N° d'ordre : 384

THESES

présentées à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Max DAUCHET

Première Thèse :

TRANSDUCTIONS DE FORETS
BIMORPHISMES DE MAGMOIDES

Deuxième Thèse : FLUX D'INFORMATIONS DANS LES ORDINATEURS.

Thèses soutenues le 1er Juin 1977, devant la Commission d'Examen

MM.	P.	BACCHUS	Président
	L.	BOASSON	
	V.	CORDONNIER	Examinateurs
	M.	GROSS	
	G.	JACOB	
	M.	NIVAT	Rapporteur

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE

01.02.1976

DOYENS HONORAIRES de l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, SAVART, WATERLOT, WIEMAN, ZAMANSKI.

PRESIDENTS HONORAIRES DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R. DEFRETIN, M. PARREAU.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. J. LOMBARD.

PROFESSEURS TITULAIRES

M.	BACCHUS Pierre	Astronomie
M.	BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Physique
M.	BECART Maurice	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BILLARD Jean	Physique du Solide
M.	BIAYS Pierre	Géographie
M.	BONNEMAN Pierre	Chimie Appliquée
M.	BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M.	BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M.	BOUGHON Pierre	Algèbre
M.	BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M.	CELET Paul	Géologie Générale
M.	CONSTANT Eugène	Electronique
M.	DECUYPER Marcel	Géométrie
M.	DELATTRE Charles	Géologie Générale
M.	DELHAYE Michel	Chimie Physique
M.	DERCOURT Michel	Géologie Générale
M.	DURCHON Maurice	Biologie Expérimentale
M.	FAURE Robert	Mécanique
M.	FOURET René	Physique du Solide
M.	GABILLARD Robert	Electronique
M.	GLACET Charles	Chimie Organique
M.	GONTIER Gérard	Mécanique
M.	GRUSON Laurent	Algèbre
M.	GUILLAUME Jean	Microbiologie
M.	HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M.	LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique
M.	LANSRAUX Guy	Physique Atomique et Moléculaire
M.	LAVEINE Jean-Pierre	Paléontologie
M.	LEBRUN André	Electronique
M.	LEHMANN Daniel	Géométrie

Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M.	LINDER Robert	Biologie et Physiologie Végétales
M.	LOMBARD Jacques	Sociologie
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M.	LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M.	MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M.	MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M.	MONTREUIL Jean	Biochimie
M.	PARREAU Michel	Analyse
M.	POUZET Pierre	Analyse Numérique
M.	PROUVOST Jean	Minéralogie
M.	SALMER Georges	Electronique
M.	SCHILTZ René	Physique Atomique et Moléculaire
Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Géométrie
M.	SEGUIER Guy	Electrotechnique
M.	TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée
M.	VIDAL Pierre	Automatique
M.	VIVIER Emile	Biologie Cellulaire
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique Atomique et Moléculaire
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.	BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BODARD Marcel	Biologie Végétale
M.	BOILLET Pierre	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M.	BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M.	CAPURON Alfred	Biologie Animale
M.	CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des entreprises
M.	DEPREZ Gilbert	Physique Théorique
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M.	GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M.	LACOSTE Louis	Biologie Végétale
Mme	LEHMANN Josiane	Analyse
M.	LENTACKER Firmin	Géographie
M.	LOUAGE Francis	Electronique
Mle	MARQUET Simone	Probabilités
M.	MIGEON Michel	Chimie Physique
M.	MONTEL Marc	Physique du Solide
M.	PANET Marius	Electrotechnique
M.	RACZY Ladislas	Electronique
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M.	SLIWA Henri	Chimie Organique

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés d'Enseignement)

M.	ADAM Michel	Sciences Economiques
M.	ANTOINE Philippe	Analyse
M.	BART André	Biologie Animale
M.	BEGUIN Paul	Mécanique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
M.	BOSCQ Denis	Probabilités
M.	BREZINSKI Claude	Analyse Numérique
M.	BRUYELLE Pierre	Géographie

.../...

M. CARREZ Christian	Informatique
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. COQUERY Jean-Marie	Psycho-Physiologie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DEBENEST Jean	Sciences Economiques
M. DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M. DHAINAUT André	Biologie Animale
M. DELAUNAY Jean-Claude	Sciences Economiques
M. DERIEUX Jean-Claude	Microbiologie
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique du Solide
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du Solide
Me EVRARD Micheline	Chimie Appliquée
M. FONTAINE Jacques-Marie	Electronique
M. FOURNET Bernard	Biochimie
M. FORELICH Daniel	Chimie Physique
M. GAMBLIN André	Géographie
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M. GUILLAUME Henri	Sciences Economiques
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JOURNEL Gérard	Physique Atomique et Moléculaire
Mle KOSMAN Yvette	Géométrie
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LAURENT François	Automatique
Mle LEGRAND Denise	Algèbre
Mle LEGRAND Solange	Algèbre
M. LEROY Jean-Marie	Chimie Appliquée
M. LEROY Yves	Electronique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique Théorique
M. LOUCHET Pierre	Sciences de l'Education
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAHIEU Jean-Marie	Physique Atomique et Moléculaire
Me N'GUYEN VAN CHI Régine	Géographie
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MALAUSSENA Jean-Louis	Sciences Economiques
M. MESSELYN Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. MONTUELLE Bernard	Biologique Appliquée
M. NICOLE Jacques	Chimie Appliquée
M. PAQUET Jacques	Géologie Générale
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie Physique
M. PERROT Pierre	Chimie Appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie Animale
M. PONSOLLE Louis	Chimie Physique
M. POVY Lucien	Automatique
M. RICHARD Alain	Biologie
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROY Jean-Claude	Psycho-Physiologie
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SOMME Jean	Géographie
Mle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. STEEN Jean-Pierre	Informatique

M.	THERY Pierre	Electronique
M.	TOULOTTE Jean-Marc	Automatique
M.	TREANTON Jean-René	Sociologie
M.	VANDORPE Bernard	Chimie Minérale
M.	VILLETTE Michel	Mécanique
M.	WALLART Francis	Chimie
M.	WERNIER Georges	Informatique
M.	WATERLOT Michel	Géologie Générale
Mme	ZINN-JUSTIN Nicole	Algèbre

J'exprime à Messieurs les membres du Jury ma profonde gratitude.

Monsieur le Professeur BACCHUS me fait l'honneur de présider cette thèse.

Luc BOASSON s'intéresse à mes travaux depuis leurs origines.

Vincent CORDONNIER m'a soutenu pleinement et a favorisé efficacement le développement de mes recherches. Il m'a volontiers proposé un sujet de seconde thèse, ses suggestions et ses conseils ont été à ce propos déterminants.

Monsieur le Professeur GROSS me fait l'honneur de s'intéresser à mon travail. Ses nombreux conseils m'ont été précieux.

Gérard JACOB a suivi avec enthousiasme l'élaboration de cette thèse. Nos fréquentes discussions ont toujours été fécondes.

Maurice NIVAT a inspiré l'essentiel de ma démarche, il en a infléchi l'évolution de façon déterminante. Lors de nos longues rencontres, ses propos ont toujours été décisifs.

André ARNOLD et moi-même avons beaucoup travaillé ensemble. L'amitié et le magmoïde en sont nés.

Mes amis Michel LATTEUX et Jean Philippe RETHORE, ainsi que Bernard SUCHER et, à des degrés divers, tous les membres du laboratoire d'informatique, m'ont toujours soutenu et encouragé.

Patricia CARON pour la thèse, Michèle DRIESSENS pour le préliminaire, ont dactylographié ce travail avec compétence, conscience et gentillesse. Avec les mêmes qualités, Monsieur et Madame DEBOCK l'ont imprimé et relié.

Je les remercie tous avec la plus grande joie.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

La "théorie des langages", née seulement il y a quelques décénnies de préoccupations linguistiques (N. Chomsky), a puisé dans l'informatique des motivations qui lui ont donné un grand essor[1]. Plus récemment encore, vers les années 1970, a commencé à naître une "théorie des forêts" (ou théorie des langages d'arbres). Une abondante littérature apparut alors sur le sujet. Depuis, la théorie achoppait sur le fait que dans la plupart des cas on ne savait pas composer les transductions de forêts. La raison de ce fait tient au double aspect suivant : d'une façon très globale, la problématique de la théorie des forêts apparait comme une "simple" généralisation de celle de la théorie des langages, mais dès que l'on est plus technique, on y découvre des aspects tout à fait différents.

Pour notre part, une étude de quelques phénomènes de la théorie antérieure nous amène à construire un cadre algébrique précis rendant compte de nouvelles opérations sur les arbres et les forêts : les magmoïdes. En termes de "bimorphismes de magmoïdes", nous obtenons alors - entr'autres - les résultats de composition les plus généraux possibles concernant les transductions. Tous les résultats fragmentaires de nos devanciers se retrouvent comme cas particuliers. Nous développons principalement des applications aux grammaires transformationnelles, décrivant les clôtures par composition des diverses classes de transformations élémentaires.

Commençons par poser la notion tout à fait générale de transformation et situons y les transductions de forêts.

Une transformation T d'un ensemble E dans un ensemble F est une relation binaire sur le produit cartésien E x F.

T permet de définir une application de $P(E)$ dans $P(F)$ par :

$$\forall A \in P(E),\ T(A) = \{b \in F \mid \exists\, a \in A,\ (a, b) \in T\}$$

La composition et l'inversion des transformations se font au sens des relations. Ainsi, quand nous parlerons de "transduction" inverse ou de morphisme inverse, il s'agira de la relation inverse de celle réalisée par la "transduction" ou le morphisme considéré.

A toute classe C de transformations d'ensembles, on peut associer une relation $\bar{C}$ entre les parties de ces ensembles par :

$$A \bar{C} B \Leftrightarrow \exists T \in C, T(A) = B$$

On dira qu'une propriété P (portant sur les parties des ensembles) est une C-propriété (ou est invariante par C) ssi $\forall T \in C, \forall A$, P(A) vraie implique P(T(A)) vraie.

Si la classe C est close par composition et contient les transformations identiques, $\bar{C}$ est un préordre.

Il se pose alors la question naturelle de savoir en quelles circonstances ce préordre est une équivalence. Notons qu'il en est en particulier ainsi quand C est une classe d'isomorphismes dans la structure considérée. En effet, on a alors $T(A) = B \Leftrightarrow T^{-1}(B) = A$. Les C-propriétés sont alors les propriétés compatibles avec l'équivalence $\bar{C}$. On trouve cette situation en géométrie où, par exemple, les propriétés différentielles, euclidiennes, projectives... sont les propriétés respectivement invariantes par difféomorphismes, isométries, homographies ...

Si les transformations ne sont pas des isomorphismes, alors $T(A) = B$ n'implique plus $T^{-1}(B) = A$ et $\bar{C}$ n'est plus en général une équivalence. Cette situation se trouve en théorie des langages et en théorie des forêts, où les transformations considérées ne sont généralement pas des bijections, pas même des applications : plusieurs phrases peuvent se traduire en une même phrase, peuvent avoir même interprétation, une phrase peut avoir plusieurs traductions ou ne pas en avoir.

Les classes de transformations considérées dépenderont des caractères des familles de forêts ou de langages que l'on veut étudier. Pour nous, un langage ou une forêt auront une structure définie par des règles de grammaire ou des équations - en un mot une syntaxe. Les différentes familles de langages ou de forêts dépenderont des types de ces structures.

Il importe que les transformations soient suffisamment "régulières" pour ne pas bouleverser les structures. Aussi étudie-t-on les transformations de langages comme de forêts, réalisées par des "machines d'états finis transformant séquentiellement". Nous appelerons transductions ces transformations. La base empirique des transductions consiste donc en des machines qui peuvent prendre un nombre fini d'états et qui transforment sans rupture de séquence ni retour en arrière : en parcourant les mots de gauche à droite (ou de droite à gauche), les arbres de haut en bas (ou de bas en haut). Les transformations se font au fur et à mesure de la lecture, en fonction des états pris et des symboles lus.

Dans toute la suite, le mot transducteur désigne une machine d'états finis, le mot transduction désigne la transformation associée. Deux transducteurs sont équivalents si ils définissent la même transduction.

En théorie des langages, on obtient ainsi les transductions rationnelles, dues pour l'essentiel à M. Nivat [72].

Ces transductions ont de remarquables propriétés qui en font la clé de voute de la théorie des langages.

D'abord, ce sont les transformations réalisées par composition d'un morphisme inverse, d'une intersection avec un langage reconnaissable et d'un morphisme. Autrement dit, en appelant bimorphisme aussi bien tout triplet $B = (\phi, K, \Psi)$ (où ϕ et Ψ sont des morphismes, K un langage reconnaissable) que la relation $\hat{B} = \{(\phi(t), \Psi(t)) \mid t \in K\}$ associée, les transductions rationnelles sont équivalentes aux bimorphismes, c'est à dire réalisent les mêmes transformations . Pour notre part, nous considérons dans la suite des bimorphismes où ϕ et Ψ seront des morphismes classiques d'arbres ou des morphismes de magmoïdes . Ainsi les transductions rationnelles s'expriment en termes algébriques très simples et naturels, donc manipulables.

Ensuite, cette classe est close par composition et inversion.

Enfin, les transductions rationnelles conservent les principales familles de langages.

Bien entendu, des sous classes (transductions rationnelles fidèles, continues ...) ont les mêmes bonnes propriétés.

Dès lors, soit $\bar{R}$ la relation sur les langages associée à la classe R des transductions rationnelles. Intuitivement, L $\bar{R}$ L' signifie que "le langage L est plus puissant que le langage L'". Les transductions ne sont pas bijectives, $\bar{R}$ n'est donc pas une équivalence. Mais comme R est close par composition, $\bar{R}$ est un préordre. La théorie des langages développe l'étude de ce préordre par l'étude des cônes de langages. Un cône est une famille close par transduction. Un langage est générateur d'un cône si tout autre langage de ce cône en est un transducté. Un cône est principal si il admet un générateur ; c'est le cas du cône Alg des langages algébriques (c'est à dire à contexte libre). L'intérêt des générateurs vient de ce que, si P est une propriété rationnelle (c'est à dire conservée par transduction) et si L est un générateur d'un cône ayant la propriété, tout langage du cône a cette propriété.

Les transductions rationnelles sont donc le centre de l'étude des cônes de langages. Leur caractérisation en termes de bimorphismes en fait également le centre de l'étude des F.A.L. qui sont les cônes rationnels fermés par "étoile", produit et union.

Nous venons de voir que les transductions de langages et celles de forêts procédent d'une idée commune, que les transductions de langages ont de remarquables propriétés qui en font tout l'intérêt. En ce qui concerne les transductions de forêts, un rapide état des connaissances va montrer toute la différence avec le cas des langages et le blocage qui s'en suit pour le développement de la théorie.

L'étude des principales classes de forêts fait l'objet de la thèse d'A. Arnold [A] où, comme ici, le fait de se placer dans le cadre nouveau des magmoïdes permet de résoudre les problèmes posés par la théorie classique et de développer correctement une étude des systèmes d'équations.

En ce qui concerne les forêts, rappelons rapidement que les automates d'états finis d'arbres sont apparus les premiers ([30], [31], [77], [83], [88], [85] ...). Ils généralisent naturellement les automates de mots. Ils ont été introduits pour résoudre des problèmes de décision ([33], [42], [91]) et pour étudier les langages algébriques qui sont leurs feuillages. Des classes plus larges définies par grammaires d'arbres sont apparues, en particulier les forêts algébriques ([38], [39], [48], [53], [55], [73], [81]). Ces dernières généralisent, au niveau de la définition, les langages algébriques mais ont des propriétés très différentes.
Les schémas de programmes sont depuis peu une motivation puissante à l'étude de ces forêts.

En ce qui concerne les transductions, citons particulièrement les travaux de W.C. Rounds et J.W. Thatcher, les précurseurs, et surtout J. Engelfriet qui le premier a crée des outils permettant une étude systématique.

La compilation et les grammaires transformationnelles ont d'emblée motivé l'apparition des transducteurs de forêts. Les raisons à cela sont faciles à comprendre : la syntaxe des langages algébriques est décrite par des arbres de dérivation et, que l'on compile, traduise ou transforme langages informatiques ou naturels, les opérations se font toujours "guidées par la syntaxe". Comme on part de langages plongés dans les algébriques, les opérations se font en fait guidées par les arbres syntaxiques, et en fin de compte on transforme bien des forêts !

Pour étudier certaines phases de la compilation ont été introduits les syntax-directed translations ([93], [94]) et d'autres modèles plus généraux ([84], [102]). Les transductions de forêts sont en partie nées de ces études ([26], [69], [84]).

L'étude des grammaires transformationnelles est née de motivations linguistiques. Mais l'intérêt de cette démarche a été considérablement étendu par l'informatique considérée tant comme objet d'étude (langages informatiques, compilation, voir systèmes) que comme moyen (analyse de textes, traduction automatique).

Les transformations de grammaires se font généralement à partir d'un noyau constitué d'un langage algébrique, que l'on transforme en appliquant des transformations élémentaires qui diffèrent selon le formalisme. Nous avons vu que les transformations sont syntaxiques et se font donc sur les arbres. Pourtant, l'étude des grammaires transformationnelles s'est longtemps faite sans se placer vraiment du point de vue des forêts, peut être par manque de formalisme pour bien décrire les arbres. Il s'en suivit évidemment un formalisme très lourd. Des efforts de synthèse aboutirent alors aux modèles de S. Ginsburg et B. Partee [96], P. Peters et S. Richie [104], modèles que nous appelerons "grammaires (transformationnelles) par coupes". Exprimé en termes d'arbres [81], [95], [103], [105], [106], [109] le formalisme gagna beaucoup en clarté. Les transducteurs apparurent en même temps que les arbres, ce qui n'est pas étonnant : nous avons vu qu'ils formalisent la notion de transformation séquentielle d'arbres. Nous dirons qu'il s'agit là de transformations de profondeur un (chaque noeud est "transformé une seule fois"). La première idée est alors, évidemment, d'itérer ces transformations ; mais là, la situation se bloque : les transducteurs ne "se composent pas", on ne sait pas décrire les transformations composées (transformations donc de profondeur supérieure à un). Toujours dans le cadre de l'étude des grammaires transformationnelles, J.W. Thatcher note ce fait dans [109]. Il parle de boites de Pandor à propos des composées de transductions.

Un rapide inventaire des propriétés des transductions de forêts montre combien la situation diffère du cas des langages.

Il existe de nombreux types de transducteurs d'états finis de forêts. D'abord, on distingue les transducteurs ascendants (qui transforment des feuilles vers le sommet) et les transducteurs descendants (qui transforment du sommet vers les feuilles) ; les classes de transformations correspondantes sont incomparables. Pour chacun de ces deux cas, on peut considérer les transducteurs linéaires ou non (selon que chaque branche des arbres objets a une seule ou plusieurs branches pour image dans les arbres images) ; on peut aussi distinguer les transducteurs complets ou non (selon que chaque branche a au moins une branche image ou peut ne pas avoir d'image dans les arbres images). Autant de distinctions inexistantes dans le cas des langages, et auxquelles correspondent des transformations tout à fait différentes.

A part la classe des transductions déterministes ascendantes et celle des transductions linéaires ascendantes, aucune classe n'est close par composition, des hiérarchies infinies sont conjecturées.

Aucune classe n'est close par inversion.

Les principales familles classiques de forêts (reconnaissables, algébriques) ne sont pas closes par transductions, même très restreintes.

Face à cette situation, des tentatives diverses ont été faites, tentant de débloquer un peu la situation, et soulignons qu'il est remarquable que toutes ces tentatives, éclairées par nos transformations de magmoïdes, apparaitront comme des cas particuliers d'applications de nos concepts fondamentaux.

- Ainsi, J. Engelfriet [51] introduit une généralisation de la notion de transduction d'états finis.

- Le même auteur décrit les transductions classiques de forêts en des termes qui seront pour nous des bimorphismes particuliers. B. Baker [19] pose en les mêmes termes les problèmes de composition de ces transductions.

- J.A. Goguen et J.W. Thatcher décrivent dans [59] des transducteurs déterministes dans une forme particulière.

Ce sont pour nous des morphismes de magmoïdes (III-1-3)

- M. Takahashi ([87] et à paraître) adopte d'emblée le point de vue des bimorphismes, elle établit la stabilité par composition pour deux classes particulières, résultats qui sont des corollaires très restreints de nos théorèmes II-2 et II-4.

- A propos des grammaires transformationnelles, L.S. Levy A. Joshi et M.Takahashi [100] introduisent un modèle de transformation proche dans l'esprit de nos morphismes de magmoïdes (discuté en III-2-2). J. Chauché [95] introduit ses transformations exhaustives proches de nos bitransductions (discuté en III-2-3-2).

Nous avons vu que la problématique des transductions de langages et celle des transductions de forêts sont très proches, mais que la situation est tout de suite beaucoup plus compliquée dans le cas des forêts. Voyons quelques phénomènes de la théorie antérieure des forêts qui nous ont amené, pour les résoudre, à fabriquer le cadre de la théorie des magmoïdes.

- Dans [9] nous montrions essentiellement que $\widehat{TI} \neq \widehat{TI}^2 = \widehat{TI}^3$, où TI est une classe de bimorphismes où les morphismes sont "classiques" et linéaires (ils sont de plus complets stricts). Le fait que la classe $\widehat{TI}$ ne soit pas close par composition, mais que la classe $\widehat{TI}^2$ le soit, était souligné comme surprenant. Nous donnions une explication intuitive en termes de "chevauchements de découpages" (cette explication est illustrée ici en II-1-3-2). Mais nous conjecturions une explication plus profonde dans un cadre plus large. De fait le problème est ici ramené à celui de"l'inversion de morphisme" (II-1-1 et théorème II-1) ; ce dernier se présente comme suit : étant donné un morphisme, peut-on réaliser la transformation inverse par un morphisme (à un démarquage près-un démarquage est un morphisme qui à une lettre associe une lettre). L'intérêt de ce problème est qu'il a une solution en théorie des langages, et que celle ci est très utile pour prouver, par exemple, la stabilité des langages algébriques par transductions rationnelles. Nous montrons également que ce problème ne peut pas être résolu dans le cadre classique , et nous le résolvons grâce à une classe particulière de morphismes de magmoïdes . Or, nous prouvons (Théorème II-1) que cette dernière classe s'inverse par elle même et apparait donc comme la clôture par inversion des morphismes classiques (linéaires - sinon nous voyons que le problème est insensé) . On peut comparer cette démarche au passage de R à C qui se trouve être clos pour les résolutions d'équations algébriques.

- Nous voyons en (II-2-3) que la non composition des transductions, de quelque type que ce soit, provient de l'alternance de non déterminisme et de non linéarité. En termes de bimorphismes, elle se traduit par la succession de morphismes inverses et de morphismes non linéaires. Surtout, en termes de magmoïdes, ce phénomène se traduit en terme d'applications itérées de l'"adjonction de torsion", qui est un foncteur de la catégorie des magmoïdes.

- Un transducteur (ou un morphisme) non linéaire génére des égalités, en ce sens qu'il donne dans l'image d'un arbre plusieurs images d'un sous arbre. Inversement, un morphisme inverse teste des égalités. Evidemment, un transducteur classique génére mais ne teste pas d'égalités.

Il est connu [19], [76], [78] que si on compose des transductions qui"générent des copies en nombre non borné" on a aucun espoir de propriétés de composition. On peut alors se poser le problème de la composition dans le cas où les copies de chaque arbre sont en nombre borné (Remarquons que cette contrainte n'implique pas que le nombre total des recopies soit borné). Du point de vue des transducteurs, cette contrainte de borne est inextricable.

Or il se trouve que les k-morphismes linéaires (inexistants dans le cadre classique) expriment très simplement cette propriété (un k-morphisme de magmoïde associe à chaque arbre un k-uple d'arbres). Les classes de transductions exprimées en termes de k-morphismes linéaires sont alors les plus larges pour lesquelles on puisse espérer de bonnes propriétés. Nous verrons en (II-2-4) qu'il en est ainsi.

-Nous montrons en [12] que l'image inverse, même par un morphisme classique très simple, d'une forêt algébrique n'est pas en général une forêt algébrique. De même, les forêts algébriques ne sont pas closes par morphisme linéaire de magmoïde [7]. Aussi la classe Alg lin est -elle introduite par A. Arnold dans sa thèse (A). Alg lin est close dans les deux cas considérés ci-dessus. Il est remarquable que la stabilité de Alg lin par morphisme inverse s'appuie alors sur le théorème d'inversion (Théorème II-7), comme dans le cas de la théorie des langages.

Les grandes lignes de nos résultats se présentent comme suit.

Les parties I et II aboutissent à une étude des différents types de bimorphismes de magmoïdes. Cette étude est exhaustive vis à vis des problèmes étudiés, en ce sens que par exemple, pour la composition, tous les cas sont étudiés et que, dès qu'on n'établit pas de bonnes propriétés de composition, on montre qu'il n'en existe pas. D'autre part, on peut identifier les morphismes classiques aux 1-morphismes de magmoïde (I-1-3).

En ce qui concerne la composition des transductions, nous avons trois types de résultats essentiels (nous ne signalons pas ici les nombreuses variantes détaillées dans le texte) résumés en les théorèmes II-2 à II-5.

Partant de bimorphismes aux morphismes classiques (des 1-morphismes), nous généralisons les résultats obtenus dans [9] et surtout les caractérisations en termes de bimorphismes de magmoïdes. Si on considère des 1-morphismes non linéaires, on génere des égalités non bornées, aucun espoir de bonnes propriétés. Si on considère des 1-morphismes linéaires,on obtient des hiérarchies finies par composition, stables à l'ordre 1, 2 ou 4 selon le cas ! Nous montrons qu'il est impossible de caractériser les clotures dans le cadre classique, mais nous les caractérisons en termes de bimorphismes de magmoïdes particuliers.

Intuitivement, ces derniers sont des machines d'états finis qui ne générent ni ne testent globalement d'égalités mais le font seulement localement (Théorèmes II-2, 3 et 4).

Les transductions classiques sont des machines d'états finis qui ne testent pas d'égalités mais en génèrent. Nous avons vu que pour avoir de bonnes propriétés, il faut borner ces générations d'égalités. On obtient ainsi la classe $\widehat{DL}$ de nos bimorphismes semi-linéaires, qui s'expriment simplement seulement en termes de morphismes linéaires de magmoïdes. Nous prouvons que $\widehat{DL}$ est close par composition (théorème II-5).

On peut ajouter à une transduction classique la capacité de tester des égalités. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, on borne ces tests et générations d'égalités. On obtient les transformations conservatives, qui s'expriment simplement par les bimorphismes $\widehat{LL}$ de magmoïdes (et sont beaucoup plus large que les précédentes).

La classe $\widehat{LL}$ n'est pas close par composition ($\widehat{LL}^2 \neq \widehat{LL}$) mais l'est à l'ordre 2 ($\widehat{LL}^2 = \widehat{LL}^3$) (Théorème II-8) ! Nous caractérisons la clôture comme étant la classe $\widehat{QB}$ des quasi-bimorphismes de magmoïdes (Théorème II-9). Les morphismes apparaissant dans cette classe sont toujours les morphismes linéaires de magmoïdes, mais, au lieu des forêts reconnaissables (ou raisonnables I-1-2-4), apparait une nouvelle classe, la classe IDRL. $\widehat{QB}$ est évidemment close par composition.

En ce qui concerne l'inversibilité, certaines classes considérées sont symétriques par définition. Nous résolvons d'autre part le problème suivant. Soit une transformation réalisée par composition de transductions (aussi générales soient-elles, même si elles ne se composent pas), quelles relations ont leur inverse réalisée également par composition de transductions ? Nous caractérisons cette classe (Théorème II-6). Il est remarquable que c'est la classe des bitransductions, apparue précédemment comme clôture par composition d'une classe simple de bimorphismes classiques.

Enfin, nous étudions les propriétés de stabilités des principales classes de forêts vis à vis des transductions citées précédemment (Théorème II-7, III-1 et 2). Disons simplement qu'elles sont "aussi bonnes que possible" (elles sont résumées en III-1-1 et III-2-3). Il apparait en particulier une nouvelle classe (III-1-2), notée MIDRL, que l'on peut considérer comme la classe des "forêts récursivement énumérables". Elle est constituée des "images par morphismes linéaires des intersections de deux forêts de Rat lin" (de deux ou d'un nombre quelconque, à rapprocher de la théorie des langages et des images homomorphes d'intersection de langages algébriques qui engendrent tous les langages récursivement énumérables).

En ce qui concerne les applications de nos résultats, signalons d'abord la "TI-équivalence" que nous étudions en [10] et ne reprenons pas dans cette thèse. Les forêts reconnaissables y sont étudiées à l'aide des bitransductions. Deux forêts sont équivalentes si elles se correspondent par bitransduction. Cette équivalence amène à une classification des grammaires des langages quasi rationnels.

Il est normal que nos travaux s'appliquent à la compilation : Les transducteurs d'arbres sont nés des "syntax directed translators". Nous ne faisons ici que donner quelques exemples qui convaincrons de l'adéquation de nos outils au sujet (III-1-4).

Nous avons préféré développer les applications aux grammaires transformationnelles (III-2).

Nous comparons d'abord les "capacités transformationnelles" de différents modèles (III-2-3-1). Nous montrons que ces modèles sont équivalents, non seulement du point de vue des transformations des langages feuillages des forêts, mais du point de vue des forêts elles-mêmes. Des modèles apparamment très restrictifs sont en fait équivalents aux modèles généraux (Théorème III-3). Par exemple, on peut toujours se dispenser de tests et de générations d'égalités et d'effacer sans restreindre la capacité des transformations. Ces résultats à priori peu conformes à l'intuition s'expliquent par le fait que les transformations qui font passer d'un modèle à l'autre sont elle-même sans base empirique. Ainsi, "tout est en tout et réciproquement", mais les contraintes (profondeur bornée) que nous imposons à nos transformations sont un moyen de "séparer mathématiquement ce qui l'est intuitivement".

Une critique des grammaires transformationnelles (III-2-2) nous amène à considérer de façon privilégiée les transformations composées de transformations conservatives. Alors, nous caractérisons la clôture par composition de différents types de transformations - Aucun résultat de ce genre n'existait auparavant, bloquant l'étude des grammaires transformationnelles du point de vue des transductions (nous développons ce point de vue en III-2-2). En fait, nous n'avons plus qu'à interpréter dans le cadre des grammaires transformationnelles nos résultats généraux ! (voir III-2-3-2). Ces derniers étant puissants, leurs illustrations le sont aussi. Par exemple, nous savons que la clôture par composition des transformations conservatives est la classe $\widehat{DL} \circ \widehat{LD}$, (Théorème II-9).

Ceci s'interpréte en gros comme suit : si, partant d'un noyau, on alterne un nombre quelconque de fois tests et générations bornés d'égalités, et bien sûr transformations reconnaissables, on peut toujours se ramener à appliquer une transformation reconnaissable puis des générations bornées d'égalité, puis des tests, puis une transformation reconnaissable sans itérer ces opérations (Théorème III-6). Autrement dit, l'alternance est illusoire.

Notre étude met en évidence l'intérêt des quasi-bimorphismes qui sont la clôture par composition des transformations conservatives. Nous étudions de nombreuses sous classes, leurs significations intuitives et leurs propriétés (Théorème III-4).

D'une façon pratique, l'organisation de notre travail appelle quelques remarques.

L'adjectif "classique" se réfère aux connaissances antérieures essentielles, survolées de façon informelle par J.W.Thatcher dans [90] et synthétisées par J. Engelfriet dans [51]. Rappelons que la théorie des magmoïdes est exposée dans [AD] en préliminaires commun à la thèse d'A. Arnold [A] et à la présente thèse. Néanmoins, nous résumons informellement dans ce travail ce qu'il est indispensable de savoir tant de la théorie classique des transductions de forêts (I-1-2-3, I-1-5) que de celle des magmoïdes (I-1).

La partie III, consacrée aux applications, est d'un style moins formel que les parties I et II. La partie III-2, consacrée aux grammaires transformationnelles, comporte sa propre introduction.

En conclusion, nous avons ici mis en évidence, sous forme de bimorphismes de magmoïdes, différentes classes de transductions de forêts ayant une base empirique solide et de bonnes propriétés algébriques. Ces propriétés sont très techniques à prouver mais aussi très puissantes.

Nous disposons maintenant d'un cadre algébrique adéquat - les magmoïdes - et d'outils élaborés - les bimorphismes - pour développer une théorie des cônes de forêts, comme le justifie la diversité des motivations.

I - LES OUTILS DE BASE

Les notions et les propriétés que nous présentons dans cette première partie seront non seulement utiles dans la suite mais doivent être considérées comme "une boite à outils" d'intérêt général pour une étude "fine" des transformations dans les magmoïdes, et doivent être abordées comme telles. En particulier, l'assimilation de toutes les notions n'est pas nécessaire à la compréhension de l'idée générale des résultats fondamentaux de la deuxième partie. En effet, certaines notions n'ont qu'une utilité technique et apparaissent dans les preuves et non les énoncés des théorèmes ; d'autres notions ne sont pas essentielles à l'esprit des résultats fondamentaux dont elles n'introduisent que des variantes. C'est pourquoi nous précisons (en introduction de chapitres, en remarques ou commentaires) l'intérêt (technique, secondaire ou essentiel) des outils présentés. Nous situons les plus importants et les illustrons d'exemples.

Nous présentons en I - 1 une description détaillée des principaux concepts. Les motivations de certains d'entre eux apparaitront en partie II. En I - 2, nous donnons des propriétés élémentaires, d'intérêt général et souvent de preuve assez facile (les points délicats ou "à priori" surprenant sont alors signalés et commentés).

CHAPITRE I - 1

DEFINITION DES OUTILS DE BASE

Nous présentons en (I - 1 - 1) une description détaillée de la notion d'arbre. Nous resituons informellement le cadre des magmoïdes, dressons une nomenclature des différents types d'arbres et de torsions utiles dans la suite. Certaines notions sont tout à fait nouvelles (la séparation en particulier), d'autres généralisent des concepts connus en théorie des arbres (linéarité, complétude).

Dans la description des forêts (I - 1 - 2), les équivalences "$\hat{\_}$" et "$\underline{\vee}$" ont une signification simple : deux algorithmes de transformation (morphismes, machines d'états finis, bimorphismes ...) sont équivalents (au sens $\hat{\_}$ ou $\underline{\vee}$) s^{s}i ils définissent les mêmes transformations de forêts (sans variables - c'est à dire "sans torsion" - pour $\hat{\_}$, avec variables pour $\underline{\vee}$). D'autre part, deux parties M et N de deux magmoïdes k dil T(Σ) et k' dil T(Σ) sont equivalentes si elles sont "les dilatées d'une même partie de $\vee$ dil T(Σ)" (avec $\vee \leq$ k et k'). Ensuite, nous rappelons (I - 1 - 2 - 3) les principales propriétés des très classiques forêts reconnaissables. Nous introduisons alors (I - 1 - 2 - 4) les familles raisonnables de forêts dans le but suivant : généraliser la notion de reconnaissabilité en conservant les "bonnes" propriétés de cette dernière. Notre généralisation porte alors sur la possibilité d'éléments de degré supérieur quelconque (non borné), un contrôle reconnaissable étant exercé entre les composantes.

Nous abordons en (I - 1 - 3) une importante classification des morphismes de magmoïdes. Rappelons qu'un morphisme classique d'arbres associe à un arbre un seul arbre, alors qu'un morphisme de magmoïde (en l'occurrence un k-morphisme) associe à un arbre un uple d'arbres (ici un k-uple)et éclate une variable(en k composantes ici). Les morphismes classiques sont ainsi les 1-morphismes. Notre description des morphismes fait apparaître les notions importantes de complétude (et quasi-complétude), linéarité, strictitude (et régulation), séparation (à délai). Les trois premières de ces notions généralisent celles déjà existantes dans le cas classique : grosso modo, un morphisme est complet sur F si il lit complétement tout arbre de F. La **complétude** devient assez lourde à manipuler et de nombreux détails techniques apparaissent, mais ses propriétés générales et son comportement restent simples à concevoir et énoncer. Ajoutons que la complétude n'intervient pas dans la nature de phénomènes essentiels étudiés ici (inversion de morphismes, composition de bimorphismes mais donne des variantes importantes de résultats obtenus ; par contre la complétude est liée à la fidélité (I - 2 - 1 - 4) qui est essentielle dans la preuve de l'importante caractérisation des hypertransductions inversibles (théorème 6, II - 2 - 3 - 2). La **linéarité** apparaitra comme indispensable à l'obtention de bons résultats, comme dans le cas classique, mais on remarquera que la linéarité est ici beaucoup moins restrictive que dans le cas classique ; on peut "recopier" un arbre en un nombre borné d'exemplaires au lieu d'en un seul dans le cas classique. Un morphisme est **strict** si l'image de chaque lettre contient au moins une lettre dans chacune de ses composantes. La strictitude, au contraire de la complétude, influera fortement sur les résultats de composition de la partie II, et pour des raisons peu apparentes "à priori" (voir II - 1 - 4, II - 1 - 5, comparer les théorèmes 2 et 3 de II - 2 - 2). La régulation généralise la strictitude. La notion de **séparation à délai borné** est sans équivalent dans le cas des morphismes classiques (tous séparés de façon triviale . **Cette notion est absolument fondamentale.** Elle permet de résoudre les"grands problèmes" exposés plus loin : inversion de morphismes (lemme 2 de II - 1 - 2 puis théorème 1), caractérisation de la classe TI^2 etc... (théorème 2). Aussi avons nous longuement commenté et illustré cette notion en (I - 3 - 2 - 2), mettant en évidence le cas très important des morphismes linéaires et séparés à délai borné. Ceux-ci seront en effet en fin de compte "la cloture par inversion" des 1-morphismes linéaires (II - 2 - 1 - 1 et 2) et détermineront les classes les plus larges de bimorphismes symétriques "ayant de bonnes propriétés" (thèorèmes 2, 6, 7). D'autre part, parmi les autres types de morphismes introduits en I-1-3, remarquons encore l'importante et simple notion de démarquage, remarquons que les autres types de morphismes (marqué, sans feuilles, homogène ...) ont un caractère technique qui n'en rend pas l'étude nécessaire en première lecture.

Avec les bimorphismes (I - 1 - 4) nous atteignons la notion essentielle de notre travail. Aussi présentons nous en (I - 1 - 4 - 1) un historique de cette notion en théorie des langages (de mots).

Enfin, en (I - 1 - 5), nous définissons les classiques transducteurs d'états finis de forêts en nous contentant de rappeler les principaux résultats.

I - 1 - 1 : LES ARBRES

Etant donné un alphabet gradué Σ, et un ensemble dénombrable d'indexes $X = \{x_i | i\epsilon N\}$, la formalisation de la notion'd'arbres (sur Σ indexés sur X)'conduit au concept de magmoïde (projetable libre $T(\Sigma)$. Ce passage est détaillé dans [A D], aussi nous contenterons nous ici du minimum de rappels, sans justifier à nouveau les rapports entre les concepts formels et les notions 'intuitives' relatives aux arbres. Nous rappelons certaines définitions à cause d'extensions de terminologie par rapport à [A D].

Sauf exception, nous considérons dans la suite des magmoïdes projetables libres finiement engendrés, c'est à dire du type $T(\Sigma)$, où Σ est un alphabet fini gradué. (Les magmoïdes du type k dil $T(\Sigma)$ peuvent être 'plongés' dans $T(\Sigma)$ aux graduations près [A D]).

Les éléments de $T(\Sigma)^p_q$ sont les suites $<q ; t_1, .., t_p>$ où t_i est un arbre sur Σ indexé par $x_1,\quad , x_q$. Par la suite, on omet d'écrire q qui est précisé implicitement quand on identifie la suite d'indexes à une torsion ([A D]). Rappelons que tout élément t de $T(\Sigma)^p_q$ se décompose de façon unique en

$$t = \tilde{t}.\theta = <t_1, .., t_p> = <\tilde{t}_1.\theta_1, ..., \tilde{t}_p.\theta_p>$$

où $\tilde{t}\epsilon\tilde{T}(\Sigma)^p$, les $t_i\epsilon T(\Sigma)^1$, les $\tilde{t}_i\epsilon\tilde{T}(\Sigma)^1, \theta\epsilon\Theta_q$ et les $\theta_i\epsilon\Theta_q$.

Nous utiliserons parfois d'autres alphabets d'indexes que$\{ x_i | i\epsilon N\}$, par exemple x, y, z, t .

(I-1-1-0-1) Nous dirons que $t\epsilon T(\Sigma)^p$ est un **p-uple** d'arbres indexés, de degré supérieur 1, mais nous étendrons parfois le terme d''arbre' aux éléments de degré supérieur quelconque. Le contexte évitera la confusion. $\tilde{T}(\Sigma)$ est l'ensemble des suites finies d'**arbres initiaux** ou **sans tensions** [A D] (le terme initial sera justifié en I-1-1-3)

Rappelons [A D] que $(k \text{ dil } T(\Sigma))^p_q$ s'identifie à $(T(\Sigma))^{kp}_{kq}$.

(I-1-1-0-2) En particulier, un élément de $(k \text{ dil } T(\Sigma))^1$ est un k-uple $t = <t_1, ..., t_k>$ d'arbres indexés de $T(\Sigma)^1$. Nous appelerons $t_i = \pi^i_k t$ la $i^{\text{ème}}$ **composante de t** (k étant sous entendu et précisé par le contexte).

(I-1-1-0-3) Nous abrégerons souvent **k dil** $T(\Sigma)$ en $T_k(\Sigma)$.

La décomposition canonique d'un arbre indexé en un arbre sans torsion composé à une torsion nous aména à décrire séparément ce qui est spécifique'aux arbres sans torsion' et ce qui l'est aux 'torsions' respectivement en I-1-1-1 et 2. Enfin, nous étudions en I-1-1-3 la relation 'être sous élément de' (un élément d'un magmoïde $T(\Sigma)$ étant un arbre ou un uple d'arbres).

I-1-1-1. Les arbres :

Soit t un arbre (ou plus généralement un uple d'arbres).

(I-1-1-1-1) On appelle **noeud** de t toute occurence dans t d'une lettre graduée ou d'un index. Cette lettre ou cet index sont le

(I-1-1-1-2) **label** du noeud. Si le label est un index, le noeud

(I-1-1-1-3) est encore appelé **variable**. Dans cette sous section, que les éléments soient avec ou sans torsions, les variables ne jouent pas de rôle spécifique par rapport aux autres noeuds.

(I-1-1-1-4) La **taille** de t est le nombre de ses noeuds. On note $|t|$ la taille de t.

I-1-1-1-5 Remarque :

Il se peut évidemment que deux noeuds de t aient le même label. On peut toujours distinguer nominalement les noeuds, en les numérotant injectivement par exemple. Par commodité d'écriture, nous le ferons rarement explicitement, confondant le noeud et son label quand le contexte évite toute ambiguïté. Ainsi parlerons nous du 'noeud a' pour désigner un certain noeud de label a. ///

(I-1-1-1-6) soit $t \in T(\Sigma)^p_q$. Nous noterons **dsup(t)**=p le degré supérieur de t et **dinf(t)**=q son degré inférieur.

I-1-1-1-7 L'ordre $\leq_t$:

t étant fixé, nous définissons entre ses noeuds un ordre partiel, noté $\leq_t$, défini comme suit :

I) $aR_tb \Leftrightarrow t$ se décompose en $t = t_1(t_2,a(t_4,b.t_6, t_5), t_3)$

II) $\leq_t$ est la cloture transitive de R_t

Il est facile de vérifier que $\underset{t}{\leq}$ est un ordre partiel et que $a\underset{t}{\leq}b$ ssi a et b confondus ou t se décompose en $t = u_1(u_2,a.u_4(u_5,b.u_7,u_6),u_3)$. Si aR_tb, on dit que a est **prédecesseur immédiat** de b et b **successeur immédiat** de a. Si, dans I), $dsup(t_4) = i$, on peut préciser que b est **i + lème successeur immédiat** de a. Si $a\underset{t}{\leq}b$, on dit évidemment que a est **prédécesseur** de b (ou a précéde b) et que b est **successeur** de a (ou que b succède à a).///

I-1-1-1-8 <u>Une propriété de $\underset{t}{\leq}$</u>

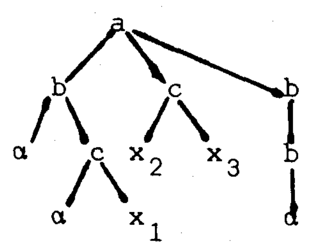
Si dsup (t) = 1, l'ensemble des noeuds de t, muni de $\underset{t}{\leq}$,est un inf-demi treilli. La preuve, élémentaire, est laissée au lecteur. L'élément minimal est appelé **sommet** de t.///

(I-1-1-1-9) **Les feuilles** de t sont les noeuds de t, autres que les variables, maximaux pour $\underset{t}{\leq}$(c'est à dire sans successeur immédiat). Un noeud est une feuille ssi son label appartient à Σ_0. Un noeud est **primaire** ssi il posséde au moins un successeur qui soit une variable ; si aucun successeur n'est une variable, le noeud est dit **secondaire**. Un élément **sans variable** est un élément de $T(\Sigma)_0$, un élément est **sans feuille** si aucun noeud n'est une feuille (tous les éléments maximaux sont des variables).///

I-1-1-1-10 Les **sous branches** de t sont les suites $(a) = (a_1,\dots,\alpha_p)$ telles que, pour tout i, a_{i+1} soit successeur immédiat de a_i. La **longueur** de la sous-branche (a), notée **long (a)**, est égale à p-1 si a_p est une variable, à p sinon. Une **branche** est une sous-branche où α_p est maximal et a_1 minimal. La **profondeur** de t, notée **prof(t)**, est la borne supérieure des longueurs des branches de t.///

I-1-1-1-11 Illustrons sur un exemple les définitions ci-dessus. Considérons l'alphabet $\Sigma = (a,3),(b,2),(c,2),(b,1),(\alpha,0)$.
soit $t=a(b(\alpha,c(\alpha,x_1)),c(x_2,x_3)bb\alpha)\in\tilde{T}(\Sigma)^1_3$

<u>Notation</u> : Conformément à l'usage dans[A D], nous omettons les parenthèses pour les chaines monadiques, écrivant bbα pour b(b(α)).
t se schématise en



On pourrait distinguer les noeuds en les numérotant ou, de façon moins lourde, en désignant par exemple par b_1, b_2, b_3 les trois occurences de b, numérotées dans l'ordre où elles apparaissent, de gauche à droite, en écriture parenthésée. a est le sommet ; c_1 et c_2 sont incomparables ; b_2 est prédécesseur de α_3 ; c_2 est 2ème successeur immédiat de a ; (a, b_1) et (a,b_2) sont deux sous-branches (distinctes évidemment) de t ; (a,b_1,c_1,α_2) est une branche de longueur 4 ; (a,c_2,x_2) est une branche de longueur 2 ; la taille de t est $|t|= 12$ et la profondeur est prof(t)=4 ; c_1 est un noeud primaire, b_2 est secondaire ; inf $(\alpha_1,\alpha_2)=b_1$.///

I-1-1-1-12 Eléments marqués :

Soit M un ensemble de symboles et $t\in T(\Sigma)$. On dit que **t est marqué par m** (m est un élément de M) ssi les labels des noeuds autres que les variables de t sont modifiée de façon que

I) deux noeuds n'aient pas même label

II) l'ensemble des nouveaux labels est en bijection avec une partie de $\Sigma \times N \times M$ et si l'ancien label du noeud était 'a', le nouveau est en correspondance par la bijection avec un élément de la forme (a,i,m).

Par exemple, les labels de t marqué par m seront de la forme (a,i,m) ou a^i_m ou a_{mi} etc... .///

I-1-1-2 Les torsions.

Préliminaire : les k-variables'.

(I-1-1-2-1) Soit $k\in N^+$. Notons $\underline{k^\otimes}$ le produit tensoriel de la seule application de [k] dans [1] p-1 fois par elle-même. On a donc $k^{\otimes p}\in\Theta_p^{kp}$ et, pour $i\in[p]$ et $j\in[k]$, $k^{\otimes p}(k(i-1)+j) = i$.

(I-1-1-2-2) Nous noterons $\underline{k^\otimes}$ l'application partielle de Θ dans Θ définie par :

$$\forall\theta\in\Theta^p_{kq},\ k^\otimes(\theta) = \theta.k^{\otimes q}\in\Theta^p_q$$

(I-1-1-2-3) Notation : nous écrirons $\underline{k^\otimes(\theta) = \theta.k^\otimes}$, confondant $k^\otimes$ avec le seul $k^{\otimes q}$ pour lequel la composition $\theta.k^{\otimes q}$ a un sens.

(I-1-1-2-4) I) Posons $\underline{I_k(\theta)} = Im(\theta.k^\otimes)$, $\underline{V^i_k(\theta) = Im(\theta)\ [k(i-1)+1,ki]}$ (Im(θ) désigne évidemment l'image de θ). Si la valeur de k est sans ambiguïté par le contexte, on omet parfois de la préciser.

II) Soit $\theta_1 \in \Theta_q^{p_1}, \ldots, \theta_k \in \Theta_q^{p_k}$ avec pour tout $i \in [k]$, $p_i > 0$;
$\theta = \langle \theta_1, \ldots, \theta_k \rangle$ désigne la torsion de $\Theta_q^{p_1+\ldots+p_k}$ défini par

$$\theta(p_1 + \ldots + p_{i-1} + j) = \theta_i(j)$$

pour tout $i \in [k]$ et $j \in [p_i]$.

Inversement, soit $\theta \in \Theta_q^p$ et $p_1, \ldots, p_k$ des entiers > 0 tels que $p_1 + .. + p_k = p$.

θ se décompose alors en :

$$\theta = \langle \theta_1, \ldots \theta_k \rangle$$

où, $\forall i \in [k]$, On pose $\theta_i(j) = \theta(p_1 + \ldots + p_{i-1} + j)$.///

III) propriété

a) tout $\theta = \langle \theta_1, \ldots, \theta_k \rangle \in \Theta_q^p$ peut s'écrire $(\theta_1 \otimes \ldots \otimes \theta_k).k\zeta$ où, de plus $k\zeta \in k \operatorname{dil} \Theta$ si $q = kq'$.

b) inversement, tout $(\theta_1 \otimes \quad \otimes \theta_k).k\zeta$ peut s'écrire $\langle \theta'_1, \ldots, \theta'_k \rangle$

Preuve : Le point b) est une conséquence de II)

Prouvons a) :

α) il suffit de définir $k\zeta$ par :

- $k\zeta \in \Theta_q^{kq}$
- $\forall i \in [k]$, $\forall j \in [q]$ $\quad k\zeta(q(i-1)+j) = j$

β) Prouvons l'égalité de $\theta = \langle \theta_1, .., \theta_k \rangle$ et $(\theta_1 \otimes \quad \otimes \theta_k).k\zeta$
soit $l \in [p]$. l se décompose de façon unique en
$l = p_1 + \quad + p_{i-1} + j$ avec $j \in [p_i]$ (car les $p_i > 0$).
on a $\theta(l) = \theta_i(j)$.

D'autre part, $(\theta_1 \otimes \quad \otimes \theta_k) l = q(i-1) + \theta_i(j)$ par définition du tensoriel, d'où $k\zeta(q(i-1) + \theta_i(j)) = \theta_i(j)$ et le résultat.

γ) si de plus $q = kq'$, $k\zeta$ est défini par
$k\zeta\,(k[q'(i-1)] + j) = j$ pour tout $j \in kq'$ donc $k\zeta \in k \operatorname{dil} \Theta$ ///CQFD

Soit $\langle \theta \rangle = \langle \theta_1, .., \theta_k \rangle$ (tous les θ_i de même degré inférieur), soit $\alpha \subset [k]$, on pose

(I-1-1-2-5) $\quad V_k^{i/\alpha} \langle \theta \rangle = \bigcup_{j \in k} V_k^i(\theta_j)$.

Interprétons intuitivement ces notions. Rappelons d'abord [A D] que toute $\theta \in \Theta_q^p$ s'identifie à $\langle q \,;\, x_{\theta(1)}, \ldots, x_{\theta(p)} \rangle$, ce qui fait le lien entre la notion de 'torsion' θ et celle de 'suite des variables' d'un élément

$t = \tilde{t}.\theta$ de $T(\Sigma)$. Conformément à [A D], comme rappelé en introduction de I-1-1, on omet souvent de faire figurer q avant la suite $x_{\theta(1)},\dots x_{\theta(p)}$. Par la suite, selon les cas, on manipulera les notions de variables ou de torsions.

On sait [A D] que k dil $T(\Sigma)$ contient le sous magmoïde de torsion k dil Θ isomorphe à Θ. En plongeant par i_k (notation de A - D) k dil Θ dans Θ, l'isomorphisme se traduit en une bijection de θ sur i_k(k dil Θ) que nous noterons k et dont il est facile de voir qu'elle se caractérise par les deux propriétés :

(I-1-1-2-6) I) $k(\theta).k^{\theta} = k^{\theta}.\theta$

II) $k(\theta)$ croissante sur chaque intervalle $[(i-1)k+1,ik)]$.

Ces propriétés sont en effet équivalentes à dire que

I-1-1-2-7 $\forall\theta\epsilon\Theta_q^p,\forall i\epsilon[p],j\epsilon[k],\ k(\theta)[(i-1)k+j]=(\theta(i)-1)k+j.$

En traduisant en terme de 'variables', k associe à x_i la suite $<x_{(k-1)i+1},\dots,x_{(k-1)i+k}>$

Intuitivement, la variable x_i 'éclate' en k composantes. (ceci est précisément développé dans [A D]).

(I-1-1-2-8) Pour cette raison, nous dirons que $x_{(k-1)i+j}$ est la jème composante de la k variable x_i.

En particulier, un k morphisme associera les k composantes $x_{(k-1)i+1},\dots,x_{(k-1)i+k}$ à la variable x_i. C'est ce dernier point qui motive les définitions qui suivent.

(I-1-1-2-9) linéarité : θ est dite **linéaire** ssi elle est injective (cette notion est abondamment utilisée dans [A]).

Nous introduisons maintenant de nouvelles définitions relatives aux torsions. Leur intérêt sera justifié par la suite.

(I-1-1-2-10) séparation : Soit $\theta=<\theta_1,\dots,\theta_k>\epsilon\Theta_{kq}$

I) définition : θ est dite **k-séparée** ssi, $\forall$ i et j différents et $\epsilon[k]$, $I_k(\theta_i)\cap I_k(\theta_j) = \emptyset$. Intuitivement, cela signifie qu'il n'existe aucun couple (i,j) tel que $I_m(\theta_i)$et $I_m(\theta_j)$ contiennent des composantes d'une même variable.

Donnons à cette définition un caractère plus "magmoïdien" en donnant un énoncé que nous prouverons être équivalent.

II) <u>Définition équivalente</u> :

$\theta=<\theta_1,..,\theta_k>$ est dite k séparée ssi $\exists\theta'_1,..\theta'_k$ et ζ tels que

- $\theta= (\theta'_1\otimes..\otimes\theta'_k).\zeta$
- ζ **injectif** et appartient à k dil Θ

<u>Preuve</u> : (Remarquons d'abord que nous ne pourrons pas nous contenter de reprendre la construction de (I-1-1-2-4|||).

a) supposons $\theta=<\theta_1,..,\theta_k>$ séparé $\in\Theta_{kq}$

Posons $I_k(\theta_1) = \{i^1_1,..,i^1_{u1}\}$

$\vdots$

$I_k(\theta_k) = \{i^k_1,...,i^k_{uk}\}$

Les $I_k(\theta_i)$ sont disjoints puisque θ séparé.

On peut donc définir une permutation μ de [q] par :

$\mu(i^1_j) = j,..,\mu(i^\lambda_j)=n_1 + \quad +n_{\lambda-1}+j...$

et μ défini arbitrairement hors de $\bigcup_{i\in[k]} I_k(\theta_i)$

Pour tout $j\in[k]$, posons d'autre part :

$\mu_j(i^j_l) = l.\ \mu_j\in\Theta^{nj}_{nj}$

et $\theta'_j=\theta_j$ o k dil μ_j.

Posons ζ = k dil $(\mu^{\ 1})$

vérifie par construction les conditions de l'énoncé.

Reste à prouver que $\theta= (\theta'_1\otimes .. \otimes\theta'_k).\zeta$

Supposons $\theta\in\Theta^p_{kq}$ et chaque $\theta_i\in\Theta^{pi}_{kq}$ avec p_i quel'on sait >0

Tout $\alpha\in[p]$ se décompose de façon unique en :

$\alpha= p_1+..+p_{i-1}+j$ avec $j\in[p_i]$.

On a $\theta(\alpha) =\theta_i(j)$

D'autre part, $(\theta'_1\otimes..\otimes\theta'_k)(\alpha) = k(n_1+ \quad +n_{i-1})+\theta'_i(j)$

Reste à prouver que

k dil $(\mu^{-1})(k(n_1+ \quad +n_{i-1}) +\theta'_i(j))=\theta_i(j)$

Or, il existe $i^i_m\in I_k(\theta_i)$ et $\nu\in[k]$ tels que

$\theta_i(j)=k(i^i_m) + \nu$

On a alors $\theta'_i(j)$ = k dil$\mu_j(k(i^i_m) +\nu) = k(m\ ) + \nu$

par def. de μ, on a alors

$k \operatorname{dil} \mu^{-1}(k(n_1 + . + n_{i-1} + m) + v) = k(i_m^i) + v$

b) inversement, soit $\theta = \theta'_1 \otimes \quad \otimes \theta'_k \zeta$ avec $\zeta \in k \operatorname{dil} \Theta$ et ζ injective.

Supposons $\theta'_i \epsilon \Theta^{p_i}$ (avec $p_i > 0$ toujours)

Alors, θ se décompose en $\theta = (\theta_1, .., \theta_k)$ avec $\theta_i \epsilon \Theta^{p_i}$

La preuve, facile, que $i \neq j \Rightarrow I_k(\theta_i) \cap I_k(\theta_j) = \emptyset$ est laissée au lecteur///

CQFD

(I-1-1-2-11) Complétude : soit $k \epsilon N^+$ et $v \subset [k]$, soit $\theta = \langle \theta_1, .., \theta_k \rangle$ appartenant à Θ_{kq}, on dit que θ est $[v]$ - k **compléte** ssi $\bigcup_{i \epsilon v} I_k(\theta_i) = [q]$ Si $v = [k]$, on dira que θ est **k complète**. k sera sous entendu si le contexte évite toute ambiguité.

Remarquons que si $k = 1$, θ est compléte ssi elle est surjective.

I-1-1-2-12 Propriété : **Soit M un magmoïde décomposable, soit $\mathcal{T}(M)$ le magmoîde projetable obtenu par adjonction de torsion à M, alors, si θ est linéaire, θ_μ est linéaire pour tout μ tel que θ_μ est défini. Si $\langle \theta_1, \quad, \theta_k \rangle$ est k séparé, $\langle (\theta_1)_\mu, .., (\theta_k)_\mu \rangle$ est k séparé.**

Preuve : Le lecteur se reportera à [A D] pour la définition de l'adjonction de torsion et de la notation 'θ_μ'.
La propriété énoncée est une conséquence facile à établir des définitions.///

Corollaire : Soit $[t, \theta] \epsilon \mathcal{T}(M)_q^p$ et $[u; r] \epsilon \mathcal{T}(M)_r^q$ alors, si θ et r sont linéaires, $\theta_\mu . r$ est linéaire.
Soit $\langle [t_1, \theta_1], ., [t_k; \theta_k] \rangle$. Alors, si $\langle \theta_1, .., \theta_k \rangle$ est séparé, alors $\langle (\theta_1)_\mu . r, ..., (\theta_k)_\mu . r \rangle$ est séparé.

En particulier, si $M = \tilde{T}(\Sigma)$, on obtient que si t et $u \epsilon T(\Sigma)$, avec $t = \tilde{t} . \theta \epsilon T(\Sigma)_q^1)$ et $\mu = \hat{u} . r \epsilon T(\Sigma)_r^q$, alors $t.u = \tilde{v} \zeta$ avec ζ linéaire si θ et r le sont. Si $t = \langle \tilde{t}_1 . \theta_1, .., \tilde{t}_k . \theta_k \rangle$, alors $t.u = (\hat{v}_1 \zeta_1, ..., \hat{v}_k \zeta_k)$ avec $\langle \zeta_1, .., \zeta_k \rangle$ k séparé si $(\theta_1, .., \theta_k)$ l'est.

Ces résultats sont une conséquence immédiate de (I-1-1-2-12) ils s'énoncent briévement en

I-1-1-2-13 'La linéarité et la séparation sont conservés par composition'

I-1-1-2-14 Remarque : La complétude n'est pas conservée par composition, sauf dans le cas où $k = 1$;

Preuve : si $k = 1$, θ est compléte donc surjective. Il en est de même de θ_μ, d'où le résultat
si $k > 1$, l'exemple suivant prouve la remarque :

exemple : $k = 2$, soit $\alpha = \langle a(x_2), \grave{a}\rangle \in (2 \text{ dil } T(\Sigma))_1^1$
la torsion x_2 est 2-compléte. Considérons
$\alpha.\alpha = \langle a(x_2), \grave{a}\rangle\langle a(x_2), \grave{a}\rangle = \langle a(\grave{a}), \grave{a}\rangle \in (2 \text{ dil} T(\Sigma))_1^1$
La torsion de $\alpha.\alpha$ est 0_2 et n'est pas compléte.///
D'une façon générale, on verra que la notion de complétude est lourde à manier dans le cas où $k>1$.

Nous utiliserons souvent le lemme suivant.

I-1-1-2-15 lemme : I) soit $\theta \in \Theta_q^p$, $\theta' \in \Theta_r^p$. Si θ est injective, il existe $\zeta \in \Theta_r^q$ tel que $\Theta.\zeta = \theta'$.

II) si $q = r$, on peut choisir ζ bijective si θ' est injective.

preuve : $\forall j \in [q]$

I) - si $j \notin \mathrm{Im}(\theta)$, on peut définir $\zeta(j)$ arbitrairement
- si $j \in \mathrm{Im}(\theta)$, il existe un seul i (car θ est injective) tel que $\theta(i) = j$. On pose alors $\zeta(j) = \theta'(i)$ et on a ainsi, par construction, $\forall i \in [p], \theta'(i) = \zeta(\theta(i))$.

II) si θ' est injective, la restriction de ζ à $\mathrm{Im}(\theta)$ est une bijection sur $\mathrm{Im}(\theta')$. Puisque $q = r$ et $\mathrm{Card}(\mathrm{Im}(\theta)) = \mathrm{Card}(\mathrm{Im}(\theta'))$, on a $\mathrm{Card}([q]-\mathrm{Im}(\theta)) = \mathrm{Card}([r]-\mathrm{Im}(\theta'))$. ζ peut donc être prolongé sur $[q]-\mathrm{Im}(\theta)$ en une bijection.///

I-1-1-2-16 Remarque importante : Soit $\theta \in \Theta_q^p$ et $\theta' \in \Theta_r^q$.

Conformément à [A D], nous notons $\theta.\theta' = \theta o \theta'$ la composée au sens des relations de θ et θ'. Si bien que, pour $i \in [p]$, nous écrirons $\theta.\theta'(i) = \theta o \theta'(i) = \theta'[\theta(i)]$.

I-1-1-2-17 Notation : Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. La restriction de f à une partie A de E sera notée $f_{|A}$. (Ceci vaut en particulier pour les torsions).

I-1-1-3. Les sous arbres

Soit un arbre t - c'est à dire un élément de $T(\Sigma)^1$. Grosso modo, les sous arbres de t seront les 'morceaux de t qui sont des arbres'. L'idée intuitive est claire et se précise :

I-1-1-3-1 <u>t'sous arbre de t</u> ssi t se décompose en $t=t_1(t_2,t'.t_3,t_4)$.

Nous noterons $t'<t$. Il est à noter que, comme dans le cas des noeuds, t peut avoir deux occurrences différentes de sous arbres ayant 'mêmes labels'. Plusieurs choix sont possibles : soit qu'on considère **la** relation < sans tenir compte des occurrences, on obtient alors un **ordre** sur $T(\Sigma)^1$; soit qu'on considère la relation < sur les occurrences de sous arbres, cette relation doit alors en toute rigueur être notée $\underset{t}{\leq}$ (elle dépend de t). Par la suite, nous utiliserons la notion de sous arbre en ce dernier sens, pour désigner donc un 'ensemble de noeuds de t constituant un arbre' ; mais comme dans le cas de noeuds, nous désignerons souvent le sous arbre en désignant les noeuds par leur label.

(I-1-1-3-2) Un sous arbre t' de t est **final** ssi $t=t_1(t_2,t',t_3)$.
En fait nous n'utiliserons que d'une façon purement descriptive cette notion de sous arbre qui, étant relative à t, aurait aussi pu être exposée en I-1-1-1.

La relation de **sous arbre initial**, notée $\underset{I}{\leq}$, sera beaucoup plus féconde. Quelques-unes des raisons en sont que d'abord, les difficultés relatives aux occurences disparaissent, d'autre part les notions de borne supérieure et inférieure de 2 arbres, celle de limite d'une suite croissante, seront ici intéressantes. Nous nous attacherons donc ci-dessous à préciser cette notion de sous arbre initial.

I-1-1-3-3 <u>Définition</u> : Soit t et $t' \in \tilde{T}(\Sigma)$.

$t' \underset{I}{\leq} t$ ssi $\exists u \in \tilde{T}(\Sigma)$ tq $t = t'.u$

Remarquons d'abord que $\underset{I}{\leq}$ est définie sur $\tilde{T}(\Sigma)$, c'est à dire sur des uples d'arbres. Elle se restreint trivialement à $\tilde{T}(\Sigma)^1$. On veut que la notion de torsion soit étrangère à celle de sous arbre initial, c'est pourquoi $\underset{I}{\leq}$ est défini sur $\tilde{T}(\Sigma)$ et non sur $T(\Sigma)$. Intuitivement, $t \underset{I}{\leq} t'$ si et seulement si on peut 'couper' t en deux, la partie inférieure(au sens de l'ordre des noeuds), étant t'.

Il est facile de vérifier que $\underset{I}{\leq}$ est un ordre partiel sur $\tilde{T}(\Sigma)$.

(I-1-1-3-4) Nous noterons $\underset{I}{\vee}$ et $\underset{I}{\wedge}$ les bornes supérieures et inférieures si elles existent. Il est facile de voir que $\tilde{T}(\Sigma)$ est, muni de $\underset{I}{\leq}$, inf-demi-treilli distributif complet.

(I-1-1-3-5) Deux arbres t et t' sont dits **compatibles** ssi $\underset{I}{\vee}(t,t')$ existe.

Exemple : soit $t = a(b(x_1),a(x_2,x_3))$, $t' = a(bb(x_1),x_2)$ et $t'' = a(a(x_1,x_2),x_3)$.

On a alors $t \underset{I}{\wedge} t' = a(b(x_1),x_2)$, $t \underset{I}{\wedge} t'' = a(x_1,x_2)$.

$t' \underset{I}{\wedge} t'' = a(x_1,x_2)$. $t \underset{I}{\vee} t' = a(bb(x_1),a(x_2,x_3))$ (t et t' sont compatibles) mais t et t" d'une part, t' et t" d'autre part sont incompatibles.

Si nous complétons $\tilde{T}(\Sigma)$ de façon que toute suite croissante admette une limite pour la topologie induite par $\underset{I}{\leq}$, nous obtenons comme nouveaux objets les arbres infinis.///

I-1-1-3-6 <u>Propriété</u> : **Soit t et t' compatibles**

I) si t est sans variable, alors $t' \underset{I}{\leq} t$

II) si t et t' sont sans variables, $t = t'$.

<u>preuve</u> :

I) Posons $t' \underset{I}{\vee} t = \mu$. Nous aurons $t \underset{I}{\leq} \mu$, donc $\exists$ v tel que $\mu = t.v$. Mais comme t est sans variable, c'est à dire comme $t \in T(\Sigma)_o$, $t.v = t$. Nous obtenons donc $t.v = t = \mu \underset{I}{\geq} t'$.

II) d'après I) $t \underset{I}{\leq} t'$ et $t' \underset{I}{\leq} t$, d'où $t = t'$///

<u>CQFD</u>

I-1-1-3-7 <u>Notation</u> : Soit $t \in T(\Sigma)_q$ et $u \in T(\Sigma)^1$, soit $i \in [q]$.

Nous noterons $t_{x_i}u$ l'élément $t\,(1_{i-1},u,1_{q-i})$.

Soit $t \in \tilde{T}(\Sigma)_q$ et $u \in \tilde{T}(\Sigma)^1$, soit $i \in [q]$.

Nous noterons $t_{\tilde{x}_i}u$ l'élément $t.(1_{i-1} \otimes u \otimes 1_{q-i})$.

Nous dirons que, pour obtenir $t_{x_i}u$, on a **substitué** u à x_i **dans t** et, pour obtenir $t_{\tilde{x}_i}u$, on a **substitué initialement** u à x_i **dans t.**

La première substitution décrite ci-dessus est la substitution 'classique' (voir discussion en [A D]) dans les arbres. La seconde substitution, ne faisant intervenir que les arbres initiaux, consiste à "prolonger" l'arbre initial t en x_i par u, la renumération des variables étant effectuée par le tensoriel.

Les notations ci-dessus s'étendent facilement dans k dil $T(\Sigma)$: soit $t \in (k \text{ dil } T(\Sigma))^p_q$ et $u \in (k \text{ dil } T(\Sigma))^q_r$, soit $i \in [q]$. Nous noterons $t_{[x_i]_k}u$ l'élément $t(1_{k(i-1)}, u, 1_{k(q-i)})$. Les autres définitions s'étendent de même. Si k est sans ambiguité, nous noterons $[x_i]$ au lieu de $[x_i]_k$, mais il y a lieu de conserver la distinction entre '$[x_i]$', qui représente la substitution simultanée en toutes les composantes de la k variable $\langle x_{k(i-1)+1}, \ldots, x_{ki}\rangle$ et 'x_i' qui représente la substitution en la composante x_i. (Rappelons qu'on confondra souvent dans les manipulations k dil $T(\Sigma)$ et i_k (k dil $T(\Sigma)$))///

I - 1 - 2 : LES FORETS

Nous avons décrit précisément en (I-1-1) la structure d''arbre'. Les notions introduites avaient une signification intuitive immédiate. La seule exception était l'introduction des notions de torsion linéaire, compléte, séparée, mais nous illustrerons intuitivement à propos des morphismes (I-1-3) ces notions à priori plus obscures.

Dans la présente section, nous allons introduire des outils ou des notions dont l'intérêt apparaitra précisément dans la suite. Rappelons pour le moment que nous nous intéressons à des transformations de forêts, c'est à dire grosso-modo à des parties de $T(\Sigma)_o xT(D)_o$. Seuls les arbres sans variables nous intéressent en fin de compte, mais les relations associées aux bimorphismes (I-1-4) ou aux transducteurs(I-1-5) sont structurées de telle façon qu'afin de ne pas 'perdre d'information', on en est amené à considérer des relations de $T_k(\Sigma)$ x $T_{k'}(D)$. C'est dans cette optique que sont introduites les équivalences de (I-1-2-2). Auparavant, nous indiquons en (I-1-2-1) dans quels magmoïdes nous travaillerons le plus couramment, renvoyant le lecteur à [A D] pour l'étude précise de certains d'entr'eux. Nous donnons quelques compléments et remarques. Nous rappelons en (I-1-2-3) la notion classique (la plus ancienne de la théorie des arbres !) de forêt reconnaissable. Cette notion est également développée dans [A D]. Nous donnons quelques compléments. En (I-1-2-4), nous définissons les classes agréables de forêts, classes jouissant vis à vis des bimorphismes des mêmes bonnes propriétés qué la classe des forêts reconnaissables. Nous pourrons ainsi dans la suite étudier des bimorphismes plus généraux sans rien changer aux preuves.

I-1-2-1 Magmoïdes produits et magmoïdes des parties :

Commençons par décrire informellement les principaux types de magmoïdes que nous utiliserons couramment dans la suite. Nous renvoyons à [A D] pour l'étude théorique des premiers, qui sont seulement rappelés ici.

(I-1-2-1-1) Soit Σ un alphabet gradué fini et k un entier positif . k dil $T(\Sigma)$ = $T_k(\Sigma)$ (I-1-1-0-3), est le magmoïde défini par :

- (k dil $T(\Sigma))^p_q$ = $T(\Sigma)^{kp}_{kq}$ = l'ensemble des kp uples d'arbres sur Σ à'variables dans $\{x_1,..,x_{kq}\}$ '.

- la composition et le tensoriel sont ceux induits par $T(\Sigma)$ [A D]

- $T_k(\Sigma)$ est projetable, il contient le sous magmoïde $k\theta$ isomorphe à Θ (I-1-1-2-6) ///

(I-1-2-1-2) Soit M et N deux magmoïdes. Le magmoïdes produit [A D] est défini de façon évidente par :

- $(M\times N)^p_q = M^p_q \times N^p_q$
- $(t_1,t_2)\otimes(u_1,u_2) = (t_1\otimes u_1, t_2\otimes u_2)$
- $(t_1,t_2).(u_1,u_2) = (t_1.u_1,\ t_2.u_2)$

Si M et N sont projetables, MxN l'est aussi.

Par exemple, nous considérerons fréquemment les magmoïdes du type $T_k(\Sigma)\times T_{k'}(\Delta)$. Le sous magmoïde des torsions est isomorphe à Θ par le morphisme qui à $\theta\in\Theta$ associe $(k(\theta),k'(\theta))\in k\ \mathrm{dil}\Theta \times k'\ \mathrm{dil}\ \theta$ (I-1-1-2-6)

(I-1-2-1-3) Le magmoïde $\mathcal{P}T(\Sigma)$ des parties (descendantes) de $T(\Sigma)$ est défini par

- $(\mathcal{P}T(\Sigma))^p_q = (\mathcal{P}(T(\Sigma)^1_q))^p$

Autrement dit, tout élément de $\mathcal{P}T(\Sigma)^p_q$ est de la forme $p_1 \times \quad \times p_p$ où chaque p_i est une partie de $T(\Sigma)^1_q$.

- Soit $A\in\mathcal{P}T(\Sigma)^p_q$ et $A'\in\mathcal{P}T(\Sigma)^{p'}_{q'}$, alors $A \otimes A' = \{a\otimes a' \mid a\in A, a'\in A'\}$ .Cette définition se passe de commentaire.
- Soit $A\in\mathcal{P}T(\Sigma)^p_q$ et $B\in\mathcal{P}T(\Sigma)^q_r$, alors $A.B = \bigcup_{i\in A} a.B$

Pour définir a.B, posons $a = \hat{a}\theta$ (avec $\theta\in\Theta^m_q$) et $B = B_1\times..\times B_q$. On pose alors $a.B = \{\hat{a}(b_1,..,b_m) \mid \forall\ i\in[m], b_i\in B_{\theta(i)}\}$.

En traduisant en termes imagés de variables (I-1-1-1, I-1-1-3-7 et8) cette définition signifie qu'on substitue, pour tout $i\in[m]$, à la variable $x_{\theta(i)}$ un élément quelconque de $B_{\theta(i)}$. Ainsi, si par exemple $\theta(i_1) = \theta(i_2) = j$, à deux occurrences de x_j dans a pourront être substitués des éléments **différents** de B_j. On aurait pu s'imposer le point de vue 'ascendant', consistant à substituer à toutes les occurrences d'une même variable le **même** arbre. Les notions 'ascendant' et 'descendant' sont étudiées dans [A D], on y voit que seul le magmoïde des parties descendantes est projetable.

Nous considérons souvent le sous-magmoïde projetable $\mathcal{P}_F(T(\Sigma))$ des parties finies.

La construction de $\mathcal{P}T(\Sigma)$ s'étend comme suit, de façon évidente, à celle de $\mathcal{P}T(M)$ où M est un magmoïde décomposable quelconque. L'idée de la généralisation consiste à remarquer que $T(\Sigma) = \mathcal{T}(\tilde{T}(\Sigma))$ et à généraliser les notations, ce qui nous donne :

- $(\mathcal{P}T(M))^p_q = (\mathcal{P}T(M)^1_q)^p$

- la définition du tensoriel est triviale

- Soit $A\in\mathcal{P}T(M)^p_q$ et $B\in\mathcal{P}T(M)^q_r$, alors $A.B = \underset{a\in A}{\cup} a.B$.

Pour définir a.B, posons $a = [a' \ ; \ \theta]$ où $\theta\in\Theta^m_q$ et $B = B_1 \times \quad \times B_q$. On pose alors

$a.B = \{[a'.(b_1\otimes \quad \otimes b_m) \ ; \ \theta_{b_1\otimes \quad \otimes b_m}.(r_1, \quad ,r_m)] \mid \forall \ i\in[m], [b_i \ ; \ r_i]\in B_{\theta(i)}\}$

La notation 'θ_b' est définie dans [A D]. Nous n'utiliserons cette construction que sur des cas particuliers, en explicitant chaque fois la construction. (Dans le cas où $M = \tilde{T}(\Sigma)$, on a l'identification entre $(b_1,..,b_m)$ et $\bar{b}_1\otimes.. \otimes\bar{b}_m.\theta_{\bar{a}_1\otimes \quad \otimes\bar{b}_m}(r_1,..,r_m)$, ce qui simplifie beaucoup l'écriture - voir [A D] pour les détails sur l'adjonction de torsion).

(I-1-2-1-4) Le magmoïde $D\mathcal{P}^k\mathcal{T}M$: nous introduisons maintenant une nouvelle classe de magmoïdes utilisée en (II-2-3).

o) Remarque : comme nous serons amené à composer de nombreux foncteurs, nous écrirons $\mathcal{T}M$ au lieu de $M\mathcal{T}$, cette dernière notation étant adoptée dans AD et A.

D'autre part, $\mathcal{P}^k\mathcal{T}M$ n'est autre que k dil $\mathcal{PT}M$, mais l'usage fréquent que nous en ferons et sa structure non triviale nous font préférer en décrire directement la construction.

Soit M un magmoïde décomposable, le magmoïde projetable $\mathcal{T}M$ est obtenu en appliquant le foncteur $\mathcal{T}$ décrit dans [A D]. Nous définissons alors le magmoïde projetable $\mathcal{P}^k\mathcal{T}M$ par :

I) $(\mathcal{P}^k\mathcal{T}M)^p_q = ((\mathcal{P}^k\mathcal{T}M^1_q)^p$

(La 'puissance p' s'entendant au sens du produit cartésien d'ensembles).
Nous définissons alors :

II) $(\mathcal{P}^k\mathcal{T}M)^1_q = (\mathcal{P}(\mathcal{T}M)^1_{kq})^k$

III) Donc, $(\mathcal{P}^k\mathcal{T}M)^p_q = \{A_1 \times \quad \times A_{kp} \mid A_i \subset \mathcal{T}M^1_{kq}\}$

Nous avons donc du point de vue ensembliste, $\mathcal{P}^k\mathcal{T}M \subset \mathcal{PT}M$ ($\mathcal{P}^k\mathcal{T}M$ a pour éléments ceux de $\mathcal{PT}M$ dont les degrés sont multiples de k). On considère alors l'injection canonique i_k de $P^k TM$ dans PTM qui à $A \in (P^k TM)^p_q$ associe $i_k(A) = A \in (PTM)^{kp}_{kq}$. La composition et le tensoriel sur $P^k TM$ sont alors ceux induits par PTM sur $i_k(P^k TM)$. on en déduit évidemment que $P^k TM$ est un magmoïde, projetable car contenant $k\Theta$ qui est isomorphe à Θ(I-1-1-2-6 & 7).

$P^k TM$ étant projetable, $DP^k TM$ est défini par le foncteur D de [A D].

En résumé, tout élément de $(DP^k TM)^p_q$ s'écrit donc :

IV) $((A_1 x..xA_k) \otimes (A_{k+1} x..xA_{2k}) \otimes .. \otimes (A_{k(p-1)+1} x..xA_{kp})\ ;\ q_1,..,q_p)$

où $A_{(\alpha-1)k+\beta} \in PT(M)^1_{q\alpha}$ avec $\alpha \in [p]$, $\beta \in [k]$ et $\sum_\alpha q_\alpha = q$.
Conformément à l'usage [A D] nous omettrons d'écrire $q_1,..q_p$, qui sont spécifiés dans le co-domaine des torsions.///

V) <u>Remarque</u> : Nous ne pouvons pas définir comme ci-dessus P(k dilTM) à cause de la difficulté illustrée ci-après :

Soit un élément A de $P(T_k M)^1$. A n'est pas nécessairement de la forme $A_1 x..xA_k$ ou $A_i \in P(T\ M)^1$ et ceci fait que, si on définit la composition 'descendante' comme précédemment, on est amené à composer ' avec des éléments qui n'appartiennent pas à A' comme le précise l'exemple suivant :

<u>exemple</u> :

$k = 2$, $A = \{(a,a')(b,b')\} \in P(T_2 M)^1_0$, $\hat{a}\theta = \hat{a}\ (x_1, x_2, x_1)$

on aurait alors par exemple $\hat{a}(a,a',b) \in \hat{a}\ \theta.A$
et de même, en introduisant $\hat{a}'(x_1,x_2)$, $\hat{a}'(x_1,x_2)$. A contient $\hat{a}'(a,b')$ alors que (a,b') n'appartient pas à A.
Nous évitons ce problème dans $P^k TM$ en supposant que A peut toujours s'écrire $A_1 x..xA_{kp}$.
Il y a néanmoins dans le cas de $P(T_k M)$ possibilité de définir une structure de composition ascendante (voir A.D).///

VI) Nous considérerons souvent le sous-magmoïde projetable $DP^k_F TM$ des parties finies de $DP^k TM$.///

(I-1-2-1-5) Soit P une partie d'un magmoïde M. Nous noterons $[P]$ le **sous magmoïde de M engendré par P** et $\hat{P} = M_0 \cap [P]$.///

(I-1-2-1-6) Soit M un magmoïde décomposable. Une partie A de k dil $T(M)$ est dite **linéaire** (respectivement **k-séparée, [v] k complète**) ssi pour tout $[a,\theta] \in A$, θ est **linéaire** (I-1-1-2-9) (resp. **k-séparée** (I-1-1-2-10), [v] **k-compléte**(I-1-1-2-11)).///

(I-1-2-1-7) Nous avons défini en (I-1-2-1-4) $P^kT(M)$. Nous utiliserons fréquemment des magmoïdes du genre $P^kT(\Sigma)xP^{k'}T(\Delta)$.
Faisons à ce propos une remarque qui évitera par la suite des confusions et qui joue un rôle essentiel dans les problèmes de composition des transducteurs (voir II-2-2-2).

(I-1-2-1-8) <u>Remarque</u> : Considérons $\Sigma=\{\bar{a},a(x)\}$, $\Delta=\{\bar{a},a(x_1,x_2), a'(x_1,x_2)\}$
Soit $E_1 = \{(\bar{a},\bar{a}),(a(x), \{a'(x,x),a(x,x)\})\} \subset P(T(\Sigma))xP(T(\Delta))$
(on identifie les ensembles à un élément avec l'élément correspondant, écrivant par exemple $a(x)$ pour $\{a(x)\}$).
Appelons **arbre balancé** tout arbre dont toutes les branches (I-1-1-1-10) ont même longueur. Le lecteur vérifiera facilement que :

I) $\hat{E}_1 = \{(a^n\bar{a}$, {arbres balancés de profondeur n+1, sans variables} $|n\in N\}$
Remarquons maintenant qu'au sens des ensembles, E_1 est encore la partie $E_2= \{(\bar{a},\bar{a}),(a(x),a'(x,x)), (a(x),a(x,x))\}$ de $T(\Sigma)xT(\Delta)$.or, E_2 engendre dans $T(\Sigma)xT(\Delta)$:

II) $\hat{E}_2= \{(a^n\bar{a}$, arbres balancés sans variables de profondeur n+1)$|n\in N\}$
tous les noeuds à une même profondeur
ayant même label

III) Ainsi, en plongeant $PT(\Sigma)xPT(\Delta)$ dans $P(T(\Sigma)xT(\Delta))$,a-t-on $\hat{E}_2 \subsetneq \hat{E}_1$ (par exemple, $(aa\bar{a},a(a(\bar{a},\bar{a}),a'(\bar{a},\bar{a})))$ appartient à $\hat{E}_1$ mais pas à $\hat{E}_2$). Ceci provient simplement de ce que, dans le cas I), la composition se fait dans le magmoïde $P(T(\Sigma)) \times P(T(\Delta))$ et, dans le cas II, se fait dans $T(\Sigma) \times T(\Delta)$. La différence entre les deux compositions est explicitée par le lemme (I-1-2-1-9). Ainsi, il ne faut pas 'oublier la structure de parties', c'est à dire en fait celle du magmoïde sur lequel on travaille. Cette remarque, pour évidente qu'elle soit, est importante. Nous y reviendrons (II-2-3).
Le lemme suivant précise le phénomène illustré ci-dessous.

(I-1-2-1-9) <u>Lemme</u> : **Soit A et B $\in PT(M)$. Alors en général $A.B \supsetneq \{a.b|a\in A,b\in B\}$.
On a l'égalité si A est linéaire.**

<u>Preuve</u> comme $A.B = \bigcup_{a\in A} a.B$, il suffit de prouver le résultat pour A réduit à un seul élément.
Posons $A = \{a\}$; $a = [\hat{a};\theta]$ avec $\theta\in\Theta_q^m$ et $B = B_1x..xB_q$. On a alors d'une part, d'après (I-1-2-1-3)

$a.B = \{[\hat{a}.(b_1 \otimes \quad \otimes b_m);\theta_{b_1} \otimes \quad \otimes b_m(r_1,..,r_m)] \mid [b_i;r_i] \in B_{\theta(i)}\}$

et d'autre part,

$\{a.b \mid b \in B\} = \{\hat{a}(b_{\theta(1)} \otimes \quad \otimes b_{\theta(m)}) ;\theta_{b_{\theta(1)}} \otimes \quad \otimes b_{\theta(m)} ; (r_{\theta(1)},..,r_{\theta(m)})] \mid [b_i;r_i] \in B_i\}$

En associant à tout $j \in Im(\theta)$ un i tel que $\theta(i) = j$ on obtient l'inclusion, mais la non unicité de i entraine en général l'ingégalité comme le montre l'exemple suivant :

$a = a(x,x)$, $B = \{a_1,a_2\}$. Alors $a.B = \{a(a_1,a_2),a(a_1,a_2),a(a_2,a_1),a(a_2,a_2)\}$

alors que $\{a.b \mid b \in B = a(a_1,a_1), a(a_2,a_2)\}$

Ici apparait bien la raison de l'inégalité : dans la deuxième expression, le même $b_{\theta(j)}$ est substitué à toutes les occurrences de $x_{\theta(j)}$; dans la première, un élément quelconque de $B_{\theta(j)}$ est substitué à chaque occurrence.

Si A est linéaire, θ est linéaire donc injective. On peut établir une bijection entre $[m]$ et $Im(\theta)$ et les deux expressions sont les mêmes à une permutation d'indices près.///

I-1-2-2 Equivalences fondamentales :

Rappelons que l'étude de transformations remarquables de forêts est un but essentiel de notre travail. Plus précisément, à un procédé simple P de transformation (bimorphisme, transducteur d'états finis) nous associons la transformation, c'est à dire la relation, notée $\hat{P}$, constituée des couples (t,u) où u est un transformé de t par P. Seuls nous intéressent en fin de compte les arbres (ou les uples d'arbres) sans variables, c'est à dire les éléments de $T(\Sigma)_o$ et $T(\Delta)_o$.

Ainsi une forêt F de $T(\Sigma)_o$ a-t-elle pour image par P

I-1-2-20 $\quad P(F) = \hat{P}(F) = \quad u \in T(\Delta)_o \; (t,u) \in \hat{P}$.

Mais à un bimorphisme ou un transducteur P 'de Σ dans Δ'on peut plus généralement associer une partie P de $T(\Sigma)xT(\Delta)$ constituée des couples (t,u) tels que u soit transformé de t et où t est un élément de $T(\Sigma)$ (et non plus de $T(\Sigma)_o$ comme pour $\hat{P}$) et u un élément de $T(\Delta)$ (et non plus de $T(\Delta)_o$).

Il se trouve que la donnée de P- et non celle de $\hat{P}$- permet de 'retrouver' immédiatement le procédé P. De ce fait, même si c'est finalement $\hat{P}$ qui nous intéresse, l'utilisation de P sera systématique dans la suite. C'est pourquoi nous donnons maintenant des définitions précises d'équivalences concernant les éléments 'avec variables'.

I-1-2-2-1. <u>Transformateurs et transformations.</u>

I) Un transformateur (de M dans N) est la donnée d'un algorithme permettant d'associer à tout élément de M une partie de N. Dans le cas où $M=T(\Sigma)$ et $N=T(\Delta)$ nous parlerons de transformateur 'de Σ dans Δ' pour ' de $T(\Sigma)$ dans $T(\Delta)$'.
Si u est transformé de t par P, nous notons $t \mid \frac{*}{P} u$.

II) M et N étant deux magmoïdes, à un transformateur P de M dans N on associe :

$\check{P} = \{(t,u) \mid t \in M,\ u \in N \text{ et } t \mid \frac{*}{P} u\}$

$\hat{P} = \{(t,u) \mid t \in M_o,\ u \in N_o \text{ et } t \mid \frac{*}{P} u\}$

III) Soit $R \subset M \times N$. Nous poserons $R_{|o} = R \cap M_o \times N_o$ (où M_o est l'ensemble des éléments de degré inférieur nul du magmoïde M). On a évidemment :

$\check{P}_{|o} = \hat{P}$

IV) On définit de façon évidente entre les transformateurs deux relations d'équivalences par :

$P \hat{=} Q \Leftrightarrow \hat{P} = \hat{Q}$

$P \check{=} Q \Leftrightarrow \check{P} = \check{Q}$

V) <u>Remarque</u> : Les transformations apparaissent donc comme des classes d'équivalences de transformateurs. Pour une sous-classe donnée de transformateurs, dire que P 'permet de retrouver P'' (comme nous le disons en introduction de I-1-2-2) signifie que chaque classe d'équivalence contient un seul transformateur du type considéré.

Par la suite, les bimorphismes, les substitutions, les transducteurs seront des exemples de classes de transformateurs, pour lesquels chaque classe d'équivalence pour $\check{=}$ contiendra un seul transformateur, sans qu'il en soit de même pour l'équivalence $\hat{=}$ (qui est évidemment beaucoup plus grossière que $\check{=}$)///

Nous considérerons fréquemment des relations de $T_k(\Sigma) \times T_{k'}(\Delta)$ dans lesquelles nous "selectionnerons" certaines composantes. Des relations seront alors équivalentes ssi elles sont égales sur les composantes. Nous développons dans la section qui suit cette idée. On pourra se contenter en première lecture de la conclusion de I-1-2-2-2.

I-1-2-2-2. Soit $v \in N^+$, soit $k \geq v$ avec $k \in N$. Nous posons

I) $\sigma^p_{vk} = (1_v \otimes 0_{k-v})^{\otimes p}$

Nous avons donc $\sigma^p_{vk} \in \Theta^{pv}_{pk}$. Rappelons que 1_v est l'application identique sur $[v]$, que 0_{k-v} est l'application de $\emptyset$ dans $[k-v]$.

Remarquons que les σ^p_{vk} sont des fonctions de décalage particulières (A D) et que $\sigma_{1k} = \pi^1_k$

II) Posons $\sigma^v_k = \bigcup_{p\in N} \sigma^p_{vk}$

Soit maintenant t appartenant à un magmoïde (dont on peut identifier une partie des torsions à σ_{vk}). On a $\sigma^v_k.t = \{\sigma^p_{vk}.t \mid p\in N\}$ mais cette composition est définie pour un p au plus. Par la suite, nous noterons indifféremment $\sigma^v_k.t$ ou $\sigma^p_{vk}.t$. La même remarque vaut pour $t.\sigma^v_k$ et $t.\sigma^p_{vk}$///

σ^v_k peut être considéré de plusieurs façons comme un opérateur. Explicitons son effet.

III) Soit $t = (t_1,..,t_{kp}) \epsilon T_k(\Sigma)^p$. On a

$\sigma^v_k.t = \sigma^p_{vk}.t = (t_1,..t_v,t_{k+1},..t_{k+v},..t_{ki+1},..t_{ki+v},..t_{k(p-1)+v})$

Autrement dit, quand σ^v_k 'opère à gauche' sur un élément t de $T_k(\Sigma)$ il lui associe l'élément de $T_v(\Sigma)$ obtenu en sélectionnant dans chaque fibre supérieure de t les v premières de ses k composantes (en identifiant $T_k(\Sigma)$ à une partie de $T(\Sigma)$) (voir I-1-1, I-1-1-0-2).

IV) Soit $\theta \epsilon (v\Theta)^p_q$ (voir I-1-1-2-6,7). On sait (I-1-1) qu'on peut l'écrire $\langle x_{\theta(1)},..,x_{\theta(pv)}\rangle$. On a alors

$\theta.\sigma^v_k = \theta.\sigma_{vk}{}^q = \langle x_{\theta'(1)},..,x_{\theta'(pv)}\rangle$ où $\theta'(i) = (\theta.\sigma_{vk})(i) = ki+j$ ssi $\theta(i)=vi+j$.

En particulier,

$\langle x_{vi+1},..\ x_{vi+v}\rangle .\sigma^v_k = \langle x_{ki+1},..\ x_{ki+v}\rangle$

Intuitivement, σ^v_k opérant à droite 'identifie chaque v-variable (I-1-1-2) aux v premières composantes d'une k-variable'.

V) L'opérateur σ^v_k est 'compatible avec les opérations du magmoïde'. Plus précisément, on a :

$\sigma^v_k(t_1 \otimes t_2) = (\sigma^v_k.t_1)\otimes(\sigma^v_k.t_2)$

$(t_1\otimes t_2).\sigma^v_k = (t_1.\sigma^v_k)\otimes(t_2.\sigma^v_k)$

$\sigma^v_k(t_1.t_2) = (\sigma^v_k.t_1).t_2 = \sigma^v_k.t_1.t_2$

$(t_1.t_2)\sigma^v_k = t_1(t_2.\sigma^v_k)$.

Ceci est évident du fait que σ^v_k est un ensemble de torsions et d'après les axiomes des magmoïdes.

VI) Considérons $T_k^v(\Sigma) = \{t \in T_k(\Sigma) \mid \exists \hat{u} \in \tilde{T}(\Sigma), \exists \theta \in \Theta\sigma_k^v$, tels que $\sigma_k^v.t = \hat{u}.\theta\}$

Remarquons que $T_k^v(\Sigma)$ **n'est pas** un sous -magmoïde de $T_k(\Sigma)$ (il ne contient par exemple pas les identités). Mais $T_k^v(\Sigma)$ est clos par tensoriel et composition, c'est à dire :

Propriété : Si t et $t' \in T_k^v(\Sigma)$, $t \otimes t' \in T_k^v(\Sigma)$ et $t.t' \in T_k^v(\Sigma)$ si il est défini.

Preuve : Il existe $\hat{u}$ et $\hat{u}' \in \tilde{T}(\Sigma)$, ζ et $\zeta' \in \Theta$ tels que

$\sigma_k^v.t = \hat{u}.\zeta.\sigma_k^v$ et $\sigma_k^v.t' = \hat{u}'.\zeta'\sigma_k^v$. On a alors (d'après v)

a) - $\sigma_k^v.(t \otimes t') = (\sigma_k^v.t) \otimes (\sigma_k^v.t') = (\hat{u}.\zeta.\sigma_k^v) \otimes (\hat{u}'.\zeta'.\sigma_k^v) = (\hat{u}.\zeta \otimes \hat{u}'.\zeta')\sigma_k^v$

d'où $t \otimes t' \in T_k^v(\Sigma)$

b) - $\sigma_k^v(t.t') = (\sigma_k^v.t).t' = \hat{u}.\zeta.\sigma_k^v.t' = \hat{u}.\zeta.\hat{u}'.\zeta'.\sigma_k^v$ d'où $t.t' \in T_k^v(\Sigma)$ (si les conditions de degré sont satisfaites pour qu'il soit défini). CQFD

VII) Posons $\overset{v}{M}(\Sigma) = {}_{k \geq v} T_k^v(\Sigma)$. Fibrons $M^v(\Sigma)$ par $M^v(\Sigma)_q^p = \bigcup_{k \geq v} T_k^v(\Sigma)_q^p$

Attention, $M^v(\Sigma)$ **n'est pas** un magmoïde : la composition de $t \in (T_k^v)_q$ avec $u \in (T_{k'}^v)^q$ n'est par exemple pas définie si $k \neq k'$.

Notation : Σ étant fixé, nous le sous entendrons si il n'y a pas d'ambiguité possible. Nous définissons sur M^v une relation binaire $\underset{v}{\vee}$ par :

Définition : Soit $t \in T_k^v$ et $t' \in T_{k'}^v$. Alors $t \underset{v}{\vee} t'$ ssi

- $\exists p$ et q tq t et $t' \in M^v(\Sigma)_q^p$
- $\exists u$ tel que $\sigma_k^v.t = u.\sigma_k^v$ et $\sigma_{k'}^v.t' = u.\sigma_{k'}^v$

VIII) Propriétés de la relation $\underset{v}{\vee}$ sur $M^v(\Sigma)$: c'est une équivalence.

a) Remarquons d'abord que, si $t \in T_k^v$, il existe **un seul** $u = \hat{u}.\zeta$ tel que $\sigma_k^v.t = \hat{u}.\zeta.\sigma_k^v$

En effet, soit $\sigma_k^v.t = \hat{u}_1.\zeta_1.\sigma_k^v = \hat{u}_2.\zeta_2.\sigma_k^v$. D'après l'unicité de la décomposition canonique dant $T(\Sigma)$ il vient $\hat{u}_1 = \hat{u}_2$ et $\zeta_1.\sigma_k^v = \zeta_2.\sigma_k^v$ d'où $\zeta_1 = \zeta_2$ puisque σ_k^v est injective.

Remarquons également que $T_v^v(\Sigma) = T_v(\Sigma)$ car $\sigma_v^v = 1_v$

b) **Propriété : $\underset{v}{\vee}$ est une relation d'équivalence sur $M^v(\Sigma)$ et $T_v(\Sigma)$ est un système de représentants canoniques.**

En effet, la réflexivité et la symétrie de $\underset{v}{\vee}$ sont évidentes.

Soit d'autre part $t \underset{v}{\vee} t'$ et $t' \underset{v}{\vee} t''$. Il existe p et q tels que $t, t', t'' \in M^v(\Sigma)_q^p$ et u et w tels que $\sigma_k^v.t = u.\sigma_k^v, \sigma_{k'}^v, t' = u.\sigma_{k'}^v$

$\sigma^v_{k'}.t' = w.\sigma^v_{k'}$ et $\sigma^v_{k''}.t'' = w.\sigma^v_{k''}$. D'après a), u = w par unicité d'où $\sigma^v_k.t = u.\sigma^v_k$ et $\sigma^v_{k''}.t'' = u.\sigma^v_{k''}$ donc $t \underset{v}{\curlyvee} t''$. La relation est bien une équivalence.

Soit $t \in M^v$. Il existe k tel que $\sigma^v_k.t$ de la forme $u.\sigma^v_k$. Comme $\sigma^v_v.u = u.\sigma^v_v$; $t \underset{v}{\curlyvee} u$. Comme u est unique, chaque classe de M^v est bien caractérisée par le seul élément u de $T_v(\Sigma)$ qu'elle contient, d'où le fait que $T_v(\Sigma)$ est système de représentants de l'équivalence.

CQFD

IX) L'équivalence $\underset{v}{\curlyvee}$ est compatible avec la composition et le tensoriel.

Précisons la définition de la composition et du tensoriel dans M^v:

Soit $t \in M^{vp}_{,q}$ et $t' \in M^{vp'}_{q'}$. Il existe k et k' tels que $t \in T_k(\Sigma)^p_q$ et $t' \in T_{k'}(\Sigma)^{p'}_{q'}$. $t \otimes t'$ est alors défini ssi k = k' et alors $t \otimes t'$ est induit par le tensoriel de $T_k(\Sigma)$. De même, si p' = q, t.t' est défini ssi k = k' et alors induit par la composition de $T_k(\Sigma)$. Autrement dit, même si les conditions habituelles de fibres sont satisfaites, les opérations dans M^v ne sont définies qu'entre éléments de même dilatation. Pour cette raison, nous avons déjà remarqué que M^v n'est pas un magmoïde.

Propriété : $t \underset{v}{\curlyvee} t'$ et $w \underset{v}{\curlyvee} w' \Rightarrow t \otimes w \underset{v}{\curlyvee} t' \otimes w'$ si les 2 membres sont définis.
$t \underset{v}{\curlyvee} t'$ et $w \underset{v}{\curlyvee} w' \Rightarrow t.w \underset{v}{\curlyvee} t'.w'$ si les 2 membres sont définis.

En effet on a

$\sigma^v_k.t = u.\sigma^v_k, \sigma^v_{k'}.t' = u.\sigma^v_{k'}, \sigma^v_{k''}.w = u'\sigma^v_{k''}$ et $\sigma^v_{k'''}w' = u'\sigma^v_{k'''}$.

Pour que les tensoriels ou composés soient définis, il faut k = k" et k' = k"'.

On a alors d'après V)

$$E \left\{ \begin{array}{l} \sigma^v_k.(t \otimes w) = (\sigma^v_k.t) \otimes (\sigma^v_k.w) = u.\sigma^v_k \otimes u'.\sigma^v_k = (u \otimes u').\sigma^v_k \\ \\ \text{et de même } \sigma^v_{k'}.(t \otimes w') = (u \otimes u').\sigma^v_{k'}. \end{array} \right.$$

On prouverait de même que, si ils sont définis,

E' $\sigma^v_k.(t.w) = (u.u')\sigma^v_k$ et $\sigma^v_{k'}(t'w') = (u.u')\sigma^v_{k'}$.

La propriété est ainsi démontrée, mais les égalités ci-dessus montrent plus. Nous avons en effet vu en VIII) que, du point de vue ensembliste, il existe une bijection v du quotient $M^v/\underset{v}{\curlyvee}$ sur $T_v(\Sigma)$ qui, à toute classe associe son représentant canonique qui est le seul élément de $T_v(\Sigma)$ qu'elle contienne.

La propriété IX) permet alors de munir $M^v/\underset{v}{\curlyvee}$ du tensoriel et de la composition, les propriétés E et E' prouvant alors que v est un isomorphisme de magmoïdes.

<u>Conclusion de I-1-2-2-2</u> : Nous avons introduit, pour un alphabet Σ donné, une structure $M^v(\Sigma)$ qui, bien que munie partiellement d'un tensoriel et d'une composition, n'est pas un magmoïde. Nous avons défini sur M^v une équivalence $\underset{v}{\curlyvee}$. Chaque classe c contient un et un seul élément $v(c) = u$ de $T_v(\Sigma)$ et, intuitivement, tous les autres éléments sont ceux tels que, avec des dilatations différentes k, quand on en selectionne les v-premières composantes de chaque fibre, l'élément obtenu a une torsion qui est une extension à $k\theta$, comme définie en IV), de celle de u, obtenue en 'dilatant' chaque v-variable. Les opérations de M^v et l'équivalence sont compatibles, ce qui permet de munir $M^v/\underset{v}{\curlyvee}$ d'une composition et d'un tensoriel. On obtient finalement un magmoïde isomorphe à $T_v(\Sigma)$. En identifiant à l'isomorphisme v près, travailler dans $M^v/\underset{v}{\curlyvee}$ revient à travailler dans $T_v(\Sigma)$, un élément de M^v étant éventuellement 'contracté' en un élément de $T_v(\Sigma)$ (le représentant de sa classe).///

I-1-2-2-3 La congruence $\underset{v}{\curlyvee}$ étudiée ci-dessus s'étend facilement au produit de magmoïdes.

Soit v et $v' \in N^+$, on pose $T^{v,v'}_{k,k'}(\Sigma,D) = T^v_k(\Sigma) \times T^{v'}_{k'}(D)$.

(le produit s'entendant au sens des magmoïdes produits (I-1-2-1)).

On pose $M^{v,v'}(\Sigma,D) = \cup\, T^{v,v'}_{k,k'}(\Sigma,D)$, sur lequel on définit l'équivalence $\underset{v,v'}{\curlyvee}$ produit des équivalences $\underset{v}{\curlyvee}$ et $\underset{v'}{\curlyvee}$. On obtient évidemment un magmoïde $M^{v,v'}/\underset{v,v'}{\curlyvee}$ isomorphe à $T_v(\Sigma) \times T_{v'}(D)$, toutes ces constructions étant classique en algèbre.///

L'intérêt de l'équivalence $\underset{v}{\curlyvee}$, étudiée ci-dessus, pour les transformations est mis en évidence ci-après.

I-1-2-2-4 Soit R et S deux parties de M^v. On dira évidemment que :

I) <u>Définition</u> = $R \underset{v}{\curlyvee} S \Leftrightarrow \overset{\smile}{R}^v = \overset{\smile}{S}^v$

où t^v désigne la classe de t pour $\underset{v}{\curlyvee}$ et $\overset{\smile}{R}^v = \{\overset{\smile}{t}^v | t \in R\}$

Nous intéressant aux seuls 'arbres sans variables', nous poserons :

II) $R \hat{v} S \quad R \cap (M^v)_o \underset{v}{\curlyvee} S \cap (M^v)_o$

Il est évident que :

III) $R \underset{v}{\curlyvee} S \Rightarrow R \hat{v} S$

Dans la pratique, nous serons souvent dans la situation suivante :

IV) Soit $R \subset T_r(\Sigma) \times T_{r'}(D)$ et $S \subset T_s(\Sigma) \times T_{s'}(D)$, soit v et $v' \in N^+$. (R et S sont par exemple associés à des transformateurs).

Pour étudier si $R \widehat{v,v'} S$, on en sera amené à considérer $R \underset{v,v'}{\curlyvee} S$ (la définition de ces équivalences étant évidente).

I-1-2-3 Les forêts reconnaissables :

La notion de forêt reconnaissable est la plus classique qui soit dans la théorie. Elle a été abondamment étudiée(BRAINERD [31], PAIR et QUERE [77], ROUNDS [81], THATCHER [88] ....) et est synthétisée dans [A]. Nous en rappelons ici le strict nécessaire, puis donnons quelques compléments.

I-1-2-3-1 Rappels : En théorie des langages, une partie d'un monoïde libre est reconnaissable ssi elle est reconnue par un automate d'états finis. La notion de reconnaissabilité s'étend aux monoïdes non libres par "congruences d'indice fini". Pour les forêts, la reconnaissabilité a été classiquement introduite à l'aide de reconnaisseurs d'arbres d'états finis, généralisant les automates de langages de mots. Nous rappelons ce point de vue ci-après. Le point de vue des congruences finies, abordé dans [A D], ne sera pas utile ici (nous nous plaçons dans des magmoïdes libres)

I) Définition : Un automate d'états finis de forêts M est la donnée d'un quadruplet $M = (Q,F,\Sigma,R)$ où

- Q est un ensemble fini d'états
- $F \subset Q$ est l'ensemble des états distingués
- Σ est un alphabet gradué fini
- R est un ensemble fini de règles.

Posons $Q[\Sigma]$ l'alphabet gradué défini par
$Q[\Sigma] = \{q[a](x_1,.. ,x_n) | q\epsilon Q \text{ et } a(x_1,..,x_n)\epsilon \Sigma_n\}$
Si $t\epsilon T(Q[\Sigma])^1$ est de la forme $q[a](t_1,..,t_n)$, nous le noterons encore $q[a(t_1,..t_n)]$ ou $q[t']$ avec $t' = a(t_1,..,t_n)$.
Deux points de vue duaux pour la 'reconnaissance' sont possibles

Ia) Reconnaisseur ascendant : les états distingués sont appelés finaux, les règles, dites ascendantes, sont de la forme :

$a(q_{i_1}[x_1],.. q_{i_n}[x_n]) \rightarrow q[a(x_1,..x_n)]$ où $a\epsilon\Sigma_n$ et $q,q_{i_1}...q_{i_n}\epsilon Q$.(ou de la forme $a\rightarrow q[a]$ si $a\epsilon\Sigma_o$)

Soit t et $u \epsilon T(Q[\Sigma])^1_o$. On pose
$t \mid_{\overline{M}} u$ ssi il existe des décompositions :

$$t = t_o.a(q_{i_1}[t_1],...q_{i_n}[t_n]),\ u = t_o.q[a(t_1,..,t_n)]$$

$$\text{et } (a(q_{i_1}[x_1],..,q_{i_n}[x_n]) \rightarrow q[a(x_1,..x_n)])\epsilon R$$

$\mid\overset{*}{\overline{M}}$ désigne la cloture transitive de $\mid_{\overline{M}}$. On dit que $t\epsilon T(\Sigma)^1_o$ est reconnu par M ssi $\exists q \in F$ tel que $t \mid\frac{*}{M} q[t]$. On note F(M) la forêt reconnue par M (c'est à dire l'ensemble des arbres de $T(\Sigma)_o^1$ reconnus par M).

Ib) Reconnaisseur descendant :

- les états distingués sont appelés initiaux
- les régles, dites descendantes, sont de la forme

$q[a(x_1,..,x_n)] \to a(q_{i_1}[x_1],..q_{i_n}[x_n])$

(avec $q[a] \to a$ si $a \in \Sigma_o$)

Soit t et u $\in T(Q[\Sigma])_o^1$. On pose

$t \mid\frac{}{M} u$ ssi il existe des décompositions :

$t = t_o q[a(t_1,..t_n)], u = t_o a(q_{i_1}[t_1],..,q_{i_n}[t_n])$

et $(q[a(x_1,..x_n)] \to a(q_{i_1}[x_1],..q_{i_1}[x_n])) \in R$

$\mid\frac{*}{M}$ est la cloture transitive de $\mid\frac{}{M}$. On dit que $t \in T(\Sigma)_o^1$ est reconnu par M ssi $\exists q \in F$ tel que $q[t] \mid\frac{*}{M} t$. On note F(M) la forêt reconnue par M.

II) Définition : Une forêt $F \subset T(\Sigma)_o^1$ est **reconnaissable** ssi il existe un automate d'états fini ascendant M tel que F(M) = F.

Les propriétés suivantes sont classiques :

III) Propriétés élémentaires :

a) on peut toujours supposer M déterministe (c'est à dire tel qu'il n'existe pas deux règles de même membre gauche)

b) on ne change pas la définition II) en remplaçant 'ascendant' par 'descendant' (mais on ne peut plus toujours supposer l'automate déterministe).

c) la classe Rec des forêts reconnaissables est close par union, complément (donc intersection), 1-homomorphisme inverse, 1-homomorphisme linéaire [A D]. (Voir en (I-1-3) les définitions concernant les morphismes).///

IV) Propriété fondamentale du feuillage :

a) Définition : (rappel). Soit $t \in T(\Sigma)_o^1$ (t est 'sansvariable'). On définit le **feuillage** $\Phi(t)$ de l'arbre t par l'application Φ(de $T(\Sigma)_o^1$ dans le monoïde libre engendré par Σ_o) définit par :

- si $t \in \Sigma_o, \Phi(t) = t$
- si $t = t_o(t_1,..,t_n), \Phi(t) = \Phi(t_1)....\Phi(t_n)$

$\Phi(t)$ est donc le mot de Σ_o^* obtenu en concaténant de gauche à droite les feuilles de t.

A une forêt $F \subset T(\Sigma)^1_o$, on associe évidemment son feuillage $\Phi(F)$ qui est le langage de Σ_o^* défini par :

$$\Phi(F) = \{\Phi(t) | t \in F\}$$

b) définition : Nous étudirons dans le détail les morphismes dans (I-1-3). Rappelons [A D] qu'un morphisme de $T(\Sigma)$ dans un magmoïde M est défini par sa donnée sur Σ($T(\Sigma)$ étant libre). Un 1-morphisme ε de Σ dans D (c'est à dire de $T(\Sigma)$ dans $T(D)$) est un **démarquage propre** ssi

$\forall a \in \Sigma, \exists \alpha \in D$ tel que $\varepsilon(a(x_1,..x_n)) = \alpha(x_1,..x_n)$.
(Autrement dit, ε ne modifie que les labels).

c) Définition : Comme on définit les langages locaux, on définit comme suit les forêts locales.

Soit Σ un alphabet gradué, on se donne des 'règles de successions' constituées

- d'une partie I de Σ (alphabet initial)
- d'une partie F de Σ_o(alphabet final)
- pour tout $n > o$ tel que $\Sigma_n \neq \emptyset$, d'une application S de Σ_n dans $P(\Sigma^n)$.

Au triplet (I,S,F) on associe la forêt L de $T(\Sigma)^1_o$ définie par : "t appartenant à L ssi pour tout $a \in \Sigma_n$, pour tout noeud de t de label a, il existe $(a_1,..,a_n) \in S(a)$ tel que, pour tout $i \in [n]$, a_i soit le $i^{\text{ème}}$ successeur immédiat du noeud considéré dans t(I-1-1-1-7), et ssi le sommet de t appartient à I et le feuillage appartient à F^*". En bref, L est l'ensemble des arbres satisfaisant aux conditions de successions définies par (I,S,F).

Une forêt est locale ssi elle est définie comme ci-dessus par des règles de successions.

Nous pouvons maintenant énoncer ce qui fut la motivation la plus puissante à l'étude des forêts reconnaissables.

d) propriétés fondamentales :

- Il y a identité entre la classe des langages algébriques sans mot vide et la classe des feuillages des forêts reconnaissables.
- Pour tout grammaire algébrique, l'ensemble des arbres de dérivation est une forêt locale.
- Toute forêt reconnaissable est l'image par un démarquage propre d'une forêt locale.///

I-1-2-3-2 Les forêts hyperlocales : Afin de faciliter certaines démonstrations, nous introduisons ici une notion plus forte que celle de forêt locale : la notion de forêt hyperlocale. Certaines preuves sur les forêts reconnaissables se raméneront à des preuves sur les forêts hyperlocales, plus faciles à manier encore que les forêts locales.

Intuitivement, les forêts hyperlocales sont les forêts locales où "le $i^{\text{ème}}$ successeur est indépendant des autres". Donnons une définition formelle.

I) Définition : Une forêt est **hyperlocale** ssi elle est une forêt locale associée à des règles de succession (I, S, F) où, $\forall n$, $\forall a \in \Sigma_n$, $S(a)$ de la forme $S_1(a) \times .. \times S_n(a)$ où $S_i(a) \subset \Sigma$.///

Il existe évidemment des forêts locales qui ne sont pas hyperlocales, par exemple :

Soit $L = \{b(a,a), b(b,b)\}$ où $\Sigma_o = \{a,b\}$ et $\Sigma_2 = \{b\}$

L est locale ($I = \{b(x_1,x_2)\}$, $S(b) = \{(a,a),(b,b)\}$, $F = \Sigma_o$)

mais n'est pas hyperlocale (pour savoir dans un arbre de L si b peut être 1er successeur de $b(x_1,x_2)$, il faut regarder le deuxième successeur.///

Dans une forêt hyperlocale, il suffit donc de 'regarder' l'antécédant immédiat d'une occurrence pour connaitre les labels permis. Dans une forêt locale, il faut aussi regarder les autres successeurs immédiats de l'antécédant considéré.///

II) Propriété fondamentale : **toute forêt locale est l'image d'une forêt hyperlocale par un démarquage propre.**

Preuve : Soit une forêt locale L définie par les règles de succession (I, S, J) sur un alphabet Σ. Explicitons S pour tout $a \in \Sigma_n$ en numérotant $s_1(a), .., s_{p_a}(a)$ les éléments (on a donc $s_i(a) \in \Sigma^n$) de S(a).

Nous définissons un nouvel alphabet Δ par :

$\Delta_o = \Sigma_o$ et, pour $n \geq 1$,

$\Delta_n = \{(a, s_i(a))(x_1 .. x_n) \mid s_i(a) \in S(a) \text{ et } a \in \Sigma_n\}$

Nous définissons un nouveau triplet de régles de succession (I', S', J') par :

- $I' = \{(a, s_i(a)) \mid a \in I\}$
- $J' = J$

$$- \forall\ a' = (a,s_i(a)) \in \Delta_n, S'(a') = S_1(a')x..xS_n(a')$$

où $\quad S_j(a') = \{(b,s_k(b)) | b = s_i^j(a) \text{ et } s_k(b) \in S(b)\}$

($s_i^j(a)$ désigne le $j^{\text{ème}}$ composante de la suite $s_i(a)$)

Enfin, nous considérons le démarquage propre δ défini par :

$\delta(a,s_i(a))(x_1,..x_n) = a(x_1,..,x_n)$.

Le lecteur établira alors facilement que l'image par δ de la forêt hyperlocale définie par (I', S', J') et L.///

C.Q.F.D.

III) Corollaire : **toute forêt reconnaissable est l'image par un démarquage propre d'une forêt hyperlocale.**

En effet, soit F une forêt reconnaissable. D'après (1-d)) il existe un démarquage propre Σ_1 et une forêt locale L tels que $\Sigma_1(L) = F$. D'après (2-b)), il existe un démarquage propre Σ_2 et une forêt hyperlocale H tels que $L = \Sigma_2(H)$. Comme il est évident que le composé de deux démarquages propres est un démarquage propre, le résultat est établi par $F = \Sigma_1 o \Sigma_2(H)$///

I-1-2-3-3 Forêts initiales

A une forêt $F \subset T(\Sigma)$, nous associons la **forêt initiale** $I(F) \subset \tilde{T}(\Sigma)$ constituée des arbres initiaux des éléments de F, c'est à dire $I(F) = \{\hat{t} \in \tilde{T}(\Sigma) | \exists t \in F,\ \hat{t} \leq_I t\}$

Remarquons que si $F \subset T(\Sigma)_o$, $I(F) \supset F$.///

I-1-2-3-4 Reconnaissabilité dans $T(\Sigma)_n^1$

Soit une forêt de $T(\Sigma)_n^1$. Si on considère $x_1,...x_n$ comme des lettres de degré inférieur o, on définit immédiatement la reconnaissabilité. Cette généralisation est considérée dans (A) et parfois dans ce travail.

On montre facilement (en composant les reconnaisseurs) que si F est reconnaissable dans $T(\Sigma)_n^1$ et $(F_1,..F_n)$ aussi, alors $F(F_1,..F_n)$ est reconnaissable (on substitue F_i à x_i). De même, le sous magmoïde M engendré par $[F_1,..F_n]$ est alors tel que tout M_p^1 est reconnaissable.///

Nous étudions dans la suite les bimorphismes de magmoïde (définis en I-1-4) Si on rattache ceux-ci à des notions déjà existantes, on peut les présenter comme une généralisation aux forêts des transductions rationnelles de langages (NIVAT [72]) ou comme une représentation des transducteurs de forêts.

Dans les deux cas, les forêts reconnaissables y apparaissent, Mais les propriétés essentielles des bimorphismes ne sont dues qu'aux propriétés énumérées en (1-III) des forêts reconnaissables. Comme il peut être intéressant de généraliser (notamment de considérer des uples-d'arbres et non plus des arbres) dans le cadre des magmoïdes, nous définissons maintenant les classes raisonnables de forêts, qui auront grosso-modo les mêmes propriétés que les forêts reconnaissables vis à vis des bimorphismes.

I-1-2-4 Familles raisonnables de forêts

I-1-2-4-1 Définition : Rappelons qu'une forêt est une partie d'un magmoïde.

Une famille R de forêts est dite raisonnable ssi

a) $\forall F \in R$, il existe un magmoïde M tel que $F \subset M_o$ (toutes les forêts sont sans feuilles).

b) La famille R est close par union, intersection, morphisme inverse et démarquage.

c) Soit F une famille de forêts, on note $F^{\otimes}$ sa 'clôture par tensoriel' c'est à dire que $F^{\otimes} = \{F_1 \otimes .. \otimes F_n \mid n \in N \text{ et } \forall i \in (n),\ F_i \in F\}$. On s'impose alors que la famille R soit close par intersection avec $\mathrm{Rec}^{\otimes}$.

d) $\forall F \in F$, il existe un nombre fini de forêts reconnaissables $F_1, .. F_n$ telles que pour tout i et $p \in N$, $\exists j$ tq $\pi_p^i F = F_j$ ("les projections des forêts raisonnables appartiennent à un ensemble fini de forêts reconnaissables"), et $\forall_n$, $F \cap T(\Sigma)_o^n = \pi_n^1(F) \otimes .. \otimes \pi_n^n(F)$.

Une forêt est dite raisonnable si elle appartient à une famille raisonnable.

I-1-2-4-2 Exemple de familles raisonnables :

a) Rec est évidemment raisonnable.

b) le lecteur vérifiera facilement que les familles Rec^n, $\mathrm{Rec}^{\otimes}$ sont raisonnables, sachant que Rec^n est clos par morphisme inverse (voir [A]).

c) Définissons la famille Rec^{rec} comme suit :

$F \in \mathrm{Rec}^{rec}$ ssi il existe un nombre fini de reconnaisseurs $M_1 ... M_p$; ascendants d'ensembles d'états finaux respectifs $Q_1, .., Q_p$, reconnaissant respectivement les forêts $F_1, .. F_p$, et ssi il existe un langage reconnaissable L sur l'alphabet $Q_1 \cup ... \cup Q_p$ tels que :

$$F = \{F_{i_1} \otimes .. \otimes F_{i_n} \mid \exists q_{i_1}, .., q_{i_n} \text{ tels que } q_{i_j} \in Q_{i_j} \text{ et } q_{i_1} ... q_{i_n} \in L\}$$

On peut alors facilement prouver que Rec^{rec} est raisonnable. Intuitivement, la famille Rec^{rec} est celle des forêts bi-reconnaissables en ce sens que, pour chaque fibre, la projection est reconnaissable et que L assure un controle reconnaissable sur les fibres.///

I - 1 -3 - LES MORPHISMES

Les morphismes de magmoïdes sont formellement étudiés dans[A D]. Nous faisons un bref rappel et donnons une suite de définitions nouvelles classant précisément les morphismes.

I-1-3-1 Rappels : Un morphisme d'un magmoïde M dans un magmoïde N est une application de M dans N qui est compatible avec la composition et le tensoriel. Un morphisme respecte des contraintes de degrès : il conserve ou 'dilate' les degrès ; le morphisme est k-dilatant si il envoie M_q^p dans N_{qk}^{pk}. Si M et N sont projetables, il met alors en bijection Θ avec $k\Theta$ (I-1-1-2) (il se confond sur Θ avec l'application k définie en (I-1-1-2)).

$T(\Sigma)$ étant libre, un **morphisme** de $T(\Sigma)$ dans M est défini par sa donnée sur Σ. Nous parlerons parfois de **morphisme de Σ dans D** pour morphisme de $T(\Sigma)$ dans $T(D)$. Notons $\phi_{|A}$ la restriction de ϕ à A.

I-1-3-2 Définitions : Nous définissons les principaux types de morphismes utilisés dans la suite. Nous commentons ces définitions .

Nous considérons des morphismes de $T(\Sigma)$ dans $T(D)$ (encore que les définitions s'étendent de façon évidente à des morphismes de $(M)T$ dans $(N)T$).

I-1-3-2-1 morphismes linéaires : (définition déjà donnée dans A-D)

Un morphisme ϕ de Σ dans D est linéaire ssi, $\forall$ a $\in \Sigma$, $\phi(a) = \bar{t}_a.\theta_a$ avec θ_a linéaire (et $\bar{t}_a \in \tilde{T}(D)$).

Il est facile de prouver qu'il s'en suit que, pour tout $t \in \tilde{T}(\Sigma), \phi(t) = \hat{u}.\theta$ avec $\hat{u} \in \tilde{T}(D)$ et θ linéaire.

I-1-3-2-2 : Morphismes séparés à délai borné :

I) quelques définitions :

a) Soit $t \in T(\Sigma)$. t se décompose en $\bar{t}.\theta$ avec $\bar{t} \in \tilde{T}(\Sigma)$ et $\theta \in \Theta$. t est dit **k-séparé** si θ est k-séparée (I-1-1-2-10).

b) soit ϕ un k-morphisme de $T(\Sigma)$ dans $T_k(D)$. ϕ est dit **k-séparée sur $\bar{t} \in \tilde{T}(\Sigma)$** ssi $\phi(\bar{t})$ est k-séparé.

c) Soit $t \in T(\Sigma)$. On appelle **"profondeur essentielle" de t**, que l'on note $\mathrm{prof}_x(t)$, la longueur maximale des branches joignant dans t une variable au sommet.

Soit $F \subset T(\Sigma)_o$ et $p \in N^+$. ϕ est un k-morphisme **k-séparé à délai p sur F** ssi, pour tout sous-arbre $\tilde{t}$ d'un arbre de F, tel que $\mathrm{prof}_x(\tilde{t}) \geq p$, $\phi(\tilde{t})$ est k-séparé. (On dira k-morphisme séparé en abréviation de k-morphisme k-séparé).

d) ϕ est un k-morphisme **séparé à délai borné sur F** ssi $\exists p$ tel que ϕ est séparé à délai p sur F. Si le délai est 1, on dira simplement 'séparé sur F'. Si $F = \tilde{T}(\Sigma)$, on omettra d'écrire 'sur $\tilde{T}(\Sigma)$'.

II) Comme cette notion est nouvelle et importante, discutons la et illustrons la.

a) Rappelons d'abord, en utilisant les notations de (I-1-1-3-7), que l'image de $t = t' {}_x t''$ par un k-morphisme ϕ est $\phi(t') {}_{[x]_k} \phi(t'')$. Intuitivement, l'image de l'arbre t" substitué à x dans t est un k-uple que l'on substitue dans $\phi(t')$, composante par composante, aux k-composantes de la k-variable $[x]_k$. Autrement dit, d'une certaine façon, t' est transformé 'de k-façons différentes' (les k-composantes de $\phi(t')$) et la substitution dans l'image se fait en parallèle. Dire que ϕ est linéaire revient à dire qu'on ne substitue pas deux mêmes composantes de l'image (simultanément). $\phi(t')$ est un k-uple, dire que ϕ est séparé sur t' signifie qu'il n'existe pas deux composantes de $\phi(t')$ ayant en variables des composantes d'une même variable.
Autrement dit, si ϕ est séparé sur t', on ne fera pas de "substitutions simultanées d'images d'une même branche" dans deux composantes différentes de l'image en appliquant ϕ à t'.t".

b) Illustrons d'un exemple :
Soit ϕ un 2-morphisme défini par :
$\phi(a(x)) = \langle a_1(x_1), a_2(x_2) \rangle$, $\phi(b(x_1,x_2)) = \langle a(x_1,x_2), a_2(x_3) \rangle$ et $\phi(\bar{a}) = \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle$
Alors, quelque soit n, $\phi(a^n(x)) = \langle a_1^n(x_1), a_2^n(x_2) \rangle$ n'est pas 2-séparé (les deux composantes de $\phi(a^n(x))$ contiennent des composantes de la même (unique) 2-variable (x_1, x_2). Par contre, ϕ est séparé sur $b(x_1, x_2)$ (des substitutions simultanées se font en x_1 et x_2, mais dans une même composante de l'image).

ϕ n'est pas à délai borné (sur $\tilde{T}\{a,b,\bar{a}\}$) car n'est pas à délai borné sur $\{a^n(x) \mid n \in N\}$

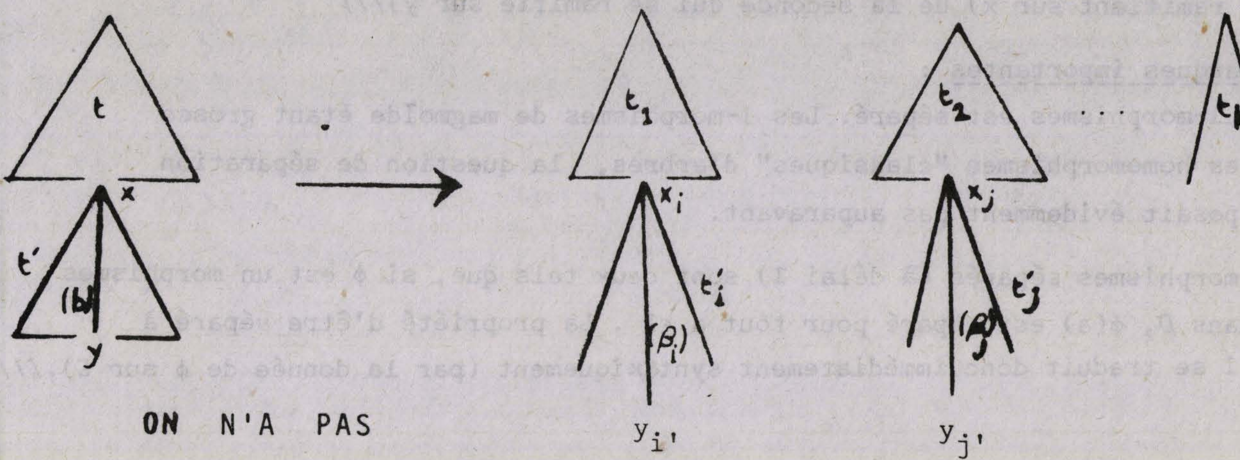
Remarquons qu'être à délai borné est une propriété 'locale' :

il suffit de regarder toutes les occurrences de sous arbres d'une certaine profondeur essentielle apparaissant dans la forêt considérée.///

c) Remarque : Ne pas confondre ϕ séparé sur t et ϕ séparé (à délai p) sur $\{t\}$: dans le premier cas, la séparation ne porte que sur l'image de t, dans le second sur les images de tous les sous arbres de profondeur essentielle p.///

d) Un cas particulier important : les k-morphismes linéaires et séparés à délai borné. Cette classe apparaitra dans la suite naturellement comme essentielle. Sans en discuter ici l'utilité, nous pouvons en donner une idée intuitive simple qu'il faudra garder à l'esprit dans la suite.
Soit ϕ un k-morphisme linéaire, séparé à délai p sur une forêt F. Soit $\bar{t}$ un arbre de F et (b) une sous-branche de longueur p.
Il existe un sous arbre t' de $\bar{t}$ dont (b) est une branche, et $\bar{t}$ se décompose en $t_x t'_y t''$, les extrémités de (b) se substituant à x et y. (voir la figure).
$\phi(\bar{t})$ est un k-uple; écrivons $\phi(t) = \langle u_1,..,u_k\rangle$. Comme ϕ est linéaire, $\phi(t)$ ne contient pas plusieurs occurrences d'une même composante de la k-variable $[x]_k$. La notion de sous arbre étant évidemment conservée par morphisme, les 'images' $(\beta_1),..(\beta_k)$ de la sous branche (b) sont des branches des images $\langle u'_1,..,u'_k\rangle$ de t', qui se substituent respectivement dans $\phi(t)$ à $x_1,..x_k$.
Mais comme ϕ est séparé à délai p, il existe au plus un u'_i contenant des occurrences de composantes de la k-variable $[y]_k$ (image de y par ϕ), donc il existe au plus un i pour lequel (β_i) a une composante de $[y]_k$ en variable. Considérant que deux composantes u'_i et u'_j de $\langle u'_1,..u'_k\rangle$ sont deux images en parallèle de t', on obtient ainsi que dans $\phi(t_x t'_y)$, il existe au plus une branche β_i image de (b), dont les extrémités sont substituées à des composantes de $[x]_k$ et $[y_k]$. Autrement dit, (b) n'est pas transformée en parallèle plusieurs fois sur toute sa longueur.

En résumé, si ϕ est linéaire à délai borné, toute sous branche ne peut être transformée en parallèle que sur une longueur bornée, la séparation de ϕ entrainant à délai la séparation (par ramification) des images .



ON N'A PAS

(qui signifierai que (b) est recopiée sur toute sa longueur en (β_i) et (β_j), mais contredirait la séparation de ϕ)

donc, nécessairement, en un noeud $a(z_1, z_2)$ de (b), les images se sont séparées en se ramifiant, une seule composante de $\phi(a)$ présente dans $\phi(\bar{t})$ contenant des variables antécédantes de y_o.

Exemple :

Soit ϕ le 2-morphisme défini par

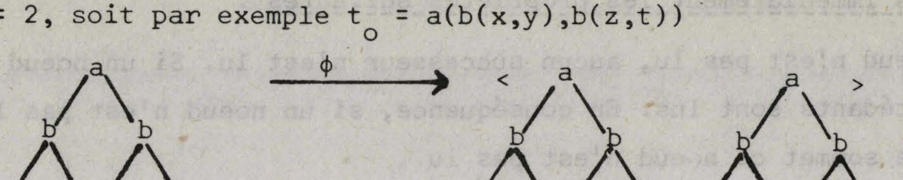
$\phi a(x, y) = \langle a(x_1, y_1), a(x_2, y_2)\rangle$

$\phi b(x, y) = \langle b(x_1, x_2), b(y_1, y_2)\rangle$

Soit F_p la forêt constituée des arbres tels qu'aucune sous-branche ne contient p occurrences successives de noeuds de label a. Alors ϕ -qui est linéaire- est séparé à délai p sur F_p.

Par exemple, si p = 1, F_p est la forêt engendrée par b, et on a bien ϕséparé (à délai 1) sur b.

Si p = 2, soit par exemple $t_o = a(b(x,y),b(z,t))$



$\phi(t)$ est bien séparé. Aucune branche de F_2 de longueur 2 n'est recopiée intégralement en parallèle, car elle contient un b qui assure la séparation par ramification des images (la première composante de $\phi(b(x, y)$ se sépare (en se ramifiant sur x) de la seconde qui se ramifie sur y)///

e) Remarques importantes :

- tout 1-morphismes est séparé. Les 1-morphismes de magmoïde étant grosso modo les homomorphismes "classiques" d'arbres, la question de séparation ne se posait évidemment pas auparavant.

- Les morphismes séparés (à délai 1) sont ceux tels que, si ϕ est un morphismes de Σ dans D, $\phi(a)$ est séparé pour tout $a \in \Sigma$. La propriété d'être séparé à délai 1 se traduit donc immédiatement syntaxiquement (par la donnée de ϕ sur Σ).///

I-1-3-2-3 : Les morphismes complets :

définitions : I) Soit ϕ sur k-morphisme, v un noeud d'un arbre t de $T(\Sigma)$. t s'écrit alors $\hat{t}_o.(t_1, t_2, t_3)$ avec $t_1 \in T(\Sigma)^{\bar{p}_1}$, $t_2 \in T(\Sigma)^1$, $t_3 \in T(\Sigma)^{p_2}$ et v sommet de t_2. Nous dirons que **v est lu par ϕ dans t** ssi

$\tilde{\phi}(\hat{t}_o) = \hat{u}_o.\theta_o$ et $k^{\otimes}(\theta_o) \not\ni p_1 + 1$.

Donnons la signification de cette définition en langage imagé de variables. Dans la décomposition de t, v est substitué à x_{p_1+1}, v est dit lu par ϕ dans t ssi une composante au moins de la k variable, image de x_{p_1+1} par ϕ, figure dans $\phi(\hat{t}_o)$. **(Nous dirons en abrégé que 'x_{p_1+1} figure dans $\phi(t)$')**. Si c'est le cas, l'image de v aura au moins une composante substituée dans $\phi(\hat{t}_o)$ à la composante correspondante de variable. Sinon, l'image de v ne figurera par aucune composante dans $\phi(t)$, ce qui correspond bien respectivement à la notion intuitive d'"être lu" ou "ne pas être lu" par ϕ.

Nous dirons qu'un sous-arbre t' de t **est lu** par ϕ ssi **tous** ses noeuds sont lus par ϕ dans t. Nous dirons qu'un sous arbre t' de t **n'est pas lu** par ϕssi **aucun** noeud de t' n'est lu par ϕ dans t. attention, il se peut que t' ne soit ni 'lu', ni 'pas lu', mais soit **partiellement lu.**

II) Nous avons immédiatement les propriétés suivantes :

P_1 - si un noeud n'est pas lu, aucun successeur n'est lu. Si un noeud est lu, tous ses antécédants sont lus. En conséquence, si un noeud n'est pas lu, tout sous arbre de sommet ce noeud n'est pas lu.

P_2 - Soit $v = t_{x_i} u$ avec u non lu par ϕ dans v (c'est à dire x_i 'ne figurant pas' dans $\phi(t)$). Alors, $\phi(t_{x_i} u) = \phi(t)\ (1_{k(i-1)} \otimes 0_{kq_u} \otimes 1_{k(q_t-i)})$ où ϕ est un k-morphisme, $t \in T(\Sigma)_{q_t}$ et $u \in T(\Sigma)_{q_u}$, ce qui ne veut rien dire d'autre que $\phi(t_{x_i} u) = \phi(t)$ à des réindiçages près. Plus intéressant est le cas particulier suivant :

P_3 - Si $t = t(x) \in T(\Sigma)_1$, si x n'est pas lu par ϕ, alors,
$\forall u \in T(\Sigma)_o$, $\phi(t.u) \otimes O_k = \phi(t)$

Donc, $\phi(t.u)$ est alors indépendant de u, ce qui est normal puisque u n'est pas lu ! (Le 'O_k' ne figure que pour respecter les degrès).

III) Soit ϕ un k-morphisme de Σ dans D et $t \in T(\Sigma)^1$ ϕ **est [v]-complet sur t** ssi, $\forall \hat{u} \in I(t)$ (voir I-1-2-3-3), $\phi(\hat{u}) = (\hat{v}_1,\theta_1,..,\hat{v}_k.\theta_k>$ avec $\theta=<\theta_1,..,\theta_k>$[v]-k-compléte (I-1-1-2-11).

Si $t =<t_1,..,t_p> \in T(\Sigma)^p$, ϕ est [v] **complet sur t** ssi, $\forall i\in[p]$, ϕ est [v] complet sur t_i.
On a la propriété élémentaire suivante

P_1 - Si ϕ est [v] complet sur t, ϕ est [v] complet sur tout sous arbre initial de t.
Cette propriété découle de la définition .///
Donnons quelques définitions permettant de relier les notions de complétude et de lecture.

D_1 - <u>Définition</u> : Soit ϕ un k-morphisme et $v \in N^+$, $v \leq k$. Nous noterons $\phi_{[v]} = \sigma_k^v o\phi$ (σ_k^v est défini en I-1-2-2-2)

N - NOTATION IMPORTANTE : Comme nous l'avons déjà signalé en (I-1-1-2-16), signalons que, étant donné deux applications ϕ et Ψ nous notons ϕ o Ψ l'application définie par ϕ o $\Psi(x) = \Psi(\phi(x))$. Autrement dit, nous adoptons la notation **inverse** de la notation usuelle de composition de fonctions. La raison en est que, dans la suite, nous considérons toujours pêle-mêle des morphismes (c'est à dire des applications particulières) et des relations (bimorphismes, transductions). Nous sommes amenés à composer les uns aux autres. Or, habituellement, étant donné deux relations R et S, on note $RoS = \{(t,v) \mid \exists u, (t,u) \in R \text{ et } (u,v) \in S\}$. Notre notation revient à adopter dans tous les cas la notation relationnelle, confondant l'application ϕ et la relation $\{(x,\phi(x)) \mid x \in \text{Domaine de } \phi\}$ associée. Nous écrivons toujours ainsi dans l''ordre des compositions'.///
Revenons à la définition D_1-. $\phi_{[v]}$ est l'**application** (attention, $\phi_{[v]}$ n'est plus un morphisme de magmoïdes) obtenue en sélectionnant dans l'image par ϕ, les v premières composantes de chaque suite de k-composantes (ce qui justifie la notation).///

D_2 - Définition : un noeud n de t est dit **[v]-lu par ϕ dans t** ssi il est lu par $\phi_{[v]}$./// Complétude et lecture sont liées par la propriété suivante :

P_2 - **ϕ est [v]-complet sur t ssi t est [v]-lu par ϕ**

En effet, décomposons t en $t = \hat{t}_1(\alpha_1,..\alpha_p)$ où les α_i sont les noeuds sans successeurs de t. Les α_i sont donc soit des variables, soit des éléments de degré inférieur nul.

t est [v]-lu par ϕ ssi ϕ est [v]-complet sur $\hat{t}_1$(résulte immédiatement des définitions).

Or, si ϕ est [v]-complet sur t, il l'est évidemment sur $\hat{t}_1$(propriété P_1-).

Inversement, si ϕ est [v]-complet sur $\hat{t}_1$, il l'est sur t car, si α_i est une variable, la k-variable image de α_i par ϕ a au moins une composante dans $\phi_{[v]}(t)$ et si α_i est de degré inférieur nul, α_i est "sans variable".

P_2 - est établi/// C.Q.F.D.

P_2 - restera présent à l'esprit pour soutenir l'intuition.///

IV) Définition : ϕ **est [v]-complet sur F** ssi, pour tout $t \in F$, ϕ est [v]-complet sur t.

Le **domaine de [v]-complétude** de ϕ, noté $\mathcal{C}_{[v]}(\phi)$ est l'ensemble des t sur lesquels ϕ est [v]-complet.

Si ϕ est un k-morphisme, nous dirons **complet** pour [k]-complet.

Nous donnerons en I-2 les propriétés de la complétude. Disons en gros qu'elles sont "bonnes" ; essentiellement, la complétude se conserve par composition de morphismes.///

V) Cas particulier : Dans le cas où ϕ est un 1-morphisme, la propriété de complétude s'exprime beaucoup plus simplement et on retrouve la notion classique de morphisme "non deleating", ou "rank-preserving".

En effet, remarquons d'abord qu'on à v = k = 1, donc on parlera simplement de complétude. Soit $\hat{t} \in \hat{T}(\Sigma)$. Dire que le 1-morphisme ϕ est complet sur $\hat{t}$ équivaut à dire que $\phi(\hat{t}) = \hat{u}.\theta$ avec θ subjective. En particulier, ϕ est complet sur $\hat{T}(\Sigma)$ ssi il est complet sur Σ, c'est à dire ssi

$\forall a \in \Sigma$, $\phi(a) = \hat{t}_a.\theta_a$ avec θ_a surjective.

On retrouve la notion classique

VI) Remarque : Il faut voir que, si ϕ est un k-morphisme avec k > 1, la situation est plus compliquée du fait que les images éclatent en k-composantes. Illustrons d'un exemple :

Soit ϕ le 2-morphisme de Σ dans D défini par

$\phi(a(x_1, x_2)) = \langle \alpha(x_1), \alpha(x_3) \rangle$, $\phi(b(x)) = \langle \bar{\alpha}, \alpha(x_1) \rangle$

ϕ est complet sur $a(x_1, x_2)$ et sur $b(x_1)$. Pourtant il n'est pas complet sur $a(x_1, x_2).\langle b(x_1), \langle b(x_2) \rangle$! En effet, $\phi(a(b(x_1), b(x_2))) = \langle \alpha\bar{\alpha}, \alpha\bar{\alpha} \rangle$

Nous reviendrons sur ce problème en I-2-1-2-4./I/

I-1-3-2-4 Les morphismes régulés :

Nous empruntons le terme 'régulé' à G. JACOB [99] car l'idée est commune : considérer des transformations qui, à un élément de départ suffisamment grand, (chaîne, arbre) associe un élément "de taille non nulle" (chaîne non vide, arbre non réduit à des variables).

I) Définition préliminaire : Un arbre t de $T(\Sigma)$[1] est dit de **profondeur homogène** h ssi toutes les branches joignant le sommet à une variable ont la longueur h et les autres branches (celles joignant le sommet à une feuille de Σ_o) une longueur $\leq$ h.

II) Définition des k-morphismes p-régulés :

Soit p un entier positif, ϕ un k-morphisme de Σ dans D, F une forêt de $T(\Sigma)$. ϕ est dit **p-régulé sur F** ssi, pour tout sous arbre t de tout arbre de F, tel que t soit de degré supérieur 1 et de profondeur homogène p, $\phi(t)$ n'ait **aucune** de ses k composantes réduites à une variable. Si $F = T(\Sigma)$, on omet de le préciser et on dit que ϕ est p-régulé.

Nous appelerons **stricte** toute composante non réduite à une variable.///

ϕ est dit **régulé sur F** ssi il existe p tel que ϕ est p-régulé sur F.

III) Remarque : L'idée de régulation est de "ne pas effacer arbitrairement profondément". Dans le cas des mrophismes 'classiques' (k=1) et pour p=1, on retrouve la notion classique de morphisme **strict** (ou 'Σ-free', 'non-easing').

IV) Remarque : Comme pour la complétude, la notion de strictitude est plus complexe que pour le cas classique.

Soit par exemple ϕ le 3-morphisme défini par :

$\phi a(x) = \langle a(x_2), x_3, x_1 \rangle$

ϕ n'est par 1-régulé, mais il est 3-régulé car

$\phi a(a(a(x))) = \langle a(x_1), a(x_2), a(x_3) \rangle$! ///

I-1-3-2-5 Autres types de morphismes :

I) Les morphismes [v] quasi-complets sur une forêt :

Soit ϕ un k-morphisme et F une forêt. ϕ **est [v] quasi-complet sur F** ssi, $\forall\ \hat{t} \in I(F)$, si une variable x n'apparait pas dans $\phi(\hat{t})$, alors l'ensemble des $\hat{u}$ tels que $\hat{t}\,\hat{\underset{x}{}}\,\hat{u} \in I(F)$ est fini. Autrement dit, tout noeud qui n'est pas lu par $\phi_{[v]}$ ne peut être le sommet que d'un nombre fini de sous-arbres. Dans la pratique, cette notion sera appliquée à F reconnaissable ou F $\in$ $Rec^{\otimes}$. Dans une reocnnaissance descendante de $\hat{t}$, les états atteints en chaque noeud déterminent si une forêt finie ou infinie (selon les états) peut s'y substituer dans $I(F)$.

II) Les démarquages et les quasi démarquages :

Soit ϕ un 1-morphisme **linéaire** de Σ dans D.
ϕ est un **démarquage** ssi, $\forall$ a $\in \Sigma$, $\phi(a)$ contient un seul noeud qui ne soit pas une variable, ou est réduit à une variable. (Un démarquage est donc un 1 - morphisme linéaire qui à une lettre de Σ associe (au plus) une lettre de D).
Un démarquage est dit **propre** ssi $\forall$ a $\in \Sigma$, $\phi(a) \in D$. (Ce cas correspond à une application de Σ dans D). ϕ est un **quasi-démarquage** ssi, $\forall$ a $\in \Sigma$, toute branche joignant le sommet à une variable a la longueur 1 dans $\phi(a)$. (Autrement dit, dans $\phi(a)$, les variables sont successeurs immédiates du sommet).
ϕ est un **quasi-démarquage propre** ssi, $\forall$ a $\in \Sigma$, on a de plus $\phi(a) \in \tilde{T}(D)$.
Remarquons donc qu'un (quasi) démarquage propre est complet strict.

III) Cas des 1-morphismes : Les remarques (I-1-3-2-4 III) et (I-1-3-2-3 V) montrent que la régulation se réduit à la strictitude (sur un sous alphabet éventuellement) et la [v] complétude à la complétude. Les seuls qualificatifs que nous emploirons dans ce cas seront donc 'complet' et 'strict'.
Un 1-morphisme est linéaire complet ssi, $\forall$ a $\in \Sigma$, $\phi(a) \in \tilde{T}(D)$. Nous dirons encore qu'il est "**sans torsions**"

IV) Les morphismes marqués, les morphismes sans feuilles :

Un morphisme ϕ est dit **marqué** ssi, $\forall$ a $\in \Sigma$, $\phi(a)$ est marqué par a (I-1-1-1-12).
ϕ est dit **sans feuilles** ssi, $\forall$ a $\in \Sigma-\Sigma_o$, $\phi(a)$ est sans feuilles (I-1-1-1-9)///

V) Les morphismes homogènes :

Un k-morphisme ϕ de Σ dans D est dit **p-homogène** ssi, pour tout a $\in \Sigma$, pour tout

$i \in [k]$, $\phi_i(a)$ est un arbre de profondeur homogène p (avec $\phi(a) = <\phi_1(a),..,\phi_k(a)>$).
ϕ est dit **quasi-p-homogène** ssi, pour tout $a \in \Sigma$, pour tout $i \in [k]$, $\phi_i(a)$ a toutes ses branches joignant le sommet à une variable, de longueur p.
Parfois, on dira que ϕ est **(quasi)-homogène** si il existe p tel que ϕ soit (resp. quasi) p-homogène///

I-1-3-2-6 Notations :

I) Nous abrévierons parfois **complet en c, strict en s, séparé à dalai borné en dB, séparé à délai p en dp, séparé (à délai 1) en d, linéaire en l, p-régulé en p-r, régulé en r.** Nous désignerons par $H_{l,dB}$ par exemple la classe des morphismes linéaires à délai borné (en précisant éventuellement relativement à quelles forêts). De même nous désignerons par K indicé des abréviations correspondantes la sous classe des k-morphismes.
Nous dirons souvent que $\Psi_{[\mu]}$ **est sur G du même type que** $\phi_{[\nu]}$ **sur F** pour dire que Ψ est $[\mu]$ complet sur G si ϕ est $[\nu]$ complet sur F, Ψ est à délai borné sur G si ϕ l'est sur F, etc...///.

I-1-3-2-7 Conclusion de I-1-3 :

Par rapport aux morphismes 'classiques' (k=1), seule la notion de linéarité s'étend sans problème au cas des k-morphismes. Les notions de complétude et de strictitude deviennent plus délicates (exemples I-1-3-2-3- VI et 4- IV) en ce sens qu'elles ne sont plus syntaxiques (donnée immédiatement par la donnée de ϕ sur Σ) mais relatives aux arbres considérés.
Une nouvelle notion, inexistante dans le cas classique, apparait : la séparation à délai borné. Cette notion est très importante car nous verrons, que d'une manière précisée par la suite, la linéarité **et séparation à délai borné**, et non la simple linéarité, est une bonne généralisation aux k-morphismes de la linéarité des 1-morphismes (ce qui est à priori surprenant).
Remarquons encore que la régulation et la séparation à délai borné sont des propriétés locales : il suffit de regarder ce qui se passe sur des sous arbres de profondeur bornée. La complétude est une propriété globale : il faut regarder l'arbre tout entier. Enfin, le fait que les propriétés ci dessus (complétude, séparation à délai, régulation) sont relatives à des forêts incite à considérer des couples (F,ϕ) plutôt que les seuls morphismes. C'est un premier pas vers les bimorphismes, qui sont grosso-modo des triplets (ϕ, F, Ψ) où ϕ et Ψ sont deux morphismes de 'source' F.
Dans toute la suite, nous confondons ϕ et la relation associée (relation que, selon I-1-2-2-1, nous notons Φ ou, par abus, encore ϕ). Rappelons encore une fois que nous 'composons aus sens des relations' (I-1-3-2-3- III N).

I - 1 - 4 LES BIMORPHISMES :

Nous introduisons ici le concept essentiel de notre travail.

I-1-4-1 Historique de la notion de bimorphisme dans les langages :

(La bibliographie détaillée sur chaque sujet figure en annexe).

En théorie des langages, la notion de bimorphismes a été introduite par M.NIVAT [72] qui montre l'équivalence avec les transductions rationnelles de langages. Plus précisément, dès le début de la théorie des langages était apparue la notion de reconnaisseur d'état fini (donc de langage reconnaissable). Mettant "une sortie" à ces reconnaisseurs, on obtenait aussitôt les transducteurs d'états finis (a-transducers) qui transforment des langages en d'autres. Les transducteurs d'états finis restent d'un usage constant en théorie des langages et ses développements (A.F.L. cônes rationnels).

A tout transducteur d'états finis T d'un monoïde Σ^* dans un autre Δ^*, est associée la relation (partie de $\Sigma^* \times \Delta^*$) $\hat{T} = \{(x, y) | \; x \mid\!\frac{*}{T} y\}$. Un bimorphisme de langages est la donnée d'un triplet $B = (\phi, K, \Psi)$ où K est un langage reconnaissable et ϕ et Ψ deux homomorphismes de monoïdes. A B est associée la relation $\hat{B} = \{(\phi(t), \Psi(t)) | t \in K\}$. M. NIVAT montre l'équivalence des transductions d'états finis et des bimorphismes en ce sens que toute transformation (ou relation) réalisée avec un transducteur l'est avec un bimorphisme et inversement. Cette caractérisation a de nombreux avantages :

- elle met en évidence le caractère symétrique des transductions d'états finis (la relation inverse est réalisée également par une transduction). Ce caractère n'est pas apparent dans la définition par machine d'état fini, mais évident par définition des bimorphismes (la relation inverse de celle réalisée par $B = (\phi, K, \Psi)$ et celle réalisée par (Ψ, K, ϕ) !).
- Tout transducteur d'états finis se décompose en objets élémentaires : forêts reconnaissables et homomorphismes. Cela le rend d'une manipulation beaucoup plus facile.
- Cette même décomposition en fait un outil central de l'étude des A F L et des cônes rationnels.

Les relations associées aux transducteurs d'états finis (ou aux bimorphismes) sont encore appelées **transductions rationnelles**, car ce sont les parties rationnelles du produit de deux monoïdes.

Les transductions rationnelles ont les principales propriétés suivantes.

1 - La classe des transductions rationnelles s'identifie à la classe des bimorphismes (nous utiliserons indifféremment les deux termes)

2 - Les bimorphismes sont clos par inversion . (Nous avons vu ce que cela signifie pour l'inversion. Pour la composition, étant donné $B = (\phi, K, \Psi)$ et $B' = (\phi', K', \Psi')$, il existe donc $B'' = (\phi'', K'', \Psi'')$ tel que $\hat{B}'' = \hat{B} \circ \hat{B}'$).

3 - Le transformé d'un langage reconnaissable (resp algébrique) par un bimorphisme est un langage reconnaissable (resp algébrique).

Rappelons que les langages algébriques sont encore appelés "à contexte libre" ('context-free'). Nous dirons plus briévement que'la classe des langages reconnaissable et celle des langages algébriques sont closes par bimorphisme'.

4 - 'Les bimorphismes sont les parties rationnelles du produit'. Précisons. Remarquons d'abord que nous confondons -et le ferons couramment- le bimorphisme en tant que triplet $(\phi, K, \Psi) = B$ et la relation $\hat{B}$ associée. Rappelons que les parties rationnelles d'un monoïdes sont obtenues à partir des parties finies par application d'un nombre fini d'opérateurs 'union', 'concaténation' et 'étoile' (elles sont décrites par des 'expressions régulières').

Ces 'bonnes' propriétés des transductions d'états finis de langages, les 'mauvaises'propriétés des transductions d'états finis classiques de forêts nous ont amené, par un cheminement détaillé dans l'introduction de cette thèse, à introduire la notion de **bimorphisme de magmoïde**.

I-1-4-2 Les bimorphismes de magmoïdes - définitions générales :

I-1-4-2-1 Définitions :

I) Un **bimorphisme de magmoïdes** B est la donnée d'un quintuplet $B=(v,\phi,F,\Psi,\mu)$ où

- F est une forêt appartenant à une famille raisonnable $\mathcal{F}$.

On prendra toujours F inclus dans un magmoïde libre $T(\Sigma)$

- ϕ est un k-morphisme de $T(\Sigma)$ dans un magmoïde M, Ψ un k'-morphisme de $T(\Sigma)$ dans un magmoïde N

- v est un entier $\leq k$, μ un entier $\leq k'$.

II) La relation associée à B, notée $\hat{B}$, encore appelée bimorphisme, est définie par :

$\hat{B} = \{(\phi_{[v]}(t), \Psi_{[\mu]}(t)) \mid t \in F\} \subset M \times N.$

(voir (I-1-3-2-3- III - D_1-) pour la définition de $\phi_{[v]}$).

III) Commentons ces définitions :

Gardons à l'esprit que considérer une forêt d'une classe 'raisonnable' revient à considérer une forêt ayant en gros les bonnes propriétés des forêts reconnaissables (I-1-2-4). Dès lors, si nous avions défini B par un triplet (ϕ, F, Ψ), la notion de bimorphisme de magmoïdes eut été la généralisation en droite ligne de celle de bimorphismes de monoïdes. Pourquoi sélectionner les fibres des

images par $[v]$ et $[\mu]$?
Remarquons d'abord que cette modification de définition est en fait une généralisation (pour $k = v$ et $k' = \mu$, on retrouve la sous-classe des 'triplet ' (ϕ, F, Ψ)). Sans cette généralisation , nous montrons en (II-2-2-1) qu'on ne peut avoir de "bonnes propriétés" de composition. En ce sens, l'introduction d'un quintuplet au lieu d'un triplet est essentielle, mais elle affecte peu la notion même de bimorphisme (un peu comme quand, dans un reconnaisseur ou un transducteur, on sélectionne des états initiaux ou finaux). Remarquons qu'il revient au même, d'après (I-1-3-2-3- III - D_1) de définir B par (v, ϕ, F, Ψ, μ) ou par $(\phi_{[v]}, F, \Psi_{[\mu]})$. Toutefois, nous préférons au point de vue conceptionnel la première notation car $\phi_{[v]}$ n'est en général pas un morphisme. Nous emploierons pourtant parfois, par commodité, la seconde notation.
Nous aurions pu évidemment généraliser nos définitions en remplaçant le segment commençant $[v]$ de $[k]$ par une partie quelconque de $[k]$, mais ceci n'aurait absolument rien apporté à la théorie, mais compliquerait inutilement les notations (disons, qu'à une permutation près, on peut toujours se ramener à notre définition).
Retenons dès maintenant que, par v et μ, nous sélectionnons des composantes pour associer à un bimorphisme une transformation. Les composantes abandonnées -que nous montrerons dans (II-2-2-1) être indispensables, doivent être regardées comme des"composantes de manoeuvres internes", qui ne sont pas "sorties" par la transformation. (En applications aux schémas de programmes, on peut regarder les composantes sélectionnées comme les schémas de calculs entrés et sortis, les composantes abandonnées décrivant les calculs intermédiaires (sur des registres de travail par exemple).

I-1-4-2-2 Composition et inversion de bimorphismes de magmoïdes - transformation de forêts

La composition et l'inversion se faisant comme toujours au sens des relations, cette section "va sans dire". Néanmoins, certains détails "vont mieux en les disant".

I) Les bimorphismes sont par nature inversible. Ainsi, soit $R = \hat{B}$ avec $B = (v, \phi, F, \Psi, \mu)$. On a évidemment $R^{-1} = \hat{B'}$ avec $B' = (\mu, \Psi, F, \phi, v)$

II) Nous verrons que le problème de composition est beaucoup plus complexe.
La question générale est :
"étant donné deux bimorphismes B_1 et B_2, existe-t-il un bimorphisme B_3 tels que $\hat{B}_3 = \hat{B}_1 \circ \hat{B}_2$? "
La réponse varie selon les classes de bimorphismes considérées.

III) Soit K une forêt et B un bimorphisme. **La transformée de K par B**, notée $\hat{B}(K)$ ou $B(K)$, est évidemment définie par : $\hat{B}(K) = \{u \mid \exists t \in K, (t,u) \in \hat{B}\}$.

IV) <u>Remarque</u> : Faisons une remarque concernant la composition et les fibres prises en compte.

Soit $B = (v, \phi, K, \Psi, \mu)$ et $B' = (v', \phi', K', \Psi', \mu')$

Posons M^{vN} l'ensemble des éléments du magmoïde M qui sont de degré supérieur multiple de v.

On a par définition des bimorphismes (car K, raisonnable, est 'sans variables') :

$$\hat{B} \subset M_o^{vN} \times M_o'^{\mu N}$$

Pour composer B et B', on peut supposer toujours que Ψ et ϕ' ont pour but le même magmoïde (quitte à prendre l'intersection des deux magmoïdes buts, qui est encore un magmoïde).

On a alors $\hat{B}' \subset M_o'^{v'N} \times M_o''^{\mu' N}$ donc :

$$\hat{B} \circ \hat{B}' \subset M_o^{vv'_1 N} \times M_o''^{\mu_1 \mu' N}$$

où $m = \mu v'_1 = v'\mu_1$ est le P.P.C.M. de μ et v'

De même, en supposant $K \subset T(\Sigma)$, les seuls éléments utiles de K sont dans $T(\Sigma)^{v'_1 N}$ et ceux de K' dans $T(\Sigma')^{\mu_1 N}$.

Ainsi, pour composer deux bimorphismes, on est obligé de "grouper par paquets" les composantes dans K et K'.///

I-1-4-3 Différents types de bimorphismes - notations :

Dans le cas des homomorphismes de monoïdes, les qualificatifs étudiés précédemment de 'linéaire', 'complet', 'séparé à délai borné' sont sans fondement. Tout au plus considère-t-on des morphismes de monoïdes **stricts** (ou 'Σ-free', l'image d'une lettre ne pouvant être le mot vide) en **alphabétiques** (l'image d'une lettre est au plus une lettre). Il s'en suit, dans le cas des magmoïdes, une foule de classes possibles de bimorphismes. Nous sommes amenés ci-dessous à fixer des notations commodes pour les désigner. Nous verrons dans toute la suite que les propriétés diffèrent du tout au tout selon les classes.

<u>I-1-4-3-1 Notations</u> :

I) $\mathcal{B}((\ell, dB, r), \mathcal{F}, \emptyset)$ désignera par exemple la classe des bimorphismes (v, ϕ, F, Ψ, μ) où $F \in \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ famille raisonnable), ϕ est un morphisme ℓ, dB sur F, r sur F (I-1-3-2-6) . Nous conviendrons que $\emptyset$ signifie l'absence de restriction pour Ψ, qui est donc un morphisme quelconque.

Parfois, on précisera la dilatation d'un morphisme. On obtient par exemple

$B(1(\ell, c, s), Rec^{\otimes}, k(c, p-r))$

qui est la classe des bimorphismes $(1, \phi, F, \Psi, \mu)$ où $F \in Rec^{\otimes}$, ϕ est un 1 morphisme linéaire complet sur F, strict sur F, Ψ un k morphisme $[\mu]$-complet sur F, p-régulé sur F.

II) Remarquons qu'implicitement, les propriétés des morphismes sont relatives à la forêt du bimorphisme. De même, la complétude porte implicitement sur les composantes indiquées dans le quintuplet. Par exemple, dans l'exemple ci-dessus, la complétude de Ψ est implicitement la $[\mu]$-complétude.

III) Remarquons encore que si ϕ est un 1-morphisme, il est inutile de préciser v dans (v, ϕ, K, Ψ, μ) car nécessairement $v = 1$. On écrira donc (ϕ, K, Ψ, μ), et (Φ, K, Ψ) si Ψ est un 1-morphisme. **Autrement dit, dans le cas des morphismes 'classiques' d'arbres, on retrouve la notion de bimorphisme définie, comme dans les langages, par un simple triplet.**

IV) D'une façon plus générale, nous noterons (ϕ, K, Ψ) pour (k, ϕ, K, Ψ, k') si ϕ est un k-morphisme et Ψ un k'-morphisme.

I-1-4-3-2 Les bimorphismes symétriques :

Un cas particulier intéressant est celui où, dans un bimorphisme (v, ϕ, K, Ψ, μ) ϕ et Ψ sont de même type (voir I-1-3-2-6 I), c'est à dire où ϕ et Ψ sont simultanément p-régulés, à délai de séparation q, etc... **sur K.** De tels bimorphismes seront dits **symétriques** et la notation des classes en sera simplifiée comme suit.

$B(F, (\ell, [v, v']-c, \dots))$ désignera la classe des bimorphismes $(\mu, \phi, F, \Psi, \mu')$ où ϕ et Ψ sont linéaires, respectivement v et v' complets sur F, etc... .

Le lecteur généralisera facilement notre procédé de notations.///

I-1-4-4 Les triplets :

Bien que seuls nous intéressent en fin de compte les "arbres sans variables", nous obtiendrons souvent des résultats intermédiaires plus fins, parfois utiles pour d'autres applications (les lemmes 2 et 4 de II-1 sont utilisés dans [A]).

Aussi introduisons nous une notion plus large que celle de bimorphisme, celle de **triplet** où sont pris en compte les éléments avec torsions.

I-1-4-4-1 Définitions:

Soit F une partie d'un magmoïde M. Nous noterons F_o la sous forêt de F constituée des éléments de dinf nul, c'est à dire $F_o = F \cap M_o$

Un **triplet** est la donnée de (ϕ, K, Ψ) où ϕ et Ψ sont des morphismes et F une forêt telle que F_o est raisonnable.

Au triplet $T = (\phi, K, \Psi)$ est évidemment associée la relation :

$T = \{(\phi(t), \Psi(t)) | t \in K\} \subset T_k(D) \times T_{k'}(\Gamma)$

en posant ϕ k-morphisme de Σ dans D et Ψ k'-morphisme de Σ dans Γ.

Si $K = T(\Sigma)$, nous abrégerons (ϕ, K, Ψ) en (ϕ, Ψ).

Nous noterons encore $(\phi, \Psi) = \phi^{-1} \circ \Psi$, la relation associée étant la même.

Remarque importante Il importe de remarquer que, si ϕ est un k-morphisme et Ψ un k'morphisme, la relation $\phi^{-1} \circ \Psi$ est une **partie de** $T_k(D) \times T_{k'}(\Gamma)$.

I-1-4-4-2 Propriétés élémentaires :

I) Soit $T = (\phi, K, \Psi)$ et $T' = (\phi', K', \Psi')$ deux triplets

Alors, si $(\phi, K, \Psi) \underset{v,v'}{\smile} (\phi', K', \Psi')$, on a

$(v, \phi, K_o, \Psi, v') \simeq (v, \phi', K'_o, \Psi, v')$

La preuve en est immédiate.

II) Soit P une partie d'un magmoïde. Rappelons que nous notions [P] le magmoïde engendré. Soit alors $(\phi, P, \Psi) \underset{v,v'}{\smile} (\phi', P', \Psi')$. Nous en déduisons immédiatement $(\phi, [P], \Psi) \underset{v,v'}{\smile} (\phi', [P'], \Psi')$.

I - 1 - 5 LES TRANSDUCTEURS DE FORÊTS :

Nous avons vu en (I-1-4-1) que dans le cas des langages, la notion de bimorphisme est équivalente à celle de transduction d'états finis. Si, en théorie des forêts, la notion de bimorphisme n'a jamais été introduite (sauf dans un cas très très restreint (TAKAHASHI, [87])), la notion de transducteur d'états finis d'arbres a été vite étudiée -pour des raisons et par des auteurs rappelées en introduction. L'idée était la même que dans le cas des langages : transformer des arbres en d'autres en mettant "une sortie" aux reconnaisseurs d'états finis. Toutefois la situation se "complique" vite pour les raisons suivantes.

I) Nous avons vu que les reconnaisseurs ascendants et descendants sont équivalents. Il n'en est pas de même pour les transducteurs, où les comportements sont fort différents.

II) Les problèmes de linéarité, complétude, se posent en sortie (recopie en plusieurs exemplaires d'une même branche).

La situation est ainsi tout à fait différente et beaucoup plus complexe que dans le cas des langages, même si l'idée de départ est la même.

Nous nous contentons ici de définir les transducteurs et d'en énumérer les principales propriétés. Une abondante bibliographie est donnée sur ce sujet en annexe. L'essentiel des résultats de la théorie sont consignés dans [51] par J. ENGELFRIET. De nombreux exemples figurent dans [1], [9].

Les concepts voisins de celui de "transducteur d'états finis" sont rappelés dans la partie III de ce travail, en application de la notion de bimorphisme. Il en est ainsi en particulier pour les "syntax directed translators" qui ont donné naissance aux transducteurs d'états finis. D'une façon générale, la situation des différentes notions de transformation de forêts, les motivations et applications de ces notions, les références, sont données en introduction et en partie III de ce travail.

I-1-5-1 Définitions des transducteurs d'états finis de forêts :

La distinction entre les cas ascendants et descendants est capitale.

I-1-5-1-1 Transducteurs d'états finis ascendant de forêts ;

Nous abrégerons ce terme en "transducteur ascendant" et désignerons par TA la classe de ces objets ou l'un quelconque d'entre eux.

Un TA est la donnée d'un quintuplet $T = (\Sigma, \Delta, Q, R, F)$

où Σ est l'alphabet gradué fini d'entrée

Δ est l'alphabet gradué fini de sortie

Q est un ensemble fini d'états

$F \subset Q$ est l'ensemble des états finaux

R est un ensemble fini de règles de la forme

$a(q_{i_1}[x_1],.., q_{i_n}[x_n]) \to q[u(x_{j_1},.., x_{j_p})]$

où $\forall$ k $\in$ [p], $j_k \in$ [n],q, $q_{i_1},.. q_{i_n} \in Q$.

$a(x_1,..x_n) \in \Sigma$ et $u(x_1,.. x_p) \in \tilde{T}(\Delta)^1$

$u(x_{j_1},..,x_{j_p})$ peut encore s'écrire $u.\theta$ où $\theta \in \Theta_n^p$

(Remarquons que si n = 0, $a \to q[u]$).

Une règle est **linéaire** (respectivement **compléte, stricte**) ssi θ est linéaire (respectivement θ compléte, u strict).

T est **linéaire** (resp. **complet, strict**) ssi toutes ses règles le sont. T est **déterministe** ssi il n'existe pas deux règles de même partie gauche.

T est encore dit transducteur de Σ dans Δ.

A T est associée une relation de $T(\Sigma)_o^1 \times T(\Delta)_o^1$ appelée **transduction** associée à T et notée $\hat{T}$.

Nous déduirons $\hat{T}$ de la notion de "mouvement" $\overset{*}{\underset{T}{\vdash}}$ de T.

Soit $\Sigma_Q = \Sigma \cup \{q[a(x_1,..x_n)] \mid q \in Q, a(x_1,..x_n) \in \Sigma\}$

(Σ_Q est Σ augmenté des lettres de Σ marquées d'un état).

On définit de même Δ_Q.

On dira que $t \underset{T}{\vdash} u$ ssi

-t se décompose en $t_o.a(q_{i_1}[u_1],.., q_{i_n}[u_n])$

u se décompose en $t_o.q[u(u_{j_1},.. u_{j_p})]$

et $(a(q_{i_1}[x_1],..,q_{i_n}[x_n]) \to q[u(x_{j_1},.. x_{j_p})]) \in R$

Finalement, $\overset{*}{\underset{T}{\vdash}}$ est la cloture transitive de $\underset{T}{\vdash}$ et

$\hat{T} = \{(t,u) \mid t \in T(\Sigma)_o^1, u \in T(\Delta)_o^1$ et $\exists_q \in F, t \overset{*}{\underset{T}{\vdash}} q[u]\}$

I-1-5-1-2 Transducteurs descendants :

Un transducteur descendant (T D) est la donnée d'un quintuplet $T = (\Sigma, \Delta, Q, R, I)$ où Σ, Δ, Q ont la même signification que dans le cas ascendant, $I \subset Q$ est l'ensemble des états initiaux, et les règles sont de la forme.

$q[a(x_1,..x_n)] \to u(q_{i_1}[x_{j_1}],..,q_{i_p}[x_{j_p}])$

où $a \in \Sigma$, $u(x_1, x_p) \in \tilde{T}(\Delta)^1$, $q, q_{i_1}..q_{i_p} \in Q$

$(x_{j_1},.., x_{j_p})$ est une torsion θ de Θ_n^p

(si $n = 0$, $q[a] \to u$ avec $u \in T(\Delta)_o^1$)

Les termes '**complet, linéaire, déterministe, strict**' se définissent de façon évidente comme précédemment.

On dit que $t \vdash_{\overline{T}} u$ ssi

t se décompose en $u_o q[a(t_1,.. t_n)]$

u se décompose en $u_o . u\,(q_{i_1}[t_{j_1}],.. q_{i_p}[t_{j_p}])$

et $(q[a(x_1,..,x_n)] \to u(q_{i_1}[x_{j_1}],..,q_{i_p}[x_{j_p}]) \in R$

La **transduction** $\hat{T}$ associée à T est

$\hat{T} = \{(t,u) \mid t \in T(\Sigma)_o^1,\ u \in T(\Delta)_o^1 \text{ et } \exists_q \in I,\ q[t] \vdash_{\overline{T}}^{*} u\}$

I-1-5-1-3 Autres types de transducteurs

I) Nous avions défini dans [9] les classes de transducteurs généralisés ascendants et descendants (T G A et T G D) et de transducteurs quasi généralisés ascendants et descendants (T Q A et T Q D).

T G A se déduit de T A en changeant dans la définition le fait que la partie gauche de chaque règle est une lettre par "la partie gauche de chaque règle est un arbre de $T(\Sigma)^1$ non réduit à une variable". On obtient la classe T Q A en imposant à la partie gauche de chaque règle d'être un arbre de $T(\Sigma)^1$ non réduit à une variable, où toutes les variables figurent à la profondeur 1 seulement.

On définit de même T G D et T Q D à partir de T G

II) J. ENGELFRIET introduit dans [51], [52] deux autres généralisation de la notion classique de T D : Les T' - F S T et les G F S T.

Nous ne les définirons pas formellement, la définition en termes de règles de dérivations étant longue et compliquée. Retenons qu'ENGELFRIET introduit la classe des transducteurs descendants avec "lock-ahead" (T' - F S T), qui généralisent les T D en ce que des contraintes reconnaissables peuvent être satisfaites sans que l'arbre correspondant soit lu au cours d'un mouvement de traduction). La nature des G F S T' est discutée en partie III

I-1-5-1-4 Les transductions :

Une partie R de $T(\Sigma)^1_o \times T(\Delta)^1_o$ est une **transduction de type X** ssi il existe un transducteur T de la classe X tel que $\hat{T} = R$.

Nous noterons $\hat{X}$ la classe des transductions associés à X.

La transductée par T d'une forêt F est

$T(F) = \{ u \mid (t,u) \in \hat{T} \text{ et } t \in F \}$

I-1-5-2 Principales propriétés des transductions de forêts.

1 - Ni la reconnaissabilité, ni l'algébricité ne sont en général conservés par transduction.

2 - La transductée inverse d'une forêt reconnaissable est reconnaissable.
Les transducteurs **linéaires** conservent la reconnaissabilité.

3 - $TD \subsetneq TQD \subsetneq TGD \subsetneq T'-FST \subsetneq GFST \subsetneq TD \circ TD$
$TA \subsetneq TQA \subsetneq TGA \subsetneq GFST$

4 - $\widehat{TD} \subsetneq \widehat{TQD} = \widehat{TGD} \subsetneq \widehat{T'-FST} \subsetneq \widehat{GFST} \subsetneq \widehat{TD \circ TD}$
$\widehat{TA} \subsetneq \widehat{TQA} \subsetneq \widehat{TGA} \subsetneq \widehat{GFST}$

5 - Les classes $\widehat{TA}$ et $\widehat{TD}$ sont incomparables. De même pour $\widehat{TGA}$ et $\widehat{TGD}$, $\widehat{TQA}$ et $\widehat{TQD}$

6 - Aucune des classes introduites précédemment n'est close par composition. Des hierarchies infinies sont conjecturées.

I-1-5-3 Cas particulier

1 - Nous utiliserons fréquemment des **marqueurs** (ascendants ou descendants)
Un **marqueur ascendant** est un T A déterministe dont toutes les règles sont de la forme :

$a(q_{i_1}[x_1], .. \, q_{i_n}[x_n]) \to q[a'(x_1, .. x_n)]$

où $a'(x_1, .. x_n) \in \Delta$.

On définit de même les marqueurs descendants. D'après I-1-5-2-2 et par déterminisme, un marqueur associe donc biunivoquement une forêt reconnaissable à une autre.

2 - Un reconnaisseur est, par définition, un transducteur. Un reconnaisseur d'une forêt F pourra être noté p_F et définira la restriction de $T(\Sigma)^1_o$ à F.

CHAPITRE I - 2

PROPRIETES ELEMENTAIRES

Nous étudions ici les propriétés élémentaires des morphismes, puis des bimorphismes.

Comme dans un transducteur d'états finis on "choisit" des états distingués (finaux ou initiaux), on peut, pour un morphisme, ne retenir qu'une sous suite des composantes de l'image, d'où la section (I-2-1-1). En (I-2-1-2), nous étudions les propriétés de composition des morphismes, qui sont en général du genre : "le composé de deux morphismes d'un certain type est du même type". Il y a des exceptions, signalées en (I-2-1-2-2). Ces propriétés seront bien entendu d'un usage constant. Plus techniques sont les propriétés de décomposition (I-2-1-3) : elles permettent de "décomposer" les difficultés, elles montrent aussi quelles notions sont liées ou dissociables par décomposition. Les notions étudiées en (I-2-1-4) concernent toutes le même problème : est-ce que, dans une transformation, une infinité d'éléments ont la même image ? Si l'image réciproque de tout transformé est fini, la transformation est dite **fidèle**. D'autre part, une propriété importante des bimorphismes est d'être les "parties rationnelles du produit" ; nous ne faisons en (I-2-2-1) que nous rattacher à la rationnalité étudiée dans le détail dans (A). Les lemmes de (I-2-2-2) seront constamment utilisés dans la suite. Remarquons enfin que nous abordons avec le lemme "des morphismes et des parties" de (I-2-1-5) un phénomène essentiel qui sera à la base de tous les résultats "négatifs" : la non distributivité de la réunion par rapport à la composition dans le cas non linéaire. Ce phénomène est commenté dans (I-2-1-5).

I - 2 - 1 PROPRIETES DES MORPHISMES :

Tout notre travail se situe dans le cadre des magmoïdes, catégorie dont les flèches sont les morphismes de magmoïdes sur lesquels nous avons défini en (I-1-3) de nombreuses notions. Il est donc essentiel de vérifier que les notions introduites ont de "bonnes propriétés algébriques" (permettent de définir des sous-catégories...). Concrétement, nous aboutissons auxénoncés de (I-2-1-2) qui établissent la stabilité par composition de sous-classes introduites en (I-1-3) (par exemple, "le composé de deux morphismes linéaires est linéaire", etc...). Les preuves de cette sous-section "coulent de source". Auparavant, nous voyons en (I-2-1-1) quelques propriétés relatives aux fibres (n'oublions pas que, par rapport à la notion classique de morphisme, une des innovations est de "dilater" les fibres). Aprés les propriétés de composition de (I-2-1-2), nous voyons en (I-2-1-3) quelques propriétés de décomposition fort utiles dans la pratique, puisqu'elles permettront de décomposer dans la suite de nombreuses preuves. Certains énoncés apparaitront beaucoup plus techniques qu'en (I-2-1-2) mais auront leur utilité justifiée par leur emploi dans des preuves ultérieures. Nous précisons en (I-2-1-4) les rapports entre les notions voisines de 'fidélité', 'complétude' et 'régulation'. Enfin, nous étudions (I-2-1-5) et illustrons les problèmes liés à l''extension d'un morphisme au magmoïde des parties'. Les résultats 'négatifs' énumérés ici sont à l'origine de nombreuses 'mauvaises' propriétés des transducteurs habituels.

I-2-1-1 Propriétés des morphismes sur les fibres.

I-2-1-1-1 Morphismes et équivalences :

Soit ϕ un k-morphisme et Ψ un k'-morphisme de Σ dans Δ, soit $\nu \leq \inf(k,k')$. On a alors :

$$\phi \underset{v}{\smile} \Psi \Rightarrow \phi \underset{.v}{\frown} \Psi \Leftrightarrow \phi_{[\nu]} \underset{-}{\frown} \Psi_{[\nu]}$$

mais $\phi \underset{v}{\smile} \Psi \not\Leftrightarrow \phi_{[\nu]} \underset{-}{\smile} \Psi_{[\nu]}$

La preuve est immédiate. Contentons nous de l'illustrer. Dire que $\phi \underset{v}{\smile} \Psi$ signifie que ϕ et Ψ sont, par leurs ν-premières composantes, des extensions d'un même ν-morphisme. Si on se réduit aux arbres sans variables, on obtient immédiatement que ces deux restrictions $\phi_{[\nu]}$ et $\Psi_{[\nu]}$ définissent ume même relation (rappelons qu'on confondra dans la suite le morphisme ϕ et le relation $(x, \phi(x))$ associée.)

Par contre, $\phi \underset{\nu}{\curlyvee} \Psi$ n'implique pas que les torsions se transforment de la même façon par ϕ et Ψ (ϕ k-dilate et ϕ k'-dilate). ///

I-2-1-1-2 Morphismes et restrictions de fibres :

I) Notations : Nous serons souvent amené à considérer la restriction $\phi_{[\nu]}$ (définie en I-1-3-2-3 III D1) d'un k-morphisme ϕ, qui n'est définie que si $\nu \leq k$. Par la suite, nous omettrons systématiquement de préciser cette condition d'une inégalité ///

II) Soit ϕ un k-morphisme et Ψ un k' morphisme. On a

a) $\phi_{[\nu]} \circ \Psi = \phi \circ \Psi_{[\nu k']}$

b) $\phi_{[1]} \circ \Psi_{[\mu]} = (\phi \circ \Psi)_{[\mu]}$ et en particulier $\phi_{[1]} \circ \Psi_{[1]} = (\phi \circ \Psi)_{[1]}$

c) mais, pour $\nu \neq 1$, on a

$\phi_{[\nu]} \circ \Psi_{[\mu]} \neq \phi \circ \Psi_{[\nu\mu]}$ ///

La preuve est évidente. Remarquons simplement que $\phi_{[\nu]} \circ \Psi_{[\mu]}$ ne s'exprime pas comme une restriction de fibre de $\phi \circ \Psi$. ///

I-2-1-2 Propriétés de composition :

Rappelons encore une fois que $\phi \circ \Psi$ s'écrit au sens des relations associées, c'est à dire que $(\phi \circ \Psi)(x) = \Psi[\phi(x)]$
Les propriétés ci-dessus signifient que les notions introduites précédemment relativement aux morphismes sont compatibles avec la composition (à une nuance près dans le cas de la séparation à délai borné).
Nous nous contentons, ici comme dans la plupart des cas, de considérer des morphismes 'de Σ dans Δ', c'est à dire de $T(\Sigma)$ dans $T(\Delta)$, c'est à dire de magmoïdes libres. La plupart des preuves se transposent mot à mot dans le cas de magmoïdes $(M)T$ obtenus par adjonction de torsion,

la décomposition de tout élément en "élément initial et torsion" jouant un rôle fondamental (on écrit $t = \tilde{t}.\theta$ dans $T(\Sigma)$, $[t_1;\theta]$ dans $(M)T$). Simplement, n'ayant pas besoin de plus que des morphismes de $T(\Sigma)$ dans $T(\Delta)$ pour ce qui nous intéresse, nous simplifions les écritures en nous restreignant à ce cas.

I-2-1-2-1 Conservation de la linéarité par composition :

La composition de deux morphismes linéaires est linéaire///.

Preuve : La notion de linéarité étant "sans piège", nous nous contentons d'esquisser les étapes d'une preuve coulant de source.

On prouve d'abord par récurrence sur la taille de $\tilde{t} \in \tilde{T}(\Sigma)$que :

P) **Si Ψ est linéaire, $\Psi(\tilde{t})$ se décompose en $\tilde{u}\theta$ avec θ linéaire.**

Ensuite, pour toute lettre a, en posant $\phi(a) = \tilde{t}_a.\theta_a$, on a

$(\phi \circ \Psi)(a) = \Psi(\tilde{t}_a.\theta_a) = \Psi(\tilde{t}_a).\ \Psi(\theta_a)$.

Si ϕ est un k-morphisme, on a $\Psi(\theta_a) = k(\theta_a)$ (I-1-1-2-6,7),or on établit facilement que :

Q) **Si θ est linéaire, $k(\theta)$ est linéaire**

Posons $\Psi(\tilde{t}_a) = \tilde{u}.\zeta$. On obtient :

$(\phi \circ \Psi)(a) = \tilde{u}.\zeta.k\theta_a$

Or, d'après P) ζ est linéaire si Ψ l'est, $k\theta_a$ est linéaire si θ_a l'est, donc si ϕ l'est. On en déduit que $\zeta.k\theta a$ est linéaire (la composée de deux injections est une injection), donc que $\phi \circ \Psi$ est linéaire.///

I-2-1-2-2 La séparation à délai borné et la composition :

I) Propriétés élémentaires de la séparation :

a) Soit $\tilde{t} \leq_I \tilde{t}'$. Si ϕ est séparé sur $\tilde{t}$, il l'est sur $\tilde{t}'$

b) Si ϕ est p-séparé, il est p'-séparé pour tout $p' \geq p$.

Preuve évidente laissée au lecteur.

II) **Soit ϕ un k-morphisme p-séparé sur $\tilde{t}$, Ψ un k'-morphisme p'-séparé sur $\phi(\tilde{t})$. Supposons de plus que Φ est q-régulé. Alors $\phi \circ \Psi$ est q'-séparé sur $\tilde{t}$, avec $q' = \sup(p, p'q)$**

Preuve : Soit $\tilde{t}' < \tilde{t}$, $\tilde{t}'$ étant de profondeur homogène q'.
$\phi(\tilde{t}') = (\tilde{u}_1.\theta_1, \tilde{u}_k.\theta_k)$ avec $<\theta_1,..,\theta_k>$ k-séparée d'après (I)a). D'autre part, ϕ étant q-régulé, il existe pour tout i, $\tilde{u}'_i \leq \tilde{u}_i$ tel que $\tilde{u}'_i$ soit de profondeur homogène p'. On a alors $\phi(\tilde{u}'_i)$ séparé donc $\phi(\tilde{u}_i)$ séparé.
Posons $(\tilde{u}_i) = (\tilde{v}_{i,1}.\zeta_{i,1}, .. \tilde{v}_{i,k'}.\zeta_{i,k'})$
On a alors ;
$(\phi \circ \Psi)(\tilde{t}) = (\tilde{v}_{1,1}.\zeta_{1,1},..., \tilde{v}_{k,k'}..\zeta_{k,k'}) . (k'\theta_1,.., k'\theta_k)$
$(\theta_1,..., \theta_k)$ étant k séparé, les $\zeta i,j$ étant k'-séparés, il est facile de voir que $(\zeta_{1,1},..., \zeta_{k,k'}).(k'\theta_1,..., k'\theta_k)$ est kk'-séparé ///.

III) En corollaire, nous obtenons que :

lemme de conservation de la séparation :

Si ϕ est un k-morphisme régulé à délai de séparation borné sur F, si Ψ est un k'-morphisme à délai de séparation borné sur $\phi(F)$, $\phi \circ \Psi$ est un kk'-morphisme à délai de séparation borné sur F.

C'est ce résultat que l'on doit retenir. Remarquons qu'on fait l'hypothèse sur ϕ d'être régulé. Ceci nous amène à la remarque suivante.

IV) Remarque : Le lemme III est faux sans l'hypothèse de régulation sur ϕ.
Donnons en un exemple :
Soit $F = \{a'a^n(\bar{a}) | n \in N\}$, ϕ le 2-morphisme défini par
$\phi(\bar{a}) = <\bar{a},\bar{a}>$, $\phi(a'(x_1))=<a'(x_1), x_2>$ et $\phi(a(x_1)) = <x_1, \bar{a}>$

ϕ n'est pas 1-séparé (il ne l'est pas sur $a'(x_1)$) mais il est 2-séparé sur F car, pour $n \geq 1$, $\phi(a'a^n(x_1) = <a'(x_1),\bar{a}>$
On a $\phi(F) = \{a'(\bar{a}),\bar{a}\}$ sur laquelle ϕ est évidemment 2-séparée. Pourtant, $\phi \circ \phi$ n'est pas séparé à délai borné sur F puisque
$\phi \circ \phi(a'a^n(x_1),\bar{a}) = \phi(a'(x_1),\bar{a}) = <a'(x_1), x_2, \bar{a}, \bar{a}>$ qui n'est pas séparé.
Ceci vient de ce que ϕ n'est pas régulé et "écrase" la branche arbitrairement longue $a'a^n(x_1)$ en un arbre de profondeur 1. Ceci est à priori fort génant, puisque la "séparation à délai borné" n'apparait pas comme une propriété "magmoïdienne". Par contre, la classe des morphismes régulés et séparés à délai borné est elle une bonne classe, close par composition. Une généralisation de notre définition de séparation à délai borné serait de faire porter la condition de profondeur sur les images au

lieu des objets. Ainsi, ϕ serait dit séparé à délai p si toute image de profondeur homogène p d'un arbre initial était séparée. Le contre exemple ci-dessus tombe alors car $\phi \circ \phi$ devient séparé à délai 2. On prouve même aisément que, avec cette définition, la 'séparation à délai borné' est close par composition sans autre hypothèse. Pourquoi alors ne pas avoir pris cette bonne définition, mais une, plus restrictive, qui n'a de bonnes propriétés que sous l'hypothèse de régulation ?
L'exemple suivant illustre notre raison.
Soit ϕ défini par :

$\phi\alpha(x_1) = <\beta(x_1, x_2), \neq>$

$\phi a(x_1) = <a(x_1), x_2>$ $\phi(b(x_1)) = <\bar{a}, b(x_2)>$

et $\phi(\bar{a}) = <\bar{a}, \bar{a}>$

Soit Ψ défini par $\Psi\, \alpha(x_1) = <\beta(x_1, x_2), \neq>$

$\Psi a(x_1) = <x_1, b(x_2)>$, $\Psi(b(x_1)) = <a(x_1), \bar{a}>$

et $\Psi(\bar{a}) = <\bar{a}, \bar{a}>$

Considérons les bimorphismes $B = (id, F, \phi, 2)$et $B' = (2, \Psi, F, id)$ avec $F = \{\alpha a^n b^p \bar{a} | n \text{ et } p \in N\}$

On a $\hat{B} = \{(\alpha a^n b^p \bar{a}, <\beta(a^n \bar{a}, b^p \bar{a}), \neq> | n \text{ et } p \in N\}$

et $\hat{B}' = \{<\beta(a^{p'}\bar{a}, b^{n'}\bar{a}), \neq>, \alpha a^{n'} b^{p'} \bar{a}) | n \text{ et } p \in N\}$

donc $\hat{B} \circ \hat{B}' = \{(\alpha a^n b^p \bar{a}, \alpha a^p b^n \bar{a}) | n \text{ et } p \in N\}$.

On peut se demander si il existe un bimorphisme C - aussi général qu'il faut - tel que $\hat{C} = \hat{B} \circ \hat{B}'$. La réponse est non. Intuitivement, la raison en est la suivante : $\hat{B} \circ \hat{B}'$ 'permute'(sur la branche $\alpha a^n b^p \bar{a}$) les a avec les b ; grosso modo, $\hat{B} \circ \hat{B}'$ transforme $a^n b^p$ en $a^p b^n$. Imaginons que cette transformation soit réalisée par un bimorphisme. Cela nécessiterait de 'mémoriser n', ce qui est impossible si $\mathcal{F}$ est une famille telle que, pour tout $F \in \mathcal{F}$, l'ensemble des branches de F soit un langage reconnaissable. Or, pour toutes les familles raisonnables, c'est le cas. [La contrainte dans les familles raisonnables de clôture par intersection nous amène en effet à considérer les 'petites' familles de langages closes par intersection (les langages étant les langages de branches associées). Or, la classe reconnaissable est dans les langages la seule 'petite'classe (id, incluse dans les algébriques) intéressante à avoir cette propriété. C'est pourquoi on s'impose dans la définition des familles raisonnables, la 'reconnaissabilité des composantes'.]

Or, ϕ et Ψ sont séparés sur F à délai 2 'au sens de l'image', mais non séparés à délai borné 'au sens du domaine'.

L'exemple ci-dessus montre qu'avec cette définition de la séparation, on obtient par composition de bimorphismes des phénomènes qui ne peuvent être décrits à l'aide d'un seul bimorphisme, c'est le genre de situation que nous voulons justement éviter (voir critique de la notion de bimorphisme en conclusion de notre travail).

Il est facile de voir que, si on suppose les morphismes régulés, les deux définitions de la séparation à délai borné coïncident. Ainsi avions nous 3 options possibles :

- considérer la classe des morphismes séparés à délai borné au sens de l'image : cette classe est trop large d'après ce qui précéde.

- considérer la classe des morphismes séparés à délai borné au sens du domaine : cette classe est non close par composition, ce qui est génant.

- considérer la classe des morphismes régulés séparés à délai borné : nous verrons dans la suite que c'est le bon choix !

V) Remarque : Remarquons encore que la notion de séparation à délai donné n'est pas close, que seule l'est celle de séparation à délai borné (sans hypothèse de régulation). En gros, les délais s'ajoutent en effet.///

I-2-1-2-3 Conservation de la régulation par composition :

Le lecteur établira facilement que :

I) Soit ϕ un k-morphisme p-régulé sur F, Ψ un k'-morphisme q-régulé sur ϕ(F). Alors $\phi \circ \Psi$ est un kk'-morphisme pq-régulé sur F.///

Ce lemme traduit bien la stabilité de la régulation par composition. Informellement, la preuve s'établit comme suit : Soit $\bar{t}$ de profondeur homogène pq. $\phi(\hat{t})$ contient un sous arbre initial $\hat{u}$ de profondeur homogène q. Donc $\Psi(\hat{u})$, et par conséquent $\Psi(\phi(\hat{t}))$, a toutes ses composantes strictes///

II) Remarque : Comme dans le cas de la séparation, c'est la régulation et non la p-régulation qui est conservée (les coefficients se multiplient ici).

I-2-1-2-4 Propriétés relatives à la complétude :

I) Domaine de $[\nu]$-complétude d'un k-morphisme .

a) Définition :

Soit ϕ un k-morphisme. On appelle **domaine de $[\nu]$-complétude** de ϕ la forêt

$D(\phi) = \{\tilde{t} \in \tilde{T}(\Sigma)_o \mid \phi \text{ est } [\nu]\text{-complet sur } t\}$

b) lemme :

Soit ϕ un k-morphisme de Σ dans Δ. Il existe une forêt reconnaissable K telle que $D(\phi) = K^{\otimes}$

Preuve : L'idée est de construire un automate qui bloque sur une branche ssi celle-ci n'est pas lue.

Soit, pour tout $a \in \Sigma$, $\phi(a) = <\tilde{t}^1_a.\theta^1_a,.., \tilde{t}^k_a.\theta^k_a> = \tilde{t}_a.\theta_a$

On construit un reconnaisseur descendant D d'état initial $\neq$ et dont les autres états sont les parties de $[k]$. Les régles sont définies par :

- $\forall\ a \in \Sigma_n,\ \neq [a(x_1,.., x_n)] \to a(q_1[x_1],.. q_n[x_n])$

avec $q_i = \bigvee^{i/[\nu]}<\theta a>$, **ssi aucun** $q_i = \emptyset$

- $\forall\ a \in \Sigma_n,\ q[a(x_1,.., x_n)] \to a(q_1[x_1],.., q_n[x_n])$

avec $q_i = \bigvee^{i/q}<\theta a>$, **ssi aucun** $q_i = \emptyset$

- $q[a] \to a$ ssi $q \neq \emptyset$

D a la propriété P1 suivante, évidente par construction :

P1) $\neq [\tilde{t}(x_1,.. x_n)] \mid\frac{*}{D}\ \tilde{t}(q_1[x_1],.., q_n[x_n])$ ssi $q_i = \bigvee^{i/[\nu]}<\theta>$est $\neq \emptyset$ pour tout $i \in [n]$ (avec $\phi(\tilde{t}) = \hat{u}.\theta$).

On en déduit que ϕ est compléte sur $t \in T(\Sigma)^1$ ssi t appartient à la forêt reconnaissable K reconnue par D.

Comme $\tilde{T}(\Sigma)$ est décomposable, on en déduit que $D(\phi) = K^{\otimes}$.///

La remarque (I-1-1-2-14) signalait que la complétude ne se conservait pas par composition dans le magmoïde. En effet, sa conservation exige un contrôle reconnaissable(qui **n'est pas local**) effectué par D ci-dessus. On a néanmoins la propriété suivante :

II) lemme :

Soit deux torsions ζ et θ telles que ζ est k_2-compléte et k_1-compléte, alors $\zeta k_2(\theta)$ est k_1k_2-compléte.

Preuve : Par hypothèse, $\zeta.k_2^{\otimes}$ et $\theta.k_1^{\otimes}$ sont surjectifs. Il s'agit de prouver que $\alpha = \zeta.k_2(\theta).(k_1k_2)^{\otimes}$ est surjectif.Mais nous savons que $(k_1k_2)^{\otimes} = k_2^{\otimes}.k_1^{\otimes}$ et $k_2(\theta).k_2^{\otimes} = k_2^{\otimes}.\theta$ (I-1-1-2-6- I)) d'où $\alpha=(\zeta.k_2^{\otimes}).(\theta.k_1^{\otimes})$ et ν est donc surjectif/// (On remarquera ici l'usage commode qu'il est fait de la notion 'magmoïdienne' de torsion).

Nous déduisons de ce lemme sur les torsions l'important corollaire suivant sur les morphismes.

III) Corollaire :

Stabilité de la complétude par composition :

a) Soit ϕ_1 un k_1-morphisme $[\nu]$ complet sur K_1, ϕ_2 un k_2-morphisme $[\mu]$ complet sur K_2. Alors $\phi_1 \circ \phi_2$ est $[k_2\nu]$ complet sur $\phi_1^{-1}(K_2) \cap K_1 = K$

(En particulier, si $\phi_1(K_1) \subset K_2$, $\phi_1 \circ \phi_2$ est $[\nu k_2]$ complet sur K_1)

b) Si ϕ_1 est un 1-morphisme complet et si ϕ_2 est un k_2 morphisme $[\mu]$ complet sur K_2, alors $\phi_1 \circ \phi_2$ est $[\mu]$ complet sur $\phi_1^{-1}(K_2)$

Preuve : a) Soit $\tilde{t} \in I(K)$. $\phi_{1_{[\nu]}}(\tilde{t})$ est de la forme $\tilde{u}.\theta$ avec θ qui est k_1-complet car $\tilde{t} \in K_1$.

On a alors $\phi_2(\phi_{1_{[\nu]}}(\tilde{t})) = \phi_2(\tilde{u}).\ \phi_2(\theta) = \tilde{v}.\zeta.k_2(\theta)$ avec ζ étant k_2-complet car $\tilde{u} \in K_2$. Il reste à remarquer que, d'après le lemme II) précédant, $\zeta.k_2\ (\theta)$ est $k_1\ k_2$-complet.

b) On raisonne comme précédemment en considérant $\phi_{2_{[\mu]}}(\phi_1(\tilde{t})$. Posant $\phi_1(\tilde{t})=\tilde{u}.\theta$, on a $\phi_{2_{[\mu]}}(\tilde{u}.\theta) = \phi_{2_{[\mu]}}(\tilde{u}).k_2(\theta)$. Si on pose $\phi a_{[\mu]}(\tilde{u}) = \tilde{v}.\zeta$, on a ζk_2-complet et θ 1-complet par hypothèse, donc $\zeta.k_2(\theta)$ est k_2 complet d'après le lemme II), ce qui prouve que $\phi_1 \circ \phi_{2_{[\mu]}}$ est $[\mu]$-complet. Mais comme ϕ_1 est un 1-morphisme, on sait que $\phi_1 \circ \phi_{2_{[\mu]}} = (\phi_1 \circ \phi_2)_{[\mu]}$ d'après (I-2-1-1-2- II) ; c'est cette propriété qui assure la conclusion.

IV) Remarque :

Il est facile de voir qu'on a pas $\phi_1 o \phi_2$ $[\mu]$-complet si ϕ_1 est complet de coefficient de dilatation supérieur à 1 et ϕ_2 $[\mu]$-complet.

D'autre part, remarquons que l'application de a) à $k_1 = \nu = 1$ ne donne pas b) mais $\phi_1 \circ \phi_2$ étant seulement $[k_2]$ complet.///

Nous enonçons simplement dans la section suivante des résultats qui seront des outils de preuve mais n'ont pas grand intérêt en eux-mêmes. Aussi, les preuves sont-elles laissées au lecteur ; de plus elles "coulent de source"! (aucune difficulté, on aligne les définitions-comme c'était d'ailleurs le cas dans les preuves ci-dessus!)

I-2-1-2-5 Divers résultats de composition :

a) le composé de deux morphismes marqués est marqué

b) le composé de deux morphismes sans feuilles est sans feuilles

c) si ϕ est un morphisme p-homogène et Ψ un morphisme q-homogène, $\phi \circ \Psi$ est pq-homogène.
Si ϕ et Ψ sont quasi-homogène, $\phi \circ \Psi$ est quasi-homogène

d) le composé de deux morphismes sans torsions est sans torsions

e) le composé de deux (respectivement quasi) démarquages (resp.propres) est un (resp.quasi) démarquage (resp.propre).

I-2-1-2-6 Conclusion de I-2-1-2 et conventions :

A ceci près qu'il faut considérer des morphismes à délai de séparation borné **et régulés**, nous pouvons dire en conclusion que :

toutes les classes des morphismes introduites jusqu'ici sont closes par composition.

Il s'en suit la même propriété pour les intersections de classes et nous utiliserons par la suite toutes ces propriétés de clotûre sans les expliciter. Il en sera de même pour tous les corollaires évidents qui en découlent (cas particuliers où $k = 1$, $\nu = k$...)

I-2-1-3 Propriétés de décomposition :

La section (I-2-1-2) précédente conduisait à une conclusion dont la signification et l'intérêt étaient immédiats. Les résultats que nous allons obtenir ici seront des outils beaucoup plus techniques, les preuves ne sont plus si faciles, aussi les détaillons nous.

I-2-1-3-1 Réduction de la 'profondeur' des morphismes :

Le but est ici de remplacer un morphisme donné par une composition de morphismes 'plus simples'.

I) Définition :

Soit ϕ un morphisme de Σ dans Δ. La quantité $\sup_{a \in \Sigma} (\text{prof}\ (\phi(a)))$, notée prof (ϕ), sera dite la **profondeur de ϕ**.

II) Lemme :

Soit ϕ un 1-morphisme linéaire complet strict de profondeur supérieure à 2. Il existe alors deux 1-morphismes également linéaires complets stricts, notés Ψ_1 et Ψ_2, tels que :

- **$\phi = \Psi_1 \circ \Psi_2$**
- **prof $(\Psi_1) <$ prof(ϕ)**
- **prof $(\Psi_2) \leq 2$**
- **Ψ_1 et Ψ_2 sont sans feuilles si Ψ l'est**

Preuve :

a) Soit ϕ un morphisme de Σ dans Δ. Pour tout $a \in \Sigma$, nous posons $\phi(a) = \tilde{t}_a . \theta_a$ avec $\tilde{t}_a \in \tilde{T}(\Sigma)^1$. Comme ϕ est 1-lcs, θ_a est une permutation.

b) $\tilde{t}_a$, qui est strict car ϕ l'est, se décompose de façon unique en :

$\tilde{t}_a = \alpha_a(\tilde{t}_a^{\,1} \otimes .. \otimes \tilde{t}_a^{\,n_a})$ avec

$\alpha_a = \alpha_a^o . (\alpha_a^1 \otimes .. \otimes \alpha_a^{v_a})$ où $\alpha_a^o \in \Sigma$, $\alpha_a^i \in \Sigma \cup \{x_1\}$

et α_a^i tel que si $\alpha_a^i = x_1$, alors $\tilde{t}(\deg \alpha_a^1 + .. + \deg \alpha_a^{i-1} + 1) = x_1$

Intuitivement, cette décomposition explicite le fait de couper $\tilde{t}_a$ à la profondeur homogène 2, α_a étant le sous-arbre (homogène de profondeur 2 ou non si des branches de t_a n'ont que la profondeur 1) initial correspondant de $\tilde{t}_a$.

c) Définissons un alphabet Γ' disjoint de Σ par :

$\Gamma' p = \{\bar{\alpha}_a \mid \alpha_a \in \tilde{T}(\Delta)_p\}$

On pose $\Gamma = \Gamma' \cup \Sigma$

Définissons Ψ_1 de Σ dans Γ par :

$\Psi_1(a) = \bar{\alpha}_a.(\tilde{t}_a^1 \otimes .. \otimes \tilde{t}_a^{n_a}).\theta_a$

et Ψ_2 de Γ dans Δ par :

$\Psi_2(\bar{\alpha}_a) = \alpha_a$, Ψ_2 = identité sur Σ.

Intuitivement, on obtient $\Psi_1(a)$ en remplaçant dans $\phi(a)$, le 'sous-arbre initial de profondeur 2' noté α_a, par une seule lettre (nouvelle) notée $\bar{\alpha}_a$. La profondeur de Ψ_1 est donc bien réduite de 1 par rapport à celle de ϕ.
Ψ_2 est l'identité sauf qu'il associe à $\bar{\alpha}_a$ le sous arbre initial α_a qui est de profondeur ≤ 2.
Il est évident que $\phi = \Psi_1 \circ \Psi_2$, que Ψ_1 et Ψ_2 sont lcs. Les trois premiers points du lemme sont établis.

d) Supposons ϕ sans feuilles. Alors, si a $\notin \Sigma_o$, $\phi(a)$ est sans feuille.
Tout sous-arbre d'un arbre sans feuille étant sans feuilles , les $\tilde{t}_a^i$ et α_a sont sans feuille , donc Ψ_1 et Ψ_2 sont sans feuille .///

C.Q.F.D.

III) Corollaire : Réduction de la profondeur par décomposition d'un 1-morphisme linéaire complet strict :

Soit ϕ un 1-morphisme linéaire complet strict de profondeur $\nu + 1$, il existe des 1-morphismes linéaires complets stricts de profondeur inférieure a! égale à 2, $\phi_1,..,\phi_\nu$ tels que :

- $\phi = \phi_1 \circ .. \circ \phi_\nu$
- **les ϕ_i sont sans feuille si ϕ l'est.**

La preuve s'établit trivialement en itérant le lemme II)

I-2-1-3-2 Convention :

Nous utiliserons couramment des énoncés du genre :
"Soit un morphisme ϕ tel .... alors, il existe un morphisme Ψ de **même type que ϕ** tel que ......"

Ψ du **même type** que ϕ signifie que Ψ est respectivement complet, régulé, séparé à délai borné, strict, linéaire si ϕ l'est (on se réfère donc aux concepts introduits précédemment à propos des morphismes). Evidemment, si il y a risque d'ambiguité (par exemple sur les composantes pour la [ν]-complétude) on explicitera.

De même, on dira que Ψ **est sur G du même type que ϕ sur F** si Ψ est respectivement complet, régulé, séparé à délai borné sur G quand ϕ l'est respectivement sur F.

Remarque : On dira encore que ϕ et Ψ sont du même type α, etc... pour dire 'd'un certain type' c'est à dire appartenant à une intersection de classes prises parmi les **'linéaires', 'séparé à délai borné', 'régulé', '[ν]complet', et leurs variantes (délai fixé, strict, sur une forêt donnée).** Ces notions sont en effet celles qui nous intéressent finalement. Mais les notions 'intermédiaires', de caractère technique comme 'homogène', 'sans torsion', 'sans feuille', 'marqué' **ne sont pas** considérés comme des types.

I-2-1-3-3 Le lemme suivant procéde du même esprit que le précédent : "décomposer la complexité d'un morphisme".

lemme : **Soit ϕ un k-morphisme de type α sur K. Il existe un k-morphisme Ψ marqué de même type α sur K, de profondeur 1, et un 1-morphisme ζ linéaire complet strict sans torsions, tels que $\phi = \Psi \circ \zeta$**

Preuve : Soit ϕ de Σ dans Δ.

Posons $\phi(a) = \tilde{t}_a.\theta_a = \langle \tilde{t}^1_a.\theta^1_a, .. \tilde{t}^k_a.\theta^k_a \rangle$

Nous introduisons un nouvel alphabet Δ défini par :

$\Delta_p = \{\bar{t}^i_a | \tilde{t}^i_a \text{ strict et} \in T(\Gamma)^1_p\}$

Nous définissons Ψ de Σ dans Δ par :

$\forall\, a \in \Sigma,\ \Psi(a) = \langle \bar{t}^1_a.\theta^1_a, \ldots, \bar{t}^k_a.\theta^k_a \rangle$

et ζ de Δ dans Γ par :

$\forall\, \bar{t}^i_a \in \Delta,\ \ \zeta.(\bar{t}^i_a) = \tilde{t}^i_a$

Le lecteur concluera sans peine ///

I-2-1-3-4 Morphismes marqués :

I) Tout k-morphisme ϕ se décompose en $\phi = \phi_m \circ \delta$ où ϕ_m est un k-morphisme marqué, de même type sur même forêt que ϕ, et δ un démarquage propre.

En effet, on peut par exemple pour tout $a \in \Sigma$ marquer les n noeuds de $\phi(a)$ par "a_1",......,"a_n" et effacer ces marques par δ ///

II) Soit δ un démarquage propre. $\delta \circ \phi$ est du même type que ϕ ///

III) lemme :

Soit $\phi = \phi_1 \circ \phi_2 \circ .. \circ \phi_{\nu+1}$. pour tout $i \in [\nu]$, on peut supposer les ϕ_i marqués sans en changer le type.

Preuve : Prouvons par récurrence sur $j \in [\nu]$ qu'on peut toujours supposer les ϕ_i marqués pour tout $i \leq j$.

- si $j = 1$, ϕ_1 se décompose d'après I) en $\phi_1 = \phi'_1 \circ \delta$

où ϕ'_1 est marqué du même type que ϕ_1. D'après II) $\delta \circ \phi_2$ est du même type que ϕ_2, le résultat est établi (en rebaptisant $\delta \circ \phi_2$ sous le nom de ϕ_2, c'est à dire en affectant $\phi_2 := \delta \circ \phi_2$)

- supposons le résultat établi pour $j - 1$

Reste à prouver qu'on peut supposer ϕ_j marqué. Or, comme ci-dessous, $\phi_j = \phi'_j \circ \delta$ où ϕ'_j est marqué du même type que ϕ_j. On conclu en posant $\phi_{j+1} := \delta \circ \phi_{j+1}$.///

I-2-1-3-5 Lemme :

Soit ϕ un 1-morphisme. Il existe un 1-morphisme complet strict Ψ et un démarquage ε tels que $\phi = \Psi \circ \varepsilon$
De plus, ε est respectivement strict, complet si ϕ l'est.
Ψ est linéaire si ϕ l'est.

Preuve : $\forall a \in \Sigma_n$, posons $\phi(a) = \tilde{t}_a . \theta_a$.

a) Construction de Ψ et ε

Cas 1 : $\tilde{t}_a = x_1$. On introduit un nouveau symbole $\bar{a}$ de même degré inférieur que a et on pose :

$\Psi a = \bar{a}.1_n$, $\varepsilon(\bar{a}) = \theta_a$.

<u>Cas 2</u> : $\tilde{t}_a = \alpha_a.\tilde{u}_a$ avec $\alpha_a \in \Sigma$

Posons $E_a = \{i \in [n] \mid i \notin \text{Image de } [n] \text{ par } \theta_a\}$ et Card $(E_a) = n_a$

On introduit un nouveau symbole $\bar{\alpha}_a$ de degré inférieur égal à $\nu_a + n_a$, où $\nu_a = \text{dinf } \alpha_a$.

On définit θ'_a comme suit :

- En supposant $\theta_a \in \theta^p_q$, θ'_a appartient alors à $\theta^{p+n_a}_{q+n_a}$

- $\theta'_a = \theta_a$ sur $[p]$ et θ'_a envoie injectivement $[p+1, p+n_a]$ sur E_a

Posons enfin :

$\Psi(a) = \bar{\alpha}_a(\tilde{u}_a \otimes 1_{n_a}).\theta'_a$

et $\varepsilon(\bar{\alpha}_a) = \alpha_a . 1^{\nu_a}_{\nu_a+n_a}$, ε= identité ailleurs.

b) <u>Conclusion de la preuve</u> :

- Dans les deux cas, on a $\phi(a) = (\Psi \circ \varepsilon)$ (a) par construction

- Ψ est complet strict, linéaire si ϕ l'est car θ'_a est injective si θ_a l'est.

- Si ϕ est strict, le cas 1 disparait et ε est strict.

- Si ϕ est complet, pour tout a, θ_a est alors complet, donc $n_a = 0$ et ε est complet. ///

<u>C.Q.F.D.</u>

<u>I-2-1-3-6 Lemme</u>

Soit ϕ un 1-morphisme linéaire, complet, strict. Il existe un 1-morphisme linéaire complet strict sans feuille Ψ, et un quasi-démarquage propre tels que $\phi = \Psi \circ \varepsilon$

<u>Preuve</u> : On marque ϕ en ϕ_m. δ_m est le démarquage propre associé - on a donc $\phi = \phi_m \circ \delta_m$.

Pour a fixé de Σ, posons $\phi_m(a) = \tilde{t}.\theta$. Tout noeud α de $\tilde{t}$ est sommet d'un sous-arbre $\tilde{u}$ de $\tilde{t}$. $\tilde{u}$ se décompose en $\tilde{u}=\alpha(\tilde{u}_1 \otimes .. \otimes \tilde{u}_p)$. Soit $(i_1,..i_j)$ la suite d'indices de $[p]$ pour lesquels $\tilde{u}_{i_k}$ n'est pas de degré inférieur nul. On substitue, dans $\tilde{t}$, $\bar{\alpha}(\tilde{u}_{i_1} \otimes .. \otimes \tilde{u}_{i_j})$ à $\tilde{u}$($\bar{\alpha}$ est un nouveau symbole de degré inférieur j). En effectuant cette opération pour tous les noeuds de $\tilde{t}$, on obtient un arbre $\tilde{t}'$ dont tout sous arbre contient au moins une variable. $\tilde{t}'$ est donc sans feuilles . $\tilde{t}'$ et $\tilde{t}$ ont même degré inférieur car celui-ci n'est pas modifié par les substitutions effectuées, qui 'suppriment' les seuls arbres sans variables.

Posons $\Psi(a) = \tilde{t}'.\theta$

Définissons ε_1 par $\varepsilon_1(\bar{\alpha}) = \alpha(\tilde{v}_1 \otimes .. \otimes \tilde{v}_p)$

où $\tilde{v}_k = \tilde{u}_k$ si $k \notin (i_1,.., i_j)$ et $\tilde{v}_k = x_1$ sinon.

Il est alors facile de vérifier que $\varepsilon_1(\tilde{t}') = \tilde{t}$.

ε_1 est un quasi démarquage propre, donc $\varepsilon = \delta_m \circ \varepsilon_1$ également . On a bien Ψ linéaire complet strict sans feuille et $(\Psi \circ \varepsilon)a = \delta_m(\tilde{t}).\theta = \phi(a)$. ///

C.Q.F.D.

I-2-1-3-7 Conclusion de I-2-1-3 :

Ces résultats de décomposition ont le mérite de 'séparer les propriétés qui peuvent l'être par décomposition'. Le lecteur pourra vérifier que la plupart des résultats ci-dessus ne se généralisent pas ou que d'autres décompositions auxquelles on pourrait penser, proches de celles citées ci-dessus, n'existent pas. ///

I-2-1-4 Rapports entre fidélité, quasi-complétude et régulation :

I-2-1-4-1 Définitions :

I) Fidélité :

Une relation $R \subset A \times B$ est fidèle ssi

$\forall\ b \in B$, Card $\{a \in A | (a,b) \in R\} < +\infty$ .///

Cette définition n'est qu'un rappel. Les transductions rationnelles fidèles de langages ont déjà été étudiées. La fidélité est également importante dans les transductions de séries formelles, où elle assure l'existence des coefficients de l'image.

II) Régulation par composante :

Rappelons que nous avons donné la définition de la régulation en gros comme suit : "ϕ est p-régulé sur t ssi, pour tout sous-arbre t' de t, de profondeur homogène p, $\phi(t)$ a **toutes** ses composantes strictes". La définition de la régulation par composante s'obtient en remplaçant "toutes" par "au moins une".

I-2-1-4-2 Lemmes :

I) Soit ϕ un k-morphisme quasi-complet et régulé sur K. Alors la relation associée à la restriction de ϕ à K est fidèle.

En effet, fixons nous u et considérons t tel que $\phi(t) = u$. Le degré supérieur de t est fixé par celui de u. Soit t' le plus grand sous-arbre initial de t lu par ϕ. Supposant ϕ p-régulé, la profondeur de t' est majorée par p fois celle de u. Donc, l'ensemble des t' lus par ϕ vérifiant $\phi(t') = u$ est fini.
D'autre part, par définition de la quasi-complétude, l'ensemble des $t \in K$ admettant t' pour sous-arbres initial est fini, donc $\{t \in K, \phi(t) = u\}$ est fini. ///

C.Q.F.D.

II) Soit K une forêt reconnaissable et soit ϕ fidèle sur K (c'est à dire tel que $\{(t,\phi(t)) | t \in K\}$, fidèle). Alors, ϕ est quasi-complet et régulé par composante sur K

Preuve :
a) supposons ϕ non quasi-complet sur K. Il existe $\tilde{t} \in I(K)$, x_i non lu par ϕ tels qu'il existe une infinité de $\tilde{t}'$ tels que $\tilde{t}_{x_i} \tilde{t}' \in I(K)$.
Soit R un reconnaisseur de K. Ce qui précéde implique qu'il existe au moins un mouvement $q_o[\tilde{t}'_{x_i}] \overset{*}{\vdash} \tilde{t}(q[x_i])$ où q est tel que F = {t' qui sont reconnus par R avec q comme état initial} est infini. Comme $\tilde{t} \in I(K)$,

il existe au moins un mouvement de R se terminant, en particulier sur toutes les autres branches de $\tilde{t}$ (que celle d'extrémité x_i). On a donc l'existence de $\tilde{u}'(x_1) \in T(\Sigma)_1^1$, tel que $q_o[(\tilde{u}(x_1)] \mid\!\overset{*}{-} \tilde{u}' q[x_1]$.

Or, x_1 n'étant pas lu par ϕ, on sait que $\forall\, v \in T(\Sigma)_o^1$, $\phi(\tilde{u}.v)$ est constant, donc $\phi(\tilde{u}.F)$ est réduit à un élément, F étant infini, cela nie la fidélité.

b) Supposons ϕ non régulé par composante. $\forall\, p$, $\exists\, \tilde{t}_p$, sous arbre d'un arbre de K, tel qu'aucune composante de $\phi(\tilde{t}_p)$ n'est stricte et $\tilde{t}_p$ est de profondeur homogène p. Les $\tilde{t}_p$ sont donc tous distincts.

<u>1er cas</u> : Si une infinité de $\tilde{t}_p$ n'est pas lue, il existe q tel que, pour une infinité de p, $\exists\, \tilde{t}'_p(x_{i_p}) \in \mathcal{I}(K)$ vérifiant $q_o[t'_p] \mid\!\overset{*}{\underset{R}{-}} \tilde{t}'_p(..q[x_{i_p}])$ et $\tilde{t}'_p.\tilde{t}_p \in \mathcal{I}(K)$. par propriété de la reconnaissabilité, on a évidemment, pour un p_o fixé, $\tilde{t}'_{p_o}.\tilde{t}_p \in \mathcal{I}(K)$ pour une infinité de $\tilde{t}_p$ qui ne sont pas lus, ce qui nie la quasi-complétude de ϕ.

<u>2ème cas</u> : Si seulement un nombre fini de $\tilde{t}_p$ ne sont pas lus, il existe une infinité de $\tilde{t}_p$ lus. Comme ci-dessus, il existe un $\tilde{t}_{p_o}$ indépendant de p tels que $\tilde{t}_{p_o}.\tilde{t}_p \in \mathcal{I}(K)$. Posons $\tilde{t}_p \in T(\Sigma)^1_{q_p}$. Si ϕ est un k-morphisme, on a donc $\phi(\tilde{t}_p) \in \Theta^k_{k_{q_p}}$ (puisqu'aucune composante de l'image n'est strict).

Posons donc $\phi(\tilde{t}_p) = \langle x_{p_1}, .., x_{p_k} \rangle$ les $p_i \in [k_{q_p}]$

Posons $p_i = kp'_i + p''_i$.

Seules les variables $x_{p'_1}, ..., x_{p'_k}$ de $\tilde{t}_p$ sont lues.

D'autre part, comme $\tilde{t}_{p_o}.\tilde{t}_p \in \mathcal{I}(K)$, il existe un mouvement du reconnaisseur R de K de la forme :

$$(M) \qquad q_o[\tilde{t}_{p_o}.\tilde{t}_p(x_1, .., x_{n_p})] \mid\!\overset{*}{\underset{R}{-}} \tilde{t}_{p_o}.\tilde{t}_p(q_{j_{p_1}}[x_1], .., q_{j_{p_{n_p}}}[x_{n_p}])$$

tel que, pour tout $j_{p_{n_p}}$, il existe $\tilde{u} \in T(\Sigma)_o$ vérifiant

$q_{j_{p_{n_p}}}[\tilde{u}] \mid\!\overset{*}{\underset{R}{-}} \tilde{u}'$ (c'est à dire, $\tilde{t}_{p_o}.\tilde{t}_p$ étant initial, le mouvement de reconnaissance se termine).

A tout état $q \in Q$ et apparaissant dans un tel mouvement, on peut donc au moins associer un $\tilde{u}$. Nous en fixerons un arbitraire, noté $\tilde{u}_q$.
Pour tout p, considérons une suite $q_{\bar{p}_1}, \ldots, q_{\bar{p}_k}$ d'états associés à

$x_{p'_1}, \ldots x_{p'_k}$ dans un mouvement (M) comme ci-dessus. Comme

$x_{p'_1}, \ldots, x_{p'_k}$ sont les seules variables lues de $\tilde{t}_p$, il existe $t''_p \in T(\Sigma)_o$
tel que $\tilde{t}_{p_o}.\tilde{t}_p.t''_p \in K$ et $\phi(\tilde{t}_p.t''_p) = \langle \phi_{p''_1}(u_{q_{\bar{p}_1}}), \ldots, \phi_{p''_k}(u_{q_{\bar{p}_k}}) \rangle$

(où ϕ_i désigne la $i^{\text{ème}}$ composante de ϕ).
(Intuitivement, on construit $\tilde{t}_p.t''_p$ en substituant à chaque $x_{p'_i}$, le $u_{q_{\bar{p}_i}}$ choisi précédemment et n'importe quoi de compatible avec K ailleurs puisque seuls $x_{p'_1}, \ldots x_{p'_k}$ sont lus).

$\{\tilde{t}_{p_o}, \tilde{t}_p.t''_p\}$ est donc un ensemble infini d'image finie ($\phi(\tilde{t}_{p_o}.\tilde{t}_p.t''_p)$ est de la forme $\phi(\tilde{t}_{p_o}) \langle \phi_{p''_1}(u_{q_{\bar{p}_1}}), \ldots \phi_{p''_k}(u_{q_{\bar{p}_k}}) \rangle$)

La fidélité est contredite ///

C.Q.F.D.

I-2-1-4-3 Propriétés de composition :

I) Il est évident que :

La composée de deux relations fidèles est fidèle.///

II) Soit ϕ un morphisme régulé quasi complet sur F reconnaissable et Ψ un morphisme quasi complet sur $\phi(F)$. Alors $\phi \circ \Psi$ est quasi complet sur F.

Preuve : Soit $\tilde{t} \in I(F)$ et x_i une variable de $\tilde{t}$ non lue par $\phi \circ \Psi$. En gros, deux cas peuvent se présenter :

- Soit que x_i n'est pas lue par ϕ, on sait qu'aucun $x_{k(i-1)+1} \ldots x_{k(i-1)+k}$ n'est lu par Ψ (ϕ est un k-morphisme).

1er cas : x_i n'est pas lu par ϕ : Alors, comme ϕ est quasi complet, l'ensemble des u tels que $\tilde{t}_{x_i}.u \in I(F)$ est fini. La conclusion est établie.

2ème cas : x_i est lu par ϕ mais aucune des k-composantes de son image par ϕ n'est lue par Ψ. Ψ étant quasi-complet, l'ensemble des u_j

qui peuvent se substituer à une occurrence donnée de $x_{k(i-1)+j}$ dans $\phi(\tilde{t})$ pour constituer un arbre de $I(F)$ est fini.
D'autre part, ϕ étant régulé quasi-complet sur F reconnaissable, ϕ est fidèle d'après (I-2-1-4-2), donc l'ensemble des u d'image $<u_1,..,u_k>$ est fini, ce qui échève la preuve ///

C.Q.F.D.

I-2-1-4-4 Conclusion de I-2-1-4 : Rôle de la reconnaissabilité, résultats "négatifs" :

I) Les résultats précédents s'étendent au cas où la forêt appartient à une famille raisonnable. Il suffit pour cela de remarquer qu'une forêt 'raisonnable' a toutes 'ses composantes reconnaissables'.

II) Le lemme I-2-1-4-2 II) est faux si K n'est pas raisonnable .
En effet, prenons par exemple :

$K = \{\alpha(a^n\bar{a}, b^n\bar{a}) | n \in N\}$

et $\phi(\alpha(x,y) = x$, $\phi(a(x)) = a(x)$, $\phi(\bar{a}) = \bar{a}$, $\phi(b(x)) = x$

ϕ n'est pas régulée par composante sur K car les sous-arbres $b^n(x)$, arbitrairement profonds, de K, ou t pour image x par ϕ!
ϕ n'est pas quasi-complet sur K, car $\phi(\alpha(x, y)) = x$, donc y n'est pas lu et, pour tout n, $\alpha(x,b^n(y)) \in I(F)$.
Pourtant, ϕ est fidèle et même injective sur K puisque
$\phi\ \alpha(a^n\bar{a}, b^n\bar{a}) = a^n\bar{a}$.
De fait, la reconnaissabilité, qui intervient dans la preuve de (I-2-1-4-2 II), est essentielle. Elle traduit l'impossibilité de mémoriser sur une sous forêt lue substituée en x, une infinité d'informations sur une sous-forêt non lue substituée en y (ici, bijection entre les branches).///

III) Remarquons qu'il n'y a pas d'équivalence simple entre les notions de quasi-complétude, fidélité et régulation. Les lemmes I-2-1-4-2 I) et II) ne sont en effet pas réciproques l'un de l'autre.

IV) Enfin, (I-2-1-4-3 II) est faux si on retire l'hypothèse de régulation pour ϕ.

Il suffit pour le voir de prendre :

$F = \{\alpha(a^n\bar{a},\bar{a}) \mid n\in N\}$

$\phi(\alpha(x,y)) = \alpha(x,y)$, $\phi a(x) = x$ et $\phi(\bar{a}) = \bar{a}$

$\Psi\alpha(x, y) = y$, $\Psi\, a(x) = a(x)$ et $\Psi(\bar{a}) = \bar{a}$

ϕ est complet, donc quasi-complet sur F.

Ψ est quasi complet sur $\phi(F) = \{\alpha(\bar{a},\bar{a})\}$ puisque $\phi(F)$ est fini.

Pourtant $\phi \circ \Psi$ n'est pas quasi complet sur F car

$(\phi \circ \psi)\, (\alpha(x,y)) = y$ et $\{\xi \mid \alpha(\xi,y)\in I(F)\} = \{a^n\bar{a} \mid n\in N$ est infini.$\}$

$\boxed{\text{I-2-1-5 'Morphismes et magmoïde des parties' :}}$

Nous donnons d'abord un lemme contenant de nombreux petits résultats. Nous commentons ensuite et tirons les conséquences.

I-2-1-5-1 'Lemme des morphismes et des parties'

Soit ϕ un k-morphisme de Σ dans Δ, soit A et B $\in P(T(\Sigma))$.

I) $\{a.b \mid a\in A,\ b\in B\} \subset A.B$

II) En général l'inclusion est stricte. On a l'égalité si A est linéaire.

III) $\{\phi(a.b) \mid a\in A,\ b\in B\} \subset \phi(A.B)$

IV) En général, l'inclusion est stricte, on a l'égalité si A est linéaire.

V) $\phi(A.B) \subset \phi(A).\phi(B)$

VI) On a l'égalité si ϕ est linéaire et si, pour tout $a\in A$, $\phi(a)$ a toutes ses composantes non vides (cette dernière condition est toujours vérifiée si ϕ est un morphisme de Σ dans Δ, mais nous la précisons en vue d'appliquer le lemme aux substitutions).

VII) $\phi^{-1}(A'.B') \supset \phi^{-1}(A').\,\phi^{-1}(B')$

VIII) En général, l'inclusion est stricte. On a l'égalité si ϕ est un démarquage.

Preuve :

I) et II) ont été prouvés en (I-1-2-1-9).

III) et IV) sont des corollaires de I) et II). En effet

$\{\ \phi(a.b)|b\epsilon B\} \ = \ \phi\ \{a.b|b\epsilon B\} \ \subset \ \phi(a.B)$ puisque

$\{\ a.b|b\epsilon B\} \ \subset a.B$ d'après I) (voir I-1-2-1-9). Si a est linéaire, on a l'égalité d'après II).

V) Posons $a = \tilde{a}.\theta$ avec $\tilde{a}\epsilon\tilde{T}(\Sigma)^p_q$ et $\theta \epsilon \Theta^q_r$

On sait qu'on peut décomposer B en $B = B_1 x \ldots x B_r$ où $B_i \subset T(\Sigma)^1$

(d'après la structure de $P(T(\Sigma))$).

Posons $\phi(\tilde{a}) = \tilde{a}'.\theta'$ et $\phi(b^i_j) = (b'^i_j)$ (où $b^i_j \epsilon B_j$)

On a alors :

$$\phi(a.B) = \ \{\tilde{a}'.\theta'\ (b'^1_{\theta(1)},\ldots,\ b'^q_{\theta(q)})\ (b'^i_{\theta(i)}\ \epsilon\ \phi(B_{\theta(i)}\}$$

$$= \{\tilde{a}'.(b'^{\theta'(1)}_{\theta\theta'(1)},\ldots,\ b'^{\theta'(q')}_{\theta\theta'(q')}\ )\ |b'^{\theta'(i)}_{\theta\theta'(i)}\ \epsilon\ \phi(B_{\theta\theta'(i)})\}$$

alors que ;

$$\phi(a).\ \phi(B) = \tilde{a}'.\theta'.\theta(\phi(B_1)\ x..x\phi(B_i))$$

$$= \{\ \tilde{a}'.\ (\bar{b}'^1_{\theta\theta'(1)},\ldots,\ \bar{b}'^{q'}_{\theta\theta'(q')})|\ \bar{b}'^i_{\theta\theta'(i)}\ \epsilon\ \phi(B_{\theta\theta'(i)})\}$$

Pour prouver l'inclusion V) il suffit de remarquer que, pour tout $i\ \epsilon[q']$, on peut choisir :

$$\bar{b}'^i_{\theta\theta'(i)} = b'^{\theta'(i)}_{\theta\theta'(i)}$$

et qu'on a évidemment $\phi(A.B) = \bigcup_{a\epsilon A} \phi(a.B) = \bigcup_{a\epsilon A} \phi(a).\ \phi(B)$

VI) Si ϕ est linéaire, θ' est injective et pour tout $i\epsilon[q']$, on peut choisir $b'^{\theta'(i)}_{\theta\theta'(i)} = \bar{b}'^i_{\theta\theta'(i)}$. Si ϕ n'est pas linéaire, donnons un exemple achevant la preuve :

$A = \{\bar{a}(x)\}$, $B = \{b,\ b'\}$

$\phi a(x) = a(x,x)$, $\phi(b) = \phi(b') = b$

alors, $a.B = \ \{ab,\ ab'\}$, $\phi(a.B) = \ \{a(b,b),\ a(b',b')\}$

alors que $\phi(a).\ \phi(B) = a(x,x).\ \{b,\ b'\} \ = \ \{a(b,\ b),\ a(b,b'),a(b',b),a(b',b')\}$

VII) Soit $A' = a'.\theta'$, $B' = B'_1 x..xB'_r$

Posons $\phi^{-1}(\tilde{a}'.\theta') = \{\tilde{a}_i.\theta_i \mid i\in I\}$

$\forall\, i\in I$, on a donc $\phi(\tilde{a}_i.\theta_i) = \phi(\tilde{a}_i).\ \phi(\theta_i) = \tilde{a}'.\ \theta'.\ \bar{\theta}_i$ où $\bar{\theta}_i$ est $k\theta_i$

si ϕ est un k-morphisme.

Avec ces notations,

$\phi^{-1}(A').\ \phi^{-1}(B') = \{\tilde{a}_i.\theta_i \mid i\in I\}\ .\ B_1\ x..xB_r$

où $B_i = \phi^{-1}(B'_i)$.

soit encore

$\phi^{-1}(A').\phi^{-1}(B') = \{\tilde{a}_i.(b^1_{\theta_i(1)},\dots, b^{n_i}_{\theta_i(n_i)}) \mid b^j_{\theta_i(j)} \in B_{\theta_i(j)}\}$

D'autre part, $\phi(\tilde{a}_i(b^1_{\theta_i(1)},\dots, b^{n_i}_{\theta_i(n_i)}))$

$= \tilde{a}'.\theta'_i\ (b'^1_{\bar{\theta}_i(1)},\dots, b'^{n_i}_{\bar{\theta}_i(n_i)})$ où $b'^j_{\bar{\theta}_i(j)} = \phi(b^j_{\theta_i(j)})$

$= \tilde{a}'\ (b'^{\theta'_i(1)}_{\bar{\theta}_i(\theta'_i(1))},\dots\ b'^{\theta'_i(n)}_{\bar{\theta}_i(\theta'_i(n))})$ et, compte tenu de $\theta'_i.\bar{\theta}_i = \theta'$,

$= \tilde{a}'\ (b'^{\theta'_i(1)}_{\theta'(1)},\dots, b'^{\theta'_i(n)}_{\theta'(n)}) \in \tilde{a}'.\theta'.B' = a'.B'$ d'où l'inclusion

VIII) Inversement, deux phénomènes vont empécher l'inclusion inverse : la non linéarité de ϕ (comme dans les cas précédents) et un problème de découpage d'arbre (comme dans le cas des langages de mots).

Exemple 1 : $\phi\ a(x) = a(x,x)$, $\phi(b) = b$

Posons $A' = \{a(b,x)\}$ et $B' = \{b\}$

$\phi^{-1}(A'.B') = \phi^{-1}(a(b,b)) = ab$

alors que $\phi^{-1}(A') = \emptyset$ donc $\phi^{-1}(A').\ \phi^{-1}(B') = \emptyset$

Exemple 2 : $\phi(b) = ab$, $A' = \{a(x)\}$ et $B' = \{b\}$

alors, $\phi^{-1}(A'.B') = \phi^{-1}(a,b) = b$ alors que $\phi^{-1}(A') = \emptyset$

donc $\phi^{-1}(A').\phi^{-1}(B') = \emptyset$

Exemple 3 : Cet exemple montre que si ϕ est un k-morphisme avec $k>1$, il se peut qu'il soit linéaire séparé complet alphabétique sans qu'on ait encore l'égalité $\phi(A.B) = \phi(A).\ \phi(B)$

$\phi a(x) = < a(x_1,x_2), \ddagger >$, $\phi(b) = < b, b >$

Posons $A' = \{<a(b, x_2), \ddagger>\}$, $B' = \{<b, b>\}$

On a alors $A'.B' = \{<a(b,b), \ddagger>\}$

donc $\phi^{-1}(A'.B') = ab$ alors que $\phi^{-1}(A') = \emptyset$

Dans les 3 exemples ci-dessus, des causes diverses (non linéarité, non alphabétique, k-composantes)imposent des contraintes de partition à l'image, en ce sens que "$u = u_1.u_2$ peut être l'image par ϕ de t sans que u_1 soit l'image d'aucun sous arbre initial de t".

Nous pouvons donc au mieux, d'après les exemples précédents, espérer avoir l'inclusion inverse de VII) pour un démarquage.

Prouvons maintenant que c'est le cas.

Nous reprenons les notations de VII, avec $\tilde{a}'\epsilon\tilde{T}(\Sigma)^p_q$, $\theta'\epsilon\Theta^q_r$.

Il suffit de prouver que :

(R) $\phi^{-1}(\tilde{a}'.\theta'.B')\subset \phi^{-1}(\tilde{a}'.\theta').\ \phi^{-1}(B')$.

Nous avons, par définition du magmoïde des parties :

(E1) $\theta'.B' = \theta'(B'_1 \times..\times B'_r) = B'_{\theta'(1)} \times..\times B'_{\theta'(q)}$

Prouvons

(E2) $\phi^{-1}(\tilde{a}'.\theta') = \phi^{-1}(\tilde{a}').\theta'$

D'après VII), il suffit d'établir que $\phi^{-1}(\tilde{a}'.\theta')\subset \phi^{-1}(\tilde{a}').\theta'$.

Soit $\tilde{a}.\zeta$ tel que $\phi(\tilde{a}.\zeta) = \tilde{a}'.\theta'$ (c'est à dire $\tilde{a}.\zeta$ appartenant à $\phi^{-1}(\tilde{a}'.\theta')$). On a $\phi(\tilde{a}.\zeta) = \phi(\tilde{a}).\zeta$ donc il existe ζ_1 tel que $\phi(\tilde{a}) = \tilde{a}'.\zeta_1$ et $\zeta_1.\zeta = \theta'.\phi$ est un démarquage, donc ζ_1 est injectif.

On peut trouver ζ_2 tel que

$\phi(\tilde{a}.\zeta_2) = \tilde{a}'$ donc $\tilde{a}\zeta_2\epsilon\ \phi^{-1}(\tilde{a}')$

et $\tilde{a}\zeta_2.\theta'\epsilon\ \phi^{-1}(\tilde{a}').\theta'$. Comme $\zeta_2.\theta' = \zeta_2.\zeta_1\zeta = \zeta$, $\tilde{a}\zeta\ \epsilon\phi^{-1}(\tilde{a}'.\theta')$

et (E2) est prouvé.

(E1) et (E2) nous permettent d'écrire :

$\phi^{-1}(\tilde{a}'.\theta'.B') = \phi^{-1}(\tilde{a}'.(B'_{\theta'(1)} \times...\times B'_{\theta'(q)})$

et $\phi^{-1}(\tilde{a}'.\theta').\ \phi^{-1}(B') = \phi^{-1}(\tilde{a}').\ (\phi^{-1}(B'_{\theta'(1)}),..,\ \phi^{-1}(B'_{\theta'(q)})$.

Nous en sommes donc ramené à prouver que , $\forall\ \tilde{a}'\epsilon\ \tilde{T}(\Delta)$, $\forall B'$, on a

(E3) $\phi^{-1}(\tilde{a}'.B')\subset \phi^{-1}(\tilde{a}').\phi^{-1}(B')$

Pour cela montrons d'abord le :

<u>Sous lemme</u>. Soit ϕ un démarquage, soit $u = \tilde{u}_1.u_2$ avec $\tilde{u}_1\epsilon\tilde{T}(\Delta)$.

Alors, $\forall$ t tel que $\phi(t) = u$, $\exists$ t_1 et t_2 tels que $\phi(t_1) = \tilde{u}_1$, $\phi(t_2) = u_2$ et $t_1 . t_2 = t$ preuve du sous lemme 1 :

Considérons l'ensemble des sous arbres initiaux de t, dont l'image par ϕ admet $\tilde{u}_1$ pour sous arbre initial. Cet ensemble est non vide ($\tilde{t}$ y appartient) et possède un élément minimal $\tilde{t}'_1$. Si $t'_1 = \tilde{t}'_1.\zeta'_1$, on a $\tilde{u}_1 \underset{I}{<} \phi(\tilde{t}'_1)$. ζ'_1 donc $\tilde{u}_1 \underset{I}{<} \phi(\tilde{t}'_1)$ et on peut toujours supposer que $t'_1 = \tilde{t}'_1 \epsilon \tilde{T}(\Sigma)$.

Posons $\phi(\tilde{t}'_1) = \tilde{u}'_1\zeta_1$. Prouvons que $\tilde{u}'_1 = \tilde{u}_1$: comme on a $\tilde{u}_1 < \tilde{u}'_1$, il suffit d'établir que les nombres de noeuds de $\tilde{u}_1$ et $\tilde{u}'_1$ sont égaux. Remarquons pour cela que, $\forall$ $t_x a$, $\phi(t)_x\phi(a)$ a au plus un noeud de plus que $\phi(t)$ puisque ϕ est alphabétique linéaire. Alors, si $\tilde{u}_1 \neq \tilde{u}'_1$, $\tilde{t}'_1$ ne serait pas minimal, d'où $\tilde{u}_1 = \tilde{u}'_1$.
ζ_1 est injectif et $\exists \zeta_2$ tel que , en posant $t_1 = \tilde{t}'_1.\zeta_2$, $\phi(t_1) = \tilde{u}'_1.\zeta_1.\zeta_2 = \tilde{u}_1$
$\tilde{t}'_1$ est par construction un sous arbre initial de t. Il existe donc t'_2 tel que $\tilde{t}'_1.t'_2 = t$ et, en posant $\zeta_1 t'_2 = t_2$, on a donc $t_1.t_2 = t$.
On sait que $\phi(t_1.t_2) = \phi(t_1).\ \phi(t_2) = \tilde{u}_1.\ u_2$ avec $\phi(t_1) = \tilde{u}_1$, on sait d'après A D que $(\tilde{u}.v_1 = \tilde{u}\ v_2 \Rightarrow v_1 = v_2)$ donc ici $\phi(t_2) = u_2$.
Le sous lemme 1 est prouvé.
Nous terminons la preuve de VIII) par la preuve de (E3):
d'après le point II) du présent lemme, comme a' est linéaire, on a $\tilde{a}'.B' = \{a'.t' \mid t' \epsilon B'\}$ d'où :

$\forall$ $t \in \phi^{-1}(\tilde{a}'.B')$, $\exists$ $t' \epsilon B'$ tel que $\phi(t) = \tilde{a}'.t'$ sur lequel ϕ est complet. Le sous-lemme 1 nous assure alors de l'existence de t_1 et t_2 tels que $t_1.t_2 = t$, $\phi(t_1) = \tilde{a}'$ et $\phi(t_2) = t'$, donc $t \in \phi^{-1}(\tilde{a}').\ \phi^{-1}(B')$. ///

C.Q.F.D.

I-2-1-5-2 Commentaires et conséquences :

I) Tous les résultats d'inclusion stricte sont du même esprit que celui rappelé en II) et illustré en (I-1-2-1-9) qui traduit la non distributivité (à cause de la non linéarité) de la composition par rapport à la réunion. Mais, selon les cas, c'est soit la non linéarité de la partie A, soit la non linéarité du morphisme ϕ qui intervient.

Le point II) du lemme a une conséquence fort importante, exprimée ci-après.

II) Remarque importante :

Soit ϕ un morphisme de $T(\Sigma)$ dans $T(\Delta)$. On l'étend classiquement en une application de $P(T(\Sigma))$ dans $P(T(\Delta))$ par

$\phi(A) = \{\phi(a) \mid a \in A\}$

ϕ n'est en général pas un morphisme de $P(T(\Sigma))$ dans $P(T(\Delta))$.

En effet, si ϕ était un morphisme, on aurait $\phi(A.B) = \phi(A).\phi(B)$ pour tout A,B.///

III) Remarquons qu'on pourrait considérer le sous magmoïde $T_\ell(\Sigma)$ de $T(\Sigma)$, dont les éléments sont de la forme $\tilde{a}.\theta$ avec θ linéaire, et qu'alors la restriction de ϕ à $T_\ell(\Sigma)$ est un morphisme. (Mais $T_\ell(\Sigma)$ est évidemment un magmoïde non projetable).

I - 2 - 2 PROPRIETES DES BIMORPHISMES :

Nous appuyant sur des résultats établis dans (A) concernant la rationnalité dans les forêts, nous établissons d'abord, grosso modo que "les bimorphismes sont les parties rationnelles du produit". Les sections suivantes présentent des résultats plus ou moins techniques qui nous servirons en partie II à établir 'les grands théorèmes' sur les bimorphismes de magmoïdes.

I-2-2-1 Bimorphismes et parties rationnelles du produit :

Nous avons déjà rappelé qu'un des résultats essentiels de la théorie des langages est l'équivalence des transductions rationnelles, des bimorphismes et des 'parties rationnelles du produit'. Dans le cas des forêts, la diversité des notions de morphismes - donc de bimorphismes - et de transductions d'états finis rend nécessairement les choses beaucoup plus complexes. Nous renvoyons à (A) pour l'étude de la notion de rationnalité dans le magmoïde. Citons en le :

I-2-2-1-1 Thèorème :

Les parties rationnelles d'un magmoïde M sont les images homomorphes des parties '1-rationnelles linéaires' d'un magmoïde libre $\hat{T}(\Sigma)$ - c'est à dire sont les parties reconnaissables de $\hat{T}(\Sigma)$.

Or , par définition de la notion de magmoïde produit, on peut considérer que tout morphisme de $T(\Gamma)$ dans $T_k(\Sigma) \times T_{k'}(\Delta)$ se décompose canoniquement en un couple (ϕ,Ψ) où ϕ est un k-morphisme de $T(\Gamma)$ dans $T(\Sigma)$ et Ψ un k'-morphisme de $T(\Gamma)$ dans $T(\Delta)$ (aux identification habituelles près). Nous en déduisons que :

I-2-2-1-2 Propriété importante :

Il y a identité entre les parties rationnelles de $T_k(\Sigma) \times T_{k'}(\Delta)$ et les bimorphismes (k, ϕ, K, Ψ, k') où K est reconnaissable, ϕ est un k-morphisme dans Σ et Ψ un k'-morphisme dans Δ. ///

Bien entendu, aux diverses notions de rationnalité correspondent diverses notions de morphismes, de bimorphismes.

Remarquons que la propriété se dit schématiquement :
"Il y a équivalence entre les parties rationnelles du produit et les bimorphismes de magmoïdes dont les forêts sont reconnaissables."

I-2-2-1-3 Remarque :

Rappelons que, dans notre esprit, la notion de famille raisonnable étend les "bonnes" propriétés de la classe des forêts reconnaissables. Notre généralisation a en particulier l'intérêt de considérer des forêts de n-uples, pour n quelconque, et non seulement de 1-uple. Une même généralisation pourrait se faire en ce qui concerne la reconnaissablilité, donc la rationnalité, et on obtiendrait une extension du théorème de (A) précité, puis de la **propriété importante.** Nous n'avons pas développé cette voie, qui n'offre aucune difficulté mais risque d'apparaître comme une généralisation gratuite, purement "formaliste", en l'absence actuelle de motivations.

I-2-2-2 Quelques lemmes sur les bimorphismes :

I-2-2-2-1 Notations et rappels :

I) Rappelons que $\phi_{/A}$ désigne la restriction de ϕ à A (A n'étant en général qu'une partie quelconque du magmoïde domaine de ϕ, $\phi_{/A}$ n'est évidemment pas en général un mrophisme !). Rappelons également que si ϕ est un k-morphisme et Ψ un k'-morphisme, on abrège (k, ϕ, K, Ψ, k') en (ϕ, K, Ψ). De même, (id, K, Ψ) s'abrégera en (K, Ψ) et (ϕ, K, id) en (ϕ, K).

II) (k, ϕ, T(Σ)o, Ψ, k') s'abrégera en (k, ϕ, Ψ, k')

III) Remarquons qu'on pourra écrire indifféremment $\phi_{/A}$ ou (A, ϕ). Rappelons encore que $\phi \circ \Psi^{-1}$ désigne la relation associée à ϕ composée à celle associée à Ψ^{-1}.

I-2-2-2-2 Lemmes :

I) Lemme
Supposons $\phi \circ \Psi^{-1} \preceq \Psi'^{-1} \circ \phi'$. Soit $F' = \Psi'^{-1}(F)$ alors $\phi_{/F} \circ \Psi^{-1} \preceq \Psi'^{-1} \circ \phi'_{/F'}$.///

En effet, $(t,v) \in \phi_{|F} \circ \Psi^{-1} \Longleftrightarrow \Psi^{-1}(\phi(t)) \ni v$ et $t \in F \Longleftrightarrow \exists u$ tel que $\Psi'(u) = t' \in F$ et $\phi'(u) = v$

$\Longleftrightarrow \exists u \in \Psi'^{-1}(F) = F'$ tq $\Psi'(u) = t$ et $\phi'(u) = v$

$\Longleftrightarrow (t,v) \in (\Psi', F', \phi')$ ///

II) Lemme

Soit $\alpha(F) = K$. Alors $(\alpha \circ \phi, F, \alpha \circ \Psi) \succeq (\phi, K, \Psi)$ ///

En effet, $(u,v) \in (\alpha \circ \phi, F, \alpha \circ \Psi)$

$\Longleftrightarrow \exists\, t \in F,\ \phi(\alpha(t)) = u$ et $\Psi(\alpha(t)) = v$

$\Longleftrightarrow \exists\, t' \in \alpha(F) = K,\ \phi(t') = u$ et $\Psi(t') = v$

$\Longleftrightarrow (u, v) \in (\phi, K, \Psi)$.

III) Lemme

Soit ϕ et ϕ' deux morphismes linéaires, ε et ε' deux démarquages, K une forêt tels que, pour tout $a \in \Sigma$ et $t \in T(\Delta)$,

a) $(\varepsilon'^{-1}(a).\ \varepsilon'^{-1}(t)) \cap K = (\varepsilon'^{-1}(a) \cap K) \ .\ (\varepsilon'^{-1}(t) \cap K)$

b) $(\varepsilon'^{-1}(a) \otimes \varepsilon'^{-1}(t)) \cap K \ = \ (\varepsilon'^{-1}(a) \cap K) \otimes (\varepsilon'^{-1}(t) \cap K)$

c) $\varepsilon^{-1}(\phi(a)) \ \underset{1,v}{\smile} \ \phi'(\varepsilon'^{-1}(a) \cap K)$

Alors, $\phi \circ \varepsilon^{-1} \underset{1,v}{\smile} (\varepsilon', K, \phi')$.

En particulier :

- Si ϕ et ϕ' sont deux v-morphismes, on peut remplacer ci dessus $\underset{1,\,v}{\smile}$ par $\succeq$ (donc à forciori par $\hat{=}$) .

- a) et b) sont en particulier vérifiés si $K = T(\Delta)$

- Si, pour tout $a \in \Sigma_n$, il existe une forêt reconnaissable F(a) de $T(\Delta)^1_n$ telle que $(a, \varepsilon^{-1}\phi(a)) \ \underset{1,v}{\smile} \ (\varepsilon', K(a), \phi')$, alors $\phi \circ \varepsilon^{-1} \underset{1,v}{\smile} (\varepsilon', K, \phi')$ (avec ϕ, ϕ', ε et ε' satisfaisant aux hypothèses du début de l'énoncé).

Preuve : Les cas particulier sont évidents.

- Montrons par récurrence sur la profondeur π de t que

$\varepsilon^{-1}(\phi(t)) \underset{v}{\smile} \phi'(\varepsilon'^{-1}(t))$

D'après la définition de l'équivalence $\underset{v}{\smile}$, il suffit de supposer que $t \in \hat{T}(\Sigma)$.

- si $\pi = o$, le résultat est évident

- supposons le résultat établi pour π, et soit $t' = a.t$ avec $a \in \Sigma$ et $\text{prof}(t) \leq \nu$.

On a alors $\varepsilon^{-1}(\phi(a.t)) = \varepsilon^{-1}(\phi(a).\phi(t)) = \varepsilon^{-1}(\phi(a)).\ \varepsilon^{-1}\ \phi(t)$, ceci d'après le point VIII) de lemme (I-2-1-5-1).

D'autre part, d'après les propriétés de $\underset{v}{\curlyvee}$, par hypothèse et par hypothèse de récurrence on a :

$\varepsilon^{-1}(\phi(a))\ \varepsilon^{-1}(\phi(t))\ \underset{v}{\curlyvee}\ \phi'(\varepsilon'^{-1}(a) \cap K)\ .\ \phi'(\varepsilon'^{-1}(t) \cap K)$

et encore, par (I-2-1-5-1 VI), $\underset{v}{\curlyvee}$ à $\phi'((\varepsilon'^{-1}(a) \cap K).\ (\varepsilon'^{-1}(t) \cap K))$

l'hypothèse a) permet d'écrire que cette quantité est égale à $\phi'((\varepsilon'^{-1}(a).\varepsilon'^{-1}(t) \cap K)$ et, d'après (I-2-1-5-1 VIII), encore égal à $\phi'(\varepsilon'^{-1}(a.t) \cap K)$.

Enfin, si $t' = m.t$ avec $m \in \Sigma^p$, onpeut décomposer t' en $t' = t'_1 \otimes .. \otimes t'_p$ où $t'_i = a_i.t_i$. Il reste alors à remarquer que $\varepsilon^{-1}\phi(t') = \underset{i}{\otimes}\ \varepsilon^{-1}\phi(t'_i)$ et que

$\phi'((\varepsilon'^{-1}(t')) \cap K) = \underset{i}{\otimes}\ \phi'(\varepsilon'^{-1}(t'_i) \cap K)$. Or, on tire de l'hypothèse b) que $\varepsilon'^{-1}(t') \cap K = \underset{i}{\otimes}\ (\varepsilon'^{-1}(t'_i) \cap K)$ d'où le résultat.///

<u>C.Q.F.D.</u>

<u>I-2-2-2-3 Bimorphismes purs</u> :

I) <u>Définition</u>

Un bimorphisme (k, ϕ, K, Ψ, k') est dit **pur** ssi ϕ est un k-morphisme, Ψ un k'-morphisme et $K = T(\Sigma)_o$. Conformément aux notations adoptées en (I-2-2-2-1), nous noterons (ϕ, Ψ).

II) <u>Bimorphismes purs et parties finiment engendrées du produit de deux magmoïdes</u> :

a) Soit P une partie finie de $(T_k(\Sigma) \times T_{k'}(\Sigma'))^1$. Il existe un k-morphisme ϕ et un k'-morphisme Ψ tels que $\phi^{-1} \circ \Psi \curlyvee [P]$ ///

<u>Preuve</u> : Posons $\{\alpha_i = (t_i.\theta_i,\ u_i.\zeta_i) | i \in [n]\}$

avec $\alpha_i \in (T_k(\Sigma) \times T_{k'}(\Sigma'))^1_{q_i}$.

Construisons l'alphabet $A = \{\alpha_i(x_1,..,x_{q_i}) | i \in [n]\}$

Soit ϕ le k-morphisme défini par :

$\phi(\alpha_i) = t_i.\theta_i$ pour tout $i \in [n]$

et Ψ le k'morphisme défini par :
$\Psi(\alpha_i) = u_i.\zeta_i$ pour tout $i \in [n]$.

Nous avons par construction
$\{(\phi(\alpha_i), \phi(\alpha_i) | i \in [n]\} = P$ d'où l'égalité des parties engendrées et le résultat.

Remarquons qu'inversement, on peut évidemment associer à tout couple (ϕ,Ψ) la partie P finie de degré supérieur 1
$P = \{(\phi(a), \Psi(a)) | a \in$ alphabet source de ϕ et $\Psi\}$ et qu'on a
$[P] \underline{\smile} \phi^{-1} \circ \Psi$.///

C.Q.F.D.

I-2-2-3 Une importante propriété de la composition des bimorphismes :

Nous énonçons et prouvons d'abord le lemme et le commentons ensuite.

I-2-2-3-1 Lemme

Soit $B = (F, \Psi, \mu)$ et $B' = (\nu', \phi', F')$ deux bimorphismes (notations convenues en I-2-2-2-1) où F et F' appartiennent à une famille raisonnable $\mathcal{F}$. Soit d le P.P.C.M. de μ et ν', avec $d = \mu\nu'_1 = \nu'\mu_1$.
Alors, il existe $\bar{B} = (\phi, \bar{F}, \bar{\Psi}, 1)$ et $\bar{B}' = (1, \bar{\phi}', \bar{F}', \Psi')$ tels que :

a) $B \circ B' \underline{\frown} \bar{B} \circ \bar{B}'$
b) ϕ est un ν'_1-morphisme, strictement alphabétique, linéaire complet séparé sur $\bar{F}$, Ψ' est un μ_1-morphisme strictement alphabétique, linéaire complet séparé sur $\bar{F}'$.
c) $\bar{\Psi}$ est du même type que Ψ, $\bar{\phi}'$ du même type que ϕ'
d) $\bar{F}$ et $\bar{F}' \in \mathcal{F}$
e) si ϕ' est un démarquage (respectivement propre, sans torsion), on peut choisir ϕ tel. De même pour Ψ et Ψ'.

Preuve :

$(t,v) \in B \circ B' \Rightarrow \text{dsup}\ \Psi_{[\mu]}(t) = \text{dsup}\ \phi'_{[\nu]}(v) = m$
Or, $\text{dsup}\ \Psi_{[\mu]}(t) = \mu\ \text{dsup}\ (t)$ et $\text{dsup}\ \phi'_{[\nu]}(v) = \nu' \text{dsup}\ (v)$,
donc m est multiple de μ et ν', donc de d.
Dans la composition, seuls sont donc utiles les éléments de F de dsup multiple de ν'_1 et ceux de F' de dsup multiple de μ_1.
Nous 'regroupons donc par éléments de dsup ν'_1' les arbres de F par la construction suivante, qui les 'accole par le sommet', et que nous appelerons ν'_1-regroupement et noterons $p(\nu'_1)$

Supposons F définie sur un alphabet Σ. A toute suite de longueur ν'_1 d'éléments de Σ, notée $(a_{i_1},.., a_{i\nu'_1})$, nous associons un nouveau symbole marqué $\neq (a_{i_1},.., a_{i_{\nu'_1}})$ dont le degré sup est évidemment 1 et le dinf est la somme des dinf $n_{i_1},.., n_{i_{\nu'_1}}$ des a_{i_j}. Nous avons ainsi défini un nouvel alphabet $\bar{\Sigma}$, union de Σ et de l'ensemble des lettres définies ci-dessus.

Soit ϕ le ν'_1-morphisme défini sur $\bar{\Sigma}$ par :

$$\phi \neq (a_{i_1},..a_{i_{\nu'_1}})(x_1,.., x_n) = <a_{i_1}.\sigma^{ni_1}_{1\nu'_1},.., a_{i_{\nu'_1}}.\sigma^{ni_{\nu'_1}}_{1_{\nu'_1}}> .$$

$$\text{et } \phi a(x_1,..x_n) = <a.\sigma^{n}_{1\nu'_1}, \neq ,.., \neq >$$

où $\neq$ est un nouveau symbole de dinf nul.

Soit R la forêt définie par

$R = (\bar{\Sigma} - \Sigma)^{\otimes}_{\cdot} T(\Sigma)_o$

R est constituée des 'uples d'arbres sans variables dont les sommets sont dans $\bar{\Sigma} - \Sigma$, les autres noeuds dans Σ'.

Posons $R \cap \phi^{-1}(F) = \bar{F}$.

Comme $F \in \mathcal{F}$ et que $\mathcal{F}$ est raisonnable, $\phi^{-1}(F) \in \mathcal{F}$.

Comme $R \in \text{rec}^{\otimes}$, $\bar{F} \in \mathcal{F}$

Intuitivement, les arbres de dsup 1 sont 'réunis' ν'_1 à ν'_1 par le sommet à l'aide des symboles de $\bar{\Sigma} - \Sigma$, où ces sommets sont marqués.

ϕ 'reconstitue' les ν'_1-uples accolés par $\rho(\nu'_1)$.

Plus précisément, il est facile de voir que l'application ϕ est injective sur $\bar{F}$. L'application réciproque est $\rho(\nu'_1)$ cherché.

($\rho(\nu'_1)$ n'est évidemment pas un morphisme).

Nous construisons maintenant $\bar{\bar{\Psi}}$ par :

$\bar{\bar{\Psi}}$ est défini sur les $\neq (a_{i_1},.. a_{i_{\nu'_1}})$ de façon à regrouper les $\mu\nu'_1$ composantes 'utiles' en premières. $\bar{\bar{\Psi}}$ prolonge Ψ sur les autres noeuds que le sommet en 'plongeant' chaque variable dans la première composante de sa $\mu\ell$-dilatée, dans l'esprit de la définition de l'équivalence $\underset{\nu}{\checkmark}$.

(Nous posons que Ψ est un ℓ-morphisme).

Précisément, nous poserons :

$$\bar{\bar{\Psi}}\neq(a_{i_1},..,a_{i_{\nu'_1}})(x_1,..x_n)=<\Psi(a_{i_1})_{[\mu]}.\sigma_{\ell,\mu\ell}^{\ell n_{i_1}},..,\Psi(a_{i_{\nu'_1}})_{[\mu]}.\sigma_{\ell,\mu\ell}^{\ell n_{i_{\nu'_1}}},\Psi(a_i)_{[\mu+1,\ell]}^{\cdots}> \ldots$$

$$<\Psi(a_{i_1})_{[\mu]}.\sigma_{\ell,\mu\ell}^{\ell n_{i_1}},..,\Psi(a_{i_{\nu'_1}})_{[\mu]}.\sigma_{\ell,\mu\ell}^{\ell n_{i_{\nu'_1}}},\Psi(a_{i_1})_{[\mu+1,\ell]}.\sigma_{\ell,\mu\ell}^{\ell n_{i_1}},..,\Psi(a_{i_{\nu'_1}})_{[\mu+1,\ell]}.\sigma_{\ell,\mu\ell}^{\ell n_{i_{\nu'_1}}}>$$

(où, en posant $\Psi(a) = <\Psi_1(a),..,\Psi_\ell(a)>$, on a

$\Psi(a)_{[\mu]}=<\Psi_1(a),..,\Psi_\mu(a)>$ et $\Psi(a)_{[\mu+1,\ell]}= <\Psi(a)_{\mu+1},..,\Psi(a)_\ell>$)

Posons également

$\bar{\bar{\Psi}}(a) = <\Psi(a).\sigma_{\ell,\mu\ell}^{\mathrm{dinf}(a)}, \neq^{\otimes\ell(\mu-1)}>$

(les torsions $\sigma_{\ell,\mu\ell}^{i}$ 'transforment' chaque ℓ-variable (Ψ est un ℓ-morphisme) en les ℓ-premières composantes d'une $\mu\ell$-variable.)

Il est facile d'établir alors la propriété (P) suivante :

(P) Soit $(t_1,..t_{\nu'_1}) = t$ un ν'_1-uple quelconque de $T(\Sigma)^{\nu'_1}$. Tout t_i s'écrit évidemment $t_i = a_i.t'_i$ où $a_i \in \Sigma$. On a alors

- $\phi(\neq(a_1,..,a_{\nu'_1}).(t'_1,..,t'_{\nu'_1})) = (t''_1,..,t''_{\nu'_1})$

avec, $\forall\ i \in [\nu'_1]$, $t'' \curlyvee_1 t_i$

- $\bar{\bar{\Psi}}(\neq(a_1,..a_{\nu'_1})\ (t'_1,..,\ \ ,..t'_{\nu'_1}))_{[\mu\nu'_1]}= (u_1,..\ u_{\nu'_1})$

avec, $\forall\ i \in [\nu'_i]$, $\mathrm{dsup}\ (u_i) = \mu$ et $u_i \curlyvee_\mu \Psi(t_i)$ ///

La preuve est laissée au lecteur. Elle se fait sans problème par récurrence sur la taille de t en utilisant la compatibilité de $\curlyvee_v$ avec la composition et le tensoriel.

On déduit immédiatement de (P) que :

(P') $(F \cap (\bigcup_{n\in N} T(\Sigma)^{\nu'_1 n}), \Psi,\mu) \hat{=} (\phi, \bar{F}, \bar{\bar{\Psi}}, \mu\nu'_1)$

On construit évidemment $\bar{\bar{\Phi}}'$, $\bar{F}'$, et Ψ' à partir de B' comme on a construit respectivement $\bar{\bar{\Psi}}$, $\bar{F}$ et ϕ à partir de B on en a de même

$$(P') \quad (\nu', \phi', F' \cap \bigcup_{n\in N} (T(\Sigma')^{\mu_1 n})) \mathrel{\widehat{=}} (\mu_1\nu', \bar{\bar{\Phi}}' \bar{F}', \Psi')$$

Remarquant que $\mu\nu'_1 = \mu_1\nu' = d$ par construction, on a

$$(Q) \qquad B \circ B' \mathrel{\widehat{=}} (\phi, \bar{F}, \bar{\bar{\Psi}}, d) \circ (d, \bar{\bar{\Phi}}', \bar{F}', \Psi').$$

Il nous reste à 'regrouper' les d premières composantes de $\bar{\bar{\Psi}}$ et faire de même pour $\bar{\bar{\phi}}'$. Pour cela, définissons $\bar{\Psi}$ par :

$$\bar{\Psi}\neq(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{\nu'_1}}) = \langle \cancel{\delta} (\bar{\bar{\Psi}}(\neq(a_{i_1}, \ldots, a_{i_{\nu'_1}}))_{[d]}), \neq^{\mu\ell-1} \rangle$$

$$\bar{\Psi} = \bar{\bar{\Psi}} \text{ sur } \Sigma$$

($\cancel{\delta}$ est une nouvelle lettre de degré d)

On construit de même $\bar{\phi}'$ à partir de $\bar{\bar{\Phi}}'$ et on a immédiatement :

$$(R) \qquad (\bar{F}, \bar{\bar{\Psi}}, d) \circ (d, \bar{\bar{\phi}}', \bar{F}') \mathrel{\widehat{=}} (\bar{F}, \bar{\Psi}, 1) \circ (1, \bar{\phi}', \bar{F}')$$

d'où $B \circ B' \mathrel{\widehat{=}} (\phi, \bar{F}, \bar{\Psi}, 1) \circ (1, \bar{\phi}', \bar{F}', \Psi')$.

Le point a) du lemme est établi.

Les points b), c) sont évidents par construction et d'après les propriétés de cloture des morphismes.

Le point d) a été établi en cours de preuve et pour prouver e), il suffit d'examiner la construction en remarquant que, si ϕ' est un démarquage, $\nu'_1 = 1$. ///

<u>C.Q.F.D.</u>

I-2-2-3-2 Conséquences et commentaires :

I) <u>Corollaire</u> : Soit $B = (\nu, \phi, F, \Psi, \mu)$ et $B' = (\nu', \phi', F', \Psi', \mu')$ deux bimorphismes. Posons $d = \mu\nu'_1 = \nu'\mu_1$ où d est le P.P.C.M. de μ et ν'. Supposons que les coefficients de dilatation de ϕ, ϕ', Ψ, Ψ' sont respectivement k, k', ℓ, ℓ'.

Alors, il existe $\bar{B} = (\nu\nu'_1, \bar{\phi}, \bar{F}, \bar{\Psi}, 1)$ et $\bar{B}' = (1, \bar{\phi}', \bar{F}', \bar{\Psi}' \mu' \mu_1)$ tels que

a) $B \circ B' \mathrel{\widehat{=}} \bar{B} \circ \bar{B}'$

b) les coef. de dilatation de $\bar{\phi}$, $\bar{\phi}'$, $\bar{\Psi}$, $\bar{\Psi}'$, sont respectivement $k\nu'_1$, $k'\mu_1$, $\ell\nu'_1$, $\ell'\mu_1$

c) $\bar{B}$ est du même type que B, $\bar{B}'$ est du même type que B'.///

La preuve est une conséquence immédiate du lemme précédent et des propriétés de composition des morphismes.

II) Commentaire :

Rappelons que $\bar{B}$ du même type que B signifie que $\bar{F}$ et F appartiennent à la même famille raisonnable, que $\bar{\Psi}$ est du même type que Ψ, $\bar{\phi}$ du même type que ϕ.

En abrégé, nous pouvons énoncer le corollaire comme suit
"Pour composer deux bimorphismes, on peut toujours supposer
- sans changer les types- que la composition se fait sur la première composante des morphismes intérieurs".

On peut donc toujours supposer, avec les notations de B et B' ci-dessus, que $\mu = \nu' = 1$, mais cela ne va pas sans une augmentation de k, k', ν, μ'.

Des considérations évidentes sur les degrès supérieurs des éléments de B o B' montrent cette dilatation inévitable : en effet tout couple de B o B' est de degrés supérieurs multiples de $(\nu\nu'_1, \mu'\mu_1)$

Retenons que ce corollaire justifie, vis à vis des bimorphismes, la restriction de l'étude de la composition aux $(\phi, 1)$ et $(1, \phi)$.

II - RÉSULTATS FONDAMENTAUX

Nous présentons ici les résultats fondamentaux de notre travail, orientés vers l'étude des bimorphismes.

Fort des outils généraux de la partie I, nous établissons dans II-1 les "lemmes fondamentaux", dont nous déduirons en II-2 les théorèmes sur les bimorphismes. C'est dans les lemmes fondamentaux que nous nous trouvons confronté aux "vrais problèmes", ceux qui sont à l'origine de notre étude, ses concepts et son formalisme. C'est dans ces lemmes que nous résolvons ces problèmes. Les preuves de ces lemmes, de ce fait essentielles, sont comme les problèmes qu'elles traitent : parfois peu faciles. Ces raisons font que nous les illustrons largement d'exemples et de commentaires.

Les théorèmes de la partie II-2 fournissent une étude complète des propriétés de composition et d'inversion des bimorphismes, résultats que nous récapitulons et dont nous tirons conséquences en conclusion. Les preuves de la partie II-2 s'appuient facilement (sauf II-2-3-7) sur les lemmes fondamentaux.

CHAPITRE II - 1

LES LEMMES FONDAMENTAUX

Le lemme 1, fort utile dans la suite dès qu'il s'agit de traiter un problème de fidélité ou de complétude, est surtout d'un intérêt technique : il présente un choix (qui s'avérera utile dans les preuves ultérieures) dans les moyens de traiter "les forêts finies".

Le lemme 2 est absolument essentiel. Il traite du problème d'inversion de morphisme. Ce problème d'inversion consiste à réaliser la relation associée à un morphisme inverse par un morphisme (à un démarquage et des contraintes reconnaissables près), comme cela se fait en théorie des langages. Or, nous verrons dans (II-1-2-3) que ce problème est sans solution dans le cadre classique de la théorie des arbres, même si il s'agit d'inverser un 1-morphisme simple (linéaire, complet, strict). Le lemme 2 montre qu'on peut inverser un tel morphisme par un morphisme linéaire régulé séparé à délai borné. Nous voyons ici pour la première fois l'importance de la linéarité et séparation à délai borné.

Le lemme 3 est tout aussi important. Il montre que tout morphisme linéaire séparé à délai borné est équivalent au composé de deux bimorphismes dans lesquels n'interviennent que des notions classiques (1-morphismes linéaires complets stricts). Grosso modo, ces lemmes 2 et 3 sont réciproques et leur conjonction est à la base du théorème 2. La signification du lemme 3 est qu'on peut remplacer le phénomène de séparation à délai borné par un chevauchement de découpages entre 1-morphismes et 1-morphismes inverses, comme expliqué en II-1-3.

Les lemmes 4 étudient la composition d'un morphisme et d'un morphisme inverse lorsque "ne se pose pas de problème de découpages", ce qui nécessite qu'un des deux morphismes soit un démarquage. On voit alors que la non linéarité (d'un morphisme) composée au non déterminisme (d'un démarquage inverse) sont "irréductibles" (ne peuvent être réalisés par un autre type de composition de morphismes et morphismes inverses). De même, quand on veut réaliser $\phi \circ \delta^{-1}$ par $\delta'^{-1} \circ \phi'$ (où ϕ et ϕ' sont des morphismes quelconques et δ, δ' des démarquages), la séparation de ϕ est perdue dans ϕ' si δ est non strict. Dans les autres cas, si ϕ est linéaire, ϕ' et δ' existent et sont du même type que ϕ et δ.

En II-1-5, nous étudions la composition des morphismes et de leurs inverses dans le cas des 1-morphismes classiques linéaires non stricts. De nouveaux phénomènes apparaissent alors (dus à la non-strictitude) et se concrétisent en le théorème 3 de II-2-2.

Le lemme 6 (II-1-6) montre facilement que dans un bimorphisme, les délais (de séparation ou régulation) peuvent être ramenés à 1.

Enfin, nous étudions en (II-1-7) les homologues des lemmes 2 et 4 dans le cas d'alphabets dyadiques (l'arité des lettres ne dépasse pas 2). Dans ce cas, la situation se simplifie.

II - 1 - 1 LEMME 1 : LEMME DES BIMORPHISMES ET DES QUASI-DEMARQUAGES.

II-1-1-1- Lemme 1

Soit $(\varepsilon, F, \phi, \nu)$ un bimorphisme où F est reconnaissable et ε est un démarquage propre ou un quasi-démarquage propre.
Alors, on peut indifféremment considérer que :

- ε est un démarquage propre et ϕ est $[\nu]$-quasi-complet sur F

- ε est un quasi-démarquage propre et ϕ est $[\nu]$-complet sur F

Plus précisément, nous voulons dire que, si $(\varepsilon, F, \phi, \nu)$ est tel que ε est un démarquage propre et ϕ est $[\nu]$-quasi-complet sur F, il existe un bimorphisme équivalent $(\varepsilon', F', \phi', \nu)$ où ε' est un quasi-démarquage propre et où ϕ' est $[\nu]$-complet sur F' et réciproquement. De plus, nous entendons par "indifféremment" que ϕ et ϕ' peuvent être pris du même type (sauf pour la complétude bien entendu).///

Preuve : La preuve s'appuie sur les deux sous-lemmes suivants

sous lemme 1-1 : Soit K reconnaissable et ϕ un k-morphisme $[\nu]$-quasi-complet sur K. Alors, il existe F reconnaissable, Ψ k-morphisme $[\nu]$-complet sur F et ε quasi-démarquage propre tels que :

- $(K, \phi, \nu) \simeq (\varepsilon, F, \Psi, \nu)$

- Ψ est du même type que ϕ (hormis la complétude)

Preuve de 1-1 :
Soit un reconnaisseur R (que l'on sait pouvoir supposer ascendant déterministe) de K. A chaque état $q \in Q$ de R, on peut associer la forêt $K_q = \{t | t \mid\!\overset{*}{\underset{R}{-}} q[t]\}$ (K_q est 'la forêt reconnue par R en prenant q pour état final'). Q est partitionné en(Q_f, Q_∞) où $q \in Q_f$ ssi Card(K_q) finie.
Construisons le transducteur ascendant (linéaire) T par toutes les règles.

$$a(q_1[x_1],.., q_n[x_n]) \to q[a_{(i_1;\, t_{i_1}),..,(i_p;\, t_{i_p})}(x_{j_1},.., x_{j_q})]$$

où - $i_1 <.. < i_p$, $j_1 <.. < j_q$ et $\{\{i_1,..i_p\}, \{j_1,..,j_q\}\}$

partitionne [n]

- $\forall k \in [p]$, $q_{i_k} \in Q_F$ et $\forall k \in [q]$, $q_{j_k} \in Q_\infty$

- $\forall k \in [p]$ $t_{i_k} \in F_{q_{i_k}}$

- les $a_{(i_1;\, t_{i_1})..(i_p;\, t_{i_p})}$ sont de nouvelles lettres

Posons F = T(K). Comme T est linéaire, F est reconnaissable.

Nous posons sur l'alphabet de F:

$\varepsilon(a(x_1,..,x_n)) = a(x_1,..\,x_n)$

$\varepsilon(a_{(i_1,\, t_1),..,\,(i_p;t_p)}(x_1,\,..,x_q)) = a(x_1,..,x_n).(\zeta_1 \otimes .. \otimes \zeta_n)$

où $\zeta_i = x_1$ si $i \notin \{i_1,..\, i_p\}$

$\zeta_i = t_k$ si $i_k = i$

Enfin, nous posons $\Psi = \varepsilon \circ \phi$

On vérifie facilement que $\varepsilon(F) = K$, le lemme (I-2-2-2-2 II) prouve alors que $(\varepsilon, F, \Psi, \nu) \widehat{=} (K, \phi, \nu)$.

ε est par construction un quasi-démarquage. De plus ε est propre car, comme $\zeta_i = x_1$ si $i \notin \{i_1,..,\, i_p\}$ on a $\zeta_i = x_1$ pour $n - p = q$ indices, d'où la complétude.

D'après les propriétés de composition des morphismes, $\varepsilon \circ \phi = \Psi$ est du même type que ϕ. Nous allons prouver que de plus, Ψ est $[\nu]$-complet sur F.

Supposons que Ψ ne soit pas $[\nu]$-complet sur F. Il existe alors $t \in I(F)$ tel que $\Psi(t) = u.\theta$ avec θ non k-$[\nu]$-complet. Comme ε est propre, en posant $t' = \varepsilon(t)$, on a $t' \in I(K)$ et $\phi(t') = u.\theta$ avec θ non k-$[\nu]$-complet. Or, par définition de transducteur T, on voit que pour tout $t' \in \varepsilon(I(F))$ $t' \in I(K)$ et il existe des ensembles infinis $F_1,..\, F_p$ tels que $t'.(t_1 \otimes .. \otimes t_p) \in K$ pour tout $t_i \in F_i$. Ce fait et $\phi(t') = u.\theta$ avec θ non k-$[\nu]$-complet contredisent la quasi $[\nu]$-complétude de ϕ ./ / /

Sous lemme 1-2 :

Soit ε un quasi-démarquage propre. Alors, il existe un démarquage propre δ, une forêt F et un 1-morphisme ϕ quasi-complet sur F, strict et linéaire, tels que

$$\varepsilon^{-1} \preceq (\delta, F, \phi)$$

De plus, F_o^1 est reconnaissable et $F = F^{1\otimes}$

Preuve de 1-2

Soit ε un quasi-démarquage propre de Σ dans Δ. Comme ε est propre, il est strict. Marquons, pour tout $a \in \Sigma$, les noeuds de $\varepsilon(a)$ injectivement par a_o, a_1,..a_n (le sommet étant marqué par a_o).

Soit $t_a = s_{a_o}(t_a^1, .., t_a^p)$ l'arbre $\varepsilon(a)$ ainsi marqué. Comme ε est propre t_a est initial (c'est à dire 'sans torsion').

Soit δ le démarquage propre associé au marquage défini ci-dessus.

Soit ϕ défini par :

$\phi(s_{a_o}(x_1,.. x_p)) = a(x_{i_1},..,x_{i_m})$

où $i_1,..,i_m$ sont les indices tels que $t_a^{i_1},.. t_a^{i_m}$ réduits à une variable.

Remarquons que ε étant un quasi-démarquage propre, on a soit t_a^i réduit à une variable, soit t_a^i sans variable.

ϕ est l'identité ailleurs :

Nous avons par construction :

$\phi(t_a) = a(x_1,..x_m)$ pour tout $a(x_1,.. x_m) \in \Sigma_m$.

Soit $F = [\{t_a | a \in \Sigma\}]$. On a évidemment $F = F^{1\otimes}$ et, comme tout t_a est linéaire, F_o^1 est reconnaissable.

Nous avons donc, $\forall\, a \in \Sigma$:

$(\varepsilon(a),a) = (\delta(t_a), \phi(t_a))$

d'où $\varepsilon^{-1} \preceq (\delta, F, \phi)$ ///

Terminons la preuve du lemme 1 :

- En corollaire du sous lemme 1-2, nous obtenons que si (ε, K, Ψ) est tel que ε est un démarquage propre, K est reconnaissable et Ψ un k-morphisme $[\nu]$-complet sur K, alors $(\delta, F \cap \phi^{-1}(K), \phi \circ \Psi) \preceq_{1,\nu} (\varepsilon, K, \Psi)$.
Or, $F \cap \phi^{-1}(K)$ est reconnaissable. $\phi \circ \Psi$ est $[\nu]$-quasi-complet sur $F \cap \phi^{-1}(K)$ puisque ϕ est quasi-complet strict (voir lemme I-2-1-4-3 II).

Nous obtenons ainsi la réciproque du sous lemme 1-1. la conjonction des deux sous lemmes nous donne le lemme 1 (en remarquant que si 2 k-morphismes ϕ et Ψ vérifiant $\phi \underset{v}{\smile} \Psi$, alors $(\phi,\nu) \smile (\Psi,\nu)$ ///

C.Q.F.D.

II-1-1-2 Conséquences et commentaires :

II-1-1-2-1 Corollaire :

Soit (k, ϕ, F, Ψ, ν) où Ψ est $[\nu]$-quasi-complet sur F (et F appartenant à une famille raisonnable). Alors,on peut supposer $\Psi[\nu]$-complet sur F sans changer le type de ϕ (c'est à dire sans changer le caractère linéaire, complet, séparé ou régulé à délai borné), sauf que ϕ devient un quasi-démarquage si il était un démarquage. ///

En effet, F étant raisonnable, on sait que "l'ensemble des projections de F constitue une famille finie de forêts reconnaissables $F_1,..,F_n$". (I-1-2-4-1). Il suffit alors de faire la construction du lemme 1-1 pour chaque (F_i, Ψ, ν), remarquant qu'apparait la composition $\varepsilon \circ \phi$ d'un quasi-démarquage propre par ϕ, qui n'altère de ϕ que l'éventuel caractère de démarquage.

II-1-1-2-2 Remarques

I) Nous avions déjà remarqué que la reconnaissabilité jouait un grand rôle à propos de la quasi-complétude (I-2-1-4). Nous retrouvons ce rôle ici.

II) On peut donc toujours ramener dans un bimorphisme la quasi-complétude à la complétude. Mais ceci nécessite de coder les "forêts finies" que l'on supprime (et qui empéchaient la complétude). Ces forêts finies sont "reconstituées" dans l'image de l'autre morphisme du bimorphisme (le démarquage devient quasi-démarquage), augmentant la taille de cette image, et on risque de trouver des problèmes de 'découpage' dans la composition. Pour la composition de bimorphismes, on en sera ainsi amené au contraire à introduire la quasi-complétude pour passer du quasi-démarquage au démarquage, donc se débarasser des 'problèmes de découpage' comme il sera expliqué en II-2.

II - 1 -2 : LEMME 2 : PREMIER LEMME D'INVERSION DE MORPHISMES :

II-1-2-1 Le problème d'inversion des morphismes :

Soit ϕ un morphisme de magmoïdes ou de monoïdes. Nous avons vu dans la preuve de (I-2-1-5-1 VIII) qu'il se posait en général pour ϕ^{-1} un 'problème de découpage'.

Plus précisément, $\phi(t)$ est partitionné en les images de ses noeuds, et on a en général $\phi^{-1}(u_1).\ \phi^{1}(u_2) \subsetneq \phi^{-1}\ (u_1.u_2)$.

L'inclusion est stricte si u_1 et u_2 ne sont pas compatibles avec la partition induite par ϕ.

Nous avons vu en (I-2-1-5-1 VIII) qu'on a pas de 'problème de découpage' -c'est à dire qu'on a $\phi^{-1}(u_1).\ \phi^{-1}(u_2) = \phi^{-1}(u_1.u_2)$- quand ϕ est un morphisme alphabétique de monoïdes ou un démarquage de magmoïdes.

Ceci fait tout l'intérêt des morphismes alphabétiques (dans le cas des langages) et des démarquages (dans le cas des forêts) : on peut inverser "lettre par lettre" (ou noeud par noeud) .

Nous poserons ainsi le problème d'inversion :

Etant donné un morphisme ϕ, existe-t-il r alphabétique (dans le cas des langages) ou démarquage (dans le cas des forêts), K reconnaissable et un morphisme Ψ tels que $(r, K, \Psi) \underset{-}{\frown} \phi^{-1}$?

Dans l'affirmative, un tel résultat est intéressant, car il ramène le problème de ϕ^{-1}, complexe, à 'une inversion sans problème de découpage' par r^{-1}, une intersection avec un reconnaissable et un morphisme direct. (Ainsi prouve-t-on par exemple aisément en théorie des langages que l'image homomorphe inverse d'un langage algébrique est algébrique).

Si dans le cas des langages le problème d'inversion se résoud facilement comme nous l'allons voir en commentaire du lemme 2, il est sans solution dans le cadre classique des morphismes d'arbres comme nous le verrons également.

Remarquons que nous pouvons supposer r étant simplement un quasi-démarquage, le lemme 1 permettant alors d'obtenir le résultat pour un démarquage.

Nous supposerons également la forêt K raisonnable, ce qui est une extension "raisonnable" de reconnaissable (l'extension touche aux degrés supérieurs, sans rien retirer des bonnes propriétés de la reconnaissabilité, conservée "degré par degré".)

Mais prendre K dans une classe trop large, n'étant plus close par intersection par exemple, repousserait les problèmes et pour rendre utilisable une solution au problème d'inversion, nous devons nous restreindre à cette classe de forêts.

Le lemme que nous présentons maintenant est, dans cette optique, fondamental.

Les commentaires, critiques et conséquences que nous en tirerons le sont également (voir II-1-2-3).

II-1-2-2 Lemme 2 :

Soit ϕ un 1-morphisme linéaire complet strict.

Alors, il existe un triplet (r, K, Ψ) tel que

- $(r, K, \Psi) \underset{1,1}{\smile} \phi^{-1}$
- r est un quasi-démarquage propre
- en supposant $K \subset T(\Sigma)$, il existe une partie finie P de $T(\Sigma)$ telle que $K = [P]$ (Donc K de la forme $K_1^{\otimes}$)
- Ψ est un k-morphisme linéaire, à délai de séparation bornée, régulé et [1]-complet sur K.///

Preuve du lemme 2:

La preuve repose sur des résultats intermédiaires :

Sous-lemme 2-1 :

Soit ϕ un 1-morphisme de Σ dans Δ linéaire complet strict marqué sans feuilles, de profondeur 2.

Alors, il existe $K = [P]$, où P est finie $\subset \tilde{T}(\Delta)$, il existe Ψ k-morphisme linéaire, séparé à délai borné, régulé et [1]-complet sur K, tels que

$(K,\Psi) \underset{1,1}{\smile} \phi^{-1}$

Preuve de 2-1

a) Notations : $\forall\, a \in \Sigma_o$, posons $\phi(a) = a_o \in \Delta_o$

$\forall\, a \in \Sigma_n$, $n>o$, posons $\phi(a) = a_o(a_1 \otimes .. \otimes a_{p_a})\sigma a = \tilde{\phi}(a).\ \sigma(a)$

où $a_o \in \Sigma$, $a_i \in \Sigma \cup \{x_1\}$ et σ_a est une permutation de $[n]$ (les hypothèses faites sur ϕ nous autorisent à une telle écriture).

Dans la suite de la preuve, on suppose a fixé.
Comme ϕ est marqué, $a_i = b_j \Rightarrow a = b$ et $i = j$

Posons $k = \sup \{ \operatorname{dinf} (a_i) | \; i \in [p_a], a \in \Sigma \}$

b) à ϕ^{-1} est associée la relation -encore notée ϕ^{-1}- qui est le magmoïde engendré par les couples $(\phi(a),a)$, $a \in \Sigma$. Comme $\phi(a)=\tilde{\phi}(a).\sigma_a$ et que σ_a est une permutation, ϕ^{-1} est encore engendrée par les $(\tilde{\phi}(a),a\sigma._a^{-1})$, $a \in \Sigma$. Il suffit ici d'établir que, pour tout $a \in \Sigma$,

$$\Psi(\tilde{\phi}(a)) \underset{1}{\checkmark} a.\sigma_a^{-1}$$

(en ne considérant plus les relations mais seulement les images, pour a fixé). C'est ce que nous prouvons en c)

c) Si $a \in \Sigma_o$, posons $\Psi(a_o) = \langle a, \neq^{\otimes k-1} \rangle$ (où $\neq$ est un nouveau symbole de dinf nul).

Si $a \in \Sigma_n$, $n > o$, on définit d'abord

$$\theta = 1_k^{|a_1|} \otimes .. \otimes 1_k^{|a_p|}$$

(rappelons que $1_q^p \in \Theta_q^p$ et que $1_q^p(i) = i$ pour $i \in [p]$)

De plus, à tout $i \in [p]$, nous associons une permutation arbitraire μ_i de $[k]$. Nous posons enfin :

$$\zeta = \sigma^{-1}. \theta.\mu_1 \otimes .. \otimes \mu_p \in \Theta_{kp}^n$$

Nous définissons Ψ :

$$\Psi(a_o) = \langle a.\zeta, \neq, .. \neq \rangle$$

$$\Psi(a_i) = \mu_i^{-1}. \rho_i \text{ avec } \rho_i = (1_k^1)^{\otimes |a_i|} \otimes \neq^{\otimes k-|a_i|}$$

Nous avons alors

$$\Psi(\tilde{\phi}(a))_{|1} = a.\zeta.(\Psi(a_1) \otimes .. \otimes \Psi(a_p))$$

$$= a.\sigma^{-1}.\theta.(\mu_1 \otimes .. \otimes \mu_p) . (\mu_1^{-1}.\rho_1 \otimes .. \otimes \mu_p^{-1}.\rho_p)$$

$= a.\sigma^{-1}.\theta.(\rho_1 \otimes .. \otimes \rho_p)$

D'après la définition de l'équivalence $\underset{1}{\vee}$, pour prouver que

$\Psi(\tilde{\phi}(a)) \underset{1}{\vee} a.\sigma^{-1}$ il suffit d'établir

(E) $\theta.(\rho_1 \otimes .. \otimes \rho_p) = (1_k^1)^{\otimes n}$

(rappelons encore que $1_k^1 = \pi_k^1$

Or on a :

$$\theta.(\rho_1 \otimes .. \otimes \rho_p) = (1_k^{|a_1|} \otimes .. \otimes 1_k^{|a_p|}) . (\rho_1 \otimes .. \otimes \rho_p)$$

$$= [\, 1_k^{|a_1|}.((1_k^1)^{\otimes |a_1|} \otimes \neq^{\otimes k-|a_1|}) \,] \otimes .. \otimes [\, (1_k^1)^{\otimes |a_p|}.((1_k^1)^{\otimes |a_p|} \otimes \neq^{\otimes k-|a_p|}) \,]$$

Il est facile de vérifier que $1_k^q((1_k^1)^{\otimes q} \otimes t) = (1_k^1)^{\otimes q}$

pour tout $q \in [k]$ et $t \in T(\Sigma)_o^{k-q}$.

Nous avons finalement

$$\theta.(\rho_1 \otimes .. \otimes \rho_p) = (1_k^1)^{\otimes |a_1|} \otimes .. \otimes (1_k^1)^{\otimes |a_p|} = (1_k^1)^{\otimes (|a_1|+..+|a_p|)} = (1_k^1)^{\otimes n}$$

(E) est établi, donc pour tout $a \in \Sigma$, $\Psi(\tilde{\phi}(a) \underset{1}{\vee} a.\sigma_a^{-1}$.

et compte tenu de ce que $\phi^{-1}(\tilde{\phi}(a)) = a.\sigma_a^{-1}$, $\Psi(\tilde{\phi}(a)) \underset{1}{\vee} \phi^{-1}(\tilde{\phi}(a))$.

soit encore $\Psi(\tilde{\phi}(a)) = \langle a.\sigma_a^{-1}.\ (1_k^1)^{\otimes n}\ ,\ \neq^{\otimes k-1} \rangle$

donc Ψ est régulé, séparé, séparé à délai 2, [1]-complet sur $[\{\tilde{\phi}(a) | a \in \Sigma\}]$ d'où le sous-lemme 2-1 avec $P = \{\tilde{\phi}(a) | a \in \Sigma\}$.///

Le lecteur vérifiera dès lors sans difficulté qu'en itérant le sous-lemme 2-1, on obtient le lemme 2 compte tenu des lemmes (I-2-1-3-1 III) et (I-2-1-3-4 III) qui permettent de décomposer le morphisme ϕ du lemme 2 en $\phi = \phi_1 \circ .. \circ \phi_p \circ r$, ou r est un démarquage propre et où les ϕ_i satisfont aux hypothèses du sous lemme 2-1

<u>C.Q.F.D.</u>

II-1-2-3 Illustration et conséquences :

Vu l'importance considérable de ce résultat, nous donnons d'abord un exemple illustrant la construction faite dans la preuve du lemme 2, puis nous montrons l'importance du résultat.

II-1-2-3-1 : Exemple :

L'exemple que nous présentons est d'une très grande simplicité mais illustre bien l'esprit de la construction :

Soit ϕ défini par :

$\phi(c(x, y, z)) = b(b(x, y), b(z, \bar{a}))$

(Rappelons que nous préférons pour la clarté des exemples noter $c(x, y, z)$ pour $c(x_1, x_2, x_3)$. Ainsi par exemple, la 2-dilatée de la torsion $\langle x, y\rangle$ (au lieu de (x_1, x_2))se note $\langle x_1, x_2, y_1, y_2\rangle$ (au lieu de (x_1, x_2, x_3, x_4)).

Nous introduisons $\tilde{t} = b_1(b_2(x, y), b_3(z))$ et le quasi-démarquage propre r défini par

$r(b_1(x, y)) = b(x, y)$, $r(b_2(x, y)) = b(x, y)$

et $r(b_3(x)) = b(x, \bar{a})$.

Nous avons ainsi $r(\tilde{t}) = \tilde{\phi}(c) = \phi(c)$ (puisqu'ici ϕ est "sans torsion").

Nous posons simplement $K = [\tilde{t}]$ (K est le magmoïde engendré par $\tilde{t}$).

Reste l'essentiel contruire Ψ sur $\tilde{t}$(qui est marqué et sans feuilles).

Ψ est le 2-morphisme défini par :

$\Psi(b_1(x, y)) = \langle c(x_1, x_2, y_1), \neq \rangle$

$\Psi(b_2(x,y)) = \langle x_1, y_1\rangle$ et $\Psi(b_3(x) = \langle x_1, \neq\rangle$

Nous avons ainsi

$\Psi(\tilde{t}(x, y, z)) = \langle c(x_1, y_1, z_1), \neq\rangle \curlyvee_1 c(x, y, z)$

et$(r(\tilde{t}), \Psi(\tilde{t})) \curlyvee_{1,1} (\phi(c), c)$ d'où $(r, [\tilde{t}], \Psi) \curlyvee_{1,1} \phi^{-1}$ ///

II-1-2-3-2 Commentaire :

I) En théorie des langages, l'"inversion de morphisme " ne pose pas de problème. Elle se résoud comme illustré sur l'exemple ci-dessous.

Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$ et Σ^* le monoïde libre engendré par Σ.

Soit ϕ le morphisme de Σ^* dans Σ^* défini par :

$\phi(a) = aa$, $\phi(b) = \wedge$ et $\phi(c) = c$ ($\wedge$ désigne le mot vide)

On 'marque' ϕ en $\bar{\phi}(a) = a_1a_2$, $\bar{\phi}(b) = b_1$, $\bar{\phi}(c) = c_1$

que l'on 'démarque' par $r(a_1) = r(a_2) = a$, $r(b_1) = \wedge$ et $r(c_1) = c$

$\bar{\phi}$ est 'inversé' par le morphisme Ψ défini par :

$\Psi(a_1) = a$, $\Psi(a_2) = \wedge$, $\Psi(b_1) = b$ et $\Psi(c_1) = c$

On a alors

$(r(a_1a_2), \Psi(a_1a_2)) = (aa, a) = (\phi(a), a)$

$(r(b_1), \Psi(b_1)) = (\wedge, b) = (\phi(b), b)$

$(r(c_1), \Psi(c_1)) = (c, c) = (\phi(c), c)$

d'où $(r, \{a_1a_2, b_1, c_1\}^*, \Psi) \,\underline{\frown}\, \phi^{-1}$

La construction ci-dessus se généralise sans peine à tout morphisme de monoïde et on a :

<u>Théorème d'inversion dans les langages</u> :

Soit ϕ un morphisme de Σ^* dans Δ^*. Il existe un langage reconnaissable R, un morphisme alphabétique r et un morphisme Ψ tels que $(r, R, \Psi) \,\underline{\frown}\, \phi^{-1}$.
Autrement dit, tout morphisme de monoïdes s'inverse par un bimorphisme où r est alphabétique -c'est à dire que r associe à une lettre, une lettre ou le mot vide. La notion de morphisme alphabétique est donc la notion correspondant dans les monoïdes aux démarquages de magmoïdes

II) Malheureusement, le problème 'd'inversion' d'un morphisme ϕ n'admet pas de solution dans la théorie classique des forêts, même si ϕ est linéaire complet strict.

L'exemple suivant prouve ce fait.
Soit ϕ égal à l'identité sauf $\phi\, c(x, y, z) = b_1(x, b_2(y, z))$
(ϕ est même linéaire complet strict marqué sans feuilles et très simple !).
Alors il n'existe pas de triplet $(r, K, \Psi) \frown \phi^{-1}$, où r est un quasi-démarquage, K raisonnable et Ψ un $\boxed{1}$-morphisme (donc Ψ est un morphisme 'classique').
Nous n'allons pas donner une preuve formelle, celle-ci serait fort longue et fastidieuse, reposant sur des propriétés classiques de la reconnaissabilité (utilisation du 'lemme de l'étoile' etc...). D'autant que le

résultat en jeu est "négatif" et qu'cn s'en convaincra aisément par l'argumentation 'intuitive' qui suit, que le lecteur pourra détailler. Nous pouvons nous restreindre à l'étude du cas de degré supérieur 1, donc considérer K reconnaissable (toute 'composante' d'une forêt raisonnable étant reconnaissable).

On en est alors amené à l'alternative suivante :

- soit Ψ non linéaire
- soit 'mémoriser' dans K des contraintes telles que $\alpha(t, t') \in K \Rightarrow t = t'$ pour une infinité de (t, t'), ce qui est impossible, puisque K est reconnaissable (arguments classiques de 'boucles' : 'lemme de l'étoile').

En effet, si nous supposons par exemple $\Psi(b_1(x, b_2(y, z))$ réduit à une variable (mettons x), et que $r(b_1(x, b_2\ (y, z))) = b_1(x,b_2(y,z))$ en raisonnant sur l''information' transmise, on en est ramené pour une infinité de t_1 à une situation du genre :

$$\Psi\ b_1\ (u_1, b_2\ (u_2, u_3)) = c(t_1, t_2, t_3) = \Psi(u_1)$$

$$r\ (b_1(u_1, b_2\ (u_2, u_3)) = b_1(r(u_1), b_2(r(u_2), r(u_3))$$

$$= b_1(t_1, b_2(t_2, t_3)).$$

d'où-grosso-modo- u_1 doit mémoriser t_1, t_2, t_3, u_2 doit mémoriser t_2 et u_3 mémoriser t_3, on dcit considérer une forêt K du genre "$b_1(\gamma(t'_1, t'_2, t'_3), b_2(t_2, t_3)) \in K \Rightarrow t'_2 = t_2, t'_3 = t_3$ pour une infinité de t_1, t_2, t_3" ce qui est incompatible avec la reconnaissabilité de K.

Si $\Psi(b_1(x, b_2(y, z)))$ non réduit à une variable, ou on se ramène au cas précédent ou on considère $\Psi(b_1(x, b_2(y, z)))$ du genre $c(x, y, y)$; et on ne peut alors obtenir $c(t_1, t_2, t_3)$ si $t_2 \neq t_3$.///

II-1-2-3-3 Corollaire :

I) Corollaire du lemme 2 :

Soit ϕ un 1 morphisme linéaire. Il existe une forêt K telle que K_o reconnaissable, un démarquage δ et un k-morphisme Ψ linéaire, séparé à délai borné, régulé, quasi-complet sur $k^{\otimes}$ tels que $(\delta, K^{\otimes}, \Psi) \underset{1,1}{\smile} \phi^{-1}$

De plus, δ est strict si ϕ l'est, complet si ϕ l'est.///

Preuve :

Soit ϕ un 1-morphisme linéaire. D'après (I-2-1-3-5), ϕ se décompose en $\phi_1 \circ \varepsilon$ où ϕ_1 est linéaire complet strict et ε est un démarquage, respectivement complet ou strict si ϕ l'est.

Appliquons le lemme 2 à ϕ_1. Il existe $(r, F^{\otimes}, \Psi_1) \underset{1,1}{\smile} \phi_1^{-1}$.

r est un quasi-démarquage propre, nous pouvons donc appliquer le sous-lemme 1-2 et il existe $(\delta', F'^{\otimes}, \phi) \underset{1,1}{\smile} r^{-1}$.

Nous obtenons donc

$$\phi^{-1} \underset{1,1}{\smile} \varepsilon^{-1} \circ \phi_1^{-1} \underset{1,1}{\smile} \varepsilon^{-1} \circ (\delta', F'^{\otimes}, \phi) \circ (id, F^{\otimes}, \Psi_1)$$

Posons $K = (F') \cap \phi^{-1}(F)$. K_o est reconnaissable car on sait que les morphismes inverses conservent la reconnaissabilité et que F'_o et F_o sont reconnaissables. On a évidemment $K^{\otimes} = F'^{\otimes} \cap \phi^{-1}(F^{\otimes})$.

On a alors :

$$\phi^{-1} \underset{1,1}{\smile} (\delta' \circ \varepsilon, K^{\otimes}, \phi \circ \Psi_1)$$

En posant $\delta' \circ \varepsilon = \delta$ et $\phi \circ \Psi_1 = \Psi$, nous en déduisons de façon évidente le résultat, compte tenu des propriétés de δ' et de Ψ_1 d'après les lemmes 2 et sous lemme 1-2, et des propriétés de composition (I-2-1-3) des morphismes///.

II) Remarque : Dans (A) est définie une notion de reconnaissabilité légérement plus générale que la notre (qui est la "classique") en ce sens que sont prises en considération un nombre fini de variables. On définit ainsi dans (A) la reconnaissabilité d'une forêt de $T(\Sigma)^1_n$ au lieu simplement d'une forêt de $T(\Sigma)^1_o$.

Ceci n'est qu'un détail car disons grosso modo qu'on se ramène au cas de $T(\Sigma)^1_o$ en considérant $x_1, .. x_n$ comme des symboles terminaux (n étant fixé, ils sont en nombre fini). Il est facile de voir alors, compte tenu de la construction des forêts F et K respectivement dans le sous lemme 1-2 et le lemme 2, que, pour tout n, K_n est reconnaissable au sens défini ci-dessus . La proposition 7-1 de A est alors un corollaire immédiat du corollaire ci-dessus.

II-1-2-3-4 Critique du lemme 2 :

I) Le lemme 2 contient l'essentiel du phénomène d'inversion. Il s'étend par le corollaire (II-1-2-3-3) à tout 1-morphisme linéaire. Nous pouvons nous poser le problème d'une plus grande généralisation.

a) Peut-on 'inverser' un morphisme non linéaire ou un k-morphisme non à délai de séparation borné ?
La réponse est non. Des considérations simples de degrés réduisent le problème à :
peut-on inverser $\phi_{[1]}$ par un bimorphisme B = (δ, F, Ψ, 1) ?
Or, comme on sait que la reconnaissabilité est close par morphisme inverse, intersection et démarquage, B^{-1} conserve la reconnaissabilité et ne peut être équivalent à $\phi_{[1]}$ qui lui ne la conserve pas si il n'est pas linéaire séparé à délai borné (plus précisément, **aucun** morphisme non linéaire ne conserve la reconnaissabilité, et il faut des conditions très restrictives pour que ϕ linéaire non séparé à délai borné la conserve. On montre alors tout de même la non inversibilité par un raisonnement plus fin).

b) Nous avons inversé les 1-morphismes linéaires par une classe plus large : celle des morphismes linéaires séparés à délai borné (le démarquage inverse et l'intersection avec la forêt raisonnable étant "accessoires"). **Notre résultat souffrirait un grave défaut si ces morphismes n'étaient eux mêmes inversibles.** Or, nous prouverons ultérieurement qu'ils le sont (des résultats nous manquent pour conclure maintenant). Ce sera le "second lemme d'inversion"

c) En conclusion et résumé du problème de l'"inversion de morphismes" :
Les morphismes non linéaires au non séparés à délai bornés n'auraient "aucune chance" d'être inversibles (arguments de reconnaissabilité).
Même les 1-morphismes linéaires ne sont pas inversibles dans le cadre classique.
Mais, dans le cadre des morphismes de magmoïdes, les 1-morphismes linéaires sont inversibles par les morphismes linéaires séparés à délai borné, qui sont 'eux inversibles par eux mêmes'.
Nous avons donc ici un premier argument solide pour introduire les morphismes linéaires séparés à délai bornés. Ceux-ci ont beaucoup du comportement des 1-morphismes linéaires (conservation de la reconnaissabilité) mais nous verrons qu'ils ont d'autres bonnes propriétés que l'inversion, que les 1-morphismes linéaires n'ont pas.

II - 1 - 3 LEMME 3 : LEMME DE SEPARATION

II-1-3-1 Situation du lemme : le phénomène de 'chevauchement de découpages'.

Nous avons déjà vu à propos de l''inversion de morphismes' (lemme 2) que tout morphisme Ψ induit une partition sur l'image $\Psi(t)$ de tout t. On retrouve ce phénomène quand on veut faire la composition $\Psi \circ \Phi^{-1}$ d'un morphisme et d'un morphisme inverse.
Soit ainsi $\Psi(t) = u$ et $\Phi^{-1}(u) = v$, le couple (u, v) appartient alors à la relation associée à $\Psi \circ \Phi^{-1}$. Conformément à l'ordre 'plus fin que' classique sur les partitions d'un ensemble, nous dirons que la partition induite sur u par Φ est plus fine que celle induite par Ψ si, pour tout noeud c de t, il existe un sous arbre v' de v tel que $\Psi(c)$ et $\Phi(v')$ soient un même sous arbre de u. Si la partition induite par Φ était plus fine que celle induite par Ψ on pourrait espérer - en dehors de toute considération des problèmes liés aux torsions - composer $\Psi \circ \Phi^{-1}$ 'syntaxiquement', c'est à dire en posant $\Psi \circ \Phi^{-1}(c) = \Phi^{-1}(\Psi(c))$ pour tout noeud c. Mais, d'une part les problèmes de torsions compliquent les choses, et d'autre part, même si Ψ et Φ sont des 1-morphismes linéaires complets stricts sans torsions, les partitions associées à Ψ et Φ sont en général incompatibles. Il se pose alors ce que nous appelions dans [9] le problème de "chevauchement de découpages", les partitions pouvant se chevaucher arbitrairement loin. Il ne peut plus être question dès lors d''inverser syntaxiquement'. Nous retrouvons ici le problème étudié dans [9] de "composition des TI"(Nous étudions dans II-2 des problèmes englobant ce dernier).
Remarquons que le lemme 2 donne, dans le cas où Φ est un 1-morphisme linéaire complet strict, une amorce de solution car, 'inversant' Φ, il ne reste à étudier que la composition $\Psi \circ r^{-1}$ où r est un démarquage. Or la partition associée à un démarquage est discréte, donc plus fine que toutes les autres et on peut espérer résoudre le problème syntaxiquement. C'est ce que nous faisons dans le lemme 4.
En ce qui concerne le lemme 3 étudié ici, il contient comme toujours le "noyau dur" d'un phénomène, et il sera étendu simplement par la suite grâce à d'autres résultats. Ainsi par exemple, nous considérons ici ϕ linéaire séparé (donc à délai 1), alors que le résultat s'étendra à ϕ linéaire à délai de séparation borné.

Dans le contexte ci-dessus, la philosophie du lemme 3 apparait comme étant :
toute "séparation à délai borné" peut être remplacée par un "chevauchement de découpages" entre Ψ et Φ avec les notations du lemme 3)
Autrement dit, un k-morphisme linéaire séparé à délai borné peut être décrit uniquement à l'aide des 1-morphismes linéaires complets stricts, de leurs inverses et des forêts reconnaissables. Ceci resserre les liens suggérés en conclusion du lemme 2 entre les k-morphismes linéaires séparés à délai borné et les 1-morphismes linéaires complets stricts.
Les lemmes suivants préciseront encore les liens.
Le lemme 3 est ici d'abord prouvé, puis illustré d'un exemple commenté.
Il est à remarquer que la preuve du lemme 3 utilise celle du lemme 2 (nous 'inversons' Φ).

II-1-3-2 Lemme 3 : Lemme du séparation :

II-1-3-2-1 Enoncé du lemme 3 :

Soit ϕ un k-morphisme linéaire, strict et séparé et soit une forêt reconnaissable.
Alors il existe un démarquage propre δ, une forêt F' reconnaissable, deux 1-morphismes linéaires complets stricts Φ et h, un 1-morphisme linéaire strict Ψ, tels que :

$$(F, \phi, 1) \simeq (\delta, F', \Psi) \circ (\Phi, h)$$

(ou encore $\rho_F \circ \phi_{[1]} \simeq \delta^{-1} \circ \rho_{F'} \circ \Psi \circ \Phi^{-1} \circ h$)
De plus, Ψ peut être pris complet si ϕ est [1]-complet sur F.

II-1-3-2-2 Remarques sur l'énoncé du lemme 3 :

I) Nous avons déjà vu que le caractère strict (contrairement à celui plus général, d'être régulé) et séparé (contrairement à celui plus général d'être à délai borné) était donné par la seule donnée de ϕ sur Σ, alphabet générateur du domaine. Il est donc ici inutile de préciser "strict et séparé sur $T(\Sigma)$" !

II) Tout 1-morphisme conservant les degrés, le lemme ne peut évidemment porter que sur la restriction $\phi_{[1]}$ du k-morphisme ϕ à une composante - qu'on pourra toujours supposer être la première.

III) Le problème de la complétude ne peut pas être disjoint de celui traité ici. A priori, on aurait pu espérer décomposer les difficultés, en 'rejettant' la non complétude sur h. En fait, on se convainc vite de la nécessité de considérer la complétude au niveau de Ψ et de la traiter simultanément avec le "chevauchement de découpage" comme le fait la preuve qui suit.

II-1-3-2-3 Preuve du lemme 3.

I) Nous considérons ϕ de Σ dans Σ'. Nous allons marquer les arbres de $T(\Sigma)_o^1$ en marquant d'une barre "$\bar{\ }$" leur sommet et en marquant pour chaque noeud "(est le $i^{ème}$ successeur immédiat de...)". Par exemple, a(b, a(b, b)) sera marqué en $\bar{a}(b(a_1), a(a_2)\ (b(a_1), b(a_2)))$ où $a(a_2)$ indique que l'occurrence correspondante de a est 2ème successeur d'un autre a).
Ce marquage est effectué par le marqueur descendant M défini par :
q_o est état initial

$q_o[a(x_1,..,x_n)] \to \bar{a}(q_{a_1}[x_1],.., q_{a_n}[x_n])$

$q_{a_i}[b(x_1,.. x_p)] \to b(a_i)\ (q_{b_1}[x_1],.., q_{b_p}[x_p])$.

δ sera le démarquage propre associé (on a donc $\delta(\bar{a}(x_1,..,x_n)) = a(x_1,.. x_n)$, $\delta(b(a_i)\ (x_1,..,x_n)) = b(x_1,.. x_n)$

Notons ρ_k la restriction à la forêt K (voir I-1-5)
Nous avons évidemment :

$\rho_{F'} \circ \delta \circ \phi = \delta \circ \rho_F \circ \phi$ avec $F' = \delta^{-1}(F)$

II) ϕ se décompose d'après les lemmes de décomposition en $\phi'_1 \circ h$ où h est linéaire (l) complet (c) strict (s) sans torsion et ϕ'_1 est ls séparé, strictement alphabétique, sans feuille , marqué, complet sur F si ϕ l'est. Posons $\phi_1 = \delta \circ \phi'_1$. Nous avons donc

$\rho_{F'} \circ \phi_1 \circ h = \delta \circ \rho_F \circ \phi$

et ϕ_1 a toutes les caractéristiques de ϕ'_1(sauf d'être marqué) puisque δ est propre.

Nous avons compte tenu de I)

$\delta \circ \rho_F \circ \phi = \rho_{F'} \circ \phi_1 \circ h$

Supposons que $\delta(t) = \delta(t')$ et que t et t'$\in M(T(\Sigma))$. t et t' sont identiques aux marquages près. Mais ces marquages sont les mêmes car M est injectif, donc t = t'. δ est ainsi également injective. Comme δ est évidemment surjectif, on a $\delta^{-1} \circ \delta = id$, d'où

$\rho_F \circ \phi = \delta^{-1} \circ \rho_{F'} \circ \phi_1 \circ h$

Pour prouver le lemme, il suffit maintenant d'établir qu'il existe Ψ et Φ l.s, Φ c., Ψ c. si F' $\subset$ le domaine de [1]complétude $D(\phi_{1[1]})$ de ϕ_1 et tels que

P) $\phi_{1[1]} \triangleq \Psi \circ \Phi^{-1}$

En effet, on a alors

$\rho_F \circ \phi_{[1]} = \delta^{-1} \circ \rho_{F'} \circ \phi_{1_{[1]}} \circ h \triangleq \delta^{-1} \circ \rho_{F'} \circ \Psi \circ \Phi^{-1} \circ h$

qui est le résultat cherché compte tenu des propriétés de h et δ. Nous allons prouver P) dans ce qui suit et qui est le "coeur" de la preuve.

III) Notations : Notons Δ l'alphabet source de δ_1. les lettres de Δ sont donc de la forme $a_{(b_i)}(x_1,.. x_n)$ (voir I)

Nous poserons $\phi'_1(a) = \langle a_1 . A_1,.. a_k.A_k\rangle = \tilde{a}.A$

donc $\phi_1(a(b_i)) = \langle a_1 . A_1,.., a_k.A_k\rangle$

De façon générale, nous associerons à une miniscule latine la majuscule correspondante pour désigner les torsions, comme dans a.A ;

Nous poserons

$A = (Ak^{\otimes})$, $i(A) = (Im(A) \cap k^{\otimes -1}(i))$

où nous rappelons que k : [k] $\rightarrow$ [1],

où (E) désigne la suite **ordonnée** selon les indices croissants des éléments de E. (Ainsi $(Ak^{\otimes})$ est la suite, réordonnée selon les indices croissants, des variables figurant par au moins une composante dans A) A est donc l'ensemble ordonné des variables de $a(b_i)$ qui sont lues par ϕ_1, i(A) l'ensemble ordonné des k-composantes de x_i qui figurent dans A (voir les références en annexe pour préciser ces notions 'lu par', etc...).

IV) Définition de Ψ :

$$\Psi a(b_i)\ (x_1,\ldots x_n) = b^i.\ (a'_{i_1} \cdot A_{i_1}, \ldots, a'_{i_p} . A_{i_p})$$

où $(i_1, \ldots i_p)$ est l'ensemble (ordonné) $i(B)$

$$\Psi(\bar{a})\ (x_1, \ldots, x_n) = a'_1 . A_1$$

L'alphabet image de Ψ est donc constitué des b^i de degré Card(i(B)) et des a'_j de degré Card(A_j).

Ces lettres sont formelles.

V) Définition de Φ :

si $A_i = \emptyset$, $\Phi(a_i) = a'_i$

sinon, $\Phi(a_i) = a'_i(a^{i_1}.i_1(A_i), \ldots, a^{i_p}.i_p(A_i)).\ \sigma(a_i)$

où $(i_1, \ldots, i_p)$ est l'ensemble ordonné A_i et où $\sigma(a_i)$ est une permutation que nous déterminerons dans la suite.

VI) Propriétés de Ψ et Φ :

Ψ est strict par construction. Comme ϕ_1 est linéaire, A_i est injectif et Ψ est donc linéaire.

Montrons que Ψ est complet si Ψ_1 est restreint à $D(\phi_1)$.

Soit $t \in D(\phi_1)$ et $a(b_i)$ un noeud de t. $a(b_i)$ est le $i^{\text{ème}}$ successeur d'une lettre du type $b(c_j)$. Puisque ϕ_1 est [1]-complet sur t, il faut que $(a_{\alpha_1} \cdot A_{\alpha_1}, \ldots a_{\alpha_p} . A_{\alpha_p})$ soit k-complet (où, rappelons le, $(i_1, \ldots, i_p) = i(B)$

$\phi_1(b(c_j)) = \tilde{a}.B)$. En effet, seules ces composantes de $\phi_1(a(b_i))$ figurent dans $\phi(t)_{[1]}$ et comme $\phi(t)_{[1]}$ est complet, $\phi(b(c_j).a(b_i))_{[1]}$ aussi. Donc, toutes les variables de $a(b_i)$ doivent figurer dans l'image, et ce ne peut être que par les composantes ci-dessus.

Nous avons donc $<a'_{i_1}.A_{i_1},.., a'_{i_p}.A_{i_p}>$ [1]-complet, donc enfin $\Psi a(b_i)$ complet.

(Autrement dit, les lettres apparaissant dans $t \in D(\phi_1)$ ont leur image par Ψ compléte.)

Si on restreint ϕ_1 à $D(\phi_1)$, on peut donc restreindre l'alphabet source de Ψ à un alphabet tel que Ψ soit complet.

Propriétés de Φ :

Φ est évidemment strict. Comme ϕ_1 est linéaire, A_i est injectif, $deg(a_i) = Card(Im(A_i))$ où $Im(A_i)$ est l'ensemble des variables qui figurent dans A_i et $Im(i_j(A_i))$ l'ensemble des k-composantes de x_{i_j} dans A_i, donc

$$\bigcup_{j\in[p]} Im\ i_j(A_i) = Im\ (A_i)$$

et $deg(a_i) = card\ Im(A_i) = Card\ (\bigcup_{j\in[p]} Im\ i_j(A_i))$.

D'autre part, $i_j(A_i)$ est par construction injectif et, par définition, $i \neq j \Rightarrow Im(i(A)) \cap Im(j(A)) = \emptyset$ donc, d'une part $\Phi(a_i)$ est linéaire, d'autre part $deg(a_i)=\sum_{j\in[p]} Card(Im\ i_j(A_i))$ donc $\Phi(a_i)$ est complet.

VII) Nous allons maintenant inverser Φ en utilisant la construction du lemme 2. Remarquons que Φ est marqué et que Φ est un k-morphisme avec $k \geq \sup_{\substack{a\in\Sigma \\ i_j\in deg(a)}} (deginf(a^{i_j}))$

Posons $L = Im(\Phi)_o$. Nous construisons comme dans le lemme 2, explicitement un k-morphisme χ à partir de Φ. Nous avons alors $\rho_L o \chi_{[1]} \widehat{=} \Phi^{-1}$. Puis, nous montrons qu'on peut choisir les $\sigma(a_i)$ de telle façon que pour tout arbre t marqué par u, on ait : $\Psi(t) o \rho_L o\ \chi_{[1]} \widehat{=} \phi_{1[1]}(t)$, ce qui établira la propriété P), donc le lemme 3. En fait, nous montrerons même que $\Psi(t) o \chi_{[1]} = \phi_{1[1]}(t)$.

<u>Construction de χ</u> : avec les notations du lemme 2, nous avons :

$$\chi(a'_i) = (a_i.\zeta(a_i), \neq \ldots, \neq)$$

$$\chi(a^i) = \mu(a^i)^{-1}.((1^1_k)^{\otimes|a^i|}{}_\otimes \neq {}^{\otimes k-|a^i|})$$

avec $\mu(a^i)$ permutation arbitraire de $[k]$

$$\theta(a_i) = 1_k^{d(a^{i_1})} \otimes \ldots \otimes 1_k^{d(a^{i_p})}$$

où $(i_1,\ldots,i_p) = A_i$

$$\text{et } \zeta(a_i) = \sigma^{-1}(a_i).\theta(a_i).(\mu(a^{i_1}) \otimes \ldots \otimes \mu(a^{i_p}))$$

Comme on peut choisir $\mu(a^i)$, définissons les comme suit : on a vu que a^j apparaissait dans un $\Phi(a_i)$ au plus, ce qui permet d'associer $i(j)$ à j. Posons $j(A_{i(j)}) = (j_1,\ldots,j_p)$ ($i(j)$ est en fait le seul indice i (si il existe) tel que $j(A_i) \neq \emptyset$). On a alors, pour $\ell \in [p]$, $\mu(a^i)(\ell) = j_\ell$ et $\mu(a^i)$ complété de façon arbitraire sur $[k]$.

Explicitons $\Psi \circ \chi$:

$$\Psi \circ \chi\,(\bar{a}) = \chi(a'_1.A_1) = a_1.\zeta(a_1).\ k - A_1, \neq^{\otimes k-1}$$

$$\Psi \circ \chi\ a(b_i) = \chi\ b^i(a'_{i_1}.A_{i_1}, \ldots, a'_{i_p}.A_{i_p})$$

$$= \mu(b^i)^{-1}.(1_k^{1\,\otimes|b^i|} \otimes \neq {}^{\otimes k-|b^i|}) \text{ composé avec}$$

$$[(a_{i_1}.\zeta(a_{i_1}), \neq^{\otimes k-1})kA_{i_1}, \ldots, (a_{i_p}.\zeta(a_{i_p}), \neq^{\otimes k-1}).kA_{i_p}]$$

$$= \mu(b^i)^{-1}.[(a_{i_1}.\zeta(a_{i_1}).kA_{i_1}, \ldots, a_{i_p}.\zeta(a_{i_p}).kA_{i_p})\otimes \neq {}^{\otimes k-|b^i|}]$$

(car $1_k^{1\otimes}$ sélectionne la première composante de chaque fibre de degré supérieur k)

Nous sommes amené à développer les expressions de la forme $\zeta(a_j).kA_j$

En posant $Im(A_j) = (j_1,\dots j_q)$ on a

$\zeta(a_j).kA_j = \sigma^{-1}(a_j).\ \nu(a_j)$

avec $\nu(a_j) = \theta(a_j).(\mu(a^{j_1}) \otimes \dots \otimes \mu(a^{j_q}))$.

Pour **choisir les** $\sigma(a_j)$, prouvons d'abord un **sous lemme** : Si $Im(\nu) = Im(A)$ et que ν et A sont injectives et dans θ^n, alors $\exists!\sigma$, permutation de $[n]$, telle que $\sigma.\nu = A$.

En effet, $\forall\ i \in [n], \exists! j \in [n]$ tel que $\nu(j) = A(i)$.

Posons $\sigma(i) = j$. Nous avons bien $A(i) = \nu(\sigma(i))$. Pour remarquer que σ est une permutation, il suffit de remarquer que $\sigma(i) = \sigma(i')$ $\Rightarrow A(i) = A(i') \Rightarrow\ i = i'$.///

On peut choisir $\sigma(a_j)$ tel que

(R) $\zeta(a_j).\ k\ A_j = A_j$

En effet, $Im(\zeta(a_j).\ kA_j) = Im(\nu(a_j)) = Im(A_j)$.

$\nu(a_j)$ et $A_j \in \Theta^{\deg(a_j)}$ (compte tenu de $\Sigma \deg a^{j_\ell} = \deg a_j$) et sont injectives. Le sous lemme précédent prouve alors (R).

Terminons la preuve du lemme 3 en prouvant par récurrence sur la taille t_a de $\tilde{t}$ marqué par u que :

$\Psi(\tilde{t}) \circ \chi_{[1]} = \phi_{1[1]}(\tilde{t})$

si $t_a = 1$, $\Psi(\bar{a}) \circ \chi_{[1]} = a_1.\zeta(a_1).kA_1$

et compte tenu de (R), $= a_1.\ A_1 = \phi_{1[1]}(\bar{a})$.

supposons vrai pour $\tilde{t}$ et soit $\tilde{t}' = \tilde{t}.\ (1_{n_1} \otimes a(k_i) \otimes 1_{n_2})$

($\tilde{t}'$ marqué par u). Par hypothèse de récurrence, on a

$(\Psi \circ \chi)_{[1]}(\tilde{t}) = \phi_{1[1]}(\tilde{t}) = \tilde{u}.U$

$$\Psi \circ \chi\ a(b_i) = \mu(b^i)^{-1}[(a_{i_1}.A_{i_1}, \ldots, a_{i_p}.A_{i_p}) \otimes \neq^{\otimes k-|b^i|}]$$

et rappelons que $\phi_1\ a(b_i) = (a_1.A_1, \ldots, a_k.A_k)$

Par définition de M, l'antécédant de a (b_i) est de la forme $b(c_j)$

et par définition de Ψ, on a $(i_1, \ldots, i_p) = i(B)$ si bien que,

comme $\mu(b_i)\ (\ell) = i_\ell$, on a :

$$\phi_1 a(b_i) = \mu(b_i)^{-1}.(a_{i_1}.A_{i_1}, \ldots, a_{i_p}.A_{i_p}, a_{i'_1}.A_{i'_1}, \ldots, a_{i'_{k-p}}.A_{i'_{k-p}})$$

Or, de $[n_1k+1, (n_1+1)k]$, seuls $(n_1k+i_1, \ldots, n_1k+i_p)$ figurent dans $Im(U)$, donc $\psi \circ \chi(\tilde{t}')$ et $\phi_{1[1]}\tilde{t}'$ ne dépendent que des composantes de rang $i_1, \ldots i_p$ de $\psi \circ \chi\ a(b_i)$ et $\phi_1\ a(b_i)$ respectivement, c'est à dire des p premières composantes de $\mu(b^i).(\psi \circ \chi\ a(b_i))$ et $\mu(b^i).(\phi_{1[1]}a(b_i))$ qui sont les mêmes. L'égalité est établie.

Conclusion : Si t est marqué sans variable, on en déduit en particulier l'égalité P). Le lemme 3 est prouvé///

C.Q.F.D.

II-1-3-2-4 Exemple :

Nous illustrons le lemme 3 et sa preuve en en conservant les notations.

Soit ϕ défini par :

$\phi(b(x, y)) = \langle b_1(x_1, x_2, y_1), b_2\rangle$

$\phi(c(x, y, z)) = \langle c_1(x_1, x_2, y_1), c_2(z_1)\rangle$

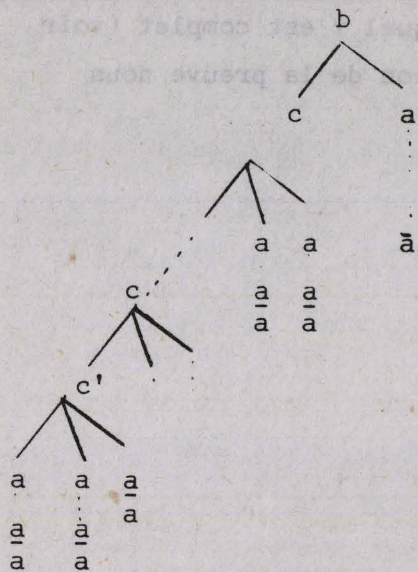
$\phi(c'(x, y, z)) = \langle c'_1(x_1, y_1), c'_2(z_1)\rangle$

$\phi(a(x)) = \langle a_1(x_1), a_2\rangle$

$\phi(\bar{a}) = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2\rangle$

ϕ est ici un 2-morphisme linéaire séparé strict alphabétique marqué, nous pourrons donc prendre ici $\phi'_1 = \phi$ et h = identité.

Soit F la forêt reconnaissable constituée des arbres de la forme



F est même la forêt hyper-locale (I-1-2-3-2) définie par

$I = \{b(x, y)\}$

$S(b) = \{c(x, y, z)\} \times \{a(x)\}$

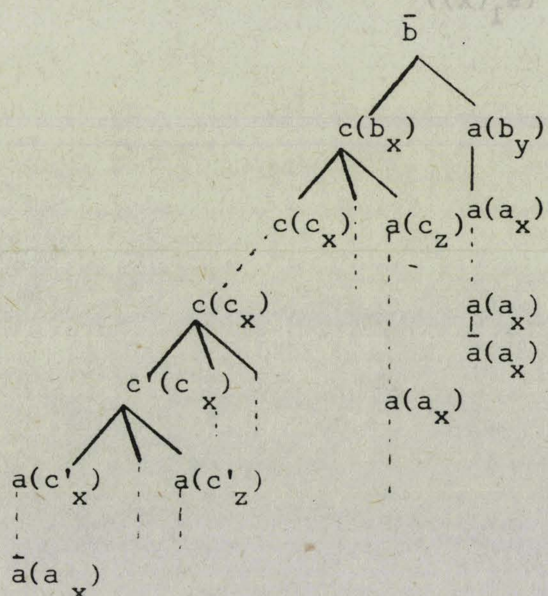
$S(c) = \{c^{(')}(x,y,z)\} \times \{a(x)\} \times \{a(x)\}$

$S(c') = \{a(x)\}^3$, $S(a) = \{a(x), \bar{a}\}$

Comme nous notons b(x, y) au lieu de $b(x_1, x_2)$, il sera ici plus imagé de marquer par exemple $c(b_x)$ que $c(b_1)$ pour dire que c est 1er successeur de b(x, y) (car c "se substitue à x" dans l'arbre).

Soit F' l'image par le marqueur M de la forêt F.

F' est l'ensemble des arbres de la forme



Rappelons que $a(c_z)$ signifie que a est, dans l'arbre considéré, 3ème successeur (= substitué à z) d'une occurrence de c(x, y, z) etc...

δ étant le démarquage associé à M, on en déduit $\phi_1 = \delta \circ \phi'_1$.

Il est facile de vérifier que F est inclus dans le domaine de [1]-complétude de ϕ. Ceci va nous permettre de restreindre l'alphabet sur lequel est défini F' à un alphabet sur lequel Ψ est complet (voir point VI de la preuve). De fait, la construction de la preuve nous donne ici :

$\Psi(\bar{b}(x,y)) = b_1(x, y)$

$\Psi c(b_x)(x, y, z) = b^x(c_1(x, y), c_2(z))$

$\Psi c(c_x)(x, y, z) = c^x(c_1(x, y), c_2(z))$

$\Psi c'(c_x)(x, y, z) = c^x(c'_1(x, y), c'_2(z))$

$\Psi \bar{a}(a_x) = a^x(\bar{a}_1)$

$\Psi a(b_y)(x) = b^y(a_1(x))$, $\Psi a(c_y)(x) = c^y(a_1(x))$

$\Psi a(c_z)(x) = c^z(a_1(x))$, $\Psi a(c'_x)(x) = c'^x(a_1(x))$

$\Psi a(c'_y)(x) = c'^y(a_1(x))$, $\Psi a(c'_z)(x) = c'^z(a_1(x))$

et $\Psi a(a_x)(x) = a^x(a_1(x))$.

Φ est défini par :

$\Phi b_1(x, y, z) = b_1(b^x(x, y), b^y(z))$

$\Phi c_1(x, y, z) = c_1(c^x(x, y), c^y(z))$

$\Phi c_2(x) \quad = c_2(c^z(x))$

$\Phi c'_1(x, y) \quad = c'_1(c'^x(x), c'^y(y))$

$\Phi c'_2(x) \quad = c'_2(c'^z(x))$

$\Phi a_1(x) \quad = a_1(a^x(x))$ et $\Phi(\bar{a}_1) = \bar{a}_1$.

Φ s'inverse par χ :

$\chi b_1(x, y) = \langle b_1(x_1, x_2, y_1), \neq\rangle$

$\chi b^x(x, y) = \langle x_1, y_1\rangle$

$\chi b^y(x) = \langle x_1, \neq\rangle$

$\chi c_1(x, y) = \langle c_1(x_1, x_2, y_1), \neq\rangle$

$\chi c^x(x, y) = \langle x_1, y_1\rangle$

$\chi c^y(x) = \langle x_1, \neq\rangle$

$\chi c_2(x) = \langle c_2(x_1), \neq\rangle$

$\chi(c^z(x)) = \langle x_1, \neq\rangle$

$\chi(c'_1(x, y)) = \langle c'_1(x_1, y_1), \neq\rangle$

$\chi(c'^x(x)) = \langle x_1, \neq\rangle$

$\chi(c'^y(x)) = \langle x_1, \neq\rangle$

$\chi(c'_2(x)) = \langle c'_2(x_1), \neq\rangle$

$\chi(c'^z(x)) = \langle x_1, \neq\rangle$

$\chi(a_1(x)) = \langle a_1(x_1), \neq\rangle$

$\chi(a^x(x)) = \langle x_1, \neq\rangle$

et $\chi(\bar{a}_1) = \langle \bar{a}_1, \neq\rangle$

Nous en déduisons que :

$\Psi \circ \chi(\bar{b}(x, y)) = \langle b_1(x_1, x_2, y_1), \neq\rangle$

$\Psi \circ \chi(c(b_x)(x, y, z)) = \langle c_1(x_1, x_2, y_1), c_2(z_1)\rangle$

$\Psi \circ \chi c(c_x)(x, y, z) =$ "

$\Psi \circ \chi c'(c_x)(x, y, z) = \langle c'_1(x_1, y_1), c'_2(z_1)\rangle$

$\Psi \circ \chi \bar{a}(a_x) = \langle \bar{a}_1, \neq\rangle$

$\Psi \circ \chi a(b_y)(x) = \langle a_1(x_1), \neq\rangle$, $\Psi \circ \chi\ a(c_y)(x) = \langle a_1(x_1), \neq\rangle$

$\Psi \circ \chi a(c_z)(x) =$ " , $\Psi \circ \chi\ a(c'_x)(x) =$ "

$\Psi \circ \chi a(c'_y)(x) =$ " , $\Psi \circ \chi\ a(c'_z)(x) =$ "

et $\Psi \circ \chi\ a(a_x)\ (x) = \langle a_1(x_1), \neq\rangle$

Remarquons qu'ici, tous les morphismes étant "sans torsions", nous n'avons "pas besoin" des permutations du type μ et σ qui interviennent dans la preuve et sont indispensables dans le cas général.

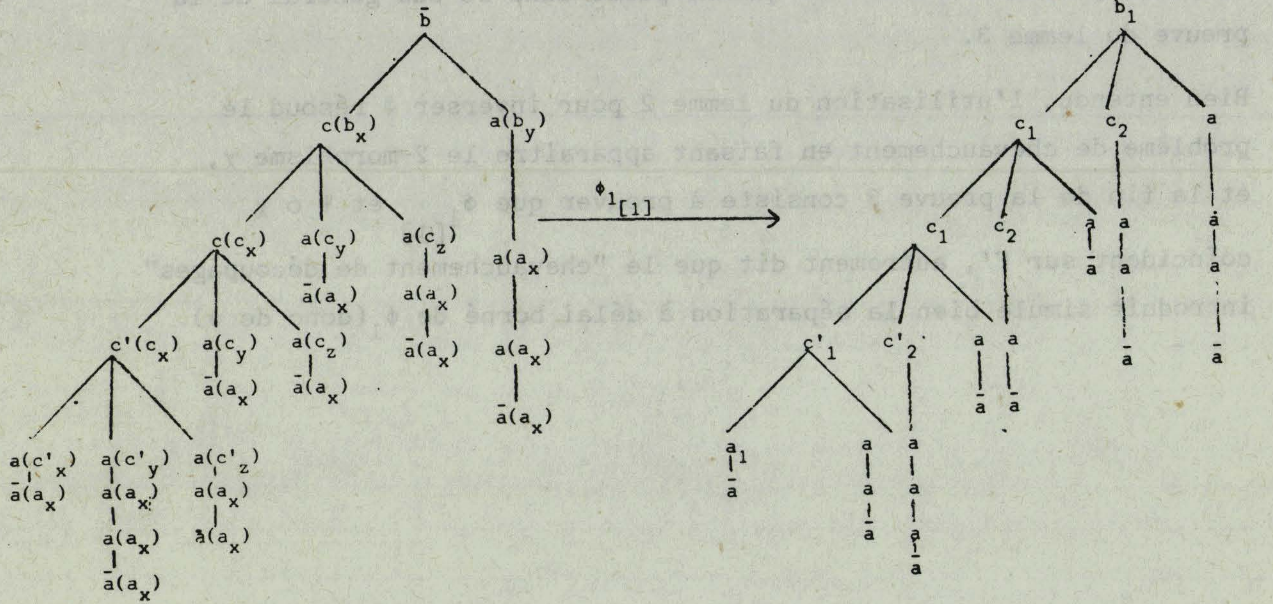
Le lecteur vérifiera que $\Psi \circ \chi$ et ϕ_1 coïncident sur F', d'où le résultat. On retrouve l'idée de la preuve, à savoir que $\phi_{1_{[1]}}$ et $\Psi \circ \chi$ coïncident sur les composantes "utiles". par exemple, on aura $\phi_1 \bar{a}(a_x) = \langle \bar{a}_1, \bar{a}_2\rangle$ alors que $\Psi \circ \chi\ \bar{a}(a_x) = \langle \bar{a}_1, \neq\rangle$ mais, du fait qu'on ne s'intéresse qu'à la restriction à F', $\bar{a}_2$ n'apparait jamais. On obtient en fait $\Psi \circ \chi$ en remplaçant dans ϕ_1 les "composantes inutiles" par $\neq$.

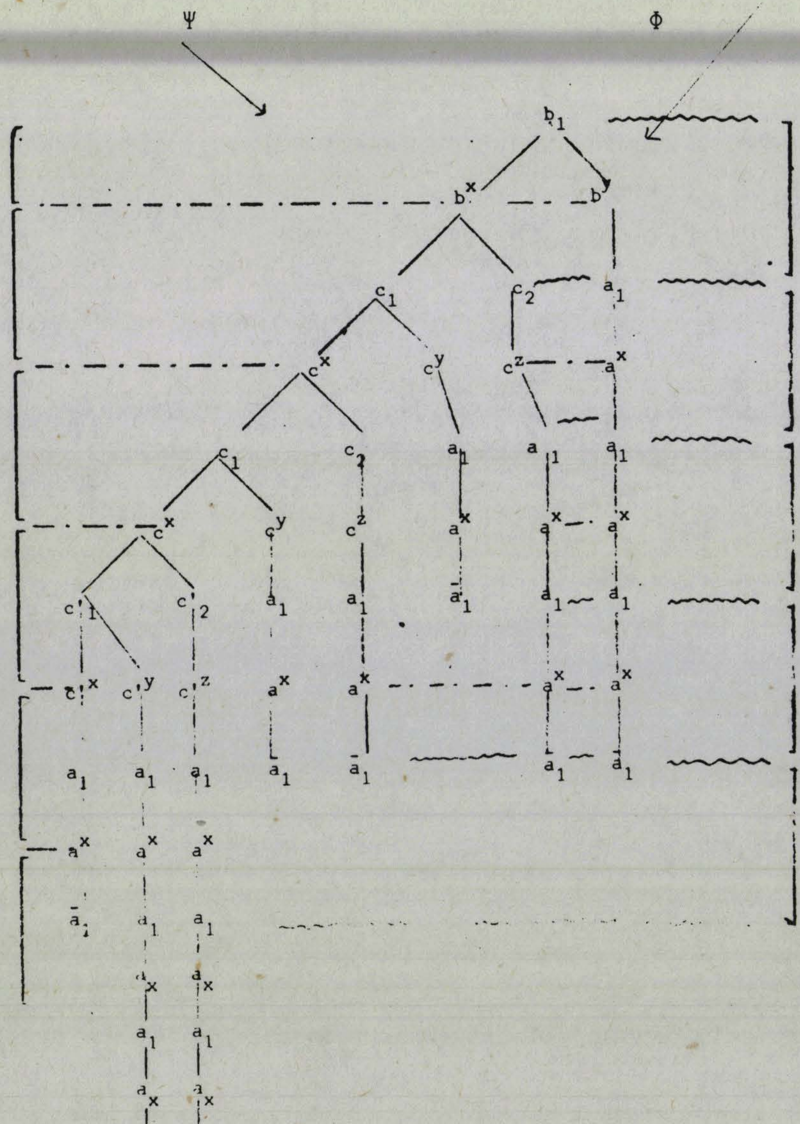
Nous donnons sur la figure 1 une illustration de $\Psi \circ \Phi^{-1} \hat{=} \phi_{1_{[1]}}$ sur F'.

Le chevauchement de découpages apparait bien ici, Ψ partitionnant son image par coupes aux profondeurs homogènes impaires et Φ aux profondeurs homogènes paires.

Ainsi, ce type de découpage est "complet" (au sens de la complexité) en ce sens que le chevauchement se propage partout du sommet jusqu'aux feuilles. Ce phénomène de chevauchement est ainsi ici "le plus complexe possible". C'est ce qui se passe dans le cas général de la preuve du lemme 3.

Bien entendu, l'utilisation du lemme 2 pour inverser Φ résoud le problème de chevauchement en faisant apparaitre le 2-morphisme χ, et la fin de la preuve 3 consiste à prouver que $\phi_{1_{[1]}}$ et $\Psi \circ \chi$ coïncident sur F', autrement dit que le "chevauchement de découpages" introduit simule bien la séparation à délai borné de ϕ_1(donc de ϕ).





II - 1 - 4 LEMMES DE PERMUTATION DES MORPHISMES ET DES DEMARQUAGES INVERSES :

Les lemmes 4 et 4 bis que nous allons prouver ici sont à la base des propriétés de composition des bimorphismes.
L'idée est que, dans certains cas, étant donné un k-morphisme ϕ et un démarquage δ, on pourra trouver un k-morphisme ϕ' et un démarquage δ' tels que $\phi \circ \delta^{-1} \underline{\frown} \delta'^{-1} \circ \phi'$ (avec en plus des contrôles reconnaissables, des restrictions de fibre etc...).
Dans certains cas, on pourra prendre ϕ' du même type que ϕ.
Nous commençons par établir 3 sous-lemmes préliminaires.
Puis nous en déduisons les lemmes 4 et 4 bis et enfin nous commentons et illustrons les résultats.

II-1-4-1 Sous-lemmes préparatoires :

II-1-4-1-1 Sous-lemme 4-1 :

Soit un k-morphisme linéaire, ε un démarquage strict marqué. Il existe alors un démarquage strict marqué ε', un k-morphisme ϕ' et une forêt K tels que $\phi \circ \varepsilon^{-1} \underline{\vee} (\varepsilon', K, \phi')$.

Si ϕ est d'un certain type sur Γ, ϕ' est du même type sur $\varepsilon'^{-1}(\Gamma) \cap K$
De plus, il existe $K_1, .., K_n$ telles que K_i reconnaissable et

$K = [K_i]$ $i \in [n]$ (Donc K_o raisonnable)

<u>Preuve</u> : Supposons que ε est un démarquage de Δ dans Γ. Pour tout $\tilde{t} \in \mathcal{T}(\Gamma)^1_p$, il existe un et un seul $\tilde{t}' \in \mathcal{T}(\Delta)^1_{p+p'}$, une et une seule permutation σ de $[p]$, tels que :

$$\varepsilon^{-1}(\tilde{t}) = \tilde{t}'(A_1 \otimes .. \otimes A_{p+p'}) . \sigma^{-1}$$

où, pour p indices $i_1, .. i_p$, on a $A_{i_j} = x_1$ et pour les p' autres indices, $A_{i_j} = T(\Delta)^1_o$.

Supposons maintenant que Σ est l'alphabet domaine de ϕ. Pour tout $a \in \Sigma$, posons :

$\phi(a) = <\tilde{t}(a)_1.\theta_1(a),.., \tilde{t}(a)_k.\theta_k(a)>$

D'après ce qui précéde, nous pouvons, à tout $a \in \Sigma$ et $i \in [k]$, associer $\tilde{t}'_i(a) \in \tilde{T}(\Delta)^1$ et une permutation $\sigma_i(a)$ tels que

$$\varepsilon^{-1}(\tilde{t}'_i(a)) = \tilde{t}'_i(a).(A^i_1(a) \otimes .. \otimes A^i_{P''_{a,i}}(a)).\sigma_i^{-1}(a)$$

avec $P''_{a,i} = P_{a,i} + P'_{a,i}$

que nous poserons $= \tilde{t}_i(a)\ (A_i(a))\sigma_i^{-1}(a)$

$\varepsilon^{-1}\ (\phi(a))$ s'exprime alors sous la forme :

$$\varepsilon^{-1}(\phi(a)) = <\tilde{t}_1(a).(A_1(a))\sigma_1^{-1}(a).\theta_1(a),.., \tilde{t}_k(a).(A_k(a)).\sigma_k^{-1}(a).\theta_k(a)>$$

tout $\tilde{t}_i(a).A_i(a)$ est une forêt de $\tilde{T}(\Delta)^1_{n_i(a)}$ pour un certain $n_i(a)$.

A tout $a \in \Sigma_n$ associons une nouvelle lettre a' d'un nouvel alphabet $\Sigma'_{n'}$ avec,

$$n' = n + p'_{a,1} + .. + p'_{a,k}$$

<u>Définissons</u> ϕ' :

$\forall\, a' \in \Sigma',\ \phi'(a'(x_1,.. x_n, x_{n+1},.. x_{n'}))$

$$= <\tilde{t}_1(a).\ A'_1(a).\sigma_1'^{-1}(a).\theta_1'(a),..., \tilde{t}_k(a).A'_k(a).\sigma_k'^{-1}(a).\theta'_k(a)>$$

où $A'_i(a)$ est défini comme suit :

$$A'_i(a) = <x_{i_1},.., x_{i_{p_{a,i}+p'_{a,i}}}>$$

avec $x_{i_j} = x_m$ si i_j est le $m^{\text{ème}}$ indice ν tel que, dans $A_i(a)$,

$$A^i_\nu(a) = x_1$$

$x_{i_j} = x_{m+p(a,1)+..+ p(a,k)+p'(a,1)+..+p'(a,i-1)}$

si i_j est le $m^{ème}$ indice ν tel que, dans $A_i(a)$ $A^i_\nu(a) = T(\Delta)^1_o$

$\sigma'^{-1}_i(a)$ prolonge $\sigma_i^{-1}(a)$ par l'identité en une permutation de [r] avec $r = p''(a,1)+..+p''(a,k)$

$\theta'_i(a)$ prolonge $\theta_i(a)$ en associant à tout ν, $(k-1)\nu + 1$.

On supposera $\Sigma' \cap \Delta = \emptyset$ et on pose :

$\forall\, b \in \Delta,\ \phi'(b(x_1,..\ x_n)) = \langle b(x_1,..\ x_n).\ 1_k^{1^{\otimes n}},\ \neq \otimes^{k-1}\rangle$

Des liens entre les torsions de ϕ et ϕ', il vient immédiatement tous les liens entre les types de ϕ et ϕ'.

On a d'autre part, $\forall\ t \in T(\Delta)_o$, $\phi'(t) = \langle t, \neq^{\otimes^{k-1}}\rangle$

d'où, en posant $K(a) = a'(x_1,..\ x_n, T(\Delta)^1_o,..,T(\Delta)^1_o)$,

il vient immédiatement :

$\phi'(K_{(a)}) = \varepsilon^{-1}(\phi(a))$.

<u>Définition de</u> ε' :

$\varepsilon' a'(x_1,..\ x_n,..\ x_{n'}) = a(x_1,..\ x_n)$

ε' = identité sur Δ

Remarquant que $\varepsilon'^{-1}(a(x_1,..\ x_n)) = K(a)$, il vient pour tout $a \in \Sigma$:

(R) $\quad \phi'(K(a)) = \phi'\varepsilon'^{-1}(a) = \varepsilon^{-1}\phi(a)$

Pour tout a, K(a) est reconnaissable (au sens généralisé déjà rappelé dans II-1-2, c'est à dire en regardant les variables $x_1,..\ x_n$ comme des lettres de l'alphabet).

Posant $K = [K(a)]_{a \in \Sigma}$, c'est à dire K engendrée par les K(a), compte tenu que les conditions de types sont évidemment satisfaites, il nous reste à établir que

$(\varepsilon', K, \phi') \underline{\vee}\ \phi \circ \varepsilon^{-1}$

A tout $t \in T(\Sigma)$, associons $K(t)$ comme suit :

$K(\theta) = \theta$, $K(a)$ déjà défini pour $a \in \Sigma$

$K(t \otimes t') = K(t) \otimes K(t')$ et $K(t.t') = K(t).K(t')$.

Compte tenu de (I-2-1-5-1 VIII), on a

$\varepsilon^{-1}(t \otimes t') = \varepsilon^{-1}(t) \otimes \varepsilon^{-1}(t')$ et $\varepsilon^{-1}(t.t') = \varepsilon^{-1}(t).\ \varepsilon^{-1}(t')$

et, comme $\varepsilon^{-1}(\theta) = \theta$ et $\varepsilon^{-1}(a) = K(a)$ si $a \in \Sigma$, on en déduit

$\forall\ t,\ \ \varepsilon^{-1}(t) = K(t)$.

Reste donc à prouver que pour tout $t \in T(\Sigma)$ on a :

(S) $\phi'(K(t)) = \varepsilon^{-1}(\phi(t))$.

Prouvons (S) par récurrence sur la taille de t.

I) si $t = a \in \Sigma$, (R) nous assure du résultat.

Si $t = \theta \in \Theta$, $\phi'(K(\theta)) = \phi'(\theta) = k\theta = \varepsilon^{-1}\ \phi(\theta)$

II) On a $\phi'(K(t \otimes t')) = \phi'(K(t) \otimes K(t'))$ d'après la définition de $K(t)$,

et encore $= \phi'(K(t)) \otimes \phi'(K(t'))$.

Si, par hypothèse de récurrence, on a $\phi'(K(t)) = \varepsilon^{-1}\phi(t)$ et

$\phi'(K(t')) = \varepsilon^{-1}\ \phi(t')$, on en déduit que $\phi'(K(t \otimes t')) = \varepsilon^{-1}\phi(t) \otimes \varepsilon^{-1}\phi(t')$

qui est égal à $\varepsilon^{-1}(\phi(t) \otimes \phi(t')) = \varepsilon^{-1}\phi(t \otimes t')$.

Reste à prouver que, $\forall\ a \in \Sigma$ et $t \in T(\Sigma)$, si (S) est satisfaite pour t elle l'est pour a.t.

Or, $\phi'(K(a).K(t)) = \phi'(K(a)).\phi'(K(t))$ d'après (I-2-1-5-1 VI) car <u>ϕ' est linéaire</u>. Par hypothèse de récurrence, on a donc

$\phi'(K(a).\ K(t)) = \varepsilon^{-1}(\phi(a)).\varepsilon^{-1}(\phi(t)) = \varepsilon^{-1}(\phi(a).\phi(t)) = \varepsilon^{-1}\phi(a.t)$

(d'après I-2-1-5-1 VIII)

C.Q.F.D. ///

<u>II-1-4-1-2 Sous lemme 4-2</u> :

Soit ϕ un k-morphisme linéaire, ε un démarquage propre. Alors, il existe un k-morphisme linéaire ϕ', un démarquage propre ε' tels que ;

$\phi \circ \varepsilon^{-1} \succeq \varepsilon'^{-1} \circ \phi'$.

De plus, pour toute forêt F, ϕ' est du même type sur $\varepsilon^{-1}(F)$ que ϕ sur F.

Preuve : Notons, pour tout $a \in \Sigma$, $\phi(a) = \tilde{t}(a).\theta_a$.

ε étant complet et strict, $\forall\ \tilde{t} \in \tilde{T}(\Sigma)$, $\varepsilon^{-1}(\tilde{t})$ est fini et inclus dans $\tilde{T}(\Sigma)$ car ε est sans torsion . Nous poserons donc :

$$\forall\ a \in \Sigma_n,\ \varepsilon^{-1}(\tilde{t}(a)) = \{\tilde{t}^1(a),.., \tilde{t}^{p_a}(a)\} \subset \tilde{T}^k_{kn}.$$

Nous y associons l'alphabet formel :

$$\{\tilde{r}^i_a | a \in \Sigma,\ i \in [p_a]\} \text{ où } \operatorname{dinf}(\tilde{r}^i_a) = \operatorname{dinf}(a)$$

Nous définissons alors (ε', ϕ') par :

$\varepsilon'(\tilde{r}^i_a) = a$

$\phi'(\tilde{r}^i_a) = \tilde{t}^i(a).\theta(a)$

Il est évident par construction que les conditions de types sont conservées. Reste à prouver que $\phi \circ \varepsilon^{-1} \curlyvee \varepsilon'^{-1} \circ \phi'$.

Or, on a par construction :

$$\forall\ a \in \Sigma,\ \phi'\ \varepsilon'^{-1}(a) = \phi'\{\tilde{r}^1_a,..\tilde{r}^{p_a}_a\} = \{\tilde{t}^i_a.\theta_a | i \in [p_a]\}$$

$$= \varepsilon^{-1}(\tilde{t}(a).\theta_a) = \varepsilon^{-1}\phi(a).$$

Le résultat se déduit alors de (I-2-2-2-2- III) ///

C.Q.F.D.

II-1-4-1-3 Sous lemme 4-3 :

Soit ϕ un k-morphisme linéaire, ε un démarquage égal à l'identité sur $\Sigma-\{e(x_1)\}$ et tel que $\varepsilon\ e(x_1) = x_1$. Alors, il existe un k'-morphisme ϕ' linéaire, un démarquage ε' sans torsion, une forêt K' tels que :

$$\phi \circ \varepsilon^{-1} \underset{1,k}{\curlyvee} (\varepsilon', K', \phi')$$

De plus, ϕ' est $[\nu]$-complet sur t si ϕ l'est sur $\varepsilon'(t)$ et K' est engendré par $K_1,..\ K_n$ qui sont reconnaissables (K'_o est donc raisonnable).

Preuve :

Soit Σ' l'alphabet domaine de ϕ. Pour tout $a \in \Sigma'$, posons

$\phi(a) = \langle \tilde{t}_a^{\,1}.\theta_a^1, .., \tilde{t}_a^{\,k}.\theta_a^k \rangle = \tilde{t}_a.\theta_a$

(on sait que $\tilde{t}_a = \tilde{t}_a^{\,1} \otimes .. \otimes \tilde{t}_a^{\,k}$).

I) Prouvons par récurrence sur la taille ν de $\tilde{t}'_a = \tilde{\phi}(\bar{a}) \in \tilde{T}(\Sigma)^k$

qu'il existe K_a reconnaissable monodique, définie sur un alphabet Δ_a,

qu'il existe Σ' défini sur Δ_a et un k'-morphisme linéaire ϕ' tels que :

P) $\quad \varepsilon^{-1}(\tilde{t}_a) \underset{k}{\curlyvee} \phi'(\varepsilon'^{-1}(x_1) \cap K_a)$

et tels que, de plus, ϕ' soit [k]-complet sur K_a

- si $\nu = o$, $\tilde{t}'_a = 1_k$ et $\varepsilon^{-1}(\tilde{t}_a) = e^*(x_1) \otimes .. \otimes e^*(x_1)$. On prend

$K_a = \alpha_a^{1^*} \ldots \alpha_a^{k^*}\ (x_1)$, $\varepsilon'(\alpha_a^i(x_1)) = x_1$

et $\phi'(\alpha_a^i(x)) = 1_{i-1} \otimes e(x_1) \otimes 1_{k'-i}$.

($a^*(x)$ désigne $\{a^n(x) | n \in N\}$)

On a $\varepsilon'^{-1}(x_1) \cap K_a = K_a$ et $\phi'(K_a) \underset{k}{\curlyvee} \varepsilon^{-1}(\tilde{t}_a)$

- supposons le résultat établi pour tout $\tilde{t}_a$ de taille $\leq \nu$

et soit $\tilde{t}'_a = \tilde{t}'_a(1_{n_1} \otimes b(x_1, .. x_n) \otimes 1_{n_2})$

On peut toujours supposer que Δ_a contient $\{\alpha_a^i | i \in [k']\}$ tels que

$\phi'(\alpha_a^i) = 1_{i-1} \otimes e(x_1) \otimes 1_{k'-i}$. On a, par hypothèse de récurrence,

l'existence de K_a sur Δ_a, de ε' et ϕ' tels que

$\varepsilon^{-1}(\tilde{t}_a) \underset{k}{\curlyvee} \phi'(\varepsilon'(x) \cap K_a)$ ($\forall$ k' assez grand)

On ajoute à Δ_a un nouveau caractère $\beta_a(x)$ (toujours unaire), on pose

$$\varepsilon'(\beta_a(x)) = x \text{ et } \phi'(\beta_a(x)) = 1_{n_1} \otimes b\,(x_1,\ldots x_n) \otimes 1_{k'-n-n_1} \otimes \neq^{\otimes n-1}$$

(on prend k' assez grand pour que $k'-n-n_1 \geq o.$)

Nous remarquons que ϕ' est bien linéaire.

On pose alors $K'(a) = K(a).\alpha_a^{1^*} \ldots \alpha_a^{k'^*} \beta_a \alpha_a^{n_1+1^*} \ldots (\alpha_a^{n_1+n})^* \;x$

ϕ' est complet sur $K'(a)$ car l'est sur $K(a)$ et l'ensemble des variables dans $\phi'(\beta_a)$ est $\{x_1,\ldots, x_{k'}\}$

On a $\varepsilon'^{-1}(x_1) \cap K'(a) = K'(a)$ (car toutes les lettres de $K'(a)$ ont pour image x_1)

Compte tenu de la linéarité de ϕ', nous pouvons appliquer le lemme (I-2-1-5-1) et obtenons :

$$\phi'(K'(a)(x))_{[k]}=\phi'(K(a)x)_{[k]}.\phi'(\alpha_a^{1^*}(x))\ldots\phi'(\alpha_a^{k'^*}(x)).\phi'(\beta_a(x).\phi'(\alpha_a^{n_1+n^*})\ldots \phi'(\alpha_a^{n_1+n\,*})(x)$$

$$= \varepsilon^{-1}(\tilde{t}(a)).(e^*(x)^{\otimes n_1} \otimes e^*b(x_1,\ldots x_n)\otimes e^*(x)^{k'-n_1-n} \otimes e^*(\neq)^{\otimes n-1}).(1_{n_1}\otimes e(x_1)^{*\otimes n} \otimes_{k'-n-n_1})$$

$$= \varepsilon^{-1}(\tilde{t}(a)).[e_1^*(x)^{\otimes n_1}\otimes e^*(be^*(x_1),\ldots,e^*(x_n))\otimes e^{*\otimes k'-n-n_1}\ldots\otimes e^*(\neq)^{\otimes n-1}]$$

Or l'expression ci-dessus entre crochets est :

$$\varepsilon^{-1}(1_{n_1} \otimes b(x_1,\ldots x_n) \otimes 1_{k'-n-n_1} \otimes \neq^{\otimes n_1})$$

et, d'après (I-2-1-5-1 VIII) on a encore

$$\phi'(K'(a)(x))_{[k]}=\varepsilon^{-1}(\tilde{t}(a)).(1_{n_1} \otimes\ldots\otimes \neq^{\otimes n_1})=\varepsilon^{-1}(\tilde{t}(a)(1_{n_1}\otimes b(x_1,\ldots x_n)\otimes 1_{k'-n-n_1}))$$

(pour k' assez grand, c'est à dire $\geq$ au nombre de variables de $\tilde{t}(a)$)

Finalement, la récurrence est établie.

Remarquons qu'à tout $a \in \Sigma_n$, on a ainsi associé $k'(a)$ tel que

$k' \geq k'(a) \Rightarrow \exists\ \phi'$, k'-morphisme vérifiant la propriété (P).

Dans la suite, on prend $k' \geq \sup\limits_{a \in \Sigma} k'(a)$.

II) $\forall\ a \in \Sigma_n$, nous associons finalement

$\bar{K}_a = K_a .\ a(x_1 \dots x_n)$ et posons

$\varepsilon' a(x_1, \dots x_n) = a(x_1 \dots x_n)$

$\phi' a(x_1, \dots x_n)$ tel que $\sigma^k_{k'}\ \phi'(a) = \theta\ {}_a\phi^k_{k'}$

($\phi'(a)$ a donc une part d'arbitraire, on le compléte par exemple par des $\neq$)

On a donc, d'après (P), $\forall\ a \in \Sigma_n$, avec $\tilde{t}_a = \phi(a)$,

$\varepsilon^{-1}\phi(a) = \varepsilon^{-1}(\tilde{\phi}(a).\theta_a) = \varepsilon^{-1}(\tilde{\phi}(a)).\theta_a$

$= \phi'(\varepsilon'^{-1}(x_1) \cap K_a)_{[k]}.\theta_a = \sigma^k_{k'}\phi'(\varepsilon'^{-1}(x_1) \cap K_a).\theta_a$

soit encore, compte tenu de $\sigma^k_{k'}\phi'(a) = \theta_a.\sigma^k_{k'}$,

$= \sigma^k_{k'}\phi'(\varepsilon'^{-1}(x_1) \cap K_a).\ \phi'(a).\sigma^k_{k'}$

$= \sigma^k_{k'}.\phi'\ ((\varepsilon'^{-1}(x_1) \cap K_a).a)\ \sigma^k_{k'}$

d'où , compte tenu de $(\varepsilon'^{-1}(x_1) \cap K_a).a = \varepsilon'^{-1}(a(x_1, \dots x_n)) \cap \bar{K}(a)$,

(E) $\varepsilon^{-1}\phi(a) \underset{k}{\curlyvee} \phi'(\varepsilon'^{-1}(a(x_1, \dots x_n) \cap \bar{K}(a))$

Nous pouvons supposer les Δ_a tous disjoints. Nous poserons

$K' = [\bar{K}(a) | a \in \Sigma]$

III) Pour achever la preuve du sous lemme 4-3, il nous suffit d'appliquer le lemme (I-2-2-2-2 III) en vérifiant que les conditions a), b) et c) d'application de ce lemme sont ici satisfaites.

La condition b) est évidemment satisfaite, la condition c) l'est par (E) ci-dessus. Reste à prouver a) :

On a K' = K'.K', d'où on déduit aisément que :

$(\varepsilon'^{-1}(a) \cap K').(\varepsilon'^{-1}(t) \cap K') \subset \varepsilon'^{-1}(a.t) \cap K'$

Réciproquement, soit $u \in K'$ tel que $\varepsilon(u) = a.t$.

Etant donné la définition de ε', u se décompose en $u_1.u_2$ avec $\varepsilon'(u_1) = a$ et $\varepsilon'(u_2) = t$. Comme $u_1.\ u_2 \in K'$, on peut par définition de K', choisir $u_1 \in K(a)$, on a alors $u_2 \in K'$ d'où l'inclusion inverse et le lemme ///

C.Q.F.D.

II-1-4-2 Lemmes de permutation des morphismes et des démarquages inverses.

II-1-4-2-1 Lemme 4 : Premier lemme de permutation :

Soit ϕ un k-morphisme linéaire, ε un démarquage. Alors, il existe un k'-morphisme ϕ' linéaire, une forêt F', un démarquage ε' tels que :

(P) $\phi \circ \varepsilon^{-1} \underset{1,k}{\curlyvee} (\varepsilon', F', \phi')$

De plus :

I) F'_0 est raisonnable et $\forall\ n \in N$, $F' \cap T(\Sigma)^1_n$ est reconnaissable (en supposant F' définie sur l'alphabet Σ, et étendant la reconnaissabilité en considérant $\{x_1,.. x_n\}$ comme des éléments de Σ_0).

II) ε' est respectivement strict, complet, sans torsions si ε l'est

III) Si ε est strict, on peut prendre k' = k et ϕ' est alors du même type sur $\varepsilon'^{-1}(K) \cap F'$ que ϕ sur K pour toute forêt K.

IV) Dans tous les cas, on peut prendre $\phi'[\nu]$-complet sur $\varepsilon'^{-1}(K) \cap F'$ si ϕ l'est sur K.

V) En corollaire, si ε est strict et si ϕ est un 1-morphisme linéaire (respectivement complet, strict) ε' est strict et ϕ' est un 1-morphisme linéaire (respectivement complet, strict).
Si ϕ est un démarquage et ε strict, ϕ' est un démarquage du même type que ϕ. ///

Preuve : Soit ε un démarquage. Il est facile de le décomposer en $\varepsilon = \varepsilon'' \circ \varepsilon' \circ \varepsilon$ où ε'' est strict marqué, ε' propre et ε vérifie les hypothèses du sous lemme 4-3.

En effet, soit Σ l'alphabet de définition de ε. Soit Σ' un alphabet en bijection avec Σ et on pose :

$$\varepsilon''(a) = a'.\theta_a \text{ ssi } \varepsilon(a) = \widetilde{\varepsilon(a)}.\theta_a.$$

(on a donc degré (a') = degré $(\widetilde{\varepsilon(a)})$)

On pose, pour tout a', $\varepsilon'(a') = \widetilde{\varepsilon(a)}$ ssi $\widetilde{\varepsilon(a)} \neq x_1$

$\varepsilon'(a') = e(x_1)$ si $\widetilde{\varepsilon(a)} = x_1$

enfin, ε = identité sauf $\varepsilon\, e(x_1) = x_1$

le lemme 4 est alors une conséquence immédiate des sous-lemmes 4-1, 2 et 3 et des propriétés de composition des morphismes.///

C.Q.F.D.

II-1-4-2-2 Lemme 4 bis : Deuxième lemme de permutation :

L'énoncé est en tout point identique à celui du lemme 4, sauf qu'on remplace (P) par :
(P') $\phi_{[1]} \circ \varepsilon^{-1} \underset{1,k}{\vee} (\varepsilon', F', \phi'_{[1]})$ ///

et dans le reste de l'énoncé, respectivement ϕ et ϕ' par $\phi_{[1]}$ et $\phi'_{[1]}$

Preuve : Soit Σ l'alphabet domaine de ϕ. On dédouble Σ en $\Sigma \cup \bar{\Sigma}$.
On définit $\bar{\pi}$ par $\bar{\pi}(\bar{a}) = \bar{\pi}(a) = a$, $\bar{F}$ par $\bar{F} = (\bar{\Sigma}.T(\Sigma))^{\circledast}$. Il est immédiat

que $\bar{F}_o$ appartient à la même famille raisonnable que F_o, que $\bar{F}$ vérifie les mêmes propriétés que F.

D'autre part, on définit $\bar{\phi}$ à partir de ϕ par :

$\bar{\phi}(\bar{a}) = <\bar{\phi}_1(\bar{a}), .., \bar{\phi}_k(\bar{a})>$

avec $\bar{\phi}_1(\bar{a}) = \phi_1(a)$ et, pour $i > 1$, $\bar{\phi}_i(\bar{a}) = \not B$ (nouveau symbole)

$\bar{\phi}(a) = \phi(a)$

On étend ε par $\varepsilon(\not B) = \not B$

Il est évident que l'on a, pour tout $t \in \bar{K}$,

(A) $\qquad \phi(\bar{\pi}(t))_{[1]} = \bar{\phi}(t)_{[1]}$ et $\bar{\phi}(t) = <\bar{\phi}(t)_{[1]}, \not B^{\otimes k-1}>$

D'autre part, $\bar{\phi}_{[1]}$ est évidemment du même type sur $\bar{F}$ que $\phi_{[1]}$, du même type sur toute $\bar{\pi}^{-1}(F) \cap \bar{F}$ que $\phi_{[1]}$ sur F.

Appliquant le lemme 4 à $\bar{\phi}$ et ε, il existe

(B) $\qquad (\varepsilon', \bar{F}', \bar{\phi}') \curlyvee_{1,k} \bar{\phi} \circ \varepsilon^{-1}$

On fait maintenant pour $(\bar{F}', \bar{\phi}')$ la même construction que précédemment et on obtient ainsi $(\bar{\bar{\pi}}, \bar{\bar{F}}', \bar{\bar{\phi}}')$ tels que

(A') $\qquad \bar{\phi}'(\bar{\bar{\pi}}(t'))_{[1]} = \bar{\bar{\phi}}'(t')_{[1]}$ et $\bar{\bar{\phi}}'(t') = <\bar{\bar{\phi}}(t')_{[1]}, \not B^{\otimes k'-1}>$

Finalement, reste à montrer que

$\phi_{[1]} \circ \varepsilon^{-1} \curlyvee_{1,k} (\bar{\bar{\pi}} \circ \varepsilon' \circ \bar{\pi}, \bar{\bar{F}}', \bar{\bar{\phi}}'_{[1]})$

(les conditions de types étant évidentes)

Or, $u \in \varepsilon^{-1}(\phi_{[1]}(t)) \iff$ (A) $\iff \exists \bar{t} \in \bar{F}, <u, \not B^{\otimes k-1}> \in \varepsilon^{-1}(\bar{\phi}(t))$ et $\bar{\pi}(\bar{t}) = t$

$\iff$ (B) $\iff \exists \bar{t}' \in \bar{F}', \bar{\pi}(\varepsilon'(\bar{t}')) = t$ et $\bar{\phi}'(\bar{t}')_{[k]} = <u, \not B^{\otimes k-1}>$

$\iff$ (A') $\iff \exists \bar{\bar{t}} \in \bar{\bar{F}}', \bar{\pi}\ \varepsilon'\ \bar{\bar{\pi}}(\bar{\bar{t}}) = t$ et $\bar{\phi}(\bar{\bar{\pi}}(\bar{\bar{t}}))_{[1]} = u = \bar{\bar{\phi}}'(\bar{\bar{t}})_{[1]}$ /// C.Q.F.D.

II-1-4-3 Illustration et commentaire :

II-1-4-3-1 A propos du sous lemme 4-1 :

I) Exemple : Illustrons l'esprit de la construction sur un exemple très simple :

Soit ϕ défini par :

$\phi a(x, y) = \langle b(x_1, x_2), b'(y_1)\rangle$ et l'identité ailleurs

ε défini par $\varepsilon b(x, y, z) = b(x, z)$, $\varepsilon(b'(x, y)) = b'(y)$, $\varepsilon(\bar{b}) = \bar{b}$

La construction nous donne :

$K(a) = a'(x, y, T(\Delta)_o^1, T(\Delta)_o^1)$ avec $\Delta = \{b(x, y, z), b'(x, y), \bar{b}\}$

$\varepsilon'(a'(x, y, z, t)) = a(x, y)$

$\phi'(a'(x, y, z, t)) = \langle b(x_1, z_1, x_2), b'(t_1, y_1)\rangle$

$\phi'(b(x, y, z)) = \langle b(x_1, y_1, z_1), \neq\rangle$, $\phi'(b'(x, y)) = \langle b'(x_1, y_1), \neq\rangle$

et $\phi'(\bar{b}) = \langle \bar{b}, \neq\rangle$

Nous vérifions bien ici que :

$$\varepsilon^{-1}\phi a(x, y) = \langle b(x_1, T(\Delta)_o^1, x_2), b'(T(\Delta)_o^1, y_1)\rangle$$

$$= \phi'\varepsilon'^{-1}(a(x, y)) = \phi'(K(a))$$

Remarquons un point accessoire dans l'esprit mais important si on veut suivre le détail de la preuve. Nous avons pris l'habitude d'écrire $\varepsilon'(a'(x, y, z, t)) = a(x, y)$ au lieu de $\langle 4, a(x, y)\rangle$. Mais, quand on considère $\phi(a(x, y))$, il s'agit là de $a(x, y) \in \Sigma$, donc $\langle 2, a(x, y)\rangle$ et ainsi, $a'(x, y, z, t)$ n'appartient pas par exemple à $\varepsilon'^{-1}a(x, y)$ mais seulement à $\varepsilon'^{-1}\langle 4, a(x, y)\rangle$. Ces considérations de degrés, gênantes mais dont nous n'avons que faire, sont éludées en considérant les K(a), où chaque variable 'ne figurant pas dans l'image' ne figure plus non plus, puisqu'il lui est substituée $T(\Delta)_o^1$ qui est sans variable. Ainsi, partout où le degré inférieur n'est pas explicité, on le trouve fixé par le contexte et nos égalités sont valables pour le degré fixé ainsi.

II) Cas de ϕ non linéaire : Le lecteur vérifiera que le sous-lemme 4-1 ne s'étend pas au cas ϕ non linéaire grâce à l'exemple suivant (pourtant très simple!)

$$\phi a(x) = a(x, x),\ \varepsilon a(x, y, z) = a(x, y)\ \varepsilon(\bar{a}) = \bar{a}$$

II-1-4-3-2 A propos du sous-lemme 4-2 :

Nous n'illustrons pas la construction, qui est très simple. Le résultat ne s'étend pas non plus au cas ou ϕ est non linéaire pour les mêmes raisons que celles du lemme des morphismes et des parties (qui est d'ailleurs utilisé dans toutes les preuves!)

II-1-4-3-3 A propos du sous-lemme 4-3 :

I) Exemple :

Soit ϕ le 1-morphisme (donc séparé) linéaire complet strict défini par :

$$\phi c(x_1, x_2, x_3) = b(b(x_1, x_2), x_3)$$

$$\phi a(x) = a(x) \text{ et } \phi(\bar{a}) = \bar{a}$$

ε est l'identité sur $b(x_1, x_2)$, $a(x)$ et $\bar{a}$ vérifie $\varepsilon(e(x)) = x$

Avec les notations de la preuve, nous avons ici :

$$\Delta = \bigcup_{a \in \Sigma} \Delta_a \text{ avec}$$

$$\Delta_{\bar{a}} = \{\alpha_{\bar{a}}(x), \bar{a}\},\ \Delta_a = \{\alpha_a(x), a(x)\}$$

$$\Delta_c = \{\alpha_c^1(x), \alpha_c^2(x), b_c^1(x), b_c^2(x), \alpha_c^3(x), c(x, y, z)\}$$

Nous définissons $K = [K(a) | a \in \Sigma]$ avec

$K_{\bar{a}} = \alpha_{\bar{a}}^{*}\ \bar{a},\ K_a = \alpha_a^{*}\ a\ \alpha^{*}_a(x)$

et $K_c = \alpha_c^{1*} b_c^1 \alpha_c^{1*} b_c^2 \alpha_c^{1*} \alpha_c^{2*} \alpha_c^{3*} c(x,\ y,\ z)$

Nous définissons ε' par :

$\varepsilon'(\alpha_{\bar{a}}(x)) = \varepsilon'\ \alpha_a(x) = \varepsilon'\alpha_c^1(x) = \varepsilon'\alpha_c^2(x) = \varepsilon'\alpha_c^3(x) = \varepsilon' b_c^1(x)$

$= \varepsilon' b_c^1(x) = x$ et ε' = identité sur Σ

Nous définissons (dans la preuve toujours), ϕ' par :

$\phi'\alpha_{\bar{a}}(x) = \phi'\alpha_a(x) = \phi'\alpha_c^1(x) = \langle e(x_1,\ x_2,\ x_3\rangle$

$\phi'(b_c^1(x)) = \langle b(x_1,\ x_2),\ x_3,\ \neq\ \rangle$

$\phi' b_c^2(x) = \langle b(x_1,\ x_2),\ x_3,\ \neq\ \rangle$

$\phi'(\bar{a}) = \langle \bar{a},\ \neq\ \rangle,\ \phi' a(x) = \langle a(x_1),\ \neq\ \rangle$

$\phi'\ c(x,\ y,\ z) = \langle x_1,\ y_1,\ z_1\rangle$

$\phi'\alpha_c^2(x) = \langle x_1,\ e(x_2),\ x_3\rangle$

$\phi'\alpha_c^3(x) = \langle x_1,\ x_2,\ e(x_3)\rangle$

On a alors $\varepsilon^{-1}\phi(\bar{a}) = e^{*}\bar{a} \underset{1}{\curlyvee} \phi'(\varepsilon'^{-1}(\bar{a}) \cap K_{\bar{a}})$

$\varepsilon^{-1}\phi a(x) = e^{*} a e^{*}\ (x) \underset{1}{\curlyvee} \phi'(\varepsilon'^{-1}\ a(x) \cap K_a)$

$\varepsilon^{-1}\phi c(x,y,z) = e^{*} b(e^{*}(b e^{*}(x),\ e^{*}(y)), e^{*}(z)) \underset{1}{\curlyvee} \phi'\varepsilon'^{-1}(c(x,y,z) \cap K_c)$

Intuitivement, on code dans K_c, **en une chaîne monodique**, la forêt $\varepsilon^{-1}\phi(c(x,\ y,\ z))$ et ϕ' effectue le 'décodage'. Le coefficient de dilatation de ϕ' doit donc être au moins égal à la "largeur" de $\phi(c)$ (ici 3). $\phi'(c)$ réalise la torsion .

II) Remarque importante : Dans l'exemple ci-dessus, ϕ est un 1-morphisme linéaire complet strict (donc séparé) très simple.
Pourtant ϕ' n'est ni séparé à délai borné, ni régulé, et son coefficient de dilatation est supérieur à celui de ϕ.

En fait, **il n'existe** en général **pas** de solution ϕ' au lemme 4-3 conservant ou la séparation à délai borné, ou la régulation, ou les coefficients de dilatation. C'est le cas pour l'exemple ci-dessus qui en illustre la raison essentielle, que nous développons ci-après.

On a $\varepsilon^{-1}\phi(c(x_1, x_2, x_3)) = e^*b(e^*b(e^*(x_1), e^*(x_2)), e^*(x_3)) = G$

On doit donc trouver $(\varepsilon', F', \phi')$ tels que $\varepsilon'(F') = c(x_1, x_2, x_3)$ et $\phi'(F') \checkmark G$

Même sans imposer à ε' d'être complet, on en est ramené à considérer F' de la forme $F_1\ c(F_2(x_1), F_3(x_2), F_4(x_3))$ où F_1, F_2, F_3, F_4 sont des forêts monodiques (les seules lettres y apparaissant sont de degré 1)

En effet, "toute branche ajoutée à F' ne servirait à rien" car elle serait effacée par ε' et par ϕ' (pour assurer les correspondances de variables).

Voyons maintenant que l'on a pas le "choix des moyens" pour associer par ϕ', la forêt G à la forêt F' :

En effet, le problème se concentre en celui d'associer $\phi'(F'')$ $\checkmark b(e^*b(x, y), z)$ à une sous-forêt F'' de F', qui est nécessairement de la même forme que F', c'est à dire $H_1c(H_2(x), H_3(y), H_4(z))$ où les H_i sont monodiques. Or, on doit même avoir $\phi'(H_1c(x, y, z))$ $\checkmark b(e^*b(x, y), z)$ car sinon, une au moins des 3 variables x, y, z disparaitrait dans l'image.

De plus, $\phi'(H_1(x)) \checkmark b(e^*(x_1), x_2)$ ou à $b(e^*b(x_1, x_2), x_3)$, car $\phi'(c(x, y, z))$ est fini. On voit alors que ϕ' ne peut pas être un 1-morphisme, il ne peut être ni régulé ni séparé à délai borné car on a nécessairement une forêt monadique $I(x)$ d'image $\langle e^*(x_1), x_2\rangle$!

II-1-4-3-4 Conclusion :

Nous avons donc vu que, si ϕ est linéaire, notre problème de "permuter" morphisme et démarquage inverse admet une solution, la linéarité étant conservée. Seul le caractère non strict du démarquage fait perdre la régulation et la séparation à délai borné, et nécessite l'augmentation du coefficient de dilatation (que l'on peut évidemment prendre quelconque pourvu qu'il soit assez grand). Il est important de remarquer que si ϕ n'est pas linéaire, "plus rien ne marche".

II - 1 - 5 LES 1-MORPHISMES LINEAIRES NON STRICTS :

Dans ce paragraphe n'interviennent que des notions "classiques" : 1-morphismes et forêts reconnaissables. Les bimorphismes (ϕ, K, Ψ), où K est reconnaissable et ϕ et Ψ sont des 1-morphismes linéaires ont un comportement "à part" vis à vis de la composition. Ces choses sont précisées et discutées dans (II-2-2-3) et aboutissent en particulier au théorème (3), dont la preuve se base sur les résultats que nous allons obtenir ici. L'intérêt de ce paragraphe apparaitra ainsi en (II-2-2-3).

Nous prouvons d'abord en (II-1-5-1) que tout bimorphisme (ϕ, K, Ψ) du type ci-dessus peut être "réduit", c'est à dire qu'on peut "ne conserver de tout arbre t de K que les noeuds qui ont une image stricte dans ϕ(t) ou Ψ(t) ". Puis, utilisant cette forme réduite, nous donnons des lemmes précisant le comportement de la "non strictitude" vis à vis de la composition. Enfin, nous illustrons d'un exemple simple.

II-1-5-1 Les bimorphismes réduits

Nous introduisons une à une les 'réductions', en faisant le point de temps entemps des résultats obtenus.
Soit B = (ϕ, F, ϕ') où F est une forêt reconnaissable, ϕ et ϕ' sont des 1-morphismes quelconques.

II-1-5-1-1 On peut toujours supposer qu'il n'existe pas de lettre $a(x_1,.. x_n)$ telle que $\phi\, a(x_1,.. x_n) = \phi' a(x_1,.. x_n) = x_i$:

Preuve : Soit B = (ϕ, F, ϕ') avec $F \subset T(\Sigma)^1_o$ et

$\phi a(x_1,.. x_n) = \phi' a(x_1,.. x_n) = x_i$

Soit h le démarquage égal à l'identité sur Σ-{a} et tel que $h\ a(x_1,..x_n)=x_i$

h est linéaire donc h(F) reconnaissable .

Soit $\bar{\phi} = \phi$ restreint à $T(\Sigma$-{a}) et $\bar{\phi}'$ défini de même.

On a $\phi = \bar{\phi} \circ h$ et $\phi' = \bar{\phi}' \circ h$ d'où $(\phi, F, \phi') \hat{=} (\bar{\phi}, h(F), \bar{\phi}')$ d'après (I-2-2-2-2 II) et le résultat est établi.

II-1-5-1-2 Marquage de la lecture :

I) Associons au couple (ϕ, ϕ') le transducteur descendant linéaire déterministe $\lambda_{\phi, \phi'}$ défini comme suit :

- $\lambda_{\phi, \phi'}$ va de $T(\Sigma \cup \{\neq\})$ dans $T(\Delta)$ avec $\Delta = \Sigma \times \{(1,0),(0,1),(1,1)\} \cup \{\neq\}$

(Nous poserons $\Delta - \{\neq\} = \Sigma_{o,1}$)

- $q_{1,1}$ est l'état initial

- $\forall a \in \Sigma$, $q_{\varepsilon, \varepsilon'}[a(x_1, .., x_n)] \to a(\varepsilon, \varepsilon')(q[x_1]_{\varepsilon \times i_1, \varepsilon' \times i'_1}, \ldots\ldots, q[x_n]_{\varepsilon \times i_n, \varepsilon' \times i'_n})$

où . ε ou $\varepsilon' = 1$, ε et $\varepsilon' \in \{o,1\}$

. $\forall j \in [n]$, $i_j^{(')} = 1$ ssi x_j contenu dans $\phi^{(')}a(x_1, .. x_n)$

- $q_{o,o}[\neq] \to \neq$ et $q_{o,o}[a(x_1, .., x_n)] \to \neq$

II) Soit μ le démarquage propre de Δ dans $\Sigma \cup \{\neq\}$ défini par :

$\mu\, a(\varepsilon, \varepsilon')(x_1, .., x_n) = a(x_1, .. x_n)$ et $\mu(\neq) = \neq$

$\lambda_{\phi,\phi'}$ est fonctionnel car déterministe, il est complétement spécifié sur Σ donc son domaine contient $T(\Sigma)_o^1$.

$\forall t \in T(\Sigma)_o^1$, on peut donc définir $t \neq$ de façon unique par $t \neq = \mu(\lambda_{\phi\phi'}(t))$.

Posons $F \neq = \{t \neq | t \in F\}$. Si F est reconnaissable, $F \neq$ aussi car $\lambda_{\phi,\phi'}$ et μ sont linéaires.

Propriété F :

Soit $t \in T(\Sigma)^1_o$. On lui associe $t_c \underset{I}{\leq} t$ défini par : "t_c est le sous-arbre initial maximal de t proprement transducté par $\lambda_{\phi,\phi'}$ sans atteindre l'état $q_{o,o}$". t_c existe comme étant la réunion de l'ensemble orienté des sous-arbres transductés de t.

On a alors :

(F) $\forall\, u \underset{I}{\leq} t_c,\ q_{1,1}[u(x_1,\ldots, x_n)] \overset{*}{\underset{\lambda_{\phi,\phi'}}{\vdash}} \bar{u}[q_{\varepsilon_1,\varepsilon'_1}[x_1],\ldots,q_{\varepsilon_n,\varepsilon'_n}[x_n]]$

où - $\forall\, i \in [n],\ \varepsilon_i^{(')} = 1$ ssi $\phi^{(')}(u(x_1,\ldots x_n))$ contient la variable x_i

- $\mu(\bar{u}) = u$

(la preuve s'établit facilement par induction sur la taille de u).

Corollaire de F : Toute occurrence a dans t_c a pour image par $\lambda_{\phi,\phi'}$ $a(\alpha,\alpha')$ avec $\alpha^{(')} = 1$ ssi a est lu par $\phi^{(')}$ dans la lecture de t_c, c'est à dire que:

soit $\bar{u}(1_p \otimes a(\alpha,\alpha')\,(x_1,\ldots x_n) \otimes 1_q) \in I(t_c)$. Alors $\alpha^{(')} = 1$

ssi x_{p+1} apparait dans $\phi^{(')}\,\mu(\bar{u})$.

La preuve en est évidente.

III) $\forall\, t \in T(\Sigma)^1_o$, $\phi(t \neq)$ est défini et égal à $\phi(t)$.

Preuve

a) D'abord, $q_{1,1}[t_c(x_1,\ldots x_n)] \overset{*}{\underset{\lambda_{\phi,\phi'}}{\vdash}} \bar{t}_c(q_{o,o}[x_1],\ldots, q_{o,o}[x_n])$

Supposons en effet qu'il existe un $q_{\alpha,\alpha'} \neq q_{o,o}$ à droite. Comme $\lambda_{\phi,\phi'}$ est complétement spécifié sur Σ, la transduction de t se poursuit et la définition de t_c (maximalité) est contredite.

On a alors, par définition de $\lambda_{\phi,\phi'}$, et en posant
$t = t_c(t_1,..,t_n)$:

$$q_{1\,1}[t] \overset{*}{\vdash} \bar{t}_c(q_{o,o}[t_1],..\ q_{o,o}[t_n]) \overset{*}{\vdash} \bar{t}_c\ (\neq,...\ \neq)$$

Mais d'après (F), aucun x_i n'apparait dans $\phi(t_c)$ qui est donc sans variable. Par conséquent, $\forall\ t_1,..\ t_n$, $\phi(t_c(t_1,..\ t_n)) = \phi(t_c)$

En particulier, $\phi t_c(\neq,..\ \neq) = \phi(t_c) = \phi(t)$.

b) Nous venons de voir que $\lambda_{\phi,\phi'}(t) = \bar{t}_c(\neq,..,\ \neq) = \bar{t}_c(x_1,..\ x_n).\neq^n$

Remarquons que, si t_c est de dinf q, $t_{\neq} = t_c.\neq^{\otimes}$ ($t_{\neq}$ est donc obtenu en substituant $\neq$ à chaque variable de t_c)

D'autre part, $\mu(\bar{t}_c) = t_c(x_1,..\ x_n)$ donc $\mu(\bar{t}_c(\neq,..\ \neq)) = t_c(\neq,..,\neq)$

d'où $t_{\neq} = t_c(\neq,..,\neq)$ puisque $t_{\neq} = \mu(\lambda_{\phi,\phi'}(t))$. Finalement compte tenu de a) on a :

$$\underline{\phi(t) = \phi(t_{\neq})}$$

IV) $(\phi,\ F,\ \phi') \simeq (\phi,\ F_{\neq},\ \phi') \simeq (\mu \circ \phi,\ \lambda_{\phi,\phi'}(F),\ \mu \circ \phi')$

La première équivalence provient de III) et la seconde du lemme (I-2-2-2-2 II) du fait que $F_{\neq} = \mu(\lambda_{\phi\phi'}(F))$

V) Soit U le transducteur ascendant défini par :

$\neq \rightarrow q_{\neq}[\neq]$

$\forall\ a(\alpha,\ \alpha') \in \Delta_o$, $a(\alpha,\ \alpha') \rightarrow q_o[a(\alpha,\ \alpha')]$

$a(\alpha,\ \alpha')\ (q_1[x_1],..\ q_n[x_n]) \rightarrow q_o[a(\alpha,\alpha')_{(i_1,..,i_p)}(x_{i_1},..\ x_{i_p})]$

où $i_1 < ... < i_p$ et $i_j = k$ ssi $q_k = q_o$.

q_o est final.

U est linéaire déterministe (donc fonctionnel)
on définit le démarquage $\bar{\mu}$ par :

$$\bar{\mu}\ (a(\alpha,\alpha')(x_1,..\ x_n)) = a(\alpha,\alpha')(x_1,..\ x_n)$$

$$\bar{\mu}\ a(\alpha,\alpha')_{i_1..i_p}(x_1,..\ x_p) = a(\alpha,\alpha')\ (t_1,..,\ t_n)$$

où $t_k = \neq$ ssi il n'existe pas j tel que $i_j = k$

et où les autres t_k sont, de gauche à droite, $x_1,..,\ x_p$.

Pour tout $t \in T(\Sigma)^1_o$, $U(\lambda_{\phi,\phi'}(t))$ est défini et on a évidemment

$$\bar{\mu}(U(\lambda_{\phi,\phi'}(t))) = \lambda_{\phi,\phi'}(t)$$

Enfin, comme U est linéaire, $U(\lambda_{\phi,\phi'}(F))$ est reconnaissable et on a, d'après le lemme (I-2-2-2-2 II),

$$B = (\bar{\mu} \circ \mu \circ \phi,\ U(\lambda_{\phi,\phi'}(F)), \bar{\mu} \circ \mu \circ \phi') \underline{\simeq} (\mu \circ \phi, \bar{\mu}(U(\lambda_{\phi,\phi'}F)), \mu \circ \phi')$$

donc, d'après ce qui précède, $\underline{\simeq}\ (\mu \circ \phi,\ \lambda_{\phi,\phi'}(F),\ \mu \circ \phi')$

VI) Propriétés du bimorphisme B :

- $\forall\ \bar{u} \in I(U(\lambda_{\phi,\phi'}(F)))$, avec $\bar{u} = \bar{u}'(1p \otimes a(\alpha,\alpha')(x_1,..,x_n) \otimes 1q)$

$\alpha^{(')} = 1$ ssi $\phi^{(')}\mu\bar{\mu}(\bar{u})$ contient la variable x_{p+1}, c'est à dire ssi $a(\alpha,\alpha')$ est lu dans $\bar{u}$ par $\bar{\mu} \circ \mu \circ \phi^{(')}$.

- $\forall\ \bar{u} \in I(U(\lambda_{\phi,\phi'}(F)))$, $\forall\ a(\alpha,\alpha')$ noeud de $\bar{u}$, alors α ou $\alpha' = 1$

La preuve de ce fait est évidente d'après (F) et son corollaire, sauf pour les successeurs de $a(\alpha,\alpha')_{(i_1,..,i_p)}$, mais on a alors dans un arbre t donné,

$$\phi\mu\bar{\mu}a(\alpha,\alpha')_{(i_1,..\ i_p)}(x_1,..x_p) = \phi\mu a(\alpha,\alpha')(x_1 \neq ...,x_p) = t_a(x_1,..x_p)$$

On a donc dans $t = t'(1p_1 \otimes a(\alpha,\alpha')\ \dot{i}_1,\ldots \dot{i}_p(x_1,\ldots x_p) \otimes 1p_2)$,

$x_{p_1} + j \in \phi\mu\bar{\mu}(t)$ ssi $x_{p_1} + j \in \phi\mu t'(1_{p_1} \otimes a(\alpha,\alpha')(x_1,\neq\ldots,x_p) \otimes 1_{p_2})$

ce qui ne change rien à la complétude.

VII) Conclusion de II-1-5-1-2 (Marquage de la lecture)

à $(\phi,\ F,\ \phi')$ on a associé $(\Psi,\ G,\ \Psi')$ équivalent tel que

P1) - l'alphabet de G est marqué par $(\alpha,\beta) \in \{0,1\}^2$ et où

$a(\alpha,\beta)(x_1,\ldots x_n)$ est lu par Ψ (respectivement Ψ') dans un arbre donné de G, ssi $\alpha = 1$ (resp. $\beta = 1$).

P2) - $\forall\ t \in G$, $\forall\ a(\alpha,\beta)$ noeud de t, α ou $\beta = 1$ (c'est à dire que pour tout arbre de G, tout noeud est lu au moins par un des deux morphismes).

P3) - De plus, on peut supposer qu'il n'existe pas $a(\alpha,\beta)(x_1,\ldots x_n)$ tel que $\Psi(a(\alpha,\beta)(x_1,\ldots x_n) = \Psi'\ a(\alpha,\beta)(x_1,\ldots x_n) = x_i$. Ceci provient de l'application à $(\Psi,\ G,\ \Psi')$ de la construction de (II-1-5-1-1) qui ne modifie pas P1) et P2).

VIII) Commentaire : Le transducteur $\lambda_{\phi,\phi'}$ défini en I) marque, pour tout arbre t, chaque noeud d'un couple (α,α') tel que P1) soit satisfaite. L'image par ϕ de t n'est pas modifiée si on modifie dans t les noeuds non lus. Nous remplaçons alors le premier noeud de chaque branche qui n'est lu ni par ϕ, ni par ϕ', par un symbole $\neq$ de degré inférieur nul. Tout t se transforme ainsi par $\lambda_{\phi,\phi'}$ en $\lambda(t)$ et on a $(\mu \circ \phi,\ \lambda(F),\ \mu \circ \phi') \triangleq (\phi,\ F,\ \phi')$ où μ démarque les (α,β) (c'est le résultat IV). Pour conclure, il reste le fait que les $\neq$ ne sont pas lus. La construction V et VI résoud ce détail : les "$\neq$" n'étant pas lus, ils sont supprimés en "supprimant l'arité correspondante" de leur antécédant immédiat, ce qui ne change rien aux propriétés de lecture.

II-1-5-1-3 Définition : (ϕ, F, ϕ') est dit semi-complet strict ssi

$\forall\ t.(1_p \otimes a(x_1,.. x_n) \otimes 1_q) = u \in I(F)$, avec $a(x_1,.. x_n) \in \Sigma$, on a

$|\phi(t)|+|\phi'(t)|<|\phi(\mu)|+|\phi'(\mu)|$ (Rappelons que, dans tout ce paragraphe II-1-5, F est reconnaissable et ϕ et ϕ' sont des 1-morphismes).

Remarquons que cette définition équivaut à dire que ;

-si a n'est pas lu par ϕ dans t, alors a est lu par ϕ' et $\phi'(a)$ est strict. Symétriquement en permutant ϕ et ϕ'.

-si a est lu par ϕ et ϕ' dans t, $|\phi(a)|+|\phi'(a)|>0$.

Considérons (ϕ, F, ϕ') ayant les propriétés P1, 2 et 3. On a

I) a) $V(\phi a(1,1)) \cup V\ \phi'(a(1,1)) = V(a(1,1))$

b) $V\ \phi\ a(1,0) = V\ (a(1,0))$ et $V\ \phi'(a(0,1)) = V\ a\ (0,1)$

(Rappelons que V(t) désigne l'ensemble des variables apparaissant dans t, soit l'image de la torsion de t).
La preuve est évidente.

II) D'après I) si $\phi a(1,0)(x_1,.. x_n) = x_i$, alors $i = n = 1$.
Soit $a(1,0)(x_1)$ d'image x_1 par ϕ. Soit h l'homomorphisme sur l'alphabet A de F défini par l'identité sur A- $\{a(1,0)\}$ et $h(a(1,0) = x_1$.
On a d'après (I-2-2-2-2 II),
$(\phi, h(F), \phi')\ \_\ (h \circ \phi, F, h \circ \phi')$, on a d'autre part $h \circ \phi = \phi$ sur A-$\{a(1,0)\}$. Pour tout $t \in F$, $\phi'\ h(t) = \phi'(t)$ car h modifié les a(1,0) seulement, que ϕ' ne lit pas. Finalement , $(\phi, F, \phi') \simeq (\phi, h(F), \phi')$.

III) h ne modifie évidemment pas P1, 2, 3. En itérant, cette construction, on peut donc supposer que (ϕ, F, ϕ') vérifie P1, 2, 3 et de plus :

P4) $\forall\ a(1,0)\ (x_1,.. x_n),|\ \phi a(1,0)| > 0$

$\forall\ a(0,1)\ (x_1,.. x_n),|\ \phi' a(0,1)| > 0$

P5) Propriétés I)
IV) Lemme : On peut toujours supposer que $\beta = (\phi, F, \phi')$ vérifie P 1, 2, 3, 4, 5 et est semi-complet strict.

<u>Preuve</u> : Compte tenu des PI), il reste à prouver pour que β soit semi-complet strict, qu'on peut toujours supprimer le cas ou

$\phi a(1,1)(x_1, x_2) = x_1$ et $\phi' a(1, 1)(x_1, x_2) = x_2$

(à une permutation près de $\{1, 2\}$).

Soit donc $\beta = (\phi, F, \phi')$ vérifiant P1 à 5 tel que

$\phi a(1,1)(x_1, x_2) = x_1$ et $\phi' a(1,1)(x_1, x_2) = x_2$.

Soit une occurrence de $a(1,1)(x_1, x_2)$ dans un $t \in F$: on peut toujours écrire $t = t'.a(1,1)(x_1, x_2).(t_1 \otimes t_2)$ avec $t' \in \tilde{T}(\Sigma)^1_1$, t_1 et $t_2 \in T(\Sigma)^1_o$.

Soit $b_i(\alpha_i, \alpha'_i)(x_1,.. x_{p'})$ le sommet de t_i

$(i=1,2).a(1,1)(b_1(\alpha_1,\alpha'_1)(x_1,.. x_p), b_2(\alpha_2,\alpha'_2)(x_{p+1},.. x_{p+p'}))$

est un sous - arbre de $t \in F$. Comme $\phi a(1,1)(x_1,x_2) = x_1$, $\alpha'_1 = 0$

et, d'après les hypothèses sur β, on a $\alpha_1 = 1$ et $|\phi b_1(1,0)| > 0$.

De même, $(\alpha_2,\alpha'_2) = (0,1)$ et $|\phi'(b_2(0,1)| > 0$.

<u>Idée générale de la preuve</u> : Nous venons de voir que chaque occurrence de $a(1,1)$ dans un $t \in F$ a pour successeurs immédiats b_1 et b_2 tels que $|\phi^{(')} a(1,1)(b_1,b_2)| > 0$.

Nous allons remplacer chaque occurrence de ce sous-arbre par un nouveau symbole de même image par ϕ et ϕ', sans rien changer aux propriétés de complétude.

-Pour toutes les lettres b_1 et b_2, considérons les nouvelles lettres $a_{(b_1,b_2)}(1,1)\ (x_1,.. x_{p+p'})$ si $b_1(1,0) \in \Sigma_p$ et $b_2(0,1) \in \Sigma_{p'}$

-Si Δ est l'alphabet de F, considérons Δ_a l'ensemble des nouvelles lettres ainsi créées et considérons le morphisme f de $T(\Delta \cup \Delta_a - a\{1,1\})$ dans $T(\Delta)$ défini par :

f est l'identité sur $\Delta - \{a(1,1)\}$

$$f_{a_{b_1,b_2}}(1,1)(x_1,.. x_{p+p'}) = a(1,1)(b_1(1,0)(x_1,..x_p),b_2(0,1)(x_{p+1},..x_{p+p'}))$$

Nous avons $f \circ \phi^{(')} = \Psi^{(')}$ par construction donc

$(f \circ \phi, f^{-1}(F), f \circ \phi') \frown (\phi, ff^{-1}(F), \phi')$

Mais $\forall$ $t \in F$, $\exists$ $t' \in f^{-1}(F)$, conc $ff^{-1}(F) = F$ et finalement

$B \frown (f \circ \phi, f^{-1}(F), f \circ \phi')$

On vérifie que, en posant $\Psi^{(')} = f \circ \phi^{(')}$

- $\Psi = \phi$ sur Δ-$a\{1,1\}$

$\Psi(a(b_1,b_2)(1,1)(x_1,.. x_{p+p'}) = \phi b_1(1,0)(x_1,.. x_p)$

- $\Psi' = \phi'$ sur Δ-$a\{1,1\}$

$\Psi' a_{b_1,b_2}(1,1)(x_1,.. x_{p+p'}) = \phi' b_2(0,1)(x_{p+1},.. x_{p+p'})$

D'autre part $a(1,1)$ n'appartient plus à l'alphabet de F.

Sur les "nouvelles lettres" $a_{b_1,b_2}(1,1)$ on a bien les propriétés P1 à 5 vérifiées et on a pas

$|\Psi a_{b_1,b_2}(1,1)|+|\Psi' a_{b_1,b_2}(1,1)| = 0.$

Enfin, comme $x_i \in \Psi\, a_{b_1,b_2}(1,1)$ ssi $x_i \in \phi a(1,1)(b_1(1,0)(x_1,..x_p),$

$b_2(0,1)(x_{p+1},..,x_{p+p'}))$ (et de même pour Ψ') les propriétés P1 à 5

sont conservées. C.Q.F.D.

Finalement on a :

II-1-5-1-4 Définition :

On appelera bimorphisme **réduit** tout bimorphisme (ϕ, F, ϕ') (F reconnaissable, ϕ et ϕ' 1-morphismes) vérifiant P 1,2,3,4,5 et étant semi-complet strict.

Les résultats précédents permettent de conclure en
proposition : Tout bimorphisme (ϕ, F, ϕ') où F est reconnaissable et ϕ et ϕ' sont des 1-morphismes est $\hat{=}$ à un bimorphisme réduit du même type.

De plus, comme il est évident que les démarquages propres conservent la réduction, on pourra toujours supposer que la forêt reconnaissable du bimorphisme réduit est hyperlocale.

II-1-5-2 Lemmes de non-strictitude

II-1-5-2-1 Premier Lemme :

Soit (ϕ, K, ε) où ϕ est un 1-morphisme linéaire complet strict, K est une forêt reconnaissable et ε est un démarquage. Alors, il existe K' reconnaissable, ϕ' 1-morphisme linéaire complet strict et ε' démarquage (du même type que ε), il existe π et π', démarquages propres, tels que :

$$(\phi, K, \varepsilon) \hat{=} (\pi, K', \varepsilon') \circ (\phi', \pi')$$

De plus, ϕ' est un démarquage si ϕ en est un.

Preuve : Marquons d'abord ϕ en $\bar{\phi}$ (par exemple en marquant de $a_o, a_1, .. a_i$ les noeuds de $\bar{\phi}(a)$ pour tout $a \in \Sigma$, ce qui est possible car ϕ est strict).

Soit alors $\bar{\phi}(a(x_1, .. x_n)) = \bar{t}_a . \sigma_a (\sigma_a$ est une permutation).

Soit π le démarquage associé. On a évidemment $\bar{\phi} \circ \pi = \phi$.

1er cas : soit a tel que $\varepsilon(a(x_1,.. x_n)) = a'.\zeta_a = a'(x_{i_1},..,x_{i_p})$

nous associons à a' la lettre formelle $\bar{a}'(x_1,..,x_p)$

(ζ est injective car ε est un démarquage).

Nous définissons alors ε' sur $\bar{t}_a$ tel que :

Soit a_i un noeud de $\bar{t}_a$ et $a_i(t_1.\theta_1,.., t_n.\theta_n)$ le sous arbre maximal de $\bar{t}_a$ de sommet a_i. Alors,

$\varepsilon' a_i(x_1,.. x_n) = a'_i(x_{j_1},.., x_{j_{p'}})$

où - $x_{j_1} <..< x_{j_{p'}}$

- $\forall\, k \in [n],\ \exists_\ell\ t_q\ j_\ell = k$ ssi $Im(\theta_k) \cap Im(\zeta_a) \neq \emptyset$

(ε' ne recopie que les branches qui aboutissent à une variable de $Im(\zeta_a)$.)

Posons alors $\varepsilon'(\bar{t}_a) = \bar{t}_{a'}.\theta'_a$.

On a par construction $Im(\theta'_a) = Im(\zeta_a)$ et comme les deux torsions sont injectives, il existe une permutation σ'_a telle que $\theta'_a = \sigma'_a.\zeta_a$.

Nous posons alors $\phi'\bar{a}'(x_1,.. x_p) = \bar{t}_{a'}.\sigma'_a$

(ϕ' est donc ici linéaire complet strict).

Nous posons $\pi'\bar{a}'(x_1,.. x_p) = a'(x_1,.. x_p)$.

<u>2ème cas</u> : Soit a tel que $\varepsilon a(x_1,.. x_n) = x_i$

Nous définissons ε' sur $\bar{t}_a$ par : (avec les notations du <u>1er cas</u>)

$\varepsilon'\ a_i(x_1,.. x_n) = x_j$ où $Im(\theta_j) \ni x_i$ (j est unique car σ_a injective, existe σ_a surjective).

(ε' 'selectionne' la variable x_i sur $\bar{t}_a$).

Posons $K_a = \bar{t}_a.\sigma_a(F_1,.. F_n)$ où $F_i = x_i$ si $x_i \in Im(\zeta_a)$ et

$x_i = [\phi(\Delta)]_o^1 = G$

Comme ϕ est linéaire, G est reconnaissable. Posons $H = [K_a | a \in \Sigma]_0^1$.

H est également reconnaissable.

Pour prouver le résultat il suffit de prouver que $(\phi,\varepsilon) \frown (\pi,H,\varepsilon')o(\phi',\pi')$ le reste en découlera immédiatement en posant $K' = \bar{\phi}(K) \cap H$ (car $\bar{\phi}$ est marqué), et du fait que, par construction, $\pi,\pi',\phi',\varepsilon'$ et H ont bien le type voulu.

Compte tenu du fait que $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$ et $\varepsilon = \bar{\varepsilon} \circ \pi'$ (avec $\bar{\varepsilon}\ \bar{a}'(x_1,.. x_p) = a'(x_1,.. x_p)$), il suffit même d'établir :

$(\bar{\phi}, \bar{\varepsilon}) \hat{=} (H, \varepsilon') \circ \phi'^{-1}$.

Compte tenu de la linéarité de $\bar{\phi}$ et ϕ', de la complétude de ε', de celle de $\bar{\varepsilon}$ sur tout K_a, il suffit comme dans (I-2-2-2-2 III) d'établir :

$(\bar{u}, \bar{v}) \in (\bar{\phi}(a), \bar{\varepsilon}(a)) \iff \bar{u} \in K_a$ et $\varepsilon'(\bar{u}) = \phi'(\bar{v})$

Or, $(\bar{u},\bar{v}) \in (\bar{\phi}(a),\bar{\varepsilon}(a)) \iff [\ \bar{u} \in K_a$ et $\bar{u} = \bar{t}_a(t_1,.. t_n), \bar{v} = x_i\ ]$

où $\bar{v} = \bar{a}'(x_{i_1},.. x_{i_p})$ selon les cas.

la dernière assertion équivaut à dire que $\bar{u} \in K_a$ et $\bar{\phi}(\bar{v}) = \varepsilon'(\bar{u})$

par construction de $\bar{\phi}$ et $\bar{\varepsilon}'$.///

<u>C.Q.F.D.</u>

Si on considère ϕ non strict, la construction précédente est mise en défaut et la situation est beaucoup plus complexe comme nous allons le voir dans le lemme suivant.

<u>II-1-5-2-2 Second lemme de non strictitude</u> :

<u>Lemme</u> : Soit $(\varepsilon, K, \varepsilon')$ où ε et ε' sont des démarquages.
K est reconnaissable.
Alors il existe deux démarquages propres δ et δ', deux forêts reconnaissables F et F', deux 1-morphismes linéaires ϕ et ϕ' tels que :

$$(\varepsilon, K, \varepsilon') \hat{=} (\delta, F, \phi') \circ (\phi, F', \delta')$$

<u>Preuve</u> : D'après (II-1-5-1), on peut supposer $(\varepsilon, K, \varepsilon')$ réduit et K hyperlocale.

I) K est supposée définie sur Σ qui se partitionne en $\Sigma_N \cup \Sigma_g \cup \Sigma_d$

où $\Sigma_N = \{a(x_1,..,x_n) | \varepsilon(a)$ et $\varepsilon'(a)$ non réduits à une variable$\}$

$\Sigma_d = \{a(x_1,..,x_n) | \varepsilon'(a) = a$ et $\varepsilon(a) = x_i\}$

$\Sigma_g = \{a(x_1,..,x_n) | \varepsilon'(a) = x_i$ et $\varepsilon(a) = a\}$

Remarque : nous abrégeons "il existe i tel que $\varepsilon(a) = x_i$" en "tel que $\varepsilon(a) = x_i$".

II) Dans ce point, nous marquons K d'informations utiles par la suite. Marquons tout d'abord K en $\bar{K}$ comme suit :

a) le sommet a de tout arbre t de K est barré en $\bar{a}$ si $a \notin \Sigma_N$. Tout noeud $b \notin \Sigma_g$ et étant successeur d'un $a \in \Sigma_N$ sans $c \in \Sigma_d$ entr'eux est barré, et symétriquement.

b) Si $a \in \Sigma_d$, $ab \in \Sigma_g$ pour $i^{\text{ème}}$ successeur dans t et que $\varepsilon(a) = x_i$, on marque a en a_b, de même $\bar{a}$ en $\bar{a}_b$. De même, si $a \in \Sigma_g$ admet $b \in \Sigma_d$, pour $i^{\text{ème}}$ successeur dant t et que $\varepsilon'(a) = x_i$, on marque a en a_b.

c) on tilde (marque b en $\tilde{b}$) les $b \in \Sigma_d$ $i^{\text{ème}}$ successeurs immédiats de $a \in \Sigma_g$ (avec $\varepsilon(a) = x_i$) et n'ayant pas de $c \in \Sigma_g$ avant un $d \in \Sigma_N$ en $j^{\text{ème}}$ successeur (non immédiat) (si $\varepsilon(b) = x_j$). Symétriquement pour les $b \in \Sigma_g$.

Nous laissons au lecteur le soin de construire des transducteurs linéaires fonctionnels réalisant ces marquages.

III) On définit $\bar{\varepsilon}$ à partir de ε par :

$$\bar{\varepsilon}\, a(x_1,..\, x_n) = \varepsilon a(x_1,..\, x_n),$$

$$\bar{\varepsilon}\, \bar{a}(x_1,..\, x_n) = \overline{\varepsilon(a)}(x_1,..\, x_n) \text{ si } \varepsilon(a) \neq x_i, = x_i \text{ sinon}$$

$$\bar{\varepsilon}\, a_b(x_1,..\, x_n) = \left| \begin{array}{l} x_i \text{ si } a \in \Sigma_d \text{ (donc si } \varepsilon\, a(x_1,..\, x_n) = x_i) \\ a_b(x_{i_1},..\, x_{i_p}) \text{ si } a \in \Sigma_g \text{ et } \varepsilon(a) = a(x_{i_1},..,x_{i_p}) \end{array} \right.$$

de même pour $\bar{a}_b$

$$\bar{\varepsilon}\ \tilde{a}(x_1,.., x_n) = \begin{cases} x_i \text{ si } a \in \Sigma_d \\ \tilde{a}(x_{i_1},..,x_{i_p}) \text{ si } a \in \Sigma_g \text{ et } \varepsilon(a) = a(x_{i_1},..,x_{i_p}) \end{cases}$$

Remarquons que i dépend en fait de a, mais nous abrégeons. De même on peut toujours supposer ε et ε' marqués, quitte à effacer par δ et δ' les marques.

Intuitivement, $\bar{\varepsilon}$ est identique à ε et, en plus, 'transporte' les marques.
$\bar{\varepsilon}'$ est défini de la même façon à partir de ε'.

IV) δ et δ' sont définis comme suit :

$$\delta(\bar{a}_b(x_1,.. x_n) = \delta a_b(x_1,.. x_n) = \delta'\bar{a}_b(x_1,.., x_n) = \delta'(a_b(x_1,.. x_n)) = a(x_1,..x_n)$$

$$\delta a(x_1,..x_n) = \delta'\dot{a}(x_1,.. x_n) = a(x_1,.. x_n)$$

(intuitivement, δ et δ' effacent les marques)

V) Soit T_1, T_2, T_3 des transducteurs réalisant les marquages décrits respectivement en II) a, b et c. Le marquage étant fonctionnel(un arbre est marqué d'une seule façon), on peut considérer les T_i comme des applications.

<u>Attention</u> : les transducteurs T_i ne sont pas pour autant déterministes.

Considérons donc $\mathcal{T} = T_1 \circ T_2 \circ T_3$ qui applique K sur $\bar{K}$($\bar{K}$ étant l'ensemble des arbres marqués de K).

On vérifie aisément que $\mathcal{T} \circ \bar{\varepsilon} \circ \delta = \varepsilon$ et $\mathcal{T} \circ \bar{\varepsilon}' \circ \delta' = \varepsilon'$, dont on déduit par des considérations ensemblistes faciles que $(\varepsilon, K, \varepsilon') \simeq (\bar{\varepsilon} \circ \delta, \bar{K}, \bar{\varepsilon}' \circ \delta')$

<u>Faisons le point</u> : Nous avons jusqu'ici trouvé deux démarquages propres δ et δ' et construit $\bar{\varepsilon}$, $\bar{K}$, $\bar{\varepsilon}'$ vérifiant l'équivalence ci-dessus. De plus, $(\varepsilon, K, \varepsilon')$ étant réduit, $(\bar{\varepsilon}, \bar{K}, \bar{\varepsilon}')$ l'est à forciori. Pour établir le lemme en cours, il suffit d'établir l'existence de F, F'

reconnaissables et de 1-morphismes linéaires ϕ et ϕ' tels que :

(P) $(\exists t \in \bar{K}t_q . \bar{\varepsilon}(t)=u$ et $\bar{\varepsilon}'(t)=u') \Leftrightarrow (\phi'(u)=\phi(u'),\ u \in F$ et $u' \in F')$

VI) Pour cela, construisons donc F, F', ϕ et ϕ'.

$F = \bar{\varepsilon}(\bar{K})$, $F' = \bar{\varepsilon}'(\bar{K})$

$\phi'\bar{b}(x_1,.. x_n) = \phi\bar{b}(x_1,.. x_n) = x_i$

$\phi'\bar{b}_c(x_1,.. x_n) = \phi\bar{b}_c(x_1,.. x_n) = c'(x_i)$

sur $b(x_1,.. x_p)$, ϕ' et ϕ sont tels que $\phi'\varepsilon(b(x_1,.. x_n)) = \phi\varepsilon'(b(x_1,..x_n)) =$

$b'(x_{i_1},..,x_{i_p})$ où $x_{i_1},.. x_{i_p}$ sont les variables communes à $\varepsilon(b)$ et

$\varepsilon'(b)$ si $b \in \Sigma_N$, $\phi(b)= \phi(b') = x_i$ sinon.

$\phi'b_c(x_1,.., x_n) = \phi b_c(x_1,..,x_n) = b'c'(x_i)$

si $a \in \Sigma_d$, $\phi\ \tilde{a}(x_1,.. x_n) = a'(x_i)$ et $\phi'\ \tilde{a}(x_1,.. x_n) = x_i$

si $a \in \Sigma_g$, $\phi\ \tilde{a}(x_1,.. x_n) = x_i$ et $\phi'\ \tilde{a}(x_1,.. x_n) = a'(x_i)$

Il n'est pas nécessaire de définir ϕ et ϕ' sur les autres lettres, qui sont non lues (on peut le faire arbitrairement)

VII) Prouvons l'implication => de (P)

Pour cela, nous allons d'abord montrer par récurrence sur la taille ν de $\tilde{t}$ que :

(Q) $\forall\ \tilde{t} \in I(\bar{K})$, avec $\tilde{t} = \tilde{t}'(\alpha_1(x_1,.. x_{k_1}),..,\alpha_j(x_{k_{j-1}}+1,.., x_{k_j}))$,

les α_i étant des lettres, alors :

- $\widetilde{\bar{\varepsilon}(\tilde{t})} \in I(F)$, $\widetilde{\bar{\varepsilon}'(\tilde{t})} \in I(F')$

- $\exists\ \tilde{u}$, $\beta = \beta_1 \otimes .. \otimes \beta_p$, $\beta' = \beta'_1 \otimes .. \otimes \beta'_p$ avec :

a) $\beta'_j = c'(x_k)$, $\beta_j = x_k$

ssi $\exists_{\bar{j}}$ et $b \in \Sigma_d$ $t_q(\alpha_{\bar{j}} = b_c$ ou $\bar{b}_c \wedge k_{\bar{j}-1} + 1 = k)$

b) $\beta'_j = x_k$, $\beta_j = c'(x_k)$

ssi $\exists_{\bar{j}}$ et $b \in \Sigma g$ $t_q(\alpha_{\bar{j}} = b_c$ ou $\bar{b}_c \wedge b_{\bar{j}-1}+1 = k)$

c) $\beta'_j = \beta_j$ sinon

Preuve de (Q) :

Les faits que $\widetilde{\bar{\varepsilon}(\tilde{t})} \in \mathcal{I}(F)$ et $\widetilde{\bar{\varepsilon}'(\tilde{t})} \in \mathcal{I}(F')$ sont évidents par définition de F et F'.

- Q est évidente pour $\nu = 0$

- soit $\tilde{t}_{x_{i_o}}\ \alpha = \tilde{t}(\alpha_1, .., \alpha_{j_o}(x_{k_{j_o-1}+1}, .., \alpha_{i_o = k_{j_o-1}+\ell}(\ \ ), ..), ..\ \alpha_n)$

avec $|\tilde{t}| \leq \nu$

Cas 1 :

α est lu par $\bar{\varepsilon}$ et $\bar{\varepsilon}'$

$i_o = k_{j_o-1}+\ell$ est donc commun à $V(\tilde{u}.\beta)$ et $V(\tilde{u}.\beta')$

($V(t)$ désigne les variables de t). Soit λ_o l'indice (qui existe par hypothèse de récurrence et est unique par linéarité) tel que β_{λ_o} et β'_{λ_o} soient antécédants de x_{i_o}.

Cas 1-1

$\alpha_{j_o} \in \Sigma_N$ alors $\beta_{\lambda_o} = \beta'_{\lambda_o}$ (cas c) de l'hypothèse de récurrence)

Cas 1-1-1

si $\alpha \in \Sigma_N$, on a $\phi'\bar{\varepsilon}(\tilde{t}.\alpha) = \tilde{u}.\beta.\alpha$

et $\phi(\bar{\varepsilon}'(\tilde{t}.\alpha)) = \phi\bar{\varepsilon}'(\tilde{t}).\phi\bar{\varepsilon}'(\alpha) = \tilde{u}.\beta'.\alpha$

l'hypothèse (Q) reste vérifiée par $\tilde{u}_{x_{\lambda_o}}\ \beta_{\lambda_o}\alpha(x_1, .., x_n)$ et les suites

$(\beta_1,..,\beta_{\lambda_o-1},x_{i_o},..x_{i_o+n},\beta_{\lambda_o+1},..,\beta_p)$

et $(\beta'_1,..,\beta'_{\lambda_o-1},x_{i_o},..,x_{i_o+n},\beta'_{\lambda_o+1},..,\beta'_p)$

(Nous ne faisons figurer dans les expressions que les variables qui importent, comme dans $\tilde{u}_{x_{\lambda_o}}\ \beta_{\lambda_o}\ \alpha(x_1,..,x_n))$

<u>Cas 1-1-2</u> :

si $\alpha = \bar{a}_b(x_1,..,x_n) \in \Sigma_d$, alors

$\phi\bar{\varepsilon}'(\tilde{t}.\alpha) = \tilde{t}.\beta'\phi(\bar{\varepsilon}'\bar{a}_b) = \tilde{t}.\beta'.b'(x_{i_o+\ell})$

et $\phi'\bar{\varepsilon}(\tilde{t}.\alpha) = \tilde{t}.\beta.\phi'(\bar{\varepsilon}(\bar{a}_b)) = \tilde{t}.\beta.(x_{i_o+\ell})$

la propriégé (Q) est vérifiée par $\tilde{t}.\alpha$ (cas a))

<u>Cas 1-1-3</u> :

$\alpha = \bar{a}_b \in \Sigma_g$. Cas symétrique du précédent. On ne peut pas avoir $\alpha = a_b$

car α a pour antécédant $\alpha_{j_o} \in \Sigma_N$ donc a est barré si a $\notin \Sigma_N$.

<u>Cas 1-1-4</u> :

Si α de la forme a (ou $\bar{a}$) $\in \Sigma_d$, on a alors $\phi\bar{\varepsilon}'(a) = x_i = \phi'\bar{\varepsilon}(a)$ d'où

$\phi\bar{\varepsilon}'(\tilde{t}.\alpha) = \tilde{t}.\beta'$ et $\phi'\bar{\varepsilon}(\tilde{t}.\alpha) = \tilde{t}.\beta$. (Q) est toujours vérifié.

Le cas α de la forme a (ou $\bar{a}$) $\in \Sigma_g$ est symétrique.

<u>Cas 1-2</u> :

$\alpha_{j_o} \notin \Sigma_N$. Supposons par exemple $\alpha_{j_o} \in \Sigma_d$ (le cas $\alpha_{j_o} \in \Sigma_g$ se traite de même).

Si α_{j_o} est non marqué par α, on a $\beta_{\lambda_o} = \beta'_{\lambda_o}$ on est ramené au cas 1-1.

Si α_{j_o} marqué par α, c'est que $\alpha \in \Sigma_g$. Alors, on est dans le cas a) de l'hypothèse (Q) : $\beta'_{\lambda_o} = \alpha'(x_{i_o})$ et $\beta_{\lambda_o} = x_{i_o}$

Cas 1-2-1 :

Alors, si α est de la forme a_c ou $\bar{a}_c$, $\phi\bar{\varepsilon}'a_c(x_1,.. x_n) = x_i$

$\phi'\bar{\varepsilon}(\alpha_\gamma) = a'c'(x_{i_o})$. La récurrence est vérifiée (cas b)) où

β'_{λ_o} devient x_{i_o} et β_{λ_o} devient $c'(x_{i_o})$.

Cas 1-2-2 :

si α de la forme a, $\phi\bar{\varepsilon}'a(x_1,.. x_n) = \phi'\bar{\varepsilon}a(x_1,.. x_n) = x_i$

(Q) est vérifié (situation de l'hypothèse inchangée)

Cas 1-2-3 : si α de la forme $\tilde{a}$, $\phi\bar{\varepsilon}'\tilde{a}(x_1,.. x_n) = x_i$

et $\phi'\bar{\varepsilon}\tilde{a}(x_1,.. x_n) = a'(x_i)$. (Q) est vérifiée (cas c)).

Cas 1-2-4 :

Si α_{j_o} de la forme $\tilde{a}$, mettons $\tilde{a} \in \Sigma_g$, on est dans le cas (c)) de

l'hypothèse et on y reste car alors α est du type $b(x_1,..,x_n) \in \Sigma_g \cup \Sigma_N$

et $\phi\bar{\varepsilon}'(b) = \phi'\bar{\varepsilon}(b)$.

Cas 2

α est lu seulement par $\bar{\varepsilon}'$

$\tilde{t}$ est donc de la forme $\tilde{t}_1.\zeta(x_k,..,t_2.\alpha,..)$ où ζ est lu par $\bar{\varepsilon}$ et $\bar{\varepsilon}'$

mais $\bar{\varepsilon}\zeta(x_k,.., x_{k+n}) = x_{k+i-1}$. On a donc $\zeta \in \Sigma_d$ et tous ses successeurs dans $\tilde{t}$ appartiennent à $\Sigma_d \cup \Sigma_N$. (Car le bimorphisme est réduit). De ce fait on déduit d'une part que $\alpha \in \Sigma_d$ et n'est ni marqué, ni tildé, ni indicé, d'autre part, que $\phi\zeta(x_k,.., x_{k+n})$ n'a pour variable que x_{k+i-1}, donc que α n'est pas lu dans $\tilde{t}$ par $\phi\bar{\varepsilon}'$, donc que α n'est lu ni par $\phi\bar{\varepsilon}'$, ni par $\phi'\bar{\varepsilon}$. Nous sommes donc dans le cas b) de (Q) et y restons.

Cas 3 :

α n'est lu ni par $\bar{\varepsilon}$, ni par $\bar{\varepsilon}'$: exclu car le bimorphisme est réduit.

Le cas où α est lu seulement par $\bar{\varepsilon}$ se traite comme le cas 2. (Q) est prouvé.///

De (Q), on déduit que $\forall\ \tilde{t} \in I(\bar{K})$, alors $\widetilde{\bar{\varepsilon}(\tilde{t})} \in I(F)$, $\widetilde{\bar{\varepsilon}'(\tilde{t})} \in I(F\ )$ et $\phi'\varepsilon(\tilde{t})$ et $\phi\bar{\varepsilon}'(\tilde{t})$ sont compatibles. En particulier, $\forall\ t \in \bar{K}$, $\bar{\varepsilon}(\tilde{t})$ est sans feuille donc $\in F$. De même $\bar{\varepsilon}'(\tilde{t}) \in F'$ et $\phi'\bar{\varepsilon}(\tilde{t})$ et $\phi\bar{\varepsilon}'(\tilde{t})$ sont compatibles et sans feuille, donc égaux. L'implication => de (P) est prouvée.///

Pour achever la preuve du lemme, il reste à montrer l'implication inverse de (P). Nous allons pour cela prouver (R) :

(R) $\forall\ v \in T(\Sigma)^1_o$ tel que il existe u, u' vérifiant $u \in F$, $u' \in F'$ et

$\phi'(u) = \phi(u') = v$,

alors $\forall\ \tilde{\omega} \underset{I}{<} v$, $\exists\ \tilde{t} = \tilde{t}'.(\alpha_1 \otimes .. \otimes \alpha_n) \in I(\bar{K})$ ou $\tilde{t} = x_1$,

$\exists \theta \in \Theta^p_n, \exists \beta_1, .. \beta_n (\beta_i \in \Sigma' \cup \{x_i\}), \beta'_1, .., \beta'_n (\beta'_i \in \Sigma' \cup \{x_i\})$

tels que :

- $\widetilde{\bar{\varepsilon}(\tilde{t})} \in I(F)$, $\bar{\varepsilon}'(\tilde{t}) \in I(F')$

$\phi'\bar{\varepsilon}(\tilde{t}) = \tilde{\omega}\theta(\beta_1 \otimes .. \otimes \beta_n)$ et $\phi\bar{\varepsilon}'(\tilde{t}) = \tilde{\omega}\theta(\beta'_1 \otimes .. \otimes \beta'_n)$

- si α_j de la forme a_b ou $\bar{a}_b$ (avec b non tildé), si $a \in \Sigma_d$, alors $\beta_j = x_i$ et $\beta'_j = c'(x_i)$

- si α_j de même forme que ci-dessus et si $d \in \Sigma_g$ alors $\beta'_j = x_i$ et $\beta_j = c'(x_i)$

- sinon, $\beta_j = \beta'_j = x_i$.

Preuve de R : Par récurrence sur la taille ν de $\tilde{\omega}$

- si $\nu = 0$, $\tilde{\omega} = x_1$ et $\tilde{t} = x_1$ répond à (R).

- supposons (R) établi pour tout $\tilde{\omega}$ tel que $|\tilde{\omega}| \leq \nu$ et soit $\tilde{\omega}_{x_k}.\zeta$ avec $\zeta \in \Sigma'$ et $|\tilde{\omega}| = \nu$. Supposons que $\tilde{\omega}$ satisfait aux conditions de (R).

$\alpha_{\theta(k)}$ est nécessairement lu par $\phi\bar{\varepsilon}'$ et $\phi'\bar{\varepsilon}$ car a pour variable(s) celle(s) de $\beta_{\theta(k)}$ qui figure(nt) dans $\phi\bar{\varepsilon}'(\tilde{t})$ et $\phi'\bar{\varepsilon}(\tilde{t})$ (le bimorphisme est réduit).

Par définition de ϕ et ϕ', ζ est de la forme $a(x_1,.. x_n) \in \Sigma_N$ ou $a'(x_1) \in \Sigma'_d \cup \Sigma'_g$

Posons $\bar{\varepsilon}(\tilde{t}(\alpha_1 \otimes .. \otimes \alpha_n)) = T(\gamma_1 \otimes .. \otimes \gamma_n)$

et $\bar{\varepsilon}'\tilde{t}'(\alpha_1 \otimes .. \otimes \alpha_n) = T'(\gamma'_1 \otimes .. \otimes \gamma'_n)$.

Soit b_1 l'antécédant immédiat de ζ dans v.

<u>1er cas</u> ;

$\zeta = a(x_1,.. x_n) \in \Sigma_N$ et $b_1 = b(x_1,.. x_n) \in \Sigma_N$

On peut alors dire qu'il existe deux noeuds b et a de u d'images respectives b et a par ϕ'. Comme $u \in \bar{\varepsilon}(\bar{K})$ et par définition du marquage, la branche joignant b à a ne peut contenir (autre b et a) que des éléments de Σ_g. Soit $bc_1,.., c_n$ a cette branche. Mais alors, puisque $u \in \bar{\varepsilon}(\bar{K})$, $c_1 \in S_{i_1}(b)$, $c_{i+1} \in s_{i_i}(c_i)$ et $a \in S_{i'}(a)$

($S_i(d)$ désigne les $i^{\text{ème}}$ successeurs possibles de d ans une forêt hyperlocale). $\bar{\varepsilon}(\tilde{t})$ contient une sous-branche initiale $b_{c_1},.. c_j$.
On a alors $\tilde{t}_{x_i}\ c_{j+1},.. c_n$ a qui vérifie R pour $\tilde{\omega}_{x_i},..,\zeta$(l'image par $\phi'\bar{\varepsilon}$ et $\phi\bar{\varepsilon}'$ étant 'augmentée' pour les deux de ζ).

<u>2ème cas</u> :

$\zeta = a(x_1,.. x_n) \in \Sigma_N$ et $b_1 = b'_{(x_1)} \in \Sigma'_d \cup \Sigma'_g$ (supposons par exemple $b_1 \in \Sigma'_d$). Comme dans le premier cas, a est l'image par ϕ d'un certain a de u', b' est un noeud de l'image par ϕ d'un certain c_b de u' (ou est l'image d'un $\tilde{b}$ ou d'un $\bar{c}_b$). La branche de u' joignant c_b(ou $\tilde{b}$,ou $\bar{c}_b$) à a est formée de successeurs de K (raisonner comme ci-dessus, en tenant compte du marquage). On prend alors, avec les notations du 1er cas :
$\tilde{t}_i$ remplacé par $\tilde{t}_{x_i}\ c_{j+1},.., c_n c_b$ (ou $\tilde{t}_{x_i}\tilde{b}$ ou $\tilde{t}_{x_i}$ cb).

L'image de $\tilde{t}$ est ainsi augmentée par rapport à l'hypothèse de c'b' (ou b') par $\phi\bar{\varepsilon}'$ et reste la même par $\phi'\bar{\varepsilon}$.

3ème Cas :

$\zeta = a'(x_1) \in \Sigma_g \cup \Sigma_d$ et $b_1 = b(x_1,.. x_n) \in \Sigma_N$.

même raisonnement que ci-dessus.

4ème Cas :

$\zeta = a'(x_1) \in \Sigma_g \cup \Sigma_d$ et $b_1 = b'(x_1) \in \Sigma_g \cup \Sigma_d$.

Si $a' \in \Sigma_g$, nécessairement $b' \in \Sigma_d$. Même type de raisonnement.

(R) est établie.///

En particulier, $\forall\, \tilde{\omega} = v$, $\exists\, \tilde{t} \in I(\bar{K})$ t_q $\widetilde{\bar{\varepsilon}(\tilde{t})} \in I(F)$,

$\widetilde{\bar{\varepsilon}'(\tilde{t})} \in I(\bar{K}')$ et $\phi'\bar{\varepsilon}(\tilde{t})$ et $\phi\bar{\varepsilon}'(\tilde{t}) > v$, ce qui implique

$\phi'\bar{\varepsilon}(\tilde{t}) = \phi\bar{\varepsilon}'(\tilde{t})$. D'autre part, comme $(\bar{\varepsilon},\bar{K},\bar{\varepsilon}')$ est réduit, si $\tilde{t}$ contenait une variable, $\bar{\varepsilon}(\tilde{t})$ ou $\bar{\varepsilon}'(\tilde{t})$ la contiendrait. Enfin si T contient 1 variable, $\phi(T)$ et $\phi'(T)$ aussi, donc $\tilde{t} = t \in \bar{K}$.

P est prouvé.///

C.Q.F.D.

II-1-5-3 Illustration des preuves

II-1-5-3-1 Commentaire :

Remarquons tout d'abord que seul le second lemme de non strictitude utilise la forme réduite. Nous commençons donc par illustrer le premier lemme, puis la réduction et le second lemme sur un même second exemple.

Dans les deux lemmes, l'idée est grosso modo la même, mais la technique plus complexe dans le second. Les notations adoptées ici sont celles des lemmes correspondants.

1er lemme. ϕ étant strict, on peut "marquer" la structure de tout $t \in K$ par $\bar{\phi}$ dans $\bar{\phi}(t) \in K'$. Le seul problème est alors de 'reconstituer' les informations en les sélectionnant par ε' dans $\bar{\phi}(t)$. L'égalité $\varepsilon'(u)=\phi(v)$ permet alors de vérifier si il existe $t \in K$ tel que $\bar{\phi}(t) = u$ et $\bar{\varepsilon}(t) = v$.

<u>Réduction</u> : La réduction ne présente pas de difficulté. La construction que nous donnons "coule" presque de source. Mais l'intérêt est que, dans $(\varepsilon, K, \varepsilon')$, tout noeud d'un $t \in K$ a une image stricte dans $\varepsilon(t)$ ou $\varepsilon'(t)$, toutes les informations concernant t peuvent donc se retrouver par marquage dans $\bar{\varepsilon}(t) \cup \bar{\varepsilon}'(t)$. Tout le problème de la preuve du second lemme sera de "recoller les informations".

<u>2ème lemme</u> : Plus précisément, l'essentiel du problème est d'avoir assez d'informations dans F et F' pour pouvoir établir que
$(\phi(u) = \phi'(v),\ u \in F,\ v \in F') \Leftrightarrow (\exists \bar{t} \in \bar{K}$ tel que $\bar{\varepsilon}(t) = u,\ \bar{\varepsilon}'(t) = v)$

Soit t' un sous-arbre de $\bar{t} \in \bar{K}$ dont chaque noeud à une image stricte par $\bar{\varepsilon}$. Il n'y a pas de difficulté à coder t' dans $\bar{\varepsilon}(t')$ (c'est le cas du 1er lemme). Mais quand une branche de $\bar{t}$ se décompose en sous branches $b_1 b'_1, .. b_n b'_n$ telles que les $\bar{\varepsilon}(b_i)$ et les $\bar{\varepsilon}'(b'_i)$ sont réduits à des variables, on a plus grosso modo dans $\bar{\varepsilon}(\bar{t})$ que les informations concernant $b'_1..b'_n$ et dans $\bar{\varepsilon}'(\bar{t})$ celles concernant $b_1..b_n$
On peut néanmoins marquer sur chaque lettre des informations finies, donc les successeurs immédiats, donc les "soudures" entre les b_i et les b'_i. Les règles de succession de K sont alors vérifiées soit sur F (sur les b'_i), soit sur F' (sur les b_i), soit par $\phi(u) = \phi'(v)$ (pour les soudures).

Bien entendu, l'exemple présenté illustre de façon simpliste les phénomènes. En particulier, les a_i et les b_i ne sont pas nécessairement monadiques, mais le problème se réduit essentiellement au cas monadique. C'est sur la chaine monadique $a_{i_1}^{+} b_{i_1}^{+} .. a_{i_p}^{+} b_{i_p}^{+}$ que nous illustrons ici le "problème des soudures",
qui revient en fait à un chevauchement de découpages ! Mais la preuve formelle montre que tous les problèmes se réduisent grosso modo à ceux illustrés ici, et se résolvent comme ci-dessous.

<u>II-1-5-3-2 Exemple sur le premier lemme de non strictitude</u> :

Considérons directement $\bar{\phi}$ et $\bar{\varepsilon}$ marqués comme dans la preuve.
Soit $\bar{\phi} = \bar{\varepsilon} = id$ sur $\Sigma - \{a\}$

$\bar{\phi}\ a(x,y,z) = a_o(a_1(x,y),a_2(z,a_3))$ et $\bar{\varepsilon}\ a(x,y,z) = \bar{a}'(x,z)$

Soit $K = a(F_1, F_2, F_3)$ (où les F_i sont reconnaissables) alors,

$(\bar{\phi}, K, \bar{\varepsilon}) \underline{\wedge} \{(a_o(a_1(t_1,t_2),a_2(t_3,a_3)),\bar{a}'(t_1,t_3)) | t_i\ F_i\}$

Sur $\Sigma - \{a\}$, pas de problème, on pose $\phi' = \varepsilon' = id$

On construit ε' sur $\bar{\phi}(a(x,y,z))$:

$\varepsilon'\ a_o(x,y) = a_o(x,y)$, $\varepsilon'\ a_1(x,y) = a_1(x)$

$\varepsilon'(a_2(x,y)) = a_2(y)$

On en déduit $\varepsilon' a_o(a_1(x,y),a_2(z,a_3)) = a_o(a_1(x),a_2(z))$

On pose $\phi' a'(x,y) = a_o(a_1(x), a_2(y))$

$K' = a_o(a_1(F_1,F_2), a_2(F_3,a_3))$

On a alors $(K', \varepsilon') \circ (\phi', \pi')$

$\underline{\wedge}\{(a_o(a_1(t_1,t_2), a_2(t_3,a_3)), a_o(a_1(t_1), a_2(t_3)) | t_i \epsilon F_i\}$

$o\{(a_o(a_1(u_1), a_2(u_2)), a'(u_1,u_2)) | u_i \epsilon T(\Sigma)_o^1\}$

donc $\underline{\wedge}(\bar{\phi}, K, \bar{\varepsilon})$.

II-1-5-3-3 : Exemple de réduction

Soit $(\varepsilon, K, \varepsilon')$ défini par :

K est la forêt reconnaissable définie par :

$K = K_1 . K_2$

$K_1 = \{\alpha a_{i_1}^+ b_{i_1}^+ a_{i_2}^+ b_{i_2}^+ \ldots a_{i_n}^+ b_{i_n}^+(x) | n \epsilon N^+, i_j \epsilon \{0,1\}\}$

où $a^+(x)$ désigne $\{a^i(x) | i \epsilon N^+\}$, $\alpha(x)$, $a_o(x)$, $a_1(x)$, $b_o(x)$, $b_1(x)$

sont les lettres.

$K_2 = e(F_1, d(\beta(F_2), \gamma(F_3)))$

où $e(x,y)$, $d(x,y)$, $\beta(x)$ et $\gamma(x)$ sont des lettres et F_1, F_2, F_3 des forêts reconnaissables définies sur un alphabet Σ' ne contenant pas les lettres précitées.

ε et ε' sont des démarquages définis par :

$\varepsilon = \varepsilon' = \text{id}$ sur $\Sigma' \cup \{\bar{\alpha}(x), \beta(x), \gamma(x)\}$

$\varepsilon\ a_o(x) = a_o(x)$, $\varepsilon\ a_1(x) = a_1(x)$, $\varepsilon\ b_o(x) = \varepsilon\ b_1(x) = x$

$\varepsilon\ e(x,y) = y$, $\varepsilon\ d(x,y) = x$

$\varepsilon'\ a_o(x) = \varepsilon'\ a_1(x) = x$, $\varepsilon'\ b_o(x) = b_o(x)$, $\varepsilon'\ b_1(x) = b_1(x)$

$\varepsilon'\ e(x,y) = y$, $\varepsilon'\ d(x,y) = y$

On peut d'abord "supprimer" $e(x,y)$ (puisque $\varepsilon(e(x,y)) = \varepsilon'(e(x,y)) = y$) en le remplaçant dans K_2 par y, ce qui donne :

$K = K_1.K_3$ avec

$K_3 = d(\beta(F_2), \gamma(F_3))$.

Marquons la lecture sur K. Nous obtenons :

- tous les noeuds de K_1 sont marqués par $(1,1)$ (lus par ε et ε'), d est également marqué $d_{(1,1)}$

tous les noeuds de $\beta(F_2)$ sont marqués $(1,0)$ (lus seulement par ε), ceux de $\gamma(F_3)$ par $(0,1)$.

Comme ε est strict sur $\beta(F_2)$ et ε' sur $\gamma(F_3)$, pas de problème ici.

Mais d est effacé par ε et ε'. On pose alors

$K_4 = c(F_2, F_3)$, $\varepsilon(c(x,y)) = \varepsilon\ d(\beta(x), \gamma(y)) = \beta(x)$

et $\varepsilon'\ c(x,y) = \varepsilon'\ d(\beta(x), \gamma(y)) = \gamma(y)$.

(pour être conforme aux notations du second lemme, posons plutôt $\varepsilon\ c(x,y)) = c(x)$ et $\varepsilon'\ c(x,y) = c(y))$

Finalement, on obtient $(\varepsilon, K, \varepsilon')$ réduit avec $K = K_1.K_4$.

II-1-5-3-4 Exemple de la construction du second lemme :

Reprenons $(\varepsilon, K, \varepsilon')$ réduit ci-dessus.

on a $(\varepsilon, K, \varepsilon')\widehat{\ }$

$$\{(\alpha a_{i_1}^{p_1} a_{i_2}^{p_2} \ldots a_{i_n}^{p_n} \beta(t_2), \alpha b_{i_1}^{p'_1} \ldots b_{i_n}^{p'_n} \gamma(t_3)) \mid n \in N^+, i_j \in \{0,1\}, \text{ les } p_i \text{ et } p'_i \in N^+$$

$$t_2 \in F_2 \text{ et } t_3 \in F_3\}$$

K est marqué en $\bar{K}$

$$\bar{K}_1 = \{\bar{\alpha} a_{i_1}^{*} \bar{a}_{{i_1}_{b_{i_1}}} b^{*}_{{i_1}_{a_{i_2}}} \ldots a_{i_j}^{*} a_{{i_j}_{b_{i_j}}} b^{*}_{i_j} b_{{i_j}_{a_{i_{j+1}}}} \ldots a_{i_n}^{*} a_{{i_n}_{b_{i_n}}} \tilde{b}_{i_n} b_{i_n}^{*}(x) \mid n \in N, i_j \in \{0,1\}\}$$

$\bar{K}_2 = K_4$ et $\bar{K} = \bar{K}_1 . \bar{K}_2$

$(a^{*} = \{a^n \mid n \in N\})$

$\bar{\varepsilon}$ est défini par :

$\bar{\varepsilon}\ \bar{\alpha}(x) = \bar{\alpha}(x)$, $\bar{\varepsilon}\ a_o(x) = a_o(x)$, $\bar{\varepsilon}\ a_1(x) = a_1(x)$

$\bar{\varepsilon}\ b_o(x) = \bar{\varepsilon}\ b_1(x) = x$, $\bar{\varepsilon}\ c(x,y) = c(x)$,

$\bar{\varepsilon}$ est l'identité sur Σ' (alphabet de F_2 et F_3)

$\bar{\varepsilon}\ a_{{i}_{b_j}}(x) = a_{{i}_{b_j}}(x)$, $\bar{\varepsilon}\ \tilde{b}_i(x) = x$, $\bar{\varepsilon}\ \bar{a}_{{i}_{b_j}}(x) = \bar{a}_{{i}_{b_j}}(x)$

$\bar{\varepsilon}'$ est défini par :

$\bar{\varepsilon}' \bar{\alpha}(x) = \bar{\alpha}(x)$, $\bar{\varepsilon}'\ b_o(x) = b_o(x)$, $\bar{\varepsilon}'\ b_1(x) = b_1(x)$

$\bar{\varepsilon}'\ a_o(x) = \bar{\varepsilon}'\ a_1(x) = x$, $\bar{\varepsilon}'\ c(x,y) = c(x)$.

$\bar{\varepsilon}'$ est l'identité sur Σ'

$\bar{\varepsilon}'\ b_{{i}_{a_j}}(x) = b_{{i}_{a_j}}(x)$, $\bar{\varepsilon}'\ \tilde{b}_i(x) = \tilde{b}_i(x)$

δ est défini par :

δ est l'identité sauf :

$\delta\ \bar{\alpha}(x) = \alpha(x)$, $\delta\ a_{{i}_{b_j}}(x) = a_i(x)$

δ' est l'identité sauf

$\delta'\ \bar{\alpha}(x) = \alpha(x)$, $\delta'\ b_{{i}_{a_j}}(x) = b_i(x)$ et $\delta'\ \tilde{b}_i(x) = b_i(x)$

ϕ' est défini par :

$\phi'\ \bar{\alpha}(x) = x,\ \phi'\ a_i(x) = x,\ \phi'\ a_{i_{b_j}}(x) = a'_i(b'_j(x))$ (qui est un arbre de profondeur 2), $\phi'(c(x)) = c',\ \phi'\bar{a}_{i_{b_j}}(x) = b'_j(x)$

ϕ est défini par

$\phi\ \bar{\alpha}(x) = x,\ \phi\ b_i(x) = x,\ \phi\ \tilde{b}_i(x) = b'_i(x),\ \phi'(c(x)) = c'$

$\phi'\ b_{i_{a_j}}(x) = b'_i(a'_j(x))$

Il est évident ici que $\bar{\varepsilon} \circ \delta = \varepsilon$ et $\bar{\varepsilon}' \circ \delta' = \varepsilon'$.

Vérifions sur l'exemple que :

$(\bar{\varepsilon},\ \bar{K},\ \bar{\varepsilon}') \frown (\varepsilon(\bar{K}),\ \phi') \circ (\phi,\ \varepsilon'(\bar{K}))$

$$(\bar{\varepsilon},\bar{K},\bar{\varepsilon}') \frown \{(\bar{\alpha} a^*_{i_1} \bar{a}_{i_{1_{b_{i_1}}}} a^*_{i_2} a_{i_{2_{b_{i_2}}}} \ldots a^*_{i_n} a_{i_{n_{b_{i_n}}}} c(t_1), \bar{\alpha}\bar{b}^*_{i_1} b_{i_{1_{a_{i_2}}}} \ldots b_{i_{n-1}} \tilde{b}_{i_{n_{a_{i_n}}}} b^*_{i_n} c(t_2) \;|\; n \in N^+,\ t_1 \in F_2 \text{ et } t_2 \in F_3\}$$

$$(\bar{\varepsilon}(\bar{K}),\phi') = \{(\bar{\alpha} a^*_{i_1} \bar{a}_{i_{1_{b_{i_1}}}} a^*_{i_2} a_{i_{2_{b_{i_2}}}} \ldots a^*_{i_n} a_{i_{n_{b_{i_n}}}} c(t_1), b'_{i_1} a'_{i_2} b'_{i_2} \ldots a'_{i_n} b'_{i_n} c) \;|\; n \in N^+\ t_1 \in F_2\}$$

$$(\phi,\bar{\varepsilon}'(\bar{K})) = \{b'_{j_1} a'_{j_2} b'_{j_2} \ldots a'_{j_m} b'_{j_m} c, \bar{\alpha} b^*_{j_1} b_{j_{1_{a_{j_2}}}} \ldots b_{j_{m-1_{a_{j_m}}}} b_{j_m} c(t_2) \;|\; m \in N^+ t_2 \in F_3\}$$

d'où le résultat.

L'essentiel est de voir que ϕ' induit sur $b'_{i_1} a'_{i_2} \ldots b'_{i_n}$ le découpage :

$$\overbrace{b'_{i_1}}\ \overbrace{a'_{i_2} b'_{i_2}}\ \overbrace{a'_{i_3} b'_{i_3}}\ \ldots\ldots\ldots\ \overbrace{a'_{i_n} b'_{i_n}}$$

et ϕ le découpage

$$\overbrace{b'_{i_1}\ a'_{i_2}}\ \overbrace{b'_{i_2}\ a'_{i_3}}\ \overbrace{b'_{i_3}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \overbrace{b'_{i_{n-1}}\ a'_{i_n}}\ \overbrace{b'_{i_n}}$$

II - 1 - 6 LEMME 6 DES DELAIS :

Le lemme suivant, quoique fort simple, est fort utile . Il montre que dans un bimorphisme, "on peut toujours supposer les morphismes séparés plutôt que séparés à délai borné, stricts plutôt que régulés". Plus précisément, on peut trouver un bimorphisme équivalent à celui donné, du même type, où le délai borné (d'effacement ou de séparation) est ramené à 1.

Lemme 6 : **Soit $(\nu, \phi, K, \Psi, \mu)$ un bimorphisme B, où ϕ et Ψ sont respectivement séparés à délai borné, ou régulés, ou $[\alpha]$-quasi-complets sur K.**
Alors il existe $B' = \langle \nu, \phi', K', \Psi', \mu \rangle$ tel que :
$B' \underset{\sim}{\vee} B$, ϕ' est du même type et de même coefficient de dilatation que ϕ, de même pour Ψ' et Ψ (seul le fait d'être un démarquage n'est pas conservé), ϕ' et Ψ' sont respectivement séparés (donc à délai 1), ou stricts, ou $[\alpha]$-complets sur K'.

Preuve : Soit p le délai de régulation de ϕ, p' celui de Ψ, q le délai de séparation de ϕ, q' celui de Ψ (si ils existent).
Soit $s = \sup(p,p',q,q')$. Supposons K définie sur Σ.
Définissons un alphabet formel Σ' en bijection avec les arbres de $\tilde{T}(\Sigma)^1$ de profondeur homogène s (ils sont en nombre fini). Plus précisément, $\forall\ \tilde{t} \in \tilde{T}(\Sigma)^1_n$, $\tilde{t}$ de profondeur homogène s, il existe un et un seul $\bar{t} \in \Sigma'_n$ par la bijection.
Il résulte des définitions et propriétés immédiates des notions de séparation et régulation pour les morphismes (voir ces chapitres) que :

si ϕ est séparé à délai q (respectivement régulée à délai p), alors $\phi(\tilde{t})$ est séparé (resp. régulé) pour tout $\tilde{t}$ de prof. homogène s. De même pour Ψ.
Soit alors h le 1-morphisme sans torsion qui à tout $\bar{t} \in \Sigma'$ associe le $\tilde{t}$ correspondant. Posons $K' = h^{-1}(K)$, $\phi' = h \circ \phi$ et $\Psi' = h \circ \Psi$.
Le résultat est alors immédiat en ce qui concerne régulation et séparation. Le Lemme 1, appliqué à ϕ puis à Ψ, donne le résultat concernant la complétude.

II - 1 - 7 LE CAS DYADIQUE :

Un cas particulier important est celui où les alphabets considérés sont dyadiques (les lettres sont de degré 0, 1 ou 2).
On peut en effet coder de nombreux problèmes (logique, dénombrement, information) avec des arbres construits sur de tels alphabets. Il se trouve que dans ce cas de nombreuses constructions, impossibles dans le cas général, deviennent possibles. Les propriétés des bimorphismes s'en ressentiront. Nous présentons ici deux lemmes, en les situant par rapport au cas général.

II-1-7-1 Définitions

Un alphabet Σ est **dyadique** ssi $n > 2 \Rightarrow \Sigma_n = \emptyset$
Un morphisme est **semi-dyadique** ssi l'alphabet de son domaine est dyadique.
Un morphisme est **dyadique** ssi les alphabets domaine et image sont dyadiques.
Une forêt est **dyadique** ssi elle est définie sur un alphabet dyadique.

II-1-7-2 Lemme d'inversion dans le cas dyadique

II-1-7-2-1 Lemme 7-2 :

**Soit ϕ un 1-morphisme linéaire dyadique.
Alors il existe une forêt reconnaissable K, un démarquage dyadique δ et un 1-morphisme dyadique linéaire Ψ, régulé et quasi-complet sur K, tels que $\phi^{-1} \triangleq (\delta, K^{\theta}, \Psi)$. De plus, δ est strict (resp. complet) si ϕ est strict (resp. complet).**

Preuve : ϕ se décompose en $\phi_1 \circ \delta$ ou ϕ_1 est dyadique, marqué et linéaire complet strict, δ est un démarquage, complet ou strict si ϕ l'est (voir les propriétés de décomposition).
A tout $a \in \Sigma$ associons $K(a) = \phi_1(a)$. D'après (I-2-2-2-2 III), il suffit de construire Ψ tel que

$$\forall a \in \Sigma \quad \Psi\, K(a) = a$$

ϕ_1 étant marqué, on peut noter a_o son sommet, $a_1 \ldots a_n$ ses noeuds.
a_o existe toujours car ϕ_1 est strict.

<u>1er Cas</u> : $a \in \Sigma_o$. On pose $\Psi(a_o) = a$.

<u>2ème Cas</u> : $a \in \Sigma_1$. On pose $\Psi(a_o) = a(x)$

(Remarquons que a_o est ici monadique ou dyadique)

On 'selectionne' x sur les autres noeuds, c'est à dire que :

- si le noeud $a_p(x_1,x_2)$ est antécédant par x_i de la variable de $\phi_1(a)$, on pose $\Psi\ a_p(x_1,x_2) = x_i$
- sinon, on définit arbitrairement (les autres noeuds ne sont pas lus).

<u>3ème Cas</u> : $a \in \Sigma_2$.
Si un noeud de $\phi_1(a)$ n'est antécédant d'aucune des deux variables de $\phi_1(a)$, on définit Ψ arbitrairement.

- si a_i est antécédant d'une seule variable de $\phi_1(a)$, on pose $\Psi(a_i(x_1,x_2)) = x_j$(si a_i est antécédant par x_j).
- si a_i est antécédant des deux variables x et y de $\phi_1(a)$ par une même variable x_j, on procéde comme ci-dessus
- si $a_i(x_1,x_2)$ est tel que x_1 est antécédant de x et x_2 de y (ou inversement), on pose $\Psi\ a_i(x_1,x_2) = a(x_1,x_2)$.

Il est évident qu'un tel a_i existe et est unique dans $\phi_1(a)$.

Dans les 3 cas, on a bien $\Psi(\phi_1(a)) = a$ et Ψ est bien linéaire, quasi-complet sur K(a) (les branches non lues sont bornées) et régulé sur K(a) ($\Psi(K_a) = a \neq x$) donc Ψ répond sur K aux conditions.

<u>C.Q.F.D.</u>

II-1-7-2-2 Remarque

Si $K(a(x,y) = a_o(a_1(x,a_2(y))$, la construction donne :

$\Psi\ a_o(x) = x$, $\Psi\ a_1(x,y) = (x,y)$, $\Psi\ a_2(x) = x$.

Mais une telle construction n'est pas possible si ϕ_1 n'est pas dyadique. Par exemple, si ϕ_1 $a(x,y,z) = a_o(x,a_1(y,z))$ on retrouve la nécessité de la construction du lemme 2, dont le lemme 7-2 est l'homologue dans la cas dyadique.

II-1-7-3 Lemme de permutation des morphismes et des démarquages dans le cas dyadique

II-1-7-3-1 Lemme 7-3 :

Soit ϕ un 1-morphisme linéaire dyadique et δ un démarquage dyadique. Alors, il existe une forêt K reconnaissable, un démarquage δ' dyadique et un 1-morphisme linéaire dyadique Ψ, tels que $\phi \circ \delta^{-1} \widehat{=} (\delta', K^{\otimes}, \phi')$ De plus, si δ et ϕ sont complets stricts, δ' et ϕ' le sont. Si δ et ϕ sont stricts, δ' et ϕ' sont régulés sur $K^{\otimes}$.

Preuve : Nous allons d'abord prouver ce lemme dans des cas particuliers, que le lemme général de permutation (lemme 4) nous permettra d'étendre :

sous-lemme 1 : Si, dans l'énoncé du lemme 7-3 ci-dessus, ϕ est complet strict et δ l'identité sauf sur une lettre e(x) où δ e(x) = x, alors il existe (δ', K, ϕ') répondant aux conditions.
En effet, pour tout $a \in \Sigma$, posons $\phi(a) = t_a$ et supposons que t_a ait n_a noeuds ($n_a > 0$ car ϕ strict).

Etant donné la forme de δ, il est facile de voir que pour tout $t = a(t_1,.. t_n)$, on a $\delta^{-1}(t) = e^{*}a(\delta^{-1}(t_1),..,\delta^{-1}(t_n))$ d'où on en déduit $\delta^{-1}(t_a)$ et on a, $\forall\, u \in \delta^{-1}(t_a)$, u a exactement n_a noeuds autres que de label e, et en marquant ces noeuds $a_1,.., a_{n_a}$, les règles de successions entre les a_i sont indépendantes de u chois dans $\delta^{-1}(t_a)$

Soit alors $K(a) = \delta^{-1}(t_a)$ où les noeuds autres que de label e sont ainsi marqués par a, soit δ' tel que δ' e(x) = e(x) et δ' est le démarquage associé ailleurs. On a évidemment :

$\delta'\ (K(a)) = \overline{\delta^{-1}(t_a)} = \delta^{-1}\phi(a)$.

ϕ' est d'autre part défini comme suit :

- on sait (car ϕ est complet strict et par un raisonnement analogue à celui du lemme 7-2) que si $a \in \Sigma_2$, tout u contient un seul a_{i_o} (indépendant de u) tel que $a_{i_o}(x_1,x_2)$ ait x_1 et x_2 comme antécédants, de chacune des variables de $t_a(x,y)$.

- On pose alors $\phi' a_{i_o}(x,y) = a(x,y)$, ϕ' est construit comme en 7-2 ailleurs et dans les autres cas, avec de plus $\phi' e(x) = x$.
On a alors $(a, \delta^{-1}\phi(a)) \stackrel{\frown}{=} (\phi', K(a), \delta')$
d'où le sous-lemme 1 d'après (I-2-2-2-2 III)

Sous-lemme 2 : Si, dans l'énoncé du lemme 7-3, ϕ est l'identité sauf sur une lettre $e'(x)$ où $\phi(e'(x)) = x$, et si δ est comme dans le sous-lemme 1, alors il existe (δ', K, ϕ') répondant aux conditions.

En effet, pour toute lettre a telle que $\phi(a) = a$, on construit ϕ', δ', $K(a)$ comme ci-dessus dans le sous-lemme 1, on a d'autre part $\delta^{-1}\phi(e'(x)) = e^*(x)$ d'où on pose $K(e') = \bar{e}e^*(x)$. Comme $\phi' e(x) = x$ et $\delta' e(x) = e(x)$ d'après la construction précédente, il suffit de poser $\phi'\bar{e}(x) = e'(x)$ et $\delta'\bar{e}(x) = x$ et on a $(e'(x), \delta^{-1}\phi e'(x)) \stackrel{\frown}{=} (\phi', K(e'), \delta')$ et on conclut comme dans le sous lemme précédent.

Sous-lemme 3 : Les sous-lemmes 1 et 2 vont nous permettre d'achever la preuve du lemme 7-3.

1) Soit ϕ un 1-morphisme linéaire dyadique. ϕ se décompose en $\phi = \phi_1 \circ \delta_1 \circ \delta_2$ où ϕ_1 est linéaire complet strict, δ_1 est un démarquage strict et δ_2 est l'identité sauf sur une lettre $e(x)$ où $\delta_2 e(x)=x$, ϕ_1, δ_1 et δ_2 étant dyadiques.

Pour le voir, on fait la construction suivante : si $\phi(a)$ est complet strict, on le marque comme toujours par a. On en déduit $\phi_1(a)$ et δ_1 est le démarquage correspondant sur $\phi_1(a)$, δ_2 l'identité.

Si $\phi(a)$ n'est pas complet : on le marque en $\bar{\phi}(a)$ comme ci dessus et on pose $\phi_1(a) = a_o(a_1(\bar{\phi}(a),x),y)$ ou $a_o(\bar{\phi}(a),x)$ afin de compléter $\phi_1(a)$ selon les cas (a est dyadique).
On pose $\delta_1 a_o(x,y) = \delta_1(a_1(x,y)) = e(x)$ et $\delta_2\, e(x) = x$.
On est ramené au cas précédent.
Si $\phi(a)$ n'est pas strict, on pose $\phi_1(a) = a_o(x)$ (ou $a_o(y)$) et on procéde comme ci-dessus.

De même, tout démarquage δ dyadique se décompose en $\delta = \delta'_1 \circ \delta'_2$ où les δ'_i sont des démarquages dyadiques, δ'_1 étant strict et δ'_2 l'identité sauf $\delta_2\, e'(x) = x$.

2) Soit ϕ et δ tels que dans l'énoncé du lemme 7-3. Décomposons comme ci-dessus en $\phi = \phi_1 \circ \delta_1 \circ \delta_2$ et $\delta = \delta'_1 \circ \delta'_2$.

Nous allons appliquer plusieurs fois le lemme 4 (I-1-4-2-1) (Cas particulier V), dès que l'un des démarquages est strict.

a) Le sous lemme 2 appliqué à δ_2 et δ'_2 donne :

$\exists\ \delta'_3,\ \delta_3$ et K_1 tels que $(\delta'_3,\ K_1,\ \delta_3) \widehat{=} \delta_2 \circ \delta'_2{}^{-1}$

b) le lemme 4(V) s'applique à δ_1 (qui est strict) et δ'_3 :

$\exists\ \delta_4,\ K_2$ et δ'_4 tels que $\delta_1 \circ \delta'_3{}^{-1} \widehat{=} (\delta'_4, K_2,\ \delta_4)$

c) Le lemme 4(V) s'applique à $\delta_4 \circ \delta_3$ et δ'_1 (qui est strict) :

$\exists\ \delta'_5,\ \delta_5$ et K_3 tels que $\delta_4 \circ \delta_3 \circ \delta'_1{}^{-1} \widehat{=} (\delta'_5,\ K_3,\ \delta_5)$.

En posant $\delta'_6 = \delta'_5 \circ \delta'_4$, $K_4 = K_3 \cap \delta'_5{}^{-1}(K_2 \cap \delta_4{}^{-1}(K_1))$,

et nous avons donc $\delta_1 \circ \delta_2 \circ \delta^{-1} \widehat{=} (\delta'_6,\ K_4,\ \delta_5)$

δ'_6 se décompose évidemment en $\delta'_6 = \delta'_7 \circ \delta'_8$ où δ'_7 est strict

et δ'_8 dyadique et égal à l'identité sauf sur $e(x)$ où $\delta'_8 e(x) = x$

En effet, l'alphabet image de δ'_8 est celui de ϕ_1, donc dyadique, le reste est classique (on rend δ'_6 strict en δ'_7 et on efface par δ'_8).

d) ϕ_1 étant dyadique linéaire complet strict, on applique le sous-lemme 1 :

$\exists\ \phi'_1\ \ \delta''_7$ et K_5 tels que $(\delta''_7,\ K_5,\ \phi'_1) \widehat{=} \phi_1 \circ \delta'_8{}^{-1}$

e) le lemme 4(V) nous donne, δ'_7 étant stricte

$\exists\ \phi''_1,\ \delta''_8$ et K_6 tels que $(\delta''_8,\ K_6,\ \phi''_1) \widehat{=} \phi'_1 \circ \delta'_7{}^{-1}$

Finalement, $\phi_1 \circ \delta'_6{}^{-1} \underline{\wedge}(\delta', K_7, \phi''_1)$

en posant $\delta' = \delta''_8 \circ \delta''_7$ et $K_7 = (\delta''_8{}^{-1}(K_5)) \cap K_6$

Finalement, nous en déduisons que

$\phi \circ \delta^{-1} \underline{\wedge}(\delta', K_7 \cap \phi''_1{}^{-1}(K_4), \phi''_1 \circ \delta_5)$

et $K_7 \cap \phi''_1{}^{-1}(K_4)$ est évidemment de la forme $K^{\otimes}$ (voir les constructions qui donnent tous les K_i comme clotures tensorielles de reconnaissables).

Enfin, si ϕ et δ sont complets stricts, il suffit de remarquer que les constructions utilisées dans le lemme 4 conservent le caractère dyadique des alphabets, et la complétude.
Si ϕ et δ ne sont pas complets, on peut modifier la construction du lemme 4 correspondant à la non complétude en considérant par exemple $\delta(a_1(a_2(a_3,x),y,z) = a(x)$ au lieu de $\delta(a_1(x,y,z)) = a(x)$. δ est alors non plus strict mais régulé, mais il est aussi dyadique./// C.Q.F.D.

II-1-7-3-2 Remarque :

Le lemme 7-3 est l'homologue dans le cas dyadique du lemme 4. Mais, dans le lemme 4, le degré de dilatation et la complétude de ϕ ne sont pas conservés dans ϕ' si δ n'est pas strict.
La particularité du cas dyadique est la même que dans le lemme 7-2.
En effet, la construction du sous-lemme 1 ne peut se faire pour :

$\phi\ a(x,y,z) = b(b(x,y),z)$.

CHAPITRE II - 2

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES BIMORPHISMES

Les lemmes fondamentaux permettent d'établir, souvent aisément, les théorèmes de cette section, qui décrivent les propriétés des bimorphismes.

Nous avons vu (lemme 2) que le problème d'inversion d'un 1-morphisme linéaire n'est résolu que grâce aux morphismes linéaires séparés à délai borné. Le théorème 1 montre ici que cette classe s'inverse par elle-même. La classe des morphismes linéaires, séparés à délai borné apparait donc comme la clôture par le problème d'inversion des classiques 1-morphismes linéaires.

Les propriétés de composition des bimorphismes sont discutées en (II-2-2). Les résultats les plus significatifs figurent dans les théorèmes 2 et 2 bis. Nous savions (9) que la classe TI des 1-bimorphismes linéaires complets stricts (c'est à dire des bimorphismes où les morphismes sont classiques, linéaires, complets et stricts) n'était pas close par composition ($\widehat{TI} \neq \widehat{TI}^2$) mais que $\widehat{TI}^2 = \widehat{TI}^3$. Ainsi l'étude de bimorphismes dans le cadre classique de la théorie des arbres mettait-elle en évidence une bonne classe sans la caractériser proprement ni expliquer les phénomènes. Nous prouvons ici que la classe $\widehat{TI}^2$ est équivalente à la classe $\widehat{B'_1}$ des bimorphismes linéaires séparés (et complets et stricts) et que cette classe $\widehat{B'_1}$ est close par composition. La notion de séparation pour un morphisme (linéaire) apparait alors comme la clé de voute du phénomène $\widehat{TI}^2 = \widehat{TI}^3$. Le théorème 2 énonce d'autres résultats du même esprit. Le théorème 3 met en évidence, dans le cadre classique, pour des morphismes non stricts, un autre phénomène. La classe $\widehat{TL}$ (des 1-bimorphismes linéaires) est non close par composition jusque l'ordre 4($\widehat{TL} \neq \widehat{TL}^2 \neq \widehat{TL}^3 \neq \widehat{TL}^4$) mais $\widehat{TL}^5 = \widehat{TL}^4$.

Le théorème 4 montre que dans le cas dyadique, la situation se simplifie considérablement. Le théorème 5 énonce les résultats de composition pour les bimorphismes non symétriques (où les deux morphismes ne sont pas du même type).

Dans la plupart des autres cas, nous voyons en II-2-2-2 qu'on ne peut espérer des résultats positifs de stabilité par composition. Si on alterne non déterminisme (introduit en général par un morphisme inverse) et non linéarité, on est conduit à des hiérarchies infinies du genre de celles décrites dans (19),(76). Abrégeons la classe B(1,Rec,1) en LL. Nous remarquons, toujours en II-2-2-2, que la classe $\widehat{LL}$ n'est pas close par composition. Mais nous consacrons la partie II-2-4 à l'étude de la cloture par composition de cette classe. Il s'avère en effet que $\widehat{LL} \neq \widehat{LL}^2$ mais $= \widehat{LL}^3$. La classe $\widehat{LL}^2$ est donc la clôture par composition de $\widehat{LL}$ (théorème 8). Nous verrons que $\widehat{LL}^2$ ne peut se caractériser par aucune classe de bimorphismes. Mais nous étendrons la notion de bimorphisme en s'autorisant des forêts non raisonnables (donc des "transformations non rationnelles"). Nous aboutirons ainsi à la caractérisation du théorème 9.

Le but de la partie II-2-3 est, utilisant les résultats antérieurs, de caractériser dans le cas le plus général l'inversibilité des transductions. Pour cela, nous considérons les hypertransductions, clôture par composition des transductions classiques (rappelons qu'on sait que les transductions classiques ne se composent pas et qu'on conjecture des hierarchies infinies par composition).

Nous nous posons le problème de caractériser les hypertransductions inversibles, c'est à dire les relations réalisées, ainsi que leurs inverses, par composition de transduction. Deux points sont à mettre en relief dans nos résultats. Premier point : le formalisme des magmoïdes permet de dénoter - sinon d'expliquer - les transformations obtenues par composition de transductions (II-2-3-4). On sait que la non composition des transductions est due à l'alternance de la non-linéarité et du non déterminisme. Ici, cette alternance se traduit par l'application alternée du foncteur T (adjoignant des torsions non linéaires) et du passage aux parties P (introduisant le non déterminisme).

Deuxième point : nous obtenons (II-2-3-7) une condition nécessaire très forte d'inversibilité qui peut se comprendre intuitivement comme suit (encore que le détail ne soit pas simple) : pour qu'une composée de transductions soit inversible, il faut qu'elle soit "globalement presque linéaire" (c'est à dire qu'elle ne recopie pas en plusieurs exemplaires des arbres arbitrairement profonds) car en sens inverse, on ne sait pas "tester l'égalité" sur le domaine. On peut alors choisir chacune des transductions de la composition linéaire. L'alternance non déterminisme-non linéarité empéchant la composition disparait alors et grosso-modo, les transductions se composent alors en une seule transduction "presque linéaire". Le "presque" correspond précisément à la séparation à délai borné. On aboutit alors assez facilement (par des raisonnements sur la reconnaissabilité, non toujours détaillés) au théorème 6. Ce théorème montre que pour qu'une hypertransduction soit inversible, il faut et il suffit qu'elle soit équivalente à un bimorphisme de B'_1 (linéaire séparé, complet, strict). En corollaire, on obtient la même caractérisation pour des classes beaucoup plus restreintes que les hypertransductions. En fait, si la caractérisation est fausse pour les transductions classiques, elle devient exacte dès que la classe considèrée est "un peu plus grande" que celle des transductions.

La classe $\widehat{B'_1}$ caractérise ainsi toute classe inversible et assez grande de transformations rationnelles (obtenues à partir de machines d'états finis). Pour cette raison, nous appelerons **bitransductions** les transformations de $\widehat{B'_1}$. Le théorème 7 montre que $\widehat{B'_1}$ conserve la reconnaissabilité et l'algébricité (au sens des magmoïdes, voir (A)).

Il est à remarquer que la classe $\widehat{B'_1}$ - et par elle la notion de morphisme linéaire séparé - caractérise les solutions à des problèmes à priori éloignés (hypertransductions inversibles, $\widehat{TI}^2 = \widehat{TI}^3$). C'est qu'en fait et dans tous les cas, la notion de linéarité des morphismes classiques est trop restreinte et que la "bonne" notion est celle de morphisme (de magmoïdes) linéaire séparé.

II - 2 - 0 PRELIMINAIRES :

Les preuves des thèorèmes qui suivent consistent en des applications élémentaires mais répétées des lemmes fondamentaux de (II-1). Il est fastidieux et peu lisible d'expliciter de nombreuses compositions et décompositions de morphismes et morphismes inverses, aussi utiliserons nous souvent une notation de "diagrammes commutatifs" (classique en théorie des catégories - nous l'appliquons ici à la catégorie des magmoïdes). Rappelons informellement cette notion : chaque morphisme est représenté par une flêche allant de son domaine vers son but.
Un diagramme est commutatif ssi tous les chemins (en "suivant les flêches") conduisant d'une même source à un même but représentent par composition des mêmes applications. Par exemple, dire que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\Psi_2"] \arrow[d, "\phi_1"'] & \cdot \arrow[d, "\phi_2"] \\ \cdot \arrow[r, "\Psi_1"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

commute équivaut à $\phi_1 \circ \Psi_1 = \Psi_2 \circ \phi_2$.

Nous considérons en fait les domaines restreints à des forêts appartenant à une famille raisonnable, et les lemmes fondamentaux ne font apparaitre que des forêts de $Rec^{\otimes}$. Mais les propriétés des familles raisonnables font qu'on peut toujours "remonter sur un diagramme les forêts".

Par exemple, considérons Ψ_1 restreint à F_1, Ψ_2 à F_2 et ϕ_2 à G dans le diagramme précédent. Nous noterons

$$\begin{tikzcd} F_2 \arrow[r, "\Psi_2"] \arrow[d, "\phi_1"'] & G \arrow[d, "\phi_2"] \\ F_1 \arrow[r, "\Psi_1"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Le lemme (I-2-2-2-2- I) montre que le diagramme ci-dessus peut encore s'écrire

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\Psi_2"] \arrow[d, "\phi_1"'] & \cdot \arrow[d, "\phi_2"] \\ \cdot \arrow[r, "\Psi_1"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

avec $H = F_2 \cap \Psi_2^{-1}(G) \cap \phi_1^{-1}(F_1)$ qui appartient à la même famille raisonnable.

Les flêches définissant un arbre de façon évidente sur les sommets qu'elles joignent dans le graphe, on peut donc toujours se ramener à considérer des forêts (de la classe considérée) seulement aux sommets maximaux (où n'aboutit aucune flêche). En particulier si les forêts sont dans $Rec^{\otimes}$.

- En cours de preuve et dans les diagrammes nous omettrons donc souvent d'écrire les forêts (tant que les propriétés en jeu sont 'raisonnables'). Les propriétés de conservation des types de morphismes sur des forêts données étant également closes par les opérations raisonnables, ceci est justifié du point de vue des types.

- De même, nous ne citerons pas explicitement les propriétés élémentaires de composition et décomposition du chapitre (I-2) relatives aux types des morphismes.

- $\phi_{[1]}$ se représentera par $\xrightarrow{\phi}_{[1]}$

- Nous citons les lemmes fondamentaux utilisés par leur numéro, par exemple 'lemme 6' pour le lemme 6 du chapitre (II-1-6), nous utilisons les abréviations suivantes (déjà définies dans la première partie).
l = linéaire, dB = délai de séparation borné, d = séparé, s = strict, r = régulé, c = complet.

Soit ϕ un k-lcs désigne ainsi un k-morphisme ϕ linéaire complet strict (éventuellement sur une forêt sous entendue).

II - 2 - 1 THEOREME 1 : 2ème CAS D'INVERSION DES MORPHISMES :

Nous avions développé en (II-1-1) le "problème d'inversion des morphismes" à propos du lemme 1. Rappelons qu'étant donné une classe C de forêts (ou de langages), définie par un certain type syntaxique, il est en général facile de prouver si la classe est close par morphisme ou démarquages inverses (on résoud alors le problème syntaxiquement, en prenant les "images des règles"). Nous avions vu que le problème de stabilité par morphismes inverses était rendu beaucoup plus complexe par les problèmes de partitions (ou de découpages) qu'il entrainait, d'où l'intérêt du lemme 1 qui nous rapproche du cas des langages. Mais, dans le lemme 1, on inverse un "1-morphisme par un k-morphisme linéaire à délai de séparation borné, régulé et quasi-complet, donc on inverse un certain type de morphismes par un type plus large. Il se pose alors le problème d'inversion pour ce dernier type. Le théorème 1, utilisant plusieurs lemmes fondamentaux de II-1, prend tout son poids par le fait qu'il permet d'inverser un morphisme de la classe ainsi apparue (k-morphismes linéaires etc... etc...) par un morphisme de la **même** classe. Enfin, nous remarquons que le théorème 1 est le "plus général possible".

II-2-1-1 : Théroème 1

Etant donné un k-morphisme ϕ linéaire, séparé à délai borné, il existe un démarquage δ, une forêt reconnaissable K et un k'-morphisme Ψ du même type que ϕ, tels que

$$\phi^{-1}_{[1]} \underline{\frown} (\delta, K^{\otimes}, \Psi, 1)$$

On peut de plus prendre Ψ régulé et [1]-quasi-complet sur $K^{\otimes}$. On peut imposer à δ d'être seulement un quasi-démarquage et alors à Ψ d'être complet sur $K^{\otimes}$.

Si de plus ϕ est respectivement [1]-complet ou régulé sur une forêt F raisonnable, alors il existe G de la même famille que F telle que

$$(1, \phi, F) \underline{\frown} (\delta, G, \Psi, 1)$$

et δ est un démarquage respectivement complet, strict (ou propre si ϕ est [1]-complet et régulé).

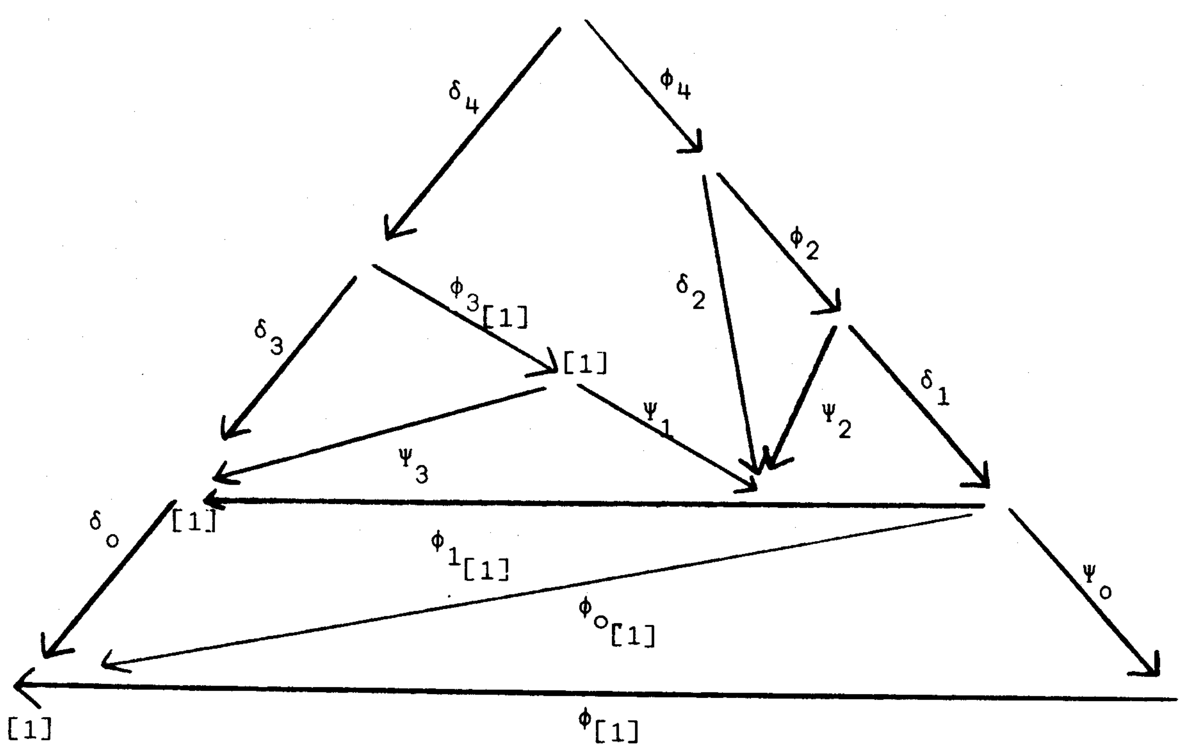
Preuve : (Rappelons que nous omettons en cours de preuve les restrictions aux forêts).

Soit ϕ un k-morphisme linéaire, séparé à délai borné. D'après le lemme 6, il existe ϕ_o k - 1 d et Ψ_o 1 - lcs tels que $\phi \,\hat{=}\, \Psi_o^{-1} \circ \phi_o$. ϕ_o est de plus strict si ϕ est régulé, [1]- complet si ϕ l'est (nous sous-entendons toujours les forêts) ϕ_o se décompose en $\phi_o = \phi_1 \circ \delta_o$ où ϕ_1 est [1]- c s et δ_o est un démarquage, c si ϕ_o est [1]- c et strict si ϕ_o est s. Le lemme 3 entraine qu'il existe un démarquage propre δ_1, des 1-lcs Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 tels que $\phi_{1_{[1]}} = \delta_1^{-1} \circ \Psi_2 \circ \Psi_1^{-1} \circ \Psi_3$

Le lemme 2 (corollaire II-1-2-3-3) implique l'existence de démarquages propres δ_2 et δ_3, de morphismes ϕ_2 et ϕ_3 quasi[1]-complets, 1, dB, régulés tels que $\delta_2^{-1} \circ \phi_{2_{[1]}} \,\hat{=}\, \Psi_2^{-1}$ et $\delta_3^{-1} \circ \phi_{3_{[1]}} \,\hat{=}\, \Psi_3^{-1}$

$\phi_3 \circ \Psi_1$ est du même type que ϕ_3 ; δ_2 est propre ; le lemme 4 bis entraine donc qu'il existe ϕ_4 du même type que ϕ_3 et δ_4 démarquage propre tels que $\phi_{3_{[1]}} \circ \delta_2^{-1} \,\hat{=}\, \delta_4^{-1} \circ \phi_4$

Finalement, le diagramme suivant est commutatif.



Diag. 1

Il est facile de voir que $\delta = \delta_4 \circ \delta_3 \circ \delta_o$ et $\phi_4 \circ \phi_2 \circ \delta_1 \circ \Psi_o = \Psi$ satisfont aux conditions de types requises. Le lemme 1 assure l'alternative entre (δ démarquage, Ψ quasi[1]-complet) et (δ quasi démarquage, Ψ [1]-complet). L'existence de $K^{\otimes}$ est évidente d'après les préliminaires II-2-0. Le théorème 1 est prouvé.///

II-2-1-2 Remarques

1 - La preuve se réduit au diagramme commutatif 1 et à des considérations de type. Toute la difficulté technique est dans les lemmes fondamentaux 1, 2, 3, 4 et 6 utilisés.

2 - On ne peut pas espérer généraliser le résultat

En effet, soit une classe C de morphisme telle que, pour tout $\phi \in C$, il existe un démaquage δ, une forêt raisonnable F et un morphisme $\Psi \in C$ tels que $\phi^{-1}_{[1]} \triangleq (\delta, F, \Psi, 1)$. On sait (A) que pour tout morphisme Ψ, $\Psi^{-1}_{[1]}$ conserve la reconnaissabilité ; la reconnaissabilité étant également conservée par intersection et démarquage, $(\delta, F, \Psi, 1)^{-1}$ conserve donc toujours la reconnaissabilité, pour toute classe C.
Pour espérer avoir un lemme d'inversion, il nous faut donc considérer une classe C telle que, pour tout $\phi \in C$, $\phi_{[1]}$ conserve la reconnaissabilité.
Or, nous avons déjà remarqué que si on supprime une des deux contraintes "linéaires" ou"séparé à délai borné", la reconnaissabilité n'est plus conservée. Dans le cadre des magmoïdes, le résultat obtenu est donc le plus large possible.

3 - On peut considérer que :
"La classe des k-morphismes régulés, séparés à délai borné, [1]-quasi-complets linéaires est la clôture de la classe des 1-morphismes linéaires complets stricts par le problème d'inversion".
En effet, la classe 1-lcs s'inverse par la classe (r,dB, [1]-quasi-c l) elle -même close par inversion .

4 - Corollaire : Pour tout morphisme ϕ linéaire séparé à délai borné, toute famille raisonnable est close par $\phi_{[1]}$
En effet, le théorème 1 montre que $\phi_{[1]}(F) = \delta(\Psi^{-1}_{[1]}(F) \cap K^{\otimes})$, or les familles raisonnables sont closes par morphisme inverse, intersection avec $rec^{\otimes}$ et démarquages.

II - 2 - 2 COMPOSITION DES BIMORPHISMES :

II-2-2-1 Composition des bimorphismes linéaires séparés stricts

Rappelons que le lemme 6 permet de toujours ramener les délais (de séparation ou de régulation) à 1, ce qui ramène l'étude des différents types de bimorphes régulés ou séparés à délai borné aux types correspondants stricts ou séparés. De même ce lemme raméne l'étude de la quasi-complétude à la complétude. Les classes considérées ici, que nous notons $\mathcal{B}(\text{lsd}, \mathcal{F})$, sont, conformément aux notations adoptées en (I-1-4-3), pour toute famille raisonnable $\mathcal{F}$ fixée, les ensembles de bimorphismes symétriques $(\mu, \phi, K, \Psi, \nu)$ où ϕ et Ψ sont des morphismes linéaires stricts séparés et K une forêt de $\mathcal{F}$.

Théorème 2 : Composition des bimorphismes linéaires séparés stricts :

1 - Pour toute famille raisonnable $\mathcal{F}$, la classe des bimorphismes linéaires séparés stricts est close par composition. La classe des bimorphismes linéaires séparés stricts complets est close par composition. Abrégeons ces classes en $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$.
Dans le cas où $\mathcal{F}$ est la classe des forêts reconnaissables, désignons par $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ les sous-classes de $\mathcal{B}_{\text{rec}}$ et $\mathcal{B}'_{\text{rec}}$ où tous les bimorphismes sont de la forme $(1, \phi, K, \Psi, 1)$.

Désignons par TS la classe des bimorphismes (ϕ, K, Ψ) où K est reconnaissable, ϕ et Ψ sont des 1-morphismes linéaires stricts, désignons par TI la sous-classe de TS où ϕ et Ψ sont complets.

2 - Les classes $\widehat{\text{TS}}$ et $\widehat{\text{TI}}$ ne sont pas closes par composition, mais les classes $\widehat{\text{TS}}^2$ et $\widehat{\text{TI}}^2$ sont respectivement égales aux classes $\widehat{\mathcal{B}_1}$ et $\widehat{\mathcal{B}'_1}$ closes par composition.
En résumé, nous avons donc

1 - $\widehat{\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}^2 = \widehat{\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}$, $\widehat{\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}}^2 = \widehat{\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}}$

2 - $\widehat{\text{TS}} \neq \widehat{\text{TS}}^2 = \widehat{\text{TS}}^3 = \widehat{\mathcal{B}_1} = \widehat{\mathcal{B}_1}^2$

$\widehat{\text{TI}} \neq \widehat{\text{TI}}^2 = \widehat{\text{TI}}^3 = \widehat{\mathcal{B}'_1} = \widehat{\mathcal{B}'_1}^2$

Les classes $\widehat{B_1}$ et $\widehat{B'_1}$ sont donc les clotures par composition des classes $\widehat{TS}$ et $\widehat{TI}$.

Preuve :

1 - Soit $C = (\mu, \phi, K, \Psi, \nu)$ et $C' = (\mu', \phi', K', \Psi', \nu')$ appartenant à B_F (resp.B'_F). D'après (I-2-2-3), on peut toujours supposer que $\nu = \mu' = 1$. Oinverse $\phi'_{[1]}$par le théorème 1 en

$\phi'_{[1]} \hat{\underline{\ }} (\delta, G, \Psi'')$ où δ est un démarquage strict et Ψ'' est linéaire à

délai de séparation et de régulation borné, quasi-complet si ϕ est [1]-complet. Le fait que δ est stict permet d'appliquer le lemme 4 de permutation à $\Psi_{[1]} \circ \delta^{-1}$ en 'conservant les types'. On conclue alors de façon évidente (on restitue la complétude à partir de la quasi-complétude par le lemme 6).

2 - En corollaire de 1-, il est évident que $\widehat{B_1}$ et $\widehat{B'_1}$ sont closes par composition. Les inclusions $\widehat{TS} \subset \widehat{B_1}$ et $\widehat{TI} \subset \widehat{B'_1}$ proviennent de la définition, donc $\widehat{TS}^2 \subset \widehat{B_1}$ et $\widehat{TI}^2 \subset \widehat{B'_1}$ puisque $\widehat{B_1}$ et $\widehat{B'_1}$ sont closes par composition

Pour prouver les inclusions inverses, considérons $C = (1, \phi, K, \Psi, 1)$. On inverse d'abord $\phi_{[1]}$ en $(\delta, F, \Psi'_{[1]})$ par le théorème 1 (on prend δ quasi-démarquage strict complet si $C \in B'_1$ et Ψ' [1]-quasi-complet si $C \in B'_1$). On obtient alors

$C \hat{\underline{\ }} (1, \delta, K \cap \Psi'^{-1}_{[1]} (F), \Psi' \circ \Psi, 1)$

D'après le lemme 6, il existe

$D = (1, f, G, h, 1) \hat{\underline{\ }} C$

où f est un 1-morphisme linéaire strict complet si δ l'est et h un morphisme linéaire séparé strict ([1]- complet si $C \in B'_1$). On conclut de façon évidente en appliquant le lemme 3 à $h_{[1]}$ (considérations de types provenant immédiatement des lemmes utilisés).
Il reste à prouver que $\widehat{TI}^2 \neq \widehat{TI}$ et $\widehat{TS}^2 \neq \widehat{TS}$.
Rappelons ici que c'est la constatation du phénomène $\widehat{TI}^2 \neq \widehat{TI}$, jointe au sentiment que $\widehat{TI}^2 = \widehat{TI}^3$, qui nous a amené "historiquement" à la notion de k-morphisme pour déployer et résoudre le problème ainsi soulevé. C'est pourquoi nous conservons la notation TI introduite dans [9] et rappelons ici notre premier exemple : Soit $B_1 = (id, F_1, \phi)$

avec: F_1 est la forêt hyperlocale définie par les règles de successions :

éléments initiaux = I = $\{b(x, y)\}$

$S(b(x, y)) = \{c(x, y, z)\} \times \{a(x)\}$

$S(c(x, y, z)) = \{c(x, y, z), a(x)\} \times \{a(x)\} \times \{a(x)\}$

$S(a(x)) = \{a(x), \bar{a}\}$

élément final $F = \{\bar{a}\}$

ϕ est le 1-morphisme lcs défini par :

ϕ est l'identité sur $b(x, y)$, $a(x)$ et $\bar{a}$

$\phi\ c(x, y, z) = b(b(x, y), z)$

Soit $B_2 = (\Psi, F_2, id)$

avec : F_2 est la forêt hyperlocale définie par :

$I = \{c(x, y, z)\}$

$S(c(x, y, z)) = \{c(x, y, z), b(x, y)\} \times \{a(x)\} \times \{a(x)\}$

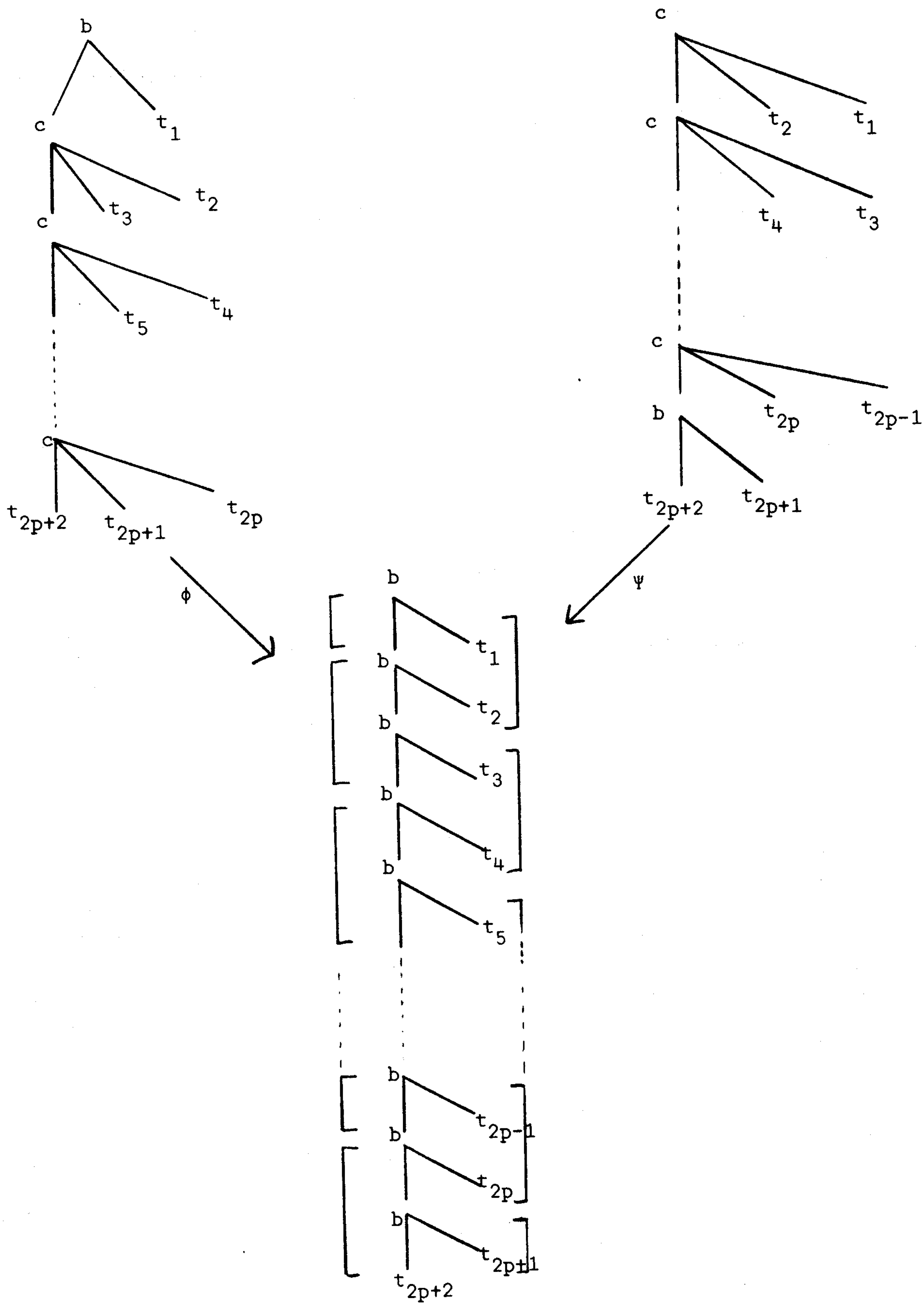
$S(b(x, y)) = \{a(x)\} \times \{a(x)\}$

$S(a(x)) = \{a(x), \bar{a}\}$

élément final : $F = \{\bar{a}\}$

Ψ est le 1-morphisme lcs défini par l'identité sur $\bar{a}$, $a(x)$ et $b(x,y)$
et par $\Psi\ c(x, y, z) = b(b(x, y), z)$.

Il est facile de voir, comme l'illustre le schéma ci-aprés, qu'il se produit un "chevauchement de découpages" lors de la composition $\widehat{B_1} \circ \widehat{B_2}$.



ϕ découpe la "branche des b" aux noeuds de profondeur impaire, Ψ aux noeuds de profondeur paire.

On voit aisément que

$$\widehat{B_1} \circ \widehat{B_2} = \{b(c(\ldots\ldots c(t_{2p+2}, t_{2p+1}, t_{2p}, \ldots\ldots t_3, t_2), t_1),$$

$$c(\ldots\ldots\ldots c(b(t_{2p+2}, t_{2p+1}), t_{2p}, t_{2p-1})\ldots\ldots, t_2, t_1)$$

où $p \in N^+$, et $\forall\ i \in [2p+2]$, $t_i \in a^+ \bar{a}\}$

Supposons qu'il existe un bimorphisme $C = (h, K, h')$ où h et h' sont des 1-morphismes (quelconques) et K est reconnaissable, tel que

$$C \,\widehat{=}\, B_1 \circ B_2$$

Il existe alors une lettre α sommet d'une infinité d'arbres t de K tels que $(h(t), h'(t))$ aient leurs branches (notées t_i précédemment) toutes aussi longues qu'on veut (faire un raisonnement"à tiroirs") et avec autant de "c" qu'on veut.

h $\alpha(x_1,.. x_k)$ est sous arbre initial des h(t) et h' $\alpha(x_1.. x_k)$ sous-arbre initial des h'(t).

Posons $h(\alpha(x_1,..x_k)) = \tilde{u}.\theta$ et $h'(\alpha(x_1,..x_k)) = \tilde{u}'.\theta'$.

En raisonnant sur la reconnaissabilité de K, on peut voir que $\mathrm{Im}\theta-\{\theta(1)\}$ et $\mathrm{Im}\theta'-\{\theta'(1)\}$ doivent être en correspondance biunivoque et θ et θ' injectives (pour une infinité de t, avec les t_i "assez profonds").

Or ceci implique que $\mathrm{Card}(\mathrm{Im}\theta-\{\theta(1)\}) = \mathrm{Card}(\mathrm{Im}\theta'-\{\theta'(1)\})$ mais ces deux nombres sont respectivement impairs et pairs (voir la forme des sous-arbres initiaux de h(K) et h'(K)), d'où contradiction.

Remarquons que cela prouve même que $\widehat{TI}^2 \subsetneq \widehat{TS}$ donc à forciori que $\widehat{TS}^2 \subsetneq \widehat{TS}$. Nous avons même obtenu le résultat suivant :

$\widehat{TI}^2$ n'est pas inclus dans la classe des bimorphismes dont les morphismes sont des 1-morphismes.

<u>Remarque importante</u> :

Le fait qu'une transformation de $\widehat{TI}^2$ ou $\widehat{TS}$ ne puisse être réalisée par aucun bimorphisme classique montre la nécessité d'étendre la notion de morphisme (des 1-morphismes classiques aux k-morphismes de magmoïdes) pour avoir des propriétés de composition. De même, nous sommes obligés d'introduire les "selections de fibres" μ et ν du quintuplet (μ,ϕ,K,Ψ,ν) qu'est un bimorphisme, car une transformation de $\widehat{TI}^2$ ne peut être réalisée que par un bimorphisme du type $(1,\phi,K,\Psi,1)$ ou ϕ est un k-morphisme, Ψ un k'-morphisme, avec en général k et k' > 1.

II-2-2-2 Non composition d'autres classes de bimorphismes

Nous voyons ici qu'en supprimant par rapport au paragraphe (II-2-2-1) une des trois hypothèses 'linéaire','séparé' ou'strict', la situation change du tout au tout et que les classes correspondantes ne sont pas closes par composition.

II-2-2-2-1 Cas des bimorphismes non linéaires :

Soit les deux 1-morphismes ϕ et π, stricts, définis par :

$\phi\ a(x) = a(x,x)$ et $\pi\ a(x) = \pi\ a'(x) = a(x)$

$\phi(\bar{a}) = \bar{a}$ $\pi(\bar{a}) = \bar{a}$

$\phi \circ \pi^{-1} = \{(a^n\bar{a}, E_n) | n \in N,$ E_n est l'ensemble des arbres de profondeur homogène n+1, sur $\{a(x), a'(x), \bar{a}\}\}$

Il est connu que cette relation ne peut être obtenue par transduction, on peut voir qu'elle ne peut être obtenue par **aucun** type de bimorphisme.

Remarque : En fait, nous touchons là un phénomène essentiel de non composition, déjà comme : ϕ réalise une non linéarité "arbitrairement large" (la branche $a^n(x)$ se ramifie à l'infini avec n), toutes les branches images ont une contrainte en commun (la même longueur) ; π^{-1} réalise un "non déterminisme", donnant des labels arbitraires (a ou a') à chaque noeud. En itérant ce procédé, on obtient une hierarchie que tout le monde s'accorde à reconnaitre infinie (Ogden - Rounds [76], B.Baker [19], Perrault [78]) mais qui est non prouvée. Il faut donc retenir que **l'alternance non linéarité - non déterminisme est irréductible vis à vis de la composition.**

II-2-2-2-2 Cas des bimorphismes non séparés :

Soit les deux morphismes linéaires stricts mais non séparés ϕ et Ψ définis par :

$\phi\ \alpha(x) = <\alpha(x_1, x_2), \neq>$

$\phi\ a(x) = <a(x_1), aa(x_2)>$

$\phi\ \bar{a} = <\bar{a}, a\bar{a}>$

$\Psi\ \alpha(x) = <\alpha(x_1, x_2), \neq>$

$\Psi\ a(x) = <a(x_1), a(x_2)>$

$\Psi\ \beta(x) = <\bar{a}, a(x_2)>$

$\Psi\ b(x) = <\neq, a(x_2)>$

$\Psi(\bar{b}) = <\neq, \bar{a}>$

Soit les forêts reconnaissables $K_1 = \{\alpha a^n \bar{a} | n \in N\}$ et $K_2 = \{\alpha a^n \beta b^p \bar{b} | n \text{ et } p \in N\}$ et les bimorphismes $B_1 = (id, K_1, \phi)$ et $B_2 = (\Psi, K_2, id)$.

On a $\phi(\alpha\ a^n \bar{a}) = <\alpha(a^n \bar{a}, a^{2n+1}\bar{a}), \neq>$

et $\Psi(\alpha\ a^n \beta b^p \bar{b}) = <\alpha(a^n \bar{a}, a^{n+p+1}\bar{a}), \neq>$

Donc $\widehat{B_1} \circ \widehat{B_2} = \{(\alpha\ a^n \bar{a}, \alpha\ a^n \beta b^n \bar{b}) | n \in N\}$ qui ne peut être réalisé par **aucun** bimorphisme (raisonner sur les langages de branches).

II-2-2-2-3 Cas des bimorphismes non stricts :

Soit les 1-morphismes linéaires mais non stricts Ψ, Φ et Φ' définis par :

ϕ est l'identité sur $b(x, y)$, $a(x)$, $\bar{a}$ et $\phi\ e(x) = x$

Φ est l'identité sur $a(x)$ et $\bar{a}$ et $\Phi\ c(x, y, z) = b(b(x, y), z)$

Φ' est l'identité sur $a(x)$ et a et $\Phi'\ c(x, y, z) = b(x, b(y, z))$

F_1 et F_2 sont les forêts reconnaissables définies par :

$F_1 = b(e^*b(a^*\bar{a},\ a^*\bar{a}),\ a^*\bar{a})$ et $F_2 = b(a^*\bar{a},\ e^*b(a^*\bar{a},\ a^*\bar{a}))$

Soit les 3 bimorphismes $B_1 = (F_1,\phi)$, $B_2 = (\Phi,\ \Phi')$, $B_3 = (\phi,\ F_2)$

Il est facile de voir que $\widehat{B_1} \circ \widehat{B_2} \circ \widehat{B_3}$ ne peut être obtenu que par bimorphisme non séparé. Mais on peut s'arranger pour que le bimorphisme construit soit "séparé au sens des images" mais il est nécessairement non régulé (voir I-2-1-2-2 IV). La question de la composition de cette sous-classe se pose alors. L'exemple suivant montre la non stabilité par composition, et même plus :

Soit ϕ et Ψ deux morphismes linéaires définis par :

$\phi(\alpha(x)) = \Psi(\alpha(x)) = <\beta(x_1,\ x_2),\ \neq>$

$\phi(a(x)) = <a(x_1),\ x_2>$ $\quad\quad \Psi(a(x)) = <x_1,\ b(x_2)>$

$\phi(b(x)) = <x_1,\ b(x_2)>$ $\quad\quad \Psi(b(x)) = <a(x_1),\ x_2>$

$\phi(\bar{a}) \quad = <\bar{a},\ \bar{a}>$ $\quad\quad \Psi(\bar{a}) \quad = <\bar{a},\ \bar{a}>$

ϕ et Ψ sont séparés au sens des images sur $F = \alpha\ a^*\ \ b^*\ \bar{a}$

On a $\phi(\alpha\ a^n b^p \bar{a}) = <\beta(a^n\bar{a},\ b^p\bar{a}),\ \neq>$

et $\quad \Psi(\alpha\ a^n b^p \bar{a}) = <\beta(a^p\bar{a},\ b^n\bar{a}),\ \neq>$

Posant $B_1 = (id,\ F,\ \phi)$ et $B_2 = (\Psi,\ F,\ id)$

on a $\widehat{B_1} \circ \widehat{B_2} = \{(\alpha\ a^n b^p \bar{a},\ \alpha\ a^p b^n \bar{a}) \mid p \text{ et } n \in N\}$

qui ne peut être réalisé par **aucun** bimorphisme (intuitivement, la relation ci-dessus "permute" des contraintes sur les branches).

Nous avons pourtant un résultat partiel de composition dans le cas des 1-morphismes. C'est l'objet de la section suivante.

II-2-2-3 Composition des bi 1-morphismes non stricts

Soit $\mathcal{B}$(11, rec) ou plus simplement, TL la classe des bimorphismes (ϕ, K, Ψ) où ϕ et Ψ sont des 1-morphismes linéaires et K est reconnaissable. L'exemple B_1 o B_2 o B_3 de la section précédente permettrait de montrer que $\widehat{TL}^3 \neq \widehat{TL}^2$ par un raisonnement laissé au lecteur . Nous allons ici donner un exemple prouvant que $\widehat{TL}^4 \neq \widehat{TL}^3$ (donc que $\widehat{TL}^3 \neq \widehat{TL}^2 \neq \widehat{TL}$). Puis, nous verrons pourtant que $\widehat{TL}^5 = \widehat{TL}^4$!

II-2-2-3-1 $\widehat{TL}^4 \neq \widehat{TL}^3$:

Soit B_1 = (id, F_1, ϕ_1) défini par :

F_1 est la forêt hyperlocale définie par les successions :

- élément initial : b(x, y), final : $\bar{a}$

S $b_1(x, y) = \{e_1(x), b_1(x,y), b_2(x,y)\} \times \{e_2(x), b_2(x,y)\}$

S $(e_1(x)) = \{e_1(x), b_1(x, y), b_2(x,y)\}$

S $(e_2(x)) = \{e_2(x), b_2(x, y)\}$

S $(b_2(x, y)) = \{a(x)\} \times \{a(x)\}$

S $a(x) = \{a(x), \bar{a}\}$

ϕ_1 est l'identité sur b_1, b_2, a et $\bar{a}$ et $\phi_1 e_1(x) = \phi_1 e_2(x) = x$

Soit B_2 = (Ψ_2, F_2, ϕ_2) avec :

F_2 est la forêt hyperlocale F_2 de la preuve du théorème 2.

Ψ_2 c(x, y, z) = $b_1(x, b_2(y, z))$, Ψ_2 b(x, y) = $b_2(x, y)$

Ψ_2 a(x) = a(x) et Ψ_2 $\bar{a} = \bar{a}$.

ϕ_2 c(x, y, z) = b(b(x, y), z), ϕ_2 est l'identité ailleurs.

Soit B_3 = (ϕ_2, F_3, ϕ_3) avec :

F_3 est la forêt hyperlocale F_1 de la preuve du théorème 2.

$\phi_3\ b(x, y) = b_1(x, y)$, $\phi_3\ c(x, y, z) = b_1(x, b_2\ (x, y))$

$\phi_3\ a(x) = a(x)$ et $\phi_3(\bar{a}) = \bar{a}$.

Soit $B_4 = (\phi_4, F_4, id)$

F_4 est définie par ses règles de succession.

élément initial $b_o(x, y)$, final $\bar{a}$

$S\ b_o(x, y) = \{b_1(x), b_1(x, y)\} \times \{a(x)\}$

$S\ b_1(x, y) = \{e_1(x), b_1(x, y), a(x)\} \times \{e_2(x)\}$

$S\ e_1(x) = \{e_1(x), b_1(x, y)\}$

$S\ e_2(x) = \{e_2(x), b_2(x, y)\}$

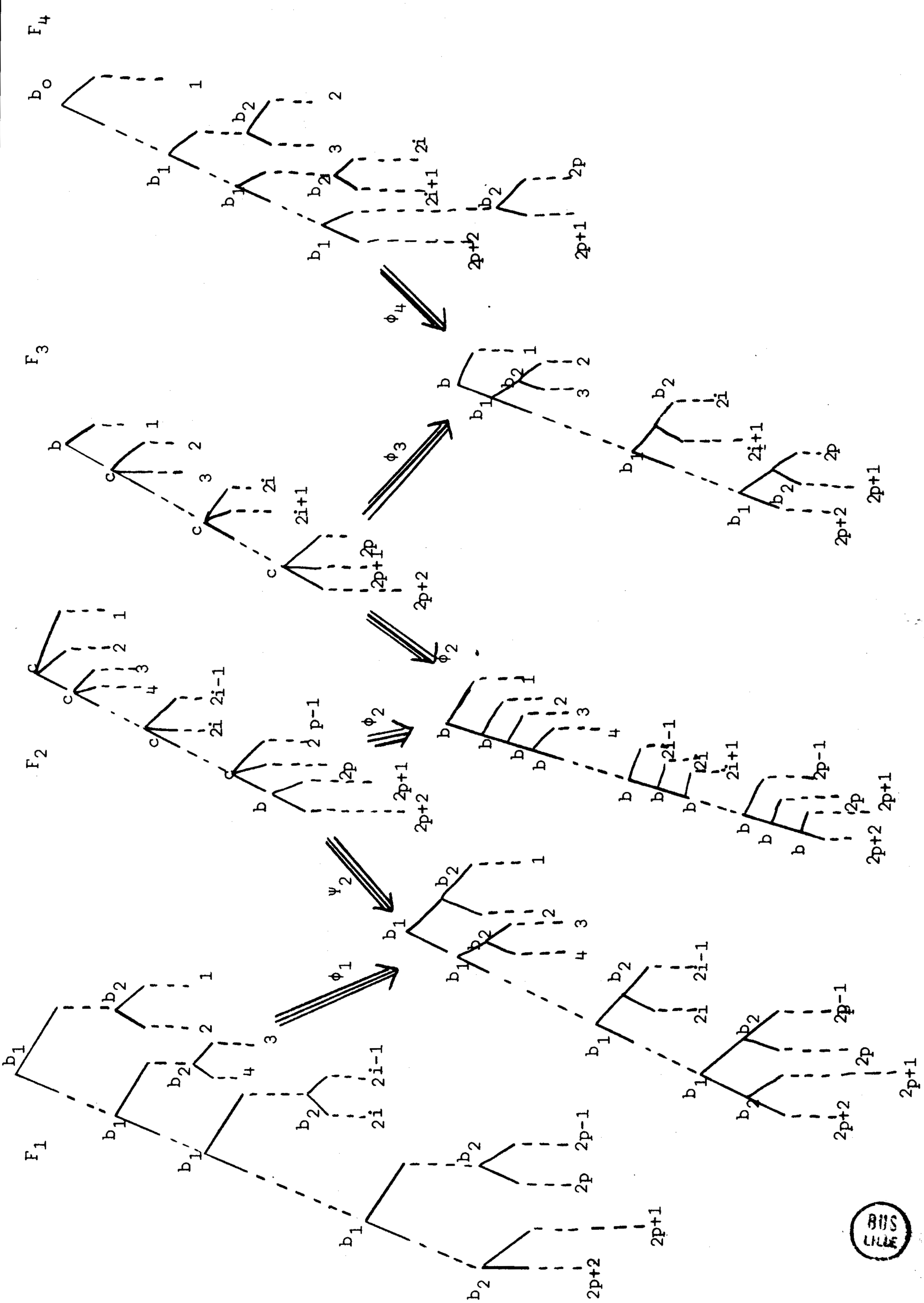
$S\ b_2(x, y) = \{a(x)\} \times \{a(x)\}$

$S\ a(x) = \{a(x), \bar{a}\}$

ϕ_4 est l'extension de ϕ_1 par $\phi_1\ b_o(x, y) = b(x, y)$.

La relation associée à $B_1 \circ B_2 \circ B_3 \circ B_4$ est schématisée par la figure 1, où les pointillés figurent des chaînes arbitrairement profondes et les entiers 1, 2 ... indiquent les correspondances entre branches.

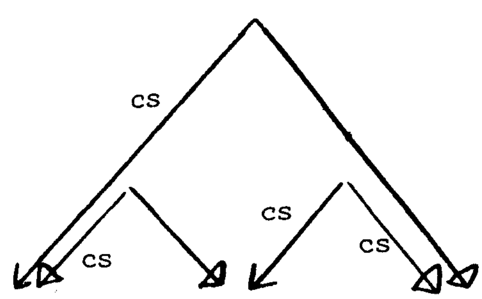
La relation ainsi définie ne peut être réalisée par 3 bimorphismes $C_1 \circ C_2 \circ C_3$ dont les morphismes sont des 1-morphismes (linéaires ou non). Le lecteur s'en convaincra en remarquant que C_1 ne peut essentiellement "rien transformer d'autre que ce que fait ϕ_1", c'est à dire qu'il faut d'abord "rapprocher en effaçant" les b_1 et les b_2. Le raisonnement est symétrique pour F_4. Et on se retrouve dans une situation tout à fait comparable à celle du théorème 2 prouvant que $\widehat{TI}^2 \neq \widehat{TI}$, nécessitant deux nouveaux bimorphismes, d'où le résultat


F1
F2
F3
F4
φ1
φ2
φ3
φ4
ψ2

II-2-2-3-2 $\widehat{TL}^5 = \widehat{TL}^4$:

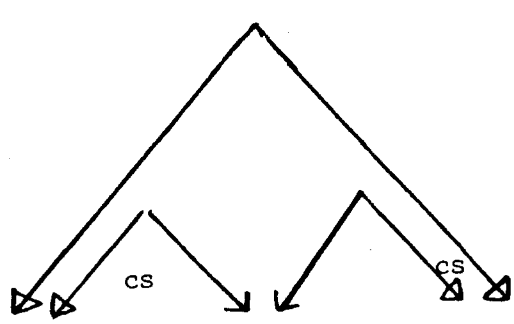
Pourtant, on pressent pouvoir faire les opérations suivantes : effacer tout ce qui s'efface aux extrémités de la composition (ici ϕ_1 et ϕ_4 pour B_1 et B_4) et se ramener au cas strict au centre (ici B_2 o B_3). Or, comme dans le cas strict on a $\widehat{TS}^2 = \widehat{TS}^3$, on aurait alors $\widehat{TL}^5 = \widehat{TL}^4$. Tout le problème est de montrer qu'on peut "rejetter la non strictitude aux extrémités". C'est ce que nous faisons maintenant en nous appuyant sur les lemmes 5 de non strictitude:
Nous utilisons les conventions de (II-2-0), omettant les forêts (ici toutes reconnaissables) et utilisant des diagrammes (tous les morphismes sont ici des 1-morphismes linéaires). Nous précisons sur les flêches "s" si le morphisme est strict, etc... et notons $\longrightarrow\!\!\!\triangleright$ (au lieu de $\longrightarrow$) les démarquages. Le caractère linéaire, constant dans ce qui suit, n'est plus rappelé.
Les lemmes de non strictitude se schématisent ainsi en

1er lemme :



les "∀" et "∃" sont laissés au lecteur

2ème lemme :



Propriété P :

Prouvons d'abord que :

(P) Soit $B = (\phi, K, \Psi)$ où ϕ est 1-1, Ψ 1 ls

et $C = (f, F, g) \in TL$

alors il existe $B' = (\phi', K', \Psi')$ où ϕ' est 1-ls, Ψ 1 ls

et $C' = (f', F, g')$ du même type que C sauf que f' n'est plus stricte (mais les démarquages sont conservés), tels que

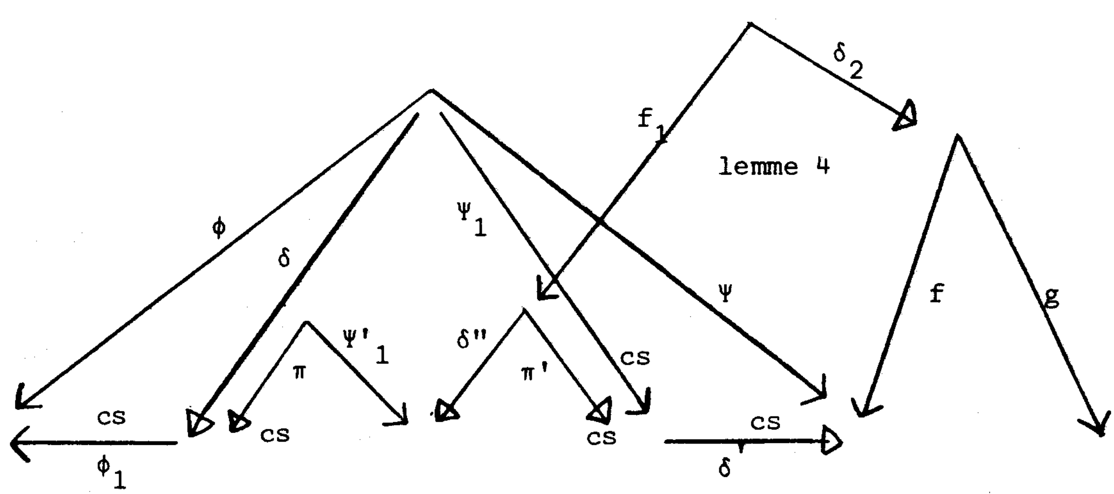
$B \circ C \,\underline{\frown}\, B' \circ C'$

Autrement dit, "on peut faire passer la non strictitude de ϕ à f".

On peut même supposer ϕ' et Ψ' complets.

Preuve de P :

Tout 1-morphisme ϕ se décompose en $\delta \circ \phi_1$ où δ est un démarquage et ϕ_1 est 1 lcs, Ψ en $\Psi_1 \circ \delta'$ où Ψ_1 est 1-lcs et δ' un démarquage.



(les propriétés de composition et de type sont évidentes).

Ainsi, $\phi' = \pi \circ \phi_1$, $\Psi' = \Psi'_1$, $f' = f_1 \circ \delta''$, $g' = \delta_2 \circ g$ répondent à la question.

Nous allons maintenant prouver par récurrence sur n que

$$(Qn): \widehat{TL}^n \subset \widehat{Dem} \circ \widehat{TI}^2 \circ \widehat{Dem'}$$

où Dem est la classe des (ϕ, K, Ψ) avec ϕ démarquage propre et Ψ démarquage, et Dem' est la classe des (ϕ, K, Ψ)où ϕ est un démarquage et Ψ un démarquage propre.

(Qo) est évidemment vrai

La récurrence revient à établir que

$$\widehat{TL} \circ \widehat{Dem} \circ \widehat{TI}^2 \circ \widehat{Dem'} \subset \widehat{Dem} \circ \widehat{TI}^2 \circ \widehat{Dem'}$$

Soit $(\phi, K, \Psi) \in TL$ et Ψ strict. Remarquons que

$(\phi, K, \Psi) \hat{=} (\phi, K, \Psi) \circ (id, id)$. Appliquant la propriété (P), nous obtenons alors $(\phi, K, \Psi) \hat{=} (\phi', K', \Psi') \circ (\delta, \delta')$ où

$(\phi', K', \Psi') \in TI$ δ et δ' sont des démarquages.

Soit Ψ 1-linéaire. $\Psi = \Psi_1 \circ \delta''$ où Ψ_1 est 1-lcs et δ'' un démarquage.

Appliquant le résultat ci-dessus à (ϕ, K, Ψ_1) on obtient encore

$\widehat{(\phi, K, \Psi)} \subset \widehat{TI} \circ \widehat{(dem, dem)} \circ \widehat{dem}$

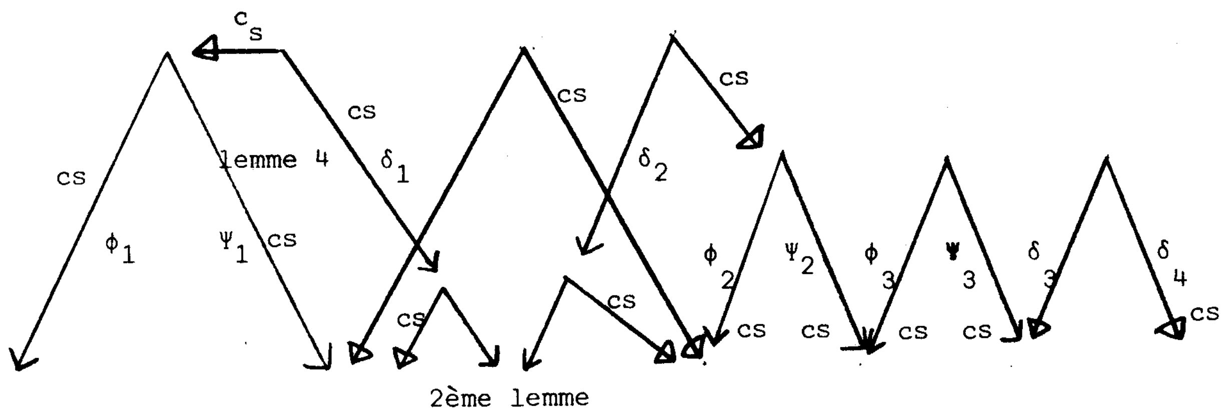
donc $\subset \widehat{TI} \circ \widehat{(dem, dem)}$

le lemme fondamental 4 montre que

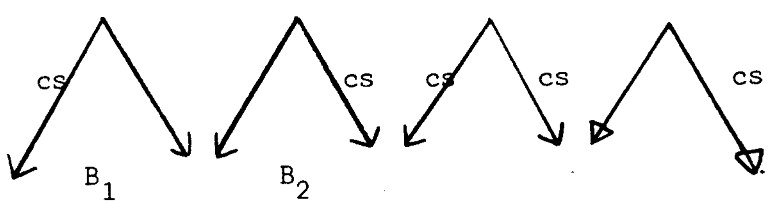
$\widehat{dem} \circ \widehat{(dem\ strict)}^{-1} \subset \widehat{(dem\ strict)}^{-1} \circ \widehat{dem}$, donc nous avons :

$$\widehat{TL} \circ \widehat{Dem} \circ \widehat{TI}^2 \circ \widehat{Dem}' \subset \widehat{TI} \circ \widehat{(dem, dem)} \circ \widehat{(dem\ strict, dem)} \circ \widehat{TI}^2 \circ \widehat{Dem'}$$

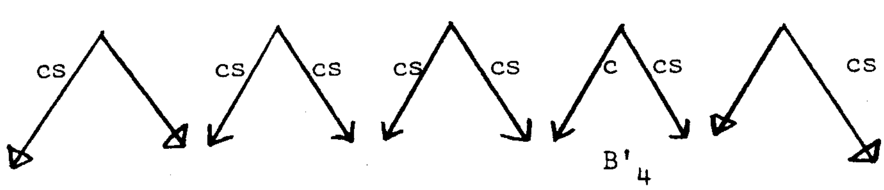
$$\subset \widehat{TI} \circ \widehat{(dem, dem)} \circ \widehat{TI}^2 \circ \widehat{Dem'}.$$



le diagramme ci-dessus , obtenu en appliquant à (δ_1, δ_2) le 2éme lemme puis le lemme fondamental 4 du résultat, montre que la classe considérée est incluse dans celle du type



appliquant la propriété P aux bimorphismes B_1 et B_2, on obtient un diagramme équivalent



Appliquant P à B'_4, on obtient enfin un diagramme de $\widehat{\text{Dem}} \circ \widehat{\text{TI}}^3 \circ \widehat{\text{Dem}'}$ d'où le résultat compte tenu de $\widehat{\text{TI}}^2 = \widehat{\text{TI}}^3$.

Finalement nous pouvons énoncer :

II-2-2-3-3 Théorème 3 : La hiérarchie finie des bimorphismes linéaires.

Soit TL la classe des bimorphismes (ϕ, K, Ψ) où K est reconnaissable, ϕ et Ψ sont des 1-morphismes linéaires. Alors

$\widehat{TL} \subsetneq \widehat{TL}^2 \subsetneq \widehat{TL}^3 \subsetneq \widehat{TL}^4 = \widehat{TL}^5$

(Nous avons même ci-dessus une expression plus fine de $\widehat{TL}^4$, montrant que $\widehat{TL}^4 = \widehat{Dem} \circ \widehat{TI}^2 \circ \widehat{Dem'}$)///

II-2-2-3-4 La classe $\widehat{TC}$:

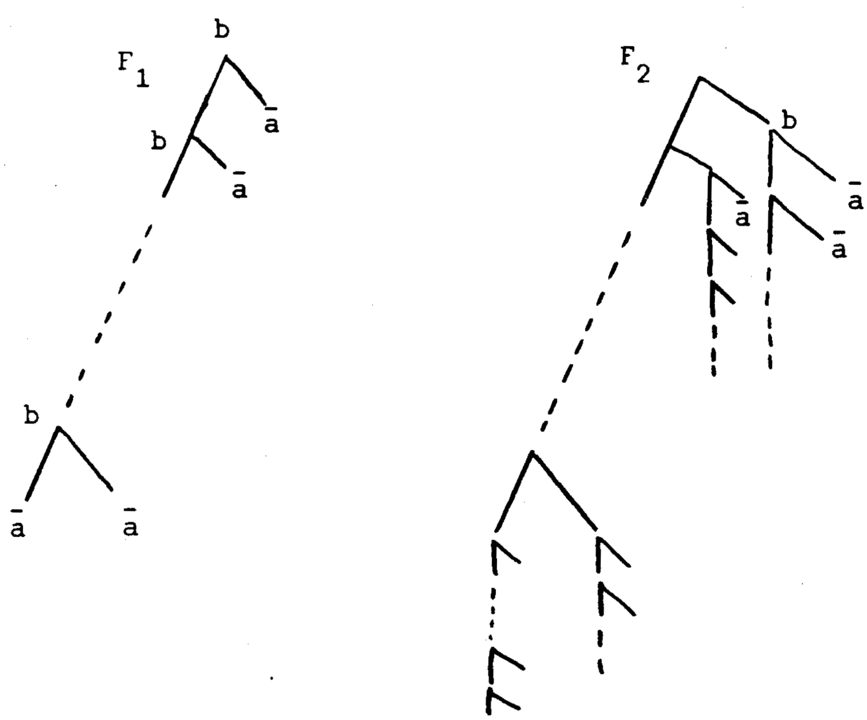
Notons TC la classe des bimorphismes (ϕ, K, Ψ) où K est reconnaissable, ϕ et Ψ 1-c. Nous avons déjà vu dans [9] que, par composition, cette classe engendrait une hierarchie infinie ($\forall$ n $\in$ N, $\widehat{TC}^n \subsetneq \widehat{TC}^{n+1}$).
Donnons ici quelques indications sur ce phénomène.
Construisons par récurrence une famille infinie (F_n) n $\in$ N, de forêts reconnaissables.

$F_o = \bar{a}$

$F_{n+1} = \{b(b(\ldots b(b(K_1, K_2), K_3)\ldots K_p), K_{p+1})\}$

où $p \in N$, $K_i \in F_n$

On peut par exemple schématiser



Soit $B = (\phi, \Psi)$ où ϕ et Ψ sont les deux 1 - lc définis par :

$\phi(b(x, y)) = b(x, y)$, $\phi\, a(x) = b(x, \bar{a})$

et $\phi(\bar{a}) = b(\bar{a}, \bar{a})$

$\Psi\, b(x, y) = b(x, y)$, $\Psi\, a(x) = x$ et $\Psi(\bar{a}) = \bar{a}$.

Il est facile de vérifier que

$B(F_2) = F_1$, $B(F_1) = F_o$

et, d'une façon générale, $B^n(F_n) = F_o$

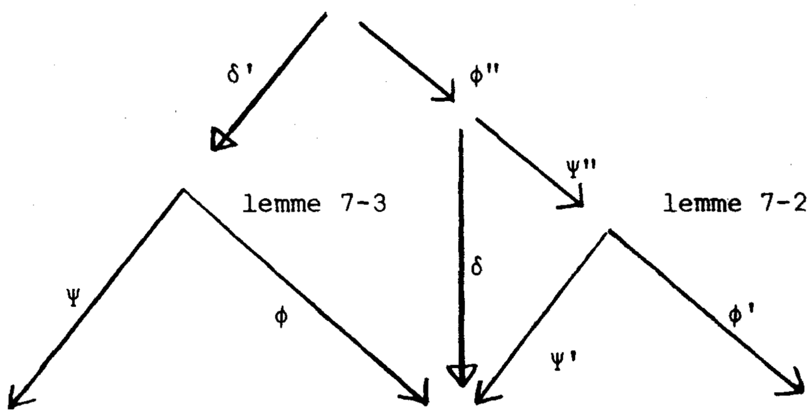
Mais on peut vérifier également que $F_o \notin T\, C(F_2)$ et, d'une façon générale que $F_o \notin T\, C^{n-1}(F_n)$

(L'idée est que, les bimorphismes étant complets, on ne peut supprimer aucune branche non bornée. Il faut d'abord effacer les branches monadiques par Ψ, puis supprimer par ϕ les "moignons restants", ce qui rend monadiques les branches d'un niveau supérieur et ainsi de suite. Par exemple, F_1 est un intermédiaire nécessaire (à des arbres bornés près) entre F_2 et F_o) dans le fait que $\widehat{TI}^2 \neq \widehat{TI}$. De fait le théorème 4 montre que, dans le cas dyadique, $\widehat{TI}^2 = \widehat{TI}$.

II-2-2-4 Le cas dyadique

Théorème 4 : Dans le cas de bimorphismes dyadiques, les classes $\widehat{TL}$ $\widehat{TS}$, $\widehat{TI}$ sont closes par composition. La hiérarchie $(\widehat{TC}^n)$ $n \in N$, reste infinie.

Preuve : L'exemple précédent de la hierarchie (TC^n) est dyadique, d'où le résultat sur ce point.
Les résultats de composition proviennent évidemment des lemmes fondamentaux 7-2 (II-1-7-2-1) et 7-3(II-1-7-3-1), comme nous allons le détailler.



D'où (aux forêts reconnaissables près)

$(\Psi,\ \phi) \circ (\Psi',\ \phi') \,\hat{=}\, (\delta' \circ \Psi,\ \phi'' \circ \Psi'' \circ \phi')$

Les conditions de type proviennent des lemmes 7-2 et 7-3, à ceci près que Ψ'' est seulement régulé, mais le lemme 6 permet alors de conclure.///

II-2-2-5 Le cas des bimorphismes non symétriques

Théorème 5 : Dans ce qui suit, la famille raisonnable n'importe pas.
Nous l'omettons donc.
Les classes suivantes sont closes par composition

1) $\mathcal{B}$ (dem propre (ou strict), lin (et quasi complet, ou dB ou d, ou s, ou r))

2) $\mathcal{B}$ (dem, lin (quasi-c))

3) On peut remplacer ci-dessus dem. par quasi dem. et quasi-c par c.

4) On peut remplacer dem. par morphisme dB-1 et dem. propre par morphisme dB.1 eB, quasi-c.

5) On peut remplacer dem. par 1-1, dem propre par 1-1cs.

6) On peut considérer les sous-classes $\mathcal{B}_1$ de la forme $(1,\ \phi,\ K,\ \Psi,\ 1)$.///

Preuve :

1) et 2) proviennent immédiatement du lemme 4

3) provient du lemme 1

4) provient du théorème 1, 5) du lemme 2

6) est immédiat.

Remarquons que les exemples de non composition des paragraphes précédents de II-2-2 montrent qu'on ne peut améliorer ces résultats, mais on a évidemment des résultats duaux des précédents (en permuttant les morphismes dans chaque classe).

II - 2 - 3 REPRESENTATION DES HYPERTRANSDUCTEURS - INVERSIBILITE DES TRANSDUCTEURS ET DES HYPERTRANSDUCTEURS :

II-2-3-1 Rappels et définitions

II-2-3-1-1 : Les substitutions de magmoïdes ont été largement étudiées dans (A). Nous nous contentons ici d'un bref rappel suffisant à la compréhension de notre travail. (Rappelons, comme déjà remarqué en (I-1-2-1-4), que nous utilisons des notations légérement différentes permettant de mieux écrire la composition de n substitutions).

I) Nous appelerons **k-substitutions finie de Σ dans Δ** tout morphisme de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans $DP_F^k T\tilde{T}(\Delta)$ (I-1-2-1-4)

II) Toute transduction descendante est équivalente à une substitution finie

En effet, soit un transducteur descendant T donné par ses règles de Σ dans Δ. On y associe la substitution $\bar{T}$ de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans $DP_F^k T\tilde{T}(\Delta)$ définie comme suit.

Notons $q_1,\dots q_k$ les états de T, q_1 étant l'état initial. Nous définissons T par :

$\forall\ a \in \Sigma,\ T(a) = A_1 \times\dots\times A_k$

où $t(x_{\alpha_1},\dots, x_{\alpha_p}) \in A_i$ ssi

$q_i[a(x_1,\dots x_n)] \to t(q_{i'_1}[x_{i_1}],\dots , q_{i'_p}[x_{i_p}]) \in \bar{T}$

et, $\forall\ j \in [p],\ \alpha_j = (i_j - 1)\, k + i'_p$

On prouve facilement que $\widehat{T} = \widehat{\bar{T}}_{[1]}$.

On a en fait codé les états sur les composantes des variables.

Remarque : La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant :

$\sigma\ \alpha(x, y) = \{\bar{a}\} \times \{x_4\} \times \{y_4\} \times \emptyset$

$\sigma\ a(x) \quad = \emptyset \times \emptyset \times \emptyset \times \{x_4\}$

$\sigma\ \bar{a} \quad = \emptyset \times \emptyset \times \emptyset \times \{\bar{a}\}$

On vérifie que $\widehat{\sigma_{[1]}} = \{(\alpha(a^*\bar{a}, a^*\bar{a}), \bar{a})\}$

Supposons qu'il existe un transducteur descendant réalisant $\widehat{\sigma_{[1]}}$.
La première règle appliquée sera nécessairement non complète, donc ne pourra vérifier les contraintes reconnaissables sur les successeurs de α (par exemple $q_1[\alpha(x, y)] \to q_2[x]$ et on ne peut vérifier l'appartenance à $a^*\bar{a}$ des branches substituées en y).

C'est ce phénomène qui fait la différence en subsitutions et transductions descendantes : seules, les premières peuvent "vérifier des contraintes sur des branches qu'elles ne recopient pas".
On pourrait néanmoins montrer que toute subsitution finie est équivalente à une transduction "look-head" (Engelfriet [52]).

II-2-3-1-2 Hypertransducteurs, hypertransductions, hypersubstitutions :

Un n-transducteur est le composé de n transducteurs.
De même, on définit les n-transductions.
Un hypertransducteur est, pour un certain n, un n transducteur. On définit de même les hypertransductions et hypersubstitutions.

II-2-3-1-3 A propos des relations et de l'inversibilité :

Une partie $P \subset M \times N$ est fidèle ssi $\forall\ b \in N$, $\{a \in M | (a,b) \in P\}$ est fini.
P est d'image finie ssi $\forall\ a \in M$, $\{a \in N | (a,b) \in P\}$ est fini

Une hypertransduction est inversible ssi son inverse est une hypertransduction.

Une transduction est inversible ssi son inverse est une transduction.

. Un (hyper)transducteur est inversible ssi l'(hyper)transduction associée est inversible.

Remarquons que si P est fidèle, P^{-1} est d'image finie et inversement.

II-2-3-2 Non composition des substitutions finies

Les substitutions ne sont pas closes par composition.

Nous allons voir ici la raison profonde de ce fait que nous aborderons progressivement.

Soit σ une substitution finie de Σ dans Δ et ζ de Δ dans Γ.

σ est donc un morphisme de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans $DP_F^k T\tilde{T}(\Delta)$ et μ de $\tilde{T}(\Delta)$ dans $DP_F^{k'} T\tilde{T}(\Gamma)$. En général, σ o μ n'est **pas un morphisme** de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans $DP_F^k T(M)$ comme nous allons le voir.

La raison a déjà été souvent rencontrée dans ce travail : on a en général $\mu(A.B) \neq \mu(A).\,\mu(B)$ où A et B sont des parties (finies) de $\tilde{T}(\Delta)$.

Discutons du problème sur un exemple :

Soit $\sigma\ a(x) = \{a_1(x, y), a_2(x, y)\}$, $\sigma(\bar{a}) = \{\bar{a}\}$

$$\mu\ a_i(x, y) = \{a_i^1(x, y, x, y), a_i^2(x, y, x, y)\} \qquad i \in [2]$$

$$\mu(\bar{a}) = \{\bar{a}\}$$

Supposons que la composition des substitutions se fasse "syntaxiquement", c'est à dire que la relation $\widehat{\sigma \text{ o } \mu}$ soit engendrée par les $\{(a, \sigma \text{ o } \mu(a) | a \in \Sigma\}$

on a $\sigma \text{ o } \mu(a) = \mu[\sigma(a)] = \{a_i^j(x,x,x,x) | i \text{ et } j \in [2]\}$

Il est facile de vérifier que σ o μ n'est pas engendrée de cette façon et nous allons voir qu'il n'y a aucune raison théorique qu'elle le soit.

En effet σ est un morphisme de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans $DP_F^k T\tilde{T}(\Delta)$ et μ de $\tilde{T}(\Delta)$ dans $DP_F^{k'} T\tilde{T}(\Gamma)$. Le caractère fonctoriel de $DP_F T$ va faire naturellement que σ o μ sera défini par un morphisme ζ de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans $DP_F^k T(DP_F^{k'} T\ \tilde{T}(\Gamma))$

Sur l'exemple,

$$\zeta\ a(x) = \{\{a_1^1(x,y,x,y),\ a_1^2(x,y,x,y)\}\ \langle x,x\rangle,$$

$$\{a_2^1(x,y,x,y),\ a_2^2(x,y,x,y)\}\ \langle x,x\rangle\}$$

En fait, lorsqu'on compose "syntaxiquement" σ et μ, on identifie abusivement $\{\mu(a_i)\,|\,a_i \epsilon \sigma(a)\}$ à $\bigcup_{a_i \epsilon \sigma(a)} \{\mu(a_i)\}$, alors que la structure de "Parties de Parties" est importante du point de vue de la structure de magmoïdes.

<u>En conclusion</u>

Soit deux relations R de E dans F et S de F dans G. R définit une application de E dans $\mathcal{P}(F)$, que l'on compose avec l'application induite par S de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(G))$.

On identifie sans aucun problème $\mathcal{PP}(G)$ à $\mathcal{P}(G)$ et on obtient $R \circ S(a) = S(R(a))$. Sans cette identification, on a $R \circ S$ de E dans $\mathcal{PP}(G)$ avec

$R \circ S(a) = \{S(b)\ |\ b \in R(a)\}$

Du point de vue ensembliste, la distinction est sansintérêt mais quand on considère des relations qui sont des substitutions de magmoïdes, elle devient essentielle vis à vis de la structure de "magmoïde des parties". Aussi dans la suite allons nous composer syntaxiquement les substitutions sans oublier les structures de parties. Le résultat ensembliste associé sera obtenu en oubliant la structure des parties dans le résultat. C'est l'idée de la proposition suivante.

II-2-3-3 "Composition" des substitutions finies

Soit O l'application (qui n'est pas un morphisme !) de $\mathcal{DP}_F^{k'}\mathcal{T}(\mathcal{DP}_F^{k}\mathcal{T}(M)_o)$ dans $\mathcal{DP}_F^{kk'}\mathcal{T}(M)_o$ définie par : $O(\{A_\alpha\}_{\alpha\epsilon I}) = \bigcup_{\alpha\epsilon I} A_\alpha$

où $A_\alpha \in \mathcal{DP}_F^{k}\mathcal{T}(M)$, et M est un magmoïde décomposable.

Remarquons que seuls les "arbres sans variable" nous intéressent.

O réalise l'"oublie" annoncé précédemment de structure des parties.

Remarquons que si $\{A_{\alpha_1}\}_{\alpha_1} \times .. \times \{A_{\alpha_{k'}}\}_{\alpha_{k'}}$

appartient à $DP_F^{k'}T(DP_F^kT(M))$ alors on a bien

$$\bigcup_{\alpha_1,..,\alpha_{k'}} (A_{\alpha_1} \times .. \times A_{\alpha_{k'}}) \in (DP_F^k(TM))^{k'} \subset DP_F^{kk'}(TM)$$

Proposition fondamentale :

Soit σ un k-morphisme de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans $DP_F^kT\tilde{T}(\Delta)$ et μ un k'-morphisme de $\tilde{T}(\Delta)$ dans $DP_F^{k'}TM$, où M est décomposable (σ et μ sont donc des substitutions).

Alors il existe un kk' morphisme de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans $DP_F^kTDP_F^{k'}TM$ tel que $O(\zeta) \,\hat{=}\, \sigma \circ \mu$.

Preuve :

a) notations : Pour tout $a \in \Sigma$, posons

$\sigma(a) = A_1 \times .. \times A_k$

où, $\forall\ i \in [k]$, $A_i = \{\tilde{a}_{i,j}\ A_{i,j} \mid j \in I_i\}$ I_i est un ensemble fini d'indices.

Posons $\mu(\tilde{a}_{i,j}) = B_{i,j}^1 \times .. \times B_{i,j}^{k'}$

Nous définissons alors ζ par :

$\zeta(a) = C_1 \times .. \times C_{kk'}$

avec, $\forall\ (\alpha-1)\ k + \beta \in [kk']$ (où $\alpha \in [k']$ et $\beta \in [k]$)

$$C_{(\alpha-1)k+\beta} = \{\{B_{\alpha,j}^{\beta}\}.\ k'\ A_{\alpha,j}\}_{j \in I_\alpha}$$

(k' Adésigne la torsion k'-dilatée de A)

De même, soit $t \in T(\Sigma)_o^n$, nous noterons

$\sigma(t) = T_1 \times ... \times T_{kn}$

et, $\forall\ t_{i,j} \in T_i, j \in J_i$, $\mu(t_{i,j}) = \upsilon_{i,j}^1 \times .. \times \upsilon_{i,j}^{k'} = \upsilon_{i,j}$

b) nous allons prouver que, pour tout $t \in T(\Sigma)_o$, on a

(E) $\forall\ \gamma = (\alpha-1)k + \beta \in [kk'],\ \pi^\gamma\zeta(t) = \{\{U^\beta_{\alpha,j}\}\}_{j\ \in\ J_{\alpha-1}}$

(rappelons que $\pi^\gamma t$ est la $\gamma^{\text{ème}}$ composante de t)

- Supposons (E) prouvé, montrons que le résultat cherché s'en déduit :

$\forall\ \gamma \in [kk']$, on a $\pi^\gamma \circ \zeta(t) = \bigcup_{j\ \in\ J_{\alpha-1}} U^\beta_{\alpha,j}$

et $\pi^\gamma\mu[\sigma(t)] = \bigcup_{j\ \in\ J_{\alpha-1}} U^\beta_{\alpha,j}$ d'où le résultat.

- Reste à prouver (E). Nous raisonnons par induction sur la profondeur π de t.

Si $\pi = 1$, le résultat est évident.

De même, on vérifie immédiatement la stabilité du résultat par tensoriel.

Le seul point non évident est de prouver que

$\forall\ a \in \Sigma_n,\ \forall\ t_1,..\ t_n \in T(\Sigma)^1_o$ de prof $\leq \pi$, on a (E) vérifiée pour

$\bar{t} = a(t_1,..,t_n)$. On pose $t = (t_1,..,t_n)$.

On a $\pi^\gamma\zeta\ a(t_1,..,t_n) = \pi^\gamma(\zeta(a).(\zeta(t_1),..\ \zeta(t_n))) = (\pi^\gamma\zeta(a)).\ \zeta(t)$

(Car ζ est un morphisme).

En posant $\gamma = (\alpha-1)\ k + \beta$ on a par hypothèse de récurrence,

$$\pi^\gamma\zeta(\bar{t}) = \{\{B^\beta_{\alpha,j}\}.k'A_{\alpha,j}\}_{j\in I_\alpha} \bullet \{\{U_{1,j}\}\}_{j\in J_1} \times..\times\{\{U_{n,j}\}\}_{j\in J_{n_k}}$$

D'autre part,

$$\pi^\gamma\mu[\sigma(a\cdot t)] = \pi^\beta_\mu[(\pi^\alpha\sigma(a)).\sigma(t)]$$

$$= \pi^\beta\mu(\{\tilde{a}_{\alpha,j}\cdot A_{\alpha,j}\}_{j\in I_\alpha}.(T_1,..,T_{k_n}))$$

compte tenu de la distributivité à gauche

$$= \{\pi^\beta\mu(\tilde{a}_{\alpha,j}\cdot A_{\alpha,j}.T_1,..\ T_{k_n})\}_{j\in I_\alpha}$$

$$= \{\pi^{\beta}\mu(\tilde{a}_{\alpha,j}(t_1^j,..,t_{m_j}^j))\,|\,j\in I_\alpha,\ t_1^j\in T\mathcal{A}_{\alpha,j(1)}\}$$

$$= \{\pi^{\beta}\mu(\tilde{a}_{\alpha,j}).(\mu(t_1^j),..,\ \mu(t_{m_j}^j))\,|\,j\in I_\alpha,\ t_1^j\in T\mathcal{A}_{\alpha,j(1)}\}$$

$$= \{\pi^{\beta}\mu(\tilde{a}_{\alpha,j}).(\cup_{A_{\alpha,j}(1),j_1},\ldots,\ \cup_{A_{\alpha,j}(mj),j_j})\,|\,j\in I_\alpha,\ j_1\in J_{\mathcal{A}_{\alpha,j}(1)}\}$$

Ainsi, compte tenu de la distributivité à gauche de la composition par rapport aux parties, nous en sommes réduit à prouver que, $\forall\ \tilde{b}.\theta \in \mathcal{T}\tilde{T}(\Delta)$ (en supprimant les indices α et β supposés fixés) :

$$O(\{\tilde{b}.\theta\}\ k'\mathcal{A}\{\{\cup_{1,j}\}_{j\in J_1},..,\{\cup_{nk,j}\}_{j\in J_{kn}}\}) .$$

$$= \{\tilde{b}.\theta.(\cup_{\mathcal{A}(1),j_1},\ldots,\cup_{\mathcal{A}(m),j_m})\,|\,j_1\in J_{\mathcal{A}(1)}\}$$

Alors, compte tenu du fait que $k'\mathcal{A}$ est la torsion k-dilatée de $\mathcal{A}$ et que chaque $\cup_{1,j}$ est de deg sup k', on a

$$k'\mathcal{A}\{\{\cup_{1,j}\}_{j\in J_1},..,\{\cup_{kn,j}\}_{j\in J_{kn}}\}$$

$$= \{\{\cup_{A(1),j1}\}_{j_1\in \mathcal{A}(1)},..,\{\cup_{A(m),jm}\}_{jm\in \mathcal{A}(m)}\}$$

d'où le résultat.///

(Remarquons que la construction peut s'étendre aux éléments t "avec variables").

II-2-3-4 Corollaire : Représentation des hypertransductions

II-2-3-4-1 Soit $T_1, .., T_n$ n transducteurs descendants (T_i de Σ_i dans Σ_{i+1}).

Il existe un morphisme ζ de $\tilde{T}(\Sigma_1)$ dans $DP_F^{k_1} T DP_F^{k_2} T \dots DP_F^{k_n} T \tilde{T}(\Sigma_{n+1})$ tel que T_1 o... o $T_n \,\hat{=}\, 0^n \,\zeta_{[1]}$.

(k_i est le nombre d'états de T_i)

Preuve : Immédiate en appliquant n fois la proposition (II-2-3-3) et le lemme (II-2-3-1-1)

Ainsi, ζ s'écrira comme suit en fonction des substitutions $\sigma_1, .., \sigma_n$ associées à $T_1, .. T_n$.

Soit $\sigma_j : \tilde{a}_{i_j} \to \{ \tilde{a}_{i_1}, .. i_j . \theta_{i_j} \}_{ij}$

alors, $\zeta : a \to \{\{ \dots \{\{ \tilde{a}_{i_1}, .._{i_n} \theta_{i_n} \} < \theta_{i_{n-1}} > \}_{i_{n-1}} \dots \} < \theta_{i_1} > \}_{i_1}$

(et les $\theta_{i_j} \in (k_j \times .. \times k_n)$ dil θ.)

II-2-3-4-2 Notation :

Un hypertransducteur (une hypertransduction) T_1 o ... o T_n où T_i a K_i états sera dit de paramètres (n ; $k_1, .. k_n$). De même pour une hyper substitution de $DP_F^{k_1} T \dots DP_F^{k_n} T$ M.

D'ailleurs, nous abrégerons cette dernière notation en $DP_F^{(k)} TM$ où (k) désigne la suite ($k_1, \dots k_n$).

II-2-3-4-3 Remarque : Le corollaire (II-2-3-4) ne 'déploie' aucun phénomène, c'est à dire qu'il ne place pas le problème de la 'hiérarchie infinie' dans un cadre permettant de la résoudre, mais le corollaire est néanmoins un outil de description syntaxique des hypertransductions, puisqu'il permet d'en écrire les "règles" (qui sont la donnée de l'hypersubstitution associée). En fait, toute la difficulté est dans la loi de composition de $\mathcal{DP}_F^{(k)}\mathcal{T}M$. On voit bien que la non composition des transductions est due à l'alternance de non linéarité (introduite par les foncteurs $\mathcal{T}$) et de non déterminisme (introduit par $\mathcal{P}$).

II-2-3-4-4 Réciproque du corollaire (II-2-3-4)

Pour tout morphisme ζ de $\tilde{T}(\Sigma_1)$ dans $\mathcal{DP}_F\mathcal{T}^{(k)}(\tilde{T}(\Sigma_{n+1}))$, ζ étant de paramètre $(n\ ;\ k_1,\ldots,\ k_n)$, il existe $n - 1$ alphabets $\Sigma_2,\ldots\ \Sigma_n$ et n morphismes σ_i de $\tilde{T}(\Sigma_i)$ dans $\mathcal{DP}_F\mathcal{T}\tilde{T}(\Sigma_{i+1})$ tels que $O^n\zeta \mathrel{\hat{=}} \sigma_1 \circ\ldots\circ \sigma_n$.

Nous laissons la preuve au lecteur, en indiquant seulement l'idée :

soit $\zeta\ a \to \{\{\tilde{a}_{i,j}\theta_j\}_j\}_i$ un morphisme de $\tilde{T}(\Sigma_1)$ dans $\mathcal{DP}_F\mathcal{T}^{(k_1,k_2)}\tilde{T}(\Sigma_3)$.

Nous construisons un alphabet Σ_2 en associant à chaque couple (a,i) une nouvelle lettre α_i. On définit alors

σ de $\tilde{T}(\Sigma_1)$ dans $\mathcal{DP}_F^{k_1}\mathcal{T}\tilde{T}(\Sigma_2)$

par $\sigma(a) = \{\alpha_i\theta_i\}_i$

et μ de $\tilde{T}(\Sigma_2)$ dans $\mathcal{DP}_F^{k_2}\mathcal{T}\tilde{T}(\Sigma_3)$

par $\mu(\alpha_i) = \{a_{i,j}.\theta_j\}_j$

On obtient facilement $O\ \zeta = \sigma \circ \mu$

La construction se généralise.///

II-2-3-5 Substitutions linéaires finies et bimorphismes

II-2-3-5-1 Proposition :

Soit σ un morphisme linéaire de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans $\mathcal{DP}_F^k\tilde{T}(\Delta)$. Il existe alors $(\varepsilon,\ K,\ \phi,\ 1) \mathrel{\hat{=}} \sigma_{[1]}$ où ε est un démarquage propre, K une forêt de rec et ϕ un k-morphisme linéaire.

Preuve :

Posons $\sigma : a \to \{a^1_{i_1}\}_{i_1\in I_1(a)} \times\ldots\times \{a^k_{i_k}\}_{i_k\in I_k(a)}$

On considère un nouvel alphabet Γ constitué des lettres formelles $\{a_{i_1,.. i_k} | a\in\Sigma,\ i_j\in I_j(a),\ \deg a_{i_1,.. i_k} = \deg a\}$

avec la convention capitale que i_j = '$\neq$' si $I_j(a) = \emptyset$

on pose $\varepsilon_{a_{i_1,..i_k}}(x_1,.. x_n) = a(x_1,.., x_n)$

$\phi(a_{i_1,..,i_k}) = (a_{i_1},.., a_{i_k})$

avec la convention que $a_{i_j} = \neq$ si $i_j = \neq$

$K = T(\Delta)_o^{1^{\otimes}} \cap \phi^{-1}_{[1]}(T(\Delta)_o)$.

Le seul problème est de remarquer qu'il faut définir ϕ même si une composante de $\sigma(a)$ est vide.

Supposons que $\sigma(a)$ ait sa $i^{\text{ème}}$ composante vide. Cela implique que $t_x.\sigma(a)$ est vide ssi x_i figure dans t.

Pour le bimorphisme, il y correspond le fait que $\neq$ figure dans $t_x.(\varepsilon^{-1} \circ \phi(a))$ ssi x_i figure dans t. Le caractère vide de l'image pour σ correspond donc à la présence d'un '$\neq$' dans l'image pour le bimorphisme. Le résultat découle alors immédiatement de (I-2-2-2-2). car ϕ est linéaire.

II-2-3-5-2 Remarque :

L'hypothèse de linéarité est essentielle. Sans elle, pour des raisons fréquemment évoquées (I-2-1-5-1) le lecteur vérifiera sur des exemples (inspirés de ceux souvent cités) que le résultat n'est pas vrai (en gros, la raison est que par les bimorphismes, on opère sur le magmoïde des parties ascendantes (au sens de (A)), et sur les parties descendantes pour les substitutions. Les deux notions ne coïncident pas dans le cas non linéaire).

II-2-3-6 Bimorphismes, substitutions et composition

Nous venons d'établir l'inclusion des relations associées aux substitutions finies **linéaires** dans celles associées à la classe $\mathcal{B}(\text{dem}, \text{rec}^{\otimes}, \text{linéaire})$ de bimorphismes (l'inclusion inverse est fausse).

<u>Notation</u> : Nous noterons DL la classe $\mathcal{B}$ (dem, rec$^{\otimes}$, linéaire) et l'appelerons classe des bimorphismes **semi-linéaires**. Or nous savons que la classe $\widehat{DL}$ est close par composition (Théorème 5). Ainsi, à deux substitutions linéaires σ et μ, nous pouvons associer deux bimorphismes semi-linéaires B et B', puis B o B' = B", $B''_{[1]}$ réalisant $(\sigma \circ \mu)_{[1]}$

Mais en général, si on compose syntaxiquement σ et μ, on n'obtient pas la relation composée. Ainsi, **"on peut composer les bimorphismes, pas les substitutions associées"**.

L'exemple suivant illustre ce fait.

Soit les deux substitutions linéaires finies

$\sigma : (a(x)) = \{a(x_2)\} \times \emptyset \qquad \mu\ a(x) = \{\bar{a}\} \times \emptyset$

$\sigma \quad b(x) \quad = \emptyset \times \{b(x_1)\} \qquad \mu\ b(x) = \emptyset \times \emptyset$

$\sigma \quad \bar{a} \quad = \{\bar{a}\} \times \emptyset \qquad \mu\ \bar{a} \quad = \emptyset \times \emptyset$

Conformément aux constructions précédentes, nous associons à σ et μ les bimorphismes semi-linéaires B et B'.

$B = (\varepsilon, F^{\otimes}, \phi)$ avec

$\varepsilon a_{1,\neq}(x) = a(x)$, $\varepsilon\ b_{\neq,1}(x) = b(x)$, $\varepsilon(\bar{a}_{1,\neq}) = \bar{a}$

$\phi a_{1,\neq}(x) = \langle a(x_2),\neq\rangle$, $\phi\ b_{\neq,1}(x) = \langle\neq, b(x_1)\rangle$ et $\phi(\bar{a}_{1,\neq}) = \langle\bar{a},\neq\rangle$

$K = (a_{1,\neq} b_{\neq,1})^{*} \bar{a}_{1,\neq}$.

Nous avons ici rigoureusement appliqué la construction (II-2-3-5-1).
En simplifiant les notations, on a ε = id, $K = (ab)^{*}\bar{a}$

$\phi\ a(x) = \langle a(x_2),\neq\rangle$, $\phi\ b(x) = \langle\neq, b(x_1)\rangle$, $\phi(\bar{a}) = \langle\bar{a}, \neq\rangle$

De même, en notations simplifiées, on obtient $B' = (\varepsilon', K', \phi')$

ε' = id, $K' = a\{a,b\}^{*}\bar{a}$ $\phi' a(x) = \langle\bar{a},\neq\rangle$, $\phi' b(x) = \phi'(\bar{a}) = \langle\neq,\neq\rangle$

Composant comme dans le lemme fondamental B et B', on obtient
$B'' = (\varepsilon'', K'', \phi'') \widehat{=} B \circ B'$. (Ici, la construction est triviale car ε'=id).

$\varepsilon'' = id$, $K'' = K = (ab)^* \bar{a}$

$\phi''a(x) = \langle\bar{a},\neq,\neq,\neq\rangle$, $\phi''b(x) = \phi''\bar{a} = \langle\neq,\neq,\neq,\neq\rangle$

Remarquons que :

$\widehat{\sigma_{[1]}} = \{((ab)^n\bar{a}, (ab)^n\bar{a}) \mid n \in N\}$

$\widehat{\mu_{[1]}} = \{(a\{a,b\}^*\bar{a}, \bar{a})\}$

donc $(\widehat{\sigma \circ \mu})_{[1]} = \{((ab)^n\bar{a}, \bar{a}) \mid n \in N\}$

On vérifie bien ici $(\widehat{\sigma \circ \mu})_{[1]} = \widehat{B''}_{[1]}$

Par contre, la composition syntaxique de $\sigma \circ \mu$ nous donnerait :

$\zeta\, a(x) = \{\bar{a}\} \times \emptyset \times \emptyset \times \emptyset$

$\zeta\, b(x) = \zeta\, \bar{a} = \emptyset \times \emptyset \times \emptyset \times \emptyset$

et $\widehat{\zeta}_{[1]} = \{(a(a,b)^*\bar{a}, \bar{a})\}$ qui est différent de $\widehat{B''}_{[1]}$

II-2-3-7 Caractérisation des hypertransductions inversibles

II-2-3-7-1 Fort des résultats précédents, nous allons caractériser les hypertransductions inversibles.

1 - Remarquons d'abord que toute hypertransduction inversible est fidèle. En effet, toute transduction, donc toute hypertransduction est d'image finie. Si une hypertransduction H est inversible, H^{-1} est donc d'image finie, c'est à dire que H est fidèle///.

2 - Soit H une hypertransduction de paramètres $(n, k_1,..,k_n)$. Nous représenterons d'après (II-2-3-4) H par une hypersubstitution $\mathcal{H}$ de mêmes paramètres, notée

$$\mathcal{H} : a \in \Sigma \to \{\{\{\{a_{i_1,\ldots i_n}\theta_{i_n}\}_{i_n}\theta_{i_{n-1}}\}_{i_{n-1}}\cdots\cdots\}_{i_2}\theta_{i_1}\}_{i_1}$$

Il est facile de voir que $0^n\mathcal{H}$ contient (strictement en général) $0^n\mathcal{G}$ avec

$G : a \in \Sigma \to \{\{\{a_{i_1,..,i_n}\theta_{i_n}\}\theta_{i_{n-1}}\ldots.\}\theta_{i_1}\}_{i_1,..,i_n}$

intuitivement, cela revient à faire la même substitution pour chaque occurrence de variable). Remarquer que G est différent de la simple substitution.

$a \in \Sigma \to \{a_{i_1..\,i_n}\theta_{i_n}\theta_{i_{n-1}}..\theta_{i_1}\}_{i_1..\,i_n}$

cette distinction ayant fait l'objet de (II-2-3-6).///

3 - Nous avons donc à H (donc à H) associé un nombre fini de "règles" $a \to \{\{a_{i_1..i_n}\theta_{i_n}\}\ldots\theta_{i_1}\}$, que nous abrégerons en

$a \to a_{(i)}(\theta_i)$ ou, pour $(i) = i_1,..\, i_n$ fixé, en $a \to a'(\theta)$.

Posant $k = k_1 \times\ldots\times k_n$, rappelons que $a_{i_1,..\, i_n}$ est de deg sup k.

Nous appelerons domaine de H le domaine de H, que nous noterons Dom H. Nous avons donc

Dom $H = \{t \mid \exists u, (t,u) \in O^n H\}$. Il est facile de voir que Dom H = Dom G.

Considérons un reconnaisseur R descendant dont les états sont les parties de [k]. R a ses règles associées à H comme suit :

$p[a(x_1,..\, x_n)] \to a(p_1[x_1],..\, p_n[x_n])$

ssi il existe une règle $a \to a'(\theta)$ de H telle que

- $\forall\, j \in p,\ \pi^j\, a \neq \emptyset$

- p_i est l'ensemble des indices des composantes de x_i qui figurent dans les variables d'au moins un $\pi^j a_{.}$, $j \in p$.

Si on prend {1} pour état initial, le reconnaisseur associé reconnait Dom H (il contrôle si les composantes utilisées sont non vides).

Une règle $a \to a'(\theta)$ est **essentielle** ssi

- $\exists\ \tilde{t}.a(x_1,..\, x_n) \in I$ (Dom H), $\exists$ F **infinie** telle que $\tilde{t}\ a(F) \subset$ Dom H

par application de cette règle.

Ceci équivaut à dire que $1[\tilde{t}\ a(x_1,..\ x_n)]\ \vert\!\frac{*}{R}\ t\ a\ (p_1[x_1],..\ p_n[x_n])$

où chaque F_{p_i} est non vide et au moins une infinie, avec F_{p_i} étant la forêt reconnue par R avec p_i état initial. De plus, pour tout p_i tel que F_{p_i} est finie, on peut, comme déjà fait souvent, marquer les arbres de F_{p_i} sur a (introduisant donc un nouvel alphabet) et les restituer par un 1-morphisme linéaire complet strict ϕ.

Les règles non essentielles sont supprimées de cette façon.

Finalement, on peut décomposer H en ϕ^{-1} o H' où chaque règle de H' a la propriété suivante :

(P) il existe $\tilde{t}.a(F_1 \times .. \times F_n) \subset \mathrm{Dom}\ H'$, chaque élément ayant une image par application de la règle (à l'occurrence de a mise en évidence).

4 - A tout arbre t, on peut associer un ordre $\underset{t}{<}$ sur ses noeuds par "a $\underset{t}{\leq}$ b ssi a est antécédant de b". Il est facile de voir que t muni de cet ordre est un inf demi treilli. Soit F une forêt. Nous dirons que F est **émondée** ssi il existe un entier α tel que, $\forall\ t \in F$, $\forall$ a et b noeuds de F, la longueur de la branche joignant inf(a,b) à a ou la longueur de la branche joignant inf(a,b) à b est majorée par α. (Intuitivement, dans une forêt émondée, les arbres ne se ramifient que d'une profondeur bornée le long d'une"branche principale").

Le lemme de l'étoile (A) permet de voir immédiatement que de toute forêt reconnaissable infinie, on peut extraire une forêt infinie (reconnaissable) émondée.

On en déduit qu'on peut supposer que H' vérifie (P') :

(P')"dans (P), $F_1,..\ F_n$ sont émondées".

5 - **Conservation de l'émondation par les hypertransductions inversibles :**

Supposons qu'une hypertransduction H inversible ne conserve pas l'émondation : soit F infinie (reconnaissable) émondée telle que $O^n H(F) = F'$ non émondée.

La relation inverse associée à celle de H est obtenue par composition de m transducteurs $T_1,..\ T_m$ (puisque H est inversible), donc $F' = T_m^{-1}(...T_1^{-1}(F))$.

Comme toute transduction inverse conserve la reconnaissabilité, F' est reconnaissable.

F' est non émondée, donc $\forall \alpha \in N$, il existe $t_\alpha = t'_\alpha (t''_\alpha, t'''_\alpha)$ tel que $t_\alpha \in F'$, prof $(t''_\alpha) \geq \alpha$ et prof $(t'''_\alpha) \geq \alpha$.

Comme une infinité de substitutions commencent par l'application des mêmes règles et que F est reconnaissable, on peut extraire de F' une sous famille de t_α ayant même $t'_\alpha = t_o$. Pour simplifier les notations, supposons que dsup (t''_α) = dsup $(t'''_\alpha) = 1$, donc que t'_α a deux variables x_1 et x_2. Soit ϕ une hypersubstitution réalisant la transformation inverse. Pour tout $\alpha \in N$ (en supposant avoir renuméroté la sous-suite extraite précédemment), $t_o(t'_\alpha, t''_\alpha)$ a pour image un $u_\alpha \in F$, donc une infinité de t'_α ou une infinité de t''_α ont leur image de profondeur bornée par β (β coefficient d'émondation de F). Comme F' est reconnaissable, on peut se fixer un t'_{α_o} (si une infinité de t''_α ont même image, ou inversement sinon) et on a alors une infinité d'arbres (de la forme $t_o|t'_{\alpha_o}, t''_\alpha)$) qui ont pour image un nombre fini d'arbre (puisque l'image de l'ensemble des t''_α est bornée en profondeur). Ceci nie la fidélité.

6 - Une règle $a \to a' (\theta) = \{\{a'\theta_n\}...\theta_1\}$ est **linéaire** ssi chaque θ_i est linéaire. Reprenons H' introduit en 3 - Montrons qu'**on peut toujours supposer que les règles de** H' **sont linéaires sous l'hypothèse d'inversibilité.**

Considérons la substitution σ $a \to \{a_{i_1 .. i_n} \theta_{i_n} .. \theta_{i_1}\}_{i_1,..,i_n}$

On sait que la relation associée est incomparable avec celle associée à H', mais il est facile de voir (laissé au lecteur), que si $t \in$ Dom H' et $u \in \sigma(t)$, alors $(t,u) \in \widehat{H'}$ (en notant par abus $\widehat{H}$ la relation associée à $O^n H$). Supposons maintenant un θ_{i_j} non linéaire : si $\theta_{i_n} .. \theta_{i_1}$ est linéaire, on peut toujours modifier θ_{i_j} de façon à le rendre linéaire sans changer la règle (éventuellement, on dilate fictivement). Sinon, on peut toujours supposer que H' satisfaisait à (P') et alors, il existe une forêt $t_o(F) \subset$ Dom H', avec F' infinie émondée. Si $H'(t_o(F))$

est fini, la fidélité de H est niée. Sinon, H' ne conserve pas l'émondation, et il en est alors de même de $H = \phi^{-1} \circ H'$, ce qui contredit encore l'inversibilité de H.

7 - Finalement, si H est inversible, on peut donc supposer toutes les règles de H' linéaires. H' est alors composée de n substitutions linéaires, dont les bimorphismes associés sont semi-linéaires et se composent en un bimorphisme semi linéaire d'après (II-2-3-5). Nous avons donc :

$$H \text{ inversible} \Rightarrow \begin{cases} \exists\, \upsilon \text{ semi-linéaire tel que } \widehat{H_{[1]}} = \widehat{\phi_o^{-1}}\ \upsilon_{[1]} \\ \text{et } \phi \text{ 1-lcs} \end{cases}$$

De plus, $\widehat{H}_{[1]}$ étant fidèle, υ est quasi-[1]complet.

On peut alors, d'après le lemme fondamental 1, le supposer [1]-complet. Posons $\phi^{-1} \circ \upsilon = (\phi', K, \Psi, 1)$ où ϕ' est 1-lcs, K reconnaissable et Ψ est linéaire [1] complet sur K. Montrons qu'on peut toujours supposer $\Psi_{[1]}$ à délai de séparation borné. (Le raisonnement est le même qu'en 6). Supposons $\Psi_{[1]}$non à délai de séparation borné. On peut alors trouver une forêt infinie F, que l'on peut prendre reconnaissable émondée et un t_o tels que : $\forall\, t \in F,\ t_o(t) \overset{*}{\underset{\upsilon_{[1]}}{\vdash}} u_o(u, u')$.

La conservation de l'émondation implique alors que si la profondeur des u n'est pas bornée, celle des u' l'est et on peut alors marquer F en son sommet et générer u' de façon séparée. (La preuve détaillée, basée uniquement sur le caractère reconnaissable des contraintes, est laissée au lecteur).

$\Psi_{[1]}$peut être également pris régulé, sinon la fidélité serait niée. Finalement, d'après le lemme fondamental 6, $\Psi_{[1]}$est séparé et strict. On a alors $\widehat{\phi}^{-1} \circ \widehat{\upsilon} \subset \widehat{B'}_1$.

Nous pouvons donc énoncer le lemme suivant, qui sera à la base du théorème 6 :

II-2-3-7-2 : Lemme d'inversibilité :

Pour qu'une hypertransduction H soit inversible, il faut qu'elle soit équivalente à un bimorphisme de B'_1 (voir II-2-2-1).

II-2-3-8 Lemme

Toute relation associée à un bimorphisme de B'_1 peut être réalisée par une quasi-transduction descendante.

II-2-3-8-1 Preuve :

Soit $(1, \phi, K, \Psi, 1) \in B'_1$. Inversant $\phi_{[1]}$ par le théorème 1, on peut se ramener au cas où le bimorphisme est de la forme $B = (\delta, K, \Psi, 1)$ où δ est un quasi-démarquage, K est reconnaissable, Ψ est linéaire, [1] complet sur K, séparé à délai borné et régulé sur K.
(Rappelons qu'un quasi-transducteur est un transducteur "légérement généralisé", en partie gauche des règles du quel apparaissent des arbres initiaux dont les variables sont à la profondeur 1.)
On peut toujours supposer K hyperlocale. On construit alors un quasi-transducteur descendant Q comme suit :

Soit R un reconnaisseur de la forêt hyperlocale K, d'état initial q_o (R mémorise seulement le somme antérieur).
Supposons que Ψ est un k-morphisme. Alors, les états de Q sont les couples (q,i) où q est état de R et $i \in [k]$. $(q_o,1)$ est initial.

Les règles de Q sont définies par :

$$(q,j)[t(x_1,\ldots x_n)] \to u((q_{j'_1}, j_1)[x_{j'_1}],\ldots, (q_{j'_p}, j_p)[x_{j'_p}])$$

ssi il existe $a(x_1,\ldots x_n)$ tel que :

$$- \delta\, a(x_1,\ldots, x_n) = t(x_1,\ldots,x_n)$$

$$- q[a(x_1,\ldots,x_n)] \to a(q_1[x_1],\ldots, q_n[x_n])$$

$$- \pi_k^j\, \Psi\, a(x_1,\ldots,x_n) = u(x_{(k-1)j'_1+j_1},\ldots, x_{(k-1)j'_p+j_p})$$

Le fait que $\widehat{B} \subset \widehat{Q}$ se prouve facilement par induction sur la taille de $v \in K$. L'inclusion est d'ailleurs toujours vraie, indépendamment de la complétude de Ψ.

Inversement, soit $t \mid\frac{*}{Q} u$. On peut alors associer au couple (t,u) un élément v tel que $\delta(v) = t$ et $\Psi_{[1]}(v) = u$ (v est le composé "des $a(x_i,\ldots x_n)$" intervenant dans la construction). Reste à vérifier que $v \in K$, or, Ψ étant [1]-complet sur K, on voit (par induction sur la profondeur de $v' \underset{I}{<} v$), que chaque variable de v' figure dans $Q(\delta(v'))$, où elle est affectée par construction d'un état controlant les règles R de succession de K.///

II-2-3-8-2 Remarque :

Une relation de B'_1 ne peut pas en général être réalisée par une quasi-transduction ascendante. Le lecteur vérifiera ce fait sur l'exemple suivant :

B est le bimorphisme de B'_1 défini par $B = (\phi, K, \Psi)$ avec

$K = c(a^{*}\bar{a}, a^{*}\bar{a}, a^{*}\bar{a})$, $\phi a(x) = \Psi a(x) = a(x)$, $\Psi(\bar{a}) = \phi(\bar{a}) = \bar{a}$

$\phi c(x,y,z) = b(b(x,y,z)$ et $\Psi c(x,y,z) = b(x,b(y,z))$///

II-2-3-9 Théorème 6

II-2-3-9-1 Définition et Rappel :

Soit $\mathcal{C}$ une classe de transducteurs. Une relation R est dite $\mathcal{C}$-inversible ssi il existe T et $U \in \mathcal{C}$ tels que $R = \widehat{T}$ et $R^{-1} = \widehat{U}$. Notons $\widehat{\mathcal{C}}$ la classe des relations associées à $\mathcal{C}$. Rappelons (voir I-1-5) que nous appelons TR la classe des transducteurs 'classiques' d'arbres (ascendants ou descendants), TQ la classe des transducteurs quasi-généralisés, TG celle des transducteurs généralisés (ces deux classes ayant été introduites par nous dans [9]), T' - FST et GFST deux classes de transducteurs introduites par Engelfriet ([51], [52]). Nous avons :

$\widehat{TR} \subsetneq \widehat{TQ} = \widehat{TG} \subsetneq \widehat{T'\text{-}FST} \subsetneq \widehat{GFST} \subsetneq \widehat{HT}$

(HT désigne la classe des hypertransducteurs).

<u>II-2-3-9-2 Théorème 6 : Transductions inversibles</u> :

Soit C une classe de transducteurs telle que $TQ \subset C \subset \widehat{HT}$. Alors, une relation R est C-inversible ssi $R \in \widehat{B'_1}$ ($\widehat{B'_1}$ désigne l'ensemble des relations associées à B'_1)

<u>Preuve</u> : Soit R une relation C-inversible. Comme $C \subset$ HT, R est une hypertransduction inversible donc $R \in \widehat{B'_1}$ d'après le lemme (II-2-3-7-2). Inversement, soit $R \in \widehat{B'_1}$; Le lemme (II-2-3-8) montre alors que $R \in \widehat{TQ}$, donc $R \in \widehat{C}$. Si $R \mathrel{\widehat{=}} (1, \phi, K, \Psi, 1)$, $R^{-1} \mathrel{\widehat{=}} (1, \Psi, K, \phi, 1) \in B'_1$ donc $R^{-1} \in \widehat{C}$. Finalement, $R \in \widehat{B'_1}$ entraine que R est C-inversible///

<u>II-2-3-9-3 Corollaire</u> :

La classe $\widehat{B'_1}$ est donc une classe de relations réalisées, ainsi que leurs inverses, par des transductions appartenant à des classes C "assez larges" et obtenues par composition de transductions classiques. Aussi appelerons nous **bitransduction** toute relation de $\widehat{B'_1}$. Nous pouvons alors énoncer.

<u>Corollaire du théorème 6</u> :

Pour chacune des classes de transducteurs TQ, TG, T' -FST, GFST, HT, une transduction est inversible ssi elle est une bitransduction.

<u>II-2-3-9-4 Remarque</u> :

Ce résultat est faux pour la classe T^R, pour laquelle il existe des bitransductions non TR-inversibles, comme le montre l'exemple suivant (preuve laissée au lecteur)

$B = (\phi, K, \Psi)$

$K = c(a^{*}\bar{a}, a^{*}\bar{a}, a^{*}\bar{a})$, $\phi a(x) = \Psi a(x) = a(x)$, $\phi(\bar{a}) = \Psi(\bar{a}) = \bar{a}$

$\phi c(x,y,z) = b(c(\bar{a},x,y),z)$ et $\Psi c(x,y,z) = c(\bar{a},x,b(y,z))$

On a $\widehat{B} =$

```
    /        b              c       \
   |        / \            /|\       |
   |       c   a^q       _  a^n  b   |
  <       /|\       ,    a  _   / \   > | n, p et q ∈ N
   |     _ a^n a^p          a a^p a^q|
   |     a _   _               _   _ |
    \      a   a               a   a/
```

Intuitivement, ni $\widehat{B}$ ni $\widehat{B}^{-1}$ ne sont réalisés par une transduction classique pour les raisons suivantes.

- $\widehat{B}$ ne peut être réalisé par transduction ascendante à cause de l'impossibilité de transformer de façon ascendante $c(\bar{a},a^n\bar{a},a^p\bar{a})$ en $c(\bar{a},a^n\bar{a}, b(a^p,x))$

- $\widehat{B}$ ne peut être réalisé par une transduction descendante car on a nécessairement $q[c(x,y,z] \to y$ ou z (pour assurer les correspondances entre branches de $a^*\bar{a}$), d'où l'impossibilité d'assurer le contrôle sur x.

Remarquons que la "non complétude" joue ici un rôle fondamental dans l'exemple. On retrouve ce rôle de la "complétude" dans les preuves précédentes.

Par contre, le transducteur descendant quasi-généralisé suivant réalise $\widehat{B}$.

$q_o[b(x,y)] \to c(\bar{a},q_1[x], b(q_2[x], q_3[y]))$

$q_1[c(\bar{a},x,y)] \to q_3[x]$

$q_2[c(\bar{a},x,y)] \to q_3[y]$

$q_3[a(x)] \to a(q_3[x])$ et $q_3[\bar{a}] \to \bar{a}$

On réalise $\widehat{B}^{-1}$ de façon très comparable (laissé au lecteur)./// Enfin, il est important de voir que les bitransductions conservent la reconnaissabilité et les classes Rat lin, Alg lin (cf A).

Plus généralement on a :

II-2-3-10 Théorème 7

Les classes Rec, Rat lin, Alg lin sont closes par $\widehat{TL}$

Remarques préliminaires : comme les bitransductions sont la classe $\widehat{TI}^2$, il en résulte que les bitransductions conservent les classes de forêts considérées. Rappelons (A) que Rat lin est la classe des images par morphismes linéaires de Rec (on se place ici dans des magmoïdes libres). On notera Rat lin = L(Rec), où L désigne la classe des morphismes linéaires.

De même, Alg lin = L(Alg). Ces classes sont étudiées en détail dans (A) où l'équivalent du théorème 7 est prouvé, en s'appuyant évidemment sur nos résultats sur les bimorphismes (rappelés en les propositions 7-1 et 7-2, qui sont respectivement nos lemmes fondamentaux 2 et 4). Nous donnons ici les grandes lignes de la preuve :

Preuve : La classe Rec est close par transduction inverse donc par morphisme inverse. Elle est close par intersection pour la même raison. Elle est également close par 1-morphisme linéaire (en termes de grammaire, on prend pour règles de l'image les images des règles !). Donc Rec est close par $\widehat{TL}$.

Il est facile de voir (A) que Rat lin et Alg lin sont closes par intersection avec Rec. Elles sont évidemment closes par morphisme linéaire, donc par 1-morphisme linéaire.

Reste à montrer qu'elles sont closes par 1-morphisme linéaire inverse donc, **d'après le théorème 1 (ou le lemme 2)**, par démarquage inverse. Soit δ un démarquage.
D'après le lemme 4, on a δ^{-1} L(Alg) $\subset$ L δ'^{-1}(Alg) et δ^{-1} L(Rec) $\subset$ L δ'^{-1}(Rec).
Reste à prouver que Alg est close par démarquage inverse. Ceci se fait en prenant, grosso modo, pour grammaires les images inverses des grammaires considérées (le détail est dans A).

C.Q.F.D.

II - 2 - 4 PROPRIETES DE LA CLASSE LL DES BIMORPHISMES LINEAIRES :

II-2-4-1 Position et critique du problème

Nous abrégeons en LL la classe $\mathcal{B}(1, \text{rec}, 1)$ des bimorphismes constitués de deux morphismes linéaires et d'une forêt reconnaissable. Toutes les considérations qui suivent sont valables pour des bimorphismes ou apparaissent des forêts raisonnables quelconques, mais nous nous cantonnons au cas reconnaissable pour la clarté de l'exposé.

Nous savons (II-2-2-2) que la classe $\widehat{LL}$ n'est pas close par composition ($\widehat{LL}^2 \neq \widehat{LL}$). Nous nous posons ici la question : la hierarchie $\{\widehat{LL}^n | n \in N\}$ est elle finie ou infinie ? Nous allons montrer (Théorème 8) que $\widehat{LL}^2 = \widehat{LL}^3$, donc que $\widehat{LL}^2$ est la cloture par composition de la classe $\widehat{LL}$, et donc que la hiérarchie considérée s'arrête à n = 2. Ce résultat est dans son énoncé à rapprocher du théorème 2 (II-2-2-1) où $\widehat{TI} \neq \widehat{TI}^2 = \widehat{TI}^3$. Pourtant, nous allons voir que les deux résultats sont de nature différente.

En effet, nous obtenions dans le théorème 2 $\widehat{TI}^2 = \widehat{\mathcal{B}'}_1$ et caractérisions ainsi la cloture transitive d'une classe de bimorphisme où les morphismes étaient classiques (c'est à dire des 1-morphismes), par une classe de bimorphismes de magmoïdes. Ce problème était même un de ceux ayant motivé l'introduction des morphismes de magmoïdes ! Montrons maintenant que nous ne pouvons pas espérer trouver une classe de bimorphismes X telle que $\widehat{LL}^2 = \widehat{X}$. En effet, on sait que le "langage de branches" (l.d.b. en abrégé) d'une forêt reconnaissable est un langage reconnaissable. On vérifie facilement que le langage de branches de l'image d'une forêt raisonnable par un morphisme quelconque est reconnaissable. Ceci implique que, pour tout bimorphisme B, dom B a un langage de branches reconnaissable. Or, l'exemple de $\widehat{LL}^2$ donné en II-2-2-2 montre qu'il n'en est rien en général, donc qu'une transformation de $\widehat{LL}^2$ ne peut en général pas être réalisée par un bimorphisme.

Nous avions généralisé la notion de 1-morphisme à celle de k-morphisme pour rendre compte de $\widehat{TI}^2 = \widehat{TI}^3$. Peut-on rendre compte de $\widehat{LL}^2 = \widehat{LL}^3$ par une nouvelle généralisation ? Non, car si on regarde de prés, on voit que le fait qu'un morphisme conserve la reconnaissabilité des langages de branches tient à la notion même de morphisme (compatibilité avec les opérations sur les arbres) et l'objection faite ci-dessus persiste donc. En fait, nous allons ici généraliser non pas la classe de morphismes mais celle de forêts. Nous avions vu en (I-2-1-4) l'intérêt des classes de forêts raisonnables, et les "dangers d'en sortir" ; nous allons néanmoins ici introduire des classes de forêts loin d'être raisonnables, mais dont nous verrons qu'elles ont tout de même de bonnes qualités !

Définitions :

1) IDRL abrégera la classe des forêts qui sont Intersections de Deux forêts de la classe Rat Lin.
La classe Rat. Lin. étudiée dans (A) désigne l'ensemble
$\{\phi_{[\nu]}(K) | \phi$ est un morphisme linéaire, K une forêt reconnaissable$\}$

(la restriction par ν sur les fibres ne modifie en rien le fond des choses)
On a donc :
$F \in$ IDRL $\iff \exists\ \nu \in N$, ϕ et ϕ' linéaires, K et K' $\in$ Rec, tels que
$F = \phi_{[\nu]}(K) \cap \phi'_{[\nu']}(K')$

2) Nous définissons
MIDRL $= \{\phi_{[\nu]}(F) | F \in$ IDRL, ϕ linéaire$\}$

3) Rappel : DL désigne la classe $B(\text{dem}, \text{Rec}^{\otimes}, 1)$ (voir II-2-3-6).
LD désignera évidemment la classe $B(1, \text{Rec}^{\otimes}, \text{dem})$

4) Nous appelerons **quasi-bimorphisme** tout quintuplet $(\mu, \phi, F, \Psi, \nu)$ où μ et $\nu \in N$, ϕ et Ψ sont des morphismes linéaires et $F \in$ IDRL (les quasi-bimorphismes généralisent les bimorphismes car F non raisonnable). La classe des quasi-bimorphismes sera désignée par QB.
On a les mêmes classifications de type que pour les bimorphismes.///

Le théorème 9 montrera alors que $\widehat{LL}^2 = \widehat{QB}$

II-2-4-2 Les résultats

Théorème 8 : $\widehat{LL} \neq \widehat{LL}^2 = \widehat{LL}^3 = \widehat{DL} \circ \widehat{LD}$

Preuve : $\widehat{LL} \neq \widehat{LL}^2$ a été prouvé en II-2-2-2.

1er Point : Soit $B = (1, \sigma, K, \Psi, 1) \in LL$. Construisons $B_1 \in DL$ et $B_2 \in LD$ tels que $\widehat{B} = \widehat{B_1} \circ \widehat{B_2}$.

Si ϕ est un morphisme de Γ dans Σ et Ψ de Γ dans Δ, posons

$B_1 = (\delta, K_1, \phi', 1)$ avec :

$K_1 = \alpha(K, T(\Sigma)_o^1, T(\Delta)_o^1)$ (α est un nouveau symbole)

$\delta\alpha(x, y, z) = y$, δ est l'identité ailleurs.

ϕ' est tel que, pour tout $t, u, v \in T_o^1$,

$\phi'_{[1]}\alpha(t,u,v) = \beta(t, \phi_{[1]}(t), u,v,v)$

Il est facile de construire un morphisme ϕ' tel. ϕ' peut de plus être pris k+1 linéaire si ϕ est k-linéaire.

On construit de même $B_2 = (1, \Psi', K_2, \delta)$ avec :

$K_2 = \alpha(K, T(\Delta)_o^1, T(\Sigma)_o^1)$

δ déjà défini pour B_1

Ψ' est le k'+1 morphisme linéaire (si Ψ est un k'-morphisme) tel que ; pour tout $t', u', v' \in T_o^1$,

$\Psi'_{[1]}\alpha(t',u',v') = \beta(t',v',v',\Psi_{[1]}(t'), u')$

Reste à prouver que $\widehat{B} = \widehat{B_1} \circ \widehat{B_2}$

$(u,u') \in \widehat{B_1} \circ \widehat{B_2} \iff \exists \alpha(t,u,v) \in K_1,\ \alpha(t',u',v') \in K_2$
tels que $\phi'_{[1]}\alpha(t,u,v) = \Psi'_{[1]}\alpha(t',u',v')$

$\iff \exists t$ et $t' \in K$, v et v' tels que

$\beta(t, \phi_{[1]}(t), u, v, v) = \beta(t', v', v', \Psi_{[1]}(t'), u')$

$\iff \exists\ t$ et $t' \in K$, v et v' tels que

$t = t'$, $\phi_{[1]}(t) = u = v'$, $\Psi_{[1]}(t') = u' = v$

$\iff \exists\ t \in K$ tel que $\phi_{[1]}(t) = u$ et $\Psi_{[1]}(t) = u'$

$\iff (u, u') \in \widehat{B}$

<u>2ème Point</u> Soit $B \circ B' \circ B'' \subset \widehat{LL}^3$.

D'après (I-2-2-3), on peut toujours supposer que B' est comme dans le premier point. On déduit alors de ce premier point que $B' \subset \widehat{DL} \circ \widehat{LD}$ donc que $B \circ B' \circ B'' \subset \widehat{LL} \circ \widehat{DL} \circ \widehat{LD} \circ \widehat{LL}$.

Les lemmes 4 de permutation nous donnent aisément $\widehat{LL} \circ \widehat{DL} \subset \widehat{LL}$ et $\widehat{LD} \circ \widehat{LL} \subset \widehat{LL}$ d'où $B \circ B' \circ B'' \subset \widehat{LL}^2$ et finalement $\widehat{LL}^3 \subset \widehat{LL}^2$.

<u>3ème Point</u> Soit B et B' comme dans le point 1 (avec les restrictions à la première composante). Ce point 1 nous assure que $B \circ B' \subset \widehat{DL} \circ \widehat{LD} \circ \widehat{DL} \circ \widehat{LD}$ et, en appliquant successivement les lemmes 4 de permutation et le point 1, on obtient $B \circ B' \subset \widehat{DL} \circ \widehat{LL} \circ \widehat{LD} \subset \widehat{DL} \circ \widehat{DL} \circ \widehat{LD} \circ \widehat{LD} \subset \widehat{DL} \circ \widehat{LD}$.
Ce résultat s'étend facilement au cas ou B et B' ont des restrictions de fibres quelconques. D'où $\widehat{LL}^2 \subset \widehat{DL} \circ \widehat{LD}$.

C.Q.F.D.

<u>Théorème 9</u> : $\widehat{LL}^2 = \widehat{QB}$

<u>Preuve</u> :

<u>1er point</u> Soit ϕ et ϕ' deux morphismes linéaires, respectivement de Σ dans Γ et de Δ dans Γ.

Nous associons à ϕ et ϕ' :

$F = \alpha(T(\Sigma)^1_o, T(\Delta)^1_o)$ (α nouveau symbole)

h, morphisme linéaire tel que :

$h_{[1]}(\alpha(t,u)) = \alpha(t,\phi_{[1]}(t),u)$

Il est facile de construire un tel h - nous le laissons au lecteur)

h', morphisme linéaire tel que :

$h'_{[1]}(\alpha(t',u)) = \alpha(u', \phi'_{[1]}(t'), (t'))$ δ le démarquage tel que

$\delta(\alpha(x,y,z)) = x$, l'identité ailleurs

δ' le démarquage tel que

$\delta'(\alpha(x,y,z)) = z$, l'identité ailleurs

Considérons maintenant le quasibimorphisme $Q = (\delta, h_{[1]}(F) \cap h'_{[1]}(F'), \delta')$

et montrons que $Q \widehat{=} \phi_{[1]} \circ \phi'^{-1}_{[1]}$

$(t,t') \in \widehat{Q} \iff \exists\ \omega = \alpha(t,u,t') \in h_{[1]}(F) \cap h'_{[1]}(F')$

$\iff \exists$ u tel que $u = \phi_{[1]}(t) = \phi'_{[1]}(t')$

$\iff (t,t') \in \widehat{\phi_{[1]}} \circ \widehat{\phi'_{[1]}}^{-1}$

ce qui achève la preuve.

2ème Point Soit maintenant $B_1 \circ B_2 \in LL^2$

avec $B_1 = (\nu, \Psi, K, \phi, \mu)$ et $B_2 = (\mu', \phi', K', \Psi', \nu')$.

D'après (I-2-2-3), on peut supposer $\mu = \mu' = 1$. On a alors

$\widehat{B}_1 \circ \widehat{B}_2 = \Psi_{[\nu]}^{-1} \circ \rho_K \circ \phi_{[1]} \circ \phi'^{-1}_{[1]} \circ \rho_{K'} \circ \Psi'_{[\nu']}$

D'après le point 1, il existe δ, h, F, F', h', δ' tels que

$\phi_{[1]} \circ \phi'^{-1}_{[1]} = \delta^{-1} \circ \rho_{h_{[1]}(F) \cap h'_{[1]}(F')} \circ \delta'$

d'où $\widehat{B}_1 \circ \widehat{B}_2 = (\delta \circ \Psi)^{-1}_{[\nu]} \circ \rho_{h_{[1]}(F) \cap h'_{[1]}(F') \cap \delta^{-1}(K) \cap \delta'^{-1}(K')} \circ (\delta' \circ \Psi')_{[\nu']}$

or, $h_{[1]}(F) \cap h'_{[1]}(F') \cap \delta^{-1}(K) \cap \delta'^{-1}(K') = h_{[1]}(F) \cap h'_{[1]}(F' \cap h'^{-1}_{[1]}(\delta^{-1}(K) \cap \delta'^{-1}(K')))$

appartient à IDRL (car $F' \cap h'^{-1}_{[1]}(\delta^{-1}(K) \cap \delta'^{-1}(K'))$ est reconnaissable).

Nous en déduisons $\widehat{B_1} \circ \widehat{B_2} \subset \widehat{QB}$ soit $\widehat{LL}^2 \subset \widehat{QB}$

3ème Point Montrons l'inclusion inverse, c'est à dire que $\widehat{LL}^2 \supset \widehat{QB}$

Soit pour cela $Q = (\nu, \phi, h_{[\nu]}(F) \cap h'_{[\nu]}(F'), \phi', \nu')$ un quasibimorphisme.

Supposons que $\{(t,t) \mid t \in h_{[\nu]}(F) \cap h'_{[\nu]}(F')\} \in \widehat{LL}^2$

On en déduit alors que $\widehat{Q} \subset \phi^{-1} \circ \widehat{LL}^2 \circ \phi' \subset \widehat{LL}^4 = \widehat{LL}^2$.

Le résultat serait alors établi. Il nous reste donc à montrer que $\{(t,t) \mid t \in h_{[\nu]}(F) \cap h'_{[\nu]}(F')\} \subset \widehat{LL}^2$.

Pour cela, considérons $G = \alpha.(T(\Sigma)^1_o, F, F')$

Soit f le morphisme linéaire tel que

$f_{[1]}\ \alpha(u,t,t') = \alpha(u,\ h_{[\nu]}(t),\ h'_{[\nu]}(t'))$,

δ tel que $\delta\alpha(x,y,z) = x$ et δ = identité ailleurs.
et g tel que $g_{[1]}(u) = \alpha(u,u,u)$

On a alors

$(u,u') \in (\delta,\ G,\ f,\ 1) \circ g_{[1]}^{-1}$

$\Longleftrightarrow \exists\ t,t'$ tq $f_{[1]}(\alpha(u,t,t')) = g_{[1]}(u')$ et $t \in F,\ t' \in F'$

$\Longleftrightarrow \exists\ t,t'$ tq $\alpha(u,h_{[\nu]}(t),h'_{[\nu]}(t')) = \alpha(u',u',u')$ et $t \in F,\ t' \in F'$

$\Longleftrightarrow \exists\ t,t'$ tq $u = u' = h_{[\nu]}(t) = h'_{[\nu]}(t')$ et $t \in F,\ t' \in F'$

$\Longleftrightarrow u = u' \in h_{[\nu]}(F) \cap h'_{[\nu]}(F')$

Autrement dit,

$\{(u,u) \mid u \in h_{[\nu]}(F) \cap h'_{[\nu]}(F')\} \triangleq (\delta,\ G,\ f,\ 1) \circ g_{[1]}^{-1} \in \widehat{LL}^2$

C.Q.F.D.

<u>Corollaire des théorèmes 8 et 9</u> :

La cloture par composition et inversion des bimorphismes semi-linéaires $\widehat{DL}$ est la classe des quasi-bimorphismes $\widehat{QB} = \widehat{DL} \circ \widehat{LD}$.

La classe $\widehat{QB}$ est donc close par composition.

III - APPLICATIONS

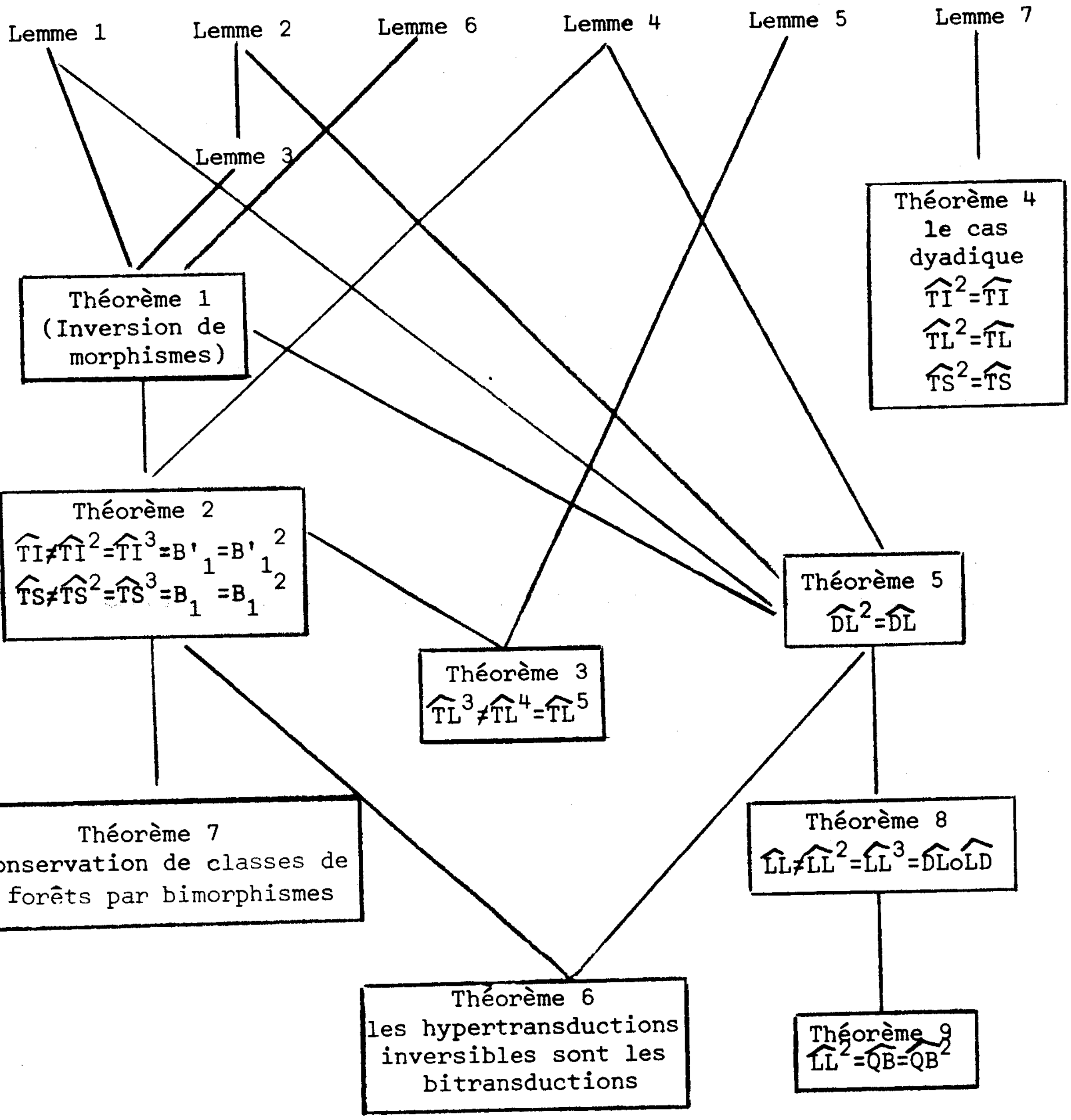
CHAPITRE III - 1

INTERPRÉTATIONS ET CONSÉQUENCES DES RÉSULTATS

III - 1 - 1 RESUME DES PRINCIPAUX RESULTATS :

Nous donnons dans la page qui suit un tableau synoptique la seconde partie de cette thèse.
Anticipant sur les théorèmes 1 et 2 de III-1-2, nous donnons ici un résumé des propriétés des principales classes de forêts vis à vis des principales classes de bimorphismes.

Les classes Rec, Rat lin, Alglin et MIDRL sont closes par $\widehat{TL}$, donc par $\widehat{TI}$, $\widehat{TS}$ et bitransduction.
Les classes Rec, Rat lin, Alglin et MIDRL sont closes par morphisme linéaire séparé, morphisme linéaire séparé inverse et intersection avec Rec.
La classe Rat lin est close par $\widehat{DL}$.
La cloture de Rec par morphisme linéaire, morphisme linéaire inverse et intersection avec Rec est la classe MIDRL.
Cette classe est close par union, intersection (et évidemment quasi-bimorphisme).


Lemme 1
Lemme 2
Lemme 6
Lemme 4
Lemme 5
Lemme 7
Lemme 3
Théorème 1 (Inversion de morphismes)
Théorème 4 le cas dyadique
$\widehat{TI}^2=\widehat{TI}$
$\widehat{TL}^2=\widehat{TL}$
$\widehat{TS}^2=\widehat{TS}$
Théorème 2
$\widehat{TI}\neq\widehat{TI}^2=\widehat{TI}^3=B'_1=B'^2_1$
$\widehat{TS}\neq\widehat{TS}^2=\widehat{TS}^3=B_1=B^2_1$
Théorème 5
$\widehat{DL}^2=\widehat{DL}$
Théorème 3
$\widehat{TL}^3\neq\widehat{TL}^4=\widehat{TL}^5$
Théorème 7
Conservation de classes de forêts par bimorphismes
Théorème 8
$\widehat{LL}\neq\widehat{LL}^2=\widehat{LL}^3=\widehat{DL}o\widehat{LD}$
Théorème 6
les hypertransductions inversibles sont les bitransductions
Théorème 9
$\widehat{LL}^2=\widehat{QB}=\widehat{QB}^2$

III - 1 - 2 LA CLASSE DES FORETS M I D R L :

III-1-2-1 Propriétés de cloture

Théorème 1 :

1 - La classe MIDRL est la cloture de la classe des forêts reconnaissables par morphismes linéaires, morphismes linéaires inverses et intersection avec les forêts reconnaissables.

2 - L'image par morphisme linéaire de trois (ou d'un nombre quelconque de) Rat-lin est dans MIDRL.

3 - La classe MIDRL est close par union et intersection.

Preuve :

1 - est conséquence des théorèmes 8 et 9 de III.
En effet, comme QB est la cloture par composition de LL, il suffit d'établir que MIDRL = (Rec) QB.
Par définition de QB, on a MIDRL $\subset$ (Rec) QB. Inversement, remarquons qu'une forêt de Rec(QB) est de la forme $\phi^{-1}(K) \cap h\ (f(F) \cap f'(F'))$ qui s'écrit encore $h(f(F) \cap f'(F') \cap h^{-1}\ \phi^{-1}(K\ )$.

Or, $h^{-1}\ \phi^{-1}(K)$ est, comme K, reconnaissable. On sait que Rat-lin est close par intersection avec Rec.
Donc $f'(F') \cap h^{-1}\ \phi^{-1}(K) \in$ Rat-lin d'où le résultat

2 - Soit $F = \phi_1(K_1) \cap \phi_2(K_2) \cap \phi_3(K_3)$. Montrons que $F \in$ MIDRL.

Soit $K = \alpha(K_1, K_2, K_3)$ où on distingue éventuellement les alphabets de K_1, K_2, K_3.
Il existe un morphisme linéaire f tel que
$f_{[1]}\alpha(t_1, t_2, t_3) = \alpha(\phi_1(t_1), \phi_2(t_2), \phi_3(t_3))$
Soit g un autre morphisme linéaire tel que :
$g_{[1]}(t) = \alpha(t, t, t)$.
Il est facile de voir qu'on a alors
$F = (K)\ f_{[1]} \circ g_{[1]}^{-1}$ d'où $F \in$ MIDRL (d'après 1-)

On en déduit que pour tout h linéaire, $h(F) \in$ MIDRL, ce qui prouve 2.

3 - Soit $F = h(f_1(K_1) \cap f_2(K_2))$ et F' deux forêt de MIDRL

$F \cap F' = h(f_1(K_1) \cap f_2(K_2) \cap h^{-1}(F'))$

$h^{-1}(F') = F'' \in$ MIDRL (d'après 1).

$f_2(K_2) \cap F'' = f_2(K_2 \cap f_2^{-1}(F'')) \in$ MIDRL (d'après 1)

de même, $f_1(K_1) \cap (f_2(K_2) \cap F'') \in$ MIDRL d'où $F \cap F' \in$ MIDRL.

Pour la réunion, remarquons d'abord que la classe $\widehat{LL}$ est close par réunion. En effet, soit (ϕ, K, Ψ) et $(\phi', K', \Psi') \in \widehat{LL}$. On peut toujours supposer K et K' définis sur des alphabets disjoints et considérer ϕ'' tel que $\phi'' = \phi$ sur K et $\phi'' = \phi'$ sur K'. De même pour Ψ''. En posant $K'' = K \cup K' \in$ Rec, on a bien $(\phi, K, \Psi) \cup (\phi' K', \Psi') = (\phi'', K'', \Psi'')$. Comme MIDRL $= LL^2$(Rec), on en déduit que MIDRL est close par union.

C.Q.F.D.

III-1-2-2 Propriétés génératives

Théorème 2 :

1 - Les langages de branches des forêts de MIDRL sont tous les langages récursivement énumérables. De même, les feuillages sont tous les langages récursivement énumérables.

2 - La classe MIDRL contient strictement toutes les forêts de Alg lin (donc toutes les algébriques).

III-2-2-2-1 Preuve de la première partie du théorème 2 :

Soit L un langage récursivement énumérable. Soit R un système de règles de réécriture (V étant l'alphabet de variables et Σ l'alphabet terminal) engendrant L.

Appelons $u_1 \to v_1, \ldots u_n \to v_n$ les règles de R. On introduit les alphabets marqués $\bar{\Sigma}$, $\bar{V}$, $\bar{\bar{\Sigma}}$, les nouveaux symboles $\to$ et $\neq$.

Nous associons ainsi à R le langage reconnaissable K défini par :

$$K=\{S \to \bar{v}_{i_1} \neq m_2 \bar{u}_{i_2} n_2 \to m'_2 \bar{v}_{i_2} n'_2 \neq \ldots \neq m_p \bar{u}_{i_p} n_p \to m'_p \bar{v}_{i_p} n'_p$$

$$\neq m_{p+1} \bar{u}_{i_{p+1}} v_{p+1} \to \ldots \to \bar{\bar{m}}'_q \bar{\bar{v}}_{i_q} \bar{\bar{n}}'_q$$

où S est l'axiome de R, $(u_{i_j} \to v_{i_j}) \in R$, $q \in N$ }

Un mot de K est une dérivation dans R ssi

$\forall\ p \leq q,\ m_p = m'_p,\ n_p = n'_p$ et $m'_p\ v_{i_p}\ n'_p = m_{p+1}\ u_{i_{p+1}}\ n_{p+1}$

Cette dérivation est alors nécessairement terminale (puisque seul Σ est marque en $\bar{\bar{\Sigma}}$).

K peut également être considéré comme une forêt reconnaissable monadique.

Soit alors ϕ un S morphisme linéaire tel que

$$\phi \begin{array}[t]{c} S \\ \downarrow \\ \bar{v}_{i_1} \\ \neq \\ m_2 \\ \bar{u}_{i_2} \\ n_2 \\ \downarrow \\ \vdots \\ \neq \\ m_p \\ \bar{u}_{i_p} \\ n_p \\ \downarrow \\ m'_p \\ \bar{v}_{i_p} \\ n'_p \\ \neq \\ m_{p+1} \\ \bar{u}_{i_{p+1}} \\ n_{p+1} \\ \downarrow \\ \vdots \\ \underline{\downarrow} \\ \bar{\bar{m}}'_q \\ \bar{\bar{v}}_{i_q} \\ \bar{\bar{n}}'_q \end{array} = < \begin{array}[t]{c} v_{i_1} \\ \neq \\ \vdots \\ \neq \\ m'_p \\ v_{i_p} \\ n'_p \\ \neq \\ \vdots \\ \neq \\ m'_{q-1} \\ v_{i_{q-1}} \\ n'_{q-1} \\ \neq \end{array} , \begin{array}[t]{c} m_2 \\ u_{i_2} \\ n_2 \\ \neq \\ \vdots \\ \neq \\ m_{p+1} \\ u_{i_{p+1}} \\ n_{p+1} \\ \neq \\ \vdots \\ \neq \\ m_q \\ u_{i_q} \\ n_q \\ \neq \end{array} , \begin{array}[t]{c} m_2 \\ \not{b} \\ n_2 \\ \neq \\ \vdots \\ \neq \\ m_p \\ \not{b} \\ n_p \\ \neq \\ \vdots \\ \neq \\ m_q \\ \not{b} \\ n_q \end{array} , \begin{array}[t]{c} m'_2 \\ \not{b} \\ n'_2 \\ \neq \\ \vdots \\ \neq \\ m'_p \\ \not{b} \\ n'_p \\ \neq \\ \vdots \\ \neq \\ m'_q \\ \not{b} \\ n'_q \end{array} , \begin{array}[t]{c} m'_q \\ v_{i_q} \\ n'_q \end{array} >$$

et Ψ un 2 morphisme linéaire tel que

$\Psi\ \alpha(t, u, v) = < t, t, u, u, v >$

(La construction de ϕ et Ψ sont laissées au lecteur).

Soit enfin le démarquage π tel que

$\pi\ \alpha(t, u, v) = v$

Soit $T = (K, \phi) \circ (\Psi, \pi) \in DL \circ LD$.

Il est facile de vérifier que $(t,u) \in \widehat{\mathcal{T}}$ ssi t est une dérivation du u dans R. Finalement, on a $\mathcal{T}(K) = L$, où L est considéré comme une forêt monadique. L est donc égal à son langage de branches, et on a bien répondu au premier point, car $L = \mathcal{T}(K) \in$ MIDRL (théorème 1).
Soit maintenant le 1-morphisme linéaire tel que :

$\forall\, a \in \Sigma_1,\ \phi\, a(x) = a'(a,x)$

$\forall\, a \in \Sigma_o,\ \phi(a) = a$

Il est immédiat que $\phi(L)$ a pour feuillage L.

D'après le théorème 1, $\phi(L) \in$ MIDRL

C.Q.F.D.

III-1-2-2-2 Un lemme

Définition: Soit Σ un alphabet gradué donné. On lui associe l'alphabet $\bar{\Sigma}$ où toute lettre $a(x_1,\ldots, x_n)$ de Σ devient $a(x_1)$ et Σ_o reste inchangé. Atout langage L de $\bar{\Sigma}^*$ on associe la forêt $\mathcal{B}(L)$ de $T(\Sigma)^1_o$ par :

$\mathcal{B}(L) = \{\ t \in T(\Sigma)^1_o \mid$ toute branche de $t \in L\ \}$

$\mathcal{B}(L)$ est la forêt de branchage L, c'est "l'ensemble de tous les arbres dont les branches appartiennent à L".

Lemme :
Soit Σ un alphabet gradué donné. Il existe une transformationn $\mathcal{C}$ de $\mathcal{QB}$ qui, à tout arbre t, associe bijectivement un arbre monadique formé de la suite des branches de t, ordonnées selon un ordre canonique et séparées 2 à 2 par un marqueur.

Preuve :
I) Soit t un arbre de $T(\Sigma)^1_o$. On peut ordonner complétement l'ensemble de ses branches par :

$b \le_t b'$ ssi - il existe une branche initiale c, une lettre α, deux sous-branches finales b_1 et b'_1 telles que

- $b = c\ \alpha\ b_1,\ b' = c\ \alpha\ b'_1$

- dans t, b et b' ont $c\,\alpha\, b'_1$ comme plus grande sous branche initiale commune, b_1 est $i^{\text{ème}}$ successeur de α, b'_1 est $j^{\text{ème}}$ successeur de α dans t, et $j \geq i$.

II) Soit G la forêt définie comme suit :

G est l'ensemble des arbres t de $T(\Sigma)_o^1$, où deux branches **immédiatement** successives (au sens de $\underset{t}{\leq}$ défini ci-dessus) sont marquées (différemment pour les 2). Ainsi, à tout $t \in G$, on peut associer g(t) et d(t) qui en sont les 2 branches marquées (avec $g(t) < d(t)$)

De même, G_I est l'ensemble des arbres où la plus petite branche est marquée. G_F est l'ensemble des arbres où la plus grande branche est marquée (ordre au sens de I) toujours).

Ainsi, à tout $t \in G_I$, on associe g(t) et à tout $t \in G_F$, on associe d(t). Il est facile de voir que G, G_I et G_F sont reconnaissables.

Enfin, on considère G' la forêt des arbres ayant une branche marquée.

III) Soit $F_1 = \{\bar{\alpha}(t_1, \alpha(t_2, .., \alpha(t_{n-1}, t_n))) \mid n \in N,\ t_i \in G'\}$

(α est un nouveau symbole).

F_1 est évidemment reconnaissable.

Soit δ le démarquage effaçant les marques des branches dans G' et tel que $\delta\, \bar{\alpha}\,(x, y) = x$.

Soit ϕ le 2 morphisme linéaire défini par :

$$\phi\, \bar{\alpha}(x, y) = < \alpha(x_1, y_1, y_2), \neq >$$

$$\phi\, \alpha(x, y) = < \alpha(x_1, y_1, y_2), x_2 >$$

ϕ tel que $\phi(t) = <t,t>$ sur $T(\Sigma)_o^1$ (construction déjà vue)

ϕ est donc tel que :

```
φ          ᾱ                  <       α       ,      ≠        >
          /|                         /|\
      t1  α          →           t1  α  t2
          /|                         /|\
      t2  α                      t2  α  t3
          /:                          :
      t3  α                           α
          /|                         /|\
   tn-1  tn                   tn-2  α  tn-1
                                     /|\
                              tn-1  tn  tn
```

Soit $F_2 = \{\alpha(u_1, \alpha(u_2, \ldots \alpha(u_{n-1}, u_n))\ldots) \mid u_1 \in G_I$

$u_n \in G_F$, les autres $u_i \in G$ }

F_2 est également reconnaissable.

Il est facile de construire un 2-morphisme linéaire Ψ tel que :

$$\Psi \quad \begin{array}{ccc} & \alpha & \\ u_1/ & | & \\ & \alpha & \\ u_2/ & | & \\ & \alpha & \\ u_3/ & | & \\ & \vdots & \\ & \alpha & \\ u_{n-1}/ & | & \\ & u_n & \end{array} \quad = \quad < \quad \begin{array}{ccc} & \alpha & \\ u_1/ & | & \backslash u_1^g \\ & \alpha & \\ u^g_2/ & | & \backslash u_2^d \\ & \alpha & \\ u^g_3/ & | & \backslash u_3^d \\ & \vdots & \\ & \alpha & \\ u^g_{n-1}/ & | & \backslash u_n \\ & u^d_{n-1} & \end{array} \quad , \quad \neq \quad >$$

(Ψ est construit en s'inspirant de ϕ et en effaçant certaines marques de branches. u^g signifie qu'on a gardé que la marque de la plus petite branche - "la plus à gauche" ; u^d signifie qu'on a gardé la marque que de la plus grande branche - "la plus à droite").

Soit $F_3 = \{ u_1.u_2\ldots u_n \mid u_1 \in G_I, u_n \in G_F, u_i \in G \}$

où u_{i+1} est substitué à l'extrémité de la branche marquée la plus à droite de u_i. Le sommet de u_{i+1} est de plus marqué de cette extrémité).

Il est alors facile de construire un 2-morphisme linéaire Ψ' tel que :

$\Psi' \, (u_1.u_2\ldots u_n) = \alpha(u_1, \alpha(u_2, \ldots \alpha(u_{n-1}, u_n)\ldots))$

Il suffit pour cela de recopier sur la première composante et de suivre sur l'autre, sans rien recopier, la branche marquée la plus à droite. Ce détail est laissé au lecteur.

Soit enfin h un 1-morphisme linéaire qui dans un arbre sélectionne la branche marquée la plus à droite et fait précéder son sommet d'un $\neq$.
Il faut pour cela avoir pris la précaution, en marquant les branches dans G, G', G_I et G_F, de marquer chaque noeud de branche marqué du rang

de son successeur appartenant à la branche. h ne fait alors qu'effacer les marques et les arités inutiles.

Soit $\mathcal{C} = (\delta, F_1, \phi) \circ (\Psi, F_2, \mathrm{id}) \circ (\Psi', F_3, h) \in \mathcal{QB}$

IV) $\mathcal{C}$ associe à un arbre quelconque un arbre monadique constitué de l'ensemble de ses branches (séparées par des symboles distingués).
En effet, soit un arbre $t \in T(\Sigma)^1_o$

$\delta^{-1}(t) \cap F_1$ est l'ensemble des arbres de F_1où $t_1 = t$.

(au marquage près d'une branche)

D'autre part, $\phi(u) = \Psi(v)$ ssi

$v = \alpha(u_1, \alpha(u_2, \ldots \alpha(u_{n-1}, u_n) \ldots))$ avec :

- u_1 est t avec la branche la plus à gauche marquée

- u_{i+1} est u_i au marquage près avec, dans u_{i+1}, la branche marquée la plus à guache qui est celle marquée la plus à droite dans u_i

- u_n est t avec la branche la plus à droite marquée.

Finalement, comme dans un u_i ce sont deux branches immédiatement successives qui sont marquées (au sens de l'ordre $\leq t$), $(\delta, F_1, \phi) \circ (\Psi, F_2)$ associe à t l'arbre $\alpha(u_1, \alpha(u_2, \ldots \alpha(u_{n-1}, u_n) \ldots))$ où la branche la plus à droite marquée de u_i est la $i^{\text{ème}}$ branche de t.

(Ψ', F_3, h) met pour finir bout à bout ces branches.

Finalement, $\mathcal{C}$ réalise bien la transformation indiquée.
Le caractère bijectif est évident.

C.Q.F.D.

III-1-2-2-3 Preuve de la deuxième partie du théorème 2 :

Soit L un langage récursivement énumérable. Associons lui le langage $L^{\neq}$ récursivement énumérable constitué des suites de mots de L, séparés par des $\neq$. $L^{\neq}$ peut être considéré comme une forêt monadique. On a alors

$\mathcal{C}^{-1}(L^{\neq}) = \mathcal{B}(L)$.

D'après la partie 1 du théorème, L $\in$MIDRL donc $\mathcal{B}(L) \in$ MIDRL.

D'autre part, on sait [11] que toute forêt algébrique est de la forme $\phi(D_n \cap K)$ où ϕ est un 1-morphisme linéaire, K une forêt reconnaissable et D_n est une forêt de Dyck, c'est à dire une forêt de la forme $\mathcal{B}(D)$, où D est un langage de Dyck.

Tout langage de Dyck étant récursivement énumérable, on a donc, d'après ce qui précéde, toute forêt de Dyck dans MIDRL. D'après le théorème 1 et le théorème de Chomsky-Schützenberger pour les forêts algébriques [11], on a bien toute forêt algébrique , donc, par k-morphisme linéaire, toute forêt de Alg lin, incluse dans MIDRL.

Par contre, il est évident que les forêts de D_n, pour $n \geq 3$, définies dans [19], ne sont pas dans MIDRL.

Enfin, la partie 1 du théorème montre bien qu'il existe des forêts de MIDRL qui ne sont pas dans Alg lin.

C.Q.F.D.

III - 1 - 3 RETOUR AUX TRANSDUCTEURS D'ETATS FINIS :

Dans le cas des langages, la notion de bimorphisme est née de l'étude des transductions d'états finis. Telle a été également notre démarche, commencée dans [9]. Le but est le même : partant de la notion de transducteur d'états finis, notion empiriquement immédiate mais peu adaptée à une étude mathématique, nous substituons la notion de bimorphisme, décrite en termes simples. Il est normal que nous revenions ici aux transducteurs d'états finis, après avoir tant étudié les bimorphismes ! Nous faisons ce retour - informel - en quelques remarques.

III-1-3-1 Les autres travaux

B. Baker [19] avait commencé à étudier les décompositions de transductions d'états finis en termes de morphismes et morphismes inverses (morphismes classiques bien sûr, c'est àdire 1-morphisme en notre sens). Ce travail a été approfondi dans [51] par J. Engelfriet. On trouvera dans ce dernier article tout ce qui a été fait sur le sujet.

Les principaux résultats sont (dans notre formalisme)

TA $\hat{=}$ (démarquage propre, Rec, 1-morphisme)

TA 1 (= TA linéaire) $\hat{=}$ (dem. propre, Rec, 1-morphisme linéaire)

TD $\subsetneq$ { ϕ o (δ, K, Ψ) | ϕ et Ψ sont des 1-morphismes,

K $\in$ Rec, Ψ est linéaire, δ démarquage }

T'FST = classe ci-dessus

(les T'FST sont des TD qui "vérifient des contraintes même sur ce qu'ils ne lisent pas")

GFST = { ϕ o (δ, K, Ψ) | ϕ et Ψ sont des 1 morphismes

K $\in$ Rec, δ démarquage }

La classe TA 1 est close par composition.

D'autre part, Thatcher et Goguen [58] avaient introduit une notion équivalente à celle de k-morphisme, partant de la notion de transducteur déterministe. Malheureusement, ils ne laissèrent cette idée que sous forme de remarque, leur formalisme ne permettant semble-t-il pas de développement à cette idée (difficultés à définir la composition, etc...)

III-1-3-2 Sur la forme des bimorphismes ci-dessus

On remarque que les seuls morphismes inverses apparaissant dans [58] sont des démarquages propres.

La raison en est que, grosso modo, les images des morphismes "gauches" ont la forme des parties gauches des règles, et de même à droite. Comme dans les transducteurs d'états finis, la partie gauche des règles appartient à l'alphabet (hormis les états), il est normal que les morphismes "gauches" (c'est à dire ceux qui sont inversés) des bimorphismes soient des démarquages propres. Pour être précis, donnons la construction qui prouve que tout TA est équivalent à un (δ, K, ϕ) où δ est un démarquage propre, $K \in Rec$ et ϕ est un 1-morphisme :

à toute règle $r : a(q_{i_1}[x_1],\ldots, q_{i_n}[x_n]) \to q[t(x_{j_1},\ldots, x_{j_p})]$

on associe la lettre $a_r(x_1,\ldots x_n)$ et

$\delta\ a_r(x_1,\ldots, x_n) = a(x_1,\ldots x_n)$

$\phi\ a(x_1,\ldots x_n) = t(x_{j_1},\ldots x_{j_p})$

et K est la forêt reconnue par l'automate dont les règles sont les

$a_r(q_{i_1}[x_1],\ldots, q_{i_n}[x_n]) \to q[a_r(x_1,\ldots x_n)]$

associées aux règles du transducteur.

Si le transducteur est linéaire, ϕ est bien linéaire.
On voit bien ici les rôles de δ, K et ϕ.
δ assure le non déterminisme, K le contrôle des états et ϕ la transformation.

III-1-3-3 Bimorphismes et généralisations des transductions d'états finis

Nous venons de remarquer la forme très dissymétrique des bimorphismes associés aux transducteurs classiques. Ceci tient au caractère très dissymétrique de ces transducteurs eux-mêmes (contrairement à ce qui se passe dans les langages).

Voyons comment on peut passer d'un bimorphisme (ϕ, K, Ψ) où ϕ et Ψ sont des 1-morphismes, à une notion plus générale de transducteur ascendant. Dans le cas où ϕ est un démarquage propre, on obtient l'inclusion inverse de celle construite en III-1-3-2 par la construction suivante.

Soit K reconnaissable sur Σ. A toute règle de reconnaissance

$a(q_1\,[x_1],\,..\,q_n\,[x_n]) \to q[a(x_1,..\,x_n)]$

de K, on associe la règle de transduction ascendante :

$\delta\ a(q_1[x_1],..\,q_n[x_n]) \to q[\phi(a)]$

Cette construction se généralise si δ n'est pas un démarquage.

Si on considère alors

$\delta\ a(x_1,..\,x_n) = t(x_{i_1},\ldots,x_{i_p})$, et

$\phi\ a(x_1,..\,x_n) = u(x_{j_1},\ldots,x_{j_q})$,

on prend les règles ascendantes

$t(q_{i_1}[x_{i_1}],\ldots,q_{i_p}[x_{i_p}]) \to q[u(\alpha_1,\ldots,\alpha_q)]$

où : $\alpha_k = x_{j_k}$ si x_{j_k} apparait dans $\delta\ a(x_1,..\,x_n)$ et sinon

$\alpha_k = F_{q_{j_k}}$ où F_q est la forêt reconnaissable reconnue par l'automate

de K avec q comme état final.

On peut définir le fonctionnement du transducteur T ainsi obtenu de la même façon que pour les transducteurs ascendants classiques, mais on remarque que :

- si δ est non complet, T génère une forêt reconnaissable (en général infinie) à la seule lecture d'une lettre
- si δ non strict, T génère une forêt reconnaissable sans rien lire.

Ces cas se présentent d'ailleurs dans le cas des transductions de langages.

- si δ non linéaire, la règle de T ne peut être appliquée qu'en "testant des égalités".

Il faut vérifier que les arbres substitués à plusieurs occurrences gauches d'une même variable sont égaux.

T ainsi défini réalise la même transformation que le bimorphisme donné.

Mais il est à remarquer que, en partie gauche de chaque règle, les occurrences d'une même variable sont toujours marquées d'un **même** état. Inversement, la donnée d'un système de règles généralisées comme ci-dessus devra satisfaire cette condition pour s'interpréter en termes de bimorphismes.

Nous avons ainsi, à partir d'un bimorphisme symétrique introduit un transducteur dont le fonctionnement est "symétrisé" : T teste des égalités comme il en génére il "réécrit sans lire" comme il peut "lire sans réécrire"......

III-1-3-4 k-morphismes et transducteurs descendants

Si ϕ et Ψ sont des k-morphismes, on ne peut plus interpréter en termes de transducteurs ascendants. Par contre, la construction suivante associe un **transducteur descendant déterministe à k états à tout k-morphisme :**

à $\phi a(x_1,.., x_n) = <\tilde{t}_1.\theta_1,... \tilde{t}_k.\theta_k>$

On associe, pour tout $i \in [k]$, les règles

$q_i[a(x_1,.. x_n)] = \tilde{t}_i(q_{j_1}[x_{k_1}],..., q_{j_p}[x_{k_p}])$

avec, pour tout $l \in [p]$,

$\theta_i(l) = (k_l-1) \times k + j_l$.

Prendre q_i comme état initial revient à selectionner la $i^{\text{ème}}$ composante de l'image par ϕ.

Cette idée apparait d'ailleurs, comme déjà dit, dans [58].

Inversement, à un transducteur descendant **même déterministe,** on **ne peut** pas en général associer un bimorphisme comme ci-dessus (voir dans cet ordre d'idée II-2-3-2).

Mais les résultats de [51] montre qu'un TD est toujours inclus dans le composé de deux bimorphismes.

Etant donné un transducteur descendant, on peut se demander si il est équivalent à un bimorphisme semi-linéaire (de DL). Cette propriété est décidable. La preuve est laissée au lecteur. Elle repose sur le fait que toutes les contraintes sont reconnaissables, qu'on peut alors décider si le nombre de "recopies" est borné ou non. Si il est non borné, le transducteur n'est pas équivalent à un DL, sinon, il l'est en "numérotant les occurrences des variables (on fait ainsi apparaitre un k-morphisme linéaire).

III-1-3-5 G.F.S.T., hypertransductions et adjonction de torsion

Engelfriet introduit dans [51] la classe GFST. Il est remarquable qu'il introduise empiriquement à cette occasion l'adjonction de torsion. Partant de la notion de transducteur descendant, l'auteur critique cette dernière et introduit d'abord la possibilité pour un TD de vérifier des contraintes reconnaissables sur des arbres non recopiés. Il obtient ainsi la classe T'FST. Il est remarquable également que les bimorphismes servent de guide dans cette démarche. Cette démarche aboutit aux GFST, dont la caractérisation en bimorphismes est rappelée en III-1-3-1. Or, les GFST sont grosso modo des hypertransductions de type $(2, k_1, k_2)$ (II-2-3-4-2), (c'est à dire composés de deux bimorphismes de (dem, Rec, k_i-morphisme)). Il est normal, d'après II-2-3, de les décrire par une adjonction de torsion. Ainsi, les n-hypertransductions que nous introduisons dans II-2-3 généralisent au cas n ce que sont les GFST au cas 2. Seulement, le concept d'adjonction de torsion n'étant pas dégagé dans [51], la définition des GFST est très lourde et impossible à généraliser à nos hypertransductions.

III - 1 - 4 A PROPOS DE LA COMPILATION

L'étude des transducteurs d'états finis d'arbres a été en bonne partie motivée par les "syntax-directed translators" (S.D.T. en abrégé) (voir par exemple D.F. Martin - S.A. Vere [69]). Rien d'étonnant dès lors à ce qu'il y ait des liens entre bimorphismes et S.D.T.. Néanmoins, pour montrer la large portée de nos bimorphismes, nous avons préféré en développer les applications dans un autre domaine, d'esprit un peu différent: les grammaires transformationnelles (III-2). Aussi ne ferons nous ici que donner quelques exemples et énoncer quelques résultats simples, vérifiant l'adéquation de notre formalisme aux S.D.T. soit, plus généralement, à la compilation par attribut (Lehre [102]).

Premier exemple : Le lecteur vérifiera facilement que les "syntax-directed translation schemes" ([93], [94], [110]) "sans mot vide" sont ,lorsqu'on les interpréte comme transformations d'arbres, équivalents à des bimorphismes (ϕ, K, Ψ) de la classe TI, où ϕ et Ψ sont des quasi-démarquages. En conséquence, lorsqu'on les compose (au sens des relations d'arbres) on obtient des transformations fidèles de TS (où les morphismes sont des démarquages quasi-complet). Ce résultat se prouve en utilisant les lemmes 1 (sous lemme 1-1) et 4.
Le fait que les morphismes sont des quasi-démarquages fait que nous n'avons pas de problème de chevauchement de découpage, comme le matérialise le lemme 1, et donc qu'on reste dans la classe TS, (mais non TI car on perd la complétude).
Plutôt que développer ce modèle, nous préférons ci-après donner un exemple d'un modèle plus général.

Deuxième exemple : Les "syntax-connected transductions" (S.C.T.).
Ce modèle, généralisant le précédent, est introduit par P.P. Schreiber [84].
A tout S.C.T., on peut associer un bimorphisme (ϕ, K, Ψ) où ϕ est un quasi-démarquage et Ψ est un 1-morphisme, respectivement complet, linéaire, sans torsion si Ψ est "rand-preserving", "linear", "regular".

Exemple : soit

(r_1) $S \rightarrow a\ SB\ a\ A,\ S\ a\ B\ [1,2]$

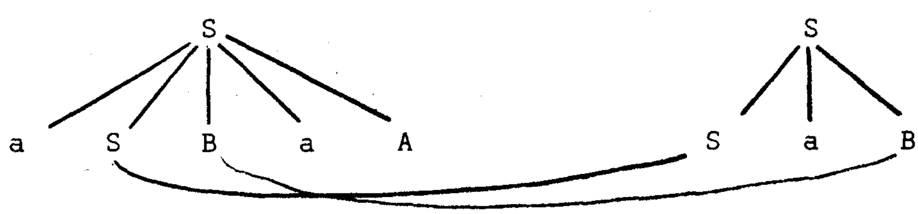
(r_2) $B \rightarrow b\ BA,\ b\ BB\ [1,1]$

$(r_3,\ r_4$ et $r_5)$ $A \rightarrow a,\ a \qquad B \rightarrow b,\ b \qquad S \rightarrow a,\ a$

S est l'axiome.

Pour l'auteur, un S.C.T. fonctionne comme suit (informellement). Partant de S, on dérive en parallèle à l'aide des règles ci-dessus, comme dans deux grammaires algébriques. Les chiffres entre crochets indiquent les correspondances entre variables. Ces correspondances se composent au fur et à mesure de la dérivation. Commentons un exemple de dérivation :

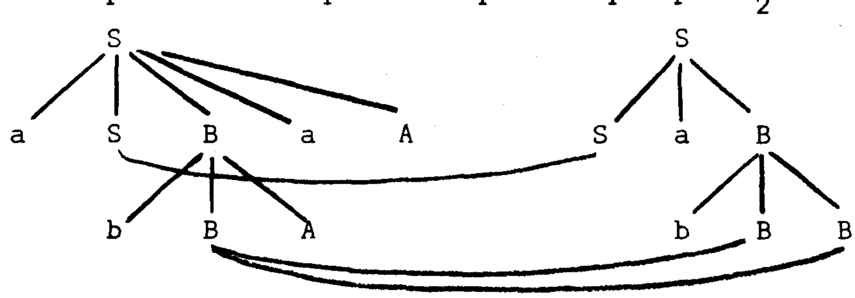
L'application de r_1 donne



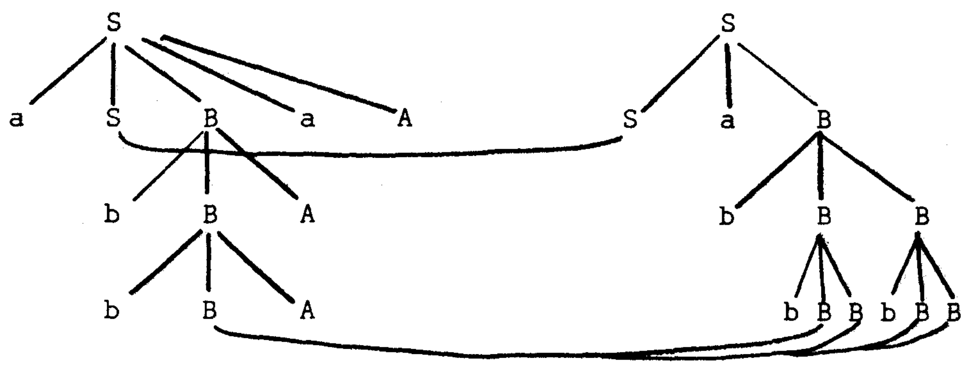
Autrement dit, on applique d'une part $S \rightarrow a\ SB\ a\ A$, d'autre part $S \rightarrow S\ a\ B$.

[1, 2] réalise une application des occurrences de variables du second terme droit dans celles du premier. Cette application respecte les variables (à A associe A, etc...). Les liens sont matérialisés sur la figure.

On continue en dérivant simultanément à partir des variables se correspondant. Ce qui donne par exemple par r_2



puis par r_2 encore



etc...

Pour nous, nous décrirons cette transformation par le bimorphisme (ϕ, K, Ψ)

où K est la forêt locale définie par les successions.

$S_1\ (x_1, x_2, x_3)$ a pour successeur $\left\{\begin{matrix} S_1(x_1, x_2, x_3) \\ S_5 \end{matrix}\right\} x \left\{\begin{matrix} B_2(x_1, x_2) \\ B_4 \end{matrix}\right\} x \left\{ A_3 \right\}$

$B_2\ (x_1, x_2)$ a pour successeurs $\left\{\begin{matrix} B_2\ (x_3\ x_2) \\ B_4 \end{matrix}\right\} x \left\{ A_3 \right\}$

$S_1\ (x_1, x_2, x_3)$ est initial, A_3, B_4 et S_5 finaux

L'idée est ici de marquer les variables par des numéros de règles, de leur autoriser comme successeurs les successeurs qu'elles ont dans la grammaire algébrique "gauche"ou"objet".

Remarque : En termes de compilation, l'idée est que la grammaire "gauche" définit le langage "source" et la"droite" le langage "objet".

ϕ est un quasi démarquage propre (il reconstitue les règles "sources", les variables syntaxiques étant remplacées par une torsion identité).

$$\phi\ S_1\ (x_1, x_2, x_3) \quad = \quad S\ (a, x_1, x_2, a, x_3)$$

$$\phi\ S_5 \quad = \quad S(a)$$

$$\phi\ B_2\ (x_1, x_2) \quad = \quad B(b, x_1, x_2)$$

$\phi\ B_4 \quad = \quad B(b)$

$\phi\ A_3 \quad = \quad A(a)$

Ψ reconstitue les règles "objets", les variables syntaxiques étant remplacées par la torsion définie entre crochets dans le formalisme de P.P. Schreiber

$\Psi\ S_1\ (x_1, x_2, x_3) \quad = \quad S(x_1, a, x_2)$

$\Psi\ S_5 \quad = \quad S(a)$

$\Psi\ B_2\ (x_1, x_2) = \quad B(\ b, x_1, x_1)$

$\Psi\ B_4 \quad = \quad B(b)$

$\Psi\ A_3 \quad = \quad A(a)$

Il est immédiat que le bimorphisme ci-dessus définit la même transformation de forêts que le S.C.T. donné. Cette construction se généralise évidemment à tout S.C.T.

En outre, le lemme fondamental 1 de II-1-1 montre qu'on peut remplacer le quasi démarquage ϕ par un démarquage propre, donc que tout **S.C.T. est un transducteur ascendant d'états finis** (propriété qui semble avoir échappé à l'auteur).

Un troisième exemple : On peut, d'une façon générale, "compiler en se guidant par la syntaxe du langage source et selon la valeur d'attributs associés à l'arbre syntaxique source" (B. Lohre [102], J.D. Ulmann [110]). Les attributs peuvent être hérités (calculés à partir du sommet de l'arbre syntaxique considéré) ou synthétisés (fonctions des sous arbres terminaux dont le noeud "attribué" est le sommet) ou les deux (ce qui pose des problèmes de bouclage).

Nous prenons ici un exemple empreinté à J. D. Ulmann [110]. Il s'agit de l'évaluation d'une expression arithmétique.

Nous partons de la grammaire source

$E \rightarrow E + T$ $E \rightarrow T$

$T \rightarrow T * F$ $T \rightarrow F$

$F \rightarrow (E)$ $F \rightarrow id$

On dispose du code d'instructions suivantes :

A C C α	mettre le contenu de la mémoire α dans l'accumulateur
M E M α	mettre le contenu de l'accumulateur dans la mémoire α
A D D α	additionner le contenu de la mémoire α à celui de l'accumulateur
M U L α	multiplier le contenu de la mémoire α à celui de l'accumulateur

On considère les quatre attributs synthétisés suivants (numérotés 1 à 4)

1 - Codage de la sous expression associée au sous arbre dont le noeud considéré est sommet (à valeur dans langage objet)

2 - Nom de l'identificateur unique successeur du noeud considéré indéfini ($\perp$) sinon (à valeur dans les identificateurs ou $\perp$)

3 - Variable booléenne vraie si le noeud considéré a un seul identificateur successeur, faux sinon (a valeur dans V, F)

4 - Numéro de mémoire auxilliaire (calculée à partir de la profondeur du noeud dans l'arbre) (à valeur dans N).

A chaque noeud d'un arbre source sont attribuées des valeurs des attributs selon les règles suivantes, associées aux règles de la grammaire source.

E_i, T_i ou F_i désigne la valeur du $i^{\text{ème}}$ attribut pour noeud correspondant étiqueté E, T ou F.

$E \rightarrow E + T$: E_1 = si T_3, alors E_1 'ADD' T_2

sinon 'MEMØ' E_4 E_1 'ADDØ' E_4

$E_2 = \perp$

$E_3 = F$

$E_4 = 1 + \max (E_4, T_4)$

$E \rightarrow T$ $E_1 = T_1$

$E_2 = T_2$

$E_3 = T_3$

$E_4 = T_4 + 1$

$T \rightarrow T * F$ T_1 = si F_3 alors T_1 'MUL' F_2 sinon

F_1 'MEMØ' T_4 T_1 'MULØ' T_4

$T_2 = \perp$

$T_3 = F$

$T_4 = 1 + \max (T_4, F_4)$

$T \rightarrow F$ $T_1 = F_1$

$T_2 = F_2$

$T_3 = F_3$

$T_4 = F_4 + 1$

$F \rightarrow (E)$ $F_1 = E_1$

$F_2 = E_2$

$F_3 = E_3$

$F_4 = E_4 + 1$

$F \to id$ $\quad F_1$ = 'ACC' NOM (id)

F_2 = NOM (id)

$F_3 = V$

$F_4 = 1$

Nous associons à cette compilation par attribut le bimorphisme (δ, K, ϕ, 1)

$$\delta : \begin{aligned} E(x, y) &\to E(x, +, y) \\ E(x) &\to E(x) \\ T(x, y) &\to T(x, *, y) \\ T(x) &\to T(x) \\ F(x) &\to F("("x")") \\ F_a(x) &\to F(x) \end{aligned}$$

K est la forêt locale définie par (voir I-1-2-3-1 pour les notations)

$$K : \begin{aligned} S(E(x, y) &= \{E(x, y), E(x)\} \times \{T(x, y), T(x)\} \\ S(E(x)) &= \{T(x), T(x, y)\} \\ S(T(x, y) &= \{T(x), T(x, y)\} \times \{F(x), F_a(x)\} \\ S(T(x)) &= \{F(x), F_a(x)\} \\ S(F(x)) &= \{E(x, y), E(x)\} \\ S(F_a(x) &= \{a\} \\ I(K) &= \{E(x, y), E(x)\} \qquad F(K) = \{a\} \end{aligned}$$

Chaque composante de l'image du 4-morphisme ϕ est associée à un attribut.

Comme dans l'exemple précédent, on remplace les variables syntaxiques par des torsions, mais des torsions de 4 dil Θ où est également indiqué le numéro de l'attribut considéré. Pour simplifier l'écriture, on écrit séquentiellement la première composante de l'image de ϕ et on omet les $\otimes$ qui, en toute rigueur, réalisent la composition en largeur.

ϕ est le 4-morphisme défini par :

$E(x, y) \rightarrow \langle t(y_3, x_1\ \text{'ADD'}\ y_2, y_1\ \text{'MEM\$'}\ x_4\ \ x_1\ \text{'ADD\$'}\ x_4), \perp, F, s(\max(x_4, y_4)\rangle$

$E(x) \rightarrow \langle x_1, x_2, x_3, s(x_4)\rangle$

$T(x, y) \rightarrow \langle t(y_3, x_1\ \text{'MUL'}\ y_2, y_1\ \text{'MEM\$'}\ x_4\ \ x_1\ \text{'MUL\$'}\ x_4), \perp, F, s(\max (x_4, y_4)\rangle$

$T(x) \rightarrow \langle x_1, x_2, x_3, s(x_4)\rangle$

$F(x) \rightarrow \langle x_1, x_2, x_3, s(x_4)\rangle$

$F_a(x) \rightarrow \langle \text{'ACC'}\ \text{NOM}\ x_1, \text{NOM}\ x_1, V, 1\rangle$

$id \rightarrow \langle id, \neq, \neq, \neq\rangle$

Soit par exemple à générer le code de

```
      E
     /|\
    E + T
    |  /|\
    T T * F
    | |   |
    F F   id
    | |
   id id
```

(on supposera que les noms des 3 occurrences de id sont, de gauche à droite, X, Y et Z)

On obtient par (δ, K, ϕ, 1)

$\rightarrow$ t(F, 'ACC' X 'ADD' $\perp$, t(V, 'ACC' Y 'MUL' Z, 'ACC' Z 'MEM\$' s(1) 'ACC' Y 'MUL\$' s(1))

'MEM\$' s(s(1)) 'ACC' X 'ADD\$' s s 1)

En interprétant le test et la fonction successeur, on a :

'ACC' Y 'MUL' Z 'MEM$\not{S}$' 3 'ACC' X 'ADD$\not{S}$' 3

(qui effectue bien Y x Z, range le résultat puis l'ajoute à X, d'où Y x Z + X).

CHAPITRE III - 2

APPLICATIONS AUX GRAMMAIRES TRANSFORMATIONNELLES

AVANT PROPOS

Historiquement, l'étude des grammaires transformationnelles est née de motivations linguistiques, dans un souci de modèliser les langues naturelles pour mieux les étudier. Chomsky est évidemment un des précurseurs de cette démarche. Dès les premières études, la notion de transformation d'ensembles d'arbres était déjà sous-jacente : les transformations sont guidées par la syntaxe, donc par les arbres syntaxiques. L'informatique a multiplié les raisons de s'intéresser aux transformations de forêts, avec de grandes exigences de rigueur sur les définitions syntaxiques, mais sans modifier l'essentiel des problèmes : il s'agit toujours d'analyser, générer, transformer ou traduire des langages (langages d'arbres en incorporant la syntaxe), langages plus où moins proches des langages de l'homme - l'homme restant l'interlocuteur privilégié !
On touche ainsi aux problèmes de compilation, traduction, langages conversationnels, ou, plus généralement, aux analyses, générations, transformations de processus quels qu'ils soient (phrases, schémas de calculs, de cablage,...) selon l'interprétation que l'on donne aux noeuds de l'arbre (métasymbole, fonction ou opérateur à n argurments, "boite" à n entrées...). Mais l'ordinateur sera le principal intéressé lorsque ce sera lui qui "traitera" ces arbres. C'est pourquoi, même lorsqu'il s'agira d'étudier les langues "naturelles", nous nous libérerons des tendances à chercher des "transformations psychologiquement naturelles" (sic). Notre démarche ira dans le sens de la production de concepts mathématiques féconds, susceptibles d'être mis en oeuvre algorithmiquement mais universels vis à vis de traitements particuliers sur ordinateurs. (Nous entendons par "concept fécond" tout outil, en particulier tout formalisme, "contribuant à la résolution des problèmes qui lui ont donné naissance" (d'après G. Jacob)).

III - 2 - 1 RESUME, PRESENTATION DES PRINCIPAUX RESULTATS ET EXEMPLES :

III-2-1-1 Idée Générale

Une grammaire transformationnelle (G.T. en abrégé) est la donnée d'un noyau (qui est souvent une forêt reconnaissable) et d'un ensemble de règles de transformations, soumises à diverses contraintes, qui permettent de transformer ce noyau. Les arbres précisent la structure syntaxique des mots que sont leur feuillage.

Nous donnons en III-2-1-2 quelques exemples de transformations dont l'idée résumée ici.

Exemple 1 : La transformation est 'reconnaissable' en ce sens qu'elle conserve la reconnaissabilité des forêts (ici, elle est réalisée par une transduction linéaire).

Exemple 2 : "Transformation avec test d'égalité". On teste dans l'arbre à transformer l'égalité de deux sous arbres et, si oui, on transforme. Le domaine d'une telle transformation n'est pas reconnaissable.

Exemple 3 : "Génération d'égalité". Cet exemple est dual du précédent. On recopie deux fois un même sous-arbre. En fait, il est plus fréquent - et c'est le cas ici - de recopier deux fois "à peu près" le même arbre (ici, "Dieu" figure dans un transformé, "César" dans l'autre). Les pages roses du petit Larousse sont pleines de phrases de ce type "à effet stylistique". En fait, nous parlerons encore dans ce cas de "génération d'égalités".

Exemple 4 et 4 bis : "Structure récursive". Une structure (un arbre) se greffe sur elle-même un nombre arbitrairement grand de fois.

Enfin nous présentons un exemple 5 plus complet.
Dans tous ces exemples, nous n'explicitons pas les rèlges précises de transformation, car elles dépendent des formalismes - souvent fort lourds. Seul, l'exemple 3 est complétement décrit dans la partie (III-2-2) dans le cadre des G.T. de Ginsburg - Partee (que nous appelons "G.T. par coupes").

Quelque soit le formalisme adopté, la composée de deux transformations élémentaires n'est en général pas élémentaire. Nous prouvons par exemple en III-2-2 que la transformation de l'exemple 3, composée de 3 transformations élémentaires au sens des G.T. par coupe, ne peut être réalisée par une seule transformation élémentaire. Il en est de même des exemples 4 et 4 bis. Pour ces derniers, les transformations ne peuvent pas être réalisées par composition de transductions d'états finis classiques d'arbres (puisque celles-ci conservent la reconnaissabilité des langages de branches). Enfin, l'exemple 5 ne peut être réalisé, ni par une transduction d'états finis, ni par une quelconque transformation élémentaire (quelque soit le cadre dans lequel on se place).
Nous discutons dans III-2-1-2 de la notion de profondeur d'une transformation, une transformation de profondeur 1 consistant grosso-modo à transformer séquentiellement un arbre (par exemple de haut en bas). Une transduction d'états finis est une transformation de profondeur 1.
Jusque maintenant, la situation était la suivante :

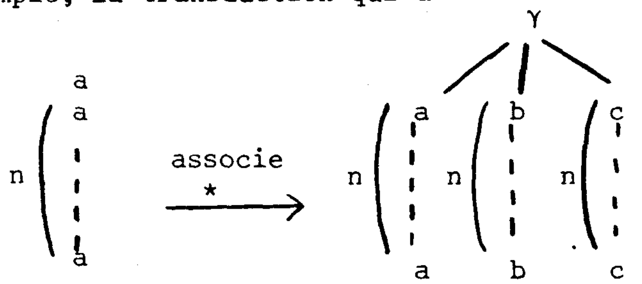
On ne sait en général rien dire des composées de transformations, si ce n'est qu'en général une composée de transformations élémentaires n'est pas élémentaire, qu'une composée de transductions n'est pas une transduction.... .
En particulier, dès le début de l'étude des G.T. dans le cadre de la théorie des arbres, les transductions d'états finis ont été utilisées, mais elles ne se composent pas, ce qui fait parler Thatcher de "boites de Pandor" et ce même auteur pose, dès 1969, le problème de trouver des classes intéressantes (pas trop restreintes) se composant.

On ne peut se débarasser du non-déterminisme, qui autorise à appliquer ou non une transformation, mais on peut, du point de vue des G.T., se borner à appliquer des transformations non **expansives** ou non **contractantes**. Plus précisément, une transformation T d'arbres est dite non expansive ssi $\exists k$ tel que,

$\forall\ \tilde{t}(x) \overset{*}{\Rightarrow} T(\tilde{t})(x,..,x) T(\tilde{t})$ ne contient pas plus de k occurrences de x.
Ceci équivaut à dire que, $\forall\ \tilde{t}$ et t_1, $\tilde{t}.t_1 \Rightarrow T(\tilde{t}).(t_1,..\ t_1)$ ne contient pas plus de k occurences de t_1. Autrement dit, une transformation est non expansive ssi elle "ne duplique pas à l'infini". Remarquons qu'en continuant la transformation T, les k occurrences de t peuvent avoir des

transformées différentes $t_1, .. t_k$, mais ces arbres ont tous la même source t. Une telle transformation sera dite **k-dilatante.**

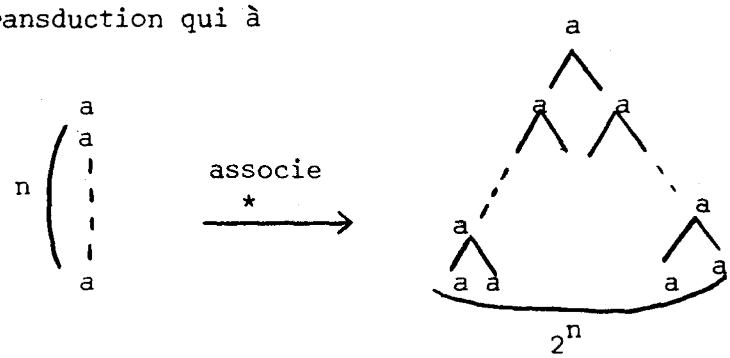
Par exemple, la transduction qui à



est non expansive (ou 3-expansive)

(elle donne 3 copies de a^n).

La transduction qui à



est expansive (c'est à dire ∞-expansive)

La notion de transformation non compressive est duale (inverser le sens des flêches). Elle impose ici une contrainte aux "test d'égalité". Une transformation ni expansive ni contractante sera dite **conservative** : Jusque maintenant, on ne disposait d'aucun outil pour étudier ces transformations. Or, les bimorphismes linéaires LL réalisent justement ces transformations.

Par exemple, un bimorphisme $(1, \phi, K, \Psi, 1)$ où ϕ est k-linéaire, Ψ k' linéaire, est k-contractant et k' dilatant (donc ni contractant, ni expansif).

Nos résultats sur la composition des classes LL, DL, TI etc... nous permettent de caractériser la cloture transitive de la plupart des classes de transformations conservatives.

Les exemples 1' à 5' reprennent les exemples 1 à 5 par des constructions précises en termes de bimorphismes linéaires et illustrent ces cas.

- L'exemple 1, sans test ni génération d'égalités, est réalisé en 1' par un 1-morphisme linéaire. En général, les transformations sans test ni génération d'égalités, qui sont celles étudiées par J. Chauché, seront réalisées par composition de bimorphismes du type (ϕ, K, ϕ'), où ϕ et ϕ' sont 1-linéaires. En général, on obtient comme clôture par composition de ces transformations les bitransductions B'_1 ou B_1 (on peut toujours rendre ϕ et ϕ' stricts).

- L'exemple 2, qui "teste des égalités" (mais est bien sur non contractant) est réalisé en 2' par un 2-morphisme inverse. En général, LD sera la cloture par composition de ce type de transformations.

- L'exemple 3, dual de l'exemple 2, "génére seulement des égalités" et est réalisé par un DL. En général, DL sera la cloture transitive de ce type de transformations.

- Les exemples 4 et 5 sont plus complets, ils alternent génération et tests d'égalités. Ils sont réalisés en 4' et 5' par des DL o LD. D'une façon générale, la cloture par composition des transformations conservatives testant et générant des égalités sera bien la classe DL o LD.

Nous déduisons de nos théorèmes sur les bimorphismes d'autres résultats exposés en partie III-2-3 (par exemple, qu'on peut "d'abord appliquer toutes les transformations d'un certain type, puis celles d'un autre"). La classe de forêts MIDRL apparait alors naturellement, comme étant la cloture par transformations conservatives des noyaux (forêts reconnaissables). Nous étudions la puissance générative de nos différents types de transformations etc, etc... .

D'autre part, nous étudions en (III231) les puissances génératives et transformationnelles des différents types de systèmes de réécriture, montrant que les différentes généralisations de la forme de ces règles sont illusoires, du point de vue des forêts engendrées. Mais le passage d'un système de réécriture à un système d'un type plus particulier se fait en général par transformations de profondeur non bornée. Dans la pratique, quand on considère des transformations de profondeur bornée, les différents types de règles conservent donc tout leur intérêt (ce qui apparait également empiriquement).

Dans la partie III-2-2 nous donnons un survol historique des G.T., puis une critique de quelques modèles. En particulier, nous étudions la notion de profondeur de transformation.

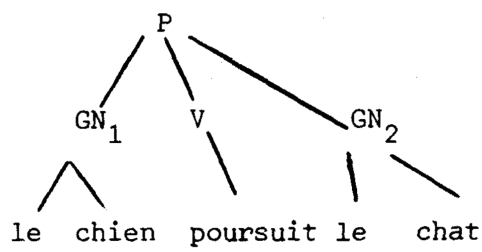
Dans la partie III-2-3, nous énonçons, prouvons et commentons nos résultats.

III-2-1-2 Exemples

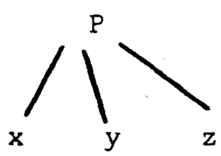
Les exemples 1 à 5 décrivent informellement des transformations classiques, que les exemples 1' à 5' décrivent respectivement en termes de bimorphismes de magmoïdes.

Remarque préliminaire sur le formalisme :

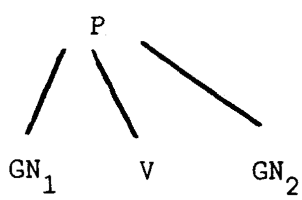
Soit par exemple l'arbre t =



En termes de théorie des arbres, un sous arbre de t se note par exemple



En linguistique la notation standard est



Cette dernière notation introduit un contrôle reconnaissable sur la succession des noeuds. Autrement dit, il est équivalent

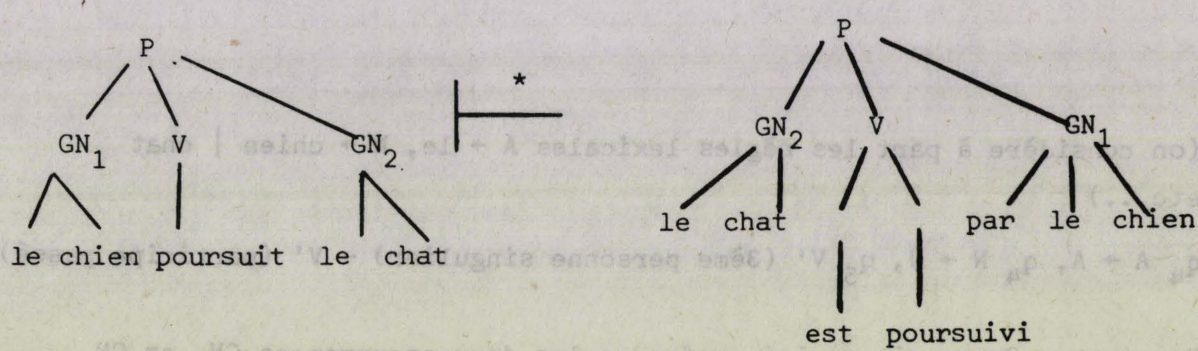
- d'une part, de considérer la notation "linguistique"
- d'autre part la notation du type "sous-arbre", assortie d'une

contrainte reconnaissable, et même locale (on s'impose en plus l'appartenance de t à une forêt locale).
Dans les deux cas, les concepts sont les mêmes, seules les modalités de contrôle sur la "succession des noeuds" étant formulées différemment.

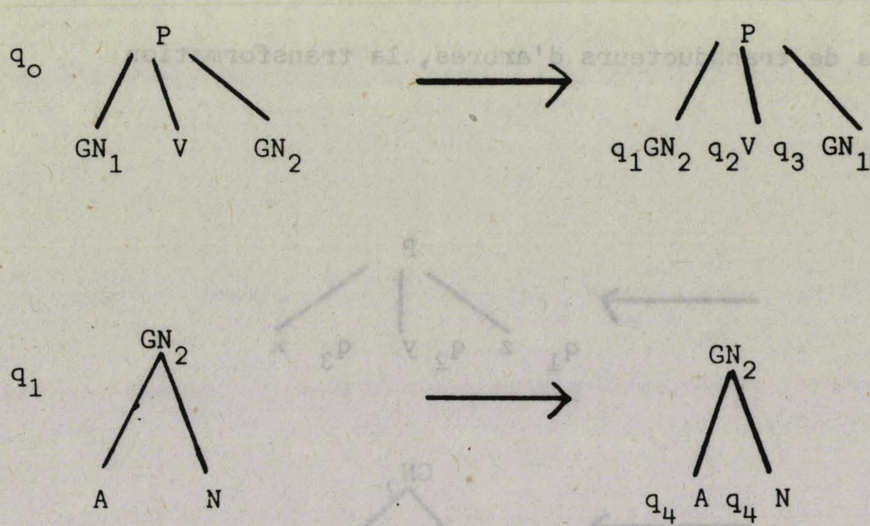
On peut encore considérer que l'on a des variables "avec type" (x de type GN, y de type V etc...) ce qui est une troisième façon d'écrire la même chose.

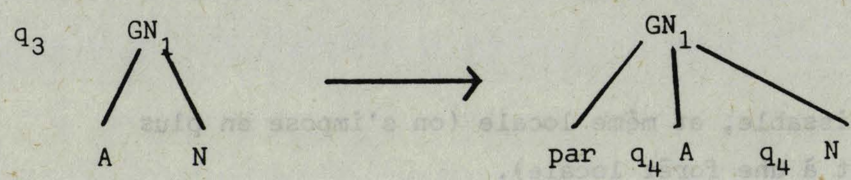
Dans la suite, nous utiliserons le formalisme linguistique pour les exemples classiques et le formalisme des arbres dans le cadre des transformations réalisées par bimorphismes de magmoïdes.

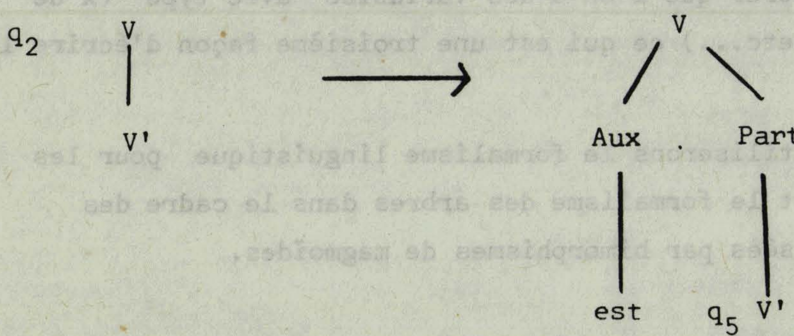
Exemple 1 : "Transformation reconnaissable"



est réalisé par le transducteur linéaire descendant.





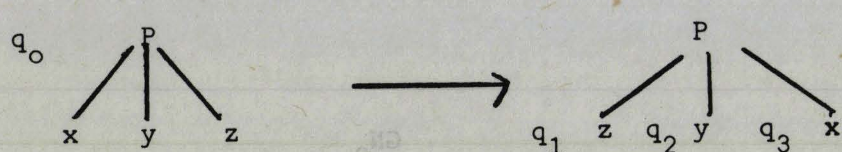


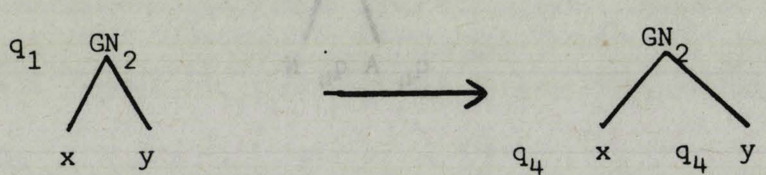
(on considère à part les règles lexicales A → le, N → chien | chat etc...)

q_4 A → A, q_4 N → N, q_5 V' (3ème personne singulier) → V' (participe passé)

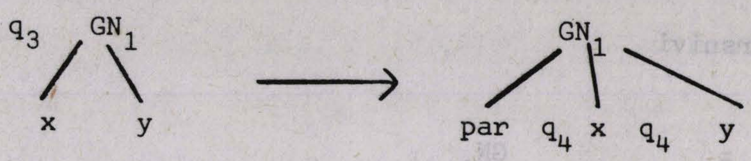
<u>Remarque</u> : On aurait pu ici confondre les deux occurrences GN_1 et GN_2 de GN, les états (q_1 et q_3) distinguant les sous arbres dont ils sont sommets. Mais, en général deux occurrences de GN impliquent l'égalité des sous arbres dont ils sont sommets (voir modèle de Ginsburg et Partee par exemple).

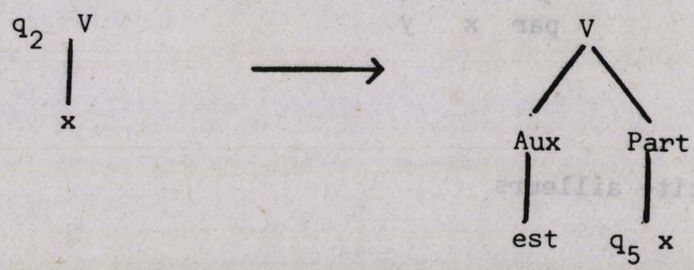
En termes classiques de transducteurs d'arbres, la transformation s'écrit encore:





q_4 le $\longrightarrow$ le $\qquad q_4$ chat $\longrightarrow$ chat $\qquad q_4$ chien $\longrightarrow$ chien



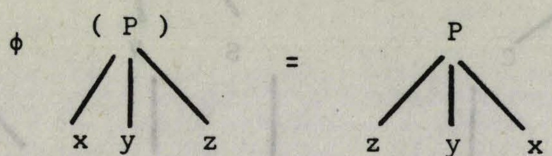


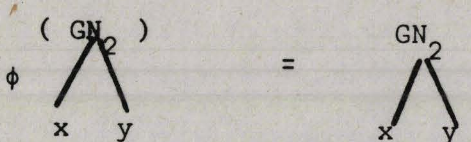
q_5 poursuit $\longrightarrow$ poursuit

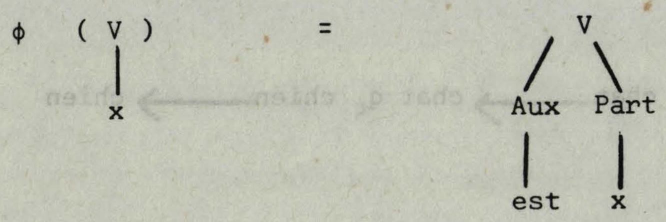
Rem 1. On peut très bien ici mémoriser dans les états le genre (singulier, pluriel) des sujets afin de "conjuguer", mais dans certains cas, cette mémorisation sera impossible. (Nombre non borné de conjugaisons imbriquées).

Rem 2. Les abréviations P, S, V, GN, etc.. ont des significations syntaxiques évidentes (phrase, sujet, verbe, groupe nominal, etc..)

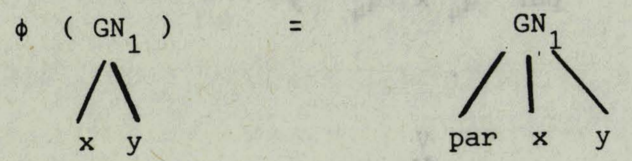
Exemple 1' :







ϕ(poursuit) = poursuivi

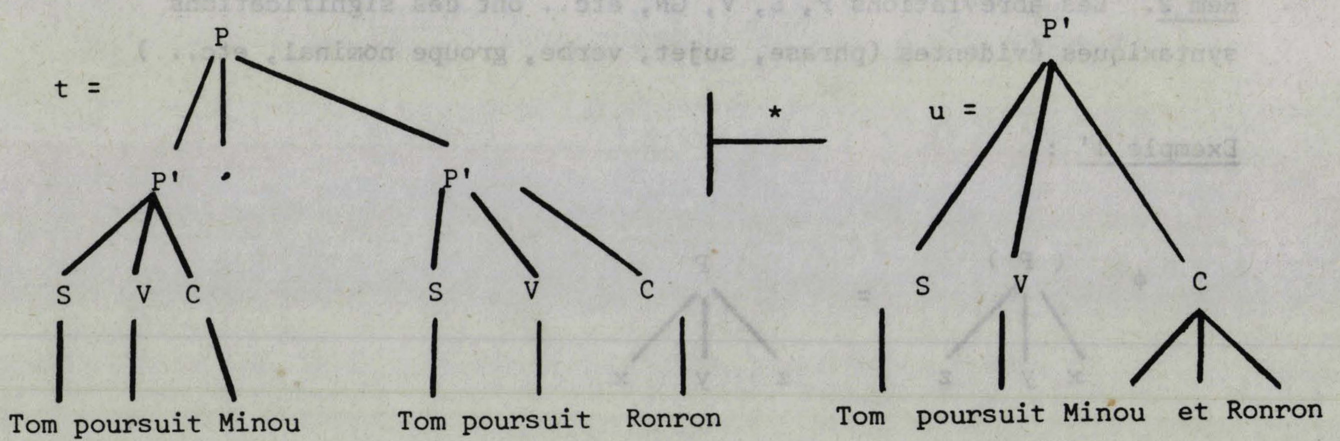


ϕ est égale à l'identité ailleurs

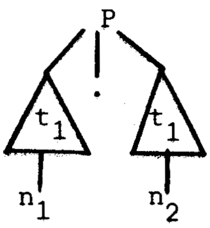
ϕ est 1-linéaire

Le 1-morphisme linéaire ϕ réalise la transformation de l'exemple 1

<u>Exemple 2</u> "Transformation avec test d'égalité"



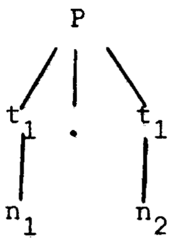
1) on teste si t est de la forme



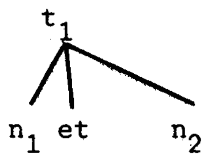
où n_1 et n_2 sont deux noms et t_1 un sous arbre.

(donc, on teste l'égalité de deux sous arbres de t)

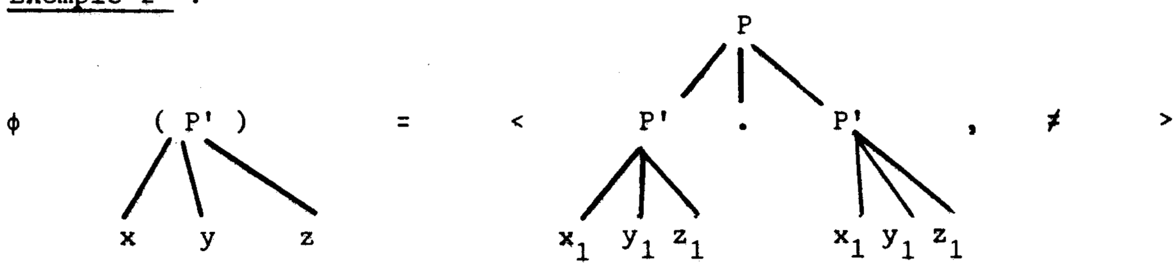
2) si oui, on transforme



en

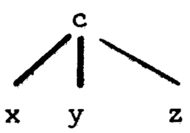


<u>Exemple 2'</u> :



ϕ est le "2 dilaté de l'identité"sur ce sous alphabet

$$\left\{\begin{array}{l}
\phi\left(\begin{array}{c}V\\|\\x\end{array}\right) = \left\langle \begin{array}{c}V\\|\\x_1\end{array}, \neq \right\rangle \quad \phi(\text{poursuit}) = \langle \text{poursuit}, \neq \rangle \\[2ex]
\phi\left(\begin{array}{c}S\\|\\x\end{array}\right) = \left\langle \begin{array}{c}S\\|\\x_1\end{array}, \neq \right\rangle \quad \phi(\text{Tom}) = \langle \text{Tom}, \neq \rangle \\[2ex]
\phi(\text{Minou}) = \langle \text{Minou}, \neq \rangle, \ \phi(\text{Ronron}) = \langle \text{Ronron}, \neq \rangle
\end{array}\right.$$

$\phi($  $) = \langle x_1, z_1 \rangle$

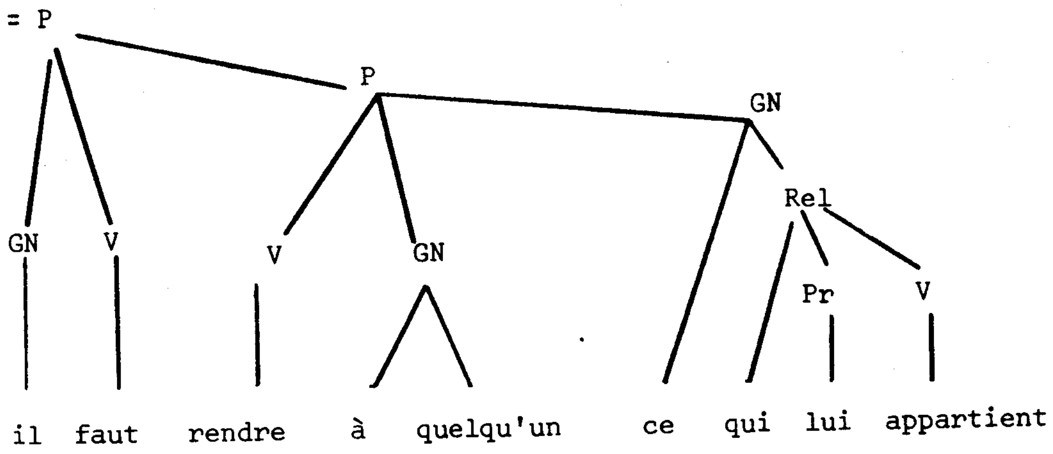
ϕ est 2-linéaire

$\phi_{[1]}^{-1}$ réalise la transformation de l'exemple 2

ϕ est un 2-morphisme linéaire.

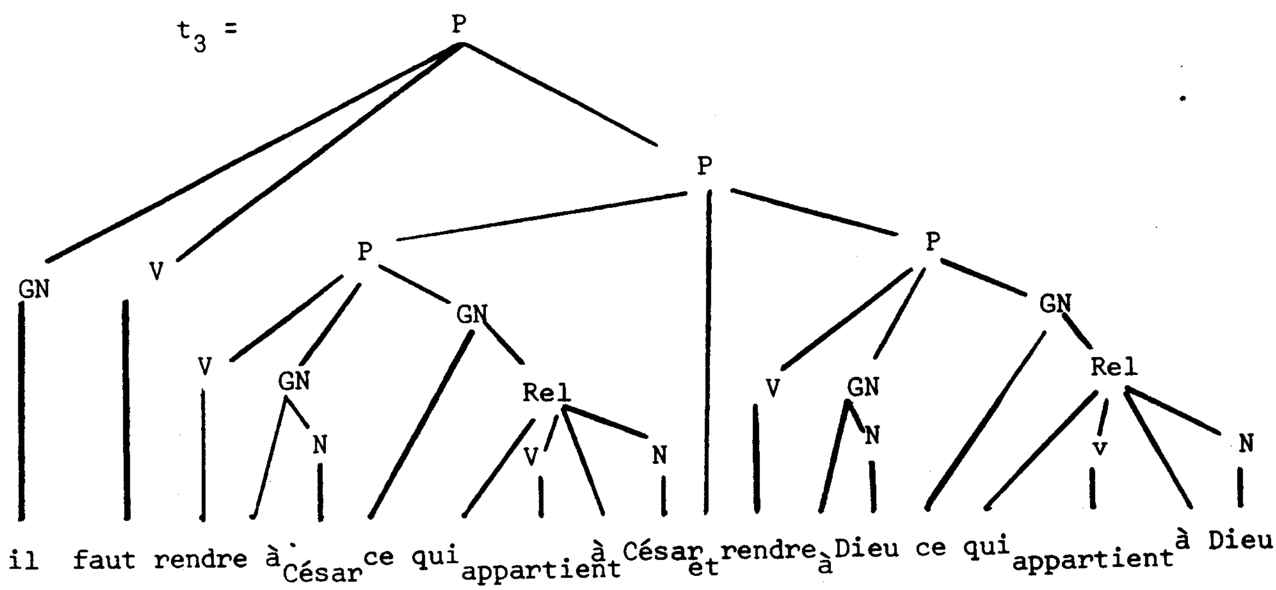
<u>Exemple 3</u> :

Soit t_o =



à transformer en

t_3 =

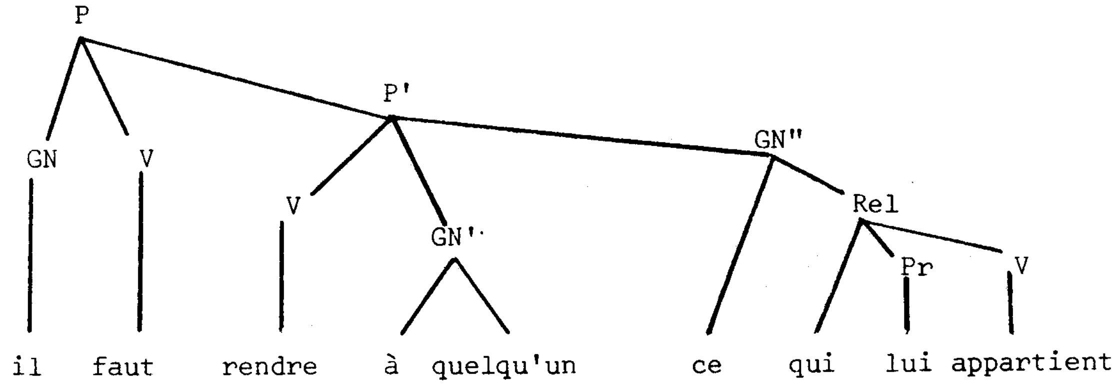


Exemple 3' :

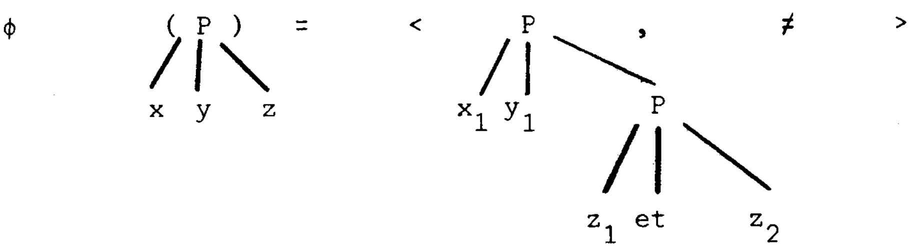
On peut d'abord marquer les diverses occurrences de P et GN (qui subiront des transformations différentes). Ceci se fait par un marqueur déterministe (rappelons qu'il s'agit d'un transducteur linéaire particulier, concervant la reconnaissabilité)ou, mieux, par un démarquage inverse δ^{-1} et par intersection avec une forêt reconnaissable K.

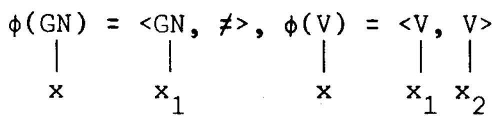
On a $t'_o = \delta^{-1}(t_o) \cap K$ avec

$t'_o =$

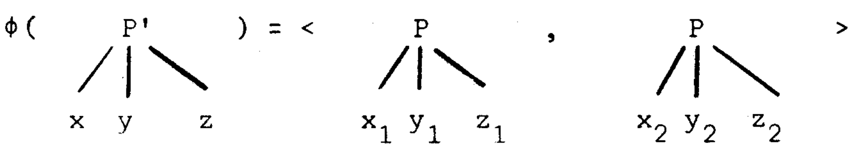


Soit ϕ le morphisme linéaire défini par :





$\phi(\text{il}) = \langle \text{il}, \neq \rangle$, $\phi(\text{faut}) = \langle \text{faut}, \neq \rangle$



$\phi(\text{rendre}) = \langle \text{rendre}, \text{rendre} \rangle$

$$\phi\big(\text{GN}'[\,x\ \ y\,]\big) = \big\langle\ \text{GN}[\,x_1\ \ \text{N}[\,y_1\,]\,]\ ,\ \ \text{GN}[\,x_2\ \ \text{N}[\,y_2\,]\,]\ \big\rangle$$

$\phi(\bar{a}) = \langle\bar{a}, \bar{a}\rangle$

ϕ(quelqu'un) = <César, Dieu>

$$\phi\big(\text{GN}''[\,x\ \ y\,]\big) = \big\langle\ \text{GN}[\,x_1\ \ y_1\,]\ ,\ \ \text{GN}[\,x_2\ \ y_2\,]\ \big\rangle$$

ϕ(ce) = <ce, ce>

$$\phi\big(\text{Rel}[\,x\ \ y\ \ z\,]\big) = \big\langle\ \text{Rel}[\,x_1\ \ z_1\ \ \grave{a}\ \ y_1\,]\ ,\ \ \text{Rel}[\,x_2\ \ z_2\ \ \grave{a}\ \ y_2\,]\ \big\rangle$$

ϕ(qui) = <qui, qui>

$$\phi\big(\text{Pr}[\,x\,]\big) = \big\langle \text{N}[\,x_1\,],\ \text{N}[\,x_2\,]\big\rangle$$

ϕ(lui) = <César, Dieu>

ϕ(appartient) = <appartient, appartient>

Commentaire :

Grosso modo, ϕ dédouble l'arbre de sommet P' en le modifiant un peu ; de plus "quelqu'un" et "lui" sont transformés en "César" dans la première copie, "Dieu" dans l'autre.

Finalement, la transformation est réalisée par le DL (δ, K, ϕ, 1)

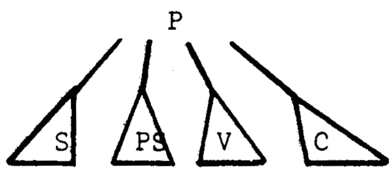
Exemple 4 : "structures récursives" : une génération "emboitée" d'égalités.

Considérons la phrase

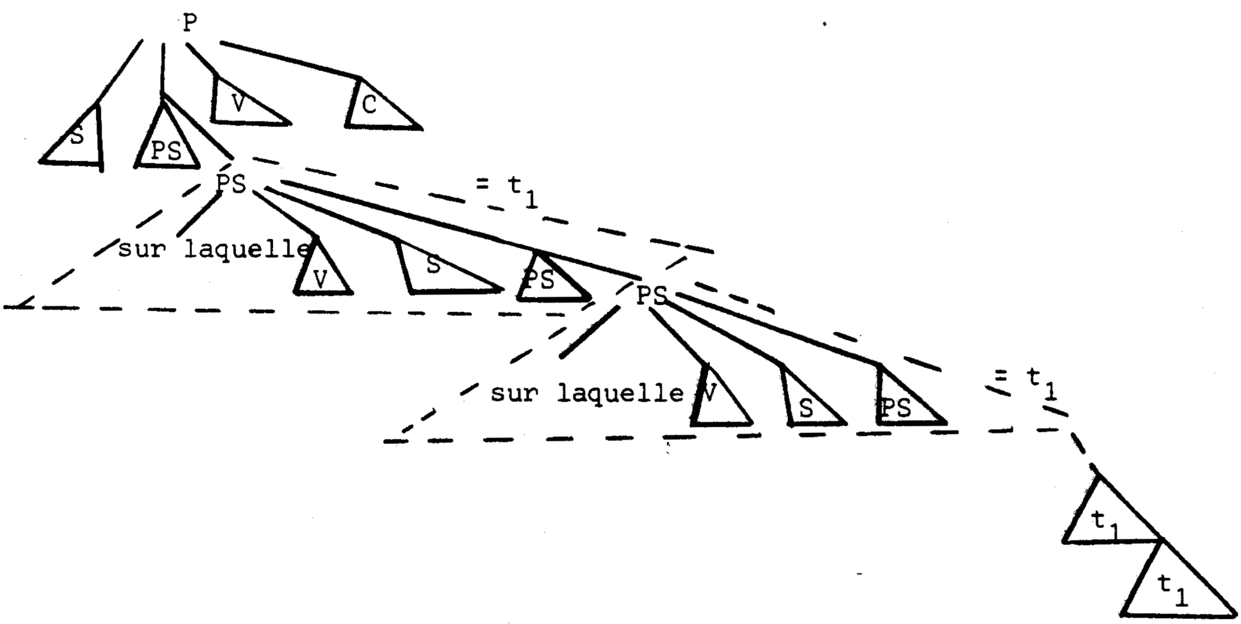
$$P = \underbrace{\text{un moine souriant}}_{S}\ \underbrace{\text{qui tient une boite de camembert}}_{PS}\ \underbrace{\text{figure}}_{V}\ \underbrace{\text{sur les boites de camembert.}}_{C}$$

Elle peut se transformer par exemple en un moine souriant qui tient une boite de camembert sur laquelle figure un moine souriant qui tient une boite de camembert sur laquelle figure un moins souriant qui tient une boite de camembert, etc..., figure sur les boites de camembert".

Sans détailler l'arbre syntaxique de P, on peut l'écrire

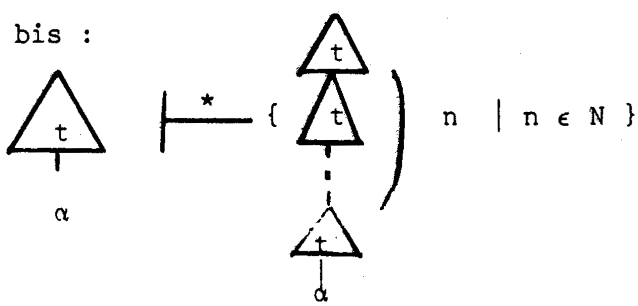


où S, PS, V et C sont des sous-arbres. La transformation ci-dessus se décrit alors par :



ainsi un arbre se 'raccroche-t-il à lui même' et a-t-on pour l'essentiel à effectuer une transformation du genre

Exemple 4 bis :



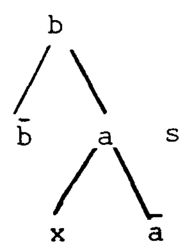
que nous abrégerons en $t.\alpha \mid\!\overset{*}{-} \{t^n.\alpha \mid n \in N\}$

Exemple 4 bis' :

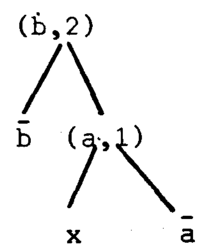
a) préliminaire :

Soit $t(x)$ un arbre quelconque de $\tilde{T}(\Sigma)_1^1$, (c'est à dire un arbre à une variable). On peut toujours "marquer la branche de $t(x)$ joignant le sommet à x" en introduisant un nouvel alphabet $\bar{\Sigma}$. Plus précisément, on procède de la façon suivante : si un noeud de $t(x)$ a pour label $a(x_1, .. x_n)$ et si x est $i^{\text{ème}}$ successeur de a (c'est à dire si le sous arbre de $t(x)$ qui contient x se substitue à x_i dant t), alors on remplace $a(x_1, .. x_n)$ par $(a,i)\,(x_1, .. x_n)$.

Exemple :



se marque en



Posons $\bar{t}(x)$ l'arbre $t(x)$ marqué de la sorte. Ce marquage est reconnaissable. Plus précisément il est facile de voir que $\{\bar{t}(x) \mid t(x) \in \tilde{T}(\Sigma)_1^1\}$ est une forêt reconnaissable.

D'autre part, soit ϕ le 2 morphisme défini par :

$\forall\ a \in \Sigma$: $\phi(a(x_1,x_2\cdot\cdot,x_n)) = <a(x_1,x_3,..,x_{2n-1}),\ \neq >$

$\forall\ (a,i) \in \bar{\Sigma}$: $\phi((a,i)(x_1,x_2,..x_n)) = <a(x_1,x_3,..,x_{2n-1}),x_{2i}>$

$\phi(\bar{t}(x)) = <t(x_1),\ x_2>$

b) Soit maintenant $\bar{\bar{t}}(x)$ marqué comme $\bar{t}(x)$ mais sur un alphabet $\bar{\bar{\Sigma}}$ disjoint de $\bar{\Sigma}$. On peut d'autre part toujours considérer que le sommet de $t(x)$ est un symbole distingué α.

Considérons alors : $F = \{\bar{t}_1.t_2.t_3....t_{n-1}.\bar{\bar{t}}_p(\alpha) \mid t_i \in \tilde{T}(\Sigma)_1^1,\ p \in N\}$

Cette forêt est reconnaissable .

Soit δ le démarquage effaçant toutes les marques de $\bar{t}$ et tel que

$\delta\ \alpha(x_1, .. x_n) = \alpha$

On peut, comme dans le préliminaire, construire un 2-morphisme ϕ tel que :

- la marque α des sommets soit conservée
- $\phi\ \bar{t}_1(x) = <t_1(x_1), x_2>$
- $\phi\ \bar{\bar{t}}(x) = <x_1, \bar{\bar{t}}(x_2)>$
- $\phi\ t(x) = <t(x_1), t(x_2)>$

Soit alors Δ_1 le DL $(\delta, F, \phi, 1)$ et Δ_2 le DL $(1, \phi, id)$

On a, $\forall\ \bar{t}_1.t_2 \ldots \bar{\bar{t}}_p(\alpha) \in F$,

$\delta(\bar{t}_1, .. \bar{\bar{t}}_p(\alpha)) = t_1.\alpha$

$\phi(\bar{t}_1.t_2 \ldots \bar{t}_p(\alpha)) = <t_1.t_2 \ldots\ldots t_{p-1}.\alpha, t_2 \ldots t_p(\alpha)>$

Considérons la transformation $\widehat{\Delta}_1 \circ \widehat{\Delta}_2$.

$\widehat{\Delta}_1 = \{(t_1.\alpha, <t_1.t_2 \ldots t_{p-1}\alpha, t_2 \ldots t_p\alpha>) \mid t_1.t_2 \ldots t_p\ \alpha \in F\}$

$\widehat{\Delta}_2 = \{(<u,u>, u)\}$

D'où finalement

$(t,u) \in \widehat{\Delta}_1 \circ \widehat{\Delta}_2 \iff \exists\ t_1, .., t_p$ tels que

$t = t_1.\alpha$ et

$u = t_1.t_2 \ldots t_{p-1}\alpha = t_2 \ldots t_p\alpha$

Comme les α "séparent" les t_i, il est équivalent de dire

$(t,u) \in \widehat{\Delta}_1 \circ \widehat{\Delta}_2 \iff \exists\ t_1, .. t_p$ tels que

$t = t_1.\alpha,\ u = t_1 \ldots t_{p-1}\alpha$

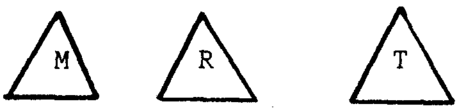
$t_1 = t_2,\ t_2 = t_3,\ t_3 = t_4, \ldots t_{p-1} = t_p$

$\iff \quad u = t_1^{p-1}.\alpha \quad$ et $t = t_1.\alpha$

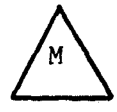
Finalement, on a bien $\widehat{\Delta}_1 \circ \widehat{\Delta}_2 = \{(t.\alpha, t^n.\alpha) \mid n \in N,\ t(x) \in T(\Sigma)_1^1\}$

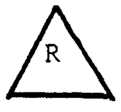
Exemple 5 :

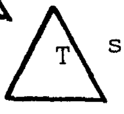
Un exemple plus général de transformation :



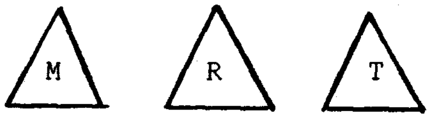
sont des abréviations d'arbres de même type, à savoir un nom suivi d'une suite quelconque de qualificatifs ou propositions subordonnées. [En M et R figurent deux noms appartenant à une classe donnée ('chat') et en T un nom appartenant à la classe 'chien']

Par exemple, le feuillage de 

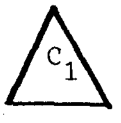
sera "Minou, le chat de la voisine" celui de 

sera "Ronron, qui est le plus vieux chat du quartier" celui de 

sera"le féroce Tom".

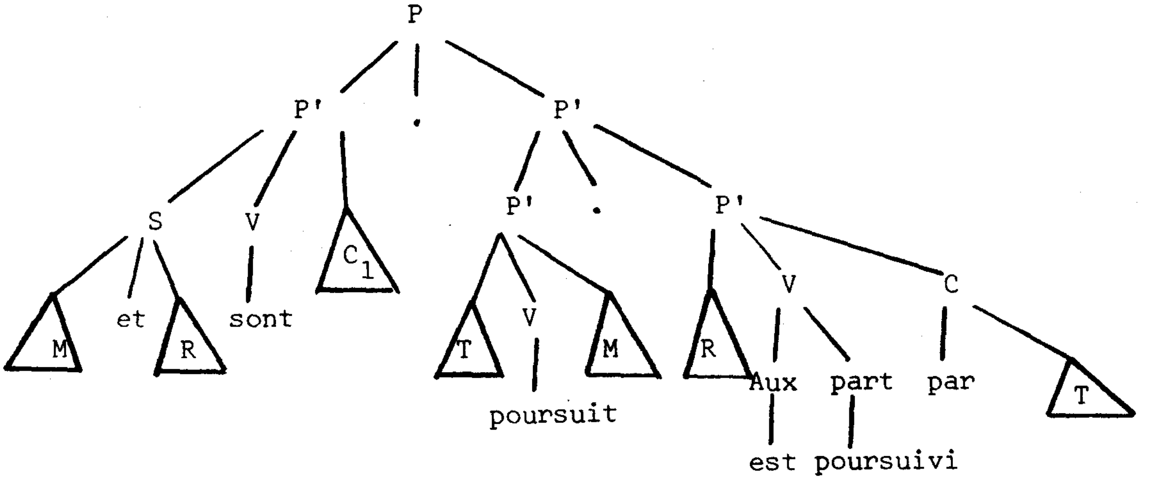


sont ainsi des arbres arbitrairement grands. Néanmoins, dans notre illustration, nous en abrévierons (par commodité) les feuillages en Minou, Ronron et Tom !

De même 

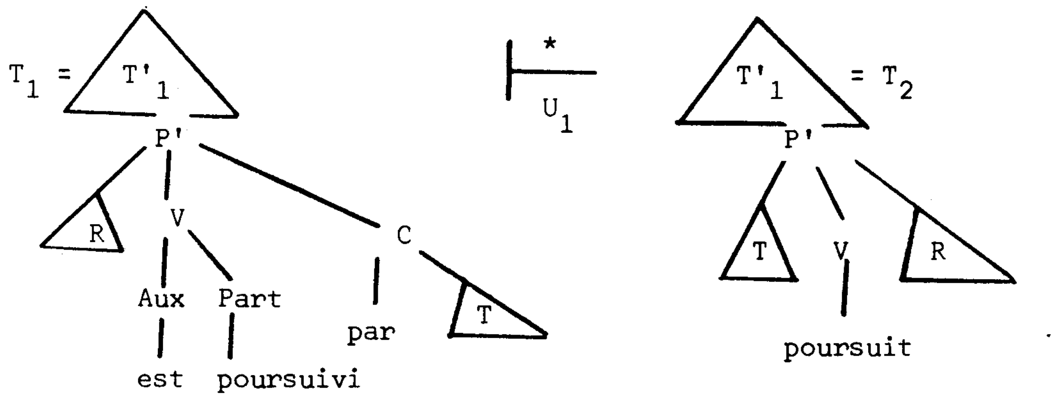
sera de feuillage "les petits chats blancs"

Considérons l'arbre T_1



de feuillage P_1 : "Minou et Ronron sont des petits chats blancs. Tom poursuit Minou. Ronron est poursuivi par Tom."

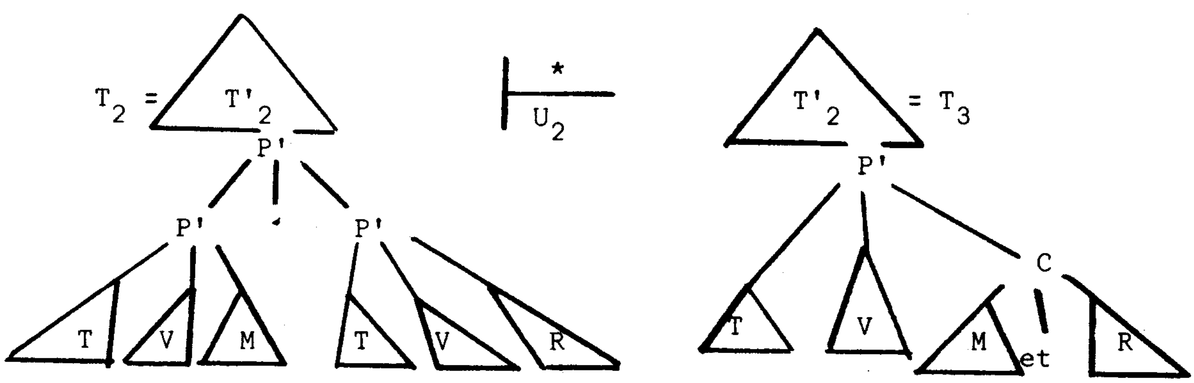
<u>1ère Transformation</u> : On applique la transformation U_1 inverse de celle de l'exemple 1.



Le feuillage de T_2 est "Minou et Ronron sont des petits chats blancs. Tom poursuit Minou. Tom poursuit Ronron".

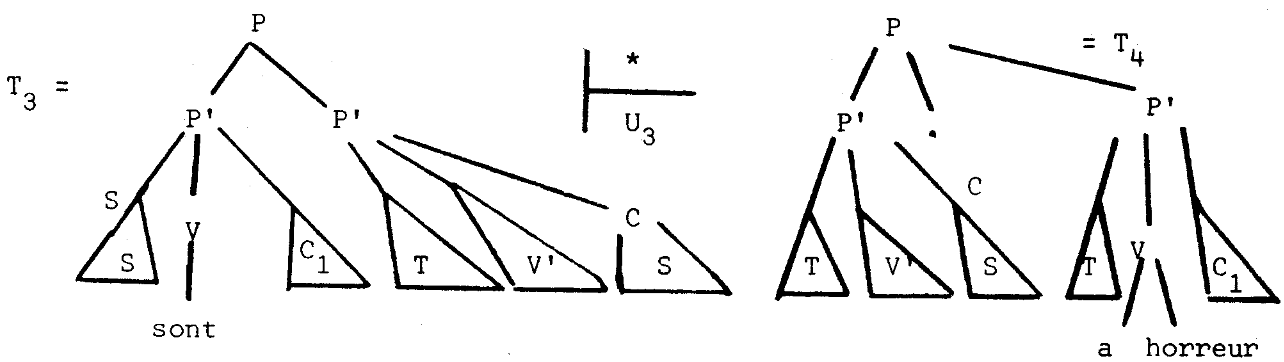
<u>2ème Transformation</u> :

On applique la transformation U_2, du même type que dans l'exemple 2



Le feuillage de T_2 est P_2 = "Minou et Ronron sont des petits chats blancs. Tom poursuit Minou et Ronron.

<u>3ème Transformation</u> :



Le feuillage de T_4 est P_4 = "Tom poursuit Minou et Ronron. Tom a horreur des petits chats blancs".

Remarque 1 :
L'exemple 5 est traité dans l'esprit des grammaires par coupe. En fait les problèmes sous-jacents à cet exemple ont été beaucoup étudiés par les linguistes et peuvent être résolus différemment.

Remarque 2 :
On pourrait objecter du point de vue sémantique que la même transformation appliquée à "du sucre et des biscuits sont des friandises. Tom mange du sucre. Des biscuits sont mangés par Tom" donne "Tom mange du sucre et des biscuits. Tom a horreur des friandises".
En fait, il suffit de subordonner dans U_3 l'apparition de "a horreur" à l'appartenance d'autres mots à certaines classes (remplacer ici par "adore" !). Un tel contrôle peut être réalisé par intersection avec une forêt reconnaissable. D'une manière plus générale, en considérant des classes de mots (comme suggéré au début de l'exemple), on peut "faire passer une partie de la sémantique dans la syntaxe".

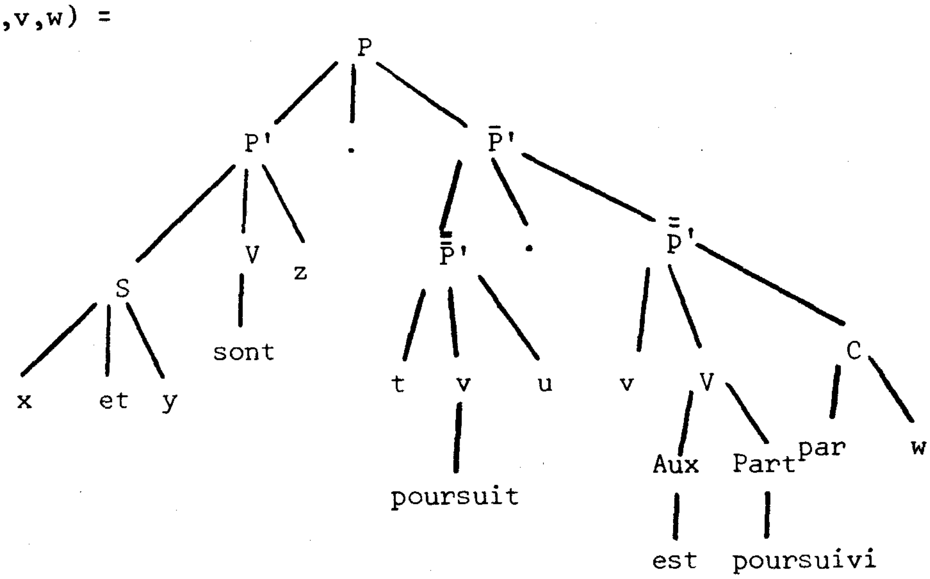
Exemple 5' :

Soit $F = \{\bar{T}(X,Y,Z,T,U,V,W) \mid X,..,W \in T(\Sigma)^1_0$ et $\bar{T}$ est l'arbre initial ci-dessus $\}$

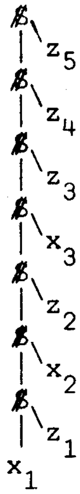
F est reconnaissable

On peut supposer $\bar{T}$ sur un alphabet disjoint de Σ

$\bar{T}(x,y,z,t,u,v,w)$ =



Soit ϕ le 5-morphisme linéaire défini par

$\phi\ P(x,y,z) = <$  $, \neq^{\otimes^4} >$

$\phi\ P'(x,y,z) = <x_1,x_2,z_1,\neq,\neq>$

$\phi\ S(x,y,z) = <x_1,z_1,\neq,\neq,\neq>$

$\phi\ \bar{P}'(x,y,z) = <x_2,z_1,x_1,z_2,z_3>$

$\phi\ \bar{\bar{\bar{P}}}'(x,y,z) = <x_1,z_1,\neq,\neq,\neq>$

$\phi\ \bar{\bar{P}}'(x,y,z) = <x_1,z_1,z_2,\neq,\neq>$

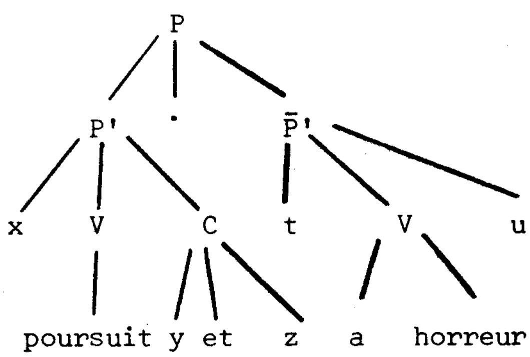
$\phi\ c(x,y) = <y_1,y_2,\neq,\neq,\neq>$

($\uparrow$ nous abrégerons en $\not{B}\ (x_1, z_1, x_2, z_2, x_3, z_3, z_4, z_5)$)

ailleurs, $\phi\ a(x_1,.. x_n) = <a(x_1,.. x_n).(\pi_5^1)^{\otimes^n}, a(x_1,..x_n)(\pi_5^2)^{\otimes^n}, \neq^{\otimes^3}>$

Soit $G = \{\bar{U}(X',Y',Z',T',U') \mid X'...U' \in T(\Delta)_o^1$ et $\bar{U}$ est l'arbre initial ci-dessous $\}$

$\bar{U}(x,y,z,t,u) =$



Soit Ψ le 6 morphisme linéaire défini par

$\Psi\ P(x,y,z) = <\not{B}(x_1,x_2,x_3,x_4,z_1,x_5,x_6,z_2), \neq^{\otimes^5}>$

$\Psi\ P'(x,y,z) = <z_1,z_2,z_3,z_4,x_1,x_2>$

$\Psi\ c(x,y,z) = <x_1,x_2,z_1,z_2,\neq,\neq>$

$\Psi\ \bar{P}(x,y,z) = <x_1,z_1,\neq,\neq,\neq,\neq>$

ailleurs, $\Psi\ a(x_1,..\ x_n) = <a(x_1,..\ x_n)\ (\pi_6^1)^{\otimes^n}, a(x_1,..\ x_n)(\pi_6^2)^{\otimes^n}, \neq^{\otimes^4}>$

δ est le démarquage propre effaçant les marques de $\bar{T}$.(En particulier, on avait supposé l'alphabet de $\bar{T}$ disjoint de Σ . On aura aussi

$\delta\ P'(x,y,z) = \delta\ \bar{P}'(x,y,z) = \ldots = P(x,y,z)$

δ' est le démarquage propre effaçant les marques de $\bar{U}$.

Il est facile de voir que $\forall\ X \in T(\Sigma)_o^1$, on a

$\phi(X) = <X,X,\neq,\neq,\neq>$ et de même, $\forall\ X' \in T(\Delta)_o^1$, on a

$\Psi(X') = <X',X',\neq,\neq,\neq,\neq>$

D'autre part, on a

$$\phi\ \bar{T}(x,y,z,t,u,v,w) = <\not{B}(x_1,u_1,y_1,v_1,z_1,t_1,w_1,w_2),\ \neq^{\otimes^4}>$$

et $\Psi\ \bar{U}(x,y,z,t,u) = <\not{B}(y_1,y_2,z_1,z_2,u_1,x_1,x_2,t_1),\ \neq^{\otimes^5}>$

On en déduit

$$\phi_{[1]}\ \bar{T}\ (X,Y,Z,T,U,V,W) = \not{B}(X,U,Y,V,Z,T,W,W)$$

et $\Psi_{[1]}\ \bar{U}(X',Y',Z',T',U') = \not{B}(Y',Y',Z',Z',U',X',X',T')$

Les 2 lignes sont égales ssi

$X = Y',\ U = Y',\ Y = Z',\ V = Z',\ Z = U',\ T = X',\ W = X',\ W = T'$

c'est à dire ssi il existe M, R, C, T tels que

$X = Y' = U = M,\quad Y = Z' = V = R,\quad Z = U' = C,\quad T = X' = W = T'$

Autrement dit, si $A \in F$ et $B \in G$, on a

$$\phi_{[1]}\ (A) = \Psi_{[1]}(B) \iff \begin{cases} \exists\ M,\ R,\ C,\ T \text{ tels que} \\ A = \bar{T}(M,R,C,T,M,R,T) \\ \text{et } B = \bar{U}(T,M,R,T,C) \end{cases}$$

Posons $D_1 = (\delta, F, \phi, 1)$ et $D_2 = (\delta', G, \Psi, 1)$

Soit T_1 l'arbre à transformer de l'exemple 5.

T_1 se décompose en $T_1 = \mathcal{T}(M,R,C,T,M,R,T)$ et, compte tenu des démarquages δ et δ', on a $(T_1)\ \widehat{D}_1 \circ \widehat{D}_2 = \mathcal{U}(T,M,R,T,C)$

Ce dernier arbre est l'arbre T_4 de l'exemple 5.

Plus généralement, on a $A \mid\frac{\ast}{U_1,U_2,U_3} B$ ssi $(A,B) \in \widehat{D}_1 \circ \widehat{D}_2$

III - 2 - 2 APERCU HISTORIQUE ET CRITIQUE DES GRAMMAIRES TRANSFORMATIONNELLES :

Très vite, le consensus se fit sur une définition du type suivant : une grammaire transformationnelle (en agrégé G.T.) est la donnée d'un ensemble **noyau** de phrases (données avec leur structure syntaxique, par des arbres ou une grammaire) et d'un nombre fini de **règles de transformation.** L'application de ces règles est toujours soumis à la syntaxe et parfois à des contraintes sur le domaine d'application ou sur la succession des règles. La syntaxe d'un langage se décrit, lorsque ce langage est algébrique, par ses arbres de dérivation. Ceci fait qu'on prend pour noyau un langage algébrique (ou plutôt ses arbres de dérivation). A la suite de Chomsky, on appelle généralement structure "profonde" (deepth) le noyau et "structure superficielle" (surface set) le langage obtenu par transformation du noyau.
Les transformations se faisant guider par la syntaxe se font en fait sur les arbres. Les auteurs l'avaient constaté très tôt mais étaient génés jusque vers les années 1968-1970 par un manque de cadre pour étudier les arbres. A cette époque, de nombreux travaux (Brainerd [30], [31], Pair et Quéré [77], Rounds [80], Thatcher [88],) furent consacrés aux langages d'arbres (c'est à dire aux forêts) en eux-mêmes, à commencer bien sûr par les arbres de dérivation des langages algébriques. Ces travaux marquèrent une importante évolution dans l'étude des G.T., si bien qu'on peut distinguer deux "époques" : avant et avec la "théorie des forêts".

III-2-2-1 Première époque

Un effort de synthèse aboutit, vers 1970, aux modèles décrits par Ginsburg et Partee [96] et Peters et Richie [104].

III-2-2-1-0 Idée Générale :

L'idée générale est la suivante : une transformation est obtenue par application d'un nombre fini (mais non borné en général) de transformations élémentaires, l'application de chaque transformation élémentaire, et la succession de ces transformations étant soumis à diverses contraintes.

En fait, en termes d'arbres (pour simplifier !), les choses se décrivent ainsi :

- l'application d'une transformation élémentaire dépend de la valeur d'un prédicat vérifiant sur l'arbre domaine une condition "reconnaissable" (c'est à dire l'appartenance à une forêt reconnaissable) ou étant un "test d'égalité" (c'est à dire vérifiant qu'un arbre contient 2 ou plusieurs mêmes sous-arbres).

- on s'impose entre les règles des contraintes de succession, là encore reconnaissables, comme un ordre partiel entre les règles ou l'appartenance des mots constitués par concatenation des numéros de règles à un langage reconnaissable.

- Une transformation élémentaire, effectuée par application d'une des règles définissant la G.T., consiste à effacer, dupliquer un ou plusieurs sous-arbres, ou à modifier une ou plusieurs feuilles de l'arbre.

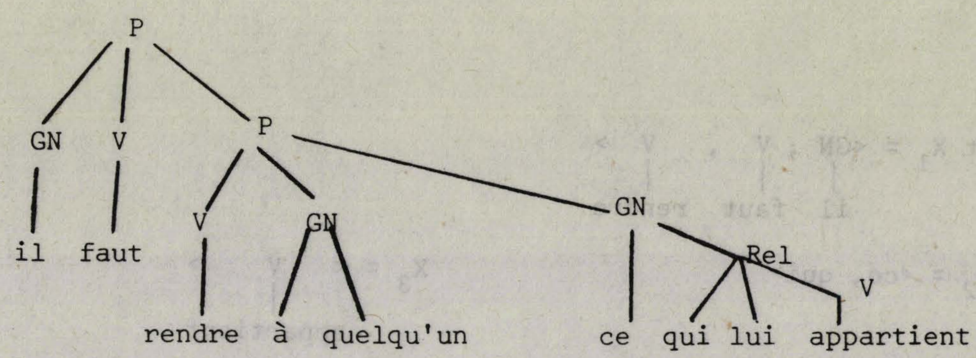
III-2-2-1-1 Les principaux modèles :

Le modème de Ginsburg et Partee, axé sur les transformations d'arbres n'est décrit - faute d'outils - qu'en termes de mots. Il s'en suit un formalisme lourd et peu de résultats profonds.

Exemple :

Nous décrivons maintenant informellement ce modèle sur l'exemple 3 de la partie III-2-1. Nous partons de la phrase noyau d'arbre t_o.

t_o =



I) Nous allons appliquer la règle r_1 :

r_1 : $X_1 GN\ X_2$ lui $X_3 \rightarrow X_1\ GN\ X_2\ X_3\ GN$

X_1, X_2, X_3 représentent les contextes. Ils sont invariants dans la transformation réalisée par application d'une règle.

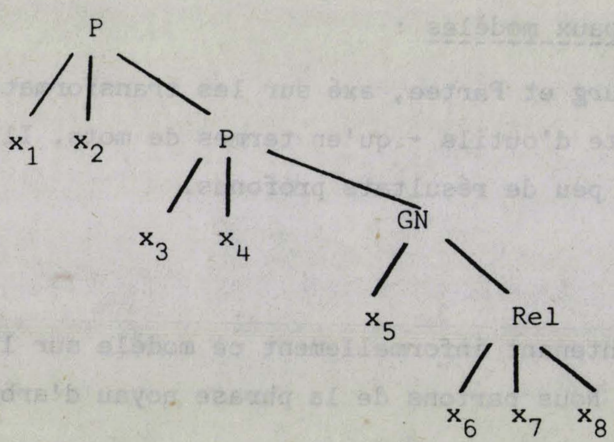
(Nous nous aidons ici en partie de notre vocabulaire sur les arbres pour décrire les transformations).

La partie gauche de la règle doit être la complémentaire d'un sous-arbre initial sans feuilles de t_o pour que la règle soit applicable à cet arbre.

Les contextes $X_1 \ldots X_n$ désignent alors des uples de sous-arbres terminaux (de degré supérieur non contraint), alors que chaque occurrence d'une variable ou d'un terminal dans la partie gauche de la règle désigne le sous-arbre terminal (de degré supérieur 1) dont elle est le sommet dans l'arbre à transformer.

Ici, t_o se décompose en $t_o = \tilde{t}.<X_1, GN, X_2, \text{lui}, X_3>$

avec to =



et X_1 = <GN , V , V >
il faut rendre

X_2 = <ce, qui>

X_3 = < V >
appartient

GN = <GN >
à quelqu'un

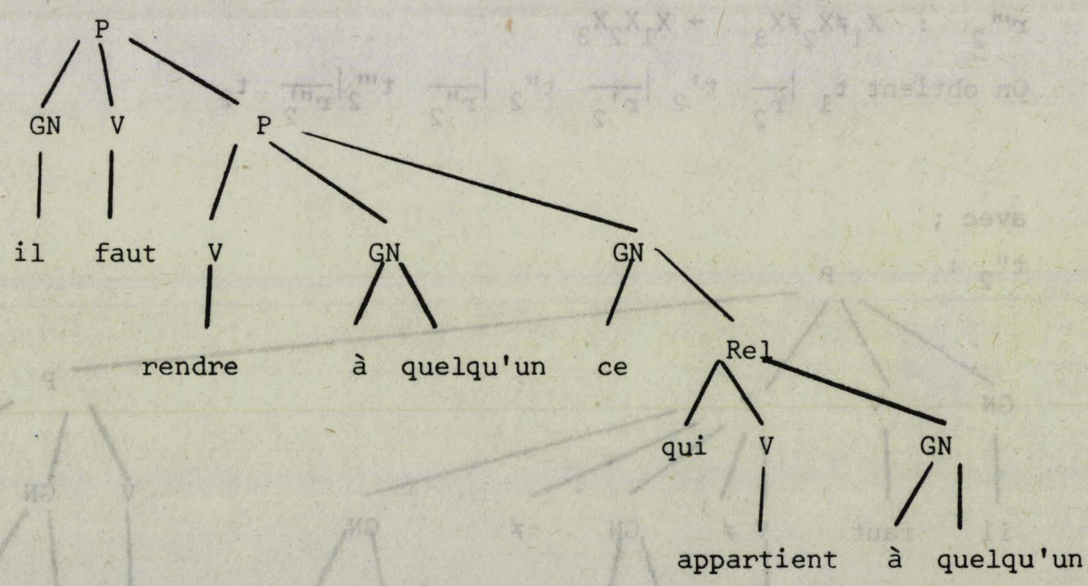
La décomposition n'est en général pas unique. C'est le cas ici, nous en avons choisi une. En général, le choix de la décomposition influe sur la transformation. Ici , le choix ne porte que sur les contextes qui de toute façon restent inchangés.

En fait, avant de transformer t_o, on l'a "coupé en deux", la partie gauche de r_1 désignant la succession des noeuds rencontrés au niveau de la coupe. Nous allons voir qu'appliquer une règle revient à effectuer des transformations au niveau de cette coupe, $\tilde{t}$ restant grosso modo inchangé. D'où le nom de "grammaire par coupe".

Ici, appliquer r_1 revient à transformer t_o en t_1 de la façon suivante : on conserve l'arbre initial $\tilde{t}$ que l'on termine de façon qu'au niveau de la coupe, la succession des sommets soit la partie droite de r_1, chaque occurrence d'une même lettre (ou d'un même contexte) étant sommet du même sous arbre final dans t_o et t_1.

Nous obtenons ici $t_o \underset{r_1}{\vdash} t_1$ avec

t_1 =



<u>Remarque</u> : Toutes ces opérations se décrivent facilement en termes de magmoïdes ! Dans le formalisme des "grammaires par coupes", certaines opérations sont définies de façon vague et un peu arbitraire. Ainsi, nous avons ci-dessus greffé GN en convenant de la faire au niveau de la coupe (des marqueurs $\not{b}$ peuvent encore préciser la profondeur à laquelle on transforme). L'opération d'émondage, consistant simplement à supprimer les noeuds monadiques, est effectué par une succession complexe de transformations élémentaires de G.T. par coupes (voir "tree pruning" dans [96]). Plus généralement, les G.T. par coupe sont évidemment très mal adaptées à la description de modifications intérieures aux arbres, même si celles-ci sont fort simples et locales.

II) Soient maintenant les règles :

r_2 : $GNVP \rightarrow GNVPP$

r'_2 : $X_1 V GN_1 GN_2 P \rightarrow X_1 V \neq GN_1 \neq GN_2 P$

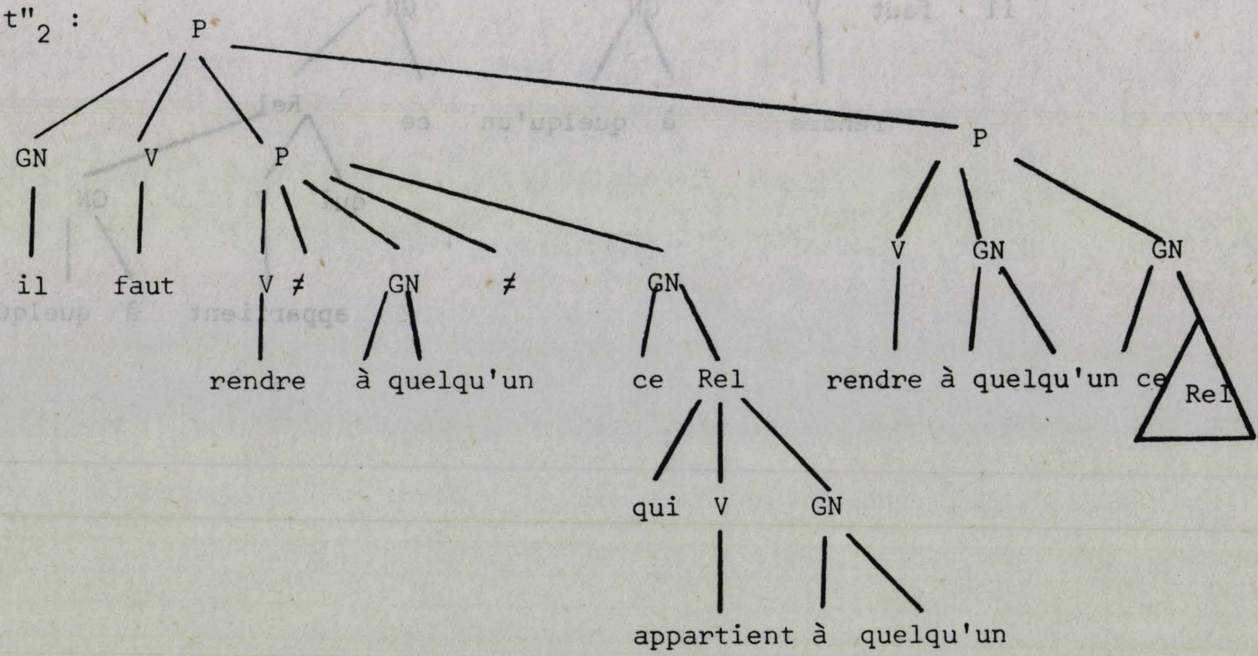
r''_2 : $X_1 V \neq X_2 \neq X_3 P \rightarrow X_1 \neq P$ et $P \neq$

r'''_2 : $X_1 \neq X_2 \neq X_3 \rightarrow X_1 X_2 X_3$

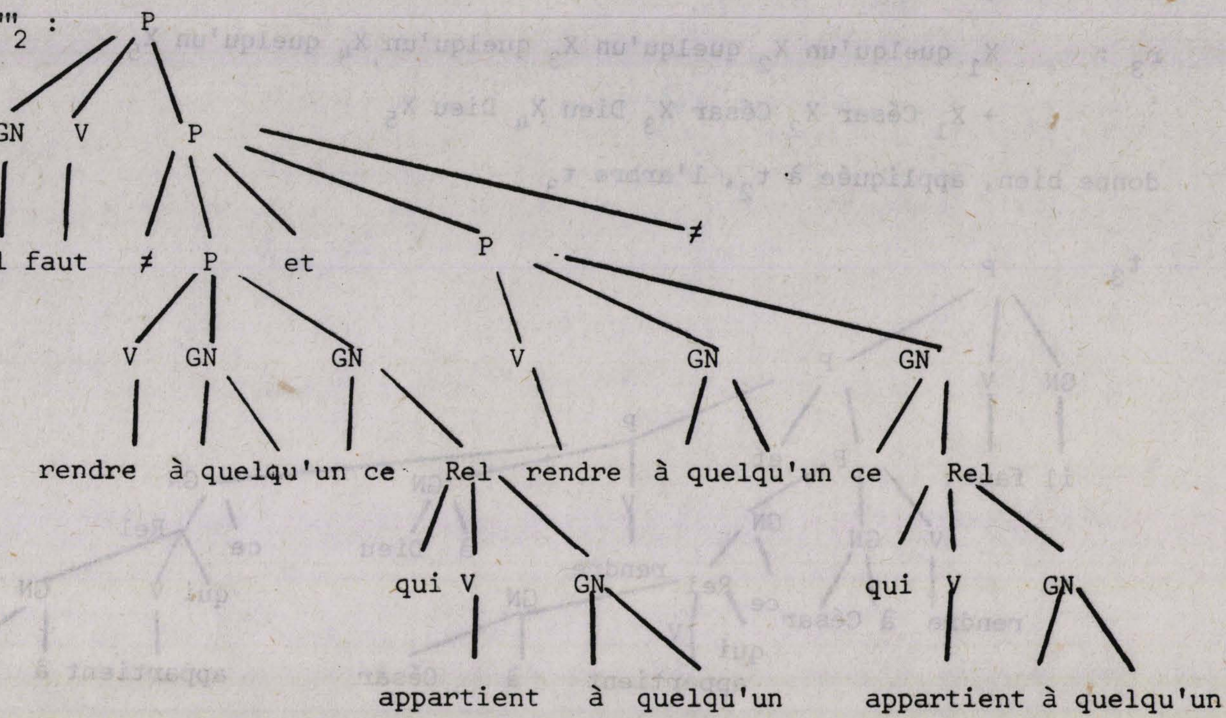
On obtient $t_1 \mid\!\frac{}{r_2}\; t'_2 \mid\!\frac{}{r'_2}\; t''_2 \mid\!\frac{}{r''_2}\; t'''_2 \mid\!\frac{}{r'''_2}\; t_2$

avec ;

t''_2 :



t'''_2 :



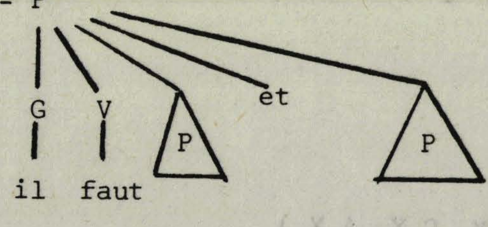
t_2 est déduit de t'''_2 en effaçant les deux "≠".

Remarques :

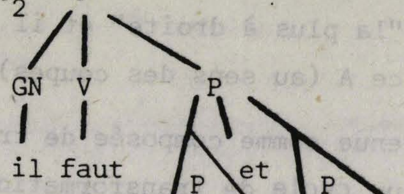
Dans r'_2, les deux occurrences de GN sont distinguées en GN_1 et GN_2 ; sinon X_1VGN GNP impliquerait l'égalité des deux sous arbres de sommets les deux occurrences de GN.

- La seule règle "GNVP → GNVP et P" nous aurait "presque" donné t_2 : Plus précisément, nous aurions obtenu

$\bar{t}_2$ = P



au lieu de t_2 = P



et les deux arbres avaient même feuillage.

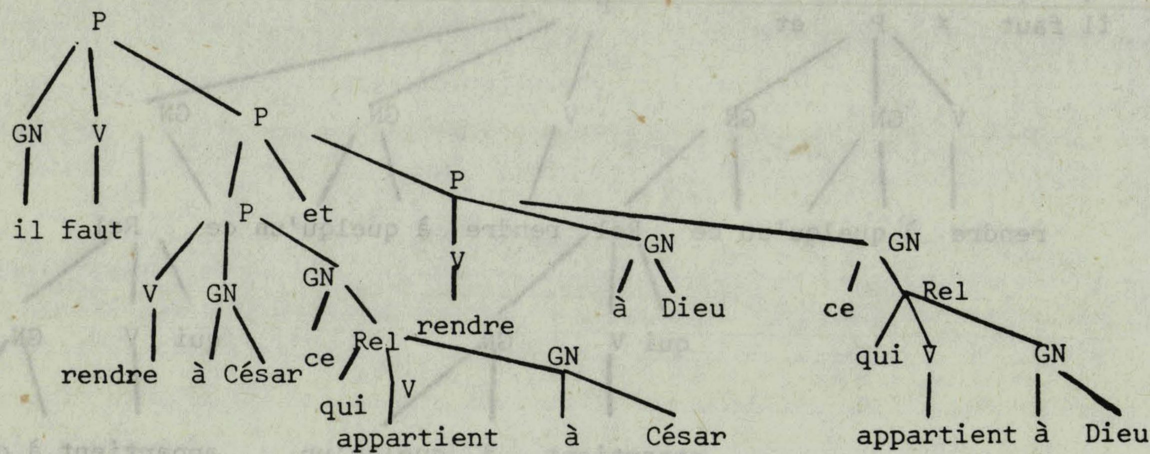
III) Enfin, soit la règle

r_3 : X_1 quelqu'un X_2 quelqu'un X_3 quelqu'un X_4 quelqu'un X_5

$\rightarrow X_1$ César X_2 César X_3 Dieu X_4 Dieu X_5

donne bien, appliquée à t_2, l'arbre t_3

t_3



Nous avons ainsi transformé la phrase
"Il faut rendre à quelqu'un ce qui lui appartient"
en "Il faut rendre à César ce qui appartient à César et rendre à Dieu ce qui appartient à Dieu"

fin de l'exemple:

Remarquons encore l'existence dans les grammaires par coupes de **prédicats d'applications**. Un prédicat d'application est associé à une règle et est obtenu à partir de prédicats élémentaires par un nombre fini de conjonctions, disjonctions et négations. Un prédicat élémentaire a la même forme et la même signification qu'un membre gauche de règle.
Par exemple soit

r : $X_1 A\ X_2 \rightarrow X_1 X_2$

associée au prédicat d'application

non (X_1 A X_3 A X_4) et (X_4 B X_5 A X_2 ou X_4 C X_5 A X_2)

L'occurrence de A effacée par r est "la plus à droite" et il y a au moins un noeud B ou C "à gauche" de ce A (au sens des coupes)

La transformation $t_o \overset{*}{\vdash} t_3$ a été obtenue comme composée de transformations élémentaires. D'une façon générale, un **cycle** de transformations est une succession d'opérations élémentaires satisfaisant à certaines conditions.

Le modèle de Peters et Richie peut être considéré comme un cas particulier du précédent, en ce sens que les transformations élémentaires sont grosso modo les mêmes mais que leur succession obéit à des contraintes particulières. Brièvement, disons qu'un arbre noyau est partitionné en sous-arbres par des occurrences d'un symbole distingué S. (par exemple $t = t_1\ (S\ t_2.\ S(t_4,t_5),\ S\ t_3)$, les t_i ne contenant aucun symbole S). La transformation se fait de façon ascendante. On applique d'abord un **cycle de transformation** à chacun des sous arbres ainsi définis les plus proches du feuillage. La marque du sommet disparait (ou est modifiée) (par exemple $t_4 \overset{*}{\to} u_4$, $t_5 \overset{*}{\to} u_5$, $t_3 \overset{*}{\to} u_3$ d'où $t \overset{*}{\to} t_1\ (S\ t_2.\cancel{S}(u_4,u_5),\cancel{S}u_3)=t'$.) Puis on itère le procédé (ici, $t_2.\ \cancel{S}(u_4,u_5) \overset{*}{\to} v_2$ d'où $t' \overset{*}{\to} t''=t_1(\cancel{S}v_2,\cancel{S}u_3)$ et finalement $t'' \overset{*}{\to} t'''$ par le cycle le plus "profond" au sens des auteurs). Les auteurs, se passant de tout concept d'arbre, ont un formalisme considérablement compliqué. On trouvera un exposé clair en termes d'arbres de leur modèle par Rounds [105], [106].

De nombreuses restrictions définissent des sous-classes de ces modèles généraux, coïncidant"à peu près" avec tous les modèles étudiés par les autres auteurs. (Nous disons "à peu près" car, pour une même idée de base, le fait que les définitions sont soumises à tel ou tel formalisme particulier introduit évidemment des variantes dans les classes engendrées). Il importe de savoir quels motifs ont fait introduire les différentes classes de grammaires transformationnelles. Ces motifs sont liés aux principaux problèmes de la théorie, que nous énumérons maintenant.

III-2-2-1-2 La problèmatique :

P1 - Quelle est la classe de langages engendrée par une classe de G.T. donnée ?

P2 - La classe de langages obtenue est-elle "linguistiquement satisfaisante", c'est à dire décrit-elle "bien" les langues naturelles ?

P3 - L'analyse syntaxique est elle possible ? (Décidabilité de l'appartenance). Si oui, quelle en est la complexité ?

P4 - Propriétés des règles : pour telle classe de langages engendrés, peut-on se passer d'un certain type de règles ou de contraintes ?

Peut-on remplacer une ou plusieurs règles par une règle d'un autre type, etc...

L'état de ces questions était le suivant en cette 'première époque' considérée ici.

Les modèles généraux de G.T. engendrènt tous les langages récursivement énumérables, ce qui donne évidemment une réponse négative à P2 et P3. Même on montre (Salomaa [107]) que, pour un alphabet donné, il existe un ensemble fini de règles de transformations tel que, pour tout langage récursivement énumérable défini sur cet alphabet, il existe un noyau très simple (une forêt monadique reconnaissable) tel que la G.T. (au sens de Ginsburg - Partee) ainsi définie l'engendre. Autrement dit on peut trouver un ensemble de règles "uniformes" (indépendant du langage) et des noyaux très simples sans restreindre la puissance générative. Un résultat du même type est évidemment obtenu par Peters et Richie [104]. Nous généraliserons encore ces résultats en II et les éclairerons).

L'idée à retenir de ces résultats est que l'on peut "tout mettre dans le noyau" (puisque les règles peuvent être indépendantes des langages) et que ce noyau peut être "très simple".

Remarquons qu'en considérant une grammaire (de mots) à structure de phrases comme un ensemble de règles de transformations et l'axiome comme noyau, on engendre tous les récursivements énumérables "en mettant toutes les informations dans les règles".

<u>Conséquence et remarque importante</u> : Ces résultats montrent que, du point de vue des langages engendrés, la distinction noyau - règles est illusoire. Mais les passages de l'un à l'autre "malmènent la syntaxe". Plus précisément, le détail des preuves montre qu'on génére alors des langages qui ont des arbres syntaxiques réduits tous à une branche ! Ces transformations sont donc peu satisfaisantes, mais montrent la nécessité d'affiner les concepts. Du point de vue des langues naturelles, ces résultats qualitatifs extrêmes n'ont de toute façon pas de signification empirique.

<u>Fin remarque</u>.

Aussi de nombreuses sous-classes de G.T. existent, correspondant à des restrictions des modèles généraux de Ginsburg - Partee ou Peters - Richie. Les restrictions ont pour but de restreindre les classes de langages

(en vue du problème P2) et de rendre l'analyse syntaxique décidable (P3) (Woods [ ]). L'indécidabilité générale de l'appartenance provenant de la puissance de transformation, on conserve dans la totalité des modèles un noyau algébrique, mais on restreint les règles (règles "croissantes", linéaires non effaçantes, nombre borné d'applications de règles etc ...). Les restrictions étant fortement liées aux formalismes, nous ne les détaillons pas. Les problèmes P1 et P4 se reposent évidemment pour chaque sous-classe. En ce qui concerne les propriétés des transformations, les auteurs s'interdisent souvent, suivant une idée de Chomsky, de recopier un arbre en plusieurs exemplaires, puis d'en effacer les "copies" ainsi générées. Nous préciserons ce problème en III-2-3-1. Un important problème est également de savoir si on peut d'abord appliquer toutes les règles d'un type avant celles d'un autre (par exemple, tester d'abord toutes les égalités, puis générer toutes les copies, puis faire toutes les transformations reconnaissables).
On pourrait donner de nombreux exemples de transformations simples d'arbres qui soient très complexes à décrire dans le cadre jusqu'ici étudié (rappelons que Ginsburg - Partee donnent l'exemple de l'émondage ('tree-pruning') dans [96]). Nous avons déjà vu à l'occasion de l'exemple 3 les difficultés à décrire de façon satisfaisante les modifications syntaxiques. Ces difficultés disparaissent quand on étudie les G.T. dans le cadre suivant.

III-2-2-2 Deuxième époque

Grammaires transformationnelles et langages d'arbres (ou forêts).

III-2-2-2-0 Evolution de la problèmatique :

Comme dans tout autre domaine, l'évolution de la problèmatique des G.T. a été orientée par

- l'évolution des concepts, due à la démarche de clarification, approfondissement et synthèse des notions antérieures. En ce sens, l'étude des arbres se fait clairement ressentir dans le paragraphe précédant.

- L'enrichissement des motivations. En ce sens, nous avons déjà cité les nombreux auteurs qui ont simultanément introduit la notion de "forêt reconnaissable", essentiellement pour étudier les arbres de dérivation des forêts algébriques. Mais les raisons d'étudier les forêts pour elles mêmes se sont multipliées : les problèmes de compilations se ramènent à des problèmes de traduction liée à la syntaxe (syntax directed translators ou compilation par attributs ; d'une façon plus générale, Marchand [68], [103] pose le problème de traduire toute phrase d'un langage (algébrique) donné en une phrase d'un autre, en respectant la syntaxe, c'est à dire de **transformer une forêt en une autre** ("problème fondamental lié aux systèmes transformationnels"). Plus généralement encore, le point de vue informatique (langages évolués, systèmes conversationnels, traduction automatique, schémas de programmes, soit encore "traitement de toutes sortes de processus") multiplie les raisons de s'intéresser aux G.T.

On s'intéresse donc maintenant aux arbres pour eux mêmes, et non seulement pour leurs feuillages que sont les mots. Les questions énumérées en II-2-2-1 se posent donc non seulement pour les langages (de mots) mais pour les forêts.

L'apparition d'une "théorie des forêts" se traduit immédiatement dans l'étude des G.T. par une grande simplification du formalisme (Rounds[82], [105], [106] Thatcher [89], [109]) et, "par définition", par la possibilité de décrire directement des transformations d'arbres, donc des transformations syntaxiques.

III-2-2-2-1 Les nouveaux outils :

Dès le début de l'étude des arbres apparaissent ceux qui restent les principaux outils de la théorie des arbres : les grammaires d'arbres, les forêts reconnaissables et algébriques, les transducteurs d'états finis. Formellement, ces notions sont d'ailleurs des généralisations naturelles, aux arbres, de notions classiques en théorie des langages.

α) les grammaires d'arbres et les principales classes de forêts :

Remarque préliminaire :

Certains auteurs (Marchand [103], Chauché [95] considèrent des lettres d'arité non bornée. Nous nous limiterons toujours au cas d'alphabets gradués finis (donc d'arités bornées), suivant en cela de nombreux auteurs. Cette restriction ne modifie fondamentalement rien.

I) Le type le plus général de grammaire d'arbres

(Rounds [105], [106], Marchand [103]) est la donnée d'un nombre fini de règles et d'un axiome. Nous utilisons ici les notations du magmoïde pour le décrire (le modèle et le formalisme de Marchand diffèrent quelque peu).

On considère un axiome $A \in V_o$, un alphabet gradué de variables syntaxiques (1) V et un alphabet gradué final Σ.

Une règle est de la forme $t = \tilde{t}.\theta \to \tilde{u}.\zeta = u$ où $\tilde{t}$ et $\tilde{u} \in T(\Sigma \cup V)^1$, θ et ζ sont de même degré inférieur et on s'impose de plus que l'image de ζ soit incluse dans celle de θ (donc que "toute variable de u figure dans t") et que θ soit surjective.

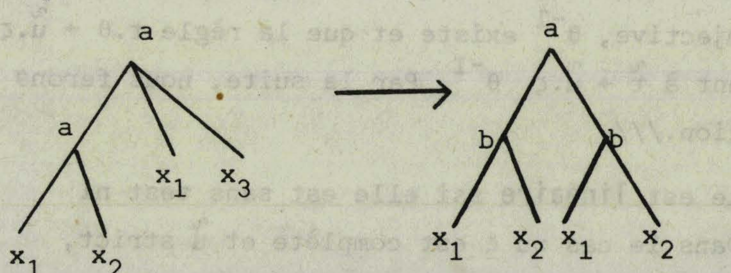
On a alors évidemment $t_1 \Rightarrow t_2$ par la règle considérée si et seulement si il existe t'_1, t''_1 tels que

$$t_1 = t'_1.\tilde{t}.\theta.t''_1 \quad \Rightarrow \quad t'_1.\tilde{u}.\zeta.t''_1 = t_2$$

Ce qui revient à écrire, avec $t''_1 = \langle \bar{t}_1, .. \bar{t}_n \rangle$

$$t'_1.\tilde{t}.(\bar{t}_{\theta(1)}, ..., \bar{t}_{\theta(p)}) \quad \Rightarrow \quad t'_1.\tilde{u}.(\bar{t}_{\zeta(1)}, ..., \bar{t}_{\zeta(q)})$$

Par exemple soit la règle



alors $t(a(a(\bar{t}_1,\bar{t}_2), \bar{t}_1,\bar{t}_3)) \to t(a(b(\bar{t}_1,\bar{t}_2),b(\bar{t}_1,\bar{t}_2)))$.

On définit alors de façon évidente la cloture transitive $\overset{*}{\Rightarrow}$ associée à un nombre fini de règles, et la notion de **forêt engendrée par une grammaire**. Remarquons que l'application d'une règle ne change pas le degré d'un arbre. Ainsi, comme l'axiome appartient à $T(\Sigma \cup V)^1_o$, la forêt engendrée est incluse dans $T(\Sigma)^1_o$. C'est là le point de vue habituel, qu'on généralise évidemment à $T(\Sigma)^p_q$. Remarquons encore que la restriction

(1) Ne pas confondre les variables syntaxiques et les variables des torsions.

imposée à l'image de ζ permet de savoir 'quel arbre substituer à chaque variable de $\tilde{u}$' et que la restriction θ surjectif ne restreint en fait pas le type de règles (on renumérote les variables).

II) Analyse de la transformation réalisée par application d'une règle.

Une règle remplace dans un arbre "un sous arbre par un autre", comme elle remplace "un sous mot par un autre" dans le cas des langages . Mais il se pose ici le problème de substitution de sous arbres aux variables des règles.
Les variables de t et u, spécifiées par θ et ζ, réalisent une correspondance entre des sous arbres de l'arbre initial et et l'arbre transformé. Si θ n'est pas linéaire, comme c'est le cas dans l'exemple donné (deux occurences de x_1 dans t), il faut tester une égalité d'arbres pour appliquer la règle. Par exemple on pourra appliquer la règle de l'exemple à la décomposition $t'_1.\tilde{t}(u_1,u_2,u_3,u_4)$ de t ssi

Déf 1 : $u_1 = u_3$. C'est pourquoi nous disons qu'une règle est **sans test d'égalité** ssi θ est linéaire, et **avec test d'égalité** sinon.

Déf 2 : De même, une règle **génére des égalités** ssi ζ est non linéaire.

Propriété 1 : Si une règle est sans test d'égalité, on peut toujours supposer que θ est l'identité, autrement dit que $t = \tilde{t}$ est un arbre initial. En effet, il est facile de voir que θ étant linéaire (donc injective) et surjective, θ^{-1} existe et que la règle $t.\theta \to \tilde{u}.\zeta$ est d'un effet équivalent à $\tilde{t} \to \tilde{u}.\zeta\ \theta^{-1}$. Par la suite, nous ferons toujours cette supposition.///

Déf 3 : Nous dirons qu'une règle est **linéaire** ssi elle est sans test ni génération d'égalité. Dans le cas ou ζ est complète et $\tilde{u}$ strict, nous dirons, conformément à (Dauchet [9]) que la règle est

Déf 4 : **inversible** (ζ est alors bijective). De même, dans le cas général

Déf 5 : nous dirons qu'une règle est **stricte** si $\tilde{u}$ n'est pas réduit à une

Déf 6 : variable, qu'une règle est **complète** si ζ est complète. Bien entendu,

Déf 7 : une grammaire **complète** sera une grammaire dont toutes les règles sont complètes, etc... etc...

III) Problèmes généraux relatifs aux grammaires d'arbres :

Nous avons vu qu'une grammaire est la donnée d'un couple (A,R) où A est un axiome et R un ensemble fini de règles.

<u>Déf 8</u> : R, que nous appelerons encore **système de réécriture** est évidemment la donnée essentielle du couple (A,R).

Etant donné un système de réécriture R, on peut y attacher deux notions essentielles.

<u>Déf 9</u> : a) Capacité transformationnelle d'un système de réécriture : cette capacité de "transformer ou non un arbre en un autre" est donnée par l'ensemble des couples (t,u) où u est transformé de t par application de règles de R ($t \overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}} u$) et où u est "sans variable".

Ainsi, nous associerons à un système de réécriture R la **transformation associée** $\widehat{R} = \{(t,u) \mid t \overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}} u,\ u \in T(\Sigma)_o^1\}$

<u>Déf 10</u> : b) Capacité générative d'un système de réécriture : c'est un cas particulier du point de vue précédent, où on considère les transformées de l'axiome **A**. Ainsi, la **forêt engendrée** par G = (A,R) sera notée $F(G) = F_A(R) = \{(A,u) \mid A \overset{*}{\underset{R}{\rightarrow}} u,\ u \in T(\Sigma)_o^1\}$.

<u>Déf 11</u> : Deux grammaires G et G' sont générativement équivalentes (noté $\tilde{g}$) ssi F(G) = F(G'). Deux grammaires (A,R) et (A',R') (où deux systèmes de réécriture R et R') sont transformationnellement équivalents ($\tilde{t}$) ssi $\widehat{R} = \widehat{R'}$. Bien entendu, $\tilde{t}$ est strictement plus fine que $\tilde{g}$.

Si le problème de l'équivalence transformationnelle n'est, à notre connaissance, pas posé clairement dans la littérature, celui de l'équivalence générative est évidemment le plus classique qui soit. Le premier problème qui se pose est celui de la décidabilité de ces équivalences. Il a été peu étudié et c'est normal car, comme nous allons le voir, il "tourne court" en ce qui concerne spécifiquement les arbres. Si on considère deux grammaires régulières d'arbres (Arnold [A], Brainerd [30], [31], Rounds [83], Thatcher [88]), l'équivalence générative est décidable. Cette classe de grammaire, qui engendre les forêts reconnaissables, a des règles fort simples du fait que $V = V_o$ (toutes les variables de la grammaire sont de degré 0). On dérive en effet nécessairement de "haut en bas". Dès qu'on supprime cette contrainte, on obtient pour le moins des règles du type algébrique (Arnold [A], Fischer [55], Engelfriet [48], Rounds [81], Marchand [103]) et, même si on se restreint au cas monadique ($V = V_o \cup V_1$), cas où on génère des arbres monadiques, les forêts

coïncident alors avec les langages de branches qui sont algébriques.
L'équivalence générative se ramène alors au problème indécidable de l'égalité de langages algébriques.
Les résultats concernant l'équivalence transformationnelle en découlent. En effet, dans le cas de grammaires algébriques d'arbres, chaque règle a sa partie gauche réduite à une variable syntaxique. Partant d'un arbre t, seules les variables syntaxiques de cet arbre sont donc transformées. L'équivalence transformationnelle se ramène donc à l'équivalence générative : $R \underset{t}{\sim} R' \iff \forall X \in V, (X, R) \underset{g}{\sim} (X,R')$.
On en déduit que $\underset{t}{\sim}$ est décidable si R et R' sont régulières, indécidables en général (même dans le cas algébrique monadique cité précédemment).

Beaucoup plus fécond en l'état actuel des choses est l'autre problème canonique suivant.
Q1) Nous avons énuméré en II) différents types de grammaires d'arbres. S'y ajoutent les grammaires par coupes (c'est à dire, rappelons le, les G.T. étudiées en III-2-2-1 , considérées du point de vue des arbres. Il se pose naturellement les problèmes de comparaison des capacités génératives et transformationnelles de ces différentes classes, tant du point de vue des forêts que des langages feuillages de ces forêts. Comme cas particulier de ces problèmes, on peut chercher pour chaque classe une forme canonique, particulièrement simple, de règles. Ces problèmes englobent en particulier-au niveau des arbres- les problèmes P3 et P4 cités en III-2-2-1-2. Nous répondons à la question Q1 en (III-2-3).

IV) Les grammaires algébriques et régulières ont été les plus étudiées (références déjà données). Nous n'y reviendrons pas, car la synthèse en est faite dans Arnold [A] et il n'y a pas de retombées sur les G.T. (autres que les propriétés intrinsèques résultant des études de ces classes, voir Arnold [A]).

β) Les transducteurs d'états finis d'arbres :
Ils apparaissent dès le début de la théorie des arbres, et liés aux G.T. (Lévy et Joshi [64], Rounds [83], Thatcher [109]). Nous en avons abondamment résumé les propriétés dans [9] et dans les premières parties de cette thèse. Nous touchons avec ces transducteurs d'arbres un des noeuds de l'évolution de l'étude des G.T., comme nous allons le voir maintenant.

III-2-2-3 Critique de la notion de transformation d'arbres :

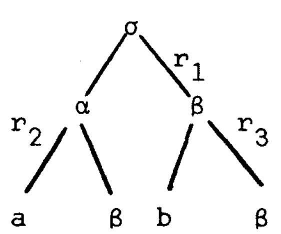
Dans toute la suite, pour la clarté de l'exposé, nous ne distinguerons pas "variable syntaxique" et lettre terminale. La distinction est d'ailleurs tout à fait accessoire (elle revient à tester si, toutes transformations faites, le résultat appartient à l'ensemble des arbres (ou des mots) sur un ous alphabet)

III-2-2-3-1-introduction : le cas des langages : La transformation la plus simple d'un mot revient à appliquer une règle de dérivation (règle étant pris au sens classique de règle de grammaire). Nous allons voir comment sont étudiées les applications itérées de règles, c'est à dire que nous allons étudier diverses notions de cloture transitive des transformations réalisées par application d'une seule occurrence d'une règle (transformations que nous qualifierons d'**élémentaires**).

I) Le cas des langages algébriques : nous disposons ici de la notion d'arbre syntaxique pour décrire l'application à un mot d'un nombre fini d'occurrences de règles (nous abrégerons "occurrence de règle" en "règle").
On distingue les règles indépendantes et les règles imbriquées : les premières peuvent être appliquées dans un ordre quelconque, pas les secondes.

Par exemple, soit $r_1 : \sigma \to \alpha\ \beta$, $r_2 : \alpha \to a\ \beta$, $r_3 : \beta \to b\ \beta$

et l'arbre de dérivation



r_2 et r_3 sont indépendantes, mais r_2 est imbriquée dans r_1, ainsi que r_3.
Le "degré d'imbrication" correspond à la "profondeur de l'arbre".

Considérons un mot auquel on applique une séquence de règles indépendantes. La transformation obtenue est réalisée par un g.s.m (un transducteur d'états finis de langages). [Un tel transducteur réalise d'ailleurs de plus un contrôle reconnaissable sur les séquences de règles utilisées, et on obtient les transductions rationnelles en s'autorisant à "réécrire sans rien lire "]. L'arbre de dérivation correspondant à la transformation étudiée est de profondeur 1. Ainsi, nous voyons que les transductions rationnelles strictes (qui lisent obligatoirement) réalisent les "transformations de profondeur 1".

Dans le cas de règles algébriques, les "règles imbriquées se composent". Par exemple, on peut considérer la règle $\sigma \to a\ \beta\ \beta$ réalisée en dérivant par r_2 α dans r_1. Ceci revient à ramener à 1 la profondeur de l'arbre. On peut retrouver grosso modo ce résultat de composition en remarquant qu'appliquer une transformation de profondeur p (correspondant à un arbre syntaxique de profondeur p), revient à composer p transductions rationnelles strictes. **Or, on sait que ces transductions sont closes par composition.** Ainsi, dans le cas des règles grammaticales algébriques, la notion de transformation de profondeur bornée est décrite par les transductions rationnelles, et se ramène à la profondeur 1 (tant du point de vue grammatical que des transductions). Etudier les transformations non bornées en profondeur revient évidemment à étudier tous les transformées possibles d'un mot par des règles algébriques, donc les forêts reconnaissables.

II) Le cas des langages à structure de phrase :

La notion de règles indépendantes persiste, mais il est plus difficile de définir les imbrications de règles - car les règles peuvent ici se chevaucher. Néanmoins, on peut définir, dans le même esprit que précedemment, la notion de profondeur de transformation (voir Stanat [108]). Soit par exemple l'alphabet $\{a_1, a_2, a, \bar{a}\}$ et les règles

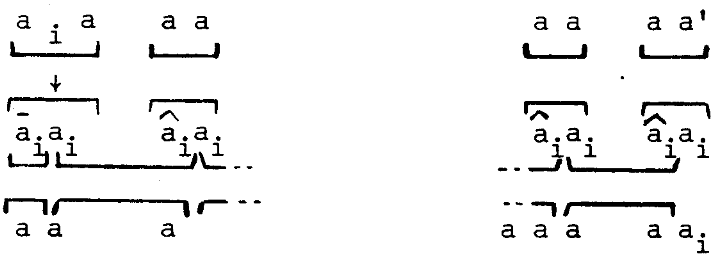
$r_1^i : a_i a \to \bar{a}_i a_i$, $r_2^i : a\ a \to \hat{a}_i a_i$, $r_3^i : a\ a' \to \hat{a}_i a'_i$, $r_4^{i}\,\bar{a}_i \to a$,

$r_5^i\ a_i \widehat{a'}_i \to a\ a$ (pour $i \in [1,2]$)

Le mot $a_i a^{2n}\ a'$, auquel on applique la séquence $(r_1^i, r_2^i, \ldots, r_2^i, r_3^i)$ de règles indépendantes, se transforme ainsi en $\bar{a}_i a_i (\hat{a}_i a_i)^{n-1} a_i a'_i$ par une transformation de profondeur 1 que l'on peut schématiser en

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{a_i\ a}_{\downarrow} & & \underbrace{a\ a} & & \underbrace{a\ a} \ \cdots\cdots & \underbrace{a\ a} & \underbrace{a\ a'} \\ \overbrace{\bar{a}_i\ a_i} & & \overbrace{\hat{a}_i a_i} & & \overbrace{\hat{a}_i a_i} & \overbrace{\hat{a}_i a_i} & \overbrace{\hat{a}_i a'_i} \end{array}$$

Si on applique au mot obtenu la séquence $(r^i_4, r^i_5, .. r^i_5)$ on obtient $a^{2n+1}a'_i$. Finalement, $a_i a^{2n} a' \overset{*}{\to} a^{2n+1} a'_i$ par la 'transformation de profondeur 2'



où on voit apparaitre un chevauchement des découpages induits sur le mot intermédiaire par les séquences de règles. Pour la grammaire donnée, si on considère $\{a, a_1, a_2\}$ comme seuls terminaux, l'image de $a_1 a^{2n} a'$ se réduit à $a^{2n+1}a'_1$ et celle de $a_2 a^{2n} a'$ à $a^{2n+1}a'_2$. Ici, la profondeur de la transformation ne peut pas être réduite à 1 (pour transmettre arbitrairement loin l'indice de la première lettre à la dernière, il faut la profondeur 2). Mais, comme dans le cas I) une transformation de profondeur 1 se réalise par transduction et, comme les transductions se composent, ici encore la notion de transduction rationnelle rend compte des 'transformations grammaticales de profondeur bornée'. Ainsi, alors que les règles contextuelles nous apparaissent d'un usage malaisé, **les transductions rationnelles "déploient" les transformations syntaxiques de profondeur bornée les plus générales.** (Si on retire l'hypothèse de profondeur bornée, on en est amené à une étude directe des langages contextuels ou récursivement énumérables).

III-2-2-3-2-<u>Le cas des forêts</u> : Les premières questions qu'on se pose sont, comme dans le cas des langages :

- étudier les transformations obtenues par application de séquence de règles indépendantes (profondeur 1)

- étudier les transformations de profondeur >1.

A-t-on la possibilité de 'contracter' cette profondeur ? (Propriété de composition comme dans le cas des langages ?)

Ici, la situation est beaucoup plus complexe que dans le cas des langages, essentiellement à cause de l'existence de torsions.

I) Les transformations de profondeur 1 : Il s'agit d'abord de définir les règles indépendantes. Dans le cas des langages, nous avons vu qu'une transformation de profondeur 1 consistait à lire le mot d'entrée de gauche à droite et à appliquer au fur et à mesure des règles grammaticales telles que les occurrences de leurs parties gauches soient disjoints deux à deux. Mais en fait, dans ce cas, l'hypothèse "de gauche à droite" était superflue, l'ordre d'application des règles n'importait pas.

Illustrons d'un exemple la différence qui apparait, par rapport au cas des langages, dans le cas des arbres.

soit les règles $r_1 : \begin{array}{c} a \\ | \\ x \end{array} \to \begin{array}{c} a' \\ / \ \backslash \\ x \quad x \end{array}$ $\quad r_2 : b \to b'$ $r_3 : b \to b''$.

Considérons les dérivations $d_1 : \begin{array}{c} a \\ | \\ b \end{array} \xrightarrow{r_1} \begin{array}{c} a' \\ / \ \backslash \\ b \quad b \end{array} \xrightarrow{*} \begin{array}{c} a \\ / \ \backslash \\ b' \quad b'' \end{array}$

$r_2 \quad r_3$

$d_2 : \begin{array}{c} a \\ | \\ b \end{array} \xrightarrow[r_2]{} \begin{array}{c} a' \\ | \\ b' \end{array} \xrightarrow{r_1} \begin{array}{c} a' \\ / \ \backslash \\ b' \quad b' \end{array}$

Dans les deux cas, les occurrences des parties gauches des règles appliquées sont bien disjointes (on peut dire en ce sens que les règles sont indépendantes). Pourtant, "le sens de parcours de l'arbre" importe : dans d_1 on lit l'arbre en descendant, ce qui permet de dériver les deux occurrences de b de façons différentes. Si, comme dans d_2, on transforme de bas en haut, on doit dériver d'abord b, puis on dédouble son transformé ne pouvant pas obtenir a(b', b"). Ainsi, le sens de parcours de l'arbre importe. Par contre, si on applique des règles dont les occurrences de parties gauches ont leurs sommets incomparables deux à deux (non situés sur une même branche), il est alors évident qu'on se retrouve dans une situation comparable à celle des langages. On peut donc restreindre la notion de règles indépendantes en ce dernier sens (sommets incomparables). La transformation réalisée par application à un arbre d'une séquence de telles règles indépendantes est alors effectuée par un transducteur d'états finis d'arbres, ascendant ou descendant. Mais il est plus intéressant de considérer un autre point de vue : comme on choisit un sens de parcours (gauche à droite) pour réaliser une transduction de mots, on va choisir un sens de parcours de l'arbre en le transformant au fur et à mesure. En ce sens, on appliquera des règles grammaticales de domaine disjoint ; sans autre restriction.

Nous avons remarqué que l'ordre de transformation de sous arbres indépendants n'importe pas, autrement dit, on pourra aller de branche en branche dans un ordre arbitraire.

Par contre, nous avons vu que parcourir les branches de haut en bas ou bas en haut importait.

Finalement, les transformations de profondeur 1, ascendantes ou descendantes, seront définies ainsi.

II) Transformations de profondeur 1 et transducteurs d'états finis d'arbres :

a) Dans le cas où toutes les règles grammaticales sont de type algébrique, les transformations de profondeur 1 sont évidemment réalisées par des transducteurs d'états finis d'arbres, avec, en plus, un contrôle reconnaissable effectué par la succession des états *(1)*. Nous nous retrouvons alors exactement dans le cas des langages.

b) Dans le cas de règles grammaticales quelconques, les transductions classiques d'arbres ne peuvent pas rendre compte de certains phénomènes :

- soit par exemple la règle $\begin{array}{c} A \\ / \ \backslash \\ a \ \ x \end{array} \to \begin{array}{c} a' \\ | \\ x \end{array}$

Une règle de transduction descendante classique réalisant cette règle grammaticale serait de la forme $q[A(x_1,x_2)] \to a'(q'[x_2])$, donc incapable de "reconnaitre" le a substitué à x_1 en $A(x_1,x_2)$. C'est le problème de "reconnaissance de ce qui n'est pas lu".

- Soit la règle $\begin{array}{c} A \\ / \ \backslash \\ x \ \ x \end{array} \quad \begin{array}{c} a. \\ | \\ x \end{array}$ Une telle règle réalise sur le domaine un

(1) Les règles algébriques sont de la forme $\begin{array}{c} A \\ / \, | \, \backslash \\ x_1 \ x_2 \cdots x_n \end{array} \to \tilde{u}.\zeta$

"test d'égalité", opération impossible par un transducteur classique. Nous avons déjà au chapitre (III-1-2) de cette thèse discuté des rapports entre bimorphismes et transductions d'arbres, et vu que nos bimorphismes correspondaient à des classes de transducteurs résolvant ces problèmes. Nous rappelerons en III-2-3 les rèsultats en termes de G.T.

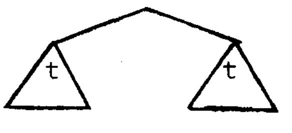
III) Transformations de profondeur supérieur à 1 *(1)* :

Si nous nous limitons au cas des systèmes de réécriture algébriques, nous venons de voir que les transformations de profondeur 1 sont réalisées par les transductions classiques de forêts. Les transformations de profondeur supérieure seront donc réalisées par composition de transductions. Or, il est connu que ces transductions, qu'elles soient ascendantes ou descendantes, **ne se composent pas** (Thatcher [109], Ogden et Rounds [76], Perrault [78], Baker [19]). **C'est là un point capital sur lequel nous reviendrons.**

III-2-2-3-4-Composition des transformations dans les G.T. par coupe :

I) Une transformation élémentaire par coupe, ne peut pas réaliser de transformation en plusieurs noeuds d'une même branche : la transformation se fait simultanément sur des noeuds incompatibles, puisqu'au niveau d'une coupe. L'exemple donné en III-2-2-1 se formalise en gros en les transformations élémentaires suivantes :

- D'abord, on part d'un arbre t que l'on 'dédouble au niveau de l'axiome' (ce qui est une transformation élémentaire)

on obtient alors 

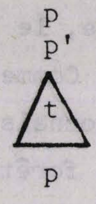
- Ensuite, on fait des modifications au niveau des feuilles d'une des occurrences de t.

La transformation composée obtenue est 'intrinséquement à deux niveaux de coupe' : racine et feuillage. Elle ne peut être décrite par une seule transformation élémentaire. Autrement dit, la notion de **transformation par coupe n'est pas close par composition.** Remarquons que le type de

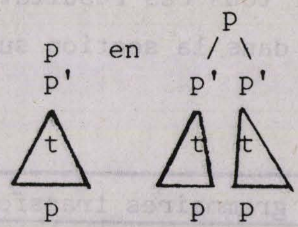
(1) Ne pas confondre la notion de profondeur utilisée ici (transformation par plusieurs passages) avec celle utilisée par de nombreux auteurs (Peters et Richie, Rounds) qui correspond à la profondeur de l'arbre, donc à la profondeur que nous utilisons dans le cas des langages.

transformation décrit ci-dessus est fréquent : on obtient deux phrases aux structures très proches, différant peu.

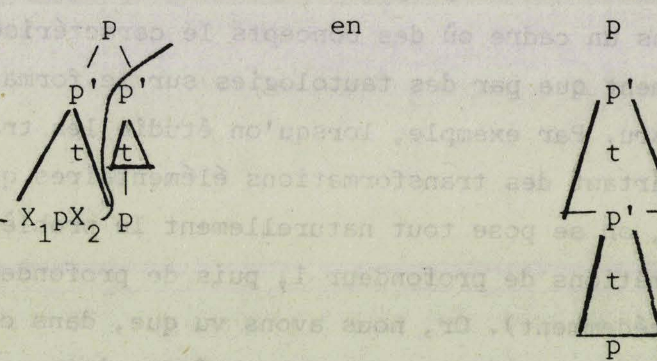
II) Donnons un autre exemple de non composition :

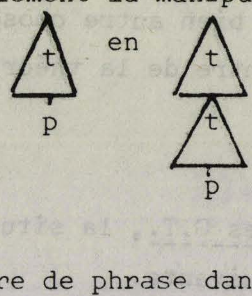
Soit t de la forme pp'.t.p (

sous forme imagée) ou p' est un symbole unaire et p unaire ou zéro aire).

La règle p' → p'p' transforme 

puis la régle X_1 p X_2 p' → X_1 p' X_2 transforme



Les contraintes sur les occurrences des p et p' ne sont pas essentielles, elles simplifient seulement la manipulation de l'exemple. Retenons que nous avons transformé 

Cette transformation correspond à imbriquer une structure de phrase dans elle même, ou plus généralement à imbriquer une structure dans elle même ou dans une qui lui est très proche (structure récursive). Cette transformation, que nous avons réalisée en deux transformations élémentaires par coupe, ne peut pas l'être en une.

III) l'exemple I) ci-dessus peut être réalisé par une transduction d'états finis d'arbres, mais l'exemple II) **ne peut pas l'être, même par une transduction qui testerait des égalités.** Pour prouver ce fait, considérons la transformation qui associe t. t.p.à tout t.p. L'ensemble des t.p est une forêt reconnaissable, le langage de branche de l'ensemble des t.t.p n'est pas reconnaissable. Comme on sait que les transductions avec test d'égalité conserve la reconnaissabilité des langages de branches des forêts transformées de forêts reconnaissables ces transductions ne peuvent réaliser la transformation étudiée ./ / /

Nous allons synthétiser tous ces résultats de"non composition" et en tirer les conséquences dans la section suivante.

III-2-2-3 Le point sur les grammaires transformationnelles - Les problèmes

III-2-2-3-1 D'une façon générale, pour obtenir des résultats profonds sur un problème, il faut pouvoir le "déployer" c'est à dire, mathématiquement parlant, le plonger dans un cadre où des concepts le caractérisent intrinsèquement, autrement que par des tautologies sur le formalisme dans lequel il est apparu. Par exemple, lorsqu'on étudie les transformations de langages, partant des transformations élémentaires que sont les règles syntaxiques, on se pose tout naturellement le problème d'étudier les transformations de profondeur 1, puis de profondeur bornée (au sens vu précédemment). Or, nous avons vu que, dans ce cas les transductions rationnelles réalisent ces transformations, ces transductions déploient le phénomène étudié car leurs propriétés décrivent directement les propriétés des "transformations de profondeur bornée" (dont on peut alors dire bien autre chose que des trivialités !), ces transductions qui sont au centre de la théorie des langages actuelle (A.F.L, cônes)...

III-2-2-3-2 Dans le cas de l'étude des G.T., la situation est, d'après l'étude faite précédemment, la suivante.
Dès l'apparition de l'étude des G.T. au niveau des forêts apparaissent les transductions de forêt (Ogden, Thatcher, Rounds), ce qui est normal

car elles réalisent des transformations algébriques de profondeur un, (au sens précisé dans le paragraphe précédent), c'est à dire associées à des règles grammaticales algébriques.

Mais nous avons vu

I) Qu'elles ne rendent pas compte des transformations de profondeur 1 associées aux règles grammaticales quelconques (essentiellement se pose le problème des tests d'égalité).

II) Surtout, qu'**elles ne sont pas closes par composition.** Si bien qu'on ne peut parler que des transformations de profondeur bornées que comme "composées de transformations de profondeur 1" ! Très tôt, Thatcher [109] se rend compte de l'inconvénient (il parle de "boites de Pandor" pour décrire les transformations de profondeur bornée) et de l'intérêt qu'il y aurait à trouver de **"bonnes classes" de transductions closes par composition.**

Depuis, de nombreux auteurs ont tenté de prouver une hierarchie infinie par composition (Ogen - Rounds, Baker, Perrault), mais de toute façon, le problème demeure et bloque la situation.

1er Point :

Les transductions de forêts n'étant pas closes par composition, on ne peut pas étudier les transformations de profondeur supérieure à 1.

On comprend alors que la théorie des forêts, malgré un formalisme très prometteur et ses tentatives d'application déjà anciennes (1968-1970) aux G.T. aient apporté peu de résultats à ces dernières.

III) Du point de vue des G.T. par coupe, nous avons trouvé la même impossibilité de décrire directement les itérées de transformations élémentaires. D'une façon plus générale se pose le problème :

2ème Point :

Comparer les G.T. de forêts et les G.T. par coupes, leurs transformations élémentaires, leurs puissances génératives et transformationnelles. Si on passe de l'une à l'autre, par quel type de transformation, etc ...

(c'est à dire étudier les questions P1 à P4 du point de vue des grammaires d'arbres).

III-2-2-3-3 Il se trouve lié à ces problèmes la nécessité de trouver des concepts mathématiques les décrivant "à peu près" et dont les bonnes propriétés permettent de les étudier. Pour cela, essayons du point de vue de la problèmatique des G.T., de préciser **un type de transformations dont on a essentiellement besoin**. Suivant cette démarche, tous les auteurs introduisent des sous-classes, des cas particuliers à leurs modèles, les classes obtenues ainsi dépendent évidement beaucoup du formalisme de chacun.

Mais, partant de la notion de transformation élémentaire (c'est à dire d'application d'une règle), on rencontre la difficulté suivante

- ou on exclut toute règle permettant de dupliquer.
Il faut alors pour le moins s'autoriser à tester des égalités avant de transformer (ou après) comme Chauché.
Si on alterne transformations et tests d'égalité, comment vérifier que le nombre de tests est borné ? Si on alterne pas, il faut étudier si on modifie la capacité de transformation en s'imposant un ordre sur les types d'opérations (par exemple : **d'abord** tous les tests d'égalités, **puis** toutes les transformations, etc...)

- ou on s'autorise des règles permettant de dupliquer.
On peut alors tenter d'en contrôler l'application afin de borner le nombre de recopies. Du point de vue des transducteurs d'arbres, ceci revient à des contraintes inextricables sur les états.
C'est pourquoi, pour les transducteurs d'arbres, on trouve soit des transducteurs linéaires, qui ne peuvent dupliquer, soit des transducteurs non linéaires qui peuvent dupliquer à l'infini.
Remarquons enfin que les transducteurs déterministes se composent, mais le non déterminisme est inhérent à la faculté d'appliquer ou pas telle ou telle transformation, et ne peut être,de l'avis de beaucoup, supprimé du point de vue des grammaires transformationnelles (bien que Chomsky y ait songé). Et, avec l'alternance de non linéarité et de non déterminisme, on retrouve la non composition des transductions (hierarchie infinie de Baker [19], Ogden, Rounds [76]).

Nous venons de voir que si on s'autorise des recopies non bornées en largeur, on se trouve dans l'impossibilité de décrire les phénomènes nés de compositions de transformations. Par contre, on peut essayer d'étudier

les transformations générant (ou testant) un nombre borné en largeur d'égalités. Certes, la borne n'aura pas de signification empirique, mais, même en élargissant la problématique, il semble que nous ayons là un modèle assez puissant. En effet, considérons nos transformations conservatives. Nos résultats sur la composition des bimorphismes (que nous rappelerons en termes de G.T. en III-2-3) montrent que leur clôture par composition est la classe DL o LD. Or, les exemples 4 et 4 bis de III-2-1 montrent qu'on peut "imbriquer à l'infini" un arbre dans lui-même par une transformation de la classe DL o LD. On peut donc recopier de façon non bornée "le long d'une branche" ce qui permet à notre formalisme de rendre compte d'autres modèles linguistiques de G.T., non exposés ici, qui nécessitent des recopies non bornées en profondeur. Certaines tentatives vont dans le sens de cette restriction : les S.T.A.G. de Joshi et Takahashi [62] permettent de générer en parallèle un nombre borné d'arbres identiques ou de structures voisines. Surtout, Chauché [105] satisfait à cette contrainte en utilisant des règles de transformation ne permettant pas de recopier en plusieurs exemplaires et en vérifiant un nombre fini de "prédicats de présence" (donc un nombre borné d'égalités de sous-arbres).
En conclusion, nous allons voir que nos transformations conservatives répondent au :

3ème Point :
Trouver un modèle de transformations suffisamment général et ayant de bonnes propriétés de composition.

Nous étudions dans III-2-3 les propriétés de ce modèle vis à vis des autres problèmes soulevés lors des pages qui précèdent.

III - 2 - 3 NOS RESULTATS

III-2-3-1 Systèmes de réécriture et grammaires transformationnelles par coupe : Comparaison, propriétés

III-2-3-1-1 Idée générale. Critique du passage d'un modèle à un autre :

Nous allons montrer ici que les G.T. par coupe et les systèmes de réécriture ont même capacité transformationnelle (donc générative) du **point de vue des forêts** (ce qui est plus fort que du point de vue des langages-feuillages). Dans le même esprit, nous verrons qu'on peut beaucoup restreindre le type de transformations élémentaires considérées sans changer les capacités (on peut par exemple supprimer les tests et les générations d'égalités). On serait tenté de dire que "tout est dans tout et réciproquement", puisque des modèles a priori fort différents sont équivalents. Mais ce serait hatif : quand on considère le passage d'un modèle à un autre, nous verrons que **ce passage se fait de façon artificielle, sans aucune réalité empirique.** Telle notion intuitive se formalise simplement dans un modèle et pas dans un autre, etc... Ainsi chaque modèle conserve son intérêt. C'est le passage de l'un à l'autre qui est artificiel.Mais nous remarquerons que ce passage se fait par des transformations de profondeur non bornée. Autrement dit, si on s'en tient aux transformations de profondeur bornée, on distingue mathématiquement ce qui est distingué empiriquement.

L'intérêt des résultats suivants est autant de constater le côté "forcé" des équivalences que les équivalences elles-mêmes. Des preuves formelles seraient d'autre part fastidieuses. Aussi nous contenterons nous ici de donner les idées générales des preuves.

III-2-3-1-2 Quelques lemmes techniques :

Définition : Soit R un système de réécriture d'arbres dont les règles sont numérotées $r_1, \dots r_n$. Soit L un langage de $\{r_1, .. r_n\}^*$. Au couple (R,L) on peut associer la transformation $\{(t,u) | t \mid\!\frac{\quad}{r_{i_1}} t_1 \mid\!-: \dots t_n \mid\!\frac{\quad}{r_{i_n}} u$

et $r_{i_1} \dots r_{i_n} \in L\}$. On dira que R **controlé par** L réalise cette transformation. Si L est reconnaissable, on a ainsi imposé à R un **contrôle reconnaissable.** Remarquons ici que les occurrences dans chaque t_i d'application des règles ne sont pas contraintes.

Convention : Nous conviendrons de distinguer le sommet de chaque arbre à transformer (on peut toujours marquer ce sommet). Du point de vue génératif, ceci est toujours possible à partir de l'axiome. Cette convention ne modifie rien dans l'esprit des choses. Nous noterons $a_s(x_1,..,x_n)$ l'occurrence de $a(x_1,.. x_n)$ au sommet d'un arbre.

lemme a :

Tout système de réécriture avec contrôle reconnaissable est transformationnellement équivalent à un système de réécriture (sans contrôle).

Idée de la preuve :

Soit R un système de réécriture contrôlé par L.
Soit Q un automate d'états finis reconnaissant L.
Les règles de transition de Q sont donc de la forme $q_i(r_{i'}) \to q_j$ où q_i et q_j sont des états de Q et $r_{i'}$ une règle de R. On peut toujours supposer que Q possède un seul état initial q_o et un seul état final q_f.

I) On construit un système de réécriture R' comme suit :

- L'alphabet terminal de R' et celui de R

- L'alphabet variable de R' est celui de R augmenté des nouvelles variables $q_i a(x_1,.. x_n)$, pour tout état q_i de Q et toute lettre $a(x_1,.., x_n)$ de R, et augmenté des nouvelles variables q_i.

- Les règles de R' sont les suivantes

  règles initiales :

Pour toute lettre du sommet $a_s(x_1,.. x_n)$ de R on définit
$a_s(x_1,.. x_n) \to q_o\ a(x_1,.. x_n)$

  règles de remontée :

$a(x_1,.. x_{i-1},q_k b(x_i,.. x_j),x_{j+1},x_n) \to q_k a(x_1,..x_{i-1},b(x_i,..x_j),x_{j+1},..x_n)$

pour toutes lettres a, b, tout q_k et tout i.

règles de descente :

Les mêmes que ci-dessus, en inversant les flêches.

règles finales :

$q_f\ a(x_1, .. \ x_n) \rightarrow a(x_1, .. \ x_n)$

pour toute lettre de R

règles de transition :

A toute règle r_k : $t_k \rightarrow u_k$ de R, à tout couple d'états q_i et q_j, on associe la règle de R' :

$q_i t_k \rightarrow q_j u_k$

ssi $q_i(r_k) \rightarrow q_j$ est une transition de l'automate Q.

$q_i t_k \rightarrow q_j u_k$ désigne la règle où le sommet de t_k est marqué de q_i et celui de u_k est marqué de q_j.

Si u_k est réduit à une variable x_p, nous noterons $q_j(x_p)$ la partie droite.

Nous introduirons également les règles de la forme

$q_j(a(x_1, .. \ x_n)) \rightarrow q_j a(x_1, .. \ x_n)$.

II) R' ainsi construit est transformationnellement équivalent à R contrôlé par L. L'idée est la suivante :
les transformations de R' sont nécessairement comme suit :

- On marque le sommet de l'arbre à transformer par q_o. C'est le seul moyen de"faire apparaître un état". Les autres règles ne feront que "faire parcourir" l'arbre à la marque d'un état. L'arbre restera donc marqué d'un seul état.

- Les règles descendantes "descendent" q_o de façon non déterministe

- on applique une règle de transition, ce qui revient à appliquer dans R une règle r_k et à marquer l'arbre d'un état q_j (avec $q_o \overset{r_k}{\rightarrow} q_j$).

- On itère le procédé, à savoir :

Supposons $t \underset{R'}{\overset{*}{\vdash}} t'$ où t' est marqué par q_i.

On peut, par règles ascendantes et descendantes, transférer q_i en tout noeud de t', où on applique une règle de transfert marquant de q_j et revenant à appliquer r_k dans R ssi $q_i(r_k) \to q_j$.

- On termine en effaçant la marque d'état par une règle terminale.

Il est alors évident que R' $\underset{t}{\sim}$ (R controlé par L)

C.Q.F.D.

Corollaire a :

Si des transformations sont $\underset{t}{\sim}$ à des systèmes de réécriture, toute composition avec contrôle reconnaissable de ces transformations est $\underset{t}{\sim}$ à un système de réécriture. En particulier, si chaque règle d'une G.T. par coupe est $\underset{t}{\sim}$ à un système de réécriture, la G.T. est elle-même $\underset{t}{\sim}$ à un système de réécriture.

lemme b : Si une transformation est réalisée par un système de réécriture, il existe un système de réécriture réalisant la transformation inverse.

Idée de la preuve : Soit R $\underset{t}{\sim}$ T, T étant une transformation donnée.
A chaque règle $\tilde{t}.\zeta \to \tilde{u}.\theta$ de R, on associe la règle $\tilde{u}.\theta \to \tilde{t}.\zeta$ dans R'
si Im θ = Im ζ.
Sinon, on associe la règle $\tilde{u}.\theta \to \tilde{t}''.\zeta'$
où $\tilde{t}'.\zeta'$ est obtenu en substituant dans $\tilde{t}.\zeta$, un nouveau symbole S à chaque variable de ζ n'apparaissant pas dans $\tilde{u}.\theta$. (Eventuellement, on renumérote les variables).
On ajoute les règles permettant à S de générer tout arbre.
Si ζ contient au moins deux occurrences d'une même variable n'apparaissant pas dans $\tilde{u}.\theta$, on marque le sommet de $\tilde{t}'$ d'un symbole distingué et on introduit une règle $\bar{\tilde{t}}'.\mu \to \tilde{t}'.\mu$, où $\bar{\tilde{t}}'$ est $\tilde{t}'$ marqué comme ci dessus et μ teste les égalités sur les occurrences de la variable considérée.

exemple : soit la règle
$a(x_1, x_1, x_2) \to b(x_2)$ de R

On introduit dans R' :
$b(x_2) \to \bar{a}\ (S,S,x_2)$
(ou, en renumérotant, $b(x_1) \to \bar{a}(S,S,x_1)$)

et $\bar{a}(x_1,x_1,x_2) \to a(x_1,x_1,x_2)$.
D'une façon générale, on vérifie que R' $\underset{t}{\sim}$ R^{-1} C.Q.F.D.

lemme c : toute transduction associée à un transducteur d'états finis (ascendant ou descendant) peut être réalisée par un système de réécriture.

Idée de la preuve : Traitons le cas descendant. Le cas ascendant se traite de même. Rappelons qu'on suppose le sommet de chaque arbre marqué (d'un indice "S"). On considère l'alphabet donné Σ augmenté de ses lettres marquées de S et des états dù transducteur.

A chaque règle de transduction

$$q[a(x_1,\dots x_n)] \to t(q_{i_1}[x_{j_1}],\dots, q_{i_p}[x_{j_p}])$$

associons les règles de réécriture de la forme

$$q\ a^S(b_1(x_1,\dots x_{n_1}),\dots,b_n(x_{n_{n-1}},\dots,x_{n_n})) \to t(q_{i_1} b^S_{j_1}(x_{n_{j_1-1}},\dots,x_{n_{j_1}}),\dots$$

$$\dots,q_{i_p} b^S_{j_p}(x_{n_{j_p-1}},\dots,x_{n_{j_p}}))$$

où $b_1,\dots b_n$ sont des lettres arbitraires de Σ.

A chaque règle de transduction
$q[a] \to t$, on a-socie en autre les règles "terminales" $q\ a^S \to a$.

Il est facile de voir que toute transformation du système de réécriture est calquée sur un mouvement du transducteur. Pour obtenir un arbre sans variable grammaticale, donc sans marque, il faut faire disparaître les "S", donc effectuer le mouvement complet.

C.Q.F.D.

Corollaire de b et c : Tout morphisme inverse ou direct, toute intersection avec une forêt reconnaissable, sont réalisés par des systèmes de réécriture :

Preuve : Il suffit de remarquer que ces transformations sont réalisées par des transductions d'états finies ou leurs inverses.

lemme d : Toute transformation associée à une règle de G.T. par coupe peut être réalisée par système de réécriture.

Idée de preuve : Soit une règle de G.T. par coupe et ses conditions d'applications. Ces conditions sont une conjonction de conditions reconnaissables et de tests d'égalités. La règle elle même fait des transformations reconnaissables, des tests et des générations d'égalités. En marquant la coupe au niveau de laquelle on applique la règle, et en décomposant cette règle en une séquence de règles plus simples, on décompose le problème. Il résulte des lemmes précédents que le marquage d'une coupe, qui est reconnaissable, peut être effectué par système de réécriture. De même, d'après le lemme a, la succession de la séquence de règles décomposées peut être contrôlée. De même encore, toute contrainte et transformation reconnaissable sont réalisées par transduction d'états finies, donc système de réécriture. Reste à étudier les tests et générations d'égalités. Les deux problèmes se traitent de façon identique. Nous nous contentons ici d'étudier le cas des tests d'égalités. Le problème est que les sous arbres à tester sont arbitrairement éloignés. On commence alors par "remonter" les sous arbres à tester, jusqu'au sommet de l'arbre. Là, on applique une"règle - test". Le lemme a nous assure qu'on peut toujours contraindre régulièrement l'ordre d'applications de ces règles.

Soit un test d'égalité

X_1 A X_2 A X_3

- On marque (aléatoirement) les sommet des sous arbres à tester (on marque A en $\bar{A}$).

<u>Attention</u> : en termes de GT par coupe, A désigne <u>tout</u> le sous arbre de sommet A.

- On "remonte" les sous arbres de la façon suivante :

$b(x_1,\ldots x_i, \bar{A}(x_{i+1})\ldots x_j)\ x_{j+1},\ldots x_n) \rightarrow$

$\bar{\bar{b}}(A(x_{i+1},\ldots x_j), x_1,\ldots x_i, A\ (x_{i+1},\ldots x_j), x_{j+1},\ldots x_n)$

("$\bar{\bar{\ }}$" est une nouvelle marque)

On commence ainsi par dupliquer le sous arbre A. A remarquer qu'on "remonte un exemplaire et laisse l'autre inchangé".

On continue la remontée par les règles de la forme :

$a(x_1,\ldots x_i, \bar{\bar{b}}(x_{i+1},\ldots x_j), x_{j+1},\ldots x_n)$

$\rightarrow \bar{\bar{a}}(x_{i+1},x_1,\ldots x_i,b(x_{i+2},\ldots x_j), x_{j+1},\ldots, x_n)$

Remarquons qu'ainsi chaque sous arbre remonté est premier successeur immédiat d'une lettre marquée "$\bar{\bar{}}$". Remontant les - 2 par exemple - sous arbres dont on veut tester l'égalité, on aboutit à un noeud prédécesseur des deux occurrences originelles de ces arbres. Ainsi, on a remonté et rapproché deux copies de sous arbres arbitrairement éloignés. On fait alors le test d'égalité par :

$$a(x_1, .., x_i, \bar{\bar{b}}(x_{i+1}, x_j), x_{j+1}, .., x_k, \bar{\bar{c}}(x_{i+1}, .. x_l), x_{l+1}, .. x_n)$$

$$\rightarrow a(x_1, .., x_i, b(x_{i+1}, .. x_j), ..., c(x_{i+1}, ... x_l) ....x_n)$$

remarquons que la **même** variable figure en premier successeur immédiat de $\bar{\bar{b}}$ et $\bar{\bar{c}}$, ce qui teste bien l'égalité considérée. On efface les marques en même temps.
L'opération est terminée.

C.Q.F.D.

lemme e : Toute règle de réécriture est transformationnellement équivalente à une G.T. par coupe.

Idée de la preuve : La transformation réalisée par une règle de réécriture est locale. Les tests et générations d'égalité se font, par vocation, facilement dans une G.T. par coupe. Par contre, il est difficile de transformer la structure de l'arbre (voir le "tree-pruning"!).
On procéde alors comme suit : par coupes successives, on encadre chaque noeud de l'arbre de marqueurs. Ainsi, on parenthétise complétement et la structure arborescente apparait ainsi codée dans la coupe. On transforme ainsi sans peine (sans peine dans le principe seulement ....).

C.Q.F.D.

III- 2-3-1-3 Equivalence de différents systèmes de transformation :

Proposition 1 : Les grammaires transformationnelles par coupe et les systèmes de réécriture sont transformationnellement (donc générativement) équivalents. Les composées de transductions et transductions inverses, les composées de bimorphisme sont transformationnellement (et générativement) strictement moins puissants que les systèmes de réécriture (et que les grammaires transformationnelles par coupe).

Preuve : Il existe des transformations réalisées par système de réécriture qui ne peuvent être réalisées par composition de bimorphismes (et à forciori de transductions). Il suffit pour cela de considérer la cloture par union de la hierarchie infinie de composition de transductions proposée par B. Baker [19], ou celle proposée par Ogden et Rounds [76] par exemple. Le reste de la proposition se déduit immédiatement des lemmes préliminaires///.

Remarque : Ces résultats n'ont rien de surprenant. Remarquons seulement que l'application d'une règle de réécriture est purement locale, ce qui explique le lemme d, où on doit d'abord rapprocher les sous-arbres avant d'en tester l'égalité ; ce test porte en effet dans une G.T. par coupe sur des sous arbres quelconques. Les G.T. par coupe reviennent à appliquer des espèces de multirègles (comme Marchand dans [103]). Le lemme d montre que cette généralisation est illusoire.

Proposition 2 : Tout système de réécriture est transformationnellement équivalent à un système de réécriture linéaire complet strict dont les seules règles non croissantes sont de la forme $a(x) \to x$(une règle est croissante ssi la taille de sa partie droite est supérieure ou égale à la taille de sa partie gauche).

Preuve :

I) On peut toujours supposer une règle stricte : si une règle $\tilde{t}.\zeta \to \pi^i$ n'est pas stricte, on peut toujours la remplacer par $\tilde{t}.\zeta \to \not{b}\ \pi^i$ et $\not{b}.(x_1) \to x_1$ ($\not{b}$ est un nouveau symbole). Plus généralement, si une règle n'est pas croissante, on rajoute en partie droite des $\not{b}$ que l'on efface ensuite.

II) Si une règle n'est pas compléte, l'idée est de la "compléter" et d'introduire des règles "mangeant" les sous arbres ajoutés. Plus précisément, soit $\tilde{t}.\zeta \to \tilde{u}.\theta$ une règle non compléte.
On lui substitue la règle compléte
$\tilde{t}.\zeta \to \tilde{u}.(\theta, \not{f}.\theta')$ où $Im(\theta') \cup Im(\theta) = Im\ \zeta$

(on peut supposer θ' linéaire).
Puis on introduit les règles "arborivores".

$a(b_1,..,b_n) \to a^{\neq}$ (les $b_i \in \Sigma_o$)

$a(a_1^{\neq},.. ,a_n^{\neq}) \to a^{\neq}$

$\neq\ a^{\neq} \to \neq$

$\tilde{u}\ (\theta, \neq) \to \tilde{u}(\theta)$.

Ainsi, le seul moyen de faire disparaitre le $\neq$ de $\tilde{u}(\theta, \neq \theta')$ est de manger par des marquages en $\neq$ les sous arbres substitués à θ'.

III) Si une règle n'est pas linéaire gauche (ζ non linéaire) on procéde comme suit :
Soit $\tilde{t}.\zeta \to \tilde{u}.\theta$ avec ζ non linéaire. On peut toujours (détails laissés au lecteur) substituer à cette règle une séquence de règles dont les seules non linéaires gauches sont de la forme $a(x_1, x_1) \to a(x_1)$.
Considérons donc seulement une telle règle (il est d'ailleurs intuitif que là est le noyau du problème).
On substitue à cette règle les règles

$a(b(x_1,.. x_n), b(x_{n+1}, x_{2n})) \to$

$a(b(\neq(x_1, x_{n+1}),..., \neq (x_i, x_{n+i}),.., \neq (x_n, x_{2n})))$

pour tout $b \in \Sigma$.

De plus, pour tout $b \in \Sigma$, on introduit les règles :

$\neq (b(x_1,.. x_n, b(x_{n+1},.. x_{2n}))$

$\to a(b(\neq(x_1, x_{n+1}),..., \neq(x_i, x_{n+i}),..., \neq(x_n, x_{2n})))$

et enfin, pour $b \in \Sigma_o$

$\neq (b,b) \to b$.

Ici encore, les non terminaux $\neq$ ne peuvent disparaitre qu'en parcourant totalement les sous arbres substitués aux deux occurrences de x_1, ce qui nécessite l'égalité de ces sous arbres (et la recopie en un exemplaire).

IV) Cas des règles non linéaires droites :

Soit $\tilde{t}.\zeta \to \tilde{u}.\theta$ où θ non linéaire :

On remplace dans θ toutes les occurrences sauf une de chaque variable par un nouveau symbole S. S génére n'importe quel arbre. Puis on se ramène ainsi à des tests d'égalités : vérifier que les sous arbres générés arbitrairement par S sont égaux au sous arbre substitué à la seule occurrence conservée de la variable considérée.

V) En appliquant le procédé IV) pour chaque règle non linéaire droite, on obtient un système équivalent sans règle non linéaire droite. Le procédé III) conserve la linéarité à droite. On obtient donc un système linéaire, puis complet par II) (qui conserve la linéarité). Ces caractères étant conservés par I) on obtient ainsi le résultat.

C.Q.F.D.

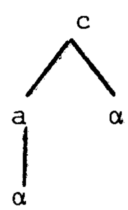
Proposition 3 : **Tout système de réécriture est générativement équivalent à un système de réécriture dans lequel**

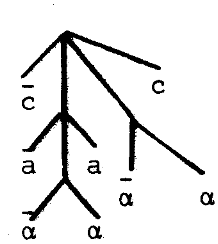
- **on applique d'abord que des règles monadiques complétes**
- **puis que des règles inversibles**

(une règle inversible est une règle linéaire compléte stricte)

Idée de la preuve : on code chaque arbre sur un arbre monadique (c'est à dire sur un mot) en le parenthésant. La forêt générée par un système se code ainsi en un langage récursivement énumérable. On peut donc d'abord générer ce langage récursivement énumérable puis décoder. Ce décodage consiste à faire pousser (par les règles inversibles) les arbres des feuilles vers la racine. La construction générale est simple dans l'esprit mais monotone par tous ses cas particuliers.

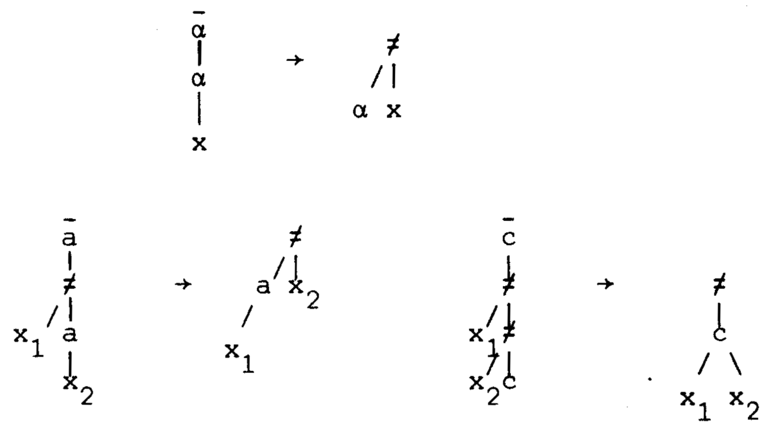
Nous l'illustrons sur un exemple.

L'arbre 

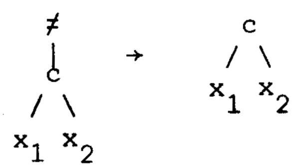
se parenthétise en 

et se code linéairement en $\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{\alpha}\ \alpha\ a\ \bar{\alpha}\ \alpha\ c$

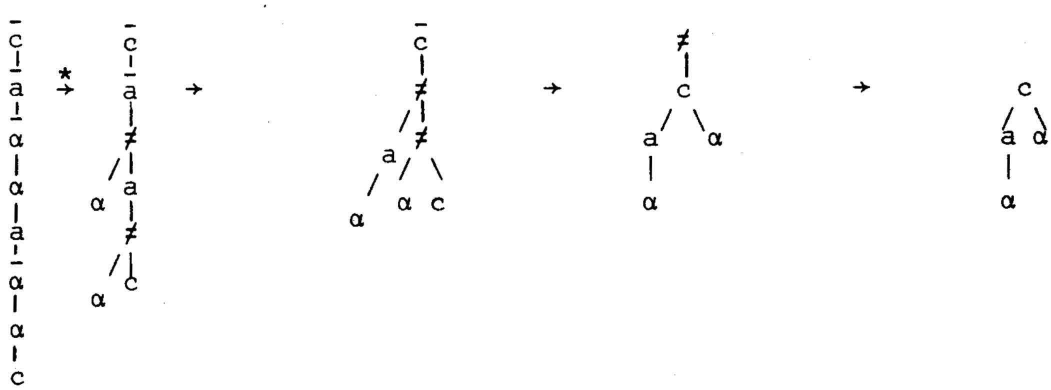
On fait pousser l'arbre par les règles



et pour terminer



On obtient ainsi :



C.Q.F.D.

En remarquant que la linéarité et la complétude sont conservées dans le passage d'un système de réécriture à une G.T. par coupe, l'essentiel des propositions qui précédent se traduisent en le :

<u>Théorème 3</u> : Du point de vue transformationnel (donc génératif), les systèmes de réécriture et les grammaires transformationnelles par coupe sont équivalentes.
On peut toujours supposer la grammaire ou le système linéaire complet.

Remarque : Il se dégage des propositions 2 et 3 une autre idée. Si on considére un système de réécriture complet croissant, l'appartenance d'un arbre à la forêt engendrée est évidemment décidable. La proposition 2 montre que la non croissance peut être réduite au cas monadique. De même, dans la proposition 3, on remarque que le passage du mot à l'arbre divise par deux la taille. De ce fait, l'indécidabilité de l'appartenance ne peut résider que dans la génération monadique de l'arbre codé.
Remarquons encore que dans la proposition 3, les règles sont croissantes en largeur (on retrouve l'idée des grammaires contextuelles de Marchand).
Le problème de l'appartenance d'un mot du feuillage de la forêt est alors décidable si l'appartenance est décidable au niveau du système monadique que l'on applique d'abord.///

III-2-3-1-4 : Comparaison des différents modèles par transformations de profondeur bornée :

En reprenant les constructions faites dans le paragraphe précédent, on constate bien qu'elles sont "tirées par les cheveux" et en tous cas, qu'elles ne peuvent être en général réalisées par transformations de profondeur bornée. De même, si on considère les capacités (génératives ou transformationnelles) bornées, il est facile de voir que les classes obtenues diffèrent avec les modèles. Ainsi, ce qui est empiriquement distinct est bien séparé par les transformations de profondeur bornée. Ce qui suit concrétise cette idée.

I) Les capacités génératives (et transformationnelles) des différents types de systèmes de réécriture de profondeur bornée et respectivement des G.T. par coupe de profondeur bornée sont incomparables.
On trouvera à chaque inclusion un contre exemple tiré des constructions du paragraphe précédent. Par exemple, un simple test d'égalité dans une G.T. peut nécessiter la "remontée" arbitrairement loin des sous arbres à tester. Ceci ne peut se faire par une transformation par système de réécriture de profondeur bornée.

II) Notons R^B la classe des transformations de profondeur bornée (réalisées par systèmes de réécriture), R^n celle des transformations de profondeur n.

c abrège complet, s strict, lg linéaire gauche (c'est à dire sans test d'égalité), ld linéaire droit (sans génération d'égalité), l linéaire. On obtient les inclusions strictes suivantes.

$$\begin{array}{ccccc} & & R^B_{ld} & & \\ R^B & \begin{array}{c}\supsetneq \\ \\ \supsetneq\end{array} & & \begin{array}{c}\supsetneq \\ \\ \supsetneq\end{array} & R^B_l \\ & & R^B_{ld} & & \end{array}$$

on a les mêmes inclusions pour les sous-classes

c, s et c,s

$$\begin{array}{ccccc} & & R^B_{ld}c(\text{resp } s, \text{ resp } c.s) & & \\ R^B_{c(\text{resp } s, \text{ resp } c.S)} & \begin{array}{c}\supsetneq \\ \\ \supsetneq\end{array} & & \begin{array}{c}\supsetneq \\ \\ \supsetneq\end{array} & R^B_l c(\text{resp } s, \text{resp } c.s) \\ & & R^B_{lg}c(\text{resp } s, \text{ resp } c,s) & & \end{array}$$

et on a pour α = lg, lg, l ou Ø

$$\begin{array}{ccccc} & & R^B_\alpha s & & \\ R^B_\alpha & \begin{array}{c}\supsetneq \\ \\ \supsetneq\end{array} & & \begin{array}{c}\supsetneq \\ \\ \supsetneq\end{array} & R^B_\alpha c,s \\ & & R^B_\alpha c & & \end{array}$$

Les comparaisons entre classes de transformations de profondeur donnée font partie de l'étude suivante.

III-2-3-2 Grammaires transformationnelles et bimorphismes de magmoïdes

Nous répondons ici aux premier et troisième points soulevés en III-2-2-4. Nous n'avons ici qu'à traduire en termes de grammaires transformationnelles nos résultats fondamentaux sur les bimorphismes ! L'adéquation de ces derniers à la problèmatique a déjà été discutée.

III-2-3-2-1 Propriétés de composition :

Elles sont résumées dans le tableau "transformations de profondeur bornée" ci-joint.

Nous tirons en particulier de ce tableau que :

Théorème 4 :

La clôture par composition des transformations conservatives est la clôture par composition et inversion des bimorphismes semi-linéaires. Toute composition de transformations conservatives peut-être réalisée par composition d'un bimprophisme semi-linéaire et d'un bimorphisme semi-linéaire inverse, c'est à dire encore par un quasi bimorphisme. D'une façon générale, si on considère une composition de transformations conservatives d'un certain type, cette composition est réalisée par la composée de 1, 2, 3 ou 4 (selon les types) transformations du même type. Autrement dit, on peut toujours ramener une profondeur de transformation quelconque à 1, 2, 3 ou 4 (selon les types).

Remarque importante :

La classe $\widehat{DL} \circ \widehat{LD}$, qui est la cloture par composition des transformations conservatives(et inversion puisque celles-ci sont symétriques) n'est pas conservative. Nous avons vu en effet qu'elle permettait une infinité de tests d'égalités (ou de générations) en "profondeur" mais pas en "largeur". C'est donc une classe très large de transformations, mais qui a de bonnes propriétés tout de même.

III-2-3-2-2 Propriétés génératives :

Théorème 5 : A partir de noyaux reconnaissables, on génère dans le cas le plus général la classe MIDRL.

Le théorème est prouvé dans le chapitre III-1-2 qui est consacré à cette classe, dont on voit ici l'importance du point de vue des grammaires transformationnelles. Ajoutons quelques propriétés de décidabilité.

T R A N S F O R M A T I O N S   D E   P R O F O N D E U R   B O R N E E

TYPE DE TRANSFORMATIONS DE PROFONDEUR 1	TYPE DE BIMORPHISMES CORRESPONDANT	PROPRIETES DE COMPOSITION	CLASSES DE FORETS ENGENDREES A PARTIR DE NOYAUX DE FORETS RECONNAISSABLES
Conservatives (avec tests et générations bornées d'égalités)	L L	$\forall n \geq 2$, $(\widehat{LL})^n = \widehat{LL}^2 = \widehat{QB} = \widehat{DL} \circ \widehat{LD} \neq \widehat{LL}$	M I D R L
Non expansives : avec générations bornées d'égalité, sans test	D L	$\forall n$ $(\widehat{DL})^n = \widehat{DL}$	Rat - lin
Non compressives : avec tests bornés d'égalité sans génération d'égalités	L D	$\forall n$ $(\widehat{LD})^n = \widehat{LD}$	Reconnaissables
Reconnaissables : ni test ni génération d'égalité. a) quelconques	T L	$\forall n \geq 4$ $(\widehat{TL})^n = \widehat{TL}^4 \neq \widehat{TL}^3$	Reconnaissables
b) strictes (on lit et on recopie nécessairement)	T S	$\forall n \geq 2$ $(\widehat{TS})^n = \widehat{TS}^2 = \widehat{B}_1 \neq \widehat{TS}$	
c) strictes et complétes (on lit complétement les arbres à transformer)	T I	$\forall n \geq 2$ $(\widehat{TI})^n = \widehat{TI}^2 = \widehat{B'}_1 \neq \widehat{TI}$	

I) **L'appartenance est décidable dans la classe IDRL.** (C'est à dire qu'étant donné $F \in$ IDRL, on peut décider si un arbre appartient à F).

Preuve : Soit $\phi_1(R_1) \cap \phi_2(R_2) \in$ IDRL

Soit t quelconque $t \in \phi_1(R_1) \cap \phi_2(R_2)$ ssi

$\phi_1^{-1}(t) \cap R_1 \neq \emptyset$ et $\phi_2^{-1}(t) \cap R_2 \neq \emptyset$. Or, $\phi_1^{-1}(t)$, $\phi_2^{-1}(t)$,

R_1 et R_2 sont reconnaissables, et il est décidable de savoir si deux forêts reconnaissables sont disjointes.

C.Q.F.D.

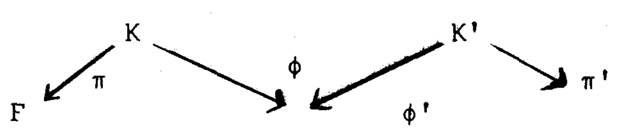
II) En général, l'appartenance est indécidable dans la classe MIDRL Nous savons en effet que cette classe contient toutes les forêts monadiques de langages de branche recensivement énumérable.

III) Par contre, si on prend par exemple la sous classe de MIDRL constituée des forêts de la forme : $h(\phi_1(R_1) \cap \phi_2(R_2))$ avec h complet régulé, alors $h^{-1}(t)$ est finie et l'appartenance est décidable.

Pour pouvoir décider de l'appartenance d'un **mot** ou **langage feuillage** d'une forêt, il faut en général pouvoir borner la taille des arbres en fonction de leur feuillage. Ceci est si on s'interdit par exemple les symboles monadiques ///.

III-2-3-2-3 : Une propriété sur l'ordre d'application des transformations :

Soit une composition de transformations conservatives. Intuitivement, chaque transformation conservative $(1, \phi, K, \Psi, 1)$ teste des égalités (par ϕ^{-1}), puis effectue une transformation reconnaissable (par $\cap$ K) puis génére des égalités (par Ψ). Ces trois types de transformation sont donc, par composition, alternés.
Mais on sait que la transformation composée peut toujours se réaliser comme suit



(F est le noyau)

- appliquer π^{-1} et $\cap K$ revient à vérifier des contraintes reconnaissables sur F. De même pour $\cap K'$ et π'

- ϕ génére les égalités (de façon non expansive)

Remarquons que si ϕ est 1-linéaire, il ne génére pas d'égalité. D'autre part, nos résultats sur les bimorphismes montrent que dans ce cas, la transformation se ramène à un simple LD. On retrouve ainsi la non génération d'égalités.

- ϕ' teste les égalités. Comme ci-dessus, dans le cas de ϕ' 1-linéaire, on sait que la transformation se ramène à un seul DL, qui est bien sans test d'égalités. On a ainsi le

Théorème 6 : **Toute transformation de profondeur bornée, composée de transformations conservatives, peut être réalisée par :**

- **un contrôle reconnaissable**
- **puis des générations d'égalités**
- **puis un contrôle reconnaissable.**

III-2-3-2-4 Comparaison avec les grammaires transformationnelles de Chauché :

Chauché définit dans [105] un modèle de grammaires transformationnelles dont les règles sont - au formalisme près - nos règles linéaires. Remarquons également que les **grammaires exhaustives** qu'il définit ne sont pas des transformations de profondeur bornée, mais en sont très proches : si on s'impose de ne pas appliquer une règle en un sous-arbre dont **tous** les noeuds sont marqués par cette règle (au lieu du sommet, et toutes choses égales par ailleurs chez Chauché) on obtient évidemment des transformations de profondeur bornée. Et on pourrait montrer que ses transformations exhaustives sont dans le cas général une sous classe de la classe DL o LD de transformations.

Les résultats sur les classes TL, TS et TI permettent de dire que

Théorème 7 : **Toute "transformation de Chauché" de profondeur bornée peut être réalisée par une transformation du même type de profondeur 2 si les règles sont strictes, de profondeur 4 sinon.**

III-2-3-2-5 Autres conséquences des résultats de composition :

I) $(\widehat{TI})^n = (\widehat{TI})^2 = \widehat{B'}_1$ signifie qu'appliquer n transductions inversibles revient à en appliquer 2, ou encore à appliquer une bitransduction.

Mais on peut y ajouter le résultat suivant :

Problème : soit une forêt F que l'on veut "traduire" en une autre en un "nombre borné de passages", c'est à dire, plus précisément : on part d'un élément t de F auquel on applique une transduction d'états finis T_1, on obtient $F_1(t)$ comme forêt image par T_1 de t. On transforme $F_1(t)$ par un transducteur T_2 etc... . On applique n transducteurs $T_1, \ldots, T_n$, transformant finalement t en $F_n(t)$; à $(T_1, \ldots T_n)$ est associée la relation $R:\{(t, F_n(t))\}$ et la transformée de F est $G=\{F_n(t) | t \in F\}$

On se pose le problème de savoir si cette correspondance est inversible, c'est à dire de savoir si la relation R^{-1} peut être réalisée par une succession $U_1, \ldots U_p$ d'autres transductions.

On sait que les bitransductions caractérisent ce cas.

On a donc

Théorème 8 : Pour que deux forêts F et G se traduisent l'une dans l'autre par application d'un nombre fini de transductions, il faut et il suffit qu'elles se correspondent par une bitransductions.
(Les transductions sont ici les transductions d'états finis classiques).

II) D'un point de vue pratique : Tous les résultats résumés dans le tableau s'appuyant sur des preuves constructives il s'ensuit la démarche suivante :

Problème : effectuer une transformation de profondeur bornée.

- On dispose de la donnée des n transformations $T_1, \ldots T_n$ de profondeur 1. On peut effectuer la transformation en n étapes.

- Si on désire réaliser la transformation en un minimum d'étapes (1, 2 ou 4 selon les cas, voir le tableau), on procéde comme suit :

1) On peut générer automatiquement les règles de la transformation de profondeur minimale : dans le cas le plus général, on se retrouvera avec $U \circ V \in DL \circ LD$..

Certes, même si chaque T_i a une signification "intuitive évidente", il n'en sera en général pas de même de U et V mais peu importe : c'est l'ordinateur qui manipulera U et V, et c'est lui-même qui les aura construits auparavant.

On a alors minimisé le nombre de passages.

Bien entendu, "moins les T_i seront déterministes", plus U et V seront "gros", mais le non déterminisme est souvent inhérent aux transformations.

Il se pose les problèmes d'améliorer les constructions de U et V, mais surtout d'implanter efficacement nos bimorphismes. Pour cela, il serait intéressant de les décrire directement sous forme de machines d'états finis.

ANNEXES

Nous donnons deux index permettant au lecteur de retrouver rapidement la signification des termes, notations ou symboles utilisés dans ce travail.

L'index I donne la liste alphabétique des termes et les numéros de sections renvoyant aux définitions. Dans cette liste, les préfixes variables ne sont pas à prendre en compte. Par exemple, on trouvera "[ν]-k complète" à la lettre "c" (comme complète).

L'index II donne une liste de symboles et notations couramment employés. Comme il n'existe pas d'ordre habituel sur ces symboles, nous les ordonnons selon l'ordre dans lequel ils apparaissent. Les numéros correspondants de sections sont donc croissants.

I N D E X I

I N D E X II

BIBLIOGRAPHIE

Les références [A], [D] et [AD] renvoient respectivement :

à la thèse de A. Arnold

à la thèse de M. Dauchet

au préliminaire commun à ces deux thèses.

[1] A.V. AHO et J.D. ULLMAN, *"The theory of parsing, translation and compiling"*. Prentice Hall (1973).

[2] A.V. AHO et J.D. ULLMAN, *"Translations on a context-free grammar"*. Inf. and Control 19 (1971) 439-475.

[3] A.V. AHO (Ed.), *"Currents in the theory of computing"*. Prentice Hall (1973).

[4] S. ALAGIC, *"Natural state transformations"*. J. Comput. System Sci. 10 (1975) 266-307.

[5] M.A. ARBIB et Y. GIVE'ON, *"Algebra automata I : Parallel programming as a prolegomena to the categorical approach"*. Inf. and Control 12 (1968) 331-345.

[6] M.A. ARBIB et E.G. MANES, *"Basic concepts of category applicable to computation and control"* in "Category theory applied to computation and control". Lect. Notes in Comput. Sci. n° 25 (1975) 1-34.

[7] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"Un théorème de duplication pour les forêts algébriques"*. J. Comput. System Sci. 13 (1976) 223-244.

[8] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"Transductions de forêts reconnaissables monadiques. Forêts corégulières"*. R.A.I.R.O. Informatique théorique 10 (1976) 5-28.

[9] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"Transductions inversibles de forêts"*. Thèse 3° cycle M. DAUCHET, Université de Lille I (1975).

[10] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"Une équivalence décidable sur les forêts régulières"*. Publications du Laboratoire de Calcul n°52, Université de Lille I (1975).

[11] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"Un théorème de Chomsky-Schutzenberger pour les forêts algébriques"*. Publications du Laboratoire de Calcul n°54, Université de Lille I (1975).(A paraître dans Calcolo)

[11 bis] A.ARNOLD & M.DAUCHET *"Bitransductions de forêts"* Third International Colloquium on Automata, Languages and Programming, Edinburg University Press (1976). 74-86

[12] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"Forêts algébriques et homomorphismes inverses"*. Publications du Laboratoire de Calcul n°55, Université de Lille I (1975).

[13] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"S-morphismes, bimorphismes et bi-S-morphismes"*. Publications du Laboratoire de Calcul n°59, Université de Lille I (1975).

[14] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"Forêts algébriques strictes"*. Publications du Laboratoire de Calcul n°62, Université de Lille I (1975).

[15] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"Théorie des magmoïdes"*, Colloque de Lille sur les arbres en algèbre et en programmation (1976).

[16] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"Bimorphismes de magmoïdes"*, Colloque de Lille sur les arbres en algèbre et en programmation (1976).

[17] A. ARNOLD, M. DAUCHET et G. JACOB (Eds), *"Actes du Colloque de Lille sur les arbres en algèbre et en programmation"*. Université de Lille I (1976).

[18] J.M. AUTEBERT et J. BEAUQUIER, *"Une caractérisation des générateurs standard"*, R.A.I.R.O. Informatique théorique (1974) 63-83.

[19] B.S. BAKER, *"Tree-transductions and families of tree-languages"*. 5^{th} A.C.M. Proc. on Theory of Computing (1973) 200-206.

[20] J. BENABOU, *"Structures algébriques dans les catégories"*. Thèse d'Etat, Paris (1966).

[21] D.B. BENSON, *"Syntax and Semantics : a categorical view"*. Inf. and Control 17 (1970) 145-160.

[22] D.B. BENSON, *"Semantic-preserving translations"*. Math. Systems Theory 8 (1974) 105-125.

[23] D.B. BENSON, *"The basic algebraic structures in Categories of Derivations"*. Inf. and Control 28 (1975) 1-29.

[24] G. BIRKHOFF et J.D. LIPSON, *"Heterogeneous algebras"*. J. Combinatorial Theory 8 (1970) 115-133.

[25] A. BLIKLE, *"Equational languages"*, Inf. and Control 21 (1972) 134-147.

[26] D. BJORNER, *"The synthesis of finite-state syntax-directed top-down and bottom-up transducers"*. 11th. IEEE Symp. on Switching and automata theory (1970) 122-132.

[27] S.L. BLOOM et C.C. ELGOT, *"The existence of free iterative theories"*. J. Comput. System. Sci. 12 (1976) 305-318.

[28] L. BOASSON, *"Cônes rationnels et familles agréables de langages"*. Thèse 3° cycle, Paris (1971).

[29] G. BOUDOL, *"Langages polyadiques algébriques. Théorie des schémas de programme : sémantique de l'appel par valeur"*. Thèse 3° cycle, Paris (1975).

[30] W.S. BRAINERD, *"The minimalization of tree-automata"*. Inf. and Control 13 (1968) 484-491.

[31] W.S. BRAINERD, "*Tree-generating regular systems*". Inf. and Control 14 (1969) 217-231.

[32] W.S. BRAINERD, "*Semi-Thue systems and representations of tree*". 10th IEEE Symp. on switching and automata theory (1969) 240-244.

[33] J.R. BUCHI et C.C. ELGOT, "*Decision problems of weak second-order theories*". Notices Amer. Math. Soc. (1958).

[34] R.M. BURSTALL et J.W. THATCHER, "*The algebraïc theory of recursive program schemes*". In "Category applied to Computation and Control" Lect. Notes in Comput. Sci. n°25 (1975) 126-131.

[36] N. CHOMSKY et M.P. SCHUTZENBERGER, "*The algebraic theory of context-free languages*". In "Computer programming and Formal Systems" (P. Braffort et D. Hirschberg, Eds) North-Holland, Amsterdam (1963) 118-161.

[37] P.M. COHN, "*Universal algebra*". Harper and Row, New York (1965).

[38] B. COURCELLE, *Recursive schemes, algebraic trees and deterministic languages*". 15th IEEE Symp. on switching and automata theory (1974) 52-62.

[39] B. COURCELLE,"*Sur les ensembles algébriques d'arbres et les langages déterministes. Quelques applications à la théorie des schémas de programme*". Thèse d'Etat, Paris (1975).

[40] B. COURCELLE, G. KAHN et J. VUILLEMIN, "*Algorithmes d'équivalence et de réduction à des expressions minimales dans une classe d'équations récursives simples*". In "Automata, languages and programming", 2nd Colloquium, Saarbrucken (1974) 200-213.

[41] F.G. COUSINEAU et J.M. RIFFLET, "*Schémas de programme : problèmes d'équivalence et complexité*". Thèse 3ème cycle, Paris (1974).

[42] J. DONER, "*Tree acceptors and some of their applications*". J. Comput. System Sci. 4 (1970) 406-451.

[43] P. DOWNEY, "*Formal languages and recursion schemes*", Ph. D. Dissertation, Harvard University (1974).

[44] P. DOWNEY, "*Tree transducers and ETOL Tree systems*", Conference on formal languages automata and development, Noordwijkerhout, the Netherlands (1975).

[45] S. EILENBERG, "*Automata, languages and machines*", New-York (1974).

[46] S. EILENBERG et J.B. WRIGHT, "*Automata in general algebras*". Inf and Control 11 (1967) 217-231.

[47] C.C. ELGOT,"*Algebraic theories and program schemes*". Symp. on semantics of algorithmic languages. Lect. Notes in Math. n° 188 (1971) 71-88.

[48] J. ENGELFRIET, *"Simple program schemes and formal languages"*. Lect. Notes in Comput. Sci. (1974).

[49] J. ENGELFRIET, *"Surface tree languages and parallel derivation trees"*. DAIMI Report PB 44, University of Aarhus, Danemark (1975).

[50] J. ENGELFRIET, *"Tree automata and tree grammars"*. DAIMI Report FN-10, University of Aarhus, Danemark (1975).

[51] J. ENGELFRIET, *"Bottom-up and top-down tree transformations. A comparison"*. Math. Systems Theory 9 (1975) 198-231.

[52] J. ENGELFRIET, *"Top-down tree transducers with regular look-ahead"*. DAIMI Report PB 49, University of Aarhus, Danemark (1975).

[53] J. ENGELFRIET et M. SCHMIDT, *"IO and OI"*, DAIMI Report PB 47, University of Aarhus, Danemark (1975).

[54] J. ENGELFRIET et S. SKYUM, *"Copying theorems"*, DAIMI Report PB 48, University of Aarhus, Danemark (1975).

[55] M.J. FISCHER, *"Grammars with macro-like productions"*. 9th IEEE Symp. on switching and automata theory (1968) 131-142.

[56] Y. GIVE'ON et M.A. ARBIB, *"Algebra automata II : the categorical framework for dynamic analysis"*. Inf. and Control 12 (1968) 346-370.

[57] J.A. GOGUEN, *"Discrete-time machines in closed monoïdal categories"*. J. Comput. System Sci. 10 (1975) 1-43.

[58] J.A. GOGUEN et J.W. THATCHER, *"Initial algebra semantics"*. 15th IEEE Symp. on switching and automata theory (1974) 63-77.

[59] J.A. GOGUEN, J.W. THATCHER, E.G. WAGNER et J.B. WRIGHT, *"An introduction to categories, algebraic theories and algebras*. IBM Research Report RC 5369 (1975).

[60] F.J. HELTON, *"The semigroups of an algebra automaton"*. J. Comput. System Sci. 12 (1976) 13-24.

[61] G.T. HERMAN et G. ROZENBERG, *"Developmental systems and languages"*, North-Holland - American Elsevier (1975).

[62] A.K. JOSHI, L.S. LEVY et M. TAKAHASHI, *"A tree generating system"*, In "Automata, languages and programming", 1st Colloquium (M. Nivat, Ed) North-Holland (1972).

[63] F.W. LAWVERE, *"Functorial semantics of algebraic theories"*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 50 (1963) 869-872.

[64] L.S. LEVY et A.K. JOSHI, *"Some results in tree automata"*. Math. Systems Theory 6 (1972) 335-342.

[65] S. Mac LANE, *"Categorical algebra"*. Bull. Am. Math. Soc. 71 (1965) 40-106.

[66] S. Mac LANE, *"Categories for the working mathematician"*. Springer Verlag (1974).

[67] T.S.E. MAIBAUM, "*A generalized approach to formal languages*". J. Comput. System Sci. 8 (1974) 402-432.

[68] P. MARCHAND, "*Bigrammaires et systèmes transformationnels*". In "Les Arbres en Algèbre et en Programmation", Colloque de Lille (1976) 175-195.

[69] D.F. MARTIN et S.A. VERE, "*On syntax-directed transduction and tree-transducers*". 2nd A.C.M. Proc on theory of computing (1970) 129-135.

[70] W.J. MEYERS, "*Linear representations of tree structure*". 3rd ACM Proc. on theory of computing (1971) 50-62.

[71] J. MEZEI et J.B. WRIGHT, "*Algebraic automata and context free sets*". Inf. and Control 11 (1967) 3-29.

[72] M. NIVAT, "*Transductions des langages de Chomsky*". Annales de l'Institut Fourier de Grenoble, 18 (1968) 339-456.

[73] M. NIVAT, "*Langages algébriques sur le magma libre et sémantique des schémas de programme*". In "Automata, languages and programming" 1st Colloquium (M. Nivat Ed.) Springer Verlag (1973) 293-307.

[74] M. NIVAT, "*On the interpretation of recursive program schemas*". Rapport IRIA n°84 (1974).

[75] M. NIVAT, "*Formalisation de la sémantique des langages de programmation : ses buts et ses moyens*". Bulletin de liaison IRIA (1976) 2-13.

[76] W.F. OGDEN et W.C. ROUNDS, "*Composition of n tree transducers*". 4th ACM Proc. on theory of computing (1972) 198-206.

[77] C. PAIR et A. QUERE, "*Définition et étude des bilangages réguliers*". Inf. and Control 13 (1968) 565-593.

[78] C.R. PERRAULT, "*Intercalation lemmas for tree transducers languages*". 7th ACM Proc. on theory of computing (1975) 126-136.

[79] B.K. ROSEN, "*Tree-manipulating systems and Church-Rosser theorem*". Journal of ACM 20 (1973) 160-187.

[80] W.C. ROUNDS, "*Trees, transducers and transformations*". Ph. D. Dissertation, Stanford University (1968).

[81] W.C. ROUNDS, "*Context-free grammars on trees*". 1st ACM Proc. on theory of computing (1969) 143-148.

[82] W.C. ROUNDS, "*Tree-oriented proofs of some theorems on context-free and indexed languages*". 2nd ACM Proc. on theory of computing (1970) 109-116.

[83] W.C. ROUNDS, "*Mappings and grammars on trees*". Math. Systems Theory 4 (1970) 257-287.

[84] P.P. SCHREIBER, "*Tree transducers and syntax-connected transductions*". In "Les Arbres en algèbre et en programmation", Colloque de Lille (1976).

[85] C.D. SHEPARD, "*Languages in general algebras*". 1st ACM Proc. on theory of computing (1968) 155-164.

[86] M. STEINBY, "*On algebras as tree automata*". non publié (1976).

[87] M. TAKAHASHI, "*Primitive transformations of regular sets and recognizable sets*". In "Automata, languages and programming" (Nivat, Ed.) North-Holland, Amsterdam (1973) 475-480.

[88] J.W. THATCHER, "*Characterizing derivation trees of context free grammars through a generalization of finite automata theory*". J. Comput. System Sci. 1 (1967) 317-322.

[89] J.W. THATCHER, "*Generalized^2 sequential machine maps*". J. Comput. System Sci. 4 (1970) 339-367.

[90] J.W. THATCHER, "*Tree automata : an informal survey*". In "Currents in the theory of computing" (A.V. Aho, Ed.) Prentice Hall (1973) 143-178.

[91] J.W. THATCHER et J.B. WRIGHT, "*Generalized finite automata theory with an application to a decision problem of second order logic*". Math. Systems Theory 2 (1968) 57-81.

[92] R.T. YEH, "*Some structural properties of generalized automata and algebras*". Math. Systems Theory 5 (1971) 306-318.

[93] A.V. AHO & J.D. ULLMAN, "*Syntax directed trasnlations and the pushdown assembler*" J. Comput. System Sci. 3, (1969), 37-56

[94] A.V. AHO & J.D. ULLMAN, "*Properties of syntax directed translations*". J.Comput System Sci 3, (1969), 319 - 334.

[95] J. CHAUCHE "*Transducteurs et arborescences. Etudes et réalisations de systèmes appliqués aux grammaires transformationnelles*". Doctorat d'état Grenoble (1974)

[96] S. GINSBURG & B. PARTEE "*A mathematical model of transformational grammars*". Inf and Control 15 (1969) 297-334

[97] M. GROSS & A. LENTIN "*Notions sur les grammaires formelles*" Gauthier Villars (1967)

[98] O.H. IBARRA "*Characterization of transductions defined by abstract families of transducers*". Math. Syst. Th 5. (1971) 271-281

[99] G. JACOB "*Représentations et substitutions matricielles dans la théorie algébrique des transductions*". Thèse de Doctorat d'état Paris 1975

[100] A.K. JOSHI, L.S. LEVY, M. TAKAHASHI "*A tree generating system*" 1st Automata ; Languages and Programming (Nivat ed) North Holland Amsterdam (1973) 453-465.

[101] H.P. KRIEGEL & H.A. MAURER "*Formal translations and Szilard languages*". Inf. & Control 30-2 (1976) 187-198

[102] B. LOHRO *"De la définition des langages de programmation : méthode des attributs sémantiques"*. Doctorat és Sciences. Université Paul Sabatier de Toulouse (1974).

[103] P. MARCHAND *"Etude et classification des bigrammaires. Application à l'étude des systèmes transformations "* Thèse de 3ème cycle Nancy (1974)

[104] P. PETERS & S. RICHIE *"On restricting the base component of transformational grammars"*. Inf. and Cont. 18, (1971) 483-501.

[105] W.C. ROUNDS *"Complexity of Recognition in Intermediate-Level Languages"*.14th IEEE Symp. on switching and automata Theory (1973) 145-158

[106] W.C. ROUNDS "A *grammatical characterization of exponential-time languages"*. 16th IEEE Symp. on switching and automata theory (1975)135-143

[107] A. SALOMAA *"The generative capacity of transformational grammars of Ginsburg and Partee"*. Inf. and Control 18 (1971) 227- 232

[108] D. STANAT *"Approximation of weighted type 0 languages by formal power series"*. Inf. and Control 21 (1972) 344-381

[109] J.W. THATCHER *"Transformations and translations from the point of view of generalized finite automata theory"*. 1st A.C.M. Proc. on theory of Computing (1969) 129-142

[110] J.D. ULMANN *"Application of language Theory to Compiler Design"*. dans Currents in the theory of computing. Prentice Hall (1973)

[111] W. WOODS *"Transition Network grammars for natural languages analysis"*. C.A.C.M. 13-10 (1970) 591-606.