

50 376  
1 977  
53

N° d'ordre : 386

50376  
1977  
53

# THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES**

par

Jean-Charles FIOROT

CONTRIBUTION A LA CONVERGENCE

DES ALGORITHMES D'OPTIMISATION



030 026079 4

Thèse soutenue le 14 juin 1977, devant la Commission d'Examen

|        |           |              |
|--------|-----------|--------------|
| MM. P. | BACCHUS   | Président    |
| C.     | BREZINSKI | } Examineurs |
| P.J.   | LAURENT   |              |
| P.     | POUZET    |              |
| J.P.   | YVON      |              |
| P.     | HUARD     | Rapporteur   |

DOYENS HONORAIRES de l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit  
et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, SAVART, WATERLOT, WIEMAN, ZAMANSKI.

PRESIDENTS HONORAIRES DE L'UNIVERSITE  
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R. DEFRETIN, M. PARREAU.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE  
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. J. LOMBARD.

PROFESSEURS TITULAIRES

|    |                        |                                  |
|----|------------------------|----------------------------------|
| M. | BACCHUS Pierre         | Astronomie                       |
| M. | BEAUFILS Jean-Pierre   | Chimie Physique                  |
| M. | BECART Maurice         | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. | BILLARD Jean           | Physique du Solide               |
| M. | BIAYS Pierre           | Géographie                       |
| M. | BONNEMAN Pierre        | Chimie Appliquée                 |
| M. | BONNOT Ernest          | Biologie Végétale                |
| M. | BONTE Antoine          | Géologie Appliquée               |
| M. | BOUGHON Pierre         | Algèbre                          |
| M. | BOURIQUET Robert       | Biologie Végétale                |
| M. | CELET Paul             | Géologie Générale                |
| M. | CONSTANT Eugène        | Electronique                     |
| M. | DECUYPER Marcel        | Géométrie                        |
| M. | DELATTRE Charles       | Géologie Générale                |
| M. | DELHAYE Michel         | Chimie Physique                  |
| M. | DERCOURT Michel        | Géologie Générale                |
| M. | DURCHON Maurice        | Biologie Expérimentale           |
| M. | FAURE Robert           | Mécanique                        |
| M. | FOURET René            | Physique du Solide               |
| M. | GABILLARD Robert       | Electronique                     |
| M. | GLACET Charles         | Chimie Organique                 |
| M. | GONTIER Gérard         | Mécanique                        |
| M. | GRUSON Laurent         | Algèbre                          |
| M. | GUILLAUME Jean         | Microbiologie                    |
| M. | HEUBEL Joseph          | Chimie Minérale                  |
| M. | LABLACHE-COMBIER Alain | Chimie Organique                 |
| M. | LANSRAUX Guy           | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. | LAVEINE Jean-Pierre    | Paléontologie                    |
| M. | LEBRUN André           | Electronique                     |
| M. | LEHMANN Daniel         | Géométrie                        |

|     |                       |                                   |
|-----|-----------------------|-----------------------------------|
| Mme | LENOBLE Jacqueline    | Physique Atomique et Moléculaire  |
| M.  | LINDER Robert         | Biologie et Physiologie Végétales |
| M.  | LOMBARD Jacques       | Sociologie                        |
| M.  | LOUCHEUX Claude       | Chimie Physique                   |
| M.  | LUCQUIN Michel        | Chimie Physique                   |
| M.  | MAILLET Pierre        | Sciences Economiques              |
| M.  | MONTARIOL Frédéric    | Chimie Appliquée                  |
| M.  | MONTREUIL Jean        | Biochimie                         |
| M.  | PARREAU Michel        | Analyse                           |
| M.  | POUZET Pierre         | Analyse Numérique                 |
| M.  | PROUVOST Jean         | Minéralogie                       |
| M.  | SALMER Georges        | Electronique                      |
| M.  | SCHILTZ René          | Physique Atomique et Moléculaire  |
| Mme | SCHWARTZ Marie-Hélène | Géométrie                         |
| M.  | SEGUIER Guy           | Electrotechnique                  |
| M.  | TILLIEU Jacques       | Physique Théorique                |
| M.  | TRIDOT Gabriel        | Chimie Appliquée                  |
| M.  | VIDAL Pierre          | Automatique                       |
| M.  | VIVIER Emile          | Biologie Cellulaire               |
| M.  | WERTHEIMER Raymond    | Physique Atomique et Moléculaire  |
| M.  | ZEYTOUNIAN Radyadour  | Mécanique                         |

PROFESSEURS SANS CHAIRE

|      |                      |                                     |
|------|----------------------|-------------------------------------|
| M.   | BELLET Jean          | Physique Atomique et Moléculaire    |
| M.   | BODARD Marcel        | Biologie Végétale                   |
| M.   | BOILLET Pierre       | Physique Atomique et Moléculaire    |
| M.   | BOILLY Bénoni        | Biologie Animale                    |
| M.   | BRIDOUX Michel       | Chimie Physique                     |
| M.   | CAPURON Alfred       | Biologie Animale                    |
| M.   | CORTOIS Jean         | Physique Nucléaire et Corpusculaire |
| M.   | DEBOURSE Jean-Pierre | Gestion des entreprises             |
| M.   | DEPREZ Gilbert       | Physique Théorique                  |
| M.   | DEVRAINNE Pierre     | Chimie Minérale                     |
| M.   | GOUDMAND Pierre      | Chimie Physique                     |
| M.   | GUILBAULT Pierre     | Physiologie Animale                 |
| M.   | LACOSTE Louis        | Biologie Végétale                   |
| Mme  | LEHMANN Josiane      | Analyse                             |
| M.   | LENTACKER Firmin     | Géographie                          |
| M.   | LOUAGE Francis       | Electronique                        |
| Mlle | MARQUET Simone       | Probabilités                        |
| M.   | MIGEON Michel        | Chimie Physique                     |
| M.   | MONTEL Marc          | Physique du Solide                  |
| M.   | PANET Marius         | Electrotechnique                    |
| M.   | RACZY Ladislas       | Electronique                        |
| M.   | ROUSSEAU Jean-Paul   | Physiologie Animale                 |
| M.   | SLIWA Henri          | Chimie Organique                    |

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés d'Enseignement)

|    |                      |                      |
|----|----------------------|----------------------|
| M. | ADAM Michel          | Sciences Economiques |
| M. | ANTOINE Philippe     | Analyse              |
| M. | BART André           | Biologie Animale     |
| M. | BEGUIN Paul          | Mécanique            |
| M. | BKOUCHE Rudolphe     | Algèbre              |
| M. | BONNELLE Jean-Pierre | Chimie               |
| M. | BONNEMAIN Jean-Louis | Biologie Végétale    |
| M. | BOSCQ Denis          | Probabilités         |
| M. | BREZINSKI Claude     | Analyse Numérique    |
| M. | BRUYELLE Pierre      | Géographie           |

|                           |                                  |
|---------------------------|----------------------------------|
| M. CARREZ Christian       | Informatique                     |
| M. CORDONNIER Vincent     | Informatique                     |
| M. COQUERY Jean-Marie     | Psycho-Physiologie               |
| Mlle DACHARRY Monique     | Géographie                       |
| M. DEBENEST Jean          | Sciences Economiques             |
| M. DEBRABANT Pierre       | Géologie Appliquée               |
| M. DE PARIS Jean-Claude   | Mathématiques                    |
| M. DHAINAUT André         | Biologie Animale                 |
| M. DELAUNAY Jean-Claude   | Sciences Economiques             |
| M. DERIEUX Jean-Claude    | Microbiologie                    |
| M. DOUKHAN Jean-Claude    | Physique du Solide               |
| M. DUBOIS Henri           | Physique                         |
| M. DYMENT Arthur          | Mécanique                        |
| M. ESCAIG Bertrand        | Physique du Solide               |
| Me EVRARD Micheline       | Chimie Appliquée                 |
| M. FONTAINE Jacques-Marie | Electronique                     |
| M. FOURNET Bernard        | Biochimie                        |
| M. FORELICH Daniel        | Chimie Physique                  |
| M. GAMBLIN André          | Géographie                       |
| M. GOBLOT Rémi            | Algèbre                          |
| M. GOSSELIN Gabriel       | Sociologie                       |
| M. GRANELLE Jean-Jacques  | Sciences Economiques             |
| M. GUILLAUME Henri        | Sciences Economiques             |
| M. HECTOR Joseph          | Géométrie                        |
| M. JACOB Gérard           | Informatique                     |
| M. JOURNEL Gérard         | Physique Atomique et Moléculaire |
| Mlle KOSMAN Yvette        | Géométrie                        |
| M. KREMBEL Jean           | Biochimie                        |
| M. LAURENT François       | Automatique                      |
| Mlle LEGRAND Denise       | Algèbre                          |
| Mlle LEGRAND Solange      | Algèbre                          |
| M. LEROY Jean-Marie       | Chimie Appliquée                 |
| M. LERCY Yves             | Electronique                     |
| M. LHENAFF René           | Géographie                       |
| M. LOCQUENEUX Robert      | Physique Théorique               |
| M. LOUCHET Pierre         | Sciences de l'Education          |
| M. MACKE Bruno            | Physique                         |
| M. MAHIEU Jean-Marie      | Physique Atomique et Moléculaire |
| Me N'GUYEN VAN CHI Régine | Géographie                       |
| M. MAIZIERES Christian    | Automatique                      |
| M. MALAUSSENA Jean-Louis  | Sciences Economiques             |
| M. MESSELYN Jean          | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. MONTUELLE Bernard      | Biologie Appliquée               |
| M. NICOLE Jacques         | Chimie Appliquée                 |
| M. PAQUET Jacques         | Géologie Générale                |
| M. PARSY Fernand          | Mécanique                        |
| M. PECQUE Marcel          | Chimie Physique                  |
| M. PERROT Pierre          | Chimie Appliquée                 |
| M. PERTUZON Emile         | Physiologie Animale              |
| M. PONSOLLE Louis         | Chimie Physique                  |
| M. POVY Lucien            | Automatique                      |
| M. RICHARD Alain          | Biologie                         |
| M. ROGALSKI Marc          | Analyse                          |
| M. ROY Jean-Claude        | Psycho-Physiologie               |
| M. SIMON Michel           | Sociologie                       |
| M. SOMME Jean             | Géographie                       |
| Mlle SPIK Geneviève       | Biochimie                        |
| M. STANKIEWICZ François   | Sciences Economiques             |
| M. STEEN Jean-Pierre      | Informatique                     |

|     |                    |                   |
|-----|--------------------|-------------------|
| M.  | THERY Pierre       | Electronique      |
| M.  | TOULOTTE Jean-Marc | Automatique       |
| M.  | TREANTON Jean-René | Sociologie        |
| M.  | VANDORPE Bernard   | Chimie Minérale   |
| M.  | VILLETTE Michel    | Mécanique         |
| M.  | WALLART Francis    | Chimie            |
| M.  | WERNIER Georges    | Informatique      |
| M.  | WATERLOT Michel    | Géologie Générale |
| Mme | ZINN-JUSTIN Nicole | Algèbre           |

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur Bacchus pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

Monsieur le Professeur Huard a été l'instigateur de ce travail. Les nombreuses discussions que j'ai eues avec lui, les encouragements qu'il m'a prodigués ainsi que sa participation effective ont grandement contribué à sa réalisation. Ce travail est un témoignage de plus de sa présence à l'Université de Lille.

Qu'à travers ces brefs rappels il trouve ici ma sincère reconnaissance.

Je remercie, pour avoir bien voulu accepter de porter un jugement sur ce travail,

Monsieur le Professeur Pouzet qui a su me communiquer son intérêt pour les Mathématiques Appliquées,

Monsieur le Professeur Laurent qui m'a manifesté une attention bienveillante et constructive,

Monsieur le Professeur Brezinski dont le séminaire a été l'occasion d'échanges de vues intéressants,

Monsieur le Professeur Yvon avec qui j'ai eu de fructueuses discussions lors de son passage à l'Université de Lille.

Que F. Cordellier avec qui j'ai travaillé sur un problème qui nous a passionnés trouve ici toute ma sympathie.

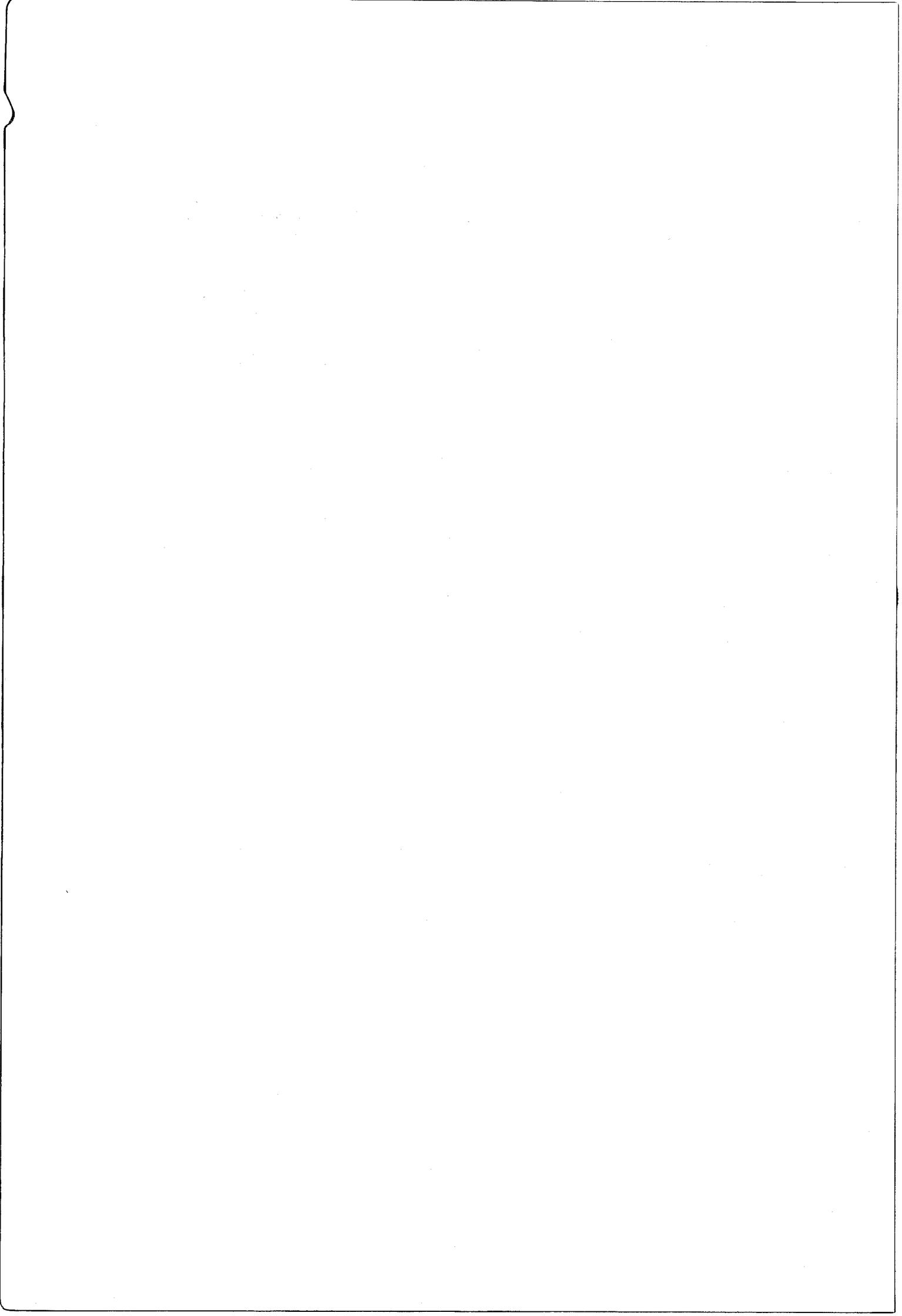
Je remercie les membres de l'équipe d'optimisation du laboratoire d'Informatique pour les discussions intéressantes que nous avons eues.

J'adresse enfin mes remerciements pour la qualité de la frappe et la réalisation matérielle à Mademoiselle Driessens et à Monsieur et Madame Debock dont j'ai pu apprécier la compétence.

|   |     |
|---|-----|
| V : OBTENTION EXPLICITE DE TOUS LES POINTS ENTIERS<br>D'UN SYSTÈME D'INÉGALITÉS LINÉAIRES - CAS DES<br>CÔNES ET DES PARALLÉLOTOPE | 126 |
| 1. Introduction   | 127 |
| 2. Notations et définitions   | 130 |
| 3. Cône polyédrique régulier  | 132 |
| 4. Représentation analytique minimale d'un<br>cône régulier   | 141 |
| 5. Cône contenant une variété linéaire  | 145 |
| 6. Cône polyédrique défini par $\{x   Ax \geq b\}$ où<br>A est une $(m,n)$ matrice, $m > n$                                       | 148 |
| 7. Parallélotopes bornés  | 148 |
| 8. Parallélotopes non bornés  | 149 |
| 9. Quelques propriétés algébriques et<br>géométriques [19]  | 151 |
| 10. Résolution d'un problème général [19]   | 153 |
| 11. Application à l'optimisation en nombres<br>entiers  | 157 |

#### ERRATA

|          |                 |   |
|----------|-----------------|---|
| page 9   | lignes -6 et -1 | lire A au lieu de C   |
| page 12  | ligne -8        | lire $(x-y)$ au lieu de $(y-x)$   |
| page 15  | ligne -7        | lire $R(x)$ au lieu de $B(x)$   |
| page 16  | ligne -1        | lire $\frac{\quad}{\ \nabla g_j(\bar{x}_j)\ }$ au lieu de $\frac{\quad}{\nabla g_j(\bar{x}_j)}$ |
| page 28  | ligne 11        | } les 2 inclusions dans l'autre sens  |
| page 31  | ligne 8         |   |
| page 34  | ligne -6        | lire inf-continuité au lieu de sup-continuité   |
| page 35  | ligne 1         | lire sup-continuité au lieu de inf-continuité   |
| page 36  | ligne 4         | lire $A_\lambda = \lambda x + (1-\lambda) A$ au lieu de $A_\lambda = x + (1-\lambda)A$          |
| page 51  | ligne -3        | lire a ou c au lieu de a ou b<br>lire $M_1(\bar{x})$ au lieu de $M_1(x)$                        |
| page 67  | sur la figure   | lire d près de $\frac{5}{x}$ au lieu de a   |
| page 151 | ligne -1        | lire T C P au lieu de T c P   |



*A mes parents,*

## TABLE DES MATIÈRES

|  |    |
|--|----|
| INTRODUCTION   | 1  |
| NOTATIONS ET DÉFINITIONS   | 5  |
| I : ALGORITHMES DE PROGRAMMATION CONVEXE PAR<br>LINÉARISATION EN FORMAT CONSTANT     | 7  |
| 1. Introduction  | 8  |
| 2. Hypothèses, notations   | 9  |
| 3. Algorithme I  | 10 |
| 4. Algorithme II   | 14 |
| II : UNE APPROCHE THÉORIQUE DU PROBLÈME DE<br>LINÉARISATION EN PROGRAMMATION CONVEXE | 21 |
| 1. Introduction  | 22 |
| 2. Problèmes équivalents   | 24 |
| 3. Hypothèses, notations   | 25 |
| 4. Algorithme général de recherche de solution                                       | 25 |
| 5. Algorithme I  | 26 |
| 6. Algorithme II   | 29 |
| 7. Remarques sur les limites du théorème de<br>Zangwill                              | 31 |

|  |     |
|--|-----|
| Annexe A   | 34  |
| Annexe B   | 37  |
| <br>   |     |
| III : COMPOSITION ET RÉUNION D'ALGORITHMES GÉNÉRAUX<br>D'OPTIMISATION  | 41  |
| 1. Introduction  | 42  |
| 2. Résultats généraux de convergence<br>d'algorithmes  | 44  |
| 3. Application à la maximisation de fonctions<br>ayant un maximum unique sur les sous-ensembles<br>envisagés | 47  |
| 4. Résultats dans le cas de fonctions plus<br>générales. Cas chaotique et cyclique                           | 62  |
| Annexe   | 72  |
| <br>   |     |
| IV : SUR LE PROBLÈME DE FERMAT-WEBER AVEC FONCTIONS<br>DE COÛT CONVEXES                                      | 76  |
| 1. Introduction  | 77  |
| 2. Le problème, les notations et les hypothèses  | 80  |
| 3. Algorithme I  | 86  |
| 4. Algorithme II   | 99  |
| 5. Algorithme III pour le problème de Fermat-<br>Weber généralisé (problème 2)                               | 115 |
| Annexes  | 122 |

|   |     |
|---|-----|
| V : OBTENTION EXPLICITE DE TOUS LES POINTS ENTIERS<br>D'UN SYSTÈME D'INÉGALITÉS LINÉAIRES - CAS DES<br>CÔNES ET DES PARALLÉLOTOPE | 126 |
| 1. Introduction   | 127 |
| 2. Notations et définitions   | 130 |
| 3. Cône polyédrique régulier  | 132 |
| 4. Représentation analytique minimale d'un<br>cône régulier   | 141 |
| 5. Cône contenant une variété linéaire  | 145 |
| 6. Cône polyédrique défini par $\{x   Ax \geq b\}$ où<br>A est une (m,n) matrice, $m > n$   | 148 |
| 7. Parallélotopes bornés  | 148 |
| 8. Parallélotopes non bornés  | 149 |
| 9. Quelques propriétés algébriques et<br>géométriques [19]  | 151 |
| 10. Résolution d'un problème général [19]   | 153 |
| 11. Application à l'optimisation en nombres<br>entiers  | 157 |

#### ERRATA

|          |                 |   |
|----------|-----------------|---|
| page 9   | lignes -6 et -1 | lire A au lieu de C   |
| page 12  | ligne -8        | lire (x-y) au lieu de (y-x)   |
| page 15  | ligne -7        | lire R(x) au lieu de B(x)   |
| page 16  | ligne -1        | lire $\frac{\quad}{\ \nabla_{g_j}(\xi_j)\ }$ au lieu de $\frac{\quad}{\nabla_{g_j}(\xi_j)}$ |
| page 28  | ligne 11        | } les 2 inclusions dans l'autre sens  |
| page 31  | ligne 8         |   |
| page 34  | ligne -6        | lire inf-continuité au lieu de sup-continuité   |
| page 35  | ligne 1         | lire sup-continuité au lieu de inf-continuité   |
| page 36  | ligne 4         | lire $A_\lambda = \lambda x + (1-\lambda) A$ au lieu de $A_\lambda = x + (1-\lambda)A$      |
| page 51  | ligne -3        | lire a ou c au lieu de a ou b<br>lire $M_i(\xi)$ au lieu de $M_i(x)$                        |
| page 67  | sur la figure   | lire d près de $\frac{5}{x}$ au lieu de a   |
| page 151 | ligne -1        | lire T C P au lieu de T c P   |

## I N T R O D U C T I O N

Depuis moins de vingt ans le problème de la maximisation d'une fonctionnelle dans un domaine non linéaire a fait l'objet de nombreux travaux. Un grand nombre d'algorithmes ont été donnés, leur convergence démontrée.

Dès 1963-1964, quelques auteurs ont proposé des algorithmes généraux mais ce n'est que vers la fin des années 1960, après la publication du livre de Zangwill, qu'un courant d'intérêt s'est révélé pour la synthèse des algorithmes. Cette synthèse a permis d'en dégager leurs caractéristiques communes pour assurer leur convergence. Les travaux des différents auteurs sont connus sous la dénomination de théorèmes généraux de convergence.

Avec la notion d'applications multivoques, notion bien adaptée pour décrire les algorithmes, ils seront largement utilisés dans ce travail et assurent un lien commun entre les quatre premiers chapitres. Le cinquième chapitre est consacré à un travail de nature différente : il est relatif à l'optimisation en nombres entiers et se place dans le cadre de l'arithmétique.

Ces théorèmes généraux d'énoncés très simples ne représentent pas seulement des résultats de synthèse (vue macroscopique sur les algorithmes), ce qui est assez louable en soi, mais sont des outils nouveaux pour l'établissement de méthodes nouvelles. Ils permettent de fournir des schémas de démonstration particulièrement simples.

Les deux premiers chapitres sont consacrés à la linéarisation d'un programme mathématique. C'est une démarche naturelle : nous voulons remplacer un problème non linéaire par une succession de problèmes linéaires. Ces problèmes (ou programmes) ont certaines particularités liées à la mise en oeuvre sur ordinateurs (problèmes de mémoires). Ils devront être de format constant i.e. que le nombre de contraintes linéaires doit être fixe ou borné de manière uniforme. La suite des solutions de chaque programme linéaire, solutions obtenues par la méthode simpliciale, doit converger vers une solution du problème d'origine. Cette démarche a été celle de méthodes bien connues : méthode de directions réalisables (Zoutendijk, Topkis et Veinott) ou méthode des centres linéarisée (Huard). Néanmoins ces méthodes exigent, d'une part de partir d'un point réalisable (ce qui est un problème en soi), d'autre part d'effectuer des calculs intermédiaires comme par exemple la maximisation de la fonction économique sur la partie réalisable d'un segment. Dans les deux premiers chapitres nous avons répondu partiellement à notre objectif.

Le fait de supprimer les calculs intermédiaires et de nous interdire d'accumuler les contraintes linéaires nous oblige, dans le chapitre I, à conserver, pour les programmes à format constant, la fonction économique de départ et de supposer qu'elle est strictement concave. Aux contraintes obtenues par linéarisation est ajoutée une contrainte linéaire additionnelle (due à Haugazeau). Les deux algorithmes proposés sont une illustration pratique d'un algorithme plus général dû à Laurent et Martinet.

Dans le chapitre II, nous nous interdisons de prendre une fonction économique non linéaire. Dans ce cas, pour obtenir la convergence, nous devons limiter le polyèdre linéarisé. Ce qui a été trouvé est un cône convexe non linéaire. Bien que nous n'ayons pas répondu à la question posée, nous pensons avoir mis en évidence certaines difficultés de ce problème toujours ouvert.

Le chapitre III est une étude macroscopique de la composition et de la réunion d'algorithmes. C'est une généralisation des méthodes d'optimisation par relaxation. Ainsi les relaxations cyclique ou chaotique sont définies de façon simple par la composition ou la réunion d'applications multivoques définies au point courant. Notons que les domaines de sous-

maximisation ne sont pas nécessairement des droites ou des variétés linéaires ou des convexes. Ils sont également les images d'applications multivoques. Divers affaiblissements des hypothèses sur la fonction économique et les applications multivoques sont discutés. Nous en montrons le rôle dans l'étude de la convergence des suites de points obtenus, ou plus modestement dans l'obtention des points d'accumulation optimaux. Ces points d'accumulation sont des points fixes de certaines applications définissant cette composition ou cette réunion d'algorithmes.

Dans le chapitre IV est résolu un vieux problème, celui de Fermat-Weber. A l'origine, il s'agit de chercher le minimum de la somme des distances pondérées d'un point  $x$ , à déterminer, à  $m$  points de l'espace appelés sommets. Après avoir résolu ce problème, en collaboration avec F. Cordellier, nous avons généralisé au cas où les distances pondérées sont remplacées par des fonctions convexes de ces distances. Deux algorithmes sont donnés, ils recouvrent un travail antérieur et s'appliquent au problème d'origine. Un troisième algorithme est défini pour ce dernier. La difficulté est de définir un successeur des sommets (points où la fonction économique est non différentiable) et de donner un algorithme convergent. Une caractérisation de l'ensemble des solutions optimales est donnée (un segment de droite en général). Bien que la fonction économique ne soit pas strictement convexe, nous obtenons la convergence de la suite entière fournie par l'un ou l'autre algorithme.

Le chapitre V est indépendant des précédents. Il regroupe l'essentiel d'une thèse de 3ème cycle et quelques résultats ultérieurs. L'objet de ce chapitre est de définir ou de décrire la structure des points entiers d'un système d'inégalités linéaires essentiellement représenté géométriquement par un cône ou un parallélotope de  $\mathbb{R}^n$ . Un algorithme est donné pour obtenir tous les points entiers de ces ensembles. Pour cela est mis en évidence un ensemble fini de points entiers appelés points fondamentaux et un ensemble fini de vecteurs dits de translation à coordonnées entières. De plus, il est également donné pour un cône ou un parallélotope sa représentation analytique minimale i.e. celle qui conduit, à l'aide de l'algorithme évoqué, au nombre minimum de points fondamentaux ainsi qu'aux vecteurs de translation de longueur minimale. Enfin la technique employée est utilisée pour résoudre un problème plus général que celui de la résolution des systèmes d'inégalités linéaires en nombres entiers.  $\square$

Les introductions de chacun des chapitres ont été rédigées de façon aussi indépendante que possible. Cette introduction générale en est un résumé.

## QUELQUES NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Rappelons quelques notations et définitions standards utilisées au cours de ce travail en plus des notations et définitions propres à chaque chapitre.

Pour  $A$  un sous-ensemble d'un espace vectoriel topologique, ce sera  $\mathbb{R}^n$  en fait, nous notons :

$\bar{A}$  sa fermeture

$\overset{\circ}{A}$  ou  $\text{int}(A)$  son intérieur

$F_r(A) = \bar{A} \cap \overline{\bar{A}}$  sa frontière

$\text{co}(A)$  son enveloppe convexe.

Pour  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  notons :

$\nabla f(x)$  le gradient de  $f$  en  $x$

$\partial f(x)$  le sous-différentiel de  $f$  en  $x$  (essentiellement pour  $f$  convexe)

$\partial f(x) = \{y \in (\mathbb{R}^n)^* \mid f(z) \geq f(x) + (y, z-x), \forall z \in \mathbb{R}^n\}$ .

Soient  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^m$  et l'application multivoque  $\Gamma$ ,

$\Gamma : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  ( $\mathcal{P}(Y)$  est l'ensemble des parties de  $Y$ ).

$\Gamma$  est *inf-continue* en  $x_0$  si et seulement si :

.  $\forall \theta$  ouvert ;  $\Gamma(x_0) \cap \theta \neq \emptyset, \exists V(x_0) :$

$x' \in V(x_0) \implies \Gamma(x') \cap \theta \neq \emptyset$

ou encore (définition équivalente) si et seulement si :

$\forall (\overset{k}{x}) \in X, k \in \mathbf{N}, \overset{k}{x} \rightarrow x_0$

$\forall y \in \Gamma(x_0)$

il existe  $(\overset{k}{y}) \in Y, k \in \mathbf{N}, \overset{k}{y} \rightarrow y$  et  $\bar{k} \in \mathbf{N} ; \overset{k}{y} \in \Gamma(\overset{k}{x}), \forall k \geq \bar{k}$ .

$\Gamma$  est *sup-continue (s.c.)* en  $x_0$  si et seulement si :

.  $\forall (\overset{k}{x}) \in X, k \in \mathbf{N}, \overset{k}{x} \rightarrow x_0$

$\forall (\overset{k}{y}) \in Y, k \in \mathbf{N}, \overset{k}{y} \rightarrow y$

on a :  $\overset{k}{y} \in \Gamma(\overset{k}{x}), \forall k \in \mathbf{N} \implies y \in \Gamma(x_0)$ .

$\Gamma$  est *semi-continue supérieurement (s.c.s.)* en  $x_0$  si et seulement si :

.  $\forall \theta$  ouvert :  $\Gamma(x_0) \subset \theta, \exists V(x_0) : x' \in V(x_0) \implies \Gamma(x') \subset \theta$ .

Rappelons que si  $\Gamma$  est s.c.s en  $x_0$  et  $\Gamma(x_0)$  fermé alors  $\Gamma$  est s.c. en  $x_0$  et que si  $\Gamma$  est s.c. en  $x_0$  et  $Y$  compact alors  $\Gamma$  est s.c.s. en  $x_0$ .  $\square$

## CHAPITRE I

### ALGORITHMES DE PROGRAMMATION CONVEXE PAR LINÉARISATION EN FORMAT CONSTANT

La maximisation d'une fonction strictement concave sur un domaine convexe est remplacée par une suite de problèmes à contraintes linéaires ; le nombre de ces contraintes linéaires reste constant. Deux sortes de linéarisation sont considérées. Elles conduisent à deux algorithmes convergents qui entrent dans le cadre d'un algorithme plus général donné par Laurent et Martinet.

## I-1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous nous proposons de remplacer le problème de programmation convexe avec une fonction strictement concave par une suite de problèmes plus simples [3]. Ces problèmes sont à contraintes linéaires mais, contrairement aux méthodes de Kelley [12] et de Kaplan [11] où les contraintes sont accumulées, leur nombre reste ici constant.

De plus, dans les deux algorithmes présentés, nous n'avons pas de calculs intermédiaires pour chaque problème, comme par exemple la maximisation d'une fonction sur la partie réalisable d'un segment, ce qui est le cas dans certaines méthodes de directions réalisables : Zoutendijk [17] ou dans la méthode des centres linéarisée : Huard [9].

Néanmoins, pour assurer la convergence, les programmes intermédiaires ont pour fonction économique celle du problème d'origine.

Pour le premier algorithme, les contraintes linéaires sont obtenues par linéarisation des contraintes au point courant. Pour le deuxième, cette linéarisation est faite aux points d'intersection de la frontière des contraintes et du segment joignant le point courant à un point intérieur au domaine. Dans les deux cas, une autre contrainte linéaire est ajoutée : celle passant par le point courant dont la normale est colinéaire au gradient de la fonction économique en ce point. Cette contrainte a été introduite par Haugazeau [7], [8] pour des programmes quadratiques avec contraintes linéaires.

Nous démontrons de deux manières différentes la convergence des deux méthodes proposées. Une démonstration autonome fait appel à un théorème général de convergence dû à Huard [10]. Une autre consiste à montrer que ces algorithmes correspondent à un choix pratique de l'algorithme général proposé par Laurent et Martinet [13].

## I-2 HYPOTHÈSES, NOTATIONS

Nous nous donnons :

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction strictement concave et continuellement différentiable,  
 $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , des fonctions concaves et continuellement différentiables.

Désignons par  $x \cdot y$  le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Le problème est :

$$(P) \quad \text{Max } \{f(x) \mid g_j(x) \geq 0, j=1, 2, \dots, m\}.$$

Posons  $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \geq 0, j=1, 2, \dots, m\}$  et pour  $y$  quelconque dans  $\mathbb{R}^n$ ,  
 $R(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq f(y)\}$ .

Faisons l'hypothèse (H) suivante : il existe un point  $b$  de  $A$  tel que  
 $R(b) \cap A$  est un compact.

Notons  $D(x)$  le demi-espace suivant :

$D(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(x) \cdot (x-y) \leq 0\}$ . Dans la suite, nous voulons que  
 $A \subset D(x)$  si  $x$  est le point courant ; pour cela, introduisons l'ensemble  
non vide  $U$  suivant :  $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \subset D(x)\}$ . La solution optimale  $\hat{x}$  de  
(P) est l'unique point commun à  $U$  et à  $A$ . Notons que  $U$  est un ensemble  
fermé. En effet, il suffit pour le constater de prendre une suite  $(x^k)$ ,  
contenue dans  $U$ , qui tend vers  $x$  ; alors, en raison de la continuité du  
gradient de  $f$  et du produit scalaire, nous avons  $x \in U$ . Nous introduisons  
également un pavé  $B$  borné, arbitraire mais suffisamment grand pour contenir  
 $R(b) \cap A$ . Cette contrainte supplémentaire permet d'obtenir un problème

équivalent à (P) (la solution n'est pas modifiée) et d'assurer que la suite  $(\bar{x}^k)$  obtenue par les algorithmes possède un point d'accumulation.

Comme il est indiqué en remarque 2, une hypothèse légèrement plus restrictive que (H) permet de se passer du pavé B.

### I-3 ALGORITHME I

Notons  $L_j(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) + \nabla g_j(x) \cdot (y-x) \leq 0\}$  le demi-espace obtenu en linéarisant la contrainte j au point x.

Considérons  $L(x) = \bigcap_{j=1}^{j=m} L_j(x)$  le polyèdre dit linéarisé de A au point x. Les fonctions  $g_j$  étant concaves,  $L(x)$  contient A.

Posons  $V(x) = L(x) \cap D(x) \cap B$  pour  $x \in U$  et introduisons la fonction  $\gamma$  définie pour  $x \in U$ ,  $\gamma : x \rightarrow \{u \in V(x) \mid f(u) \geq f(y), \forall y \in V(x)\}$ .

La fonction f étant strictement concave, elle admet un maximum unique sur  $V(x)$  et ainsi la fonction  $\gamma$  est univoque. Comme la fonction multivoque :  $x \rightarrow V(x)$  est continue sur U et que f est également continue, la fonction  $\gamma$  est une application continue. De plus,  $\gamma$  est à valeur dans U car  $\nabla f(\gamma(x)) \cdot (y-\gamma(x)) \leq 0$  pour tout y de  $V(x)$  donc pour tout y de A. Notons enfin que si  $\gamma(x) \in A$  alors  $\gamma(x) = \bar{x}$  et que d'autre part  $\gamma(\bar{x}) = \bar{x}$ .

Algorithme I Soient  $\bar{x}^0$  quelconque et  $\frac{1}{x}$  la solution de

Max  $\{f(y) \mid y \in L(\bar{x}^0) \cap B\}$ . Pour  $k \geq 1 : \frac{k+1}{x} = \gamma(\frac{k}{x})$ . □

Théorème : La suite  $(\bar{x}^k)$  obtenue par l'algorithme I converge vers la solution de (P).

Preuves :

1) Nous utilisons le résultat suivant [10,p.157] qui est une légère amélioration de celui de Polak [15, p.14] et de Zangwill. [16,p.91].

Soient  $E \subset \mathbb{R}^n$  un fermé,  $P$  un ensemble dit privilégié contenu dans  $E$ ,  $\Gamma : E \rightarrow P(E)$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  semi-continue inférieurement dans  $E-P$ . La fonction multivoque  $\Gamma$  est supposée vérifier :

$$\alpha) \forall x \in E-P : \Gamma(x) \neq \emptyset$$

$$\beta) \text{ si } x' \in \Gamma(x) \text{ alors } f(x') < f(x).$$

Considérons également une suite  $(\overset{k}{x})$  définie par  $\overset{k+1}{x} \in \Gamma(\overset{k}{x})$  si  $\overset{k}{x} \notin P$ ,  $\overset{k+1}{x} = \overset{k}{x}$  si  $\overset{k}{x} \in P$ ,  $\overset{0}{x} \in E$ .

De plus, si  $x \notin P$ , il existe un voisinage  $\overset{\vee}{V}(x)$  tel que pour tout  $y$  de  $\overset{\vee}{V}(x)$  et tout  $y'$  de  $\Gamma(y)$  nous avons  $f(y') < f(x)$  ( $\overset{\vee}{V}(x)$  est un voisinage relativement à  $E$ ).

Alors sous toutes ces conditions, si  $\overset{*}{x}$  est un point d'accumulation de la suite  $(\overset{k}{x})$  nous avons :  $\overset{*}{x} \in P$ .  $\square$

Les ensembles  $U$  et  $U \cap C = \{\overset{\hat{x}}{x}\}$  jouent le rôle de  $E$  et de  $P$  et  $\gamma$  celui de  $\Gamma$ . Pour  $x \in U$ ,  $\gamma(x)$  est non vide. Pour  $x \in U - \{\overset{\hat{x}}{x}\}$ ,  $x' = \gamma(x)$  est tel que  $f(x') < f(x)$ . En effet  $x \notin A$  entraîne  $x \notin L(x)$  donc  $x \neq x'$  et de plus  $x' \in D(x)$  donc  $\nabla f(x) \cdot (x' - x) \leq 0$  ; comme la fonction  $f$  est strictement concave :  $f(x') - f(x) < \nabla f(x) \cdot (x' - x)$  donc  $f(x') < f(x)$ .

D'autre part, si  $x \in U - \{\hat{x}\}$ , cette dernière inégalité entraîne, d'après la continuité de  $f$ , l'existence d'une boule  $B(x', \varepsilon)$ , de centre  $x'$  et de rayon  $\varepsilon$  telle que  $B(x', \varepsilon) \cap R(x) = \emptyset$  et la continuité de  $\gamma$  entraîne l'existence d'un voisinage  $\tilde{V}(x)$  tel que  $\forall y \in \tilde{V}(x) : \gamma(y) \in B(x', \varepsilon)$  i.e.  $f(\gamma(y)) < f(x)$ .

Toutes les conditions du théorème rappelé ci-dessus sont satisfaites. Comme la suite  $(\tilde{x}^k)$  reste dans le compact  $B \cap U$ , tout point d'accumulation de cette suite est confondu avec l'unique solution  $\hat{x}$  de (P) et ainsi  $(\tilde{x}^k)$  converge vers la solution de (P).  $\square$

2) Montrons que cet algorithme entre dans le cadre de celui proposé en [13]. Le domaine  $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \geq 0, j=1,2,\dots,m\}$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$A = \bigcap_{j=1}^{j=m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(y) + \nabla g_j(y) \cdot (x-y) \geq 0\}.$$

$$y \in \mathbb{R}^n$$

Posons  $H(x,y)^* = \min_{j=1,2,\dots,m} \{g_j(y) + \nabla g_j(y) \cdot (x-y)\}$  et  $A_y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid H(x,y) \geq 0\}$ . Nous aurons alors  $A = \bigcap_{y \in \mathbb{R}^n} A_y$ .

Nous sommes donc ramenés à une définition du domaine  $A$  identique à celle donnée dans [13] et pour se placer dans ce même cadre, il suffit de poser  $K^k = D(\tilde{x}^k)$ . Il reste à montrer que si  $\tilde{x}^k \notin A$ , le choix de la "contrainte" non satisfaite (qui sert à définir le domaine de l'itération suivante) est celui correspondant à la "contrainte" qui est la plus mal vérifiée. C'est-à-dire : montrons que le choix de  $\tilde{y}$ , tel que

$H(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} H(\bar{x}, y)$ , correspond à  $\bar{y} = \bar{x}$  donc au choix de  $A_{\bar{x}} = L(\bar{x})$ .

Cela résulte de la concavité des fonctions  $g_j$ . Nous avons

$g_j(\bar{x}) \leq g_j(y) + \nabla g_j(y) \cdot (\bar{x} - y)$  pour tout  $j=1,2,\dots,m$  et tout  $y$  de  $\mathbb{R}^n$  ;

alors en prenant la borne inférieure par rapport à  $j$  et par rapport à

$y \in \mathbb{R}^n$  nous obtenons  $\inf_{j=1,2,\dots,m} g_j(\bar{x}) \leq \inf_{y \in \mathbb{R}^n} H(\bar{x}, y)$ . Comme

$H(\bar{x}, \bar{x}) = \inf_{j=1,2,\dots,m} g_j(\bar{x})$  nous avons bien  $H(\bar{x}, \bar{x}) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} H(\bar{x}, y)$ .

Donc le  $A_{\bar{y}}$  choisi est bien  $A_{\bar{x}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid H(x, \bar{x}) \geq 0\} = L(\bar{x})$ .  $\square$

Remarque 1 : La contrainte  $D(x)$  est fondamentale car, comme nous l'avons vu dans la démonstration 1, elle assure la décroissance stricte de la suite  $f(\bar{x})$ . Si nous la supprimons, la convergence n'est pas assurée.

Remarque 2 : Si, au lieu de faire l'hypothèse (H) nous faisons l'hypothèse (H') suivante : il existe  $b \in A$  tel que  $R(b)$  est borné, nous pouvons dans le cas de la démonstration 1 supprimer le compact  $B$  car alors  $U$  est borné. En effet les points  $x$  de  $U$  appartiennent à des ensembles  $R(y)$  tels que  $R(y) \cap A = \emptyset$  donc à des ensembles  $R(y)$  qui sont contenus dans  $R(b)$ . Les itérés  $\bar{x}^k$  se trouvent alors dans le compact  $U$ . Ajoutons qu'il est alors plus simple d'appliquer [16, p.91].

## I-4 ALGORITHME II

Nous supposons de plus que  $A$  a un point intérieur  $a$ . Pour  $x \neq a$ , nous notons  $u_j(x)$  l'unique point d'intersection, s'il existe, du segment  $[a, x]$  avec la frontière de l'ensemble  $A_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \geq 0\}$ .

Si le segment  $[a, x]$  coupe la frontière de  $A_j$  définissons

$$L_j^!(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \frac{\nabla g_j(u_j(x))}{\|\nabla g_j(u_j(x))\|} \cdot (y - u_j(x)) \geq 0\}, \text{ et } L_j^!(x) = \mathbb{R}^n$$

dans le cas contraire.

Posons  $L'(x) = \bigcap_{j=1}^{j=m} L_j^!(x)$ . D'après la concavité des  $g_j$ , nous avons  $A_j \subset L_j^!$  donc  $A \subset L'(x)$ .

Posons encore  $V'(x) = L'(x) \cap D(x) \cap B$  pour tout  $x$  de  $U$ . La fonction  $f$  admet un maximum unique sur  $V'(x)$  que l'on notera  $\gamma'(x)$ . Le point  $\gamma'(x)$  appartient à  $U$ .

Algorithme II Soient  $\bar{x}$  quelconques et  $\frac{1}{x}$  la solution de

$$\text{Max } \{f(y) \mid y \in L'(\bar{x}) \cap B\}. \text{ Pour } k \geq 1 : \frac{k+1}{x} = \gamma'(\frac{k}{x}). \square$$

Théorème : La suite  $\frac{k}{x}$  obtenue par l'algorithme II converge vers la solution de (P).

Preuves :

1) La démonstration utilise aussi le résultat rappelé précédemment [10, p.157]. C'est à un détail près celle de la partie I.3.1 précédente. Ici la fonction d'itération  $\gamma'$  n'est pas en général continue. Pour montrer l'existence d'un voisinage  $\hat{V}$  de  $x$  (pour  $x \neq \hat{x}$ ) ayant la propriété requise nous devons procéder différemment.

Pour  $x \in U - \{\hat{x}\}$  il existe un ensemble  $A_j$  tel que  $x \notin A_j$  et, comme  $g_j$  est continue, il existe une boule  $B(x, \rho)$  telle que  $B(x, \rho) \cap A_j = \emptyset$ . Comme  $a$  est un point intérieur à  $A$ , donc à  $A_j$ , pour tout  $y \in B(x, \rho)$ ,  $u_j(y)$  est défini, et la fonction  $u_j$  est continue sur  $B(x, \rho)$  (ce résultat est montré en annexe A1 du chapitre II).

Pour  $y \in B(x, \rho)$  notons  $\gamma''(y)$  le point (unique) qui maximise  $f$  sur  $L_j^1(y) \cap D(y) \cap B$ ; la fonction  $\gamma''$  ainsi définie est continue sur  $B(x, \rho)$  (même raisonnement qu'au début de la partie 3).

Soit  $x'' = \gamma''(x)$ ; nous savons que la stricte concavité de  $f$  entraîne que  $f(x'') < f(x)$  et donc qu'il existe une boule  $B(x'', \varepsilon)$  telle que  $B(x'', \varepsilon) \cap B(x) = \emptyset$ . La continuité de  $\gamma''$  sur  $B(x, \rho)$  entraîne l'existence d'une boule  $B(x, \varepsilon') \subset B(x, \rho)$  telle que pour tout  $y$  de  $B(x, \varepsilon')$  nous avons  $\gamma''(y) \in B(x'', \varepsilon)$  i.e.  $f(\gamma''(y)) < f(x)$ . Comme  $V'(y) \subset L_j^1(y) \cap D(y) \cap B$  nous avons :  $f(\gamma'(y)) \leq f(\gamma''(y)) < f(x)$ .  $\square$

2) Comme précédemment cet algorithme entre dans le cadre de celui proposé en [13]. Toutefois comme dans [13] nous utiliserons l'hypothèse (H') : il existe  $b \in A$  tel que  $R(b)$  soit borné (mais  $A$  non borné), au lieu de (H).

Dans ce cas, nous savons que  $U$  est un compact. Cette hypothèse pouvait, bien entendu, être faite pour la partie 1 ci-dessus, ce qui évitait de prendre un pavé  $B$ .

Posons cette fois :

$$F(x,y) = \min_{j \in J(y)} \frac{\nabla g_j(u_j(y))}{\|\nabla g_j(u_j(y))\|} \cdot (x - u_j(y))$$

où  $J(y)$  est l'ensemble des indices des contraintes  $A_j$  telles que le segment  $[a,y]$  coupe la frontière de  $A_j$ , et  $A_y = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x,y) \geq 0\}$ ; alors nous avons  $A = \bigcup_{y \in \mathbb{R}^n - \{a\}} A_y$ . Nous avons encore  $K^k = D(\bar{x})$ . Il reste à montrer que pour  $\bar{x} \notin A$ , le choix  $A_{\bar{x}}$  comme "contrainte" non vérifiée et utilisée à l'étape suivante est tel qu'il existe  $\theta \in ]0,1]$  satisfaisant à  $F(\bar{x}, \bar{x}) \leq \theta \inf_{y \in \mathbb{R}^n - \{a\}} F(\bar{x}, y)$ .

$$F(\bar{x}, \bar{x}) = \min_{j \in J(\bar{x})} \frac{\nabla g_j(u_j(\bar{x}))}{\|\nabla g_j(u_j(\bar{x}))\|} \cdot (\bar{x} - u_j(\bar{x})).$$

D'autre part, appelons  $t_j^k$  la projection de  $\bar{x}$  sur  $A_j$ .

L'expression  $\frac{\nabla g_j(u_j(y))}{\|\nabla g_j(u_j(y))\|} \cdot (\bar{x} - u_j(y))$  n'est autre que la distance

algébrique de  $\bar{x}$  à la contrainte  $L_j^!(y)$ ; et pour  $j$  fixé cette distance est minimum pour le point  $y = t_j^k$ .

$$\text{Par suite } \inf_{y \in \mathbb{R}^n - \{a\}} F(\bar{x}, y) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n - \{a\}} \min_{j \in J(y)} \frac{\nabla g_j(u_j(y))}{\|\nabla g_j(u_j(y))\|} \cdot (\bar{x} - u_j(y))$$

s'écrit encore en permutant les symboles Min et Inf :

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^n - \{a\}} F(\bar{x}, y) = \min_{j \in J(\bar{x})} \frac{\nabla g_j(t_j^k)}{\|\nabla g_j(t_j^k)\|} \cdot (\bar{x} - t_j^k).$$

Soit  $j'$  l'indice qui donne cette valeur minimum

(  $\text{Inf}_{y \in \mathbb{R}^n - \{a\}} F(\bar{x}, y)$  est la plus petite distance algébrique du point  $\bar{x}$  aux

contraintes  $A_j$ ).

$$\text{Nous aurons alors : } F(\bar{x}, \bar{x}) \leq \frac{\nabla g_{j'}(u_{j'}(\bar{x}))}{\|\nabla g_{j'}(u_{j'}(\bar{x}))\|} \cdot (\bar{x} - u_{j'}(\bar{x})).$$

Notons  $\text{Co}(a, U)$  l'enveloppe convexe de l'ensemble  $\{a, U\}$  ; c'est un compact. Un calcul simple montre que :

$$\frac{\nabla g_{j'}(u_{j'}(\bar{x}))}{\|\nabla g_{j'}(u_{j'}(\bar{x}))\|} \cdot (\bar{x} - u_{j'}(\bar{x})) \leq \theta_{j'} \frac{\nabla g_{j'}(t_{j'})}{\|\nabla g_{j'}(t_{j'})\|} \cdot (\bar{x} - t_{j'})$$

où  $\theta_{j'} = \text{Inf} \left\{ \frac{r_{j'}}{\|a-y\|} \mid y \in F_r(A_{j'}) \cap \text{Co}(a, U) \right\}$ ,  $r_{j'}$  étant le rayon d'une boule de centre  $a$  contenue dans  $A_{j'}$ .

En prenant  $\theta = \text{Inf}_{j=1,2,\dots,m} \theta_j$  nous obtenons l'inégalité

$$F(\bar{x}, \bar{x}) \leq \theta \text{ Inf}_{y \in \mathbb{R}^n - \{a\}} F(\bar{x}, y). \quad \square$$

Remarque 3 : Contrairement à l'algorithme I nous ne pouvons pas utiliser le résultat de Zangwill [16, p.91] pour démontrer la convergence, que ce soit avec (H) ou (H'). En effet, comme nous l'avons déjà dit la fonction  $\gamma'$  n'est pas sup-continue (donc continue). Pour pouvoir la rendre continue il suffit que le domaine obtenu par linéarisation le soit. La construction d'un tel domaine continue sera évoquée dans le chapitre suivant (cf. [4] p.19).

Remarque 4 : Les programmes intermédiaires peuvent être résolus par diverses méthodes : gradient réduit [2], gradient projeté [14], gradient conjugué [1], [6] ou de Frank et Wolfe [5].

Remarque 5 : Dans le cas où nous nous proposons de remplacer les programmes intermédiaires (qui sont à fonctions économique strictement concave) par des programmes linéaires (en linéarisant également la fonction économique par exemple) nous nous heurtons à un problème difficile comme nous le verrons au chapitre suivant où une étude préliminaire a été faite. Le polyèdre linéarisé a en effet besoin d'être limité pour obtenir la convergence.

## RÉFÉRENCES

- [1] *BEST M.J.*, "A feasible conjugate-direction method to solve linearly constrained minimization problems", *J. Opt. Theory and Applications* 16 (1975), 25-38.
- [2] *FAURE P. et HUARD P.*, "Résolution de programmes mathématiques à fonction non linéaire par la méthode du gradient réduit", *Revue Franç. de Recherche Opérationnelle* 36 (1965), 167-206.
- [3] *FIOROT J.C.*, "Algorithmes de programmation convexe par linéarisation en format constant", à paraître dans la *Revue Franç. d'Inf. et Recherche Opérationnelle* (1977).
- [4] *FIOROT J.C. et HUARD P.*, "Une approche théorique du problème de linéarisation en programmation mathématique convexe", publication n°42 du Laboratoire de Calcul, Université de Lille I, Colloque d'Analyse Numérique de Gourette (1974).
- [5] *FRANK M. and WOLFE P.*, "An algorithm for quadratic programming", *Naval Research Logistics quarterly* 3 (1956), 95-120.
- [6] *GOLFARB D.*, "Extension of Davidon's variable metric method to maximization under linear inequality and equality constraints", *SIAM Journal on Applied Math.* 17 (1969), 739-764.
- [7] *HAUGAZEAU Y.*, "Sur la minimisation des formes quadratiques avec contraintes", *C.R. Acad. Sc. Paris, série A*, 264, 322-324 (1967).
- [8] *HAUGAZEAU Y.*, "Sur les inéquations variationnelles et la minimisation de fonctionnelles convexes", Thèse Paris (1967).
- [9] *HUARD P.*, "Programmation mathématique convexe", *Revue Franç. d'Inform. et Recherche Opérationnelle* 7 (1968), 43-59.
- [10] *HUARD P.*, "Optimisation dans  $R^n$  (programmation mathématique)", Cours de 3ème cycle, 2ème partie, Laboratoire de Calcul, Université de Lille I (1971).
- [11] *KAPLAN A.*, "Determination of the extremum of a linear function on a convex set", *Dodlady Akademii Nauk SSSR* (1968) (en russe), traduction anglaise : *Soviet Mathematics* 9 (1969), 269-271.
- [12] *KELLEY J.E.*, "The cutting plane method for solving convex programs", *SIAM Journal* 8 (1960), 703-712.
- [13] *LAURENT P.J. et MARTINET B.*, "Méthodes duales pour le calcul du minimum d'une fonction convexe sur une intersection de convexes", *Symposium on optimization (Nice June 29th - July 5th 1969)*, *Lectures Notes in Math.* 132, Springer-Verlag (1970), 159-179.

- [14] ROSEN J.B., "The gradient projection method for nonlinear programming - part 1 : linear constraints", Journal of the SIAM 8 (1960), 180-217.
- [15] POLAK E., "Computational methods in optimization, a unified approach", Academic Press, New York (1971).
- [16] ZANGWILL W.I., "Non linear programming : a unified approach", Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. (1969).
- [17] ZOUTENDIJK G., "Methods of feasible direction", Elsevier Publishing Co. Amsterdam (1960).

## CHAPITRE II

### UNE APPROCHE THÉORIQUE DU PROBLÈME DE LINÉARISATION EN PROGRAMMATION CONVEXE

Dans ce chapitre, une étude est proposée sur le problème toujours ouvert de la linéarisation simultanée de la fonction économique et des contraintes. Le nombre de contraintes linéaires obtenues définissant les programmes intermédiaires reste constant à chaque étape. Comme précédemment, le problème est abordé à l'aide de théorèmes généraux de convergence.

## II-1 INTRODUCTION

Le problème de la linéarisation des programmes mathématiques convexes est un problème ouvert depuis plus de quinze ans. L'approche a été faite en linéarisant les contraintes et la fonction économique si on ne s'est pas ramené à une fonction économique linéaire auparavant (cf. II.2). Cette linéarisation se fait au point courant : Cheney et Goldstein [1], Griffith et Stewart [4], Kelley [7], Topkis [10] ou en plusieurs points (grille) : Hartley et Hocknig [5] ou encore comme dans Kaplan [8], Veinott [12] et Zoutendijk [14] en utilisant des plans "sécants" tangents au domaine.

Bien que ce problème soit important et naturel, ces approches ne sont pas satisfaisantes pour l'utilisateur comme pour le théoricien. Car en effet, ces méthodes accumulent tout ou une partie des contraintes déterminées aux étapes antérieures, ce qui conduit :

1) à des programmes linéaires dont le nombre de contraintes devient de plus en plus grand

2) ce qui est plus grave, à des erreurs d'arrondis importantes, qui empêchent la convergence numérique. Ceci est dû au fait que dans le voisinage de l'optimum les linéarisations se font en des points de plus en plus voisins qui donneront des contraintes de moins en moins distinctes.

Alors se pose la question suivante :

Existe-t-il un (ou des) algorithmes de linéarisation qui abandonnent les contraintes linéaires obtenues aux étapes précédentes pour n'en garder ou n'en définir qu'un nombre constant ?

Dans Eaves et Zangwill [2] une tentative a été faite, on établit la convergence de tels algorithmes mais, bien que les contraintes ne soient pas accumulées à chaque étape, leur nombre n'est pas uniformément borné. D'une manière assez voisine, Topkis [10], [11] donne une convergence mais sous des hypothèses très fortes et non utilisables. Ces résultats peuvent être d'ailleurs présentés de manière plus simple dans le cadre plus général

de la continuité des applications multivoques (annexe B).

Le chapitre précédent ne répond que partiellement à cette question, en ce sens que les programmes intermédiaires n'étaient pas complètement linéaires et ne pouvaient être résolus par la méthode simplexe. Mais, comme nous l'avons vu, le fait de garder à chaque étape un programme dont la fonction économique est strictement concave (les contraintes linéaires étant en nombre constant ou inférieur à  $m$ ) a permis d'obtenir deux algorithmes convergents. Un autre point important est que les programmes s'enchaînent sans nécessiter de calculs intermédiaires comme par exemple la maximisation sur la partie réalisable d'un segment.

Dans ce chapitre, pour tenter de répondre au problème posé et obtenir la convergence, nous verrons que le polyèdre linéarisé a besoin d'être limité. Ce qui a été trouvé comme délimitation est la partie du cône de sommet le point courant, circonscrit au domaine, partie située entre ce point et le domaine (le "chapeau" du cône). Mais pour des raisons de commodité ou de simplifications, nous utiliserons l'enveloppe convexe de l'ensemble formé par le point courant et le domaine. Bien entendu, cet ensemble n'est pas un polyèdre linéaire ce qui fait que nous n'avons pas répondu à la question posée. Néanmoins, nous pensons avoir mis ainsi en évidence certaines difficultés du problème.

Un théorème de convergence dû à Huard [6], plus général que celui utilisé au chapitre précédent, nous fournira la propriété d'optimalité des points d'accumulation. Ce théorème ne fait pas appel à la continuité des applications multivoques au contraire de celui de Zangwill [13 p.91]. Aussi nous verrons quelles précautions supplémentaires il faut prendre pour appliquer ce dernier résultat.

## II-2 PROBLÈMES ÉQUIVALENTS

Nous nous proposons de résoudre :

$$(P_0) \quad \begin{aligned} & \text{Max } h(x) \\ & g_i(x) \geq 0 \quad i=1,2,\dots,m \end{aligned}$$

Il est équivalent de résoudre (P') ou (P'').

$$\begin{array}{ll} (P') & \begin{aligned} & \text{Max } \rho \\ & h(x) = \rho \\ & g_i(x) \geq 0 \quad i=1,2,\dots,m \end{aligned} \\ (P'') & \begin{aligned} & \text{Max } \rho \\ & h(x) \geq \rho \\ & g_i(x) \geq 0 \quad i=1,2,\dots,m \end{aligned} \end{array}$$

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, les programmes intermédiaires doivent être linéaires. La façon de procéder habituellement est de linéariser également la fonction économique au point courant. D'après ce qui précède tout problème à fonction économique non linéaire se ramène à un problème à fonction économique linéaire. En supposant cette transformation déjà faite nous obtiendrons ainsi pour chaque programme linéaire la même fonction économique. Dans ce chapitre, nous traiterons donc un tel problème écrit sous la forme suivante :

$$(P) \quad \begin{aligned} & \text{Max } f \cdot x \\ & g_i(x) \geq 0 \quad i=1,2,\dots,m \\ & f \in (\mathbb{R}^n)^* \end{aligned}$$

### II-3 HYPOTHÈSES, NOTATIONS

Soient  $g_i : x \rightarrow g_i(x)$ ,  $i=1,2,\dots,m$ , des fonctions concaves et continuellement différentiables.

Posons  $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0 \quad i=1,2,\dots,m\}$ .

L'ensemble des solutions réalisables  $A$  est supposé borné, contenu dans un pavé  $B$ , et de plus il existe un point  $a$  tel que  $g_i(a) > 0$  pour tout  $i$  (hypothèse dite de Slater).

Pour  $x \in \overset{\circ}{A}$  définissons les ensembles suivants :

$C(x,A) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = x + \lambda(z-x), \lambda \geq 0, z \in A\}$ , c'est le cône de sommet  $x$  circonscrit à  $A$ .

$\Gamma(x) = \text{co}(x \cup A)$ .

Pour  $x \neq a$  désignons par :

$\ell(a,x)$  la droite passant par  $a$  et  $x$

$D(a,x)$  la demi-droite d'origine  $a$  et de direction  $x-a$ .

### II-4 ALGORITHME GÉNÉRAL DE RECHERCHE DE SOLUTION

Nous utiliserons pour montrer la convergence des algorithmes proposés le résultat suivant dû à Huard [6 p.155], ce résultat étant plus général que celui utilisé au chapitre I.

Théorème : Soient  $E$  un fermé de  $\mathbb{R}^n$ ,  $P$  un sous-ensemble de  $E$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux applications multivoques, tels que :

- a)  $\forall x \in E - P, \Gamma_2(x) \neq \emptyset$  et  $\Gamma_2(x) \subset \Gamma_1(x)$
- b)  $\forall x \in E - P, \forall x' \in \Gamma_1(x)$  alors  $\Gamma_1(x') \subset \Gamma_1(x)$
- c) Si  $x \notin P, \exists V(x)$  tel que  $\forall y \in V(x), \forall x' \in \Gamma_2(y)$  alors  $x \notin \overline{\Gamma_1(x')}$ .

$V(x)$  est un voisinage de  $x$  relativement à  $E$ .

On considère la suite définie pour tout  $k \in \mathbb{N}$  de la manière suivante :

$$x^{k+1} \in \Gamma_2(x^k) \text{ si } x^k \notin P, \quad x^{k+1} = x^k \text{ sinon avec } x^0 \in E.$$

Si  $x^*$  est un point d'accumulation de cette suite alors  $x^* \in P$ .  $\square$

## II-5 ALGORITHME I

Pour  $x \in \overset{\circ}{A}$  posons :

$$E(x) = \{i \mid i = 1, 2, \dots, m \text{ et } g_i(x) \leq 0\}, \quad E'(x) = \{1, 2, \dots, m\} - E(x),$$

$$\tilde{L}(x) = \bigcap_{i \in E(x)} L_i(x) \text{ où } L_i(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) + \nabla g_i(x) \cdot (y-x) \geq 0\},$$

$\tilde{L}(x)$  est le polyèdre obtenu en linéarisant au point  $x$  les contraintes non satisfaites par ce point,

$$\tilde{\Omega}(x) = \tilde{L}(x) \cap \Gamma(x),$$

$$\tilde{M}(x) = \{y \in \tilde{\Omega}(x) \mid y \text{ maximise } f.t \text{ pour } t \in \tilde{\Omega}(x)\}.$$

L'algorithme I est le suivant :

1. Déterminer  $\overset{\circ}{x}$  une solution de  $\text{Max } \{f.t \mid t \in B\}$
2.  $k = 0$
3. Si  $\overset{k}{x} \in A$  stop, sinon prendre  $x \in \tilde{M}(\overset{k}{x})$
4. Poser  $\overset{k+1}{x} = x$ ,  $k = k+1$  et aller en 3.

Proposition : L'algorithme I fournit une suite de points  $(\overset{k}{x})$  non réalisables ; tout point d'accumulation de cette suite est solution du problème (P). Un tel point existe toujours.

Preuve :

a) Dans un premier temps, nous appliquerons le théorème précédent où nous ferons jouer à B, A,  $\Gamma$  et  $\tilde{M}$  les rôles respectivement de E, P,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

La suite  $(\overset{k}{x})$  est dans B donc elle admet au moins un point d'accumulation  $\tilde{x}$ .

Si  $x \notin A$  alors  $E(x) \neq \emptyset$  et  $\tilde{\Omega}(x)$  est un compact car  $\tilde{L}(x)$  est fermé et  $\Gamma(x)$  est à la fois fermé (car  $\Gamma$  est sup-continue d'après la propriété A2) et borné. L'ensemble  $\tilde{M}(x)$  est donc non vide, de plus  $\tilde{M}(x) \subset \Gamma(x)$  par définition.

D'après la propriété A5,  $\forall x' \in \Gamma(x)$  nous avons  $\Gamma(x') \subset \Gamma(x)$ .

Vérifions c). Parmi l'ensemble  $E(x)$  distinguons  $E_1(x) = \{i \in E(x) \text{ tel que } g_i(x) < 0\}$  et  $E_2(x) = \{i \in E(x) \text{ tel que } g_i(x) = 0\}$ .

Pour  $i \in E_1(x)$ , considérons l'application suivante :

$$F_i : (y, x) \rightarrow g_i(y) + \nabla g_i(y) \cdot (x - y).$$

La fonction  $g_i$  étant continuellement différentiable,  $F_i$  est continue par rapport à  $(y, x)$ . Comme  $F_i(x, x) = g_i(x) < 0$ , il existe une boule  $B(x, \rho_i)$  telle que pour tout  $y$  de  $B(x, \rho_i)$ , d'une part  $g_i(y) < 0$  ce qui entraîne  $E_1(x) \subset E_1(y)$  et d'autre part  $F_i(y, x) < 0$ , c'est-à-dire que  $x \notin L_i(y)$ .

En prenant  $\rho = \min \rho_i$  pour  $i \in E_1(x)$  nous mettons en évidence une boule  $B(x, \rho)$  telle que pour tout  $y$  de  $B(x, \rho)$  :  $x \notin \bigcup_{i \in E_1(x)} L_i(y)$ . Comme

nous avons les inclusions suivantes :

$$\bigcup_{i \in E_1(x)} L_i(y) \subset \bigcup_{i \in E_1(y)} L_i(y) \subset \bigcup_{i \in E(y)} L_i(y) = \tilde{L}(y), \text{ alors pour tout } y \text{ de}$$

$$B(x, \rho) : x \notin \tilde{L}(y).$$

L'ensemble  $\tilde{L}(y)$  est un convexe fermé, il contient  $A$  et  $\tilde{M}(y)$  donc pour tout  $x' \in \tilde{M}(y)$  nous avons bien  $x \notin \Gamma(x')$ .

Nous pouvons donc conclure que  $\overset{*}{x} \in A$  ou que  $\overset{k}{x} \in A$  à partir d'un certain rang.

b) Il reste à montrer que  $\overset{*}{x}$  est bien une solution du problème (P).

Soit  $m = \text{Max} \{f \cdot t \mid t \in A\}$ . Comme  $B \supset A$  nous avons  $f \cdot \overset{o}{x} \geq m$ .

Montrons par récurrence que pour tout  $k$  :  $f \cdot \overset{k}{x} \geq m$ .

C'est vrai pour  $\bar{x}^0$ , supposons que ce le soit pour  $\bar{x}^{k-1}$ . Si  $\bar{x}^{k-1} \notin A$  alors  $\bar{x}^{k-1} \notin \tilde{L}(\bar{x}^{k-1})$  à cause de la concavité des  $g_j$ , donc  $\bar{x}^k \neq \bar{x}^{k-1}$ .

Par définition  $f.\bar{x}^k = \text{Max} \{f.t \mid t \in \tilde{L}(\bar{x}^{k-1}) \cap \Gamma(\bar{x}^{k-1})\}$ . Supposons que  $f.\bar{x}^k < m$  alors il existe un  $\bar{z} \in A$  tel que  $f.\bar{x}^k < f.\bar{z}$  (un  $\bar{z}$  qui réalise le max de  $f.t$  sur  $A$  par exemple). Pour tout  $u$  de  $[\bar{z}, \bar{x}^{k-1}[$  nous avons :  $f.\bar{z} \leq f.u \leq f.\bar{x}^{k-1}$  à cause de la linéarité de  $f$ , et par suite  $f.\bar{x}^k < f.u$ .

Comme  $\bar{x}^{k-1} \notin A$ , il existe un  $u$  de  $[\bar{z}, \bar{x}^{k-1}[$  tel que  $u \in \tilde{L}(\bar{x}^{k-1}) \cap \Gamma(\bar{x}^{k-1})$  donc  $f.\bar{x}^k \geq f.u$  ce qui contredit l'inégalité ci-dessus, donc  $f.\bar{x}^k \geq m$  pour tout  $k$ .

Si  $\bar{x}^{k-1} \in A$ , comme  $f.\bar{x}^{k-1} \geq m$ , alors  $\bar{x}^{k-1}$  est bien une solution de (P).

De l'inégalité  $m \leq f.\bar{x}^k$  nous obtenons en passant à la limite  $m \leq f.\bar{x}^*$  et comme  $\bar{x}^* \in A$  nous avons  $f.\bar{x}^* = m$ .  $\square$

## II.6 ALGORITHME II

Rappelons que pour  $x \neq a$  ( $a$  étant un point tel que  $g_j(a) > 0$  pour tout  $j$ ) nous notons  $u_j(x)$  l'unique point d'intersection, s'il existe, du segment  $[a, x]$  avec la frontière du convexe  $A_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \geq 0\}$ . Si le segment  $[a, x]$  coupe  $F_r(A_j)$  définissons  $L_j^!(x)$  la contrainte linéarisée de  $A_j$  au point  $u_j(x)$  :

$$L_j^!(x) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_j(u_j(x)) \cdot (y - u_j(x)) \geq 0\}$$

et  $L_j^!(x) = \mathbb{R}^n$  dans le cas contraire.

Posons  $L'(x) = \bigcap_{j=1}^{j=m} L_j'(x)$ ,  $L'(x)$  est le polyèdre formé des contraintes linéaires dites "plaquées" au domaine  $A$ .

$$\Omega'(x) = L'(x) \cap \Gamma(x).$$

$$M'(x) = \{y \in \Omega'(x) \mid y \text{ maximise f.t pour } t \in \Omega'(x)\}.$$

L'algorithme II est le suivant :

1. Déterminer  $\overset{\circ}{x}$  une solution de  $\text{Max } \{f.t \mid t \in B\}$
2.  $k = 0$
3. Si  $\overset{k}{x} \in A$  stop sinon prendre  $x \in M'(\overset{k}{x})$
4. Poser  $\overset{k+1}{x} = x$ ,  $k = k+1$  et aller en 3.

Proposition : L'algorithme II fournit une suite de points  $(\overset{k}{x})$  non réalisables ; tout point d'accumulation de cette suite est solution du problème (P). Un tel point existe toujours.

Preuve : Nous vérifierons uniquement la partie c) du théorème (II.4) ; le reste de la démonstration est semblable à la partie correspondante de la démonstration précédente.

Pour  $x \notin A$ , notons  $J(x) = \{j \mid j \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ et } u_j(x) \text{ existe avec } u_j(x) \neq x\}$ .

Pour  $j \in J(x)$  et  $x \notin A$  considérons l'application

$$G_j : (y, x) \rightarrow \nabla g_j(u_j(y)) \cdot (x - u_j(y)).$$

$$G_j(x, x) = \nabla g_j(u_j(x)) \cdot (x - u_j(x)) < 0 \text{ car } x \notin A \text{ et } a \in \overset{\circ}{A}.$$

Nous savons que  $u_j : x \rightarrow u_j(x)$  est continue (propriété A1) et  $g_j$  est continuellement différentiable donc  $G_j$  est continue. Comme  $G_j(x,x) < 0$  il existe une boule  $B(x,\rho_j)$  telle que pour tout  $y$  de  $B(x,\rho_j)$  nous avons d'une part  $u_j(y) \neq y$  ce qui entraîne  $J(x) \subset J(y)$  et d'autre part  $G_j(y,x) < 0$  c'est-à-dire que  $x \notin L'_j(y)$ .

Soit  $\rho = \inf \rho_j$  pour  $j \in J(x)$  alors pour tout  $y$  de  $B(x,\rho)$  nous avons  $x \notin \bigcup_{j \in J(x)} L'_j(y)$ . Des inclusions suivantes :

$$\bigcup_{j \in J(x)} L'_j(y) \subset \bigcup_{j \in J(y)} L'_j(y) \subset \bigcap_{j=1}^{j=m} L'_j(y) = L'(y),$$

nous déduisons que pour tout  $y$  de  $B(x,\rho)$  nous avons :  $x \notin L'(y)$ .

Le polyèdre convexe fermé  $L'(y)$  contient  $A$  et  $M'(y) \subset L'(y)$  donc pour tout  $x' \in M'(y)$  nous avons  $x \notin \Gamma(x')$ .  $\square$

## II-7 REMARQUES SUR LES LIMITES DU THÉORÈME DE ZANGWILL

La convergence des algorithmes précédents a été obtenue grâce au théorème (II.4). Si nous appliquons le théorème classique de Zangwill [13 p.91, rappel au chapitre III en III-2] nous ne pouvons pas démontrer leur convergence. Ce théorème de Zangwill pourrait être cependant utilisé pour des algorithmes modifiés, en ce sens qu'il faut linéariser systématiquement toutes les contraintes même celles satisfaites par le point courant. Ces algorithmes modifiés apparaissent moins économiques.

En ce qui concerne l'algorithme I, cette modification ne pose pas de problèmes particuliers. Nous obtenons un polyèdre  $L(x)$  ayant un nombre de

contraintes égal à  $m$  ( $L(x) \subset \tilde{L}(x)$ ). L'application  $L : x \rightarrow L(x)$  est alors continue. C'était le but recherché car en général l'application  $\tilde{L} : x \rightarrow \tilde{L}(x)$  n'a pas cette propriété. En utilisant la propriété A2 et la proposition A3, nous montrons que  $\Omega : x \rightarrow L(x) \cap \Gamma(x)$  est aussi continue, ce qui entraîne que l'application  $M : x \rightarrow \{t \in \Omega(x) \mid t \text{ maximisant } f.u \text{ pour } u \in \Omega(x)\}$  est sup-continue. Enfin il reste à mettre en évidence une fonction continue strictement décroissante (ou croissante) exigée par le théorème de Zangwill. Elle est fournie par la fonction  $d : x \rightarrow d(x,A)$  (propriété A4) ou la fonction mesure de  $\Gamma(x) : x \rightarrow \text{mes}(\Gamma(x))$  (propriétés A5 et A7).

En ce qui concerne l'algorithme II les modifications à apporter sont plus délicates et peuvent se faire avec une hypothèse supplémentaire.

Ainsi dans [3 p.19-23] nous avons procédé de la manière suivante.

Pour  $x \notin A$ , si tous les  $A_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \geq 0\}$  sont bornés, nous linéarisons non seulement au point d'intersection de  $F_r(A_j)$  avec le segment  $[a,x]$  (point qui n'existe pas toujours) mais aux deux points d'intersection de  $F_r(A_j)$  avec la droite  $\ell(a,x)$  (ces deux points-là existant toujours).

Le polyèdre linéaire  $L'_1(x)$  ainsi obtenu a  $2m$  contraintes et  $L'_1 : x \rightarrow L'_1(x)$  est une application continue.

Si certains ensembles  $A_j$  ne sont pas bornés, pour obtenir la continuité de  $L'_1$  nous remplaçons ces  $A_j$  par des domaines bornés  $A'_j$ . Ces  $A'_j$  sont tels que  $A \subset A'_j$ ,  $A'_j \subset A_j \cap B$ ,  $F_r(A'_j)|_A = F_r(A_j)|_A$ ; de plus en tout point de  $F_r(A'_j)$  on peut définir un plan tangent de normale continue. Cette construction n'est possible que si les  $g_j$  définissant de tels  $A_j$  sont deux fois continue-

ment différentiables. La droite  $\ell(a,x)$  coupe alors  $F_r(A_j^!)$  en deux points où les linéarisations sont effectuées pour obtenir  $L_1^!(x)$ , polyèdre à  $2m$  contraintes.

La propriété de continuité de  $\Omega_1^! : x \rightarrow L_1^! \cap \Gamma(x)$  et celle de sup-continuité de  $M_1^! : x \rightarrow \{t \in \Omega_1^!(x) \mid t \text{ maximise } f.u \text{ sur } \Omega_1^!(x)\}$  sont obtenues comme précédemment.

On montre que toutes les contraintes ajoutées aux polyèdres  $\tilde{L}(x)$  et  $L'(x)$  pour obtenir respectivement  $L(x)$  et  $L_1^!(x)$  sont redondantes pour le programme intermédiaire et ne servent que pour les besoins de la démonstration. Ce problème de la linéarisation situe les limites du théorème de Zangwill. C'est une des raisons pour lesquelles nous avons exposé les algorithmes I et II en utilisant (II-4) plutôt que d'exposer leurs variantes nécessitées par l'utilisation de [13,p.91]. C'est d'ailleurs ce point de vue qui avait déjà été adopté au chapitre I en utilisant une forme plus faible que (II.4) mais plus générale que [13 p.91].

## ANNEXE A

A1 - Propriété : Soient  $A$  un convexe compact et  $a \in \overset{\circ}{A}$ ,  $x \neq a$ .

Alors  $D(a,x) \cap F_r(A)$  est réduit à un point  $z(x)$  et  $z : x \rightarrow z(x)$  est une fonction continue.

Preuve : L'unicité de  $z(x)$  se montre facilement ; pour la continuité nous pouvons procéder de la manière suivante. Il suffit de démontrer (par translation) le résultat en supposant que  $a = 0 \in \overset{\circ}{A}$ . Nous savons que la fonction jauge  $\gamma : x \rightarrow \gamma(x) = \text{Inf} \{ \lambda \geq 0 \mid x \in \lambda A \}$  est convexe [9,p.28]. Comme  $0 \in \overset{\circ}{A}$ , il existe une boule de centre 0 et de rayon  $r$  contenue dans  $A$  et alors  $\gamma(x) \leq \text{Inf} \{ \lambda \geq 0 \mid x \in \lambda B \} = \frac{\|x\|}{r}$ . La fonction  $\gamma$ , majorée par une fonction convexe continue est continue. Comme  $A$  est borné, pour  $x \neq 0$  nous avons :  $\gamma(x) > 0$  et  $z(x) = \frac{x}{\gamma(x)}$ .

A2 - Propriété : La fonction multivoque  $\Gamma$  définie en (II.3) est continue pour tout  $x$ .

Preuve :

a) Les images  $\Gamma(x)$  sont fermées; pour démontrer <sup>l'inf-continuité</sup> ~~la sup-continuité~~, considérons un ouvert quelconque  $\Theta$  qui coupe  $\text{co}(x \cup A)$ , alors il existe  $\lambda \in [0,1]$  et  $x_1 \in A$  tel que  $\lambda x + (1-\lambda) x_1 \in \Theta$ . Donc il existe un voisinage  $V(x)$  tel que pour tout  $x' \in V(x)$ ,  $\lambda x' + (1-\lambda) x_1 \in \Theta$  donc  $\Gamma(x') \cap \Theta \neq \emptyset$ .

b) Si  $\Theta$  est un ouvert quelconque (que nous pouvons prendre convexe car  $\Gamma(x)$  est convexe) est tel que  $\text{co}(x \cup A) \subset \Theta$ , il existe  $V(x) \subset \Theta$ , par

suite pour tout  $x' \in V(x)$ ,  $\text{co}(x' \cup A) \subset \Theta$  c'est-à-dire que  $\Gamma$  est ~~inf~~<sup>sup</sup>-continue.

A3 - Proposition (c'est une extension de la proposition 5.86 de [6]).

Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux applications multivoques telles que :

h1)  $\Gamma_2$  est inf-continue

h2)  $\Gamma_2(x) \subset \Gamma_1(x) \subset \overline{\Gamma_2(x)}$  pour tout  $x$

alors  $\Gamma_1$  est inf-continue.

Preuve : Soit  $\Theta$  un ouvert quelconque qui coupe  $\Gamma_1(x)$  comme  $\Gamma_1(x) \subset \overline{\Gamma_2(x)}$ , il coupe aussi  $\Gamma_2(x)$ . Comme  $\Gamma_2$  est inf-continue, il existe  $V(x)$  tel que pour tout  $x'$  de  $V(x)$  :  $\Gamma_2(x') \cap \Theta \neq \emptyset$  donc  $\Gamma_1(x') \cap \Theta \neq \emptyset$  (car  $\Gamma_2(x') \subset \Gamma_1(x')$ ).

A4 - Propriété : Soit un convexe  $A$  fermé, non vide,  $z$  un point de  $A$  et  $x$  un point n'appartenant pas à  $A$ , alors pour tout  $y$  du segment  $[z, x]$  nous avons  $d(y, A) < d(x, A)$ .

Preuve : La fonction  $d : x \rightarrow d(x, A)$  est une fonction convexe donc  $\phi : \lambda \rightarrow d(\lambda z + (1-\lambda)x, A)$  est convexe. Comme  $\phi(0) = d(x, A) > 0$  et  $\phi(1) = d(z, A) = 0$ , nous avons  $\phi(\lambda) < \phi(0)$  pour tout  $\lambda \in ]0, 1]$ .

A5 - Propriété : Soit  $A$  un convexe fermé, borné, d'intérieur non vide, pour tout  $x$  du complémentaire de  $A$  et tout  $t$  de  $\Gamma(x)$  alors  $\Gamma(t) \subset \Gamma(x)$ . Si  $t \neq x$ , l'inclusion est stricte et  $\text{mes}(\Gamma(t)) < \text{mes}(\Gamma(x))$ .

Preuve : Soit  $t \in \text{co}(x \cup A)$ ,  $t \neq x$ . Comme  $A$  et  $\{t\}$  sont contenus dans  $\Gamma(x)$  alors  $\text{co}(t \cup A) \subset \Gamma(x)$ . De plus,  $\Gamma(t)$  et  $\Gamma(x)$  sont deux convexes fermés d'intérieur non vide et  $\Gamma(t) \neq \Gamma(x)$  alors  $\text{mes}(\Gamma(t)) < \text{mes}(\Gamma(x))$ .

A6 - Propriété : Soient  $A$  un convexe d'intérieur non vide,  $x$  un point n'appartenant pas à  $A$ , alors pour tout  $y$  de  $\overset{\circ}{\Gamma}(x)$ , il existe  $z \in \overset{\circ}{A}$  tel que  $y \in [x, z]$ .

Preuve : Si nous notons  $A_\lambda = \lambda x + (1-\lambda) A$  et  $\overset{\circ}{A}_\lambda = \lambda \overset{\circ}{x} + (1-\lambda) \overset{\circ}{A}$  ( $x \notin A$ ) nous avons d'après [9 p.50] et compte tenu du fait que  $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$  :

$$\text{Int}(\text{co}(x \cup A)) = \bigcup_{\lambda \in ]0,1[} \overset{\circ}{A}_\lambda$$

d'où le résultat.

A7 - Propriété : Soit  $A$  un convexe d'intérieur non vide, alors la fonction :  $x \rightarrow \text{mes}(\Gamma(x))$  est continue.

Preuve :  $\Gamma$  est continue (propriété A2) et à valeurs convexes compactes d'intérieur non vide donc  $\text{mes} \Gamma$  est continue.

## ANNEXE B

Comme nous l'avons dit lors de l'introduction, dans Topkis [10], [11], certains résultats de convergence de sous-suites de points (solutions de programmes intermédiaires) vers la solution de (P) reposent sur des hypothèses assez fortes comme par exemple "tout point d'accumulation de la suite appartient à A". Nous pouvons replacer ces résultats dans un cadre plus général et plus simple, celui des fonctions multivoques. C'est ce que nous nous proposons de faire.

Problème posé :

Soient  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ ,  $f \cdot x$  atteint son maximum sur A en  $\hat{x}$ .

(P) :  $\text{Max } \{f \cdot x \mid x \in A\}$ .

$\Delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  une fonction multivoque telle que :

α)  $\Delta$  est sup-continue

β) si  $x \in \Delta(x)$  alors  $x \in A$ .

Nous considérons une suite infinie  $\overset{\circ}{x}, \overset{1}{x}, \dots, \overset{k}{x}, \dots$  ayant la propriété suivante :

A  $\overset{\circ}{x}$  est associé un cône  $S_0 \supset A$ ,  $\overset{\circ}{x}$  maximisant  $f \cdot x$  sur  $S_0$ , pour  $k \geq 1$ , à  $\overset{k}{x} \in S_{k-1} \cap \Delta(\overset{k-1}{x})$  est associé un cône  $S_k \supset A$ ,  $\overset{k}{x}$  maximisant  $f \cdot x$  sur  $S_k$ . L'ensemble  $S_k$  est un cône polyédrique en vue des applications mais peut être un ensemble plus général. Nous avons le résultat suivant :

Proposition :

- a) Nous avons les inégalités suivantes :  $f.\overset{k}{x} \geq f.\overset{k+1}{x} \geq f.\hat{x}$ .
- b) Si la suite converge, sa limite est solution de (P).
- c) Si un point d'accumulation de cette suite appartient à A, ce point est solution de (P).
- d) S'il existe une sous-suite  $\overset{k}{x} \rightarrow \bar{x}$  et  $\overset{k+1}{x} \rightarrow \bar{x}$  avec  $\bar{x} = \hat{x}$  pour  $k \in \mathbb{N}'$ , alors  $\bar{x}$  est solution de (P).

Preuve :

a) Le point  $\overset{k}{x}$  maximise  $f.x$  sur  $S_k$ , comme  $\overset{k+1}{x} \in S_k$  alors  $f.\overset{k}{x} \geq f.\overset{k+1}{x}$ . Comme  $A \subset S_{k+1}$  nous avons aussi  $f.\overset{k+1}{x} \geq f.\hat{x}$ .

b) Nous supposons que  $\overset{k}{x} \rightarrow x$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Alors  $\overset{k+1}{x} \in \Delta(\overset{k}{x})$  entraîne d'après  $\alpha$ ) :  $x \in \Delta(x)$  et  $\beta$ ) nous donne  $x \in A$ . Donc  $f.x = f.\hat{x}$  d'après a).

c) Nous supposons qu'ici il existe  $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$  tel que  $\overset{k}{x} \rightarrow x \in A$  pour  $k \in \mathbb{N}'$ . D'après a) :  $f.\overset{k}{x} \geq f.\hat{x}$  donc  $f.x \geq f.\hat{x}$  et comme  $x \in A$  alors  $f.x = f.\hat{x}$ .

d) De  $\overset{k+1}{x} \in \Delta(\overset{k}{x})$  et  $\alpha$ ) nous obtenons  $\bar{x} \in \Delta(\bar{x})$  donc  $\bar{x} \in A$  et par suite  $f.\bar{x} = f.\hat{x}$ .  $\square$

Exemple de choix de  $\Delta(x)$  et de  $S(x)$ 

Si A est défini par  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i=1,2,\dots,m\}$  avec les  $g_j$  continuellement différentiables et concaves, nous prenons pour ensemble  $\Delta(y)$  le polyèdre linéarisé de A au point y soit

$$L(y) = \bigcap_{j=1}^{j=m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(y) + \nabla g_i(y) \cdot (x-y) \geq 0\}.$$

Les points  $\alpha$ ) et  $\beta$ ) précédents sont vérifiés et  $A \subset L(y)$ .

Si  $S_{k-1}$  est un cône polyédrique contenant  $A$ , alors l'ensemble  $S_{k-1} \cap \Delta(\overset{k-1}{x})$  est un polyèdre contenant  $A$ . Nous pouvons prendre pour  $\overset{k}{x}$  un point maximisant  $f.x$  sur le polyèdre  $S_{k-1} \cap \Delta(\overset{k-1}{x})$  et pour cône  $S_k$  le cône tangent en  $\overset{k}{x}$  au polyèdre. Dans ces conditions :  $A \subset S_k$  car  $A \subset S_{k-1} \cap \Delta(\overset{k-1}{x}) \subset S_k$  et  $\overset{k}{x}$  maximise  $f.x$  sur  $S_k$ .

On remarquera que la méthode de Kelley [7] (qui accumule toutes les contraintes) entre également dans ce cadre.

## RÉFÉRENCES

- [1] CHENEY E.W. and GOLDSTEIN A.A., "Newton's method for convex programming and Tchebycheff approximation", *Numerische Mathematik* 1 (1959), 253-268.
- [2] EAVES B.C. and ZANGWILL W.I., "Generalised cutting plane algorithms", *SIAM J. on Control* 9 (1971), 524-542.
- [3] FIOROT J.C. et HUARD P., "Une approche théorique du problème de linéarisation en programmation mathématique convexe", Publication n°42 du Laboratoire de Calcul, Université de Lille I, Colloque d'Analyse Numérique de Gourette (1974).
- [4] GRIFFITH R.E. and STEWART R.A., "A nonlinear programming technique for the optimization of continuous processing systems", *Management Science* 7 (1961), 379-392.
- [5] HARTLEY H.O. and HOCKING R.R., "Convex programming by tangential approximation", *Management Science* 9 (1963), 600-612.
- [6] HUARD P., "Optimisation dans  $\mathbf{R}^n$  (Programmation mathématique) 1ère partie et 2ème partie", cours de 3ème cycle, Université de Lille I (janvier 1972).
- [7] KELLEY J.E., "The cutting plane method for solving convex programs", *SIAM Journal* 8 (1960), 703-712.
- [8] KAPLAN A.A., "Determination of the extremum of a linear function on a convex set", *Doklady Akademii Nauk SSSR* (1968) (en russe), traduction anglaise : *Soviet Mathematics* 9 (1968), 269-271.
- [9] ROCKAFELLAR R.T., "Convex Analysis", Princeton University Press, N.J. (1970).
- [10] TOPKIS D.M., "Cutting plane methods without nested constraint sets", *Operations Research* 18 (1970), 404-413.
- [11] TOPKIS D.M., "A note on cutting plane methods without nested constraint sets", *Operations Research* (1970), 1216-1220.
- [12] VEINOTT A.F., "The supporting hyperplane method for unimodal programming", *Operations Research* 15 (1967), 147-152.
- [13] ZANGWILL W.I., "Nonlinear programming : a unified approach", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1969).
- [14] ZOUTENDIJK G., "Nonlinear programming : a numerical survey", *SIAM J. on Control* 4 (1966), 194-210.

## CHAPITRE III

### COMPOSITION ET RÉUNION D'ALGORITHMES GÉNÉRAUX D'OPTIMISATION

Nous consacrons ce chapitre à l'étude de la convergence des algorithmes d'optimisation obtenus par composition. Cette composition consiste à enchaîner des algorithmes qui maximisent la fonction économique sur des sous-ensembles plus simples en général que l'ensemble des solutions réalisables. Ces sous-ensembles dépendent du point courant et possèdent des propriétés de continuité au sens des applications multivoques. La composition est faite de manière cyclique ou chaotique i.e. à choix multiple ou libre. Les points solutions des sous-maximisations ainsi obtenues forment une suite dont les points d'accumulation sont, selon les hypothèses faites, des points fixes ou des points fixes généralisés de toutes ou de certaines applications composantes. Aucune hypothèse de différentiabilité sur la fonction ou de convexité sur les sous-ensembles n'est faite à priori.

### III-1 INTRODUCTION

Les méthodes dites de relaxation ont été proposées à l'origine par Jacobi et Gauss-Seidel pour la résolution des systèmes d'équations. Ces méthodes itératives consistant à résoudre, de façon cyclique, une succession de problèmes partiels ne portant que sur certaines variables, les autres étant fixées. Nous pouvons citer pour la résolution des systèmes linéaires : VARGA [22] et pour les systèmes non linéaires : ORTEGA et RHIENBOLDT [14], MIELLOU [12]. Récemment MIELLOU [13], ROBERT [18], ROBERT, CHARNAY et MUSY [19] ont traité la relaxation dite "chaotique" où les résolutions partielles sont choisies dans un ordre arbitraire, et dont l'idée originale se trouve dans SCHECHTER [20], CHAZAN et MIRANKER [4].

Le procédé de relaxation a été repris dans le cadre des problèmes d'optimisation, l'algorithme consistant en une succession de sous-optimisations, portant sur des parties du domaine, essentiellement des droites ou des variétés affines parallèles aux axes de coordonnées, ou bien encore sur les composantes d'un ensemble produit. Citons pour les études relatives à la minimisation des fonctions strictement concaves, utilisant les dérivées directionnelles : AUSLENDER [1] ou utilisant la différentiabilité : ORTEGA et RHIENBOLDT [14], [15], CEA et GLOWINSKI [2], MARTINET et AUSLENDER [9]. La relaxation chaotique a été traitée pour des fonctions de classe  $C^2$  par SCHECHTER [21] et de classe  $C^1$  par ORTEGA et RHIENBOLDT [14] et par BOYER [3].

En nous limitant à la minimisation d'une fonction sur une partie de  $\mathbf{R}^n$ , nous étudions ici une généralisation récente des méthodes d'optimisation par relaxation ; en ce sens que les ensembles où s'effectuent les sous-optimisations sont plus généraux que les droites ou variétés affines habituelles. Plus précisément ces ensembles sont définis comme les images de la solution courante par des applications multivoques comme par exemple lorsqu'il est décrit des algorithmes généraux (cf. HUARD [7]). Les relaxations cyclique et chaotique sont alors définies de façon très naturelle par la composition et l'union de ces images. D'où l'expression "composition et réunion d'algorithmes" constituant le titre de ce chapitre. De plus, une préoccupation essentielle ici est d'évaluer le rôle et la force de chacune des hypothèses envisagées dans l'étude de la convergence vers une solution optimale des suites de points obtenus, ou

plus modestement, dans l'obtention de points d'accumulation optimaux. Ces points d'accumulation apparaissent comme les points fixes de certaines applications.

Dans la première partie de ce chapitre, nous rappelons de nouveau le théorème de Zangwill [23] et nous en donnons deux légères extensions. Les deux autres parties traitent toutes les deux des compositions cyclique et chaotique, mais avec des choix d'hypothèses différents.

Dans la seconde partie, l'étude diffère également des articles cités en référence, en ce sens que ceux-ci ont toujours utilisé, soit la différentiabilité de la fonction à maximiser, de Frèchet ou de Gâteaux (avec des définitions différentes selon les auteurs), soit la dérivée directionnelle. Ici il n'en est rien, nous n'envisageons à priori qu'une fonction continue présentant un maximum unique sur chacun des sous-ensembles envisagés. La forme de ces sous-ensembles n'est pas prise en compte, ils doivent simplement, en dehors de l'unimodalité évoquée ci-dessus, être l'image de la solution courante  $x$  par une application multivoque continue, et comprendre  $x$ . Ces hypothèses suffisent pour que tout point d'accumulation soit point fixe pour l'application multivoque représentant la composition cyclique ainsi que pour chaque application composante. Dans les exemples où nous appliquons les résultats à une fonction différentiable et strictement concave, nous retrouvons la convergence vers une solution optimale du problème d'optimisation.

Dans la troisième partie, nous affaiblissons les hypothèses. Les résultats, plus pauvres, que nous obtenons, établissent bien l'existence de points fixes généralisés, mais seulement pour certaines applications composantes. Des exemples permettent de souligner la limite des résultats que l'on peut espérer dans ce cadre d'hypothèses très général. Ce chapitre reprend sous une forme légèrement différente ce qui a été fait dans [6].

### III-2 RÉSULTATS GÉNÉRAUX DE CONVERGENCE D'ALGORITHMES

Rappelons d'abord le théorème de Zangwill [23 p.91].

Théorème 1 : Soient  $E$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ ,  $P$  un sous-ensemble de  $E$ ,  
 $\Gamma$  une application multivoque :  $E \rightarrow P(E)$ ,  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue  
sur  $E$  tels que :

$\forall x \in E - P$  :  $\alpha)$   $\Gamma(x) \neq \emptyset$  et  $\Gamma$  sup-continue sur  $E - P$   
 $\beta)$   $x' \in \Gamma(x) \implies h(x') > h(x)$ .

L'algorithme général envisagé consiste à obtenir une suite  $(x^k)$ ,  
 $k \in \mathbb{N}$  telle que  $x^k \in E$ ,  $x^{k+1} \in \Gamma(x^k)$  si  $x^k \notin P$ ,  $x^{k+1} = x^k$  sinon.

Sous ces conditions, la suite est infinie et admet au moins un  
point d'accumulation. Si  $x^*$  est un tel point d'accumulation alors  $x^* \in P$ .  $\square$

Donnons maintenant deux extensions de ce théorème.

Corollaire 1 : Soient  $E$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ ,  $P$  un sous-ensemble de  $E$   
dit ensemble privilégié,  $I$  un ensemble fini d'indices,  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$  une  
fonction continue sur  $E$  et  $\Gamma_i : E \rightarrow P(E)$ ,  $i \in I$ , un ensemble d'applications  
multivoques tels que :

$\forall i \in I, \forall x \in E - P$  :  $\alpha')$   $\Gamma_i(x) \neq \emptyset$  et  $\Gamma_i$  sup-continue sur  $E - P$   
 $\beta')$   $x' \in \Gamma_i(x) \implies h(x') > h(x)$ .

Posons  $\Gamma = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ .

Considérons la suite donnée par  $x^0 \in E$ ,  $x^{k+1} \in \Gamma(x^k)$  si  $x^k \notin P$ ,  
 $x^{k+1} = x^k$  sinon.

Alors tout point d'accumulation  $x^*$  de la suite  $(x^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , est tel  
 que  $x^* \in P$ .  $\square$

Preuve : Vérifions que  $\Gamma$  satisfait les hypothèses exigées par le théorème 1.

Pour tout  $x$  de  $E-P$ ,  $\alpha'$ ) entraîne que  $\bigcup_{i \in I} \Gamma_i(x) \neq \emptyset$  et que  $\Gamma$  est  
 sup-continue sur  $E-P$  ; de même  $\beta'$ ) entraîne que pour tout  $x'$  de  $\bigcup_{i \in I} \Gamma_i(x)$   
 nous obtenons  $h(x') > h(x)$ .  $\square$

Remarque 1 : Le corollaire précédent donne le théorème 1 lorsqu'une seule  
 $\Gamma_i$  est considérée.

Remarque 2 : Choisir un successeur  $x^{k+1}$  dans  $\Gamma(x^k)$  revient à le choisir  
 arbitrairement dans l'une des images  $\Gamma_i(x^k)$  i.e. de manière libre ou  
 "chaotique" selon l'expression en usage dans la littérature. L'utilisation  
 de toutes les fonctions  $\Gamma_i$  les unes après les autres dans un ordre déter-  
 miné i.e. de façon cyclique en est une réalisation particulière, à condition  
 que cela soit possible, par exemple que  $\Gamma_i(x^k) \neq \emptyset$  pour tout  $i$ . Dans ces  
 conditions, si  $I = \{1,2\}$  par exemple,  $\Gamma$  est définie par

$$\Gamma : x \rightarrow \Gamma_2 \circ \Gamma_1(x) = \bigcup_{y \in \Gamma_1(x)} \Gamma_2(y).$$
 Plus généralement, si  $I = \{1,2,\dots,p\}$

en prenant l'ordre naturel,  $\Gamma$  s'écrit  $\Gamma = \Gamma_p \circ \Gamma_{p-1} \circ \dots \circ \Gamma_1$ .

Corollaire 2 : Soient  $E$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ ,  $P \subset E$ ,  $\Gamma$  une application multivoque :  $E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ ,  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue en tout point de  $E$  tels que :

- $\forall x \in E - P$  :  $\alpha)$   $\Gamma(x) \neq \emptyset$  et  $\Gamma$  sup-continue sur  $E - P$   
 $\beta)$   $x' \in \Gamma(x) \implies h(x') > h(x)$ .

L'algorithme général envisagé consiste à obtenir une suite  $(x^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , de la manière suivante :

$x^0 \in E$ ,  $x^{k+1} \in E$  tel que  $h(x^{k+1}) \geq h(y^k)$  avec  $y^k \in \Gamma(x^k)$  si  $x^k \notin P$ ,  $x^{k+1} = x^k$  sinon.

Sous ces conditions, tout point d'accumulation  $x^*$  de la suite  $(x^k)$  est tel que  $x^* \in P$ .  $\square$

On peut trouver la démonstration de ce corollaire dans DUBOIS [5].

### III-3 APPLICATION À LA MAXIMISATION DE FONCTIONS AYANT UN MAXIMUM UNIQUE SUR LES SOUS-ENSEMBLES ENVISAGÉS

#### III.3.1 - Hypothèses et définitions

Soit  $A$  un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^n$ , nous nous donnons  $p$  applications multivoques  $\Delta_i$ ,  $i \in I$  où  $I = \{1, 2, \dots, p\}$ , de  $A$  dans  $P(A)$  et  $f$  une fonction continue de  $A$  dans  $\mathbb{R}$ , tels que :

(H1)  $x \in \Delta_i(x)$  pour tout  $i$  de  $I$

(H2)  $\Delta_i$  est une application multivoque continue sur  $A$

(H3) La fonction économique  $f$  possède un maximum unique sur chaque  $\Delta_i(x)$  pour tout  $x$  de  $A$

(H4) Il existe  $\bar{x} \in A$  tel que  $E_0 = \{x \in A \mid f(x) \geq f(\bar{x})\}$  soit un compact.

Le problème est de résoudre  $\text{Max } \{f(x) \mid x \in A\}$ .

#### Exemples classiques de telles applications $\Delta_i$

a) Cas sous contraintes. ( $A = \mathbb{R}^n$ ) L'image  $\Delta_i(x)$  est une variété linéaire affine passant par  $x$ , de dimension  $r_i$ , telle que  $\sum_{i \in I} r_i = n$  et  $\mathbb{R}^n = \sum_{i \in I} \Delta_i(0)$ .  
En particulier pour  $p = n$  et  $r_i = 1$ ,  $\Delta_i(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = x + \theta e_i, \theta \in \mathbb{R}\}$   
où  $e_i$  est le  $i^{\text{ième}}$  vecteur d'une base de  $\mathbb{R}^n$ .

b) Cas avec contraintes. Soient  $V_i$ ,  $i \in I$ , des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $V = \sum_{i \in I} V_i = \mathbb{R}^n$  et  $K = \sum_{i \in I} K_i$  où  $K_i$  est un convexe fermé de  $V_i$ . Dans CEA et GLOWINSKI [2],  $V$  et  $V_i$  sont des Banach réflexifs.

Posons  $A = K$ , pour tout  $x$  de  $K$  définissons  $\Delta_i(x)$ .

$$\Delta_i(x) = \{y \in K \mid y = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_p), y_i \in K_i\}.$$

$$\Delta_i(x) \text{ s'écrit encore } \Delta_i(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_p) + K_i \subset x + V_i.$$

Remarque 3 : Dans les exemples précédents empruntés à la littérature, les ensembles  $\Delta_i(x)$  sont convexes. Mais cela n'est pas exigé par les hypothèses (H1) à (H4).

Définition : Pour tout  $x$  de  $E_0$  et pour tout  $i$  de  $I$ , définissons l'application  $M_i : M_i : x \rightarrow \{u \in \Delta_i(x) \mid f(u) \geq f(t), \forall t \in \Delta_i(x)\}$ .

Si l'ensemble  $M_i(x)$  est réduit à un point, ce qui est le cas lorsque (H3) est utilisée, nous noterons ce sous-ensemble par  $M_i(x)$  plutôt que par  $\{M_i(x)\}$ .

Définissons également

$$M = M_p \circ M_{p-1} \circ \dots \circ M_1.$$

Remarque 4 : Les résultats de convergence fournis dans ce qui suit sont établis indépendamment de la méthode utilisée pour maximiser  $f$  sur  $\Delta_i(x)$ .

Propriété 1 : Sous les hypothèses (H1) à (H4) :  $M$  est continue sur  $E_0$ .

Preuve : D'après (H3), pour  $x \in E_0$ , l'ensemble  $M_i(x)$  est non vide et  $M_i$  est univoque. L'hypothèse (H2) et la continuité de  $f$  entraînent que  $M_i$  est sup-continue. De plus,  $M_i(x)$  d'après (H1), est tel que  $f(M_i(x)) \geq f(x) \geq f(x^0)$  donc  $M_i(x)$  appartient à  $E_0$  compact. Par suite  $M_i$  qui est sup-continue et univoque, à valeurs dans un compact, est continue. Il en est de même de la fonction  $M$  qui est donc univoque et continue sur  $E_0$ .

### III.3.2 - Composition cyclique d'algorithmes

#### III.3.2.1 - Algorithme I

Soit  $x^0$  un point de départ donné dans  $A$ , considérons la suite  $(x^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , vérifiant pour tout  $k$  :  $x^{k+1} = x^k$  si  $x^k = M(x^k)$ ,  $x^{k+1} = M(x^k)$  sinon.  $\square$

Cet algorithme a été traité par Zangwill [23 p.111] sous une forme moins générale (dite "univariate relaxation method" selon la terminologie de [14 p.244]) et également dans [14 p.515].

Nous étudions ici l'obtention de points fixes pour  $M$  sans utiliser tout de suite des propriétés de différentiabilité.

Nous obtenons les résultats suivants.

Lemme 1 : Sous les hypothèses (H1) et (H3) nous avons :

$x = M_i(x)$  pour tout  $i$  de  $I$  est équivalent à  $x = M(x)$ .

Preuve :

a) De  $x = M_i(x)$ ,  $\forall i \in I$ , nous obtenons directement d'après la définition de  $M$  :  $x = M(x)$ .

b) Si  $x = M(x)$ , soit  $\overset{0}{y} = x$ ,  $\overset{1}{y}, \dots, \overset{p}{y} = x$  avec  $\overset{i}{y} = M_i(\overset{i-1}{y})$  une suite issue de  $x$  et arrivant en  $x$ .

D'après (H1) et la définition de  $M_i$ , nous obtenons  $f(\overset{i-1}{y}) \leq f(\overset{i}{y})$ .  
Comme  $\overset{p}{y} = x$ , il vient :  $f(\overset{i}{y}) = f(x)$  : et d'après (H1) et (H3),  $\forall i \in I$ , nous avons  $\overset{i}{y} = x$  et donc  $x = M_i(x)$ .

Lemme 2 :      *Sous les hypothèses (H1) à (H4), tout point d'accumulation  $\overset{*}{x}$  de la suite fournie par l'algorithme 1 est tel que  $\overset{*}{x} = M(\overset{*}{x})$ .*

Preuve : Nous supposons que la suite contient une infinité de valeurs distinctes sinon le dernier point obtenu est une solution du problème. Vérifions les conditions du théorème 1. Au lieu de  $E, \Gamma, h$  et  $P$  prenons  $E_0, M, f$  et  $\{x \in E_0 \mid x = M(x)\}$ .

La propriété 1 nous permet d'obtenir la condition  $\alpha$ ). La condition  $\beta$ ) s'écrit de la manière suivante :  $x' = M(x)$ ,  $x \neq M(x)$  entraîne  $f(x') > f(x)$ . En effet, supposons le contraire, c'est-à-dire  $f(x') = f(x)$  alors, d'après (H1), la suite  $\overset{0}{y} = x$ ,  $\overset{1}{y}, \dots, \overset{p}{y} = x'$  avec  $\overset{i}{y} = M_i(\overset{i-1}{y})$  pour tout  $i \in I$  est telle que  $f(x) = f(\overset{1}{y}) = f(\overset{2}{y}) = \dots = f(\overset{p}{y}) = f(x)$ . Donc d'après (H3) nous avons  $x = \overset{1}{y} = \overset{2}{y} = \dots = \overset{p}{y} = x'$  ce qui contredit  $x \neq x'$ . Nous concluons donc que  $\overset{*}{x} = M(\overset{*}{x})$ .

Remarque 5 : Si nous supprimons l'hypothèse (H3) nous ne pouvons plus appliquer le théorème de Zangwill comme le montre l'exemple suivant de  $\mathbb{R}^2$  où nous avons tracé le graphe d'une fonction  $f$  quasi-concave (figure 1).

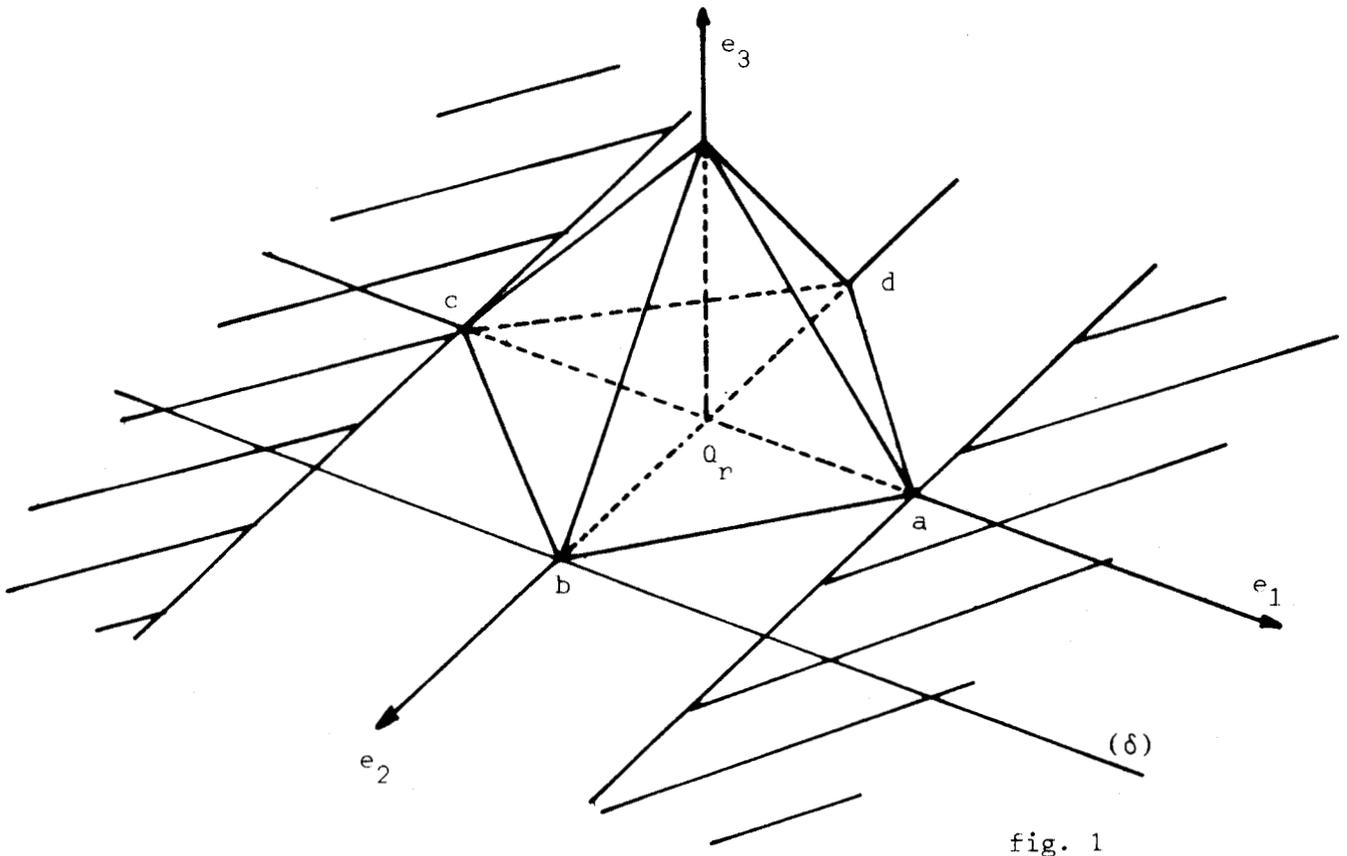


fig. 1

En dehors du carré abcd la valeur de  $f$  est nulle.

$$\Delta_i(x) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u = x + \theta e_i, \theta \in \mathbb{R}\} \quad i=1,2,$$

$$M_1(b) = (\delta), M(b) = M_2 \circ M_1(b) = [c,a] \cup \{\text{zone hachurée}\},$$

$b \notin M(b)$ ,  $a$  ou  $c \in M(b)$  et pourtant  $f(c) = f(a) = f(b) = 0$ .

A partir des deux lemmes précédents, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 2 : Sous les hypothèses (H1) à (H4) tout point d'accumulation de la suite fournie par l'algorithme I satisfait :  $\bar{x} = M_i(\bar{x})$  pour tout  $i$  de  $I$  i.e.  $\bar{x}$  maximise  $f$  sur chaque  $\Delta_i(\bar{x})$ . De plus  $\|x^{k+1} - x^k\|$  tend vers 0 lorsque  $k$  tend vers l'infini.

Preuve : Il reste à montrer la deuxième partie. Supposons le contraire i.e. qu'il existe un réel  $\delta > 0$  et une sous-suite  $(x^k)$ ,  $k \in N' \subset \mathbb{N}$ , telle que  $\|x^{k+1} - x^k\| > \delta$ . Comme  $(x^k, x^{k+1}) \in E_0 \times E_0$  nous pouvons extraire une sous-suite convergente vers  $(\bar{x}, \bar{x}^*)$  avec  $\|\bar{x}^* - \bar{x}\| \geq \delta > 0$ . Mais comme  $x^{k+1} = M(x^k)$  alors  $\bar{x}^* = M(\bar{x})$ , or d'après le lemme 2 :  $\bar{x} = M(\bar{x})$  donc  $\bar{x}^* = \bar{x}$  ce qui contredit le fait que  $\bar{x}^* \neq \bar{x}$ .  $\square$

Remarque 6 : D'après Ostrowski [16] nous savons que ou bien la suite converge ou bien elle admet un ensemble de points d'accumulation qui forme un continuum. Par suite si, comme dans Meyer [10], [11], nous ajoutons l'hypothèse suivante : pour tout  $\lambda$  donné :

$$\{x \in E_0 \mid x = M(x) \text{ et } f(x) = \lambda\}$$

est fini ; nous obtenons donc la convergence de la suite  $x^k$  vers  $\bar{x}$ .  $\square$

Remarquons que nous pouvons obtenir la convergence de la suite des itérés même dans le cas où cette dernière hypothèse n'est pas vérifiée. Ainsi dans  $\mathbb{R}^2$  pour la fonction  $f : (x_1, x_2) \rightarrow \min(1 - |x_1 + x_2|, -2|x_1 - x_2|)$  nous obtenons comme ensemble de solutions optimales le segment  $[a, b]$  où  $a = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  et  $b = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  ; la valeur optimale de  $f$  correspondante est zéro. La maximisation se fait suivant les ensembles  $\Delta_i$  définis par  $\Delta_i(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = x + \theta e_i, \theta \in \mathbb{R}\}$  où  $e_i$ ,  $i=1,2$  sont les vecteurs unitaires portés par les axes de coordonnées (figure 2). Bien que  $\{x \in E_0 \mid x = M(x), f(x) = 0\} = [a, b]$  donc non fini, pour tout point de départ  $\bar{x}$  quelconque la suite obtenue converge ou vers  $a$  ou vers  $b$  ou alors

un point de  $[a,b]$  est atteint en une étape. Dans cet exemple  $f$  vérifie (H3) mais le lemme 2 ne nous garantit pas la convergence.

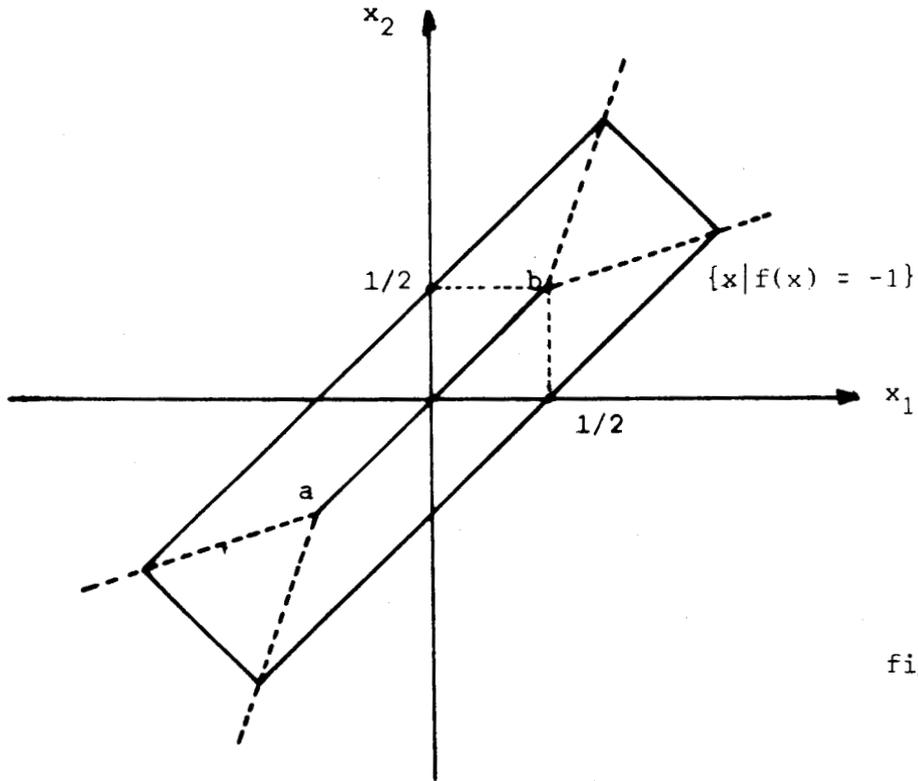


fig. 2

### III.3.2.2 - Etude de quelques exemples relatifs à l'algorithme I

**Exemple E1.** L'ensemble  $A$  est  $\mathbb{R}^2$ . Posons  $\Delta_i(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + \theta e_i, \theta \in \mathbb{R}, i=1,2\}$ .

$$f : (x_1, x_2) \rightarrow -(|(x_1-2) \cos \alpha + (x_2-2) \sin \alpha|)^{1/2} - (|(x_1-2) \sin \alpha + (x_2-2) \cos \alpha|)^{1/2}$$

avec  $\alpha \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{4}}$ .

Cette fonction  $f$  n'est pas quasi-concave et ne possède pas de dérivée directionnelle partout en particulier sur  $L_1$  et  $L_2$  (figure 3) mais vérifie H3.

Les itérés  $\bar{x}^k$  fournis par l'algorithme I se trouvent alternativement sur  $L_1$  et  $L_2$  et convergent vers  $\Omega$ .

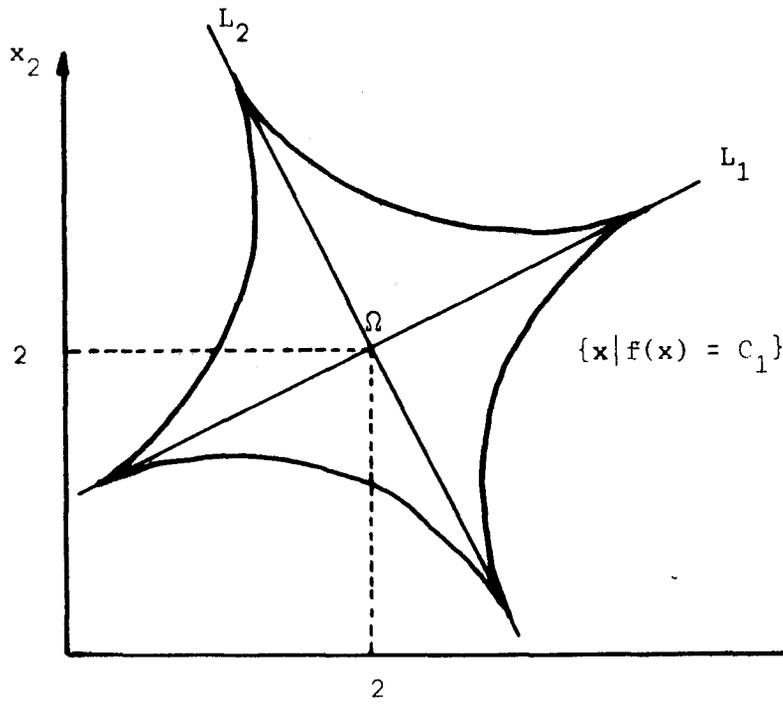


fig. 3

**Exemple E2.** Reprenons l'exemple défini en III.3.1.b où  $A = K$ .

Introduisons  $T(\Delta_i(x), x)$ , le cône tangent à  $\Delta_i(x)$  en  $x \in \Delta_i(x) = \overline{\Delta_i(x)}$ .

Bien que cette notion soit classique, rappelons que

$$T(\Delta_i(x), x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k (\bar{x}^k - x) \text{ où } \bar{x}^k \in \Delta_i(x) \text{ et } \bar{x}^k \rightarrow x \text{ lorsque } k \rightarrow \infty, \lambda^k \in \mathbb{R}^+\}.$$

De même introduisons  $\Gamma(T(\Delta_i(x), x))$ , le cône polaire négatif de  $T$  i.e. :  $\Gamma(T(\Delta_i(x), x)) = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* \mid u \cdot x \leq 0, \forall x \in T(\Delta_i(x), x)\}$  où  $u \cdot x$  désigne le produit scalaire de  $u$  et de  $x$ .

Propriété 2 (exemple E2) : Pour tout  $x$  appartenant à  $K$  nous avons :

$$T(\Delta_i(x), x) = T(K_i, (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)).$$

Preuve : Effectivement  $\Delta_i(x)$  est déduit de  $K_i$  par une translation définie par le vecteur  $(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_p)$ . Les cônes tangents en  $x$  et  $(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$  à  $\Delta_i(x)$  et  $K_i$  sont identiques.

Propriété 3 (Exemple E2) : Pour tout  $x$  de  $K$  nous avons :

$$T(K, x) = \sum_{i \in I} T(K_i, (0, \dots, 0, x_i, \dots, 0)).$$

Preuve :

a)  $y \in T(\sum_{i \in I} K_i, x)$  i.e.  $(\exists \lambda^k \geq 0, x^k \in K, x^k \rightarrow x$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k (x^k - x) = y) \implies (\exists \lambda^k \geq 0$  et pour tout  $i \in I, x_i^k \in K_i, x_i^k \rightarrow x_i, \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k (x_i^k - x_i) = y_i) \implies y_i \in T(K_i, (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0))$ .

b) Si  $y_i \in T(K_i, (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0))$  pour chaque  $i \in I$ , montrons que  $(y_1, y_2, \dots, y_p) \in T(K, x)$ .

Pour un  $i$  donné,  $\exists \lambda_i^k \geq 0, x_i^k \in K_i, x_i^k \rightarrow x$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^k (x_i^k - x_i) = y_i$ .

Posons  $\delta^k = \sup_{i \in I} \lambda_i^k$  et  $\mu_i^k = \lambda_i^k / \delta^k, \mu_i^k \in [0, 1]$ .

Définissons  $x_i^k = \mu_i^k x_i^k + (1 - \mu_i^k) x_i, x_i^k \in K_i, x_i^k - x_i = \mu_i^k (x_i^k - x_i)$   
i.e.  $x_i^k \rightarrow x_i \implies x_i^k \rightarrow x_i$ .

Si  $\lambda_i^k \neq 0$  alors  $\mu_i^k \neq 0$  et nous avons  $\delta^k (x_i^k - x_i) = \lambda_i^k (x_i^k - x_i)$ ,  
d'où :  $\delta^k (x^k - x) = \sum_{i \in I} \lambda_i^k (0, \dots, 0, x_i^k - x_i, 0, \dots, 0)$ .

Donc  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta^k (x^k - x) = \sum_{i \in I} (0, \dots, 0, y_i, 0, \dots, 0) = y$  i.e.  $y \in T(K, x)$ .  $\square$

Introduisons pour cet exemple l'hypothèse suivante :

(H5) :  $f$  est différentiable.

Alors nous avons le résultat suivant :

Corollaire 3 (exemple E2) : Sous les hypothèses (H3) à (H5) tout point d'accumulation  $\bar{x}$  de la suite  $(x^k)$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , fournie par l'algorithme I est tel que :  $\nabla f(\bar{x}) \in \Gamma(T(K, \bar{x}))$ .

Preuve : Les hypothèses (H1) et (H2) sont trivialement vérifiées.

D'après le théorème 2, il vient :  $\nabla f(\bar{x}) \in \Gamma(T(\Delta_i(\bar{x}), \bar{x}))$   
pour tout  $i \in I$  donc  $\nabla f(\bar{x}) \in \bigcap_{i \in I} \Gamma(T(\Delta_i(\bar{x}), \bar{x}))$ .

D'après les propriétés 2 et 3 et un résultat classique sur les cônes polaires, nous obtenons :

$$\bigcap_{i \in I} \Gamma(T(\Delta_i(\bar{x}), \bar{x})) = \bigcap_{i \in I} \Gamma(T(K_i, (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0))) = \Gamma(T(K, \bar{x})). \quad \square$$

Corollaire 4 (exemple E2) : Si  $f$  est strictement concave, sous les hypothèses (H4) et (H5), la suite  $(x^k)$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , fournie par l'algorithme I converge vers le maximum de  $f$  sur  $K$ . Si  $f$  est strictement quasi-concave et si  $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ ,  $\bar{x}$  étant un point d'accumulation de la suite  $(x^k)$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , nous avons la même conclusion.

Preuve : Les hypothèses (H1) à (H3) sont vérifiées pour cet exemple.

Montrons la deuxième partie. Le corollaire 3 nous donne

$\nabla f(\bar{x}) \in \Gamma(T(K, \bar{x}))$ . Comme  $f$  est strictement quasi-concave et  $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ ,

alors  $\bar{x}$  est un maximum de  $f$  sur  $K$ . Ce maximum est unique (cf. Poljak [17]),

la suite n'ayant qu'un seul point d'accumulation converge vers  $\bar{x}^*$ .  
La première partie résulte également de l'unicité du maximum.  $\square$

**Exemple E3.** Reprenons l'exemple défini en III.3.1.a où

$$A = \mathbb{R}^n = \sum_{i \in I} \Delta_i(0), \text{ nous avons le résultat suivant :}$$

Corollaire 5 (exemple E3) : Si la fonction  $f$  est strictement concave sous les hypothèses (H4) et (H5), la suite fournie par l'algorithme 1 converge vers  $\bar{x}^*$ , maximum unique de  $f$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Preuve : Les hypothèses (H1) à (H3) sont également vérifiées. L'exemple E3 est un cas particulier de E2, il suffit de poser  $K_i = \Delta_i(0)$  ce qui implique  $K = \mathbb{R}^n$  et nous pouvons utiliser le corollaire 3 pour obtenir :  $\nabla f(\bar{x}^*) \in \Gamma(T(\mathbb{R}^n, \bar{x}^*)) = \{0\}$  d'où la conclusion.  $\square$

### III.3.3 - Composition chaotique d'algorithmes

**Algorithme II :**

Soit  $\bar{x}^0$  un point de départ donné de  $A$ , considérons la suite  $(\bar{x}^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , vérifiant pour tout  $k$  :

$$\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k \text{ si } \bar{x}^k = M_i(\bar{x}^k) \text{ pour tout } i \text{ de } I,$$

$$\bar{x}^{k+1} \in \bigcup_{i \in I} M_i(\bar{x}^k) \text{ sinon. } \square$$

Considérons maintenant une partition des indices de la suite (i.e. aussi une partition de la suite) en sous-ensembles de  $m$  éléments où  $m$  est un entier quelconque.

Avec le partitionnement ci-dessus nous faisons apparaître une infinité de séquences de  $m$  itérations successives, les séquences utilisant les mêmes  $\Delta_i$  dans le même ordre.

Ceci est dû au fait qu'étant données  $m$  itérations successives prises dans le partitionnement, il existe un nombre fini  $p^m$  de possibilités de maximiser sur les  $\Delta_i$  dans un ordre donné. Les répétitions sont permises, en particulier si  $m > p$ . Si  $m < p$  une partie seulement des  $i$  de  $I$  sera bien entendu utilisée.

Appelons alors  $M' = M_{i_m} \circ M_{i_{m-1}} \circ \dots \circ M_{i_1}$  la composée des  $m$  itérations successives mises ainsi en évidence où  $i_1, i_2, \dots, i_m$  est une suite ordonnée de  $m$  indices pris dans  $\{1, 2, \dots, p\}$ .

De la suite obtenue à partir de l'algorithme II, nous extrayons la sous-suite  $(x^k)$ ,  $k \in N'$ , construite par les  $m$  itérations successives, répétées une infinité de fois.

Notons  $N''$  le sous-ensemble des indices des points donnant par l'application  $M_{i_1}$  le premier point de chaque séquence de  $m$  itérés successifs mise en évidence. Nous avons pour  $k \in N''$  :

$$x^{k+m} = M_{i_m} \circ M_{i_{m-1}} \circ \dots \circ M_{i_1} (x^k). \text{ Si } k \text{ et } k' \text{ sont deux éléments}$$

consécutifs de  $N''$  nous pouvons avoir  $k' = k+m$  s'il y a  $2m$  termes consécutifs de la suite générale dans la sous-suite  $(x^k)$ ,  $k \in N'$ .

Théorème 3 : Sous les hypothèses (H1) à (H4), tout point d'accumulation  $\bar{x}$  de la sous-suite  $(\bar{x}^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}'$  est tel que  $\bar{x} = M'(\bar{x})$  et le point  $\bar{x}$  est aussi point fixe pour chaque  $M_j$  avec  $j \in \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ .

Preuve : Grâce en particulier à (H1) et (H3) il est possible d'appliquer le corollaire 2 où, à la place de  $E, \Gamma, \bar{y}^k, \bar{x}^k, P$  et  $h$ , nous prenons respectivement  $E_0, M', \bar{x}^{k+m}, \bar{x}^k$  ( $k \in \mathbb{N}''$ ),  $\{x \in E_0 \mid x = M'(x)\}$  et  $f$ . Ce corollaire nous donne donc  $\bar{x} = M'(\bar{x})$  et, d'après le lemme 1, le point  $\bar{x}$  est aussi point fixe de  $M_j$  pour  $j \in \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ .

Pour étendre ce résultat à la suite  $(\bar{x}^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}'$ , il suffit d'établir que les deux sous-suites  $(\bar{x}^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}'$  et  $(\bar{x}^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}''$  ont les mêmes points d'accumulation.

En effet si  $(\bar{x}, \bar{x}^{**})$  est un point d'accumulation de  $(\bar{x}^k, \bar{x}^{k+1})$   $k \in \mathbb{N}''$  nous avons  $\bar{x}^{**} = M_{i_1}(\bar{x})$  et  $f(\bar{x}^{**}) = f(\bar{x})$  ce qui implique  $\bar{x} = \bar{x}^{**}$ .

De proche en proche, nous établissons que si  $(\bar{x}, \bar{x}^{**})$  est un point d'accumulation de  $(\bar{x}^k, \bar{x}^{k+h})$ ,  $k \in \mathbb{N}''$ , avec  $h \in \{1, 2, \dots, m\}$  nous avons :  
 $\bar{x} = \bar{x}^{**}$  .  $\square$

Introduisons maintenant l'hypothèse suivante :

(H6) :  $\exists m, m \geq p$  tel que  $\forall j \in \mathbb{N}, \forall i \in I, \exists k \in [jm+1, (j+1)m]$   
 vérifiant  $\bar{x}^{k+1} = M_i(\bar{x}^k)$ .

L'algorithme définit implicitement une suite  $(i_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , vérifiant  $\bar{x}^{k+1} = M_{i_k}(\bar{x}^k)$ . Toute suite  $(i_k)$  satisfaisant l'hypothèse (H6) sera appelée

"essentiellement périodique" par analogie avec la propriété du même nom introduite dans [14 p.513] pour une suite de vecteurs.

En effet (H6) peut encore s'écrire :

(H6') :  $\exists m', m' \geq p$  tel que  $\forall j \in \mathbb{N}, \forall i \in I, \exists k \in [j+1, j+m']$   
vérifiant  $x^{k+1} = M_i(x^k)$ .

Car (H6) entraîne (H6'), il suffit de poser  $m' = 2m$  par exemple ;  
et réciproquement, en posant  $m = m'$ , (H6') entraîne (H6).

L'hypothèse (H6) signifie que dans toute séquence de  $m$  itérés successifs toute "opération"  $i$  (maximisation sur  $\Delta_i(x^k)$ ) est utilisée au moins une fois. C'est-à-dire que dans  $M'$  figurent toutes les applications  $M_i$  pour  $i \in I$ . Alors d'après le théorème 3 tout point d'accumulation  $\bar{x}$  de la sous-suite  $(x^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}'$ , est tel que  $\bar{x} = M_i(\bar{x})$  pour tout  $i$  de  $I$ .  
Nous avons le résultat suivant :

Corollaire 6 : *Sous les hypothèses (H1) à (H4) et (H6), si la condition  $x = M_i(x)$  pour tout  $i$  de  $I$  est une condition suffisante d'optimalité alors , tout point d'accumulation de  $(x^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}'$ , est un maximum de  $f$  sur  $A$ . Si ce maximum est unique alors la suite  $(x^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , converge vers ce maximum.*

Preuve : D'après (H6) alors  $\{i_1, i_2, \dots, i_m\} = I$ , de plus pour la convergence nous considérons  $\bar{x}$  un point d'accumulation quelconque de la suite  $(x^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . La suite des valeurs correspondantes  $f(x^k)$  étant monotone croissante d'après (H1), nous avons  $f(\bar{x}) = f(x^*)$ . Comme il y a unicité du maximum :  $\bar{x} = x^*$  donc nous obtenons la convergence de la suite globale vers le maximum.

Application à l'exemple III.3.1.b où  $A = K$

Si nous avons les hypothèses (H4), (H5) et (H6) avec  $f$  strictement concave ou  $f$  strictement quasi-concave et  $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$  alors la suite  $(x^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  converge vers  $\bar{x}$  maximum unique de  $f$  sur  $K$ .

En effet  $\bar{x} = M_i(\bar{x})$  pour tout  $i$  de  $I$  entraîne :  
 $\nabla f(\bar{x}) \in \Gamma(T(K, \bar{x}))$  donc  $\bar{x}$  est un maximum de  $f$  sur  $K$  et ce maximum est unique.

### III-4 RÉSULTATS DANS LE CAS DE FONCTIONS PLUS GÉNÉRALES. CAS CHAOTIQUE ET CYCLIQUE.

#### III.4.1 - Hypothèses

Dans ce qui suit nous faisons des hypothèses beaucoup plus faibles qu'en III.3 (abandon de l'hypothèse (H3) entre autres). Une conséquence essentielle est que les fonctions  $M_i$  sont multivoques et ne possèdent plus, cette fois, des points fixes classiques, c'est-à-dire vérifiant  $x = M_i(x)$  mais des points fixes généralisés vérifiant  $x \in M_i(x)$ . Nous verrons que les points d'accumulation des suites obtenues par composition chaotique ou cyclique d'algorithmes sont points fixes généralisés de certaines applications  $M_i$  et non de toutes. Des exemples illustrant ces résultats permettront de faire apparaître le rôle des hypothèses.

Comme en III.3, nous nous donnons  $p$  applications multivoques  $\Delta_i$ ,  $i \in I$ , de  $A$  dans  $\mathcal{P}(A)$  et  $f$  une fonction continue de  $A$  dans  $\mathbb{R}$ , tels que :

$$(H1) \quad x \in \Delta_i(x) \text{ pour tout } i$$

$$(H2) \quad \Delta_i \text{ est une application multivoque continue sur } A$$

$$(H4) \quad \text{Il existe } \overset{\circ}{x} \in A \text{ tel que } E_0 = \{x \in A \mid f(x) \geq f(\overset{\circ}{x})\} \text{ soit un compact}$$

$$(H7) \quad y \in \Delta_i(x) \implies \Delta_i(y) = \Delta_i(x).$$

Dans ce qui suit, pour les algorithmes III, III bis et IV, la suite  $(x^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , ainsi obtenue est supposée contenir une infinité de points

distincts. S'il n'en était pas ainsi, c'est que nous aurions obtenu un point répondant à la question à savoir  $x \in M_i(x)$  pour tout  $i$  de  $I$ .

Nous prendrons pour les applications  $M_i$  la même définition qu'en III.3.1. Mais cette fois ces applications sont multivoques.

Comme dans la propriété 1 en utilisant (H1), (H2), (H4), nous montrons que  $M_i(x) \neq \emptyset$  pour tout  $x$  de  $E_0$  et que  $M_i$  est sup-continue sur  $E_0$ .

Pour un point d'accumulation  $\bar{x}^*$  fourni par les algorithmes III, III bis et IV, nous considérons une sous-suite infinie  $(\bar{x}^k)$ ,  $k \in N' \subset \mathbb{N}$  convergeant vers  $\bar{x}^*$ .

Nous notons  $I'$  le sous-ensemble des indices de  $I$ , tel que chaque "opération"  $i$  (maximisation sur  $\Delta_i(\bar{x}^k)$ ) soit utilisée une infinité de fois pour la construction de la sous-suite  $(\bar{x}^k)$ ,  $k \in N'$ . Dans la terminologie de Robert, Charnay et Musy [19]. Il est appelé un "résiduel" associé à la suite  $(\bar{x}^k)$ ,  $k \in N'$  ; dans le cas où  $I' = I$  ce résiduel est dit maximal. Du fait que  $I$  est fini, l'ensemble  $I'$  est non vide.

#### III.4.2 - Algorithme III. Cas chaotique

C'est l'algorithme II décrit en III.3.3 mais adapté au fait que  $M_i$  est ici multivoque.

Soit  $\bar{x}^0$  appartenant à  $A$  ; considérons la suite  $(\bar{x}^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , vérifiant :

$$x^{k+1} = x^k \text{ si } x^k \in M_i(x^k) \text{ pour tout } i \in I,$$

$$x^{k+1} \in \bigcup_{i \in I} M_i(x^k) \text{ sinon. } \square$$

Nous vérifions que dans cet algorithme les répétitions sont permises. Par contre, pour les algorithmes III bis et IV ces répétitions n'auront pas lieu.

Théorème 4 : Sous les hypothèses et définitions de III.4.1 nous avons  $x^* \in M_i(x^*)$  pour tout  $i \in I'$ .

Preuve : Pour  $i$  quelconque de  $I'$ , il existe  $S \subset N'$  tel que  $x^{k+1} \in M_i(x^k)$  pour tout  $k$  de  $S$ .

Considérons deux éléments consécutifs de  $S$ , soient  $k$  et  $k'$  et la sous-suite  $(x^{k+2})$ ,  $k \in S$ .

Comme il existe une infinité de couples  $(k, k') \in S \times S$  et un nombre fini "d'opérations"  $i$ , l'une d'elles, soit  $j$  (peut être encore  $i$ ), est utilisée une infinité de fois pour passer de  $x^{k+1}$  à  $x^{k+2}$  lorsque  $k \in S$  i.e. il existe  $(i, j)$  et  $S' \subset S$  tels que  $x^{k+1} \in M_i(x^k)$  et  $x^{k+2} \in M_j(x^{k+1})$  pour tout  $k \in S'$ .

Considérons maintenant la suite  $(x^k, x^{k+1}, x^{k+2})$  de  $E_0 \times E_0 \times E_0$  pour  $k \in S'$ . La compacité de  $E_0$  assure l'existence d'une sous-suite convergeant vers  $(\bar{x}, \bar{x}, \bar{x})$  pour  $k \in N'' \subset S'$ . Comme  $M_i$  est sup-continue alors  $\bar{x} \in M_i(\bar{x})$  i.e. que  $\bar{x}$  maximise  $f$  sur  $\Delta_i(\bar{x})$ . De plus  $\bar{x} \in \Delta_i(\bar{x})$  et l'hypothèse (H7) entraînent  $\Delta_i(\bar{x}) = \Delta_i(\bar{x})$  donc  $M_i(\bar{x}) = M_i(\bar{x})$  et par suite  $\bar{x} \in M_i(\bar{x})$ .  $\square$

Remarque 8 : Nous venons d'établir avec la démonstration précédente le résultat supplémentaire suivant :  $\overset{*}{x} \in M_j(\overset{*}{x})$ . En effet  $M_j$  étant sup-continue il vient  $\overset{**}{x} \in M_j(\overset{*}{x})$ . De plus la suite des valeurs  $f(\overset{k}{x})$  étant monotone croissante d'après (H1) nous en déduisons  $f(\overset{*}{x}) = f(\overset{**}{x})$ . Par suite si  $\overset{*}{x} \notin M_j(\overset{*}{x})$  alors  $f(\overset{**}{x}) > f(\overset{*}{x})$  ce qui contredit ce qui précède, donc  $\overset{*}{x} \in M_j(\overset{*}{x})$ .  $\square$

### III.4.3 - Algorithme III bis, Cas chaotique

Posons  $L(x) = \{i \in I \mid x \in M_i(x)\}$ .

Soit  $\overset{o}{x}$  appartenant à  $A$ , considérons une suite telle que :

$$\overset{k+1}{x} = \overset{k}{x} \text{ si } L(\overset{k}{x}) = I, \quad \overset{k+1}{x} \in \bigcup_{i \in I - L(\overset{k}{x})} M_i(\overset{k}{x}) \text{ sinon. } \square$$

Nous remarquons que la même "opération"  $i$  ne peut être utilisée deux fois de suite car d'après (H7) si  $\overset{k+1}{x} \in M_i(\overset{k}{x})$  alors  $\Delta_i(\overset{k+1}{x}) = \Delta_i(\overset{k}{x})$  et  $\overset{k+1}{x} \in M_i(\overset{k+1}{x})$  donc  $i \in L(\overset{k+1}{x})$ .

Corollaire 7 : Sous les hypothèses et définitions de III.4.1, pour tout  $i \in I'$ , il existe un  $j \neq i$  tel que  $\overset{*}{x} \in M_i(\overset{*}{x})$  et  $\overset{*}{x} \in M_j(\overset{*}{x})$ .

Preuve : C'est une conséquence du théorème 4 et des remarques précédentes.

### III.4.4 - Algorithme IV. Cas cyclique

Soit  $\overset{\circ}{x}$  appartenant à  $A$ , considérons la suite  $(\overset{k}{x})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , donnée de la manière suivante où  $k \equiv i \pmod{p}$ ,  $i \in I$  :

$$\overset{k+1}{x} = \overset{k}{x} \text{ si } \overset{k}{x} \in M_i(\overset{k}{x}), \overset{k+1}{x} \in M_i(\overset{k}{x}) \text{ sinon. } \square$$

Cet algorithme est le même que l'algorithme I. Mais ici  $M_i$  est une application multivoque et les  $p$  pas intermédiaires sont considérés comme des itérations séparées.

Nous voyons que les "opérations"  $i$  sont utilisées à tout de rôle dans un ordre déterminé i.e. cycliquement.

Corollaire 8 : Sous les hypothèses et définitions de III.3.1, pour tout  $i \in I$  nous avons :  $\overset{*}{x} \in M_i(\overset{*}{x})$  et  $\overset{*}{x} \in M_j(\overset{*}{x})$ .

Preuve : C'est une conséquence du corollaire 7, car cet algorithme est un cas particulier de l'algorithme III bis.

### III.4.5 - Exemples dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ illustrant les résultats du théorème 4 et de ses corollaires

Nous donnons ci-dessous deux exemples d'application des algorithmes III, III bis et IV avec obtention de point d'accumulation vérifiant les résultats du théorème 4 mais ne vérifiant pas  $x \in M_i(x)$  pour tout  $i$  de  $I$ .

**Exemple dans  $\mathbb{R}^2$ .** Considérons dans le plan  $x_1, x_2$  le polyèdre  $G$  de sommets  $a, b, c, d$ , dont la forme géométrique est un trapèze (figure 4). Soient  $g_i \cdot x = 0, i=1,2,3,4$ , les équations des droites supports des 4 côtés.  $G = \{x \mid g_i \cdot x \geq 0, i=1,2,3,4\}$ .

Nous définissons une fonction  $f(x)$  à l'intérieur de  $G$  sous forme explicite et à l'extérieur de  $G$  nous la définissons par ses équipotentielles.

$$\text{Pour } x \in G, f(x) = f_1(x) \text{ où } f_1(x) = \prod_{i=1}^4 (g_i \cdot x)^2.$$

C'est une F-distance régulière au sens de Huard [8]. Notons que  $f(x) = 0$  et  $\nabla f(x) = 0$  pour  $x$  appartenant au contour  $abcd$  ; à l'intérieur de  $G$  elle est strictement positive. C'est une fonction quasi-concave.

Pour  $x \notin G$ ,  $f(x)$  est une fonction dont les équipotentielles sont définies par quatre segments respectivement parallèles aux côtés de  $G$ , de longueur égale à ces côtés, à une distance constante  $\rho$  de ceux-ci ; ces quatre segments sont reliés par des arcs de cercle de rayon  $\rho$  dont les centres sont  $a, b, c, d$  de manière que le raccordement soit continuellement différentiable. Les équipotentielles vont en décroissant à partir de la valeur 0 lorsqu'on s'éloigne de  $G$ .

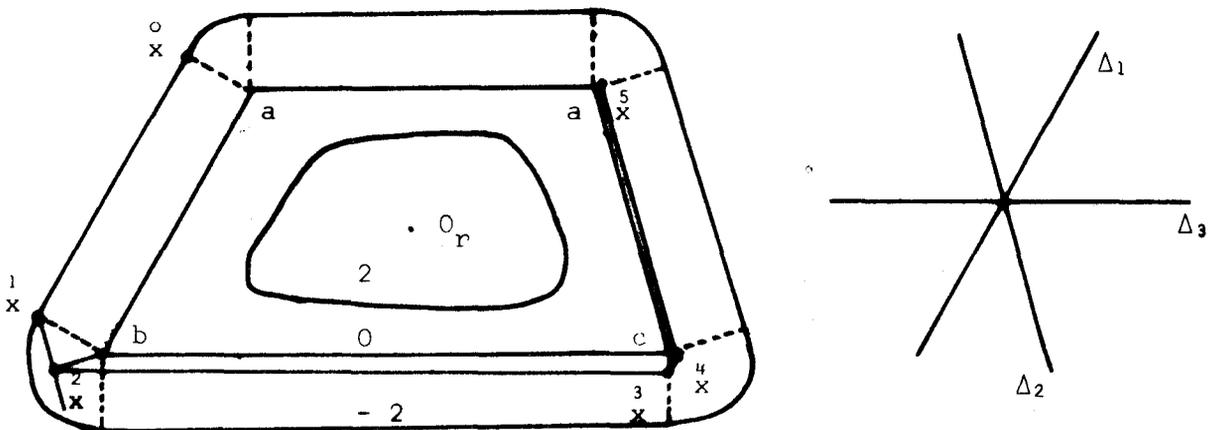
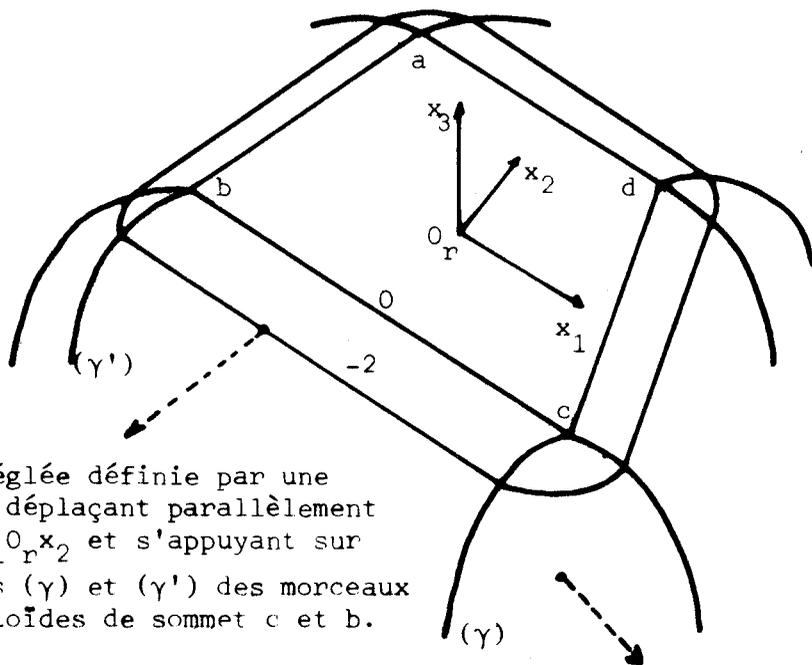


fig. 4

Représentons en fig. 5 le graphe de  $f(x)$  mais seulement la partie  $x_3 \leq 0$ .



surface réglée définie par une droite se déplaçant parallèlement au plan  $x_1 O_r x_2$  et s'appuyant sur les arêtes  $(\gamma)$  et  $(\gamma')$  des morceaux de paraboloides de sommet  $c$  et  $b$ .

fig. 5

morceaux de paraboloides de révolution autour de  $ox_3$ , de sommet  $c$ , d'équation  $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + x_3 = 0$

Pour  $x_3 \geq 0$ , nous obtenons une surface en forme de cloche qui présente un sommet en un point dont la projection sur  $x_1 O_r x_2$  est le "centre" situé à l'intérieur de  $G$ . Cette surface est tangente à  $x_1 O_r x_2$  le long du contour  $abcd$  ce qui permet de la relier à la partie  $x_3 \leq 0$  de manière continue et continuellement différentiable.  $f(x)$  est continuellement différentiable et quasi-concave dans  $\mathbb{R}^2$ .

Définissons les directions  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  comme celles des côtés  $ab, dc, ad$  et maximisons suivant les directions  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  dans cet ordre et de

manière cyclique. Partons de  $\overset{\circ}{x}$  (fig. 4) en choisissant comme successeur, lorsqu'il y a plusieurs possibilités, le point le plus éloigné d'où nous nous trouvons. Nous obtenons quatre points d'accumulation a,b,c,d qui sont des points stationnaires i.e. de gradient nul mais ne sont pas le maximum, celui-ci étant le "centre".

Pour b et c nous avons  $b \in M_i(b)$ ,  $c \in M_i(c)$  pour  $i=1,2,3$  donc  $b \in M(b)$  et  $c \in M(c)$ .

Par contre pour les points a et d nous avons la situation suivante :

$$\begin{aligned} a \in M_1(a), a \in M_3(a) \text{ mais } a \notin M_2(a) ; M_2(a) = \{a'\} \in \overset{\circ}{G} ; \\ d \in M_2(d), d \in M_3(d) \text{ mais } d \notin M_1(d) ; M_1(d) = \{d'\} \in \overset{\circ}{G} . \end{aligned}$$

C'est ce que donne le corollaire 8 i.e. le théorème 4 et nous n'en avons pas plus pour ces deux points.

**Exemple dans  $\mathbb{R}^3$ .** Les directions  $\Delta_i$  sont ici indépendantes, ce sont les directions des trois axes de coordonnées  $e_i$ ,  $i=1,2,3$ .

La figure 6 représente de manière incomplète les trois équipotentiels de valeur 1, 0, -1.

La figure 7 représente une coupe dans le plan horizontal contenant les points a,b,c,d et le point de départ  $\overset{\circ}{x}$ . La maximisation se fait suivant  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  dans cet ordre et cycliquement.

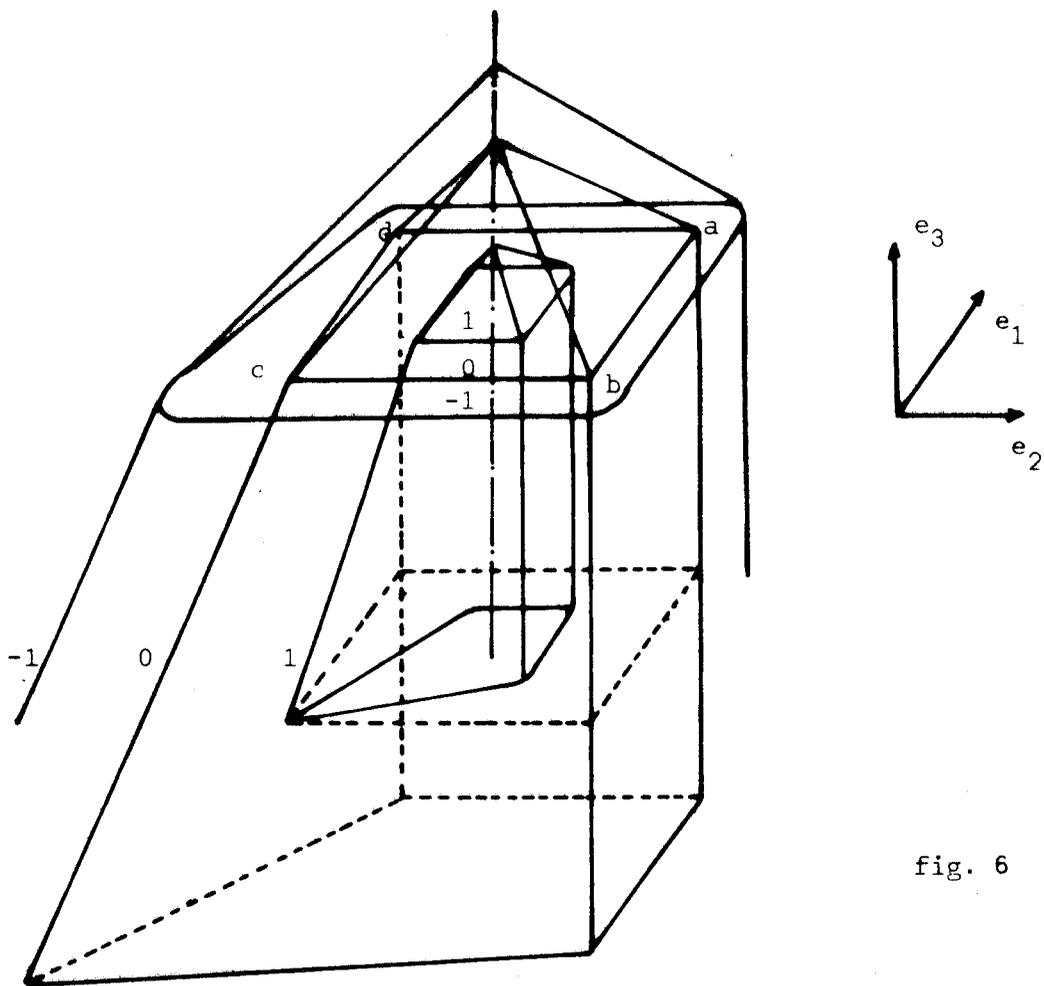


fig. 6



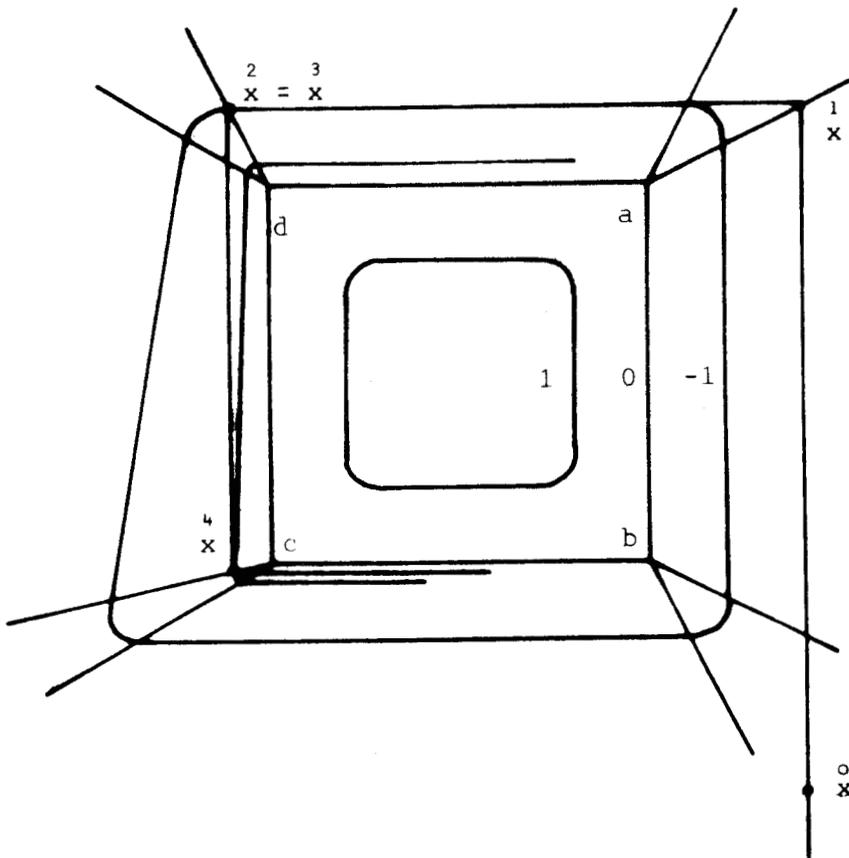


fig. 7

La suite infinie de points  $\overset{k}{x}$  demeure dans le plan de coupe car au voisinage de  $d$  et de  $b$  nous avons  $\overset{k}{x} \in M_3(\overset{k}{x})$ . Cette suite possède quatre points d'accumulation  $a, b, c, d$ .

Au point  $c$  nous avons  $c \in M_i(c)$  pour  $i = 1, 2$  mais  $c \notin M_3(c)$ , il y a de meilleures valeurs que  $f(c)$  sur  $\Delta_3(x)$ , vers le bas.

## ANNEXE

## Quelques remarques concernant (H1) et (H7)

- . L'hypothèse (H7) n'entraîne pas (H1). Par exemple, dans  $\mathbf{R}$ , nous posons  $\Delta_i(x) = \text{entier}(x) + 1$  si  $x \in \mathbf{R} - \mathbf{N}$  et  $\Delta_i(x) = x$  si  $x \in \mathbf{N}$ . L'hypothèse (H7) est vérifiée mais si  $x \in \mathbf{R} - \mathbf{N}$ ,  $x \notin \Delta_i(x)$ .
- . Les hypothèses (H1) et (H7) entraînent la propriété suivante :  
si  $y \in \Delta_i(x)$  alors  $x \in \Delta_i(y)$ .
- . Sous l'hypothèse (H1), pour  $q \leq p$ , si  $x \in M_q \circ M_{q-1} \circ \dots \circ M_1(x)$  alors : a)  $x \in M_1(x)$   
b) si en plus nous avons (H7) alors :  $x \in M_q(x)$ .

En effet : considérons la suite  $\overset{0}{y} = x, \overset{1}{y}, \dots, \overset{q}{y} = x$  telle que  $\overset{i}{y} \in M_i(\overset{i-1}{y})$  pour  $i=1,2,\dots,q$ , qui partant de  $x$  aboutit en  $x$ . Nous avons  $f(x) \leq f(\overset{1}{y}) \leq \dots \leq f(\overset{q}{y}) = f(x)$  donc  $f(\overset{i}{y}) = f(x)$  pour  $i=1,2,\dots,q$ .

a)  $x \in M_1(x)$  car sinon  $f(\overset{1}{y}) > f(x)$  ce qui conduit à une contradiction.

b)  $x \in M_q(x)$  car par définition  $\overset{i}{y} \in M_i(\overset{i-1}{y})$  donc  $\overset{i}{y} \in \Delta_i(\overset{i-1}{y})$  et d'après (H7) :  $\Delta_i(\overset{i}{y}) = \Delta_i(\overset{i-1}{y})$ . Et (H1) entraîne :  $\overset{i-1}{y} \in \Delta_i(\overset{i}{y})$  et comme  $f(\overset{i-1}{y}) = f(\overset{i}{y})$  alors  $\overset{i-1}{y} \in M_i(\overset{i}{y})$ .

En particulier pour  $i = q$  nous avons  $\overset{q-1}{y} \in M_q(\overset{q}{y})$ . Si  $x \notin M_q(x)$  alors  $f(\overset{q-1}{y}) > f(x)$  ce qui est impossible, par suite  $x \in M_q(x)$ .  $\square$

Donnons un exemple d'application et un contre-exemple relatif à ce dernier point.

1. Dans le cas particulier de  $\mathbb{R}^2$  si nous maximisons sur deux sous-ensembles  $\Delta_1(\cdot)$  et  $\Delta_2(\cdot)$  d'après ce qui précède nous avons :  
 $x \in M(x)$  implique  $x \in M_1(x)$  et si nous avons (H7), alors  $x \in M_2(x)$ ,  
 donc l'équivalence  $x \in M(x) \iff x \in M_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ .

2. Dans  $\mathbb{R}$  considérons le graphe de  $f$  suivant :

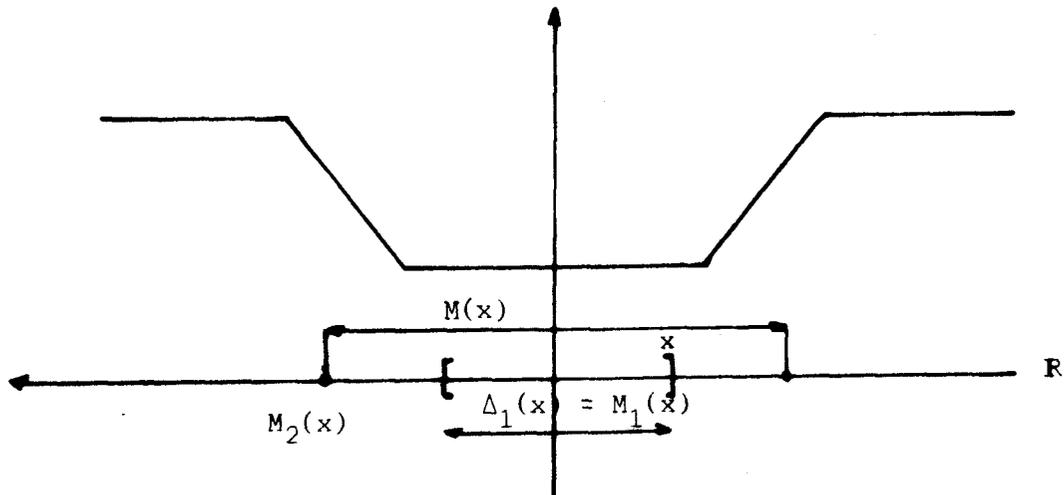


fig. 8

Définissons  $\Delta_1(x) = [-x, x]$  et  $\Delta_2(x) = [-2x, x]$  ;  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  ne satisfont pas (H7) ; nous avons  $x \in M(x)$  et  $x \in M_1(x)$  ce résultat est indépendant de (H7) mais  $x \notin M_2(x)$ .

## RÉFÉRENCES

- [1] AUSLENDER A., "Méthodes numériques pour la décomposition et la minimisation de fonctions non différentiables", Numer. Math. 18 (1971), 213-223.
- [2] CEA J. et GLOWINSKI R., "Sur les méthodes d'optimisation par relaxation", Rev. Française Automat. Informat. Rech. Opérat., déc. 1973, 5-32.
- [3] BOYER R., "Quelques algorithmes diagonaux en optimisation convexe", Thèse 3ème cycle, Univ. de Provence (1974).
- [4] CHAZAN D. and MIRANKER W., "Chaotic relaxation", Linear Algebra and its Appl. 2 (1969), 199-222.
- [5] DUBOIS J., "Theorems of convergence for improved nonlinear programming algorithms", Operations Research 21 (1973), 328-332.
- [6] FIOROT J.C. et HUARD P., "Composition et réunion d'algorithmes généraux", Compte-Rendus Acad. Sc. Paris, t. 280 (2 juin 1975), Série A, 1455-1458 - Séminaire d'Analyse Numérique n°229, Université de Grenoble (mai 1975).
- [7] HUARD P., "Optimization algorithms and point-to-set maps", Mathematical Programming 8 (1975), 308-331.
- [8] HUARD P., "A method of centers by upper-bounding functions with applications", in Nonlinear Programming, Rosen, Mangasarian, Ritter ed., Academic Press, New-York (1970) pp. 1-30.
- [9] MARTINET B. et AUSLENDER A., "Méthodes de décomposition pour la minimisation d'une fonction sur un espace produit" SIAM J. Control 12 (1974) 635-642.
- [10] MEYER R., "On the convergence of algorithms with restart" SIAM J. Numer. Anal. 13 (1976), 696-704.
- [11] MEYER R., "Sufficient conditions for the convergence of monotonic mathematical programming algorithms, J. of Computer and System Sciences 12 (1976), 108-121.
- [12] MIELLOU J.C., "Méthode de Jacobi, Gauss-Seidel, sur-(sous) relaxation par blocs appliquée à une classe de problèmes non linéaires", Compte-Rendus Acad. Sc. Paris t. 273 (20 déc. 1971) Série A, 1257-1260.
- [13] MIELLOU J.C., "Algorithme de relaxation chaotique à retards", Rev. Française d'Automat. Informat. Rech. Opérat., avril 1975, 55-82.

- [14] ORTEGA J.M. and RHEINBOLDT W.C., "Iteration solution of nonlinear equations in several variables", Academic Press, New-York (1970).
- [15] ORTEGA J.M. and RHEINBOLDT W.C., "A general convergence result for unconstrained minimization methods", SIAM J. of Num. Anal. 9 (1972), 40-43.
- [16] OSTROWSKI A.M., "Solution of equations and systems of equations", Academic Press, New-York (1966).
- [17] POLJAK B.T., "Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions", Soviet Math. Dokl. 7 (1966), 72-75.
- [18] ROBERT F., "Contraction en norme vectorielle : convergence d'itérations chaotique pour des équations de point fixe à plusieurs variables", Colloque d'Analyse Numérique (1974), Gourette.
- [19] ROBERT F., CHARNAY M. et MUSY F., "Itérations chaotiques série parallèle pour des équations non linéaires de point fixe", Aplikace Matematiky 20 (1975), 1-37.
- [20] SCHECHTER S., "Relaxation methods for linear equations", Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), 313-335.
- [21] SCHECHTER S., "Minimization of a convex function by relaxation", in Integer and nonlinear programming, Abadie ed., North Holland (1970) pp. 177-189.
- [22] VARGA R.S., "Matrix Iterative Analysis", Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. (1962).
- [23] ZANGWILL W.I., "Nonlinear Programming : a unified approach", Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. (1969).

## CHAPITRE IV

SUR LE PROBLÈME DE FERMAT-WEBER AVEC  
FONCTIONS DE CÔT CONVEXES

Ce chapitre reprend une grande partie d'un travail effectué récemment en collaboration avec F. CORDELLIER.

Nous traitons d'une extension du problème de Fermat-Weber généralisé avec des fonctions de coût convexes. Deux algorithmes sont présentés, ils fournissent des suites de points convergeant vers un minimum bien que la fonction économique ne soit pas strictement convexe. L'idée générale est d'associer à la fonction économique notée  $h$ , une famille de fonctions strictement convexes plus régulières, dont l'enveloppe inférieure est la fonction  $h$ . Un troisième algorithme est aussi donné pour le cas particulier du problème de Fermat-Weber généralisé.

## IV-1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous traitons le problème de Fermat-Weber avec des fonctions de coût convexes, c'est-à-dire :

$$(1) \quad \text{Min} \left\{ \sum_{i=1}^m \phi_i(d_i(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Les fonctions  $\phi_i$  sont convexes, dérivables et non décroissantes,  $d_i(x) = \|x - a_i\|$  (norme euclidienne) et les  $a_i$  sont  $m$  points de  $\mathbb{R}^n$  donnés, appelés sommets. Ce problème a été abordé par Katz [12] et sous une forme moins générale par Cooper [3].

Il contient comme cas particulier le problème classique de Fermat-Weber généralisé [24]

$$(2) \quad \text{Min} \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i d_i(x) \mid x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

où  $\omega_i$  est une constante positive. Ce dernier a intéressé un grand nombre de mathématiciens depuis que son auteur l'a proposé voilà plus de 300 ans avec trois points.

Les problèmes (1) et (2) ont de nombreuses applications en économie. Ils se rencontrent dans le problème de localisation d'usines, de centres de distribution ou de communication (lignes électriques, téléphoniques, grosses conduites de gaz ou de pétrole).

De plus, ils servent de manière cruciale comme sous-problèmes dans des méthodes de type Branch and Bound pour résoudre des problèmes combinatoires plus généraux encore (plusieurs dépôts, plusieurs usines). Pour ces problèmes multi-sources, nous pouvons nous reporter à Cooper [1], [2], Eilon, Watson-Gandy, Christofides [8], Francis and White [9], Kuenne et Soland [16].

Pour le problème (2), Weiszfeld [25] a défini un algorithme itératif qui converge pourvu que le point courant soit distinct d'un sommet, point où la fonction n'est pas différentiable. La formule d'itération proposée

par Weiszfeld a été retrouvée ou reprise par de nombreux auteurs. MIEHLE [19], KUHN et KUENNE [15], COOPER [1], [2]. KATZ [13] a étudié la vitesse de convergence du procédé. Dans un autre ordre d'idée, SCHECHTER [23, p.186] propose de partir du sommet qui donne à la fonction la plus petite valeur et de poursuivre avec une méthode de relaxation pour fonctions différentiables.

Faisant le point sur ce problème, Kuhn [14] montre que l'éventualité de tomber sur un sommet (en un nombre fini d'itérations) a lieu pour des points de départ appartenant à un certain sous-ensemble dénombrable de points, auquel cas l'algorithme s'arrête. Jacobsen [10] a donné un successeur d'un tel sommet et Cordellier, Fiorot et Jacobsen [5] ont démontré la convergence d'un tel algorithme ainsi partout défini. Par la suite, Cordellier et Fiorot [6] ont donné trois algorithmes de structures différentes. Le premier contient celui défini en [10].

Le problème (2) a été traité par Planchart et Hurter [22] dans le cas où la fonction à minimiser dépend linéairement de plusieurs métriques dont les métriques euclidienne et rectangulaire. Pour cela ils utilisent entre autres les résultats de Wendell et Peterson [26] relatifs à la dualité des programmes géométriques.

Dans ce chapitre, comme il a été fait en [7], nous étendons d'abord au problème (1) les deux premiers algorithmes définis en [6] et nous donnerons pour le problème (2) le troisième algorithme défini en [6].

Alors que la fonction du problème (2) est strictement convexe dès que les sommets  $a_i$  ne sont pas alignés (dans le cas contraire, la solution est triviale), celle du problème (1) ne l'est pas nécessairement, que les points  $a_i$  soient alignés ou non. Cette fonction est simplement convexe. Toutefois, nous trouverons en annexe une condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction ne soit pas strictement convexe d'une part, et une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle n'ait pas de minimum unique d'autre part. De plus, un corollaire caractérise alors l'ensemble des minima. Les démonstrations de ces résultats ont été omises, on les trouvera dans [4].

Après avoir précisé en IV-2 les notations et les hypothèses suivies de quelques remarques et propositions, nous présentons en IV-3 l'algorithme I. La fonction d'itération de cet algorithme est univoque en tout point différent d'un sommet et multivoque en ces points où elle est discontinue.

Nous montrons la convergence vers un minimum de toute suite ainsi fournie par cet algorithme. Pour cela nous utilisons un résultat de Huard [11] et un lemme de convergence de suites.

En IV-4, nous définissons l'algorithme II dans lequel la fonction d'itération est univoque et continue en tout point. Cette fois la convergence est démontrée grâce au théorème de Zangwill [28] et au lemme précédemment évoqué.

Quand nous appliquons ces algorithmes au cas du problème (2), nous retrouvons les algorithmes proposés en [6].

Enfin en IV-5, comme il a déjà été dit, nous donnerons pour le problème (2) le troisième algorithme défini dans [6].

Bien entendu ce problème d'optimisation sans contraintes de fonction économique non différentiable sur un ensemble fini de points peut être résolu au moyen de méthodes générales telles que des méthodes de sous-gradients : Lemaréchal [18], Wolfe [27] ou des méthodes de séries divergentes : Poljak [21]. Ces méthodes fournissent des suites dont tout point d'accumulation est solution du problème posé.

Par contre les algorithmes I et II que nous proposons ici sont spécifiques du problème et comme nous l'avons déjà dit, ces algorithmes fournissent une suite de points qui converge vers une solution du problème. L'approche est totalement différente. L'idée générale de ces algorithmes est d'associer à la fonction économique, notée  $h$ , une famille de fonctions strictement convexes dont le paramètre décrit le domaine d'optimisation (privé des sommets pour le premier algorithme) et dont l'enveloppe inférieure est la fonction  $h$ . Ces fonctions sont telles que nous sachions calculer leur minimum qui est pris comme successeur du point paramètre.

## IV-2 LE PROBLÈME, LES NOTATIONS ET LES HYPOTHÈSES

Les données sont :

$m$  points  $a_i$  appelés sommets  $i \in J = \{1, 2, \dots, m\}$

$m$  fonctions  $\phi_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in J$

Nous noterons :

$d_i : x \rightarrow \|x - a_i\|$  où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne

$h : x \rightarrow \sum_{i \in J} \phi_i(d_i(x))$

Le problème est de trouver un  $\hat{x}$  tel que :

$$h(\hat{x}) = \text{Min} \{h(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Nous notons :  $A$  l'enveloppe convexe des sommets  $a_i$  et

$$\Delta_i = \sup_{x \in A} d_i(x) = \max_{i \in J} d_i(a_j).$$

Désignons par  $x \cdot y$  le produit scalaire de  $x$  par  $y$ .

Pour  $u \neq v$ , nous notons  $[u, v]$  le segment d'origine  $u$  et d'extrémité  $v$  et  $D[u, v]$  la droite contenant  $[u, v]$ .

Posons encore  $r_i = \inf \{t \geq 0 \mid \phi_i(t) > \phi_i(0)\}$ .

Si une fonction  $\phi_i$  est telle que  $r_i \geq \Delta_i$ , alors  $\phi_i \circ d_i$  est constante sur  $A$ , et ne joue aucun rôle dans la détermination des minima dans  $A$ . Par la suite nous ne considérerons donc que des fonctions  $\phi_i$  telles que  $r_i < \Delta_i$ .

Les fonctions  $\phi_i$  sont assujetties aux hypothèses suivantes :

(H1)  $\phi_i$  est convexe non décroissante sur  $[0, \Delta_i]$

(H2)  $\phi_i$  est dérivable sur  $[0, \Delta_i]$

(H3) La dérivée  $\phi_i'$  vérifie une condition de Lipschitz de constante

$$M_i' = M_i/2 : \forall t_1, t_2 \in [0, \Delta_i] : |\phi_i'(t_1) - \phi_i'(t_2)| \leq M_i' |t_1 - t_2|.$$

(H4) Pour tout  $t$  de  $]\Delta_i, \infty[$ , nous avons  $\phi_i(t) > \phi_i(\Delta_i)$ .

En fonction des valeurs de la dérivée  $\phi_i'$  à l'origine et des valeurs de  $r_i$ , nous partitionnons  $J$  en trois sous-ensembles :

a)  $P_1 = \{i \in J \mid \phi_i'(0) > 0 \text{ (} r_i = 0 \text{)}\}$

b)  $Q_1 = \{i \in J \mid \phi_i'(0) = 0 \text{ et } r_i = 0\}$

c)  $Q_2 = \{i \in J \mid \phi_i'(0) = 0 \text{ et } r_i > 0\}$

Pour  $i \in Q_1 \cup Q_2$  la fonction :  $x \rightarrow \phi_i(d_i(x))$  est partout différentiable, en particulier  $\nabla \phi_i(d_i(a_i)) = 0$ .

Pour  $i \in P_1$  la fonction :  $x \rightarrow \phi_i(d_i(x))$  n'est pas différentiable en  $a_i$ .

Dans  $A$  la fonction  $h$  est convexe mais non nécessairement strictement convexe. L'ensemble des minima de  $h$  est donc un ensemble convexe non réduit à un point en général.

Les hypothèses (H1) et (H2) entraînent que  $\phi_i'(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, \Delta_i]$ . L'hypothèse (H1) entraîne que  $\phi_i$  est strictement croissante dans  $[r_i, \Delta_i]$ .

Pour la suite, il est commode d'introduire les quantités suivantes :

pour tout  $x$  de  $A - \{a_j\}$  et tout  $j$  de  $J$  :

$$\cdot B_j(x) = \phi'_j(d_j(x)) / d_j(x)$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow a_j} B_j(x)$  est défini pour  $j \in P_1 \cup Q_2$ , nous pouvons étendre

par continuité cette définition en posant  $B_j(a_j) = 0$  si  $j \in Q_2$  et  $B_j(a_j) = \infty$  si  $j \in P_1$  ; pour  $j \in Q_1$  nous pouvons seulement affirmer, d'après (H3), que dans le voisinage de  $a_j$  le quotient  $\phi'_j(d_j(x)) / d_j(x)$  est majoré par  $M_j/2$ .

$$\cdot D_j(x) = \text{Max} (M_j, B_j(x))$$

et tenant compte de ce qui précède, posons pour  $j \in P_1$  :  $D_j(a_j) = \infty$

et pour  $j \in Q_1 \cup Q_2$  :  $D_j(a_j) = M_j$ .

$$\cdot A_j(x) = \text{Max} (0, M_j - B_j(x))$$

donc  $D_j(x) = A_j(x) + B_j(x)$

et pour  $j \in P_1$  posons :  $A_j(a_j) = 0$ ,  $j \in Q_2$  :  $A_j(a_j) = M_j$  et

pour  $j \in Q_1$ , d'après ce qui précède dans le voisinage de  $a_j$  on peut dire que  $A_j(x)$  est compris entre  $M_j/2$  et  $M_j$ .

Enfin introduisons également :

$$\text{pour } x \in A - \bigcup_{j \in P_1 \cup Q_1} \{a_j\} : B(x) = \sum_{j \in J} B_j(x)$$

$$\text{pour } x \in A - \bigcup_{j \in P_1} \{a_j\} : D(x) = \sum_{j \in J} D_j(x)$$

$$\text{pour } x \in A - \bigcup_{j \in Q_1} \{a_j\} : A(x) = \sum_{j \in J} A_j(x)$$

Pour  $x \neq a_k$ ,  $k \in P_1$ ,  $h$  est différentiable : donnons l'expression du gradient :  $\nabla h(x) = \sum_{i \in J} B_i(x) (x - a_i)$ .

Posons  $R_k(x) = \sum_{i \neq k} B_i(x) (a_i - x)$  et  $R_k = R_k(a_k)$ .

Pour  $k \in Q_1 \cup Q_2$ , nous avons  $\nabla h(a_k) = -R_k$ .

Définissons la forme quadratique suivante où  $x$  appartenant à  $A$  mais distinct d'un sommet  $a_k$  pour  $k \in P_1 \cup Q_1$  joue le rôle d'un paramètre tandis que  $y$  est la variable.

$$H : A \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Si  $x \neq a_k$ ,  $k \in P_1 \cup Q_1$  :

$$H : (x; y) \rightarrow h(x) + \sum_{i \in J} B_i(x) (d_i^2(y) - d_i^2(x)) / 2 + A(x) \|y - x\|^2 / 2.$$

Ajoutons quelques remarques sur les hypothèses faites.

Remarque 1 : D'après (H1) et (H4) nous pouvons nous limiter à rechercher un minimum de  $h$  dans  $A$ . En effet pour tout  $x$  du complémentaire de  $A$ , appelons  $y$  sa projection sur  $A$ . Alors pour tout  $i$  de  $J$  :  $d_i(y) < d_i(x)$  et d'après (H1) et (H4) :  $\phi_i(d_i(y)) \leq \phi_i(d_i(x))$ , par suite  $h(y) \leq h(x)$ .

Proposition 1 : L'ensemble des minima de  $h$  est inclus dans  $A$  si et seulement si l'intersection des boules  $B(a_i, r_i)$  est soit vide, soit contenue dans  $A$ .

Preuve : En effet s'il existe  $z \in A$  tel que pour tout point  $x$  du complémentaire de  $A$  nous ayons  $h(z) < h(x)$ , alors il existe un indice  $j \in J$

tel que  $\phi_j(d_j(z)) < \phi_j(d_j(x))$ . D'après la définition de  $r_j$  ceci implique :  $x \notin B(a_j, r_j)$  donc  $x \notin \bigcap_{i \in J} B(a_i, r_i)$ . Par suite  $\bigcap_{i \in J} B(a_i, r_i)$  est soit vide, soit contenue dans  $A$ .

Réciproquement si  $\bigcap_{i \in J} B(a_i, r_i)$  est soit vide, soit incluse dans  $A$  alors pour tout  $x$  du complémentaire de  $A$ , il existe  $i \in J$  tel que  $x \notin B(a_i, r_i)$ . Soit  $y$  la projection de  $x$  sur  $A$  : la croissance stricte de  $\phi_i$  sur  $[r_i, \Delta_i]$  et l'hypothèse (H4) impliquent :  $\phi_i(d_i(y)) < \phi_i(d_i(x))$  car  $d_i(y) < d_i(x)$ . D'autre part, nous avons toujours  $\phi_j(d_j(y)) \leq \phi_j(d_j(x))$ , pour tout  $j \neq i$ . Donc  $h(y) < h(x)$  : un point quelconque  $x$  du complémentaire ne peut être un minimum et l'ensemble des minima de  $h$  est inclus dans  $A$ .

Remarque 2 : Dans le cas où  $\bigcap_{i \in J} B(a_i, r_i) \neq \emptyset$ , cette intersection est l'ensemble des minima de  $h$ , car la valeur de  $h$  sur cet ensemble est

$$\sum_{i \in J} \phi_i(0).$$

Proposition 2 : Les fonctions  $D$  et  $D_i$  vérifient les propriétés suivantes :

i) Pour tout  $j$  de  $P_1$ , il existe un réel  $\rho_j > 0$  tel que pour tout  $x \in A$  nous ayons :  $D_j(x) > \rho_j$  ( $D_j(a_j) = \infty$ ).

ii) Pour tout  $j$  de  $Q_1 \cup Q_2$  nous avons  $D_j(x) = M_j$

iii) Pour tout  $x$  de  $A$  nous avons  $D(x) \geq \sum_{j \in Q_1 \cup Q_2} M_j + \sum_{j \in P_1} \rho_j > 0$

iv)  $D$  est continue sur  $A - \bigcup_{j \in P_1} \{a_j\}$ .

Preuve :

i) Supposons le contraire :  $\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A - \{a_j\}$  tel que  $D_j(x_\epsilon) \leq \epsilon$ .  
 Nous en déduisons que  $M_j \leq \epsilon$  (d'où  $M_j = 0$ ) et  $\phi_j'(d_j(x_\epsilon)) \leq \epsilon d_j(x_\epsilon)$ .

Mais  $M_j = 0$  et (H3) impliquent  $\phi_j'(d_j(x)) = \phi_j'(0)$  pour tout  $x$  de  $A$ .  
 Donc  $\phi_j'(0) \leq \epsilon d_j(x_\epsilon) \leq \epsilon \Delta_j$  d'où  $\phi_j'(0) = 0$ , ce qui est impossible si  $j \in P_1$ .

ii) Pour  $j \in Q_1 \cup Q_2$ , l'hypothèse (H3) entraîne :  $\phi_j'(d_j(x)) < (M_j/2) d_j(x)$   
 et par suite  $D_j(x) = \text{Max}(M_j, M_j/2) = M_j$ .

iii) Pour  $x \neq a_j, j \in P_1$  :  $D(x) = \sum_{j \in Q_1 \cup Q_2} D_j(x) + \sum_{j \in P_1} D_j(x) \geq$   
 $\sum_{j \in Q_1 \cup Q_2} M_j + \sum_{j \in P_1} \rho_j$ .

Comme  $\rho_j < \Delta_j$  alors chaque  $M_j$  et chaque  $\rho_j$  sont strictement positifs.  
 Enfin pour  $j \in P_1$ , nous avons  $D_j(a_j) = \infty$ .

iv) Pour  $x \in A - \bigcup_{j \in P_1} \{a_j\}$ , nous obtenons  $D(x) = \sum_{j \in Q_1 \cup Q_2} M_j + \sum_{j \in P_1} D_j(x)$

et  $D_j$  pour  $j \in P_1$  est continue sauf en  $x = a_j$ .

## IV-3 ALGORITHME I

## IV.3.1 - Fonction d'itération et algorithme I

La fonction d'itération est univoque en tout point différent d'un sommet  $a_k$  pour  $k \in P_1 \cup Q_1$ . En ces sommets, elle est multivoque et ne présente aucune propriété de continuité.

Définissons les directions améliorantes en ces sommets, i.e. les directions  $u$  de  $\mathbb{R}^n$  ayant la propriété suivante : il existe  $\eta > 0$  tel que  $h(a_k + \eta u) < h(a_k)$ .

La fonction  $h$  est convexe dans  $A$  ; pour  $k \in P_1$ , elle n'est pas différentiable en  $a_k$  mais elle admet en ce point un sous-différentiel noté  $\partial h(a_k)$  qui n'est autre que la boule fermée de centre  $-R_k$  et de rayon  $\phi'_k(0)$ .

Puisqu'il est équivalent d'écrire  $\|R_k\| \leq \phi'_k(0)$  ou  $0 \in \partial h(a_k)$ , le sommet  $a_k$  est un minimum si et seulement si  $\|R_k\| \leq \phi'_k(0)$ .

Dans le cas contraire :  $\|R_k\| > \phi'_k(0)$  ; déterminons alors toutes les directions améliorantes pour  $h$ , en ce sommet  $a_k$ . Nous savons que l'ensemble de ces directions n'est autre que celui qui est défini par l'intérieur du cône polaire négatif du cône engendré par le sous-différentiel  $\partial h(a_k)$  (cf. proposition A2 [6] et Laurent [17, p.383]) i.e. :  $\{u \in \mathbb{R}^n \mid R_k \cdot u / \|u\| > \phi'_k(0)\} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u = tv, t > 0, v \in B_0\}$  où  $B_0$  est la boule ouverte de centre  $R_k$  et de rayon  $[\|R_k\|^2 - (\phi'_k(0))^2]^{1/2}$ .

Par suite  $\{z \in \mathbb{R}^n \mid h(z) < h(a_k)\} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = a_k + tv, t > 0, v \in B_0 \text{ tel que } h(z) < h(a_k)\}$ . Le successeur de  $a_k$  sera un point de  $A$  appartenant à ce sous-ensemble.

De manière semblable, bien que  $h$  soit différentiable en  $a_k$  pour  $k \in Q_1$ , nous prendrons comme successeur de ce point un point de  $A$  appartenant au sous-ensemble  $\{z \in \mathbb{R}^n \mid h(z) < h(a_k)\} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = a_k + tv, t > 0 \text{ et } v \text{ tel que } v \cdot R_k > 0\}$ .

### Fonction d'itération

(IV.3.1.a) Si  $x \in A$  et  $x \neq a_k, k \in P_1 \cup Q_1$

$$\Gamma : x \rightarrow \left( \sum_{i \in J} B_i(x) a_i + A(x) x \right) / D(x)$$

(IV.3.1.b) Si  $x = a_k, k \in P_1$  et  $\|R_k\| > \phi'_k(0)$

$$\Gamma : x \rightarrow \{z \in A \mid z = a_k + tv, t > 0, v \in B_0 \text{ tel que } h(z) < h(a_k)\}$$

(IV.3.1.c) Si  $x = a_k, k \in Q_1$  et  $\|R_k\| > 0$

$$\Gamma : x \rightarrow \{z \in A \mid z = a_k + tv, v \text{ tel que } v \cdot R_k > 0 \text{ et } t > 0 \text{ tel que } h(z) < h(a_k)\} \quad \square$$

Notons que (IV.3.1.a) s'écrit encore :

$$(IV.3.1.a') \quad \Gamma : x \rightarrow x - \nabla h(x) / D(x)$$

ou

$$(IV.3.1.a'') \quad \Gamma : x \rightarrow (B(x) b(x) + A(x) x) / D(x)$$

où  $b(x) = \frac{\sum_{i \in J} B_i(x) a_i}{\sum_{i \in J} B_i(x)}$ . C'est-à-dire que  $\Gamma(x)$  est un barycentre du point  $x$  et du point  $b(x)$ , point proposé comme successeur de  $x$  dans [12].

### Algorithme I

- 1-  $p = 1$ ,  $\frac{1}{x}$  donné dans  $A$ , par exemple  $\frac{1}{x} = \sum_{i \in J} a_i / m$ .
- 2- S'il existe  $k$  tel que  $\frac{p}{x} = a_k$   
 alors : si  $\|R_k\| \leq \phi'_k(0)$  alors stop :  $\hat{x} = a_k$   
 sinon prendre  $\frac{p+1}{x}$  dans  $\Gamma(a_k)$   
 sinon : calculer  $\frac{p+1}{x}$  d'après (3.1.a)  
 si  $\frac{p+1}{x} = \frac{p}{x}$  alors stop  $\hat{x} = \frac{p}{x}$
- 3-  $p = p+1$ , aller en 2.

Bien que l'ensemble des minima ne soit pas nécessairement réduit à un point, nous démontrerons la convergence de toute suite fournie par cet algorithme vers un minimum de  $h$ .

Pour cela nous donnerons en :

- IV.3.2 des propriétés de  $H$
- IV.3.3 un lemme de stricte décroissance locale
- IV.3.4 un rappel d'un théorème de convergence
- IV.3.5 un lemme de convergence de suite.

Remarque 3 : Dans le problème de Fermat-Weber généralisé (2) la fonction  $\phi_i$  est linéaire et alors la constante de Lipschitz  $M_i'$  de (H3) est nulle. L'itération définie par (IV.3.1.a) s'identifie avec celle que propose Weiszfeld [25] tandis que l'ensemble des successeurs de  $a_k$  défini par (IV.3.1.b) ( $P_1 = J$ ) est le même que celui proposé pour l'algorithme I de [6]. Un choix particulier dans ce dernier sous-ensemble a été utilisé dans [5] et [10].

#### IV.3.2 - Propriétés de H

Dans la suite les dérivées sont calculées par rapport à  $y$  :  
c'est la signification de  $\nabla H(x;y)$ .

Nous avons les propriétés suivantes :

(IV.3.2.a) D'après la définition des  $A_i$ , sous les hypothèses (H1) et (H2), H est une fonction quadratique strictement convexe.

Pour  $x \in A$  et  $x \neq a_k$ ,  $k \in P_1 \cup Q_1$  :

(IV.3.2.b)  $H(x;x) = h(x)$

(IV.3.2.c) H est différentiable pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$

$$\nabla H(x;y) = \sum_{i \in J} B_i(x)(y-a_i) + A(x)(y-x)$$

(IV.3.2.d)  $\nabla H(x;x) = \nabla h(x)$

(IV.3.2.e) D'après la définition des  $A_i$ , sous l'hypothèse (H3), nous avons :

$$H(x;y) \geq h(y) \text{ pour tout } y \text{ de } \mathbb{R}^n.$$

Preuve : Si nous posons pour tout  $i \in J$

$$T_i(x;y) = \phi_i(d_i(x)) - \phi_i(d_i(y)) - \phi_i'(d_i(y))(d_i(x) - d_i(y))$$

$$U_i(x;y) = 2(\phi_i'(d_i(x)) - \phi_i'(d_i(y)))(d_i(y) - d_i(x)) + M_i(d_i(x) - d_i(y))^2$$

$$V_i(x;y) = (A_i(x) - M_i + B_i(x))(d_i(y) - d_i(x))^2 = (D_i(x) - M_i)(d_i(y) - d_i(x))^2$$

$$W_i(x;y) = \|x-y\|^2 - (d_i(x) - d_i(y))^2$$

$$\text{et } P_i(x;y) = T_i(x;y) + [U_i(x;y) + V_i(x;y) + A_i(x) W_i(x;y)]/2$$

un calcul montre que :

$$H(x;y) - h(y) = \sum_{i \in J} P_i(x;y)$$

Les quantités  $T_i(x;y)$ ,  $U_i(x;y)$ ,  $V_i(x;y)$  et  $W_i(x;y)$  sont toutes positives ou nulles. En effet, la convexité de  $\phi_i$  entraîne la positivité de  $T_i(x;y)$ , l'hypothèse (H3) assure la positivité de  $U_i(x;y)$ , la définition de  $D_i(x)$  assure la positivité de  $V_i(x;y)$  et enfin l'inégalité triangulaire de la norme implique celle de  $W_i(x;y)$ .  $\square$

(IV.3.2.f)  $H(x;.)$  a un minimum unique (d'après (IV.3.2.a)). Ce minimum n'est autre que  $\Gamma(x)$  donné par (IV.3.1.a).

## IV.3.3 - Lemme

Soit  $k \in P_1 \cup Q_1$  tel que  $\|R_k\| > \phi'_k(0)$ , alors il existe une boule de centre  $a_k$  et de rayon  $\rho_1$  telle que pour tout  $x$  de cette boule,  $x$  différent de  $a_k$ , nous ayons :  $h(\Gamma(x)) < h(a_k)$ .

Preuve : Nous la ferons de manière indépendante pour  $k \in P_1$  et  $k \in Q_1$ .

1-  $k \in P_1$ . La différence  $a_k - \Gamma(x)$  s'écrit sous la forme  $g_k(x)/D(x)$  où  $g_k(x) = -R_k(x) + (\sum_{i \neq k} B_i(x) + A(x))(a_k - x)$ . Puisque  $g_k(x)$  tend vers  $R_k$  et  $D(x)$  vers l'infini lorsque  $x$  tend vers  $a_k$ , nous avons  $\lim_{x \rightarrow a_k} \Gamma(x) = a_k$ . Il existe donc une boule  $B(a_k, \rho')$  dont l'image par  $\Gamma$  ne contient pas d'autre sommet que  $a_k$ . Grâce à la formule de Taylor la différence  $h(a_k) - h(\Gamma(x))$  se met sous la forme  $W_k(x)/D(x)$  avec  $W_k(x) = -R_k(a_k + \theta[\Gamma(x) - a_k]) \cdot g_k(x) - [\phi_k(d_k(\Gamma(x))) - \phi_k(0)] \|g_k(x)\|/d_k(\Gamma(x))$  où  $\theta$  (dépendant de  $x$ ), appartient à  $]0,1[$ .

Lorsque  $x$  tend vers  $a_k$ ,  $W_k(x)$  tend vers  $\|R_k\| (\|R_k\| - \phi'_k(0)) > 0$  car  $\theta$  est borné et  $\theta(\Gamma(x) - a_k)$  tend vers 0. Il existe donc une boule  $B(a_k, \rho_1) \subset B(a_k, \rho')$  dans laquelle la valeur de  $W_k(x)$  reste positive et la stricte positivité de  $D(x)$  complète la preuve.

2-  $k \in Q_1$ . Puisque  $H(x;y)$  est une forme quadratique dont le minimum est atteint pour  $y = \Gamma(x)$ , nous avons :  $H(x;x) - H(x;\Gamma(x)) = D(x)\|x - \Gamma(x)\|^2/2$ . Grâce à (IV.3.2.b), (IV.3.2.e) et (IV.3.1.a') :

$$h(x) - h(\Gamma(x)) \geq \|\nabla h(x)\|^2/(2D(x)), \text{ ou encore } h(\Gamma(x)) \leq h(x) - \|\nabla h(x)\|^2/2D(x).$$

D'après la proposition 2, iv),  $D$  est continue dans un voisinage de  $a_k$  pour  $k \in Q_1$  et comme  $D(a_k) > 0$  (iii), la fonction  $\tilde{g} : x \rightarrow h(x) - \|\nabla h(x)\|^2 / 2D(x)$  l'est également. Sa valeur pour  $x = a_k$  est  $h(a_k) - \|R_k\|^2 / 2D(a_k)$ . Comme  $\|R_k\| > 0$  cette valeur est strictement plus petite que  $h(a_k)$ . Par suite, d'après la continuité de  $\tilde{g}$ , il existe une boule  $B(a_k, \rho_1)$  telle que pour tout  $x$  de cette boule, nous ayons :  $h(\Gamma(x)) < h(a_k)$ .  $\square$

#### IV.3.4 - Un théorème de convergence

Ce théorème dû à Huard [11] est une extension d'un résultat de Polak [20].

Théorème : Soient  $E$  un fermé de  $\mathbb{R}^n$ ,  $P$  un sous-ensemble de  $E$ ,  $F$  une application multivoque,  $h$  une fonction tels que :

( $\alpha$ )  $F : E - P \rightarrow \mathcal{P}(E)$  tel que  $\forall x \in E - P : F(x) \neq \emptyset$

( $\beta$ )  $h : E - P \rightarrow \mathbb{R}$  semi-continue inférieurement sur  $E - P$

( $\gamma$ )  $\forall x \in E - P, \exists V(x)$  tel que  $\forall t \in V(x), \forall z \in F(t) \implies h(z) < h(x)$   
 $V(x)$  est un voisinage de  $x$  relativement à  $E$ .

Considérons une suite  $(\overset{k}{x})$  définie pour tout  $k \in \mathbb{N}$  par  $\overset{k+1}{x} \in F(\overset{k}{x})$  si  $\overset{k}{x} \notin P, \overset{k+1}{x} = \overset{k}{x}$  sinon.

Alors sous toutes les conditions ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ) tout point d'accumulation  $\overset{*}{x}$  de  $(\overset{k}{x})$  est dans  $P$ .

Remarque 4 : Au contraire du théorème classique de Zangwill [28, p.91] aucune propriété de continuité n'est demandée à F.

#### IV.3.5 - Un lemme de convergence de suite

Comme nous le signalons dans l'introduction, dans la majorité des problèmes de minimisation où l'ensemble des minima n'est pas réduit à un point, les algorithmes fournissent des suites dont tout point d'accumulation est un minimum et non des suites convergeant vers un tel minimum. En fait cet inconvénient n'est pas essentiellement lié aux algorithmes mais plutôt aux outils dont nous disposons pour étudier la convergence. Les outils tels que les théorèmes généraux de Zangwill, Polak ou Huard s'appuient sur des hypothèses relativement faibles ne prenant en compte qu'une partie des propriétés des algorithmes et ne peuvent naturellement pas conduire à un résultat aussi précis que la convergence d'une suite. Il est utile de leur adjoindre des résultats qui prennent en compte des particularités plus spécifiques des algorithmes et qui, parce qu'ils seront d'une utilisation moins générale, conduiront à des résultats plus précis. Le lemme suivant qui s'applique à une fonction convexe (mais non strictement) montre que sous certaines hypothèses, un algorithme converge vers un minimum.

Ce lemme sera appliqué avec profit aussi bien à l'algorithme I qui nous concerne ici qu'à l'algorithme II que nous présenterons dans le paragraphe suivant.

Dans les deux cas, son utilisation fera suite à celle d'un théorème général (Huard pour l'algorithme I, Zangwill pour l'algorithme II) dont il viendra préciser les conclusions en montrant que la suite fournie par l'algorithme converge vers un minimum alors que le théorème général établissait seulement que tout point d'accumulation de la suite était un minimum.

Lemme : Soit  $h$  une fonction convexe de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . Si la suite  $(\overset{k}{x})$  contenue dans un compact  $E_0$  vérifie :

$$i) \quad \overset{k+1}{x} = \overset{k}{x} - \lambda_k \ell_k \text{ où } \ell_k \in \partial h(\overset{k}{x}) \text{ et } \lambda_k > 0$$

$$ii) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|\overset{k+1}{x} - \overset{k}{x}\|^2 < +\infty$$

iii) tout point d'accumulation de  $(\overset{k}{x})$  est un minimum de  $h$   
alors la suite  $(\overset{k}{x})$  converge vers un minimum de  $h$ .  $\square$

Preuve : Soit  $u$  un point d'accumulation de la suite  $(\overset{k}{x})$ . Puisque  $u$  est un minimum de  $h$  et que  $h$  est convexe, deux points successifs de la suite  $\overset{k}{x}$  et  $\overset{k+1}{x}$  vérifient donc :

$$0 \geq h(u) - h(\overset{k}{x}) \geq \ell_k \cdot (u - \overset{k}{x}) \text{ où } \ell_k \in \partial h(\overset{k}{x})$$

Alors  $\overset{k+1}{x} - \overset{k}{x} = -\lambda_k \ell_k$  implique :  $-(u - \overset{k}{x}) \cdot (\overset{k+1}{x} - \overset{k}{x}) \leq 0$ , d'où

$$\|u - \overset{k+1}{x}\|^2 \leq \|u - \overset{k}{x}\|^2 + \|\overset{k+1}{x} - \overset{k}{x}\|^2.$$

Ce qui entraîne pour tout  $m < k$  :  $\|u - \overset{k}{x}\|^2 \leq \|u - \overset{m}{x}\|^2 + \sum_{i=m}^{k+1} \|\overset{i+1}{x} - \overset{i}{x}\|^2$ .

Puisque la série de terme général  $(\|x^{k+1} - x^k\|^2)$  converge :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que, } \forall k > m \geq N(\varepsilon) \implies \sum_{i=m}^{k-1} \|x^{i+1} - x^i\|^2 < \varepsilon/2$$

$$\text{donc } \|u - x^k\|^2 - \|u - x^m\|^2 \leq \varepsilon/2.$$

Comme  $u$  est un point d'accumulation

$$\exists p > N(\varepsilon) \text{ tel que } \|u - x^p\| \leq (\varepsilon/2)^{1/2}.$$

Pour  $m = p$ , nous obtenons :

$$\|u - x^k\|^2 \leq \varepsilon/2 + \|u - x^p\|^2 \leq \varepsilon, \text{ pour tout } k > p = m.$$

$$\text{Donc } \forall \varepsilon > 0, \exists p = m(\varepsilon) \text{ tel que pour tout } k > p \implies \|u - x^k\|^2 \leq \varepsilon.$$

Nous obtenons bien la convergence de la suite  $(x^k)$  vers  $u$  qui est un minimum de  $h$ .  $\square$

Nous pouvons remarquer que dans ce lemme, nous n'exigeons pas que le paramètre  $\lambda_k > 0$  soit celui qui donne le meilleur successeur possible dans la direction opposée du sous-gradient, ni même que le successeur  $x^{k+1}$  soit meilleur que le point  $x^k$ .

#### IV.3.6 - Convergence de l'algorithme I

Théorème : La suite  $(x^k)$  définie par l'algorithme I converge vers un minimum de  $h$  ; un minimum peut être obtenu en un nombre fini  $p$  d'étapes dans les deux cas suivants :

a)  $\frac{p}{x} = a_k$  et pour ce  $k$  :  $\|R_k\| \leq \phi'_k(0)$  alors  $a_k$  est un minimum

b) si  $\frac{p}{x} \neq a_k, k \in P_1$  et si  $\frac{p+1}{x} = \frac{p}{x}$  alors  $\frac{p}{x}$  est un minimum.

Preuve : Les cas finis a) et b) résultent immédiatement du fait que respectivement  $\|R_k\| \leq \phi'_k(0)$  et  $P_{\bar{x}}^{+1} = \bar{x} \neq a_k, k \in P_1$ , sont équivalents à  $0 \in \partial h(a_k)$  et  $\nabla h(\bar{x}) = 0$ .

Ces deux cas finis mis à part, la suite  $(\bar{x}^p)$  a une infinité de valeurs distinctes ; pour montrer que la suite converge vers un minimum, nous procéderons en deux étapes :

S1 : Dans une première étape, nous utiliserons le théorème IV.3.4 pour montrer que tout point d'accumulation de la suite est un minimum de  $h$ .

Pour appliquer ce théorème, nous choisissons :

- comme ensemble  $E$ , l'ensemble compact  $A$  : d'après (IV.3.1.a) et (IV.3.1.b) tous les itérés sont dans  $A$  dès que  $\bar{x}^1 \in A$
- comme ensemble privilégié  $P$ , l'ensemble des minima de  $h$  (dans  $\mathbf{R}^n$ ) contenu dans  $A$ . D'après la remarque 1, cet ensemble n'est pas vide.
- comme application  $F$  l'application multivoque  $\Gamma$  définie en IV.3.1.
- comme fonction  $h$ , la fonction à minimiser : elle est continue.

Pour vérifier l'hypothèse  $(\gamma)$  nous distinguerons deux cas :

$(\gamma_a)$  :  $x$  différent d'un sommet.

Pour  $x \neq a_k$ ,  $k \in P_1 \cup Q_1$  la fonction  $H$  est strictement convexe et d'après (IV.3.2.f) possède un minimum unique qui n'est autre que  $\Gamma(x)$  donné par (IV.3.1.a). Puisque  $x \notin P$  nous avons  $\forall h(x) \neq 0$  et d'après (IV.3.2.d) nous en déduisons  $\nabla H(x;x) \neq 0$ ;  $\Gamma(x)$  étant le minimum de  $H(x;.)$ , nous avons :  $H(x;\Gamma(x)) < H(x;x)$ . En utilisant (IV.3.2.b) et (IV.3.2.e) nous obtenons  $h(\Gamma(x)) < h(x)$ .

Puisque  $h \circ \Gamma$  est univoque et continue dans un voisinage de  $x$  qui ne contient aucun sommet  $a_k$  ( $k \in P_1 \cup Q_1$ ), il existe un voisinage de  $x$  noté  $V(x)$  tel que : pour tout  $t$  de  $V(x)$  nous avons  $h(\Gamma(t)) < h(x)$ .

$(Y_h)$  :  $x = a_k$ ,  $k \in P_1 \cup Q_1$

Puisque  $x \notin P$ , nous avons  $\|R_k\| > \phi'_k(0)$ . Par définition de  $\Gamma(a_k)$  nous avons :  $z \in \Gamma(a_k) \implies h(z) < h(a_k)$ , tandis que le lemme IV.3.3 permet de conclure à l'existence d'un voisinage  $V(a_k)$  tel que  $x \in V(a_k) - \{a_k\} \implies h(\Gamma(x)) < h(a_k)$ .

Les hypothèses du théorème étant satisfaites, nous sommes assurés du fait que tout point d'accumulation de  $(\overset{P}{x})$  est dans  $P$  c'est-à-dire est un minimum de  $h$  dans  $\mathbb{R}^n$  contenu dans  $A$ .

S2 : Montrons maintenant que la suite  $(\overset{P}{x})$  est convergente vers un minimum de  $h$ ; pour cela utilisons le lemme IV.3.5.

Notons  $I$  l'ensemble des indices des éléments de la suite  $(\overset{P}{x})$  qui sont des sommets. La décroissance stricte de la suite  $h(\overset{P}{x})$  implique qu'un sommet ne peut être rencontré qu'une fois au plus. L'ensemble  $I$  étant fini, à partir d'un certain rang  $N_1$  la suite ne contient plus de sommets  $a_k$ ,

$k \in P_1 \cup Q_1$  et d'après (IV.3.1.a') nous avons i)  $P_x^{+1} = \frac{P}{x} - \lambda_p \nabla h(\frac{P}{x})$   
avec  $\lambda_p = 1/D(\frac{P}{x}) > 0$  (proposition 2).

Vérifions ii) : pour  $x \neq a_k$ ,  $k \in P_1 \cup Q_1$ , nous avons :

$h(x) - h(\Gamma(x)) \geq H(x;x) - H(x;\Gamma(x))$ . La formule de Taylor appliquée à  
H au voisinage de  $\Gamma(x)$  donne :  $H(x;x) - H(x;\Gamma(x)) = \|x - \Gamma(x)\|^2 D(x)/2$ .

D'après la proposition 2, il existe  $\rho > 0$  tel que  $D(x) > \rho$  et par  
suite pour tout  $\frac{P}{x}$  distinct d'un sommet (donc pour tout  $p > N_1$ ) :

$$h(\frac{P}{x}) - h(P_x^{+1}) \geq \|\frac{P}{x} - P_x^{+1}\|^2 \rho/2.$$

La suite  $h(\frac{P}{x})$  étant décroissante et bornée inférieurement, elle  
converge, ce qui entraîne la convergence de la série de terme général  
 $\|\frac{P}{x} - P_x^{+1}\|^2$ .

Le troisième point du lemme IV.3.5 ayant été établi dans la première  
partie de cette démonstration, la convergence de la suite  $(\frac{P}{x})$  vers un  
minimum de h est établie.  $\square$

Remarque 5 : Nous pouvons donner à la partie S2 de la démonstration une  
autre présentation en considérant tous les éléments de la suite y compris  
les sommets. Toutefois, pour obtenir i) nous devons restreindre le choix  
des points meilleurs (formules (IV.3.1.b) ou (IV.3.1.c)) aux directions  
 $v \in B_0 \cap B_1$  où  $B_1 = -\partial h(a_k)$  (i.e. la boule fermée de centre  $R_k$  et de  
rayon  $\phi'_k(0)$ ).

## IV-4 ALGORITHME II

D'après la remarque 1, nous pouvons nous limiter à rechercher un minimum de  $h$  (dans  $\mathbb{R}^n$ ) contenu dans  $A$ . Si le point initial est pris dans  $A$ , tous les points de la suite fournie par l'algorithme II seront dans  $A$ . Ainsi nous pouvons nous restreindre à  $A$  pour établir toutes les propriétés des fonctions dont nous aurons besoin.

Au contraire de l'algorithme I, la fonction d'itération définie en IV.4.2 est univoque et continue sur  $A$ .

Pour  $k \in P_1 \cup Q_1$ , définissons les quantités suivantes :

•  $\delta'_k = \text{Min}_{i \neq k} d_i(a_k)/2$

• Si  $\|R_k\| > \phi'_k(0)$  posons :

$$\delta''_k = (\|R_k\| - \phi'_k(0)) / \left[ \sum_{i \neq k} \{ \phi'_i(0) / (d_i(a_k) - \delta'_i) + 2M_i \} + 3M_k/2 \right]$$

•  $B_k$  : boule ouverte de centre  $a_k$  et de rayon  $\delta_k = \text{Min}(\delta'_k, \delta''_k)$ .

Pour  $k \in Q_2$ , nous posons  $\delta_k = 0$ .

Pour  $x \in \bar{B}_k$ , posons  $\lambda_k(x) = (d_k(x)/\delta_k)^{1+\varepsilon}$  où  $\varepsilon > 0$ .

Posons également :

$$\begin{aligned} E_k(x) &= \lambda_k(x) \sum_{i \in J} A_i(x) + (1 - \lambda_k(x)) \left( \sum_{i \neq k} A_i(x) + M_k \right) \\ &= \sum_{i \neq k} A_i(x) + \lambda_k(x) A_k(x) + (1 - \lambda_k(x)) M_k \end{aligned}$$

BUS  
LILLE

$$S_k(x) = \sum_{i \neq k} B_i(x)(a_i - a_k) ; \text{ nous avons } S_k(a_k) = R_k$$

$$Z_k(x) = S_k(x) + E_k(x)(x - a_k).$$

IV.4.1 - Lemme : *S'il existe un  $k \in P_1 \cup Q_1$  tel que  $\|R_k\| > \phi'_k(0)$  alors pour tout  $x$  de  $B_k$  nous avons :  $\|Z_k(x)\| > \phi'_k(d_k(x))$ .*

Preuve : D'après la définition de  $S_k(x)$  et  $Z_k(x)$ , nous avons :

$$\|Z_k(x)\| \geq \|R_k\| - \|S_k(x) - S_k(a_k)\| - E_k(x) \|x - a_k\|.$$

$$\text{Or } \|S_k(x) - S_k(a_k)\| \leq \sum_{i \neq k} |B_i(x) - B_i(a_k)| d_i(a_k).$$

Compte tenu de l'hypothèse (H3) et de l'inégalité

$$B_i(x) = \phi'_i(d_i(x)) / d_i(x) \leq \phi'_i(0) / d_i(x) + M_i/2$$

qui en découle, nous avons :

$$\begin{aligned} |B_i(x) - B_i(a_k)| &= |B_i(x)(d_i(a_k) - d_i(x)) + \phi'_i(d_i(x)) - \phi'_i(d_i(a_k))| / d_i(a_k) \\ &\leq (\phi'_i(0) / d_i(x) + M_i) |d_i(x) - d_i(a_k)| / d_i(a_k). \end{aligned}$$

Puisque  $|d_i(x) - d_i(a_k)| \leq d_k(x)$  et  $d_i(x) \geq d_i(a_k) - \delta'_k$ , il vient :

$$\|S_k(x) - S_k(a_k)\| \leq \sum_{i \neq k} (\phi'_i(0) / (d_i(a_k) - \delta'_k) + M_i) d_k(x).$$

Comme  $A_i(x) \leq M_i$  implique :  $E_k(x) \|x - a_k\| \leq (\sum_{i \in J} M_i) d_k(x)$ ,

et que  $\phi'_k(d_k(x)) - \phi'_k(0) \leq M_k d_k(x)/2$  nous obtenons :

$$\|Z_k\| - \phi'_k(d_k(x)) \geq \|R_k\| - \phi'_k(0) - Q_k d_k(x)$$

$$\text{où } Q_k = \sum_{i \neq k} [\phi'_i(0) / (d_i(a_k) - \delta'_k) + 2M_i] + 3M_k/2.$$

Et pour  $x$  appartenant à  $B_k$ , nous avons bien :  $\|Z_k(x)\| > \phi'_k(d_k(x))$ .  $\square$

## IV.4.2 - Fonction d'itération et algorithme II

Pour  $x \in A \cap \bigcup_{k \in P_1 \cup Q_1} B_k$  :

$$(IV.4.2.a) \quad f(x) = \left\{ \sum_{i \in J} B_i(x) a_i + A(x) x \right\} / D(x)$$

Pour  $x \in \bar{B}_k, k \in P_1 \cup Q_1$  :

$$(IV.4.2.b) \quad f(x) = a_k + \left\{ [1 - F_k(x) / \|Z_k(x)\|] / C_k(x) \right\} Z_k(x)$$

$$\text{où } F_k(x) = \phi'_k(d_k(x)) (1 - \lambda_k(x))$$

$$\text{et } C_k(x) = \sum_{i \neq k} B_i(x) + E_k(x) + \lambda_k(x) B_k(x)$$

- $f$  est une application de  $A$  dans  $A$  : pour tout  $x$  de  $A$ ,  $f(x)$  appartient à  $A$  car c'est un barycentre de  $x$  et des sommets  $a_i, i \in J$ . Pour (IV.4.2.a) c'est immédiat, pour (IV.4.2.b) il suffit de réécrire  $f(x)$  sous la forme :

$$f(x) = \left( (1 - F_k(x) / \|Z_k(x)\|) \left( \sum_{i \neq k} B_i(x) a_i + E_k(x) x + \lambda_k(x) B_k(x) a_k \right) / C_k(x) + (F_k(x) / \|Z_k(x)\|) a_k \right)$$

- $f$  est continue sur  $A$  : il est clair que les applications définies par (IV.4.2.a) et (IV.4.2.b) sont continues dans leurs domaines respectifs de définition. De plus sur la frontière de  $B_k \cap A$ , les applications définies par (IV.4.2.a) et (IV.4.2.b) coïncident.

Afin de justifier la partie 2 dans l'algorithme II et préciser les calculs nécessaires à une itération, il est utile de faire la remarque suivante :

Remarque 6 : Pour un point  $x$  de  $A$  donné, seul le calcul du rayon  $\delta_k$  de la boule dont le centre est le sommet le plus proche est nécessaire.

En effet le calcul des  $d_i(x)$  donne le sommet  $a_k$  le plus proche de  $x$ . Pour ce sommet  $a_k$ , nous calculons le rayon  $\delta_k$  de la boule  $B_k$ .

Si  $\|x - a_k\| > \delta_k$  alors  $x \notin \bigcup_{p \in J} B_p$ .

En effet, remarquons que pour tout sommet  $a_p$ ,  $p \neq k$  nous avons :

$\|x - a_k\| \leq \|x - a_p\|$  et  $\|a_k - a_p\| \leq \|a_k - x\| + \|x - a_p\|$ . Donc :

$\delta_p < \|a_k - a_p\|/2 \leq \|x - a_p\|$ . L'égalité n'ayant lieu que si  $x \in [a_k, a_p]$  et

$\delta_p = \|a_k - a_p\|/2$ . Par suite  $x \notin B_p$  et ceci pour tout  $p \neq k$ .  $\square$

### Algorithme II

1-  $p = 1$ ,  $\bar{x}$  donné dans  $A$ , par exemple  $\bar{x} = \sum_{i \in J} a_i/m$ .

2- Choisir le sommet  $a_k$ ,  $k \in P_1 \cup Q_1$  le plus proche de  $\bar{x}$

si  $\|R_k\| \leq \phi'_k(0)$  alors stop  $\hat{x} = a_k$

si  $\|\bar{x} - a_k\| < \delta_k$  alors calculer  $P_{\bar{x}}^{p+1}$  selon (IV.4.2.b)

sinon calculer  $P_{\bar{x}}^{p+1}$  selon (IV.4.2.a)

si  $P_{\bar{x}}^{p+1} = \bar{x}$  alors stop :  $\hat{x} = \bar{x}$ .

3-  $p = p+1$ , aller en 2.

Remarque 7 : Dans le cas du problème de Fermat-Weber généralisé (2) l'algorithme II s'identifie avec l'algorithme II proposé en [6].

Comme pour l'algorithme I, l'idée consiste à définir pour tout point  $x$  de  $A$  une fonction élémentaire majorante et tangente à la fonction  $h$  dont le minimum est pris comme successeur de  $x$  (formules (IV.4.2.a) et (IV.4.2.b)).

Cette fonction élémentaire majorante et tangente à  $h$  en  $x$  est quadratique pour  $x \notin \bigcup_{k \in P_1 \cup Q_1} B_k$ , quadratique "corrigée" pour  $x \in B_k$ ,  $k \in P_1 \cup Q_1$ . La correction dans le deuxième cas a pour but de faire intervenir la non différentiabilité de  $h$  au point  $a_k$  de façon que la fonction élémentaire tangente épouse mieux la fonction  $h$  au voisinage de  $a_k$ .

Avant d'établir la convergence, donnons quelques résultats préliminaires sur la fonction d'interpolation de  $h$  en  $a_k$ .

#### IV.4.3 - Résultats préliminaires

Introduisons la fonction  $K$  suivante où le premier argument  $x$  est un paramètre et le second  $y$  la variable

$$K : A \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \in A \cap B_k, k \in P_1 \cup Q_1 \implies K(x;y) = K_k(x;y)$$

$$x \in A \cap \left( \bigcup_{k \in P_1 \cup Q_1} B_k \right) \implies K(x;y) = H(x;y)$$

$K_k$  est définie par :

$$(IV.4.3.1) \quad K_k(x;y) = \lambda_k(x) H(x;y) + (1-\lambda_k(x)) J_k(x;y)$$

où  $J_k$  est définie pour  $x \in A \cap \bar{B}_k$  et  $y \in \mathbb{R}^n$  par :

$$J_k(x;y) = h(x) + \sum_{i \neq k} B_i(x) (d_i^2(y) - d_i^2(x))/2 + \phi'_k(d_k(x))(d_k(y) - d_k(x)) \\ + \left( \sum_{i \neq k} A_i(x) + M_k \right) \|x-y\|^2 / 2$$

Donc :

$$(IV.4.3.2) \quad K_k(x;y) = h(x) + \sum_{i \neq k} B_i(x) (d_i^2(y) - d_i^2(x))/2 + E_k(x) \|x-y\|^2 / 2 \\ + \phi'_k(d_k(x)) [(1-\lambda_k(x))(d_k(y)-d_k(x)) \\ + (d_k^2(y) - d_k^2(x)) \lambda_k(x)/2 d_k(x)]$$

### Propriétés de $K_k$

D'après (IV.4.3.1) ou (IV.4.3.2), la définition des  $A_i$  et le fait que  $\lambda_k(x) = (d_k(x)/\delta_k)^{1+\varepsilon}$  avec  $\varepsilon > 0$ , nous concluons que  $K_k$  est continue par rapport à  $(x;y) \in A \cap B_k \times \mathbb{R}^n$ .

De plus pour tout  $y$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $K_k$  et  $H$  coïncident pour  $x$  appartenant à la frontière de  $A \cap B_k$  ; comme ces deux fonctions sont continues sur la frontière de  $A \cap B_k$ ,  $K$  est continue sur  $A \times \mathbb{R}^n$ .

Rappelons que  $K_k(x; \cdot)$  n'est utilisée que pour  $x \in A \cap B_k$ .

(IV.4.3.a)  $K_k$  est une fonction strictement convexe dans  $\mathbb{R}^n$

En effet, après avoir écrit  $d_i^2(y)$  sous la forme :

$d_i^2(y) = d_i^2(x) + \|x-y\|^2 + 2(x-y) \cdot (a_i - x)$ , il suffit de vérifier que le coefficient de  $\|y-x\|^2$  dans  $K_k$  est strictement positif.

(IV.4.3.b) Propriété d'interpolation de  $K_k$

$$K_k(x; x) = h(x)$$

(IV.4.3.c) Propriété de majoration de  $K_k$ .

Pour tout  $x$  de  $B_k$  et tout  $y$  de  $\mathbb{R}^n$ , nous avons  $K_k(x; y) \geq h(y)$ .

Preuve : Compte tenu de la définition de  $E_k(x)$ , nous avons :

$$K_k(x; y) - h(y) = \sum_{i \neq k} P_i(x; y) + \lambda_k(x) P_k(x; y) + (1 - \lambda_k(x)) Q_k(x; y)$$

où  $P_i(x; y)$  pour  $i \in J$  a été défini en (IV.3.2.e) en fonction des quantités positives  $T_i(x; y)$ ,  $U_i(x; y)$ ,  $V_i(x; y)$  et  $W_i(x; y)$  et où  $Q_k(x; y)$  s'écrit :

$$Q_k(x; y) = \phi'_k(d_k(x))(d_k(y) - d_k(x)) + M_k \|y-x\|^2/2 + \phi_k(d_k(x)) - \phi_k(d_k(y)).$$

Un calcul montre que :

$$Q_k(x; y) = T_k(x; y) + (U_k(x; y) + M_k W_k(x; y))/2.$$

Donc nous avons bien  $K_k(x; y) \geq h(y)$  pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$  et tout  $x$  de  $B_k$ .  $\square$

(IV.4.3.d) *Propriété de tangence de  $K_k$* 

Pour  $x \in B_k$ , la fonction :  $y \rightarrow K_k(x;y)$  est différentiable pour tout  $y \neq a_k$ ,  $k \in P_1$

$$\nabla K_k(x;y) = \sum_{i \neq k} B_i(x)(y-a_i) + E_k(x)(y-x) + [B_k(x)\lambda_k(x) + \phi'_k(d_k(x))(1-\lambda_k(x))/d_k(y)] (y-a_k)$$

Pour tout  $x \neq a_k$ ,  $k \in P_1$ , nous avons  $\nabla K_k(x;x) = \nabla h(x)$ .

Pour  $x \in B_k$ ,  $k \in P_1$ ,  $K_k$  est dérivable au sens de Gâteaux au point  $y = a_k$ .

Notons  $K'_k(a_k; a_k; u)$  et  $K'_k(x; a_k; u)$  les dérivées au sens de Gâteaux de  $K_k$  au point  $y = a_k$  pour les valeurs du paramètre égales respectivement à  $a_k$  et à  $x \neq a_k$ ,  $k \in P_1$ , dans la direction quelconque  $u$  de  $\mathbb{R}^n$  :

$$K'_k(a_k; a_k; u) = \phi'_k(0) \|u\| - R_k \cdot u = h'(a_k; u)$$

$$K'_k(x; a_k; u) = -Z_k(x) \cdot u + \phi'_k(d_k(x)) (1-\lambda_k(x)) \|u\|$$

(IV.4.3.e) Soit  $k \in P_1 \cup Q_1$  tel que  $\|R_k\| > \phi'_k(0)$ . Pour tout  $x$  de  $B_k$ , le minimum de  $K_k(x;y)$  est obtenu en un point différent de  $a_k$  ; ce minimum est donné par la formule (IV.4.2.b).

Preuve : Pour  $x \in B_k$ ,  $k \in P_1 \cup Q_1$ ,  $a_k$  n'est pas le minimum de  $K_k(x; \cdot)$ .

En effet, d'après le lemme IV.4.1, pour tout  $x$  de  $B_k$  nous avons :

$\|Z_k(x)\| > \phi'_k(d_k(x))$ . Choisissons  $\hat{u} = Z_k(x) / \|Z_k(x)\|$  ; alors :

$K'_k(x; a_k; \hat{u}) = -\|Z_k(x)\| + (1 - \lambda_k(x)) \phi'_k(d_k(x)) < 0$ . Donc dans la direction  $\hat{u}$ , il existe des points meilleurs que  $a_k$  pour  $K_k(x; \cdot)$ .

Comme le point  $a_k$  est le seul point où  $K_k(x; \cdot)$  peut ne pas être différentiable (quand  $k \in P_1$ ), ce minimum est donc atteint en un point unique  $\tilde{y}$  (stricte convexité de  $K_k$ ) où le gradient est nul.

Pour calculer ce point  $\tilde{y}$ , annulons le gradient de  $K_k(x; \cdot)$ .  
En décomposant  $y - a_i = y - a_k + a_k - a_i$  et  $y - x = y - a_k + a_k - x$ , nous obtenons :  $C_k(x)(\tilde{y}-a_k) + (F_k(x)/\|\tilde{y}-a_k\|)(\tilde{y}-a_k) = Z_k(x)$ .

Puisque  $C_k(x)$  et  $F_k(x)$  sont positifs, les vecteurs  $\tilde{y}-a_k$  et  $Z_k(x)$  sont colinéaires et de même sens :  $(\tilde{y}-a_k)/\|\tilde{y}-a_k\| = Z_k(x)/\|Z_k(x)\|$ .  
Nous obtenons alors  $y$  donné par (IV.4.2.b).

(IV.4.3.f) Pour  $x \neq a_k$ ,  $k \in P_1$ , les conditions  $x = f(x)$  et  $\forall h(x) = 0$  sont équivalentes.

Remarque 8 : Dans l'algorithme II, la formule (IV.4.2.b) dépend du rayon  $\delta_k$  de la boule  $B_k$ . Bien entendu tout rayon  $\delta_k^*$  inférieur à  $\delta_k$  convient. Si nous faisons tendre les  $\delta_k^*$  vers 0, nous obtenons un nouvel algorithme qui n'est autre qu'un cas particulier de l'algorithme I, celui pour lequel le successeur du point  $a_k$  est le point :

$$f(a_k) = a_k + \{[1-\phi'_k(0)/\|R_k\|]/(\sum_{i \neq k} D_i(a_k) + M_k)\} R_k$$

c'est-à-dire le minimum de la fonction  $K_k(a_k; \cdot) = J_k(a_k; \cdot)$ . Appliqué au problème (2), ce successeur n'est autre que celui proposé en [5] ou [10].

Remarque 9 : Nous pouvons donner une variante de l'algorithme II (comme de l'algorithme I). Pour  $k \in Q_1$ , la fonction  $h$  est différentiable au point  $a_k$ . Il semble donc qu'il n'y ait pas lieu d'entourer ces points par des

boules comme les autres sommets singuliers mais de les considérer comme des points ordinaires dont nous donnerons le successeur par une formule dérivée de (IV.4.2.a).

Toutefois, pour assurer l'existence et la continuité de la fonction successeur en ces sommets, il est alors nécessaire (et suffisant) de supposer l'existence de  $\phi_k''(0)$ . Ce successeur est alors donné par :

$$f(a_k) = \left[ \sum_{i \neq k} B_i(a_k) a_i + (\phi_k''(0) + A^*(a_k)) a_k \right] / \left[ \sum_{i \neq k} B_i(a_k) + \phi_k''(0) + A^*(a_k) \right]$$

$$\text{où } A^*(a_k) = \sum_{i \neq k} A_i(a_k) + \text{Max}(0, M_k - \phi_k''(0)).$$

Ce point  $f(a_k)$  est l'unique minimum de la fonction  $H(a_k; \cdot)$ .

Rappelons maintenant le théorème classique de Zangwill [28 p,91] déjà rappelé au chapitre précédent.

Théorème : Soient  $E$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ ,  $P$  un sous-ensemble de  $E$ ,  $\gamma$  une application multivoque :  $E \rightarrow P(E)$ ,  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $E$  tels que :

- $\forall x \in E - P$  : (α)  $\gamma(x) \neq \emptyset$  et  $\gamma$  sup-continue sur  $E - P$   
 (β)  $x' \in \gamma(x) \implies h(x') < h(x)$

alors, si nous considérons la suite  $(x^k)$  de  $E$  définie pour tout  $k$  :

$x^0 \in E$ ,  $x^{k+1} \in \gamma(x^k)$  si  $x^k \notin P$ ,  $x^{k+1} = x^k$  sinon, tout point d'accumulation

$x^*$  de cette suite est dans  $P$ .  $\square$

IV.4.4 - Lemme : Soit  $k \in P_1 \cup Q_1$  ; si le point  $a_k$  n'est pas un minimum, alors la fermeture de la boule  $B(a_k, \delta_k)$  ne contient aucun minimum de  $h$ .

Preuve : Puisque la fonction  $h$  est différentiable dans  $A$  sauf en  $a_j$  pour  $j \in P_1$ , tout point  $x$  minimal vérifie :

ou bien  $\nabla h(x) = 0$

ou bien  $x = a_j$  avec  $\|R_j\| \leq \phi'_j(0)$ ,  $j \neq k$  ( $j \in P_1$ ).

D'après la définition de  $\delta'_k$ , nous avons  $d_k(a_j) \geq 2\delta_k > \delta_k$ ,  $\forall j \neq k$ . Pour établir le lemme, il suffit donc de montrer que  $\nabla h(x) = 0$  et  $a_k$  non optimal impliquent :  $d_k(x) > \delta_k$ .

Pour cela, notons que la condition  $\nabla h(x) = 0$  s'écrit encore :

$$\sum_{i \neq k} \{ [\phi'_i(d_i(x)) - \phi'_i(d_i(a_k))] (x-a_i)/d_i(x) + \phi'_i(d_i(a_k)) [(x-a_i)/d_i(x) - (a_k-a_i)/d_i(a_k)] \} + [\phi'_k(d_k(x)) - \phi'_k(0)] (x-a_k)/d_k(x) = R_k - \phi'_k(0)(x-a_k)/d_k(x).$$

Dans cette relation, majorons et minorons les normes respectives des deux membres. Nous obtenons :

$$(IV.4.4.1) \quad \sum_{i \neq k} M_i \|x-a_k\| / 2 + \phi'_i(d_i(a_k)) \| (x-a_i)/d_i(x) - (a_k-a_i)/d_i(a_k) \| + M_k \|x-a_k\| / 2 \geq \|R_k\| - \phi'_k(0).$$

S'il existe  $x \in B(a_k, \delta_k)$  tel que  $\nabla h(x) = 0$ , nous avons donc :

$$(IV.4.4.2) \quad \|x-a_k\| \leq \delta'_k$$

$$(IV.4.4.3) \quad \|x - a_k\| \leq \delta_k''.$$

et l'inégalité (IV.4.4.1). Montrons alors que (IV.4.4.1) et (IV.4.4.2) impliquent :  $\|x - a_k\| > \delta_k''$ .

Pour un tel  $x$  un calcul élémentaire permet de montrer l'inégalité stricte suivante :

$$(IV.4.4.4) \quad \left\| \frac{(x - a_i)}{d_i(x)} - \frac{(a_k - a_i)}{d_i(a_k)} \right\| < \frac{d_k(x)}{(d_k(a_i) - d_k(x))}.$$

Alors (IV.4.4.1) devient :

$$\|R_k\| - \phi_k'(0) < \|x - a_k\| \left\{ (M_k + \sum_{i \neq k} M_i)/2 + \phi_i'(d_i(a_k))/(d_k(a_i) - d_k(x)) \right\}$$

Puisque  $\|x - a_k\| \leq \delta_k'$  et  $\phi_i'(d_i(a_k)) \leq \phi_i'(0) + M_i d_i(a_k)/2$ , nous avons :  $\|x - a_k\| > \sigma_k$

$$\text{où } \sigma_k = (\|R_k\| - \phi_k'(0)) / \left\{ \sum_{i \neq k} [\phi_i'(0) / (d_i(a_k) - \delta_k') + 3M_i/2] + M_k/2 \right\}$$

est un majorant (strict s'il existe au moins un  $M_i > 0$ ) de  $\delta_k''$ . Donc

(IV.4.4.1) et (IV.4.4.2) impliquent bien  $\|x - a_k\| > \delta_k''$  ; par conséquent, il n'existe pas de  $x$  appartenant à  $\overline{B(a_k, \delta_k)}$  tel que  $\forall h(x) = 0$  et le lemme est établi.  $\square$

## IV.4.5 - Convergence de l'algorithme II

Théorème : La suite  $(\overset{P}{x})$  définie par l'algorithme II est telle que :  
ou elle converge vers un minimum en un nombre fini d'étapes dans les deux cas suivants :

a) il existe  $k$  tel que  $\|R_k\| \leq \phi'_k(0)$  : alors  $a_k$  est un minimum

b) si  $\overset{P}{x} \neq a_k$ ,  $k \in P_1$  et si  $\overset{P+1}{x} = \overset{P}{x}$  : alors  $\overset{k}{x}$  est un minimum

ou bien elle a une infinité de valeurs différentes et alors elle converge vers un minimum de  $h$ .

Preuve : Les cas finis a) et b) résultent immédiatement du fait que respectivement  $\|R_k\| \leq \phi'_k(0)$  et  $\overset{P+1}{x} = \overset{P}{x}$ ,  $\overset{P}{x} \neq a_k$ ,  $k \in P_1$  sont équivalents à  $0 \in \partial h(a_k)$  et  $\nabla h(\overset{P}{x}) = 0$  (IV.4.3.f).

Mis à part ces deux cas finis, la suite  $(\overset{P}{x})$  a une infinité de valeurs différentes ; montrons d'abord que tout point d'accumulation de cette suite est un minimum de  $h$ . Pour cela appliquons le théorème de Zangwill rappelé ci-dessus.

Considérons pour  $E$  l'ensemble  $A$  ; nous avons vu que si  $\overset{1}{x} \in A$  tous les successeurs  $\overset{P}{x}$  sont dans  $A$ . Prenons pour  $P$  l'ensemble des minima de  $h$  dans  $A$ . La fonction d'itération  $f$  (jouant le rôle de  $\gamma$ ) est univoque et continue, de même que  $h$ .

Il reste à montrer que si  $x$  n'est pas un minimum :  $h(f(x)) < h(x)$ .

Distinguons deux cas :

.  $x \in A \cap \bigcup_{k \in P_1 \cup Q_1} B_k$  : comme  $x$  n'est pas un minimum, alors  $\nabla h(x) \neq 0$  ;

donc d'après (IV.3.2.d) :  $\nabla H(x;x) \neq 0$ . D'après (IV.3.2.f),  $f(x)$  est le minimum de  $H(x; \cdot)$  et comme nous l'avons vu en (IV.3.6), S1 :

$$h(f(x)) \leq H(x;f(x)) < H(x;x) = h(x).$$

.  $x \in A \cap B_k$  (pour  $k \in P_1 \cup Q_1$ ) : distinguons le cas où  $x \neq a_k$  et le cas où  $x = a_k$ .

Si  $x \neq a_k$ ,  $x$  étant différent d'un minimum :  $\nabla h(x) \neq 0$  ; donc d'après (IV.4.3.d) :  $\nabla K_k(x;x) \neq 0$ , i.e. que  $x$  n'est pas d'après (IV.4.3.e) le minimum de  $K_k(x; \cdot)$  ; nous avons alors :

$$K_k(x;f(x)) < K_k(x;x)$$

En utilisant (IV.4.3.b) et (IV.4.3.c) nous obtenons :

$$h(f(x)) \leq K_k(x;f(x)) < h(x)$$

Si  $x = a_k$ , (IV.4.3.e) donne  $K_k(a_k;f(a_k)) < K(a_k;a_k)$  et par suite  $h(f(a_k)) < h(a_k)$ .

Donc tous les points d'accumulation de la suite  $(\overset{P}{x})$  sont des minima de  $h$ .

Montrons maintenant la convergence de la suite  $(\overset{P}{x})$  vers un minimum.

Cette convergence est immédiate si l'ensemble des minima est réduit à un point. Supposons que ce ne soit pas le cas. Comme  $P_1 \cup Q_1 \neq \emptyset$ , d'après le corollaire A3, cet ensemble est un segment  $[u', v'] \subset A$  et pour tout  $a_k, k \in P_1 \cup Q_1 : a_k \in D[u', v']$  et  $a_k \notin ]u', v'[$ .

Distinguons trois éventualités :

1. Si le segment  $[u', v']$  ne contient pas de sommets  $a_k$  ( $k \in P_1 \cup Q_1$ ) d'après le lemme IV.4.4, il existe un voisinage  $V_1$  de  $[u', v']$  tel que pour tout  $k \in P_1 \cup Q_1 : V_1$  ne rencontre pas la fermeture de  $B(a_k, \delta_k)$ . A partir d'un certain rang  $N_1$ , tous les itérés  $(\bar{x})^p$  sont dans  $V_1$  et alors l'algorithme II se confond avec l'algorithme I : la partie S2 de la démonstration du théorème IV.3.6 nous donne par application du lemme IV.3.5 la convergence de  $(\bar{x})^p$  vers un minimum.
2. Si le segment  $[u', v']$  contient un sommet par exemple  $u' = a_k$  ( $k \in P_1 \cup Q_1$ ), considérons le polyèdre  $G_k = \bigcap_{i \in P_1 \cup Q_1 - \{k\}} \{x \mid (x - (a_k + a_i)/2) \cdot (a_i - a_k) \leq 0\}$ .

Le polyèdre  $G_k$  contient  $B(a_k, \delta_k)$  d'après la définition de  $\delta_k$  et en fait, comme les  $a_i$  sont sur  $D[u', v']$ ,  $G_k$  se réduit à une intersection de deux demi-espaces ou à un demi-espace.

D'après la définition de l'algorithme II (début de la partie 2) s'il existe un itéré dans  $G_k$  alors l'algorithme est fini (cas déjà vu) sinon toute la suite est à l'extérieur de  $G_k$  donc de  $B_k(a_k, \delta_k)$  et, à partir d'un certain rang, d'après le lemme IV.4.4, la suite n'a aucun point dans les boules  $B_i$  pour  $i \in P_1 \cup Q_1$ . Alors l'algorithme II comme précédemment se confond avec l'algorithme I et la

convergence est assurée.

3. Les deux extrémités de  $[u', v']$  sont des sommets :  $u' = a_k$  et  $v' = a_j$ ,  $k, j \in P_1 \cup Q_1$ . La convergence est obtenue en un nombre fini d'étapes car à partir d'un certain rang la suite est dans  $G_k \cup G_j$ .  $\square$

Remarque 10 : Dans le théorème précédent, nous avons supposé que

$P_1 \cup Q_1 \neq \emptyset$  ; en réalité nous pouvons nous affranchir de cette restriction : si  $P_1 \cup Q_1 = \emptyset$ , l'algorithme II est identique à l'algorithme I. La convergence de toute suite fournie par l'algorithme II (ou I) vers un minimum est assurée par le théorème IV.3.6 relatif à l'algorithme I.

#### IV-5 ALGORITHME III POUR LE PROBLÈME DE FERMAT-WEBER GÉNÉRALISÉ (Problème (2))

Rappelons que le problème (2) envisagé est :  $\text{Min} \left\{ \sum_{i \in J} \omega_i d_i(x) \mid x \in \mathbb{R}^n \right\}$ ,  
 $\omega_i$  est une constante positive.

Comme dans l'algorithme II précédent, la fonction d'itération est ici univoque et continue partout sauf peut être au point  $\hat{x}$  solution de (2). Mais sa valeur n'est pas donnée explicitement comme en (IV.4.2.a) ou (IV.4.2.b) mais par une minimisation suivant une direction qui sera définie en IV.5.3.

Donnons d'abord deux lemmes, le lemme IV.5.2 est légèrement différent du lemme IV.4.1 mais ne peut être déduit de ce dernier.

IV.5.1 - Lemme : Soient un point  $a$  de  $\mathbb{R}^n$  différent de l'origine  $0$ ,  $x$  un point intérieur à la boule  $B(a, \frac{\|a\|}{2})$  et  $a'$  le point de la demi-droite qui porte  $0x$  tel que  $\|a'\| = \|a\|$ , alors nous obtenons :  
 $\|a-a'\| < 2(2+3^{1/2})^{-1/2} \|a-x\|$ .

Preuve : Soit  $x'$  la projection de  $a$  sur la demi-droite d'origine  $0$  portant le point  $x$  alors :  $\|a-x'\| \leq \|a-x\|$ .

Comme  $\|a-x\| < \frac{\|a\|}{2}$ , la mesure  $2\alpha$  de l'angle des deux demi-droites issues de  $0$  et portant  $a$  et  $x$  est plus petite strictement que  $\frac{\pi}{6}$ , donc  
 $\frac{3^{1/2}}{2} < \frac{\|x'\|}{\|a\|}$ .

Appelons  $0'$  la projection de  $0$  sur le segment  $[a, a']$ .

Comme  $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} (2-3^{1/2})^{1/2}$  nous obtenons  $\frac{\|a-0'\|}{\|a\|} < \frac{1}{2} (2-3^{1/2})^{1/2}$  et par suite  $\frac{\|0'\|}{\|a\|} > \frac{1}{2} (2+3^{1/2})^{1/2}$ .

De  $\frac{\|x'-a\|}{\|a-a'\|} = \frac{\|0'\|}{\|a\|}$  et de  $\|a-x\| \geq \|a-x'\|$  nous déduisons le

résultat.  $\square$

Ici  $\phi_k(t) = \omega_k t$  donc  $\phi'_k(t) = \omega_k$  pour tout  $t \geq 0$ .

Considérons maintenant les grandeurs suivantes :

$$\delta'_k = \text{Min}_{i \neq k} \frac{1}{2} d_i(a_k).$$

$$\text{Pour } \|R_k\| > \omega_k : \bar{\delta}_k = \frac{1}{2} (2+3^{1/2})^{1/2} \left( \sum_{i \neq k} \frac{\omega_i}{d_k(a_i)} \right)^{-1} (\|R_k\| - \omega_k).$$

$$\delta_k^* = \text{Min} (\delta'_k, \bar{\delta}_k).$$

IV.5.2 - Lemme : Si en  $a_k$  nous avons  $\|R_k\| > \omega_k$ , alors pour tout point  $x$  de  $B_k(a_k, \delta_k^*)$  nous obtenons :  $\|R_k(x)\| > \omega_k$ .

Preuve :  $\|R_k(x)\|$  étant continue sauf aux sommets  $a_j \neq a_k$  et

$\|R_k(a_k)\| = \|R_k\| > \omega_k$ , il existe un voisinage de  $a_k$  pour lequel nous avons  $\|R_k(x)\| > \omega_k$ . Donnons une évaluation de ce voisinage.

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  différent des sommets  $a_j$ ,  $j \neq k$ , formons la différence :

$$\| R_k(x) - R_k \| = \left\| - \sum_{i \neq k} \omega_i \left( \frac{x-a_i}{\|x-a_i\|} - \frac{a_k-a_i}{\|a_k-a_i\|} \right) \right\|$$

$$\| R_k(x) - R_k \| \leq \sum_{i \neq k} \omega_i \left\| \frac{x-a_i}{\|x-a_i\|} - \frac{a_k-a_i}{\|a_k-a_i\|} \right\|$$

Pour tout  $i \neq k$ , posons :  $a_i' = a_i + \|a_i-a_k\| \frac{x-a_i}{\|x-a_i\|}$ .

Pour  $x$  appartenant à l'intérieur de la boule  $B(a_k, \frac{\|a_i-a_k\|}{2})$  nous obtenons d'après le lemme IV.5.1 :  $\|a_i'-a_k\| < 2(2+3^{1/2})^{-1/2} \|x-a_k\|$ .

Considérons les points  $a_i''$  et  $x_i''$  déduits de  $a_k$  et de  $a_i'$  par une homothétie de centre  $a_i$  et de rapport  $\frac{1}{\|a_i-a_k\|}$ .

Nous obtenons :

$$x_i''-a_i'' = (x_i''-a_i) - (a_i''-a_i) = \frac{(a_i'-a_i) - (a_k-a_k)}{\|a_k-a_i\|} = \frac{x-a_i}{\|x-a_i\|} - \frac{a_k-a_i}{\|a_k-a_i\|}.$$

$$\text{Or } \|x_i''-a_i''\| = \frac{\|a_k'-a_k\|}{\|a_i-a_k\|} < 2(2+3^{1/2})^{-1/2} \frac{\|x-a_k\|}{\|a_i-a_k\|}.$$

$$\text{D'où } \|R_k(x)-R_k\| < 2(2+3^{1/2})^{-1/2} \|x-a_k\| \sum_{i \neq k} \frac{\omega_i}{\|a_i-a_k\|}.$$

De  $\|R_k(x)\| \geq \|R_k\| - \|R_k-R_k(x)\|$  il vient :

$$\|R_k(x)\| > \|R_k\| - 2(2+3^{1/2})^{-1/2} \|x-a_k\| \sum_{i \neq k} \frac{\omega_i}{\|a_i-a_k\|}$$

et comme  $x$  appartient à la boule  $B(a_k, \bar{\delta}_k)$  :  $\|R_k(x)\| > \omega_k$ .  $\square$

IV.5.3 - Directions de minimisation de  $h$  et Algorithme III

Définissons maintenant les directions, à l'aide des vecteurs  $u(x)$ , sur lesquelles se fera la minimisation de  $h$ .

Pour  $x \in \text{int}.B_k(a_k, \delta_k^*)$  :

$$u(x) = R_k(x) - \omega_k \frac{d_k(x)}{\delta_k^*} \frac{x - a_k}{\|x - a_k\|}$$

et pour  $x \notin \bigcup_{k=1}^m \text{int}.B_k(a_k, \delta_k^*)$  :

$$u(x) = R(x).$$

Posons :  $\alpha^*(x) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = x + tu(x), t \geq 0\}$ .

$$\gamma^*(x) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid h(z) \leq h(v) \text{ pour tout } v \text{ de } \alpha^*(x)\}.$$

La fonction  $h$  étant strictement convexe, son minimum sur la demi-droite  $\alpha^*(x)$  est unique, donc  $\gamma^*$  est une fonction univoque.

Lemme : La fonction  $\gamma^* : x \rightarrow \gamma^*(x)$  est continue sur tout compact de  $\mathbb{R}^n$  sauf au point  $\hat{x}$ , solution du problème (2), si  $\hat{x} \notin \bigcup_{k=1}^m \text{int}.B_k(a_k, \delta_k^*)$ .

Preuve :

1. La fonction  $u : x \rightarrow u(x)$  est continue partout (évident) et  $u(x) \neq 0$  sauf en  $\hat{x}$  si  $\hat{x} \notin \bigcup_{k=1}^m \text{int}.B_k(a_k, \delta_k^*)$ .

En effet, si  $x \notin \bigcup_{k=1}^m \text{int.} B_k(a_k, \delta_k^*)$  :  $u(x) = R(x) = -\nabla h(x)$ , donc si  $x = \hat{x}$  :  $u(\hat{x}) = 0$ .

Par contre si  $x \in B_k(a_k, \delta_k^*)$  d'après le lemme IV.5.2 :  $\|R_k(x)\| > \omega_k$  donc  $u(x) = R_k(x) - \frac{\omega_k}{\delta_k^*} (x-a_k) \neq 0$ . Et pour  $\hat{x} \in \text{int.} B_k(a_k, \delta_k^*)$ , comme  $\|R_k\| > \omega_k$  :  $\hat{x} \neq a_k$  et compte tenu du fait que  $-R(\hat{x}) = \nabla f(\hat{x}) = 0$ , le vecteur  $u(\hat{x})$  est non nul, il est égal à  $\omega_k \left( \frac{1}{d_k(\hat{x})} - \frac{1}{\delta_k^*} \right) (\hat{x}-a_k) \neq 0$ .

2. L'application multivoque  $\alpha^* : x \rightarrow \alpha^*(x)$  est continue partout sauf en  $\hat{x}$  si  $\hat{x} \notin \bigcup_{k=1}^m \text{int.} B_k(a_k, \delta_k^*)$ . C'est évident à cause de la continuité de  $u$  et du fait que  $u(x) \neq 0$ .

3. D'après un théorème classique sur la parémétrisation des programmes mathématiques,  $h$  étant continue et  $\alpha^*$  continue partout sauf en  $\hat{x}$  si  $\hat{x} \notin \bigcup_{k=1}^m \text{int.} B_k(a_k, \delta_k^*)$ , nous déduisons que  $\gamma^*$  est sup-continue donc continue sur tout compact sauf en  $\hat{x}$  si  $\hat{x} \notin \bigcup_{k=1}^m \text{int.} B_k(a_k, \delta_k^*)$ .  $\square$

Nous sommes en mesure de décrire l'algorithme III ; pour sa mise en oeuvre, nous utilisons également la remarque 6 faite en IV.4.

### Algorithme III

1-  $p=0$ ,  $\frac{1}{x}$  donné, par exemple  $\frac{1}{x} = \frac{\sum_{i=1}^m \omega_i a_i}{\sum_{i=1}^m \omega_i}$ .

2-  $p = p+1$ .

3- Chercher le sommet  $a_k$  le plus proche de  $\frac{1}{x}$  :

si  $\|R_k\| \leq \omega_k$ , alors stop :  $\hat{x} = a_k$ ,  
 sinon prendre le successeur  $P_x^{+1} = \gamma^*(\frac{P}{x})$  ;  
 si  $P_x^{+1} = \frac{P}{x}$ , alors stop :  $\hat{x} = \frac{P}{x}$   
 sinon aller en 2.  $\square$

#### IV.5.4 - Convergence de l'Algorithme III

Théorème : La suite  $(\frac{P}{x})$  définie par l'algorithme III converge vers la solution  $\hat{x}$  du problème (2).

L'optimum peut être atteint en un nombre fini d'itérations dans les deux cas suivants :

- a) il existe un  $k$  tel que  $\|R_k\| < \omega_k$ , alors :  $\hat{x} = a_k$   
 b) si  $P_x^{+1} = \frac{P}{x}$  alors  $\hat{x} = \frac{P}{x}$ .

Preuve : Le cas fini a) a déjà été examiné. Donnons d'abord les trois résultats suivants :

$$1- \quad x \notin \bigcup_{k=1}^m \text{int.} B_k(a_k, \delta_k^*) : \frac{d}{dt} h(x+tu(x))_{t=0} = \nabla h(x) \cdot R(x) = - \|\nabla h(x)\|^2$$

$$2- \quad x \in \text{int.} B_k(a_k, \delta_k^*) \text{ et } x \neq a_k :$$

$$\frac{d}{dt} h(x+tu(x))_{t=0} = \nabla h(x) \cdot u(x) = - R(x) \cdot u(x)$$

$$R(x) \cdot u(x) = (R_k(x) - \frac{\omega_k}{d_k(x)} (x-a_k)) \cdot (R_k(x) - \frac{\omega_k}{\delta_k^*} (x-a_k)).$$

Comme  $x \in B_k(a_k, \delta_k^*)$  :  $\|R_k(x)\| > \omega_k$ , le produit scalaire  $R(x) \cdot u(x)$  est nul si et seulement si  $R(x) = 0$  car  $u(x) \neq 0$ , strictement positif sinon.

3-  $x = a_k$  :

$$\frac{d}{dt} h(a_k + tu(a_k))_{t=0} = \omega_k \|u(a_k)\| - R_k \cdot u(a_k) = \|R_k\| (\omega_k - \|R_k\|).$$

Si  $P_{\bar{x}}^{+1} = \bar{x}$ , distinguons deux cas :

$$\cdot \bar{x} \notin \bigcup_{k=1}^m \text{int}.B_k(a_k, \delta_k^*) \text{ alors d'après 1- : } - \|\nabla h(\bar{x})\| \geq 0,$$

$$\text{i.e. } \nabla h(\bar{x}) = 0 \text{ donc } \bar{x} = \bar{x}.$$

$$\cdot \bar{x} \in \text{int}.B_k(a_k, \delta_k^*) \text{ alors d'après 2- : } - R(\bar{x}) \cdot u(\bar{x}) \geq 0, \text{ et encore}$$

$$\text{d'après 2- : } R(\bar{x}) = 0, \text{ donc } \bar{x} = \bar{x}.$$

Ceci démontre le cas fini b). Dans le cas où toutes les valeurs de la suite  $(\bar{x})$  sont distinctes, démontrons, à l'aide du théorème de Zangwill (IV.4.3), que la suite  $(\bar{x})$  converge vers  $\bar{x}$ .

Prenons pour E un compact assez grand pour contenir les sommets et les équipotentiels passant par  $\bar{x}$ , et pour P le seul point  $\bar{x}$ .

La fonction h est continue partout et  $\gamma^*$  est continue sauf en  $\bar{x}$  si  $\bar{x} \notin \bigcup_{k=1}^m \text{int}.B_k(a_k, \delta_k^*)$ , il reste à vérifier que si  $x \neq \bar{x}$  :  $h(\gamma^*(x)) < h(x)$ .

Ceci est évident car pour  $x \neq \bar{x}$  :  $\frac{d}{dt} h(x+tu(x))_{t=0} < 0$  d'après les trois résultats ci-dessus.

Donc tout point d'accumulation de la suite  $(\bar{x})$  est dans P. Comme P est réduit à un point  $\bar{x}$ , cette suite converge donc vers  $\bar{x}$ .  $\square$

## ANNEXES

## A1 - Proposition

Sous l'hypothèse (H1) nous avons :

- 1-  $h$  est convexe dans  $A$
- 2- L'équivalence des deux propriétés suivantes :

(NC)  $h$  n'est pas strictement convexe dans  $A$

(NC') il existe deux points  $u$  et  $v$  de  $A$ ,  $u \neq v$  et un partitionnement de  $J$  en deux sous-ensembles  $I_1$  et  $I_2$  tels que :

pour tout  $i$  de  $I_1$  :  $u$  et  $v \in B(a_i, r_i)$

pour tout  $i$  de  $I_2$  :  $a_i \in D[u, v]$ ,  $a_i \notin ]u, v[$  et  $\phi_i$  est affine sur  $[d_i(u), d_i(v)]$ .  $\square$

Pour préciser les notations dans la proposition suivante et dans le corollaire, nous définissons une orientation sur  $D[u, v]$  au moyen de la relation d'ordre suivante :  $x \leq y \iff (y-x) \cdot (v-u) \geq 0$ .

De plus, si  $\phi_i$  est affine sur  $[d_i(u), d_i(v)]$  avec par exemple  $d_i(u) < d_i(v)$ , nous noterons  $\omega_i$  la valeur constante de sa dérivée sur ce segment i.e.

$\forall t \in ]d_i(u), d_i(v)[$  :  $\phi_i'(t) = \omega_i$  et  $\phi_i'(d_i(u)+) = \phi_i'(d_i(v)-) = \omega_i$

## A2 - Proposition

Sous les hypothèses (H1) et (H4) les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(NU) :  $h$  n'admet pas un minimum unique dans  $\mathbb{R}^n$

(NU') : il existe deux points distincts  $u$  et  $v$  de  $A$  et un partitionnement de  $J$  en deux sous-ensembles  $I_1$  et  $I_2$  tels que :

pour tout  $i$  de  $I_1$  :  $u$  et  $v \in B(a_i, r_i)$

pour tout  $i$  de  $I_2$  :  $a_i \in D[u, v]$ ,  $a_i \notin ]u, v[$ ,  $\phi_i$  est affine sur  $[d_i(u), d_i(v)]$  de dérivée  $\omega_i$  telle que :

$$\sum_{i: a_i \geq v} \omega_i = \sum_{i: a_i \leq u} \omega_i. \quad \square$$

## A3 - Corollaire

Sous les hypothèses (H1) et (H4), si  $h$  n'admet pas de minimum unique dans  $\mathbb{R}^n$  et si  $\bigcap_{i \in J} B(a_i, r_i) = \emptyset$ , alors l'ensemble des minima de  $h$  est un segment  $[u', v'] \subset A$  tel que : il existe un partitionnement de  $J$  en deux sous-ensembles  $I'_1$  et  $I'_2$  tel que :

$$u', v' \in \bigcap_{i \in I'_1} B(a_i, r_i)$$

pour tout  $i \in I'_2$  :  $a_i \in D[u', v']$ ,  $a_i \notin ]u', v'[,$  et  $\phi_i$  est affine sur  $[d_i(u'), d_i(v')]$ , de dérivée  $\omega_i > 0$  dans cet intervalle avec :

$$\sum_{i: a_i \geq v'} \omega_i = \sum_{i: a_i \leq u'} \omega_i. \quad \square$$

## RÉFÉRENCES

- [1] COOPER L., "Location-allocation problems", *Operations Research* 11 (1963), 331-343.
- [2] COOPER L., "Heuristic methods for location-allocation problems", *SIAM Review* 6 (1964), 37-52.
- [3] COOPER L., "An extension of the generalized Weber problem", *Journal of Regional Science* 8 (1968), 181-197.
- [4] CORDELLIER F. et FIOROT J.C., "Sur le problème de Fermat-Weber avec fonctions de coût convexes", publication n°74, Laboratoire de Calcul, Université de Lille I (1976) - IX Int. Symposium on Mathematical Programming Budapest, August 23-27, 1976.
- [5] CORDELLIER F., FIOROT J.C. and JACOBSEN, "An algorithm for the generalized Fermat-Weber problem", to appear.
- [6] CORDELLIER F. et FIOROT J.C., "Trois algorithmes pour résoudre le problème de Fermat-Weber généralisé", *Bulletin de la Direction des Etudes et Rech. E.D.F.*, supplément n°2 (1976), série C, 35-54.
- [7] CORDELLIER F. and FIOROT J.C., "On Fermat-Weber's problem with convex cost functions", *Mathematical Programming*, à paraître 1977.
- [8] EILON S., WATSON-GANDY C.D.T. and CHRISTOFIDES N., "Distribution Management : Mathematical modelling and practical analysis", Charles Griffin and C° Ltd, London (1971).
- [9] FRANCIS R.L. and WHITE J.A., "Facility Layout and Location : An Analytical Approach", Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. (1974).
- [10] JACOBSEN S.K., "Weber rides again", Working paper n° 2252/037042, IMSOR, The Technical University of Denmark, LYNGBY, Denmark (décember 1974).
- [11] HUARD P., "Optimisation dans  $\mathbb{R}^n$  (programmation mathématique)", Cours de 3ème cycle, 2ème partie, Université de Lille I (1971).
- [12] KATZ I.N., "On the convergence of a numerical scheme for solving some locational equilibrium problems", *SIAM Journal on Applied Mathematics* 17 (1969) 1224-1231.
- [13] KATZ I.N., "Local convergence in Fermat's problem", *Mathematical Programming* 6 (1974), 89-104.

- [14] KUHN H.W., "A note on Fermat's problem", *Mathematical Programming* 4 (1973), 98-107.
- [15] KUHN H.W. and KUENNE R.E., "An efficient algorithm for the numerical solution of the generalized Weber problem in spatial economics", *Journal of Regional Science* 4 (1962), 21-33.
- [16] KUENNE R.E. and SOLAND R.M., "Exact and approximate solutions to the multisource Weber problem", *Mathematical Programming* 3 (2) (1972), 193-209.
- [17] LAURENT P.J., "Approximation et Optimisation", Hermann, Paris (1971).
- [18] LEMARECHAL C., "An extension of Davidon methods to non differentiable functions", *Mathematical Programming Study* 3 (1975), 95-109.
- [19] MIEHLE W., "Link-length minimization in networks", *Operations Research* 6 (1958), 232-243.
- [20] POLACK E., "On the implementation of conceptual algorithms", in : Mangasarian, Ritter and Rosen, eds., *Nonlinear programming*, Academic Press, New-York (1970), 275-291.
- [21] POLJAK B.T., "A general method of solving extremum problems", *Doklady Akademii Nauk SSR* 174 (1967) 33-36 [In Russian ; Engl. transl. : *Soviet Mathematics Doklady* 8 (1967), 593-597].
- [22] PLANCHART A. and HURTER A.P., "An efficient algorithm for the solution of the Weber problem with mixed norms", *SIAM Journal on Control* 13 (1975), 650-665.
- [23] SCHECHTER S., "Minimization of a convex function by relaxation" in : *Integer and nonlinear programming*, Abadie ed., North Holland 1970, 177-189.
- [24] WEBER A., "Über den Standort der Industrien (Tübingen, 1909) [Translated as : "Alfred Weber's theory of the location of industries" by C.J. Friedrich, Univ. of Chicago Press, 1929]
- [25] WEISZFELD E., "Sur le point pour lequel la somme des distances de  $n$  points donnés est minimum", *Tōhoku Mathematical Journal* 43 (1937), 355-386.
- [26] WENDELL R.E. and PETERSON E., "Duality in generalized location problems", Working paper, Department of Industrial Engineering and Management Sciences, North-Western University, Evanston, Illinois, 1971.
- [27] WOLFE P., "A method of conjugate subgradients for minimizing non differentiable functions", *Mathematical Programming Study* 3 (1975), 145-173.
- [28] ZANGWILL W.I., "Nonlinear Programming : A Unified Approach", Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey (1969).

## CHAPITRE V

OBTENTION EXPLICITE DE TOUS LES POINTS ENTIERS  
D'UN SYSTÈME D'INÉGALITÉS LINÉAIRES - CAS DES CÔNES  
ET DES PARALLÉLOTOPEs

Nous donnons une procédure de calcul pour l'obtention de tous les points entiers satisfaisant un système d'inégalités linéaires. Cinq cas sont examinés : leurs représentations géométriques sont des cônes ou des parallélotopes. Pour obtenir tous les points entiers, on met en évidence un ensemble particulier de points entiers appelés points fondamentaux et un ensemble de vecteurs de translation à coordonnées entières. Le nombre de ces points fondamentaux est fourni par une formule très simple. Nous donnons un algorithme pour obtenir tous ces éléments. De plus, pour un cône (ou un parallélotope) nous obtenons sa représentation analytique minimale i.e. celle qui conduit à l'aide de l'algorithme évoqué au nombre de points fondamentaux minimum ainsi qu'aux vecteurs de translation de longueur minimale. Enfin il est donné une extension de notre étude sous la forme d'un problème général ainsi qu'une application à l'optimisation en nombres entiers.

## V-1 INTRODUCTION

Le problème de l'optimisation en nombres entiers ou en nombres bivalents d'une forme linéaire sur un polyèdre linéaire a été abordé de deux points de vue dans la littérature.

Le premier point de vue est celui développé sous le nom de méthode de séparation et évaluation progressive ("Branch and Bound" dans la littérature anglo-saxonne). Ce sont des méthodes arborescentes ou d'énumération implicite qui peuvent fournir assez rapidement une solution optimale mais qui nécessitent parfois des temps de calcul assez élevés pour prouver que l'optimum est effectivement atteint. La technique consiste à trouver de "bonnes" règles pour, d'une part partitionner l'ensemble des solutions réalisables (Branch) et d'autre part, définir des estimations les plus exactes possibles de la valeur optimale de la fonction économique sur les sous-ensembles de solutions mis en évidence par ce partitionnement (Bound). Une littérature très abondante traite de ce sujet, citons par exemple parmi les articles les plus classiques : Lang et Doig [41], Little, Murty, Sweeney et Karel [42], Dakin [16], Balas [2], Roy, Nghiem et Bertier [48], Guignard et Spielberg [35], [36], Tomlin [52], [53], Beale et Small [8], Held et Karp [39], Benichou, Gauthier, Girodet, Hentges, Ribiere, Vincent [10], Mitra [45], Fayard et Plateau [17]. Parmi les tours d'horizon, citons : Balinski [5], Balinski et Spielberg [6], Geoffrion et Marsten [27], Hansen [38].

L'autre point de vue est développé par des méthodes qui reposent davantage sur des bases mathématiques (notion de congruences, de groupes cycliques, de dualité, de théorèmes de séparation) qui permettent d'affirmer qu'il y a convergence mais celle-ci est sur le plan pratique souvent acquise au bout d'un temps de calcul très élevé. Ajoutons que pour les applications, la limite entre les deux points de vue n'est pas toujours strictement définie. Certains codes de la méthode séparation et évaluation progressive utilisent par exemple des contraintes additionnelles (appelées aussi coupes) ou également la théorie de la dualité (méthodes dites lagrangiennes).

L'idée est d'approcher, dans le voisinage de la solution optimale, l'enveloppe des points entiers du polyèdre. Ce cadre a pour origine l'étude du problème dit asymptotique associé au problème posé. Brièvement, il consiste, après avoir résolu le problème en continu (i.e. le problème où les variables ne sont plus astreintes à être entières mais réelles), à définir, si la solution obtenue n'est pas entière, le cône dit asymptotique ayant pour sommet cette solution contenant le polyèdre. Une structure de groupe cyclique est mise en évidence, elle permet d'obtenir des contraintes linéaires définissant un domaine qui contient toutes les solutions entières réalisables et ne contient pas la solution en continu ainsi trouvée. Ces contraintes définissent de nouveaux problèmes que l'on résout de nouveau en continu. A l'origine, cette méthode a été proposée par Gomory [29], [30], [31], [32] et reprise essentiellement par Gomory et Johnson [33], Johnson [40] puis par Shapiro [50], Glover [28], Wolsey [54], Frehel [25], Gondran [34], Bachem [1]. Dans un même ordre d'idées, d'autres coupes ont été proposées par Balas [3], Burdet [13], Burdet et Johnson [14]. L'étude de problèmes à structures particulières est faite dans Padberg [47], Balas [4], Wolsey [55], Hammer, Johnson et Peled [37], Berge [11], Sakarovitch [49], Maurras [44]. La dualité est utilisée dans les méthodes dites lagrangiennes : Shapiro [51], Fisher et Shapiro [24] et dans les méthodes de décomposition : Benders [9].

L'étude du problème asymptotique nous a conduit de manière naturelle à la question de savoir s'il y avait une possibilité pratique d'obtenir tous les points entiers qui sont à l'intérieur du domaine défini par les contraintes linéaires.

Dans [18], [20] nous avons donné une procédure pour obtenir tous les points entiers qui satisfont un système d'inégalités linéaires. Cinq cas différents ont été traités : ces systèmes d'inégalités linéaires représentent essentiellement des cônes polyédriques (donc des cônes asymptotiques à un polyèdre) et des parallélotopes. Nous reprenons dans ce chapitre l'essentiel de cette étude ainsi qu'une partie de [21] et [22].

Pour obtenir tous les points entiers vérifiant les systèmes d'inégalités linéaires envisagés ici, il est mis en évidence un ensemble fini de points entiers particuliers appelés points fondamentaux et un ensemble de vecteurs de translation qui sont linéairement indépendants et à coor-

données entières. Ces points fondamentaux et ces vecteurs de translation sont parfaitement déterminés par un algorithme et leur nombre est donné par une formule très simple. De plus dans [21] nous avons déterminé pour un cône polyédrique sa représentation analytique dite minimale c'est-à-dire celle qui conduit, lorsqu'on utilise ce qui a été fait en [20] à l'obtention du plus petit ensemble de points fondamentaux ainsi qu'aux vecteurs de translation de longueur minimale.

Etroitement lié à l'étude du problème asymptotique, ce travail entre en fait dans le contexte plus ancien de la résolution des systèmes d'inégalités linéaires. Nous pourrions le mettre en parallèle avec celui de Motzkin [46], [26] au sujet de la théorie de la décomposition des polyèdres. Dans les cas V.4 et V.5 envisagés, aux points fondamentaux correspondent les sommets et aux vecteurs de translation correspondent les directions d'infinitude du polyèdre.

## V-2 NOTATIONS ET DÉFINITIONS

- $\mathbf{N}$  : ensemble des entiers positifs ou nuls  
 $\mathbf{Z}$  : ensemble des entiers rationnels  
 $\mathbf{Q}$  : ensemble des rationnels  
 $A(m,n)$  : matrice de format  $(m,n)$  c'est-à-dire à  $m$  lignes et  $n$  colonnes à éléments dans  $\mathbf{Z}$   
 $A^j$  : colonne  $j$  de la matrice  $A$   
 $A_j$  : ligne  $j$  de la matrice  $A$   
 ${}^tA^j$  : vecteur ligne transposé du vecteur  $A^j$   
 $A_i \cdot a$  désigne le produit scalaire du vecteur ligne  $A_i$  et du vecteur colonne  $a$   
 $A_R$  : sous-matrice de  $A$  composée des lignes dont les indices appartiennent au sous-ensemble  $R$  de  $\mathbf{N}$   
 $A^R$  : sous-matrice de  $A$  composée des colonnes dont les indices appartiennent au sous-ensemble  $R$  de  $\mathbf{N}$   
 $A_{J,I}^I$  : sous-matrice de  $A$  dont l'indice de la ligne et de la colonne d'un élément appartient respectivement à  $J$  et  $I$

Soient  $p$  éléments  $m_1, m_2, \dots, m_p$  de  $\mathbf{Z}$  ; on note :

$[m_1, m_2, \dots, m_p] = m$  leur plus petit commun multiple  
 (en abrégé p.p.c.m.)

$(m_1, m_2, \dots, m_p) = d$  leur plus grand commun diviseur  
 (en abrégé p.g.c.d.).

La relation  $a|b$  signifie "a divise b", de même  $a \nmid b$  signifie "a ne divise pas b".

La relation  $a \equiv b \pmod{\epsilon}$  signifie "a congru à b modulo  $\epsilon$ ".

Etant donnés  $p$  vecteurs colonnes  $B^1, \dots, B^p$ , nous notons par  $B = [B^1, \dots, B^p]$  la matrice dont les vecteurs colonnes sont  $B^j$ .

Plus grand commun diviseur d'une matrice : On appelle p.g.c.d. d'ordre  $h$  d'une matrice  $A(m,n)$  noté  $\Delta_h(A)$ , le p.g.c.d. des déterminants de toutes les sous-matrices de format carré  $(h,h)$  de  $A$ .

On appelle p.g.c.d. de  $A$ , noté  $\Delta(A)$ , le p.g.c.d. d'ordre  $r$  où  $r$  est le rang de  $A$ .

Matrice unimodulaire : matrice de forme carrée à éléments dans un anneau (ce sera toujours  $\mathbb{Z}$ ) de déterminant  $+1$  ou  $-1$ .

Matrice semi-modulaire : matrice de forme rectangulaire à éléments dans un anneau possédant une inverse entière à droite ou à gauche.

### V-3 CÔNE POLYÉDRIQUE RÉGULIER

Un cône polyédrique régulier est défini par :  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$   
 où  $A$  est une  $(n,n)$  matrice de rang  $n$ , à éléments dans  $\mathbb{Z}$  (ou  $\mathbb{Q}$ ) et  $b$  est  
 un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

Théorème : Tous les points entiers d'un cône polyédrique régulier  
 sont donnés par la formule suivante :

$$x = \overset{i}{\bar{x}} + k_1 B^1 + \dots + k_n B^n. \quad (\text{V.3.}\alpha)$$

Les  $B^j$  sont les vecteurs colonnes de  $B = \epsilon M$  où  $M$  est l'inverse de  $A$  et  
 $\epsilon$  le p.p.c.m. des éléments diagonaux d'une forme normale (ou de la réduite)  
 de Smith de  $A$ .

Ces vecteurs  $B^j$  sont à composantes entières et sont parallèles aux  
 arêtes du cône ;  $k_j$  appartient à  $\mathbb{N}$  pour  $j = 1, 2, \dots, n$ .

L'ensemble des  $\overset{i}{\bar{x}}$  est appelé l'ensemble des points fondamentaux  
 $(P_F)$ . Ces points fondamentaux sont les seuls points entiers du parallé-  
 lotope semi-ouvert suivant :

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = s + \lambda_1 B^1 + \dots + \lambda_n B^n, 0 \leq \lambda_i < 1, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ pour } i=1, 2, \dots, n\}$   
 où  $s$  est le sommet du cône.

Le nombre de ces points fondamentaux est égal à  $|\det B|$ .

A chaque choix de  $\epsilon' = t\epsilon$  où  $t$  est un entier plus grand ou égal à 1  
 correspond une décomposition unique du type (V.3.α), cette dernière étant  
 associée à  $t = 1$ .  $\square$

Preuve : Elle consiste en quatre parties. Les parties a) et b) fournissent un algorithme pour trouver les points fondamentaux et les vecteurs de translation  $B^j$ . La méthode consiste à résoudre dans  $Z^n$  le système  $Ax = a$  avec  $a \geq b$ , i.e. à trouver l'ensemble des  $a$  qui rendent le système linéaire compatible et qui sont plus grands que  $b$  (composante par composante). De tels points  $a$  sont dits admissibles.

a) Calcul des  $a$  admissibles

Il existe deux matrices unimodulaires  $U(n,n)$  et  $V(n,n)$  telles que  $UAV = E$  ;  $E(n,n)$  est une forme normale (ou la réduite) de Smith de  $A$ . La construction de  $U$ ,  $V$  et  $E$  peut être trouvée dans Bradley [12], Chatelet [15], Fiorot et Gondran [23], MacDuffee [43].

$$\text{Donc : } Ax = a \iff Ey = Ua \text{ (avec } x = Vy), \quad (1.a)$$

Appelons  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  les éléments de la diagonale de  $E$ , où  $\epsilon_i \mid \epsilon_{i+1}$  pour  $i = 1, 2, \dots, n-1$  et posons  $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n]$ ,  $\epsilon = v_i \epsilon_i$  ( $v_n = 1$ ) pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . Posons également  $Ua = z$ . Alors  $Ey = Ua \iff Ey = z \iff \epsilon_i y_i = z_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, n \iff \epsilon y_i = v_i z_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . Alors  $y$  (ou  $x$ ) est entier si et seulement si  $v_i z_i \equiv 0 \pmod{\epsilon}$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$  ; il existe  $v_i = (v_i, \epsilon)$  solutions différentes  $\pmod{\epsilon}$  pour  $z_i$ . Par suite, nous avons  $v_1 \times \dots \times v_n$  solutions  $\pmod{\epsilon}$  pour le vecteur  $z$  et par conséquent pour  $a$ .

Supposons que  $t_z^i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i) \pmod{\epsilon}$  pour  $i = 1, 2, \dots, v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$ . De  $\frac{i}{a} = U^{-1} \frac{i}{z}$  nous déduisons que les  $a$  admissibles sont donnés par  $t_a^i = (\beta_1^i, \dots, \beta_n^i) \pmod{\epsilon}$  pour  $i = 1, 2, \dots, v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$ .

Maintenant retournons à la condition  $a \geq b$ . Puisque  $\beta_j^i$  définit une classe modulo  $\epsilon$ , nous pouvons choisir un élément  $\gamma_j^i$  de cette classe tel que  $b_j \leq \gamma_j^i < b_j + \epsilon$  pour  $i = 1, 2, \dots, \nu_1 \times \nu_2 \times \dots \times \nu_n$  et  $j = 1, 2, \dots, n$ . Alors tous les  $a$  admissibles sont donnés par :

$$t_{\vec{a}}^i = (\gamma_1^i + k_1 \epsilon, \gamma_2^i + k_2 \epsilon, \dots, \gamma_n^i + k_n \epsilon) \quad (2.a)$$

avec  $k_j \in \mathbb{N}$  pour  $j = 1, 2, \dots, n$  et  $i = 1, 2, \dots, \nu_1 \times \nu_2 \times \dots \times \nu_n$ . Définissons  $t_{\vec{P}}^i = (\gamma_1^i, \dots, \gamma_n^i)$  et considérons les vecteurs  $\delta^i$  dont toutes les composantes sont nulles sauf la  $i^{\text{ième}}$  égale à 1. Alors (2.a) devient :

$$\vec{a} = \vec{P} + \epsilon k_1 \delta^1 + \dots + \epsilon k_n \delta^n$$

pour  $j = 1, 2, \dots, \nu_1 \times \dots \times \nu_n$ .

Remarque : Rappelons que le p.p.c.m.  $\epsilon$  qui joue un grand rôle est un invariant lié à  $A$ . Aussi il peut être calculé à partir des éléments diagonaux non nuls d'une forme normale quelconque ou de la réduite de Smith (cette dernière étant unique, et ses éléments diagonaux non nuls vérifiant  $\epsilon_i \mid \epsilon_{i+1}$  pour  $i=1, 2, \dots, n$ ). Pour des raisons d'économie de calculs, sur le plan pratique, on utilise une forme normale.

#### b) Points entiers du cône

De  $x = Vy$  et  $y = E^{-1}Ua$ , nous obtenons  $x = VE^{-1}Ua$  ( $= VE^{-1}z$ ).

Posons  $M = VE^{-1}U$ ,  $B = \epsilon M$ ,  $MP^i = \vec{x}^i$ . Notons que  $M = A^{-1}$ .

Alors tous les points entiers du cône V.3 sont donnés par

$$x = \vec{x}^i + k_1 B^1 + \dots + k_n B^n$$

pour  $i = 1, 2, \dots, \nu_1 \times \nu_2 \times \dots \times \nu_n$  avec  $k_j \in \mathbb{N}$  pour  $j = 1, 2, \dots, n$ .

L'ensemble des  $\vec{x}^i$  est appelé l'ensemble des points fondamentaux. Il est noté  $P_f$ .

c) Propriétés de  $B^1, \dots, B^n$ 

De  $B = \epsilon M = \epsilon A^{-1}$ , nous déduisons que le produit scalaire  $A_i \cdot B^j = 0$  pour  $i \neq j$ , ce qui signifie que  $B^j$  est parallèle aux  $n-1$  hyperplans  $A_i x = b_i$  pour  $i \neq j$ . En d'autres termes, les  $B^j$  qui sont des vecteurs à composantes entières sont parallèles aux arêtes du cône.

d) Le paralléloétope fondamental et le nombre de points fondamentaux

Considérons l'ensemble suivant, appelé le paralléloétope fondamental associé à la matrice  $A$  définissant le cône :

$$P(S) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = S + \lambda_1 B^1 + \dots + \lambda_n B^n, 0 \leq \lambda_i < 1, \lambda_i \in \mathbb{R}, \\ i = 1, 2, \dots, n\},$$

construit à partir du sommet  $S$  du cône et porté par ses arêtes. Les points fondamentaux sont les seuls points entiers de  $P(S)$ . En effet, montrons d'abord que pour tout  $\overset{i}{x} \in P_f$ , il existe un vecteur réel  $\overset{i}{\lambda}$  dont les composantes  $\overset{i}{\lambda}_j$  satisfont :  $0 \leq \overset{i}{\lambda}_j < 1$  et tel que  $\overset{i}{x} = S + B\overset{i}{\lambda}$ .

Par construction  $\overset{i}{P}$  vérifie  $b_j \leq \overset{i}{P}_j < b_j + \epsilon$  pour  $j = 1, 2, \dots, n$  et  $i = 1, 2, \dots, v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$ . Considérons le vecteur réel  $\overset{i}{\lambda} = \epsilon^{-1}(\overset{i}{P} - b)$  ; alors nous avons  $0 \leq \overset{i}{\lambda}_j < 1$  et appliquant  $M$  à cette égalité nous déduisons :

$$M(\epsilon \overset{i}{\lambda}) = M\overset{i}{P} - Mb \quad \text{i.e.} \quad \overset{i}{x} = S + B\overset{i}{\lambda}.$$

Inversement, étant donné un entier  $x$  de  $P(S)$ , il est aussi point du cône donc  $x = \overset{i}{x} + k_1 B^1 + \dots + k_n B^n$ .

Puisque  $\overset{i}{x} = S + \lambda_1 B^1 + \dots + \lambda_n B^n$  avec  $0 \leq \lambda_j < 1$ , nous avons  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$  et  $x = \overset{i}{x}$  c'est-à-dire que  $x$  est un point fondamental.

En d'autres termes, nous recouvrons tous les points entiers du cône en translatant le parallélotope fondamental avec les vecteurs  $B^1, \dots, B^n$ .

Le nombre de ces points fondamentaux est

$$v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2} \times \dots \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon_n} = \frac{\varepsilon^n}{|\det A|} = |\det B|$$

c'est-à-dire égal au volume du parallélotope fondamental.

Dans  $\mathbb{R}^2$  nous avons  $|\det A| = |\det B|$  mais pour  $n > 2$ ,  $|\det B|$  peut être différent de  $|\det A|$ . Donnons deux exemples illustrant ces formules.

#### Exemple V.3.1.

Considérons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{alors nous obtenons} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ici  $N = 3^3/3 = 9 = |\det B| > \det A = 3$ .

## Exemple V.3.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -25 \\ 1 & 7 & 23 \end{pmatrix} \quad \text{alors nous obtenons} \quad B = \begin{pmatrix} -43 & 19 & 30 \\ 16 & -6 & -10 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 19 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ici  $N = 6^3/18 = 12 = |\det B| < \det A = 18$ .

e) L'unicité de la décomposition (V.3.α)

Nous pouvons reprendre ce qui a été fait de a) à d) en utilisant  $\varepsilon' = t\varepsilon$  avec  $t \in \mathbf{N}$  (par exemple  $\varepsilon' = |\det A|$  si  $\varepsilon < |\det A|$  ; rappelons que  $\varepsilon \mid \det A$ ). Nous obtenons :

$$\begin{aligned} U_i a &\equiv 0 \pmod{\varepsilon_i} \quad i=1,2,\dots,n, \\ tv_i U_i a &\equiv 0 \pmod{\varepsilon'} \quad i=1,2,\dots,n. \end{aligned}$$

Alors  $z = Ua$  donne  $tv_i z_i \equiv 0 \pmod{\varepsilon'}$  avec  $(tv_i, \varepsilon') = tv_i$  solutions  $\pmod{\varepsilon'}$  pour  $z_i$ . De  $a = U^{-1}z$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} \overset{i}{a} &= \frac{\overset{i}{a}}{\overset{i}{P}} + \varepsilon' k_1 \delta^1 + \dots + \varepsilon' k_n \delta^n \\ x &= M \frac{\overset{i}{a}}{\overset{i}{P}} + \varepsilon' k_1 M^1 + \dots + \varepsilon' k_n M^n. \end{aligned}$$

Définissons  $\bar{B} = \varepsilon' M$  donc  $\bar{B}^i = tB^i$ . Nous avons  
 $b_j \leq \bar{P}^i < b_j + \varepsilon'$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Si  $\bar{P}_f$  est l'ensemble des points fondamentaux ainsi obtenu alors  $P_f \subset \bar{P}_f$ . Nous obtenons deux représentations (donc une infinité) des points entiers du cône :

$$x = \frac{i}{x} + Bk \quad i=1, 2, \dots, |\det B|, k \in \mathbf{N}^n$$

$$x = \frac{i}{x} + \bar{B}k \quad i=1, 2, \dots, |\det \bar{B}|, k \in \mathbf{N}^n$$

Nous référant à l'une d'elles, nous affirmons que la décomposition (V.3a) est unique. Montrons-le avec le choix  $\varepsilon$ . Si  $\bar{y}$  est un point entier du cône ( $A\bar{y} \geq b$ ) nous déterminons un point fondamental  $\frac{i}{x}$  et un n-upple de nombres entiers positifs ou nuls  $k_1, k_2, \dots, k_n$  tel que :

$$\bar{y} = \frac{i}{x} + B^1 k_1 + \dots + B^n k_n,$$

$$\text{où } B^i = \varepsilon M^i \text{ et } A\bar{y} = A\frac{i}{x} + k_1 \varepsilon \delta^1 + \dots + k_n \varepsilon \delta^n. \quad (3.e)$$

Comme  $\frac{i}{x}$  est un point fondamental i.e. que  $b_j \leq A_j \frac{i}{x} < b_j + \varepsilon$ , pour  $j=1, 2, \dots, n$  alors (3.e) donne :

$$\varepsilon^{-1}(A_j \bar{y} - b_j) - 1 < k_j \leq \varepsilon^{-1}(A_j \bar{y} - b_j).$$

Donc  $k_j$  est positif ou nul et il est unique. De plus  $\frac{i}{x} = \bar{y} - (B^1 k_1 + \dots + B^n k_n)$  est parfaitement déterminé.

f) Le choix de  $\varepsilon$

Propriété : La valeur  $\varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$  est le plus petit entier tel que  $B = \varepsilon M$  soit une matrice à coefficients entiers.

Preuve : Nous savons que  $\epsilon M = V(\epsilon E^{-1}) U$  est une matrice à coefficients entiers. Considérons maintenant un entier  $t$  quelconque strictement plus petit que  $\epsilon$ . Alors il existe au moins un élément de  $tE^{-1}$  qui ne soit pas entier par exemple l'élément  $(i,i)$  de valeur  $p/q \in \mathbb{Q}$ . Puisque  $(V t E^{-1})^i = (p/q) V^i$  et que  $V$  est unimodulaire, un élément au moins de la colonne  $(p/q) V^i$  n'est pas entier, par exemple l'élément  $(k,i)$  qui est égal à  $r/s$ . Aussi,

$$t M_i = V(tE^{-1}) U_i = (\alpha_1 + (r/s)U_i^1, \alpha_2 + (r/s)U_i^2, \dots, \alpha_n + (r/s)U_i^n)$$

avec  $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ . Le p.g.c.d. des éléments de  $U_i$  est égal à 1 et alors au moins un élément de  $t M_i$  n'est pas entier.

### Exemple V.3.3 illustrant le théorème V.3

Considérons le cône défini par les inégalités suivantes :

$$2x - y \geq \frac{43}{2} \quad (1)$$

$$x - 5y \geq -\frac{17}{4} \quad (2)$$

Les coordonnées du sommet  $S$  sont  $(\frac{149}{12}, \frac{10}{3})$ .

Nous obtenons  $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$$

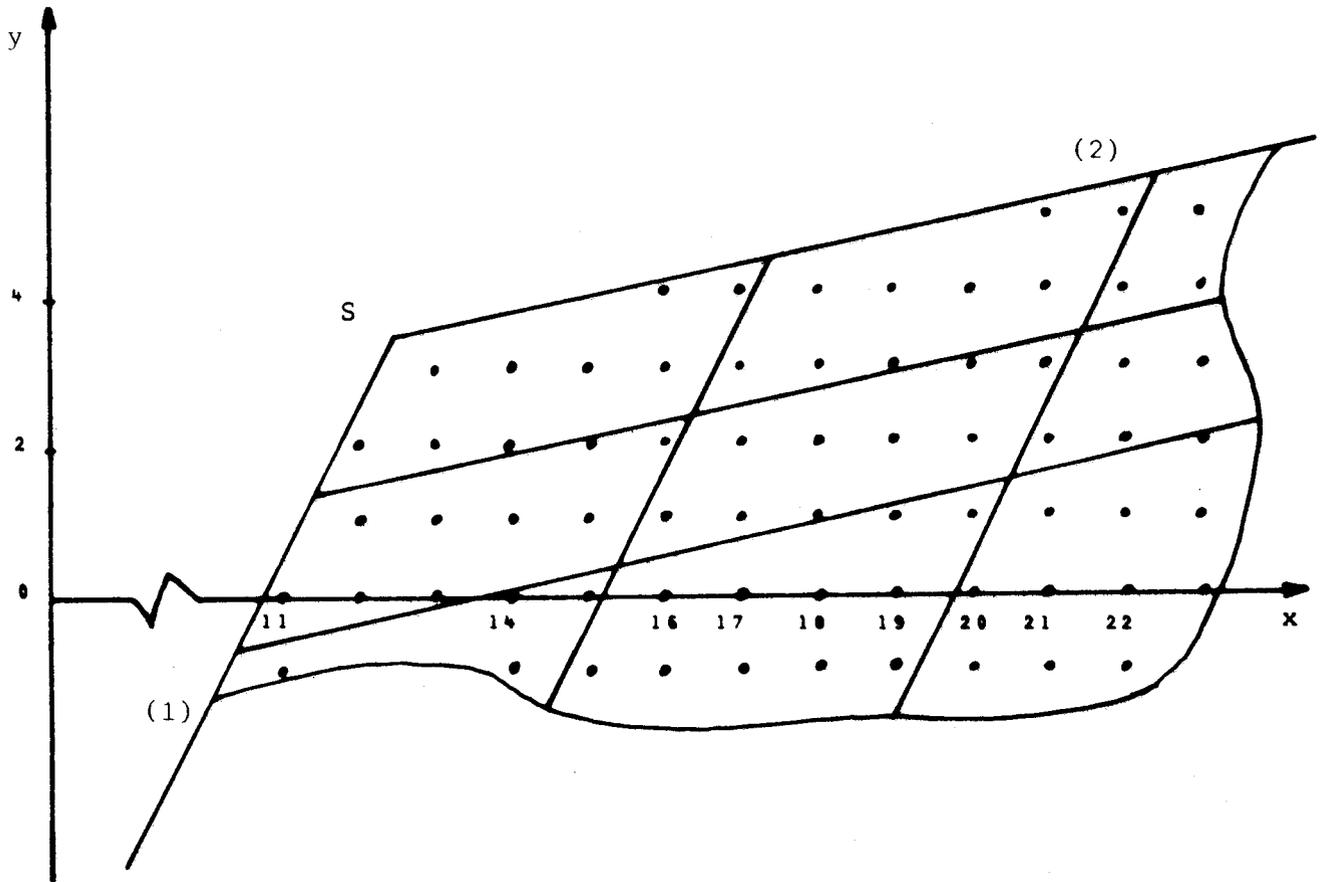
$$B^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

et neuf points fondamentaux :

$$\frac{1}{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{2}{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \frac{3}{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{4}{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \frac{5}{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{6}{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{7}{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{8}{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{9}{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



#### V-4 REPRÉSENTATION ANALYTIQUE MINIMALE D'UN CÔNE RÉGULIER

Dans la partie précédente nous avons vu que l'ensemble des points fondamentaux et l'ensemble des vecteurs de translation sont définis de manière unique à partir de la matrice  $A$ , c'est-à-dire à partir de la représentation analytique du cône :  $\{x \mid Ax \geq b\}$ . Démontrons le résultat suivant :

Théorème : *Etant donné un cône polyédrique régulier défini par  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$  alors il existe une représentation analytique de ce cône de la forme  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x \geq b'\}$  qui conduit, lorsqu'on lui applique la méthode précédente, à un ensemble de points fondamentaux minimaux et à un ensemble de vecteurs de translation de longueur minimale.  $\square$*

Preuve : Nous donnerons une démonstration constructive.

Soit  $UAV = E$  une forme normale de Smith de  $A$  dont les éléments non nuls sont notés  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ . Posons  $\varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$  et  $B = \varepsilon VE^{-1}U$ . Nous savons que  $BA = AB = \varepsilon I$ .

Posons  $\bar{B}^j = \frac{1}{\beta_j} B^j$  où  $\beta_j$  est le p.g.c.d. des coordonnées du vecteur  $B^j$ .

Appelons  $D$  la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont  $\beta_j$ . Posons  $A' = DA$  et  $\bar{B}' = BD^{-1}$ . Nous avons :  $BA = \varepsilon I \iff \bar{B}'A' = \varepsilon I$  i.e. que  $\frac{1}{\varepsilon} \bar{B}'$  est l'inverse de  $A'$ .

Considérons  $E'$  une forme normale de Smith de  $A'$  :  $U'A'V' = E'$ . Soient  $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n$  les éléments diagonaux de  $E'$ . Posons  $\varepsilon' = [\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n]$  et  $B' = \varepsilon'V'(E')^{-1}U'$ .

Montrons que  $\varepsilon' = \varepsilon$  (et que  $B' = \bar{B}'$ ).

La matrice  $\frac{1}{\varepsilon'} B'$  est l'inverse de  $A'$  donc  $\frac{1}{\varepsilon'} B' = \frac{1}{\varepsilon} \bar{B}'$ .

De  $(A')^{-1} = V'(E')^{-1} U' = \frac{1}{\varepsilon} \bar{B}'$ , nous déduisons que  $\varepsilon(E')^{-1}$  est une matrice à coefficients entiers car  $\bar{B}'$  l'est et que  $U'$  et  $V'$  sont unimodulaires. Par suite comme  $\varepsilon'$  est le plus petit entier tel que la matrice  $\varepsilon'(E')^{-1}$  soit entière nous avons  $\varepsilon = \lambda\varepsilon'$  avec  $\lambda \geq 1$ .

D'autre part  $A^{-1} = VE^{-1}U$  et  $\varepsilon'(A')^{-1} = B' = \varepsilon' A^{-1}D^{-1}$  ; nous en déduisons  $B' = \varepsilon' VE^{-1}UD^{-1}$ . Comme  $B$  et  $D$  sont des matrices à coefficients entiers,  $U$  et  $V$  sont unimodulaires ; nous concluons de manière identique à ce qui précède que  $\varepsilon' = \mu\varepsilon$  avec  $\mu \geq 1$  et donc  $\varepsilon' = \varepsilon$  et  $B' = \bar{B}'$ .

Nous avons alors les représentations analytiques suivantes du cône :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x \geq b'\} \text{ avec } A' = DA \text{ et } b' = Db.$$

Si nous définissons le cône comme  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$  nous savons d'après le théorème V.3 que le nombre de points fondamentaux est égal à  $|\det B|$  et que les vecteurs de translation sont les colonnes de  $B$ .

Si nous définissons le cône comme  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x \geq b'\}$ , le nombre de points fondamentaux est  $|\det B'| = \frac{|\det B|}{|\det D|}$  et les vecteurs de translation sont les vecteurs  $B'^j = \frac{1}{\beta_j} B^j$ .  $\square$

Nous pouvons résumer la recherche de la représentation analytique minimale du cône polyédrique par le schéma suivant :

Etant donné  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$

1. calculons :

- .  $E = UAV$  une forme normale de Smith de  $A$ ,
- .  $B = \epsilon VE^{-1}U$ ,
- . les entiers  $\beta_1, \dots, \beta_n$  p.g.c.d. des coordonnées des vecteurs  $B^1, \dots, B^n$

2. d'où :  $A'_i = \beta_i A_i$  et  $b'_i = \beta_i b_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .  $\square$

#### Exemples V.4.1

Pour  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 11 & 7 & 39 \\ 6 & 15 & 3 & 15 \\ -12 & -35 & -8 & -34 \end{pmatrix}$  nous obtenons :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \quad \text{et } B = \begin{pmatrix} 82 & -12 & 22 & 8 \\ -44 & 6 & -10 & -4 \\ 146 & -21 & 15 & 4 \\ -18 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

soit un nombre de points fondamentaux égal à 288.

En appliquant ce qui précède nous obtenons :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 10 \\ 6 & 33 & 21 & 117 \\ 6 & 15 & 3 & 15 \\ -48 & -140 & -32 & -136 \end{pmatrix} \quad \text{et } E' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 41 & -4 & 22 & 2 \\ -22 & 2 & -10 & -1 \\ 73 & -7 & 15 & 1 \\ -9 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et le nombre de points fondamentaux est 12.  $\square$

Pour les autres cas traités par la suite, nous donnerons seulement les résultats ; les démonstrations ou les constructions sont assez analogues à celles des parties V.3 et V.4 et peuvent être trouvées dans [19] et [20].

## V-5 CÔNE CONTENANT UNE VARIÉTÉ LINÉAIRE

Ce cône est défini par :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$$

où  $A$  est une  $(m, n)$  matrice avec  $m < n$ , de rang  $m$ . Les éléments de  $A$  sont dans  $\mathbb{Z}$  (ou  $\mathbb{Q}$ ) et  $b$  est dans  $\mathbb{R}^n$ .

Théorème : Tous les points entiers d'un tel cône sont donnés par la formule suivante :

$$x = \frac{i}{x} + k_1 B^1 + \dots + k_m B^m + y_{m+1} V^{m+1} + \dots + y_n V^n. \quad (V.5.\beta)$$

Les  $B^j$  sont les vecteurs colonnes de  $B = \epsilon M$  où  $M$  est l'inverse à droite de  $A$  et  $\epsilon$  est le p.p.c.m. des éléments diagonaux de  $E = UAV$  une forme normale (ou la réduite) de Smith de  $A$  ( $U$  et  $V$  étant les deux matrices unimodulaires associées).

Ici  $B^j$  est parallèle à la variété linéaire  $K_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_i x = b_i, i \neq j\}$  pour tout  $j = 1, 2, \dots, m$ ,

Les  $V^j$  sont les  $n-m$  dernières colonnes de  $V$ , ils sont parallèles à la variété linéaire  $A^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_i x = b_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ ,

$$k_j \in \mathbb{N} \text{ pour } j = 1, 2, \dots, m$$

et  $y_p \in \mathbb{Z}$  pour  $p = m+1, \dots, n$ .

L'ensemble des  $\frac{i}{x}$  est appelé l'ensemble des points fondamentaux (ensemble  $P_f$ ). Les points fondamentaux sont les seuls points entiers de l'ensemble suivant :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \frac{0}{x} + \lambda_1 B^1 + \dots + \lambda_m B^m, 0 \leq \lambda_i < 1, \lambda_i \in \mathbb{R}, i=1, 2, \dots, m\}$$

où  $\overset{\circ}{x}$  est un point de la variété  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ .

Le nombre de points fondamentaux de ce cône est égal au p.g.c.d. de B où  $B = [B^1, \dots, B^m]$ .

Cette décomposition (V.5.8) est unique à une translation près.  $\square$

### Exemple V.5.1

Pour le cône défini par les inégalités suivantes :

$$-7x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 19x_4 + x_5 \geq 14/3$$

$$5x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 17x_5 \geq 7/9$$

$$3x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 7x_4 - 9x_5 \geq 16/5$$

Les calculs donnent :

$$t_B^1 = (5327, 697, 2307, 8, 875)$$

$$t_B^2 = (658, 86, 285, 1, 108)$$

$$t_B^3 = (-651, -85, -282, -1, -107)$$

$$t_V^4 = (-89, -12, -37, -1, -15)$$

$$t_V^5 = (24, 6, -2, 7, 7)$$

et deux points fondamentaux :

$$t_x^1 = (15\ 337, 2\ 007, 6\ 642, 23, 2\ 519)$$

$$t_x^2 = (12\ 019, 1\ 573, 5\ 205, 18, 1\ 974)$$

### Exemple V.5.2

Pour le demi-espace :

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 13/2$$

nous trouvons  $t_B^1 = (-1, 1, 0)$ ,  $t_V^2 = (3, -2, 0)$ ,  $t_V^3 = (-2, 0, 1)$  et un point

fondamental  $\begin{matrix} t \\ \bar{x} \end{matrix} = (-7, 7, 0)$ .

Représentation analytique minimale de V.5

Etant donnés  $A(m, n)$  et  $b(m, 1)$  déterminons  $A'(m, n)$  et  $b'(m, 1)$  la représentation analytique minimale du cône associé à l'aide du schéma suivant :

1. Calculons :

.  $E = UAV$  une forme normale de Smith de  $A$ ,

. En posant  $R = \{1, 2, \dots, m\}$  et  $\varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m]$ ,

$$B = \varepsilon V^R (E^R)^{-1} U,$$

. Les entiers  $\beta_1, \dots, \beta_m$  p.g.c.d. des coordonnées des vecteurs  $B^1, \dots, B^m$

2. D'où  $A'_i = \beta_i A_i$  et  $b'_i = \beta_i b_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, m$ .  $\square$

V-6 CÔNE POLYÉDRIQUE DÉFINI PAR  $\{x \mid Ax \geq b\}$  OÙ A EST UNE  $(m,n)$  MATRICE,  $m > n$

Ce cône peut être décomposé en une réunion de cônes réguliers V.3. Dans cette décomposition, deux cônes réguliers ont au plus une face en commun. Pour obtenir cette décomposition nous utilisons la méthode simpli-  
 ciale qui nous donne les sommets de tout polyèdre, en particulier leurs directions d'infinitude [5]. L'intérêt de la méthode simpliciale est que le procédé de calcul permet de passer d'un sommet (ou d'une direction d'infinitude) à un sommet voisin (ou à une direction d'infinitude voisine) c'est-à-dire dont les bases correspondantes ne diffèrent que d'un seul élément.

V-7 PARALLÉLOTOPE BORNÉS

Un parallélotope borné de  $\mathbb{R}^n$  est défini par :  
 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid c \geq Ax \geq b\}$  où A est une  $(n,n)$  matrice de rang n, à éléments dans  $\mathbb{Z}$ , b et c étant des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

Théorème : Tous les points entiers d'un parallélotope borné de  $\mathbb{R}^n$  sont donnés par :

$$x = \frac{i}{x} + k_1 B^1 + \dots + k_n B^n.$$

Cette décomposition est unique. Ici  $i \in K$  (un sous-ensemble fini de  $\mathbb{N}$ ),  $B^1, \dots, B^n$  sont n vecteurs linéairement indépendants à composantes entières. Ils sont parallèles aux arêtes du parallélotope. De plus les

$\overset{i}{k}_j \in \mathbb{N}$  et ils sont tels que  $0 \leq \overset{i}{k}_j \leq \overset{i}{l}_j$  pour  $j=1,2,\dots,n$  et  $i \in K$ .

L'ensemble des  $\overset{i}{x}$  est appelé ensemble des points fondamentaux (ensemble  $P_F^*$ ). Ces points sont les seuls points entiers d'un parallélotope semi-ouvert qui est appelé le parallélotope fondamental du parallélotope.  $\square$

Bien entendu nous utilisons la représentation minimale d'un tel parallélotope c'est-à-dire celle associée à l'un des cônes asymptotiques au parallélotope ; il en sera de même pour le dernier cas envisagé suivant.

## V-8 PARALLÉLOTOPE NON BORNÉS

### V.8.1 - 1er type

Considérons le parallélotope donné par :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid b_J \leq A_J x \leq c_J, b_{J'} \leq A_{J'} x \leq c_{J'}, J \cup J' = n, J \cap J' = \emptyset, A_{J \cup J'} \text{ de rang } n\}.$$

Corollaire : Tous les points entiers de ce parallélotope sont donnés par la formule suivante :

$$x = \overset{i}{x} + \sum_{j \in J} \overset{i}{k}_j B^j + \sum_{j \in J'} k_j B^j.$$

Cette décomposition est unique. Ici  $i \in K$  (où  $K$  est un sous-ensemble fini de  $\mathbb{N}$ ) ;  $B^j$  comme dans la section V.7 ;  $k_j \in \mathbb{N}$  pour  $j \in J'$  ;  $\overset{i}{k}_j$  sont des entiers tels que  $0 \leq \overset{i}{k}_j \leq \overset{i}{l}_j$  pour  $i \in K$  et  $j \in J$ .

L'ensemble des  $\overset{i}{x}$  est l'ensemble des points fondamentaux ( $P_F^*$ ).

Cet ensemble est dans un parallélotope semi-ouvert appelé le parallélotope

fondamental du parallélotope.  $\square$

### V.8.2 - 2ème type

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid b_J \leq A_J x \leq c_J, b_{J'} \leq A_{J'} x, J = \{1, 2, \dots, s\}, J' = \{s+1, \dots, m\},$   
 $m < n, A_{J \cup J'} \text{ de rang } m\}.$

Corollaire : Tous les points entiers de ce parallélotope sont donnés par la formule suivante :

$$x = \frac{i}{x} + \sum_{j \in J} k_j^i B^j + \sum_{j \in J'} k_j B^j + \sum_{j \in L} y_j V^j$$

Cette décomposition est unique. Ici  $i \in K$  ;  $k_j \in \mathbb{N}$  pour  $j \in J'$  ;  $k_j^i$  sont des entiers tels que  $0 \leq k_j^i \leq l_j^i$  pour  $i \in K$  et  $j \in J$  ;  $y_j \in \mathbb{Z}$  pour  $j \in L$ .

Pour  $j \in J \cup J'$ , les vecteurs  $B^j$  sont parallèles aux variétés  $K_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_i x = b_i \text{ pour } i \in J \cup J', i \neq j\}.$

Pour  $j \in L = \{m+1, \dots, n\}$ , les  $V^j$  sont des vecteurs parallèles à la variété linéaire  $A^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_i x = b_i, i \in J \cup J'\}.$

L'ensemble des  $\frac{i}{x}$  est l'ensemble des points fondamentaux.  $\square$

## V-9 QUELQUES PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES ET GÉOMÉTRIQUES [19]

Proposition : Les cônes V.3 ou les parallélotopes V.7 ont un seul point fondamental si et seulement si  $A = tU$  où  $t \in \mathbb{Z}$  et  $U$  est une matrice unimodulaire.

Corollaire : Les cônes V.4 ou les parallélotopes V.8 ont un seul point fondamental si et seulement si  $A = tW$  où  $t \in \mathbb{Z}$  et  $W$  est une matrice semi-modulaire.

Proposition : Etant donné un parallélotope semi-ouvert :

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = T + \lambda_1 C^1 + \dots + \lambda_n C^n, 0 \leq \lambda_i < 1, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ pour } i=1,2,\dots,n\}$   
 où  $T \in \mathbb{R}^n$  et les  $C^i$  étant  $n$  vecteurs linéairement indépendants à coordonnées entières, alors le nombre de points entiers de ce parallélotope est exactement égal à son volume i.e. à  $\det [C^1, \dots, C^n]$ .

Définition d'un m-parallélotope

Un m-parallélotope semi-ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , de sommet  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , défini par  $m$  vecteurs  $C^1, \dots, C^m$  linéairement indépendants,  $m < n$ , à coordonnées entières, est l'ensemble noté  $P(\bar{x}; C^1, \dots, C^m) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \bar{x} + \lambda_1 C^1 + \dots + \lambda_m C^m, 0 \leq \lambda_i < 1, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ .

Soient  $T$  et  $P$  deux matrices unimodulaires donnant  $D$  une forme normale de Smith de  $C = [C^1, C^2, \dots, C^m]$  :  $D = T \cdot P$ . Posons  $\bar{R} = \{m+1, \dots, n\}$ .

Proposition [22] : Etant donné un  $m$ -parallélotope de  $\mathbb{R}^n$ , de sommet  $s \in \mathbb{R}^n$  défini par  $m$  vecteurs  $c^1, \dots, c^m$  à coordonnées entières,  $m < n$ , il possède des points entiers si et seulement si son sommet  $s$  est de la forme  $s = Cu + (T^{-1})^{\bar{R}}t$  où  $C = [c^1, \dots, c^m]$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $(T^{-1})^{\bar{R}}$  est une matrice semi-modulaire dont les vecteurs colonnes engendrent un espace supplémentaire dans  $\mathbb{R}^n$  de celui engendré par les vecteurs  $c^i$ ,  $t \in \mathbb{Z}^{n-m}$ . Le nombre de points entiers qu'il contient est exactement  $\Delta(C)$ .

## V-10 RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME GÉNÉRAL [19]

Nous nous proposons de chercher tous les vecteurs  $x$  entiers qui vérifient :

$$Ax R b$$

où  $R$  est une relation quelconque ; en fait ce sera une relation d'ordre quelconque sur un anneau. Précédemment  $R$  était la relation d'ordre  $\geq$ .

Nous supposons que  $A$  est une  $(m,n)$  matrice ; si  $m = n$ , elle est de rang  $n$ , si  $m < n$ , elle est de rang  $m$  et ses éléments sont entiers ;  $b$  est un vecteur à coordonnées réelles ou entières selon les cas.

Pour cela nous posons  $Ax = a$  et nous cherchons les vecteurs  $a$  admissibles c'est-à-dire qui :

- 1) donnent des solutions entières au système  $Ax = a$ ,
- 2) vérifient  $a R b$ .

Le premier point s'obtient en utilisant la technique de résolution des systèmes linéaires en nombres entiers. Avec les notations et les notions introduites en V.3.a) nous obtenons :

$$Ax = a \iff Ey = Ua \text{ (avec } x = Vy).$$

Notons toujours  $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n]$  ; les  $\epsilon_i$  étant les éléments diagonaux de  $E$ .

Comme en V.3.a) les vecteurs  $a$  qui vérifient 1) sont donnés par :

$$a \equiv \overset{i}{\bar{a}} \pmod{\varepsilon} \text{ pour } i = 1, 2, \dots, v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n.$$

Revenons à 2), il faut  $\overset{i}{a} R b$  c'est-à-dire que pour  $i$  fixé, il faut qu'il existe des entiers  $\overset{i}{k}_1, \dots, \overset{i}{k}_n$  tels que :

$$(\overset{i}{\bar{a}}_1 + \overset{i}{k}_1 \varepsilon) R b_1, \dots, (\overset{i}{\bar{a}}_n + \overset{i}{k}_n \varepsilon) R b_n \quad (10.1)$$

Appelons  $L$  le sous-ensemble de  $\{1, 2, \dots, v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n\}$  tel que la condition 2) soit réalisée.

L'ensemble des  $\overset{i}{\bar{a}}$  pour  $i \in L$  constitue l'ensemble des  $a$  admissibles.

Ils peuvent s'écrire :

$$\overset{i}{\bar{a}} = \overset{i}{p} + \varepsilon \overset{i}{k}_1 \delta^1 + \dots + \varepsilon \overset{i}{k}_n \delta^n \text{ pour } i \in L.$$

Un  $\overset{i}{\bar{a}}$  admissible peut fournir un nombre fini de solutions (c'est le cas où la relation est la relation de divisibilité, voir l'exemple ci-dessous) ou un nombre infini de solutions (cas de la relation  $\geq$  dans V.3.a) ).

L'ensemble des solutions du problème est alors donné par  $x = M \overset{i}{\bar{a}}$  où  $M = VE^{-1}U$ , soit

$$x = M \overset{i}{p} + \overset{i}{k}_1 B^1 + \dots + \overset{i}{k}_n B^n \text{ pour } i \in L,$$

les  $\overset{i}{k}_j$  étant déterminés par les relations (10.1).

Dans le cas où la matrice  $A$  est rectangulaire,  $m < n$ , nous obtenons :

$$x = MP + k_1 B^1 + \dots + k_m B^m + y_{m+1} y^{m+1} + \dots + y_n y^n,$$

où  $y_{m+1}, \dots, y_n$  sont des entiers quelconques.

Exemple. La relation  $R$  est celle de la divisibilité. Déterminer  $x_1, x_2, x_3$  tels que :

$$\begin{array}{r|l} 21x_1 - 10x_2 + 4x_3 & 31 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 & 3 \\ -3x_1 + 4x_2 + 10x_3 & 7 \end{array}$$

La partie 1) nous fournit 4 solutions :

$$t_a^1 = (0, 0, 0) \pmod{2}, \quad t_a^2 = (11, 0, 1) \pmod{2}, \quad t_a^3 = (21, 1, -3) \pmod{2},$$

$$t_a^4 = (32, 1, -2) \pmod{2}$$

$a_1, a_2, a_4$  ne sont pas admissibles car :

$$\begin{array}{l} a_1 = 2k_1 \not\mid 31 \\ a_2 = 2k_2 \not\mid 3 \\ a_4 = -2 + 2k_3 \not\mid 7 \end{array}$$

$a_3$  est admissible et donne 27 solutions car

$$\begin{array}{l} 21 + 2k_1 \mid 31 \quad \text{pour } k_1 = -26, -10, 5 \\ 1 + 2k_2 \mid 3 \quad \text{pour } k_2 = -2, 0, 2 \\ -3 + 2k_3 \mid 7 \quad \text{pour } k_3 = -2, 2, 5 \end{array}$$

(-227, -432, 104), (-131, -248, 60), (-59, -110, 27), (5, 12, -4),  
(101, 196, -48), (173, 334, -81), (121, 234, -58), (217, 418, -102),  
(289, 556, -135), (-259, -496, 120), (-163, -312, 76), (-91, -174, 43),  
(-27, -52, 12), (69, 132, -32), (141, 270, -65), (89, 170, -42),  
(185, 354, -86), (257, 492, -119), (-289, -556, 135), (-193, -372, 91),  
(-121, -234, 58), (-57, -112, 27), (39, 72, -17), (111, 210, -50),  
(59, 110, -27), (155, 294, -71), (227, 432, -104).

## V-11 APPLICATION À L'OPTIMISATION EN NOMBRES ENTIERS

Considérons le programme suivant :

$$(PM1) : \text{Max } \{f \cdot x \mid Ax \geq b\}$$

où  $f \in (\mathbb{R}^n)^*$  et  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$  représente géométriquement un cône régulier.

Proposition : Si le sommet  $\bar{x}$  du cône est l'unique solution de (PM1) alors l'optimum en entier de (PM1) est un point fondamental de ce cône.

Corollaire : Si le sommet  $\bar{x}$  est solution non unique de (PM1), alors il existe une infinité de solutions entières ; l'une d'elles est un point fondamental.  $\square$

Considérons (PM2) :  $\text{Max } \{f \cdot x \mid c \geq Ax \geq b\}$  où  $f \in (\mathbb{R}^n)^*$  et  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid c \geq Ax \geq b\}$  représente géométriquement un parallélotope. Nous supposons qu'un sommet  $\bar{x}$  par exemple est optimum pour (PM2).

Corollaire : L'optimum en entier de (PM2) est un point fondamental du parallélotope i.e. un point de  $P_f^*$  où  $P_f^*$  est associé à  $\bar{x}$ .  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [1] *BACHEM A.*, "Reduction and decomposition of integer programs over cones", Workshop on integer programming, Bonn, Sept. 8-12, 1975.
- [2] *BALAS E.*, "Un algorithme additif à la programmation en nombres entiers et à la programmation non linéaire", C.R.Acad. Sc. Paris, série A, 258, 3817-3820 (1964).
- [3] *BALAS E.*, "Integer programming and convex analysis, intersection cuts from outer polars", Mathematical Programming 2 (1972), 330-382.
- [4] *BALAS E.*, "Facets of the knapsack polytope", Mathematical Programming 8 (1975), 146-164.
- [5] *BALINSKI M.L.*, "An algorithm for finding all vertices of convex polyhedral sets", Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics 9 (1961), 72-88.
- [6] *BALINSKI M.L.*, "Integer programming : methods, uses, computations", Management Science 12 (1965), 253-313.
- [7] *BALINSKI M.L. and SPIELBERG K.*, "Methods for integer programming : algebraic combinatorial, and Enumerative", in Progress in Operations Research vol. III J.S. Aronofsky ed., John Wiley and Sons, Inc. N.Y. (1969), pp. 195-292.
- [8] *BEALE E.M.L. and SMALL R.E.*, "Mixed integer programming by branch and bound technique", in Proceeding IFIP Congress vol. 2, Kalenich ed., Spartan Press, Washington and Mac Millan, London (1965), pp. 450-451.
- [9] *BENDERS J.F.*, "Partitionning procedures for solving mixed-variables programming problems", Numerische Mathematik 4 (1962), 238-252.
- [10] *BENICHOU M., GAUTHIER J.M., GIRODET P., HENTGES G., RIBIERE G. et VINCENT O.*, "Experiments in mixed-integer linear programming" Mathematical Programming 1 (1971), 76-94.
- [11] *BERGE C.*, "Balanced matrices", Mathematical Programming 2 (1972), 19-31.
- [12] *BRADLEY G.H.*, "Algorithms for Hermite and Smith normal matrices and linear diophantine equations", Mathematical Computation 25 (1971), 897-907.

- [13] BURDET C.A., "Enumerative inequalities in integer programming", *Mathematical Programming* 2 (1972), 32-64.
- [14] BURDET C.A. and JOHNSON E.L., "A subadditive approach to the group problem of integer programming", *Mathematical Programming Study* 2 (1974), 51-71.
- [15] CHATELET A., "Arithmétiques et algèbres modernes", Tomes I, II, III, Presses Universitaires de France, Paris, (1967-1968).
- [16] DAKIN R.J., "A tree search algorithm for mixed integer programming problems", *Computer Journal* 8 (1965), 250-255.
- [17] FAYARD D. and PLATEAU G., "Resolution of the 0-1 knapsack problem : comparison of methods", *Mathematical Programming* 8 (1975) 272-307.
- [18] FIOROT J.C., "Génération des points entiers d'un cône polyédrique", *C.R. Acad. Sc. Paris, série A*, 269, 215-217 (1969).
- [19] FIOROT J.C., "Structures d'ensembles de points entiers", Thèse 3ème cycle, Lille (1971).
- [20] FIOROT J.C., "Generation of all integer points for given sets of linear inequalities", *Mathematical Programming* 3 (1972), 276-295.
- [21] FIOROT J.C., "Représentation minimale des points entiers d'un cône polyédrique", publication n°33, laboratoire de Calcul, Université de Lille I (1972).
- [22] FIOROT J.C., "Nombre de points entiers dans un m-paralléloèdre", Publication n°35, Laboratoire de Calcul, Université de Lille I (1972).
- [23] FIOROT J.C. et GONDRAN M., "Résolution des systèmes linéaires en nombres entiers", *Bull. de la Dir. des Etudes et Recherches E.D.F. Série C*, 2 (1969), 65-115.
- [24] FISHER M.L. and SHAPIRO J.F., "Constructive duality in integer programming", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 27 (1974), 31-52.
- [25] FREHEL J., "Une méthode de troncature pour la programmation en nombres entiers", Rapport IBM France n° FFL0072, février 1969.
- [26] FULKERSON D.R., "The theory of linear inequalities", Rand Report RT L2 (1952).
- [27] GEOFFRION A.M. and MARSTEN R.E., "Integer programming algorithms : a framework and State-of-the art survey", *Management Science* 18 (1972), 465-491.
- [28] GLOVER F., "Cut search methods in integer programming", *Mathematical Programming* 3 (1972) 86-100.

- [29] GOMORY R.E., "An algorithm for integer solutions to linear programs" in Recent advances in Mathematical Programming, Graves and Wolfe eds., Mac Graw-Hill Book Company Inc. (1963) pp. 269-302.
- [30] GOMORY R.E., "All integer programming algorithms", in Industrial scheduling, Muth, Thompson eds., Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1963) pp. 193-206.
- [31] GOMORY R.E., "Some polyhedra related to combinatorial problems", linear algebra and its applications 2 (1969), 451-558.
- [32] GOMORY R.E., "An algorithm for the mixed integer problem", RM-2595 Rand Corporation (July 7, 1960).
- [33] GOMORY R.E. and JOHNSON E.L., "Some continuous functions related to corner polyhedra", Mathematical Programming 3 (1972), 23-85.
- [34] GONDRAN M., "Problèmes combinatoires et programmation en nombres entiers", thèse Paris (1974).
- [35] GUIGNARD M. and SPIELBERG K., "The state enumeration method for mixed zero-one programming", 7th Mathematical Programming Symposium, La Haye (1970).
- [36] GUIGNARD M. and SPIELBERG K., "Search techniques with adaptation features for certain integer and mixed integer programming problems" in Proceeding IFIP Congress 1968, North Holland Publishing company Amsterdam (1969) pp. 238-244.
- [37] HAMMER P.L., JOHNSON E.L. and PELED U.N., "Facets of regular 0-1 polytopes", Mathematical Programming 8 (1975), 179-206.
- [38] HANSEN P., "Les procédures d'exploration et d'optimisation par séparation et évaluation : a survey" in Combinatorial Programming : Methods and Applications, Roy ed., D. Reid Publishing Company, Dordrecht, Holland (1975) pp. 29-63.
- [39] HELD M. and KARP R.M., "The traveling-salesman problem and minimum spanning trees : part II", Mathematical Programming 1 (1971), 6-25.
- [40] JOHNSON E.L., "On the group problem for mixed integer programming", Mathematical Study 2 (1974), 137-179.
- [41] LANG A.H. and DOIG A.G., "An automatic method of solving discrete programming problems", Econometrica 28 (1960), 497-520.
- [42] LITTLE J.D.C., MURTY K.C., SWEENEY D.W. and KAREL C., "An algorithm for the traveling salesman problem", Operations Research 11 (1963), 972-989.
- [43] MAC DUFFEE C.C., "The theory of matrices", Chelsea Publishing Company N.Y. (1956).
- [44] MAURRAS J.F., "Polytopes à sommets dans  $\{0,1\}^n$ ", thèse Paris (1976).

- [45] MITRA G., "Investigation of some branch and bound strategies for the solution of mixed integer linear programs", *Mathematical Programming* 4 (1973), 155-170.
- [46] MOTZKIN T.S., "Beiträge zur theorie der linearen ungleichungen", Dissertation, University of Basel (1936).
- [47] PADBERG M., "On the facial structure of set packing polyhedra", *Mathematical Programming* 5 (1973), 199-215.
- [48] ROY B., GNHIEM P.T., BERTIER P., "Programmes linéaires en nombres entiers et procédure S.E.P.", *Métra* 4 (1965), 441-460.
- [49] SAKAROVITCH M., "Quasi-balanced matrices", *Mathematical Programming* 8 (1975), 382-386.
- [50] SHAPIRO J.F., "Group theorie algorithms for the integer programming problem II : extension to a general algorithm", *Operations Research* 16 (1968), 928-947.
- [51] SHAPIRO J.F., "Generalized Lagrange multipliers in integer programming", *Operations Research* 19 (1971), 68-76.
- [52] TOMLIN J.A., "Branch and bound methods for integers and non-convex programming" in *Integer and nonlinear programming*, Abadie ed., North Holland (1970) pp. 437-450.
- [53] TOMLIN J.A., "An improved branch and Bound method for integer programming", *Operations Research* 19 (1971), 1070-1075.
- [54] WOLSEY L.A., "Extensions of the group theoretic approach in integer programming", Working paper (october 1970) Manchester Business School, University of Manchester, England.
- [55] WOLSEY L.A., "Faces for a linear inequality in 0-1 variables", *Mathematical Programming* 8 (1975), 165-178.

