélicoïdal du capillaire de section quelconque selon la figure suivante :

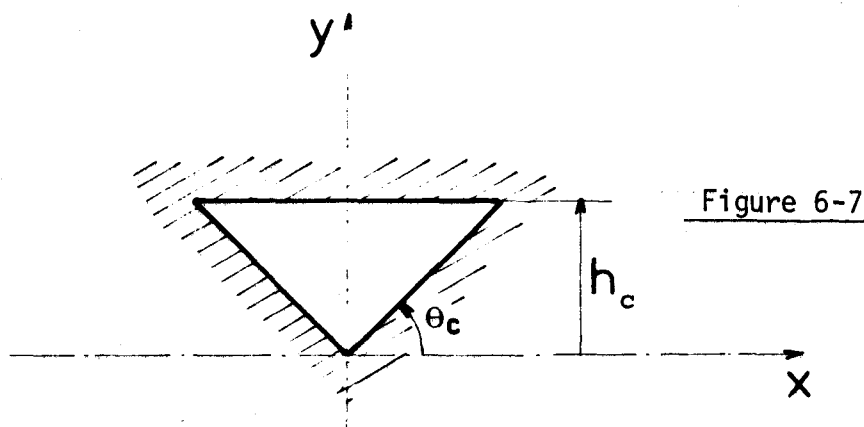


Conformément à ce schéma la simple rotation de la vis comportant l'enroulement, assure la variation de la longueur du capillaire l_c . La section retenue pour ce type de réalisation est de forme triangulaire.

6-6.2. Détermination du débit s'écoulant au travers d'un capillaire de section triangulaire

Pour déterminer le débit à travers une section triangulaire, nous

devons d'abord déterminer la répartition des vitesses et intégrer cette répartition de vitesse sur la surface triangulaire. Cette surface est précisée conformément à la figure suivante dans laquelle le segment OA a pour équation $y = x \operatorname{tg} \theta_c$.



L'expression du débit à travers une section triangulaire a été calculée dans le cas où la valeur de l'angle $\theta_c = 60^\circ$, c'est-à-dire pour une section triangulaire équilatérale. [3]. Elle s'écrit :

$$q_v = 0,0019 \frac{p_t - p_i^*}{\mu} \frac{h_c^4}{l_c}$$

ou encore :

$$q_{vc} = \frac{p_t - p_i^*}{\mu} e^{*3} \text{ avec } e^{*3} = 0,0019 \frac{h_c^4}{l_c} \quad (112)$$

En remplaçant e^{*3} par son expression (112) dans la relation qui exprime λ (108) il vient :

$$\lambda = \frac{\pi h_0^3}{0,0057} \frac{l_c}{h_c^4} \quad (113)$$

En choisissant une longueur maximale de capillaire égale à 300 millimètres, nous avons la possibilité de balayer les rapports des pressions γ_0 de 0,219 à 1.

Si toutes autres choses restant égales, le jeu radial h_0 du palier est égal à 5/100 de millimètre, la valeur du rapport γ_0 conduisant au maximum de la raideur est égal à 0,537. Il y correspond une longueur de capillaire (l_c) égale à 15,62 mm.

6.7. GRANDEURS A MESURER

Dans la machine que nous considérons, il convient de mesurer, outre les grandeurs indépendantes déjà précisées :

- la vitesse de rotation de l'arbre;
- la force appliquée sur le palier;
- la pression d'alimentation du palier.

Les grandeurs qui en résultent :

- l'excentrement relatif ϵ ;
- le couple de frottement dans le palier.

Remarque

Compte tenu des dispositions constructives adoptées, il faut noter que la mesure des forces appliquées, ne peut se faire par la seule évolution de la pression dans le vérin de mise en charge; en procédant ainsi on négligerait les forces de frottement entre le piston et ses éléments de guidage. Une évaluation plus précise de la force appliquée peut être précisée par la mesure de la tension dans le câble de suspension de fléau.

6.7.1. Mesure de la vitesse de rotation de l'arbre

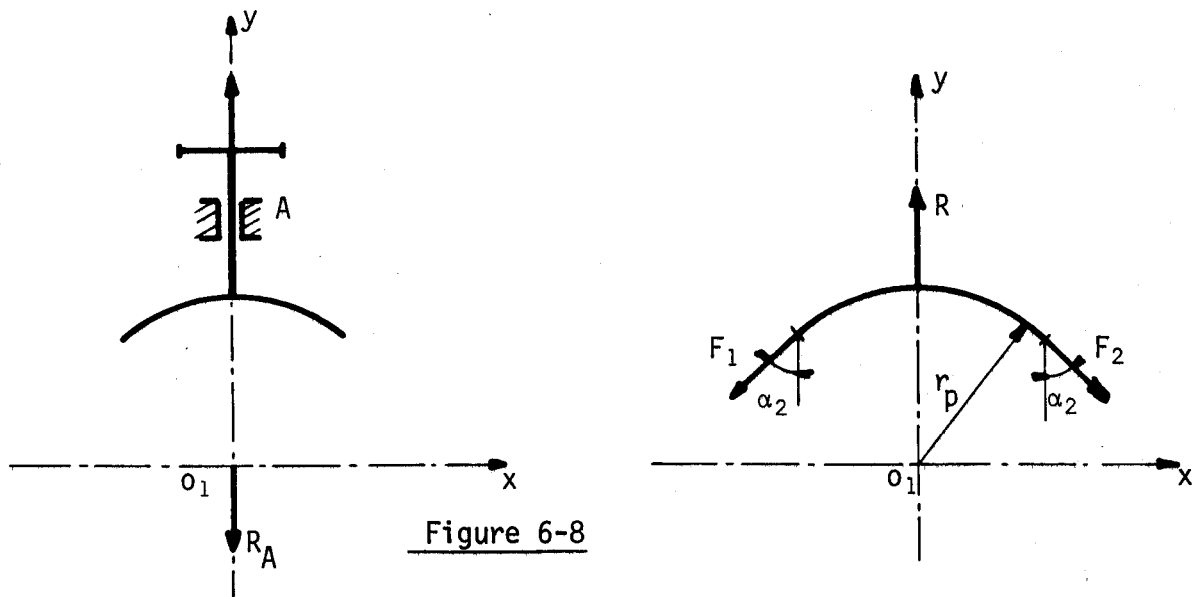
Nous disposons pour la mesure de la vitesse de rotation de l'arbre, d'un capteur qui reçoit des impulsions à partir d'un disque solidaire de l'arbre. Le signal de sortie du capteur est transmis à un fréquencemètre tachymètre qui nous donne la vitesse de rotation avec une précision de 0,2 % de la lecture.

6.7.2. Mesure de la force appliquée sur le palier

Nous allons dans ce paragraphe, faire tout d'abord une étude en négligeant le frottement existant entre les éléments roulants (voir figure 6-5). Cette étude se fera en considérant tout d'abord le tourillon et le coussinet centré, et ensuite en considérant une valeur de l'excentricité. La même étude sera ensuite reprise en considérant alors le frottement existant entre les éléments roulants.

1) Considérons qu'il n'y a pas de frottement au contact des éléments roulants

a) Etude en considérant l'arbre et le coussinet centré



Equilibre du piston

$$R_a = P$$

Equilibre de la lame

$$F_1 r_p = F_2 r_p ; F_1 = F_2$$

$$R_a = 2F_1 \cos \alpha_2$$

$$\text{D'où } F_1 = \frac{P}{2 \cos \alpha_2}$$

(113)

b) L'arbre occupant une position quelconque dans le coussinet

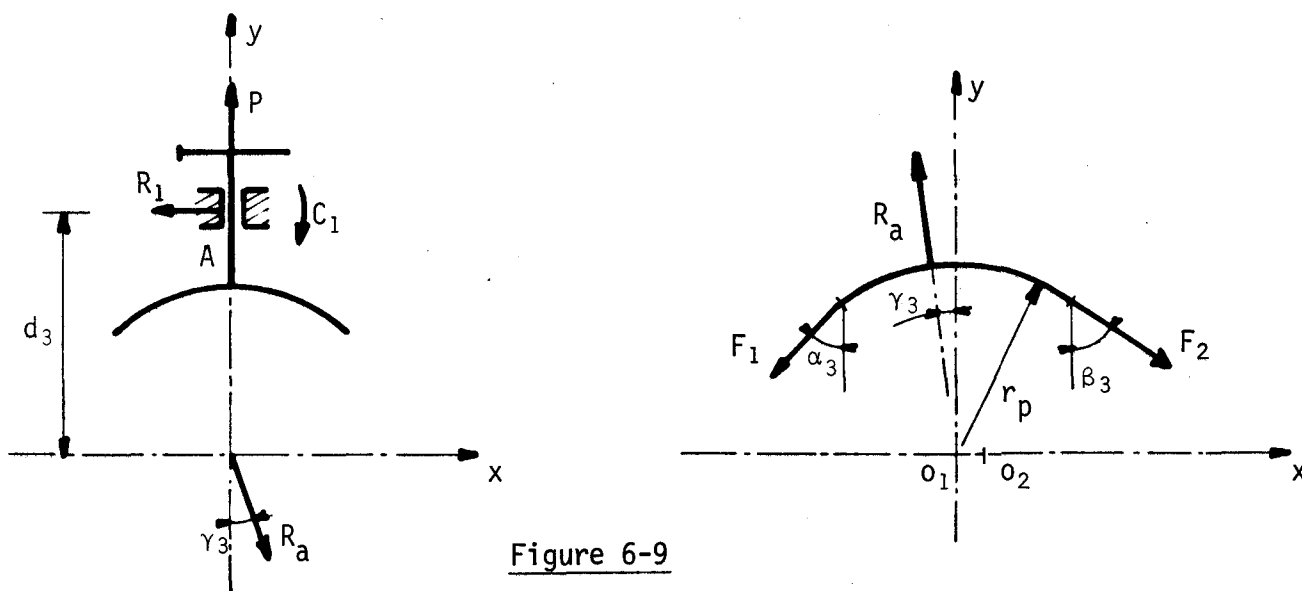


Figure 6-9

$$R_1 = P \sin \gamma_3$$

$$P = R_a \cos \gamma_3 + R_1 \operatorname{tg} \phi_0$$

$$R_1 d_3 = C_1$$

$$F_2 \sin \beta_3 - F_1 \sin \alpha_3 - R_a \sin \gamma_3 = 0$$

$$- F_1 \cos \alpha_3 - F_2 \cos \beta_3 + R_a \cos \gamma_3 = 0$$

$$F_1 x_{rp} = F_2 x_{rp} \quad ; \quad F_1 = F_2$$

Dans ces expressions ϕ_0 représente le coefficient de frottement des pièces en contact, ce qui donne :

$$F_1 = F_2 = \frac{P(1 - \sin \gamma_3 \operatorname{tg} \phi_0)}{\cos \alpha_3 + \cos \beta_3} \quad (114)$$

et

$$\operatorname{tg} \gamma_3 = \frac{\sin \beta_3 - \sin \alpha_3}{\cos \beta_3 + \cos \alpha_3} \quad (115)$$

En remarquant que le déplacement du double parallélogramme de Watt est au maximum égal au jeu radial h_0 , nous pouvons considérer que les angles α_3 et β_3 sont sensiblement égaux, ce qui nous permet de considérer que l'angle γ_3 est nul.

Compte tenu de la remarque faite en début de paragraphe, nous constatons que la détermination de la force appliquée sur le palier à partir de la mesure de pression dans le vérin néglige la composante de frottement existante sur le guidage A. La mesure de la charge appliquée sur le palier pourra alors être envisagée à partir de la tension existant dans les câbles.

D'autre part, du point de vue de la conception technologique, nous serons amenés à dessiner un guidage A (du système "piston support câble") assez long et une hauteur de piston assez faible de façon à ce que le couple de basculement C_1 soit entièrement repris par le guidage A.

2) Etude du système en considérant le frottement entre les éléments roulants

Isolons le système "Cable, double parallélogramme de watt".

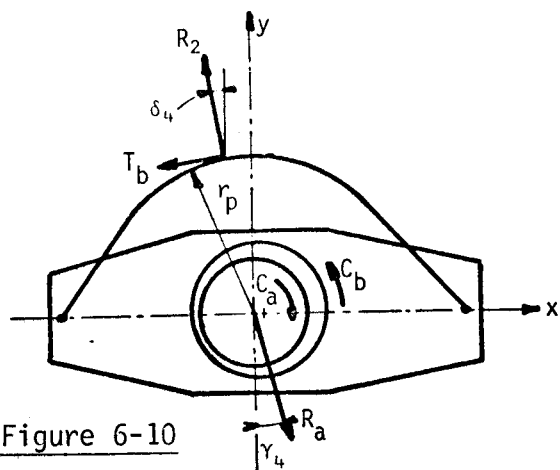


Figure 6-10

C_b : couple exercé par le bâti sur l'ensemble du système

C_a : couple exercé par l'arbre

T_b : Effort de frottement

Si ϕ_{01} est le coefficient de frottement des billes dans leur logement, alors :

$$f = \text{tg}\phi_{01} \text{ d'où } T_b = R_2 \text{tg}\phi_{01} \quad (116)$$

Ecrivons les équations d'équilibre du système :

$$R_2 \cos\delta_4 - T_b \sin\delta_4 - R_a \cos\gamma_4 = 0 \quad (117)$$

$$-R_2 \sin\delta_4 - T_b \cos\delta_4 + R_a \sin\gamma_4 = 0 \quad (118)$$

$$T_b r_p + C_b - C_a = 0 \quad (119)$$

des équations (117) et (118) l'on tire :

$$\text{tg}\gamma_4 = \frac{R_2 \text{tg}\delta_4 + T_b}{R_2 - T_b \text{tg}\delta_4}$$

et en tenant compte de l'expression (116) nous obtenons :

$$\text{tg}\gamma_4 = \frac{\text{tg}\delta_4 + \text{tg}\phi_{01}}{1 - \text{tg}\delta_4 \text{tg}\phi_{01}} \text{ d'où } \gamma_4 = \delta_4 + \phi_{01} \quad (120)$$

Etudions l'équilibre de la lame :

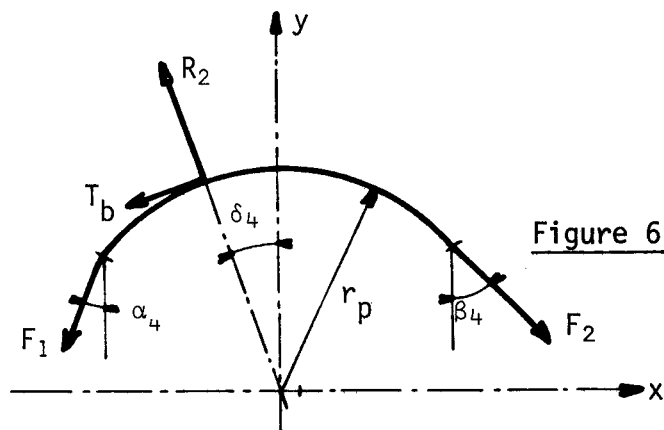


Figure 6-11

Nous pouvons écrire :

$$-F_1 \sin \alpha_4 + F_2 \sin \beta_4 - R_2 \sin \delta_4 - T_b \cos \delta_4 = 0 \quad (121)$$

$$R_2 \cos \delta_4 - T_b \sin \delta_4 - F_2 \cos \alpha_4 - F_2 \cos \beta_4 = 0 \quad (122)$$

$$F_1 r_p + T_b r_p - F_2 r_p = 0 \quad (123)$$

L'équation (123) entraîne :

$$F_2 = F_1 + T_b \quad (124)$$

Les équations (118), (121) (124) nous donnent :

$$R_a \sin \gamma_4 = F_1 (\sin \beta_4 - \sin \alpha_4) + T_b \sin \beta_4 \quad (125)$$

Les équations (117), (122), (124) nous donnent :

$$R_a \cos \gamma_4 = F_1 (\cos \beta_4 + \cos \alpha_4) + T_b \cos \beta_4 \quad (126)$$

Le rapport des équations (125) et (126) entraîne :

$$\text{tg} = \frac{F_1 (\sin \beta_4 - \sin \alpha_4) + T_b \sin \beta_4}{F_1 (\cos \beta_4 + \cos \alpha_4) + T_b \cos \beta_4} \quad (127)$$

d'où si l'on considère que les angles α_4 et β_4 sont sensiblement égaux et que l'effort T_b est très petit devant l'effort F_1 , l'expression (127) entraîne :

$$\text{tg} \gamma_4 = \text{tg}(\delta_4 + \phi_{01}) = \text{tg} \beta_4 \frac{T_b}{2F_1} \quad (128)$$

La valeur de la force R_a s'écrira alors d'après les expressions (117) et (121) :

$$R_a = \frac{F_2 \cos \beta_4 + F_1 \cos \alpha_4}{\cos \gamma_4} \quad (129)$$

En conclusion, nous pouvons alors déterminer la valeur de la charge appliquée sur le palier, si nous connaissons les valeurs des angles α_4 et β_4 ainsi que des forces F_1 , F_2 , T_b . La connaissance de α_4 et β_4 dépend de la géométrie de la machine, et ces valeurs peuvent être calculées aisément. La valeur des forces F_1 , F_2 et T_b peuvent être relevées à l'aide de jauges collées sur un élément de traction relié au câble. La mesure de l'effort de frottement T_b nécessitera une mesure différentielle entre les deux valeurs F_1 et F_2 . Nous pouvons ainsi calculer précisément la valeur de la composante R_a .

Remarque :

Calculons la valeur de l'angle γ_4 que fait la force R_A avec la direction Oy .

Le coefficient de frottement des éléments roulants peut être évalué à $\text{tg}\phi_{01} = 15 \cdot 10^{-4}$.

et en considérant en première approximation que :

$$R_2 = 2F_1 \cos\alpha_4$$

nous obtenons à partir des expressions (128) et (116)

$$\text{tg}\gamma_4 = \text{tg}\phi_{01} \sin\alpha_4$$

Par Construction l'angle $\alpha_4 = 29^\circ 78'$

ce qui nous donne

$$\gamma_4 = 0,0427^\circ$$

Nous pouvons donc considérer en faisant une très faible erreur que la force R_a a une direction verticale.

En conclusion : si nous connaissons la valeur de l'effort T_b nous pouvons ramener le problème aux hypothèses :

- la réaction R_a passe par le centre O_1 du tourillon et à une direction verticale, et sa valeur nous est donnée par l'expression suivante :

$$R_a = (F_1 + F_2) \cos\alpha_4 \quad (130)$$

6.7.3. Mesure de la pression dans le palier

La détermination expérimentale de la valeur des pressions dans le palier pose deux problèmes, l'un de construction, l'autre de mesure :

- le premier résulte de la nécessité de loger le capteur de pression dans l'arbre (la surface active du capteur affleurant la surface du tourillon) et de déplacer celui-ci par rapport au coussinet ou inversement pour obtenir une carte complète de pressions;
- le second résulte de l'animation du capteur en rotation.

6.7.3.1. Problème de construction

Nous pouvons considérer deux cas possibles de réalisation :

- l'arbre étant fixe axialement, le coussinet se déplace suivant l'axe a_2a_2' ;
- le coussinet étant fixe axialement, l'arbre se déplace suivant son axe a_1a_1' .

- Première possibilité :

Etant donné la transmission de l'effort sur l'arbre par l'intermédiaire du double parallélogramme de Watt sur lequel est monté le coussinet, le déplacement axial du coussinet implique que l'on déplace également le système de mise en charge.

Cette disposition nécessite alors de prévoir un chariot, coulissant parallèlement à l'axe a_1a_1' sur lequel est monté le dispositif de mise en charge. Le guidage du chariot se faisant par le bâti, nous rencontrerons alors des problèmes de rigidité du bâti, et de guidage du chariot.

- Deuxième possibilité

La solution consistant à effectuer un déplacement axial de l'arbre, en gardant le coussinet fixe, peut être réalisée en montant une broche portant l'arbre dans un fourreau coulissant. Cette solution est beaucoup plus aisée que la réalisation précédente. Elle conduit au schéma suivant :

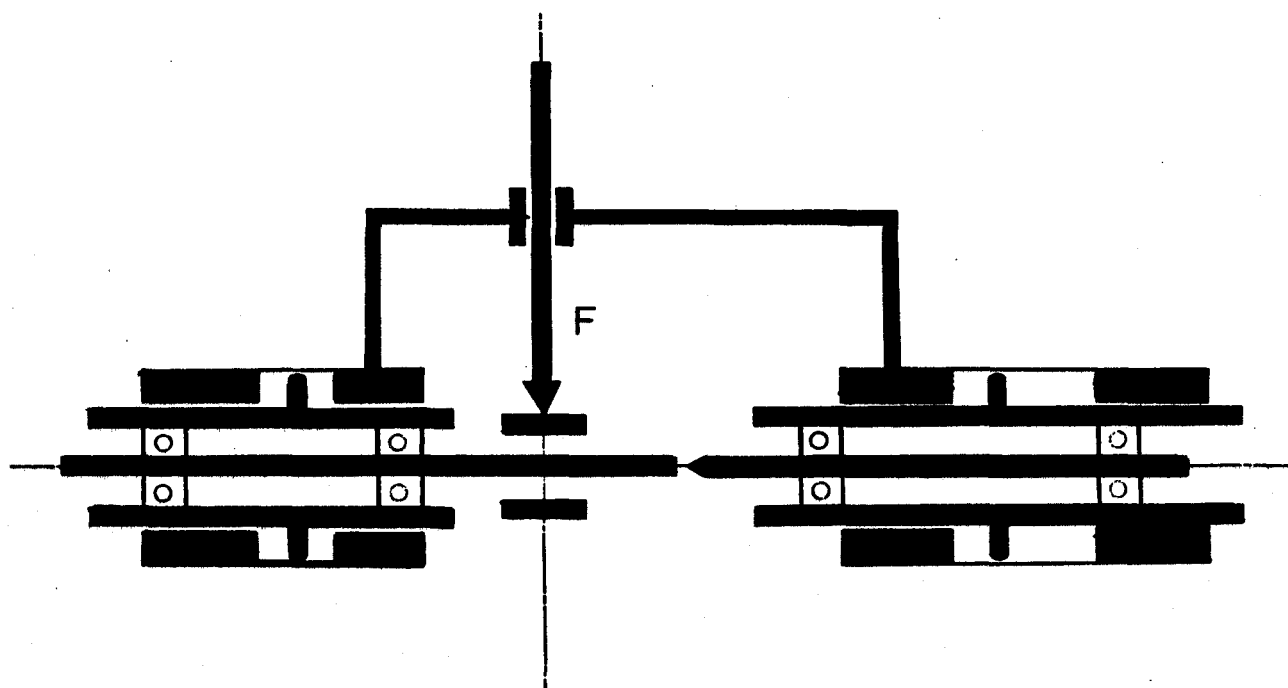
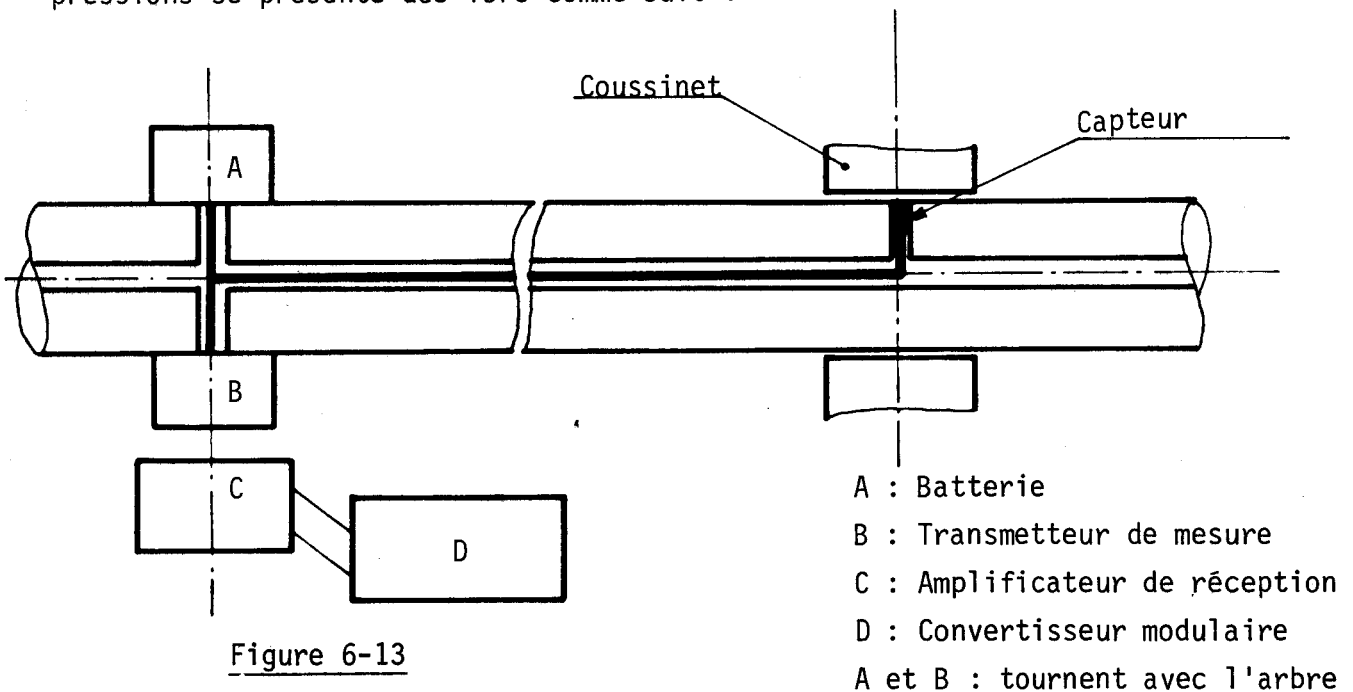


Figure 6-12

Cette solution impose cependant à cause du niveau des efforts, la présence d'une contre-pointe pour éviter la flexion de l'arbre.

6.7.3.2. Dispositif de mesure des pressions

L'arbre et le capteur de mesure des pressions étant entraînés en rotation, nous aurons recours à un transducteur électrique, dont l'alimentation et le signal de sortie seront transmis à un dispositif d'enregistrement par l'intermédiaire d'un collecteur tournant ou d'un système de télémessure. L'utilisation d'un collecteur tournant, conduit à une exploitation difficile de la mesure à cause du niveau élevé du bruit. Le dispositif de mesure des pressions se présente dès lors comme suit :



Pour une position axiale de l'arbre par rapport au coussinet, c'est-à-dire pour une valeur de $\xi = \xi_1$, l'arbre en rotation donne, par l'intermédiaire du capteur, la loi des pressions en fonction de l'angle θ . Nous obtenons dès lors successivement des lois $p = f(\theta, \zeta = C^{te})$, en déplaçant l'arbre axialement.

Le capteur monté sur l'arbre est alimenté pour une batterie (A). Il délivre une tension de sortie proportionnelle à la grandeur à mesurer. Ce signal est reçu par un transmetteur de mesure (B) qui est un convertisseur tension fréquence spécialement adopté pour la conversion de faibles tensions, en impulsions de fréquence modulée. Le signal est alors transmis par l'intermédiaire

d'une antenne à l'amplificateur de réception (C) qui remet en forme les signaux impulsionnels émis.

L'appareil D a pour rôle de reconvertir la modulation de fréquence en signal analogique.

6.7.4. MESURE DE L'EXCENTREMENT RELATIF ϵ

Nous devons pour déterminer la valeur de l'excentricité relative $\epsilon = e/h_0$, mesurer la position du coussinet par rapport à l'arbre. Nous pourrions également déduire de ces mesures, [11] la valeur de l'angle ϕ (Angle $O_1\vec{Y}_0, O_1\vec{n}$).

Les distances "h" que nous avons mesurer, sont comprises entre $h_0 = 0$ et $h_0 = 2h_0$ (variation de 0 à 1 ou 2/10 de millimètre). Cette mesure devra être faite à l'extérieur du palier, pour ne pas perturber l'écoulement, et si possible sans contact à cause de la vitesse de rotation de l'arbre. Nous avons retenu pour ces mesures des capteurs inductifs de proximité.

Ces détecteurs sont constitués de deux bobines de mesure séparées. Ils sont montés en 1/2 pont et complétés à l'intérieur du pont de Whestone par deux résistances pour former un pont complet.

La méthode de mesure consiste à installer en regard du tourillon et en opposition diamétrale les deux capteurs. Ces capteurs sont alors dans les mêmes conditions de température, et de fonctionnement. Toutefois, cette disposition reste imprécise pour une mesure exacte de la position du tourillon par rapport au coussinet. En effet, on peut remarquer [12] que dans la gamme des faibles déplacements utilisés, la réponse du capteur est insensible aux déplacements dans une direction orthogonale à son axe.

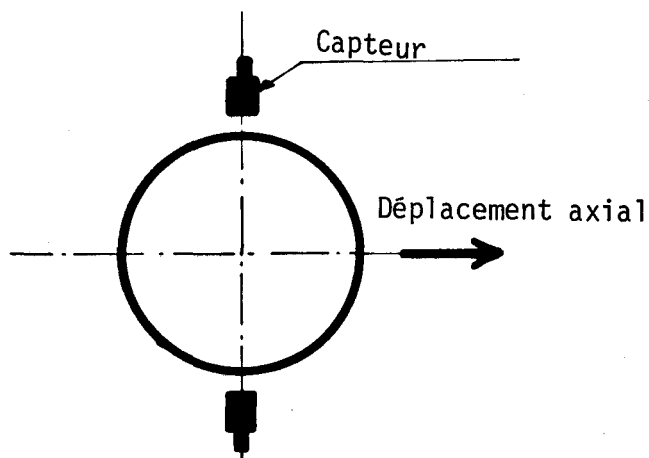
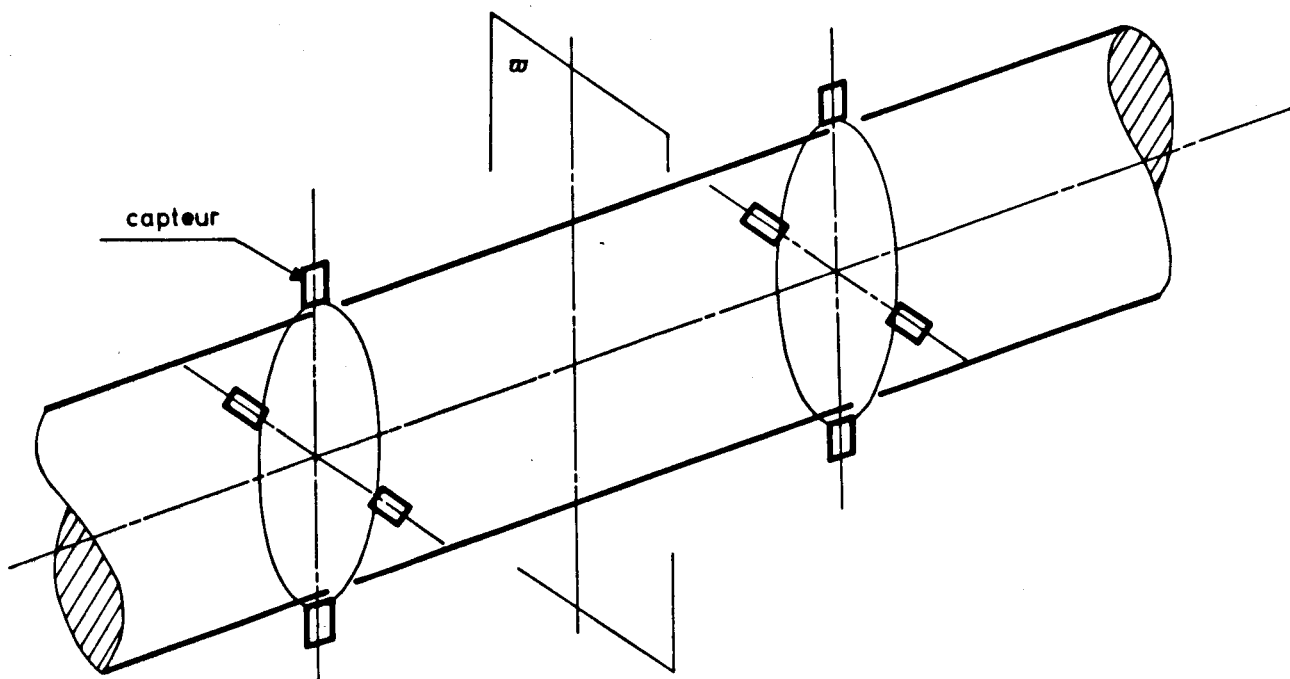


Figure 6-14

Il est donc nécessaire de placer sur un axe perpendiculaire à l'axe défini par les 2 capteurs, 2 autres capteurs diamétralement opposés. Cette disposition permet dès lors une mesure très précise de la position du tourillon dans le coussinet.

Pour vérifier le parallélisme de l'arbre et du coussinet, nous disposerons 4 autres capteurs dans un plan symétrique par rapport au plan de symétrie du palier.



Les quatre ponts de mesure, sont alimentés par un générateur à fréquence porteuse de 5KH_2 . Sous l'influence de la grandeur à mesurer, le pont de mesure au préalable réglé au zéro se déséquilibre, et délivre un signal proportionnel au déplacement de la force en regard du capteur. Il faut donc établir une courbe d'étalonnage, entre ce signal, et la valeur h mesurée. D'autre part, le signal délivré par le capteur est fonction également du matériau qui se trouve en regard du capteur. Nous rencontrons ici le problème de l'homogénéité du matériau. L'expérience montre, que le problème peut être résolu, en utilisant des pistes en acier amagnétique.

6.7.5. MESURE DU COUPLE DE FROTTEMENT DANS LE PALIER

Le couple de frottement dans le palier, est transmis au bâti par l'intermédiaire des biellettes horizontales 1-1' du double parallélogramme de Watt (voir Fig. 6-4).

Si l'on donne à ces biellettes, une forme précisée sur le schéma ci-dessous, l'effort du frottement dans le palier, produira une sollicitation de flexion. Il suffit dès lors d'équiper une des biellettes d'extensomètres résistifs pour obtenir un transducteur convenable.

Pour augmenter la sensibilité de ce transducteur, nous disposerons sur les deux faces de la biellette deux rosettes orthogonales, ce qui double ainsi la sensibilité et assure une correction complète vis à vis des dilatations thermiques.

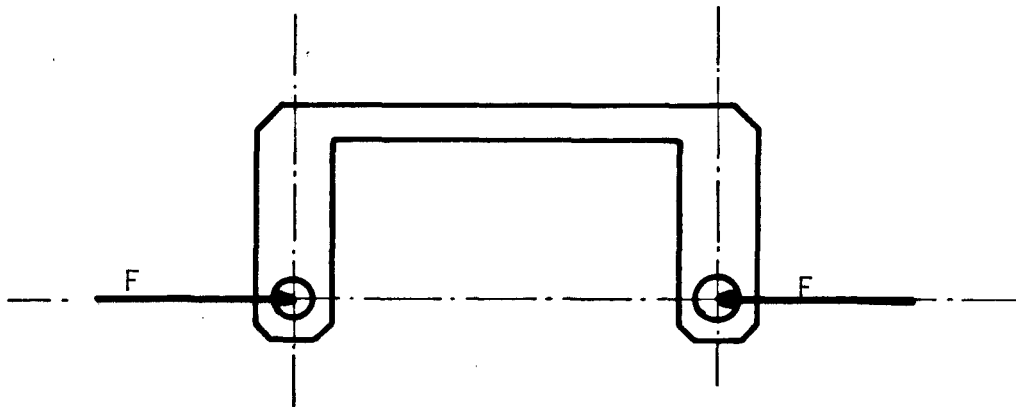
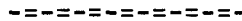


Figure 6-15

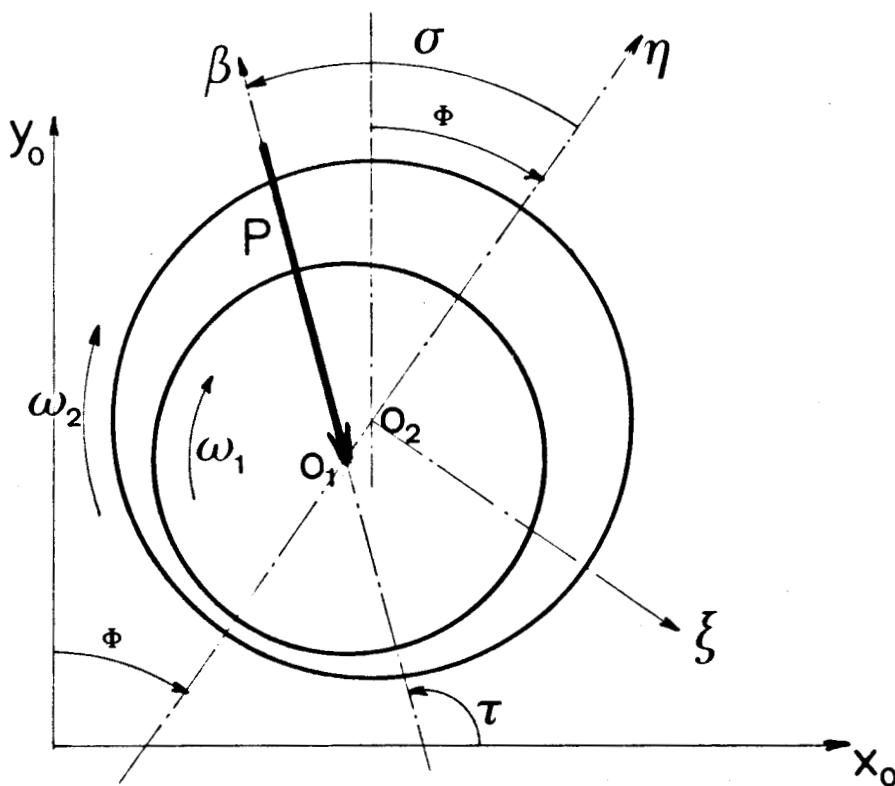


CHAPITRE 7 : STABILITE

7-1) Généralités

Rappelons les éléments qui ont été établis au paragraphe 4-4 et qui nous serviront dans ce chapitre :

- le schéma suivant :



- la relation (67) qui s'écrit :

$$\tau = \sigma - \phi + \frac{\pi}{2} \quad (67)$$

- les équations (73) et (74) qui s'écrivent :

$$-2 \overset{\circ}{\varepsilon} h_0 \overset{\circ}{\phi} - \varepsilon h_0 \overset{\circ}{\phi} = \frac{P_n + F_n}{m_1} \quad (73)$$

$$-\overset{\circ\circ}{\varepsilon} h_0 + \varepsilon h_0 \overset{\circ\circ}{\dot{\Phi}} = \frac{P_t + F_t}{m_1} \quad (74)$$

l'équation de moment par rapport au centre du tourillon s'écrit :

$$I \overset{\circ}{\omega}_1 = M_r \quad (131)$$

dans cette expression M_r désigne le moment résultant appliqué à l'arbre :

$$M_r = M_m - M$$

M_m étant le moment fournit par le moteur

M étant le couple de frottement du palier qui s'écrit d'après l'expression (102) :

$$M = - \frac{4\pi\mu r^4 \zeta_0 (\omega_1 + \overset{\circ}{\dot{\Phi}})}{h_0} \quad (132)$$

Les expressions (73), (74), (131), s'écrivent encore, en remplaçant $\overset{\circ}{\dot{\Phi}}$ par sa valeur :

$$\overset{\circ}{\dot{\Phi}} = \overset{\circ}{\sigma} - \overset{\circ}{\tau}$$

$$- 2\overset{\circ\circ}{\varepsilon} h_0 (\overset{\circ}{\tau} - \overset{\circ}{\sigma}) + \varepsilon h_0 (\overset{\circ\circ}{\tau} - \overset{\circ\circ}{\sigma}) = \frac{R_n}{m_1} \quad (133)$$

$$-\overset{\circ\circ}{\varepsilon} h_0 - \varepsilon h_0 (\overset{\circ}{\tau} - \overset{\circ}{\sigma})^2 = \frac{R_t}{m_1} \quad (134)$$

$$I \overset{\circ}{\omega}_1 = M_m + \frac{4\pi\mu r^4 \zeta_0}{h_0} (\omega_1 + \overset{\circ}{\sigma} - \overset{\circ}{\tau}) \quad (135)$$

expressions dans lesquelles nous avons posé :

$$R_n = P_n + F_n$$

$$R_t = P_t + F_t$$

R_n et R_t représentant les composantes de la résultante des forces appliquées sur le palier.

L'étude de la stabilité est ici envisagée dans le cadre de la méthode des petites perturbations, en analogie avec les études similaires effectuées par N. TIPEI [7] et V.N. CONSTANTINESCU [13] à propos de paliers hydrodynamiques

En principe, les perturbations portent sur les grandeurs géométriques et cinématiques qui fixent la position instantanée de l'arbre dans le coussinet il s'agit de l'excentricité relative ε , de l'angle σ , et de la vitesse de l'arbre ω_1 . Nous noterons ces perturbations respectivement $\delta\varepsilon$, $\delta\sigma$, $\delta\omega_1$.

Le problème de l'étude de la stabilité se pose dès lors comme suit :

- on suppose que l'arbre est initialement en équilibre ;
- on le soumet à une perturbation cinématique quelconque,
- on étudie les conditions du retour à la position d'équilibre après la disparition de cette perturbation.
- Si, après disparition de cette perturbation, l'arbre revient à sa position d'équilibre, le palier est stable ; dans le cas contraire, il est instable.

Analytiquement, pour étudier ce problème, il s'agit tout d'abord de réécrire les équations du mouvement (133) à (134) et (135) en présence de ces perturbations.

Il vient :

$$\left. \begin{aligned}
 & - 2\varepsilon h_0 \delta\sigma + 2h_0 (\tau - \sigma) \delta\varepsilon + 2\varepsilon h_0 \frac{\partial \tau}{\partial \omega_1} \delta\omega_1 - \varepsilon h_0 \delta\sigma^{\circ\circ} + \\
 & (\tau - \sigma) h_0 \delta\varepsilon + \varepsilon h_0 \left(\frac{\partial \tau}{\partial \omega_1} \delta\omega_1 + \frac{\partial \tau}{\partial \omega_1} \delta\omega_1 \right) = \frac{1}{m_1} \left[\frac{\partial R_n}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon + \frac{\partial R_n}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon + \right. \\
 & \left. \frac{\partial R_n}{\partial \sigma} \delta\sigma + \frac{\partial R_n}{\partial \sigma} \delta\sigma + \frac{\partial R_n}{\partial \omega_1} \delta\omega_1 + \frac{\partial R_n}{\partial \omega_1} \delta\omega_1 \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & - h_0 \delta\varepsilon^{\circ\circ} + h_0 (\tau - \sigma)^2 \delta\varepsilon - 2\varepsilon h_0 (\tau - \sigma) \delta\sigma + 2\varepsilon h_0 (\tau - \sigma) \frac{\partial \tau}{\partial \omega_1} \delta\omega_1 \\
 & = \frac{1}{m_1} \left[\frac{\partial R_t}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon + \frac{\partial R_t}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon + \frac{\partial R_t}{\partial \omega_1} \delta\omega_1 + \frac{\partial R_t}{\partial \omega_1} \delta\omega_1 + \frac{\partial R_t}{\partial \sigma} \delta\sigma + \frac{\partial R_t}{\partial \sigma} \delta\sigma \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

$$I \delta\omega_1 = \frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon + \frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon + \frac{\partial M_r}{\partial \sigma} \delta\sigma + \frac{\partial M_r}{\partial \sigma} \delta\sigma + \frac{\partial M_r}{\partial \omega_1} \delta\omega_1 + \frac{\partial M_r}{\partial \omega_1} \delta\omega_1 \quad (138)$$

Recherchons la solution de ce système, en considérant que les petites perturbations s'écrivent comme suit sous forme exponentielle.

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon &= \varepsilon^* e^{\nu t} \\ \delta \sigma &= \sigma^* e^{\nu t} \\ \delta \omega_1 &= \omega_1^* e^{\nu t} \end{aligned}$$

Nous obtenons dès lors :

$$\left. \begin{aligned} &\left[2h_0 \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \tau & -\sigma \end{pmatrix} \nu + h_0 \begin{pmatrix} \circ \circ & \circ \circ \\ \tau & -\sigma \end{pmatrix} - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_n}{\partial \varepsilon} - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_n}{\partial \varepsilon} \nu \right] \varepsilon^* e^{\nu t} \\ &+ \left[-2\varepsilon h_0 \nu - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_n}{\partial \sigma} \nu - \varepsilon h_0 \nu^2 - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_n}{\partial \sigma} \right] \sigma^* e^{\nu t} \\ &+ \left[2\varepsilon h_0 \frac{\delta \tau}{\delta \omega_1} + \varepsilon h_0 \frac{\delta \tau}{\delta \omega_1} + \varepsilon h_0 \frac{\delta \tau}{\delta \omega_1} \nu - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_n}{\partial \omega_1} - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_n}{\partial \omega_1} \nu \right] \omega_1^* e^{\nu t} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

$$\left. \begin{aligned} &\left[-h_0 \nu^2 + h_0 \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \tau & -\sigma \end{pmatrix}^2 - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_t}{\partial \varepsilon} - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_t}{\partial \varepsilon} \nu \right] \varepsilon^* e^{\nu t} \\ &+ \left[-2\varepsilon h_0 \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \tau & -\sigma \end{pmatrix} \nu - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_t}{\partial \sigma} - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_t}{\partial \sigma} \nu \right] \sigma^* e^{\nu t} \\ &+ \left[-2\varepsilon h_0 \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \tau & -\sigma \end{pmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial \omega_1} - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_t}{\partial \omega_1} - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_t}{\partial \omega_1} \nu \right] \omega_1^* e^{\nu t} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

$$\left[\frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial M_r}{\partial \varepsilon} \nu \right] \varepsilon^* e^{\nu t} + \left[\frac{\partial M_r}{\partial \sigma} + \frac{\partial M_r}{\partial \sigma} \nu \right] \sigma^* e^{\nu t} + \left[\frac{\partial M_r}{\partial \omega_1} + \frac{\partial M_r}{\partial \omega_1} \nu - I \nu \right] \omega_1^* e^{\nu t} = 0 \quad (141)$$

Remarque :

La valeur du couple de frottement M dans le palier est, compte-tenu de la remarque faite au paragraphe (5-5) indépendante de la valeur de ε , ce qui nous permet d'écrire dès maintenant les conditions :

$$\frac{\partial M}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial \dot{\varepsilon}} = 0$$

L'équation (141) s'écrit dès lors :

$$\left[\frac{\partial M_r}{\partial \sigma} + \frac{\partial M_r}{\partial \dot{\sigma}} v \right] \sigma^* e^{vt} + \left[\frac{\partial M_r}{\partial \omega_1} + \frac{\partial M_r}{\partial \dot{\omega}_1} v - I v \right] \omega^* e^{vt} = 0 \quad (142)$$

Résolution du système formé par les équations (139), (140) et (142)

Nous allons poser pour faciliter la résolution de ce système :

$$\left. \begin{aligned} a &= 2h_0 \left(\overset{\circ}{\tau} - \overset{\circ}{\sigma} \right) - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_n}{\partial \dot{\varepsilon}} \\ b &= h_0 \left(\overset{\circ\circ}{\tau} - \overset{\circ\circ}{\sigma} \right) - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_n}{\partial \varepsilon} \\ c &= 2\varepsilon h_0 + \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_n}{\partial \dot{\sigma}} \\ d &= h_0 \left(\overset{\circ}{\tau} - \overset{\circ}{\sigma} \right)^2 - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_t}{\partial \varepsilon} \\ e &= 2\varepsilon h_0 \left(\overset{\circ}{\tau} - \overset{\circ}{\sigma} \right) + \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_t}{\partial \dot{\sigma}} \\ f &= 2\varepsilon h_0 \frac{\partial \overset{\circ}{\tau}}{\partial \omega_1} + \varepsilon h_0 \frac{\partial \overset{\circ\circ}{\tau}}{\partial \omega_1} - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_n}{\partial \omega_1} \\ g &= \varepsilon h_0 \frac{\partial \overset{\circ\circ}{\tau}}{\partial \omega_1} - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_n}{\partial \dot{\omega}_1} \\ t &= 2\varepsilon h_0 \left(\overset{\circ}{\tau} - \overset{\circ}{\sigma} \right) \frac{\partial \overset{\circ}{\tau}}{\partial \omega_1} - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_t}{\partial \omega_1} \\ j &= \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_t}{\partial \dot{\omega}_1} \\ k &= \frac{\partial M}{\partial \omega_1} - I \end{aligned} \right\} \quad (143)$$



La résolution des équations (139), (140), (142) conduit dès lors au système suivant qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} f + gv & av + b & -\epsilon h_0 v^2 - cv - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_n}{\partial \sigma} \\ t - jv & -h_0 v^2 - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_t}{\partial \epsilon} v + d & -ev - \frac{1}{m_1} \frac{\partial R_t}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial M_r}{\partial \omega_1} + kv & 0 & \frac{\partial M_r}{\partial \sigma} + \frac{\partial M_r}{\partial \sigma} v \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega^* e^{vt} \\ \epsilon^* e^{vt} \\ \sigma^* e^{vt} \end{bmatrix} = 0 \quad (144)$$

La valeur nulle du déterminant conduit alors à une équation du 5ème degré en v qui s'écrit :

$$D_0 v^5 + D_1 v^4 + D_2 v^3 + D_3 v^2 + D_4 v + D_5 = 0 \quad (145)$$

pour alléger l'écriture des coefficients D_i , nous allons pour :

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 \\ C_1 &= 2 \frac{\overset{\circ}{\epsilon}}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon m_1 h_0} \frac{\partial R_n}{\partial \sigma} + \frac{1}{m_1 h_0} \frac{\partial R_t}{\partial \epsilon} \\ C_2 &= 3 (\overset{\circ}{\tau} - \overset{\circ}{\sigma})^2 + (\overset{\circ}{\tau} - \overset{\circ}{\sigma}) \left[\frac{2}{\epsilon m_1 h_0} \frac{\partial R_t}{\partial \sigma} - \frac{2}{m_1 h_0} \frac{\partial R_n}{\partial \epsilon} \right] + \frac{2 \overset{\circ}{\epsilon}}{\epsilon m_1 h_0} \frac{\partial R_t}{\partial \epsilon} \\ &\quad + \frac{1}{m_1 h_0} \frac{\partial R_t}{\partial \epsilon} + \frac{1}{\epsilon m_1 h_0} \frac{\partial R_n}{\partial \sigma} + \frac{1}{\epsilon m_1^2 h_0^2} \left[\frac{\partial R_n}{\partial \sigma} \frac{\partial R_t}{\partial \epsilon} - \frac{\partial R_t}{\partial \sigma} \frac{\partial R_n}{\partial \epsilon} \right] \\ C_3 &= (\overset{\circ}{\tau} - \overset{\circ}{\sigma}) \left[2 (\overset{\circ}{\tau} - \overset{\circ}{\sigma}) + \frac{1}{\epsilon m_1 h_0} \frac{\partial R_t}{\partial \sigma} \right] + (\overset{\circ}{\tau} - \overset{\circ}{\sigma}) \left[\frac{2}{\epsilon m_1 h_0} \frac{\partial R_t}{\partial \sigma} - \frac{2}{m_1 h_0} \frac{\partial R_n}{\partial \epsilon} - \right. \\ &\quad \left. \left(2 \frac{\overset{\circ}{\epsilon}}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon m_1 h_0} \frac{\partial R_n}{\partial \sigma} \right) (\overset{\circ}{\tau} - \overset{\circ}{\sigma}) \right] + \frac{2 \overset{\circ}{\epsilon}}{\epsilon m_1 h_0} \frac{\partial R_t}{\partial \epsilon} + \frac{1}{\epsilon m_1^2 h_0^2} \left[\frac{\partial R_n}{\partial \sigma} \frac{\partial R_t}{\partial \epsilon} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial R_n}{\partial \epsilon} \frac{\partial R_t}{\partial \sigma} + \frac{\partial R_n}{\partial \sigma} \frac{\partial R_t}{\partial \epsilon} - \frac{\partial R_t}{\partial \sigma} \frac{\partial R_n}{\partial \epsilon} \right] \end{aligned} \quad (146)$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \circ\circ & \circ\circ \\ \tau & -\sigma \end{pmatrix} \frac{1}{\epsilon m_1 h_0} \frac{\partial R_t}{\partial \sigma} - \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \tau & -\sigma \end{pmatrix} \frac{1}{\epsilon m_1 h_0} \frac{\partial R_n}{\partial \sigma} + \frac{1}{\epsilon m_1^2 h_0^2} \left[\frac{\partial R_n}{\partial \sigma} \frac{\partial R_t}{\partial \epsilon} - \frac{\partial R_n}{\partial \epsilon} \frac{\partial R_t}{\partial \sigma} \right] \quad (146)$$

Compte tenu de l'expression des coefficients C_i , les coefficients D_i de l'équation (149) s'écrivent dès lors :

$$\begin{aligned} D_0 &= -k \epsilon h_0^2 C_0 \\ D_1 &= -h_0 g \frac{\partial M_r}{\partial \sigma} - \epsilon h_0^2 k C_1 - \epsilon h_0^2 \frac{\partial M_r}{\partial \omega_1} C_0 \\ D_2 &= -h_0 g \frac{\partial M_r}{\partial \sigma} + \frac{\partial M_r}{\partial \sigma} (-h_0 f + a j - \frac{g}{m_1} \frac{\partial R_t}{\partial \epsilon}) - \epsilon h_0^2 (k C_2 + \frac{\partial M_r}{\partial \omega_1} C_1) \\ D_3 &= \frac{\partial M_r}{\partial \sigma} (a j - f h_0 - \frac{g}{m_1} \frac{\partial R_t}{\partial \epsilon}) + \frac{\partial M_r}{\partial \sigma} (g d - a t + j b - \frac{f}{m_1} \frac{\partial R_t}{\partial \epsilon}) \\ &\quad - (k C_3 + \frac{\partial M_r}{\partial \omega_1} C_2) \epsilon h_0^2 \\ D_4 &= \frac{\partial M_r}{\partial \sigma} (g d - \frac{f}{m_1} \frac{\partial R_t}{\partial \epsilon} - a t + j b) + \frac{\partial M_r}{\partial \sigma} (d f - t b) \\ &\quad - (k C_4 + \frac{\partial M_r}{\partial \omega_1} C_3) h_0^2 \epsilon \\ D_5 &= d f \frac{\partial M_r}{\partial \sigma} + t b \frac{\partial M_r}{\partial \sigma} - \frac{\partial M_r}{\partial \omega_1} C_4 \epsilon h_0^2 \end{aligned} \quad (147)$$

7-2) Etude de la stabilité du palier

L'équation régissant la stabilité du palier, obtenu au paragraphe précédent s'écrit :

$$D_0 v^5 + D_1 v^4 + D_2 v^3 + D_3 v^2 + D_4 v + D_5 = 0$$

Pour que le palier soit stable, il faut que les racines de cette équation soient à partie réelle négative.

Il n'est cependant pas nécessaire de calculer les racines de cette équation. En effet, la méthode de ROUTH que nous rappelons ci-après, permet de déterminer les conditions qui conduisent à des racines à partie réelle non négative, c'est-à-dire à l'instabilité.

L'application de la méthode de ROUTH conduit à définir la grille des coefficients suivants :

D_0	D_2	D_4	avec :	$E_1 = \frac{D_1 D_2 - D_0 D_3}{D_1}$	}	(148)
D_1	D_3	D_5		$E_3 = \frac{D_1 D_4 - D_0 D_5}{D_1}$		
E_1	E_3			$F_1 = \frac{E_1 D_3 - D_1 E_3}{E_1}$		
F_1	F_3			$F_3 = D_5 = K_1$		
G_1				$G_1 = \frac{F_1 E_3 - E_1 F_3}{F_1}$		
K_1						

De cette grille, on déduit les conditions de stabilité qui s'écrivent :

- 1/ $D_0 > 0$
- 2/ $D_1 > 0$
- 3/ $E_1 > 0$ d'où $D_1 D_2 - D_0 D_3 > 0$
- 4/ $F_1 > 0$ d'où $D_1 D_2 - D_0 D_3 - (D_1 D_4 - D_0 D_5) D_1 > 0$
- 5/ $G_1 > 0$, d'où $(D_1 D_2 - D_0 D_3) [(D_1 D_4 - D_0 D_5) D_3 - D_5] - (D_1 D_4 - D_0 D_5)^2 D_1 > 0$
- 6/ $K_1 > 0$ d'où $D_5 > 0$

7-3) Etude de la stabilité du palier, dans le cas où la charge extérieure est constante en grandeur et en direction, le couple reste constant (solicitation statique) et la perturbation $\delta\omega_1$ est nulle.

Les coefficients D_i (147) de l'équation générale du 5ème ordre en v s'écrivent ici :

$$D_0 = -k \varepsilon h_0^2 C_0$$

$$D_1 = -k \varepsilon h_0^2 C_1$$

$$D_2 = -k \varepsilon h_0^2 C_2$$

$$D_3 = -k \varepsilon h_0^2 C_3$$

$$D_4 = -k \varepsilon h_0^2 C_4$$

$$D_5 = 0$$

d'où l'équation :

$$- \varepsilon h_0^2 k (C_0 v^5 + C_1 v^4 + C_2 v^3 + C_3 v^2 + C_4 v) = 0$$

ce qui en simplifiant par v conduit à l'équation :

$$C_0 v^4 + C_1 v^3 + C_2 v^2 + C_3 v + C_4 = 0 \quad (149)$$

expressions dans lesquelles les coefficients C_i nous sont donnés par les expressions (146).

Lorsque la charge extérieure est constante en grandeur et direction, les coefficients de l'équation du quatrième ordre (149), en remarquant que :

$$\overset{\circ}{\sigma} = \overset{\circ\circ}{\sigma} = \overset{\circ}{\tau} = \overset{\circ\circ}{\tau} = \overset{\circ}{\varepsilon} = 0$$

s'écrivent :

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = \frac{1}{m_1 h_0} \left[\frac{\partial R_t}{\partial \overset{\circ}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R_n}{\partial \overset{\circ}{\sigma}} \right]$$

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \frac{1}{m_1 h_0} \left[\frac{\partial R_t}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial R_n}{\partial \sigma} \right] + \frac{1}{\varepsilon m_1^2 h_0^2} \left[\frac{\partial R_n}{\partial \sigma} \frac{\partial R_t}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial R_n}{\partial \varepsilon} \frac{\partial R_t}{\partial \sigma} \right] \\
 C_3 &= \frac{1}{\varepsilon m_1^2 h_0^2} \left[\frac{\partial R_t}{\partial \varepsilon} \frac{\partial R_n}{\partial \sigma} + \frac{\partial R_n}{\partial \sigma} \frac{\partial R_t}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial R_n}{\partial \varepsilon} \frac{\partial R_t}{\partial \sigma} - \frac{\partial R_n}{\partial \varepsilon} \frac{\partial R_t}{\partial \sigma} \right] \\
 C_4 &= \frac{1}{\varepsilon m_1^2 h_0^2} \left[\frac{\partial R_t}{\partial \varepsilon} \frac{\partial R_n}{\partial \sigma} - \frac{\partial R_n}{\partial \varepsilon} \frac{\partial R_t}{\partial \sigma} \right]
 \end{aligned}
 \tag{150}$$

Remarque :

Les composantes de la résultante R, des forces appliquées sur le palier s'écrivent dans le système d'axes $O_2 \xi \eta z$,

$$\vec{R} = R_n \vec{\xi} + R_t \vec{\eta}
 \tag{151}$$

expression dans laquelle, les composantes R_n et R_t peuvent s'écrire selon :

$$R_n = P_n + F_n
 \tag{152}$$

$$R_t = P_t + F_t
 \tag{153}$$

Dans le cas où la force extérieure appliquée au palier est constante en module, et direction, les équations générales de la dynamique (73) et (74) entraînent :

$$R_n = P \sin \sigma - F \sin \phi = 0$$

$$R_t = -P \cos \sigma + F \cos \phi = 0$$

Ce système conduit alors aux relations :

- sur les forces $P = F$ (154)

- sur les angles $\sigma = \phi$ (155)

Cette dernière relation entraîne la remarque suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \Phi}, \text{ et } \frac{\partial}{\partial \sigma^{\circ}} = \frac{\partial}{\partial \Phi^{\circ}} \quad (156)$$

En vue d'expliciter la valeur des grandeurs R_n et R_t apparaissant dans l'expression des coefficients C_i , nous pouvons remarquer que les composantes de la résultante R des efforts appliquées sur le palier peuvent encore s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} R_n &= (P - F) \sin \Phi \\ R_t &= (-P + F) \cos \Phi \end{aligned} \right\} \quad (157)$$

ce qui entraîne :

$$\frac{\partial R_n}{\partial \Phi} = -R_t \quad \text{et} \quad \frac{\partial R_t}{\partial \Phi} = R_n \quad (158)$$

En remplaçant dans le système (157) la valeur des composantes de la force F due aux pressions par ses composantes, on obtient les relations :

$$\begin{aligned} R_n &= P \sin \Phi - F_n \\ R_t &= -P \cos \Phi + F_t \end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$\frac{\partial R_n}{\partial x_j} = -\frac{\partial F_n}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial R_t}{\partial x_j} = \frac{\partial F_t}{\partial x_j} \quad (159)$$

avec $x_j = \varepsilon, \varepsilon^{\circ}, \Phi^{\circ}$.

Compte-tenu des remarques (156), (158) et (159) les coefficients C_i s'écrivent dès lors :

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = \frac{1}{m_1 h_0} \left[\frac{\partial F_t}{\partial \varepsilon^{\circ}} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial F_n}{\partial \Phi^{\circ}} \right] \quad (160)$$

$$C_2 = \frac{1}{m_1 h_0} \left[\frac{\partial F_t}{\partial \varepsilon} + \frac{F_t}{\varepsilon} \right] + \frac{1}{\varepsilon m^2 h_0^2} \left[\frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon^{\circ}} \frac{\partial F_t}{\partial \Phi^{\circ}} - \frac{\partial F_n}{\partial \Phi^{\circ}} \frac{\partial F_t}{\partial \varepsilon^{\circ}} \right]$$

$$C_3 = \frac{1}{\varepsilon m_1^2 h_0^2} \left[F_t \frac{\partial F_t}{\partial \varepsilon} + F_n \frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F_t}{\partial \phi} \frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial F_t}{\partial \varepsilon} \frac{\partial F_n}{\partial \phi} \right]$$

$$C_4 = \frac{1}{\varepsilon m_1^2 h_0^2} \left[F_n \frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon} + F_t \frac{\partial F_t}{\partial \varepsilon} \right]$$
(160)

La connaissance des composantes F_n et F_t permet dès lors de calculer les différents coefficients de l'équation (149)

Si nous posons :

$$A = \pi n \left[2r_1^2 \left(\frac{1}{\text{ch } \zeta_0} - 1 \right) - \frac{r_0^2 N}{2} + n \gamma \text{th } \zeta_0 \right]$$

$$B = 3\pi \mu \frac{r_1^2}{h_0^2} \left[4 r_1^2 (\zeta_0 - \text{th } \zeta_0) + \frac{2n\gamma}{\text{ch } \zeta_0} - \frac{nr_0^2}{\text{ch } \zeta_0} \right]$$
(161)

Les composantes de la charge portante du palier F, d'après les relations (70), (71), (52), (53), (54) s'écrivent :

$$F_t = - \left\{ A \left[\left(\frac{3}{2} q - q_1 \right) - q_3 \frac{\circ}{\varepsilon} \right] - 2 B \frac{\circ}{\varepsilon} \right\}$$

$$F_n = \left(\frac{q_3 A}{2} + B \right) (\omega_1 - 2 \frac{\circ}{\phi}) \varepsilon$$
(162)

Expressions dans lesquelles :

- les coefficients A et B sont des fonctions de la géométrie du palier, ainsi que de la viscosité du fluide,
- les coefficients q, q_1, q_3 sont des fonctions de la géométrie du palier, de la viscosité du fluide, et du rapport des pressions γ_0 .
- le coefficient q_2 est fonction des mêmes paramètres que les coefficients q, q_1, q_3 , mais est également fonction de la vitesse ω_1 du tourillon.

Le calcul des coefficients C_i conduit alors aux relations :

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = \frac{2}{m_1 h_0} (q_3 A + 2 B)$$
(163)

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \frac{1}{m_1 h_0} \left[-2 A \left(\frac{3}{2} q - q_1 \right) + \frac{1}{m_1 h_0} (q_3 A + 2 B) \right] \\
 C_3 &= \frac{1}{m_1^2 h_0^2} \left[-2 A \left(\frac{3}{2} q - q_1 \right) (q_3 A + 2 B) \right] \\
 C_4 &= \frac{1}{m_1^2 h_0^2} \left[A^2 \left(\frac{3}{2} q - q_1 \right)^2 + (q_3 A + 2 B)^2 - \frac{\omega_1^2}{4} \right]
 \end{aligned}
 \tag{163}$$

Les conditions de la stabilité du palier au sens de ROUTH appliquées à l'équation (149) :

$$C_0 v^4 + C_1 v^3 + C_2 v^2 + C_3 v + C_4 = 0$$

se ramènent à la vérification des conditions :

$$\begin{aligned}
 1/ & C_0 > 0 \\
 2/ & \frac{2}{m_1 h_0} (q_3 A + 2 B) > 0 \\
 3/ & \frac{(q_3 A + 2 B)^4}{m_1^4 h_0^4} \left[-\frac{4 A}{m_1 h_0} \left(\frac{3}{2} q - q_1 \right) - \omega_1^2 \right] > 0
 \end{aligned}
 \tag{164}$$

Les deux premières conditions sont toujours vérifiées ; par conséquent, le système sera stable si :

$$-\frac{4 A}{m_1 h_0} \left(\frac{3}{2} q - q_1 \right) - \omega_1^2 > 0 \tag{165}$$

Dans cette expression, le coefficient A est toujours positif. La relation (165) peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{4 |F_{sr}|}{m_1 h_0} - \omega_1^2 > 0 \tag{166}$$

ou sous la forme :

$$\frac{4 K_0}{m_1} - \omega_1^2 > 0 \tag{167}$$

K_0 , étant défini par la relation (60) et exprimant la rigidité du palier à vitesse de rotation nulle.

La structure de l'expression (167) conduit à la conclusion suivante : les paramètres du palier qui conduisent au maximum de rigidité à vitesse nulle maximalisent également la stabilité du palier sous perturbations $\delta\varepsilon$ et $\delta\phi$.

A titre d'exemple nous avons déterminé la condition de stabilité pour un palier défini par les valeurs numériques suivantes auxquelles correspondent le maximum de la rigidité à vitesse nulle :

rayon de l'arbre	$r_1 = 30$ cm
largeur du palier	$l = 60$ cm
nombre d'orifices	$n = 4$
diamètre réduit	$\bar{\rho} = 0,4$
élancement du palier	$\zeta_0 = 1$
masse de l'arbre	$m_1 = 4$ kg
jeu radial	$h_0 = 3/100$

Pour deux valeurs de la pression d'alimentation de la pompe p_t , nous avons tracé les courbes de la vitesse de l'arbre en fonction du rapport des pressions γ_0 . Ces courbes délimitant, pour la pression de la pompe considérée, les zones de stabilité et d'instabilité du palier. (Voir planches 7-1 et 7-2).

Nous avons d'autre part étudié l'évolution de la stabilité en fonction de la masse m_1 de l'arbre. Sur la planche (7-3), nous avons tracé les courbes définissant la masse m_1 de l'arbre correspondant à la limite de stabilité, en fonction de la vitesse de rotation ω_1 , pour différentes valeurs du rapport des pressions γ_0 .

7-4) Etude de la stabilité du palier, dans le cas où la charge extérieure est constante en grandeur et direction, le couple fourni au palier est constant (solicitation statique) et $\delta\omega_1$ est différent de zéro

Les coefficients D_i (147) de l'équation générale du 5ème ordre en v s'écrivent ici :

$$\begin{aligned} D_0 &= I\varepsilon h_0^2 C_0 \\ D_1 &= \varepsilon h_0^2 I C_1 - \varepsilon h_0^2 \frac{\partial M_r}{\partial \omega_1} C_0 \end{aligned} \quad (168)$$

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \frac{h_0}{m_1} \frac{\partial R_n}{\partial \omega_1} \frac{\partial M_r}{\partial \sigma} + \epsilon h_0^2 \left[IC_2 - \frac{\partial M_r}{\partial \omega_1} C_1 \right] \\
 D_3 &= \frac{1}{m_1^2} \frac{\partial R_t}{\partial \epsilon} \frac{\partial R_n}{\partial \omega_1} \frac{\partial M_r}{\partial \sigma} + \epsilon h_0^2 \left[IC_3 - \frac{\partial M_r}{\partial \omega_1} C_2 \right] \\
 D_4 &= \frac{1}{m_1^2} \frac{\partial R_t}{\partial \epsilon} \frac{\partial R_n}{\partial \omega_1} \frac{\partial M_r}{\partial \sigma} + \epsilon h_0^2 \left[IC_4 - \frac{\partial M_r}{\partial \omega_1} C_3 \right] \\
 D_5 &= - \frac{\partial M_r}{\partial \omega_1} C_4 \epsilon h_0^2
 \end{aligned}
 \tag{168}$$

Compte-tenu des différentes remarques faites au paragraphe précédent et de l'écriture des composantes F_t et F_n qui nous sont données par l'expression (162), nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial R_n}{\partial \omega_1} = - \frac{(q_3 A + 2 B)}{2} \epsilon$$

$$\frac{\partial R_t}{\partial \epsilon} = (q_3 A + 2 B)$$

$$\frac{\partial R_t}{\partial \epsilon} = - A \left(\frac{3}{2} q - q_1 \right)$$

d'autre part, l'expression du moment M_r appliqué sur l'arbre nous étant donné par l'expression (132), nous pouvons en déduire :

$$\frac{\partial M_r}{\partial \sigma} = \frac{\partial M_r}{\partial \omega_1} = - \frac{2\pi\mu r_1^4 \zeta_0}{h_0}$$

Nous allons poser : $C = \frac{2\pi\mu r_1^4 \zeta_0}{h_0}$

Les coefficients D_i peuvent s'écrire dès lors :

$$D_0 = \epsilon h_0^2 I C_0$$

$$D_1 = \epsilon h_0^2 (I C_1 + C C_0)$$

(169)

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \varepsilon h_0^2 (I C_2 + C C_1) + \frac{\varepsilon h_0}{m_1} \frac{(q_3 A + 2 B) C}{2} \\
 D_3 &= \varepsilon h_0^2 (I C_3 + C C_2) + \frac{\varepsilon}{2m_1^2} (q_3 A + 2 B)^2 C \\
 D_4 &= \varepsilon h_0^2 (I C_4 + C C_3) - \frac{\varepsilon}{2m_1^2} A \left(\frac{3}{2} q - q_1\right) (q_3 A + 2 B) C \\
 D_5 &= C C_4 \varepsilon h_0^2
 \end{aligned}
 \tag{169}$$

En remplaçant dans ces expressions les coefficients C_i par leurs expressions (163), les coefficients D_i s'écrivent dès lors :

$$\begin{aligned}
 D_0 &= I \\
 D_1 &= \frac{2 I}{m_1 h_0} (q_3 A + 2 B) + C \\
 D_2 &= \frac{I}{m_1 h_0} \left[- 2A \left(\frac{3}{2} q - q_1\right) + \frac{1}{m_1 h_0} (q_3 A + 2B)^2 \right] + \frac{5}{2} \frac{C}{m_1 h_0} (q_3 A + 2B) \\
 D_3 &= \frac{I}{m_1^2 h_0^2} \left[- 2A \left(\frac{3}{2} q - q_1\right) (q_3 A + 2B) \right] + \frac{C}{m_1 h_0} \left[- 2A \left(\frac{3}{2} q - q_1\right) + \frac{3}{2m_1 h_0} (q_3 A + 2B)^2 \right] \\
 D_4 &= \frac{I}{m_1^2 h_0^2} \left[A^2 \left(\frac{3}{2} q - q_1\right)^2 + (q_3 A + 2B)^2 \frac{\omega_1^2}{4} \right] + \frac{C}{m_1^2 h_0^2} \left[- \frac{5}{2} A \left(\frac{3}{2} q - q_1\right) (q_3 A + 2B) \right] \\
 D_5 &= \frac{C}{m_1^2 h_0^2} \left[A^2 \left(\frac{3}{2} q - q_1\right)^2 + (q_3 A + 2B)^2 \frac{\omega_1^2}{4} \right]
 \end{aligned}
 \tag{170}$$

Etant donné la complexité des expressions précédentes, il paraît difficile d'en tirer de manière explicite une condition générale de la stabilité. Le calcul de ces coefficients D_i dans un cas particulier n'offre cependant pas de difficulté et il en est de même de la vérification de la stabilité.

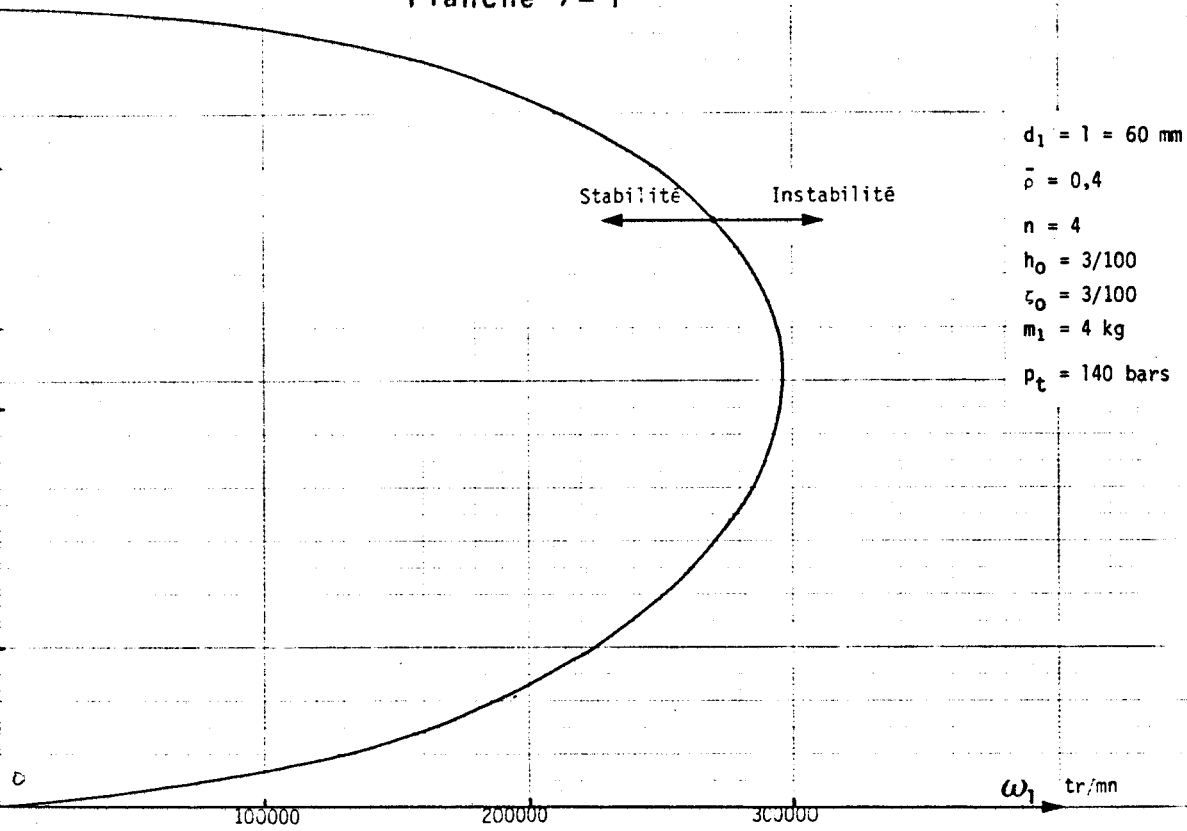
Pour le même palier que celui défini au paragraphe précédent, nous avons étudié l'influence de la pression d'alimentation de la pompe, du rapport γ_0 de la masse m_1 et du jeu radial h_0 , nous avons constaté que la vitesse critique au delà

de laquelle l'instabilité apparaît est toujours supérieure ou égale à la vitesse critique déterminée dans les mêmes conditions mais en l'absence de perturbation $\delta\omega_1$.

7-5) Etude de la stabilité du palier dans le cas d'une sollicitation.

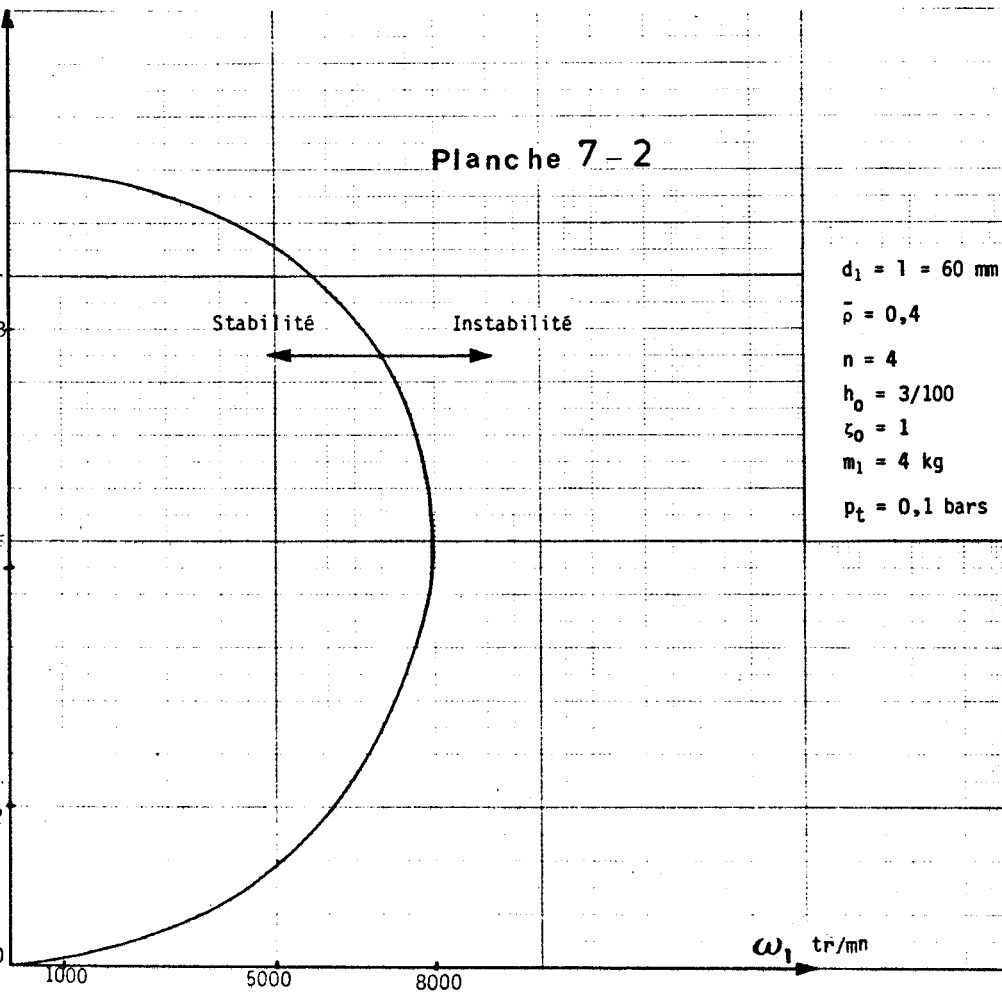
En complément de l'étude de la stabilité sous sollicitation statique, il faudrait aborder l'étude de la stabilité lorsque les sollicitations varient dans le temps (sollicitation dynamique). Le problème se pose en principe comme suit : pour les lois de variation des sollicitations considérées et propres à chaque problème, il faut d'abord, à partir des équations générales de la dynamique, déterminer les lois de variation de l'excentricité relative (ϵ) de l'angle ϕ et de la vitesse ω_1 . Il s'agit ensuite d'introduire ces lois dans les relations générales du § 7-1 et en déduire les conditions de stabilité relatives au problème. En pratique, ce problème est très complexe et n'a pu être abordé dans le cadre de cette étude.

Planche 7-1



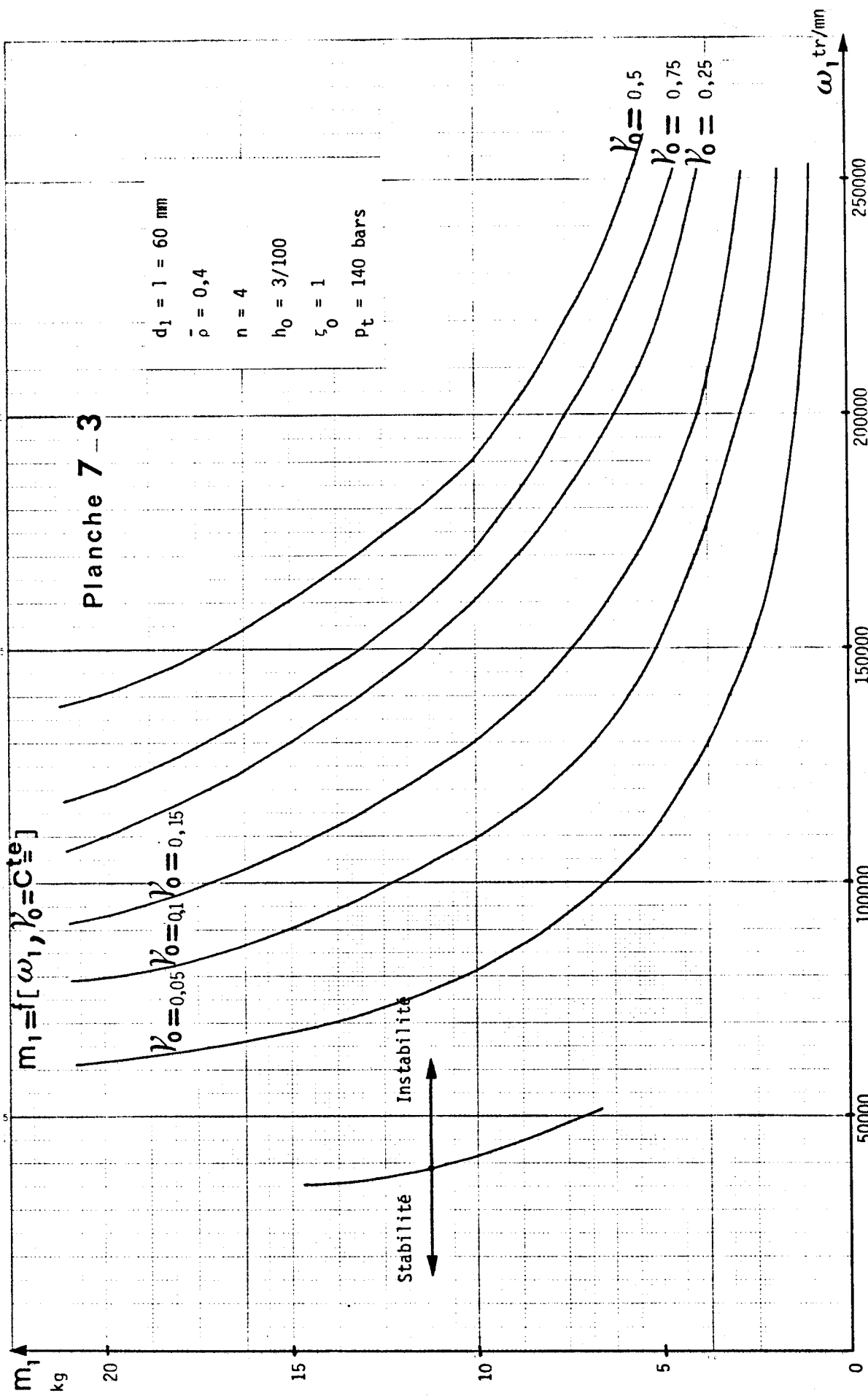
$d_1 = l = 60$ mm
 $\bar{\rho} = 0,4$
 $n = 4$
 $h_0 = 3/100$
 $\zeta_0 = 3/100$
 $m_1 = 4$ kg
 $p_t = 140$ bars

Planche 7-2



$d_1 = l = 60$ mm
 $\bar{\rho} = 0,4$
 $n = 4$
 $h_0 = 3/100$
 $\zeta_0 = 1$
 $m_1 = 4$ kg
 $p_t = 0,1$ bars





CONCLUSION

La nature du palier hydrostatique que nous avons considéré implique l'existence simultanée des lubrifications hydrodynamique et hydrostatique. L'influence de la lubrification hydrostatique est prépondérante en deçà d'une vitesse de rotation de l'arbre ω^* . Il en résulte un domaine privilégié d'utilisation du palier pour lequel la raideur maximale est obtenue pour un rapport γ_0 , de la pression dans les chambres à la pression d'alimentation, voisin de 0,5, pour un nombre d'orifices n égal à 4 et pour un diamètre réduit de ces orifices $\bar{\rho}$ voisin de 0,4.

Pour des valeurs de la vitesse de rotation de l'arbre supérieures à ω^* , on ne peut plus tirer de conclusions générales en ce qui concerne la rigidité; la méthode exposée dans notre travail peut alors être appliquée sans difficulté à tous les cas particuliers que l'on peut être amené à rencontrer.

En ce qui concerne la stabilité étudiée ici dans le seul cas des sollicitations statiques, on peut tirer les conclusions suivantes : il existe une vitesse critique ω^{**} , au delà de laquelle le palier devient instable. Cette vitesse ω^{**} est proportionnelle à la racine carrée de la rigidité K_0 à vitesse nulle et inversement proportionnelle à la masse m_1 de l'arbre.

Par conséquent, il convient, pour étendre le domaine de stabilité, d'accroître la rigidité K_0 ; ceci correspond à la recherche d'une grande rigidité aux faibles valeurs de la vitesse de rotation ω_1 , mais ne conduit pas à la maximalisation de la rigidité aux grandes vitesses de rotation. A ce moment, la force hydrodynamique peut s'opposer à la force hydrostatique et concourir à la réduction de la rigidité. Inversement, la recherche d'une rigidité maximale à grande vitesse n'implique jamais la maximalisation de la rigidité K_0 et réduit par conséquent, à masse m_1 donnée, le domaine de stabilité. Notre étude permet, dans chaque cas particulier, de quantifier ce raisonnement en fonction des données du problème considéré.

En ce qui concerne le choix du jeu radial h_0 , il convient de le réduire dans toute la mesure du possible si on veut étendre le domaine de stabilité et réduire la puissance de la pompe d'alimentation. Par contre, la puissance perdue par frottement s'en trouve accrue et on peut être amené

indépendamment du problème de la stabilité à choisir une valeur de h_0 qui rend minimale la somme des puissances nécessaires au fonctionnement du palier. Le § 5-6 répond à cette question.

L'ensemble des considérations ici développées dans le cadre de nos hypothèses, permet dès maintenant le développement de la conception des paliers hydrostatiques que nous avons étudiés.

ANNEXE I

Dans les quatre premiers paragraphes de cette annexe sont rappellées les équations de la Mécanique des fluides conduisant à l'équation de Navier.

Le cinquième paragraphe est consacré à l'énoncé de cette expression.

I-1) EQUATION DE CONTINUITÉ

$\rho(M,t)$ désignant la masse volumique d'une particule fluide située au point M à l'instant t ; U_k désignant les composantes de la vitesse de cette même particule, l'équation de continuité s'écrit :

$$\rho_{,t} + (\rho U_j)_{,j} = 0$$

I-2) EXPRESSION DE L'ACCELERATION D'UNE PARTICULE FLUIDE

L'expression de l'accélération γ_i d'une particule fluide située en M à l'instant t s'écrit :

$$\gamma_i = U_{i,t} + U_j U_{i,j} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2a)$$

I-3) LOIS DE COMPORTEMENT DES MILIEUX CONTINUS FLUIDES

Par définition, l'état des déformations pour un fluide est caractérisé par le tenseur des taux de déformations (D); en chaque point et à chaque instant, le tenseur des contraintes (C)* est une fonction déterminée univoque du tenseur (D).

Nous considérons des fluides, qui satisfont aux hypothèses de linéarité, d'homogénéité, et d'isotropie.

L'hypothèse d'isotropie, implique que tout repère principal de (D) est également repère principal de (C), d'où il résulte que la loi de comportement s'écrit :

$$\sigma_i = f(\epsilon_i, \epsilon_j, \epsilon_k) \quad (3a)$$

* : nous désignerons les composantes des tenseurs des taux de déformations et des contraintes respectivement par ϵ et σ .

par conséquent, en un point M , et relativement à un repère principal commun à (D) et (C), les lois de comportement, d'après les hypothèses de linéarité et d'isotropie, expriment que la contrainte normale principale σ_i est une fonction linéaire de ε_i et de la somme des autres taux d'allongement unitaire principaux, ou encore de ε_i et du premier invariant $\theta = 3e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ du tenseur (D). Nous écrirons :

$$\sigma_i = \varpi + 3\lambda e + 2\mu\varepsilon_i \quad (4a)$$

en désignant par ϖ , λ et μ trois paramètres caractéristiques de la loi de comportement : l'hypothèse d'homogénéité implique que les quantités ϖ , λ et μ sont indépendantes des coordonnées de M . Elles peuvent toutefois dépendre de grandeurs scalaires caractérisant l'état physique du milieu en M telles que la masse volumique ρ , et la température.

En introduisant les parties sphériques, les déviateurs, et en se plaçant dans un repère trirectangle, l'expression (4a) pourra alors s'écrire :

$$\sigma_{ij} = (\varpi + \lambda\theta)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (5a)$$

δ_{ij} , représentant le symbole de Kronecker.

Lorsque le fluide est en équilibre, par rapport à un repère (R), les ε_{ij} sont nuls, le tenseur des contraintes purement sphérique est caractérisé par le scalaire ϖ . Or, l'expérience montre qu'un fluide au repos ne peut subir que des compressions, c'est pourquoi, nous égalons systématiquement ϖ à $-p$, p étant un scalaire positif : (la pression du fluide au point considéré M). Avec cette convention, dans le cas d'un fluide en mouvement, l'expression (5a) s'écrira alors :

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda\theta)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (6a)$$

Les scalaires λ et μ sont appelés coefficients de viscosité des fluides. Ces coefficients ont pour dimension $M L^{-1} T^{-1}$.

Dans le système international (SI), l'unité de viscosité est le Porseuille (Pl).

I-4) LOI FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE

L'équation du mouvement est définie par l'expression :

$$\rho \gamma_i = f_i + \sigma_{ij,j} \quad (7a)$$

f_i représentant les forces par unité de volume.

I-5) EQUATIONS DE NAVIER

L'équation du mouvement (7a) peut encore s'écrire compte tenu de la relation (2a)

$$\rho(U_{i,t} + U_j U_{i,j}) = f_i + \sigma_{ij,j}$$

En introduisant dans cette équation, la relation (6a), l'équation du mouvement devient :

$$\rho(U_{i,t} + U_j U_{i,j}) = f_i + [(-p + \lambda\theta) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}]_{,j} \quad (8a)$$

Explicitons le tenseur des déformations ϵ_{ij} ; celui-ci peut s'écrire en fonction des vitesses de déformations :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i})$$

Le premier invariant du tenseur des déformations est égal à :

$$\theta = 3e = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \epsilon_{kk}$$

ou encore en fonction des vitesses de déformations :

$$\theta = \epsilon_{kk} = \text{div. } U$$

En dérivant le tenseur des déformations :

$$\epsilon_{ij,j} = \frac{1}{2} (U_{i,jj} + U_{j,ij})$$

Et en remplaçant dans l'expression (8a) nous obtenons l'équation de Navier qui s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \\ + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \end{aligned}$$

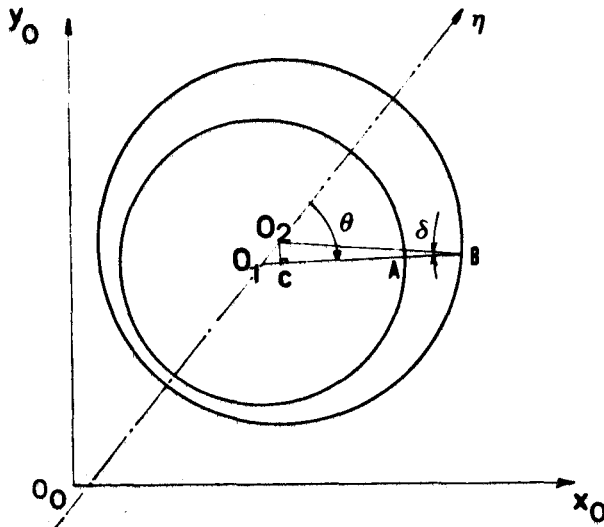
ANNEXE II

Expression du jeu dans le film "h"

L'objet de cette annexe est l'établissement de l'expression du jeu h , dans le film, en fonction du jeu radial h_0 , de l'excentricité relative ϵ :

$$\epsilon = \frac{O_2O_1}{h_0} = \frac{e}{h_0}$$

et de l'angle θ défini à partir de l'axe $O_1\eta$



De l'examen de la figure, il résulte l'expression de h :

$$h = |AB| = |O_1B| - |O_1A| = |O_1B| - r_1 \quad (1)$$

Pour déterminer $|O_1B|$, abaissons la perpendiculaire O_2C sur O_1B .
Ce qui nous permet d'écrire :

$$|O_1B| = |O_1C| + |CB| = e \cos\theta + r_2 \cos\delta$$

Dans les triangles O_1O_2C et CO_2B nous pouvons écrire :

$$\sin\theta = \frac{O_2C}{e}, \quad \sin\delta = \frac{O_2C}{r_2}$$

d'où

$$\sin\delta = \frac{e}{r_2} \sin\theta$$

De la relation $\cos^2\alpha + \sin^2\delta = 1$, nous pouvons écrire :

$$\cos\delta = \sqrt{1 - \sin^2\delta} = \sqrt{1 - \frac{e^2 \sin^2\theta}{r_2^2}} \approx \sqrt{1 - \frac{e^2 \sin^2\theta}{2r_2^2}} \approx 1,$$

la valeur de $\frac{e}{r_2}$ étant très petite, de l'ordre de 0,002 dans la majeure partie

des problèmes étudiés.

Nous obtenons alors l'expression de $|O_1B|$ sous la forme

$$|O_1B| = e \cos \theta + r_2$$

et par suite l'expression (1) devient :

$$h = e \cos \theta + r_2 - r_1$$

En explicitant la valeur de e , et en remarquant que la différence des rayons $(r_2 - r_1)$ est égal au jeu radial h_0 , la valeur du jeu h nous est donnée par l'expression :

$$h = h_0(1 + \epsilon \cos \theta)$$

ANNEXE III

CALCUL DES FORCES PORTANTES F_{Si} , F_{Di} , F_{Ni}

A) Calcul de la force portante F_{Si}

La force portante F_{Si} est une force qui est dirigée suivant la ligne des centres, et qui a pour expression d'après les relation (48) :

$$F_{Si} = - \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} (p_0 + \epsilon p_{1S}) \cos\theta \delta d\delta d\psi \right\} \quad (III.1)$$

La répartition de pression p_0 étant symétrique par rapport au centre du tourillon, son intégration conduit à un résultat nul. Il nous reste donc à calculer la contribution due à ϵp_{1S} tel que :

$$p_{1S} = A+B+C \quad (III.2)$$

avec

$$A = \left(\frac{3}{2} q - q_1\right) n \frac{\text{sh}(\zeta - \zeta_0)}{\text{ch}\zeta_0} \cos\theta$$

$$B = \frac{3}{2} q_n \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\text{sh}kn(\zeta - \zeta_0)}{kn \text{ch}n\zeta_0} \cos\alpha - \left[\frac{\text{sh}(kn+1)(\zeta - \zeta_0)}{(kn+1)\text{ch}(kn+1)\zeta_0} - \frac{\text{sh}kn(\zeta - \zeta_0)}{kn \text{ch}kn\zeta_0} \right] \frac{\cos\alpha}{(kn)^2 - (kn+1)^2} \right\}$$

$$C = - q_1 n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sh}m(\zeta - \zeta_0)}{m \text{ch}m\zeta_0} \cos(m\theta - kn\phi_1)$$

Dans ces expressions, les coordonnées θ et ζ sont précisées par l'expression (47) :

$$\theta = \theta_i + \text{Arc sin } \frac{\delta}{r_1} \cos\psi, \quad \zeta = \frac{\delta}{r_1} \sin\psi$$

A.1) Force portante due à la répartition de pression : $p = \epsilon A$

L'expression de la force portante due à la pression ϵA , que nous noterons F_{SiA} , s'écrit :

$$F_{SiA} = - \left(\frac{3}{2} q - q_1\right) n \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{\text{sh}(\zeta - \zeta_0)}{\text{ch}\zeta_0} \delta \cos^2\theta d\delta d\psi \right\} \quad (III.3)$$

si nous posons :

$$\theta = \theta_i + \beta,$$

Il vient :

$$\cos^2 \theta = \cos^2(\theta_i + \beta) = \frac{1 + \cos^2(\theta_i + \beta)}{2} = \frac{1}{2}$$

en vertu d'un calcul effectué dans l'annexe IV.

Par conséquent :

$$F_{SiA} = -\left(\frac{3}{2} q - q_1\right) \frac{n^2 \epsilon}{2 \operatorname{ch} \zeta_0} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \operatorname{sh}\left(\frac{\delta}{r_1} \sin \psi - \zeta_0\right) \delta d\delta d\psi \quad (\text{III.4})$$

Posons

$$K = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \operatorname{sh}\left(\frac{\delta}{r_1} \sin \psi - \zeta_0\right) \delta d\delta d\psi$$

cette expression pouvant encore s'écrire :

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \left[e^{\frac{\delta}{r_1}(\sin \psi - \zeta_0)} - e^{-\left(\frac{\delta}{r_1} \sin \psi - \zeta_0\right)} \right] \delta d\delta d\psi \quad (\text{III.5}) \\ &= \frac{1}{2} e^{-\zeta_0} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} e^{\frac{\delta}{r_1} \sin \psi} \delta d\delta d\psi - \frac{1}{2} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\delta}{r_1} \sin \psi} \delta d\delta d\psi \end{aligned}$$

que nous noterons :

$$K = \frac{e^{-\zeta_0}}{2} \times Q_1 - \frac{e^{\zeta_0}}{2} \times Q_2$$

en posant :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_0^{r_0} \delta \left\{ \int_0^{2\pi} e^{a \sin \psi} d\psi \right\} d\delta \\ Q_2 &= \int_0^{r_0} \delta \left\{ \int_0^{2\pi} e^{-a \sin \psi} d\psi \right\} d\delta \end{aligned}$$

$$a = \frac{\delta}{r_1}$$

Compte tenu de la remarque fait à l'annexe [V], les valeurs de Q_1 , et Q_2 s'écrivent :

$$Q_1 = Q_2 = \int_0^{r_0} \delta \left\{ \int_0^{\pi} (e^{a \sin \psi} + e^{-a \sin \psi}) d\psi \right\} d\delta$$

d'où il vient :

$$K = -shz_0 \int_0^{r_0} \delta \left\{ \int_0^\pi (e^{a \sin \psi} + e^{-a \sin \psi}) d\psi \right\} d\delta \quad (\text{III.6})$$

Posons :

$$I = \int_0^\pi (e^{a \sin \psi} + e^{-a \sin \psi}) d\psi \quad (\text{III.7})$$

qui s'écrit encore :

$$I = 2 \int_0^\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k} \sin^{2k} \psi}{(2k)!} d\psi$$

dans cette expression $a = \frac{\delta}{r}$ et $\sin^{2k} \psi$ sont toujours inférieurs à l'unité par conséquent chaque terme $a^{2k} \sin^{2k} \psi$ est majoré par le terme $\frac{1}{(2k)!}$ d'une série convergente, ceci nous permet d'écrire :

$$I = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{(2k)!} \int_0^\pi \sin^{2k} \psi d\psi \quad (\text{III.8})$$

Posons :

$$I_{2k} = \int_0^\pi \sin^{2k} \psi d\psi$$

$$I_{2k} = \int_0^\pi \sin^{2k-1} \psi \sin \psi d\psi$$

En intégrant par parties, il vient :

$$\begin{aligned} I_{2k} &= (2k-1) \int_0^\pi \sin^{2k-2} \psi \cos^2 \psi d\psi \\ &= (2k-1) \int_0^\pi (\sin^{2k-2} \psi - \sin^{2k} \psi) d\psi \end{aligned}$$

D'où il résulte la relation de récurrence suivante :

$$2k I_{2k} = (2k-1) I_{2k-2}$$

Ce qui nous permet de calculer I_{2k} sous la forme :

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \times \frac{2k-3}{2k-2} \times \frac{2k-5}{2k-4} \times \dots \times \frac{1}{2} I_0$$

avec $I_0 = \int_0^\pi d\psi = \pi$

La valeur finale de I_{2k} s'écrit dès lors :

$$I_{2k} = \frac{(2k)! \pi}{2^{2k} (k!)^2}$$

et celle de I :

$$I = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi a^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \quad (III.9)$$

En reportant cette valeur de I dans l'expression (III-6), et après avoir remplacé $a = \frac{\delta}{r}$ par sa valeur, on obtient successivement les relations suivantes :

$$K = -2\pi \text{sh} \zeta_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} \int_0^{r_0} \left(\frac{\delta}{r_1}\right)^{2k+1} \delta d\delta$$

$$K = -2\pi \text{sh} \zeta_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_0^{2k+2}}{(2k+2) (k!)^2 (2r)^{2k}} \quad (III-10)$$

qui reportées dans l'expression (a4) conduit à l'expression de la force F_{SiA} s'écrit :

$$F_{SiA} = +\left(\frac{3}{2} q - q_i\right) n^2 \pi \text{th} \zeta_0 \epsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_0^{2k+2}}{(2k+2) (k!)^2 (2r_1)^{2k}} \quad (III-11)$$

A-2) Force portante due à la répartition : p = εB

L'expression de la force portante due à la pression B, que nous noterons F_{SiB} , s'écrit :

$$F_{SiB} = -\frac{3}{2} q_n \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{r_0} \left\{ \left[\frac{\text{sh} kn(\zeta - \zeta_0)}{kn \text{ch} kn \zeta_0} - \left(\frac{\text{sh}(kn+1)(\zeta - \zeta_0)}{(kn+1) \text{ch}(kn+1) \zeta_0} \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{\text{sh} kn(\zeta - \zeta_0)}{kn \text{ch} kn \zeta_0} \right) \times \frac{1}{(kn)^2 - (kn+1)^2} \right] \delta \int_0^{2\pi} \cos \alpha \cos \theta d\psi \right\} d\delta$$

dans laquelle α est défini par la relation :

$$\alpha = \left[(kn+1)\theta - kn\phi_1 \right]$$

Calculons tout d'abord l'expression suivante que nous noterons H :

$$H = \int_0^{2\pi} \cos \alpha \cos \theta d\psi$$

C'est-à-dire encore sous forme explicite :

$$H = \int_0^{2\pi} \left\{ \cos \left[(kn+2)\theta - kn\phi_1 \right] + 2\cos \left[kn(\theta - \phi_1) \right] \right\} d\psi$$

Développons les expressions qui sont à intégrer en posant comme au § A1 :

$\theta = \theta_i + \beta$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \cos[(kn+2)\theta - kn\phi_1] &= \left[\cos(kn+2)\theta_i \cos\beta - \sin(kn+2)\theta_i \sin\beta \right] \cos kn\phi_1 \\ &\quad + \left[\sin(kn+2)\theta_i \cos\beta + \sin\beta \cos(kn+2)\theta_i \right] \sin kn\phi_1 \\ 2 \cos[kn(\theta - \phi_1)] &= 2 \left[\cos kn\theta_i \cos kn\beta - \sin kn\theta_i \sin kn\beta \right] \cos kn\phi_1 \\ &\quad + 2 \left[\sin kn\theta_i \cos kn\beta - \sin kn\beta \cos kn\theta_i \right] \sin kn\phi_1 \end{aligned}$$

Remarquons que dans tous les termes de ces deux expressions, nous rencontrons des fonctions trigonométriques de la forme : $\cos\alpha_0\theta_i$ et $\sin\alpha_0\theta_i$, (α_0 étant une constante). Comme ces fonctions vont être sommées sur l'indice i pour les "n" orifices, compte tenu de la remarque faite à l'annexe[IV], ces expressions ont une valeur nulle, et :

$$F_{siB} = 0 \quad (III-12)$$

A-3) Force portante due à la répartition : $p = \epsilon C$

L'expression de la force portante due à la pression ϵC , que nous noterons F_{sic} , s'écrit :

$$F_{sic} = + \sum_{i=1}^n q_1 n \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{r_0} \left\{ \frac{\text{sh}m(\zeta - \zeta_0)}{m \text{ch}m\zeta_0} \delta \int_0^{2\pi} \cos(m\theta - kn\phi_1) \cos\theta d\psi \right\} d\delta \quad (III-13)$$

dans laquelle $m = kn+1 > 0$

En explicitant l'expression $\cos(m\theta - kn\phi_1) \cos\theta$, et en faisant la même remarque que précédemment, on peut écrire :

$$F_{sic} = 0 \quad (III-14)$$

La valeur finale de la force portante F_{si} , compte tenu, des expressions (III.11), (III-12) et (III-14) s'écrit dès lors :

$$F_{si} = + \left(\frac{3}{2} q - q_1\right) n^2 \pi \text{th} \zeta_0 \epsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_0^{2k+2}}{(2k+2)(k!)^2 (2r_1)^{2k}} \quad (III-15)$$

B) Calcul de la force portante F_{Di}

La force portante F_{Di} est une force qui est dirigée suivant la ligne des centres, et qui a pour expression d'après la relation (48)

$$F_{Di} = - \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \epsilon p_{1v} \cos \theta \delta \delta d\psi \right\} \quad (\text{III-16})$$

dans laquelle p_{1v} nous est donnée par la relation (38) qui s'écrit :

$$p_{1v} = -q_3 n \frac{\text{sh}(\zeta - \zeta_0) \cos \theta}{\text{ch} \zeta_0} - 12\mu \frac{r_1^2}{h_0^2} \left(1 - \frac{\text{ch} \zeta}{\text{ch} \zeta_0} \right) \cos \theta$$

$$- q_3 n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{shm}(\zeta - \zeta_0)}{m \text{ch} m \zeta_0} \cos (m\theta - kn\phi_1)$$

L'intégration de cette répartition de pression, suivant l'expression (III.16) est similaire à l'intégration développée dans le § précédent, nous en donnons directement le résultat qui s'écrit :

$$F_{Di} = - \left[\pi n^2 q_3 \text{th} \zeta_0 \gamma - 6\mu n \frac{r_1^2}{h_0^2} \left(\pi r_0^2 - \frac{2\pi}{\text{ch} \zeta_0} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_0^{2k+2}}{(2k+2)(k!)^2 (2r_1)^{2k}} \right) \right] \quad (\text{III.17})$$

C) Calcul de la force portante F_{Ni}

La force portante F_{Ni} est une force qui est dirigée suivant la direction normale à la ligne des centres; elle a pour expression, d'après la relation (48) :

$$F_{Ni} = - \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \epsilon p_{1d} \cos \theta \delta \delta d\psi \right\}$$

dans laquelle p_{1d} nous est donné par la relation (36) qui s'écrit :

$$p_{1d} = 6\mu \frac{r_1^2}{h_0^2} (\omega_1 - 2\phi) \sin \theta \left(1 - \frac{\text{ch} \zeta}{\text{ch} \zeta_0} \right)$$

$$+ q_2 n \sum_{k=0}^{\infty} \mp \frac{\text{shm}(\zeta - \zeta_0)}{m \text{ch} m \zeta_0} \sin \left[(kn \pm 1)\theta - kn\phi_1 \right]$$

De la même manière que précédemment, nous procédons à l'intégration de cette répartition de pression, et la valeur de F_{Ni} s'écrit dès lors comme suit :

$$F_{Ni} = \left[+\pi n^2 q_2 \text{th} \zeta_0 \gamma - 3\mu \frac{r_1^2}{h_0^2} n (\omega_1 - 2\phi) \left(\pi r_0^2 - \frac{2\pi}{\text{ch} \zeta_0} \gamma \right) \right] \epsilon \quad (\text{III.18})$$

avec :

$$\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_0^{2k+2}}{(2r_1)^{2k} (2k+2)(k!)^2} \quad (\text{III.19})$$

En résumé, les forces portantes F_{Si} , F_{Di} , F_{Ni} s'écrivent :

$$F_{Si} = \left(\frac{3}{2} q - q_1\right) n^2 \pi t h \zeta_0 \gamma \varepsilon$$

$$F_{Di} = - \pi n^2 q_3 t h \zeta_0 \gamma - 6 \mu n \frac{r_1^2}{h_0^2} \left(\pi r_0^2 - \frac{2\pi}{ch \zeta_0} \gamma \right) \varepsilon$$

$$F_{Ni} = \pi n^2 q_2 t h \zeta_0 \gamma - 3 \pi \mu n \frac{r_1^2}{h_0^2} (\omega_1 - 2\phi) \left(r_0^2 - \frac{2}{ch \zeta_0} \gamma \right) \varepsilon$$

ANNEXE IV

REMARQUE A PROPOS DE LA VALEUR DES EXPRESSIONS SUIVANTES

$$\sum_{i=1}^n \cos 2(\theta_i + \beta) \quad (IV-1)$$

$$\sum_{i=1}^n \cos(kn \pm 2)\theta_i, \quad \sum_{i=1}^n \sin(kn \pm 2)\theta_i \quad (IV-2)$$

$$\sum_{i=1}^n \cos kn\theta_i, \quad \sum_{i=1}^n \sin kn\theta_i \quad (IV-3)$$

Dans ces expressions :

$$\theta_i = \phi_1 + \frac{2\pi}{n} (i-1) \quad (IV-4)$$

n = nombre d'orifices

k = indice variant de 0 à ∞

L'expression (IV.1) peut encore s'écrire :

$$\sum_{i=1}^n \cos 2(\theta_i + \beta) = \cos 2\beta \sum_{i=1}^n \cos 2\theta_i - \sin 2\beta \sum_{i=1}^n \sin 2\theta_i$$

nous nous proposons dès lors de calculer d'une manière générale les expressions :

$$\sum_{i=1}^n \cos \alpha_0 \theta_i, \quad \sum_{i=1}^n \sin \alpha_0 \theta_i \quad (IV-5)$$

dans lesquelles α_0 désigne une constante pour les valeurs de k et n fixées.

Les expressions (IV-5) peuvent encore s'écrire, si nous remplaçons la valeur de θ_i par son expression (IV-4) :

$$\sum_{i=1}^n \cos \alpha_0 \theta_i = \cos \alpha_0 \phi_1 \sum_{i=1}^n \cos \alpha_0 \frac{2\pi}{n} (i-1) - \sin \alpha_0 \phi_1 \sum_{i=1}^n \sin \alpha_0 \frac{2\pi}{n} (i-1) \quad (IV-6)$$

$$\sum_{i=1}^n \sin \alpha_0 \theta_i = \sin \alpha_0 \phi_1 \sum_{i=1}^n \cos \alpha_0 \frac{2\pi}{n} (i-1) + \cos \alpha_0 \phi_1 \sum_{i=1}^n \sin \alpha_0 \frac{2\pi}{n} (i-1) \quad (IV-7)$$

Calculons tout d'abord la valeur des expressions suivantes :

$$A_{n-1} = \sum_{i=1}^n \cos \alpha_0 \frac{2\pi}{n} (i-1)$$

$$B_{n-1} = \sum_{i=1}^n \sin \alpha_0 \frac{2\pi}{n} (i-1)$$

qui s'écrivent encore en posant :

$$\left. \begin{aligned} A_{n-1} &= \sum_{j=0}^{n-1} \cos \alpha_0 \frac{2\pi}{n} j \\ B_{n-1} &= \sum_{j=0}^{n-1} \sin \alpha_0 \frac{2\pi}{n} j \end{aligned} \right\} \quad j = i-1, \quad (IV-8)$$

Nous pouvons remarquer que les expressions A_{n-1} et B_{n-1} sont respectivement les parties réelle et imaginaire de la grandeur complexe C_{n-1} définie comme suit :

$$C_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{i \alpha_0 \frac{2\pi}{n} j}$$

Développons l'expression C_{n-1} , il vient :

$$C_{n-1} = 1 + e^{i \alpha_0 \frac{2\pi}{n}} + \dots + e^{i \alpha_0 \frac{2\pi}{n} (n-1)}$$

qui est nulle pour $n > 1$ et égale à 1 pour $n=1$.

Par conséquent :

$$A_0 = 1, B_0 = 0$$

$$A_{n-1} = B_{n-1} = 0 \text{ pour } n > 1$$

Compte tenu de ce résultat les expressions (IV.8), (IV.6), (IV.7) entraînent les relations :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \cos \alpha_0 \theta_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \sin \alpha_0 \theta_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{pour } n > 1$$

d'où il résulte que les valeurs de toutes les expressions énumérées en début de paragraphe sont nulles pour $n > 1$.

$$\sum_{i=1}^n \cos 2(\theta_i + \beta) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \cos(kn+2)\theta_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \sin(kn+2)\theta_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \cos kn\theta_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \sin kn\theta_i = 0$$

} pour $n > 1$

ANNEXE VREMARQUE A PROPOS DU CALCUL DES INTEGRALESQ₁ ET Q₂

$$Q_1 = \int_0^{r_1} \delta \left\{ \int_0^{2\pi} e^{a \sin \psi} d\psi \right\} d\delta$$

$$Q_2 = \int_0^{r_1} \delta \left\{ \int_0^{2\pi} e^{-a \sin \psi} d\psi \right\} d\delta$$

1) Etude de l'intégrale Q₁

Posons :

$$E_1 = \int_0^{2\pi} e^{a \sin \psi} d\psi$$

Cette expression peut encore s'écrire :

$$E_1 = \int_0^{\pi} e^{a \sin \psi} d\psi + \int_{\pi}^{2\pi} e^{a \sin \psi} d\psi$$

Effectuons sur la deuxième intégrale de cette expression, le changement de variable : $\psi - \pi = y$; ce qui entraîne :

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{a \sin \psi} d\psi = \int_0^{\pi} e^{-a \sin y} dy$$

d'où

$$E_1 = \int_0^{\pi} (e^{a \sin \psi} + e^{-a \sin \psi}) d\psi$$

et l'expression de Q₁ s'écrit dès lors :

$$Q_1 = \int_0^{r_1} \delta \left\{ \int_0^{\pi} (e^{a \sin \psi} + e^{-a \sin \psi}) d\psi \right\} d\delta$$

2) Etude de l'intégrale Q₂

Posons :

$$E_2 = \int_0^{2\pi} e^{-a \sin \psi} d\psi$$

En développant cette intégrale, et en effectuant le même changement de variable, que précédemment on obtient :

$$E_2 = \int_0^\pi (e^{a \sin \psi} + e^{-a \sin \psi}) d\psi$$

et l'expression Q_2 s'écrit alors, en remarquant que :

$$E_1 = E_2,$$

$$Q_1 = Q_2 = \int_0^{r_1} \delta \left\{ \int_0^\pi (e^{a \sin \psi} + e^{-a \sin \psi}) d\psi \right\} d\delta$$

NOTATIONS ET SYMBOLES UTILISES

F_S	: Force portante du palier dirigée suivant la ligne des centres, intervenant avec ϵ
F_N	: Force portante du palier dirigée suivant la normale à la ligne des centres
F_D	: Force portante du palier dirigée suivant la ligne des centres, intervenant avec ϵ
F_{Sr}	: Force portante du palier
F_{Nr}	: Force portante du palier
F_{Dr}	: Force portante du palier
	} Tenant compte du diamètre des orifices
K	: Rigidité
K_0	: Rigidité statique (vitesse de rotation de l'arbre nulle)
K_w	: Rigidité statique (vitesse de rotation de l'arbre constante)
K_d	: Rigidité dynamique
L	} Constantes géométriques du palier
M^*	
N	
M_a	: Couple de frottement sur l'arbre
M_c	: Couple de frottement sur le coussinet
M	: Couple de frottement dans le palier
O_1	: Centre du tourillon
O_2	: Centre du coussinet
P_{Sr}	: Force extérieure appliquée au palier et dirigée suivant la ligne des centres
P_{Nr}	: Force extérieure appliquée au palier et dirigée suivant la normale à la ligne des centres
P_T	: Force extérieure appliquée au palier
P_{uf}	: Puissance perdue par frottement
P_{up}	: Puissance fournie par la pompe
P_{ut}	: Puissance totale mise en jeu
Re_c	: Nombre de Reynolds critique
T	: Nombre de Taylor
U_1, U_2	: Vitesses tangentielles du tourillon, et du coussinet

V_1, V_2	:	Vitesses radiales du tourillon et du coussinet
d_0	:	diamètre d'un orifice
d_1	:	diamètre du tourillon
d_c	:	diamètre d'un capillaire
e	:	distance entre les centres du coussinet et du tourillon
e_c	:	distance complexe
e^{*3}	:	Coefficient relatif aux restrictions extérieures
f_x	:	} Composante de la force volumique
f_y	:	
f_z	:	
h	:	jeu entre le tourillon, et le coussinet
h_0	:	jeu radial
l	:	largeur du coussinet
l_c	:	longueur du capillaire
m_1	:	masse de l'arbre
p	:	pression
p_t	:	pression fournie par la pompe
q	:	} Coefficient relatif aux orifices
q_1	:	
q_2	:	
q_3	:	
q^*	:	Coefficient réduit = q/p_t
q_1^*	:	Coefficient réduit = q_1/p_t
q_{vj}	:	Débit à travers un orifice
q_v	:	Débit total du palier
r_0	:	rayon d'un orifice
r_1	:	rayon du tourillon
r_2	:	rayon du coussinet
s_c	:	section du capillaire
s_d	:	section du diaphragme
t	:	temps

u	:	} Composante du vecteur vitesse d'une particule fluide
v	:	
w	:	
x	:	} Coordonnées précisant la position d'une particule fluide à l'instant t.
y	:	
z	:	
α	:	Coefficient de restrictions ($\alpha = 1/2$ pour un diaphragme $\alpha = 1$ pour un capillaire)
α_1	:	$(kn \pm 1) \theta - kn \dot{\varphi}_1$
γ_{01}	:	Accélération du centre du tourillon
γ_0	:	Rapport des pressions $\gamma_0 = p_{0i}^*/p_t$
γ_1	:	Rapport des pressions $\gamma_1 = p_{1s1}^*/p_t$
δ	:	Coordonnées d'un point appartenant à un orifice
ϵ	:	excentricité relative
ϵ, ϵ''	:	Dérivée première et seconde de l'excentricité relative
λ	:	Coefficient caractéristique des restrictions
$v = \zeta_0$:	Elancement du palier $v = l/d_1$
μ	:	Viscosité dynamique du fluide
ρ	:	Masse volumique du fluide
σ	:	Angle repérant la force extérieure appliquée au palier par rapport à la direction fixe 0_0x_0
τ	:	Angle repérant la force extérieure appliquée au palier par rapport à la direction 0_1n
ξ	:	} $0_2\xi\eta\zeta$ repère lié au tourillon
η	:	
ζ	:	
θ	:	Coordonnée précisant la position d'une particule fluide
θ_i	:	Angle $\phi_1 + \frac{2}{n} (i-1)$
ψ	:	Coordonnée d'un point appartenant à un orifice
χ	:	Exposant de l'évolution polytrophique
ω_1	:	vitesse de rotation du tourillon

ω_E : Pulsation

ω_ϕ : Pulsation

Δ : Laplacien

ψ : Angle que fait la direction de la ligne des centres avec la direction fixe O_0y_0

ϕ_1 : Angle repérant le 1er orifice

BIBLIOGRAPHIE

1. F.M. STANSFIELD.- Hydrostatic Bearings For machine Tools. The Machinery Publishing Co-Ltd.
2. D. NICOLAS - J. FRENE - D. BERTHE.- La lubrification hydrostatique - Application aux butées. Revue Energie Fluide n° 59 (mars p. 63 à 67) n° 60 (avril 1973 p. 85 à 91).
3. C. CHARCOSSET.- Techniques de l'Ingénieur
4. O. PINKUS - STERNLICHT.- Théory of hydrodynamic lubrication. Mc Graw Hill Book Compagny Inc - 1961.
5. G.I. TAYLOR.- The stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders - Phil, Trans. A223 (1923).
6. A. DYMENT - Cours de Mécanique des fluides
Université de LILLE I
7. TIPEI.- Theory of lubrication. Stanford University Press (1962).
8. C. CHARCOSSET.- Butées et paliers hydrostatiques alimentés par des séries d'orifices. P.S.T. Arts et Metiers (1971).
9. LELOUP.- Etude de la lubrification Dunod Paris (62) p. 100.
10. I.S. GRADSHTEYN - I.M. RYZHIK.- Table of integrals series and products. Academic Press New-York and London (1965)
11. J. FRENE.- Contribution à l'étude des régimes de transition dans les paliers lisses. Thèse Lyon 1970.
12. R. BOUDET.- Effet de saut dans les films minces de patins et paliers hydrodynamiques Thèse Paris 75.

13. V.N. CONSTANTINESCU.- - Sur la dynamique des paliers à air publié dans Studii si cercetari de mecanica aplicata, Acad RPR, 1960, 11, 4 - p. 317 à 330.

- On Hydrodynamic instability of gas lubricated journal Bearings - Journal of Basic Engineering Sept 1965 - p. 579-588

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 - EQUATION DE REYNOLDS.....	4
CHAPITRE 2 - RESOLUTION DE L'EQUATION DE REYNOLDS.....	14
- Résultats numériques.....	23
- Commentaires à propos du diamètre des orifices.....	29
CHAPITRE 3 - CALCUL DE LA FORCE PORTANTE DU PALIER EN TENANT COMPTE DU DIAMETRE DES ORIFICES	
- Généralités.....	31
- Etude géométrique du domaine S_j	31
- Calcul des forces portantes.....	32
- Tableau récapitulatif des forces portantes du palier.....	34
- Nature des forces portantes du palier.....	35
- Comparaison des résultats obtenus en négligeant le diamètre des orifices, et en considérant l'influence du diamètre.....	36
CHAPITRE 4 - RIGIDITE DU PALIER	
- Généralités.....	39
- Etude statique à vitesse de rotation nulle.....	39
- Etude statique à vitesse de rotation de l'arbre constante.....	41
- Etude de la raideur dynamique.....	43
- Planche 4-1 à 4-11.....	48
CHAPITRE 5 - DETERMINATION DU COUPLE DE FROTTEMENT HYDRAULIQUE	
- Ecoulement et contrainte de cisaillement.....	59
- Action tangentielle due au fluide sur les surfaces qui délimitent le palier.....	59
- Action tangentielle due au fluide s'exerçant sur le coussinet....	60
- Action tangentielle due au fluide s'exerçant sur le tourillon....	68
- Couple de frottement dans le palier.....	69
- Bilan des puissances.....	70

CHAPITRE 6 - MACHINE D'ESSAI

- Introduction.....	74
- Schéma cinématique du palier et principe de réalisation du palier d'essai.....	75
- Choix des mouvements absolus.....	76
- Dispositif de mise en charge.....	76
- Mécanisme et guidage du coussinet.....	77
- Choix des restrictions extérieures.....	79
- Grandeurs à mesurer.....	84

CHAPITRE 7 - STABILITE

- Généralités.....	95
- Etude de la stabilité d'un palier.....	101
- Etude de la stabilité d'un palier, dans le cas où la charge extérieure est constante en grandeur et en direction, le couple reste constant (solicitation statique), et la perturbation $\delta\omega_1$ est nulle.....	103
- Etude de la stabilité du palier, dans le cas où la charge extérieure est constante en grandeur et direc- tion, le couple fourni au palier est constant (solli- citations statiques) et $\delta\omega_1$ est différent de zéro.....	108
- Etude de la stabilité du palier dans le cas d'une solicitation dynamique.....	111

CONCLUSION.....	114
-----------------	-----

ANNEXE I - RAPPEL DE MECANIQUE DES FLUIDES.....	116
---	-----

ANNEXE II - EXPRESSION DU JEU DANS LE FILM "h".....	120
---	-----

ANNEXE III - CALCUL DES FORCES PORTANTES F_{Si} , F_{Di} , F_{Ni}	122
---	-----

ANNEXE IV - REMARQUE A PROPOS D'EXPRESSIONS.....	129
--	-----

ANNEXE V - REMARQUE A PROPOS DES INTEGRALES Q_1 et Q_2	132
--	-----

NOTATIONS ET SYMBOLES UTILISES.....	134
-------------------------------------	-----

BIBLIOGRAPHIE.....	138
--------------------	-----

=====