

50376
1977
3

N° d'ordre : 365

50376
1977
3

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Raymond MOCHÉ

1. DECANTATION ET SEPARATION ASYMPTOTIQUES UNIFORMES ;
TESTS ET ESTIMATEURS CONVERGENTS, DANS LE CAS D'OBSERVATIONS
INDEPENDANTES, EQUIDISTRIBUEES OU NON.
2. ETUDES SUR L'ANALYSE DE LA STATIONNARITE DES FONCTIONS
ALEATOIRES DU SECOND ORDRE.



0300085649

Thèse soutenue le 10 Janvier 1977, devant la Commission d'Examen :

MM. J. KAMPÉ de FÉRIET, Président, Directeur de Recherche
J. GEFFROY, Co-Directeur de Recherche
D. BOSQ, Rapporteur
J. DELPORTE, Rapporteur
P. POUZET, Examinateur

A mes parents,

A Laure,

A Laurent et Henri.

Je remercie M. Joseph Kampé de Fériet de m'avoir posé en juin 1970 le beau et important problème de l'analyse de la stationnarité des fonctions aléatoires du second ordre, d'où provient la seconde partie de ma thèse. En mai 1973, j'ai abandonné ce sujet, me trouvant sans inspiration, ce qui n'est plus le cas aujourd'hui, et seul, M. J. Kampé de Fériet se consacrant à la théorie de l'information, et M. Jean Delporte, qui m'avait mis en route, étant entièrement occupé par ses propres activités professionnelles.

J'ai eu alors la chance, grâce à M. Denis Bosq, de rencontrer M. Jean Geffroy qui m'a confié un résultat original à exploiter, en me donnant les grandes idées de la théorie à construire, qui n'est ni plus ni moins que l'extension de la statistique asymptotique au cas où les observations sont indépendantes mais non équidistribuées. Il s'agit d'une théorie vraiment nouvelle, les cas envisagés n'étant pas assujettis à être voisins du cas classique de l'échantillon. Je suis heureux et fier d'avoir contribué à cette création, et M. J. Geffroy sait combien je lui en suis reconnaissant.

Je remercie MM. D. Bosq et J. Delporte qui m'ont beaucoup aidé, je l'ai dit, et ont accepté d'être rapporteurs à une époque très chargée de l'année, et M. Pierre Pouzet qui a bien voulu compléter mon jury, et sortir une nouvelle fois de sa spécialité, sa présence m'aidant de plus à croire que je deviendrai peut-être un jour un vrai mathématicien appliqué.

Je pense avec reconnaissance à d'autres collègues : Mmes Raymonde Bérat et Arlette Lengaigne qui ont dactylographié mon texte en en améliorant très sensiblement la présentation, M. Emmanuel Crépeaux qui m'a traduit plusieurs articles russes, (de gauche à droite et de haut en bas), mes collègues probabilistes du séminaire créé et animé dans notre U.E.R. par M. D. Bosq avec la collaboration de M. Claude Langrand.

Enfin, et avant tout, je remercie mon épouse qui m'a permis à notre mariage de commencer ce travail, et qui l'a parfois bien regretté. Etant données les multiples promesses que je lui ai faites, je ne suis pas sûr d'être celui qui entreprendra les nouvelles recherches que mes deux sujets appellent ...

TABLE DES MATIERES.

DECANTATION, ET SEPARATION ASYMPTOTIQUES UNIFORMES, TESTS ET ESTIMATEURS CONVERGENTS, DANS LE CAS D'OBSERVATIONS INDEPENDANTES, EQUIDISTRIBUEES OU NON.

p. 1	<u>SOMMAIRE ET NOTATIONS.</u>
p. 5	<u>CHAPITRE I - LA SEPARATION ASYMPTOTIQUE UNIFORME ET LA CONVERGENCE DES TESTS ET DES ESTIMATEURS.</u>
p. 5	IA - Condition nécessaire et suffisante pour qu'un paramètre soit estimable, dans le cas de l'échantillon.
p. 29	IB - Tests et séparation asymptotique uniforme.
p. 33	IC - Estimation et séparation asymptotique uniforme.
p. 42	<u>CHAPITRE II - DECANTATION.</u>
p. 42	IIA - Rappels sur la distance de Hellinger et la distance en variations.
p. 49	IIB - Décantation.
p. 57	IIC - Application de la décantation à la séparation asymptotique uniforme de deux familles de lois-produits.
p. 66	<u>CHAPITRE III - PROPRIETES DE DECANTATION DE CERTAINES DISTANCES ENTRE LES LOIS.</u>
p. 66	IIIA - Propriétés (M_1).
p. 72	IIIB - Propriétés (M_2).
p. 87	<u>CHAPITRE IV - CONDITIONS SUFFISANTES D'EXISTENCE DE TESTS ET D'ESTIMATEURS CONVERGENTS DANS LE CAS DES LOIS-PRODUITS.</u>
p. 87	IVA - Théorème général.
p. 90	IVB - Cas où le paramètre f et les projections $\pi_1, \pi_2, \dots$ se comportent isométriquement.
p. 101	IVC - Cas où $f(H), \pi_1(H), \pi_2(H), \dots$ sont ordonnés de manière isomorphe.
p. 105	IVD - Estimateurs uniformément p.s. convergents, lorsque $(\oplus, \delta)$ est un espace euclidien.
p. 115	<u>CHAPITRE V - ESTIMATION DE LA LOI DANS LE CAS DE L'ECHANTILLON.</u>
p. 122	<u>REFERENCES.</u>

ETUDES SUR L'ANALYSE DE LA STATIONNARITE DES FONCTIONS ALEATOIRES

DU SECOND ORDRE.

p. 125 INTRODUCTION.

p.131 PREMIER CHAPITRE - COVARIANCES SEPARABLES.

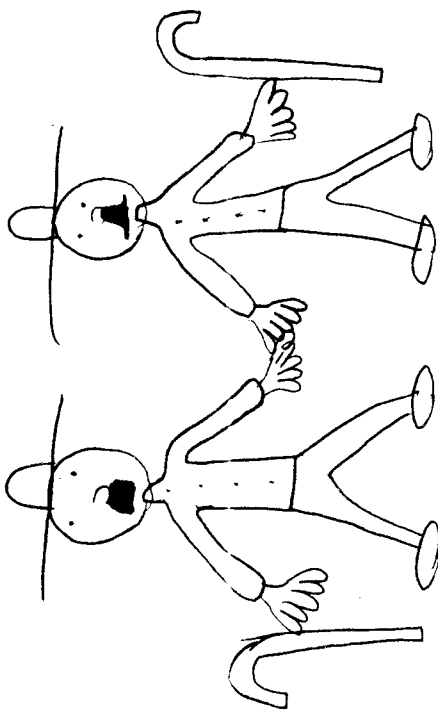
p.158 DEUXIEME CHAPITRE - ETUDE DES COVARIANCES ET CORRELATIONS PLUS PETITES
QU'UNE COVARIANCE DONNEE. APPLICATION AUX PROCESSUS.

p.158 - Première partie : Représentation canonique des covariances plus petites qu'une covariance donnée.

p. 179 - Deuxième partie : Corrélations plus petites qu'une covariance donnée.

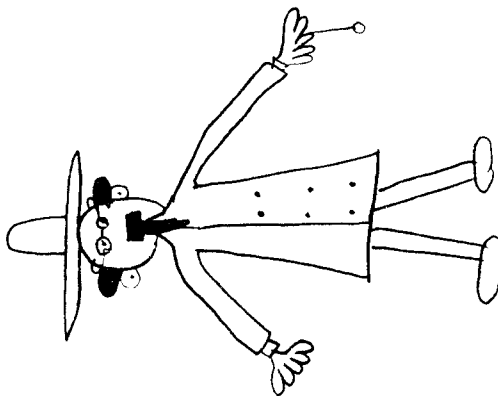
p.187 - Troisième partie : Applications aux processus.

p. 192 REFERENCES.

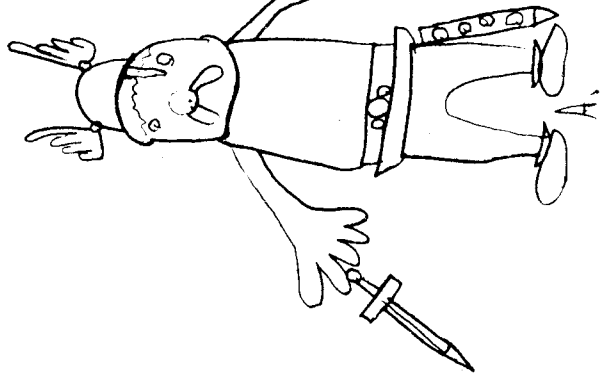


DUPONT.

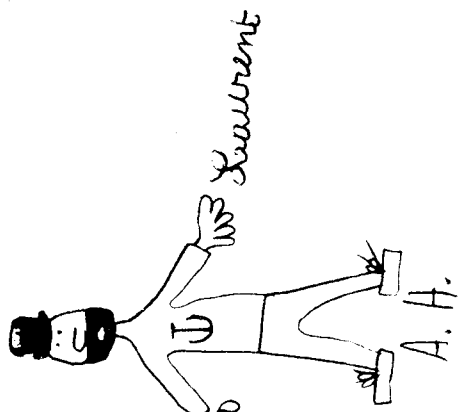
DUPOND.



T.T.

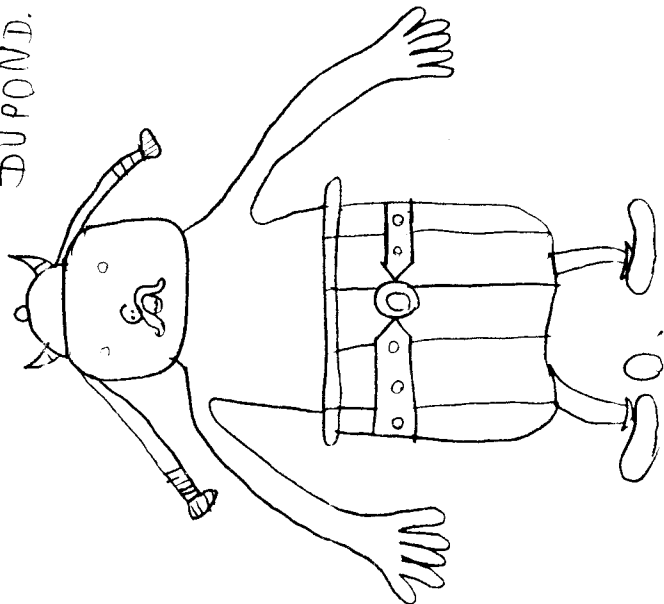


A.

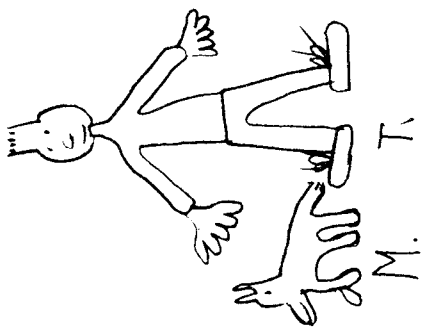


Laurent

A.H.



S.O.



T.

M.



DECANTATION ET SEPARATION ASYMPTOTIQUES UNIFORMES ;
TESTS ET ESTIMATEURS CONVERGENTS, DANS LE CAS D'OBSERVATIONS
INDEPENDANTES, EQUIDISTRIBUEES OU NON .

1 - Soit $X = (X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires simultanées prenant respectivement leurs valeurs dans des espaces mesurables quelconques $(X_n, \mathcal{B}_n)$, $(n = 1, 2, \dots)$ et dont la loi conjointe inconnue appartient à un ensemble donné H de lois sur $(X^{(+\infty)}, \mathcal{B}^{(+\infty)}) = \bigotimes_{n=1}^{+\infty} (X_n, \mathcal{B}_n)$.

Si P est une loi sur cet espace, $\Pi_n(P)$ ou P_n désigne sa projection sur $(X_n, \mathcal{B}_n)$, $\Pi^{(n)}(P)$ ou $P^{(n)}$ sa projection sur $(X^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)}) = \bigotimes_{i=1}^n (X_i, \mathcal{B}_i)$, quel que soit l'entier positif n .

2 - Tests. - Si H_0 et H_1 désignent deux familles disjointes de lois sur $(X^{(+\infty)}, \mathcal{B}^{(+\infty)})$, elles se séparent asymptotiquement (resp. asymptotiquement uniformément) s'il existe une suite adaptée $(C_n)_{n \geq 1}$ de cylindres $(\forall n \in \mathbb{N}^*, C_n \in \mathcal{B}^{(n)})$ telle que

$$\forall P \in H_0 \cup H_1, \quad P^{(n)}(C_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1_{H_0}(P)$$

$$(\text{resp. } \sup_{P \in H_0 \cup H_1} (|P^{(n)}(C_n) - 1_{H_0}(P)|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0).$$

Si de plus H_0 et H_1 sont deux hypothèses, soit deux parties de l'hypothèse générale H , et si $H_1 = H - H_0$, $(X^{(n)} - C_n)_{n \geq 1}$ est la suite des régions critiques d'une suite convergente [resp. uniformément convergente] de tests de H_0 contre H_1 . On dit alors que H_0 est testable (resp. uniformément testable).

H_t désigne l'ensemble des hypothèses testables : c'est une algèbre de parties de H ($\mathcal{B}$, th. 3.1).

3 - Espace paramétrique. - Soit (H) un ensemble muni d'une distance δ . $\forall \theta \in (H)$ et $\forall \alpha \geq 0$, $B(\theta, \alpha)$ et $b(\theta, \alpha)$ désignent respectivement les boules fermée et ouverte de centre θ et de rayon α .

Etant donné deux boules fermées quelconques $B_0 = B(\theta_0, \alpha_0)$ et $B_1 = B(\theta_1, \alpha_1)$, on pose

$$\delta^*(B_0, B_1) = \delta(\theta_0, \theta_1) - (\alpha_0 + \alpha_1) .$$

$\mathcal{H}_b$ et $\mathcal{H}_f$ désignent respectivement l'algèbre de parties de $\mathcal{H}$ engendrée par les boules fermées et l'algèbre des parties de $\mathcal{H}$ dont l'image réciproque par f est une hypothèse testable (où f est une application de H dans $\mathcal{H}$).

4 - Estimateurs. - Soit un paramètre $f : H \rightarrow (\mathcal{H}, \delta)$, une famille non vide F d'hypothèses, une suite $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ d'estimateurs de f , autrement dit une suite de fonctions mesurables $\hat{f}_n : (X^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)}) \rightarrow (\mathcal{H}, \delta)$, ($n = 1, 2, \dots$) . Nous rappelons que

a) $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ est une suite F-p.co.convergente d'estimateurs de f si et seulement si

$$(\forall F \in \mathcal{F}, \forall \varepsilon > 0) , \sup_{P \in F} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} P^{(n)} \{ \delta(\hat{f}_n, f(P)) > \varepsilon \} \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

b) $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ est une suite F-p.s.convergente d'estimateurs de f si et seulement si

$$(\forall F \in \mathcal{F}, \forall \varepsilon > 0) , \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sup_{P \in F} P \left(\bigcup_{n \geq k} \{ \delta(\hat{f}_n, f(P)) > \varepsilon \} \times \prod_{j \geq n} X_j \right) \right) = 0$$

c) $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ est une suite F-convergente d'estimateurs de f si et seulement si

$$(\forall F \in \mathcal{F}, \forall \varepsilon > 0) , \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{P \in F} P^{(n)} \{ \delta(\hat{f}_n, f(P)) > \varepsilon \} \right) = 0$$

Lorsque $F = \{H\}$ (resp. $F = \{ \{P\}, P \in H \}$), $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ est donc uniformément

p.co.convergente en (a), uniformément p.s. convergente en (b), uniformément convergente en (c) (resp. p.co.convergente en (a), p.s. convergente en (b), convergente en (c)). On dira que le paramètre f est estimable (resp. uniformément estimable) s'il existe une suite convergente (resp. uniformément convergente) d'estimateurs. Pour les convergences p.s. et p.co., on utilisera les termes analogues.

Exemple.- Soit H une hypothèse. Le paramètre $1_H : H \rightarrow (\{0,1\}, | \cdot |)$ est estimable (resp. uniformément estimable) si et seulement si H est testable (resp. uniformément testable).

A partir de cette remarque, on peut définir d'autres types de convergence pour les tests (convergences p.s. et p.co., uniformes ou non). Ainsi une hypothèse H est p.co.testable si et seulement s'il existe une suite adaptée $(C_n)_{n \geq 1}$ de cylindres tels que

$$\forall P \in H, \quad 1_{C_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P\text{-p.co.}} 1_H(P).$$

5 - Cas particuliers.- Nous venons de décrire le cas général ; mais souvent nous supposerons que les variables aléatoires X_n ($n = 1, 2, \dots$) sont indépendantes, autrement dit que H est un ensemble de lois-produits ($\forall P \in H, P = \bigotimes_{n=1}^{+\infty} P_n$) ou même qu'elles sont indépendantes et équidistribuées : c'est le cas de l'échantillon pour lequel on identifie H et $\Pi_1(H)$, et l'on pose $(X_n, B_n) = (X, B)$, $(X^{(+\infty)}, B^{(+\infty)})$, $(X^{(n)}, B^{(n)})$, $P^{(n)}$ devenant respectivement $(X^{+\infty}, B^{+\infty})$, (X^n, B^n) et P^n , quels que soient la loi P et l'entier positif n .

6 - Nous allons construire des tests et des estimateurs convergents en introduisant la notion de décantation asymptotique uniforme de deux familles de lois sur $(X^{(+\infty)}, B^{(+\infty)})$. L'intérêt de cette notion est

qu'il y a séparation asymptotique uniforme lorsque la décantation est assez forte.

Alors, après avoir étudié

- les relations entre l'existence de tests et d'estimateurs convergents d'une part, et la séparation asymptotique uniforme de certaines familles de lois d'autre part,

- les propriétés de décantation de certaines distances entre les lois, nous pourrions énoncer des conditions suffisantes simples à partir desquelles sont possibles nos constructions.

7 - Sous sa forme actuelle, cette théorie déborde largement nos résultats antérieurs (², ¹¹, ¹², ²³, ³³). Elle a été développée sous la direction et avec l'aide de J. Geffroy qui a fourni notamment la notion de décantation asymptotique et son application à la séparation asymptotique (voir ², ¹¹, ²⁴, ³¹, et nos références dans le texte ; les astérisques signalent des résultats dûs en partie à J. Geffroy, et en partie à nous-même).

CHAPITRE I

LA SEPARATION ASYMPTOTIQUE UNIFORME ET LA CONVERGENCE DES TESTS ET DES ESTIMATEURS.

I A - CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QU'UN PARAMETRE SOIT ESTIMABLE, DANS LE CAS DE L'ECHANTILLON.

En groupant les lois suivant les probabilités qu'elles donnent à un nombre fini d'événements, puis en séparant asymptotiquement uniformément les familles de lois ainsi obtenues, nous démontrons (th. I A 9) que dans le cas de l'échantillon, l'espace paramétrique (Θ, δ) étant un espace vectoriel normé séparable, le paramètre f est p.s.estimable si et seulement s'il est limite simple d'une suite de paramètres uniformément continus pour une certaine structure uniforme E sur H . Ce résultat généralise les conditions suffisantes de L. Le Cam et L. Schwartz ⁽³⁾, de S. Jilovec ⁽⁴⁾ ainsi que la condition nécessaire de ce dernier ⁽⁵⁾.

La séparabilité de l'espace paramétrique est nécessaire, puisque les estimateurs que nous construisons ne prennent chacun qu'un nombre fini de valeurs. Aussi sont écartés d'importants problèmes d'estimation fine tel que l'estimation de la densité dans l'ensemble des densités continues et bornées sur $\mathbb{R}$, muni de la topologie de la convergence uniforme.

I A 1 - Nous donnons deux démonstrations du théorème ci-dessous. La première s'appuie sur une loi des grands nombres (A. Berger, ¹ lemme 1), la seconde est une version simplifiée de (², théorème 1).

Le mot cylindre y a son sens propre. Autrement dit, ce que nous appelons cylindre est tantôt un vrai cylindre, soit une partie $(\bigcup_{n \geq 1} (B^{(n)} \times \prod_{j > n} X_j))$ - mesurable de $X^{(+\infty)}$, tantôt une base de cylindre.

Théorème. - Soit (X, B) un espace mesurable quelconque, A un événement, ε et ε' deux nombres choisis dans $]0, 1[$, π et π' deux nombres vérifiant $0 \leq \pi < \pi' \leq 1$.

Alors il existe un cylindre C de $(X^{+\infty}, B^{+\infty})$ tel que, pour toute probabilité P sur (X, B) , on ait :

$$P(A) \leq \pi \implies P^{+\infty}(C) > 1 - \varepsilon$$

$$P(A) \geq \pi' \implies P^{+\infty}(C) < \varepsilon'.$$

Première démonstration : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n : X^{+\infty} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x_p)_{p \geq 1} \rightsquigarrow 1_A(x_n)$$

$(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de v.a.r. indépendantes et suivant $B(1, P(A))$ sur $(X^{+\infty}, B^{+\infty}, P^{+\infty})$, quelle que soit la loi P sur (X, B) . On a donc

$$P^{+\infty}\left\{\left|\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) - P(A)\right| \geq \frac{\pi' - \pi}{2}\right\} \leq \frac{4}{n(\pi' - \pi)^2}.$$

Si n vérifie $\frac{4}{n(\pi' - \pi)^2} < \min(\varepsilon, \varepsilon')$, il suffit de poser

$$C = \left\{\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) < \frac{\pi + \pi'}{2}\right\} : \quad \text{en effet,}$$

$$P(A) \leq \pi \implies \left\{\left|\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) - P(A)\right| < \frac{\pi' - \pi}{2}\right\} \subset C \implies P^{+\infty}(C) > 1 - \varepsilon,$$

$$P(A) \geq \pi' \implies \left\{\left|\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) - P(A)\right| < \frac{\pi' - \pi}{2}\right\} \subset X^{+\infty} - C \implies P^{+\infty}(C) < \varepsilon'.$$

Deuxième démonstration (J. Geffroy) : Cette démonstration n'utilise pas de loi des grands nombres. Le cylindre C est recherché parmi les cylindres de la forme

$$B_{n,r} = (X^n - A^n)^r \times X^{+\infty}, \quad \text{où } n, r \in \mathbb{N}^*.$$

Pour toute loi P sur $(X, \mathcal{B})$, nous avons :

$$P^{+\infty}(B_{n,r}) = (1 - P^n(A))^r.$$

En particulier, $P(A) \leq \pi \implies P^{+\infty}(B_{n,r}) \geq (1 - \pi^n)^r$

et $P(A) \leq \pi' \implies P^{+\infty}(B_{n,r}) \leq (1 - \pi'^n)^r$.

Il suffit donc de montrer que l'on peut choisir deux entiers positifs n et r tels que :

$$(1 - \pi^n)^r > 1 - \varepsilon \quad \text{et} \quad (1 - \pi'^n)^r < \varepsilon',$$

ce que D. Bosq fait en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad r_n = E\left(\frac{1}{\tau^n}\right) \quad (\text{partie entière de } \frac{1}{\tau^n}), \text{ où } \tau \in]\pi, \pi'[.$$

On en déduit en effet que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \pi^n)^{r_n} = 1 = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \pi'^n)^{r_n},$$

compte tenu de :

$$\begin{aligned}
 & - \operatorname{Log} (1 - \pi^n)^{r_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} - r_n \pi^n \\
 & - \operatorname{Log} (1 - \pi'^n)^{r_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} - r_n \pi'^n \\
 & - \forall n \in \mathbb{N}^*, (0 < r_n \pi^n < (\frac{\pi}{\tau})^n + \pi^n) \text{ et } (r_n \pi'^n > (\frac{\pi'}{\tau})^n) \blacksquare
 \end{aligned}$$

Remarquons que les choix de n et r_n ne dépendent que de π, π', ε et ε' , et que l'on peut préciser la dimension de la base B_{n, r_n} du cylindre ainsi obtenu en fonction de ces données numériques, ce que la démonstration initiale (voir ²³, th. 1) ne permettait pas.

I A 2 - Nous classons maintenant les lois suivant les probabilités qu'elles donnent à n événements fixés à l'avance, et nous séparons uniformément les paquets de lois ainsi obtenus.

Lemme. - Quels que soient ε dans $]0, 1[$ et p dans $\{3, 4, \dots\}$, il existe un entier $n > 0$ tel que :

A tout événement A de (X, B) , on puisse associer p événements de $B^n : F_0, \dots, F_{p-1}$ pour lesquels on ait :

- $|j - j'| \geq 2 \implies F_j \cap F_{j'} = \emptyset$,
- pour toute loi P , $\frac{j}{p} \leq P(A) \leq \frac{j+1}{p} \implies P^n(F_j) > 1 - \varepsilon$.

Démonstration. - En utilisant le théorème 1, on associe à ε, p et A un entier $n > 0$ (qui ne dépend pas de A) et p événements de $B^n : C_0, \dots, C_{p-1}$ tels que pour toute loi P sur (X, B) , on ait :

$$P(A) \leq \frac{i}{p} \implies P^n(C_i) > 1 - \frac{\epsilon}{2p}$$

$$P(A) \geq \frac{i+1}{p} \implies P^n(C_i) < \frac{\epsilon}{2p}, \text{ pour } i = 0, \dots, p-1.$$

On pose $D_0 = C_1$, $D_1 = C_0^c \cap C_2$, ..., $D_{p-2} = C_{p-3}^c \cap C_{p-1}$, $D_{p-1} = C_{p-2}^c$.

Il est facile de voir que si $i, j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ et si $|i-j| \geq 2$,

$$\frac{i}{p} \leq P(A) \leq \frac{j+1}{p} \implies P^n(D_j) > 1 - \frac{\epsilon}{p} \text{ et } P^n(D_i) < \frac{\epsilon}{2p}.$$

Vérifions que la suite $F_j = D_j \cap \left(\bigcup_{i: |i-j| \geq 2} D_i \right)^c$, ($j=0, \dots, p-1$)

convient :

$$\frac{i}{p} \leq P(A) \leq \frac{j+1}{p} \implies P^n(D_j) > 1 - \frac{\epsilon}{p} \text{ et } P^n\left(\bigcup_{i: |i-j| \geq 2} D_i\right) < (p-1) \frac{\epsilon}{2p} \implies P^n(F_j) > 1 - \epsilon.$$

$$|i-j| \geq 2 \implies F_i \subset D_i \text{ et } F_j \subset \left(\bigcup_{q: |q-j| \geq 2} D_q \right)^c \subset D_i^c \implies F_i \cap F_j = \emptyset.$$

I A 3 - Théorème.- Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements d'un espace mesurable $(X, \mathcal{B})$, $\mathcal{D}$ un ensemble de lois sur cet espace, ϵ un réel choisi dans $]0, 1[$, et p un entier ≥ 3 .

Il existe un entier positif m et une application $\hat{P} : X^m \rightarrow \mathcal{D}$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, telle que pour toute loi P de $\mathcal{D}$ on ait :

$$\begin{aligned} - B(P) &= \left\{ \left(\max_{1 \leq i \leq n} |\hat{P}(A_i) - P(A_i)| \right) \leq \frac{\epsilon}{p} \right\} \in \mathcal{B}^m \\ - P^m(B(P)) &> 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

Démonstration.- D'après le lemme précédent, il existe un entier $m > 0$ tel qu'à chaque événement A_i , $i = 1, \dots, n$, on puisse associer p événements de $\mathcal{B}^m$: $F_0^i, F_1^i, \dots, F_{p-1}^i$ qui vérifient :

$$\frac{j}{p} \leq P(A_i) \leq \frac{j+1}{p} \implies P^m(F_j^i) > 1 - \frac{\varepsilon}{n}$$

$$|j-j'| \geq 2 \implies F_j^i \cap F_{j'}^i = \emptyset.$$

$(j_1, \dots, j_n)$, $(j'_1, \dots, j'_n)$ désignant des points de $\{0, \dots, p-1\}^n$, on pose :

$$- F_{j_1, \dots, j_n} = F_{j_1}^1 \cap F_{j_2}^2 \cap \dots \cap F_{j_n}^n,$$

$$- |(j_1, \dots, j_n) - (j'_1, \dots, j'_n)| = \sup\{|j_i - j'_i|, i = 1, \dots, n\},$$

$$- \mathcal{D}_{(j_1, \dots, j_n)} = \{P, P \in \mathcal{D}, P(A_i) \in [\frac{j_i}{p}, \frac{j_{i+1}}{p}] , i = 1, \dots, n\}$$

$$\text{où } [\frac{j_i}{p}, \frac{j_{i+1}}{p}] \text{ est fermé à droite lorsque } j_i = p-1,$$

$$- J = \{(j_1, \dots, j_n) : \mathcal{D}_{(j_1, \dots, j_n)} \neq \emptyset\}.$$

$\forall j \in J$, soit P_j une loi choisie dans $\mathcal{D}_j$.

On définit $\hat{P} : X^m \rightarrow \mathcal{D}$ de la manière suivante :

- Si $x \in X^m - \bigcup_J F_j$, $\hat{P}(x) = P_{j_0}$, où j_0 est un point arbitrairement choisi dans J .

- Si $x \in \bigcup_J F_j$, $\hat{P}(x) = P_{j(x)}$, où $j(x) = \min\{j | x \in F_j\}$ (pour l'ordre lexicographique). On retiendra que :

$$\forall j \in J \text{ et } \forall x \in \bigcup_J F_j, \hat{P}(x) = P_j \implies j = j(x), \text{ donc que}$$

$$\forall j \in J, \hat{P}(x) = P_j \implies x \in F_j \cup (X^m - \bigcup_J F_j), \text{ et que } \{\hat{P} = P_j\} \in \mathcal{B}^m.$$

Il reste à montrer que quelle que soit la loi P de $\mathcal{D}$, P est concentrée sur $B(P)$ à ε près.

Soit P une telle loi, et $j(P)$ un indice dans J tel que

$P \in \mathcal{D}_{j(P)}$. Il est clair que

$$- P^m(F_{j(P)}) > 1 - \epsilon$$

$$- \left(\sup_{1 \leq i \leq n} |P(A_i) - P_j(A_i)| \right) > \frac{2}{p} \implies |j - j(P)| \geq 2 \implies F_j \cap F_{j(P)} = \emptyset.$$

Il en résulte que

$$X^m - B(P) \subset \left(\bigcup_{j: |j - j(P)| > \frac{2}{p}} F_j \right) \cup (X^m - \bigcup_j F_j) \subset X^m - F_{j(P)}.$$

$$\text{On a donc } P^m(B(P)) \geq P^m(F_{j(P)}) > 1 - \epsilon \quad \blacksquare$$

Nous abordons maintenant le problème de l'estimabilité des paramètres.

I A 4 - Structure uniforme de Le Cam-Schwartz ⁽³⁾.

Soit H une famille de lois sur $(X^{(+\infty)}, B^{(+\infty)})$.

Pour tout $n \geq 1$, on définit une famille U_n de parties de $H \times H$ par : $U \in U_n$ si et seulement s'il existe une suite finie de fonctions mesurables bornées : $f_1, \dots, f_q : (X^{(n)}, B^{(n)}) \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$(P, Q) \in U \iff \left| \int f_j dP^{(n)} - \int f_j dQ^{(n)} \right| < 1 \text{ pour } j = 1, \dots, q.$$

Si les réels $M_1, \dots, M_q$ majorent respectivement les fonctions $|f_1|, \dots, |f_q|$, on a aussi

$$(P, Q) \in U \iff \left| \int (f_j + M_j) dP^{(n)} - \int (f_j + M_j) dQ^{(n)} \right| < 1 \text{ pour } j = 1, \dots, q.$$

On peut donc n'utiliser que des f.m. ≥ 0 bornées pour définir U_n .

On vérifie que

- U_n est un système fondamental d'entourages de H ;

- $U_n \subset U_{n+1}$.

Ainsi $U = \bigcup_{n \geq 1} U_n$ est également un système fondamental d'entourages de H .

I A 5 - Autre définition de la structure uniforme de Le Cam-Schwartz.

Pour tout $n \geq 1$, E_n est la famille de parties de $H \times H$ ainsi caractérisée :

$E \in E_n$ si et seulement s'il existe ϵ dans $]0,1[$ et une suite finie d'événements de $B^{(n)} : A_1, \dots, A_q$ telle que :

$$(P, Q) \in E \iff |P^{(n)}(A_j) - Q^{(n)}(A_j)| < \epsilon \text{ pour } j = 1, \dots, q.$$

On vérifie que E_n est un système fondamental d'entourages de H ainsi que $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$.

Nous allons montrer que E et U engendrent la même structure uniforme.

Lemme.- Soit $\psi : (\Omega, A) \rightarrow \mathbb{R}$ une f.m. bornée ≥ 0 . Il existe ϵ dans $]0,1[$ et une suite finie d'événements $A_1, \dots, A_q$ tels que pour tout couple (P, Q) de lois sur (Ω, A) on ait :

$$(|P(A_j) - Q(A_j)| < \epsilon \text{ pour } j = 1, \dots, q) \implies \left| \int \psi dP - \int \psi dQ \right| < 1.$$

En effet, si ψ est une f.m. ≥ 0 étagée, ψ s'écrit sous la forme

$$\psi = \sum_{j=1}^q \psi_j 1_{A_j} \text{ avec } \psi_1, \dots, \psi_q > 0 \text{ et } A_1, \dots, A_q \in A.$$

$$\left| \int \psi dP - \int \psi dQ \right| \leq \sum_{j=1}^q \psi_j |P(A_j) - Q(A_j)|.$$

Si l'on pose $\epsilon = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{3q \psi_j}, j = 1 \dots q)$, on a :

$$|P(A_j) - Q(A_j)| < \varepsilon \text{ pour } j = 1, \dots, q \implies \left| \int \psi dP - \int \psi dQ \right| < \frac{1}{3}.$$

Si ψ est une f.m. ≥ 0 bornée, ψ est limite uniforme d'une suite croissante de f.m. ≥ 0 étagées. L'une d'elles, ψ_0 , vérifie :

$$|\psi - \psi_0| \leq \frac{1}{3}.$$

On choisit ε dans $]0,1[$ et des événements $A_1, \dots, A_q$ tels que : $|P(A_j) - Q(A_j)| < \varepsilon$ pour $j = 1, \dots, q \implies \left| \int \psi_0 dP - \int \psi_0 dQ \right| < \frac{1}{3}$.
Alors on a :

$$\left| \int \psi dP - \int \psi dQ \right| \leq \left| \int (\psi - \psi_0) dP \right| + \left| \int (\psi - \psi_0) dQ \right| + \left| \int \psi_0 dP - \int \psi_0 dQ \right| < 1.$$

Proposition. - E et U engendrent la même structure uniforme.

Il suffit de démontrer que E_n et U_n engendrent la même structure. Puisqu'il est évident que $E_n \subset U_n$, il reste à démontrer que tout entourage U de U_n contient un entourage de E_n .

Il existe des f.m. ≥ 0 bornées $f_1, \dots, f_q : (X^{(n)}, B^{(n)}) \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$U = \{(P, Q) : \left| \int f_j dP^{(n)} - \int f_j dQ^{(n)} \right| < 1 \text{ pour } j = 1, \dots, q\}$$

Pour chaque fonction f_j , on peut trouver ε_j dans $]0,1[$ et des événements $A_1^j, \dots, A_{k_j}^j$ de $B^{(n)}$ tels que :

$$(|P^{(n)}(A_i^j) - Q^{(n)}(A_i^j)| < \varepsilon_j \text{ pour } i = 1, \dots, k_j) \implies \left| \int f_j dP^{(n)} - \int f_j dQ^{(n)} \right| < 1.$$

Posons $\{A_1, \dots, A_r\} = \bigcup_{j=1}^q \{A_1^j, \dots, A_{k_j}^j\}$ et $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$; alors, nous avons l'inclusion recherchée :

$$E = \{(P, Q) : \max_{1 \leq j \leq r} |P^{(n)}(A_j) - Q^{(n)}(A_j)| < \varepsilon\} \subset U.$$

I A 6 - Structures uniformes de S. Jilovec.

S. Jilovec associe à tout espace de Banach $(M, || \quad ||)$ une structure uniforme E^M sur H de la manière suivante ^(4,5) :

Pour tout entier $n \geq 1$, E_n^M est la famille des parties E de $H \times H$ pour lesquelles il existe des f.m. (fonctions mesurables) bornées :

$f_1, \dots, f_q : (X^{(n)}, B^{(n)}) \rightarrow (M, || \quad ||)$ telles que :

a) $f_1(X^{(n)}), \dots, f_q(X^{(n)})$ sont des parties séparables de M .

b) $(P, Q) \in E \iff || \int f_j dP^{(n)} - \int f_j dQ^{(n)} || < 1$ pour $j = 1, \dots, q$, l'intégrale étant celle de Dunford ⁽⁶⁾.

Il est clair que

$E \subset E^M = \bigcup_{n \geq 1} E_n^M$, qui est un système fondamental d'entourages de H .

Dans certains cas, par exemple si X est fini, E et E^M définissent la même structure uniforme ; mais E^M peut être strictement plus fine que E .

Exemple. - Prenons $(X^{(+\infty)}, B^{(+\infty)}) = (R^{+\infty}, B_R^{+\infty})$, H étant l'ensemble des lois $\mu^{+\infty}$, où μ décrit l'ensemble $\mathcal{D}_1$ des lois boréliennes sur $\mathbb{R}$. Soit M un espace de Hilbert séparable de dimension infinie dont on extrait une base orthonormale notée $(h_p)_{p \geq 1}$.

Posons $f = \sum_{p \geq 1} 1_{B_p} \times h_p$, où $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $B_p =]-p, -p+1] \cup [p-1, p[$.

On définit un entourage U de E_1^M en posant :

$$U = \{(\mu^{+\infty}, \nu^{+\infty}) \mid \mu, \nu \in \mathcal{D}_1 \text{ et } || \int f d\mu - \int f d\nu || < 1\}.$$

Si U contenait un entourage de E , on pourrait trouver un entier positif m , des événements $A_1, \dots, A_q$ de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^m$ et un réel ε dans $]0, 1[$ tels que

$$U \supset E = \{(\mu^{+\infty}, \nu^{+\infty}) \mid \mu, \nu \in \mathcal{D}_1 \text{ et } |\mu^m(A_i) - \nu^m(A_i)| < \varepsilon \text{ pour } i=1, \dots, q\}.$$

La tribu de parties de $\mathbb{R}^m$ engendrée par $A_1, \dots, A_q$ est également engendrée par une unique partition finie P de $\mathbb{R}^m$ notée $\{A'_1, \dots, A'_r\}$.

La trace $P \cap \Delta$ de P sur la diagonale Δ de $\mathbb{R}^m$ est une partition finie de Δ tandis que $P' = \{B_p^m \cap \Delta, p \in \mathbb{N}^*\}$ en est une partition infinie.

On peut donc trouver dans Δ deux points $(x, \dots, x)$ et $(y, \dots, y)$ qui sont séparés par P' sans l'être par $P \cap \Delta$. Autrement dit, il existe des entiers positifs $i, j, k, j \neq k$ tels que :

$$x \in B_j, y \in B_k, (x, \dots, x) \in A'_i \text{ et } (y, \dots, y) \in A'_i.$$

Il en résulte que

$$\delta_x^m(A_i) = \delta_y^m(A_i) \text{ pour } i = 1, \dots, q, \text{ et que}$$

$$|| \int f d \delta_x - \int f d \delta_y || = || h_j - h_k || = \sqrt{2}.$$

Autrement dit, on a $(\delta_x^{+\infty}, \delta_y^{+\infty}) \in E \cap ((H \times H) - U)$, ce qui contredit $E \subset U$ ■

I A 7 - Condition suffisante pour qu'un paramètre soit estimable.

Soit $K = [0, 1]^{+\infty}$ le cube infini muni de sa distance usuelle

$$(\forall x, x' \in K, \rho(x, x') = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} |x_n - x'_n|, \text{ où } x = (x_n)_{n \geq 1} \text{ et } x' = (x'_n)_{n \geq 1}).$$

L. Le Cam et L. Schwartz ont montré ⁽³⁾ que dans le cas de l'échantillon,

$\mathbb{H}$ étant une partie de K , et δ la restriction de ρ à $\mathbb{H}$, le paramètre $f : H \rightarrow (\mathbb{H}, \delta)$ est F -estimable si et seulement s'il existe une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions vérifiant :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : H \rightarrow K$ est (E, ρ) uniformément continue ,
- $\forall F \in \mathcal{F}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup_{P \in F} \rho(f_n(P), f(P))) = 0$, ce qui sera noté

$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{F} f$ (convergence uniforme sur toute hypothèse de $\mathcal{F}$).

Nous montrons d'abord que la condition suffisante reste valide si $(\mathbb{H}, \delta)$ devient un espace métrique quelconque.

Lemme 1.- Soit $f : H \rightarrow (\mathbb{H}, \delta)$ un paramètre quelconque, dans le cas général. S'il existe une suite de paramètres $(f_n : H \rightarrow \mathbb{H})_{n \geq 1}$ telle que

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{F} f$$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est uniformément estimable , alors il existe une suite F -p.s.convergente d'estimateurs de f .

Démonstration.- Pour tout entier $p \geq 1$, on peut choisir un entier $m_p > 0$ et un estimateur $\hat{f}_{m_p}$ de f_p défini sur $X^{(m_p)}_p$ tel que :

$$\inf_{P \in H} P^{(m_p)}_p \{ \delta(\hat{f}_{m_p}, f_p(P)) \leq \frac{1}{p} \} \geq 1 - \frac{1}{p^2}.$$

On peut supposer que la suite (m_p) est strictement croissante. Complétons la suite $(\hat{f}_{m_p})$ en une suite d'estimateurs de f :

- si $n < m_1$, $\hat{f}_n$ est un estimateur arbitraire ;
- si $n \geq m_1$, l'unique entier p tel que $m_p \leq n < m_{p+1}$ étant

noté $p(n)$, on pose $\hat{f}_n(x_1, \dots, x_n) = \hat{f}_{m_{p(n)}}(x_1, \dots, x_{m_{p(n)}})$.

Montrons que $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ est F -p.s. convergente : soit $\varepsilon > 0$ et $F \in \mathcal{F}$. Il existe un entier $n(\varepsilon, F) \geq m_1$ tel que :

$n \geq n(\varepsilon, F) \implies \frac{1}{p(n)} < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\sup_{P \in F} (\delta(f(P), f_{p(n)}(P))) < \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors, si $P \in F$:

$$\begin{aligned} \{\delta(\hat{f}_n, f(P)) \leq \varepsilon\} &= \{\delta(\hat{f}_{m_{p(n)}}, f(P)) \leq \varepsilon\} \times \prod_{j=m_{p(n)}+1}^n X_j \\ &\supset \{\delta(\hat{f}_{m_{p(n)}}, f_{p(n)}(P)) \leq \frac{1}{p(n)}\} \times \prod_{j=m_{p(n)}+1}^n X_j. \end{aligned}$$

Compte tenu de l'égalité suivante, valable si $n \geq m_1$ et $P \in H$:

$$\bigcup_{k \geq n} (\{\delta(\hat{f}_k, f(P)) > \varepsilon\} \times \prod_{j=k+1}^{+\infty} X_j) = \bigcup_{p \geq p(n)} (\{\delta(\hat{f}_m, f(P)) > \varepsilon\} \times \prod_{j=m_p+1}^{+\infty} X_j)$$

on obtient finalement

$$n \geq n(\varepsilon, F) \implies \sup_{P \in F} P \left(\bigcup_{k \geq n} (\{\delta(\hat{f}_k, f(P)) > \varepsilon\} \times \prod_{i=k+1}^{+\infty} X_i) \right) \leq \sum_{p \geq p(n)} \frac{1}{p^2} \blacksquare$$

Lemme 2.- Soit $f : H \rightarrow (\mathbb{H}, \delta)$ un paramètre quelconque, dans le cas général. Pour que f soit uniformément estimable, il faut et il suffit que :

pour tout réel $\gamma > 0$ et tout ε choisi dans $]0, 1[$, il existe un entier positif n et un estimateur $\hat{f}$ défini sur $X^{(n)}$ tel que

$$\sup_{P \in H} (P^{(n)} \{\delta(\hat{f}_n, f(P)) > \gamma\}) \leq \varepsilon$$

Démonstration.- La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, on construit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers positifs : $(m_p)_{p \geq 1}$ et une suite $(\hat{f}_m)_{m \geq 1}$ d'estimateurs de f tels que :

- $\hat{f}_{m_p}$ est défini sur $X^{(m_p)}$
- $\sup_{P \in H} (P^{(m_p)} \{ \delta(\hat{f}_{m_p}, f(P)) > \frac{1}{p+1} \}) \leq \frac{1}{p+1}$

On complète la suite $(\hat{f}_{m_p})$ comme précédemment. Il suffit pour conclure de remarquer que :

$$\begin{aligned}
 - n \geq m_1 &\implies \sup_{P \in H} P^{(n)}(\{ \delta(\hat{f}_n, f(P)) > \frac{1}{p(n)+1} \}) \\
 &= \sup_{P \in H} P^{(m_{p(n)})}(\{ \delta(\hat{f}_{m_{p(n)}}, f(P)) > \frac{1}{p(n)+1} \}) \leq \frac{1}{p(n)+1}, \\
 - \lim_{n \rightarrow +\infty} p(n) &= +\infty \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Lemme 3.- Dans le cas de l'échantillon, le paramètre $f : H \rightarrow \mathbb{H}$ est uniformément estimable s'il est (E, δ) uniformément continu.

Réciproquement, dans le cas général, mais sous l'hypothèse que $(\mathbb{H}, \delta)$ est précompact, f est (E, δ) uniformément continu s'il est uniformément estimable.

Démonstration.-

Condition suffisante : Soit $\gamma > 0$ et $\varepsilon \in]0, 1[$.

Il existe un entourage fondamental E de E tel que

$$(P, Q) \in E \implies \delta(f(P), f(Q)) \leq \gamma.$$

E est défini à partir d'un entier positif m , d'événements $A_1, \dots, A_q$ de $\mathcal{B}^m$ et d'un nombre α de $]0, 1[$ par

$$(P, Q) \in E \iff \max_{1 \leq j \leq q} |P^m(A_j) - Q^m(A_j)| < \alpha.$$

D'après le théorème (I A 3), il existe un entier positif r et $\hat{P} : X^{mr} \rightarrow H$ vérifiant

$$\forall P \in H, P^{mr}\{(\hat{P}, P) \in E\} > 1 - \epsilon.$$

Si nous posons $\hat{f} = f \circ \hat{P}$, nous avons donc :

$$\forall P \in H, P^{mr}\{\delta(\hat{f}, f(P)) \leq \gamma\} > 1 - \epsilon \quad \blacksquare$$

Condition nécessaire : Etant donné un nombre $\gamma > 0$, on recherche un entourage E de E tel que

$$(P, Q) \in E \implies \delta(f(P), f(Q)) < \gamma.$$

A partir d'une suite uniformément convergente $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ d'estimateurs de f , on choisit un entier positif n vérifiant

$$\forall P \in H, P^{(n)}\{\delta(\hat{f}_n, f(P)) < \frac{\gamma}{6}\} > \frac{2}{3}.$$

Il existe une partie finie $\mathcal{M}^*$ de $\mathcal{M}$ pour laquelle on a

$$\forall \theta \in \mathcal{M}, \quad \delta(\theta, \mathcal{M}^*) < \frac{\gamma}{6}.$$

Alors l'entourage fondamental E suivant convient :

$$E = \{(P, Q) \mid P, Q \in H \text{ et } \max_{\theta \in \mathcal{M}^*} (|P^{(n)}\{\delta(\hat{f}_n, \theta) < \frac{\gamma}{6}\} - Q^{(n)}\{\delta(\hat{f}_n, \theta) < \frac{\gamma}{6}\}|) < \frac{1}{6}\}.$$

En effet, si pour toute loi P de H , θ_P désigne un point de $\mathcal{M}^*$ tel que $\delta(f(P), \theta_P) < \frac{\gamma}{6}$, nous avons :

$$P^{(n)}\{\delta(\hat{f}_n, \theta_P) < \frac{\gamma}{3}\} > \frac{2}{3} \text{ et } Q^{(n)}\{\delta(\hat{f}_n, \theta_Q) < \frac{\gamma}{3}\} > \frac{2}{3}$$

$$(P, Q) \in E \implies P^{(n)}\{\delta(\hat{f}_n, \theta_P) < \frac{\gamma}{3}\} > \frac{2}{3} \text{ et } P^{(n)}\{\delta(\hat{f}_n, \theta_Q) < \frac{\gamma}{3}\} > \frac{1}{2}$$

$$\implies \{\delta(\hat{f}_n, \theta_P) < \frac{\gamma}{3}\} \cap \{\delta(\hat{f}_n, \theta_Q) < \frac{\gamma}{3}\} \neq \emptyset$$

$$\implies \delta(\theta_P, \theta_Q) < \frac{2\gamma}{3} \implies \delta(f(P), f(Q)) < \gamma \quad \blacksquare$$

Finalement, les lemmes 1 et 3 nous donnent le résultat annoncé :

Théorème.- Dans le cas de l'échantillon, le paramètre $f : H \rightarrow (\mathbb{H}, \delta)$ est F -p.s. estimable s'il existe une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de paramètres vérifiant :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : H \rightarrow \mathbb{H}$ est (E, δ) uniformément continu ,

$$- f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{F} f$$

I A 8 - Condition nécessaire pour qu'un paramètre soit estimable.

Théorème.- Dans le cas de l'échantillon, et $(\mathbb{H}, \delta)$ étant un espace vectoriel normé séparable, il est nécessaire, pour que le paramètre $f : H \rightarrow \mathbb{H}$ soit estimable, que l'on puisse trouver une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de paramètres tels que :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : H \rightarrow \mathbb{H}$ est (E, δ) uniformément continu,

$$- f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f \quad (\text{convergence simple}).$$

(δ est évidemment la distance associée à la norme $\| \cdot \|$). S. Jilovec ⁽⁵⁾ a obtenu ce résultat en supposant que $(\mathbb{H}, \delta)$ est un espace de Hilbert M séparable, et en substituant E^M à E . Nous avons simplement repris sa démonstration avec une meilleure séparation asymptotique uniforme des lois, et une discrétisation des estimateurs, qui s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme. - Dans le cas général, s'il existe une suite convergente $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ d'estimateurs de f et si l'espace paramétrique (Θ, δ) est séparable, il existe une suite convergente $(\bar{f}_n)_{n \geq 1}$ d'estimateurs de f dont chacun ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Démonstration. - Il existe un homéomorphisme ψ de (Θ, δ) sur une partie de l'espace métrique (K, ρ) .

$(\hat{\psi}_n) = (\psi \circ \hat{f}_n)$ est une suite convergente d'estimateurs du nouveau paramètre $\psi = \psi \circ f$.

L'espace $(\psi(\Theta), \rho)$ dans lequel $\psi, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \dots$ prennent leurs valeurs est précompact.

Pour tout entier $n > 0$, on peut donc extraire de $\psi(\Theta)$ une suite finie $\Psi_n = \{\psi_{n,1}, \dots, \psi_{n,k(n)}\}$ telle que :

$$\forall \psi \in \psi(\Theta), \rho(\psi, \Psi_n) < \frac{1}{n}$$

On définit une nouvelle suite d'estimateurs de ψ en posant :

$$\forall x \in X^{(n)}, \bar{\psi}_n(x) = \psi_{n,j(n,x)}$$

$$\text{où } j(n,x) = \inf \{j \mid 1 \leq j \leq k(n), \rho(\hat{\psi}_n(x), \psi_{n,j}) < \frac{1}{n}\}$$

Soit $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \implies \{\rho(\bar{\psi}_n, \psi(P)) > \varepsilon\} \subset \{\rho(\bar{\psi}_n, \hat{\psi}_n) + \rho(\hat{\psi}_n, \psi(P)) > \varepsilon\}$$

$$\subset \{\rho(\hat{\psi}_n, \psi(P)) > \frac{\varepsilon}{2}\}$$

$$\implies P^{(n)}_{\{\rho(\bar{\psi}_n, \psi(P)) > \varepsilon\}} \leq P^{(n)}_{\{\rho(\hat{\psi}_n, \psi(P)) > \frac{\varepsilon}{2}\}}.$$

$(\bar{\psi}_n)$ est donc convergente. Il suffit de poser $\bar{f}_n = \psi^{-1} \circ \bar{\psi}_n, \forall n \geq 1$ ■

Démonstration du théorème.-

Soit $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ une suite convergente d'estimateurs de f , chacun d'eux ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

Soit $\odot_u$ la boule unité ouverte de $\odot$, et ψ l'homéomorphisme de $\odot$ sur $\odot_u$ défini par

$$\forall \theta \in \odot, \quad \psi(\theta) = \frac{\theta}{1 + ||\theta||}.$$

$\psi = \psi \circ f$ est un nouveau paramètre, qui est borné, et $(\hat{\psi}_n)_{n \geq 1} = (\psi \circ \hat{f}_n)_{n \geq 1}$ est une suite convergente d'estimateurs de ψ . On pose

- $\hat{\psi}_n(X^n) = \{\hat{\psi}_1^n, \dots, \hat{\psi}_{r_n}^n\}$,
- $A_i^n = \{\hat{\psi}_i^n = \hat{\psi}_i^n\}$ pour $i = 1, \dots, r_n$,
- $a_n = \text{Max} \left\{ \frac{1}{2}, ||\hat{\psi}_1^n||, \dots, ||\hat{\psi}_{r_n}^n|| \right\}$,
- $\psi_n(P) = \int \hat{\psi}_n dP^n = \sum_{i=1}^{r_n} \hat{\psi}_i^n P^n(A_i^n)$, pour toute loi P dans H .

La fonction $\psi_n : H \rightarrow \odot$ a les propriétés suivantes :

- $||\psi_n(P)|| \leq a_n < 1$, pour toute loi P
 - $\psi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \psi$: en effet, soit $P \in H$ et $\varepsilon > 0$.
- $$||\psi_n(P) - \psi(P)|| \leq \sum_{i=1}^{r_n} ||\hat{\psi}_i^n - \psi(P)|| P^n(A_i^n) \leq \varepsilon + 2 P^n\{||\hat{\psi}_n - \psi(P)|| > \varepsilon\}.$$
- $$\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} ||\psi_n(P) - \psi(P)|| \leq \varepsilon.$$

Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers ≥ 3 et $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs telles que

$$\forall n \geq 1, \frac{2}{p_n} < \frac{1}{n \cdot a_n \cdot r_n} \quad \text{et} \quad \frac{\epsilon_n a_n}{1 - a_n} < \frac{1}{n}.$$

Il est clair que $\epsilon_n < \frac{1}{n}$, et que si l'on pose

$$E_n = \{(P, Q) \mid P, Q \in H \text{ et } \max_{1 \leq i \leq r_n} |P^n(A_i^n) - Q^n(A_i^n)| \leq \frac{2}{p_n}\},$$

on a $(P, Q) \in E_n \implies ||\psi_n(P) - \psi_n(Q)|| < \frac{1}{n}.$

Pour chaque n , et d'après le théorème (I A 3), on peut trouver un entier positif m_n et une fonction $\hat{P}_n : X^{nm_n} \rightarrow H$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs, est B^{nm_n} -mesurable et vérifie

$$\forall P \in H, P^{nm_n} \{(\hat{P}_n, P) \in E_n\} > 1 - \epsilon_n.$$

On pose $\hat{P}_n(X^{nm_n}) = \{\hat{P}_1^n, \dots, \hat{P}_{s_n}^n\}$

$$- B_i^n = \{\hat{P}_n = \hat{P}_i^n\} \quad \text{pour } i = 1, \dots, s_n.$$

$\bar{\psi}_n = \psi_n \circ \hat{P}_n$ a les propriétés suivantes :

$$- \bar{\psi}_n : (X^{nm_n}, B^{nm_n}) \rightarrow (\oplus_u, \delta)$$

$$- ||\bar{\psi}_n|| \leq a_n$$

$$- P^{nm_n} \{\delta(\bar{\psi}_n, \psi_n(P)) < \frac{1}{n}\} > 1 - \epsilon_n.$$

On voit que la loi de $\bar{\psi}_n$ est mieux concentrée autour de $\psi_n(P)$ que celle de $\hat{\psi}_n$, lorsque P est la loi de l'échantillon, quelle que soit cette loi. On peut maintenant revenir au paramètre f :

$$\bar{f}_n = \psi^{-1} \circ \bar{\psi}_n = \frac{\bar{\psi}_n}{1 - ||\bar{\psi}_n||} \quad \text{ne prend que les valeurs } \bar{f}_i^n = \psi^{-1}(\psi_n(\hat{P}_i^n))$$

$i = 1, \dots, s_n$, et est B^{nm_n} -mesurable. De plus, on a

$$||\bar{f}_n|| \leq \frac{a_n}{1 - a_n}.$$

$$\forall P \in H, \text{ soit } f_n(P) = \sum_{i=1}^{s_n} \bar{f}_i^n P^{nm_n(B_i^n)} = \int \bar{f}_n dP^{nm_n}.$$

Montrons que $(f_n)_{n \geq 1}$ est la suite de paramètres recherchée.

a) f_n est (E, δ) uniformément continu puisque $\forall \varepsilon > 0$,

$$\max_{1 \leq i \leq s_n} |P^{nm_n(B_i^n)} - Q^{nm_n(B_i^n)}| < \frac{\varepsilon(1-a_n)}{a_n s_n} \implies ||f_n(P) - f_n(Q)|| < \varepsilon.$$

b) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$: en effet, soit $\varepsilon > 0$ et $P \in H$.

ψ^{-1} étant continue au point $\psi(P)$, il existe $\alpha(\varepsilon, P) > 0$, tel que

$$\{||\bar{f}_n - f(P)|| \geq \varepsilon\} \subset \{||\bar{\psi}_n - \psi(P)|| \geq \alpha(P, \varepsilon)\}.$$

A partir d'un certain rang $n(P, \varepsilon)$, nous avons

$$\alpha(P, \varepsilon) = ||\psi_n(P) - \psi(P)|| > \frac{1}{n}.$$

$$n \geq n(P, \varepsilon) \implies \{||\bar{f}_n - f(P)|| \geq \varepsilon\} \subset \{||\bar{\psi}_n - \psi_n(P)|| > \frac{1}{n}\}$$

$$\implies P^{nm_n} \{||\bar{f}_n - f(P)|| \geq \varepsilon\} < \varepsilon_n.$$

$$||f_n(P) - f(P)|| \leq \sum_{i=1}^{s_n} ||\bar{f}_i^n - f(P)|| P^{nm_n(B_i^n)}$$

$$\leq \varepsilon + (||f(P)|| + \frac{a_n}{1 - a_n}) P^{nm_n} \{||\bar{f}_n - f(P)|| > \varepsilon\}$$

$$\leq \varepsilon + (||f(P)|| + \frac{a_n}{1 - a_n}) \varepsilon_n, \text{ si } n \geq n(P, \varepsilon),$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} ||f_n(P) - f(P)|| \leq \varepsilon \quad \blacksquare$$

I A 9 - Récapitulation des résultats précédents.

Théorème.- Dans le cas de l'échantillon, considérons les propositions suivantes :

- a) f est estimable et $(f(H), \delta)$ est séparable,
- b) f est p.s. estimable et $(f(H), \delta)$ est séparable,
- c) f est limite d'une suite de paramètres (E, δ) - uniformément continu.

Si $(\mathbb{H}, \delta)$ est un espace vectoriel normé, $(a) \iff (b) \iff (c)$;

Si $(\mathbb{H}, \delta)$ est un espace métrique quelconque, $(a) \iff (b) \implies (c)$.

Démonstration.- $(c) \implies (b)$, quel que soit $(\mathbb{H}, \delta)$: en effet, d'après le théorème (I A 7), (c) entraîne l'existence d'une suite d'estimateurs de f convergeant p.s., chacun d'eux ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Il suffit donc d'appliquer le lemme ci-dessous.

Lemme 1.- Dans le cas général, s'il existe une suite convergente $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ d'estimateurs de f , chaque $f_n(X^{(n)})$ étant dénombrable, $(f(H), \delta)$ est séparable.

En effet $\mathbb{H}^* = \bigcup_{n \geq 1} (\hat{f}_n(X^{(n)}))$ est dénombrable. De plus, $\forall P \in H$ et $\forall \epsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P^{(n)}\{\delta(\hat{f}_n, f(P)) \leq \epsilon\} = 1$ montre que lorsque n est assez grand, $\{\delta(\hat{f}_n, f(P)) \leq \epsilon\}$ n'est pas vide, donc $\delta(f(P), \mathbb{H}^*) \leq \epsilon$ ■

$(b) \implies (a)$, quel que soit $(\mathbb{H}, \delta)$: évident.

$(a) \implies (c)$ si $(\mathbb{H}, \delta)$ est un espace vectoriel normé.

En effet, si $\mathbb{M}^f$ désigne l'espace vectoriel engendré par $f(H)$, $(\mathbb{M}^f, \delta)$ est un espace vectoriel normé séparable. S'il existe une suite convergente d'estimateurs de f prenant leurs valeurs dans $\mathbb{M}^f$, il suffit d'appliquer le théorème (I A 8) en substituant $(\mathbb{M}^f, \delta)$ à $(\mathbb{M}, \delta)$.

Finalement, il suffit de démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.- Dans le cas général, si le paramètre $f : H \rightarrow \mathbb{M}$ est estimable (resp. p.s. estimable, resp. p.co.estimable), et si $(f(H), \delta)$ est séparable, il existe une suite convergente (resp. p.s. convergente, resp. p.co. convergente) d'estimateurs stricts de f , autrement dit d'estimateurs à valeurs dans $f(H)$.

Démonstration.- Soit $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ une suite d'estimateurs de f , et $(\theta_j)_{j \geq 1}$ une suite dense dans $(f(H), \delta)$.

$\forall x \in X^{(n)}$, on pose

$$\bar{f}_n(x) = \theta_{j(n,x)} \quad \text{où} \quad j(n,x) = \text{Min}\{j \mid \delta(\hat{f}_n(x), \theta_j) \leq \delta(\hat{f}_n(x), f(H)) + \frac{1}{n}\}$$

Il est clair que $\bar{f}_n : X^{(n)} \rightarrow f(H)$ est $(B^{(n)}, \delta)$ mesurable, et que

$$\begin{aligned} \forall P \in H \quad \text{et} \quad \forall \epsilon > 0, \quad \{\delta(\bar{f}_n, f(P)) > \epsilon\} &\subset \{\delta(\bar{f}_n, \hat{f}_n) + \delta(\hat{f}_n, f(P)) > \epsilon\} \\ &\subset \{2 \delta(\hat{f}_n, f(P)) > \epsilon - \frac{1}{n}\} \\ &\subset \{\delta(\hat{f}_n, f(P)) > \frac{\epsilon}{4}\} \quad \text{si} \quad \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Dans les mêmes conditions, on a aussi

$$\bigcup_{k \geq n} \{\delta(\bar{f}_k, f(P)) > \epsilon\} \subset \bigcup_{k \geq n} \{\delta(\hat{f}_k, f(P)) > \frac{\epsilon}{4}\}.$$

Si $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ converge suivant un certain mode, $(\bar{f}_n)_{n \geq 1}$ converge donc suivant ce mode ■

(a) $\implies$ (b) si $(f(H), \delta)$ est séparable (S. Jilovec, ⁴)

En effet, d'après le lemme ci-dessus, on peut supposer que $(\mathbb{H}, \delta)$ est séparable.

Soit $\mathbb{H}'$ un espace de Hilbert séparable, de dimension hilbertienne infinie, δ' sa distance. Il existe une fonction $\psi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}'$ qui est homéomorphisme de $(\mathbb{H}, \delta)$ sur $(\psi(\mathbb{H}), \delta')$.

Le nouveau paramètre $f' = \psi \circ f : H \rightarrow \mathbb{H}'$ est estimable, donc p.s. estimable, d'après la première partie du théorème.

Soit $(\hat{f}'_n)_{n \geq 1}$ une suite d'estimateurs stricts de f' convergeant p.s. Alors $(\psi^{-1} \circ \hat{f}'_n)_{n \geq 1}$ est une suite p.s. convergente d'estimateurs de f ■

I A 10 - Remarques.

a) D'après (I A 7, lemme 1), dans le cas général, $(\mathbb{H}, \delta)$ étant un espace métrique quelconque, le paramètre f est uniformément p.s. estimable si et seulement s'il est uniformément estimable.

b) Dans le cas de l'échantillon, la séparabilité de $(f(H), \delta)$ n'est pas nécessaire pour que f soit estimable, comme le montre l'exemple suivant : soit (X, ρ) un espace métrique non séparable muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$. On suppose que $H = \{\delta_x, x \in X\}$ (ensemble des lois sur $(X, \mathcal{B})$ concentrées en un point) et que $(\mathbb{H}, \delta) = (X, \rho)$.

Considérons le paramètre $f : H \rightarrow \mathbb{H}$

$$\delta_x \rightsquigarrow x$$

$\hat{f}_n$ désignant la projection de X^n sur le premier espace facteur, on a :

$$\forall x \in X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* , \delta_x^n \{ \hat{f}_n = x \} = 1 .$$

$(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ est donc une suite uniformément p.co. convergente d'estimateurs de f bien que $(f(H), \delta)$ ne soit pas séparable.

c) Néanmoins, S. Abou-Jaoudé (7) a donné un théorème de non-existence d'une suite convergente d'estimateurs, dans le cas de l'échantillon, dans lequel la non-séparabilité de $(f(H), \delta)$ intervient de manière essentielle. J. Geffroy a illustré ce théorème par cet exemple : soit $M > 1$, H l'ensemble des lois boréliennes P_θ sur $\mathbb{R}$ admettant une densité θ continue sur $[0, 1[$, nulle ailleurs et majorée par M . L'ensemble $\oplus$ de ces densités est muni de la distance δ de la convergence uniforme. Alors la densité, autrement dit le paramètre

$$f : H \longrightarrow \oplus$$

$$P_\theta \rightsquigarrow \theta$$

n'est pas estimable.

I B - TESTS ET SEPARATION ASYMPTOTIQUE UNIFORME.

Les deux théorèmes suivants permettront la construction de tests convergents à partir de la notion de séparation asymptotique uniforme.

I B 1 - Théorème (*) Soit H_0 une hypothèse quelconque , $H_1 = H - H_0$ l'hypothèse complémentaire.

Dans le cas général, pour que H_0 soit testable, il est suffisant que l'on ait :

(T) Il existe deux suites d'hypothèses $(H_{i,r})_{r \geq 1}$, $i = 0,1$ telles que

$$- H_i = \bigcup_{r=1}^{+\infty} H_{i,r} \text{ pour } i = 0,1$$

- $\forall r, s \geq 1$, $H_{0,r}$ et $H_{1,s}$ se séparent asymptotiquement uniformément.

Dans le cas de l'échantillon, la condition (T) est nécessaire et suffisante.

Démonstration.-

a) Supposons (T) vérifiée.

$\forall r \in \mathbb{N}^*$ et pour $i = 0,1$, posons $H'_{i,r} = \bigcup_{s=1}^r H_{i,s}$.

$\forall i, j \in \mathbb{N}^*$, $(C_n(i,j))_{n \geq 1}$ désignant une suite adaptée de cylindres séparant asymptotiquement uniformément $H_{0,i}$ et $H_{1,j}$, soit

$$\forall n, r, s \in \mathbb{N}^* \quad C'_n(r,s) = \bigcup_{i=1}^r \left(\bigcap_{j=1}^s C_n(i,j) \right).$$

Il est clair que $(C'_n(r,s))_{n \geq 1}$ sépare asymptotiquement uniformément $H'_{0,r}$ et $H'_{1,s}$. Il en résulte que

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists m_p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\inf_{P_0 \in H'_{0,p}} P_0^{(m_p)} (C'_m(p,p)) - \sup_{P_1 \in H'_{1,p}} P_1^{(m_p)} (C'_m(p,p)) \geq 1 - \frac{1}{p}.$$

On peut supposer que la suite $(m_p)_{p \geq 1}$ est strictement croissante.

$\forall n \geq m_1$, posons $C'_n = C'_m(p,p) \times \prod_{k=m_p+1}^n \chi_k$, si $m_p \leq n < m_{p+1}$,

l'unique entier p ayant cette propriété étant noté $p(n)$; si $n < m_1$,

C'_n désigne un événement $B^{(n)}$ -mesurable quelconque.

$\forall P_0 \in H_0, \exists p(P_0) \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \geq p(P_0) \implies P_0 \in H'_{0,p}$.

Alors $n \geq m_{p(P_0)} \implies P_0^{(n)} (C'_n) = P_0^{(m_{p(n)})} (C'_{m_{p(n)}}) \geq 1 - \frac{1}{p(n)}$.

$\forall P_1 \in H_1, \exists p(P_1) \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \geq p(P_1) \implies P_1 \in H'_{1,p}$.

Alors $n \geq m_{p(P_1)} \implies P_1^{(n)} (C'_n) \leq \frac{1}{p(n)}$.

$(C'_n)_{n \geq 1}$ sépare donc asymptotiquement H_0 et H_1 .

b) Réciproquement, on suppose que H_0 et H_1 se séparent asymptotiquement, dans le cas de l'échantillon.

Le paramètre $1_{H_0} : H \rightarrow \mathbb{R}$ est estimable, puisque si $(C_n)_{n \geq 1}$ est une suite adaptée de cylindres séparant asymptotiquement H_0 et H_1 ,

$(1_{C_n})_{n \geq 1}$ est une suite convergente d'estimateurs de ce paramètre.

Il résulte du théorème (I A 9) qu'il existe une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de paramètres réels tels que

$$- f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$$

- pour tout entier positif n , il existe une suite uniformément convergente $(\hat{f}_m^n)_{m \geq 1}$ d'estimateurs de f_n .

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, posons $H_{0,n} = \{P_0 \mid P_0 \in H_0 \text{ et } f_p(P_0) > \frac{2}{3}, \forall p \geq n\}$

$H_{1,n} = \{P_1 \mid P_1 \in H_1 \text{ et } f_p(P_1) < \frac{1}{3}, \forall p \geq n\}$.

Puisque $H_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \uparrow H_{0,n}$ et que $H_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \uparrow H_{1,n}$, il suffit de démontrer que pour tout n , $H_{0,n}$ et $H_{1,n}$ se séparent asymptotiquement uniformément, ce qui résulte de :

$$\inf_{P_0 \in H_{0,n}} P_0^{(m)} \left\{ \hat{f}_m^n > \frac{1}{2} \right\} \geq \inf_{P_0 \in H_0} P_0^{(m)} \left\{ \left| \hat{f}_m^n - f_n(P_0) \right| \leq \frac{1}{6} \right\} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$$

$$\inf_{P_1 \in H_{1,n}} P_1^{(m)} \left\{ \hat{f}_m^n < \frac{1}{2} \right\} \geq \inf_{P_1 \in H_1} P_1^{(m)} \left\{ \left| \hat{f}_m^n - f_n(P_1) \right| \leq \frac{1}{6} \right\} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1.$$

I B 2 - Exemple : cas où H_0 et H_1 sont dénombrables, dans le cas général.

On déduit du théorème précédent que ces hypothèses se séparent asymptotiquement si et seulement si toute loi de H_0 se sépare asymptotiquement de toute loi de H_1 . En particulier, dans le cas de l'échantillon, il est nécessaire et suffisant que $H_0 \cap H_1 = \emptyset$ (voir ¹⁴, th. 4 et cor. 4.1).

I B 3 - Théorème (*). - Dans le cas général, soit $(H_{i,r})_{r \geq 1}, i = 0, 1$

deux suites d'hypothèses. Pour que $H_0 = \bigcup_{r=1}^{+\infty} H_{0,r}$ et $H_1 = \bigcup_{r=1}^{+\infty} H_{1,r}$ se

séparent asymptotiquement, il suffit que pour tout entier positif s , il existe une suite adaptée $(C_n(s))_{n \geq 1}$ de cylindres telle que :

$$\underline{- \forall r \in \mathbb{N}^*, \inf_{P \in H_{0,r}} P^{(n)}(C_n(s)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$$

$$\underline{- \forall P \in H_{1,s}, P^{(n)}(C_n(s)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$$

Démonstration. - $\forall p \in \mathbb{N}^*$, posons $H'_{0,p} = \bigcup_{j=1}^p H_{0,j}$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\exists m_p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\inf_{P \in H'_{0,p}} P^{(m_p)}(C_{m_p}(j)) \geq 1 - \frac{1}{p} \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots, p.$$

On peut supposer que $m_1 = 1$ et que la suite $(m_p)_{p \geq 1}$ est strictement croissante.

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_{m_p} = \bigcap_{j=1}^p C_{m_p}(j)$; et on complète cette suite en une suite adaptée de cylindres, comme précédemment.

Cette suite sépare asymptotiquement les hypothèses H_0 et H_1 puisque :

$$- \forall P_0 \in H_0, \exists p(P_0) \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } p \geq p(P_0) \implies P_0 \in H'_{0,p}.$$

$$\text{Alors } n \geq m_{p(P_0)} \implies P_0^{(n)}(C_n) = P_0^{(m_{p(n)})}(C_{m_{p(n)}}) \geq 1 - \frac{1}{p(n)}.$$

$$- \forall P_1 \in H_1, \exists p(P_1) \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } P_1 \in H_{1,p(P_1)}.$$

$$\text{Alors } n \geq m_{p(P_1)} \implies P_1^{(n)}(C_n) \leq P_1^{(m_{p(n)})}(C_{m_{p(n)}}(p(P_1))) \blacksquare$$

I B 4 - La séparation asymptotique des hypothèses H_0 et H_n pour tout entier positif n n'implique pas la séparation asymptotique de H_0 et de $\bigcup_{n=1}^{+\infty} H_n$.

Exemple. - Dans le cas de l'échantillon, soit $(X, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et $H = \{N(\theta, 1), \theta \in \mathbb{R}\}$.

Quel que soit le rationnel q , l'hypothèse $H_q = \{N(q, 1)\}$ est testable, et a fortiori se sépare asymptotiquement de l'hypothèse $H_0 = \{N(\theta, 1), \theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$.

Pourtant on sait que H_0 et $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} H_q$ ne se séparent pas asymptotiquement (voir ¹⁴, p. 130 ou ¹⁹, exemple 3.4).

I C - ESTIMATION ET SEPARATION ASYMPTOTIQUE UNIFORME.

I C 1 - Le théorème suivant permettra la construction d'estimateurs convergents et uniformément convergents.

Théorème.- Dans le cas général, pour que le paramètre $f : H \rightarrow \mathbb{H}$ soit estimable (resp. uniformément estimable) il suffit que l'espace métrique $(\mathbb{H}, \delta)$ soit séparable (resp. précompact) et que la condition (G) ci-dessous soit vérifiée :

(G) Pour tout couple (B_1, B_2) de boules fermées de $(\mathbb{H}, \delta)$
 $f^{-1}(B_1)$ et $f^{-1}(B_2)$ se séparent asymptotiquement uniformément
 si $\delta^*(B_1, B_2) > 0$.

Nous faisons la démonstration en distinguant les cas où $(\mathbb{H}, \delta)$ est précompact, σ -précompact et séparable.

I C 2 - Cas où $(\mathbb{H}, \delta)$ est précompact.

Lemme.- Dans le cas général, si $(\mathbb{H}, \delta)$ est précompact, pour que $f : H \rightarrow \mathbb{H}$ soit uniformément estimable, il faut et il suffit que $\forall \gamma > 0$
 $\exists \alpha \in]0, \gamma[$ tel que

$\forall \theta \in \mathbb{H}$, $f^{-1}(b(\theta, \alpha))$ et $H - f^{-1}(B(\theta, \gamma))$ se séparent asymptotiquement uniformément.

Démonstration.- La condition est nécessaire, que $(\mathbb{H}, \delta)$ soit précompact ou non, de manière évidente.

Condition suffisante : soit $\gamma > 0$ et $\epsilon \in]0, 1[$.

Il existe une partie finie $\{P_1, \dots, P_r\}$ de H , un entier positif n et des événements $C_1, \dots, C_r$ de $\mathcal{B}^{(n)}$ tels que

$$- f(H) \subset \bigcup_{i=1}^r b(f(P_i), \alpha)$$

$$- \forall P \in \mathcal{P} \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, r\}$$

$$\delta(f(P), f(P_i)) < \alpha \implies P^{(n)}(C_i) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\delta(f(P), f(P_i)) \geq \gamma \implies P^{(n)}(C_i) < \frac{\varepsilon}{2r}.$$

On définit une application $\hat{f} : X^{(n)} \rightarrow \mathbb{Q}$ par

$$\text{Si } x \in X^{(n)} - \bigcup_{i=1}^r C_i, \hat{f}(x) = f(P_1)$$

$$\text{Si } x \in \bigcup_{i=1}^r C_i, \hat{f}(x) = f(P_{i(x)}) \text{ où } i(x) = \min \{i \mid x \in C_i\}.$$

$\hat{f}$ est $(B^{(n)}, \delta)$ -mesurable, et de plus, pour toute hypothèse simple P , on a :

$$\{\delta(\hat{f}, f(P)) > \gamma\} \subset (X^{(n)} - \bigcup_{i=1}^r C_i) \cup \left(\bigcup_{i: \delta(f(P_i), f(P)) > \gamma} C_i \right)$$

On en déduit que

$$\sup_{P \in H} (P^{(n)} \{\delta(\hat{f}, f(P)) > \gamma\}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Il suffit d'appliquer le lemme 2 (I A 7) pour conclure ■

Démonstration du théorème. - Choisissons arbitrairement $\gamma > 0$

et θ dans $\mathbb{Q}$. Si $\mathbb{Q} - B(\theta, \gamma) \neq \emptyset$, on peut y trouver des points

$\theta_1, \dots, \theta_r$ tels que

$$\mathbb{Q} - B(\theta, \gamma) \subset \bigcup_{i=1}^r b(\theta_i, \frac{\gamma}{3}).$$

Les hypothèses $f^{-1}(B(\theta, \frac{\gamma}{3}))$ et $f^{-1}(B(\theta_i, \frac{\gamma}{3}))$ se séparent asymptotiquement uniformément pour $i = 1, \dots, r$, en vertu de (G) puisque

$$\delta^*(B(\theta, \frac{\gamma}{3}), B(\theta_i, \frac{\gamma}{3})) > \frac{\gamma}{3}.$$

Il en est de même pour les hypothèses $f^{-1}(B(\theta, \frac{\gamma}{3}))$ et $f^{-1}(\bigcup_{i=1}^r B(\theta_i, \frac{\gamma}{3}))$, et a fortiori pour $f^{-1}(b(\theta, \frac{\gamma}{3}))$ et $f^{-1}(\bigoplus - B(\theta, \gamma))$

I C 3 - Cas où $(\bigoplus, \delta)$ est σ -précompact.

Il existe une suite croissante de parties de $\bigoplus : (\bigoplus_p)_{p \geq 1}$ telles que

$$- \bigoplus = \bigcup_{p=1}^{+\infty} \bigoplus_p$$

- $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $(\bigoplus_p, \delta)$ est précompact.

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, la restriction de f à $f^{-1}(\bigoplus_p)$ notée $f \upharpoonright f^{-1}(\bigoplus_p)$ est uniformément estimable, d'après le résultat précédent. Il suffit alors d'appliquer le lemme ci-dessous

Lemme.- Dans le cas général, pour que le paramètre $f : H \rightarrow (\bigoplus, \delta)$ soit estimable (resp. p.s. estimable, resp. p. co. estimable), il est suffisant qu'il existe une suite croissante $(\bigoplus_p)_{p \geq 1}$ de parties de $\bigoplus$ ayant les propriétés suivantes :

- $f(H) \subset \bigcup_{p \geq 1} \bigoplus_p$
 - $\forall p \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(\hat{f}_{p,n})_{n \geq 1}$ d'estimateurs de $f \upharpoonright f^{-1}(\bigoplus_p)$ convergeant uniformément [resp. uniformément p.s., resp. uniformément p.co.].

Ce résultat est connu pour la convergence en probabilité et la convergence p.s. Pour la convergence p.co., voir S. Abou - Jaoudé (⁷, th. 2).

Démonstration.- $\forall p \in \mathbb{N}^*$, posons $H_p = f^{-1}(\bigoplus_p)$.

On peut supposer que $H_1 = f^{-1}(\odot_1)$ n'est pas vide.

Soit $(n_p)_{p \geq 1}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs telle que $\forall p \in \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \{n_p, n_{p+1}, \dots\}$, on ait

$$\left(\sup_{P \in H_p} P^{(n)} \{ \delta(\hat{f}_{p,n}, f(P)) > \frac{1}{p} \} \right) \leq \frac{1}{p}$$

$$\text{(resp. } \left(\sup_{P \in H_p} P \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} \{ \delta(\hat{f}_{p,k}, f(P)) > \frac{1}{p} \} \times \prod_{j=k+1}^{+\infty} X_j \right) \right) \leq \frac{1}{p^2} \text{ ,}$$

$$\text{resp. } \left(\sup_{P \in H_p} \sum_{k=n}^{+\infty} (P^{(k)} \{ \delta(\hat{f}_{p,k}, f(P)) > \frac{1}{p} \}) \right) \leq \frac{1}{p^2} \text{) .}$$

Soit $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ une suite d'estimateurs du paramètre f vérifiant $\forall p \in \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \{n_p, n_{p+1}, \dots, n_{p+1} - 1\}$, $\hat{f}_n = \hat{f}_{p,n}$.

Si $n \geq n_1$, l'unique entier positif p tel que $n_p \leq n < n_{p+1}$ est noté $p(n)$.

Soit une hypothèse simple P et un réel positif ε , tous deux quelconques.

Soit $p(\varepsilon, P) \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \geq p(\varepsilon, P) \implies (P \in H_p \text{ et } \varepsilon > \frac{1}{p})$.

Alors le lemme résulte des majorations suivantes :

- pour la convergence en probabilité :

$$n \geq n_{p(\varepsilon, P)} \implies P^{(n)} \{ \delta(\hat{f}_n, f(P)) > \varepsilon \} \leq P^{(n)} \{ \delta(\hat{f}_{p(n), n}, f(P)) > \frac{1}{p(n)} \} \leq \frac{1}{p(n)}$$

- pour la convergence p.s.

$$\begin{aligned}
 n \geq n_{p(\varepsilon, P)} &\implies P\left(\bigcup_{k \geq n} (\{\delta(\hat{f}_k, f(P)) > \varepsilon\} \times \prod_{j=k+1}^{+\infty} X_j)\right) \\
 &\leq P\left(\bigcup_{q=p(n)}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n_q}^{n_{q+1}-1} (\{\delta(\hat{f}_{q,k}, f(P)) > \frac{1}{q}\} \times \prod_{j=k+1}^{+\infty} X_j)\right)\right) \\
 &\leq \sum_{q=p(n)}^{+\infty} P\left(\bigcup_{k=n_q}^{+\infty} (\{\delta(\hat{f}_{q,k}, f(P)) > \frac{1}{q}\} \times \prod_{j=k+1}^{+\infty} X_j)\right) \\
 &\leq \sum_{q=p(n)}^{+\infty} \frac{1}{q^2} .
 \end{aligned}$$

- pour la convergence p.co.

$$n \geq n_{p(\varepsilon, P)} \implies$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=n}^{+\infty} P^{(k)}\{\delta(\hat{f}_k, f(P)) > \varepsilon\} &\leq \sum_{q=p(n)}^{+\infty} \left(\sum_{k=n_q}^{n_{q+1}-1} P^{(k)}\{\delta(\hat{f}_{q,k}, f(P)) > \frac{1}{q}\}\right) \\
 &\leq \sum_{q=p(n)}^{+\infty} \frac{1}{q^2} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

I C 4 - Cas où $(\mathbb{H}, \delta)$ est séparable.

Dans ce cas, plus général que le précédent, il suffit de montrer que f est $(H_t, \mathbb{H}_b)$ -mesurable, d'après le théorème 4.8 ⁽¹⁹⁾ de H. Schmerkotte, où une suite convergente d'estimateurs est effectivement construite.

Soit B une boule fermée quelconque de $(\mathbb{H}, \delta)$.

Si $B = \mathbb{H}$, $f^{-1}(B)$ est testable. Sinon, on peut trouver une suite $(B_n)_{n \geq 1}$ de boules fermées telles que

$$\begin{aligned}
 - \mathbb{H} - B &= \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \\
 - \forall n \in \mathbb{N}^*, \delta^*(B, B_n) &> 0 .
 \end{aligned}$$

Il en résulte que $f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(B_n)$ se séparent asymptotiquement uniformément, d'après (G), donc que $f^{-1}(B)$ est testable, d'après le théorème (I B 1). On en déduit que f est $(H_t, \bigoplus_b)$ - mesurable puisque H_t est une algèbre de parties de H ■

I C 5 - Remarques. - Il est évident que (G) est nécessaire lorsque f est uniformément estimable, que $(\bigoplus, \delta)$ soit ou non précompact, dans le cas général. Par contre, l'estimabilité de f n'implique pas (G).

Exemple. - Quel que soit α dans $[0,1]$, P désigne la probabilité sur $(X, B) = (\{0,1\}, P\{0,1\})$ définie par $P_\alpha = \alpha \delta_1 + (1-\alpha) \delta_0$.

On se place dans le cas de l'échantillon, avec $H = H_0 \cup H_1$, où $H_0 = \{P_0\}$ et $H_1 = \{P_{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Le paramètre $f = 1_{H_0} : H \rightarrow (\{0,1\}, | \cdot |) = (\bigoplus, \delta)$ est estimable puisque H_0 et H_1 se séparent asymptotiquement.

De plus, pour les boules fermées $B_0 = B(1,0)$ et $B_1 = B(0,0)$, on a $\delta^*(B_0, B_1) = 1$. Pourtant $H_0 = f^{-1}(B_0)$ et $H_1 = f^{-1}(B_1)$ ne se séparent pas asymptotiquement uniformément.

Sinon, on pourrait trouver un entier positif m et un événement C de B^m tel que :

$$\begin{aligned} - \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{\frac{1}{n}}^m(C) &< \frac{1}{3}, \\ - P_0^m(C) &> \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

On en déduirait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{3} < d_V(P_0^m, P_{\frac{1}{n}}^m) \leq 1 - (1 - d_V(P_0, P_{\frac{1}{n}}))^m,$$

où d_V est la distance en variations (voir II A).

C'est absurde parce que

$$d_V(P_0, P_{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} \quad \blacksquare$$

Néanmoins, si f est estimable, aucune hypothèse n'étant faite sur $(\mathbb{H}, \delta)$, il est évident que pour tout couple (B_1, B_2) de boules fermées de $(\mathbb{H}, \delta)$, $f^{-1}(B_1)$ et $f^{-1}(B_2)$ se séparent asymptotiquement si $\delta^*(B_1, B_2) > 0$. Dans le cas de l'échantillon, il en résulte que l'on peut trouver des parties de $f^{-1}(B_1)$ et de $f^{-1}(B_2)$ "aussi grosses que l'on veut" (condition (T) du théorème (I B 1)) et qui se séparent asymptotiquement uniformément.

I C 6 - Pour mettre en évidence la simplicité de la condition (G), nous donnons maintenant une condition nécessaire et suffisante pour que f soit estimable. Cette condition est naturelle, mais paraît inutilisable à cause de (ii), alors que l'on mettra (G) en oeuvre aisément, à partir de la décantation asymptotique uniforme.

Théorème.- Dans le cas général, $(\mathbb{H}, \delta)$ étant un espace métrique séparable dans lequel la suite $(\theta_i)_{i \geq 1}$ est dense, pour que le paramètre $f : H \rightarrow \mathbb{H}$ soit estimable, il faut et il suffit qu'à tout couple (i, p) d'entiers positifs, on puisse associer une suite adaptée $(C_n(i, p))_{n \geq 1}$ de cylindres, ces suites de cylindres vérifiant : quels que soient les entiers positifs i, j, p, q et l'hypothèse simple P , on a :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \delta(f(P), \theta_i) \leq \frac{1}{p} \implies \underbrace{P^{(n)}(C_n(i, p))}_{n \rightarrow +\infty} \longrightarrow 1 \\ \text{(ii)} \quad & \delta(\theta_i, \theta_j) \geq \frac{2}{p} + \frac{2}{q} \implies (\forall n \in \mathbb{N}^*, C_n(i, p) \cap C_n(j, q) = \emptyset) \end{aligned}$$

$$(iii) \quad p \leq p' \implies C_n(i, p') \subset C_n(i, p)$$

$$(iv) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P^{(n)} \left(\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_n(i, p) \right) \right) = 1 .$$

Démonstration. - Si f est estimable et si $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ est une suite convergente d'estimateurs de f , il suffit de poser

$$\forall i, p, n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n(i, p) = \{ \delta(\hat{f}_n, \theta_i) < \frac{2}{p} \} .$$

Réciproquement, identifions $(\hat{\mathcal{C}}, \delta)$ à un sous-espace partout dense d'un espace polonais $(\hat{\mathcal{C}}, \hat{\delta})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\hat{X}^{(n)} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} C_n(i, p) \right)$, et

$\forall x \in \hat{X}^{(n)}$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\hat{f}_{n,p}(x) = \theta_{i(x,p)}$ où $i(x, p) = \min\{i \mid x \in C_n(i, p)\}$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\hat{f}_{n,p} : \hat{X}^{(n)} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ est $(\hat{X}^{(n)} \cap \mathcal{B}^{(n)}, \hat{\delta})$ -mesurable.

De plus, $\forall p, p' \in \mathbb{N}^*$, $\delta(\hat{f}_{n,p}(x), \hat{f}_{n,p'}(x)) \leq 4 \max\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}\right)$

On peut donc définir $\hat{f}_n^* : \hat{X}^{(n)} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ par :

$$\forall x \in \hat{X}^{(n)}, \quad \hat{f}_n^*(x) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \hat{f}_{n,p}(x) .$$

$\hat{f}_n^*$ est aussi $(\hat{X}^{(n)} \cap \mathcal{B}^{(n)}, \hat{\delta})$ -mesurable.

A partir d'un prolongement $\hat{f}_n' : \mathcal{X}^{(n)} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ de $\hat{f}_n^*$ qui soit $(\mathcal{B}^{(n)}, \hat{\delta})$ -mesurable, on introduit enfin l'estimateur $\hat{f}_n : \mathcal{X}^{(n)} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ comme n'importe quelle application $(\mathcal{B}^{(n)}, \hat{\delta})$ -mesurable vérifiant :

$$\forall x \in \mathcal{X}^{(n)}, \quad \delta(\hat{f}_n'(x), \hat{f}_n(x)) < \frac{1}{n} .$$

$$\begin{aligned}
 \forall p \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall x \in X^{(n)}, \delta(\hat{f}_n(x), \hat{f}_{n,p}(x)) &\leq \frac{1}{n} + \delta(\hat{f}_n(x), \hat{f}_{n,p}(x)) \\
 &\leq \frac{1}{n} + \lim_{p' \rightarrow +\infty} \delta(\hat{f}_{n,p'}(x), \hat{f}_{n,p}(x)) \\
 &\leq \frac{1}{n} + \frac{4}{p}.
 \end{aligned}$$

Montrons que la suite d'estimateurs $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

Soit $\varepsilon > 0$ et $P \in H$: on choisit des entiers positifs p et $i(P)$ tels que

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{p} < \varepsilon \text{ et } \delta(f(P), \theta_{i(P)}) &\leq \frac{1}{p}. \\
 \hat{X}^{(n)} \cap C_n(i(P), p) &\subset \hat{X}^{(n)} \cap \{\delta(\hat{f}_{n,p}, \theta_{i(P)}) \leq \frac{4}{p}\} \\
 &\subset \hat{X}^{(n)} \cap \{\delta(\hat{f}_n, \theta_{i(P)}) \leq \frac{8}{p} + \frac{1}{n}\} \\
 &\subset \{\delta(\hat{f}_n, f(P)) \leq \frac{9}{p} + \frac{1}{n}\} \subset \{\delta(\hat{f}_n, f(P)) < \varepsilon\},
 \end{aligned}$$

dès que n est assez grand. On a alors

$$P^{(n)} \{\delta(\hat{f}_n, f(P)) \geq \varepsilon\} \leq 2 - [P^{(n)}(\hat{X}^{(n)}) + P^{(n)}(C_n(i(P), p))] \quad \blacksquare$$

CHAPITRE II

DECANTATION.

II A - RAPPELS SUR LA DISTANCE DE HELLINGER ET LA DISTANCE EN VARIATIONS.

II A 1 - Définitions.- Pour tout couple (P, Q) de probabilités sur un espace mesurable quelconque (X, B) , les quantités

$$\int \sqrt{\frac{dP}{d\mu} \cdot \frac{dQ}{d\mu}} d\mu \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \int \left| \frac{dP}{d\mu} - \frac{dQ}{d\mu} \right| d\mu = 1 - \int \inf \left(\frac{dP}{d\mu}, \frac{dQ}{d\mu} \right) d\mu$$

ne dépendent pas de μ , mesure positive σ -finie dominant P et Q .

On peut donc poser

$$\rho_H(P, Q) = \int \sqrt{\frac{dP}{d\mu} \cdot \frac{dQ}{d\mu}} d\mu, \quad \text{et puisque} \quad |\rho_H(P, Q)| \leq 1,$$

$$d_H(P, Q) = \sqrt{1 - \rho_H(P, Q)},$$

$$|P \wedge Q| = \int \inf \left(\frac{dP}{d\mu}, \frac{dQ}{d\mu} \right) d\mu,$$

$$d_V(P, Q) = \frac{1}{2} \int \left| \frac{dP}{d\mu} - \frac{dQ}{d\mu} \right| d\mu = 1 - \int \inf \left(\frac{dP}{d\mu}, \frac{dQ}{d\mu} \right) d\mu.$$

d_H et d_V sont deux distances sur l'ensemble $\mathcal{D}$ des lois sur (X, B) , à valeurs dans $[0, 1]$: la distance de Hellinger (¹⁵), et la distance en variations. Pour cette dernière, on a aussi (⁹, p. 709)

$$\forall P, Q \in \mathcal{D}, \quad d_V(P, Q) = \sup_{B \in B} |P(B) - Q(B)| = \sup_{\phi \in \Phi(X, B)} \left| \int \phi dP - \int \phi dQ \right|,$$

où $\Phi(X, B) = \{ \phi \mid \phi : (X, B) \rightarrow ([0, 1], B[0, 1]) \}.$

II A 2 - Equivalence de ces deux distances ⁽¹⁴⁾, lemme 1).

Soient P et Q deux probabilités sur $(X, \mathcal{B})$, μ une mesure positive σ -finie les dominant, $f \in \frac{dP}{d\mu}$, $g \in \frac{dQ}{d\mu}$.

$$d_V^2(P, Q) = \frac{1}{4} \left(\int |f-g| d\mu \right)^2 \leq \frac{1}{4} \int (\sqrt{f} + \sqrt{g})^2 d\mu \cdot \int (\sqrt{f} - \sqrt{g})^2 d\mu$$

$$\leq 1 - \rho_H^2(P, Q) \leq 2 (1 - \rho_H(P, Q)) .$$

$$d_V(P, Q) = \frac{1}{2} \int |f-g| d\mu \geq \frac{1}{2} \int |\sqrt{f} - \sqrt{g}|^2 d\mu = 1 - \rho_H(P, Q) .$$

En résumé, nous avons

$$(1) \quad \underline{\sqrt{2} d_H \geq d_V \geq d_H^2}$$

Ces inégalités ne sont pas améliorables en toute généralité.

Par exemple si P et Q sont deux lois étrangères sur $(X, \mathcal{B})$,

$$d_V(P, Q) = d_H^2(P, Q) = 1 .$$

En ⁽²⁵⁾, Appendice A3), ces distances sont calculées pour certains couples de lois normales. A. Hillion ⁽²⁷⁾ a considérablement affiné la comparaison de d_H et d_V .

II A 3 - Cas des lois sur $(X^{(+\infty)}, \mathcal{B}^{(+\infty)})$.

Lemme.- Soit P, Q deux lois quelconques sur $(X^{(+\infty)}, \mathcal{B}^{(+\infty)})$:

alors

$$(2) \quad \underline{d_V(P, Q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_V(P^{(n)}, Q^{(n)})}$$

$$\underline{d_H(P, Q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_H(P^{(n)}, Q^{(n)})} .$$

Démonstration. - La croissance de $(d_V(P^{(n)}, Q^{(n)}))_{n \geq 1}$ est évidente sur la quatrième définition de d_V . De plus, soit $\mu = \frac{1}{2} (P+Q)$, $p \in \frac{dP}{d\mu}$, $q \in \frac{dQ}{d\mu}$.

Il est clair que si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n \in E_\mu(p \mid \mathcal{B}^{(n)} \times \prod_{i=n+1}^{+\infty} X_i) \quad \text{et} \quad q_n \in E_\mu(q \mid \mathcal{B}^{(n)} \times \prod_{i=n+1}^{+\infty} X_i),$$

$$\text{nous avons} - d_V(P^{(n)}, Q^{(n)}) = \frac{1}{2} \int |p_n - q_n| d\mu$$

$$- p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mu\text{-p.s.}} p$$

$$- q_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mu\text{-p.s.}} q \quad (\text{th. IV.5.6., }^{10}, \text{ sur les martingales})$$

$$- 0 \leq p_n, q_n \leq 2 \quad \mu\text{-p.s.}$$

$$\text{Donc} \quad d_V(P^{(n)}, Q^{(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2} \int |p - q| d\mu = d_V(P, Q).$$

Pour d_H , la démonstration est analogue (¹⁴, th. 1).

Ainsi P et Q se séparent asymptotiquement si et seulement si elles sont étrangères.

II A 4 - Cas des lois-produits.

Lemme. - Soit P et Q deux lois-produits sur $(X^{(+\infty)}, \mathcal{B}^{(+\infty)})$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } - d_H^2(P^{(n)}, Q^{(n)}) &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - d_H^2(P_i, Q_i)) \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_V^2(P_i, Q_i)} \leq d_V(P^{(n)}, Q^{(n)}) \leq 1 - \prod_{i=1}^n (1 - d_V(P_i, Q_i)). \end{aligned}$$

Démonstration. - L'égalité concernant la distance de Hellinger est triviale, ainsi que la seconde inégalité (en utilisant la seconde définition de d_V).

La première peut se démontrer via la distance de Hellinger :

$$(1) \implies (d_V(P^{(n)}, Q^{(n)}) \geq d_H^2(P^{(n)}, Q^{(n)}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - d_H^2(P_i, Q_i)) \\ \geq 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \frac{1}{2} d_V^2(P_i, Q_i)) \geq 1 - e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_V^2(P_i, Q_i)}$$

II A 5 - En particulier, si P et Q sont deux lois sur $(X, \mathcal{B})$, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_V(P^n, Q^n) \geq 1 - e^{-\frac{n}{2} d_V^2(P, Q)}$$

En fait, la distance entre P^n et Q^n croît beaucoup plus vite avec n que ne l'indique cette minoration.

J. Geffroy ⁽²⁹⁾ a montré que :

$\mathcal{D}$ étant l'ensemble des lois sur l'espace mesurable quelconque $(X, \mathcal{B})$, il existe une fonction $\beta :]0, 1] \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} & \text{---} \forall \alpha \in]0, 1], \beta(\alpha, n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ & \text{---} \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P, Q \in \mathcal{D}, \text{ avec } \alpha = d_V(P, Q) > 0, \\ & \quad d_V(P^n, Q^n) \geq 1 - \frac{2+\alpha}{\alpha\sqrt{\pi n}} \cdot 2^{\frac{n\alpha}{2}} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{1-\frac{\alpha}{2}} \right)^{n(1-\frac{\alpha}{2})} (1 + \beta(\alpha, n)). \end{aligned}$$

A. Rényi ⁽³⁰⁾ avait également obtenu ce type de minoration.

II A 6 - Optimalité des inégalités (3).

S. Abou-Jaoudé a montré que l'on ne peut pas améliorer les inégalités (3) (voir ⁷, remarque 1). Ci-dessous, nous étudions les cas d'égalité de $d_V(P^{(n)}, Q^{(n)})$ et de $1 - \prod_{i=1}^n (1 - d_V(P_i, Q_i))$, P et Q étant deux lois-produits sur $(X^{(+\infty)}, \mathcal{B}^{(+\infty)})$, avec $n \geq 2$.

a - Si l'un des couples $(P_1, Q_1), \dots, (P_n, Q_n)$ est un couple de mesures étrangères, $P^{(n)}$ et $Q^{(n)}$ sont aussi étrangères, et il y a égalité.

b - Il y a aussi égalité si $P_i = Q_i$ pour au moins $n-1$ valeurs de l'indice i . En effet, on peut supposer que $P_i = Q_i$ pour $i = 2, \dots, n$, et on a

$$d_V(P^{(n)}, Q^{(n)}) \leq 1 - (1 - d_V(P_1, Q_1)) (1 - d_V(\bigotimes_{i=2}^n P_i, \bigotimes_{i=2}^n Q_i)) = d_V(P_1, Q_1)$$

De plus $d_V(P_1, Q_1) \leq d_V(P^{(n)}, Q^{(n)})$, d'après le lemme (II A 3) ■

c - Réciproque.

Théorème. - Soit P et Q deux lois-produits sur $(X^{(+\infty)}, B^{(+\infty)})$, et un entier $n \geq 2$. Si $(P_1, Q_1), \dots, (P_n, Q_n)$ sont des couples de lois équivalentes, on a $d_V(P^{(n)}, Q^{(n)}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - d_V(P_i, Q_i))$ si et seulement si $P_i = Q_i$ pour au moins $n-1$ valeurs de l'indice i .

La démonstration de la condition nécessaire repose sur le lemme suivant :

Lemme. - Soit (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2) deux couples de lois équivalentes sur les espaces mesurables (Ω_1, A_1) et (Ω_2, A_2) respectivement.

$$\text{Si } |(P_1 \otimes P_2) \wedge (Q_1 \otimes Q_2)| = |P_1 \wedge Q_1| \cdot |P_2 \wedge Q_2|,$$

alors $P_1 = Q_1$ ou $P_2 = Q_2$.

Démonstration. - Posons $\mu_i = \frac{1}{2} (P_i + Q_i)$ pour $i = 1, 2$.

Soit f_1, g_1, f_2, g_2 des versions de $\frac{dP_1}{d\mu_1}, \frac{dQ_1}{d\mu_1}, \frac{dP_2}{d\mu_2}, \frac{dQ_2}{d\mu_2}$

telles que $\{f_1 > 0\} = \{g_1 > 0\}$ et $\{f_2 > 0\} = \{g_2 > 0\}$.

Par hypothèse, nous avons

$$(4) \int \inf(f_1 \cdot f_2, g_1 \cdot g_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int (\inf(f_1, g_1) \inf(f_2, g_2)) d(\mu_1 \otimes \mu_2)$$

Posons

- $\Omega = \{\inf(f_1 \cdot f_2, g_1 \cdot g_2) = \inf(f_1, g_1) \cdot \inf(f_2, g_2)\} \cap (\{f_1 > 0\} \times \{f_2 > 0\})$
- $\Omega' = \Omega \cap \{f_1 \cdot f_2 = \inf(f_1, g_1) \cdot \inf(f_2, g_2)\}$
- $\Omega'' = \Omega \cap \{f_1 \cdot f_2 > \inf(f_1, g_1) \cdot \inf(f_2, g_2)\}$
- $A_1 = \{f_1 > g_1\}, A'_1 = \{f_1 = g_1\}, A''_1 = \{f_1 < g_1\}$
- $A_2 = \{f_2 > g_2\}, A'_2 = \{f_2 = g_2\}, A''_2 = \{f_2 < g_2\}.$

Ces événements vérifient

- $\mu_1 \otimes \mu_2(\Omega) = 1$ d'après (4),
- $\mu_1 \otimes \mu_2(\Omega') + \mu_1 \otimes \mu_2(\Omega'') = 1$
- $\Omega' \subset (A'_1 + A''_1) \times (A'_2 + A''_2)$
- $\Omega'' \subset (A_1 + A'_1) \times (A_2 + A'_2) - (A'_1 \times A'_2).$

Il en résulte que

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A''_2 + A''_1 \times A_2) = 0, \text{ soit que}$$

$$\mu_1(A_1) \mu_2(A''_2) = \mu_1(A''_1) \mu_2(A_2) = 0.$$

Si $\mu_1(A_1) = \mu_1(A''_1) = 0$, $P_1 = Q_1$,

si $\mu_1(A_1) = \mu_2(A_2) = 0$, $P_1 = Q_1$ et $P_2 = Q_2$,

si $\mu_2(A''_2) = \mu_1(A''_1) = 0$, $P_1 = Q_1$ et $P_2 = Q_2$,

si $\mu_2(A''_2) = \mu_2(A_2)$, $P_2 = Q_2$ ■

Démonstration de la condition nécessaire du théorème.-

Soit (K, L) une partition de $\{1, \dots, n\}$ en deux parties non vides :

$$\begin{aligned}
 |P^{(n)} \wedge Q^{(n)}| &= |((\bigotimes_{k \in K} P_k) \otimes (\bigotimes_{l \in L} P_l)) \wedge ((\bigotimes_{k \in K} Q_k) \otimes (\bigotimes_{l \in L} Q_l))| \\
 &\geq |(\bigotimes_{k \in K} P_k) \wedge (\bigotimes_{k \in K} Q_k)| |(\bigotimes_{l \in L} P_l) \wedge (\bigotimes_{l \in L} Q_l)|, \text{ d'après (3)} \\
 &\geq (\prod_{k \in K} |P_k \wedge Q_k|) (\prod_{l \in L} |P_l \wedge Q_l|) = |P^{(n)} \wedge Q^{(n)}|, \text{ par hypothèse.}
 \end{aligned}$$

S'il existe un indice i tel que $P_i \neq Q_i$, nous avons donc

$$|(P_i \otimes (\bigotimes_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_j)) \wedge (Q_i \otimes (\bigotimes_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Q_j))| = |P_i \wedge Q_i| \cdot |(\bigotimes_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_j) \wedge (\bigotimes_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Q_j)|$$

Le lemme ci-dessus permet de conclure que $\bigotimes_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_j = \bigotimes_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Q_j$ ■

II B - DECANTATION.

Plusieurs méthodes peuvent donner des conditions suffisantes pour que deux familles de lois sur $(X^{(+\infty)}, B^{(+\infty)})$ se séparent asymptotiquement uniformément.

II B 1 - Cas de deux hypothèses simples. Si l'hypothèse générale H sur la loi de $(X_n)_{n \geq 1}$ se compose de deux lois : $H = \{P_0, P_1\}$, $H_0 = \{P_0\}$ et $H_1 = \{P_1\}$ se séparent asymptotiquement si et seulement si elles sont étrangères.

L'étude de l'orthogonalité de P_0 et P_1 devrait être maintenant possible, avec suffisamment de généralité, à partir de résultats récents de J. Geffroy (²⁴, voir ³¹ pour leur application au cas où $(X_n)_{n \geq 1}$ est un processus de Markov). Les études antérieures sur ce sujet sont très partielles (par exemple T. Nemetz, ¹⁷ pour le cas où $(X_n)_{n \geq 1}$ est un processus strictement stationnaire).

Si P_0 et P_1 sont deux lois-produits, nous utilisons le théorème suivant (¹⁵, ¹⁸ pour généralisation et bibliographie) :

Théorème (S. Kakutani). - Soit P_0 et P_1 deux lois-produits sur $(X^{(+\infty)}, B^{(+\infty)})$. Elles sont étrangères si et seulement si

$$0 = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - d_H^2(P_{0,n}, P_{1,n}))$$

Sinon, elles sont équivalentes.

Compte tenu des inégalités (II A 2,1), on voit que P_0 et P_1 sont étrangères si $\sum_{n=1}^{+\infty} d_V^2(P_{0,n}, P_{1,n}) = +\infty$, et seulement si l'un des couples

$(P_{0,1}, P_{1,1}), (P_{0,2}, P_{1,2}), \dots$ est un couple de lois étrangères ou si

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_V(P_{0,n}, P_{1,n}) = +\infty.$$

II B 2 - Dans le cas des lois-produits, H_0 et H_1 étant cette fois des hypothèses multiples, il est naturel de rechercher des conditions suffisantes portant sur la suite $(d_V(\Pi_n(H_0), \Pi_n(H_1)))_{n \geq 1}$ pour que H_0 et H_1 se séparent asymptotiquement uniformément.

Exemple. - Soit H l'ensemble des lois-produits sur $(\{0,1\}, P\{0,1\})^{+\infty}$ défini par

- $H = H_0 \cup H_1$
- $p = \frac{1}{2} (\delta_0 + \delta_1)$
- $H_0 = \{p^{+\infty}\}$
- $H_1 = \{\delta_x \mid x \in \{0,1\}^{+\infty}\}$

Il est clair que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_V(\Pi_n(H_0), \Pi_n(H_1)) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad d_V(\Pi^{(n)}(H_0), \Pi^{(n)}(H_1)) = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Pourtant, il n'y a pas séparation asymptotique.

Sinon, on pourrait trouver une suite adaptée $(A_n)_{n \geq 1}$ de cylindres tels que

- $p^n(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- $\forall x \in \{0,1\}^{+\infty}, \quad \delta_x^{(n)}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$

On pourrait en extraire une suite $(A_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que

- $n_1 = 1$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p^{n_k}(A_{n_k}) \leq \frac{1}{2^{k-1}},$ et poser

$$\forall n, k \in \mathbb{N}^*, \quad A'_n = A_{n_k} \times \{0,1\}^{n-n_k} \quad \text{si} \quad n_k \leq n < n_{k+1}.$$

Pour la suite $(A'_n)_{n \geq 1}$ séparant asymptotiquement H_0 et H_1 , on aurait :

$$p^{+\infty}(A) = 0, \text{ où } A = \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty}} (A'_n \times \{0,1\}^{+\infty}).$$

On pourrait donc choisir un point x de $\{0,1\}^{+\infty} - A$, qui vérifierait $\delta_x(A) = 0$, mais aussi $\delta_x(A) = 1$, car

$$\delta_x^{(n)}(A'_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \implies \delta_x^{(n)}(A'_n) = 1 \text{ dès que } n \text{ est assez grand} \blacksquare$$

On peut aussi invoquer des raisons de convexité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (p^n = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} \delta_x \implies d_V(\text{Conv } \Pi^{(n)}(H_0), \text{Conv } \Pi^{(n)}(H_1)) = 0)$$

où Conv signifie enveloppe convexe.

Il n'y a donc pas séparation asymptotique uniforme de H_0 et H_1 en vertu du théorème suivant :

Théorème (L. Le Cam, ¹⁴ th. 5). - Soit H_0 et H_1 deux familles de lois définies sur un espace mesurable quelconque $(\Omega, \mathcal{A})$ et dominées par une mesure positive σ -finie. Pour tout $\epsilon > 0$, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$$- \underline{d_V(\text{Conv}(H_0), \text{Conv}(H_1)) \geq \epsilon}$$

$$- \underline{\exists \varphi \in \Phi(\Omega, \mathcal{A}) \text{ tel que } \inf_{P \in H_0} \int \varphi dP \geq \epsilon + \sup_{P \in H_1} \int \varphi dP.}$$

Ce théorème est applicable à notre problème dans le cas de l'échantillon. Sinon, les questions de convexité deviennent inextricables.

II B 3 - Méthode des hypothèses 0.1.

Dans le cas de l'échantillon, soit H_0 une hypothèse testable.

$1_{H_0} : H \rightarrow [0,1]$ étant estimable, il existe une suite p.s.

convergente d'estimateurs, notée $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ (th. I A 9).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, considérons $\hat{f}_n^* : X^{+\infty} \rightarrow [0,1]$

$$(x_1 \dots x_n \dots) \mapsto \hat{f}_n(x_1, \dots, x_n),$$

et posons $B = \{\hat{f}_n^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1\}$.

Cet événement $B^{+\infty}$ -mesurable vérifie

$$(1) \quad \begin{cases} - \forall P \in H_0, & P^{+\infty}(B) = 1 \\ - \forall P \in H - H_0, & P^{+\infty}(B) = 0 \end{cases}.$$

Dans le cas général, une hypothèse H_0 est dite hypothèse 0.1 (^{19, 20}) si et seulement s'il existe un événement $B^{(+\infty)}$ -mesurable B vérifiant :

$$\begin{aligned} & \underline{- \forall P \in H_0, \quad P(B_0) = 1} \\ & \underline{- \forall P \in H - H_0, \quad P(B_0) = 0} \end{aligned}.$$

Lorsque l'ensemble des hypothèses 0.1 est assez riche, il existe des estimateurs exacts (voir ^{16, 19, 20, 21, 28}) : c'est la première application de cette théorie qui permet aussi l'étude des convergences de tests et d'estimateurs : par exemple,

Théorème.- Dans le cas général, si H est dominée, pour qu'une hypothèse H_0 soit testable, il suffit qu'elle soit 0.1.

Dans le cas de l'échantillon, cette condition est nécessaire, que H soit ou non dominée.

Remarque.- L'hypothèse de domination sur H est forte : dans le cas de l'échantillon, H est dominée si et seulement si elle est dénombrable (²², lemme 3).

Démonstration.- Soit B un événement vérifiant (1), μ une probabilité dominant H .

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, soit $\hat{f}_n^*$ une version de $E_\mu(1_B \mid B^{(n)} \times \prod_{j=n+1}^{+\infty} X_j)$.

$\hat{f}_n^*(x)$ ne dépend que des n premières coordonnées de x . On peut donc poser

$$\hat{f}_n^*(x_1, \dots, x_n) = \hat{f}_n^*(x_1, \dots)$$

D'après un argument déjà utilisé (martingale), $(\hat{f}_n^*)_{n \geq 1}$ est une suite p.s.-convergente d'estimateurs de 1_B ■

II B 4 - Finalement, nous préférons retenir la remarque suivante, en revenant au cas (II B 1) de deux hypothèses simples lois-produits :

Pour que deux lois-produits P et Q (sur $(X^{(+\infty)}, B^{(+\infty)})$) se séparent asymptotiquement, il suffit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_V^2(P_n, Q_n) = +\infty$$

ou ce qui est équivalent, qu'il existe une suite adaptée $(B_n)_{n \geq 1}$ d'événements telle que :

$$(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n(B_n) \leq Q_n(B_n)$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (P_n(B_n) - Q_n(B_n))^2 = +\infty$$

(en effet, on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , \exists B_n \in \mathcal{B}_n \text{ tel que } P_n(B_n) + d_V(P_n, Q_n) = Q_n(B_n) .$$

Supposons de plus que :

$$- \forall n \in \mathbb{N}^* , d_V(P_n, Q_n) < 1 \quad (\text{pas de couples de projections étrangères})$$

$$- \lim_{n \rightarrow +\infty} d_V(P_n, Q_n) = 0 .$$

Alors pour que P et Q se séparent asymptotiquement, il est nécessaire qu'il existe une suite adaptée $(B_n)_{n \geq 1}$ d'événements vérifiant

(1) et

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |P_n(B_n) - Q_n(B_n)| = +\infty$$

La condition (2) étant plus forte que (3), il est intéressant de remarquer que ni (2) ni (3) ne sont améliorables en toute généralité, ce que montrent respectivement les exemples 1 et 2 suivants.

Exemple 1. - Soit Q une probabilité sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{B})$, B un événement, un nombre $\lambda > 1$, et $P_{\lambda, B}$ la mesure admettant la densité

$$f_{\lambda, B} = \left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^2 1_B + \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^2 1_{X-B} , \text{ par rapport à } Q .$$

Si $0 < Q(B) < \frac{1}{2}$, $P_{\lambda, B}$ est une probabilité si et seulement si

$$\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^2 = \frac{1-Q(B)}{Q(B)} .$$

Ces conditions étant vérifiées, nous avons :

$$\lambda \left| \sqrt{f_{\lambda, B}} - 1 \right| = \sqrt{f_{\lambda, B}} + 1 .$$

On en déduit, d'après l'inégalité de Schwarz, que

$$\left(\int |f_{\lambda,B} - 1| dQ \right)^2 = \int (\sqrt{f_{\lambda,B}} - 1)^2 dQ \cdot \int (\sqrt{f_{\lambda,B}} + 1)^2 dQ ,$$

soit, tous calculs faits, que

$$d_V^2(P_{\lambda,B}, Q) = 2 d_H^2(P_{\lambda,B}, Q) - d_H^4(P_{\lambda,B}, Q) .$$

Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres vérifiant :

$$- \forall n \in \mathbb{N}^* , \quad 0 < \alpha_n < \frac{1}{2}$$

$$- \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} .$$

On suppose que Q est la mesure de Borel sur

$(X, \mathcal{B}) = ([0, 1], \mathcal{B}[0, 1])$, et pour tout entier positif n , on pose $P_n = P_{\lambda_n, B_n}$

où $B_n = [0, \alpha_n]$ et où λ_n est le nombre > 1 vérifiant

$$\left(\frac{1+\lambda_n}{1-\lambda_n} \right)^2 = \frac{1-\alpha_n}{\alpha_n} .$$

On remarque que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^* , d_V(P_n, Q) = 1-2\alpha_n) \implies (d_V^2(P_n, Q) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2d_H^2(P_n, Q)) .$$

$\bigoplus_{n=1}^{+\infty} P_n$ et $Q^{+\infty}$ étant étrangères si et seulement si $\sum_{n=1}^{+\infty} d_H^2(P_n, Q) = +\infty$

se séparent donc asymptotiquement si et seulement si $\sum_{n=1}^{+\infty} d_V^2(P_n, Q) = +\infty$ ■

A. Hillion ⁽²⁷⁾ a donné un autre exemple montrant que (2) n'est pas améliorable.

Exemple 2. - On se place dans le cas des lois-produits avec

$$- \forall n \in \mathbb{N}^* , \quad (X_n, \mathcal{B}_n) = (\{0, 1\}, \mathcal{P}\{0, 1\})$$

$$- \forall \alpha \in [0, 1], \quad P_\alpha = (1-\alpha) \delta_0 + \alpha \delta_1$$

$$- P = \prod_{n=1}^{+\infty} P_{\alpha_n}, \text{ où } (\alpha_n)_{n \geq 1} \text{ est une suite extraite de }]0,1[$$

et convergeant vers 0.

$$- Q = \delta_0^{+\infty}.$$

P et Q sont étrangères si et seulement si

$$1 = d_H^2(P, Q) = 1 - \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - d_H^2(\delta_0, P_{\alpha_n})) \text{ soit si et seulement}$$

$$\text{si } \prod_{n=1}^{+\infty} \sqrt{1 - \alpha_n} = 0$$

$$\text{ou } \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$$

$$\text{ou } \sum_{n=1}^{+\infty} d_V(P_{\alpha_n}, \delta_0) = +\infty \quad \blacksquare$$

II B 5 - Définitions pour la décantation (J. Geffroy).

- Un événement B décante strictement (resp. décante) deux familles de lois H_0 et H_1 sur un espace mesurable $(X, \mathcal{B})$ si

$$(\forall P_0 \in H_0 \text{ et } \forall P_1 \in H_1), (P_0(B) < P_1(B), \text{ resp. } P_0(B) \leq P_1(B)).$$

- Une suite adaptée $(B_n)_{n \geq 1}$ d'événements décante asymptotiquement uniformément deux familles de lois H_0 et H_1 sur $(X^{(+\infty)}, \mathcal{B}^{(+\infty)})$ s'il existe un entier naturel N tel que

$$(\forall P_0 \in H_0, \forall P_1 \in H_1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*), (n > N \implies P_{0,n}(B_n) \leq P_{1,n}(B_n)).$$

Jusqu'ici, la décantation semble n'avoir été utilisée que dans des cas très particuliers (construction de tests, dans le cas de l'échantillon, voir ¹, ⁹). Nous avons vu qu'elle est sous-jacente dans le théorème de S. Kakutani, et nous l'avons nous aussi déjà utilisée dans le chapitre I. Nous passons maintenant à un cas plus général.

II C - APPLICATION DE LA DECANTATION A LA SEPARATION ASYMPTOTIQUE UNIFORME
DE DEUX FAMILLES DE LOIS-PRODUITS.

II C 1 - Théorème (J. Geffroy).- Soit $(\xi_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et ne prenant que les valeurs 0 et 1.

Soit $(\alpha_n)_{n \geq 1}$, $(\pi_n)_{n \geq 1}$ et $(\pi'_n)_{n \geq 1}$ trois suites de nombres choisis arbitrairement dans $[0, 1]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P\{\xi_n = 1\} = p_n$ et $Y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$. Alors

- s'il existe un entier naturel N tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$(n > N \implies p_n \leq \pi_n)$, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n > N \implies P\{Y_n > \sum_{i=1}^n \alpha_i (\pi_i + \frac{\alpha_i}{2})\} \leq e^{\sum_{i=1}^N \alpha_i - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2}).$$

- s'il existe un entier naturel N' tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$(n > N' \implies p_n \geq \pi'_n)$, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n > N' \implies P\{Y_n \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i (\pi'_i - \frac{\alpha_i}{2})\} \leq e^{\sum_{i=1}^{N'} \alpha_i - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2}).$$

Démonstration.-

$$P\{Y_n > \sum_{i=1}^n \alpha_i (\pi_i + \frac{\alpha_i}{2})\} = P\{e^{Y_n} > e^{\sum_{i=1}^n \alpha_i (\pi_i + \frac{\alpha_i}{2})}\} < E(e^{Y_n}) \cdot e^{-\sum_{i=1}^n \alpha_i (\pi_i + \frac{\alpha_i}{2})},$$

d'après l'inégalité de Markov.

$\forall m \in \mathbb{N}^*$, posons $q_m = 1 - p_m$ et majorons $E(e^{Y_n})$:

$$E(e^{Y_n}) = \prod_{i=1}^n E(e^{\alpha_i \xi_i}) = \prod_{i=1}^n (p_i e^{\alpha_i} + q_i) = e^{\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i} \prod_{i=1}^n (p_i e^{\alpha_i q_i} + q_i e^{-\alpha_i p_i}).$$

Compte tenu de $(\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 1 \implies e^x \leq 1+x+x^2)$, on obtient

$$E(e^{Y_n}) \leq e^{\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i} \prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i^2 p_i q_i) \leq e^{\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i} e^{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2}$$

puisque $(\forall m \in \mathbb{N}^*, p_m q_m \leq \frac{1}{4})$ et $(\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x)$.

Finalement, nous avons :

$$P\{Y_n > \sum_{i=1}^n \alpha_i (\pi_i + \frac{\alpha_i}{2})\} \leq e^{\sum_{i=1}^n \alpha_i (p_i - \pi_i)} e^{-\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2},$$

d'où la première majoration recherchée.

La seconde se démontre de manière analogue.

II C 2 - Théorème fondamental (J. Geffroy). - Deux familles H_0 et H_1 de lois-produits sur $(X^{(+\infty)}, B^{(+\infty)})$ se séparent asymptotiquement uniformément s'il existe une suite adaptée $(B_n)_{n \geq 1}$ d'événements les décantant asymptotiquement uniformément et vérifiant de plus $\sum_{n=1}^{+\infty} (\pi'_n - \pi_n)^2 = +\infty$,
où nous avons posé

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n = \sup_{P_0 \in H_0} P_{0,n}(B_n) \text{ et } \pi'_n = \inf_{P_1 \in H_1} P_{1,n}(B_n).$$

Démonstration. - Il existe un entier naturel N tel que

$$n > N \implies \pi_n \leq \pi'_n.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, posons - $\alpha_n = 0$ si $n \leq N$,

- $\alpha_n = \pi'_n - \pi_n$ si $n > N$,

- $\xi_n = 1_{(\prod_{i < n} X_i) \times B_n \times (\prod_{i > n} X_i)}$,

- $C_n \times \prod_{i > n} X_i = \{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i (\pi_i + \frac{\alpha_i}{2}) \}.$

Alors, d'après (II C 1), nous avons :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P_0 \in H_0 \text{ et } \forall P_1 \in H_1),$$

$$n > N \implies \inf(P_0^{(n)}(C_n), P_1^{(n)}(X^{(n)} - C_n)) \geq 1 - e^{-\frac{1}{4} \sum_{i=N+1}^n (\pi'_i - \pi_i)^2} \quad \blacksquare$$

II C 3 - Remarques. - Il existe une version de ce théorème valable pour des lois quelconques (J. Geffroy, ²⁴, th. 1).

Les théorèmes (IA1) et 1⁽²⁾ en sont des cas particuliers. Ce dernier s'applique lui aussi aux couples (H_0, H_1) de familles de lois-produits quelconques, avec des hypothèses du même type. Mais (IIC2) donne de plus une minoration de l'amplitude de la séparation asymptotique uniforme sur chacun des cylindres C_n , $n = 1, 2, \dots$ de la suite $(C_n)_{n \geq 1}$ qui sépare H_0 et H_1 . Plus précisément, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n > N \implies \inf_{P_0 \in H_0} P_0^{(n)}(C_n) - \sup_{P_1 \in H_1} P_1^{(n)}(C_n) \geq 1 - 2 e^{-\frac{1}{4} \sum_{i=N+1}^n (\pi'_i - \pi_i)^2}).$$

Cette propriété importante permettra de construire des estimateurs p.co. convergents à partir de (IIC2), alors que c'est impossible à partir du théorème 1⁽²⁾.

II C 4 - Applications au cas de l'échantillon.

a - Théorème 1. - Dans le cas de l'échantillon, l'hypothèse H_0 est uniformément testable s'il existe un nombre fini d'événements de $(X, \mathcal{B})$ notés $B_1, \dots, B_p$ et un nombre $\alpha > 0$ tels que

$$\forall P_0 \in H_0 \text{ et } \forall P_1 \in H_1 = H - H_0, \quad \sup_{i=1, \dots, p} (P_1(B_i) - P_0(B_i)) \geq \alpha.$$

Démonstration. - Il suffit de montrer que le paramètre

$1_{H_0} : H \rightarrow ([0,1], | \cdot |)$ est uniformément estimable.

Soit $\varepsilon \in]0,1[$, et p' un entier positif tel que $\frac{4}{p'} < \alpha$.

D'après le théorème (I A 3), il existe un entier positif n

et

$$\hat{P} : X^n \rightarrow \mathcal{D} \quad (\text{ensemble des lois sur } (X, \mathcal{B}))$$

tels que, $\forall P \in \mathcal{D} - \mathcal{B}(P) = \{ \text{Max}_{1 \leq i \leq p} |\hat{P}(B_i) - P(B_i)| \leq \frac{2}{p'} \} \in \mathcal{B}^n$

$$- P^n(\mathcal{B}(P)) > 1 - \varepsilon.$$

Il est évident que l'événement $\mathcal{B}^n$ -mesurable $C = \bigcup_{P \in H_0} \mathcal{B}(P)$ vérifie :

$$\forall P_1 \in H_1, \quad C \cap \mathcal{B}(P_1) = \emptyset.$$

Pour l'estimateur $\hat{f} = 1_C : X^n \rightarrow [0,1]$, on a donc

$$P \in H_0 \implies P^n \{ |\hat{f} - 1_{H_0}(P)| > 0 \} = P^n(X^n - C) \leq P^n(X^n - \mathcal{B}(P)) < \varepsilon$$

$$P \in H_1 \implies P^n \{ |\hat{f} - 1_{H_0}(P)| > 0 \} = P^n(C) \leq P^n(X^n - \mathcal{B}(P)) < \varepsilon.$$

Finalement, on peut appliquer le lemme 2 (I A 7) puisque

l'on a

$$\sup_{P \in H} P^n \{ |\hat{f} - 1_{H_0}(P)| > 0 \} \leq \varepsilon \quad \blacksquare$$

b - Raffinement de la décantation : la ψ -décantation.

Définition. - Deux familles de lois H_0 et H_1 sur un espace mesurable quelconque $(X, \mathcal{B})$ sont strictement ψ -décantées s'il existe une fonction ψ de $\Phi(X, \mathcal{B})$ telle que

$$(1) \quad (\forall P_0 \in H_0 \text{ et } \forall P_1 \in H_1), \quad \left(\int \psi dP_0 < \int \psi dP_1 \right).$$

Cette notion est strictement plus fine que la décantation stricte.

Exemple.- Soit $P = \sum_{q=1}^{+\infty} p_q \delta_q$ et $(P_1, P_2, \dots)$ des lois sur $\mathbb{N}^*$ vérifiant

$$- \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad p_q > p_{q+1} > 0$$

$$- P_n = \left(\sum_{q \neq n, q \neq n+1} p_q \delta_q \right) + p_{n+1} \delta_n + p_n \delta_{n+1}.$$

Aucun événement A ne décante strictement $H_0 = \{P\}$ et $H_1 = \{P_1, P_2, \dots\}$. Sinon, compte tenu de

$$\forall B \subset \mathbb{N}^*, \quad (P(B) > P_n(B) \implies n \in B),$$

on aurait $B = \mathbb{N}^*$, ce qui est absurde.

Par contre H_0 et H_1 sont strictement ψ -décantées. En effet pour toute suite $(\psi_p)_{p \geq 1}$ strictement décroissante à valeurs dans $[0, 1]$, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int \psi dP - \int \psi dP_n = (\psi(n) - \psi(n+1)) (p_n - p_{n+1}) > 0 \quad \blacksquare$$

c - Théorème 2.- Dans le cas de l'échantillon, deux familles de lois H_0 et H_1 sur $(X, \mathcal{B})$ se séparent asymptotiquement uniformément s'il existe un nombre $\alpha > 0$ et une suite finie $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ de fonctions de $\phi(X, \mathcal{B})$ tels que :

$$\forall P_0 \in H_0 \quad \text{et} \quad \forall P_1 \in H_1, \quad \max_{1 \leq i \leq n} \left(\int \psi_i dP_1 - \int \psi_i dP_0 \right) \geq \alpha.$$

Démonstration.- Pour chacune des fonctions ψ_i , $i = 1, \dots, n$, il existe une fonction $\psi'_i = \sum_{j=1}^{r(i)} \psi'_{i,j} 1_{B_{i,j}}$, où $\{B_{i,1}, \dots, B_{i,r(i)}\}$ est une partition finie $\mathcal{B}$ -mesurable de X telle que

$$- 0 \leq \psi'_i \leq \psi_i$$

$$- \psi_i - \psi'_i \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Pour toute loi P_0 de H_0 et toute loi P_1 de H_1 ,
si $\int \psi_i dP_1 - \int \psi_i dP_0 \geq \alpha$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ P_1(B_{i,j}) > P_0(B_{i,j})}}^{r(i)} (P_1(B_{i,j}) - P_0(B_{i,j})) &\geq \sum_{j=1}^{r(i)} \psi'_{i,j} (P_1(B_{i,j}) - P_0(B_{i,j})) \\ &= \int \psi'_i dP_1 - \int \psi'_i dP_0 \geq \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

$\{A_1, \dots, A_p\}$ désignant l'ensemble des réunions finies d'événements choisis
dans $\{B_{i,j} \mid 1 \leq j \leq r(i), i = 1, \dots, n\}$, nous avons finalement :

$$\forall P_0 \in H_0 \text{ et } \forall P_1 \in H_1, \quad \sup_{1 \leq i \leq p} (P_1(A_i) - P_0(A_i)) \geq \frac{\alpha}{2}$$

Il suffit donc d'appliquer le théorème précédent pour conclure ■

d - Théorème 3. - Dans le cas de l'échantillon, pour que deux familles
de lois H_0 et H_1 sur $(X, \mathcal{B})$ se séparent asymptotiquement, il suffit
qu'il existe deux suites d'hypothèses $(H_{i,r})_{r \geq 1}$, $i = 0, 1$ telles que

$$- H_i = \bigcup_{r=1}^{+\infty} H_{i,r} \text{ pour } i = 0, 1,$$

$$- \forall r, s \in \mathbb{N}^*, H_{0,r} \text{ et } H_{1,s} \text{ soient strictement } \psi\text{-décantées.}$$

Démonstration. - $\forall r, s \in \mathbb{N}^*$, soit $\psi_{r,s}$ une fonction de $\Phi(X, \mathcal{B})$
qui décante strictement $H_{0,r}$ et $H_{1,s}$. Pour se ramener au théorème précédent,
nous distinguons deux cas, suivant que la borne supérieure

$$a_{r,s} = \sup_{P \in H_{0,r}} \int \psi_{r,s} dP \text{ est atteinte ou non.}$$

$$\underline{\text{Cas 1 : } \forall P \in H_{0,r}, \int \psi_{r,s} dP < a_{r,s} .}$$

Alors $a_{r,s} > 0$, et on pose :

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad - \quad H_{0,r}^q = \{P \mid P \in H_{0,r}, \int \psi_{r,s} dP \leq a_{r,s} (1 - \frac{1}{2q})\}$$

$$- \quad H_{1,s}^q = H_{1,s}$$

$$- \quad b_{r,s}^q = \frac{a_{r,s}}{2q}$$

$$\underline{\text{Cas 2 : } \forall P \in H_{1,s}, \int \psi_{r,s} dP > a_{r,s} .}$$

Alors $a_{r,s} < 1$, et on pose :

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad - \quad H_{0,r}^q = H_{0,r}$$

$$- \quad H_{1,s}^q = \{P \mid P \in H_{1,s}, \int \psi_{r,s} dP \geq a_{r,s} + (1-a_{r,s}) \frac{1}{2q}\}$$

$$- \quad b_{r,s}^q = (1-a_{r,s}) \frac{1}{2q} .$$

Il est clair que

$$- \quad H_{0,r} = \lim_{q \rightarrow +\infty} \uparrow H_{0,r}^q$$

$$- \quad H_{1,s} = \lim_{q \rightarrow +\infty} \uparrow H_{1,s}^q$$

$$- \quad \forall r, s, q \in \mathbb{N}^*, \quad H_{0,r}^q \quad \text{et} \quad H_{1,s}^q$$

se séparent asymptotiquement uniformément, puisqu'il y a ψ -décantation stricte d'amplitude $b_{r,s}^q$ ($= \alpha$ dans le théorème précédent).

Les égalités $H_i = \bigcup_{r=1}^{+\infty} (\bigcup_{q=1}^{+\infty} H_{i,r}^q)$, $i = 0, 1$ permettent de conclure,

avec le théorème (I B 1).

e - Corollaires.- J. Geffroy a démontré directement à partir du théorème fondamental les résultats suivants (²⁴, th. 3 et 4) que nous obtenons comme corollaires du théorème ci-dessus.

Corollaire 1.- Dans le cas de l'échantillon, une hypothèse H_0 est testable si H_0 et $H_1 = H - H_0$ sont strictement décanquées.

Corollaire 2.- Test d'une hypothèse simple contre une hypothèse multiple : dans le cas de l'échantillon, une hypothèse simple $H_0 = \{P_0\}$ est testable s'il existe une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'événements telle que :

$$P \in H - H_0 \implies (\exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } P(A_n) \neq P_0(A_n)) .$$

En particulier, si B est de type dénombrable, toute hypothèse simple est testable.

f - Remarques sur le corollaire 1.-

(i) Il est suffisant que H_0 et H_1 soient φ -décanquées strictement pour que H_0 soit testable.

Cette condition n'est pas nécessaire :

Exemple : On se place dans le cas de l'échantillon, avec

$$- (X, B) = (\{0, 1\}, P\{0, 1\})$$

$$- P_0 = \frac{1}{2} (\delta_0 + \delta_1)$$

$$- H = \{P_0, \delta_0, \delta_1\}$$

$$- H_0 = \{P_0\} .$$

Alors H_0 est testable, mais il n'existe aucune fonction réelle ψ sur $\{0,1\}$ telle que

$$\int \psi dP_0 < \min \left(\int \psi d\delta_0, \int \psi d\delta_1 \right) \text{ (évident) } .$$

(ii) On peut aussi se demander si la condition ci-dessous n'est pas suffisante pour que H_0 soit testable :

$$\exists B \in \mathcal{B} \text{ tel que } (\forall P_0 \in H_0 \text{ et } \forall P_1 \in H_1, P_0(B) \neq P_1(B)) .$$

L'exemple (I B 4) montre que non.

CHAPITRE III

PROPRIETES DE DECANTATION DE CERTAINES DISTANCES ENTRE LES LOIS.

III A - PROPRIETES (M_1).

III A 1 - Distances de Prokhorov, Kolmogorov et Lévy.

Ces distances sont ainsi définies :

- distance de Prokhorov d_P . (X, ρ) étant un espace métrique, $\mathcal{B}$ sa tribu borélienne, F l'ensemble de ses fermés, d_P est définie sur l'ensemble $\mathcal{D}_X$ des lois boréliennes sur X par :

$$\begin{aligned} (\forall P, Q \in \mathcal{D}_X), d_P(P, Q) &= \inf \{ \varepsilon > 0 \mid \forall F \in \mathcal{F}, P(F) \leq Q(F^\varepsilon) + \varepsilon \} \\ &= \inf \{ \varepsilon > 0 \mid \forall F \in \mathcal{F}, Q(F) \leq P(F^\varepsilon) + \varepsilon \} . \end{aligned}$$

Dans cette définition, on a posé :

$$\forall \varepsilon > 0, (\emptyset^\varepsilon = \emptyset \text{ et } \forall A \in \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}, A^\varepsilon = \{x \mid d(x, A) < \varepsilon\}) .$$

On peut substituer aux fermés les ouverts ou les boréliens dans tous les cas, les compacts si P ou Q est tendue (³², chap. I).

Dans les cas usuels, par exemple si l'espace métrique (X, ρ) est séparable, d_P définit la topologie de la convergence faible (³⁵, App. III).

- distance de Lévy d_L . Pour tout entier positif v , on définit d_L sur l'ensemble $\mathcal{D}_v$ des lois boréliennes sur $\mathbb{R}^v$ par :

$$(\forall P, Q \in \mathcal{D}_v), d_L(P, Q) = \inf \{ h > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}^v, F_Q(x - \dot{h}) - h \leq F_P(x) \leq F_Q(x + \dot{h}) + h \} ,$$

où F_P et F_Q désignent respectivement les fonctions de répartition de P et Q et où h désigne le v -uplet $(h, \dots, h)$.

d_L définit comme d_P la topologie de la convergence faible sur $\mathcal{D}_v$ (³⁷, chap. 9).

- distance de Kolmogorov d_K . C'est la distance du théorème de Glivenko-Cantelli : en conservant les mêmes notations, elle est définie par :

$$\forall P, Q \in \mathcal{D}_v, \quad d_K(P, Q) = \sup(|F_P(x) - F_Q(x)|, x \in \mathbb{R}^v).$$

III A 2 - Propriétés (M_1) : définition (*). Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de lois sur un espace mesurable quelconque $(X, \mathcal{B})$. Nous dirons qu'une métrique d sur $\mathcal{D}$ a la propriété (M_1) si et seulement si

(M_1) pour tout couple (B_0, B_1) de boules fermées de $(\mathcal{D}, d)$ et tout nombre α ,

$$0 < \alpha < d^*(B_0, B_1) \implies \exists B \in \mathcal{B} \text{ tel que}$$

$$P' \in B_0 \text{ et } P'' \in B_1 \implies P'(B) - P''(B) \geq \alpha.$$

III A 3 - Les distances usuelles ont la propriété (M_1) :

Théorème (*). -

- La distance d_v entre les lois de probabilité sur un espace mesurable quelconque $(X, \mathcal{B})$,

- la distance d_P entre les lois boréliennes sur un espace métrique (X, ρ) ,

- les distances d_K et d_L entre les lois boréliennes sur $\mathbb{R}^v$ (v entier positif arbitraire)

ont la propriété (M_1) .

Démonstration. - On se donne un nombre α , deux boules fermées $B_0 = B(P_0, \alpha_0)$ et $B_1 = B(P_1, \alpha_1)$ dans $(\mathcal{D}, d)$ ($= (\mathcal{D}, d_V), (\mathcal{D}_X, d_P)$, $(\mathcal{D}_V, d_K), (\mathcal{D}_V, d_L)$ suivant le cas).

On suppose que $0 < \alpha < d^*(B_0, B_1) = d(P_0, P_1) - (\alpha_0 + \alpha_1)$.

Cas 1 : $d = d_V$. Soit A un événement tel que $P_0(A) - P_1(A) = d_V(P_0, P_1)$.

$$P' \in B_0 \implies |P_0(A) - P'(A)| \leq d_V(P_0, P') \leq \alpha_0$$

$$P'' \in B_1 \implies |P_1(A) - P''(A)| \leq d_V(P_1, P'') \leq \alpha_1$$

Il en résulte que :

$$P' \in B_0 \text{ et } P'' \in B_1 \implies P'(A) - P''(A) \geq d_V(P_0, P_1) - (\alpha_0 + \alpha_1) > \alpha$$

Cas 2 : $d = d_P$. Soit η, η_0 et η_1 trois nombres vérifiant :

$$(1) \quad \eta < d_P(P_0, P_1)$$

$$- \quad \alpha_0 < \eta_0$$

$$- \quad \alpha_1 < \eta_1$$

$$(2) \quad \alpha < \eta - (\eta_0 + \eta_1)$$

$$(1) \implies (\exists F_0 \in F \text{ tel que } (3) \quad P_0(F_0) > P_1(F_0^\eta) + \eta)$$

Soit P' et P'' deux lois arbitraires de B_0 et B_1 .

$$d_P(P_0, P') < \eta_0 \implies P_0(F_0) \leq P'(F_0^{\eta_0}) + \eta_0$$

Compte tenu de (3), on a donc

$$(4) \quad P'(F_0^{\eta_0}) > P_1(F_0^\eta) + \eta - \eta_0$$

Le fermé $F = \{x \mid \rho(x, F_0) \leq \eta_0\}$ vérifie :

- (5) $F_0^{\eta_0} \subset F \subset F_0^{\eta-\eta_1}$
- $F^{\eta_1} \subset F_0^{\eta}$
- $P''(F) \leq P_1(F^{\eta_1}) + \eta_1$.

On en déduit à partir de (5,4,2) que

$$P'(F) > P''(F) + \eta - (\eta_0 + \eta_1) > P''(F) + \alpha \quad \blacksquare$$

Cas 3 : $d = d_L$ ou d_K : voir les théorèmes (III B 3) et (III B 4).

III A 4 - Remarque. - d_V a sur l'ensemble de toutes les lois sur l'espace mesurable quelconque $(X, \mathcal{B})$ les propriétés évidentes suivantes :

- toute boule est un convexe
- $(\forall P_0, P_1 \text{ et } \forall \alpha_0, \alpha_1 \geq 0), d_V^*(B(P_0, \alpha_0), B(P_1, \alpha_1)) = d_V(B(P_0, \alpha_0), B(P_1, \alpha_1))$.

Ainsi, d'après le théorème (III A 3), pour tout couple (B_0, B_1) de boules fermées de lois, on a

$$d_V(B_0, B_1) > \alpha > 0 \implies \exists B \in \mathcal{B} \text{ tel que } \inf(P'(B) \mid P' \in B_0) \geq \alpha + \sup(P''(B) \mid P'' \in B_1).$$

Ce résultat est donc de même nature que le théorème (II B 2) (de L. Le Cam).

III A 5 - Propriété $(M_1 \text{ faible})$.

Nous n'utiliserons pas cette propriété, mais dans certains cas, notamment dans le cas de l'échantillon, les résultats établis à l'aide de (M_1) restent vrais lorsqu'on lui substitue $(M_1 \text{ faible})$.

Définition. - Une distance d sur un ensemble $\mathcal{D}$ de lois sur un espace mesurable $(X, \mathcal{B})$ a la propriété $(M_1 \text{ faible})$ s'il existe deux fonctions $U, V :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ vérifiant :

$$(\forall \eta > 0 \text{ et } \forall P, Q \in \mathcal{D}) , (d(P, Q) > \eta \implies \exists B \in \mathcal{B} \text{ tel que } \inf(P'(B) \mid P' \in \mathcal{B}(P, U(\eta))) \geq \sup(P''(B) \mid P'' \in \mathcal{B}(Q, U(\eta))) + V(\eta)).$$

Proposition. - Soit d et d' deux distances équivalentes sur un ensemble $\mathcal{D}$ de lois sur un espace mesurable $(X, \mathcal{B})$.

Si d a la propriété $(M_1 \text{ faible})$, alors d' l'a aussi.

Démonstration. - Il existe deux fonctions monotones non décroissantes

$$\underline{h}, \bar{h} :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[\text{ telles que :}$$

$$- \bar{h}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0_+} 0$$

$$- \forall P, P' \in \mathcal{D}, P \neq P' \implies (\underline{h}(d'(P, P')) \leq d(P, P') \leq \bar{h}(d'(P, P'))).$$

Soit $\eta > 0$ et deux lois P et Q telles que $d'(P, Q) > \eta$.

$$d'(P, Q) > \eta \implies d(P, Q) \geq \underline{h}(d'(P, Q)) \geq \underline{h}(\eta) > \frac{1}{2} \underline{h}(\eta).$$

Puisque d a la propriété $(M_1 \text{ faible})$, on peut trouver un événement B tel que

$$d(P, P') \leq U(\frac{1}{2} \underline{h}(\eta)) \text{ et } d(Q, P'') \leq U(\frac{1}{2} \underline{h}(\eta)) \implies P'(B) \geq P''(B) + V(\frac{1}{2} \underline{h}(\eta)).$$

$$\exists U'(\eta) > 0 \text{ tel que } \bar{h}(U'(\eta)) \leq U(\frac{1}{2} \underline{h}(\eta)).$$

Si on pose $V'(\eta) = V(\frac{1}{2} \underline{h}(\eta))$, on a donc

$$d'(P, P') \leq U'(\eta) \text{ et } d'(Q, P'') \leq U'(\eta) \implies P'(B) \geq P''(B) + V'(\eta) \blacksquare$$

Exemples.-

a - d_V ayant la propriété (M_1) , d_H a la propriété $(M_1 \text{ faible})$,
puisque ces deux distances sont équivalentes (II A 2).

b - Soit (X, ρ) un espace métrique .

$\forall \lambda > 0$, on définit une distance $d_{P, \lambda}$ équivalente à d_P
sur $\mathcal{D}_X$ en posant (voir ³², chap. I) :

$$\forall P, Q \in \mathcal{D}_X \text{ et } \forall \epsilon > 0 - S(P, Q, \epsilon) = \sup \{P(B) - Q(B^\epsilon) \mid B \in \mathcal{B}\}$$

$$- d_{P, \lambda}(P, Q) = \inf(\sup(\lambda \epsilon, S(P, Q, \epsilon)) \mid \epsilon > 0) .$$

Ces distances ont donc la propriété $(M_1 \text{ faible})$.

III B - PROPRIETES (M₂).

III B 1 - Définition (*). - Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de lois sur un espace mesurable quelconque $(X, \mathcal{B})$. Nous dirons qu'une métrique d a sur $\mathcal{D}$ la propriété (M₂) si et seulement si

(M₂) pour tout triplet (α, ξ, ξ') de réels tels que $0 < \xi < \xi + \alpha < \xi'$, on peut associer à toute loi P de $\mathcal{D}$ une suite finie d'événements notés $A_1, \dots, A_n$ ayant la propriété suivante :

$$\forall Q \in \mathcal{D}, \quad d(P, Q) > \xi' \implies$$

$$\exists i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{tel que} \quad \inf\{P'(A_i) \mid P' \in \mathcal{D}, d(P, P') < \xi\} \geq Q(A_i) + \alpha.$$

Cette propriété introduit une forme complexe de décantation : elle n'exclut pas l'anomalie suivant laquelle deux lois de $\mathcal{D} - B(P, \xi')$ puissent être décantées de $b(P, \xi)$ par deux événements différents de la suite $A_1, \dots, A_n$, même lorsqu'elles sont très voisines. Nous démontrons ci-dessous que d_K , d_L et d_P - lorsque (X, ρ) est séparable - vérifient (M₂) sans présenter cette anomalie.

Malheureusement, lorsqu'on cherche à séparer asymptotiquement uniformément $b^{(+\infty)}(P, \xi)$ et $(\mathcal{D} - B(P, \xi'))^{(+\infty)}$, le nombre des cylindres qui interviennent est trop grand, sauf cas particulier, et la séparation ne se fait pas.

Ces problèmes n'apparaissent pas dans le cas de l'échantillon.

III B 2 - Nous démontrerons le théorème suivant en plusieurs étapes :

Théorème (*). - La distance d_P sur $\mathcal{D}_X$, lorsque (X, ρ) est séparable, et les distances d_K et d_L sur $\mathcal{D}_v$, quel que soit l'entier positif v , ont la propriété (M₂).

III B 3 - Cas des distances de Prokhorov et de Lévy.

Théorème.- Quel que soit l'espace métrique séparable (X, ρ) (resp. $\forall v \in \mathbb{N}^*$), il existe une famille dénombrable C de boréliens de (X, ρ) (resp. $\mathbb{R}^v$) pour laquelle $(\mathcal{D}_X, d_P)$ (resp. $(\mathcal{D}_v, d_L)$) a la propriété suivante : quel que soit le quadruplet $(\alpha, \beta, \xi, \xi')$ de nombres tels que

$$0 \leq \xi < \xi + \alpha \leq \xi + \alpha + \beta < \xi' < 1 ,$$

on peut associer à toute probabilité borélienne P sur (X, ρ) (resp. $\mathbb{R}^v$) une suite finie d'événements C -mesurables notés $A_1, \dots, A_n$ vérifiant :

$$\begin{aligned} & \forall Q \in \mathcal{D}_X - B(P, \xi') \text{ (resp. } \mathcal{D}_v - B(P, \xi')) \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que} \\ & \inf \{P'(A_i) \mid P' \in B(P, \xi)\} > \sup \{P''(A_i) \mid P'' \in B(Q, \beta)\} + \alpha . \end{aligned}$$

Démonstration.-

a) Distance de Prokhorov.

On choisit cinq rationnels $\tau, \alpha_0, \beta_0, \xi_0$ et ξ'_0 tels que

- $\alpha < \alpha_0$
- $\beta < \beta_0$
- $\xi < \xi_0$
- $\xi'_0 < \xi'$
- $\xi_0 + \alpha_0 + \beta_0 < \xi_0 + \alpha_0 + \beta_0 + \tau < \xi'_0 ,$

puis une suite $\{x_i, i \in I\}$ dense dans (X, ρ) , et une partie finie I_0 de I vérifiant :

$$P\left(\bigcup_{i \in I_0} B(x_i, \frac{\tau}{3})\right) > 1 - \tau .$$

$$d_p(P, Q) > \xi' \implies \exists F \in \mathcal{F} \text{ tel que } P(F) > Q(F_{\xi'_0}^{\xi'_0}) + \xi'_0.$$

Soit B_Q la réunion des boules de la famille finie $\{B(x_i, \frac{1}{3}), i \in I_0\}$ qui rencontrent $F_0 = F \cap (\bigcup_{i \in I_0} B(x_i, \frac{1}{3}))$.

Il est clair que :

$$F_0 \subset F \subset F_0 + (X - \bigcup_{i \in I_0} B(x_i, \frac{1}{3})) \implies P(F_0) \leq P(F) \leq P(F_0) + \tau,$$

$$F_0 \subset B_Q \subset F_0^T \implies P(B_Q) > Q(F_0^{\xi'_0}) + \xi'_0 - \tau,$$

$$P' \in B(P, \xi) \implies d_p(P, P') < \xi_0 \implies P(B_Q) \leq P'(B_Q^{\xi_0}) + \xi_0,$$

$$P'' \in B(Q, \beta) \implies d_p(Q, P'') < \beta_0 \implies P''(B_Q^{\xi_0}) \leq Q((B_Q^{\xi_0})^{\beta_0}) + \beta_0,$$

$$B_Q \subset F_0^T \implies (B_Q^{\xi_0})^{\beta_0} \subset F_0^{\xi'_0}$$

Finalement, on a :

$$P'(B_Q^{\xi_0}) > P''(B_Q^{\xi_0}) + \xi'_0 - \tau - (\xi_0 + \beta_0) > P''(B_Q^{\xi_0}) + \alpha_0.$$

Il suffit donc d'appeler $\mathcal{C}$ la classe de tous les dilatés d'ordre rationnel des réunions finies de boules fermées centrées dans $\{x_i, i \in I\}$ et de rayon rationnel positif ■

b) Distance de Lévy. On se donne une loi P sur $\mathbb{R}^v$ et un quadruplet $(\alpha, \beta, \xi, \xi')$ du type précédent. $\tau, \alpha_0, \beta_0, \xi_0$ et ξ'_0 gardent la même signification.

$F_P^1, \dots, F_P^v$ étant les fonctions de répartition marginales de P , on choisit dans $\mathbb{Z}$ deux entiers p et q tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, v\}, F_P^i(p \alpha_0) < \frac{1}{v} \text{ et } F_P^i(q \alpha_0) > 1 - \frac{1}{v}.$$

$d_L(P, Q) > \xi' \implies \exists x = (x_1, \dots, x_v) \in \mathbb{R}^v$ tel que

$$F_P(x) > F_Q(x + \dot{\xi}'_0) + \xi'_0 \text{ ou } F_Q(x - \dot{\xi}'_0) - \xi'_0 > F_P(x).$$

Cas 1 : $F_P(x) > F_Q(x + \dot{\xi}'_0) + \xi'_0$.

$$F_P(x) > \xi'_0 \implies (\forall i \in \{1, \dots, v\}, F_P^i(x_i) > \xi'_0 > \frac{\tau}{v}) \implies (\forall i, x_i > p \alpha_0).$$

Pour $i = 1, \dots, v$, on pose $y_i = x_i$ si $x_i \leq q \alpha_0$

$$y_i = q \alpha_0 \text{ sinon.}$$

Pour le point $y = (y_1, \dots, y_v)$ de $\mathbb{R}^v$ ainsi défini, nous avons :

$$- y \leq x$$

$$- \widehat{(p \alpha_0)} \leq y \leq \widehat{(q \alpha_0)}$$

$$- 0 \leq F_P(x) - F_P(y) \leq \sum_{i=1}^v (F_P^i(x_i) - F_P^i(y_i)) \leq \sum_{i=1}^v (1 - F_P^i(q \alpha_0)) \leq \tau.$$

$$\implies F_P(y) > F_Q(y + \dot{\xi}'_0) + \xi'_0 - \tau$$

$$P' \in B(P, \xi) \implies F_{P'}(y + \dot{\xi}'_0) + \xi_0 \geq F_P(y)$$

$$P'' \in B(Q, \beta) \implies F_Q(y + \dot{\xi}'_0) \geq F_{P''}(y + \dot{\xi}'_0 - \dot{\beta}_0) - \beta_0$$

En résumé, nous avons :

$$F_{P'}(y + \dot{\xi}'_0) > F_{P''}(y + \dot{\xi}'_0 - \dot{\beta}_0) + \xi'_0 - (\tau + \xi_0 + \beta_0) > F_{P''}(y + \dot{\xi}'_0 - \dot{\beta}_0) + \alpha_0.$$

De plus, $(\xi'_0 - \beta_0) - \xi_0 > \alpha_0 \implies (\forall i \in \{1, \dots, v\}) \exists r_i \in \mathbb{Z}$ tel que

$$y_i + \xi_0 \leq r_i \alpha_0 < y_i + \xi'_0 - \beta_0).$$

Il en résulte que

$$P'([-\infty, r_1 \alpha_0 [x \dots x] - \infty, r_v \alpha_0 [) \geq P''([-\infty, r_1 \alpha_0 [x \dots x] - \infty, r_v \alpha_0 [) + \alpha_0$$

Cas 2 : $F_Q(x - \dot{\xi}'_0) - \xi'_0 > F_P(x)$. Le point $y = (y_1, \dots, y_v)$ de $\mathbb{R}^v$ défini par

$$y_i = x_i \quad \text{si} \quad x_i \in [p \alpha_0, q \alpha_0]$$

$$y_i = p \alpha_0 \quad \text{si} \quad x_i < p \alpha_0$$

$$y_i = +\infty \quad \text{si} \quad x_i > q \alpha_0$$

a les propriétés suivantes :

$$- \overline{(p \alpha_0)} \leq y$$

$$- x \leq y$$

$$\begin{aligned} - 0 \leq F_P(y) - F_P(x) &\leq \sum_{i=1}^v (F_P^i(y_i) - F_P^i(x_i)) \\ &\leq \sum_{\substack{i=1 \\ x_i < p\alpha_0}}^v F_P^i(p \alpha_0) + \sum_{\substack{i=1 \\ x_i > q\alpha_0}}^v (1 - F_P^i(q \alpha_0)) \leq \tau . \end{aligned}$$

$$\implies \underline{F_Q(y - \dot{\xi}'_0) - \xi'_0 > F_P(y) - \tau} .$$

$$P' \in B(P, \xi) \implies (F_{P'}(y) \geq F_{P'}(y - \dot{\xi}'_0) - \xi_0)$$

$$P'' \in B(Q, \beta) \implies (F_{P''}(y - \dot{\xi}'_0 + \dot{\beta}_0) + \beta_0 \geq F_Q(y - \dot{\xi}'_0)) .$$

En résumé, nous avons

$$F_{P''}(y - \dot{\xi}'_0 + \dot{\beta}_0) > F_{P'}(y - \dot{\xi}'_0) + \xi'_0 - (\tau + \beta_0 + \xi_0) > F_{P'}(y - \dot{\xi}'_0) + \alpha_0 .$$

De plus, comme précédemment, on peut trouver un point a de $\bar{\mathbb{R}}^v$ dont les coordonnées sont des multiples entiers de α_0 , ou $+\infty$, et tel que

$$y - \dot{\xi}'_0 + \dot{\beta}_0 \leq a \leq y - \dot{\xi}'_0$$

donc tel que $F_{P''}(a) > F_{P'}(a) + \alpha_0$.

Il suffit d'appeler C l'ensemble des pavés mesurables à extrémités rationnelles et de leurs complémentaires ■

Remarques.-

a) Il suffit de faire $\beta = 0$ pour obtenir la propriété (M_2) .
Il est aussi évident que d_L a sur $\mathcal{D}_V$ la propriété (M_1) . Cette remarque est sans intérêt pour d_P , puisque ce résultat a déjà été établi dans un cadre plus général (th. (III A 3), où (X, ρ) est un espace métrique quelconque).

b) Si (X, ρ) n'est pas séparable et si l'on substitue à $\mathcal{D}_X$ un ensemble $\mathcal{D}$ de lois séparables (lois pour lesquelles il existe un événement séparable presque certain, voir ³⁵, App. III), le théorème ci-dessus reste vrai pour $(\mathcal{D}, d_P)$ si l'on supprime $\text{Card } C \leq \aleph_0$.

c) Par contre, si l'on substitue à $\mathcal{D}_X$ un ensemble équitendu de lois, on peut supposer que le nombre n ne dépend que de $(\alpha, \beta, \xi, \xi')$, même si (X, ρ) n'est pas séparable : il suffit de modifier la démonstration correspondante en choisissant d'abord un compact K tel que

$$\inf \{P(K), K \in \mathcal{D}\} > 1 - \tau,$$

puis une suite finie $\{x_i, i \in I_0\}$ de points de K telle que

$$\bigcup_{i \in I_0} B(x_i, \frac{1}{3}) \supset K.$$

Ainsi I_0 dépend de $(\alpha_0, \beta_0, \xi_0, \xi'_0)$ et non de P .

On introduira ensuite les dilatés d'ordre ξ_0 des réunions finies de boules de la famille $\{B(x_i, \frac{1}{3}), i \in I_0\}$, et il conviendra d'appeler C l'ensemble de tous les ouverts ainsi obtenus quand $(\alpha_0, \beta_0, \xi_0, \xi'_0)$ varie.

III B 4 - Cas de la distance de Kolmogorov.

$\forall v \in \mathbb{N}^*$, désignons par $\mathcal{D}_{v,c}$ l'ensemble des lois boréliennes sur $\mathbb{R}^v$ dont la fonction de répartition est continue (il s'agit de lois diffuses si $v = 1$).

Théorème (*). - Quel que soit l'entier positif v , il existe une famille $\mathcal{C}_v$ (resp. une famille dénombrable $\mathcal{C}_{v,c}$) de fermés de $\mathbb{R}^v$ telle que : quel que soit le quadruplet $(\alpha, \beta, \xi, \xi')$ de nombres tels que

$$0 \leq \xi < \xi + \alpha \leq \xi + \alpha + \beta < \xi' < 1$$

on peut associer à toute loi borélienne P sur $\mathbb{R}^v$ (resp. toute loi P de $\mathcal{D}_{v,c}$) une suite d'au-plus $2(E(\frac{2v}{\xi' - (\alpha + \beta + \xi)}) + 1)^v$ boréliens

$\mathcal{C}_v$ (resp. $\mathcal{C}_{v,c}$)-mesurables notés $A_1, \dots, A_k$ vérifiant

$\forall Q \in \mathcal{D}_v - B(P, \xi'), \exists i \in \{1, \dots, k\}$ tel que

$$\inf \{P'(A_i) \mid P' \in B(P, \xi)\} > \sup \{P''(A_i) \mid P'' \in B(Q, \beta)\} + \alpha.$$

Nous démontrons d'abord que

Lemme (*) - $\forall P \in \mathcal{D}_1$ et $\forall \tau \in]0, 1[, \exists a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tels que

- $k \leq E(\frac{1}{\tau})$ où $E(\frac{1}{\tau})$ désigne la partie entière de τ

- $a_1 < \dots < a_k$

- $\forall I =]-\infty, a_1], \dots,]a_k, +\infty[, \sup(|F_P(x) - F_P(y)|, x, y \in I) < \tau$

Si de plus $P \in \mathcal{D}_{1,c}$, on peut supposer que $a_1, \dots, a_k$ sont rationnels.

En effet, posons

$$- n = E\left(\frac{1}{\tau}\right) + 1 \quad (\implies n \geq 2 \text{ et } \frac{1}{n} < \tau)$$

$$- \forall k \in \{1, \dots, n-1\}, x_k = \sup \{x \mid F_P(x) \leq \frac{k}{n}\}$$

$$\implies (\forall k, F_P(x_k) \leq \frac{k}{n} \text{ et } F_P(x_k + 0) \geq \frac{k}{n}) .$$

Considérons l'oscillation de F sur chacun des intervalles

$$]-\infty, x_1], \dots,]x_{n-1}, +\infty[.$$

$$\text{Sur }]-\infty, x_1], \quad x \leq y \leq x_1 \implies F_P(y) - F_P(x) \leq F_P(x_1) \leq \frac{1}{n} .$$

$$\text{Sur }]x_{n-1}, +\infty[, \quad x_{n-1} < x \leq y \implies F_P(y) - F_P(x) \leq 1 - F_P(x_{n-1}+0) \leq \frac{1}{n} .$$

$$\text{Sur }]x_k, x_{k+1}], \text{ si } x_k < x_{k+1} ,$$

$$x_k < x \leq y \leq x_{k+1} \implies F_P(y) - F_P(x) \leq F_P(x_{k+1}) - F_P(x_k+0) \leq \frac{1}{n} .$$

Il suffit de noter $a_1, \dots, a_k$ la suite $x_1, \dots, x_{n-1}$ rangée dans l'ordre strictement croissant.

Si $P \in \mathcal{D}_{1,c}$, on choisit d'abord $n-1$ réels $x'_1, \dots, x'_{n-1}$ tels que

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, F_P(x'_k) = \frac{k}{n} ,$$

puis $n-1$ rationnels $x_1, \dots, x_{n-1}$ tels que

$$- x_1 \leq \dots \leq x_{n-1}$$

$$- \forall k, (x_k \leq x'_k \text{ et } F_P(x'_k) - F_P(x_k) < \frac{1}{2} (\tau - \frac{1}{n}) .$$

On vérifie que l'oscillation de F_P sur chacun des intervalles

$$]-\infty, x_1], \dots,]x_{n-1}, +\infty[\text{ est majorée par } \frac{1}{2} (\tau + \frac{1}{n}) \blacksquare$$

Démonstration du théorème.-

Cas $v = 1$. Sont donnés un quadruplet $(\alpha, \beta, \xi, \xi')$ et une loi P .

On applique le lemme ci-dessus pour P et $\tau = \frac{1}{2} (\xi' - (\alpha + \beta + \xi))$.

$Q \in \mathcal{D}_1$ et $d_K(P, Q) > \xi' \implies \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $|F_P(x) - F_Q(x)| > \xi'$.

Si $F_P(x) > F_Q(x) + \xi'$, $F_P(x) > \xi' \implies x > a_1$.

Soit $j = \text{Max} \{i \mid 1 \leq i \leq k, a_i < x\}$.

Si $j < k$, $x \in]a_j, a_{j+1}]$; sinon, $x \in]a_k, +\infty[$.

Dans les deux cas, nous avons

$$(1) \quad F_P(a_j + 0) > F_Q(a_j + 0) + \xi' - \tau$$

Si $F_Q(x) > F_P(x) + \xi'$, $F_P(x) < 1 - \xi' \implies x \leq a_k$.

Soit $j = \text{Min} \{i \mid 1 \leq i \leq n, x \leq a_i\}$.

Si $j \geq 2$, $x \in]a_{j-1}, a_j]$; sinon, $x \in]-\infty, a_1]$.

Dans les deux cas, on a

$$(2) \quad F_Q(a_j) > F_P(a_j) + \xi' - \tau .$$

Finalement, suivant que l'on est dans le premier ou le second cas, on déduit de (1) ou (2) que

$$(P' \in B(P, \xi) \text{ et } P'' \in B(Q, \beta)) \implies$$

$$(P' (]-\infty, a_j]) > P'' (]-\infty, a_j]) + \xi' - (\tau + \xi + \beta))$$

ou $(P' ([a_j, +\infty[) > P'' ([a_j, +\infty[) + \xi' - (\tau + \xi + \beta))$.

Cas $v > 1$. On applique le lemme à chacune des lois marginales de P pour $\tau = \frac{1}{2v} (\xi' - (\alpha + \beta + \xi))$.

On obtient ainsi pour $j = 1, \dots, v$ au plus $E(\frac{1}{\tau})$ nombres notés $a_1^j, \dots, a_{k(j)}^j$ tels que

- $a_1^j < \dots < a_{k(j)}^j$
- l'oscillation de F_P^j sur chacun des intervalles $] -\infty, a_1^j], \dots,]a_{k(j)}^j, +\infty[$ est inférieure à τ .

$Q \in \mathcal{D}_v$ et $d_K(P, Q) > \xi' \implies \exists x = (x_1, \dots, x_v)$ tel que

$$|F_P(x) - F_Q(x)| > \xi'.$$

Si $F_P(x) > F_Q(x) + \xi'$

$$F_P(x) > \xi' \implies (\forall j, F_P^j(x_j) > \xi') \implies (\forall j, x_j > a_1^j).$$

Soit $i(j) = \text{Max}\{i \mid 1 \leq i \leq k(j), a_i^j < x_j\}$

Si $i(j) < k(j)$, $x_j \in]a_{i(j)}^j, a_{i(j)+1}^j]$; sinon, $x_j \in]a_{k(j)}^j, +\infty[$.

Posons $a = (a_{i(1)}^1, \dots, a_{i(v)}^v)$:

$$\forall j, F_P^j(x_j) - F_P^j(a_{i(j)}^j + 0) \leq \tau \implies F_P(x) - F_P(a + 0) \leq v \tau.$$

$$\implies (F_P(a+0) > F_Q(a+0) + \xi' - v \tau). \quad (1')$$

Si $F_Q(x) > F_P(x) + \xi'$, $\forall j \in \{1, \dots, v\}$ posons $a_0^j = -\infty$

et $a_{k(j)+1}^j = +\infty$; x appartient à un seul pavé de la forme $]a_{i(1)}^1, a_{i(1)+1}^1) \times \dots \times]a_{i(v)}^v, a_{i(v)+1}^v)$, ces intervalles étant fermés à droite si leur borne supérieure est finie, ouverts sinon.

Pour le point $a = (a_{i(1)+1}^1, \dots, a_{i(v)+1}^v)$ de $\bar{\mathbb{R}}^v$, nous avons :

$$\begin{aligned} \forall j, \quad F_P^j(a_{i(j)+1}^j) - F_P^j(x_j) \leq \tau &\implies F_P(a) - F_P(x) \leq v \tau \\ &\implies F_Q(a) > F_P(a) + \xi' - v \tau \quad (2') \end{aligned}$$

De (1') ou (2') suivant le cas, on déduit que

$$P' \in B(P, \xi) \quad \text{et} \quad P'' \in B(Q, \beta) \implies$$

$$P'(\prod_{i=1}^v]-\infty, a_{i(1)}^1] \times \dots \times]-\infty, a_{i(v)}^v]) > P''(\prod_{i=1}^v]-\infty, a_{i(1)}^1] \times \dots \times]-\infty, a_{i(v)}^v]) + \xi' - (\beta + \xi + v\tau)$$

ou

$$\begin{aligned} P'(\mathbb{R}^v - \prod_{i=1}^v]-\infty, a_{i(1)+1}^1[\times \dots \times]-\infty, a_{i(v)+1}^v[> P''(\mathbb{R}^v - \prod_{i=1}^v]-\infty, a_{i(1)+1}^1[\times \dots \times]-\infty, a_{i(v)+1}^v[+ \\ \xi' - (\beta + \xi + v\tau) . \end{aligned}$$

On appellera donc C_v (resp. $C_{v,c}$) la classe des fermés de la forme $]-\infty, x_1] \times \dots \times]-\infty, x_v]$ avec $(x_1, \dots, x_v) \in \mathbb{R}^v$ (resp. $\mathbb{Q}^v$) ou de la forme $\mathbb{R}^v - \prod_{i=1}^v]-\infty, x_i[\times \dots \times]-\infty, x_v[$ avec $(x_1, \dots, x_v) \in (\mathbb{R} + \{+\infty\})^v$ (resp. $(\mathbb{Q} + \{+\infty\})^v$), en remarquant que si $P \in \mathcal{D}_{v,c}$, $F_P^1, \dots, F_P^v$ sont continues ■

On déduit du théorème (III B 4) que d_K a la propriété (M_1) .

III B 5 - Propriété (M_2) faible.-

Nous ne l'emploierons pas, mais dans le cas de l'échantillon, on peut l'utiliser au lieu de (M_2) .

Définition.- Une distance d sur un ensemble $\mathcal{D}$ de lois sur un espace mesurable $(X, \mathcal{B})$ a la propriété (M_2) faible s'il existe deux fonctions $S, T :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ vérifiant :

$\forall P \in \mathcal{D}$ et $\forall \xi' > 0$, il existe une suite finie d'événements

$A_1, \dots, A_n$ telle que

$Q \in \mathcal{D} - B(P, \xi') \implies \exists i \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$\inf(P'(A_i) \mid P' \in B(P, S(\xi'))) \geq Q(A_i) + T(\xi')..$

L'introduction de cette définition est justifiée par la proposition suivante analogue à (III A 5) :

Proposition.- Soit d et d' deux distances équivalentes sur un ensemble $\mathcal{D}$ de lois sur un espace mesurable $(X, \mathcal{B})$.

Si d a la propriété $(M_2 \text{ faible})$, d' l'a aussi.

Démonstration.- analogue à (III A 5).

Exemple.- Si l'espace métrique (X, ρ) est séparable, $\forall \lambda > 0$ la distance $d_{P, \lambda}$ a sur $\mathcal{D}_X$ la propriété $(M_2 \text{ faible})$, puisque d_P a la propriété (M_2) .

III B 6 - Distance d_V .

La distance d_V sur l'ensemble $\mathcal{D}$ de toutes les lois sur un espace mesurable $(X, \mathcal{B})$ n'a pas, en général, la propriété (M_2) , ni même la propriété $(M_2 \text{ faible})$.

Exemple.- Supposons que $\mathcal{D}$ possède une loi diffuse P , et que d_V a sur $\mathcal{D}$ la propriété $(M_2 \text{ faible})$.

On peut associer à P et $\xi' \in]0, 1[$ des événements $A_1, \dots, A_n$ vérifiant cette propriété.

La tribu engendrée par $(A_1, \dots, A_n)$ est aussi engendrée par une partition $\mathcal{B}$ -mesurable de X notée $(B_1, \dots, B_r)$.

$$\forall j \in \{1, \dots, r\}, \exists b_j \in B_j.$$

La loi $Q = \sum_{i=1}^r P(B_j) \delta_{b_j}$ donne aux événements $A_1, \dots, A_n$ les mêmes probabilités que la loi P . C'est absurde puisque $d_V(P, Q) = 1$, la loi Q étant discrète ■

III B 7 - Par contre la restriction de d_V à certaines parties de $\mathcal{D}$ a souvent la propriété $(M_2$ faible).

α - Proposition.- Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de lois sur R^V vérifiant la condition suivante :

$$(H.W) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } (\forall P, Q \in \mathcal{D}, d_V(P, Q) \leq M(\varepsilon) d_K(P, Q) + \varepsilon).$$

Alors d_V a sur $\mathcal{D}$ la propriété $(M_2$ faible).

Démonstration.-

a) Montrons d'abord que (H.W) est vérifiée si et seulement si l'application identique ψ de $\mathcal{D}$ est (d_K, d_V) uniformément continue.

Si (H.W) est vérifiée, on a évidemment

$$\forall \varepsilon > 0, (P, Q \in \mathcal{D} \text{ et } d_K(P, Q) < \frac{\varepsilon}{2 M(\frac{\varepsilon}{2})} \implies d_V(P, Q) < \varepsilon).$$

Réciproquement, si ψ est (d_K, d_V) uniformément continue,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } (P, Q \in \mathcal{D} \text{ et } d_K(P, Q) < \alpha(\varepsilon)) \implies d_V(P, Q) < \varepsilon.$$

On a donc toujours

$$P, Q \in \mathcal{D} \implies d_V(P, Q) \leq \frac{1}{\alpha(\varepsilon)} d_K(P, Q) + \varepsilon.$$

b) Puisque $d_V \geq d_K$, (H.W) est vérifiée si et seulement si $\emptyset$ est (d_K, d_V) et (d_V, d_K) uniformément continue, soit si et seulement si d_V et d_K sont équivalentes. Il en résulte que d_V a la propriété $(M_2 \text{ faible})$ sur $\mathcal{D}$ ■

W. Hoeffding et J. Wolfowitz qui ont introduit la propriété (H.W) signalent (⁹, p. 713) que cette condition est vérifiée par de nombreuses familles de lois boréliennes sur $\mathbb{R}$. Ces auteurs indiquent par exemple que si $\mathcal{D}$ est l'ensemble des lois normales dégénérées ou non sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall P, Q \in \mathcal{D}, \quad d_V(P, Q) \leq 6 d_K(P, Q) \quad \blacksquare$$

β - Puisque $d_V \geq d_P$, on peut faire le même genre de remarque au sujet de d_P : sur toute partie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}_X$ ((X, ρ) étant un espace métrique séparable) dont l'application identique est (d_P, d_V) uniformément continue, d_V a la propriété $(M_2 \text{ faible})$.

Une telle étude peut sans doute utiliser (³⁶, th. 3.7. et suivants).

III B 8 - Autres propriétés de décantation.-

Pratiquement, on a souvent affaire à des ensembles de lois beaucoup moins généraux : familles exponentielles, lois normales sur $\mathbb{R}^V$, lois stables sur $\mathbb{R}$ (³⁴, 5.7). De plus, on peut fréquemment injecter ces ensembles de lois dans un espace euclidien, et les munir ainsi d'une distance qui a souvent de fortes propriétés de décantation.

Ainsi l'ensemble $\mathcal{D}_{1,s}$ des lois stables sur $\mathbb{R}$ est en correspondance biunivoque avec

$$\mathcal{Q}_{1,s} = \{(\alpha, \beta, \gamma, \sigma^2) \mid 0 < \alpha \leq 2, |\beta| \leq 2 - \alpha, -\infty < \gamma < +\infty, \sigma^2 > 0\}.$$

On peut donc munir $\mathcal{D}_{1,s}$ de la distance notée d'_0 associée à la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^4$. Cette distance définit sur $\mathcal{D}_{1,s}$ la topologie de la convergence faible (³⁶, 4.1.).

On en déduit que sur l'ensemble $\mathcal{D}_{1,n}$ des lois normales non dégénérées sur $\mathbb{R}$, les distances d_0 et d''_0 suivantes :

$$(\forall m, m' \in \mathbb{R} \text{ et } \forall \sigma, \sigma' > 0) ,$$

$$d''_0(N(m, \sigma^2), N(m', \sigma'^2)) = ((m-m')^2 + (\sigma^2 - \sigma'^2)^2)^{1/2}$$

et
$$d_0(N(m, \sigma^2), N(m', \sigma'^2)) = |m-m'| + |\sigma - \sigma'|$$

définissent la topologie de la convergence faible.

En fait, d_0 décante mieux que d_p les lois de $\mathcal{D}_{1,n}$. Nous avons utilisé cette remarque pour construire des estimateurs uniformément convergents dans un cas où on attend seulement des estimateurs convergents (voir ¹², th. 4 : ce résultat n'est pas redémontré ici).

CHAPITRE IV

CONDITIONS SUFFISANTES D'EXISTENCE DE TESTS ET D'ESTIMATEURS CONVERGENTS DANS LE CAS DES LOIS-PRODUITS.

Il est facile de voir que les résultats de synthèse ci-dessous reposent sur des constructions. Elles ont été données par morceaux dans les chapitres précédents, sauf celle de H. Schmerkotte que nous n'avons pas rappelée (voir ¹⁹).

IV A - THEOREME GENERAL.

IV A 1 - Théorème. - Considérons le paramètre $f : H \rightarrow (\mathbb{H}, \delta)$, les conditions ci-dessous étant vérifiées :

- (H_1) H est un ensemble de lois-produits.
- (H_2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Pi_n(H)$ est muni d'une distance d_n ayant la propriété (M_1) .
- (H_3) pour tout couple (B_1, B_2) de boules fermées de $(\mathbb{H}, \delta)$ vérifiant $\delta^*(B_1, B_2) > 0$, il existe des hypothèses $H_1, \dots, H_r$ recouvrant $f^{-1}(B_1)$ et des hypothèses $H_{r+1}, \dots, H_s$ recouvrant $f^{-1}(B_2)$ et pour $i = 1, \dots, s$ une suite de boules fermées $(H_{i,n})_{n \geq 1}$ de chacun des espaces $(\Pi_n(H), d_n)$, $n = 1, 2, \dots$ telles que :
 - $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et pour $i = 1, \dots, s$, $\Pi_n(H_i) \subset H_{i,n}$
 - $\forall i, j \in \{1, \dots, s\}$, $1 \leq i \leq r < j \leq s \implies \sum_{n=1}^{+\infty} (\sup(0, d_n^*(H_{i,n}, H_{j,n})))^2 = +\infty.$

Alors f est estimable (resp. uniformément estimable) si $(\mathbb{H}, \delta)$ est séparable (resp. précompact).

Démonstration.- Si $1 \leq i \leq r < j \leq s$, on peut trouver une suite d'entiers $1 \leq n_1 < n_2 \dots$ et une suite de réels $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ vérifiant :

- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 < \alpha_k < d_{n_k}^*(H_{i,n_k}, H_{j,n_k})$
- $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^2 = +\infty$.

Par définition de (M_1) , $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists B_{n_k} \in \mathcal{B}_{n_k}$ tel que

$$(P \in H_{i,n_k} \text{ et } Q \in H_{j,n_k}) \implies P(B_{n_k}) + \alpha_k < Q(B_{n_k}).$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ - $(n_k)_{k \geq 1}$, posons $B_n = \emptyset$.

Alors $(B_n)_{n \geq 1}$ décante asymptotiquement uniformément $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} H_{i,n}$ et $\bigoplus_{n=1}^{+\infty} H_{j,n}$.

Il y a donc séparation asymptotique uniforme, d'après le théorème fondamental, puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 = +\infty$.

On en déduit que $f^{-1}(B_1)$ et $f^{-1}(B_2)$ ont aussi cette propriété, puisque notamment $H_i \subset \bigoplus_{n=1}^{+\infty} H_{i,n}$ pour $i = 1, \dots, s$.

Il suffit d'utiliser le théorème (I C 1) pour conclure.

IV A 2 - Exemple.- Soit (X, ρ) un espace métrique séparable, $\mathcal{B}$ sa tribu borélienne, $\mathcal{D}_X$ l'ensemble des lois sur $(X, \mathcal{B})$, d_P la distance de Prokorov associée à ρ . Nous supposons que

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(X_n, \mathcal{B}_n) = (X, \mathcal{B})$
- H est un ensemble de lois-produits
- $\forall P \in H$, $(\Pi_n(P))_{n \geq 1}$ converge dans $(\mathcal{D}_X, d_P)$ vers une loi notée $f(P)$.

On définit ainsi un paramètre $f : H \rightarrow (\mathcal{D}_X, d_P)$.

Il est estimable si $(\sup_{P \in H} d_P(\Pi_n(P), f(P))) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

En effet, soit $B_0 = B(f(P_0), \alpha_0)$ et $B_1 = B(f(P_1), \alpha_1)$
deux boules fermées de $(\mathcal{D}_X, d_P)$ telles que $\alpha = d_P^*(B_0, B_1) > 0$.

Soit N un entier naturel vérifiant

$$n > N \implies \left(\sup_{P \in H} d_P(\Pi_n(P), f(P)) \right) < \frac{\alpha}{7}.$$

Alors, si $n > N$, nous avons :

$$- \Pi_n(f^{-1}(B_i)) \subset B(\Pi_n(P_i), \alpha_i + \frac{2\alpha}{7}) \text{ pour } i = 0, 1,$$

$$- d_P^*(B(\Pi_n(P_0), \alpha_0 + \frac{2\alpha}{7}), B(\Pi_n(P_1), \alpha_1 + \frac{2\alpha}{7})) > \frac{\alpha}{7} \quad \blacksquare$$

IV B - CAS OU LE PARAMETRE f ET LES PROJECTIONS $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ SE COMPORTENT ISOMETRIQUEMENT (*).

IV B 1 - Estimateurs convergents.

Théorème (*). - Soit $f : H \rightarrow (\oplus, \delta)$ un paramètre, les conditions (H_1) (H_2) et la condition (H_4) ci-dessous étant vérifiées :

- (H_4) Il existe deux suites de fonctions monotones non décroissantes non négatives $(\underline{h}_n)_{n \geq 1}$ et $(\bar{h}_n)_{n \geq 1}$ définies sur $[0, +\infty[$ telles que :

- $\forall P, Q \in H, \forall n \in \mathbb{N}^*, \underline{h}_n(\delta(f(P), f(Q))) \leq d_n(\Pi_n(P), \Pi_n(Q)) \leq \bar{h}_n(\delta(f(P), f(Q)))$,
- $\forall \gamma > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} (\text{Max}(0, \underline{h}_n(\gamma) - 2\bar{h}_n(\alpha)))^2 = +\infty$.

Alors f est p.s. estimable (resp. uniformément p.s. estimable) si $(\oplus, \delta)$ est σ -précompact (resp. précompact).

Démonstration. -

a) Soit P_0 et P_1 deux hypothèses simples quelconques vérifiant $\delta(f(P_0), f(P_1)) \geq \gamma > 0$.

Pour tout entier positif n et tout nombre positif α , nous avons :

- $\Pi_n(f^{-1}(B(f(P_i), \alpha))) \subset B(\Pi_n(P_i), \bar{h}_n(\alpha))$ pour $i = 0, 1$,
- $d_n(\Pi_n(P_0), \Pi_n(P_1)) \geq \underline{h}_n(\gamma)$
- $d_n^*(B(\Pi_n(P_0), \bar{h}_n(\alpha)), B(\Pi_n(P_1), \bar{h}_n(\alpha))) \geq \underline{h}_n(\gamma) - 2\bar{h}_n(\alpha)$.

Si α est assez petit, les boules $B(f(P_0), \alpha)$ et $B(f(P_1), \alpha)$ vérifient (H_3) , donc se séparent asymptotiquement uniformément.

b) Supposons d'abord que $(\oplus, \delta)$ soit précompact.

Il suffit de montrer que la condition (G) est vérifiée.

Soit B_0 et B_1 deux boules fermées quelconques de $(\mathbb{W}, \delta)$ telles que $\delta^*(B_0, B_1) > 0$.

Il n'y a pas de problème si $f(H) \cap B_0$ ou $f(H) \cap B_1$ est vide. Sinon, soit $P_1, \dots, P_r$ des lois de $f^{-1}(B_0)$ et $P_{r+1}, \dots, P_s$ des lois de $f^{-1}(B_1)$ vérifiant :

$$- f(H) \cap B_0 \subset \bigcup_{i=1}^r B(f(P_i), \alpha)$$

$$- f(H) \cap B_1 \subset \bigcup_{j=r+1}^s B(f(P_j), \alpha), \quad \alpha \text{ étant un nombre positif}$$

associé à $\gamma = \delta^*(B_0, B_1)$ par (H_4) .

Puisque $\delta(f(P_i), f(P_j)) \geq \gamma$ si $1 \leq i \leq r < j \leq s$, $f^{-1}(B(f(P_i), \alpha))$ et $f^{-1}(B(f(P_j), \alpha))$ se séparent asymptotiquement uniformément, d'après (a). Il en est de même de $f^{-1}(B_0)$ et $f^{-1}(B_1)$.

On en déduit que f est uniformément estimable (th. I C 1) et même uniformément p.s. estimable (remarque I A 10 a).

Si $(\mathbb{W}, \delta)$ est σ -précompact, il suffit d'appliquer le lemme (I C 3) ■

IV B 2 - Interprétation de (H_4) et exemple.

(H_2) étant réalisée, il est commode de remplacer (H_4) par les conditions (H_4') ou (H_4'') suivantes, qui sont plus fortes.

(H_4') (resp. (H_4'')) - Il existe deux fonctions monotones non décroissantes $\underline{h}$ et $\bar{h} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ telles que

$$- \underline{x} > 0 \implies \underline{h}(\underline{x}) > 0 \quad (\text{resp. } \underline{h}(\bigcap [0, +\infty[) = \bigcap [0, +\infty[)$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0_+} \bar{h}(x) = 0$$

$$- \forall P, Q \in H \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \underline{h}(\delta(f(P), f(Q))) \leq d_n(\Pi_n(P), \Pi_n(Q)) \leq \bar{h}(\delta(f(P), f(Q)))$$

$$- \underline{h} \leq \bar{h}$$

Si (H_4') est vérifiée, $\Pi_n(P) \rightsquigarrow f(P)$ définit une bijection ψ_n de $\Pi_n(H)$ sur $f(H)$, pour tout n . De plus les bijections $\psi_1, \psi_2, \dots$ sont équi-bi-uniformément continues. Il s'agit donc d'une généralisation naturelle du cas de l'échantillon.

Exemple.- Estimation du paramètre de translation.

Théorème.- Soit $f : H \rightarrow (\oplus, \delta)$ un paramètre, (H_1) et les conditions suivantes étant réalisées :

- (H_5) $\forall n \in \mathbb{N}^*, (\mathcal{X}_n, \mathcal{B}_n) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
- (H_6) Sont données une loi borélienne diffuse μ sur $\mathbb{R}$ et une fonction $\lambda : \mathbb{N}^* \times H \rightarrow \mathbb{R}$ telles que
 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall P \in H$, $\Pi_n(P)$ est l'image de μ par
la translation $t_{\lambda(n,P)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightsquigarrow x + \lambda(n,P)$
- (H_7) Il existe deux fonctions monotones non décroissantes non
negatives $\underline{h}'$ et $\bar{h}'$ définies sur $[0, +\infty[$ telles que

- $x > 0 \implies \underline{h}'(x) > 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \bar{h}'(x) = 0$

- $\forall P, Q \in H$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{h}'(\delta(f(P), f(Q))) \leq |\lambda(n,P) - \lambda(n,Q)| \leq \bar{h}'(\delta(f(P), f(Q)))$.

Alors f est p.s. estimable si $(\oplus, \delta)$ est σ -précompact,
uniformément p.s. estimable si $(\oplus, \delta)$ est précompact.

Démonstration.- La fonction de concentration Q_μ de μ définie par

- $Q_\mu(\ell) = 0$ si $\ell \leq 0$

- $Q_\mu(\ell) = \sup \{P([x, x + \ell[) \mid x \in \mathbb{R}\}$ si $\ell > 0$

est monotone non décroissante, continue en 0 et positive sur $]0, +\infty[$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall P, Q \in H$, nous avons :

$$\begin{aligned} d_K(\Pi_n(P), \Pi_n(Q)) &= \sup \{ |F_{\Pi_n(P)}(x) - F_{\Pi_n(Q)}(x)|, x \in \mathbb{R} \} \\ &= \sup \{ |F_\mu(x - \lambda(n, P)) - F_\mu(x - \lambda(n, Q))|, x \in \mathbb{R} \} \\ &= Q_\mu(|\lambda(n, P) - \lambda(n, Q)|). \end{aligned}$$

Les fonctions $\underline{h} = Q_\mu(\underline{h}')$ et $\bar{h} = Q_\mu(\bar{h}')$ vérifient donc (H'_4) :
ce résultat est un corollaire de (IV B 1) ■

Remarque. - $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(P) \rightsquigarrow \lambda(n, P)$ définit une injection continue de $f(H)$ dans $\mathbb{R}$. Sous l'hypothèse supplémentaire suivante :

- (H_9) $(\oplus) = \mathbb{R}$, δ est la distance usuelle, et $f(H)$ est un intervalle,

une telle fonction est strictement croissante.

L'hypothèse (H_9) est donc vérifiée :

- (H_9) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'une des propriétés ci-dessous est vraie :

$$(a) - \forall P, Q \in H, (f(P) < f(Q) \implies F_{\Pi_n(P)} \leq F_{\Pi_n(Q)})$$

$$(b) - \forall P, Q \in H, (f(P) < f(Q) \implies F_{\Pi_n(P)} \geq F_{\Pi_n(Q)})$$

Ce cas est développé en (IV C).

IV B 3 - Tests convergents.

Théorème. - Soit $f : H \rightarrow (\oplus, \delta)$ un paramètre. Sous les hypothèses (H_1, H_2, H_4) , l'algèbre $\oplus_f$ contient

- les fermés de $(\oplus, \delta)$ si cet espace est σ -précompact,
- ses fermés σ -compacts s'il est séparable.

Démonstration. -

a) $(\mathbb{H}, \delta)$ est σ -précompact.

Soit $\mathbb{H}_0$ un fermé de $(\mathbb{H}, \delta)$. Il n'est pas suffisant de savoir que f est p.s. estimable pour conclure que $f^{-1}(\mathbb{H}_0)$ est testable.

Soit $(\mathbb{H}_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de parties précompactes de $\mathbb{H}$, le recouvrant.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathbb{H}_{0,n} = \mathbb{H}_0 \cap \mathbb{H}_n$

$$\mathbb{H}_{0,n}^* = \{ \theta \mid n \geq \delta(\theta, \mathbb{H}_0) \geq \frac{1}{n} \} \cap \mathbb{H}_n.$$

$(\mathbb{H}_{0,n})_{n \geq 1}$ et $(\mathbb{H}_{0,n}^*)_{n \geq 1}$ sont des suites croissantes de précompacts recouvrant respectivement $\mathbb{H}_0$ et $\mathbb{H} - \mathbb{H}_0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{H}_{0,n}$ et $\mathbb{H}_{0,n}^*$ se séparent évidemment asymptotiquement uniformément. Il suffit donc d'appliquer le théorème (I B 1).

b) $(\mathbb{H}, \delta)$ est séparable.

Montrons que pour toute suite $(\mathbb{H}_{0,r})_{r \geq 1}$ de parties compactes de $(\mathbb{H}, \delta)$, $f^{-1}(\bigcup_{r=1}^{+\infty} \mathbb{H}_{0,r})$ et $H - f^{-1}(\bigcup_{r=1}^{+\infty} \mathbb{H}_{0,r})$ se séparent asymptotiquement.

α - On peut supposer que $(\mathbb{H}_{0,r})_{r \geq 1}$ est une suite croissante.

Soit $(\mathbb{H}_{1,s})_{s \geq 1}$ une suite de boules fermées telles que

$$- \mathbb{H} - \bigcup_{r=1}^{+\infty} \mathbb{H}_{0,r} = \bigcup_{s=1}^{+\infty} \mathbb{H}_{1,s}$$

$$- \forall s \in \mathbb{N}^*, \delta(\mathbb{H}_{1,s}, \bigcup_{r=1}^{+\infty} \mathbb{H}_{0,r}) > 0.$$

β - Pour tout entier positif quelconque s , on peut trouver
une suite $(P_{1,v})_{v \geq 1}$ dans $f^{-1}(\oplus_{1,s})$ et pour tout entier positif r une
suite finie $(P_{o,u})_{u \in U_r}$ dans $f^{-1}(\oplus_{o,r})$ telles que

$$- f(H) \cap \oplus_{o,r} \subset \bigcup_{u \in U_r} B(f(P_{o,u}), \alpha)$$

$$- f(H) \cap \oplus_{1,s} \subset \bigcup_{v=1}^{+\infty} B(f(P_{1,v}), \alpha) \text{ où } \alpha \text{ est un nombre vérifiant}$$

$$(H_4) \text{ pour } \gamma = \delta \left(\bigcup_{r=1}^{+\infty} \oplus_{o,r}, \oplus_{1,s} \right).$$

On sait que $\forall r \in \mathbb{N}^*, f^{-1}(\bigcup_{u \in U_r} B(f(P_{o,u}), \alpha))$ et
 $f^{-1}(\bigcup_{v=1}^r B(f(P_{1,v}), \alpha))$ se séparent asymptotiquement uniformément.

Il est donc facile de construire une suite adaptée $(C_n(s))_{n \geq 1}$
de cylindres tels que

$$- \forall r \in \mathbb{N}^*, \left(\inf_{P \in f^{-1}(\oplus_{o,r})} P^{(n)}(C_n(s)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \right),$$

$$- P \in f^{-1}(\oplus_{1,s}) \implies (P^{(n)}(C_n(s)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0).$$

γ - Cette construction étant possible quel que soit s , il
reste à appliquer le théorème (I B 3).

IV B 4 - Estimateurs p.co.convergentes.

Théorème.- Soit $f : H \rightarrow (\oplus, \delta)$ un paramètre, les conditions
 (H_1, H_2, H_4'') étant réalisées. Alors :

f est p.co. estimable si $(\oplus, \delta)$ est σ -compact, uniformément
p.co. estimable si $(\oplus, \delta)$ est compact.

Démonstration. - On suppose d'abord que $(\mathcal{H}, \delta)$ est compact.

a) D'après (²⁶, lemme 2), on peut construire une suite triple

$(m_n, \varepsilon_n, \mathcal{H}_n)_{n \geq 1}$ ayant les propriétés suivantes :

- $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ est une suite monotone non croissante de réels tendant vers 0 et vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varepsilon_n \geq n^{-1/3}$.

- $(m_n)_{n \geq 1}$ est une suite monotone non décroissante d'entiers positifs tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, m_n \leq n$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{H}_n$ est une partie de $\mathcal{H}$ à m_n éléments notés $\theta_{n,1}, \dots, \theta_{n,m_n}$ tels que :

$$- \mathcal{H} = \bigcup_{\theta \in \mathcal{H}_n} B(\theta, \varepsilon_n)$$

$$- 1 \leq i < j \leq m_n \implies \delta(\theta_{n,i}, \theta_{n,j}) \geq \varepsilon_n.$$

b) Soit n un entier positif quelconque. On pose

- $I_n = \{i \mid 1 \leq i \leq m_n, f(H) \cap B(\theta_{n,i}, \varepsilon_n) \neq \emptyset\}$. On choisit alors, $\forall i \in I_n$, une loi $P_{n,i}$ dans $f^{-1}(B(\theta_{n,i}, \varepsilon_n))$, ce qui donne

$$f(H) \subset \bigcup_{i \in I_n} B(f(P_{n,i}), 2\varepsilon_n).$$

- γ_n est un nombre positif tel que $\underline{h}(\gamma_n + 2\varepsilon_n) = 2\bar{h}(2\varepsilon_n) + 2\varepsilon_n$.

- $\forall i \in I_n, J_{n,i} = \{j \mid j \in I_n, \delta(f(P_{n,i}), f(P_{n,j})) \geq \gamma_n + 2\varepsilon_n\}$.

- $J_n = \{i \mid i \in I_n, J_{n,i} \neq \emptyset\}$.

Nous rappelons que pour tout couple (P, Q) d'hypothèses simples telles que $\delta(f(P), f(Q)) \geq \gamma_n + 2\varepsilon_n$, puisque l'on a

- $\underline{h}(\gamma_n + 2\varepsilon_n) \leq d_p(\Pi_p(P), \Pi_p(Q))$ pour $p = 1, 2, \dots, n$,

- $d_p^*(B(\Pi_p(P), \bar{h}(2\varepsilon_n)), B(\Pi_p(Q), \bar{h}(2\varepsilon_n))) \geq 2\varepsilon_n$,

on peut trouver un cylindre $C_n(P, Q)$ tel que

$$- P_0 \in f^{-1}(B(f(P), 2 \epsilon_n)) \implies P_0^{(n)}(C_n(P, Q)) \geq 1 - \exp(-\frac{1}{4} n \epsilon_n^2)$$

$$- P_0 \in f^{-1}(B(f(Q), 2 \epsilon_n)) \implies P_0^{(n)}(C_n(P, Q)) \leq \exp(-\frac{1}{4} n \epsilon_n^2)$$

Pour tout couple (i, j) d'indices de I_n tels que

$j \in J_{n,i}$ (ou $i \in J_{n,j}$), on pose

$$- C_n(i, j) = C_n(P_{n,i}, P_{n,j}) \quad \text{si } i < j$$

$$- C_n(i, j) = X^{(n)} - C_n(P_{n,j}, P_{n,i}) \quad \text{si } i > j.$$

Pour tout i dans $\{1, \dots, m_n\}$, on pose

$$- C_n(i) = \bigcap_{j \in J_{n,i}} C_n(i, j) \quad \text{si } i \in J_n$$

$$- C_n(i) = X^{(n)} \quad \text{sinon.}$$

Pour toute hypothèse simple P , si

$i(n, P) = \text{Min} \{i \mid i \in I_n, \delta(f(P), f(P_{n,i})) \leq 2 \epsilon_n\}$, nous avons

$$P^{(n)}(C_n(i(n, P))) \geq 1 - m_n \exp(-\frac{1}{4} n \epsilon_n^2) \geq 1 - n \exp(-\frac{1}{4} n^{1/3})$$

Considérons l'estimateur $\hat{f}_n : (X^{(n)}, B^{(n)}) \rightarrow (\mathbb{Q}, \delta)$ défini, en remarquant

que $j \in J_{n,i} \implies C_n(i) \cap C_n(j) = \emptyset$, par :

$$- \text{si } x \in \bigcup_{i \in J_n} C_{n,i}, \hat{f}_n(x) = f(P_{n,i(n,x)}) \quad \text{où}$$

$$i(n, x) = \text{Min} \{i \mid i \in J_n; x \in C_n(i)\}$$

$$- \text{si } x \notin \bigcup_{i \in J_n} C_{n,i}, \hat{f}_n(x) = f(P_{n, \text{Min}(I_n)})$$

c) La suite $(\hat{f}_n)_{n \geq 1}$ d'estimateurs que l'on peut ainsi construire

est uniformément p.co.convergente : en effet, on peut supposer que

$\gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et étant donné $\epsilon > 0$ trouver N_ϵ dans $\mathbb{N}^*$ tel que

$$n > N_{\varepsilon} \implies \gamma_n + 4 \varepsilon_n < \varepsilon .$$

Il suffit pour conclure de remarquer successivement que

- $\forall P \in H, \{\delta(\hat{f}_n, f(P)) > \varepsilon\} \subset \{\delta(\hat{f}_n, f(P)) \geq \gamma_n + 4 \varepsilon_n\} \subset X^{(n)} - C_n(i(n,P))$
- $(\sup_{P \in H} P^{(n)} \{\delta(\hat{f}_n, f(P)) > \varepsilon\}) \leq n \exp(-\frac{1}{4} n^{1/3}) .$

Si $(\mathbb{W}, \delta)$ est seulement σ -compact, il suffit d'appliquer le lemme (I C 3) ■

IV B 5 - Tests p.co. convergents.

Théorème.- Soit $f : H \rightarrow (\mathbb{W}, \delta)$ un paramètre, les hypothèses (H_1, H_2, H_4'') étant vérifiées.

Pour tout fermé $\mathbb{W}_0$ de $\mathbb{W}$

- $f^{-1}(\mathbb{W}_0)$ est p.co. testable si $(\mathbb{W}, \delta)$ est un espace euclidien ;
- si $(\mathbb{W}, \delta)$ est compact, il existe une suite p.co. convergente de tests de $f^{-1}(\mathbb{W}_0)$ contre l'hypothèse complémentaire, dont le niveau de signification tend vers 1.

Démonstration.- On conserve les notations de la démonstration précédente.

Supposons d'abord que $(\mathbb{W}, \delta)$ est compact.

a) Soit n un entier positif quelconque. On pose

- $\mathbb{W}_{1,n} = \{\theta \mid \delta(\theta, \mathbb{W}_0) \geq \gamma_n + 2 \varepsilon_n\}$
- $K_{0,n} = \{i \mid 1 \leq i \leq m_n, B(\theta_i, \varepsilon_n) \cap \mathbb{W}_0 \cap f(H) \neq \emptyset\}$
- $K_{1,n} = \{i \mid 1 \leq i \leq m_n, B(\theta_i, \varepsilon_n) \cap \mathbb{W}_{1,n} \cap f(H) \neq \emptyset\}$

$$- \forall i \in K_{0,n}, \text{ soit } P'_{n,i} \in f^{-1}(\Theta_0 \cap B(\theta_i, \varepsilon_n)) .$$

$$- \forall i \in K_{1,n}, \text{ soit } P''_{n,i} \in f^{-1}(\Theta_{1,n} \cap B(\theta_i, \varepsilon_n)) .$$

Il est clair que

$$- \Theta_0 \cap f(H) \subset \bigcup_{i \in K_{0,n}} B(f(P'_{n,i}), 2\varepsilon_n)$$

$$- \Theta_{1,n} \cap f(H) \subset \bigcup_{i \in K_{1,n}} B(f(P''_{n,i}), 2\varepsilon_n)$$

$$\text{Posons } C_n = \bigcup_{i \in K_{0,n}} \left(\bigcap_{i \in K_{1,n}} C_n(P'_{n,i}, P''_{n,i}) \right) .$$

b) La suite $(X^{(n)} - C_n)_{n \geq 1}$ ainsi construite est la suite des régions critiques de tests p.co. convergents de $f^{-1}(\Theta_0)$ contre $f^{-1}(\Theta - \Theta_0)$ dont le niveau de signification tend vers 1.

En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$- P \in f^{-1}(\Theta_0) \implies P^{(n)}(C_n) \geq 1 - n \exp(-\frac{1}{4} n^{1/3}) ,$$

$$- P \in f^{-1}(\Theta_{1,n}) \implies P^{(n)}(C_n) \leq n \exp(-\frac{1}{4} n^{1/3}) ,$$

ce qui suffit, compte tenu des relations

$$- \Theta - \Theta_0 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Theta_{1,n}$$

$$- \sum_{n=1}^{+\infty} n \exp(-\frac{1}{4} n^{1/3}) < +\infty .$$

Si (Θ, δ) est un espace euclidien quelconque, on peut l'identifier à l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^v$, pour une certaine valeur de v .

Si δ' est la distance sur Θ définie par



$\forall \theta = (\theta_1, \dots, \theta_v), \theta' = (\theta'_1, \dots, \theta'_v) \in \Theta, \delta'(\theta, \theta') = \text{Max}(|\theta_1 - \theta'_1|, \dots, |\theta_v - \theta'_v|),$

en substituant δ' à δ , on obtient un nouveau modèle statistique qui vérifie (H_1, H_2, H_4'') .

Plus précisément, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P, Q \in H, \underline{h}(\delta'(f(P), f(Q))) \leq d_n(\Pi_n(P), \Pi_n(Q)) \leq \bar{h}(\sqrt{v} \delta'(f(P), f(Q))).$

Pour tout entier positif n ,

- $\Theta_n = \{\theta \mid \delta'(\theta, 0) \leq n\}$ peut être recouvert par $2^v n^v [n^{1/3}]^v$ boules fermées (cubes) de diamètre $4\varepsilon'_n = [n^{1/3}]^{-1}$ ($[]$ désigne ici la partie entière) ;

- il existe un nombre positif γ'_n tel que

$$\underline{h}(\gamma'_n + 2\varepsilon'_n) = \bar{h}(2\sqrt{v}\varepsilon'_n) + 2\varepsilon'_n ;$$

- on pose $\Theta_{0,n} = \Theta_0 \cap \Theta_n$

$$\Theta_{1,n} = \{\theta \mid \delta'(\theta, \Theta_0) \geq \gamma'_n + 2\varepsilon'_n\} \cap \Theta_n.$$

Comme précédemment, on peut trouver un événement C_n de $\mathcal{B}^{(n)}$ vérifiant :

$$- P \in f^{-1}(\Theta_{0,n}) \implies P^{(n)}(C_n) \geq 1 - 2^v n^{4v/3} \exp(-\frac{1}{4} n^{1/3}),$$

$$- P \in f^{-1}(\Theta_{1,n}) \implies P^{(n)}(C_n) \leq 2^v n^{4v/3} \exp(-\frac{1}{4} n^{1/3}).$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser les relations

$$- \Theta_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \uparrow \Theta_{0,n}$$

$$- \Theta - \Theta_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \uparrow \Theta_{1,n} \text{ (on peut supposer que } \gamma'_n + 2\varepsilon'_n \downarrow 0 \text{)}$$

$$- \sum_{n=1}^{+\infty} n^{4v/3} \exp(-\frac{1}{4} n^{1/3}) < +\infty \quad \blacksquare$$

Démonstration. - Il suffit de montrer que f est uniformément estimable lorsque $f(H)$ est borné.

Pour appliquer le théorème (I C 1), considérons deux intervalles fermés bornés disjoints quelconques : $B_i = [\theta_i - \alpha_i, \theta_i + \alpha_i]$, $i = 0, 1$. On peut supposer que $f^{-1}(B_0)$ et $f^{-1}(B_1)$ ne sont pas vides, et que $\theta_0 < \theta_1$.

Soit deux lois P_0 et P_1 telles que

$$- f(P_0) = \theta_0 + \alpha_0$$

$$- f(P_1) = \theta_1 - \alpha_1.$$

Il existe une suite strictement croissante d'entiers positifs $(n_k)_{k \geq 1}$ et deux suites de réels $(\alpha_{n_k})_{k \geq 1}$ et $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ tels que :

$$- \forall k \in \mathbb{N}^*, 0 < \alpha_{n_k} < d_K(\Pi_{n_k}(P_0), \Pi_{n_k}(P_1))$$

$$- \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{n_k}^2 = +\infty$$

$$- \forall k \in \mathbb{N}^*, |\Pi_{n_k}(P_0) \cap]-\infty, x_{n_k}[- \Pi_{n_k}(P_1) \cap]-\infty, x_{n_k}[| > \alpha_{n_k}.$$

Si $(H_9 a)$ est vérifiée, on pose $B_{n_k} =]-\infty, x_{n_k}[$.

Sinon, $(H_9 b)$ l'est, et on pose $B_{n_k} = \mathbb{R} -]-\infty, x_{n_k}[$.

On complète cette suite par : $\forall n \in (\mathbb{N}^* - \{n_k, k \geq 1\}), B_n = \emptyset$.

Ainsi $(B_n)_{n \geq 1}$ décante asymptotiquement uniformément $\{P \mid P \in H, f(P) \leq \theta_0 + \alpha_0\}$ et $\{P, P \in H, f(P) \geq \theta_1 - \alpha_1\}$, et de plus il y a séparation asymptotique uniforme d'après le théorème fondamental ■

IV C 3 - Exemple : estimation du paramètre de translation.

Théorème.- Sous les hypothèses (H_1, H_5, H_8) et les hypothèses $(H'_6, H'_9 \text{ et } H'_{10})$ ci-dessous, le paramètre $f : H \rightarrow (\ominus, \delta)$ est p.s. estimable.

- (H'_6) Sont données une loi borélienne μ sur $\mathbb{R}$ et une fonction

$\lambda : \mathbb{N}^* \times H \rightarrow \mathbb{R}$ telles que .

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall P \in H$, $\Pi_n(P)$ est l'image de μ par $t_{\lambda(n,P)}$.

- (H'_9) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'une des propriétés ci-dessous est vraie :

- $(\forall P, Q \in H, (f(P) < f(Q) \implies \lambda(n,P) \leq \lambda(n,Q)))$

- $(\forall P, Q \in H, (f(P) < f(Q) \implies \lambda(n,P) \geq \lambda(n,Q)))$.

- (H'_{10}) $\forall P, Q \in H, (f(P) \neq f(Q) \implies \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda(n,P) - \lambda(n,Q))^2 = +\infty)$.

Si l'intervalle $f(H)$ est borné, f est uniformément p.s. estimable.

Démonstration.- C'est un corollaire du théorème ci-dessus

puisque $(H'_9) \implies (H_9)$

et $(H'_{10}) \implies (H_{10})$, compte tenu du lemme ci-dessous, puisque

$(\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall P, Q \in H), Q_\mu(|\lambda(n,P) - \lambda(n,Q)|) = d_K(\Pi_n(P), \Pi_n(Q))$.

Lemme.- La fonction de concentration Q_μ de toute loi borélienne μ sur $\mathbb{R}$ a la propriété suivante :

pour toute suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ de réels ≥ 0 , $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^2 = +\infty \implies \sum_{n=1}^{+\infty} Q_\mu^2(\alpha_n) = +\infty$.

En effet, on peut supposer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n > 0$.

Cas 1 - $\alpha_n \not\rightarrow 0$: il existe une sous-suite $(\alpha_{n_k})_{k \geq 1}$ qui converge vers un certain nombre $\alpha > 0$.

Dès que k est assez grand, on a $\alpha_{n_k} > \frac{\alpha}{2}$, donc $Q_\mu(\alpha_{n_k}) \geq Q_\mu(\frac{\alpha}{2}) > 0$,
donc $\sum_{n=1}^{+\infty} Q_\mu^2(\alpha_n) = +\infty$.

Cas 2 - $\alpha_n \rightarrow 0$. On peut supposer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est majorée par 1.

Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers positifs vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{p_n} \geq \alpha_n > \frac{1}{p_{n+1}}.$$

N étant un entier positif tel que $\mu([-N, N]) > \frac{1}{2}$, à partir d'une partition de $[-N, N[$ en $2N(p_n+1)$ intervalles semi-ouverts à droite de même longueur, on voit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, Q_\mu(\alpha_n) \geq Q_\mu\left(\frac{1}{p_{n+1}}\right) \geq \frac{1}{4N(p_{n+1})},$$

ce qui suffit puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(p_{n+1})^2} = +\infty$ ■

IV D - ESTIMATEURS UNIFORMEMENT P.S. CONVERGENTS, LORSQUE $(\oplus, \delta)$ EST UN ESPACE EUCLIDIEN.

IV D 1 - Dans le cas général, $(\oplus, \delta)$ étant un espace métrique quelconque, le paramètre f est uniformément p.s. estimable si et seulement s'il est uniformément estimable.

Les conditions (G'_1) et (G''_1) ci-dessous sont alors vérifiées :

(G'_1) $\forall \varepsilon \in]0, 1[$, il existe deux réels α et A , un entier positif n_1 et une famille d'événements $B^{(n_1)}$ -mesurables $C_1 : H \rightarrow B^{(n_1)}$ tels que :

- $0 < \alpha < A$,
- $\forall P_0, P \in H, \delta(f(P), f(P_0)) < \alpha \implies P^{(n_1)}(C_1(P_0)) > 1 - \varepsilon$
- $\forall P_0, P_1 \in H, \delta(f(P_0), f(P_1)) > A \implies C_1(P_0) \cap C_1(P_1) = \emptyset$.

(G''_1) $\forall \gamma > 0 \exists \alpha \in]0, \gamma[$ tel que

$\forall \varepsilon \in]0, 1[$, il existe un entier positif n_2 et une famille d'événements $B^{(n_2)}$ -mesurables $C_2 : H \rightarrow B^{(n_2)}$ vérifiant

- $\forall P_0, P \in H, \delta(f(P), f(P_0)) < \alpha \implies P^{(n_2)}(C_2(P_0)) > 1 - \varepsilon$
- $\forall P_0, P \in H, \delta(f(P), f(P_0)) > \gamma \implies P^{(n_2)}(C_2(P_0)) < \varepsilon$.

La condition (G''_1) est exigeante.

Exemple.- Sous l'hypothèse (H_1) et les hypothèses suivantes :

- (H'_5) $\forall n \in \mathbb{N}^*, (X_n, B_n) = (R^v, B(R^v))$, où $v \in \mathbb{N}^*$,
- (H_{11}) $\exists f : H \rightarrow \mathcal{D}_v$ vérifiant

$$\sup(d_K(\Pi_n(P), f(P)) \mid P \in H) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

Alors, $f : H \rightarrow (\mathcal{D}_v, d_K)$ est un paramètre vérifiant (G''_1) .

Démonstration. - Soit γ et ε choisis arbitrairement dans $]0,1[$.

a) donnons-nous une loi borélienne quelconque P_0 sur $\mathbb{R}^V$.

Pour toute loi P_1 telle que $d_K(P_0, P_1) > \gamma$, on peut trouver un borélien $B(P_0, P_1)$ de $\mathbb{R}^V$ vérifiant :

$$\forall P, P' \in \mathcal{D}_V,$$

$$d_K(P_0, P) < \frac{2\gamma}{5} \text{ et } d_K(P_1, P') < \frac{\gamma}{5} \implies P(B(P_0, P_1)) + \frac{\gamma}{5} < P'(B(P_0, P_1)) \quad (1)$$

(th. III B 4).

Puisque d_K vérifie (M_2) , on peut supposer que $B(P_0, P_1)$ appartient à une suite finie de r boréliens de $\mathbb{R}^V$ qui ne dépendent que de P_0 et γ , leur nombre r ne dépendant que de γ .

(1) signifie que $B(P_0, P_1)$ décante asymptotiquement uniformément $b^{(+\infty)}(P_0, 2\frac{\gamma}{5})$ et $b^{(+\infty)}(P_1, \frac{\gamma}{5})$.

D'après le théorème fondamental, il existe un entier positif p_2 fonction de ε et de γ seulement et un événement $D_2(P_0, P_1)$ de $(\mathbb{R}^V)^{p_2}$ tel que

$$- \mu \in b^{(p_2)}(P_0, \frac{2\gamma}{5}) \implies \mu(D_2(P_0, P_1)) > 1 - \frac{\varepsilon}{r}$$

$$- \mu' \in b^{(p_2)}(P_1, \frac{\gamma}{5}) \implies \mu'(D_2(P_0, P_1)) < \varepsilon.$$

On pose $D_2(P_0) = \bigcap_{\substack{P_1 \in \mathcal{D}_V \\ d_K(P_0, P_1) > \gamma}} D_2(P_0, P_1)$; il s'agit en fait d'une intersection de r événements.

b) D'après (H_{11}) , $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > N \implies \sup_{P \in H} (d_K(\Pi_n(P), f(P))) < \frac{\gamma}{5}$.

Posons $n_2 = N + p_2$

$$- \forall P_0 \in \mathcal{D}_V, C_2(P_0) = (\mathbb{R}^V)^N \times D_2(P_0).$$

Alors, il est clair que pour toute hypothèse simple P on a :

$$\begin{aligned} - d_K(f(P), f(P_0)) < \frac{\gamma}{5} &\implies P^{(n_2)}(C_2(f(P_0))) > 1 - \epsilon \\ - d_K(f(P), f(P_0)) > \gamma &\implies P^{(n_2)}(C_2(f(P_0))) < \epsilon . \blacksquare \end{aligned}$$

IV D 2 - Théorème. - Le paramètre f est uniformément estimable dans le cas général si

- $(\oplus, \delta)$ est un espace euclidien,
- (G'_1) et (G''_1) sont vérifiées .

Démonstration. - Soit γ et ϵ deux nombres quelconques de $]0, 1[$.

a) Le nombre positif α associé à γ par (G''_1) peut être supposé aussi petit que l'on veut.

$$\begin{aligned} \text{D'après } (G'_1), \exists A > \alpha, n_1 \in \mathbb{N}^* \text{ et } C_1 : H \rightarrow B^{(n_1)} \text{ tels que} \\ \forall P_0, P \in H, \delta(f(P), f(P_0)) < \alpha &\implies P^{(n_1)}(C_1(P_0)) > 1 - \frac{\epsilon}{6} . \\ \forall P_0, P_1 \in H, \delta(f(P_0), f(P_1)) > A &\implies C_1(P_0) \cap C_1(P_1) = \emptyset . \end{aligned}$$

$(\oplus, \delta)$ étant un espace euclidien, il existe une suite $\{\mu_j, j \in J\}$ - finie ou non - dans H et un entier positif N vérifiant :

- $J \subset \mathbb{N}^*$ et $1 \in J$
- $\bigcup_{j \in J} (b(f(\mu_j), \alpha)) \supset f(H)$
- $\forall j \in J, \text{Card}\{i \mid i \in J, \delta(f(\mu_i), f(\mu_j)) \leq A\} \leq N .$

D'après (G_1'') , $\exists n_2 \in \mathbb{N}^*$ et $C_2 : H \rightarrow B^{(n_2)}$ tels que

$\forall P, P_0 \in H$,

$$\begin{aligned} - \delta(f(P), f(P_0)) < \alpha &\implies P^{(n_2)}(C_2(P_0)) > 1 - \frac{\varepsilon}{6} . \\ - \delta(f(P), f(P_0)) > \gamma &\implies P^{(n_2)}(C_2(P_0)) < \frac{2\varepsilon}{3N} . \end{aligned}$$

On pose - $n = n_1 + n_2$

$$- \forall j \in J, C(j) = (C_1(\mu_j) \times (\prod_{p=n_1+1}^n X_p)) \cap (C_2(\mu_j) \times (\prod_{p=n_2+1}^n X_p)).$$

$\forall i, j \in J$ et $\forall P \in H$, on a :

$$\begin{aligned} - \delta(f(P), f(\mu_j)) < \alpha &\implies P^{(n)}(C(j)) > 1 - \frac{\varepsilon}{3} \\ - \delta(f(P), f(\mu_j)) > \gamma &\implies P^{(n)}(C(j)) < \frac{2\varepsilon}{3N} \\ - \delta(f(\mu_i), f(\mu_j)) > A &\implies C(i) \cap C(j) = \emptyset . \end{aligned}$$

On définit un estimateur $\hat{f}_n : (X^{(n)}, B^{(n)}) \rightarrow (\mathbb{Q}, \delta)$ du

paramètre f en posant :

$$\begin{aligned} - \hat{f}_n(x) &= f(\mu_1) \quad \text{si } x \notin \bigcup_{j \in J} C(j) \\ - \hat{f}_n(x) &= f(\mu_{j(x)}) \quad \text{où } j(x) = \text{Min } \{j \mid j \in J, x \in C(j)\} \text{ sinon .} \end{aligned}$$

b) Montrons que $\sup_{P \in H} \{\delta(\hat{f}_n, f(P)) > \gamma\} \leq \varepsilon$, ce qui permettra

d'appliquer le lemme 2 (I A 7) :

$$\forall P \in H, \exists j(P) \in J \text{ tel que } \delta(f(P), f(\mu_{j(P)})) < \alpha .$$

Soit $J(P) = \{j \mid j \in J, \delta(f(\mu_j), f(P)) > \gamma \text{ et } \delta(f(\mu_j), f(\mu_{j(P)})) \leq A\}$

et $J_1(P) = \{j \mid j \in J, \delta(f(\mu_j), f(P)) > \gamma \text{ et } \delta(f(\mu_j), f(\mu_{j(P)})) > A\} .$

Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} - \{ \delta(\hat{f}_n, f(P)) > \gamma \} &\subset (X^{(n)} - C(j(P))) \cup \left(\bigcup_{j \in J(P)} C(j) \right) \cup \left(\bigcup_{j \in J_1(P)} C(j) \right) \\ &\subset (X^{(n)} - C(j(P))) \cup \left(\bigcup_{j \in J(P)} C(j) \right), \end{aligned}$$

$$- \text{Card } J(P) \leq N$$

$$- P^{(n)} \{ \delta(\hat{f}_n, f(P)) > \gamma \} \leq \frac{\varepsilon}{3} + N \cdot \frac{2\varepsilon}{3N} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

IV D 3 - Application au cas où $f(H), \Pi_1(H), \Pi_2(H), \dots$ sont ordonnés de manière isomorphe.

Théorème.- Le paramètre $f : H \rightarrow (\mathbb{Q}, \delta)$ est uniformément estimable sous les conditions (H_1, H_5, H_8, H_9) et l'hypothèse (H''_{10}) ci-dessous :

- (H''_{10}) Il existe une suite $(h_n)_{n \geq 1}$ de fonctions monotones non décroissantes non négatives définies sur $[0, +\infty[$ telles que

$$- (\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall P, Q \in H), d_K(\Pi_n(P), \Pi_n(Q)) \geq h_n(|f(P) - f(Q)|)$$

$$- \forall x > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} h_n^2(x) = +\infty$$

$$- \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \lim_{x \rightarrow +\infty} h_{n_0}(x) = 1.$$

Démonstration.- Si l'intervalle $f(H)$ est borné, il suffit d'appliquer le théorème (IV C 2) puisque $(H''_{10}) \implies (H_{10})$.

Dans le cas où $f(H)$ n'est pas borné, il suffit de montrer que (G'_1) et (G''_1) sont vérifiées, pour appliquer le théorème (IV D 2).

Condition (G''_1) - Il est clair que étant donnés $\gamma > 0$ et $\varepsilon \in]0, 1[$, on peut trouver un entier positif n_2 ayant la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \forall P_0, P_1 \in H, \quad f(P_1) = f(P_0) + \frac{\gamma}{2} &\implies \exists D_2(P_0, P_1) \in \mathcal{B}^{(n_2)} \text{ tel que} \\ - P \in H \text{ et } f(P) \leq f(P_0) &\implies P^{(n_2)}(D_2(P_0, P_1)) > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \\ - P' \in H \text{ et } f(P') \geq f(P_1) &\implies P'^{(n_2)}(D_2(P_0, P_1)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour toute hypothèse simple P_0 , on fait la construction suivante :

Cas 1 : $f(P_0) - \gamma \notin f(H)$ - alors il existe deux lois

$P'_{0,1}$ et $P'_{0,2}$ dans H telles que

$$\begin{aligned} - f(P'_{0,1}) &= f(P_0) + \frac{\gamma}{2} \\ - f(P'_{0,2}) &= f(P_0) + \gamma \end{aligned}$$

$$\text{On pose } C_2(P_0) = D_2(P'_{0,1}, P'_{0,2}).$$

Cas 2 : $f(P_0) + \gamma \notin f(H)$ - alors il existe deux lois

$P_{0,1}$ et $P_{0,2}$ dans H telles que

$$\begin{aligned} - f(P_{0,1}) &= f(P_0) - \frac{\gamma}{2} \\ - f(P_{0,2}) &= f(P_0) - \gamma. \end{aligned}$$

$$\text{On pose } C_2(P_0) = \mathbb{R}^{n_2} - D_2(P_{0,2}, P_{0,1}).$$

Cas 3 : $[f(P_0) - \gamma, f(P_0) + \gamma] \subset f(H)$: on conserve les notations ci-dessus et on pose

$$C_2(P_0) = D_2(P'_{0,1}, P'_{0,2}) \cap (\mathbb{R}^{n_2} - D_2(P_{0,2}, P_{0,1})).$$

Dans tous les cas, et pour toute hypothèse simple P on a :

$$\begin{aligned} |f(P) - f(P_0)| < \frac{\gamma}{2} &\implies P^{(n_2)}(C_2(P_0)) > 1 - \varepsilon \\ |f(P) - f(P_0)| > \gamma &\implies P^{(n_2)}(C_2(P_0)) < \varepsilon \blacksquare \end{aligned}$$

Condition (G') - On va établir la propriété suivante, plus

forte que (G') :

$(\forall \epsilon \in]0,1[\text{ et } \forall \alpha > 0) , \exists A > \alpha \text{ et } \exists I : H \rightarrow B(\mathbb{R}) \text{ tels que}$

$\forall P, P' \in H : - I(P) \text{ est un intervalle}$

$$- |f(P) - f(P')| < \alpha \implies \Pi_{n_0}(P') (I(P)) > 1 - \epsilon$$

$$- |f(P) - f(P')| > A \implies I(P) \cap I(P') = \emptyset .$$

Traisons seulement le cas où

$$\forall P, P' \in H , f(P) \leq f(P') \implies F_{\Pi_{n_0}}(P) \leq F_{\Pi_{n_0}}(P') :$$

a) pour toute hypothèse simple P_0 , on pose

$$- A(P_0) = \{x \mid F_{\Pi_{n_0}}(P)(x) \leq \frac{\epsilon}{3} , \forall P \in f^{-1}([f(P_0) - \alpha, f(P_0) + \alpha])\} ,$$

$$- B(P_0) = \{x \mid \exists P \in f^{-1}([f(P_0) - \alpha, f(P_0) + \alpha]) \text{ tel que } F_{\Pi_{n_0}}(P)(x) \leq 1 - \frac{\epsilon}{3}\} ,$$

$$- x_{P_0} = \sup A(P_0) \text{ si } A(P_0) \neq \emptyset$$

$$= -\infty \quad \text{sinon}$$

$$- y_{P_0} = \sup B(P_0) \text{ si } B(P_0) \text{ est borné}$$

$$= +\infty \quad \text{sinon}$$

$x_{P_0} \leq y_{P_0}$ résulte de $A(P_0) \subset B(P_0)$. De plus, s'il existe une hypothèse simple P'_0 (resp. P''_0) telle que $f(P'_0) = f(P_0) + \alpha$ (resp. $f(P''_0) = f(P_0) - \alpha$) ,

on a évidemment suivant le cas

$$- x_{P_0} = \sup \{x \mid F_{\Pi_{n_0}}(P'_0)(x) \leq \frac{\epsilon}{3}\}$$

$$- y_{P_0} = \sup \{x \mid F_{\Pi_{n_0}}(P''_0)(x) \leq 1 - \frac{\epsilon}{3}\} .$$

On en déduit que l'un au-moins des deux nombres x_{P_0} et y_{P_0} est fini.

Finalement, il est clair que pour l'intervalle fermé $I(P_0)$ d'extrémités x_{P_0} et y_{P_0} on a :

$$\forall P \in H, (|f(P) - f(P_0)| < \alpha) \implies (\Pi_{n_0}(P)(I(P_0)) > 1 - \varepsilon).$$

b) La famille d'intervalles $I : H \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$ convient : en effet,

$$\exists A > \alpha \text{ tel que } h_{n_0}(A) > 1 - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour tout couple (P_0, P_1) d'hypothèses simples telles que $f(P_0) + A + 2\alpha < f(P_1)$, il existe deux hypothèses simples P''_0 et P'_1 telles que

$$- f(P''_0) = f(P_0) + \alpha$$

$$- f(P'_1) = f(P_1) - \alpha.$$

$$(d_K(\Pi_{n_0}(P''_0), \Pi_{n_0}(P'_1)) \geq h_{n_0}(f(P_1) - f(P_0) - 2\alpha) \geq h_{n_0}(A) > 1 - \frac{\varepsilon}{3}) \implies \exists a \in \mathbb{R}$$

$$\text{tel que } F_{\Pi_{n_0}(P''_0)}(a) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } F_{\Pi_{n_0}(P'_1)}(a) > 1 - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc $x_{P_0} \geq a$ et $y_{P_1} < a$, car on est dans le cas où

$$y_{P_1} = \sup \{x \mid F_{\Pi_{n_0}(P'_1)}(x) \leq 1 - \frac{\varepsilon}{3}\}.$$

Les intervalles $I(P_0)$ et $I(P_1)$ sont donc disjoints ■

IV D 4 - Exemple : estimation du paramètre de translation.

Théorème.- Soit $f : H \rightarrow (\oplus, \delta)$ un paramètre, les hypothèses $(H_1, H_5, H'_6, H_8, H'_9)$ et l'hypothèse (H'_{10}) ci-dessous étant vérifiées :

- (H'_{10}) Il existe une suite de fonctions monotones non décroissantes non négatives $(h_n)_{n \geq 1}$ définies sur $[0, +\infty[$ telles que
- $-\forall P, Q \in H \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, |\lambda(n, P) - \lambda(n, Q)| \geq h_n(|f(P) - f(Q)|)$
- $-\forall x > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} h_n^2(x) = +\infty$

Alors f est uniformément estimable.

Démonstration. - D'après le lemme (IV C 3) et la propriété (H'_{10})

nous avons :

$$- x > 0 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} h_n^2(x) = +\infty \implies \sum_{n=1}^{+\infty} Q^2(h_n(x)) = +\infty$$

$$- \forall P, Q \in H, f(P) \neq f(Q) \implies \sum_{n=1}^{+\infty} d_K^2(\Pi_n(P), \Pi_n(Q))$$

$$\geq \sum_{n=1}^{+\infty} Q_\mu^2(h_n(|f(P) - f(Q)|)) = +\infty.$$

Puisque l'on a $(H'_6 \text{ et } H'_9) \implies (H_9)$, (G''_1) est vérifiée.

(G'_1) est également vérifiée : en effet, soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$.

On choisit d'abord $d > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $h_{n_0}(d) > 0$, puis deux réels a et b tels que

$$- a < b$$

$$- \mu([a, b[) > 1 - \varepsilon.$$

Traisons par exemple le cas où

$$\forall P, Q \in H, (f(P) < f(Q) \implies \lambda(n_0, P) \leq \lambda(n_0, Q)).$$

$\forall P \in H$, soit $I(P)$ l'intervalle fermé d'extrémités $a + a_P$ et $b + b_P$ où a_P et b_P sont respectivement les bornes inférieure et supérieure

de $(\lambda(n_o, P') \mid P' \in f^{-1} [f(P) - \alpha, f(P) + \alpha])$.

L'une au-moins de ces bornes est finie, et nous avons évidemment :

$$|f(P) - f(Q)| \leq \alpha \implies \Pi_{n_o}(Q) (I(P)) > 1 - \varepsilon .$$

Montrons que de plus $f(Q) - f(P) > 2\alpha + Kd \implies I(Q) \cap I(P) = \emptyset$,

K étant un entier vérifiant $K \cdot h_{n_o}(d) > b-a$: il suffit de remarquer que

$$\lambda(n_o, f(Q) - \alpha) - \lambda(n_o, f(P) + \alpha) \geq$$

$$\sum_{p=0}^{K-1} (\lambda(n_o, f(P) + \alpha + (p+1)d) - \lambda(n_o, f(P) + \alpha + pd))$$

$$\geq K \cdot h_{n_o}(d) > b - a ,$$

soit $a + \lambda(n_o, f(Q) - \alpha) > b + \lambda(n_o, f(P) + \alpha)$ ■

CHAPITRE V

ESTIMATION DE LA LOI, DANS LE CAS DE L'ECHANTILLON.

V 1 - Retour sur l'algèbre H_t des hypothèses testables.

Théorème 1.- Dans le cas de l'échantillon, l'hypothèse générale étant munie d'une distance d , H_t contient les boules fermées de (H, d) si d a la propriété (M_2) , ou si d a la propriété (M_1) et (H, d) est séparable.

Démonstration.- La loi, soit l'application identique ℓ de H est considérée comme un paramètre, (H, d) étant alors l'espace paramétrique.

Cas 1 : d a la propriété (M_1) et (H, d) est séparable.

Soit B_1, B_2 deux boules fermées de (H, d) .

Si $d^*(B_1, B_2) > 0$, elles sont strictement décantées (propriété (M_1)) donc B_1 et B_2 se séparent asymptotiquement uniformément (th. II C 4 - 1).

Ainsi (G) est vérifiée et toute boule fermée de (H, d) est testable si cet espace métrique est séparable (dém. I C 4).

Cas 2 : d a la propriété (M_2) .

Soit $B(P, \alpha)$ une boule fermée quelconque de (H, d) . Elle est évidemment testable si elle recouvre H .

Sinon, dès que n est assez grand, $B(P, \alpha)$ et $H - B(P, \alpha + \frac{1}{n})$ ne sont pas vides et se séparent asymptotiquement uniformément (prop. (M_2) et th. II C 4 - 1).

$B(P, \alpha)$ est donc testable puisque $H - B(P, \alpha) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (H - B(P, \alpha + \frac{1}{n}))$
(th. I B 1) .

Remarques. -

a) Si $(H, d) = (\mathcal{D}_v, d_K)$, toute boule fermée est donc testable.
On voit ici l'intérêt de (M_2) puisque $(\mathcal{D}_v, d_K)$ n'est pas séparable.

b) d_K a des propriétés spéciales vis à vis de la séparation asymptotique uniforme :

Théorème 2 (*).- Soit $v \in \mathbb{N}^*$. $\mathcal{D}_v$ étant muni de la distance d_K ,
on peut associer à toute loi borélienne P de $\mathbb{R}^v$ et à tout nombre $\eta \in [0, 1[$
une suite adaptée $(C_n(P, \eta))_{n \geq 1}$ de cylindres de $(\mathbb{R}^v, \mathcal{B}^v)^{+\infty}$, ces suites
vérifiant :

$$\begin{aligned} & - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\inf_{P \in \mathcal{D}_v} \left(\inf(Q^n(C_n(P, \eta)) \mid Q \in B(P, \eta)) \right) \right) = 1 \\ & - \forall \eta' \in]\eta, 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{P \in \mathcal{D}_v} \left(\sup(Q^n(C_n(P, \eta)) \mid Q \in \mathcal{D}_v - B(P, \eta')) \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

Démonstration. - On reprend la démonstration (II C 4) en la précisant.

Soit $\eta \in [0, 1[$, Q_η un entier positif tel que

$$q \geq Q_\eta \implies \eta + \frac{1}{q} < 1 .$$

a) Soit P une loi borélienne sur $\mathbb{R}^v$.

D'après le théorème (III B 4) pour tout $q \geq Q_\eta$, on peut lui associer $k_q = 2(4qv+1)^v$ fermés de $\mathbb{R}^v$ notés $A_1, \dots, A_{k_q}$ tels que

$$\forall Q \in \mathcal{D}_v - B(P, \eta + \frac{1}{q}), \exists i \in \{1, \dots, k_q\}$$

vérifiant $\inf(P'(A_i) \mid P' \in B(P, \eta)) \geq Q(A_i) + \frac{1}{2q}$.

D'après le théorème (I A 3), il existe un entier positif m_q aussi grand que l'on veut, ne dépendant que de q , et une application $\hat{P} : (R^v)^{m_q} \rightarrow \mathcal{D}$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs telle que

$$\forall \mu \in \mathcal{D}_v : - C(\mu) = \left\{ \max_{1 \leq i \leq k_q} |\hat{P}(A_i) - P(A_i)| < \frac{2}{9q} \right\} \in B^{m_q}(R^v)$$

$$- \mu^{m_q}(C(\mu)) > 1 - \frac{1}{q}$$

Posons $C_{m_q}(P, \eta) = \bigcup_{\mu \in B(P, \eta)} C(\mu)$.

Il est clair que

$$(1) \quad Q \in B(P, \eta) \implies Q^{m_q}(C_{m_q}(P, \eta)) > 1 - \frac{1}{q}$$

$$(2) \quad Q \in \mathcal{D}_v - B(P, \eta + \frac{1}{q}) \implies C_{m_q}(P, \eta) \cap C(Q) = \emptyset \implies Q^{m_q}(C_{m_q}(P, \eta)) < \frac{1}{q}.$$

On complète la suite $(C_{m_q}(P, \eta))_{q \geq Q_\eta}$ ainsi construite à partir de η et P en une suite $(C_n(P, \eta))_{n \geq 1}$, de la manière habituelle, en supposant d'abord que $(m_q)_{q \geq Q_\eta}$ est strictement croissante.

b) Quand P décrit $\mathcal{D}_v$, on obtient une famille de suites adaptées de cylindres construites à partir de la même suite $(m_q)_{q \geq Q_\eta}$, et qui vérifient (1) et (2)

Il est facile de voir que ce théorème reste vrai si par exemple on substitue (H, d_P) à $(\mathcal{D}_v, d_K)$, H étant un ensemble équitendu de lois boréliennes sur un espace métrique quelconque (voir la remarque III B 3 - C).

V 2 - Estimation de la loi.

Théorème 1.- Dans le cas de l'échantillon, et l'hypothèse générale H étant munie d'une distance d ayant la propriété (M_1) ou (M_2) , la loi $\ell : H \rightarrow (H, d)$ est p.s. estimable si (H, d) est séparable, uniformément p.s. estimable si (H, d) est précompact.

Démonstration.-

a) Si (H, d) est séparable, d ayant la propriété (M_1) ou (M_2) , ℓ est estimable en vertu du théorème (V 1) et du théorème (¹⁹, 4.8) de H. Schmerkotte.

De plus, ℓ étant estimable est p.s. estimable (th. I A 9).

b) Si (H, d) est précompact, d ayant la propriété (M_1) , ℓ est uniformément estimable, puisque (G) est vérifiée (th. I C 1).

c) Si (H, d) est précompact, d ayant la propriété (M_2) , on a vu (démonstration du th. (V 1)) que

$\forall P \in H$ et $\forall \gamma > 0$, $B(P, \frac{\gamma}{2})$, et $H - B(P, \gamma)$ se séparent asymptotiquement uniformément.

On peut appliquer le lemme (I C 2) pour conclure que ℓ est uniformément testable.

Enfin on rappelle qu'en toute généralité, un paramètre uniformément estimable est uniformément p.s. estimable (remarque I A 10 - a) ■

Exemples.- La loi est donc p.s. estimable dans les cas suivants :

1) H muni de d_V est un ensemble dominé de lois sur un espace mesurable quelconque (X, B) ($\implies (H, d_V)$ est séparable (⁸, App. 3)).

Ce cas n'est pas nouveau (J. Pfanzagl, ²⁸) et peut aussi se déduire directement du théorème (I A 9) (voir ²³, Troisième partie).

2) (X, B) est un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne, et $(H, d) = (D_X, d_P)$.

3) $(X, B) = (\mathbb{R}^V, B(\mathbb{R}^V))$, $v \in \mathbb{N}^*$, et $(H, d) = (D_V, d_L)$.

4) $d = d_K$ et (H, d_K) est une partie séparable de (D_V, d_K) , par exemple $H = D_{V,c}$.

Les cas (2,3,4) se déduisent aussi des théorèmes (III B 3) et (III B 4).
à partir de :

Théorème 2.- Dans le cas de l'échantillon, le paramètre $f : H \rightarrow (\mathbb{Q}, \delta)$ est estimable s'il existe une suite $(C_n)_{n \geq 1}$ de cylindres de $(X, B)^{+\infty}$, un nombre $a > 0$ et deux fonctions

$$N :]0, a[\times H \rightarrow \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \alpha :]0, a[\times H \rightarrow]0, +\infty[$$

telles que

$$(\forall P, Q \in H \text{ et } \forall \varepsilon \in]0, a[, (\delta(f(P), f(Q)) > \varepsilon \implies \sup_{1 \leq i \leq N(\varepsilon, P)} |P(C_i) - Q(C_i)| > \alpha(\varepsilon, P)).$$

Démonstration.- voir (²³, Troisième partie, th. 6).

Remarque.- L'intérêt du quatrième cas est mince : on sait que la suite des lois empiriques $(\hat{E}_n)_{n \geq 1}$ définies par

$$(\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^V)^n), \hat{E}_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} (\delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n})$$

a les propriétés suivantes :

- $\forall n \geq 1$ et $\forall P \in \mathcal{D}_V$, $d_K(\hat{E}_n, P)$ est $(\mathcal{B}^n(\mathbb{R}^V), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

- La suite des variables aléatoires réelles $(d_K(\hat{E}_n, P))_{n \geq 1}$ converge uniformément (par rapport à la loi P décrivant $\mathcal{D}_V$) p.co. vers 0 (th. de Glivenko-Cantelli).

Plus précisément, il existe deux constantes positives c_0 et c telles que

$(\forall \varepsilon > 0, \forall P \in \mathcal{D}_V \text{ et } \forall n \geq 1), P^n\{d_K(\hat{E}_n, P) \geq \varepsilon\} < c_0 e^{-c\varepsilon^2 n}$ (¹³, th. 1).

Par conséquent $(\hat{E}_n)_{n \geq 1}$ fonctionne comme une suite uniformément p.co. convergente d'estimateurs de la loi lorsque l'espace paramétrique est $(\mathcal{D}_V, d_K)$ tout entier.

V 3 - Estimation d'un paramètre quelconque.

a - Lemme. - Dans le cas général, soit $f : H \rightarrow (\Theta, \delta)$ un paramètre, (Θ', δ') un espace métrique, $\psi : (\Theta, \delta) \rightarrow (\Theta', \delta')$ une fonction définissant un nouveau paramètre $f' = \psi \circ f$.

Si f est estimable, p.s. estimable ou p.co. estimable, f' est estimable suivant le même mode de convergence si ψ est (δ, δ') continue.

Les convergences uniformes sont également conservées si ψ est (δ, δ') uniformément continue. On en déduit, compte tenu de (V 2), que :

b - Théorème 1. - Dans le cas de l'échantillon, soit $f : H \rightarrow (\Theta, \delta)$ un paramètre, d une distance sur H .

On suppose que - (H, d) est séparable.

- d a la propriété (M_1) ou (M_2) .

- f est (d, δ) continu.

Alors f est p.s. estimable.

c - Estimateurs p. co. convergents.

Théorème 2.- Dans le cas de l'échantillon, et l'hypothèse générale
 H étant munie d'une distance d ayant la propriété (M_1) , le paramètre
 $f : H \rightarrow (\mathbb{Q}, \delta)$ est

- uniformément p.co. estimable si f est (d, δ) uniformément
continu et (H, d) est compact.
- p. co. estimable si f est (d, δ) continu et (H, d) est
 σ -compact.

Démonstration.- Si f est la loi, avec évidemment $(H, d) = (\mathbb{Q}, \delta)$,
il suffit d'appliquer le théorème (IV B 4).

Sinon, on applique le lemme ci-dessus, puisque $f = f \circ \ell$ ■

Pour $d = d_V$, ce résultat a été démontré pour la première fois
et par d'autres moyens par S. Abou-Jaoudé ⁽²⁶⁾ .

REFERENCES.

L'abréviation P.I. désigne les "Publications Internes" de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées de l'Université des Sciences et Techniques de Lille.

- 7 - ABOU-JAOUDÉ S. - Sur un théorème de non-existence d'estimateurs convergeant en probabilité. Comptes Rendus, série A, t. 278 (1974), p. 1445-1448.
- 26 - ABOU-JAOUDÉ S. - Estimation dans les espaces localement compacts de type dénombrable. Comptes Rendus, série A, t. 281 (1975), p. 871-874.
- 1 - BERGER A. - On uniformly consistent tests. A.M.S., vol.22 (1951), p. 289-293.
- 22 - BERGER A. - On orthogonal probability measures. Proc. Amer. Math. Soc. 4, (1953), p. 800-806.
- 35 - BILLINGSLEY P. - Convergence of probability measures. Wiley, New-York (1968).
- 20 - BREIMAN L., LE CAM L.,
et SCHWARTZ L. - Consistent estimates and zero-one sets. A.M.S., vol.35 (1964), p. 157-161.
- 16 - CHAO-MIN-TE - A note on statistical consistency. Tamkang J. Math., 2 (1971), p. 59-66.
- 6 - DUNFORD N. et SCHWARTZ J. - Linear operators. Interscience Pub., New-York (1958).
- 32 - DURCZEWSKI H.P. - Robustesse d'estimateurs. P.I. n° 24 (1974).
- 36 - FISHER L. et VAN NESS J. - The topology of distinguishability. A.M.S., vol.42 (1971), p. 1262-1272.
- 21 - GÄNSSLER P. - Exakte Schätzer und konsistente Schätzerfolgen. Z. Wahr. verw. Geb. 12 (1969), p. 145-152.
- 24 - GEFFROY J. - Inégalités pour le niveau de signification et la puissance de certains tests reposant sur des données quelconques. Comptes Rendus, série A, t. 282 (1976), p. 1299-1301.
- 29 - GEFFROY J. - Distance en variations de lois-produits. Séminaire de Statistique Mathématique (J. Geffroy), non publié.

- 31 - GEFROY J. - Conditions suffisantes de convergence de certains tests déduits d'observations non nécessairement indépendantes ou équiréparties. Actes du Congrès Européen des Statisticiens de Grenoble (1976), à paraître.
- 2 - GEFROY J. et MOCHÉ R. - Sur la séparation asymptotique uniforme des produits de lois de probabilité. Comptes Rendus, série A, t. 278 (1974), p. 969-971.
- 11 - GEFROY J. et MOCHÉ R. - Construction d'estimateurs uniformément convergents à partir d'observations non nécessairement équidistribuées. Comptes Rendus, série A, t. 280 (1975), p. 133-135.
- 37 - GNEDENKO B. et KOLMOGOROV A. - Limit distributions for sums of independent random variables. Addison-Wesley, Reading (1954).
- 27 - HILLION A. - Sur l'intégrale d'Hellinger et la séparation asymptotique. Comptes Rendus, série A, t. 283 (1976) p. 61-64.
- 9 - HOEFFDING W. et WOLFOWITZ J. - Distinguishability of sets of distributions. A.M.S., vol.29 (1958) p. 700-718.
- 4 - JILOVEC S. - On the existence of superconsistent estimates. Trans. Fourth Prague Conf. on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes (Prague 1965), Academia, Prague (1967), p. 343-380.
- 5 - JILOVEC S. - A note on the characterization of consistently estimable functions. Aplikace Matematiky, vol.18 (1973), p. 161-165.
- 25 - JØRSBOE O. - Equivalence or singularity of Gaussian measures on function spaces. Var. Pub. Ser. n° 4 (1968), Matematisk Institut, Aarhus Universitet.
- 15 - KAKUTANI S. - On equivalence of infinite product measures. Ann. of Math., t. 49 (1948), p. 214-224.
- 13 - KIEFER J. et WOLFOWITZ J. - On the deviations of the empiric distribution function of vector chance variables. Trans. Amer. Math. Soc., t. 87 (1958), p. 173-186.
- 14 - KRAFT C. - Some conditions for consistency and uniform consistency of statistical procedures. Univ. of California Pub. in Statistics, Univ. of California, Berkeley, vol 2 (1955), p. 125-142.
- 3 - LE CAM L. et SCHWARTZ L. - A necessary and sufficient condition for the existence of consistent estimates. A.M.S., vol. 31 (1960), p. 140-150.
- 8 - LEHMANN E. - Testing Statistical Hypotheses. Wiley, New-York (1959).

- 34 - LUKACS E. - Characteristic functions. Griffin, London (1970).
- 12 - MOCHÉ R. - Construction d'estimateurs uniformément convergents. Comptes Rendus, série A, t. 280 (1975), p. 1029-1031.
- 23 - MOCHÉ R. - Existence d'estimateurs convergents. P.I. n° 59 (1975).
- 33 - MOCHÉ R. - Construction d'estimateurs convergents dans le cas d'observations indépendantes, équidistribuées ou non, comme application de la décantation et de la séparation asymptotiques de certaines familles de lois. P.I. n° 84 (1976).
- 17 - NEMETZ T. - On the orthogonality of probability measures. Studia Sci. Math. Hung. 7 (1972), p. 111-115.
- 18 - NEMETZ T. - Equivalence-orthogonality of probability measures. Colloquium on limit theorems of probability theory and statistics, Keszthely (1974), à paraître.
- 10 - NEVEU J. - Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités. Masson, Paris (1964).
- 28 - PFANZAGL J. - On the existence of consistent estimates and tests. Z. Wahr. verw. Geb. 10 (1968), p. 43-62.
- 30 - RENYI A. - On some problems of statistics from the point of view of information theory. Proc. of Coll. Inf. Theory, Debrecen (1967), p. 343-357.
- 19 - SCHMERKOTTE H. - Interdependences between consistent tests and estimates. Z. Wahr. verw. Geb. 16 (1970), p. 293-306.

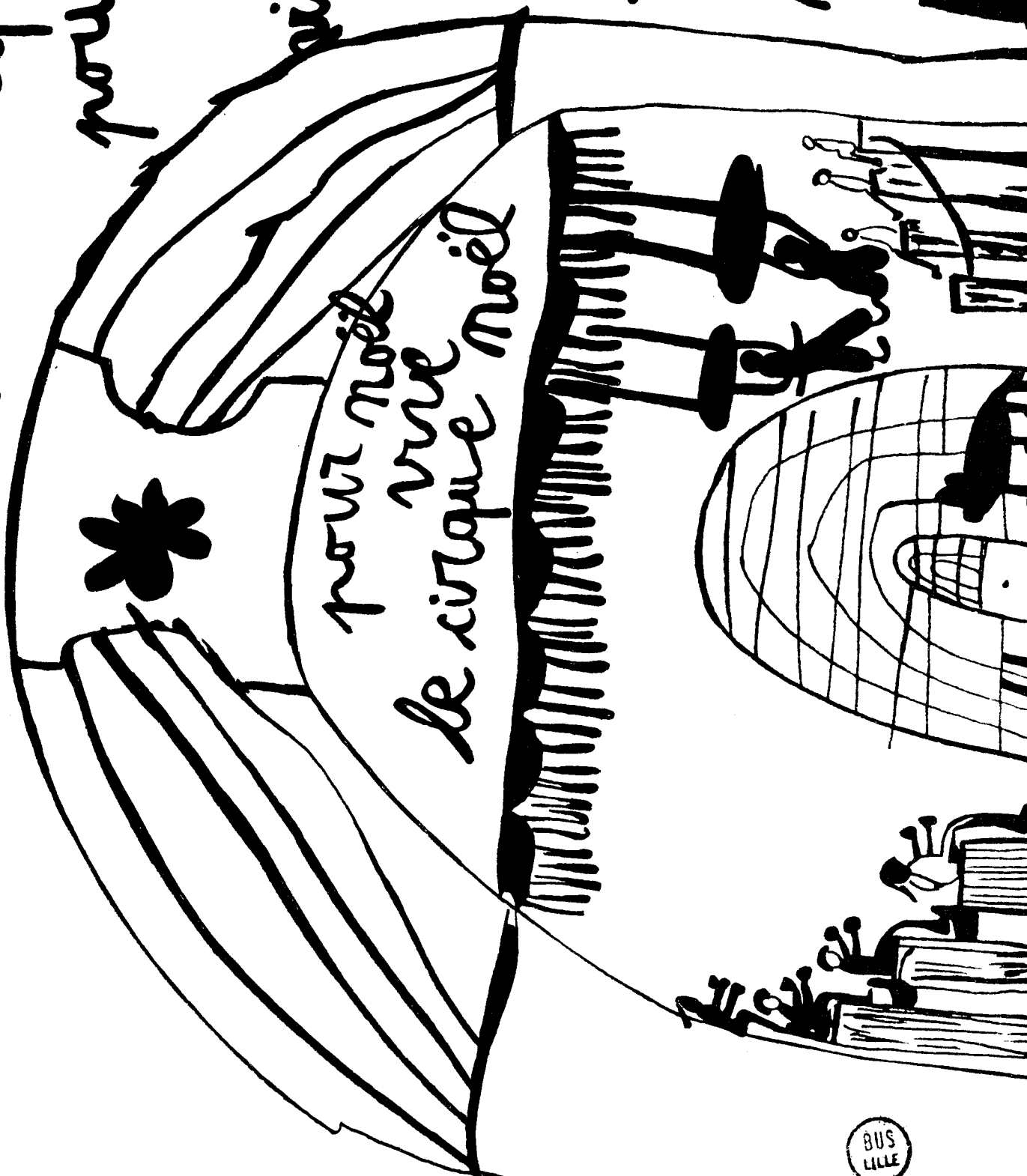
le cirque

pour Noël

pour Noël

pour Noël
vive
le cirque Noël

fini
Noël
1977



ETUDES SUR L'ANALYSE DE LA STATIONNARITE
DES FONCTIONS ALEATOIRES DU SECOND ORDRE.

I - Soit $U = \{U_t, t \in T\}$ une fonction aléatoire complexe (f.a.c.) ou réelle (f.a.r.) définie sur un espace de probabilité (e.p.) $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où T est un ensemble non vide quelconque.

On suppose que U est du second ordre, c'est-à-dire que

$$E(|U_t|^2) < +\infty, \forall t \in T.$$

Alors, on définit la covariance de $U : \Gamma_U : T \times T \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$\Gamma_U(t, s) = E((U_t - E(U_t)) \cdot (U_s - E(U_s))^*), \forall t, s \in T.$$

Si T est contenu dans un groupe commutatif G , posons $T^* = \{t - s \mid t, s \in T\}$.

Alors, on dit que U est stationnaire si et seulement si

$$- E(U_t) = E(U_s), \forall t, s \in T,$$

$$- \exists R_U : T^* \rightarrow \mathbb{C} \text{ tel que}$$

$$R_U(t-s) = \Gamma_U(t, s), \forall t, s \in T.$$

Dans ce cas, la covariance Γ_U est appelée corrélation, et puisque nous supposons centrées toutes les f.a. considérées, il sera équivalent de dire qu'une f.a. est stationnaire, ou que sa covariance est une corrélation.

II - Les f.a. rencontrées dans les applications, par exemple en mécanique statistique, sont souvent stationnaires, ou voisines d'une certaine manière de f.a. stationnaires.

Exemple 1 : Les notions de f.a. harmonisables (M. Loeve⁴³, 34.4 ; voir aussi³⁷) et de processus V -bornés (voir³⁸) sont des généralisations naturelles de celle de f.a. stationnaire.

Exemple 2 : Les f.a.r. asymptotiquement stationnaires, introduites par J. Kampé de Fériet et N. Frenkiel⁽⁴²⁾ sont les f.a.r. du second ordre

centrées $U = \{U_t, t \in \mathbb{R}\}$, définies sur un e.p. (Ω, A, P) , de covariance Γ_U , et telles que :

(1) U est mesurable, autrement dit l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\longmapsto U_t(\omega) \end{aligned}$$

est $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes A, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ -mesurable.

$$(2) \quad -\infty < a < b < +\infty \implies \int_a^b \Gamma_U(t, t) < +\infty$$

(3) Il existe $R_U^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad R_U^*(h) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{|h|/2}^{T-|h|/2} \Gamma_U(t - \frac{h}{2}, t + \frac{h}{2}) dt$$

R_U^* étant nécessairement une corrélation ^(30, 31), on associe ainsi de manière canonique une corrélation à toute f.a.r. asymptotiquement stationnaire.

Extension de cette notion : La définition ci-dessus devient plus commode et plus générale lorsque l'on substitue l'hypothèse (1') ci-dessous à l'hypothèse (1) :

(1') Γ_U est $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ -mesurable.

Ainsi, on n'exige plus que U soit mesurable, mais dans les cas usuels, cette extension de la définition est minime puisque si $U = \{U_t, t \in \mathbb{R}\}$ est une f.a.r. du second ordre centrée définie sur un e.p. (Ω, A, P) , si (1'), (2), (3) sont vérifiées, et si de plus l'e.p. $(\Omega, \sigma(U), P)$ est séparable (voir plus loin : premier chap., II), compte tenu de notre théorème 1 (premier chap., III) et du théorème 1 ⁽³²⁾ de S. Cambanis, il existe une f.a.r. mesurable $U' = \{U'_t, t \in \mathbb{R}\}$ définie sur (Ω, A, P) et

équivalente à U , autrement dit telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U'_t \underset{\text{p.s.}}{=} U_t.$$

Bien entendu, dans ce cas, on peut souvent substituer U' à U .

Exemples de f.a.r. asymptotiquement stationnaires :

- Si $U = \{U_t, t \in \mathbb{R}\}$ est une f.a.r. du second ordre, centrée, stationnaire et mesurable, elle est asymptotiquement stationnaire, et l'on a

$$R_U^* = R_U \quad (30, 31)$$

- Un peu plus généralement, si $U = \{U_t, t \in \mathbb{R}\}$ est une f.a.r. du second ordre, centrée, mesurable ; si sa covariance Γ_U vérifie (2) et admet la "période" $\tau (> 0)$, autrement dit si l'on a :

$$\Gamma_U(t + \tau, s + \tau) = \Gamma_U(t, s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R},$$

alors U est asymptotiquement stationnaire (31).

Ce cas est en particulier réalisé lorsqu'il existe deux f.a.r. du second ordre, centrées, mesurables et non corrélées, définies sur le même e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$: $V = \{V_t, t \in \mathbb{R}\}$ et $U' = \{U'_t, t \in \mathbb{R}\}$ telles que :

- $U = V + U'$
- V est stationnaire
- U' admet la période $\tau (> 0)$, autrement dit

$$U'_{t+\tau}(\omega) = U'_t(\omega), \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ et } \forall \omega \in \Omega$$

- $\Gamma_{U'}$ vérifie (2) .

En effet, alors Γ_U vérifie (2) et admet la période τ puisque l'on a

$$(\forall t, s \in \mathbb{R}), \quad \Gamma_U(t, s) = R_V(t-s) + \Gamma_{U'}(t, s).$$

III - Lorsqu'une f.a.r. $U = \{U_t, t \in \mathbb{R}\}$ du second ordre et centrée apparaît dans les applications, l'une des premières questions à résoudre est donc de voir dans quelle mesure elle est stationnaire, et même plus précisément, vu l'exemple ci-dessus, si elle est la somme de deux f.a.r. du second ordre, centrées et indépendantes, dont l'une est stationnaire. Pour la covariance Γ_U se pose parallèlement le problème de savoir s'il existe une corrélation R telle que $\Gamma_U - R$ soit une covariance.

Ces questions ont été posées dès 1962 par J. Kampé de Fériet ^(27, 30) et constituent l'analyse de la stationnarité des f.a. du second ordre.

En revenant aux notations du paragraphe (I), nous énonçons donc les problèmes suivants :

A - Sous l'hypothèse $T \subset G$, soit U une f.a.c. (resp. f.a.r.) du second ordre et centrée. Admet-elle une partie stationnaire ? Autrement dit, existe-t-il deux f.a.c. (resp. f.a.r.) centrées V et U' définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et telles que :

$$(4) \quad \underline{\forall t \in T, U_t}_{p.s.} = \underline{V_t + U'_t}$$

(5) V et U' sont des f.a. indépendantes

(6) V est stationnaire ?

B - Sous l'hypothèse $T \subset G$, et étant donnée une covariance Γ sur T , existe-t-il une corrélation R sur T telle que $\Gamma - R$ soit une covariance ?

IV - Nous avons obtenu les résultats suivants (essentiellement ceux de notre dernière publication dans ce domaine, ²²) :

Premier chapitre : L'égalité (4) suggère de comparer les f.a. ayant la même covariance. En restreignant cette étude aux f.a. gaussiennes centrées (dont la loi est définie par la covariance), on trouve que si $X = \{X_t, t \in T\}$ et $Y = \{Y_t, t \in T\}$ sont deux f.a.c. gaussiennes centrées ayant la même covariance Γ et définies sur l'e.p. usuel $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ - où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de $[0,1]$, et λ la mesure de Borel - et si de plus X est d'un certain type (que nous appelons représentation complète de Γ), alors il existe

$$S : ([0,1], \mathcal{B}) \rightarrow ([0,1], \mathcal{B})$$

conservant λ et telle que :

$$\forall t \in T, X_t \circ S = Y_t \text{ p.s.}$$

Il en résulte des propriétés des ensembles de trajectoires des f.a. suffisamment régulières, notamment le mouvement brownien.

Second chapitre : Etant données deux covariances Γ et Γ' sur T , on dit que $\Gamma' \leq \Gamma$ si $\Gamma - \Gamma'$ est une covariance.

On étudie d'abord (première partie) la relation d'ordre $\leq$ dans l'ensemble $C(\Gamma)$ des covariances sur T majorées par une covariance donnée Γ : on obtient en particulier une représentation spectrale utile de tout élément de $C(\Gamma)$.

Puis (deuxième partie), lorsque T est un groupe abélien localement compact, on étudie l'ensemble $C_0(\Gamma)$ des corrélations continues appartenant

à $\mathcal{C}(\Gamma)$. $\mathcal{C}_0(\Gamma)$ admet au moins un élément maximal R .

Alors (troisième partie), à partir de la relation $\Gamma = R + \Gamma'$, on peut revenir au problème initial de la décomposition d'une f.a. de covariance Γ en une partie stationnaire et un reste indépendant dont les covariances sont respectivement R et Γ' .

V - Ces questions ne sont pas traitées en toute généralité puisque nous ne considérons pratiquement que des covariances dont l'espace autoreproduisant est un Hilbert séparable. De plus, l'essentiel du problème reste ouvert, et notamment

- la caractérisation des covariances Γ sur T , groupe abélien localement compact, telles que $\mathcal{C}_0(\Gamma)$ contienne au moins une corrélation non nulle (les covariances de certaines f.a.r. asymptotiquement stationnaires ont cette propriété, ³⁰, p. 62) ;

- l'étude, dans ce cas, de l'ensemble des corrélations maximales de $\mathcal{C}_0(\Gamma)$ (par exemple, ses propriétés de convexité) ; le choix de certaines d'entre elles suivant de nouveaux critères (d'énergie notamment), et leur détermination effective à partir de Γ .

Il est sans doute préférable d'étudier d'abord ces problèmes pour des f.a. voisines des f.a. stationnaires, comme celles que nous avons signalées au début de notre introduction.

PREMIER CHAPITRE : COVARIANCES SEPARABLES.

I - COVARIANCES SEPARABLES.-

- Un noyau hermitien de type positif complexe (resp. réel) sur un ensemble non vide T est une application Γ définie sur $T \times T$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) telle que :

$$\Gamma(s,t) = \Gamma^*(t,s), \quad \forall t, s \in T \quad (\text{symétrie hermitienne})$$

- pour toute fonction $a : T \rightarrow \mathbb{C}$ de support fini, on a :

$$\sum_{t,s \in T} a(t) a^*(s) \Gamma(t,s) \geq 0 \quad (\text{type positif}).$$

Soit Γ un tel noyau. On note $H(\Gamma)$ l'espace autoreproduisant de noyau Γ . C'est l'unique espace de Hilbert H de fonctions définies sur T à valeurs dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) et tel que

- les fonctions $\Gamma_t = \Gamma(t, \cdot)$, $t \in T$ appartiennent à H et engendrent H .

$$h(t) = \langle h, \Gamma_t \rangle_H, \quad \forall h \in H, \quad \forall t \in T.$$

Les espaces autoreproduisants ont été introduits par A. Povzner ⁽²⁴⁾ et N. Aronszajn ⁽¹⁾. Nous nous référons essentiellement à ⁽²⁾.

- Les notions de covariance et de noyau hermitien de type positif sont identiques puisque Γ est un noyau hermitien de type positif sur T si et seulement s'il existe un e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une f.a.c. (resp. f.a.r. si Γ est réel) gaussienne centrée définie sur cet e.p. et dont la covariance est Γ .

Définitions.-

1) on appellera dimension $\delta(\Gamma)$ d'une covariance Γ la dimension hilbertienne de son espace autoreproduisant : $\delta(H(\Gamma))$.

2) Une covariance réelle (resp. complexe) Γ sur T est dite séparable si et seulement si $\delta(\Gamma) \leq \mathfrak{H}_0$.

Exemple (², prop. 3.6.).- Si T est un espace topologique séparable et si Γ est continue sur l'espace topologique produit $T \times T$, alors $H(\Gamma)$ est un espace de Hilbert séparable de fonctions continues sur T .

II - ESPACES DE PROBABILITE SEPARABLES.

Pour tout e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}$ par : $A \sim B \iff P(A \Delta B) = 0$, et une distance d_P sur $\mathcal{A}/\sim$ par $d_P(\bar{A}, \bar{B}) = P(A \Delta B)$. $(\mathcal{A}/\sim, d_P)$ est toujours un espace métrique complet.

Définition.- On dira que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un e.p. séparable si et seulement si l'espace métrique $(\mathcal{A}/\sim, d_P)$ est séparable (⁶, p. 168).

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un e.p. quelconque, $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$, N_A (resp. N_B) l'ensemble des parties de Ω négligeables pour $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (resp. $(\Omega, \mathcal{B}, P)$). L'e.p. complété de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ étant noté $(\Omega, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P})$, nous avons $\hat{\mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{A} \cup N_A)$.

Posons $\hat{\mathcal{B}} = \sigma(\mathcal{B} \cup N_B)$ et $\hat{\mathcal{B}}_A = \sigma(\mathcal{B} \cup N_A)$ (tribu complétée de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$). Il est facile de voir que :

- Pour que l'e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ soit séparable, il suffit que $\mathcal{A}$ soit de type dénombrable.

- Les espaces de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont séparables si $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un e.p. séparable.

- Si $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est séparable, alors $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est séparable.

- Si $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est séparable, les e.p. complets $(\Omega, \hat{\mathcal{B}}, \hat{P})$ et $(\Omega, \hat{\mathcal{B}}_A, \hat{P})$ le sont aussi.

III - Théorème 1.- Soit $f = \{f_t, t \in T\}$ une f.a.c. (ou f.a.r.) du second ordre, centrée, définie sur (Ω, A, P) .

Alors, la covariance Γ de f est séparable si et seulement si $(\Omega, \sigma(f), P)$ est un e.p. séparable.

$(\sigma(f) = \sigma\{f_t, t \in T\}$ désigne la plus petite tribu rendant mesurables les f_t).

Démonstration.- Supposons par exemple que f est une f.a.c.

Soit H_f le sous-espace de Hilbert engendré par $\{\bar{f}_t, t \in T\}$ dans $L^2_C(\Omega, \sigma(f), P)$. On sait (voir ³ ou ³⁹, p. 302) que l'on définit une isométrie ψ de H_f sur $H(\Gamma)$ en posant :

$$(\psi(\bar{g}))(t) = E(g \cdot f_t^*), \forall t \in T, \forall \bar{g} \in H_f.$$

Γ est donc séparable si et seulement si H_f est séparable.

Dans ce cas, et si Γ n'est pas nulle ($\Gamma \neq 0 \iff \exists t \in T$ tel que $\Gamma(t, t) > 0$), soit $(\theta_j, j \in J)$ une famille dénombrable de variables aléatoires complexes (v.a.c.) définies sur $(\Omega, \sigma(f))$ telle que $(\bar{\theta}_j, j \in J)$ soit une base orthonormale de H_f . On convient que $J = \mathbb{N}^*$ si J est infini. Dans ce cas, la série $\bar{f}_t = \sum_{n=1}^{\infty} E(f_t \cdot \theta_n^*) \bar{\theta}_n$ est fortement convergente dans H_f .

Que J soit fini ou non, f_t est donc $\hat{\sigma}_{\sigma(f)}\{\theta_j, j \in J\}$ mesurable, quel que soit t (il s'agit de la complétée dans $\sigma(f)$ de la tribu $\sigma(\theta_j, j \in J)$).

On a donc $\sigma(f) \subset \hat{\sigma}_{\sigma(f)}\{\theta_j, j \in J\}$.

La tribu $\sigma\{\theta_j, j \in J\}$ étant de type dénombrable, on en déduit que les e.p. $(\Omega, \sigma\{\theta_j, j \in J\}, P)$, $(\Omega, \hat{\sigma}_{\sigma(f)}\{\theta_j, j \in J\}, P)$ et $(\Omega, \sigma(f), P)$ sont séparables.

Cette conclusion vaut pour le cas $\Gamma = 0$ puisqu'alors on a $\sigma(f) \subset \hat{\sigma}_{\sigma(f)}\{\emptyset, \Omega\}$.

Réciproquement, si $(\Omega, \sigma(f), P)$ est un e.p. séparable, $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \sigma(f), P)$ et a fortiori H_f sont séparables.

IV - AUTRES CRITERES DE SEPARABILITE D'UNE COVARIANCE.

Soit $f = \{f_t, t \in T\}$ une f.a. réelle ou complexe définie sur un e.p. (Ω, A, P) et indexée par l'ensemble T muni d'une distance d . On dit (4, III 5) que f est

- continue en probabilité si et seulement si

$$\forall t \in T, \forall \epsilon > 0, P\{|f_t - f_s| > \epsilon\} \xrightarrow{s \rightarrow t} 0$$

- p.s. continue si et seulement si

$$\forall t \in T, \exists N_t \in N_A \text{ tel que } \omega \notin N_t \implies f_s(\omega) \xrightarrow{s \rightarrow t} f_t(\omega)$$

- p.s. à trajectoires continues si et seulement si $\exists N \in N_A$

tel que la trajectoire $f(\omega)$ est une fonction continue si $\omega \notin N$.

Proposition 1.- Soit $f = \{f_t, t \in T\}$ une f.a. réelle ou complexe définie sur (Ω, A, P) et indexée par l'espace métrique (T, d) . Si f est continue en probabilité et si (T, d) est séparable, alors $(\Omega, \sigma(f), P)$ est un e.p. séparable.

Démonstration.- Soit $(t_n)_{n \geq 1}$ une suite partout dense dans T et $\mathcal{B} = \sigma\{f_{t_n}, n \geq 1\}$: c'est une tribu de type dénombrable. Si $t \in T$, soit $(t_{n(k,t)})_{k \geq 1}$ une suite extraite de $(t_n)_{n \geq 1}$ et qui converge vers t .

Alors $f_{n(k,t)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{P} f_t$, et on peut extraire de cette suite

une sous-suite convergeant p.s. Il existe donc suivant le cas une v.a. réelle ou complexe $\mathcal{B}$ -mesurable f'_t telle que

$$f_t = f'_t \text{ p.s.}$$

f_t est donc $\hat{\sigma}_{\sigma(f)}(B)$ mesurable, $\forall t \in T$; donc $\sigma(f) \subset \hat{\sigma}_{\sigma(f)}(B)$.

Cette démonstration se termine comme la précédente.

Ce résultat est vrai a fortiori si on remplace la continuité en probabilité par la continuité p.s., qui est plus forte.

Proposition 2.- Soit $f = \{f_t, t \in T\}$ une f.a. réelle ou complexe définie sur un e.p. (Ω, A, P) . T est muni d'une tribu T .

Si f est $T \otimes A$ mesurable, alors $(\Omega, \sigma(f), P)$ est séparable.

Démonstration.- f désignant ici l'application $(t, \omega) \rightarrow f_t(\omega)$, nous avons $f^{-1}(B_{\mathbb{C}}) \subset T \otimes A$, dans le cas où f est complexe. $f^{-1}(B_{\mathbb{C}})$ étant de type dénombrable, on peut extraire de la classe $S = \{S \times A, S \in T, A \in A\}$ des pavés mesurables une sous-classe dénombrable $\{S_n \times A_n, n \geq 1\}$ telle que

$$f^{-1}(B_{\mathbb{C}}) \subset \sigma\{S_n \times A_n, n \geq 1\} \subset T_0 \otimes A_0$$

où l'on a posé $T_0 = \sigma\{S_n, n \geq 1\}$, et $A_0 = \sigma\{A_n, n \geq 1\}$ (parce que si $\{S_i, i \in I\}$ est la famille des parties dénombrables de S , $\sigma(S) = T \otimes A = \bigcup_I \sigma(S_i)$).

f_t , section de f en t est donc A_0 -mesurable, $\forall t \in T$.

Donc $\sigma(f) \subset A_0$, qui est une tribu de type dénombrable, par construction.

Les e.p. (Ω, A_0, P) et $(\Omega, \sigma(f), P)$ sont donc séparables.

S. Cambanis a récemment amélioré ce résultat (³², th. 1).

L'exemple et les propositions ci-dessus montrent que les covariances usuelles sont séparables. Néanmoins, il est facile de construire des covariances et des e.p. qui ne soient pas séparables.

Exemple.- Soit B_0 la tribu borélienne de $]0, 1[$, et λ la loi uniforme sur $(]0, 1[, B_0)$.

Posons $(\Omega_t, A_t, P_t) = ([0, 1[, B_0, \lambda)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, et

$$(\Omega, A, P) = \bigotimes_{t \in \mathbb{R}} (\Omega_t, A_t, P_t).$$

- L'e.p. (Ω, A, P) n'est pas séparable : en effet, soit π_t la projection de Ω sur Ω_t , et $A_t = \pi_t^{-1}([0, 1/2[)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

L'égalité $P(A_t \Delta A_s) = \frac{1}{2}$ si $s \neq t$ montre que dans $(A/\mathcal{N}, d_P)$ 2 points quelconques de la famille $\{\bar{A}_t, t \in \mathbb{R}\}$ sont distants de $\frac{1}{2}$.
Cet espace métrique n'est donc pas séparable.

- Considérons maintenant la f.a.r. $f = \{f_t, t \in \mathbb{R}\}$ avec $f_t = \phi \circ \pi_t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, où $\phi :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite sur $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ (loi $N(0, 1)$).

f est une f.a.r. gaussienne centrée dont la covariance est
 $\Gamma(t, s) = 1$ si $t = s$
0 sinon.

Cette covariance n'est pas séparable puisque $\sigma(f) = A$, et que (Ω, A, P) n'est pas séparable.

D'ailleurs il est clair que $\delta(\Gamma) = \mathcal{H}_1$ puisque $\{\Gamma_t, t \in \mathbb{R}\}$ est une base orthonormale de l'espace autoreproduisant $H(\Gamma)$ qui est l'ensemble des points $x = (x_t, t \in \mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tels que

$$\sum_{t \in \mathbb{R}} x_t^2 < +\infty, \text{ le produit scalaire étant donné par}$$

$$\langle x, y \rangle_{H(\Gamma)} = \sum_{t \in \mathbb{R}} x_t y_t.$$

V - COVARIANCES SEPARABLES ET F.A. SUR $([0, 1], B, \lambda)$ (5).-

Théorème 2.- Pour qu'une covariance complexe (resp. réelle) soit séparable, il faut et il suffit qu'elle soit la covariance d'une f.a.c. (resp. f.a.r.) gaussienne centrée définie sur $([0, 1], B, \lambda)$.

Démonstration.- Soit Γ une covariance sur T . On suppose, par exemple, qu'elle est complexe.

a) Si Γ est la covariance d'une f.a.c. gaussienne centrée $f = \{f_t, t \in T\}$ définie sur $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$, elle est évidemment séparable car le sous-espace H_f de $L^2_{\mathbb{C}}([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ engendré par f , qui est un espace gaussien centré (², chap. II), est séparable et isomorphe à $H(\Gamma)$.

b) Réciproquement, on suppose que Γ est séparable.

Le cas $\Gamma = 0$ est trivial. Si $\Gamma \neq 0$, soit $\{h_j, j \in J\}$ une base orthonormale de $H(\Gamma)$ (on pose $J = \mathbb{N}^*$ si J est infini) et soit $(\mathbb{C}_j, \mathcal{B}_j, \nu_j)$, $j \in J$ des exemplaires de $(\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}}, \nu)$ où ν est la loi normale centrée réduite sur $\mathbb{C}$.

La famille des projections $\pi_j : (\prod_{j \in J} \mathbb{C}_j) \rightarrow \mathbb{C}_j$ est une famille de v.a.c. gaussiennes réduites indépendantes définies sur $\otimes_J (\mathbb{C}_j, \mathcal{B}_j, \nu_j)$. Soit H_{π} l'espace gaussien qu'elle engendre dans $L^2_{\mathbb{C}}(\otimes_J (\mathbb{C}_j, \mathcal{B}_j, \nu_j))$. Soit ψ l'unique isomorphisme de $H(\Gamma)$ sur H_{π} dans lequel les bases $\{h_j, j \in J\}$ et $\{\bar{\pi}_j, j \in J\}$ se correspondent.

Pour chaque t , on choisit un représentant X_t de $\psi(\Gamma_t)$. Alors $\{X_t, t \in T\}$ est une f.a.c. gaussienne centrée de covariance Γ puisque $E(X_t X_s^*) = \langle \Gamma_t, \Gamma_s \rangle_{H(\Gamma)} = \Gamma(t, s)$, $\forall t, s \in T$. $\otimes_J (\mathbb{C}_j, \mathcal{B}_j, \nu_j)$ est un e.p. séparable, parce que $\otimes_J \mathcal{B}_j$ est une tribu de type dénombrable, J étant dénombrable. De plus cet e.p. est non atomique. Il existe donc une f.a.c. f définie sur $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ ayant même loi que $\{X_t, t \in T\}$, d'après les théorèmes d'isomorphisme d'espaces de probabilité de Halmos (⁶, 41, th. C) et Doob (⁷, chap. X). f est donc une f.a.c. centrée gaussienne de covariance Γ .

c) Remarque : On peut construire directement une telle f.a. sur $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$:

- Tout point x de $[0,1]$ peut s'écrire $x = \sum_{n \geq 1} \frac{X_n(x)}{2^n}$

avec :

- $X_n(x) \in \{0,1\}$, $\forall n \geq 1$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) = +\infty$ si $x \neq 0$, et $\sum_{n=1}^{\infty} X_n(0) = 0$.

Une telle représentation, qui est unique, s'appelle décomposition dyadique de x . La suite des coefficients dyadiques $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite indépendante de v.a.r. uniformément réparties sur $\{0,1\}$, et l'on a $\sigma\{X_n, n \geq 1\} = \mathcal{B}$.

- Soit L un ensemble, et $\psi, \psi' : J \rightarrow L$ 2 injections telles que $(\psi(J), \psi'(J))$ soit une partition de L . Soit $\{N_\ell, \ell \in L\}$ une partition de $\mathbb{N}^*$ dont chaque élément N_ℓ est une suite strictement croissante notée $(n_{\ell,k}, k \geq 1)$.

$$\text{On pose } \zeta_\ell = \sum_{k \geq 1} \frac{X_{n_{\ell,k}}}{2^k}, \quad \forall \ell \in L.$$

$\{\zeta_\ell, \ell \in L\}$ est une suite indépendante de v.a.r. sur $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$, uniformément réparties sur $[0,1]$, et telles que :

$\hat{\mathcal{B}} = \hat{\sigma}_{\mathcal{B}}\{\zeta_\ell, \ell \in L\}$, autrement dit telles que la tribu de Lebesgue $\hat{\mathcal{B}}$ est la plus petite tribu qui rende mesurables les $\zeta_\ell, \ell \in L$, et qui contienne les parties négligeables de $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$.

- Soit $G : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui coïncide sur $]0,1[$ avec l'inverse Φ de la fonction de répartition (f.r.) F de $N(0,1)$. En posant $\xi_\ell = G(\zeta_\ell), \forall \ell \in L$, on obtient une famille indépendante $\{\xi_\ell, \ell \in L\}$ de v.a.r. gaussiennes réduites telles que

$$\hat{\mathcal{B}} = \hat{\sigma}_{\mathcal{B}}\{\xi_\ell, \ell \in L\}.$$

- Soit $\eta_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_{\psi(j)} + \frac{i}{\sqrt{2}} \xi_{\psi'(j)}, \forall j \in J$.

Il est clair que $\{\eta_j, j \in J\}$ est une famille indépendante de v.a.c. gaussiennes réduites, et que $\hat{\sigma}_B(\eta_j, j \in J) = \hat{B}$ puisque $\sigma\{\eta_j, j \in J\} = \sigma\{\xi_\ell, \ell \in L\}$. Soit H_η l'espace gaussien engendré par cette famille dans $L^2_{\mathbb{C}}([0,1], B, \lambda)$, et ψ' l'unique isomorphisme de $H(\Gamma)$ sur H_η dans lequel les bases $\{h_j, j \in J\}$ et $\{\bar{\eta}_j, j \in J\}$ se correspondent.

Pour chaque t , on choisit un représentant f_t de $\psi'(\Gamma_t)$. Alors $\{f_t, t \in T\}$ est une f.a.c. gaussienne centrée de covariance Γ . De plus nous avons :

$$\alpha) \quad \Gamma_t = \sum_J \langle \Gamma_t, h_j \rangle_{H(\Gamma)} h_j = \sum_J h_j^*(t) \cdot h_j \implies \\ f_t \in \sum_J h_j^*(t) \bar{\eta}_j, \quad \forall t \in T.$$

Si J est infini, la série $\sum_J h_j^*(t) \eta_j$ est λ -p.s. convergente puisque $\sum_J \text{var}(h_j^*(t) \eta_j) = \sum_J |h_j(t)|^2 = \Gamma(t,t)$.

$\beta)$ $\{\bar{f}_t, t \in T\}$ engendre H_η parce que $\{\Gamma_t, t \in T\}$ engendre $H(\Gamma)$. On a donc $\hat{\sigma}_B\{f_t, t \in T\} = \hat{\sigma}_B\{\eta_j, j \in J\} = \hat{B}$ (2 , lemme 2.3.).

VI - REPRESENTATIONS COMPLETES D'UNE COVARIANCE : EXISTENCE ET UNICITE.

Définition. - Soit Γ une covariance complexe (resp. réelle) séparable définie sur T . Soit $f = \{f_t, t \in T\}$ une f.a.c. (resp. f.a.r.) gaussienne centrée de covariance Γ définie sur $([0,1], \hat{B}, \lambda)$. On dira que f représente complètement Γ si et seulement si

$$\hat{\sigma}_B\{f_t, t \in T\} = \hat{B}.$$

Théorème 3. - 1) Toute covariance séparable non nulle Γ admet une représentation complète.

2) Soit $f = \{f_t, t \in T\}$ une représentation complète d'une covariance séparable non nulle Γ sur T . Soit $g = \{g_t, t \in T\}$ une

f.a.c. (f.a.r. si Γ est réelle) gaussienne centrée de covariance Γ , définie sur $([0,1], \hat{B}, \hat{\lambda})$. Alors g représente complètement Γ si et seulement s'il existe un isomorphisme mod. 0 ψ de $([0,1], \hat{B}, \hat{\lambda})$ sur lui-même tel que :

$$g_t = f_t \circ \psi, \forall t \in T.$$

p.s.

Démonstration. - L'existence d'une représentation complète a été établie.

a) Si ψ est un isomorphisme mod. 0 de $([0,1], \hat{B}, \hat{\lambda})$ sur lui-même, par définition, $\psi : [0,1] \rightarrow [0,1]$ est $(\hat{B}, \hat{B})$ mesurable, et il existe J_0, J'_0 dans $\hat{B}$ tels que :

$$-\hat{\lambda}(J_0) = \hat{\lambda}(J'_0) = 1$$

- $\psi \upharpoonright J_0$ est un isomorphisme de $(J_0, \hat{B} \cap J_0, \hat{\lambda})$ sur $(J'_0, \hat{B} \cap J'_0, \hat{\lambda})$ (bijection bimesurable et conservant la mesure).

ψ conserve aussi la mesure (l'image de $\hat{\lambda}$ par ψ est $\hat{\lambda}$).

Il est évident que $\hat{B} \supset \hat{\sigma}_{\hat{B}}\{f_t \circ \psi, t \in T\}$.

Inversement, si $B \in \hat{B}$, $\psi(B \cap J_0) \in \hat{B} \cap J'_0 \Rightarrow$

$\exists B' \in \sigma\{f_t, t \in T\}$ et $\exists N \in \hat{B}$ tels que :

$$\hat{\lambda}(N) = 0 \text{ et } \psi(B \cap J_0) = (B' \Delta N) \cap J'_0.$$

L'inclusion $B \Delta \psi^{-1}(B') \subset ([0,1] - J_0) \cup \psi^{-1}(N \cup ([0,1] - J'_0))$ montre que $N_B = B \Delta \psi^{-1}(B')$ qui est $\hat{B}$ -mesurable, est $\hat{\lambda}$ -négligeable.

$$\Rightarrow B = \psi^{-1}(B') \Delta N_B \in \hat{\sigma}_{\hat{B}}\{f_t \circ \psi, t \in T\}.$$

Finalement; $\hat{B} = \hat{\sigma}_{\hat{B}}\{f_t \circ \psi, t \in T\}$.

Puisque ψ conserve la mesure, $f_\psi = \{f_t \circ \psi, t \in T\}$ a même loi que f , et est donc une représentation complète de Γ .

Enfin, il est clair que l'on a :

$$\hat{\sigma}_{\hat{B}}\{f_t \circ \varphi, t \in T\} = \hat{\sigma}_{\hat{B}}\{g_t, t \in T\}.$$

b) Réciproquement, on suppose que f et g représentent complètement Γ . Traitons le cas complexe :

b₁) Si $(\mathcal{C}_t, \mathcal{B}_t)$ est un exemplaire de $(\mathcal{C}, \mathcal{B}_{\mathcal{C}})$, $\forall t \in T$, on définit la loi $\hat{\lambda}_f$ de f comme l'image de $\hat{\lambda}$ par t_f ainsi définie :

$$t_f : ([0,1], \hat{B}) \rightarrow \bigotimes_T (\mathcal{C}_t, \mathcal{B}_t) = (\mathcal{C}^T, \mathcal{B}_{\mathcal{C}}^T).$$

$$x \rightsquigarrow \{f_t(x), t \in T\}.$$

Soit $T_f : \mathcal{B}_{\mathcal{C}}^T \rightarrow \hat{B}$ définie par $T_f(C) = t_f^{-1}(C)$, $\forall C \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}}^T$.

Il est évident que $T_f(C \Delta C') = T_f(C) \Delta T_f(C')$

$$T_f(C \cap C') = T_f(C) \cap T_f(C'), \forall C, C' \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}}^T,$$

$$T_f(\mathcal{C}^T) = [0,1].$$

$$\hat{\lambda}(T_f(C)) = \hat{\lambda}(t_f^{-1}(C)) = \hat{\lambda}_f(C), \forall C \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}}^T.$$

$T_f : \mathcal{B}_{\mathcal{C}}^T \rightarrow \hat{B}$ est donc un $\mathfrak{M}$ -homomorphisme conservant les mesures $\hat{\lambda}_f$ et $\hat{\lambda}$, si l'on se réfère aux définitions suivantes :

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ un e.p. On dit que $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ est un $\mathfrak{M}$ -homomorphisme si et seulement si

$$T(A \Delta B) \mathfrak{M} T(A) \Delta T(B),$$

$$T(A \cap B) \mathfrak{M} T(A) \cap T(B), \forall A, B \in \mathcal{A},$$

$$T(\Omega) \mathfrak{M} \Omega'.$$

Si $(\Omega, \mathcal{A})$ est pourvu d'une probabilité P , on dit que le $\mathfrak{M}$ -homomorphisme T conserve les mesures P et P' si

$$P'(T(A)) = P(A), \forall A \in \mathcal{A}.$$

Si de plus $\forall A' \in \mathcal{A}' \exists A \in \mathcal{A}$ tel que $T(A) \mathfrak{M} A'$, on dit que T est inversible.

Montrons que T_f est inversible : soit $B \in \hat{B} = \hat{\sigma}_{\hat{B}}\{f_t, t \in T\}$:
 $\exists B' \in \sigma\{f_t, t \in T\}$ et $\exists N \in \hat{B}$ tels que

$$B = B' \Delta N \text{ et } \hat{\lambda}(N) = 0.$$

π_t désignant la projection de $\mathbb{C}^T$ sur $\mathbb{C}_t$, nous avons

$$t_f^{-1}(B_{\mathbb{C}}^T) = t_f^{-1}(\sigma(\bigcup_T \pi_t^{-1}(B_{\mathbb{C}}))) = \sigma(\bigcup_T (t_f^{-1}(\pi_t^{-1} B_{\mathbb{C}}))) = \sigma\{f_t, t \in T\}.$$

$$\Rightarrow \exists C \in B_{\mathbb{C}}^T \text{ tel que } B' = t_f^{-1}(C) = T_f(C).$$

$$\text{En résumé, } B = T_f(C) \Delta N \Rightarrow B \Delta T_f(C) = N \Rightarrow B \vee T_f(C).$$

Remarquons aussi que :

$$T_f\{\pi_t \leq r\} = t_f^{-1}\{\pi_t \leq r\} = \{f_t \leq r\}, \forall t \in T, \forall r \in \mathbb{Q}.$$

$b_2)$ A partir de g , nous définissons de même $T_g : B_{\mathbb{C}}^T \rightarrow \hat{B}$,
 $\vee$ -homomorphisme conservant les mesures $\hat{\lambda}_g$ et $\hat{\lambda}$, inversible et tel
 que $T_g\{\pi_t \leq r\} = \{g_t \leq r\}, \forall t \in T, \forall r \in \mathbb{Q}.$

$b_3)$ Par inversion de T_f , on obtient un $\vee$ -homomorphisme
 $T_f : \hat{B} \rightarrow B_{\mathbb{C}}^T$, conservant les mesures $\hat{\lambda}$ et $\hat{\lambda}_f$, inversible et tel que
 $T_f\{f_t \leq r\} = T_t(T_f\{\pi_t \leq r\}) \vee \{\pi_t \leq r\}.$

$b_4)$ $\hat{\lambda}_f = \hat{\lambda}_g$, puisque f et g sont des f.a.c. gaussiennes centrées
 ayant même covariance donc même loi.

$T_g \circ T_f : \hat{B} \rightarrow \hat{B}$ est un $\vee$ -homomorphisme conservant la mesure
 $\hat{\lambda}$, inversible, et $(T_g \circ T_f)\{f_t \leq r\} \vee \{g_t \leq r\}, \forall t \in T, \forall r \in \mathbb{Q}.$

D'après le théorème d'isomorphisme de Doob déjà cité, il existe

$$U : L = L_{\mathbb{C}}^0([0,1], \hat{B}, \hat{\lambda}) \rightarrow L \text{ vérifiant :}$$

$$1) \quad U(1_B) \underset{\text{p.s.}}{=} 1_{(T_g \circ T_f)(B)} , \quad \forall B \in \hat{B}.$$

$$2) \quad U(aX + bY) \underset{\text{p.s.}}{=} aU(X) + bU(Y), \quad \forall a, b \in \mathbb{C}, \quad \forall X, Y \in L.$$

$$3) \quad (X_n)_{n \geq 1} \subset L, \quad X \in L \quad \text{et} \quad X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} X \implies U(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} U(X).$$

$$4) \quad X \in L_{\mathbb{R}}^0([0,1], \hat{B}, \hat{\lambda}) \implies U(X) \in L_{\mathbb{R}}^0([0,1], \hat{B}, \hat{\lambda}).$$

De plus, si $V : L \rightarrow L$ vérifie (1), (2), et (3), alors

$$U(X) \underset{\text{p.s.}}{=} V(X), \quad \forall X \in L.$$

Enfin, il est facile de vérifier que $U(f_t) \underset{\text{p.s.}}{=} g_t, \quad \forall t \in T.$

b₅) D'après le théorème d'isomorphisme de V.A. Rohlin ⁽⁸⁾, il existe $\Psi : ([0,1], \hat{B}) \rightarrow ([0,1], \hat{B})$, isomorphisme mod. 0 de $([0,1], \hat{B}, \hat{\lambda})$ sur lui-même tel que :

$$\Psi(B) \in \hat{B} \quad \text{et} \quad \hat{\lambda}(\Psi(B) \Delta (T_g \circ T_f)(B)) = 0, \quad \forall B \in \hat{B}.$$

Soit $J', J'' \in \hat{B}$ tels que $\hat{\lambda}(J') = \hat{\lambda}(J'') = 1$ et que $\psi_0 = \psi \upharpoonright J'$ soit un isomorphisme de $(J', \hat{B} \cap J', \hat{\lambda})$ sur $(J'', \hat{B} \cap J'', \hat{\lambda})$.

On considère la bijection réciproque ψ_0 de ψ_0 et un prolongement $(\hat{B}, \hat{B})$ mesurable ψ de ψ_0 défini sur $[0,1]$.

$$\forall B \in \hat{B}, \quad \Psi(B) \Delta \{\psi \in B\} \subset \{\psi \in ([0,1] - J')\} \cup ([0,1] - J'') \implies$$

$$\hat{\lambda}(\Psi(B) \Delta \{\psi \in B\}) \leq \hat{\lambda}\{\psi \in ([0,1] - J')\} + \hat{\lambda}([0,1] - J'')$$

$$\leq 2 \hat{\lambda}([0,1] - J'') = 0$$

$$\implies 1_{\{\psi \in B\}} \underset{\text{p.s.}}{=} 1_{\Psi(B)} \underset{\text{p.s.}}{=} 1_{(T_g \circ T_f)(B)}, \quad \forall B \in \hat{B}.$$

Soit $V : L \rightarrow L$ l'application définie par

$$V(X) = X \circ \psi, \quad \forall X \in L.$$

V vérifie (1), (2) et (3) donc $U(X) = V(X)$, $\forall X \in L$.
p.s.

En particulier $f_t \circ \psi = g_t$, $\forall t \in T$.
p.s.

VII - CAS DE DEUX REPRESENTATIONS COMPLETES B-MESURABLES.-

Proposition 3.- Si f et g sont 2 représentations complètes $\mathcal{B}$ -mesurables d'une covariance séparable non nulle Γ , il existe un isomorphisme mod. 0 ψ_0 de $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ sur lui-même tel que $g_t = f_t \circ \psi_0$, $\forall t \in T$.
p.s.

Démonstration.- Utilisons un isomorphisme mod. 0 ψ de $([0,1], \hat{\mathcal{B}}, \hat{\lambda})$ sur lui-même tel que $g_t = f_t \circ \psi$, $\forall t \in T$.
p.s.

Soit $\psi_0 : ([0,1], \mathcal{B}) \rightarrow ([0,1], \mathcal{B})$ une fonction égale à ψ λ -p.s. .

On a évidemment $g_t = f_t \circ \psi_0$, $\forall t \in T$, et il reste à vérifier que ψ_0 est un isomorphisme mod. 0 de $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ sur lui-même.

Soit B, J' et J'' tels que :

- $B \in \mathcal{B}, \lambda(B) = 1$ et $\psi(x) = \psi_0(x)$, $\forall x \in B$.
- $J', J'' \in \hat{\mathcal{B}}, \hat{\lambda}(J') = \hat{\lambda}(J'') = 1$ et $\psi \upharpoonright J'$ est un isomorphisme de $(J', \hat{\mathcal{B}} \cap J', \hat{\lambda})$ sur $(J'', \hat{\mathcal{B}} \cap J'', \hat{\lambda})$.

Soit B' un borélien vérifiant $B' \subset J'$, et $\lambda(B') = 1$.

Posons $B'_0 = B \cap B'$, et $B''_0 = \psi(B'_0)$: il est clair que $B''_0 \in \hat{\mathcal{B}} \cap J''$, et que $\lambda(B'_0) = 1 = \hat{\lambda}(B''_0)$.

Si $B^* \in \mathcal{B}$, $B^* \subset B'_0 \Rightarrow \psi(B^*) \in \mathcal{B}$, d'après un théorème connu (9, th. 3.9). On en déduit en particulier que $B''_0 \in \mathcal{B}$, et que $\psi_0 \upharpoonright B'_0$ est un isomorphisme de $(B'_0, \mathcal{B} \cap B'_0, \lambda)$ sur $(B''_0, \mathcal{B} \cap B''_0, \lambda)$, donc que ψ_0 est un isomorphisme mod 0 de $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ sur lui-même.

VIII - CAS DES REPRESENTATIONS INCOMPLETES.-

Exemple.- Soit f une représentation complète d'une covariance

séparable non nulle Γ sur T . Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ la suite des coefficients dyadiques ; on pose

$$R_1 = \sum_{k \geq 1} \frac{X_{2k}}{2^k}, \quad R_2 = \sum_{k \geq 1} \frac{X_{2k-1}}{2^k}.$$

R_1 et $R_2 : ([0,1], \mathcal{B}) \rightarrow ([0,1], \mathcal{B})$ conservent la mesure λ et sont indépendantes. Ainsi $f_1 = \{f_t \circ R_1, t \in T\}$ et $f_2 = \{f_t \circ R_2, t \in T\}$ sont 2 f.a.c. (f.a.r. si Γ est réelle) gaussiennes centrées de covariance Γ , et indépendantes. Elles ne représentent donc complètement Γ ni l'une ni l'autre. En effet l'égalité $\hat{\sigma}_{\mathcal{B}}\{f_1(t), t \in T\} = \hat{B}$ montrerait que $\sigma\{f_2(t), t \in T\}$ est une tribu indépendante d'elle-même, donc que $f_2(t) = 0, \forall t \in T$, donc que $\Gamma = 0$.
p.s.

Théorème 4. - Soit k et k' 2 f.a.c. (resp. f.a.r.) gaussiennes centrées ayant la même covariance $\Gamma \neq 0$ et définies sur $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$. Soit g une représentation complète $\mathcal{B}$ -mesurable de Γ .

Alors il existe $S, S' : ([0,1], \mathcal{B}) \rightarrow ([0,1], \mathcal{B})$ conservant λ et telles que

$$g_t \circ S = k_t \text{ et } g_t \circ S' = k'_t, \forall t \in T. \\ \text{p.s.}$$

Démonstration. - Supposons par exemple que Γ est une covariance complexe.

a) On utilise d'abord la représentation complète $\mathcal{B}$ -mesurable f de Γ qui a été construite en (5c) ainsi que les notations de ce paragraphe.

a₁) Soit H_k l'espace gaussien engendré par $\{k_t, t \in T\}$ dans $L^2_{\mathcal{C}}([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$. Il existe un isomorphisme de $H(\Gamma)$ sur H_k qui fait correspondre $\bar{k}_t$ à $\Gamma_t, \forall t \in T$. L'image de la base orthonormale $\{h_j, j \in J\}$ de $H(\Gamma)$ dans cet isomorphisme est noté $\{\bar{U}_j, j \in J\}$.

On sait que $k_t = \sum_{p.s.} h_j^*(t) U_j$, le second membre étant une série p.s. convergente si J est infini.

a₂) Faisons apparaître la partie réelle et la partie imaginaire de U_j :

$$\sqrt{2} U_j = V_{\psi(j)} + i V_{\psi'(j)} .$$

$\{V_\ell, \ell \in L\}$ est une famille indépendante de v.a.r. gaussiennes réduites puisque $\{U_j, j \in J\}$ est une famille de v.a.c. du même type.

Posons $W_\ell = F \circ V_\ell, \forall \ell \in L$. Alors $\{W_\ell, \ell \in L\}$ est une famille indépendante de v.a.r. définies sur $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ et conservant λ .

De plus $V_\ell = G \circ W_\ell, \forall \ell \in L$.

a₃) J. Kampé de Fériet a montré que si

$$R = \sum_{\ell \in L} \sum_{k \geq 1} \frac{X_k \circ W_\ell}{2^{n_{\ell,k}}} = \sum_{n \geq 1} \frac{Z_n}{2^n}$$

(à condition de poser $Z_n = X_k \circ W_\ell, \forall k \geq 1, \forall \ell \in L$, lorsque $n_{\ell,k} = n$),

$R : ([0,1], \mathcal{B}) \rightarrow ([0,1], \mathcal{B})$ conserve λ et vérifie de plus :

$$V_\ell = \xi_\ell \circ R, \forall \ell \in L .$$

p.s.

Voici sa démonstration :

- Z_n suit la loi uniforme sur $\{0,1\}$, $\forall n \geq 1$, puisque $Z_n([0,1]) = \{0,1\}$ et que $\lambda\{Z_n = 0\} = \lambda_{W_\ell}\{X_k = 0\} = \lambda\{X_k = 0\} = \frac{1}{2}$, si $n = n_{\ell,k}$.

- Z_n est une suite indépendante de v.a.r. : en effet, quelles que soient la suite $(\ell_1, \dots, \ell_r)$ extraite de L , les suites d'entiers > 0 $(k_{1,1}, \dots, k_{1,s_1}), \dots, (k_{r,1}, \dots, k_{r,s_r})$ et les suites de 0 et de 1 $(a_{1,1}, \dots, a_{1,s_1}), \dots, (a_{r,1}, \dots, a_{r,s_r})$, on peut écrire, compte-tenu de l'indépendance de $\{W_\ell, \ell \in L\}$ puis de l'indépendance de $\{X_n, n \geq 1\}$:

$$\begin{aligned}
 \lambda\{Z_{n_{\ell_i, k_{i,j}}} = a_{i,j}, j = 1, \dots, s_i, i = 1, \dots, r\} \\
 &= \lambda\left(\bigcap_{i=1}^r \{W_{\ell_i} \in \{X_{k_{i,j}} = a_{i,j}\}, j = 1, \dots, s_i\}\right) \\
 &= \prod_{i=1}^r \lambda_{W_{\ell_i}}(\{X_{k_{i,j}} = a_{i,j}, j = 1, \dots, s_i\}) = \prod_{i=1}^r \lambda\{X_{k_{i,j}} = a_{i,j}, j = 1, \dots, s_i\} \\
 &= \prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^{s_i} \lambda\{X_{k_{i,j}} = a_{i,j}\} = \frac{1}{2}^{s_1 + \dots + s_r}.
 \end{aligned}$$

- La loi de $R = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Z_n}{2^n}$ est la loi de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X_n}{2^n}$, soit la loi de l'application identique de $[0,1]$. Donc R conserve λ .

- Enfin, on sait que $\zeta_{\ell}(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{X_{n_{\ell,k}}(x)}{2^k}$. Donc

$$\zeta_{\ell} \circ R(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{Z_{n_{\ell,k}}(x)}{2^k} \text{ si } (Z_n(x))_{n \geq 1} \text{ est la suite des coefficients dyadiques de } R(x), \text{ ce qui est notamment vrai si } \sum_{n=1}^{+\infty} Z_n(x) = +\infty.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, et puisque $\{Z_n, n \geq 1\}$ est indépendante, nous avons :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda\{Z_n = 1\} = +\infty \implies \lambda(\overline{\lim}_n \{Z_n = 1\}) = \lambda\left\{\sum_{n=1}^{+\infty} Z_n = +\infty\right\} = 1.$$

Ce qui démontre que $\zeta_{\ell} \circ R = \sum_{p.s. \ k \geq 1} \frac{X_k \circ W_{\ell}}{2^k} = W_{\ell}, \forall \ell \in L;$

$$\implies G \circ (\zeta_{\ell} \circ R) = G \circ W_{\ell} \text{ p.s.};$$

$$\implies \xi_{\ell} \circ R = V_{\ell} \text{ p.s.}, \forall \ell \in L.$$

$$a_4) \quad U_j = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\psi(j)} + \frac{i}{\sqrt{2}} V_{\psi'(j)} \text{ p.s. } = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \xi_{\psi(j)} + \frac{i}{\sqrt{2}} \xi_{\psi'(j)} \right) \circ R = \eta_j \circ R,$$

$\forall j \in J.$

$$\implies k_t \text{ p.s. } = \sum_J (h_j^* \eta_j \circ R) = f_t \circ R, \forall t \in T.$$

b) Pour k' on peut aussi trouver $R' : ([0,1], \mathcal{B}) \rightarrow ([0,1], \mathcal{B})$ conservant λ et tel que $k'_t = f_t \circ R'$, $\forall t \in T$.
p.s.

Il existe d'autre part un isomorphisme mod. 0 ψ de $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ sur lui-même tel que

$$f_t = g_t \circ \psi, \forall t \in T.$$

p.s.

Il suffit donc de poser $\psi \circ R = S$ et $\psi \circ R' = S'$.

IX - TRAJECTOIRES.

On appelle mouvement brownien sur $[0, +\infty[$ toute f.a.r.
 $f = \{f_t, t \geq 0\}$ séparable (⁴, III. 4 ou ⁷ chap. II. 2) gaussienne centrée de covariance

$$\Lambda(t,s) = \text{Min}(t,s), \forall t, s \geq 0.$$

Tout mouvement brownien est p.s. à trajectoires continues.

Considérant des mouvements browniens, J. Delporte et J. Kampé de Fériet ont introduit le problème suivant (¹⁰, ¹¹) : dans quelle mesure est-il exact de dire que 2 f.a. ayant la même covariance ont les mêmes trajectoires ?

Dans certains cas, ces auteurs ont trouvé que 2 mouvements browniens peuvent avoir les mêmes trajectoires, moyennant une renumérotation de celles-ci.

Plus généralement, nous avons :

Proposition 4.- Soit $k = \{k_t, t \in T\}$, $g = \{g_t, t \in T\}$ et $g' = \{g'_t, t \in T\}$ 3 f.a.c. (resp. f.a.r.) définies sur $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$, gaussiennes, centrées et ayant la même covariance $\Gamma \neq 0$.

- g et g' représentent complètement Γ .
- T muni d'une distance d est un espace métrique séparable.
- g, g' et k sont p.s. à trajectoires continues.

Il existe alors des boréliens A, B et B' de $[0,1]$, de mesure

1 tels que :

$$\{k(x), x \in A\} \subset \{g(x), x \in B\} = \{g'(x), x \in B'\}.$$

Démonstration.- Soit ψ un isomorphisme mod. 0 de $([0,1], B, \lambda)$ sur lui-même et $U : ([0,1], B) \rightarrow ([0,1], B)$ conservant λ tels que :

$$\begin{matrix} g'_t \circ \psi = g_t & \text{et} & g_t \circ U = k_t, & \forall t \in T. \\ \text{p.s.} & & \text{p.s.} \end{matrix}$$

On choisit des boréliens $E, A_k, A_g, A_{g'}, J_0$ et J'_0 de $[0,1]$, de mesure 1 vérifiant les propriétés suivantes :

- $E = \{g_t \circ U = k_t, g'_t \circ \psi = g_t, \forall t \in D\}$ où D est une suite dense dans T .
- Si $x \in A_k$ (resp. $A_g, A_{g'}$) la trajectoire $k(x)$ (resp. $g(x), g'(x)$) est continue.
- $\psi \upharpoonright J_0$ est un isomorphisme de $(J_0, B \cap J_0, \lambda)$ sur $(J'_0, B \cap J'_0, \lambda)$.

Posons $B = J_0 \cap E \cap A_g \cap \psi^{-1}(J'_0 \cap A_{g'})$, et $\psi(B) = B'$. Il est clair que B et B' sont des boréliens, que $\lambda(B) = \lambda(B') = 1$, et que $g(x) = g'(\psi(x))$, $\forall x \in B$, puisqu'il s'agit de fonctions continues coïncidant sur D . B et B' étant en bijection par ψ , on a bien

$$\{g(x), x \in B\} = \{g'(x), x \in B'\}$$

Pour le borélien $A = A_k \cap U^{-1}(B) \cap E$, on a :

$$\lambda(A) = 1, \text{ et } k(x) = g(U(x)), \forall x \in A, \text{ donc}$$

$$\{k(x), x \in A\} \subset \{g(x), x \in B\}.$$

Exemple. - Pour des mouvements browniens construits sur $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ le théorème ci-dessus peut se traduire par :

L'ensemble des trajectoires de n'importe quel mouvement brownien sur $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ est contenu, à un ensemble de mesure nulle près, dans l'ensemble des trajectoires de tout autre mouvement brownien $\mathcal{B}$ -mesurable et qui représente complètement sa covariance. En particulier, 2 mouvements browniens $\mathcal{B}$ -mesurables qui représentent complètement leur covariance ont même ensemble de trajectoires, à 2 ensembles de mesure nulle près.

X - UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DU MOUVEMENT BROWNIEN.

A partir d'une propriété caractéristique de leur covariance (voir ¹⁰), nous caractérisons maintenant les mouvements browniens avec une propriété de leurs trajectoires.

Soit S l'ensemble des fonctions $S : ([0,1], \mathcal{B}) \rightarrow ([0,1], \mathcal{B})$ qui conservent λ , et Φ l'ensemble des applications croissantes de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ ($\psi \in \Phi \iff \psi([0, +\infty[) = [0, +\infty[$ et $0 \leq x < x' \implies \psi(x) < \psi(x')$). Il est clair que si $\psi \in \Phi$, ψ est continue, et $\psi(0) = 0$.

Proposition 5. - Soit $f = \{f_t, t \geq 0\}$ une f.a.r. séparable gaussienne centrée définie sur $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ et représentant complètement sa covariance Γ continue et non nulle.

Alors f est un mouvement brownien si et seulement si

$$- \Gamma(1,1) = 1$$

$$- \forall \psi_1, \psi_2 \in \Phi \text{ et } \forall U, V \in S, \lambda\text{-indépendantes, } \exists S \in S \text{ tel que :}$$

$$\frac{\lambda \{ f_{(\psi_1 + \psi_2)}(t) \circ S = f_{\psi_1}(t) \circ U + f_{\psi_2}(t) \circ V, \forall t \geq 0 \}} = 1.$$

Démonstration. - Si f a la propriété, quels que soient

$t \geq 0$, $s \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} E \left(\left(f_{(\psi_1 + \psi_2)}(t) \circ S \right) \left(f_{(\psi_1 + \psi_2)}(s) \circ S \right) \right) &= \Gamma((\psi_1 + \psi_2)(t), (\psi_1 + \psi_2)(s)) \\ &= E \left(\left(f_{\psi_1}(t) \circ U + f_{\psi_2}(t) \circ V \right) \left(f_{\psi_1}(s) \circ U + f_{\psi_2}(s) \circ V \right) \right) \\ &= E \left(\left(f_{\psi_1}(t) \circ U \right) \left(f_{\psi_2}(t) \circ U \right) \right) + E \left(\left(f_{\psi_2}(t) \circ V \right) \left(f_{\psi_2}(s) \circ V \right) \right) \\ &= \Gamma(\psi_1(t), \psi_1(s)) + \Gamma(\psi_2(t), \psi_2(s)). \end{aligned}$$

Γ vérifie donc la propriété suivante :

$$(1) \Gamma(\psi_1(t) + \psi_2(t), \psi_1(s) + \psi_2(s)) = \Gamma(\psi_1(t), \psi_1(s)) + \Gamma(\psi_2(t), \psi_2(s)),$$

$$\forall \psi_1, \psi_2 \in \Phi, \forall t, s \geq 0.$$

En appliquant (1) aux fonctions $\psi_1(t) = \alpha.t$ et $\psi_2(t) = (1-\alpha)t$, avec $\alpha \in]0,1[$, on obtient :

$$\Gamma(t,s) = \Gamma(\alpha t, \alpha s) + \Gamma((1-\alpha)t, (1-\alpha)s), \forall t, s \geq 0.$$

On en déduit que $\Gamma(0,0) = 0$, puis successivement que

- $\Gamma(nt, ns) = n \Gamma(t, s)$ et $\Gamma\left(\frac{t}{n}, \frac{s}{n}\right) = \frac{1}{n} \Gamma(t, s) \quad \forall t, s \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$,
- $\Gamma(rt, rs) = r \Gamma(t, s)$, $\forall t, s \geq 0, \forall r \in \mathbb{Q}_+^*$,
- $\Gamma(xt, xs) = x \Gamma(t, s)$, $\forall t, s, x \geq 0$, parce que Γ est continue.

Montrons maintenant (solution de J. Delporte) que :

$$(\forall t, s, h > 0), \quad \Gamma(t+h, s+h) = \Gamma(t, s) + \Gamma(h, h).$$

Supposons que $s > t$ (Γ étant un noyau symétrique) et considérons la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1} \subset \Phi$ ainsi définie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall x \geq 0,$$

$$\varphi_n(x) = \frac{h}{t} 1_{[0, t[}(x) + (h + \frac{x-t}{n}) 1_{[t, s[}(x) + (h + \frac{s-t}{n} + (x-s)) 1_{[s, +\infty[}(x)$$

$$(1) \implies (\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(t+\varphi_n(t), s+\varphi_n(s)) = \Gamma(t, s) + \Gamma(\varphi_n(t), \varphi_n(s))).$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient l'égalité cherchée :

$$\Gamma(t+h, s+h) = \Gamma(t, s) + \Gamma(h, h).$$

Cette égalité se prolonge par continuité pour $t, s, h \geq 0$.

Si $0 \leq t \leq s$, on a donc

$$\begin{aligned} \Gamma(t, s) &= \Gamma(t, t + (s-t)) = \Gamma(t, t) + \Gamma(0, s-t) \\ &= \Gamma(t, t) = t \quad \Gamma(1, 1) = t. \end{aligned}$$

Réciproquement, soit f un mouvement brownien représentant complètement sa covariance. Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, et $U, V \in S$.

On suppose que U et V sont indépendantes.

Les f.a.r. $\{f_{(\varphi_1+\varphi_2)}(t), t \geq 0\}$ et $\{f_{\varphi_1}(t) \circ U + f_{\varphi_2}(t) \circ V, t \geq 0\}$ sont évidemment gaussiennes, centrées, p.s. à trajectoires continues.

Leur covariance est celle du mouvement brownien : il s'agit donc de mouvements browniens. De plus

$$(\varphi_1 + \varphi_2)([0, +\infty[) = [0, +\infty[\implies \sigma\{f_t, t \geq 0\} = \sigma\{f_{(\varphi_1+\varphi_2)}(t), t \geq 0\}$$

Le premier mouvement est donc une représentation complète. Il suffit d'appliquer le théorème 4.

XI - CONSTRUCTION DE P. LEVY ⁽²⁰⁾ - J. KAMPÉ DE FÉRIET ^(21, 28) DU MOUVEMENT BROWNIEN (voir aussi ⁴¹).

Nous donnons ici une nouvelle justification de cette construction, qui donne tous les mouvements browniens.

a) Espace autoreproduisant du mouvement brownien.

Soit $C_0([0, +\infty[)$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[0, +\infty[$ et s'annulant à l'origine.

L'espace autoreproduisant $H(\Lambda)$ associé à la covariance Λ du mouvement brownien est l'ensemble des fonctions $\psi \in C_0([0, +\infty[)$ telle que la distribution dérivée ψ' de $\psi \upharpoonright ([0, +\infty[)$ soit une fonction de carré intégrable : $\int_0^{+\infty} \psi'^2(t) dt < +\infty$; et le produit scalaire dans $H(\Lambda)$ est donné par :

$$\forall \psi_1, \psi_2 \in H(\Lambda), \quad \langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_0^{+\infty} \psi_1'(t) \cdot \psi_2'(t) dt \quad (\text{voir } ^{40}, \text{Ex. 1.6.2.}).$$

Autrement dit, $\psi \rightarrow \psi'$ établit un isomorphisme de $H(\Lambda)$ sur l'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{R}}([0, +\infty[, \mathcal{B}([0, +\infty[), \lambda)$.

b) La base triangulaire de $H(\Lambda)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists ! (p_n, q_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$- \quad n = 2^{q_n-1} + p_n$$

$$- \quad 0 \leq p_n < 2^{q_n-1}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ on pose } J_n = \left[\frac{p_n}{2^{q_n-1}}, \frac{p_n+1}{2^{q_n-1}} \right[\quad (\Rightarrow J_{2n} + J_{2n+1} = J_n).$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}^*$ et $\forall t \geq 0$, soit :

$$\begin{aligned} - \text{ si } n > 0 : \quad e_{m,n}(t) &= 2^{q_n} \left(t - m + 1 - \frac{p_n}{2^{q_n-1}} \right) \quad \text{si } t - m + 1 \in J_{2n} \\ &= 2^{q_n} \left(\frac{p_n+1}{2^{q_n-1}} - t + m - 1 \right) \quad \text{si } t - m + 1 \in J_{2n+1} \end{aligned}$$

$$= 0 \text{ sinon ;}$$

$$- \text{ si } n = 0 : e_{m,0}(t) = 0 \quad \text{si } t < m-1$$

$$= t-m+1 \quad \text{si } m-1 \leq t < m$$

$$= 1 \quad \text{si } t \geq m .$$

Les fonctions $e_{m,n}$, $m \geq 1$, $n \geq 0$, dites fonctions triangulaires, appartiennent évidemment à $H(\Lambda)$, et vérifient :

$$\forall m \geq 1, \forall n \geq 1, \quad e'_{m,n} = 2^{(q_n+1)/2} h_{m,n}$$

$$\forall m \geq 1 \quad e'_{m,0} = h_{m,0} ,$$

les fonctions de Haar $h_{m,n}$, $m \geq 1$, $n \geq 0$ étant définies par :

$$\begin{aligned} \forall m \geq 1, \forall n \geq 1, \forall t \geq 0, \quad h_{m,n}(t) &= 2^{(q_n-1)/2} \quad \text{si } t-m+1 \in J_{2n}^0 \\ &= -2^{(q_n-1)/2} \quad \text{si } t-m+1 \in J_{2n+1}^0 \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall m \geq 1, \forall t \geq 0, \quad h_{m,0}(t) &= 1 \quad \text{si } m-1 < t < m \\ &= 0 \quad \text{sinon .} \end{aligned}$$

$\{h_{m,n}, m \geq 1, n \geq 0\}$ étant une base orthonormale de $L^2_{\mathbb{R}}(]0, +\infty[, \mathcal{B}(]0, +\infty[, \lambda))$,

les fonctions $\frac{1}{2^{\frac{q_n+1}{2}}} e_{m,n}$, $m \geq 1$, $n \geq 1$ et $e_{m,0}$, $m \geq 1$ constituent une base orthonormale de $H(\Lambda)$: la base triangulaire.

c) Construction de mouvements browniens.

On en déduit immédiatement (ce que J. Neveu a fait via les mesures gaussiennes, ², chap. 4) que si $(\eta_{m,n}, m \geq 1, n \geq 0)$ est une suite de v.a.r. gaussiennes centrées réduites définies sur le même e.p. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on définit une f.a.r. gaussienne centrée de covariance $\Lambda : \hat{W} = \{\hat{W}_t, t \geq 0\}$ par

$$\forall t \geq 0, \hat{W}(t, \cdot) \stackrel{\text{m.q.}}{\underset{\text{p.s.}}{=}} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\eta_{m,0} e_{m,0}(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \eta_{m,n} \cdot \frac{1}{\frac{q_n+1}{2^2}} \cdot e_{m,n}(t) \right).$$

Il y a en fait beaucoup mieux : puisque pour chaque $t \geq 0$ la série ci-dessus converge p.s., la série de v.a. à valeurs dans $C_0([0, +\infty[)$:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\eta_{m,0} e_{m,0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \eta_{m,n} \cdot \frac{1}{\frac{q_n+1}{2^2}} \cdot e_{m,n} \right)$$

converge p.s. pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $[0, +\infty[$ (d'après ²⁵, th. 2).

Nous retrouvons ainsi un résultat démontré pour la première fois par J. Kampé de Fériet, qui a utilisé certaines propriétés des fonctions triangulaires (²¹, ²⁸). Notre procédé est plus général puisque nous pouvons évidemment substituer à la base de Haar toute autre base orthonormale de $L^2_{\mathbb{R}}([0, +\infty[, \mathcal{B}([0, +\infty[), \lambda)$. Ces remarques avaient d'ailleurs déjà été faites par L. Shepp (²⁹, p. 324) pour construire des mouvements browniens dont l'espace des temps est réduit à $[0, A]$, $A > 0$, au lieu de $[0, +\infty[$, ce qui est techniquement très différent.

Ainsi, la f.a.r. W dont presque toutes les trajectoires sont définies par

$$W(\cdot, \omega) \underset{C_0([0, +\infty[)}{=} \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\eta_{m,0}(\omega) \cdot e_{m,0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \eta_{m,n}(\omega) \cdot \frac{1}{\frac{q_n+1}{2^2}} \cdot e_{m,n} \right)$$

est un mouvement brownien.

d) La construction de P. Lévy - J. Kampé de Fériet donne tous les mouvements browniens définis sur $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$: en effet, celui que l'on vient de construire, en supposant que $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$, représente complètement Γ si et seulement si

$$\hat{\sigma}_{\mathcal{B}}(\eta_{m,n}, m \geq 1, n \geq 0) = \hat{\mathcal{B}}.$$

Dans ce cas, et si W' est un autre mouvement brownien défini sur $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$, il existe une fonction $\psi : ([0, 1], \mathcal{B}) \rightarrow ([0, 1], \mathcal{B})$

conservant λ et telle que pour presque tout ω on ait :

$$W'(\cdot, \omega) = \sum_{m=1}^{+\infty} (\eta_{m,0}(\psi(\omega)) e_{m,0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\frac{q_n+1}{2}} \cdot e_{m,n} \cdot \eta_{m,n}(\psi(\omega))) .$$

e) Remarques diverses.

e₁) Soit Λ_0 la restriction de Λ à $[0,1]$, $C_0([0,1])$ l'espace de Banach des fonctions continues réelles définies sur $[0,1]$ et s'annulant à l'origine, muni de la topologie de la convergence uniforme.

Alors $H(\Lambda_0)$ est un sous-espace hilbertien de $C_0([0,1])$, autrement dit l'injection canonique de $H(\Lambda_0)$ dans $C_0([0,1])$ est continue (voir ²³) : en effet,

$$\forall \psi \in H(\Lambda_0) \text{ et } \forall t \in [0,1],$$

$$|\psi(t)| = |\langle \psi, \Lambda_0(t, \cdot) \rangle_{H(\Lambda_0)}| \leq \|\psi\|_{H(\Lambda_0)} \cdot \sqrt{\Lambda_0(t,t)} = \sqrt{t} \cdot \|\psi\|_{H(\Lambda_0)} \implies$$

$$\forall \psi \in H(\Lambda_0), \sup_{0 \leq t \leq 1} |\psi(t)| \leq \|\psi\|_{H(\Lambda_0)} .$$

e₂) Soit W_0 un mouvement brownien quelconque construit sur $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$, et dont l'espace des temps est $[0,1]$.

Alors $B_{W_0} = \{\omega : W_0(\cdot, \omega) \in H(\Lambda_0)\}$ est λ -négligeable (voir ^{26, 44} pour des résultats plus complets sur le support de la mesure de Wiener).

En effet, d'après le paragraphe ci-dessus, il existe une suite de v.a.r. gaussiennes centrées réduites et indépendantes, construites sur $([0,1], \mathcal{B}, \lambda) : (\eta_n)_{n \geq 0}$ et un borélien B λ -presque-certain de $[0,1]$ tels que :

$$\forall \omega \in B, W_0(\cdot, \omega) = \eta_0(\omega) e_{1,0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\frac{q_n+1}{2}} e_{1,n} \cdot \eta_n(\omega) .$$

$e_{1,0}$ et $\frac{1}{\frac{q_n+1}{2}} e_{1,n}$, $n = 1, 2, \dots$ constituant une base orthonormale de $H(\Lambda_0)$, $\forall \omega \in B_{W_0}$, soit $(\alpha_n(\omega))_{n \geq 0}$ la suite des coefficients de Fourier du développement de $W_0(\cdot, \omega)$ suivant cette base, suite qui vérifie évidemment

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n^2(\omega) < +\infty.$$

La convergence dans $H(\Gamma_0)$ entraînant la convergence dans $C_0([0, 1])$, $\forall \omega \in B \cap B_{W_0}$, on a :

$$\alpha_0(\omega) e_{1,0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(\omega) \frac{1}{\frac{q_n+1}{2}} e_{1,n} = \eta_0(\omega) e_{1,0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n(\omega) \frac{1}{\frac{q_n+1}{2}} e_{1,n}.$$

Comme il y a unicité du développement de toute fonction de $C_0([0, 1])$ suivant la base de Schauder $(e_{1,n})_{n \geq 0}$, on a :

$$\forall n \geq 0 \text{ et } \forall \omega \in B \cap B_{W_0}, \alpha_n(\omega) = \eta_n(\omega)$$

$$\implies B \cap B_{W_0} \subset \{\omega : \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_n^2(\omega) < +\infty\}$$

$$\implies B_{W_0} \text{ est } \lambda\text{-négligeable.}$$

XII - COVARIANCES MESURABLES (P. Cartier, ³⁶).

Le théorème suivant peut permettre dans certains cas l'extension de nos résultats aux covariances mesurables (voir aussi K. Devinatz, ³⁵ et M. Crum, ³⁴).

Théorème. - Si T est un espace topologique séparé muni de sa tribu borélienne $\mathcal{T}$ et d'une mesure positive σ -finie μ , et si Γ est une covariance réelle sur T , $(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T})$ -mesurable, alors

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1$$

où Γ_0 est une covariance réelle séparable sur T , et Γ_1 une covariance réelle sur T , nulle $(\mu \otimes \mu)$ -p.p.

DEUXIEME CHAPITRE : ETUDE DES COVARIANCES ET CORRELATIONS PLUS PETITES
QU'UNE COVARIANCE DONNEE. APPLICATIONS AUX PROCESSUS.

Première Partie : Représentation canonique des covariances plus petites qu'une covariance donnée.

I - Dans la première partie, on considère des covariances complexes (resp. réelles) définies sur un ensemble non vide quelconque T . Pour deux quelconques d'entre elles, on pose $\Gamma' \leq \Gamma$ si et seulement si $\Gamma - \Gamma'$ est une covariance. On sait (¹, p. 354) que

$$\Gamma' \leq \Gamma \iff (H(\Gamma') \subset H(\Gamma) \text{ et } \|f\|_{H(\Gamma')} \geq \|f\|_{H(\Gamma)}, \forall f \in H(\Gamma')).$$

Cette relation est antisymétrique : en effet si $\Gamma' \leq \Gamma$ et $\Gamma \leq \Gamma'$, $H(\Gamma)$ et $H(\Gamma')$ sont 2 espaces de Hilbert identiques. On a donc

$$\Gamma'(t,s) = \langle \Gamma'_t, \Gamma_s \rangle_{H(\Gamma)} = \langle \Gamma_s, \Gamma'_t \rangle_{H(\Gamma')}^* = \Gamma^*(s,t) = \Gamma(t,s), \forall t, s \in T.$$

On en déduit que $\leq$ est une relation d'ordre.

Dans la suite, une covariance Γ est donnée. La norme et le produit scalaire de $H(\Gamma)$ sont plus simplement notées $\| \cdot \|$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Nous allons identifier $C(\Gamma)$, ensemble des covariances majorées par Γ à un ensemble d'opérateurs de $H(\Gamma)$, en nous référant au livre de F. Riesz et B. Sz. Nagy (¹²).

On définit d'abord les bornes inférieure et supérieure d'un opérateur auto-adjoint u de $H(\Gamma)$ comme respectivement le plus grand réel m_u et le plus petit réel M_u tels que

$$m_u \langle f, f \rangle \leq \langle u(f), f \rangle \leq M_u \langle f, f \rangle, \forall f \in H(\Gamma).$$

Si u et v sont 2 opérateurs auto-adjoints de $H(\Gamma)$, on pose

$$u \leq v \iff (\langle u(f), f \rangle \leq \langle v(f), f \rangle, \forall f \in H(\Gamma)).$$

C'est une relation d'ordre (¹², n° 104).

Appelons $U(\Gamma)$ l'ensemble des opérateurs auto-adjoints u de $H(\Gamma)$ tels que

$$0 \leq m_u \leq M_u \leq 1 ,$$

autrement dit, l'ensemble des opérateurs auto-adjoints positifs de norme ≤ 1 puisque $||v|| = \max(|m_v|, |M_v|)$ pour tout opérateur auto-adjoint v .

Théorème 5. - $\forall \Gamma' \in C(\Gamma) , \exists ! U(\Gamma') \in U(\Gamma)$ tel que :

$$U(\Gamma')(\Gamma_t) = \Gamma'_t , \forall t \in T .$$

De plus, $U : C(\Gamma) \rightarrow U(\Gamma)$ est une bijection respectant $\leq$.

Démonstration. - Soit $\Gamma' \in C(\Gamma)$. Le sous-espace vectoriel $V(\Gamma)$ engendré par $\{\Gamma_t, t \in T\}$ est partout dense dans $H(\Gamma)$.

Soit $u'_0 : V(\Gamma) \rightarrow H(\Gamma)$ l'application linéaire définie par

$$u'_0(\Gamma_t) = \Gamma'_t , \forall t \in T .$$

Cette définition est cohérente puisque si $a_1 \Gamma_{t_1} + \dots + a_n \Gamma_{t_n} = 0$, alors $a_1 \Gamma'_{t_1} + \dots + a_n \Gamma'_{t_n} = 0$: en effet ,

$$\begin{aligned} ||a_1 \Gamma'_{t_1} + \dots + a_n \Gamma'_{t_n}||_{H(\Gamma')}^2 &= \sum_{i,j=1}^n a_i a_j^* \Gamma'(t_i, t_j) \leq \sum_{i,j=1}^n a_i a_j^* \Gamma(t_i, t_j) = \\ &= ||a_1 \Gamma_{t_1} + \dots + a_n \Gamma_{t_n}||^2 = 0 \end{aligned}$$

De plus $||u'_0(f)|| \leq ||f||$, $\forall f \in V(\Gamma)$ puisque si $f = \sum_{i=1}^n a_i \Gamma_{t_i}$,

$$||u'_0(f)||^2 \leq ||u'_0(f)||_{H(\Gamma')}^2 = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j^* \Gamma'(t_i, t_j) \leq \sum_{i,j=1}^n a_i a_j^* \Gamma(t_i, t_j) = ||f||^2 .$$

Le prolongement par continuité u' de u'_0 à $H(\Gamma)$ est donc un opérateur de $H(\Gamma)$ de norme ≤ 1 . Montrons qu'il est auto-adjoint et positif.

- u' est auto-adjoint : en effet,

$$\langle u'(\Gamma_t), \Gamma_s \rangle = \langle \Gamma_t', \Gamma_s \rangle = \Gamma'(t, s)$$

$$\langle \Gamma_t, u'(\Gamma_s) \rangle = \langle \Gamma_t, \Gamma_s' \rangle = \langle \Gamma_s', \Gamma_t \rangle^* = \Gamma'(s, t)^* .$$

Cette relation s'étend par linéarité à $V(\Gamma)$:

$$\langle u(f), g \rangle = \langle f, u(g) \rangle, \forall f, g \in V(\Gamma),$$

puis par continuité à $H(\Gamma)$.

- u' est positif puisque si $f = \sum_{i=1}^n a_i \Gamma_{t_i}$,

$$\langle u'(f), f \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j^* \Gamma'(t_i, t_j) \geq 0, \text{ et que cette relation}$$

s'étend à $H(\Gamma)$ par continuité.

u' est évidemment l'unique opérateur de $H(\Gamma)$ qui envoie Γ_t sur Γ_t' , $\forall t \in T$.

Considérons maintenant $U : C(\Gamma) \rightarrow U(\Gamma)$. Etant donné v choisi dans $U(\Gamma)$, posons $v(\Gamma_t) = \Gamma_t'$, $\forall t \in T$. On définit ainsi un noyau $\Gamma'(t, s)$, ($t, s \in T$) qui a la symétrie hermitienne puisque

$$\Gamma_t'(s) = \langle v(\Gamma_t), \Gamma_s \rangle = \langle \Gamma_t, v(\Gamma_s) \rangle = \langle \Gamma_s', \Gamma_t \rangle^* = (\Gamma_s'(t))^* .$$

et est de type positif : en effet, si $a : T \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de support fini, on a :

$$\sum_{t,s} a(t) a^*(s) \Gamma'(t, s) = \langle v(\sum_t a(t) \Gamma_t), \sum_t a(t) \Gamma_t \rangle \geq 0 .$$

Autrement dit, Γ' est une covariance, ainsi que $\Gamma - \Gamma'$ qui correspond à l'opérateur $i - v$ qui appartient aussi à $U(\Gamma)$ (i : opérateur identique de $H(\Gamma)$). U est donc une surjection.

Les équivalences suivantes terminent la démonstration :

$$U(\Gamma') \leq U(\Gamma'') \iff \langle U(\Gamma')(f), f \rangle \leq \langle U(\Gamma'')(f), f \rangle, \forall f \in H(\Gamma)$$

$$\iff \langle U(\Gamma')(f), f \rangle \leq \langle U(\Gamma'')(f), f \rangle, \forall f \in V(\Gamma) \iff \Gamma' \leq \Gamma''.$$

II - Γ -COVARIANCES ⁽¹³⁾.-

Définition.- On dira que $\Gamma' \in C(\Gamma)$ est une Γ -covariance si et seulement si $H(\Gamma')$ est un sous-espace de $H(\Gamma)$, autrement dit si et seulement si $H(\Gamma')$ est un sous-espace vectoriel de $H(\Gamma)$, le produit scalaire de $H(\Gamma')$ étant celui de $H(\Gamma)$:

$$\langle f, g \rangle_{H(\Gamma')} = \langle f, g \rangle, \forall f, g \in H(\Gamma').$$

On sait que Γ' est une Γ -covariance si et seulement s'il existe une projection e dans $H(\Gamma)$ telle que $\Gamma'_t = e(\Gamma_t), \forall t \in T$, et qu'alors e est la projection sur le sous-espace $H(\Gamma')$ (², prop. 3.15). U met donc en correspondance bi-univoque les Γ -covariances et les projections.

A partir du théorème de Hilbert de représentation spectrale d'un opérateur auto-adjoint (¹², n° 107), on obtient toute covariance majorée par Γ comme limite d'une suite de combinaisons linéaires de Γ -covariances :

Théorème 6.- (théorème de représentation spectrale des covariances de $C(\Gamma)$) :

Pour toute covariance Γ' plus petite que Γ , il existe une famille unique de Γ -covariances : $\{\Gamma'_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ ayant les propriétés suivantes :

$$1) \mu \leq \nu \implies \Gamma'_\mu \leq \Gamma'_\nu.$$

$$2) \Gamma'_\lambda = 0 \text{ si } \lambda < m' \text{ et } \Gamma'_\lambda = \Gamma \text{ si } \lambda > M', \text{ ou } m' \text{ et } M'$$

désignent respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de l'opérateur $U(\Gamma')$.

3) $\forall t \in T, \lambda \rightsquigarrow \Gamma'_\lambda(t, \cdot)$ est continue à droite.

4) $\forall t, s, \lambda \rightsquigarrow \Gamma'_\lambda(t, s) \cdot 1_{[0,1]}^{(\lambda)}$ est à variations bornées sur $[0,1]$ et $\Gamma'(t, s) = \int_0^1 \lambda d_\lambda (\Gamma'_\lambda(t, s) \cdot 1_{[0,1]}^{(\lambda)})$.

Cette intégrale est prise au sens de Stieltjès (¹², n° 49) et sera notée plus simplement $\int_{0-}^1 \lambda d \Gamma'_\lambda(t, s)$.

Il s'agit d'une application immédiate du théorème de décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint, de Hilbert. On utilise la démonstration de F. Riesz (¹², n° 107).

Rappels : a) On peut associer à tout opérateur u' de $U(\Gamma)$ une famille - et une seule - de projections de $H(\Gamma)$ notée $\{e'_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ ayant les propriétés suivantes :

$$1') \lambda \leq \mu \Rightarrow e'_\lambda \leq e'_\mu.$$

2') $e' = 0$ si $\lambda < m'$ et $e'_\lambda = i$ si $\lambda \geq M'$, où m' est M' désignent respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de u' .

3') e'_λ est continue à droite au sens de la convergence forte pour les opérateurs, c'est-à-dire que $\|e'_\mu(f) - e'_\lambda(f)\| \rightarrow 0, \forall f \in H(\Gamma)$.

$$\mu \rightarrow \lambda$$

$$\mu > \lambda$$

$$4') u' = \int_{0-}^1 \lambda d e'_\lambda, \text{ cette intégrale étant définie comme suit :}$$

au choix $s = (k, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ où k est un entier ≥ 1 ,

$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k$ des réels tels que $0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_{k-1} < \mu_k = 1$

et $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des réels choisis respectivement dans $[\mu_0, \mu_1], \dots, [\mu_{k-1}, \mu_k]$,

on associe l'opérateur auto-adjoint

$$u'_s = \lambda_1 e'_{\mu_1} + \sum_{i=2}^k \lambda_i (e'_{\mu_i} - e'_{\mu_{i-1}}), \text{ et on pose } \bar{\omega}_s = \sup(\mu_i - \mu_{i-1}, i=1, \dots, k).$$

$$\text{Alors on sait que } \|u' - u'_s\| \leq \bar{\omega}_s.$$

On obtient donc une intégrale de Stieltjès sur $[0,1]$ associée à la convergence en norme des opérateurs, par rapport à la fonction

$$\lambda \rightsquigarrow e'_\lambda \cdot 1_{[0,1]}^{(\lambda)}. \text{ Il est donc naturel de poser}$$

$$u' = \int_0^1 \lambda d_\lambda (e'_\lambda - 1]_{0,1}(\lambda)) , \text{ ou plus simplement (4') }.$$

b) Toute famille de projections $\{e'_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ qui vérifie (1'), (2') et (3') s'appelle une famille spectrale étalée sur le segment $[m', M']$ si de plus $m' = \sup\{\lambda : e'_\lambda = 0\}$ et $M' = \inf\{\lambda : e'_\lambda = 1\}$. Alors on a $m' \leq M'$ et $e'_{M'} = 1$ (d'après (3')).

Soit $\{e'_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ une famille spectrale de projections étalée sur $[m', M'] \subset [0, 1]$. Posons

$$U'_n = \frac{1}{2^n} e'_1 + \sum_{k=2}^{2^n} \frac{k}{2^n} (e'_{\frac{k}{2^n}} - e'_{\frac{k-1}{2^n}}), \text{ et } u'_n = \sum_{k=2}^{2^n} \frac{k-1}{2^n} (e'_{\frac{k}{2^n}} - e'_{\frac{k-1}{2^n}}), \forall n \geq 1.$$

D'après (1'), $e'_{\frac{1}{2^n}}, e'_{\frac{2}{2^n}} - e'_{\frac{1}{2^n}}, \dots, e'_{\frac{2^{n-1}}{2^n}} - e'_{\frac{2^{n-2}}{2^n}}$ sont des projections sur des sous-espaces 2 à 2 orthogonaux. Donc

$$0 \leq \langle u'_n(f), f \rangle \leq \langle U'_n(f), f \rangle \leq \langle f, f \rangle,$$

$$0 \leq \langle (U'_n - u'_n)(f), f \rangle \leq \frac{1}{2^n} \langle f, f \rangle,$$

$$U'_{n+1} \leq U'_n \text{ et } u'_{n+1} \geq u'_n, \forall n \geq 1, \forall f \in H(\Gamma).$$

Les suites $(U'_n)_{n \geq 1}$ et $(u'_n)_{n \geq 1}$ sont convergentes (au sens de la convergence forte des opérateurs) comme suites monotones et bornées d'opérateurs auto-adjoints (¹², n° 104). Soit u' la limite commune.

Il est clair que c'est un opérateur de $\mathcal{U}(\Gamma)$.

Considérons maintenant l'opérateur u'_s construit à partir d'un choix quelconque $s = (k, \mu_0, \dots, \mu_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ du type décrit ci-dessus.

Pour comparer U'_n et u'_s , on introduit la subdivision

$v_0 = 0 < v_1 \dots < v_r = 1$ formée avec tous les points de $(\mu_0, \dots, \mu_k)$ et de $(0, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{2^{n-1}}{2^n}, 1)$.

$$U'_n = \lambda'_1 e'_{v_1} + \sum_{k=2}^r \lambda'_k (e'_{v_k} - e'_{v_{k-1}}), \text{ et } u'_s = \lambda''_1 e'_{v_1} + \sum_{k=2}^r \lambda''_k (e'_{v_k} - e'_{v_{k-1}}),$$

$$\text{avec notamment } \lambda'_1 = \frac{1}{2^n}, \lambda''_1 = \lambda_1, \text{ et } |\lambda'_k - \lambda''_k| \leq \bar{\omega}_s + \frac{1}{2^n}.$$

$$\Rightarrow |\langle (U'_n - u'_s), f, f \rangle| \leq \left(\frac{1}{2^n} + \bar{\omega}_s \right) \langle f, f \rangle, \forall f \in H(\Gamma).$$

Finalement, on obtient les inégalités $\|u' - u'_s\| \leq \bar{\omega}_s$ et $\|u' - U'_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ qui montrent que (U'_n) converge en norme vers u' et que $u' = \int_{0-}^1 \lambda d e'_\lambda$ définit un opérateur de $U(\Gamma)$.

Nous allons montrer que m' et M' sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de u' :

Cas 1 : $m' < M'$. Soit s un choix tel que l'on ait :

$$\mu_{r-1} < m' < \mu_r < \mu_{r+1} \dots < \mu_s = M, \lambda_r = m', \lambda_s = M'.$$

$$\langle u'_s(f), f \rangle = m' \langle e'_{\mu_r}(f), f \rangle + \sum_{i=r+1}^{s-1} \lambda_i \langle (e'_{\mu_i} - e'_{\mu_{i-1}})(f), f \rangle + M' \langle (i - e'_{\mu_{s-1}})(f), f \rangle.$$

$$\Rightarrow m' \langle f, f \rangle \leq \langle u'_s(f), f \rangle \leq M' \langle f, f \rangle, \forall f \in H(\Gamma). \quad (\alpha)$$

Puisque $e'_{\mu_r} \neq 0$, on peut trouver f' tel que $e'_{\mu_r}(f') = f'$ et $\|f'\| = 1$.

De même $i - e'_{\mu_{s-1}} \neq 0$, et on peut trouver f'' tel que

$$(i - e'_{\mu_{s-1}})(f'') = f'' \text{ et } \|f''\| = 1.$$

Il en résulte que $\langle u'_s(f'), f' \rangle = m'$ et $\langle u'_s(f''), f'' \rangle = M'$. (β)

On déduit de (α) et (β) que :

- $m' \langle f, f \rangle \leq \langle u'(f), f \rangle \leq M' \langle f, f \rangle, \forall f \in H(\Gamma),$
- $0 \leq \langle u'(f'), f' \rangle - m' = \langle (u' - u'_s)(f'), f' \rangle \leq \|u' - u'_s\|,$
- $0 \leq M' - \langle u'(f''), f'' \rangle = \langle (u'_s - u')(f''), f'' \rangle \leq \|u' - u'_s\|.$

Cas 2 : $m' = M'$. Alors $u' = M'i$, et la conclusion est trivialement vraie. Le théorème de Hilbert s'énonce donc plus précisément : si $u' \in U(\Gamma)$, il existe une unique famille spectrale $\{e'_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ étalée sur $[m', M']$ (bornes inférieure et supérieure de u') telle que $u' = \int_{0-}^1 \lambda d e'_\lambda$.

Démonstration du théorème 6.- Soit $\Gamma' \in C(\Gamma)$. On applique le théorème de Hilbert à $U(\Gamma')$ et on pose $\Gamma'_\lambda = U^{-1}(e'_\lambda)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$(\Gamma'_\lambda = U^{-1}(e'_\lambda) \iff e'_\lambda(\Gamma'_t) = \Gamma'_\lambda(t,.) , \forall \lambda \in \mathbb{R} , \forall t \in T) .$$

(1), (2) et (3) sont évidemment vérifiées.

Montrons que $\lambda \rightsquigarrow \Gamma'_\lambda(t,s) \downarrow_{[0,1]}(\lambda)$ est à variations bornées sur $[0,1]$ (¹², n° 107) : soit $\mu_0 = 0 < \mu_1 < \dots < \mu_k = 1$.

$\forall t, s \in T$, si on pose $\alpha_1 = - \text{Arg } \Gamma'_{\mu_1}(t,s)$

$$\alpha_i = - \text{Arg } (\Gamma'_{\mu_i}(t,s) - \Gamma'_{\mu_{i-1}}(t,s)) , \text{ pour } i = 2, \dots, k$$

$$f' = e^{i\alpha_1} \Gamma'_{\mu_1}(t,.) + \sum_{i=2}^k e^{i\alpha_i} (\Gamma'_{\mu_i}(t,.) - \Gamma'_{\mu_{i-1}}(t,.))$$

$$\text{Alors } |\Gamma'_{\mu_1}(t,s)| + \sum_{i=2}^k |\Gamma'_{\mu_i}(t,s) - \Gamma'_{\mu_{i-1}}(t,s)| = \langle f', \Gamma_s \rangle \leq ||f'|| \cdot ||\Gamma_s|| = ||\Gamma_t|| \cdot ||\Gamma_s|| .$$

La formule (4) est alors évidente.

Unicité de cette représentation spectrale : soit $\{\Gamma''_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ une famille quelconque de Γ -covariances vérifiant (1), (2), (3) et (4) :

Posons $e''_\lambda = U(\Gamma''_\lambda)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. La famille $\{e''_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ vérifie (1'), (2'), et (3') puisque pour (3') la propriété :

$$e''_\mu(\Gamma_t) = \Gamma''_\mu(t,.) \xrightarrow[\mu > \lambda]{\mu \rightarrow \lambda} e''_\lambda(\Gamma_t) = \Gamma''_\lambda(t,.) \text{ s'étend par linéarité}$$

$$\text{à } U(\Gamma) : e''_\mu(f) \xrightarrow[\mu > \lambda]{\mu \rightarrow \lambda} e''_\lambda(f) , \forall f \in U(\Gamma) .$$

Si $f \in H(\Gamma)$, soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite extraite de $V(\Gamma)$ telle que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } ||e''_\mu(f) - e''_\lambda(f)|| &\leq ||e''_\mu(f - f_n)|| + ||e''_\mu(f_n) - e''_\lambda(f_n)|| + ||e''_\lambda(f - f_n)|| \\ &\leq 2 ||f - f_n|| + ||e''_\mu(f_n) - e''_\lambda(f_n)||. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } ||e''_\mu(f) - e''_\lambda(f)|| \xrightarrow[\mu \rightarrow \lambda]{\mu > \lambda} 0.$$

La formule $A = \int_{0-}^1 \lambda d e''_\lambda$ définit donc un opérateur de $U(\Gamma)$ tel que $\langle A(\Gamma_t), \Gamma_s \rangle = \Gamma'(t, s) = \langle U(\Gamma')(\Gamma_t), \Gamma_s \rangle, \forall t, s \in T$.

On en déduit que $A(\Gamma_t) = U(\Gamma')(\Gamma_t), \forall t \in T$, donc que $A = U(\Gamma')$. L'égalité $e'_\lambda = e''_\lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ résulte donc de l'unicité de la représentation spectrale de $U(\Gamma')$. Et finalement on a donc $\Gamma'_\lambda(t, \cdot) = \Gamma''_\lambda(t, \cdot), \forall t \in T, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

III - EXEMPLES (13).-

Exemple 1 : Γ' est une Γ -covariance différente de 0 et de Γ .

$e' = U(\Gamma')$ est une projection sur un sous-espace de $H(\Gamma)$ différent de $\{0\}$ et de $H(\Gamma)$, donc $m' = 0, M' = 1$.

$$\text{On vérifie que } e'_\lambda = (i - e')^{-1} [0, 1[^{(\lambda)} + i^{-1} [1, +\infty[^{(\lambda)}$$

$$\text{et que } \Gamma'_\lambda(t, \cdot) = (\Gamma_t - \Gamma'_t)^{-1} [0, 1[^{(\lambda)} + \Gamma_t^{-1} [1, +\infty[^{(\lambda)}, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemples 2 : Considérons les corrélations continues sur $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\Gamma(t, s) = R(t-s) = \int e^{i(t-s)x} \cdot \frac{1}{\pi(1+x^2)} \cdot dx = e^{-|t-s|}, \forall t, s \in \mathbb{R},$$

$$\Gamma'(t, s) = R'(t-s) = \int_{-1}^1 e^{i(t-s)x} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot dx = \frac{\sin(t-s)}{\pi(t-s)} \text{ si } t \neq s$$

$$(\Gamma - \Gamma')(t, s) = \frac{1}{\pi} \int e^{i(t-s)x} \left[\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} \cdot 1_{[-1, 1]}(x) \right] dx, \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

$\Gamma - \Gamma'$ est donc une corrélation puisque $\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} 1_{[-1,1]}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

On peut aussi établir la relation $\Gamma' \leq \Gamma$ en considérant $H(\Gamma)$ et $H(\Gamma')$, qui sont connus : d'après (14), les relations suivantes :

$$\psi(g)(t) = \int g(x) e^{-itx} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx, \forall t \in \mathbb{R}, \forall g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}, \frac{dx}{\pi(1+x^2)})$$

$$\text{et } \psi'(g)(t) = \int_{-1}^1 g(x) \cdot e^{-itx} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot dx, \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\forall g \in L^{2*}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}, \frac{1}{2\pi} \cdot 1_{[-1,1]}(x) dx),$$

définissent des bijections isométriques ψ (resp. ψ') de

$$L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}, \frac{dx}{\pi(1+x^2)}) \text{ sur } H(\Gamma) \text{ (resp. } L^{2*}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}, \frac{1}{2\pi} \cdot 1_{[-1,1]}(x) dx) \text{ sur }$$

$H(\Gamma')$). Les notations $L^{2*}_{\mathbb{C}}$ et $L^{2*}_{\mathbb{C}}$ signifient que l'on se restreint dans $L^2_{\mathbb{C}}$ et $L^2_{\mathbb{C}}$ aux fonctions nulles p.s. en dehors de $[-1, 1]$.

On remarque que si l'on pose $\alpha(x) = \frac{1+x^2}{2} \cdot 1_{[-1,1]}(x)$, alors

$$\psi'(g) = \psi(\alpha g), \forall g \in L^{2*}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}, \frac{1}{2\pi} \cdot 1_{[-1,1]}(x) dx).$$

Opérateur $U(\Gamma')$: il s'agit de $u' : H(\Gamma) \rightarrow H(\Gamma)$ défini par :

$$u'(\psi(g)) = \psi'(g 1_{[-1,1]}) , \forall g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}, \frac{dx}{\pi(1+x^2)}) .$$

En effet,

$$a) \quad u'(\Gamma_t) = u'(\psi(e^{it\cdot})) = \psi'(e^{it\cdot} \cdot 1_{[-1,1]}) = \Gamma'_t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$b) \quad ||u'(\psi(g))||^2 = ||\psi(\alpha g)||^2 = \int \alpha^2(x) |g(x)|^2 \frac{dx}{\pi(1+x^2)} \\ \leq \int |g(x)|^2 \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = ||\psi(g)||^2 .$$

D'après le théorème 5, l'opérateur u' est donc $U(\Gamma')$.

Bornes inférieure et supérieure m' et M' de u' :

$$u' \in U(\Gamma) \Rightarrow 0 \leq m' \leq M' \leq 1.$$

Si $g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \frac{dx}{\pi(1+x^2)})$ et si $g \cdot 1_{[-1,1]} = 0$ p.s. alors

$u'(\psi(g)) = 0$. Comme on peut de plus supposer que $||\psi(g)|| = 1$, on en déduit que $m' = 0$.

L'égalité $M' = 1$ résulte de ce que si $g_{\varepsilon} = 1_{[1-\varepsilon,1]}$, avec $0 < \varepsilon < 1$,

$$\frac{||u' \psi(g_{\varepsilon})||^2}{||\psi(g_{\varepsilon})||^2} = \frac{||\psi'(\alpha g_{\varepsilon})||^2}{||\psi(g_{\varepsilon})||^2} = \frac{||\psi(\alpha \cdot g_{\varepsilon})||^2}{||\psi(g_{\varepsilon})||^2} = \frac{\int_{1-\varepsilon}^1 \frac{\alpha^2(x)}{\pi(1+x^2)} dx}{\int_{1-\varepsilon}^1 \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx} \xrightarrow[\varepsilon > 0]{\varepsilon \rightarrow 0} 1$$

Représentation spectrale de Γ' :

L'égalité $u'(\psi(g)) = \psi(\alpha \cdot g)$, $\forall g \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \frac{dx}{\pi(1+x^2)})$

donne $u'^k(\psi(g)) = \psi(\alpha^k \cdot g)$, $\forall k \geq 1$, puis

$P(u')(\psi(g)) = \psi(P(\alpha) \cdot g)$ pour tout polynôme P à coefficients réels.

Considérons $E'_{\lambda} : \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}$ définie par $E'_{\lambda}(x) = 1 \iff x \leq \lambda$.

On sait (¹², n° 106) que $e'_{\lambda} = E'_{\lambda}(u')$, $E'_{\lambda}(u')$ pouvant être défini à partir de toute suite $(P_n)_{n \geq 1}$ de polynômes à coefficients réels telle que $P_n(x) \uparrow E'_{\lambda}(x)$, $\forall x \in [0,1]$ et qu'alors

$P_n(u') \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} E'_{\lambda}(u')$ au sens de la convergence forte des opérateurs.

Il en résulte que $P_n(u')(\Gamma_t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e'_{\lambda}(\Gamma_t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, et a

fortiori que $(P_n(u')(\Gamma_t))(s) = \langle P_n(u')(\Gamma_t), \Gamma_s \rangle \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \Gamma'_{\lambda}(t,s)$.

Puisque $\Gamma_t = \psi(e^{it \cdot})$, on obtient :

$$\Gamma'_\lambda(t,s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int P_n(\alpha(x)) \cdot e^{i(t-s)x} \cdot \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \int E'_\lambda(\alpha(x)) \cdot e^{i(t-s)x} \cdot \frac{dx}{\pi(1+x^2)}$$

$$\text{Si } 0 \leq \lambda < \frac{1}{2} \quad E'_\lambda(\alpha(x)) = 1 \iff \frac{1+x^2}{2} \cdot 1_{[-1,1]}(x) \leq \lambda \iff |x| > 1.$$

$$\implies \Gamma'_\lambda(t,s) = 2 \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t-s)x}{\pi(1+x^2)} dx$$

$$\text{Si } \frac{1}{2} \leq \lambda < 1, \quad E'_\lambda(\alpha(x)) = 1 \iff (|x| > 1 \text{ ou } -\sqrt{2\lambda-1} \leq x \leq \sqrt{2\lambda-1}).$$

$$\implies \Gamma'_\lambda(t,s) = \Gamma'_0(t,s) + 2 \int_0^{\sqrt{2\lambda-1}} \frac{\cos(t-s)x}{\pi(1+x^2)} dx.$$

Ceci montre notamment que Γ' n'est pas une Γ -covariance.

Exemple 3 : cas d'un spectre purement ponctuel.

Soit $\Gamma' \in \mathcal{C}(\Gamma)$. Notons $\text{Sp}(\Gamma', \Gamma)$ le spectre de $U(\Gamma')$ ainsi défini (¹², n° 132) :

$$\lambda \in \text{Sp}(\Gamma', \Gamma) \iff (\mu < \lambda < \nu \implies e'_\mu \neq e'_\nu).$$

où $\{e'_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est évidemment la famille spectrale associée à $U(\Gamma')$.

Cette famille étant étalée sur $[m', M']$, on voit que $m', M' \in \text{Sp}(\Gamma', \Gamma)$, et il est clair que $\text{Sp}(\Gamma', \Gamma) \subset [m', M']$ (borne inférieure et supérieure de $U(\Gamma')$).

Puisque U est une bijection de $\mathcal{C}(\Gamma)$ sur $U(\Gamma)$ respectant $\leq$, on peut aussi caractériser le spectre de $U(\Gamma')$ comme l'ensemble des points de croissance de $\lambda \mapsto \Gamma'_\lambda = U^{-1}(e'_\lambda)$. Dans l'exemple 2, $\text{Sp}(\Gamma', \Gamma) = \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 1]$.

Supposons que $\text{Sp}(\Gamma', \Gamma)$ soit purement ponctuel, autrement dit qu'il existe des valeurs propres de $U(\Gamma')$ dont l'ensemble est noté V tel que si H_v est le sous-espace propre de valeur propre v , on ait

$$H(\Gamma) = \bigoplus_V H_v \quad (\text{somme hilbertienne des } H_v, v \in V).$$

Posons

$$H''_{\lambda} = \{0\} \quad \text{si} \quad V \cap]-\infty, \lambda] = \emptyset$$

$$H''_{\lambda} = \bigoplus_{v \in V \cap]-\infty, \lambda]} H_v, \quad \text{sinon}.$$

Il est évident que :

- $\lambda \leq \mu \implies H''_{\lambda} \subset H''_{\mu}$.
- $\lambda < m' \implies H''_{\lambda} = \{0\}$ car $V \cap]-\infty, \lambda] = \emptyset$, puisque $V \subset \text{Sp}(\Gamma', \Gamma)$.
- $\lambda \geq M' \implies H''_{\lambda} = H(\Gamma)$ car $V \cap]-\infty, \lambda] = V$.

Si e''_{λ} désigne la projection sur H''_{λ} , la famille des projections $\{e''_{\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ vérifie donc (1') et (2'). Montrons qu'elle est continue à droite (3') : soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels vérifiant $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$ et $\mu_n > \lambda$, $\forall n \geq 1$. $(e''_{\mu_n})_{n \geq 1}$ est une suite décroissante et minorée d'opérateurs auto-adjoints. Elle converge donc vers un opérateur auto-adjoint noté $\hat{e}''_{\lambda}$. Montrons que $\hat{e}''_{\lambda}$ est une projection, en montrant que $(\hat{e}''_{\lambda})^2 = \hat{e}''_{\lambda}$:

$$\forall f \in H(\Gamma), \|e''_{\mu_n}(f)\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|\hat{e}''_{\lambda}(f)\|^2 \quad \text{et} \quad \langle e''_{\mu_n}(f), f \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle \hat{e}''_{\lambda}(f), f \rangle.$$

Puisque $\|e''_{\mu_n}(f)\|^2 = \langle e''_{\mu_n}(f), f \rangle$, on obtient l'égalité

$$\langle \hat{e}''_{\lambda}(f), f \rangle = \langle (\hat{e}''_{\lambda})^2 f, f \rangle, \quad \forall f \in H(\Gamma), \quad \text{qui montre que}$$

$\hat{e}''_{\lambda} \leq (\hat{e}''_{\lambda})^2$ et que $(\hat{e}''_{\lambda})^2 \leq \hat{e}''_{\lambda}$, donc que $\hat{e}''_{\lambda} = (\hat{e}''_{\lambda})^2$, puisque $\leq$ est un ordre dans l'ensemble des opérateurs auto-adjoints.

Soit $v \in V$:

$$v \leq \lambda \implies H_v \subset H''_{\lambda} \quad \text{et} \quad H_v \subset H''_{\mu_n} \implies (e''_{\mu_n} - e''_{\lambda}) e_v = 0$$

$$\mu_n < v \implies H_v \perp H''_{\mu_n} \quad \text{et} \quad H_v \perp H''_{\lambda} \implies (e''_{\mu_n} - e''_{\lambda}) e_v = 0.$$

$\forall v \in V, \forall f \in H(\Gamma)$, on a, dès que n est assez grand :

$$(e_{\mu_n}'' - e_{\lambda}'') e_v f = 0, \text{ donc } (\hat{e}_{\lambda}'' - e_{\lambda}'') e_v f = 0, \text{ donc } \hat{e}_{\lambda}'' = e_{\lambda}'',$$

car $\{e_v f, v \in V, f \in H(\Gamma)\}$ est un système total dans $H(\Gamma)$.

Finalement, $e_{\mu_n}'' \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e_{\lambda}''$, au sens de la convergence forte des opérateurs.

$$f \in H(\Gamma), \text{ et } \lambda < \mu < \mu + \frac{1}{n} \Rightarrow \|e_{\mu}''(f) - e_{\lambda}''(f)\|^2 = \langle (e_{\mu}'' - e_{\lambda}'') f, f \rangle \\ \leq \| (e_{\mu + \frac{1}{n}}'' - e_{\lambda}'') f \|^2$$

montre que $e_{\mu}'' \xrightarrow[\mu > \lambda]{\mu \rightarrow \lambda} e_{\lambda}''$.

Puisque m' et M' sont des points du spectre, $V \cap [m', m' + \varepsilon]$ et $V \cap [M' - \varepsilon, M']$ ne sont pas vides, pour tout $\varepsilon > 0$.

$$\text{Donc } \varepsilon > 0 \Rightarrow e_{m' + \varepsilon}'' \neq 0 \text{ et } e_{M' - \varepsilon}'' \neq i.$$

La famille spectrale $\{e_{\lambda}'', \lambda \in \mathbb{R}\}$ est donc étalée sur $[m', M']$. Elle définit un opérateur u'' de $U(\Gamma)$: $u'' = \int_{0-}^1 \lambda d e_{\lambda}''$ qui vérifie naturellement $u''(e_v f) = v e_v(f) = U(\Gamma') (e_v f)$, $\forall v \in V, \forall f \in H(\Gamma)$. Donc $u'' = U(\Gamma')$, et il suffit de poser $\Gamma'_{\lambda}(t, \cdot) = e_{\lambda}''(\Gamma_t)$, $\forall t \in T, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ pour obtenir la représentation spectrale de Γ' .

IV - PROPOSITION 6. ⁽¹³⁾.- L'équivalence $\Gamma' \leq \Gamma'' \iff (\text{Sp}(\Gamma', \Gamma' + \Gamma'') \subset [0, \frac{1}{2}])$ vaut pour tout couple (Γ', Γ'') de covariances sur T .

Démonstration.- On pose $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$. Alors $\Gamma', \Gamma'' \in C(\Gamma)$, et l'on considère $u' = U(\Gamma')$ et $u'' = U(\Gamma'') = i - u'$.

Soit $\{e'_{\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ la famille spectrale associée à u' .

On sait ^(12, n° 107) que $u'' - u' = i - 2u' = \int_{0-}^1 (1-2\lambda) d e'_{\lambda}$.

On peut vérifier directement cette égalité : soit

$s = \{k, \mu_0, \dots, \mu_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ un choix du type habituel. On rappelle que

$$\bar{\omega}_s = \sup \{ \mu_i - \mu_{i-1} , i = 1, \dots, k \} \text{ et } u'_s = \lambda_1 e'_{\mu_1} + \sum_{i=2}^k \lambda_i (e'_{\mu_i} - e'_{\mu_{i-1}})$$

$$\text{Alors } (1-2\lambda_1) e'_{\mu_1} + \sum_{i=2}^k (1-2\lambda_i) (e'_{\mu_i} - e'_{\mu_{i-1}}) = i - 2u'_s .$$

$$\text{et } ||(i - 2u'_s) - (i - 2u'_s)|| = 2 ||u - u'_s|| \leq 2 \bar{\omega}_s .$$

Il en résulte la formule annoncée.

Si $\text{Sp}(\Gamma', \Gamma' + \Gamma'') \subset [0, \frac{1}{2}]$, pour tout choix

$$s = (2k, \mu_0 = 0 < \mu_1 \dots < \mu_k = \frac{1}{2} < \mu_{k+1} < \dots < \mu_{2k} = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{2k}) ,$$

$$\text{et puisque } e'_{\frac{1}{2}} = i, \quad i - 2u'_s = (1-2\lambda_1) e'_{\mu_1} + \sum_{i=2}^k (1-2\lambda_i) (e'_{\mu_i} - e'_{\mu_{i-1}})$$

$$1 \leq i \leq k \implies \lambda_i \leq \frac{1}{2} \implies i - 2u'_s \geq 0 .$$

Par passage à la limite, on a donc $u'' - u' = i - 2u' \geq 0$,

donc $u'' \geq u'$ ce qui équivaut à $\Gamma'' \geq \Gamma'$.

Si $\text{Sp}(\Gamma', \Gamma' + \Gamma'') \not\subset [0, \frac{1}{2}]$, on peut choisir un point du spectre
dans $]\frac{1}{2}, 1]$, noté λ .

Soit $(s_n)_{n \geq 1}$ une suite de choix tels que $\bar{\omega}_{s_n} = \frac{1}{n}$ et si n est assez grand, $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ et $\lambda - \frac{1}{2n}, \lambda + \frac{1}{2n}$ sont 2 points consécutifs de la subdivision $\mu_0, \dots, \mu_k$.

Puisque $e'_{\lambda + \frac{1}{2n}} - e'_{\lambda - \frac{1}{2n}}$ est une projection non nulle de $H(\Gamma)$,

on peut choisir f_n dans $H(\Gamma)$ tel que

$$(e'_{\lambda + \frac{1}{2n}} - e'_{\lambda - \frac{1}{2n}}) f_n = f_n \text{ et } ||f_n|| = 1 .$$

Alors $\langle (i - 2u'_{s_n}) f_n, f_n \rangle = 1 - 2\lambda$, et $|\langle (i - 2u') f_n, f_n \rangle - (1 - 2\lambda)| \leq \frac{2}{n}, \forall n \geq 1$.

La borne inférieure de $(i-2u')$ est donc majorée par $1-2\lambda$ donc $u'' - u' \neq 0$ donc $\Gamma'' \neq \Gamma'$.

V - THEOREME 7.-

a) Pour tout couple (Γ, Γ') de covariances sur T , on a :

$$\Gamma' \leq \Gamma \Rightarrow \delta(\Gamma') \leq \delta(\Gamma).$$

En particulier, si T est muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et si Γ est séparable et mesurable, toute covariance de $C(\Gamma)$ est séparable et mesurable.

b) Si T est un espace topologique, et si Γ est continue sur $T \times T$, toute covariance de $C(\Gamma)$ est continue sur $T \times T$.

Démonstration.-

a₁) Soit $X = \{X_t, t \in T\}$ une f.a.c. (f.a.r. si Γ est réelle, et que l'on se place dans le domaine réel) gaussienne centrée de covariance Γ . On utilise l'unique isométrie $\mathcal{U}$ de H_X - espace gaussien engendré par X - sur $H(\Gamma)$ qui fait correspondre $\bar{X}_t$ et $\Gamma_t, \forall t \in T$. $u' = U(\Gamma')$ étant un opérateur auto-adjoint et positif admet une racine carrée (¹², n° 104) $\sqrt{u'}$ qui est l'unique opérateur auto-adjoint positif dont le carré soit u' .

De plus $\|\sqrt{u'}\| \leq 1$, autrement dit $\sqrt{u'} \in U(\Gamma)$.

Pour chaque t , on choisit un représentant de $\mathcal{U}^{-1} \sqrt{u'} \mathcal{U} \bar{X}_t$, noté Y_t . $Y = \{Y_t, t \in T\}$ est une f.a.c. gaussienne centrée puisque $\{Y_t, t \in T\} \subset H_X$. Sa covariance est Γ' puisque

$$E(Y_t \cdot Y_s^*) = \langle \sqrt{u'} \mathcal{U} \bar{X}_t, \sqrt{u'} \mathcal{U} \bar{X}_s \rangle = \langle \sqrt{u'} \Gamma_t, \sqrt{u'} \Gamma_s \rangle = \langle u' \Gamma_t, \Gamma_s \rangle = \Gamma'(t, s).$$

Puisque l'espace gaussien H_Y engendré par Y est un sous-espace de H_X , on a :

$$\delta(\Gamma') = \delta(H(\Gamma')) = \delta(H_Y) \leq \delta(H_X) = \delta(H(\Gamma)) = \delta(\Gamma) .$$

a₂) Supposons de plus que T soit muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et que $\Gamma : T \times T \rightarrow \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) soit $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ mesurable, et que $\delta(\Gamma) \leq K_0$.

1) si Γ' est une Γ -covariance non nulle, on choisit une base orthonormale de $H(\Gamma') : \{h_n, n \in N'\}$ que l'on complète si nécessaire en une base orthonormale de $H(\Gamma) : \{h_n, n \in N\}$, avec $N' \subset N \subset \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \Gamma'(t,s) &= \langle \Gamma'_t, \Gamma'_s \rangle = \sum_N \langle \Gamma'_t, h_n \rangle \langle \Gamma'_s, h_n \rangle^* \\ &= \sum_{N'} \langle \Gamma'_t, h_n \rangle \langle \Gamma'_s, h_n \rangle^* = \sum_{N'} h_n(s) h_n^*(t) . \end{aligned}$$

Γ' est donc $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ mesurable parce que h_n est $\mathcal{T}$ -mesurable, $\forall n \geq 1$ (2, cor. 3.8.).

2) Si Γ' est un élément quelconque de $\mathcal{C}(\Gamma)$, considérons les familles spectrales $\{e'_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $\{\Gamma'_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ associées à $u' = U(\Gamma')$ et à Γ' .

$$\text{On a posé } U'_n = \frac{1}{2^n} e'_{\frac{1}{2^n}} + \sum_{k=2}^{2^n} \frac{k}{2^n} (e'_{\frac{k}{2^n}} - e'_{\frac{k-1}{2^n}}) ,$$

et on pose $\gamma'_n = U'^{-1}(U'_n)$, $\forall n \geq 1$. $(\gamma'_n)_{n \geq 1}$ est comme $(U'_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante qui vérifie :

$$\gamma'_n(t,s) = \langle U'_n(\Gamma'_t), \Gamma'_s \rangle = \frac{1}{2^n} \Gamma'_{\frac{1}{2^n}}(t,s) + \sum_{k=2}^{2^n} \frac{k}{2^n} (\Gamma'_{\frac{k}{2^n}}(t,s) - \Gamma'_{\frac{k-1}{2^n}}(t,s)) \text{ et}$$

$$|\Gamma'(t,s) - \gamma'_n(t,s)| = |\langle (u' - U'_n) \Gamma'_t, \Gamma'_s \rangle| \leq \|u' - U'_n\| \cdot \|\Gamma'_t\| \cdot \|\Gamma'_s\|$$

$$\leq \frac{1}{2^n} \|\Gamma'_t\| \|\Gamma'_s\| ,$$

$$\forall t, s \in T, \forall n \geq 1 .$$

γ'_n est $\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$ mesurable comme combinaison linéaire de Γ -covariances, et Γ' l'est comme limite de $(\gamma'_n)_{n \geq 1}$.

b) Si T est un espace topologique, on sait (², prop. 3.6) que la continuité en m.q. de $t \rightsquigarrow X_t$ (resp. $t \rightarrow Y_t$) équivaut à la continuité de Γ (resp. Γ') sur $T \times T$. Il suffit donc de remarquer que :

$$E(|Y_t - Y_s|^2) = ||\sqrt{u'}(\Gamma_t - \Gamma_s)||^2 \leq ||\sqrt{u'}||^2 ||\Gamma_t - \Gamma_s||^2 \leq ||\Gamma_t - \Gamma_s||^2 = E(|X_t - X_s|^2) .$$

VI - DIAGONALISATION SIMULTANEE DE 2 COVARIANCES.-

a) Reprenons d'abord l'exemple 3 :

Puisque $H(\Gamma) = \bigoplus_V H_V$, si nous choisissons une base orthonormale

dans chaque sous-espace propre H_V , la réunion de ces bases est une base orthonormale de $H(\Gamma)$ notée $\{\varphi_i, i \in I\}$. Il s'agit d'une base formée d'éléments propres de $U(\Gamma')$. La valeur propre de φ_i est notée λ_i .

$$\Gamma(t,s) = \langle \Gamma_t, \Gamma_s \rangle = \sum_I \langle \Gamma_t, \varphi_i \rangle \cdot \langle \Gamma_s, \varphi_i \rangle^* = \sum_I \varphi_i(x) \varphi_i^*(t)$$

$$\Gamma'(t,s) = \langle U(\Gamma')\Gamma_t, \Gamma_s \rangle = \sum_I \lambda_i \langle \Gamma_t, \varphi_i \rangle \langle \Gamma_s, \varphi_i \rangle^* = \sum_I \lambda_i \varphi_i(s) \varphi_i^*(t), \forall t, s \in T .$$

On vérifie que $f \rightarrow \sum_I \sqrt{\lambda_i} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i$ définit un opérateur de $U(\Gamma)$ dont le carré est $U(\Gamma')$. Il s'agit donc de $\sqrt{U(\Gamma')}$.

Reprenons la construction (a1) du paragraphe précédent : soit η_i un représentant de $\varphi^{-1}(\varphi_i)$, $\forall i \in I$.

φ étant une isométrie de H_X sur $H(\Gamma)$, on a :

$$X_t = \sum_{p.s.} \varphi_i^*(t) \eta_i ,$$

et
$$Y_t = \sum_{p.s.} \sqrt{\lambda_i} \varphi_i^*(t) \eta_i , \quad \forall t \in T .$$

Ces seconds membres sont sommables en m.q., mais aussi p.s., pour chaque t , lorsque $H(\Gamma)$ est séparable.

Ces formules généralisent les résultats de T.T. Kadota (¹⁵, ³³) sur les diagonalisations simultanées de covariances et de f.a.

b) Soit Γ' et Γ'' 2 covariances quelconques sur T . Montrons que l'on peut les approcher par des diagonalisations simultanées : posons $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$. Soit $\{e'_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ la famille spectrale de projections associée à $u' = U(\Gamma')$.

On a posé $u'_n = \sum_{k=2}^{2^n} \frac{k-1}{2^n} \left(\frac{e'_{\frac{k}{2^n}}}{2^n} - \frac{e'_{\frac{k-1}{2^n}}}{2^n} \right)$, et $U'_n = \frac{1}{2^n} i + u'_n, \forall n \geq 1$.

On sait que $(u'_n)_{n \geq 1}$ et $(U'_n)_{n \geq 1}$ sont 2 suites respectivement croissante et décroissante d'opérateurs de $U(\Gamma)$ convergeant en norme vers u' . Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned} - \quad ||u' - U'_n|| &\leq \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad ||u' - u'_n|| \leq \frac{1}{2^n} \\ - \quad u'_n &\leq u' \leq U'_n, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

On a déjà vu que l'opérateur $u'' = U(\Gamma'') = i - u'$ s'exprime aussi à l'aide de $\{e'_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$: $u'' = \int_{0-}^1 (1-\lambda) d e'_\lambda$.

Nous avons évidemment

$$\begin{aligned} 0 &\leq i - U'_n \leq u'' \leq i - u'_n \leq i, \\ ||u'' - (i - U'_n)|| &= ||u' - U'_n|| \leq \frac{1}{2^n}, \\ ||u'' - (i - u'_n)|| &= ||u' - u'_n|| \leq \frac{1}{2^n}, \forall n \geq 1, \\ i - U'_n &\uparrow \quad \text{et} \quad i - u'_n \downarrow. \end{aligned}$$

Ceux des sous-espaces $\frac{e'_1}{2^n}(H(\Gamma))$, $(\frac{e'_{\frac{k}{2^n}}}{2^n} - \frac{e'_{\frac{k-1}{2^n}}}{2^n})(H(\Gamma))$, $k = 2, \dots, 2^n$ qui ne sont pas réduits à $\{0\}$ sont des sous-espaces propres pour les 4 opérateurs ci-dessus, et si l'un deux correspond à la

valeur propre λ pour u'_n il correspond aux valeurs propres $\lambda + \frac{1}{2^n}$, $1 - \lambda$, $1 - \lambda - \frac{1}{2^n}$ respectivement pour U'_n , $i - u'_n$ et $i - U'_n$.

On choisit dans chacun de ces sous-espaces propres une base orthonormale. Leur réunion $\{h_m^n, m \in M\}$ est une base orthonormale de $H(\Gamma)$.

λ_m^n désigne la valeur propre correspondant à h_m^n pour u'_n .

Nous avons donc $\{\lambda_m^n, m \in M\} \subset \{0, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{2^{n-1}}{2^n}\}, \forall n \geq 1$.

Les covariances associées à u'_n , U'_n , $i - u'_n$ et $i - U'_n$ s'écrivent :

$$U^{-1}(u'_n)(t,s) = \sum_M \lambda_m^n h_m^{n*}(t) h_m^n(s),$$

$$U^{-1}(U'_n)(t,s) = \sum_M \left(\lambda_m^n + \frac{1}{2^n}\right) h_m^{n*}(t) h_m^n(s) = U^{-1}(u'_n)(t,s) + \frac{1}{2^n} \Gamma(t,s),$$

$$U^{-1}(i-u'_n)(t,s) = \sum_M (1 - \lambda_m^n) h_m^{n*}(t) h_m^n(s),$$

$$U^{-1}(i-U'_n)(t,s) = U^{-1}(i-u'_n)(t,s) - \frac{1}{2^n} \Gamma(t,s), \forall t, s \in T;$$

où les seconds membres sont sommables dans $\mathbb{C}$, pour chaque couple (t,s) .

Ces 4 covariances appartiennent à $C(\Gamma)$ et respectent les mêmes inégalités que les opérateurs correspondants. On sait aussi qu'elles convergent simplement sur $T \times T$ vers Γ' ou Γ'' suivant le cas.

Enfin, puisque $Sp(u'_n) = \{\lambda_m^n, m \in M\}$, et d'après la proposition 6, on a :

$$\Gamma' \leq \Gamma'' \implies U^{-1}(u'_n) \leq U^{-1}(i-u'_n) \iff \{\lambda_m^n, m \in M\} \subset [0, \frac{1}{2}] ,$$

$$\text{et } \{\lambda_m^n, m \in M\} \subset [0, \frac{1}{2}] \implies \Gamma' \leq \Gamma'' + \frac{1}{2^{n-1}} \Gamma.$$

En résumé, les 2 suites de covariances de $C(\Gamma)$: $(U^{-1}(u'_n))_{n \geq 1}$ et $(U^{-1}(i-U'_n))_{n \geq 1}$ ont les propriétés suivantes :

- elles sont diagonalisées simultanément ;
- elles approchent Γ' et Γ'' respectivement puisque

$$U^{-1}(u'_n) \leq \Gamma' \leq U^{-1}(u'_n) + \frac{1}{2^n} \Gamma,$$

$$U^{-1}(i-U'_n) \leq \Gamma'' \leq U^{-1}(i-U'_n) + \frac{1}{2^n} \Gamma, \forall n \geq 1 ;$$

- elles convergent simplement sur $T \times T$ vers Γ' et Γ'' respectivement.
- elles permettent d'étudier la relation $\Gamma' \leq \Gamma''$.

Remarques : 1) Si Γ' et Γ'' sont bornées sur la diagonale de $T \times T$ par A' et A'' respectivement, $(U^{-1}(u'_n))_{n \geq 1}$ et $(U^{-1}(i-U'_n))_{n \geq 1}$ convergent uniformément sur $T \times T$ vers Γ' et Γ'' puisque, pour la première suite par exemple, on a :

$$|U^{-1}(u'_n)(t,s) - \Gamma'(t,s)| = |\langle u'_n(\Gamma_t) - u'(\Gamma_t), \Gamma_s \rangle| \leq \frac{1}{2^n} ||\Gamma_t|| ||\Gamma_s|| \leq \frac{1}{2^n} (A' + A'')$$

puisque $||\Gamma_t|| = \sqrt{\Gamma(t,t)} \leq \sqrt{A' + A''}$, $\forall t \in T$.

2) Il n'y a pas de restrictions sur $\delta(\Gamma')$ et $\delta(\Gamma'')$ donc sur M dans ce qui précède. Si Γ' et Γ'' sont séparables, $\Gamma' + \Gamma''$ l'est aussi (¹, p. 352) et M est alors de la forme $\{1, \dots, r\}$ ou $\{1, \dots, n, \dots\}$.

Deuxième Partie : Corrélations plus petites qu'une covariance donnée.

Nous nous plaçons d'abord dans le cadre complexe.

VII - On suppose maintenant que T est un groupe abélien localement compact noté additivement.

Si les 2 fonctions $\Gamma : T \times T \rightarrow \mathbb{C}$ et $R : T \rightarrow \mathbb{C}$ sont reliées par

$$\Gamma(t,s) = R(t-s), \forall t, s \in T,$$

Γ est une covariance si et seulement si R est une fonction définie - positive (¹⁶, 1.4); Γ est continue sur $T \times T$ si et seulement si R est continue sur T . Ainsi la formule ci-dessus établit une correspondance biunivoque entre les corrélations continues et les fonctions définies-positives continues. On confondra ces 2 notions en posant $R(t,s) = R(t-s), \forall t, s \in T$. L'ensemble des corrélations continues sur T est noté C_0 . C'est un ensemble ordonné par la relation $R' \leq R$ si et seulement si $R - R'$ est une covariance, qui est nécessairement une corrélation continue. Le dual T^* de T est un groupe abélien localement compact (¹⁶, chap. 1). $B(T^*)$, O^* , K^* désignent respectivement la tribu borélienne, l'ensemble des ouverts et l'ensemble des compacts de T^* .

$M^+(T^*)$ désigne l'ensemble de toutes les mesures positives bornées et régulières sur $(T^*, B(T^*))$, c'est-à-dire l'ensemble des mesures μ telles que :

$$0 \leq \mu(B) = \sup\{\mu(K), K \subset B, K \in K^*\} = \inf\{\mu(O), O \in O^*, O \supset B\} \leq \mu(T^*) < +\infty, \\ \forall B \in B(T^*).$$

Le théorème de Bochner (¹⁶, 1.4.3.) établit une bijection b de C_0 sur $M^+(T^*)$ par :

$$R(t) = \int_{T^*} (t, t^*) d(bR)(t^*), \forall t \in T, \forall R \in C_0.$$

(la notation (t, t^*) désigne la valeur en t du caractère continu t^*).

$b(R)$ s'appelle la mesure spectrale de R .

On définit sur $M^+(T^*)$ une relation d'ordre en posant

$$\mu' \leq \mu \iff \mu'(B) \leq \mu(B), \forall B \in \mathcal{B}(T^*).$$

Théorème 8. - b est un isomorphisme de $(C_0, \leq)$ sur $(M^+(T^*), \leq)$.
 $(C_0, \leq)$ est un treillis.

Démonstration. - Soit $R_i, i = 1, 2$ 2 corrélations continues sur T .

$$(R_1 + R_2)(t) = \int_{T^*} (t, t^*) d(b(R_1 + R_2))(t^*) = \int_{T^*} (t, t^*) d(b(R_1) + b(R_2))(t^*), \forall t \in T.$$

On en déduit que $b(R_1 + R_2) = b(R_1) + b(R_2)$ puisque $b(R_1) + b(R_2) \in M^+(T^*)$.

Le résultat résulte alors des équivalences suivantes : soit

$R, R' \in C_0$:

$$R' \leq R \iff \exists R'' \in C_0 \text{ tel que } R = R' + R''$$

$$\iff \exists \mu'' \in M^+(T^*) \text{ tel que } b(R) = b(R') + \mu''$$

$$\iff b(R') \leq b(R).$$

Il reste à montrer que $(M^+(T^*), \leq)$ est un treillis : si

$\mu', \mu'' \in M^+(T^*)$, on pose $\mu = \mu' + \mu''$. Soit f' (resp. f'') une version de $\frac{d\mu'}{d\mu}$ (resp. $\frac{d\mu''}{d\mu}$). On considère la mesure μ_1 (resp. μ_2) admettant la dérivée de Radon-Nikodym $f_1 = \text{Max}(f', f'')$ (resp. $f_2 = \text{Min}(f', f'')$) par rapport à μ .

$$0 \leq f_2 \leq f', f'' \leq f_1 \leq 1 \implies 0 \leq \mu_2 \leq \mu', \mu'' \leq \mu_1 \leq \mu.$$

$\mu\text{-p.s.} \qquad \qquad \qquad \mu\text{-p.s.}$

De plus μ_1 et μ_2 sont régulières, ce qui est immédiat si l'on pose $B_0 = \{f' \geq f''\}$ parce que :

$$\mu_1(B) = \mu'(B \cap B_0) + \mu''(B \cap (T^* - B_0))$$

$$\mu_2(B) = \mu''(B \cap B_0) + \mu'(B \cap (T^* - B_0)) \quad , \quad \forall B \in \mathcal{B}(T^*) .$$

Il reste à vérifier que μ_1 (resp. μ_2) est le plus petit majorant (resp. le plus grand minorant) de μ' et μ'' dans $M^+(T^*)$.

Soit v_1 un majorant de μ' et μ'' . Posons $v = v_1 + \mu' + \mu''$ et choisissons des versions de $\frac{d\mu}{dv}$ et $\frac{dv_1}{dv}$ notées g et h_1 respectivement. $f' \cdot g$ et $f'' \cdot g$ étant des versions de $\frac{d\mu'}{dv}$ et de $\frac{d\mu''}{dv}$,
 $v_1 \geq \mu' \implies f' \cdot g \leq h_1$ et $v_1 \geq \mu'' \implies f'' \cdot g \leq h_1$ v-p.s.

Ainsi $h_1 \geq \sup(f', f'') \cdot g = f_1 \cdot g$ donc $v_1 \geq \mu_1$.

Si v_2 est un minorant de μ' et de μ'' , soit h_2 une version de $\frac{dv_2}{d\mu}$: $v_2 \leq \mu' \implies h_2 \leq f'$. De même $h_2 \leq f''$, donc $h_2 \leq f_2$, donc $v_2 \leq \mu_2$ v-p.s.

VIII - THEOREME 9.- L'ensemble $C_0(\Gamma)$ des corrélations continues plus petites qu'une covariance donnée Γ sur T est un ensemble inductif pour $\leq$.

Démonstration.- Il s'agit de montrer que tout sous-ensemble totalement ordonné non vide $\{R_j, j \in J\}$ de $C_0(\Gamma)$ admet une borne supérieure dans $C_0(\Gamma)$.

$\forall j \in J$, posons $\mu_j = b(R_j)$.

$M = \sup \{R_j(0), j \in J\}$ est défini puisque

$$0 \leq \int_{T^*} d\mu_j = \mu_j(T^*) = R_j(0) \leq \Gamma(0,0) \quad , \quad \forall j \in J .$$

Si $M = 0$, $\{R_j, j \in J\} = \{0\}$, qui admet 0 comme borne supérieure.
Si $M > 0$, on peut de plus supposer que $R_j(0) > 0$, $\forall j \in J$, ce qui permet d'introduire la famille suivante de probabilités régulières : $\{ \frac{1}{R_j(0)} \mu_j, j \in J \}$.

Cas 1 : $R_j(0) < M$, $\forall j \in J$. On extrait de J une suite $\{j_n, n \geq 1\}$ telle que :

- $R_{j_n}(0) < R_{j_{n+1}}(0)$, $\forall n \geq 1$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{j_n}(0) = M$.

Puisque la famille $\{R_j, j \in J\}$ est totalement ordonnée,
 $R_{j_n}(0) < R_{j_{n+1}}(0) \implies R_{j_n} \leq R_{j_{n+1}} \implies \mu_{j_n} \leq \mu_{j_{n+1}}$, $\forall n \geq 1$.
Pour tout borélien B de T^* , la suite $(\mu_{j_n}(B))_{n \geq 1}$ est croissante et majorée par $\Gamma(0,0)$. On peut donc poser

$$Q(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{R_{j_n}(0)} \mu_{j_n}(B), \forall B \in \mathcal{B}(T^*).$$

Q est une probabilité sur $(T^*, \mathcal{B}(T^*))$, d'après le théorème de Vitali-Hahn-Saks (⁴, IV. 2, cor. 1).

De plus, $M \cdot Q \in M^+(T^*)$: soit B un borélien de T^* , et $\varepsilon > 0$:

$$\exists N \text{ tel que } n \geq N \implies M \cdot Q(B) \geq \mu_{j_n}(B) \geq \mu_{j_N}(B) \geq M \cdot Q(B) - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\text{et } \exists K \in K^* \text{ tel que } K \subset B \text{ et } \mu_{j_N}(K) \geq \mu_{j_N}(B) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Finalement, } n \geq N \implies M \cdot Q(B) \geq \mu_{j_n}(K) \geq M \cdot Q(B) - \varepsilon.$$

Par passage à la limite, on obtient les inégalités ci-dessous qui suffisent pour affirmer que $M \cdot Q$ est régulière :

$$M \cdot Q(B) \geq M \cdot Q(K) \geq M \cdot Q(B) - \varepsilon.$$

$M \cdot Q$ est donc la mesure spectrale d'une corrélation continue notée R .

$R \in C_0(\Gamma)$: en effet, soit $(h_n)_{n \geq 1}$ une suite de versions de

$\frac{d\mu_1}{d(M.Q)}, \dots, \frac{d\mu_n}{d(M.Q)}, \dots$ respectivement. Il est clair que

$$0 \leq h_n \leq h_{n+1} \leq 1 \quad \text{Q-p.s.}$$

$(h_n)_{n \geq 1}$ converge vers 1 Q-presque-sûrement puisque :

$$\forall B \in \mathcal{B}(T^*) , \quad M.Q(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_B h_n d(M.Q) = \int_B (\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n) d(M.Q) .$$

Il en résulte que $R_j \xrightarrow{j_n \rightarrow \infty} R$ puisque :

$$R(t) = \int_{T^*} (t, t^*) d(M.Q)(t^*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{T^*} (t, t^*) h_n(t^*) d(M.Q)(t^*) , \quad \forall t \in T .$$

La convergence simple des covariances conservant $\leq$, on a donc

$$R_{j_n} \leq \Gamma \implies R \leq \Gamma .$$

R est un majorant de $\{R_j, j \in J\}$: en effet, R majore évidemment $\{R_{j_n}, n \geq 1\}$ puisque $\mu_{j_n} \leq M.Q, \forall n \geq 1$.

Soit $j \in J : \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $R_j(0) < R_{j_{n_0}}(0)$.

Nous avons alors $R_j \leq R_{j_{n_0}} \leq R$.

R est la borne supérieure de $\{R_j, j \in J\}$ dans $\{C_0(\Gamma), \leq\}$.

En effet, si R' est un majorant de cette famille, dans $C_0(\Gamma)$,
 $R_{j_n} \leq R', \forall n \geq 1 \implies R \leq R'$ (par passage à la limite).

Cas 2 : la borne M est atteinte : $\exists j_0 \in J$ tel que $R_{j_0}(0) = M$.

Si $R_j(0) < M$, on a $R_j \leq R_{j_0}$.

Si $R_j(0) = M$, et puisque R_j et R_{j_0} sont comparables, nous avons par exemple $R_j \leq R_{j_0}$ donc $\mu_j \leq \mu_{j_0}$. Mais ces mesures ont même

masse totale, donc elles sont égales, donc $R_j = R_{j_0}$.

R_{j_0} est donc la borne supérieure de $\{R_j, j \in J\}$ dans $C_0(\Gamma)$.
On appliquera le théorème 9 avec l'axiome de Zorn pour conclure que si $C_0(\Gamma)$ contient une corrélation R non nulle, il existe dans $C_0(\Gamma)$ une corrélation maximale R' majorant R .

IX - PASSAGE AU CAS REEL - EXEMPLES.

$R : T \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie - positive réelle si et seulement si, par définition :

$$- R(t) = R(-t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$- \sum_{t,s \in T} a(t) a(s) R(t-s) \geq 0, \text{ pour toute fonction } a : T \rightarrow \mathbb{R}$$

de support fini.

Il est facile de voir que R est définie - positive, c'est-à-dire que $\sum_{t,s \in T} a(t) a^*(s) R(t-s) \geq 0$, pour toute fonction $a : T \rightarrow \mathbb{C}$ de support fini (il suffit de remarquer que $t,s \rightarrow R(t-s)$ est la covariance d'une f.a.).

Ainsi, à toute fonction définie - positive réelle continue R est associée une mesure spectrale $b(R)$. Plus précisément, b met en correspondance biunivoque les corrélations réelles continues (ensemble C_0^r) et les mesures positives, bornées, régulières et symétriques (ensemble $M_S^+(T^*)$). En effet, une mesure μ sur $(T^*, \mathcal{B}(T^*))$ est symétrique si $\mu = \mu_-$, avec $\mu_-(B) = \mu(-B)$, $\forall B \in \mathcal{B}(T^*)$, et si $R \in C_0$, on a les équivalences suivantes :

$$R(t) = R(-t), \forall t \in T \iff \int_{T^*} (t, t^*) d(bR)(t^*) = \int_{T^*} (t, t^*) d(bR)_-(t^*).$$

$$\iff bR = (bR)_-.$$

On obtient dans le domaine réel des résultats analogues à ceux du cas complexe. Par exemple, si Γ est une covariance réelle sur T , et si $C_O^r(\Gamma)$ désigne l'ensemble des corrélations réelles continues majorées par Γ , $(C_O^r(\Gamma), \leq)$ est inductif.

Montrons qu'il peut y avoir plusieurs éléments maximaux :

Exemple.- a) Considérons $R'(t,s) = \cos(t-s)$ et $R''(t,s) = \cos(2(t-s))$, $\forall t, s \in \mathbb{R} = T$. On identifie T^* et $\mathbb{R}$. Il est clair que :

$$- b(R') = \frac{1}{2} (\delta_{-1} + \delta_1) \quad \text{et} \quad b(R'') = \frac{1}{2} (\delta_{-2} + \delta_2) .$$

- $H(R')$ et $H(R'')$ sont 2 espaces de Hilbert réel de fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ admettant comme base orthonormale respectivement $(R'(0, \cdot), R'(\frac{\pi}{2}, \cdot))$ et $(R''(0, \cdot), R''(\frac{\pi}{4}, \cdot))$.

De plus, $H(R'+R'') = H(R') \oplus H(R'')$ car $b(R')$ et $b(R'')$ sont étrangères.

b) On considère l'espace de Hilbert réel admettant $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ comme base orthonormale, avec :

$$\psi_1(s) = \cos s = R'(0, s) ,$$

$$\psi_2(s) = \frac{1}{\alpha} (\sin s - \sin 2s) = \frac{1}{\alpha} (R'(\frac{\pi}{2}, s) - R''(\frac{\pi}{4}, s)) ,$$

$$\psi_3(s) = \frac{1}{\beta} (\sin s + \sin 2s) = \frac{1}{\beta} (R'(\frac{\pi}{2}, s) + R''(\frac{\pi}{4}, s)) ,$$

$$\psi_4(s) = \cos 2s = R''(0, s) , \quad \forall s \in \mathbb{R} , \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont 2 réels non nuls}$$

donnés. H est un espace autoreproduisant puisque quel que soit le réel

s , $f \rightsquigarrow f(s)$ est une fonction continue sur H (1, p. 343) : en effet,

$$\text{si } f = \sum_{i=1}^4 a_i \psi_i , \quad |f(s)|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^4 a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^4 \psi_i^2(s) \right) , \quad \text{soit}$$

$$|f(s)|^2 \leq \|f\|_H^2 \cdot \left(\sup_{s \in \mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^4 \psi_i^2(s) \right) \right) .$$

On sait exprimer le noyau Γ de cet espace autoreproduisant en fonction de toute base orthonormale. En particulier,

$$\Gamma(t,s) = \sum_{i=1}^4 \psi_i(t) \psi_i(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

c) Choisissons α et β de manière que $R', R'' \leq \Gamma$ et $R' + R'' \not\leq \Gamma$: puisque $H(R') \subset H$, $(R' \leq \Gamma \iff |||_{H(R')} \geq |||_H)$.

L'égalité

$$u R'(0,.) + v R'(\frac{\pi}{2},.) = u \psi_1 + v \frac{\alpha}{2} \psi_2 + v \frac{\beta}{2} \psi_3 + 0 \cdot \psi_4, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}$$

montre que : $R' \leq \Gamma \iff u^2 + v^2 \geq \frac{u^2 + \frac{v^2}{4}(\alpha^2 + \beta^2)}{4}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$

Finalement, $R' \leq \Gamma \iff 1 \geq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}$, et de même on trouve que $R'' \leq \Gamma \iff 1 \geq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4}$.

La troisième inégalité se traite de manière analogue : puisque $H(R' + R'') = H(R') \oplus H(R'') \subset H$, on obtient :

$$R' + R'' \leq \Gamma \iff |||_{H(R'+R'')} \geq |||_H \iff$$

$$(b^2 + c^2) \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} - 1 \right) + 2bc \left(\frac{\beta^2}{4} - \frac{\alpha^2}{4} \right) \leq 0; \quad \forall b, c \in \mathbb{R}, \text{ puisque l'on a,}$$

$$a R'(0,.) + b R'(\frac{\pi}{2},.) + c R''(\frac{\pi}{4},.) + d R''(0,.) = a \psi_1 + \frac{\alpha}{2}(b-c) \psi_2 + \frac{\beta}{2}(b+c) \psi_3 + d \psi_4, \\ \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Si $\alpha = 1, \beta = \sqrt{3}$, Γ majore R' et R'' sans majorer $R' + R''$.

d) $C_0^r(\Gamma)$ n'a pas d'élément maximum puisque si un tel élément noté R existait, on aurait $b(R) \geq b(R')$ et $b(R) \geq b(R'')$ donc $b(R) \geq b(R') + b(R'') = b(R' + R'')$ et finalement $\Gamma \geq R \geq R' + R''$, ce qui est faux. Il y a donc plusieurs éléments maximaux.

Troisième Partie

Applications aux processus.

T désigne d'abord un ensemble quelconque non vide.

X - Soit $X = \{X_t, t \in T\}$ une f.a.c. (resp. f.a.r.) gaussienne centrée définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la covariance Γ est la somme de 2 covariances complexes (resp. réelles) Γ' et Γ'' . Existe-t-il 2 f.a.c. (resp. f.a.r.) gaussiennes centrées $X' = \{X'_t, t \in T\}$ et $X'' = \{X''_t, t \in T\}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, ayant respectivement comme covariances Γ' et Γ'' et telles que

$$X_t \underset{p.s.}{=} X'_t + X''_t, \quad \forall t \in T ?$$

On peut remarquer que :

a) dans le cas réel, si $X_t \underset{p.s.}{=} X'_t + X''_t, \quad \forall t \in T$, si X est une f.a.r. gaussienne et si X' et X'' sont indépendantes, alors elles sont gaussiennes puisque quelles que soient les suites de même longueur $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(t_1, \dots, t_n)$ extraites respectivement de $\mathbb{R}$ et T, l'égalité $\sum_{i=1}^n \lambda_i X_{t_i} \underset{p.s.}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i X'_{t_i} + \sum_{i=1}^n \lambda_i X''_{t_i}$ montre que $\sum_{i=1}^n \lambda_i X'_{t_i}$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i X''_{t_i}$ sont normales puisqu'elles sont indépendantes et que leur somme est normale (théorème de H. Cramer, ¹⁷, p. 307).

Ce résultat est faux dans le cas complexe.

b) Si ξ, ξ_1 et ξ_2 sont 3 v.a.c. (resp. v.a.r.) gaussiennes centrées, si ξ_1 et ξ_2 sont indépendantes et non nulles p.s. et si $\xi = \xi_1 + \xi_2$, l'espace gaussien centré engendré par (ξ_1, ξ_2) est de dimension 2. On peut y

choisir une v.a.c. (resp. v.a.r.) ξ' orthogonale à ξ et non nulle p.s.

Alors, les tribus $\sigma(\xi)$ et $\sigma(\xi')$ sont indépendantes et sans atomes, ce qui montre en particulier que nécessairement $\sigma(\xi)$ n'est pas très riche, et que le problème posé n'a pas toujours de solution.

Théorème 10. - Soit $X = \{X_t, t \in T\}$ une f.a.c. (resp. f.a.r.) gaussienne centrée définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont la covariance Γ est séparable, et somme de 2 covariances complexes (resp. réelles) Γ' et Γ'' .

Pour qu'il existe 2 f.a.c. (resp. f.a.r.) gaussiennes centrées $X' = \{X'_t, t \in T\}$ et $X'' = \{X''_t, t \in T\}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, ayant respectivement comme covariances Γ' et Γ'' et vérifiant

$$X_t \stackrel{p.s.}{=} X'_t + X''_t, \quad \forall t \in T,$$

il suffit que $H(\Gamma') \cap H(\Gamma'') = \{0\}$ ou qu'il existe une tribu $\mathcal{T}$ indépendante de $\sigma\{X_t, t \in T\}$ et telle que $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ soit sans atomes.

Démonstration. - Puisque Γ' et Γ'' sont séparables (th. 7), on peut trouver 2 parties disjointes N' et N'' de $\mathbb{N}$ indexant respectivement une base orthonormale $\{h_n, n \in N'\}$ et $\{h_n, n \in N''\}$ de $H(\Gamma')$ et de $H(\Gamma'')$, étant supposé que Γ , Γ' et Γ'' ne sont pas nulles, auquel cas le théorème est trivialement vrai.

Soit $(\eta_n, n \in N' \cup N'')$ une famille de v.a.c. (resp. v.a.r.) gaussiennes centrées réduites définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

H' et H'' sont les espaces gaussiens engendrés respectivement par $\{\eta_n, n \in N'\}$ et $\{\eta_n, n \in N''\}$, ϕ' et ϕ'' les isomorphismes de $H(\Gamma')$ sur H' et $H(\Gamma'')$ sur H'' faisant correspondre h_n et $\overline{\eta_n}$. On définit Z'_t, Z''_t, Z_t par : $\overline{Z'_t} = \phi'(\Gamma'_t)$, $\overline{Z''_t} = \phi''(\Gamma''_t)$, $Z_t = Z'_t + Z''_t$, $\forall t \in T$.

$Z' = \{Z'_t, t \in T\}$ et $Z'' = \{Z''_t, t \in T\}$ sont orthogonales dans l'espace gaussien $H' \oplus H''$, donc sont des f.a.c. (resp. f.a.r.) gaussiennes centrées et indépendantes. On sait que leurs covariances sont respectivement Γ' et Γ'' , et que les espaces gaussiens qu'elles engendrent sont H' et H'' .

Z est aussi une f.a. gaussienne centrée. Les espaces gaussiens $H(Z)$ et $H(X)$ engendrés par Z et X sont isomorphes par $\Psi : H(Z) \rightarrow H(X)$, unique application linéaire continue telle que $\Psi(\bar{Z}_t) = \bar{X}_t, \forall t \in T$; Ψ est une bijection isométrique.

$H(Z)$ est un sous-espace de $H' \oplus H''$.

Cas 1 : $H(Z) = H' \oplus H''$. Il suffit de définir X'_t et X''_t par

$$\bar{X}'_t = \Psi(\bar{Z}'_t) \text{ et } \bar{X}''_t = \Psi(\bar{Z}''_t), \quad \forall t \in T.$$

Cas 2 : $H(Z) \neq H' \oplus H''$. Soit $\{k_j, j \in J\}$ une base orthonormale de $(H' \oplus H'') \ominus H(Z)$. On construit dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, T, P)$ (resp. $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, T, P)$) une suite $\{\xi_j, j \in J\}$ de v.a.c. (resp. v.a.r.) gaussiennes centrées réduites indépendantes. Soit H l'espace gaussien engendré par $\{\bar{\xi}_j, j \in J\}$. Considérons l'unique application linéaire bornée Ψ' de $H' \oplus H''$ sur $H(X) \oplus H$ telle que :

$$\begin{aligned} \Psi'(\bar{Z}_t) &= \bar{X}_t, \quad \forall t \in T \\ \Psi'(\bar{k}_j) &= \bar{\xi}_j, \quad \forall j \in J. \end{aligned}$$

Il suffit de définir X'_t et X''_t par

$$\Psi'(\bar{Z}'_t) = \bar{X}'_t \text{ et } \Psi'(\bar{Z}''_t) = \bar{X}''_t, \quad \forall t \in T.$$

Il reste à démontrer que $H(\Gamma') \cap H(\Gamma'') = \{0\} \iff H' \oplus H'' = H(Z)$.

a) Si $H(Z) = H' \oplus H''$, soit $\theta : H(Z) \rightarrow H(\Gamma)$ l'unique application linéaire continue faisant correspondre $\bar{Z}_t$ et Γ_t . C'est une bijection isométrique.

$$\langle \theta(\bar{Z}'_t), \Gamma_s \rangle_{H(\Gamma)} = E(Z'_t \cdot Z_s^*) = E(Z'_t \cdot Z_s^*) = \Gamma'(t, s), \text{ donc}$$

$$\theta(\bar{Z}'_t) = \Gamma'_t, \forall t \in T, \text{ de même } \theta(\bar{Z}''_t) = \Gamma''_t, \forall t \in T.$$

On a donc $\theta(H') = H(\Gamma')$, $\theta(H'') = H(\Gamma'')$ et $H(\Gamma) = H(\Gamma') \oplus H(\Gamma'')$.

b) Si $H(\Gamma) = H(\Gamma') \oplus H(\Gamma'')$, soit φ l'unique isométrie de $H(\Gamma)$ sur $H' \oplus H''$ qui fait correspondre h_n et $\bar{h}_n$, $\forall n \in N' \cup N''$.

$$\text{On sait que } \varphi(\Gamma'_t) = \bar{Z}'_t, \quad \varphi(\Gamma''_t) = \bar{Z}''_t.$$

Donc $\varphi(\Gamma_t) = \bar{Z}_t, \forall t \in T$. $\{\Gamma_t, t \in T\}$ engendrant $H(\Gamma)$,
 $\{\bar{Z}_t, t \in T\}$ engendre $H' \oplus H''$, donc $H(Z) = H' \oplus H''$.

Pour conclure, il suffit de remarquer que $H(\Gamma') \oplus H(\Gamma'') = H(\Gamma)$ équivaut à $H(\Gamma') \cap H(\Gamma'') = \{0\}$ (1, p. 354). Ce cas est particulier puisque Γ' et Γ'' sont alors des Γ -covariances.

Le corollaire suivant est immédiat et s'applique notamment aux vecteurs aléatoires gaussiens.

Corollaire. - Soit $X = \{X_t, t \in T\}$ une f.a.c. (resp. f.a.r.) gaussienne centrée dont la covariance $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ est de dimension finie.

Il existe 2 f.a. gaussiennes centrées définies sur le même espace de probabilité : $\{X'_t, t \in T\}$ et $\{X''_t, t \in T\}$, indépendantes, de covariances Γ' et Γ'' et telles que $X_t \stackrel{p.s.}{=} X'_t + X''_t, \forall t \in T$ si et seulement s'il existe un espace gaussien centré H tel que :

- $H \supset H(X)$ (espace gaussien engendré par X),
- $\delta(H) = \delta(\Gamma') + \delta(\Gamma'')$.

XI - Si T désigne de nouveau un groupe abélien localement compact, on dira qu'une f.a.c. (resp. f.a.r.) centrée du second ordre $U = \{U_t, t \in T\}$ admet une partie stationnaire s'il existe des f.a.c. (resp. f.a.r.) centrées du second ordre V et U' telles que :

- $U_t \underset{\text{p.s.}}{=} V_t + U'_t, \forall t \in T,$
- V et U' sont indépendantes,

- La covariance de V est une corrélation continue non nulle.

Ces définitions permettent l'énoncé suivant où de plus on a indiqué une décomposition spectrale de la partie stationnaire V analogue dans le cas général aux représentations usuelles (⁷, XI, § 4), compte-tenu de (¹⁸) et (¹⁹) :

Théorème 11.- Soit $U = \{U_t, t \in T\}$ une f.a.c. gaussienne centrée de covariance séparable Γ et définie sur l'espace de probabilité (Ω, A, P) . Pour qu'elle admette une partie stationnaire, il est nécessaire que $C_0(\Gamma) \neq \{0\}$. Sous cette condition, il suffit qu'il existe une tribu T indépendante de $\sigma\{U_t, t \in T\}$ telle que (Ω, T, P) n'ait pas d'atomes, et on peut alors trouver 2 f.a.c. gaussiennes centrées et indépendantes $V = \{v_B, B \in \mathcal{B}(T^*)\}$ et $U' = \{U'_t, t \in T\}$ définies sur (Ω, A, P) , ayant les propriétés suivantes :

- $E(v_B \cdot v_{B'}^*) = 0$ si $B \cap B' = \emptyset$, autrement dit, v est à accroissements orthogonaux ;

- U' n'a pas de partie stationnaire ;

$$- \underline{U(t) \underset{\text{p.s.}}{=} \int_{T^*} (t, t^*) dv_{t^*} + U'_t, \forall t \in T,}$$

où $\int_{T^*} (t, t^*) dv_{t^*}$ est la v.a.c. gaussienne centrée définie par :

$$\underline{E\left(\left(\int_{T^*} (t, t^*) dv_{t^*}\right) \cdot Z^*\right) = \int_{T^*} (t, t^*) d(E(v_{t^*} \cdot Z^*))},$$

$B \mapsto E(v_B \cdot Z^*)$ étant une mesure complexe bornée et régulière

(¹⁶, App. E), $\forall Z \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, A, P)$.

R E F E R E N C E S.

Les auteurs sont classés par ordre alphabétique.

- 18 - ARNOUS E. - Sur les groupes continus de transformations unitaires de l'espace de Hilbert : une extension d'un théorème de M.H. Stone ; Comm. Math. Helvetici, 19 (1946-1947) p. 50-60.
- 1 - ARONSAJN N. - Theory of reproducing kernels ; Trans. A.M.S., 68 (1950) p. 337-404.
- 25 - BULDYGIN V., PETUNIN J., - The structure of the σ -algebra of Borel sets, and the convergence of certain random series in Banach spaces (en russe) ; Ukrain. Mat. Ž. 27 (1975) p. 435-442.
- 32 - CAMBANIS S. - The measurability of a stochastic process of second order and its linear space ; Proc. Amer. Math. Soc. 47 (1975) p. 467-475.
- 37 - CAMBANIS S. - On harmonizable stochastic processes ; Information control 17 (1970) p. 183-202.
- 14 - CAMPBELL L. - Series expansions for random processes ; Probability and Information theory ; Lectures Notes Math., 89 (1969) p. 77-95.
- 36 - CARTIER P. - Covariances mesurables ; exposé au séminaire de Probabilités de Strasbourg (1971), non publié.
- 41 - CIESELSKI Z. - Lectures on Brownian motion, heat conduction and potential theory ; Matematisk Institut, Aarhus Universitet (1966).
- 34 - CRUM M. - On positive - definite functions ; Proc. London Math. Soc. 6 (1956) p. 546-560.
- 35 - DEVINATZ K. - On measurable positive definite operator functions ; J. London Math. Soc. 35 (1960) p. 417-424.
- 7 - DOOB J. - Stochastic processes ; Wiley, New-York (1963).
- 40 - DUC-JACQUET M. - Approximation des fonctionnelles linéaires sur les espaces hilbertiens autoreproduisants ; Thèse, Université Scientifique et Médicale Grenoble (1973).

- 3 - FORTET R. - Espaces à noyau autoreproduisant et lois de probabilité des fonctions aléatoires ; Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. B , IX (1973) p. 41-58.
- 6 - HALMOS P. - Measure theory ; Van Nostrand, Princeton (1950).
- 15 - KADOTA T. - Integral equation for simultaneous diagonalization of two covariance kernels ; Bell Tech. J. (1967) p. 883-892.
- 33 - KADOTA T. - Simultaneous diagonalization of two covariance kernels and application to second order stochastic processes ; S.I.A.M. J. Appl. Math. 15 (1967) p. 1470-1480.
- 44 - KALLIANPUR G. - Abstract Wiener processes and their reproducing kernels Hilbert spaces ; Z. Wahr. verw. Geb. 17 (1971) p. 113-123.
- 19 - KAMPÉ de FÉRIET J. - Fonctions aléatoires stationnaires et groupe de transformations dans un espace abstrait ; Coll. intern. Calcul des Probabilités et Statistique Math., Lyon (1947), C.N.R.S. (1948) p. 67-76.
- 21 - KAMPÉ de FÉRIET J. - An elementary theory of the brownian motion random function ; Sankhyā, A, 23 (1961) p. 207-220.
- 27 - KAMPÉ de FÉRIET J. - Sur la décomposition d'une fonction aléatoire normale ; Abstracts of Short communications, Intern. Cong. Math. Stockholm (1962) p. 162.
- 28 - KAMPÉ de FÉRIET J. - Mesures de probabilité sur les espaces de Banach possédant une base dénombrable ; J. Math. Pures Appl. 39 (1960) p. 119-163.
- 30 - KAMPÉ de FÉRIET J. - Correlation and spectrum of stationary random functions ; Math. Student 30 (1962) p. 55-67.
- 10 - KAMPÉ de FÉRIET J., DELPORTE J. - Une propriété caractéristique de la fonction aléatoire du mouvement brownien ; Comptes rendus, ser. A, t. 263 (1966) p. 919-922.
- 11 - KAMPÉ de FÉRIET J., DELPORTE J. - Mesures de probabilité sur les espaces de Fréchet à base de Schauder ; application à la fonction aléatoire du mouvement brownien ; Comptes rendus, ser. A, t. 264 (1967), p. 949-954.
- 31 - KAMPE de FERIET J., FRENKIEL N. - Correlations and spectra for non-stationary random functions ; Math. Comput. 77(1962) p. 1-21.

- 42 - KAMPÉ de FÉRIET J.,
FRENKIEL N. - Estimation de la corrélation d'une fonction aléatoire non stationnaire ; Comptes rendus ser. A, t. 249 (1959) p. 348-351.
- 26 - LE PAGE R. - Subgroups of paths and reproducing kernels ; Ann. Prob. 1 (1973) p. 345-347.
- 20 - LÉVY P. - Le mouvement brownien ; Memorial Sciences Math. CXXVI (1954) Gauthier-Villars, Paris.
- 43 - LOEVE M. - Probability theory ; Van Nostrand, Princeton (1963).
- 5 - MOCHÉ R. - Une représentation des covariances à espace autoreproduisant séparable ; Comptes rendus, ser. A, t. 274 (1972) p. 346-349.
- 13 - MOCHÉ R. - Représentation canonique des covariances plus petites qu'une covariance donnée ; applications, Comptes rendus, ser. A, t. 277 (1973) p. 133-136.
- 22 - MOCHÉ R. - Etudes sur l'analyse de la stationnarité des fonctions aléatoires du second ordre ; Pub. Internes de l'UER de Math. Pures et Appl. Univ. Sciences et Techniques de Lille, 74 (1976).
- 2 - NEVEU J. - Processus aléatoires gaussiens ; Séminaire Math. Sup. Presses Université Montréal (1968).
- 4 - NEVEU J. - Bases mathématiques du Calcul des Probabilités, Masson, Paris (1964).
- 38 - NIEMI H. - Stochastic processes as Fourier transforms of stochastic measures ; Ann. Acad. Scientiarum Fennicae, ser. A, I Math. 591 (1975) p. 1-47.
- 9 - PARTHASARATHY K. - Probability measures on metric spaces ; Academic Press, New-York (1967).
- 39 - PARZEN E. - Time series analysis papers ; Holden-Day, San Francisco (1967).
- 24 - POVZNER A. - On a class of Hilbert spaces of functions ; Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R. (N.S.) 68 (1949) p. 817-820.
- 8 - ROHLIN V. - On the fundamental ideas of measure theory ; A.M.S. Transl. (1) 10 (1962) p. 1-54.
- 17 - RENYI A. - Calcul des Probabilités ; Dunod, Paris (1966).
- 12 - RIESZ F., sz. NAGY B. - Leçons d'analyse fonctionnelle ; Akad. Kiado, Budapest (1953).

- 16 - RUDIN W. - Fourier Analysis on Groups ; Interscience. Pub., New-York (1962).
- 23 - SCHWARTZ L. - Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés (noyaux reproduisants) ; J. anal. Math. XIII (1964) p. 115-256.
- 29 - SHEPP. L. - Radon Nikodym derivatives of Gaussian Measures ; Ann. Math. Stat. 37 (1966) p. 321-354.

