

52156
1977
6

REMERCIEMENTS

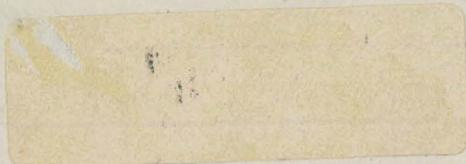
Nous exprimons notre profonde gratitude à Monsieur le Professeur P. FLORENT, Directeur du Laboratoire de Mécanique des Fluides du Centre Universitaire de VALENCIENNES, pour son aide constante et ses encouragements qui nous ont permis de mener à bien ce travail.

Nous remercions vivement Monsieur le Professeur G. GONTIER, Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de LILLE, Messieurs les Professeurs G. COGNET de l'Université de NANCY, M. LERAY du Centre Universitaire de VALENCIENNES, R. Kh ZEYTOUNIAN de l'Université de LILLE d'avoir accepté de bien vouloir juger ce travail.

Nous sommes reconnaissant à Monsieur C. TOURNIER pour les conseils qu'il nous a donné lors de l'étude expérimentale.

Nous remercions amicalement Mademoiselle M. CAMBIE, Technicienne au C.N.R.S. qui a bien voulu assurer la coordination technique avec l'ordinateur de l'Université de LILLE I.

Enfin, nous remercions Madame L. GOUEMAND qui a contribué à la réalisation matérielle de ce mémoire sans oublier les Techniciens du Centre Universitaire de VALENCIENNES qui ont réalisé notre montage expérimental.



- TABLES DES MATIERES -

	Pages
INTRODUCTION	1
-oOo-	
<u>CHAPITRE I</u> - Equations de base et conditions aux limites.	
I - Choix des coordonnées de référence.	21
II - Equations de NAVIER-STOKES.	22
III - Conditions aux limites et initiales.	23
IV - Formes adimensionnelles.	24
V - Conclusion.	26
<u>CHAPITRE II</u> - Solutions de l'écoulement deux cylindres infinis.	
I - Ecoulement stationnaire.	29
II - Ecoulement instationnaire.	35
III - Recherche d'une solution numérique en écoulement instationnaire.	44
IV - Conclusion.	48
<u>CHAPITRE III</u> - Méthode de calcul de l'écoulement entre deux cylindres de longueur finie.	
I - Choix d'une méthode numérique.	51
II - Etude d'un schéma numérique.	53
III - Mise au point du programme.	62
IV - Analyse de la méthode.	62
V - Cas des grands nombres de REYNOLDS.	
VI - Analyse des résultats.	65
VII - Conclusion.	69
<u>CHAPITRE IV</u> - Etude expérimentale sur des cylindres de longueur finie.	
I - Description du montage.	70
II - Principe de la méthode.	72

III - Application aux écoulements entre deux cylindres.

73

IV - Etude expérimentale.

77

V - Conclusion.

82

CONCLUSION

-000-

INTRODUCTION

I - GENERALITES

Toutes les expériences concernant l'apparition et le développement des instabilités montrent qu'un écoulement peut présenter un caractère laminaire stable lorsque le mouvement est très lent. Par contre, si la vitesse du fluide dépasse une certaine limite critique, l'écoulement laminaire stable laisse place à un écoulement à caractère tourbillonnaire dont la complexité croît avec la vitesse. Cette limite est fonction de l'importance relative des deux types de forces agissant sur les particules fluides :

- Les forces de surface comme la pression et les tensions visqueuses ;
- Les forces de volume comme les forces de pesanteur (convection libre), les forces centrifuges, les forces électriques et magnétiques.

Dans l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux, ce régime se caractérise par des instabilités symétriques et périodiques dans la direction axiale. Elles consistent en une structure de tourbillons toriques régulièrement superposés selon la direction des génératrices des cylindres et tournant alternativement dans des directions opposées.

Ce régime à caractère tourbillonnaire est lui-même un régime intermédiaire d'écoulement. En effet, on peut constater, par visualisations, qu'il

précède un régime à "caractère turbulent" mais toujours à l'intérieur des mêmes tourbillons toriques régulièrement superposés (voir photos). C'est pourquoi on l'appelle "régime secondaire" ou "régime transitoire". Traiter un tel problème se révèle d'une grande complexité, c'est pourquoi, il convient de choisir un écoulement qui possède un grand degré de symétrie. C'est le cas des écoulements dans un tube circulaire ou sur une plaque plane, mais alors on constate que le domaine transitoire est trop restreint pour que l'on puisse en observer le régime.

Par contre l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux a l'intérêt de posséder un large domaine tout en étant relativement simple. Les théories existantes ont pour but de comprendre comment naît l'instabilité à partir du régime laminaire permanent. Elles définissent un critère de son apparition et permettent de suivre son évolution jusqu'à l'établissement d'un écoulement de caractère turbulent.

II - THEORIES SUR LA STABILITE

La stabilité d'un écoulement est définie par rapport à une perturbation existante ou introduite dans le fluide. Le mouvement est stable s'il tend à revenir à son état initial ; il est instable dans le cas contraire et donne naissance à un nouveau type d'écoulement. Mathématiquement il faudra prévoir la forme et faire une hypothèse sur l'amplitude de la perturbation. Si la forme est observable par l'expérience, on peut faire deux hypothèses différentes sur l'amplitude :

- La perturbation est très petite et n'a pas d'influence sur le mouvement moyen (théorie linéaire) ;
- La perturbation est d'amplitude finie et agit sur le mouvement moyen (théorie non linéaire).

1 - La théorie linéaire

Avant de décrire la théorie linéaire, il convient de donner la solution en régime laminaire stable et permanent de l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux. COUETTE (1890) a été le premier à faire l'étude de ce problème pour déterminer une propriété caractéristique de chaque fluide, à savoir sa viscosité et donner sa valeur. Dans le même temps, il vérifie que la courbure de la surface mobile, entraînant l'existence de forces centrifuges, influe sur la limite de vitesse à ne pas dépasser pour laquelle les résultats obtenus sont compatibles avec la solution laminaire du mouvement. Il ne fournit cependant pas de réponse à ce phénomène. Le premier, LORD RAYLEIGH (1) l'explique et établit ainsi un critère de stabilité des fluides non visqueux. On peut le présenter comme suit :

Soit v_0 la vitesse tangentielle à la distance r_0 du centre de courbure d'une particule fluide et soit $(\frac{dp}{dr})_r$ le gradient radial de pression à la distance r . En écoulement non perturbé on a la relation d'équilibre de la particule fluide :

$$\left(\frac{dp}{dr}\right)_{r=r_0} = \rho \cdot \frac{v_0^2}{r_0}$$

Si la particule se déplace de r_0 à r , le moment par rapport au centre de la quantité de mouvement de la particule se conservant, on a $\rho \bar{v} r = \rho v_0 r_0$ où \bar{v} est la nouvelle vitesse. Par suite la force centrifuge s'écrit :

$$\rho \frac{\bar{v}^2}{r} = \rho v_0^2 \cdot \frac{r_0^2}{r^3}$$

- Lorsque dans l'écoulement, la quantité vr reste constante quand

r augmente, on a $vr = v_0 r_0$ pour $r > r_0$ où v est la vitesse en r et $\frac{v^2}{r} = v_0^2 \cdot \frac{r_0^2}{r^3} = \frac{v_0^2}{r}$. Cela montre que $(\frac{dp}{dr})_{r=r} = (\rho \frac{v^2}{r}) = \rho \frac{v_0^2}{r}$ et dans ce cas l'écoulement est dans un état de stabilité marginale.

- Par contre, si la quantité vr décroît quand r augmente, on a $vr < v_0 r_0$ et $\frac{v^2}{r} < v_0^2 \cdot \frac{r_0^2}{r^3}$ avec $\frac{v_0^2}{r} = v_0^2 \cdot \frac{r_0^2}{r^3}$. On voit que dans ce cas $(\frac{dp}{dr})_{r=r} < \rho \frac{v_0^2}{r}$. La force centrifuge de la particule est alors supérieure au gradient de pression radial qui règne au sein du fluide. Un tel mouvement est instable et la particule s'éloigne de sa position d'équilibre primitive.

- Enfin si $vr > v_0 r_0$ on trouve $(\frac{dp}{dr})_{r=r} > \rho \frac{v_0^2}{r}$. Un tel mouvement est toujours stable.

Le critère de stabilité d'un fluide non visqueux dans l'écoulement de COUETTE peut donc se formuler sous la forme $\omega_2 r_2^2 > \omega_1 r_1^2$, les indices 1 et 2 s'attachant respectivement aux cylindres intérieur et extérieur. Dans le cas le plus général, la résolution de ce problème à symétrie de révolution de l'écoulement d'un fluide incompressible en régime instationnaire, s'effectue à partir des équations de NAVIER-STOKES écrites en coordonnées cylindriques. (Fig. 1.1.). En tenant compte de la symétrie de révolution qui s'exprime par $\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv 0$, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u ; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v ; \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w ; \end{array} \right. \quad (1.1)$$

et l'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

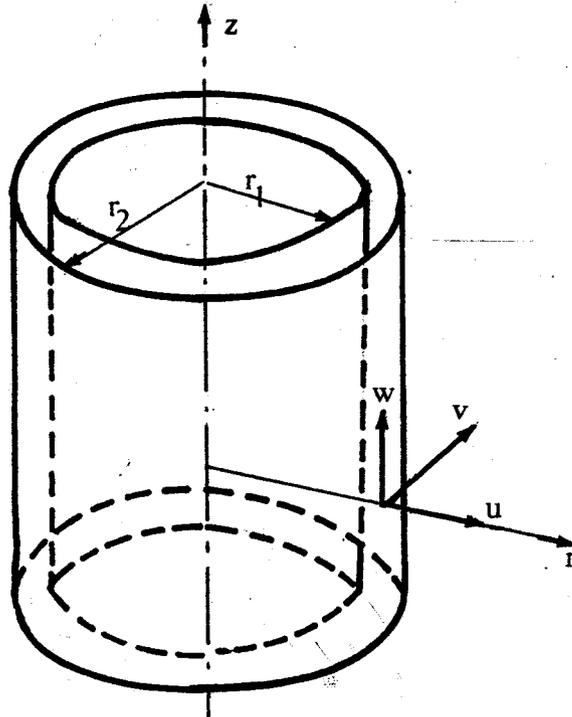


Fig. 1.1

a) Solution de l'écoulement en régime laminaire stable et permanent.

Comme le montrent les visualisations, il est supposé qu'il n'y a pas de mouvement secondaire, soit $u = w = 0$. On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} \rho \frac{v^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

muni des conditions aux limites :

et

$$\begin{aligned} v &= \omega_1 r_1 \text{ pour } r = r_1 \\ v &= \omega_2 r_2 \text{ pour } r = r_2 \end{aligned}$$

Moyennant l'hypothèse v indépendant de z , on trouve la solution :

$$v = Ar + \frac{B}{r} \quad \text{où}$$

$$A = \omega_1 \cdot \frac{1-m\lambda^2}{1-\frac{1}{\lambda^2}} \quad \text{avec } m = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \text{et } \lambda = \frac{r_2}{r_1}$$

$$B = \omega_1 r_1^2 \cdot \frac{1-m}{1-\frac{1}{\lambda^2}} \quad (1.4)$$

Il reste que l'indépendance de v vis à vis de la variable axiale z est une hypothèse liée à $u = w = 0$. Nous verrons dans les prochains chapitres, si cette hypothèse conduit toujours à la solution (1.4)

La solution (1.4) représente donc la superposition d'un tourbillon potentiel et d'un écoulement où le fluide tourne en bloc.

En régime instationnaire, le système (1.3) n'a été résolu, à notre connaissance, que dans le cas où le cylindre intérieur passe brusquement de ω_0 à ω_1 (impulsion) par COGNET(12). Nous aborderons ce problème pour le cas d'une variation quelconque de la vitesse du cylindre intérieur en nous limitant cependant aux faibles vitesses.

b) Solution de l'écoulement en régime laminaire perturbé.

Par la suite, G.I. TAYLOR (2) reprend les travaux de LORD RAYLEIGH. En 1923 il publie ses résultats où il décrit la forme des instabilités et le régime à partir duquel elles apparaissent. Il arrive à la conclusion que l'écoulement secondaire consiste en une structure de cellules régulièrement superposées suivant la direction des génératrices du cylindre et d'axe OZ. Il prévoit également que l'instabilité se situe dans le domaine prévu par Lord RAYLEIGH (fig.1.2).

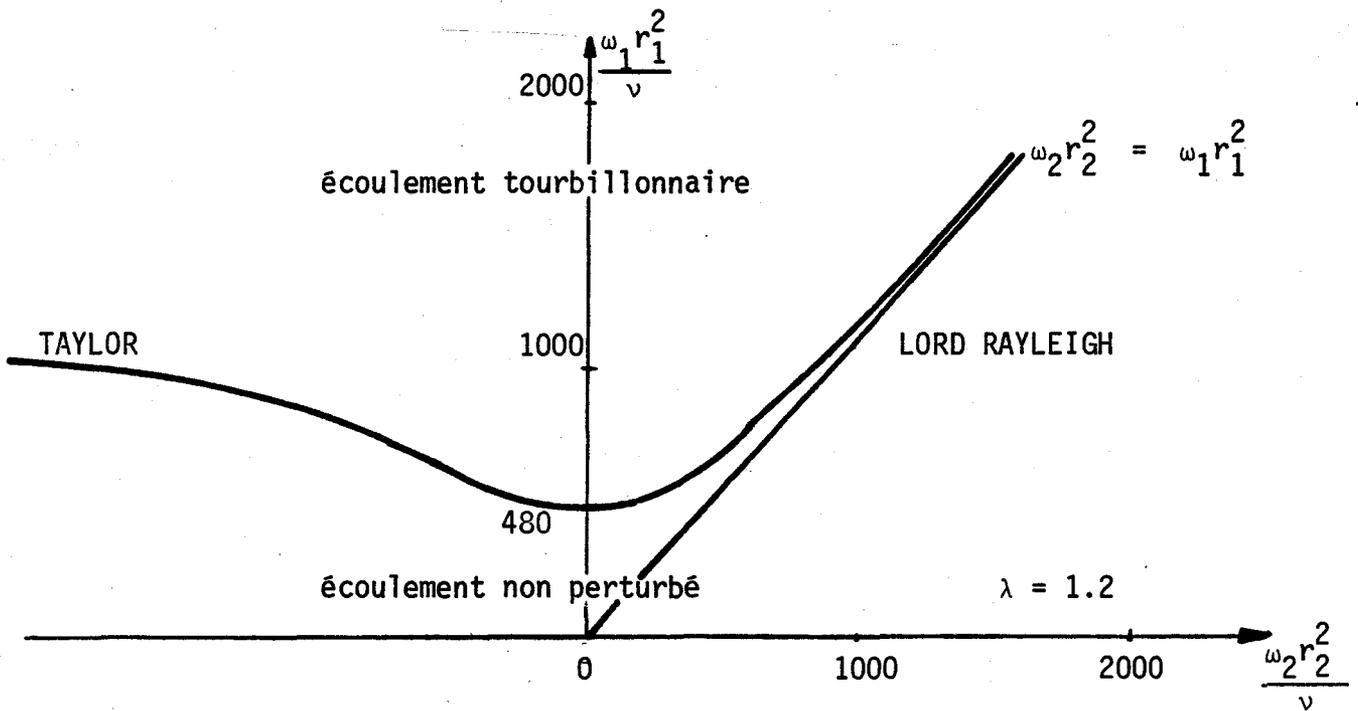


Fig. 1.2

- 1 écoulement tourbillonnaire simple.
- 2 écoulement tourbillonnaire double.

La théorie linéaire peut être présentée comme suit. G.I. TAYLOR suppose que le régime tourbillonnaire se compose du mouvement moyen v_0 déterminé en (1.4) et d'une perturbation de petite amplitude devant v_0 . Cette perturbation ne dépendant que des variables d'espace et de temps r, z, t est sans action sur l'écoulement moyen. Soit :

$$\begin{cases} u = u_1 \cos \lambda' z e^{kt} \\ v = v_0 + v_1 \cos \lambda' z e^{kt} = v_0 + \bar{v} \\ w = w_1 \sin \lambda' z e^{kt} \end{cases} \quad (1.5)$$

avec $v_0 = Ar + \frac{B}{r}$

En négligeant les termes quadratiques, produits de perturbations, on obtient le système linéarisé suivant à partir de (1.1) :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{v_0^2}{r} - \frac{2v_0 \bar{v}}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u ; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \left(\frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} \right) &= v \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v ; \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w \end{aligned} \right. \quad (1.6)$$

et l'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.7)$$

Si u_1, v_1, w_1 ne dépendent que de r et en éliminant la pression p dans les équations (1.6) on aboutit au système linéarisé :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{u_1}{r} + \frac{du_1}{dr} + \lambda^2 w_1 &= 0 ; \\ v \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - \lambda^2 - \frac{k}{v} \right) v_1 - 2A u_1 &= 0 ; \\ \frac{v}{\lambda} \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \lambda^2 - \frac{k}{v} \right) w_1 + 2 \left(A + \frac{B}{r^2} \right) v_1 + v \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - \lambda^2 - \frac{k}{v} \right) u_1 &= 0. \end{aligned} \right. \quad (1.8)$$

avec les conditions aux limites $u_1 = v_1 = w_1$ pour $r = r_1$ et $r = r_2$.

Pour résoudre ce système G.I. TAYLOR suppose que u_1 , v_1 et w_1 sont développables en séries de fonctions de BESSEL d'ordre 0 et 1. Les conditions aux limites fournissent donc un système linéaire et homogène entre les coefficients et ces séries. L'existence d'une solution différente de zéro impose un déterminant nul d'où l'équation caractéristique des valeurs propres k : $F(\lambda', Re, \lambda, m) = 0$ où Re est un nombre de REYNOLDS défini par $Re = \frac{r_1^{\omega_1} d}{\nu}$ avec $d = r_2 - r_1$. On peut donc déterminer le coefficient d'évolution instationnaire $k^{(*)}$ lorsque Re, λ', λ et m sont fixés. La figure (1.2) donne la courbe limite à laquelle apparaît l'instabilité (stabilité marginale, $k = 0$). Pour déterminer λ' TAYLOR suppose que d est très petit devant r_1 et définit un paramètre :

$$P = \frac{\nu^4 (1 + \lambda^2)}{2d^3 (1-m)^2 (1-m)} \cdot \frac{1}{\omega_1^2 r_1}$$

dont la valeur critique P_c détermine la vitesse ω_1 au-delà de laquelle apparaissent les tourbillons. Ainsi pour $1 > m \geq 0$, cette valeur est donnée par :

$$P_c = 0,0571 \cdot \left[\frac{1+m}{1-m} - 0,652 (\lambda - 1) \right] + 56,10^{-5} / \left[\frac{1+m}{1-m} - 0,652 (\lambda - 1) \right]$$

comme $\lambda \approx 1$ on peut écrire que :

$$P_c \approx 0,0571 \cdot \left(\frac{1+m}{1-m} \right)$$

- Pour $m = 0$ ($\omega_2 = 0$) il trouve $P_c = 0,0571$, ce qui correspond à $\lambda' = \frac{\pi}{d}$. Par conséquent la répartition axiale des tourbillons s'effectue suivant une période $\tau = \frac{2\pi}{\lambda'} = 2d$. Autrement dit, à sa naissance, la perturbation a une hauteur égale à l'espace annulaire. On en déduit ensuite le champ des vitesses u, v, w et les lignes de courant (fig 1.3.)

 $k^{(*)}$ est toujours un nombre réel.

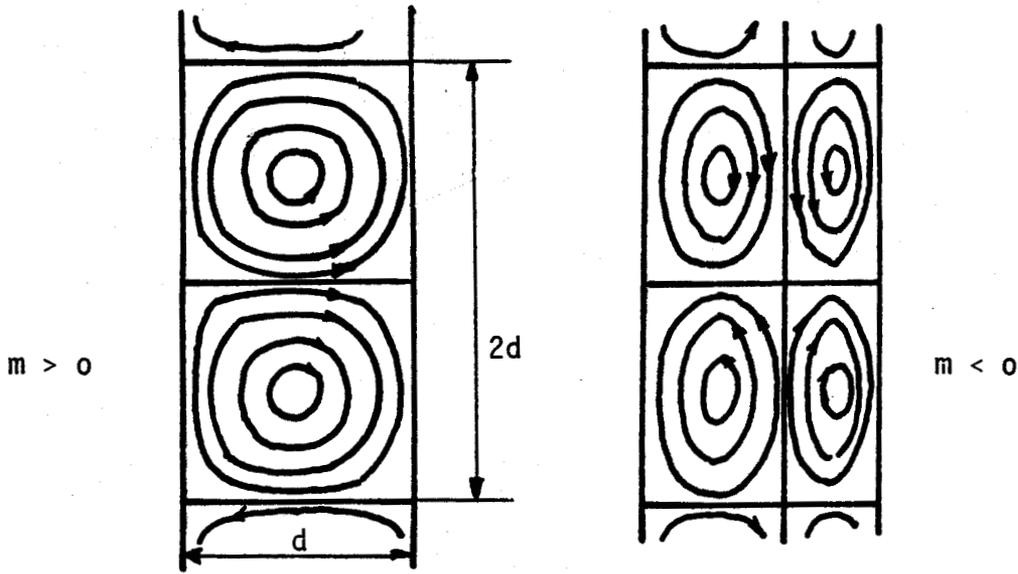


Fig. 1.3

- Pour $m < 0$, le fluide se divise en deux régions séparées par une surface cylindrique de vitesse nulle.

Après TAYLOR d'autres théories linéaires ont été élaborées, ne différant entre elles que par leur méthode de résolution. Ainsi celle de MEKSYN (1946) consiste à prendre des solutions sous forme de développement en séries entières de $\frac{\pi}{d}$. Il établit un critère pour $0 < m < 1$ et $\lambda = 1$ mais qui reste valable jusque $\lambda = 2$, soit

$$T_M = \frac{2d^3 \cdot (1-m\lambda^2) \cdot \left[(1+m) - \frac{3}{4 R_e (1-m)} \right]}{v^2 (1+\lambda)} \cdot \omega_1^2 r_1$$

dont la valeur critique est $T_M = 1712$. Pour $m < 0$ il établit un autre critère soit :

$$T_M = \frac{2(1-m\lambda^2)^2}{v^2 (\lambda^2 - 1)^2} \cdot \frac{d'^5}{R'} \cdot \omega_1^2 \text{ avec } d' = \frac{\pi}{1,545\lambda}, \text{ et } R' = d' + r_1$$

dont la valeur critique est $T_M = 283$.

La méthode de CHANDRASEKHAR (3) consiste à écrire le système (1.8) sous la forme $(D D^* - \lambda^2 \frac{k}{v})^2 \cdot (D D^* - \lambda^2) \cdot v_1 = \frac{4A \lambda'^2}{v} \cdot (A + \frac{B}{r^2}) \cdot v_1$

avec $D = \frac{d}{dr}$ et $D^* = (\frac{d}{dr} + \frac{1}{r})$, les conditions aux limites devenant dans ce cas :

$v_1 = 0$, $(DD^* - \lambda^2) v_1 = 0$, $D.(DD^* - \lambda^2 - \frac{k}{v}) v_1 = 0$ pour $r = r_1$ et r_2
 Posant $r = r_0 + \epsilon d$ et ϵ variant de $-\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{2}$, il montre que la solution
 v_1 dépend d'une fonction $S(\epsilon)$ définie par :

$$S(\epsilon) = -\frac{1}{8\pi^2} + \frac{1}{\pi^4} + \frac{2}{2\pi^2} + \frac{\cos \pi \epsilon}{4\pi^3} + \frac{A}{2\pi^3} \left(1 + \frac{1}{5} \cos 2\pi \epsilon\right) - \frac{1}{\pi^4} \left(1 + \frac{2\pi}{5} A\right) \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi \epsilon}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2}}$$

où $A = -0,02686$.

Il obtient alors

$$\begin{cases} u_1 = -a r_1 \omega_1 P \\ v_1 = a r_1^2 \omega_1^2 \frac{d}{\lambda} S \\ w_1 = \frac{a r_1 \omega_1}{d \lambda'} \quad \text{D.P.} \end{cases} \quad (1.9.)$$

avec $P = (D^2 - \lambda^2 d^2) S$, a étant un coefficient arbitraire défini comme l'amplitude.

Enfin, il établit un critère de stabilité pour $m = 0$:

$$T_c = \frac{4 d^4 \omega_1}{(\lambda^2 - 1) v^2} \quad \text{dont la valeur critique est } T_c = 3390.$$

Nous pourrions enfin citer les travaux de GOLDSTEIN (4) et de DIPRIMA (5) qui ont montré qu'un écoulement axial stabilisait le mouvement du fluide.

2 - La théorie linéaire et l'expérience

Les résultats obtenus par cette théorie sont souvent très proches de ceux observés expérimentalement par visualisation et par mesure du frottement sur les cylindres (voir paragraphe II). Cependant, si on l'applique à l'écoulement entre deux plaques parallèles dont l'une est mobile,

elle laisse prévoir que le mouvement est toujours stable, alors que l'on constate l'existence d'une transition. Cette anomalie peut s'expliquer par les hypothèses servant de base à la théorie :

a) On utilise un développement limité au premier terme de la perturbation ;

b) On ne tient pas compte des tensions de REYNOLDS (termes quadratiques des équations du mouvement) ;

c) Toutes les longueurs d'onde λ' étant possibles, on ne peut prévoir celle qui est observée expérimentalement.

Enfin la théorie linéaire laisse indéterminée l'amplitude a de la perturbation.

3 - La théorie non linéaire

Considérons un écoulement à nombre de REYNOLDS fixé, affecté par une petite perturbation. Selon la théorie linéaire nous savons qu'elle va croître exponentiellement selon t depuis son apparition. Par la suite elle va atteindre une amplitude telle que la quantité de mouvement qu'elle transporte ne sera plus négligeable. Les tensions de REYNOLDS associées à ce mouvement doivent être prises en considération. Elles auront pour effet de déformer le mouvement moyen ce qui a pour résultat de modifier le transfert d'énergie de cet écoulement moyen à la perturbation. Comme ce transfert conditionne la croissance exponentielle, il y aura une modification de cette loi. J.T. STUART (6) a été le premier à mettre en évidence cette interaction. On peut encore séparer l'écoulement entre une partie moyenne et une perturbation de valeur moyenne nulle mais les deux parties seront dépendantes par l'intermédiaire des tensions de REYNOLDS. Par conséquent, l'écoulement moyen n'est plus l'écoulement laminaire original, il en diffère d'autant plus que l'amplitude de la perturbation est grande. Pour tenir compte de la distorsion de l'écoulement, il définit la perturbation par les expressions suivantes :

$$u = u' = u_1 (r, t) e^{i\lambda'z} + u_2 (r, t) e^{2i\lambda'z} + u_1^* (r, t) e^{i\lambda'z} + u_2^* (r, t) e^{2i\lambda'z} + \dots$$

et des formes identiques pour $v' = v - \bar{v} (r_1 t)$ et $w' = w$. (* dénote un nombre imaginaire conjugué et - une valeur moyenne par rapport à z).

On obtient alors les équations du mouvement moyen $\bar{v} (r_1 t)$ à partir de (1.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{u'^2}) - \frac{1}{r} \cdot (\overline{v'^2} + \overline{v^2}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}; \quad (a) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \overline{u'v'}) = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) \bar{v}; \quad (b) \end{array} \right. \quad (1.10)$$

L'équation (1.10 a) donne le gradient de pression radial équilibrant les tensions de REYNOLDS et la force centrifuge, tandis que l'équation (1.10 b) montre que l'écoulement moyen \bar{v} est fonction des tensions de REYNOLDS. D'autre part, on retient la dépendance de t car, la perturbation variant en fonction du temps, le mouvement moyen se déforme pour maintenir l'équilibre de l'énergie. Pour un état d'équilibre ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) (1.10. b) peut s'intégrer et on a :

$$\bar{v} = Ar + \frac{B}{r} + \frac{r}{\nu} \int_{r_1}^r \frac{\overline{u'v'}}{r} dr \quad (1.11)$$

$$A = \frac{\omega_1 (1 - m\lambda^2)}{1 - \lambda^2} + \frac{1}{\nu(\lambda^2 - 1)} \int_{r_0}^{r_2} \frac{\overline{u'v'}}{r} dr \quad \left(r_0 = \frac{r_1 + r_2}{2} \right)$$

$$B = \frac{\omega_1 (1 - m)r_1^2}{1 - \lambda^2} + \frac{r_1^2}{\nu(1 - \lambda^2)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\overline{u'v'}}{r} dr$$

Le mouvement moyen étant connu, on peut alors calculer les perturbations u' , v' , w' à partir des équations (2.1) et exprimer le transfert de l'énergie par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{1}{2} \rho (u'^2 + v'^2 + w'^2) r dr dz = \iint (-\rho \overline{u'v'}) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{\bar{v}}{r} \right) r dr dz -$$

$$- \mu \iint (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) r dr dz \quad (1.12)$$

où les composantes rotationnelles de la perturbation sont :

$$\xi' = - \frac{\partial v'}{\partial z}, \quad \eta' = \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial r}, \quad \zeta' = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r v')$$

L'équation (2.12) montre alors que l'accroissement d'énergie apporté par la perturbation sur un intervalle dt est égal à la différence entre l'intégrale du produit des tensions de REYNOLDS, par le cisaillement $\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{\bar{v}}{r} \right)$ (qui représente le transfert d'énergie cinétique de l'écoulement moyen à la perturbation) et la dissipation visqueuse d'énergie cinétique.

Il ne reste alors qu'à déterminer l'amplitude a de la perturbation).

Pour cela J.T. STUART suppose que le fondamental u_1, v_1, w_1 , est donné par la théorie linéaire de CHANDRASEKHAR (1.9) et qu'à tout instant on peut négliger le terme $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$. Dans le cas $m = 0$ ($\omega_2 = 0$) et pour $d \ll r_0$ l'équation (1.12) conduit à :

$$\gamma_1 \cdot \frac{da^2}{d\tau} = \gamma_2 a^2 - \gamma_3 Re^2 a^4 - \frac{\gamma_4 a^2}{\lambda'^2 Ts}$$

$$\text{avec } \tau = \frac{2\nu t}{d^2}$$

$$\gamma_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S^2 d\zeta, \quad \gamma_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Z d\zeta$$

$$\gamma_3 = -2 \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Z d\zeta \right]^2 + 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} Z^2 d\zeta$$

$$\gamma_4 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[(D^2 - \lambda'^2) \cdot P \right]^2 d\zeta$$

$$Z = -S \cdot P$$

$$P = (D^2 - \lambda'^2) \cdot S$$

$$T_s = \frac{r_1 d^3}{\lambda^2} \omega^2$$

S est donné par la théorie linéaire de CHANDRASEKHAR.

Les intégrales $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, utilisées par STUART ont pour valeur numérique :

$$\gamma_1 = 6,73 \cdot 10^{-7}, \gamma_2 = 1,33 \cdot 10^{-5}, \gamma_3 = 2,45 \cdot 10^{-10}, \gamma_4 = 0,22473$$

Si on néglige a^4 , le nombre de TAYLOR critique est donné par $\lambda^2 T_{s_c} = \frac{\gamma_4}{\gamma_2} = 1708$

L'amplitude d'équilibre (pour laquelle $\frac{\partial}{\partial t} = 0$) est alors définie par :

$$a_e^2 = \frac{5,425 \cdot 10^4}{Re^2} \cdot \left(1 - \frac{1708}{T} \right)$$

Après STUART, d'autres théories ont été élaborées. Ainsi DAVEY (7) a développé

l'étude de STUART et montré que pour un coefficient d'amplification k petit,

l'amplitude d'équilibre est donnée par une relation de la forme :

$$k a_e^2 + (k_1 + k_2 + k_3) a_e^4 = 0$$

où k_1, k_2 et k_3 représentent les différents transferts d'énergie du mouvement

moyen au fondamental u_1, v_1, w_1 , du fondamental au premier harmonique

u_2, v_2, w_2 et enfin de la distorsion au fondamental.

4 - La théorie non linéaire et l'expérience

La théorie non linéaire permet de déterminer le frottement supplémentaire

dû à la perturbation. Pour de petits espaces annulaires les théories de STUART

ou de DAVEY donnent les mêmes résultats et concordent avec les expériences

de TAYLOR à 7 % près dans un domaine $\omega < 3 \omega_c$. Rappelons que la méthode de TAYLOR

se fonde sur la mesure du couple G dû au frottement exercé par le fluide sur

les cylindres (fig. 1.4).

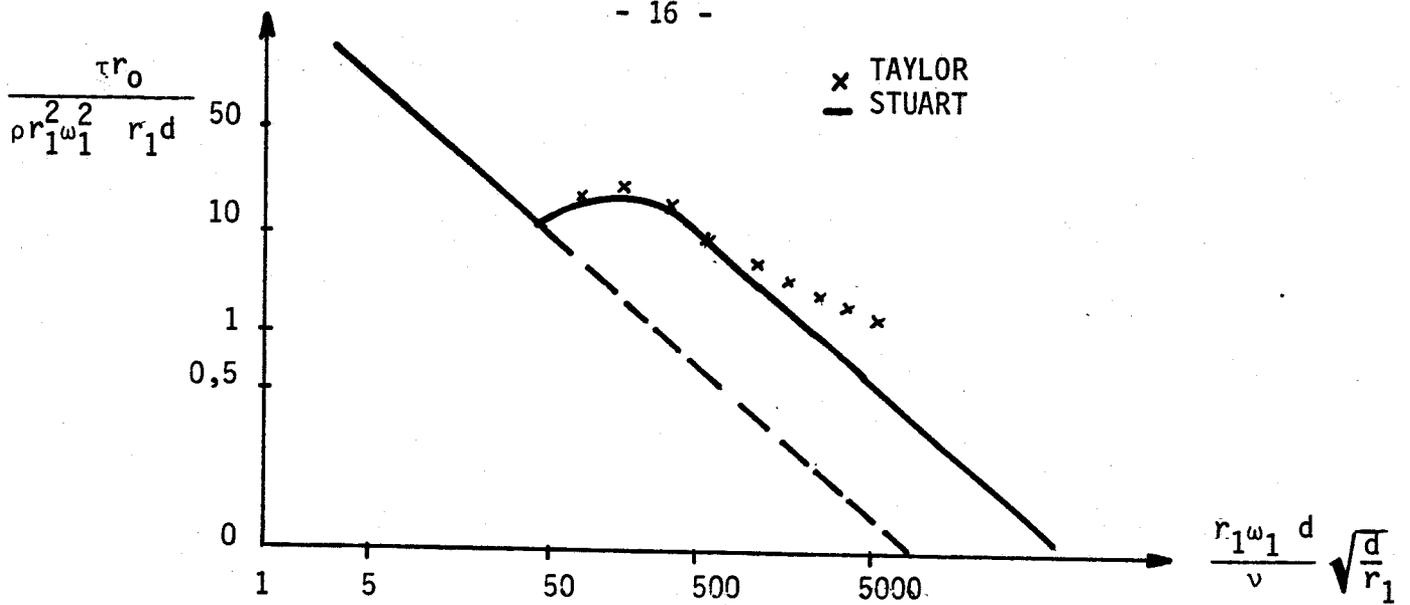


Fig. 1.4

L'analyse de DAVEY fournit des résultats non conformes aux mesures pour $\omega > 3 \omega_c$, ce qui peut signifier que l'écoulement se fait selon un mode différent de celui prévu par la théorie à partir d'une certaine vitesse au-delà de ω_c . En effet, les expériences de SCHULTZ (8) et de DONELLY (9) montrent qu'il peut apparaître un second type d'instabilité périodique suivant θ . DI PRIMA (5) a établi une théorie linéaire pour une telle perturbation et montré qu'elle apparaît à une vitesse légèrement supérieure à la vitesse critique donnée par le nombre de TAYLOR T_c . Enfin DAVEY, DI PRIMA et STUART (10) ont étudié la stabilité des tourbillons de TAYLOR d'une longueur d'onde donnée par rapport à une perturbation périodique en z et en θ . Ils montrent que ces tourbillons sont instables si la perturbation a le même nombre d'onde mais déphasée de $\frac{\pi}{2}$ en θ . Aucune instabilité n'a été trouvée pour une perturbation de même phase et le nombre de TAYLOR où apparaît cette instabilité est supérieur de 8 % à la valeur critique de T_c (pour $\omega_2 = 0$). La théorie prévoit également une configuration en spirale qui n'a pu être mise en évidence par d'autres auteurs. Enfin, pour des nombres de TAYLOR supérieurs à la valeur critique d'instabilité, un nouvel équilibre s'instaure avec des frontières oscillantes entre les cellules comme observées par COLES. Nous reviendrons sur ces résultats lors des mesures du gradient pariétal de vitesse effectuées par polarographie.

III - RECHERCHES EXPERIMENTALES

Trois méthodes ont été utilisées pour vérifier les prévisions des théories linéaires et non linéaires.

1 - Visualisation

Nous avons déjà cité cette méthode qui consiste à visualiser l'écoulement par colorant ou par suspension de particules métalliques. Elle a été utilisée par J.T. TAYLOR et lui a permis de déterminer la vitesse de rotation critique, la longueur d'onde des tourbillons ainsi que leur forme.

2 - Mesure du frottement pariétal

WENT et TAYLOR ont utilisé cette méthode en essayant d'éliminer les frottements parasites qui s'exercent aux extrémités des cylindres et DONNELLY (9) a conçu un système avec cylindres de garde destinés à éliminer cet effet. On peut dire que leurs mesures concernent des valeurs moyennes au sens de la théorie non linéaire puisqu'elles sont prises dans le sens de la périodicité.

Ces dernières années, des méthodes permettant des mesures locales ont été présentées :

a) Technique à ions : Elle consiste à recueillir sur une électrode de surface, le courant traversant le liquide conducteur de l'écoulement. DONNELLY et SCHWARZ ont montré que cette méthode est sensible à la vitesse radiale et ont pu suivre l'évolution de l'amplitude de la perturbation.

b) Sonde chauffée : L'instrument utilisé par SNYDER et LAMBERT (11) est une sonde à thermistance chauffée et placée à la surface d'un cylindre. Elle mesure la variation relative de l'écart de température entre le fluide et la sonde lorsqu'il y a mouvement. Cet écart est proportionnel à la puissance $\frac{1}{3}$ du gradient de vitesse pariétal.

c) Polarographie : C'est une méthode électrochimique dans laquelle la réaction est contrôlée par la diffusion ionique au niveau d'une microcathode

située à la paroi d'un cylindre. Elle peut être représentée par un modèle simple de transfert de matière entre l'infini (loin de l'électrode) où la concentration C du corps actif reste constante et la microélectrode où C est nulle. Une telle relation est fournie par l'équation du bilan instantané de matière appliquée au cas d'un fluide en mouvement :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \text{div}(D \cdot \vec{\text{grad}} c) - \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} c$$

où D représente le coefficient de diffusion de la substance active et \vec{V} le vecteur vitesse.

Cette méthode a été utilisée par COGNET (12). Pour une géométrie donnée il a pu identifier les différents types d'instabilité et les régimes auxquels elles apparaissent. La première instabilité est différente de celle attendue (mouvement hélicoïdal au lieu de cellules toriques) mais l'instabilité doublement périodique en θ et en z est conforme aux autres observations. Enfin les mesures de transfert moyen ont permis de calculer le frottement du fluide sur le cylindre extérieur.

d) Anémométrie à fil chaud : Cette méthode utilisée par COLES (13) et VON ATTA a le défaut de perturber l'écoulement et de plus l'interprétation des mesures obtenues est très difficile vu la complexité du champ des vitesses.

3 - Méthode numérique de traitement

Parmi les méthodes proposées pour la résolution numérique des équations régissant les écoulements bidimensionnels d'un fluide visqueux incompressible, on peut distinguer celles qui utilisent comme inconnues les fonctions de courant et le tourbillon et celles qui considèrent la vitesse et la pression. Par ailleurs, les écoulements stationnaires sont calculés selon deux méthodes : ou bien à partir des équations stationnaires ou bien à partir des équations d'évolution en laissant tendre le temps vers l'infini. On sait, dans certains cas, montrer la convergence de la solution évolutive vers la solution stationnaire et il est naturel de chercher à utiliser cette propriété pour calculer cette dernière. Cependant, si l'on s'intéresse uniquement à la

solution stationnaire, il importe peu que la méthode utilisée décrive correctement l'état transitoire ; par exemple, il n'est pas nécessaire que la solution transitoire soit à divergence nulle, il suffit que cette divergence tende vers zéro. La première méthode a été utilisée par GREENSPAN (14) AMIEL (15) pour résoudre le problème de l'écoulement dans une cavité carrée à trois côtés fixes. Pour la deuxième méthode, on peut citer les travaux de TEMAN, FORTIN, PEYRET (16) concernant l'écoulement dans une cavité carrée ou rectangulaire, ceux de THOMAN et SCZWCZYK (17) concernant l'écoulement autour d'un cylindre. L'étude des écoulements dans une cavité cylindrique a été entreprise ces dernières années à l'aide de méthodes dérivées de celles citées ci-dessus, en particulier par ALONZO, MACAGNO (18) et GRILLAUD (19) utilisant comme inconnues les fonctions de courant dans les équations d'évolution sans chercher à reproduire l'évolution avec précision.

IV - DEFINITION DE CETTE ETUDE

Dans cette étude, nous allons aborder analytiquement et numériquement l'écoulement d'un fluide visqueux et incompressible entre deux cylindres coaxiaux le cylindre intérieur tournant à une vitesse angulaire quelconque $\omega(t)$ fonction du temps ou éventuellement constante, le cylindre extérieur étant au repos.

Dans une première partie, nous supposons que ce système est de longueur infinie et que l'écoulement s'effectue dans le domaine laminaire stable ($\omega < \omega_c$). Nous étudierons alors l'influence de différents modes de rotation instationnaire du cylindre intérieur sur l'écoulement de COUETTE associé défini par la solution (1.4), c'est-à-dire :

$$v = Ar + \frac{B}{r}$$

Nous pourr ons ainsi mettre en évidence la différence qui existe entre un état instationnaire à un instant donné et l'état stationnaire associé .

Celui-ci étant défini comme l'état stationnaire dont la vitesse angulaire ω_0 est égale à celle qu'aurait le système dans une évolution instationnaire à un instant donné. Pour cela, nous émettrons l'hypothèse que v est fonction de la variable r seulement et nous déterminerons l'écoulement par trois fonctions qui feront l'objet d'un traitement numérique.

Dans la deuxième partie nous aborderons le problème réel de l'écoulement entre cylindres de longueurs finies. Nous appliquerons alors la méthode numérique mise au point par TEMAM - FORTIN - PEYRET à ce problème qui peut être contrôlé expérimentalement et nous utiliserons comme inconnues le champ des vitesses, u , v , w ainsi que la pression p . En faisant varier la hauteur des cylindres et en supposant que les parois horizontales sont mobiles ou restent fixes, nous pourrons étudier différentes configurations d'écoulement. Ainsi, nous mettrons en évidence l'influence des parois horizontales sur l'écoulement de TAYLOR et l'échelle de grandeur pour laquelle v est indépendante de z . Ces effets de bord ne sont en général abordés que de façon empirique dans l'étude des paliers fluides.

Dans la dernière partie de ce travail, nous appliquerons une méthode expérimentale à l'étude de notre système : la polarographie nous permettra de déterminer le gradient pariétal de vitesse à la paroi fixe.

Ayant ainsi défini notre étude, nous pouvons la justifier comme ceci. Expérimentalement le cas de cylindres infinis n'existe pas et il faut toujours tenir compte de la présence de parois perpendiculaires à l'axe de rotation. Par conséquent, l'écoulement de COUETTE doit se trouver perturbé et il convient de déterminer dans quelle mesure. De plus nous rattacherons notre étude à celle effectuée par P. FLORENT (20) sur l'écoulement entre deux disques avec soufflage axial. Ainsi nous serons en mesure de déterminer l'écoulement d'un fluide incompressible dans un palier fluide avec injection. Aussi la formulation du problème en fonction des inconnues u , v , w et p est intéressante car elle nous permettra d'envisager ultérieurement un soufflage entre les deux parois.

CHAPITRE I

EQUATIONS DE BASE ET CONDITIONS AUX LIMITES

I - CHOIX DES COORDONNEES DE REFERENCE

Considérons deux cylindres coaxiaux, de rayons respectifs r_1 et r_2 tels que $r_2 > r_1$, et limités par deux parois horizontales appartenant à l'un ou à l'autre des cylindres et situées à une distance H l'une et l'autre. Nous définissons ainsi une cavité torique axisymétrique, de section rectangulaire, dans laquelle l'écoulement est engendré par les parois pouvant tourner à des vitesses de rotation différentes. Enfin, nous supposons que le fluide est incompressible, que sa viscosité cinématique ν et sa masse volumique ρ restent constantes.

Le problème étant ainsi posé, nous pouvons dire que l'hypothèse de cylindres infinis est à rejeter dans le cas qui nous concerne sauf, si la distance entre les deux parois horizontales est très grande devant l'entrefer. Nous pouvons alors prévoir que l'écoulement sera du type de COUETTE avec, ultérieurement, apparition de tourbillons de TAYLOR. Nous utiliserons dans notre étude le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , fixe par rapport au fluide et nous porterons son origine sur l'axe des deux cylindres. Comme l'indique la figure (2.1), le champ des vitesses admet trois composantes $u(t, r, z, \theta)$, $v(t, r, z, \theta)$, $w(t, r, z, \theta)$ qui sont respectivement la vitesse radiale, la vitesse tangentielle et la vitesse axiale.

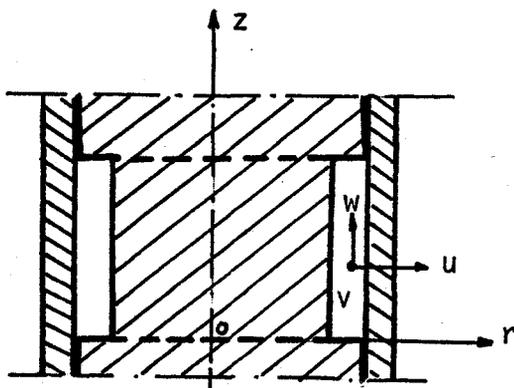


Fig. 2.1

II - EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

En négligeant les forces extérieures, les équations générales de NAVIER-STOKES s'écrivent en coordonnées cylindriques et en régime instationnaire (rappel des équations déjà écrites en 1.1 et 1.2)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) ; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) ; \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) ; \end{aligned} \right. \quad (2.1)$$

Le champ de composantes $u(t, r, z, \theta)$, $v(t, r, z, \theta)$, $w(t, r, z, \theta)$ devant également satisfaire l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

Ces équations munies des conditions aux limites et initiales que nous allons fixer, définissent le modèle mathématique du problème de l'écoulement entre les deux cylindres. Nous pouvons cependant ramener ce problème à trois variables indépendantes à un problème bidimensionnel : du fait de la symétrie de révolution, les champs de vitesse et de pression ne dépendent pas de la variable azimutale θ . Les équations (2.1.)

et (2.2) deviennent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) ; \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) ; \end{array} \right. \quad (2.3)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4.)$$

Nous aboutissons alors à un système de quatre équations aux dérivées partielles à quatre inconnues u , v , w et p . Pour le résoudre nous devons fixer les conditions aux limites et initiales auxquelles doivent satisfaire ces inconnues.

III - CONDITIONS AUX LIMITES ET INITIALES

1 - Les conditions aux limites se déduisent de la condition d'adhérence du fluide sur les parois du domaine :

a) Sur le cylindre extérieur que nous supposons toujours fixe, les composantes radiale, tangentielle et axiale de la vitesse des particules fluides sont nulles :

$$u(t, r_2, z) = v(t, r_2, z) = w(t, r_2, z) = 0 \quad (2.5)$$

b) Sur le cylindre intérieur tournant à la vitesse angulaire $\omega(t)$, les composantes radiale et axiale sont nulles et la vitesse tangentielle doit être égale à la vitesse linéaire du cylindre :

$$u(t, r_1, z) = w(t, r_1, z) = 0 \text{ et } v(t, r_1, z) = r_1 \omega(t) \quad (2.6)$$

c) Il en est de même sur les parois horizontales ($z = 0$ et $z = H$)

qui, selon la nature du problème envisagé, seront fixes ou animées d'une vitesse angulaire ω constante ou fonction du temps.

$$\begin{aligned} - \text{ parois } (z = 0) \text{ fixes} &\implies u(t, r, 0) = v(t, r, 0) = w(t, r, 0) = 0 \\ - \text{ parois } (\bar{z} = 0) \text{ mobiles} &\implies u(t, r, 0) = w(t, r, 0) = 0 \\ &\text{et } v(t, r, 0) = r \cdot \omega(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Il en est de même pour les parois $z = H$.

Bien entendu nous pourrions toujours supposer que l'une des parois tourne quand l'autre reste immobile.

2 - La résolution du système d'équation (2.3), (2.4) nécessite la connaissance de conditions initiales. Nous prendrons à $t = 0$ un état stationnaire de référence à partir duquel l'écoulement évolue. Cet état stationnaire sera caractérisé par une vitesse de rotation angulaire ω_0 constante ou éventuellement nulle et par la valeur du champ de vitesses stationnaires qui lui correspond. Nous aurons donc les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} \omega(0) &= \omega_0 ; \\ u(0, r, z) &= u_s(r, z) ; \\ v(0, r, z) &= v_s(r, z) ; \\ w(0, r, z) &= w_s(r, z) . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Il convient à présent de rendre le système d'équation (2.3) et (2.4) ainsi que les conditions aux limites et initiales (2.5), (2.6), (2.7) et (2.8) adimensionnels avant de procéder à l'établissement de la solution.

IV - FORMES ADIMENSIONNELLES ET PARAMETRES DE REFERENCE

Nous allons rapporter nos variables aux grandeurs qui définissent le problème, c'est-à-dire le rayon du cylindre intérieur r_1 , la vitesse de rotation $\omega(t)$ du cylindre extérieur, la viscosité cinématique ν et la

masse volumique ρ du fluide.

En général, dans les études stationnaires on choisit $\sqrt{\frac{v}{\omega}}$ comme longueur de référence et $\sqrt{v\omega}$ comme vitesse de référence. Pour le problème instationnaire qui nous intéresse, ω étant une fonction du temps, nous choisissons les trois grandeurs constantes ρ , v et r_1 à cause des dérivées temporelles des vitesses qui apparaissent au niveau des équations (2.3). Nous prendrons donc le rayon r_1 comme longueur de référence et le rapport $\frac{v}{r_1}$ comme vitesse de référence. Ce qui donne les variables et inconnues suivantes.

$$\bar{r} = \frac{r}{r_1}, \quad \bar{z} = \frac{z}{r_1}; \quad \bar{t} = t \frac{v}{r_1^2};$$

$$\bar{u} = u \frac{r_1}{v}, \quad \bar{v} = v \frac{r_1}{v}, \quad \bar{w} = w \frac{r_1}{v}; \quad \bar{p} = p \frac{r_1^2}{\rho v^2}.$$

Le choix de ces nouvelles variables et fonctions inconnues, fournit le système aux dérivées partielles suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} - \frac{\bar{v}^2}{\bar{r}} &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2}; \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} + \frac{u v}{r} &= \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{v}}{\bar{r}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2}; \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2}; \end{aligned} \right. \quad (2.9)$$

et

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}}{\bar{r}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.10)$$

Nous utiliserons également les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{r} = \frac{r_2}{r_1} = \lambda &\implies \bar{u}(\bar{t}, \lambda, \bar{z}) = \bar{v}(\bar{t}, \lambda, \bar{z}) = \bar{w}(\bar{t}, \lambda, \bar{z}) = 0 \\ \bar{r} = \frac{r_1}{r_1} = 1 &\implies \bar{u}(\bar{t}, 1, \bar{z}) = \bar{w}(\bar{t}, 1, \bar{z}) = 0 \text{ et } \bar{v}(\bar{t}, 1, \bar{z}) = \frac{r_1^2 \omega(t)}{\nu} \\ \bar{z} = 0, \bar{z} = \frac{H}{r_1} = k &\implies \left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0 \\ \bar{u} = \bar{w} = 0, \bar{v} = \frac{r_1^2 \omega(\bar{t})}{\nu} \end{array} \right. \quad \bar{r} \end{aligned} \quad (2.11)$$

La définition du problème fait donc intervenir trois paramètres :

- le nombre λ qui définit l'entrefer des deux cylindres ($\lambda > 1$) ;
- le nombre k qui définit la hauteur des deux cylindres par rapport au rayon intérieur. Nous dirons que les cylindres sont infiniment longs si le rapport $\frac{k}{\lambda}$ est très grand devant l'unité ;
- le nombre de REYNOLDS de rotation $R_{er}(\bar{t}) = \frac{r_1^2}{\nu} \cdot \omega(\bar{t})$.

En plus de ces conditions aux limites (2.11), l'étude du problème instationnaire nécessite encore la connaissance des conditions initiales à partir desquelles évolue l'écoulement considéré.

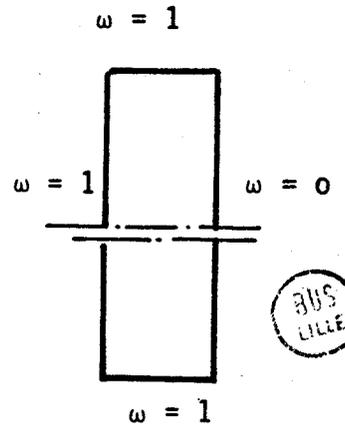
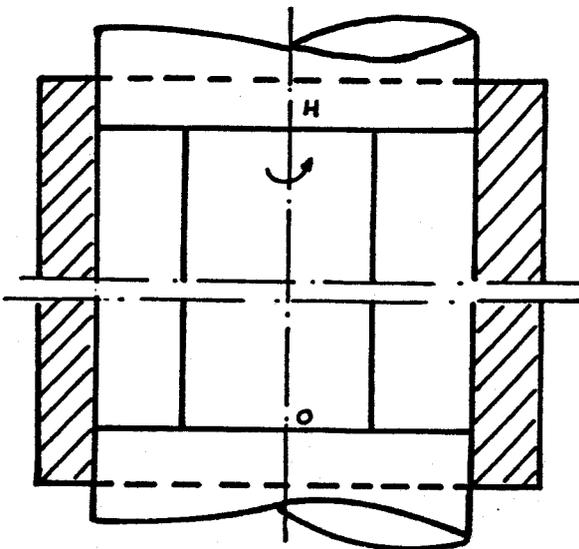
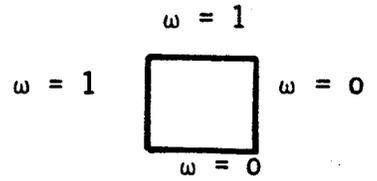
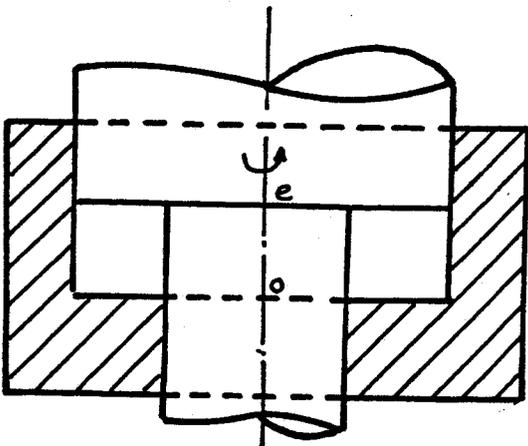
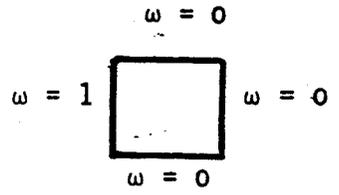
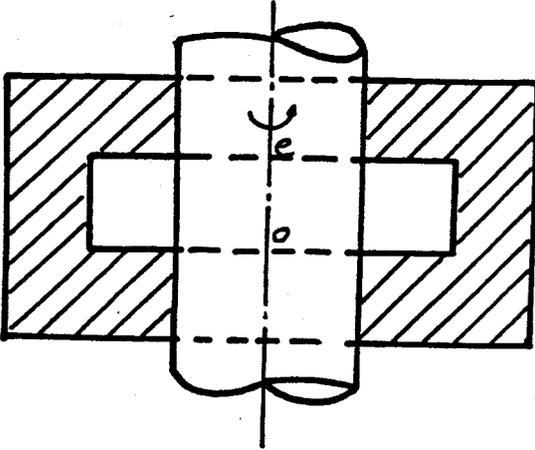
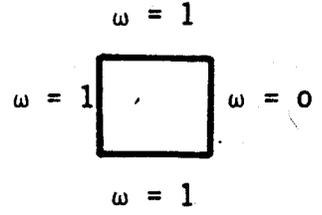
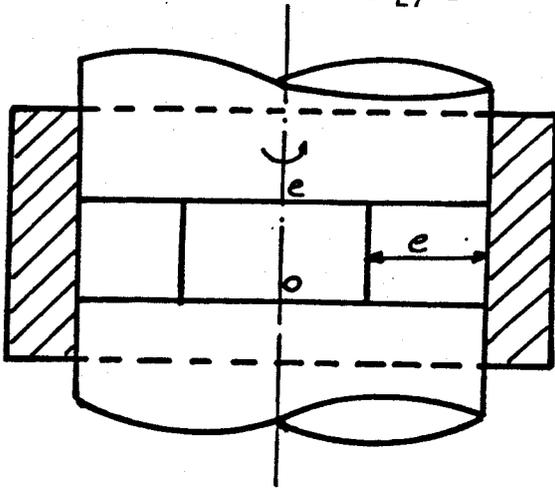
Nous prendrons :

$$R_{e0} = R_{er}(0) = \frac{r_1^2 \omega_0}{\nu} ;$$

$$\bar{u}(0, \bar{r}, \bar{z}) = \bar{u}_s(\bar{r}, \bar{z}) ; \bar{v}(0, \bar{r}, \bar{z}) = \bar{v}_s(\bar{r}, \bar{z}) ; \bar{w}(0, \bar{r}, \bar{z}) = \bar{w}_s(\bar{r}, \bar{z}) \quad (2.12)$$

Les composantes \bar{u}_s , \bar{v}_s et \bar{w}_s sont solutions du système stationnaire (2.9), (2.10).

En résumé nous abordons ici l'étude d'un écoulement de fluide visqueux incompressible dans une cavité torique. Nous nous bornerons à faire varier trois paramètres λ , k , $R_{er}(t)$ en considérant que les parois horizontales tournent à une vitesse angulaire ω_0 égale à celle du cylindre intérieur ou restent fixes. On peut ainsi étudier un grand nombre d'écoulements Fig. (2.2).



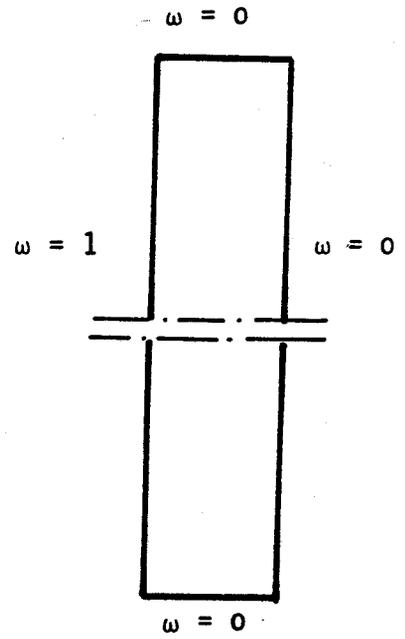
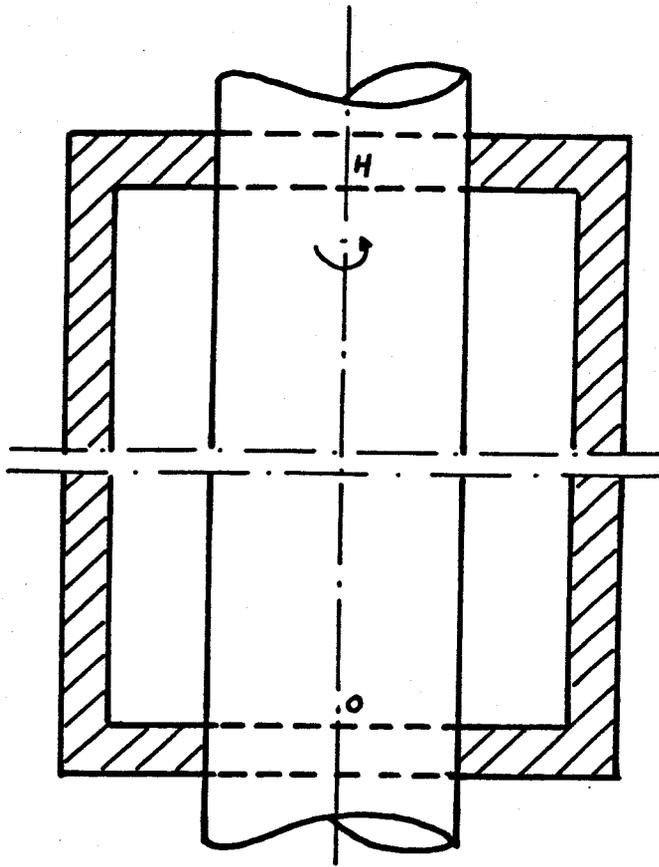


Fig. 2.2



CHAPITRE II

SOLUTIONS DE L'ÉCOULEMENT ENTRE DEUX CYLINDRES INFINIS

Nous considérons ici le cas où l'influence des parois horizontales peut être négligée.

Si nous voulons résoudre analytiquement ou numériquement le problème instationnaire défini par les équations aux dérivées partielles (2.9) et (2.10) munies des conditions aux limites et initiales (2.11) et (2.12), il apparaît nécessaire de réduire les équations de NAVIER-STOKES en un système d'équations différentielles ordinaires. Cette réduction ne peut se faire qu'en adoptant certaines hypothèses déduites de la considération du problème physique. Nous exposerons ces hypothèses aux paragraphes (I) et (II).

Nous avons vu au chapitre précédent que l'étude du cas instationnaire nécessite des données initiales qui seront les résultats du cas stationnaire à partir duquel évolue le mouvement du fluide. Pour cette raison, nous commençons par étudier l'écoulement stationnaire.

I - ÉCOULEMENT STATIONNAIRE

1) Hypothèse

Selon l'hypothèse d'indépendance de la vitesse tangentielle par rapport à la variable \bar{z} pour des cylindres infinis (ce qui signifie que le rapport hauteur/entrefer est très grand) et en cherchant une solution de la forme :

$$\bar{v}(\bar{r}) = \frac{1}{\bar{r}} \cdot f_s(\bar{r}) \quad (3.1)$$

nous obtenons, en substituant $\bar{v}(\bar{r})$ dans la deuxième équation (2.9), une solution de la forme :

$$\bar{u}(\bar{r}) = g_s(\bar{r}) \quad (3.2)$$

Avec l'équation de continuité (2.10) qui s'écrit :

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{r} g_s}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0,$$

il vient :

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = - \frac{\partial g_s}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}} g_s.$$

soit en intégrant :

$$\bar{w}(\bar{r}, \bar{z}) = - \bar{z} \cdot (g'_{s\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} g_s) + h(\bar{r}) \quad (3.3)$$

On voit tout de suite que $h(\bar{r})$ représente une vitesse de soufflage axial entre les deux cylindres à une côte de référence $\bar{z} = 0$. Cette vitesse peut être constante w_0 ou une fonction de \bar{r} dépendante des conditions aux limites.

Supposons ici que $h(\bar{r}) \equiv 0$. Il vient :

$$\bar{w}(\bar{r}, \bar{z}) = \bar{z} \cdot k_s(\bar{r}) \quad (3.4)$$

$$\text{avec } k_s(\bar{r}) = - g'_{s\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}} g_s \quad (3.5)$$

En reportant les solutions (3.1), (3.2) et (3.5) dans les équations de base (2.9) nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} g_s \cdot g'_s - \frac{1}{\bar{r}^3} \cdot f_s^2 = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + g''_s + \frac{1}{\bar{r}} g'_s - \frac{1}{\bar{r}^2} g_s ; \\ g_s \cdot f'_s = - \frac{1}{\bar{r}} \cdot f'_s + f''_s ; \\ g_s \cdot k'_s + k_s^2 = - \frac{1}{\bar{z}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + k''_s + \frac{1}{\bar{r}} k'_s . \end{cases} \quad (3.6)$$

D'après la troisième équation (3.6) nous voyons que

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = \bar{z} \chi(\bar{r}),$$

soit

$$\bar{p}(\bar{r}, \bar{z}) = \frac{\bar{z}^2}{2} \cdot \chi(\bar{r}) + \psi(\bar{r}) \quad (3.7)$$

Comme, selon la première équation (3.6) on doit avoir :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} = \Gamma(\bar{r})$$

il vient :

$$\chi' = 0$$

La fonction $\chi(\bar{r})$ doit être une constante et il s'ensuit que

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{r} \partial \bar{z}} = 0.$$

Nous utilisons ce résultat pour éliminer la pression de la troisième équation (3.6) et nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} k'_s \left(-g'_s - \frac{2}{\bar{r}} g_s + \frac{1}{\bar{r}^2} \right) + k''_s \cdot \left(g_s - \frac{1}{\bar{r}} \right) - k'''_s = 0 ; \\ g_s \cdot f'_s + \frac{1}{\bar{r}} f'_s - f''_s = 0 ; \\ k_s + g'_s + \frac{1}{\bar{r}} g_s = 0 \end{cases}$$

Au système (3.8) il faut associer les conditions aux limites suivantes déduites de (2.11).

$$\begin{aligned} g_s(1) = k_s(1) = 0 \text{ et } f_s(1) = \frac{\omega_0 r_1^2}{\nu} = Re_r ; \\ g_s(\lambda) = k_s(\lambda) = f_s(\lambda) = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ainsi, connaissant le champ des vitesses par la résolution du système (3.8), nous pouvons calculer la pression par le système suivant :

$$\begin{aligned} \psi' &= g''_s + g'_s \left(\frac{1}{\bar{r}} - g_s \right) - \frac{1}{\bar{r}^2} g_s + \frac{1}{\bar{r}^3} f_s^2 ; \\ \chi &= k''_s + k'_s \cdot \left(\frac{1}{\bar{r}} - g_s \right) - k_s^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Nous pouvons également déterminer la contrainte tangentielle de frottement sur le cylindre fixe par la relation :

$$\tau = \mu \cdot \left[r \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) \right]_{r=r_2}$$

soit en variable adimensionnelle :

$$\bar{\tau} = \left[\bar{r} \cdot \frac{d}{d\bar{r}} \left(\frac{\bar{v}}{\bar{r}} \right) \right]_{\bar{r}=\lambda}$$

avec $\tau = \frac{\rho v^2}{r_1^2} \bar{\tau}$

Sous l'hypothèse (3.1) on aura :

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\lambda} f'_s (\lambda) \quad (3.11)$$

où $f'_s (\lambda)$ est la valeur de la dérivée de $f_s (\bar{r})$ pour $\bar{r} = \lambda$

Dans ce cas le couple de frottement exercé sur un cylindre extérieur de hauteur H est donné par la relation :

$$C = 2 \pi \mu \rho v^2 \lambda f'_s (\lambda) \quad (3.12)$$

Comme la valeur de $f'_s (\lambda)$ dépend du nombre de REYNOLDS de rotation, la mesure de C permet de mettre en évidence la différence qui existe entre un état intationnaire à un instant donné et l'état stationnaire associé.

2)- Recherche d'une solution du système (3.8)

Pour le cas stationnaire caractérisé par le système (3.8) muni des conditions aux limites (3.9), nous cherchons une solution de la forme d'un développement en série entière du nombre de REYNOLDS :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_s(\bar{r}) = \sum_{i=1}^n \text{Re} r^i f_{si}(\bar{r}) \\ g_s(\bar{r}) = \sum_{i=1}^n \text{Re} r^i g_{si}(\bar{r}) \\ k_s(\bar{r}) = \sum_{i=1}^n \text{Re} r^i k_{si}(\bar{r}) \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Les solutions f_{si} , g_{si} , k_{si} doivent vérifier les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} f_{s1}(1) = 1 \text{ et } g_{s1}(1) = k_{s1}(1) = 0 \quad \forall i ; \\ f_{si}(1) = 0 \quad \forall i \neq 1 ; \quad f_{si}(\lambda) = g_{si}(\lambda) = k_{si}(\lambda) = 0 \quad \forall i . \end{aligned} \quad (3.14)$$

En introduisant f_s , g_s et k_s dans le système d'équations (3.8) nous obtenons différents systèmes d'ordre 1,2.... n.

a) Pour $i = 1$ il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r^2} k'_{s1} - \frac{1}{r} k''_{s1} - k'''_{s1} = 0 ; \\ \frac{1}{r} f'_{s1} - f''_{s1} = 0 ; \\ k_{s1} + q'_{s1} + \frac{1}{r} q_{s1} = 0 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

La deuxième équation (3.15) admet la solution générale :

$$f_{s1}(\bar{r}) = A + B \frac{\bar{r}^2}{2}$$

Compte-tenu des conditions aux limites (3.14) la solution s'écrira

$$f_{s1}(\bar{r}) = \frac{1}{\lambda^2 - 1} (\lambda^2 - \bar{r}^2) \quad (3.16)$$

Enfin, à partir des première et troisième équations (3.15), il est possible d'obtenir une seule équation pour g_{s1} ; soit :

$$g_{s1}^{IV} + \frac{2}{r} g_{s1}''' - \frac{3}{r^2} g_{s1}'' + \frac{3}{r^3} g_{s1}' - \frac{3}{r^4} g_{s1} = 0 \quad (3.17)$$

cette équation admet la solution générale :

$$g_{s1}(\bar{r}) = -\frac{A}{2} \bar{r} \ln \bar{r} + \frac{B}{8\bar{r}} + \frac{C}{2} \bar{r}^3 + D\bar{r} \quad (3.18)$$

On en déduit :

$$k_{s1}(\bar{r}) = \frac{B}{2} (1 + 2 \ln \bar{r}) - 2C \bar{r}^2 - 2D \quad (3.19)$$

Compte-tenu des conditions aux limites (3.14), nous obtenons quatre équations identiquement nulles à quatre inconnues A,B,C et D.

Par conséquent, on obtient :

$$g_{s1}(\bar{r}) = k_{s1}(\bar{r}) \equiv 0$$

b) Pour tout $i \neq 1$ il vient en tenant compte des termes nuls :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} k'_{si} - \frac{1}{r} k''_{si} - k'''_{si} = 0 ; \\ \frac{1}{r} f'_{si} - f''_{si} = 0 ; \\ k_{si} + g'_{si} + \frac{1}{r} g_{si} = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Ainsi les solutions générales de ce système sont celles du système (3.15) précédent. Mais compte-tenu des conditions aux limites, nous obtenons toujours :

$$f_{si}(\bar{r}) = g_{si}(\bar{r}) = k_{si}(\bar{r}) \equiv 0 \quad \forall i \neq 1$$

Par conséquent, la forme générale (3.13) se limite au terme d'ordre $i = 1$ et la solution de l'écoulement peut s'écrire :

$$\begin{cases} \bar{v}(\bar{r}) = \frac{Re_r}{\lambda^2 - 1} \left(\frac{\lambda^2}{\bar{r}} - \bar{r} \right) \\ \bar{u}(\bar{r}) = \bar{w}(\bar{r}) \equiv 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

La pression est donnée par la relation :

$$\bar{p}_s(\bar{r}) = \frac{\lambda^2 Re_r^2}{2(\lambda^2 - 1)^2} \left(\frac{\bar{r}^2}{\lambda^2} - \frac{\lambda^2}{\bar{r}^2} - 4 \ln \bar{r} \right) \quad (3.22)$$

et le couple de frottement par :

$$C_s = - \frac{4 \pi \lambda^2 H \rho \omega^2}{\lambda^2 - 1} \cdot Re_r \quad (3.23)$$

3) Conclusion

Nous voyons que l'hypothèse d'indépendance de \bar{v} par rapport à \bar{z} et la recherche de solutions sous forme de développement en série du nombre de REYNOLDS (3.13) nous conduit finalement à la solution de COUETTE lorsqu'il n'y a pas de soufflage entre les deux cylindres.

Nous allons étudier l'écoulement instationnaire et voir ce que devient le cas stationnaire étudié comme cas limite d'une évolution instationnaire.

II - ECOULEMENT INSTATIONNAIRE

1) Hypothèse

Nous conservons l'hypothèse de TAYLOR sur l'indépendance de la vitesse tangentielle par rapport à la variable \bar{z} mais nous supposons en plus que la vitesse de rotation du cylindre intérieur est une fonction du temps $\omega(t)$. Autrement dit, nous cherchons une solution de l'écoulement instationnaire

sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}(\bar{r}, \bar{t}) = \frac{1}{\bar{r}} f(\bar{r}, \bar{t}) ; \\ \bar{u}(\bar{r}, \bar{t}) = g(\bar{r}, \bar{t}) ; \\ \bar{w}(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) = \bar{z} k(\bar{r}, \bar{t}) \end{array} \right. \quad (3.24)$$

En reportant ces solutions dans les équations de base (2.9), nous obtenons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} g'_{\bar{t}} + gg'_{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}^3} f^2 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + g''_{\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} g'_{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}^2} g ; \\ f'_{\bar{t}} + g f'_{\bar{r}} = -\frac{1}{\bar{r}} f'_{\bar{r}} + f''_{\bar{r}^2} ; \\ k'_{\bar{t}} + gk'_{\bar{r}} + k^2 = -\frac{1}{\bar{z}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + k''_{\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} k'_{\bar{r}} . \end{array} \right. \quad (3.25)$$

D'après la troisième équation (3.25) nous voyons que

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = \bar{z} \chi(\bar{r}, \bar{t}),$$

soit
$$\bar{p}(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) = \frac{\bar{z}^2}{2} \chi(\bar{r}, \bar{t}) + \psi(\bar{r}, \bar{t}) \quad (3.26)$$

Comme, selon la première équation (3.25) on doit avoir

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} = \Gamma(\bar{r}, \bar{t})$$

il vient :

$$\chi'_{\bar{r}} = 0$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{r} \partial \bar{z}} = 0$$

Nous utiliserons ce résultat pour éliminer la pression de la troisième équation (3.6) et nous obtenons finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} k''_{\bar{t}, \bar{r}} + k'_{\bar{r}} \left(-g'_{\bar{r}} - \frac{2}{\bar{r}} g + \frac{1}{\bar{r}^2} \right) + k''_{\bar{r}^2} \left(g - \frac{1}{\bar{r}} \right) - k'''_{\bar{r}^3} = 0 ; \\ f'_{\bar{t}} + g \frac{f'_{\bar{r}}}{\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{f'_{\bar{r}}}{\bar{r}} - \frac{f''_{\bar{r}^2}}{\bar{r}^2} = 0 ; \\ k + g'_{\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} g = 0 . \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Au système (3.8) il faut associer les conditions aux limites et initiales suivantes :

$$f(1, \bar{t}) = \frac{\omega(\bar{t}) r_1^2}{\nu} = R_{er}(\bar{t}) \text{ et } g(1, \bar{t}) = k(1, \bar{t}) = 0 ;$$

$$g(\lambda, \bar{t}) = k(\lambda, \bar{t}) = f(\lambda, \bar{t}) = 0 ;$$

$$R_{er}(0) = \frac{\omega_0 r_1^2}{\nu} = R_{e0}$$

$$f(\bar{r}, 0) = f_s(\bar{r}) , g(\bar{r}, 0) = g_s(\bar{r}) \text{ et } k(\bar{r}, 0) = k_s(\bar{r}) \quad (3.28)$$

où f_s , g_s et k_s sont des états stationnaires de référence à partir desquels le mouvement peut évoluer.

2) Recherche d'une solution du système (3.27)

Pour le cas instationnaire caractérisé par le système (3.27) muni des conditions aux limites et initiales (3.28), nous cherchons une solution de la forme d'un développement en série entière du nombre de REYNOLDS de rotation :

$$f(\bar{r}, \bar{t}) = \sum_{i=1}^n R_{er}^i(\bar{t}) f_i(\bar{r}) ;$$

$$g(\bar{r}, \bar{t}) = \sum_{i=1}^n R_{er}^i(\bar{t}) g_i(\bar{r}) ;$$

$$k(\bar{r}, \bar{t}) = \sum_{i=1}^n R_{er}^i(\bar{t}) k_i(\bar{r}) ; \quad (3.29)$$

Les solutions f_i, g_i, k_i doivent vérifier les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(1) &= 1 \text{ et } g_i(1) = k_i(1) = 0 \quad \forall i ; \\ f_i(1) &= 0 \quad \forall i \neq 1 ; \\ f_i(\lambda) &= g_i(\lambda) = k_i(\lambda) = 0 \quad \forall i . \end{aligned} \tag{3.30}$$

Si nous introduisons f, g et k données en (3.29) dans le système d'équations (3.27), nous obtenons différents systèmes d'ordre 1,2,...n.

a) Pour $i = 1$ il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} k'_1 \frac{dR_{er}}{d\bar{t}} + \frac{1}{r^2} R_{er} k'_1 - \frac{1}{r} R_{er} k''_1 - R_{er} k'''_1 &= 0 \\ f_1 \frac{dR_{er}}{d\bar{t}} + \frac{1}{r} R_{er} f'_1 - R_{er} f''_1 &= 0 \\ k_1 + g'_1 + \frac{1}{r} g_1 &= 0 \end{aligned} \right. \tag{3.31}$$

La deuxième équation (3.31) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{R_{er}} \frac{dR_{er}}{d\bar{t}} = \frac{1}{f_1} (f''_1 - \frac{1}{r} f'_1) = c \tag{3.32}$$

où c est une constante indéterminée. La solution de cette équation impose une expression du nombre de REYNOLDS de rotation parfaitement définie ; en effet, si nous posons $c = \pm \bar{k}^2$, nous obtenons :

$$R_{er}(\bar{t}) = R_{e0} \cdot e^{\bar{k}^2 \bar{t}} \tag{3.33}$$

ou

$$R_{er}(\bar{t}) = R_{e0} \cdot e^{-\bar{k}^2 \bar{t}} \tag{3.34}$$

\bar{k} étant un paramètre qui fixe le taux d'accélération (solution 3.33) ou de décélération (solution 3.34) du cylindre intérieur.

- Dans le cas d'une décélération ($c = -\bar{k}^2$) la deuxième équation (3.32) s'écrit :

$$f_1'' - \frac{1}{r} f_1' + \bar{k}^2 f_1 = 0 \quad (3.35)$$

Par le changement de variable $x = \bar{k} \bar{r}$ on obtient :

$$\frac{d}{d\bar{r}} = \bar{k} \frac{d}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{d\bar{r}^2} = \bar{k}^2 \frac{d^2}{dx^2} ;$$

d'où

$$f_1'' - \frac{1}{x} f_1' + f_1 = 0 , \quad (3.16)$$

avec

$$f_1(\bar{k}) = 1, \quad f_1(\bar{k}\lambda) = 0$$

Nous pouvons encore écrire (3.36) sous la forme :

$$x f_1'' - f_1' + x f_1 = 0 \quad (3.37)$$

et en effectuant le changement de fonction inconnue $f_1 = x F$ il vient successivement :

$$f_1' = F + x F'$$

$$f_1'' = 2F' + x F''$$

d'où l'équation :

$$x^2 F'' + x F' + (x^2 - 1) F = 0 \quad (3.38)$$

qui est une équation de BESSEL du 1er ordre de solution générale :

$$F = C_1 J_1(x) + C_2 Y_1(x) \quad (3.39)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes.

Nous avons alors :

$$f_1 = \bar{k} \bar{r} \left[C_1 J_1(\bar{k} \bar{r}) + C_2 Y_1(\bar{k} \bar{r}) \right] \quad (3.40)$$

Les conditions aux limites imposent aux constantes C_1 et C_2 les valeurs :

$$C_1 = \frac{Y_1(\lambda \bar{k})}{\bar{k} \left[J_1(\bar{k}) Y_1(\bar{k}\lambda) - J_1(\lambda \bar{k}) Y_1(\bar{k}) \right]}, \quad C_2 = \frac{-J_1(\lambda \bar{k})}{\bar{k} \left[J_1(\bar{k}) Y_1(\lambda \bar{k}) - J_1(\lambda \bar{k}) Y_1(\bar{k}) \right]}$$

En définitive lorsque le cylindre intérieur est décéléré de façon exponentielle, nous trouvons :

$$\bar{v}(\bar{r}, \bar{t}) = \frac{R_{eo} \cdot e}{\left[J_1(\bar{k}) Y_1(\bar{k} \bar{r}) - J_1(\lambda \bar{k}) Y_1(\bar{k}) \right]} \left[Y_1(\lambda \bar{k}) J_1(\bar{k} \bar{r}) - J_1(\lambda \bar{k}) Y_1(\bar{k} \bar{r}) \right] \quad (3.41)$$

On trouvera une représentation de (3.41) sur les courbes (III.1)

- Dans le cas d'une accélération ($c = \bar{k}^2$) la deuxième équation (3.32) s'écrit :

$$f_1'' - \frac{1}{\bar{r}} f_1' - \bar{k}^2 f_1 = 0. \quad (3.42)$$

Les conditions aux limites sont identiques au cas précédent. En effectuant le même changement de variable $x = \bar{k} \bar{r}$, puis le même changement de fonction inconnue $f_1 = xH$, nous aboutissons à l'équation de BESSEL du 1er ordre modifié :

$$x^2 H'' + x H' - (x^2 + 1) H = 0. \quad (3.43)$$

Sa solution générale est :

$$H = D_1 J_1(ix) + D_2 K_1(x) \quad (3.44)$$

D_1 et D_2 étant deux constantes.

Nous avons alors :

$$f_1 = \bar{k} \bar{r} \left[D_1 J_1(i \bar{k} \bar{r}) + D_2 K_1(\bar{k} \bar{r}) \right]. \quad (3.45)$$

Les conditions aux limites imposent aux constantes D_1 et D_2 les valeurs :

$$D_1 = \frac{K_1(\lambda \bar{k})}{\bar{k} \left[J_1(i \bar{k}) K_1(\lambda \bar{k}) - J_1(i \bar{k} \lambda) K_1(\bar{k}) \right]} \quad D_2 = \frac{-J_1(i \lambda \bar{k})}{\bar{k} \left[J_1(i \bar{k}) K_1(\lambda \bar{k}) - J_1(i \lambda \bar{k}) K_1(\bar{k}) \right]}$$

En définitive lorsque le cylindre intérieur est accéléré de façon exponentielle, nous trouvons :

$$\bar{v}(\bar{r}, \bar{t}) = \frac{R_{eo} e^{\frac{\bar{k}^2 \bar{t}}{2}}}{J_1(i \bar{k}) K_1(\lambda \bar{k}) - J_1(i \lambda \bar{k}) K_1(\bar{k})} \left[K_1(\lambda \bar{k}) J_1(i \bar{k} \bar{r}) - J_1(i \lambda \bar{k}) K_1(\bar{k} \bar{r}) \right].$$

On trouvera une représentation de (3.46) sur les courbes (III.2).

La première équation (3.31) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{R_{er}} \frac{dR_{er}}{dt} = \frac{1}{k'_1} \left(k'''_1 + \frac{1}{\bar{r}} k''_1 - \frac{1}{\bar{r}^2} k'_1 \right) = \pm \bar{k}^2 \quad (3.47)$$

On retrouve donc :

$$R_{er} = R_{eo} e^{\pm \frac{2}{\bar{k}} \bar{t}}$$

- Dans le cas d'une décélération nous obtenons l'équation :

$$k'''_1 + \frac{1}{\bar{r}} k''_1 + \left(\bar{k}^2 - \frac{1}{\bar{r}^2} \right) k'_1 = 0 \quad (3.48)$$

Posons $k'_1 = K_1$, il vient :

$$K''_1 + \frac{1}{\bar{r}} K'_1 + \left(\bar{k}^2 - \frac{1}{\bar{r}^2} \right) K_1 = 0 \quad (3.49)$$

Effectuons le changement de variable $x = \bar{k} \bar{r}$, il vient :

$$K''_1 + \frac{1}{x} K'_1 + \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) K_1 = 0 \quad (3.50)$$

Soit :

$$x^2 K''_1 + x K'_1 + (x^2 - 1) K_1 = 0 \quad (3.51)$$

La solution générale de cette équation est de la forme :

$$K_1(x) = E_1 J_1(x) + E_2 Y_1(x) \cdot$$

On en déduit que :

$$K_1(\bar{r}) = E_1 J_1(\bar{k} \bar{r}) + E_2 Y_1(\bar{k} \bar{r}) \cdot$$

En intégrant une nouvelle fois nous obtenons :

$$k_1(\bar{r}) = \bar{E}_1 J_0(\bar{k} \bar{r}) + \bar{E}_2 Y_0(\bar{k} \bar{r}) + \bar{E}_3 \quad (3.52)$$

Dans ces conditions on montre, par variation des constantes, que $g_1(\bar{r})$ vérifie la relation :

$$g_1(\bar{r}) = D_1 J_1(\bar{k} \bar{r}) + D_2 Y_1(\bar{k} \bar{r}) + D_3 \bar{r} + \frac{D_4}{\bar{r}} \quad (3.53)$$

avec

$$D_1 = - \bar{k} \bar{E}_1 \quad D_2 = - \bar{k} \bar{E}_2 \quad D_3 = - 2 \bar{E}_3$$

Compte-tenu des conditions aux limites (3.30), nous obtenons quatre équations identiquement nulles à quatre inconnues $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3, \bar{D}_4$. Par conséquent nous aurons :

$$k_1(\bar{r}) = g_1(\bar{r}) \equiv 0 \quad (3.54)$$

- Dans le cas d'une accélération nous obtenons une solution de la forme :

$$k_1(\bar{r}) = \bar{F}_1 J_0(i \bar{k} \bar{r}) + \bar{F}_2 K_0(\bar{k} \bar{r}) + \bar{F}_3 \quad (3.55)$$

$$g_1(\bar{r}) = \bar{G}_1 J_1(i \bar{k} \bar{r}) + \bar{G}_2 K_1(\bar{k} \bar{r}) + \bar{G}_3 \bar{r} + \frac{\bar{G}_4}{\bar{r}} \quad (3.56)$$

Comme pour une décélération, on vérifie que la solution se réduit à :

$$k_1(\bar{r}) = g_1(\bar{r}) \equiv 0 \quad (3.57)$$

b) Pour tout $i \neq 1$ nous obtenons un système identique au système (3.31) en tenant compte des termes nuls. La solution de ce système, compte-tenu des conditions aux limites nulles, est la solution identiquement nulle.

Par conséquent, une solution de la forme générale (3.29) se limite au terme d'ordre $i = 1$ et la solution de l'écoulement instationnaire peut s'écrire sous la forme suivante, qui n'est plus un développement en série :

$$\begin{cases} \bar{v}(\bar{r}, \bar{t}) = \frac{R_{e0} e^{-\bar{k}^2 \bar{t}}}{J_1(\bar{k}) Y_1(\bar{k} \lambda) - J_1(\lambda \bar{k}) Y_1(\bar{k})} \left[Y_1(\lambda \bar{k}) J_1(\bar{k} \bar{r}) - J_1(\lambda \bar{k}) Y_1(\bar{k} \bar{r}) \right] ; \\ \bar{u}(\bar{r}, \bar{t}) = \bar{w}(\bar{r}, \bar{t}) = 0 \end{cases} \quad (3.58)$$

pour une décélération exponentielle (courbes III.1) ;

$$\begin{cases} \bar{v}(\bar{r}, \bar{t}) = \frac{R_{e0} e^{+\bar{k}^2 \bar{t}}}{J_1(i \bar{k}) K_1(\lambda \bar{k}) - J_1(i \lambda \bar{k}) K_1(\bar{k})} \left[K_1(\lambda \bar{k}) J_1(i \bar{k} \bar{r}) - J_1(i \lambda \bar{k}) K_1(\bar{k} \bar{r}) \right] ; \\ \bar{u}(\bar{r}, \bar{t}) = \bar{w}(\bar{r}, \bar{t}) = 0 \end{cases} \quad (3.59)$$

pour une accélération exponentielle (courbes III.2) .

3 - Conclusion

Nous avons cherché dans un premier temps une solution de la forme :

$$\begin{aligned}\bar{v}(\bar{r}, \bar{t}) &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n R_{er}^i(\bar{t}) f_i(\bar{r}) \quad ; \\ \bar{u}(\bar{r}, \bar{t}) &= \sum_{i=1}^n R_{er}^i(\bar{t}) g_i(\bar{r}) \quad ; \\ \bar{w}(\bar{r}, \bar{t}) &= \bar{z} \sum_{i=1}^n R_{er}^i(\bar{t}) k_i(\bar{r})\end{aligned}$$

qui nous a conduit à la solution exacte :

$$\left\{ \begin{aligned}\bar{v}(\bar{r}, \bar{t}) &= R_{e0} e^{\pm k^2 \bar{t}} f(\bar{r}) \quad ; \\ \bar{u}(\bar{r}, \bar{t}) &= \bar{w}(\bar{r}, \bar{t}) = 0\end{aligned}\right.$$

On constate donc que la recherche d'une solution sous la forme présentée ne conduit pas à un développement en série mais à une forme analytique bien définie indépendante des considérations habituelles sur sa validité fonction de la petitesse du nombre de REYNOLDS.

Il en résulte qu'une comparaison avec le traitement numérique du système (3.25), au paragraphe suivant, permettra de vérifier si la solution trouvée est bien celle obtenue numériquement pour des lois d'accélération ou de décélération exponentielle, sans que l'on ait eu à choisir un type particulier de solution pour \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} sous la forme (3.29).

Remarquons dès à présent que l'étude numérique aura l'avantage de traiter l'accélération ou de décélération d'un type quelconque. Notons qu'il est encore possible de trouver une solution au problème lorsque l'on passe brusquement d'un état stationnaire caractérisé par une vitesse de rotation ω_0 à un autre état stationnaire caractérisé par ω_1 . Cette solution a été donnée par G. COGNET (12) ; elle peut s'écrire :

$$\bar{v}(\bar{r}, \bar{t}) = (\bar{v}_1 - \bar{v}_0) \left\{ \frac{\lambda^2 - \bar{r}^2}{\bar{r}(\lambda^2 - 1)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n^2 \bar{t}} [H_n(\bar{r})] \right\} + \bar{v}_0(\bar{r}) \quad (3.60)$$

avec

$$H_n(\bar{r}) = \frac{J_1(\alpha_n \bar{r}) Y_1(\alpha_n \lambda) - J_1(\alpha_n \lambda) Y_1(\alpha_n \bar{r})}{\alpha_n (A_1 - A_2)} ;$$

$$A_1 = J_1(\alpha_n \lambda) Y_2(\alpha_n) - J_2(\alpha_n) Y_1(\alpha_n \lambda) ;$$

$$A_2 = \lambda \left[J_1(\alpha_n) Y_2(\alpha_n \lambda) - J_2(\alpha_n \lambda) Y_1(\alpha_n) \right]$$

α_n sont tabulées.

Toutes ces solutions ne nous permettent pas d'étudier l'écoulement à grande vitesse car \bar{u} et \bar{w} cessent d'être nulles. Enfin, il n'a été possible d'établir la solution qu'en supposant les cylindres de hauteur infinie. Cette restriction nous a permis de ramener le problème bidimensionnel à un problème unidimensionnel, et par là même nous ne pouvons prévoir l'influence de parois horizontales limitant le domaine torique sur l'écoulement de base laminaire.

Il s'avère donc nécessaire de reprendre le problème des cylindres infinis en régime laminaire stable et instationnaire et d'étudier différents types d'accélération ou de décélération. Il sera alors intéressant de comparer l'évolution du mouvement par rapport au régime stationnaire associé.

Etant donné la complexité d'une étude analytique, il nous a paru bon de traiter les équations par une méthode numérique. Cette méthode a été utilisée par P. FLORENT (21) pour déterminer l'écoulement entre deux disques.

III - RECHERCHE D'UNE SOLUTION NUMERIQUE EN ECOULEMENT INSTATIONNAIRE

Pour résoudre les équations (3.27) munies des conditions aux limites et initiales (3.28) nous utilisons la méthode de NEWTON qui n'implique pas qu'une forme particulière soit donnée à $R_{er}(\bar{r})$.

1) Schéma implicite de différences finies

Nous devons intégrer le système aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} k''_{\bar{r},\bar{t}} + k'_{\bar{r}} \left(-g'_{\bar{r}} - \frac{2}{\bar{r}} g + \frac{1}{\bar{r}^2}\right) + k''_{\bar{r}^2} \left(g - \frac{1}{\bar{r}}\right) - k'''_{\bar{r}^3} = 0 & (1) \\ k + g'_{\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} g = 0 & (2) \\ \frac{f'}{\bar{t}} + g \frac{f'}{\bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{f'}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}} \frac{f''}{\bar{r}^2} = 0 & (3) \end{cases} \quad (3.27)$$

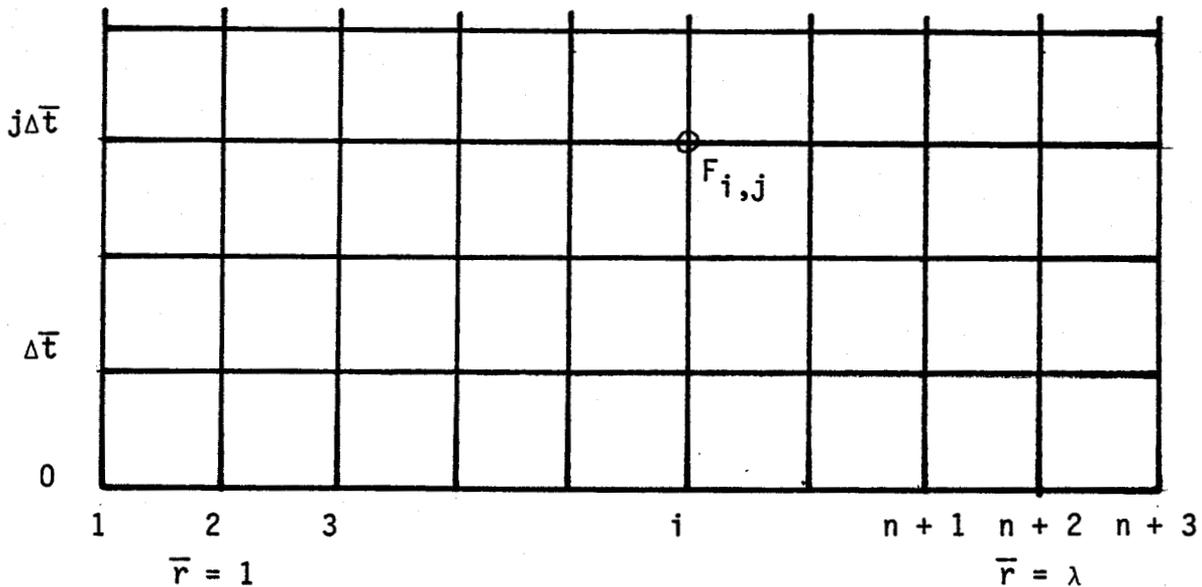
En remplaçant les différents termes de ce système par leur approximation en différences finies et en appelant ϕ_{1i} , ϕ_{2i} , ϕ_{3i} les trois équations (3.27), nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned} \phi_{1i} &= \frac{1}{2\Delta\bar{t}\Delta\bar{r}} \left[K_{1,i+1} - K_{1,i-1} - K_{i+1} + K_{i-1} \right] + \frac{1}{2\Delta\bar{r}} \left[k_{1,i+1} - k_{1,i-1} \right] \cdot \\ &\left\{ \frac{1}{2\Delta\bar{r}} \left[G_{1,i+1} - G_{1,i-1} \right] - \frac{2}{\bar{r}_i} G_{1,i} + \frac{1}{\bar{r}_i^2} \right\} + \frac{1}{\Delta\bar{r}^2} \left[K_{1,i-1} - 2K_{1,i} + \right. \\ &\left. + K_{1,i+1} \right] \cdot \left[G_{1,i} - \frac{1}{\bar{r}_i} \right] + \frac{1}{2\Delta\bar{r}^3} \left[K_{1,i-2} - 2K_{1,i-1} + 2K_{1,i+1} - K_{1,i+2} \right] ; \\ \phi_{2i} &= k_{1,i} + \frac{1}{2\Delta\bar{r}} \left[G_{1,i+1} - G_{1,i-1} \right] + \frac{1}{\bar{r}_i} G_{1,i} ; \\ \phi_{3i} &= \frac{1}{\Delta\bar{t}} \left[F_{1,i} - F_i \right] + \frac{G_{1i}}{2\Delta\bar{r}} \left[F_{1,i+1} - F_{1,i-1} \right] + \frac{1}{2\bar{r}_i\Delta\bar{r}} \left[F_{1,i+1} - F_{1,i-1} \right] + \\ &+ \frac{1}{\Delta\bar{r}^2} \left[2F_{1,i} - F_{1,i+1} - F_{1,i-1} \right] \cdot (3.28) \end{aligned}$$

pour $3 \leq i \leq n + 1$

et où $F_{1,i}$, $G_{1,i}$ et $K_{1,i}$ sont les valeurs de F_i, G_i et K_i à l'instant $\bar{t} + \Delta\bar{t}$; F_i, G_i, K_i étant prises à l'instant \bar{t} .

Si nous considérons un grillage limité à l'intérieur d'une bande demi-infinie en ordonnée, de largeur $(\lambda - 1)$ correspondant à l'entrefer et si nous désignons par $\Delta\bar{r} = \frac{\lambda - 1}{n}$ et $\Delta\bar{t}$ les dimensions du maillage suivant les axes \bar{r} et \bar{t} , nous obtenons la figure ci-dessous :



L'introduction des points $i = 1$ et $i = n + 3$ se justifie par l'utilisation de formules centrales dans les approximations des dérivées spatiales. La valeur des inconnues F_i, G_i, K_i en ces points est déterminée en annexe II ainsi que la méthode de NEWTON.

Les conditions aux limites (3.28) entraînent :

- pour $\bar{r} = 1$ soit $i = 2$

$$f(1, \bar{t}) = R_{er}(\bar{t}) \implies F_2 = R_{er}(\bar{t})$$

$$g(1, \bar{t}) = k(1, \bar{t}) = 0 \implies G_2 = K_2 = 0$$

- pour $\bar{r} = \lambda$ soit $i = n + 2$

$$f(\lambda, \bar{t}) = g(\lambda, \bar{t}) = k(\lambda, \bar{t}) = 0 \implies F_{n+2} = G_{n+2} = K_{n+2} = 0$$

On imposera des lois $R_{er}(t)$ dans ce qui suit.

2) Analyse des résultats numériques

Ce problème a été intégré sur un ordinateur C.I.I 10070 avec un pas $\Delta \bar{r} = 0,01$ pour un entrefer $\lambda - 1 = 0.2$.

Nous avons donc utilisé $n = 20$ dans nos calculs. L'organigramme de calcul se trouve en annexe I.

Différentes formes d'accélération ou de décélération du cylindre intérieur caractérisée par le nombre de REYNOLDS $R_{er}(\bar{t})$ ont été réalisées. Nous avons ainsi déterminé le mouvement pour :

$$R_{er}(\bar{t}) = R_{e0} e^{\bar{k}^2 \bar{t}} \text{ avec } \bar{k}^2 = +1 \text{ (courbes III.3) ;}$$

$$R_{er}(\bar{t}) = R_{e0} e^{-\bar{k}^2 \bar{t}} \text{ avec } \bar{k}^2 = +1 \text{ (courbes III.4) ;}$$

$$R_{er}(\bar{t}) = R_{e0} (1 - e^{-\bar{k}^2 \bar{t}}) \text{ avec } \bar{k}^2 = 1 \text{ (courbes III.5) ;}$$

$$R_{er}(\bar{t}) = R_{e0} \sin \bar{\omega} \bar{t} \text{ avec } \bar{\omega} = \pi \text{ (courbes III.6) ;}$$

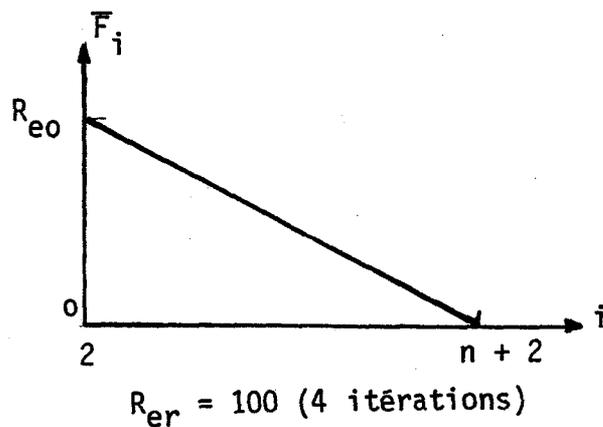
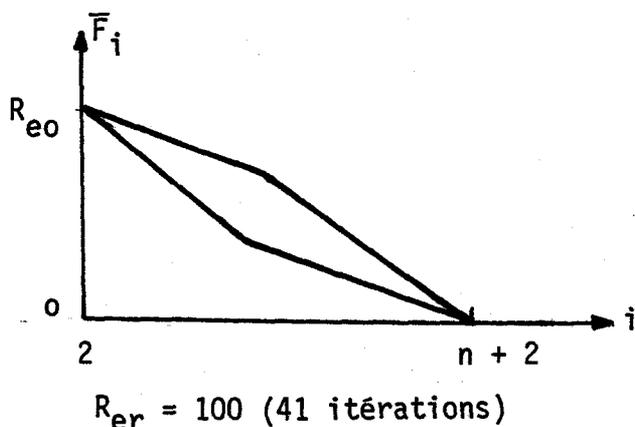
$$R_{er}(\bar{t}) = R_{e0} \text{ sh } \bar{\omega} \bar{t} \text{ avec } \bar{\omega} = \pi \text{ (courbes III.7) ;}$$

$$R_{er}(\bar{t}) = R_{e0} (1 - \sin \bar{\omega} \bar{t}) \text{ avec } \bar{\omega} = \pi \text{ (courbes III.8).}$$

Nous avons limité l'étude à six formes de $R_{er}(\bar{t})$. En fait, la méthode permet de traiter n'importe quel régime instationnaire.

Nous pouvons alors comparer la solution trouvée numériquement avec la solution analytique (3.58) et (3.59) pour un taux d'accélération ou de décélération exponentielle $\bar{k}^2 = 1$. Nous constatons que la précision des résultats dépend essentiellement du choix de ϵ et du nombre d'itérations maximum si les calculs convergent. Ainsi, nous avons pu prendre $\epsilon = 0.01, 0.005, 0.001$ sans obtenir de différence supérieure à 10^{-4} avec les résultats analytiques du paragraphe précédent (tableau numérique en annexe II).

Enfin, il est à noter que la solution trouvée est indépendante du choix des valeurs de départ pour f, g et k . Le même résultat est trouvé simplement au bout d'un nombre d'itérations plus grands si l'on est plus loin de la solution. C'est le cas de l'approximation triangulaire ci-dessous:



Le nombre d'itérations nécessaires pour rendre les résidus tous inférieurs à ϵ varie également avec le nombre de REYNOLDS. Ainsi pour $R_{er} = 10$ il faut 2 itérations et pour $R_{er} = 150$ il faut 4 itérations.

Nous pouvons encore souligner le point suivant : il est toujours possible de trouver une solution du type (1.4) aux grands nombres de REYNOLDS supérieurs à R_{er} critique qui est de 480 pour $\lambda = 1.2$.

Pourtant l'expérience montre que l'écoulement laminaire stable a laissé la place à un écoulement tourbillonnaire.

3) Régime stationnaire associé

Il est possible de mettre en évidence la différence qui existe entre un état instationnaire à un instant donné et l'état stationnaire associé. Celui-ci est défini comme l'état stationnaire dont la vitesse angulaire ω_0 est égale à celle qu'aurait le système dans une évolution instationnaire à un instant donné. Nous avons réalisé cette expérience entre un état stationnaire et un état instationnaire obéissant à la loi $R_{er}(\bar{\tau}) = R_{e0} (1 - e^{-\bar{\tau}})$ (courbe III.9), puis entre deux états instationnaires obéissant à la même loi $R_{er}(\bar{\tau}) = R_{e0} \sin \omega \bar{\tau}$ (courbes II. 10). Dans les deux cas, on montre l'avance ou le retard de l'évolution instationnaire.

IV - CONCLUSION

A partir de l'hypothèse d'indépendance de \bar{v} vis à vis de la coordonnée axiale, nous avons étudié l'écoulement entre deux cylindres infinis en cherchant d'abord une solution de la forme :

$$\begin{aligned} \bar{v}(\bar{r}, \bar{\tau}) &= \frac{1}{r} \cdot \sum_{i=1}^n R_{er}^i(\bar{\tau}) \cdot f_i(\bar{r}) \\ \bar{u}(\bar{r}, \bar{\tau}) &= \sum_{i=1}^n R_{er}(\bar{\tau}) \cdot g_i(\bar{r}) \\ \bar{w}(\bar{r}, \bar{\tau}) &= \bar{z} \cdot \sum_{i=1}^n R_{er}(\bar{\tau}) \cdot k_i(\bar{r}) \end{aligned}$$

Nous avons pu constater que le choix d'une telle solution conduit analytiquement à la solution :

$$\bar{v}(\bar{r}, \bar{t}) = \frac{1}{\bar{r}} R_{eo} e^{\pm k^2 \bar{t}} f_1(\bar{r})$$

$$\bar{u}(\bar{r}, \bar{t}) = \bar{w}(\bar{r}, \bar{t}) = 0$$

pour une accélération ou décélération exponentielle. Ce résultat a été trouvé sans qu'il soit nécessaire d'imposer au départ $\bar{u} = \bar{w} = 0$.

L'étude numérique du système d'équations (3.25), outre qu'elle permet d'envisager n'importe quelle forme d'accélération ou de décélération du cylindre intérieur, confirme le résultat analytique pour une rotation du type :

$$R_{er}(\bar{t}) = R_{eo} e^{\pm k^2 \bar{t}}$$

Mais, de plus, nous pouvons constater que seule est trouvée la solution dans laquelle $\bar{u} = \bar{w} = 0$, même aux nombres de REYNOLDS supérieurs à $R_{ec} = 480$ à partir duquel apparaissent des tourbillons. La solution trouvée est la solution de similitude qui ne représente l'écoulement réel que dans une gamme de nombres de REYNOLDS.

Un essai de perturbation conformément à la théorie linéaire a été envisagé, mais il n'a pas été possible de trouver une solution du fait des instabilités numériques rencontrées ;

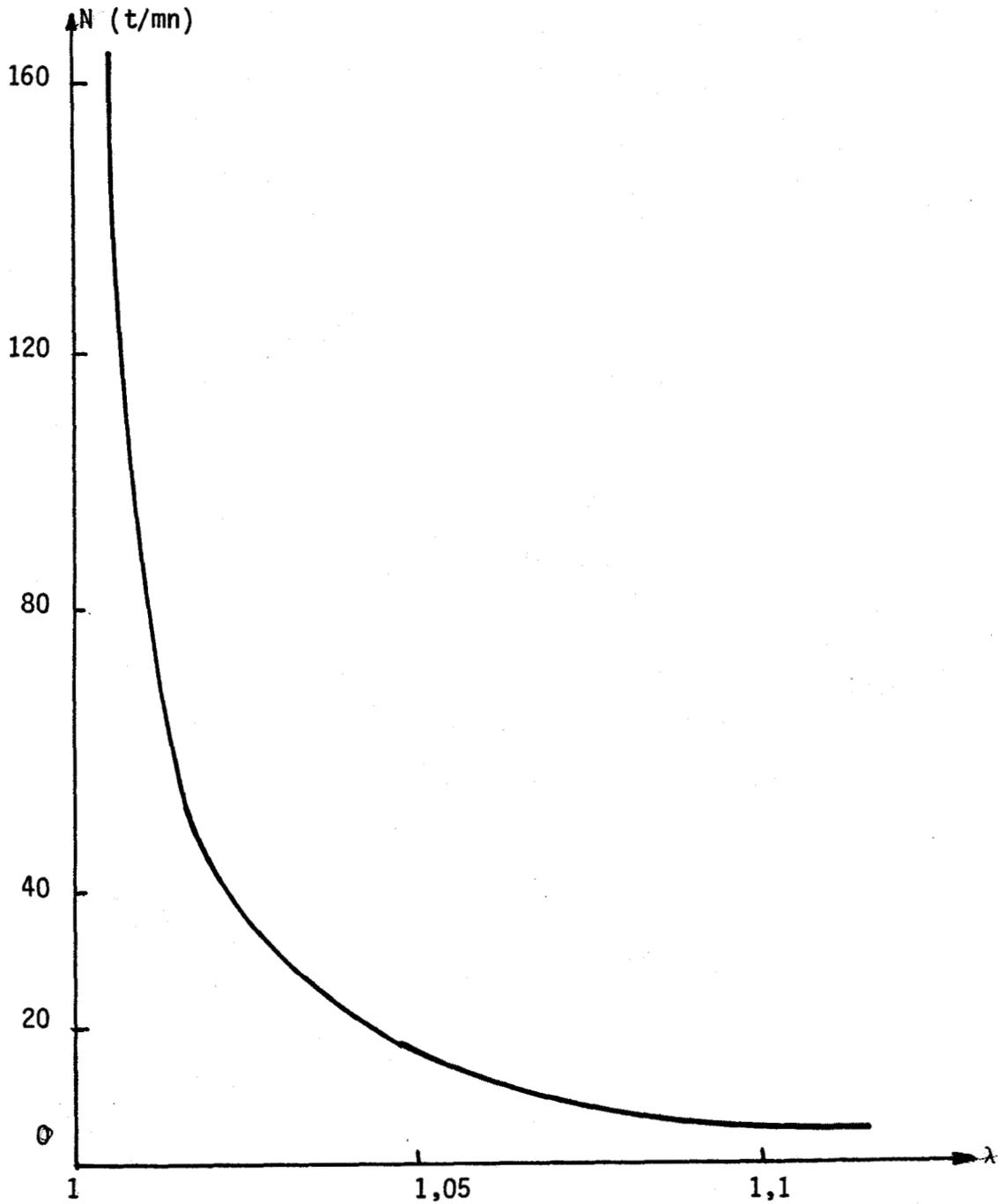
Par conséquent, nous avons choisi de changer de méthode de calcul et de traiter directement les équations de NAVIER-STOKES. Cette méthode nécessite la connaissance du vecteur vitesse \mathcal{U} sur des frontières z ; il faut donc envisager le cas de cylindres finis.

Cependant l'écoulement laminaire tel que nous l'avons défini se rencontre dans les paliers fluides et peut se maintenir à de grandes vitesses. Nous avons tracé ci-dessous la limite du régime laminaire



stable définie par le nombre de REYNOLDS $R_{ec} = \frac{\omega_1 r_1 d}{\lambda}$ pour un palier

$r_1 = 40$ mm.



Tous ces résultats concernent l'écoulement entre cylindres de longueur infinie, ce qui n'est qu'une approximation d'autant meilleure que l'allongement est grand. Dans le chapitre suivant nous allons étudier le cas des cylindres de longueur finie.



METHODE DE CALCUL DE L'ÉCOULEMENT STATIONNAIRE ENTRE DEUX
CYLINDRES DE LONGUEUR FINIE

Dans la réalité, il faut constater que des cylindres de longueur infinie n'existent pas et si l'allongement est insuffisant, il faudra toujours tenir compte de la présence d'extrémités fermées par des joints d'étanchéité ou d'autres systèmes. Il n'est plus alors possible de faire les hypothèses du chapitre précédent. (voir figure 2.2).

Aussi, nous allons aborder l'étude directe du système d'équations aux dérivées partielles (2.9), (2.10) appliquées à l'écoulement dans une cavité torique. Ce domaine est limité par quatre parois mobiles autour d'un axe vertical commun.

Nous nous limiterons à faire varier les trois paramètres définis dans les conditions aux limites (2.11), à savoir : l'entrefer des deux cylindres défini par $(\lambda - 1)$, la hauteur de la cavité définie par k et enfin le nombre de REYNOLDS de rotation du cylindre intérieur, le cylindre extérieur étant fixe. Ce choix des paramètres définissant le domaine d'écoulement nous permettra d'effectuer la liaison avec le problème des cylindres infinis pour lesquels $k \gg (\lambda - 1)$. Il sera alors possible de déterminer le rôle des extrémités fermées et leur influence sur l'écoulement de TAYLOR. Cela nous amènera à définir le rapport $\frac{k}{\lambda - 1}$ à partir duquel on trouve une région d'écoulement de ce type.

I - CHOIX D'UNE METHODE NUMERIQUE

Nous devons trouver une solution du système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} - \frac{\bar{v}^2}{\bar{r}} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}}{\bar{r}^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} ; \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} + \frac{\bar{u}\bar{v}}{\bar{r}} = \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{v}}{\bar{r}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} ; \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} ; \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}}{\bar{r}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

tel que \bar{u} , \bar{v} et \bar{w} satisfassent aux conditions sur le contour :

$$\bar{r} = \lambda \implies \bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0 ,$$

$$\bar{r} = 1 \implies \bar{u} = \bar{w} = 0 \text{ et } \bar{v} = R_{e0} .$$

$$\bar{z} = 0 \text{ et } \bar{z} = k \implies \begin{cases} \bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0 \\ \text{ou} \\ \bar{u} = \bar{w} = 0 \text{ et } \bar{v} = R_{e0} \cdot \bar{r} \end{cases} \quad (4.2)$$

La résolution numérique d'un tel système se heurte à plusieurs difficultés inhérentes aux équations de NAVIER-STOKES. Elles sont non linéaires d'une part et d'autre part les simplifications difficiles car si les termes de convection peuvent devenir prépondérants aux grands nombres de REYNOLDS, cela n'est plus vrai au voisinage d'une paroi.

Le problème direct peut être formulé de deux façons différentes qui dépendent des conditions aux limites :

- Soit que l'on transforme les équations en introduisant des fonctions de courant ;

- Soit que l'on conserve les inconnues de départ ; à savoir : la vitesse et la pression.

Si la première formulation diminue le nombre de fonctions inconnues, elle élève par contre l'ordre de dérivation du système d'équations aux dérivées partielles ce qui peut entraîner des imprécisions d'ordre numérique au niveau de la discrétisation de ces dérivées. L'utilisation de la vitesse et de la pression rend plus aisée la compréhension des résultats mais nécessite la résolution de quatre équations.

Parmi ceux qui ont utilisé ces différentes méthodes on peut citer FORTIN, PEYRET, TEYMAM (17) qui ont calculé le champ des vitesses dans une cavité carrée à partir d'une méthode de perturbation des équations de NAVIER-STOKES et GRILLAUD, ALZIARY DE ROQUEFORT (19) qui ont déterminé les lignes de courant entre deux cylindres coaxiaux finis et entre deux sphères concentriques.

La plupart des problèmes ayant fait l'objet d'une résolution numérique en formulation vitesse-pression concernaient des écoulements plans. L'extension de cette méthode aux systèmes nécessitant l'utilisation des coordonnées cylindriques est plus récente. On peut citer dans ce cas les travaux de FLORENT, NGUYEN DINH et VON DINH qui ont déterminé l'écoulement entre deux disques coaxiaux de dimensions finies avec soufflage axial ou non (20) par une extension de la méthode de PEYRET au cas d'un écoulement non borné. C'est cette méthode que nous allons appliquer au cas de cylindres coaxiaux de hauteur limitée et pour différentes configurations.

II - ETUDE D'UN SCHEMA NUMERIQUE

1) Formulation de la méthode

Considérons les équations de NAVIER-STOKES régissant les écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans un domaine borné (Ω) à deux dimensions, de frontière (Γ). Dans le cas stationnaire les équations (4.1) et (4.2) s'écrivent sous la forme générale.

$$\left\{ \begin{array}{l} U \cdot \nabla U - \Delta U + \nabla p = 0 ; \\ \nabla \cdot U = 0 \\ U|_{\Gamma} = \alpha \end{array} \right. \quad (4.3)$$

où U est le vecteur vitesse de composantes u, v, w . Le vecteur α figurant dans les conditions aux limites est donné.

Dans cette étude nous cherchons à appliquer une méthode indépendante de l'hypothèse utilisée au chapitre (III), à savoir v indépendante de z .

La méthode de FORTIN, PEYRET, TEMAM permet de traiter directement le système aux dérivées partielles (4.3). Son application nécessite la connaissance de la vitesse sur le contour fermé (Γ). Ces conditions au contour sont données en (4.2) à savoir :

$$\begin{aligned} u(r_2, z) = w(r_2, z) = 0, \quad v(r_2, z) = R_{er} \\ u(r_1, z) = v(r_1, z) = w(r_1, z) = 0 \\ u(r, 0) = w(r, 0) = 0, \quad v(r, 0) = r \cdot R_{er} \text{ ou } 0 \\ u(r, H) = w(r, H) = 0, \quad v(r, H) = r \cdot R_{er} \text{ ou } 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

La méthode numérique que l'on applique est une méthode de perturbation des équations du mouvement faisant apparaître des termes analogues aux gradients temporels des vitesses et des pressions. Avec ces perturbations, les équations de NAVIER-STOKES s'écrivent sous forme vectorielle :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial s} + U \cdot \nabla U - \Delta U + \nabla p &= 0 ; \\ \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} + \nabla \cdot U &= 0 ; \\ U|_{\Gamma} &= \alpha \end{aligned} \right. \quad (4.5)$$

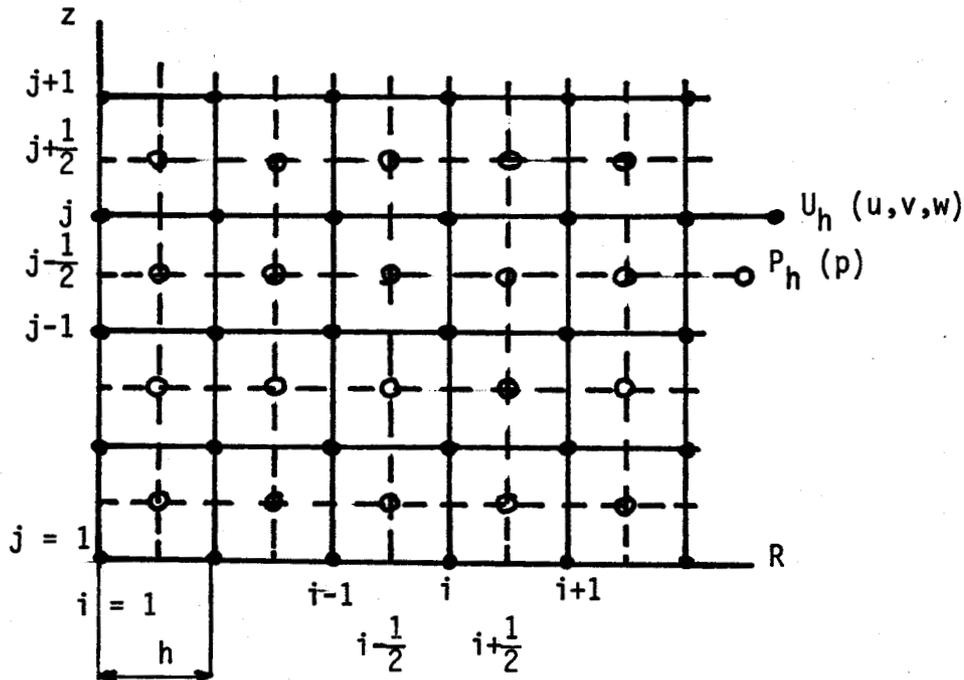
Le système (4.5) ne représente l'écoulement que lorsque ce qui correspond à un état "stationnaire" est atteint.

2) Discrétisation spatiale

Le choix de la discrétisation doit être déterminé par la précision que nous voulons atteindre. Les dérivées spatiales sont approchées par des différences centrées de façon à obtenir une précision du second ordre.

Afin de s'affranchir des conditions de pression sur la frontière (Γ) du domaine d'écoulement (Ω) tel qu'il est défini dans les conditions aux limites (4.2), nous considérons deux réseaux U_h et P_h décalés l'un par rapport

à l'autre de $\frac{h}{2}$, h étant le pas spatial. Les composantes u, v, w de la vitesse U sont définies sur U_h , la pression p étant définie sur P_h comme l'indique la figure ci-dessous.



Dans ces conditions, en un point d'espace (i, j) et à la $n^{\text{ème}}$ itération, la vitesse est fonction des points :

$$U_{i,j}^n = U(n\delta s, ih, jh) \text{ soient :}$$

$$\begin{cases} U_{i,j}^n = u(n\delta s, ih, jh) ; \\ v_{i,j}^n = v(n\delta s, ih, jh) ; \\ w_{i,j}^n = w(n\delta s, ih, jh) ; \end{cases} \quad (4.6)$$

et la pression, une fonction de la forme :

$$p_{i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^n = p \left[n\delta s, \left(i \pm \frac{1}{2} \right) h, \left(j \pm \frac{1}{2} \right) h \right] \quad (4.7)$$

Si nous choisissons un maillage tel que pour

$$\bar{r} = 1 \rightarrow i = 1$$

et

$$\bar{z} = 0 \rightarrow j = 1$$

la position d'une particule fluide sera déterminée par :

$$\bar{r} = 1 + (i - 1) \Delta R \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.8)$$

et

$$\bar{z} = (j - 1) \Delta z \quad 1 \leq j \leq N \quad (4.9)$$

avec éventuellement $\Delta R = \Delta Z = h$.

3 - Calcul de la vitesse et de la pression

La vitesse et la pression étant connues à la $(n - 1)^{\text{ème}}$ itération, le passage à la $n^{\text{ème}}$ itération est donné par les relations suivantes :

$$\begin{cases} U^n = U^{n-1} + \delta U ; \\ p^n = p^{n-1} + \delta P . \end{cases} \quad (4.10)$$

Les termes de correction δU et δP sont calculés à partir du système (4.5) perturbé. La vitesse U^{n-1} étant connue à la $(n-1)^{\text{ème}}$ itération, l'équation de continuité donne :

$$\delta P = - c^2 \delta s \cdot (\nabla U)^{n-1} \quad (4.11)$$

La $n^{\text{ème}}$ itération de p^n est alors déterminée. On calcule ensuite δU à partir des équations du mouvement :

$$\delta U = - \delta s \left[(U \cdot \nabla U)^{n-1} - (\Delta U)^{n-1} + (\nabla p)^n \right] . \quad (4.12)$$

Le processus itératif est arrêté lorsque les termes correctifs δU et δP sont inférieurs à une constante ϵ arbitrairement petite, fixée à l'avance. Il est alors évident que le choix des valeurs de départ U^0 satisfait aux conditions aux limites et de p^0 influera sur la rapidité d'obtention des résultats quand $n \rightarrow \infty$.

Le choix des valeurs respectives de δs et c^2 est guidé par la stabilité du schéma que nous choisissons et par la rapidité de convergence vers l'état stationnaire.

4 - Approximation par différences centrées

Les dérivées premières des vitesses u , v , w intervenant dans les termes δU et δP à chaque itération sont approchées par des différences centrées aux points (i,j) .

$$\frac{\partial U}{\partial r}{}^{n-1}_{i,j} \Rightarrow \frac{U_{i+1,j}^{n-1} - U_{i-1,j}^{n-1}}{2 \Delta R} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r}{}^{n-1}_{i,j} \Rightarrow \frac{U_{i,j+1}^{n-1} - U_{i,j-1}^{n-1}}{2 \Delta Z} \quad (4.14)$$

Il en est de même pour les dérivées premières de la pression p, mais il faut tenir compte du décalage de $\frac{h}{2}$ du réseau P_h :

$$\frac{\partial P}{\partial r}{}^n_{i,j} \Rightarrow \frac{1}{2 \Delta R} \cdot \left[(P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n + P_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n) - (P_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n + P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n) \right] \quad (4.15)$$

Nous introduisons ainsi une erreur de discrétisation de l'ordre de $o(h^2)$.

De même, les dérivées secondes sont approchées par des différences centrées :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}{}^{n-1}_{i,j} \Rightarrow \frac{U_{i+1,j}^{n-1} - 2U_{i,j}^{n-1} + U_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta R^2} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}{}^{n-1}_{i,j} \Rightarrow \frac{U_{i,j+1}^{n-1} - 2U_{i,j}^{n-1} + U_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta Z^2} \quad (4.17)$$

Nous introduisons également une erreur de discrétisation de l'ordre $o(h^2)$.

Par conséquent, les termes correctifs de chaque composante du vecteur

vitesse et de la pression seront donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \delta u = \delta s \left\{ - u_{i,j}^{n-1} \cdot \frac{u_{i+1,j}^{n-1} - u_{i-1,j}^{n-1}}{2 \Delta R} - w_{i,j}^{n-1} \cdot \frac{u_{i,j+1}^{n-1} - u_{i,j-1}^{n-1}}{2 \Delta Z} \right. \\ \left. + \frac{(v_{i,j}^{n-1})^2}{1+(i-1)\Delta R} - \frac{P_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - P_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n + P_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n - P_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n}{2 \Delta R} \right. \\ \left. + \frac{u_{i+1,j}^{n-1} - 2u_{i,j}^{n-1} + u_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta R^2} + \frac{u_{i+1,j}^{n-1} - u_{i-1,j}^{n-1}}{2 \Delta R} \left[\frac{1+(i-1)\Delta R}{1+(i-1)\Delta R} \right] \right. \\ \left. - \frac{u_{i,j}^{n-1}}{[1+(i-1)\Delta R]^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n-1} - 2u_{i,j}^{n-1} + u_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta Z^2} \right\} \quad (4.18) \end{aligned}$$

$$\delta v = \delta s \left\{ - u_{i,j}^{n-1} \frac{v_{i+1,j}^{n-1} - v_{i-1,j}^{n-1}}{2\Delta R} - w_{i,j}^{n-1} \frac{v_{i,j+1}^{n-1} - v_{i,j-1}^{n-1}}{2\Delta Z} \right. \\ - \frac{u_{i,j}^{n-1} \cdot v_{i,j}^{n-1}}{1+(i-1)\Delta R} + \frac{v_{i+1,j}^{n-1} - 2v_{i,j}^{n-1} + v_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta R^2} + \frac{v_{i+1,j}^{n-1} - v_{i-1,j}^{n-1}}{2\Delta R [1 + (i-1)R]} \\ \left. - \frac{v_{i,j}^{n-1}}{[1 + (i-1)\Delta R]} + \frac{v_{i,j+1}^{n-1} - 2v_{i,j}^{n-1} + v_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta Z^2} \right\}; \quad (4.19)$$

$$\delta w = \delta s \left\{ - u_{i,j}^{n-1} \frac{w_{i+1,j}^{n-1} - w_{i-1,j}^{n-1}}{2\Delta R} - w_{i,j}^{n-1} \frac{w_{i,j+1}^{n-1} - w_{i,j-1}^{n-1}}{2\Delta Z} \right. \\ - \frac{p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n + p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^n - p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta Z} \\ + \frac{w_{i+1,j}^{n-1} - 2w_{i,j}^{n-1} + w_{i-1,j}^{n-1}}{\Delta R^2} + \frac{w_{i+1,j}^{n-1} - w_{i-1,j}^{n-1}}{2\Delta R [1 + (i-1)\Delta R]} \\ \left. + \frac{w_{i,j+1}^{n-1} - 2w_{i,j}^{n-1} + w_{i,j-1}^{n-1}}{\Delta Z^2} \right\}; \quad (54.20)$$

et

$$\delta p = \frac{c^2 \delta s}{1+(i-\frac{1}{2})\Delta R} \left\{ - \frac{(1+i\Delta R)}{2\Delta R} \cdot (u_{i+1,j+1}^{n-1} + u_{i+1,j}^{n-1}) \right. \\ + \frac{1+(i-1)\Delta R}{2\Delta R} (u_{i,j+1}^{n-1} + u_{i,j}^{n-1}) - \frac{[1+(i-\frac{1}{2})\Delta R]}{2\Delta Z} \cdot (w_{i+1,j+1}^{n-1} \\ \left. + w_{i,j+1}^{n-1} - w_{i+1,j}^{n-1} - w_{i,j}^{n-1}) \right\} \quad (4.21)$$

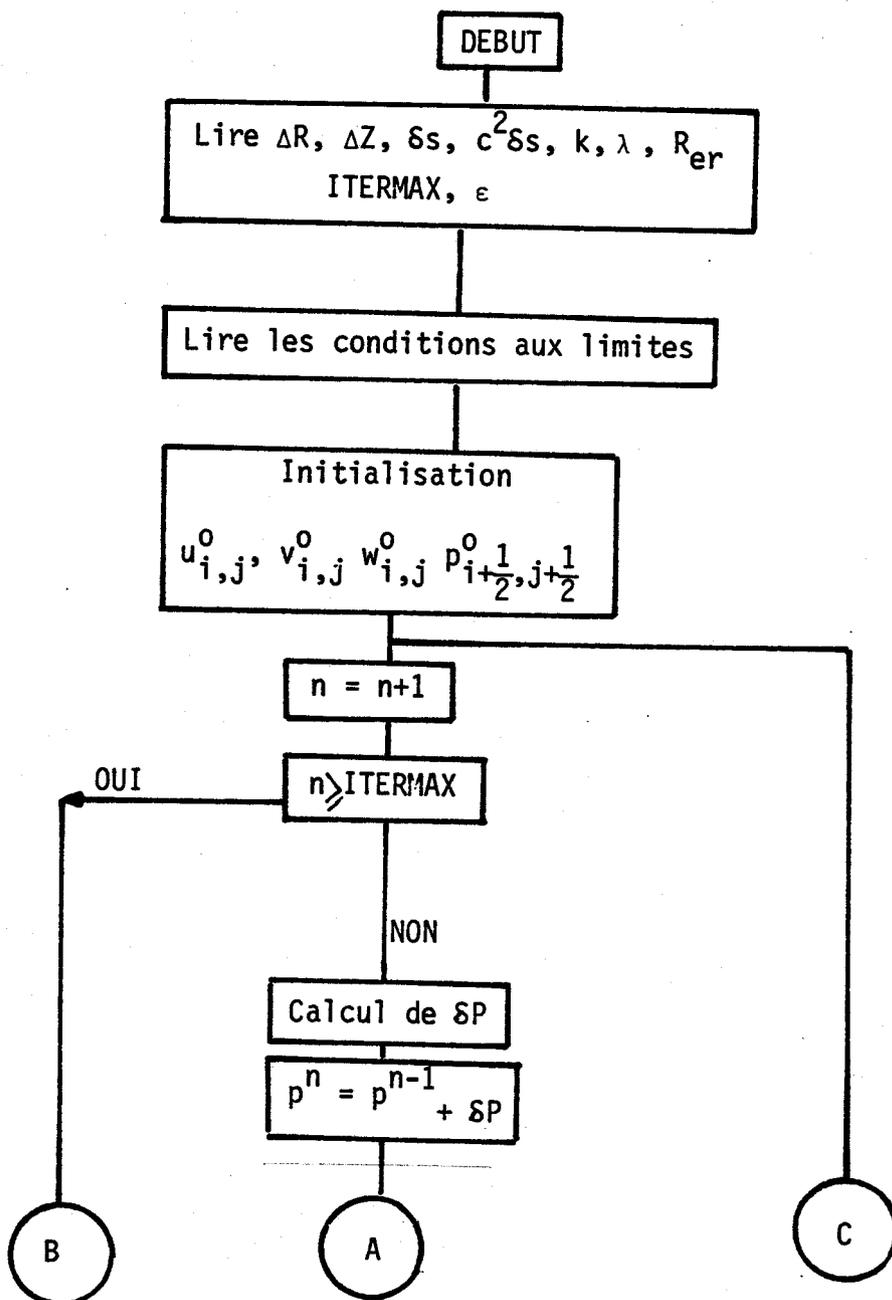
Nous aurons alors successivement le passage de la $(n-1)^{\text{eme}}$ itération à la n^{eme} itération par l'intermédiaire des formules :



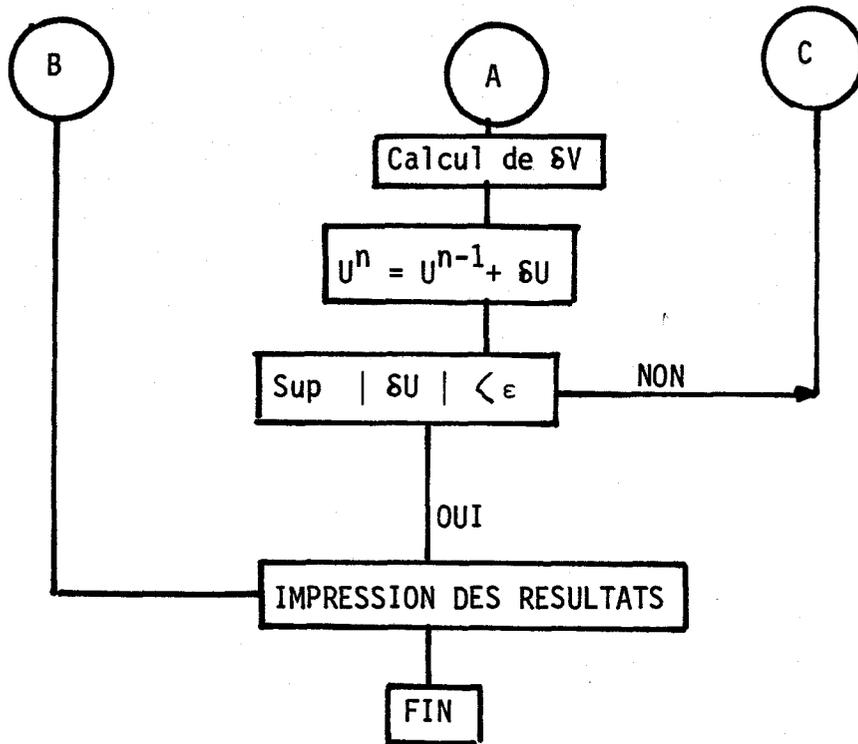
$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i,j}^n = u_{i,j}^{n-1} + \delta u \\ v_{i,j}^n = v_{i,j}^{n-1} + \delta v \\ w_{i,j}^n = w_{i,j}^{n-1} + \delta w \\ p_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^n = p_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n-1} + \delta p \end{array} \right. \quad (4.22)$$

5 - Organigramme de calcul

Le processus itératif est représenté par le schéma de calcul suivant



BIS
LILLE



Le programme est arrêté lorsqu'est vérifiée la condition de convergence suivante sur les résidus de vitesse :

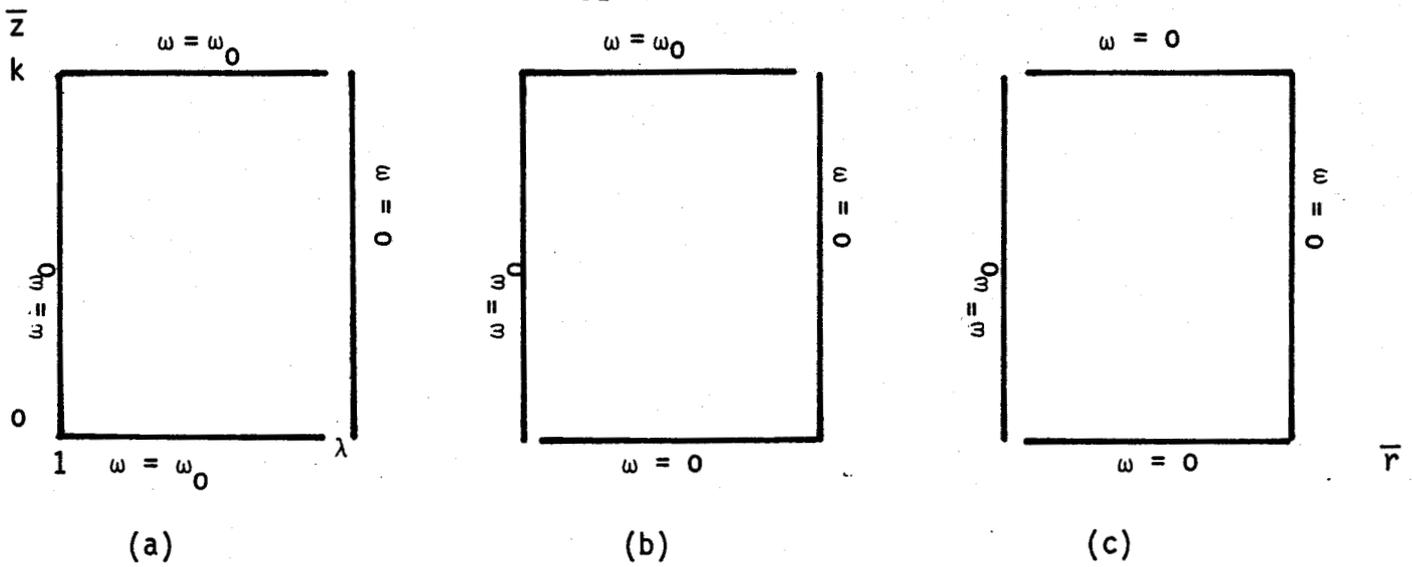
$$\sup |U_{i,j}^n - U_{i,j}^{n-1}| < \epsilon$$

où ϵ est fixé de façon arbitraire et très petit.

Si cette condition n'est pas respectée au bout d'un certain nombre d'itérations défini par ITERMAX, nous arrêtons le programme et conservons les résultats pour un calcul ultérieur.

6) Points singuliers

Etant donné la forme rectangulaire du domaine d'écoulement limité par des parois horizontales qui peuvent tourner à des vitesses différentes des parois verticales qu'elles joignent, la vitesse U subit une discontinuité et ses dérivées d'espaces sont alors infinies. Nous éliminons ces singularités en considérant que le point singulier appartient à l'une ou à l'autre des parois ; dans ce cas les dérivées d'espace sont finies et nous tendrons vers l'infini lorsque le pas h sera de plus en plus petit.



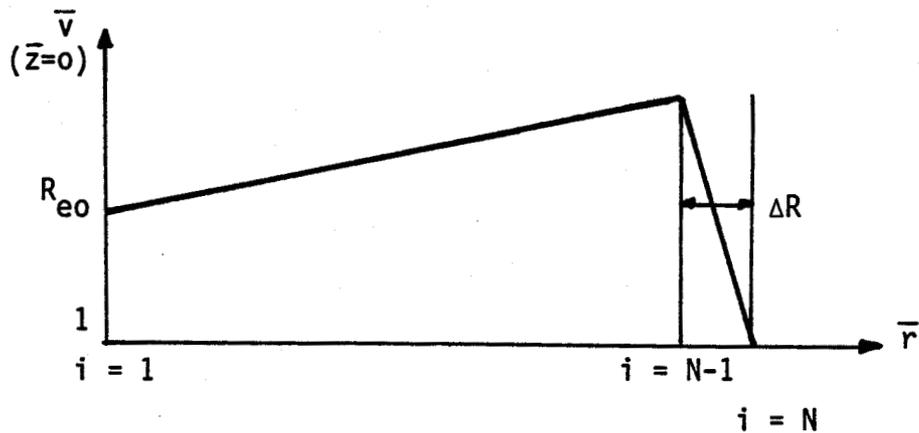
Dans le cas de la figure (a) par exemple, la condition d'adhérence à la paroi impose pour la vitesse tangentielle de vérifier en tout point $\bar{z} = 0$ où $\bar{z} = k$ la relation :

$$\bar{v} = R_{eo} \cdot \bar{r} \quad (4.23)$$

déduite des conditions aux limites (4.2). De plus on doit avoir pour $\bar{r} = \lambda$ la valeur

$$\bar{v} = 0 \quad (4.24)$$

Nous supposons alors que la relation (4.23) est valable jusqu'à $i = N-1$ c'est-à-dire un pas avant la paroi verticale fixe.



On a alors :

$$\bar{v} = R_{eo} \left[1 + (i-1)\Delta R \right] \text{ pour } 1 \leq i \leq N-1$$

et

$$\bar{v} = 0 \text{ pour } i = N$$

III - MISE AU POINT DU PROGRAMME

Nous avons mis au point le programme de calcul selon le processus décrit dans l'organigramme simplifié du paragraphe précédent pour un maillage (20 x 20). Nous avons alors choisi dans un premier temps des pas radiaux et axiaux égaux : $\Delta R = \Delta Z = 0,01$ ce qui correspond à un entrefer $\lambda - 1 = 0,2$ et un rapport hauteur/entrefer égal à 1, c'est-à-dire à une cavité carrée. La vitesse de rotation du cylindre intérieur est fixée à $R_{er} = 100$.

Par la suite, nous avons étudié l'écoulement dans différentes cavités rectangulaires pour lesquelles le rapport hauteur/entrefer varie de 2 à 8. Dans chaque cas nous avons conservé $\lambda - 1 = 0,1$ c'est-à-dire fixé $\Delta R = 0.005$. Pour toutes les géométries envisagées la vitesse de rotation du cylindre intérieur est égale à $R_{er} = 100$, mais la cavité dont le rapport hauteur/entrefer est égal à 8, a fait l'objet d'une étude à différentes vitesses comme nous le verrons au paragraphe VI.

Cette étude a été rendue possible par l'utilisation d'un ordinateur C. I. I. 10070 et d'un ordinateur TELEMECANIC T.1600. Le temps de résolution étant parfois très long (de l'ordre de 120 minutes pour certaines configurations) nous avons fixé $\epsilon = 10^{-3}$ ou $\epsilon = 10^{-4}$ et étudié l'influence de ce paramètre sur la solution obtenue pour des nombres de REYNOLDS n'excédant par $R_{er} = 100$.

IV - ANALYSE DE LA METHODE

Nous devons souligner plusieurs problèmes inhérents à la méthode de perturbation qui nous sont apparus au cours de la réalisation du programme de calcul.

L'erreur est définie sur chaque composante du vecteur vitesse U par

l'écart maximum entre deux itérations successives et en tout point de l'écoulement, c'est-à-dire :

$$\text{Sup } |U_{i,j}^n - U_{i,j}^{n-1}| = \text{Sup } \left\{ |u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}|, |v_{i,j}^n - v_{i,j}^{n-1}|, |w_{i,j}^n - w_{i,j}^{n-1}| \right\}$$

Nous avons constaté que cette erreur est liée au choix des valeurs de ϵ , δs , c^2 , ΔR et ΔZ que nous allons étudier successivement.

1 - Influence de δs et c^2 sur les résultats

Pour une même cavité torique, nous avons pu constater que pour $\delta_s = 25 \cdot 10^{-7}$ la rapidité de convergence ne varie pas jusque $\epsilon = 10^{-3}$ avec deux valeurs différentes de c^2 ($c^2 = 4$ et $c^2 = 10$). Ceci n'est plus vrai si l'on désire atteindre une précision de l'ordre de 10^{-4} comme le montrent les courbes (IV.1).

Par contre, la convergence se fait de façon uniforme pour des nombres de REYNOLDS de $R_{er} = 100$ et nous obtenons les mêmes valeurs des fonctions inconnues à 10^{-3} près (tableau en annexe III) pour $\epsilon = 10^{-4}$ avec $c^2 = 4$ ou $c^2 = 10$. Par contre les résultats diffèrent de 10^{-1} pour $\epsilon = 1,5 \cdot 10^{-3}$ avec $c^2 = 4$ ou $c^2 = 10$ où pourtant la vitesse de convergence est la même (cf para.4). Ceci est lié au fait que les composantes des vitesses n'ont pas atteint un palier horizontal en fonction du nombre d'itérations (courbes IV-1 bis).

2) Influence du pas

Pour une cavité torique qui possède un entrefer constant, avec $\Delta R = 0.005$ et pour une même vitesse de rotation du cylindre intérieur, nous avons pu constater que la vitesse de convergence varie avec la valeur du pas axial ΔZ . Ainsi pour $\epsilon = 10^{-3}$ et pour différents pas, nous trouvons le nombre d'itérations suivant :

ΔZ	0.005	0.01	0.02	0.04
Itérations	458	778	1492	1948

Le pas radial ΔR n'influe pas sur le nombre d'itérations sauf aux grands nombres de REYNOLDS ($R_{er} > 1500$) dont nous parlerons au paragraphe (V). Par contre, pour c^2 constant et égal à 10, la vitesse de convergence pour $\Delta Z = 0,04$ n'est pas la même que pour $\Delta Z = 0,02$ ainsi que le montre la courbe (IV.1), toutefois les résultats sont les mêmes pour $\epsilon = 10^{-4}$

3) Influence du nombre de REYNOLDS sur le nombre d'itérations.

Pour une cavité torique qui présente toujours la même géométrie nous constatons que l'état stationnaire est atteint à 10^{-3} près au bout d'un nombre d'itérations qui varie avec la vitesse de rotation R_{er} . Ainsi pour un entrefer $\lambda - 1 = 0.1$ et un rapport hauteur/entrefer égal à 8 nous trouvons :

R_{er}	1	10	100
Itérations	424	951	1948

Ces résultats des paragraphes 2 et 3 ne sont d'importance que quant au choix de ϵ qui se révèle être primordial pour l'obtention d'une solution approchée. C'est ce que nous allons montrer au paragraphe suivant.

4) Variation des grandeurs physiques en fonction du nombre d'itérations.

Choix de ϵ .

Nous allons voir ce que nous considérons comme le critère fondamental d'obtention d'une solution par arrêt non arbitraire, du processus itératif.

Si nous comparons l'évolution vers l'état stationnaire des composantes \bar{u} et \bar{v} de la vitesse, il apparait que \bar{v} peut encore varier même si \bar{u} a atteint un état permanent et réciproquement (Courbes IV. 1bis,2) quel que soit le nombre de REYNOLDS. Par conséquent, la vitesse de convergence n'est pas la même en tout point de l'écoulement et nous constatons qu'elle est plus rapide si la solution finale est plus près des conditions de départ $U_{i,j}^0$. Il est alors nécessaire de choisir une valeur de ϵ suffisamment petite et de veiller à effectuer un nombre d'itérations suffisant afin que chaque point du maillage soit dans les mêmes conditions de non variation des composantes de vitesse en fonction du nombre d'itérations. Ceci apparait sur les courbes (IV.2) représentant l'évolution de \bar{u} et \bar{v} en deux points $\left[i = 10 (\bar{r} = 1.05), j = 10 (\bar{z} = 0.4) \text{ et } i = 19 (\bar{r} = 1.095), j = 10 (\bar{z} = 0.4) \right]$ dans une cavité rectangulaire d'entrefer $\lambda - 1 = 0.1$ et de rapport hauteur/entrefer = 8 pour $R_{er} = 1700$.

V - CAS DES GRANDS NOMBRES DE REYNOLDS

Pour les grands nombres de REYNOLDS ($R_{er} > 1500$) le schéma s'est révélé très long en temps machine et de plus les résultats obtenus présentent des instabilités au voisinage de la paroi du cylindre extérieur comme le montrent les courbes (IV.3) obtenues pour $R_{er} = 1700$.

Nous observons également que la convergence n'est plus uniforme (courbe IV.4). En effet, les calculs convergent jusque $\epsilon \approx 0.1$ puis divergent jusque $\epsilon = 1.025$. Par la suite la convergence s'effectue de façon uniforme jusque $\epsilon = 10^{-4}$ ce qui est à relier à la variation des composantes en fonction du nombre d'itérations seul critère d'obtention d'une solution.

VI - ANALYSE DES RESULTATS NUMERIQUES

Nous étudions l'écoulement dans diverses cavités toriques.

1) Cavité carrée

Les calculs ont été effectués pour un entrefer $\lambda - 1 = 0.2$. La hauteur adimensionnelle correspondante est alors de 0.2. Le cylindre extérieur est

fixe.

a) Les parois intérieure et inférieure tournent à la même vitesse angulaire ω_0 . Le calcul montre que l'écoulement ne présente pas de symétrie axiale comme remarqué également par GRILLAUD avec la méthode des fonctions de courant. Les courbes (IV.5-a-b-c) qui le représente indiquent une symétrie par rapport à une génératrice $\bar{r} = 1.1$ et portant sur \bar{u} et \bar{w} . La figure (b) montre le développement de la vitesse tangentielle \bar{v} à partir de la paroi horizontale fixe.

Sur la figure (c) nous constatons que la vitesse \bar{w} est positive dans le coin gauche de la paroi inférieure. Nous retrouvons donc ici une caractéristique de l'écoulement dans un dièdre ainsi que A. EICHELBRENNER (22) l'a montré dans une cavité rectangulaire. (cf allure des lignes de courant IV. 5 c).

b) Les parois intérieure, inférieure et supérieure tournent à la même vitesse angulaire ω_0 . Nous constatons que l'écoulement se partage en deux régions symétriques et de hauteur 0.1. A la limite la vitesse radiale \bar{u} est maximale et la vitesse axiale \bar{w} voisine de zéro. En comparant avec la courbe (IV.5a), il apparait que la plus grande vitesse radiale est obtenue pour cette configuration. (courbes IV.6 a-b-c)

$$\bar{u}_{\max} (a) = 14,5 \qquad \bar{u}_{\max} (b) = 21,3$$

c) La paroi intérieure tourne seule à la vitesse angulaire ω_0 .

Nous constatons que l'écoulement se partage encore en deux régions symétriques séparées par un plan tel que $\bar{w} = 0$. A la limite la vitesse radiale $\bar{u}_{\max} (c) = 9$. La vitesse tangentielle \bar{v} évolue de zéro sur les parois horizontales fixes et atteint son maximum dans le plan limite $\bar{z} = 0.1$. (courbes IV.7 a-b-c)

2) Cavité rectangulaire

Les calculs ont été effectués pour un entrefer $\lambda-1 = 0.1$. La hauteur

correspondante aux trois cas envisagés varie de 0.2 à 0.8. Le cylindre extérieur est toujours fixe.

a) Les parois intérieure et inférieure tournent à la même vitesse angulaire ω_0 .

Les résultats montrent que cette fois encore l'écoulement ne présente pas de symétrie axiale. Les courbes (IV.8.9.A0. a.b.c) qui donnent les valeurs de \bar{u} , \bar{v} et \bar{w} pour des rapports hauteur/entrefer égaux à 2.4 et 8 montrent que le maximum de $\bar{u} = 6.25$ et de $\bar{w} = 25 \cdot 10^{-3}$ ne varient pas quelle que soit la configuration. Pour une géométrie telle que hauteur/entrefer = 8 nous trouvons un domaine $0,24 \leq \bar{z} \leq 0,68$ où $\bar{w} = 0$ et $\bar{u} \neq 0$ ce qui montre l'influence des parois horizontales. Sur les courbes (IV.9.c) et (IV.10.c) nous retrouvons une caractéristique de l'écoulement dans un dièdre comme nous l'avons déjà vu pour une cavité carrée.

b) Les parois intérieure, inférieure et supérieure tournent à la même vitesse angulaire ω_0 .

Nous constatons que l'écoulement se divise en deux régions symétriques suivant la direction axiale. Sur les courbes (IV.11 a-b-c) qui représentent l'écoulement dans une cavité dont le rapport hauteur/entrefer = 8, il apparaît que le profil des vitesses ne varie pas pour $0.12 \leq \bar{z} \leq 0.68$. Dans cette région nous trouvons $\bar{w} = 0$ et $\bar{u}_{\max} = 6,5$. Le même phénomène se reproduit avec les courbes (IV. 12 a-b-c) qui représentent l'écoulement dans une cavité telle que hauteur/entrefer = 4.

Nous trouvons une région $0.1 \leq \bar{z} \leq 0.3$ dans laquelle $\bar{w} = 0$ et $\bar{u}_{\max} = 6,8$.

Dans une cavité telle que hauteur/entrefer = 2 cette région se limite à un plan $\bar{z} = 0.1$ et $\bar{u}_{\max} = 6,8$ (courbes IV.13.a.b.c).

On se rapproche de la solution de TAYLOR avec un écart maximum pris sur \bar{v} de 12 % pour $\bar{r} = 1.05$ et hauteur/entrefer = 8.

c) La paroi intérieure tourne seule à la vitesse angulaire ω_0 .

Dans chaque configuration, l'écoulement se divise en deux régions symétriques, séparées par un plan ou un domaine dans lequel on trouve $\bar{w} = 0$. A la limite \bar{u} est maximum et \bar{v} correspond à la solution de TAYLOR (courbes IV.14-15-a.b.c.).

Pour des cylindres tels que le rapport hauteur/entrefer = 8 nous avons cherché à obtenir l'écoulement entre deux cylindres infinis en faisant varier R_{er} de 100 à 1 (courbes IV 16-17 a.b.). Nous constatons que la solution obtenue tend vers celle des cylindres infinis : $\bar{v} = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \cdot \left(\frac{\lambda}{r} - \bar{r}\right)$. La vitesse radiale \bar{u} est très petite : on trouve $\bar{u}_{\max} = 0.27$ pour $R_{er} = 10$ et $\bar{u}_{\max} = 0.17$ pour $R_{er} = 1$. La vitesse axiale \bar{w} est nulle. Par conséquent, il est possible d'obtenir $\bar{u} = 0$ pour des cylindres plus longs tels que le rapport hauteur/entrefer soit supérieur à 8.

VII - CONCLUSION

Au chapitre II, nous avons négligé l'influence des parois horizontales limitant le domaine d'écoulement entre deux cylindres coaxiaux. Pour résoudre le problème, il a été nécessaire d'adopter une hypothèse d'indépendance de la vitesse tangentielle \bar{v} vis à vis de la coordonnée axiale \bar{z} , ce qui nous a conduit à une solution instationnaire du type (4.4). Cette hypothèse n'est qu'une approximation d'autant meilleure que l'allongement est grand.

Par contre, la méthode de perturbation nous a permis, sans faire aucune hypothèse sur la forme de la solution, de déterminer l'écoulement dans différentes cavités toriques en formulation vitesse-pression.

D'une manière générale, nous constatons que les composantes \bar{u}, \bar{v} et \bar{w} de la vitesse sont fonctions des coordonnées radiale et axiale, sauf pour certaines configurations dans lesquelles il existe un domaine où $\bar{w} < 10^{-4}$. Dans ce cas nous trouvons que \bar{u} et \bar{v} varient très peu avec \bar{z} et \bar{v} est égale à la solution laminaire de l'écoulement entre deux cylindres infinis.

Par conséquent, les parois horizontales, qu'elles soient fixes ou entraînées à la même vitesse angulaire que le cylindre intérieur, ont pour effet de déformer l'écoulement de TAYLOR, entraînant l'apparition d'un champ de vitesse à trois composantes.

La méthode s'est révélée particulièrement délicate à mettre en oeuvre car elle nécessite de déterminer les valeurs de δs et $c^2 \delta s$ pour chaque nombre de REYNOLDS. Mais elle fournit toujours un champ de vitesse qui dépend de ϵ . L'avantage de notre procédé est de n'avoir pas choisi ϵ arbitraire mais de l'avoir déterminé en fonction du nombre d'itérations nécessaire à une stationnarisation de chaque composante de la vitesse.

Cependant nous n'avons pu, par cette méthode, montrer l'existence de l'écoulement tourbillonnaire à grands nombres de REYNOLDS. L'objet du prochain chapitre sera de montrer que cet écoulement peut être mis en évidence par une technique expérimentale autre que les visualisations.

CHAPITRE IV

ETUDE EXPERIMENTALE SUR DES CYLINDRES DE
LONGUEUR FINIE

Nous allons aborder l'étude de l'écoulement stationnaire entre deux cylindres de longueur finie par une méthode expérimentale. Nous nous proposons de déterminer le gradient pariétal de vitesse sur le cylindre extérieur par une méthode électrochimique ne perturbant pas l'écoulement et donnant le frottement local. Nous serons alors en mesure de reprendre, ultérieurement, les calculs du chapitre III précédent pour des grands nombres de REYNOLDS de rotation en initialisant un champ de vitesse possédant le gradient pariétal que nous allons déterminer par cette méthode. En effet, l'importance de ce gradient, devient primordiale pour la convergence de la méthode numérique de perturbation comme nous l'avons constaté aux nombres de REYNOLDS élevés (courbe IV).

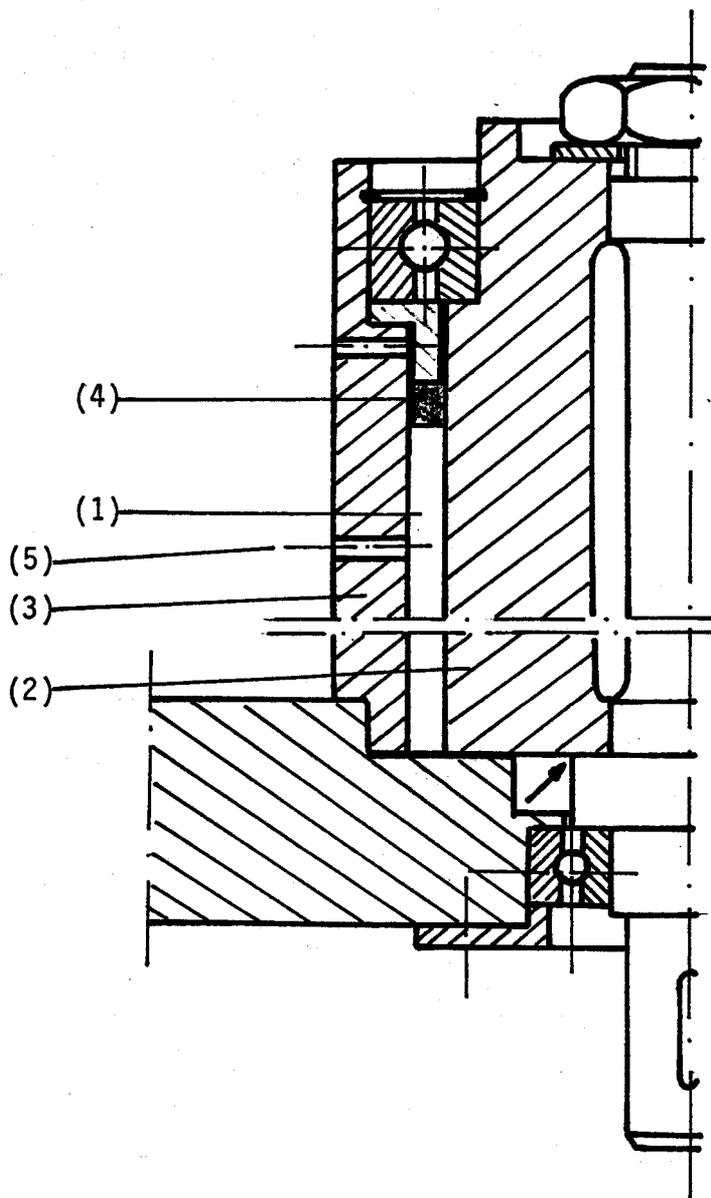
La technique utilisée permet de relier par une réaction électrochimique le gradient pariétal de vitesse au flux de diffusion d'une espèce chimique bien déterminée.

I - DESCRIPTION DU MONTAGE EXPERIMENTAL

Nous avons réalisé un dispositif expérimental comprenant essentiellement les cylindres d'étude et la chaîne de mesure.

1 - Cylindres d'études

La méthode utilisée nécessitant des matériaux chimiquement inertes, nous avons réalisé deux cylindres en altuglas (Fig. 5.1) tournés puis polis jusqu'à leur côtes définitives :



(Fig. 5.1)

Le domaine d'écoulement (1) est limité par le cylindre intérieur (2) de diamètre 62 mm ($\pm 0,02$) et le cylindre extérieur (3) de diamètre 72 mm ($\pm 0,02$), ce qui correspond à un entrefer de 5 mm et à un rapport des rayons $\lambda = 1.16$. La cavité torique est limitée par la présence de parois horizontales fixes et distantes de 250 mm, ce qui correspond à un rapport hauteur/entrefer de 50.

Une anode en platine (4) de grande dimension (20 x 225) est fixée à la partie supérieure du cylindre extérieur qui est percé en deux endroits pour le passage de la sonde (5) et de l'anode.

Le cylindre intérieur est mis en mouvement par un moteur régulé

par l'intermédiaire d'un réducteur $\frac{1}{20}$ et d'une transmission à poulies. Ceci nous permet de faire varier la vitesse de rotation de 0 à 100 t/mn.

Les sondes polarographiques sont constituées d'un fil de diamètre 0,2 mm noyé dans un support d'altuglas tourné au diamètre 5 mm. Ensuite, elles sont montées sur le cylindre extérieur, usinées et polies pour leur donner la courbure nécessaire et ne pas perturber l'écoulement. Puis elles sont dégraissées avant utilisation. L'électrode présente alors une surface active circulaire affleurant à la paroi du cylindre extérieur.

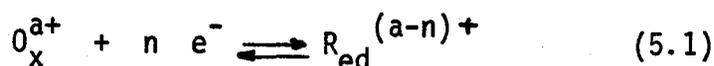
2 - Chaîne de mesure

L'aoude est portée à un potentiel constant de 0,4 volts contrôlé sur un voltmètre. L'électrode est maintenue à un potentiel nul. Les courants sont transformés en tension puis filtrés pour éliminer les parasites à haute fréquence et lus sur un voltmètre intégrateur. Un oscilloscope permet de visualiser la tension d'électrode.

II - PRINCIPE DE LA METHODE

Ce n'est que récemment grâce aux travaux de REISS-HANRATTY (23) G. COGNET (12) C. TOURNIER (24) et B. PY (25), par analogie entre transfert de chaleur et transfert de masse, que l'on a développé comme pour l'anémométrie à fil chaud, une technique électrochimique.

Soit un couple oxydo-réducteur :



en présence d'une électrode inattaquable. En circuit ouvert, l'électrode atteindra un certain potentiel d'équilibre. Si on polarise cette électrode, on déplace l'équilibre (5.1). Si cette réaction est suffisamment rapide, l'apport de courant sur la cathode est uniquement limité par le déplacement des ions au sein de la solution. Ce déplacement se fait par migration grâce au champ électrique, par convection grâce au mouvement du fluide et par diffusion grâce

au gradient de concentration. En ajoutant un fort excès d'électrolyte indifférent tout se passe comme si on éliminait la migration. Le courant reçu sur l'électrode ne dépend donc que du mouvement de la solution.

Si, l'on trace la courbe de polarisation (polarogramme) de l'électrode, elle présentera un palier dans la plage de tension qui satisfait aux conditions précédentes. La hauteur du palier de la courbe $I_c = I_c(E_c - E_a)$ constitue une mesure du flux de matière de l'électrode. Le courant limite est atteint lorsque la concentration du corps actif au niveau de l'électrode est nulle. Nous verrons au paragraphe IV, comment on obtient le courant limite.

Cette méthode électrochimique que l'on appelle polarographie peut donc être représentée par un transfert de matière entre la microcathode où $C = 0$ et l'infini (loin de l'électrode) où la concentration est maintenue constante.

III - APPLICATION A L'ETUDE DES ECOULEMENTS DANS LES CYLINDRES

Dans le dispositif qui a été réalisé, le cylindre extérieur est fixe, le cylindre intérieur est seul mobile. La microcathode circulaire est située à la paroi du cylindre extérieur et ne perturbe pas l'écoulement.

1 - Modèle de transfert

Considérons un fluide en mouvement contenant une substance en concentration C_0 au-dessus d'un plan $y > 0$. Dans ce plan se trouve une surface active circulaire de rayon r_0 , capable d'échanger des électrons avec la solution grâce à une réaction très rapide d'oxydo réduction, telle que $C = 0$ pour $y = 0$. Le flux de matière est nul à travers le plan sauf pour $|r| < r_0$ (fig. 5.2).

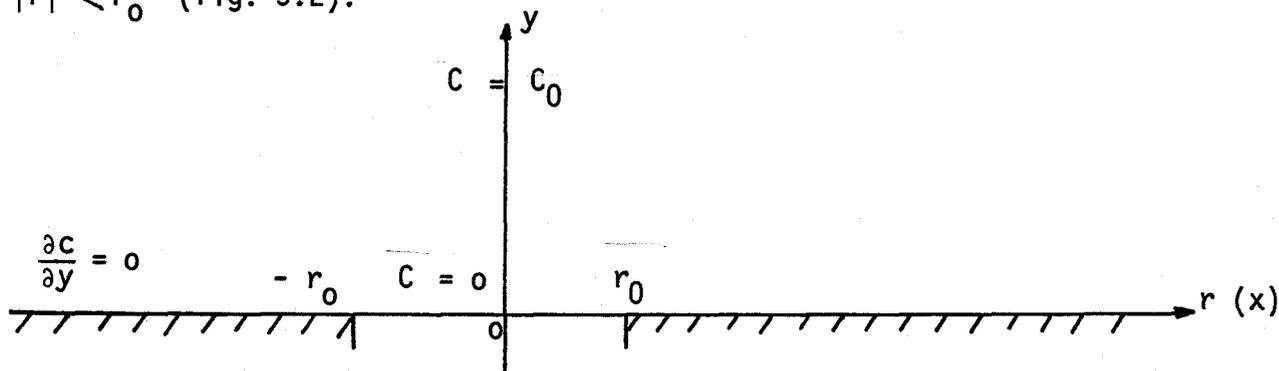


Fig. 5.2

La relation entre le champ des vitesses et le champ des concentrations est fournie par l'équation du bilan instantanée de matière, soit :

$$D \cdot \Delta C = \vec{V} \cdot \text{Grad } C + \frac{\partial C}{\partial t} \quad (5.2.)$$

où D est le coefficient de diffusion de la substance active. La solution générale du problème doit satisfaire aux conditions aux limites

$$\begin{aligned} |r| \leq r_0 \text{ et } y = 0 &\longrightarrow C = 0 \\ |r| > r_0 \text{ et } y \rightarrow \infty &\longrightarrow C = C_0 \\ |r| > r_0 \text{ et } y = 0 &\longrightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

(5.3)

Le champ des vitesses u, v, w est donné par les équations de NAVIER-STOKES :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \text{ grad } p + \nu \Delta \vec{v}$$

Par analogie au transfert de chaleur G. COGNET (12) a résolu le problème pour un régime de diffusion établi ($\frac{\partial C}{\partial t} = 0$).

- Lorsque le fluide est au repos et en négligeant la convection naturelle, l'équation (5.2) devient $\Delta C = 0$ soit en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} = 0 \quad (5.4)$$

Il trouve une solution de la forme :

$$C = C_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{2 r_0}{[(r - r_0)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} + [(r + r_0)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad (5.5)$$

Dans ce cas, la densité de courant limite étant par la première loi de FICK :

$$j = D \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Il vient, pour une réaction dans laquelle n est le nombre d'électrons mis en jeu et F le nombre de FARADAY (96 500 coulombs)

$$j = 4 C_0 r_0 D \cdot n \cdot F \quad (5.6)$$

Pour comparer les résultats entre eux, on définit le coefficient de transfert K par la relation :

$$K = \frac{I}{AC_0} \text{ avec } I = \int_A j \, dA$$

soit :

$$K = \frac{D}{AC_0} \int_A \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)_{y=0} \, dA$$

Il représente le flux de matière par unité de concentration C_0 et par unité de surface A de la sonde. Dans ce cas on trouve :

$$K = \frac{4D}{\pi r_0} \quad (5.8)$$

- Lorsque le fluide est en mouvement permanent dans la direction $o x$, l'écoulement occasionne l'existence d'une couche limite hydrodynamique grande devant l'épaisseur de la couche limite de diffusion. L'épaisseur de la couche limite de diffusion selon NERNST est fonction du nombre de SCHMIDT $S_c = \frac{v}{D}$. Dans notre cas le rapport des épaisseurs de couche limite est supérieur à 10. On peut écrire dans ces conditions au voisinage de l'électrode.

$$u = S_x \cdot y \quad (5.9)$$

où S_x est le gradient de vitesse de l'écoulement selon les lignes de courant.

L'équation (5.2) devient :

$$D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) = S_x \cdot y \frac{\partial C}{\partial x} \quad (5.10)$$

Cette équation n'est valable que pour une électrode d'allongement infini dans la direction z , ce qui permet de négliger la diffusion selon z .

Pour une électrode de largeur L , REISS et HANRATTY ont donné une solution numérique pour C et en déduit la valeur du coefficient de transfert

$$\frac{KL}{D} = 0,807 \cdot (S_x \frac{L^2}{D})^{\frac{1}{3}} \quad (5.11)$$

pour une valeur du gradient pariétal telle que $S_x \frac{L^2}{D} \geq 5000$

Pour une électrode circulaire, REISS et HANRATTY ont obtenu un résultat équivalent en prenant une longueur effective :

$$L_e = 0,820 \cdot d_0 \quad (5.12)$$

d_0 étant le diamètre de la sonde. Dans leur étude ils supposent en plus que la vitesse de l'écoulement est assez grande pour négliger la diffusion tangentielle.

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

2 - Conclusion

Pour des électrodes suffisamment petites et en dehors d'un point de frottement nul, la vitesse instantanée peut toujours localement être représentée par un profil linéaire sans qu'aucune hypothèse ne soit faite sur le régime d'écoulement. Dans ce cas au signal K mesuré, correspond le paramètre S_x qui est le gradient pariétal à la surface de l'électrode.

Lorsque l'écoulement possède une composante normale à la paroi G. COGNET a montré que celle-ci a peu d'influence sur le coefficient de transfert qui est essentiellement déterminé par le gradient de vitesse tangentielle.

Par conséquent, la méthode polarographique permet de faire des mesures absolues du gradient pariétal de vitesse. Mais ces mesures sont conditionnées par l'état de surface des électrodes qu'il est très difficile de contrôler. C'est pourquoi nous avons toujours opéré par étalonnage

des sondes après un vieillissement assurant une bonne stabilité des caractéristiques.

IV - ETUDE EXPERIMENTALE

Nous avons utilisé un système rédox iodure-triodure dans une solution iodure de potassium. La réaction chimique est la suivante :



L'oxydant est le triiodure I_3^- et le réducteur l'iodure I^- .

Dans le cas de mesures absolues on aurait ici $n = 2$. A 25 °C le coefficient de diffusion de l'iode est $D = 1,13 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$; il varie d'environ 2 % par degré. La concentration du corps actif le triiodure est $C_0 = 10^{-5} \text{ mole/cm}^3$.

La sonde circulaire utilisée a un rayon $r_0 = 0,1 \text{ mm}$. La surface de l'anode est grande (environ 2500 mm^2) devant la surface de la cathode (environ $3,2 \cdot 10^{-2} \text{ mm}^2$) si bien que la densité de courant reçue par l'anode est négligeable. On peut donc se servir de son potentiel E_a comme référence.

1 - Tracé d'un polarogramme

Pour obtenir la courbe de polarisation I_c en fonction de $(E_c - E_a)$ on fait varier le potentiel de l'anode de 0V à 0,6 V avec un pas de 0,05 V. A chaque mesure, il faut attendre que le courant se stabilise.

Un exemple de polarogramme est donné courbe (V.I). Les mesures ont été effectuées à 21° C pour différents nombres de REYNOLDS.

Lorsque le palier est atteint, la concentration du corps actif au niveau de l'électrode est nulle. L'apport d'ions actifs ne dépend plus que des conditions hydrodynamiques c'est-à-dire du gradient de vitesse S . Nous pouvons donc, à partir d'une mesure du courant, en déduire S .

2 - Etalonnage de la sonde

Nous avons effectué l'étalonnage de la sonde circulaire à partir de la relation que nous avons obtenu analytiquement au chapitre I en régime

stationnaire.

Soit :

$$S = \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \quad (5.14)$$

avec

$$v = \frac{\lambda^2 \omega_1}{\lambda^2 - 1} \left(r + \frac{r_1^2}{r} \right) \quad (5.15)$$

et $\lambda = \frac{r_2}{r_1} = 1.16$

Nous trouvons :

$$S = \frac{-2 \lambda^2 \omega_1}{\lambda^2 - 1} \cdot \frac{r_1^2}{r^2} \quad (5.16)$$

Au niveau du cylindre extérieur $r = r_2$, nous aurons

$$S = \frac{-2 \omega_1}{\lambda^2 - 1} \quad (5.17)$$

soit $S = -5,714 \omega_1 \quad (5.18)$

En fonction du nombre de tours nous utiliserons la relation :

$$S = 0,598 N_1$$

Nous savons que la tension E de l'électrode est fonction de S dont nous avons les valeurs théoriques dans le tableau ci-dessous.

N_1 (t/mn)	2,1	3	3,9	4,68	5,4	6,6
S (s - 1)	1,25	1,79	2,33	2,79	3,22	3,94
$\bar{S} = S \cdot \frac{d_0^2}{D}$	44,24	63,36	82,47	98,76	113,98	139,46
E (v)	0,274	0,293	0,311	0,325	0,337	0,349

Par conséquent nous voyons que $\bar{S} < 5000$. Nous ne pouvons donc pas utiliser la loi (5.11) $\bar{K} = 0,807 \bar{S}^{-1}$.

Dans ce cas nous utilisons la courbe du coefficient de transfert \bar{K} en fonction de \bar{S} pour $\bar{S} < 5000$. Cette courbe a été établie par plusieurs auteurs (G. COGNET, M. LABBE) et nous avons calculé \bar{S} à partir de leurs résultats.

\bar{S}	2,94	9,80	49	106	197	395	793	1590
$\bar{K} = K \cdot \frac{d_0}{D}$	1,72	2,19	3,37	4,24	5,12	6,37	7,99	9,78

Nous savons que le coefficient de transfert \bar{K} est proportionnel à la tension de l'électrode E : $E = \alpha \bar{K}$.

Donc $\ln E = \ln \alpha + \ln \bar{K}$. Nous déterminons alors $\ln \alpha$.

Les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-dessous :

\bar{S}	44,24	63,36	82,47	98,76	113,98	139,46
$\ln E$	- 1,294	- 1,227	- 1,167	- 1,123	- 1,087	- 1,052
$\ln K$	1,170	1,280	1,350	1,410	1,455	1,515
$\ln \alpha$	- 2,464	- 2,507	- 2,517	- 2,533	- 2,542	- 2,567

Nous trouvons alors une valeur moyenne $\ln \alpha = - 2,521$.

Nous en déduisons $\ln E = - 1,156$ pour $\ln K = 1,362$ calculées sur un intervalle $\Delta \bar{S}$ pour $82,47 < \bar{S} < 98,76$. Cet étalonnage nous permet ensuite de

faire une étude de l'écoulement au-delà du nombre de REYNOLDS critique et de déterminer le gradient pariétal sur le cylindre extérieur.

3 - Mesure du gradient pariétal en régime supercritique

Lorsqu'on augmente la vitesse de rotation du cylindre intérieur, on voit apparaître des oscillations dans l'enregistrement du signal de la sonde à partir de $R_{ec} = 141$. Ceci indique que le gradient de vitesse n'est plus constant mais varie périodiquement dans le temps (Fig. 5.5). Si l'on dépasse cette vitesse, l'amplitude des oscillations augmente, mais elle s'annule si l'on diminue le régime. Par conséquent, le mouvement est devenu instable et nous constatons qu'il apparaît des ondes azimutales dans la direction θ . Les visualisations montrent que ce type d'instabilité apparaît à une vitesse très peu supérieure à l'apparition des tourbillons régulièrement superposés ($R_{ec} = 131$).

Grâce aux mesures, nous remarquons également que le mouvement change de caractère pour $R_{ec} = 327$ (Fig. 5.5). Le signal commence par être fortement instable puis il devient périodique, enfin il se déforme et il apparaît une nouvelle onde superposée. D'ailleurs, les visualisations montrent qu'il apparaît une nouvelle onde azimutale déphasée par rapport à celle existante. Par la suite, cette configuration ne se modifie plus dans la gamme de vitesses que nous avons envisagées.

Notre sonde étant fixe nous mesurons la tension E pour différentes vitesses et nous calculons \bar{S} puis S à l'aide de la courbe d'étalonnage. Les résultats d'expériences sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

N_1 (t/mn)	$R_{ec} = \frac{\omega_1 r_1 d}{\nu}$	\sqrt{T}	E (v)	\bar{S}	S (s ⁻¹)	$\bar{\tau}$
9	141	56,62	0,420	210	5,93	$1,92 \cdot 10^{-2}$
12	187	74,8	0,463	288	8,13	$1,58 \cdot 10^{-2}$

15	234	93,6	0,492	345	9,74	$1,25 \cdot 10^{-2}$
18	261	112,4	0,535	437	12,34	$1,05 \cdot 10^{-2}$
21	327	130,8	0,638	765	21,16	$1,22 \cdot 10^{-2}$
24	374	149,6	0,728	1394	39,38	$1,79 \cdot 10^{-2}$
28	437	174,8	0,786	1929	54,49	$1,82 \cdot 10^{-2}$
30	468	187,2	0,820	2440	68,93	$2,01 \cdot 10^{-2}$
33	515	206	0,849	2643	74,66	$1,80 \cdot 10^{-2}$
36	561	224,4	0,913	3533	99,80	$2,02 \cdot 10^{-2}$
42	655	262	0,944	4105	115,96	$1,72 \cdot 10^{-2}$
45	702	281	0,973	4495	127	$1,65 \cdot 10^{-2}$
50	780	312	1,003	5663	160	$1,68 \cdot 10^{-2}$

La valeur de S nous permet de calculer la contrainte tangentielle de frottement τ sur le cylindre extérieur. Nous savons en effet que $\tau = \mu S$ et sous forme adimensionnelle nous aurons $\bar{\tau} = \frac{\tau}{\tau^*}$ avec $\tau^* = \frac{1}{2} \rho \omega_1^2 r_1^2$. Nous traçons alors $\bar{\tau}$ en fonction du nombre de TAYLOR $\sqrt{T} = \frac{\omega_1 r_1 d}{\nu} \sqrt{\frac{d}{r_1}}$ (courbe V.3). Nous constatons que la courbe présente une discontinuité pour $\sqrt{T} = 44,5$ correspondant à l'apparition des tourbillons. Nous trouvons alors que $\bar{\tau}$ est proche des valeurs correspondantes au domaine laminaire stable.

Par contre pour $R_{ec} = 327$ ($\sqrt{T} = 131$). Les valeurs $\bar{\tau}$ augmentent. Ceci correspond à l'apparition d'un nouveau type d'instabilité doublement périodique (Fig. 5.3) avec des valeurs proches de celles trouvées

par G. COGNET.

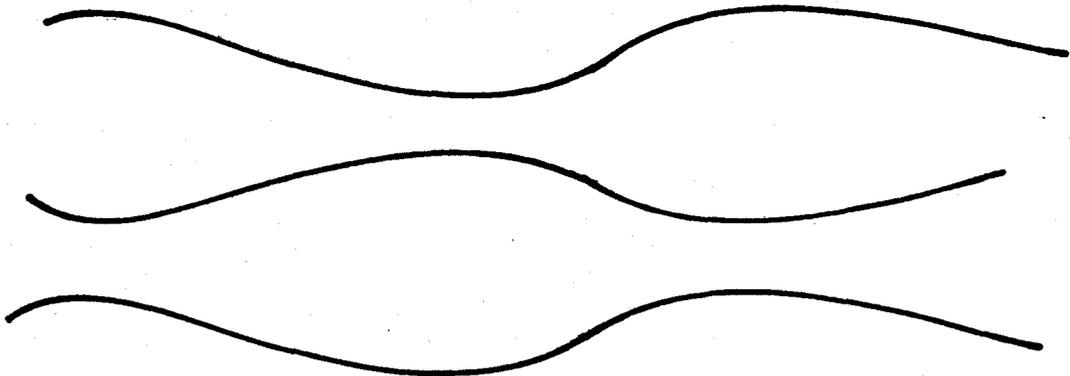


Fig. 5.3

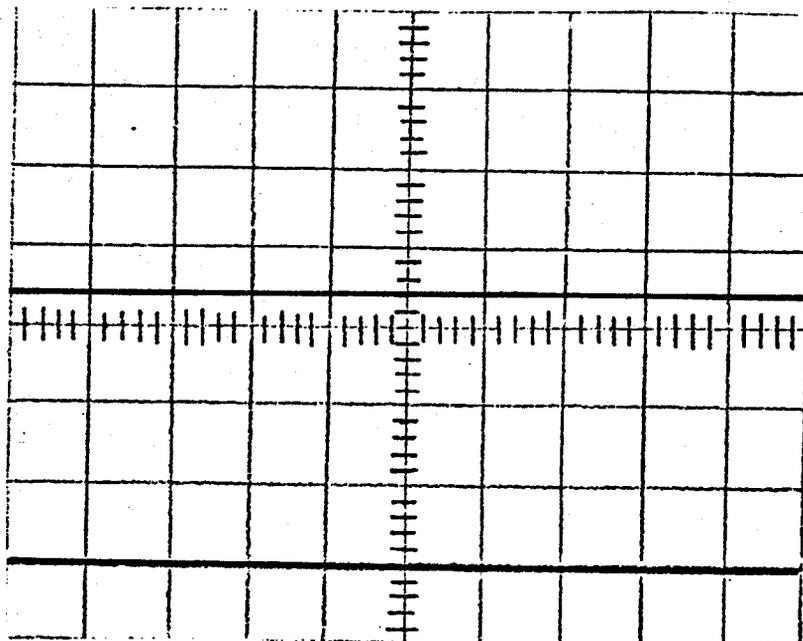
Par conséquent, il semble que dans notre montage expérimental le frottement supplémentaire introduit par la perturbation serait dû essentiellement au mouvement circonférentiel dans une cellule et non au mouvement de déplacement des ondes azimutales tant que $\sqrt{T} < 131$. Cependant lorsque $\sqrt{T} > 131$ le développement de la seconde instabilité conduit à des valeurs du frottement beaucoup plus grandes que celles que l'on aurait en régime non perturbé. Ceci semble indiquer que le déplacement des ondes devient important.

V - CONCLUSION

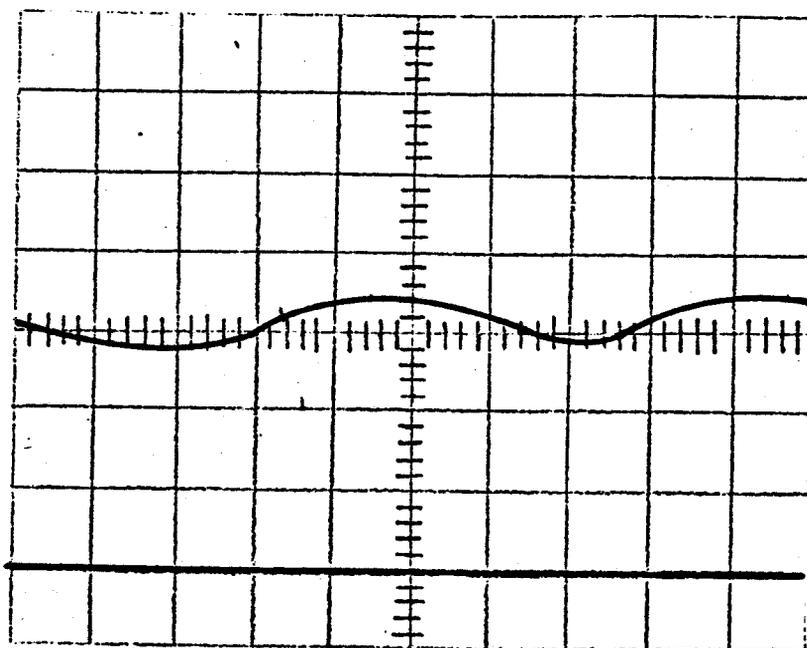
La méthode polarographique nous a permis d'étudier l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux à des nombres de REYNOLDS correspondants au régime perturbé que nous n'avons pu trouver numériquement. On remarquera d'ailleurs que l'instabilité de l'écoulement correspond à l'apparition d'une instabilité numérique.

Nous avons alors identifié l'instabilité périodique selon la direction z puis l'instabilité périodique puis doublement périodique selon la

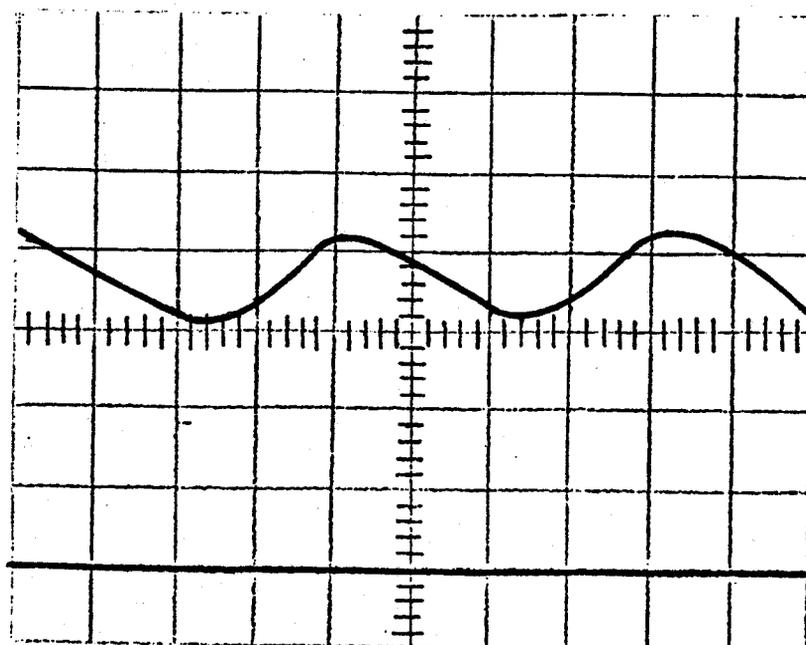
la direction θ . Les mesures du gradient pariétal et du frottement sur le cylindre extérieur pourront alors être utilisées ultérieurement dans la recherche du champ des vitesses par la méthode de perturbation puisque l'initialisation correcte du gradient semble primordiale par la convergence de cette méthode. Il faut cependant tenir compte du fait qu'un tel calcul ne peut plus se faire moyennant une indépendance par rapport à θ pour des valeurs de R_{ec} supérieures à $R_{ec} = 141$ ($R_{er} = R_{ec} / (\lambda - 1) = 880$ pour $\lambda = 1.16$, $R_{er} = 1800$ pour $\lambda = 1.1$). Cependant nous pourrons utiliser ces résultats pour une plage de nombres de REYNOLDS $1400 < R_{er} < 1800$ correspondants à un entrefer $\lambda - 1 = 0.1$.



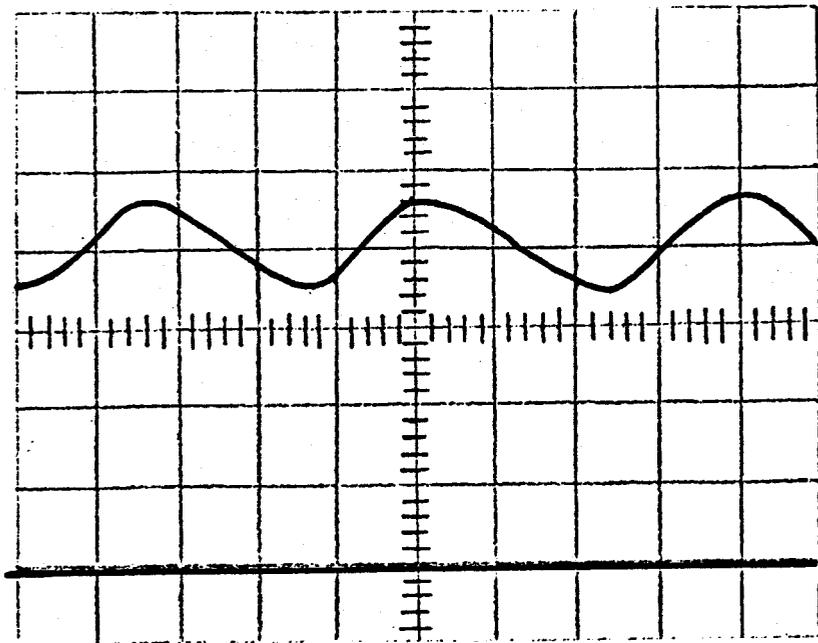
a - $R_{ec} = 80$



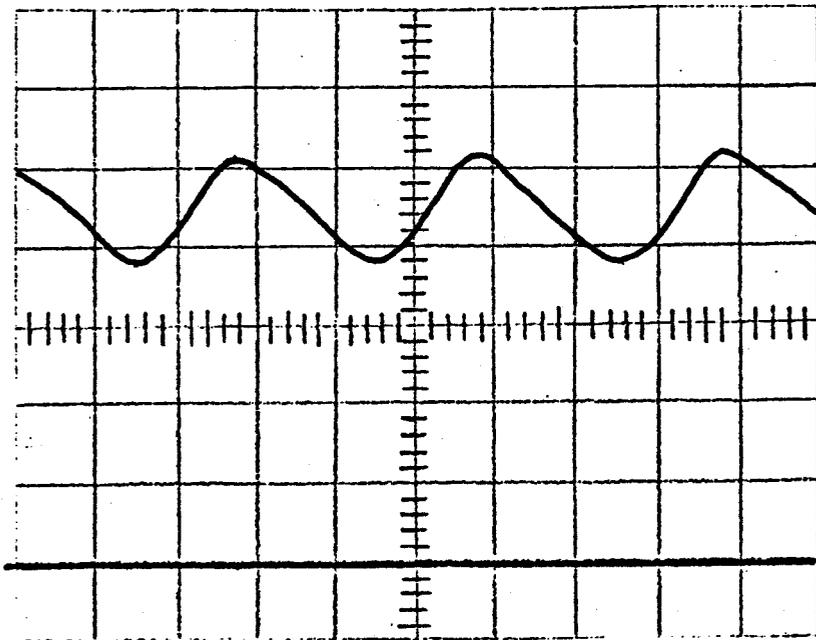
b - $R_{ec} = 141$



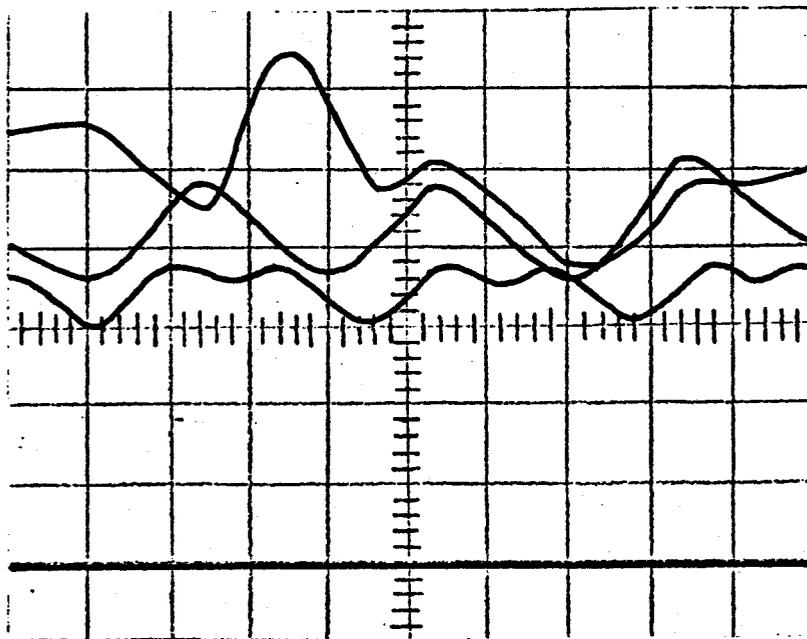
c - $R_{ec} = 187$



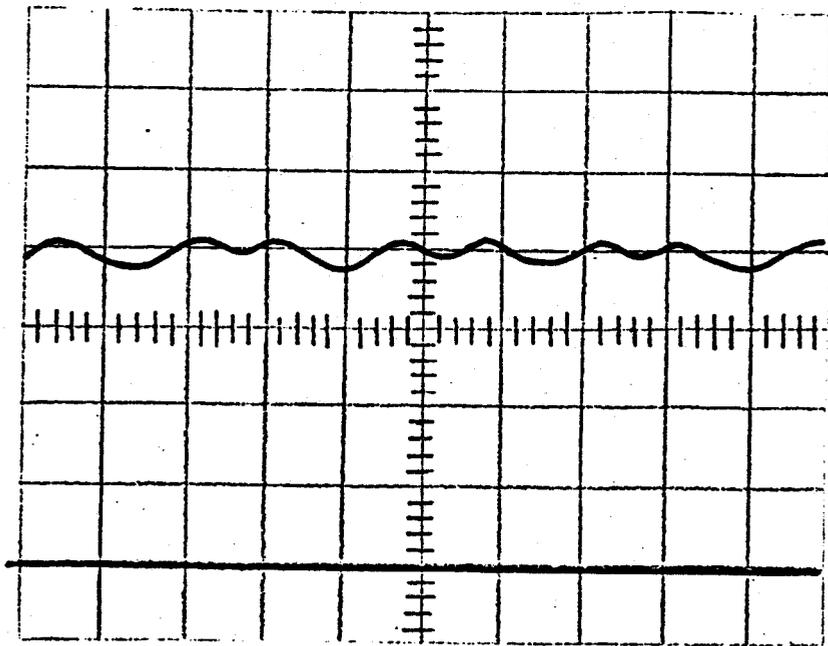
$$d - R_{ec} = 234$$



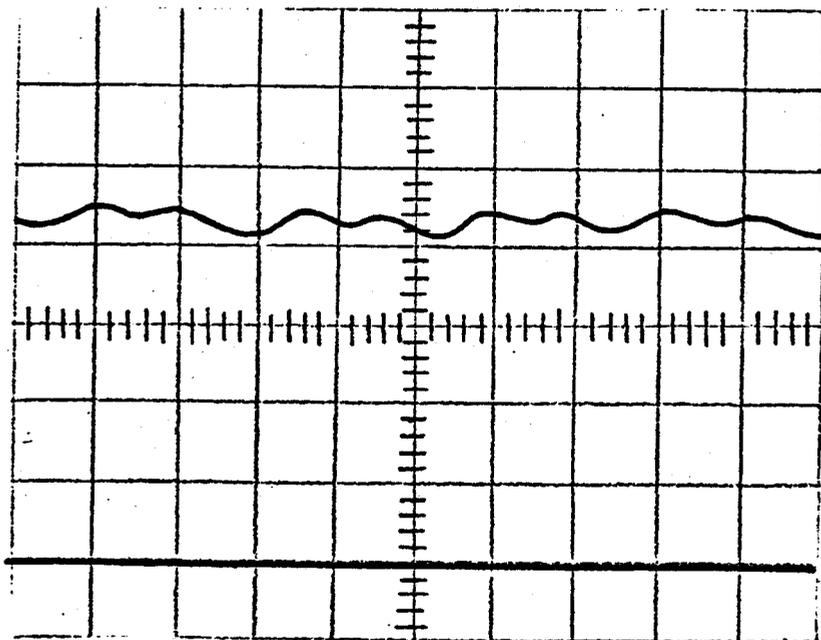
$$e - R_{ec} = 281$$



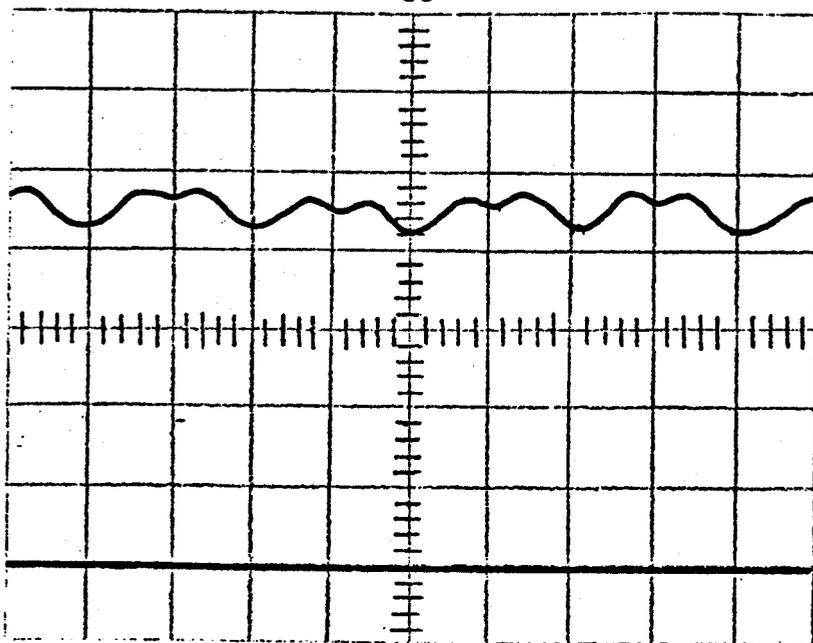
$$f - R_{ec} = 327$$



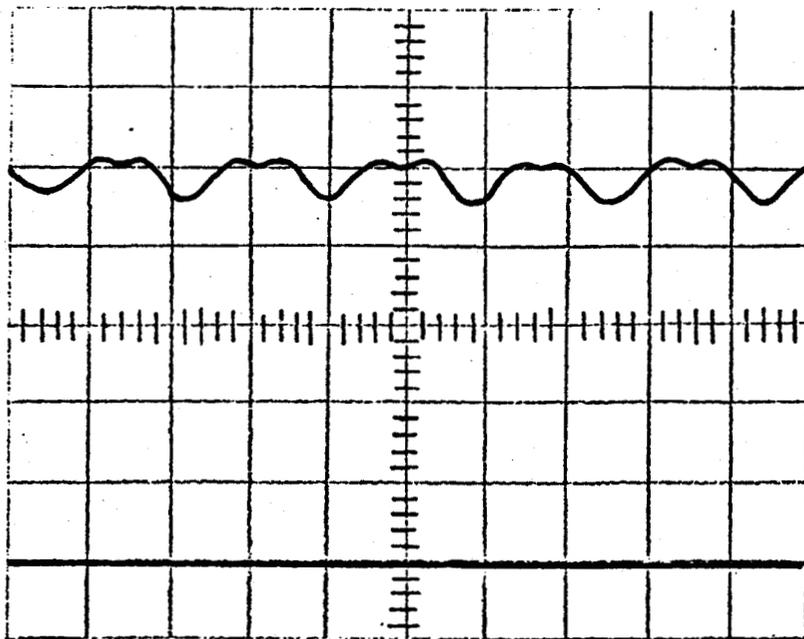
$$g - R_{ec} = 437$$



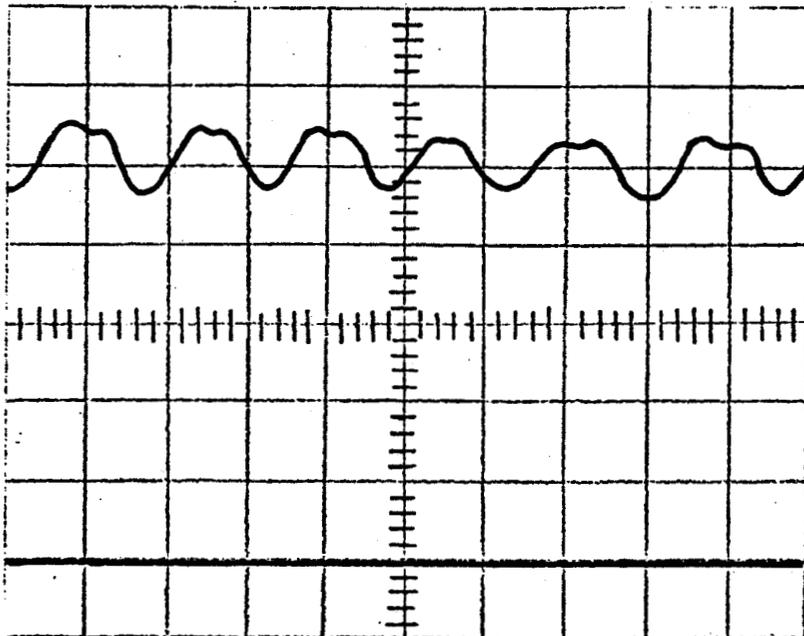
$$h - R_{ec} = 468$$



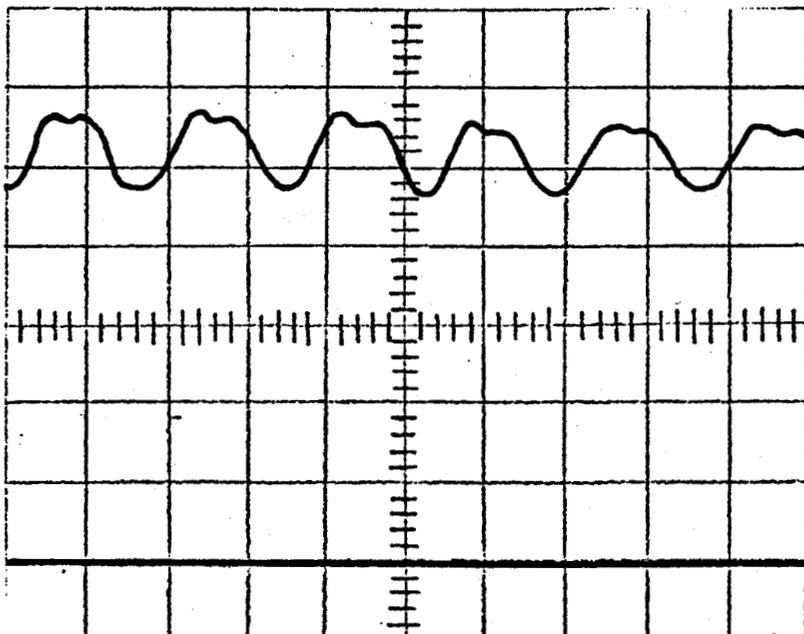
$$i - R_{ec} = 561$$



j - $R_{ec} = 655$



k - $R_{ec} = 780$



l - $R_{ec} = 840$

Fig. 5.5

CONCLUSION

Ce travail a été consacré à l'étude d'écoulements produits par la rotation des parois dans une cavité torique dont le rapport hauteur/entrefer pouvait varier de l'unité à de très grandes valeurs permettant de considérer les cylindres infinis.

Dans ce dernier cas nous avons supposé que la composante tangentielle de la vitesse n'est fonction que de r et de t . Cette hypothèse nous a permis de donner une solution analytique de l'écoulement stationnaire puis de l'écoulement instationnaire lorsque la vitesse de rotation du cylindre intérieur $\omega(t)$ est une fonction exponentielle. Pour tout autre type d'accélération ou de décélération arbitraire, nous avons utilisé une méthode numérique de NEWTON. Elle nous a permis de mettre en évidence la différence entre un état instationnaire à un instant donné et l'état stationnaire caractérisé par le même nombre de REYNOLDS de rotation et de retrouver quel que soit le nombre de REYNOLDS la solution analytique dans le cas d'accélération ou de décélération exponentielle.

Par contre, la recherche d'une solution dans une cavité torique de hauteur finie ne peut plus se faire moyennant une hypothèse d'indépendance de la vitesse tangentielle par rapport à z . Dans ce cas, nous avons cherché une solution numérique en utilisant une méthode de perturbation des équations de NAVIER-STOKES. Ceci nous a permis de définir le rôle des parois limitant les cylindres et de montrer que l'on tend vers la solution de type COUETTE lorsque le rapport hauteur/entrefer devient grand. L'intérêt de notre méthode, outre sa formulation en vitesse-pression, est d'avoir permis de définir un critère de convergence basé sur une stationnarisation de chaque composante de la vitesse en tout point de l'écoulement.

L'obtention d'une solution se révélant impossible aux grands nombres de REYNOLDS, nous avons cherché à montrer que l'écoulement s'effectue selon un autre mode. Nous avons alors réalisé une expérience mettant en oeuvre une technique électrochimique ne perturbant pas l'écoulement. Ceci nous a permis de contrôler la variation du frottement pariétal sur le cylindre extérieur et de montrer l'existence de trois types d'instabilités. Nous avons localisé les nombres

de REYNOLDS à partir desquels elles apparaissent. Ces résultats seront utilisés ultérieurement comme initialisation de la méthode de perturbation qui ne nous a pas donné de résultats aux grands nombres de REYNOLDS.

Une extension de ce travail est d'introduire un débit dans les coins de la cavité, et de relier les cylindres à des disques coaxiaux pour schématiser un palier fluide, ou pour schématiser un labyrinthe de turbomachine.

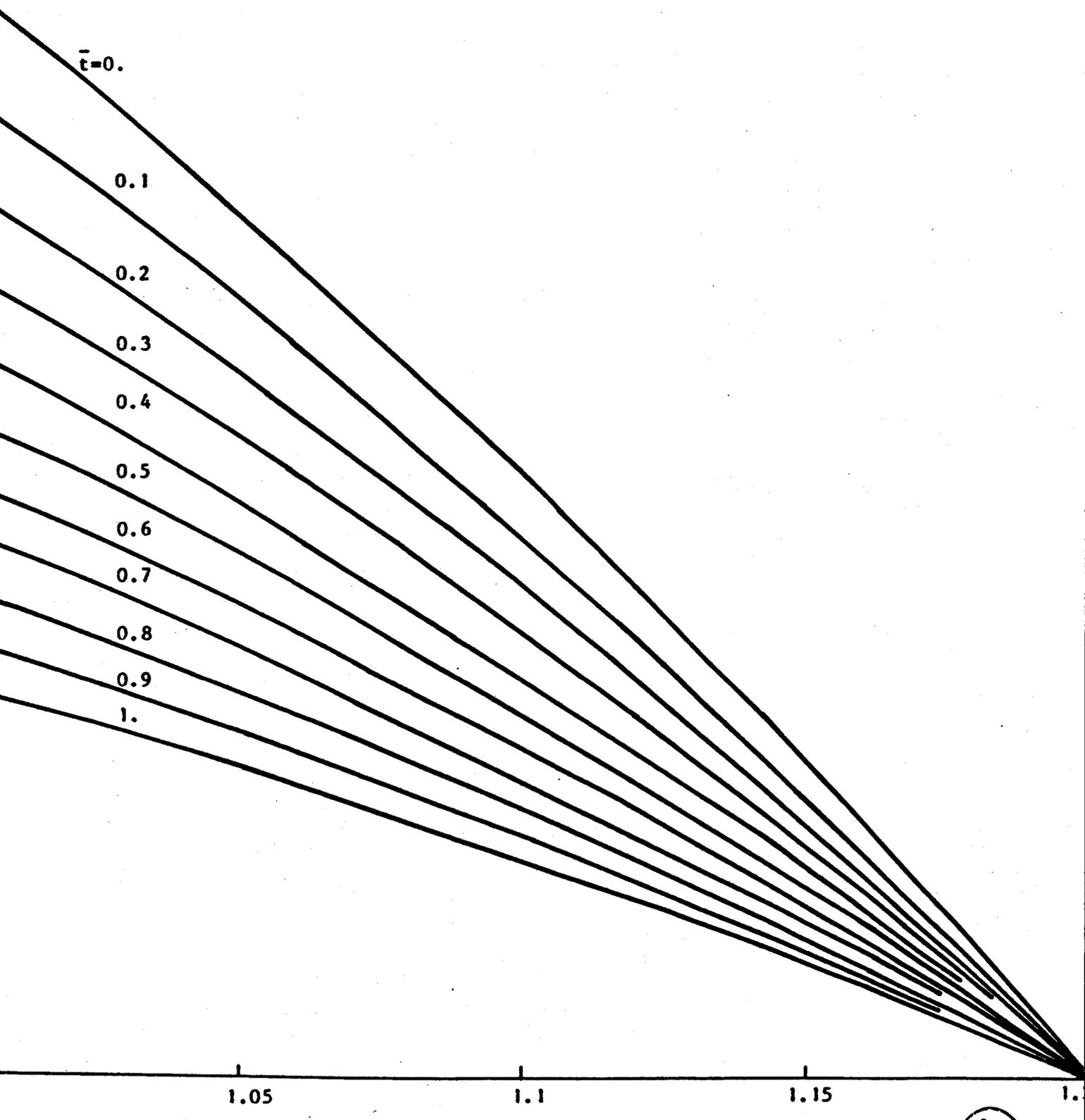
$\bar{v}(\bar{r}, \bar{t}) \times \bar{r}$

$$\bar{v}(\bar{r}, \bar{t}) = \text{Re}_0 e^{-\bar{k}^2 \bar{t}} F(\bar{k}\bar{r})$$

$\text{Re}_0 = 1.$

$\bar{k} = 1.$

$\lambda = 1.2$



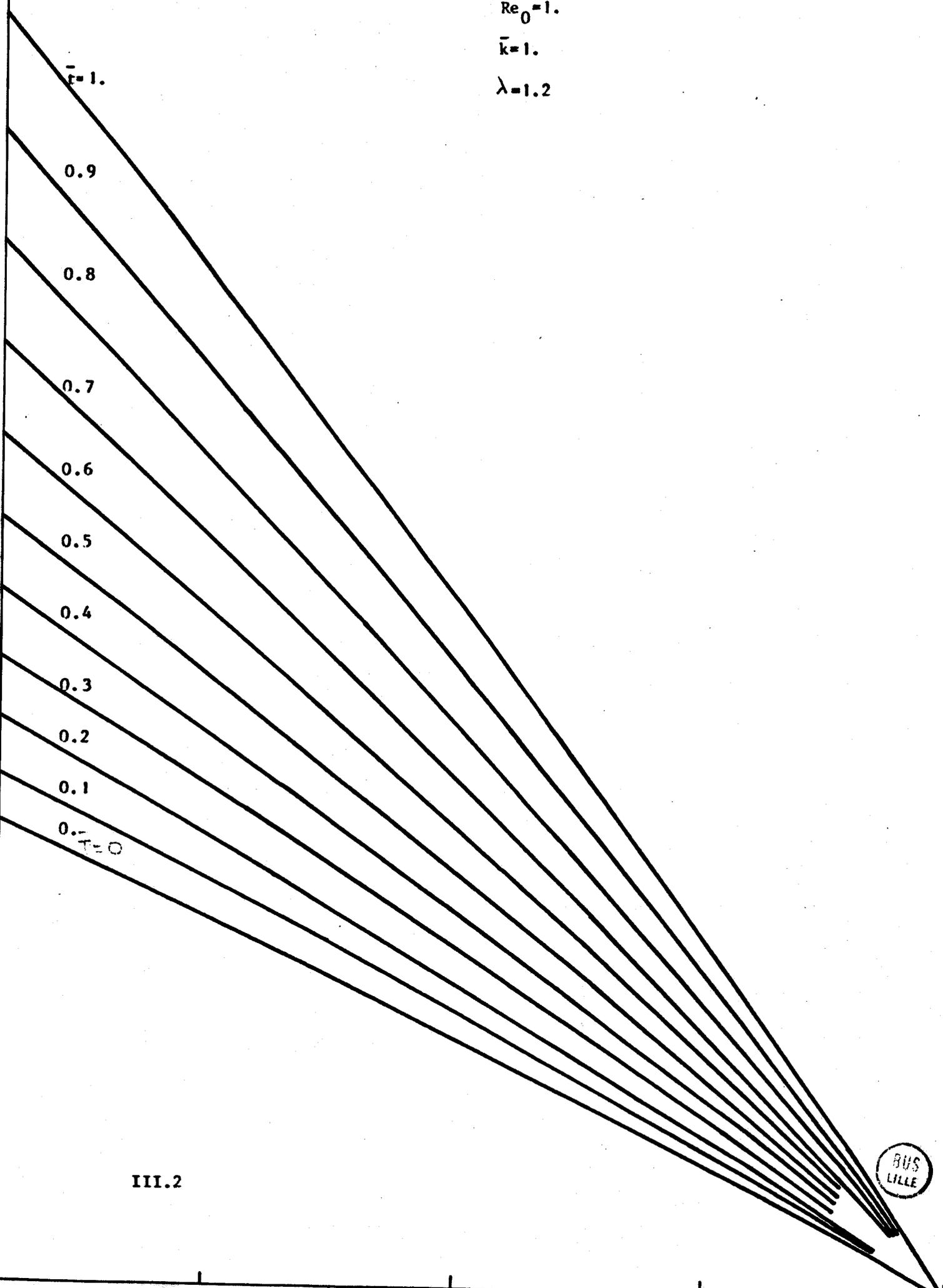
$\bar{v}(\bar{r}, \bar{t}) \times \bar{r}$

$$\bar{v}(\bar{r}, \bar{t}) = \text{Re}_0 e^{\bar{k}^2 \bar{t}} F(\bar{k} \bar{r})$$

$$\text{Re}_0 = 1.$$

$$\bar{k} = 1.$$

$$\lambda = 1.2$$



III.2



(r,t)

$$Re r = Re_0 e^{-\lambda k^2 t}$$

$$Re_0 = 50$$

$$\bar{k} = 1.$$

$$\lambda = 1.2$$

$\bar{t} = 0.6$

0.5

0.4

0.3

0.2

0.1

0.

III.3



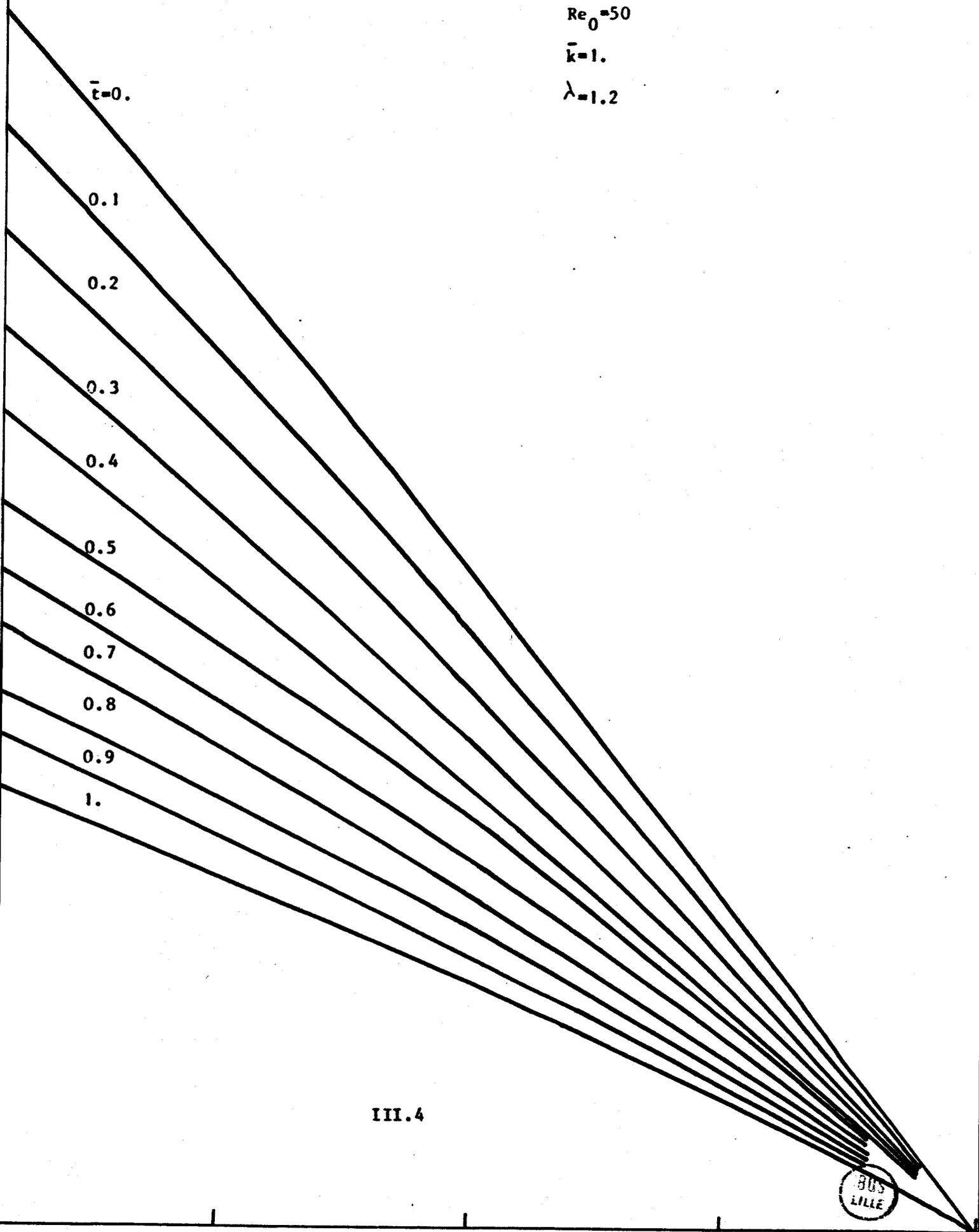
\bar{r}, \bar{t}

$$Re_r = Re_0 e^{-k^2 \bar{t}}$$

$$Re_0 = 50$$

$$\bar{k} = 1.$$

$$\lambda = 1.2$$



III.4



1.05

1.1

1.15

1.2

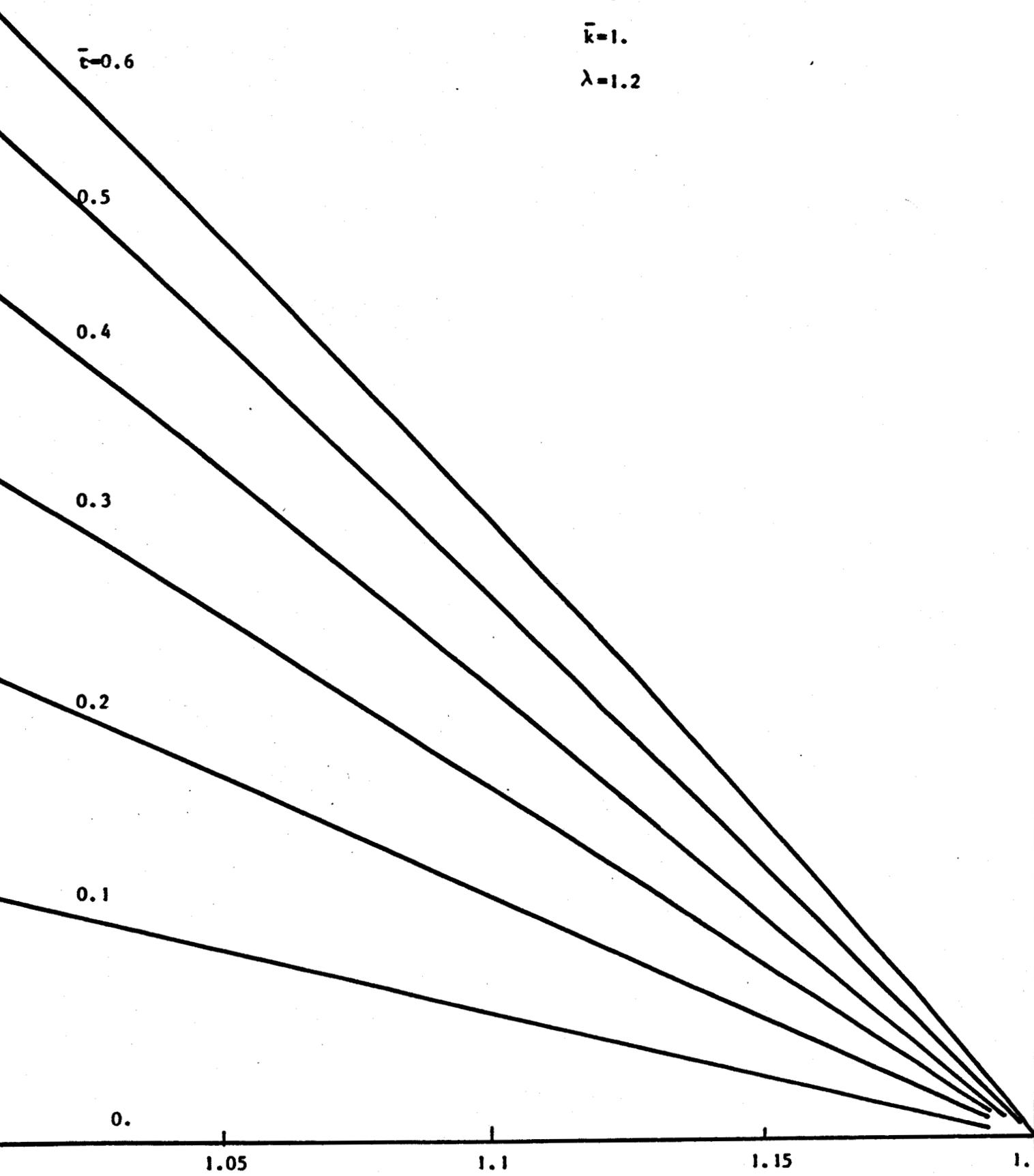
$\bar{r}(t)$

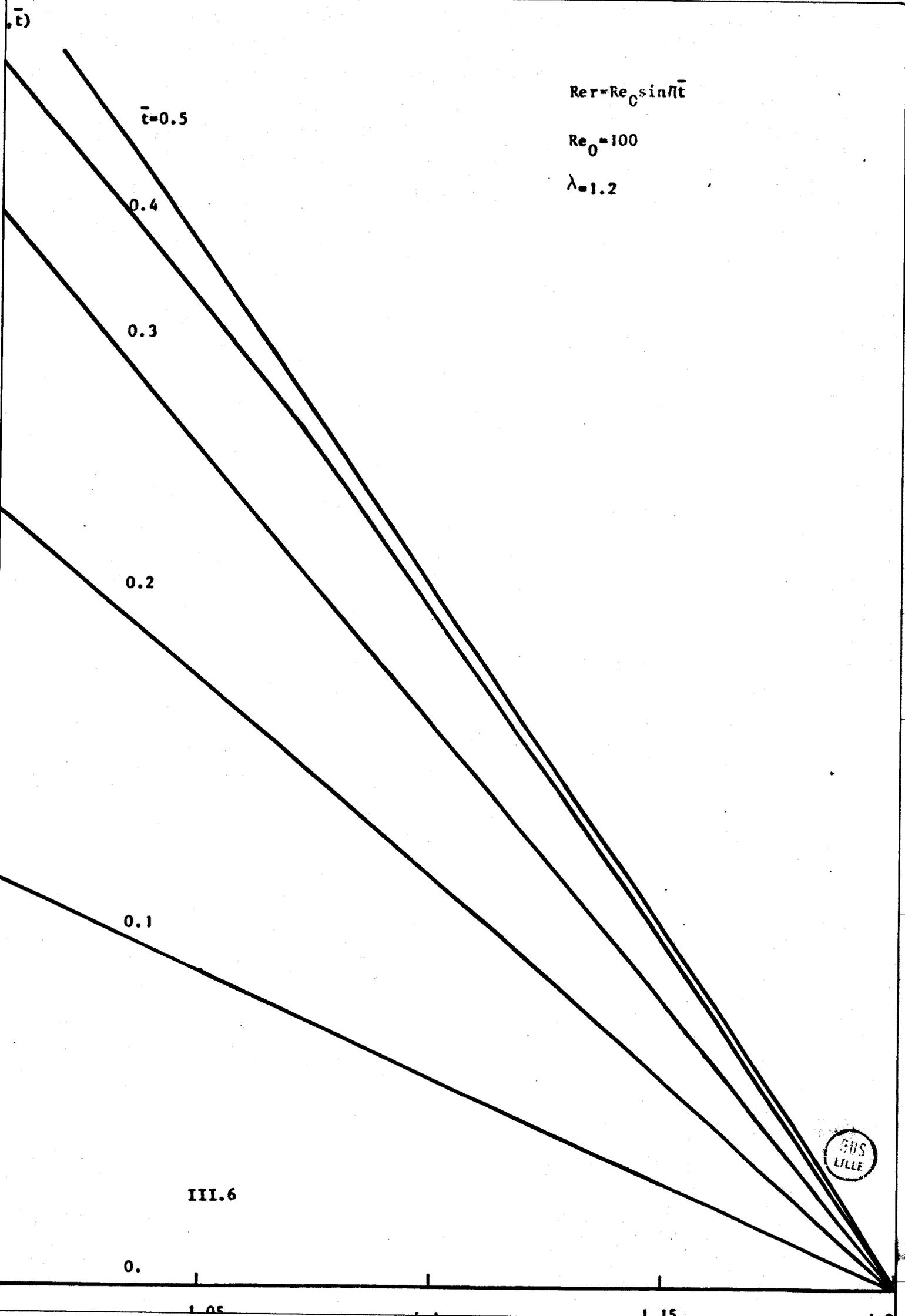
$$Re\ r = Re_0 (1 - e^{-\bar{k}^2 t})$$

$$Re_0 = 50$$

$$\bar{k} = 1.$$

$$\lambda = 1.2$$





$\bar{t}=0.5$

0.4

0.3

0.2

0.1

III.6

0.

1.05

1.15



f, \bar{t}

$$Re_r = Re_0 \operatorname{sh} \pi \bar{t}$$

$$Re_0 = 100$$

$$\lambda = 1.2$$

$\bar{t} = 0.3$

0.2

0.1

III.7

0.

1.05

1.1

1.15

1.



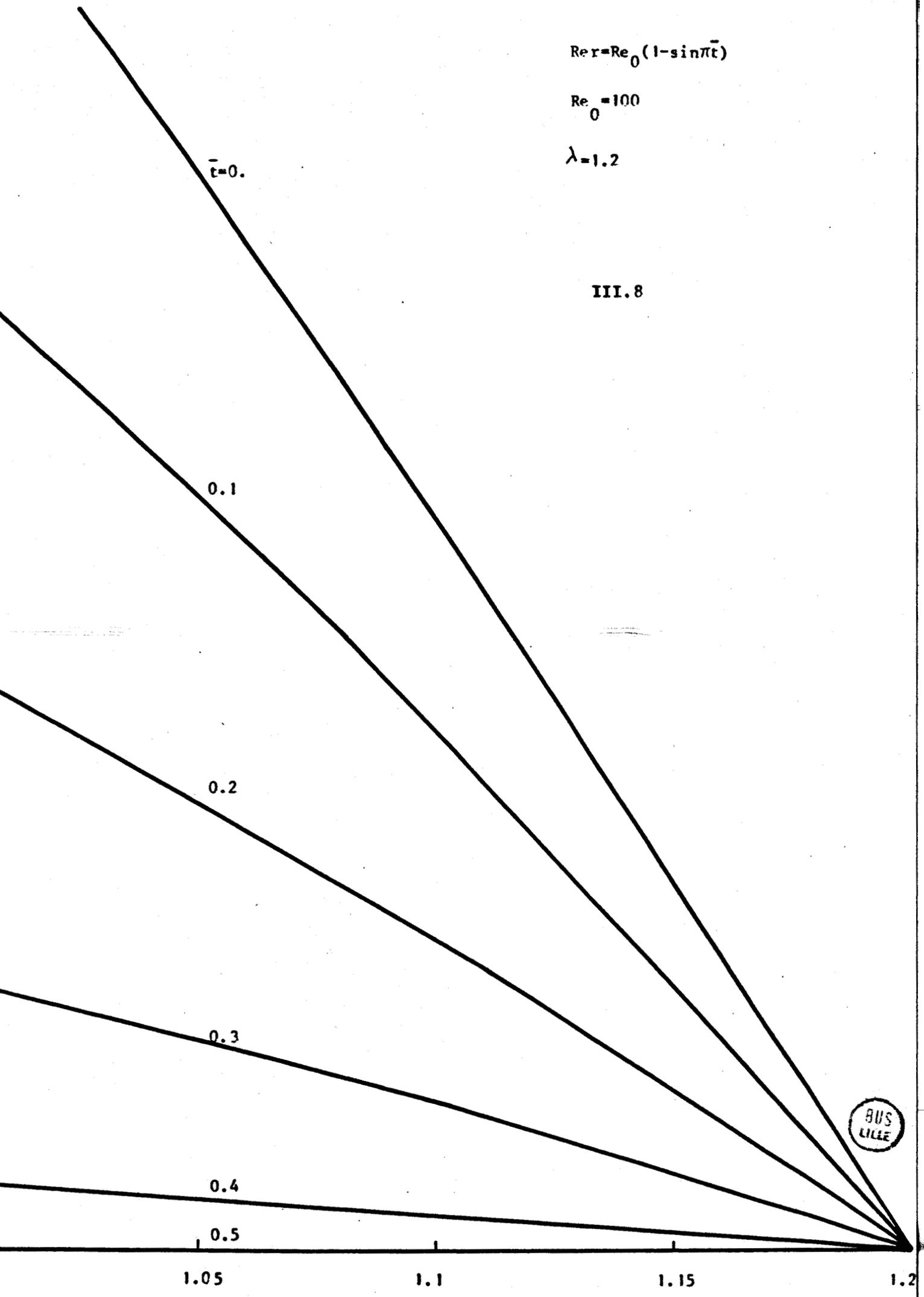
, \bar{t})

$$Re_r = Re_0 (1 - \sin \pi \bar{t})$$

$$Re_0 = 100$$

$$\lambda = 1.2$$

III.8



(\bar{r}, \bar{t})

— INSTATIONNAIRE

$Re_r = Re_0(1 - e^{-\bar{t}})$

$Re_0 = 50$

- - - STATIONNAIRE ASSOCIE

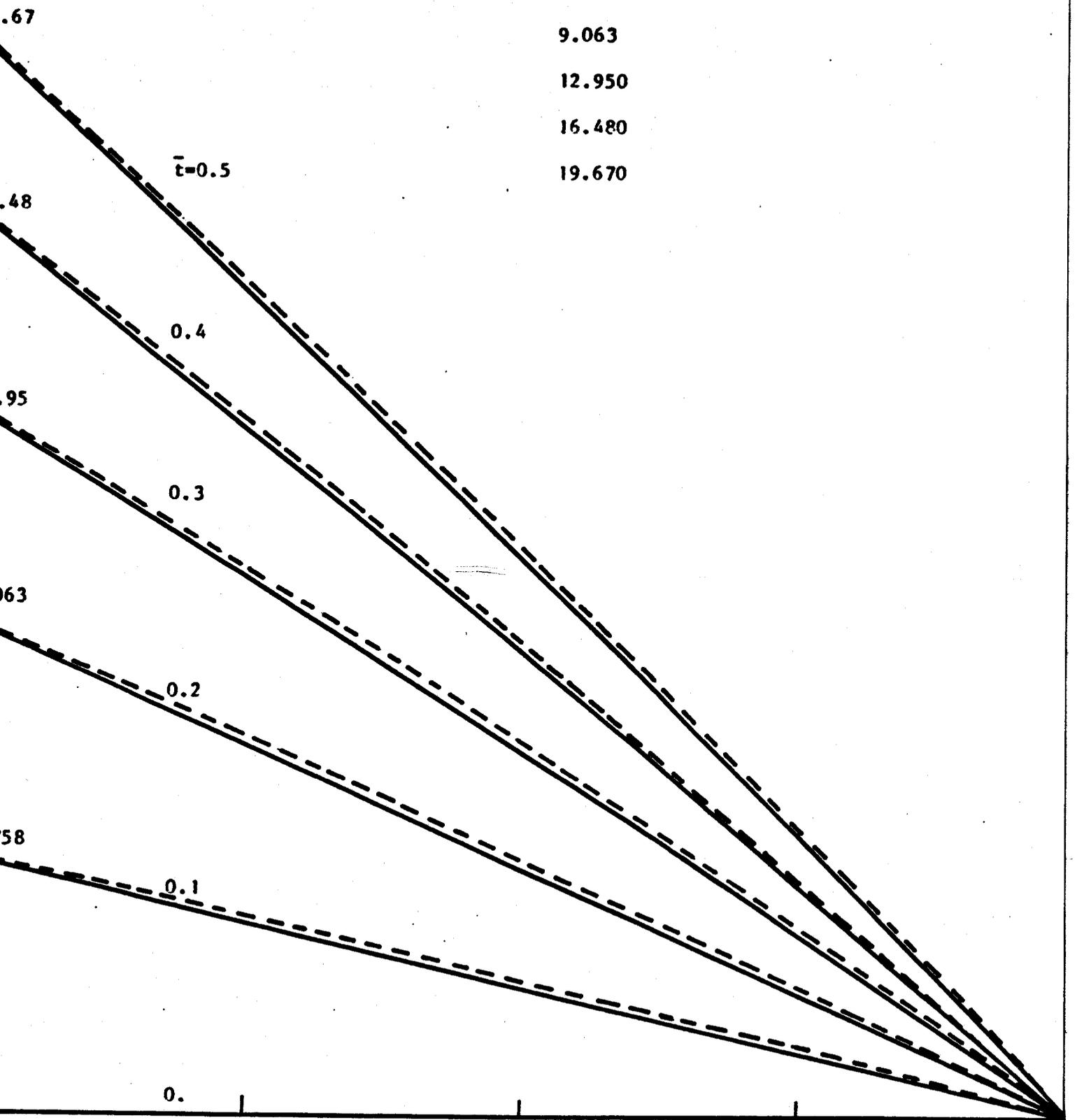
$Re_r = 4.758$

9.063

12.950

16.480

19.670



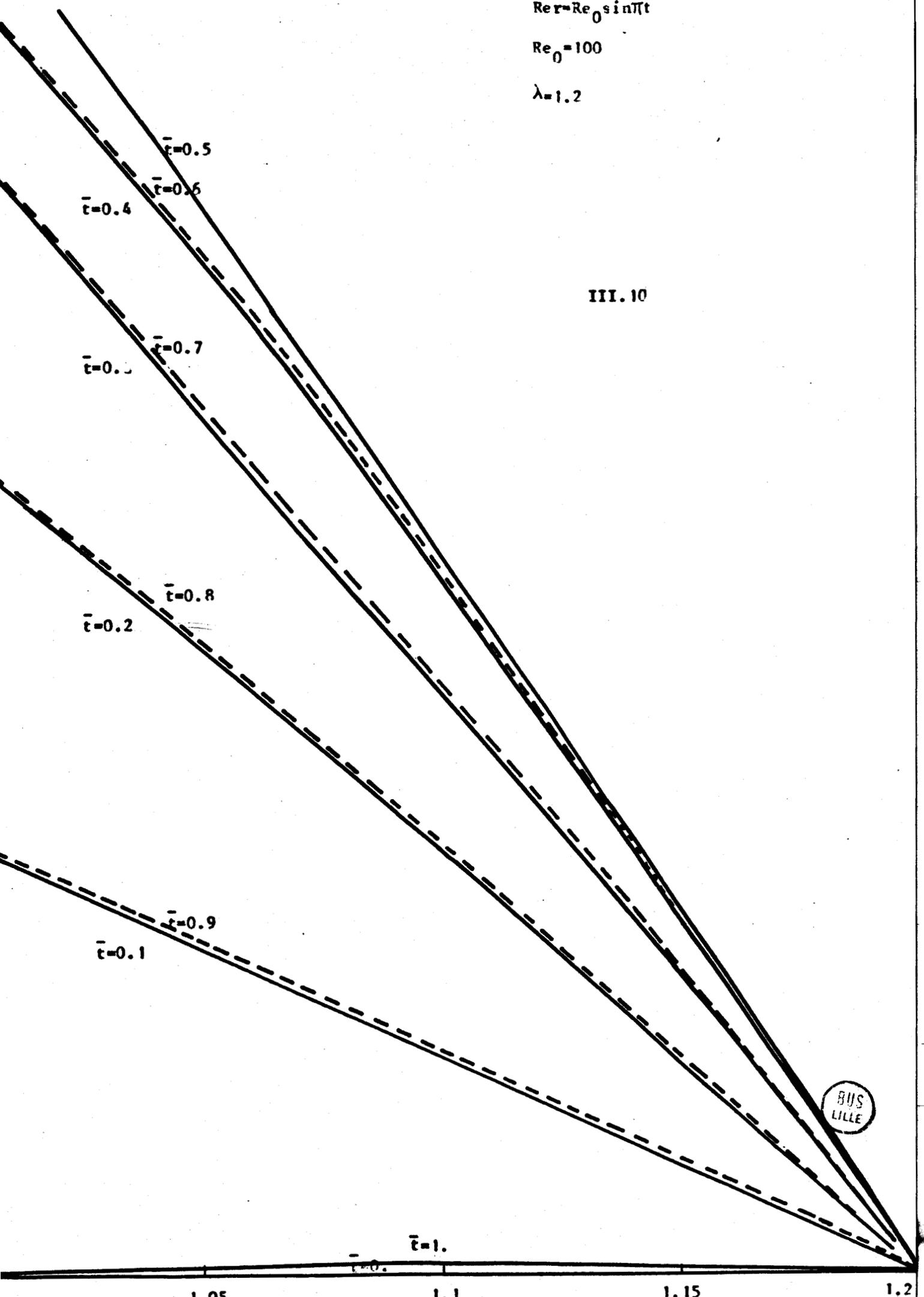
\bar{t}

$$Re_r = Re_0 \sin \pi \bar{t}$$

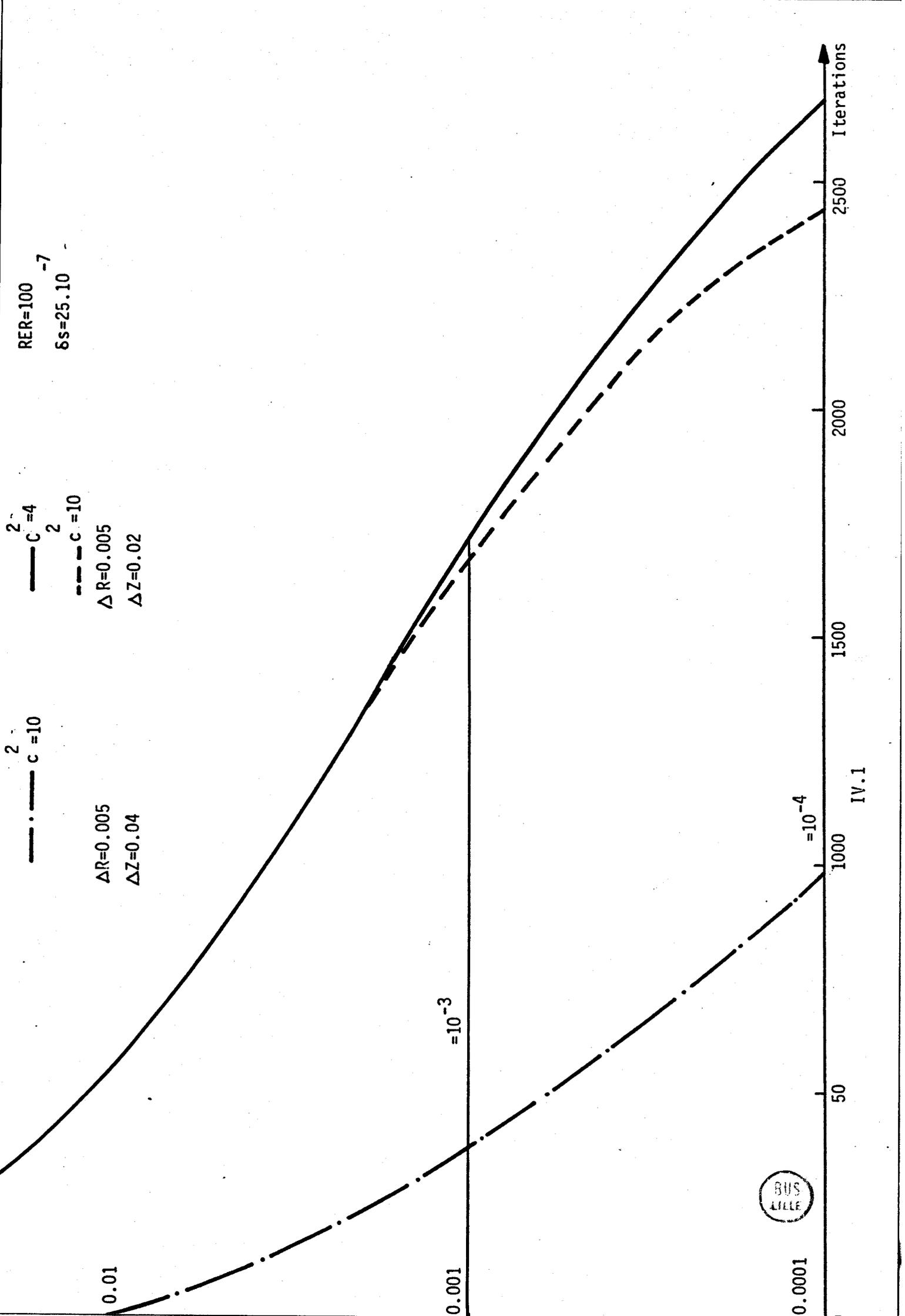
$$Re_0 = 100$$

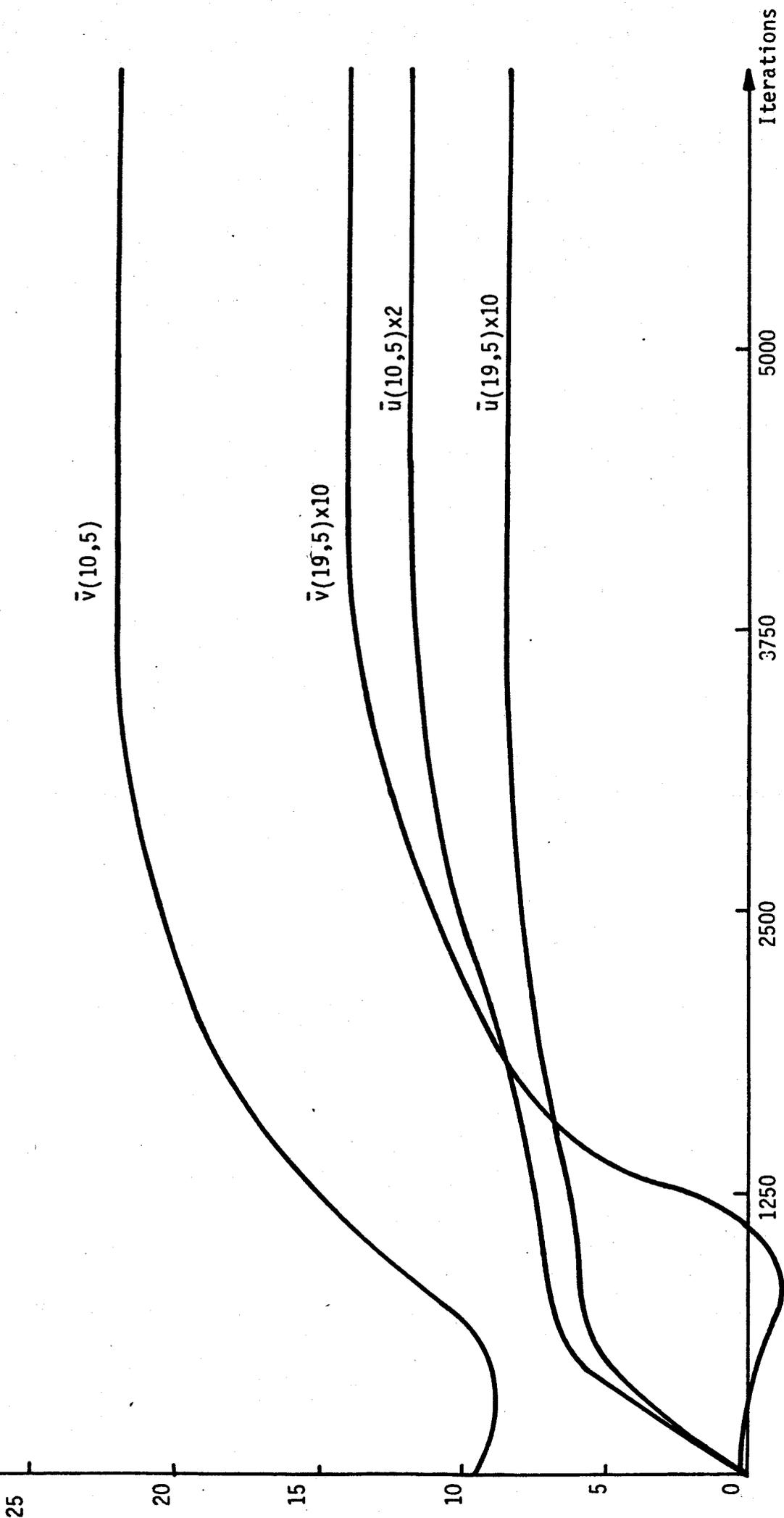
$$\lambda = 1.2$$

III. 10



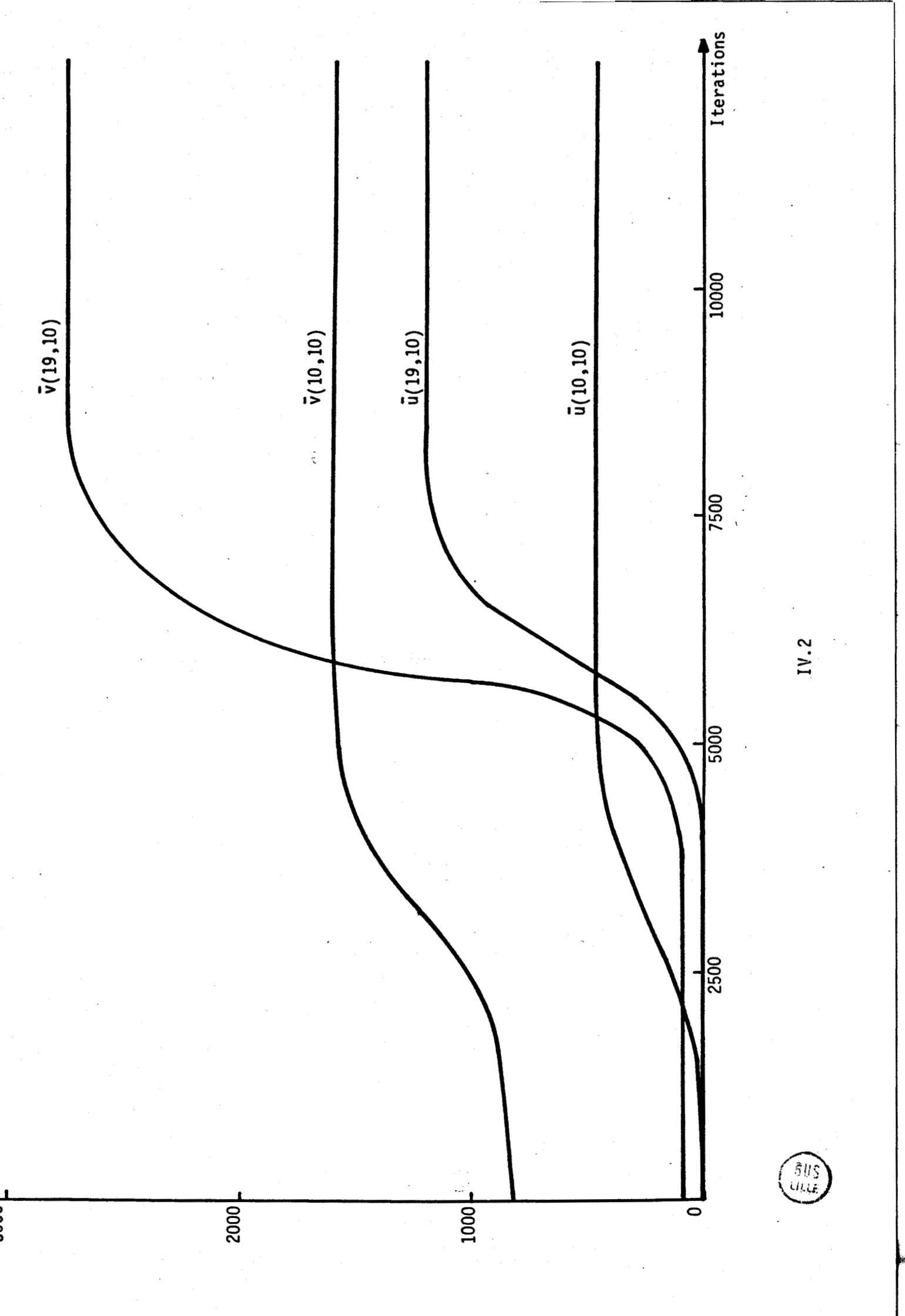
BUS LILLE

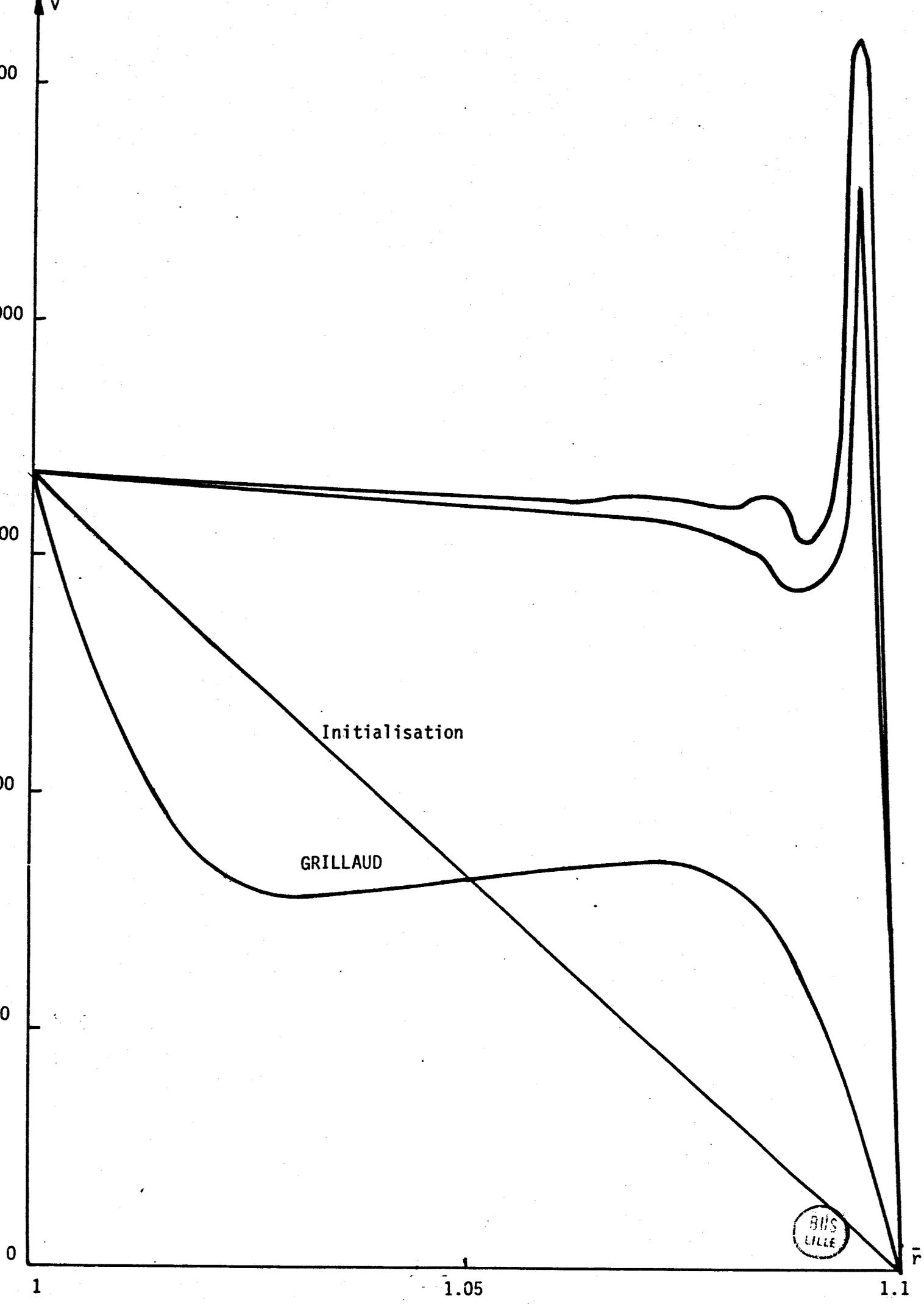




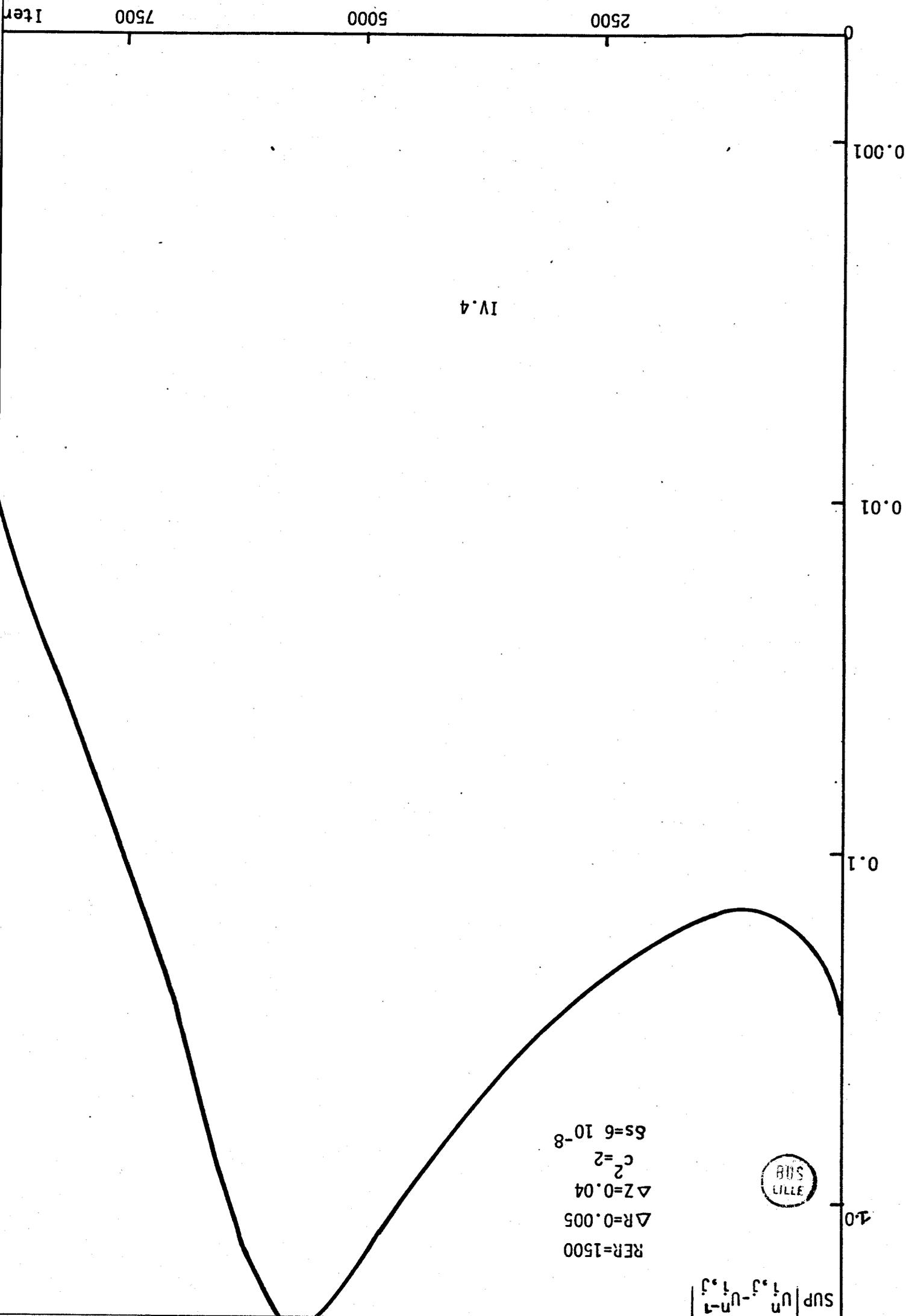
IV.1 bis

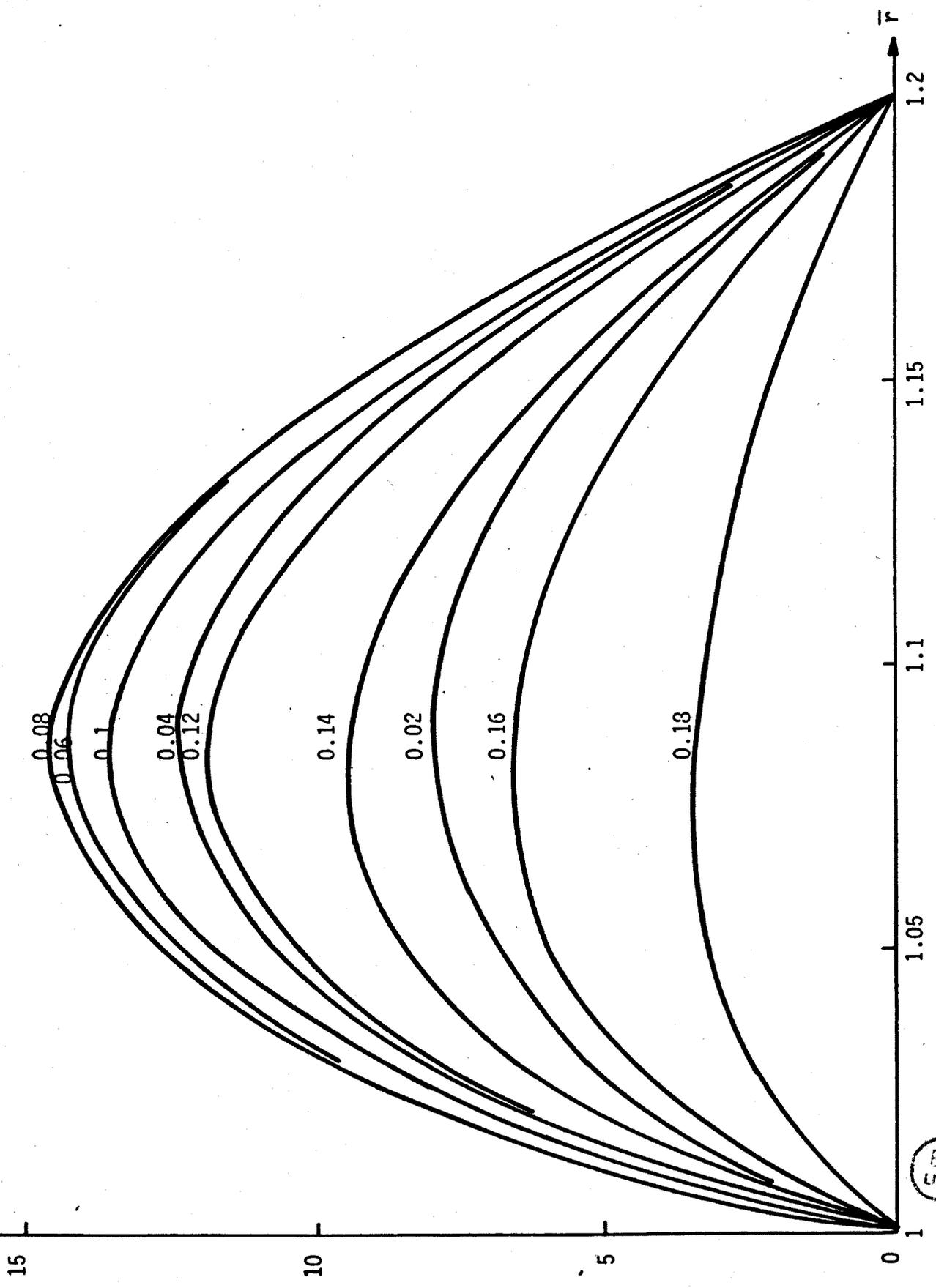






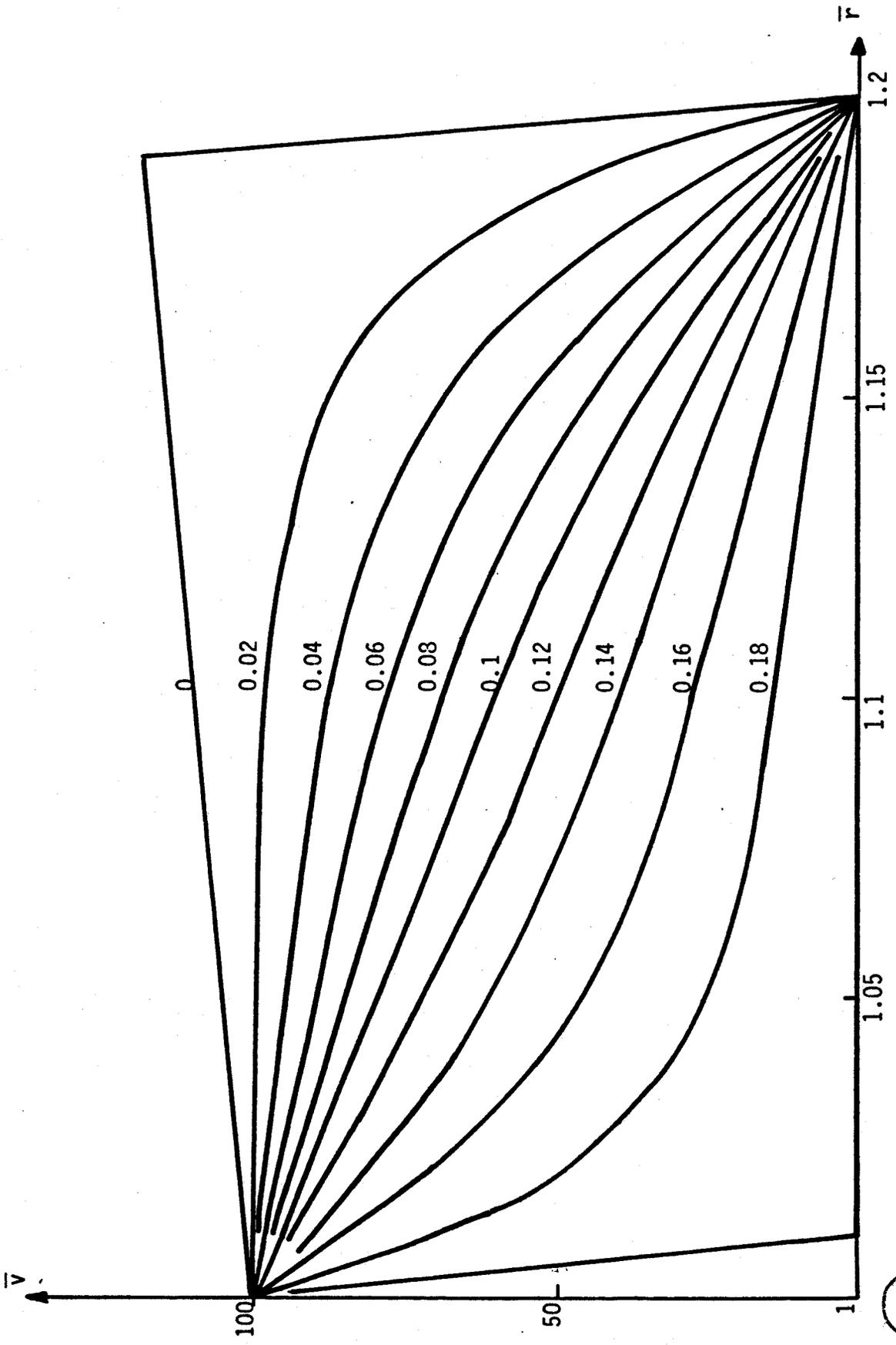
BUS
LILLE

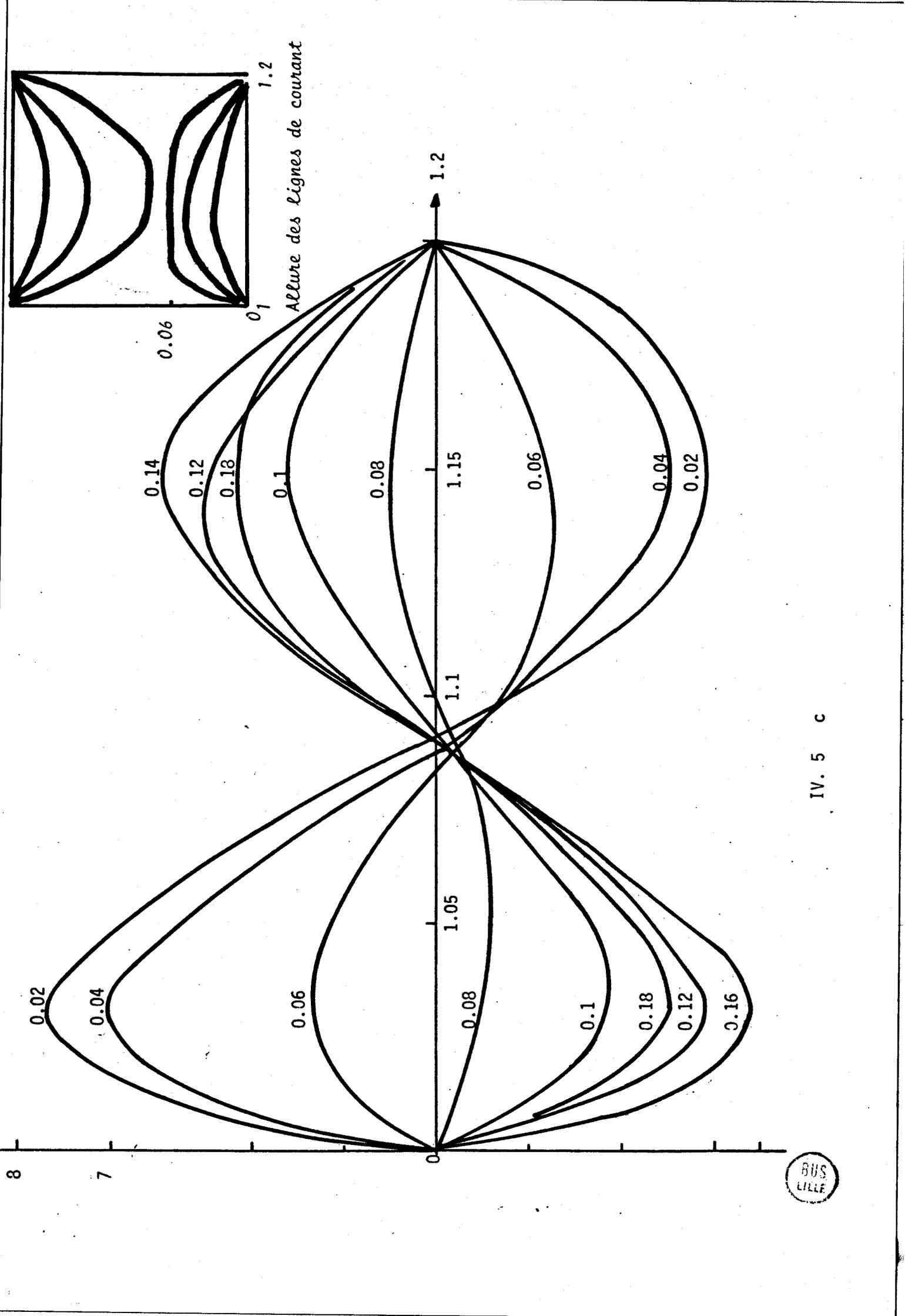




IV.5 a

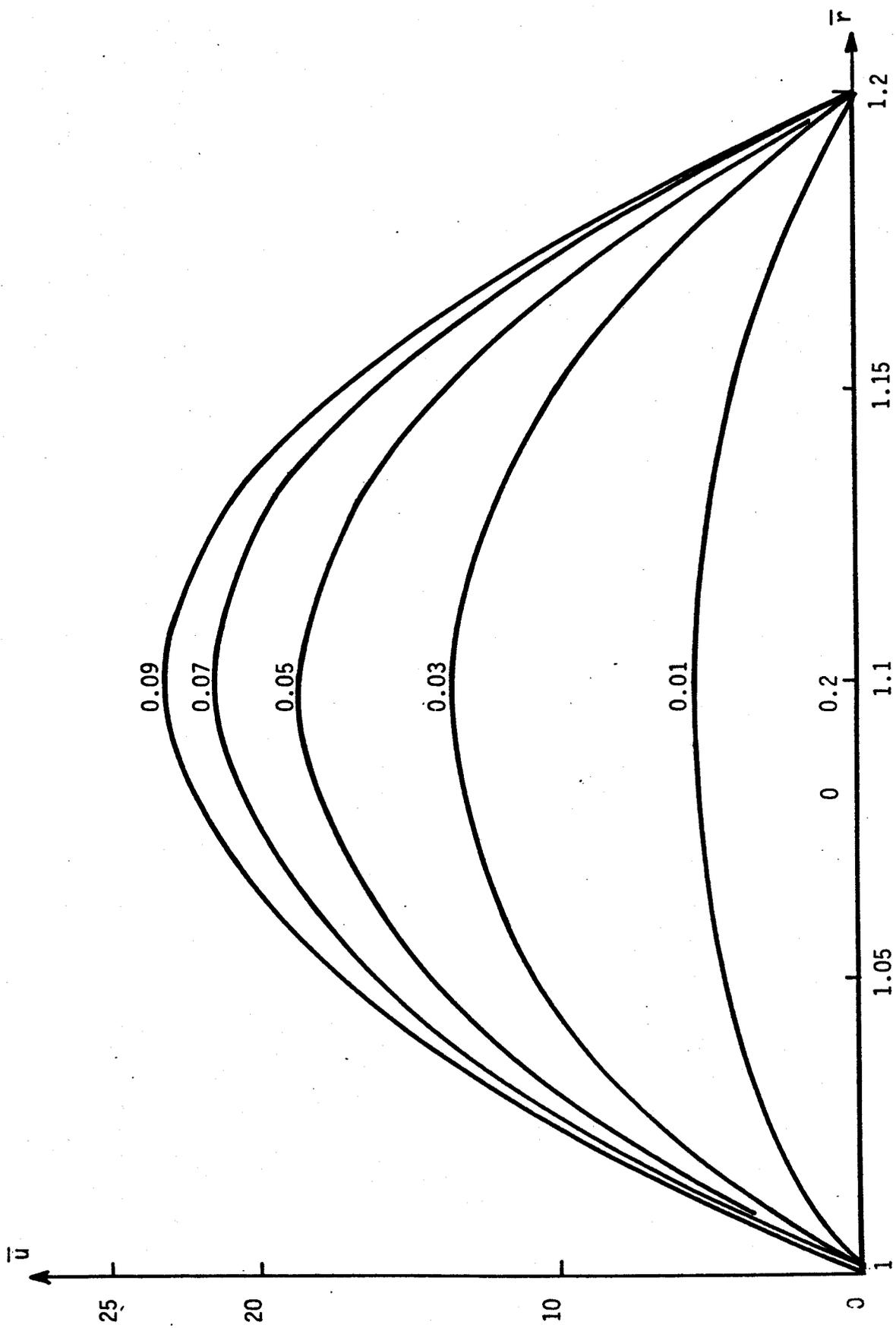






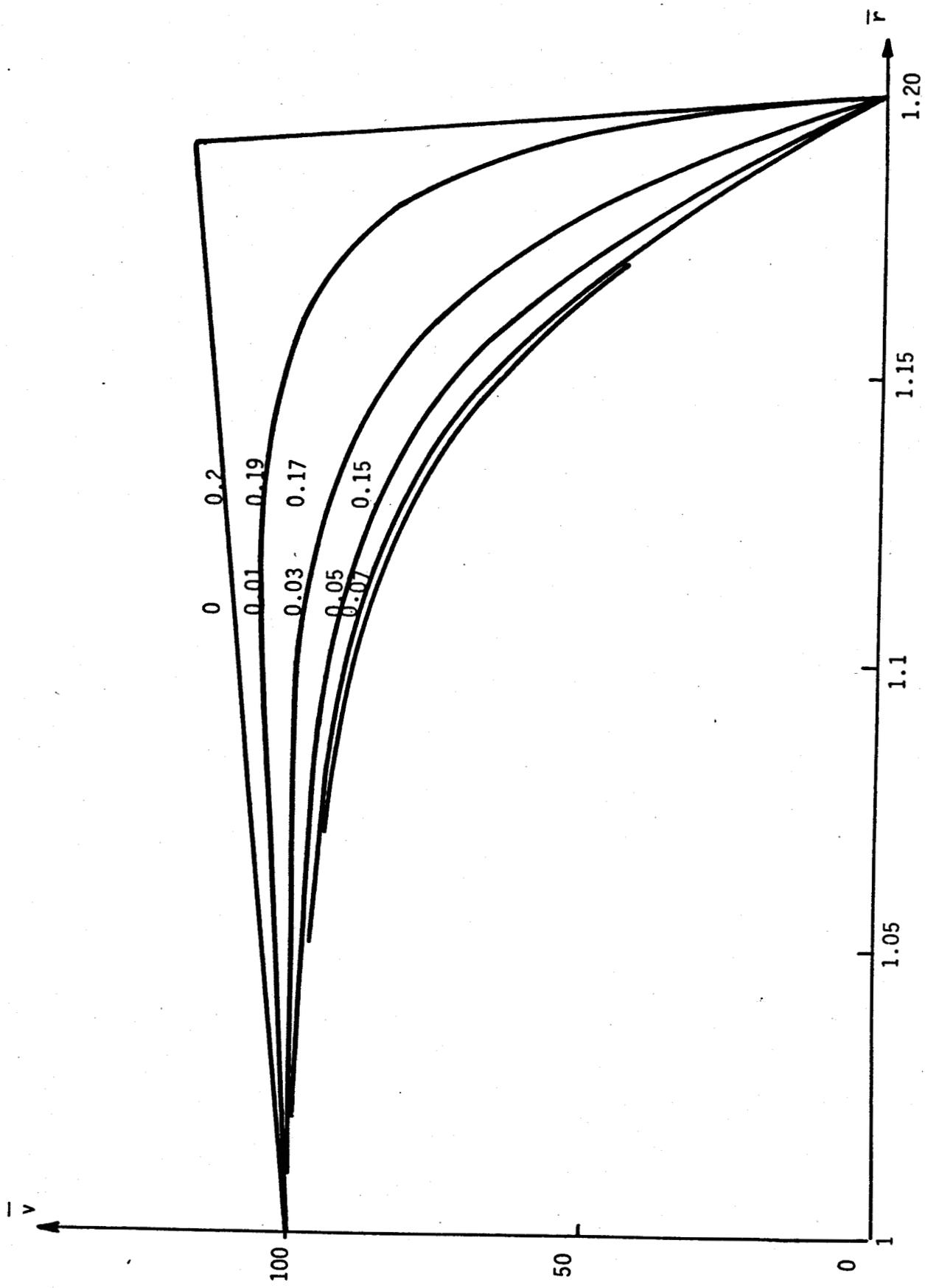
Allure des lignes de courant





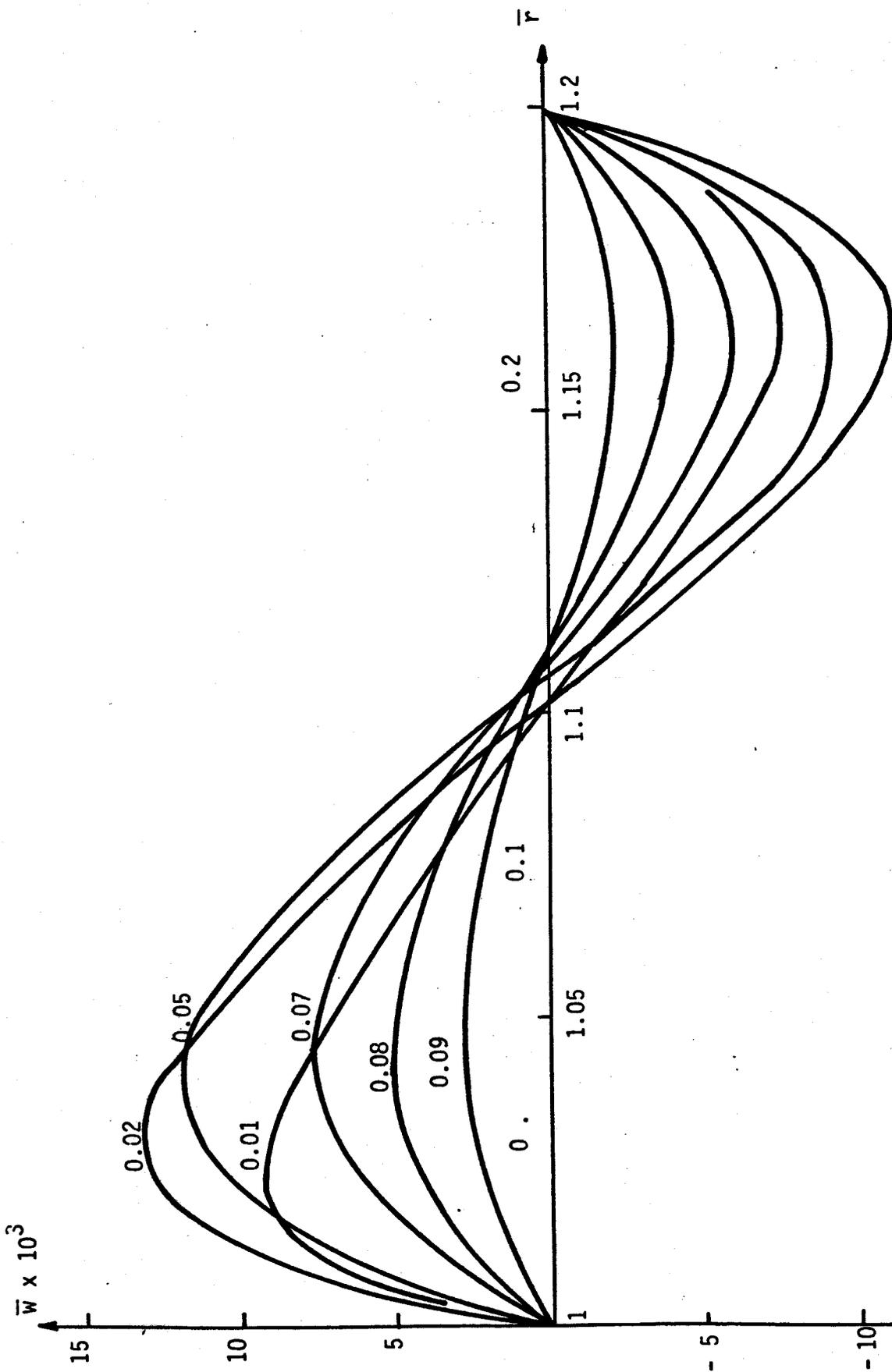
IV.6 a.





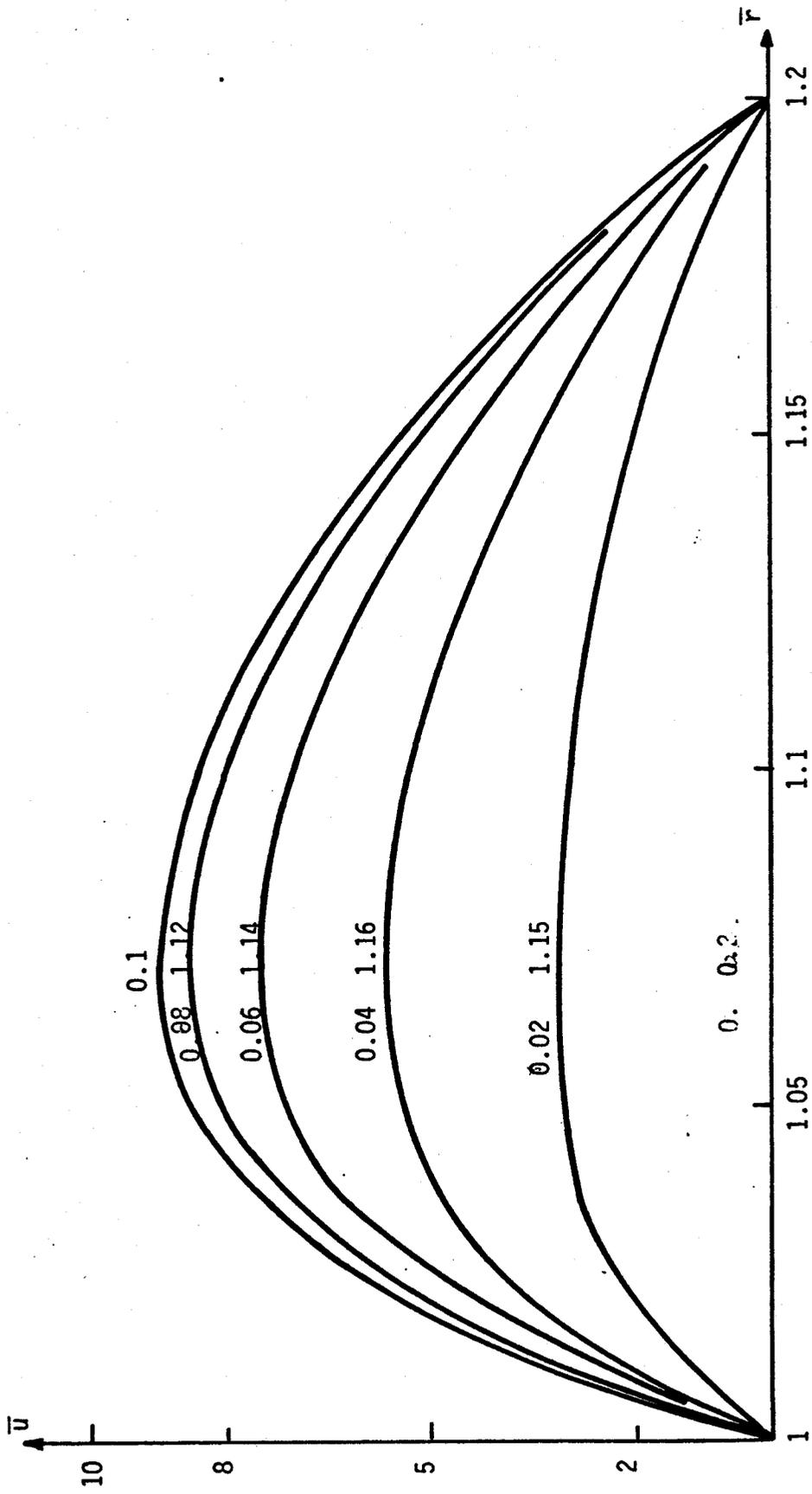
IV.6 b

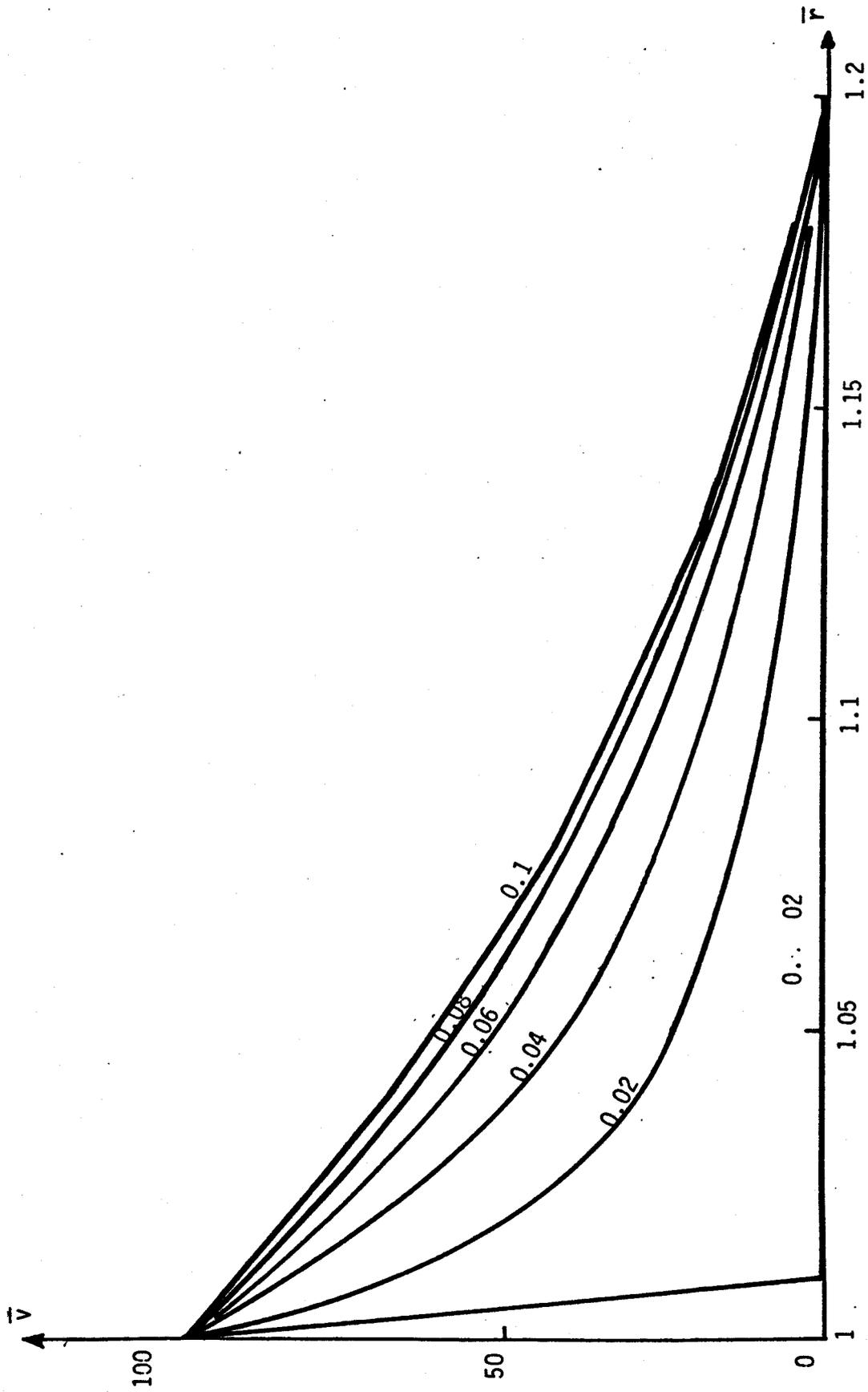




IV.6 c

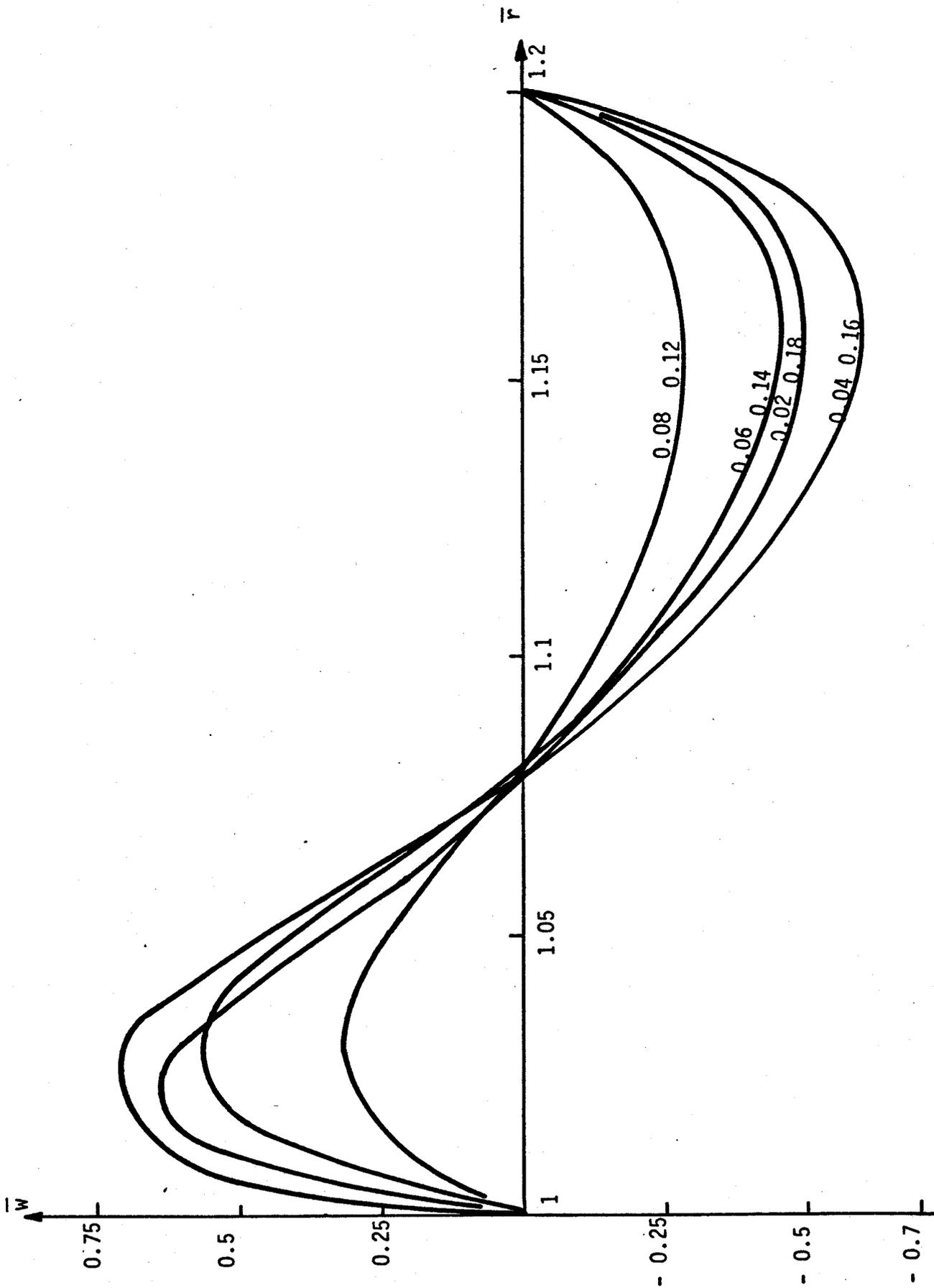




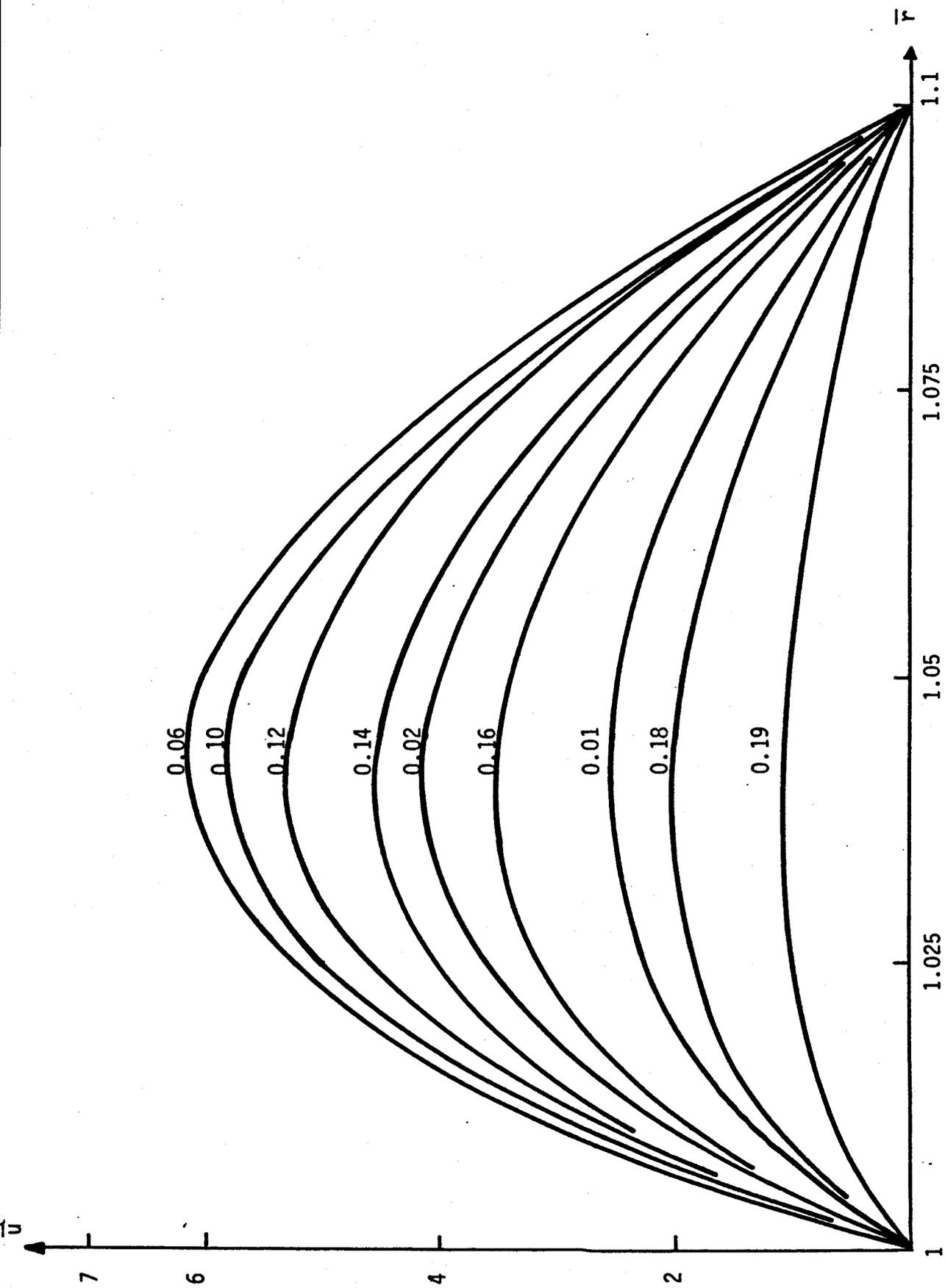


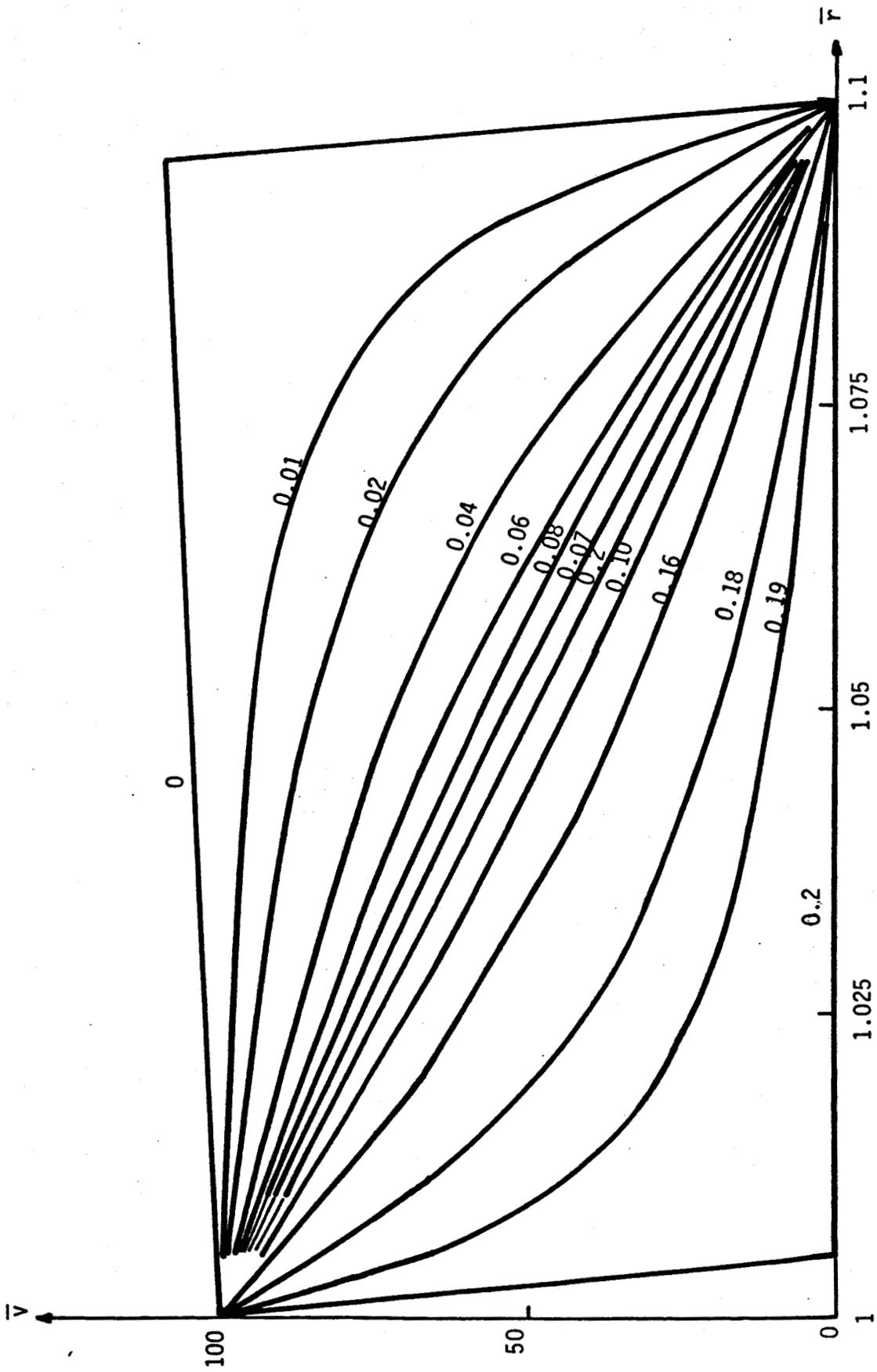
IV.7 b

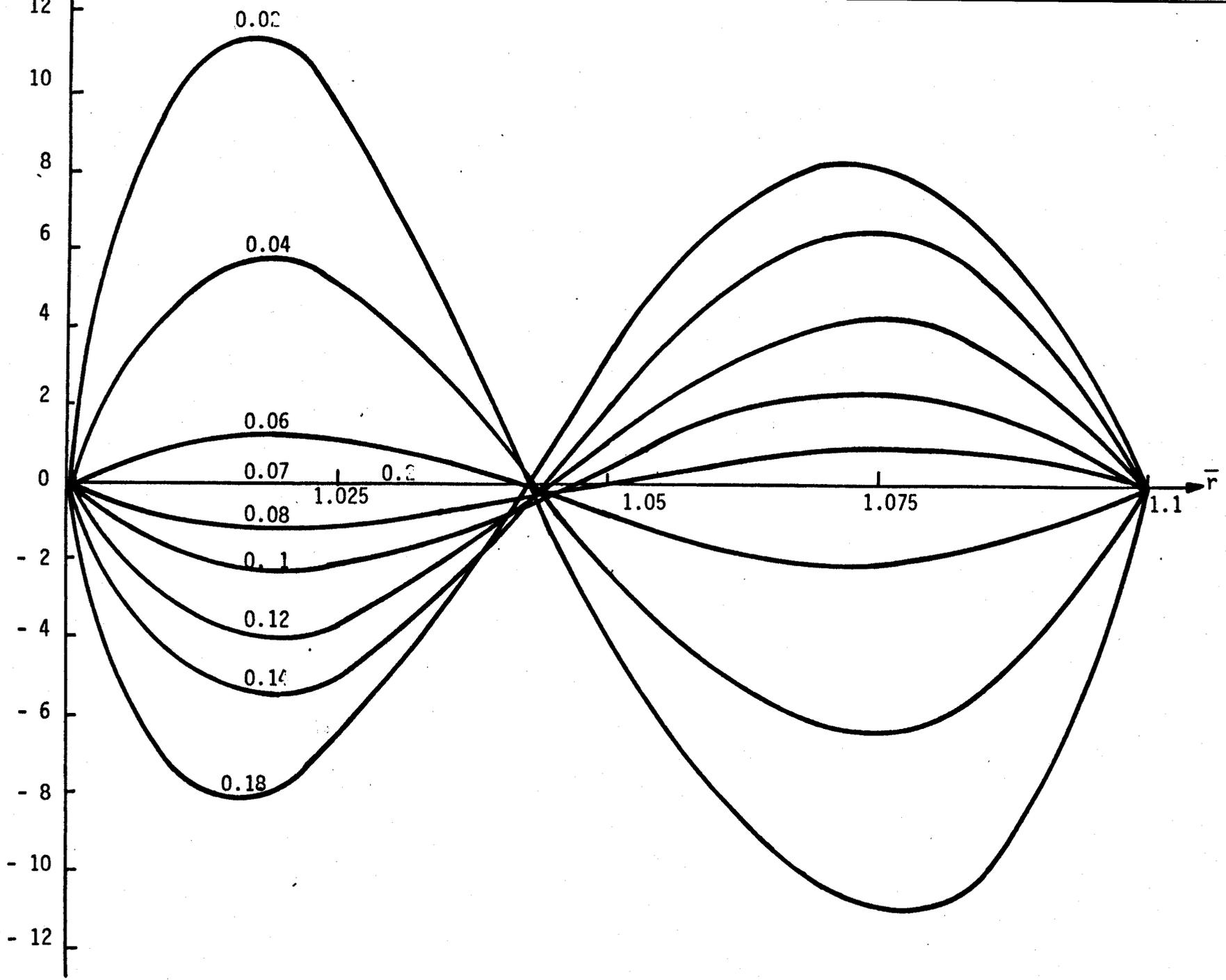




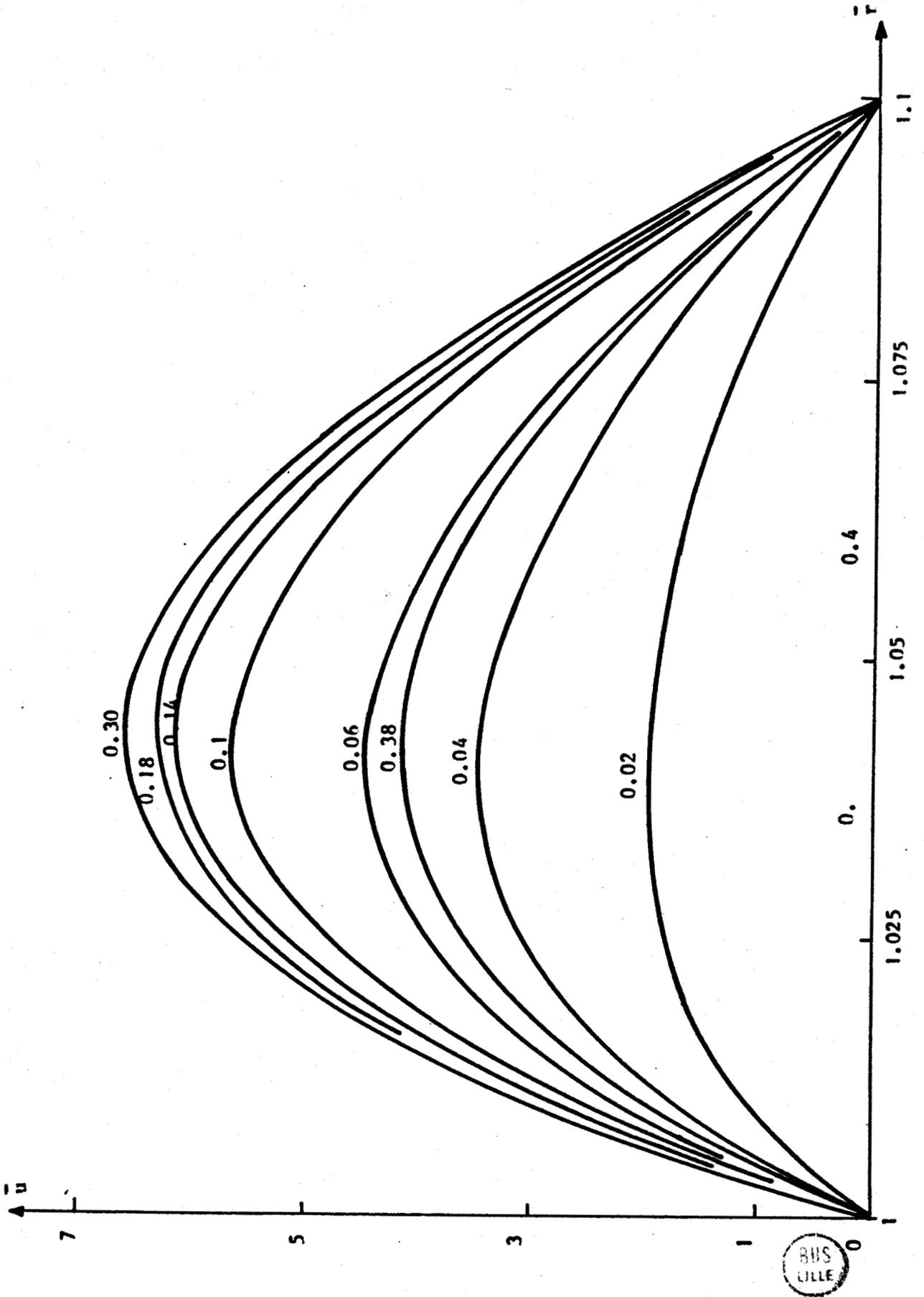
IV.7 c

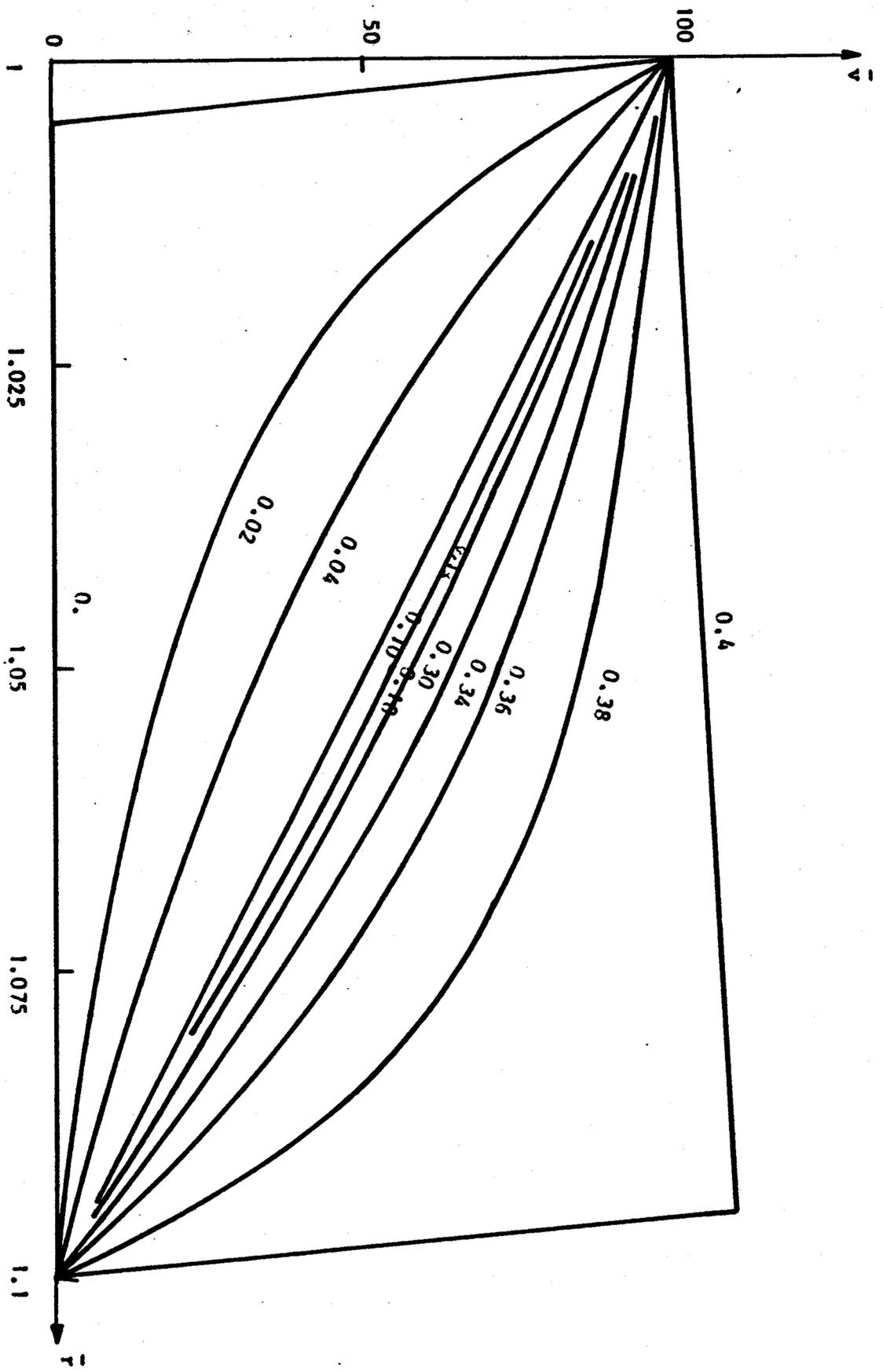






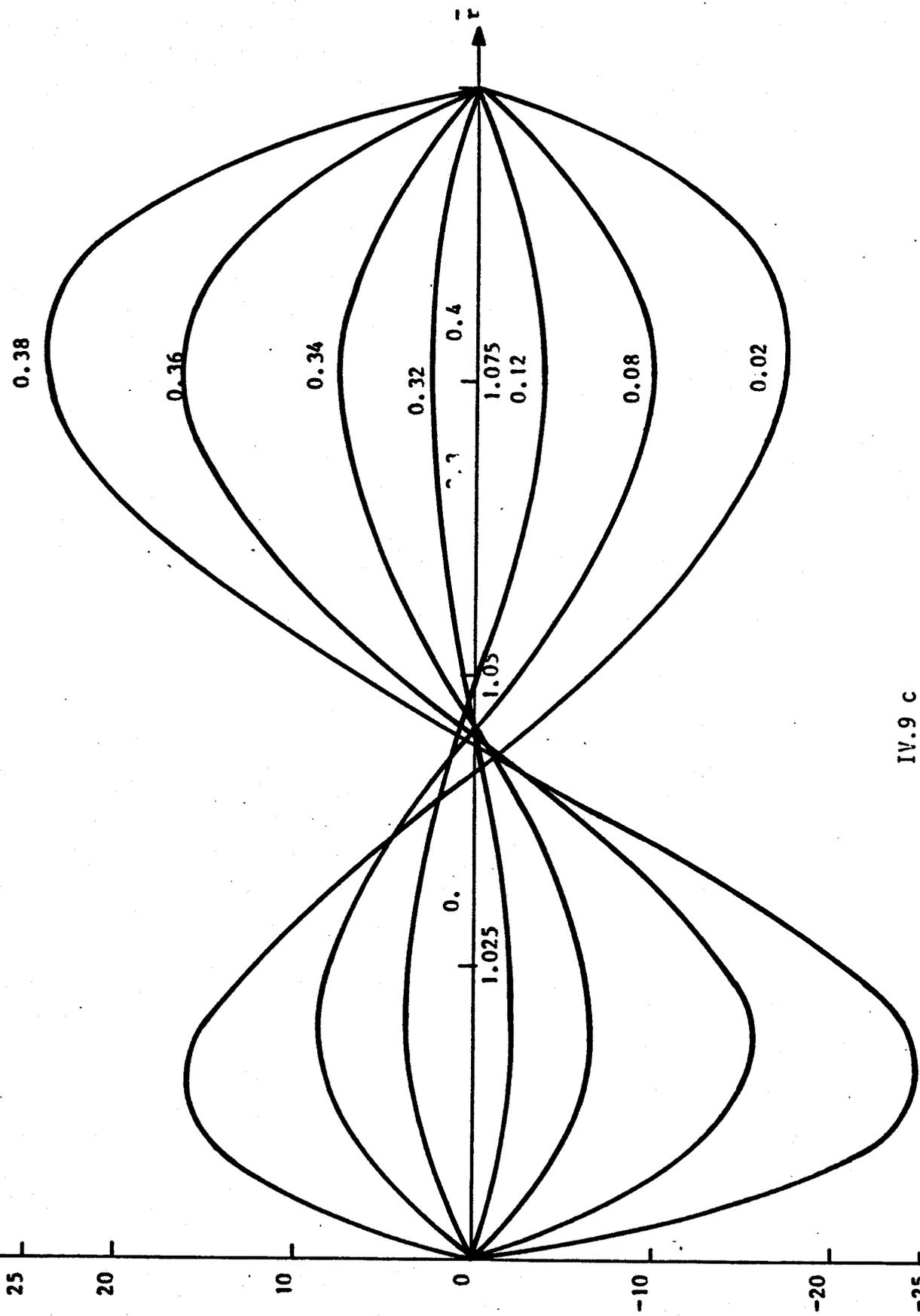
BHS
LINE





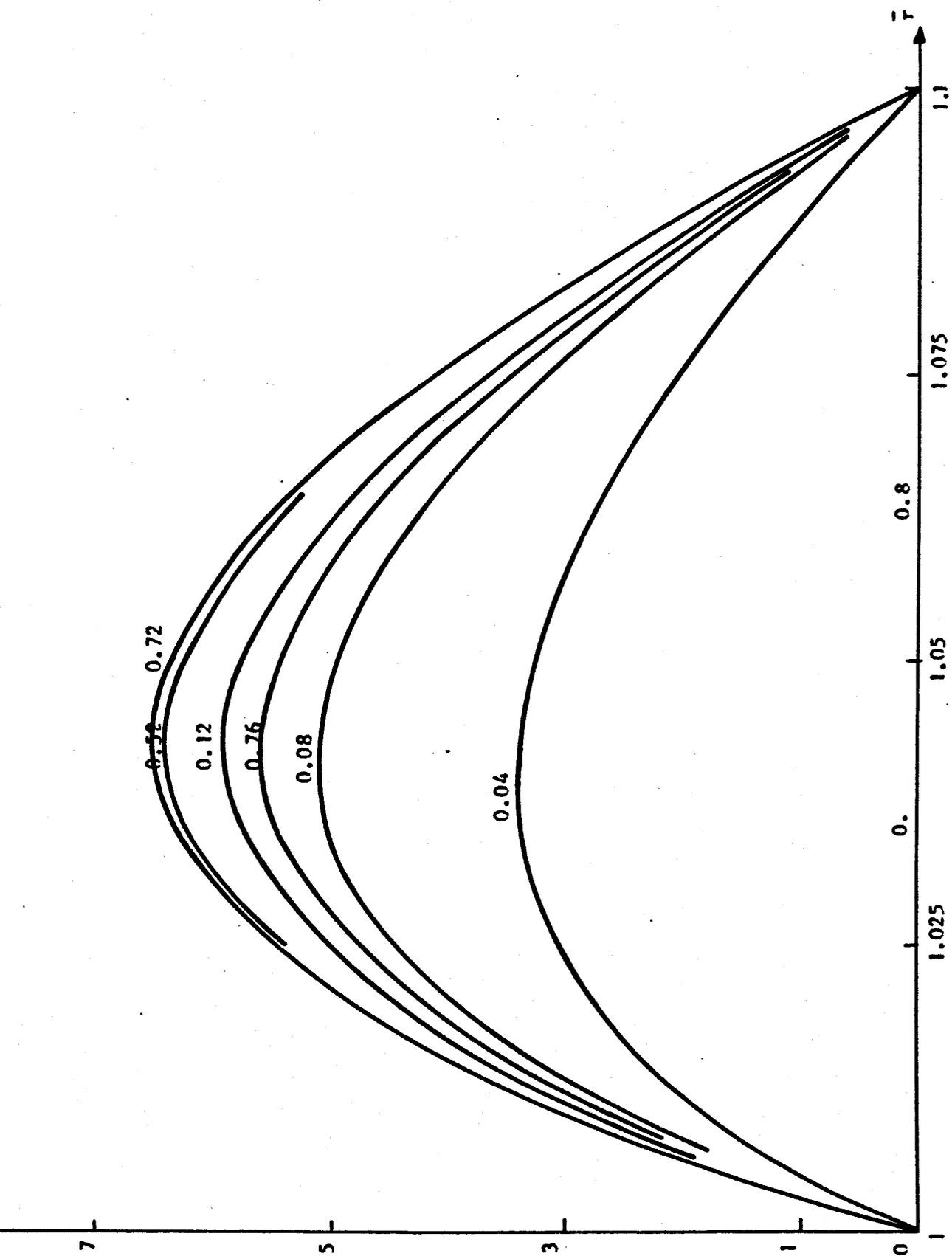
IV.9 b





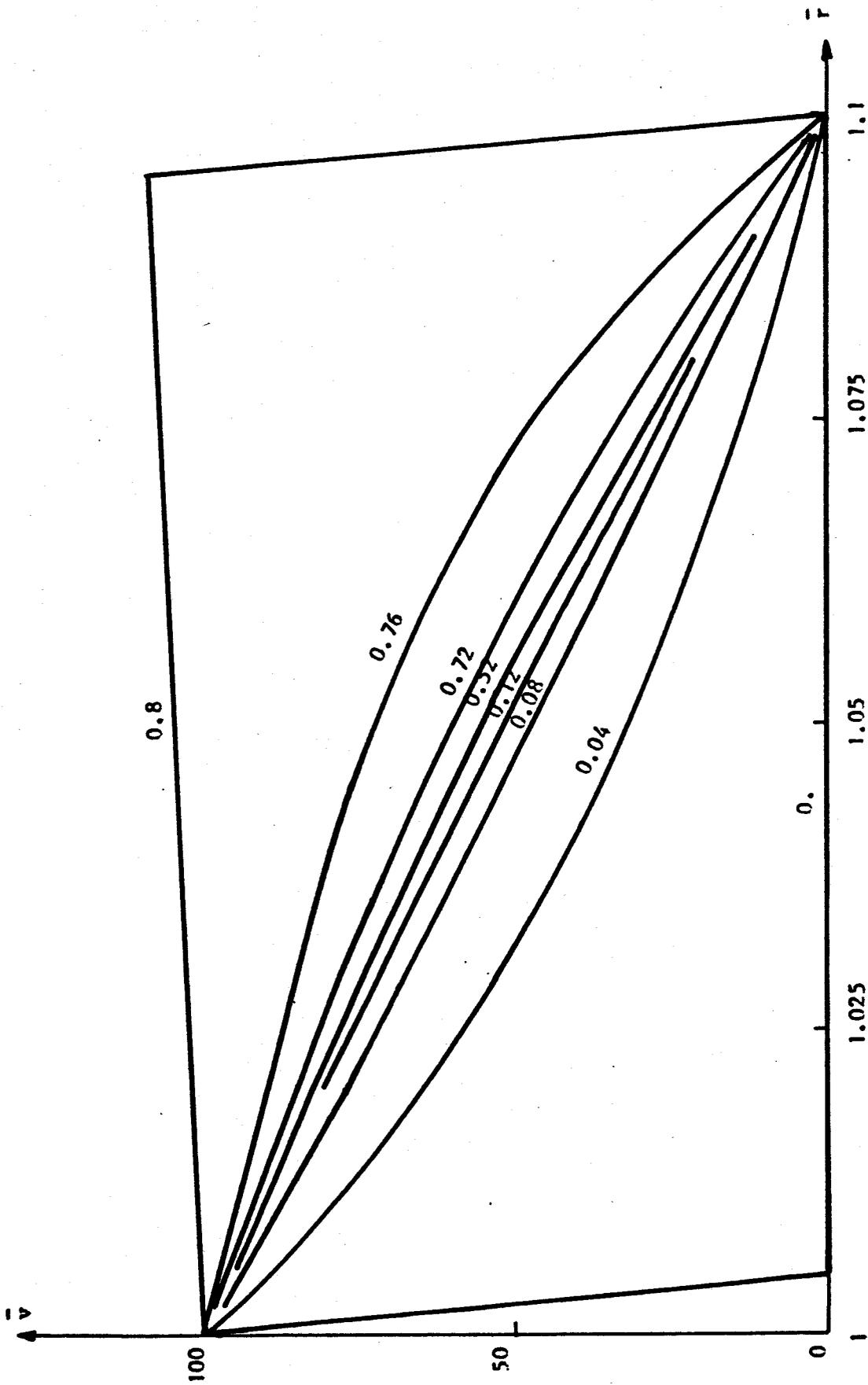
IV.9 c





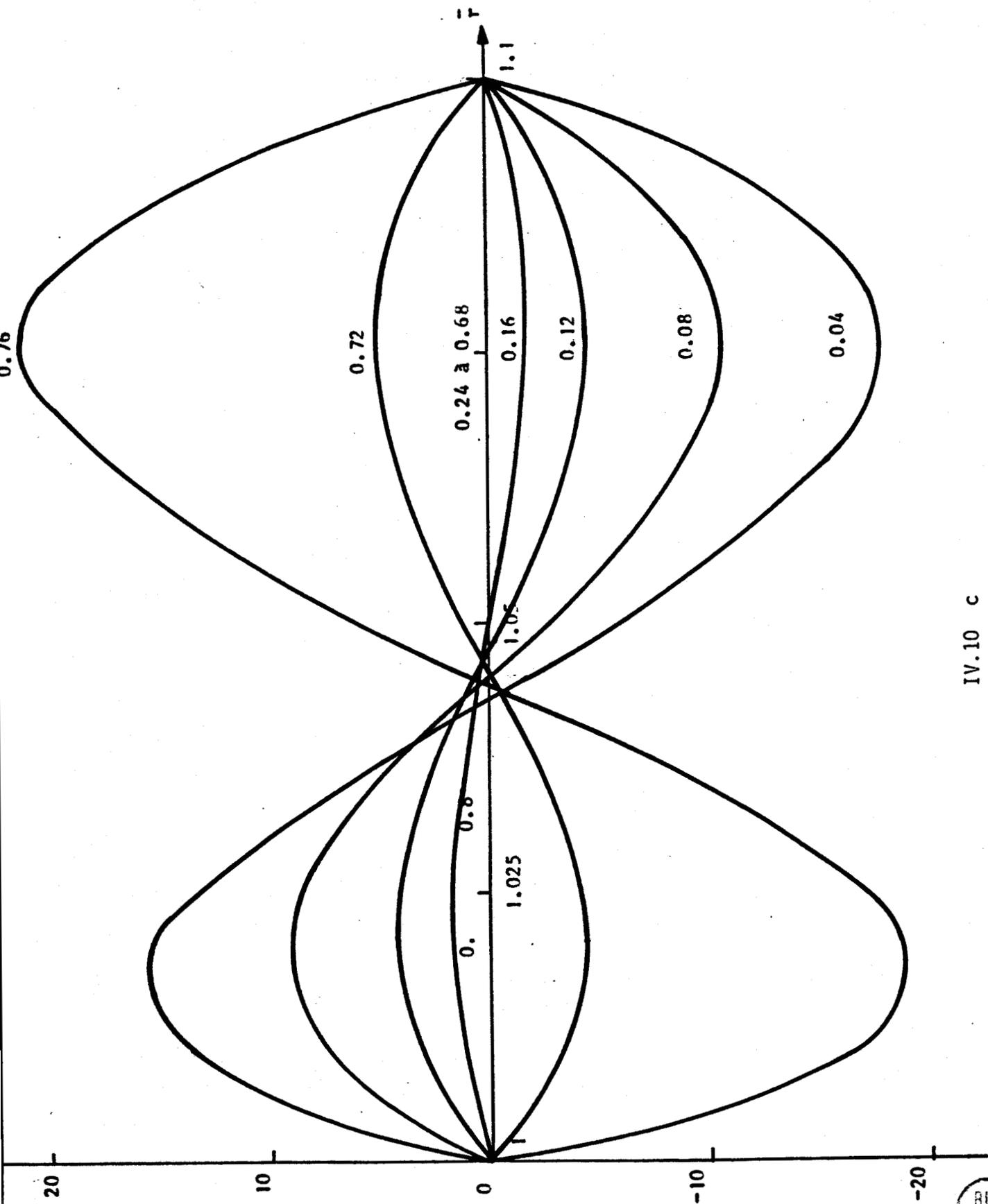
IV.10 a





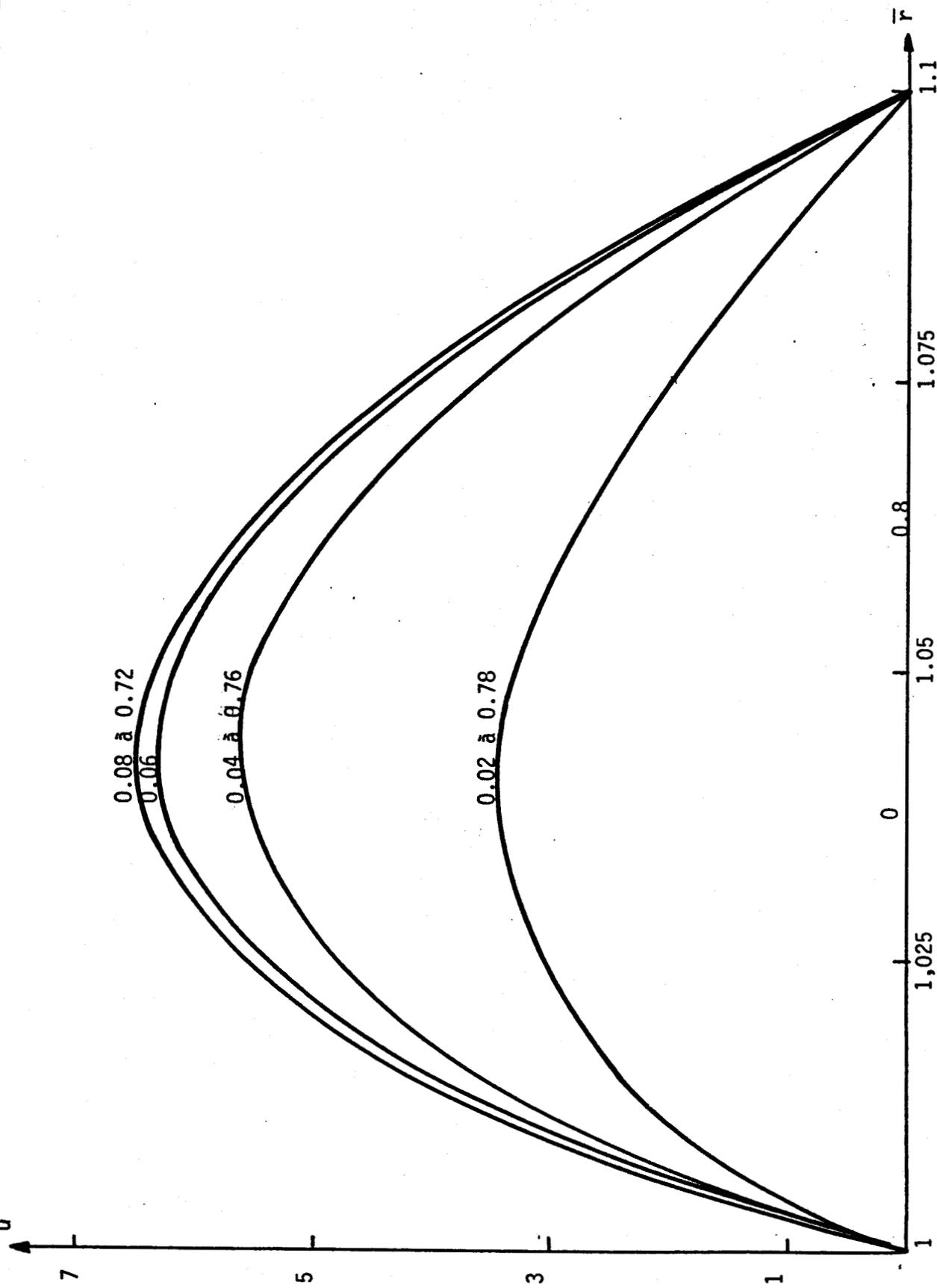
IV. 10 b





IV.10 c

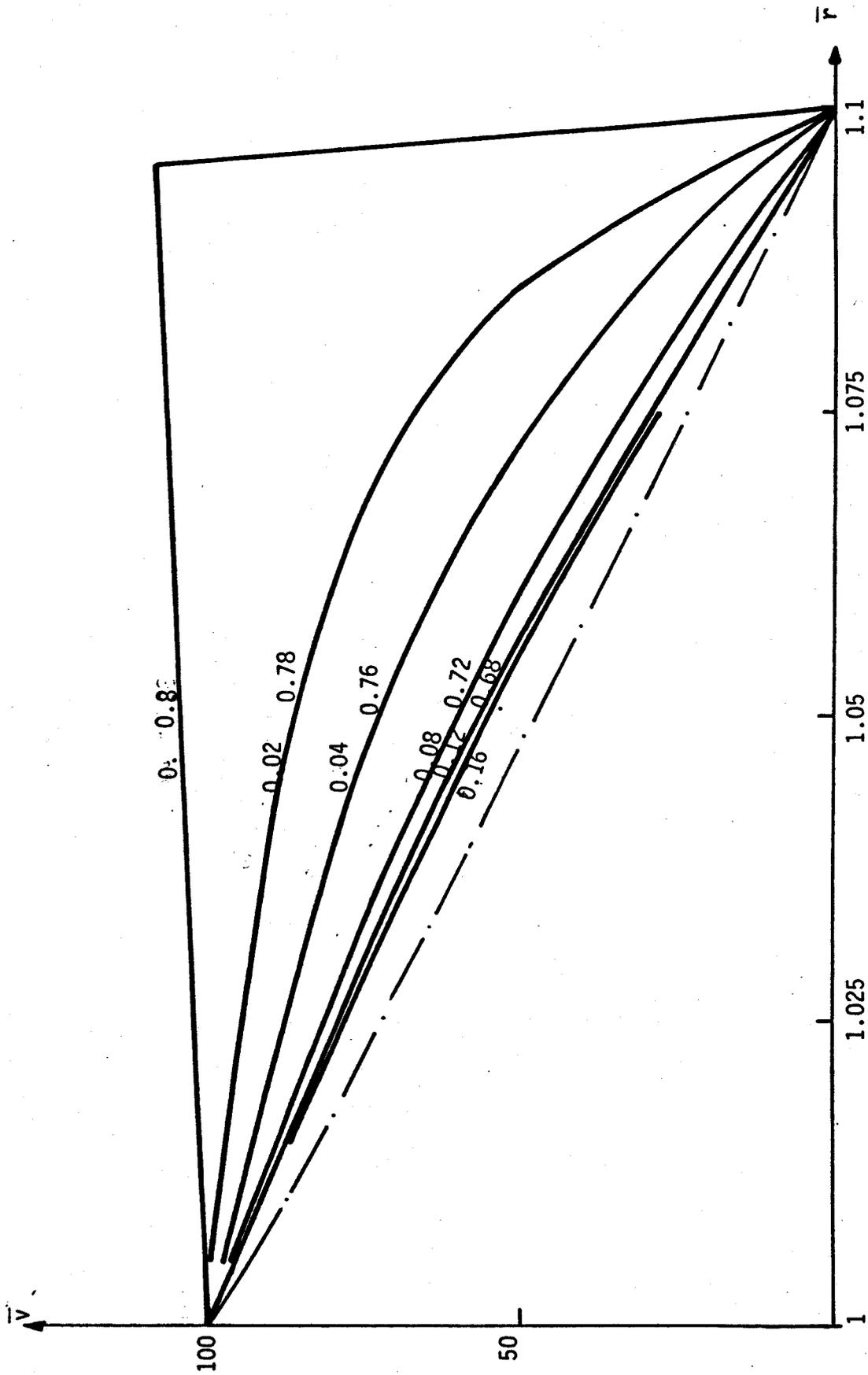




IV.11 a

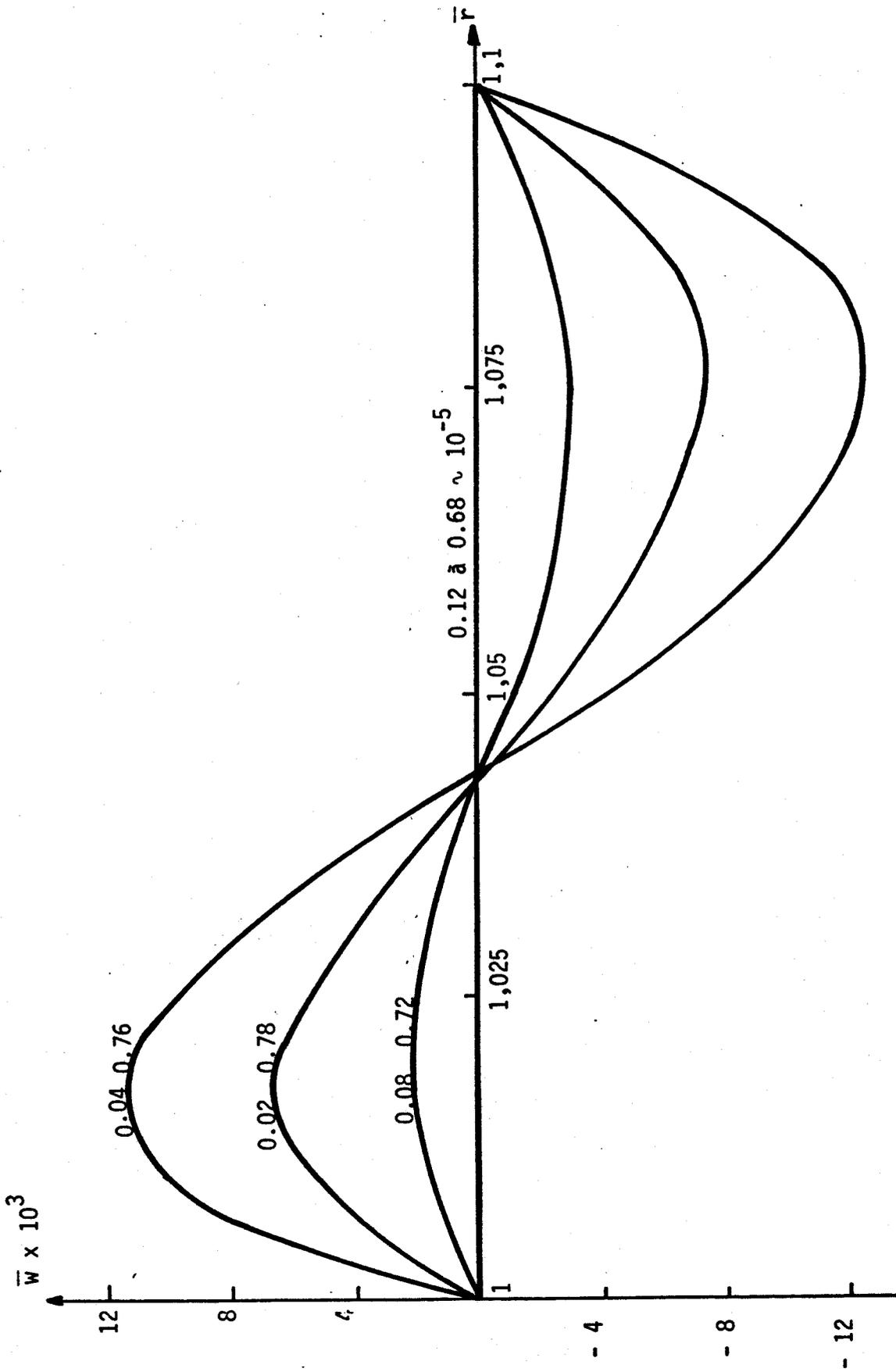


---:--- CYLINDRE INFINI



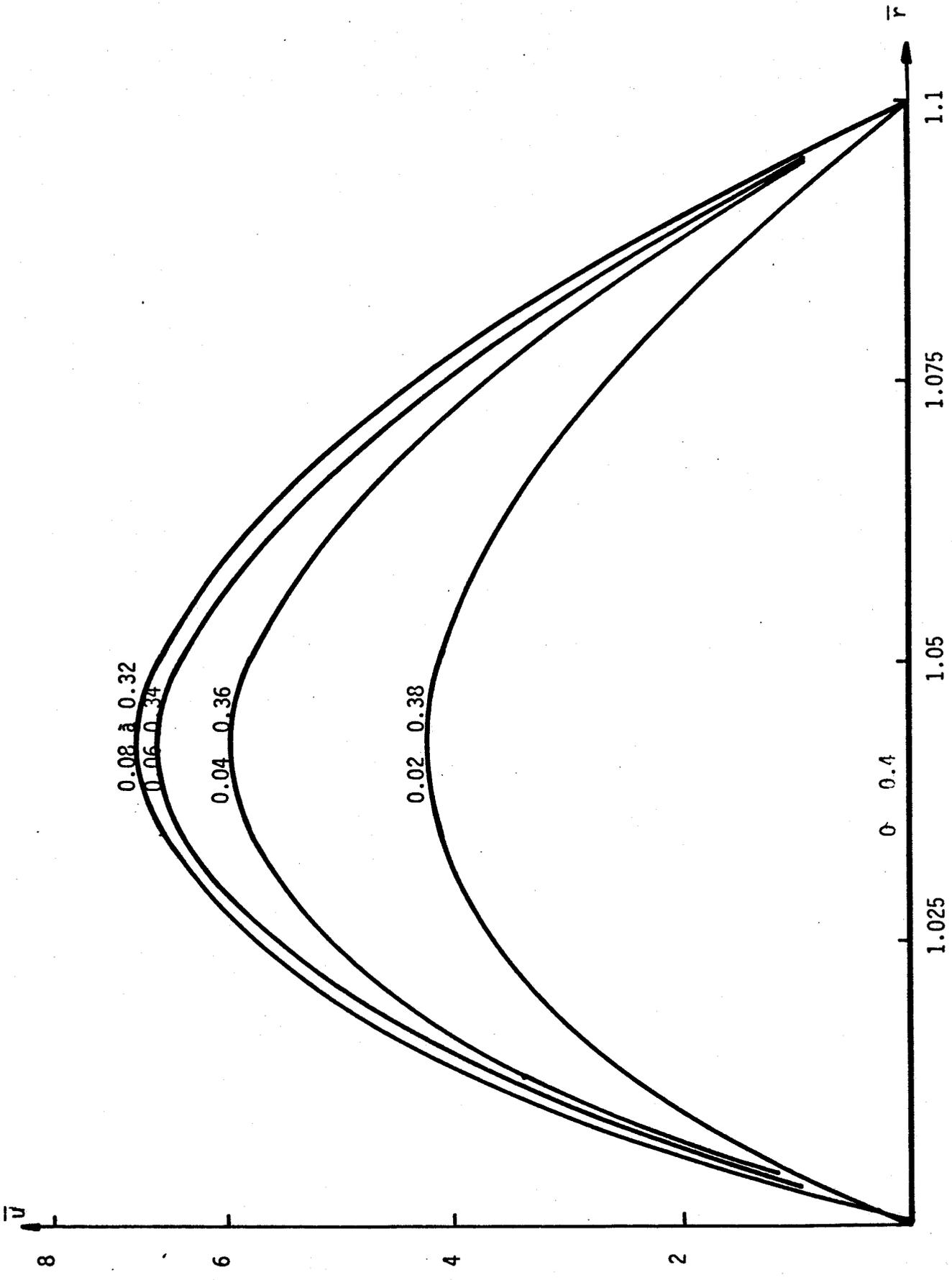
IV .11 b





IV.11 c

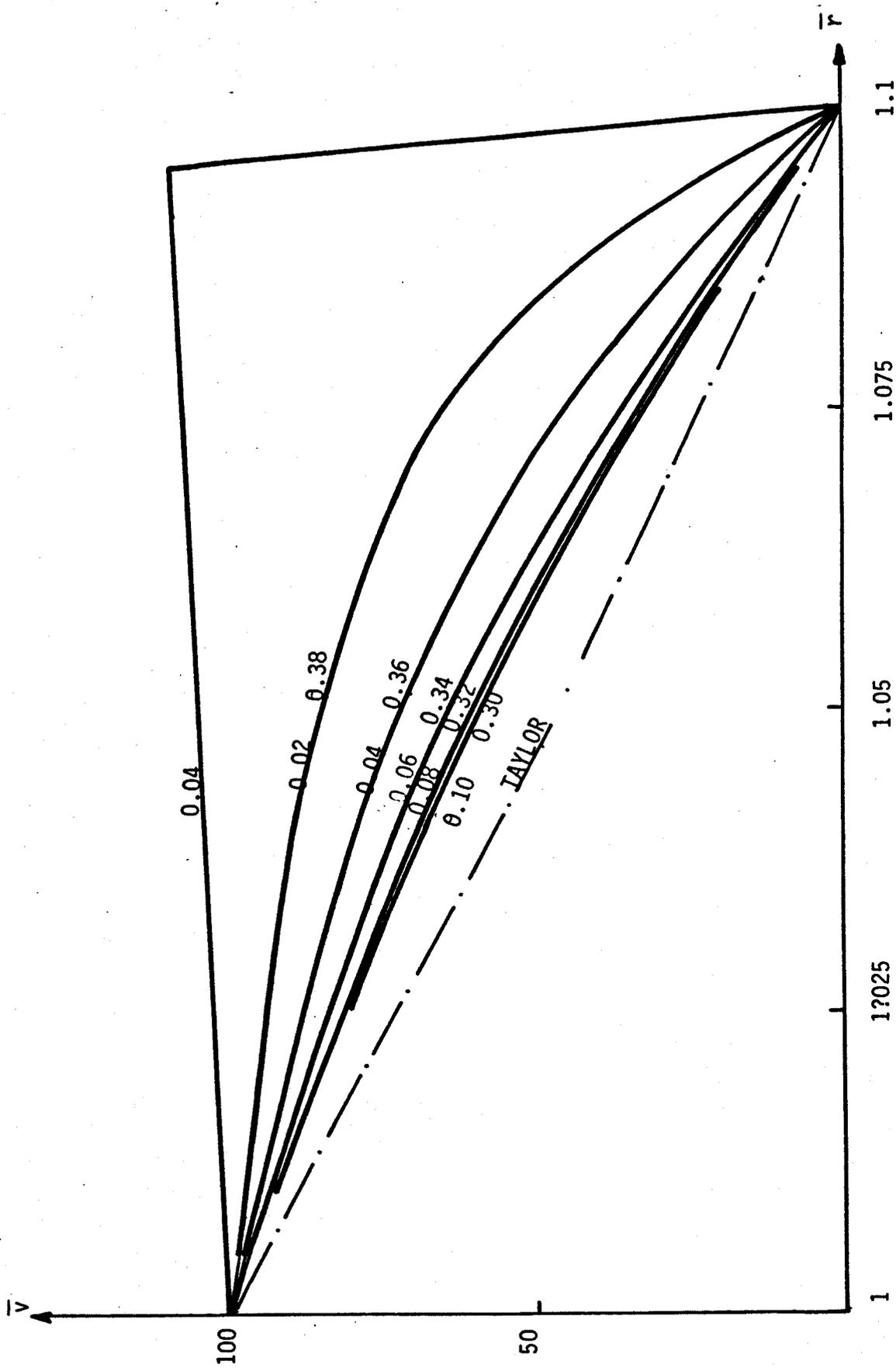




IV.12 a

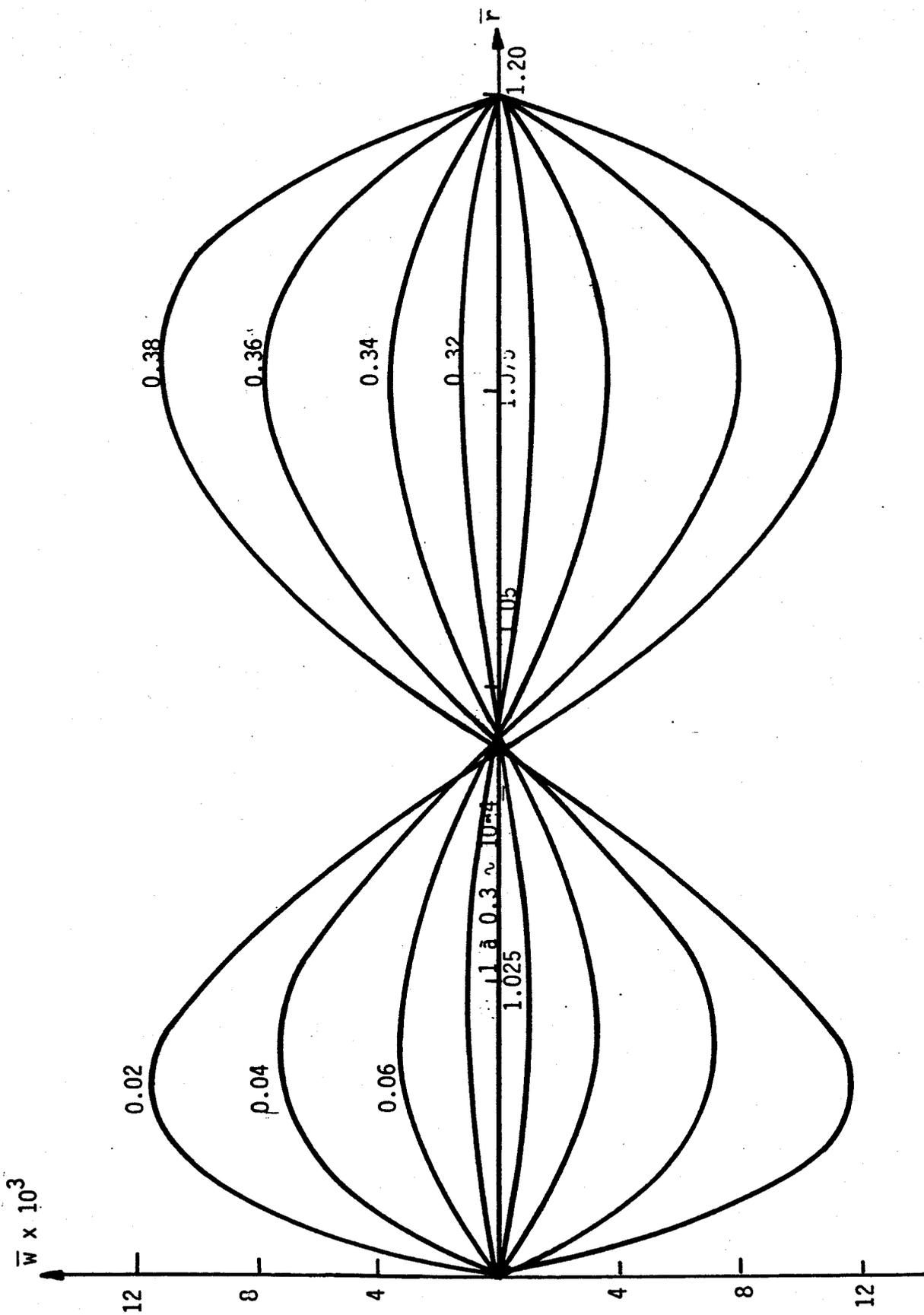


--- CYLINDRE INFINI



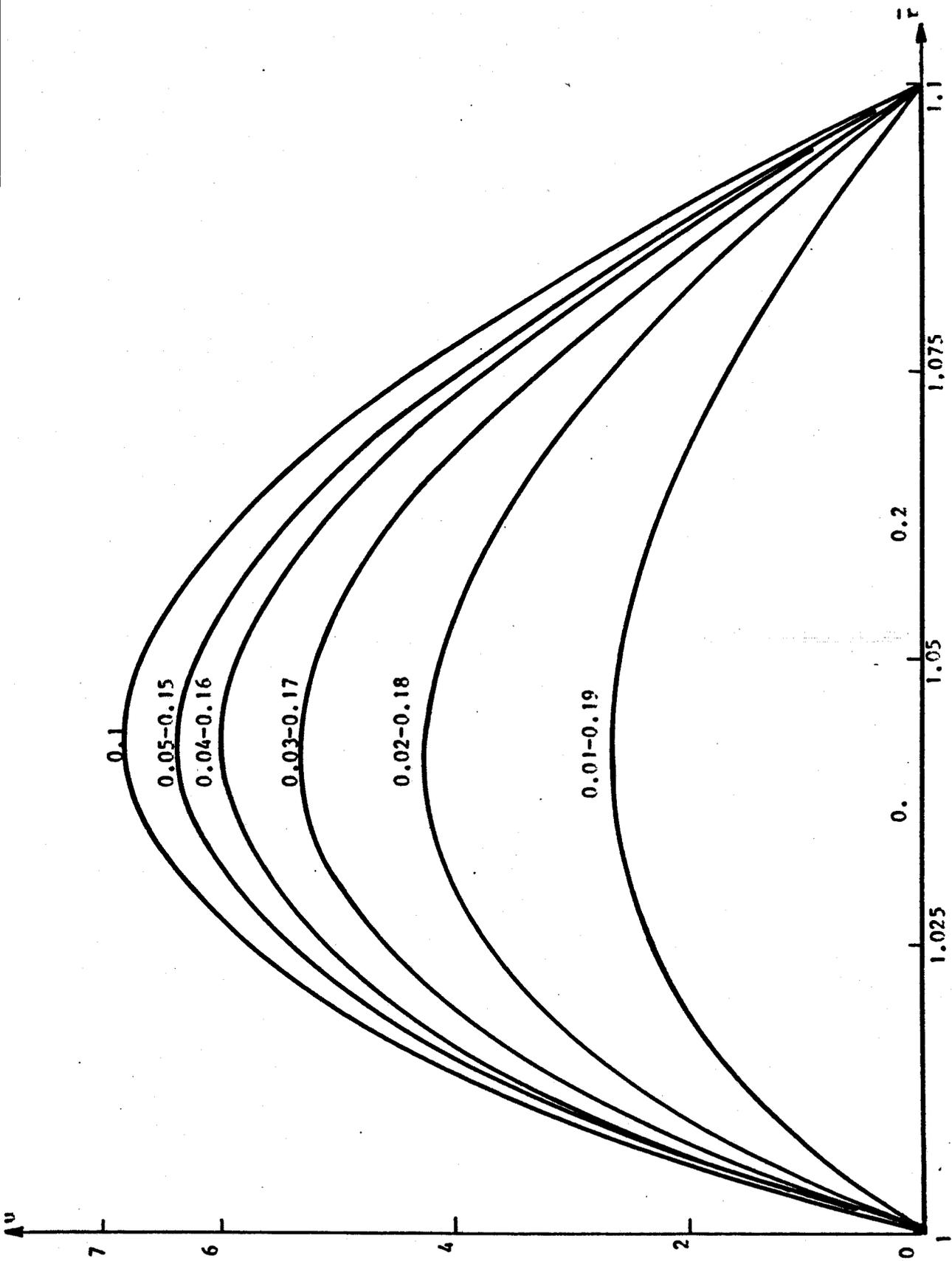
IV.12 b





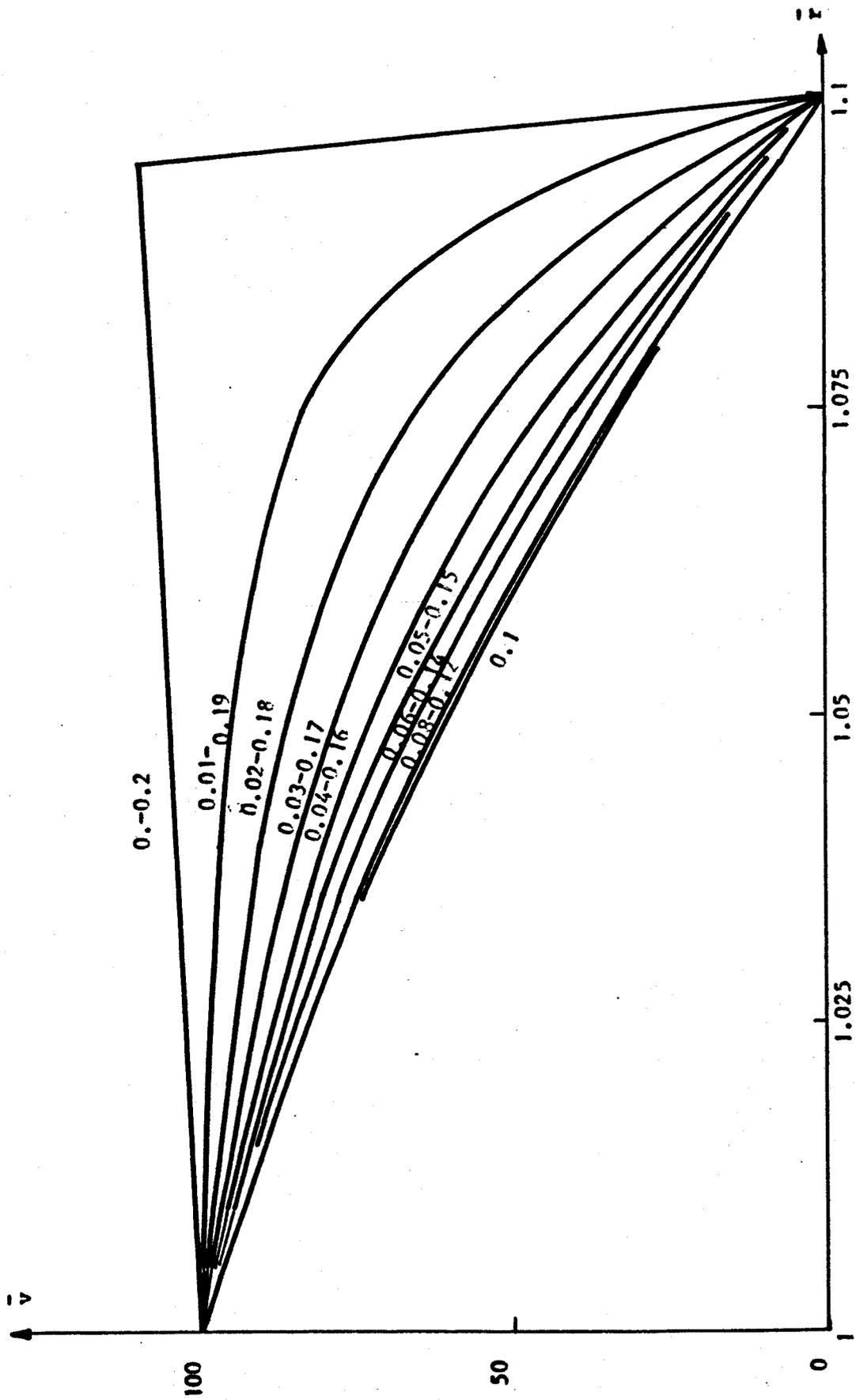
IV 12 c





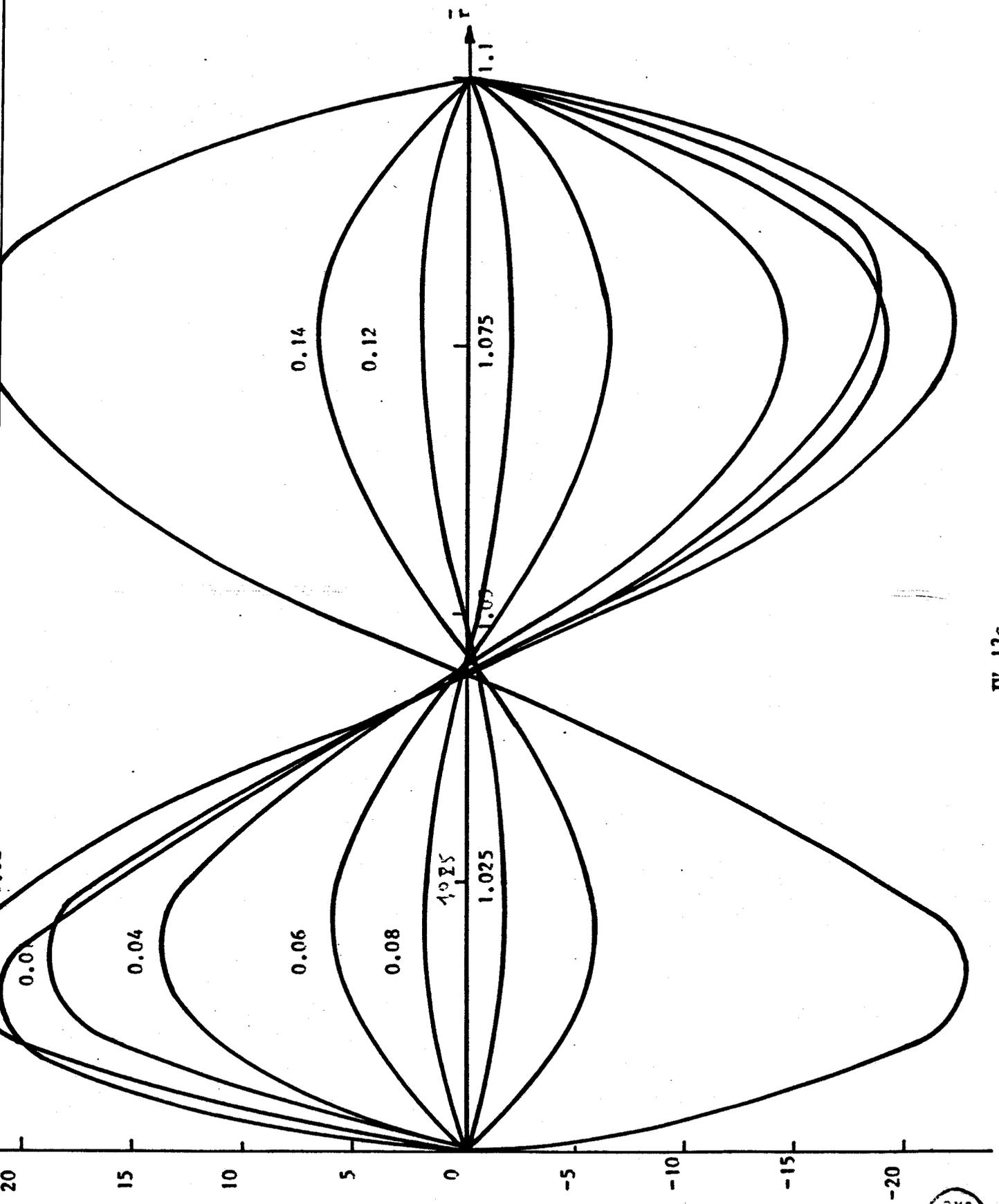
IV.13 a





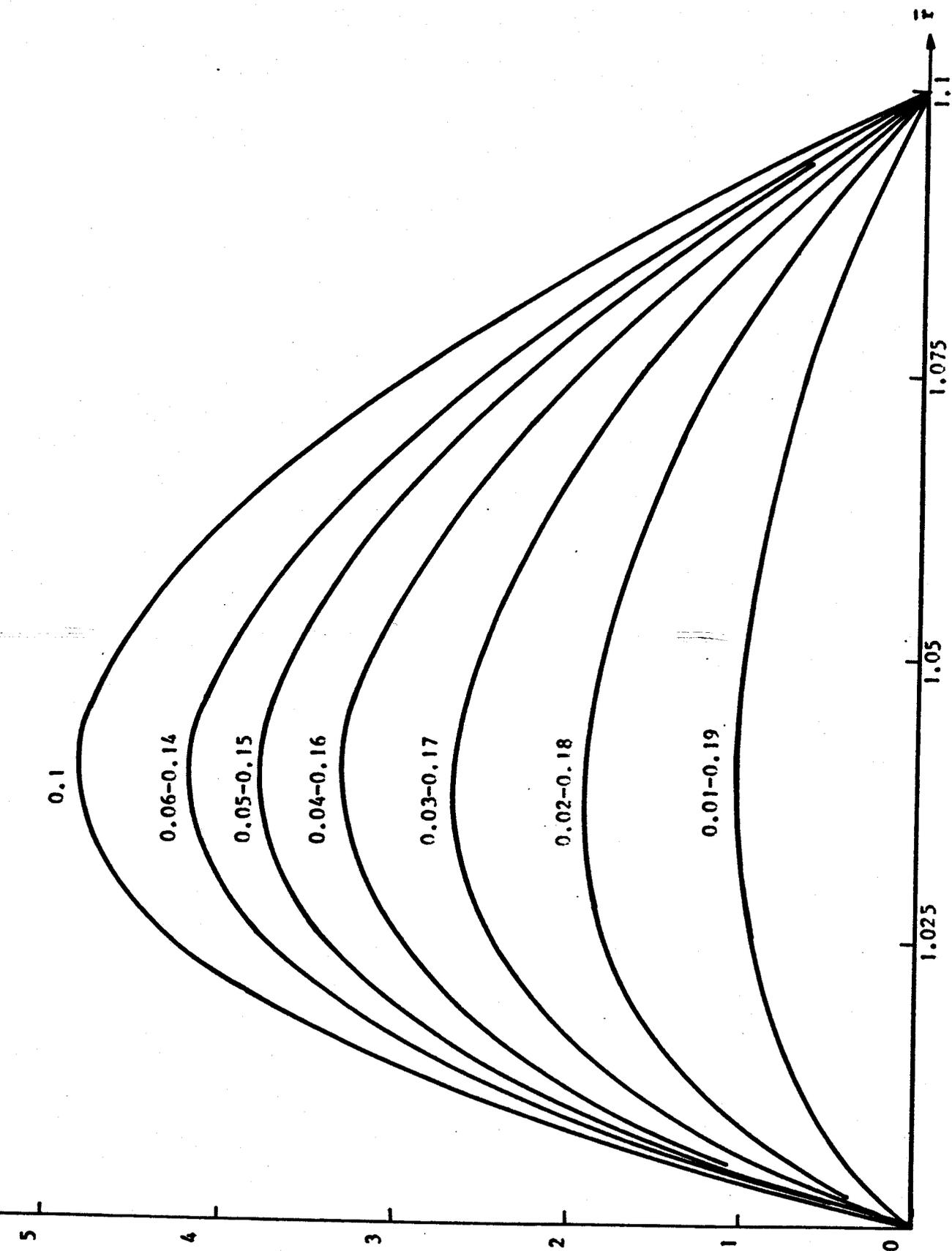
IV.13 b



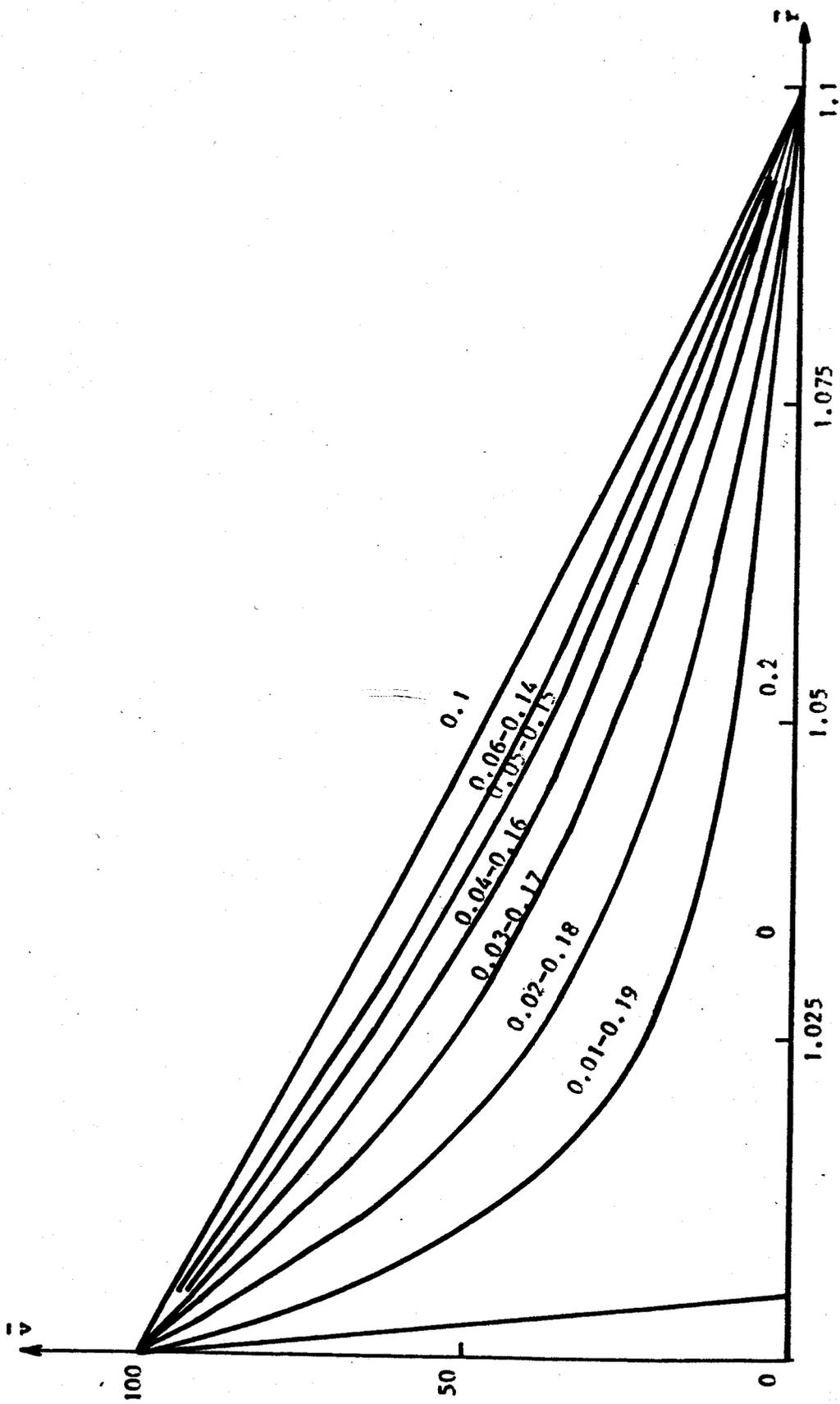


IV.13c

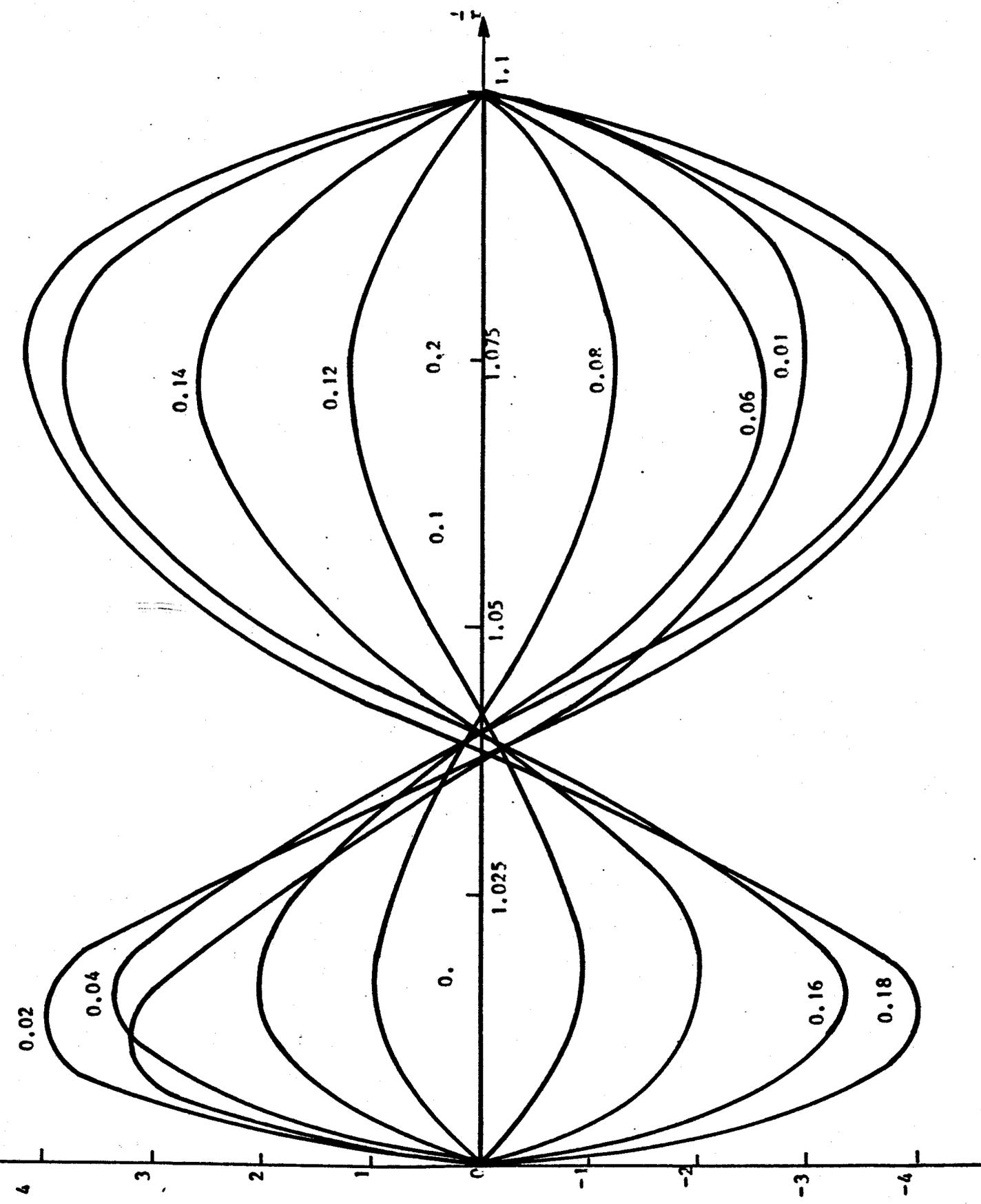




IV. 14 a

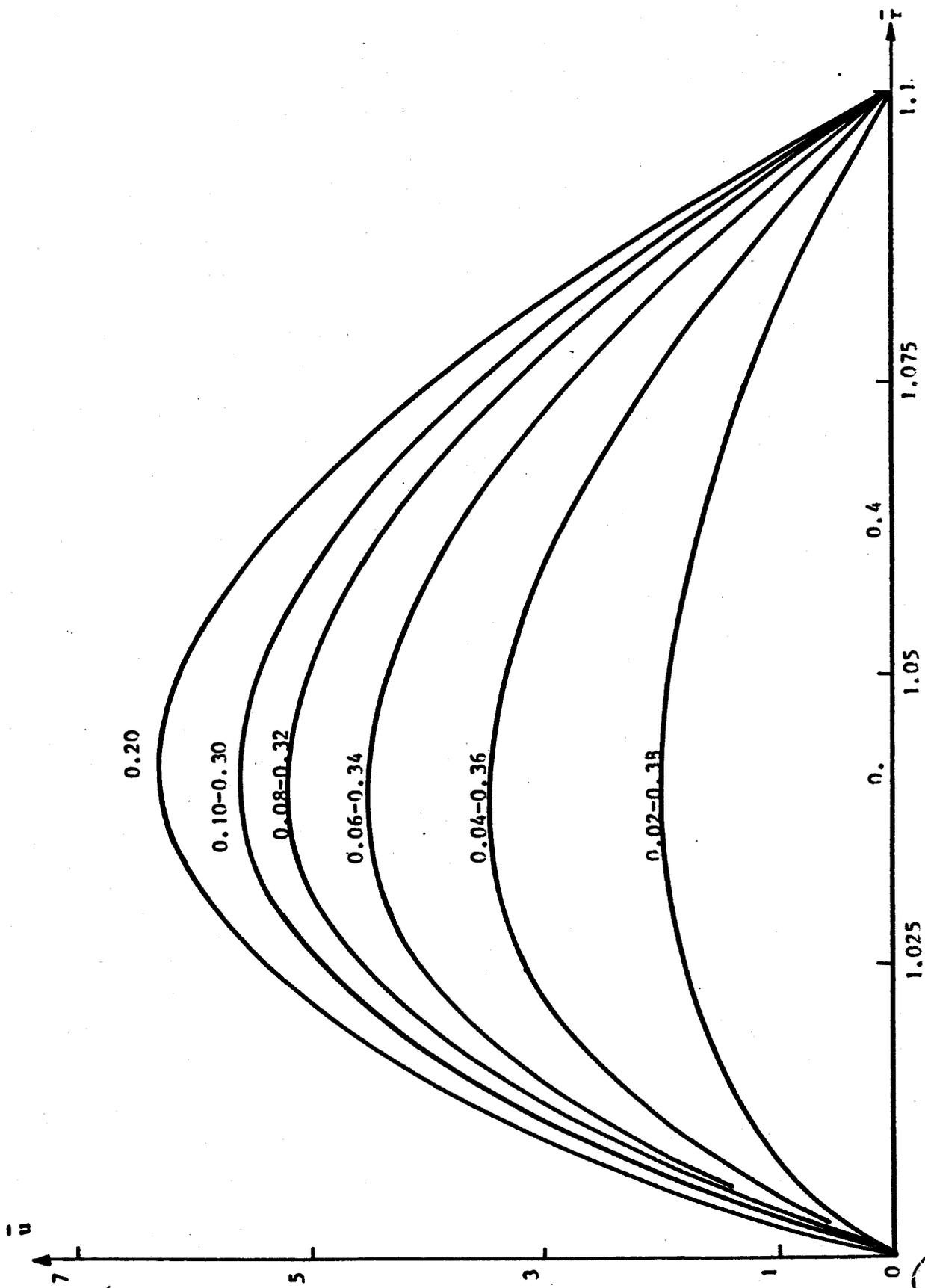


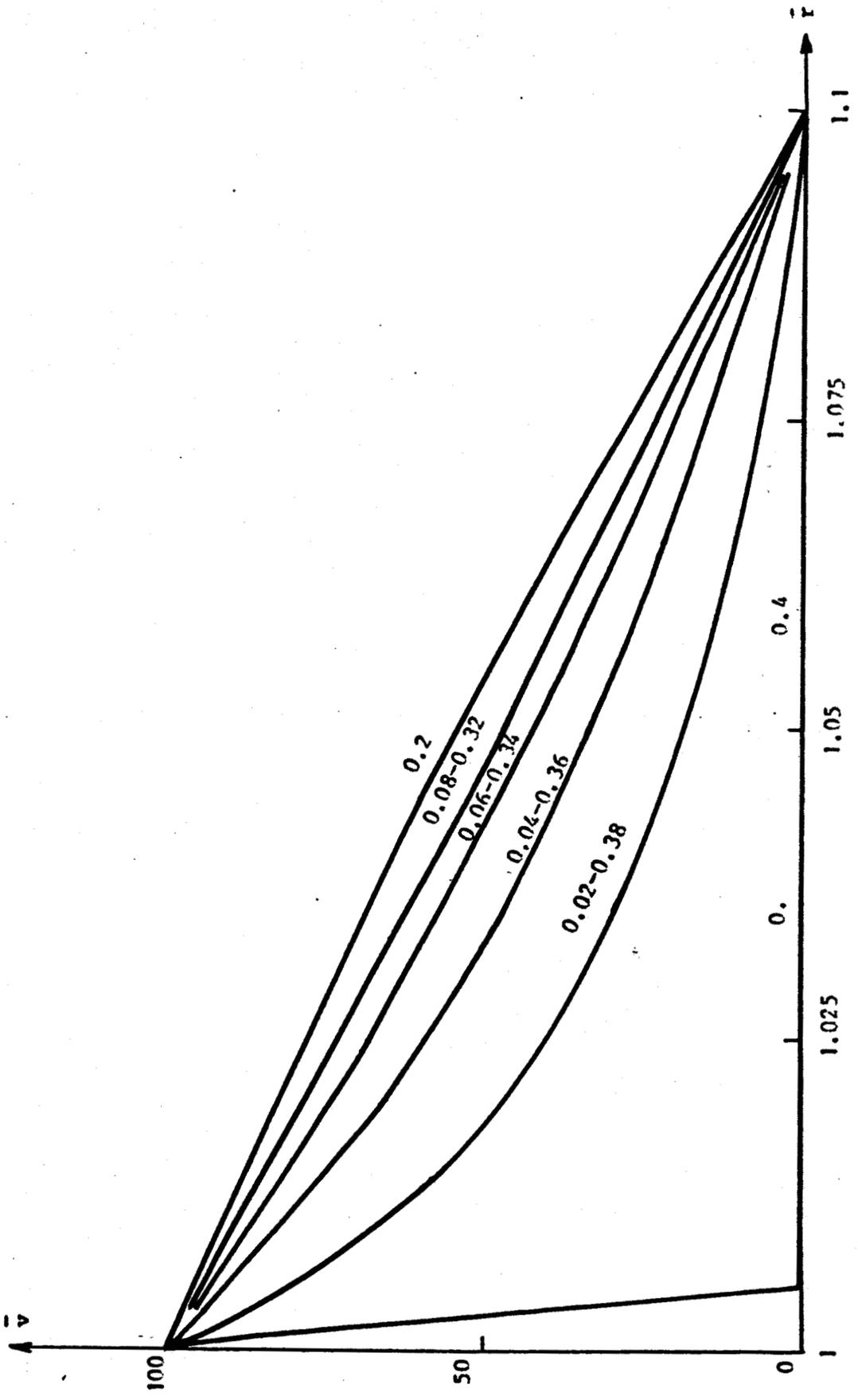
IV.14 b



IV.14 c

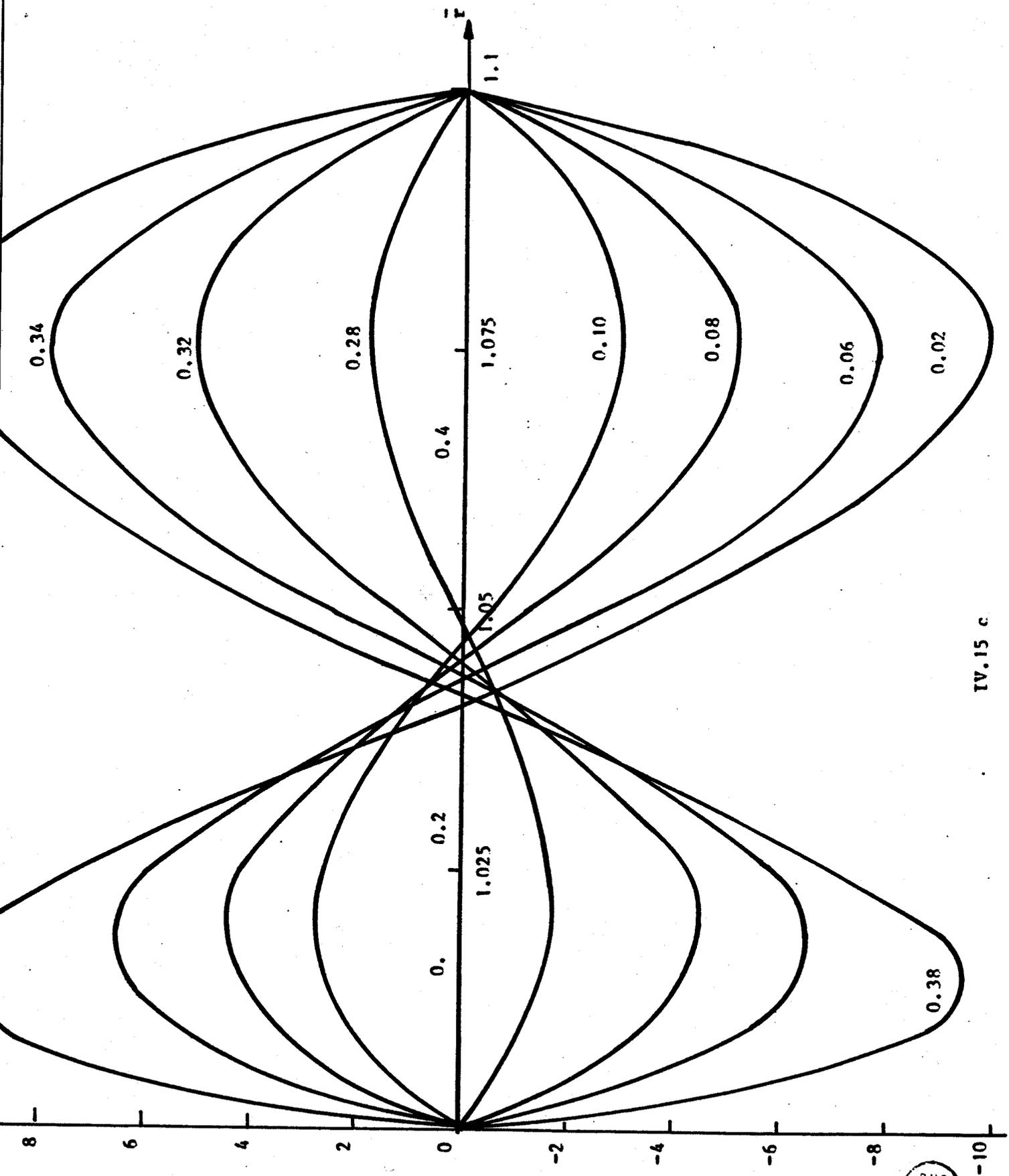






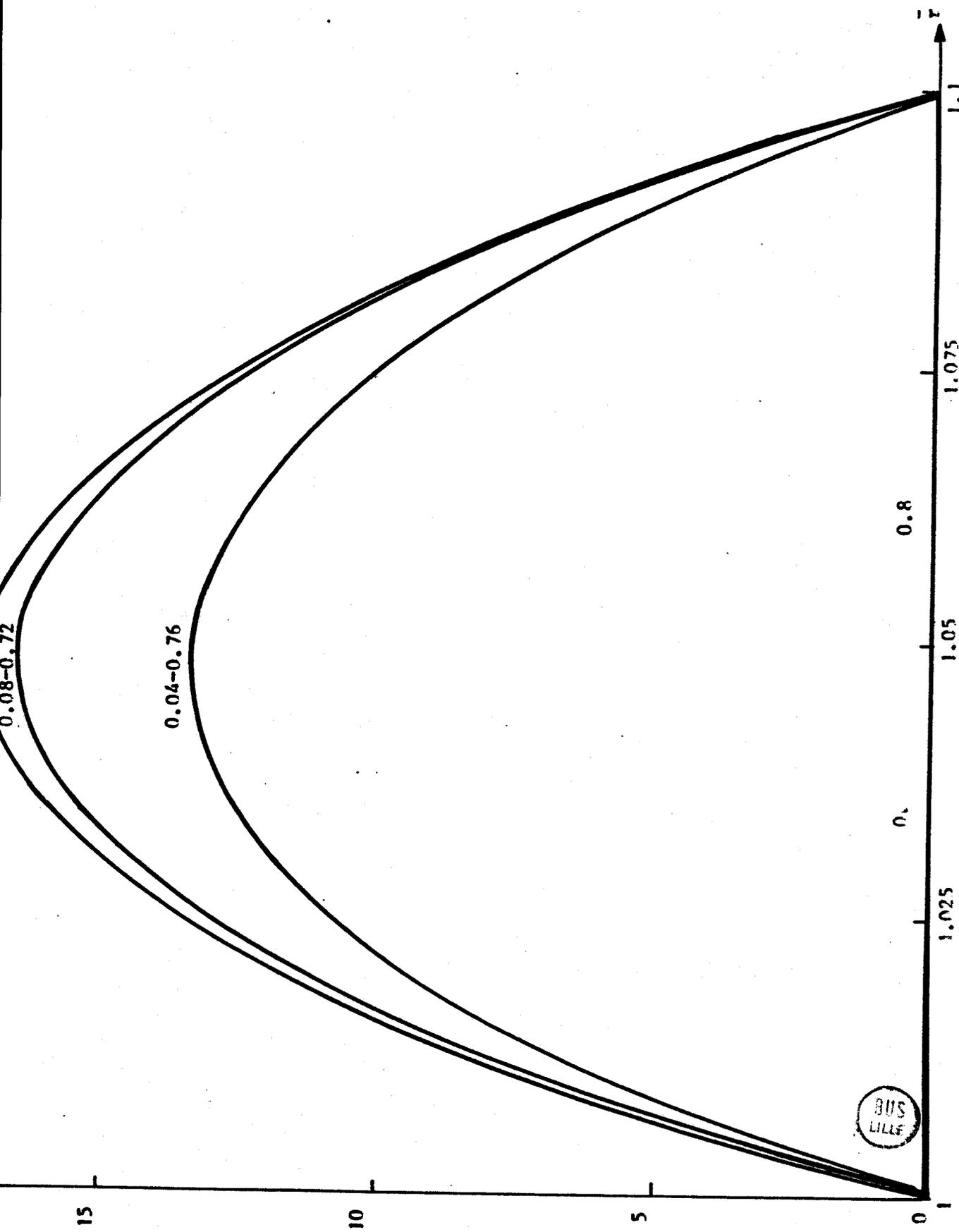
TV.15 b



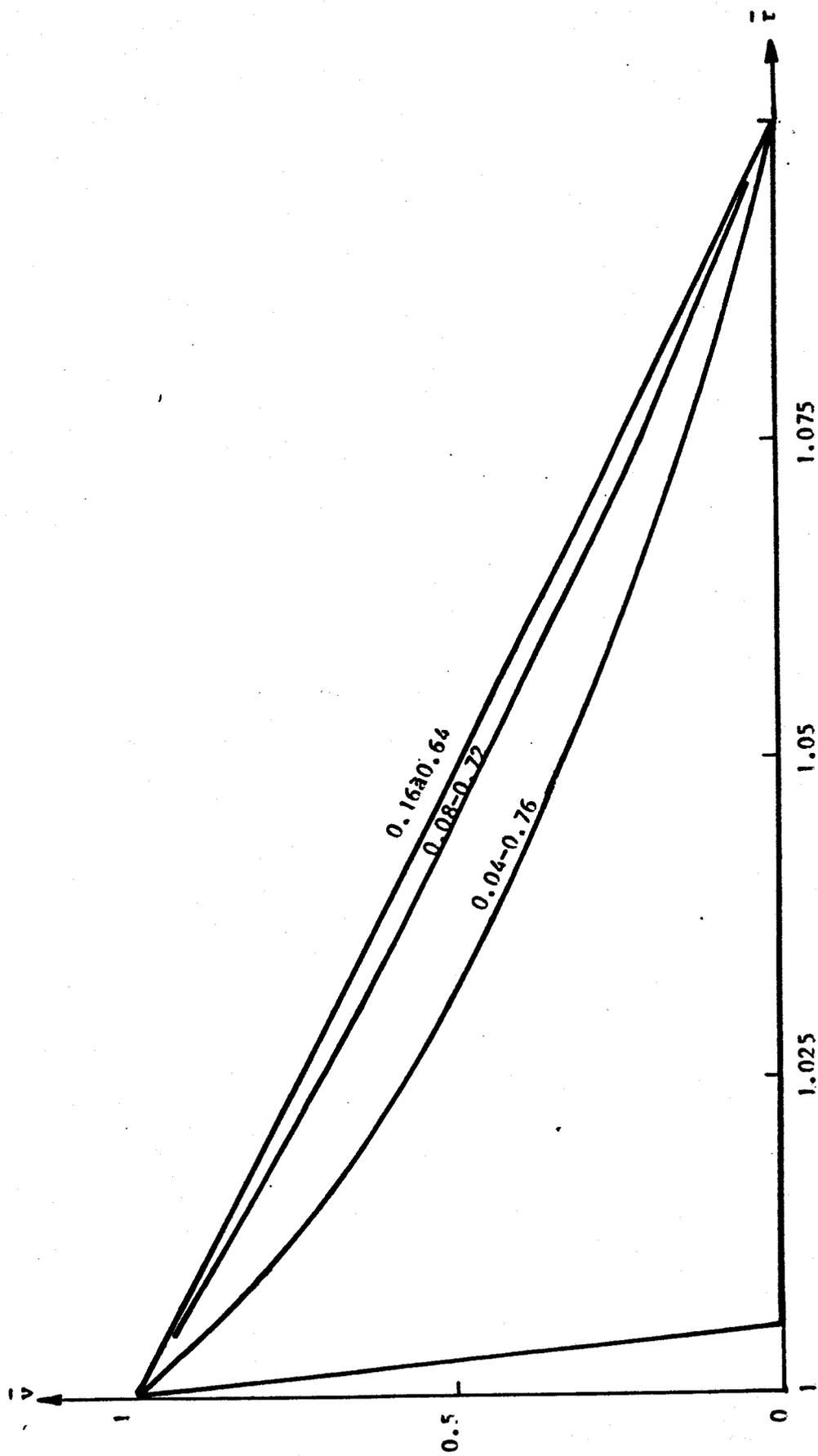


IV.15 c



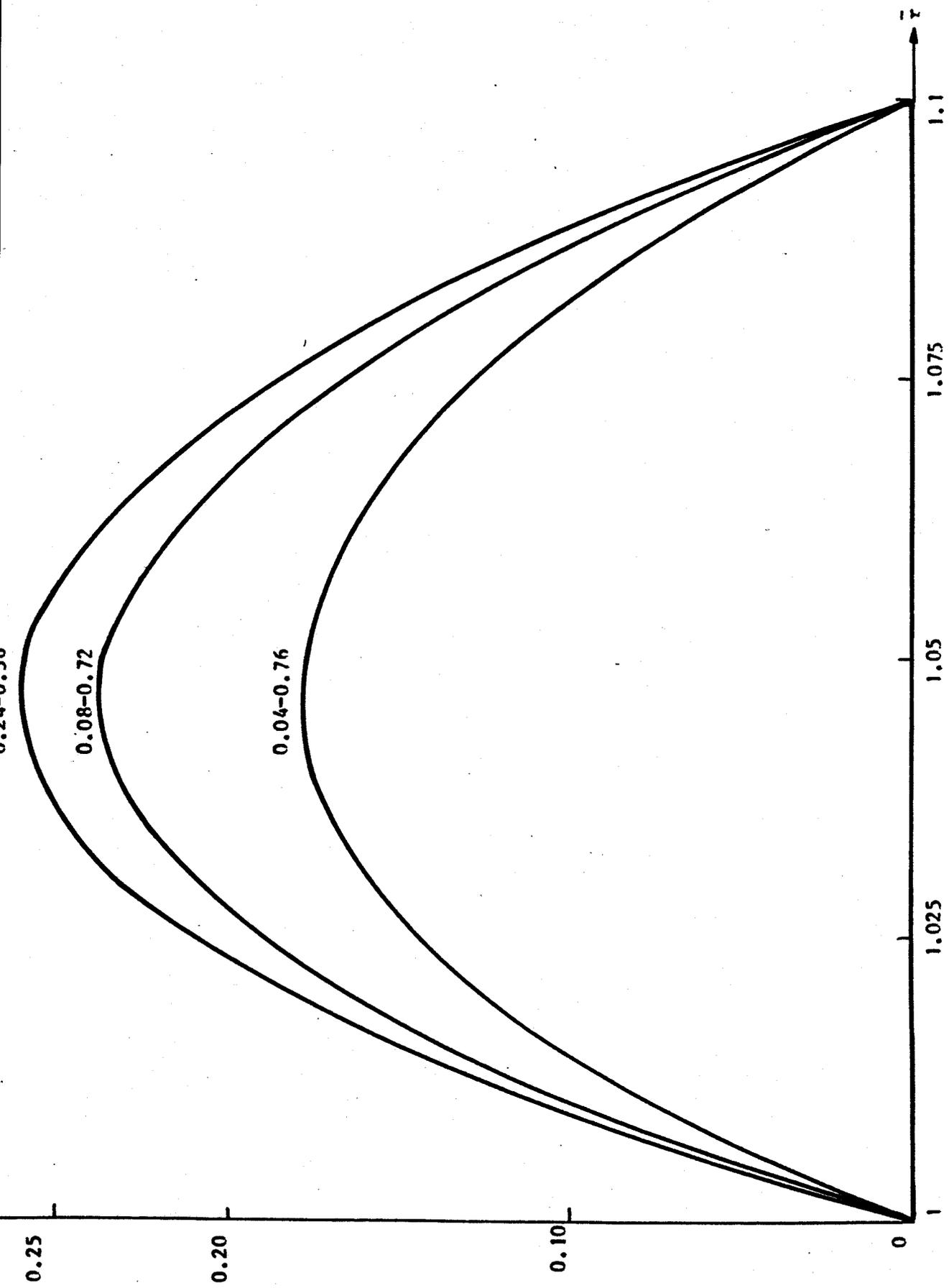


IV.16 a



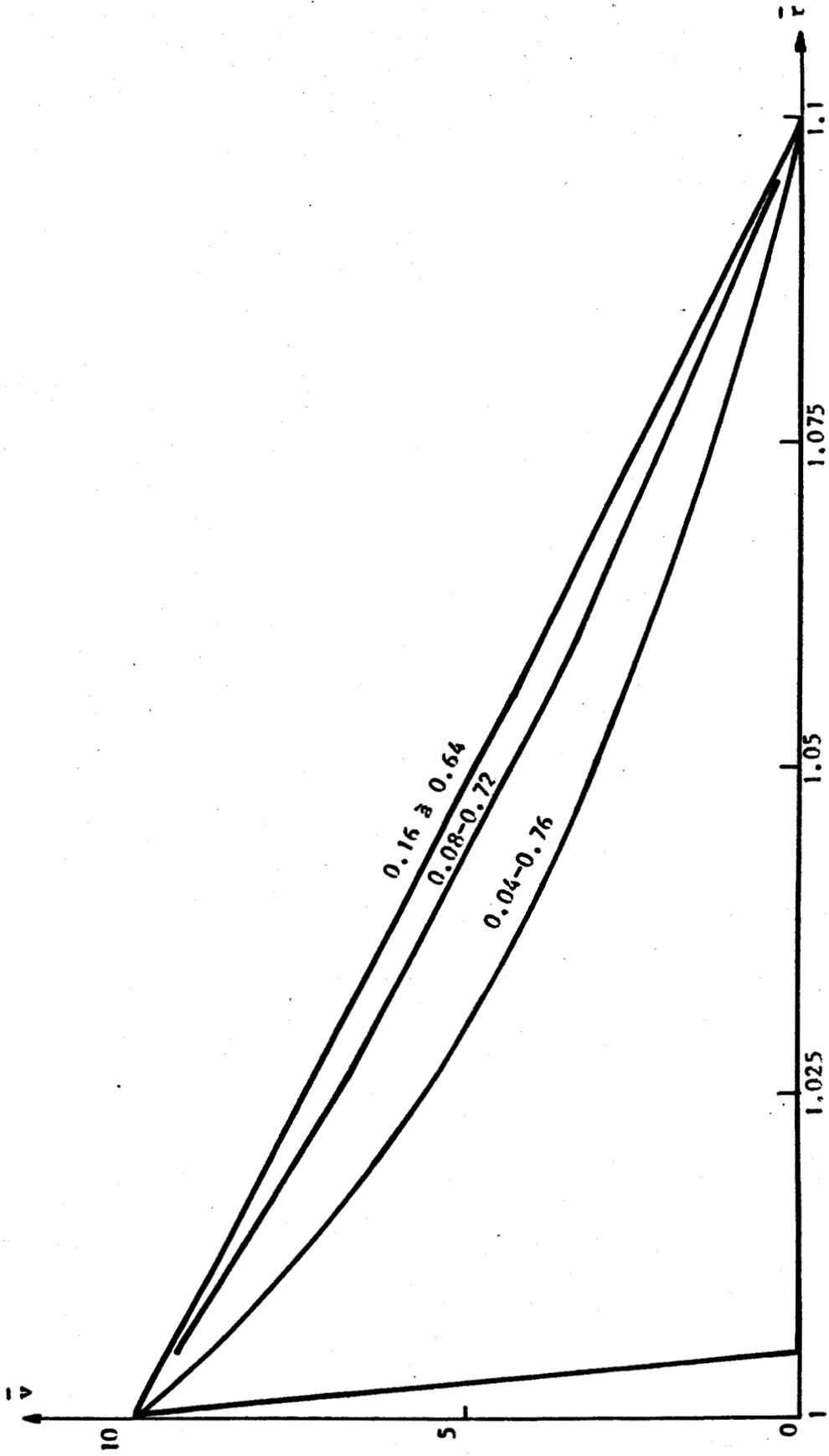
TV.16 b



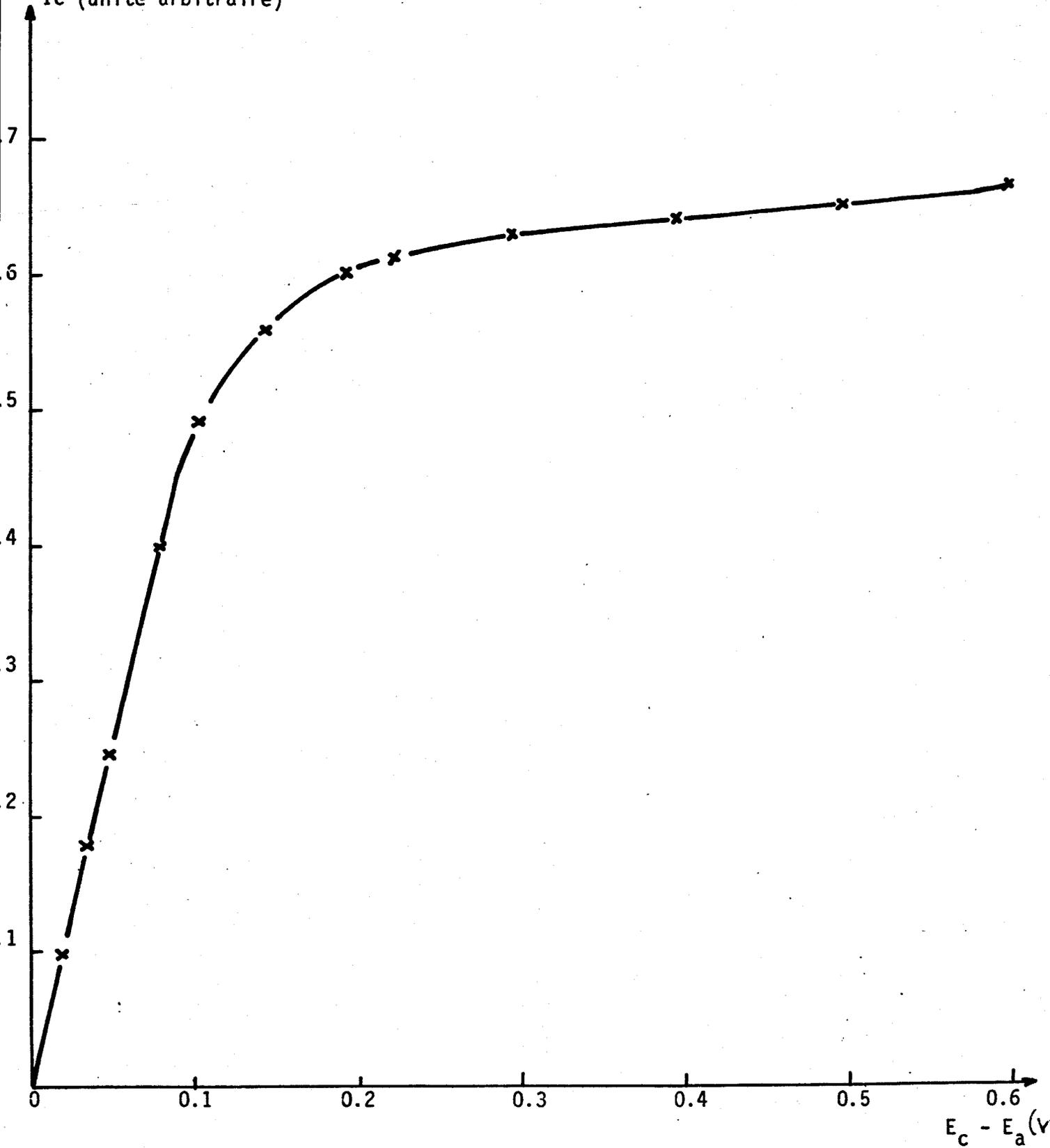


IV. 17a





i_c (unité arbitraire)



V.1



A. S

0.2

1

- 1.3

- 1.1

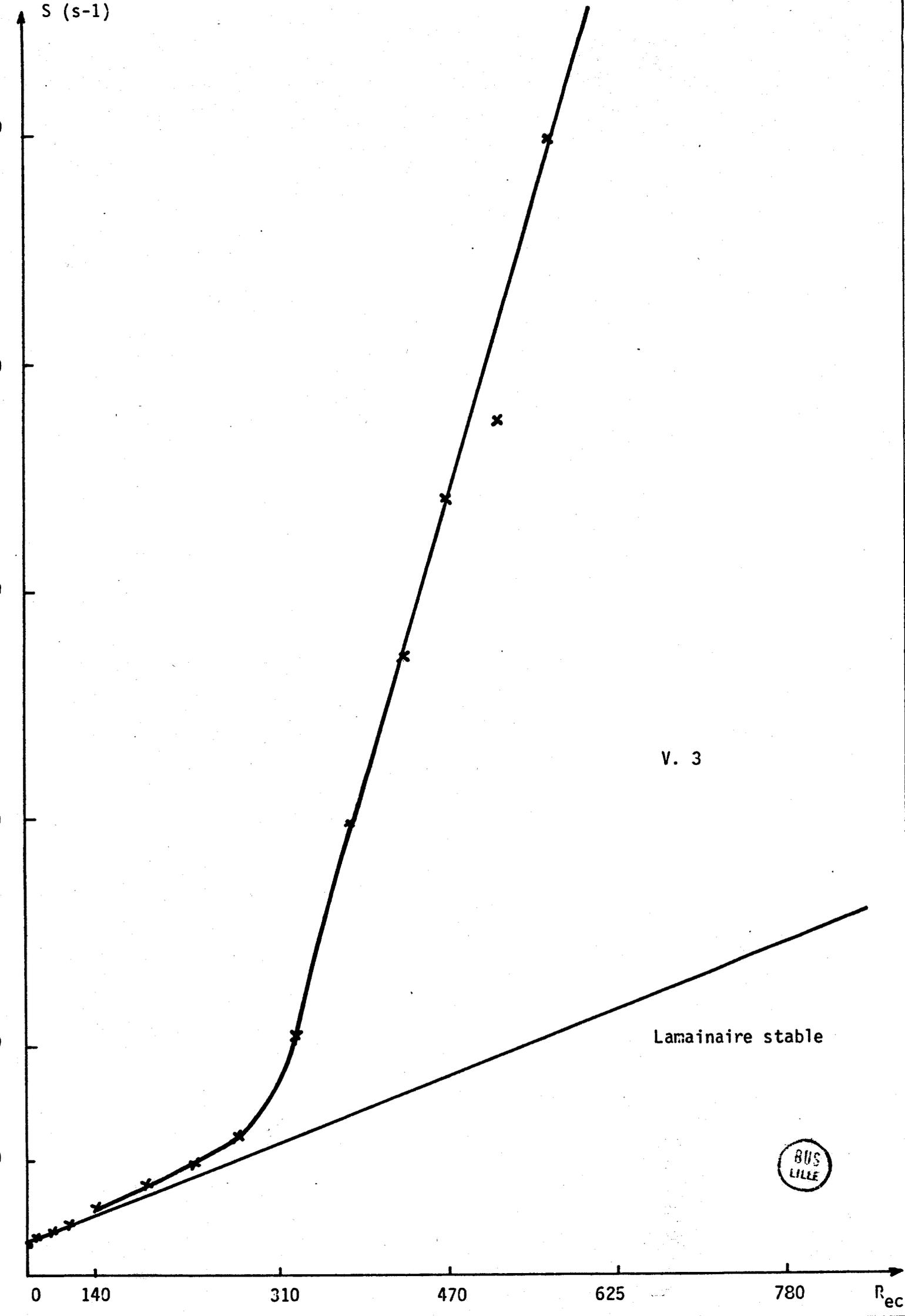
- 0.9

- 0.7

- 0.5

JUK JUE





V. 3

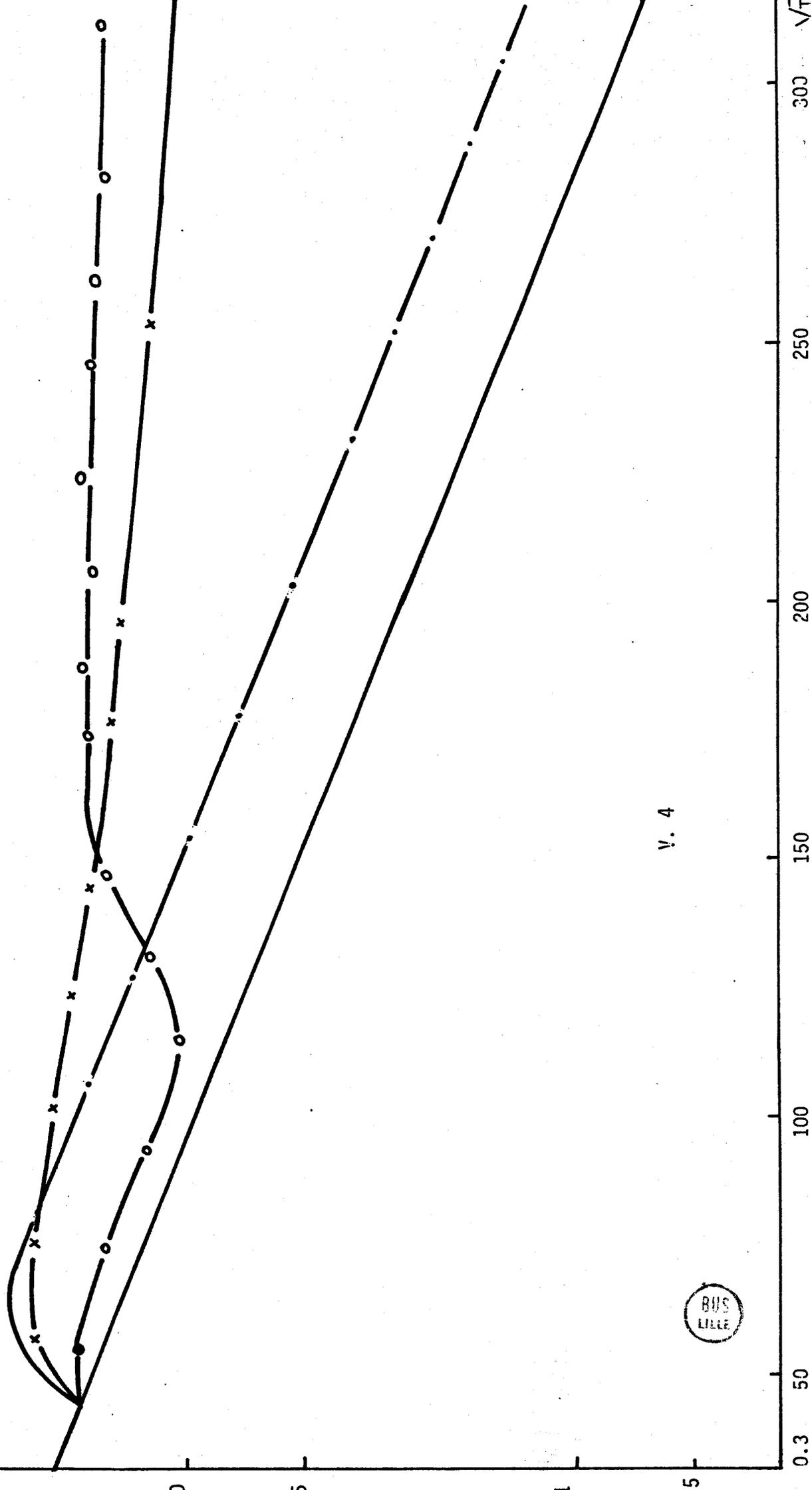
Laminaire stable



—x— COGNET

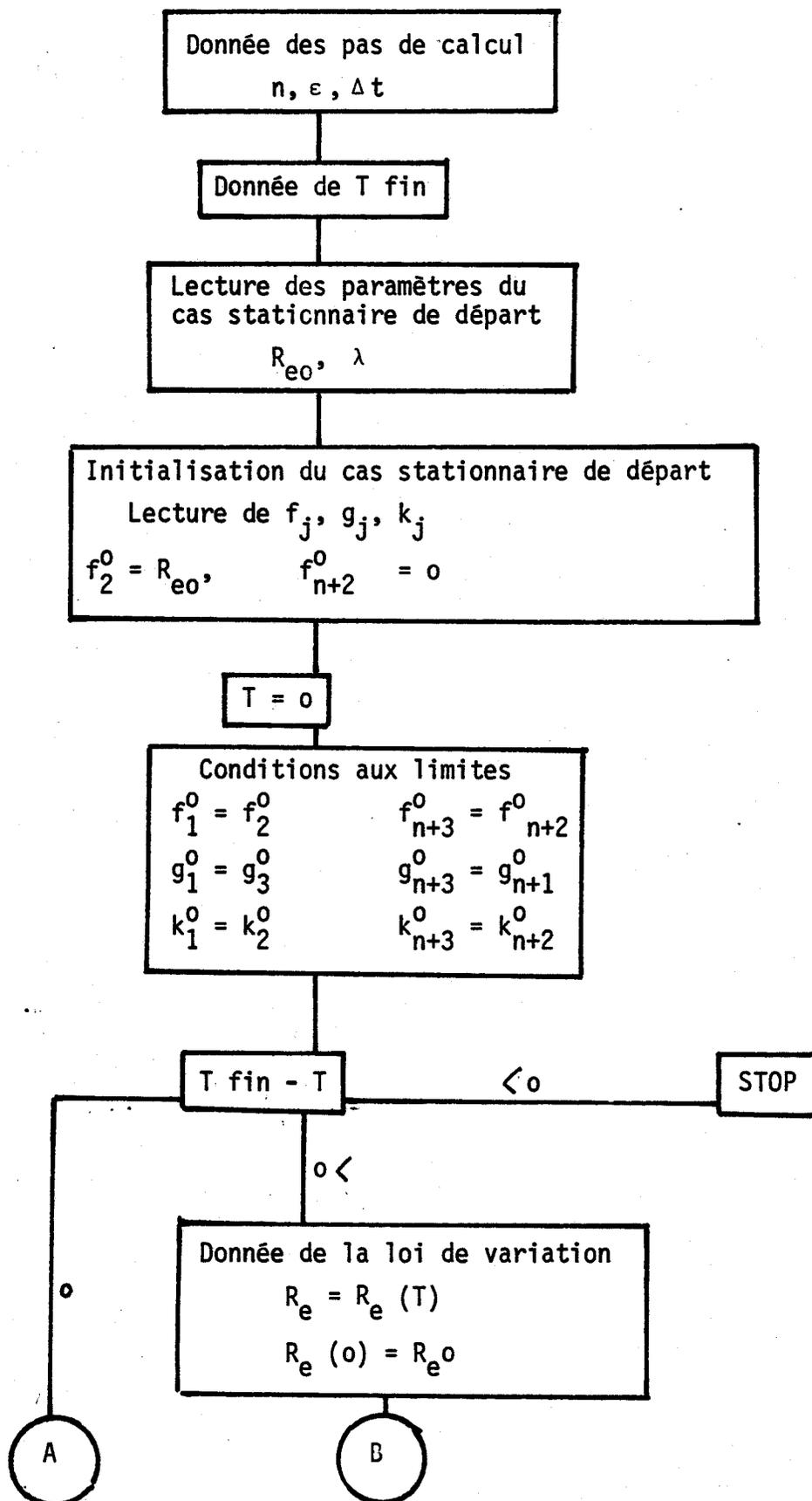
—·— THEORIE NON LINEAIRE

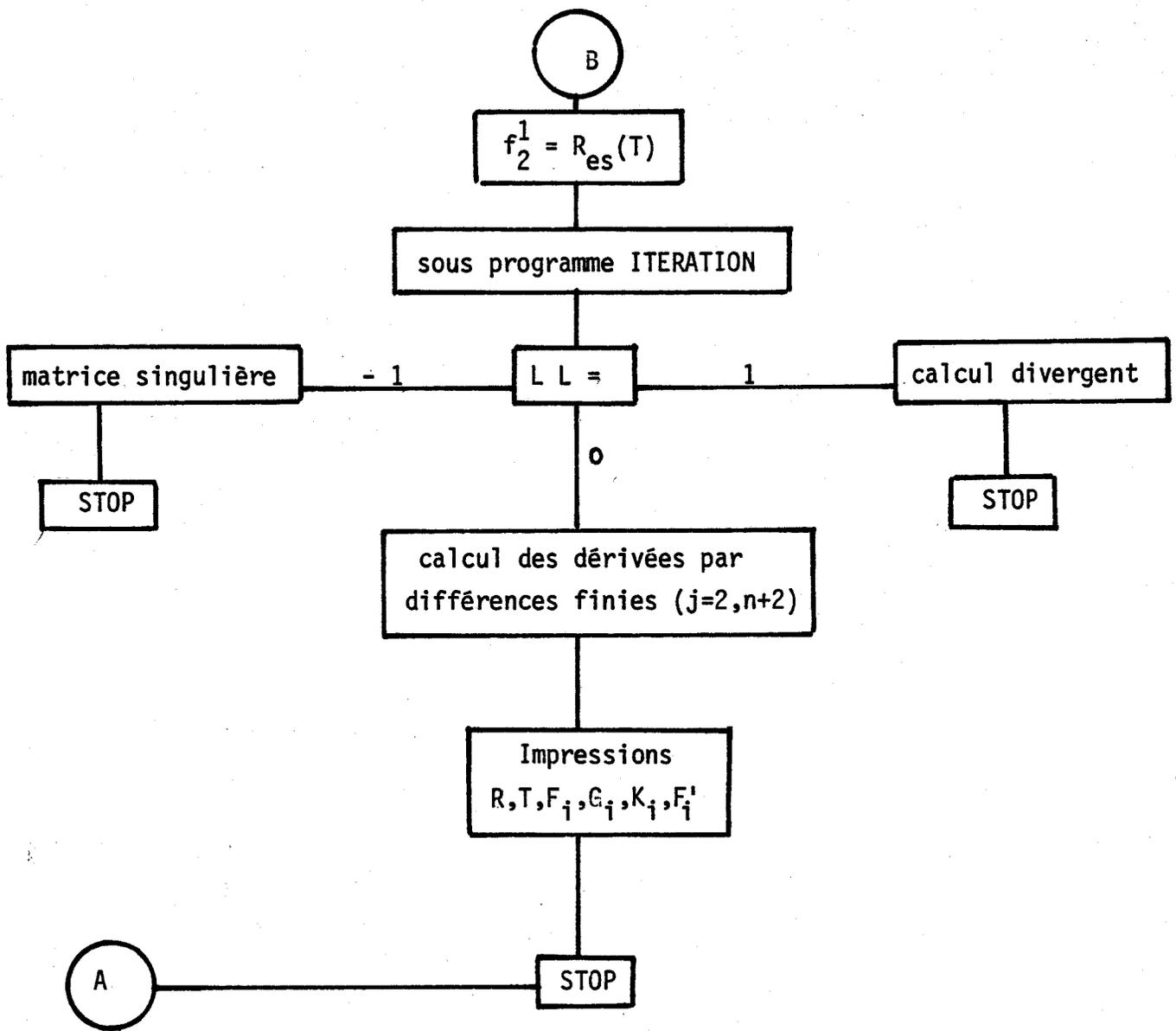
—o— EXPERIMENTAL



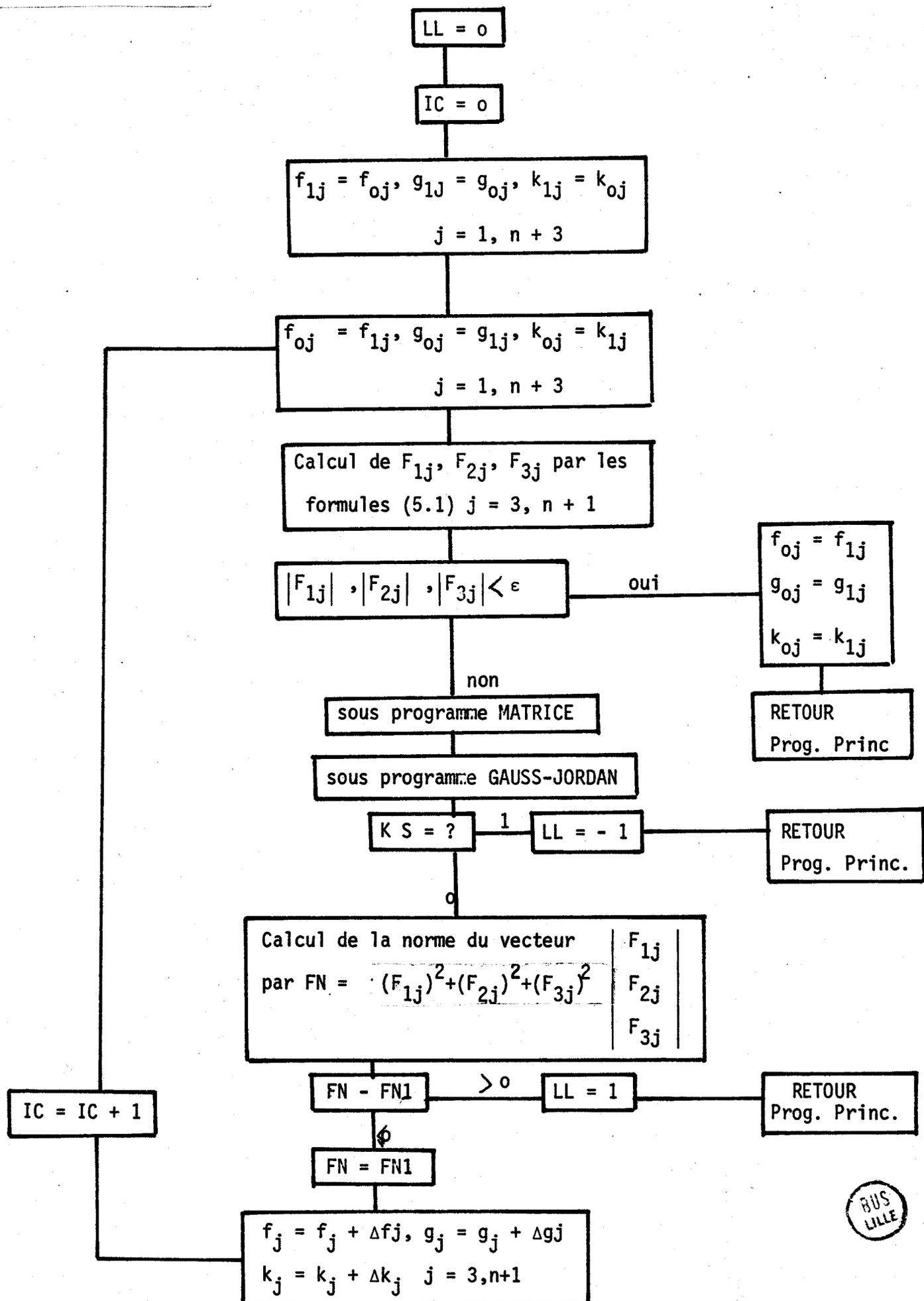
V. 4



CAS INSTATIONNAIREPROGRAMME PRINCIPAL



SOUS PROGRAMME ITERATION



METHODE DE NEWTON

En prenant les dérivées partielles des équations (3.28),
par rapport aux fonctions inconnues, nous obtenons les systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial k_{1i-2}} = \frac{1}{2\Delta r^3} ; \\ \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial k_{1i-1}} = -\frac{1}{2\Delta r^2} - \frac{1}{2\Delta r} \left\{ \frac{1}{2\Delta r} [G_{1i-1} - G_{1i+1}] - \frac{2}{r_i} G_{1i} + \frac{1}{r_i^2} \right\} + \\ \quad + \frac{1}{\Delta r^2} \left[G_{1i} - \frac{1}{r_i} \right] - \frac{1}{\Delta r^3} ; \\ \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial k_{1i}} = -\frac{2}{\Delta r^2} \left[G_{1i} - \frac{1}{r_i} \right] ; \\ \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial k_{1i+1}} = \frac{1}{2\Delta r^2} + \frac{1}{2\Delta r} \left\{ \frac{1}{2\Delta r} [G_{1i-1} - G_{1i+1}] - \frac{2}{r_i} G_{1i} + \frac{1}{r_i^2} \right\} + \\ \quad + \frac{1}{\Delta r^2} \left[G_{1i} - \frac{1}{r_i} \right] + \frac{1}{\Delta r^3} ; \\ \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial k_{1i+2}} = -\frac{1}{2\Delta r^3} ; \\ \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial G_{1i-1}} = \frac{1}{4\Delta r^2} [K_{1i+1} - K_{1i-1}] ; \\ \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial G_{1i}} = \frac{1}{r_i \Delta r} [K_{1i+1} - K_{1i-1}] + \frac{1}{\Delta r^2} [K_{1i-1} - 2K_{1i} + K_{1i+1}] ; \\ \frac{\partial \phi_{1i}}{\partial G_{1i+1}} = -\frac{1}{4\Delta r^2} [K_{1i+1} - K_{1i-1}] . \end{array} \right.$$

et :

Les autres conditions aux limites pour g donnent :

$$\begin{aligned} g(1) = 0 &\implies G_2 = 0 ; \\ g(\lambda) = 0 &\implies G_{n+2} = 0 ; \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Les valeurs de f et k n'apparaissent pas aux points 1 et $n+3$ dans la résolution du système. Nous prenons pour simplifier

$$\begin{aligned} F_1 = F_{n+3} &= 0 \\ K_1 = K_{n+3} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Les conditions aux limites pour f et k donnent :

$$\begin{aligned} f(1) = R_{er} &\implies F_2 = R_{er} \\ f(\lambda) = 0 &\implies F_{n+2} = 0 \\ k(1) = 0 &\implies K_2 = 0 \\ k(\lambda) = 0 &\implies K_{n+2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Il y a donc un ensemble de $(n+3)$ inconnues G_i et $(n+1)$ inconnues F_i et K_i . Avec les relations (II.4.5.6.7) nous avons $(3n+5)$ équations non linéaires.

Nous supposons en première approximation que les inconnues varient linéairement entre leurs conditions aux limites ; c'est-à-dire que nous prenons

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{R_{er}}{n} \left[(n+2) - 1 \right] \\ G_i = K_i &= 0 \quad 2 \leq i \leq n+2 \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Ces valeurs supposées sont situées à un écart $\Delta F_i, \Delta G_i, \Delta K_i$ des valeurs réelles F_i, G_i, K_i ; c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \bar{F}_i &= F_i + \Delta F_i \\ \bar{G}_i &= G_i + \Delta G_i \\ \bar{K}_i &= K_i + \Delta K_i \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Selon les critères du développement en série de TAYLOR limitée au terme du premier ordre, les écarts $\Delta F_i, \Delta G_i$ et ΔK_i seront donnés

par la résolution du système linéaire suivant ($3 \leq i \leq n+1$)

$$\left[\frac{\partial \phi_j}{\partial x} (x) \right] \cdot [H] + [\Phi_j] = 0 \quad j = 1, 2, 3$$

où

$$[H] = \begin{bmatrix} \Delta F_3 \\ \vdots \\ \Delta F_{n+1} \\ \Delta G_3 \\ \vdots \\ \Delta G_{n+1} \\ \Delta K_3 \\ \vdots \\ \Delta K_{n+1} \end{bmatrix} \quad [\Phi_j] = \begin{bmatrix} \phi_{13} \\ \vdots \\ \phi_{1n+1} \\ \phi_{23} \\ \vdots \\ \phi_{2n+1} \\ \phi_{33} \\ \vdots \\ \phi_{3n+1} \end{bmatrix}$$

et

$$\left[\frac{\partial \phi_j}{\partial x} (x) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_{13}}{\partial F_3} & \frac{\partial \phi_{13}}{\partial F_{n+1}} & \frac{\partial \phi_{13}}{\partial G_3} & \frac{\partial \phi_{13}}{\partial K_3} & \frac{\partial \phi_{13}}{\partial K_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{1,n+1}}{\partial F_3} & \frac{\partial \phi_{1,n+1}}{\partial F_{n+1}} & \vdots & \vdots & \frac{\partial \phi_{1n+1}}{\partial K_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{23}}{\partial F_3} & \frac{\partial \phi_{23}}{\partial F_{n+1}} & \vdots & \vdots & \frac{\partial \phi_{23}}{\partial K_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{2,n+1}}{\partial F_3} & \frac{\partial \phi_{2,n+1}}{\partial F_{n+1}} & \vdots & \vdots & \frac{\partial \phi_{2,n+1}}{\partial K_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{33}}{\partial F_3} & \frac{\partial \phi_{33}}{\partial F_{n+1}} & \vdots & \vdots & \frac{\partial \phi_{33}}{\partial K_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{3,n+1}}{\partial F_3} & \frac{\partial \phi_{3,n+1}}{\partial F_{n+1}} & \vdots & \vdots & \frac{\partial \phi_{3,n+1}}{\partial K_{n+1}} \end{bmatrix}$$



Les valeurs ainsi calculées par (II.9) seront une meilleure approximation des valeurs réelles que l'approximation précédente. Nous utilisons ces nouvelles valeurs et recommençons le cycle jusqu'à ce que les $|\phi_{1i}|$, $|\phi_{2i}|$ et $|\phi_{3i}|$ soient toutes plus petites ou égales à ϵ , erreur que nous imposons à l'avance.

$$|\phi_{1i}|, |\phi_{2i}| \text{ et } |\phi_{3i}| \leq \epsilon$$

ANNEXE III

CHOIX DE δs et c^2

Pour une cavité torique qui possède un entrefer $\lambda - 1 = 0.1$ et pour un rapport hauteur/entrefer = 4, nous constatons que la valeur $\epsilon = 10^{-4}$ est atteinte au bout d'un nombre d'itérations différent selon le choix de c^2 pour $\delta s = 25.10^{-7}$. Cependant les résultats diffèrent peu comme le montre le tableau ci-dessous.

Pour $\bar{r} = 1.05$ et $R_{er} = 100$ nous obtenons pour \bar{v} :

\bar{z}	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20
$c^2 = 4$	105	85.529	72.225	64.437	60.130	57.787	56.518	55.830	55.465	55.287	55.233
$c^2 = 10$	105	85.524	72.220	64.432	60.125	57.783	56.513	55.825	55.461	55.284	55.231
\bar{z}	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30	0.32	0.34	0.36	0.38	0.40	
$c^2 = 4$	55.287	55.465	55.831	55.517	55.786	60.130	64.437	72.225	85.529	105	
$c^2 = 10$	55.284	55.461	55.826	56.513	57.783	60.125	64.432	72.221	85.525	105	

Par contre pour $\epsilon = 1,5. 10^{-3}$, l'écart entre les solutions peut atteindre 10^{-1} comme le montre le tableau ci-dessous :

\bar{z}	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20
$c^2 = 4$	105	85.4	72.0	64.2	59.8	57.4	56.1	55.4	55.0	54.8	54.8
$c^2 = 10$	105	85.4	72.0	64.1	59.8	57.4	56.0	55.3	54.9	54.8	54.7
\bar{z}	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30	0.32	0.34	0.36	0.38	0.40	
$c^2 = 4$	54.8	55.0	55.4	56.1	57.4	59.8	64.2	72.0	85.4	105	
$c^2 = 10$	54.8	54.9	55.3	56.0	57.4	59.8	64.1	72.0	85.4	105	

- (14) D GREESPAN Numerical studies of cavity flow problems
computer J. 12-p 88 - 93 (1969)
- (15) R. AMIEL Contribution à l'étude numérique des écoule-
ments dans une cavité.
Thèse Université POITIERS (1972)
- (16) R. TEMAM - M. FORTIN - R. PEYRET -
Résolution numérique des équations de NAVIER-
STOKES pour un fluide incompressible (1971)
J de Mécanique 10 - p 357 - 390
- (17) D.C. THOMAN - A.A. SZEWCZYK -
Time dependent viscous flows over a cylinder
Physics of fluid II - p 76 - 86 (1969)
- (18) C.V. ALONSO - E.O. MACAGNO
Numérique intégration of the time dependent
équations of motion for Taylor vortex. Computers
and fluids 1 - p 301 - 316 (1973)
- (19) G. GRILLAUD Contribution à l'étude numérique des écoule-
ments bidimensionnels dans une cavité torique
Thèse Université - POITIERS (1975)
- (20) P. FLORENT - N.D. NGUYEN - V.N. DINH
Sur l'hypothèse de similitude dans l'étude de
l'écoulement entre disques en rotation
6ème Congrès Canadien de Mécanique (1977)
- (21) P. FLORENT - V.N. DINH - N. DINH
Ecoulement instationnaire entre disques coaxiaux
J. de Mécanique 12 p 555 - 579 (1973)
- (22) E.A. EICHELBRENNER Détermination de l'écoulement secondaire à
l'intérieur d'un dièdre.
J. de Mécanique 10 - p 91 - 112 (1971)

- (23) L.P. REISS - T.J. HANRATTY
Int. J. Heat Mass Trans.
Vol. 14 p 1499 (1971)
- (24) C. TOURNIER Etude de l'écoulement tridimensionnel instationnaire autour des cylindres
Thèse Université PARIS VI (1977)
- (25) B. PY Inst. J. Heat. Mass. Trans
Vol. 16 p 129 (1973)

