

50376
1977
41

N° d'ordre: 366

50376
1977
41

THESE

présentée

à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre

de

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Jérôme OUDIN



CONTRIBUTIONS DIVERSES

A L' ETUDE DE LA DEFORMATION DES METAUX

PAR LA THEORIE DE LA PLASTICITE



Soutenue le 21 Avril 1977

devant la Commission d' Examen

Membres du Jury: MM. G. GONTIER

F. PARSY

P.E. LAGASSE

M. SAVE

T. VINH

J.J. BERNARD

J.M. FLAMME

Président

Examineur

Examineur

Examineur

Examineur

Invite

Invite



030 050932 9

Nous tenons à remercier et à assurer de notre profonde reconnaissance :

. Monsieur DEBEUNNE, directeur de l' I.C.A.M. qui nous a beaucoup aidé dans la préparation et la réalisation de ces études;

. Monsieur le Professeur GONTIER, directeur de l' I.M.F.L., dont les encouragements et les conseils nous ont été précieux;

. Monsieur PARSY, Maître de Conférences à l' U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, dont l'aide importante nous a permis de résoudre des problèmes difficiles;

. Monsieur le Professeur LAGASSE, de l' Université de Louvain la Neuve, Monsieur le Professeur SAVE, de la Faculté Polytechnique de Mons, Monsieur le Professeur VINH TUONG, de l' Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique, qui ont accepté d' examiner nos travaux;

. Monsieur OUZIAUX, directeur de l' E.N.S.A.M., qui a été extrêmement intéressé par les sujets abordés;

. Nos collègues Jean BURETTE, Hervé BRUNET, Dominique CARETTE, Yves RAVALARD pour leur excellente collaboration;

. Madame BERA et Monsieur LÄHNERT qui ont dactylographié avec beaucoup de soins un texte souvent difficile à reproduire.

Les travaux réalisés ont fait partie d'un programme de recherche coopératif entre le Service Mécanique de l'U.S.T.L. et le Département Matériaux Structures Mise en Forme de l'ICAM.

Pour ce programme, nous avons reçu des aides

- . du C.N.R.S. (Section Mécanique) qui nous a accordé une aide individuelle dès la mise en route du programme (AI N° 995 888) ,
- . de la D.G.R.S.T. (Comité Mécanique) qui a bien voulu retenir nos propositions de recherche (Aide N° 75-7-1386) ,
- . de l'Industrie de Transformation des Métaux dont plusieurs adhérents nous ont fait confiance pour l'exécution de leurs contrats de recherche.

DOYENS HONORAIRES de l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit
et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DECUYPER
DEHEVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, GLACET, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE
KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT,
MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SAVARO, WATERLOT, WIEMAN,
ZAMANSKI.

PRESIDENTS HONORAIRES DE L'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R. DEFRETIN, M. PARREAU.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. M. MIGEON.

PROFESSEURS TITULAIRES

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Physique
M. BECART Maurice	Physique Atomique et Moléculaire
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BONNEMAN Pierre	Chimie Appliquée
M. BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M. BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. CELET Paul	Géologie Générale
M. COEURE Gérard	Analyse
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des Entreprises
M. DELATTRE Charles	Géologie Générale
M. DELHAYE Michel	Chimie Physique
M. DERCOURT Jean	Géologie Générale
M. DURCHON Maurice	Biologie Expérimentale
M. FAURE Robert	Mécanique
M. FOURET René	Physique du Solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. GONTIER Gérard	Mécanique
M. GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique
M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M. LANSRAUX Guy	Physique Atomique et Moléculaire
M. LAVEINE Jean-Pierre	Paléontologie
M. LEBRUN André	Electronique
M. LEHMANN Daniel	Géométrie

Mme LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M. LINDER Robert	Biologie et Physiologie Végétales
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M. LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M. MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M. MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. POUZET Pierre	Analyse numérique
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. SALMER Georges	Electronique
M. SCHILTZ René	Physique Atomique et Moléculaire
Mme SCHWARTZ Marie-Hélène	Géométrie
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique
M. TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M. TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. VIVIER Emile	Biologie Cellulaire
M. WERTHEIMER Raymond	Physique Atomique et Moléculaire
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie Végétale
M. BOILLET Pierre	Physique Atomique et Moléculaire
M. BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M. BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M. CAPURON Alfred	Biologie Animale
M. CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
Mme DACHARRY Monique	Géographie
M. DEPRES Gilbert	Physique Théorique
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
Mme EVRARD Micheline	Chimie Appliquée
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M. HERMAN Maurice	Physique Spatiale
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LENTACKER Firmin	Géographie
M. LEROY Jean-Marie	Chimie Appliquée
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
Mle MARQUET Simone	Probabilités
M. MIGEON Michel	Chimie Physique
M. MONTEL Marc	Physique du Solide
M. MONTUELLE Bernard	Biologie Appliquée
M. NICOLE Jacques	Chimie Appliquée
M. PAQUET Jacques	Géologie Générale
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M. SLIWA Henri	Chimie Organique
M. WATERLOT Michel	Géologie Générale

MAITRES DE CONFERENCES (Et Chargés d'Enseignement)

M. ADAM Michel	Sciences Economiques
M. ANTOINE Philippe	Analyse
M. BART André	Biologie Animale
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie

M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M. BOSCOQ Denis	Probabilités
M. BREZINSKI Claude	Analyse Numérique
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CARREZ Christian	Informatique
M. COQUERY Jean-Marie	Psycho-Physiologie
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. COUTURIER Daniel	Chimie Organique
M. CRAMPON Norbert	Géologie
M. CROSNIER Yves	Electronique
M. DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DELORME Pierre	Physiologie Animale
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M. DHAINAUT André	Biologie Animale
M. DELAUNAY Jean-Claude	Sciences Economiques
M. DERIEUX Jean-Claude	Microbiologie
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique du Solide
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUEE Gérard	Géologie
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du Solide
M. FAKIR Sabah	Algèbre
M. FLAMME Jean-Marie	Technologie de Construction
M. FOCT Jacques	Génie Mécanique
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. FONTAINE Jacques	Electronique
M. FOURNET Bernard	Biochimie
M. GAMBLIN André	Géographie
M. GERVAIS Michel	Gestion des Entreprises
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JOURNEL Gérard	Physique Atomique et Moléculaire
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LAURENT François	Automatique
Mlle LEGRAND Denise	Algèbre
Mlle LEGRAND Solange	Algèbre
M. LEROY Yves	Electronique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique théorique
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAHIEU Jean-Marie	Physique Atomique et Moléculaire
M. MESSELYN Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. MIGNOT Fulbert	Analyse Numérique
M. N'GUYEN VAN CHI Régine	Géographie
M. NOTELET Francis	Electrotechnique
M. NUSSEMBAUM Maurice	Sciences Economiques
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PAUPARDIN Colette	Biologie Physiologie Végétales
M. PECQUE Marcel	Chimie Physique
M. PERROT Pierre	Chimie Appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie Animale
M. PETIT Francis	Chimie Organique
M. PONSOLLE Louis	Chimie Physique
M. POVY Lucien	Automatique
M. RICHARD Alain	Biologie
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROY Jean-Claude	Psycho-Physiologie
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SOMME Jean	Géographie

M ^{lle} SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. STERBOUL François	Informatique
M. TAILLEZ Roger	Biologie
M. THERY Pierre	Electronique
M. TOP Gérard	Sciences Economiques
M. TOULOTTE Jean-Marc	Automatique
M. TREANTON Jean-René	Sociologie
M. VANDORPE Bernard	Chimie Minérale
M. VILLETTE Michel	Mécanique
M. WALLART Francis	Chimie
M. WERNER Georges	Informatique
M ^{me} ZIN-JUSTIN Nicole	Algèbre

INTRODUCTION

Nous présentons dans ce mémoire les résultats de cinq recherches sur la prévision du comportement plastique des produits métalliques :

- I. *Contribution à l'étude du comportement limite des plaques rectangulaires en déformation plane.*
- II. *Contribution à l'étude du comportement limite des plaques rectangulaires encastées en déformation plane.*
- III. *Contribution à l'optimisation d'un outillage de poinçonnage.*
- IV. *Contribution à la détermination des lois de comportement des métaux et des conditions de frottement dans les procédés de mise à forme à froid.*
- V. *Méthode générale de traitement automatique des écoulements plans en mise à forme des métaux.*

La rédaction de chaque étude est indépendante, à l'exception de l'étude traitée au chapitre II qui est la suite de celle traitée au chapitre I.

I

CONTRIBUTION

A L'ETUDE DU COMPORTEMENT LIMITE

DES PLAQUES RECTANGULAIRES EN DEFORMATION PLANE

SOMMAIRE

La détermination de la charge limite, en déformation plane, de plaques rectangulaires simplement appuyées sur deux bords opposés est faite à partir de champs de vitesses cinématiquement et plastiquement admissibles, de champs de contraintes statiquement et plastiquement admissibles.

Le critère de plasticité de TRESCA est associé à la loi du potentiel plastique.

Les champs de vitesses sont constitués par des réseaux de lignes de glissement ; les champs de contraintes sont, soit continus, soit constitués par des blocs.

La charge limite théorique est comparée à la charge limite expérimentale de plaques en acier à faible teneur en carbone.

TABLE DES MATIERES

	Page
1 - <u>INTRODUCTION.</u>	1
2 - <u>POSITION DU PROBLEME.</u>	1
3 - <u>ANALYSE PAR VOIE CINEMATIQUE.</u>	2
3.1. - Introduction	2
3.2. - Conditions et méthode de résolution	2
3.3. - Champ cinématiquement et plastiquement admissible symétrique	3
3.4. - Champ cinématiquement et plastiquement admissible asymétrique	6
3.5. - Comparaison des résultats	10
4 - <u>ANALYSE PAR VOIE STATIQUE.</u>	10
4.1. - Introduction	10
4.2. - Conditions et méthodes de résolution	11
4.3. - Champ statiquement et plastiquement admissible continu	11
4.4. - Champ par blocs symétriques	12
4.5. - Champ par blocs asymétriques	15
4.6. - Comparaison des résultats	17
5 - <u>VERIFICATION EXPERIMENTALE.</u>	17
6 - <u>CONCLUSION.</u>	18

1. Introduction

La présente étude apporte une contribution théorique et expérimentale concernant la ruine de plaques rectangulaires métalliques soumises à la flexion plane, à la température ambiante.

La partie théorique fait appel aux théorèmes d'extrémum [7] par recherche de champs de vitesses de déformation cinématiquement et plastiquement admissibles et de champs de contraintes statiquement et plastiquement admissibles [6].

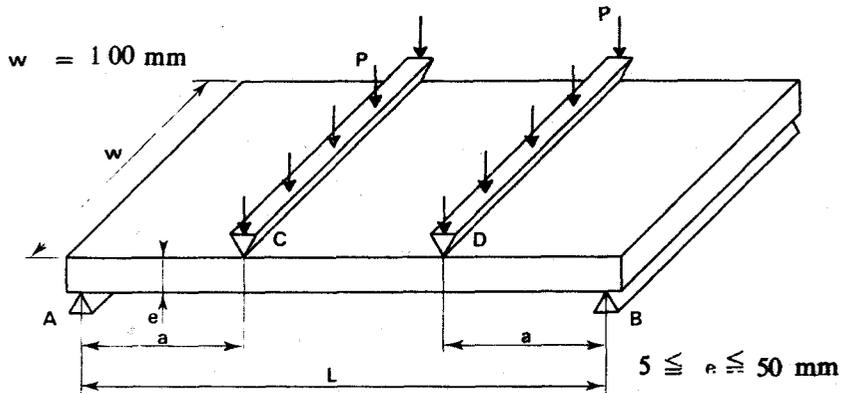


Fig. 1

La partie expérimentale rend compte d'essais systématiques menés sur des plaques en acier au carbone, convenablement recuites [3]. Ces expériences apportent une bonne corrélation avec les résultats théoriques tant sur les aspects quantitatifs que sur les aspects qualitatifs.

2. Position du problème

Nous considérons une plaque rectangulaire de largeur w et d'épaisseur e . Elle repose sur deux appuis simples distants de l (fig. 1).

Compte tenu de ses dimensions, la plaque est en état plan de déformation. L'élargissement maximum mesuré des plaques d'épaisseur 50 est inférieur à 0,6 mm.

Le matériau est supposé avoir le comportement rigide et parfaitement plastique [4].

Il vérifie le critère de plasticité de Tresca [1].

3. Analyse par voie cinématique

3.1. INTRODUCTION

Deux champs de vitesse de déformation cinématiquement et plastiquement admissibles sont étudiés.

Le premier, symétrique par rapport au plan moyen de la plaque, a déjà été utilisé par Onat et Shield [21] et Green [15].

Le second, asymétrique, est à notre connaissance nouveau.

3.2. CONDITIONS ET MÉTHODE DE RÉOLUTION

Nous utilisons la théorie des lignes de glissement ([5], [10], [12]).

Soient α et β les directions des lignes de glissement, p la pression hydrostatique, k la limite d'écoulement en cisaillement simple, v_α et v_β les composantes de la vitesse selon les directions α et β .

Les relations de Geiringer pour les vitesses doivent être vérifiées :

$$\begin{aligned} dv_\alpha - v_\beta d\varphi &= 0 \quad \text{le long de } \alpha, \\ dv_\beta + v_\alpha d\varphi &= 0 \quad \text{le long de } \beta, \end{aligned}$$

et la puissance dissipée doit être positive ou nulle dans le réseau

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\beta} - v_\beta \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\alpha} + v_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial s_\alpha} \geq 0.$$

Les relations de Hencky pour les contraintes doivent être également vérifiées dans le réseau

$$\begin{aligned} dp + 2k d\varphi &= 0 \quad \text{sur } \alpha, \\ dp - 2k d\varphi &= 0 \quad \text{sur } \beta. \end{aligned}$$

Les champs de vitesse proposés vérifient toutes les conditions cinématiques aux limites des champs.

Cependant, seules les conditions statiques aux surfaces libres seront vérifiées. Les réseaux proposés constituent donc des solutions incomplètes et sont à interpréter au sens des théorèmes d'extrémum comme une solution cinématiquement et plastiquement admissible ([10], [12], [13]).

3.3. CHAMP CINÉMATIQUEMENT ET PLASTIQUEMENT ADMISSIBLE SYMÉTRIQUE

Le réseau n° 3 est le plus général; il a la forme représenté ci-contre (fig. 2).

Il est constitué par :

- deux champs homogènes 1, 7, 8 et 4, 5, 6;
- deux champs semi-homogènes 1, 2, 7 et 3, 4, 6;
- une ligne circulaire 2, 3.

Les paramètres géométriques du réseau sont b , θ_0 , R .

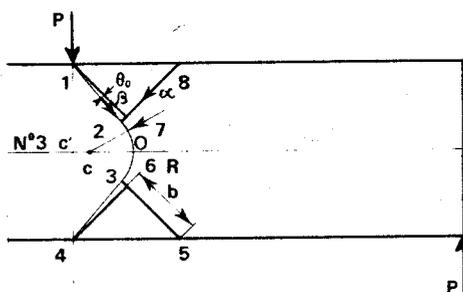


Fig. 2

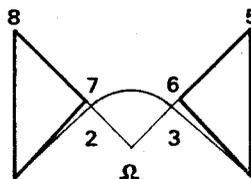


Fig. 3

Par raison de symétrie, la pression p est nulle au point 0. Cette condition fixe la valeur de θ_0 :

$$\theta_0 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}. \quad (1)$$

L'hodographe correspondant à ce réseau est celui de la figure 3. La ligne 1, 2, 3, 4 est une ligne de discontinuité de vitesse. A gauche de cette ligne, les vitesses sont nulles partout.

Ainsi le long de 1, 2, 3, 4 :

$$v_x = 0, \quad v_y = -R. \quad (2)$$

Les vitesses dans le champ semi-homogène 1, 2, 7 sont données par les relations immédiates suivantes :

$$v_{\beta} = -R \cos \alpha - b \sin \alpha, \quad v_{\alpha} = -R \sin \alpha + b \cos \alpha - b, \quad (3)$$

où b représente la longueur 1, 2 et α l'angle d'une ligne β du champ avec la ligne 1, 2.

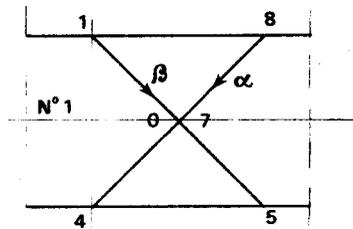


Fig. 4

Dans le champ 1, 7, 8, la vitesse v_{α} est

$$v_{\alpha} = -R \sin \theta_0 + b \cos \theta_0 - b.$$

La puissance dissipée est partout positive.

Les efforts et les moments transmis par ce réseau sont :

$$\frac{P}{ke} = \left[(1 + 2\theta_0) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \theta_0 \right) - 1 \right] - \frac{b}{e} \left[\frac{2(1 + 2\theta_0)}{\cos \left[(\pi/4) + \theta_0 \right]} - 4 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \theta_0 \right) \right], \quad (4)$$

$$\frac{2M}{ke^2} = \left(\frac{4b^2}{e^2} - \frac{4b}{e} \cos \psi \right) \left(\cotg \psi - \frac{\psi}{\sin^2 \psi} \right) + \frac{\psi}{\sin^2 \psi} + (1 - 2\psi \cotg \psi) \cotg \psi, \quad (5)$$

$$\psi = \frac{\pi}{4} - \theta_0.$$

Les efforts et les moments transmis par ce réseau (R et b non nuls) évoluent dans les limites suivantes :

$$0,03756 \leq \frac{P}{ke} \leq 0,71763, \quad 1,03113 \geq \frac{2M}{ke^2} \geq 0,83186.$$

Les limites sont obtenues pour R nul d'une part et pour b nul d'autre part.

La dégénérescence de ce champ fournit les extensions suivantes :

● Champ n° 1 (fig. 4) :

$$\frac{P}{ke} = 0, \quad \frac{2M}{ke^2} = 1.$$

L'ensemble des résultats est reporté à la figure 7 sous forme de courbe d'interaction ([14], [16]).

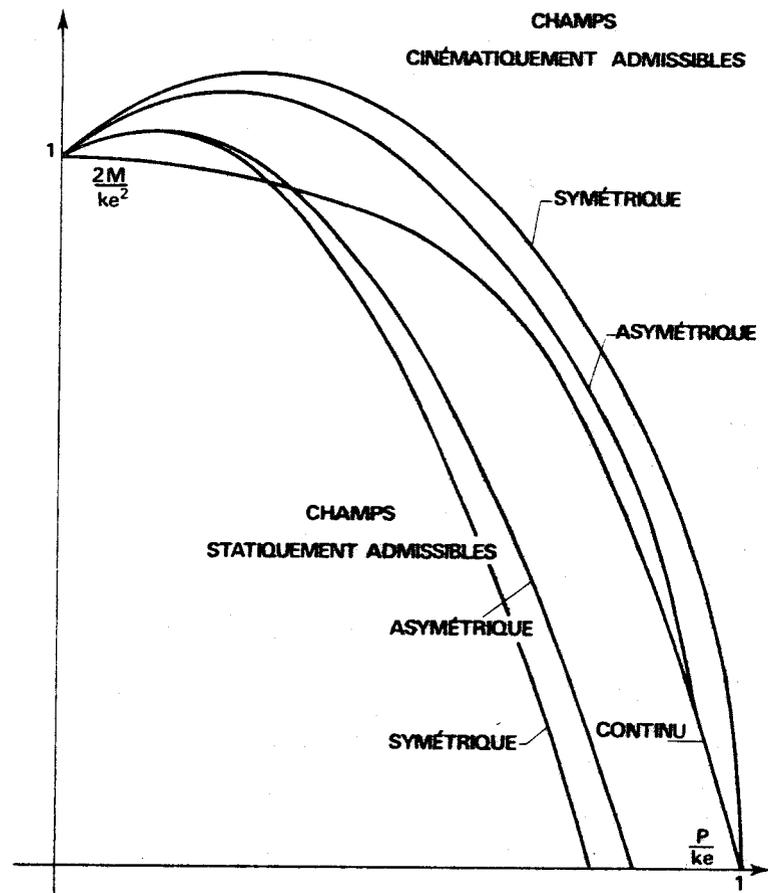


Fig. 7

3.4. CHAMP CINÉMATIQUEMENT ET PLASTIQUEMENT ADMISSIBLE ASYMÉTRIQUE

Le champ symétrique étudié précédemment impose des conditions cinématiques excessives pour le problème étudié.

Une amélioration est obtenue en adoptant un champ de lignes de glissement de forme asymétrique [11].



Le réseau n° 3 est le plus général (fig. 10). Il est constitué par :

- deux champs homogènes 1, 7, 8 et 3, 4, 5;
- un champ semi-homogène 1, 2, 7;
- une ligne circulaire 2, 3.

Les paramètres géométriques du réseau sont b , c , θ_1 et R .

L'hodographe est semblable à celui de la figure 3. Le calcul des vitesses et de la puissance dissipée est identique à celui fait pour le réseau symétrique précédent.

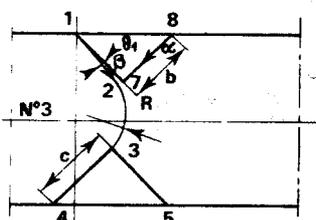


Fig. 10

Les efforts et les moments transmis par le réseau sont :

$$\frac{P}{ke} = -\frac{b}{e} \left\{ \left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1 \right) \sin \psi - \cos \psi \right\} + \frac{R}{e} \left(\frac{\pi}{2} \cos \psi - \sin \psi \right), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{2M}{ke^2} = & -\frac{2b}{e} \left[\frac{R}{e} \sin \psi \left(\sin \psi + \frac{\pi}{2} \cos \psi \right) + \frac{b}{e} \left\{ \sin \psi \left(\cos \psi - \frac{\pi}{2} \sin \psi \right) + \frac{\pi}{4} \right\} \right] \\ & + \frac{2R}{e} \left[-\frac{R}{e} \left(\frac{\pi}{4} + \psi \right) + \left(\frac{R}{e} \cos \psi - \frac{b}{e} \sin \psi \right) \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\pi}{2} \cos \psi - \sin \psi \right) \right] - \frac{2c}{e} \left(\frac{R}{e} + \frac{c}{2e} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

avec

$$\psi = \frac{\pi}{4} - \theta_1.$$

Les conditions de pression aux limites fixent la valeur de ψ soit $\psi = 1/2$.

Les efforts et les moments transmis par le réseau évoluent dans les limites suivantes :

$$0,06892 \leq \frac{P}{ke} \leq 0,69434, \quad 1,04669 \geq \frac{2M}{ke^2} \geq 0,78799.$$

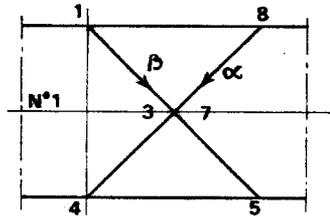


Fig. 8

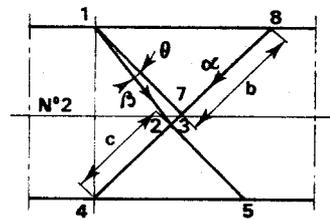


Fig. 9

Les limites sont obtenues pour R nul d'une part et pour b nul d'autre part
La dégénérescence de ce champ fournit les extensions suivantes :

● Réseau n° 1 (fig. 8) :

$$\frac{P}{ke} = 0, \quad \frac{2M}{ke^2} = 1.$$

● Réseau n° 2 (fig. 9) :

Pour ce réseau, nous obtenons les relations :

$$\frac{P}{ke} = \frac{b}{e} \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) - (1 + 2\theta) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \right\}, \quad (12)$$

$$\frac{2M}{ke^2} = -\frac{2b^2}{e^2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + (1 + 2\theta) \left\{ \frac{1}{2} - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \right\} \right] - \frac{c^2}{e^2}. \quad (13)$$

L'angle θ varie de 0 à θ_1 . Les limites sont les suivantes :

$$0 \leq \frac{P}{ke} \leq 0,06892, \quad 1 \leq \frac{2M}{ke^2} \leq 1,04699.$$

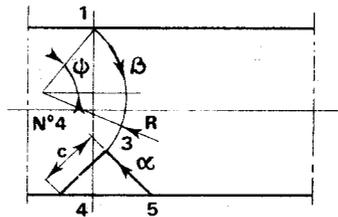


Fig. 11

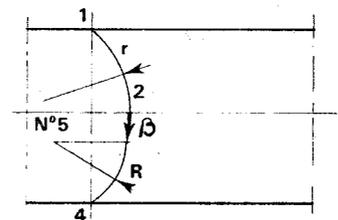


Fig. 12

● Réseau n° 4 (fig. 11) :

Il vient :

$$\frac{P}{ke} = \frac{R}{e} \left\{ \left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1 \right) \cos \psi - \sin \psi \right\}, \quad (14)$$

$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{2R^2}{e^2} \left[-\psi - \frac{\pi}{4} + \cos \psi \left\{ \left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1 \right) \cos \psi - \sin \psi \right\} \right] - \frac{2c}{e} \left(\frac{c}{2e} + \frac{R}{e} \right). \quad (15)$$

Les limites sont :

$$0,69434 \leq \frac{P}{ke} \leq 0,80338, \quad 0,78799 \geq \frac{2M}{ke^2} \geq 0,62077.$$

● Réseau n° 5 (fig. 12) :

Les efforts et les moments sont les suivants :

$$\frac{P}{ke} = \frac{R}{e} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{r}{e} \left\{ \left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1 \right) \cos \psi - \sin \psi - \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right\}, \quad (16)$$

$$\frac{2M}{ke^2} = -\frac{2r^2}{e^2} \left[\psi - \cos \psi \left\{ \left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1 \right) \cos \psi - \sin \psi - \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right\} \right] + \frac{2R}{e^2} \left[-R \frac{\pi}{4} + \{ R + r(\cos \psi - 1) \} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right]. \quad (17)$$

Les limites sont :

$$0,80338 \leq \frac{P}{ke} \leq 0,904945, \quad 0,62077 \geq \frac{2M}{ke^2} \geq 0,34372.$$

● Réseau n° 6 (fig. 13) :

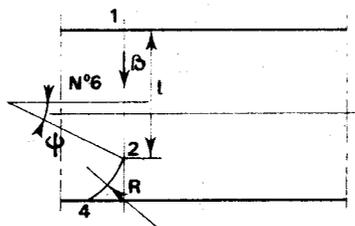


Fig. 13

Il vient :

$$\frac{P}{ke} = \frac{l}{e} + \frac{R}{e} \left\{ \left(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1 \right) \cos \psi - \sin \psi \right\}, \quad (18)$$

$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{2p_0 l}{ke} \left(\frac{l}{2e} + \frac{R}{e} \sin \psi \right) + \frac{2R^2}{e^2} \left[\psi + \frac{\pi}{4} + \sin \psi - \left\{ 2 \left(\psi + \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right\} \cos \psi \right]. \quad (19)$$

Les limites sont :

$$0,904945 \leq \frac{P}{ke} \leq 1, \quad 0,34372 \geq \frac{2M}{ke^2} \geq 0.$$

L'ensemble des résultats est reporté à la figure 7.

3.5 COMPARAISON DES RÉSULTATS

Le réseau asymétrique, beaucoup mieux adapté à la cinématique du problème, donne des résultats inférieurs à ceux obtenus par le champ symétrique (fig. 7). Il constitue donc une amélioration du réseau symétrique.

4. Analyse par voie statique

4.1. INTRODUCTION

Trois champs statiquement et plastiquement admissibles sont définis. Le premier est un champ continu symétrique qui a été utilisé par Drücker [14]. Les deux autres champs sont constitués de blocs rigides ou

plastiques. L'un est symétrique par rapport au plan moyen de la plaque, l'autre est asymétrique. Ils constituent une nouvelle application de la méthode statique à l'étude du comportement limite des plaques rectangulaires.

4.2. CONDITIONS ET MÉTHODES DE RÉOLUTION

Les champs de contraintes proposés vérifient les conditions suivantes :

- les équations d'équilibre sont vérifiées en tout point;
- le critère de plasticité est vérifié partout;
- les conditions aux limites sont satisfaites;
- dans le cas d'un champ par blocs, les contraintes vérifient les conditions de continuité avec les blocs adjacents [1].

Lorsque ces conditions sont vérifiées, le champ est statiquement et plastiquement admissible [6].

La définition complète du champ permet de définir une courbe d'interaction effort tranchant-moment fléchissant, qui est une borne inférieure du problème [4].

4.3. CHAMP STATIQUEMENT ET PLASTIQUEMENT ADMISSIBLE CONTINU

On prend pour ce champ une contrainte σ_y , nulle partout. Les conditions aux limites sur cette contrainte sont donc vérifiées. En état plan de déformation, d'après la loi du potentiel plastique et le critère de Tresca, la contrainte σ_z est intermédiaire entre σ_x et σ_y . Ici, l'axe y est situé au droit de l'appui extrême gauche (fig. 1).

En tenant compte des équations d'équilibre, nous avons

$$\tau_{xy} = \tau(y) \quad \text{et} \quad \sigma_x = -x \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}.$$

La vérification du critère de Tresca dans la section critique (pour $x = a$) conduit aux solutions suivantes (pour y négatif) :

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= -k \sin \frac{e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e} \right) \\ \sigma_x &= 2k \frac{x}{a} \cos \frac{e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e} \right) \end{aligned} \right\} \frac{e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e} \right) \leq \frac{\pi}{2} \quad (20)$$

et

$$\tau_{xy} = -k, \quad \sigma_x = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e} \right) > \frac{\pi}{2}.$$

L'effort tranchant et le moment fléchissant sont alors déterminés par intégration dans la section considérée :

$$P = -2 \int_{-e/2}^0 \tau_{xy} dy, \quad M = 2 \int_{-e/2}^0 \sigma_x y dy$$

Les résultats sont rassemblés à la figure 7.

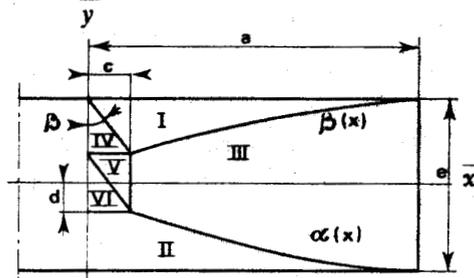


Fig. 14

4.4. CHAMP PAR BLOCS SYMÉTRIQUES

Ce type de champ permet de tenir compte d'une répartition intuitive des contraintes. Les zones plastifiées sont rassemblées au voisinage de la section critique et dans les parties inférieures et supérieures de la plaque (fig. 14).

Les contraintes sont constantes dans les blocs I, II, IV, V et VI.

Dans les blocs I et II, les contraintes sont choisies pour satisfaire les conditions aux limites. Ainsi

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

et

$$\sigma_x = -2k \quad \text{pour le bloc I,} \quad \sigma_x = 2k \quad \text{pour le bloc II.}$$

Et, pour simplifier, nous écrirons :

$$\sigma_x = -1 \quad \text{pour le bloc I,} \quad \sigma_x = +1 \quad \text{pour le bloc II.}$$

Dans tous les autres blocs, les contraintes sont définies à partir des conditions aux limites, des équations d'équilibre et du critère de plasticité.

Nous choisissons pour le bloc III :

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -\tau'(x)y + \sigma(x), \quad \tau_{xy} = \tau(x). \quad (22)$$

Soient $\beta(x)$ et $\alpha(x)$ les frontières entre les blocs I et II et entre les blocs II et III. Les conditions de continuité des contraintes normales et des contraintes tangentielles à la frontière [1] donnent

$$\sigma_y = \beta'^2(x), \quad \tau_x = \beta'(x); \quad (23)$$

et, par symétrie,

$$\sigma_y = -\alpha'^2(x), \quad \tau_x = -\alpha'(x).$$

L'équation de la frontière $\beta(x)$ entre les blocs I et III est, compte tenu des conditions aux limites,

$$x = c, \quad \beta = d,$$

$$x = a, \quad \beta = \frac{e}{2},$$

$$\beta(x) = -\alpha(x) = \frac{\sqrt{(e^2 - 4d^2)x + 4ad^2 - ce^2}}{4(a-c)}.$$

Les conditions aux limites entre les blocs I et II IV et V, V et VI, III et V et l'application du critère de plasticité dans chaque bloc permettent de définir complètement l'état de contraintes dans chacun de ces blocs.

Soient

$$A = \sigma_x + \sigma_y, \quad B = \sigma_x - \sigma_y, \quad C = \tau_{xy},$$

les contraintes dans le bloc IV.

La continuité entre le bloc IV et le bloc I donne

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2C}{B+1} = t.$$

Le critère de plasticité s'écrit :

$$B^2 + 4C^2 = 1.$$

Il vient :

$$B = \frac{-t^2 + 1}{t^2 + 1}, \quad C = \frac{t}{t^2 + 1}, \quad A = -1 - (B+1) \cos 2\beta - 2C \sin 2\beta.$$

Dans le bloc V, nous avons

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = \frac{A-B}{2}, \quad \tau_{xy} = C.$$

Dans le bloc VI :

$$\sigma_x = -1 - \frac{A+B}{2}, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

Le choix de l'angle β est fixé par la condition de plasticité dans le bloc III :

$$\sigma_y^2 + 4\tau_{xy}^2 \leq 1.$$

Il vient :

$$\beta'^4 + 4\beta'^2 - 1 \leq 0,$$

soit

$$\beta' \leq 0,486 \quad \text{et} \quad \tau(c) \leq 0,486.$$

Dans le bloc V, la condition de plasticité est

$$\left(\frac{A-B}{2}\right)^2 + 4C^2 = 1.$$

Compte tenu des valeurs A, B et C, l'angle β optimum est

$$\beta = 0,56079.$$

On en déduit l'état des contraintes dans chaque bloc :

$\sigma_x = -1,$	$\sigma_y = \tau_{xy} = 0,$	bloc I;	
$\sigma_x = 1,$	$\sigma_y = \tau_{xy} = 0,$	» II;	
$\sigma_x = 0,$	$\tau_{xy} = \tau(x),$	$\sigma_y = -\tau'(x)y,$	bloc III;
$\sigma_x = -1,24568,$	$\tau_{xy} = 0,39118,$	$\sigma_y = -0,62284,$	» IV;
$\sigma_x = 0,$	$\tau_{xy} = 0,39118,$	$\sigma_y = -0,62284,$	» V;
$\sigma_x = 0,24568,$	$\tau_{xy} = 0,$	$\sigma_y = 0,$	» VI.

Les efforts et moments sont donnés par

$$\frac{P}{ke} = 2\tau(a) \quad \text{avec} \quad \tau(a) = \beta'(a),$$

$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{P}{ke} \left(\frac{2a}{e}\right).$$

Les résultats sont reportés à la figure 7.

4.5. CHAMP PAR BLOCS ASYMÉTRIQUES

Nous considérons un champ constitué par six blocs numérotés I, II, III, IV, V et VI. L'axe x passe par le milieu de la frontière entre III et V et ne coïncide plus avec la trace du plan moyen (fig. 15).

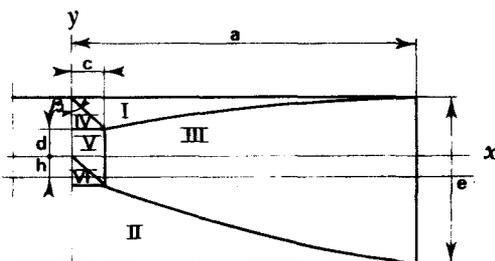


Fig. 15

Les contraintes dans les blocs I et II sont toujours :

$$\begin{aligned} \sigma_x = -1, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad & \text{bloc I;} \\ \sigma_x = +1, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad & \text{» II.} \end{aligned}$$

Les contraintes dans le bloc III sont définies de façon à améliorer le modèle précédent.

Pour σ_x nous choisissons

$$\sigma_x = \sigma(c)(1 - \cos \gamma) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\pi(x-a)}{a-c},$$

de façon à satisfaire les conditions aux limites.

Les conditions d'équilibre donnent

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -\frac{\pi}{a-c} \sigma(c) y \sin \gamma + \tau(x), \\ \sigma_y &= +\frac{\pi^2}{(a-c)^2} \sigma(c) \frac{y^2}{2} \cos \gamma - y \tau'(x) + \sigma(x). \end{aligned} \tag{24}$$

Les conditions aux limites entre les blocs I et III et II et III donnent

$$\beta'(x) = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x + 1}, \quad \beta'^2(x) = \frac{\sigma_y}{\sigma_x + 1}$$

et

$$\alpha'(x) = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - 1}, \quad \alpha'^2(x) = \frac{\sigma_y}{\sigma_x - 1}. \tag{25}$$

Les frontières entre les blocs sont définies à partir de ces relations :

$$\beta = \sqrt{\frac{1-\sigma_x}{1+\sigma_x} \sqrt{\frac{e^2}{4} - 2\tau(c)d(a-x) - k}},$$

$$\bar{\alpha} = -\sqrt{\frac{1+\sigma_x}{1-\sigma_x} \sqrt{\frac{e^2}{4} - 2\tau(c)d(a-x) - k}}$$

et

$$(d+k)^2 = \frac{1-\sigma_x}{1+\sigma_x} \left[\frac{e^2}{4} - 2\tau(c)d(a-c) \right],$$

$$(d-k)^2 = \frac{1+\sigma_x}{1-\sigma_x} \left[\frac{e^2}{4} - 2\tau(c)d(a-c) \right].$$

Les conditions aux limites entre les blocs I et IV et entre les blocs IV et V conduisent aux relations obtenues pour le champ symétrique.

La valeur optimale de β sera obtenue à partir du critère de plasticité appliqué dans le bloc III.

Son expression est

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \leq 1.$$

Compte tenu des résultats précédents la valeur optimale de β est

$$\beta = 0,52360.$$

Ce résultat est identique à celui obtenu par Shield [20] dans un problème de poinçonnement :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = -0,25 \\ \tau_{xy} = 0,43301 \end{array} \right\} \text{ pour } x = c.$$

L'état des contraintes dans chaque bloc est donc :

$$\begin{array}{ll} \sigma_x = -1, & \sigma_y = \tau_{xy} = 0, & \text{bloc I;} \\ \sigma_x = 1, & \sigma_y = \tau_{xy} = 0, & \text{» II;} \\ \sigma_x = -\frac{1}{8}(1 - \cos \gamma), & \gamma = \frac{\pi(x-a)}{a-c}; & \\ \tau_{xy} = \frac{\pi}{8(a-c)} y \sin \gamma + \tau(x), & & \text{bloc III;} \\ \sigma_y = -\frac{12}{16(a-c)^2} y^2 \cos \gamma - \tau'(x) + \sigma(x); & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{5}{4}, \quad \tau_{xy} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \sigma_y = -\frac{3}{4}, && \text{bloc IV;} \\ \sigma_x &= -\frac{1}{4}, \quad \tau_{xy} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \sigma_y = -\frac{3}{4}, && \text{» V;} \\ \sigma_x &= 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = 0, && \text{» VI.} \end{aligned}$$

Les blocs I, II, IV et V sont plastiques; le bloc VI est libre de toute contrainte; le bloc III est rigide.

Avec les valeurs précédentes, il vient :

$$\frac{d}{e} = \frac{1}{25} \left[-\frac{12}{\sqrt{3}} \left(a - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) + \sqrt{\frac{144}{3} \left(\frac{a}{e} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^2 + 100} \right].$$

Les efforts et moments transmis par ce champ sont

$$\frac{P}{ke} = \sqrt{3} \frac{d}{e}, \quad \frac{2M}{ke^2} = \frac{P}{ke} \left(\frac{2a}{e} \right).$$

Les résultats sont reportés à la figure 7.

4.6. COMPARAISON DES RÉSULTATS

Le champ continu est excellent pour des valeurs de P/ke supérieures à 0,3. Par contre, les champs par blocs sont meilleurs pour les valeurs de P/ke comprises entre 0 et 0,3. Le champ par blocs symétriques est lui-même très légèrement meilleur que le champ par blocs asymétrique pour des valeurs de P/ke comprises entre 0 et 0,14 (fig. 7).

Les champs par blocs doivent pouvoir être améliorés en considérant une géométrie des blocs variable permettant d'optimiser pour chaque cas la valeur de la contrainte $\tau(c)$. L'utilisation d'un moyen de calcul important est nécessaire pour résoudre ce problème.

Les solutions cinématiques et statiques présentées ici permettent néanmoins de situer la valeur exacte du moment fléchissant pour une valeur de l'effort tranchant donné à moins de 5% près.

5. Vérification expérimentale

Les expériences effectuées au laboratoire sur des aciers au carbone convenablement recuits, pour des plaques d'épaisseur comprise entre 5

et 50 mm et pour des valeurs de $2 a/e$ supérieures ou égales à 1, ont permis de vérifier avec une très bonne précision les courbes d'interaction obtenues.

La quasi-totalité des résultats expérimentaux est comprise dans la surface limitée par les bornes inférieures et supérieures théoriques de la figure 7.

De plus, une attaque au réactif de Fry, qui permet de révéler les zones plastifiées, a confirmé la forme choisie pour les champs cinématiquement admissibles asymétriques dans divers cas de chargement. On peut donc estimer que ces champs sont une très bonne approche de la réalité [3], [17], [18].

6. Conclusion

Les champs cinématiquement admissibles et les champs statiquement admissibles étudiés permettent d'obtenir avec une bonne précision la courbe d'interaction de l'effort tranchant sur le moment fléchissant.

Les résultats théoriques sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux. Si, pour les poutres, les résultats théoriques et expérimentaux sont très nombreux, bien des domaines restent inexplorés dans le comportement limite des plaques et des coques.

L'étude expérimentale réalisée ici montre qu'elle est capable de nous aider à formuler des champs de vitesse de déformation de bonne qualité.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HILL R., *The mathematical theory of plasticity*, Oxford Clarendon Press, 1950
- [2] HODGE PH., *Plastic analysis of structures*, Mac Graw Hill Book Company, 1959.
- [3] JAOUËL R., *Étude de la plasticité et application aux matériaux*, Dunod, Paris, 1965.
- [4] JOHNSON W. et MELLOR P. B., *Plasticity for mechanical engineers*, Van Nostrand Company, 1962.
- [5] JOHNSON W., SOWERBY R. et HODDOW J. B., *Plane-strain slip lines fields*, Edward Arnold, 1970.
- [6] MANDEL J., *Cours de mécanique des solides*, École Polytechnique, 1958.
- [7] CH. MASSONNET et SAVE M., *Calcul plastique des constructions*, Centre Belgo-Luxembourgeois, 1963.
- [8] NADAI A., *Theory of flow and fractures of solids*, Mac Graw Hill Book Company, 1950.
- [9] PRAGER W. et HODGE PH., *Theory of perfectly plastic solids*, John Wiley, 1951.
- [10] THOMSEN E., YANG C. et KOBAYASHI S., *Mechanics of plastic deformation in metal processing*, Mac Millan Company, 1965.
- [11] ALEXANDER J. M. et KOMOLY T. J., *On the yielding of a rigid plastic bar with an izod notch (J. Mech. Phys. Solids, vol. 10, 1962, p. 265-275).*
- [12] BAQUE P., D'ESCATHA Y., FELDER E. et HYAFIL J., *Théorie de la plasticité, méthodes de l'Ingénieur. Lignes de glissement*. École des Mines, Paris, 1972.
- [13] BISHOP J. F., *On the complete solution to problems of deformation of a plastic rigid material (J. Mech. Phys. Solids, vol. 2, 1953, p. 43-56).*
- [14] DRÜKER D. C., *The effect of shear on the plastic bending of beams (J. Appl. Mech., 1956, p. 509-514).*
- [15] GREEN A. P., *A theory of the plastic yielding due to bending of cantilevers and beams (J. Mech. Phys. Solids, vol. 3, 1954, p. 1 et 143-155).*
- [16] HODGE J. et BROOKLIN N. Y., *Interaction curves for shear and bending of plastic beams (J. Appl. Mech., 1957, p. 453-456).*
- [17] LANCE R. et ONAT E., *A comparison of experiments and theory in the plastic bending of circular plates (J. Mech. Phys. Solids, vol. 10, 1962, p. 301-311).*
- [18] LÜDERS, *Demonstrating the elasticity of iron and steel beam and observing the molecular slip when bending this bar (Dinglers Journal, vol. 155, 1860, p. 18-36).*
- [19] OUDIN J., *Cours de résistance des structures*, ICAM, Lille, 1969.
- [20] SHIELD R. T., *The application of limit analysis to punch indentation problems (J. Appl. Mech., 1953, p. 453-460).*
- [21] SHIELD et ONAT E. T., *The influence of shearing force on the plastic bending of wide beams (Proc. SD. US. Cong. Appl. Mech., 1954, p. 535-537).*

II

CONTRIBUTION

A L'ETUDE DU COMPORTEMENT

LIMITE DES PLAQUES RECTANGULAIRES

ENCASTREES EN DEFORMATION PLANE

SOMMAIRE

=====

La détermination de la charge limite, en déformation plane, de plaques rectangulaires encastrées sur deux bords opposés est faite à partir de champs de vitesses licites et de champs de contraintes licites.

Le critère d'écoulement de TRESCA est utilisé en association avec la loi du potentiel plastique.

Les champs de vitesses sont constitués par des réseaux de lignes de glissement ; les champs de contraintes sont, soit continus, soit constitués par des blocs.

La charge limite théorique est comparée à la charge limite expérimentale de plaques en acier à faible teneur en carbone.

T A B L E D E S M A T I E R E S

= = = = = = = = = = = = = = = = =

	Page
1. INTRODUCTION.	19
2. CHAMPS CINEMATIQUEMENT ET PLASTIQUEMENT ADMISSIBLES.	19
2.1. Types d'encastrement envisagés.	19
2.2. Champs cinématiquement et plastiquement admissibles symétriques.	19
2.2.1. Description générale des réseaux.	19
2.2.2. Etude des réseaux N° 3.	19
2.2.3. Etude des réseaux N° 2.	27
2.2.4. Etude des réseaux N° 4.	28
2.2.5. Valeurs successives des dimensions des réseaux, des efforts et moments transmis.	29
2.3. Champs cinématiquement et plastiquement admissibles asymétriques à deux points singuliers.	37
2.3.1. Introduction.	37
2.3.2. Description générale des réseaux.	37
2.3.3. Etude des réseaux N° 3.	37
2.3.4. Etude des réseaux N° 2.	49
2.3.5. Etude des réseaux N° 4.	52
2.3.6. Etude des réseaux N° 5.	57
2.3.7. Etude des réseaux N° 6.	59
2.3.8. Valeurs successives des efforts et moments transmis.	61
2.4. Champs cinématiquement et plastiquement admissibles asymétriques à trois points singuliers.	66
2.4.1. Introduction.	66
2.4.2. Description générale des réseaux.	66
2.4.3. Etude des réseaux N° 4.	68
2.4.4. Etude des réseaux N° 3.	76

	Page
2.4.5. Etude des réseaux N° 2.	79
2.4.6. Etude des réseaux N° 5.	82
2.4.7. Etude des réseaux N° 6.	86
2.4.8. Etude des réseaux N° 7.	88
2.4.9. Etude des réseaux N° 8.	90
2.4.10. Etude des réseaux N° 9.	93
2.4.11. Valeurs successives des efforts et moments transmis.	96
3. CHAMPS STATIQUEMENT ET PLASTIQUEMENT ADMISSIBLES.	100
3.1. Introduction.	100
3.2. Champ statiquement et plastiquement admissible continu.	100
3.2.1. Constitution du champ.	100
3.2.2. Efforts transmis par le champ.	102
3.2.3. Moments transmis par le champ .	104
3.2.4. Valeurs successives des efforts et moments transmis.	104
3.3. Champ statiquement et plastiquement admissible à zones symétriques.	108
3.3.1. Constitution du champ.	108
3.3.2. Contraintes dans la zone centrale III.	109
3.3.3. Conditions aux limites entre les zones I et III, II et III, VIII et III, IX et III.	111
3.3.4. Détermination des frontières de la zone III.	114
3.3.5. Conditions aux limites entre les zones I et IV, III et V, IV et VII, V et VI.	116
3.3.6. Détermination de l'angle β_0 .	118
3.3.7. Définition complète des contraintes.	119
3.3.8. Détermination des efforts et moments transmis par le champ.	121
3.3.9. Dimensions des zones et valeurs successives des efforts et moments transmis.	123
3.4. Champ statiquement et plastiquement admissible à zones asymétriques.	127
3.4.1. Description du champ.	127
3.4.2. Contraintes dans la zone centrale.	127
3.4.3. Conditions aux limites entre les zones I et III, II et III, VIII et VII, IX et VII.	130

	Page
3.4.4. Détermination des frontières de la zone III.	132
3.4.5. Conditions aux limites entre les zones I et IV, IV et V.	137
3.4.6. Conditions de plasticité dans la zone III.	140
3.4.7. Valeur optimale de l'angle β_0 .	141
3.4.8. Définition complète des contraintes du champ.	144
3.4.9. Détermination des efforts et moments transmis par le champ.	145
. 3.5. Conclusion.	149
4. RESULTATS EXPERIMENTAUX.	155
4.1. Introduction.	155
4.2. Préparation des plaques d'essais	155
4.3. Essais.	155
4.4. Détermination de la charge limite.	159
5. CONCLUSION.	164

1 - INTRODUCTION

Nous nous proposons d'étendre les résultats obtenus au chapitre I au cas des plaques encastrees sur deux bords, dans les memes conditions de chargement, en état plan de déformation (Figure 16). Cet état est obtenu dans les zones éloignées des bords libres pour des rapports largeur-épaisseur élevés.

2 - CHAMPS CINEMATIQUEMENT ET PLASTIQUEMENT ADMISSIBLES

2.1. - Types d'encastremets envisagés.

Nous examinerons successivement deux cas selon la nature des encastremets.

Le premier cas concerne les encastremets à un degré de liberté qui permettent un déplacement horizontal des parties encastrees.

Le second cas concerne les encastremets parfaits qui ne permettent aucun déplacement des parties encastrees.

2.2. - Champs cinématiquement et plastiquement admissibles symétriques

2.2.1. - Description générale des réseaux.

Les réseaux proposés pour les plaques non encastrees peuvent être utilisés pour le cas où l'encastrement permet un déplacement horizontal de la plaque (Figure 6).

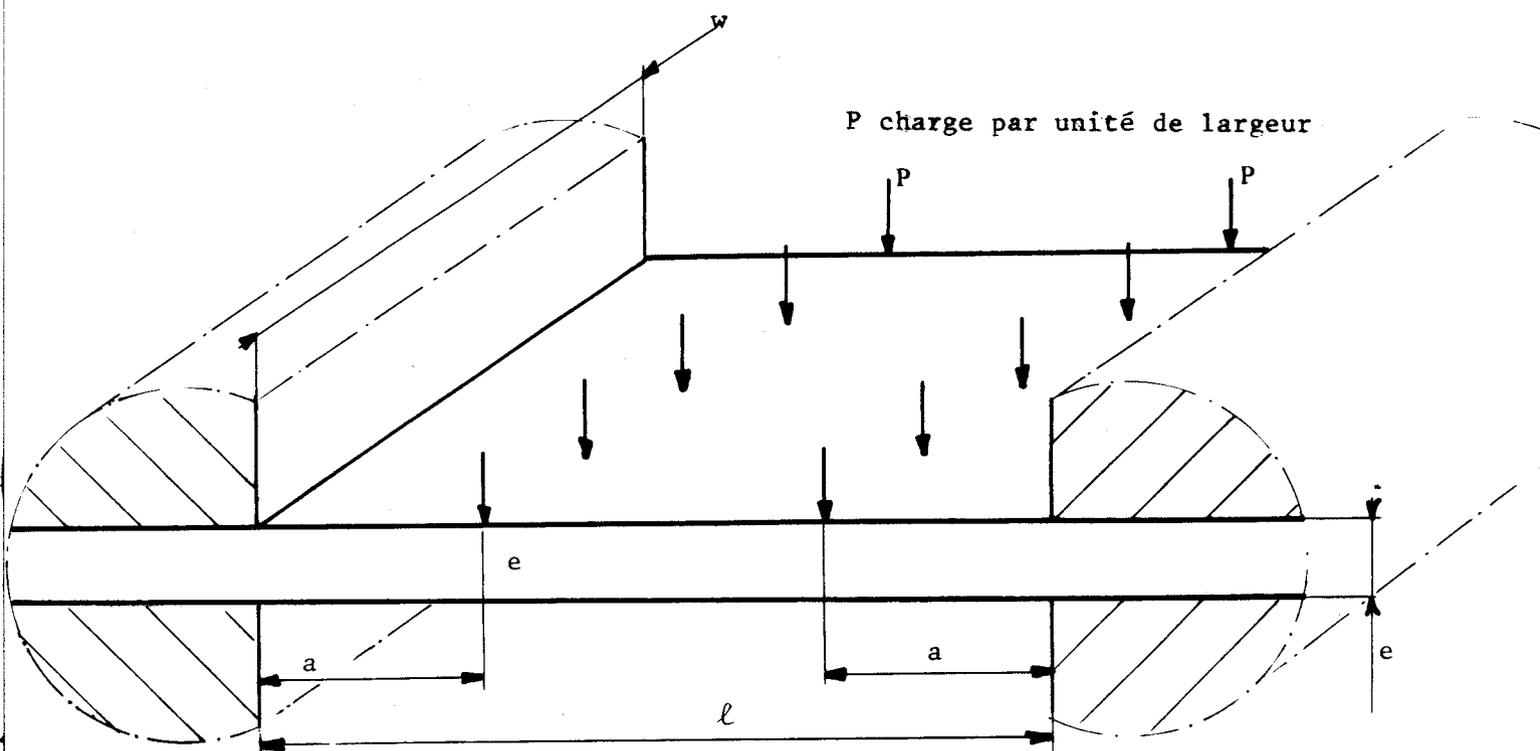
Les réseaux les plus généraux sont ceux du type N° 3 (Figure 2). L'un est situé au droit des charges, l'autre au droit des encastremets (Figure 17).

Selon le mode de chargement, les réseaux prennent les formes des types N° 1, N° 2 et N° 5 (Figures 4, 5 et 6).

2.2.2. - Etude des réseaux N° 3.

. Détermination des pressions.

Les conditions de pression (Figure 17) sont les suivantes :



- Figure 16 -

- Plaque encastrée sur deux bords -



et $p_{8'} = k$ k : limite d'écoulement du matériau en état
 $p_{5'} = -k$ de cisaillement pur

Au point O' , la pression est nulle car ces réseaux symétriques ne peuvent pas transmettre d'effort horizontal selon x . Ainsi, le long de la ligne β $2'3'$, nous avons les pressions suivantes :

$$p_{2'} - p_{O'} = 2k\left(-\frac{3\pi}{4} - \theta'_O + \pi\right)$$

soit $p_{2'} = k(1 + 2\theta'_O)$.

Cette condition fixe la valeur de l'angle θ'_O du réseau semi-homogène $1'2'7'$:

$$\theta'_O = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

ou

$$\boxed{\psi'_O = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}} \quad (26)$$

Les conditions de pression sont identiques par les réseaux situés au droit des encastremets.

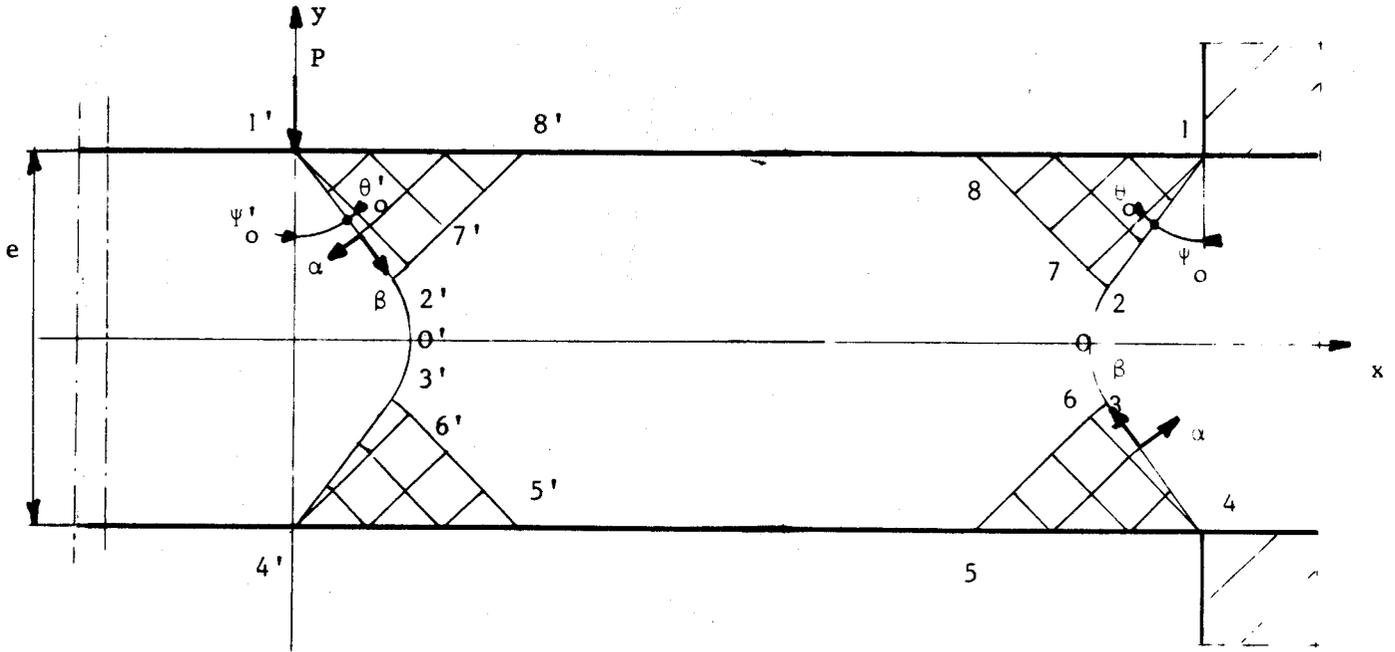
. Détermination des vitesses.

Considérons d'abord le réseau situé au droit de la charge (Figure 18).

Le long de la ligne β $1' 2' 3' 4'$, les vitesses sont égales à :

$$\begin{aligned} v_\alpha &= 0 \\ v_\beta &= -R \end{aligned} \quad (27)$$

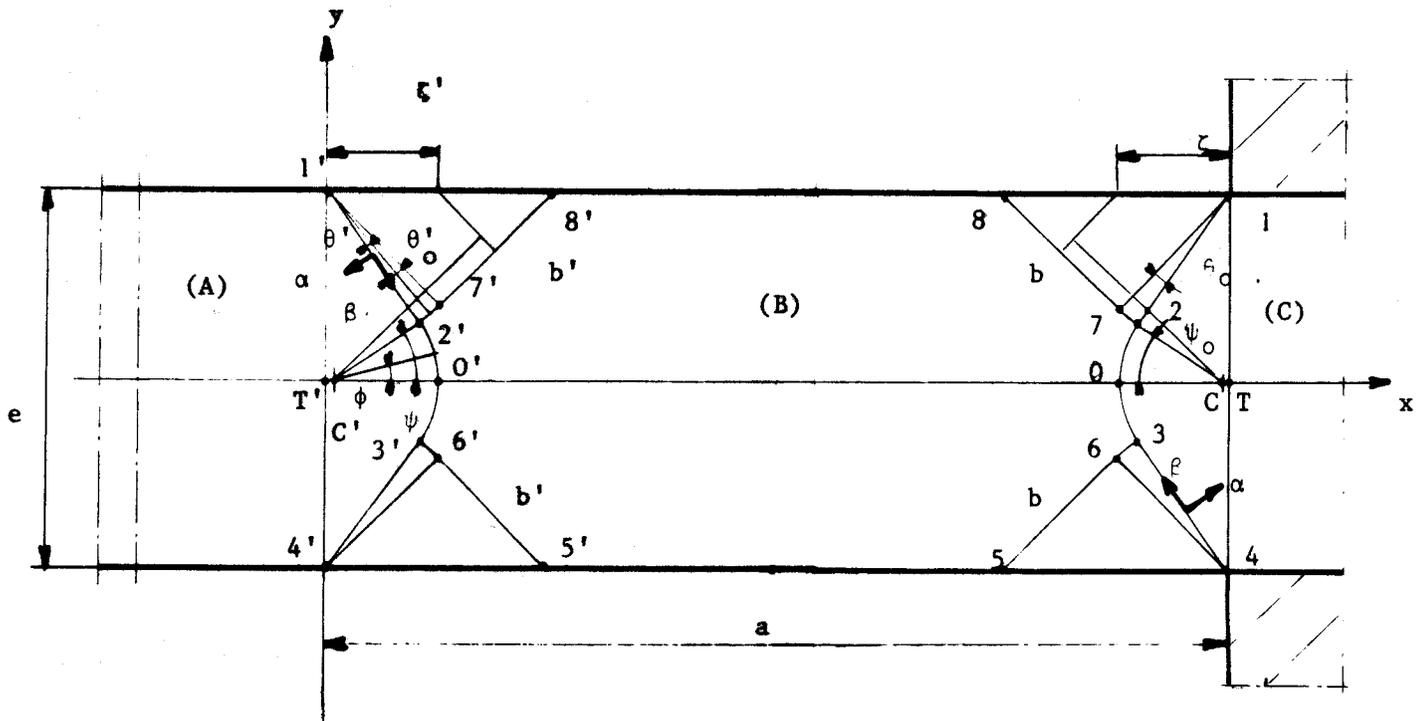
En effet, la partie **(A)** située à gauche de cette ligne ne se déplace pas dans la direction x et la partie **(B)** située à droite est



- Figure 17 -

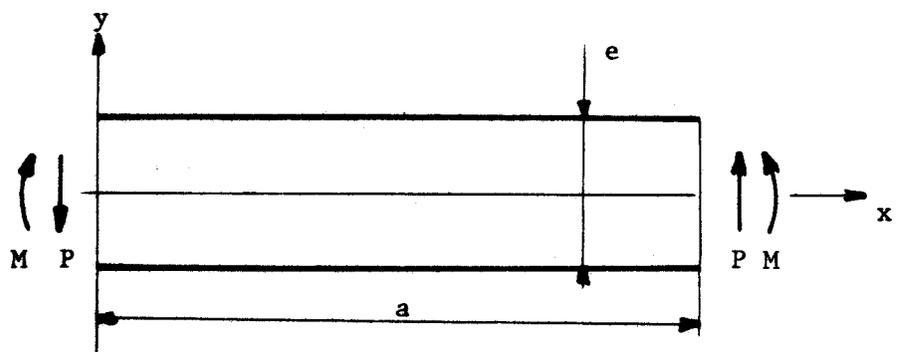
- Réseau N° 3 -





- Figure 18 -

- Réseau N° 3 -



- Figure 19 -

- Efforts et moments transmis par les réseaux -



animée d'un mouvement de rotation naissant autour du point C'. Nous prenons égale à l'unité la vitesse instantanée de rotation correspondante.

Dans le champ 1' 2' 7', les vitesses sont :

$$\begin{aligned} v_{\alpha} &= -R' \sin \theta' + b' \cos \theta' - b' \\ v_{\beta} &= -R' \cos \theta' - b' \sin \theta' \end{aligned} \quad (28)$$

et dans le champ homogène 1' 7' 8' :

$$\begin{aligned} v_{\alpha} &= -R' \sin \theta'_0 + b' \cos \theta'_0 - b' \\ v_{\beta} &= -R' \cos \theta'_0 - b' \sin \theta'_0 - \frac{\zeta'}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Pour les réseaux situés au droit des encastremets, les vitesses sont identiques à celles qui viennent d'être calculées.

Les réseaux sont cinématiquement admissibles puisque, en plus des résultats précédents, les centres instantanés de rotation C et C' des lignes 23 et 2'3' sont situés à mi-épaisseur (Figure 18).

. Puissance dissipée dans les réseaux.

Evaluons la puissance dissipée \dot{W} dans l'un des réseaux.

Dans le champ 1' 2' 7', nous avons :

$$\dot{W} = \int_0^{-\theta'_0} \int_0^{b'} \left(\frac{\partial v_{\beta}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial s_{\alpha}} + \frac{v_{\alpha}}{r} \right) r dr d\theta.$$

Soit :

$$\dot{W}_{1'2'7'} = k b'^2 \theta'_0 \quad (29)$$

Dans le champ 1'7'8' :

$$\dot{W} = \int_0^{\zeta'} \int_0^{b'} \left(\frac{\partial v_{\beta}}{\partial g'} - \frac{\partial \zeta'}{\partial s_{\alpha}} \right) db' d\zeta'$$

D'où :

$$\dot{W}_{1'7'8'} = k b'^2 \quad (30)$$

Aux frontières des réseaux, les puissances dissipées sont :

$$\dot{W}_{1'2'0'} = kR'(R'\Psi'_0 + b')$$

et

$$\dot{W}_{2'7'} = kb' [R'(1 - \cos \theta'_0) + b(\theta'_0 - \sin \theta'_0)] \quad (31)$$

$$\dot{W}_{7'8'} = kb' [R' \sin \theta'_0 + b'(1 - \cos \theta'_0)]$$

Des expressions analogues pour les autres régions (3'4'6' et 4'5'6') et pour l'autre réseau montrent que la puissance dissipée est partout positive.

Conditions géométriques.

Les relations de compatibilité géométrique des réseaux sont les suivantes :

$$\boxed{\frac{2R'}{e} \sin \Psi'_0 + \frac{2b'}{e} \operatorname{tg} \Psi'_0 = 1} \quad (32)$$

et

$$\frac{2R}{e} \sin \Psi_0 + \frac{2b}{e} \operatorname{tg} \Psi_0 = 1. \quad (33)$$

. Efforts transmis par les réseaux.

Les réseaux ne transmettent pas d'efforts horizontaux.

Les efforts verticaux transmis, à gauche de la ligne 1'2'3'4' par exemple, sont calculés comme suit.

Pour la ligne 1'2', il vient :

$$Y_{1'2'} = kb'(2\Psi'_0 \sin \Psi'_0 - \cos \Psi'_0)$$

et pour la ligne 2'0' :

$$Y_{2'0'} = kR'(\sin \Psi'_0 - 2\Psi'_0 \cos \Psi'_0)$$

L'effort total P transmis par unité de largeur de plaque est (Figure 19) :

$$P = -2(Y_{1'2'} + Y_{2'0'})$$

Soit :

$$\frac{P}{ke} = \frac{b'}{e} \left(4 \cos \Psi'_0 - \frac{4\Psi'^2_0}{\sin \Psi'_0} \right) + 2\Psi'_0 \cotg \Psi'_0 - 1 \quad (34)$$

Les efforts verticaux transmis à droite de la ligne 1 2 3 4 sont égaux à ceux qui viennent d'être calculés.

. Moments transmis par les réseaux.

Les moments transmis à gauche de la ligne 1'2'3'4' sont calculés par rapport au point T', intersection du support de la charge P avec le plan moyen de la plaque.

Pour la ligne 1'2', le moment transmis est :

$$M_{1'2'} = kb'(R' - C'T' \cos \psi'_0) + pb' \left(\frac{b'}{2} + C'T' \sin \psi'_0 \right)$$

et pour la ligne 2'0' :

$$M_{2'0'} = \int_0^{\psi'_0} k(R' - C'T' \cos \psi) R d\psi + \int_0^{\psi'_0} p \cdot C'T' \cdot \sin \psi \cdot R' \cdot d\psi$$

Le moment résultant M est, compte tenu du sens positif choisi (Figure 19) :

$$M = -2(M_{1'2'} + M_{2'0'})$$

Soit :

$$\frac{2M}{ke^2} = \left(\frac{4b'^2}{e^2} - \frac{4b'}{e} \cos \psi'_0 \right) \left(\cotg \psi'_0 - \frac{\psi'_0}{\sin^2 \psi'_0} \right) + \frac{\psi'_0}{\sin \psi'_0} + (1 - 2\psi'_0 \cotg \psi'_0) \cotg \psi'_0 \quad (35)$$

Les moments transmis à droite de la ligne 1 2 3 4 sont égaux à ceux transmis à gauche de la ligne 1'2'3'4' (Figures 18 et 19).

2.2.3. - Etude des réseaux N° 2.

Lorsque les lignes 2 3 et 2'3' disparaissent, nous nous trouvons en présence des réseaux N° 2 (Figure 20) ; $\frac{R}{e}$ est égal à zéro.

Les efforts et moments transmis à gauche de la ligne 1'2'3'4' ou à droite de la ligne 1 2 3 4 sont obtenus comme suit.

L'effort horizontal N est nul.

L'effort vertical P est :

$$\frac{P}{ke} = 1 - (1 + \frac{\pi}{2} - 2\Psi') \operatorname{tg} \Psi' \quad (36)$$

Le moment est :

$$\frac{2M}{ke^2} = \operatorname{tg} \Psi' + 2\Psi' (1 - \frac{1}{2 \cos^2 \Psi'}) \quad (37)$$

et l'angle Ψ' (ou Ψ) varie de 0 à $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ (valeur fixée à

$\Psi'_0 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ dans les réseaux N° 3).

2.2.4. - Etude des réseaux N° 4.

Les réseaux se réduisent à une ligne circulaire 2'3' ou 2 3 (Figure 21).

Dans ce cas $\frac{b'}{e}$ (ou $\frac{b}{e}$) est égal à zéro.

Les efforts et moments transmis à gauche de la ligne 1'4' (ou à droite de la ligne 1 4) sont les suivants :

$$\frac{P}{ke} = 2\Psi' \operatorname{cotg} \Psi' - 1 \quad (38)$$

et

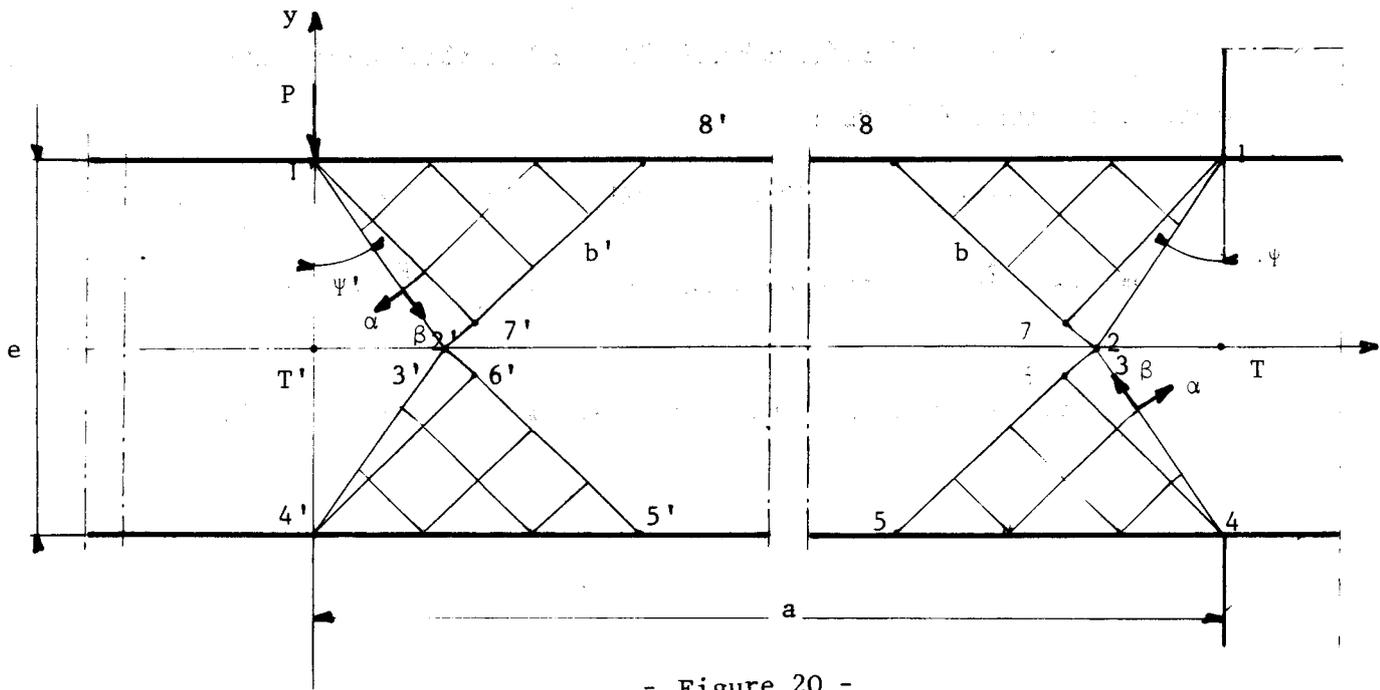
$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{\Psi'}{\sin^2 \Psi'} + (1 - 2\Psi' \operatorname{cotg} \Psi') \operatorname{cotg} \Psi' \quad (39)$$

L'angle ψ' (ou ψ) varie pour ce réseau de $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ à 0.

2.2.5. - Valeurs successives des dimensions des réseaux, des efforts et moments transmis.

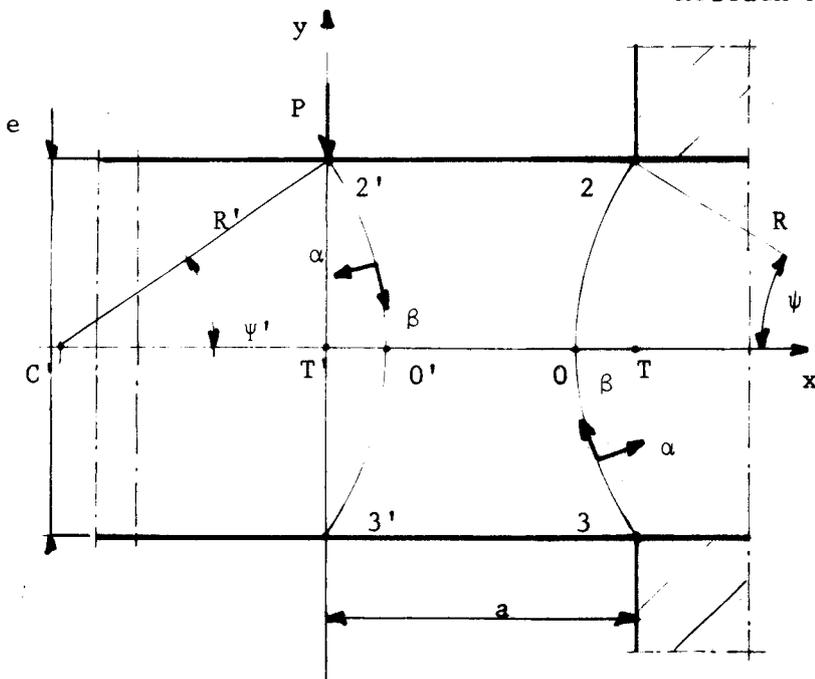
Le tableau 1 donne pour chaque réseau les efforts $\frac{P}{ke}$,
les moments $\frac{2M}{ke^2}$ et les dimensions réduites $\frac{b}{e}$, $\frac{R}{e}$ et $\frac{a}{e}$.

Ces valeurs sont obtenues à partir des relations (32) à (39).



- Figure 20 -

- Réseaux N° 2 -



- Figure 21 -

- Réseaux N° 4. -



De plus, nous avons la relation d'équilibre suivante:

$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{P}{ke} \times \frac{a}{e} \quad (40)$$

	$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$	$\frac{b}{e}$	$\frac{R}{e}$	$\frac{a}{e}$
N° 1	0,00000	1,00000	1,41421	0,00000	∞
N° 2	0,01885	1,01652	0,64586	0,00000	53,93980
	0,03756	1,03113	0,62462	0,00000	27,45211
N° 3	0,11897	1,08192	0,54975	0,10000	9,09374
	0,20039	1,11237	0,47487	0,20000	5,55108
	0,28180	1,12247	0,40000	0,30000	3,98322
	0,36321	1,11224	0,32513	0,40000	3,06221
	0,44463	1,08166	0,25025	0,50000	2,43274
	0,52604	1,03074	0,17538	0,60000	1,95944
	0,60745	0,95948	0,10050	0,70000	1,57952
	0,68887	0,86788	0,02563	0,80000	1,25987
	0,71673	0,83186	0,00000	0,83423	1,16063
N° 4	0,79969	0,70877	"	0,96815	0,88631
	0,86761	0,58233	"	1,16719	0,67119
	0,92108	0,45329	"	1,48796	0,49213
	0,96058	0,32232	"	2,08053	0,33555
	0,98641	0,19001	"	3,51580	0,19262
	0,99878	0,05693	"	11,71341	0,05699

- Tableau 1 -

- Champs cinématiquement et plastiquement admissibles symétriques -

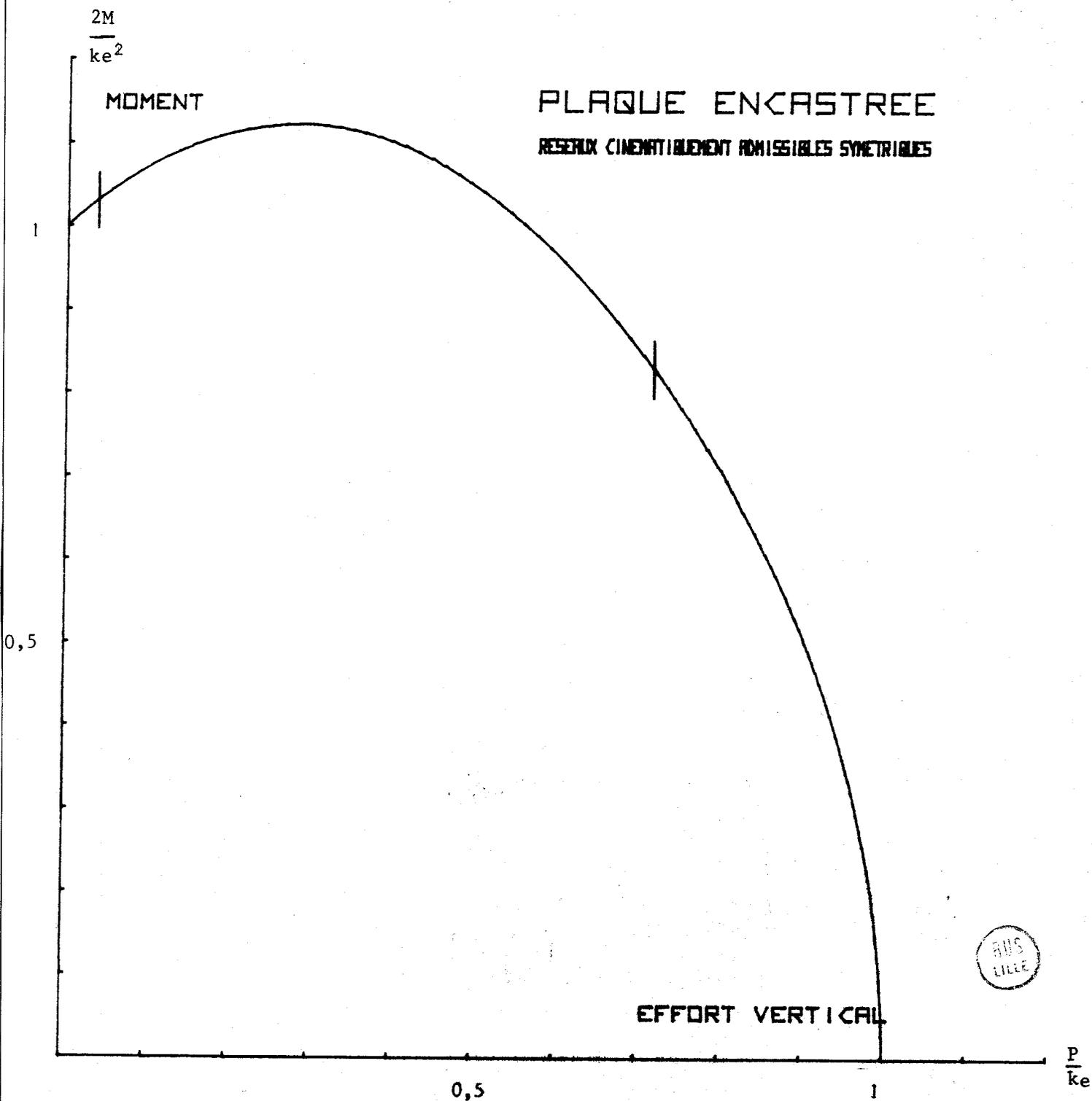
- Réseaux N° 1, 2, 3 et 4 -



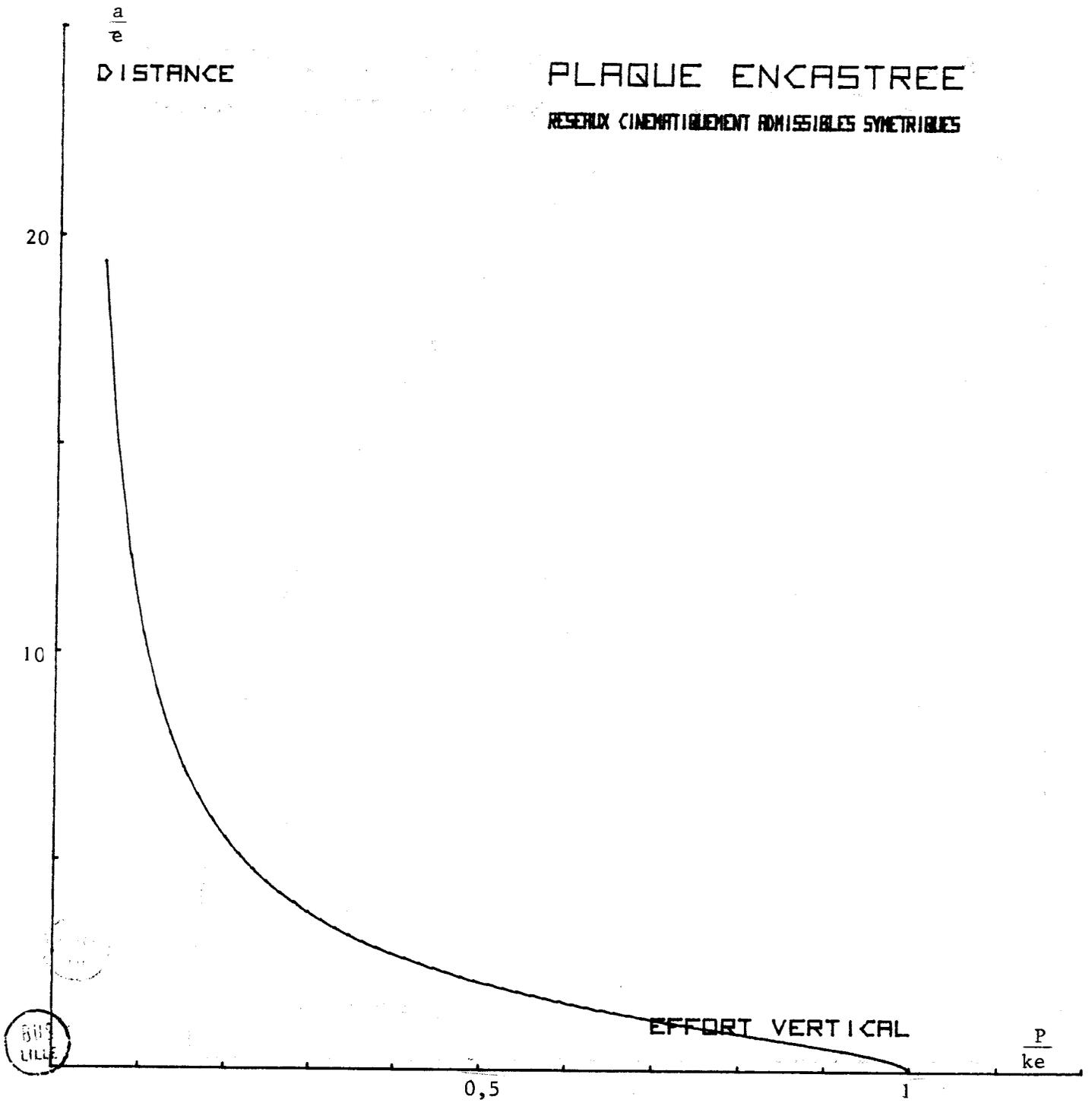
Les figures 22 et 23 représentent les fonctions

$\frac{2M}{ke^2} = f\left(\frac{P}{ke}\right)$ et $\frac{a}{e} = f\left(\frac{P}{ke}\right)$ pour les plaques rectangulaires encastrées sur deux bords.

La figure 24 donne les valeurs de $\frac{a}{e}$ obtenues pour les plaques appuyées sur deux bords (Figure 1) et la figure 25 établit la comparaison entre les deux cas.



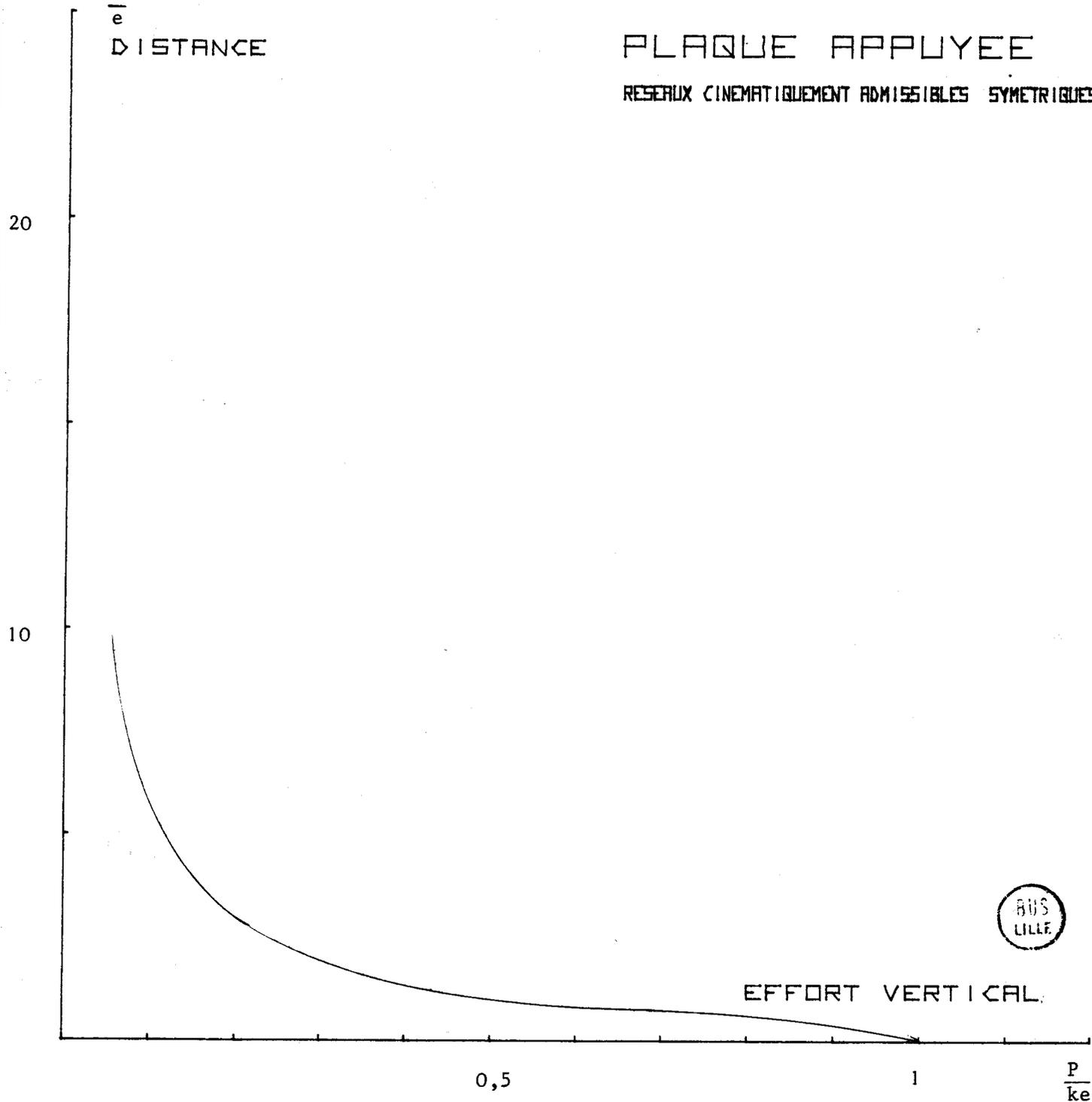
- Figure 22 -



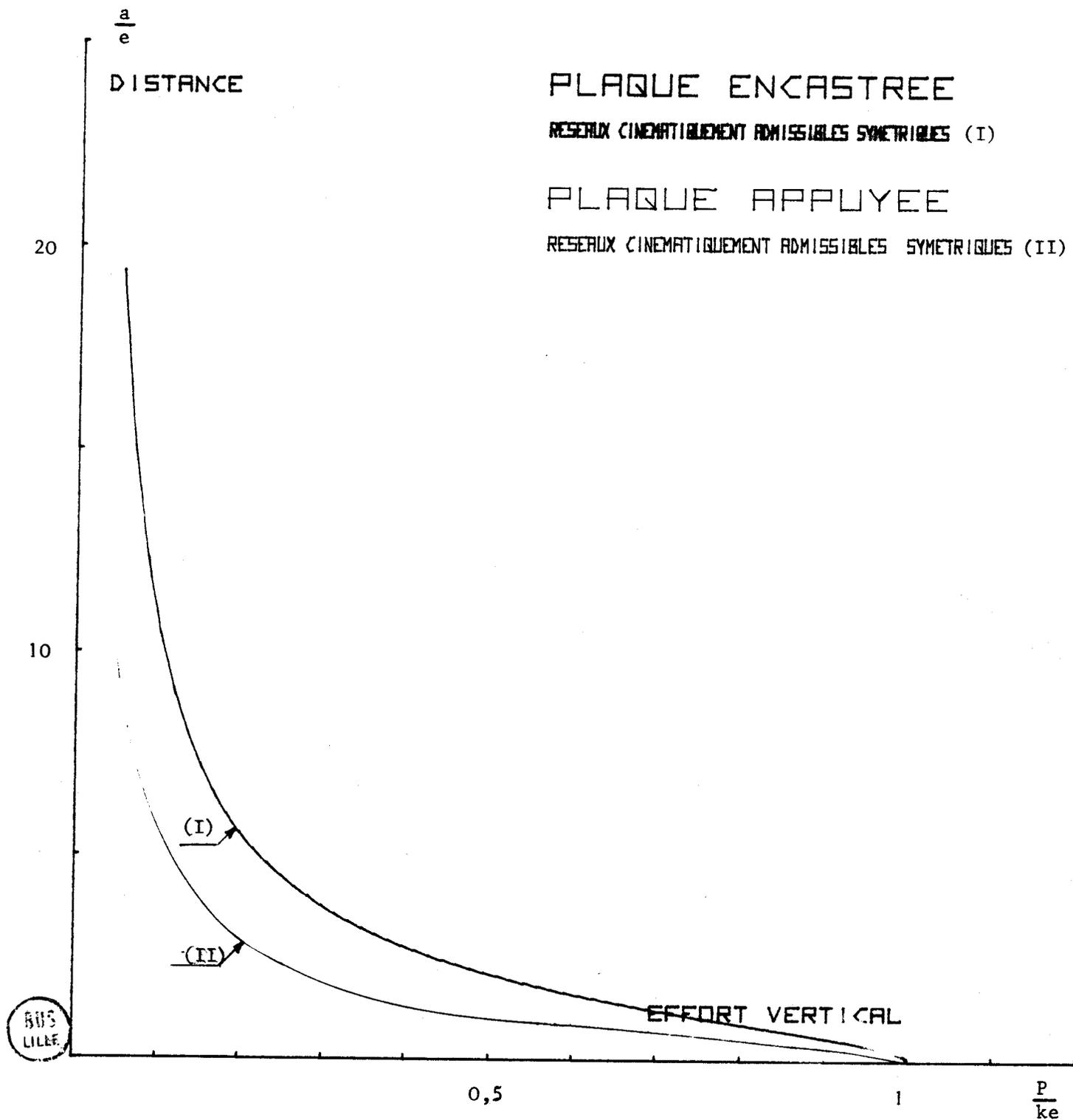
- Figure 23 -

$\frac{a}{e}$
DISTANCE

PLAQUE APPUYEE
RESERVOIR CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLES SYMETRIQUES



- Figure 24 -



- Figure 25 -

2.3. - Champs cinématiquement et plastiquement admissibles asymétriques à deux points singuliers.

2.3.1. - Introduction.

Nous considérons maintenant deux réseaux de lignes de glissement asymétriques à deux points singuliers de façon à comparer avec les résultats obtenus avec les réseaux symétriques.

2.3.2. - Description générale des réseaux.

Les réseaux proposés, situés l'un au droit de l'encastrement, l'autre au droit de la charge (Figure 26) comprennent, dans le cas le plus fréquent, des champs homogènes (1'7'8', 3'4'5', 1 2 8, 4 5 6), deux champs semi-homogènes (1'2'7' et 3 4 6) et deux lignes circulaires (2'3' et 2 3).

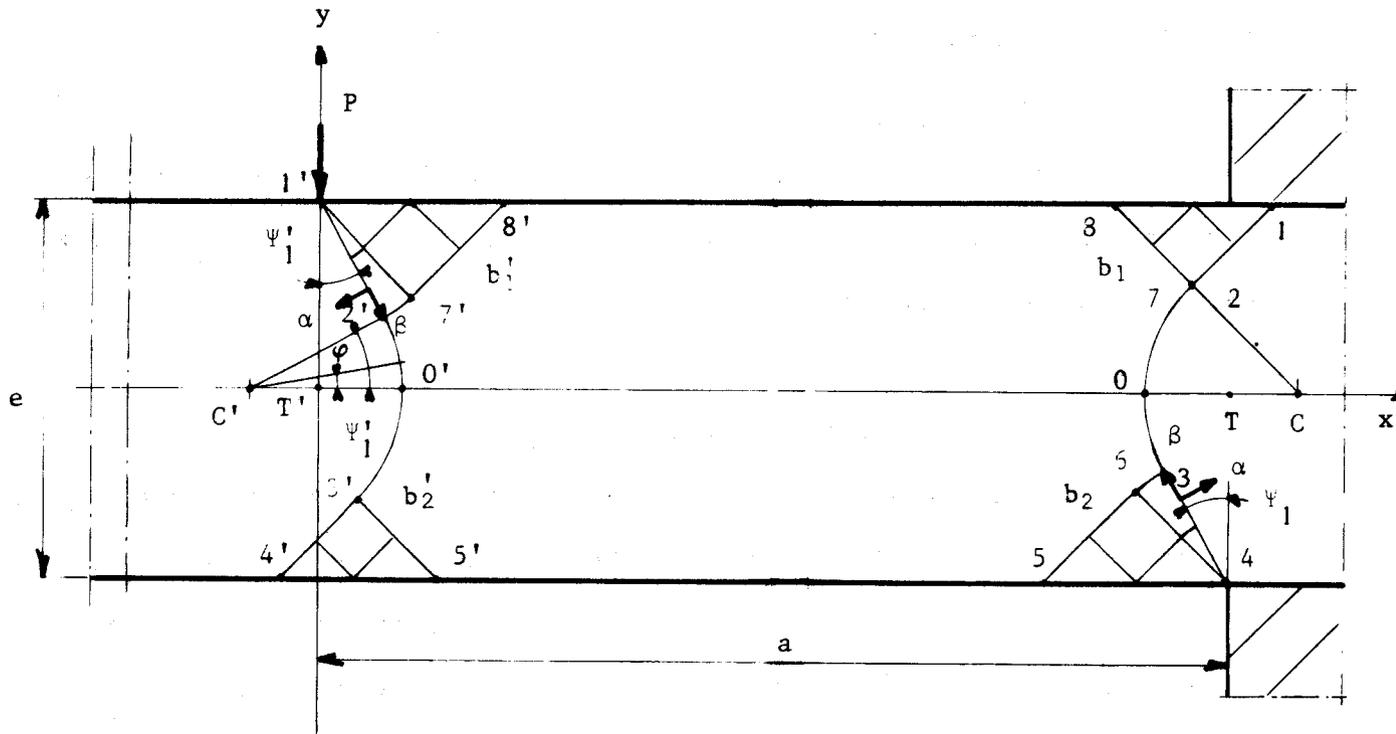
Selon le mode de chargement, les réseaux peuvent prendre les six formes suivantes :

- . Réseaux N° 1 : quatre champs homogènes (Figure 27).
- . Réseaux N° 2 : quatre champs homogènes, deux champs semi-homogènes (Figure 28).
- . Réseaux N° 3 : deux champs homogènes, deux champs semi-homogènes, deux lignes circulaires (Figure 26).
- . Réseaux N° 4 : deux champs homogènes, deux champs semi-homogènes, quatre lignes circulaires (Figure 29).
- . Réseaux N° 5 : quatre lignes circulaires (Figure 30).
- . Réseaux N° 6 : deux lignes droites et deux lignes circulaires (Figure 31).

2.3.3. - Etude des réseaux N° 3.

. Détermination des pressions.

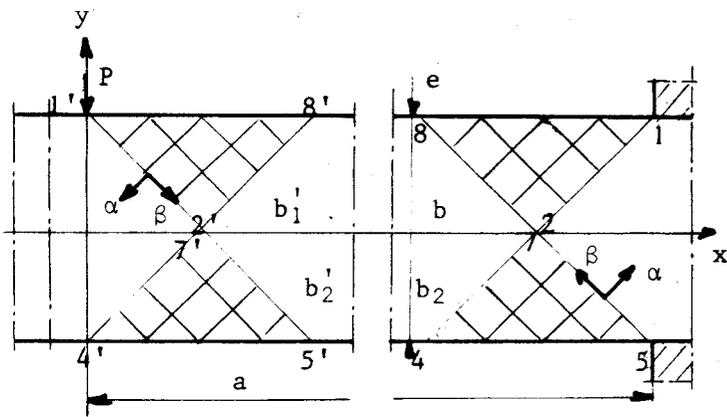
Considérons d'abord le réseau situé au droit de la charge (Figure 26).



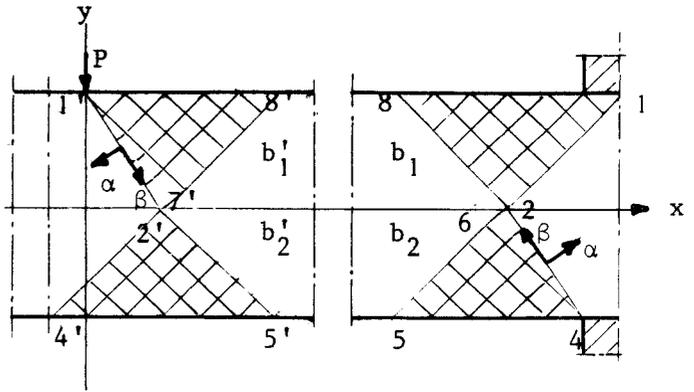
- Figure 26 -

- Réseaux N° 3 -

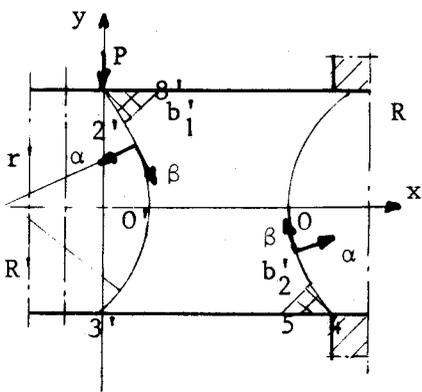




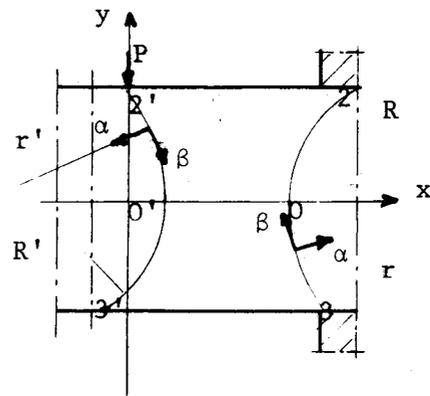
- Figure 27 -
- Réseaux N° 1 -



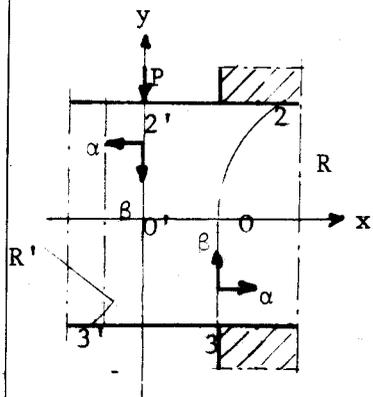
- Figure 28 -
- Réseaux N° 2 -



- Figure 29 -
- Réseaux N° 4 -



- Figure 30 -
- Réseaux N° 5 -



- Figure 31 -
- Réseaux N° 6 -



Les conditions de pression sont identiques à celles des réseaux symétriques avec :

$$p_{8'} = k$$

et

$$p_{5'} = -k$$

Soit ψ'_1 l'angle formé par la ligne 12 et la verticale ; la pression au point 2' est :

$$p_{2'} = k\left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi'_1\right)$$

et :

$$p_{3'} = -k$$

Le long de la ligne β 2'3', la variation des pressions est :

$$p_{2'} - p_{3'} = 2k\left(\psi'_1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

D'où :

$$k\left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi'_1 + 1\right) = 2k\left(\psi'_1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

Soit :

$$\boxed{\psi'_1 = \frac{1}{2}} \quad (41)$$

Dans le second réseau, les conditions sont identiques :

$$p_8 = -k$$

et :

$$p_5 = k$$

L'angle formé par la ligne 3 4 et la verticale vaut de la même

façon :

$$\boxed{\psi_2 = \frac{1}{2}} \quad (42)$$

. Détermination des vitesses.

Les conditions de vitesses sont identiques à celles des réseaux symétriques.

Le long de la ligne β , 1'2'3'4' (Figure 32), nous avons :

$$\begin{aligned} v_\alpha &= 0 \\ v_\beta &= -R \end{aligned} \quad (43)$$

Dans le champ semi-homogène 1'2'7', les vitesses sont :

$$\begin{aligned} v_\alpha &= -R' \sin \theta' + b' \cos \theta' - b' \\ v_\beta &= -R' \cos \theta' - b' \sin \theta' \end{aligned} \quad (44)$$

et dans 1'7'8' :

$$\begin{aligned} v_\alpha &= -R' \sin \theta'_1 + b' \cos \theta'_1 - b' \\ v_\beta &= -R' \cos \theta'_1 - b' \sin \theta'_1 - \frac{\xi'}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

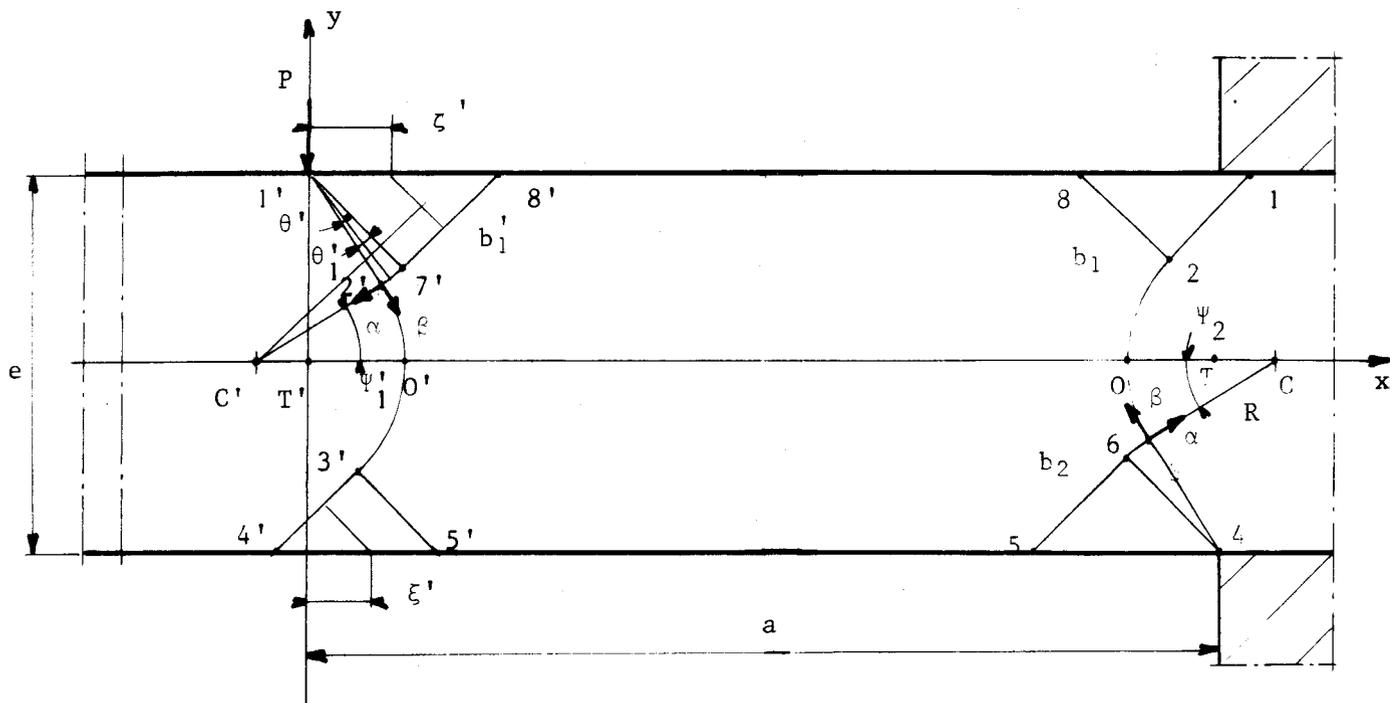
Dans le champ homogène 3'4'5', il vient :

$$\begin{aligned} v_\alpha &= 0 \\ v_\beta &= -R' - \frac{\xi'}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Pour les réseaux situés au droit des encastremets, les vitesses sont identiques à celles qui viennent d'être calculées.

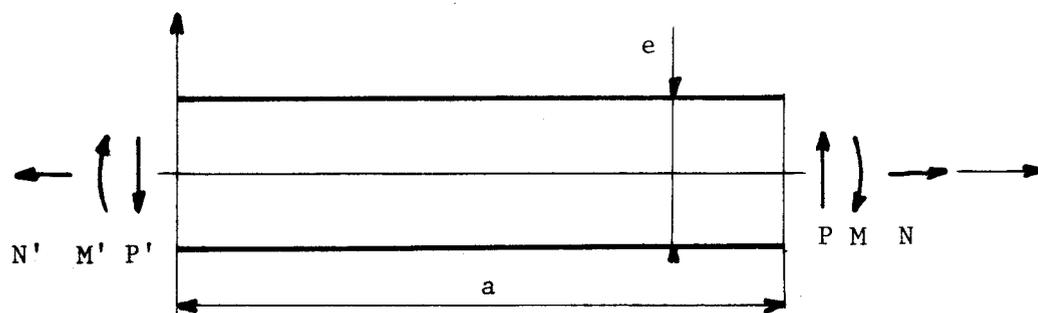
. Puissance dissipée.

La puissance dissipée dans ces réseaux, exprimée par des relations analogues aux relations (29), (30) et (31), est partout positive.



- Figure 32 -

- Réseaux N° 3 -



- Figure 33 -

- Efforts et moments transmis par les réseaux -



. Conditions géométriques.

Soit b'_1 la longueur de la ligne 7'8', b'_2 celle de la ligne 3'5',
 R' le rayon de la ligne 2'3'.

Nous avons la relation de compatibilité suivante :

$$\frac{b'_1}{e} \cos \psi'_1 + \frac{R'}{e} \left(\sin \psi'_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{b'_2}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \quad (45)$$

De même pour le second réseau, nous avons :

$$\frac{b_1}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{R}{e} \left(\sin \psi_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{b_2}{e} \cos \psi_2 = 1 \quad (46)$$

. Efforts transmis par les réseaux.

Chacun des réseaux transmettent des efforts horizontaux et des efforts verticaux.

Pour la ligne 1'2', l'effort horizontal est :

$$X_{1,2'} = k b'_1 \sin \psi'_1 + k b'_1 \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi'_1 \right) \cos \psi'_1$$

$$X_{1,2'} = k b'_1 \left(\sin \psi'_1 + \frac{\pi}{2} \cos \psi'_1 \right).$$

Pour la ligne 2'3', l'effort horizontal est :

$$X_{2,3'} = k R' \left(\cos \psi'_1 + \frac{\pi}{2} \sin \psi'_1 - \sqrt{2} \right)$$

Et pour 3'4' :

$$X_{3,4'} = -k b'_2 \sqrt{2}$$

La somme des efforts horizontaux peut se mettre sous la forme :

$$N = - X_{1'2'} - X_{2'3'} - X_{3'4'}$$

Soit:

$$\frac{N'}{ke} = - \frac{b_1'}{e} \left(\sin \Psi_1' + \frac{\pi}{2} \cos \Psi_1' \right) - \frac{R'}{e} \left(\cos \Psi_1' + \frac{\pi}{2} \sin \Psi_1' - \sqrt{2} \right) + \frac{b_2'}{e} \sqrt{2} \quad (47)$$

De la même façon pour le second réseau, il vient:

$$\frac{N'}{ke} = \frac{b_1}{e} \sqrt{2} - \frac{R}{e} \left(\cos \Psi_2 + \frac{\pi}{2} \sin \Psi_2 - \sqrt{2} \right) - \frac{b_2}{e} \left(\sin \Psi_2 + \frac{\pi}{2} \cos \Psi_2 \right) \quad (48)$$

L'effort horizontal transmis par chaque réseau est identique par condition de compatibilité statique (Figure 33).

Les efforts verticaux sont les suivants :

$$Y_{1'2'} = -k b_1' \cos \Psi_1' + k b_1' \frac{\pi}{2} \sin \Psi_1'$$

et

$$Y_{2'3'} = k R' \left(\frac{\pi}{2} \cos \Psi_1' - \sin \Psi_1' \right)$$

$$Y_{3'4'} = 0$$

La somme des efforts verticaux est :

$$P' = - Y_{1'2'} - Y_{2'3'} - Y_{3'4'}$$

$$\frac{P'}{ke} = \frac{b_1'}{e} \left[\cos \Psi_1' - \frac{\pi}{2} \sin \Psi_1' \right] + \frac{R'}{e} \left[\frac{\pi}{2} \cos \Psi_1' - \sin \Psi_1' \right] \quad (49)$$

Pour le second réseau, nous trouvons une relation identique :

$$\frac{P}{ke} = \frac{R}{e} \left[\frac{\pi}{2} \cos \psi_2 - \sin \psi_2 \right] + \frac{b_2}{e} \left[\cos \psi_2 - \frac{\pi}{2} \sin \psi_2 \right] \quad (50)$$

Moments transmis par les réseaux.

Les moments transmis par les réseaux sont calculés par rapport aux points T et T' (Figure 32).

Le moment transmis par la ligne 1'2' est :

$$M_{1'2'} = -k b_1' (R' - C'T' \cos \psi_1') - k \frac{\pi}{2} b_1' (R' \sin \psi_1' + \frac{b_1'}{2})$$

soit :

$$M_{1'2'} = -k b_1' \left[R' (\sin^2 \psi_1' + \frac{\pi}{2} \sin \psi_1' \cos \psi_1') + b_1' (\frac{\pi}{4} + \sin \psi_1' \cos \psi_1' - \frac{\pi}{2} \sin^2 \psi_1') \right]$$

Le long de la ligne 2'3', le moment élémentaire s'exprime par :

$$dM_{2'3'} = -k R' (R' - C'T' \cos \psi) d\psi - k (2\psi + \frac{\pi}{2} - 1) R' \cdot C'T' \sin \psi d\psi$$

en intégrant entre $-\frac{\pi}{4}$ et ψ_1' :

$$M_{2'3'} = -k R' (R' \cos \psi_1' - b_1' \sin \psi_1') (\sin \psi_1' - \frac{\pi}{2} \cos \psi_1') - k R'^2 (\psi_1' + \frac{\pi}{4})$$

Le moment transmis par la ligne 3'4' est :

$$M_{3'4'} = -k b_2' (R' + \frac{b_2'}{2})$$

Le moment résultant M' (Figure 33) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{2M'}{ke^2} = & \frac{2b'_1}{e} \left[\frac{R'}{e} (\sin^2 \psi'_1 + \frac{\pi}{2} \sin \psi'_1 \cos \psi'_1) + \frac{b'_1}{e} (\frac{\pi}{4} + \sin \psi'_1 \cos \psi'_1 - \frac{\pi}{2} \sin^2 \psi'_1) \right] \\ & + \frac{2R'}{e} (\frac{R'}{e} \cos \psi'_1 - \frac{b'_1}{e} \sin \psi'_1) (\sin \psi'_1 - \frac{\pi}{2} \cos \psi'_1) + \frac{2R'^2}{e^2} (\psi'_1 + \frac{\pi}{4}) + \frac{2b'_2}{e} (\frac{R'}{e} + \frac{b'_2}{2e}) \end{aligned} \quad (51)$$

Pour le second réseau situé au droit de l'encastrement, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{2M}{ke^2} = & \frac{2b_1}{e} (\frac{R}{e} + \frac{b_1}{2e}) + \frac{2R^2}{e^2} (\psi_2 + \frac{\pi}{4}) + \frac{2R}{e} (\frac{R}{e} \cos \psi_2 - \frac{b_2}{e} \sin \psi_2) (\sin \psi_2 - \frac{\pi}{2} \cos \psi_2) \\ & + \frac{2b_2}{e} \left[\frac{R}{e} (\sin^2 \psi_2 + \frac{\pi}{2} \sin \psi_2 \cos \psi_2) + \frac{b_2}{e} (\frac{\pi}{4} + \sin \psi_2 \cos \psi_2 - \frac{\pi}{2} \sin^2 \psi_2) \right] \end{aligned} \quad (52)$$

Condition d'existence des deux réseaux.

Les centres de courbure des lignes 2'3' et 23 doivent être situés sur la même horizontale.

Cette condition s'exprime par la relation:

$$\frac{R'}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{b'_2}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{e} \sin \psi_2 + \frac{b_2}{e} \cos \psi_2 \quad (53)$$

De plus, les efforts normaux et verticaux transmis par les deux réseaux doivent être identiques (Figure 33):

$$\frac{P}{ke} = \frac{P'}{ke} \quad \text{et} \quad \frac{N}{ke} = \frac{N'}{ke}$$

En conséquence nous avons l'égalité suivante :

$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{2M'}{ke^2}$$

. Valeurs des dimensions des réseaux, des efforts et moments transmis.

Les dimensions des réseaux, rapportées à l'épaisseur, $\frac{b'_1}{e}$, $\frac{R'}{e}$, $\frac{b'_2}{e}$,

$\frac{b_1}{e}$, $\frac{R}{e}$, $\frac{b_2}{e}$, sont obtenues par résolution du système linéaire constitué par les expressions suivantes :

- relations de compatibilité géométrique((45) et (46));
- relations des efforts verticaux transmis par les réseaux((49) et (50));
- relations des efforts horizontaux transmis par les réseaux((47) et (48)) ;
- relations d'existence des deux réseaux (53) .

La forme symétrique du système linéaire conduit aux conditions suivantes entre les dimensions :

$$\frac{b'_1}{e} = \frac{b_2}{e}$$

$$\frac{R'}{e} = \frac{R}{e}$$

$$\frac{b'_2}{e} = \frac{b_1}{e}$$

Les valeurs de l'effort axial $\frac{N}{ke}$ et du moment $\frac{2M}{ke^2}$ sont obtenues avec les relations (47) et (51) ; celles de la distance a/e par la relation :

$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{P}{ke} \cdot \frac{a}{e}$$

L'ensemble des valeurs relatives au réseau N° 3 sont reportées au tableau N° 2 .

$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$	$\frac{N}{ke}$	$\frac{b_1}{e}$	$\frac{R}{e}$	$\frac{b_2}{e}$	$\frac{a}{e}$
0,07094	1,04865	- 0,05855	0,56975	0,00000	0,70711	14,78321
0,08	1,05349	- 0,06527	0,56378	0,01098	0,69619	13,16864
0,10	1,06337	- 0,08009	0,55064	0,03497	0,67212	10,63372
0,12	1,07215	- 0,09906	0,53749	0,05903	0,64806	8,93461
0,14	1,07984	- 0,10972	0,52434	0,08310	0,62399	7,71311
0,16	1,08643	- 0,12454	0,51120	0,10717	0,59993	6,79019
0,18	1,09192	- 0,13935	0,49805	0,13123	0,57586	6,06624
0,20	1,09632	- 0,15417	0,48490	0,15530	0,55180	5,48160
0,22	1,09962	- 0,16899	0,47176	0,17936	0,52773	4,99827
0,24	1,10118	- 0,18380	0,45861	0,20343	0,50367	4,59092
0,26	1,10293	- 0,19862	0,44546	0,22749	0,47960	4,24203
0,28	1,10293	- 0,21344	0,43232	0,25156	0,45553	3,93905
0,30	1,10185	- 0,22826	0,41917	0,27562	0,43147	3,67282
0,32	1,09966	- 0,24307	0,40602	0,29969	0,40740	3,43644
0,34	1,09638	- 0,25789	0,39288	0,32376	0,38332	3,22465
0,36	1,09200	- 0,27271	0,37973	0,34782	0,35927	3,03334
0,38	1,08653	- 0,28752	0,36658	0,37189	0,33211	2,85928
0,40	1,07995	- 0,30234	0,35344	0,39595	0,31114	2,69988
0,42	1,07228	- 0,31716	0,34029	0,42002	0,28707	2,55306
0,44	1,06352	- 0,33197	0,32714	0,44408	0,26307	2,41709
0,46	1,05365	- 0,34679	0,31400	0,46815	0,23948	2,29055
0,48	1,04269	- 0,36161	0,30085	0,49221	0,21488	2,17228
0,50	1,03064	- 0,37643	0,28770	0,51628	0,19081	2,06127
0,52	1,01748	- 0,39124	0,27455	0,54034	0,16675	1,95670

BUS
LILLE

0,54	1,00323	- 0,40606	0,26141	0,56441	0,14268	1,85774
0,56	0,98788	- 0,42088	0,24826	0,58848	0,11862	1,76408
0,58	0,97143	- 0,43569	0,23511	0,61354	0,09455	1,67490
0,60	0,95389	- 0,45051	0,22197	0,63661	0,07048	1,58983
0,62	0,93525	- 0,46533	0,20882	0,66067	0,04642	1,50848
0,64	0,91552	- 0,48014	0,19567	0,68474	0,02358	1,43051
0,65859	0,89619	- 0,49389	0,18345	0,70711	0,00000	1,36075

- Tableau 2 -

- Champs cinématiquement et plastiquement admissibles asymétriques à deux points singuliers -

- Réseaux N° 3 -

2.3.4. - Etude des réseaux N° 2.

Les réseaux N° 3 se transforment en réseaux N° 2 lorsque les lignes circulaires 23 et 2'3' disparaissent (Figure 34).

. L'effort axial transmis à gauche de la ligne 1'2'3'4'

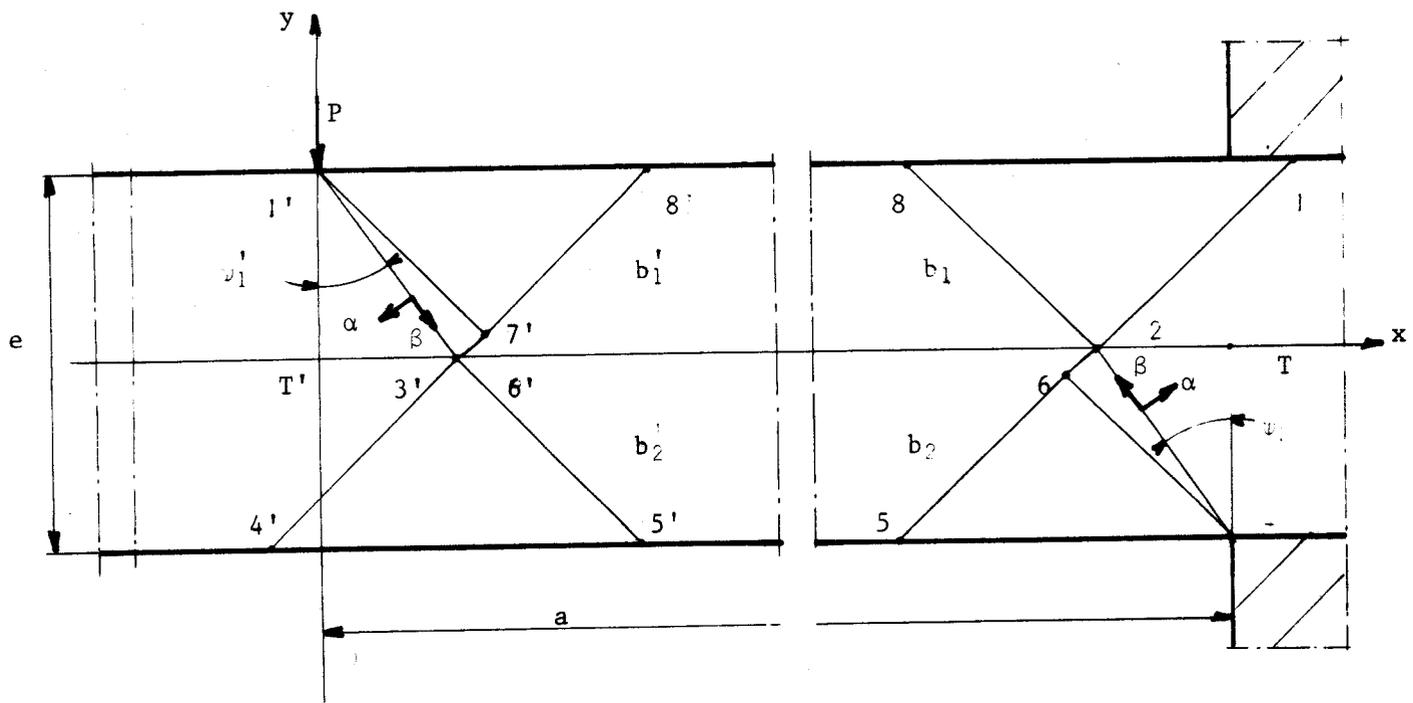
(ou à droite de la ligne 1234) est :

$$\frac{N}{ke} = \frac{b'_1}{e} \left[\left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\Psi'_1\right) \cos \Psi'_1 + \sin \Psi'_1 \right] + \frac{b'_2}{2} \sqrt{2} \quad (54)$$

. De la même façon, l'effort vertical est :

$$\frac{P}{ke} = \frac{b'_1}{e} \left[\cos \Psi'_1 - \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\Psi'_1\right) \sin \Psi'_1 \right] \quad (55)$$

. Le moment vaut :



- Figure 34 -

- Réseaux N° 2 -



$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{2b_1'^2}{e^2} \left[\sin \psi_1' \cos \psi_1' + \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi_1'\right) \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \psi_1'\right) \right] + \frac{b_2'^2}{e^2} \quad (56)$$

L'angle ψ_1' (ou ψ_2') varie pour ces réseaux entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{\pi}{4}$.

. Les conditions géométriques sont :

$$\frac{b_1'}{e} \cos \psi_1' + \frac{b_2'}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \quad (57)$$

. La condition d'existence est :

$$\frac{b_1'}{e} \cos \psi_1' = \frac{1}{2} \quad (58)$$

Des relations identiques pour les réseaux situés au droit des encastremements sont obtenues en remplaçant b_1' par b_2' , b_2' par b_1' et ψ_1' par ψ_2' .

Les valeurs successives des dimensions des réseaux, des efforts et moments transmis sont portées dans le tableau 3.

$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$	$\frac{N}{ke}$	$\frac{b_2}{e}$ $\frac{b'_1}{e}$	$\frac{b_1}{e}$ $\frac{b'_2}{e}$	$\frac{a}{e}$
0,00000	1,00000	- 0,00000	0,70711	0,70711	~
0,00200	1,00189	- 0,00194	0,67708	0,70711	500,28113
0,00693	1,00619	- 0,00654	0,65373	"	145,27842
0,01463	1,01240	- 0,01345	0,63292	"	69,22203
0,02497	1,02009	- 0,02235	0,61434	"	40,85867
0,03785	1,02889	- 0,03298	0,59776	"	27,18664
0,05319	1,03850	- 0,04511	0,58295	"	19,52567
0,07094	1,04865	- 0,05855	0,56975	"	14,78326

- Tableau 3 -

- Champs cinématiquement et plastiquement admissibles asymétriques

à deux points singuliers -

- Réseaux N° 1 et N° 2 -

2.3.5. - Etude des Réseaux N° 4.

Les réseaux N° 4 se réduisent à deux champs homogènes 1'7'8' et 456, à deux champs semi-homogènes 1'2'7' et 346, à deux lignes circulaires 2'0' et 03 et à deux lignes circulaires 0'3' et 02 (Figure 35).

. La pression le long de la ligne 1'2' est toujours :

$$p_{2'} = k \frac{\pi}{2} \quad (58)$$

En un point courant de la ligne 2'3', la pression est :

$$p_M = k(2\psi + \frac{\pi}{2} - 1)$$

. L'effort horizontal transmis est calculé dans les mêmes conditions que celles des réseaux N° 3.

Soit :

$$\frac{N}{ke} = -\frac{b'_1}{e} \left(\sin \psi'_1 + \frac{\pi}{2} \cos \psi'_1 \right) - \frac{r'}{e} \left(\cos \psi'_1 + \frac{\pi}{2} \sin \psi'_1 - 1 \right) - \frac{R'}{e} (1 - \sqrt{2}) \quad (59)$$

. L'effort vertical vaut :

$$\frac{P}{ke} = \frac{b'_1}{e} \left(\cos \psi'_1 - \frac{\pi}{2} \sin \psi'_1 \right) + \frac{r'}{e} \left(\frac{\pi}{2} \cos \psi'_1 - \sin \psi'_1 - \frac{\pi}{2} + 1 \right) + \frac{R'}{e} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \quad (60)$$

. Le moment est calculé par rapport au point T'.

Entre 2' et 0', le moment élémentaire est :

$$dM_{2'0'} = -kr'(r' - C'_1 T' \cos \psi) d\psi - p_M r' \cdot C'_1 T' \sin \psi d\psi$$

avec

$$C'_1 T' = r' \cos \psi'_1 - b'_1 \sin \psi'_1 .$$

Entre 0' et 3', le moment élémentaire vaut :

$$dM_{0'3'} = -k R'(R' - C'_2 T' \cos \psi) d\psi - p_M R' \cdot C'_2 T' \sin \psi d\psi .$$

Pour la ligne 1'2', le moment transmis s'écrit :

$$M_{12} = -k b'_1 (r' - C'_1 T' \cos \psi'_1) - k \frac{\pi}{2} b'_1 \left(r' \sin \psi'_1 + \frac{b'_1}{2} \right)$$

Pour l'ensemble de la ligne 1'2'3', il vient :

$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{2b_1'}{e} \left[\frac{b_1'}{e} \left(\frac{\pi}{4} + \sin \Psi_1' \cos \Psi_1' - \frac{\pi}{2} \sin^2 \Psi_1' \right) + \frac{r'}{e} \left\{ \pi \sin \Psi_1' \cos \Psi_1' - \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \sin \Psi_1' \right\} + \frac{R'}{e} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \sin \Psi_1' \right]$$

$$+ \frac{2r_1'^2}{e^2} \left[\Psi_1' - \left\{ \frac{\pi}{2} \cos \Psi_1' - \sin \Psi_1' - \frac{\pi}{2} + 1 \right\} \cos \Psi_1' \right]$$

$$- \frac{2R'}{e} \left[\frac{\pi R'}{4e} + \left\{ \frac{R'}{e} + \frac{r'}{e} (\cos \Psi_1' - 1) \right\} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right]$$

(61)

. Les conditions géométriques sont :

$$\frac{b_1'}{e} \cos \Psi_1' + \frac{r'}{e} \sin \Psi_1' + \frac{R'}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

(62)

et $\frac{R}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{r}{e} \sin \Psi_2 + \frac{b_2}{e} \cos \Psi_2 = 1.$

. La condition d'existence des réseaux s'écrit :

$$\frac{R'}{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(63)

Le tableau 4 donnent les valeurs successives des dimensions des réseaux, des efforts et des moments transmis.

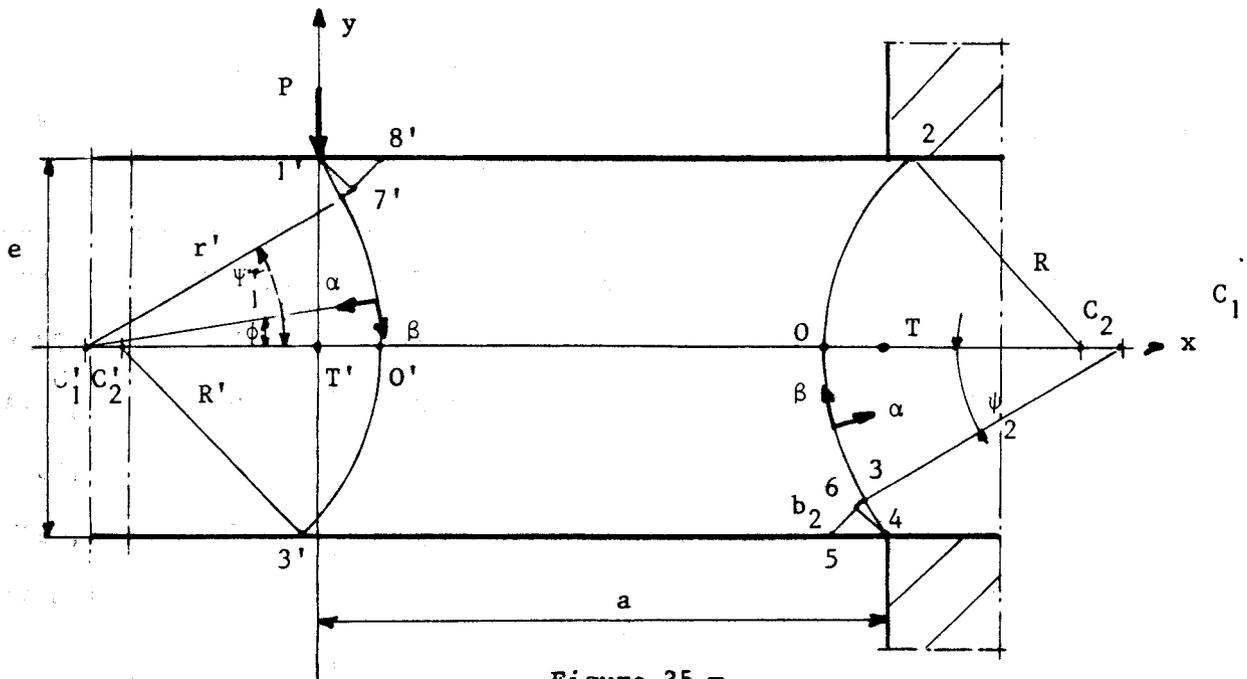
$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$	$\frac{N}{ke}$	$\frac{b_1'}{e}$	$\frac{b_2}{e}$	$\frac{r}{e}$	$\frac{R}{e}$	$\frac{a}{e}$
0,65859	0,89619	- 0,49389	0,18345	0,18345	0,70711	0,70711	1,36075
0,67764	0,87473	- 0,46575	0,14345	0,14345	0,78033	"	1,29084
0,69670	0,85094	- 0,43761	0,10345	0,10345	0,85355	"	1,22139
0,71576	0,82482	- 0,40947	0,06345	0,06345	0,92677	"	1,15238
0,73481	0,79638	- 0,38133	0,02345	0,02345	0,99999	"	1,08379
0,74598	0,77863	- 0,36483	0,00000	0,00000	1,04291	"	1,04376

- Tableau 4 -

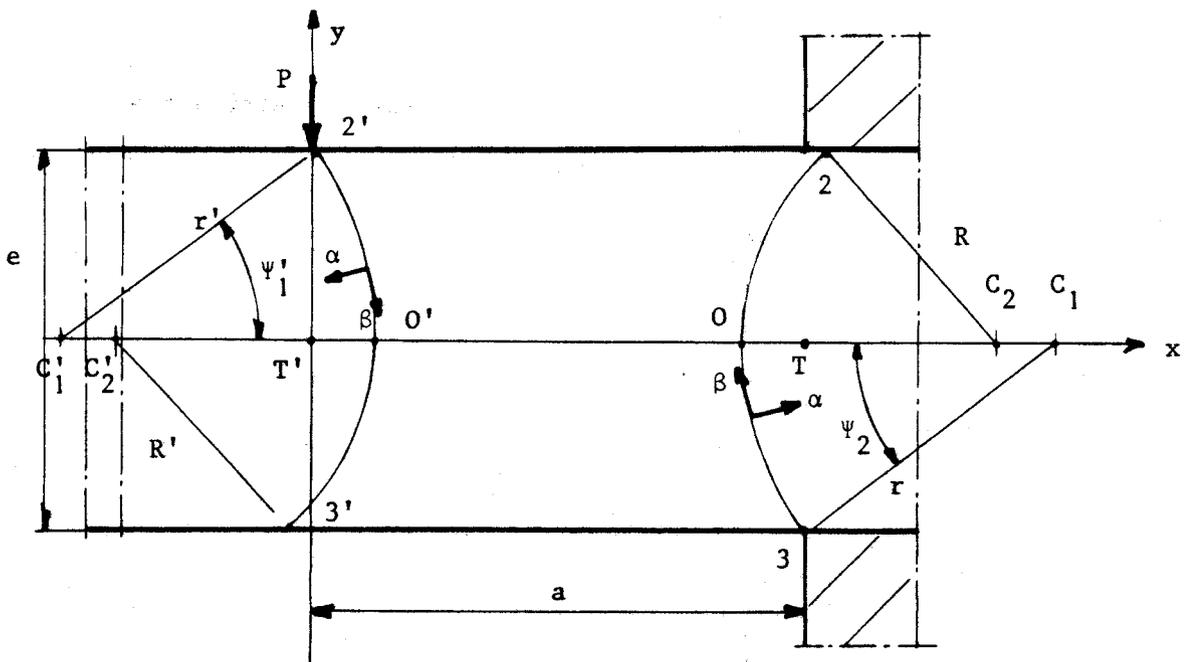
- Champs cinématiquement et plastiquement admissibles asymétriques à deux points singuliers -

- Réseaux N° 4 -





- Figure 35 -
- Réseaux N° 4 -



- Figure 36 -
- Réseaux N° 5 -



2.3.6. - Etude des réseaux N° 5.

Les réseaux N° 5 se réduisent à deux lignes circulaires 2'0' et 03 de rayons r' et r , et à deux lignes circulaires 02 et 0'3' de rayons R et R' (Figure 36).

. L'effort horizontal transmis à gauche de la ligne 2'3' (ou à gauche de 23) est :

$$\frac{N}{ke} = -\frac{r'}{e} \left[\cos \Psi'_1 + (2\Psi'_1 + \frac{\pi}{2} - 1) \sin \Psi'_1 - 1 \right] - \frac{R'}{e} (1 - \sqrt{2}) \quad (64)$$

. L'effort vertical s'écrit :

$$\frac{P}{ke} = \frac{r'}{e} \left[(2\Psi'_1 + \frac{\pi}{2} - 1) \cos \Psi'_1 - \sin \Psi'_1 - \frac{\pi}{2} + 1 \right] + \frac{R'}{e} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \quad (65)$$

. Le moment transmis est :

$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{2r'^2}{e^2} \left[\Psi'_1 - (2\Psi'_1 + \frac{\pi}{2} - 1) \cos \Psi'_1 + \sin \Psi'_1 \cos \Psi'_1 + (\frac{\pi}{2} - 1) \cos \Psi'_1 \right] - \frac{2R'}{e} \left[-\frac{\pi}{4} \frac{R'}{e} + \left\{ \frac{R'}{e} + \frac{r'}{e} (\cos \Psi'_1 - 1) \right\} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right] \quad (66)$$

. Les conditions géométriques se réduisent à :

$$\frac{r'}{e} \sin \Psi'_1 + \frac{R'}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \quad (67)$$

. La condition d'existence est la même que pour les réseaux N° 4 :

$$\frac{R'}{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Des relations identiques existent pour les autres réseaux.

Les valeurs des dimensions des réseaux, des efforts et des moments transmis sont reportées au tableau 5.

$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$	$\frac{N}{ke}$	$\frac{r'}{e}$ r/e	$\frac{R'}{e}$ R/e	$\frac{a}{e}$
0,74598	0,77863	- 0,36483	1,04291	0,70711	1,04376
0,76986	0,73803	- 0,32807	1,14952	"	0,95865
0,79185	0,69701	- 0,29115	1,28397	"	0,88023
0,83030	0,61383	- 0,21694	1,69193	"	0,73928
0,86161	0,52934	- 0,14234	2,51674	"	0,61436
0,89564	0,40063	- 0,03000	10,00417	"	0,44731
0,89903	0,38332	- 0,01500	16,66917	"	0,42637
0,90215	0,36598	- 0,00001	50,00083	"	0,40568
0,90361	0,35730	0,00750	∞	"	0,39451

- Tableau 5 -

- Champs cinématiquement et plastiquement admissibles
asymétriques à deux points singuliers -



2.3.7. - Etude des réseaux N° 6.

Les lignes circulaires 2'0' et 03 des réseaux N° 5 se transforment à la limite en droites (Figure 37).

Au point 3' l'effort extérieur est nul. Nous pouvons écrire :

$$p_3 = -k \operatorname{tg} \psi'_2 \quad (68)$$

Lorsque $\psi'_2 = \frac{\pi}{4}$, nous retrouvons les conditions de pression des réseaux N° 1 à 5.

La pression au point 0' est donc :

$$p_{0'} = -k(\operatorname{tg} \psi'_2 - 2\psi'_2)$$

et en un point courant de la ligne 0'3' :

$$p_M = -k(\operatorname{tg} \psi'_2 - 2\psi'_2 - 2\psi)$$

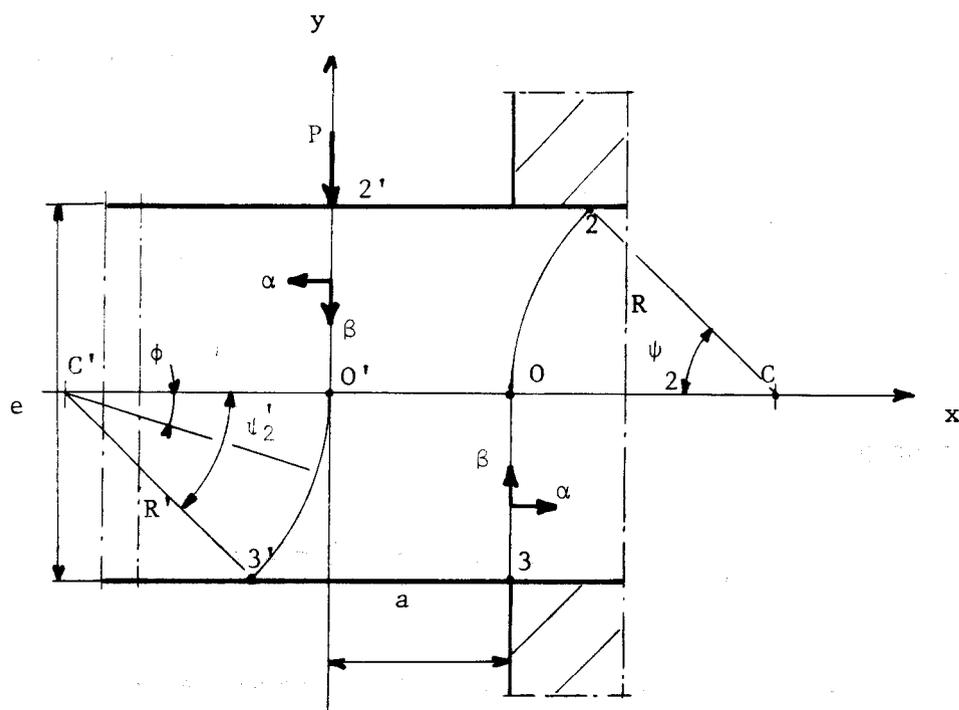
. L'effort normal repris par le réseau est :

$$\frac{N}{ke} = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \psi'_2 - 2\psi'_2) - \frac{R'}{e} (-\operatorname{tg} \psi'_2 \sin \psi'_2 - \cos \psi'_2 + 1) \quad (69)$$

. L'effort vertical transmis est :

$$\frac{P}{ke} = \frac{1}{2} + \frac{R'}{e} \{ 2\psi'_2 - \sin \psi'_2 - (1 - \cos \psi'_2) \operatorname{tg} \psi'_2 \} \quad (70)$$

. Le moment s'exprime par :



- Figure 37 -

- Réseaux N° 6 -



$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{2\psi'_2 - \text{tg } \psi'_2}{4} + \frac{2R'^2}{e^2} \left\{ (1 - \cos \psi'_2) \text{tg } \psi'_2 - \psi'_2 + \sin \psi'_2 \right\} \quad (71)$$

Les dimensions des réseaux, les efforts et moments transmis sont reportés au tableau 6.

2.3.8. - Valeurs successives, des efforts et moments transmis.

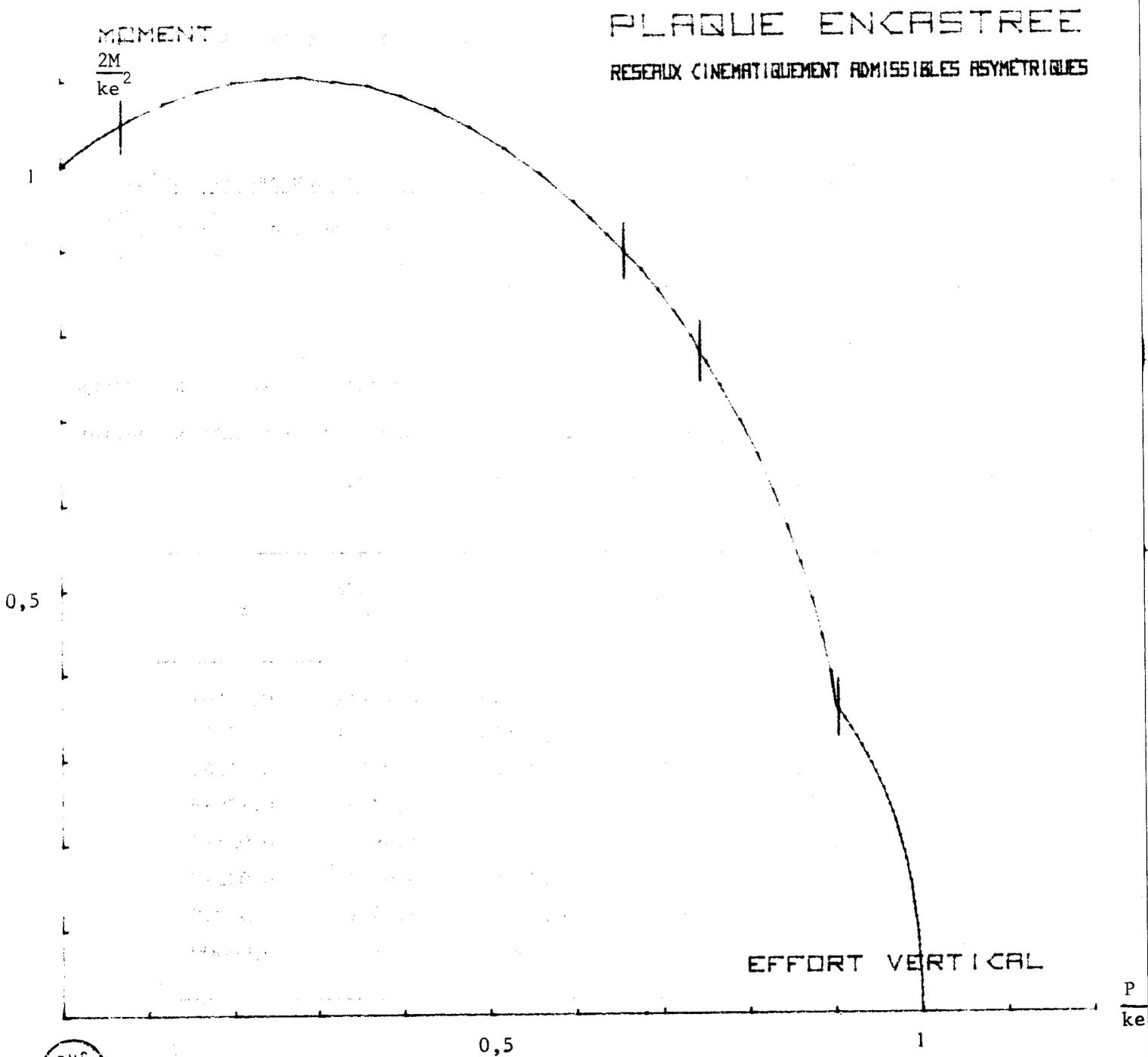
Les figures (37) et (38) représentent les fonctions $\frac{2M}{ke^2} = f\left(\frac{P}{ke}\right)$ et $\frac{a}{e} = f\left(\frac{P}{ke}\right)$ pour l'ensemble des réseaux.

Les figures (39) et (40) comparent ces résultats avec ceux obtenus par les réseaux symétriques. Les réseaux asymétriques à deux points singuliers apportent une légère amélioration de la borne supérieure.

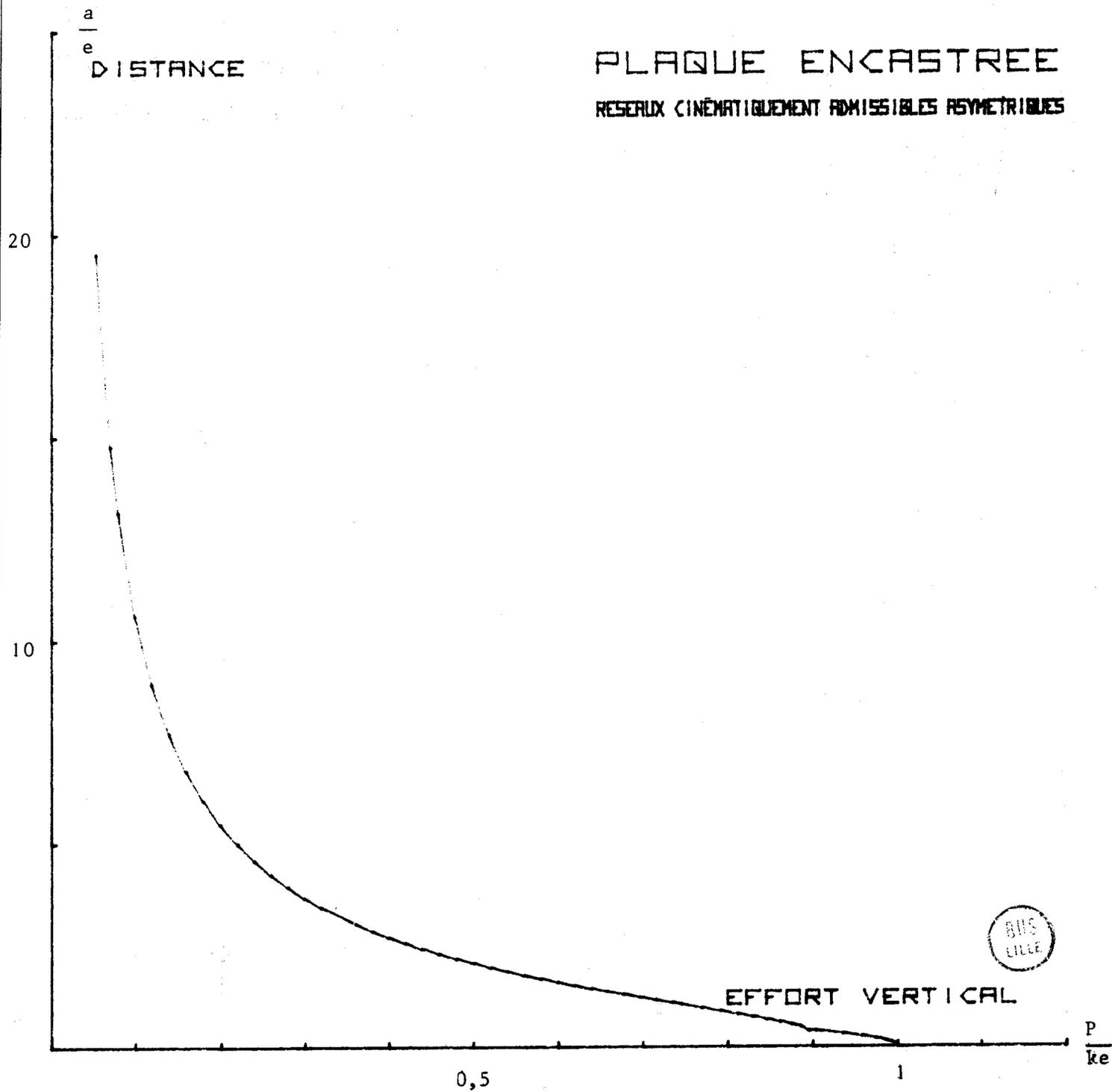
$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$	$\frac{N}{ke}$	$\frac{R', R/e}{e}$	$\frac{a}{e}$
0,90361	0,35730	0,00750	0,70711	0,39541
0,93695	0,30331	- 0,04616	0,78991	0,32371
0,97508	0,20751	- 0,08170	1,07167	0,21282
0,99263	0,11987	- 0,06383	1,77595	0,12076
0,99939	0,03561	- 0,02115	5,86205	0,03563
0,99974	0,02309	- 0,01380	9,02989	0,02310
0,99995	0,01058	- 0,00634	19,68716	0,01058
1,00000	0,00000	0,00000	∞	0,00000

- Tableau 6 -

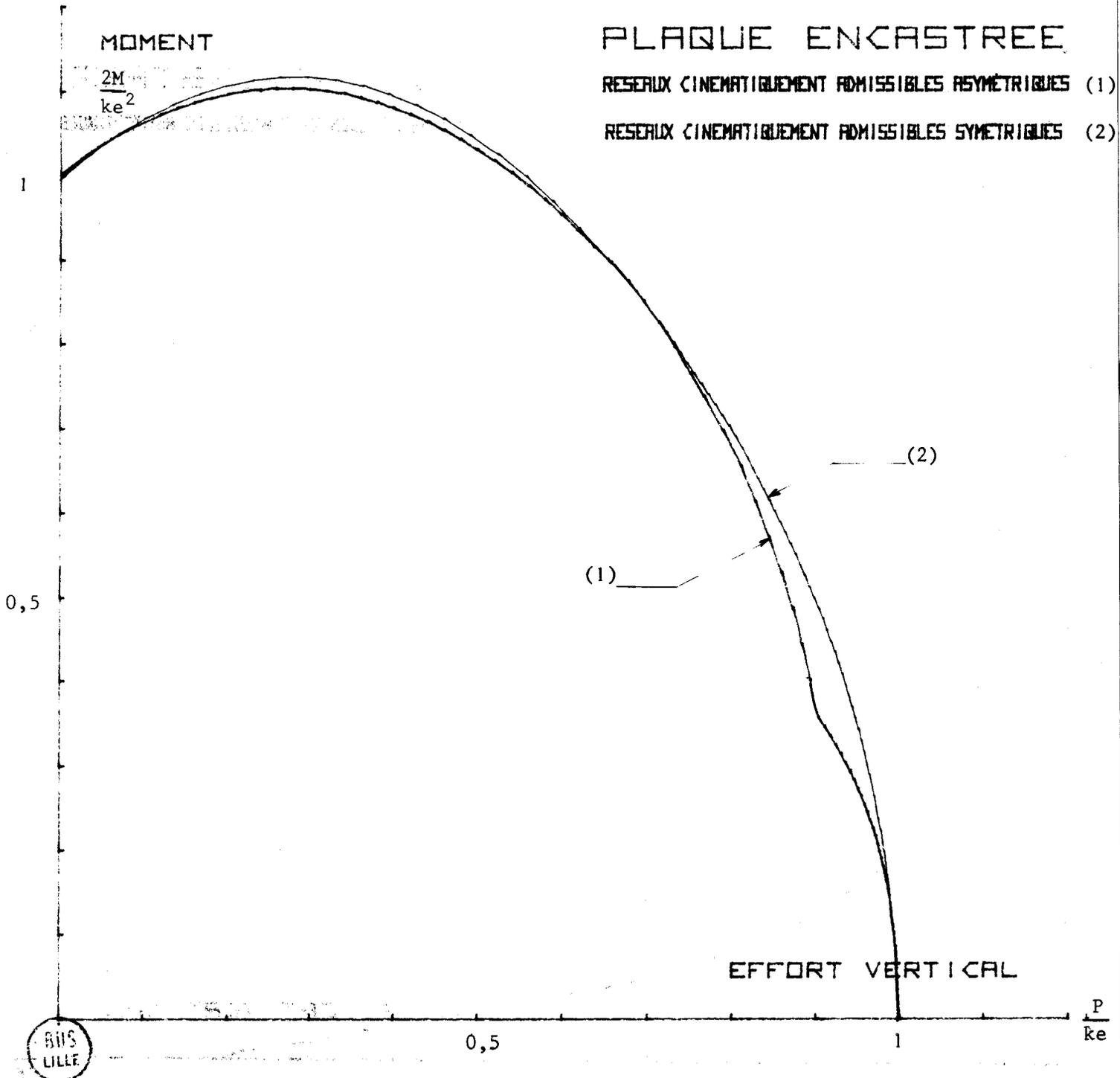
- Champs cinématiquement et plastiquement admissibles asymétriques à deux points singuliers -



- Figure 37 -



- Figure 38 -



- Figure 39 -

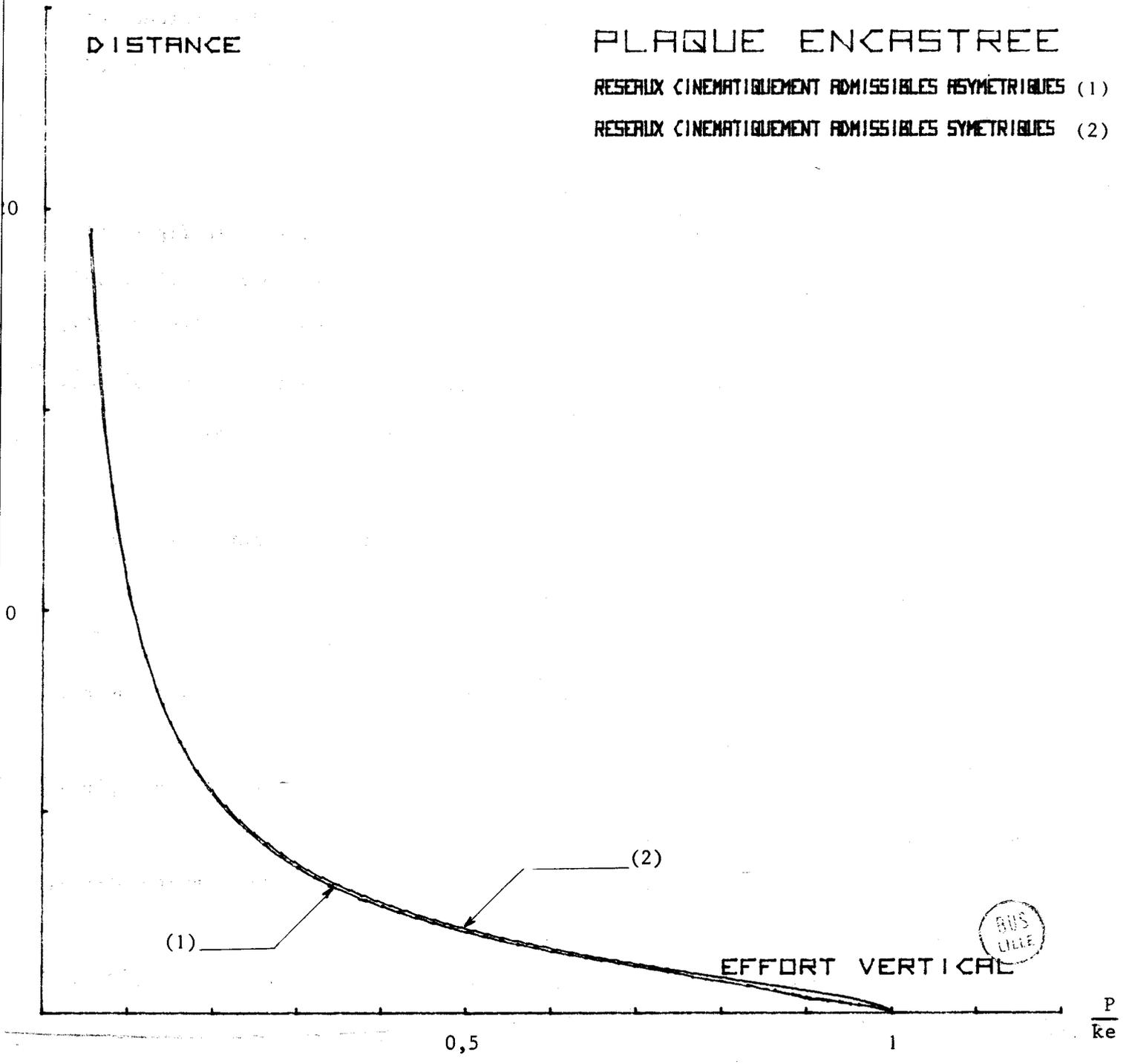
$\frac{a}{e}$

DISTANCE

PLAQUE ENCASTREE

RESEAUX CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLES ASYMETRIQUES (1)

RESEAUX CINEMATIQUEMENT ADMISSIBLES SYMETRIQUES (2)



- Figure 40 -

2.4. - Champs cinématiquement et plastiquement admissibles asymétriques à trois points singuliers.

2.4.1. - Introduction.

Dans le cas d'encastresments parfaits aux extrémités de la plaque (figure 16), il convient de considérer, pour une demi-plaque, deux réseaux de lignes de glissement à trois points singuliers : un point singulier est situé sous la charge, deux points singuliers à l'encastrement.

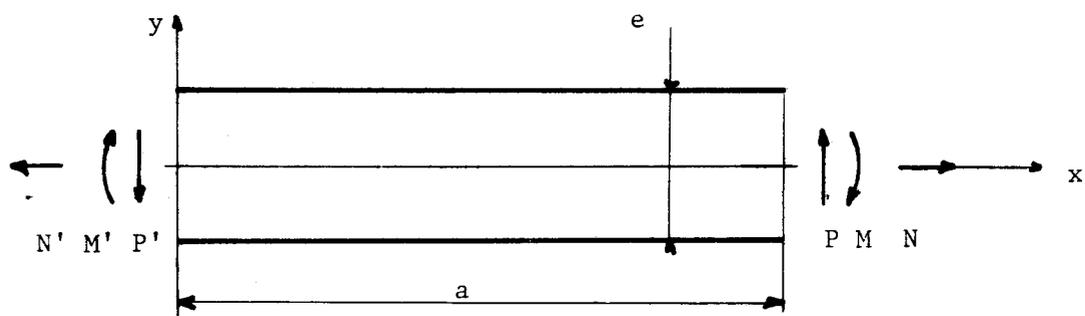
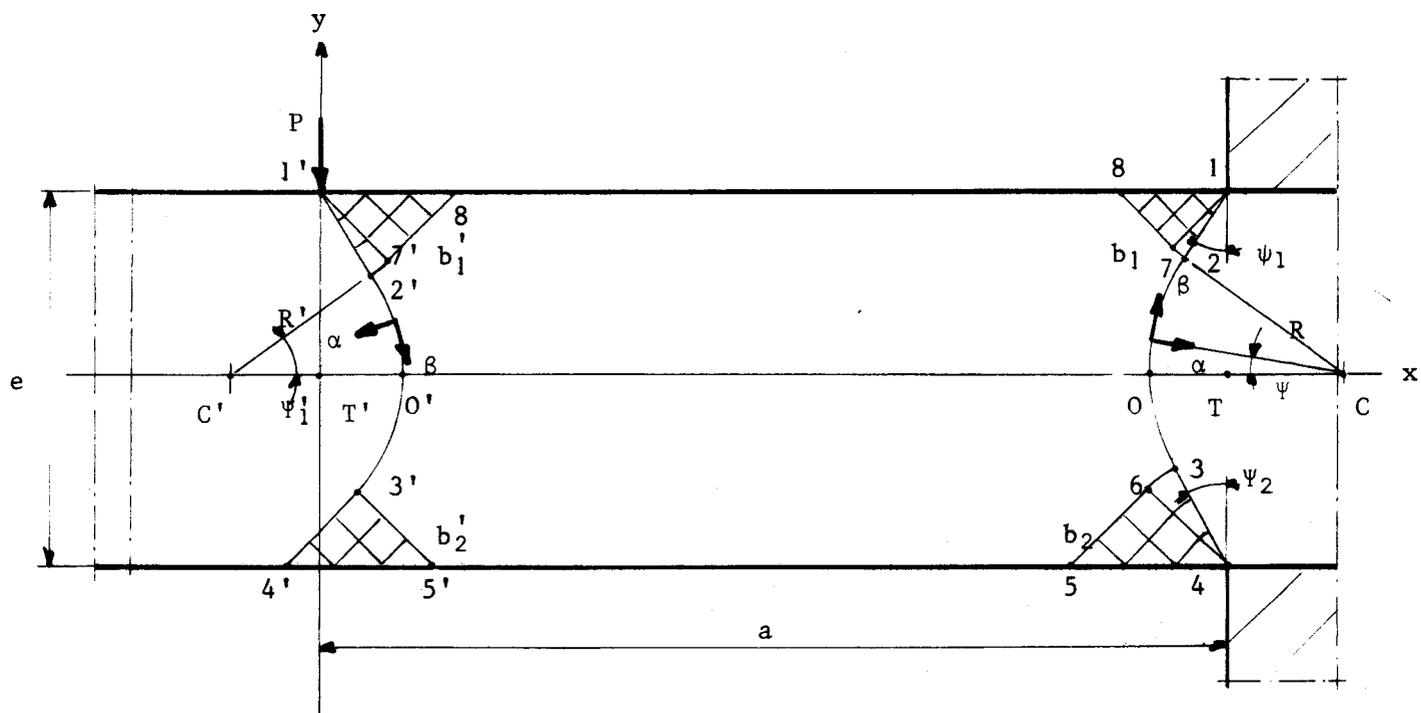
2.4.2. - Description générale des réseaux.

La forme la plus générale des réseaux est représenté à la figure 41. Le réseau situé au droit de la charge comprend deux champs homogènes (1',7',8' et 3',4',5'), un champ semi-homogène (1',2',7') et un ligne circulaire (2',3').

Le réseau situé au droit de l'encastrement comprend deux champs homogènes (1,7,8 et 4,5,6), deux champs semi-homogènes (1,2,7 et 3,4,6) et une ligne circulaire (2,3).

Selon le mode de chargement, les réseaux peuvent prendre les neuf formes suivantes:

- . Réseaux n° 1 : quatre champs homogènes (figure 42).
- . Réseaux n° 2 : quatre champs homogènes, trois champs semi-homogènes (figure 43).
- . Réseaux n° 3 : quatre champs homogènes, trois champs semi-homogènes, une ligne circulaire (figure 44).
- . Réseaux n° 4 : quatre champs homogènes, trois champs semi-homogènes, deux lignes circulaires (figure 41).
- . Réseaux n° 5 : trois champs homogènes, deux champs semi-homogènes, deux lignes circulaires (figure 45).
- . Réseaux n° 6 : deux champs homogènes, deux champs semi-homogènes, deux lignes circulaires (figure 46).



- Figure 41 -

- Réseaux N° 4 -



. Réseaux n° 7 : un champ homogène, un champ semi-homogène, deux lignes circulaires (figure 47).

. Réseaux n° 8 : deux lignes circulaires (figure 48).

. Réseaux n° 9 : une ligne droite, deux lignes circulaires (figure 49).

2.4.3. - Etude des réseaux n° 4.

. Détermination des pressions.

Pour le réseau situé au droit de la charge (figure 41), les conditions de pression sont celles déterminées au chapitre 2.3. (figure 26) (Relation (41)).

Pour le réseau situé au droit de la charge, les pressions sont :

$$p_8 = -k$$

$$\text{et } p_5 = k$$

La pression le long de la ligne 12 est :

$$p_2 = -k \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi_1 \right)$$

le long de la ligne 34 :

$$p_3 = k \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi_2 \right)$$

Les pressions p_2 et p_3 sont reliées par :

$$p_3 - p_2 = 2k(\psi_1 + \psi_2)$$

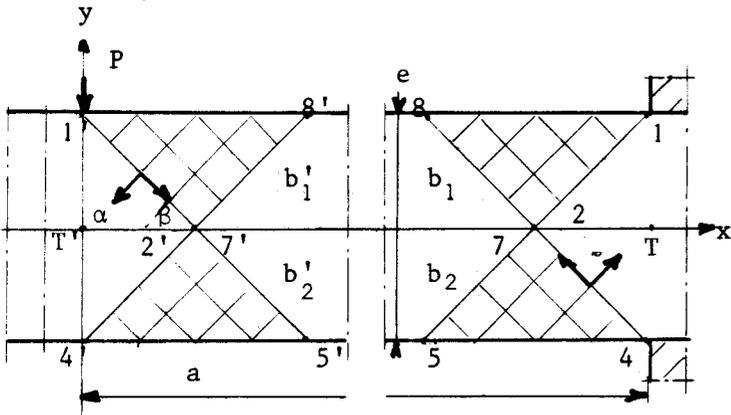
En remplaçant p_2 et p_3 par leurs valeurs, il vient :

$$\boxed{\psi_1 + \psi_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}} \quad (72)$$

Compte tenu de ce résultat, on peut exprimer les pressions comme suit :

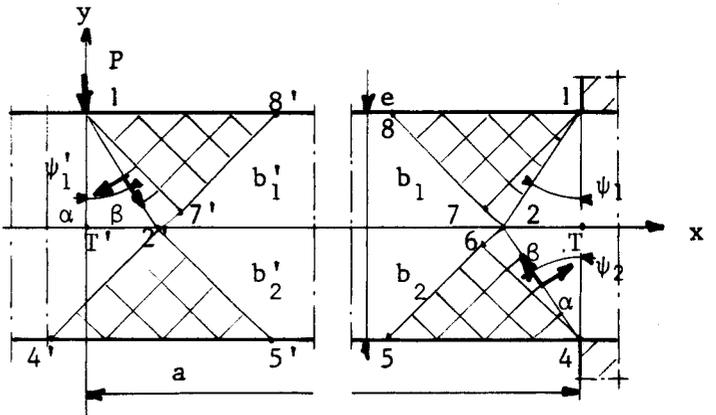
$$p_2 = -2k \psi_2$$

$$p_3 = 2k \psi_1$$



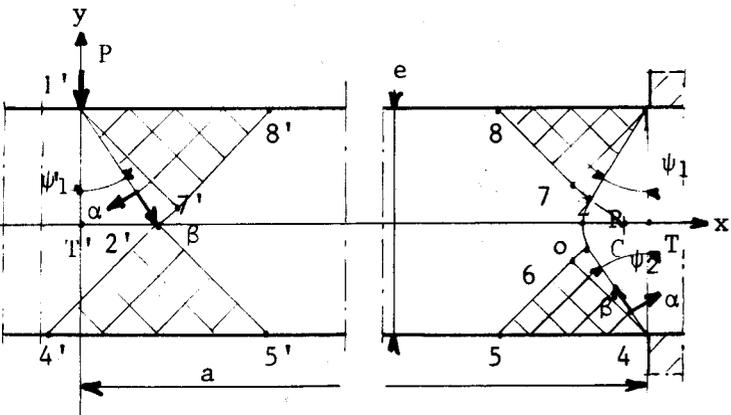
- Figure 42 -

- Réseaux N° 1 -



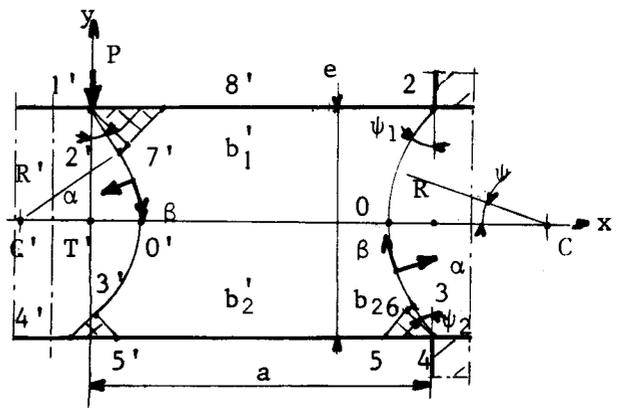
- Figure 43 -

- Réseaux N° 2 -



- Figure 44 -

- Réseaux N° 3 -



- Figure 45 -

- Réseaux N° 5 -



. Détermination des vitesses

Les conditions de vitesses sont identiques à celles des réseaux asymétriques à deux points singuliers (chapitre 2.3.).

. Conditions géométriques.

Nous obtenons les relations de compatibilité suivantes :

$$\frac{b'_1}{e} \cos \psi'_1 + \frac{R'}{e} \left(\sin \psi'_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{b'_2}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \quad (72)$$

pour le réseau situé au droit de la charge et

$$\frac{b_1}{e} \cos \psi_1 + \frac{R}{e} (\sin \psi_1 + \sin \psi_2) + \frac{b_2}{e} \cos \psi_2 = 1 \quad (73)$$

$$\frac{b_1}{e} \sin \psi_1 + \frac{R}{e} (\cos \psi_2 - \cos \psi_1) - \frac{b_2}{e} \sin \psi_2 = 0 \quad (74)$$

pour le réseau situé au droit de l'encastrement.

. Efforts transmis par les réseaux.

L'effort horizontal N' (figure 41 et relation (48)) est donné par :

$$\frac{N'}{ke} = - \frac{b'_1}{e} \left(\sin \psi'_1 + \frac{\pi}{2} \cos \psi'_1 \right) - \frac{R'}{e} \left(\cos \psi'_1 + \frac{\pi}{2} \sin \psi'_1 \frac{\pi}{2} \sqrt{2} \right) + \frac{b'_2}{e} \sqrt{2} \quad (75)$$

L'effort horizontal N transmis par le réseau situé au droit de l'encastrement s'obtient aisément en tenant de compte des conditions de pression définies précédemment :

$$\frac{N}{ke} = \frac{b_1}{e} (\sin \psi_1 + 2\psi_2 \cos \psi_1) - \frac{R}{e} (\cos \psi_2 - \cos \psi_1 + 2\psi_1 \sin \psi_2 - 2\psi_2 \sin \psi_1) - \frac{b_2}{e} (\sin \psi_2 + 2\psi_1 \cos \psi_2) \quad (76)$$

L'effort vertical P' a pour valeur (relation (49)) :

$$\frac{P'}{ke} = \frac{b'_1}{e} (\cos \psi'_1 - \frac{\pi}{2} \sin \psi'_1) + \frac{R'}{e} (\frac{\pi}{2} \cos \psi'_1 - \sin \psi'_1) \quad (77)$$

L'effort vertical P est :

$$\frac{P}{ke} = \frac{b_1}{e} (\cos \psi_1 - 2\psi_2 \sin \psi_1) + \frac{R}{e} (2\psi_1 \cos \psi_2 + 2\psi_2 \cos \psi_1 - \sin \psi_1 - \sin \psi_2) + \frac{b_2}{e} (\cos \psi_2 - 2\psi_1 \sin \psi_2). \quad (78)$$

. Moments transmis par les réseaux.

Le moment M' transmis par le réseau, situé au droit de la charge et calculé par rapport au point T', a pour valeur : (relation (51))

$$\frac{2M'}{ke^2} = \frac{2b'_1}{e} \left[\frac{R'}{e} (\sin^2 \psi_1 + \frac{\pi}{2} \sin \psi'_1 \cos \psi'_1) + \frac{b'_1}{e} (\frac{\pi}{4} + \sin \psi'_1 \cos \psi'_1 - \frac{\pi}{2} \sin^2 \psi'_1) \right] + \frac{2R'}{e} (\frac{R'}{e} \cos \psi'_1 - \frac{b'_1}{e} \sin \psi'_1) (\sin \psi'_1 - \frac{\pi}{2} \cos \psi'_1) + \frac{2R'^2}{e^2} (\psi'_1 + \frac{\pi}{4}) + \frac{2b'_2}{e} (\frac{R'}{e} + \frac{b'_2}{2e}) \quad (79)$$

Le moment M transmis par le second réseau s'obtient comme suit :

Pour la ligne 12 :

$$M_{12} = -kb_1(R - CT \cos \psi_1) - 2k\psi_2 b_1 (\frac{b_1}{2} + CT \sin \psi_1)$$

avec $CT = R \cos \psi_1 - b_1 \sin \psi_1$.

Pour la ligne 34 :

$$M_{34} = -kb_2(R - CT \cos \psi_2) - 2k b_2 \psi_1 \left(\frac{b_2}{2} + CT \sin \psi_2 \right)$$

avec $CT = R \cos \psi_2 - b_2 \sin \psi_2$.

Pour la ligne 23, le moment élémentaire vaut :

$$\begin{aligned} dM_{23} &= 2kR(\psi_1 - \psi_2)CT \cdot \sin \psi \, d\psi \\ &\quad - 2kR CT \psi \sin \psi \, d\psi \\ &\quad - kR^2 \, d\psi \\ &\quad + kR CT \cos \psi \, d\psi \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} M_{23} &= -kR CT(-2\psi_1 \cos \psi_2 - 2\psi_2 \cos \psi_1 + \sin \psi_1 + \sin \psi_2) \\ &\quad - kR^2(\psi_1 + \psi_2) \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned} \frac{2M}{ke^2} &= \frac{2b_1}{e} \left[\frac{R}{e} (\sin^2 \psi_1 + 2\psi_2 \sin \psi_1 \cos \psi_1) + \frac{b_1}{e} (\psi_2 + \sin \psi_1 \cos \psi_1 - 2\psi_2 \sin^2 \psi_1) \right] \\ &+ \frac{2R}{e} \left(\frac{R}{e} \cos \psi_2 - \frac{b_2}{e} \sin \psi_2 \right) (\sin \psi_1 + \sin \psi_2 - 2\psi_1 \cos \psi_2 - 2\psi_2 \cos \psi_1) \\ &+ \frac{2R^2}{e^2} (\psi_1 + \psi_2) \\ &+ \frac{2b_2}{e} \left[\frac{R}{e} (\sin^2 \psi_2 + 2\psi_1 \sin \psi_2 \cos \psi_2) + \frac{b_2}{e} (\psi_1 + \sin \psi_2 \cos \psi_2 - 2\psi_1 \sin^2 \psi_2) \right] \end{aligned}$$

. Condition d'existence des deux réseaux.

Les centres de courbure des lignes 23 et 2'3' doivent être situés sur la même horizontale.

La condition est :

$$\frac{R'}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{b'_2}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{e} \sin \psi_2 + \frac{b_2}{e} \cos \psi_2 \quad (81)$$

De plus, nous avons les conditions d'équilibre suivantes (Figure 41)

$$\frac{N'}{ke} = \frac{N}{ke}$$

$$\frac{P'}{ke} = \frac{P}{ke}$$

. Détermination des dimensions des réseaux, des efforts et moments transmis.

Les valeurs de $\frac{b'_1}{e}$, $\frac{R'}{e}$, $\frac{b'_2}{e}$, $\frac{b_1}{e}$, $\frac{R}{e}$, $\frac{b_2}{e}$ et de $\frac{P}{ke}$ sont obtenues

à partir des relations (72) à (78).

L'effort axial $\frac{N}{ke}$, les moments $\frac{2M'}{ke^2}$ et $\frac{2M}{ke^2}$ sont obtenus avec les relations (75), (79) et (80).

Enfin, la distance $\frac{a}{e}$ est donnée par :

$$\frac{M'}{ke^2} + \frac{M}{ke^2} = \frac{P}{ke} \frac{a}{e}$$

L'angle ψ'_1 reste égal à 0,5.

Les angles ψ_1 et ψ_2 varient dans les limites suivantes

$$\begin{aligned} 0,64940 < \psi_1 < 0,74653 \\ 0,53885 < \psi_2 < 0,63599 \end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs est reportée dans le tableau 7.

$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M'}{ke^2}$	$\frac{2M}{ke^2}$	$\frac{N}{ke}$	$\frac{b'_1}{e}$	$\frac{R'}{e}$	$\frac{b'_2}{e}$	$\frac{b_1}{e}$	$\frac{R}{e}$	$\frac{b_2}{e}$	$\frac{a}{e}$
0,06999	1,04754	1,05401	- 0,03115	0,56216	0,00000	0,71651	0,58930	0,03968	0,60048	15,0125
0,11223	1,06750	1,07898	- 0,04928	0,53035	0,05138	0,66976	0,54726	0,09343	0,56512	9,56279
0,15162	1,08144	1,09743	- 0,06712	0,50097	0,09273	0,62588	0,50790	0,13940	0,53244	7,18498
0,27094	1,09647	1,12482	- 0,12763	0,41396	0,24403	0,49095	0,38772	0,28407	0,43561	4,09918
0,30060	1,09396	1,12496	- 0,14445	0,39288	0,27994	0,45685	0,35759	0,31975	0,41215	3,69071
0,32862	1,08934	1,12263	- 0,16110	0,37321	0,31382	0,42442	0,32904	0,35331	0,39027	3,33655
0,35512	1,08298	1,11823	- 0,17758	0,35482	0,34585	0,39350	0,30194	0,38493	0,36983	3,09922
0,38024	1,07519	1,11208	- 0,19392	0,33760	0,37617	0,36398	0,27616	0,41476	0,35073	2,87613
0,40410	1,06623	1,10445	- 0,21013	0,32147	0,40494	0,33573	0,25161	0,44294	0,33284	2,68581
0,42678	1,05631	1,09556	- 0,22621	0,30633	0,43227	0,30865	0,22819	0,46960	0,31608	2,52101
0,44840	1,04561	1,08561	- 0,24217	0,29211	0,45828	0,28266	0,20581	0,49486	0,30037	2,37647
0,46902	1,03429	1,07477	- 0,25805	0,27873	0,48307	0,25767	0,18440	0,51880	0,28562	2,24836
0,47898	1,02844	1,06905	- 0,26590	0,27234	0,49503	0,24553	0,17404	0,53031	0,27859	2,18952
0,49825	1,01642	1,05710	- 0,28161	0,26011	0,51816	0,22190	0,15396	0,55247	0,26517	2,08080
0,51670	1,00406	1,04456	- 0,29722	0,24858	0,54027	0,19910	0,13469	0,57353	0,25256	1,98241
0,53439	0,99145	1,03152	- 0,31274	0,23769	0,56146	0,17706	0,11617	0,59358	0,24070	1,89278
0,55137	0,97865	1,01805	- 0,32818	0,22741	0,58177	0,15574	0,09836	0,61267	0,22954	1,81066
0,56770	0,96573	1,00423	- 0,34354	0,21768	0,60128	0,13508	0,08121	0,63087	0,21904	1,73504
0,58341	0,95274	0,99010	- 0,35884	0,20847	0,62003	0,11504	0,06467	0,64823	0,20915	1,66506
0,59855	0,93972	0,97571	- 0,37406	0,19975	0,63808	0,09558	0,04872	0,66480	0,19985	1,60005
0,61316	0,92670	0,96111	- 0,38923	0,19148	0,65548	0,07665	0,03330	0,68064	0,19108	1,53939
0,62727	0,91372	0,94635	- 0,40431	0,18364	0,67225	0,05825	0,01842	0,69577	0,18283	1,48267
0,64470	0,89714	0,92716	- 0,42361	0,17414	0,69296	0,03529	0,00000	0,71424	0,17294	1,41484

- Tableau 7 -

- Champs cinématiquement et plastiquement admissibles asymétriques
à trois points singuliers -



2.4.4. - Etude des réseaux n° 3.

Les réseaux n° 4 se transforment en réseaux n° 3 lorsque la ligne circulaire 2'3' disparaît (figure 44).

. Les conditions géométriques relatives à chaque réseau sont :

$$\frac{b'_1}{e} \cos \psi'_1 + \frac{b'_2}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \quad (82)$$

$$\frac{b_1}{e} \cos \psi_1 + \frac{R}{e} (\sin \psi_1 + \sin \psi_2) + \frac{\sqrt{2}}{e} \cos \psi_2 = 1 \quad (83)$$

$$\frac{b_1}{e} \sin \psi_1 + \frac{R}{e} (\cos \psi_2 - \cos \psi_1) - \frac{b_2}{e} \sin \psi_2 = 0 \quad (84)$$

. L'effort horizontal N' est donné par :

$$\frac{N'}{ke} = -\frac{b_1}{e} \left[\sin \psi'_1 + \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi'_1\right) \cos \psi'_1 \right] + \frac{b'_2}{2} \sqrt{2} \quad (85)$$

L'effort horizontal N est toujours celui donné par la relation (76).

L'effort vertical P' vaut :

$$\frac{P'}{ke} = \frac{b'_1}{e} \left[\cos \psi'_1 - \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi'_1\right) \sin \psi'_1 \right] \quad (86)$$

et l'effort P est fourni par la relation (78).

. Le moment M' a pour expression (relation (56))

$$\frac{2M'}{ke^2} = \frac{2b'_1}{e^2} \left[\sin \psi'_1 \cos \psi'_1 + \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi'_1\right) \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \psi'_1\right) \right] + \frac{b'^2_2}{e^2} \quad (87)$$

. Les conditions d'existence de deux réseaux s'écrivent :

$$\frac{b'_2}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{e} \sin \psi_2 + \frac{b_2}{e} \cos \psi_2 \quad (88)$$

Les dimensions des réseaux, les efforts et les moments transmis sont obtenus à partir des relations (82) à (88).

L'angle ψ'_1 varie de 0,5 à 0,58 et les angles ψ_1 et ψ_2 restent liés par la relation :

$$\psi_1 + \psi_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

avec les limites suivantes :

$$\begin{aligned} 0,64639 < \psi_1 < 0,64940 \\ 0,63599 < \psi_2 < 0,63899 \end{aligned}$$

Le tableau 8 donne les valeurs obtenues pour ce réseau.



$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M'}{ke^2}$	$\frac{2M}{ke^2}$	$\frac{N}{ke}$	$\frac{b'_1}{e}$	$\frac{R'}{e}$	$\frac{b'_2}{e}$	$\frac{b_1}{e}$	$\frac{R}{e}$	$\frac{b_2}{e}$	$\frac{a}{e}$
0,03743	1,02850	1,03133	- 0,01730	0,59314	0,00000	0,71255	0,62141	0,00000	0,62758	27,2963
0,04483	1,03309	1,03659	- 0,02045	0,58481	0,00000	0,71349	0,61431	0,00887	0,62162	23,0786
0,05261	1,03781	1,04218	- 0,02382	0,57687	0,00000	0,71446	0,60657	0,01839	0,61510	19,7674
0,06098	1,04264	1,04799	- 0,02738	0,56933	0,00000	0,71547	0,59824	0,02865	0,60806	17,1403
0,06999	1,04754	1,05401	- 0,03115	0,56216	0,00000	0,71651	0,58930	0,03968	0,60048	15,0125

- Tableau 8 -

- Champs cinématiquement et plastiquement admissibles asymétriques

à trois points singuliers -

- Réseaux N° 3 -

2.4.5. - Etude des réseaux n° 2.

Les réseaux n° 3 se transforment en réseaux n° 2 lorsque la ligne circulaire 23 disparaît (figure 43).

. Les nouvelles conditions géométriques sont déduites des relations (82), (83) et (84) en posant

$$\frac{R}{e} = 0.$$

. L'effort horizontal N' est donné par (85).

L'effort horizontal N a pour expression :

$$\frac{N}{ke} = \frac{b_1}{e} \left[\sin \psi_1 + \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi_1\right) \cos \psi_1 \right] - \frac{b_2}{e} \left[\sin \psi_2 + \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi_2\right) \cos \psi_2 \right] \quad (89)$$

De même l'effort vertical P' est calculé par la relation (85) ; l'effort vertical P s'écrit :

$$\frac{P}{ke} = \frac{b_1}{e} \left[\cos \psi_1 - \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi_1\right) \sin \psi_1 \right] + \frac{b_2}{e} \left[\cos \psi_2 - \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi_2\right) \sin \psi_2 \right] \quad (90)$$

Le moment M' est toujours obtenu à partir de (87).

Le moment M s'exprime par :

$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{2b_1^2}{e^2} \left[\cos \psi_1 \sin \psi_1 + \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi_1\right) \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \psi_1\right) \right] + \frac{2b_2^2}{e^2} \left[\cos \psi_2 \sin \psi_2 + \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi_2\right) \left(\frac{1}{2} - \sin^2 \psi_2\right) \right] \quad (91)$$

. La condition d'existence s'écrit :

$$\frac{b_2}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{b_2}{e} \cos \psi_2 = 0 \quad (92)$$

Ces relations permettent le calcul des dimensions, des efforts et moment transmis par les réseaux.

L'angle ψ_1 varie de 0,58 à 0,7854 et les angles ψ_1 et ψ_2 varient entre les limites suivantes :

$$\begin{aligned} 0,64639 < \psi_1 < 0,78540 \\ 0,63899 < \psi_2 < 0,78540 \end{aligned}$$

Le tableau 9 donne les résultats obtenus pour ces réseaux.

$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$	$\frac{2M}{ke^2}$	$\frac{N}{ke}$	$\frac{b'_1}{e}$	$\frac{R'}{e}$	$\frac{b'_2}{e}$	$\frac{b_1}{e}$	$\frac{R}{e}$	$\frac{b_2}{e}$	$\frac{a}{e}$
0,00000	1,00000	1,00000	0,00000	0,70710	0,00000	0,70710	0,70710	0,00000	0,70710	∞
0,00691	1,00617	1,00836	- 0,00234	0,65236	0,00000	0,70858	0,66857	0,00000	0,66940	145,768
0,01941	1,01597	1,01628	- 0,00955	0,62086	0,00000	0,70995	0,64312	0,00000	0,64652	52,3506
0,03743	1,02850	1,03133	- 0,01730	0,59134	0,00000	0,71255	0,62141	0,00000	0,62758	27,2963

- Tableau 9 -

- Champs cinématiquement et plastiquement admissibles asymétriques

à trois points singuliers -

- Réseaux n° 2 -



2.4.6 - Etude des réseaux n° 5.

Les réseaux n° 5 se substituent aux réseaux n° 4 lorsque le champ homogène 1,7,8 et le champ semi-homogène 1,2,7 disparaissent (figure 45).

. Les conditions géométriques sont fournies les relations (82), (83) et (84) en posant :

$$\frac{b_1}{e} = 0$$

. Les conditions de pression sont celles des réseaux n° 4 pour la partie située au droit de la charge.

Pour l'autre partie, il vient :

$$p_3 = k\left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi_2\right)$$

et pour un point courant de la ligne 23

$$p_M = k\left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi - 4\psi_2\right).$$

. L'effort horizontal N' est celui de la relation (75).

L'effort horizontal N est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{N}{ke} = \frac{R}{e} & \left[4\psi_2 \sin \psi_1 + 2\psi_2 \sin \psi_2 + 2\psi_1 \sin \psi_1 - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) (\sin \psi_1 + \sin \psi_2) \right. \\ & \left. + \cos \psi_1 - \cos \psi_2 \right] \\ & - \frac{b_2}{e} \left[\sin \psi_2 + \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi_2\right) \cos \psi_2 \right] \end{aligned} \quad (93)$$

L'effort vertical P' est donné par (77).

L'effort vertical P a pour expression :

$$\frac{P}{ke} = \frac{R}{e} \left[\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) (\cos \psi_2 - \cos \psi_1) - 2\psi_2 \cos \psi_2 + 4\psi_2 \cos \psi_1 \right. \\ \left. + 2\psi_1 \cos \psi_1 - \sin \psi_1 - \sin \psi_2 \right] \\ + \frac{b_2}{e} \left[\cos \psi_2 - \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi_2\right) \sin \psi_2 \right] \quad (94)$$

. Le moment M' est le même que celui du réseau n° 4 (relation (79)).

. Le moment M se calcule par rapport au point T (figure 45).

Pour la ligne 23, le moment élémentaire est :

$$dM_{23} = kR CT \left(1 + \frac{\pi}{2} - 4\psi_2\right) \sin \psi \, d\psi \\ - 2kR CT \psi \sin \psi \, d\psi \\ - kR^2 \, d\psi \\ + kR CT \cos \psi \, d\psi$$

Il vient :

$$M_{23} = -kR^2 \cos \psi_1 \left[\left(1 + \frac{\pi}{2} - 4\psi_2\right) (\cos \psi_1 - \cos \psi_2) \right. \\ \left. - 2\psi_1 \cos \psi_1 - 2\psi_2 \cos \psi_2 + \sin \psi_1 + \sin \psi_2 \right] \\ - kR^2 (\psi_1 + \psi_2)$$

Pour la ligne 34, le moment est :

$$M_{34} = -kb_2 \left[R(1 - \cos \psi_1 \cos \psi_2 + \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi_2\right) \cos \psi_1 \sin \psi_2) \right. \\ \left. + \frac{b_2}{2} \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi_2\right) \right]$$

Soit finalement :

$$\begin{aligned} \frac{2M}{ke^2} = \frac{2R^2}{e^2} \cos \psi_1 & \left[\left(1 + \frac{\pi}{2} - 4\psi_2\right) (\cos \psi_1 - \cos \psi_2) \right. \\ & \left. - 2\psi_1 \cos \psi_1 - 2\psi_2 \cos \psi_2 + \sin \psi_1 + \sin \psi_2 \right] \\ & + \frac{2R^2}{e^2} (\psi_1 + \psi_2) \\ & + \frac{2b_2}{e} \left[\frac{R}{e} \left\{ 1 - \cos \psi_1 \cos \psi_2 + \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi_2\right) \cos \psi_1 \sin \psi_2 \right\} \right. \\ & \left. + \frac{b_2}{e} \left(1 + \frac{\pi}{2} - 2\psi_2\right) \right] \end{aligned} \quad (95)$$

. La condition d'existence reste (relation (81)) :

$$\frac{R'}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{b_2'}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{e} \sin \psi_2 + \frac{b_2}{e} \cos \psi_2$$

. Les dimensions des réseaux, les efforts et moment transmis sont obtenus à partir de ces relations (Tableau 10).

L'angle ψ_1' est toujours égal à 0,5.

Les angles ψ_1 et ψ_2 varient dans les limites suivantes :

$$\begin{aligned} 0,71460 < \psi_1 < 0,74653 \\ 0,53085 < \psi_2 < 0,53885 \end{aligned}$$

$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M'}{ke^2}$	$\frac{2M}{ke^2}$	$\frac{N}{ke}$	$\frac{b'_1}{e}$	$\frac{R'}{e}$	$\frac{b'_2}{e}$	$\frac{b_1}{e}$	$\frac{R}{e}$	$\frac{b_2}{e}$	$\frac{a}{e}$
0,64470	0,89714	0,92716	- 0,42361	0,17414	0,69296	0,03529	0,00000	0,71424	0,17294	1,41484
0,65023	0,89175	0,92086	- 0,42985	0,17116	0,69952	0,02797	0,00000	0,72013	0,16982	1,39383
0,66691	0,87507	0,90131	- 0,44870	0,16219	0,71932	0,00589	0,00000	0,73886	0,16002	1,33176
0,67136	0,87051	0,89595	- 0,45372	0,15980	0,72459	0,00000	0,00000	0,74411	0,15729	1,31155

- Tableau 10 -

- Champs cinématiquement et plastiquement admissibles asymétriques

à trois points singuliers -

- Réseaux n° 5 -



2.4.7. - Etude des réseaux n° 6.

Les réseaux n° 6 se substituent aux réseaux n° 5 lorsque le champ homogène 3',4',5' disparaît (figure 46).

Les conditions géométriques sont :

$$\frac{b'_1}{e} \cos \psi'_1 + \frac{r'}{e} \sin \psi'_1 + \frac{R'}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

. Les conditions de pression pour ces réseaux restent identiques à celles du réseau n° 5.

$$\frac{R}{e} (\sin \psi_1 + \sin \psi_2) + \frac{b_2}{e} \cos \psi_2 = 1$$

$$\frac{R}{e} (\cos \psi_2 - \cos \psi_1) - \frac{b_2}{e} \sin \psi_2 = 0$$

. L'effort horizontal N' est fourni par la relation (59),

L'effort horizontal N par la relation (93),

. L'effort vertical P' par la relation (60), l'effort vertical P par la relation (94).

. Le moment M' est calculé à partir de la relation (61), le moment M à partir de la relation (95).

. Les conditions d'existence sont :

$$\boxed{\frac{R'}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{e} \sin \psi_2 + \frac{b_2}{e} \cos \psi_2} \quad (96)$$

Les dimensions de ces réseaux, les efforts et moment transmis sont reportés dans le tableau 11.

L'angle ψ'_1 est égal est 0,5 ; les limites des angles ψ_1 et ψ_2 sont :

$$\boxed{0,6122 < \psi_1 < 0,71460}$$

$$\boxed{0,53085 < \psi_2 < 0,55236}$$

$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M'}{ke^2}$	$\frac{2M}{ke^2}$	$\frac{N}{ke}$	$\frac{b'_1}{e}$	$\frac{r'_1}{e}$	$\frac{R'}{e}$	$\frac{R}{e}$	$\frac{b_2}{e}$	$\frac{a}{e}$
0,67136	0,87051	0,89595	- 0,45372	0,15980	0,72459	0,72459	0,74411	0,15729	1,31155
0,68176	0,86035	0,88223	- 0,44189	0,13746	0,76974	0,72171	0,76009	0,14374	1,27799
0,69613	0,84480	0,86290	- 0,42508	0,10662	0,83155	0,71808	0,78282	0,12459	1,22656
0,71067	0,82732	0,84290	- 0,40753	0,07553	0,89319	0,71486	0,80655	0,10477	1,17511
0,72537	0,80783	0,82217	- 0,38916	0,04169	0,95467	0,71212	0,83130	0,08422	1,12356
0,74028	0,78621	0,80064	- 0,36984	0,01247	1,01596	0,70990	0,85712	0,06292	1,10717
0,74615	0,77718	0,79201	- 0,36202	0,00000	1,03981	0,70919	0,86749	0,05439	1,05152

- Tableau II -

- Champs plastiquement et cinématiquement admissibles asymétriques

à trois points singuliers -

- Réseaux n° 6 -



2.4.8. - Etude des réseaux n° 7.

Les réseaux n° 7 sont constitués comme suit : (figure 47)

- au droit de la charge , une ligne circulaire 2'3';
- au droit de l'encastrement , une ligne circulaire 23, un champ homogène 4,5,6 et un champ semi-homogène 3,4,6.

. Les conditions géométriques sont :

$$\frac{r'}{e} \sin \psi'_1 + \frac{R'}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\frac{R}{e} (\sin \psi_1 + \sin \psi_2) + \frac{b_2}{e} \cos \psi_2 = 1$$

$$\frac{R}{e} (\cos \psi_2 - \cos \psi_1) - \frac{b_2}{e} \sin \psi_2 = 0.$$

. Les conditions de pression sont identiques à celles des réseaux n° 5.

. L'effort horizontal N' est donné par la relation (64), l'effort horizontal N par la relation (93), l'effort vertical P' par la relation (65), l'effort vertical P par la relation (94).

. Le moment M' se calcule à partir de la relation (66), le moment M à partir de la relation (95).

. Les conditions d'existence sont :

$$\boxed{\frac{R'}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{e} \sin \psi_2 + \frac{b_2}{e} \cos \psi_2} \quad (97)$$

Les dimensions des réseaux, les efforts et moment transmis calculés à partir des relations précédentes sont réportées dans le tableau 12.

Les limites de variation des angles ψ'_1 , ψ_1 et ψ_2 sont les suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} 0,42355 < \psi'_1 < 0,5 \\ 0,56555 < \psi_1 < 0,6122 \\ 0,55236 < \psi_2 < 0,56555 \end{aligned}}$$

$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M'}{ke^2}$	$\frac{2M}{ke^2}$	$\frac{N}{ke}$	$\frac{b'_1}{e}$	$\frac{r'}{e}$	$\frac{R'}{e}$	$\frac{R}{e}$	$\frac{b_2}{e}$	$\frac{a}{e}$
0,74615	0,77718	0,79201	- 0,36202	0,00000	1,03981	0,70919	0,86749	0,05439	1,05152
0,75567	0,76197	0,77783	- 0,34881	0,00000	1,08132	0,70825	0,88452	0,04034	1,01883
0,76527	0,74588	0,76328	- 0,33481	0,00000	1,12550	0,70758	0,90197	0,02589	0,98603
0,77515	0,72290	0,74806	- 0,32057	0,00000	1,17372	0,70719	0,92015	0,01098	0,95326
0,78207	0,71644	0,73721	- 0,30859	0,00000	1,21663	0,70710	0,93304	0,00000	0,92935

- Tableau 12 -
 - Champs plastiquement et cinématiquement admissibles asymétriques
 à trois points singuliers -
 - Réseaux n° 7 -



2.4.9. - Etude des réseaux n° 8.

Les réseaux n° 8 succèdent aux réseaux n° 7 lorsque les champs homogènes 4, 5, 6 et semi-homogène 3, 4, 6 disparaissent (figure 48).

. Les conditions géométriques s'écrivent :

$$\frac{r'}{e} \sin \psi'_1 + \frac{R'}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\frac{R}{e} = \frac{1}{2 \sin \psi_1}$$

. Pour la ligne 2'3', les conditions de pression restent identiques à celles des réseaux n° 4, 5, 6 et 7.

Pour la ligne 23, la pression p_M en un point de la ligne est :

$$p_M = p_o - 2k\psi$$

p_o est la pression au milieu de la ligne 23 et ne peut être déterminée tout de suite.

. L'effort horizontal N' est fourni par la relation (64).

L'effort N a pour valeur ici :

$$\frac{N}{ke} = - 2 \frac{p_o}{k} - \frac{R}{e} \sin \psi_1 \quad (98)$$

L'effort vertical P' est toujours celui de la relation (65).

L'effort P vaut :

$$\frac{P}{ke} = \frac{R}{e} (4\psi_1 \cos \psi_1 - 2 \sin \psi_1) \quad (99)$$

. Le moment M' est celui obtenu par la relation (66).

Le moment M s'écrit :

$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{2R^2}{e^2} \cos \psi_1 (-4\psi_1 \cos \psi_1 + 2 \sin \psi_1) + \frac{4R^2}{e^2} \psi_1 \quad (100)$$

. La condition d'existence de ces réseaux est :

$$\frac{R'}{e} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{e} \sin \psi_1 \quad (101)$$

Les résultats concernant ces réseaux sont donnés dans le tableau 13.

Les limites de variation des angles ψ_1' , ψ_1 et ψ_2 sont :

$$\begin{aligned} 0,00000 < \psi_1' < 0,42355 \\ 0,37860 < \psi_1 = \psi_2 < 0,56555 \end{aligned}$$



$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M'}{ke^2}$	$\frac{2M}{ke^2}$	$\frac{N}{ke}$	$\frac{b'_1}{e}$	$\frac{r'}{e}$	$\frac{R'}{e}$	$\frac{R}{e}$	$\frac{b_2}{e}$	$\frac{a}{e}$
0,78207	0,71644	0,73721	- 0,30859	0,00000	1,21663	0,70710	0,83304	0,00000	0,92935
0,79184	0,69700	0,72161	- 0,29114	0,00000	1,28397	0,70710	0,95194	0,00000	0,89577
0,83028	0,61382	0,65552	- 0,21693	0,00000	1,69193	0,70710	1,04234	0,00000	0,76441
0,86159	0,52933	0,59484	- 0,14233	0,00000	2,51674	0,70710	1,14360	0,00000	0,65238
0,88598	0,44375	0,54193	- 0,06748	0,00000	5,00834	0,70710	1,25091	0,00000	0,55626
0,90351	0,31079	0,49987	- 0,00667	0,00000	∞	0,70710	1,35274	0,00000	0,44861

- Tableau 13 -

- Champs plastiquement et cinématiquement admissibles asymétriques

à trois points singuliers -

- Réseaux n° 8 -

2.4.10. - Etude des réseaux n° 9.

Les réseaux n° 9 succèdent aux réseaux n° 8 lorsque la ligne circulaire 2'0' se transforme en ligne droite (figure 49).

. Le long de la ligne 0'3' les conditions de pression sont celles de la ligne 0'3' dans les réseaux n° 8.

Soit p'_0 la pression le long de la ligne 2'0' ; cette pression varie pour ce réseau de $k\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ à 0.

Pour la ligne 23, les conditions de pression sont identiques à celles de la ligne 2'3' des réseaux n° 8.

. Les conditions géométriques sont les suivantes :

$$\boxed{\frac{\ell'}{e} + \frac{R'}{e} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \psi'\right) = 1} \quad (102)$$

et

$$\frac{R}{e} = \frac{1}{2 \sin \psi_1}$$

. L'effort axial N' s'écrit :

$$\boxed{\frac{N'}{ke} = -\frac{p'_0}{k} \frac{\ell'}{e} - \frac{R'}{e} \left[\left(2\psi' + \frac{\pi}{2} - 1\right) \sin \psi' + \cos \psi' - \sqrt{2} \right]} \quad (103)$$

et l'effort axial N :

$$\frac{N}{ke} = -2 \frac{p_0}{k} \frac{R}{e} \sin \psi_1$$

L'effort vertical P' s'écrit :

$$\boxed{\frac{P'}{ke} = \frac{\ell'}{e} + \frac{R'}{e} \left[\left(2\psi' + \frac{\pi}{2} - 1\right) \cos \psi' - \sin \psi' \right]} \quad (104)$$

L'effort vertical P est donné par la relation (99).

. Le moment M' s'écrit :

$$\frac{2M'}{ke^2} = 2 \frac{p'_0}{k} \frac{l'}{e} \left[\frac{l'}{2e} - \frac{R'}{e} \sin \psi' \right] + \frac{2R'^2}{e^2} \left[\psi' + \frac{\pi}{4} + \sin \psi' - (2\psi' + \frac{\pi}{2} - 1) \cos \psi' \right]$$

(105)

Le moment M est donné par la relation (100).

. Les conditions d'existence des réseaux sont :

$$\frac{l'}{e} + \frac{R'}{e} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \psi' \right) = 1$$

(106)

et

$$\frac{R}{e} = \frac{1}{2 \sin \psi_1}$$

Les dimensions, les efforts et moment transmis par les réseaux sont donnés dans le tableau 14.

Les angles ψ' et ψ_1 varient dans les limites suivantes :

$$\begin{aligned} 0 < \psi' < \frac{\pi}{4} \\ 0 < \psi_1 < 0,37860 \end{aligned}$$

$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M'}{ke^2}$	$\frac{2M}{ke^2}$	$\frac{N}{ke}$	$\frac{b'_1}{e}$	$\frac{r'}{e}$	$\frac{R'}{e}$	$\frac{R}{e}$	$\frac{b_2}{e}$	$\frac{a}{e}$
0,90351	0,31079	0,49987	- 0,00667	0,00000	0,50000	0,70710	1,35274	0,00000	0,44861
0,91000	0,26997	0,48317	- 0,00623	0,00000	0,83160	0,70710	1,39820	0,00000	0,41379
0,93000	0,20688	0,42750	- 0,00498	0,00000	0,89615	0,70710	1,57571	0,00000	0,34106
0,95000	0,14653	0,36236	- 0,00373	0,00000	0,93599	0,70710	1,85352	0,00000	0,26783
0,97000	0,08743	0,28155	- 0,00249	0,00000	0,96568	0,70710	2,37846	0,00000	0,19020
0,99000	0,02900	0,16304	- 0,00124	0,00000	0,98959	0,70710	4,09519	0,00000	0,09699
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	1,00000	0,70710	∞	0,00000	0,00000

- Tableau 14 -

- Champs plastiquement et cinématiquement admissibles asymétriques

à trois points singuliers -

- Réseaux n° 9 -



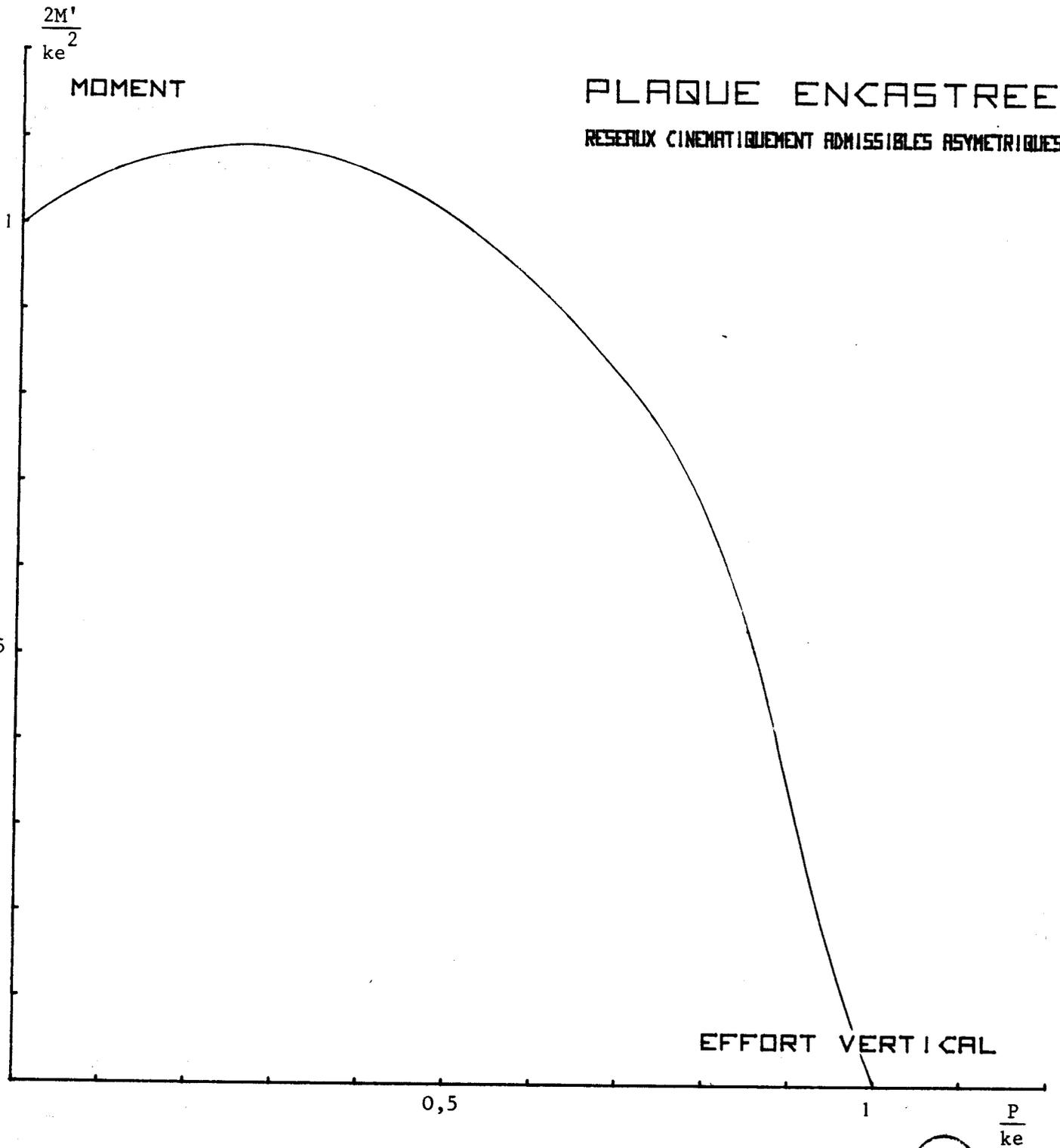
2.4.11. - Valeurs successives des efforts et moments transmis.

Les figures (50), (51), (52) représentent les fonctions

$$\frac{2M'}{ke^2} = f\left(\frac{P}{ke}\right), \quad \frac{2M}{ke^2} = f\left(\frac{P}{ke}\right) \quad \text{et} \quad a/e = f\left(\frac{P}{ke}\right).$$

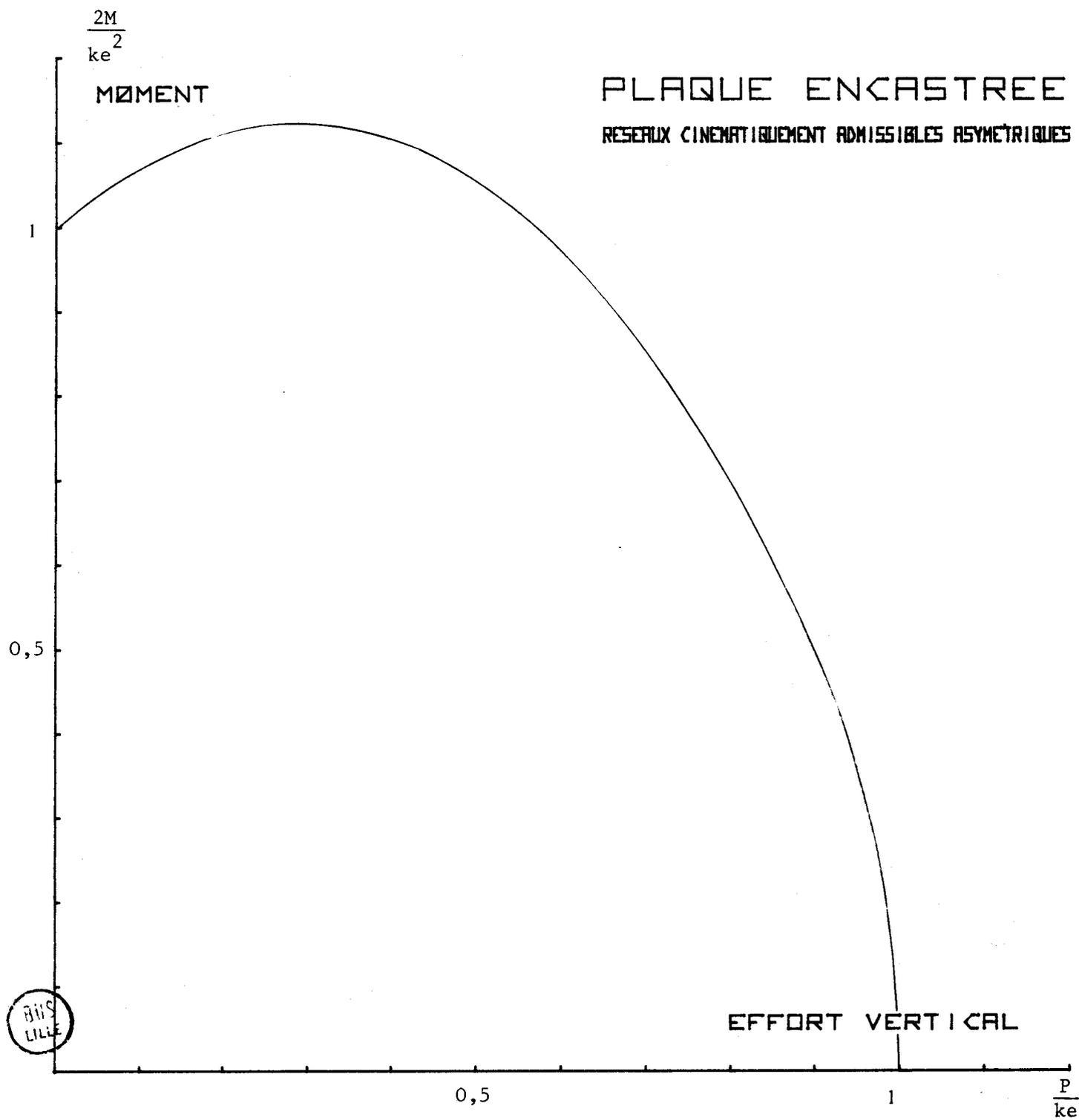
La figure (52) compare les résultats obtenus pour les réseaux, symétriques et ceux obtenus pour les réseaux asymétriques à trois points singuliers.

En se reportant à la figure (40) où une comparaison est faite entre les réseaux symétriques et les réseaux asymétriques à deux points singuliers, nous constatons que les résultats obtenus pour les réseaux asymétriques à trois points singuliers sont très légèrement plus proches des valeurs exactes.

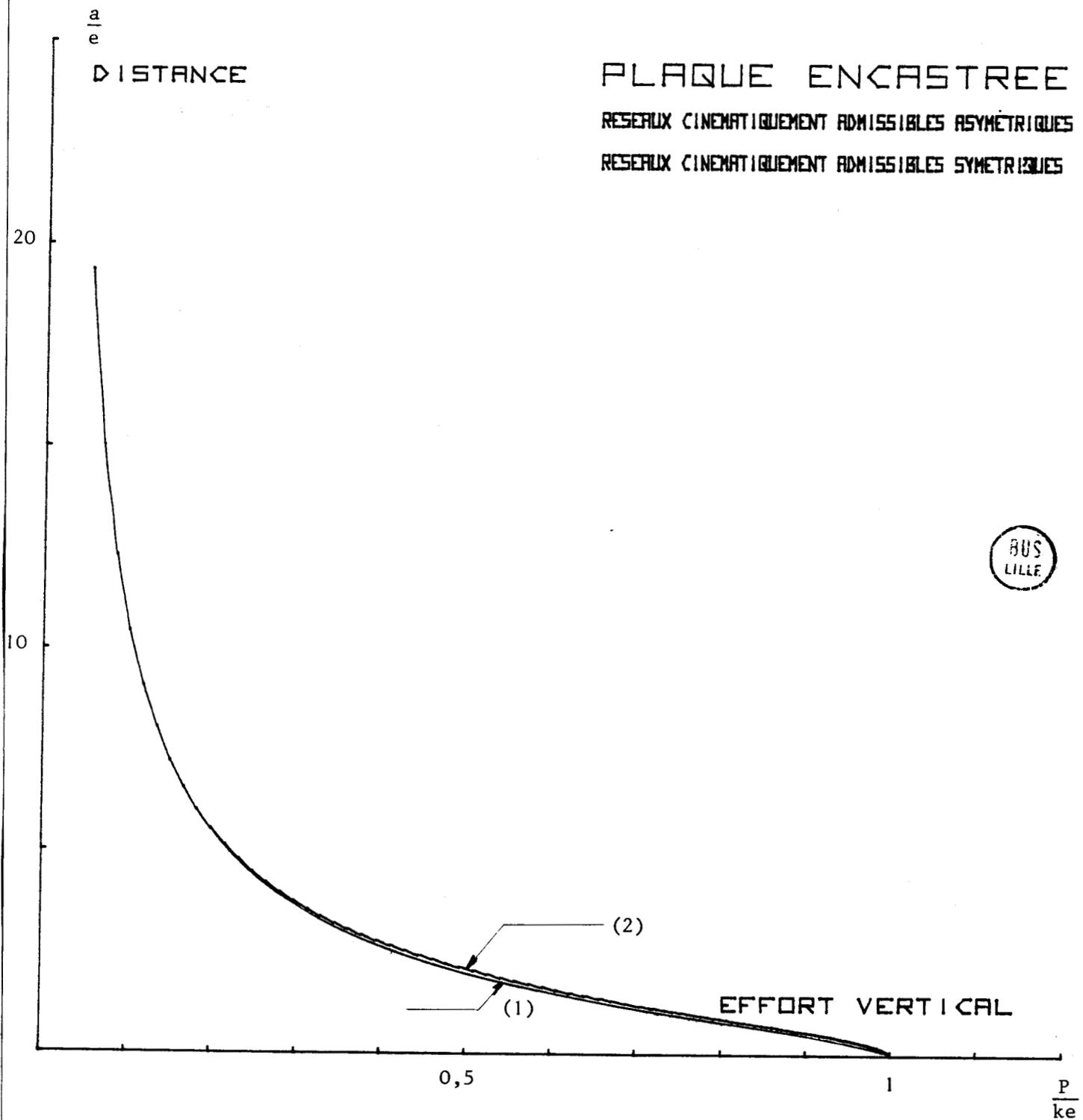


- Figure 50 -





- Figure 51 -



- Figure 52 -

3 - CHAMPS STATIQUEMENT ET PLASTIQUEMENT ADMISSIBLES.

3.1. - Introduction.

Dans ce qui suit, nous développons des champs de contraintes plastiquement et statiquement admissibles pour des plaques encastrées sur deux bords dans les conditions de chargement de la figure 16.

3.2. - Champ statiquement et plastiquement admissible continu.

3.2.1. - Constitution du champ.

Nous pouvons utiliser le champ continu décrit au chapitre I (paragraphe 4.3.).

Considérons la figure 53. Dans la partie de plaques telle que $0 < x < \frac{a}{2}$, la contrainte σ_y est prise nulle partout, et :

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Les conditions d'équilibre local sont :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

D'où :

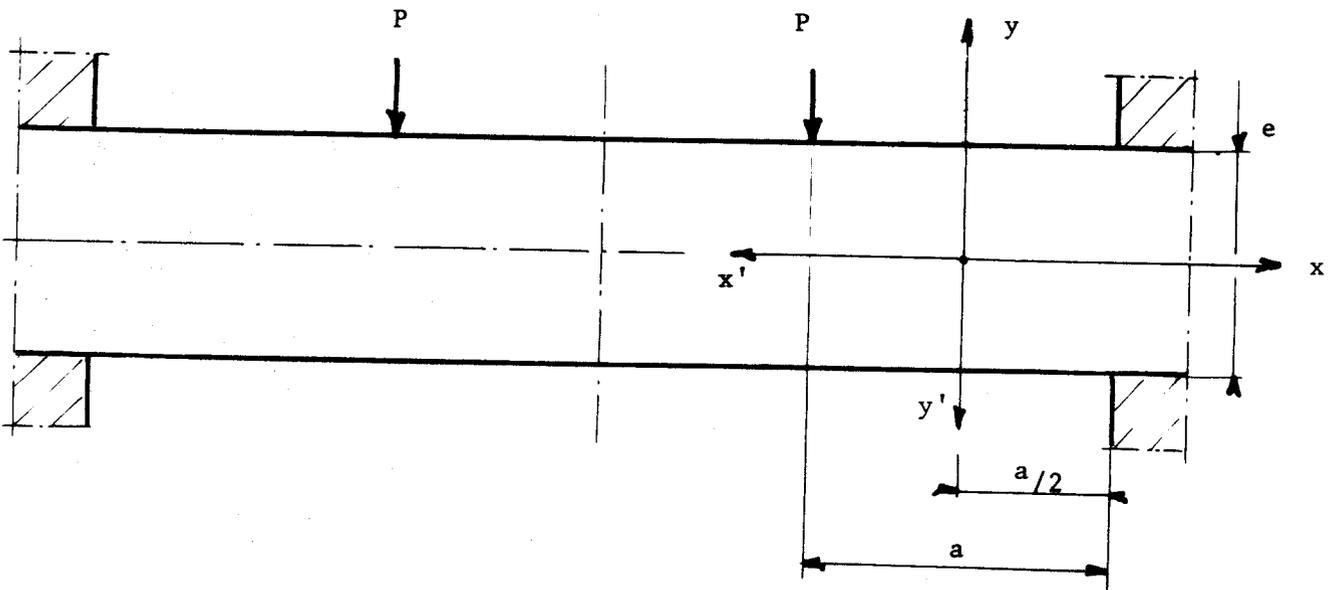
$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(y)$$

$$\sigma_x = -x \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + K$$

En posant :

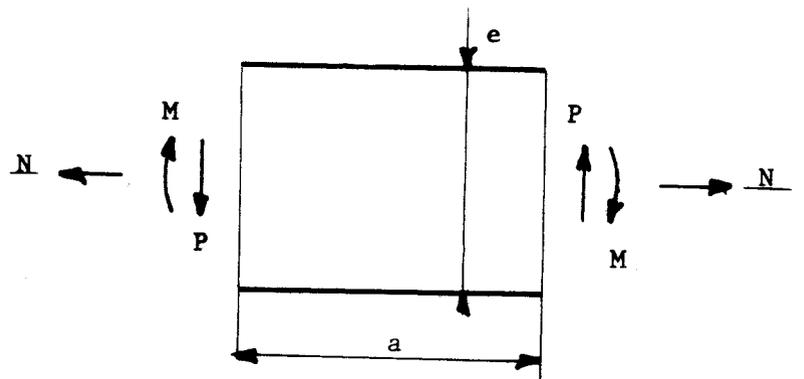
$$x = 0 \quad \sigma_x = 0$$

$$\sigma_x = -x \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$



- Figure 53 -

- Champ statiquement et plastiquement admissible continu -



- Figure 54 -

- Efforts et moments transmis -

La section critique correspond à l'abscisse $x = a/2$.

Vérifions la condition de plasticité de TRESCA :

$$\left(-\frac{a}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2$$

Les contraintes en un point de la plaque d'ordonnée y négative sont les suivantes :

$$\tau_{xy} = -k \sin \frac{2e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right)$$

et :

$$\sigma_x = 4k \frac{x}{a} \cos \frac{2e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right)$$

avec la condition :

$$\frac{2e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right) \leq \frac{\pi}{2}$$

Les contraintes sont égales à :

$$\tau_{xy} = -k$$

$$\sigma_x = 0$$

lorsque :

$$\frac{2e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right) > \frac{\pi}{2}$$

Pour la zone de la plaque située entre l'abscisse $-\frac{a}{2}$ et 0, le champ de contraintes est anti-symétrique à celui qui vient d'être décrit.

Il est décrit comme précédemment en posant :

$$x' = x$$

$$y' = y$$

3.2.2. - Efforts transmis par le champ.

. L'effort axial repris par le champ au droit de l'encastrement est nul (figure 54).

. L'effort vertical, par unité de largeur, vaut :

$$P = - 2 \int_{-\frac{e}{2}}^0 \tau_{xy} dy$$

soit :

$$P = \int_{-\frac{e}{2}}^0 - k \sin \frac{2e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right) dy$$

si $\frac{2e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right) \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{2e}{a} \leq \frac{\pi}{2}$

et
$$P = - 2 \left[\int_{-\frac{n}{2}}^0 - k dy + \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{n}{2}} - k \sin \frac{2e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right) dy \right]$$

si $\frac{2e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right) > \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{2e}{a} > \frac{\pi}{2}$

avec $\frac{n}{2}$ ordonnée correspondante à la valeur maximale de la fonction circulaire τ_{xy} . $\frac{n}{2}$ est donné par la relation

$$\frac{\pi}{2} = \frac{e}{a} \left(1 - \frac{n}{e}\right)$$

soit
$$\frac{n}{2} = \frac{e}{2} - \frac{\pi}{4} a$$

Les valeurs de l'effort vertical $\frac{P}{ke}$ sont données par les expressions suivantes :

$\frac{2e}{a} \leq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{P}{ke} = \frac{a}{2e} \left(1 - \cos \frac{2e}{a}\right) \tag{107}$$

$\frac{2e}{a} > \frac{\pi}{2}$

$$\frac{P}{ke} = \frac{a}{2e} \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \tag{108}$$

3.2.3. - Moment transmis par le champ.

Le moment repris par le champ, calculé au droit de l'encastrement, est :

$$M = 2 \int_{-\frac{e}{2}}^0 \frac{e}{2} \sigma_x y dy$$

Pour $\frac{2e}{a} \leq \frac{\pi}{2}$

$$M = 2 \int_{-\frac{e}{2}}^0 \frac{e}{2} 2k \cos \frac{2e}{a} \left(1 + \frac{2y}{e}\right) y dy$$

et pour

$$\frac{2e}{a} > \frac{\pi}{2}$$

$$M = 2 \int_{-\frac{e}{2}}^{-\frac{n}{2}} \frac{e}{2} 2k \cos \frac{2e}{a} \left(1 + \frac{2y}{a}\right) y dy$$

Il vient donc :

• $\frac{2e}{a} \leq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{a^2}{2e^2} \left(1 - \cos \frac{2e}{a}\right) \quad (109)$$

et

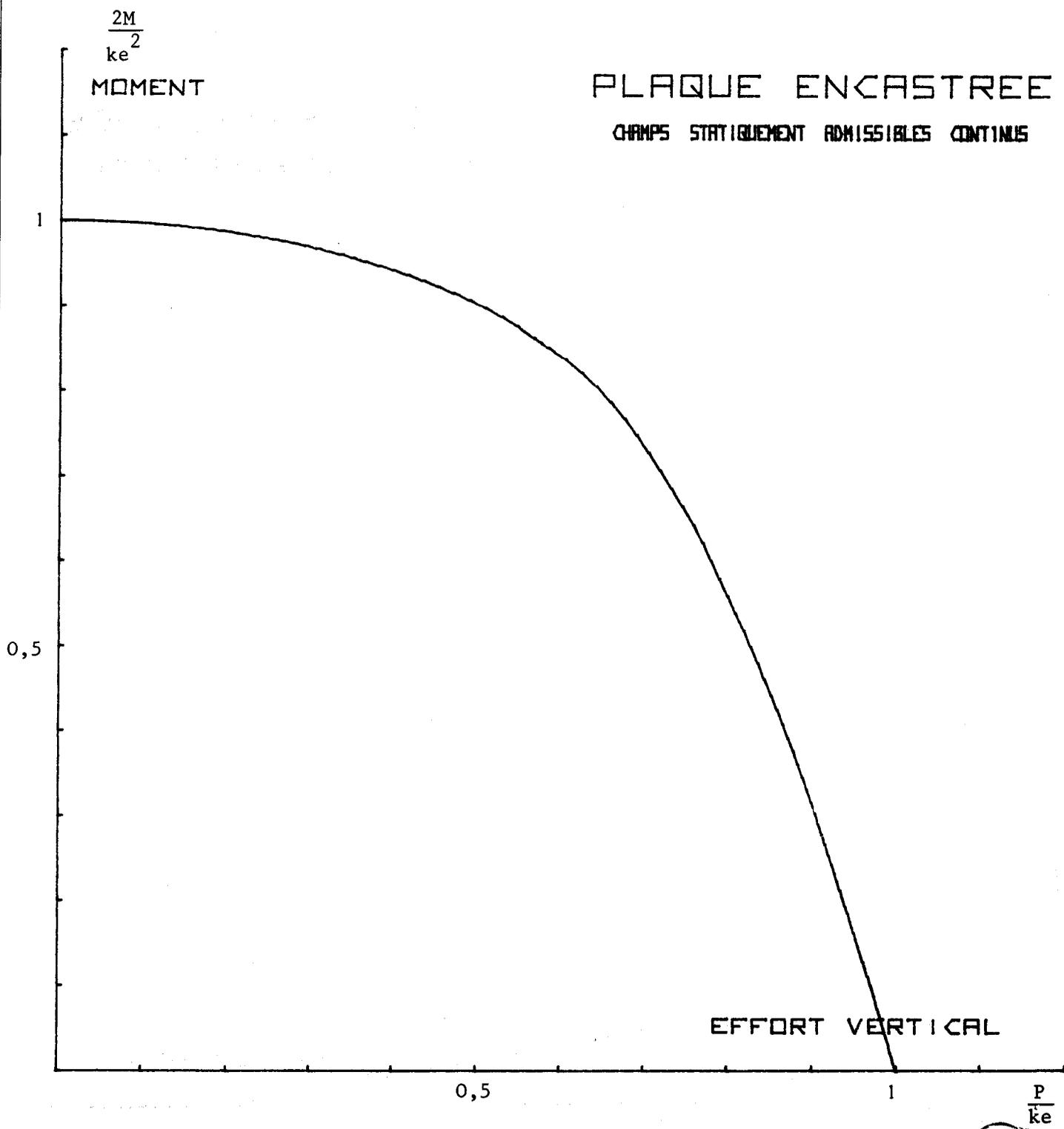
• $\frac{2e}{a} > \frac{\pi}{2}$

$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{a}{e} \left[\frac{a}{2e} \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \right] \quad (110)$$

3.2.4. - Valeurs successives des efforts et moments transmis.

Les valeurs des efforts, moment obtenus avec les relations (107) à (110) sont reportées dans le tableau (15).

Les figures 55 et 56 donnent les variations de $\frac{2M}{ke^2}$ en fonction de $\frac{P}{ke}$ et celle de a/e en fonction de $\frac{P}{ke}$.

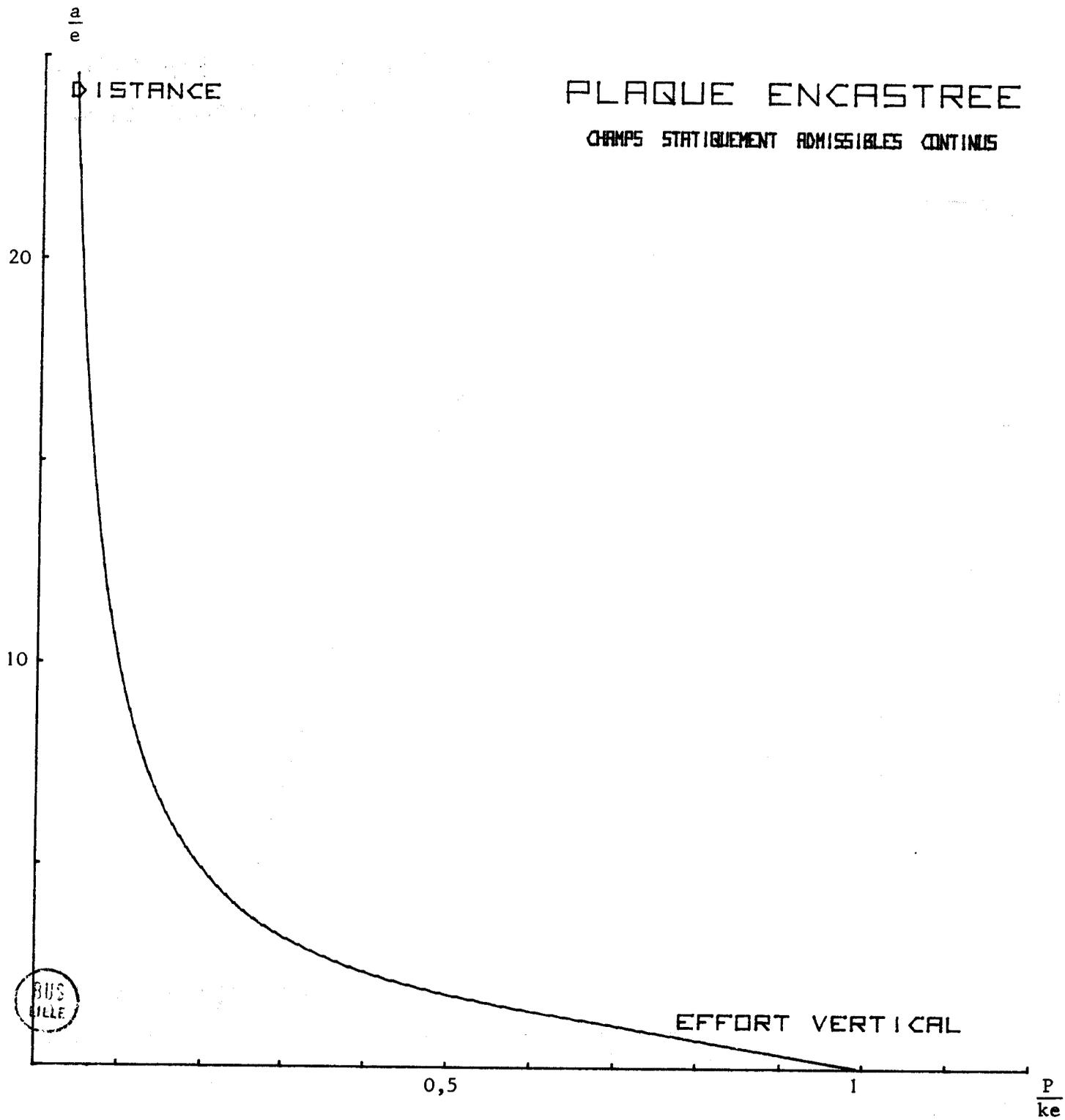


- Figure 55 -



PLAQUE ENCASTREE

CHAMPS STATIQUEMENT ADMISSIBLES CONTINUS



- Figure 56 -

$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$	$\frac{N}{ke}$	$\frac{a}{e}$
0,00000	1,00000	0,00000	∞
0,02499	0,99979	0,00000	40,00000
0,04996	0,99917	0,00000	20,00000
0,09967	0,99667	0,00000	5,00000
0,37912	0,94779	0,00000	2,50000
0,64325	0,80407	0,00000	1,25000
0,82163	0,51352	0,00000	0,62500
0,91081	0,28463	0,00000	0,31250
0,95541	0,14998	0,00000	0,15625
0,97770	0,07638	0,00000	0,07813
0,98885	0,03863	0,00000	0,03906
0,99443	0,01942	0,00000	0,01953
0,99721	0,00974	0,00000	0,00977
0,99861	0,00488	0,00000	0,00488
0,99930	0,00244	0,00000	0,00244
0,99965	0,00122	0,00000	0,00122
1,00000	0,00000	0,00000	0,00000

- Tableau 15 -

- Champs plastiquement et statiquement admissibles continus -



3.3. - Champ statiquement et plastiquement admissible à zones symétriques.

3.3.1. - Constitution du champ.

Le champ est constitué par neuf zones numérotées de I à IX (figure 57).

L'axe x est situé sur la trace du plan moyen de la plaque ; cet axe passe par le milieu de la frontière entre les zones III et V.

Les contraintes sont constantes en tout point des zones I, II, IV, V, VI, VII, VIII et IX.

Dans les zones I et II, les contraintes sont choisies pour satisfaire aux conditions aux limites :

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad \text{pour} \quad y = \pm \frac{e}{2}$$

et à la condition de plasticité de TRESCA en déformation plane :

$$\sigma_x^2 = 4k^2 .$$

Pour simplifier les expressions ultérieures du critère de plasticité, nous posons :

$$\sigma_x^2 = 1$$

Il vient donc :

Zone I	$\sigma_x = -1$	$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$	(111)
Zone II	$\sigma_x = 1$	$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$	

Dans les autres zones, les contraintes sont définies à partir des conditions aux limites, des équations d'équilibre local et de la condition de plasticité de TRESCA en déformation plane.

3.3.2. - Contraintes dans la zone centrale III.

Les conditions à respecter à la frontière entre la zone III et la zone V (figure 57) sont :

$$\sigma_x = 0 \quad x = c$$

$$\tau_{xy} = \tau(c)$$

où $\tau(c)$ est une constante puisque les contraintes sont choisies constantes dans la zone V.

De la même façon

$$\sigma_x = 0 \quad x = a$$

$$\tau_{xy} = \tau(a)$$

et

$$\sigma_x = 0 \quad x = a'$$

$$\tau_{xy} = \tau(a')$$

$\tau(a)$ et $\tau(a')$ sont également des constantes.

Nous posons que la contrainte σ_x est nulle dans toute la zone III.

La condition d'équilibre selon x s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

soit:

$$\tau_{xy} = \tau(x) \quad (112)$$

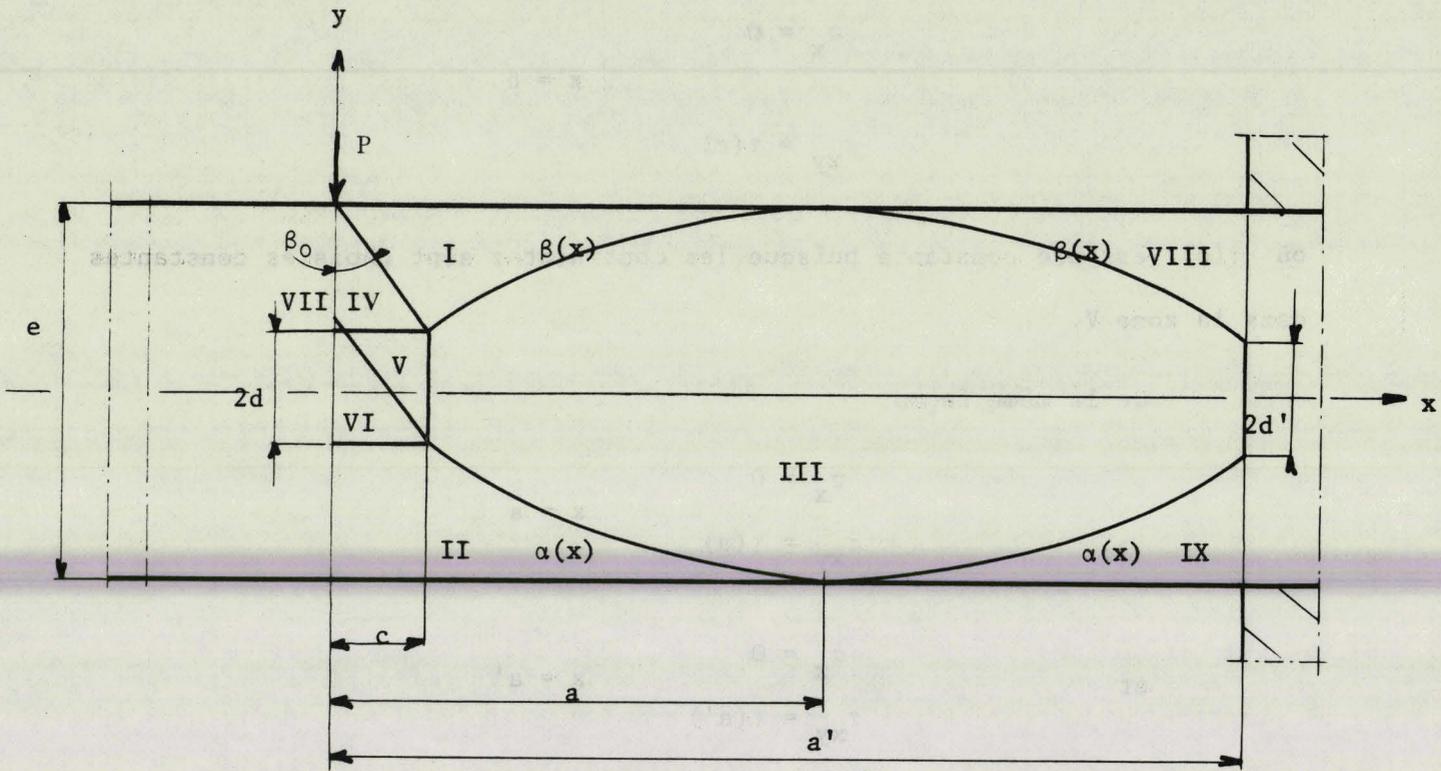
et

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

d'où:

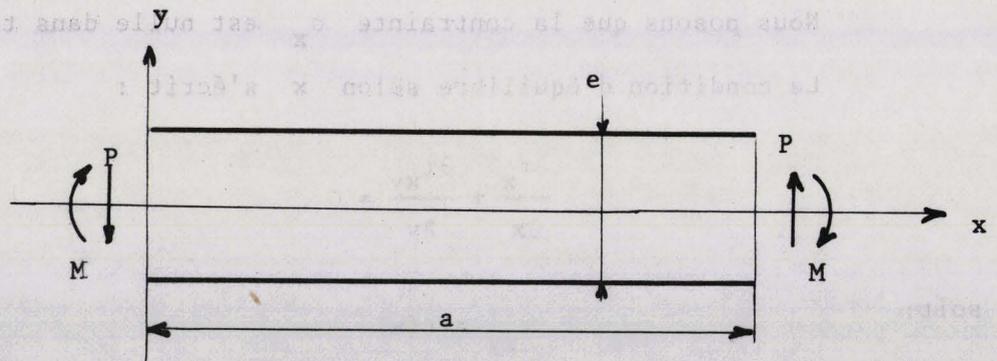
$$\sigma_y = -y \tau'(x) + \sigma(x) \quad (113)$$

Ces résultats sont identiques à ceux obtenus pour les plaques rectangulaires appuyées (relation (22)).



- Figure 57 -

- Champ statiquement et plastiquement admissible à blocs symétriques -



- Figure 58 -

- Efforts et moments transmis -



3.3.3. - Conditions aux limites entre les zones I et III, II et III, VIII et III, IX et III.

. Soit $y = \beta(x)$, l'équation de la frontière entre les zones I et III et β l'angle entre l'axe x et la tangente à la courbe $y = \beta(x)$.

Les conditions d'équilibre impliquent la continuité des contraintes normales et des contraintes tangentielles à la frontière :

$$2\sigma_n = \sigma_y - \sigma_y \cos(2\beta+\pi) + 2\tau \sin(2\beta+\pi) = -1 - \cos(2\beta+\pi) \quad (114)$$

$$2\tau_n = \sigma_y \sin(2\beta+\pi) + 2\tau \cos(2\beta+\pi) = \sin(2\beta+\pi) \quad (115)$$

De la relation (115), nous obtenons :

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\tau_{xy}}{1 - \sigma_y} \quad (116)$$

De (114) :

$$\sigma_y + 1 + (\sigma_y - 1)\cos 2\beta - 2\tau_{xy} \sin 2\beta = 0$$

Compte tenu de (116), il vient :

$$\cos 2\beta = \frac{1 - \sigma_y^2}{(1 - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (117)$$

avec la relation

$$\frac{1}{\cos^2 2\beta} = 1 + \operatorname{tg}^2 2\beta$$

et avec (116) et (117), nous obtenons :

$$\frac{(1 - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}{(1 + \sigma_y)^2} = 1$$

Il vient donc :

$$\tau_{xy}^2 = \sigma_y \quad (118)$$

En reportant dans la relation (116) :

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\tau_{xy}}{1 - \tau_{xy}^2} = \frac{2\beta'(x)}{1 - \beta'(x)^2}$$

soit :

$$\boxed{\beta'(x) = \tau(x)} \quad (119)$$

avec $c \leq x \leq a$

et :

$$\boxed{\beta'(x)^2 = \sigma_y} \quad (120)$$

. Etudions les conditions de continuité entre les zones II et III.

Notons $y = \alpha(x)$ l'équation de la frontière entre les deux zones et α l'angle entre l'axe x et la tangente à la frontière.

Il vient :

$$2\sigma_n = \sigma_y - \sigma_y \cos(2\alpha + \pi) + 2\tau_{xy} \sin(2\alpha + \pi) = 1 + \cos(2\alpha + \pi) \quad (121)$$

$$2\tau_n = \sigma_y \sin(2\alpha + \pi) + 2\tau_{xy} \cos(2\alpha + \pi) = -\sin(2\alpha + \pi). \quad (122)$$

De la relation (122), nous obtenons :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{-1 - \sigma_y} \quad (123)$$

Des relations (121) et (123), il vient :

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \sigma_y^2}{(1 + \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (124)$$

Soit finalement en reliant (123) et (124) :

$$\boxed{\alpha'(x) = -\tau(x)} \quad (125)$$

avec $c \leq x \leq a$

$$\boxed{\alpha'(x)^2 = -\sigma_y} \quad (126)$$

. Les conditions de continuité entre les zones VIII et III, IX et III s'expriment comme précédemment.

Les contraintes dans les zones VIII et IX sont prises égales à :

Zone VIII	$\sigma_x = 1$	$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$	(127)
Zone IX	$\sigma_x = -1$	$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$	

Les conditions de continuité avec la zone III nous donnent les relations suivantes :

$$\boxed{\alpha'(x) = \tau(x)} \quad (128)$$

avec $a \leq x \leq a'$

$$\boxed{\alpha'^2(x) = \sigma_y} \quad (129)$$

$$\boxed{\beta'^2(x) = -\tau_y} \quad (130)$$

avec $a \leq x \leq a'$

$$\boxed{\beta'^2(x) = -\sigma_y} \quad (131)$$

3.3.4. - Détermination des frontières de la zone III.

. Pour des abscisses comprises entre c et a (figure 57), les relations (119) et (125) donnent la condition :

$$\alpha'(x) + \beta'(x) = 0$$

soit

$$\alpha(x) + \beta(x) = K_1$$

Compte tenu de la symétrie des zones I et II, nous avons

$$\alpha(x) = -\beta(x)$$

donc

$$\alpha(x) + \beta(x) = 0 \tag{132}$$

Les relations (120) et (126) s'écrivent :

$$\alpha'(x)^2 = \alpha \tau'(x) - \sigma(x) = -\alpha'(x) \tau(x)$$

$$\beta'(x)^2 = -\beta \tau'(x) + \sigma(x) = \beta'(x) \tau(x)$$

Par différence, il vient :

$$[\beta'(x) - \alpha'(x)] \tau(x) = -[\beta(x) - \alpha(x)] \tau'(x)$$

ou

$$\frac{d}{dx} \{ \tau(\beta - \alpha) \} = 0 \tag{133}$$

en intégrant :

$$\{ \beta(x) - \alpha(x) \} \tau(x) = K_2$$

compte tenu de la symétrie des frontières $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ par rapport à l'axe x :

$$2\beta'(x)\beta(x) = K_2$$

soit

$$\alpha^2(x) = \beta^2(x) = K_2 x + K_3 \tag{134}$$

Considérons la frontière $y = \beta(x)$; les conditions aux limites la concernant sont :

$$x = c \quad \beta(c) = d$$

$$x = a \quad \beta(a) = \frac{e}{2}$$

De la relation (134), nous obtenons :

$$d^2 = K_2 c + K_3$$

$$\frac{e^2}{4} = K_2 a + K_3$$

Les constantes K_2 et K_3 ont pour valeur :

$$K_2 = \frac{e^2 - 4d^2}{4(a - c)}$$

et

$$K_3 = \frac{4ad^2 - ce^2}{4(a - c)}$$

L'équation de la frontière s'écrit :

$$\alpha^2(x) = \beta^2(x) = \frac{(e^2 - 4d^2)x + 4ad^2 - ce^2}{4(a - c)} \quad (135)$$

pour $c \leq x \leq a$

. Pour la seconde partie de la zone III ($a \leq x \leq a'$), nous obtenons compte tenu de nouvelles conditions aux limites (figure 57) :

$$x = a \quad \beta(x) = \frac{e}{2}$$

$$x = a' \quad \beta(x) = d'$$

$$\alpha^2(x) = \beta^2(x) = \frac{(e^2 - 4d'^2)x + 4ad'^2 - a'e^2}{4(a - a')} \quad (136)$$

pour $a \leq x \leq a'$

3.3.5. - Conditions aux limites entre les zones I et IV, III et V, IV et VII, V et VI .

. Continuité entre I et IV.

Soit β_0 l'angle entre la frontière des zones I et IV et la verticale (figure 57).

Posons :

$A = \sigma_x + \sigma_y$ $B = \sigma_x - \sigma_y$ $C = \tau_{xy}$	pour la zone IV	(137)
---	-----------------	-------

Les conditions de continuité suit les suivantes :

$$A + B \cos 2\beta_0 + 2C \sin 2\beta_0 = -1 - \cos 2\beta_0 \quad (138)$$

$$- B \sin 3\beta_0 + 2C \cos 2\beta_0 = \sin 2\beta_0 \quad (139)$$

De (139) nous obtenons :

$$\operatorname{tg} 2\beta_0 = t = \frac{2C}{B + 1} \quad (140)$$

La zone IV est dans le domaine plastique lorsque la condition de plasticité de TRESCA est vérifiée :

$$B^2 + 4C^2 = 1$$

La condition se transforme, compte tenu de la relation (140) :

$$4C^2 = (B+1)^2 t^2 = 1 - B^2$$

ou

$$(t^2 + 1)B^2 + 2Bt^2 + t^2 - 1 = 0$$

La solution utile de cette équation est :

$$B = \frac{-t^2 + 1}{t^2 + 1} \quad (141)$$

De (140), il vient :

$$C = \frac{1}{t^2 + 1} \quad (142)$$

La relation (138) permet de définir la valeur de A :

$$A = -1 - (B+1)\cos 2\beta_0 - 2C \sin 2\beta_0 \quad (143)$$

L'autre détermination de B possible ne convient pas car elle conduit à des contraintes positives.

. Continuité entre III et V.

Dans la zone V, les contraintes sont :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0 \\ \sigma_y &= \frac{A - B}{2} \quad \text{zone V} \\ \tau_{xy} &= C \end{aligned} \quad (144)$$

. Continuité entre IV et VII.

Les contraintes sont les mêmes dans la zone I et dans la zone IV :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -1 \\ \sigma_y &= \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \quad \text{zone VII} \quad (145)$$

. Continuité entre V et VI.

La zone VI a ses contraintes définies en reportant la discontinuité sur σ_x entre IV et V sur la discontinuité sur σ_x entre VI et VII.

Soit :

$$\sigma_x = -1 - \frac{A+B}{2} \quad \text{zone VI} \quad (146)$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

3.3.6. - Détermination de l'angle β_0 .

Le choix de l'angle β_0 est fait de façon à satisfaire la condition de plasticité dans la zone III et dans la zone V.

Cette condition s'écrit pour la zone III :

$$\sigma_y^2 + 4\tau_{xy}^2 = 1$$

La contrainte σ_y est maximale sur la frontière $\beta(x)$ ou $\alpha(x)$.

Pour la frontière $\beta(x)$, nous avons d'après (120) et (126) :

$$2\sigma(x) = \{\beta'(x) + \alpha'(x)\}\tau(x) + \{\beta(x) + \alpha(x)\}\tau'(x)$$

et $\alpha(x) + \beta(x) = 0$

$$\alpha'(x) + \beta'(x) = 0$$

il vient :

$$\sigma(x) = 0$$

$$\sigma_y = -\beta(x)\tau'(x) = \beta'^2(x) \quad (147)$$

La condition de plasticité a la forme :

$$\beta'^4(x) + 4\beta'^2(x) = 1$$

La contrainte $\tau(c)$ peut prendre des valeurs telles que :

$$\tau(c) \leq 0,48586 \quad (148)$$

Pour la zone V, la condition de plasticité est :

$$\left(\frac{A - B}{2}\right)^2 + 4C^2 = 1$$

Compte tenu des valeurs de A, B et C fournies par les relations (141), (142) et (143), nous trouvons l'angle β_0 optimum par calcul itératif :

$$\beta_0 = 0,56079 \quad (149)$$

3.3.7. - Définition complète des contraintes.

Les contraintes dans chaque zone sont les suivantes (avec $4k^2 = 1$)

$$\text{Zone I} \quad \sigma_x = -1 \quad \tau_{xy} = \sigma_y = 0$$

$$\text{Zone II} \quad \sigma_x = 1 \quad \tau_{xy} = \sigma_y = 0$$

d'après (111)

$$\begin{aligned} \text{Zone III} \quad & \sigma_x = 0 \\ & \tau_{xy} = \tau(x) \\ & \sigma_y = -y \tau'(x) \end{aligned}$$

d'après (113) et (147)

$$\begin{aligned} \text{Zone IV} \quad & \sigma_x = -1,24566 \\ & \tau_{xy} = 0,39118 \\ & \sigma_y = -0,62284 \end{aligned}$$

d'après (140), (141), (142), (143) et (149)

Zone V	$\sigma_x = 0$
	$\tau_{xy} = 0,39118$
	$\sigma_y = -0,62284$

d'après (144)

Zone VI	$\sigma_x = 0,24568$
	$\tau_{xy} = 0$
	$\sigma_y = 0$

d'après (146)

Zone VII	$\sigma_x = -1$
	$\tau_{xy} = \sigma_y = 0$

d'après (145)

Zone VIII	$\sigma_x = 1$	$\tau_{xy} = \sigma_y = 0$
-----------	----------------	----------------------------

Zone IX	$\sigma_x = -1$	$\tau_{xy} = \sigma_y = 0$
---------	-----------------	----------------------------

d'après (127)

Les zones I, II, IV, V, VII, VIII et IX sont plastifiées ;
les zones III et VI sont rigides.

Nous retrouvons ici une partie des résultats déjà obtenus pour les plaques appuyées (Chapitre I, paragraphe 4.4.).

3.3.8. - Détermination des efforts et moments transmis par le champ.

Evaluons la contrainte τ_{xy} dans la zone III avec :

$$\tau_{xy} = \tau(x) = \beta'(x)$$

D'après (135), nous obtenons :

$$\beta'(x) = \frac{e^2 - 4d^2}{8(a - c)} \frac{\sqrt{4(a - c)}}{\sqrt{(e^2 - 4d^2)x + 4ad^2 - ce^2}}$$

après simplification :

$$\beta'(x) = \frac{e^2 - 4d^2}{4\sqrt{\{(e^2 - 4d^2)x + 4ad^2 - ce^2\}(a - c)}}$$

à l'abscisse $x = c$, il vient :

$$\beta'(c) = \tau(c) = \frac{e^2 - 4d^2}{8d(a - c)} \quad (150)$$

D'après la figure 57, nous avons la relation géométrique suivante :

$$\boxed{d = \frac{e}{2} - \frac{c}{\operatorname{tg} \beta_o} = \frac{e}{2} - \frac{c}{t_o}} \quad (151)$$

L'expression (150) compte tenu de (151) s'écrit en ordonnant selon $\frac{c}{e}$

$$\frac{2 t_o \tau(c) + 1}{t_o} \frac{c^2}{e^2} - \left[\frac{2 a \tau(c)}{t_o e} + \tau(c) + \frac{1}{t_o} \right] \frac{c}{e} + \frac{a}{e} \tau(c) = 0$$

La valeur de $\frac{c}{e}$ est :

$$\frac{c}{e} = \frac{(2 \frac{a}{e} + t_0) \tau(c) + 1 - \sqrt{[(2 \frac{a}{e} + t_0) \tau(c) + 1]^2 - 4 \frac{a}{e} [2t_0 \tau(c) + 1] \tau(c)}}{4 t_0 \tau(c) + 2} \quad (152)$$

$$t_0$$

L'effort vertical P par unité de largeur de plaque (figure 58) est obtenu par :

$$\frac{P}{ke} = 2 \tau(a)$$

avec

$$\tau(a) = \beta'(a) = \frac{1 - 4(\frac{d}{e})^2}{4(\frac{a}{e} - \frac{c}{e})}$$

soit :

$$\frac{P}{ke} = \frac{1 - 4(\frac{d}{e})^2}{2(\frac{a}{e} - \frac{c}{e})} \quad (153)$$

La valeur de $\frac{d'}{e}$ est donné par

$$\frac{d'}{e} = \frac{\tau(a)}{2\tau(a')} \quad (154)$$

Nous choisissons la valeur de la contrainte $\tau(a')$ de façon que la zone III soit plastifiée à l'abscisse $x = a'$. Nous obtenons la même valeur qu'en (148) soit :

$$\tau(a') = 0,48586 \quad (155)$$

Nous obtenons la valeur de $\frac{a'}{e}$ en nous servant de la relation (136).

$$2\beta(x)\beta'(x) = \frac{e^2 - 4d'^2}{4(a-a')}$$

Soit à l'abscisse $x = a$ en tenant compte de (130) :

$$e \tau(a) = \frac{e^2 - 4d'^2}{4(a' - a)}$$

Il vient :

$$\frac{a'}{e} = \frac{a}{e} + \frac{1 - 4 \frac{d'^2}{e^2}}{4\tau(a)} \tag{156}$$

Le moment transmis par unité de largeur est (figure 58) :

$$\frac{2M}{ke^2} = \frac{P}{ke} \frac{a'}{e} \tag{157}$$

Le champ ne peut pas transmettre d'effort normal par raison de symétrie:

$$\frac{N}{ke} = 0$$

3.3.9. - Dimensions des zones et valeurs successives des efforts et moments transmis.

Les dimensions des zones sont fournies par les relations (151), (152), (154) et (156).

Les valeurs successives des efforts $\frac{P}{ke}$ et des moments $\frac{2M}{ke^2}$ sont calculées avec les relations (153) et (157).

Ces valeurs sont reportées au tableau 16 ; les figures 59 et 60 donnent l'évolution de $\frac{2M}{ke^2}$ en fonction de $\frac{P}{ke}$, et celle de $\frac{a}{e}$ en fonction de $\frac{P}{ke}$.



$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$	$\frac{N}{ke}$	$\frac{d}{d}$	$\frac{c}{e}$	$\frac{a}{e}$	$\frac{d'}{e}$	$\frac{a'}{e}$
0,00502	1,00152	0,00000	0,00321	0,31201	100,00000	0,00258	199,68799
0,00723	1,00216	0,00000	0,00462	0,31112	69,44444	0,00372	138,57777
0,01043	1,00305	0,00000	0,00667	0,30984	48,22531	0,00537	96,14078
0,01506	1,00427	0,00000	0,00963	0,30798	33,48980	0,00775	66,67162
0,02177	1,00587	0,00000	0,01391	0,30529	23,25680	0,01120	46,20832
0,03150	1,00787	0,00000	0,02013	0,30138	16,15056	0,01621	31,99973
0,04563	1,01009	0,00000	0,02916	0,29571	11,21567	0,02348	22,13562
0,06618	1,01187	0,00000	0,04229	0,28746	7,78866	0,03405	15,28985
0,09594	1,01140	0,00000	0,06131	0,27552	5,40879	0,04937	10,54206
0,13847	1,00446	0,00000	0,08850	0,25844	3,75125	0,07125	7,25376
0,19726	0,98275	0,00000	0,12607	0,23485	2,60841	0,10150	4,98196
0,27320	0,93390	0,00000	0,17460	0,20437	1,81139	0,14057	3,41842
0,36127	0,84788	0,00000	0,23088	0,16902	1,25791	0,18589	2,34681
0,45092	0,72781	0,00000	0,28818	0,13304	0,87355	0,23202	1,61406
0,53171	0,59161	0,00000	0,33981	0,10061	0,60663	0,27359	1,11266
0,59814	0,45973	0,00000	0,38226	0,07394	0,42127	0,30777	0,76860
0,64952	0,34540	0,00000	0,41510	0,05332	0,29255	0,33421	0,53778
0,68776	0,25333	0,00000	0,43954	0,03797	0,20316	0,35389	0,36835
0,71554	0,18271	0,00000	0,45730	0,02682	0,14108	0,36818	0,25535
0,73542	0,13025	0,00000	0,47000	0,01884	0,09797	0,37841	0,17711
0,74951	0,09211	0,00000	0,47900	0,01319	0,06804	0,38566	0,12289
0,75942	0,06477	0,00000	0,48534	0,00921	0,04725	0,39076	0,08529
0,76637	0,04537	0,00000	0,48978	0,00642	0,03281	0,39434	0,05921
0,77123	0,03170	0,00000	0,49289	0,00447	0,02279	0,39684	0,04110
0,77462	0,02211	0,00000	0,49505	0,00311	0,01582	0,39858	0,02854
0,77698	0,01540	0,00000	0,49656	0,00216	0,01099	0,39979	0,01982

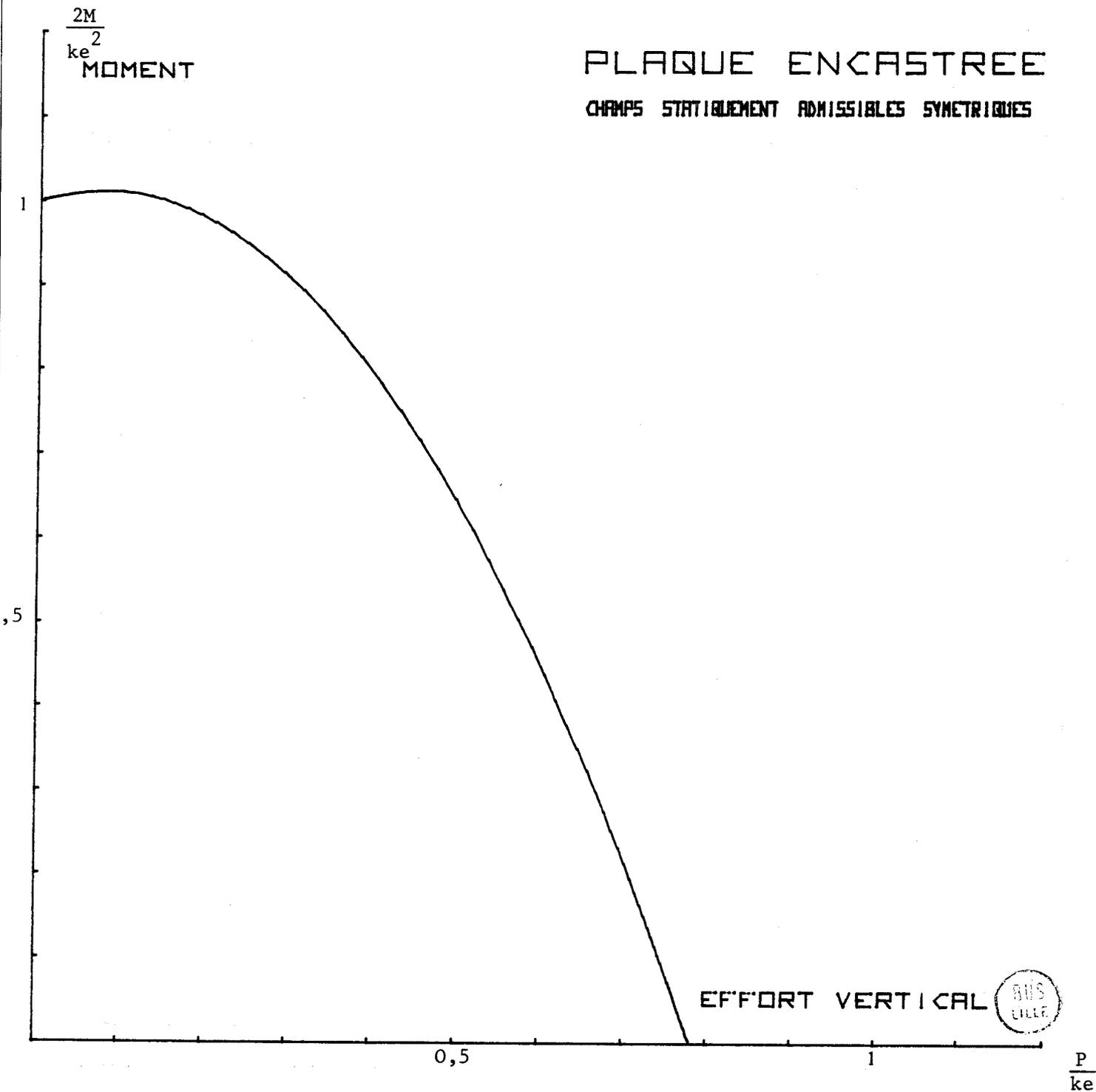
- Tableau 16 -

- Champs statiquement et plastiquement admissibles

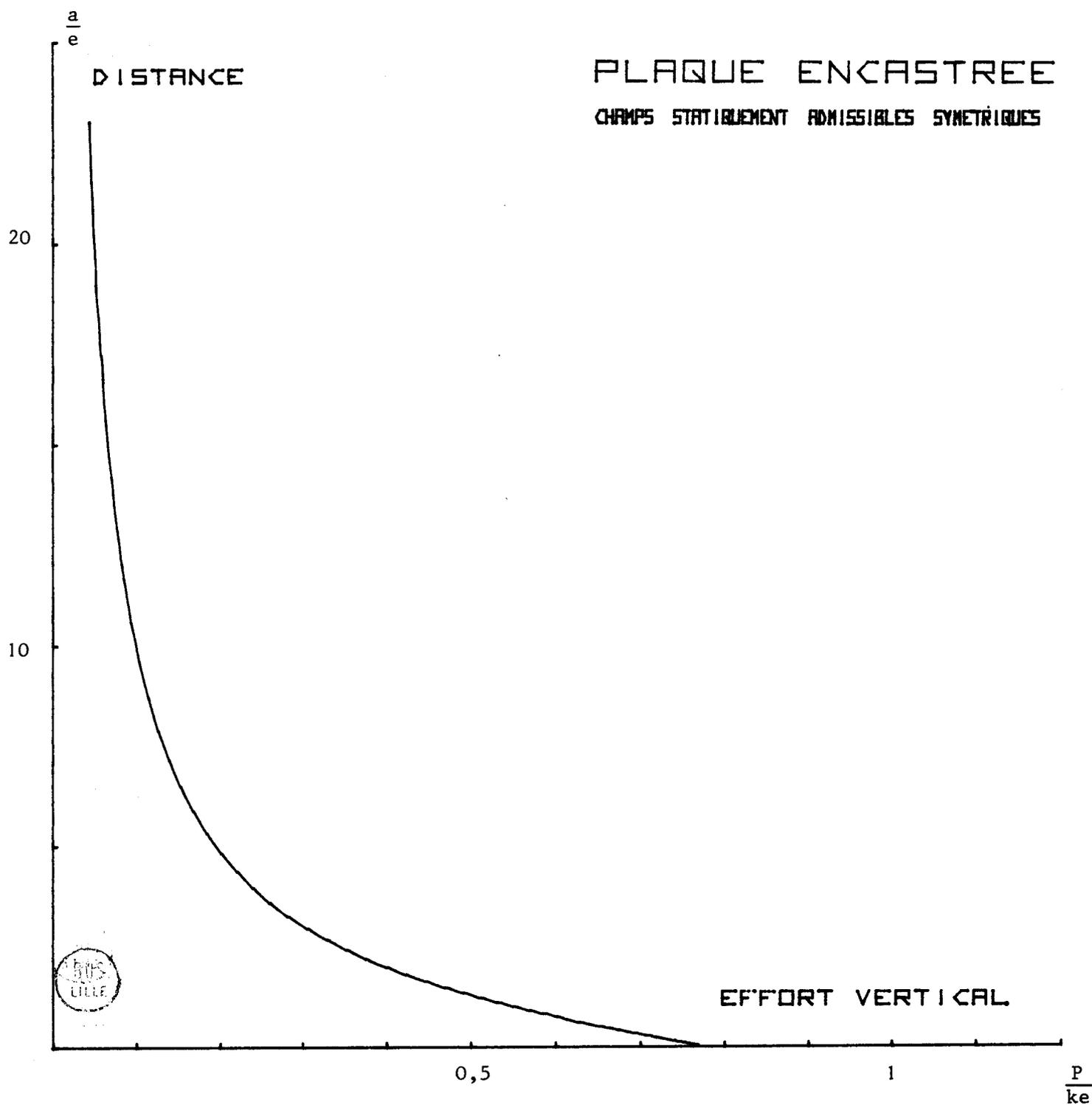
à zones symétriques -

PLAQUE ENCASTREE

CHAMPS STATIQUEMENT ADMISSIBLES SYMETRIQUES



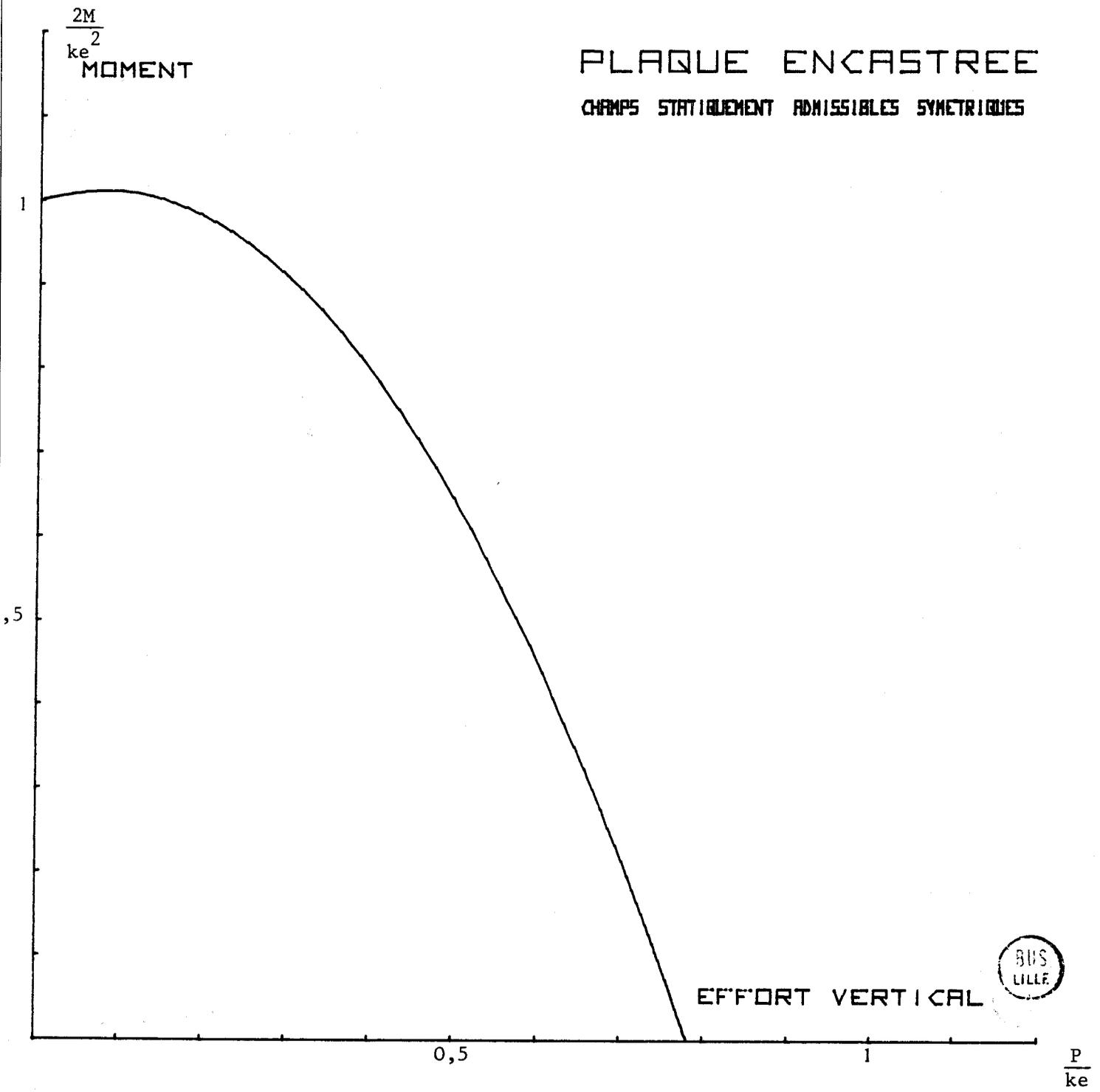
- Figure 59 -



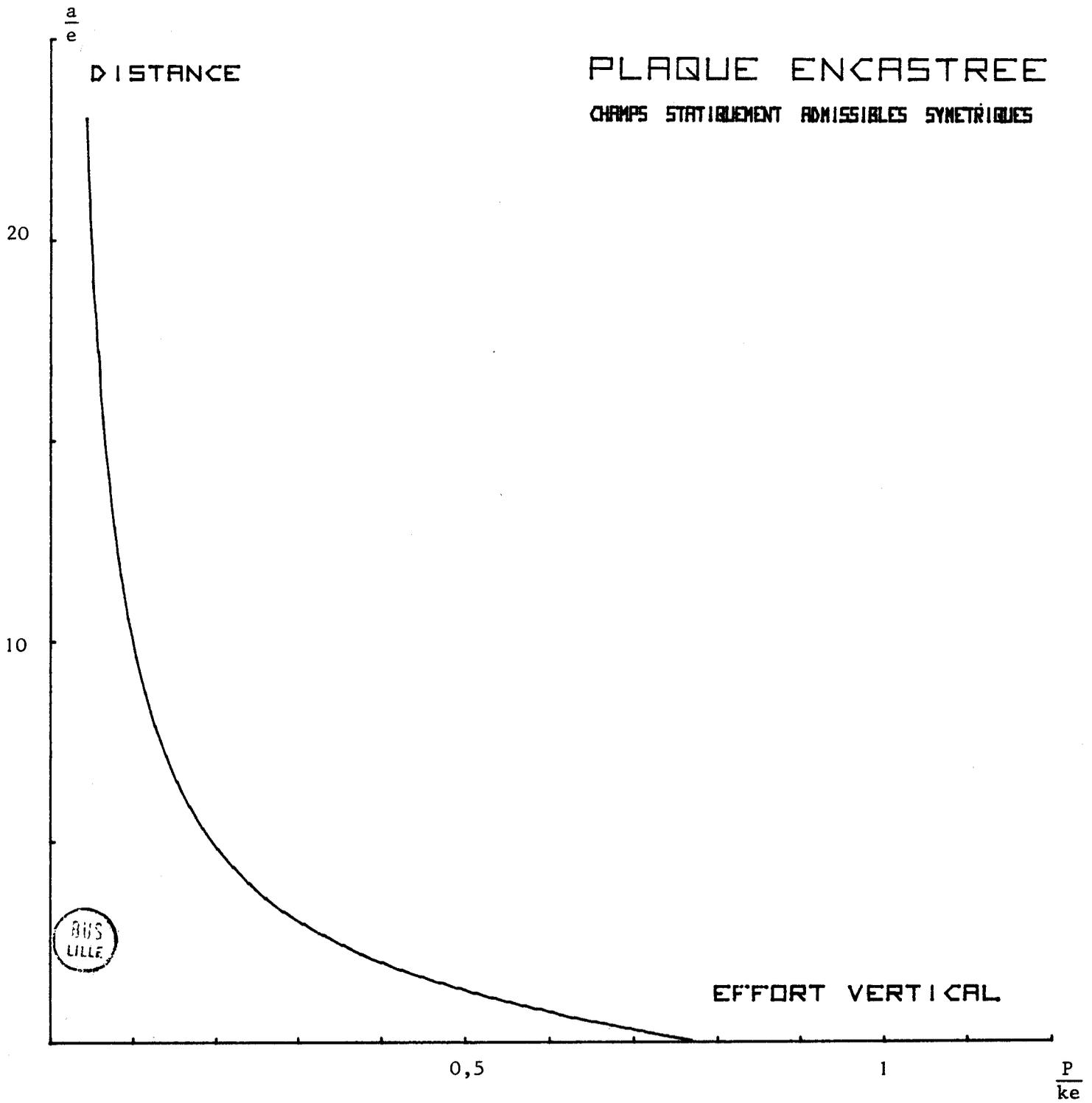
- Figure 60 -

PLAQUE ENCASTREE

CHAMPS STATIQUEMENT ADMISSIBLES SYMETRIQUES



- Figure 59 -



- Figure 60 -

3.4. - Champ statiquement et plastiquement admissible à zones asymétriques.

3.4.1. - Description du champ.

Nous considérons un champ constitué de huit zones numérotées I, II, III, IV, VI, VII, VIII et IX. Comme pour le champ proposé pour les plaques rectangulaires appuyées, l'axe x passe par le milieu de la frontière entre III et V mais ne coïncide plus avec la trace du plan moyen (figure 61).

Les contraintes sont constantes dans les zones I, II, IV, V, VI, VIII et IX.

Les contraintes dans les zones I et II sont les suivantes (111) :

Zone I	$\sigma_x = -1$	$\tau_{xy} = \sigma_y = 0$	(158)
Zone II	$\sigma_x = 1$	$\tau_{xy} = \sigma_y = 0$	

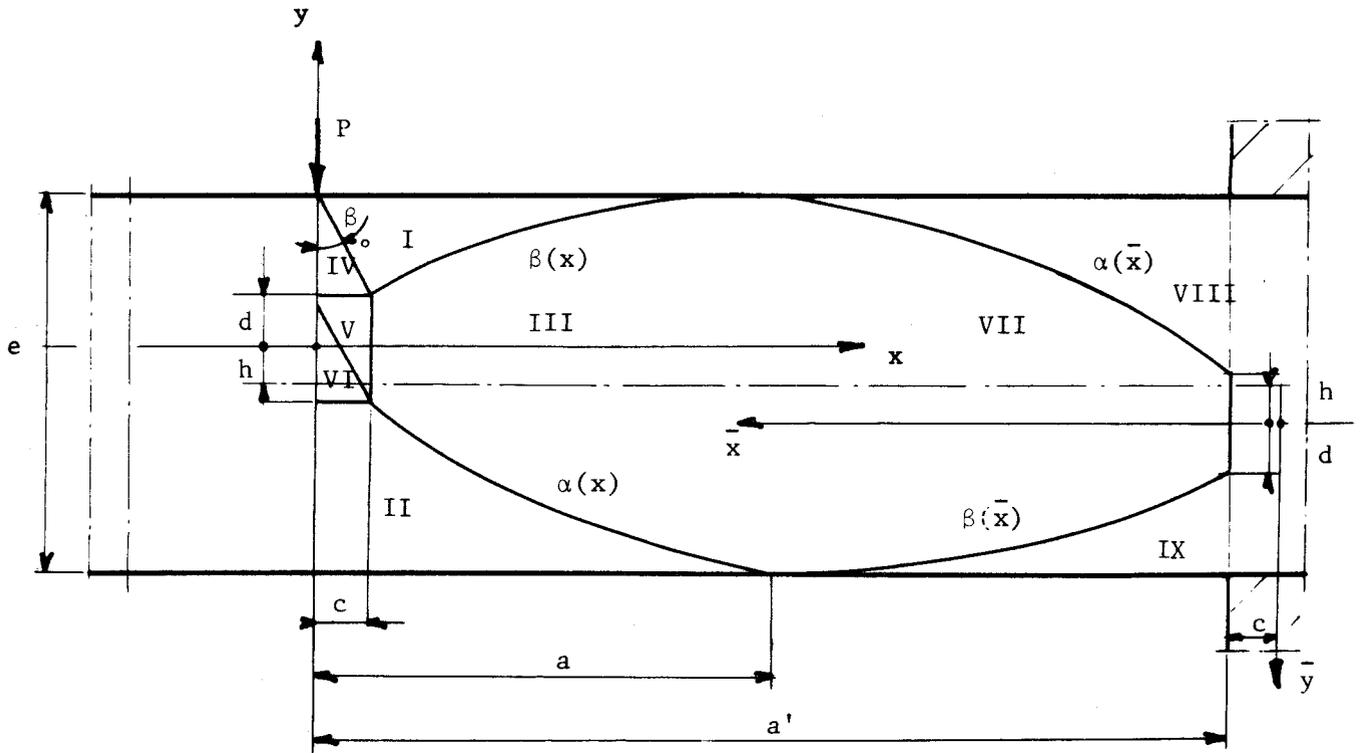
Les contraintes dans les autres zones sont encore obtenues à partir des conditions aux limites, des équations d'équilibre local et de la condition de plasticité de TRESCA en déformation plane.

3.4.2. - Contraintes dans la zone centrale.

. Dans la zone III, nous avons les conditions suivantes :

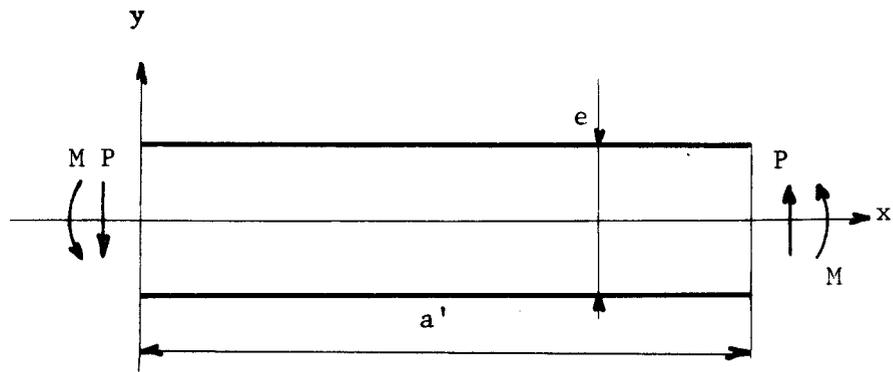
$$\begin{aligned}
 x = c \quad \sigma_x &= 2\sigma(c) \\
 \tau_{xy} &= \tau(c)
 \end{aligned}
 \tag{159}$$

$\sigma(c)$ et $\tau(c)$ sont des constantes le long de la frontière entre les zones III et V puisque les contraintes sont choisies constantes en tout point de la zone V.



- Figure 61 -

- Champ statiquement et plastiquement admissible
à zones asymétriques -



- Figure 62 -

- Efforts et moments transmis -



Nous choisissons pour σ_x

$$\sigma_x = (1 - \cos \gamma)\sigma(c) \quad (160)$$

avec
$$\gamma = \frac{\pi(x-a)}{a-c} \quad c \leq x \leq a.$$

Les conditions d'équilibre local donnent:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\pi}{a-c} \sigma(c) \sin \gamma$$

Soit après intégration:

$$\tau_{xy} = - \frac{\pi}{a-c} \sigma(c) y \sin \gamma + \tau(x) \quad (161)$$

avec $c \leq x \leq a$

La contrainte σ_y est obtenue par :

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$$

Soit:

$$\sigma_y = \frac{\pi^2}{(a-c)^2} \sigma(c) \frac{y^2}{2} \cos \gamma - y \tau'(x) + \sigma(x) \quad (162)$$

avec $c \leq x \leq a.$

Par la suite, nous utilisons les expressions simplifiées suivantes pour désigner les contraintes dans la zone III :

Zone III	σ_x	
	$\sigma_{xy} = - \sigma'_x y + \tau$	(163)
	$\sigma_y = \sigma''_x \frac{y^2}{2} - \tau'_y + \sigma$	(164)
	avec $c \leq x \leq a$	

avec $\tau = \tau(x)$, $\tau' = \frac{d\tau(x)}{dx}$, $\sigma = \sigma(x)$.

Dans la zone VII, nous choisissons le même champ de contraintes que celui de la zone III.

Il est défini en nous servant du système de référence (\bar{y}, \bar{x}) tel que l'axe \bar{x} est situé à la distance h en dessous du plan moyen de la plaque, et que l'axe \bar{y} est situé à la distance c de l'encastrement (figure 61).

Soit

<p style="margin: 0;">Zone VII</p> $\sigma_{\bar{x}} = -\sigma_{\bar{x}}' y + \tau$ $\tau_{\bar{xy}} = \sigma_{\bar{x}}'' \frac{y^2}{2} - \tau' \bar{y} + \sigma$ <p style="margin: 0;">avec $c \leq \bar{x} \leq a$.</p>	(165)
--	-------

3.4.3. - Conditions aux limites entre les zones I et III, II et III, VIII et VII, IX et VII.

. Soit $\beta(x)$ la frontière entre les zones I et III et β l'angle entre l'axe x et la tangente à la frontière.

Les conditions de continuité s'expriment comme suit :

$$2\sigma_n = A + B \cos(2\beta + \pi) + 2C \sin(2\beta + \pi) = -1 - \cos(2\beta + \pi) \tag{166}$$

$$2\tau_n = -B \sin(2\beta + \pi) + 2C \cos(2\beta + \pi) = \sin(2\beta + \pi) \tag{167}$$

avec

$$A = \sigma_x + \sigma_y$$

$$B = \sigma_x - \sigma_y$$

$$C = \tau_{xy}$$

σ_x , τ_{xy} et σ_y sont les contraintes dans la zone III.

Un traitement analogue à celui effectué dans le cas du champ à zones symétriques nous conduit aux relations suivantes :

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2C}{B+1} \quad (169)$$

d'après (167) :

$$\cos 2\beta = \frac{(A+1)(B+1)}{(B+1)^2 + 4C^2} \quad (170)$$

d'après (166) et (169) et, en combinant (169) et (170) :

$$(\sigma_x + 1)\sigma_y = \tau_{xy}^2 \quad (171)$$

en tenant de (169), nous obtenons :

$$\beta'(x) = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x + 1} \quad (172)$$

et :

$$\beta'^2(x) = \frac{\sigma_y}{\sigma_x + 1} \quad (173)$$

Pour la frontière $y = \alpha(x)$ entre les zones II et III, nous obtenons les conditions de continuité :

$$2\sigma_n = A + B \cos(2\alpha + \pi) + 2C \sin(2\alpha + \pi) = 1 + \cos(2\alpha + \pi) \quad (174)$$

$$2\tau_n = -B \sin(2\alpha + \pi) + 2C \cos(2\alpha + \pi) = -\sin(2\alpha + \pi) \quad (175)$$

De (175) :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2C}{B-1} \quad (176)$$

(174) combinée avec (176) donne :

$$\sigma_y(\sigma_x - 1) = \tau_{xy}^2 \quad (177)$$

Soit finalement avec (176) et (177) :

$$\alpha'(x) = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - 1} \tag{178}$$

$$\alpha'(x)^2 = \frac{\sigma_y}{\sigma_x - 1} \tag{179}$$

. Les conditions de continuité entre les zones VIII et VII, IX et VII aboutissent à des relations identiques aux relations (171) à (179).

En effet les contraintes dans les zones VIII et IX sont choisies comme suit (27) :

Zone VIII	$\sigma_x = 1$	$\tau_{xy} = \sigma_y = 0$
Zone IX	$\sigma_x = -1$	$\tau_{xy} = \sigma_y = 0$

3.4.4. - Détermination des frontières de la zone III.

. Pour les abscisses comprises entre c et a (figure 61), les relations (163), (172) et (178) donnent :

$$\begin{aligned} (\sigma_x - 1)\alpha'(x) &= -\sigma'_x \alpha(x) + \tau \\ (\sigma_x + 1)\beta'(x) &= -\sigma'_x \beta(x) + \tau \end{aligned} \tag{180}$$

Soit par différence :

$$\begin{aligned} (\sigma_x + 1)\beta' + \sigma'_x \beta &= (\sigma_x - 1)\alpha' + \sigma'_x \alpha \quad \text{avec } \beta' = \beta'(x) \\ \alpha' &= \alpha'(x) \end{aligned}$$

ou :

$$\frac{d}{dx} \{ \sigma_x (\beta - \alpha) \} = - \frac{d}{dx} (\beta + \alpha) \quad (181)$$

En intégrant :

$$\beta + \alpha = - (\beta - \alpha) \sigma_x + K_1$$

avec pour limites :

$$\begin{aligned} x = a & \quad \sigma_x = 0 \\ & \quad \beta + \alpha = -2h \end{aligned}$$

il vient :

$$\boxed{\beta + \alpha = - (\beta - \alpha) \sigma_x - 2h} \quad (182)$$

Par addition des relations initiales (180) , nous obtenons :

$$(\sigma_x - 1)\alpha' + (\sigma_x - 1)\beta' = - (\beta + \alpha)\sigma_x' + 2\tau$$

Soit après intégration:

$$\boxed{2\tau = \frac{d}{dx} \{ (\beta + \alpha)\sigma_x + \beta - \alpha \}} \quad (183)$$

De (172), (173), (178) et (179), nous aboutissons à :

$$\begin{aligned} \sigma_y = \tau_{xy} \beta' & \quad \text{sur la frontière } \beta(x) \\ \sigma_y = \tau_{xy} \alpha' & \quad \text{sur la frontière } \alpha(x) \end{aligned} \quad (184)$$

Soit compte tenu de (164):

$$\begin{aligned} (-\sigma_x' \beta + \tau)\beta' &= \sigma_x'' \frac{\beta^2}{2} - \tau'\beta + \sigma \\ (-\sigma_x' \alpha + \tau)\alpha' &= \sigma_x'' \frac{\alpha^2}{2} - \tau'\alpha + \sigma \end{aligned} \quad (185)$$

en intégrant :

$$2\tau(\beta - \alpha) = \sigma'_x(\beta^2 - \alpha^2) + K_2$$

avec pour limites (figure 61)

$$\begin{aligned} x = c & & \tau = \tau(c) \\ & & \beta + \alpha = 0 \\ & & \beta - \alpha = 2d \end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{2\tau = \sigma'_x(\beta + \alpha) + \frac{4\tau(c)d}{\beta - \alpha}} \quad (186)$$

La somme des relations (184) donne :

$$\tau(\beta' + \alpha') - \sigma'_x(\beta\beta' + \alpha\alpha') = \frac{\sigma''_x}{2}(\beta^2 + \alpha^2) - \tau'(\beta + \alpha) + 2\sigma$$

soit :

$$\frac{d}{dx} \{ \tau(\beta + \alpha) \} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \{ \sigma'_x(\beta^2 + \alpha^2) \} + 2\sigma$$

et

$$\boxed{2\sigma = \frac{d}{dx} \left\{ \tau(\beta + \alpha) - \frac{1}{2} \sigma'_x(\beta^2 + \alpha^2) \right\}} \quad (187)$$

En comparant (183) et (186) :

$$\beta'_x(\beta + \alpha) + \sigma_x(\beta' + \alpha') + \beta' - \alpha' = \sigma'_x(\beta + \alpha) + \frac{4\tau(c)d}{\beta - \alpha}$$

avec la relation (181)

$$\beta' + \alpha' = -\sigma'_x(\beta - \alpha) - \sigma_x(\beta' - \alpha')$$

il vient :

$$\sigma_x \left\{ -\sigma'_x (\beta - \alpha) - \sigma_x (\beta' - \alpha') \right\} + \beta' - \alpha' = \frac{4\tau(c)d}{\beta - \alpha}$$

soit :

$$\frac{d}{dx} \{ (\beta - \alpha)^2 (\sigma_x^2 - 1) \} = -8\tau(c)d \quad (188)$$

après intégration

$$(\beta - \alpha)^2 (\sigma_x^2 - 1) = -8\tau(c)dx + K_3$$

les limites sont :

$$\begin{aligned} x = a & \qquad \sigma_x = 0 \\ \beta + \alpha & = -2h \\ \beta - \alpha & = e \end{aligned}$$

soit:

$$\beta - \alpha = \sqrt{\frac{8\tau(c)d(a-x) - e^2}{\sigma_x^2 - 1}} \quad (189)$$

De (182), nous avons :

$$\beta + \alpha = - (\beta - \alpha)\sigma_x - 2h$$

ou

$$2\beta = (\beta - \alpha)(1 - \sigma_x) - 2h$$

soit:

$$\beta = \sqrt{\frac{1 - \sigma_x}{1 + \sigma_x}} \left\{ \frac{e^2}{4} - 2\tau(c)d(a-x) \right\} - h \quad (190)$$

Les valeurs de $\beta(x)$ aux limites sont :

$$\begin{aligned} x = c & \qquad \beta = d \\ x = a & \qquad \beta = \frac{e}{2} - h \end{aligned}$$

La première condition donne :

$$\boxed{(d + h)^2 = \frac{1 - \sigma_x}{1 + \sigma_x} \left\{ \frac{e^2}{4} - 2\tau_{(c)} d(a - c) \right\}} \quad (191)$$

La seconde conduit à :

$$\frac{1 - \sigma_x}{1 + \sigma_x} = 1 \quad \text{soit} \quad \sigma_x = 0.$$

Effectuons les mêmes calculs pour la frontière $\alpha(x)$.

(182) donne :

$$2\alpha = -(\beta - \alpha)(1 + \sigma_x) - 2h$$

avec (189), il vient :

$$\boxed{\alpha = -\sqrt{\frac{1 + \sigma_x}{1 - \sigma_x} \left\{ \frac{e^2}{4} - 2\tau_{(c)} d(a - x) \right\}} - h} \quad (192)$$

pour $c \leq x \leq a$

Les valeurs de $\alpha(x)$ aux limites sont :

$$\begin{aligned} x = c & \quad \alpha = -d \\ x = a & \quad \alpha = -\frac{e}{2} - h \end{aligned}$$

Il vient de la première condition :

$$\boxed{(d - h)^2 = \frac{1 + \sigma_x}{1 - \sigma_x} \left\{ \frac{e^2}{4} - 2\tau_{(c)} d(a - c) \right\}} \quad (193)$$

La seconde condition conduit à $\sigma_x = 0$.

Les limites de la zone III sont définies complètement pour les abscisses x comprises entre c et a par les relations (189) à (193) ; les valeurs de σ et τ sont données par les relations (186) et (187).

. Pour la zone VII, les conditions de continuité sont identiques à ce qui vient d'être obtenu en remplaçant x par \bar{x} et y par \bar{y} (figure 61).

3.4.5. - Conditions aux limites entre les zones I et IV, IV et V.

. Continuité entre I et IV.

Les résultats obtenus au paragraphe (3.3.5.) restent valables.

Ainsi les contraintes dans la zone IV sont :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{A+B}{2} \\ \sigma_y &= \frac{A-B}{2} \\ \tau_{xy} &= C\end{aligned}\tag{194}$$

A, B, C sont fixées par les relations (141), (142) et (143).

. Continuité entre IV et V.

Les contraintes σ_y et τ_{xy} sont identiques dans la zone IV et dans la zone V.

La contrainte σ_x peut être la même que dans la zone IV ou prendre une autre valeur fixée par la seconde détermination de B satisfaisant la condition de plasticité de TRESCA

$$B^2 + 4C^2 = 1.$$

Il vient :

$$B = \sigma_x - \sigma_y$$

Zone IV

Et :

$$-B = \sigma_x - \sigma_y$$

Zone V

Soit:

$$\sigma_x = 2\sigma_y - \sigma_x \quad (195)$$

V IV

Le tableau 17 donne les valeurs de τ_{xy} , σ_y , σ_x et σ_x pour des angles β_0 compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$.

IV V

Les conditions de plasticité de la zone III fixeront ultérieurement le choix de β_0 et de σ_x .

V

β_0	τ_{xy}	σ_y	σ_x IV	σ_x V
0,78540	0,00000	0,00000	- 1,0000	1,00000
0,68722	0,19134	0,23315	- 1,15703	0,69073
0,62177	0,30438	0,42476	- 1,21812	0,36859
0,52360	0,43301	0,75000	- 1,25000	0,25000
0,45815	0,48296	0,97935	- 1,23817	0,72053
0,39270	0,50000	- 1,20711	- 1,20711	- 1,20711
0,32725	0,48296	- 1,42276	- 1,16394	- 1,68158
0,26180	0,43301	- 1,61603	- 1,11603	- 2,11603
0,19635	0,35355	- 1,77743	- 1,07033	- 2,48454
0,13090	0,25000	- 1,89894	- 1,03291	- 2,76496
0,06545	0,12941	- 1,97441	- 1,00848	- 2,94033
0,00000	0,00000	- 2,00000	- 1,00000	- 3,00000

- Tableau 17 -

- Contraintes dans les zones IV et V
en fonction de β_0 -



3.4.6. - Conditions de plasticité dans la zone III.

Nous vérifions que la condition de plasticité de TRESCA n'est pas violée dans la zone III.

La région critique correspond à la frontière entre la zone III et la zone V.

La condition de plasticité de TRESCA

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \leq 1$$

s'exprime comme suit :

. sur $\beta(x)$

$$\{\sigma_x - (\sigma_x + 1)\beta'^2\}^2 + 4\beta'^2(\sigma_x + 1)^2 \leq 1.$$

. sur $\alpha(x)$

$$\{\sigma_x - (\sigma_x - 1)\alpha'^2\}^2 + 4\alpha'^2(\sigma_x - 1)^2 \leq 1.$$

D'où les conditions :

$$\beta'^2 \leq \frac{-(\sigma_x + 2) + \sqrt{4\sigma_x + 5}}{\sigma_x + 1} \quad (196)$$

$$\alpha'^2 \leq \frac{-(\sigma_x - 2) + \sqrt{5 - 4\sigma_x}}{\sigma_x - 1} \quad (197)$$

. à l'intérieur de zone III, les contraintes n'atteignent pas le seuil de plasticité car elles satisfont à la condition

$$(\sigma_x - \sigma_x'' \frac{y}{2} + \tau'y - \sigma)^2 + 4(-\sigma_x'y + \tau)^2 < 1.$$

La valeur de τ' est donnée par la relation (183) :

$$2\tau' = \sigma_X''(\beta+\alpha) + \sigma_X(\beta''+\alpha'') + 2\sigma_X'(\beta'+\alpha') + \beta'' - \alpha''$$

et celle de σ par (187) :

$$2\sigma = \tau(\beta' + \alpha') + \tau'(\beta+\alpha) - \frac{\sigma_X''}{2} (\beta^2 + \alpha^2) - \sigma_X'(\beta\beta' + \alpha\alpha').$$

Les valeurs de α' , β' , α'' , β'' sont obtenues à partir de (190) et (192) :

$$\alpha' = \frac{\sigma_X'}{(1 - \sigma_X)^2} (\beta + h) - \frac{\tau(c)^d}{\beta + h}$$

$$\beta' = \frac{\sigma_X'}{(1 + \sigma_X)^2} (\alpha + h) - \frac{\tau(c)^d}{\alpha + h}$$

et :

$$\alpha'' = - \frac{[\sigma_X''(1 - \sigma_X) + 2\sigma_X'^2]}{(1 - \sigma_X)^3} (\beta + h) - \frac{\sigma_X'}{(1 - \sigma_X)^2} \beta' + \frac{\tau(c)^d}{(\beta + h)^2} \beta'$$

$$\beta'' = \frac{[\sigma_X''(1 + \sigma_X) - 2\sigma_X'^2]}{(1 + \sigma_X)^3} (\alpha + h) + \frac{\sigma_X'}{(1 + \sigma_X)^2} \alpha' + \frac{\tau(c)^d}{(\alpha + h)^2} \alpha'$$

3.4.7. - Valeur optimale de l'angle β_0 .

Posons pour la suite :

$$d + h = X$$

$$d - h = X - 2d.$$

De (191) et (193), il vient :

$$\frac{d+h}{d-h} = \frac{X}{X-2d} = \frac{1-\sigma_X}{1+\sigma_X}$$

Choisissons d'abord la détermination:

$$\frac{X}{X-2d} = -K \frac{1-\sigma_x}{1+\sigma_x} \quad (198)$$

Soit: $t_o = \text{tg } \beta_o$

nous avons d'après la figure 61:

$$t_o = \frac{c}{\frac{e}{2} - X} \quad \text{avec} \quad \frac{e}{2} > X \quad (199)$$

La relation (198) conduit à :

$$X^2 = -K \left\{ \frac{e^2}{4} - 2\tau(c) d \left[a - t_o \left(\frac{e}{2} - X \right) \right] \right\}$$

ou

$$\boxed{\frac{X^2}{e^2} - 2\tau(c) \frac{d}{e} K t \frac{X}{e} - K \left\{ 2\tau(c) \frac{d}{e} \left(\frac{a}{e} - \frac{t_o}{2} \right) - \frac{1}{4} \right\} = 0} \quad (200)$$

de (198) :

$$d = \frac{K+1}{2K} X$$

il vient :

$$\frac{X^2}{e^2} \{ 1 - t_o \tau(c) (K+1) \} - \frac{X}{e} \tau(c) \left(\frac{a}{e} - \frac{t_o}{2} \right) (K+1) + \frac{K}{4} = 0$$

La condition de plasticité doit être satisfaite dans la région critique c'est-à-dire pour $x = c$.

Des relations (190) et (192), nous obtenons :

$$\alpha' = - \frac{\tau(c)^d}{\beta + h} \quad \text{avec } \beta = d$$

$$\beta' = - \frac{\tau(c)^d}{\alpha + h} \quad \text{avec } \alpha = - d \quad (201)$$

ou encore:

$$\alpha'^2 = \frac{\tau(c)^d}{X}^2$$

$$\beta'^2 = \frac{\tau(c)^{dK}}{X}^2 \quad (202)$$

Les valeurs de $\sigma_x = 2\sigma(c)$, $\tau_{xy} = \tau(c)$ et de β_0 sont celles du tableau 17.

La condition de plasticité (196) est satisfaite et la condition (197) n'est pas violée à l'abscisse $x = c$ avec les valeurs suivantes :

$$\sigma_x = 2\sigma(c) = 0,25 = - 1/4$$

$$\tau_{xy} = \tau(c) = 0,43301 = \sqrt{3}/4 \quad (203)$$

$$\beta_0 = 0,52360 = \pi/6$$

Pour toute autre valeur de σ_x , τ_{xy} et β_0 , compatibles avec les zones voisines, la condition de plasticité est violée sur la frontière $\beta(x)$. Il en est de même pour la seconde détermination de

$$K = \frac{1 - \sigma_x}{1 + \sigma_x}$$

Nous retenons donc les valeurs de (203) pour définir complètement les contraintes dans les zones III, IV, V et VI.

3.4.8. - Définition complète des contraintes du champ.

Les contraintes dans chacune des zones sont les suivantes :

Zone I	$\sigma_x = -1$	$\tau_{xy} = \sigma_y = 0$
--------	-----------------	----------------------------

Zone II	$\sigma_x = 1$	$\tau_{xy} = \sigma_y = 0$
---------	----------------	----------------------------

d'après (158)

Zone III		
$\sigma_x = -\frac{1}{8} (1 - \cos \gamma) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\pi(x-a)}{a-c}$ $\tau_{xy} = \frac{\pi}{8(a-c)} y \sin \gamma + \tau(x)$ $\sigma_y = -\frac{\pi^2}{16(a-c)^2} y^2 \cos \gamma - \tau'(x) + \sigma(x)$		
pour $c \leq x \leq a$		

d'après (160), (161), (162), $\tau(x)$ et $\sigma(x)$ sont définis selon (186) et (187)

Zone IV	$\sigma_x = -\frac{5}{4}$
	$\tau_{xy} = \frac{\sqrt{3}}{4}$
	$\sigma_y = -\frac{3}{4}$

d'après (203)

Zone V	$\sigma_x = -\frac{1}{4}$
	$\tau_{xy} = \frac{\sqrt{3}}{4}$
	$\sigma_y = -\frac{3}{4}$

d'après le tableau 17.

$$\text{Zone VI} \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

Zone VII

$$\sigma_{\bar{x}} = -\frac{1}{8} (1 - \cos \gamma) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{\pi(\bar{x}-a)}{a-c}$$

$$\tau_{\bar{xy}} = \frac{\pi}{8(a-c)} \bar{y} \sin \gamma + \tau(\bar{x})$$

$$\sigma_{\bar{y}} = -\frac{\pi^2}{16(a-c)^2} \bar{y}^2 \cos \gamma - \tau'(\bar{x}) + \sigma(\bar{x})$$

pour $c \leq \bar{x} \leq a$

Zone VIII

$$\sigma_x = 1 \quad \tau_{xy} = \sigma_y = 0$$

Zone IX

$$\sigma_x = -1 \quad \tau_{xy} = \sigma_y = 0$$

d'après (180).

Les zones I, II, IV, V, VIII et IX sont entièrement plastiques ;
la zone VI est libre de contraintes et les zones III et VII sont rigides.

3.4.9. - Détermination des efforts et moments transmis par le champ.

Avec les valeurs obtenues en (203), il vient :

$$K = \frac{\sigma_x - 1}{\sigma_x + 1} = -\frac{5}{3} .$$

Reportons cette valeur dans la relation (200)

$$\frac{X^2}{e^2} + \frac{2\sqrt{3}}{4} \frac{d}{e} \frac{5}{3\sqrt{3}} \frac{X}{e} + \frac{5}{3} \left\{ 2 \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{d}{e} \left(\frac{a}{e} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{4} \right\} = 0 \quad (204)$$

De (198), nous trouvons :

$$\frac{X}{X-2d} = \frac{5}{3}$$

$$X = \frac{5}{4} d.$$

Compte tenu de (204), il vient :

$$25 \frac{d^2}{e^2} + \frac{24}{\sqrt{3}} \left(\frac{a}{e} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \frac{d}{e} - 4 = 0.$$

La valeur de $\frac{d}{e}$ est :

$$\frac{d}{e} = \frac{-\frac{12}{\sqrt{3}} \left(\frac{a}{e} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) + \sqrt{\frac{144}{3} \left(\frac{a}{e} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^2 + 100}}{25} \quad (205)$$

D'autre part $\frac{c}{e}$ s'exprime par (199) :

$$\frac{c}{e} = \operatorname{tg} \beta_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4} \frac{d}{e} \right) \quad (206)$$

Et $\frac{a'}{e}$:

$$\frac{a'}{e} = \frac{2a}{e} - \frac{c}{e} \quad (207)$$

. L'effort horizontal transmis à l'abscisse $\bar{x} = c$ est :

$$N = 2k + \left(\frac{e}{2} + h - \frac{d}{2} \right) - \frac{d}{2} - \left(\frac{e}{2} - h - \frac{d}{2} \right) \quad (208)$$

$$\frac{N}{ke} = -\frac{d}{e} + \frac{4h}{e}$$

Soit $\boxed{\frac{N}{ke} = 0}$.

. L'effort vertical transmis à l'abscisse $\bar{x} = c$ est :

$$P = 2k \tau_{(c)} 2d$$

Soit:

$$\boxed{\frac{P}{ke} = \sqrt{3} \frac{d}{e}} \quad (209)$$

. Le moment transmis s'écrit (figure 62) :

$$\boxed{\frac{2M}{ke^2} = \frac{P}{ke} \left(\frac{a'}{e}\right)} \quad (210)$$

Les valeurs successives des dimensions du champ et des efforts et moments transmis sont reportées au tableau 17.

Les figures 63 et 64 donnent l'évolution de $\frac{2M}{ke^2}$ en fonction de $\frac{P}{ke}$ et celle de $\frac{a'}{e}$ en fonction de $\frac{P}{ke}$.

$\frac{P}{ke}$	$\frac{2M}{ke^2}$	$\frac{a}{e}$	$\frac{d}{e}$	$\frac{c}{e}$	$\frac{a'}{e}$
0,00501	1,00141	100,00000	0,00289	0,28659	199,71341
0,00723	1,00200	69,44444	0,00417	0,28566	138,60323
0,01043	1,00283	48,22531	0,00602	0,28433	96,16629
0,01505	1,00397	33,48980	0,00869	0,28240	66,69719
0,02175	1,00549	23,25680	0,01256	0,27961	46,23399
0,03146	1,00743	16,15056	0,01846	0,27557	32,02555
0,04556	1,00969	11,21567	0,02630	0,26969	22,16164
0,06606	1,01180	7,78866	0,03814	0,26115	15,31616
0,09579	1,01236	5,40879	0,05530	0,24876	10,56881
0,13844	1,00802	3,75610	0,07993	0,23099	7,28122
0,19795	0,99184	2,60841	0,11428	0,20620	5,01061
0,27618	0,95260	1,81139	0,15945	0,17360	3,44919
0,36930	0,87931	1,25791	0,21321	0,13480	2,38102
0,46680	0,77158	0,87355	0,26951	0,09418	1,65292
0,55681	0,64401	0,60663	0,32148	0,05667	1,15659
0,63209	0,51657	0,42127	0,36494	0,02530	0,81724
0,69096	0,40375	0,29255	0,39893	0,00077	0,58433
0,73508	0,29868	0,20316	0,42440	0,00000	0,40632
0,76728	0,21650	0,14108	0,44299	0,00000	0,28217
0,79038	0,15487	0,09797	0,45632	0,00000	0,19595
0,80677	0,10978	0,06804	0,46579	0,00000	0,13608
0,81833	0,07733	0,04725	0,47246	0,00000	0,09450
0,82644	0,05423	0,03281	0,47714	0,00000	0,06562
0,83210	0,03792	0,02279	0,48042	0,00000	0,04557
0,83606	0,02646	0,01582	0,48270	0,00000	0,03165

- Tableau 17 -

- Champ statiquement admissible à zones asymétriques -



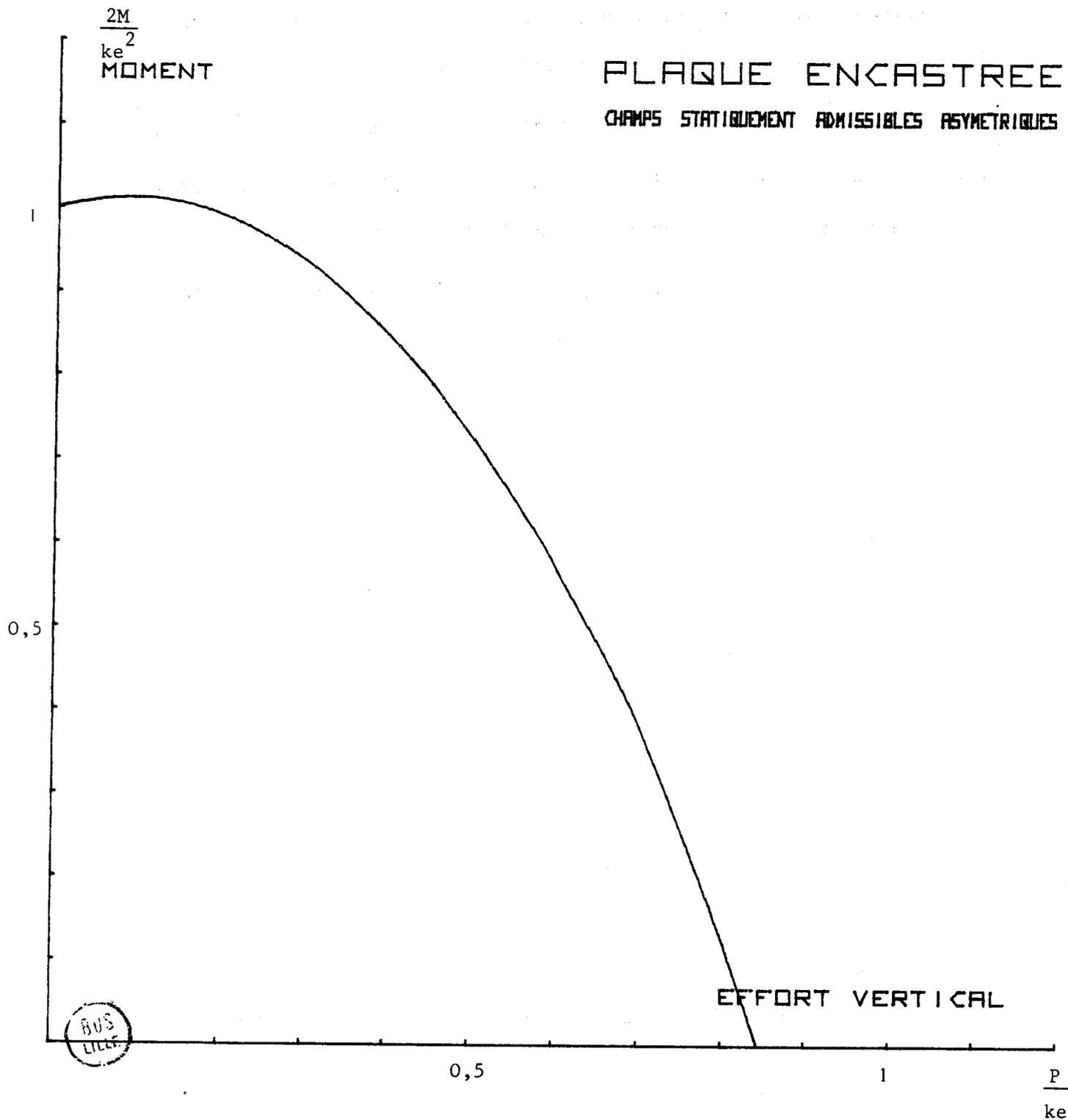
3.5. - Conclusion.

Comparons les courbes $\frac{2M}{ke^2} = f\left(\frac{P}{ke}\right)$ et $\frac{a}{e} = f\left(\frac{P}{ke}\right)$ des figures 55, 56, 59, 60, 63, 64.

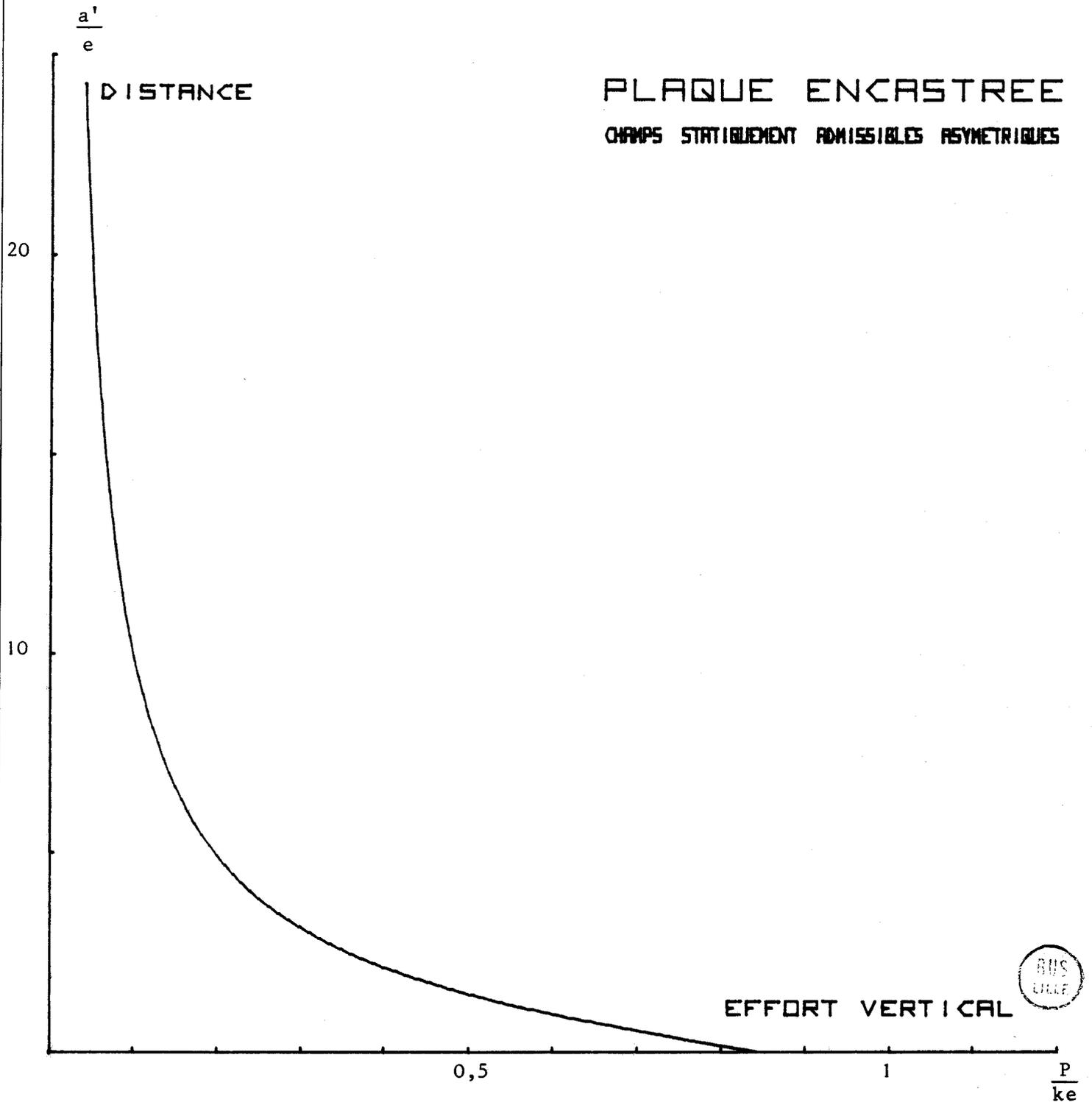
L'ensemble de ces résultats est reporté aux figures 65 et 66. Les champs par zones sont plus proches des champs exacts que le champ continu dans les chargements à faible effort tranchant.

La figure 67 reprend l'ensemble des fonctions $\frac{a}{e} = f\left(\frac{P}{ke}\right)$ obtenus pour chacune des solutions cinématiquement et plastiquement admissibles d'une part, des solutions statiquement et plastiquement admissibles d'autre part.

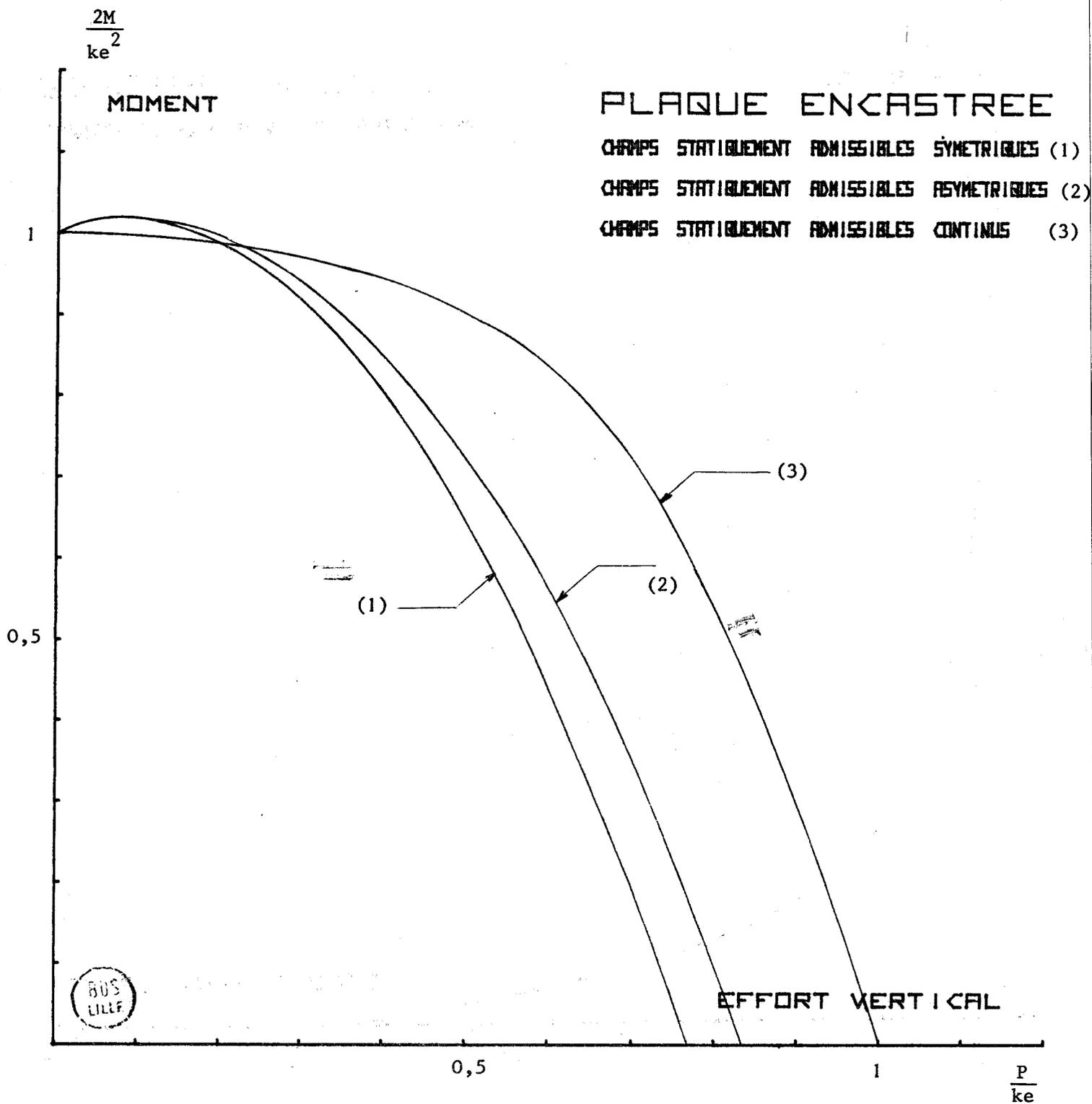
L'ensemble de ces solutions encadre bien la solution exacte.



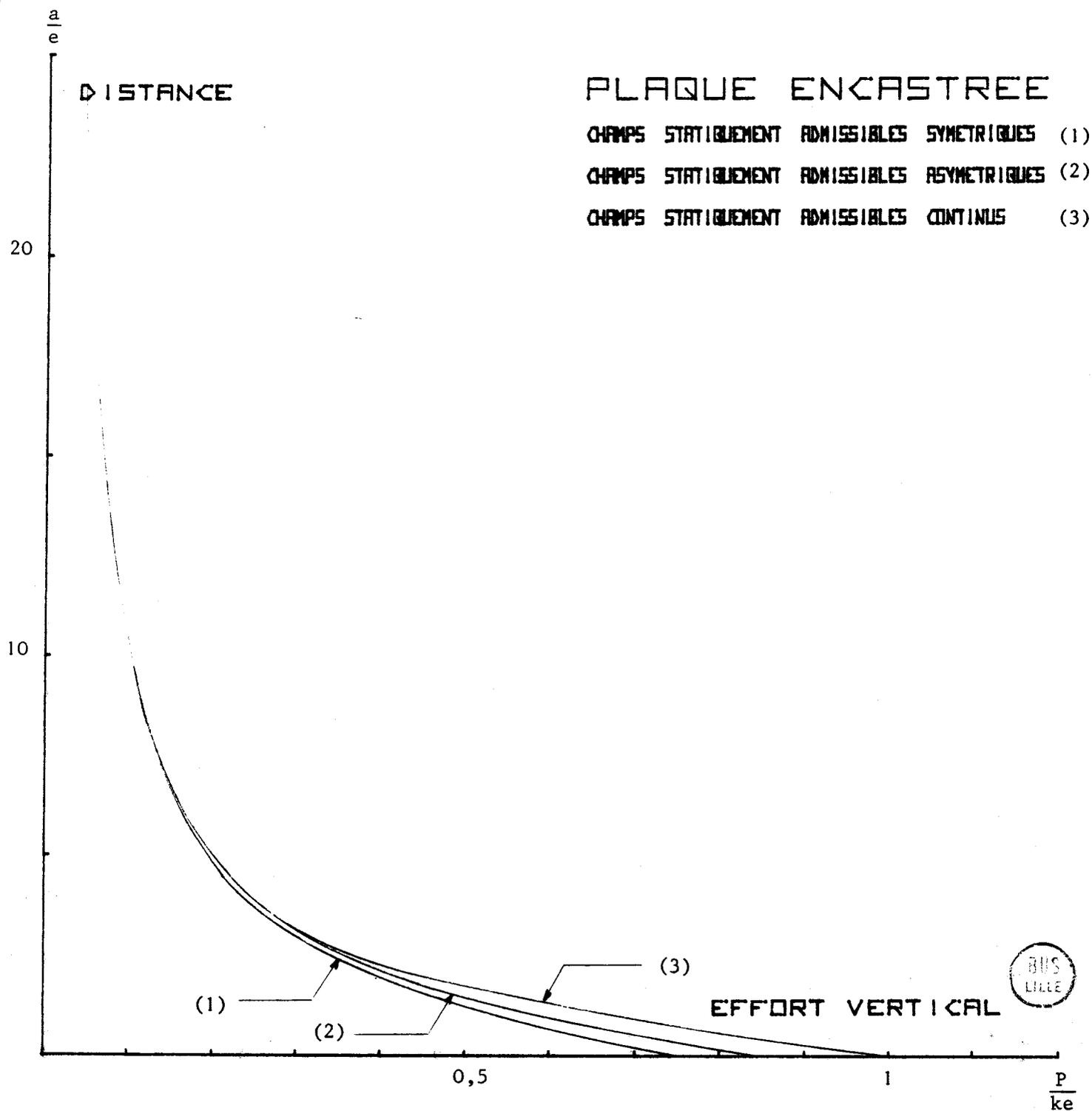
- Figure 63 -



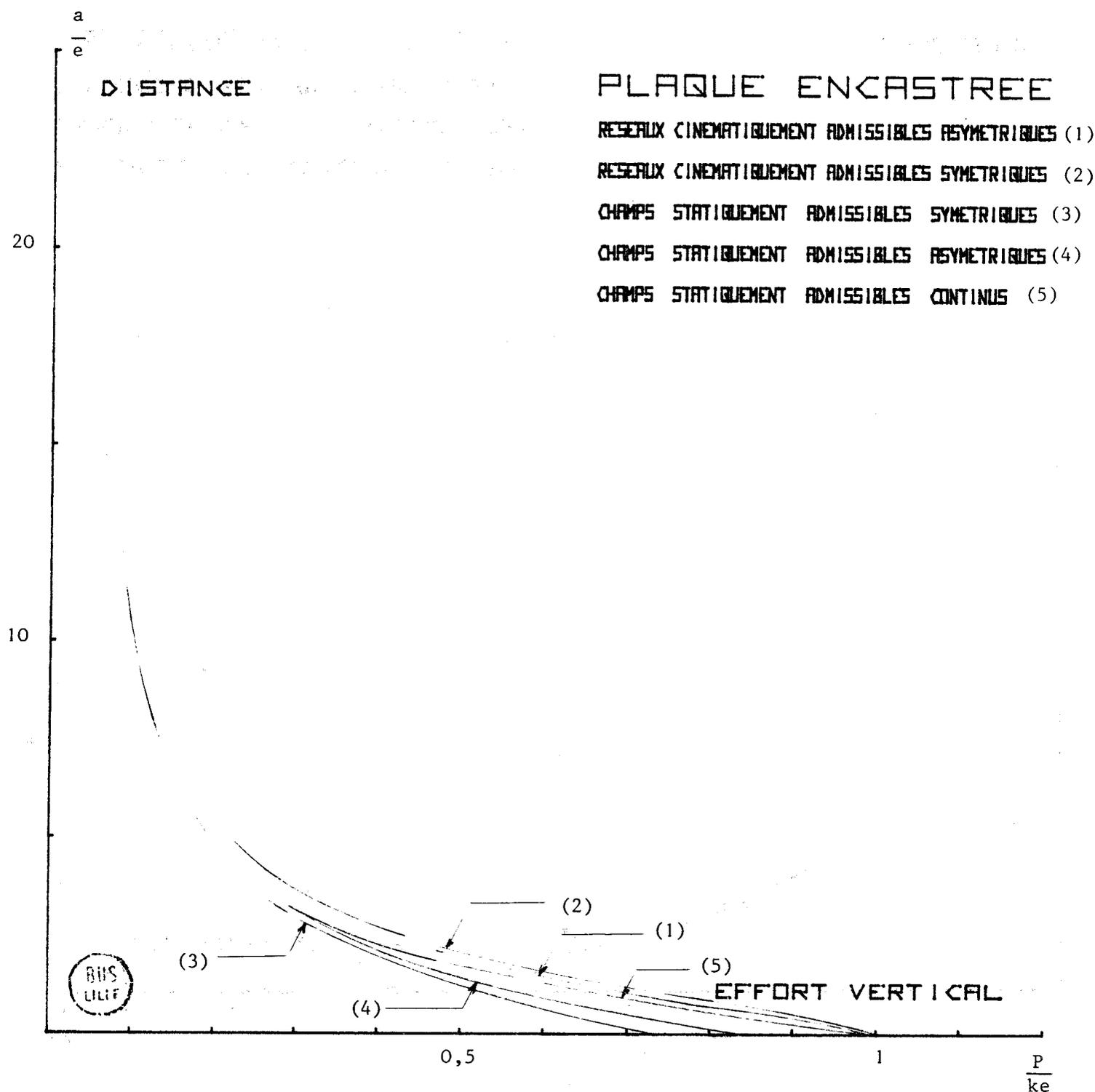
- Figure 64 -



- Figure 65 -



- Figure 66 -



- Figure 67 -

4 - ETUDE EXPERIMENTALE.

4.1. - Introduction.

Des essais ont été réalisés sur les plaques rectangulaires dans les conditions de chargement définies à la figure 16.

4.2. - Préparation des plaques d'essais.

Les plaques sont réalisés en acier doux E 24 à partir de tôles laminées à chaud, provenance USINOR . (norme française NF A 35-050).

Les plaques ont une largeur de 100 mm et une longueur de 200 mm, et l'épaisseur varie entre 4 et 16 mm.

Pour chaque série de tôles, deux éprouvettes de traction ont été prélevées dans le sens longitudinal et deux dans le sens transversal (figure 68).

Les plaques et les éprouvettes sont usinées avec des outils en carbure de tungstène de façon à réduire la profondeur de la zone écrouie.

Après usinage, les pièces sont recuites en atmosphère neutre pendant trente minutes à 875°C avec refroidissement en four pendant trois heures.

4.3. - Essais.

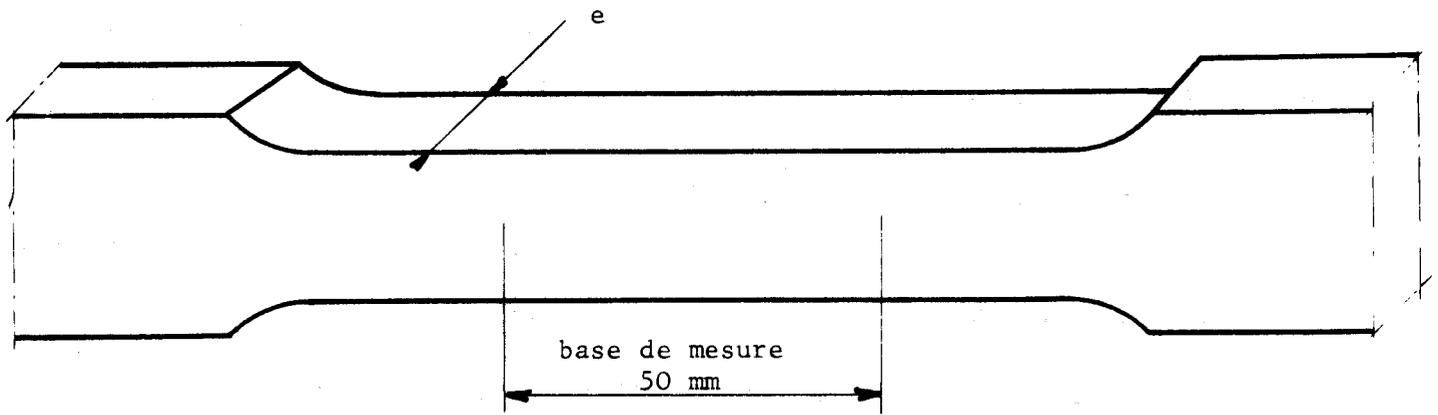
. Essais de traction.

Pour chaque lot d'acier, quatre essais de traction ont été effectués pour déterminer la limite d'élasticité conventionnelle à 0,2 % (figure 69) à la température ambiante de 20°C.

La valeur moyenne de cette limite $R_{0,2}$ pour les quatre essais est reportée pour chaque série au tableau 18.

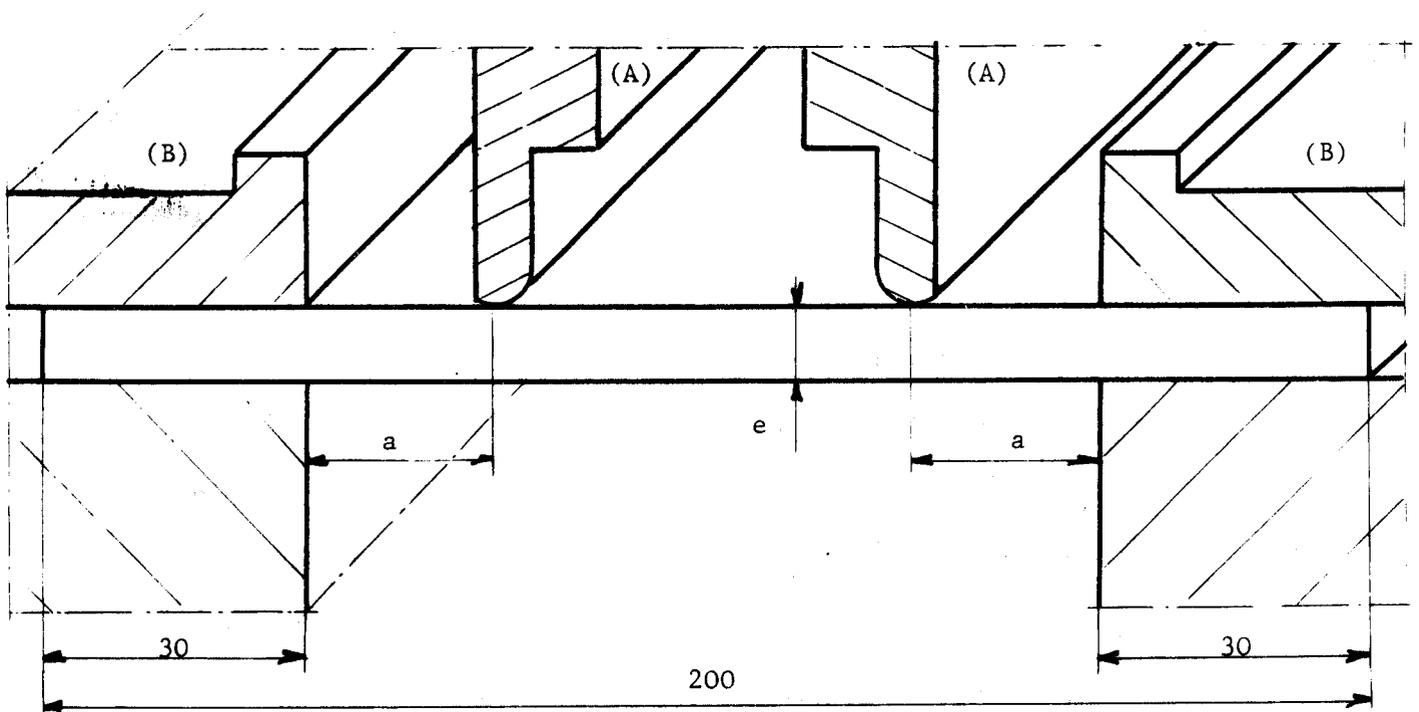
. Essais des plaques.

Les plaques sont disposées dans un montage spécial (figure 70) avec brides lisses (B) serrées à 2m daN par deux écrous et tiges filetées ISO ϕ 14.



- Figure 68 -

- Eprouvette de traction -



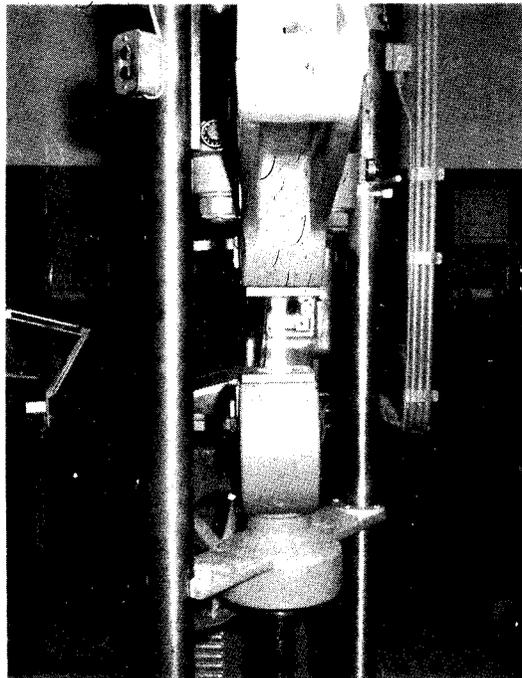
- Figure 70 -

- Montage d'essais des plaques encastrées -



Les efforts verticaux sont appliqués progressivement sur la plaque par deux pièces verticales (A) coulissant sur un plateau (figure 71).

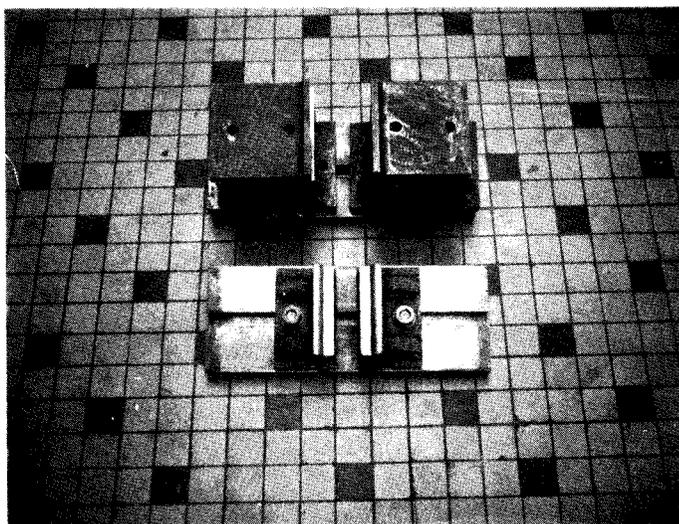
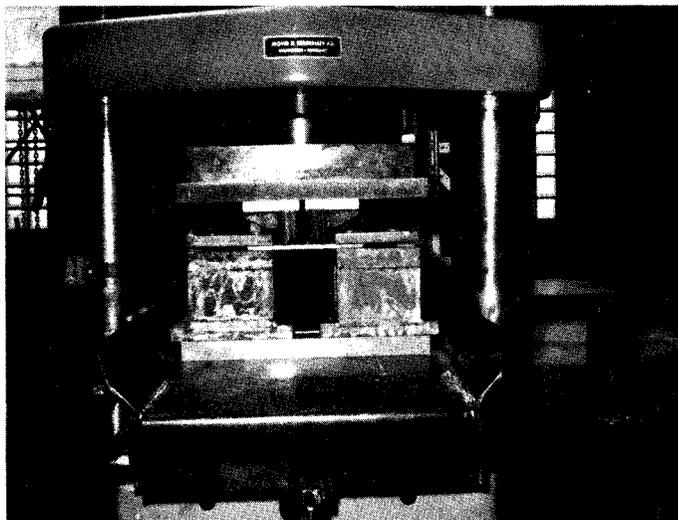
La distance a qui sépare le point d'application de la charge est choisi de façon à couvrir la plus grande partie de la courbe $\frac{a}{e} = f\left(\frac{P}{ke}\right)$ (figure 67).



- Figure 69 -

- Essai de traction. -





- Figure 71 -

- Montage d'essai des plaques encastrées.-

Pour chaque plaque essayée, on relève la courbe effort-flèche à demi-portée, à la température ambiante de 20°C. L'essai est prolongé jusqu'à ce que la flèche atteigne environ trois la flèche élastique observée. La durée de l'essai complet est d'environ cinq minutes. La figure 72 donne les valeurs successives de l'effort et de la flèche pour l'une des plaques essayées.

Après essai, la largeur de la plaque déformée est mesurée pour vérifier que l'état de déformation est plan. Pour les plaques essayées dans notre programme, de rapports largeur-épaisseur compris entre 6 et 25, la variation de largeur est toujours inférieure à 0,1 mm. Cette variation n'est qu'indicative : des informations plus précises seraient obtenues avec des plaques usinées avec des tolérances strictes, contrôlées en métrologie, notamment pour déterminer, après déformation, la géométrie du bord libre et des zones voisines.

4.4. - Détermination de la charge limite.

Dans le cas d'une poutre, simplement appuyée, la charge limite P_{ℓ} , est définie fréquemment par le tracé de la figure 73 [7].

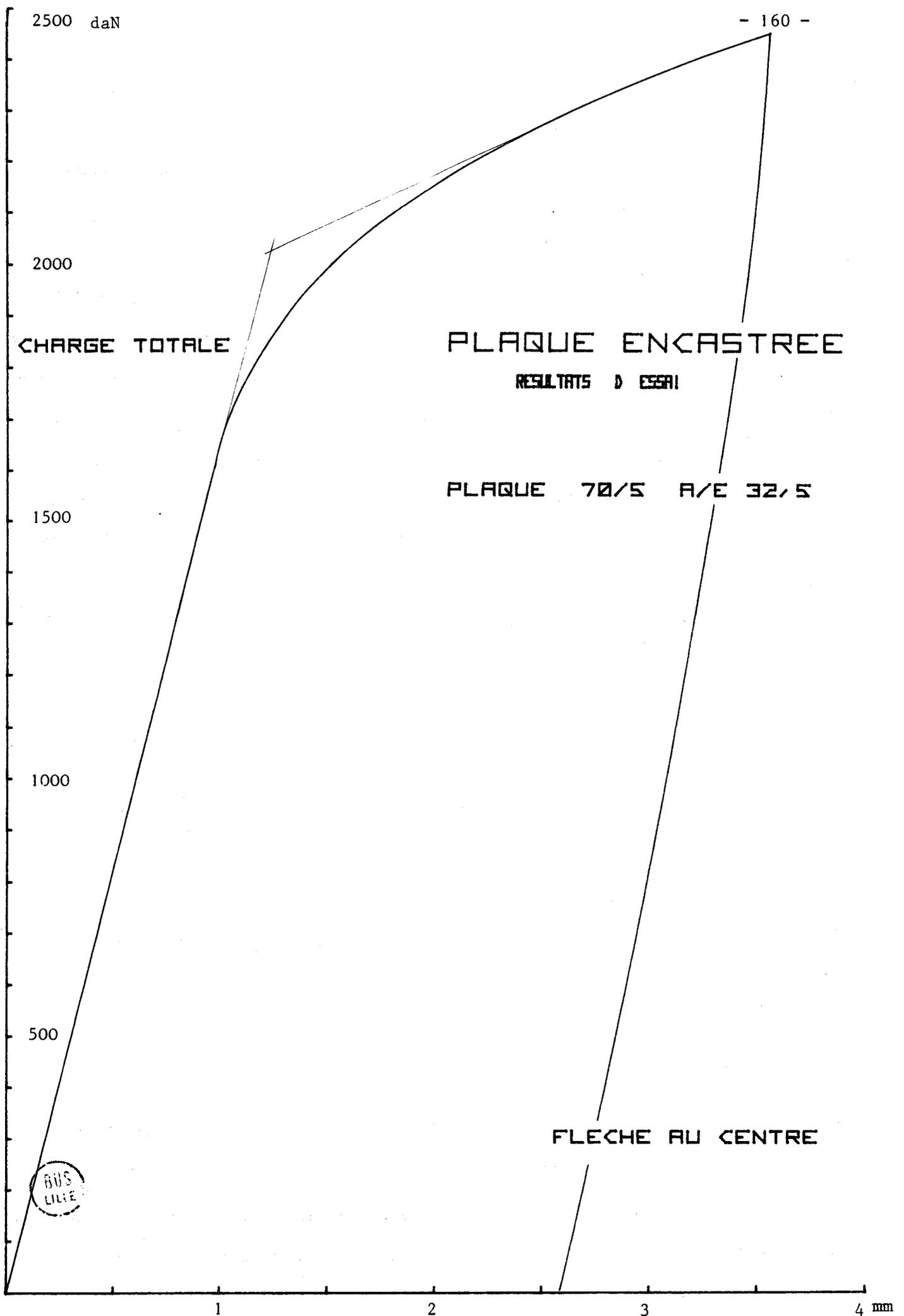
Dans le cas de plaques, le seuil d'écoulement est moins marqué si bien que la charge peut dépasser notablement la limite élastique conventionnelle sans produire la ruine de la pièce.

Nous proposons de prendre comme charge limite P_{ℓ} la charge qui donne une flèche double à celle produite par la charge P_{ℓ} , définie comme pour les poutres isostatiques (figure 74).

L'ensemble des résultats obtenus par ces essais est reporté au tableau 18 et à la figure 75.

La corrélation avec les résultats théoriques (figure 67) est bonne pour la quasi-totalité des plaques essayées.

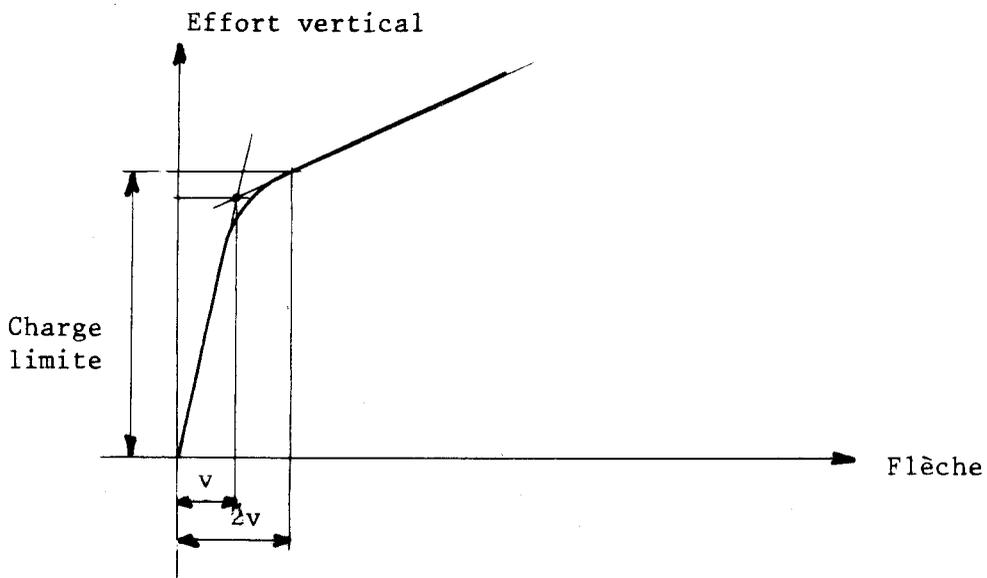
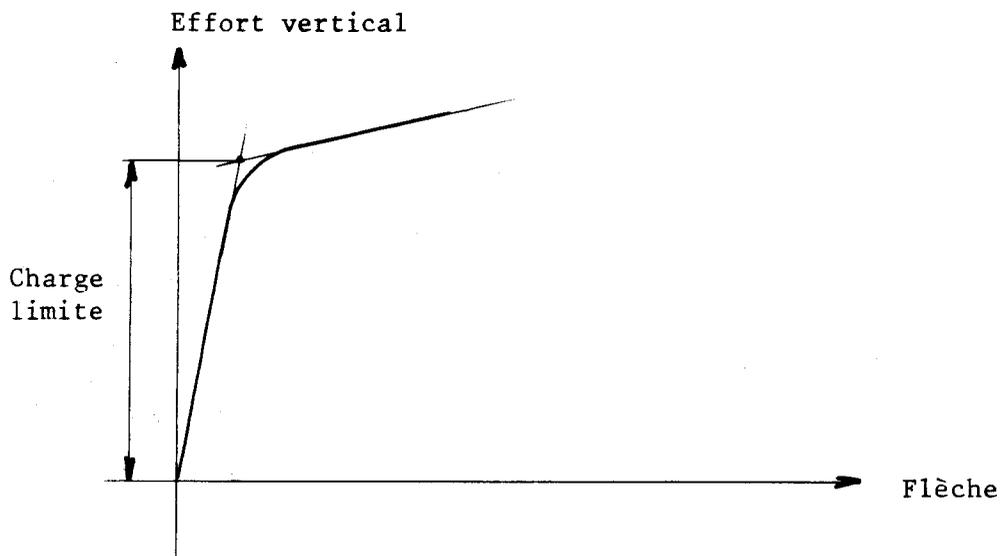
Ces résultats expérimentaux viennent compléter ceux obtenus avec des plaques appuyées sur deux bords où la corrélation observée avec les résultats théoriques est également bonne (I.5).



- Figure 72 -

- Figure 73 -

- Détermination de la charge limite d'une poutre isostatique -



- Figure 74 -

- Détermination de la charge limite d'une plaque encastrée -

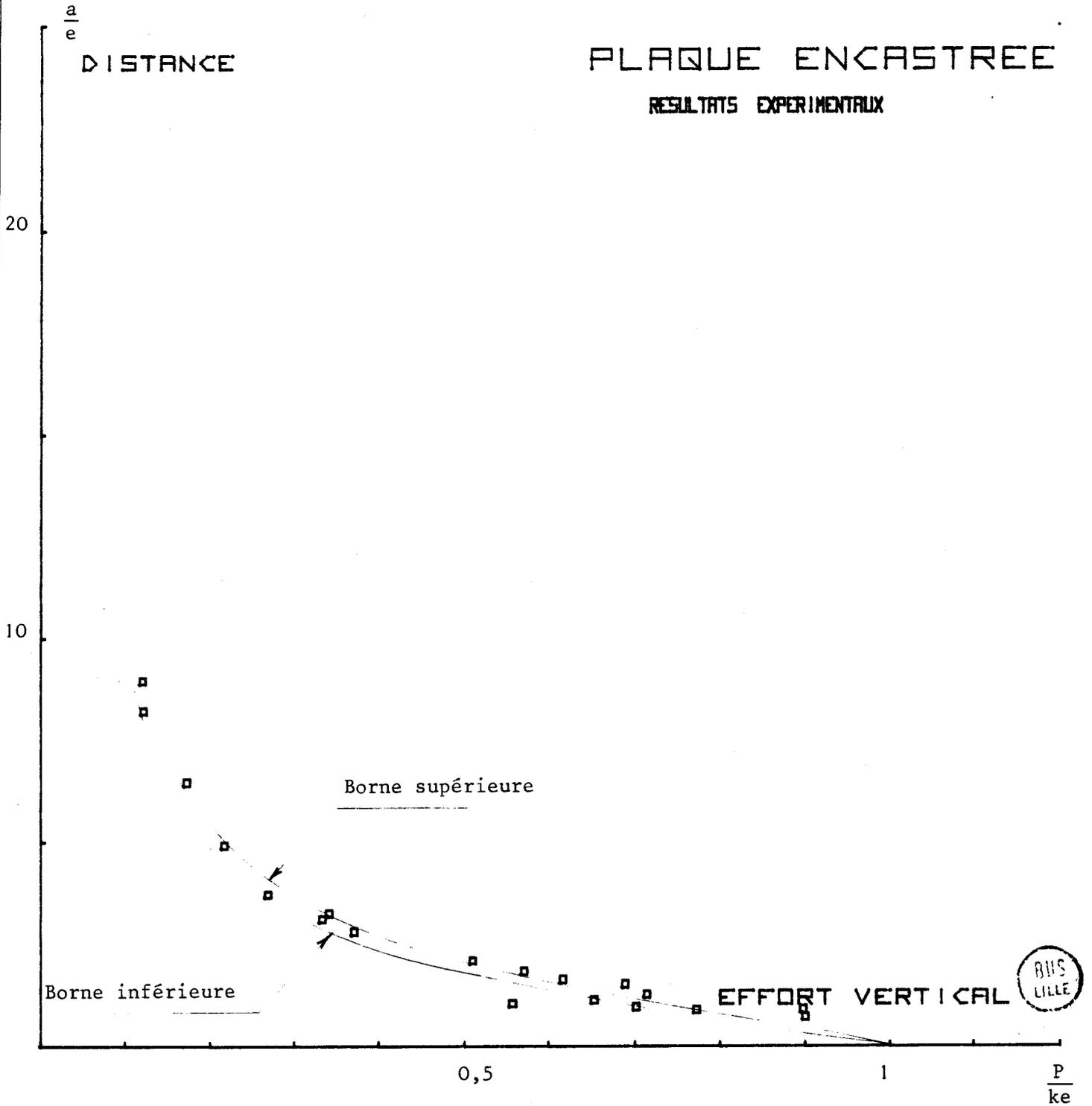


N° essai	P _ℓ daN	w mm	a mm	e mm	R _{0,2} daN/mm ²	$\frac{a}{e}$	$\frac{P}{ke}$
60/04	1200	100	36	4	24,57	9,00	0,1221
60/04	1210	"	33	4	24,57	8,25	0,1231
70/05	2840	100	24,75	5	25,96	4,95	0,2188
70/05	2260	"	32,5	5	25,96	6,50	0,1741
70/06	5800	"	17	6	25,96	2,833	0,3724
70/06	4220	"	22,5	6	25,96	3,75	0,2709
70/07	6080	"	22	7	25,96	3,142	0,3346
70/07	6230	"	23	7	25,96	3,286	0,3428
80/08	8230	100	17	8	20,13	2,125	0,5110
80/08	9200	"	15	8	20,13	1,875	0,5713
80/09	11200	"	15	9	20,13	1,667	0,6182
80/09	12500	"	14	9	20,13	1,556	0,6900
80/10	14400	"	13	10	20,13	1,300	0,7154
90/12	22500	100	14	12	28,67	1,167	0,6540
90/12	19200	"	13	12	28,67	1,083	0,5581
90/14	28200	"	14	14	28,67	1,000	0,7026
90/14	31050	"	13	14	28,67	0,929	0,7736
100/16	36900	100	15	16	25,66	0,938	0,8988
100/16	37000	"	12	16	25,66	0,750	0,9012

- Tableau 18 -



-- Essais de plaques encastrées sur deux bords
 en acier doux E 24 recuit, à la température
 de 20°C et à la vitesse moyenne de 1mm/mn --



- Figure 75 -

- Résultats expérimentaux (\square) comparés avec la meilleure borne supérieure et la meilleure borne inférieure -

5 - CONCLUSION.

Les résultats obtenus par la mise en oeuvre de champs cinématiquement et plastiquement admissibles d'une part, de champs statiquement et plastiquement admissibles, d'autre part, dans la prévision de la charge limite de plaques rectangulaires encastrees sur deux bords sont très proches les uns des autres.

Ils viennent compléter l'étude menée par A.P. GREEN [15] par la mise en oeuvre de nouvelles solutions; les résultats expérimentaux confirment la validité de ces modèles.

Il est possible d'étendre ces résultats à d'autres cas de chargement en notant que la conception de nouveaux champs cinématiquement et plastiquement admissibles peut être facilitée par quelques expériences sur des pièces en acier doux. Ch. MASSONNET et M. SAVE [7] ont utilisé avec succès cette approche dans des problèmes d'analyse limite ainsi que R. LANCE et E. ONAT [17].

Comme l'ont si bien noté W. JOHNSON et J.B. MELLOR [4] à l'occasion de plusieurs problèmes de plasticité, des champs cinématiquement et plastiquement admissibles de conception simple apportent déjà des renseignements assez proches de la réalité.

Notre étude apporte une confirmation de ce fait dans un problème d'analyse limite.

BIBLIOGRAPHIE

=====

- [1] HILL R. - *The mathematical theory of plasticity*, Oxford Clarendon Press, 1950.
- [2] HODGE Ph. - *Plastic analysis of structures*, Mac Graw Hill Book Company, 1959.
- [3] JAOU L R. - *Etude de la plasticité et application aux matériaux*, Dunod, Paris, 1965.
- [4] JOHNSON W. et MELLOR P.B. - *Plasticity for mechanical engineers*, Van Nostrand Company, 1962.
- [5] JOHNSON W., SOWERBY R. et HODDOW J.B., *Plane-strain slip lines fields*, Edward Arnold, 1970.
- [6] MANDEL J. - *Cours de mécanique des solides*, Ecole Polytechnique, 1958.
- [7] MASSONNET Ch. et SAVE M. - *Calcul plastique des constructions*, Centre Belgo-Luxembourgeois, 1963.
- [8] NADAI A. - *Theory of flow and fractures of solids*, Mac Graw Hill Book Company, 1950.
- [9] PRAGER W. et HODGE Ph. - *Theory of perfectly plastic solids*, John Wiley, 1951.
- [10] THOMSEN E., YANG C. et KOBAYASHI S. - *Mechanics of plastic deformation in metal processing*, Mac Millan Company, 1965.
- [11] ALEXANDER J.M. et KOMOLY T.J. - *On the yielding of a rigid plastic bar with an izod notch* (J. Mech. Phys. Solids, vol. 10, 1962, p. 265-275).
- [12] BAQUE P., D'ESCATHA Y., FELDER E. et HYAFIL J. - *Théorie de la plasticité, méthodes de l'Ingénieur. Lignes de glissement*. Ecole des Mines, Paris, 1972.
- [13] BISHOP J.F. - *On the complete solution to problems of deformation of a plastic rigid material* (J. Mech. Phys. Solids, vol. 2, 1953, p. 43-56).
- [14] DRUCKER D.C. - *The effect to shear on the plastic bending of beams* (J. Appl. Mech., 1956, p. 509-514).
- [15] GREEN A.P. - *A theory of the plastic yielding due to bending of cantilevers and beams* (J. Mech. Phys. Solids, vol 3, 1954, p. 1 et 143-155).
- [16] HODGE J. et BROOKLIN N.Y. - *Interaction curves for shear and bending of plastic beams* (J. Appl. Mech., 1957, p. 453-456).
- [17] LANCE R. et ONAT E. - *A comparaisn of experiments and theory in the plastic bending of circular plates* (J. Mech. Phys. Solids, vol. 10, 1962, p. 301-311).
- [18] LUDERS - *Demonstrating the elasticity of iron and steel beam and observing the molecular slip when bending this bar* (Dinglers Journal, vol. 155, 1860, p. 18-36).
- [19] OUDIN J. - *Cours de résistance des structures*, ICAM, Lille, 1969.
- [20] SHIELD R.T. - *The application of limit analysis to punch indentation problems* (J. Appl. Mech., 1953, p. 453-460).
- [21] SHIELD et ONAT E.T. - *The influence of shearing force on the plastic bending of wide beams* (Proc. SD. US. Cong. Appl. Mech., 1954, p. 535-537).

III

CONTRIBUTION A L'OPTIMALISATION

D'UN OUTILLAGE DE POINCONNAGE

S O M M A I R E

La prévision des efforts de poinçonnage de tôles minces est faite à partir d'un champ de vitesses de déformation relié au critère de plasticité de TRESCA par la loi du potentiel plastique.

Les effets de l'affûtage des poinçons sur l'effort de poinçonnage sont mis en évidence.

Les résultats théoriques sont comparés aux valeurs expérimentales des efforts de poinçonnage obtenus sur des tôles en acier galvanisé.

T A B L E D E S M A T I E R E S

	Page
1. INTRODUCTION.	1
2. MODELE THEORIQUE DE PREVISION DE L'EFFORT DE POINCONNAGE.	3
2.1. Définition du modèle de prévision de l'effort de poinçonnage.	3
2.2. Détermination de la contrainte d'écoulement du matériau.	5
2.3. Evaluation de la surface instantanée C de la frontière entre tôle et débouchure pour le poinçon affûté à fond plat.	7
2.4. Evaluation de l'effort de poinçonnage.	18
3. RESULTATS EXPERIMENTAUX.	21
3.1. Dispositif d'essais.	21
3.2. Caractérisation du matériau.	24
3.3. Description des poinçons utilisés.	28
4. COMPARAISON ENTRE RESULTATS THEORIQUES ET RESULTATS EXPERIMENTAUX.	33

1 - INTRODUCTION.

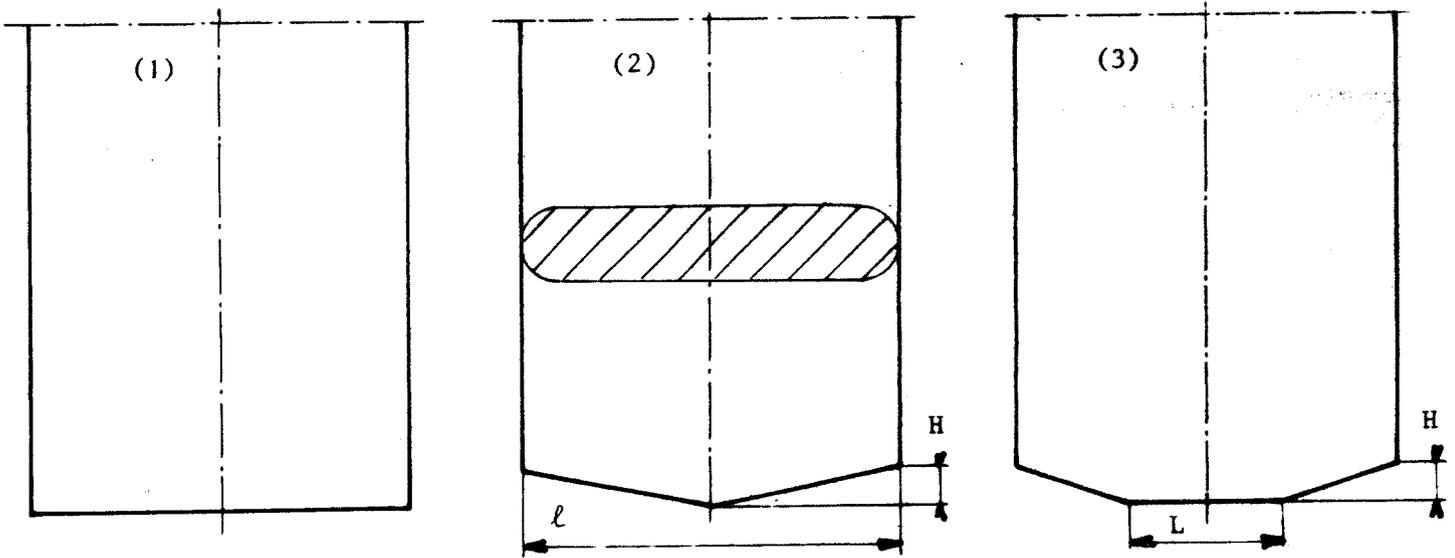
Le découpage de trous ovales dans les tôles et profilés métalliques est usuellement réalisé avec des poinçons affûtés (Figure 1) [1].

L'effort à appliquer sur un poinçon affûté pour obtenir le découpage est plus faible que l'effort à appliquer sur le poinçon à fond plat de mêmes dimensions.

Les débouchures obtenues avec le poinçon affûté ont, au retour élastique près du matériau, la forme du fond du poinçon. Leur densité (et donc leur valeur de récupération) diminuent lorsque la hauteur d'affûtage H augmente.

Nous présentons dans ce qui suit un modèle théorique de prévision de l'effort de poinçonnage pour des poinçons à fond plat, des poinçons affûtés et des poinçons partiellement affûtés (Figure 1).

Les résultats théoriques de prévision de l'effort au cours du poinçonnage sont ensuite comparés à un ensemble de résultats expérimentaux



- Figure 1 -

- Définition des poinçons -

- 1 : Poinçon à fond plat
- 2 : Poinçon affûté sans plat
- 3 : Poinçon affûté à fond plat



2 - MODELE THEORIQUE DE PREVISION DE L'EFFORT DE POINÇONNAGE.

2.1. - Définition du modèle de prévision de l'effort de poinçonnage.

Nous avons choisi de définir un modèle basé sur un champ de vitesses cinématiquement admissible.

Une solution consiste à supposer que la matière sous poinçon se déplace à la même vitesse que le poinçon. Les discontinuités de vitesse sont alors localisées sur les flancs du trou (Figure 2) entre les zones rigides (0) (tôle à poinçonner) et (1) (débouchure en cours de formation). La puissance dissipée \dot{W} dans l'opération de poinçonnage est :

$$\dot{W} = \frac{\sigma_0}{2} \cdot C \cdot \Delta V \quad (1)$$

avec σ_0 : contrainte normale d'écoulement du produit en état linéaire de contraintes,

C : surface de la frontière entre les blocs 0 et 1,

$\Delta V = V_0$ vitesse du poinçon.

L'effort de poinçonnage F vaut :

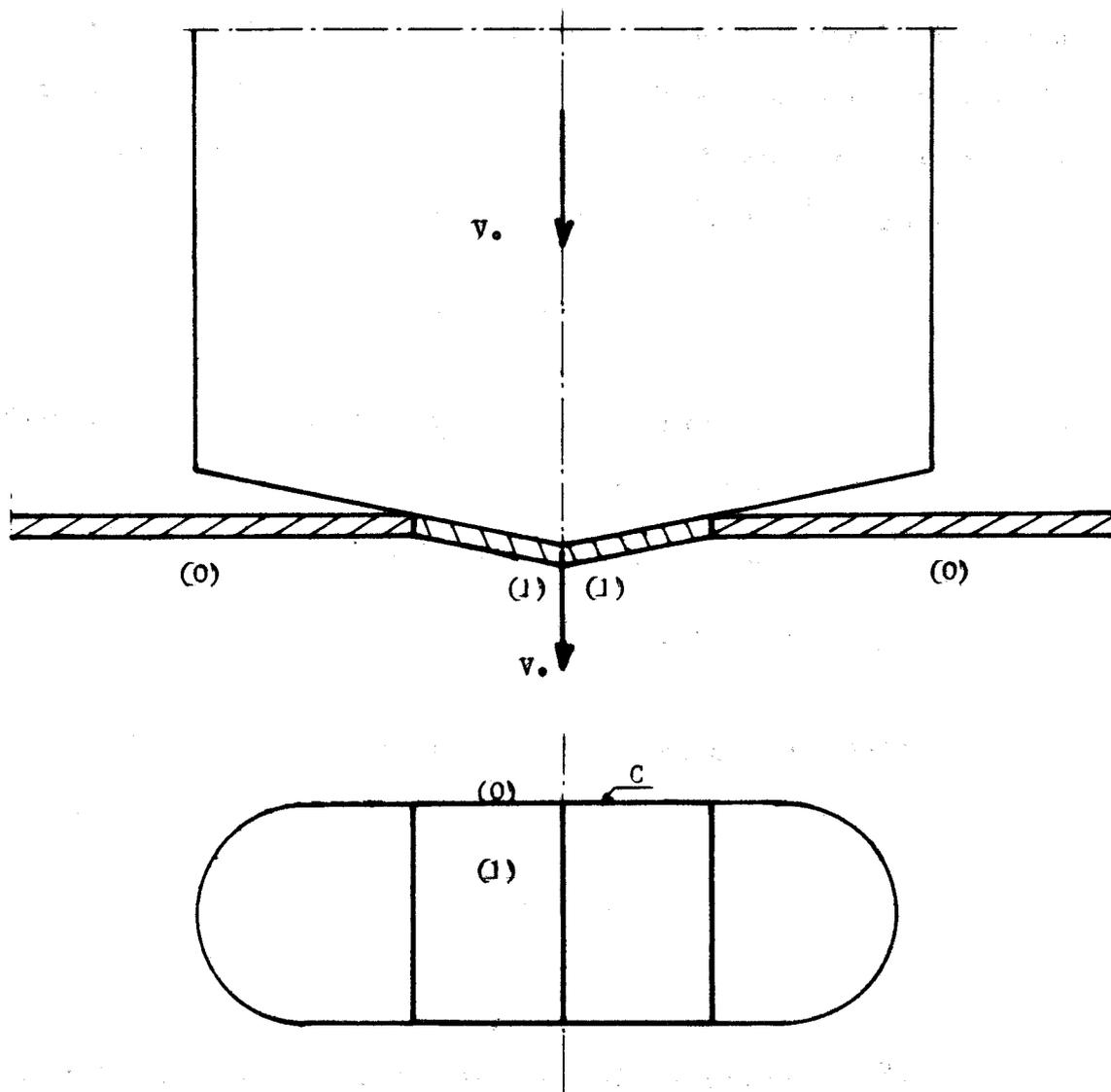
$$F = \frac{\dot{W}}{V_0} = \frac{\sigma_0}{2} C \quad (2)$$

$\frac{\sigma_0}{2}$ correspond à la contrainte tangentielle d'écoulement k

au sens du critère de TRESCA [2] .

Ces hypothèses ne tiennent pas compte de la fragilité du matériau. Or, de la même façon que pour le cisailage, le poinçonnage se termine par la rupture au niveau de la frontière entre (0) et (1). Nous supposons, ce qui

est admis en général, que la rupture se propage lorsque la débouchure s'est localement déplacée d'une fraction $\frac{e}{f}$ de l'épaisseur de la tôle.



- Figure 2 -

- Poinçonnage de tôles -

- Définition du champ de vitesse -



2.2. - Détermination de la contrainte d'écoulement du matériau.

Pour assurer une meilleure prévision de l'effort de poinçonnage, nous retenons ici une loi de comportement unidimensionnelle en écrouissage isotrope [2] de la forme

$$\sigma = \sigma^* \varepsilon^n$$

avec

- σ contrainte normale
- σ^* facteur de contrainte
- ε allongement rationnel
- n coefficient d'écrouissage.

Avec cette loi, la limite d'écoulement du matériau σ_0 en état linéaire de contraintes pour une déformation généralisée $\bar{\varepsilon}$ a pour valeur :

$$\sigma_0 = \sigma^* \bar{\varepsilon}^n \quad (3)$$

La figure 3 représente la forme de la zone plastique entre la tôle (0) et la débouchure (1). Cette zone s'étend sur une largeur égale, au jeu j entre poinçon et matrice près, à une fraction $\frac{e}{s}$ de l'épaisseur de la pièce.

Cette largeur vaut :

$$\frac{e}{s} + j$$

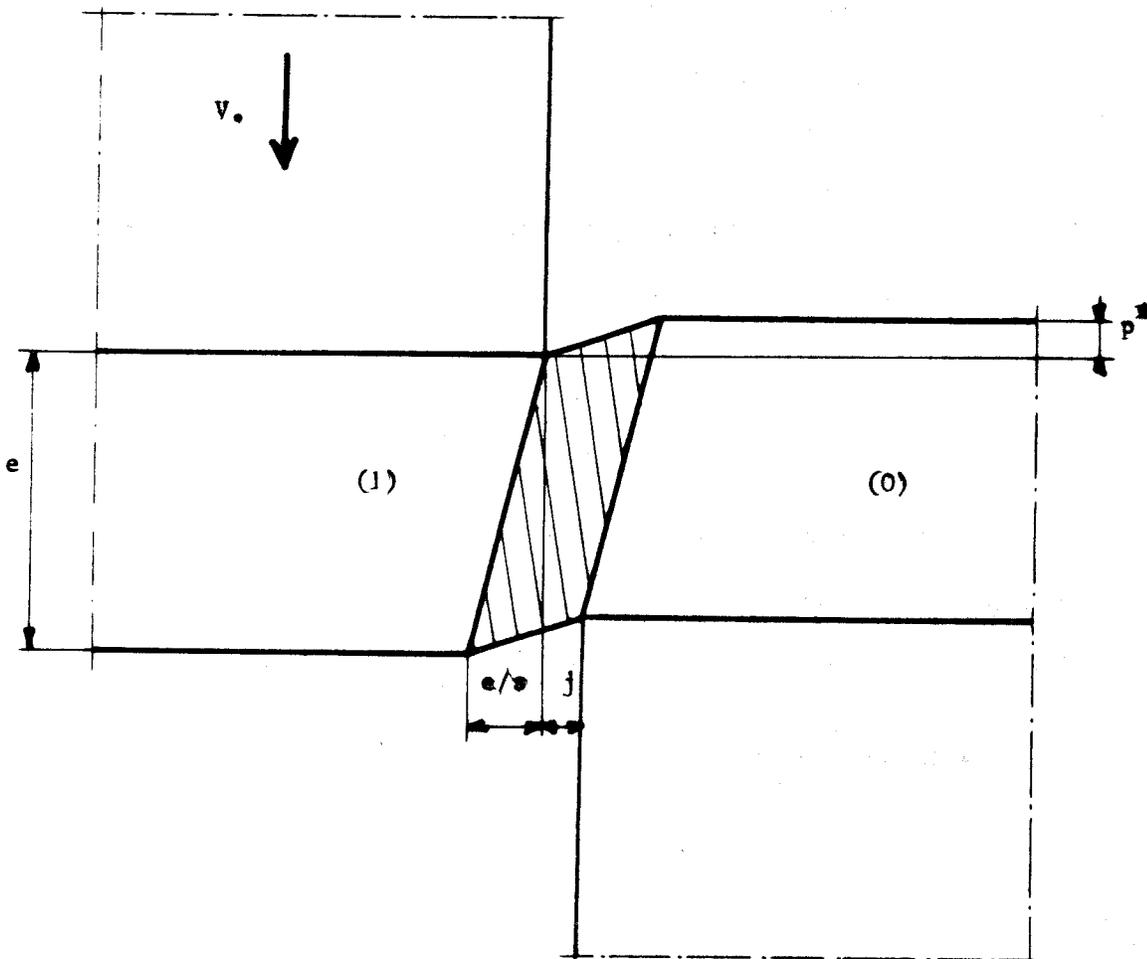
Après un enfoncement p^* du poinçon en un point de la tôle, la largeur de la zone plastique devient

$$\sqrt{p^{*2} + \left(\frac{e}{s} + j\right)^2}$$

La déformation généralisée instantanée $\bar{\epsilon}$ subie par le matériau dans la zone plastique est :

$$\bar{\epsilon} = L n \frac{[p^{*2} + (\frac{e}{s} + j)^2]^{\frac{1}{2}}}{\frac{e}{s} + j} \quad (4)$$

En associant les relations (3) et (4), on obtient la limite d'écoulement actuelle pour un enfoncement local p^* du poinçon dans la tôle.



- p^* : enfoncement local du poinçon
- e : épaisseur de la tôle
- j : jeu technologique entre poinçon et matrice

- Figure 3 -

- Modèle de déformation homogène entre la tôle (0) et la débouchure (1) -

2.3. - Evaluation de la surface instantanée C de la frontière entre tôle et débouchure pour le poinçon affûté à fond plat.

Trois étapes sont à distinguer suivant la pénétration du poinçon. Au début, la frontière entre tôle (0) et débouchure (1) ne comprend que des faces planes ; ensuite apparaissent, en plus des faces planes, des faces cylindriques partielles de rayon $\frac{d}{2}$; enfin le poinçon est partout en contact avec la tôle et la frontière est composée de faces planes (longueur $\ell-d$, épaisseur e) et de faces cylindriques (longueur πd , épaisseur e).

. Frontière à faces planes (Figure 4).

Cette frontière est celle obtenue en début de poinçonnage pour des pénétrations p telles que

$$0 \leq p \leq H \cdot \frac{\ell - d - L}{\ell - L} \quad (5)$$

Soit X la longueur de la zone de contact entre le poinçon et la tôle.

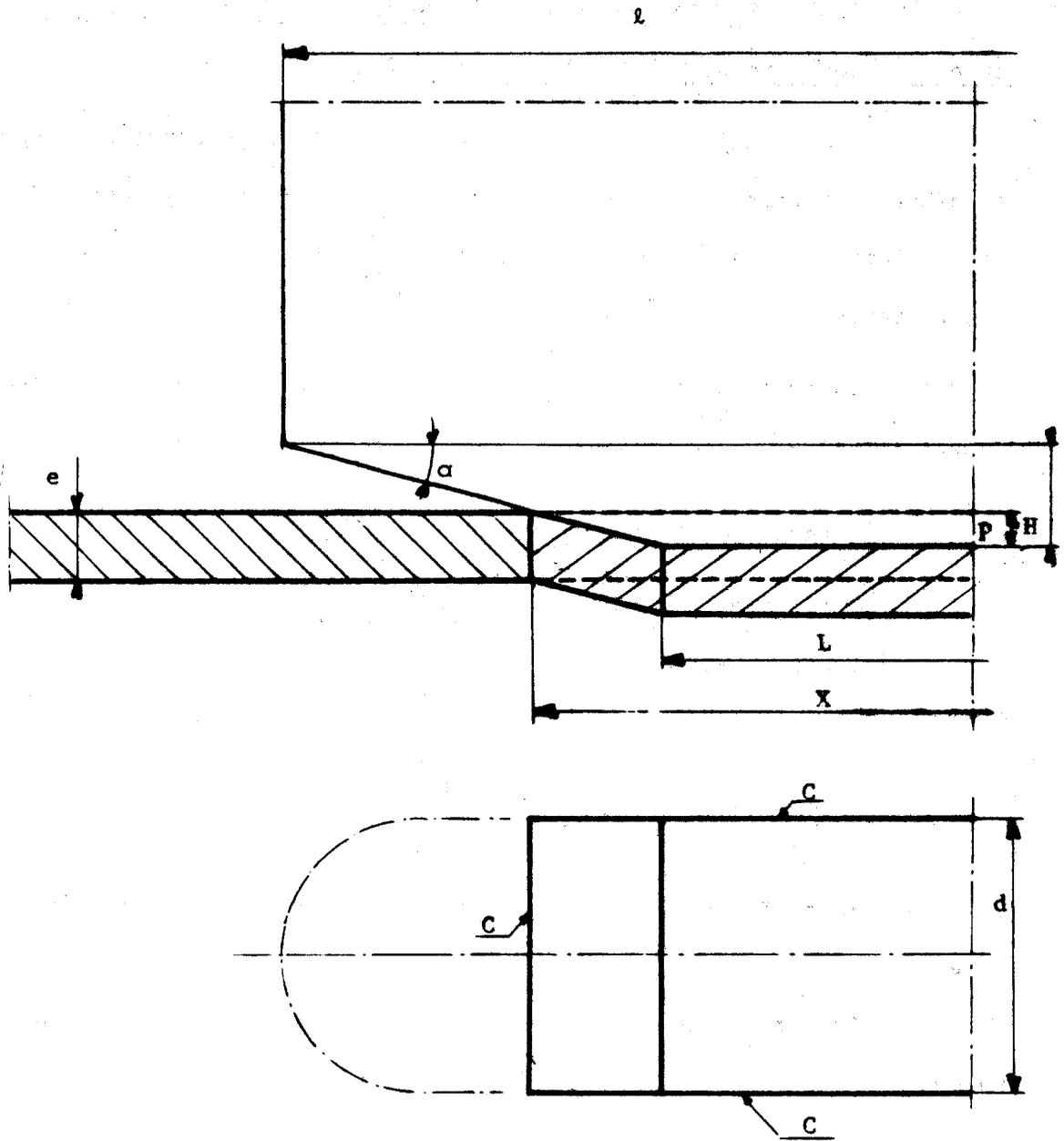
La surface de la frontière C entre le poinçon et la tôle a pour valeur :

$$C = 2 \left[eX - pL - \frac{p}{2} (L + X) + ed \right]$$

après simplification

$$C = 2e(X + d) - p(L + X) \quad (6)$$

avec L longueur du fond plat du poinçon.



- Figure 4 -

- Frontière entre tôle et débouchure à surfaces planes -



Nous avons la relation géométrique suivante :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2H}{\ell - L}$$

avec α angle d'affûtage

H hauteur d'affûtage.

La longueur X a pour valeur :

$$X = L + \frac{2p}{\operatorname{tg} \alpha}$$

ou

$$X = L + \frac{p}{H} (\ell - L) \quad (7)$$

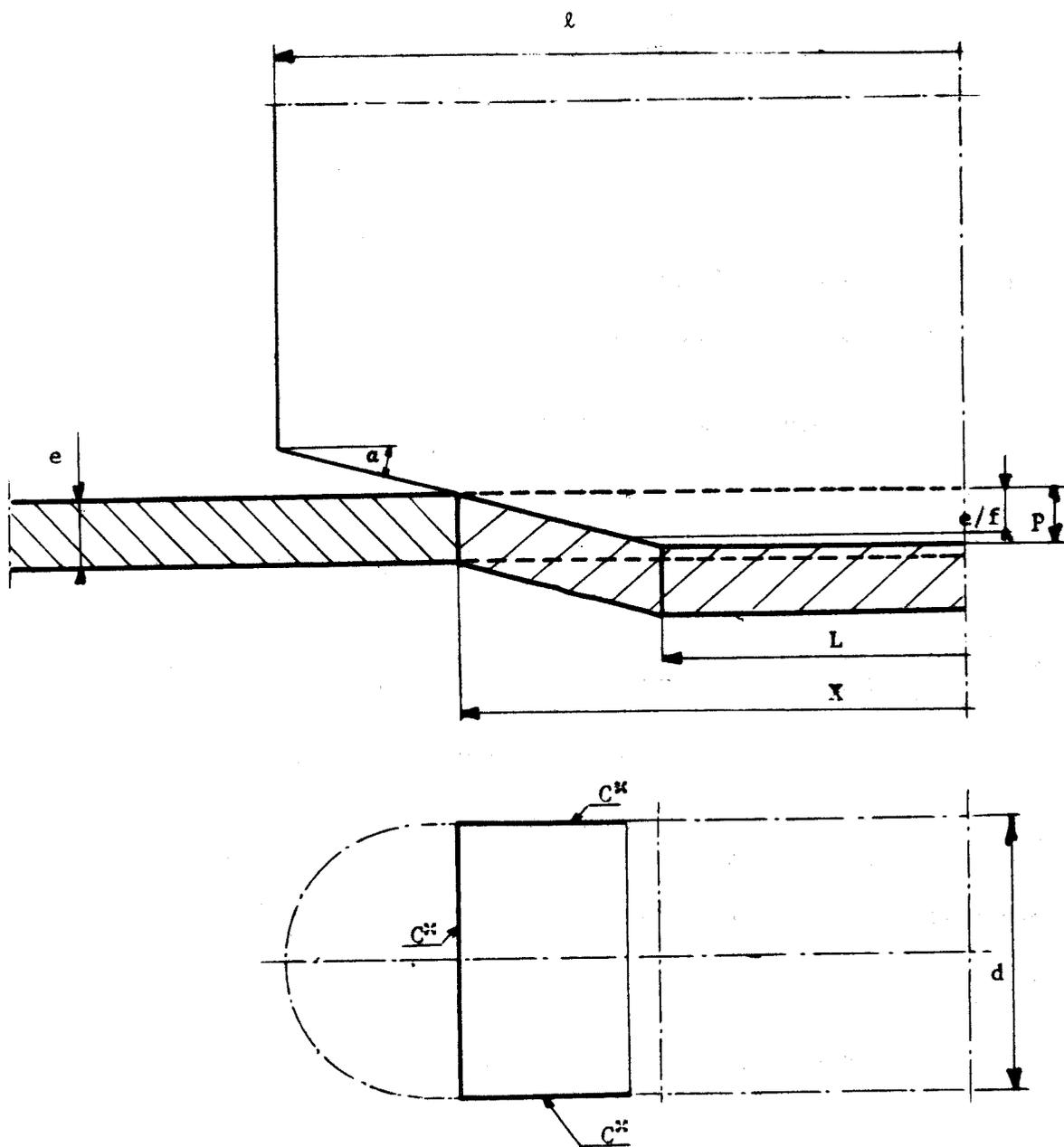
En cas de rupture partielle entre tôle et débouchure, lorsque la pénétration p atteint le seuil critique $\frac{e}{f}$, la surface C est réduite (Figure 5).

La nouvelle valeur de la surface est :

$$C^* = (4e - \frac{e}{f}) \frac{e}{f \operatorname{tg} \alpha} + 2ed$$

soit

$$C^* = 2e \left[\frac{e}{f^2 \operatorname{tg} \alpha} (2f-1) + d \right] \quad (8)$$



- Figure 5 -

- Frontière entre tôle et débouchure en cas de rupture partielle -



. Frontière à surfaces planes et à surfaces cylindriques partielles.

Lorsque la condition suivante est satisfaite

$$\boxed{H \frac{\ell - d - L}{\ell - L} \leq p \leq H} \quad (9)$$

la frontière entre (0) et (1) comportent des surfaces planes et des surfaces cylindriques (Figure 6).

Soit ψ l'angle au centre de l'arc de contact entre le poinçon et la tôle.

Sa valeur est :

$$\boxed{\psi = \arcsin\left(\frac{X - \ell + d}{d}\right)} \quad (10)$$

X est toujours donné par la relation (7).

- Calcul des surfaces cylindriques.

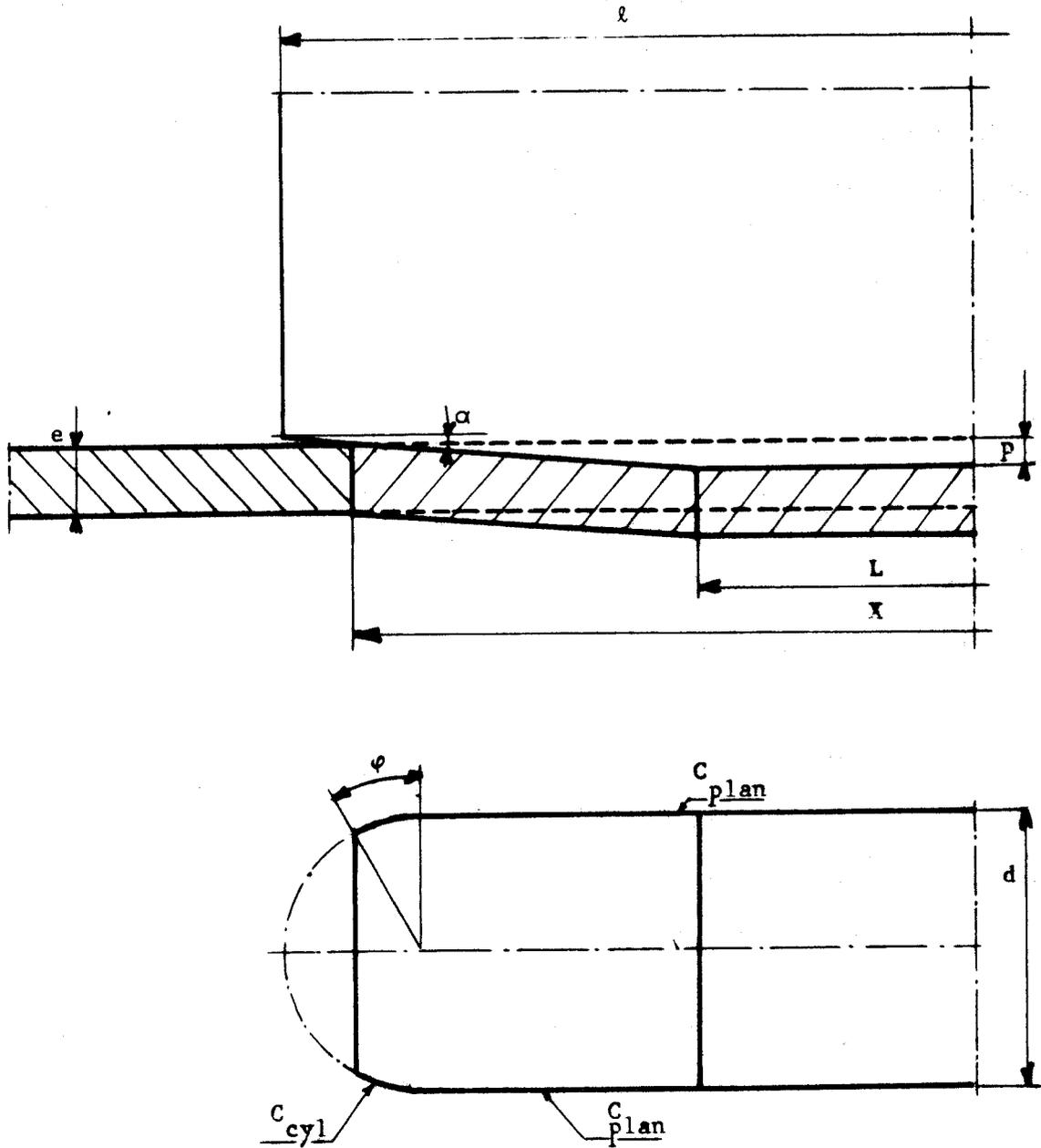
Soit ds l'élément d'arc et h la hauteur de la frontière pour un angle Ψ compris entre 0 et ψ .

Les surfaces cylindriques ont pour valeur :

$$C_{\text{cyl}} = 4 \int_0^{\psi} h ds = 4 \int_0^{\psi} \left[e + \frac{d}{2} (\sin \Psi - \sin \psi) \operatorname{tg} \alpha \right] \frac{d}{2} d\Psi .$$

Soit

$$\boxed{C_{\text{cyl}} = d \left[(2e - d \sin \psi \operatorname{tg} \alpha) \psi + d \operatorname{tg} \alpha (1 - \cos \psi) \right]} \quad (11)$$



- Figure 6 -

- Frontière entre tôle et débouchure
à surfaces planes et à surfaces cylindriques partielles -



- Calcul des surfaces planes.

D'après la figure 6, il vient :

$$\frac{C}{2} \text{ plan} = (e-p)L + (\ell - d - L) \cdot \frac{2e - p - p \frac{X-\ell+d}{X-L}}{2} + ed \cos \phi$$

$$C_{\text{plan}} = 2e[\ell - d(1 - \cos \phi)] - p \frac{(2X - (\ell+L-d))(\ell-d-L) + 2L(X-L)}{2(X-L)}$$

Après simplifications :

$$C_{\text{plan}} = 2e[\ell - d(1 - \cos \phi)] - p \frac{2X(\ell-d) - L^2 - (\ell-d)^2}{X-L} \quad (12)$$

D'où, d'après (11) et (12), nous pouvons calculer la surface totale C :

$$C = C_{\text{plan}} + C_{\text{cyl}}$$

- Lorsque la pénétration p atteint le seuil de rupture $\frac{e}{f}$ dans la zone plane, la surface de la frontière pour la zone cylindrique reste inchangée :

$$C_{\text{cyl}}^* = C_{\text{cyl}} \quad (13)$$

La nouvelle surface de la frontière pour la zone plane devient (Figure 7) :

$$C_{\text{plan}}^* = \left(2e - \frac{e}{f} - p \frac{X-\ell+d}{X-L}\right) \left[\ell - d - X + \frac{e}{pF} (X-L)\right] + 2ed \cos \psi \quad (14)$$

- Lorsque la pénétration atteint le seuil $\frac{e}{f}$ dans la zone cylindrique (Figure 8), les surfaces des frontières ont pour valeur :

$$C_{\text{cyl}}^{**} = 4 \int_{\gamma}^{\psi} hds$$

$$C_{\text{cyl}}^{**} = d \left[(2e - d \sin \psi \operatorname{tg} \alpha) \Psi - d \operatorname{tg} \alpha \cos \Psi \right]_{\gamma}^{\psi}$$

soit

$$C_{\text{cyl}}^{**} = d \left[(2e - d \sin \psi \operatorname{tg} \alpha) (\psi - \gamma) + d \operatorname{tg} \alpha (\cos \gamma - \cos \psi) \right] \quad (15)$$

et :

$$C_{\text{plan}}^{**} = 2ed \cos \psi \quad (16)$$

. Frontières à surfaces planes et à surfaces cylindriques complètes.

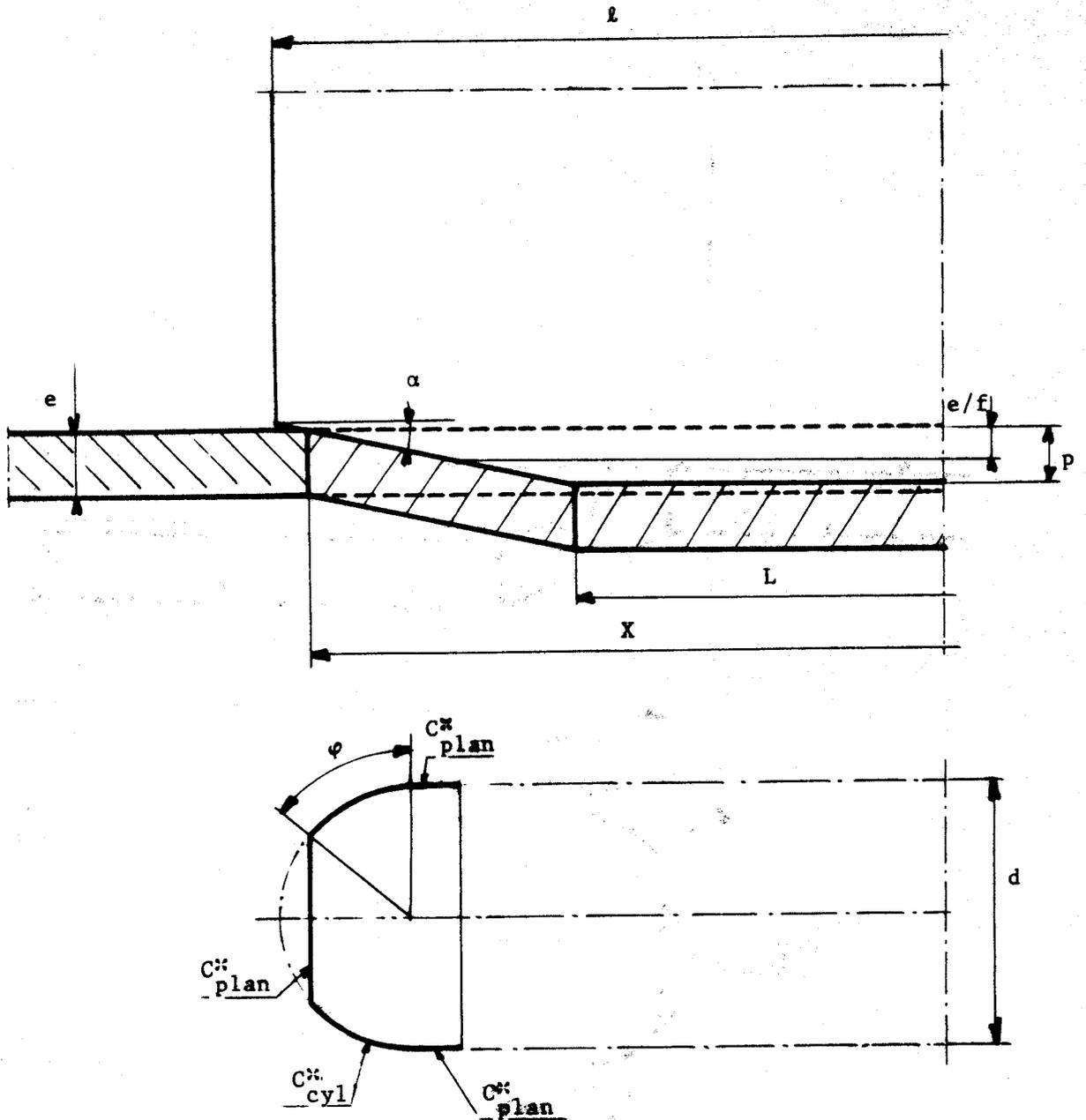
Lorsque la pénétration p atteint la hauteur d'affûtage H , la surface du poinçon est en contact complet avec la tôle (Figure 9).

Les surfaces planes et cylindriques peuvent être calculées avec les relations (11), (12), (13), (14), (15) et (16) en remplaçant l'épaisseur e de la tôle par l'épaisseur virtuelle e' telle que :

$$e' = e - (p - H)$$

avec

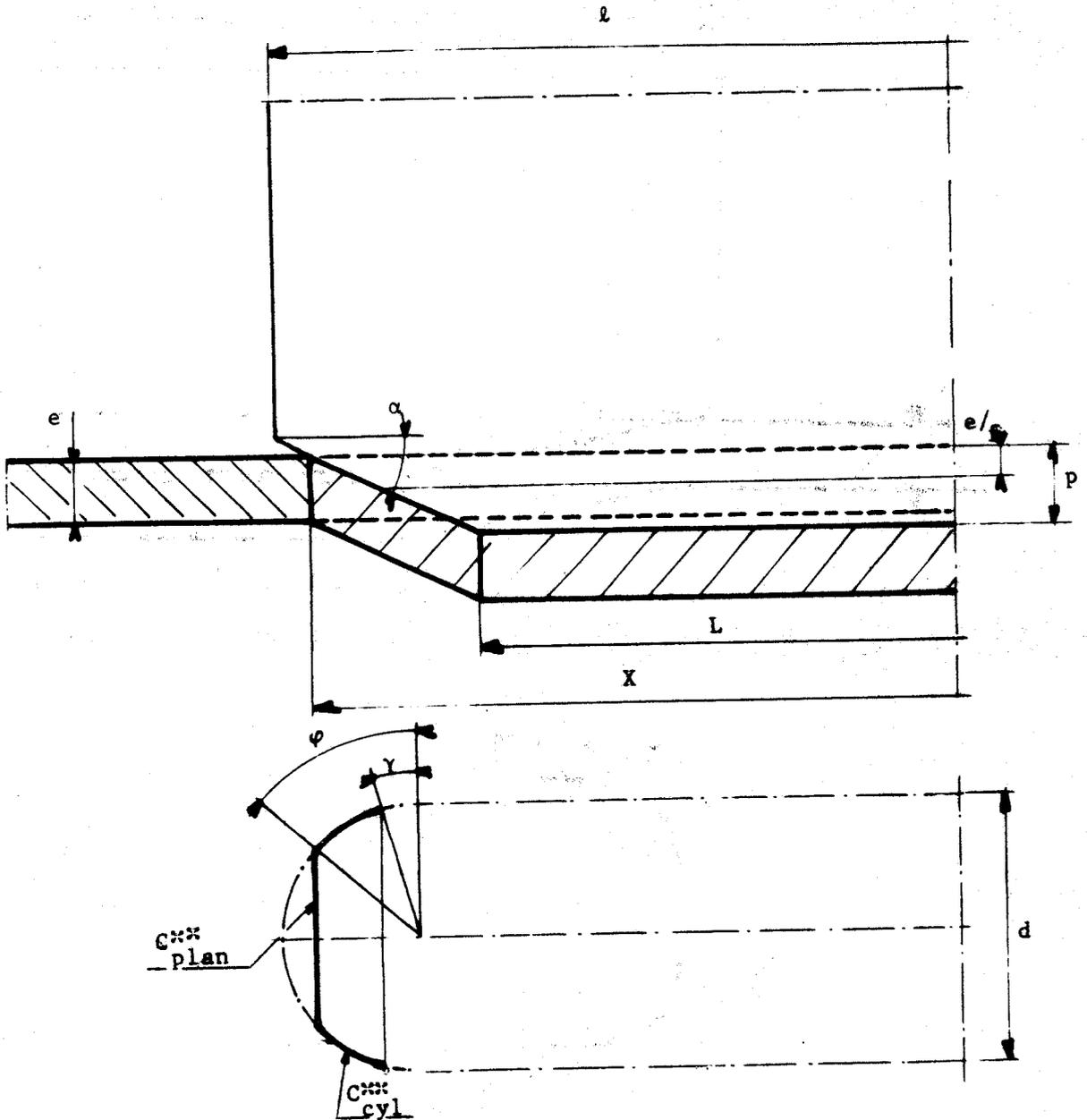
$$\psi = \frac{\pi}{2}$$



- Figure 7 -

- Frontière entre tôle et débouchure
en cas de rupture partielle dans la zone plane -

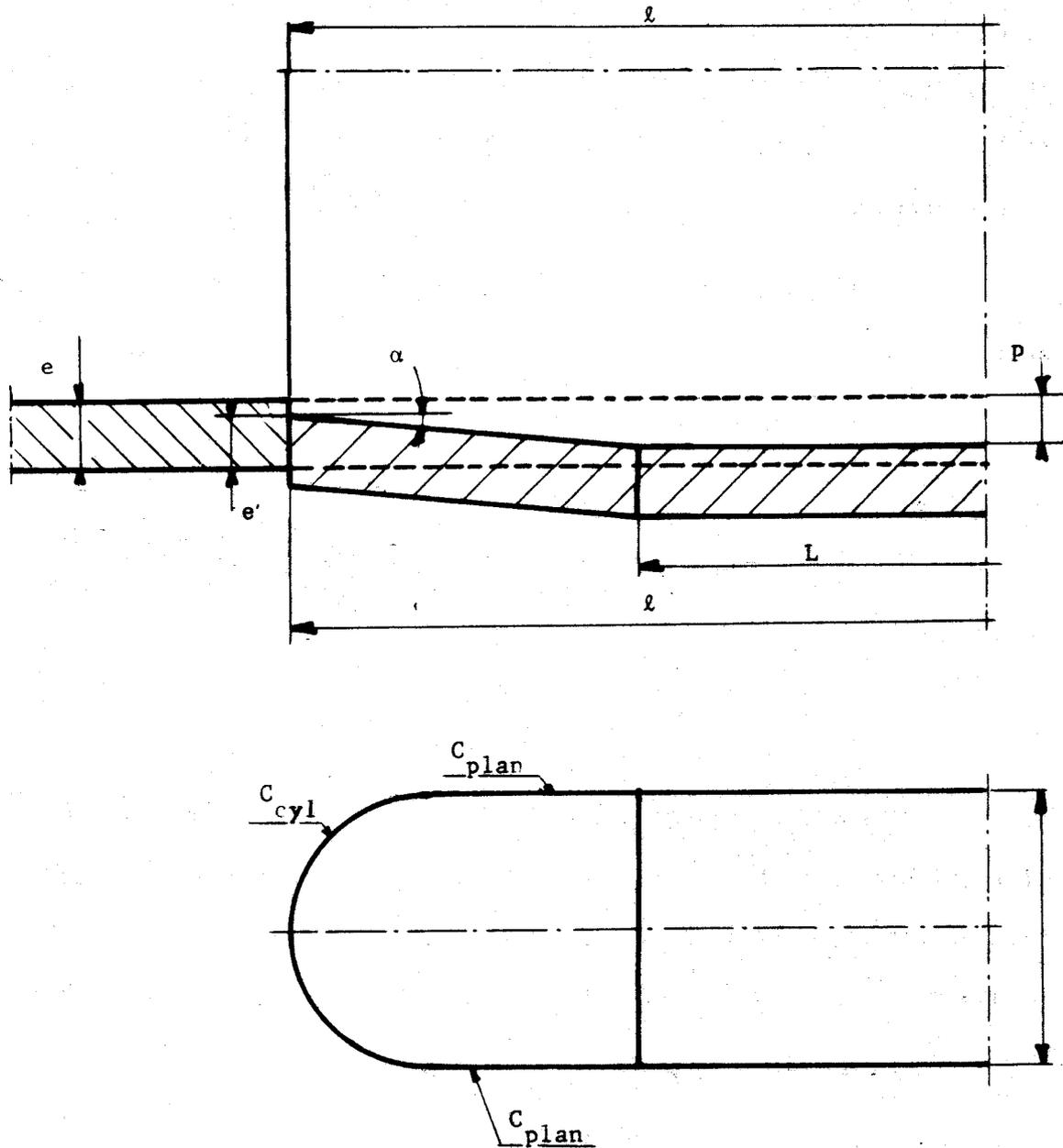




- Figure 8 -

- Frontière entre tôle et débouchure
en cas de rupture partielle dans la zone cylindrique -





- Figure 9 -

- Frontière entre tôle et débouchure
à surfaces planes et à surfaces cylindriques complètes -



2.4. - Evaluation de l'effort de poinçonnage.

L'effort de poinçonnage est obtenu en fonction de la pénétration p et de l'enfoncement local p^* en utilisant la relation (2) compte tenu de (3), (4) pour la limite d'écoulement et de (6), (8), (11), (12), (13), (14), (15) et (16) pour les surfaces de la frontière de la zone plastique en tôle et débouchure.

L'enfoncement local p^* est relié à la pénétration p comme suit :

- Pour les poinçons à fond plat, nous avons :

$$\begin{array}{l} p^* = p \quad \text{si } p < \frac{e}{f} \\ p^* = 0 \quad \text{si } p \geq \frac{e}{f} \end{array} \quad (17)$$

et

- Pour les poinçons affûtés à fond plat en contact partiel avec la tôle (Figures 4 et 5), la limite d'écoulement σ_0 pour les zones sous fonds affûtés est prise égale à la moyenne quadratique entre le seuil de déformation minimale $\bar{\epsilon}_0$ et le seuil de déformation maximale $\bar{\epsilon}_1$ (Figure 10).

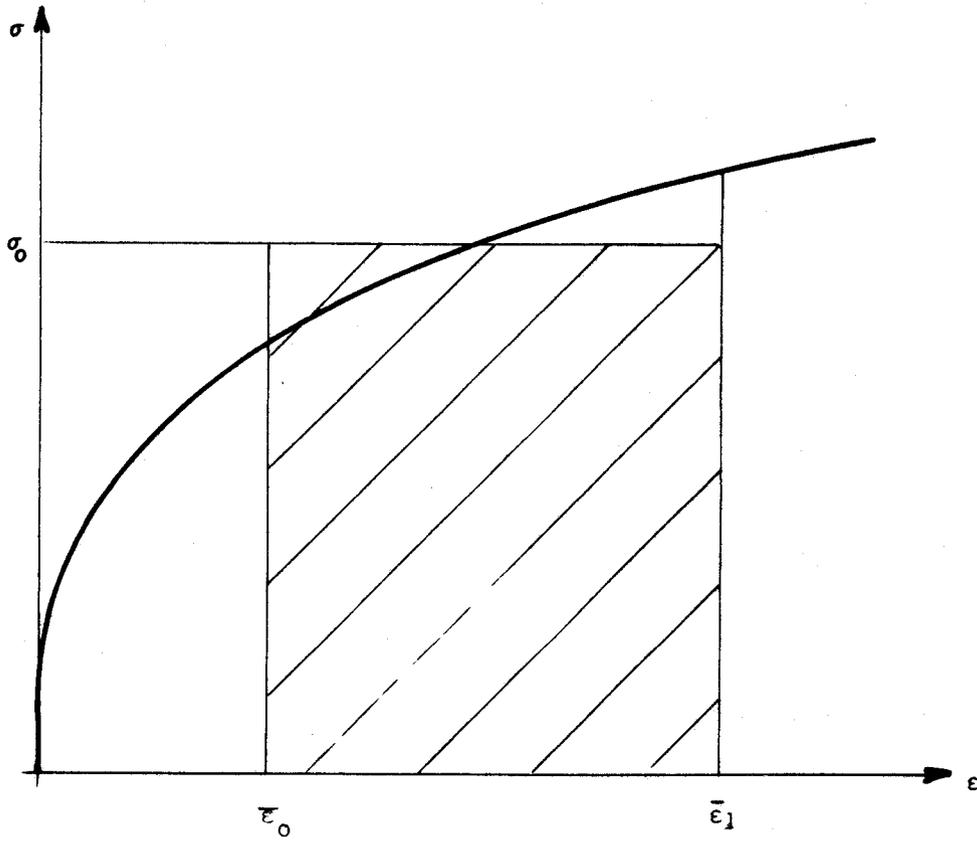
La déformation minimale $\bar{\epsilon}_0$ vaut dans ce cas :

$$\bar{\epsilon}_0 = 0$$

La déformation maximale $\bar{\epsilon}_1$ est calculée avec la relation (4)

en prenant :

$$\begin{array}{l} p^* = p \quad \text{si } p < \frac{e}{f} \\ p^* = \frac{e}{f} \quad \text{si } p \geq \frac{e}{f} \end{array} \quad (18)$$



- Figure 10 -

- Loi de comportement du matériau :
représentation des limites de déformation -



La limite d'écoulement est donnée par la relation :

$$\sigma_0(\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_0) = \int_{\bar{\varepsilon}_0}^{\bar{\varepsilon}_1} \sigma^* \bar{\varepsilon}^{-n} d\bar{\varepsilon}$$

soit

$$\sigma_0(\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_0) = \sigma^* \frac{\bar{\varepsilon}_1^{-n+1} - \bar{\varepsilon}_0^{-n+1}}{n+1}$$

et

$$\sigma_0 = \sigma^* \frac{\bar{\varepsilon}_1^{-n+1} - \bar{\varepsilon}_0^{-n+1}}{(n+1)(\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_0)} \quad (19)$$

- Pour les poinçons affûtés à fond plat en contact complet avec la tôle (Figure 9), la déformation minimale $\bar{\varepsilon}_0$ est calculée à partir de la relation (4) avec :

$$p^* = p - H \quad (20)$$

La déformation maximale $\bar{\varepsilon}_1$ est toujours calculée selon les relations (18) et la limite d'écoulement σ_0 considérée pour la zone plastique en contact avec la partie affûtée du poinçon est encore donnée par la formule (19).

Les figures (14), (15), (16) et (17) donnent l'évolution de l'effort de poinçonnage F en fonction du déplacement d du porte poinçon pour diverses formes de poinçon.

Ce déplacement d est égal à l'enfoncement p augmenté des déformations élastiques du poinçon et de l'outillage $t \frac{Fh}{ES_p}$ (h_p hauteur

du poinçon, S_p surface de la section droite du poinçon, E module de YOUNG, t coefficient de déformation élastique).

Les valeurs numériques utilisées dans les calculs sont définies dans le chapitre suivant.

3 - RESULTATS EXPERIMENTAUX.

3.1. - Dispositif d'essais.

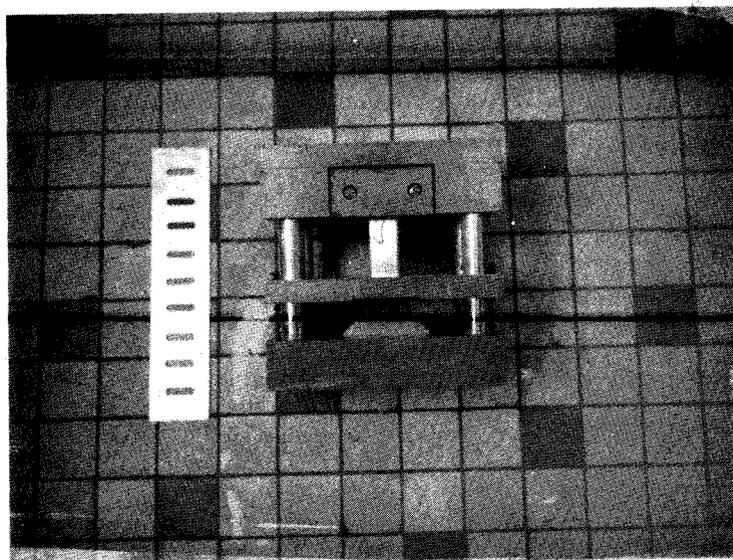
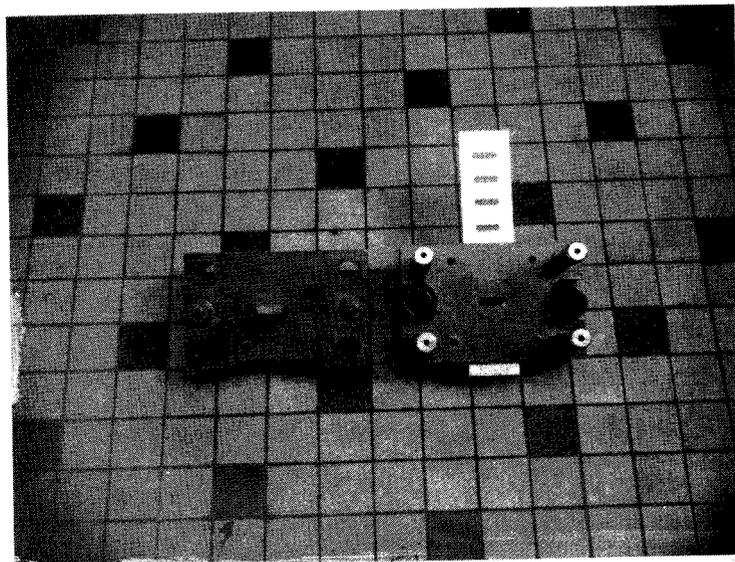
. La tôle est maintenue sur la matrice par un serre-flan (Figure 11). Le poinçon est fixé par une clame dans une rainure de la plaque supérieure. Cette plaque est guidée par 4 colonnes. L'ensemble de ce dispositif est monté sur notre machine universelle du laboratoire JOHNSON (Figure 12).

. L'effort est mesuré par un capteur à jauges résistances monté sur le nez du vérin de notre machine. La lecture se fait sur un pont de mesure SEDEME (Figure 13). Une imprimante permet la saisie de ces valeurs.

. Le déplacement est mesuré par un capteur inductif monté entre les plaques inférieure et supérieure du dispositif d'essai. La lecture se fait sur un pont de mesure H. B. M..

. Les conditions d'essai étaient les suivantes :

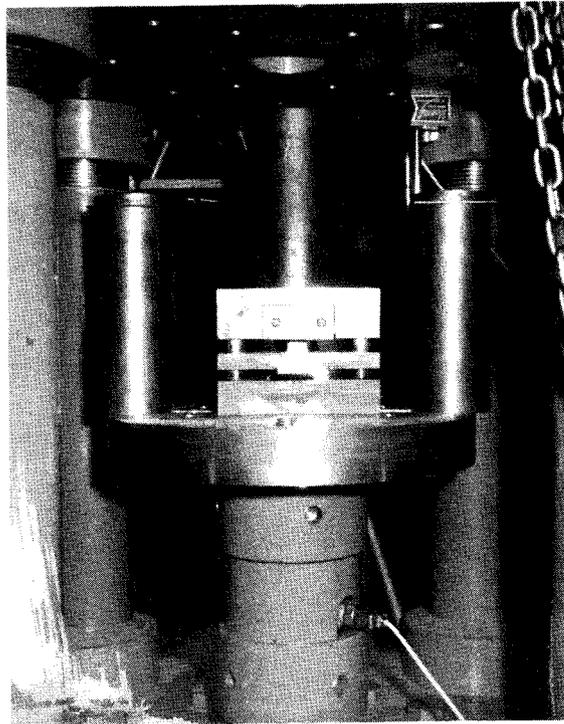
- température : $20^{\circ}\text{C} \pm 2^{\circ}\text{C}$
- humidité : $60 \% \pm 20 \%$
- machine d'essai M. S. M. capacité 100 Tonnes
- capteur d'efforts MSM ——— 100 Tonnes
- capteur de déplacement HBM W1TK
course nominale 2mm
- précision des mesures : effort $\pm 10 \text{ daN}$
déplacement $\pm 0,01 \text{ mm}$
- vitesse de déplacement du poinçon : $0,5 \text{ m /mn}$



- Figure 11 -

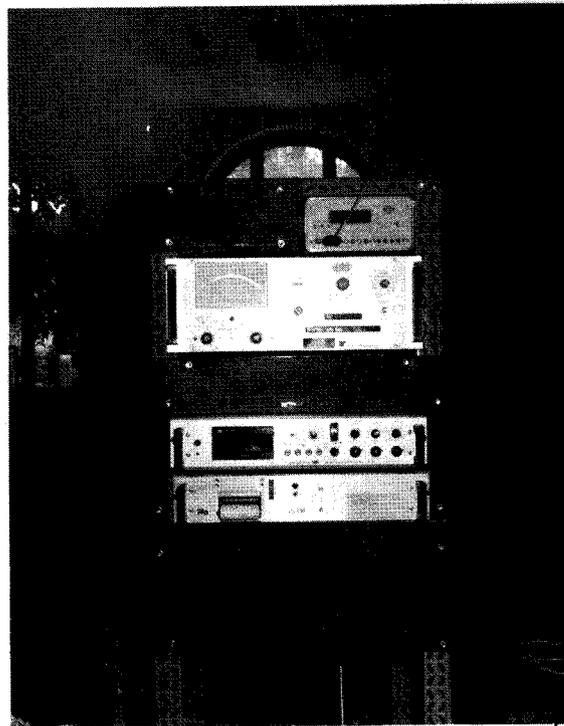
- Outillage de poinçonnage démonté -





- Figure 12 -

- Outillage de poinçonnage sur la presse -



- Figure 13 -

- Centrale de mesure de l'effort
sur poinçon et du déplacement du porte poinçon -

3.2. - Caractérisation du matériau.

L'essai habituel de traction ne permet pas de caractériser les propriétés mécaniques transverses de tôles d'épaisseur faible, susceptibles d'être découpées à froid.

Nous complétons l'essai de traction par un essai de découpage avec un poinçon à fond plat.

. Essai de traction.

L'essai de traction est effectué sur une éprouvette découpée dans la tôle. L'essai est poursuivi jusqu'à la ruine (Tableau 1).

Une identification avec la loi d'écroutissage isotrope $\sigma = \sigma^* \epsilon^n$ conduit aux valeurs suivantes [3] :

$\sigma^* = 67,8 \text{ daN/mm}^2$
$n = 0,21$

. Essai de découpage avec un poinçon à fond plat.

La figure 14 donne les valeurs expérimentales de l'effort sur poinçon pour découper une tôle d'acier doux galvanisé d'épaisseur $e = 1,4 \text{ mm}$ avec poinçon à fond plat de longueur $l = 25 \text{ mm}$ et d'épaisseur $d = 7 \text{ mm}$.

. Le coefficient s d'étendue de la zone plastique (Figure 3) est obtenue par mesure de la zone déformée. Nous retenons ici la valeur suivante :

$$\frac{e}{s} + j = 0,6 \text{ mm}$$

avec un jeu j entre poinçon et matrice

$$j = 0,14 \text{ mm}$$

soit

- 25 -

$$s = 3$$

. Le coefficient de fragilité f est obtenu par mesure de l'enfoncement à la rupture $\frac{e}{f}$. Soit dans le cas de notre produit

$$\frac{e}{f} = 0,7 \text{ mm}$$

soit

$$f = 2$$

. Le coefficient d'écroutissage est pris égal à celui de l'essai de traction.

Soit

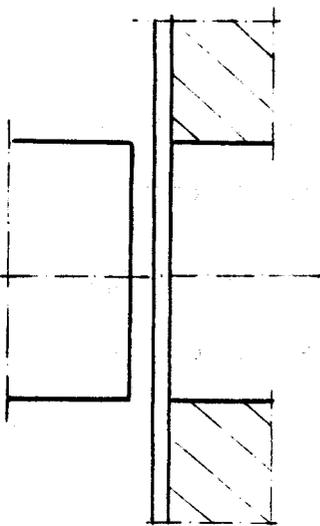
$$n = 0,21$$

N° mesure	Effort de traction daN	Contrainte normale daN/mm ²	Longueur de la base de mesure mm	Allongement rationnel
0	0	0	50	0
1	1025	37,392	53,188	0,0618
2	1067	39,390	53,825	0,0737
3	1090	40,716	54,463	0,0854
4	1108	41,873	55,100	0,0971
5	1118	42,740	55,738	0,1086
6	1128	43,615	56,375	0,1200
7	1133	44,304	57,013	0,1312
8	1140	45,076	57,650	0,1424
9	1145	45,774	58,288	0,1534
10	1150	46,477	58,925	0,1642
11	1151	47,021	59,563	0,1750
12	1152	47,565	60,200	0,1856
13	1153	48,111	60,838	0,1962
14	1154	48,657	61,475	0,2066

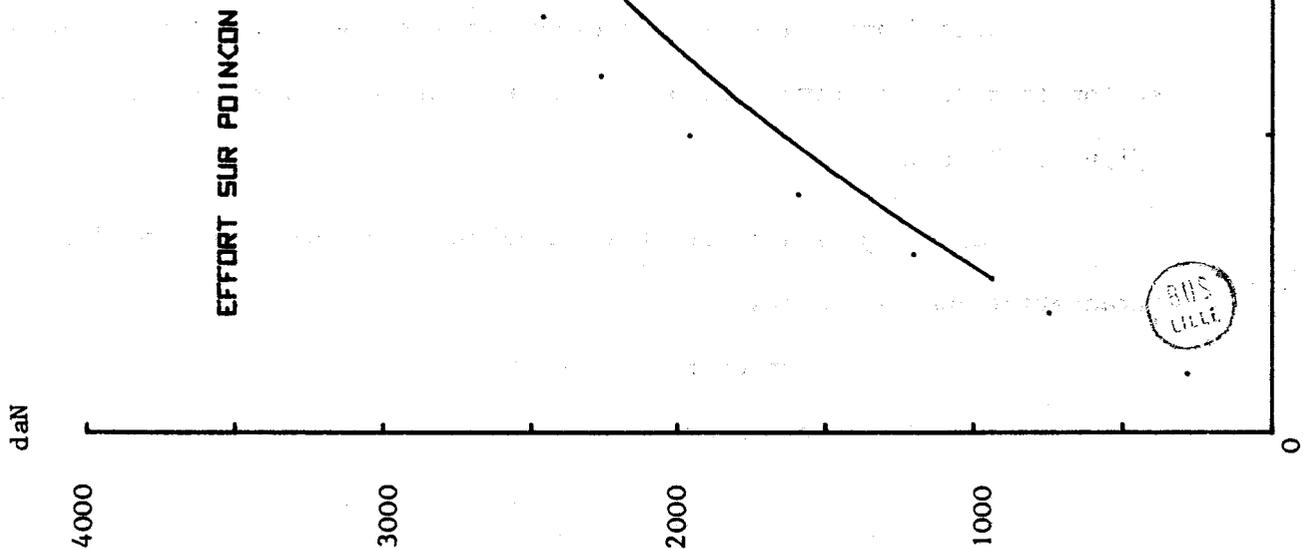
- Tableau 1 -

- Essai de traction de tôle d'épaisseur $e = 1,4$ mm -





- Figure 14 -
- IDENTIFICATION DU MATERIAU -
... résultats expérimentaux
— modèle théorique



ANIS
LILLE

. La valeur du facteur de contraintes σ^* est obtenue par identification entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux.

Le déplacement mesuré est égal à la pénétration réelle p du poinçon dans la tôle augmentée du raccourcissement $t \frac{F h}{E S_p}$ du poinçon et de l'outillage sous l'effet de l'effort F .

$$\begin{aligned} h_p &= 70 \text{ mm} \\ S_p &= 164,48 \text{ mm}^2 \\ E &= 21\,000 \text{ daN/mm}^2 \end{aligned}$$

Les valeurs du facteur de contraintes σ^* et du coefficient de déformation élastique t sont obtenues (Figure 14) en faisant coïncider le maximum de la courbe théorique avec le maximum de la courbe expérimentale soit :

$$\sigma^* = 136 \text{ daN/mm}^2$$

et

$$t = 4,8$$

3.3. - Description des poinçons utilisés.

Nous donnons les valeurs expérimentales de l'effort sur poinçon en fonction du déplacement du plateau supérieur sur lequel est fixé le poinçon (Figures 12 et 13).

Les poinçons sont affûtés à fond plat (Figure 1) et ont les caractéristiques suivantes :

. longueur $\ell = 25 \text{ mm}$

. épaisseur $d = 7 \text{ mm}$.

Les résultats présentés concernent trois types de fond de poinçon :

	Hauteur d'affûtage	Longueur du plat
1er type	H = 1,7 mm	L = 0 mm
2ème type	H = 1,7 mm	L = 5 mm
3ème type	H = 1,7 mm	L = 10 mm

Les figures 15, 16 et 17 donnent l'évolution de l'effort F sur poinçon en fonction du déplacement d du porte-poinçon.



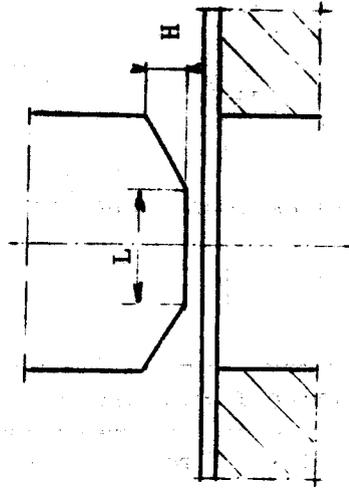
- Figure 15 -

••• résultats expérimentaux

— modèle théorique

ESSAI DE POINÇONNAGE

L → ∅ MM



EFFORT SUR POINÇON

daN

3000

2000

1000

0

DEPLACEMENT POINÇON

2

1

3

mm

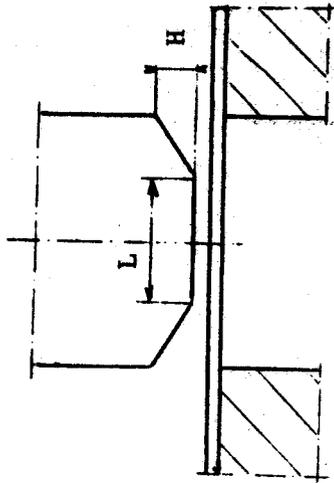
- Figure 16 -

· · · résultats expérimentaux

— modèle théorique

ESSAI DE POINÇONNAGE

L → 5 MM



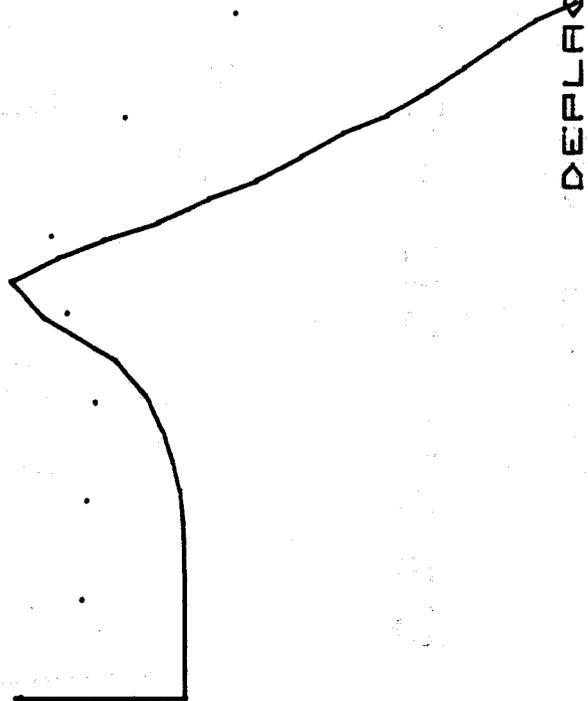
EFFORT SUR POINÇON

daN

3000

2000

1000



DÉPLACEMENT POINÇON

mm

3

2

1



BUS
LILLE

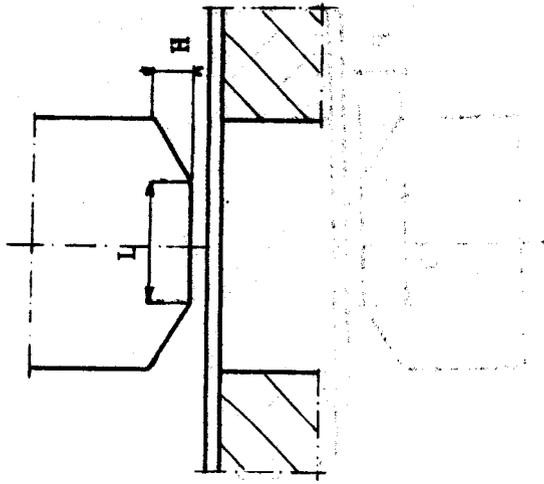
- Figure 17 -

... résultats expérimentaux

— modèle théorique

ESSAI DE POINÇONNAGE

L → 10 MM



EFFORT SUR POINÇON
daN

3000

2000

1000

DEPLACEMENT POINÇON

1

2

3

mm

4 - COMPARAISON ENTRE RESULTATS THEORIQUES ET RESULTATS EXPERIMENTAUX.

Ainsi que le montrent les figures (14), (15), (16) et (17), les prévisions théoriques de l'effort de poinçonnage sont assez voisines des efforts réels.

Dans ces figures, on peut distinguer les trois zones suivantes :

. Une zone de mise en charge dans laquelle l'effort de poinçonnage augmente avec le déplacement du porte-poinçon.

. Une zone de stabilisation dans laquelle la progression de ruptures partielles dans les régions les plus déformées annule l'effet d'accroissement du déplacement ; l'effort sur poinçon reste sensiblement constant.

. Une zone de consolidation dans laquelle l'effort croît de nouveau avec le déplacement jusqu'au contact complet du poinçon et de la tôle.

. Enfin une zone de rupture qui indique la séparation finale de la débouchure et de la tôle.

Le modèle théorique coïncide très bien avec les résultats expérimentaux de la première zone ; il sous-estime les résultats de la seconde zone, surestime la consolidation et sous-estime enfin la rupture.

Compte tenu du bon accord global avec l'expérience, le modèle théorique mis au point dans cette étude peut être utilisé pour optimiser la forme du poinçon pour une opération donnée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] SALANON D. - *Travail des métaux en feuilles*,
Centre Technique des Industries Mécaniques, 1975.
- [2] THOMSEN E., YANG C., KOBAYASHI S. - *Mechanics of plastic deformation in metal processing*,
Mac Millan Editor, 1965.
- [3] GUERLEMENT G., LAMBLIN L., SAVE M., OUDIN J., RAVALARD Y. -
Mise en forme des métaux, calcul des procédés et amélioration des outillages,
Journées d'Etudes, FPMS, 21-22 novembre 1974.
Revue M, Vol. 22, Déc. 1976.

IV

CONTRIBUTION A LA DETERMINATION DES LOIS
DE COMPORTEMENT DES METAUX ET DES CONDITIONS
DE FROTTEMENT DANS LES PROCEDES DE MISE A FORME A FROID.

S O M M A I R E

La contrainte limite d'écoulement des métaux utilisés dans les procédés de mise à forme par déformation est habituellement déterminée par un essai de traction uniaxiale. Les résultats expérimentaux sont ensuite identifiés soit au modèle rigide plastique parfait, soit au modèle plastique écrouissable de forme exponentielle.

L'exploitation des résultats de l'essai de compression d'une éprouvette cylindrique, associés aux résultats d'un essai de compression d'un anneau permet, en tenant compte des effets de frottement entre les plateaux d'essai et l'éprouvette selon le modèle de Coulomb, de déterminer la contrainte limite d'écoulement pour des taux de déformation très supérieurs à ceux de l'essai de traction.

L'identification de la loi de comportement expérimentale du matériau, faite par un modèle plastique écrouissable de forme hyperbolique, est de meilleure qualité que l'identification par modèle exponentiel.

Les deux coefficients du modèle écrouissable hyperbolique sont d'excellents paramètres de caractérisation des propriétés mécaniques des métaux quel que soit le taux de déformation envisagé.

T A B L E D E S M A T I E R E S

	Page
1. INTRODUCTION.	1
2. LE TEST D'ANNEAU.	5
2.1. Objectifs du test d'anneau.	5
2.2. Description physique du test d'anneau.	6
2.3. Modèle 1 : Méthode des tranches.	7
2.3.1. Hypothèses choisies.	7
2.3.2. Equations de base.	8
2.3.3. Etude du système des six équations de base.	11
2.3.4. Solution pour l'écoulement vers l'extérieur.	12
2.3.5. Solution pour l'écoulement vers l'intérieur.	13
2.3.6. Solution complète.	14
2.4. Modèle 2 : Méthode par Borne Supérieure.	16
2.4.1. Théorème de la Borne Supérieure.	16
2.4.2. Hypothèses choisies.	17
2.4.3. Définition d'un champ de vitesses u^* admissible.	17
2.4.4. Calcul de la puissance dissipée.	19
2.5. Comparaison des modèles 1 et 2.	22
3. L'ESSAI DE COMPRESSION.	38
3.1. Introduction.	38
3.2. Equations de base.	38
3.3. Résolution du système de six équations.	40
3.4. Utilisation pour le dépouillement des relevés expérimentaux	41
4. L'ETUDE EXPERIMENTALE.	43
4.1. Procédure d'essai.	43
4.2. Résultats expérimentaux.	43

	Page
5. SYNTHESE DES RESULTATS.	50
5.1. Comparaison des essais de traction et de compression.	50
5.2. Identification par un nouveau modèle de comportement.	50
5.3. Application du modèle plastique écrouissable hyperbolique au test d'anneau.	55
6. CONCLUSION.	62
ANNEXE : IDEALISATIONS CLASSIQUES DU FROTTEMENT.	63

1. - INTRODUCTION.

L'étude des procédés de mise à forme à froid suppose, quels que soient les modèles utilisés, une excellente connaissance des propriétés mécaniques du matériau et des conditions de frottement à l'interface outil-pièce.

Les propriétés mécaniques sont généralement idéalisées par des lois d'écoulement monodimensionnel [6] :

- . comportement Rigide - Parfaitement - Plastique (en abrégé RPP) :

Les déformations n'apparaissent que lorsque la contrainte a atteint un seuil d'écoulement σ_0 (appelé contrainte limite d'écoulement) .

Elle se maintient par la suite à ce niveau.

Ce modèle est très souvent employé par suite de sa simplicité.

Il néglige évidemment l'élasticité et l'écrouissabilité du matériau.

- . comportement Plastique - Ecrouissable (en abrégé PE) :

L'écrouissage est pris en compte sous la forme exponentielle

$$\sigma_0 = A\epsilon^n$$

avec n : coefficient d'écrouissage.

Il n'y a pas de comportement élastique.

- . comportement Rigide - Plastique - Ecrouissable (en abrégé RPE) :

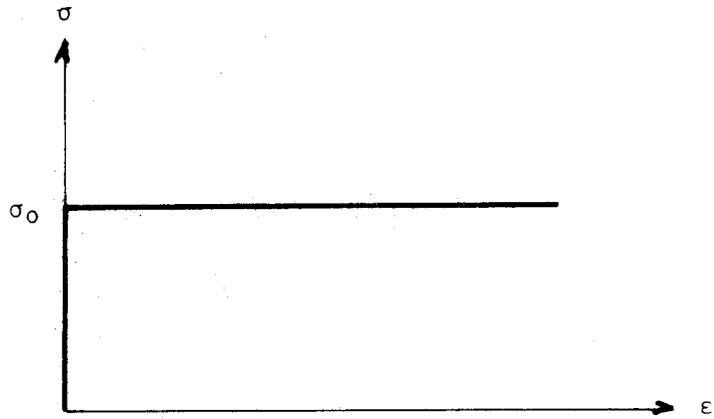
L'écrouissage est pris en compte sous une forme identique à celle du comportement PE . L'état plastique est cependant précédé d'un état rigide.

Pour $\sigma_0 < \sigma_{01}$ $\epsilon = 0$

pour $\sigma_0 > \sigma_{01}$ $\epsilon \neq 0$

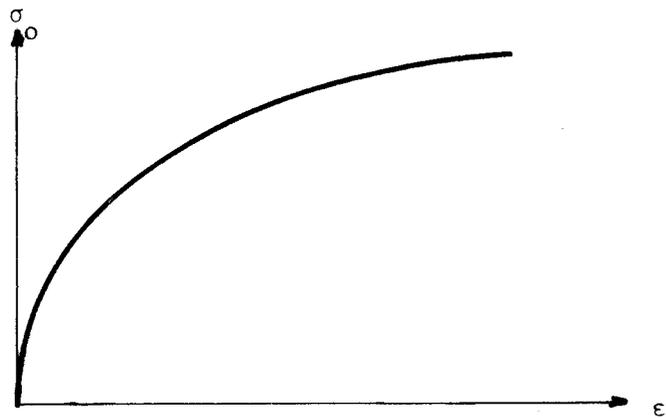
$$\sigma_0 = A(\epsilon + B)^n$$

avec $AB^n = \sigma_{01}$ ou $B = \sqrt[n]{\frac{\sigma_{01}}{A}}$



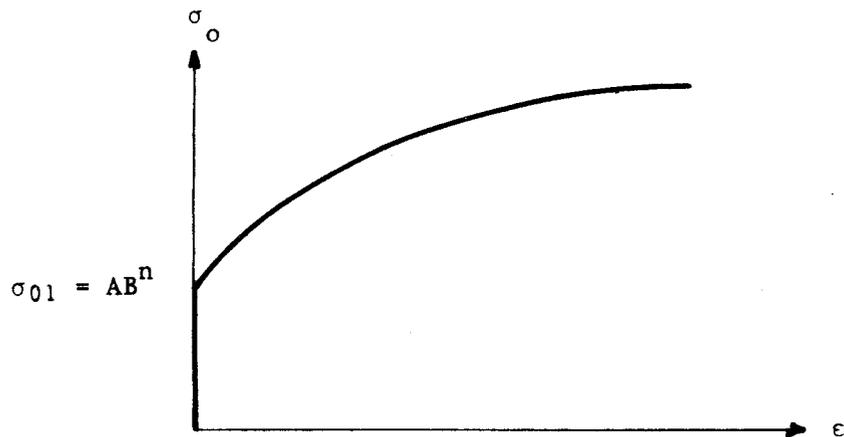
- Figure 1 -

- Loi de comportement en état linéaire de contrainte
du matériau rigide plastique parfait $\sigma = \sigma_0$ -



- Figure 2 -

- Loi de comportement en état linéaire de contrainte
du matériau plastique écrouissable $\sigma_0 = A\epsilon^n$ -



- Figure 3 -

- Loi de comportement en état linéaire de contrainte
du matériau rigide plastique écrouissable $\sigma_0 = A(\epsilon + B)^n$ -



L'identification de ces lois aux caractéristiques réelles du matériau est fréquemment réalisée à partir de l'essai de traction à partir duquel sont déduites les valeurs des paramètres σ_{01} , A et n. Cet essai est simple, réalisable avec des moyens de mesure limités et répétitif. Mais il ne permet pas de dépasser des déformations ϵ de l'ordre de 0,2.

Les déformations dans les procédés de transformation atteignent fréquemment des valeurs supérieures à 0,5. Il est donc nécessaire de disposer d'un essai qui permettent d'atteindre ces valeurs.

Des déformations de 0,6 ont pu être obtenues avec un essai de traction en plusieurs étapes [4]; une étape de mesure se termine lorsqu'apparaît une striction; l'éprouvette est réusinée à une cote plus faible et la mesure poursuivie jusqu'à l'apparition d'une nouvelle striction. Cet essai est coûteux, long et sujet à une certaine dispersion.

L'essai de compression permet d'atteindre des déformations plus importantes; il est réalisable avec des moyens de mesure limités; il est également répétitif. Cependant les déformations obtenues ne sont pas homogènes à cause du frottement entre le matériau et les tas de compression [2] [3]. Des dispositions expérimentales difficiles à mettre en oeuvre ont permis la réalisation de quelques essais avec un frottement très faible [10] [12] [13].

Dans l'essai de compression d'une éprouvette cylindrique entre deux tas lisses, le frottement reste modéré et son influence peut être prise en compte par des modèles théoriques tels que la méthode des tranches avec frottement de COULOMB [8] d'une part, et la méthode par champs de vitesse licites avec frottement de COULOMB [14] ou avec un coefficient de frottement variable d'un point à un autre et d'une étape de chargement à l'autre d'autre part [15]. Dans ce dernier cas, des méthodes de calcul variationnel associées soit à des mesures de pression à l'interface matériau-tas de compression [15] soit à des mesures de déplacements [16] ont été utilisés pour des taux de réduction inférieurs à 30 %.

La méthode des tranches [8] fournit plus rapidement une estimation de l'état de contraintes en chaque point et permet d'accéder à la loi de comportement si l'on connaît la valeur du coefficient de frottement. Toutefois, cette méthode néglige la déformation non uniforme.

Un coefficient de frottement moyen au sens de COULOMB (cf. Annexe) peut être obtenu par le test d'anneau qui présente l'avantage d'être peu différent de l'essai de compression [2]. Ce test permet de plus, si l'on a pris soin d'enregistrer la courbe charge-taux de déformation, la vérification de la loi de comportement déduite de l'essai de compression.

La méthode proposée nécessite donc deux modèles théoriques : le premier concernant l'essai de compression reprend celui de SIEBEL, le second concernant le test d'anneau a été étudié par différents auteurs mais les hypothèses utilisées les rendent mal adaptés à la détermination des lois de comportement des métaux utilisés en mise à forme à froid.

Nous nous proposons :

- de définir un modèle du test d'anneau avec la loi de frottement de COULOMB permettant la vérification de la loi de comportement du matériau obtenue à partir de l'essai de traction d'une part, la mesure du coefficient de frottement moyen d'autre part;
- de systématiser la démarche expérimentale (taille des éprouvettes, procédure d'essai);
- de mettre au point la méthode sur différents matériaux.

2. - LE TEST D'ANNEAU.

2.1. - Objectifs du test d'anneau.

Pour éliminer l'influence du frottement au contact des outils lors d'un essai de compression et déterminer de cette façon une loi de comportement aussi proche que possible de la réalité physique, il est indispensable de procéder à une mesure du frottement.

Ceci peut être fait de différentes façons, notamment en utilisant comme test certaines opérations de mise à forme dont un paramètre soit caractéristique du frottement à l'interface.

L'évolution du diamètre intérieur d'un anneau au cours de sa compression est particulièrement reliée au frottement. Sous réserve que les conditions de similitude entre le test d'anneau et l'essai de compression soient respectées, le frottement est identique. La valeur déduite du premier peut donc être utilisée pour analyser les résultats du second.

La mesure du frottement nécessite la formulation d'un modèle théorique du test d'anneau utilisant le modèle de COULOMB.

Deux méthodes peuvent être utilisées pour cela : la méthode des tranches et la méthode de borne supérieure.

HAWKYARD et JOHNSON [2] ont utilisé la première avec un frottement de couche et un critère de plasticité de MISES pour un matériau RPP.

AVITZUR [1] a utilisé la seconde avec les mêmes hypothèses.

Ces modèles ne sont pas conformes avec nos objectifs. Nous les avons donc reformulés pour un frottement de COULOMB et un matériau écrouissable.

2.2. - Description physique du test d'anneau.

Lorsque l'on comprime un anneau cylindrique entre deux plateaux de presse, il se produit un écoulement, conséquence de la réduction de l'épaisseur de l'anneau, qui modifie les rayons intérieur et extérieur de l'anneau. Leur valeur finale (et même leur forme puisqu'il peut y avoir "barrelling", c'est-à-dire déformation en 'tonneau' des faces latérales) dépendent du frottement à l'interface anneau-plateau.

- . Lorsqu'il est nul, l'anneau se déforme de la même façon qu'un cylindre plein. Les rayons intérieur et extérieur augmentent proportionnellement à leur dimension initiale. L'ensemble de l'écoulement se produit alors vers l'extérieur de l'anneau.
- . Lorsqu'il est modéré, les rayons intérieur et extérieur n'augmentent plus proportionnellement. Le frottement freine l'écoulement vers l'extérieur.
- . Lorsqu'il est important, l'écoulement peut se diviser en deux flux, l'un orienté vers l'extérieur (le rayon extérieur augmente donc mais plus lentement que pour un frottement nul) , l'autre vers l'intérieur de l'anneau (le rayon intérieur diminue) .

Il apparaît donc que le rayon intérieur d'un anneau soumis à un essai de compression est très sensible au frottement à l'interface. Pour interpréter l'essai, il faut néanmoins disposer d'un modèle théorique reliant frottement et évolution du rayon intérieur.

2.3. - Modèle 1 : méthode des tranches.

La méthode des tranches est basée sur l'expression des équations d'équilibre de tranches (de secteurs cylindriques dans les procédés axisymétriques) d'épaisseur infiniment petite.

Les hypothèses de la méthode sont les suivantes :

- . Les directions principales sont confondues avec les axes géométriques de la pièce .
- . Les contraintes principales sont constantes sur une face d'une tranche (ou d'un secteur cylindrique) .
- . Le frottement est pris en compte sur l'interface outil-pièce. Il est obligatoirement dirigé suivant l'axe principal d'écoulement ; il est constant sur une face.

Cette méthode donne d'excellents résultats, lorsque les hypothèses simplificatrices utilisées ne sont pas trop éloignées des conditions physiques. C'est le cas pour la compression d'anneau où les directions principales sont proches des directions géométriques et le frottement faible.

2.3.1. - Hypothèses choisies.

- . Nous prenons le modèle de frottement de COULOMB (Annexe) .

Les valeurs de pression normale p n'excédant jamais 2 à $3\sigma_0$ dans les essais classiques, pour des valeurs de μ généralement inférieures à 0,2 (dans le cadre des conditions de similitude avec l'essai de compression) . L'action tangentielle due au frottement μp est inférieure à 0,5 - 0,6 σ_0 , ou à peu de choses près $\mu p < k$. Nous supposons donc que la contrainte due au frottement est toujours inférieure à k (contrainte limite de cisaillement) et répond uniquement à la relation:

$$\tau = \mu p .$$

- . Le matériau est écrouissable. Malgré les distorsions provoquées par le frottement, nous supposons que les déformations sont assez homogènes dans l'anneau pour pouvoir appliquer un taux d'écrouissage uniforme et donc une contrainte limite d'écoulement uniforme. Cette hypothèse simplificatrice est justifiée par suite des faibles valeurs du frottement.
- . Le matériau est incompressible.
- . Les déformations élastiques sont négligées.
- . Le "barelling" des faces latérales de l'anneau n'est pas pris en compte par le modèle. (Hypothèse cohérente avec celle de l'uniformité des déformations due aux faibles valeurs du coefficient de frottement μ .)

2.3.2. - Equations de base.

La définition des dimensions géométriques et des axes principaux est donnée à la figure 4.

Exprimons l'équilibre d'un secteur cylindrique (Figure 5) . Par projection sur un rayon, il vient :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{2\tau}{l} = 0 \quad (1)$$

Le critère de plasticité retenu est celui de TRESCA, plus simple que celui de MISES. Avec $\sigma_r > \sigma_\theta > \sigma_z$, il s'exprime par :

$$\sigma_r - \sigma_z = \sigma_0 \quad (2)$$

Le frottement de COULOMB se traduit par une contrainte tangentielle τ (Annexe) :

$$\tau = \pm \mu \sigma_z \quad (3)$$

en prenant la détermination $+\mu\sigma_z$ lorsque l'écoulement est dirigé vers l'extérieur et la détermination $-\mu\sigma_z$ lorsqu'il est orienté vers l'intérieur.

Nous utilisons les relations contraintes-vitesses de déformation de LEVY-MISES. Le principe de normalité du vecteur-vitesse de déformation à la surface limite n'est donc pas strictement vérifié, par contre cette hypothèse de travail permet d'associer à la simplicité du critère de TRESCA des déformations significatives.

$$\frac{s_r}{\dot{\epsilon}_r} = \frac{s_\theta}{\dot{\epsilon}_\theta} = \frac{s_z}{\dot{\epsilon}_z} \quad (4)$$

avec s_i $i = r, \theta, z$ contraintes déviatoriques principales
 $\dot{\epsilon}_i$ $i = r, \theta, z$ composantes principales du tenseur de vitesse de déformation

L'homogénéité des déformations dans un secteur se traduit par la relation :

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

or $V_z = 0$ pour $z = 0$.

Posons $V_z = -1$ pour $z = \ell$ (Le plateau inférieur est supposé fixe, le plateau supérieur est donc animé d'une vitesse unitaire). Si la variation de vitesse est linéaire dans l'anneau, alors :

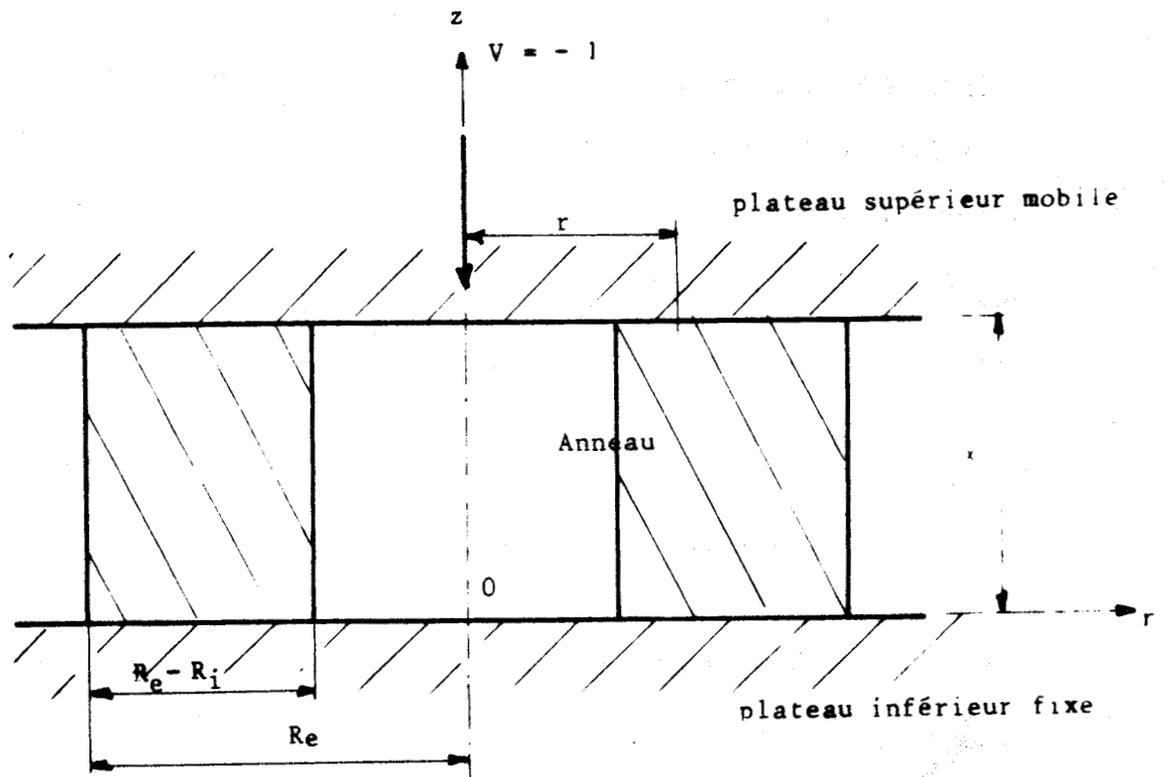
$$V_z = -\frac{z}{\ell} \quad (0 \leq z \leq \ell)$$

soit :

$$\dot{\epsilon}_z = -\frac{1}{\ell} \quad (5)$$

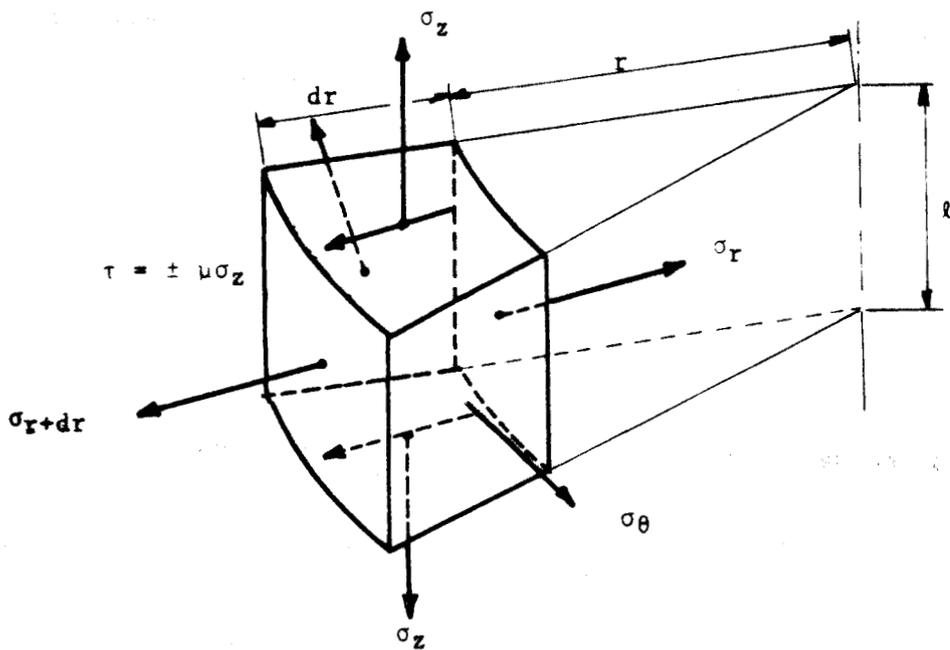
L'incompressibilité nous conduit à la condition :

$$\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_z = 0 \quad (6)$$



- Figure 4 -

- Compression d'un anneau entre deux plateaux -



- Figure 5 -

- Etat de contraintes sur un élément de volume d'un anneau cylindrique -



2.3.3. - Etude du système des six équations de base.

D'après (1), (2) et (3), il vient :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \pm \frac{2\mu}{\ell} (\sigma_r - \sigma_0) = 0$$

ou

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r \left(\frac{1}{r} \pm \frac{2\mu}{\ell} \right) = \frac{\sigma_\theta}{r} \pm \frac{2\mu\sigma_0}{\ell} \quad (7)$$

D'après (5), (6) et les propriétés de l'écoulement axisymétrique ($\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial V_r}{\partial r}$, $\dot{\epsilon}_\theta = \frac{V_r}{r}$), il vient :

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} = \frac{1}{\ell}$$

après intégration par variation de la constante, il vient :

$$V_r = \frac{r^2 - c^2}{2\ell r} \quad (8)$$

c étant une constante dépendant des conditions aux limites.

Lorsque le frottement est nul, $V_r = 0$ pour $r = 0$ (analogie avec la compression de cylindre). Soit $c = 0$; donc $V_r = \frac{r}{2\ell}$; le champ de vitesses est linéairement croissant.

Lorsque le frottement est non-nul, nous avons :

$$V_r = \frac{r}{2\ell} - \frac{c^2}{2\ell r}$$

La vitesse est freinée par le frottement. Il n'y a plus linéarité.

D'après (8) :

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{r^2 + c^2}{2\ell r^2} \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{r^2 - c^2}{2\ell r^2} \quad \dot{\epsilon}_z = -\frac{1}{\ell} \quad (9)$$

D'après (9) et (4) :

$$\frac{\sigma_r + p}{\frac{1}{2\ell} + \frac{c^2}{2\ell r^2}} = \frac{\sigma_\theta + p}{\frac{1}{2\ell} - \frac{c^2}{2\ell r^2}} = \frac{\sigma_z + p}{-\frac{1}{\ell}}$$

avec

$$p = - \frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z}{3}$$

Après élimination de p à l'aide de (2) :

$$p = \sigma_0 \frac{r^2 + c^2}{3r^2 + c^2} - \sigma_r$$

D'où la solution pour σ_θ :

$$\sigma_\theta = \sigma_r - \frac{2c^2}{3r^2 + c^2} \sigma_0 \quad (10)$$

Avec (10) et (7), on extrait l'équation différentielle en σ_r :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\mu}{l} \sigma_r = - \sigma_0 \left[\frac{2c^2}{r(3r^2 + c^2)} + \frac{2\mu}{l} \right] \quad (11)$$

L'intégration de (11) fournit une solution fonction de c qui sera alors déterminée par les conditions aux limites (pour $r = R_i$ ou R_e) $\sigma_r = 0$; σ_r identique à la frontière séparant les écoulements vers l'extérieur et vers l'intérieur) .

2.3.4. - Solution pour l'écoulement vers l'extérieur.

Dans ce cas $\tau = \mu\sigma_z$ (σ_z étant une contrainte de compression ; τ est effectivement dirigé vers l'axe et freine l'écoulement) .

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\mu}{l} \sigma_r = - \sigma_0 \left[\frac{2c^2}{r(3r^2 + c^2)} - \frac{2\mu}{l} \right] \quad (11')$$

La solution de l'équation sans second membre est :

$$\sigma_r = \frac{e^{-\frac{2\mu}{l} r}}{K_1} \quad (12')$$

K_1 est une constante d'intégration.

La solution de l'équation différentielle avec second membre (par variation de la constante K_1) (11') s'écrit :

$$-\frac{dK_1}{K_1^2} = -2\sigma_0 \left[\frac{c^2}{r(3r^2 + c^2)} - \frac{\mu}{l} \right] e^{\frac{2\mu}{l} r} dr$$

L'intégration nous permet de déterminer K_1 à une constante α près :

$$\frac{1}{K_1} = -2\sigma_0 \left[\int \left\{ \frac{1}{r} - \frac{3r}{3r^2 + c^2} - \frac{\mu}{l} \right\} e^{\frac{2\mu}{l} r} dr + \alpha \right]$$

Pour $r = R_e$, $\sigma_r = 0$; d'où :

$$\frac{1}{K_1} = -2\sigma_0 \int_{R_e}^r \left[\frac{1}{r} - \frac{3r}{3r^2 + c^2} - \frac{\mu}{l} \right] e^{\frac{2\mu}{l} r} dr$$

et σ_r :

$$\sigma_r = -2\sigma_0 e^{-\frac{2\mu}{l} r} \int_{R_e}^r \left[\frac{1}{r} - \frac{3r}{3r^2 + c^2} - \frac{\mu}{l} \right] e^{\frac{2\mu}{l} r} dr \quad (13')$$

2.3.5. Solution pour l'écoulement vers l'intérieur.

Nous avons dans ce cas :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{2\mu}{l} \sigma_r = -2\sigma_0 \left[\frac{c^2}{r(3r^2 + c^2)} + \frac{\mu}{l} \right] \quad (11'')$$

La solution de l'équation différentielle sans second membre :

$$\sigma_r = \frac{e^{\frac{2\mu}{l} r}}{K_2} \quad (12'')$$

avec K_2 constante d'intégration.

La solution avec second membre a pour valeur :

$$-\frac{dK_2}{K_2^2} = -2\sigma_0 \left[\frac{c^2}{r(3r^2 + c^2)} + \frac{\mu}{l} \right] e^{-\frac{2\mu}{l} r} dr$$

$$\frac{1}{K_2} = - 2\sigma_0 \left[\int \left\{ \frac{1}{r} - \frac{3r}{3r^2 + c^2} + \frac{\mu}{l} \right\} e^{-\frac{2\mu}{l} r} dr + \beta \right]$$

avec β constante d'intégration.

Pour $r = R_i$, $\sigma_r = 0$, soit :

$$\frac{1}{K_2} = - 2\sigma_0 \left[\int_{R_i}^r \left\{ \frac{1}{r} - \frac{3r}{3r^2 + c^2} + \frac{\mu}{l} \right\} e^{-\frac{2\mu}{l} r} dr \right]$$

Finalement :

$$\sigma_r = - 2\sigma_0 e^{\frac{2\mu}{l} r} \int_{R_i}^r \left\{ \frac{1}{r} - \frac{3r}{3r^2 + c^2} + \frac{\mu}{l} \right\} e^{-\frac{2\mu}{l} r} dr \quad (13'')$$

2.3.6. Solution complète.

Les données, à un instant t , sont le frottement μ , la contrainte d'écoulement σ_0 , la géométrie de l'anneau (l, R_e, R_i).

Si l'écoulement est entièrement dirigé vers l'extérieur (rayon intérieur R_i croissant), le système est entièrement défini par l'équation (13') et la condition $\sigma_r = 0$ pour $r = R_i$. c est alors définie par :

$$\int_{R_e}^{R_i} \left(\frac{1}{r} - \frac{3r}{3r^2 + c^2} \right) e^{\frac{2\mu}{l} r} dr = \frac{e^{\frac{2\mu}{l} R_i} - e^{\frac{2\mu}{l} R_e}}{2} \quad (14')$$

Si l'écoulement est divisé en deux flux, l'un orienté vers l'extérieur, l'autre vers l'intérieur, alors, au raccordement des deux flux, que nous appellerons le rayon neutre r_n , deux conditions doivent être satisfaites :

$$\text{pour } r = r_n \quad V_r = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_r \text{ (13')} \equiv \sigma_r \text{ (13'')}$$

(condition de raccordement des deux équations traduisant l'équilibre suivant les deux flux) .

D'après (8) :

$$V_r = \frac{r_n^2 - c^2}{2\ell r_n} = 0 \quad \text{soit} \quad r_n = \pm c$$

r_n étant une grandeur géométrique doit être positif. Le signe de c est sans importance puisqu'il n'intervient dans (13') et (13'') que sous la forme c^2 . Pour simplifier, posons $r_n \equiv c$. D'où la deuxième condition qui permet de déterminer r_n :

$$\begin{aligned} \sigma_r (13') &\equiv \sigma_r (13'') \\ e^{-\frac{2\mu}{\ell} r_n} \int_{R_e}^{r_n} \left(\frac{1}{r} - \frac{3r}{3r^2 + r_n^2} \right) e^{\frac{2\mu}{\ell} r} dr + \\ + e^{\frac{2\mu}{\ell} r_n} \int_{r_n}^{R_i} \left(\frac{1}{r} - \frac{3r}{3r^2 + r_n^2} \right) e^{-\frac{2\mu}{\ell} r} dr &= \frac{e^{\frac{2\mu}{\ell}(r_n - R_e)} - e^{\frac{2\mu}{\ell}(R_i - r_n)}}{2} \end{aligned} \quad (14'')$$

Les solutions pour σ_r étant calculées, on peut en déduire l'effort de forgeage de l'anneau F :

$$F = \int_{R_i}^{R_e} \sigma_z \cdot 2\pi r dr = 2\pi \int_{R_i}^{R_e} (\sigma_r - \sigma_o) r dr \quad (15)$$

Or σ_o est relié à la déformation $\bar{\epsilon}$ par une loi du type $\sigma_o = f(\bar{\epsilon})$.
 Suivant les hypothèses du paragraphe (2.3.1.), $\bar{\epsilon}$ est uniforme pour tout l'anneau. Plutôt que de prendre une moyenne des déformations ϵ_r , ϵ_θ , ϵ_z rencontrées (9), nous supposons (pour le calcul de l'écroutissage seulement) que la déformation moyenne $\bar{\epsilon}$ est la même que celle que l'on aurait sans frottement :

$$\bar{\epsilon} = \int_{\ell_0}^{\ell} \frac{d\ell}{\ell} = L_n \frac{\ell}{\ell_0} \quad (16)$$

(ℓ_0 : épaisseur initiale de l'anneau)

Le traitement des équations (13')-(14'), (13'')-(14''), (15) et (16) est réalisable en utilisant des procédures d'intégrations numériques. Les programmes correspondants ont été écrits en FORTRAN 4 et les résultats obtenus sont présentés aux tableaux 1 à 12.

2.4. - Modèle 2 : méthode par borne supérieure.

Cette méthode permet d'obtenir une évaluation par excès de la puissance des efforts moteurs mis en oeuvre au cours du procédé de formage. Elle repose sur le théorème de la borne supérieure.

2.4.1. - Théorème de la borne supérieure.

Soit un matériau plastique parfait isotrope, de volume V , délimité par une surface S . Les contraintes T^d ou les vitesses u^d sont définies sur les surfaces S_T et S_u .

Soit \vec{u}^* un champ de vitesses plastiquement et cinématiquement admissible et $\dot{\vec{\epsilon}}^*$ la vitesse de déformation généralisée correspondant à ce champ ; la quantité $G(u^*)$:

$$G(u^*) = \iiint_V \sigma_0 \dot{\vec{\epsilon}}^* dV - \iint_{S_T} \vec{T}^d \cdot \vec{u}^* dS_T \quad (17)$$

est minimale pour un champ de vitesses \vec{u} solution du problème.

Soit :

$$G(u^*) \geq \iint_{S_u} \vec{T} \cdot \vec{u}^d dS_u$$

Dans le cas de l'essai d'anneau S_u est définie par les deux interfaces de contact avec l'outillage ($\vec{u}^d = -1$ pour la face supérieure, 0 pour la face inférieure), S_T par les surfaces cylindriques intérieure et extérieure ($\vec{T}^d = 0$, surface libre).

La loi de comportement retenue ne prend en compte que l'écrasement moyen (paragraphe 2.3.1.). Le corps peut donc être considéré rigide plastique parfait pour une étape de chargement.

Avec les conditions de frottement de COULOMB, $G(u^*)$ ne peut être qualifiée de borne supérieure [9]. Cependant, les puissances dissipées obtenues dans ces conditions conduisent à des valeurs légèrement supérieures à nos résultats expérimentaux.

2.4.2. Hypothèses.

Elles sont identiques à celles définies au paragraphe (2.4.1.) pour la méthode des tranches.

2.4.3. Définition d'un champ de vitesses u^* admissible.

Différents types de champs applicables aux problèmes à symétrie de révolution ont été proposés par KUDO (champs continus ou à discontinuités rectilignes) [7] et KOBAYASHI [5] (champs à discontinuités courbes) . Bien que les derniers soient plus précis, nous avons retenu le champ continu de KUDO qui est le plus simple. Il a déjà été utilisé fréquemment et donne de bons résultats pour une complication des calculs acceptable. Certains auteurs l'ont employé pour le test de l'anneau [1] dans le cas d'un frottement de couche ; jamais, à notre connaissance, pour celui de COULOMB.

Dans le cas général deux champs seront à définir. L'un orienté vers l'extérieur, l'autre vers l'intérieur n'a d'existence physique que lorsque le rayon neutre r_n est compris entre R_i et R_e (Figure 6 et 7).

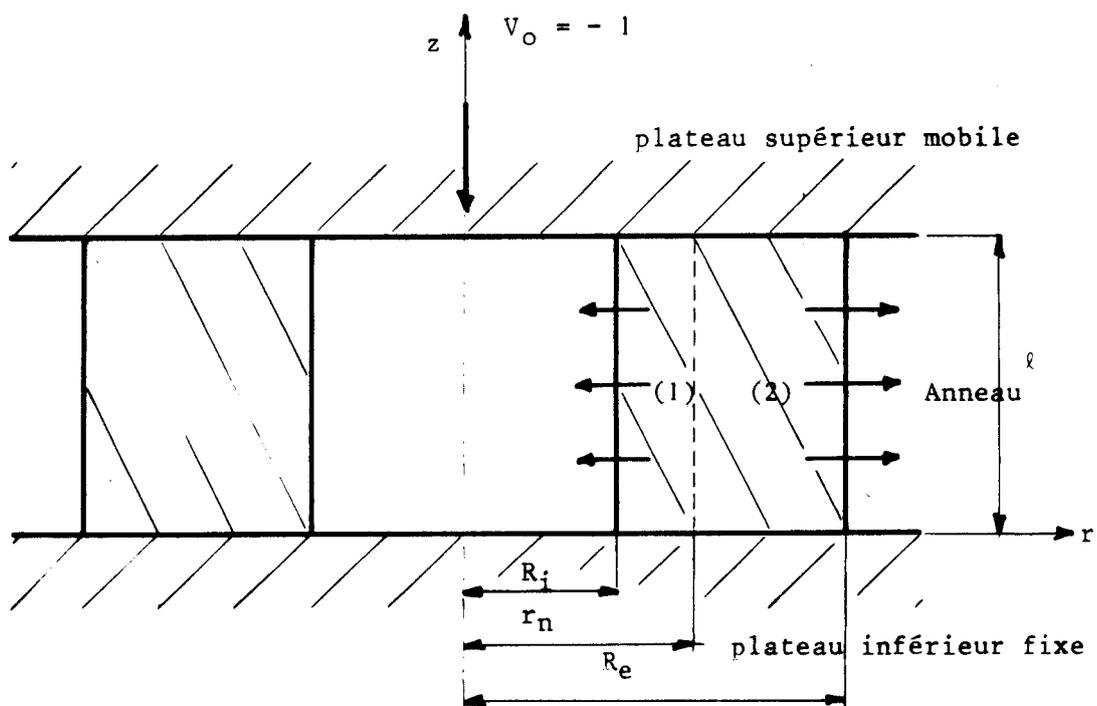
Le champ continu de KUDO suppose que les déformations verticales sont homogènes. Nous retrouvons alors les résultats obtenus en (8) :

$$V_z = -\frac{z}{\ell}$$

(pour $z = \ell$, $V_z = -1$; $z = 0$, $V_z = 0$)

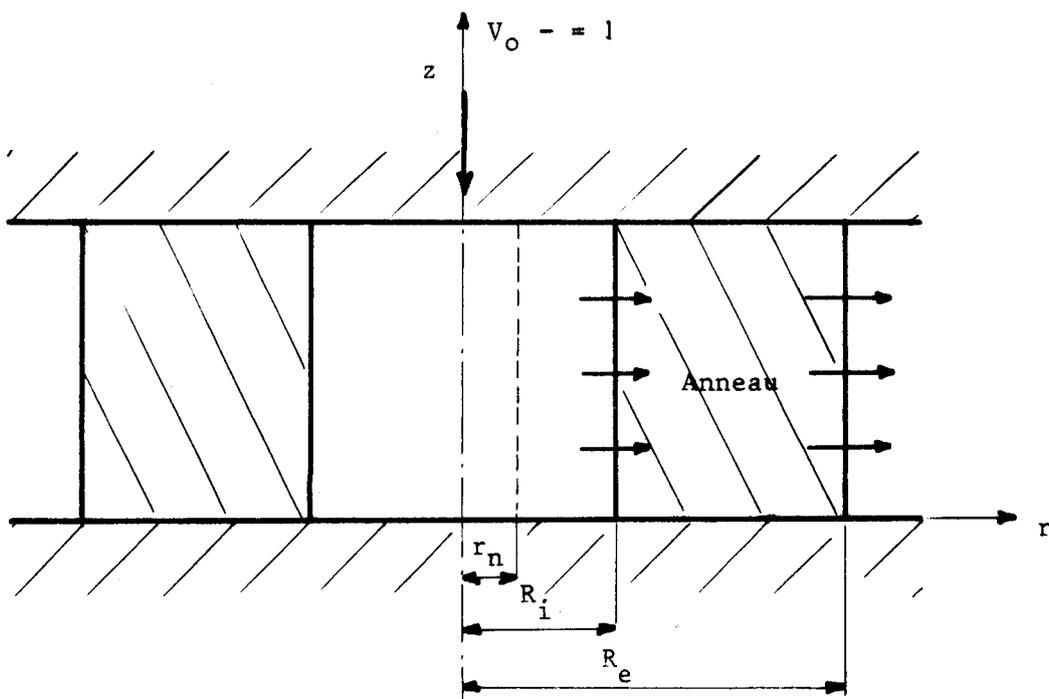
$$V_\theta = 0 \quad V_r = \frac{r^2 - r_n^2}{2\ell r} \quad (18)$$

($V_r = 0$ pour $r = r_n$, ce qui n'a de sens physique que pour $r_n \geq R_i$) .



- Figure 6 -

- Compression d'un anneau entre deux plateaux : écoulement mixte intérieur-extérieur -



- Figure 7 -

- Compression d'un anneau entre deux plateaux :
écoulement unilatéral vers l'extérieur -



Ces expressions vérifient toutes les conditions cinématiques et la condition d'incompressibilité. Ce champ de vitesses est donc cinématiquement et plastiquement admissible. Utilisant le théorème de borne supérieure, nous pouvons calculer une évaluation par excès de la puissance dissipée dépendant du rayon neutre r_n inconnu. Le meilleur champ de vitesses, donc la meilleure solution pour r_n , conduira à la prévision la plus faible. Bien que le théorème de la borne supérieure ne garantisse pas que l'écoulement théorique optimal soit proche de l'écoulement réel, il en est souvent ainsi. La valeur optimale pour r_n a ainsi toute chance d'être proche des résultats expérimentaux.

2.4.4. Calcul de la puissance dissipée.

D'après (17), il vient :

$$\dot{W} \leq \dot{W}_i^{**} + \dot{W}_f^{**}$$

avec \dot{W} puissance des efforts moteurs égale à $-F$ (vitesse du plateau supérieur $V_0 = -1$, F effort de compression) .

\dot{W}_i^{**} puissance dissipée dans l'écoulement plastique

\dot{W}_f^{**} puissance dissipée aux interfaces outil-anneau

Soit :

$$F \leq -(\dot{W}_i + \dot{W}_f) = F^{**} \quad (18)$$

(F^{**} effort de compression évalué par excès)

L'évaluation de \dot{W}_f^{**} est complexe dans le cas du frottement de COULOMB car la contrainte normale à l'interface est inconnue. KUDO [7] propose la technique suivante : soit μ le coefficient de frottement de COULOMB ; si la contrainte normale à l'interface est uniforme et égale à $-K\sigma_0$, alors $\tau = \pm \mu K\sigma_0$ (avec τ contrainte tangentielle de frottement) et $F^{**} = +K\sigma_0 S$ (avec F^{**} force de compression et S surface de l'interface) .

Il suffit de rechercher par itérations successives la valeur de K qui permettra de respecter les deux équations définissant F^* .

a) Calcul de \dot{W}_i^*

$$\dot{W}_i^* = \sigma_0 \int_V \dot{\epsilon}^* dV$$

Cette définition de \dot{W}_i^* implique l'utilisation du critère de plasticité de MISES.

Ici :

$$\dot{\epsilon}^* = \pm \sqrt{\frac{2}{3} (\epsilon_r^{*2} + \epsilon_z^{*2} + \epsilon_\theta^{*2})}$$

avec

$$\dot{\epsilon}_r^* = \frac{r^2 + r_n^2}{2lr^2} \quad \dot{\epsilon}_\theta^* = \frac{r^2 - r_n^2}{2lr^2} \quad \dot{\epsilon}_z^* = -\frac{1}{l}$$

Soit :

$$\dot{\epsilon}^* = \frac{1}{l} \sqrt{1 + \frac{r_n^4}{3r^4}} \quad (19)$$

$$\dot{W}_i^* = \sigma_0 \int_0^l dz \int_{R_i}^{R_e} \dot{\epsilon}^* \cdot 2\pi r dr$$

soit, avec (19) :

$$\dot{W}_i^* = + \frac{2\pi\sigma_0}{l} \int_0^l dz \int_{R_i}^{R_e} \sqrt{1 + \frac{r_n^4}{3r^4}} \cdot r dr$$

L'intégration en z est immédiate. Pour r , posons $r^4 + \frac{r_n^4}{3} = t^2$,
il vient :

$$\dot{W}_i^* = + \pi\sigma_0 \int \frac{\sqrt{R_e^4 + \frac{r_n^4}{3}}}{\sqrt{R_i^4 + \frac{r_n^4}{3}}} \frac{t^2 dt}{t^2 - r_n^4/3}$$

$$\dot{W}_i^* = + \pi\sigma_0 \left[t + \frac{r_n^2}{2\sqrt{3}} \operatorname{Ln} \frac{\sqrt{3t} - r_n^2}{\sqrt{3t} + r_n^2} \right] \frac{\sqrt{R_e^4 + \frac{r_n^4}{3}}}{\sqrt{R_i^4 + \frac{r_n^4}{3}}} \quad (20)$$

b) Calcul de \dot{W}_f^{**} .

La puissance dissipée à l'interface est déterminée par :

$$\dot{W}_f^{**} = + \mu K \sigma_0 \int_{S_i} |\vec{V}| dS_i$$

avec \vec{V} = secteur vitesse à l'interface

S_i = surface de l'interface

Avec

$$|\vec{V}| = |V_r| = \left[\frac{r^2 - r_n^2}{2\ell r} \right]$$

il vient :

$$\dot{W}_f^{**} = 4\pi\tau \int_{R_i}^{R_e} \left[\frac{r^2 - r_n^2}{2\ell r} \right] r dr$$

avec $\tau = \mu K \sigma_0$.

Si $r_n > R_i$, le rayon neutre est supérieur au rayon intérieur de l'anneau, la puissance dissipée par frottement est :

$$\begin{aligned} \dot{W}_f^{**} &= \frac{2\pi\tau}{\ell} \left[\int_{r_n}^{R_e} (r^2 - r_n^2) dr + \int_{R_i}^{r_n} (r_n^2 - r^2) dr \right] \\ \dot{W}_f^{**} &= \frac{2\pi\tau}{3\ell} \left[R_e^3 + R_i^3 - 3r_n^2(R_e + R_i) + 4r_n^3 \right] \end{aligned} \quad (21')$$

Si $r_n < R_i$, la puissance dissipée par frottement vaut :

$$\begin{aligned} \dot{W}_f^{**} &= \frac{2\pi\tau}{\ell} \int_{R_i}^{R_e} (r^2 - r_n^2) dr \\ \dot{W}_f^{**} &= \frac{2\pi\tau}{3\ell} \left[R_e^3 - R_i^3 - 3r_n^2(R_e - R_i) \right] \end{aligned} \quad (21'')$$

c) Analyse de la solution.

Les équations (20) et (21) permettent de définir $F^{**}(K, r_n)$.

Le meilleur choix pour r_n s'exprime par la condition :

$$\frac{\partial F^{**}}{\partial r_n} = 0$$

Par ailleurs, K devra être tel que $F^{**} = K\sigma_0 S_i$.

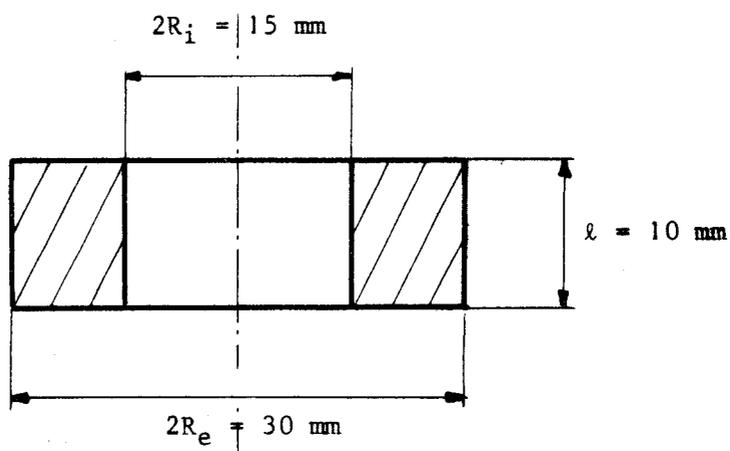
L'évaluation de σ_0 est réalisée selon la même technique que celle définie en (2.3.6.) .

Le calcul de l'effort F^{**} , par optimisation du rayon neutre r_n et itérations avec le paramètre K , a été réalisé par programmes écrits en FORTRAN 4.

2.5. - Comparaison des modèles 1 et 2.

Les modèles définis en (2.3.) et (2.4.) ont été exploités sur ordinateur pour l'éprouvette-type représentée à la figure 8. Ses dimensions ont été choisies pour tenir compte de la capacité nominale de la presse d'essai (100 Tonnes) et pour obtenir une sensibilité au frottement la plus élevée possible.

La réduction de hauteur est limitée à 50 %. Les résultats obtenus sont rassemblés dans les tableaux 1 à 12 et dans les figures 9 et 10. La convergence des deux modèles est bonne : l'écart relatif sur la variation de R_i reste inférieur à 4 %.



- Figure 8 -

- Eprouvette-type
pour la compression d'anneau entre deux plateaux -



Hauteur	Méthode des Tranches			Méth. de Borne Supérieure		
	Re	Ri	rn	Re	Ri	rn
10	15	7,5	1,84	15	7,5	1,83
9,5	15,38	7,68	1,97	15,38	7,68	1,94
9	15,77	7,86	2,10	15,78	7,87	2,09
8,5	16,20	8,07	2,25	16,22	8,08	2,25
8	16,66	8,29	2,43	16,70	8,30	2,40
7,5	17,17	8,52	2,62	17,22	8,55	2,61
7	17,73	8,78	2,84	17,80	8,81	2,82
6,5	18,35	9,06	3,10	18,44	9,10	2,92
6	19,04	9,37	3,40	19,14	9,42	3,39
5,5	19,80	9,71	3,77	19,94	9,77	3,76
5	20,67	10,08		20,85	10,16	4,23

- Tableau 1 -

- Compression d'un anneau-type entre deux plateaux

avec un coefficient de frottement de 0,01 -



Hauteur	Méthode des Tranches			Méth. de Borne Supérieure		
	R _e	R _i	r _n	R _e	R _i	r _n
10	15	7,5	2,63	15	7,5	2,61
9,5	15,36	7,66	2,81	15,37	7,67	2,77
9	15,75	7,84	2,99	15,77	7,85	2,92
8,5	16,18	8,03	3,19	16,20	8,04	3,13
8	16,63	8,22	3,43	16,67	8,24	3,39
7,5	17,13	8,44	3,70	17,18	8,46	3,65
7	17,68	8,66	4,0	17,74	8,69	3,97
6,5	18,27	8,91	4,37	18,36	8,94	4,33
6	18,94	9,17	4,79	19,04	9,21	4,75
5,5	19,68	9,44	5,28	19,81	9,50	5,21
5	20,51	9,74		20,67	9,80	5,79

- Tableau 2 -

- Compression d'un anneau-type entre deux plateaux
avec un coefficient de frottement de 0,02 -



Hauteur	Méthode des Tranches			Méth. de Borne Supérieure		
	R_e	R_i	r_n	R_e	R_i	r_n
10	15	7,5	3,25	15	7,5	3,24
9,5	15,36	7,65	3,44	15,36	7,66	3,39
9	15,74	7,81	3,67	15,76	7,82	3,60
8,5	16,15	7,98	3,93	16,18	7,99	3,86
8	16,60	8,16	4,21	16,64	8,17	4,12
7,5	17,09	8,35	4,54	17,14	8,37	4,49
7	17,62	8,54	4,90	17,68	8,57	4,85
6,5	18,20	8,75	5,33	18,28	8,78	5,21
6	18,84	8,96	5,83	18,94	9,00	5,74
5,5	19,55	9,17	6,41	19,68	9,22	6,31
5	20,34	9,39		20,51	9,44	6,98

- Tableau 3 -

- Compression d'un anneau-type entre deux plateaux
avec un coefficient de frottement de 0,03 -



Hauteur	Méthode des Tranches			Méth. de Borne Supérieure		
	R_e	$R_{\hat{r}}$	r_n	R_e	$R_{\hat{r}}$	r_n
10	15	7,5	3,80	15	7,5	3,71
9,5	15,35	7,64	4,01	15,36	7,64	3,97
9	15,73	7,78	4,27	15,74	7,79	4,17
8,5	16,13	7,94	4,57	16,16	7,95	4,49
8	16,57	8,09	4,89	16,60	8,11	4,80
7,5	17,04	8,25	5,24	17,09	8,27	5,16
7	17,56	8,42	5,66	17,62	8,44	5,58
6,5	18,12	8,58	6,14	18,20	8,61	6,05
6	18,73	8,74	6,68	18,84	8,78	6,57
5,5	19,42	8,90	7,32	19,55	8,94	7,24
5	20,17	9,03	•	20,34	9,07	7,92

- Tableau 4 -

- Compression d'un anneau-type entre deux plateaux
avec un coefficient de frottement de 0,04 -



Hauteur	Méthode des Tranches			Méth. de Borne Supérieure		
	R _e	R _i	r _n	R _e	R _i	r _n
10	15	7,5	4,27	15	7,5	4,17
9,5	15,34	7,63	4,52	15,35	7,63	4,43
9	15,71	7,76	4,80	15,73	7,76	4,75
8,5	16,11	7,89	5,13	16,13	7,90	5,01
8	16,53	8,02	5,47	16,57	8,04	5,37
7,5	17,00	8,16	5,87	17,04	8,18	5,74
7	17,49	8,29	6,32	17,56	8,31	6,20
6,5	18,04	8,41	6,83	18,12	8,44	6,72
6	18,63	8,52	7,42	18,73	8,56	7,30
5,5	19,28	8,61	8,09	19,41	8,65	7,97
5	20,01	8,65		20,17	8,69	8,70

- Tableau 5 -

- Compression d'un anneau-type entre deux plateaux avec un coefficient
de frottement de 0,05 -



Hauteur	Méthode des Tranches			Méth. de Borne Supérieure		
	R _e	R _i	r _n	R _e	R _i	r _n
10	15	7,5	4,71	15	7,5	4,64
9,5	15,34	7,61	4,99	15,34	7,62	4,90
9	15,70	7,73	5,29	15,71	7,73	5,16
8,5	16,09	7,84	5,64	16,11	7,85	5,53
8	16,50	7,95	6,01	16,54	7,97	5,89
7,5	16,95	8,06	6,44	17,00	8,08	6,31
7	17,43	8,16	6,91	17,50	8,18	6,78
6,5	17,96	8,24	7,45	18,04	8,27	7,30
6	18,53	8,30	8,05	18,63	8,33	7,92
5,5	19,15	8,32	8,54	19,28	8,35	8,49
5	19,85	8,30		20,01	8,33	8,91

- Tableau 6 -

- Compression d'un anneau-type entre deux plateaux
avec un coefficient de frottement de 0,06 -



Hauteur	Méthode des Tranches			Méth. de Borne Supérieure		
	Re	Ri	r _n	Re	Ri	r _n
10	15	7,5	5,53	15	7,5	5,42
9,5	15,32	7,59	5,83	15,33	7,59	5,68
9	15,67	7,67	6,18	15,68	7,67	6,05
8,5	16,04	7,74	6,56	16,06	7,75	6,41
8	16,43	7,81	6,98	16,47	7,82	6,83
7,5	16,85	7,86	7,44	16,90	7,88	7,30
7	17,30	7,88	7,90	17,37	7,91	7,77
6,5	17,79	7,88	8,20	17,87	7,91	8,13
6	18,33	7,86	8,52	18,43	7,88	8,44
5,5	18,93	7,80	8,83	19,06	7,83	8,75
5	19,60	7,70		19,77	7,72	9,12

- Tableau 7 -

- Compression d'un anneau-type entre deux plateaux
avec un coefficient de frottement de 0,08 -



Hauteur	Méthode des Tranches			Méth. de Borne Supérieure		
	Re	Ri	rn	Re	Ri	rn
10	15	7,5	6,29	15	7,5	6,15
9,5	15,31	7,56	6,63	15,32	7,56	6,46
9	15,64	7,6	6,99	15,65	7,61	6,83
8,5	15,98	7,63	7,38	16,01	7,65	7,24
8	16,35	7,65	7,74	16,39	7,66	7,66
7,5	16,75	7,64	7,98	16,80	7,66	7,87
7	17,18	7,62	8,22	17,25	7,64	8,13
6,5	17,66	7,58	8,48	17,74	7,60	8,39
6	18,18	7,50	8,75	18,28	7,52	8,65
5,5	18,76	7,39	9,05	18,89	7,41	8,96
5	19,41	7,22		19,58	7,24	9,27

- Tableau 8 -

- Compression d'un anneau-type entre deux plateaux
avec un coefficient de frottement de 0,1 -



Hauteur	Méthode des Tranches			Méth. de Borne Supérieure		
	Re	Ri	rn	Re	Ri	rn
10	15	7,5	7,17	15	7,5	7,04
9,5	15,29	7,52	7,52	15,30	7,52	7,35
9	15,59	7,52	7,72	15,61	7,52	7,66
8,5	15,92	7,5	7,91	15,95	7,51	7,82
8	16,27	7,48	8,10	16,31	7,49	8,03
7,5	16,66	7,44	8,31	16,70	7,45	8,23
7	17,07	7,38	8,53	17,14	7,39	8,44
6,5	17,53	7,29	8,76	17,61	7,30	8,65
6	18,04	7,16	9,00	18,14	7,18	8,91
5,5	18,6	6,99	9,22	18,73	7,00	9,17
5	19,24	6,76		19,40	6,75	9,43

- Tableau 9 -

- Compression d'un anneau-type entre deux plateaux
avec un coefficient de frottement de 0,125 -



Hauteur	Méthode des Tranches			Méth. de Borne Supérieure		
	Re	Ri	rn	Re	Ri	rn
10	15	7,5	7,75	15	7,5	7,66
9,5	15,27	7,49	7,90	15,28	7,49	7,82
9	15,57	7,46	8,07	15,58	7,47	7,97
8,5	15,89	7,43	8,25	15,91	7,44	8,18
8	16,23	7,38	8,43	16,26	7,39	8,34
7,5	16,60	7,31	8,62	16,64	7,32	8,55
7	17	7,21	8,81	17,06	7,22	8,75
6,5	17,45	7,09	9,01	17,52	7,09	8,96
6	17,94	6,92	9,21	18,04	6,92	9,12
5,5	18,49	6,70	9,40	18,61	6,69	9,33
5	19,11	6,40	.	19,27	6,38	9,59

- Tableau 10 -

- Compression d'un anneau-type entre deux plateaux
avec un coefficient de frottement de 0,15 -



Hauteur	Méthode des Tranches			Méth. de Borne Supérieure		
	Re	Ri	rn	Re	Ri	rn
10	15	7,5	8,08	15	7,5	7,97
9,5	15,27	7,47	9,22	15,27	7,47	8,13
9	15,55	7,43	8,38	15,57	7,43	8,29
8,5	15,86	7,37	8,53	15,88	7,38	8,44
8	16,19	7,30	8,69	16,22	7,30	8,65
7,5	16,55	7,20	8,87	16,60	7,21	8,81
7	16,94	7,08	9,03	17,00	7,08	8,96
6,5	17,38	6,92	9,19	17,45	6,92	9,12
6	17,86	6,72	9,38	17,95	6,71	9,33
5,5	18,40	6,45	9,54	18,52	6,42	9,53
5	19,01	6,10		19,16	6,05	9,69

- Tableau 11 -

- Compression d'un anneau-type entre deux plateaux
avec un coefficient de frottement de 0,175 -

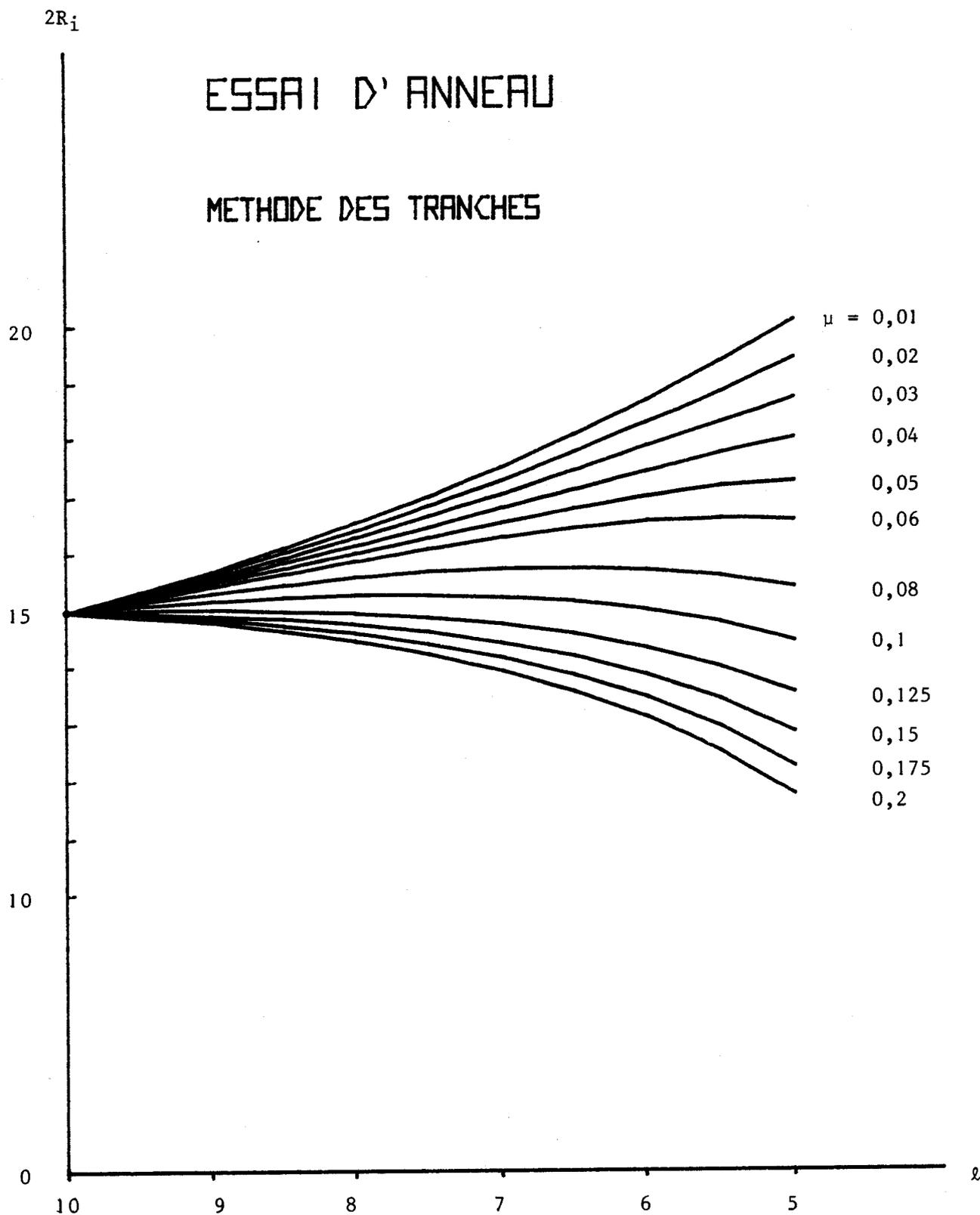


Hauteur	Méthode des Tranches			Méth. de Borne Supérieure		
	R _e	R _i	r _n	R _e	R _i	r _n
10	15	7,5	8,37	15	7,5	8,29
9,5	15,26	7,45	8,48	15,27	7,46	8,39
9	15,54	7,40	8,63	15,55	7,40	8,55
8,5	15,83	7,32	8,78	15,86	7,32	8,70
8	16,16	7,23	8,91	16,19	7,23	8,86
7,5	16,51	7,11	9,07	16,55	7,11	9,01
7	16,89	6,96	9,22	16,95	6,96	9,17
6,5	17,32	6,77	9,36	17,39	6,76	9,33
6	17,79	6,54	9,50	17,88	6,52	9,48
5,5	18,32	6,23	9,64	18,44	6,19	9,64
5	18,92	5,84		19,07	5,76	9,80

- Tableau 12 -

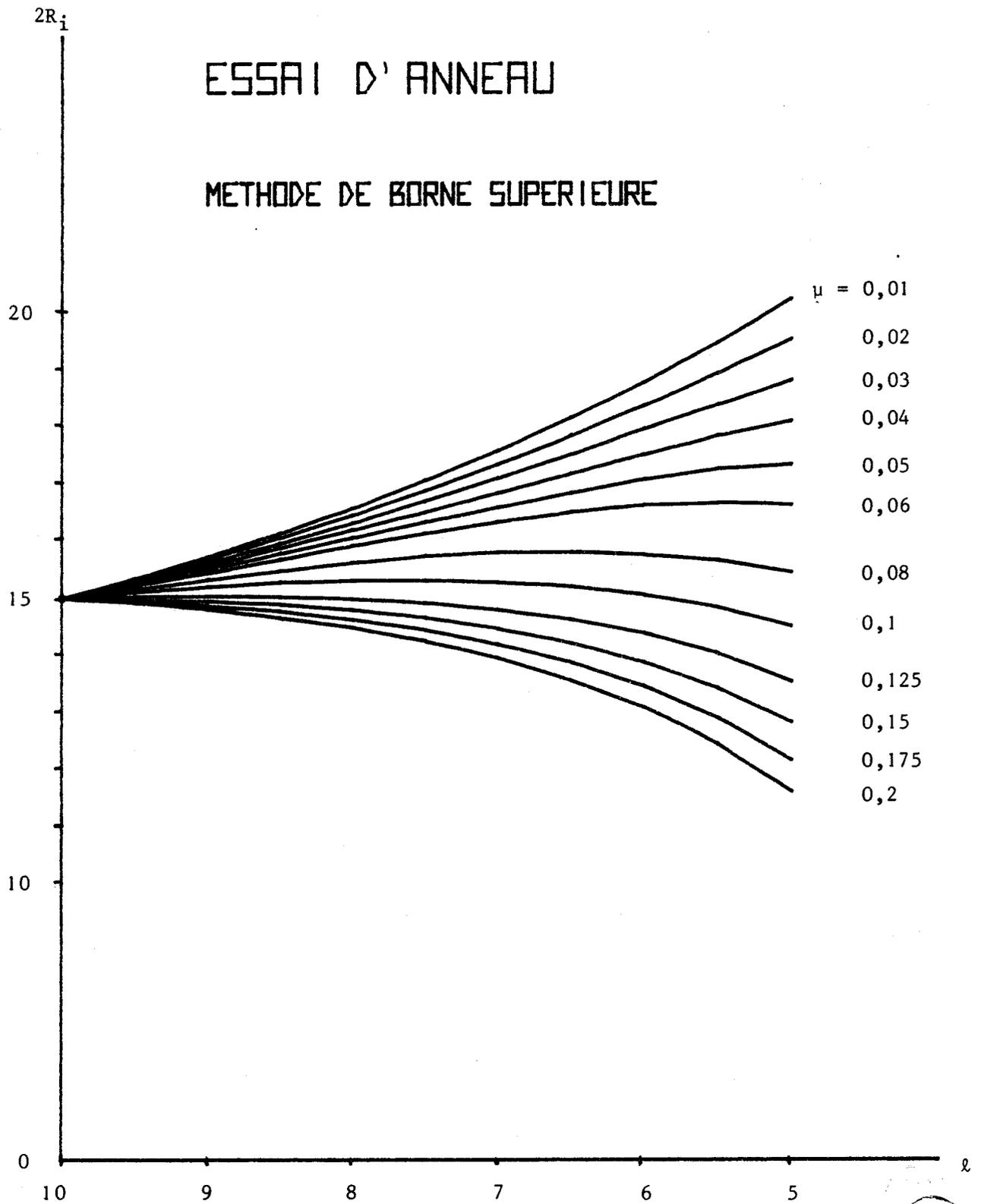
- Compression d'un anneau-type entre deux plateaux
avec un coefficient de frottement de 0,2 -





- Figure 9 -

- Résultats théoriques par modèle de tranches sur éprouvette-type -



- Figure 10 -



- Résultats théoriques par modèle de borne supérieure sur éprouvette-type -

3. - L'ESSAI DE COMPRESSION.

3.1. - Introduction.

L'essai de compression est un essai classique ; de nombreux modèles théoriques permettent de calculer la pression de forgeage en fonction des différents paramètres, y compris le frottement.

Le modèle choisi est celui développé par SIEBEL et repris en [1] .

Les bases du modèle sont :

- . frottement de COULOMB, non collant
- . matériau écrouissable, incompressible
- . déformations élastiques négligées
- . le "barelling" des faces latérales du cylindre n'est pas pris en compte
- . la méthode choisie est une méthode des tranches.

3.2. - Equations de base (Figure 11) .

L'équilibre d'un secteur cylindrique s'exprime par (Figure 12) :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{2\tau}{\ell} = 0 \quad (22)$$

Pour le critère de plasticité nous utilisons le critère de MISES :

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 = 2\sigma_0^2 \quad (23)$$

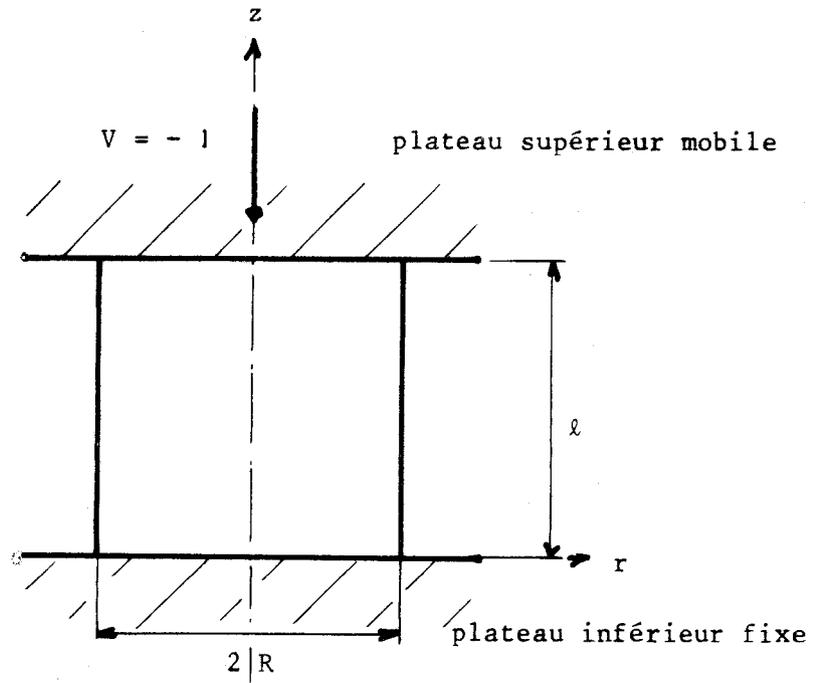
Le frottement de COULOMB est décrit par :

$$\tau = \mu\sigma_z \quad (24)$$

Les relations contraintes-vitesses de déformation de LEVY-MISES sont :

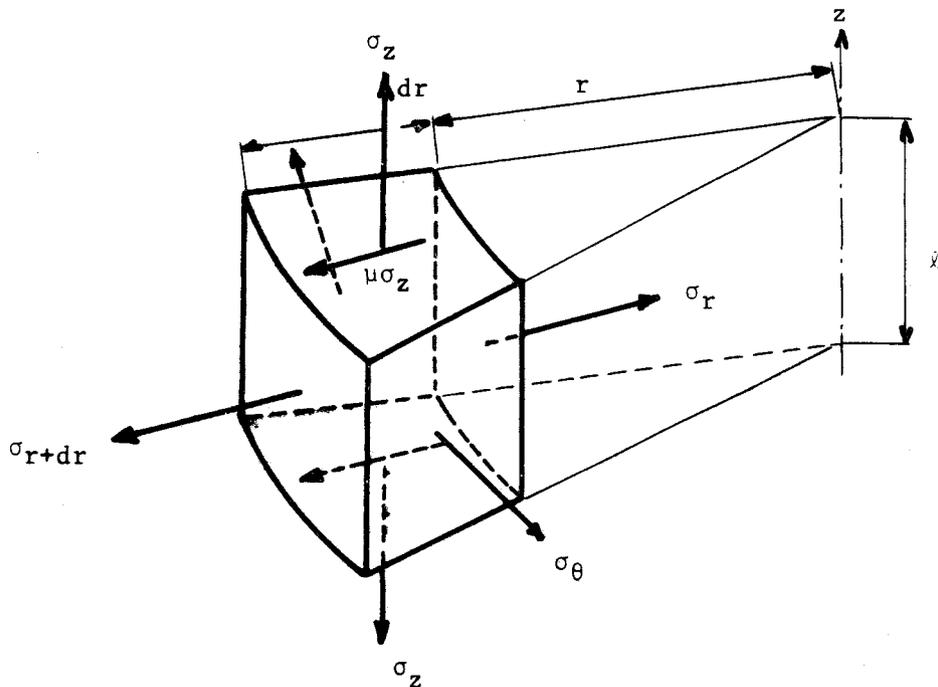
$$\frac{\sigma_r + p}{\dot{\epsilon}_r} = \frac{\sigma_\theta + p}{\dot{\epsilon}_\theta} = \frac{\sigma_z + p}{\dot{\epsilon}_z} \quad (25)$$

avec $p = -\frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)$.



- Figure 11 -

- Compression d'un cylindre entre deux plateaux parallèles -



- Figure 12 -

- Etat de contraintes sur un élément de volume d'un cylindre -



Les déformations sont homogènes dans un secteur cylindrique :

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Or $V_z = 0$ pour $z = 0$, $V_z = -1$ pour $z = \ell$ (plateau inférieur fixe, plateau supérieur animé d'une vitesse unitaire). Avec une variation linéaire dans le cylindre :

$$V_z = -\frac{z}{\ell} \quad (0 \leq z \leq \ell)$$

Soit :

$$\dot{\epsilon}_z = -\frac{1}{\ell} \quad (26)$$

L'incompressibilité s'écrit :

$$\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_z = 0 \quad (27)$$

3.3. Résolution du système de six équations.

La relation (27) peut s'écrire (avec V_r , composante du vecteur vitesse suivant r) :

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} = \frac{1}{\ell}$$

L'intégration de cette équation différentielle, avec la condition $V_r = 0$ pour $r = 0$, donne :

$$V_r = \frac{r}{2\ell}$$

Soit :

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{1}{2\ell} = \dot{\epsilon}_\theta = -\frac{\dot{\epsilon}_z}{2} \quad (28)$$

Introduisons (28) dans (25) :

$$\sigma_r + p = \sigma_\theta + p = -\frac{1}{2}(\sigma_z + p) = \lambda'$$

Soit :

$$\begin{aligned}\sigma_r - \sigma_\theta &= 0 \\ \sigma_\theta - \sigma_z &= -3\lambda' \\ \sigma_z - \sigma_r &= +3\lambda'\end{aligned}$$

En appliquant le critère de MISES, il vient :

$$\begin{aligned}\sigma_r - \sigma_\theta &= 0 \\ \sigma_\theta - \sigma_z &= \pm \sigma_0 \\ \sigma_z - \sigma_r &= \pm \sigma_0\end{aligned}$$

En reportant ces résultats dans (22) et en intégrant, on obtient :

$$\sigma_z = \sigma_0 e^{\frac{2\mu}{\ell}(R-r)} \quad (29)$$

avec pour $r = R$ $\sigma_r = 0$.

L'effort de compression F est alors égal à

$$F = 2\pi \int_0^R \sigma_0 e^{\frac{2\mu}{\ell}(R-r)} r dr \quad (30)$$

La pression moyenne sur le plateau p_m est donc de

$$p_m = \frac{\ell \sigma_0}{\mu R^2} \left[\frac{\ell}{2\mu} \left(e^{\frac{2\mu R}{\ell}} - 1 \right) - R \right] \quad (31)$$

La valeur du quotient p_m/σ_0 traduit l'influence globale du frottement sur l'effort de compression.

(Si $\mu = 0$ $\frac{p_m}{\sigma_0} = 1$; si $\mu > 0$ $\frac{p_m}{\sigma_0} > 1$.)

3.4. - Utilisation pour le dépouillement de relevés expérimentaux.

Notre objectif est de déduire des mesures de force effectuées, lors d'essais de compression, la part due au frottement (défini par un essai d'anneau préalable) . Soit F l'effort de compression et ℓ la hauteur instantanée du cylindre, ℓ_0 la hauteur initiale, R_0 le rayon initial.

Par incompressibilité, le rayon extérieur instantané R a pour valeur

$$R^2 = \frac{R_o^2 \cdot \ell_o}{\ell}$$

D'où la contrainte moyenne de compression σ_m :

$$\sigma_m = \frac{F}{\pi R^2}$$

Soit Q la valeur du quotient p_m/σ_o calculée par (31)

$$\sigma_o = \frac{\sigma_m}{Q}$$

La déformation généralisée a la valeur

$$\bar{\epsilon} = L_n\left(\frac{\ell_o}{\ell}\right)$$

Par le biais du modèle de SIEBEL [8] , on peut donc passer de couples de valeurs F , ℓ à des couples de grandeurs locales σ_o , $\bar{\epsilon}$.

4. - L'ETUDE EXPERIMENTALE.

4.1. - Procédure d'essai.

Nous avons testé quatre matériaux (XC38, 35CD4, Cuivre, AU4G) normalisés par un recuit d'une heure. Trois éprouvettes ont été usinées dans chaque matériau : une éprouvette de traction, un anneau, une éprouvette de compression (voir dimensions initiales, Tableau 13) .

La campagne d'essai a comporté les étapes suivantes :

. essais de traction sur presse MF du laboratoire JOHNSON avec dépouillement automatique par l'ordinateur du CTI (acquisitions de mesures de force et de déformation) .

. essais d'anneaux sur presse MF (variables mesurées F et ℓ en cours d'essai, R_i en fin d'essai) . Déduction du coefficient de frottement μ d'après les figures 9 et 10.

. essais de compression sur presse MF (variables mesurées F et ℓ)
Dépouillement des mesures avec introduction du coefficient μ déterminé à l'étape précédente.

. comparaison des courbes de comportement obtenues par essais de traction et de compression.

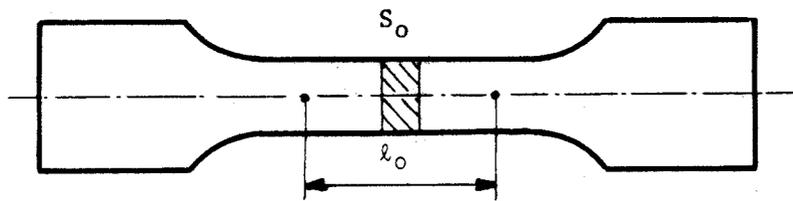
4.2. - Résultats expérimentaux.

Les mesures de force et de déformation effectuées sur les quatre matériaux sont rassemblées dans les tableaux 14 à 17, ainsi que les valeurs des contraintes et déformations logarithmiques déduites des résultats d'essai.

Conditions d'essais :

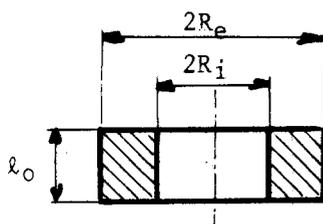
température : $20^\circ \pm 2^\circ\text{C}$

hygrométrie : 60 à 80 % d'humidité relative



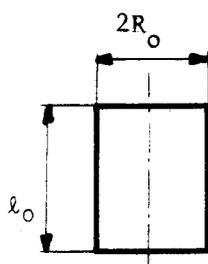
TRACTION

	ACIER XC38	ACIER 35CD4	CUIVRE Cu	ALUMINIUM AU4G
l_0	50,1	50,2	50,1	50,0
S_0 (mm ²)	99,7	99,9	100,1	99,8



ANNEAU

	XC38	35CD4	Cu	AU4G
$2R_e$	29,9	30,00	29,95	20,00
$2R_i$	15,02	15,20	14,95	15,10
l_0	10,16	10,18	10,16	10,14



COMPRESSION

	XC38	35CD4	Cu	AU4G
$2R_0$	14,00	14,01	14,03	14,01
l_0	20,96	21,18	20,88	20,92



- Tableau 13 -

- Dimensions initiales des éprouvettes -
(en mm)

ACIER XC 38 RECUIT

ESSAI DE TRACTION

F daN	σ_0 daN/mm ²	ℓ mm	ϵ
3910	50,7	51,60	0,031
4250	55,8	52,23	0,044
4470	59,4	52,90	0,056
4640	62,4	53,51	0,068
4750	64,6	54,14	0,080
4820	66,3	54,78	0,091
4880	67,9	55,42	0,103
4915	69,2	56,06	0,114
4940	70,4	56,69	0,126
4950	71,3	57,33	0,137
4960	72,2	57,97	0,148

ESSAI DE COMPRESSION

F daN	σ_m daN/mm ²	σ_0 daN/mm ²	ℓ mm	ϵ
6610	41,7	40,4	20,35	0,029
9708	59,4	57,4	19,74	0,060
11460	67,9	65,4	19,13	0,091
12660	72,7	69,9	18,52	0,124
13640	75,7	72,7	17,91	0,157
14560	78,1	74,8	17,30	0,192
15470	80,1	76,6	16,70	0,227
16310	81,2	77,6	16,08	0,265
17230	82,6	78,6	15,48	0,303
18140	83,6	79,3	14,87	0,343
19200	84,8	80,2	14,26	0,385
20180	85,4	80,4	13,65	0,429
21300	86,1	80,7	13,04	0,475
22500	86,7	80,9	12,43	0,523
23830	87,3	81,0	11,82	0,573
25380	88,2	81,3	11,21	0,626
27070	88,9	81,4	10,60	0,682
28970	89,7	81,4	9,99	0,741

ESSAI D'ANNEAU

F daN	$\Delta\ell$ mm
7500	0,06
19690	0,13
31870	0,47
41250	0,86
47110	1,25
51790	1,64
56480	2,03
61180	2,42
66560	2,81
72660	3,20
79450	3,59
87190	3,98
96320	4,38
106870	4,77

- 45 -

- Tableau 14 -

- Résultats expérimentaux -

$$\ell_{\text{final}} = 5,23$$

$$2R_{\text{ifinal}} = 13,20 \pm 0,1$$

$$\mu = 0,145$$





ACIER 35 CD 4 RECUIT

ESSAI DE TRACTION

F daN	σ_0 daN/mm ²	l mm	ϵ
4480	57,7	51,27	0,025
5080	65,2	51,91	0,038
5330	70,4	52,55	0,050
5530	73,9	53,19	0,062
5655	76,5	53,83	0,074
5735	78,5	54,46	0,085
5780	80,0	55,10	0,097
5810	81,4	55,74	0,109
5820	82,4	56,38	0,120

ESSAI DE COMPRESSION

F daN	σ_m daN/mm ²	σ_0 daN/mm ²	l mm	ϵ
10330	64,6	62,6	20,41	0,037
12860	77,9	75,4	19,80	0,067
14340	84,3	81,4	19,19	0,099
15470	88,0	84,9	18,58	0,131
16450	90,5	87,1	17,97	0,164
17360	92,3	88,6	17,36	0,199
18280	93,8	89,8	16,75	0,235
19200	94,9	90,7	16,14	0,272
20180	95,9	91,5	15,53	0,310
21240	97,1	92,2	14,92	0,350
22360	98,0	92,8	14,31	0,392
23560	98,9	93,3	13,70	0,436
24820	99,5	93,5	13,10	0,481
26230	100,3	93,9	12,49	0,528
27840	101,3	94,2	11,88	0,578
29680	102,4	94,7	11,27	0,631
31780	103,7	95,3	10,66	0,687

ESSAI D'ANNEAU

F daN	Δl mm
7500	0,08
19690	0,13
31870	0,37
43130	0,70
50390	1,09
55780	1,48
60940	1,88
66100	2,27
71720	2,66
78050	3,05
84840	3,44
93050	3,83
102420	4,22
114140	4,59

$l_{\text{final}} = 5,66 \pm 0,02$
 $2R_{\text{ifinal}} = 13,90 \pm 0,10$

$\mu = 0,135$

- Tableau 15 -

- Résultats expérimentaux -

CUIVRE RECUIT

ESSAI DE TRACTION

F daN	σ_0 daN/mm ²	ℓ mm	ϵ
810	9,3	51,59	0,031
1100	12,9	52,87	0,056
1320	15,9	54,14	0,079
1490	18,4	55,42	0,103
1610	20,4	56,69	0,126
1710	22,1	57,96	0,148
1780	23,6	59,24	0,169
1838	24,8	60,52	0,191
1875	25,9	61,80	0,212
1907	26,9	63,07	0,232
1928	27,7	64,34	0,252
1940	28,4	65,62	0,272
1946	29,1	66,90	0,291
1948	29,6	68,17	0,310

ESSAI DE COMPRESSION

F daN	σ_m daN/mm ²	σ_0 daN/mm ²	ℓ mm	ϵ
1690	10,6	10,2	20,24	0,031
2460	14,9	14,3	19,50	0,068
3370	19,7	18,9	18,89	0,100
4010	22,7	21,7	18,28	0,133
4570	25,0	23,9	17,67	0,167
5140	27,1	25,9	17,06	0,202
5630	28,7	27,2	16,45	0,238
6190	30,4	28,8	15,84	0,276
6680	31,5	29,7	15,23	0,316
7180	32,5	30,6	14,62	0,356
7670	33,3	31,2	14,01	0,399
8230	34,2	31,8	13,40	0,444
8780	34,8	32,2	12,79	0,490
9420	35,6	32,8	12,19	0,538
10130	36,4	33,3	11,58	0,590
10900	37,0	33,7	10,97	0,644
11750	37,7	33,9	10,36	0,701

ESSAI D'ANNEAU

F daN	$\Delta \ell$ mm
4450	0,26
8900	0,65
12660	1,04
15940	1,44
18980	1,83
21790	2,22
24370	2,61
27190	2,99
30240	3,39
33520	3,78
37030	4,17
41250	4,56
46170	4,95

$\ell_{\text{final}} = 4,92 \pm 0,02$

$2R_{\text{ifinal}} = 12,05 \pm 0,30$

$\mu = 0,17$

- Tableau 16 -

- Résultats expérimentaux -





ALUMINIUM A U4 G RECUIT

ESSAI DE TRACTION

F daN	σ_0 daN/mm ²	l mm	ϵ
1670	19,6	51,27	0,025
1830	21,7	51,91	0,037
1970	23,6	52,55	0,049
2050	24,9	53,19	0,062
2085	25,6	53,82	0,074
2110	26,2	54,46	0,085
2130	26,8	55,10	0,097
2150	27,4	55,74	0,109
2180	28,1	56,37	0,120

ESSAI DE COMPRESSION

F daN	σ_m daN/mm ²	σ_0 daN/mm ²	l mm	ϵ
3300	20,7	19,9	20,23	0,034
4360	26,5	25,4	19,62	0,064
4920	29,0	27,7	19,01	0,096
5410	30,9	29,5	18,40	0,128
5760	31,8	30,3	17,79	0,162
6120	32,6	30,9	17,18	0,197
6470	33,2	31,5	16,57	0,233
6960	34,4	32,5	15,96	0,271
7180	34,2	32,2	15,36	0,309
7520	34,4	32,2	14,74	0,350
7940	34,8	32,5	14,13	0,392
8360	35,1	32,6	13,53	0,436
8780	35,2	32,5	12,92	0,482
9280	35,4	32,5	12,31	0,530
9910	35,8	32,6	11,64	0,586
10550	36,1	32,6	11,03	0,640
11320	36,6	32,7	10,42	0,697
12170	37,1	32,8	9,82	0,756

ESSAI D'ANNEAU

F daN	Δl mm
7500	0,09
14060	0,48
15940	0,87
17110	1,26
18520	1,65
20160	2,04
21560	2,43
23680	2,82
25780	3,21
28130	3,60
30940	3,99
34220	4,38
38900	4,77

$$l_{\text{final}} = 4,57 \pm 0,01$$

$$2R_{\text{ifinal}} = 10,70 \pm 0,02$$

$$\mu = 0,18$$

- Tableau 17 -

- Résultats expérimentaux -

Précision des mesures :

. de force : 10 daN jusqu'à 10 Tonnes
100 daN - 100 Tonnes

. de déplacement ou de dimension géométrique : 0,01 mm

Conditions particulières aux essais de compression et d'anneau :

Les plateaux de compression ont été réalisés en Z200 C13 trempé et revenu de façon à obtenir une dureté superficielle supérieure à 62 R_C . Leurs surfaces actives ont été rectifiées après traitement thermique. Pendant les essais, elles ont été maintenues dans un état de surface aussi constant que possible par rodage à la pâte diamantaire 10 μ entre chaque opération.

Le parallélisme des plateaux est assuré par guidage par quatre colonnes (faux-parallélisme inférieur à 1/100) .

Remarque pour l'essai d'anneau :

Il n'est pas possible, dans l'état actuel des moyens d'essais utilisés, de mesurer le rayon intérieur R_i en cours d'essais. On peut relever R_i pour des valeurs intermédiaires du taux de compression à condition d'arrêter l'essai pour chaque mesure. Cette procédure est fastidieuse et perturbe le déroulement de l'essai (décharges et charges multipliées) .

Pour un acier XC38 , nous avons comparé les coefficients de frottement déduits de deux essais, l'un conduit avec des mesures intermédiaires de R_i , l'autre sans décharge. Les écarts étant inférieurs à la dispersion due à la mesure, nous avons admis que l'essai d'anneau pouvait être réalisé sans décharge jusqu'à un taux de compression d'environ 50 % et le coefficient de frottement déterminé d'après l'état final de l'anneau.

5. - SYNTHESE DES RESULTATS.

5.1. - Comparaison des essais de traction et de compression.

Les courbes rationnelles $\sigma_0 = f\{\varepsilon\}$ déduites des mesures décrites dans les tableaux 14 à 17 ont été tracées sur les figures 13 à 16.

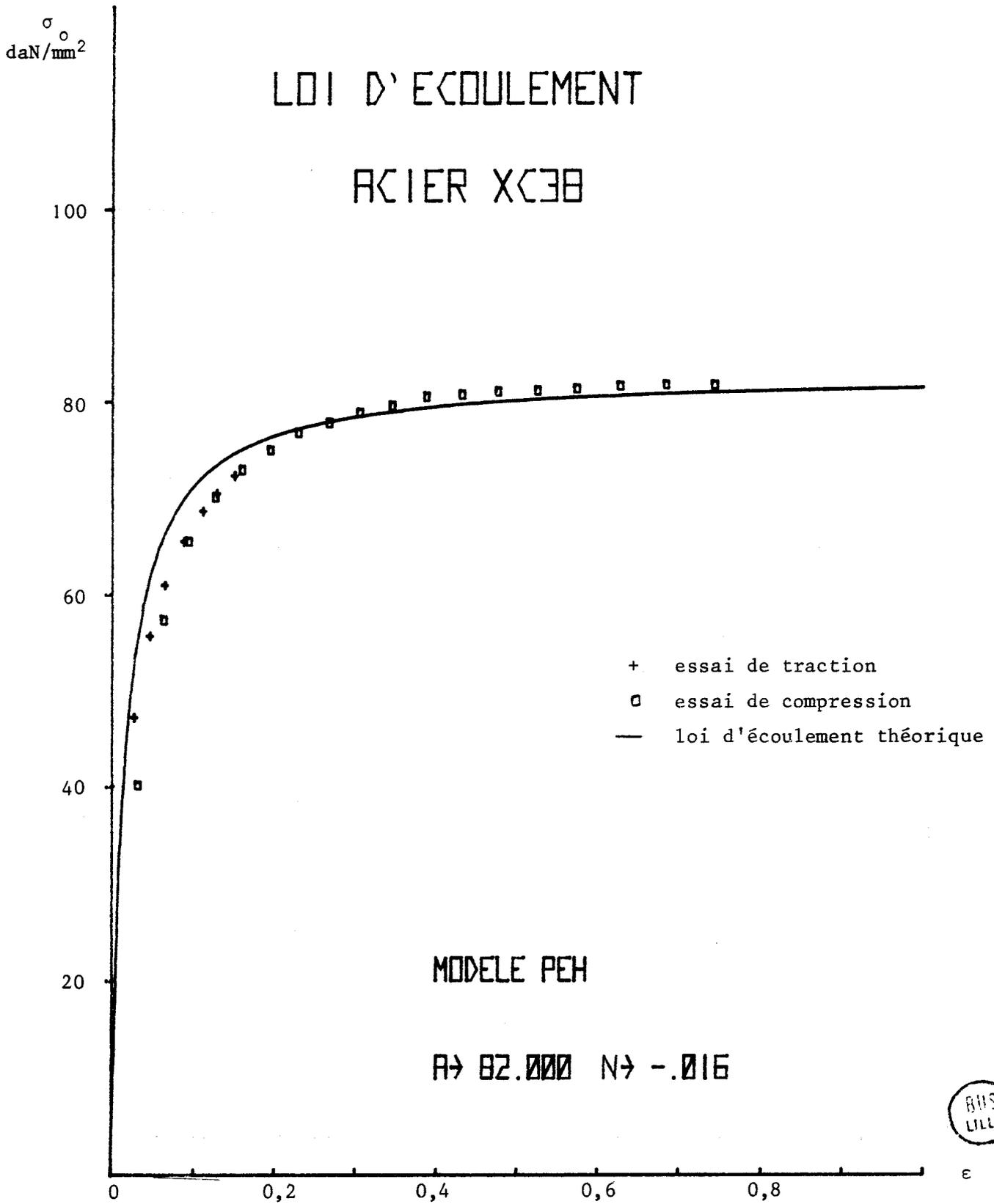
On remarque immédiatement le peu d'écart existant entre les courbes de traction et de compression. En valeur relative, il n'excède jamais 5 %. Compte tenu de la différence fondamentale des contraintes subies par le matériau, ce résultat peut être considéré comme excellent. La procédure choisie et les modèles théoriques sont adaptés à l'objectif.

5.2. - Identification par un nouveau modèle de comportement.

Contrairement à l'essai de traction, il s'est avéré impossible ou, en tous cas, sans signification d'identifier avec une loi du type PE ou RPE . Le coefficient d'érouissage obtenu varie par exemple pour l'acier XC38 de 0,21 à 0. Nous avons donc recherché une nouvelle loi de comportement érouissable. Par suite de l'allure asymptotique des résultats obtenus en compression, nous avons retenu une loi d'érouissage hyperbolique dont l'expression générale est :

$$\sigma_0 = \frac{A \varepsilon}{\varepsilon + N}$$

Lorsque ε devient très grand, σ_0 tend vers A (A est donc l'ordonnée de l'asymptote horizontale) . Lorsque ε est nul, σ_0 est également nul (le comportement est donc de la famille PE) . En cas de comportement expérimental rigide en début d'essai, il suffirait d'ajouter une constante au numérateur pour rattacher le modèle à la famille RPE . L'asymptote a pour abscisse N . Lorsque N est nul, le modèle dégénère en $\sigma_0 = A$ (modèle RPP classique) . Il apparaît alors que N est relié à l'érouissage du matériau : plus N est important, plus la courbe se détache de ses asymptotes et paraît donc inclinée.

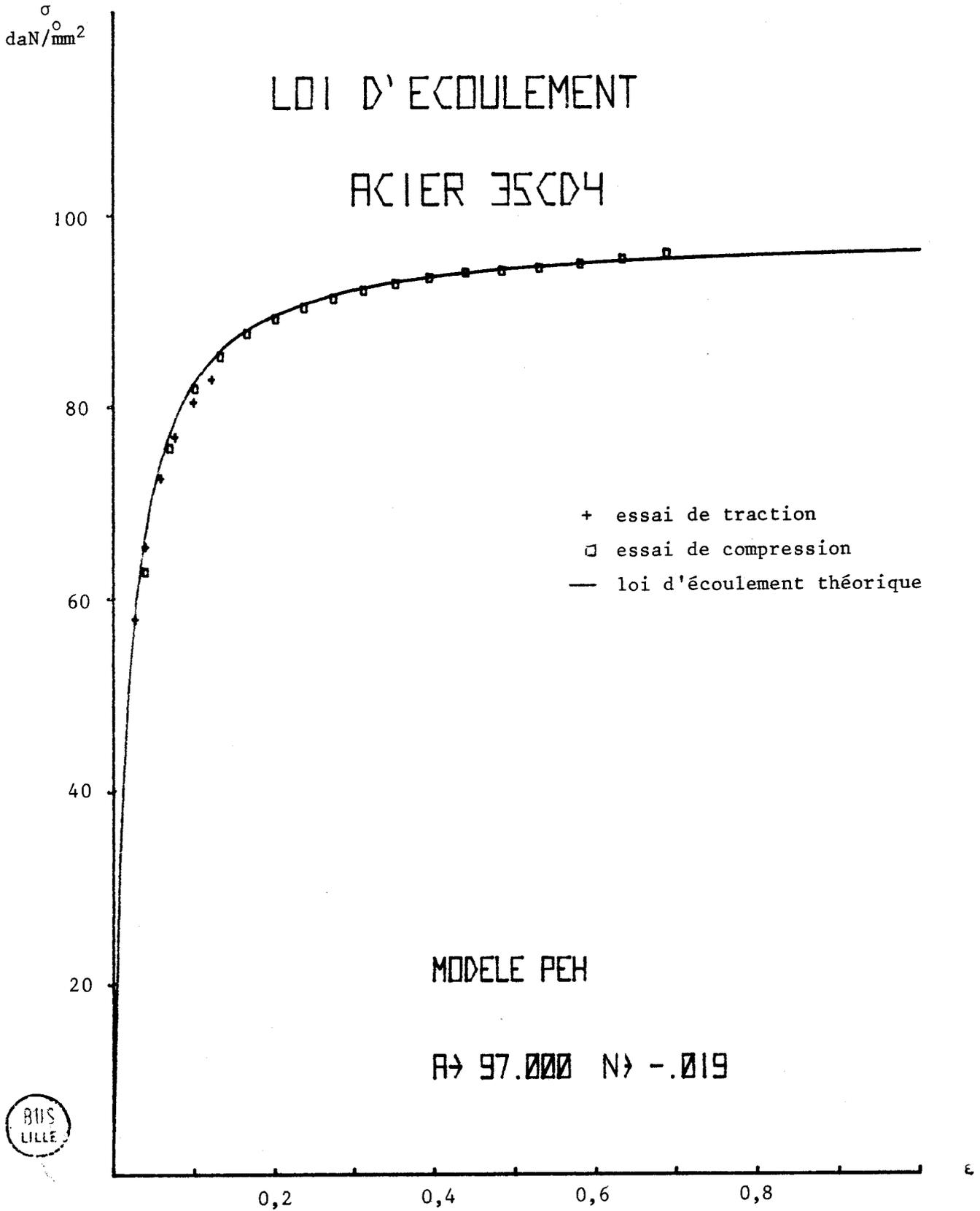


- Figure 13 -

- Comparaison des résultats des essais de traction et compression -



ε



- Figure 14 -

- Comparaison des résultats des essais de traction et de compression -

σ
daN/mm²

LOI D'ÉCOULEMENT CUIVRE RECUIT

- + essai de traction
- essai de compression
- loi d'écoulement théorique

60

40

20

MODELE PEH

$A \rightarrow 35.000 \quad N \rightarrow -.078$

0

0,2

0,4

0,6

0,8

ϵ



- Figure 15 -

- Comparaison des résultats des essais de traction et de compression -

σ_0
daN/mm²

LOI D'ÉCOULEMENT

ALU AU4G

- + essai de traction
- essai de compression
- loi d'écoulement théorique

60

40

20

MODELE PEH

$R \rightarrow 34.000 \quad N \rightarrow -.020$



0

0,2

0,4

0,6

0,8

ϵ

- Figure 16 -

- Comparaison des résultats des essais de traction et de compression -

Comme les résultats des identifications réalisées sur les quatre matériaux choisis pour l'étude le montrent, ce modèle plastique-écrouissable-hyperbolique (en abrégé P.E.H.) permet de suivre de manière très voisine le comportement réel.

Dans les figures 13 à 16, les coefficients A et N ont été déterminés de telle façon que A soit supérieure aux plus fortes valeurs expérimentales ($A \cong 1,02 \sigma_{\max i}$) et N soit la meilleure solution possible pour un calcul aux moindres carrés. Le tableau 18 présente les résultats obtenus par le modèle PEE (écrouissage exponentiel $A \epsilon^n$) identifié sur les essais de traction et le modèle PEH identifié sur les essais de compression. Les termes A sont analogues et restent dans un rapport à peu près constant pour les quatre matériaux. L'évolution de N et n est globalement la même malgré la différence des ordres de grandeur de ces coefficients.

Le modèle PEH nous paraît mieux cerner le comportement réel du matériau, il doit donc être un outil privilégié pour le calcul de procédé, de plus, et par voie de conséquence, les coefficients du modèle PEH doivent être de meilleurs critères pour différencier les matériaux ; ils pourraient donc être utilisés avec profit pour les contrôles de réception. Cette dernière utilisation reste au conditionnel et de nouvelles études devront tester l'intérêt réel du modèle PEH .

5.3. - Application du modèle plastique écrouissable hyperbolique au test d'anneau.

Dans le but de tester la loi PEH identifiée préalablement, ainsi que de comparer les modèles 1 et 2, définis en 23 et 24, nous avons entré dans ces derniers les données géométriques et les coefficients du modèle PEH pour obtenir leurs prévisions sur l'effort de compression F en fonction de la hauteur d'anneau l .

	Modèle PEE		Modèle PEH	
	A daN/mm ²	n	A daN/mm ²	N
XC 38	106	0,21	82	0,016
35 CD 4	115	0,18	97	0,019
Cuivre	54	0,48	35	0,078
AU 4 G	45	0,23	34	0,020

- Tableau 18 -

- Comparaison des lois de comportement
plastique écrouissable exponentiel - plastique écrouissable hyperbolique -

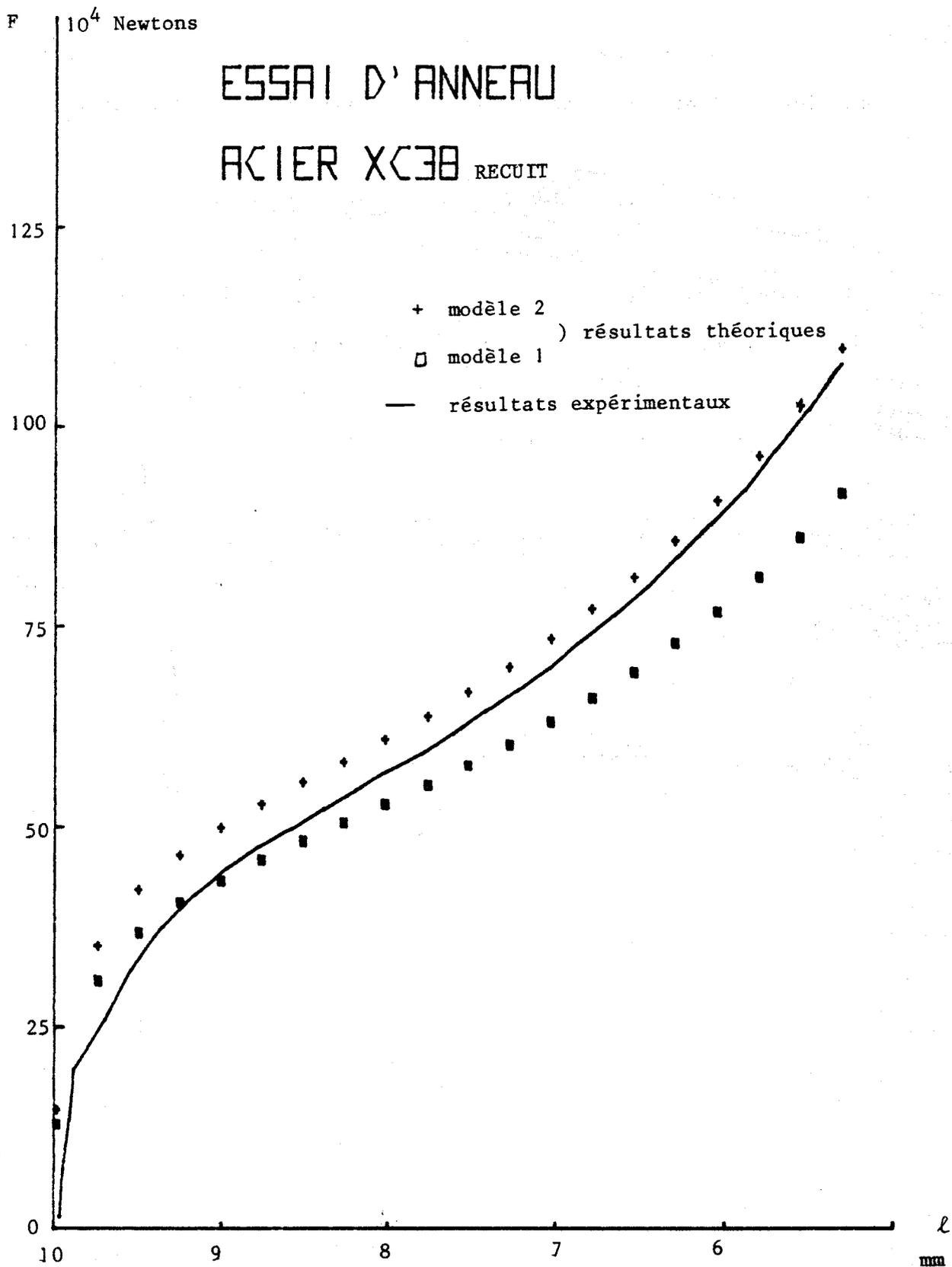


Les figures 17 à 20 représentent les valeurs théoriques et expérimentales de l'effort de compression F en fonction de la hauteur l de l'anneau.

Sur les courbes obtenues, on peut remarquer que :

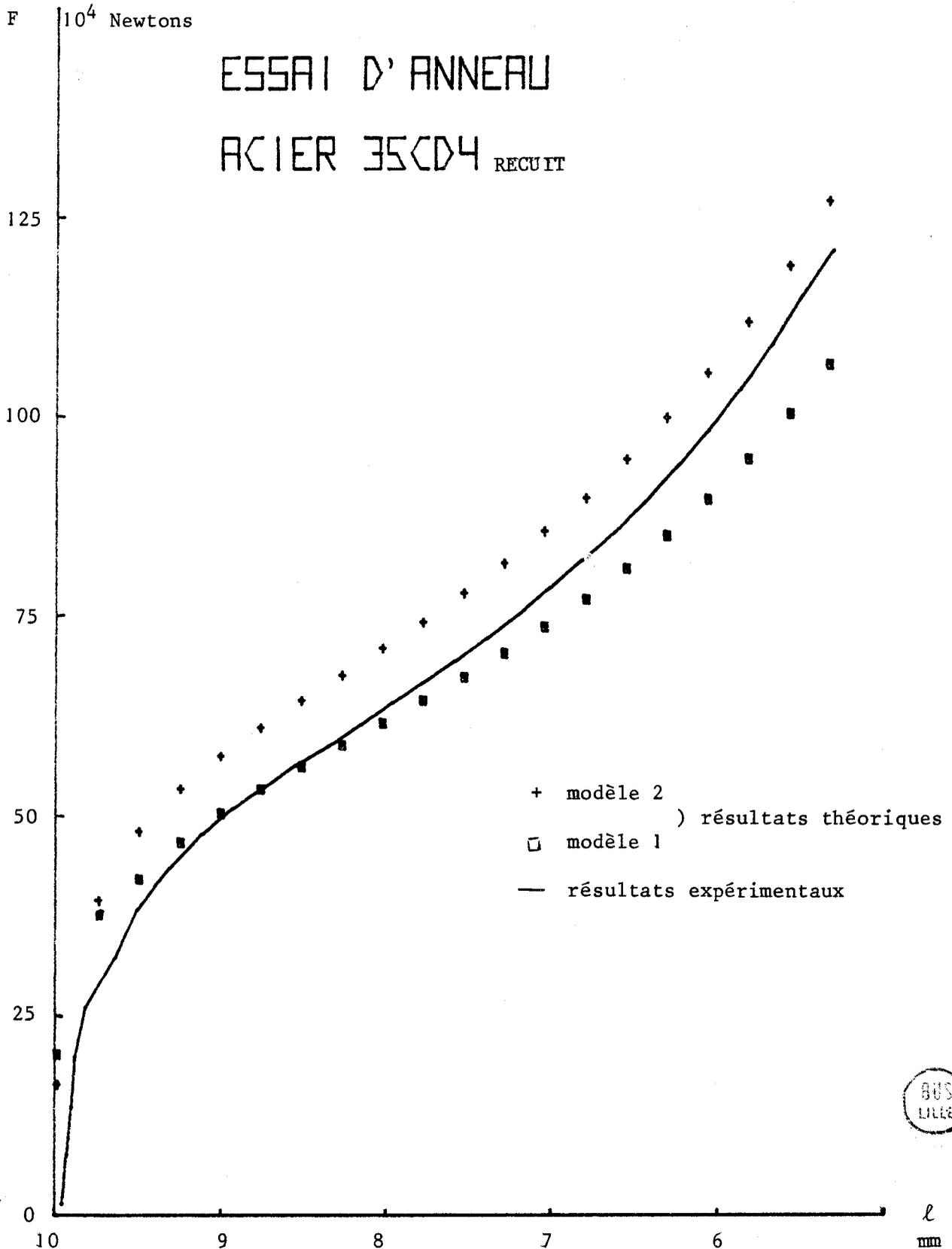
- le modèle 2, par champs de vitesses, donne une prévision supérieure aux valeurs mesurées. Pour les aciers, l'écart observé entre les valeurs fournies par le modèle 2 et les valeurs expérimentales est inférieur à 10 %. L'écoulement choisi est sans doute assez proche de la réalité.

- les modèles théoriques, par champ de vitesses et par tranches, fournissent des valeurs qui encadrent bien les valeurs expérimentales de la quasi totalité de l'essai, à l'exception de l'aluminium A U 4 G pour lequel les valeurs déduites du modèle 1 sont très légèrement supérieures aux valeurs expérimentales.



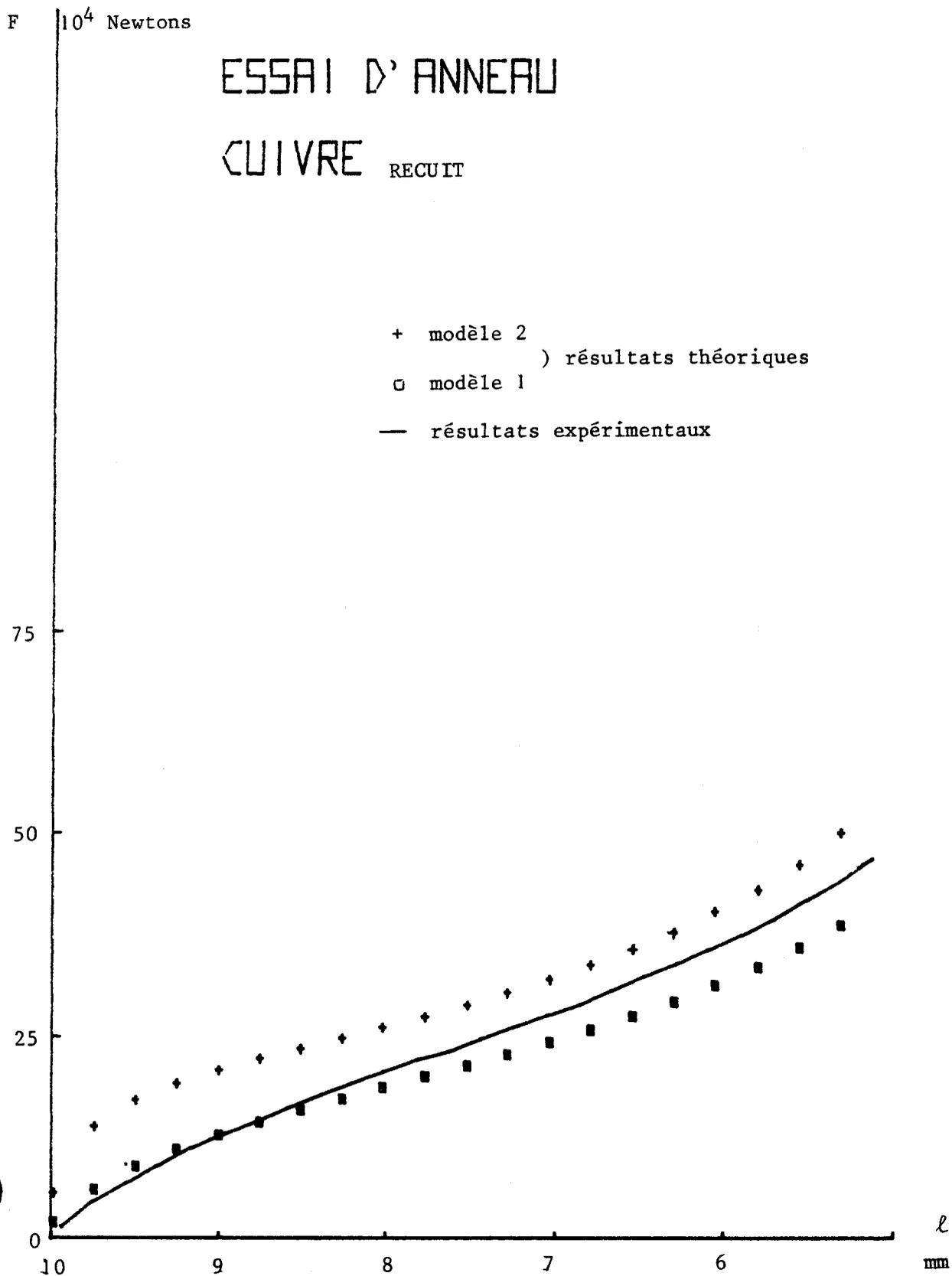
- Figure 17 -

- Efforts de compression d'anneau théoriques et expérimentaux -



- Figure 18 -

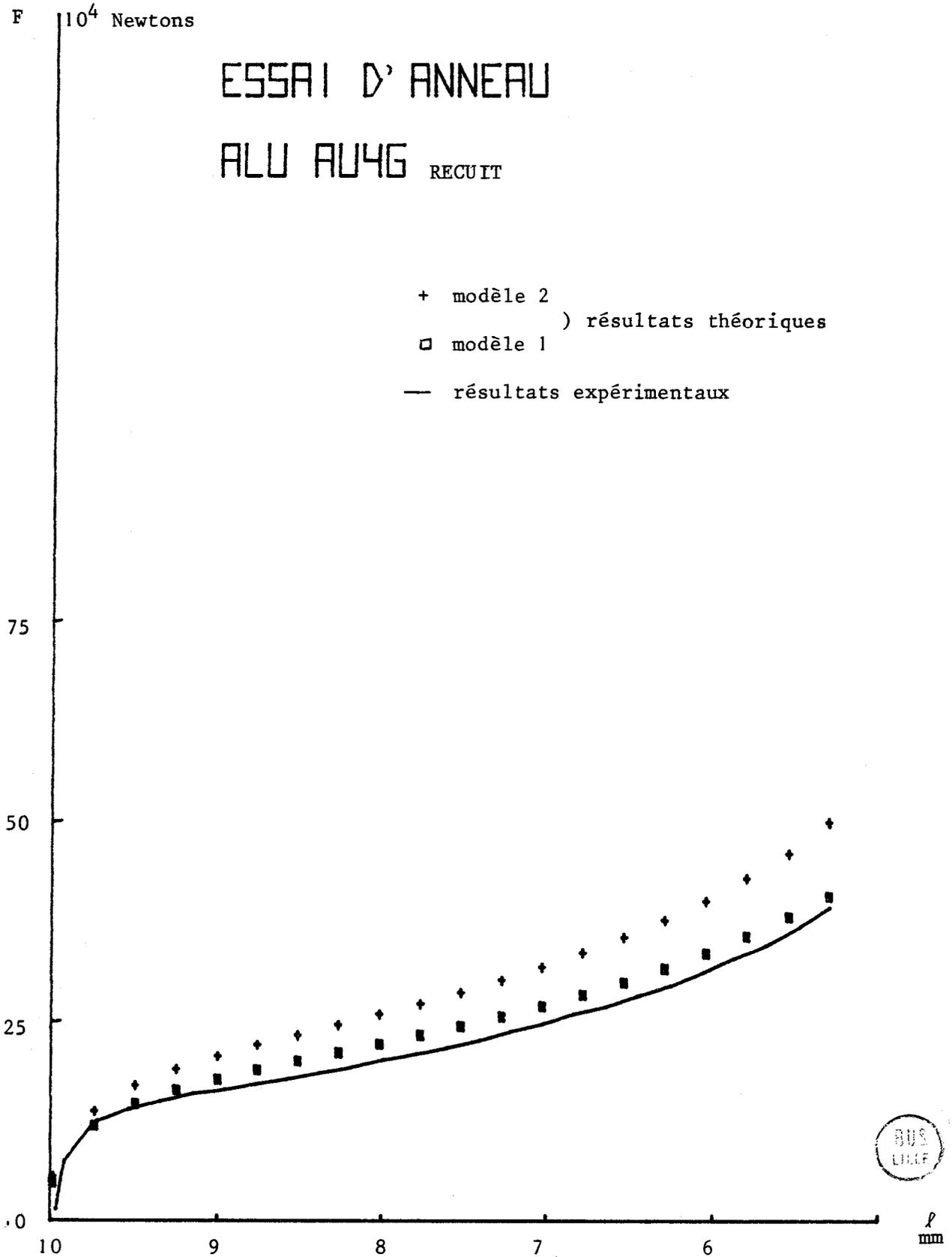
- Efforts de compression d'anneau théoriques et expérimentaux -



BIS
LILLE

- Figure 19 -

- Efforts de compression d'anneau théoriques et expérimentaux -



- Figure 20 -

- Efforts de compression d'anneau théoriques et expérimentaux -

6. - CONCLUSION.

A la fin de cette étude, nous disposons de deux modèles théoriques originaux de la compression d'anneau.

Le premier (basé sur la méthode des tranches) fournit des déformations radiales et des efforts de compression plus faibles que ceux obtenus par le second (basé sur le théorème de borne supérieure).

Ces résultats sont conformes à ce théorème et aux hypothèses simplificatrices de la méthode des tranches (le travail redondant, provoqué par les distorsions, est négligé) .

Tels qu'ils sont, ils permettent de déterminer expérimentalement le coefficient de frottement par la mesure du rayon intérieur en fin de compression pour les aciers. Pour les autres matériaux, en particulier le cuivre, la mesure du rayon intérieur doit être envisagée en continu pendant l'essai, au moins dans un premier temps.

La mesure du frottement nous permet maintenant de caractériser le comportement des matériaux par l'essai de compression.

Les courbes rationnelles, définies par les essais de traction et de compression sont peu différentes.

La meilleure connaissance du comportement du matériau en grandes déformations nous a conduit à définir un modèle plastique écrouissable hyperbolique, beaucoup plus proche du comportement réel que le modèle plastique écrouissable exponentiel classique. Les conséquences pratiques de cette innovation restent à étudier.

ANNEXE

IDEALISATIONS CLASSIQUES DU FROTTEMENT

Le frottement est un phénomène physique très complexe faisant intervenir de nombreux paramètres : nature des matériaux en contact, états de surface, conditions de lubrification, température, pression normale à l'interface... L'influence de ceux-ci peut par ailleurs varier durant le formage.

Deux modèles sont utilisés :

. le modèle de COULOMB :

Le frottement est proportionnel à la pression normale à l'interface p . La contrainte tangentielle τ due au frottement est telle que

$$\tau = \mu p$$

μ : coefficient de frottement de COULOMB.

Sa direction est opposée à celle de la discontinuité de vitesse vue du matériau sur lequel on recherche l'effet du frottement.

Ce modèle peut être utilisé en mise à forme pour des pressions normales très élevées. Les conditions de plastification du matériau le plus tendre peuvent être atteintes. Le modèle de COULOMB doit alors être complété par la condition

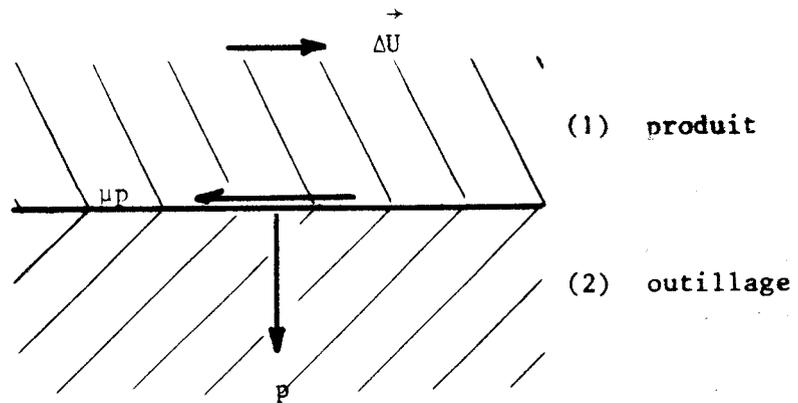
$$\tau \leq k$$

k : contrainte limite de cisaillement.

Soit l'expression complète (Figure 21) :

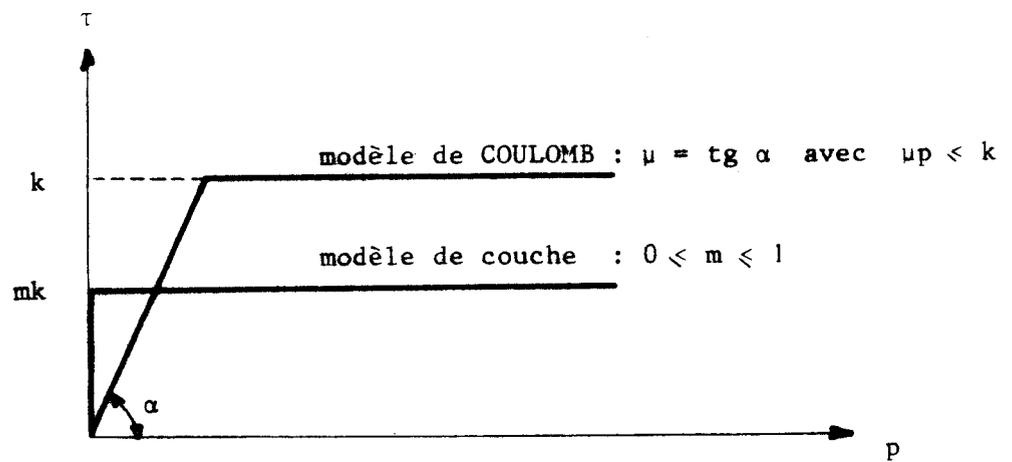
$$\tau = \mu p \quad \text{si} \quad \mu p \leq k$$

$$\tau = k \quad \text{si} \quad \mu p > k$$



- Figure 21 -

- Actions de contact avec frottement de COULOMB
d'un produit (1) sur un outillage (2) -



- Figure 22 -

- Actions tangentielles à la surface de contact
entre un produit et un outillage
selon le modèle de COULOMB et selon le modèle de couche -

Ce modèle a reçu certaines confirmations expérimentales par THOMSEN [5] .

. Le modèle de COUCHE LIMITE :

La contrainte tangentielle τ est constante et ne dépend pas des conditions de pression normale :

$$\tau = mk$$

m : coefficient de frottement de couche

$$0 \leq m \leq 1$$

Ce qui revient à considérer qu'il se forme une couche intermédiaire à l'interface dont les propriétés mécaniques soient plus faibles que celles du plus tendre des métaux (Figure 22) .

Ces deux modèles donnent des résultats équivalents lorsque μ tend vers l'infini et m égal à 1 .

Pratiquement, le modèle de COULOMB semble bien convenir dans les procédés de mise à forme à froid.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AVITZUR B. *Metal Forming.*
Processes and Analysis, Mc Graw Hill, 1968
- [2] BAQUE P., FELDER E., HYAFIL J., D'ESCATHA Y.
Mise en forme des Métaux.
Calculs par la Plasticité, Tomes 1 et 2,
Dunod 1973
- [3] JOHNSON W., MELLOR P.B. *Plasticity for mechanical Engineers.*
Van Nostrand, 1970
- [4] ROWE G.W. *An Introduction to the principles of metalworking.*
Edward Arnold, 1968
- [5] THOMSEN E., YANG C.T., KOBAYASHI S.
Mechanics of plastic deformation in metal processing.
Mac Millan, 1965
- [6] GUERLEMENT G., LAMBLIN D., OUDIN J., RAVALARD Y., SAVE M.
La mise à forme des métaux.
Calcul des procédés et amélioration des outillages.
Journées d'Etudes du Groupement pour l'Avancement
de la Mécanique Industrielle, MONS.
21 et 22 Novembre 1974. Revue M, Vol. 22, Déc. 1976.
- [7] KUDO H.
*Some analytical and experimental studies of
axisymmetric cold forging and extrusion.*
Int. J. Mech. Sci., 1960, Vol. 2, pp 102 - 107.
Int. J. Mech. Sci., 1961, Vol. 3, pp 91 - 117.
- [8] SIEBEL E.
Stahl und Eisen.
1923, 43, 1295.
- [9] COLLINS I. F.
*The upper bound theorem for rigid plastic solids
generalized to include Coulomb friction.*
J. Mech. Phys. Solids, 1969, Vol. 17, PP 323 - 338.

- [10] BOULGER F. W., HENNING H. J., BECKER J. R.
Upsets tests on steels for cold forging.
Annals of the Cirp, 1974, VOL. 23, pp 63 - 64.
- [11] ALTAN T., BOULGER F. W. *Flow stress of metals and its application in metal forming analysis.*
Journal of Engineering for Industry, Nov. 1973,
pp 1009 - 1019.
- [12] SUSUKI H. and Coll. *Studies on the flow stress of metals and alloys.*
Report of the Institute of Industrial Science
the University of Tokyo, 1968, Vol. 18, N° 3, pp 1 - 102
- [13] HSU T. C., YOUNG A. J. *Plastic deformation in the compression test of pure copper.*
Journal of Strain Analysis, 1967, Vol. 2, N° 2,
pp 159 - 170.
- [14] HILL R. *A general method of analysis for metal working processes.*
J. Mech. Phys. Solids, 1963, Vol. 11, pp 305 - 326.
- [15] NAGAMANTSU A., MUROTA T., JIMMA T.
On the non-uniform deformation of material in axially symmetric compression caused by friction.
Bulletin of the JSME, 1971, Vol. 14, N° 70, parts 1 and 2, pp 331 - 347.
- [16] LEE C. H., KOBAYASHI S. *Analysis of axisymmetric upsetting and plane-strain side-pressing of solid cylinders by the finite element method.*
Journal of Engineering for Industry, May 1971,
pp 445 - 454.

v

METHODE GENERALE DE TRAITEMENT AUTOMATIQUE

DES ECOULEMENTS PLANS EN MISE A FORME DES METAUX.

S O M M A I R E

La prévision par excès des efforts nécessaires à l'écoulement du matériau rigide plastique parfait, obéissant à la loi du potentiel plastique associée au critère de TRESCA, est obtenue à partir de champs de vitesses cinématiquement et plastiquement admissibles.

Une méthode systématique de constitution de champs de vitesses licites consiste à découper la zone déformée en régions rectangulaires. La puissance dissipée dans ces régions est calculée à partir des tables établies pour des régions rectangulaires unitaires.

Un programme de calcul effectue l'évaluation de la puissance dissipée totale et recherche les dimensions de la zone déformée et la forme des champs de vitesses qui conduisent à une puissance dissipée minimale.

Les exemples de traitement automatique concernent le forgeage, l'extrusion inverse, le forgeage-extrusion et le forgeage-matriçage de plusieurs pièces en déformation plane avec des conditions de frottement variables.

T A B L E D E S M A T I E R E S

	Page	2
1. INTRODUCTION.		
2. PREVISION D'ECOULEMENT PAR CHAMPS DISCONTINUS DE VITESSES EN DEFORMATION PLANE.		
2.1. Introduction.	3	
2.2. Théorème de la borne supérieure.	3	
2.3. Application du théorème de la borne supérieure aux champs discontinus par blocs de vitesse.	6	
3. REGIONS RECTANGULAIRES UNITAIRES DE H. KUDO.		
3.1. Introduction.	8	
3.2. Conditions au contour des régions rectangulaires unitaires. (RRU)	8	
3.3. Exemples de calcul des coefficients de puissance des régions rectangulaires unitaires.		
3.3.1. Détermination du coefficient de puissance pour une région RRU avec conditions $ssr(I)$.	13	
3.3.2. Détermination du coefficient de puissance pour une région RRU avec conditions $srsr(I)$.	19	
3.3.3. Détermination du coefficient de puissance pour une région RRU avec conditions $srsr(I)$ et formation d'un défaut.	19	
3.4. Coefficients de puissance pour diverses conditions de vitesse et de frottement aux frontières des régions RRU.	21	
3.5. Exemples d'utilisation des régions RRU.		
3.5.1. Principes d'utilisation.	27	
3.5.2. Estimation de la pression de forgeage en état plan de déformation.	27	

	Page
3.5.3. Estimation de la pression sur poinçon en extrusion plane inverse symétrique.	34
3.5.4. Estimation de la pression moyenne en forgeage-extrusion plane symétrique.	42
4. REGIONS RECTANGULAIRES UNITAIRES GENERALISEES.	
4.1. Introduction.	47
4.2. Conditions au contour des régions rectangulaires unitaires généralisées.	47
4.3. Régions rectangulaires unitaires généralisées plates.	
4.3.1. Introduction.	48
4.3.2. Région rectangulaire unitaire plate N° 1.	50
4.3.3. Région rectangulaire unitaire plate N° 5.	53
4.4. Régions rectangulaires unitaires généralisées hautes.	
4.4.1. Introduction.	56
4.4.2. Région rectangulaire unitaire haute N° 3.	56
4.4.3. Région rectangulaire unitaire haute N° 6.	59
4.4.4. Région rectangulaire unitaire haute N° 7 à défaut.	62
4.5. Tables des régions rectangulaires unitaires généralisées.	62
4.6. Région rectangulaire rigide N° 99.	72
5. TRAITEMENT AUTOMATIQUE.	
5.1. Introduction.	74
5.2. Définition des zones rectangulaires.	
5.2.1. Définition des données géométriques.	74
5.2.2. Définition des coefficients de frottement.	75
5.2.3. Superposition des écoulements.	75
5.2.4. Conditions de sortie.	84
5.3. Définition des flux de l'écoulement.	84

	Page
5.4. Calcul de la puissance dissipée.	
5.4.1. Régions rectangulaires généralisées plates.	85
5.4.2. Régions rectangulaires généralisées hautes.	85
5.4.3. Calcul de la pression sous l'outil.	86
5.5. Optimisation des dimensions des régions rectangulaires.	86
6. EEXEMPLES DE TRAITEMENT AUTOMATIQUE.	
6.1. Introduction.	87
6.2. Estimation de la pression de forgeage en état plan de dé- formation.	87
6.3. Estimation de la pression sur poinçon en extrusion plane symétrique.	90
6.4. Estimation de la pression sur matrice en forgeage-extrusion plane symétrique.	107
6.5. Estimation de la pression sur poinçon en forgeage-matriçage plan.	111
7. CONCLUSION.	120

1 - INTRODUCTION.

La prévision des écoulements plans de matière dans les procédés de mise à forme des métaux (forgeage, laminage, extrusion, étirage, ...) a été faite par de nombreux chercheurs [1] [6] qui ont utilisé le théorème de la borne supérieure [3] .

Le théorème de la borne supérieure (ou théorème cinématique) permet d'obtenir une valeur approchée par excès (ou borne supérieure) des efforts à mettre en jeu pour produire l'écoulement naissant de la matière [2] .

La prévision est d'autant plus proche des efforts réels que la puissance dissipée par le champ de vitesses approximatif diminue.

L'étude de chaque procédé de mise à forme des métaux nécessite la définition d'un ou plusieurs champs de vitesses nouveaux et l'exécution de calculs importants.

Dans le but de rendre les prévisions plus rapides et plus sûres, nous présentons ici une méthode automatique d'utilisation de champs discontinus de vitesse standard, qui généralisent les champs proposés par H. KUDO [5] . Ces champs standard peuvent être associés de différentes façons afin d'obtenir rapidement le champ de vitesses le meilleur possible pour un procédé.

2 - PREVISION D'ÉCOULEMENT PAR CHAMPS DISCONTINUS DE VITESSES EN DEFORMATION PLANE.

2.1. - Introduction.

La méthode de prévision consiste à approcher l'écoulement réel par des champs de vitesses, constitués par des zones ou blocs dans lesquels la vitesse des particules en tout point est identique [1] [4] .

Le théorème de la borne supérieure permet ensuite de choisir parmi les champs celui qui dissipe la puissance la plus faible comme meilleure prévision des efforts moteurs réels.

2.2. - Théorème de la borne supérieure.

Considérons le volume V du matériau en cours de formage, obéissant à la condition d'écoulement de MISES ou à la condition d'écoulement de TRESCA associée à la loi du potentiel plastique [2] .

Désignons par T^d les contraintes définies sur la surface S_T , par u^d les vitesses définies sur S_u et par k la contrainte limite d'écoulement en cisaillement pur le long d'une surface de discontinuité S_d (Figure 1) .

Soient

- . \vec{u}^* un champ de vitesses cinématiquement et plastiquement admissible défini dans le volume V ;
- . $\{\dot{\epsilon}^*\}$ les vitesses de déformation correspondantes au champ \vec{u}^* ;
- . $\{\sigma^*\}$ les contraintes associées à $\{\dot{\epsilon}^*\}$ par la loi d'écoulement.

De la même façon \vec{u} , $\{\dot{\epsilon}\}$ et $\{\sigma\}$ définissent le champ de vitesses réel, les vitesses de déformation correspondantes et les contraintes associées.

Les travaux virtuels s'expriment comme suit :

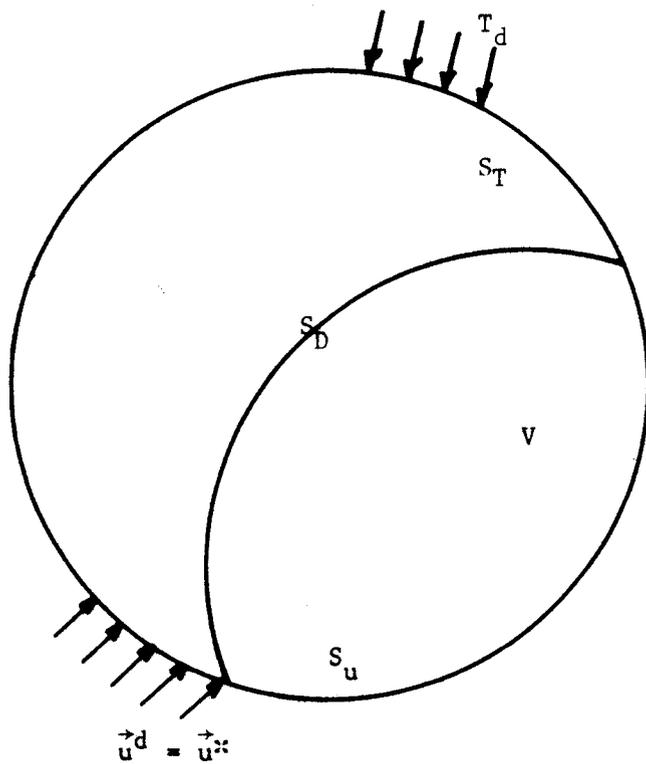
$$\begin{aligned} & \iint_{S_T} \vec{T}^d \cdot \vec{u}^* \cdot dS + \iint_{S_u} \vec{T} \cdot \vec{u}^d \cdot dS \\ & = \iiint_V \{\sigma\}^T \cdot \{\dot{\epsilon}^*\} \cdot dV + \iint_{S_D} k \cdot |\Delta u^*| \cdot dS \end{aligned} \quad (1)$$

Δu^* désigne dans cette expression la discontinuité de la composante tangentielle à S_D de la vitesse (*).

(*) $k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$ avec la condition d'écoulement de MISES

$k = \frac{\sigma_0}{2}$ avec la condition d'écoulement de TRESCA

σ_0 représente la contrainte normale d'écoulement du matériau rigide plastique en état linéaire de contraintes



- Figure 1 -

- Conditions aux limites
pour le théorème de la borne supérieure -



Le théorème du travail maximum [3] s'écrit :

$$\iint \iint_V \{\sigma^{**}\}^T \cdot \{\dot{\epsilon}^{**}\} \cdot dV \geq \iint \iint_V \{\sigma\}^T \cdot \{\dot{\epsilon}^{**}\} \cdot dV \quad (2)$$

Compte tenu de (1) , il vient :

$$\iint_{S_u} \vec{T} \cdot \vec{u}^d \cdot dS \leq \iint \iint_V \{\sigma^{**}\}^T \cdot \{\dot{\epsilon}^{**}\} \cdot dV + \iint_{S_D} k \cdot |\Delta u^{**}| \cdot dS - \iint_{S_T} \vec{T}^d \cdot \vec{u}^{**} \cdot dS \quad (3)$$

Une forme équivalente est obtenue en notant par \vec{U} la vitesse de l'outillage :

$$\iint_{S_u} \vec{T} \cdot \vec{u}^d \cdot dS \leq \iint \iint_V \{\sigma^{**}\}^T \cdot \{\dot{\epsilon}^{**}\} \cdot dV + \iint_{S_D} k \cdot |\Delta u^{**}| \cdot dS + \iint_{S_T} \vec{T}^d \cdot (\vec{U} - \vec{u}^{**}) \cdot dS \quad (4)$$

et

$$\vec{T} \cdot \vec{U} = \vec{T}^d \cdot \vec{U} + \vec{T} \cdot \vec{u}^d \quad (5)$$

Dans cette expression, le terme situé à gauche est égal à la puissance des efforts moteurs \dot{W}_e ; les termes situés à droite sont égaux, dans l'ordre de gauche à droite, à la puissance dissipée dans le volume (**), à la puissance dissipée dans la surface de discontinuité \dot{W}_T^{**} et à la puissance dissipée par frottement aux interfaces \dot{W}_F^{**} pour le champ de vitesses \vec{u}^{**} .

2.3. - Application du théorème de la borne supérieure aux champs discontinus par blocs de vitesse.

Lorsque l'écoulement du produit de volume V est décrit par des blocs de vitesse , la puissance dissipée dans le volume

$$\iint \iint_V \{\sigma^{**}\}^T \cdot \{\dot{\epsilon}^{**}\} \cdot dV$$

est nulle.

(**) $\{\sigma^{**}\}^T \cdot \{\dot{\epsilon}^{**}\}$ est équivalent à $\sigma_o \cdot \dot{\epsilon}^{**}$.

$\dot{\epsilon}^{**}$ est appelée vitesse de déformation généralisée.

Le théorème de la borne supérieure devient d'après (4) :

$$\iint_{S_u} \vec{T} \cdot \vec{u}^d \cdot dS \leq \iint_{S_D} k \cdot |\Delta u^*| \cdot dS + \iint_{S_T} \vec{T}^d \cdot (\vec{U} - \vec{u}^*) \cdot dS \quad (6)$$

ou équivalentement :

$$\dot{W}_e \leq \dot{W}_i^* + \dot{W}_f^* \quad (7)$$

La puissance \dot{W}_f^* peut s'écrire :

$$\dot{W}_f^* = m k \iint_{S_T} (\vec{U} - \vec{u}^*) \cdot dS \quad (8)$$

Dans cette expression, $m k$ désigne la contrainte tangentielle à la surface de contact S_T qui est due au frottement entre l'outillage et le matériau.

Sa valeur est inférieure ou à la limite égale à la contrainte d'écoulement k en cisaillement pur selon la valeur choisie pour le coefficient m ($0 \leq m \leq 1$).

Ainsi, une valeur par excès de la pression moyenne \bar{p} exercée par un outillage animé d'une vitesse \vec{U} perpendiculaire à sa surface active S_u est obtenue par

$$\bar{p} \leq \frac{\dot{W}_i^* + \dot{W}_f^*}{S_u \cdot U} \quad (9)$$

Nous présentons dans ce qui suit les moyens de calculer rapidement les puissances \dot{W}_i^* et \dot{W}_f^* pour divers procédés de mise à forme des métaux.

3 - REGIONS RECTANGULAIRES UNITAIRES DE H. KUDO.

3.1. - Introduction.

La description des écoulements plans de produits en cours de déformation, utilisant des champs discontinus de vitesses par blocs, fait apparaître fréquemment des blocs de vitesse triangulaires.

Ces blocs, associés les uns aux autres, peuvent former un ou plusieurs rectangles qui recouvrent la région déformée.

La puissance dissipée dans ces rectangles peut être évaluée une fois pour toutes, en fonction du rapport hauteur-longueur et des conditions aux contours.

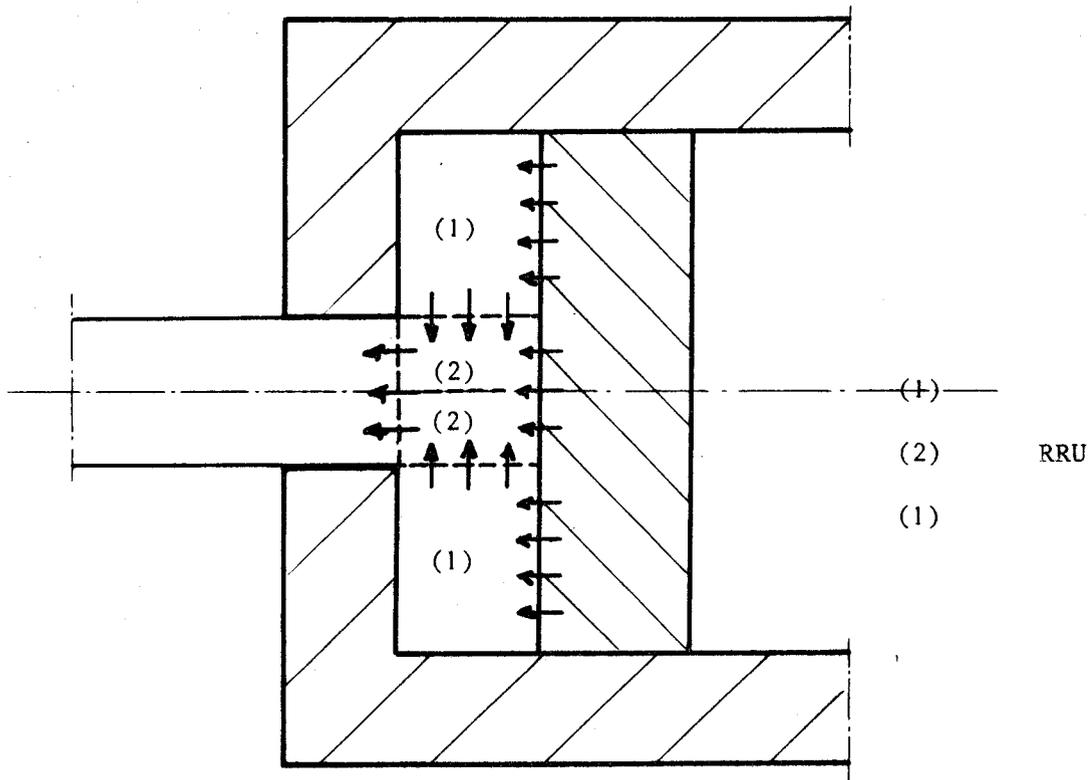
Ces rectangles sont nommés régions rectangulaires unitaires (en abrégé RRU) . Leur longueur est égale à l'unité et leur hauteur égale à a .

Une série de champs par blocs a été établie par chaque type possible de régions rectangulaires unitaires. Ont été déterminées, en faisant varier la position des lignes de discontinuité entre les blocs triangulaires, des relations reliant la puissance dissipée \dot{W}_1^* aux paramètres géométriques définissant les frontières entre les blocs.

Pour décrire l'écoulement du produit, la région déformée est découpée en régions rectangulaires unitaires (Figure 2) . Ensuite la plus faible valeur des efforts moteurs est obtenue en optimisant les dimensions des régions rectangulaires unitaires et le nombre de blocs constitutifs de chaque région.

3.2. - Conditions au contour des régions rectangulaires unitaires (RRU).

Les sommets d'une région rectangulaire unitaire sont numérotés 1, 2, 3 et 4. Elle est entourée par des zones rigides qui peuvent être soit un outil, soit de la matière.



- Figure 2 -

- Découpage de la zone déformée
en extrusion plane symétrique en régions rectangulaires -



Les vitesses au contour sont les suivantes (Figure 3) :

- . A la frontière 13, la vitesse est normale et dirigée vers l'intérieur de la RRU.
- . A la frontière 34, la vitesse est normale et dirigée vers l'extérieur de la RRU.

En prenant égale à l'unité la vitesse d'entrée sur 13, la vitesse de sortie sur 34 est égale à $1/a$, a étant le rapport hauteur-longueur de la région rectangulaire unitaire.

Il est envisagé trois conditions de sortie à la frontière 34 :

- . La frontière 34 correspond à une surface libre (Figure 4) ; cette condition est notée ℓ .
- . La matière située au delà de 34, à l'extérieur de la RRU, se déplace dans la direction normale à la frontière 34 ; cette condition est notée (I) (Figure 5) .
- . La matière située au delà de 34 se déplace dans la direction normale à la frontière 34 à la vitesse $1/a$ et dans la direction tangentielle à 34 à la vitesse 1 ; cette condition est notée (II) (Figure 6) .

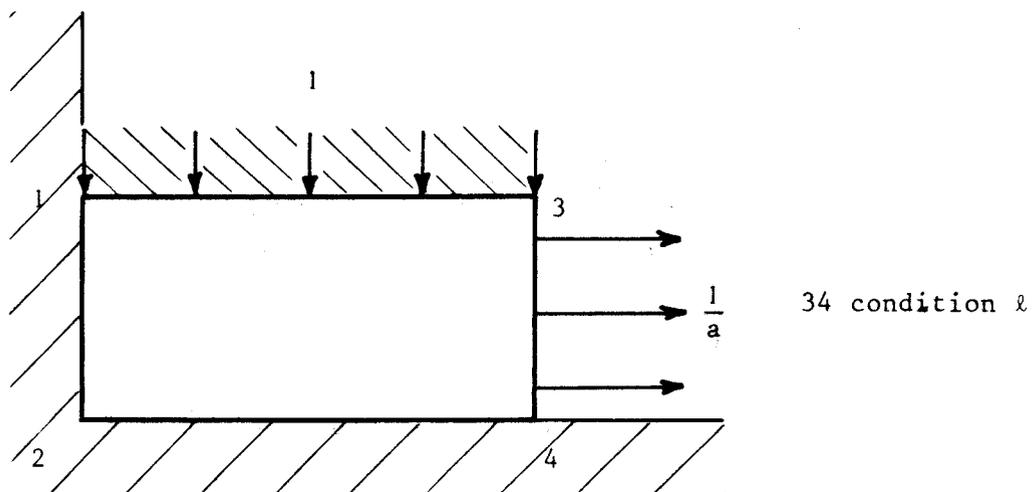
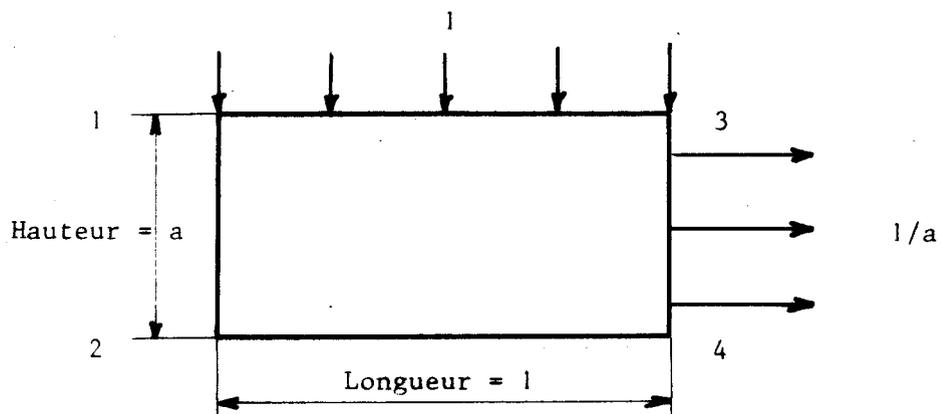
Les conditions de frottement relatives aux frontières 12, 13, 24, 34 sont de deux types :

- . Le contact est sans frottement (par exemple avec un outillage parfaitement lubrifié) ; cette condition est notée (s) .
- . Le contact est collant (par exemple avec une autre partie du matériau) ; cette condition est notée (r) .

Ainsi, si le contact le long des frontières 12, 13 et 24 est sans frottement et si le contact le long de 34 est collant, on notera ces conditions par sss r .

- Figure 3 -

- Région rectangulaire unitaire -
- Conditions cinématiques sur 13 et 34 -



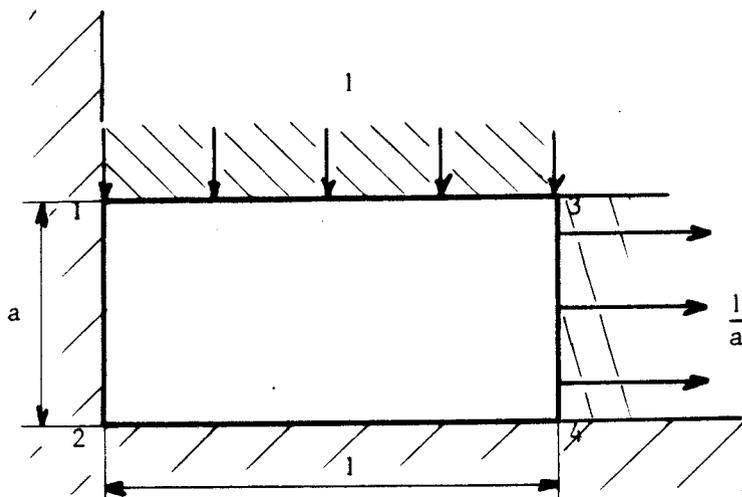
- Figure 4 -

- Région rectangulaire unitaire -
Surface libre 34 -

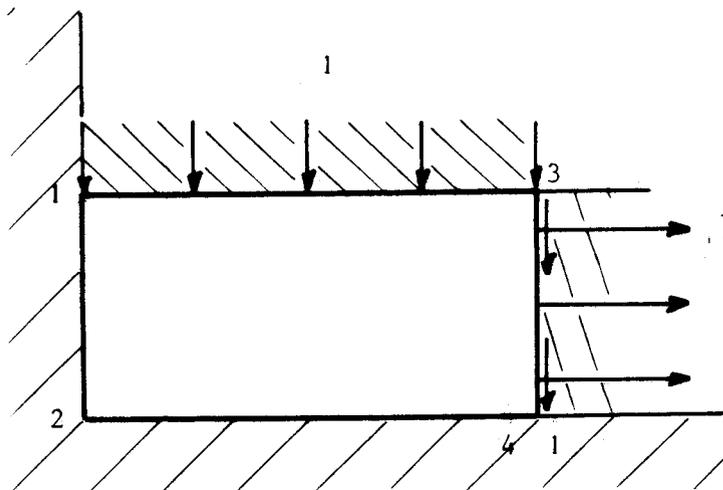


- Figure 5 -

- Région rectangulaire unitaire -
- Condition (I) sur 34 -



34 condition (I)



34 condition (II)

- Figure 6 -

- Région rectangulaire unitaire -
- Condition (II) sur 34 -



3.3. - Exemples de calcul des coefficients de puissance des régions rectangulaires unitaires.

Le coefficient de puissance est une quantité sans dimension qui a pour expression :

$$e = \frac{\dot{W}_i^{**} + \dot{W}_f^{**}}{\sigma_0 \cdot S \cdot U} \quad (10)$$

\dot{W}_i^{**} désigne la puissance dissipée dans la région RRU, S la surface de la frontière l3 et U la vitesse d'entrée sur l3.

En prenant égale à l'unité la surface de la frontière l3, il vient :

$$e = \frac{\dot{W}_i^{**} + \dot{W}_f^{**}}{\sigma_0} \quad (11)$$

Avec la condition d'écoulement de TRESCA

$$e = \frac{\dot{W}_i^{**} + \dot{W}_f^{**}}{2k} \quad (12)$$

Nous développons dans ce qui suit les calculs des coefficients de puissance e pour trois types de régions RRU. Les résultats du calcul des coefficients de puissance relatifs à d'autres régions types seront rassemblés dans les tableaux 1, 2 et 3.

3.3.1. - Détermination du coefficient de puissance pour une région RRU avec conditions s s s r (I) .

a) Premier cas : $a < 1$

La région est formée par n+1 blocs triangulaires (Figure 7) numérotés (1), (2), (3) ... (n+1) . Ils sont répartis de telle façon que les hauteurs de chaque bloc divisent la région en n cellules égales de longueur 1/n . Cette répartition conduit au champ qui dissipe la puissance la plus faible.

L'hodographe des vitesses (Figure 8) est construit d'après la géométrie des blocs pour satisfaire les conditions cinématiques à chaque surface de discontinuité. En particulier, la vitesse $\langle 01 \rangle$ du bloc (1) est égale à 1, la vitesse $\langle 04 \rangle$ du bloc (4) est égale à $1/a$.

D'après l'expression (6), la puissance dissipée à l'intérieur de la région a pour valeur :

$$\dot{W}_i^* = k \sum_1^{n-1} \{ \langle i, i+1 \rangle \cdot \lambda_{i, i+1} \} \quad (13)$$

avec

- $\langle i, i+1 \rangle$ est la vitesse de discontinuité tangentielle à la frontière entre le bloc (i) et le bloc (i+1) ;
- $\lambda_{i, i+1}$ est la surface de la frontière entre (i) et (i+1) ; l'épaisseur de la région RRU est prise égale à l'unité. $\lambda_{i, i+1}$ est donc la trace de cette frontière dans le plan de représentation.

Pour chaque discontinuité, la puissance dissipée est :

$$k \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n^2 a^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n^2} + a^2}$$

Soit pour n discontinuités :

$$\dot{W}_i^* = k a \left(n + \frac{1}{na^2} \right) \quad (14)$$

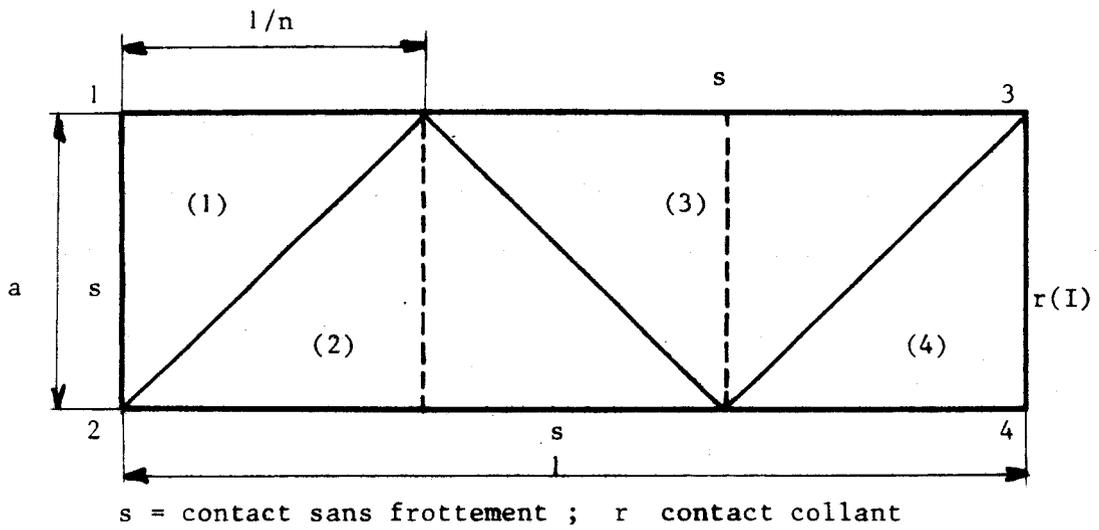
La puissance dissipée par frottement aux frontières de la région RRU est ici

$$\dot{W}_f^* = 0$$

D'après (12), le coefficient de puissance vaut :

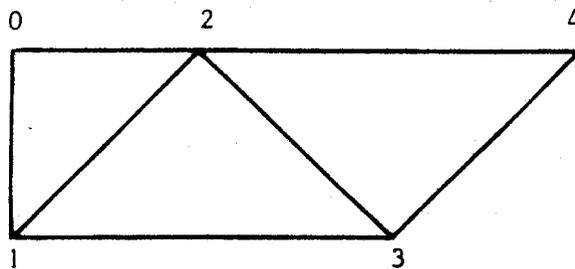
$$e_{sssr}(I) = \frac{1}{2} \left(na + \frac{1}{na} \right) \quad (15)$$

avec $a < 1$.



- Figure 7 -

- Région rectangulaire unitaire $sssr(I)$ -
 $a < l$



$\langle 01 \rangle = 1$
 $\langle 04 \rangle = 1/a$

- Figure 8 -

- Hodographe pour la région RRU $sssr(I)$ -
 $a < l$



b) Deuxième cas : $a > 1$

La région est formée de n cellules (Figure 8) et $2n$ blocs.

La hauteur de cellule adjacente à la frontière 13 est égale à

$$\frac{3}{4(n - \frac{1}{4})}$$

Les frontières entre les blocs sont parallèles deux à deux.

Cette géométrie conduit au meilleur champ au sens du théorème de la borne supérieure. L'hodographe des vitesses est représenté à la figure 10.

La puissance dissipée dans les discontinuités se calcule à partir de la relation (13) :

. Discontinuité <12> :

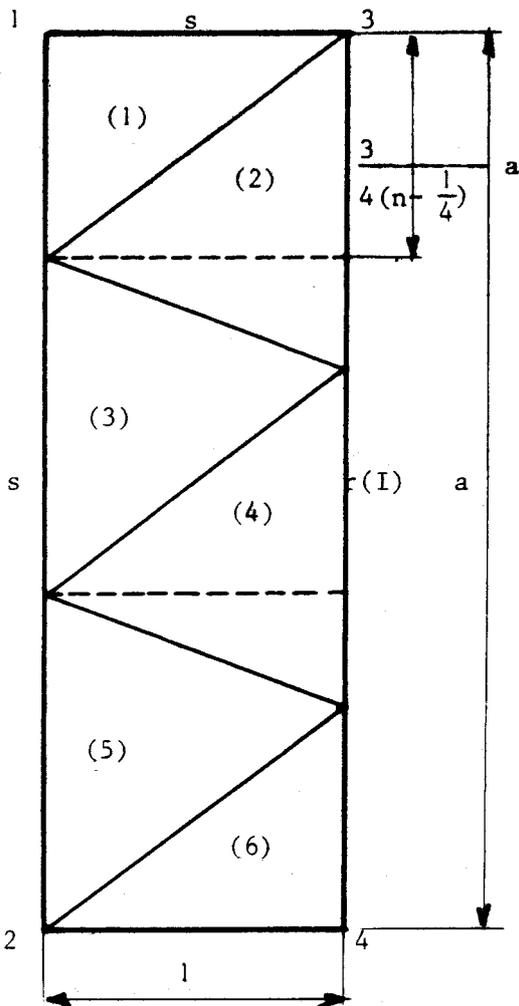
$$k \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{9}{16(n - 1 + \frac{3}{4})^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{9a^2}{16(n - 1 + \frac{3}{4})^2}}$$

. Discontinuité <23> :

$$k \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{16(n - 1 + \frac{3}{4})^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{16(n - 1 + \frac{3}{4})^2}}$$

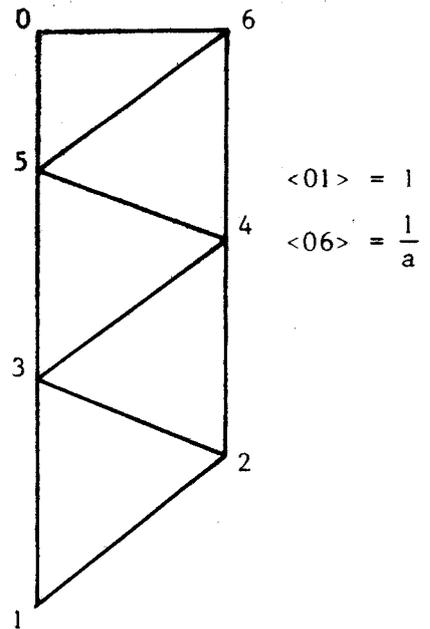
Des relations analogues sont obtenues pour les discontinuités suivantes. Pour n cellules, il y a n discontinuités identiques à <12> et $n-1$ discontinuités identiques à <23> .

s contact sans frottement
 r contact collant



- Figure 9 -

- Région rectangulaire unitaire
 sss r(I) -
 a > 1



- Figure 10 -

- Hodographe pour la région RRU
 sss r(I) -
 a > 1



Il vient donc :

$$\dot{W}_i^{**} = k \left[na \left\{ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{(4n-1)^2} \right\} + (n-1) a \left\{ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(4n-1)^2} \right\} \right] \quad (16)$$

De la puissance est dissipée par frottement pour toutes les frontières des blocs communes à la limite 34 de la région RRU, à l'exception de celle appartenant au bloc (2n).

\dot{W}_f^{**} comporte une suite de n-1 termes en progression arithmétique.

A la frontière du bloc (2) commune avec la frontière 34 de la région RRU :

$$k \cdot \frac{2}{\left(n-1 + \frac{3}{4}\right)} \cdot \frac{a}{\left(n-1 + \frac{3}{4}\right)}$$

A la frontière du bloc (4) commune avec la frontière 34 de la région RRU :

$$k \cdot \frac{1}{\left(n-1 + \frac{3}{4}\right)} \cdot \frac{a}{\left(n-1 + \frac{3}{4}\right)}$$

Soit finalement pour n cellules :

$$\dot{W}_f^{**} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{a}{\left(n - \frac{1}{4}\right)^2} \quad (17)$$

Compte tenu de (16) et (17), le coefficient de puissance a pour valeur :

$$e_{\text{sss } r(I)} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{a} + \frac{n + \frac{1}{2}}{4n-1} a \quad (18)$$

avec $a > 1$.

3.3.2. - Détermination du coefficient de puissance pour une région RRU avec conditions sr sr (I) .

a) Premier cas : $a < 1$

La région est toujours formée de n cellules (Figure 11) ; les discontinuités sont toujours parallèles deux à deux et les hauteurs des triangles parallèles à 13 divisent les bases dans les rapports $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$.

L'hodographe des vitesses de $2n$ blocs est représenté à la figure 12.

Le calcul des puissances dissipées \dot{W}_i^* et \dot{W}_f^* est conduit comme précédemment.

Le coefficient de puissance pour cette région est :

$$e_{srsr}(I) = \left(n - \frac{1}{2}\right) a + \frac{n + \frac{1}{2}}{4n - 1} \frac{1}{a} \quad (19)$$

avec $a < 1$.

b) Deuxième cas : $a > 1$

Les n cellules qui forment la région sont celles de la figure 9 ; l'hodographe est toujours celui de la figure 10.

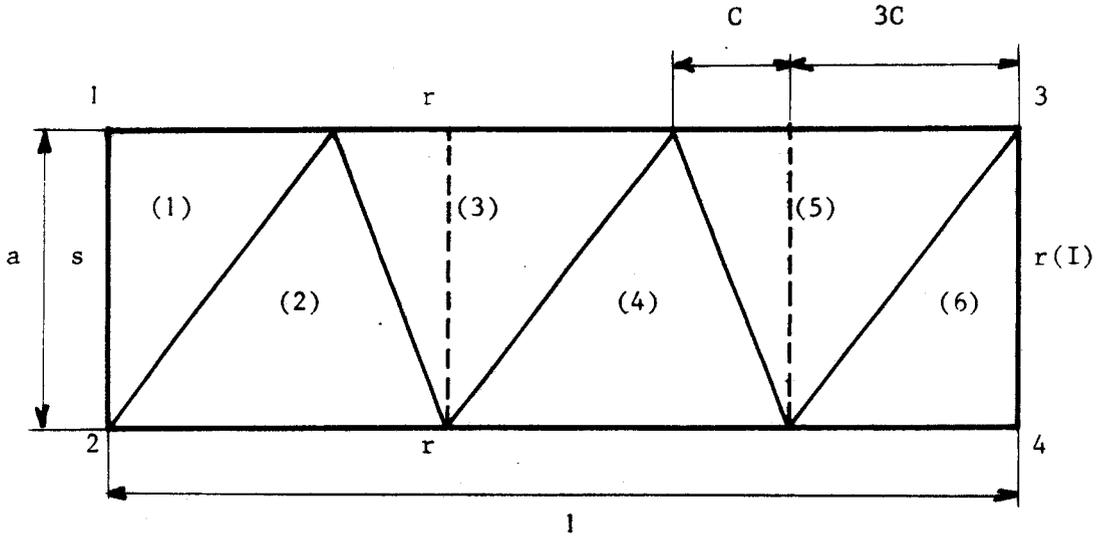
La frontière 13 assure un contact collant, mais compte tenu de la vitesse du bloc, il n'y a de puissance dissipée par frottement.

Le coefficient de puissance est donc celui de la relation (18) :

$$e_{srsr}(I) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{a} + \frac{n + \frac{1}{2}}{4n - 1} a \quad (20)$$

3.3.3. - Détermination du coefficient de puissance pour une région RRU avec conditions srsr(I) et formation d'un défaut.

La région RRU , représentée à la figure 13, permet d'envisager la formation d'une cavité le long de la frontière 12 .

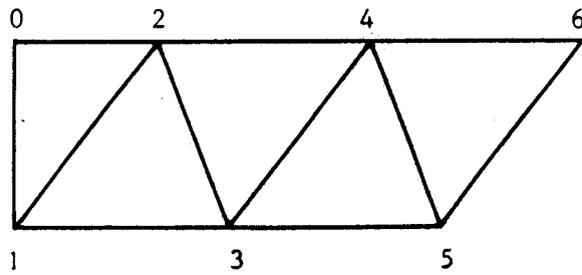


s contact lisse ; r contact collant

- Figure 11 -

- Région rectangulaire unitaire srsr(I) -

$a < l$



$$\langle 01 \rangle = 1$$

$$\langle 06 \rangle = \frac{1}{a}$$

- Figure 12 -

- Hodographe pour la région RRU srsr(I) -

$a < l$



L'hodographe est représenté à la figure 14.

La puissance dissipée se réduit à :

$$\dot{W}_i^* = k \langle 12 \rangle \cdot \ell_{12}$$

et

$$\dot{W}_f^* = 0$$

Le coefficient de puissance est donc :

$$\begin{aligned} e_{\text{srsr}(I)} &= 1 & a > 1 & \quad (21) \\ \text{cavité sur 12} & & & \end{aligned}$$

3.4. - Coefficients de puissance pour diverses conditions de vitesse et de frottement aux frontières des régions RRU .

Les tableaux 1, 2 et 3 donnent une sélection des meilleurs champs de vitesses pour différentes conditions de frottement et de vitesses aux contours des régions rectangulaires unitaires.

Les valeurs des coefficients de puissance sont regroupées

- . dans le tableau 1 pour les régions RRU plates ($a < 1$) ;
- . dans le tableau 2 pour les régions RRU hautes ($a > 1$) ;
- . dans le tableau 3 pour les régions RRU hautes à défauts.

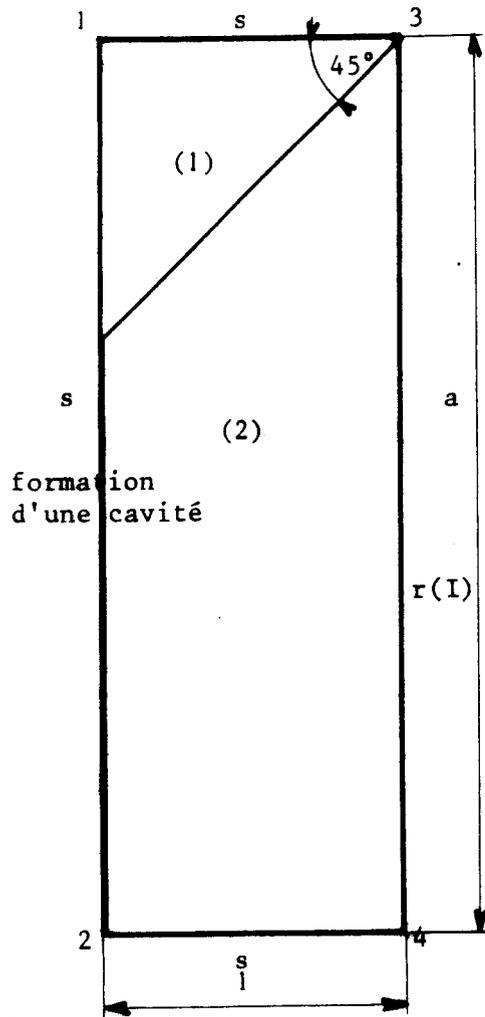
Les repères situés à gauche de chaque groupe de régions RRU définissent les conditions aux frontières.

Ainsi, la notation s r s l indique

- . un contact sans frottement sur 12
- . un contact collant sur 13
- . un contact sans frottement sur 24
- . une surface libre sur 34

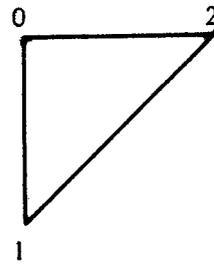
s contact sans frottement

r contact collant



- Figure 13 -

- Région rectangulaire unitaire
sssr(I) avec défaut sur 12 -



$$\langle 01 \rangle = 1$$

$$\langle 02 \rangle = 1$$

- Figure 14 -

- Hodographe pour la région RRU
sssr(I) avec défaut sur 12 -



- Coefficients de puissance des régions rectangulaires unitaires plates -

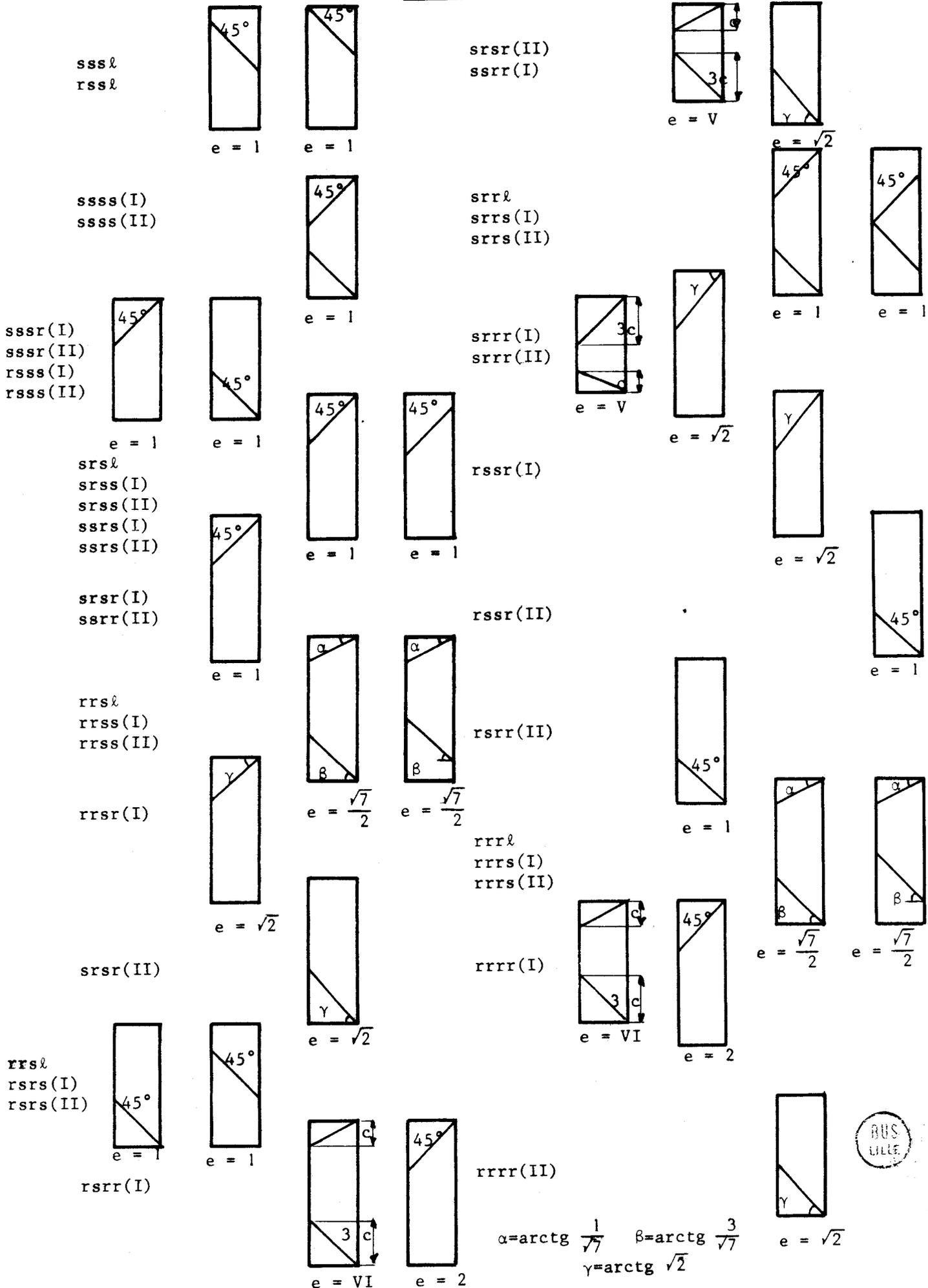
		$a < 1$		
sssl			srsr(II)	
rssl			ssrr(I)	
		$e = 1$		$e = \text{IV} (H = a)$
ssss(I)			srrl	
ssss(II)			srrs(I)	
		$e = \text{I} (H = \frac{a}{2})$	srrs(II)	
				$e = \text{II} (H = \frac{a}{2})$
sssr(I)			srrr(I)	
sssr(II)			srrr(II)	
rsss(I)		$e = \text{I} (H = a)$		$e = \text{II} (H = \frac{a}{2}) + \frac{a}{4}$
rsss(II)				
srsr(I)			rssr(I)	
srsr(II)			rssr(II)	
srss(I)		$e = \text{II} (H = a)$		$e = \text{I} (H = 2a)$
srss(II)				
srrr(I)			rssr(II)	
ssrr(II)		$e = \text{II} (H = a)$		$e = \text{I} (H = a)$
rrsl			rsrr(II)	
rrss(I)		$e = \text{IV} (H = a)$		$e = \text{II} (H = a)$
rrss(II)				
rrsr(I)			rrrl	
		$e = \text{IV} (H = a)$	rrrs(I)	
			rrrs(II)	
				$e = \text{II} (H = \frac{a}{2}) + \frac{a}{4}$
				$n \geq 2$
srsr(II)			rrrr(I)	
		$e = \text{II} (H = a)$		$e = \text{I} (H = \frac{a}{2}) + \frac{a}{2}$
				$n \geq 2$
rrsl			rrrr(II)	
rrsr(I)		$e = \text{II} (H = a)$		$e = \text{II} (H = \frac{a}{2}) + \frac{a}{2}$
rrsr(II)				$n \geq 3$
rsrr(I)			rrrr(II)	
		$e = \text{IV} (H = a)$		$e = \frac{7}{6} a + \frac{5}{7a}$
				$e = \text{III} (H = a)$
				$n = 1$

BUS LILLE

- Tableau 3 -

- Coefficients de puissance des régions rectangulaires hautes avec défauts -

$a > l$



$\alpha = \arctg \frac{1}{\sqrt{7}}$
 $\beta = \arctg \frac{3}{\sqrt{7}}$
 $\gamma = \arctg \sqrt{2}$

L'expression située en-dessous de chaque groupe de régions RRU donne la valeur du coefficient de puissance e en fonction des expressions suivantes :

$$I = \frac{1}{2} \left(nH + \frac{1}{nH} \right) \quad (22)$$

$$II = \left(n - \frac{1}{2} \right) H + \frac{n + \frac{1}{2}}{4n - 1} \frac{1}{H} \quad (23)$$

$$III = \left(n - \frac{1}{2} \right) H + \frac{n}{4n - 3} \frac{1}{H} \quad (24)$$

$$IV = nH + \frac{n + \frac{3}{4}}{4n} \frac{1}{H} \quad (25)$$

$$V = \frac{1}{4} \sqrt{16 - a^2} + \frac{1}{4} a \quad (26)$$

$$VI = \frac{\sqrt{7}}{8} \sqrt{16 - a^2} + \frac{3}{8} a \quad (27)$$

Pour calculer le coefficient de puissance par l'expression

$$e = II \quad (H = a)$$

il faut utiliser la relation (23) en remplaçant $H = a$.

L'utilisation de ces relations est faite manuellement dans les exemples qui suivent.



3.5. - Exemples d'utilisation des régions RRU .

3.5.1. - Principes d'utilisation.

La détermination d'un écoulement à l'aide des régions RRU définies aux tableaux 1, 2 et 3, s'effectue comme suit :

- . Découpage de la zone déformée en régions RRU ;
- . Définition, par chaque région, des conditions aux contours ;
- . Choix dans les tableaux 1, 2 ou 3 de la région RRU et calcul du coefficient de puissance e ; éventuellement déterminer le nombre n de cellules constitutives de la région pour rendre le coefficient e minimum ;
- . Evaluation de la puissance interne dissipée dans chaque région rectangulaire réelle par la relation :

$$2k \cdot e \cdot S_{13} \cdot u_{13} \quad (28)$$

Dans cette relation S_{13} est la surface de la frontière 13 et u_{13} est la vitesse normale à cette surface (relations (10) (12)) ;

- . Cumul des puissances dissipées dans chaque région rectangulaire réelle ;
- . Evaluation, selon les cas, des rapports "a" de chaque zone pour minimiser la puissance dissipée totale ;
- . Détermination de la valeur estimée par excès des efforts moteurs.

Nous présentons maintenant quelques exemples d'utilisation des tables de régions rectangulaires unitaires.

3.5.2. - Estimation de la pression de forgeage en état plan de déformation.

Considérons le forgeage, en état plan de déformation, d'un lopin de dimensions $2B \times 2T$ entre deux matrices planes parallèles (Figure 28) . Il s'agit de déterminer la meilleure valeur de la pression moyenne de forgeage, susceptible de produire l'écoulement naissant du lopin.

Le lopin est découpé en deux régions RRU symétriques.

Avec un contact collant entre les matrices et le lopin, nous avons donc les conditions suivantes (3.4.) :

s	r	r	l
12	13	24	34

La frontière 12 correspond à un contact sans frottement en raison de la symétrie du procédé.

La tableau 1 nous donne les valeurs de coefficients de puissance suivants :

$$e = II \left(H = \frac{a}{2} \right) \quad T/B < 1 \quad (29)$$

$$e = I \left(H = \frac{2}{a} \right) \quad T/B > 1 \quad (30)$$

$$e = 1 \quad T/B > 1 \quad (31)$$

D'après l'expression (28) , la puissance dissipée par le forgeage d'un demi-lopin en écoulement naissant est :

$$\dot{W}_1^{**} + \dot{W}_f^{**} = 2k \cdot e \cdot (B \cdot l) \cdot U$$

La puissance des efforts moteurs a pour valeur :

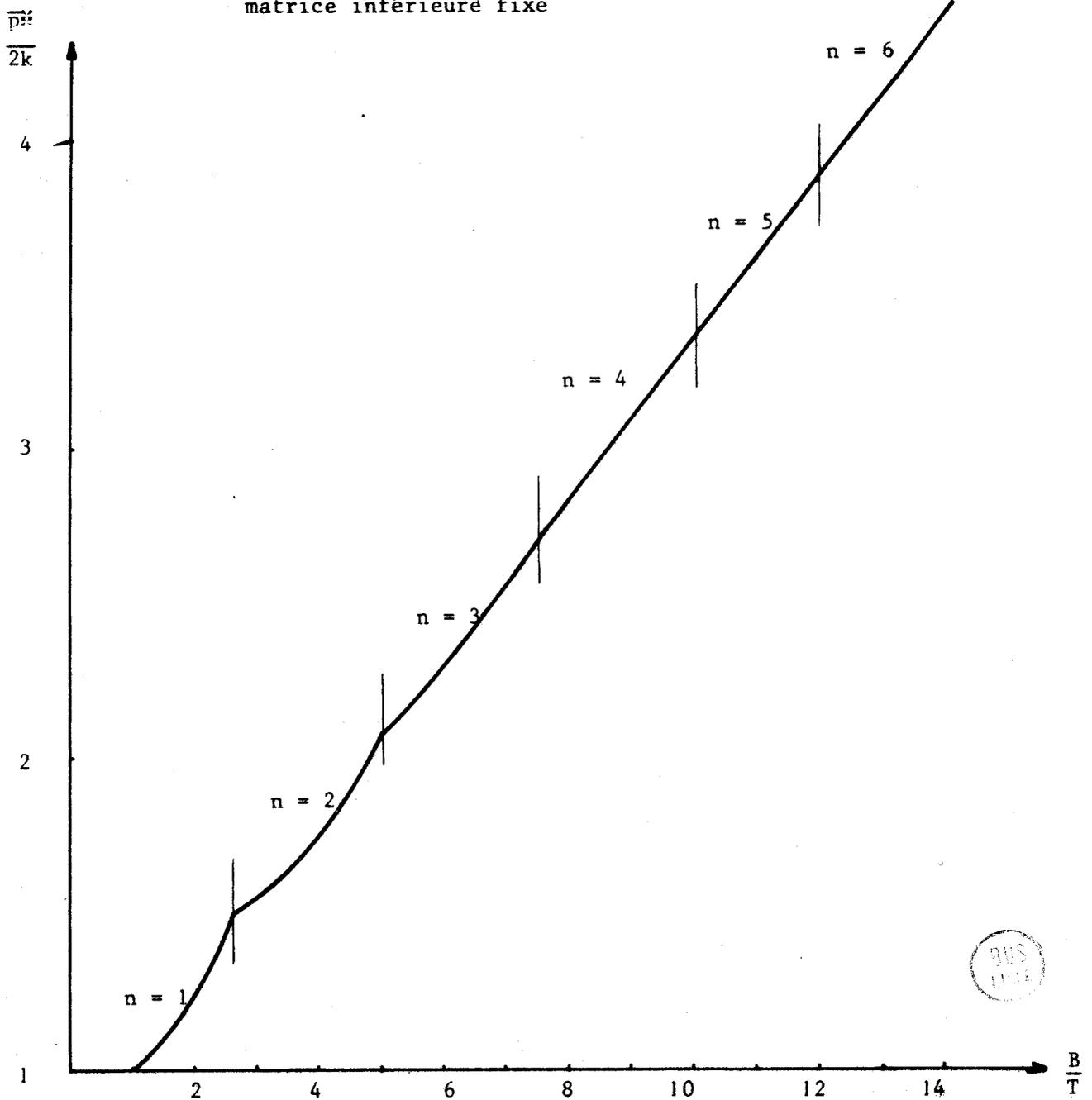
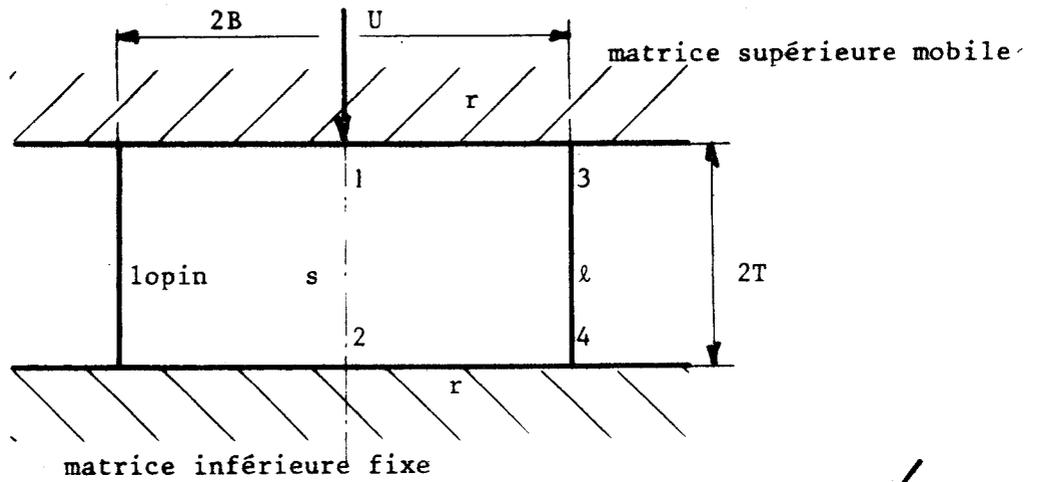
$$W_e = \bar{p} \cdot (B \cdot l) \cdot U$$

La pression moyenne de forgeage \bar{p} est donc :

$$\frac{\bar{p}}{2k} \leq e \quad (32)$$

- Figure 28 -

- Forgeage en état plan de déformation -



- Figure 29 -

- Meilleures valeurs de la pression moyenne de forgeage $\bar{p}^*/2k$ en état plan de déformation obtenues par RRU avec contact collant entre les plateaux et le lopin -

. Premier cas : $T/B < 1$

Nous avons d'après (23) :

$$\frac{\bar{p}^*}{2k} = e = II = (n - 1) \frac{T}{B} + \frac{n + \frac{1}{2}}{4n - 1} \frac{B}{T} \quad (33)$$

avec $n = 1, 2, 3$ et $T/B < 1$.

Les valeurs successives de la pression moyenne estimée $\bar{p}^*/2k$ en fonction du rapport B/T des dimensions du lopin et du nombre de cellules n constitutives des régions RRU sont reportées au tableau 4.

Ainsi peuvent être choisis, pour chaque valeur de B/T , les nombres de cellules constitutives qui donnent la plus faible valeur de la pression $\bar{p}^*/2k$.

La figure 29 donne l'évolution de la pression $\bar{p}^*/2k$ ainsi obtenue en fonction du rapport longueur/hauteur du lopin.

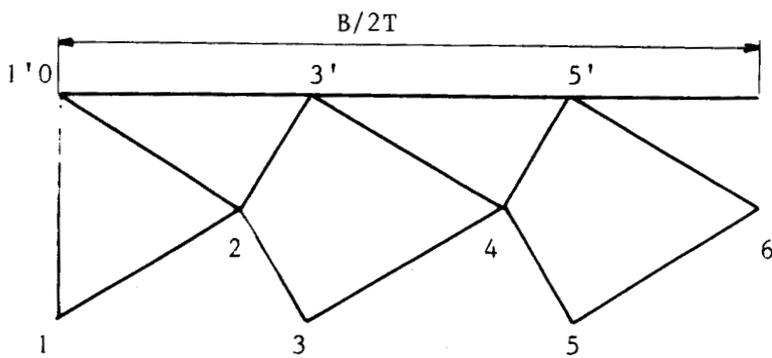
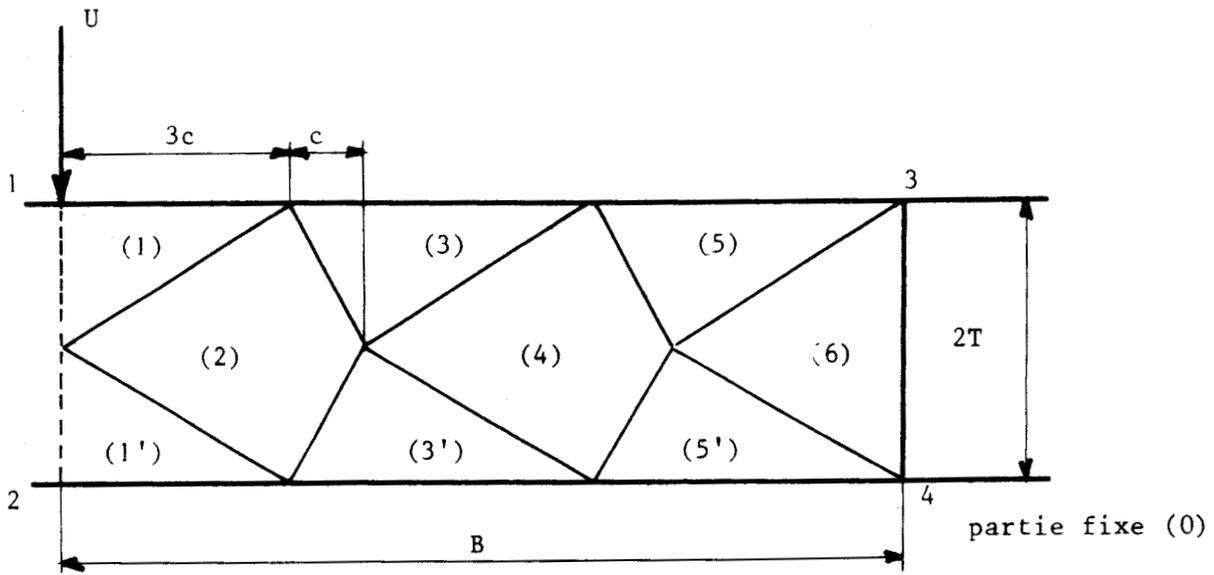
La figure 30 représente la région RRU (et son hodographe associé) qui fournit la plus faible estimation de $\bar{p}^*/2k$ pour un rapport B/T de 6 ; la région RRU est alors constituée de trois cellules.

$\bar{p}^*/2k$ B/T	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6
1	1					
1,5	1.08					
2	1.25					
2,5	1.45	1.49				
3	1.67	1.57				
4	2.13	1.8	1.9			
5		2.09	2.09	2.2		
6		2.39	2.33	2.38		
7		2.71	2.58	2.6		
8			2.86	2.84	2.88	
9			3.14	3.09	3.11	3.15
10				3.35	3.34	3.38
11				3.62	3.59	3.61
12					3.85	3.85
13					4.11	4.10
14						4.35

- Tableau 4 -

- Valeurs de la pression moyenne de forgeage $\bar{p}^*/2k$
 en fonction du rapport B/T et du nombre n de cellules constitutives des régions RRU -





$\langle 01 \rangle = 1$

- Figure 30 -

- Constitution de la région rectangulaire en forgeage
pour un rapport longueur-hauteur B/T de 6 -



. Deuxième cas : $T/B > 1$

La meilleure des deux estimations du coefficient de puissance fournies par les relations (30) et (31) est :

$$\bar{p}^*/2k = e = 1 \quad T/B > 1 \quad (34)$$

Une formation de défaut est prévue pour ces valeurs.

Remarque 1 :

Il est également possible de suivre l'évolution de la pression moyenne de forgeage au cours de l'opération complète considérée comme une suite d'écoulements naissants. La hauteur T désigne alors la hauteur instantanée du lopin ; à chaque étape, le graphique de la figure 29 donne aussi la valeur estimée par excès de la pression moyenne $\bar{p}^*/2k$ instantanée de forgeage.

Remarque 2 :

Les estimations de la pression moyenne de forgeage avec un contact collant entre lopin et outillage faites avec des champs de vitesses continus par réseaux de lignes de glissement conduisent à des résultats légèrement plus faibles [4]. Les calculs par régions rectangulaires sont par contre beaucoup plus rapides.

3.5.3. - Estimation de la pression sur poinçon en extrusion plane inverse symétrique.

Le lopin à déformer est placé dans une matrice. Un poinçon à fond plat vient agir sur le lopin et provoque l'écoulement vers l'extérieur. (Figure 31) .

Nous considérons le cas où les contacts des outillages avec le lopin sont sans frottement.

Le lopin est découpé en quatre régions rectangulaires situées de part et d'autre de l'axe de symétrie.

Les conditions pour ces régions sont les suivantes :

- . sss r(I) pour les régions (1) et (1')
- . srs l pour les régions (2) et (2')

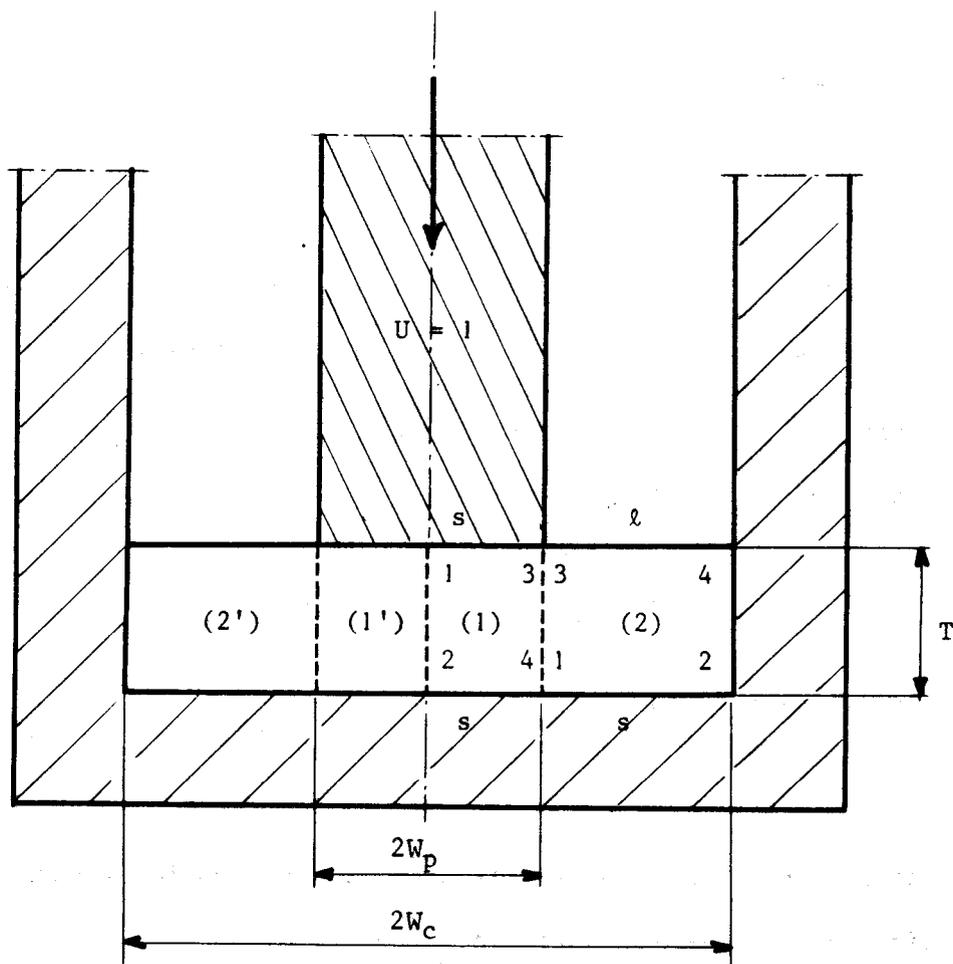
Les coefficients de puissance pour ces régions sont les suivants (Tableaux 1, 2 et 3) :

- . Région (1) - sss r(I)
 - $a_1 < 1$ $e_1 = I$ ($H = a$)
 - $a_1 > 1$ $e_1 = II$ ($H = \frac{1}{a}$)
 - $e'_1 = 1$ avec défaut
- . Région (2) - srs l
 - $a_2 < 1$ $e_2 = II$ ($H = a$)
 - $a_2 > 1$ $e_2 = I$ ($H = \frac{1}{a}$)
 - $e'_2 = 1$ avec défaut

Soit R le rapport de la largeur du poinçon $2W_p$ à la largeur de conteneur $2W_c$.

$$R = \frac{W_p}{W_c}$$

avec pour la région (1)



- Figure 31 -

- Extrusion inverse en état plan de déformation
avec un contact lopin-outillage sans frottement -



avec pour la région (1)

$$a_1 = \frac{T}{W_p} \quad (35)$$

et pour la région (2)

$$a_2 = \frac{W_c - W_p}{T}$$

Il vient :

$$a_2 = \frac{1}{a_1} \left(\frac{1}{R} - 1 \right) \quad (36)$$

Les rapports hauteur-longueur a , les surfaces S_{13} des frontières 13 et les vitesses normales u_{13} sont représentés dans le tableau 6.

Pour le calcul manuel des coefficients de puissance de chaque région, nous prenons pour dimensions particulières :

$$R = 0,5 \quad \text{et} \quad W_p = 1$$

et pour vitesse du poinçon

$$U = 1$$

et nous recherchons la meilleure estimation de la pression moyenne d'extrusion pour différentes épaisseurs initiales T du lopin.

Les hauteurs des régions rectangulaires unitaires sont d'après (35) et (36)

$$a_1 = 2 \frac{T}{W_c}$$

$$a_2 = \frac{1}{a_1}$$

Région rectangulaire	Rapport hauteur-largeur a	Surface d'entrée S_{13}	Vitesse d'entrée u_{13}
(1)	$\frac{T}{W_p}$	W_p	U
(2)	$\frac{W_c - W_p}{T}$	T	$U \frac{W_p}{T}$

- Tableau 6 -

- Rapports hauteur-longueur a ,
surfaces des frontières 13 et vitesses normales d'entrée
des régions rectangulaires en extrusion plane inverse symétrique -



Les surfaces des frontières 13 et les vitesses normales à ces frontières ont pour valeur :

. région (1)

$$S_{13}^1 = 1$$

$$u_{13}^1 = 1$$

. région (2)

$$S_{13}^2 = 2 \frac{T}{W_c}$$

$$u_{13}^2 = \frac{1}{a_1} \quad \text{pour une région (1) sans défaut}$$

$$u_{13}^2 = 1 \quad \text{pour une région (1) avec défaut}$$

Les coefficients de puissance les plus faibles sont obtenus avec des régions rectangulaires à une cellule.

Les valeurs de e_1 et e_2 sont portés dans le tableau 7.

D'après (28), la puissance dissipée dans les régions (1) et (2) nous est donnée par l'une des expressions suivantes :

$$2k \{e_1 \cdot S_{13}^1 \cdot u_{13}^1 + e_2 \cdot S_{13}^2 \cdot u_{13}^2\}$$

s'il n'y a pas de défauts prévus,

$$2k \{e_1' \cdot S_{13}^1 \cdot u_{13}^1 + e_2 \cdot S_{13}^2 \cdot u_{13}^2\}$$

$$2k \{e_1 \cdot S_{13}^1 \cdot u_{13}^1 + e_2' \cdot S_{13}^2 \cdot u_{13}^2\}$$

$$2k \{e_1' \cdot S_{13}^1 \cdot u_{13}^1 + e_2' \cdot S_{13}^2 \cdot u_{13}^2\}$$

s'il y a une formation prévue de défauts.

La valeur retenue est celle qui donne la puissance dissipée minimale $\dot{W}_i^{**} + \dot{W}_f^{**}$.

La pression moyenne d'extrusion $\bar{p}^{**}/2k$ correspondante est donnée par

$$\frac{\bar{p}^{**}}{2k} = \frac{\dot{W}_i^{**} + \dot{W}_f^{**}}{2k}$$

Les valeurs correspondantes sont données au tableau 7.

La figure 32 donne l'évolution de $\bar{p}^{**}/2k$ en fonction du rapport T/W_c hauteur/demi-largeur du lopin.

Les résultats obtenus appellent deux remarques :

- . Lorsque la hauteur T du lopin est assez importante, la zone déformée ne s'étend pas sur toute la hauteur ; pour obtenir une meilleure prévision de la pression d'extrusion, il faut rechercher la hauteur de la zone déformée qui correspond à la puissance dissipée la plus faible.
- . A l'inverse, lorsque la hauteur T du lopin devient faible, la même remarque s'applique ; la zone déformée ne s'étend pas sur toute la largeur $2W_c$ du lopin.

Pour obtenir une meilleure estimation de la pression d'extrusion, on devra procéder à une nouvelle optimisation sur les dimensions des zones rectangulaires qui s'ajoutent à l'optimisation sur le nombre de cellules constitutives de ces zones.

Ces optimisations seront faites aisément par le programme de calcul au chapitre 4.

T/W _c	Région (1)			Région (2)			$\bar{p}^*/2k$
	n = 1			n = 1			
	a ₁	e ₁	e' ₁	a ₂	e ₂	e' ₂	
0,2	0,4	1,450		2,5	1,45	1,00	2,450
0,3	0,6	1,133		1,67	1,133	1,00	2,133
0,4	0,8	1,025		1,25	1,025	1,00	2,025
0,5	1,0	1,00	1,00	1,0	1,00	1,00	2,000
0,6	1,2	1,017	1,00	0,83	1,017		2,033
0,7	1,4	1,057	1,00	0,71	1,057		2,142
0,8	1,6	1,113	1,00	0,63	1,113		2,225
0,9	1,8	1,178	1,00	0,56	1,178		2,355
1,0	2,0	1,250	1,00	0,50	1,25		2,500

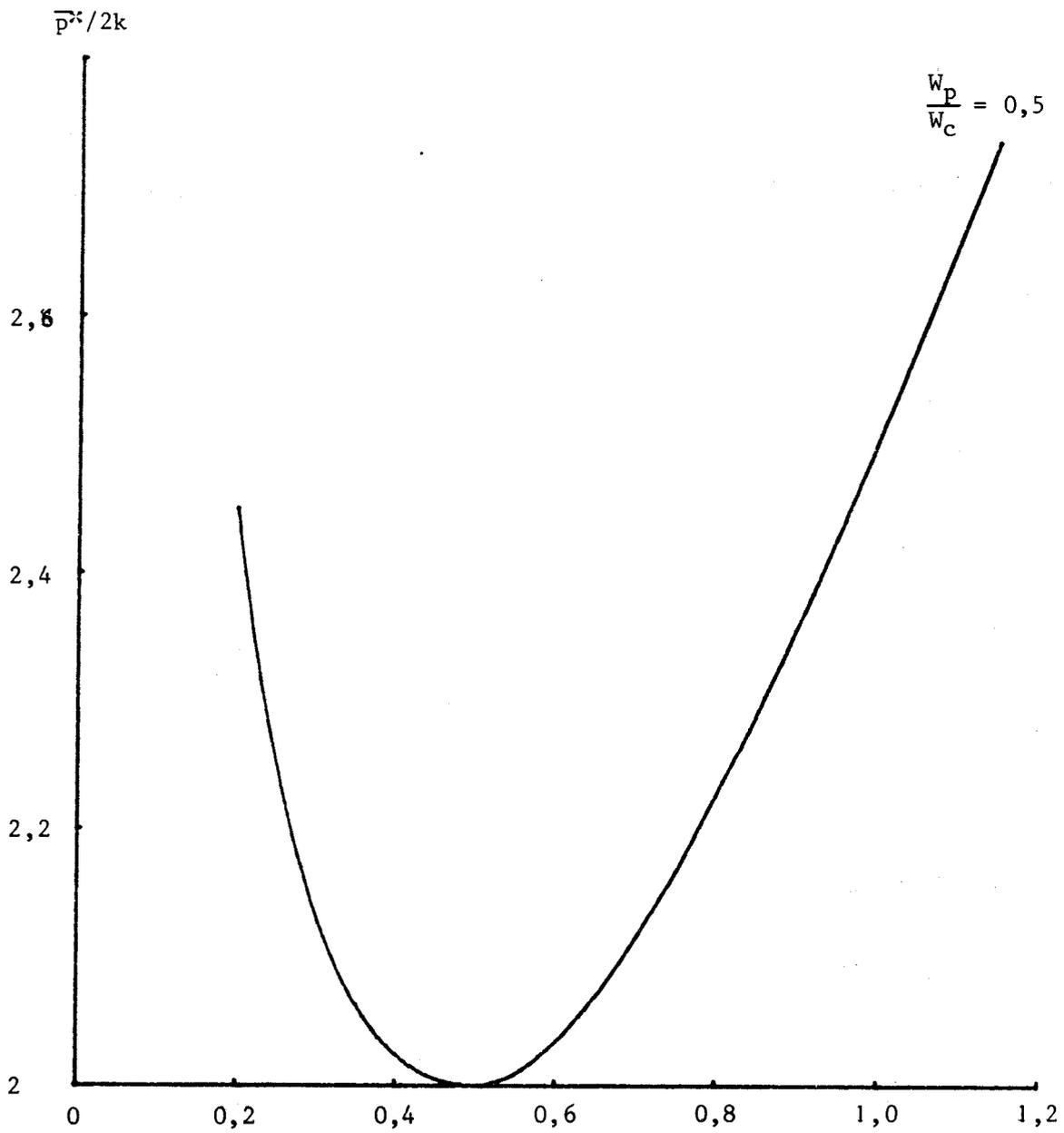
- Tableau 7 -

- Valeurs des coefficients de puissance
 pour les régions (1) et (2) et de la pression moyenne
 d'extrusion $\bar{p}^*/2k$ en extrusion plane inverse symétrique en fonction
 du rapport T/W_c avec un contact outillage-lopin sans frottement -



- Figure 32 -

- Valeurs de la pression moyenne $\bar{p}^*/2k$ en extrusion plane
symétrique naissante obtenues par RRU à une cellule
avec un contact lopin-outillage sans frottement -



T/W_c

3.5.4. - Estimation de la pression moyenne en forgeage-extrusion plane symétrique.

Un lopin de section rectangulaire ($2B \times T$) est forgé entre deux matrices planes parallèles. La matrice supérieure mobile a un orifice central de largeur $2W$ (Figure 33) .

Nous considérons successivement le cas de contacts outils-lopin sans frottement et le cas de contacts outils-lopin collants.

a) Contactes outils-lopin sans frottement.

La zone est découpée en deux régions rectangulaires (1) et (2) . Les rapports hauteur-longueur, les surfaces S_{13} des frontières d'entrée et les vitesses d'entrée u_{13} s'établissent comme suit, en désignant par Uv la vitesse de sortie du produit à la frontière 34 de la région (2) :

Région rectangulaire	Rapport hauteur-largeur a	Surface d'entrée S_{13}	Vitesse d'entrée u_{13}
(1)	$\frac{T}{B - W}$	$B - W$	U
(2)	$\frac{W}{T}$	T	$(\frac{B - W}{T} - v)U$

- Tableau 8 -

Les conditions pour les régions sont les suivantes :

- . région (1) - rss ℓ
- . région (2) - srs ℓ

Les coefficients de puissance e_1 et e_2 sont fournis par les tables 1, 2 et 3.

La puissance dissipée est donnée par :

$$\dot{W}_i^{**} + \dot{W}_f^{**} = 2k \left\{ e_1 (B - W)U + e_2 T \left(\frac{B - W}{T} - v \right) U \right\} \quad (37)$$

La puissance des efforts moteurs s'écrit :

$$\dot{W}_e = \bar{p} (B - W)U$$

\bar{p} désigne dans cette relation la pression moyenne exercée par le plateau mobile évidé.

Soit \bar{p}_f la pression moyenne exercée par le plateau fixe ; nous avons la relation suivante :

$$\bar{p}_f \cdot B = \bar{p} \cdot (B - W)$$

L'expression (37) permet d'obtenir une estimation de la pression moyenne \bar{p}_f^{**} exercée par le plateau fixe. Soit :

$$\frac{\bar{p}_f^{**}}{2k} = e_1 \left(1 - \frac{W}{B} \right) + e_2 \left(1 - \frac{W}{B} - \frac{T}{B} v \right) \quad (38)$$

La valeur minimale de $\bar{p}_f^{**}/2k$ est obtenue pour :

$$v = \frac{B - W}{T} \quad (39)$$

$$\frac{\bar{p}_f^{**}}{2k} = 1 - \frac{W}{B}$$

La vitesse d'entrée u_{13} de la région (2) est donc nulle.

Seule la région (1) se déforme au cours de l'opération. Avec des matrices planes parfaitement lubrifiées, on ne pourra donc pas obtenir une partie centrale de hauteur supérieure à la hauteur initiale du lopin.

b) Contact sans frottement du lopin avec la matrice inférieure
et contact collant du lopin avec la matrice supérieure.

L'écoulement du matériau peut se produire à la fois vers l'extérieur et vers l'orifice de la matrice supérieure lorsque son contact avec le lopin est collant.

Il existe alors dans le champ de vitesses une zone neutre où la vitesse horizontale est nulle.

La zone déformée peut être découpée en trois régions rectangulaires (1), (2) et (3); la vitesse horizontale est nulle entre les régions (1) et (2) (Figure 34).

Soit ρB la distance entre l'axe de symétrie et le plan neutre, frontière entre les régions (1) et (2).

Les rapports hauteur-longueur des régions, les surfaces S_{13} des frontières d'entrée et les vitesses d'entrée u_{13} ont pour valeur :

Région rectangulaire	Rapport hauteur-largeur a	Surface d'entrée S_{13}	Surface d'entrée u_{13}
(1)	$\frac{T}{(1 - \rho)B}$	$(1 - \rho)B$	U
(2)	$\frac{T}{\rho B - W}$	$\rho B - W$	U
(3)	$\frac{W}{T}$	T	$(\rho B - W)\frac{U}{T}$

- Tableau 9 -

Les conditions pour les régions sont :

- . région (1) - srsł
- . région (2) - srsr(I)
- . région (3) - srsł

La pression sur le plateau fixe est donnée par

$$\frac{\bar{p}_f^*}{2k} = e_1(1 - \rho) + (e_2 + e_3)\left(\rho - \frac{W}{B}\right) \quad (40)$$

Les coefficients de puissance e_1 , e_2 et e_3 sont toujours fournis par les tables 1 et 2.

On recherche ensuite les valeurs du paramètre ρ qui fournissent le minimum de l'expression (40) .

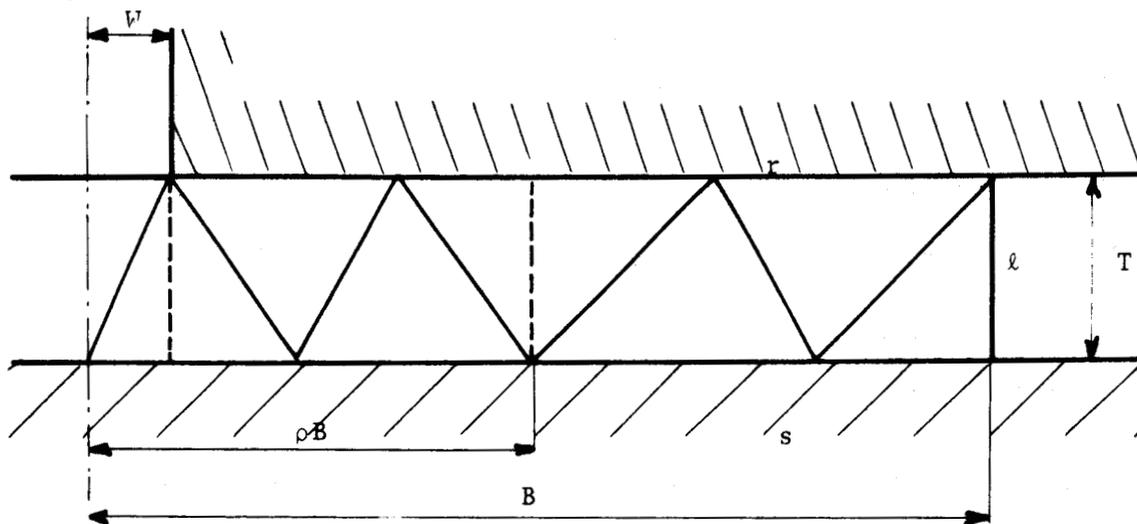
Les valeurs optimales de $\bar{p}^*/2k$ sont reportées, pour le champ de vitesses de la figure (35) , sur le graphique de la figure (36) avec un rapport ouverture du plateau supérieur/largeur du lopin égal à 0,10.

Des améliorations de ces résultats peuvent être obtenues en modifiant le nombre de régions et le nombre de cellules [5] ; l'apparition de défauts peut être également mise en évidence après un traitement manuel assez important.

Le traitement automatique proposé au chapitre 14 permet d'aboutir à ces améliorations.

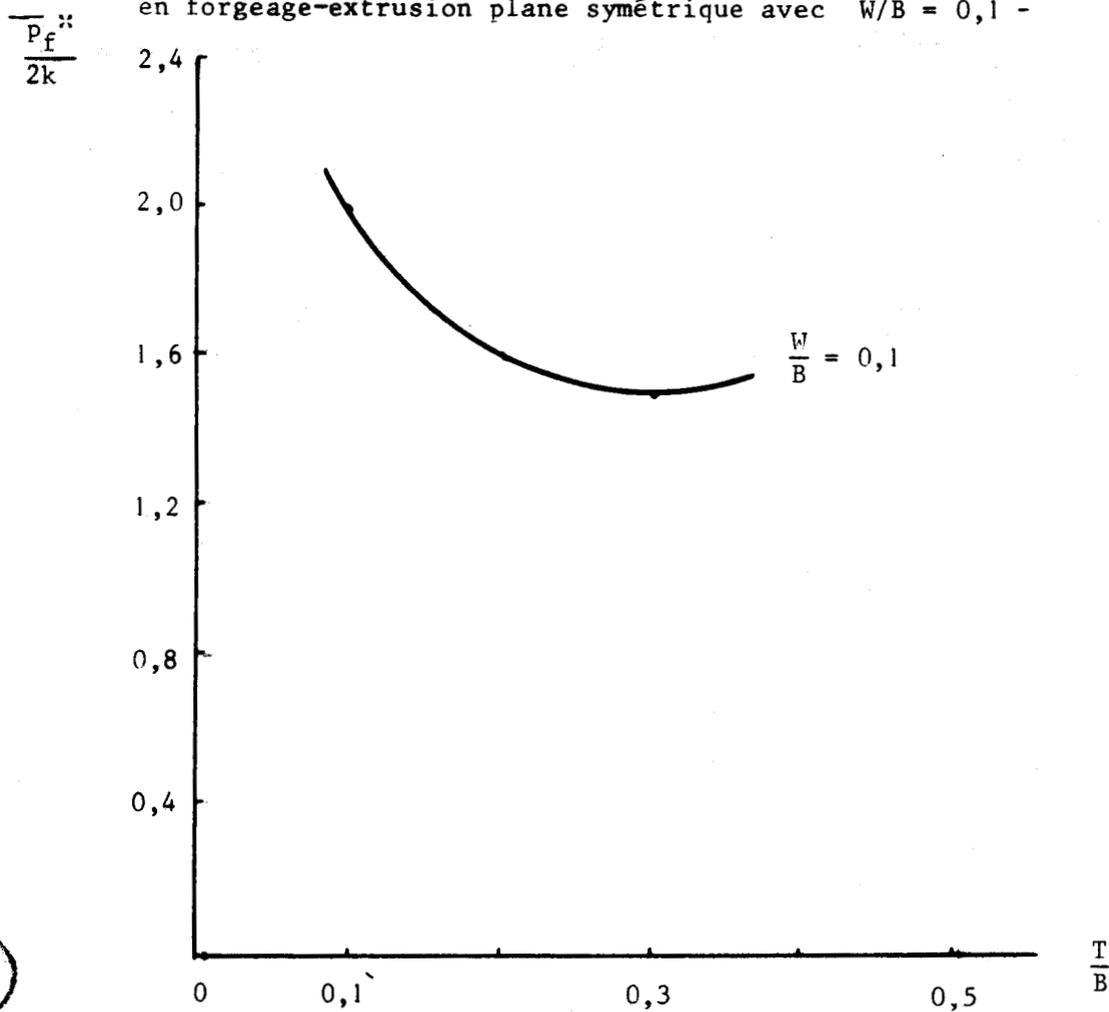
s contact sans frottement

r contact collant



- Figure 35 -

- Champ de vitesses à trois régions rectangulaires en forgeage-extrusion plane symétrique avec $W/B = 0,1$ -



- Figure 36 -

- Valeurs de la pression moyenne $\bar{p}_f/2k$ sur plateau en forgeage-extrusion plane obtenues par un champ à 3 régions rectangulaires pour $W/B = 0,1$ avec contact collant sur le plateau supérieur et un contact sans frottement sur plateau inférieur -



4. - REGIONS RECTANGULAIRES UNITAIRES GENERALISEES.

4.1. - Introduction.

Nous présentons maintenant une généralisation des régions rectangulaires unitaires de H. KUDO, vues précédemment, qui permet de prendre en compte toutes les conditions possibles de frottement aux contours de chaque région.

Les expressions généralisées à des conditions quelconques de frottement sont beaucoup plus compliquées. L'utilisation manuelle de tables généralisées pour les optimisations et les calculs de puissances dissipées est pratiquement exclue.

A cet effet, nous avons mis au point un programme de calcul automatique qui permet de réaliser les optimisations et les calculs de puissances dissipées de façon systématique pour divers procédés de mise à forme des métaux.

4.2. - Conditions au contour des régions rectangulaires unitaires généralisées.

Les conditions de vitesse restent celles de la figure 3 :

- . La vitesse d'entrée à la frontière 13 est prise égale à l'unité.
- . La vitesse de sortie à la frontière 34 est égale à $1/a$ (a est le rapport hauteur-longueur de la région) .

Les trois conditions de sortie à la frontière 34 sont notées comme suit :

- . La frontière 34 est une surface libre ; la condition est notée \emptyset (Figure 4) .
- . Il n'existe pas de discontinuité de vitesse tangentielle à la frontière 34 : la condition est notée (I) (Figure 5) .
- . Il existe une discontinuité de vitesse, tangentielle à la frontière 34 , égale à l'unité : cette condition est notée (II) (Figure 6) .

Les conditions de frottement relatives aux frontières 12, 13 et 24 sont quelconques. Les coefficients de frottement sont notés (Figure 37) :

- m_1 pour la frontière 12 (*)
- m_2 pour la frontière 13
- m_3 pour la frontière 24

Pour la frontière 34, le contact est

- . soit sans frottement (noté s)
- . soit collant (noté r).

Ces différentes conditions permettent la détermination d'une table de coefficients de puissance pour différents types de régions rectangulaires, en fonction du rapport a hauteur-longueur, du nombre n de cellules constitutives, des coefficients de frottement et des conditions particulières à la frontière 34.

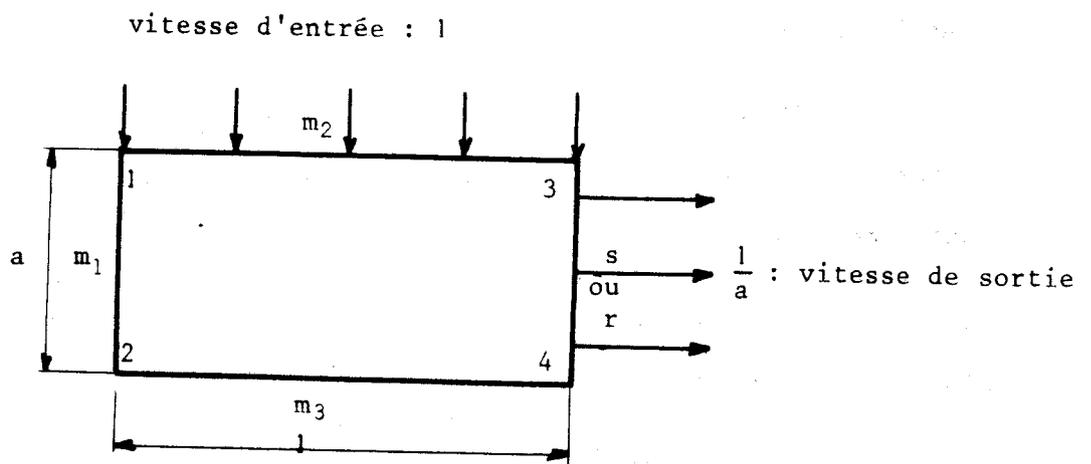
4.3. - Régions rectangulaires unitaires généralisées plates.

4.3.1. - Introduction.

Nous envisageons six types de champs plats avec des conditions de frottement quelconques sur les frontières 12, 13 et 23.

Nous donnons dans les pages qui suivent quelques exemples détaillés de calcul des coefficients de puissance des régions rectangulaires unitaires plates.

(*) Lorsque $m = 1$, le contact est collant
et lorsque $m = 0$, le contact est sans frottement.



- Figure 37 -

- Région rectangulaire unitaire généralisée :
conditions cinématiques sur 13 et 34 et
conditions de frottement sur le contour -

4.3.2. - Région rectangulaire unitaire plate N° 1.

La région est constituée de n cellules identiques ; chaque cellule contient deux surfaces de discontinuité de vitesses (Figure 38) .

La distance ρ/n entre la frontière gauche de la cellule et la hauteur du premier triangle quelconque est un paramètre du champ de vitesses. Les lignes de discontinuité sont parallèles deux à deux.

La puissance dissipée \dot{W}_i^{**} à l'intérieur de la région est obtenue à partir de l'expression (13) ; la puissance dissipée \dot{W}_f^{**} par frottement aux frontières est fournie par l'expression (8) .

Le calcul des puissances dissipées à chaque interface est donné au tableau 10 pour les conditions ℓ , $s(I)$, $s(II)$ et $r(I)$ à la frontière 34.

Le coefficient de puissance s'écrit alors :

$$e = \frac{\dot{W}_i^{**} + \dot{W}_f^{**}}{2k} = na + \frac{1}{2na} \left[\rho^2 + (1-\rho)^2 + (n-1) \frac{m_2+m_3}{2} + \rho(m_2-m_3) + m_3 \right] \quad (41)$$

La meilleure estimation correspond à la valeur de ρ qui rend minimale l'expression (41) . Soit :

$$\frac{\partial e}{\partial \rho} = \frac{1}{2na} \{4\rho - 2 + m_2 - m_3\} = 0$$

et

$$\rho = \frac{1}{2} - \frac{m_2 - m_3}{4} \quad (42)$$

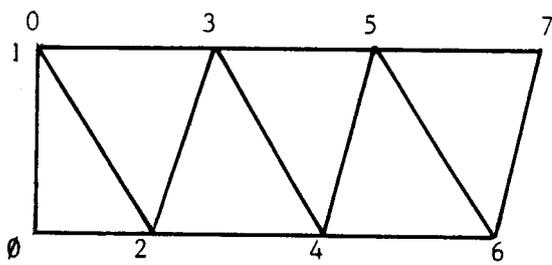
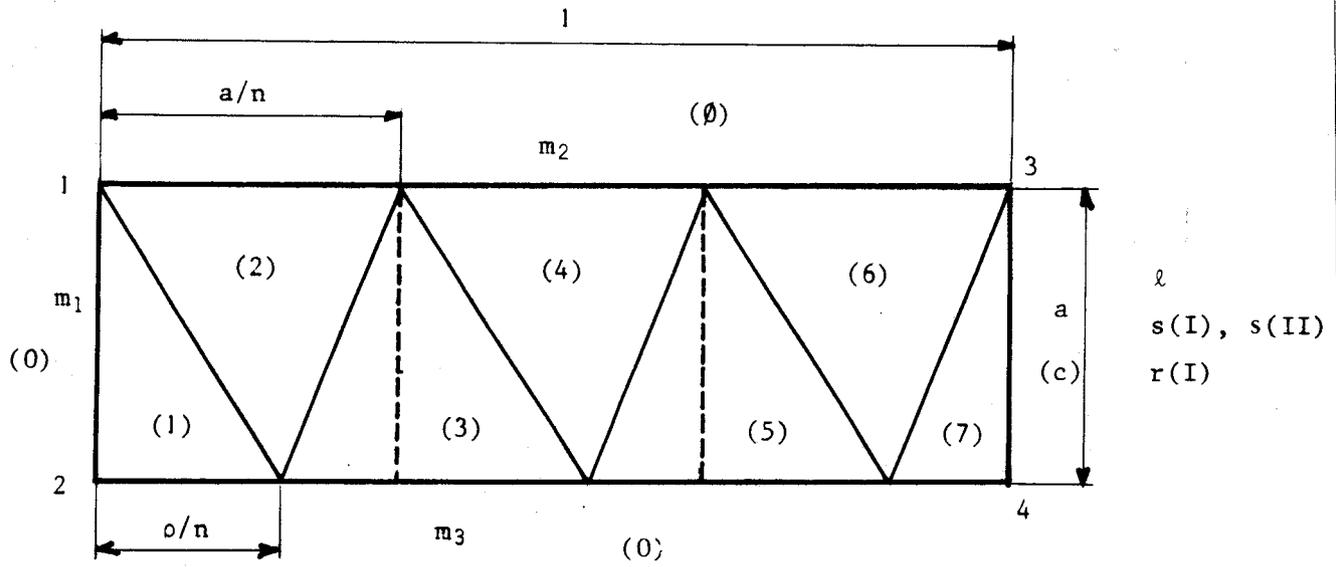
Pour les valeurs particulières des coefficients m correspondant au contact sans frottement ($m = 0$) et au contact collant ($m = 1$) , les résultats des formules (41) et (42) correspondent bien aux valeurs des coefficients de puissance du tableau 1.

Nom de la frontière entre i et j ij	Longueur de la frontière l_{ij}	Vitesse de discontinuité <ij>	Puissance dissipée <ij> . l_{ij} . m_k
12	$\left[a^2 + \frac{\rho^2}{n^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[1 + \frac{\rho^2}{n^2 a^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$a \left[1 + \frac{\rho^2}{n^2 a^2} \right]$
23	$\left[a^2 + \frac{(1-\rho)^2}{n^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[1 + \frac{(1-\rho)^2}{n^2 a^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$a \left[1 + \frac{(1-\rho)^2}{n^2 a^2} \right]$
⋮	⋮	⋮	⋮
03	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{na}$	$m_3 \frac{1}{n^2 a}$
⋮	⋮	⋮	⋮
05	$\frac{1-\rho}{n}$	$\frac{1}{a}$	$m_3 \frac{1-\rho}{n a}$
02	$\frac{1}{n}$	$\frac{\rho}{n a}$	$m_2 \frac{\rho}{n^2 a}$
04	$\frac{1}{n}$	$\frac{1+\rho}{n a}$	$m_2 \frac{1+\rho}{n^2 a}$
⋮	⋮	⋮	⋮

- Tableau 10 -

- Puissances dissipées aux frontières entre les blocs de la région rectangulaire unitaire plate N° 1. Conditions possibles sur la frontière: l , $s(I)$, $s(II)$, $r(I)$ -





- Figure 38 -

- Région rectangulaire unitaire basse N° 1
avec conditions sur 34 : l , $s(I)$, $s(II)$, $r(I)$ -



4.3.3. - Région rectangulaire unitaire plate N° 5.

La région est constituée de n cellules identiques ; chacune contient ici quatre surfaces de discontinuité de vitesses (Figure 39) .

Le champ comporte ici deux paramètres ρ et α . ρ/n est la distance entre la frontière gauche de la cellule et la hauteur du premier triangle quelconque ; αa représente la dimension de cette hauteur.

Le calcul des puissances dissipées se poursuit comme précédemment (Tableau 11) avec les conditions ℓ , $s(I)$ et $s(II)$ à la frontière 34 .

Le coefficient de puissance a pour valeur :

$$e = \frac{a}{2} \{m_1(1-\alpha) + 2n\alpha^2 + 2n(1-\alpha)^2\} + \frac{1}{4na} \{4\rho^2 + 4(1-\rho)^2 + 2\rho(m_2+m_3) + (n-1)(m_2+m_3)\} \quad (43)$$

La meilleure estimation correspond aux valeurs de α et ρ données par le système linéaire :

$$\frac{\partial e}{\partial \alpha} = \frac{a}{2} (8n\alpha - m_1 - 4n) = 0$$

$$\frac{\partial e}{\partial \rho} = \frac{1}{2na} \{4\rho - 4(1 - \rho) + m_2 + m_3\} = 0$$

Soit :

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{m_1}{4n}$$

(44)

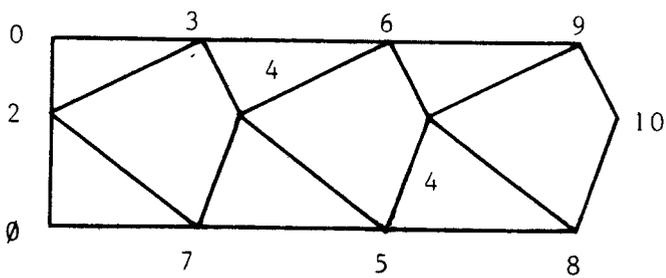
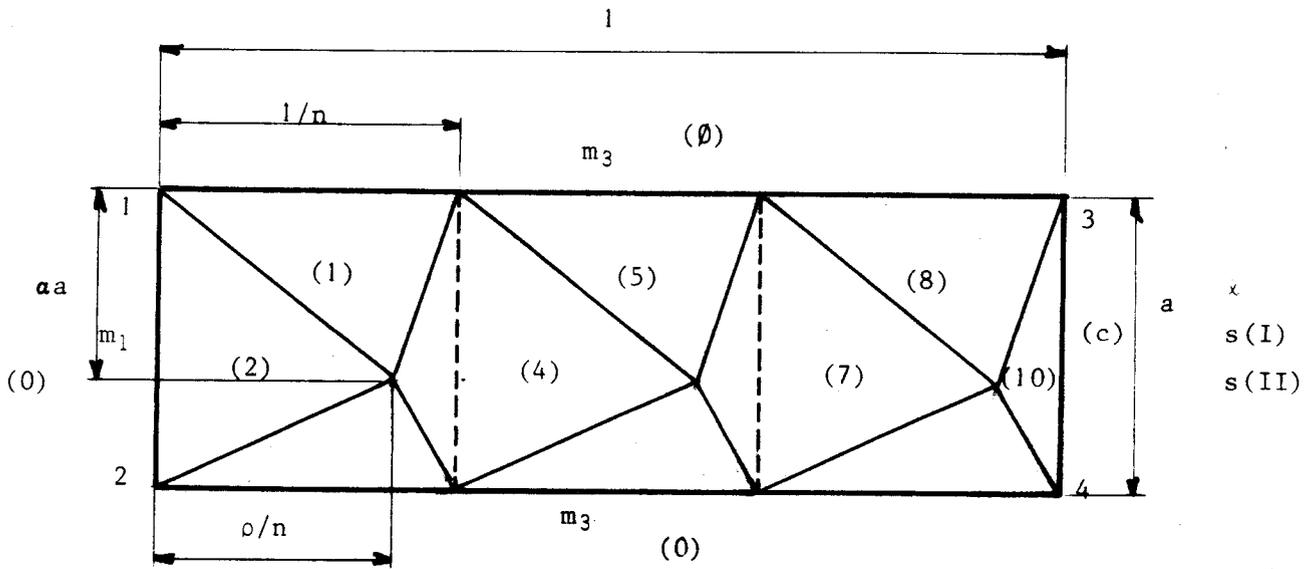
$$\rho = \frac{1}{2} - \frac{m_2 + m_3}{8}$$

Nom de la frontière ij	Longueur de la frontière l_{ij}	Vitesse de discontinuité $\langle ij \rangle$	Puissance dissipée $\langle ij \rangle \cdot l_{ij} \cdot m_k$
12	$\left[\alpha^2 a^2 + \frac{\rho^2}{n^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\alpha^2 + \frac{\rho^2}{n^2 a^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$a \left[\alpha^2 + \frac{\rho^2}{n^2 a^2} \right]$
23	$\left[(1-\alpha)^2 a^2 + \frac{\rho^2}{n^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[(1-\alpha)^2 + \frac{\rho^2}{n^2 a^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$a \left[(1-\alpha)^2 + \frac{\rho^2}{n^2 a^2} \right]$
14	$\left[\alpha^2 a^2 + \frac{(1-\rho)^2}{n^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\alpha^2 + \frac{(1-\rho)^2}{n^2 a^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$a \left[\alpha^2 + \frac{(1-\rho)^2}{n^2 a^2} \right]$
34	$\left[(1-\alpha)^2 a^2 + \frac{(1-\rho)^2}{n^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[(1-\alpha)^2 + \frac{(1-\rho)^2}{n^2 a^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$a \left[(1-\alpha)^2 + \frac{(1-\rho)^2}{n^2 a^2} \right]$
:	:	:	:
02	a	(1 - α)	$m_1 (1 - \alpha) a$
03	$\frac{1}{n}$	$\frac{\rho}{na}$	$m_3 \frac{\rho}{n^2 a}$
06	$\frac{1}{n}$	$\frac{\rho + 1}{na}$	$m_3 \frac{\rho + 1}{n^2 a}$
:	:	:	:
01	$\frac{1}{n}$	$\frac{\rho}{na}$	$m_2 \frac{\rho}{n^2 a}$
05	$\frac{1}{n}$	$\frac{\rho + 1}{na}$	$m_2 \frac{\rho + 1}{n^2 a}$
:	:	:	:

- Tableau 11 -



- Puissances dissipées entre les blocs de la région rectangulaire unitaire plate N° 5. Conditions possibles sur la frontière 34 : ℓ , s(I) , s(II) -



- Figure 39 -

- Région rectangulaire unitaire basse N° 5
avec conditions sur 34 : ℓ , s(I) , s(II) -



4.4. - Régions rectangulaires unitaires généralisées hautes.

4.4.1. - Introduction.

Dix types de régions rectangulaires unitaires hautes sont envisagées, dont quatre comportant la prévision d'un défaut.

Nous donnons maintenant quelques exemples détaillés de détermination des coefficients de puissance pour ces régions.

4.4.2. Région rectangulaire unitaire haute N° 3.

La région est constituée de n cellules ; les $n-1$ premières cellules sont identiques et comportent deux discontinuités ; la cellule n ne comporte qu'une discontinuité. Comme pour les autres régions déjà rencontrées, les discontinuités sont parallèles deux à deux (Figure 40) .

ρ est le seul paramètre de ce champ.

Le calcul des puissances dissipées à chaque frontière est donné au tableau 12 avec les conditions ℓ , $s(I)$ et $s(II)$ d'une part, la condition $r(I)$ d'autre part.

Le coefficient de puissance valable pour les conditions ℓ , $s(I)$ et $s(II)$ à la frontière 34 est :

$$e = \frac{1}{2a} (2n - 1 + m_3) + \frac{a}{4(n - 1 + \rho)^2} \{4m_1\rho(n - 1) + 2m_1(1 + \rho^2) + m_1n^2 - 3m_1n + 2n\rho^2 + 2(n - 1)(1 - \rho)^2\} \quad (45)$$

La valeur optimale de ρ est fournie par :

$$\frac{\partial e}{\partial \rho} = \frac{a(n - 1)n}{2(n - 1 + \rho)^3} (4\rho - 2 + m_1)$$

soit

$$\rho = \frac{1}{2} - \frac{m_1}{4} \quad (46)$$

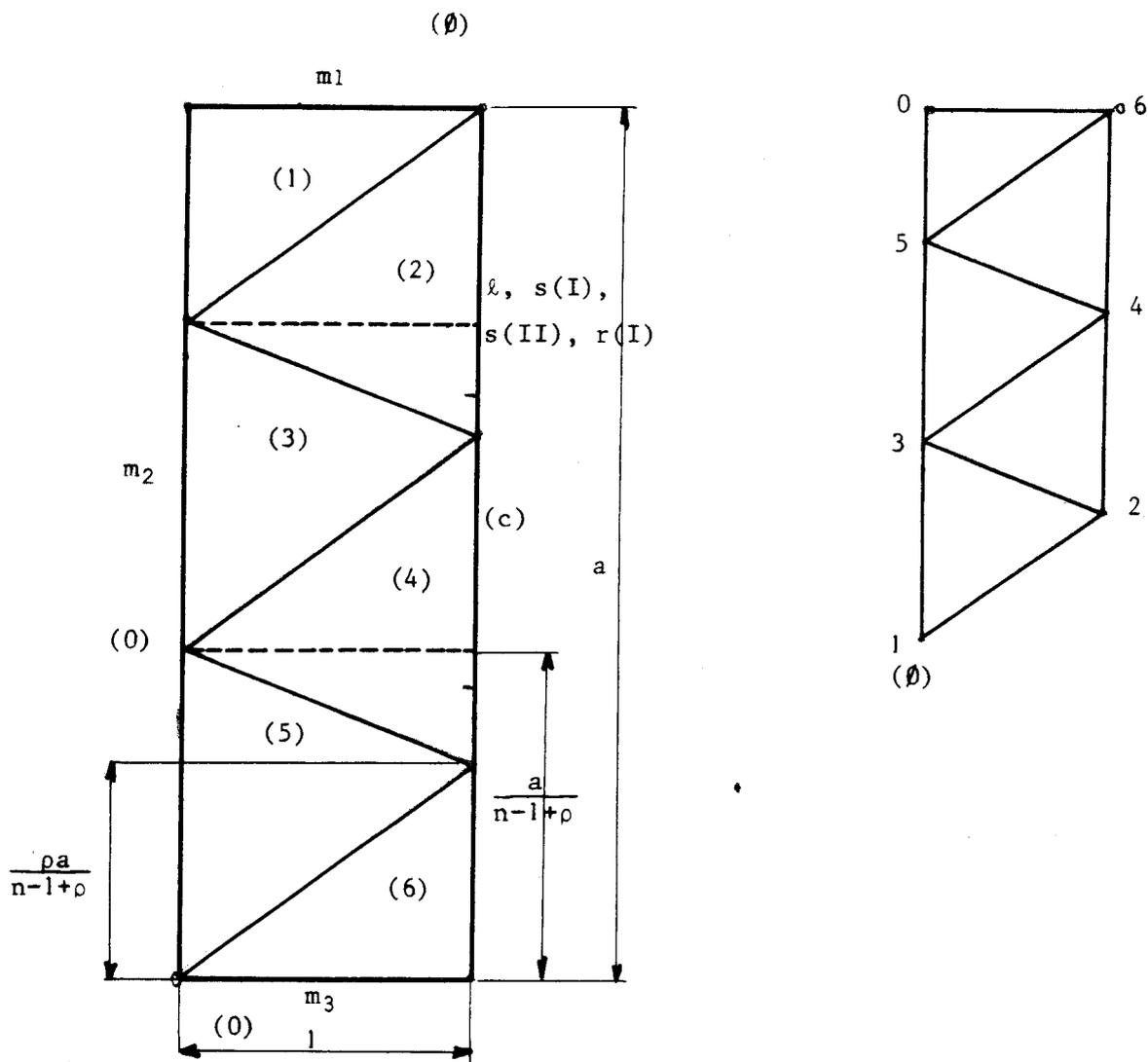
Nom de la frontière ij	Longueur de la frontière l_{ij}	Vitesse de discontinuité $\langle ij \rangle$	Puissance dissipée $\langle ij \rangle \cdot l_{ij} \cdot m_k$
12	$\left[1 + \frac{\rho^2 a^2}{(n-1+\rho)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{1}{a^2} + \frac{\rho^2}{(n-1+\rho)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$a \left[\frac{1}{a^2} + \frac{\rho^2}{(n-1+\rho)^2} \right]$
23	$\left[1 + \frac{(1-\rho)^2}{(n-1+\rho)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{1}{a^2} + \frac{(1-\rho)^2}{(n-1+\rho)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$a \left[\frac{1}{a^2} + \frac{(1-\rho)^2}{(n-1+\rho)^2} \right]$
:	:	:	:
05	$\frac{a}{n-1+\rho}$	$\frac{\rho}{n-1+\rho}$	$m_1 \frac{\rho a}{(n-1+\rho)^2}$
03	$\frac{a}{n-1+\rho}$	$\frac{1+\rho}{n-1+\rho}$	$m_1 \frac{(1+\rho)a}{(n-1+\rho)^2}$
:	:	:	:
01	$\frac{\rho a}{n-1+\rho}$	1	$m_1 \frac{\rho a}{n-1+\rho}$
06	1	$\frac{1}{a}$	$m_3 \frac{1}{a}$
avec la condition r(I) sur 34 , ajouter :			
4c	$\frac{a}{n-1+\rho}$	$\frac{1}{n-1+\rho}$	$\frac{a}{(n-1+\rho)^2}$
2c	$\frac{a}{n-1+\rho}$	$\frac{2}{n-1+\rho}$	$\frac{2a}{(n-1+\rho)^2}$
:	:	:	:

- Tableau 12 -

- Puissances dissipées aux frontières

entre les blocs de la région rectangulaire unitaire haute N° 3.
Conditions possibles sur la frontière 34 : l , s(I) , s(II) r(I) -





- Figure 40 -

- Région rectangulaire unitaire haute N° 3
avec conditions sur 34 : $\ell, s(I), s(II), r(I)$ -



Avec la condition $r(I)$ à la frontière 34, le nouveau coefficient de puissance à pour valeur :

$$e = \frac{1}{2a} (2n - 1 + m_3) + \frac{a}{4(n - 1 + \rho^2)} \{4m_1\rho(n - 1) + \quad (47)$$

$$+ 2m_1(1 + \rho^2) + m_1n^2 - 3m_1n + 2(n - 1)(1 - \rho)^2 + 2n\rho^2 + n(n - 1)\}$$

avec
$$\rho = \frac{3}{4} - \frac{m_1}{4} \quad (48)$$

4.4.3. - Région rectangulaire unitaire haute N° 6.

La région rectangulaire envisagée est composée de n cellules. Les $n-1$ premières cellules sont identiques et contiennent quatre discontinuités ; la cellule n en contient seulement deux (Figure 41) .

Le champ a deux paramètres géométriques α et ρ .

Au tableau 13 sont données les puissances dissipées à chaque frontière avec la condition $r(I)$ pour la frontière 34.

Le coefficient de puissance pour la région s'écrit :

$$e = \frac{1}{2a} \{ \alpha m_2 + n\alpha^2 + n(1 - \alpha)^2 + (n - 1)\alpha^2 + (n - 1)(1 - \alpha)^2 + m_3(1 - \alpha) \} + \quad (49)$$

$$+ \frac{a}{2(n - 1 + \rho)^2} \{ n(n - 1) \frac{m_1 + 1}{2} + 2n\rho^2 + 2(n - 1)(1 - \rho)^2 \}$$

avec les valeurs optimales de α et ρ suivantes :

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{m_2 - m_3}{4(2n - 1)} \quad (50)$$

$$\rho = \frac{m_1 + 5}{8}$$

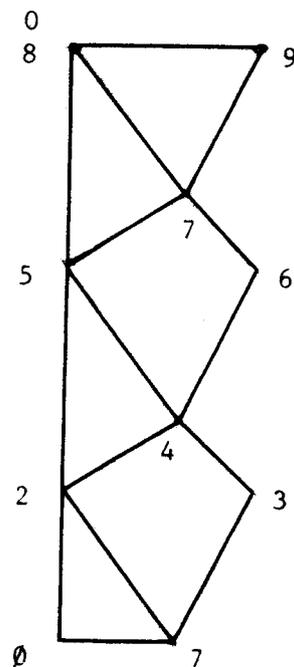
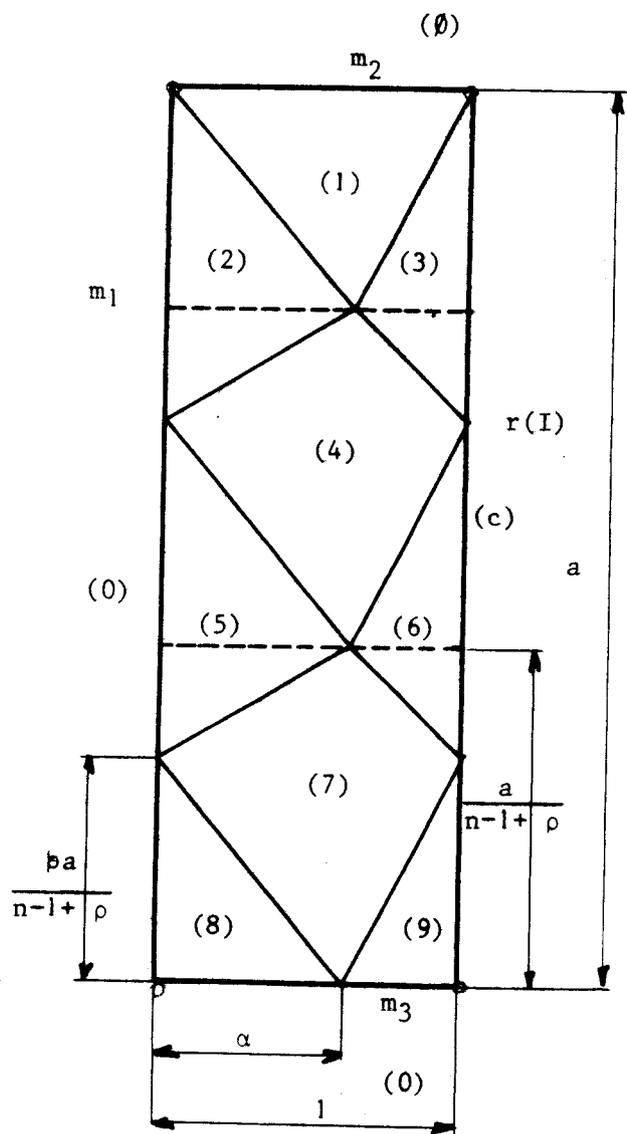
Nom de la frontière ij	Longueur de la frontière l_{ij}	Vitesse de discontinuité $\langle ij \rangle$	Puissance dissipée $\langle ij \rangle \cdot l_{ij} \cdot m_k$
12	$\left[\alpha^2 + \frac{\rho^2 a^2}{(n-1+\rho)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\rho^2}{(n-1+\rho)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$a \left[\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\rho^2}{(n-1+\rho)^2} \right]$
13	$\left[(1-\alpha)^2 + \frac{\rho^2 a^2}{(n-1+\rho)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{(1-\alpha)^2}{a^2} + \frac{\rho^2}{(n-1+\rho)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$a \left[\frac{(1-\alpha)^2}{a^2} + \frac{\rho^2}{(n-1+\rho)^2} \right]$
24	$\left[\alpha^2 + \frac{(1-\rho)^2 a^2}{(n-1+\rho)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{(1-\rho)^2}{(n-1+\rho)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$a \left[\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{(1-\rho)^2}{(n-1+\rho)^2} \right]$
34	$\left[(1-\alpha)^2 + \frac{(1-\rho)^2 a^2}{(n-1+\rho)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\left[\frac{(1-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(1-\rho)^2}{(n-1+\rho)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$	$a \left[\frac{(1-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(1-\rho)^2}{(n-1+\rho)^2} \right]$
:	:	:	:
01	1	$\frac{\alpha}{a}$	$m_2 \frac{\alpha}{a}$
05	$\frac{a}{n-1+\rho}$	$\frac{1}{n-1+\rho}$	$m_1 \frac{a}{(n-1+\rho)^2}$
02	$\frac{a}{n-1+\rho}$	$\frac{2}{n-1+\rho}$	$m_1 \frac{2a}{(n-1+\rho)^2}$
:	:	:	:
09	1 - α	$\frac{1}{a}$	$m_3 \frac{1-\alpha}{a}$
6c	$\frac{a}{n-1+\rho}$	$\frac{1}{n-1+\rho}$	$\frac{a}{(n-1+\rho)^2}$
3c	$\frac{a}{n-1+\rho}$	$\frac{2}{n-1+\rho}$	$\frac{2a}{(n-1+\rho)^2}$
:	:	:	:

- Tableau 13 -

- Puissances dissipées aux frontières entre les blocs de la région rectangulaire unitaire haute N° 6.

Conditions possibles sur 34 : r(I) -





- Figure 41 -

- Région rectangulaire unitaire haute N° 6
avec conditions sur 34 : r(I) -



4.4.4. - Région rectangulaire unitaire haute N° 7 à défaut.

La région prévoit l'apparition d'un défaut le long de la face 34 (Figure 42) .

Avec les conditions l , $s(I)$, $s(II)$ et $r(II)$ sur la face 34, la puissance dissipée a pour valeur :

$$\dot{W}_i^{**} + \dot{W}_f^{**} = k \left[\frac{m_2}{\text{tg } \alpha} + \frac{1}{\text{tg } \alpha} + \text{tg } \alpha \right]$$

Le coefficient de puissance est :

$$e = \frac{1}{2} \left[\frac{m_2 + 1}{\text{tg } \alpha} + \text{tg } \alpha \right] \quad (51)$$

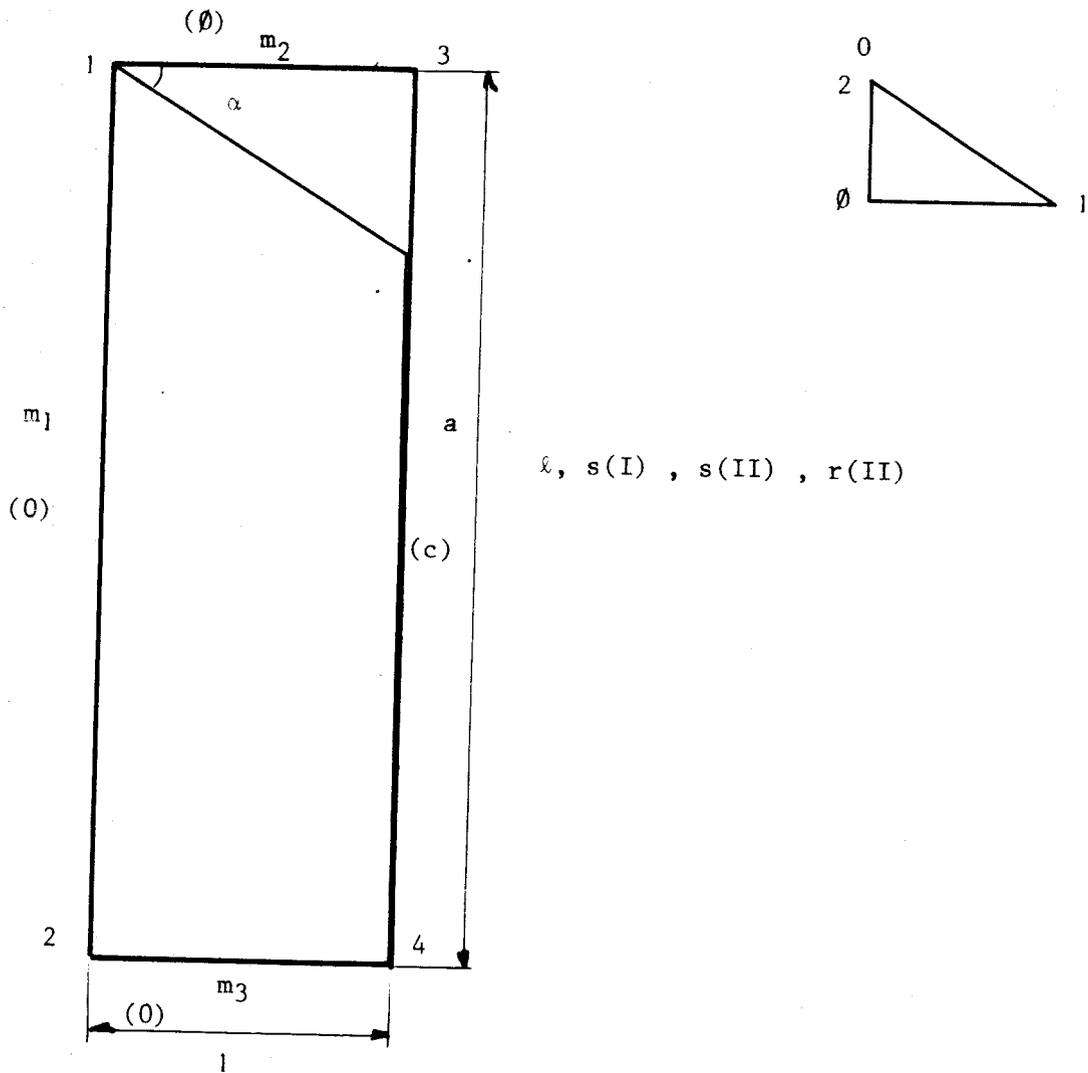
avec la valeur optimale du paramètre α suivante :

$$\text{tg}^2 \alpha = m_2 + 1 \quad (52)$$

4.5. - Tables des régions rectangulaires unitaires généralisées.

Les coefficients de puissance des régions rectangulaires généralisées sont décrits :

- . pour les régions rectangulaires unitaires plates au tableau 14 associé à la figure 43 ;
- . pour les régions rectangulaires hautes au tableau 15 associé à la figure 44 ;
- . et pour les régions rectangulaires hautes à défaut au tableau 16 associé à la figure 45.



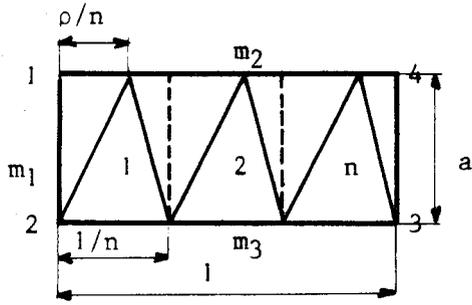
$\ell, s(I), s(II), r(II)$

- Figure 42 -

- Région rectangulaire unitaire N° 7

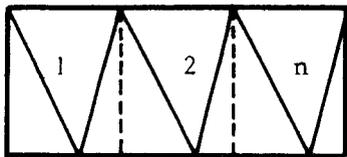
avec conditions sur 34 : $\ell, s(I), s(II), r(II)$ -



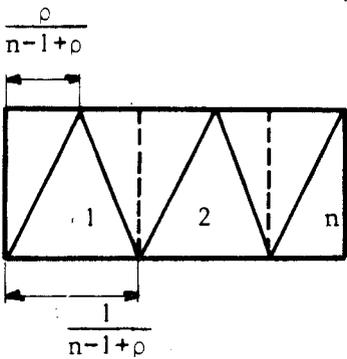


Conditions sur 34 :

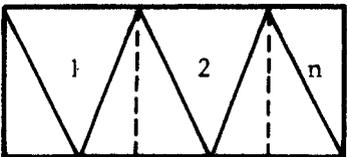
N° 1 : ℓ , s(I) , s(II) , r(II)



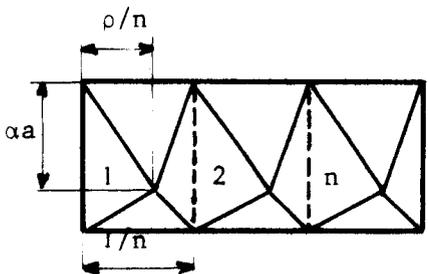
N° 2 : ℓ , s(I) , s(II) , r(I)



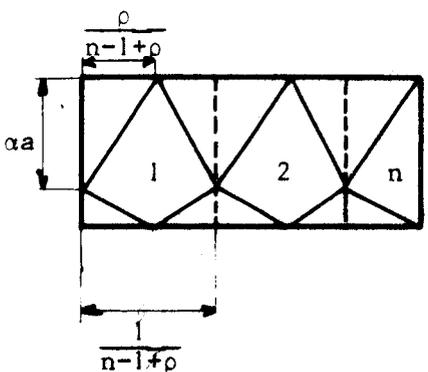
N° 3 : ℓ , s(I) , s(II) , r(I)



N° 4 : ℓ , s(I) , s(II) , r(II)



N° 5 : ℓ , s(I) , s(II)



N° 6 : ℓ , s(I) , s(II) , r(I) ,
r(II)

- Figure 43 -

- Régions rectangulaires unitaires généralisées plates -
a < l



Conditions sur 34 :

Région N° 1 : ℓ , s(I) , s(II) , r(II)

$$e = \frac{a}{2}(m_1+2n) + \frac{1}{4na}\{2\rho^2+2(1-\rho)^2+2m_2(1-\rho)+2\rho m_3+(n-1)(m_3+m_2)\}$$

$$\rho = \frac{1}{2} - \frac{m_3 - m_2}{4}$$

Région N° 2 : ℓ , s(I) , s(II) , r(I)

$$e = na + \frac{1}{2na}\{\rho^2+(1-\rho)^2+ \frac{n-1}{2}(m_2+m_3)+\rho(m_2-m_3)+m_3\}$$

$$\rho = \frac{1}{2} - \frac{m_2 - m_3}{4}$$

Région N° 3 : ℓ , s(I) , s(II) , r(I)

$$e = \frac{a}{2}(m+2n-1) + \frac{1}{4a(n-1+\rho)^2}\left[2n\rho^2+2(1-\rho)^2(n-1)+m_3(n-1)\{4\rho+n-2\}+2m_3\rho^2+m_2n(n-1)\right]$$

$$\rho = \frac{1}{2} - \frac{m_3 - m_2}{4}$$

Région N° 4 : ℓ , s(I) , s(II) , r(II)

$$e = \frac{a}{2}(2n-1) + \frac{1}{4a(n-1+\rho)^2}\left[2\rho^2(2n-1+m_2)+4\rho(m_2n-m_2-n+1)+(n-1)\{2+m_2(n-2)+m_3n\}\right]$$

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{m_3 - m_2}{4}$$

Région N° 5 : ℓ , s(I) , s(II)

$$e = \frac{a}{2}\{m_1(1-\alpha)+2n\alpha^2+2n(1-\alpha)^2\} + \frac{1}{4na}\{4\rho^2+4(1-\rho)^2+2\rho(m_2+m_3)+(n-1)(m_2+m_3)\}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{m_1}{4n} \quad \rho = \frac{1}{2} - \frac{m_2 + m_3}{8}$$

Région N° 6 : ℓ , s(I) , s(II)

$$e = \frac{a}{2}\{m_1\alpha+n\alpha^2+n(1-\alpha)^2+(n-1)\alpha^2+(n-1)(1-\alpha)^2\} + \frac{1}{4a(n-1+\rho)^2}\{4n\rho^2+4(n-1)(1-\rho)^2+n(n-1)(m_2+m_3)\}$$

$$\alpha = \frac{4n - m_1 - 2}{4(2n - 1)} \quad \rho = \frac{1}{2} + \frac{m_2 + m_3}{8}$$

Conditions sur 34 (suite) :

Région N° 6 : r(I)

$$e = \frac{a}{2} \{ m_1 \alpha + n \alpha^2 + n(1-\alpha)^2 + (n-1)\alpha^2 + (n-1)(1-\alpha)^2 + (1-\alpha) \} + \left\{ \frac{1}{4a(n-1+\rho)^2} \{ 4n\rho^2 + 4(n-1)(1-\rho)^2 + n(n-1)(m_2+m_3) \} \right.$$

$$\alpha = \frac{4n - m_1 - 1}{4(2n - 1)} \quad \rho = \frac{1}{2} + \frac{m_2 + m_3}{8}$$

Région N° 6 : r(II)

$$e = \frac{a}{2} \{ m_1 \alpha + n \alpha^2 + n(1-\alpha)^2 + (n-1)\alpha^2 + (n-1)(1-\alpha)^2 + \alpha \} + \frac{1}{4a(n-1+\rho)^2} \{ 4n\rho^2 + 4(n-1)(1-\rho)^2 + n(n-1)(m_2+m_3) \}$$

$$\alpha = \frac{4n - m_1 - 3}{4(2n - 1)} \quad \rho = \frac{1}{2} + \frac{m_2 + m_3}{8}$$

- Tableau 14 -

- Coefficients de puissance pour régions
rectangulaires unitaires basses -

$$a < 1$$

Conditions sur 34 :

Région N° 1 : ℓ , s(I) , s(II)

$$e = \frac{n}{a} + \frac{a}{4n} \{2m_1\rho + 2\rho^2 + 2(1-\rho)^2 + m_1(n-1)\}$$

$$\rho = \frac{1}{2} - \frac{m_1}{4}$$

Région N° 1 : r(I)

$$e = \frac{n}{a} + \frac{a}{4n} \{2m_1\rho + 2\rho^2 + 2(1-\rho)^2 - 2\rho + m_1(n-1) + n+1\}$$

$$\rho = \frac{1}{2} - \frac{m_1 - 1}{4}$$

Région N° 1 : r(II)

$$e = \frac{n}{a} + \frac{a}{4n} \{2m_1\rho + 2\rho^2 + 2(1-\rho)^2 + 2\rho + m_1(n-1) + n-1\}$$

$$\rho = \frac{1}{2} - \frac{m_1 + 1}{4}$$

Région N° 2 : ℓ , s(I) , s(II)

$$e = \frac{1}{2a} (m_2 + m_3 + 2n) + \frac{a}{4n} \{2\rho^2 + 2(1-\rho)^2 + m_1(n+1) - 2m_1\rho\}$$

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{m_1}{4}$$

Région N° 2 : r(I) , r(II)

$$e = \frac{1}{2a} (m_2 + m_3 + 2n) + \frac{a}{4n} \{2\rho^2 + 2(1-\rho)^2 + m_1(n+1) - 2m_1\rho + n-1\}$$

$$\rho = \frac{m_1}{4} + 10^{-10}$$

Région N° 3 : ℓ , s(I) , s(II)

$$e = \frac{1}{2a} (2n - 1 + m_3) + \frac{a}{4(n-1+\rho)^2} \{4m_1\rho(n-1) + 2m_1(1+\rho^2) + m_1n^2 - 3m_1n + 2n\rho^2 + 2(n-1)(1-\rho)^2\}$$

$$\rho = \frac{1}{2} - \frac{m_1}{4}$$

Conditions sur 34 (suite) :

Région N° 3 : r(I)

$$e = \frac{1}{2a}(2n-1+m_3) + \frac{a}{4(n-1+\rho)^2} \{4m_1\rho(n-1)+2m_1(1+\rho^2)+m_1n^2-3m_1n+2n\rho^2 + 2(n-1)(1-\rho)^2+n(n-1)\}$$

$$\rho = \frac{3}{4} - \frac{m_1}{4}$$

Région N° 4 : l , s(I) , s(II)

$$e = \frac{1}{2a} (m_2 + 2n - 1) + \frac{a}{4(n-1+\rho)^2} \{2n\rho^2 + 2(n-1)(1-\rho)^2 + m_1n(n-1)\}$$

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{m_1}{4}$$

Région N° 4 : r(I)

$$e = \frac{1}{2a} (m_2 + 2n - 1) + \frac{a}{4(n-1+\rho)^2} \{2n\rho^2 + 2(n-1)(1-\rho)^2 + m_1n(n-1)+ n(n-1)\}$$

$$\rho = \frac{3}{4} + \frac{m_1}{4}$$

Région N° 5 : l , s(I) , s(II)

$$e = \frac{1}{2a} \{ \alpha(m_2+m_3) + 2n(1-\alpha)^2 + 2n\alpha^2 \} + \frac{a}{4n} \{ 4(1-\rho)^2 + 4\rho^2 + 2m_1\rho + m_1(n-1) \}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{m_2 + m_3}{8n} \quad \rho = \frac{1}{2} - \frac{m_1}{8}$$

Région N° 6 : r(I)

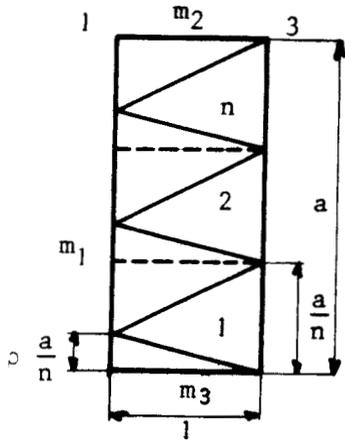
$$e = \frac{1}{2a} \{ \alpha m_2 + n\alpha^2 + n(1-\alpha)^2 + (n-1)\alpha^2 + (n-1)(1-\alpha)^2 + m_3(1-\alpha) \} + \frac{a}{4(n-1+\rho)^2} \{ n(n-1)(m_1+1) + 4n\rho^2 + 4(n-1)(1-\rho)^2 \}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{m_2 - m_3}{4(2n-1)} \quad \rho = \frac{m_1 + 5}{8}$$

- Tableau 15 -

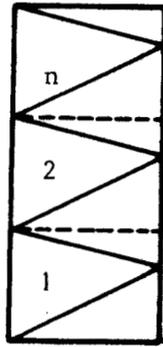
- Coefficients de puissance pour régions
rectangulaires unitaires hautes -

a > 1



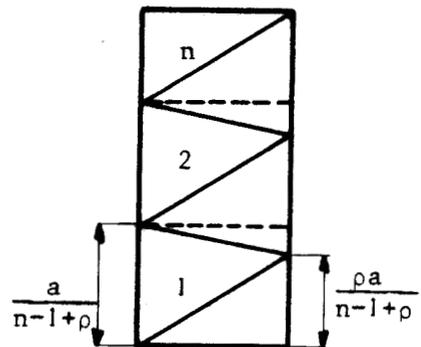
- N° 1 -

Conditions sur 34 $\ell, s(I), s(II)$
 $r(I), r(II)$



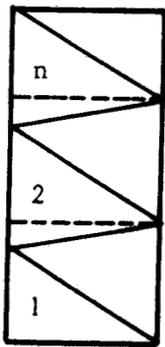
- N° 2 -

$\ell, s(I), s(II)$
 $r(I), r(II)$



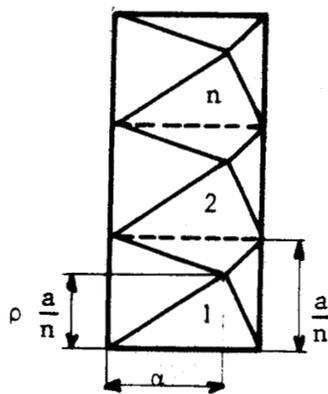
- N° 3 -

$\ell, s(I), s(II)$
 $r(I)$



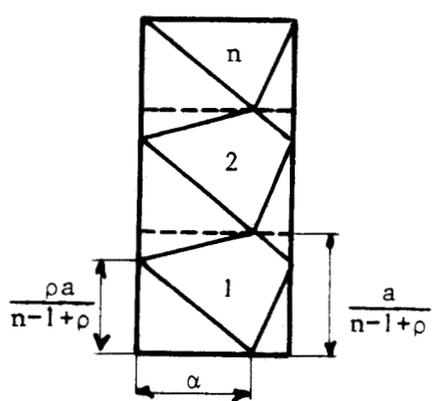
- N° 4 -

Conditions sur 34 $\ell, s(I), s(II)$
 $r(I)$



- N° 5 -

$\ell, s(I), s(II)$



- N° 6 -

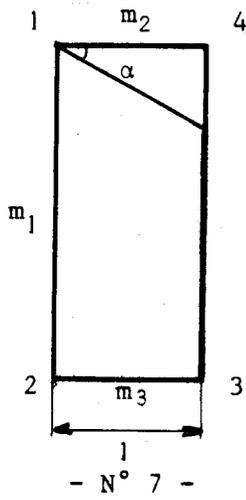
$r(I)$

- Figure 44 -

- Régions rectangulaires unitaires généralisées hautes -

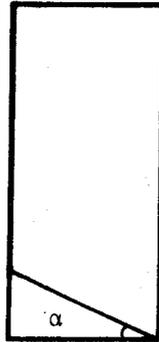
$a > 1$





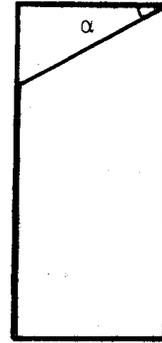
- N° 7 -

Conditions sur 34 $\ell, s(I), s(II), r(II)$



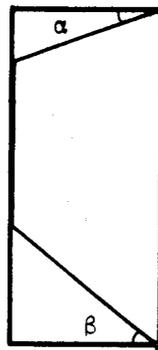
- N° 8 -

$\ell, s(I), s(II), r(I)$



- N° 9 -

$\ell, s(I), s(II), r(I)$



- N° 10 -

Conditions sur 34

$\ell, s(I), s(II), r(I), r(II)$

- Figure 45 -

- Régions rectangulaires unitaires généralisées hautes avec défaut -

$a > 1$



Conditions sur 34 :

Région N° 7 : λ , s(I), s(II), r(II)

$$e = [m_2 + 1]^{\frac{1}{2}}$$

Région N° 8 : λ , s(I), s(II), r(I)

$$e = [m_2 + 1]^{\frac{1}{2}}$$

Région N° 9 : λ , s(I), s(II), r(I)

$$e = [(m_1 + 1)(m_3 + 1)]^{\frac{1}{2}}$$

Région N° 10 : λ , s(I), s(II)

$$e = \frac{1}{2} [-m_1^2 + 4m_1 + 4]^{\frac{1}{2}}$$

Région N° 10 : r(I) (1 < a < 4)

$$e = \frac{1}{2} \left[m_1 \operatorname{tg} \alpha + \frac{2 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + a \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \right]$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{4} + \frac{2 - m_1}{4} \left[\frac{16 - a^2}{-m_1^2 + 4m_1 + 4} \right]^{1/2}$$

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{a}{4} + \frac{2 - m_1}{4} \left[\frac{16 - a^2}{-m_1^2 + 4m_1 + 4} \right]^{1/2}$$

Région N° 10 : r(II) (1 < a < 4)

$$e = \frac{1}{2} \left[m_1 \operatorname{tg} \alpha + \frac{2 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + a \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} \right]$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{4} + \frac{2 - m_1}{4} \left[\frac{16 - a^2}{-m_1^2 + 4m_1 + 4} \right]^{1/2}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{4} + \frac{2 - m_1}{4} \left[\frac{16 - a^2}{-m_1^2 + 4m_1 + 4} \right]^{1/2}$$

- Tableau 16 -

- Coefficients de puissance pour régions
rectangulaires unitaires hautes à défaut -

a > 1

4.6. - Région rectangulaire rigide N° 99.

La région rectangulaire généralisée rigide N° 99 vient compléter les tables de régions rectangulaires généralisées hautes ou plates.

Cette régions sera fréquemment utilisée pour décrire des écoulements.

Les conditions de vitesse pour cette région sont les suivantes :

. La vitesse d'entrée à la frontière 12 est prise égale à l'unité.

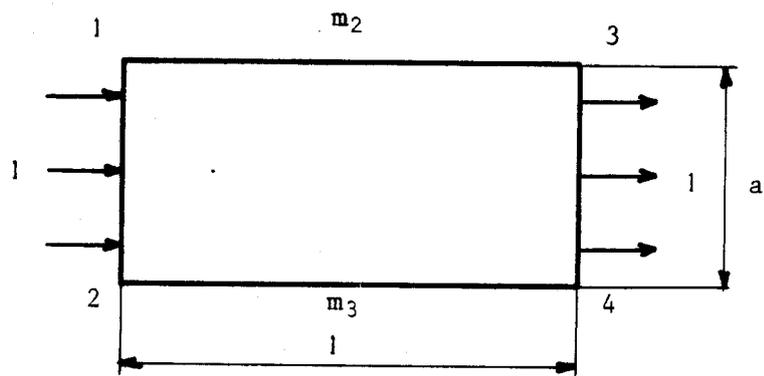
. La vitesse de sortie à la frontière 34 est égale à l'unité

(Figure 46) .

Le coefficient de puissance est donc :

$$e = \frac{m_2 + m_3}{2}$$

L'utilisation des tables de régions rectangulaires généralisées (Tableaux 15 et 16) et de la région rectangulaire généralisée N° 99 est développée au chapitre suivant.



$$e = \frac{m_2 + m_3}{2}$$

- Figure 46 -

- Région rectangulaire généralisée N° 99 -



5. - TRAITEMENT AUTOMATIQUE.

5.1. - Introduction.

L'évaluation automatique des puissances dissipées dans les écoulements plans en mise à forme est rendue nécessaire par l'ampleur des calculs à effectuer.

Pour y parvenir, il faut mettre au point un formalisme de définition de la pièce et de son découpage en zones rectangulaires.

La présentation du formalisme choisi est inutile dans ses détails ; par contre ses grandes lignes permettent de comprendre la méthode utilisée et des problèmes qu'elle pose.

La figure 47 schématise cette méthode, la présentation des données (définition des zones rectangulaires et des surfaces libres) en étant la phase la plus importante.

5.2. - Définition des zones rectangulaires.

5.2.1. - Définition des données géométriques.

Le problème étant bien défini (dimensions de la pièce, des outillages, conditions de frottement aux interfaces) , il faut procéder au découpage de la pièce en zones rectangulaires.

Une excellente intuition des écoulements réels permet de choisir le découpage optimal. On peut actuellement décrire dix zones dans une pièce. Leurs dimensions géométriques sont ensuite exprimées par addition ou soustraction de deux longueurs appelées paramètres du problème (au plus au nombre de 7) qui peuvent être éventuellement inconnus.

On définit alors leur intervalle de variation (3 paramètres, au maximum, peuvent être inconnus) .

Dans le cas d'écoulements non-stationnaires, on peut décrire des zones dont une dimension est nulle au début du procédé (paramètre 0) , ce qui permet de prendre en compte les changements de forme de la pièce.

5.2.2. - Définition des coefficients de frottement.

Les coefficients de frottement de couche limite sont spécifiés pour les faces 12, 13 et 24 de chaque zone rectangulaire.

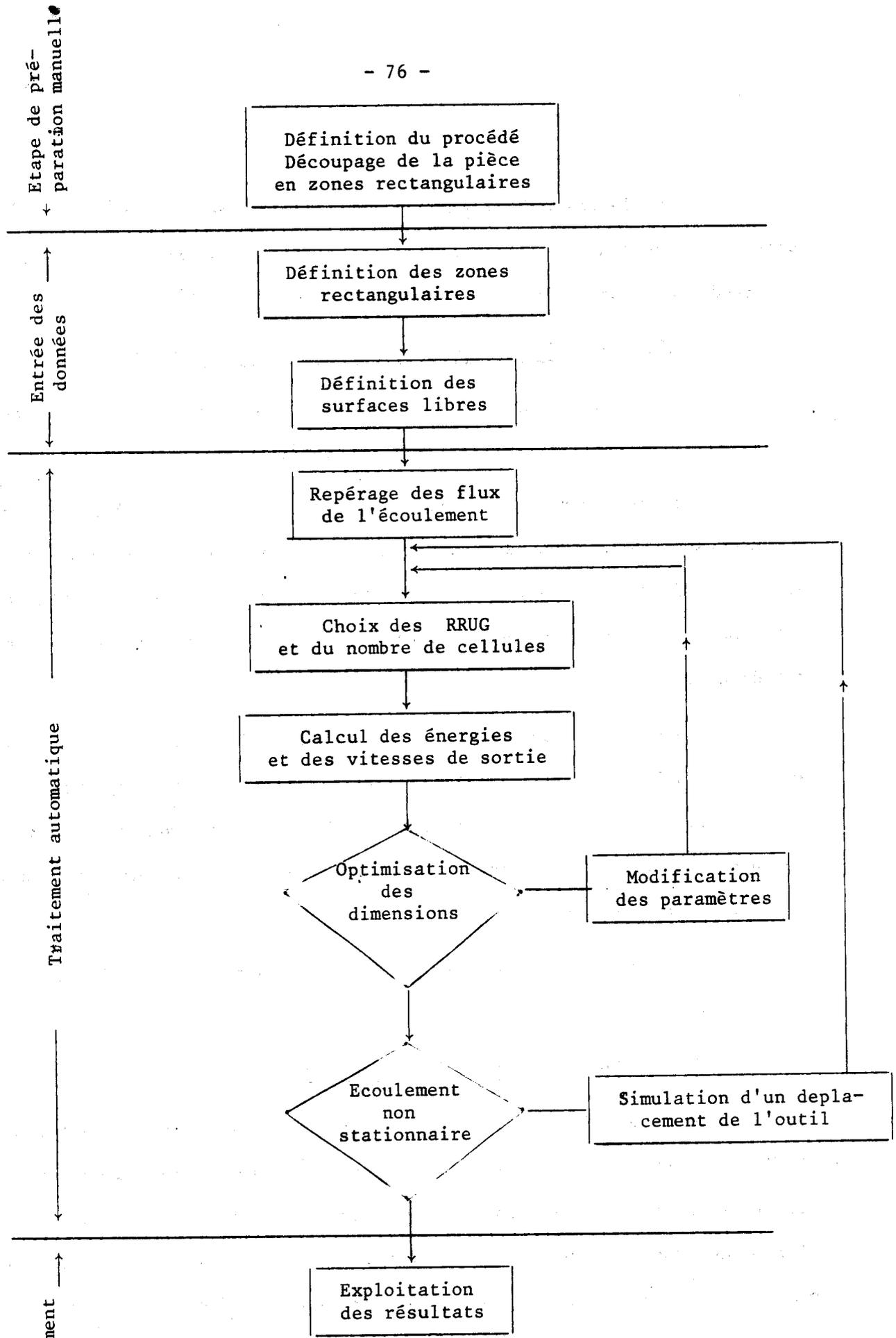
Le frottement aux interfaces avec l'outillage doit être déterminé par un test (essai d'anneau, par exemple) . Il est obligatoirement compris entre 0 (frottement nul) et 1 (contact collant) . Lorsque l'outillage est composé de plusieurs sous-ensembles, on peut définir des coefficients différents.

Lorsqu'un "plan neutre" (plan séparant deux flux de l'écoulement et à travers lequel le débit-matière est nul) ou un plan de symétrie (qui n'est qu'un plan neutre séparant deux flux symétriques) séparent deux zones rectangulaires, s'il n'y a pas de discontinuité de vitesse sur ces plans, le frottement est pris nul.

A l'interface entre deux zones, le contact est supposé collant (soit $m = 1$) .

5.2.3. Superposition des écoulements.

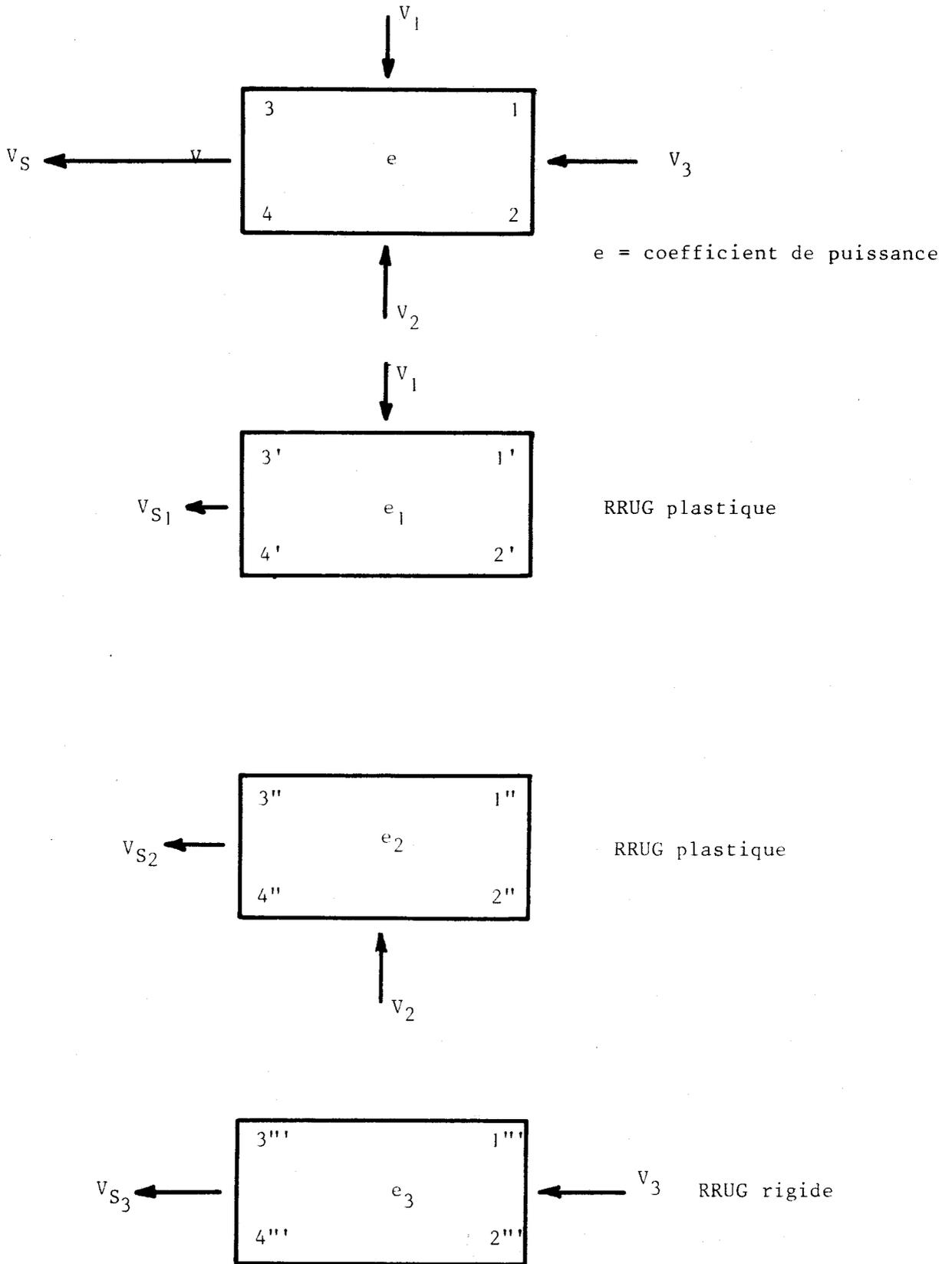
Dès que la pièce présente une certaine complexité, la description de l'écoulement par des zones rectangulaires dans lesquelles la matière pénètre par une seule face devient impossible ou trop rudimentaire. Il faut pouvoir décrire des zones à deux ou trois faces d'entrée (12, 13, 24) et une de sortie (34) . Soit, au plus deux flux tournant de 90° dans la zone et un flux le traversant en ligne droite.



- Figure 47 -

Schéma de fonctionnement
de la méthode de traitement automatique.





$v_S = v_{S1} + v_{S2} + v_{S3}$ pour les vitesses de sortie
 $e = e_1 + e_2 + e_3$ pour les puissances dissipées

- Figure 48 -

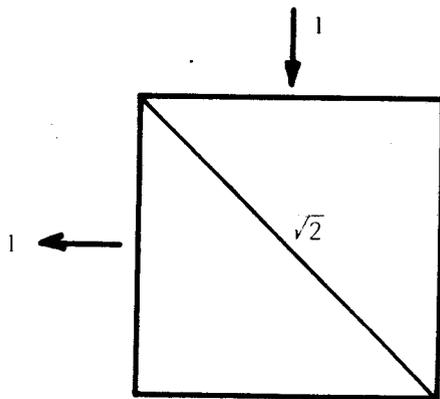
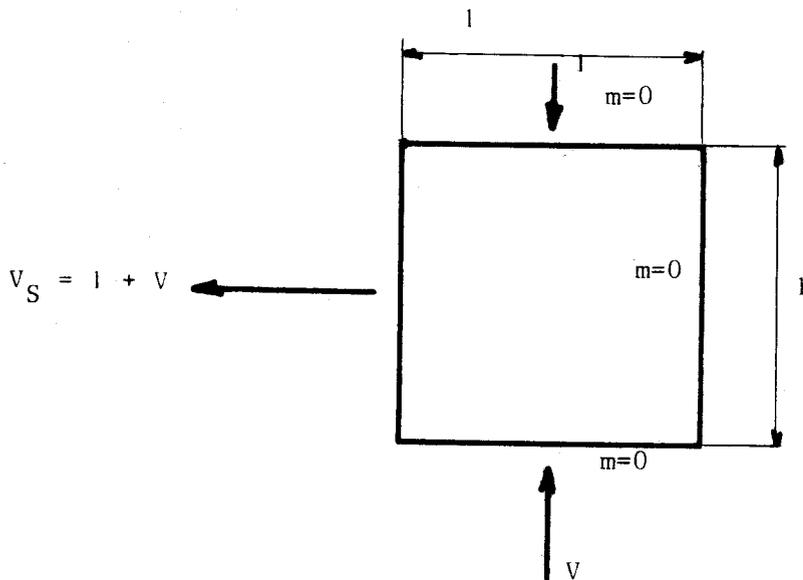
- Superposition des régions rectangulaires unitaires généralisées -



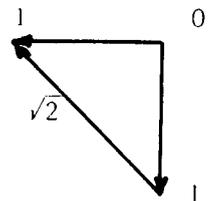
Pour cela, deux solutions sont possibles : utiliser des régions rectangulaires à deux ou trois faces d'entrée (pour des rapports de vitesse d'entrée variables) ou utiliser les régions rectangulaires à une face d'entrée en les superposant. C'est cette dernière solution qui a été retenue par suite de sa relative simplicité de mise en oeuvre.

Une zone rectangulaire à plusieurs flux entrants peut être décrite par au plus deux régions rectangulaires plastiques pour les flux tournant à 90° et une région rectangulaire rigide pour le flux traversant (Figure 48) . La puissance dissipée dans la zone est alors la somme des puissances dissipées dans chacune des régions rectangulaires. Cette superposition permet de décomposer le problème en éléments simples mais le champ de vitesses obtenu n'est pas nécessairement cinématiquement admissible dans le cas où deux régions rectangulaires plastiques sont nécessaires car leurs lignes de discontinuité sont normalement distinctes.

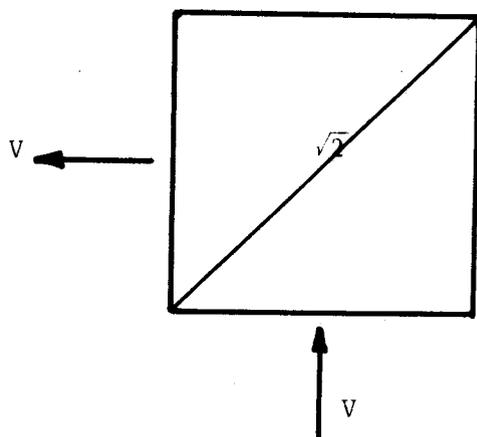
L'étude d'une zone carrée de dimension unitaire traversée par deux flux entrant par ses faces 13 et 24 montre que, dans ce cas, la superposition de deux régions fournit une prévision de puissance dissipée inférieure à celle obtenue par une solution cinématiquement admissible (Figures 49, 50 et 51) . Pour éviter cette difficulté, il est toujours possible de séparer les deux flux plastiques et de les laisser entrer dans deux zones différentes dont les vitesses de sortie dépendent de l'optimisation faite sur le rapport des hauteurs des deux zones (Figure 52) . La solution obtenue est cinématiquement admissible. Elle rejoint la solution directe lorsque les vitesses de sortie des deux zones sont identiques.



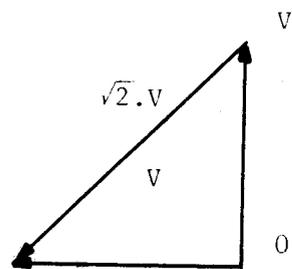
Hodographe



$$\dot{W}_1 = k \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2k$$



Hodographe



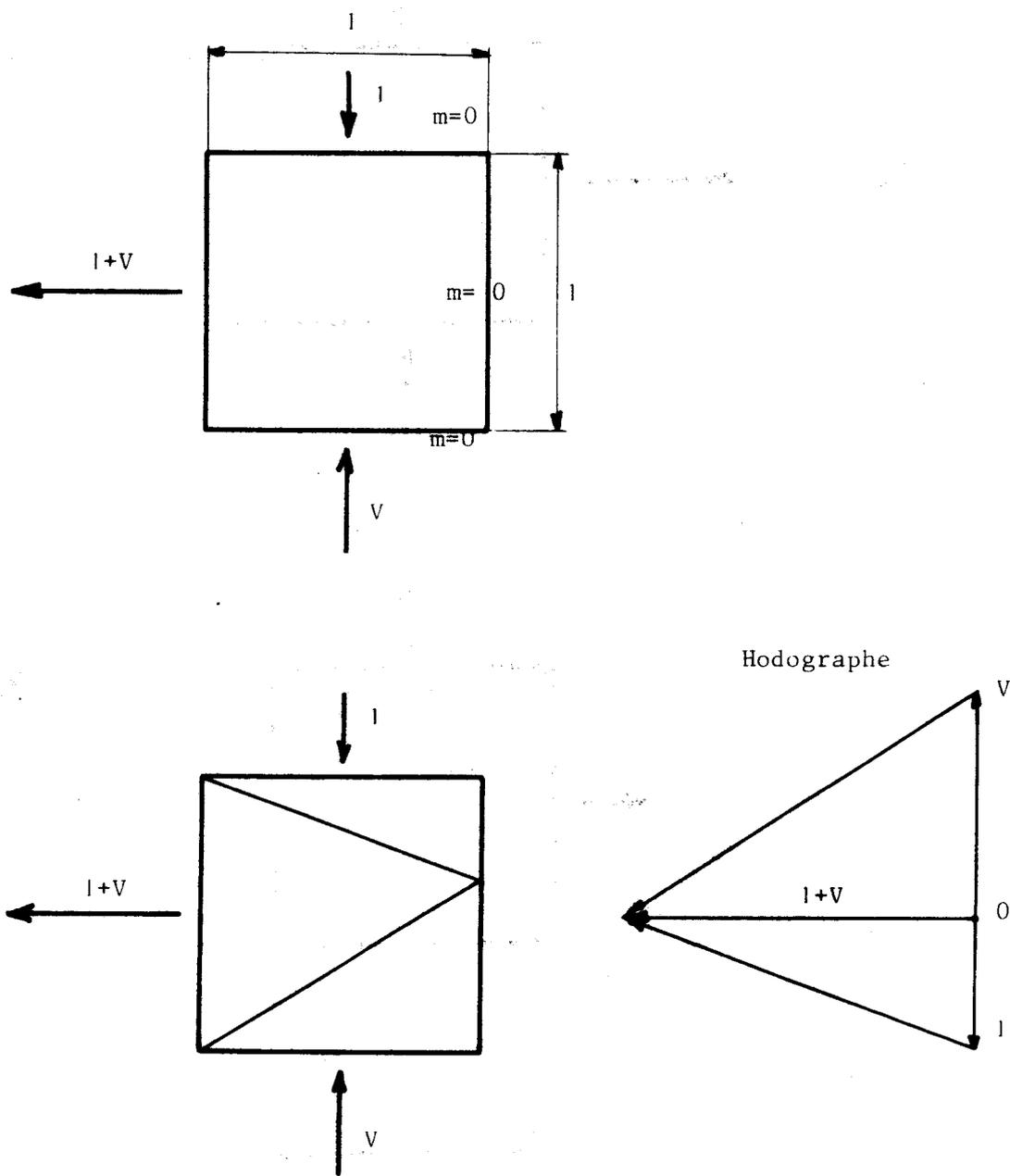
$$\dot{W}_2 = k \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot V = 2kV$$

$$\dot{W} = \dot{W}_1 + \dot{W}_2 = 2k(1 + V)$$

- Figure 49 -



- Application à une zone carrée de la méthode de superposition des écoulements -

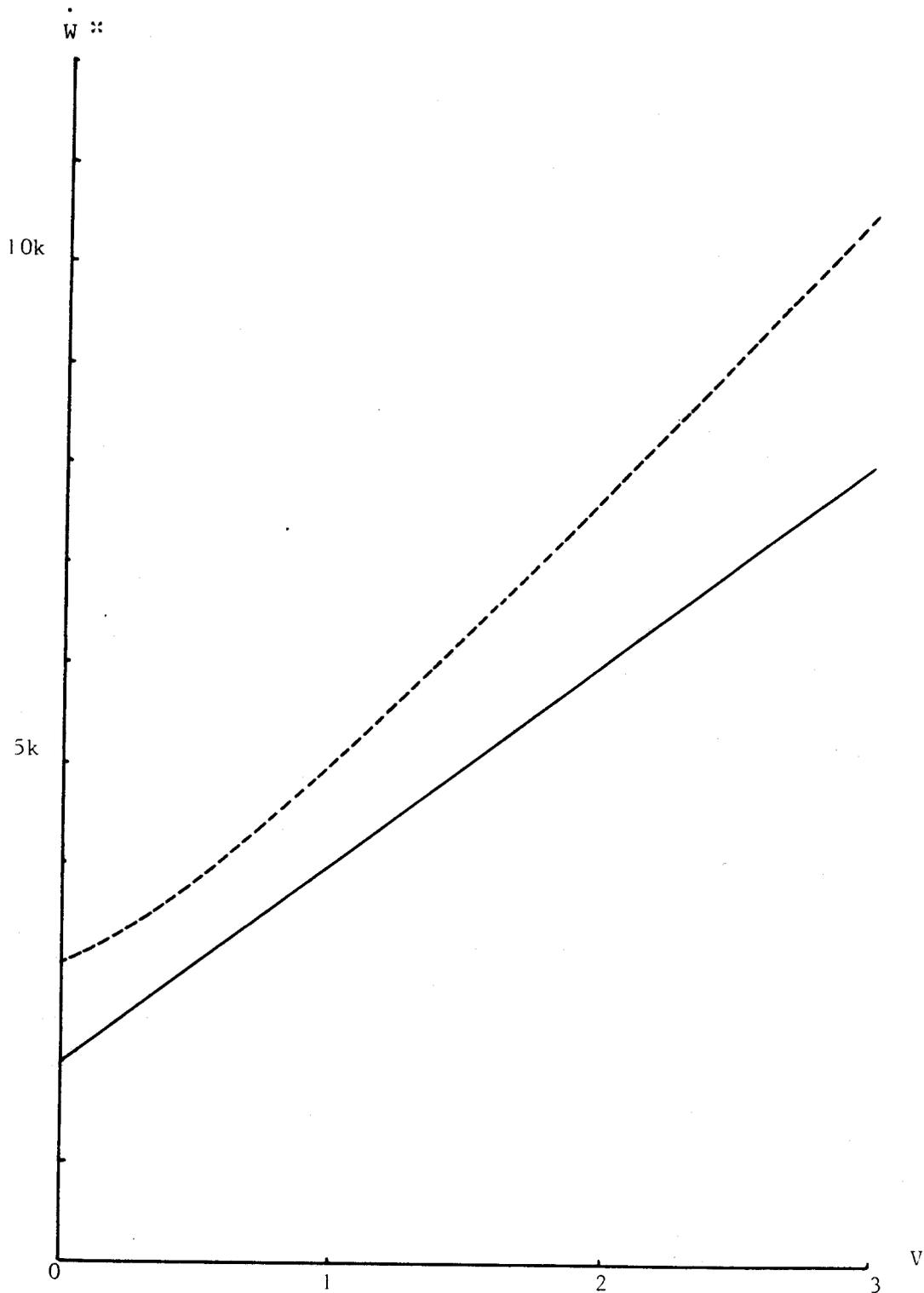


$$\dot{W} = \frac{k}{1+V} (3 + 4V + 3V^2)$$

- Figure 50 -

- Evaluation directe de la puissance dissipée
par un écoulement de deux flux dans une zone carrée -

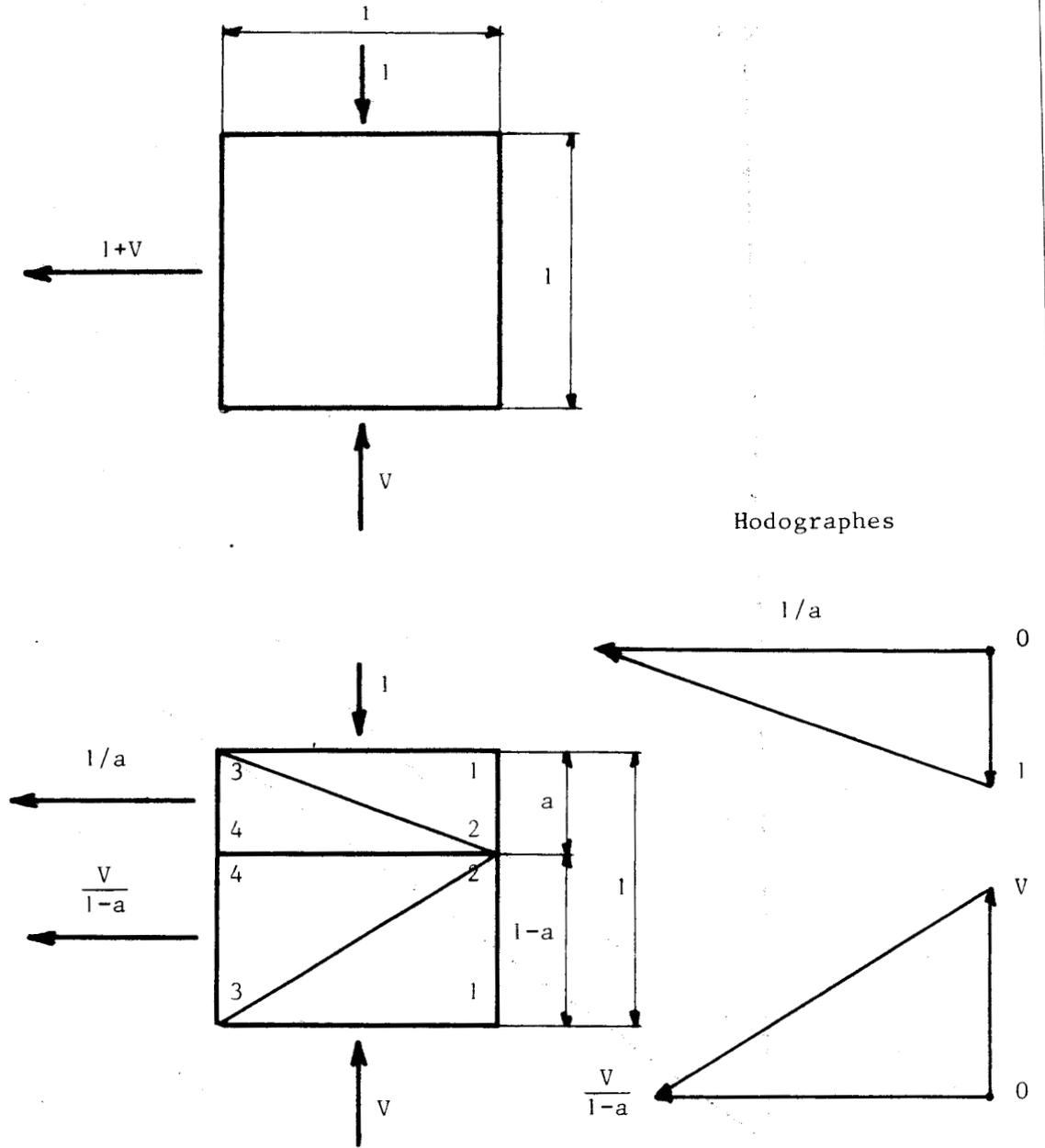




- Figure 51 -

- Comparaison des prévisions obtenues par superposition de deux régions rectangulaires (trait continu) ou par solution directe (trait interrompu) pour un écoulement à deux flux dans une zone carrée -





- Figure 52 -

- Ecoulement à deux flux entrant dans une zone carrée par division en deux zones rectangulaires -



L'utilisateur a donc le choix entre deux solutions lorsqu'il doit décrire un écoulement complexe :

- . superposer des régions rectangulaires sur une zone rectangulaire, ce qui revient à fondre des flux convergents pour ne plus obtenir qu'un flux en sortie de la zone. La solution n'est alors plus cinématiquement admissible et la prévision d'énergie effectuée ne sera pas nécessairement une borne supérieure de la puissance réelle. Néanmoins, la description de l'écoulement est plus aisée.
- . diviser la région géométrique en deux zones rectangulaires dont les tailles relatives pourront être optimisées, chacune ne pouvant être traversée que par un flux plastique et un flux rigide. La solution est cinématiquement admissible et la prévision d'énergie est une borne supérieure de la solution exacte.

Les flux parallèles issus de ces deux régions ne sont pas nécessairement animés d'une vitesse identique. La frontière entre ces flux est donc une ligne de discontinuité. Or le système automatique ne peut pas, dans l'état actuel, calculer une discontinuité sur des vitesses appartenant à des régions différentes.

La solution la plus proche de la réalité consiste alors à négliger l'énergie dissipée sur cette discontinuité en indiquant un coefficient de frottement nul. La prévision d'énergie perd alors, là aussi, sa propriété de borne supérieure. Par ailleurs, la description de l'écoulement est plus complexe. (Deux zones rectangulaires et une dimension optimisable).

5.2.4. - Conditions de sortie.

Les conditions de sortie sont de trois types :

- . Type 0 : la face de sortie 34 est une surface libre
(pas de bloc adjacent) ;
- . Type I : la face de sortie 34 est une face d'entrée pour une autre région rectangulaire qui n'est pas traversée par un flux rigide ;
- . Type II : la face de sortie 34 est une face d'entrée pour une autre région rectangulaire qui est traversée par un flux rigide (discontinuité de vitesses à l'interface) .

Les éléments correspondant aux paragraphes précédents ainsi que la définition des zones adjacentes forment les données qu'il faut fournir au programme pour réaliser le traitement automatique de l'écoulement.

5.3. - Définition des flux de l'écoulement.

Le premier travail du programme consiste à identifier les différents flux formant l'écoulement. Il procède en remontant de l'aval vers l'amont. L'aval est défini ici par une face de sortie libre dite évolutive, c'est-à-dire qu'elle peut se déplacer pendant le procédé. L'amont est normalement la cause de l'écoulement, c'est-à-dire l'interface avec l'outil.

La définition précise des différents flux est une opération fondamentale car elle conditionne toutes les opérations de calcul de vitesses et des puissances dissipées. Elle est réalisée automatiquement par le programme.

5.4. - Calcul de la puissance dissipée.

Les régions rectangulaires unitaires généralisées sont classées en deux types (suivant le rapport hauteur sur longueur) : RRUG plates ou RRUG hautes. Le programme utilise cette classification.

5.4.1. - Régions rectangulaires unitaires généralisées plates.

Il existe six RRUG plates (Figure 43) . Les puissances dissipées dépendent pour chacune du nombre de cellules, des coefficients de frottement sur les faces 12, 13, 24, et des conditions de sortie. Les vitesses de sortie sont toutes identiques pour une vitesse d'entrée et des dimensions données.

Le programme calcule pour chaque RRUG la prévision de puissance optimale en fonction du nombre de cellules. Les six prévisions d'énergie obtenues sont alors comparées de façon à sélectionner la meilleure solution. Le calcul est effectué pour une vitesse d'entrée dans la RRUG unitaire.

5.4.2. - Régions rectangulaires unitaires généralisées hautes.

Il existe deux types de RRUG hautes suivant qu'elles prennent, ou non, en compte l'apparition de défauts (Figures 44 et 45) .

La recherche de la meilleure RRUG s'effectue en deux temps :

- a) recherche de la meilleure RRUG sans défaut avec optimisation du nombre de cellules. Soit e_1 la prévision de puissance obtenue.
- b) recherche de la meilleure RRUG à défaut. Soit e_2 la prévision de puissance obtenue et V_2 la vitesse de sortie correspondante (V_2 est plus grande que V_1 vitesse de sortie des RRUG sans défauts puisqu'elle permet l'apparition d'une cavité dans la matière) .

Le choix entre une solution sans ou avec défaut dépend donc des RRUG situées en aval de celle en cours d'étude.

Soit e_0 la puissance dissipée dans les RRUG situées en aval pour une vitesse d'entrée unitaire dans la RRUG située en aval adjacente à celle en cours d'étude.

$$\begin{aligned} e' &= e_0 \times V_1 + e_1 & e' &: \text{puissance prévue pour le flux aval,} \\ & & & \text{sans défaut} \\ e'' &= e_0 \times V_2 + e_2 & e'' &: \text{puissance prévue pour le flux aval,} \\ & & & \text{avec défaut} \end{aligned}$$

Si e' est inférieur à e'' , la solution optimale ne comporte pas de défaut. Dans le cas contraire, l'écoulement prévoit l'apparition d'un défaut.

5.4.3. - Calcul de la pression sous l'outil.

Le calcul de la pression de formage nécessite le calcul de la puissance dissipée lors du procédé \dot{W}^* . Cette puissance est la somme de toutes les puissances dissipées dans les écoulements qui prennent leur source à l'outil-moteur. La surface active de l'outil-moteur a été définie à l'occasion du repérage des régions rectangulaires adjacentes. La pression de formage p^* est donc évaluée par

$$p^* = \frac{\dot{W}^*}{S\emptyset}$$

$S\emptyset$: surface active de l'outil-moteur.

5.5. - Optimalisation des dimensions des régions rectangulaires.

Dans les écoulements complexes, on est amené à définir des zones rectangulaires dont l'une au moins des dimensions géométriques est inconnue. La prévision de puissance dépend alors du choix fait sur cette ou ces dimensions par recherche de la puissance dissipée minimale. Le programme permet d'optimiser la prévision de puissance avec trois paramètres au maximum.

De plus, dans de nombreux cas de forgeage, la forme de la pièce évolue en fonction de la progression de l'outil, l'écoulement est non-stationnaire. Il est alors nécessaire d'étudier l'écoulement au cours d'une série d'étapes de déplacement de l'outil. Le programme permet de spécifier le pas et le nombre de déplacements et d'étudier les caractéristiques optimales de l'écoulement pour chacun de ces pas.

6. - EXEMPLES DE TRAITEMENTS AUTOMATIQUES.

6.1. - Introduction.

Nous envisageons maintenant des exemples de traitement automatique d'écoulements plans.

Le programme fournit à chaque pas de calcul le numéro des régions rectangulaires unitaires généralisées retenues, le nombre de cellules, la puissance dissipée dans chacune d'entre elles, le volume de matière plastifiée et la pression sous l'outil-moteur.

La vérification du champ de vitesses obtenu peut être faite aisément pour un tracé en vraie grandeur des régions rectangulaires.

6.2. - Estimation de la pression de forgeage en état plan de déformation.

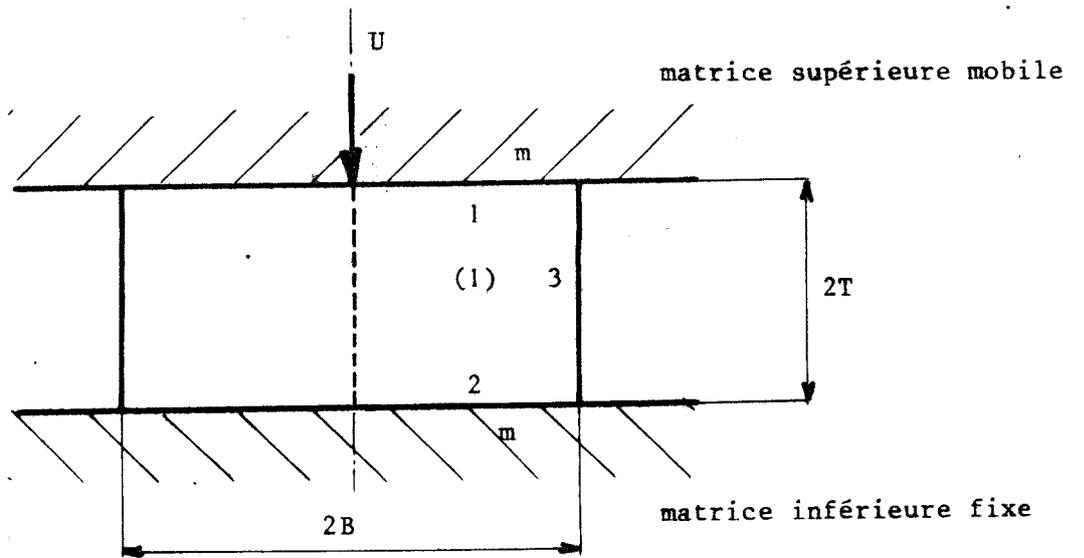
Le lopin, de dimensions $2B \times 2T$, est comprimé par deux matrices planes parallèles (Figure 53).

La zone plastifiée est découpée en deux zones rectangulaires de dimensions $B \times 2T$.

Les valeurs successives de la pression moyenne de forgeage $\bar{p}^*/2k$, obtenues automatiquement, pour différentes conditions de frottement (depuis le contact sans frottement $m = 0$ jusqu'au contact collant $m = 1$ identiques pour les deux matrices planes) sont reportées à la figure 54.

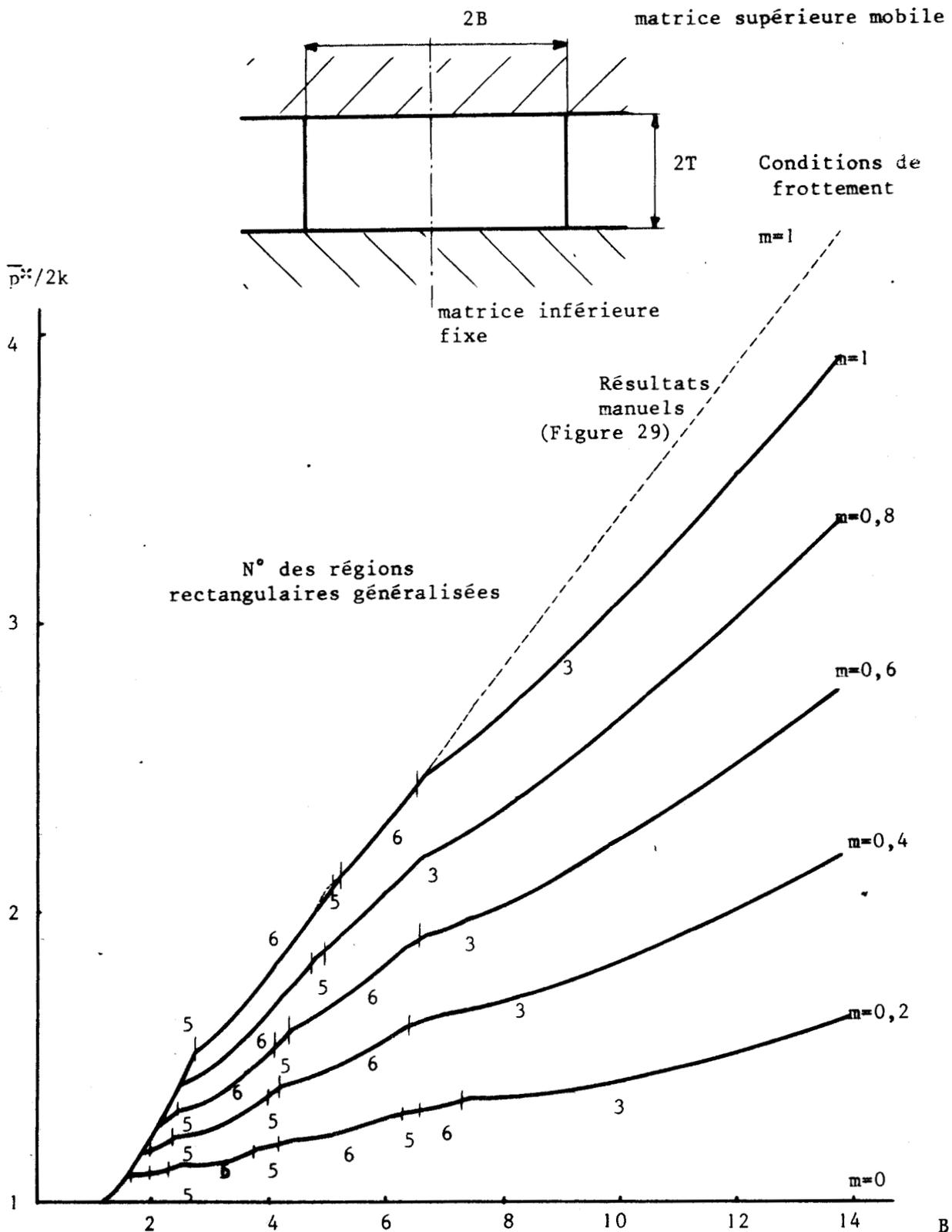
Une amélioration est obtenue par rapport aux résultats de la figure 29 (reportés en trait interrompu sur la figure 54) dans les conditions de contact collant sur les deux matrices planes.

Au cours de ces calculs, pour des rapports B/T supérieurs à 2, les régions rectangulaires unitaires généralisées plates N° 3, 5 et 6 constituées de une à trois cellules ont été utilisées.



- Figure 53 -

- Forgeage plan : découpage de la zone plastifiée
en régions rectangulaires -



- Figure 54 -

- Meilleures valeurs de la pression moyenne de forgeage $\bar{p}^*/2k$ en état plan de déformation, obtenues par régions rectangulaires unitaires généralisées avec différentes conditions de frottement de couche -



6.3. - Estimation de la pression sur poinçon en extrusion plane symétrique.

Nous reprenons l'exemple traité manuellement au paragraphe (3.5.3.) en écoulement non-stationnaire, puis en écoulement naissant.

1) Evolution de la pression d'extrusion au cours du formage de la pièce.

Le lopin, de dimensions $T \times 2W_c$, est soumis à la pression d'un poinçon plat de largeur W_p (Figure 55). Au fur et à mesure de l'enfoncement, la produit s'écoule de part et d'autre du poinçon.

La zone plastifiée est découpée en six régions rectangulaires numérotées en remontant l'écoulement de l'extérieur vers le poinçon.

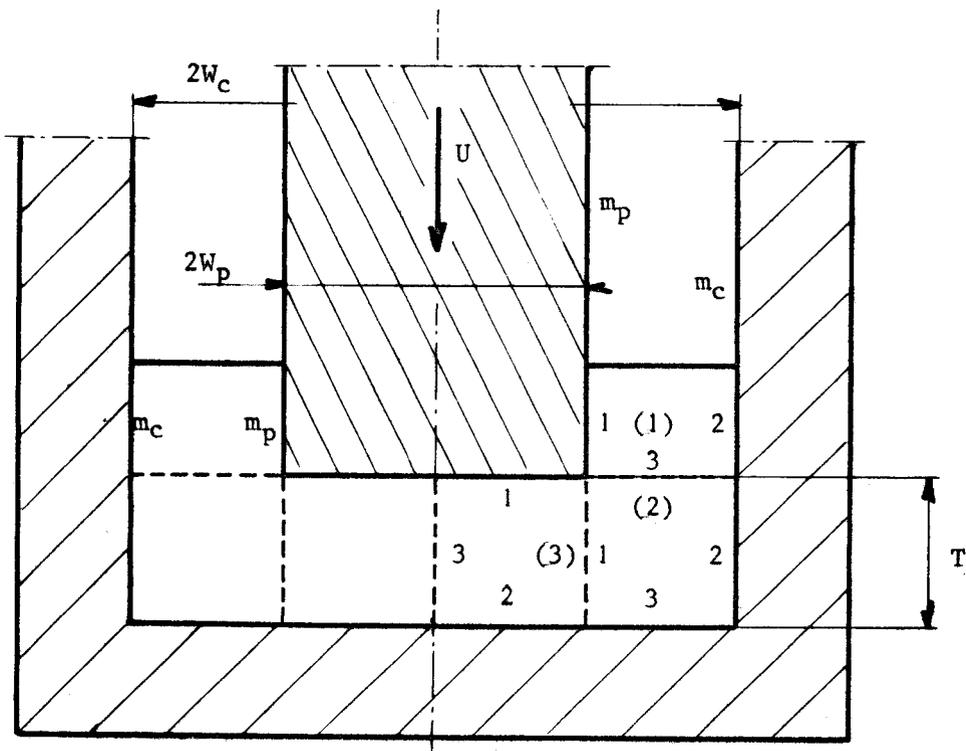
L'exploitation est menée pour l'extrusion d'un lopin de dimensions initiales $1,4 T \times T$ dans les conditions suivantes :

- . Rapports de réduction $\frac{W_p}{W_c} = 0,5$ et $\frac{W_p}{W_c} = 0,8$.
- . Conditions de frottement sur la matrice variables ; le coefficient de frottement de conche m_c varie entre 0 et 1.
- . Conditions de frottement sur le poinçon variables ; le coefficient de frottement de conche m_p varie entre 0 et 1.

Les valeurs successives de la pression moyenne $\bar{p}^*/2k$ en cours d'extrusion sont reportées :

- . à la figure 56 avec des conditions de contact collant sur poinçon et conteneur ;
- . aux figures 57 et 58 pour les rapports d'extrusion 0,5 et 0,8 avec des conditions de frottement identiques pour le poinçon et le conteneur ;
- . aux figures 59 et 60 pour les rapports d'extrusion 0,5 et 0,8, avec des conditions différentes pour le poinçon et le conteneur.

Ces différents résultats sont obtenus assez rapidement et montrent qu'il est possible de tenir compte d'une grande variété de conditions (dimensions du lopin, rapports d'extrusion, conditions de frottement) .



- Figure 55 -

- Extrusion plane symétrique :
découpage de la zone plastifiée en régions rectangulaires -

$\bar{p}^*/2k$

25

20

15

10

5

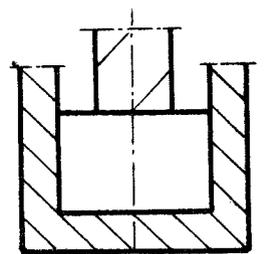
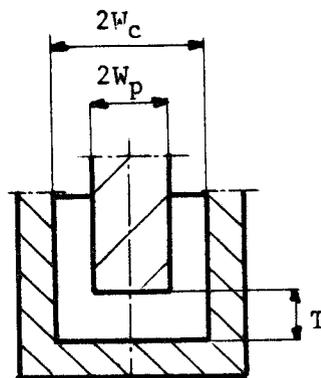
$W_p/W_c = 0,8$

$m_p = m_c = 1$

$W_p/W_c = 0,5$

- Figure 56 -

- Valeurs de la pression moyenne $\bar{p}^*/2k$
en extrusion plane symétrique avec un lopin
initial tel que $T/W_c = 1,4$ et contact rugueux
outil-lopin -



0,2

0,4

0,6

0,8

1,0

1,2

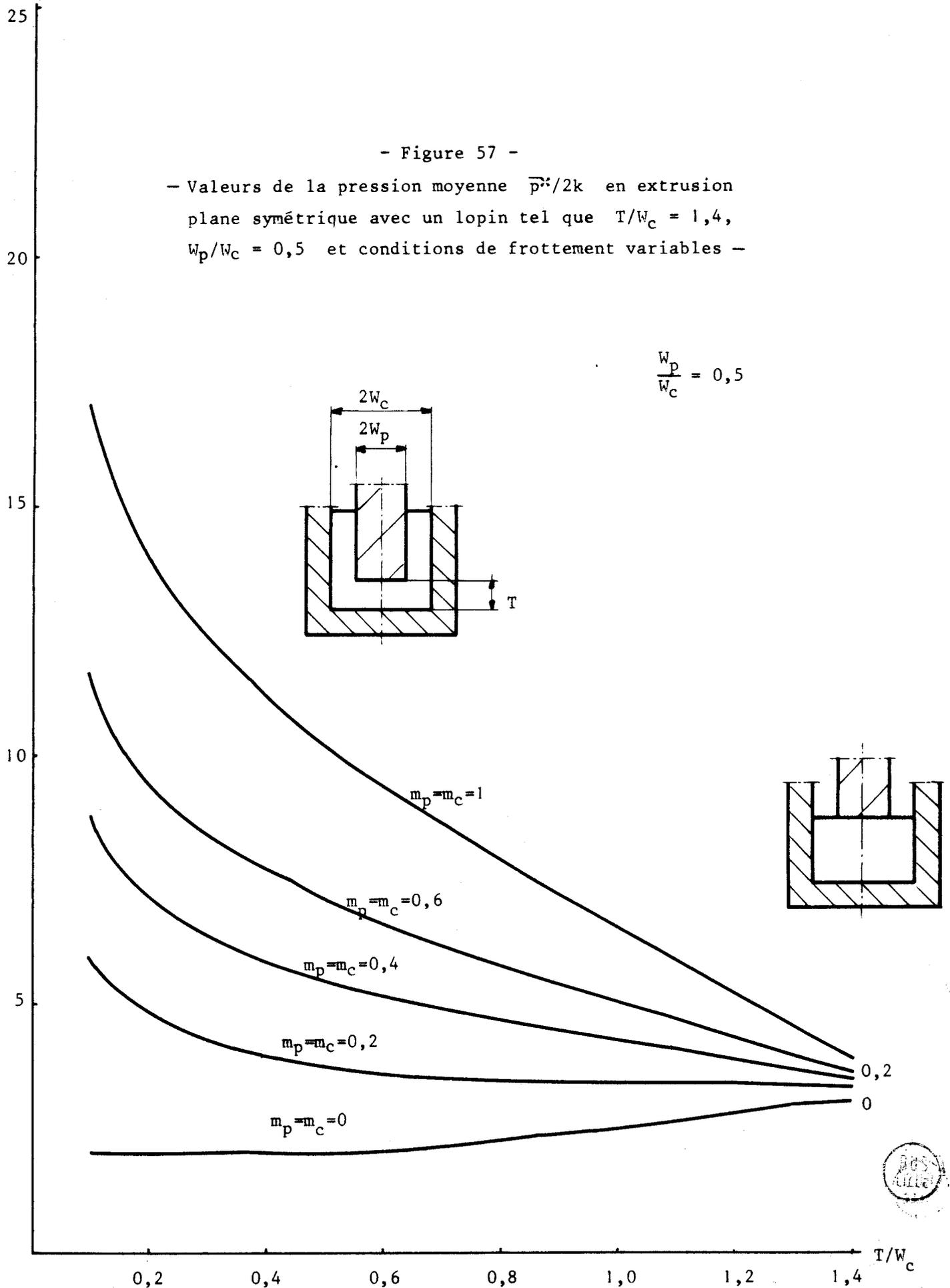
1,4

T/W_c

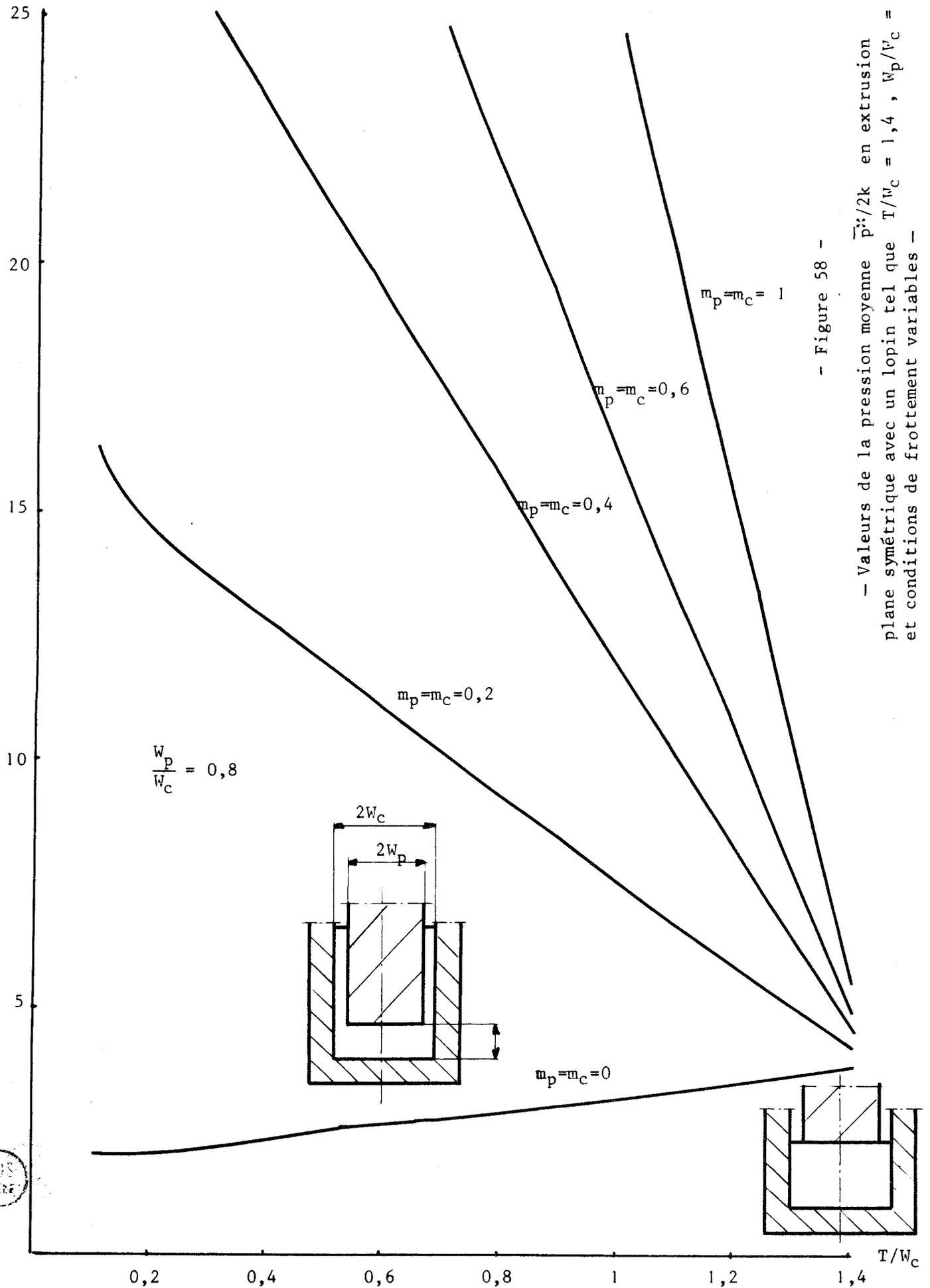


- Figure 57 -

- Valeurs de la pression moyenne $\bar{p}^*/2k$ en extrusion plane symétrique avec un lopin tel que $T/W_c = 1,4$, $w_p/w_c = 0,5$ et conditions de frottement variables -



$\bar{p}^*/2k$

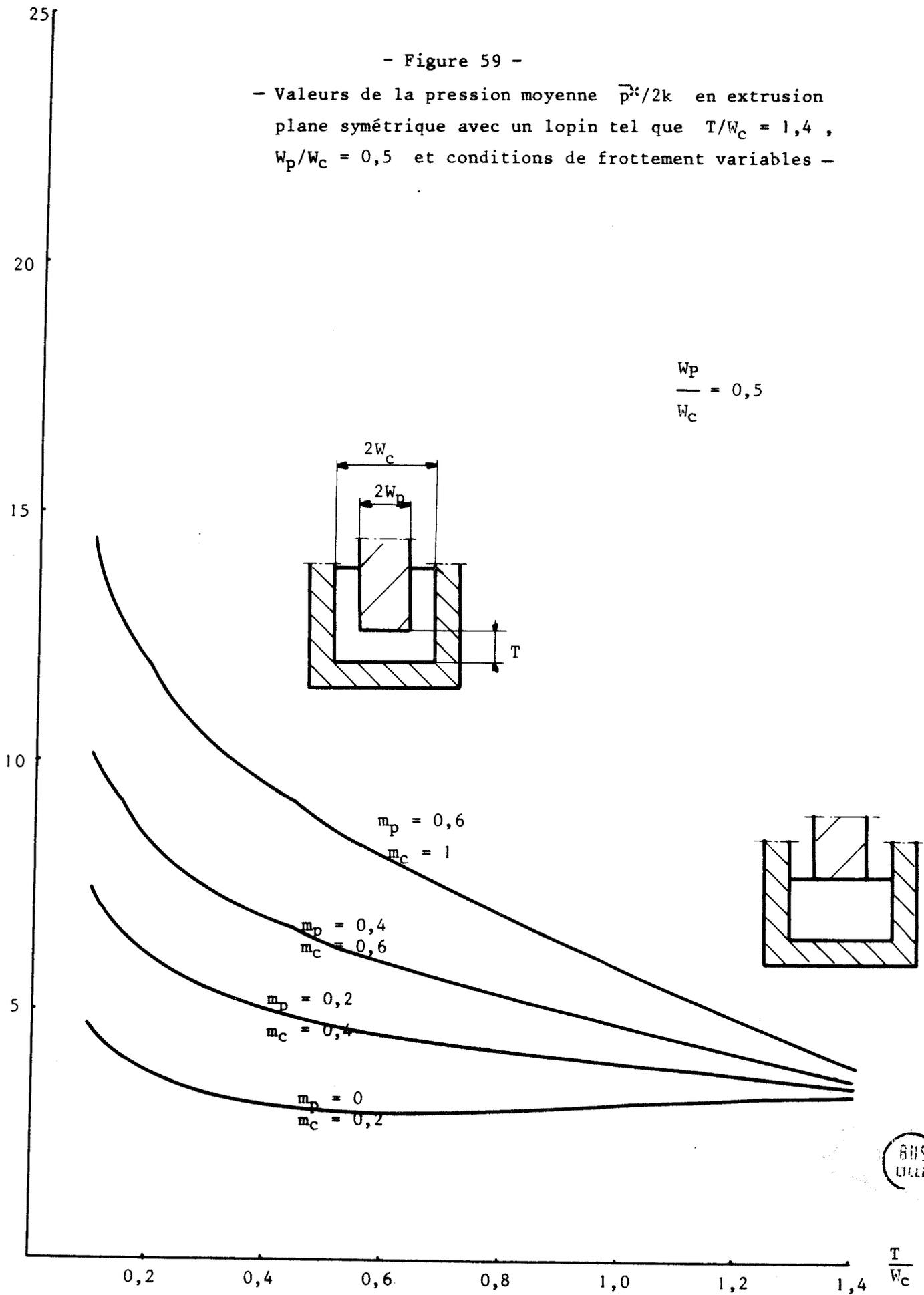


- Figure 58 -

- Valeurs de la pression moyenne $\bar{p}^*/2k$ en extrusion plane symétrique avec un lopin tel que $T/W_c = 1,4$, $W_p/W_c = 0,8$ et conditions de frottement variables -

- Figure 59 -

- Valeurs de la pression moyenne $\bar{p}^*/2k$ en extrusion plane symétrique avec un lopin tel que $T/W_c = 1,4$, $W_p/W_c = 0,5$ et conditions de frottement variables -



$\bar{p}^*/2k$

25

20

15

10

5

$W_p/W_c = 0,8$

$m_p = 0,6$
 $m_c = 1$

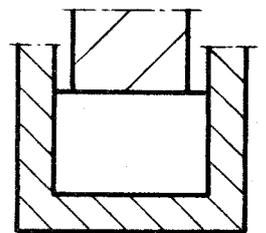
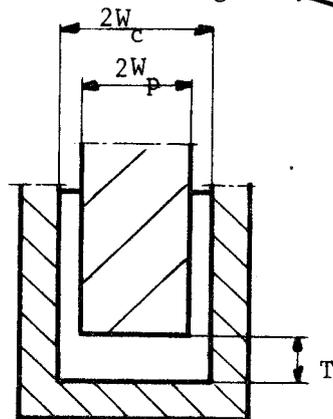
$m_p = 0,4$
 $m_c = 0,6$

$m_p = 0,2$
 $m_c = 0,4$

$m_p = 0$
 $m_c = 0,2$

- Figure 60 -

- Valeurs de la pression moyenne $\bar{p}^*/2k$ en extrusion plane symétrique avec un lopin tel que $T/W_c = 1,4$, $W_p/W_c = 0,8$ et conditions de frottement variables -



0,2

0,4

0,6

0,8

1,0

1,2

1,4

T/W_c

BUS
LILLE

2) Pression moyenne d'extrusion en écoulement naissant.

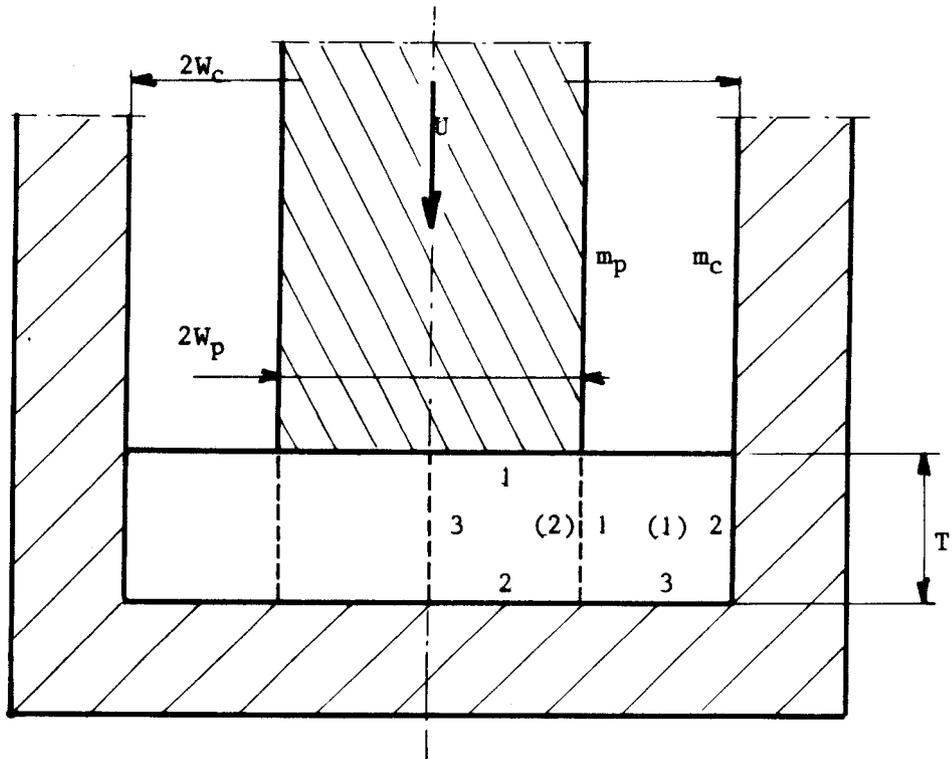
Il est intéressant de compléter les résultats précédents par une prévision de la pression d'extrusion en début du formage pour plusieurs dimensions de lopins avec des conditions de frottement. (figure 61)

Nous avons traité les cas suivants :

- . Rapports d'extrusion $W_p/W_c = 0,5$ et $W_p/W_c = 0,8$.
- . Dimensions T , W_c du lopin telles que le rapport T/W_c varie entre 0,1 et 1,4.
- . Conditions de frottement sur le poinçon variables ($0 \leq m_p \leq 1$) .
- . Conditions de frottement sur la matrice variables ($0 \leq m_c \leq 1$) .

Les valeurs calculées de la pression moyenne d'extrusion $\bar{p}^*/2k$ sont reportées

- . à la figure 62 pour $W_p/W_c = 0,5$ et $W_p/W_c = 0,8$ avec $m_p = m_c = 0$; une amélioration obtenue par rapport aux résultats notés à la figure 32 pour les rapports T/B inférieurs à 0,4 ; pour les autres rapports, les valeurs obtenues sont voisines (égales ou légèrement inférieures) .
- . aux figures 63 et 64, pour $W_p/W_c = 0,5$ et $W_p/W_c = 0,8$ avec des coefficients m_p et m_c identiques et compris entre 0 et 1 ;
- . aux figures 65 et 66, pour $W_p/W_c = 0,5$ et $W_p/W_c = 0,8$ avec des coefficients m_p et m_c , compris entre 0 et 1, différents pour le poinçon et la matrice.

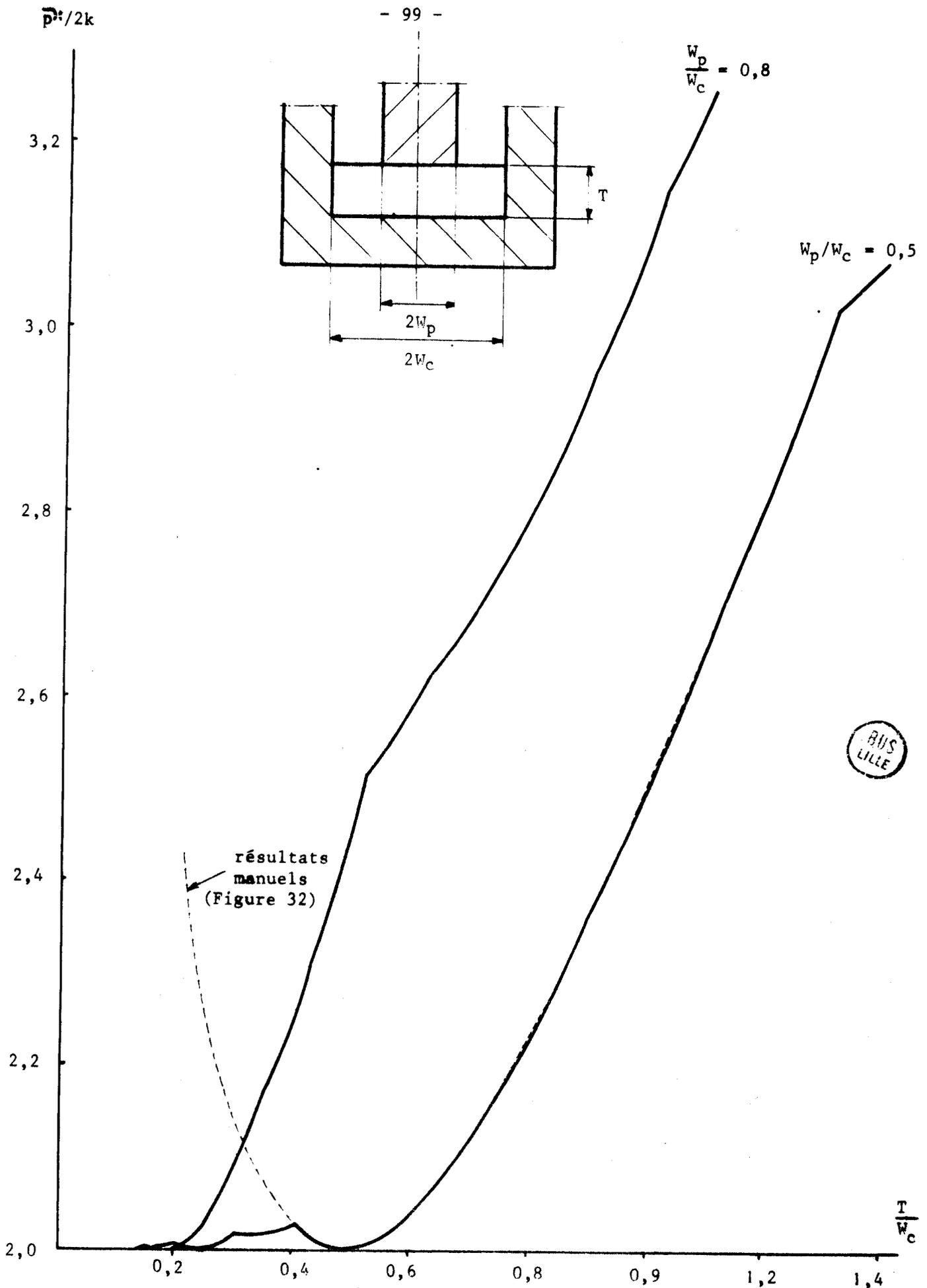


- Figure 61 -

- Extrusion plane symétrique naissante :

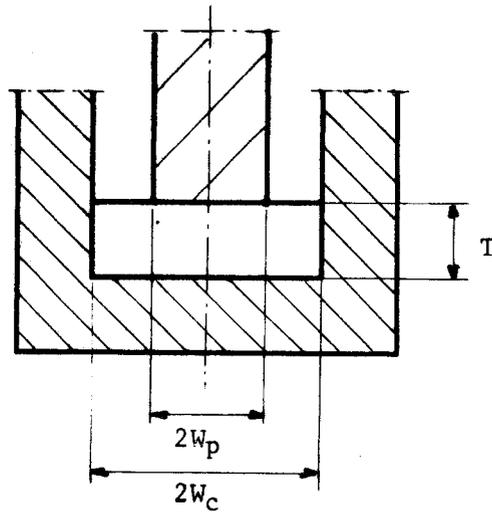
découpage de la zone plastifiée en régions rectangulaires -





- Figure 62 -

- Valeurs de la pression moyenne $\bar{p}^*/2k$ en extrusion plane symétrique naissante par régions rectangulaires unitaires généralisées avec un contact lopin-outillage sans frottement -

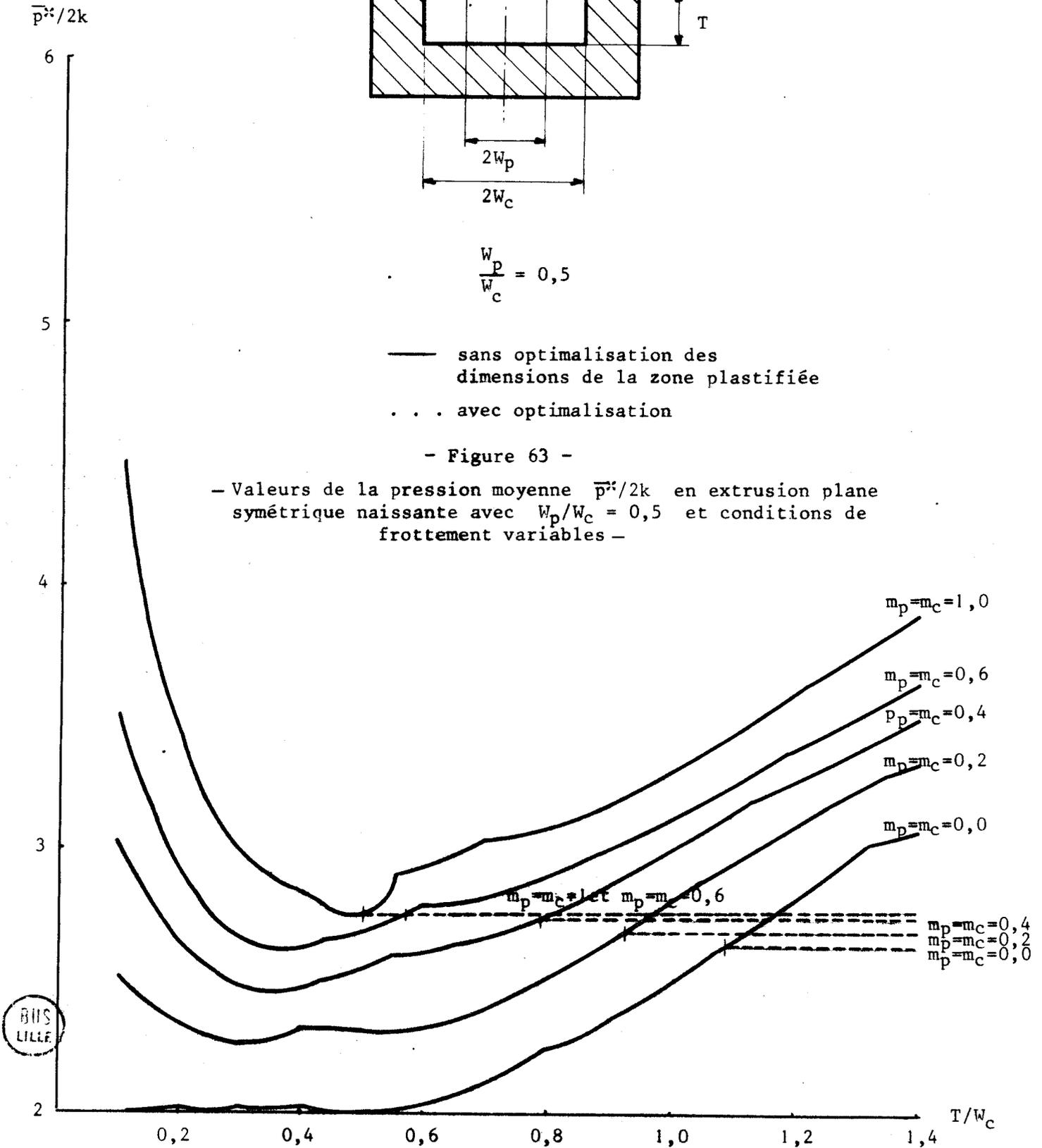


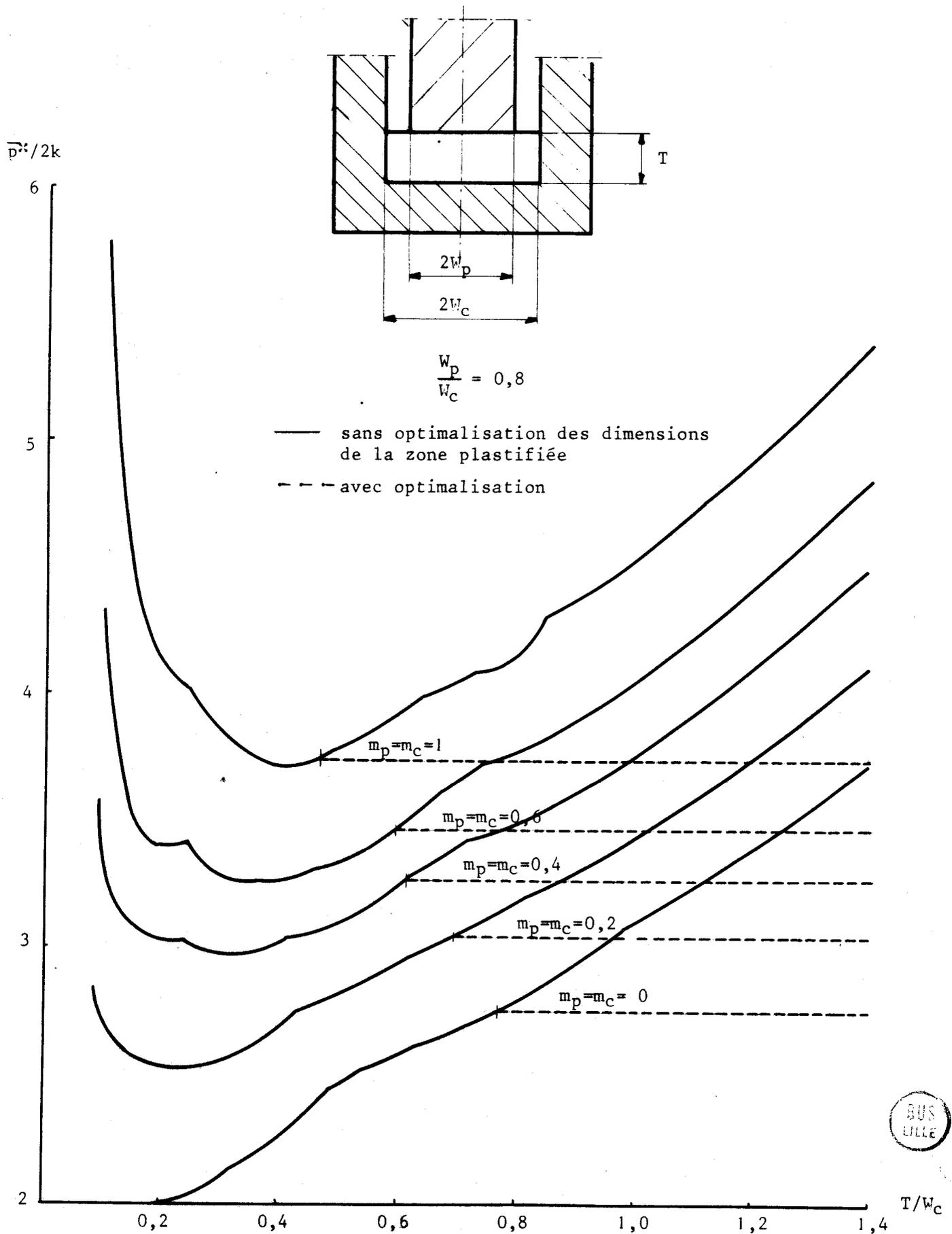
$$\frac{W_p}{W_c} = 0,5$$

— sans optimisation des dimensions de la zone plastifiée
 . . . avec optimisation

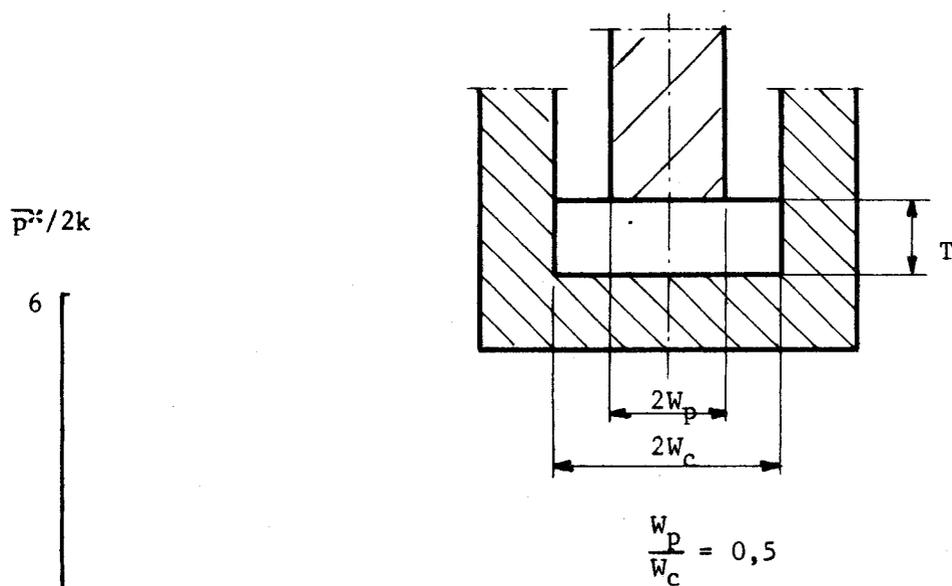
- Figure 63 -

- Valeurs de la pression moyenne $\bar{p}^z/2k$ en extrusion plane symétrique naissante avec $W_p/W_c = 0,5$ et conditions de frottement variables -



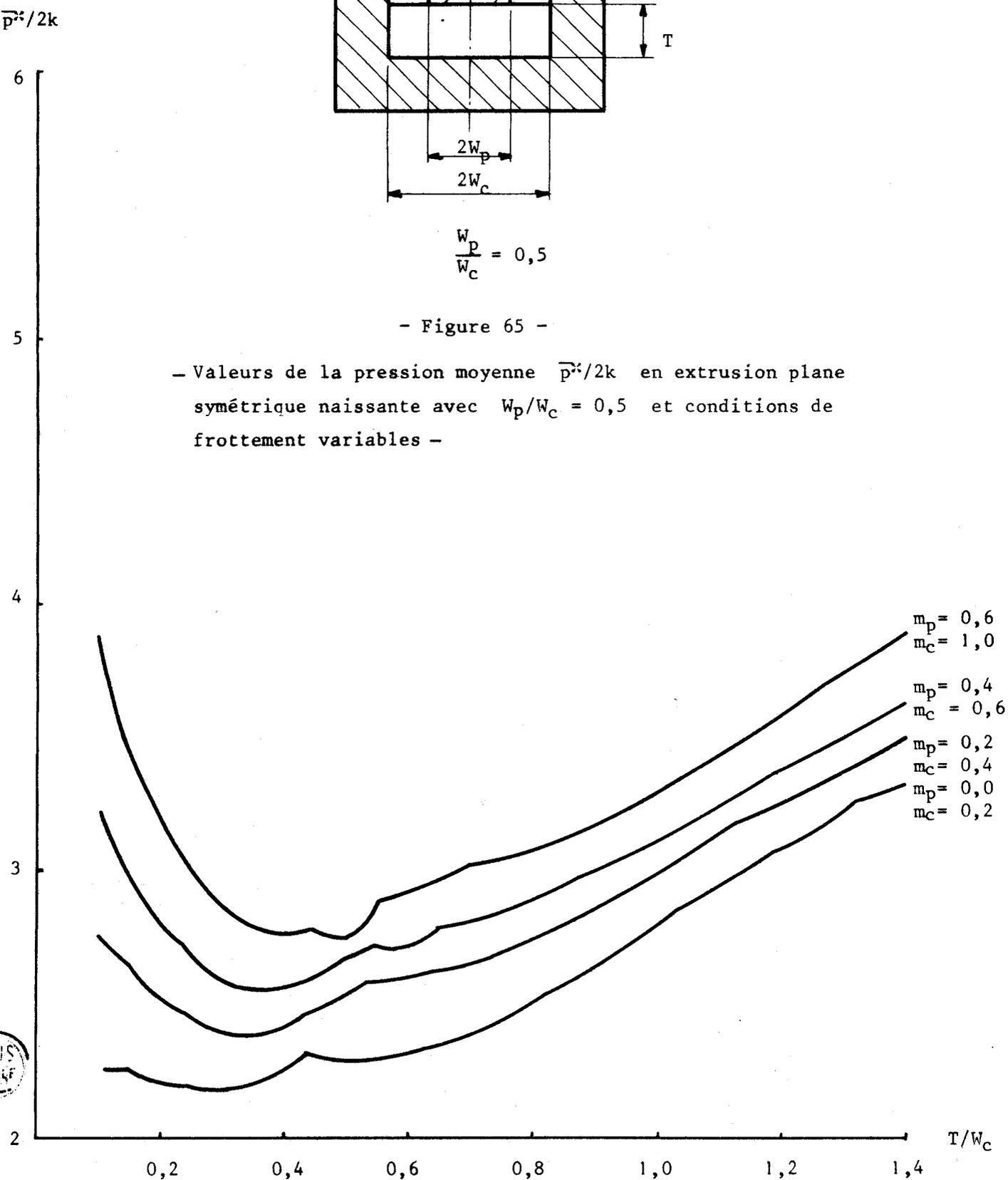


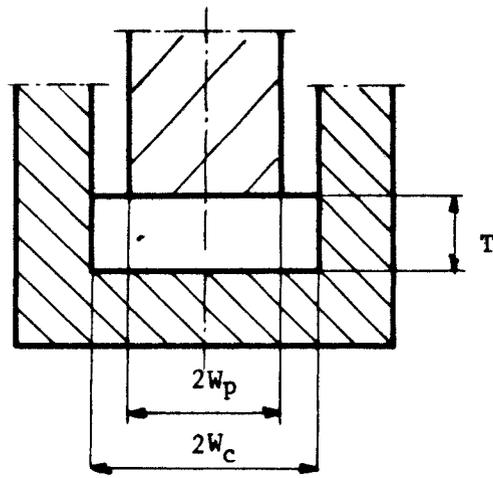
- Fig.64 : Valeurs de la pression moyenne $\bar{p}^2/2k$ en extrusion plane symétrique naissante avec $W_p/W_c = 0,8$ et conditions de frottement variables -



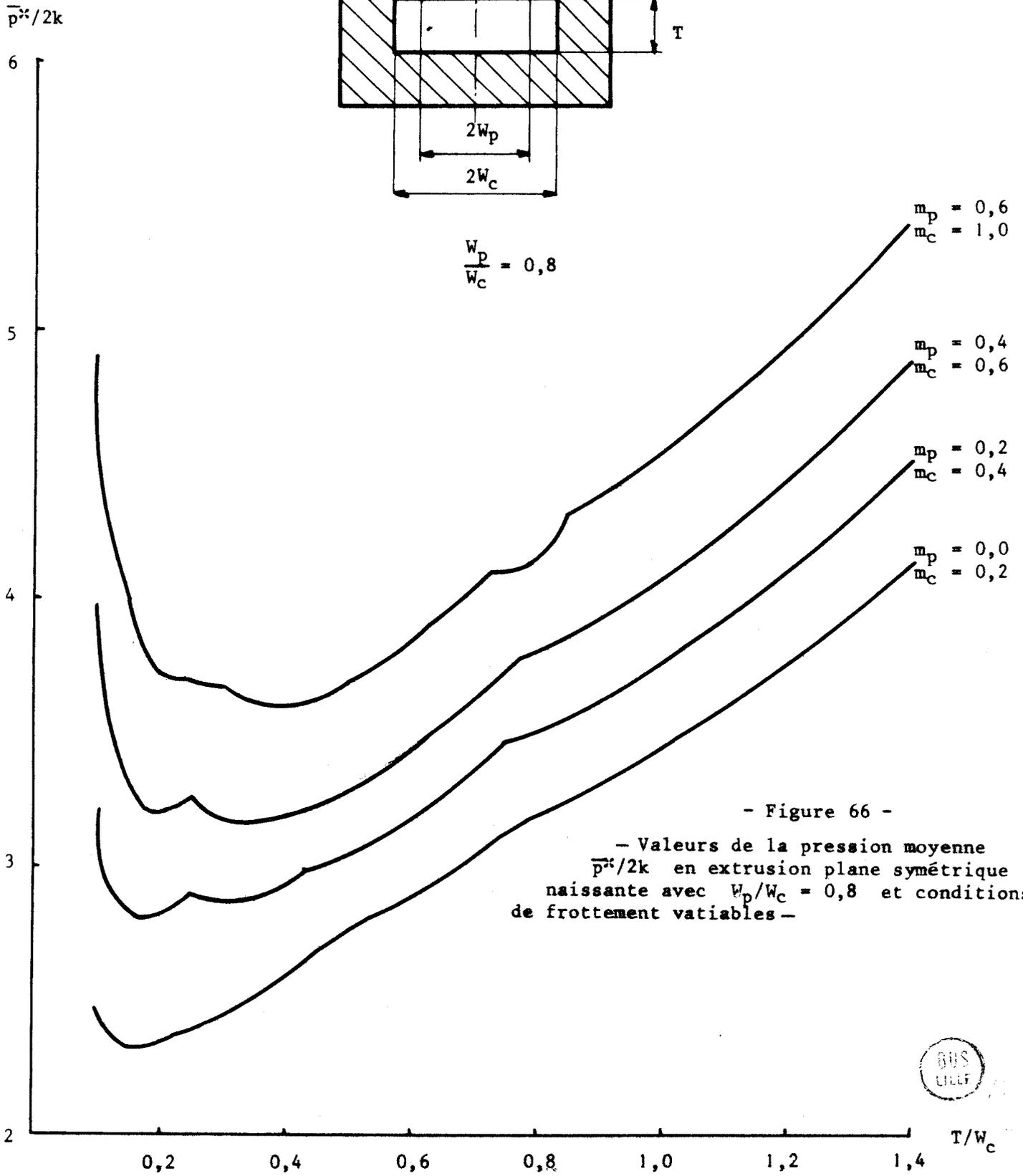
- Figure 65 -

- Valeurs de la pression moyenne $\bar{p}^2/2k$ en extrusion plane symétrique naissante avec $W_p/W_c = 0,5$ et conditions de frottement variables -





$$\frac{W_p}{W_c} = 0,8$$



- Figure 66 -

- Valeurs de la pression moyenne $\bar{p}/2k$ en extrusion plane symétrique naissante avec $W_p/W_c = 0,8$ et conditions de frottement variables -



3) Optimalisation de la prévision de la pression moyenne d'extrusion en écoulement naissant.

Pour certaines dimensions du lopin initial, les dimensions de la zone plastifiée ne correspondent pas nécessairement aux dimensions du lopin.

La zone plastifiée est découpée en quatre régions rectangulaires (Figure 67) .

La recherche de la valeur optimale de la pression est faite d'abord avec un paramètre inconnu, la hauteur T^* de la zone plastifiée, puis avec deux paramètres inconnus, T^* et la largeur B^* de la zone plastifiée.

Les valeurs optimales de la pression moyenne d'extrusion, pour des rapports d'extrusion $W_p/W_c = 0,5$ et $W_p/W_c = 0,8$ avec des conditions de frottement identiques pour le poinçon et le conteneur, sont reportées au tableau 17 et en traits interrompus aux figures 63 et 64.

L'amélioration de la prévision est importante au prix de temps de calculs qui sont pour ces cas environ cinquante fois plus élevés que pour les cas sans optimalisation.

$\frac{W_p}{W_c}$	Frottement sur poinçon et conteneur	Optimalisation sur T^*		Optimalisations sur T^* et B^*		
		$\frac{T^*}{W_c}$	$\frac{\bar{p}^*}{2k}$	$\frac{T^*}{W_c}$	$\frac{B^*}{W_c}$	$\frac{\bar{p}^*}{2k}$
0,5	0,0	0,3676	2,6294	0,3776	0,9937	2,6230
	0,2	0,3776	2,6790	0,3788	0,9824	2,6752
	0,4	0,3872	2,7265	0,4909	0,9797	2,7433
	0,6	0,4928	2,7521	0,4891	0,9964	2,7281
	1,0	0,4929	2,7521	0,4860	0,9729	2,7525
0,8	0,0	0,3989	2,7500	0,1882	0,9792	2,9725
	0,2	0,3960	3,0402	0,2042	0,9860	3,2100
	0,4	0,4247	3,2592	0,3920	0,9978	3,5364
	0,6	0,4170	3,4572	0,3784	0,9854	3,6703
	1,0	0,4081	3,7308	0,3969	0,9834	3,8203

- Tableau 17 -

- Valeurs de la pression moyenne $\bar{p}^*/2k$
 en extrusion plane symétrique naissante
 obtenues par optimisation des dimensions T^* et $2B^*$ de la zone plastifiée -



6.4. - Estimation de la pression sur matrice en forgeage-extrusion plane symétrique.

Nous reprenons, avec un traitement automatique, l'exemple traité manuellement au chapitre (3.5.4.) .

Le lopin de dimensions $2B \times 2T$ est comprimé par deux matrices planes parallèles. La matrice mobile comporte un évidement de largeur $2W$.

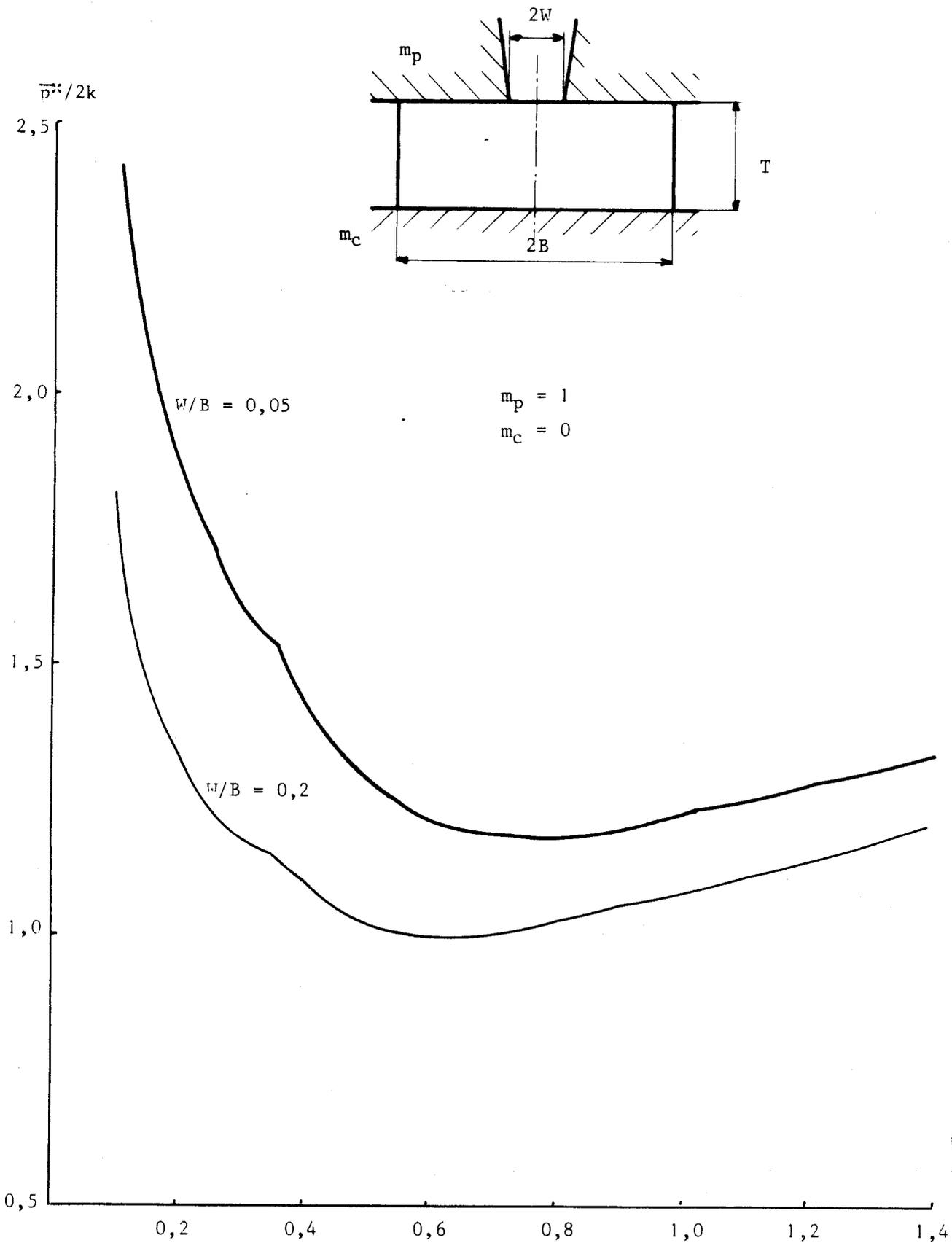
La zone plastifiée est découpée en six régions rectangulaires (Figure 68) . L'optimisation de la puissance dissipée se fait sur le paramètre B^* qui représente la distance entre la frontière de deux régions situées sous le poinçon et l'axe de symétrie. Le long de cette frontière, il n'y a pas d'écoulement : il s'agit d'une surface neutre.

L'exploitation est faite pour les conditions suivantes :

- . rapports $W/B = 0,05$ et $W/B = 0,2$;
- . frottement sous poinçon $m_p = 0$, $m_p = 0,2$, $m_p = 1$;
- . frottement sous matrice $m_p = 0$, $m_p = 0,2$

avec optimisation sur le paramètre B^* .

Les résultats sont reportées aux figures 69 et 70 : la pression $\frac{\bar{p}}{2k}$ représente la pression moyenne sous la matrice inférieure plane.

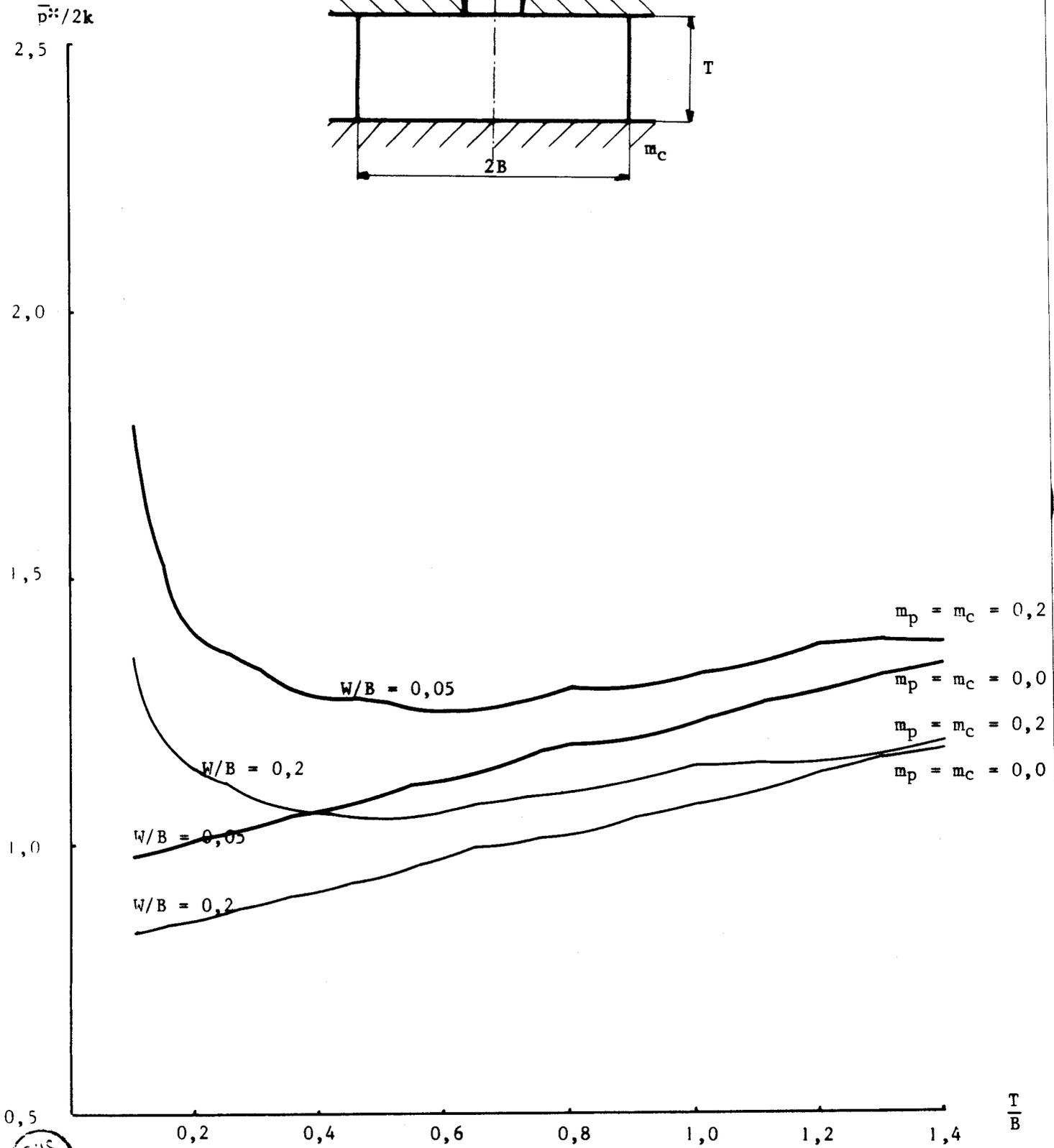
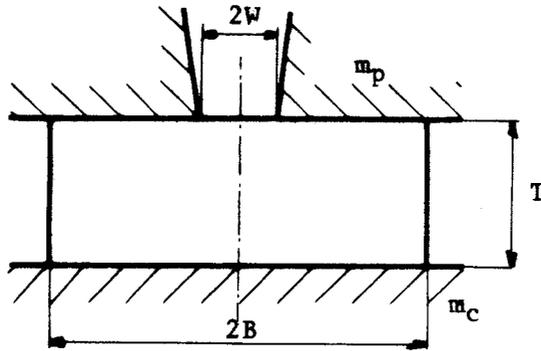


- Figure 69 -

- Valeurs de la pression moyenne $\bar{p}^*/2k$ sur la matrice plane en forgeage-extrusion naissante avec contact collant sous la matrice évidée et contact sans frottement sous la matrice plane -

BUS
LILLE

T
B



- Figure 70 -

- Valeurs de la pression moyenne $\bar{p}/2k$ sur matrice plane en forgeage-extrusion naissante avec diverses conditions de frottement -

BIS
LILLE

6.5. - Estimation de la pression sur poinçon en forgeage-matriçage plan.

Le lopin à former, de dimensions initiales $2B \times T$, est disposé dans une matrice creuse de dimensions $2B \times (T-H)$.

Un poinçon plat vient provoquer l'écoulement du produit de part et d'autre de l'orifice de la matrice (Figure 71). Le produit déformé a la forme d'un té.

L'estimation de la pression moyenne de forgeage en écoulement naissant est faite pour différentes dimensions et conditions de frottement sans optimisation et avec optimisation.

1) Pression moyenne de forgeage en écoulement naissant.

La zone plastifiée est décomposée en deux régions rectangulaires de dimensions $B \times H$ et le produit situé à l'intérieur de la matrice reste rigide (Figure 72).

Les valeurs de la pression moyenne obtenues sont reportées au tableau 18 avec les conditions suivantes :

- . T/H supérieur à l'unité ;
- . $B/H = 1$; $B/H = 5$; $B/H = 10$;
- . frottement identique pour le poinçon et pour la matrice :
 $m_p = m_c = 0$, $m_p = m_c = 0,2$.

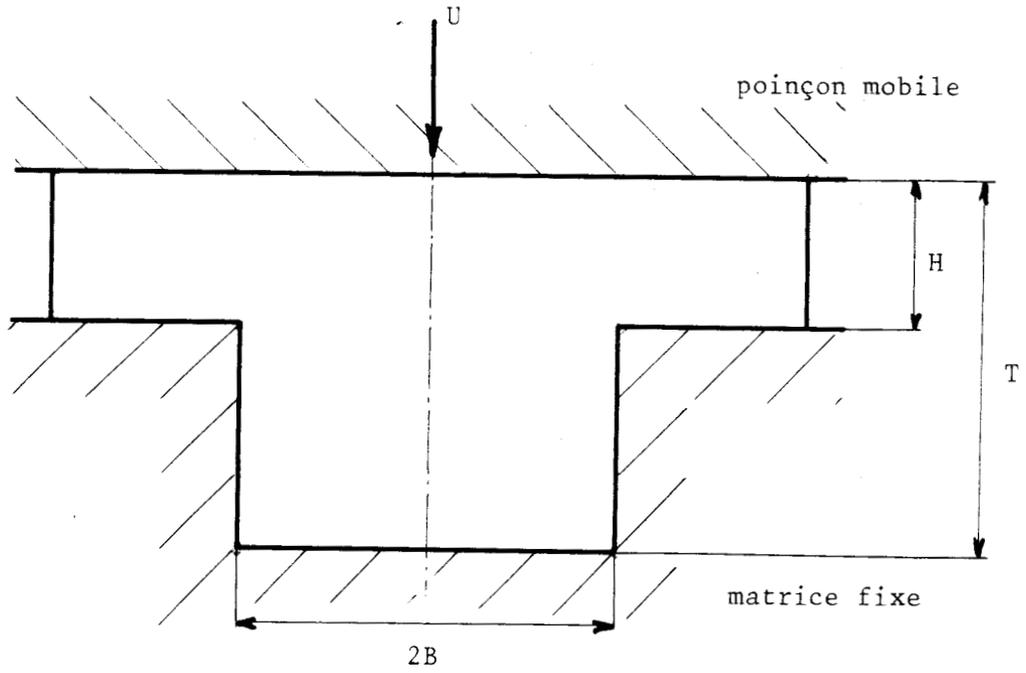
2) Optimisation de la prévision de la pression moyenne de forgeage en écoulement naissant.

La zone plastifiée est découpée en trois régions rectangulaires.

La recherche de la valeur optimale est d'abord faite avec le paramètre B^* qui représente la longueur de la région rectangulaire adjacente à l'axe de la pièce (Figure 73), puis avec deux paramètres B^* d'une part, T^* hauteur de la zone plastifiée d'autre part (Figure 74).

Les valeurs obtenues sont reportées dans le tableau 19.

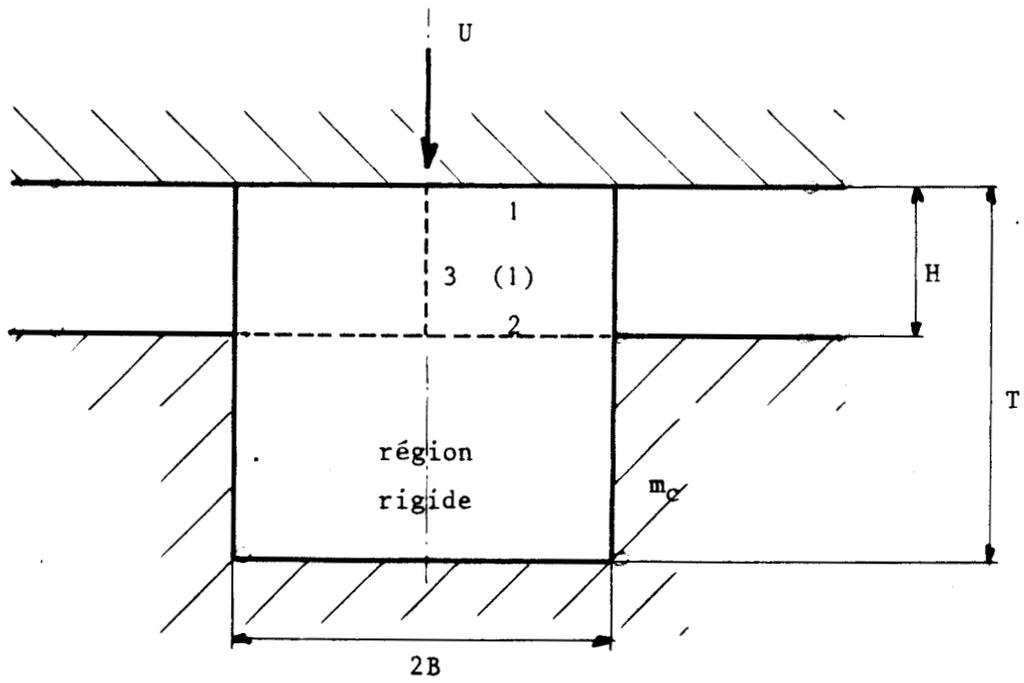
Enfin la figure 75 donne les meilleures prévisions de la pression de forgeage obtenues avec ou sans optimisation. Les résultats obtenus par H. KUDO [5] , représentés en trait interrompu, sont très voisins.



- Figure 71 -

- Forgeage-matriçage d'un lopin -





- Figure 72 -

- Forgeage-matriçage plan en écoulement naissant :
découpage de la zone plastifiée en régions rectangulaires -

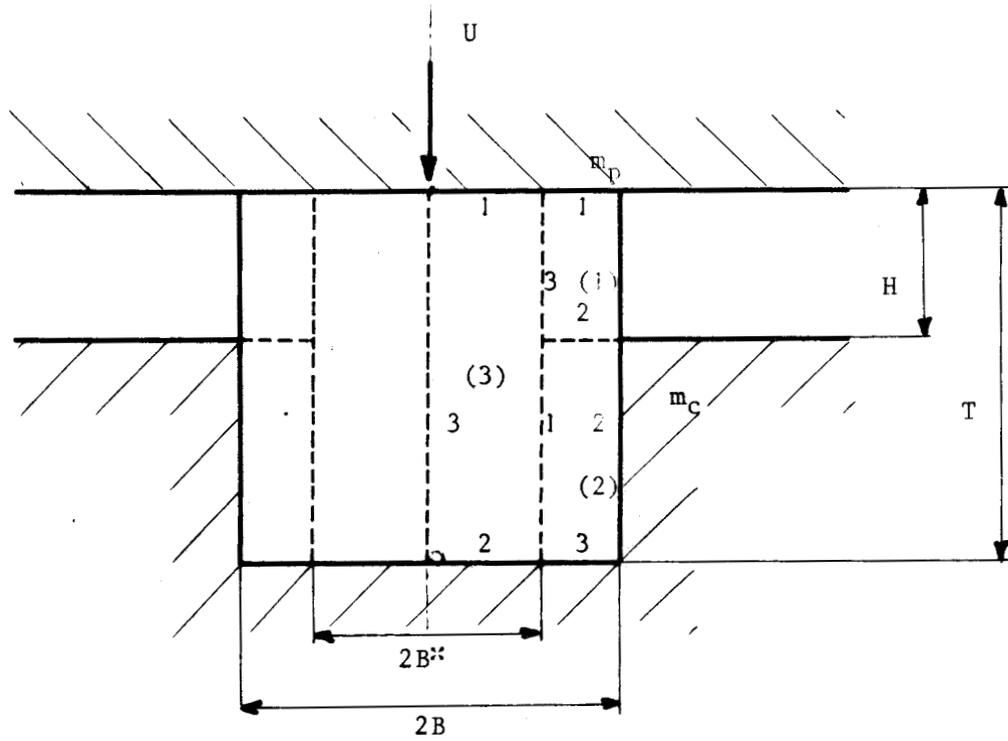


Frottement sur poinçon et matrice $m_p = m_c$	$\frac{B}{H}$	$\frac{T}{H}$	$\frac{\bar{p}}{2k}$
0,0	1	supérieur à 1	1,31
	5		1,67
	10		2,60
0,2	1	supérieur à 1	1,31
	5		1,98
	10		3,22

- Tableau 18 -

- Valeurs de la pression moyenne $\frac{\bar{p}}{2k}$
en forgeage-matriçage naissant -

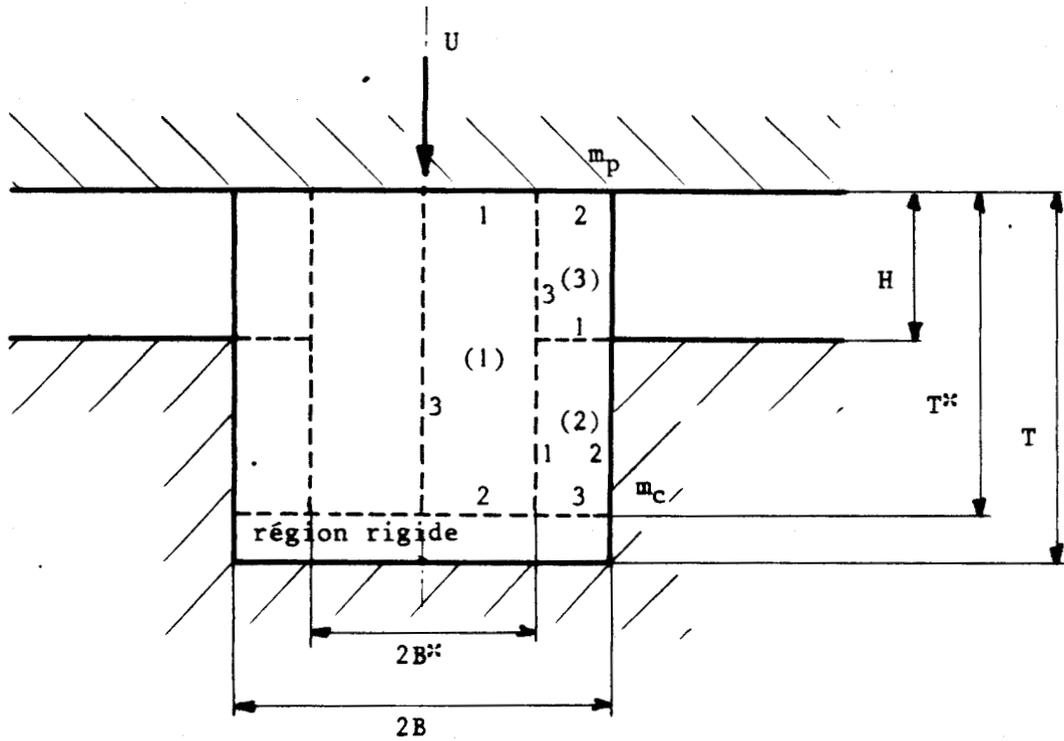




- Figure 73 -

- Forgeage-matriçage plan en écoulement naissant :
découpage de la zone plastifiée en régions rectangulaires -





- Figure 74 -

- Forgeage-matriçage plan en écoulement naissant :
découpage de la zone plastifiée en régions rectangulaires -

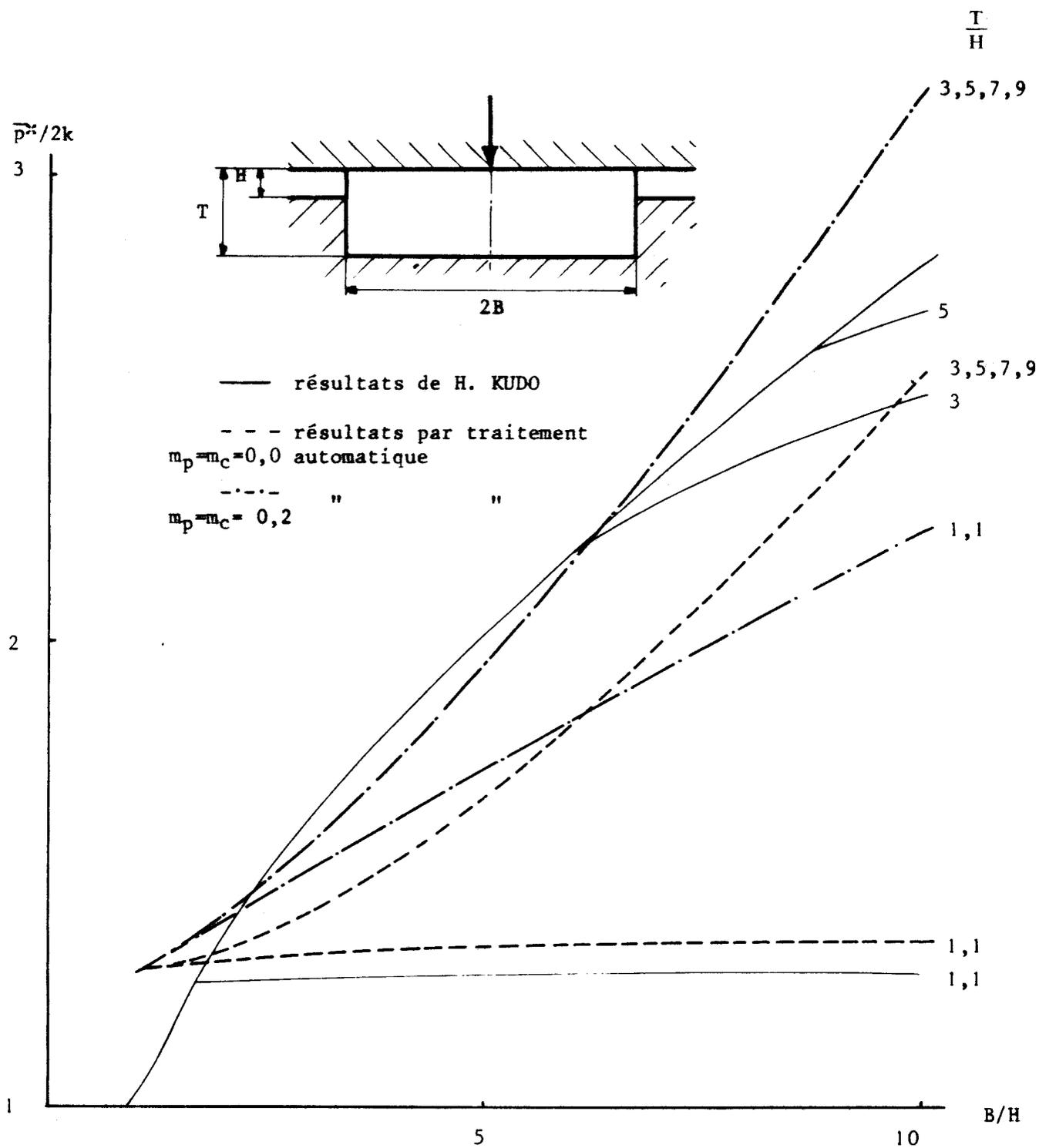


Frottement sur poinçon et matrice $m_p = m_c$	B/H	T/H	Optimalisation sur B*		Optimalisations sur B* et T*		
			B*/H	$\bar{p}^*/2k$	B*/H	T*/H	$\bar{p}^*/2k$
0,0	1	1,1	0,965	1,34	0,02	1,025	1,72
		3	0,100	2,41			
		5	0,101	3,00			
		7	0,100	3,58			
		9	0,101	4,16			
	5	1,1	4,88	1,35	0,02	1,022	1,85
		3	0,100	1,97			
		5	0,101	2,07			
		7	0,101	2,17			
		9	0,101	2,28			
	10	1,1	9,88	1,37	0,02	1,040	1,69
		3	0,101	2,75			
		5	0,101	2,79			
		7	0,101	2,84			
		9	0,100	2,89			
0,2	1	1,1	0,960	1,46	0,945	1,133	1,81
		3	0,100	2,50			
		5	0,101	3,09			
		7	0,101	3,69			
		9	0,100	4,28			
	5	1,1	4,960	1,73	0,02	1,022	2,15
		3	0,101	2,29			
		5	0,100	2,38			
		7	0,101	2,48			
		9	0,101	2,59			
	10	1,1	9,970	2,25	0,02	1,021	3,31
		3	8,570	3,40			
		5	0,101	3,41			
		7	0,100	3,46			
		9	0,100	3,51			

- Tableau 19 -

- Valeurs de la pression moyenne $\bar{p}^*/2k$
en forgeage-matriçage plan naissant
obtenues par optimisation des dimensions
des régions rectangulaires et de la hauteur plastifiée -





- Figure 75 -

- Evaluation de la pression
 sur poinçon en forgeage-matriçage symétrique naissant -



7.- CONCLUSION.

Le traitement automatique permet, ainsi que le montrent les exemples traités, une excellente prévision des efforts-moteurs à mettre en oeuvre pour la mise à forme des métaux.

Tous les types d'écoulement peuvent être envisagés selon la dimension, la position des outillages et les conditions de frottement aux interfaces outil-matériau.

La méthode constitue, par ces possibilités, un outil performant de prévision d'écoulements dans les procédés de mise à forme des métaux.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAQUE P., FELDER E., HYAFIL J., D'ESCATHA Y.
Mise à forme des métaux. (Tomes I et II)
Dunod 1973.
- [2] GUERLEMENT G., LAMBLIN D., SAVE M., OUDIN J., RAVALARD Y.
*Mise à forme des métaux, calcul des procédés
et amélioration des outillages.*
Journées d'études du Groupement pour l'Avancement
de la Mécanique Industrielle.
FPMs - 21 et 22 Novembre 1974.
- [3] HILL R.
The mathematical theory of plasticity.
Oxford Clarendon Press 1967.
- [4] JOHNSON W.
Some old and new aspects of metal forming.
Advanced school on metal forming plasticity.
Octobre 1975.
International Centre for Mechanical Sciences.
- [5] KUDO H.
*An upper-bound approach to plane-strain
forging and extrusion. (Parts I and II)*
Int. J. Mech. Sci., 1960, Vol. I, pp. 57-83,
pp. 229-252.
- [6] THOMSEN E.G., WANG C.T., KOBAYASHI S.
*Mechanics of plastic deformation on metal
processing.*
Macmillan Company 1965.