N° d'ordre : 206

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR INGENIEUR

par

Dominique HAUY

Ingénieur IDN

SUR LA DEFINITION ET L'INTERPRETATION DE MESURES DE LA COMMANDABILITE ET DE L'OBSERVABILITE D'UN PROCESSUS MULTIVARIABLE.

Soutenue le 28 Juin 1977, devant le Jury d'examen :

M.	C.	MAIZIERES	Président
M.	F.	LAURENT	Rapporteur
M.	P.	BORNE	Examinateur
M.	J.C.	GENTINA	Examinateur
M.	R.	BOSSUT	Invité
M.	Y.	CHASSIN	Invité

A Rosemarie

A Joël et François

A mes Parents

Avant - Propos

Le travail que nous présentons dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire de Systématique de l'Université des Sciences et des Techniques de Lille I.

Nous sommes particulièrement sensible à l'honneur que Monsieur le Professeur Maizières nous a fait en acceptant de présider notre Jury de Thèse. Qu'il trouve ici l'expression de notre vive reconnaissance.

Nous voulons exprimer notre profonde gratitude à Monsieur Laurent, Maître de Conférences à l'Université de Lille I et Directeur du Laboratoire de Systématique qui a bien voulu nous accueillir au sein de son équipe. Nous lui sommes reconnaissant pour l'enseignement qu'il nous a dispensé et l'intérêt qu'il nous a porté au cours de nos recherches.

Nous sommes très redevable envers Monsieur Pierre Borne, Maître-Assistant à Lille I et chargé de cours à l'Institut Industriel du Nord pour nous avoir guidé et conseillé tout au long de l'élaboration de cette thèse. Nous avons eu la chance de pouvoir dépasser avec lui les simples relations de travail et partager une excellente amitié. Très conscient de ce que nous lui devons, nous le remercions bien sincèrement.

Nous voulons exprimer toute notre sympathie à Monsieur Jean Claude Gentina, Maître-Assistant à Lille I et chargé de cours à l'Institut Industriel du Nord qui a toujours montré l'intérêt qu'il portait à nos travaux. Nous le remercions d'avoir accepté de participer à notre Jury.

Nous sommes très honoré que Monsieur le Professeur Bossut, Directeur de l'IDN ait accepté de participer à notre Jury de thèse et nous tenons à ce qu'il reçoive ici le témoignage de notre très respectueuse reconnaissance.

Nous remercions également Monsieur Chassin, Ingénieur d'Etudes de la Société Kestner qui a bien voulu juger notre travail et faire partie de notre Jury de thèse.

Nous tenons maintenant à exprimer notre amitié à chacun des membres de notre équipe de recherche. Nous voudrions en particulier associer à ce travail MM. Joël Moyaux et François Clèret avec qui nous avons mené conjointement nos recherches et à qui nous témoignons notre plus grande amitié.

A chacun nous adressons nos remerciements les plus vifs.

INTRODUCTION GENERALE

L'utilisation de la représentation d'état dans l'étude des processus a permis d'introduire les notions de commandabilité et d'observabilité dont l'intérêt a été clairement démontré par le développement de théories telles que celles de observateurs. Toutefois le fait que les critères de commandabilité et d'observabilité soient sans nuance (un modèle d'un système est commandable ou non, il est observable ou non) ne permet pas une approche satisfaisante de la réalité. En effet une variation extrêmement faible des paramètres définissant un modèle d'un processus peut en changer la propriété de commandabilité.

D'un point de vue distinct, tous les systèmes commandables ne sont pas "aussi bien" commandables. Kalman lui-même ressentit trés tôt le besoin de représenter la commandabilité d'un système par un nombre qui était nul dans le cas de non commandabilité et dont la plus ou moins grande valeur traduisait une plus ou moins grande commandabilité.

Les travaux présentés dans ce mémoire se situent dans ce cadre. Nous nous proposons en effet de formaliser les notions intuitives de bonne commandabilité et de bonne observabilité et de lier ces notions à des propriétés telle que l'énergie de commande minimale nécessaire pour imposer un comportement donné au processus et la sensibilité du modèle aux divers paramètres qui le constituent.

Dans le premier chapitre nous précisons les caractéristiques des processus que nous étudions et nous rappelons les définitions et les propriétés essentielles de la commandabilité et de l'observabilité.
L'utilisation, dans cette présentation, des pseudo-inverses de matrices nous permet d'aborder également les problèmes de commande optimale pour les systèmes non commandables.

Dans le second chapitre nous proposons une définition axiomatique des mesures de la commandabilité. Cette définition est en effet l'expression en langage mathématique des propriétés minimales souhaitées pour toute grandeur qui traduirait la bonne ou la mauvaise commandabilité d'un système. Une étude semblable est présentée en vue de définir une mesure de l'observabilité.

De plus, nous plaçant dans l'optique d'un chargé d'étude qui cherche à minimiser l'énergie de commande d'un processus, nous proposons des mesures de la commandabilité qui répondent à cette préoccupation.

L'étude présentée au troisième chapitre permet de rattacher les mesures de la commandabilité et de l'observabilité à la notion de sensibilité du processus.

La mesure de la commandabilité proposée est liée à la sensibilité de l'état aux variations des paramètres du modèle et de la loi de commande. Une étude semblable permet de définir une mesure de l'observabilité qui soit liée à la sensibilité de l'état estimé aux variations des grandeurs de sortie et des paramètres du système.

CHAPITRE I

REPRESENTATION DES SYSTEMES LINEAIRES

COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE

Les automaticiens n'utilisèrent longtemps dans l'analyse et la synthèse d'un processus que les méthodes fréquentielles issues de la représentation des systèmes par une transmittance opérationnelle.

Ces méthodes, introduites par les électriciens, firent considérablement progresser l'étude des processus décrits par des équations différentielles. Bien adaptées aux problèmes posés par les systèmes monodimensionnels, elles sont largement répandues.

Toutefois, depuis quelques années, la représentation matricielle des processus dans l'espace d'état /1/* complète souvent la représentation par fonction de transfert. L'intérêt d'une telle représentation apparait principalement lors de l'étude des systèmes multivariables. Elle permet en particulier d'aborder certains problèmes de commande optimale et d'introduire simplement les notions d'observabilité (de validité d'un modèle) et de commandabilité. De plus, elle apparait comme bien adaptée à la synthèse de la commande des processus par calculateur. Aussi adopterons nous cette représentation.

Une première partie de ce chapitre a pour objet la définition de la classe des systèmes que nous allons étudier.

Aprés avoir rappelé, dans une seconde partie, les définitions fondamentales relatives à la commandabilité et à l'observabilité d'un processus, nous introduirons la notion de "bonne ou mauvaise" commandabilité ainsi que de "bonne ou mauvaise observabilité".

* Les nombres entre / renvoient aux ouvrages et articles dont la liste se trouve à la fin de ce mémoire.

A - NOTION D'ETAT

Considérons le processus physique décrit par l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$s^{(q)}(t) + a_1 s^{(q-1)}(t) + \ldots + a_{q-1} \overset{\circ}{s}(t) + a_q\, s(t) = u(t) \qquad \text{(I-1)}$$

où $s(t)$ désigne la sortie du processus, $\overset{\circ}{s}(t), \ldots, s^{(q)}(t)$ les dérivées successives de $s(t)$ et $u(t)$ l'entrée.

L'évolution de $s(t)$ entre deux instants t_0 et t_1 dépend non seulement de l'entrée $u(t)$ appliquée entre ces deux instants, mais également des valeurs à l'instant t_0 de $s(t)$, $\overset{\circ}{s}(t), \ldots$ $s^{(q-1)}(t)$ (appelées conditions initiales).

Plus précisément, l'entrée étant supposée connue, la connaisance à l'instant t_0 des q conditions initiales est une condition nécessaire et suffisante à la prédiction du comportement futur du système. L'ensemble des q valeurs de ces paramètres à l'instant t_0 se représente par un vecteur à q composantes. C'est le vecteur "état" du système à l'instant t_0.

D'une façon générale, un ensemble de valeurs de paramètres suffisant à caractériser, en vue de l'évolution future et pour des entrées données, le comportement d'un système continu ou discret est appelé état de ce système /1/. Le plus souvent, la description adoptée utilise le minimum de paramètres. C'est le cas, dans notre exemple, si nous choisissons un état formé à tout instant des valeurs, prises à cet instant, de la sortie et de ses q-1 premières dérivées.

L'ensemble des q paramètres caractérisant l'état d'un système se représente par un vecteur. L'espace vectoriel où il évolue est l'espace d'état.
L'adoption d'une origine O pour cet espace permet alors de se représenter indifféremment l'état $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q)$ d'un système par le vecteur de composantes $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_q)$ ou par le point de coordonnées $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_q)$./2/.

B - DESCRIPTION DES SYSTEMES LINEAIRES

1 - Systèmes linéaires continus

Les processus dynamiques étudiés sont décrits dans un espace d'état par l'ensemble des relations :

$$\overset{o}{x}(t) = A(t)\ x(t) + B(t)\ u(t) \tag{I-2}$$

$$s(t) = C(t)\ x(t) + D(t)\ u(t) \tag{I-3}$$

$x(t)$ désigne un vecteur colonne à q composantes définies sur le corps des réels. Il caractérise l'état du processus à l'instant t.

$u(t)$ est un vecteur de $\mathcal{R}^m$ définissant la commande à l'instant t.

$s(t)$, vecteur de $\mathcal{R}^k$, $k \leq q$, représente la valeur à l'instant t du vecteur de sortie.

$A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ sont des matrices dont les éléments sont des fonctions réelles et continues du temps t, de dimensions respectives (q,q), (q,m), (k,q), (k,m).

a) Matrice fondamentale - Matrice de transition

On appelle matrice fondamentale /3/ de l'équation différentielle (I-2), toute matrice carrée régulière $y(t)$ qui satisfait la relation :

$$\overset{o}{y}(t) = A(t).\ y(t) \tag{I-4}$$

Lorsque les éléments de la matrice $A(t)$ sont des fonctions continues du temps t, il existe une matrice régulière et une seule qui vérifie l'équation précédente et est égale à la matrice identité pour $t = t_0$. Cette matrice, appelée matrice de transition est notée $\Phi(t, t_0)$ et vérifie les propriétés suivante /4/ :

$$\Phi(t_0,t_0) = I \tag{I-5}$$

$$\Phi(t_2,t_0) = \Phi(t_2,t_1) . \Phi(t_1,t_0) \tag{I-6}$$

$$\Phi(t_1,t_2) = \Phi^{-1}(t_2,t_1) \tag{I-7}$$

La matrice de transition associée à l'équation matricielle :

$$\overset{o}{x}(t) = - A^T(t)x(t) \tag{I-8}$$

est égale à $[\Phi^T(t,t_0)]^{-1}$

b) <u>Evolution d'un système linéaire continu dans l'espace d'état</u>

La solution de l'équation différentielle (I-2) donne à tout instant t la position dans l'espace d'état du point représentatif du système étudié /3/ /4/ /5/ /6/.

$$x(t) = \Phi(t,t_0) \left[x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\delta,t_0) . B(\delta) . u(\delta) d\delta\right] \tag{I-9}$$

Soit, en utilisant les propriétés (I-6) et (I-7) :

$$x(t) = \Phi(t,t_0) \, x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\delta) . B(\delta) \, u(\delta) \, d\delta \tag{I-10}$$

2) <u>Systèmes linéaires discrets</u>

Ces derniers sont essentiellement décrits par des équations récurrentes de la forme

$$x(t_{n+1}) = A(t_n) \, x(t_n) + B(t_n) \, u(t_n) \tag{I-11}$$

avec

$$s(t_n) = C(t_n)\ x(t_n) + D(t_n)\ u(t_n) \qquad \text{(I-12)}$$

dans cette représentation $t_n \in \mathcal{R}$ et la suite $\{t_n\}$, avec $n \in \mathcal{N}$, est une fonction croissante de n avec $t_n \to \infty$ si $n \to \infty$.

Afin d'unifier les notations entre systèmes discrets et systèmes continus nous adopterons la notation :

$$x(t+1) = A(t)\ x(t) + B(t)\ u(t) \qquad \text{(I-11-i)}$$

$$s(t) = C(t)\ x(t) + D(t)\ u(t) \qquad \text{(I-12-i)}$$

Dans cette écriture :

t désigne un nombre entier positif
$x(t)$ et $u(t)$ sont deux vecteurs colonnes, appartenant respectivement à $\mathcal{R}^q$ et à $\mathcal{R}^m$. Ils représentent l'état et la commande du processus à l'instant t.
$s(t)$ est le vecteur de sortie à l'instant t. Il appartient à $\mathcal{R}^k$.

$A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ représentent des matrices dont les éléments sont fonction de la seule variable t. Elles admettent les dimensions respectives (q,q), (q,m), (k,q), (k,m).

Les matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ caractérisent entièrement les systèmes linéaires continus ou discrets. C'est pourquoi la notation (A, B, C, D) est souvent adoptée pour décrire de façon abrégée les systèmes linéaires.

C - ATTEIGNABILITE D'UN ETAT ET COMMANDABILITE D'UN SYSTEME LINEAIRE

1) Atteignabilité d'un état à partir de l'origine pour un système linéaire continu

Soit le système continu d'équation (I-2), évoluant entre les instants t_0 et $t_1 > t_0$.

Définition 1

L'état x_1 *est dit atteignable à l'instant* t_1 *à partir d'un état initial nul à l'instant* t_0, *s'il existe une commande* $u(t)$ *qui, appliquée entre* t_0 *et* t_1 , *fait passer le système de l'état* 0 *à l'instant* t_0 *à l'état* x_1 *à l'instant* t_1 /5/.

Condition nécessaire et suffisante d'atteignabilité d'un état à partir de l'origine.

Nous notons $S(t_0, t_1)$ la matrice

$$S(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\delta)\, B(\delta)\, B^T(\delta)\, \Phi^T(t_1,\delta)\, d\delta \qquad \text{(I-13)}$$

Théorème 1

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse transférer l'état du système de $x_0 = 0$ *à l'instant* t_0 *à* x_1 *à l'instant* t_1 *est que le vecteur* $\Phi(t_0,t_1)x_1$ *appartienne à l'espace image de l'application linéaire* $W(t_0,t_1)$ /6//7/ *définie par la relation :*

$$W(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0,\delta)\, B(\delta)\, B^T(\delta)\, \Phi^T(t_0,\delta)\, d\delta \qquad \text{(I-14)}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\text{rang}\,\left[W(t_0,t_1),\ \ \Phi(t_0,t_1)x_1\right] = \text{rang}\,\left[W(t_0,t_1)\right] \qquad \text{(I-15)}$$

Cette propriété peut également s'énoncer :

Théorème 2

L'état x_1 *d'un système continu linéaire décrit par l'équation* (I-2) *est atteignable à l'instant* t_1 *en partant de l'origine* $x_0=0$ *à l'instant* t_0 *si et seulement si*

$$\text{rang}\,[S(t_0,t_1),x_1] = \text{rang}\,[S(t_0,t_1)] \qquad (I-16)$$

c'est-à-dire si et seulement si x_1 *appartient au sous espace engendré par les colonnes de la matrice* $S(t_0,t_1)$.

La démonstration de ce théorème est donnée en annexe (Annexe 1). Montrons ici simplement que les conditions (I-15) et I-16) sont équivalentes.

La matrice $\Phi(t_0,t_1)$ étant régulière, $\Phi(t_0,t_1)x_1$ appartient à l'espace image de $W(t_0,t_1)$ si et seulement si x_1 appartient à l'espace image de

$$\Phi(t_1,t_0)\ W(t_0,t_1) = S(t_0,t_1)\ \Phi^T(t_1,t_0) \qquad (I-17)$$

L'espace image de $S(t_0,t_1)$ $\Phi^T(t_1,t_0)$ étant confondu avec celui de $S(t_0,t_1)$ les conditions (I-15) et (I-16) sont donc équivalentes.

2) Atteignabilité d'un état à partir de l'origine pour un système linéaire discret.

Soit le processus discret d'équation (I-11), évoluant entre les instants t_0 et t_1, $t_1 > t_0$.

Définition 2

Le système partant à l'instant t_0 *de l'origine* $x_0 = 0$, *l'état* x_1 *est atteignable à l'instant* t_1 *s'il existe une séquence de commandes* $\{u_{t_0}, u_{t_0+1} \dots u_{t_1-1}\}$ *qui fasse passer l'état du système de* $x(t_0)= 0$ *à* $x(t_1) = x_1$. /5/

Condition nécessaire et suffisante d'atteignabilité d'un état à partir de l'origine.

Par analogie avec le cas stationnaire, notons $Cd(t_0,t_1)$ la matrice

$$Cd(t_0,t_1) = [A(t_1-1)\ldots A(t_0+1)\ B(t_0),\ldots,A(t_1-1)B(t_1-2),B(t_1-1)] \tag{I-18}$$

et $S(t_0,t_1)$ la matrice

$$S(t_0,t_1) = Cd(t_0,t_1)\ Cd^T(t_0,t_1) \tag{I-19}$$

Théorème 3

L'état x_1 *du système linéaire discret décrit par l'équation* (I-11) *est atteignable à l'instant* t_1 *en partant de l'origine* $x_0=0$ *à l'instant* t_0 *, si et seulement si :*

$$\text{rang}\ [Cd(t_0,t_1),\ x_1] = \text{rang}\ [Cd(t_0,t_1)] \tag{I-20}$$

Cette condition peut encore s'écrire :

$$\text{rang}\ [S(t_0,t_1),x_1] = \text{rang}\ [S(t_0,t_1)] \tag{I-21}$$

Démonstration :

De (I-11), il vient

$$x_1 = x(t_1) = Cd(t_0,t_1) \begin{bmatrix} u(t_0) \\ u(t_0+1) \\ u(t_1-1) \end{bmatrix} \tag{I-22}$$

L'équation précédente admet une solution $(u(t_0), u(t_0+1)\ldots u(t_1-1)$ si et seulement si /8/ :

$$\text{rang}\left[Cd(t_0,t_1),x_1\right] = \text{rang}\left[Cd(t_0,t_1)\right] \qquad \text{(I-20)}$$

Cette condition exprime l'appartenance de x_1 au sous espace de $\mathcal{R}^q$ engendré par les colonnes de $Cd(t_0,t_1)$.

Montrons que cette condition est équivalente à la condition (I-21), analogue à celle donnée pour les systèmes continus.

Les matrices $Cd^T(t_0,t_1)$ et $Cd(t_0,t_1)\ Cd^T(t_0,t_1)$ ont le même noyau.

Or le sous espace orthogonal de noyau de $Cd^T(t_0,t_1)$ est le sous espace de $\mathcal{R}^q$ engendré par les colonnes de $Cd(t_0,t_1)$.

De même, le sous espace orthogonal du noyau de $S(t_0,t_1)$ est engendré par les lignes de $S(t_0,t_1)$ et, puisque $S(t_0,t_1)$ est symétrique , il est également engendré par les colonnes de $S(t_0,t_1)$.

Les colonnes de $Cd(t_0,t_1)$ et de $S(t_0,t_1)$ engendrent donc le même espace.

D'où l'équivalence des conditions (I-20) et (I-21).

3) <u>Energie de transfert minimale</u> :

Soit la commande $u(t)$ appliquée au système continu d'équation (I-2) [resp. système discret d'équation (I-11)] entre les instants t_0 et t_1.

Et notons $J(t_0,t_1)$ la fonctionnelle caractérisant l'énergie de commande sur l'intervalle considéré

$$J(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} u^T(\delta).u(\delta)\, d\delta \qquad \text{(I-23)}$$

$$(\text{resp.} \quad J(t_0,t_1) = \sum_{n=t_0}^{t_1-1} u^T(n).u(n)) \tag{I-24}$$

<u>Remarque</u> :

Dans le cas des systèmes échantillonnés, lorsque la période d'échantillonnage n'est pas constante, l'énergie de commande s'écrit :

$$J(t_0,t_1) = \sum_{n=t_0}^{t_1-1} \alpha^2(n)\ u^T(n)\ u(n) \tag{I-25}$$

Il convient alors de remplacer dans ce qui suit, la matrice $S(t_0,t_1)$ par l'expression $Cd(t_0,t_1)\ \ R\ Cd^T(t_0,t_1)$

avec :

$$R = \begin{bmatrix} \alpha^2(t_0) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha^2(t_0) & & & & & \vdots \\ \vdots & & \alpha^2(t_0+1) & & & & \vdots \\ \vdots & & & \alpha^2(t_0+1) & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \alpha^2(t_1) & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & \alpha^2(t_1) \end{bmatrix} \tag{I-26}$$

Soit x_1 un état atteignable à l'instant t_1 en partant de l'origine à l'instant t_0.

<u>*Théorème 4*</u>

L'énergie minimale nécessaire pour transférer le système continu d'équation (I-2) *, ou discret d'équation* (I-11) *, de l'état* 0 *à l'instant* t_0 *à l'état* x_1 *à l'instant* t_1 *s'écrit :*

$$E = x_1^T\ \ S^+(t_0,t_1)\ x_1 \tag{I-27}$$

expression dans laquelle S^+ désigne la pseudo-inverse (au sens de Penrose) de la matrice S. (Cf. Annexe 2)

Nous allons démontrer tout d'abord cette propriété pour les systèmes continus.

L'utilisation du principe du maximum de Pontriaguine /9/ conduit pour la commande qui minimise $J(t_0,t_1)$ à l'expression /10/ :

$$u(t) = B^T(t) \quad \Phi^T(t_0,t)p \tag{I-28}$$

Soit encore :

$$u(t) = B^T(t) \quad \Phi^T(t_1,t)\psi \tag{I-29}$$

expression dans laquelle p et ψ désignent deux vecteurs colonnes à q composantes réelles, liés par la relation :

$$\psi = \Phi^T(t_0,t_1)p \tag{I-30}$$

Il vient, dans ces conditions :

$$x_1 = \left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\delta)\, B(\delta)\, B^T(\delta) \quad \Phi^T(t_1,\delta)d\delta\right]\psi \tag{I-31}$$

soit, pour ψ l'expression :

$$\psi = S^+(t_0,t_1)\, x_1 + y \tag{I-32}$$

dans laquelle y représente un vecteur quelconque du noyau de $S(t_0,t_1)$.

Remarque :

Toutes les solutions ψ conduisent à la même commande.
En effet, si y appartient au noyau de $S(t_0,t_1)$, nous avons

$$\left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\delta)\ B(\delta)\ B^T(\delta)\ \Phi^T(t_1,\delta)\ d\delta \right] y = 0 \qquad \text{(I-33)}$$

d'où :

$$\int_{t_0}^{t_1} y^T\ \Phi(t_1,\delta)\ B(\delta)\ B^T(\delta)\ \Phi^T(t_1,\delta)\ y d\delta \quad = 0 \qquad \text{(I-34)}$$

Ce qui nécessite que $B^T(t)\ \ \Phi^T(t_1,t)\ \ y$ soit nul quelque soit t compris entre t_0 et t_1.

L'énergie minimale de transfert s'écrit :

$$J(t_0,t_1) = \psi^T\left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\tau)\ B(\delta)\ B^T(\delta)\ \Phi^T(t_1,\delta)\ d\tau \right]\psi \qquad \text{(I-35)}$$

ou

$$J(t_0,t_1) = \psi^T S(t_0,t_1)\psi \qquad \text{(I-36)}$$

soit, compte-tenu de (I-32)

$$J(t_0,t_1) = (x_1^T\ S^{+^T}(t_0,t_1) + y^T)\ S(t_0,t_1)(S^+(t_0,t_1)x_1+y) \qquad \text{(I-37)}$$

c'est-à-dire :

$$J(t_0,t_1) = x_1^T\ S^+(t_0,t_1)\ x_1 \qquad \text{(I-38)}$$

Dans le cas des systèmes discrets, la démonstration de (I-27) est immédiate.

En effet, la solution de l'équation (I-22) qui minimise $J(t_0,t_1)$ s'écrit (Cf. Annexe 2) :

$$\begin{bmatrix} u(t_0) \\ u(t_0+1) \\ u(t_1-1) \end{bmatrix} = Cd^+(t_0,t_1)x_1 \qquad \text{(I-39)}$$

4) <u>Domaine d'atteignabilité</u> :

a) <u>Détermination du domaine d'atteignabilité à partir de l'origine</u> :

<u>*Théorème 5*</u>

Le domaine d'atteignabilité (c'est à dire l'ensemble des états atteignables) à l'instant t_1 *en partant de l'origine à l'instant* t_0 *est le sous espace de* $\mathcal{R}^q$ *engendré par les colonnes de* $S(t_0,t_1)$.

Cette propriété est une conséquence immédiate des résultats établis aux paragraphe C-1 et C-2.

b) <u>Domaine d'atteignabilité à partir d'un état donné</u> :

Lorsque le système continu d'équation (I-2) (resp discret d'équation (I-11) évolue à partir d'un état initial x_0 différent de l'origine, il vient

$$z(t) = x(t) - \Phi(t,t_0)x_0 = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\delta)B(\delta)u(\delta)d\delta \qquad \text{(I-40)}$$

$$\left(\text{resp } z(t) = x(t) - A(t-1)\ldots A(t_0)x_0 = CH(t_0,t) \begin{bmatrix} u(t_0) \\ \vdots \\ u(t-1) \end{bmatrix}\right) \qquad \text{(I-41)}$$

Et l'application des résultats précédents à $z(t)$ conduit aux énoncés suivants :

<u>*Théorème 6*</u>

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse transférer l'état du système de x_0 *à l'instant* t_0 *à* x_1 *à l'instant* t_1 *s'écrit*

$$\text{rang } \left[S(t_0,t_1),\ z(t_1)\right] = \text{rang } S(t_0,t_1) \qquad \text{(I-42)}$$

Théorème 7

Le domaine atteignable à l'instant t_1 *en partant de* x_0 *à l'instant* t_0 *s'obtient en ajoutant* $\Phi(t_1,t_0)x_0$ (*resp.* $A(t_1-1)\dots A(t_0)x_0$) *à tout vecteur obtenu par combinaison linéaire des colonnes de* $S(t_0,t_1)$.

Théorème 8

La commande qui minimise $J(t_0,t_1)$ *est*

$$u(t) = B^T(t)\ \Phi^T(t_1,t)\ S^+(t_0,t_1)\ [x_1 - \Phi(t_1,t_0)x_0] \qquad \text{(I-43)}$$

$$\text{(resp.}\ \begin{bmatrix} u(t_0) \\ \vdots \\ u(t_1-1) \end{bmatrix} = Cd^+(t_0,t_1)\ [x_1 - A(t_1-1)\dots A(t_0)x_0]\ ) \qquad \text{(I-44)}$$

c) Point du domaine atteignable le plus proche d'un état donné :

Dans des conditions données le point atteignable le plus proche d'un point x_1, au sens de la distance euclidienne, est la projection orthogonale $p(x_1)$ de ce point sur le domaine atteignable défini dans les mêmes conditions.

Des résultats précédents, il vient

$$x(t_1) - \Phi(t_1,t_0)x_0 = S(t_0,t_1)\psi \qquad \text{(I-45)}$$

$$\text{(resp.}\quad x(t_1) - A(t_1-1)\dots A(t_0)x_0 = Cd(t_0,t_1) \begin{bmatrix} u(t_0) \\ \vdots \\ u(t_1-1) \end{bmatrix} \qquad \text{(I-46)}$$

Il apparait alors que la condition nécessaire et suffisante d'atteignabilité est équivalente à la condition d'existence d'une commande de la forme

$$u(t) = B^T(t) \quad \Phi^T(t_1,t)\psi \tag{I-29}$$

(resp. $$\begin{bmatrix} u(t_0) \\ \\ u(t_1-1) \end{bmatrix} = Cd^+(x_1-A(t_1-1)\dots A(t_0)x_0)) \tag{I-44}$$

Et il vient pour l'expression du point $x(t_1)$ le plus proche de x_1 (Cf. Annexe 2)

$$x(t_1) = p(x_1) = S(t_0,t_1) \; S^+(t_0,t_1) \; [x_1 - \Phi(t_1,t_0)x_0] + \Phi(t_1,t_0)x_0 \tag{I-47}$$

(resp. $$x(t_1)=p(x_1)=S(t_0,t_1)S^+(t_0,t_1)[x_1-A(t_1-1)\dots A(t_0)x_0]+A(t_1-1)\dots A(t_0)x_0) \tag{I-48}$$

De plus conformément au théorème 7, l'emploi de la commande

$$u(t) = B^T(t) \quad \Phi^T(t_1,t) \; S^+(t_0,t_1) \; [x_1 - \Phi(t_1,t_0)x_0] \tag{I-43}$$

(resp. $$\begin{bmatrix} u(t_0) \\ \vdots \\ u(t_1-1) \end{bmatrix} = Cd^+[x_1 - A(t_1-1)\dots A(t_0)x_0]) \tag{I-44}$$

minimise $J(t_0,t_1)$ qui vaut alors

$$J(t_0,t_1) = [x_1 - \Phi(t_1,t_0)x_0]^T \; S^+(t_0,t_1)[x_1 - \Phi(t_1,t_0)x_0] \tag{I-49}$$

(resp. $$J(t_0,t_1) = [x_1-A(t_1-1)\dots A(t_0)x_0]^T S+(t_0,t_1)[x_1-A(t_1-1)\dots A(t_0)x_0]) \tag{I-50}$$

En résumé :

Théorème 9

Le point $x(t_1)$ *atteignable à l'instant* t_1 *le plus proche (au sens de la distance euclidienne) d'un point* x_1 *donné a pour expression :*

$$x(t_1) = S(t_0,t_1)\, S^+(t_0,t_1)\left[x_1 - \Phi(t_1,t_0)x_0\right] + \Phi(t_1,t_0)x_0 \qquad \text{(I-47)}$$

$$\text{(resp. } x(t_1) = S(t_0,t_1)S^+(t_0,t_1)\left[x_1 - A(t_1-1)\ldots A(t_0)x_0\right] + A(t_1-1)\ldots A(t_0)x_0) \qquad \text{(I-48)}$$

si x_0 *désigne l'état à l'instant initial* t_0.

Et l'énergie minimale nécessaire pour atteindre $x(t_1)$ *a pour valeur :*

$$J(t_0,t_1) = \left[x_1 - \Phi(t_1,t_0)x_0\right]^T S^+(t_0,t_1)\left[x_1 - \Phi(t_1,t_0)x_0\right] \qquad \text{(I-49)}$$

$$\text{(resp. } J(t_0,t_1) = \left[x_1 - A(t_1-1)\ldots A(t_0)x_0\right]^T S^+(t_0,t_1)(x_1 - A(t_1-1)\ldots A(t_0)x_0)) \qquad \text{(I-50)}$$

5) Commandabilité des systèmes linéaires continus et discrets

a) Définition

Définition 3

Un système continu ou discret est dit commandable /5/ si, quels que soient x_0, t_0 *et* x_1, *il existe* t_1 *et une commande* $u(t)$ *définie entre les instants* t_0 *et* t_1 *tels que si*

$$x(t_0) = x_0$$

alors

$$x(t_1) = x_1$$

Il est également possible de définir d'une part la commandabilité en partant de l'origine et d'autre part la commandabilité à l'origine : c'est-à-dire la possibilité de ramener l'état du système à l'origine en un temps fini, quel que soit l'état initial.

Il est clair que pour un système linéaire, la commandabilité est équivalente à la commandabilité à partir de l'origine.

Par contre la commandabilité à l'origine n'est équivalente à la commandabilité en général que pour les systèmes continus. Ceci résulte du fait que si $\Phi(t_1,t_0)$ est une matrice régulière, il n'en est pas nécessairement de même de $A(t_1-1)\ldots A(t_0)$.

Enfin trés souvent dans les problèmes pratiques, il faut considérer la commandabilité sur un intervalle $[t_0, t_1]$ donné

b) Condition nécessaire et suffisante de commandabilité

Théorème 10

Un système (continu ou discret) est commandable si et seulement si, quelque soit t_0 *, il existe* t_1 *tel que :*

$$\text{rang } S(t_0, t_1) = q \qquad \text{(I-51)}$$

Ceci résulte immédiatement des résultats du paragraphe C-4-b.

D - OBSEVABILITE D'UN SYSTEME LINEAIRE

. 1) Définition

Définition 4

Le système continu d'équation (I,2) *, ou discret d'équation* (I-11) *est dit observable si, quel que soit* t_0 *, il existe* t_1 *tel que la connaissance de* $s(t)$ *et de* $u(t)$ *sur l'intervalle* $[t_0, t_1]$ *permette de déterminer l'état initial* $x(t_0)$. /5/

2) Condition nécessaire et suffisante d'observabilité

Notons $Q(t_0, t_1)$ la matrice égale à

$$Q(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t_1, \delta) \; C^T(\delta) C(\delta) \; \Phi(t_1, \delta) \, d\delta \qquad \text{(I-52)}$$

lorsque le système est continu, et égale à

$$Q(t_0,t_1) = Ob^T(t_0,t_1)Ob(t_0,t_1) \tag{I-53}$$

avec

$$Ob = \begin{bmatrix} C(t_0) \\ C(t_0+1)\ A(t_0) \\ \vdots \\ C(t_1)\ A(t_1-1)\ldots\ A(t_0) \end{bmatrix} \tag{I-54}$$

lorsque le système est discret.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 11

Une condition nécessaire et suffisante d'observabilité du système est que, quel que soit t_0 *, il existe* t_1 *tel que :*

$$\text{rang } Q(t_0,t_1) = q \tag{I-55}$$

Ce résultat se déduit directement de la dualité des propriétés de commandabilité et d'observabilité /5/ /6/.

E - COMMANDABILITE ET OBSERVABILITE DES SYSTEMES LINEAIRES STATIONNAIRES

1) Commandabilité

Pour les systèmes linéaires stationnaires, il vient la condition nécessaire et suffisante de commandabilité bien connue /11/.

$$\text{rang}\left[A^{q-1}\ B,\ A^{q-2}\ B,\ldots\ B\right] = q \tag{I-56}$$

Lorsque le système est commandable, il existe un plus petit entier $\nu \leq q$ tel que

$$\text{rang}\left[A^{\nu-1} B, A^{\nu-2} B, \ldots, B\right] = q \qquad \text{(I-57)}$$

Ce nombre ν est appelé indice de commandabilité /6/.

2) Observabilité

Pour les systèmes stationnaires, une condition nécessaire et suffisante d'observabilité s'écrit /11/ :

$$\text{rang}\left[(A^{q-1})^T C^T, (A^{q-2})^T C^T, \ldots, C^T\right] = q \qquad \text{(I-58)}$$

et le plus petit nombre ν , tel que :

$$\text{rang}\left[(A^{\nu-1})^T C^T, (A^{\nu-2})^T C^T, \ldots C^T\right] = q \qquad \text{(I-59)}$$

est appelé indice d'observabilité /6/.

3) Interprétation géométrique des conditions de commandabilité et d'observabilité

Quel que soit le système linéaire stationnaire monovariable (A, B, C) continu ou discret, il existe un changement de base dans C^q, de matrice V, qui met A sous la forme de Jordan supérieure /11/.

$$V^{-1} A V = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & J_i & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_\ell \end{bmatrix} \qquad \text{(I-60)}$$

avec

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \qquad \text{(I-61)}$$

bloc de Jordan de dimensions (n_i, n_i).

Le vecteur de commande prend alors la forme

$$V^{-1} B = \begin{bmatrix} \beta_1^1 \\ \vdots \\ \beta_{n_1}^1 \\ \beta_1^2 \\ \\ \beta_{n_2}^2 \\ \beta_1^i \\ \beta_{n_i}^i \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \text{(I-62)}$$

La condition nécessaire et suffisante de commandabilité du système /13/ /14/ s'écrit alors sous la forme :

$$\text{quel que soit } i \begin{cases} \beta_{n_i}^i \neq 0 & \text{(I-63)} \\ \text{et } \lambda_j \neq \lambda_i \text{ pour tout } j \neq i & \text{(I-64)} \end{cases}$$

$\beta_{n_i}^i$ étant le produit scalaire du $i^{\text{ème}}$ vecteur propre de A par B /13/ /14/, (Cf Annexe 3) cette condition s'interprète comme une condition de non orthogonalisée des vecteurs propres de A^T au vecteur B.

De la même façon et dans les mêmes conditions, une condition nécessaire et suffisante d'observabilité sera la non orthogonalité des vecteurs propres de A au vecteur C.

F - NOTION DE QUALITE DE LA COMMANDABILITE ET DE L'OBSERVABILITE

L'expression des conditions de commandabilité énoncée plus haut montre que la commandabilité d'un système, au sens de Kalman, apparait en fait comme une propriété de point définie sur le modèle mathématique choisi.

Or celui-ci n'est connu qu'aux erreurs d'identification près. Ce qui fait que, pour un processus donné, deux identifications distinctes peuvent dans certains cas induire deux modèles trés voisins mais dont l'un serait commandable et l'autre non. Dans ce cas, quel que soit le modèle adopté, il semble raisonnable de penser que le processus sera difficile à commander.
Nous allons illustrer cette propriété par un exemple.

Soit le filtre linéaire continu monovariable de fonction de transfert

$$W(p) = \frac{1+\lambda p}{p(1+\delta p)} \qquad \text{(I-65)}$$

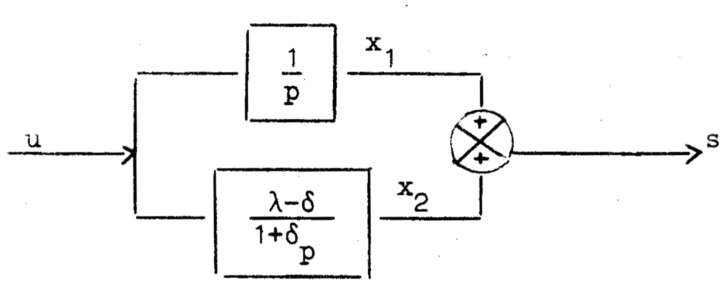


figure 1

La décomposition mise en évidence figure 1 conduit à la représentation d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\lambda-\delta}{\delta} \end{bmatrix} u(t) \quad \text{(I-66)}$$

$$s = (1 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{(I-67)}$$

Ce système est observable, quels que soient λ et δ . En effet l'application du critère de Kalman conduit à :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\delta} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\delta} \neq 0 \quad \text{(I-68)}$$

En ce qui concerne la commandabilité, nous pouvons distinguer deux cas :

soit $\lambda \neq \delta$ et le système est commandable

soit $\lambda = \delta$ et le système n'est pas commandable.

Si $\lambda \neq \delta$, d'aprés (I-26), l'énergie de commande minimale nécessaire pour passer de (0,0) à (x_1,t_1) s'écrit :

$$E = x_1^T \; S^{-1}(0,t_1)x_1 \quad \text{(I-69)}$$

avec

$$S(0,t_1) = \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{\delta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda-\delta}{\delta} \end{pmatrix} \left(1 \quad \frac{\lambda-\delta}{\delta}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{\delta}} \end{pmatrix} d\delta \quad \text{(I-70)}$$

Soit

$$S(0,t_1) = \begin{bmatrix} t_1 & (\delta-\lambda)\left[e^{-\frac{t_1}{\delta}} - 1\right] \\ (\delta-\lambda)\left[e^{-\frac{t_1}{\delta}} - 1\right] & -\frac{(\lambda-\delta)^2}{2\delta}\left(e^{-\frac{2t_1}{\delta}} - 1\right) \end{bmatrix} \quad \text{(I-71)}$$

Et si nous exprimons E dans la base orthonormée qui diagonalise $S(0,t_1)$ et $S^{-1}(0,t_1)$, il vient :

$$E = \frac{1}{\lambda_1} x'^2_1 + \frac{1}{\lambda_2} x'^2_2 \quad \text{(I-72)}$$

Dans cette expression, x'_1 et x'_2 désignent les composantes de l'état à atteindre, dans la nouvelle base, et les scalaires λ_1 et λ_2, valeurs propres de $S(0,t_1)$, sont définis par les relations

$$2\lambda_1 = S + \sqrt{S^2 - 4P} \quad \text{(I-73)}$$

$$2\lambda_2 = S - \sqrt{S^2 - 4P} \quad \text{(I-74)}$$

avec

$$S = t_1 - \frac{(\lambda-\delta)^2}{2\delta}\left(e^{-\frac{2t_1}{\delta}} - 1\right) \quad \text{(I-75)}$$

$$P = -\frac{t_1(\lambda-\delta)^2}{2\delta}\left(e^{-\frac{2t_1}{\delta}} - 1\right) - (\delta-\lambda)^2\left(e^{-\frac{t_1}{\delta}} - 1\right)^2 \quad \text{(I-76)}$$

Lorsque λ tend vers δ, λ_1 et λ_2 tendent de façon continue l'un vers t_1, l'autre vers 0.

Il en résulte que lorsque λ tend vers δ, l'énergie de commande E tend continuement vers l'infini si x'_2 n'est pas nul.

Autrement dit si l'écart $(\lambda-\delta)$ est trés petit, l'énergie minimale nécessaire pour commander le processus est trés grande. Au contraire si la différence entre λ et δ est grande, nous n'aurons pas de problème de commande.

Cette propriété constatée sur un exemple, permet d'envisager la définition d'une fonction qui caractérise la facilité de commander un système donné, la non commandabilité au sens de Kalman s'interprétant alors comme un cas limite.

De la même façon, il peut être intéressant de caractériser la facilité de reconstituer l'état initial d'un système à partir de l'observation de la sortie et de la commande.

CONCLUSION

La représentation matricielle des processus permet d'introduire simplement les notions d'état et de domaine atteignables.

Lorsqu'un état donné n'est pas atteignable, l'utilisation des pseudo-inverses de matrices permet de déterminer l'état atteignable le plus proche (au sens de la distance euclidienne).

Aprés avoir donné des définitions de la commandabilité et de l'observabilité d'un système, nous avons rappelé les critères de commandabilité usuellement employés pour les systèmes stationnaires (Kalman) ainsi que l'interprétation géométrique de ces critères dans le cas des systèmes monovariables.

Nous avons montré sur un exemple l'intérêt et la nécessité de compléter ces notions, correspondant à une propriété ponctuelle d'un modèle borné, par la définition d'un indice de qualité de la commandabilité et de l'observabilité qui soit moins sensible aux variations des paramètres du modèle, et donne une image plus conforme des possibilités réelles de commande du processus.

C H A P I T R E   I I

MESURES DE LA COMMANDABILITE ET DE L'OBSERVABILITE

L'étude de l'exemple présenté dans le précédent chapitre a montré l'intérêt de définir une mesure de la commandabilité des systèmes continus et discrets. Toutefois, comme la notion de "bonne ou mauvaise" commandabilité est subjective et dépend essentiellement des qualités que l'utilisateur attend d'un système, il convient plutôt de définir les propriétés que doit vérifier une telle mesure.

C'est pourquoi nous définissons tout d'abord une famille de fonctions, appelées mesures de la commandabilité, en énonçant les propriétés minimales qu'elles doivent satisfaire. Puis nous illustrerons cette définition par des exemples que nous interpréterons physiquement ou géométriquement. Nous étudierons, en particulier, les mesures liées à l'énergie de commande.

Une démarche semblable nous conduira à examiner les mesures de l'observabilité.

A - DEFINITION AXIOMATIQUE DES MESURES DE LA COMMANDABILITE

Dans ce qui suit, nous notons (B^1,B^2) la matrice de commande B formée de la juxtaposition des matrices B^1 et B^2.

1) Définition

Définition 5

La fonctionnelle μ *de* $A(t)$ *et* $B(t)$ *, à valeurs dans* R_+ *, est une mesure de la commandabilité des systèmes* (A,B,C,D) *continus (resp. discrets) évoluant entre les instants* t_0 *et* t_1 *, si elle vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $\mu(A,B) \geq 0 \quad \forall\, A,B$ (II-1)

(ii) $\mu(A,B) = 0$ *si et seulement si la paire* (A,B) *n'est pas commandable au sens de Kalman* (II-2)

(iii) $\mu[A,(B^1,B^2)] \geq \inf\{\mu(A,B^1),\ \mu(A,B^2)\}$ (II-3)

(iv) $\lim\limits_{\substack{i\to\infty \\ j\to\infty}} \mu(A_i,B_j) = \mu(A,B)$ (II-4)

si les suites de matrices $A_i(t)$ *et* $B_j(t)$ *convergent uniformément sur l'intervalle* $[t_0,t_1]$ *et indépendamment l'une de l'autre, respectivement vers* $A(t)$ *et* $B(t)$.

La propriété (II-3) traduit le fait qu'un système possédant plusieurs commandes se pilote au moins aussi facilement, au sens de la mesure μ que s'il ne possédait que la plus mauvaise au sens de la même mesure. Lorsque cette propriété sera vérifiée nous parlerons de mesure faible. Si, de plus, la mesure satisfait la condition :

$$\mu\,[A,\,(B^1,B^2)] \geq \sup\,\{\mu(A,B^1),\ \mu(A,B^2)\} \qquad \text{(II-4i)}$$

nous parlerons de mesure forte.

La propriété de convergence (II-4) est nécessaire pour que la mesure soit significative, le choix d'un modèle constituant seulement une approche de la réalité physique d'un système.

2) <u>Remarque sur la définition</u> :

Certains auteurs /15/ ont proposé une définition différente de celle que nous donnons.

Dans celle-ci, les propriétés (II-3) et (II-4) sont remplacées par :

$$\mu(A,k.B) = k^2\,\mu(A,B) \text{ si } k \text{ est un scalaire} \qquad \text{(II-3i)}$$

$$\mu[A,(B^1,B^2)] \geq \mu(A,B^1) + \mu(A,B^2) \qquad \text{(II-4ii)}$$

Cette définition s'interpréte bien dans le cas des mesures de la commandabilité liées à la seule notion d'énergie de commande. Par contre, elle ne permet pas de prendre en considération les mesures de la commandabilité liées à la précision dont nous verrons l'intérêt au chapitre III.

3) <u>Exemple</u> :

Un premier exemple de mesure de la commandabilité sur un intervalle (t_0,t_1) nous est donné par le déterminant de la matrice $S(t_0,t_1)$ définie au premier chapitre. Nous noterons det S = $|S|$.

Cette dernière propriété nécessite la définition de distances sur l'ensemble des matrices (q,q) et sur l'ensemble des matrices (q,m).

Pratiquement, nous utiliserons les distances induites par les normes $S_{\varphi_2\varphi_2}$ définies ci-aprés :

$$S^2_{\varphi_2\varphi_2}(M) = \sup_{x \neq 0} \frac{x^T M^T M\ x}{x^T x} \qquad \text{(II-5)}$$

où x est un vecteur à q composantes et M une matrice (q,q)

$$S^2_{\varphi_2\varphi_2}(M') = \sup_{y \neq 0} \frac{y^T M'^T M'\ y}{y^T y} \qquad \text{(II-6)}$$

où y est un vecteur à m composantes et M' une matrice (q,m)

L'énoncé de la propriété (II-4) devient alors :

si

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{t \in [t_0,t_1]} S_{\varphi_2\varphi_2} \left[A(t) - A_i(t)\right] = 0$$

et si

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{t \in [t_0,t_1]} S_{\varphi_2\varphi_2} \left[B(t) - B_j(t)\right] = 0$$

alors

$$\lim_{\substack{i\to\infty \\ j\to\infty}} \mu(A_i,B_j) = \mu(A,B)$$

Pour les systèmes continus comme pour les systèmes discrets, il vient :

$$|S| \geqslant 0 \tag{II-7}$$

avec $|S| = 0$ si et seulement si le système n'est pas commandable (II-8)

$$|S[A,(B^1,B^2)]| \geqslant \mathrm{Inf}\ \{|S(A,B^1)|,\ |S(A,B^2)|\} \tag{II-9}$$

de plus

$$|S[A,(B^1,B^2)]| \geqslant \mathrm{Sup}\ \{|S(A,B^1)|,\ |S(A,B^2)|\} \tag{II-9i}$$

la propriété de convergence (II-4) est vérifiée ci-dessous.
La condition (II-9i) indique qu'il s'agit ici d'une mesure forte.

Les propriétés (II-7) et (II-8) résultent immédiatement des propriétés de la matrice S : elle est définie positive si le système est commandable et elle est singulière si le système n'est pas commandable.

Montrons la propriété (II-9).

Dans le cas discret, comme dans le cas continu :

$$S[A,(B^1,B^2)] = S(A,B^1) + S(A,B^2) \tag{II-10}$$

Soient :

$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \ldots\ \leqslant \lambda_q$ les valeurs propres de $S(A,B^1)$.

$\mu_1 \leqslant \mu_2 \ldots\ \leqslant \mu_q$ les valeurs propres de $S(A,B^2)$

$\nu_1 \leqslant \nu_2 \ldots\ \leqslant \nu_q$ les valeurs propres de $S[A,(B^1,B^2)]$

Quel que soit i, il vient d'aprés /16/ :

$$\left.\begin{aligned} \nu_i &\geqslant \lambda_i \\ \nu_i &\geqslant \mu_i \end{aligned}\right\} \tag{II-11}$$

D'où, en remarquant que $S(A,B^1)$, $S(A,B^2)$ et $S[A,(B^1,B^2)]$ ont toutes leurs valeurs propres positives :

$$|S[A,(B^1,B^2)]| = \prod_{i=1}^{q} \nu_i \geq \prod_{i=1}^{q} \lambda_i = |S(A,B^1)| \qquad \text{(II-12)}$$

$$|S[A,(B^1,B^2)]| = \prod_{i=1}^{q} \nu_i \geq \prod_{i=1}^{q} \mu_i = |S(A,B^2)| \qquad \text{(II-13)}$$

Soit

$$|S[A,(B^1,B^2)]| \geq \mathrm{Sup}\ \{|S(A,B^1)|,\ |S(A,B^2)|\} \qquad \text{(II-14)}$$

et à fortiori :

$$|S[A,(B^1,B^2)]| \geq \mathrm{Inf}\{|S(A,B^1)|\ ,\ |S(A,B^2)|\} \qquad \text{(II-15)}$$

Nous montrerons la propriété de convergence dans le cadre des systèmes continus, le cas des systèmes discrets se traitant d'une manière semblable.

Soient les suites $A_i(t)$ et $B_i(t)$ convergeant uniformément (au sens des distances introduites plus haut) respectivement vers $A(t)$ et $B(t)$ sur l'intervalle $[t_0,\ t_1]$.

A toute matrice $A_i(t)$ correspond une matrice de transition $\Phi_i(t,t_0)$ vérifiant :

$$\overset{\circ}{\Phi}_i(t,t_0) = A_i(t)\ \ \Phi_i(t,t_0) \qquad \text{(II-16)}$$

$$\Phi_i(t_0,t_0) = I \qquad \text{(II-17)}$$

Si I désigne la matrice identité de rang q.

Montrons que la suite $\Phi_i(t,t_0)$ converge uniformément vers $\Phi(t,t_0)$ sur l'intervalle $[t_0,t_1]$.

Il vient

$$\overset{\circ}{\Phi}(t,t_0) = A(t)\ \Phi\ (t,t_0) \tag{II-18}$$

$$\overset{\circ}{\Phi}_i(t,t_0) = A_i(t)\ \ \Phi_i(t,t_0) \tag{II-19}$$

Cette dernière équation peut encore s'écrire :

$$\frac{d}{dt}\left[\Phi(t,t_0) + \Delta_i\Phi(t,t_0)\right] = \left[A(t)+ \Delta_i A(t)\right]\left[\Phi(t,t_0)+\Delta_i\Phi(t,t_0)\right] \tag{II-20}$$

avec :

$$\Delta_i\ \Phi(t,t_0) = \Phi_i(t,t_0) - \Phi(t,t_0) \tag{II-21}$$

$$\Delta_i\ A(t,t_0) = A_i(t,t_0) - A(t,t_0) \tag{II-22}$$

Il vient par différence :

$$\frac{d}{dt}\left[\Delta_i\Phi(t,t_0)\right]= A(t)\ \Delta_i\ \Phi(t,t_0)+\Delta_i A(t)\left[\Phi(t,t_0) + \Delta_i\Phi(t,t_0)\right] \tag{II-23}$$

D'où :

$$\Delta_i\Phi(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\delta)\ \Delta_i\ A(\delta)\left[\Phi(\delta,t_0) + \Delta_i\Phi(\delta,t_0)\right]d\delta \tag{II-24}$$

$$\Delta_i\Phi(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\delta)\ \Delta_i\ A(\delta)\ \Phi(\delta,t_0)\ d\delta + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\delta)\ \Delta_i\ A(\delta)\ \Delta_i\Phi(\delta,t_0)\ d\delta \tag{II-25}$$

$S_{\varphi_2\varphi_2}$ désignant la norme scalaire de matrice définie plus haut, il convient donc de montrer la propriété suivante :

$$\forall\eta > 0,\ \exists\, n_1>0 \ :\ i \geqslant n_1 \Rightarrow \sup_{[t_0,t_1]} S_{\varphi_2\varphi_2}\ [\Delta_i\ \Phi(t,t_0)] < \eta \qquad \text{(II-26)}$$

Or il vient :

$$\sup_{[t_0,t_1]} S_{\varphi_2\varphi_2}\ [\Delta_i\ \Phi(t,t_0)] \leqslant \sup_{[t_0,t_1]} S_{\varphi_2\varphi_2}\left[\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\delta)\ \Delta_i A(\delta)\Phi(\delta,t_0)\ d\delta\right]$$

$$+ \sup_{[t_0,t_1]} S_{\varphi_2\varphi_2}\left[\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\delta)\ \Delta_i A(\delta)\Delta_i\Phi(\delta,t_0)\ d\delta\right] \qquad \text{(II-27)}$$

Les éléments de la matrice $\Phi(t,t_0)$ sont des fonctions continues du temps, donc bornées sur l'intervalle fermé $[t_0,t_1]$. Il en résulte que $S_{\varphi_2\varphi_2}[\Phi(t,t_0)]$ est borné sur $[t_0,t_1]$.

Il en est de même pour $S_{\varphi_2\varphi_2}[\Phi(t_0,t)]$. Notons alors :

$$M = \sup\left\{\sup_{[t_0,t_1]} S_{\varphi_2\varphi_2}\ [\Phi(t,t_0)],\ \sup_{[t_0,t_1]} S_{\varphi_2\varphi_2}\ [\Phi(t_0,t)]\right\} \qquad \text{(II-28)}$$

D'autre part $\Delta_i\ A(t)$ converge uniformément vers la matrice nulle. Ce qu'exprime la proposition :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\ :\ i \geqslant n \Rightarrow \sup_{[t_0,t_1]} S_{\varphi_2\varphi_2}\ [\Delta_i\ A(t)] < \varepsilon \qquad \text{(II-29)}$$

La norme $S_{\varphi_2\varphi_2}$ étant sous multiplicative, il résulte alors de l'expression (II-27) :

$$\sup_{[t_0,t_1]} S\varphi_2\varphi_2[\Delta_i\Phi(t,t_0)] \leq (t_1-t_0)M^3\varepsilon+(t_1-t_0)M^2\varepsilon \sup_{[t_0,t]} S\varphi_2\varphi_2[\Delta_i\Phi(t,t_0)] \qquad \text{(II-30)}$$

quel que soit η donné, il est possible de choisir ε et n_1 de telle sorte que :

$$i \geq n_1 \Longrightarrow \begin{cases} 1-(t_1-t_0)\, M^2\varepsilon > 0 & \text{(II-31)} \\ \dfrac{(t_1-t_0)\, M^3\varepsilon}{1-(t_1-t_0)M^2\varepsilon} < \eta & \text{(II-32)} \end{cases}$$

Il en résulte que, quel que soit η , il existe n_1 tel que

$$i \geq n_1 \Longrightarrow \sup_{[t_0,t_1]} S\varphi_2\varphi_2 \left[\Delta_i\ \Phi(t,t_0)\right] < \eta \qquad \text{(II-33)}$$

Considérons maintenant la suite $S_i(t_0,t)$ définie par :

$$S_i(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} \Phi_i(t,\delta)\ B_i(\delta)\ B_i^T(\delta)\ \Phi_i^T(t,\delta)\ d\delta \qquad \text{(II-34)}$$

Compte-tenu du résultat qui vient d'être montré et de la convergence uniforme de la suite $B_i(t)$, la quantité sous le signe somme converge uniformément. Il en résulte que la suite $S_i(t_0,t)$ converge uniformément vers $S(t_0,t)$ sur l'intervalle $[t_0,t_1]$ et que $S_i(t_0,t_1)$ a pour limite $S(t_0,t_1)$.

Or les valeurs propres de la matrice $S(t_0,t_1)$ sont des fonctions continues de ses éléments. Il en résulte qu'elles sont les limites de valeurs propres de $S_i(t_0,t_1)$ lorsque $A_i(t)$ et $B_i(t)$ convergent uniformément vers $A(t)$ et $B(t)$ sur l'intervalle $[t_0,t_1]$.

Le déterminant de $S(t_0,t_1)$, produit des valeurs propres, satisfait donc la propriété de convergence (II-4).

B - MESURES DE LA COMMANDABILITE ET ENERGIE

1 - Introduction

Un critère important lors du choix d'un système est relatif à l'énergie de commande. Dans cette optique, un système sera d'autant mieux commandable que l'énergie de commande nécessaire à son évolution sera faible. C'est pourquoi nous allons chercher, pour caractériser la commandabilité d'un système, une grandeur liée à l'énergie de commande minimale de ce système.

Nous avons vu dans le premier chapitre que, pour les systèmes continus comme pour les systèmes discrets, l'énergie minimale nécessaire pour faire passer un système de l'état 0 à l'instant t_0 à l'état x_1 à l'instant t_1 était de la forme :

$$E = x_1^T \; S^+ \; x_1 \qquad \text{(II-35)}$$

Si le système est commandable, cette relation s'écrit :

$$E = x_1^T \, S^{-1} \, x_1 \qquad \text{(II-36)}$$

Dans cette expression, S^{-1} est une matrice symétrique, définie positive, et E satisfait à la double inégalité suivante /17/ :

$$\frac{1}{\lambda_q} \, x_1^T \, x_1 \leq E \leq \frac{1}{\lambda_1} \, x_1^T \, x_1 \qquad \text{(II-37)}$$

où λ_1 et λ_q désignent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de S.

2 - Degré de commandabilité

a) Définition

L'inégalité (II-37) incite à utiliser λ_1 pour définir une mesure de la commandabilité.

Vérifions que cette grandeur répond bien à la définition d'une mesure de la commandabilité.

$$\lambda_1 \geq 0 \qquad \text{(II-38)}$$

$$\lambda_1 = 0 \text{ si et seulement si le système n'est pas commandable} \qquad \text{(II-39)}$$

$$\lambda_1 \left[S(A,(B^1,B^2)\right] \geq \lambda_1 \left[S(A,B^1)\right] + \lambda_1 \left[S(A,B^2)\right] \qquad \text{(II-40)}$$

et à fortiori :

$$\lambda_1 \left[S(A(B^1,B^2)\right] \geq \text{Inf}\{\lambda_1 \left[S(A,B^1)\right] , \lambda_1 \left[S(A,B^2)\right]\} \qquad \text{(II-41)}$$

La propriété de convergence résulte de l'étude faite au paragraphe précédent.

Définition 6

La plus petite valeur propre de la matrice S *est appelée degré de commandabilité* /15/.

C'est par analogie avec le degré de stabilité que l'on appelle λ_1 degré de commandabilité. Cette grandeur est une mesure forte de la commandabilité

b) Interprétation

λ_1 est l'inverse de la valeur maximum de l'énergie minimale nécessaire pour faire passer le point représentatif de l'état d'un système, de l'origine à un point de la sphère de rayon unité /18/.

Cette définition de la mesure conduit donc à ne tenir compte que de la direction propre de S qui nécessite la plus grande énergie de commande /19/ /20/.

Nous allons maintenant rechercher des mesures de la commandabilité qui font intervenir toutes les valeurs propres, donc toutes les directions propres, de S.

3 - Moyennes pondérées des valeurs propres de S :

Soit un ensemble P de poids strictement positifs

$$P = \{p_1, p_2, \dots p_q\} \qquad \text{(II-42)}$$

et soient

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \dots \leq \lambda_q \qquad \text{(II-43)}$$

les valeurs propres de S.

Nous notons Λ, l'ensemble des valeurs propres de S.

$$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_q\} \qquad \text{(II-43i)}$$

Définition 7

La quantité :

$$M^r(\Lambda,P) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{q} p_i \lambda_i^r}{\sum_{i=1}^{q} p_i}\right]^{\frac{1}{r}}$$

est la moyenne pondérée d'ordre r/21/ *des valeurs propres de* S.

Si r est négatif, $M^r(\Lambda,P)$ est une mesure forte de la commandabilité.

Dans ce cas il vient en effet :

$$M^r(\Lambda,P) \geq 0 \qquad \text{(II-45)}$$

$$M^r(\Lambda,P) = 0 \text{ si et seulement si un } \lambda_i \text{ au moins est nul} \qquad \text{(II-46)}$$

$$M^r\left[\Lambda\left[S\left[A,(B^1,B^2)\right]\right],P\right] \geq M^r\left[\Lambda\left[S(A,B^1)\right], P\right]$$

et (II-47)

$$M^r\left[\Lambda\left[S\left[A,B^1,B^2)\right]\right], P\right] \geq M^r\left[\Lambda\left[S(A,B^2)\right], P\right]$$

les dernières inégalités résultent de (II-11)

Remarquons que :

$$M^{-\infty}(\Lambda,P) = \lim_{r\to -\infty} M^r(\Lambda,P) = \lambda_1 \qquad \text{(II-48)}$$

Nous retrouvons le degré de commandabilité précédemment défini

Si $P_1 = P_2 = \ldots = P_q = 1$, il vient :

$$M^o(\Lambda,P) = \lim_{r\to 0} M^r(\Lambda,P) = \sqrt[q]{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_q} = \sqrt[q]{|S|} \qquad \text{(II-49)}$$

Un autre cas particulier trés important est celui où r = - 1.

C'est celui que nous allons examiner maintenant.

4 - Moyenne harmonique pondérée des valeurs propres de S

Définition 8

La moyenne harmonique pondérée des valeurs propres de S *est la moyenne pondérée d'ordre* - 1 *des valeurs propres de* S, *soit :*

$$M^{-1}(\Lambda,P) = \frac{\sum_{i=1}^{q} \bar{p}_i}{\sum_{i=1}^{q} p_i \frac{1}{\lambda_i}} \tag{II-50}$$

a) Propriété

Théorème 12

La moyenne harmonique pondérée des valeurs propres de S *est égale à l'inverse de la moyenne pondérée de l'énergie minimale de commande calculée sur la sphère* Ω *de rayon unité lorsque la somme des coefficients de poids est égale à l'ordre du système :*

$$\sum_{i=1}^{q} p_i = q \tag{II-51}$$

La matrice S^{-1} étant symétrique, il existe toujours une base orthonormée dans laquelle la matrice S^{-1} est sous forme diagonale. Plaçons nous dans cette base.

Il vient alors pour l'inverse de la moyenne pondérée de l'énergie minimale de commande calculée sur la sphère Ω de rayon unité, en notant $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_q)$ les coordonnées d'un point de Ω , $d\omega$ l'élément de surface et

p_i le coefficient de poids correspondant à la commande dans la direction propre correspondant à λ_i :

$$\frac{\int_\Omega d\omega}{\int_\Omega \sum_{i=1}^{i} \frac{p_i}{\lambda_i} \alpha_i^2 d\omega} = \frac{\int_\Omega (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_q^2) d\omega}{\int_\Omega \sum_{i=1}^{q} \frac{p_i}{\lambda_i} \alpha_i^2 \, d\omega} \qquad \text{(II-52)}$$

Compte-tenu de la symétrie sphérique, nous ayons :

$$\int_\Omega \alpha_1^2 \, d\omega = \int_\Omega \alpha_2^2 \, d\omega = \ldots = \int_\Omega \alpha_q^2 \, d\omega \qquad \text{(II-53)}$$

D'où

$$\frac{\int_\Omega d\omega}{\int_\Omega \sum_{i=1}^{q} \frac{p_i}{\lambda_i} \alpha_1^2 \, d} = \frac{q}{\sum_{i=1}^{q} \frac{p_i}{\lambda_i}} \qquad \text{(II-54)}$$

b) Interprétation des coefficients de poids

L'espace d'état étant probabilisé, attachons à chaque point x de cet espace une densité de probabilité p(x) /22/ de telle sorte que la probabilité d'atteindre un point d'un domaine $\mathcal{D}$ en partant de l'origine soit :

$$p(D) = \int_\infty p(x) \, d\omega = \int_\infty p(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q) d\alpha_1 \, d\alpha_2 \ldots d\alpha_q \qquad \text{(II-55)}$$

Calculons alors, le rapport de l'espérance mathématique de $x_1^T \, x_1$ à l'espérance mathématique de $x_1^T \, S^{-1} \, x_1$ et ceci, en nous plaçant dans la base orthonormée qui diagonalise S^{-1}.

$$\frac{M(x_1^T\, x_1)}{M(x_1^T\, S^{-1} x_1)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^2\, p(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_q)\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_q}{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{\lambda_i}\, \alpha_i^2\, p(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q)\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_q} \qquad \text{(II-56)}$$

$$\frac{M(x_1^T\, x_1)}{M(x_1^T\, S^{-1} x_1)} = \frac{\sum_{i=1}^{q} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i^2\, p(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_q) d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_q}{\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{\lambda_i} \int_{-\infty}^{-\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} \alpha_i^2\, p(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_q)\, d\alpha_1\, d\alpha_2 \ldots d\alpha_q} \qquad \text{(II-57)}$$

En rapprochant cette formule de (II-50), les coefficients de poids s'interprètent comme les moments d'ordre 2 calculés dans la base orthonormée qui diagonalise S^{-1}.

5 - Moyenne harmonique des valeurs propres de S.

a) Expression

Définition 9

La quantité :

$$M^{-1}(\Lambda) = \frac{q}{\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{\lambda_i}} \qquad \text{(II-58)}$$

est la moyenne harmonique des valeurs propres de S.

Elle est obtenue en prenant dans l'expression (II-50) tous les coefficients de poids égaux.

Elle a pour inverse la valeur moyenne de l'énergie minimale de commande calculée sur la sphère Ω de rayon unité /15/ /18/

$$\frac{q}{\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{\lambda_i}} = \frac{\int_\Omega d\omega}{\int_\Omega x^T S^{-1} x \, d\omega} \qquad \text{(II-59)}$$

b) <u>Propriété</u>

$M^{-1}(\Lambda)$ satisfait, comme toutes les moyennes d'ordre négatif, l'inégalité (II-3), caractéristique des mesures de la commandabilité. Mais cette grandeur satisfait une inégalité plus stricte /15/. En effet nous allons montrer que :

Théorème 13

$M^{-1}(\Lambda)$ *, moyenne harmonique des valeurs propres de* S *est une mesure de la commandabilité qui vérifie, outre l'inégalité* (II-3), *l'inégalité* :

$$M^{-1}[\Lambda(S[A,(B^1,B^2)]\ )] \geq M^{-1}[\Lambda(S[A,B^1])] + M^{-1}[\Lambda(S[A,B^2])] \qquad \text{(II-60)}$$

Pour le montrer, rappelons tout d'abord que :

$$S[A,(B^1,B^2)] = S(A,B^1) + S(A,B^2)$$

et notons $S_i(A,B^1)$, $S_i(A,B^2)$ les matrices obtenues en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne de la colonne de $S(A,B^1)$ et $S(A,B^2)$.

L'application de l'inégalité de Bergstram /16/ conduit à :

$$\frac{|S(A,B^1)+S(A,B^2)|}{|S_i(A,B^1)+S_i(A,B^2)|} \geq \frac{|S(A,B^1)|}{|S_i(A,B^1)|} + \frac{|S(A,B^2)|}{|S_i(A,B^2)|} \qquad \text{(II-61)}$$

Soit :

$$\frac{|S_i(A,B^1)+S_i(A,B^2)|}{|S(A,B^1)+S(A,B^2)|} \leqslant \frac{1}{\frac{|S(A,B^1)|}{|S_i(A,B^1)|}+\frac{|S(A,B^2)|}{|S_i(A,B^2)|}} \tag{II-62}$$

Cette inégalité est vraie pour tout i. Il en résulte que :

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{|S_i(A,B^1)+S_i(A,B^2)|}{|S(A,B^1)+S(A,B^2)|} \leqslant \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{\frac{|S(A,B^1)|}{|S_i(A,B^1)|}+\frac{|S(A,B^2)|}{|S_i(A,B^2)|}} \tag{II-63}$$

Ceci peut encore s'écrire :

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{q} \frac{|S_i(A,B^1)\ +S_i(A,B^2)|}{|S(A,B^1)+S(A,B^2)|}} \geqslant \frac{1}{\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{\frac{|S(A,B^1)|}{|S_i(A,B^1)|}+\frac{|S(A,B^2)|}{|S_i(A,B^2)|}}} \tag{II-64}$$

L'inégalité de Minkowski /16/ à l'ordre -1 montre alors que

$$\left[\sum_{i=1}^{q}\left[\frac{|S(A,B^1)|}{|S_i(A,B^1)|}+\frac{|S(A,B^2)|}{|S_i(A,B^2)|}\right]^{-1}\right]^{-1} \geqslant \left[\sum_{i=1}^{q}\left[\frac{|S(A,B^1)|}{|S_i(A,B^1)|}\right]^{-1}\right]^{-1}$$

$$+\left[\sum_{i=1}^{q}\left[\frac{|S(A,B^2)|}{|S_i(A,B^2)|}\right]^{-1}\right]^{-1}. \tag{II-65}$$

D'où

$$\frac{1}{\dfrac{\sum_{i=1}^{q}|S_i(1,B^1)+S_i(A,B^2)|}{|S(A,B^1)+S(A,B^2)|}} \geqslant \frac{1}{\dfrac{\sum_{i=1}^{q}|S_i(A,B^1)|}{|S(A,B^1)|}} + \frac{1}{\dfrac{\sum_{i=1}^{q}|S_i(A,B^2)|}{|S(A,B^2)|}} \qquad \text{(II-66)}$$

C'est-à-dire :

$$M^{-1}[\Lambda(S[A,(B^1,B^2)])] \geqslant M^{-1}[\Lambda(S[A,B^1])] + M^{-1}[\Lambda(S[A,B^2])] \qquad \text{(II-67)}$$

6 - Exemple d'application aux problèmes de synthèse des asservissements

L'ingénieur chargé de l'étude d'un asservissement doit en général faire un compromis entre les diverses qualités attendues pour cet asservissement. Parmi ces qualités, nous pouvons compter une bonne commandabilité. L'application des résultats du paragraphe précédent, à l'étude de la commandabilité d'une classe de systèmes souvent rencontrés en automatique va permettre la réalisation d'un réseau d'attaques en vue de déterminer de façon pratique la commandabilité des systèmes de cette classe.

a) Description du processus étudié

Soit le système monovariable de fonction de transfert

$$W(p) = \frac{1+\lambda p}{p(1+\delta p)} \qquad \text{(II-68)}$$

piloté par une commande discrète obtenue par échantillonnage à période constante T d'un signal continu u(t).

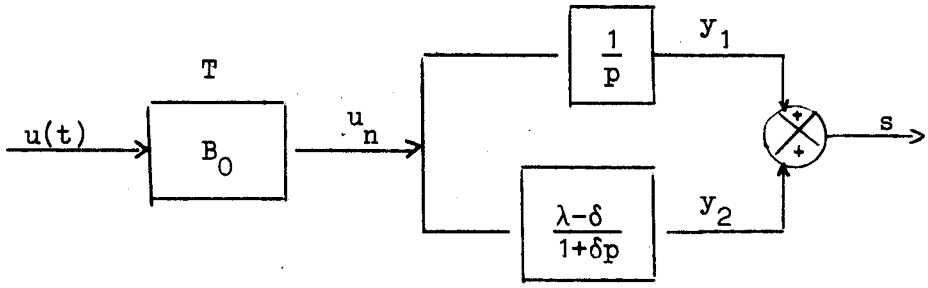


Figure 1

La décomposition du système mise en évidence figure 1, conduit à l'équation d'état :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} T \\ (\lambda-\delta)(1-D) \end{bmatrix} u_n \quad \text{(II-69)}$$

où $D = e^{-\frac{T}{\delta}}$

b) Choix et calcul d'une mesure de la commandabilité μ :

La mesure choisie correspond à la moyenne harmonique des valeurs propres de S.

La matrice de commandabilité en deux périodes du processus décrit par l'équation d'état (II-29) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} T & T \\ (\lambda-\delta)D(1-D) & (\lambda-\delta)(1-D) \end{bmatrix} \quad \text{(II-70)}$$

En multipliant à croite cette matrice par sa transposée il vient pour la matrice S :

$$S = \begin{bmatrix} 2T^2 & (\lambda-\delta)(1-D)T(D+1) \\ (\lambda-\delta)(1-D)T(D+1) & (\lambda-\delta)^2(1-D)(D^2+1) \end{bmatrix} . \tag{II-71}$$

et pour la mesure de commandabilité μ :

$$\mu = \frac{2\ |S|}{\text{trace }(S)} \tag{II-72}$$

soit :

$$\mu = \frac{2T^2(\lambda-\delta)^2(1-D)^4}{2T^2 + (\lambda-\delta)^2(1-D)^2(1+D^2)} . \tag{II-73}$$

c) Etude de μ :

L'étude des variations de μ en fonctions de l'écart $(\lambda-\delta)$ conduit au graphe présenté figure 2.

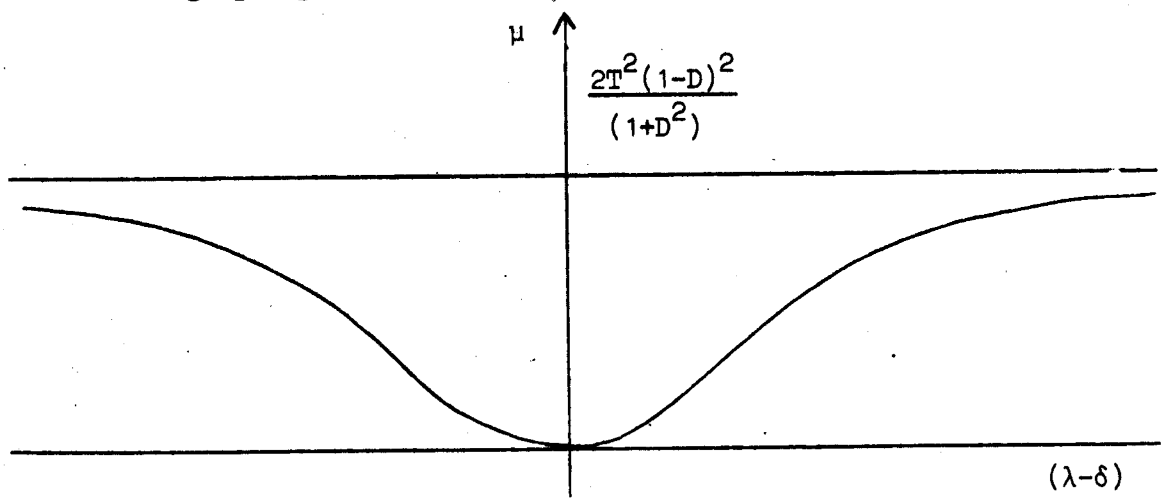


figure 2

μ est une fonction croissante de $|\lambda-\delta|$ et tend asymptotiquement vers μ_{max} lorsque $|\lambda-\delta|$ tend vers l'∞

$$\mu_{max} = \frac{2T^2(1-D)^2}{(1+D^2)} \qquad \text{(II-74)}$$

Le système est d'autant mieux commandable que le rapport $\frac{\mu}{\mu_{max}}$ est grand. C'est pourquoi la quantité β

$$\beta = 100\,\frac{\mu}{\mu_{max}} \qquad \text{(II-75)}$$

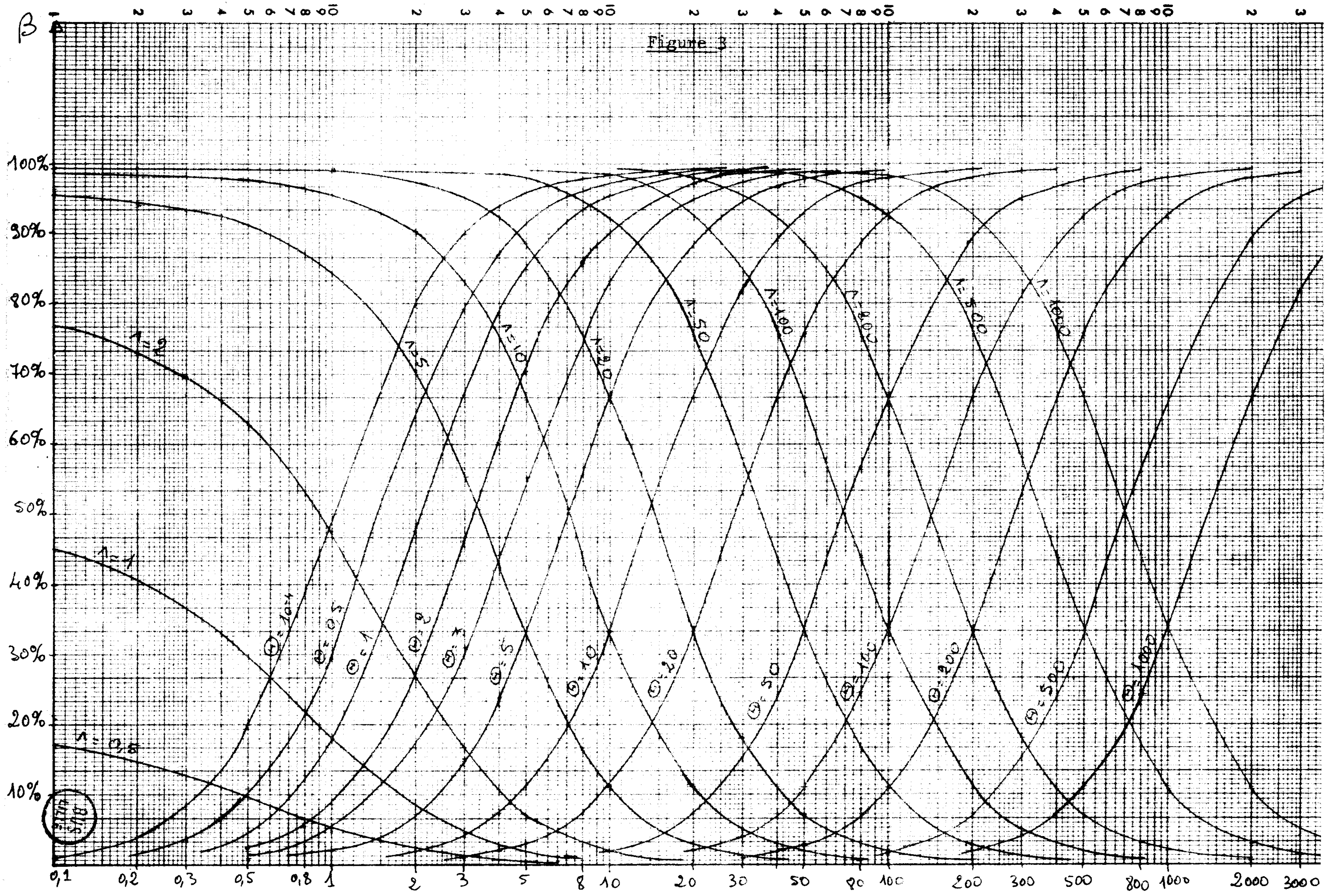
s'interprète domme un taux de commandabilité.

d) Evolution du taux de commandabilité

$$\beta = 100\,\frac{\left(\frac{\lambda-\delta}{\delta}\right)^2\left(1-e^{-\frac{T}{\delta}}\right)^2\left(1+e^{-\frac{2T}{\delta}}\right)}{2\left(\frac{T}{\delta}\right)^2+\left(\frac{\lambda-\delta}{\delta}\right)^2\left(1-e^{-\frac{T}{\delta}}\right)^2\left(1+e^{-2\frac{T}{\delta}}\right)} \qquad \text{(II-76)}$$

β est fonction des variables réduites : $\Lambda = \frac{\lambda-\delta}{\delta}$ et $\Theta = \frac{T}{\delta}$ et susceptible d'une représentation graphique à l'aide d'un réseau d'abaques. Celui-ci est présenté figure 3.

Figure 3


β
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
Λ = 2
Λ = 1
Λ = 0,5
Λ = 5
Λ = 10
Λ = 20
Λ = 50
Λ = 100
Λ = 200
Λ = 500
Λ = 1000
Θ = 10⁻⁴
Θ = 0,5
Θ = 1
Θ = 2
Θ = 3
Θ = 5
Θ = 10
Θ = 20
Θ = 50
Θ = 100
Θ = 200
Θ = 500
Θ = 1000
0,1
0,2
0,3
0,5
0,8
1
2
3
5
8
10
20
30
50
80
100
200
300
500
800
1000
2000
3000

C - MESURES DE L'OBSERVABILITE

La dualité commandabilité-observabilité induit pour les mesures de l'observabilité une définition analogue à celle des mesures de la commandabilité.

Définition 10 :

La fonctionnelle μ *de* $A(t)$ *et* $C(t)$ *, à valeurs dans* $\mathcal{R}_+$*, est une mesure de l'observabilité des systèmes* (A,B,C,D) *continus (resp. discrets) évoluant entre les instants* t_0 *et* t_1 *si elle vérifie les propriétés suivantes :*

-(i) $\mu(A,C) \geq 0$ $\forall A,C$ (II-77)

-(ii) $\mu(A,C) = 0$ *si et seulement si la paire* (A,C) *n'est pas observable au sens de Kalman* (II-78)

-(iii) $\mu\left[A,\begin{pmatrix}C^1\\C^2\end{pmatrix}\right] \geq \mathrm{Inf}\{\mu(A,C^1),\ \mu(A,C^2)\}$ (II-79)

-(iv) $\lim\limits_{\substack{i\to\infty\\ j\to\infty}} \mu(A_i,C_j) = \mu(A,C)$ (II-80)

si les suites de matrices $A_i(t)$ *et* $C_j(t)$ *convergent uniformément sur l'intervalle* $[t_0,t_1]$ *et indépendamment l'une de l'autre, respectivement vers* $A(t)$ *et* $C(t)$.

Dans cette écriture nous notons $(C^{1T}, C^{2T})^T$ la matrice C formée par juxtaposition des matrices C^1 et C^2.

L'énoncé de la propriété (II-80) nécessite la définition de distances sur l'ensemble des matrices (q,q) et sur l'ensemble des matrices (k,q). En pratique, nous utiliserons les distances conduites par les normes $S\varphi_2\varphi_2$ définies ci-aprés :

$$S^2\varphi_2\varphi_2(M) = \sup_{x\neq 0} \frac{x^T M^T M x}{x^T x}$$

où x est un vecteur à q composantes et M une matrice (q,q)

$$S^2\varphi_2\varphi_2(M') = \sup_{y\neq 0} \frac{y^T M'^T M' y}{y^T y}$$

où y est un vecteur à q composantes et M' une matrice (k,q)

L'énoncé de la propriété (II-80) devient alors :

si

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{t\in[t_0,t_1]} S\varphi_2\varphi_2 \left[A(t) - A_i(t)\right] = 0$$

et si

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{t\in[t_0,t_1]} S\varphi_2\varphi_2\left[C(t)-C_i(t)\right] = 0$$

alors

$$\lim_{\substack{i\to\infty \\ j\to\infty}} \mu(A_i,C_i) = \mu(A,C)$$

De la même façon que la définition des mesures de la commandabilité était l'énoncé des propriétés minimales requises pour ces grandeurs, les conditions (II-77) à (II-80) caractérisent nécessairement toute mesure de l'observabilité.

Cependant, comme dans le cas de la commandabilité, beaucoup d'exemples importants de mesures de l'observabilité satisfont à des conditions beaucoup plus strictes. En particulier, elles vérifient souvent :

$$\mu\left[A,\begin{pmatrix}C^1\\C^2\end{pmatrix}\right] \geqslant \operatorname{Sup}\ \{\mu(A,C^1),\ \mu(A,C^2)\} \qquad \text{(II-81)}$$

et même, quelquefois :

$$\mu\left[A,\begin{pmatrix}C^1\\C^2\end{pmatrix}\right] \geqslant \mu(A,C^1) + \mu(A,C^2) \qquad \text{(II-82)}$$

II - D - Mesures particulières aux systèmes stationnaires

Toutes les mesures de la commandabilité et de l'observabilité définies pour les systèmes non stationnaires peuvent être naturellement utilisées pour les systèmes stationnaires.

Toutefois la structure particulière de ces systèmes permet d'envisager la définition de mesures qui leur soient propres.

En premier lieu les valeurs propres de la matrice $Cd\,Cd^T$ et $Ob^T\,Ob$

où

$$Cd = \left[A^{q-1}B, \ldots\ AB, B\right]$$

et

$$Ob = \left[(A^{q-1})^T\,C^T, \ldots\ A^TC^T,\ C^T\right]^T$$

peuvent remplacer dans les études précédentes les valeurs propres de $S(t_0,t_1)$ et de $Q(t_0,t_1)$.

Il est à remarquer que, pour les systèmes discrets, ceci revient simplement à calculer $S(t_0,t_1)$ et $Q(t_0,t_1)$ pour une commande et une observation en q coups.

L'interprétation géométrique des conditions de commandabilité et d'observabilité présentée au paragraphe E -3 du chapitre précédent permet également la définition de mesures propres aux systèmes stationnaires. Cependant comme nous allons le voir, ces mesures demandent une interprétation légérement restrictive de la propriété de convergence.

1 - Définition

Rappelons tout d'abord l'interprétation géométrique des conditions de commandabilité d'un système linéaire stationnaire monovariable (A,B,C,D) continu ou discret.

Théorème - 14

Le système linéaire stationnaire monovariable (A,B,C,D) *est commandable si et seulement si*

- *le sous espace propre associe à toute valeur propre de* A *(ou de* A^T*) est de dimension* 1
- *le vecteur de commande* B *n'est orthogonal à aucun vecteur propre de* A^T .

Cette façon d'exprimer la commandabilité des systèmes stationnaires s'étend aux systèmes multivariables /14/.

Théorème - 15

Le système linéaire stationnaire multivariable (A,B,C,D) *est commandable si et seulement si*

- *le sous espace propre associe à toute valeur propre de* A *(ou* A^T*) est de dimension* 1 (II-83)

- *à chaque vecteur propre de* A^T *, il correspond au moins un vecteur colonne de la matrice de commande* B *qui ne lui soit pas orthogonal.*

(II-84)

Notons $v_1, v_2, \ldots v_\ell$ $(\ell \leqslant q)$ les vecteurs propres de A^T normés par $||v_i|| = 1$ $\forall i = 1 \ldots \ell$. Si la matrice B est de dimensions (q,k) le produit $B^T.v_i$ forme un vecteur colonne à k composantes.

La condition (II-83) étant supposée satisfaite, la condition de commandabilité du système s'exprime alors par :

$$B^T.v_i \neq 0 \qquad \forall\ 1 \leqslant i \leqslant \ell \tag{II-85}$$

Si nous appelons γ_i la norme hermitienne de $B^T.v_i$, cette condition s'énonce encore :

$$\gamma_i \neq 0 \qquad \forall\ 1 \leqslant i \leqslant \ell \tag{II-86}$$

Théorème - 16

La condition (II-83) *étant supposée satisfaite, toute moyenne, pondérée ou non, d'ordre négatif* r *, des* γ_i *est une mesure de la commandabilité du système*

$$M^r(\Gamma,P) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{\ell} p_i\ \gamma_i^{\ r}}{\sum_{i=1}^{\ell} p_i}\right]^{\frac{1}{r}} \tag{II-87}$$

En effet

$$M^r(\Gamma,P) \geqslant 0 \tag{II-88}$$

$$M^r(\Gamma,P) = 0 \text{ si et seulement si un } \gamma_i \text{ au moins est nul} \tag{II-89}$$

$$M^r[\Gamma[A,(B^1,B^2)],P] \geq M^r[\Gamma(A,B^1),P]$$
$$M^r[\Gamma(A,B^1,B^2),P] \geq M^r[\Gamma(A,B^2),P] \qquad \text{(II-90)}$$

et à fortiori :

$$M^r[\Gamma[A,(B^1,B^2)],P] \geq \operatorname{Inf}\{M^r[\Gamma(A,B^1),P],\ M^r[\Gamma(A,B^2),P]\} \qquad \text{(II-91)}$$

La continuité de $M^r|\Gamma,P|$ par rapport aux composantes des vecteurs propres de A^T et aux éléments de B montre que la propriété de convergence (II-4) est également vérifiée

$$\lim_{i\to+\infty} M^r[\Gamma(A_i,B_i),P] = M^r[\Gamma(A,B),P] \qquad \text{(II-92)}$$

si $A_i \to A$, $B_i \to B$ lorsque $i \to +\infty$

à condition toutefois de restreindre le sens de l'expression. A_i tend vers A lorsque i tend vers l'infini, de la façon suivante :

- quelque soit i, le sous espace propre associé à toute valeur propre de A_i est de dimension 1.
- les matrices A_i ont le même nombre de valeurs propres distinctes que A et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre de A_i est égal à celui de la valeur propre de A vers laquelle elle tend.

2 - Interprétation géométrique :

Soit un processus linéaire stationnaire monovariable pour lequel les valeurs propres de A sont toutes réelles. Les γ_i définis au paragraphe précédent s'identifient alors simplement aux produits scalaires des vecteurs propres de A^T, normés, par le vecteur de commande B. La moyenne harmonique de ces produits scalaires constitue une mesure de la commandabilité du système stationnaire dans les conditions précisées plus haut.

$$\mu = \frac{\ell}{\sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{|B^T . v_i|}} \qquad \text{(II-93)}$$

Dans cette écriture $|B^T . v_i|$ représente le module de $B^T v_i$

Munissons $\mathcal{R}^q$ de la base $\{v_1, v_2, \dots v_\ell, v+1, \dots v_q\}$. $v_1, v_2 \dots v_\ell$ sont les vecteurs propres de A^T, normés. Les vecteurs $v_{\ell+1}, \dots v_q$, normés complètent la base.

La matrice du régime libre A et le module du vecteur de commande B dans la base $\{v_1, v_2, \dots v_q\}$ étant fixés , cherchons à quel système correspond la plus grande mesure μ .

Soient $(b_1, b_2 \dots b_\ell, b_{\ell+1}, \dots b_q)^T$ les composantes de B sur la base $\{v_1, v_2, \dots v_q\}$. La recherche du maximum de μ est équivalente à la recherche du minimum de :

$$\frac{1}{|b_1|} + \frac{1}{|b_2|} + \dots + \frac{1}{|b_\ell|} \qquad \text{(II-94)}$$

lorsqu'est satisfaite la contrainte :

$$|b_1|^2 + |b_2|^2 + \dots + |b_\ell|^2 + |b_{\ell+1}|^2 + \quad |b_q|^2 = C^{te} \qquad \text{(II-95)}$$

L'application des théorèmes classiques pour la recherche des extrêmes d'une fonction conduit à :

$$|b_1| = |b_2| = \dots = |b_\ell| \qquad \text{(II-96)}$$

$$|b_{\ell+1}| = |b_{\ell+2}| \dots = |b_q| = 0 \qquad \text{(II-97)}$$

Autrement dit lorsque la matrice A et le module de B sont fixés, le vecteur de commande qui donne la plus forte mesure μ est celui qui appartient au sous espace de $\mathcal{R}^q$ engendré par les vecteurs propres de A^T et qui se projette d'égale façon sur chacun d'eux.

CONCLUSION

Dans ce chapitre ont été énoncées les propriétés minimales que doit satisfaire toute grandeur choisie en vue de définir une mesure de la commandabilité d'un processus linéaire, stationnaire ou non, représenté par une équation d'état

L'étude des systèmes lorsqu'ils sont commandés de manière optimale, relativement à un critère quadratique, nous a conduit à introduire une classe de mesures de la commandabilité. Dans cette optique, un système qui est "bien commandable" est un système qui ne demande qu'une faible énergie de commande alors qu'un système qui n'est pas commandable demanderait une énergie de commande infinie pour atteindre certains états.

L'examen du cas des systèmes linéaires stationnaires conduit, pour ceux-ci, à la définition de mesures particulières qui s'interprètent géométriquement.

La dualité commandabilité observabilité permet d'introduire simplement des exemples de mesures de l'observabilité dont la définition axiomatique est semblable à celle des mesures de la commandabilité.

C H A P I T R E   I I I

COMMANDABILITE , OBSERVABILITE ET SENSIBILITE AUX PARAMETRES

INTRODUCTION

La notion de"bonne ou mauvaise" commandabilité d'un système se rapporte à une qualité souhaitée pour ce système. Ainsi, nous avons vu au chapitre précédent que la recherche de la commande d'un processus à énergie minimale permettait de définir divers types de mesures permettant de préciser la commandabilité d'un système. Nous voulons ici rattacher la notion de commandabilité à une autre qualité : la précision dans la commande. C'est pourquoi, aprés avoir mis en évidence le lien entre la commandabilité d'un système et sa sensibilité aux variations de ses paramètres caractéristiques, nous montrons que la précision atteinte lors de la détermination de la commande d'un processus dépend non seulement des erreurs commises lors de la détermination d'un modèle pour ce système ou de l'élaboration de la commande mais également de la structure de la matrice de commandabilité.
Cette constatation nous conduit donc à proposer une mesure de la commandabilité qui rende compte de la précision dans la commande.

Une étude parallèle sur la précision dans reconstitution d'un état nous conduit, de la même façon, à définir une nouvelle mesure de l'observabilité.

A - COMMANDABILITE ET SENSIBILITE AUX PARAMETRES CARACTERISTIQUES DES SYSTEMES LINEAIRES.

1 - Position du problème

Soit le système linéaire continu :

$$\overset{\circ}{x}(t) = A(t)\ x(t) + B(t)\ u(t) \tag{I-2}$$

Nous étudions ici l'effet sur ce système de variations des coefficients de A(t) et B(t). Pour cela, nous notons $\Delta A(t)$ et $\Delta B(t)$ les variations sur A(t) et B(t) et $A^*(t)$, $B^*(t)$ les matrices définies par :

$$A^*(t) = A(t) + \Delta A(t) \tag{III-1}$$

$$B^*(t) = B(t) + \Delta B(t) \tag{III-2}$$

La sensibilité du processus aux variations de ses paramètres est déterminée par comparaison des trajectoires issues de l'origine $x_0 = 0$ à l'instant t_0 du système (I-1) et celles du système :

$$\overset{\circ}{x}{}^*(t) = A^*(t)\ x^*(t) + B^*(t)\ u(t) \tag{III-3}$$

lorsqu'ils sont soumis à la même commande.

De la même façon, et en utilisant une notation semblable à celle utilisée pour les systèmes continus, nous comparons les trajectoires issues de l'origine $x_0 = 0$ à l'instant t_0 du système discret:

$$x(t+1) = A(t)\ x(t) + B(t)\ u(t) \tag{I-11-i}$$

à celle du système :

$$x^*(t+1) = A^*(t)\ x^*(t) + B^*(t)\ u(t) \tag{III-4}$$

pour une même loi de commande u(t).

Montrons tout d'abord que

Théorème 17

Pour que les trajectoires dans l'espace d'état des systèmes continus linéaires (I-2) *et* (III-3) *(resp. discrets linéaires* (I-11-i) *et*(III-4)) *issues de l'origine* $x_0=0$ *à l'instant* t_0 *puissent être confondues sur l'intervalle de temps* $[t_0,+\infty[$ *et ceci quelle que soit la commande appliquée , il est nécessaire que :*

$$\Delta B(t) \equiv 0 \qquad \forall t \in [t_0,+\infty[\qquad \text{(III-5)}$$

Démontrons cette propriété pour les systèmes continus.

En tenant compte du fait que :

$$x(t_0) = x^*(t_0) = 0 \qquad \text{(III-6)}$$

L'intégration des équations (I-2) et (III-3) conduit à définir les vecteurs d'état $x(t)$ et $x^*(t)$ par les expressions respectives :

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\delta)B(\delta)u(\delta)d\delta \qquad \text{(III-7)}$$

$$x^*(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^*(t,\delta)B^*(\delta)u(\delta)d\delta \qquad \text{(III-8)}$$

Il en résulte par différence

$$x(t) - x^*(t) = \int_{t_0}^{t} [\Phi(t,\delta)B(\delta) - \Phi^*(t,\delta)B^*(\delta)]\, u(\delta)d\delta \tag{III-9}$$

Pour que les trajectoires des systèmes (I-2) et (III-3) soient confondues il est nécessaire et suffisant que la grandeur vectorielle définie en (III-9) soit nulle à tout instant. Et ceci, quelle que soit la commande $u(\delta)$ sur l'intervalle $[t_0,t]$.

Le choix d'une commande de la forme :

$$u(\delta) = [\Phi(t,\delta)B(\delta) - \Phi^*(t,\delta)B^*(\delta)]^T \psi \tag{III-10}$$

où $\alpha \in \mathcal{R}_+^q$ est un vecteur colonne à q composantes, conduit à exprimer l'écart entre les trajectoires des deux systèmes par l'expression :

$$x(t)-x^*(t) = \left[\int_{t_0}^{t} [\Phi(t,\delta)B(\delta) - \Phi^*(t,\delta)B^*(\delta)]\,[\Phi(t,\delta)B(\delta) - \Phi^*(t,\delta)B^*(\delta)]^T d\delta\right]\psi \tag{III-11}$$

La nullité de cette expression pour toute commande de la forme (III-10) nécessite que la relation (III-12)

$$\Phi(t,\delta)B(\delta) - \Phi^*(t,\delta)\, B^*(\delta) = 0 \tag{III-12}$$

soit vérifiée pour tout δ appartenant à l'intervalle $[t_0,t]$ et en particulier pour $\delta = t$.
Il en résulte :

$$\Phi(t,t)B(t) - \Phi^*(t,t)\, B^*(t) = 0 \tag{III-13}$$

d'où, puisque, si I désigne la matrice identité de rang q :

$$\Phi(t,t) = \Phi^*(t,t) = I \tag{III-14}$$

il est nécessaire d'avoir

$$B(t) = B^*(t) \tag{III-15}$$

et ceci, quel que soit t,

soit $B(\tau) \equiv B^*(\tau) \quad \forall\, \tau \in [t_0 +\infty[$.

La généralisation de la propriété 17 au cas des processus discrets s'effectue de façon semblable.

Nous admettons pour la suite de l'étude que la propriété $B(t) \equiv B^*(t)$ est vérifiée pour tout $t \geq t_0$. Il en résulte pour le système perturbé une évolution régie par l'expression :

$$\overset{\circ}{x}{}^*(t) = A^*(t)\; x^*(t) + B(t)\; u(t) \tag{III-16}$$

dans le cas continu, et par l'expression :

$$x^*(t+1) = A^*(t)\; x^*(t) + B(t)\; u(t) \tag{III-17}$$

dans le cas discret.

2 - Condition nécessaire et suffisante de commandabilité

Dans ce qui suit, nous appelons uniformément commandable un système continu (resp. discret) qui vérifie la propriété :

$$\text{rang } S(t_0,t_1) = q \Longrightarrow \text{rang } S(t_0,t_2) = q \quad \forall\, t_2 \geq t_1 \tag{III-18}$$

Il est clair que les systèmes continus et les systèmes discrets dont la matrice du régime libre est régulière à tout instant (c'est le cas, en particulier, des systèmes discrets obtenus par échantillonnage de systèmes continus) sont uniformément commandables s'ils sont commandables.

Théorème 18

Le système linéaire continu d'équation (I-2) *(resp. discret d'équation* (II-16-i) *est uniformément commandable au sens de la définition précédente si et seulement si, lorsqu'il évolue en partant de l'origine* $x_0=0$ *à l'instant* t_0 *, il existe un instant* t_1 *au delà duquel toute variation* $\Delta A(t)$ *sur* $A(t)$ *modifie nécessairement au moins une de ses trajectoires dans l'espace d'état.*

Supposons le système linéaire continu (I-2) commandable, nous allons montrer qu'une variation $\Delta A(t)$ sur $A(t)$ qui n'a d'effet sur aucune trajectoire issue de l'origine est nécessairement identiquement nulle au delà d'un temps t_1.

Si

$$x(t) = x^*(t) \qquad \forall t \in [t_0,+\infty[\tag{III-19}$$

alors :

$$\overset{\circ}{x}(t) = \overset{\circ}{x}{}^*(t) \qquad \forall t \in [t_0,+\infty[\tag{III-20}$$

Dans ces conditions, il vient :

$$A(t)\ x(t) = A^*(t)\ x^*(t) \quad \forall t \in [t_0,+\infty[\tag{III-21}$$

Le système (I-2) étant commandable, il existe un instant t_1 au delà duquel tout état puisse être atteint. Il en résulte que, pour $t \geqslant t_1$, il vient nécessairement :

$$A(t) = A^*(t) \tag{III-22}$$

La réciproque de ce théorème se démontre aisément.

Remarque : Si le système n'est pas commandable, il suffit que les lignes de $\Delta A(t)$ appartiennent à chaque instant t au sous espace orthogonal à t espace atteignable à cet instant pour que l'égalité (III-21) soit vérifiée.

3 - Systèmes discrets

Le théorème 18 que nous venons de démontrer pour les systèmes continus est également valable pour les systèmes discrets. Il convient alors d'interpréter t comme une variable discrète entière.

La démonstration est tout à fait analogue à celle présentée pour les systèmes continus. Cependant, nous allons expliciter ici une démonstration des théorèmes 17 et 18 pour les processus discrets stationnaires, pour lesquels le rôle de la commandabilité est particulièrement bien mis en évidence.

Soit, donc, les systèmes discrets stationnaires décrits par les équations d'état :

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \tag{III-23}$$

$$x^*(t+1) = A^*x^*(t) + B^*u(t) \tag{III-24}$$

Il vient pour les deux systèmes partant de l'origine $x_0 = 0$ à l'instant t_0 ÷

$$x(t_0+k) = A^{k-1}Bu(t_0)+A^{k-2}Bu(t_0+1)+\ldots+Bu(t_0+k-1) \tag{III-25}$$

$$x^*(t_0+k) = A^{*k-1}B^*u(t_0)+A^{*k-2}B^*u(t_0+1)+\ldots+B^*u(t_0+k-1) \tag{III-26}$$

Pour que les trajectoires des deux systèmes soient confondues en permanence, quelles que soient les commandes appliquées, il faut et il suffit que :

$$\left.\begin{array}{r}B = B^{*}\\ AB = A^{*}B^{*}\\ \\ A^{k}B = A^{*k}B^{*}\end{array}\right\} \qquad \text{(III-27)}$$

D'où :

$$\left.\begin{array}{r}B = B^{*}\\ (A-A^{*})\quad B = 0\\ (A-A^{*})\quad (B,AB,\ldots A^{k-1}B) = 0\end{array}\right\} \qquad \text{(III-28)}$$

L'ensemble des conditions (III-27) est encore équivalent aux deux conditions :

$$B = B^{*}$$
$$(A-A^{*})\ Cd = 0$$

où Cd est la matrice de commandabilité :

$$Cd = (B,AB,\ldots.A^{q-1}B) \qquad \text{(III-29)}$$

Pour que les trajectoires des deux systèmes soient confondues en permanence, quelles que soient les commandes appliquées, il faut et il suffit que les matrices B et B^{*} soient confondues et que les lignes de la matrice $A-A^{*}$ appartiennent au noyau de Cd^{T}. Ce qui démontre, pour les systèmes discrets stationnaires, les propriétés 17 et 18.

4 - Systèmes échantillonnés

Soit le système linéaire continu stationnaire :

$$\overset{\circ}{x}(t) = A\, x(t) + B\, u(t) \qquad \text{(III-30)}$$

Le système discret stationnaire obtenu par échantillonnage à période constante T du précédent lorsque la commande est réalisée par un bloqueur d'ordre 0 dont la période est synchronisée sur celle de l'échantillonnage, a pour équation :

$$x[(n+1)T] = e^{AT}\; x(nT) + \left[\int_0^T e^{A(T-\delta)}\, B\, d\delta\right] u(nT) \qquad \text{(III-31)}$$

Soient ΔA et ΔB des variations sur les matrices A et B du système (III-30) et notons A^* et B^* les matrices suivantes :

$$A^* = A + \Delta A \qquad \text{(III-32)}$$

$$B^* = B + \Delta B \qquad \text{(III-33)}$$

Au système continu d'équation :

$$\overset{\circ}{x}(t) = A^*\, x(t) + B^*\, u(t) \qquad \text{(III-34)}$$

nous associons le système échantillonné :

$$x[(n+1)T] = e^{A^*T} x(nT) + \left[\int_0^T e^{A^*(T-\delta)} B\, d\delta\right] u(nT) \qquad \text{(III-35)}$$

Théorème 19

Le système linéaire discret stationnaire d'équation (III-31) *obtenu par échantillonnage du système continu stationnaire* (III-30) *est* *commandable si et seulement si, lorsqu'il évolue en partant de l'origine* $x_0 = 0$ *, toute variation* ΔB *sur la matrice* B *ou* ΔA *sur la matrice* A *modifie nécessairement au moins une de ses trajectoires dans l'espace d'état.*

En effet, si le système discrétisé est commandable, pour qu'aucune trajectoire issue de $x_0 = 0$ ne soit modifiée par une variation sur la matrice A ou sur la matrice B, il faut et il suffit que :

$$e^{AT} = e^{A^* T} \qquad \text{(III-36)}$$

$$\int_0^T e^{A(T-\delta)} (B-B^*) \, d\delta = 0 \qquad \text{(III-37)}$$

Or si le système discrétisé est commandable, les diviseurs élémentaires /12/ de e^{AT} sont premiers entre eux. Dans ces conditions l'équation (III-36) admet une solution unique :

$$A = A^* \qquad \text{(III-38)}$$

D'autre part, l'équation (III-37) implique :

$$B = B^* \qquad \text{(III-39)}$$

car la matrice $\int_0^T e^{A(T-\delta)} \, d\delta$ est régulière.

B - OBSERVABILITE ET SENSIBILITE AUX PARAMETRES CARACTERISTIQUES DES SYSTEMES LINEAIRES

1 - Position du problème

De la dualité commandabilité-observabilité, il est possible de déduire pour l'observabilité des propriétés semblables à celles relatives à la commandabilité et énoncées dans les théorèmes 17 et 18. Toutefois, il est possible d'aller plus loin lorsque les systèmes considérés sont stationnaires.

Soit le système linéaire continu d'équation

$$\left.\begin{aligned} \mathring{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ s(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III-40)}$$

ou, soit le système discret

$$\left.\begin{aligned} x(t+1) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ s(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III-41)}$$

Afin d'étudier l'effet sur ces systèmes de variations des coefficients notons ΔA et ΔC les variations sur A et C et A^*, C^* les matrices définies par :

$$A^* = A + \Delta A \qquad \text{(III-42)}$$
$$C^* = C + \Delta C \qquad \text{(III-43)}$$

Nous comparons les trajectoires libres dans l'espace des sorties des systèmes (III-40) et

$$\left.\begin{aligned} \mathring{x}^*(t) &= A^*\,x^*(t) + B\,u(t) \\ \Delta^*(t) &= C^*\,x^*(t) + D\,u(t) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III-44)}$$

ainsi que des systèmes (III-41) et

$$\left.\begin{array}{ll} x^*(t+1) & = A^* x^*(t) + B u(t) \\ \Delta^*(t) & = C^* x^*(t) + D u(t) \end{array}\right\} \qquad \text{(III-45)}$$

Les vaiations possibles sur B et D étant sans influence sur le régime libre n'ont pas besoin d'être mises en évidence.

Nous allons montrer que :

Théorème 20

Pour que les trajectoires libres dans l'espace des sorties des systèmes linéaires continus stationnaires (III-40) *et* (III-44) *(resp. des systèmes linéaires discrets stationnaires* (III-41) *et* (III-45)) *soient confondues quel que soit l'état initial* x_0 *à l'instant* $t = 0$ *, il est nécessaire que :*

$$\Delta C = 0 \qquad \text{(III-46)}$$

En effet pour que les sorties des systèmes (III-40) et (III-44) (resp. (III-41 et (III-45)) soient confondues, il faut qu'elles le soient, en particulier, à l'instant initial :

$$C^* x_0 = C x_0 \qquad \text{(III-47)}$$

La vérification de (III-47) quel que soit x_0 implique (III-46).

Compte tenu de la propriété 20, nous nous limitons maintenant à comparer les systèmes (III-40) et (III-41) aux systèmes :

$$\left.\begin{aligned} \overset{\circ}{x}{}^*(t) &= A^* x(t) + B u(t) \\ \Delta^*(t) &= C x^*(t) + D u(t) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III-48)}$$

$$\left.\begin{aligned} x^*(t+1) &= A^* x(t) + B u(t) \\ \Delta^*(t) &= C x^*(t) + D u(t) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III-43)}$$

2 - Condition nécessaire et suffisante d'observabilité

Théorème 21

Le système linéaire continu stationnaire (III-40) *(resp. linéaire discret stationnaire* (III-41) *est observable si et seulement si toute variation* ΔA *sur* A *modifie nécessairement au moins une trajectoire libre dans l'espace des sorties.*

Supposons le système linéaire continu (III-40) observable et montrons qu'une variation ΔA sur A qui n'a d'effet sur aucune trajectoire libre dans l'espace des sorties est nécessairement nulle.
Il vient par intégration :

$$s(t) = C\, e^{At}\, x_0 \qquad \text{(III-50)}$$

$$s^*(t) = C\, e^{A^*t}\, x_0 \qquad \text{(III-51)}$$

$s(t)$ et $s^*(t)$ sont deux fonctions infiniment dérivables , et ceci quel que soit x_0. Il en résulte que si,

$$s(t) = s^*(t) \qquad \left\{\begin{aligned} &\forall\, t \in [t_0, +\infty[\\ &\forall\, x_0 \in \mathcal{R}^q \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III-52)}$$

alors :

$$\left.\begin{array}{lcl} C\,A\,e^{At} & = & C\,A^{*}e^{A^{*}t} \\ C\,A^{2}e^{At} & = & C\,A^{*2}e^{A^{*}t} \\ \vdots & & \\ C\,A^{q}e^{At} & = & C\,A^{*q}e^{A^{*}t} \\ \vdots & & \vdots \end{array}\right\} \quad \forall\, t \in [t_0,+\infty[\tag{III-53}$$

L'égalité (III-53) doit être vérifiée, en particulier, pour t = 0.

D'où :

$$\left.\begin{array}{l} C\,A = C\,A^{*} \\ C\,A^{2} = C\,A^{*2} \\ \vdots \\ C\,A^{q} = C\,A^{*q} \\ \vdots \end{array}\right\} \tag{III-53}$$

Soit encore :

$$\left.\begin{array}{lcl} C\,A & = & C\,A^{*} \\ C\,A^{2} & = & C\,A.A^{*} \\ \vdots & & \\ C\,A^{q} & = & C\,A^{q-1}.\,A^{*} \\ \vdots & & \vdots \end{array}\right\} \tag{III-54}$$

L'ensemble d'égalité (III-54) est encore équivalent à :

$$Ob\,[A-A^{*}] = 0 \tag{III-55}$$

où Ob désigne la matrice d'observabilité :

$$Ob = \begin{bmatrix} C \\ C\,A \\ \vdots \\ C\,A^{q-1} \end{bmatrix} \tag{III-56}$$

Si le système (III-40) est observable, cette relation ne peut être vérifiée que lorsque

$$\Delta A = 0 \tag{III-57}$$

Réciproquement si le système (III-40) n'est pas observable, il suffit que les colonnes de ΔA appartiennent au noyau de la matrice d'observabilité pour que l'égalité (III-52) soit satisfaite.

En effet il vient dans ce cas :

$$\left.\begin{array}{l} Ob\ A = Ob\ A^{*} \\ Ob\ A^{2} = Ob\ A^{*2} \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ ObA^{q-1} = ObA^{*q-1} \end{array}\right\} \tag{III-58}$$

D'où

$$Ob\ e^{At} = Ob\ e^{A^{*}t} \qquad \forall t \in [t_0,+\infty[\tag{III-59}$$

Ce qui implique, en particulier :

$$C\ e^{At} = C\ e^{A^{*}t} \qquad \forall t \in [t_0,+\infty[\tag{III-60}$$

Il en résulte que si

$$x_0 = x^{*}(0) \tag{III-61}$$

et si

$$u(t) = 0 \qquad \forall t \in [t_0,+\infty[\tag{III-62}$$

Alors :

$$s(t) = s^{*}(t) \qquad \forall t \in [t_0,+\infty[\tag{III-63}$$

La démonstration du théorème 21 pour les systèmes discrets stationnaires s'effectue de façon semblable.

C - PRECISION DANS LA COMMANDE D'UN SYSTEME LINEAIRE DISCRET

1 - Position du problème

Lors de l'élaboration de la commande d'un processus linéaire discret, nous avons à résoudre le système d'équations linéaires représenté sous forme matricielle par :

$$z_1 = Cd(t_0,t_1) \begin{bmatrix} u(t_0) \\ u(t_0+1) \\ \\ u(t_1-1) \end{bmatrix} \tag{III-64}$$

où z_1 représente :

$$z_1 = x_1 - A(t_1-1)\dots\ A(t_0)x_0 \tag{III-65}$$

c'est-à-dire la différence entre l'état x_1 que nous désirons atteindre à l'instant t_1 et l'état obtenu à cet instant en laissant évoluer librement le système à partir de l'état initial x_0.

Or la précision dans le calcul de la commande à partir de l'équation (III-64) dépend non seulement des erreurs sur les éléments de la matrice $Cd(t_0,t_1)$ mais également de la structure de cette matrice /23/. C'est pourquoi il parait intéressant d'étudier comment se repercutent sur l'état à atteindre les erreurs sur les éléments de la matrice $Cd(t_0,t_1)$.

2 - Effet sur l'état final d'erreurs sur la matrice de commandabilité

Soit un système discret linéaire que nous voulons faire passer de $x(t_0) = 0$ à $x(t_1) = x_1$.

La séquence de commande réalisant cette propriété doit vérifier la relation :

$$x_1 = Cd(t_0,t_1) \begin{bmatrix} u(t_0) \\ u(t_0+1) \\ \\ u(t_1-1) \end{bmatrix} \qquad \text{(III-66)}$$

Compte-tenu des imprécisions dans la définition du modèle l'étude s'effectue le plus souvent à partir d'une estimation $Cd^*(t_0,t_1)$ de la matrice de commandabilité $Cd(t_0,t_1)$

$$x_1 = Cd^*(t_0,t_1) \begin{bmatrix} u(t_0) \\ u(t_0+1) \\ \\ u(t_1-1) \end{bmatrix} \qquad \text{(III-67)}$$

soit en notation abrégée :

$$x_1 = Cd^*(t_0,t_1) \quad \mathcal{U}(t_0,t_1) \qquad \text{(III-68)}$$

$$Cd^*(t_0,t_1) = Cd(t_0,t_1) + \Delta Cd(t_0,t_1) \qquad \text{(III-69)}$$

Les solutions de l'équation (III-67) s'écrivent :

$$\mathcal{U}(t_0,t_1) = Cd^{*+}(t_0,t_1)x_1 + y \tag{III-70}$$

avec y vecteur quelconque appartenant au noyau de $Cd^{*}(t_0,t_1)$

$\mathcal{U}(t_0,t_1)$ étant calculé à partir de l'équation (III-67), l'état atteint à l'instant t_1 sera :

$$x(t_1) = Cd(t_0,t_1)\,\mathcal{U}(t_0,t_1) \tag{III-71}$$

De (III-71), (III-67) et (III-68) il vient :

$$x_1 - x(t_1) = \Delta Cd(t_0,t_1).\ \mathcal{U}(t_0,t_1) \tag{III-72}$$

D'où

$$\Delta x_1 = \Delta Cd(t_0,t_1)\ [Cd^{*+}(t_0,t_1)x_1 + y] \tag{III-73}$$

en notant

$$\Delta x_1 = x_1 - x(t_1) \tag{III-74}$$

Si $S\varphi_2\varphi_2$ désigne la norme géométrique de matrice induite par la norme euclidienne, le choix de

$$y = 0 \tag{III-75}$$

qui correspond à la commande minimisant l'expression $\mathcal{U}^T(t_0,t_1).\,\mathcal{U}(t_0,t_1)$, implique l'inégalité :

$$\sqrt{\Delta x^T{}_1\ \Delta x_1} < S\varphi_2\varphi_2\ [\Delta Cd(t_0,t_1]\ .\ S\varphi_2\varphi_2[Cd^{*+}(t_0,t_1)]\sqrt{x_1^T x_1} \tag{III-76}$$

soit encore :

$$\frac{\sqrt{\Delta x_1^T \; \Delta x_1}}{\sqrt{x_1^T . x_1}} \leqslant \sqrt{\frac{1}{\lambda min}} \quad S\varphi_2\varphi_2 \quad [\Delta Cd(t_0,t_1)] \tag{III-77}$$

expression dans laquelle λmin représente la plus petite valeur propre de la matrice $Cd^*(t_0,t_1)\ Cd^{*T}(t_0,t_1)$.

Les quantités $\frac{\sqrt{\Delta x_1^T \; \Delta x_1}}{\sqrt{x_1^T \; x_1}}$ et $S\varphi_2\varphi_2[\Delta Cd(t_0,t_1)]$ caractérisent l'erreur relative sur l'état à atteindre, et l'erreur absolue sur les coefficients de la matrice de commandabilité $Cd^*(t_0,t_1)$. Dans cette interprétation, il apparait que l'erreur relative sur l'état est majorée par l'erreur absolue sur les coefficients de la matrice commandable multipliée par un nombre qui ne dépend que de cette seule matrice.

Nous avons vu au chapitre précédent que λ min était une mesure forte de la commandabilité. Il apparait donc que cette grandeur qui était dans ce chapitre l'objet d'une interprétation énergétique intéressante caractérise également la précision de la commande.

Une transformation simple de l'expression (III-77) conduit à la relation :

$$\frac{\sqrt{\Delta x_1^T \quad \Delta x_1}}{\sqrt{x_1^T \; x_1}} \leqslant \sqrt{\frac{\lambda \; max}{\lambda \; min}} \quad \frac{S\varphi_2\varphi_2[\Delta Cd(t_0,t_1)]}{S\varphi_2\varphi_2 \; [Cd^*(t_0,t_1)]} \tag{III-78}$$

où λmax représente la plus grande valeur propre de $Cd^*(t_0,t_1)\ Cd^{*^T}(t_0,t_1)$.

L'inégalité (III-78) s'interprète comme une majoration de l'erreur relative sur l'état par le produit de l'erreur relative sur la matrice de commandabilité par un nombre qui ne dépend que de cette matrice.

Lorsque la matrice $Cd^*(t_0,t_1)$ est carrée, le nombre $\sqrt{\frac{\lambda min}{\lambda max}}$ qui apparait est un conditionnement /23/ de la matrice $Cd^*(t_0,t_1)$. Il est appelé nombre de Von Neumann.

3 - Interprétations du nombre de Von Neumann de la matrice de commandabilité

La quantité $\sqrt{\frac{\lambda min}{\lambda max}}$ introduite au paragraphe précédent admet deux autres interprétations intéressantes.

Envisageons le cas pour lequel il n'y a pas d'erreur sur la matrice de commandabilité utilisée dans le calcul de la commande $Cd(t_0,t_1) = Cd^*(t_0,t_1)$) les seules erreurs intervenant lors de son élaboration.

L'équation à résoudre pour trouver la séquence de la commande est :

$$x_1 = Cd(t_0,t_1)_0 \ \mathcal{U}(t_0,t_1) \qquad \text{(III-79)}$$

La commande effectivement mise en oeuvre aprés calcul est $\mathcal{U}^*(t_0,t_1)$ et l'état effectivement atteint est défini par la relation

$$x(t_1) = Cd(t_0,t_1) \ \mathcal{U}^*(t_0,t_1) \qquad \text{(III-80)}$$

L'écart entre l'état atteint et l'état désiré s'exprime par :

$$x(t_1) - x_1 = \Delta x_1 = Cd(t_0,t_1)\left[\mathcal{U}^*(t_0,t_1) - \mathcal{U}(t_0,t_1)\right] \qquad \text{(III-81)}$$

Il en résulte l'équation de sensibilité vis à vis de la commande du système :

$$\Delta x_1 = Cd(t_0,t_1).\ \Delta\,\mathcal{U}(t_0,t_1) \qquad \text{(III-82)}$$

Projetons $\Delta\mathcal{U}(t_0,t_1)$ sur le noyau de $Cd(t_0,t_1)$ et sur le sous espace orthogonal.

$$\Delta\,\mathcal{U}(t_0,t_1) = \Delta\mathcal{U}^\nu + \Delta\mathcal{U}^\lambda \qquad \text{(III-85)}$$

$\Delta\mathcal{U}^\nu$ = projection sur le noyau de $Cd(t_0,t_1)$

$\Delta\mathcal{U}^\lambda$ = projection sur le sous espace orthogonal ou noyau.

Il vient alors

$$\sqrt{\lambda min}\ \sqrt{\Delta\mathcal{U}^{\lambda T}\,\Delta\mathcal{U}^\lambda} \leq \sqrt{\Delta x_1^T\ \Delta x_1} \leq \sqrt{\lambda max}\ \sqrt{\Delta\mathcal{U}^{\lambda T}\Delta\mathcal{U}^\lambda} \qquad \text{(III-84)}$$

λmin et λmax désignant respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de $Cd(t_0,t_1)\ Cd^T(t_0,t_1)$

Il est clair que :

$$\sqrt{\frac{\lambda min}{\lambda max}} = \left[\frac{Min\ ||\Delta\ x_1||}{Max\ ||\Delta\ x_1||}\right]_{||\Delta\mathcal{U}^\lambda|| = C^{te}} \qquad \text{(III-85)}$$

La quantité $\sqrt{\frac{\lambda min}{\lambda max}}$ caractérise donc la constance du comportement du système en présence d'erreurs sur la commande.

Ce nombre caractérise encore d'une autre façon le comportement du système piloté par une commande erronée. En effet, des équations (III-80), (III-81) et (III-83) il vient, par majoration :

$$\sqrt{\frac{\Delta x_1^T \ \Delta x_1}{x_1^T \ x_1}} \leqslant \sqrt{\frac{\lambda max}{\lambda min}} \sqrt{\frac{\Delta \mathcal{U}^{\lambda \ T} . \Delta \mathcal{U}^{\lambda}}{\mathcal{U}^{\lambda \ T} \mathcal{U}^{\lambda}}} \qquad \text{(III-86)}$$

Ainsi $\sqrt{\frac{\lambda min}{\lambda max}}$ s'interprète également comme l'inverse du coefficient d'amplification maximum de l'erreur relative.

4 - Propriété de $\sqrt{\frac{\lambda min}{\lambda max}}$

Théorème 22

Pour un système linéaire discret, si λmax *et* λmax *désignent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre du produit de la matrice de commandabilité utilisées dans le calcul de la commande par sa transposée , la quantité* $\sqrt{\frac{\lambda min}{\lambda max}}$ *est une mesure de la commandabilité.*

La vérification de cette propriété est immédiate.

Il faut remarquer que $\sqrt{\frac{\lambda min}{\lambda max}}$ est une mesure faible de la commandabilité. Il est clair toutefois que cette grandeur permet une bonne caractérisation de la commandabilité lorsque le critère retenu pour qualifier celle-ci est la sensibilité.

D - PRECISION DANS LA COMMANDE D'UN SYSTEME LINEAIRE CONTINU :

Comme dans le cas des systèmes discrets, nous particulariserons la commande en choisissant systématiquement celle qui minimise la fonctionnelle quadratique :

$$\int_{t_0}^{t_1} u^T(t)\, u(t)\ dt$$

La recherche de la commande qui permet de passer d'un état x_0 à l'instant t_0 à un état x_1 à l'instant t_1 se ramène alors à la résolution du système d'équations linéaires :

$$x_1 - \Phi(t_1,t_0)x_0 = S(t_0,t_1)\ \psi \qquad \text{(III-87)}$$

où les q composantes du vecteur ψ sont les inconnues.

Si nous considérons alors les composantes de ψ comme étant les paramètres de réglage de la commande sur l'intervalle $[t_0,t_1]$, nous sommes formellement, en présence du même problème que celui posé par les systèmes discrets.

Toutefois, la matrice $S(t_0,t_1)$ étant une matrice symétrique positive, régulière lorsque le système est commandable, nous pouvons simplifier l'énoncé des propriétés.

Si λmin et λmax désignent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de $S(t_I,t_1)$, nous avons les relations :

$$\sqrt{\frac{\Delta x_1^T \quad \Delta x_1}{x_1^T \quad x_1}} \leqslant \frac{1}{\lambda min} \quad S\varphi_2\varphi_2 \quad [\Delta S(t_0,t_1)] \qquad \text{(III-88)}$$

$$\sqrt{\frac{\Delta x_1^T \quad \Delta x_1}{x_1^T \quad x_1}} \leqslant \frac{\lambda max}{\lambda min} \quad \frac{S\varphi_2\varphi_2 \; [\Delta S(t_0,t_1)]}{S\varphi_2\varphi_2 \; [\, S^*(t_0,t_1)]} \qquad \text{(III-89)}$$

$$\frac{\lambda min}{\lambda max} = \left[\frac{\text{Min} \quad ||\Delta x_1||}{\text{Max} \quad ||\Delta x_1||}\right] ||\Delta\psi|| = C^{te} \qquad \text{(III-90)}$$

$$\sqrt{\frac{\Delta x_1^T \; \Delta x_1}{x_1^T \quad x_1}} < \frac{\lambda max}{\lambda min} \quad \sqrt{\frac{\Delta\psi^T \Delta\psi}{\psi^T \psi}} \qquad \text{(III-91)}$$

Dans ces expressions $S^*(t_0,t_1)$ représente, de façon analogue à $Cd^*(t_0,t_1)$ la matrice effectivement utilisée dans les calculs.

$\Delta\ S(t_0,t_1)$ représente la différence entre $S(t_0,t_1)$ relative à l'évolution réelle du système et $S^*(t_0,t_1)$.

Les diverses interprétations de λmin et $\frac{\lambda min}{\lambda max}$ sont les mêmes que celles données pour $\sqrt{\lambda min}$ et $\sqrt{\frac{\lambda min}{\lambda max}}$ dans le cas des systèmes discrets.

E - EXEMPLE D'APPLICATION AUX PROBLEMES DE SYNTHESE DES ASSERVISSEMENTS

Le système que nous considérons est celui qui nous a déjà servi d'exemple au chapitre précédent (paragraphe II-3-5, figure 1)

Les valeurs propres extrêmes de la matrice Cd Cd^T de ce système commandé en deux périodes admettent les expressions

$$\lambda min = \frac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2} \qquad \text{(III-92)}$$

$$\lambda max = \frac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2} \qquad \text{(III-93)}$$

avec :

$$s = 2T^2 + (\lambda-\delta)^2(1-D^2)(1+D^2) \qquad \text{(III-94)}$$

$$p = T^2(\lambda-\delta)^2(1-D)^4 \qquad \text{(III-95)}$$

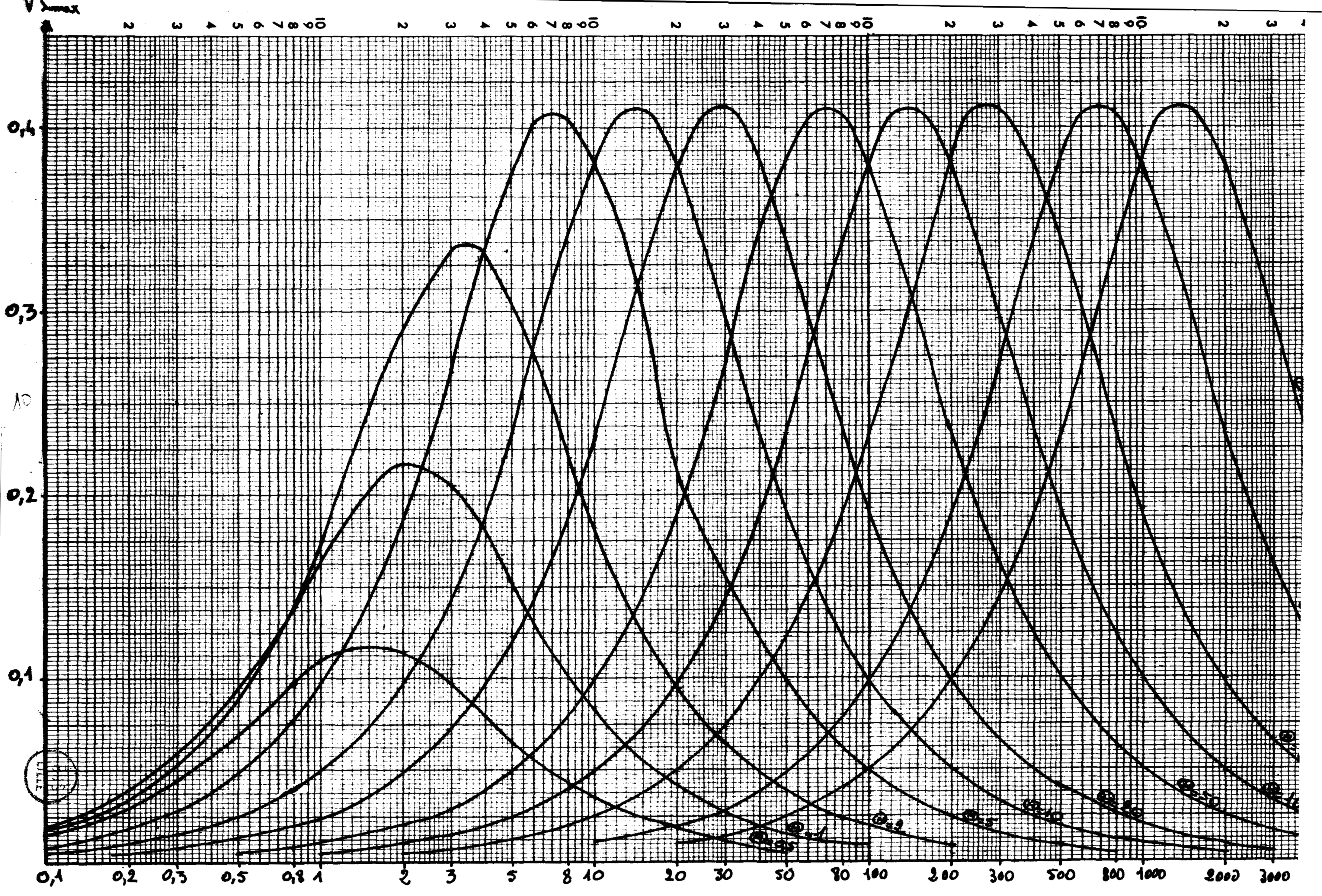
L'étude des variations de la quantité $\sqrt{\frac{\lambda min}{\lambda max}}$ en fonctions des variables réduites

$$\Lambda = \frac{\lambda-\delta}{\delta} \qquad \text{(III-96)}$$

et

$$\theta = \frac{T}{\delta} \qquad \text{(III-97)}$$

conduit à un réseau de courbes présenté figure 1.



0,4
0,3
0,2
0,1
0,1
0,2
0,3
0,5
0,8
1
2
3
5
8
10
20
30
50
80
100
200
300
500
800
1000
2000
3000

F - PRECISION DANS LA RECONSTITUTION DE L'ETAT D'UN SYSTEME LINEAIRE DISCRET

1 - Position du problème

Pour reconstituer l'état à l'instant t_0 d'un système linéaire discret dont le vecteur de sortie est observé entre les instants t_0 et t_1, il nous faut résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{bmatrix} s(t_0) - D(t_0)\ u(t_0) \\ s(t_0+1) - D(t_0+1)\ u(t_0+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ s(t_1) - D(t_1)\ u(t_1) \end{bmatrix} = Ob(t_0,t_1)\ x(t_0) \qquad \text{(III-98)}$$

où les composantes de $x(t_0)$ sont les inconnues.

Nous savons que ce système admet une solution et une seule si la matrice $Ob(t_0,t_1)$ est de rang q.

La précision dans la reconstitution de l'état initial $x(t_0)$ dépend non seulement des erreurs sur les éléments de la matrice $Ob(t_0,t_1)$ et des erreurs dans l'observation du vecteur de sortie mais également de la structure de la matrice d'observabilité /23/.

Le problème que nous rencontrons ici pour l'observabilité est analogue à celui posé au paragraphe III-13 pour la commandabilité.

2 - Effet sur la reconstitution de l'état initial d'erreurs sur la matrice d'observabilité.

Soit un système discret linéaire

$$x(t+1) = A(t+1)\ x(t) + B(t)\ u(t)$$

$$s(t) = C(t)\ x(t) + D(t)\ u(t)$$

observé entre les instants t_0 et t_1 et dont nous voulons reconstituer l'état à l'instant t_0. Soit x_0 cet état. x_0 satisfait la relation :

$$\begin{bmatrix} s(t_0) - D(t_0)\ u(t_0) \\ s(t_0+1) - D(t_0+1)\ u(t_0+1) \\ \vdots \\ s(t_1) - D(t_1)\ u(t_1) \end{bmatrix} = Ob(t_0,t_1)\ x_0 \qquad \text{(III-98)}$$

L'état $x(t_0)$ estimé lorsque la matrice $Ob(t_0,t_1)$ est entachée d'erreur est défini à partir de la matrice $Ob^*(t_0,t_1)$ selon la relation

$$\begin{bmatrix} s(t_0 - D(t_0)\ u(t_0) \\ \\ s(t_1) - D(t_1)\ u(t_1) \end{bmatrix} = Ob^*(t_0,t_1)\ x(t_0) \qquad \text{(III-99)}$$

avec :

$$Ob^*(t_0,t_1) = Ob(t_0,t_1) + D\ Ob(t_0,t_1) \qquad \text{(III-100)}$$

L'écart entre la solution calculée $x(t_0)$ et la solution réelle x_0 satisfait la relation

$$Ob^{*}(t_0,t_1) \quad x(t_0) - x_0 \quad = - \Delta Ob(t_0,t_1) \; x_0 \tag{III-101}$$

Pour que l'équation (III-99) n'admette qu'une seule solution (système observable) il faut et il suffit que la matrice $Ob^{*}(t_0,t_1)$ ait pour rang q. Dans ce cas, l'équation (III-101) admet également une solution unique :

$$x(t_0) - x_0 = Ob^{*+}(t_0,t_1) \; \Delta Ob(t_0,t_1) x_0 \tag{III-102}$$

Il vient alors, si Δx_0 désigne l'écart $x(t_0)-x_0$, les inégalités suivantes :

$$\frac{\sqrt{\Delta x_0^T \quad \Delta x_0}}{\sqrt{x_0^T \; x_0}} \leqslant \sqrt{\frac{1}{\lambda min}} \; S\varphi_2\varphi_2 \; [\Delta Ob(t_0,t_1)] \tag{III-103}$$

$$\frac{\sqrt{\Delta x_0^T \quad \Delta x_0}}{\sqrt{x_0^T \; x_0}} \leqslant \sqrt{\frac{\lambda max}{\lambda min}} \quad \frac{S\varphi_2\varphi_2 \; [\Delta Ob(t_0,t_1)]}{S\varphi_2\varphi_2 \; [Ob^{*}(t_0,t_1)]} \tag{III-104}$$

λmin et λmax désignent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de $Ob^{*T}(t_0,t_1)Ob^{*}(t_0,t_1)$.

L'interprétation pour l'observabilité de $\sqrt{\frac{1}{\lambda min}}$ et $\sqrt{\frac{\lambda max}{\lambda min}}$ dans les inégalités (III-103) et (III-104) est analogue à celle des inégalités (III-77) et (III-78) pour la commandabilité.

3 - Interprétations du nombre de Von Neumann de la matrice d'observabilité.

Comme dans le cas de la commandabilité, nous pouvons encore donner deux autres interprétations de $\sqrt{\frac{\lambda min}{\lambda max}}$

Supposons qu'il n'y ait pas d'erreur sur la matrice d'observabilité utilisée dans le calcul de l'état initial ($Ob(t_0,t_1) = Ob^*(t_0,t_1)$) mais que les diverses mesures du vecteur de sortie soit entachées d'erreurs au niveau des capteurs utilisés, l'état initial cherché satisfait l'équation (III-98)

$$\begin{bmatrix} s(t_0) - D(t_0)\ u(t_0) \\ \vdots \\ s(t_1) - D(t_1)\ u(t_1) \end{bmatrix} = Ob(t_0,t_1)x_0 \tag{III-98}$$

par suite des erreurs de mesure nous résolvons en réalité le système :

$$\begin{bmatrix} s(t_0) - D(t_0)\ u(t_0) \\ \vdots \\ s(t_1 - D(t_1)\ u(t_1) \end{bmatrix} + \varepsilon(t_0,t_1) = Ob(t_0,t_1)\ x(t_0) \tag{III-105}$$

avec $\varepsilon(t_0,t_1)$: vecteur définissant les erreurs de mesure successives sur le vecteur de sortie.
L'écart entre l'état initial calcule $x(t_0)$ et l'état initial réel x_0 admet alors l'expression :

$$x(t_0) - x_0 = Ob^+(t_0,t_1)\ \ \varepsilon(t_0,t_1) \tag{III-106}$$

En désignant respectivement par ε^ν et ε^λ les projections de $\varepsilon(t_0,t_1)$ sur le noyau de $Ob^+(t_0,t_1)$ et sur le sous espace orthogonal :

$$\varepsilon(t_0,t_1) = \varepsilon^\nu + \varepsilon^\lambda \tag{III-107}$$

il vient :

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda max}}\ \ ||\varepsilon^\lambda|| < ||\Delta x_0|| < \sqrt{\frac{1}{\lambda min}}\ \ ||\varepsilon^\lambda|| \tag{III-108}$$

si λmin et λmax désignent comme au paragraphe (III-F-2) la plus petite et la plus grande valeur propre de $Ob^T(t_0,t_1)\ Ob(t_0,t_1)$.

Puisque

$$\sqrt{\frac{\lambda min}{\lambda max}} = \left|\frac{Min||\Delta x_0||}{Max||\Delta x_0||}\right|_{||\varepsilon^\lambda||} = C^{te} \tag{III-109}$$

la quantité $\sqrt{\frac{\lambda min}{\lambda max}}$ apparait comme caractérisant la constance du comportement de l'observateur d'équation (III-98) en présence d'erreurs sur les sorties physiquement observées du système.

D'autre part si nous désignons par $Z(t_0,t_1)$

$$Z(t_0,t_1) = \begin{bmatrix} s(t_0) - D(t_0)\ u(t_0) \\ \vdots \\ s(t_1) - D(t_1)\ u(t_1) \end{bmatrix} + \varepsilon\,(t_0,t_1) \tag{III-110}$$

le vecteur formé à partir des mesures du vecteur de sortie et des commandes appliquées ou systèmes, nous pouvons écrire :

$$\frac{||\Delta x_0||}{||x_0\ ||} < \sqrt{\frac{\lambda max}{\lambda min}} \quad \frac{||\varepsilon(t_0,t_1)||}{||Z(t_0,t_1)||} \tag{III-111}$$

$\sqrt{\frac{\lambda min}{\lambda max}}$ apparait alors comme l'inverse du coefficient d'amplification maximum de l'erreur relative.

4 - Propriété de $\sqrt{\frac{\lambda min}{\lambda max}}$

Théorème 23

Pour un système linéaire discret, si λmin et λmax désignent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre du produit à gauche de la matrice d'observabilité par sa transposée, la quantité $\sqrt{\frac{\lambda min}{\lambda max}}$ est une mesure de l'observabilité.

La vérification de cette propriété se fait sans difficulté.

La quantité $\sqrt{\frac{\lambda min}{\lambda max}}$ est une mesure faible de l'observabilité. Toutefois, comme lors de l'étude de la quantité analogue définie pour la commandabilité, il convient de noter l'intérêt de cette grandeur : elle permet une trés bonne caractérisation de l'observabilité lorsque le critère retenu pour qualifier celle-ci est la sensibilité. Ceci montre bien l'intérêt des mesures faibles de l'observabilité (ou de la commandabilité) : bien que possédant des propriétés mathématiques moins fines que les mesures fortes, elles constituent néanmoins de bons outils pour l'analyse des systèmes ou la synthèse des asservissements.

CONCLUSION

L'étude des liens entre sensibilité aux paramètres et commandabilité d'une part, sensibilité aux paramètres et observabilité d'autre part, nous a permis de définir de nouvelles mesures de la commandabilité ainsi que de nouvelles mesures de l'observabilité. Nous avons pu, en particulier, introduire une grandeur qui permet de qualifier la commandabilité d'un système tout en exprimant sa sensibilité aux variations de ses paramètres caractéristiques et aux erreurs intervenant lors de la définition de la commande imposée au processus. De même il a été possible de définir une mesure de l'observabilité d'un processus qui se rattache directement à la sensibilité aux variations de ses paramètres caractéristiques et aux erreurs introduites lors de la détermination effective de ses grandeurs de sortie.

C O N C L U S I O N   G E N E R A L E

Aprés avoir rappelé les propriétés essentielles de la commandabilité et de l'observabilité, nous avons pu formaliser les notions intuitives de qualité de la commandabilité et de l'observabilité.

Le choix d'un critère énergétique nous a permis ensuite de donner des exemples de mesures de la commandabilité et d'illustrer par l'étude d'une famille de systèmes l'utilisation d'une de ces mesures.

Enfin, nous avons montré que les propriétés de commandabilité, observabilité et sensibilité aux paramètres sont liées. Cette constatation nous a conduit à introduire des mesures de la commandabilité et de l'observabilité qui caractérisent l'influence sur l'état d'un système et sur son estimation des erreurs commises lors de l'établissemnt du modèle, de l'élaboration de la commande et de la mesure à l'aide de capteurs des diverses variables de sortie physiquement accessibles.

ANNEXE - 1

Théorème :

Le système linéaire d'équation

$$\overset{\circ}{x}(t) = A(t)\ x(t) + B(t)\ u(t) \qquad \text{(I-2)}$$

évoluant entre les instants t_0 *et* t_1*, l'état* x_1 *est atteignable à l'instant* t_1 *en partant de l'origine à l'instant* t_0 *si et seulement si :*

$$\text{rang}\ [S(t_0,t_1),\ x_1] = \text{rang}[S(t_0,t_1)] \qquad \text{(I-16)}$$

Démonstration :

Condition suffisante

Supposons tout d'abord que la condition (I-16) soit réalisée. Nous allons montrer qu'il existe au moins une commande u(t) qui permette d'atteindre x_1. Pour ce faire, cherchons s'il existe une commande de la forme :

$$u(t) = B^T(t)\ \Phi^T(t_1,t).\psi \qquad \text{(A-1)}$$

où ψ est un vecteur de $\mathcal{R}^q$

Si nous appliquons une telle commande au système (I-2), l'équation (I-10) donne :

$$x_1 = x(t_1) = [\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\delta)\ B(\delta)\ B^T(\delta)\ \Phi^T(t_1,\delta)\ d\delta]\psi \qquad \text{(A-2)}$$

$$x_1 = S(t_0,t_1)\psi \qquad \text{(A-3)}$$

La condition (I-16) assure pour cette dernière équation l'existence d'une solution ψ /8/, et, par conséquent, l'existence d'une commande u(t).

Condition nécessaire

Montrons que, réciproquement, l'existence d'une commande u(t) qui transfère l'état du système (I-2) de $x(t_0) = 0$ à $x(t_1) = x_1$, implique (I-16). Nous utiliserons pour cela un raisonnement par l'absurde.

Supposons que doient simultanément vérifiées les deux propositions suivantes :

α) il existe une commande u(t) qui fait passer le système de l'état $x(t_0) = 0$ à $x(t_1) = x_1$

$$\beta)\ \mathrm{rang}\left[S(t_0,t_1),\ x_1\right] \neq \mathrm{rang}\ S(t_0,t_1) \qquad \text{(A-4)}$$

La matrice $S(t_0,t_1)$ étant symétrique, l'espace engendré par les colonnes de $S(t_0,t_1)$ est identique à celui qui engendre ses lignes. Cet espace est le sous-espace orthogonal au noyau de $S(t_0,t_1)$.

Il en résulte que x_1 peut être décomposé, et ceci de manière unique, sur le noyau de $S(t_0,t_1)$ et sur le sous espace engendré par les colonnes de $S(t_0,t_1)$.

$$x_1 = x_1^{\nu} + x_1^{\lambda} \qquad \text{(A-5)}$$

x_1^{λ} : projection de x_1 sur le sous-espace engendré par les colonnes de $S(t_0,t_1)$

x_1^{ν} : projection de x_1 sur le noyau de $S(t_0,t_1)$.

La relation β) implique :

$$x_1^{\nu\,T} .\ x_1^{\nu} \neq 0 \qquad \text{(A-6)}$$

L'orthogonalité de la décomposition se traduit par :

$$x_1^{\lambda T} . x_1^{\nu} = x_1^{\nu T} . x_1^{\lambda} = 0 \tag{A-7}$$

Enfin, d'aprés α), il existe u(t) telle que :

$$x_1 = x_1^{\lambda} + x_1^{\nu} = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\delta)\ B(\delta)\ u(\delta)\ d\delta \tag{A-8}$$

Calculons la quantité scalaire z :

$$z = \int_{t_0}^{t_1} x_1^{T}\ \Phi(t_1,\delta)\ B(\delta)\ u(\delta)\ d\delta \tag{A-9}$$

D'une part

$$z = (x_1^{\lambda T} + x_1^{\nu T})\ (x_1^{\lambda} + x_1^{\nu}) = x_1^{\lambda T} . x_1^{\lambda} + x_1^{\nu T} . x_1^{\nu} \tag{A-10}$$

D'autre part :

$$z = x_1^{\lambda T} \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1,\delta)\ B(\delta)\ u(\delta)\ d\delta + \int_{t_0}^{t_1} x_1^{\nu T}\ \Phi(t_1,\delta)\ B(\delta)\ u(\delta)\ d\delta \tag{A-11}$$

$$z = x_1^{\lambda T} . x_1^{\lambda} + \int_{t_0}^{t_1} x_1^{\nu T}\ \Phi(t_1,\delta)\ B(\delta)\ u(\delta)\ d\delta \tag{A-12}$$

Mais :

$$\int_{t_0}^{t_1} x_1^{\nu T}\ \Phi(t_1,\delta)\ B(\delta)\ B^{T}(\delta)\ \Phi^{T}(t_1,\delta)\ x_1\ d\delta = x_1^{\nu T} S(t_0,t_1) x_1^{\nu} = 0 \tag{A-13}$$

ce qui nécessite :

$$x_1^{\nu T}\ \Phi(t_1,\delta)\ B(\delta) = 0 \tag{A-14}$$

quelque soit δ compris entre t_0 et t_1.
Nous trouvons alors pour z :

$$z = x_1^{\lambda T} . x_1^{\lambda} \tag{A-15}$$

résultat incompatible avec (A-10) si l'hypothèse β est vraie.

En conséquence, la condition α) implique :

$$\text{rang}\left[S(t_0,t_1),\ x_1\right] = \text{rang } S(t_0,t_1) \tag{A-16}$$

ANNEXE - 2

DEFINITION ET PROPRIETES DES PSEUDO-INVERSES DE MATRICE AU SENS DE MOORE-PENROSE./8/

Définition

On note M^*, *la matrice trans-conjuguée d'une matrice* M.

Soit une matrice M, à éléments complexes, de dimensions (m,n). Et soit le système d'équations matricielles :

$$AXA = A \qquad \text{(B-1)}$$

$$XAX = X \qquad \text{(B-2)}$$

$$(AX)^* = AX \qquad \text{(B-3)}$$

$$(XA)^* = XA \qquad \text{(B-4)}$$

Quelle que soit la matrice A, ce système d'équations admet une et une seule solution, qui est une matrice de dimensions (n,m). Par définition, cette solution est le pseudo-inverse de la matrice A que l'on note A^+.

Propriétés

Les pseudo-inverses ainsi définis vérifient les propriétés suivantes :

$$A^{++} = A \qquad \text{(B-5)}$$

$$A^{*+} = A^{+*} \qquad \text{(B-6)}$$

Si A est carrée régulière, $A^+ = A^{-1}$ (B-7)

$(\lambda A)^+ = \lambda^+ A^+$ λ étant scalaire et λ^+ étant défini de la manière suivante : $\lambda^+ = \lambda^{-1}$ si $\lambda \neq 0$ (B-8)

$\lambda^+ = 0$ si $\lambda = 0$

$$A,\ A^{+},\ A^{*} A,\ A^{+} A \quad \text{ont même rang} \tag{B-9}$$

Si U et V sont deux matrices unitaires $(UAV)^{+} = V^{*} A^{+} U^{*}$ (B-10)

$$(A^{*} A)^{+} = A^{+} A^{*+} \tag{B-11}$$

<u>Résolution d'un système linéaire</u>

A étant une matrice et b un vecteur colonne, l'équation matricielle :

$$Ax = b \tag{B-12}$$

admet une solution si et seulement si b appartient à l'image de A c'est-à-dire si

$$\mathrm{rang}(A,b) = \mathrm{rang}\ A \tag{B-13}$$

ou encore si et seulement si

$$A A^{+} b = b \tag{B-14}$$

Cette solution s'écrit

$$x = A^{+} b + y \tag{B-15}$$

où y est un vecteur colonne quelconque du noyau de A.
Elle peut encore se mettre sous la forme :

$$x = A^{+} b + (I-A^{+} A)z \tag{B-16}$$

où z est un vecteur colonne arbitraire.

Parmi toutes les solutions,

$$x = A^{+} b \tag{B-17}$$

est celle qui minimise la norme hermitienne de x.

Lorsque l'équation

$Ax = b$

n'est pas compatible (c'est-à-dire n'admet pas de solutions)

$A^+ b$ constitue la meilleure solution approchée, au sens des moindres carrés, de l'équation. C'est-à-dire que quel que soit le vecteur colonne x

$$\begin{aligned} &\text{ou bien } ||Ax - b|| > ||A\,A^+ b - b|| \\ &\text{ou bien } ||Ax - b|| = ||A\,A^+ b - b|| \text{ et } ||x|| > ||A^+ b|| \end{aligned} \tag{B-18}$$

Dans cette écriture $||y||$ représente la norme hermitienne d'un vecteur y

$$||y|| = y^*. y \tag{B-19}$$

ANNEXE - 3

Nous donnons ici une démonstration de la propriété indiquée au chapitre I, paragraphe E-3, à savoir :

Lorsque, par un changement de base appropriée de matrice V, nous mettons la matrice A d'un système linéaire stationnaire monovariable (A,B,C) sous la forme de Jordan supérieure

$$V^{-1} A\, V = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathcal{J}_i & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathcal{J}_\ell \end{bmatrix} \qquad \text{(C-1)}$$

avec :

$$\mathcal{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \qquad \text{(C-2)}$$

bloc de Jordan de dimension (n_i, n_i),

le vecteur de commande prend alors la forme :

$$V^{-1}\ B = \begin{bmatrix} \beta_1^1 \\ \vdots \\ \beta_{n_1}^1 \\ \beta_1^2 \\ \vdots \\ \beta_{n_2}^2 \\ \vdots \\ \beta_1^i \\ \vdots \\ \beta_{n_i}^i \end{bmatrix} \qquad \text{(C-3)}$$

où $\beta^i_{n_i}$ est égal au produit scalaire du $i^{ème}$ vecteur propre de A^T par B.

Pour le montrer transposons la relation (C-1)

$$V^T A^T (V^{-1})^T = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_1^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \mathcal{J}_i^T & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathcal{J}_\ell^T \end{bmatrix}$$

$(V^{-1})^T$ caractérise donc un changement de base qui met A^T sous la forme de Jordan inférieure.

Ecrivons alors $(V^{-1})^T$ sous la forme :

$$(V^{-1})^T = [\mathcal{U}_1^1, \ldots \mathcal{U}_1^{n_1}, \ldots, \mathcal{U}_i^1, \ldots \mathcal{U}_i^{n_i}, \ldots] \qquad \text{(C-5)}$$

$\mathcal{U}_i^{n_i}$ est le vecteur propre de A^T correspondant à la valeur propre λ_i, comme on le vérifie immédiatement.

Or :

$$\beta^i_{n_i} = \mathcal{U}_i^{n_i T} . B \qquad \text{(C-6)}$$

$\beta^i_{n_i}$ est le produit scalaire du $i^{ème}$ vecteur propre de A^T par B.

REFERENCES

[1] R.E. KALMAN - *"On the general theory of control systems procedure".* 1st. Int. Conf. on Aut. Control - Vol. 1 - Butherworth's - London 1961. Vol.1, pp. 481-492

[2] F. LAURENT - *"Transformations dans l'espace d'Etat".* Cours du certificat C4 d'Automatique supérieure, Lille 1971.

[3] L. PONTRIAGUINE - *"Equations différentielles ordinaires".* - Editions de Moscou - 1969.

[4] P.M. DE RUSSO, R.J. ROY, C.M. CLOSE - *"State variables for engineers"* John Wiley and Sons - 1965.

[5] R. BOUDAREL, J. DELMAS, P. GUICHET - *"Commande optimale des processus"* Tome 1 - Dunod 1967.

[6] A. FOSSARD - *"Commande des systèmes multidimensionnels".* - Dunod 1972.

[7] A. FOSSARD, M. GAUVRIT, M. GEEGUEN, E. TOUMIRE - *"Structures identifiables des systèmes multivariables et leurs applications à la commande des processus"* - Rapport D.G.R.S.T. 1967.

[8] GERMAIN-BONNE - *"Méthodes de calcul de pseudo-inverses de matrices"* - Thèse de Docteur-ingénieur - Lille 1967.

[9] L. PONTRIAGUINE, V. BOLTIANSKI, R. GAMKRELIDZE, E. MICHTCHENKO. - *"Théorie mathématique des processus optimaux"* - Editions de Moscou 1974.

[10] R. BOUDAREL - J. DELMAS - P. GUICHET - *"Commande optimale des processus"* - Tome 4 - Dunod - 1969.

[11] F. LAURENT, P. BORNE, J.C. GENTINA, M. STAROSWIECKI. - *"Commandabilité et observabilité"*. - Coursdu C4 d'automatique supérieure. - Lille 1971.

[12] GANTMACHER - *" Théorie des matrices "* - Dunod 1966

[13] P. BORNE, A. CARLIER, C. VASSEUR - *"Commandabilité et observabilité des systèmes continus dans l'espace d'état"*. - A.F.A.S.Sciences -T.II- n°4 - 1971

[14] B. PORTER, R. GROSSLEY - *"Modal control theory and applications"* Taylor and Francis LTD - London 1972.

[15] P.C. MÜLLER, H.I. WEBER - *"Analysis and Optimization of certain qualities of controllability and observability for linear dynamical systems" "Multivariable technical control systems proceedings of the 2nd IFAC Symposium ";Düsseldorf* - Volume 1 - H. Schwarz Editor, 1971.

[16] E.F. BECKENBACH and R. BELLMAN - *"Inequalities"* - Springer verlag. Ergebnisse der mathemaik und ihrer Grenzgebiete, neue folge - heft 30 - 1961.

[17] N. GASTINEL - *"Analyse numérique linéaire"* - Hermann - 1966.

[18] R.E. KALMAN, Y.C. HO and K.S. NARENDA - *"Controllability of linear dynamical systems"- Contrib. Differential equations 1* - 1962 - pp 152-192.

[19] R.G. BROWN - *"Not just obserbable, but now observable"*. - Proc. 1966 National Electronic Conf. Volume 22 - p 709

[20] R.A. MONZINGO - *"A note on sensibility of system observability"*. - IEEETransact.Automatic Control AC-12 - 1967 - p .314

[21] D.S. MITRINOVIĆ - *"Analytic inequalities"* - Springer Verlag - 1970

[22] A. FELDBAUM - *"Principes théoriques des systèmes asservis optimaux"* - Editions de Moscou - 1973.

[23] N. GASTINEL - *"Matrices du Second Ordre et normes générales en Analyse Numérique"* . Thèse Doctorat ès Sciences, Grenoble - 1960.

TABLE des MATIERES