50376
1977
80

N° d'ordre : 372

50376
1977
80

THESES

présentées à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

André ARNOLD

Première Thèse : SYSTEMES D'EQUATIONS DANS LE MAGMOIDE. ENSEMBLES RATIONNELS ET ALGEBRIQUES D'ARBRES.

Deuxième Thèse : PRINCIPES D'ORGANISATION DES MULTI-PROCESSEURS.

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
Section de SCIENCES
LILLE

Thèses soutenues le 2 Mars 1977, devant la Commission d'Examen

MM.	P.	BACCHUS	Président
	A.	COLMERAUER	
	V.	CORDONNIER	
	R.	CORI	
	G.	JACOB	
	M.	NIVAT	Rapporteur

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE

01.02.1976

DOYENS HONORAIRES de l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, SAVART, WATERLOT, WIEMAN, ZAMANSKI.

PRESIDENTS HONORAIRES DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R. DEFRETIN, M. PARREAU.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. J. LOMBARD.

PROFESSEURS TITULAIRES

M.	BACCHUS Pierre	Astronomie
M.	BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Physique
M.	BECART Maurice	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BILLARD Jean	Physique du Solide
M.	BIAYS Pierre	Géographie
M.	BONNEMAN Pierre	Chimie Appliquée
M.	BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M.	BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M.	BOUGHON Pierre	Algèbre
M.	BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M.	CELET Paul	Géologie Générale
M.	CONSTANT Eugène	Electronique
M.	DECUYPER Marcel	Géométrie
M.	DELATTRE Charles	Géologie Générale
M.	DELHAYE Michel	Chimie Physique
M.	DERCOURT Michel	Géologie Générale
M.	DURCHON Maurice	Biologie Expérimentale
M.	FAURE Robert	Mécanique
M.	FOURET René	Physique du Solide
M.	GABILLARD Robert	Electronique
M.	GLACET Charles	Chimie Organique
M.	GONTIER Gérard	Mécanique
M.	GRUSON Laurent	Algèbre
M.	GUILLAUME Jean	Microbiologie
M.	HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M.	LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique
M.	LANSRAUX Guy	Physique Atomique et Moléculaire
M.	LAVEINE Jean-Pierre	Paléontologie
M.	LEBRUN André	Electronique
M.	LEHMANN Daniel	Géométrie

.../...

Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M.	LINDER Robert	Biologie et Physiologie Végétales
M.	LOMBARD Jacques	Sociologie
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M.	LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M.	MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M.	MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M.	MONTREUIL Jean	Biochimie
M.	PARREAU Michel	Analyse
M.	POUZET Pierre	Analyse Numérique
M.	PROUVOST Jean	Minéralogie
M.	SALMER Georges	Electronique
M.	SCHILTZ René	Physique Atomique et Moléculaire
Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Géométrie
M.	SEGUIER Guy	Electrotechnique
M.	TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée
M.	VIDAL Pierre	Automatique
M.	VIVIER Emile	Biologie Cellulaire
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique Atomique et Moléculaire
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.	BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BODARD Marcel	Biologie Végétale
M.	BOILLET Pierre	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M.	BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M.	CAPURON Alfred	Biologie Animale
M.	CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des entreprises
M.	DEPREZ Gilbert	Physique Théorique
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M.	GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M.	LACOSTE Louis	Biologie Végétale
Mme	LEHMANN Josiane	Analyse
M.	LENTACKER Firmin	Géographie
M.	LOUAGE Francis	Electronique
Mlle	MARQUET Simone	Probabilités
M.	MIGEON Michel	Chimie Physique
M.	MONTEL Marc	Physique du Solide
M.	PANET Marius	Electrotechnique
M.	RACZY Ladislas	Electronique
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M.	SLIWA Henri	Chimie Organique

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés d'Enseignement)

M.	ADAM Michel	Sciences Economiques
M.	ANTOINE Philippe	Analyse
M.	BART André	Biologie Animale
M.	BEGUIN Paul	Mécanique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
M.	BOSCQ Denis	Probabilités
M.	BREZINSKI Claude	Analyse Numérique
M.	BRUYELLE Pierre	Géographie

.../...

M. CARREZ Christian	Informatique
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. COQUERY Jean-Marie	Psycho-Physiologie
Mle DACHARRY Monique	Géographie
M. DEBENEST Jean	Sciences Economiques
M. DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M. DHAINAUT André	Biologie Animale
M. DELAUNAY Jean-Claude	Sciences Economiques
M. DERIEUX Jean-Claude	Microbiologie
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique du Solide
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du Solide
Me EVRARD Micheline	Chimie Appliquée
M. FONTAINE Jacques-Marie	Electronique
M. FOURNET Bernard	Biochimie
M. FORELICH Daniel	Chimie Physique
M. GAMBLIN André	Géographie
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M. GUILLAUME Henri	Sciences Economiques
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JOURNEL Gérard	Physique Atomique et Moléculaire
Mle KOSMAN Yvette	Géométrie
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LAURENT François	Automatique
Mle LEGRAND Denise	Algèbre
Mle LEGRAND Solange	Algèbre
M. LEROY Jean-Marie	Chimie Appliquée
M. LEROY Yves	Electronique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique Théorique
M. LOUCHET Pierre	Sciences de l'Education
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAHIEU Jean-Marie	Physique Atomique et Moléculaire
Me N'GUYEN VAN CHI Régine	Géographie
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MALAUSSENA Jean-Louis	Sciences Economiques
M. MESSELYN Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. MONTUELLE Bernard	Biologique Appliquée
M. NICOLE Jacques	Chimie Appliquée
M. PAQUET Jacques	Géologie Générale
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie Physique
M. PERROT Pierre	Chimie Appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie Animale
M. PONSOLLE Louis	Chimie Physique
M. POVY Lucien	Automatique
M. RICHARD Alain	Biologie
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROY Jean-Claude	Psycho-Physiologie
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SOMME Jean	Géographie
Mle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. STEEN Jean-Pierre	Informatique

.../...

M.	THERY Pierre	Electronique
M.	TOULOTTE Jean-Marc	Automatique
M.	TREANTON Jean-René	Sociologie
M.	VANDORPE Bernard	Chimie Minérale
M.	VILLETTE Michel	Mécanique
M.	WALLART Francis	Chimie
M.	WERNIER Georges	Informatique
M.	WATERLOT Michel	Géologie Générale
Mme	ZINN-JUSTIN Nicole	Algèbre

Je remercie vivement Monsieur le Professeur Bacchus de l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

En faisant partie de ce jury, Alain Colmerauer et Robert Cori confirment l'intérêt qu'ils ont déjà manifesté pour ce travail. Je les en remercie très sincèrement.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Vincent Cordonnier. Son appui enthousiaste n'a jamais fait défaut pour que cette recherche se poursuive et aboutisse dans les meilleures conditions. Ses conseils m'ont toujours été précieux lorsque j'ai travaillé sur le sujet de seconde thèse qu'il m'avait proposé.

Il m'est agréable de dire ma gratitude envers Gérard Jacob. Les innombrables discussions que j'ai eues avec lui ont toujours été très fécondes et ont souvent eu une importance décisive sur l'évolution de ce travail.

C'est sous la direction de Maurice Nivat que ce travail a été entrepris et réalisé. L'intérêt constant qu'il y a porté, les encouragements chaleureux, les remarques pertinentes et les conseils judicieux qu'il m'a donnés ont grandement contribué à son élaboration et à son achèvement. Je lui en suis profondément reconnaissant.

Cette thèse, ainsi que celle de Max Dauchet, trouve son origine dans les recherches que nous avons effectuées en commun. Son amicale et fructueuse collaboration n'a jamais cessé. Je suis heureux de pouvoir l'en remercier ici.

Je voudrais remercier également Michel Latteux ainsi que Jean-Philippe Réthoré, Bernard Sucher et mes autres collègues du laboratoire. Qu'ils sachent combien les échanges que nous avons eus ont été stimulants.

Cette thèse est aussi le fruit du travail de Michèle Driessens qui l'a dactylographiée et de Monsieur et Madame Debock qui l'ont imprimée. Je suis heureux d'avoir pu bénéficier de leurs compétences. Je les remercie très vivement de tout le mal qu'ils se sont donné pour fabriquer cet ouvrage.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 1

I : LE MAGMOÏDE PROJETABLE DES PARTIES D'UN MAGMOÏDE PROJETABLE 10

1. Le magmoïde projetable des parties d'un magmoïde projetable 12
2. Substitutions 26
3. Substitutions et transductions 34

II : PARTIES RECONNAISSABLES D'UN MAGMOÏDE PROJETABLE 38

1. Parties finiment saturées 39
2. Automates 48
3. Parties reconnaissables d'un magmoïde projetable 61

III : PARTIES RATIONNELLES D'UN MAGMOÏDE PROJETABLE 67

1. L'opération "étoile" 68
2. Parties rationnelles d'un magmoïde projetable 78
3. Rationalité et reconnaissabilité 88

IV : GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DANS LE MAGMOÏDE

1. Définition des systèmes algébriques 96
2. Une construction préliminaire 98
3. Solutions des systèmes algébriques 101
4. Morphismes de systèmes algébriques 103

V : SYSTÈMES D'ÉQUATIONS RÉGULIERS ET CORÉGULIERS 108

1. Systèmes réguliers 109
2. Systèmes coréguliers 117
3. Comparaison des ensembles réguliers et coréguliers 129

VI : SYSTÈMES D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

1. Grammaires algébriques descendantes 136
2. Formes particulières de systèmes algébriques 142
3. Propriétés des ensembles algébriques 152

VII : ENSEMBLES K-ALGÉBRIQUES ET K-RATIONNELS 160

1. Ensembles algébriques et démarquages inverses 161
2. Ensembles k-algébriques et k-rationnels 169
3. La hiérarchie des ensembles k-algébriques 181
4. Retour sur les morphismes inverses 199

VIII : LE MAGMOÏDE ADDITIF DES PARTIES D'UN MAGMOÏDE 211

1. Définition et propriétés 212
2. Systèmes algébriques et grammaires ascendantes 215
3. Ensembles rationnels ascendants 221

IX : SYSTÈMES D'ÉQUATIONS ET SÉMANTIQUE DES SCHÉMAS DE PROGRAMME NON DÉTERMINISTES 226

1. Systèmes d'équations schématiques dans les magmoïdes continus 228
2. Sémantique algébrique des schémas déterministes 234
3. Schémas non déterministes 236
4. Sémantique des schémas non déterministes. Appel par nom 243
5. Sémantique des schémas non déterministes. Appel par valeur 256

BIBLIOGRAPHIE 274

*

* *

*

INTRODUCTION

La carte n'est pas le territoire, le mot n'est pas la chose, et le programme n'est pas non plus la fonction. Un programme est un objet informatique fini qui permet de décrire un objet infini, ou potentiellement infini : la fonction "calculée" par ce programme.

Or, et en raison même du fait qu'ils sont effectifs, les traitements informatiques ne peuvent faire intervenir que des objets finis. Le champ d'application de l'informatique en tant que science est alors déterminé par la réponse à la question suivante :

> Quels sont les objets infinis définissables par des objets finis ?

et son problème fondamental est

> De quelle façon les objets finis définissent-ils des objets infinis ?

La réponse à la première question se trouve dans la théorie de la calculabilité et des ensembles récursifs et récursivement énumérables. Quant au problème fondamental, que nous sommes tentés d'appeler le problème de la sémantique, il recouvre un grand nombre de problèmes de l'informatique, parmi lesquels celui de la sémantique des programmes :

> Etant donné un programme, écrit dans un certain langage, quelle est la fonction "calculée" par ce programme ?

qu'on peut formuler différemment si on met l'accent sur l'aspect "définition effective" du programme :

> Etant donné un programme, écrit dans un certain langage, comment obtient-on la fonction calculée par ce programme ?

Une première façon de procéder, - c'est celle qui est utilisée en pratique - est de considérer que le programme décrit la séquence des transformations qu'il faudra faire subir aux données pour qu'elles deviennent résultats. Autrement dit, le programme définit un processus opératoire, et pour obtenir la fonction calculée par le programme, il suffit d'appliquer ce processus opératoire.

Cette façon de définir la fonction calculée par un programme est appelée **sémantique opérationnelle.** Ce concept de sémantique opérationnelle peut être étendu en y incluant tous les cas où l'objet infini décrit par un objet fini est défini en fabriquant cet objet infini (ou plus exactement tout élément fini de cet objet infini) par un processus opératoire. Ainsi, dans le cadre de la théorie des langages, un langage-objet infini - peut être décrit par sa grammaire - objet fini - ; le langage étant défini comme l'ensemble des mots dérivables dans la grammaire. Dans un tout autre domaine, le nombre réel $\sqrt{2}$ est un objet infini relativement aux nombres rationnels (c'est par exemple une classe d'équivalence de suites de Cauchy de nombres rationnels). Il peut être décrit par l'objet fini $x_0 = 1$; $x_{i+1} = \frac{1}{2}(x_i + 2/x_i)$; en ce sens que cette équation de récurrence permet de fabriquer une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$.

Mais le nombre $\sqrt{2}$ peut être également décrit par l'objet fini

$$x^2 = 2,\ x \geq 0$$

en ce sens que l'on sait qu'il existe un seul réel positif dont le carré est égal à 2. De la même façon, on sait qu'une grammaire "context-free" peut être considérée comme un système d'équations dans le monoïde $P(\Sigma^*)$ des parties d'un monoïde libre Σ^*, et que le langage engendré par la grammaire est la plus petite partie de Σ^* qui est composante de la solution de ce système d'équations. Dans le même ordre d'idée, un programme peut être considéré comme un système d'équations dans l'espace des fonctions partielles ; on définit alors la fonction décrite par ce programme comme la fonction la

moins définie qui est solution du système d'équations. Cette façon d'associer une fonction à un programme considéré comme un système d'équations est appelée **sémantique dénotationnelle** ou **sémantique du point fixe.**

En étudiant les propriétés des systèmes d'équations, on pourra plus aisément obtenir des propriétés sur les objets infinis qui sont leur solution que si ces mêmes objets étaient définis par une sémantique opérationnelle. L'étude de la résolution des systèmes d'équations dans des espaces convenables est donc une partie importante de ce que nous avons appelé le problème de la sémantique.

Pour définir la fonction décrite par un programme par la sémantique dénotationnelle, on est amené à résoudre des systèmes d'équations dans un Σ-magma. Nivat [74] a montré que les solutions de ces systèmes d'équations étaient toujours les images homomorphes de solutions de systèmes d'équations dans le Σ-magma libre et qu'on pouvait donc définir la fonction calculée par un programme comme l'image par un Σ-morphisme de la solution d'un système d'équations dans l'ensemble des parties d'un Σ-magma libre. Cette façon de définir la fonction décrite par un programme à partir d'un objet formel associé au programme, le schéma de programme, est appelée **sémantique algébrique.**

* * *

La notion de programme que nous avons utilisée jusqu'à présent était - implicitement - celle de programme déterministe. Grosso-modo, un programme est déterministe si lorsqu'on applique le processus opératoire correspondant à la sémantique opérationnelle, il est toujours possible, à tout instant de l'évolution de ce processus, d'en déterminer univoquement l'étape suivante. Les programmes non-déterministes seront ceux pour lesquels le processus opératoire peut évoluer de plusieurs façons différentes. Il en résulte qu'à une même donnée peuvent correspondre plusieurs résultats différents.

Sans parler des machines de Turing ou des divers automates reconnaissent des langages, qu'on peut considérer comme des programmes non-déterministes, les programmes non-déterministes sont plus fréquents qu'on pourrait le penser. Ainsi bien des programmes tels que des programmes de tri, d'analyse syntaxique ou de recherche opérationnelle sont constitués fondamentalement d'un programme non déterministe qu'on a rendu déterministe en précisant une façon systématique d'effectuer tous les choix possibles dans l'évolution du processus opératoire.

En tant que systèmes d'équations, les programmes non-déterministes ne sont plus des systèmes d'équations dans un espace de fonctions partielles sur un ensemble, mais soit dans un espace de fonctions sur l'ensemble des parties de cet ensemble, soit dans un espace de relations sur cet ensemble. Excepté dans le cas des programmes non déterministes monadiques traité par de Bakker [93], les méthodes de la sémantique dénotationnelle n'ont pas été appliquées au cas des programmes non déterministes. Quant à la sémantique algébrique, elle devient inapplicable dès lors qu'on travaille dans un espace de relations, car on ne peut mettre sur cet espace une structure de Σ-magma.

Et cependant, sur le plan méthodologique, les principes de la sémantique dénotationnelle et de la sémantique algébrique semblent toujours valables. Le problème posé par les programmes non-déterministes est plutôt d'ordre technique : il s'agit de définir convenablement l'espace dans lequel on doit résoudre le système d'équations qu'est un programme non-déterministe, et plus généralement, pour appliquer les méthodes de la sémantique algébrique, de définir la ou les structures libres dans lesquelles on résout le système d'équations formelles associé à un programme non-déterministe.

Ces considérations aboutissent à la formulation de la question suivante :

> Existe-t-il une structure algébrique plus générale que celle de Σ-magma dans laquelle on puisse résoudre des systèmes d'équations ?

Pour être plus précis, cette structure doit jouer le même rôle que le Σ-magma, c'est-à-dire que la fonction multivoque calculée par un programme

non déterministe correspondant à une interprétation raisonnable s'obtient comme image homomorphe de la solution d'un système d'équations dans la dite structure.

* * *

Cette même question surgit dans un autre contexte, celui de la théorie des langages d'arbres. Pour étudier les arbres de dérivation des mots d'un langages engendré par une grammaire "context-free", Rounds [83], Thatcher [88] et simultanément Pair et Quéré [77] ont introduit, vers les années 67-68, la notion de langage d'arbres. Mais alors que Pair et Quéré utilisent comme cadre théorique le binoïde, pour les autres auteurs, les arbres sont en fait les éléments d'un Σ-magma libre.

Cette théorie généralise la théorie classique des langages, en ce sens qu'un langage d'arbre est une partie d'un Σ-magma libre, et qu'un langage est une partie d'un monoïde libre A^* qu'on peut aussi considérer comme un A-magma libre. Il n'est donc pas étonnant que bien des notions et des résultats de cette théorie soient analogues à ceux qui font l'objet de la théorie des langages.

Or, aux cours de travaux précédents nous avons mis en évidence, avec M. Dauchet, le fait que sur certains points les résultats de la théorie des langages ne se généralisaient pas comme on aurait pu s'y attendre. D'une part, alors que dans le cas général, les transductions d'arbres ne se composent pas et n'admettent pas de caractérisation par bimorphisme analogue à celle que Nivat a donnée pour les transductions de langages [72], nous avons défini [9] une classe particulière de transductions ayant les mêmes propriétés que les transductions de langages mais qui se caractérisent comme étant les composées de deux bimorphismes. D'autre part, contrairement à ce qui se passe dans le cas des langages, les ensembles algébriques d'arbres ne sont pas fermés par morphisme inverse [12]. Ce dernier résultat nous a conduit à penser que la définition des ensembles algébriques d'arbres était peut être insuffisante et nous avons tenté de la généraliser.

Il faut remarquer à ce propos que lorsqu'on parle des systèmes d'équations définissant des ensembles algébriques d'arbres, le qualificatif "algébrique" fait référence à une autre structure que celle de Σ-magma : les systèmes d'équations qui sont algébriques relativement au Σ-magma sont de la forme $\{X_i = P_i(X_1,\ldots,X_n)/i \leq n\}$ où $P_i(X_1,\ldots,X_n)$ est un Σ-polynôme ; ce sont donc les systèmes appelés réguliers en théorie des langages d'arbres et qui admettent comme solution les parties reconnaissables du Σ-magma libre, ainsi que l'ont montré entre autres Eilenberg et Wright [46]. Et, de fait, Maibaum [67] d'une part, Engelfriet et Schmidt [53] d'autre part ont, pour définir précisément les ensembles algébriques d'arbres, fait intervenir une autre structure que celle de Σ-magma, à savoir celle de Σ-magma dérivé.

* * *

Bien qu'Engelfriet et Schmidt aient montré qu'en utilisant le Σ-magma dérivé il était possible de traiter la sémantique dénotationnelle des programmes non-déterministes, ce formalisme ne nous paraissait pas être la généralisation cherchée de la structure de Σ-magma, en particulier parce qu'il ne permettait pas de rendre compte des différences signalées ci-dessus entre la théorie des langages et celle des langages d'arbres.

Nous avons donc été amenés à définir le magmoïde, généralisation du monoïde. Les raisons plus précises pour lesquelles nous avons choisi cette structure sont exposées dans l'introduction de [AD]. La définition et les propriétés élémentaires du magmoïde se trouvent également dans [AD], texte auquel seront faits plusieurs renvois au cours de ce travail. Qu'il nous suffise de dire que les deux opérations de cette structure sont le produit de composition et le produit tensoriel et qu'un exemple très intuitif de magmoïde est celui du magmoïde des relations sur un ensemble où le produit de composition est le produit de composition habituel des relations et où le produit tensoriel de deux relations correspond au produit cartésien de leur graphe ; le magmoïde des fonctions sur le même ensemble en est alors un sous-magmoïde.

Un programme déterministe pourra alors être considéré comme un système d'équations dans le magmoïde des fonctions partielles sur un ensemble E et un programme non-déterministe sera un système d'équations dans le magmoïde des fonctions sur $P(E)$ ou dans le magmoïde des relations sur E. Par ailleurs, les éléments du magmoïde projetable libre engendré par un alphabet gradué Σ ne sont autres que les séquences finies d'arbres sur Σ ou encore des séquences finies d'éléments du Σ-magma libre. Il est donc possible d'utiliser le formalisme du magmoïde pour résoudre des systèmes d'équations sur un magma libre et donc pour définir les ensembles algébriques d'arbres. On dispose donc bien de la structure algébrique qui va permettre de définir la sémantique dénotationnelle et la sémantique algébrique des programmes non-déterministes.

Et, en effet, nous démontrons que ce que calcule un programme non déterministe peut être défini comme l'image homomorphe d'un ensemble d'arbres infinis ; cet ensemble étant obtenu par des procédés purement syntaxiques (et différents selon que l'on considère que les paramètres sont appelés par valeur ou par nom). Ce résultat généralise bien le résultat analogue de Nivat [74] pour les programmes déterministes.

* * *

Mais au préalable il nous faut étudier les systèmes d'équations et leurs solutions dans une telle structure.

Dans le cadre de la théorie des langages, le système d'équations qui permet de définir un langage algébrique est un système d'équations dans le monoïde $P(A^*)$ des parties du monoïde libre A^*. Pour pouvoir adopter la même démarche dans la définition des langages d'arbres, il faut que l'ensemble des parties d'un magmoïde puisse être muni d'une structure de magmoïde. En fait nous verrons qu'il existe plusieurs façons différentes de construire un magmoïde de parties. Nous en présenterons deux, une au chapitre I, l'autre au chapitre VIII, qui permettent de formaliser respectivement les notions de OI-substitution et de IO-substitution d'Engelfriet et Schmidt [53] ou de greffe complète et de greffe restreinte de Boudol [29]. Une grande partie de notre travail s'effectue dans le cadre du premier de ces magmoïdes de parties pour la

raison essentielle que c'est en utilisant celui-là que l'on peut définir les ensembles algébriques d'arbres auxquels nous nous intéressons principalement.

Disposant d'un magmoïde de parties, il devient possible d'étudier systématiquement les systèmes d'équations dans un tel magmoïde. Après avoir au chapitre II défini et étudié les parties reconnaissables d'un magmoïde, généralisation des ensembles reconnaissables d'arbres, nous introduisons au chapitre III la famille des parties rationnelles que nous définissons comme la clôture des parties finies par les opérations d'union, de produit de composition, de produit tensoriel et par une opération "étoile". Pour les magmoïdes projetables libres cette notion coïncide avec celle de parties reconnaissables, ce qui, comme dans le cas des langages, donne une caractérisation "à la Kleene" des ensembles reconnaissables. Cette caractérisation est beaucoup plus agréable que celle que donnent Thatcher et Wright [91], ce qui est dû au fait que dans le magma il n'y a pas d'opération de concaténation naturelle.

Au chapitre IV, nous montrons l'existence de solutions des systèmes d'équations algébriques et que ces solutions sont toujours les images homomorphes de solutions de systèmes d'équations dans le magmoïde projetable $P(T(\Sigma))$ des parties d'un magmoïde projetable libre. Nous établissont aussi le lien avec la théorie classique des langages d'arbres en montrant que les composantes des solutions d'un système d'équations dans $P(T(\Sigma))$ sont les ensembles d'arbres engendrés par les grammaires "context-free" d'arbres.

Au chapitre V, nous étudions deux types particuliers de systèmes d'équations, les réguliers dont les solutions sont les parties rationnelles, et les coréguliers dont les composantes des solutions sont les ensembles coréguliers que nous avons déjà définis et utilisés par ailleurs [7], [8], [10].

Les ensembles algébriques sont les composantes des solutions des systèmes d'équations. Nous étudions quelques unes de leurs propriétés au chapitre VI, en particulier des propriétés de clôture.

Au chapitre VII, nous montrons que la famille des ensembles algébriques n'est pas fermée par morphisme inverse. Ceci nous amène à généraliser la notion d'ensemble algébrique en introduisant les ensembles k-algébriques (et aussi les ensembles k-rationnels) encore définis à partir des solutions des systèmes d'équations. Nous obtenons alors des hiérarchies infinies de familles d'ensembles dont nous étudions les propriétés de clôture.

Ainsi que nous l'avons déjà signalé nous définissons au chapitre VIII un autre magmoïde de parties ; nous montrons que les systèmes d'équations dans ce magmoïde ont encore une solution et que les ensembles algébriques que l'on obtient dans ce cas sont les ensembles engendrés par des grammaires d'arbres en utilisant des dérivations ascendantes.

Au chapitre IX, nous définissons des magmoïdes de fonctions et des magmoïdes de relations particuliers. Les programmes (non-déterministes) sont des systèmes d'équations sur de tels magmoïdes, ce qui permet de définir la sémantique dénotationnelle pour ces programmes. Enfin, les résultats obtenus précédemment sur les systèmes d'équations dans un magmoïde de parties permettent de définir la sémantique algébrique de ces programmes et d'obtenir les résultats annoncés ci-dessus.

* * *

Nous ne faisons ici qu'amorcer l'étude des schémas de programme non déterministes. Nous avons préféré mettre l'accent sur la définition et les propriétés de ce que nous pensons être la structure algébrique adéquate pour l'étude des familles d'arbres. En effet, le magmoïde permet, d'abord et avant tout, d'unifier tous les résultats précédents de la théorie des langages d'arbres et d'en rectifier les anomalies. C'est ce qu'il fallait démontrer.

CHAPITRE I

LE MAGMOÏDE PROJETABLE DES PARTIES D'UN MAGMOÏDE PROJETABLE

De même que l'ensemble des parties d'un monoïde est classiquement muni d'une structure de monoïde, nous allons munir l'ensemble des parties d'un magmoïde projetable d'une structure de magmoïde projetable. Dans ce magmoïde des parties, le produit de composition sera la "greffe complète" de Boudol [29], définie également par Engelfriet et Schmidt [53] sous le nom de "OI-substitution". Les propriétés intéressantes de ce type de greffe sont alors pour l'essentiel rassemblées dans le fait que le magmoïde des parties est projetable.

S'il n'existe qu'une seule façon de construire un magmoïde des parties qui soit projetable, il existe d'autres constructions qui donnent naissance à des magmoïdes de parties non projetables. Nous construirons un tel magmoïde au chapitre VIII dans lequel le produit de composition sera la "greffe restreinte" de Boudol, ou la "IO-substitution" d'Engelfriet et Schmidt.

En fait, nous ne pourrons pas construire ce magmoïde projetable des parties à partir d'un magmoïde projetable quelconque, mais seulement à partir d'un magmoïde projetable obtenu par adjonction de torsions à partir d'un magmoïde décomposable [AD ; ch. V]. Ceci ne nous semble pas une restriction très importante, puisque $\overset{\mathcal{H}}{T}(\Sigma)$ est obtenu par adjonction de torsion à partir de T( ) et que si M est un magmoïde projetable, le magmoïde *MDT* qui a M comme sous-magmoïde est aussi obtenu par adjonction de torsions.

Ce magmoïde des parties étant construit, il est alors possible, comme dans la théorie des langages, de définir et d'étudier les **substitutions**, c'est-à-dire des morphismes qui à un élément d'un magmoïde associent un ensemble d'éléments d'un autre. Nous verrons que ces substitutions ont un rapport avec les transductions d'arbres.

1. LE MAGMOÏDE DES PARTIES D'UN MAGMOÏDE

Nous appelons **magmoïde à torsions isolées** ou plus brièvement **magmoïde à torsions** tout magmoïde projetable, noté MT, obtenu par adjonction des torsions à partir du magmoïde décomposable M. Cette appellation vient de ce que tout élément de MT s'écrit de façon unique $[u;\Theta]$ avec $u \in M$ et $\Theta \in \boldsymbol{\Theta}$. Rappelons que MT contient un sous-magmoïde isomorphe à M qui est l'ensemble des termes de la forme $[u;Id_q]$ avec $u \in M^p_q$ et que le magmoïde des torsions de MT est constitué des termes de la forme $[e_p;\Theta]$ avec $\Theta \in \boldsymbol{\Theta}^p_q$. De plus $[u;\Theta] = [u;Id_q].[e_p;\Theta]$. Tout ceci a été démontré dans [AD] au chapitre V.

Par la suite, pour alléger les notations, nous identifierons respectivement M et $\boldsymbol{\Theta}$ à leur image isomorphe dans MT. Ainsi tout élément u de MT s'écrira de façon unique $\tilde{u}.\Theta$ avec $\tilde{u} \in M$ et $\Theta \in \boldsymbol{\Theta}$. Selon que u appartient à M ou à $\boldsymbol{\Theta}$, Θ ou $\tilde{u}$ pourront être des éléments neutres.

Soit donc MT un magmoïde à torsions. Le magmoïde des parties de MT, noté $P(MT)$ est défini comme suit.

1 $$P(MT)^p_q = [P(MT^1_q)]^p.$$

Tout élément U de $P(MT)^p_q$ s'écrira donc

$$\begin{cases} \langle U_1,\ldots,U_p\rangle \text{ avec } U_i \subset M^1_q \text{ si } p \neq 0 \\ \Lambda_q \qquad\qquad \text{si } p = 0. \end{cases}$$

où Λ_q est la suite vide de parties de MT^1_q.

Comme $(P(MT)^1_q)^1$ est trivialement en bijection avec $P(MT)^1_q$ nous identifierons ces deux ensembles et si U est une partie de MT^1_q, nous écrirons aussi U, au lieu de $\langle U\rangle$ pour désigner l'élément correspondant de $P(MT)^1_q$.

2 Puisque nous voulons que $P(MT)$ soit projetable, il devra contenir un sous-magmoïde isomorphe à $\boldsymbol{\Theta}$. Pour le moment nous allons définir une partie de $P(MT)$ en bijection avec MT, dont nous démontrerons ultérieurement qu'elle est bien un sous-magmoïde de $P(MT)$. Comme MT contient un sous-magmoïde isomorphe à $\boldsymbol{\Theta}$, il en sera donc de même de $P(MT)$. Soit donc l'application $\hat{p}$ de MT dans $P(MT)$ qui à $u \in MT^p_q$ associe $\hat{p}(u)$ défini par

- si $p = 0$ alors $u = 0_q$ et $\hat{p}(u) = \Lambda_q$, unique élément de $[P(MT^1_q)]^0 = P(MT)^0_q$

- si $p \neq 0$, alors $\hat{p}(u) = <\{\Pi^1_p.u\},\ldots,\{\Pi^p_p.u\}> \in [P(MT^1_q)]^p = P(MT)^p_q$.

Il est clair par construction que cette application $\hat{p}$ est une injection de MT dans $P(MT)$ car si $\hat{p}(u) = \hat{p}(u')$ alors $\forall\ i \leq p\ \ \Pi^i_p.u = \Pi^i_p.u'$ et donc $u=u'$.

3 Nous définissons maintenant le produit de composition dans $P(MT)$ lorsque le premier facteur est l'image par $\hat{p}$ d'une torsion.

Soit donc $\Theta \in \Theta^p_q$ et $U \in P(MT)^q_r$

- si $p = 0$, $\hat{p}(\Theta).U = \Lambda_r = \hat{p}(0_r)$ unique élément de $P(MT)^0_r$

- si $q = 0$, alors nécessairement $p = 0$

- si $p \neq 0$ (et donc $q \neq 0$), $U = <U_1,\ldots,U_q>$ avec $U_i \subset MT^1_r$; on pose alors $\hat{p}(\Theta).U = <U_{\Theta(1)},\ldots,U_{\Theta(p)}> \in [P(MT^1_r)]^p = P(MT)^p_r$.

3' On déduit de cette première définition, que si $\Theta \in \Theta$ et $u \in MT^q_r$, alors $\hat{p}(\Theta).\hat{p}(u) = \hat{p}(\Theta.u)$. En effet si $p = 0$, $\Theta = 0_q$ et $\hat{p}(0_q).\hat{p}(u) = \Lambda_r = \hat{p}(0_r) = \hat{p}(0_q.u)$. Si $p \neq 0$ (et donc $q \neq 0$) $\hat{p}(\Theta).\hat{p}(u) = \hat{p}(\Theta).<\{\Pi^1_q.u\},\ldots,\{\Pi^q_q.u\}> = <\{\Pi^{\Theta(1)}_q.u\ ,\ldots,\{\Pi^{\Theta(p)}_q.u\}> = <\{\Pi^1_p.\Theta.u\},\ldots,\{\Pi^p_p.\Theta.u\}> = \hat{p}(\Theta.u)$.

3'' On déduit aussi que l'axiome des projections est vérifié. En effet si $p \geq 1$, si $U = <U_1,\ldots,U_p> \in P(MT)^p_q$, si $U' = <U'_1,\ldots,U'_p> \in P(MT)^p_q$ et si $\forall\ i \leq p$, $\hat{p}(\Pi^i_p).U = \hat{p}(\Pi^i_p).U'$, alors $\hat{p}(\Pi^i_p).U = U_i = \hat{p}(\Pi^i_p).U' = U'_i$ et donc $U = U'$.

4 Soient $U = <U_1,\ldots,U_p> \in P(MT)^p_q$ et $V \in P(MT)^q_r$. Pour que $P(MT)$ soit un magmoïde projetable dont les torsions sont les $\hat{p}(\Theta)$, on doit nécessairement avoir, puisque le produit de composition doit être associatif, $(\hat{p}(\Pi^i_p).U).V = \hat{p}(\Pi^i_p).(U.V)$. Or $\hat{p}(\Pi^i_p).U = U_i$; d'où $\hat{p}(\Pi^i_p).(U.V) = U_i.V$. On pose donc $<U_1,\ldots,U_p>.V = <U_1.V,\ldots,U_p.V>$. Il reste donc à définir le produit de composition quand le premier facteur appartient à $P(MT)^1_p$ ou à $P(MT)^0_p$.

5 Soit donc $U \in P(MT)^n_p$ et $V \in P(MT)^p_q$. Si n=0, alors $U = \Lambda_p = \hat{p}(0_p)$ et donc $U.V = \Lambda_q$. Si n=1, on pose $U.V = \bigcup_{u \in U} \{u\}.V$.
Il suffit donc de définir U.V quand U est un singleton de $P(MT)^1_p$.

Soient donc $U = \{u\} \in P(MT)^1_q$ et $V \in P(MT)^q_r$.

- Si $u = \tilde{u} \in M^1_q$, alors si $q = 0$, $V = \Lambda_r = \hat{p}(0_r)$ et on pose $\{\tilde{u}\}.V = \{\tilde{u}.0_r\} \in P(MT)^1_r$; sinon $V = \langle V_1,\dots,V_q\rangle$ et on pose $\{\tilde{u}\}.V = \{\tilde{u}.\langle v_1,\dots,v_q\rangle / v_1 \in V_1,\dots,v_q \in V_q\} = \bigcup_{\substack{v_1 \in V_1 \\ \dots \\ v_q \in V_q}} \{\tilde{u}.\langle v_1,\dots,v_q\rangle\}$.

- Si $u = \tilde{u}.\Theta$ avec $\tilde{u} \in M^1_{q'}$, et $\Theta \in \Theta^{q'}_q$, alors $\{\tilde{u}.\Theta\}.V = \{\tilde{u}\}.(\hat{p}(\Theta).V)$.

Remarquons que cette définition est compatible avec celle donnée en 3.
En effet si $u \in \Theta^1_q \subset MT^1_q$ alors $u = \Pi^i_q$ et s'écrit $e.\Pi^i_q$, et comme $q \neq 0$, $V = \langle V_1,\dots,V_q\rangle$. On a alors $\{\Pi^i_q\}.V = \{e\}.(\hat{p}(\Pi^i_q).V) = \{e\}.V_i = \{e.v / v \in V_i\} = V_i = \hat{p}(\Pi^i_q).V$.

Le produit de composition est donc défini en plusieurs étapes : pour effectuer le produit U.V, on effectue le produit par V de chacune des composantes de U ; pour cela on fait la réunion du produit par V de tous les éléments de U ; le produit de $\tilde{u}.\Theta$ par V étant obtenu en "effectuant les torsions d'abord".

<u>Exemple 1.1</u> Prenons $MT = T(\Sigma)$ avec $\Sigma = \{f,g,a,b,c\}$ où $d(f) = d(g) = 2$ et $d(a) = d(b) = d(c) = 0$.

Soient $U_1 = \{\langle 3 ; f(x_1,x_1)\rangle\} \subset T(\Sigma)^1_3$;

$U_2 = \{\langle 3 ; g(x_2,a)\rangle\} \subset T(\Sigma)^1_3$;

et $U = \langle U_1,U_2\rangle \in P(T(\Sigma))^2_3$;

$V_1 = \{\langle 0;a\rangle,\langle 0;b\rangle\} \subset T(\Sigma)^1_0$;

$V_2 = \{\langle 0;c\rangle\} \subset T(\Sigma)^1_0$

$V_3 = \emptyset \subset T(\Sigma)^1_0$ et

et $V = \langle V_1,V_2,V_3\rangle \in P(T(\Sigma))^3_0$.

Alors $U.V = \langle U_1.V,\ U_2.V\rangle$ et $U_1.V = \{\langle 3;f(x_1,x_1)\rangle\}.V = \{\langle 2;f(x_1,x_2)\rangle.\langle 3;x_1,x_1\rangle\}.\langle V_1,V_2,V_3\rangle = \{\langle 2;f(x_1,x_2)\rangle\}.\langle V_1,V_1\rangle = \{\langle 2;f(a,b)\rangle,\ \langle 2;f(a,a)\rangle,\ \langle 2;f(b,a)\rangle,\ \langle 2;f(b,b)\rangle\}$;
$U_2.V = \{\langle 3;g(x_2,a)\rangle\}.V = \{\langle 1;g(x_1,a)\rangle.\langle 3;x_2\rangle\}.\langle V_1,V_2,V_3\rangle = \{\langle 1;g(x_1,a)\rangle\}.V_2 = \{\langle 0;g(c,a)\rangle\}$.

D'autre part $U_2.\langle V_1,V_3,V_2\rangle = \{\langle 1;g(x_1,a)\rangle\}.V_3 = \emptyset$.

$\perp$

<u>Exemple 1.2</u> On considère maintenant le magmoïde à torsions $T(\Sigma)DT$ avec le même alphabet Σ que ci-dessus et on pose

$$U'_1 = \{\langle 3;f(x_1,x_1)\rangle.\langle 3,x_1,x_2,x_3\rangle\} \subset T(\Sigma)DT^1_3,$$

$$U'_2 = \{\langle 1;g(x_1,x_1)\rangle.\langle 3;x_1\rangle\} \subset T(\Sigma)DT^1_3$$

$$V'_1 = \{\langle 0;a\rangle,\langle 0;b\rangle\} \subset T(\Sigma)DT^1_0,$$

$$V'_2 = \{\langle 0;c\rangle\} \subset T(\Sigma)DT^1_0$$

$$V'_3 = \emptyset \subset T(\Sigma)DT^1_0$$

$$V' = \langle V'_1,V'_2,V'_3\rangle.$$

Alors $U'.V' = \langle U'_1.V',U'_2.V'\rangle$ et $U'_1.V' = \{\langle 3;f(x_1,x_1)\rangle.\langle 3,x_1,x_2,x_3\rangle\}.V' = \{\langle 3;f(x_1,x_1)\}.\langle V'_1,V'_2,V'_3\rangle = \{\langle 3;f(x_1,x_1)\rangle.\langle u_1,u_2,u_3\rangle / u_1 \in V'_1,\ u_2 \in V'_2,\ u_3 \in V'_3\} = \emptyset$.

$U'_2.V' = \{\langle 1;g(x_1,x_1)\rangle.\langle 3;x_1\rangle\}.\langle V'_1,V'_2,V'_3\rangle = \{\langle 1;g(x_1,x_1)\rangle\}.V'_1 = \{\langle 0;g(a,a)\rangle,\langle 0;g(b,b)\rangle\}$.

$\perp$

On peut voir sur l'exemple 1.1 que dans $P(T(\Sigma))$ l'ensemble $\{\tilde{u}.\Theta\}.\langle V_1,\ldots,V_q\rangle$ est obtenu en remplaçant chaque variable x_i figurant dans $\tilde{u}.\Theta$ par un élément quelconque de V_i. Autrement dit dans ce cas, le produit de composition n'est rien d'autre que la greffe complète de Boudol, ce qui se démontre aisément par induction sur $\tilde{u}$, alors que l'exemple 1.2 montre que l'utilisation de l'adjonction de torsion permet des types de greffe plus complexes. Ainsi si on considère dans $T(\Sigma)DT$ des termes de la forme $u.Id_q$

avec $u \in T(\Sigma)^1_q$, alors $\{u.Id_q\}.<V_1,\ldots,V_q>$ est la IO-substitution d'Engelfriet et Schmidt.

Nous donnons un autre exemple pour illustrer l'intérêt de l'adjonction de torsion pour définir des opérations de greffe complexes.

Exemple 1.3 Soit Σ l'alphabet défini précédemment.
Soit $U = \{<2;f(g(x_1,x_2),g(x_1,x_2))>.<1,x_1,x_1>\}$ et soit $V = \{<0;a>;<0;b>\}$.
Alors $U.V = \{<2;f(g(x_1,x_2),g(x_2,x_1)\}.<V_1,V_1> =$
$\{<0;f(g(a,a),g(a,a))>,<0,f(g(a,b),g(b,a)>,<0;f(g(b,a),g(a,b))>,<0;f(g(b,b),$
$g(b,b))>\}$.

⊥

Il faut remarquer que lorsqu'il généralise la notion de transducteur, Engelfriet [51] fait apparaître explicitement l'équivalent d'une torsion et la définition qu'il donne du mouvement d'un transducteur généralisé utilise aussi le principe "on effectue les torsions d'abord", et de fait nous montrerons (proposition 1.19) que les transducteurs généralisés d'Engelfriet sont ceux qui surgissent naturellement à partir de notre définition du magmoïde des parties.

Enfin, signalons que dans un cadre théorique différent, celui des théories algébriques, on retrouve ce type de construction dans Eilenberg et Wright [46]. De façon plus précise, si on identifie un "polynôme" d'un Σ-algèbre libre à un élément U de $P(T(\Sigma))$ l'effet de ce polynôme sur une partie V de la même Σ-algèbre est précisément U.V.

Proposition 1.4 *Si* $u \in MT^p_q$ *et* $v \in MT^q_r$ *alors* $\hat{p}(u).\hat{p}(v) = \hat{p}(u.v)$.

Démonstration : Dans le cas où u est une torsion, le résultat a déjà été démontré en 3'. On considère donc le cas où $u = \tilde{u}.\Theta$, avec $\tilde{u} \in M$. On a alors $\hat{p}(u) = <\{\Pi^1_p.\tilde{u}.\Theta\},\ldots,\{\Pi^p_p.\tilde{u}.\Theta\}>$ et donc $\hat{p}(u).\hat{p}(v) = <\{\Pi^1_p.\tilde{u}.\Theta\}.\hat{p}(v),\ldots$ $\ldots,\{\Pi^p_p.\tilde{u}.\Theta\}.\hat{p}(v)>$. Or $\Pi^i_p.\tilde{u}.\Theta = \tilde{u}_{\Pi^i_p}.\Pi^i_{p\|\tilde{u}\|}.\Theta$, d'où, par définition du produit de composition dans $P(MT)$, $\{\Pi^i_p.\tilde{u}.\Theta\}.\hat{p}(v) = \{\tilde{u}_{\Pi^i_p}\}.\hat{p}(\Pi^i_{p\|\tilde{u}\|}.\Theta).\hat{p}(v) =$

$\{\tilde{u}_{\Pi^i_p}\}.\hat{p}(\Pi^i_{p\|\tilde{u}\|}.\Theta.v)$. On pose $w = \Pi^i_{p\|\tilde{u}\|}.\Theta.v$ et comme $\hat{p}(w) = <\{\Pi^1_m.w\},\ldots,\{\Pi^m_m.w\}>$

$\{\Pi^i_p.\tilde{u}.\Theta\}.\hat{p}(v) = \{\tilde{u}_{\Pi^i_p}\}.\hat{p}(w) = \{\tilde{u}_{\Pi^i_p}.<w_1,\ldots,w_q>/w_i \in \Pi^i_m.w\} =$

$\{\tilde{u}_{\Pi^i_p}.<\Pi^1_m.w,\ldots,\Pi^m_m.w>\} = \{\tilde{u}_{\Pi^i_p}.w\} = \{\tilde{u}_{\Pi^i_p}.\Pi^i_{p\|\tilde{u}\|}.\Theta.v\} = \{\Pi^i_p.\tilde{u}.\Theta.v\} = \{\Pi^i_p.u.v\}$.

On en déduit que $\hat{p}(u).\hat{p}(v) = <\{\Pi^1_p.u.v\},\ldots,\{\Pi^p_p.u.v\}> = \hat{p}(u.v)$.

cqfd.

6 Définissons maintenant le produit tensoriel dans $P(MT)$ par :

Si $U = <U_1,\ldots,U_p> \in P(MT)^p_q$, si $V = <V_1,\ldots,V_{p'}> \in P(MT)^{p'}_{q'}$, alors $U \otimes V = <U_1.D_1,\ldots,U_p.D_1, V_1.D_2,\ldots,V_{p'}.D_2>$

avec $D_1 = \hat{p}(Id_q \otimes O_{q'}) \in P(MT)^q_{q+q'}$ et

$D_2 = \hat{p}(O_q \otimes Id_{q'}) \in P(MT)^{q'}_{q+q'}$.

Dans le cas où l'un des entiers p ou p' est nul, on obtient respectivement

$<V_1.D_2,\ldots,V_{p'}.D_2>$ ou

$<U_1.D_1,\ldots,U_p.D_1>$.

Remarquons que ce produit tensoriel ne fait que le "décalage adéquat des variables" des éléments des U_i et des V_j. En effet, par exemple, $U_i.D_1 = \bigcup_{u\in U_i}.\{u\}.\hat{p}(Id_q \otimes O_{q'}) = \bigcup_{u\in U_i} \hat{p}(u).\hat{p}(Id_q \otimes O_{q'}) =$ $\bigcup_{u\in U_i} \hat{p}(u.(Id_q \otimes O_{q'})) = \hat{p}(u \otimes O_{q'}) = \bigcup_{u\in U_i} \{u \otimes O_{q'}\}$; ceci découlant de la proposition 1.4 et du fait que si $v \in MT^1_r$, $\hat{p}(v) = <\{\Pi^1_1.v\}> = \{v\}$.

Théorème 1.5 *Muni des opérations définies ci-dessus* $P(MT)$ *est un magmoïde projetable contenant un sous-magmoïde isomorphe à* MT.

Démonstration : La plus grosse partie de cette démonstration est de montrer l'associativité du produit de composition.

Soit donc $U \in P(MT)^m_p$, $V \in P(MT)^p_q$, $W \in P(MT)^q_r$

- Si $m = 0$ alors $U = \Lambda_p = \hat{p}(0_p)$ et donc $(U.V).W = U.(V.W) = \Lambda_r$.

- Si $m \neq 0$, alors $U = \langle U_1,\dots,U_m\rangle$ et donc $(U.V).W = \langle U_1.V,\dots,U_m.V\rangle.W = \langle (U_1.V).W,\dots,(U_m.V).W\rangle$ et $U.(V.W) = \langle U_1.(V.W),\dots,U_m.(V.W)\rangle$. $(U.V).W$ sera donc égal à $U.(V.W)$ ssi pour chaque i, $(U_i.V).W = U_i.(V.W)$. Il suffit donc de montrer l'associativité du produit de composition dans le cas où $n = 1$. Dans ce cas, on a $(U.V).W = (\bigcup_{u\in U} \{u\}.V).W = \bigcup_{u\in U} (\{u\}.V).W$ et $U.(V.W) = \bigcup_{u\in U} \{u\}.(V.W)$. Il est donc possible de se ramener au cas où $U = \{u\}$ avec $u \in MT^1_p$.

Considérons d'abord le cas où $u = \Pi^i_p \in \Theta^1_p \subset MT^1_p$. L'entier p est nécessairement différent de 0 et V s'écrit $\langle V_1,\dots,V_p\rangle$. On a donc $V.W = \langle V_1.W,\dots,V_p.W\rangle$ et donc $(\{\Pi^i_p\}.V).W = V_i.W = \{\Pi^i_p\}.(V.W)$.

Considérons ensuite le cas où $u = \tilde{u} \in M^1_p$. Si $p=0$ alors $V = \Lambda_q$ et $\{\tilde{u}\}.(V.W) = \{\tilde{u}\}.(\Lambda_q.W) = \{\tilde{u}\}.(\hat{p}(0_q).W) = \{\tilde{u}.0_q\}.W = (\{\tilde{u}\}.V).W$ d'après les définitions données précédemment. Si $p\neq 0$, alors $V = \langle V_1,\dots,V_p\rangle$ et $\{\tilde{u}\}.V =$

$$\bigcup_{\substack{v_1\in V_1\\ \vdots \\ v_p\in V_p}} \{\tilde{u}.\langle v_1,\dots,v_p\rangle\}.$$

Mais si $v_i \in V_i$ alors $v_i = \tilde{v}_i.\Theta_i$ et $\langle v_1,\dots,v_p\rangle = (\tilde{v}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{v}_p).\langle\Theta_1,\dots,\Theta_p\rangle$. d'où $\{\tilde{u}\}.V = \bigcup_{\substack{\tilde{v}_1\Theta_1\in V_1\\ \text{-------}\\ \tilde{v}_p.\Theta_p\in V_p}} \{\tilde{u}\}.(\tilde{v}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{v}_p).\langle\Theta_1,\dots,\Theta_p\rangle\}$

et $(\{\tilde{u}\}.V).W = \bigcup_{\substack{\tilde{v}_1\Theta_1\in V_1\\ \text{-------}\\ \tilde{v}_p\Theta_p\in V_p}} \{\tilde{u}.(\tilde{v}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{v}_p)\}.(\hat{p}(\langle\Theta_1,\dots,\Theta_p\rangle).W)$.

- Rappelons que comme $v_i \in MT^1_Q$, $\tilde{v}_i \in M^1_{n_i}$ et $\Theta_i \in \Theta^{n_i}_q$. Alors $\langle\Theta_1,\dots,\Theta_p\rangle$ est l'application de $[\Sigma n_i] \to [q]$ définie par $\Pi^{\ell}_{\Sigma n_i}.\langle\Theta_1,\dots,\Theta_p\rangle = \Pi_q^{\Theta_i(j)}$ ssi $\ell = n_1+n_2+n_{i-1}+j$ avec $1 \leq j$ et $j \leq n_i$. -

D'autre part $\tilde{u}.(V.W) = \bigcup_{\substack{w_1 \in V_1.W \\ \cdots \\ w_p \in V_p.W}} \{\tilde{u}.<w_1,\ldots,w_p>\}$

Nous allons montrer que les deux ensembles $(\{\tilde{u}\}.V).W$ et $\{\tilde{u}\}.(V.W)$ sont inclus dans l'autre.

Soit donc $t \in (\{\tilde{u}\}.V).W$. Il existe donc $\tilde{v}_1.\Theta_1 \in V_1,\ldots,\tilde{v}_p.\Theta_p \in V_p$ tels que $t \in \{\tilde{u}.(\tilde{v}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{v}_p)\}.(\hat{p}(<\Theta_1,\ldots,\Theta_p>).W)$.

Posons $\bar{\Theta} = <\Theta_1,\ldots,\Theta_p> \in \Theta_q^n$ avec $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$.

- Si $n = 0$ (et donc chacun des n_i est nul), alors $\bar{\Theta} = 0_q$ et $\hat{p}(\bar{\Theta}).W = \Lambda_r = \hat{p}(0_r)$ d'où $t \in \{\tilde{u}.(\tilde{v}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{v}_p)\}.\Lambda_r = \{\tilde{u}.(\tilde{v}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{v}_p).0_r\}$. On a donc $t = \tilde{u}.<\tilde{v}_1.0_r,\ldots,\tilde{v}_p.0_r>$. Mais comme chaque n_i est nul $\Theta_i = 0_q$ d'où $\hat{p}(\Theta_i).W = \Lambda_r = \hat{p}(0_r)$ et $\{\tilde{v}_i.\Theta_i\}.W = \{\tilde{v}_i\}.(\hat{p}(\Theta_i).W) = \{\tilde{v}_i\}.\hat{p}(0_r) = \{\tilde{v}_i.0_r\}$. Il s'ensuit que $\{\tilde{v}_i.0_r\} = \{\tilde{v}_i.\Theta_i\}.W \subset V_i.W$ et que $\{t\} = \{\tilde{u}.<\tilde{v}_1.0_r,\ldots,\tilde{v}_p.0_r>\} \subset \bigcup_{\substack{w_1 \in V_1.W \\ \cdots \\ w_p \in V_p.W}} \{\tilde{u}.<w_1,\ldots,w_p>\} = \tilde{u}.(V.W)$.

- Si $n \neq 0$ alors comme $\bar{\Theta} \in \Theta_q^n$, q est nécessairement différent de 0. W s'écrit donc $<W_1,\ldots,W_q>$ et $t \in \{\tilde{u}.(\tilde{v}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{v}_p)\}.<W_{\bar{\Theta}(1)},\ldots,W_{\bar{\Theta}(n)}>$; il existe donc $w_1 \in W_{\bar{\Theta}(1)},\ldots,w_n \in W_{\bar{\Theta}(n)}$ tels que $t = \tilde{u}.(\tilde{v}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{v}_p).<w_1,\ldots,w_p>$. On pose alors

$$s_i = \begin{cases} 0_r \text{ si } n_i = 0, \\ <w_{n_1+n_2+\ldots+n_i+1},\ldots,w_{n_1+n_2+\ldots+n_{i-1}+n_i}> \text{ sinon} \end{cases}$$

On a donc, d'après la définition de $\bar{\Theta}$, $\hat{p}(s_i) \subset \hat{p}(\Theta_i).W$; et donc $\tilde{v}_i.s_i \in \{\tilde{v}_i\}.\hat{p}(\Theta_i).W = \{\tilde{v}_i.\Theta_i\}.W \subset V_i.W$. D'autre part $t=\tilde{u}.(\tilde{v}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{v}_p).<w_1,\ldots,w_n> = \tilde{u}.<\tilde{v}_1.s_1,\ldots,\tilde{v}_p.s_p>$ et comme $\tilde{v}_i.s_i \in V_i.W$ on a bien $t \in \tilde{u}.(V.W)$. On a donc bien l'inclusion de $(\{\tilde{u}\}.V).W$ dans $\{\tilde{u}\}.(V.W)$. L'inclusion réciproque se montre de façon parfaitement analogue.

Il reste enfin à montrer que $(\{\tilde{u}.\Theta\}.V).W = \{\tilde{u}.\Theta\}.(V.W)$. Montrons d'abord que $(\hat{p}(\Theta).V).W = \hat{p}(\Theta).(V.W)$. On a déjà vu que cette égalité était vraie si $\Theta \in \Theta_p^0 \cup \Theta_p^1$. Si $\Theta \in \Theta_q^n$, on a $\hat{p}(\Pi_n^i).[(\hat{p}(\Theta).V).W] = [\hat{p}(\Pi_n^i).(\hat{p}(\Theta).V)].W =$

$(\hat{p}(\Pi_q^{\Theta(i)}).V).W = \hat{p}(\Pi_q^{\Theta(i)}).(V.W) = \hat{p}(\Pi_n^i.\Theta).(V.W) = \hat{p}(\Pi_n^i).(\hat{p}(\Theta).(V.W))$ et comme ceci est vrai pour tout $i \leq n$, on a d'après 3" $\hat{p}(\Theta).(V.W) = (\hat{p}(\Theta).V).W$. On en déduit que $\{\tilde{u}.\Theta\}.(V.W) = \{\tilde{u}\}.(\hat{p}(\Theta).(V.W)) = \{\tilde{u}\}.((\hat{p}(\Theta).V).W) = (\{\tilde{u}\}.(\hat{p}(\Theta).V)).W = (\{\tilde{u}.\Theta\}.V).W$. Le produit de composition est donc bien associatif.

Le **produit tensoriel est lui aussi associatif**. En effet, soient $U \in P(MT)_q^p$, $V \in P(MT)_{q'}^{p'}$ et $W \in P(MT)_{q''}^{p''}$. Alors $U \otimes V =$
$\langle U_1.D_1,\ldots,U_p.D_1, V_1.D_2,\ldots,V_{p'}.D_2\rangle \in P(MT)_{q+q'}^{p+p'}$ avec $D_1 = \hat{p}(Id_q \otimes O_{q'})$
et $D_2 = \hat{p}(O_q \otimes Id_{q'})$; $V \otimes W = \langle V_1.D_3,\ldots,V_{p'}.D_3,W_1.D_4,\ldots,W_{p''}.D_4\rangle$
avec $D_3 = \hat{p}(Id_{q'} \otimes O_{q''})$ et $D_4 = \hat{p}(O_{q'} \otimes Id_{q''})$ et, en tenant compte de l'associativité du produit de composition
$(U \otimes V) \otimes W = \langle U_1.D_1.D_5,\ldots,U_p.D_1.D_5,V_1.D_2.D_5,\ldots,V_{p'}.D_2.D_5,W_1.D_6,\ldots,W_{p''}.D_6\rangle$
avec $D_5 = \hat{p}(Id_{q+q'} \otimes O_{q''})$ et $D_6 = \hat{p}(O_{q+q'} \otimes Id_{q''})$ et
$U \otimes (V \otimes W) = \langle U_1.D_7,\ldots,U_p.D_7,V_1.D_3.D_8,\ldots,V_{p'}.D_3.D_8,W_1.D_4.D_8,\ldots,W_{p''}.D_4.D_8\rangle$
avec $D_7 = \hat{p}(Id_q \otimes O_{q'+q''})$ et $D_8 = \hat{p}(O_q \otimes Id_{q'+q''})$ et comme
$(Id_q \otimes O_q).(Id_{q+q'} \otimes O_{q''}) = Id_q \otimes O_{q'+q''}$, alors $D_1.D_5 = D_7$;
comme $(O_{q'} \otimes Id_{q''}).(O_q \otimes Id_{q'+q''}) = O_{q+q'} \otimes Id_{q''}$, alors $D_4.D_8 = D_6$;
comme $(O_q \otimes Id_{q'}).(Id_{q+q'} \otimes O_{q''}) = (Id_{q'} \otimes O_{q''}).(O_q \otimes Id_{q'+q''}) = O_q \otimes Id_{q'} \otimes O_{q''}$,
$D_2.D_5 = D_3.D_8$ et donc $(U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W)$.

Dans le cas où l'un au moins des entiers p, p', p" serait nul, la démonstration se ferait de la même façon.

Soient maintenant $U \in P(MT)_q^p$, $U' \in P(MT)_{q'}^{p'}$, $V \in P(MT)_r^q$, $V' \in P(MT)_{r'}^{q'}$;
et montrons que $(U.V) \otimes (U'.V') = (U \otimes U').(V \otimes U')$. En effet, posons
$U = \langle U_1,\ldots,U_p\rangle$, $U' = \langle U'_1,\ldots,U'_{p'}\rangle$, $V = \langle V_1,\ldots,V_q\rangle$ et $V' = \langle V'_1,\ldots,V'_{q'}\rangle$;
alors $(U.V) \otimes (U'.V') = \langle U_1.V.D_1,\ldots,U_p.V.D_1, U'_1.V'.D_2,\ldots,U'_{p'}.V'.D_2\rangle$
avec $D_1 = \hat{p}(Id_r \otimes O_{r'})$ et $D_2 = \hat{p}(O_r \otimes Id_{r'})$;
d'autre part $(U \otimes U') = \langle U_1.D_3,\ldots,U_p.D_3,U'_1.D_4,\ldots,U'_{p'}.D_4\rangle$.
avec $D_3 = \hat{p}(Id_q \otimes O_{q'})$ et $D_4 = \hat{p}(O_q \otimes Id_{q'})$;
et $V \otimes V' = \langle V_1.D_1,\ldots,V_q.D_1, V'_1.D_2,\ldots,V'_{q'}.D_2\rangle$
d'où $D_3.(V \otimes V') = \langle V_1.D_1,\ldots,V_q.D_1\rangle = V.D_1$
et $D_4.(V \otimes V') = \langle V'_1.D_2,\ldots,V'_{q'}.D_2\rangle = V'.D_2$ et donc $(U \otimes U').(V \otimes V') =$
$\langle U_1.D_3.(V \otimes V'),\ldots,U_p.D_3.(V \otimes V'), U'_1.D_4.(V \otimes V'),\ldots,U'_{p'}.D_4.(V \otimes V')\rangle =$
$\langle U_1.V.D_1,\ldots,U_p.V.D_1, U'_1.V'.D_2,\ldots,U'_p.V'.D_2\rangle = (U.V) \otimes (U' \otimes V')$.

Comme pour les autres démonstrations, le cas où l'un au moins des entiers

p,p',q,q' est nul se traite de façon analogue.

Il est immédiat d'après les définitions que les éléments neutres de $P(MT)^p_p$ sont les éléments $\hat{p}(Id_p)$ avec $Id_p \in \Theta^p_p$.

$P(MT)$ est donc bien un magmoïde.

Pour que $P(MT)$ contienne un sous-magmoïde isomorphe à MT, il suffit de montrer, compte tenu de la proposition 1.4, que $\hat{p}(u \otimes v) = \hat{p}(u) \otimes \hat{p}(v)$. Or $\hat{p}(u) = <\{\Pi^1_p.u\},\ldots,\{\Pi^p_p.u\}>$, $\hat{p}(v) = <\{\Pi^1_{p'}.v\},\ldots,\{\Pi^{p'}_{p'}.v\}>$ et donc $\hat{p}(u) \otimes \hat{p}(v) = <\{\Pi^1_p.u.\delta_1\},\ldots,\{\Pi^p_p.u.\delta_1\}, \{\Pi^1_{p'},v.\delta_2\},\ldots,\{\Pi^{p'}_{p'},v.\delta_2\}>$ avec $\delta_1 = Id_q \otimes 0_{q'}$ et $\delta_2 = 0_q \otimes Id_{q'}$. D'autre part $\hat{p}(u \otimes v) = <\{\Pi^1_{p+p'}.(u \otimes v)\},\ldots$ $\ldots,\{\Pi^{p+p'}_{p+p'}.(u \otimes v)\}>$

$$\text{avec } \Pi^i_{p+q}.(u \otimes v) = \begin{cases} \Pi^i_p.u.(Id_q \otimes 0_{q'}) \text{ si } i \leq p \\ \Pi^{i-p}_{p'}.v(0_q \otimes Id_{q'}) \text{ si } p < i \leq p+p' \end{cases}$$

On a donc bien $\hat{p}(u \otimes v) = \hat{p}(u) \otimes \hat{p}(v)$.

Comme $P(MT)$ contient un sous-magmoïde isomorphe à MT il contient à fortiori un sous-magmoïde isomorphe à Θ, l'image de la torsion Θ étant $\hat{p}(\Theta)$. Comme l'axiome des projections est vérifié d'après 3" , $P(MT)$ est bien un magmoïde projetable.

cqfd.

Etant donné que MT isomorphe à un sous-magmoïde de $P(MT)$ nous identifierons désormais MT à son image par $\hat{p}$ dans $P(MT)$.

Nous dirons qu'un élément U de $P(MT)^p_q$ est **fini** si $\forall\ i \leq p$, $\Pi^i_p.U$ est une partie finie de MT^1_q, et qu'il est **non nul** si $\forall\ i \leq p$, $\Pi^i_p.U$ est une partie non vide de MT^1_q. L'ensemble des éléments finis et des éléments non nuls de $P(MT)$ forment bien deux sous-magmoïdes de $P(MT)$, notés respectivement $P_F(MT)$ et $P_N(MT)$, qui ont tous les deux MT comme sous-magmoïde ; ils sont donc projetables.

On définit également sur $P(MT)$ une relation binaire fibrée (i.e. deux éléments dans la relation sont dans la même fibre),notée $\subset$ par

- si $U \in P(MT)^p_q$, $V \in P(MT)^p_q$, alors $U \subset V$ ssi

$\forall\ i \leq p$, $\Pi^i_p.U \subset \Pi^i_p.V$ ou ici le symbole $\subset$ représente l'inclusion entre les parties de MT^1_q.

Autrement dit, la relation $\subset$ sur $P(M\ )^p_q$ est l'extension canonique de l'inclusion sur $P(MT^1_q)$ à $[P(MT^1_q)]^p = P(MT)^p_q$.

On définit aussi sur $P(MT)$ une addition notée + qui à deux éléments U et V de $P(MT)^p_q$ fait correspondre U+V défini par $\forall\ i \leq P$, $\Pi^i_j.(U+V) = \Pi^i_p.U \cup \Pi^i_p.V$. Il est clair que pour l'ordre $\subset$, $P(MT)^p_q$ est un sup-demi-treillis dont + est le sup.

<u>*Proposition 1.6*</u> *Pour* U, U', V, V' *dans les fibres convenables, on a les relations suivantes :*

$$(U+U').V = U.V + U'.V$$
$$(U+U')\otimes V = U\otimes V + U'\otimes V$$
$$U\otimes(U+V') = U\otimes V + U\otimes V'$$
$$U.V+U.V' \subset U.(V+V').$$

<u>Démonstration</u> : Pour que la première égalité soit vraie, il suffit que $\forall\ i \leq p$:

$$\Pi^i_p.(U'+U').V = \Pi^i_p.(U.V + U'.V) \ ;$$

Or, par définition $\Pi^i_p.(U+U') = \Pi^i_p.U + \Pi^i_p.U'$ et $\Pi^i_p.(UV + U'.V) = \Pi^i_p.U.V + \Pi^i_p.U'.V$. Or il est immédiat par définition du produit de composition

$$\Pi^i_p.U.V + \Pi^i_p.U'.V = (\Pi^i_p.U + \Pi^i_p.U').V.$$

Les deux égalités concernant le produit tensoriel se démontre de la même façon. Enfin, en ce qui concerne la dernière relation, il est clair qu'il suffit de montrer que

$$\Pi^i_p.U.V + \Pi^i_p.U.V' \subset \Pi^i_p.U.(V+V').$$

Or $\Pi_p^i.U.V + \Pi_p^i.U.V' = \bigcup_{\tilde{u}.\Theta\in\Pi_p^i.U} \{\tilde{u}.<v_1,\ldots,v_q>/v_j \in \Pi_q^j.\Theta.V\} +$

$\bigcup_{\tilde{u}.\Theta\in\Pi_p^i.U} \{\tilde{u}.<v'_1,\ldots,v'_q>/v'_j \in \Pi_q^j.\Theta.V'\} \subset \bigcup_{\tilde{u}.\Theta\in\Pi_p^i.U} \{\tilde{u}.<w_1,\ldots,w_q>/w_j \in \Pi_q^j.\Theta.V+\Pi_q^j.\Theta.V'\}.$

Et comme $\Pi_q^i.\Theta.V + \Pi_q^i.\Theta.V' = \Pi_r^{\Theta(i)}.V + \Pi_r^{\Theta(i)}.V' = \Pi_r^{\Theta(i)}(V+V') = \Pi_q^i\ \Theta(V+V')$

on a bien $\Pi_p^i.U.V + \Pi_p^i.U.V' \subset \bigcup_{\tilde{u}.\Theta\in\Pi_p^i.U} \{\tilde{u}.<w_1,\ldots,w_q>/w_i \in \Pi_q^i.\Theta(V+V')\} =$

$\Pi_p^i.U.(V+V')$.

cqfd.

Montrons sur un exemple que dans ce dernier cas on n'a pas en général l'égalité.

Exemple 1.7 Soit $\Sigma = \{f,a,b\}$ avec $d(f) = 2$ et $d(a) = d(b) = 0$.

On pose $U = \{<2;f(x_1,x_2)>\} \in P(T(\Sigma))_2^1$

$V_1 = <\{<0;a>\},\{<0;a>\}> \in P(T(\Sigma))_0^2$

$V_2 = <\{<0;b>\},\{<0;b>\}> \in P(T(\Sigma))_0^2$.

Alors $U.V_1 = \{<0;f(a,a)>\} \in P(T(\Sigma))_0^1$

$U.V_2 = \{<0;f(b,b)>\} \in P(T(\Sigma))_0^1$ et

donc $U.V_1 + U.V_2 = \{<0;f(a,a)>,<0;f(b,b)>\}$.

Par ailleurs $V_1+V_2 = <\{<0;a>,<0;b>\},\{<0;a>,<0;b>\}>$

et $U.(V_1+V_2) = \{<0;f(a,a)>,<0;f(a,b)>,<0;f(b,a)>,<0;f(b,b)>\}$ qui contient strictement $U.V_1 + U.V_2$.

⊥

Le produit de composition dans le magmoïde des parties n'est donc pas "additif à droite", contrairement au produit dans le **monoïde** des parties d'un monoïde. On voit donc ainsi apparaître une première divergence entre les propriétés des parties d'un monoïde - les langages - et celles des parties d'un magmoïde. Signalons que le magmoïde des parties - différent de celui-ci - que nous construirons au chapitre VIII aura, lui, cette propriété d'additivité

à droite, mais il ne sera pas projetable ; comme si ces deux propriétés s'excluaient mutuellement.

Corollaire 1.8 *Les produits de* $P(MT)$ *sont des opérations croissantes à droite et à gauche.*

Démonstration : Ceci découle immédiatement de la proposition 1.6, en remarquant que si $U \subset U'$ alors $U' = U+U'$.

cqfd.

Pour terminer ce paragraphe nous définissons un sous-magmoïde particulier de $P(MT)$, le magmoïde des **sous-identités**.

On dira que $U \in P(MT)^p_p$ est une **sous-identité** si $\forall\ i \leq p\ \Pi^i_p.U$ est soit $\Pi^i_p \in MT^1_p \subset P(MT)^1_p$, soit $\emptyset \in P(MT^1_p) = P(MT)^1_p$.

Comme $\Pi^i_p.Id_p = \Pi^i_p$, l'identité de $P(MT)^p_p$ est bien une sous-identité. L'ensemble des sous-identités des $P(MT)^p_p$ forme un treillis dont l'élément minimum est celui qui vérifie $\Pi^i_p.U = \emptyset$ et l'élément maximum est Id_p ; d'où le terme de sous-identité. On notera SI l'ensemble des sous-identités de $P(MT)$. SI forme bien un sous-magmoïde de $P(MT)$ puisque si S_1 et $S_2 \in$ SI

alors $$\Pi^i_p.S_1.S_2 = \begin{cases} \Pi^i_p.S_2 \\ \emptyset \end{cases}$$

et donc $S_1.S_2$ est bien une sous-identité. De même $\Pi^i_{p+p'}.(S_1 \otimes S_2)$ est égale à :

si $i \leq p$ $$\Pi^i_p.S_1.(Id_p \otimes 0_{p'}) = \begin{cases} \emptyset \\ \Pi^i_{p+p'} \end{cases}$$

si $p<i\leq p+p'$ $$\Pi^{i-p}_{p'}.S_2.(0_p \otimes Id_{p'}) = \begin{cases} \emptyset \\ \Pi^i_{p+p'} \end{cases}$$

Remarquons en outre que $S_1.S_2 = S_1 \cap S_2$. En effet $\Pi^i_p.S_1.S_2 = \Pi^i_p$

ssi $\Pi_p^i.S_1 = \Pi_p^i$ et $\Pi_p^i.S_2 = \Pi_p^i$.

A tout élément U de $P(MT)_q^p$ on associe la sous-identité notée E(U) définie par

$$\Pi_p^i.E(U) = \begin{cases} \Pi_p^i \text{ si } \Pi_p^i.U \neq \emptyset \\ \emptyset \text{ sinon} \end{cases}$$

On obtient alors <u>E(U).U = U</u> puisque si $\Pi_p^i.U \neq \emptyset$ alors $\Pi_p^i.E(U) = \Pi_p^i$ et donc $\Pi_p^i.E(U).U = \Pi_p^i.U$.

Si $\Pi_p^i.U = \emptyset$ alors $\Pi_p^i.E(U) = \emptyset$ et $\Pi_p^i.E(U).U = \emptyset = \Pi_p^i.U$.

On a aussi la propriété suivante :

<u>Proposition 1.9</u> $\quad E(U.V) = E(U.E(V))$.

<u>Démonstration</u> : Montrons d'abord que si $\tilde{u}.\Theta \in MT_q^1 \subset P(MT)_q^1$, alors $\tilde{u}.\Theta.V = \emptyset$ ssi $\tilde{u}.\Theta.E(V) = \emptyset$. En effet $\tilde{u}.\Theta.V = \{\tilde{u}.\langle v_1,\ldots,v_q\rangle / v_i \in \Pi_q^i.\Theta.V\}$ donc $\tilde{u}.\Theta.V = \emptyset$ ssi $\exists$ i tq $\Pi_q^i.\Theta.V = \emptyset$; de même $\tilde{u}.\Theta.E(V) = \emptyset$ ssi $\exists$ i tq $\Pi_q^i.\Theta.E(V) = \emptyset$. Or $\Pi_q^i.\Theta.V = \emptyset$ ssi $\Pi_{q'}^{\Theta(i)}.V = \emptyset$ ssi $\Pi_{q'}^{\Theta(i)}.E(V) = \emptyset$ ssi $\Pi_q^i.\Theta.E(V) = \emptyset$. On en déduit que si $U \in P(MT)_p^1$, $U.V = \emptyset$ ssi $U.E(V) = \emptyset$ puisque $U.V = \bigcup_{u \in U} u.V$ et donc que $U.V = \emptyset$ ssi $\forall\, u \in U$, $u.V = \emptyset$. On a alors $\Pi_p^i.E(U.V)\ \emptyset$ ssi $\Pi_p^i.U.V = \emptyset$ ssi $\Pi_p^i.U.E(V) = \emptyset$ ssi $\Pi_p^i.E(U.E(V)) = \emptyset$ et donc $E(U.V) = E(U.E(V))$.

<u>cqfd</u>.

2. SUBSTITUTIONS

Soit M un magmoïde et M'T un magmoïde à torsion. On appelle **k-substitution** de M dans P(M'T) [resp. **substitution**] tout k-morphisme [resp. morphisme] de M dans P(M'T). Rappelons que le terme de substitution est utilisé à cause de l'analogie de ce morphisme avec les substitutions dans les langages et qu'il n'a rien à avoir avec les OI et IO substitutions d'Engelfriet et Schmidt, que nous avons appelées "greffes".

Comme M'T est un sous-magmoïde de P(M'T) tout k-morphisme de M dans M'T peut être considéré comme une k-substitution de M dans P(M'T).

On dira qu'une k-substitution σ de M dans P(M'T) est **déterministe** si pour tout $u \in M_q^p$, et tout $i \leq kp$

$$\text{Card } (\Pi_{kp}^{i}.\sigma(u)) \leq 1$$

et on dira qu'elle est finie si

$$\text{Card } (\Pi_{kp}^{i}.\sigma(u)) \text{ est fini.}$$

Un k-morphisme est donc un cas particulier de substitution déterministe.

<u>*Proposition 1.10*</u> *Une* k-*substitution* σ *de* $T(\Sigma)$ *dans* P(MT) *est déterministe (resp. finie) ssi* $\forall f \in \Sigma$, $\forall i \leq k$ Card $(\Pi_k^i.\sigma(f)) \leq 1$ *(resp. fini).*

<u>Démonstration</u> : La condition nécessaire provient immédiatement des définitions et de ce que $\Sigma \subset T(\Sigma)$. La démonstration de la condition suffisante s'appuie sur les remarques suivantes :

- $\sigma(\tilde{u}.\Theta) = \sigma(\tilde{u}).\sigma(\Theta)$ où $\sigma(\Theta)$ est une torsion de P(MT) et donc

  $$\text{Card } [\Pi_k^i.\sigma(\tilde{u}.\Theta)] = \text{Card } [\Pi_k^i.\sigma(\tilde{u})]$$

- $$\text{Card } [\Pi_{k(p+p')}^{i}\sigma(u) \otimes \sigma(v)] = \begin{cases} \text{Card } [\Pi_{kp}^{i}.\sigma(u)] \\ \text{ou} \\ \text{Card } [\Pi_{kp'}^{i-kp}.\sigma(v)] \end{cases}$$

- Comme pour $U \in P(MT)^1_p$, $U.V =$

$$\bigcup_{\tilde{u}.\Theta \in U} \tilde{u}.\Theta.V = \bigcup_{\tilde{u}.\Theta \in U} \{\tilde{u}.\langle v_1,\ldots,v_q\rangle / v_i \in \Pi^i_r.\Theta.V\},$$

il existe un certain entier m tel que

$$\mathrm{Card}\,(U.V) \leq \mathrm{Card}(U) \times [\sup_{i \leq p} \mathrm{Card}\,(\Pi^i_p.V)]^m$$

cqfd.

On dira qu'une 1-substitution de MT dans $P(M'T)$ est **linéaire** si $\forall\, \tilde{u} \in M \subset MT^p_q$, $\forall\, \tilde{v}.\Theta \in \Pi^i_p.\sigma(u)$, Θ est une injection. Remarquons que dans [A.D,ch.V] on avait défini les k-morphismes linéaires, pour tout entier k, ici nous ne définirons que les 1-substitutions linéaires - et dont la définition généralise bien celle des 1-morphismes linéaires -. Nous ne définissons pas les k-substitutions linéaires, car nous ne les utiliserons pas par la suite pour la raison qu'elles n'ont pas les bonnes propriétés qu'ont les k-morphismes linéaires ou les 1-substitutions linéaires.

Proposition 1.11 *Une 1-substitution de* $T(\Sigma)$ *dans* $P(MT)$ *est linéaire ssi* $\forall\, f \in \Sigma$, $\forall\, \tilde{u}.\Theta \in \sigma(f)$, Θ *est une injection.*

Démonstration : La condition nécessaire est immédiate par définition. Pour montrer la condition suffisante on considère $t \in \tilde{T}(\Sigma)^p_q$, $s \in \tilde{T}(\Sigma)^{p'}_{q'}$ tels que $\tilde{u}\Theta \in \Pi^i_p\sigma(t) \Longrightarrow \Theta$ est une injection et $\tilde{u}.\Theta \in \Pi^i_{p'}\sigma(s) \Longrightarrow \Theta$ est une injection. On a alors :

- $\Pi^i_{p+p'}\sigma(t \otimes s) = \Pi^i_{p+p'}.[\sigma(t) \otimes \sigma(s)]$ d'où $\tilde{u}.\Theta \in \Pi^i_{p+p'}\sigma(t \otimes s) \Longrightarrow$ $\tilde{u}\Theta \in \Pi^i_p.\sigma(t).(\mathrm{Id}_q \otimes 0_{q'})$ si $i \leq p$ et $\tilde{u}.\Theta \in \Pi^{i-p}_{p'}.\sigma(s).(0_q \otimes \mathrm{Id}_{q'})$. On en déduit qu'il existe $\tilde{u}.\Theta' \in \Pi^i_p.\sigma(t)$. (resp. $\tilde{u}\,\Theta' \in \Pi^{p-i}_{p'}\sigma(s)$) tel que $\Theta \in \Theta'.\mathrm{Id}_q \otimes 0_{q'}$ et donc que $\Theta = \Theta'.(\mathrm{Id}_q \otimes 0_{q'})$ (resp. $\Theta = \Theta'.(0_q \otimes \mathrm{Id}_{q'})$). Comme Θ' est une injection, Θ est aussi une injection.

- Si $p' = q$,

$\Pi^i_p\,\sigma(t.s) = \Pi^i_p.\sigma(t).\sigma(s)$; d'où

$$\Pi^i_p.\sigma(t.s) = \bigcup_{\tilde{u}.\Theta \in \Pi^i_p\sigma(t)} .\tilde{u}.\Theta.\sigma(s) = \bigcup_{\tilde{u}.\Theta \in \Pi^i_p\sigma(t)} \tilde{u}.\sigma(\Theta.s)$$

Mais comme $s \in \tilde{T}(\Sigma)$, $s = s_1 \otimes \ldots \otimes s_p$, d'où $\Theta.s = (s_{\Theta(1)} \otimes \ldots \otimes s_{\Theta(m)}).\Theta_{\|s\|}$ et $\sigma(\Theta.s) = \sigma(s_{\Theta(1)}) \otimes \ldots \otimes (s_{\Theta(m)}).\Theta_{\|s\|}$.

On en déduit que $\tilde{v}.\gamma \in \Pi_p^i.\sigma(t.\Theta)$ ssi il existe $\tilde{u}.\Theta \in \Pi_p^i.\sigma(t)$, $\tilde{w}_1.\Theta_1 \in \sigma(s_{\Theta(1)}),\ldots,\tilde{w}_m.\Theta_m \in \sigma(s_{\Theta(m)})$ tels que $\tilde{v}.\gamma = \tilde{u}.(\tilde{w}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{w}_m).(\Theta_1 \otimes \ldots \otimes \Theta_m).\Theta_{\|s\|}$. Par hypothèse Θ et chacun des Θ_i sont injectifs donc $\Theta_{\|s\|}$ et $\gamma = (\Theta_1 \otimes \ldots \otimes \Theta_m).\Theta_{\|s\|}$ le sont aussi.

<u>cqfd</u>.

Une substitution étant un morphisme de M dans $P(M'T)$, il n'y a aucune difficulté à définir le composé d'un morphisme de N dans M et d'une substitution de M dans $P(M'T)$.

Par contre pour pouvoir définir le composé d'une substitution σ de M dans $P(M'T)$ et d'un morphisme ϕ de $M'T$ dans $M''T$, il faut d'abord étendre ce morphisme en une application de $P(M'T)$ dans $P(M''T)$.

Soit ϕ un 1-morphisme de $M'T$ dans $M''T$; on définit une application notée $P(\phi)$ de $P(M'T)$ dans $P(M''T)$ par :

- si $U \in P(M'T)_q^1 \simeq P(M'T_q^1)$, alors
  $P(\phi)(U) = \{\phi(u)/u \in U\} \in P(M''T_q^1) \simeq P(M''T)_q^1$

- si $U \in P(M'T)_q^0$ alors $U = \Lambda_q = 0_q$ et $P(\phi)(U) = \Lambda_q = 0_q \in P(M''T)_q^1$

- si $U \in P(M'T)_q^p$ avec $p \geq 2$ alors $P(\phi)(U)$ vérifie
  $\Pi_p^i.P(\phi)(U) = P(\phi).(\Pi_p^i.U)$, autrement dit $P(\phi)(\langle U_1,\ldots,U_p\rangle) = \langle P(\phi)(U_1),\ldots,P(\phi)(U_p)\rangle$.

Le composé de la substitution σ de M dans $P(M'T)$ et du 1-morphisme ϕ de M' dans M" est alors par définition l'application $P(\phi)\circ\sigma$ de M dans $P(M''T)$. Mais cette application n'est pas en général une substitution puisque $P(\phi)$ n'est pas un 1-morphisme ainsi que le montrent les exemples suivants.

<u>Exemple 1.12</u> Soient $\Sigma_2 = \{f\}$, $\Sigma_1 = \{g\}$, $\Sigma_0 = \{a\}$ et soit ϕ de $T(\Sigma_2 \cup \Sigma_0)$ dans $T(\Sigma_1 \cup \Sigma_0)$ défini par :

$\phi(f) = \phi(<2;f(x_1,x_2)>) = <2;g(x_1)>$
$\phi(a) = \phi(<0;a>) = <0;a>.$

On pose alors $U = \{<2;f(x_1,x_2)>\} \in P(T(\Sigma_2 \cup \Sigma_0))^1_2$

$V = \{<2;g(x_1)>\} \in P(T(\Sigma_1 \cup \Sigma_0))^1_2$

$W = \{<0;a>\} \in P(T(\Sigma_1 \cup \Sigma_0))^1_0 \cap P(T(\Sigma_2 \cup \Sigma_0))^1_0.$

On a bien $P(\phi)(U) = V$ et $P(\phi)(W) = W$.

Si $P(\phi)$ était un 1-morphisme on aurait $P(\phi)(U .<W,\emptyset>) = V.<W,\emptyset>$; or $V.<W,\emptyset> = <0;g(a)>$ et $U.<W,\emptyset> = \emptyset$ d'où $P(\phi)(U.<W,\emptyset>) = \emptyset$.

<u>Exemple 1.13</u> Soient $\Omega_1 = \{g\}$, $\Omega_2 = \{f\}$, $\Omega_0 = \{a,b\}$ et soit ψ de $T(\Omega_1 \cup \Omega_0)$ dans $T(\Omega_2 \cup \Omega_0)$ défini par $\psi(g) = \psi(<1;g(x_1)>) = <1;f(x_1,x_1)>$

$\psi(a) = \psi(<0;a>) = <0;a> = a$

$\psi(b) = \psi(<0;b>) = <0;b> = b.$

On pose $U = \{<1;g(x_1)>\}$

$V = \{<1;f(x_1,x_1)\}$

$W = \{<0;a>,<0;b>\}.$

Si $P(\psi)$ était un 1-morphisme, on aurait

$P(\psi)(U.W) = P(\psi)(U).P(\psi)(W) = V.W.$

Or $V.W = \{<0;f(a,a)>,<0;f(a,b)>,<0;f(b,a)>,<0;f(b,b)>\}$

et $U.W = \{<0;g(a)>,<0;g(b)>\}$ d'où $P(\psi)(U.W) = \{<0;f(a,a)>,<0;f(b,b)>\}$.

$\perp$

A première vue, le fait que $P(\phi)$ n'est pas un morphisme provient de ce que ϕ ne respecte pas les torsions adjointes ; c'est pourquoi nous allons examiner le cas particulier où ϕ est de la forme $\phi' T$. Si on examine de plus près les exemples, on s'aperçoit que le fait que $P(\phi)(U.V) \neq P(\phi)(U).P(\phi)(V)$ dépend des relations entre le caractère linéaire ou non linéaire de ϕ et le fait que U est un élément soit non nul, soit dont les composantes $\Pi^i_p U$ sont de cardinal au plus 1. Ainsi nous affirmons - une partie de la démonstration

sera faite au chapitre III - la proposition suivante :

Proposition 1.14 *Si ϕ est un 1-morphisme* **linéaire** *de MT dans $M'T$, la restriction de $P(\phi)$ à $P_N(MT)$ est un 1-morphisme de $P_N(MT)$ dans $P_N(M'T)$.*

Démonstration : Il sera démontré au chapitre III que si ϕ est un 1-morphisme linéaire,

$$P(\phi)(U.V) = P(\phi)(U.E(V)).P(\phi)(V).$$

Si $V \in P_N(M'T)$ on a nécessairement $E(V) = Id_q$ d'où $P(\phi).(U.V) = P(\phi)(U).P(\phi)(V)$.

Le reste de la démonstration est trivial.

cqfd.

Soit ϕ un 1-morphisme d'un magmoïde décomposable M dans un magmoïde décomposable M'. Alors ϕT est le 1-morphisme de MT dans $M'T$ défini par $\phi T(\tilde{u}.\Theta) = \phi(\tilde{u}).\Theta$ (cf. [AD] ch.V).

Proposition 1.15 *Si ϕ est un 1-morphisme de M dans M', $P(\phi T)$ est un 1-morphisme de $P(MT)$ dans $P(M'T)$.*

Démonstration : Tout d'abord, posons, pour abréger $\bar{\phi} = P(\phi T)$. L'identité de $P(MT)^p_p$ étant $Id_p = <\{e.\Pi^1_p\},\ldots,\{e.\Pi^p_p\}>$, son image par $\bar{\phi}$ est $<\{\phi T(e.\Pi^1_p)\},\ldots,\{\phi T(e.\Pi^p_p)\}> = <\{e'.\Pi^1_p\},\ldots,\{e'.\Pi^p_p\}>$ qui est bien l'élément neutre Id_p de $P(M'T)^p_p$.

Montrons ensuite que $\bar{\phi}(U.V) = \bar{\phi}(U).\bar{\phi}(V)$.

Comme $\Pi^i_p.\bar{\phi}(U.V) = \bar{\phi}(\Pi^i_p.U.V)$ et

$$\Pi^i_p.\bar{\phi}(U).\bar{\phi}(V) = \bar{\phi}(\Pi^i_p.U).\bar{\phi}(V),$$

il suffit de montrer cette égalité quand $U \in P(MT)^1_p$; on a alors $\bar{\phi}(U) = \{\phi(\tilde{u}).\Theta \mid \tilde{u}.\Theta \in U\}$ d'où $\bar{\phi}(U).\bar{\phi}(V) = \{\phi(\tilde{u}).\Theta \mid \tilde{u}\Theta \in U\}.V =$

$$\bigcup_{\tilde{u}.\Theta\in U} \{\phi(\tilde{u}).<v_1,\ldots,v_q>/v_i \in \Pi^i_q.\Theta.\bar{\phi}(V)\} =$$

$$\bigcup_{\tilde{u}.\Theta\in U} \{\phi(\tilde{u}).<\phi(\tilde{v}_1).\Theta_1,\ldots,\phi(\tilde{v}_q).\Theta_q>/\tilde{v}_i.\Theta_i \in \Pi_q^i.\Theta.V\} =$$

$$\bigcup_{\tilde{u}.\Theta\in U} \{\phi T(\tilde{u}.<\tilde{v}_1.\theta_1,\ldots,\tilde{v}_q.\theta_q>)/\tilde{v}_i.\theta_i \in \Pi_q^i.\Theta.V\} = \bigcup_{u\in U.V} \phi T(u) = \bar{\phi}(U.V).$$

Montrons enfin que $\bar{\phi}(U \otimes V) = \bar{\phi}(U) \otimes \bar{\phi}(V)$.

Soient $U = <U_1,\ldots,U_p> \in P(MT)_q^p$ et
$V = <V_1,\ldots,V_{p'}> \in P(MT)_{q'}^{p'}$.

Alors $U \otimes V = <U_1.\delta_1,\ldots,U_p.\delta_1,V_1.\delta_2,\ldots,V_{p'}.\delta_2>$
avec $\delta_1 = Id_q \otimes 0_{q'}$ et $\delta_2 = 0_q \otimes Id_{q'}$
d'où $\bar{\phi}(U \otimes V) = <\bar{\phi}(U_1.\delta_1),\ldots,\bar{\phi}(U_p.\delta_1),\bar{\phi}(V_1.\delta_2),\ldots,\bar{\phi}(V_{p'}.\delta_2)> =$
$<\bar{\phi}(U_1).\delta_1,\ldots,\bar{\phi}(U_p).\delta_1,\bar{\phi}(V_1).\delta_2,\ldots,\bar{\phi}(V_{p'}).\delta_2> = \bar{\phi}(U) \otimes \bar{\phi}(V)$.

cqfd.

Si donc σ est une k-substitution de M dans $P(M'T)$ et ϕ un 1-morphisme de M' dans M", $P(\phi T)o\sigma$ est une k-substitution de M dans $P(M''T)$.

Cette construction sera le plus souvent utilisée dans le cas suivant. Soient Σ, Δ, Ω trois alphabets gradués ; σ une k-substitution de $T(\Sigma)$ dans $P(T(\Delta))$ et ϕ un k'-morphisme de $T(\Delta)$ dans $T(\Omega)$. Il existe alors un 1-morphisme ϕ' de $T(\Delta)$ dans k'dil $T(\Omega)$ tel que $\phi = i_{k'}o\phi'$ où $i_{k'}$ est l'injection de k'dil $T(\Omega)$ dans $T(\Omega)$. Comme $T(\Delta) = \tilde{T}(\Delta)T$, il existe un seul 1-morphisme ϕ'' de $\tilde{T}(\Delta)$ dans k'dil $T(\Omega)DT$ qui coïncide avec ϕ' sur $\tilde{T}(\Delta)^1$. On considère alors $P(\phi''T)$ de $P(T(\Delta))$ dans $P(k'\text{dil } T(\Omega)DT)$ et la k-substitution $\sigma' = P(\phi''T)o\sigma$ de $T(\Sigma)$ dans $P(k'\text{dil } T(\Omega)DT)$.

On définit maintenant l'application $Red_{k'}$ de k'dil $T(\Omega)$ DT dans $T(\Omega)$ de la façon suivante : soit $\tilde{u}.\Theta \in$ k'dil $T(\Omega)$ DT avec $\tilde{u} \in$ k'dil $T(\Omega)D$; alors $u = u_1 \otimes \ldots \otimes u_p$ avec $u_i \in$ k'dil $T(\Omega)^1$. On pose alors $Red_{k'}(\tilde{u}.\Theta) = (i_{k'}(u_1) \otimes \ldots \otimes i_{k'}(u_p)).\nu_{k'}(\Theta)$, où toutes les opérations se font dans le magmoïde projetable $T(\Omega)$.

La définition de $\nu_{k'}(\Theta)$ se trouve dans [AD] ch.III §2.

Exemple 1.16 Soit par exemple $\Omega = \{f,g\}$ avec $d(f) = 2$, $d(g) = 1$. On pose
$u = \langle 4;f(x_1,x_3),g(x_2)\rangle \in$ 2-dil $T(\Omega)^1_2$
$v = \langle 2;f(x_2,x_1),g(x_1)\rangle \in$ 2-dil $T(\Omega)^1_1$, $u \otimes v \in$ 2-dil $T(\Omega)D^2_3$ et
$w = [u \otimes v \ ; \ \langle 4;x_1,x_3,x_3\rangle] \in$ 2-dil $T(\Omega)DT^2_4$.

Alors $\mathrm{Red}_2(w) = \langle 4;f(x_1,x_3),g(x_2)\rangle \otimes \langle 2;f(x_2,x_1),g(x_1)\rangle . \nu_2(\langle 4;x_1,x_3,x_3\rangle) =$
$\langle 6;f(x_1,x_3),g(x_2),f(x_6,x_5),g(x_5)\rangle . \langle 8;x_1,x_2,x_5,x_6,x_5,x_6\rangle =$
$\langle 8;f(x_1,x_5),g(x_2),f(x_6,x_5),g(x_5)\rangle \in T(\Omega)^4_8$.

⊥

Intuitivement $\mathrm{Red}_{k'}$ revient à supprimer toutes les distinctions formelles qu'on a fait apparaître en construisant successivement k'dil $T(\Omega)$, k'dil $T(\Omega)D$, k'dil $T(\Omega)DT$.

Avec les définitions données ci-dessus, on obtient :

Proposition 1.17 $\forall\, u \in T(\Sigma)$, $\forall\, i \leq k$,

$$\{\mathrm{Red}_{k'}(v) \ / \ v \in \Pi^i_k.\sigma'(u)\} = \{\phi(w) \ / \ w \in \Pi^i_k.\sigma(u)\}.$$

Démonstration : Par définition de σ', $v \in \Pi^i_k.\sigma'(u)$ ssi il existe $w \in \Pi^i_k.\sigma(u)$ tel que $v = \phi''T(w)$. Et comme $w = \tilde{w}.\Theta$ avec $\tilde{w} \in \tilde{T}(\Delta)^1$, $v = \phi''(\tilde{w}).\Theta$. Mais ϕ'' coïncide avec ϕ' sur $\tilde{T}(\Delta)^1$, d'où $v = \phi'(\tilde{w}).\Theta$ et donc $\mathrm{Red}_{k'}(v) = i_{k'}(\phi'(\tilde{w})).\nu_{k'}(\Theta) = \phi(\tilde{w}).\phi(\Theta) = \phi(\tilde{w}.\Theta) = \phi(w)$.

cqfd.

Le résultat suivant montre que l'étude des k-substitutions peut se ramener à celle des 1-substitutions.

Proposition 1.18 *Toute k-substitution σ de $T(\Sigma)$ dans $P(MT)$ est le composé d'un k-morphisme ϕ de $T(\Sigma)$ dans $T(\Sigma')$ et d'une 1-substitution σ' de $T(\Sigma')$ dans $P(MT)$. Si de plus σ est fini ou déterministe, σ' l'est aussi.*

<u>Démonstration</u> : On considère l'alphabet gradué $\Sigma' = \{f_i / f \in \Sigma,\ i \leq k\}$ où le degré de f_i est k fois celui de f. Soit le k-morphisme ϕ de $T(\Sigma)$ dans $T(\Sigma')$ défini par si $f \in \Sigma$ et $n = d(f)$, alors $\phi(f) = \langle kn, f_1(x_1,\ldots,x_{kn}),\ldots,f_k(x_1,\ldots,x_{kn})\rangle \in T(\Sigma')^k_{kn}$.

D'autre part, comme $\sigma(f) \in P(M\mathcal{T})^k_{kn}$, $\sigma(f)$ s'écrit $\langle U_1,\ldots,U_k\rangle$ où chacun des U_i appartient à $P(M\mathcal{T})^1_{kn}$; on considère alors la 1-substitution σ' qui à $f_i \in \Sigma'$ de degré kn associe $U_i = \Pi^i_k.\sigma(f) \in P(M\mathcal{T})^1_{kn}$. Il est clair que $\sigma'.\phi(f) = \sigma(f)$ puisque $\Pi^i_k.\sigma'.\phi(f) = \sigma'(\Pi^i_k.\phi(f)) = \sigma'(\langle kn; f_i(x_1,\ldots,x_{kn})\rangle) = \sigma'(f_i) = \Pi^i_k.\sigma(f)$; et donc $\sigma'.\phi = \sigma$.

<u>cqfd</u>.

3. SUBSTITUTIONS ET TRANSDUCTIONS

Les relations entre substitutions, transductions et bimorphismes sont étudiées systématiquement dans [D]. Nous allons seulement montrer ici l'équivalence entre les substitutions finies et les transductions généralisées au sens d'Engelfriet. Nous verrons aussi que les représentations matricielles de transductions de langages peuvent être décrites comme des k-substitutions.

Rappelons d'abord brièvement la définition des transducteurs généralisés d'Engelfriet [51], en utilisant les notations du magmoïde.

Un transducteur généralisé est un quadruplet $M = \langle \Sigma, \Delta, Q, R \rangle$ où

Σ et Δ sont des alphabets gradués
Q un ensemble fini d'états
R un ensemble fini de règles ;

chaque **règle** est une séquence $\langle q,k,m,f,t,\phi \rangle$

où
$q \in Q$
k et m sont des entiers (si $k=0$ alors $m=0$)
$f \in \Sigma$ et $d(f) = k$
$t \in T(\Delta)^1_m$
ϕ est une application de $\{x_1,\ldots,x_m\}$ dans $Q \times \{x_1,\ldots,x_k\}$.

On définit ensuite l'ensemble $M_q(u)$ des q-translatés d'un élément u de $T(\Sigma)^1_0 = \tilde{T}(\Sigma)^1_0$, où $q \in Q$, de la façon suivante :

- si $t = a \in \Sigma_0$ alors $M_q(a) = \{s \in T(\Delta)^1_0 / \langle q,0,0,a,s,\emptyset \rangle \in R\}$

- si $f \in \Sigma_k$, $t_1,\ldots,t_k \in T(\Sigma)^1_0$ et $t = f.\langle t_1,\ldots,t_k \rangle$, alors $M_q(t) = \{r.\langle s_1,\ldots,s_m \rangle / \langle q,k,m,f,r,\phi \rangle \in R$ et $\forall\, i \leq m$, si $\phi(x_i) = \langle q',x_j \rangle$ alors $s_i \in M_{q'}(t_j)\}$.

D'après cette définition, si $u \in T(\Sigma)^1_0$, $M_q(u) \subset T(\Delta)^1_0$; et comme $T(\Delta)^1_0$ est inclus dans $T(\Delta)DT^1_0$, on considèrera $M_q(u)$ comme un élément de

$P(T(\Delta)DT_0^1) = P(T(\Delta)DT)_0^1$.

Proposition 1.19 *Quel que soit le transducteur généralisé* $<\Sigma,\Delta,Q,R>$, *il existe une K-substitution finie* σ *de* $T(\Sigma)$ *dans* $P(T(\Delta)DT)$, *et réciproquement, quelle que soit la K-substitution finie* σ *de* $T(\Sigma)$ *dans* $P(T(\Delta)DT)$, *il existe un transducteur généralisé* $M = <\Sigma,\Delta,Q,R>$ *tels que*

- $K = \text{Card } Q$
- $\forall\, u \in T(\Sigma)_0^1,\ \sigma(u) = <M_{q_1}(u),\ldots,M_{q_k}(u)> \in P(T(\Delta)DT)_0^K$.

Démonstration :

1. Soit le transducteur généralisé $M = <\Sigma,\Delta,Q,R>$ et soit $K = \text{Card } (Q)$. On pose $Q = \{q_1,\ldots,q_K\}$. A toute application ϕ de $\{x_1,\ldots,x_m\}$ dans $Q \times \{x_1,\ldots,x_m\}$ on associe l'application Θ_ϕ de $[m]$ dans $[Kn]$ qui vérifie $\Theta_\phi(i) = K(j-1)+\ell$ ssi $(x_i) = <q_\ell,x_j>$. On pose alors $V(q_i,f)$, pour $q_i \in Q$ et $f \in \Sigma_n$, égal à l'ensemble des $\tilde{t}.\Theta_\phi \in T(\Delta)DT_{Kn}^1$ tels que $<q,n,m,f,\tilde{t},\phi>$ soit une règle de R. Comme R est un ensemble fini, $V(q_i,f)$ est un ensemble fini. On définit alors la K-substitution finie σ par

$$\sigma(f) = <V(q_1,f),\ldots,V(q_K,f)> \in P(T(\Delta)DT)_{Kn}^K$$

2. Réciproquement si σ est une K-substitution finie, on pose $Q = <q_1,\ldots,q_K>$ et on définit le transducteur généralisé $M = <\Sigma,\Delta,Q,R>$ par $R = \{<q_i,n,m,t,\phi_\Theta>/f \in \Sigma_n,\ \Theta \in \Theta_{Kn}^m,\ t \in T(\Delta)_m^1,\ t.\Theta \in \Pi_K^i.\sigma(f)\}$ et ϕ_Θ est l'application de $\{x_1,\ldots,x_m\}$ dans $Q \times \{x_1,\ldots,x_m\}$ définie par $\phi_\Theta(i) = <q_j,x_\ell>$ ssi $\Theta(i) = K(\ell-1)+j$.

Il est immédiat par construction que si on réapplique la construction 1 au transducteur ainsi obtenu, on retrouve la K-substitution finie σ dont on est parti.

3. On montre alors par induction que si $u \in T(\Sigma)_0^1$, $\sigma(u) = <M_{q_1}(u),\ldots,M_{q_K}(u)>$.

3.1 Si $u = a \in \Sigma_0 \subset T(\Sigma)^1_0$, alors

$$V(q_i,a) = \{v.\Theta_\phi / \langle q_i,k,m,a,v,\phi\rangle \in R\}.$$

Or comme $a \in \Sigma_0$, $k = 0$, donc $m = 0$ et $\phi = \emptyset$ d'où $\Theta_\phi = 0_0$ et $V(q_i,a) = \{v/\langle q_i,0,0,a,v,\emptyset\rangle \in R\} = M_{q_i}(a)$ et donc $\sigma(a) = \langle M_{q_1}(a),\ldots,M_{q_K}(a)\rangle$.

3.2 Si $u = f.\langle u_1,\ldots,u_n\rangle$ alors $\sigma(u) = \sigma(t).\langle\sigma(u_1),\ldots,\sigma(u_n)\rangle$ qui est aussi égal, d'après l'hypothèse d'induction, à $\sigma(f).\langle M_{q_1}(u_1),\ldots M_{q_K}(u_1), M_{q_1}(u_2),\ldots,M_{q_K}(u_2),\ldots,M_{q_1}(u_n),\ldots,M_{q_K}(u_n)\rangle$, ou, en posant $U_{\ell+K(j-1)} = M_{q_\ell}(u_j)$, $\sigma(f).\langle U_1,\ldots,U_{nK}\rangle$. Or $\sigma(f) = \langle V(q_1,f),\ldots,V(q_K,f)\rangle$ d'où $W_i = \Pi^i_K.\sigma(f).\langle U_1,\ldots,U_{nK}\rangle = V(q_i,f).\langle U_1,\ldots,U_{nK}\rangle = \bigcup_{\tilde{u}.\Theta\in V(q_i,f)} \{\tilde{u}.\langle v_1,\ldots,v_m\rangle / v_i \in U_{\Theta(i)}\}$. Ceci est encore égal, d'après la définition de $V(q_i,f)$ à $\bigcup_{\langle q_i,n,m,f,\tilde{u},\phi\rangle\in R} \{\tilde{u}.\langle v_1,\ldots,v_m\rangle / v_i \in U_{\Theta_\phi(i)}\}$.

Or $\Theta_\phi(i) = K(j-1)+\ell$ ssi $\phi(i) = \langle q_\ell,x_j\rangle$ d'où $U_{\Theta_\phi(i)} = M_{q_\ell}(u_j)$ ssi $\phi(i) = \langle q_\ell,x_j\rangle$ et donc $W_i = \bigcup_{\langle q_i,n,m,f,\tilde{u},\phi\rangle\in R} \{\tilde{u}.\langle v_1,\ldots,v_m / v_i \in M_{q_\ell}(u_j)$ ssi $\phi(i) = \langle q_\ell,x_j\rangle\} = M_{q_i}(f.\langle u_1,\ldots,u_n\rangle) = M_{q_i}(u)$.

<u>cqfd</u>.

On démontrerait de la même façon l'équivalence entre les transducteurs descendants classiques et les k-substitutions finies de $T(\Sigma)$ dans $P(T(\Delta))$; et en particulier les k-substitutions déterministes et donc à fortiori les k-morphismes sont alors des transducteurs déterministes descendants. Et en effet, dans un cadre théorique différent, Goguen et Thatcher [58] ont signalé l'analogie entre les transducteurs déterministes descendants totaux et ce que nous appelons les k-morphismes.

En ne se limitant plus aux substitutions finies, mais en considérant d'autres types de substitution, telles que les substitutions rationnelles que nous définirons au ch.III ; nous pouvons alors généraliser la notion de transduction ; c'est ce qui a été fait dans [D].

Nous allons maintenant montrer comment cette notion de k-substitution généralise aussi celle de représentation matricielle.

Soit Σ un alphabet et soit Σ^* le monoïde libre engendré par Σ. On peut également considérer Σ comme un alphabet gradué dont toutes les lettres sont de degré 1 et on identifie Σ^* à $T(\Sigma)_1^1$. A toute matrice M de dimension k×k dont les éléments sont des langages de Σ^*, on associe bijectivement un élément $\tau(M)$ de $P(T(\Sigma))_k^k$ de la façon suivante

$$u.\Pi_k^j \in \Pi_k^i.\tau(M) \text{ ssi } u \in M_{i,j}.$$

Soit un autre alphabet Δ et une application ϕ qui à $d \in \Delta$ associe une matrice carrée k×k à coefficients dans $P(\Sigma^*)$, on lui associe la substitution σ définie par $\sigma(d) = \tau(\phi(d))$. Alors, $\forall\ u \in \Delta^*$, $\sigma(u) = \tau(\phi(u))$. Il suffit pour cela de montrer que σ est bien un morphisme, c'est-à-dire :

$$\sigma(u.v) = \sigma(u).\sigma(v) \text{ ou encore}$$

$$\tau(\phi(u.v)) = \tau(\phi(u)).\tau(\phi(v)).$$

Pour cela posons $M = \phi(u)$ et $M' = \phi(v)$. On a $(M.M')_{i,j} = \sum_{\ell \leq k} M_{i,\ell}.M'_{\ell,j}$ d'où $\tau(M.M')$ vérifie $u.\Pi_k^j \in \Pi_k^i\ \tau(M.M')$ ssi $u \in M.M'_{i,j}$ ssi $\exists$ v, w, ℓ tels que $u = v.w$, $v \in M_{i,\ell}$, $w \in M'_{\ell,j}$. D'où $\Pi_k^i.\tau(M.M') = \{v.w.\Pi_k^j / \exists\ \ell \leq k$, $v \in M_{i,\ell}$ et $w \in M'_{\ell,j}\}$.

D'autre part, $u \in \Pi_n^i\ \tau(M)\ \tau(M')$ ssi il existe $v.\Pi_k^\ell \in \Pi_k^i.\tau(M)$ et $w.\Pi_k^j \in \Pi_k^\ell.\tau(M')$ tels que $u = v.w.\Pi_k^j$ ssi il existe $\ell \leq k$, $v \in M_{i,\ell}$, $w \in M'_{\ell,j}$ tels que $u = v.w.\Pi_k^j$. On en déduit donc que $\tau(M).\tau(M') = \tau(M.M')$ et c'est ce qu'on voulait démontrer.

CHAPITRE II

PARTIES RECONNAISSABLES D'UN MAGMOÏDE PROJETABLE

Dans le cadre de la théorie classique des langages, il existe plusieurs façons équivalentes de définir les parties reconnaissables d'un monoïde libre finiment engendré. Ce sont :

1- les parties finiment saturées

2- les parties reconnues par un automate, déterministe ou non

3- les parties rationnelles, obtenues à partir des parties finies par les opérations de Kleene

4- les solutions de systèmes d'équations linéaires.

Des généralisations au cas des arbres de ces différents procédés ont été définies et étudiées, et plus particulièrement la généralisation des automates et celle des grammaires régulières par Brainerd [30], [31] et Rounds [83].

Dans ce chapitre nous allons examiner la généralisation au cas du magmoïde projetable des deux premiers procédés de définition des parties reconnaissables. Les congruences de magmoïde ont déjà été utilisées au chapitre IV de [AD]. Les automates déterministes seront définis en terme de magmoïdes fonctionnels ([AD], ch.I) et les non déterministes par les k-substitutions que nous venons de définir. Mais curieusement, et contrairement au cas des langages, les deux familles de parties que nous obtenons ainsi ne coïncident plus, mais la seconde est strictement incluse dans la première. Mais elles coïncident de nouveau si on ajoute la restriction que

les parties ainsi définies doivent être incluses dans une fibre donnée. Nous serons donc amenés à imposer que pour qu'une partie soit reconnaissable, il faut qu'elle soit tout entière incluse dans une même fibre.

Dans les chapitres suivants nous généraliserons la notion de rationalité et celle de systèmes d'équations linéaires. Les parties ainsi définies auront, elles, cette propriété d'être incluses dans une même fibre, ce qui à posteriori renforce la validité du choix d'une telle contrainte dans la définition des parties reconnaissables. Par ailleurs les "forêts reconnaissables" définies classiquement sont des parties de $\mathcal{T}(\Sigma)_0^1 = T(\Sigma)_0^1$ et vérifient donc bien la restriction indiquée.

1. Parties finiment saturées

Les langages reconnaissables peuvent être caractérisés comme des parties qui vérifient $L = \phi^{-1}(\phi(L))$ où ϕ est un homomorphisme à valeurs dans un monoïde fini.

Pour définir de la même façon les parties reconnaissables d'un magmoïde projetable, il faut d'abord définir ce qu'est un magmoïde projetable fini. Bien évidemment tout magmoïde projetable contient une infinité d'éléments puisqu'il contient, à un isomorphisme près, le magmoïde Θ qui a une infinité d'éléments.

Nous dirons donc qu'un magmoïde projetable M est **fini** si chacune de ses fibres M_q^p ne contient qu'un nombre fini d'éléments.

Par exemple Θ est un magmoïde projetable fini puisque la fibre Θ_q^p, ensemble des applications de p dans q n'a que q^p éléments. Un autre exemple de magmoïde projetable fini est le magmoïde fonctionnel F(E) où E est un ensemble **fini**. Le magmoïde fonctionnel F(E) a été défini dans [AD] au chapitre I. C'est le magmoïde dont la fibre p-q est l'ensemble des applications de E^q dans E^p où le produit de composition f.g est g o f - où o est la composition des applications - et où le produit tensoriel est défini par $f \otimes y\ (x_1,\ldots,x_q,x'_1,\ldots,x'_{q'}) = (y_1,\ldots,y_p,y'_1,\ldots,y'_{p'})$ ssi $f(x_1,\ldots,x_q) = (y_1,\ldots,y_p)$ et $g(x'_1,\ldots,x'_{q'}) = (y_1,\ldots,y'_{p'})$. Si n est le

cardinal de E, la fibre $F(E)^p_q$ contient $(n^p)^{n^q} = n^{p\times n^q}$ éléments.

Si tout magmoïde fonctionnel fini est un magmoïde projetable fini, la réciproque n'est pas vraie. En effet Θ lui-même n'est pas un magmoïde fonctionnel fini car, sinon, il existerait un entier n tel que le nombre d'éléments de Θ^p_q serait $n^{p\times n^q}$; on aurait donc $n^{p\times n^q} = q^p$, ce qui est impossible. (Pour $q = 1$, $n^{p\times n} = 1$ d'où $n=1$ et donc $1 = q^p$).

On dira qu'une partie L d'un magmoïde projetable M est **finiment saturée** s'il existe un magmoïde projetable fini N, un 1-morphisme ϕ de M dans N tels que $L = \phi^{-1}(\phi(L))$.

<u>Exemple 2.1</u> Soit Σ un alphabet gradué, Σ' un sous-alphabet gradué de Σ. Alors $T(\Sigma')$ est une partie finiment saturée de $T(\Sigma)$.

Soit $E = \{0,1\}$ et soit ϕ le 1-morphisme de $T(\Sigma)$ dans $F(E)$ défini par

$$\phi(f)(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 \text{ si } f \in \Sigma'_n \text{ et } \forall\, i \leq n \quad x_i = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On démontre alors aisément que si $u \in T(\Sigma)^p_q$,

$$u \in T(\Sigma')^p_q \text{ ssi } \phi(u)\underbrace{(1,\ldots,1)}_{q \text{ fois}} = \underbrace{(1,\ldots,1)}_{p \text{ fois}} ;$$

et donc $T(\Sigma') = \phi^{-1}(\phi(T(\Sigma'))$.

En effet on a

$T(\Sigma') \subset \phi^{-1}(\phi(T(\Sigma'))$ et si $u \in T(\Sigma)^p_q \cap \phi^{-1}(\phi(T(\Sigma'))$, il existe $u' \in T(\Sigma')^p_q$ tel que $\phi(u) = \phi(u')$ d'où $\phi(u')(1,\ldots,1) = (1,\ldots,1)$ et $u \in T(\Sigma')$.

$\perp$

Dans la définition des parties saturées, on a utilisé des 1-morphismes. On aurait pu prendre tout aussi bien des morphismes quelconques tout en définissant la même famille de parties.

Proposition 2.2 *Si ϕ est un k-morphisme d'un magmoïde projetable M dans un magmoïde projetable fini N et L une partie de M telle que $L = \phi^{-1}(\phi(L))$, alors L est finiment saturée.*

Démonstration : Nous avons vu au chapitre III de [AD] que si ϕ est un k-morphisme de M dans N, il existe un 1-morphisme ϕ' de M dans k-dil N et une injection i_k de k-dil N dans N tels que $\phi = i_k \circ \phi'$. On obtient alors $L = \phi^{-1}.\phi(L) = \phi'^{-1}.i_k^{-1}.i_k.\phi'(L)$. Comme i_k est une injection $i_k^{-1}.i_k.\phi'(L) = \phi'(L)$ d'où $L = \phi'^{-1}.\phi'(L)$ et comme N est un magmoïde projetable fini, k-dil N est aussi un magmoïde projetable fini. L est donc bien une partie finiment saturée de M.

cqfd.

Proposition 2.3 *Si ψ est un k-morphisme d'un magmoïde projetable M dans un magmoïde projetable M' et si L est une partie finiment saturée de M', $\psi^{-1}(L)$ est une partie finiment saturée de M.*

Démonstration : Soit N un magmoïde projetable fini et soit ϕ un 1-morphisme de M' dans N tel que $L = \phi^{-1}(\phi(L))$. Posons $\rho = \phi \circ \psi$ le k-morphisme de M dans N. On a trivialement $\psi^{-1}(L) \subset \rho^{-1}.\rho.\psi^{-1}(L)$. D'autre part $\psi.\psi^{-1}(L) \subset L$; et comme $L = \phi^{-1}.\phi(L)$, $\psi^{-1}(L) = \psi^{-1}.\phi^{-1}.\phi(L) = \rho^{-1}.\phi(L) \supset \rho^{-1}\phi.\psi.\psi^{-1}(L) = \rho^{-1}.\rho.\psi^{-1}(L)$. Donc $\psi^{-1}(L) = \rho^{-1}.\rho.\psi^{-1}(L)$ et comme ρ est un k-morphisme de M dans N, $\psi^{-1}(L)$ est finiment saturée d'après la proposition 2.2.

cqfd.

Proposition 2.4 *Les parties saturées d'un magmoïde projetable M forment une algèbre de Boole.*

Démonstration : Soit d'abord une partie finiment saturée L de M. Il existe un magmoïde projetable fini N et un 1-morphisme ϕ de M dans N tel que $L = \phi^{-1}(\phi(L))$. Il est alors immédiat que $M-L = \phi^{-1}(\phi(M-L))$; en effet $M-L \subset \phi^{-1}(\phi(M-L))$ et si $u \in \phi^{-1}(\phi(M-L))$, il existe $u' \in M-L$ tel que $\phi(u') = \phi(u)$. Si u' appartient à L, u appartiendrait aussi à L ce qui est

exclu. On a donc $u' \in M-L$ et $M-L = \phi^{-1}(\phi(M-L))$.

Soient maintenant L_1 et L_2 deux parties finiment saturées de M. Pour $i=1,2$, soient N_i un magmoïde projetable fini et ϕ_i un 1-morphisme de M dans N_i tel que $L_i = \phi_i^{-1}(\phi_i(L_i))$. Le magmoïde produit $N_1 \times N_2$ est encore un magmoïde projetable fini et $\psi = \phi_1 \times \phi_2$ est un 1-morphisme de M dans $N_1 \times N_2$. On a alors $\psi^{-1}(\psi(L_1 \cap L_2)) = L_1 \cap L_2$. En effet si $u \in \psi^{-1}(\psi(L_1 \cap L_2))$, il existe $u' \in L_1 \cap L_2$ tel que $\psi(u) = \psi(u')$. Par définition du produit $\phi_1 \times \phi_2$ (cf. [AD] ch.I) on a alors $\phi_1(u) = \phi_1(u')$ et $\phi_2(u) = \phi_2(u')$. Comme $u' \in L_1 \cap L_2$, $u' \in L_i$ pour $i = 1,2$ et comme $L_i = \phi_i^{-1}.\phi_i(L_i)$, et que $\phi_i(u) = \phi_i(u')$, on a aussi $u \in L_i$ et donc $u \in L_1 \cap L_2$. On a donc bien $L_1 \cap L_2 = \psi^{-1}(\psi(L_1 \cap L_2))$.

cqfd.

Proposition 2.5 *Si* L *est une partie finiment saturée d'un magmoïde projetable* M, *l'intersection de* L *avec une réunion de fibres est encore une partie saturée de* M.

Démonstration : Soient P une partie de $\mathbb{N}^2$ et $F = \bigcup_{\langle p,q\rangle \in P} M_q^p$. Soit L une partie de M telle que $L = \phi^{-1}\phi(L)$. Alors il est clair que $L \cap F = \phi^{-1}\phi(L \cap F)$ puisque si $u \in M_p^p$, $\phi^{-1}(\phi(u)) \subset M_q^p$.

cqfd.

Proposition 2.6 $\mathcal{T}(\Sigma)$ *est une partie finiment saturée de* $T(\Sigma)$.

Démonstration : Soit E un ensemble contenant deux éléments a et b et soient w et $\bar{w}$ deux symboles spéciaux. Soit $\hat{E} = E^2 \cup \{w,\bar{w}\} = \{w,\bar{w},aa,ab,ba,bb\}$. On considère toute suite finie d'éléments de $\hat{E}$ comme un élément du monoïde libre $\hat{E}^*$ et on considère l'homomorphisme de monoïde τ de $\hat{E}^*$ dans $(E \cup \{w\})^*$ défini par :

$$\tau(\bar{w}) = \Lambda$$
$$\tau(w) = w$$
$$\tau(ee') = ee' \text{ pour tout } ee' \in E^2.$$

On dira qu'une suite $\bar{s} = \langle \hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n \rangle$ est **admissible** si $\tau(\bar{s})$ est soit égal à Λ, soit de la forme $e_0\ e_1\ e_1\ e_2 \cdots e_{m-1}\ e_m\ e_m\ e_{m+1}$. Dans ce dernier cas, on appelera **extrémités** de $\bar{s}$ le couple (e_0, e_{m+1}) noté $\beta(\bar{s})$.

Deux suites admissibles $\bar{s}_1$ et $\bar{s}_2$ seront dites **compatibles** si :

- soit $\tau(\bar{s}_1) = \tau(\bar{s}_2) = \Lambda$
- soit $\beta(\bar{s}_1) = \beta(\bar{s}_2)$

On considère alors le magmoïde fonctionnel fini $F(\hat{E})$ et le 1-morphisme ϕ de $T(\Sigma)$ dans $F(\hat{E})$ défini par

- si $f \in \Sigma_0$, $\phi(f) = \bar{w}$

- si $f \in \Sigma_n$, $\phi(f)(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n) =$

$$\begin{cases} w \text{ si la suite } (\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n) \text{ n'est pas admissible} \\ \bar{w} \text{ si la suite } (\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n) \text{ est admissible et si } \tau(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n) = \Lambda \\ e_0\ e_{m+1} \text{ si } \beta(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n) = (e_0, e_{m+1}). \end{cases}$$

On en déduit que si $u \in \tilde{T}(\Sigma)^p_q$

$$(*) \quad (u)(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_q) = \begin{cases} \text{- une suite admissible compatible avec} \\ \quad (\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_q) \text{ si cette dernière est admissible} \\ \text{- une suite non admissible sinon.} \end{cases}$$

En effet a) Si $u = 0_0 \in \tilde{T}(\Sigma)^0_0$

$\phi(u)$ associe la suite vide à la suite vide. Ce sont bien deux suites admissibles compatibles entre elles.

b) Si $u \in \Sigma_0 \subset \tilde{T}(\Sigma)^1_0$

$\phi(u)$ associe $\bar{w}$ à la suite vide et comme $\tau(\bar{w}) = \Lambda$ ces deux suites sont admissibles et compatibles entre elles.

c) Si $u = Id_1 \in \tilde{T}(\Sigma)^1_1$ alors $\phi(u)(\hat{e}) = \hat{e}$.

Si $\hat{e}$ n'est pas admissible, $\phi(u)(\hat{e})$ n'est pas non plus admissible et si $\hat{e}$ est admissible, $\hat{e} = \Lambda$ ou ee et alors $\phi(u)(\hat{e})$ est admissible et compatible avec $\hat{e}$.

d) Si $u = u_1 \otimes u_2$

alors $\phi(u)(\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_q,\hat{e}_{q+1},\ldots\hat{e}_{q+q'}) = (\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_p,\hat{f}_{p+1},\ldots,\hat{f}_{p+p'})$

ssi $\phi(u_1)(\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_q) = (\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_p)$ et

$\phi(u_2)(\hat{e}_{q+1},\ldots,\hat{e}_{q+q'}) = (\hat{f}_{p+1},\ldots\hat{f}_{p+p'})$.

Supposons que la suite $\bar{s} = (\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_{q+q'})$ soit admissible

- Soit $\tau(\hat{s}) = \Lambda$ et alors $\tau(\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_q) = \tau(\hat{e}_{q+1},\ldots,\hat{e}_{q+q'}) = \Lambda$.
  D'où, d'après l'hypothèse d'induction, $\tau(\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_p) =$
  $\tau(\hat{f}_{p+1},\ldots,\hat{f}_{p+p'}) = \Lambda$ et donc $(\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_p,\hat{f}_{p+1},\ldots,\hat{f}_{p+p'})$
  est admissible et compatible avec $\bar{s}$.

- Soit $\tau(\bar{s}) = e_0 e_1 e_1,\ldots,e_m e_m e_{m+1}$ alors

  α) $\tau(\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_q) = e_0\ e_1\ e_1 \cdots e_i\ e_i\ e_{i+1}$ et
  $\tau(\hat{e}_{q+1},\ldots,\hat{e}_{q+q'}) = e_{i+1}\ e_{i+2}\ e_{i+2} \cdots e_m\ e_m\ e_{m+1}$
  qui sont donc deux suites admissibles. On a alors
  $\tau(\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_p) = e_0\ f_1\ f_1 \cdots f_n\ f_n\ e_{i+1}$ et
  $\tau(\hat{f}_{p+1},\ldots,\hat{f}_{p+p'}) = e_{i+1}\ f'_1\ f'_1 \cdots f'_{n'}\ f'_{n'}\ e_{m+1}$
  et donc $(\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_p,\hat{f}_{p+1},\ldots\hat{f}_{p+p'})$ est admissible et compatible avec $\bar{s}$.

  β) Il se peut que $\tau(\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_q)$ ou $\tau(\hat{e}_{q+1},\ldots,\hat{e}_{q+q'})$ soit égal à Λ ; la démonstration précédente s'adapte facilement à ce cas.

Supposons maintenant que la suite $\bar{s}$ ne soit pas admissible. Soit l'une des deux suites $(\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_q)$ ou $(\hat{e}_{q+1},\ldots\hat{e}_{q+q'})$ ne l'est pas et alors une des deux suites $(\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_p)$ ou $(\hat{f}_{p+1},\ldots,\hat{f}_{p+p'})$ ne l'est pas non plus, ainsi que la suite $(\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_p,\hat{f}_{p+1},\ldots,\hat{f}_{p+p'})$. Soit chacune des deux est admissible, mais alors $\tau(\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_q) = e_0e_1e_1,\ldots,e_me_me_{m+1}$ et $\tau(\hat{e}_{q+1},\ldots,\hat{e}_{q+q'}) = e'_0\ e'_1\ e'_1\ \ldots\ e'_{m'}\ e'_{m'}\ e'_{m'+1}$ avec $e_{m+1} \neq e'_0$. On a alors $\tau(\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_p) = e_0\ f_1\ f_1\ \ldots\ f_n\ f_n\ e_{m+1}$ et $\tau(\hat{f}_{p+1},\ldots,\hat{f}_{p+p'}) = e'_0\ f'_1\ f'_1\ \ldots\ f'_{n'}\ f'_{n'}\ e'_{m+1}$ et donc la suite $(\hat{f}_1,\ldots,\hat{f}_p,\hat{f}_{p+1},\ldots,\hat{f}_{p+p'})$ n'est pas admissible.

e) Si $u = f.v$ avec $f \in \Sigma_p$ et $v \in \tilde{T}(\Sigma)^p_q$ alors si $\bar{s} = (\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_q)$ est admissible, $\phi(v)(\bar{s})$ est admissible et compatible avec $\bar{s}$ et alors $\phi(u)(\bar{s}) = \phi(f)(\phi(v)(\bar{s}))$ est admissible et compatible avec $\phi(v)(\bar{s})$; cette suite est donc aussi compatible avec $\bar{s}$.

Si $\bar{s}$ n'est pas admissible alors $\phi(v)(\bar{s})$ ne l'est pas non plus et donc $\phi(f)(\phi(v)(\bar{s}))$ n'est pas admissible.

Pour montrer que $\tilde{T}(\Sigma)$ est finiment saturée, il ne reste plus qu'à montrer que si $u \in T(\Sigma) - \tilde{T}(\Sigma)$ il existe une séquence admissible $\bar{s}$ telle que $\phi(u)(\bar{s})$ n'est pas admissible, ou bien est admissible mais n'est pas compatible avec $\bar{s}$, car alors il n'existera aucun $u' \in \tilde{T}(\Sigma)$ tel que $\phi(u)(\bar{s}) = \phi(u')(\bar{s})$ et donc tel que $\phi(u) = \phi(u')$.

Soit donc $u \in T(\Sigma) - \tilde{T}(\Sigma)$. Cet élément u s'écrit $\tilde{u}.\Theta$ avec $\tilde{u} \in \tilde{T}(\Sigma)$; et comme $u \notin \tilde{T}(\Sigma)$, Θ n'est pas une identité. On aura alors $\phi(u)(\bar{s}) = \phi(\tilde{u})(\phi(\Theta)(\bar{s}))$. Si $\phi(\Theta)(\bar{s})$ n'est pas admissible, $\phi(u)(\bar{s})$ ne sera pas admissible. Si $\phi(\Theta)(\bar{s})$ est admissible mais non compatible avec $\bar{s}$, comme $\phi(u)(\bar{s})$ est compatible avec $\phi(\Theta)(\bar{s})$ il ne sera pas compatible avec $\bar{s}$. Il suffit donc de montrer que si Θ n'est pas une identité, il existe une suite admissible $\bar{s}$ telle que $\phi(\Theta)(\bar{s})$ n'est pas admissible ou n'est pas compatible avec $\bar{s}$.

Soit d'abord $\Theta = 0_q \in \Theta_q^0$ et soit $\hat{s} = \langle aa,\ldots,aa\rangle$ alors $\phi(\Theta)(\hat{s})$ est la suite vide. On a donc $\tau(\phi(\Theta)(\hat{s})) = \Lambda$ et $\phi(\Theta)(\hat{s})$ n'est pas compatible avec $\hat{s}$.

Soit maintenant $\Theta \in \Theta_q^p$ avec $p \neq 0$ et $q \neq 0$.

. Si $\Theta(1) \neq 1$, on pose $\hat{s} = \langle \hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_q\rangle$ avec $\hat{e}_1 = ab$ et $\hat{e}_i = bb$ pour $2 \leq i \leq q$. Alors $\phi(\Theta)(\hat{s}) = \langle \hat{e}_{\Theta(1)},\ldots,\hat{e}_{\Theta(p)}\rangle$ et comme $\hat{e}_{\Theta(1)} = bb$, si la suite $\phi(\Theta)(\hat{s})$ est admissible, elle n'est certainement pas compatible avec $\hat{s}$ puisque $\tau(\hat{s})$ commence par a.

. Si $\Theta(1) = 1,\ldots,\Theta(i) = i$, $\Theta(i+1) \neq i+1$,

on pose
$$\begin{aligned}
\hat{e}_1 &= aa\\
&\vdots\\
\hat{e}_{i-1} &= aa\\
\hat{e}_i &= ab\\
\hat{e}_{i+1} &= ba\\
\hat{e}_{i+2} &= aa\\
&\vdots\\
\hat{e}_q &= aa
\end{aligned}$$

On a alors $\phi(\Theta)(\hat{s}) = (\hat{e}_{\Theta(1)},\ldots,\hat{e}_{\Theta(i)},\hat{e}_{\Theta(i+1)},\ldots,\hat{e}_{\Theta(p)}) = (aa,\ldots,ab,\hat{e}_{\Theta(i+1)},\ldots,\hat{e}_{\Theta(p)})$. Or comme $\Theta(i+1) \neq i+1$, $\hat{e}_{\Theta(i+1)} = aa$ ou ab et donc la suite $\phi(\Theta)(\hat{s})$ n'est pas admissible.

. Si $\Theta(i) = i$, $\forall\, i \leq p$, et $p < q$, on pose

on pose $\hat{e}_i = aa$ pour $i < q$

et $\hat{e}_q = ab$

On a alors $\phi(\Theta)(\hat{s}) = (\hat{e}_{\Theta(1)},\ldots,\hat{e}_{\Theta(p)}) = (\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_p) = (aa,aa,\ldots,aa)$ qui est une suite admissible mais pas compatible avec $\hat{s}$.

. Si la torsion Θ n'est pas une identité, elle rentre nécessairement dans l'une des trois catégories ci-dessus. En effet, soit il existe un plus petit entier $i \leq p$ tel que $\Theta(i) \neq i$ et alors on rentre dans l'une des deux premières catégories selon que $i=1$ ou $i>1$; soit $\Theta(i)=i$

pour tout $i \leq p$ et comme Θ n'est pas l'identité on doit avoir $p < q$.

cqfd.

Problème ouvert. Tout magmoïde projetable est-il une partie finiment saturée de lui-même ? D'après la démonstration de l'exemple 2.1, $T(\Sigma)$ est bien une partie finiment saturée de lui-même mais nous conjecturons que ce n'est pas le cas pour $P(T(\Sigma))$.

2. AUTOMATES

Un **automate** A sur un magmoïde projetable M est un quadruplet $<E,\phi,s,S>$ où

- E est un ensemble fini dont les éléments sont appelés des états.
- ϕ est un 1-morphisme projetable de M dans le magmoïde fonctionnel fini F(E).
- s est une application qui à tout couple d'entiers (p,q) associe un élément s(p,q) de E^q appelé **séquence initiale** pour la fibre p-q.
- S est une application qui à tout couple d'entiers (p,q) associe une partie S(p,q) de E^p appelée ensemble des **séquences finales** pour la fibre p-q.

On appelle **évènement** de l'automate $A = <E,\phi,s,S>$ la partie $E(A)$ de M définie par

$$E(A) = \bigcup_{p,q\geq 0} \{u \in M^p_q / \phi(u)(s(p,q)) \in S(p,q)\}.$$

Autrement dit, $u \in M^p_q$ est dans l'évènement de A si la fonction de E^q dans E^p associée à u par ϕ transforme la séquence initiale s(p,q) en une séquence finale de S(p,q).

On dira aussi que la partie $E(A)$ de M est **reconnue** par l'automate A.

Dans le cas où $M = T(\Sigma)$ notre définition généralise bien la définition classique des automates d'arbres [91], [64]. Il suffit de poser $S(m,n) = \emptyset$ dès que $(m,n) \neq (1,0)$. On a alors $S(1,0) \subset E^1 = E$ et s(1,0) est la séquence vide. D'où

$$E(A) = \{u \in T(\Sigma)^1_0 \ / \ \phi(u) \in S(1,0)\}$$

et où ϕ est bien l'extension à $T(\Sigma)$ d'une "fonction de transition".

Cette définition généralise aussi la définition des automates donnée par Steinby [86], lesquels peuvent reconnaître des arbres ayant des feuilles dans l'ensemble $\{x_1,\ldots,x_n\}$, c'est-à-dire en fait des éléments de $T(\Sigma)^1_n$.

On dira qu'une partie L de M est **A-reconnaissable** ssi il existe un automate A tel que L est reconnue par A (i.e. $L = E(A)$).

Proposition 2.7 *Toute partie A-reconnaissable de M est finiment saturée.*

Démonstration : Soit une partie L de M reconnue par l'automate $A = \langle E,\phi,s,S\rangle$. Par définition ϕ est un 1-morphisme de M dans le magmoïde projetable fini F(E). Si on note $\hat{F}(E)^p_q$ l'ensemble des applications f de $F(E)^p_q$ telles que $f(s(p,q)) \in S(p,q)$ et $\hat{F}(E) = \bigcup_{p,q} \hat{F}(E)^p_q$, on a bien $L = E(A) = \{u \in M/\phi(u) \in \hat{F}(E)\} = \phi^{-1}(\hat{F}(E))$ et donc $L = \phi^{-1}\phi(L)$.

cqfd.

Par contre la **réciproque n'est pas vraie** : il existe des parties finiment saturées non A-reconnaissables comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.8 *Soit Σ l'alphabet gradué* $\{b\}$ *avec* $d(b) = 2$. *Alors $\tilde{T}(\Sigma)$ n'est pas une partie A-reconnaissable de* $T(\Sigma)$.

Démonstration : Supposons qu'il existe un automate $A = \langle E,\phi,s,S\rangle$ reconnaissant $\tilde{T}(\Sigma)$ et soit n le cardinal de E. Soit $\tilde{u}$ un élément de $\tilde{T}(\Sigma)^1_{n+1}$ - un tel élément existe toujours : on peut prendre par exemple $\tilde{u} = \langle n+1 \; ; \; b(x_1,b(x_2,b(x_3,\ldots,b(x_n,x_{n+1})\ldots)))\rangle$ -

et soit $\langle e_1,\ldots,e_{n+1}\rangle$ la séquence initiale $s(1,n+1)$. Comme $\tilde{u} \in \tilde{T}(\Sigma) = E(A)$, $\phi(\tilde{u})(s(1,n+1)) \in S(1,n+1)$.

Mais E n'ayant que n éléments, il existe deux indices distincts i et j tels que $e_i = e_j$. Prenons alors Θ la bijection de [n+1] dans [n+1] qui permute i et j. On a alors

$$\phi(\Theta)(s(1,n+1)) = \phi(\Theta)(e_1,\ldots,e_i,\ldots,e_j,\ldots,e_{n+1}) =$$
$$(e_1,\ldots,e_j,\ldots,e_i,\ldots,e_{n+1}) = s(1,n+1)$$

et donc $\phi(\tilde{u}\Theta)(s(1,n+1)) = \phi(\tilde{u})(s(1,n+1)) \in S(1,n+1)$.

On en déduit que $\tilde{u}\Theta \in E(A)$; or comme Θ n'est pas une identité, $\tilde{u}.\Theta \notin \tilde{T}(\Sigma)$ ce qui contredit le fait que $E(A) = \tilde{T}(\Sigma)$. Le magmoïde libre $\tilde{T}(\Sigma)$ n'est donc pas A-reconnaissable.

cqfd.

Bien que la notion de partie A-reconnaissable soit donc plus restrictive que celle de partie finiment saturée, la classe des parties A-reconnaissable a cependant des propriétés de clôtures identiques à celles de la classe des parties saturées.

Proposition 2.9 *La classe des parties A-reconnaissables est fermée par morphisme inverse.*

Démonstration : Soit L une partie d'un magmoïde projetable M' reconnue par un automate $A = \langle E,\phi,s,S\rangle$ sur M' et soit ψ un k-morphisme du magmoïde projetable M dans M'. On considère l'automate $\bar{A} = \langle \bar{E},\bar{\phi},\bar{s},\bar{S}\rangle$ sur M défini par

- $\bar{E} = E^k$
- $\bar{s}(p,q) = s(kp,kq) \in E^{kq} = (E^k)^q = \bar{E}^q$
- $\bar{S}(p,q) = S(kp,kq) \subset E^{kp} = (E^k)^p = \bar{E}^p$
- $\forall\, u \in M^p_q$, $\bar{\phi}(u)$ est égal à $\phi(\psi(u))$;

Comme $\psi(u) \in M'^{kp}_{kq}$, $\phi(\psi(u))$ est une application de E^{kq} dans E^{kp} et donc de $\bar{E}^q$ dans $\bar{E}^p$; et il est clair que $\bar{\phi}$ est 1-morphisme de M dans $F(\bar{E})$.

On en déduit que :

$$\bar{\phi}(u)(\bar{s}(p,q)) = \phi(\psi(u))(s(kp,kq))$$

et donc $u \in E(\bar{A})$ ssi $\bar{\phi}(u)(\bar{s}(p,q)) \in \bar{S}(p,q)$ ssi $\phi(\psi(u))(s(kp,kq)) \in S(kp,kq)$ ssi $\psi(u) \in E(A)$.

On a donc bien $E(\bar{A}) = \psi^{-1}(E(A))$.

cqfd.

Proposition 2.10 *L'ensemble des parties A-reconnaissables d'un magmoïde projetable forme une algèbre de Boole.*

Démonstration : Soit L l'évènement de l'automate $A = \langle E,\phi,s,S\rangle$ sur M. Alors M-L est l'évènement de l'automate $A = \langle E,\phi,s,\bar{S}\rangle$ où $\bar{S}(p,q) = E^p - S(p,q)$.

Soit L_1 reconnu par l'automate $A_1 = \langle E_1,\phi_1,s_1,S_1\rangle$ sur M et L_2 l'évènement de l'automate $A_2 = \langle E_2,\phi_2,s_2,S_2\rangle$. Alors $L_1 \cap L_2$ est reconnu par l'automate $A = \langle E,\phi,s,S\rangle$ défini par

. $E = E_1 \times E_2$

. Si $u \in M^p_q$, $\phi(u)$ est l'application de E^q dans E^p qui à $\langle e_1, e'_1\rangle, \ldots\ldots,\langle e_q,e'_q\rangle$ associe $\langle f_1,f'_1\rangle,\ldots,\langle f_p,f'_p\rangle$ ssi

$\phi_1(u)(e_1,\ldots,e_q) = (f_1,\ldots,f_p)$ et

$\phi_2(u)(e'_1,\ldots,e'_q) = (f'_1,\ldots,f'_p)$.

Il est clair que cette application ϕ est un 1-morphisme de M dans $F(E_1 \times E_2)$.

. Si $s_1(p,q) = (e_1,\ldots,e_q)$ et

$s_2(p,q) = (e'_1,\ldots,e'_q)$ alors

$s(p,q) = (\langle e_1,e'_1\rangle,\ldots,\langle e_q,e'_q\rangle)$

. $S(p,q) = \{(\langle e_1,e'_1\rangle,\ldots,\langle e_p,e'_p\rangle)/$
$(e_1,\ldots,e_p) \in S_1(p,q)$ et $(e'_1,\ldots,e'_p) \in S_2(p,q)\}$.

cqfd.

Proposition 2.11 *L'intersection d'une partie* A-*reconnaissable d'un magmoïde projetable* M *avec une réunion de fibres de* M *est encore une partie* A-*reconnaissable.*

Démonstration : Soit $A = \langle E,\phi,s,S\rangle$ l'automate reconnaissant une partie L du magmoïde projetable M et soit P une partie de $\mathbb{N}^2$. On considère alors l'automate $A' = \langle E,\phi,s,S'\rangle$ avec

$$S'(p,q) = \begin{cases} S(p,q) \text{ si } \langle p,q\rangle \in P \\ \emptyset \subset E^p \text{ sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de voir que $E(A') = E(A) \cap \left(\bigcup_{\langle p,q\rangle \in P} M^p_q\right)$

cqfd.

En ne considérant que le cas où $M = T(\Sigma)$ on pourrait, de la même façon qu'on le fait pour les automates d'arbres classiques, définir des automates non déterministes et montrer leur équivalence avec des automates déterministes. Cette façon de procéder nous paraît peu intéressante car elle ne s'applique pas au cas d'un magmoïde projetable quelconque. De même que dans le cas des langages on définit les automates non déterministes au moyen des représentations matricielles, nous préférons définir les automates non déterministes en utilisant des substitutions qui, nous l'avons explicité au chapitre précédent, ne sont pas très éloignées des représentations matricielles.

On appelle **automate non-déterministe** sur M le quadruplet $S = \langle M',\sigma,s,S\rangle$ où :

- M' est un magmoïde décomposable
- σ est une k-substitution de M dans $P(M'T)$
- $s(p,q) \in P(M'T)^{kq}_q$
- $S(p,q) \in P(M'T)^p_{kp}$.

On pose alors, pour tout élément u de M^p_q,
$\bar{\sigma}(u) = s(p,q).\sigma(u).S(p,q) \in P(M'T)^p_q$ et on définit l'évènement $E(S)$ de S comme l'ensemble des $u \in M$ dont aucune composante de $\bar{\sigma}(u)$ n'est la partie vide ; cette condition peut s'exprimer - en utilisant les **sous-identités** définies au chapitre précédent - par $E(\bar{\sigma}(u)) = Id_p$. On a donc

$$E(S) = \bigcup_{p,q} \{u \in M^p_q \ / \ E(\bar{\sigma}(u)) = Id_p\}.$$

Remarque : Le choix des fibres dans lesquelles sont choisis les éléments s(p,q) et S(p,q) est d'une certaine façon arbitraire. Nous avons choisi les fibres p-kp et kq-q de façon à ce que si $u \in M^p_q$, $\bar{\sigma}(u) \in P(M'T)^p_q$ et ceci pour la raison suivante : dans le cas des langages, un automate non-déterministe peut être utilisé pour calculer le coefficient d'un terme dans une série reconnaissable ; si on envisage des séries formelles dans le magmoïde - pourquoi pas - il faudrait que le coefficient soit dans la même fibre que le terme et donc pour que ce coefficient puisse être calculé par un automate non déterministe, il faut bien choisir, comme nous l'avons fait, les fibres de s(p,q) et S(p,q).

On dira qu'une partie d'un magmoïde projetable M est S-**reconnaissable** ssi elle est l'évènement d'un automate non déterministe.

Alors que - nous l'avons vu - les notions de partie finiment saturées et de partie A-reconnaissable ne coïncident pas, nous montrons ci-dessous que les parties A-reconnaissables et S-reconnaissables d'un magmoïde projetable MT obtenu par adjonction de torsions à partir d'un magmoïde décomposable M sont les mêmes. Nous ignorons s'il en est de même pour les parties d'un magmoïde quelconque.

Proposition 2.12 *Toute partie A-reconnaissable de MT est S-reconnaissable.*

<u>Démonstration</u> : Soit $A = \langle E,\phi,s,S\rangle$ un automate déterministe reconnaissant une partie de MT. On suppose que E a k éléments qu'on note $e_1,\dots,e_k$.

On définit alors une application σ de MT dans $P(MT)$ par

- si $u \in MT_q^0$, $\sigma(u) = 0_{kq} \in \Theta_{kq}^0 \subset P(MT)_{kq}^0$

- si $u \in MT_q^p$, avec $p \geq 1$, u s'écrit de façon unique $\langle \tilde{u}_1\Theta_1 ,\dots, \tilde{u}_p.\Theta_p\rangle$, avec $\tilde{u}_i \in M_{n_i}^1$ et $\Theta_i \in \Theta_q^{n_i}$. On définit alors $\sigma(u)$ comme l'élément de $P(MT)_{kq}^{kp}$ qui vérifie pour $i\leq p$ et $j\leq k$, $\Pi_{kp}^{k(i-1)+j}.\sigma(u) = \{\tilde{u}_i.(\Pi_k^{\gamma(1)} \otimes \dots \otimes \Pi_k^{\gamma(n_i)}).\nu_k(\Theta_i) \ / \ \gamma \in \Theta_k^{n_i} \text{ et } \phi(\tilde{u}_i.\gamma)(e_1,\dots,e_k) = e_j\}$

où les $\nu_k(\Theta)$ sont les images des torsions par des k-morphismes et qui vérifient donc

- si $\Theta = 0_q \in \Theta_q^0$, $\nu_k(\Theta) = 0_{kq}$

- si $\Theta \in \Theta_q^p$, $\forall\ i \leq p$, $j \leq k$, $\Pi_{kp}^{k(i-1)+j}.\nu_k(\Theta) = \Pi_{kq}^{k(\Theta(i)-1)+j}$.

L'unicité de cet élément $\sigma(u)$ provient de ce que $P(MT)$ est projetable et que tout entier de [pk] s'écrit de façon unique $k(i-1)+j$ avec $i\leq p$ et $j\leq k$.

On montre d'abord que si $u = \Theta \in \Theta_q^p$, $\sigma(\Theta) = \nu_k(\Theta)$.

- Si $p = 0$, $\Theta = 0_q$ et $\sigma(\Theta) = \nu_k(\Theta) = 0_{kq}$ par définition.

- Si $p \geq 1$, Θ s'écrit $\langle \Pi_q^{\Theta(i)},\dots,\Pi_q^{\Theta(p)}\rangle$ et

$$\Pi_{kp}^{k(i-1)+p}.\sigma(\Theta) = \{\Pi_k^{\gamma(1)}.\nu_k(\Pi_q^{\Theta(i)}) \ / \ \gamma \in \Theta_k^1 \text{ et } \phi(\gamma)(e_1,\dots,e_k) = e_j\}.$$

Comme $\gamma \in \Theta_k^1$, $\gamma = \Pi_k^s$ et $\phi(\Pi_k^s)(e_1,\dots,e_k) = e_s$. On en déduit que $\gamma = \Pi_k^j$ et donc que $\gamma(1) = j$, d'où $\Pi_{kp}^{k(i-1)+p}.\sigma(\Theta) = \Pi_k^j.\nu_k(\Pi_q^{\Theta(i)}) = \Pi_k^j\ \nu_k(\Pi_p^i).\nu_k(\Theta) = \Pi_{kp}^{k(i-1)+j}.\nu_k(\Theta)$ d'où $\sigma(\Theta) = \nu_k(\Theta)$.

Montrons maintenant que σ est bien une k-substitution, c'est-à-dire un k-morphisme.

Soit $u = \langle \tilde{u}_1.\Theta_1,\ldots,\tilde{u}_p.\Theta_p\rangle \in MT^p_q$ avec $\tilde{u}_i \in M^1_{n_i}$ et $v = \langle \tilde{v}_1.\Theta'_1,\ldots,\tilde{v}_q.\Theta'_q\rangle \in MT^q_r$ avec $\tilde{v}_j \in M^1_{m_j}$. On a $\Pi^i_p\, u.v = \tilde{u}_i.\Theta_i.v = \tilde{u}_i.\langle \tilde{v}_{\Theta_i(1)}.\Theta'_{\Theta_i(1)},\ldots,\tilde{v}_{\Theta_i(n_i)}.\Theta'_{\Theta_i(n_i)}\rangle = \tilde{u}_i.(\tilde{v}_{\Theta_i(1)} \otimes \ldots \otimes \tilde{v}_{\Theta_i(n_i)}).\langle\Theta'_{\Theta_i(1)},\ldots,\Theta'_{\Theta_i(n_i)}\rangle$. Par définition on obtient alors, en posant $\bar{u}_i = \tilde{u}_i.(\tilde{v}_{\Theta_i(1)} \otimes \ldots \otimes \tilde{v}_{\Theta_i(u_i)})$,

$$\Pi^{k(i-1)+j}_{kp}\ \sigma(u.v) = \{\bar{u}_i.(\Pi_k^{\gamma(1)} \otimes \ldots \otimes \Pi_k^{\gamma(s_i)}).\nu_k(\langle\Theta'_{\Theta_i(1)},\ldots,\Theta'_{\Theta_i(n_i)}\rangle) \ /\ \phi(\bar{u}_i).\gamma(e_1,\ldots,e_k) = e_j \text{ et } \gamma \in \Theta_k^{s_i}\}.$$

D'autre part $\Pi^{k(i-1)+j}_{kp}\ \sigma(u).\sigma(v) =$

$$\{\tilde{u}_i.(\Pi_k^{\delta(1)} \otimes \ldots \otimes \Pi_k^{\delta(n_i)}).\nu_k(\Theta_i)\ /\ \phi(\tilde{u}_i.\delta)(e_1,\ldots,e_k) = e_j\}.\sigma(v) = \bigcup_{\{\delta\in\Theta_k^{n_i}/\phi(\tilde{u}_i.\delta)(e_1,\ldots,e_k) = e_j\}} \tilde{u}_i.(\Pi_k^{\delta(1)} \otimes \ldots \otimes \Pi_k^{\delta(n_i)}).\nu_k(\Theta_i).\sigma(v)$$

et par définition du produit de composition dans $P(MT)$, ceci est égal à

$$\bigcup_\delta \{\tilde{u}_i.\langle w_1,\ldots,w_{n_i}\rangle\ /\ w_s \in \Pi^{k(\Theta_i(s)-1)+\delta(s)}_{kq}.\sigma(v)\} =$$

$$\bigcup_\delta \{\tilde{u}_i.\langle w_1,\ldots,w_{n_i}\rangle\ /\ w_s = \tilde{v}_{\Theta_i(s)}.(\Pi_k^{\delta_s(1)} \otimes \ldots \otimes \Pi_k^{\delta_s(m_{\Theta_i(s)})}).\nu_k(\Theta'_{\Theta_i(s)})$$

$$\text{et } \phi(\tilde{v}_{\Theta_i(s)}.\delta_s)(e_1,\ldots,e_k) = e_{\delta(s)}\} =$$

$$\bigcup_\delta \{\bar{u}_i.(\Pi_k^{\delta_1(1)} \otimes \ldots \otimes \Pi_k^{\delta_1(m_{\Theta_i(1)})} \otimes \ldots \otimes \Pi_k^{\delta_{n_i}(1)} \otimes \ldots \otimes \Pi_k^{\delta_{n_i}(m_{\Theta_i(n_i)})})$$

$$\nu_k(\langle\Theta'_{\Theta_i(1)},\ldots,\Theta'_{\Theta_i(n_i)}\rangle)\ /\ \phi(\tilde{v}_{\Theta_i(s)}.\delta_s)(e_1,\ldots,e_k) = e_{\delta(s)}).$$

Chaque torsion δ_s étant dans $\Theta_q^{m_{\Theta_i(s)}}$, on considère la torsion $\bar{\delta} = \langle\delta_1,\ldots,\delta_{n_i}\rangle$ de $\Theta_q^{m_{\Theta_i(1)}+\ldots+m_{\Theta_i(n_i)}}$. On a alors

$$\Pi_k^{\bar{\delta}(1)} \otimes \ldots \otimes \Pi_k^{\bar{\delta}(s_i)} = \Pi_k^{\delta_1(1)} \otimes \ldots \otimes \Pi_k^{\delta_{n_i}(m_{\Theta_i(n_i)})}.$$

Pour montrer l'égalité des deux ensembles

$\Pi^{k(i-1)+j}_{kp}\ \sigma(uv)$ et $\Pi^{k(i-1)+j}_{kp}\ \sigma(u).\sigma(v)$ il suffit de montrer que si

$\gamma = <\delta_1,\ldots,\delta_{n_i}>$ alors $\phi(\bar{u}_i.\gamma)(e_1,\ldots,e_k) = e_j$ ssi $\exists\ \delta$ tel que $\phi(\tilde{u}_i.\delta)(e_1,\ldots,e_k) = e_j$ et $\forall\ s \leq n_i$, $\phi(\tilde{v}_{\Theta_i(s)}.\delta_s)(e_1,\ldots,e_k) = e_{\delta(s)}$.
Dans un sens, on définit l'application δ de $\Theta_k^{n_i}$ par $\delta(i') = j'$ ssi $\phi(\tilde{v}_{\Theta_i(i')}.\delta_{i'})(e_1,\ldots,e_k) = e_j$. Comme $\phi(\bar{u}_i.\gamma) = \phi(\tilde{u}_i.(\tilde{v}_{\Theta_i(1)} \otimes \ldots \otimes \tilde{v}_{\Theta_i(n_i)}).\gamma) =$ $\phi(\tilde{u}_i)\ \phi(<\tilde{v}_{\Theta_i(1)}.\delta_1,\ldots,\tilde{v}_{\Theta_i(n_i)}.\delta_{n_i}>)$, on a
$\phi(\bar{u}_i.\gamma)(e_1,\ldots,e_k) = \phi(\tilde{u}_i)(e_{\delta(1)},\ldots,e_{\delta(n_i)}) = \phi(\tilde{u}_i.\delta)(e_1,\ldots,e_k)$. Dans l'autre sens, de la même façon $\phi(\bar{u}_i.\gamma)(e_1,\ldots,e_k) =$
$\phi(\tilde{u}_i).<\phi(\tilde{v}_{\Theta_i(1)}.\delta_1)(e_1,\ldots,e_k),\ldots,\phi(\tilde{v}_{\Theta_i(n_i)}.\delta_{n_i})(e_1,\ldots,e_k)> =$
$\phi(\tilde{u}_i)(e_{\delta(1)},\ldots,e_{\delta(n_i)}) = \phi(\tilde{u}_i.\delta)(e_1,\ldots,e_k)$.

Il faut enfin montrer que $\sigma(u \otimes v) = \sigma(u) \otimes \sigma(v)$.
Or si $u = <\tilde{u}_1.\Theta_1,\ldots,\tilde{u}_p.\Theta_p> \in MT_q^p$ et

$$v = <\tilde{v}_1.\Theta'_1,\ldots,\tilde{v}_{p'}.\Theta'_p> \in MT_{q'}^{p'}$$

$u \otimes v$ s'écrit $<\tilde{u}_1.(\Theta_1 \otimes 0_{q'}),\ldots,\tilde{u}_p.(\Theta_p \otimes 0_{q'}),\ \tilde{v}_1.(0_p \otimes \Theta'_1),\ldots,$ $\tilde{v}_{p'}.(0_p \otimes \Theta'_p)>$; d'où pour $i \leq p$ - on procèderait de la même façon pour $p < i \leq p+p'$ -

$\Pi_{k(p+p')}^{k(i-1)+j}.\sigma(u \otimes v) =$

$\{\tilde{u}_i.(\Pi_k^{\gamma(1)} \otimes \ldots \otimes \Pi_k^{\gamma(n_i)}).\gamma_k(\Theta_i \otimes 0_q)\ /\ \phi(\tilde{u}_i.\gamma)(e_1,\ldots,e_k) = e_j\} =$

$\{\tilde{u}_i.(\Pi^{\gamma_1} \otimes \ldots \otimes \Pi_k^{\gamma(n_i)}).\nu_k(\Theta_i)/\phi(\tilde{u}_i.\gamma)(e_1,\ldots,e_k) = e_j\} \otimes 0_{kq} =$

$(\Pi_{kp}^{k(i-1)+j}\ .\ \sigma(u)) \otimes 0_{kq} = \Pi_{k(p+p')}^{k(i-1)+j}.(\sigma(u) \otimes \sigma(v))$.

On construit alors l'automate non-déterministe $S = <M,\sigma,\bar{s},\bar{S}>$ où σ est le k-morphisme ci-dessus et où

$\bar{s}(p,q)$ est défini par $\Pi_{kq}^{k(i-1)+j}.\bar{s}(p,q) = \begin{cases} \Pi_q^i & \text{si } \phi(\Pi_q^i)(s(p,q)) = e_j \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$

$\bar{S}(p,q)$ est défini par, $\tilde{u}_0$ étant un élément fixé de M_p^1

$$\Pi_p^i\ \bar{S}(p,q) = \{\tilde{u}_0.\Pi_k^{\alpha(1)} \otimes \ldots \otimes \Pi_k^{\alpha(p)}\ /\ \phi(\alpha)(e_1,\ldots,e_k) \in S(p,q)\}.$$

L'évènement de S est alors le même que celui de A. En effet, soit $u = \langle\tilde{u}_1.\Theta_1,\ldots,\tilde{u}_p.\Theta_p\rangle \in MT_q^p$; et soit β la torsion de Θ_k^q telle que $\phi(\beta)(e_1,\ldots,e_k) = s(p,q)$. On a alors $\phi(u.\beta)(e_1,\ldots,e_k) = \phi(u)(s(p,q))$. D'où si $\Pi_p^i\ \phi(u)(s(p,q)) = e_j$, on a $\phi(\tilde{u}_i\ \Theta_i.\beta)(e_1,\ldots,e_k) = e_j$

et comme $\Pi_{kp}^{k(i-1)+j}.\sigma(u) =$

$\{\tilde{u}_i.(\Pi_k^{\gamma(1)} \otimes \ldots \otimes \Pi_k^{\gamma(n_i)}.\nu_k(\Theta_i)\ /\ \phi(\tilde{u}_i.\gamma)(e_1,\ldots,e_k) = e_j\}$,

$\Pi_{kp}^{k(i-1)+j}.\sigma(u)$ contient $\tilde{u}_i.(\Pi_k^{\beta(\Theta_i(1))} \otimes \ldots \otimes \Pi_k^{\beta(\Theta_i(n_i))}).\nu_k(\Theta_i)$.

On en déduit que $\Pi_{kp}^{k(i-1)+j}.\sigma(u).\bar{s}(p,q) =$

$\{\tilde{u}_i.\langle w_1,\ldots,w_{n_i}\rangle\ /\ w_i \in \Pi_{kq}^{k(\Theta_i(s)-1)+\beta(\Theta_i(s))}.\bar{s}(p,q)\}$.

Or $\Pi_{kq}^{k(\Theta_i(s)-1)+\beta(\Theta_i(s))}.\bar{s}(p,q) = \begin{cases} \Pi_q^{\Theta_i(s)} & \text{si } \phi(\Pi_q^{\Theta_i(s)})(s(p,q)) = e_{\beta(\Theta_i)(s))} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$.

et $\phi(\Pi_q^{\Theta_i(s)})(s(p,q)) = \phi(\Pi_{n_i}^s.\Theta_i.\beta)(e_1,\ldots,e_k)) = e_{\beta(\Theta_i(s))}$

d'où $\Pi_{kp}^{k(i-1)+j}.\sigma(u).\bar{s}(p,q)$ contient $\tilde{u}_i.\langle\Pi_q^{\Theta_i(1)},\ldots,\Pi_q^{\Theta_i(n_i)}\rangle = \tilde{u}_i.\Theta_i$.

On a donc montré

$$\Pi_p^i\ \phi(u)(s(p,q)) = e_j \Longrightarrow$$

$$\Pi_p^i.u \in \Pi_{kp}^{k(i-1)+j}.\sigma(u).\bar{s}(p,q).$$

Réciproquement, si $\Pi_{kp}^{k(i-1)+j}.\sigma(u).\bar{s}(p,q)$ n'est pas vide, c'est qu'il existe γ tel que

- $\phi(\tilde{u}_i.\gamma)(e_1,\ldots,e_k) = e_j$
- $\forall\ s \le n_i$, $\Pi_{kq}^{k(\Theta_i(s)-1)+\gamma(s)}.\bar{s}(p,q)$ n'est pas vide.

Cette deuxième condition implique que

$$\phi(\Pi_q^{\Theta_i(s)})(s(p,q)) = e_{\gamma(s)} \ ;$$

or $\phi(\Pi_q^{\Theta_i(s)})(\ s(p,q)\ ) = \phi(\Pi_{n_i}^s.\Theta_i.\beta)(e_1,\ldots,e_k)$ et

$e_{\gamma(s)} = \phi(\Pi_{n_i}^s.\gamma)(e_1,\ldots,e_k)$. On en déduit que

$\phi(\gamma)(e_1,\ldots,e_k) = \phi(\Theta_i.\beta)(e_1,\ldots,e_k)$ et donc

$\phi(\tilde{u}_i\gamma)(e_1,\ldots,e_k) = \phi(\tilde{u}_i.\Theta_i.\beta)(e_1,\ldots,e_k) = \phi(\Pi_p^i.u)(s(p,q))$.

Enfin d'après la définition de $\bar{S}(p,q)$, $\Pi_p^i.\bar{S}(p,q).\sigma(u).\bar{s}(p,q)$ n'est pas vide ssi $\exists\ \alpha$ tel que $\phi(\alpha)(e_1,\ldots,e_k) \in S(p,q)$ et tel que $\forall\ \ell \leq n$, $\Pi_{kp}^{k(\ell-1)+\alpha(\ell)}.\sigma(u).\bar{s}(p,q)$ n'est pas vide. Cette dernière condition est équivalente à $\forall\ \ell \leq n$, $\phi(\Pi_p^{\ell}.u)(s(p,q)) = e_{\alpha(\ell)}$ et donc à $\phi(u)(s(p,q)) = \phi(\alpha)(e_1,\ldots,e_k)$ qui appartient à $S(p,q)$.

On en déduit qu'aucune des composantes de $\bar{S}(p,q).\sigma(u).\bar{s}(p,q)$ n'est vide ssi $\phi(u)(s(p,q)) \in S(p,q)$ ce qui achève la démonstration.

cqfd.

Problème ouvert. Une partie A-reconnaissable d'un magmoïde projetable quelconque est-elle S-reconnaissable ? Il ne nous paraît pas invraisemblable que la réponse soit négative ; auquel cas l'explication du phénomène devrait résider dans des propriétés concernant les torsions.

Proposition 2.13 *Toute partie S-reconnaissable d'un magmoïde projetable quelconque M est A-reconnaissable.*

Démonstration : Soit $\mathcal{S} = \langle M',\sigma,\bar{s},\bar{S}\rangle$ un automate non déterministe où σ est une k-substitution de M dans $P(M'\mathcal{T})$. On construit un automate déterministe $\mathcal{A} = \langle E,\phi,s,S\rangle$ où E est l'ensemble des sous-identités de [k] (c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $P(M\mathcal{T})_k^k$ de la forme

$U_1 \otimes U_2 \otimes \ldots \otimes U_k$ avec $U_i = Id_1 \subset M'T_1^1$ ou $U_i = \emptyset \subset M'T_1^1$.

On définit l'application ϕ de M dans F(E) par si $u \in M_q^p$

$$(e'_1,\ldots,e'_p) = \phi(u)(e_1,\ldots,e_q) \text{ ssi}$$

$$e'_1 \otimes \ldots \otimes e'_p = E(\sigma(u).(e_1 \otimes \ldots \otimes e_q)).$$

On rappelle que si $U \in P(M'T)_q^p$,

$$\Pi_p^i.E(U) = \begin{cases} \Pi_p^i \text{ si } \Pi_p^i.U \neq \emptyset \\ \emptyset \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrons que ϕ est bien un 1-morphisme :

- si $u = Id_p$, $\sigma(u) = Id_p$ et

$E(\sigma(u).(e_1 \otimes \ldots \otimes e_p)) = E(e_1 \otimes \ldots \otimes e_p) = e_1 \otimes \ldots \otimes e_p$ d'où $\phi(u) = Id_p$.

- Pour montrer que $\phi(u).\phi(v) = \phi(uv)$, il suffit de montrer, d'après la définition, que

$$E(\sigma(u.v).(e_1 \otimes \ldots \otimes e_p)) = E(\sigma(u).E(\sigma(v).(e_1 \otimes \ldots \otimes e_p)).$$

Or, σ étant une k-substitution $\sigma(u.v) = \sigma(u).\sigma(v)$, d'où
$E(\sigma(u.v).(e_1 \otimes \ldots \otimes e_p)) = E(\sigma(u).\sigma(v).(e_1 \otimes \ldots \otimes e_p)) =$
$E(\sigma(u).E(\sigma(v).(e_1 \otimes \ldots \otimes e_p))$.

- Enfin, comme $\sigma(u \otimes v) = \sigma(u) \otimes \sigma(v)$,

$E(\sigma(u \otimes v)(e_1 \otimes \ldots \otimes e_q \otimes e'_1 \otimes \ldots \otimes e'_{q'})) =$
$E((\sigma(u).(e_1 \otimes \ldots \otimes e_q)) \otimes (\sigma(v).(e'_1 \otimes \ldots \otimes e'_{q'}))) =$
$E(\sigma(u).(e_1 \otimes \ldots \otimes e_q)) \otimes E(\sigma(v).(e'_1 \otimes \ldots \otimes e'_{q'}))$
d'où $\phi(u \otimes v) = \phi(u) \otimes \phi(v)$.

On pose ensuite $s(p,q) = (e_1,\ldots,e_q)$ avec $e_1 \otimes \ldots \otimes e_q = E(\bar{s}(p,q))$
et $S(p,q) = \{(e_1,\ldots,e_p) \ / \ E(\bar{S}(p,q).(e_1 \otimes \ldots \otimes e_p)) = Id_p\}$.

On en déduit que $\phi(u)(s(p,q)) = (e_1,\ldots,e_p)$ ssi

$e_1 \otimes \ldots \otimes e_p = E(\sigma(u).E(\bar{s}(p,q))) = E(\sigma(u).\bar{s}(p,q))$ et donc

$\phi(u)(s(p,q)) \in S(p,q)$ ssi

$Id_p = E(\bar{S}(p,q).E(\sigma(u).\bar{s}(p,q)) = E(\bar{S}(p,q).\sigma(u).\bar{s}(p,q))$. Et comme $E(S)$ est précisément $\{u|E(\bar{S}(p,q).\sigma(u).\bar{s}(p,q)) = Id_p\}$, on a bien $E(S) = E(A)$.

cqfd.

3. PARTIES RECONNAISSABLES D'UN MAGMOÏDE PROJETABLE

Nous avons vu que la famille des parties A-reconnaissables d'un magmoïde projetable était strictement incluse dans celles des parties finiment saturées. Nous allons donner une condition suffisante pour que ces deux familles deviennent les mêmes.

Proposition 2.14 *Si* L *est une partie finiment saturée d'un magmoïde projetable* M, *et si* L *est incluse dans une seule fibre de* M, *alors* L *est* A-*reconnaissable.*

Démonstration : Soit N un magmoïde projetable fini et ϕ un 1-morphisme de M dans N tels que $L = \phi^{-1}(\phi(L))$. Supposons de plus qu'il existe p_0 et q_0 tels que $L \subset M_{q_0}^{p_0}$. On considère alors l'ensemble $E = N_{q_0}^1$ qui est bien un ensemble fini puisque N est un magmoïde fini, et l'application ψ de M dans le magmoïde fonctionnel fini F(E), définie par

$$\forall\, u \in M_q^p,\ \forall\, e_1 \in E = N_{q_0}^1, \ldots, e_q \in E = N_{q_0}^1,\ \forall\, e'_1 \in E, \ldots, e'_p \in E,$$

$$\psi(u)(e_1,\ldots,e_q) = (e'_1,\ldots,e'_p) \text{ ssi}$$

$$\langle e'_1,\ldots,e'_p\rangle = \phi(u).\langle e_1,\ldots,e_q\rangle \in N_q^p.$$

Montrons que cette application ψ est bien un 1-morphisme.

• Tout d'abord si $u = \Theta \in \Theta_q^p$,
$\phi(\Theta).\langle e_1,\ldots,e_q\rangle = \Theta.\langle e_1,\ldots,e_q\rangle = \langle e_{\Theta(1)},\ldots,e_{\Theta(p)}\rangle$ d'où
$\psi(\Theta)(e_1,\ldots,e_q) = (e_{\Theta(1)},\ldots,e_{\Theta(q)})$ et donc $\psi(\Theta) = \Theta$.

• Si $u \in M_q^p$ et $v \in M_{q'}^{p'}$, alors le fait que $\psi(u) \otimes \psi(v) = \psi(u \otimes v)$ découle immédiatement du fait que $\Pi_{p+p'}^i.\phi(u \otimes v).\langle e_1,\ldots,e_q,e_{q+1},\ldots,e_{q+q'}\rangle =$

$$\begin{cases} \Pi_p^i.\phi(u).\langle e_1,\ldots,e_q\rangle & \text{si } i \le p \\ \Pi_{p'}^{i-p}.\phi(v).\langle e_{q+1},\ldots,e_{q+q'}\rangle & \text{sinon} \end{cases}$$

• Enfin si $u \in M_q^p$ et $v \in M_r^q$, le fait que $\psi(u.v) = \psi(u).\psi(v)$ découle de ce que $\phi(u).\phi(v).\langle e_1,\dots,e_r\rangle = \phi(u.v).\langle e_1,\dots,e_r\rangle$.

On construit alors l'automate $A = \langle E,\psi,s,S\rangle$ avec

$$s(p,q) = \begin{cases} (\Pi^1_{q_0},\dots,\Pi^{q_0}_{q_0}) \in E^{q_0} = (N^1_{q_0})^{q_0} \text{ si } p = p_0 \text{ et } q = q_0 \\ \text{n'importe quel élément de } E^q \text{ sinon.} \end{cases}$$

et $$S(p,q) = \begin{cases} \{(e_1,\dots,e_{p_0}) \in E^{p_0} / \langle e_1,\dots,e_{p_0}\rangle \in \phi(L) \subset N^{p_0}_{q_0} \\ \qquad\qquad \text{si } p = p_0 \text{ et } q = q_0 \\ \emptyset \text{ sinon} \end{cases}$$

On en déduit que $E(A) = \bigcup_{p,q} \{u \in M_q^p / \psi(u)(s(p,q)) \in S(p,q)\} =$

$\{u \in M^{p_0}_{q_0} / \psi(u)(\Pi^1_{q_0},\dots,\Pi^{q_0}_{q_0}) \in S(p_0,q_0)\}$.

Or $\psi(u)(\Pi^1_{q_0},\dots,\Pi^{q_0}_{q_0}) = (e'_1,\dots,e'_{p_0})$ ssi

$\langle e'_1,\dots,e'_{p_0}\rangle = \phi(u).\langle \Pi^1_{q_0},\dots,\Pi^{q_0}_{q_0}\rangle = \phi(u)$ d'où

$\psi(u)(\Pi^1_{q_0},\dots,\Pi^{q_0}_{q_0}) \in S(p_0,q_0)$ ssi $\phi(u) \in \phi(L)$. On en déduit que

$E(A) = \{u \in M^{p_0}_{q_0} / \phi(u) \in \phi(L)\} = \phi^{-1}(\phi(L)) = L$ puisque $L \subset M^{p_0}_{q_0}$.

cqfd.

Si une partie L est donc incluse dans une fibre donnée, elle est finiment saturée si et seulement si elle est A-reconnaissable.

Nous dirons alors qu'une partie L d'un magmoïde projetable M est **reconnaissable** si elle est incluse dans une fibre et si elle est A-reconnaissable ou finiment saturée.

Remarque : Il existe des conditions suffisantes plus faibles que celle que nous avons donnée pour pouvoir montrer qu'une partie L finiment saturée est A-reconnaissable - par exemple que L soit incluse dans une union finie de fibres - Nous aurions pu, en conséquence, donner une définition moins restrictive de la reconnaissabilité. Mais il apparaîtra, au chapitre suivant, que les parties "rationnelles" sont, elles, toujours incluses

dans une seule fibre ; et comme nous voulons étudier, comme dans le cas de la théorie des langages, l'équivalence entre rationalité et reconnaissabilité pour le magmoïde projetable libre, il est donc naturel de poser une telle condition dans la définition des parties reconnaissables. D'autre part nous verrons au chapitre V que les composantes des solutions des systèmes d'équations régulières sont aussi incluses dans une fibre. Enfin cette restriction n'est pas incompatible avec la définition classique des "forêts reconnaissables" qui sont toutes des parties de $T(\Sigma)_0^1$.

<u>*Proposition 2.15*</u> *Si* M *est un magmoïde projetable, les parties reconnaissables de* M_q^p *forment une algèbre de Boole.*

Ce résultat découle immédiatement des définitions et des propositions 2.4 ou 2.10.

<u>*Proposition 2.16*</u> *Si* ϕ *est un* k*-morphisme de* M *dans* M' *et si* L *est une partie reconnaissable de* M', $\phi^{-1}(M')$ *est une partie reconnaissable de* M.

Ce résultat découle lui aussi des définitions et des propositions 2.3 ou 2.9.

Comme pour les automates de langages, les problèmes fondamentaux de décidabilité concernant les automates sur le magmoïde projetable libre $T(\Sigma)$, à savoir l'équivalence de deux automates, ou le fait de décider si une partie reconnaissable est vide ou infinie découlent d'une propriété d'itération qu'on pourra aussi utiliser pour montrer que certaines parties d'une fibre ne sont pas reconnaissables.

<u>*Proposition 2.17*</u> *Soit* L *une partie reconnaissable de* M_q^p *(avec* $p \geq 1$*) ; alors pour tout* $i \leq p$, *l'ensemble* $\{\Pi_p^i.u/u \in L\}$ *est une partie reconnaissable de* M_q^1.

Démonstration : Soient N un magmoïde projetable fini et ϕ un 1-morphisme de M dans N tel que $L = \phi^{-1}(\phi(L))$. Posons $L_i' = \{\Pi_p^i.u \ / \ u \in L\}$. On a bien $L_i' \subset \phi^{-1}\ \phi(L_i')$. Pour montrer l'inclusion inverse on considère $w \in \phi^{-1}\phi(L_i')$. Il existe donc $u \in L$ tel que $\phi(w) = \phi(\Pi_p^i.u)$. On pose alors $u' = <\Pi_p^1.u,\ldots,\Pi_p^{i-1}.u,w,\Pi_p^{i+1}.u,\ldots,\Pi_p^p.u>$; on en déduit que $\phi(u') = \phi(u)$ et donc $u' \in L$; d'où $w = \Pi_p^i.u' \in L_i'$ et $\phi^{-1}(\phi(L_i')) \subset L_i'$.

cqfd.

La proposition suivante montre que lorsqu'on considère une partie reconnaissable L du magmoïde projetable libre les variables figurant dans les éléments de L ne joue aucun rôle particulier et pourraient être remplacées par des constantes (i.e. des symboles de degré 0) sans rien changer au caractère reconnaissable de la partie ainsi obtenue.

Proposition 2.18 *Soient* Σ *un alphabet gradué,* L *une partie reconnaissable de* $T(\Sigma)_p^1$ $(p\neq 0)$. *Alors il existe un alphabet gradué* $\Omega = \{w_1,\ldots,w_p\}$ *avec* $d(w_i) = 0$, *une partie reconnaissable* L' *de* $T(\Sigma \cup \Omega)_0^1$ *tels que* $u \in L$ *ssi* $\exists\ v \in L'$ *tel que* $v = u.<w_1,\ldots,w_p>$.

Démonstration : Soit $A = <E,\phi,s,S>$ l'automate reconnaissant $L \subset T(\Sigma)_p^1$. On considère l'alphabet $\Omega = <w_1,\ldots,w_p>$ avec $d(w_i) = 0$. Le 1-morphisme ϕ de $T(\Sigma)$ dans $F(E)$ s'étend naturellement un 1-morphisme ϕ' de $T(\Sigma \cup \Omega)$ dans $F(E)$ par

$$\phi'(f) = \phi(f) \text{ si } f \in \Sigma$$

$$\phi'(w_i) = \phi(\Pi_p^i)(s(1,p)) \in E \simeq F(E)_0^1.$$

On pose alors L' la partie de $T(\Sigma \cup \Omega)_0^1$ reconnue par l'automate $A' = <E,\phi',s,S>$.

Soit $u \in T(\Sigma)_p^1$. Or u s'écrit $\tilde{u}.\Theta$ avec $\tilde{u} \in \tilde{T}(\Sigma)$ d'où $\phi(u) = \phi(\tilde{u}).\phi(\Theta)$. Or $\phi(\tilde{u}) = \phi'(\tilde{u})$ et $\Pi_q^i.\phi(\Theta)(s(1,p)) = \phi(\Pi_p^{\Theta(i)})(s(1,p)) = \phi'(w_{\Theta(i)}) = \Pi_p^{\Theta(i)}\phi'(<w_1,\ldots,w_p>)$ d'où $\phi(\Theta)(s(1,p)) = \phi'(\Theta.<w_1,\ldots,w_p>)$. D'où $\phi(u)(s(1,p)) = \phi(\tilde{u}).\phi(\Theta)(s(1,p)) = \phi'(\tilde{u}).\phi'(\Theta.<w_1,\ldots,w_p>) = \phi'(u.<w_1,\ldots,w_p>)$. On a donc $\phi(u)(s(1,p)) \in S(1,p)$ ssi $\phi'(u.<w_1,\ldots,w_p>) \in S(1,p)$ et donc $u \in L$ ssi $u.<w_1,\ldots,w_p> \in L'$.

cqfd.

En vertu de cette proposition et de la proposition 2.17, on peut donc se contenter de montrer le lemme d'itération pour les parties reconnaissables de $T(\Sigma)_0^1$. Mais auparavant nous avons besoin d'une définition.

On appelle **profondeur** d'un élément u de $T(\Sigma)_0^1$ ($= \tilde{T}(\Sigma)_0^1$) l'entier défini récursivement par

- si $u \in \Sigma_0 \subset T(\Sigma)_0^1$, prof (u) = 1
- si $u = f.(u_1 \otimes \ldots \otimes u_k) \in \tilde{T}(\Sigma)_0^1$ alors

$$\forall\, i \leq k,\ u_i \in T(\Sigma)_0^1 \text{ et prof } (u) = 1 + \sup_{i \leq k} \text{prof } (u_i).$$

<u>*Lemme 2.19*</u> *Si* L *est une partie reconnaissable de* $T(\Sigma)_0^1$, *il existe un entier* n_0 *tel que* $\forall\, u \in L$, *si* prof (u) > n_0, *il existe* $u_0 \in \tilde{T}(\Sigma)_1^1$, $v \in \tilde{T}(\Sigma)_1^1$, $w \in \tilde{T}(\Sigma)_0^1$ *tel que* $u = u_0.v.w$ et $\forall\, n \geq 0, u_0.v^n.w \in L$.

<u>Démonstration</u> : Soit $A = \langle E,\phi,s,S\rangle$ l'automate reconnaissant L et soit n_0 le nombre d'états de cet automate (i.e. n_0 = Card (E)). Soit $u \in T(\Sigma)_0^1$ de profondeur $n > n_0$; alors u s'écrit $f.(t_1 \otimes \ldots \otimes t_k)$ où l'un des t_i est de profondeur n-1. L'élément u peut s'écrire alors $f.(t_1 \otimes \ldots \otimes t_{i-1} \otimes Id_1 \otimes t_{i+1} \otimes \ldots \otimes t_k).t_i = \bar{t}_1.t_i$ avec $\bar{t}_1 \in \tilde{T}(\Sigma)_1^1$ et $t_i \in \tilde{T}(\Sigma)_0^1$. Mais t_i peut à son tour être décomposé de la même façon. En réitérant le procédé, on voit que u peut s'écrire $\bar{t}_1.\bar{t}_2 \ldots \bar{t}_n$ avec pour $i \leq n-1$ $\bar{t}_i \in \tilde{T}(\Sigma)_1^1$ et $\bar{t}_n \in \tilde{T}(\Sigma)_0^1$. On considère alors la suite

$$\begin{aligned}
e_n &= \phi(\bar{t}_n)(s(1,0)) = \phi(\bar{t}_n) \\
e_{n-1} &= \phi(\bar{t}_{n-1})(e_n) = \phi(\bar{t}_{n-1}.\bar{t}_n) \\
&\ldots\ldots\ldots \\
e_2 &= \phi(\bar{t}_2)(e_2) = \phi(\bar{t}_2.\bar{t}_3 \ldots \bar{t}_n) \\
e_1 &= \phi(\bar{t}_1)(e_1) = \phi(u).
\end{aligned}$$

Si n est strictement supérieur à n_0, cette suite comprend deux éléments identiques e_i et e_j avec $i < j$.

On a donc $e_i = \phi(\bar{t}_i.\bar{t}_{i+1} \dots \bar{t}_n) =$
$\bar{\phi}(\bar{t}_i \dots \bar{t}_{j-1})\ \bar{\phi}(t_j \dots \bar{t}_n) = \bar{\phi}(t_i \dots \bar{t}_{j-1})(e_i)$.

On pose alors $u_0 = \bar{t}_1 \dots \bar{t}_{i-1} \in \mathcal{T}(\Sigma)_1^1$,
$v = \bar{t}_i \dots \bar{t}_{j-1} \in \mathcal{T}(\Sigma)_1^1$
et $w = \bar{t}_j \dots \bar{t}_n \in \mathcal{T}(\Sigma)_0^1$.

On en déduit que

$$\phi(u_0.v^{m+1}.w) = \phi(u_0).\phi(v^m).\phi(v).\phi(w) =$$
$$\phi(u_0).\phi(v^m).\phi(v).(e_i) = \phi(u_0)\phi(v^m).\phi(w) = \phi(u_0.v^m.w)$$

d'où le résultat.

cqfd.

Exemple 2.20 A titre d'exemple nous allons montrer la non-reconnaissabilité d'une partie d'un magmoïde projetable libre. Soit $\Sigma = \{f,g,a\}$ avec $d(f) = 2$, $d(g) = 1$ et $d(a) = 0$ et soit $L = \{f(g^n(a),g^n(a)) \ / \ n \geq 0\}$.

Si L était reconnaissable, il existerait un élément $u = f(g^n(a),g^n(a))$ tel que $u = u_0.v.w$ et $u_0.v^m.w \in L$.

Ceci implique :

Soit $u_0 = Id_1$, $v = f(g^n(a),\ g^{n'}(x_1))$ ou
$f(g^{n'}(x_1),g^n(a))$ et
$w = g^{n-n'}(a)$.

Soit $u_0 = f(g^n(a),\ g^{n'}(x_1))$ ou $f(g^{n'}(x_1),g^n(a))$
$v = g^{n''}(x_1)$ et $w = g^{n-n'-n''}(a)$.

On en déduit que $u_0.v^2.w$ a l'une des formes suivantes :

$f(g^n(a),\ f(g^n(a),\ g^n(a))$
$f(f(g^n(a),\ g^n(a))$
$f(g^n(a),\ g^{n+n''}(a))$
$f(g^{n+n''}(a),\ g^n(a))$ qui n'appartiennent pas à L. ⊥

CHAPITRE III

PARTIES RATIONNELLES D'UN MAGMOÏDE PROJETABLE

Il est bien connu que les parties reconnaissables d'un monoïde libre A^* peuvent être définies comme les éléments de la clôture de l'ensemble des parties finies par les opérations de somme, de produit et d'étoile définies sur le monoïde $P(A^*)$ ("caractérisation de Kleene"). Cette méthode permet d'ailleurs de définir les parties rationnelles d'un monoïde quelconque [45]. Thatcher et Wright [91] ont étendu cette caractérisation de Kleene au cas des arbres de façon à retrouver les forêts reconnaissables, mais leur définition nous paraît beaucoup trop "ad hoc" pour avoir la simplicité qu'a celle des parties rationnelles d'un monoïde ; en particulier elle fait intervenir plusieurs opérations de produit et plusieurs opérations d'étoile différentes dont le nombre dépend de la forêt reconnaissable considérée.

En nous plaçant dans le cadre du magmoïde, nous sommes en mesure de donner une définition des parties rationnelles beaucoup plus proche de celle des parties rationnelles d'un monoïde. En effet de même que l'ensemble $P(M)$ des parties d'un monoïde M est muni d'une structure de monoïde, nous avons défini, au chapitre I, le magmoïde projetable $P(M\mathcal{T})$ à partir des parties d'un magmoïde à torsion $M\mathcal{T}$. Comme **opérations rationnelles** nous aurons donc le produit de composition et le produit tensoriel de $P(M\mathcal{T})$ ainsi que la somme définie au chapitre I - nous verrons d'ailleurs que cette dernière opération est redondante et peut se décrire au moyen des deux précédentes - Il reste à définir l'opération "étoile", ce qui sera l'objet du premier paragraphe. Nous définirons ensuite les parties rationnelles, étudierons quelques unes de leur propriété de fermeture et les comparerons aux parties reconnaissables définies dans le chapitre précédent.

1. L'OPÉRATION "ÉTOILE"

Soit MT un magmoïde à torsion obtenu par adjonction de torsion à partir d'un magmoïde décomposable M.

On rappelle que $P(MT)^p_q = [P(MT^1_q)]^p$, et que ceci permet de définir un ordre partiel sur $P(MT)$, noté $\subset$ par

$$\text{si } U = \langle U_1,\ldots,U_p\rangle \in P(MT)^p_q \text{ et}$$

$$V = \langle V_1,\ldots,V_p\rangle \in P(MT)^p_q \text{ alors}$$

$U \subset V$ ssi $\forall\, i \in [p]$, $U_i \subset V_i$. Pour l'ordre ainsi défini, les deux produits sont croissants (au sens large) par rapport à leurs deux arguments, c'est-à-dire

$$\text{si } U \subset U' \text{ et } V \subset V' \text{ alors } U.V \subset U'.V' \text{ et } U \otimes V \subset U' \otimes V'.$$

On rappelle aussi que pour cet ordre, chaque fibre forme un sup-demi-treillis dont le sup, noté + est défini par

$$\text{si } U = \langle U_1,\ldots,U_p\rangle \in P(MT)^p_q \text{ et}$$

$$V = \langle V_1,\ldots,V_p\rangle \in P(MT)^p_q \text{ alors}$$

$U + V = \langle U_1 \cup V_1,\ldots, U_p \cup V_p\rangle$ ou encore $\forall\, i \in [p]$

$\Pi^i_p.(U+V) = \Pi^i_p.U + \Pi^i_p.V = \Pi^i_p.U \cup \Pi^i_p.V.$

On a alors :

1) $(U + U') \otimes V = U \otimes V + U' \otimes V$

2) $U \otimes (V + V') = U \otimes V + U \otimes V'$

3) $(U + U').\ V = U.V + U'.V$

4) $U.(V + V') \supset U.V + U.V'$,

l'inclusion figurant dans 4) pouvant être stricte.

Nous appellerons **polynôme** tout élément de $P(MT)^p_q$ dont chaque composante est une partie **finie** de MT^1_q. Il est clair que, aux différences de formalisme près, les polynômes du magmoïde $P(T(\Sigma))$ sont exactement les polynômes d'une Σ-algèbre libre définis par Eilenberg et Wright [46] ; par ailleurs notre définition des polynômes généralise celle de Downey [43].

Nous appellerons **fibres carrées** celles dont le degré supérieur est égal au degré inférieur.

Si U appartient à une fibre carrée $P(MT)^p_p$ de $P(MT)$ nous définissons, pour $n > 0$, U^n par

$$U^1 = U$$

$$U^{n+1} = U^n.U = \underbrace{U.U \ldots U}_{n+1 \text{ fois}}$$

et nous posons

$$U^+ = U + U^2 + \ldots + U^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U^n.$$

Comme U est dans une fibre carrée chacun des U^n est défini et appartient à la même fibre ; U^+ est donc aussi défini et appartient aussi à la même fibre que U.

<u>*Proposition 3.1*</u> *Si* U *appartient à* $P(MT)^p_p$, U^+ *est le plus petit élément* X *de* $P(MT)^p_p$ *qui vérifie l'égalité* $X = U + X.U$.

<u>Démonstration</u> :

$\boxed{A}$ D'après la définition du produit de composition dans $P(MT)$ on a :

$$U^+.U = \sum_{u \in U^+} u.U = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{u \in U^n} u.U = \sum_{n=1}^{\infty} U^n.U = \sum_{n=1}^{\infty} U^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} U^n.$$

D'où $U + U^+U = U + \sum_{n=2}^{\infty} U^n = U^+$.

$\boxed{B}$ Soit maintenant V appartenant à $P(M\mathcal{T})^p_p$ tel que $V = U + V.U$ et montrons que $U^+ \subset V$

a) Comme $U \subset U + V.U$, on a bien $U \subset V$.

b) Supposons que U^n soit inclus dans V. On a alors $U^{n+1} = U^n.U \subset V.U$ et comme $V.U \subset U + V.U = V$ on a $U^{n+1} \subset V$.

On en déduit que, pour tout $n > 0$, $U^n \subset V$ et donc $U^+ \subset V$.

cqfd.

Par contre, le produit de composition dans $P(M\mathcal{T})$ n'étant pas additif à droite U^+ n'est pas nécessairement solution de $X = U + U.X$ comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 3.2 Soit l'alphabet gradué $\Sigma = \{a,b\}$ avec $d(a) = 1$ et $d(b) = 2$.

Soit $U = \langle\{\langle 2;b(x_2,x_2)\rangle\}, \{\langle 2;a(x_2)\rangle\}\rangle \in P(T(\Sigma))^2_2$.

Alors $U^2 = \langle\{\langle 2;b(x_2,x_2)\rangle\}.U, \{\langle 2;a(x_2)\rangle\}.U\rangle =$

$\langle\{\langle 2;b(a(x_2),a(x_2))\rangle\}, \{\langle 2;a(a(x_2))\rangle\}\rangle$

et de la même façon, on obtient, pour $n > 0$,

$U^n = \langle\{\langle 2;b(a^{n-1}(x_2), a^{n-1}(x_2))\rangle\}, \{\langle 2;a^n(x_2)\rangle\}\rangle$ et donc

$U^+ = \langle\{\langle 2;b(a^n(x_2),a^n(x_2))\rangle \ / \ n \geq 0\}, \{\langle 2;a^n(x_2)\rangle \ / \ n > 0\}\rangle$.

On en déduit que $\Pi^1_2.U.U^+ =$

$\{\langle 2;b(x_2,x_2)\rangle\} \ . \ U^+ = \{\langle 2;b(x_1,x_2)\rangle\} \ . \ \langle 2;x_2,x_2\rangle \ . \ U^+ =$

$\{\langle 2;b(x_1,x_2)\} \ . \ \langle \Pi^2_2.U^+, \Pi^2_2.U^+\rangle =$

$\{\langle 2;b(a^n(x_2), a^m(x_2))\rangle \ / \ n > 0, m > 0\}$.

On a donc $\Pi^1_2.(U + U.U^+) = \{\langle 2;b(x_2,x_2)\rangle\} \cup \Pi^1_2.U.U^+ \neq \Pi^1_2.U^+$

d'où $U + U.U^+ \neq U^+$.

⊥

Bien qu'on n'aie pas l'égalité, on a cependant l'inclusion dans un sens :

Proposition 3.3 U^+ *est inclus dans* $U + U.U^+$.

Démonstration : Pour $n \geq 2$, on a $U^n = U.U^{n-1}$. Comme U^{n-1} est inclus dans U^+ U^n est inclus dans $U.U^+$ et donc $\sum_{n=2}^{\infty} U^n \subset U.U^+$; d'où $U^+ \subset U + U.U^+$.

cqfd.

Nous montrerons plus loin (proposition 3.10) que pour U appartenant à $P(M\mathcal{T})_p^p$, le plus petit élément de $P(M\mathcal{T})_p^p$ qui vérifie $X = U + U.X$ est $(U+Id_p)^+.U$, où $Id_p = <\{\Pi_p^1\},\ldots,\{\Pi_p^p\}>$ est l'élément neutre de la fibre p-p de $P(M\mathcal{T})$.

Dans le cas de la théorie des langages, on a l'égalité $L^* = \Lambda + L^+ = (\Lambda+L)^+$. Par contre, dans le cas du magmoïde, les deux quantités $Id_p + U^+$ et $(Id_p + U)^+$, où $U \in P(M\mathcal{T})_p^p$ ne sont pas toujours égales comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.4 On considère l'élément U de l'exemple 3.2. Supposons que les deux quantités Id_p+U^+ et $(Id_p+U)^+$ soient égales. Comme $(Id_p+U)^+$ est solution de $X = Id_p+U+X.(Id_p+U)$ on aurait $Id_p+U^+ = Id_p+U+(Id_p+U^+).(Id_p+U) =$ $Id_p + U + Id_p.(Id_p+U) + U^+ . (Id_p+U) = Id_p + U + U^+(Id_p + U)$. Or

$\Pi_2^1.U^+.(Id_p + U) = \{<2;b(a^n(x_2),a^n(x_2))> / n \geq 0\}. (Id_p + U) =$

$\bigcup_{n\geq 0} <2;b(a^n(x_2),a^n(x_2)>.(Id_p + U) =$

$\bigcup_{n\geq 0} <2;b(a^n(x_1),a^n(x_2))> <2;x_1,x_1>.\{<2;x_2>,<2;a(x_2)>\} =$

$\{<2;b(a^n(x_2),a^m(x_2))> / n \geq 0,\ m \geq 0,\ |n-m| \leq 1\}$

et donc $\Pi_2^1.(Id_p + U + U^+ (Id_p + U)) =$

$\{<2;x_2>\} \cup \{<2;b(a^n(x_2),a^m(x_2)) \ / n \geq 0,\ m \geq 0,\ |n-m| \leq 1\}$

qui est bien différent de $\Pi_2^1.(Id_p + U^+) =$

$\{<2;x_2>\} \cup \{<2;b(a^n(x_2),a^n(x_2)) / n \geq 0\}$.

⊥

Par contre, l'inclusion dans un sens est vraie :

Proposition 3.5 $Id_p + U^+$ *est inclus dans* $(Id_p + U)^+$.

Démonstration : On a bien $U \subset Id_p + U$ d'où

$U^n \subset (Id_p + U)^n$ et donc

$U^+ \subset (Id_p + U)^+$. Par ailleurs Id_p est inclus dans $Id_p + U$ et donc dans $(Id_p + U)^+$ d'où $Id_p + U^+ \subset (Id_p + U)^+$.

cqfd.

Nous sommes donc amené à poser $U^* = (Id_p + U)^+$.

Nous allons maintenant exhiber les équations dont $Id_p + U^+$ et U^* sont les solutions minimales.

Proposition 3.6 *Si* $U \in P(MT)_p^p$, $Id_p + U^+$ *est le plus petit élément de* $P(MT)_p^p$ *qui vérifie* $X = Id_p + X.U$.

Démonstration :

$\boxed{A}$ Montrons d'abord que $Id_p + U^+$ est solution de $X = Id_p + X.U$.
En effet $Id_p + (Id_p + U^+).U = Id_p + U + U^+.U = Id_p + U^+$ d'après la définition de U^+.

$\boxed{B}$ Si V appartenant à $P(MT)_p^p$ vérifie $V = Id_p + V.U$ on a bien

a) $Id_p \subset V$

b) Puisque $Id_p \subset V$, $U = Id_p.U \subset V.U \subset Id_p + V.U = V$

c) Si $U^n \subset V$, $U^{n+1} \subset V.U \subset Id_p + V.U = V$.

D'où $Id_p + U^+ \subset V$.

cqfd.

Afin de simplifier les démonstrations ultérieures, nous allons donner une autre définition de U^* .

Lemme 3.7 *Pour* U *appartenant à* $P(MT)^p_p$, *la suite* $\{(Id_p+U)^n\}_n$ *est croissante et a pour limite* U .

Démonstration : Par définition $(Id_p + U)^{n+1} = (Id_p + U).(Id_p + U)^n = (Id_p + U)^n + U.(Id_p + U)^n$ d'où $(Id_p + U)^n \subset (Id_p + U)^{n+1}$. On a donc bien $U^* = (Id_p + U)^+ = \sum_n (Id_p + U)^n = \lim_{n\to\infty} (Id_p + U)^n$.

cqfd.

Proposition 3.8 *Si* U *appartient à* $P(MT)^p_p$, U^* *est le plus petit élément de* $P(MT)^p_p$ *qui vérifie* $X = Id_p + U.X$.

Démonstration :

A Montrons d'abord que U^* est bien solution de l'équation proposée. Pour cela nous montrons d'abord :

A1 $U^* \subset Id_p + U.U^*$. En effet :

a) On a bien $Id_p + U \subset Id_p + U.\ Id_p \subset Id_p + U.(Id_p + U) \subset Id_p + U.\ (Id_p + U)^+$

b) Si $(Id_p + U)^n \subset Id_p + U.U^*$ alors $(Id_p + U)^{n+1} = (Id_p + U).(Id_p + U)^n = (Id_p + U)^n + U.(Id_p + U)^n$. Or $(Id_p + U)^n \subset Id_p + U.U^*$ d'après l'hypothèse de récurrence et $U.(Id_p + U)^n \subset U.U^*$ d'où $(Id_p + U)^n \subset Id_p + U.U^*$.

On en déduit que $U^* = (Id_p + U)^+ \subset Id_p + U.U^*$.

On montre ensuite :

A2 $Id_p + U.U^* \subset (Id_p + U)^+ = U^*$.

On a bien d'une part $Id_p \subset Id_p + U \subset U^* = (Id_p + U)^+$ et d'autre part $U.(Id_p + U)^n \subset (Id_p + U).(Id_p + U)^n \subset U^* = (Id_p + U)^+$ et ceci pour tout $n > 0$. On en déduit d'après le lemme 3.7 que $U.U^*$ est aussi inclus dans U^* d'où le résultat ; en effet sinon il existerait $\tilde{u}\Theta \in U$ $v_i \in \Pi_p^{\Theta(i)}.U^*$ tel

que $\tilde{u}.<v_1,\ldots,v_k> \notin U^*$; il existe alors un entier n tel que $\forall$ i $v_i \in \Pi_p^{\theta(i)}(Id_p + U)^n$ d'où $\tilde{u}.<v_1,\ldots,v_k> \in U.(Id_p + U)^n \subset U^*$ ce qui est contradictoire.

$\boxed{B}$ Supposons maintenant qu'il existe V appartenant à $P(MT)_p^p$ tel que $V = Id_p + U.V$.

On a bien a) $Id_p \subset V$ d'où

b) $U \subset U.V \subset Id_p + U.V = V$

et donc $Id_p + U \subset V$. Supposons que $(Id_p + U)^n \subset V$. On a alors $(Id_p + U)^{n+1} = (Id_p + U)^n + U.(Id_p + U)^n \subset V + U.V$. Mais $V = Id_p + U.V$, d'où $U.V \subset V$ et $(Id_p + U)^{n+1} \subset V$ et donc $U^* = (Id_p + U)^+ \subset V$.

cqfd.

Par contre $Id_p + U^+$ n'est pas forcément solution de $X = Id_p + U.X$. Car si c'était le cas on aurait $Id_p + U^+ = Id_p + U.(Id_p + U^+)$ et donc $(Id_p+U^+).U = (Id_p + U.(Id_p + U^+)).U = U + U.(Id_p + U^+).U$.
Or $(Id_p + U^+).U = U + U^+U = U^+$ d'où $U^+ = U + U.U^+$. Or l'exemple 3.1 montre que cette égalité n'est pas toujours vérifiée.

De même U^* n'est pas forcément solution de $X = Id_p + X.U$; car alors on aurait $U^* = Id_p + U^*U$ et cette égalité n'est pas toujours vérifiée comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.9 On reprend l'élément U des exemples 3.2 et 3.4. On a alors
$(Id_2 + U)^2 = Id_2 + U + U.(Id_2 + U) =$
$<\{<2;x_1>\} \cup \{<2;b(a^i(x_2),a^j(x_2))> / i,j \leq 1>\}, \{<2;a^i(x_2)> / i \leq 2\}>$.

On montre aisément par récurrence que $(Id_2 + U)^n =$
$<\{<2;x_1>\} \cup \{<2;b(a^i(x_2),a^j(x_2))> / i,j \leq n-1\}, \{<2;a^i(x_2)> / i \leq n\}>$ et donc
$\Pi_2^1.U^* = \{<2;x_1>\} \cup \{<2;b(a^i(x_2), a^j(x_2)> / i \geq 0, j \geq 0\}$.
Par ailleurs $\Pi_2^1.U^*.U =$
$\{<2;b(x_2,x_2)>\} \cup \{<2;b(a^i(x_2), a^j(x_2))> / i \geq 1, j \geq 1\}$ d'où

$\Pi_2^1.U^* - \Pi_2^1.(Id_p + U^*U) = \{<2;b(a(x_2),x_2)>, <2;b(x_2,a(x_2))>\}$.

Les deux quantités U^* et $Id_p + U^*U$ sont donc bien différentes.

⊥

Proposition 3.10 *Si* U *appartient à* $P(MT)_p^p$ *et* V *appartient à* $P(MT)_q^p$, U^*V *est le plus petit élément de* $P(MT)_q^p$ *qui vérifie* $X = V + U.X$.

Démonstration : D'après la proposition 3.6, U^* vérifie $U^* = Id_p + U.U^*$ et donc $U^*.V = (Id_p + U.U^*).V = V + U.U^*.V$. Par ailleurs, si $W = V + U.W$, on a $V \subset W$ et aussi $U.V \subset U.W \subset W$ d'où $(Id + U).V = V + U.V \subset W$. Si maintenant $(Id + U)^n.V \subset W$ alors $(Id + U)^{n+1}.V =$
$(Id + U)^n.V + U.(Id + V)^n.V \subset W + U.W \subset W$. On en déduit que
$U^*.V = (Id_p + U)^+.V \subset W$.

cqfd.

Le cas particulier où $V = U$ donne U^*U comme solution de $X = U+U.X$. Par contre $U^*.U$ n'est pas solution de $X = U+X.U$. En effet si c'était le cas on aurait $U^*U = U + U^*U.U = (Id_p + U^*.U).U$ ce qui est exclu d'après l'exemple suivant :

Exemple 3.11 On considère toujours le même U des exemples précédents. Dans l'exemple 3.9, on a déjà calculé $\Pi_2^1.U^*.U$. On calcule alors aisément
$\Pi_2^1(Id_p + U^*.U).U =$
$\{<2;b(x_2,x_2)>, <2;b(a(x_2),a(x_2))>\} \cup \{<2;b(a^i(x_2),a^j(x_2))> / i \geq 2, j \geq 2\}$
et donc $\Pi_2^1.U^*.U \neq \Pi_2^1(Id_p + U^*.U).U$.

⊥

Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau suivant - on rappelle que

$$Id_p + U^+ \subsetneq U^* = (Id_p + U)^+$$

	est la solution minimale de	n'est pas solution de
U^+	$X = U + X.U$	$X = U + U.X$
U^*U	$X = U + U.X$	$X = U + X.U$
$Id_p + U^+$	$X = Id_p + X.U$	$X = Id_p + U.X$
U^*	$X = Id_p + U.X$	$X = Id_p + X.U$

Ainsi que nous l'avons déjà signalé, cette dissymétrie est due à la non-additivité à droite du produit de composition dans $P(MT)$.

Pour terminer, remarquons que si $Id_p \subset U$ alors $U = Id_p + U$ d'où $U^+ = U^* = Id_p + U^+ = U^*U$.

On peut d'ailleurs montrer un résultat plus faible :

Proposition 3.12 *Si* $Id_p + U^+ = U^*$ *alors* $U^+ = U^*U$.

Démonstration : Si $U^* = Id_p + U^+$, alors
$U^*U = (Id_p + U^+)\, U = U + U^+U = U^+$.

cqfd.

Le problème reste ouvert de savoir si les implications précédentes se retournent, c'est-à-dire $U^+ = U^*U \Longrightarrow Id_p + U^+ = U^*$

$$Id_p + U^+ = U^* \Longrightarrow Id_p \subset U.$$

Proposition 3.13 $U^* = U^*.U^* = (U^*)^+$.

Démonstration : Comme $Id_p \subset U^*$, on a bien $U^* = Id_p.U^* \subset U^*.U^*$. Réciproquement comme $U^* = \lim\limits_{n\to\infty} (Id_p + U)^n$, on a

$$U^*.(Id_p + u)^m = \lim_{n\to\infty} (Id_p + U)^{m+n} = U^*$$

et donc $U^*U^* \subset U^*$. On en déduit immédiatement que $(U^*)^n = U^*$ et donc que $(U^*)^+ = U^*$.

cqfd.

2. PARTIES RATIONNELLES D'UN MAGMOÏDE PROJETABLE

La **famille des parties rationnelles** d'un magmoïde à torsion MT, notée Rat (MT), est la plus petite famille de parties de MT

- qui contient les polynômes de MT

- qui est fermée par somme, produit de composition, produit tensoriel et étoile.

En fait, la condition de fermeture par somme est superflue. En effet, soit $U = \langle U_1,\ldots,U_p\rangle \in P(MT)^p_q$ et $V = \langle V_1,\ldots,V_p\rangle \in P(MT)^p_q$. On a alors
$U+V = \langle U_1 \cup V_1, U_2 \cup V_2,\ldots,U_p \cup V_p\rangle =$
$\langle\{\Pi^1_{2p},\Pi^{p+1}_{2p}\}, \{\Pi^2_{2p},\Pi^{p+2}_{2p}\}, \ldots, \{\Pi^p_{2p},\Pi^{2p}_{2p}\}\rangle.\langle U_1,\ldots,U_p, V_1,\ldots,V_p\rangle.$
En effet, la $i^{\text{ème}}$ composante de cette dernière quantité est bien
$\{\Pi^i_{2p},\Pi^{p+i}_{2p}\}.\langle U_1,\ldots,U_p,V_1,\ldots,V_p\rangle = U_i \cup V_i$. Et comme
$\langle U_1,\ldots,U_p, V_1,\ldots,V_p\rangle = (U \otimes V).\langle Id_p, Id_p\rangle$, la somme $U+V$ est bien décrite au moyen de polynômes, du produit de composition et du produit tensoriel.

La proposition suivante montre que les parties rationnelles d'un magmoïde à torsion quelconque sont les images homomorphes des parties rationnelles d'un magmoïde projetable libre.

<u>*Proposition 3.14*</u> *Si* U *appartient à* $P(MT)^p_q$ *est une partie rationnelle, il existe un alphabet gradué fini* Σ, *un 1-morphisme de* $\mathcal{T}(\Sigma)$ *dans* M *et une partie rationnelle* V *de* $P(T(\Sigma))^p_q$ *tels que* $U = \phi T(V)$ (1).

---

(1) Il faudrait écrire plus précisément $U = P(\phi T)(V)$ où $P(\phi T)$ est l'extension du 1-morphisme ϕT de $T(\Sigma) = \mathcal{T}(\Sigma)T$ dans MT en une application $P(\phi T)$ de $P(T(\Sigma))$ dans $P(MT)$ qui n'est pas un morphisme (cf. exemple 1.12).

<u>Démonstration</u> : Nous allons montrer ce résultat par induction sur la construction des parties rationnelles.

a) Si U est un polynôme de $P(MT)^p_q$, on pose pour $i \leq p$ $\Sigma^{(i)} = \{f_{\tilde{u}} \ / \ \tilde{u}.\Theta \in \Pi^i_p.U\}$ avec le degré de $f_{\tilde{u}}$ égal au degré inférieur de $\tilde{u}$ et $\Sigma = \bigcup_{i \leq p} \Sigma^{(i)}$. Σ est donc bien un ensemble fini. On définit ensuite V appartenant à $P(T(\Sigma))^p_q$ par, pour $i \leq p$,
$\Pi^i_p.V = \{f_{\tilde{u}}.\Theta \ / \ f_{\tilde{u}} \in \Sigma^{(i)}\} = \{f_{\tilde{u}}.\Theta \ / \ \tilde{u}.\Theta \in \Pi^i_p.U\}$. On définit aussi le 1-morphisme ϕ de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans M par

$$\phi(f_{\tilde{u}}) = \tilde{u}.$$

On a alors $\phi T(f_{\tilde{u}}.\Theta) = \tilde{u}\Theta$ et donc

$$\phi T(\Pi^i_p.V) = \Pi^i_p.U.$$

b) Si $U = U_1 \otimes U_2$ avec $U_1 \in P(MT)^p_q$, $U_2 \in P(MT)^{p'}_{q'}$, il existe Σ_1, Σ_2, ϕ_1 de $\tilde{T}(\Sigma_1)$ dans M, ϕ_2 de $\tilde{T}(\Sigma_2)$ dans M, $V_1 \in P(T(\Sigma_1))$, $V_2 \in P(T(\Sigma_2))$ tels que $U_1 = \phi_1 T(V_1)$ et $U_2 = \phi_2 T(V_2)$. On pose alors

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

$$\phi(f) = \begin{cases} \phi_1(f) \text{ si } f \in \Sigma_1 \\ \phi_2(f) \text{ si } f \in \Sigma_2 \end{cases}$$

On obtient alors $\phi T(V_1 \otimes V_2) = U_1 \otimes U_2$ puisque, pour $i \leq p$,

$$\phi T(\Pi^i_{p+p'}.(V_1 \otimes V_2)) = \phi T((\Pi^i_p.V_1) \otimes O_{q'}) = \bigcup_{v \in \Pi^i_p.V_1} \phi T(v \otimes O_{q'}) =$$

$$\bigcup_{v \in \Pi^i_p.V_1} \phi T(v) \otimes O_{q'} = \phi T(V_1) \otimes O_{q'} = U_1 \otimes O_{q'} = \Pi^i_{p+p'}.(U_1 \otimes U_2).$$

La démonstration est analogue pour $p < i \leq p+p'$.

c) Si $U = U_1.U_2$ avec $U_1 \in P(MT)^p_q$ et $U_2 \in P(MT)^q_r$, il existe Σ_1, Σ_2, U_1, U_2, ϕ_1, ϕ_2 tels que $U_1 = \phi T(V_1)$, $U_2 = \phi T(V_2)$. On définit alors Σ et ϕ comme précédemment et on a, pour $i \leq p$, $\phi T(\Pi^i_p.V_1.V_2) =$

$$\phi T(\bigcup_{\tilde{v}.\Theta \in \Pi^i_p.V_1} \{\tilde{v}.<\tilde{v}_1.\Theta_1,\ldots,\tilde{v}_k.\Theta_k> \ / \ \tilde{v}_i.\Theta_i \in \Pi^{\Theta(i)}_q.V_2\}) =$$

$$\bigcup_{\tilde{v}.\Theta \in \Pi^i_p.V_1} \{\phi(\tilde{v}).<\phi(\tilde{v}_1).\Theta_1,\ldots,\phi(\tilde{v}_k).\Theta_k> \ / \ \tilde{v}_i.\Theta_i \in \Pi^{\Theta(i)}_q.U_2\} =$$

$$\bigcup_{\tilde{u}.\Theta \in \Pi^i_p.U_1} \{\tilde{u}.<\tilde{u}_1.\Theta_1,\ldots,\tilde{u}_k.\Theta_k> \ / \ \tilde{u}_i.\Theta_i \in \Pi^{\Theta(i)}_q.U_2\} = \Pi^i_p.U_1.U_2.$$

D'où $\phi T(V_1.V_2) = U_1.U_2$.

d) Si $U = U'^*$ avec $U' \in P(MT)^p_p$, il existe Σ, V', ϕ tel que $U' = \phi T(V')$. On a alors $\phi T(Id_p + V') = Id_p + U'$ et d'après ce qui précède,

$\phi T((Id_p + V')^n) = (Id_p + U')^n$ d'où

$\phi T(V'^*) = \sum_n \phi T((Id_p + V')^n) = \sum_n (Id_p + U')^n = U'^* = U.$

cqfd.

Nous allons maintenant obtenir la réciproque de ce résultat comme cas particulier d'un résultat plus général (proposition 3.17) que nous démontrerons après avoir démontré le lemme suivant.

Lemme 3.15 *Si σ est une 1-substitution linéaire de MT dans* $P(M'T)$, *si* $U \in P(MT)^p_q$ *et* $V \in P(MT)^q_r$, *et si* $U.E(V) = U$, *alors* $\sigma(U.V) = \sigma(U).\sigma(V)$ (1).

---

(1) Comme pour les morphismes, les 1-substitutions sur MT sont étendues à $P(MT)$ par $\Pi^i_p\ \sigma(U) = \bigcup_{u \in \Pi^i_p.U} \sigma(u)$.

Démonstration :

$\boxed{A}$ Pour que $\sigma(U.V) = \sigma(U)\ \sigma(V)$, il suffit que $\forall\ i \leq p$, $\Pi_p^i.\sigma(U.V) = \Pi_p^i.\sigma(U).\sigma(V)$. Or $\Pi_p^i.\sigma(U.V) = \bigcup_{u\in\Pi_p^i.U.V} \sigma(u) = \sigma(\Pi_p^i.U.V)$ et $\Pi_p^i.\sigma(U).\sigma(V) = \left(\bigcup_{u\in\Pi_p^i.U} \sigma(u)\right).\sigma(V) = \sigma(\Pi_p^i.U).\sigma(V)$

et comme d'autre part $U.E(V) = U$ entraîne $\Pi_p^i.U.E(V) = \Pi_p^i.U$, il suffit donc de montrer le résultat pour $U \in P(M\mathcal{T})_p^1$ et $V \in P(M\mathcal{T})_q^p$.

Par ailleurs $U.V = \bigcup_{u\in U} \{u\}.V$ d'où $\sigma(U.V) = \bigcup_{u\in U} \sigma(\{u\}.V)$ et

$$\sigma(U).\sigma(V) = \left(\bigcup_{u\in U} \sigma(u)\right).\sigma(V) = \bigcup_{u\in U} (\sigma(u).\sigma(V)).$$

Comme de plus $U.E(V) = U$, on doit avoir, pour tout $u \in U$, $\{u\}.E(V) \neq \emptyset$ car sinon u appartiendrait à U mais pas à $U.E(V)$ puisque par définition $U.E(V) = \{u \in U\ /\ u.E(V) \neq \emptyset\}$.

On est donc ramené à montrer que $\sigma(u.V) = \sigma(u).\sigma(V)$ $M\mathcal{T}_p^1$ tel que $u.E(V) \neq 0$ (et donc $u.E(V) = u$).

$\boxed{B}$ Montrons d'abord que $\sigma(u.V) \subset \sigma(u).\sigma(V)$. Par définition $u.V = \tilde{u}.\Theta.V = \{\tilde{u}.\langle v_1,\ldots,v_n\rangle\ /\ v_i \in \Pi_p^{\Theta(i)}.V\}$ et

$$\sigma(u.V) = \bigcup_{v_i\in\Pi_p^{\Theta(i)}.V} \sigma(\tilde{u}.\langle v_1,\ldots,v_k\rangle) = \bigcup_{v_i\in\Pi_p^{\Theta(i)}.V} \sigma(\tilde{u}).\langle\sigma(v_1),\ldots,\sigma(v_k)\rangle.$$

Or $\sigma(v_i) \subset \sigma(\Pi_p^{\Theta(i)}.V)$ d'où

$$\sigma(u.V) \subset \sigma(\tilde{u}).\langle\sigma(\Pi_p^{\Theta(1)}.V),\ \ldots,\sigma(\Pi_p^{\Theta(k)}.V)\rangle =$$
$$\sigma(\tilde{u}).\langle\Pi_p^{\Theta(1)}.\sigma(V),\ldots,\Pi_p^{\Theta(k)}.\sigma(V)\rangle = \sigma(\tilde{u}).\Theta.\sigma(V) = \sigma(\tilde{u}.\Theta).\sigma(V) = \sigma(u).\sigma(V).$$

$\boxed{C}$ Montrons ensuite que $\sigma(u).\sigma(V) \subset \sigma(u.V)$.

Soit $w \in \sigma(u).\sigma(V) = \sigma(\tilde{u}).\Theta.\sigma(V) = \sigma(\tilde{u}).\sigma(\Theta.V)$; il existe donc $\tilde{t}.\bar{\Theta} \in \sigma(\tilde{u})$, $v_1,\ldots,v_m$ avec $v_i \in \Pi_k^{\bar{\Theta}(i)}\ \sigma(\Theta.V)$ tels que $w = \tilde{t}.\langle v_1,\ldots,v_m\rangle$. De plus, comme σ est une 1-substitution linéaire, $\bar{\Theta}$ est une injection de Θ_k^m.

Par définition de $E(V)$, on a bien $\Theta.E(V) = E(\Theta.V)$ d'où, comme $u.E(V)$ n'est pas vide par hypothèse, et que $u.E(V) = \tilde{u}.\Theta.E(V) = \tilde{u}.E(\Theta.V)$, aucune des composantes de $\Theta.V$ n'est vide. On choisit alors pour chaque $j \in [k]$ un élément $\bar{w}_j$ dans $\sigma(\Pi_k^j.\Theta.V)$ qui n'est pas vide non plus.

On pose ensuite pour $i \in [k]$, en utilisant le fait que $\bar{\Theta}$ est une injection.

$$v'_i = \begin{cases} v_j & \text{si } j \text{ est l'unique élément de } [m] \text{ tel que } \bar{\Theta}(j) = i \\ \bar{w}_i & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit que $\tilde{t}.\bar{\Theta}.\langle v'_1,\ldots,v'_k\rangle = \tilde{t}.\langle v'_{\bar{\Theta}(1)},\ldots,v'_{\bar{\Theta}(m)}\rangle = \tilde{t}.\langle v_1,\ldots,v_m\rangle = w$.

Remarquons ensuite que $v_j \in \Pi_k^{\bar{\Theta}(j)}\sigma(\Theta.V)$, d'où si $v'_i = v_j$, $\bar{\Theta}(j) = i$ et donc $v'_i \in \Pi_k^i\sigma(\Theta.V) = \sigma(\Pi_k^{\Theta(i)}.V)$. On a donc pour tout $i \leq k$, $v'_i \in \sigma(\Pi_k^{\Theta(i)}.V)$. Il existe donc, pour tout $i \leq k$, $v''_i \in \Pi_k^{\Theta(i)}.V$ tel que $v'_i \in \sigma(v''_i)$. On a donc $w = \tilde{t}.\bar{\Theta}.\langle v'_1,\ldots,v'_k\rangle \in \sigma(\tilde{u}).\langle\sigma(v''_1),\ldots,\sigma(v''_k)\rangle$ et comme σ est un morphisme $\sigma(\tilde{u}).\langle\sigma(v''_1),\ldots,\sigma(v''_k)\rangle = \sigma(\tilde{u}.\langle v''_1,\ldots,v''_k\rangle)$. Comme par ailleurs $v''_i \in \Pi_k^{\Theta(i)}.V$, $\tilde{u}.\langle v''_1,\ldots,v''_k\rangle \in u.V$ d'où $\sigma(\tilde{u}.\langle v''_1,\ldots,v''_k\rangle) \subset \sigma(u.V)$ d'où $w \in \sigma(u.V)$.

cqfd.

Remarque : Les hypothèses posées dans l'énoncé du lemme 3.15 ne sont pas utilisées dans la partie B de la démonstration. On a donc, pour toute 1-substitution σ, $\sigma(U.V) \subset \sigma(U).\sigma(V)$. Mais ces hypothèses sont indispensables pour la partie C de la démonstration : l'exemple 1.12 fournit un 1-morphisme linéaire ϕ (cas particulier de 1-substitution linéaire), un élément u et une partie W tels que $u.E(\langle W,\emptyset\rangle) = \emptyset$ et $\phi(u).\phi(\langle W,\emptyset\rangle) \neq \phi(u.\langle W,\emptyset\rangle)$. De la même façon l'exemple 1.13 montre que l'hypothèse de linéarité est indispensable.

On dira qu'une 1-substitution σ de MT dans $P(M'T)$ est **rationnelle** si pour tout $u \in MT_q^p$, $\sigma(u)$ est une partie rationnelle de $P(M'T)_q^p$.

Proposition 3.16 *Une 1-substitution σ de $T(\Sigma)$ dans $P(M\mathcal{T})$ est rationnelle ssi $\forall f \in \Sigma$ $\sigma(f)$ est une partie rationnelle.*

Démonstration : La condition nécessaire est immédiate puisque Σ est une partie de $T(\Sigma)$. La condition suffisante provient de ce que tout élément u de $T(\Sigma)$ s'écrit $\tilde{u}.\Theta$; on a donc $\sigma(u) = \sigma(\tilde{u}).\sigma(\Theta) = \sigma(\tilde{u}).\Theta$ et que $\tilde{u}$ se décompose de façon unique en produit tensoriel et produit de composition.

cqfd.

Proposition 3.17 *Soient σ une 1-substitution rationnelle linéaire de $M\mathcal{T}$ dans $P(M'\mathcal{T})$ et U une partie rationnelle de $P(M\mathcal{T})^p_q$. Alors $\sigma(U)$ est une partie rationnelle de $P(M'\mathcal{T})^p_q$.*

Démonstration : On va démontrer par récurrence sur la formation des parties rationnelles que si U est une partie rationnelle de $P(M\mathcal{T})^p_q$, alors, quelle que soit la sous-identité E de $P(M\mathcal{T})^q_q$, $\sigma(U.E)$ est une partie rationnelle. La proposition sera obtenue en posant $E = Id_q$.

a) Soit U un polynôme de $P(M\mathcal{T})^p_q$. $U' = U.E$ est encore un polynôme et donc $\Pi^i_p.U'$ est fini pour tout $i \leq p$, d'où $V_i = \sigma(\Pi^i_p.U') = \bigcup_{u \in \Pi^i_p.U'} \sigma(u)$ est une partie rationnelle. D'où $V = (V_1 \otimes \ldots \otimes V_p).\langle Id_q,\ldots,Id_q\rangle$ est encore rationnelle. Or $\Pi^i_p.V = O_{q(i-1)} \otimes V_i \otimes O_{q(p-i)}.\langle Id_q,\ldots,Id_q\rangle = V_i = \sigma(\Pi^i_p.U') = \Pi^i_p.\sigma(U')$ d'où $V = \sigma(U')$.

b) Soit $U = U_1.U_2$. On a alors $U.E = U_1.U_2.E = U_1.E(U_2.E).U_2.E$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\sigma(U_1.E(U_2.E))$ et $\sigma(U_2.E)$ sont rationnelles et donc aussi $\sigma(U_1.E(U_2.E)).\sigma(U_2.E))$. Or $U_1.E(U_2.E) = U_1.E(U_2.E).E(U_2.E)$ d'où d'après le lemme 3.15,

$\sigma(U.E) = \sigma(U_1.E(U_1.E).U_2.E) = \sigma(U_1.E(U_1.E)).\sigma(U_2.E)$ qui est rationnelle.

c) Si $U = U_1 \otimes U_2$ avec $U_1 \in P(M\mathcal{T})^p_q$ et $U_2 \in P(M\mathcal{T})^{p'}_{q'}$ et si $E \in P(M\mathcal{T})^{q+q'}_{q+q'}$, alors E s'écrit $E_1 \otimes E_2$ avec $E_1 \in P(M\mathcal{T})^q_q$ et $E_2 \in P(M\mathcal{T})^{q'}_{q'}$. On a alors $U.E = (U_1 \otimes U_2).(E_1 \otimes E_2) = (U_1.E_1) \otimes (U_2.E_2)$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\sigma(U_1.E_1)$ et $\sigma(U_2.E)$ sont rationnelles, donc aussi $\sigma(U_1.E_1) \otimes \sigma(U_2.E_2)$. Or $\sigma(U_1.E_1) \otimes \sigma(U_2.E_2) = \sigma(U_1.E_1 \otimes U_2.E_2)$; en effet $\Pi^i_{p+p'}.(\sigma(U_1.E_1) \otimes \sigma(U_2.E_2)) = (\Pi^i_p.\sigma(U_1.E_1)) \otimes 0_{q'} =$

$$\left(\bigcup_{u \in \Pi^i_p.U_1.E_1} \sigma(u)\right) \otimes 0_{q'} = \bigcup_{u \in \Pi^i_p.U_1.E_1} \sigma(u) \otimes 0_{q'} =$$

$$\bigcup_{u' \in \Pi^i_{p+p'}.(U_1.E_1 \otimes U_2.E_2)} \sigma(u') = \Pi^i_{p+p'}.\sigma(U_1.E_1 \otimes U_2.E_2).$$

$\sigma(U.E)$ est donc bien rationnelle.

d) Si $U = V^*$ avec $V \in P(M\mathcal{T})^p_p$. Alors $U.E = (Id_p + V)^+.E$. Posons $W = Id_p + V$ et considérons la suite de sous-identités

$$\begin{aligned} E_0 &= E \\ E_1 &= E(W.E) \\ &\vdots \\ E_{n+1} &= E(W.E_n) = E(W^n.E). \end{aligned}$$

On a alors pour tout $n \geq 1$, $W^{n+1}.E = W.E_n.W^n.E$ et en vertu du lemme 3.11, puisque $E_n.E_n = E_n$, $\sigma(W^{n+1}.E) = \sigma(W.E_n).\sigma(W^n.E)$. On en déduit par récurrence que, pour $n \geq 1$, $\sigma(W^n.E) = \sigma(W.E_{n-1}).\sigma(W.E_{n-2}) \ldots \sigma(W.E_0)$ qu'on écrira $\prod_{i=1}^{n} \sigma(W.E_{n-i})$.

D'autre part, la suite E_n est croissante ; en effet $E_{n+1} = E((Id_p + V).E_n) = E(E_n + V.E_n) = E_n + E(V.E_n)$. On a donc $E_n \subset E_{n+1}$. De plus cette suite est majorée par I_p. Elle est donc constante à partir d'un certain rang n_0. On pose alors $F = E_{n_0}$ et on obtient

$$\sigma(W^{n_0+q}.E) = \sigma(W.F)^q. \prod_{i=1}^{n_0} \sigma(W.E_{n_0-i}).$$

On en déduit que, comme $V^*.E = W^+.E =$

$$(\sum_{n=1}^{\infty} W^n).E = \sum_{n=1}^{\infty} W^n.E,\ \sigma(V^*E) = \sigma(\sum_{n=1}^{\infty} W^n.E) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(W^n.E) =$$

$$\sum_{q=1}^{n_0} \prod_{i=1}^{q} \sigma(W.E_{q-i}) + \sum_{q=1}^{\infty} \sigma(W.F)^q. \prod_{i=1}^{n_0} \sigma(W.E_{n_0-i})\ (*).$$

Posons $S = \prod_{i=1}^{n_0} \sigma(W.E_{n_0-i}) = \sigma(W^{n_0}.E)$ et montrons que pour tout $q \geq 1$ $\sigma(W.F)^q.S = \sigma(Id_p + V.F)^q.S$. En effet, pour $q = 1$, $\sigma(Id_p + V.F).S = (Id_p + \sigma(V.F)).S = S + \sigma(V.F).S$. Or comme $S = \sigma(W^{n_0}.E)$ et que $F = E_{n_0} = E(W^{n_0}.E)$, d'après le lemme 3.15,

$$\sigma(Id_p + V.F).S = \sigma(W^{n_0}.E) + \sigma(V.W^{n_0}.E) = \sigma(W^{n_0}.E + V.W^{n_0}.E) =$$
$$\sigma(W^{n_0+1}.E) = \sigma(W.F).S.$$

Pour $q + 1$, $\sigma(Id_p + VF)^{q+1}.S = \sigma(Id_p + VF).\sigma(Id_p + VF)^q.S =$
$\sigma(Id_p + VF).\ \sigma(WF)^q.S = \sigma(Id_p + VF).\ \sigma(W^{n_0+q}.E) =$
$\sigma(W^{n_0+q}.E) + \sigma(VF).\ \sigma(W^{n_0+q}.E)$ et comme $F = E(W^{n_0+q}.E)$ ceci est égal à
$\sigma(W^{n_0+q}.E + V.W^{n_0+q}.E) = \sigma(W^{n_0+q+1}.E) = \sigma(W.F)^{q+1}.S.$

L'égalité (*) devient donc

$$\sigma(V^*.E) = \sum_{q=1}^{n_0} \prod_{i=1}^{q} \sigma(W.E_{q-i}) + \sum_{q=1}^{\infty} \sigma(Id_p+V.F)^q. \prod_{i=1}^{n_0} \sigma(W.E_{n_0-i})$$

et comme $\sum_{q=1}^{\infty} \sigma(Id_p + V.F)^q.S = (\sum_{q=1}^{\infty} \sigma(Id_p + V.F)^q).S = \sigma(Id_p + V.F)^+.S$

on obtient $\sigma(V^*.E) = \sum_{q=1}^{n_0} \prod_{i=1}^{q} \sigma(W.E_{q-i}) + \sigma(Id_p+V.F)^+. \prod_{i=1}^{n_0} \sigma(W.E_{n_0-i}).(**).$

Or d'après l'hypothèse de récurrence, quelle que soit la sous-identité E_r, $\sigma(V.E_r)$ est une partie rationnelle, et donc aussi $E_r+\sigma(V.E_r) = \sigma(E_r+V.E_r) = \sigma(W.E_r)$. Compte tenu de l'égalité (**) il suffit pour que $\sigma(V^*.E)$ soit

rationnelle, que $\sigma(Id_p + V.F)^+$ soit rationnelle.

Or $\sigma(Id_p + V.F) = Id_p + \sigma(V.F)$ d'où $\sigma(Id_p + V.F)^+ = (Id_p + \sigma(V.F))^+ = \sigma(V.F)^*$; or d'après l'hypothèse de récurrence $\sigma(V.F)$ est rationnelle, donc aussi $\sigma(V.F)^*$.

cqfd.

Tout 1-morphisme linéaire étant un cas particulier de 1-substitution linéaire finie et donc de 1-substitution rationnelle linéaire, on obtient immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 3.18 *Si* U *est une partie rationnelle de* $P(MT)^p_q$ *et* ϕ *un 1-morphisme linéaire de* MT *dans* $P(M'T)$, $\phi(U)$ *est une partie rationnelle de* $P(M'T)^p_q$.

Cette propriété n'est plus vraie si on considère des k-morphismes linéaires ainsi qu'on le verra ci-dessous.

Exemple 3.19 Soit l'alphabet $\Sigma = \{c,\bar{c},b,a\}$ avec $d(a) = 0$, $d(c) = d(b) = 1$, $d(\bar{c}) = 2$; et soit le 2-morphisme linéaire de $T(\Sigma)$ dans lui-même défini par

$$\phi(c) = \langle 2;\bar{c}(x_1,x_2),a\rangle$$
$$\phi(b) = \langle 2;b(x_1),b(x_2)\rangle.$$

On pose $U = \{\langle 1;c(x_1)\rangle\}$

et $V = \{\langle 1;b(x_1)\rangle\}$.

Il est facile de voir que

$$U.V^* = \{\langle 1;c(b^n(x_1)) \ / \ n \geq 0\}$$

et donc que $\phi(U.V^*) = \{\langle 2;\bar{c}(b^n(x_1),b^n(x_2)),a\rangle \ / \ n \geq 0\}$.

Nous avons vu (exemple 2.20) que cette partie n'était pas reconnaissable.

Nous serons bientôt en mesure de démontrer rigoureusement que cette partie n'est pas rationnelle lorsque nous aurons démontré l'équivalence des parties rationnelles et reconnaissables. $\perp$

Nous rencontrerons encore par la suite le fait que les k-morphismes linéaires ont beaucoup moins de "bonnes" propriétés que les 1-morphismes linéaires. Les résultats figurant dans [D] explicitent ce phénomène.

Les 1-morphismes de la forme ϕT étant des cas particuliers de 1-morphismes linéaires, il découle des propositions 3.14 et 3.17 le résultat suivant :

<u>*Théorème 3.20*</u> *Une partie* U *de* $P(MT)^p_q$ *est rationnelle ssi il existe un alphabet gradué fini* Σ, *un 1-morphisme* ϕ *de* $\tilde{T}(\Sigma)$ *dans* M *et une partie rationnelle* V *de* $P(T(\Sigma))^p_q$ *tels que* $U = \phi T(V)$.

Une application importante de ce théorème est qu'elle permet d'établir un lien entre les bimorphismes et les parties rationnelles d'un produit de magmoïde (cf. [D]).

Soient en effet trois alphabets gradués Σ,Δ,Γ, un 1-morphisme ϕ de $T(\Sigma)$ dans $T(\Delta)$, un 1-morphisme ψ de $T(\Sigma)$ dans $T(\Gamma)$ et une partie rationnelle U de $T(\Sigma)^1_0$. Considérons la relation $R = \{(\phi(t),\psi(t)) \ / \ t \in U\}$ de $T(\Delta)^1_0 \times T(\Gamma)^1_0$. On peut ne considérer que les restrictions de ϕ et ψ à $\tilde{T}(\Sigma)$ ce qui induit un 1-morphisme $\phi \times \psi$ de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans le magmoïde décomposable $(T(\Delta)\times T(\Gamma))D$ et un 1-morphisme $(\phi \times \psi)T$ de $T(\Sigma)$ dans $(T(\Delta) \times T(\Gamma))DT$. On a alors pour $t \in T(\Sigma)^1_0 = \tilde{T}(\Sigma)^1_0$, $(\phi\times\psi)T(t) = \phi\times\psi(t) = (\phi(t),\psi(t)) \in (T(\Delta) \times T(\Gamma))D^1_0 \simeq (T(\Delta) \times T(\Gamma))^1_0$ et donc $(\phi\times\psi)T(U) = R$.

Réciproquement si R est une partie rationnelle de $(T(\Delta) \times T(\Gamma))DT^1_0 \simeq T(\Delta)^1_0 \times T(\Gamma)^1_0$ il existe un 1-morphisme ϕ de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans $T(\Delta) \times T(\Gamma)D$ et une partie rationnelle U de $\tilde{T}(\Sigma)^1_0$ tels que $R = \phi T(U)$. Les projections canoniques p_1 et p_2 de $T(\Delta) \times T(\Gamma)$ dans $T(\Delta)$ et $T(\Gamma)$ induisent des 1-morphismes p'_1 et p'_2 de $T(\Delta) \times T(\Gamma)DT$ dans $T(\Delta)$ et $T(\Gamma)$ et il est facile de voir que $R = \{(p'_1(\phi T(t)), p'_2(\phi T(t))) \ / \ t \in U\}$.

3. RATIONALITÉ ET RECONNAISSABILITÉ

Ce paragraphe est consacré à la comparaison des notions de rationalité et de reconnaissabilité pour les parties d'un magmoïde projetable libre finiment engendré et à un corollaire important qui est que la famille des parties rationnelles est fermée par intersection avec une partie reconnaissable. Remarquons tout d'abord que les parties rationnelles sont des éléments de $P(MT)^p_q$ et donc de $[P(MT^1_q)]^p$ et que les parties reconnaissables sont dans $P(MT^p_q)$. Comme tout élément de $[P(MT^1_q)]^p$ peut être considéré comme un élément de $P(MT^p_q)$, il n'est pas impossible qu'une partie rationnelle soit reconnaissable ; il n'en est pas de même dans l'autre sens : pour qu'une partie reconnaissable de $P(MT^p_q)$ puisse être rationnelle, il faudra nécessairement que $p = 1$. La même condition sera nécessaire quand on étudiera l'intersection d'une partie rationnelle et d'une partie reconnaissable.

Proposition 3.21 *Soit Σ un alphabet gradué fini et soient p et q deux entiers. Alors toute partie rationnelle de $P(T(\Sigma))^p_q$ est reconnaissable.*

Démonstration :

a) Montrons d'abord que tout polynôme est reconnaissable.

Soit $U = \langle U_1,\ldots,U_p\rangle$ un polynôme de $P(T(\Sigma))^p_q$. Chaque U_i est donc une partie finie de $T(\Sigma)^1_q$. Comme $U =$

$$\langle U_1,T(\Sigma)^1_q,\ldots,T(\Sigma)^1_q\rangle \cap \langle T(\Sigma)^1_q, U_2,\ldots, T(\Sigma)^1_q\rangle \cap \ldots \cap \langle T(\Sigma)^1_q, \ldots, U_p\rangle$$

et que l'intersection de parties reconnaissables est encore reconnaissable ; il suffit de montrer que chaque $\langle T(\Sigma)^1_q,\ldots,U_i,\ldots,T(\Sigma)^1_q\rangle$ est reconnaissable. Et comme $\langle T(\Sigma)^1_q,\ldots,U_i,\ldots,T(\Sigma)^1_q\rangle = \sum_{u\in U_i} \langle T(\Sigma)^1_q,\ldots,\{u\},\ldots,T(\Sigma)^1_q\rangle$ et que l'union de parties reconnaissables est encore reconnaissable, il suffit donc de montrer que $\langle T(\Sigma)^1_q,\ldots,\{u\},\ldots,T(\Sigma)^1_q\rangle$ est reconnaissable.

Soit donc $U \in T(\Sigma)^p_q$, $i_0 \leq p$ et $u \in T(\Sigma)^1_q$ tel que

$$\Pi^i_p.U = \begin{cases} \{u\} \text{ si } i = i_0 \\ T(\Sigma)^1_q \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit n le nombre de symboles de Σ figurant dans u (i.e. n = taille (u)). Soit E_n l'ensemble (fini) des éléments de $T(\Sigma)^1_q$ de taille inférieure ou égale à n. E_n contient donc en particulier u et les éléments $\Pi^i_q = \langle q;x_i\rangle$. Considérons maintenant l'ensemble d'états $E = \{e_v \mid v \in E_n\} \cup \{e_w\}$ ou w est un élément de $T(\Sigma)^1_q$ n'appartenant pas à E_n. On définit alors un 1-morphisme ϕ de $T(\Sigma)$ dans le magmoïde fonctionnel F(E) par : si $f \in \Sigma_k$,

$$\phi(f)(e_{v_1},\ldots,e_{v_k}) = \begin{cases} e_{f.\langle v_1,\ldots,v_k\rangle} \text{ si } f\langle v_1,\ldots,v_k\rangle \in E_n \\ e_w \text{ sinon.} \end{cases}$$

On montre alors aisément par récurrence que pour $u \in T(\Sigma)^1_k$

$$\phi(u)(e_{v_1},\ldots,e_{v_k}) = \begin{cases} e_{u.\langle v_1,\ldots,v_k\rangle} \text{ si } u.\langle v_1,\ldots,v_k\rangle \in E_n \\ e_w \text{ sinon.} \end{cases}$$

On considère alors l'automate $\langle E,\phi,s,S\rangle$ avec

$s(p,q) = (e_{\Pi^1_q},\ldots,e_{\Pi^q_q})$ et

$S(p,q) = E \times E \ldots \times \{e_u\} \times \ldots \times E.$

On a alors pour $v \in T(\Sigma)^1_q$, $\phi(v)\ s(p,q) = u$ ssi $v = u$ d'où $\phi(v)\ s(p,q) \in S(p,q)$ ssi $\Pi^{i_0}_p.v = u$ et donc la partie reconnue par cet automate est bien U.

b) On montre ensuite que si $U \in P(T(\Sigma))^p_q$ et $V \in P(T(\Sigma))^q_r$ sont deux parties reconnaissables, alors U.V est reconnaissable. En effet, soient $\langle Q,\phi,s,S\rangle$ et $\langle Q',\phi',s',S'\rangle$ les deux automates reconnaissant U et V. Comme $U \in [P(T(\Sigma))^1_q]^P$ on doit nécessairement avoir $S(p,q) = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_p$; de même $S'(q,r) = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_q$.

On définit alors le morphisme ψ de $T(\Sigma)$ dans $F(P(Q \cup Q'))$ pour $f \in \Sigma_k$, $E_1,\ldots,E_k \subset Q \cup Q'$ fixés, on pose

$$\bar{E}_1 = \{\phi'(f)(e_1,\ldots,e_k) \ / \ \forall\ i \leq k,\ e_i \in E_i \cap Q'\},$$

$$\bar{E}_2 = \{\phi\ (f)(e_1,\ldots,e_k) \ / \ \forall\ i \leq k,\ e_i \in E_i \cap Q\ \},$$

$$\bar{E}_3 = \{\Pi_q^i.s(p,q) \ / \ \exists\ i \leq q : \bar{E}_1 \cap B_i \neq \emptyset\}$$

et on pose $\psi(f)(E_1,\ldots,E_k) = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2 \cup \bar{E}_3$.

Intuitivement, la signification de $\bar{E}_3$ est la suivante : si ϕ (et donc ψ) permet d'obtenir un état terminal de B_i, on considère que ψ permet d'obtenir aussi l'état initial correspondant de $s(p,q)$.

On pose alors $\bar{s}(p,r) = (\hat{E}_1,\ldots,\hat{E}_r)$ avec

$$\hat{E}_i = \{\Pi_r^i.s'(q,r)\} \cup \{\Pi_q^j.s(p,q) \ / \ \exists\ j \leq q : \Pi_r^i.s'(q,r) \in B_i\}.$$

Autrement dit le $i^{\text{ème}}$ état initial de $\bar{s}$ est le $i^{\text{ème}}$ état initial de s' auquel on a ajouté les états initiaux correspondants de s si cet état est aussi terminal.

On pose aussi $\bar{S}(p,r) = E_1 \times E_2 \times E_p$ avec $E \in E_i$ ssi $E \cap A_i \neq \emptyset$.

Ceci définit donc ainsi un automate dont nous affirmons qu'il reconnaît U.V. Pour obtenir ce résultat, il suffit de montrer que $\Pi_p^i.U.V = \{w \in T(\Sigma)_r^1 \ / \ \psi(w).\bar{s}(p,r) \in E_i\}$.

Or si $w \in \Pi_p^i.U.V$, il existe $\tilde{u}.\theta \in \Pi_p^i.U$, $v_1 \in \Pi_q^{\theta(1)}.V,\ldots,v_m \in \Pi_q^{\theta(m)}.V$ tels que $w = \tilde{u}.\langle v_1,\ldots,v_m\rangle$. On a alors $\psi(w) = \psi(\tilde{u}).\langle\psi(v_1),\ldots,\psi(v_m)\rangle$. Comme $v_j \in \Pi_q^{\theta(j)}.V$, $\phi'(v_j)\ s'(q,r) \in B_{\theta(j)}$ et donc, par définition $\psi(v_j)\ \bar{s}(p,r)$ contient $\Pi_q^{\theta(j)}.s(p,q)$ d'où $\psi(w)$ contient $\psi(\tilde{u}).\langle\Pi_q^{\theta(1)}.s(p,q),\ldots,\Pi_q^{\theta(m)}.s(p,q)\rangle = \psi(\tilde{u}).\theta.s(p,q) = \psi(\tilde{u}.\theta).s(p,q)$ qui appartient à A_i d'où $\psi(w)\ \bar{s}(p,r) \in E_i$.

Réciproquement, si $\psi(w)\ \bar{s}(p,r) \in E_i$, par définition de ψ, w peut s'écrire $\tilde{u}.\langle v_1,\ldots,v_k\rangle$ tels que $\psi(v_i).\bar{s}(p,r)$ contient un état terminal de Q'. (En effet d'après la construction de ψ pour faire apparaître des états de Q dans $\psi(v)\bar{s}(p,r)$, il faut avoir fait apparaître précédemment des états terminaux de Q'). Il existe donc une application Θ telle que $\psi(v_i)\bar{s}(p,r) \cap B_{\Theta(i)} \neq \emptyset$; on en déduit que $v_i \in \Pi_q^{\Theta(i)}.V$; et donc que $w \in \tilde{u}.\Theta.V$. Il suffit alors de montrer que $\tilde{u}.\Theta \in \Pi_p^i.U$, ce qu'on déduit de la construction de ψ et en particulier de $\bar{E}_3$ et $\bar{E}_2$.

c) Soit maintenant une partie U reconnaissable de $P(T(\Sigma))_p^p$ et soit $\langle Q,\phi,s,S\rangle$ l'automate qui reconnaît U. Comme précédemment $S(p,p) = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_p$. On définit alors le morphisme ψ de $T(\Sigma)$ dans $F(\mathcal{P}(Q))$ par : pour $f \in \Sigma_k$, $E_1,\ldots,E_k$ inclus dans Q,

on pose $\bar{E}_1 = \{\phi(f)(e_1,\ldots,e_k) \ / \ \forall\ i \leq k,\ e_i \in E_i\}$

$$\bar{E}_2 = \{\Pi_p^j.s(p,p) \ / \ \exists\ j \leq p\ \bar{E}_1 \cap A_j \neq \emptyset\}$$

et $\psi(f)(E_1,\ldots,E_k) = \bar{E}_1 \cup \bar{E}_2$.

On pose ensuite $\bar{s}(p,p) = s(p,p)$ et $\bar{S}(p,p) = \mathcal{E}_1 \times \ldots \times \mathcal{E}_p$ avec $\mathcal{E}_i = \{E \subset Q \ / \ E \cap A_i \neq \emptyset\}$.

On montre alors de la même manière que ci-dessus que U^* est bien reconnu par l'autoroute $\langle \mathcal{P}(Q),\psi,\bar{s},\bar{S}\rangle$.

d) Soient enfin $U \in P(T(\Sigma))_q^p$ et $V \in P(T(\Sigma))_{q'}^{p'}$ reconnues respectivement par les automates $\langle Q,\phi,s,S\rangle$ et $\langle Q',\phi',s',S'\rangle$. On peut supposer que les ensembles Q et Q' sont disjoints. On considère alors un symbole $\bar{e}$ n'appartenant pas à $Q \cup Q'$ et on définit le 1-morphisme ψ de $T(\Sigma)$ dans $F(Q \cup Q' \cup \{\bar{e}\})$ par

$$\Psi(f)(e_1,\dots,e_k) = \begin{cases} \phi(f)(e_1,\dots,e_k) & \text{si } \forall\, i \le k \quad e_i \in Q \\ \phi'(f)(e_1,\dots,e_k) & \text{si } \forall\, i \le k \quad e_i \in Q' \\ \bar{e} & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose alors $\bar{s}(p+p',q+q') = s(p,q) \times s'(p',q')$

$\bar{S}(p+p',q+q') = S(p,q) \times S'(p',q')$.

Il est immédiat que la partie reconnue par cet automate est bien $U \otimes V$.

On déduit immédiatement des quatre points précédents que toute partie rationnelle de $P(T(\Sigma))$ est reconnaissable.

cqfd.

Montrons maintenant la réciproque - dans le cas où p=1 pour les raisons explicitées au début de ce paragraphe.

Proposition 3.22 *Soient Σ un alphabet gradué fini, p un entier et U une partie de $T(\Sigma)^1_p$. Si U est reconnaissable alors U est rationnelle.*

Démonstration : Soit $\langle Q,\phi,s,S\rangle$ l'automate reconnaissant U. Supposons que Q ait k éléments noté $e_1,\dots,e_k$. On construit alors $V \in P(T(\Sigma))^k_k$ de la façon suivante : pour $i \le k$,

$$\Pi^i_k.V = \{f.\langle \Pi_k^{m_1},\dots,\Pi_k^{m_q}\rangle \ / \ f \in \Sigma,\ d(f) = q,\ \phi(f)(e_{m_1},\dots,e_{m_q}) = e_i\}.$$

Il est clair que V est un polynôme. On montre alors aisément par récurrence sur la taille des éléments de $T(\Sigma)^1_n$ que pour $i \le k$,

$$\Pi^i_k.V^* = \{\tilde{u}.\langle \Pi_k^{m_1},\dots,\Pi_k^{m_q}\rangle \ / \ \tilde{u} \in \tilde{T}(\Sigma)^1_q,\ \phi(\tilde{u})(e_{m_1},\dots,e_{m_q}) = e_i\}.$$

On pose alors $V' = \{\Pi^i_k \ / \ e_i \in S(1,p)\} \in P(T(\Sigma))^1_k$ et

$W = \langle W_1,\dots,W_k\rangle \in P(T(\Sigma))^k_p$ avec $W_i = \{\Pi^j_p \ / \ \Pi^j_p.s(1,p) = e_i\}$.

On a d'abord, pour $i \le k$

$$\Pi^i_k.V^*.W = \{u \in T(\Sigma)^1_p \ / \ \phi(u)\ s(1,p) = e_i\}.$$

En effet $v \in \Pi_k^i.V^*.W$

ssi il existe $\tilde{u}, m_1, \ldots, m_q, W_1, \ldots, W_q$ tels que

$\phi(\tilde{u})(e_{m_1}, \ldots, e_{m_q}) = e_i$ et $\forall\, j \leq q \quad W_j \in \Pi_k^{m_j}.W$ et

$v = \tilde{u}.\langle w_1, \ldots, w_q \rangle$

ssi il existe $\tilde{u}, m_1, \ldots, m_q, j_1, \ldots, j_q$ tels que

$\phi(\tilde{u})(e_{m_1}, \ldots, e_{m_q}) = e_i$ et $\forall\, \ell \leq q \quad \Pi_p^{j_\ell}.s(1,p) = e_{m_\ell}$ et

$v = \tilde{u}.\langle \Pi_p^{j_1}, \ldots, \Pi_p^{j_q} \rangle$

ssi il existe $\tilde{u}, j_1, \ldots, j_q$ tels que

$v = \tilde{u}.\langle \Pi_p^{j_1}, \ldots, \Pi_q^{j_1} \rangle$ et $\phi(v).s(1,p) = e_i$.

On a ensuite $V'.V^*.W = \bigcup_{\Pi_k^i \in V'} \Pi_k^i.V^*.W = \bigcup_{i/e_i \in S(1,p)} \Pi_k^i.V^*.W =$

$\bigcup_{e_i \in S(1,p)} \{u \;/\; \phi(u)\; s(1,p) = e_i\}$.

On a donc bien $U = V'.V^*.W$. La partie U est donc bien rationnelle.

cqfd.

Pour simplifier l'écriture nous appellerons **ensemble rationnel** de MT toute partie rationnelle appartenant à $P(MT)_p^1$. Toute composante U_i d'une partie rationnelle $U = \langle U_1, \ldots, U_p \rangle$ appartenant à $P(MT)_q^p$ est donc un ensemble rationnel puisque $U_i \in P(MT)_q^1$ et que $U_i = \Pi_p^i.U$ est rationnel.

De même on appellera **ensemble reconnaissable** toute partie reconnaissable incluse dans MT_p^1. La notion d'ensemble reconnaissable est donc une généralisation de la notion classique de forêt reconnaissable.

Avec ces définitions la proposition 3.22 s'énonce

Proposition 3.22 bis *Tout ensemble reconnaissable d'un magmoïde libre finiment engendré est rationnel.*

Corollaire 3.23 *Soit* Σ *un alphabet gradué fini. Si une partie reconnaissable* U *de* $T(\Sigma)^p_q$ *peut s'identifier à un élément* U' *de* $P(T(\Sigma))^p_q$ *(i.e.* $U = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_p$ *et* $U' = \langle U_1,\ldots,U_p\rangle$*) alors* U' *est rationnelle.*

Démonstration : Si $U = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_p$, où $U_i \subset T(\Sigma)^1_q$ est reconnaissable, chacun des U_i est reconnaissable, donc rationnel, ainsi que $\langle U_1,U_2,\ldots,U_p\rangle = U_1 \otimes U_2 \otimes \ldots \otimes U_p \,.\, \langle Id_q,\ldots,Id_q\rangle$.

cqfd.

Des propositions 3.21 et 3.22 on tire immédiatement.

Théorème 3.24 *Les familles d'ensembles reconnaissables et d'ensembles rationnels d'un magmoïde projetable libre finiment engendré sont les mêmes.*

Ce théorème s'étend aisément aux parties de la forme $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_p$ ainsi qu'il a été fait dans le corollaire 3.23.

Ce dernier théorème, ainsi que le théorème 3.20 permettent de montrer que la famille des ensembles rationnels est fermée par intersection avec un ensemble reconnaissable.

Théorème 3.25 *Soient* p *un entier et* MT *un magmoïde à torsion. Si* U *est une partie rationnelle de* MT^1_p *et* K *une partie reconnaissable de* MT^1_p*, alors* $U \cap K$ *est une partie rationnelle de* MT^1_p.

Démonstration : D'après le théorème 3.20, il existe un alphabet gradué Σ, une partie rationnelle V de $T(\Sigma)^1_q$ et un 1-morphisme ϕ de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans M tels $\phi T(V) = U$. D'après le théorème 3.24, U est aussi reconnaissable ; d'après la proposition 2.16, $\phi T^{-1}(K)$ est une partie reconnaissable, ainsi que $V \cap \phi T^{-1}(K)$. Mais d'après le théorème 3.24 cette partie est rationnelle, ainsi que $\phi T(V \cap \phi T^{-1}(K))$ d'après le théorème 3.20. Or $\phi T(V \cap \phi T^{-1}(K)) = \phi T(V) \cap K = U \cap K$ d'où le résultat.

cqfd.

Enfin on déduit immédiatement du théorème 3.24 et du corollaire 3.18 le résultat suivant :

Proposition 3.26 *Si Σ et Δ sont deux alphabets gradués finis, ϕ un 1-morphisme linéaire de $T(\Sigma)$ dans $T(\Delta)$ et U une partie reconnaissable de $T(\Sigma)^1_q$, $\phi(U)$ est une partie reconnaissable de $T(\Delta)^1_q$.*

Remarque : L'exemple 3.19 montre que cette propriété n'est plus vraie pour les k-morphismes linéaires avec $k > 1$. Par contre elle est encore vraie si U est inclus dans $T(\Sigma)^p_q$ avec $p > 1$. On pourrait le démontrer en raisonnant sur les automates au moyen des méthodes utilisées dans les démonstrations du lemme 3.15 et de la proposition 3.17 : comme pour ces démonstrations, la seule précaution à prendre et de s'assurer qu'une torsion injective non surjective n'élimine pas des "variables" auxquelles on ne pouvait rien "greffer" (cf. exemple 1.12). N'ayant pas besoin de ce résultat par la suite nous laissons au lecteur le plaisir de faire cette démonstration.

CHAPITRE IV

GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DANS LE MAGMOÏDE

De même que les langages engendrés par des grammaires "context-free" sont des composantes de la solution d'un système d'équations algébriques dans un monoïde libre, Boudol [29] a montré que les "forêts" engendrées par des grammaires d'arbres "context-free" au moyen de dérivations descendantes sont les composantes de systèmes d'équations sur un magma libre auquel on a ajouté l'opération de greffe. Il est clair que de tels systèmes d'équations peuvent être facilement écrits comme systèmes d'équations dans le magmoïde. C'est cette notion que nous allons définir dans ce chapitre. Nous y définirons également leurs solutions et nous donnerons quelques propriétés très générales de ces systèmes et de leur solution, qui seront étudiées plus en détail dans les chapitres suivants.

1. DÉFINITION DES SYSTÈMES ALGÉBRIQUES

Soit M un magmoïde décomposable (1) et soit V un alphabet gradué fini dont les éléments seront appelés **symboles non-terminaux** (le terme "variable" étant déjà utilisé). On appelle **système d'équations algébriques sur** M et V, ou plus brièvement **système algébrique** (2) la donnée d'un ensemble d'équations

$$\mathcal{S} = \{X = R_X \mid X \in V\}$$

---

(1) En particulier, M peut être un magmoïde libre finiment engendré, mais on utilisera aussi au chapitre VII le magmoïde décomposable k dil T(Σ) $\mathcal{D}$.

(2) On pourra omettre de préciser M et V lorsqu'ils seront déterminés par le contexte.

où pour chaque X appartenant à V, R_X est une partie de $(M \oplus \mathfrak{T}(V))T^1_{d(X)}$ - donc un élément de $P(M \oplus \mathfrak{T}(V)T)^1_{d(X)}$.

On remarquera que si $M = \mathfrak{T}(\Sigma)$ alors $M \oplus \mathfrak{T}(V) = \mathfrak{T}(\Sigma \cup V)$ et donc $(M \oplus \mathfrak{T}(V))T = T(\Sigma \cup V)$. On retrouve donc bien la définition classique (cf. Boudol [29] par exemple).

2. UNE CONSTRUCTION PRÉLIMINAIRE

Considérons l'ensemble, noté $E(S)$, des applications de V dans $P(MT)$ qui respectent la fibration, i.e. si $E \in E(S)$, alors $\forall X \in V$, $E(X) \in P(MT)^1_{d(X)}$. Si $E \in E(S)$ on écrira parfois E_X au lieu de $E(X)$.

On définit sur $E(S)$ une relation d'ordre par $E \leq E'$ ssi $\forall X \in V$, $E_X \subset E'_X$. Il est clair que muni de cette relation d'ordre $E(S)$ est un treillis complet.

Comme il est possible d'identifier $P(MT)^1_q$ et $P(MT)D^1_q$ pour tout entier q (cf. [AD] chapitre IV), tout élément E de $E(S)$ détermine de façon unique un 1-morphisme de $\tilde{T}(V)$ dans le magmoïde décomposable $P(MT)D$ qui sera noté $\tilde{E}$.

Considérons maintenant l'application i qui à tout élément m de M^1_p associe $\{m\} \in P(MT)^1_p = P(MT)D^1_p$. Comme M est décomposable - il a la propriété de décomposition unique en produit tensoriel - i détermine un unique 1-morphisme $\tilde{i}$ de M dans $P(MT)D$ (cf. [AD] chapitre IV).

BUS LILLE

D'après la définition de la somme directe, il existe un unique 1-morphisme noté $\tilde{i} \oplus \tilde{E}$ de $M \oplus \tilde{T}(V)$ dans $P(MT)D$ qui coïncide avec $\tilde{i}$ sur M et avec $\tilde{E}$ sur $\tilde{T}(V)$. Il existe aussi (cf. [AD] chapitre IV) un unique 1-morphisme noté σ_E de $(M \oplus \tilde{T}(V))T$ dans $P(MT)$ qui coïncide avec $\tilde{i} \oplus \tilde{E}$ sur $M \oplus \tilde{T}(V)^1_p$ compte tenu de l'identité entre $P(MT)^1_p$ et $P(MT)D^1_p$. En particulier sur $\tilde{T}(V)^1_p \subset M \oplus \tilde{T}(V)^1_p$, σ_E coïncide avec $\tilde{i} \oplus \tilde{E}$ donc avec $\tilde{E}$ et pour $X \in V$ on a bien $\sigma_E(X) = E_X$. De même sur M^1_p, σ_E coïncide avec i, et donc sur $MT \subset M \oplus \tilde{T}(V)$, σ_E coïncide avec l'inclusion canonique de MT dans $P(MT)$. De plus comme σ_E est un 1-morphisme dont le codomaine est $P(MT)$, c'est une 1-substitution.

Dans le cas particulier où $M = \tilde{T}(\Sigma)$, on a $\tilde{T}(\Sigma) \oplus \tilde{T}(V) = \tilde{T}(\Sigma \cup V)$ et $(\tilde{T}(\Sigma) \oplus \tilde{T}(V))T = T(\Sigma \cup V)$. Or, par définition σ_E est l'unique 1-morphisme de $T(\Sigma \cup V)$ dans $P(T(\Sigma))$ tel que

a) sur $T(\Sigma)$ σ_E coïncide avec l'inclusion canonique de $T(\Sigma)$ dans $P(T(\Sigma))$

b) $\forall X \in V$, $\sigma_E(X) = E_X$. On en déduit que σ_E est la 1-substitution de $T(\Sigma \cup V)$ dans $P(T(\Sigma))$ définie par

si $f \in \Sigma$, $\sigma_E(f) = \{f\} \in P(T(\Sigma))^1_{d(f)}$

si $X \in V$, $\sigma_E(X) = E_X \in P(T(\Sigma))^1_{d(X)}$.

Exemple 4.1 Soit $V = \{X,Y\}$ avec $d(X) = 2$, $d(Y) = 1$ et soit $\Sigma = \{a,b,c,f,g\}$ avec $d(a) = d(b) = d(c) = 1$, $d(f) = 1$, $d(g) = 2$.

Soient $E_X = \{<2;f(x_1)>, <2;g(x_2,x_2)>\}$

$E_Y = \{<1;a(x_1)> ; <1;b(x_1)>\}$

et soit $u = <4;X(Y(x_2) ; c(x_3))>$.

Alors u peut s'écrire aussi $X.(Y \otimes c).<4;x_2,x_3>$

et $\sigma_E(u) = E_X.(E_Y \otimes c).<4;x_2,x_3> =$

$<2;f(x_1)>(E_Y \otimes c).<4;x_2,x_3> + <2;g(x_2,x_2)> (E_Y \otimes c).<4;x_2,x_3> =$

$\{<4;f(a(x_2))>, <4;f(b(x_2))>, <4;g(c(x_3),c(x_3))>$.

BIBLIOTHEQUE

La construction que nous avons faite dans le cas général n'est donc en fait rien d'autre que l'extension "homomorphe" de l'application E de V dans $P(M\mathcal{T})$ à $(M \oplus \tilde{T}(V))\mathcal{T}$. Il est donc naturel que l'ordre défini sur les éléments de $E(S)$ induise un ordre sur les substitutions associées.

Proposition 4.2 *Soient S un système algébrique sur* M *et* V, E *et* E' *deux éléments de $E(S)$. Si* $E \leq E'$ *alors* $\forall\, u \in (M \oplus T(V))\mathcal{T}$, $\sigma_E(u) \subset \sigma_{E'}(u)$.

Démonstration : Soit $u \in (M \oplus \tilde{T}(V))\mathcal{T}$. Cet élément s'écrit $\tilde{u}.\Theta$ avec $\tilde{u} \in M \oplus \tilde{T}(V)$. D'après la définition de la somme directe, il s'obtient donc à partir de M^1_p et de V par un nombre fini de produits de composition et de produits tensoriels. On peut alors démontrer par récurrence, compte tenu de la croissance des produits du magmoïde $P(M\mathcal{T})$ par rapport à leurs deux arguments que $\sigma_E(\tilde{u}) \subset \sigma_{E'}(\tilde{u})$ et donc

$\sigma_E(u) = \sigma_E(\tilde{u}).\Theta \subset \sigma_{E'}(\tilde{u}).\Theta = \sigma_{E'}(u)$.

cqfd.

<u>*Lemme 4.3*</u> *Soient S un système algébrique sur* M *et* V, E *un élément de $E(S)$ et* u *un élément de* $M \oplus \mathcal{T}(V)T^1_p$. *Pour tout élément* v *de* $\sigma_E(u)$, *il existe une partie finie* E' *de* E *telle que* $v \in \sigma_{E'}(u)$.

<u>Démonstration</u> : On démontre cette proposition par récurrence sur la construction de u.

a) Si $u = \Pi^i_p$, alors pour toute partie finie E' de E on a $\sigma_E(\Pi^i_p) = \sigma_{E'}(\Pi^i_p) = \Pi^i_p$.

b) Si $u = m.\langle u_1,\ldots,u_k\rangle$ avec $m \in M^1_k$, $\sigma_E(u) = m.\langle\sigma_E(u_1),\ldots,\sigma_E(u_k)\rangle$ et si $v \in \sigma_E(u)$, il existe $v_1 \in \sigma_E(u_1),\ldots,v_k \in \sigma_E(u_k)$ tels que $v = m.\langle v_1,\ldots,v_k\rangle$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe pour chaque $i \leq k$ une partie finie E_i de E telle que $v_i \in \sigma_{E_i}(u_i)$ et en posant $E' = \bigcup_{i=1,\ldots,k} E_i$, $v_i \in \sigma_{E'}(u_i)$ d'où $v \in \sigma_{E'}(u)$.

c) Si $u = X.\langle u_1,\ldots,u_k\rangle$ avec $X \in V_k$ et si $v \in \sigma_E(u)$, il existe $\tilde{w}.\Theta \in \sigma_E(X) = E_X \subset MT^1_k$ tel que
$v \in \tilde{w}.\Theta.\langle\sigma_E(u_1),\ldots,\sigma_E(u_k)\rangle = \tilde{w}.\langle\sigma_E(u_{\Theta(1)}),\ldots,\sigma_E(u_{\Theta(m)})\rangle$.
Pour les mêmes raisons que précédemment il existe une partie finie E' de E telle que $v \in \tilde{w}.\langle\sigma_{E'}(u_{\Theta(1)}),\ldots,\sigma_{E'}(u_{\Theta(m)})\rangle = \tilde{w}.\Theta.\langle\sigma_{E'}(u_1),\ldots,\sigma_{E'}(u_k)\rangle$.
On définit alors E" par

$$E''_Y = \begin{cases} E'_Y \text{ si } Y \neq X \\ E'_Y \cup \{\tilde{w}.\Theta\} \text{ si } Y = X \end{cases}$$

On a donc bien $E' \leq E''$ d'où $\sigma_{E'}(u_i) \subset \sigma_{E''}(u_i)$ et comme $\tilde{w}.\Theta \in E''_X = \sigma_{E''}(X)$, $v \in \sigma_{E''}(u)$.

<u>cqfd</u>.

3. SOLUTIONS DES SYSTÈMES ALGÉBRIQUES

Comme dans le système algébrique $S = \{X = R_X \ / \ X \in V\}$, R_X est une partie de $(M \oplus \tilde{T}(V))T$, σ_E est défini pour tout élément de R_X. On peut alors définir la **solution** de ce système comme le plus petit élément E de $E(S)$ - pour l'ordre $\leq$ - qui vérifie :

$$\forall X \in V, \ E_X = \bigcup_{u \in R_X} \sigma_E(u). \qquad (*)$$

Puisque $\sigma_E(X) = E_X$, et en notant, comme il est d'usage, $\sigma_E(R_X) = \bigcup_{u \in R_X} \sigma_E(u)$, la propriété $(*)$ peut s'écrire $\forall X \in V$, $\sigma_E(X) = \sigma_E(R_X)$.

De la même façon qu'en théorie des langages, on montre que la solution d'un système algébrique existe et peut être obtenue comme limite d'une suite croissante d'éléments de $E(S)$, grâce au célèbre théorème du plus petit point fixe de Tarski :

Associons à tout système algébrique $S = \{X = R_X \mid X \in V\}$ l'application $\hat{S}$ de $E(S)$ dans lui-même définie par :

si $E \in E(S)$ alors $\hat{S}(E)$ est l'élément de $E(S)$ qui vérifie

$$\forall X \in U, \ \hat{S}(E)_X = \bigcup_{u \in R_X} \sigma_E(u).$$

La propriété $(*)$ est donc équivalente à $E = \hat{S}(E)$. La solution de S est donc le plus petit élément E de $E(S)$ qui vérifie $E = \hat{S}(E)$. Or l'application $\hat{S}$ est croissante. En effet, si $E \leq E'$, d'après la proposition 4.2, $\sigma_E(u) \subset \sigma_{E'}(u)$ pour tout u, d'où $\sigma_E(R_X) \subset \sigma_{E'}(R_X)$ et donc $\hat{S}(E)_X \subset \hat{S}(E')_X$ pour tout $X \in V$, ce qui entraîne $\hat{S}(E) \leq \hat{S}(E')$. De plus $\hat{S}$ est continue. Soit en effet une suite croissante $\{E^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $E(S)$ dont la limite est E. On a d'une part $E^{(i)} \leq E$, d'où $\hat{S}(E^{(i)}) \leq \hat{S}(E)$ et donc $\bigcup_i \hat{S}(E^{(i)}) \leq \hat{S}(E)$. D'autre part, comme $\hat{S}(E)_X = \bigcup_{u \in R_X} \sigma_E(u)$, si $v \in \hat{S}(E)_X$, il existe $u \in R_X$ tel que $v \in \sigma_E(u)$. D'après le lemme 4.3, il existe une partie finie E' de E telle que

$v \in \sigma_{E'}(u)$. Il existe donc $E^{(i)}$ telle que $E' \leq E^{(i)}$ d'où $v \in \sigma_{E^{(i)}}(u)$ et donc $v \in \hat{S}(E^{(i)})_X \subset \bigcup_i \hat{S}(E^i)_X$. On en déduit que $\hat{S}(E)_X \subset \bigcup_i \hat{S}(E^{(i)})_X$ et donc $\hat{S}(E) \leq \bigcup_i \hat{S}(E^{(i)})$. Il découle donc du théorème du plus petit point fixe que la solution de S existe et qu'elle est la limite de la suite croissante $\{E^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ définie par

$$- \forall X \in V,\ E_X^{(0)} = \emptyset$$

$$- E^{(i+1)} = \hat{S}(E^{(i)}).$$

On appellera désormais cette suite, **l'approximation de la solution de** S.

Si $E \in E(S)$ est la solution d'un système algébrique S sur M et V, alors pour tout $X \in V$, E_X est une partie de $MT^1_{d(X)}$ que nous appellerons **ensemble algébrique.** Une partie U de MT^1_p est donc un ensemble algébrique ssi il existe un alphabet gradué fini V, qui contient un symbole non-terminal X_0 de degré p, un système algébrique S sur M et V dont la solution est E tels que $U = E_{X_0}$.

4. MORPHISMES DE SYSTÈMES ALGÉBRIQUES

Nous allons maintenant définir des systèmes algébriques homomorphes et comparer leurs solutions. Nous montrerons ensuite qu'à un 1-morphisme près, on peut se contenter d'étudier les systèmes algébriques sur un magmoïde libre finiment engendré.

Soient M et M' deux magmoïdes décomposables et soit ϕ un 1-morphisme de M dans M'. Soit V un alphabet gradué fini et notons I_V le 1-morphisme identité de $\mathfrak{T}(V)$ dans lui-même. Alors par définition de la somme directe, il existe un et un seul 1-morphisme, noté $\bar{\phi}$, tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & M \oplus \mathfrak{T}(V) \arrow[d, dashed, "\bar{\phi}"] & \mathfrak{T}(V) \arrow[l] \arrow[d, "I_V"] \\
M' \arrow[r] & M' \oplus \mathfrak{T}(V) & \mathfrak{T}(V) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Autrement dit $\bar{\phi}$ coïncide avec ϕ sur M et est l'identité sur $\mathfrak{T}(V)$.

Dans le cas particulier où $M = \mathfrak{T}(\Sigma)$ et $M' = \mathfrak{T}(\Delta)$, $\bar{\phi}$ est le 1-morphisme de $\mathfrak{T}(\Sigma \cup V)$ dans $T(\Delta \cup V)$ défini par :

- si $f \in \Sigma$ $\quad \bar{\phi}(f) = \phi(f) \in \mathfrak{T}(\Delta) \subset \mathfrak{T}(\Delta \cup V)$
- si $X \in V$ $\quad \bar{\phi}(X) = X \in V \subset \mathfrak{T}(\Delta \cup V)$.

Soient maintenant un système algébrique $S = \{X = R_X \ / \ X \in V\}$ sur M et V, et un système algébrique $S' = \{X = R'_X \ / \ X \in V\}$ sur M' et V. On dira que S' est l'image par ϕ de S, ce que l'on écrira $S' = \phi(S)$, si $\forall X \in V$, $R'_X = \bar{\phi}T(R_X)$.

<u>Exemple 4.4</u>

Soit $\Sigma = \{f,g,h\}$ avec $d(f) = d(g) = d(h) = 2$.

Soit $\Delta = \{b,a\}$ avec $d(b) = 2$, $d(a) = 1$.

Soit $V = \{X\}$ avec $d(X) = 2$

et soit le 1-morphisme ϕ de $\mathfrak{T}(\Sigma)$ dans $\mathfrak{T}(\Delta)$ défini par

$$\begin{cases} \phi(f) = b.(a \otimes Id_1) = \langle 2;b(a(x_1),x_2)\rangle \\ \phi(g) = \phi(h) = b. \end{cases}$$

Alors le système algébrique

$$X = \langle 2;X(f(x_1,x_1),f(x_2,x_2))\rangle + \langle 2;g(x_1,x_1)\rangle + \langle 2;h(x_1,x_1)\rangle$$

a pour image par ϕ le système

$$X = \langle 2;X(b(a(x_1),x_1),b(a(x_2),x_2))\rangle + \langle 2;b(x_1,x_1)\rangle.$$

$\perp$

Il est alors naturel que les solutions de tels systèmes puissent être mises en relation au moyen du morphisme ϕ.

<u>*Proposition 4.5*</u> *Soient* M *et* M' *deux magmoïdes décomposables,* ϕ *un 1-morphisme de* M *dans* M', V *un alphabet gradué fini,* S *et* S' *deux systèmes algébriques sur respectivement* M *et* V *et* M' *et* V'. *Soient* E *et* F *les solutions de ces deux systèmes. Si* $S' = \phi(S)$, *alors* $F = \phi T(E)$ (1).

<u>Démonstration</u> : Comme ϕ est un morphisme de M dans M', ϕT est un morphisme de MT dans $M'T$; et comme pour tout X, $E_X \subset MT$, l'égalité $F = \phi T(E)$ a bien un sens.

Posons $S = \{X = R_X \ / \ X \in V\}$ et $S' = \{X = R'_X \ / \ X \in V\}$ et considérons les approximations $\{E^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ et $\{F^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ des solutions E et F de S et S'.

On va montrer par récurrence sur i que pour tout i, $F^{(i)} = \phi T(E^{(i)})$ ce qui suffit pour obtenir le résultat cherché.

a) Comme pour tout $X \in V$, $E_X^{(0)} = F_X^{(0)} = \emptyset$, on a bien $F_X^{(0)} = \phi T(E_X^{(0)})$ et donc $F^{(0)} = \phi T(E^0)$.

---

(1) Cette égalité est une abréviation pour $\forall X \in V$, $F_X = \bigcup_{u\in E_X} \phi T(u)$.

b) Supposons que $F^{(i)} = \phi T(E^{(i)})$ et montrons que $F^{(i+1)} = \phi T(E^{(i+1)})$, c'est-à-dire, $\forall X \in V$, $F_X^{(i+1)} = \phi T(E_X^{(i+1)})$. Or $F_X^{(i+1)} = \bigcup_{u \in R'_X} \sigma_{F^{(i)}}(u)$; et comme $R'_X = \bar{\phi}T(R_X)$, $F_X^{(i+1)} = \bigcup_{u \in R_X} \sigma_{F^{(i)}}(\bar{\phi}T(u))$. D'autre part $E_X^{(i+1)} = \bigcup_{u \in R_X} \sigma_{E^{(i)}}(u)$.

Il suffit donc de montrer que pour tout $u \in (M \oplus \tilde{T}(V))T^1_{d(X)}$,
$\sigma_{F^{(i)}}(\bar{\phi}T(u)) = \phi T(\sigma_{E^{(i)}}(u))$, sachant que $F^{(i)} = \phi T(E^{(i)})$.
Pour simplifier les écritures, nous posons $E = E^{(i)}$, $F = F^{(i)}$ et $d(X) = p$.
Il faut donc montrer :

(*) si $\forall X \in V$, $F_X = \phi T(E_X)$ alors $\forall u \in (M \oplus \tilde{T}(V))T^1_p$,
$\sigma_F(\bar{\phi}T(u)) = \phi T(\sigma_E(u))$.

D'une part $\phi T(\sigma_E(u))$ est égal à $P(\phi T) \circ \sigma_E(u)$ et nous avons montré (proposition 1.15) que $P(\phi T)$ est un 1-morphisme de $P(MT)$ dans $P(M'T)$. $P(\phi T) \circ \sigma_E$ et donc une 1-substitution de $(M \oplus \tilde{T}(V))T$ dans $P(M'T)$. De même $\sigma_F(\bar{\phi}T(u)) = \sigma_F.\bar{\phi}T(u)$ où $\sigma_F.\ \bar{\phi}T$ est une 1-substitution de $(M \oplus \tilde{T}(V))T$ dans $P(M'T)$. Il suffit de montrer que ces substitutions sont les mêmes, c'est-à-dire qu'elles coïncident sur M^1_p et sur V. Or pour $m \in M^1_p$, $\sigma_E(m) = \{m\}$ et $P(\phi T)\ (m) = \{\phi(m)\}$; d'autre part $\bar{\phi}T(m) = \phi(m)$ et $\sigma_F(\phi(m)) = \{\phi(m)\}$. Pour $X \in V$, $\sigma_E(X) = E_X$ et $P(\phi T)(E_X) = F_X$; $\bar{\phi}T(X) = X$ et $\sigma_F(X) = F_X$.

cqfd.

Proposition 4.6 *Soit S un système algébrique sur M et V. Il existe un alphabet gradué Σ fini, un 1-morphisme de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans M, et un système algébrique S' sur $\tilde{T}(\Sigma)$ et V tels que $S = \phi(S')$.*

Démonstration : Soit $S = \{X = R_X \ / \ X \in V\}$ un système algébrique sur M et V et soit $R = \bigcup_{X \in U} R_X$. Comme chacun des R_X est un ensemble fini et que V est un ensemble fini, R est aussi un ensemble fini.

Or on a montré au chapitre IV de [AD] que tout magmoïde décomposable était l'image par un 1-morphisme ϕ d'un magmoïde libre $\tilde{T}(\Sigma)$, où Σ est un alphabet gradué éventuellement infini. On en déduit l'existence d'un 1-morphisme $\bar{\phi}$ de $\tilde{T}(\Sigma \cup V)$ dans $M \oplus \tilde{T}(V)$. Pour chaque élément $\tilde{u}$ de $M \oplus \tilde{T}(V)$ il existe donc au moins un élément $\tilde{v}$ de $\tilde{T}(\Sigma \cup V)$ tel que $\bar{\phi}(\tilde{v}) = \tilde{u}$. Il existe donc aussi une partie finie $\Sigma_{\tilde{u}}$ de Σ telle que $\tilde{v} \in \tilde{T}(\Sigma_{\tilde{u}} \cup V)$. On pose alors $\Sigma' = \bigcup_{\tilde{u}.\Theta} \Sigma_{\tilde{u}}$ qui est aussi un ensemble fini puisque R est fini. On a donc $\forall\ \tilde{u}.\Theta \in R$, il existe $\tilde{v} \in \tilde{T}(\Sigma' \cup V)$ tel que $\bar{\phi}(\tilde{v}) = \tilde{u}$ et donc tel que $\bar{\phi}T(\tilde{v}.\Theta) = \tilde{u}.\Theta$. On pose alors $R'_X = \bar{\phi}T^{-1}(R_X) \cap T(\Sigma' \cup V)$. Le système algébrique $S' = \{X = R'_X \ / \ X \in V\}$ est un système sur $\tilde{T}(\Sigma)$ et V et on a bien $S = \phi(S')$. En effet on a bien d'une part $R'_X \subset \bar{\phi}T^{-1}(R_X)$ d'où $\bar{\phi}T(R'_X) \subset R_X$ et d'autre part si $u \in R_X$, il existe $v \in T(\Sigma' \cup V)$ tel que $\bar{\phi}T(v) = u$ d'où $v \in \bar{\phi}T^{-1}(u) \cap T(\Sigma' \cup V) \subset R'_X$ et donc $u \in \bar{\phi}T(R'_X)$. Ceci implique que $R_X = \bar{\phi}T(R'_X)$ et donc $S = \phi(S')$.

cqfd.

Des deux propositions précédentes, on déduit que toute solution d'un système algébrique est l'image homomorphe de la solution d'un système algébrique sur un magmoïde libre finiment engendré.

Théorème 4.7 *Soient* M *un magmoïde décomposable et* V *un alphabet gradué fini. Une application* E *de* V *dans* P(M*T*) *qui respecte la fibration est solution d'un système algébrique sur* M *et* V *ssi il existe un alphabet gradué fini* Σ, *un 1-morphisme* ϕ *de* $\tilde{T}(\Sigma)$ *dans* M *et un système algébrique sur* $\tilde{T}(\Sigma)$ *et* V *dont la solution est* F, *tels que* $E = \phi T(F)$.

Cette propriété est exactement analogue à celle énoncée au théorème 3.20 pour les parties rationnelles.

<u>*Corollaire 4.8*</u> *Tout ensemble algébrique est l'image par un 1-morphisme linéaire d'un ensemble algébrique d'un magmoïde projetable libre.*

CHAPITRE V

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS RÉGULIERS ET CORÉGULIERS

Dans ce chapitre nous définissons et étudions trois classes particulières de systèmes algébriques. Nous considérerons en premier lieu, les systèmes **réguliers** (1). Nous démontrerons que la famille des composantes de leur solution, appelées **ensembles réguliers** s'identifie à la famille des ensembles rationnels. Nous définirons ensuite une autre classe de systèmes algébriques simples, les **systèmes coréguliers**. Nous verrons que les **ensembles coréguliers** sont une généralisation des forêts corégulières introduites par Arnold et Dauchet [7], [8] et définies également par Downey sous le nom d'ensembles ILBT [43] ou EDTOLT [44]. La définition de ces systèmes est en quelle que sorte symétrique de celle des systèmes coréguliers, d'où leur nom. Nous montrerons de plus au chapitre VIII que les ensembles coréguliers peuvent être définis "à la Kleene" à condition de se placer dans un magmoïde de parties différent de celui que nous avons défini au chapitre I ; ils sont donc également "corationnels".

---

(1) Bien que ces systèmes soient une généralisation des systèmes linéaires à droite de la théorie des langages, nous employons le qualificatif "régulier" car celui de "linéaire" est déjà utilisé pour qualifier les morphismes.

1. SYSTÈMES RÉGULIERS

Soient V un alphabet gradué fini et M un magmoïde décomposable. Un système algébrique $\mathcal{S} = \{X = R_X \ / \ X \in V\}$ sur M et V est dit **régulier** si

- Tous les éléments de V ont le même degré que nous noterons n
- Pour chaque $X \in V$, tout élément u de $R_X \subset (M \oplus \tilde{T}(V))\mathcal{T}_n^1$
  - . soit appartient à $M\mathcal{T}_n^1$
  - . soit est de la forme $v.\langle X_{i_1},\ldots,X_{i_p}\rangle$

avec $v \in M\mathcal{T}$ et $\forall\, j \leq p$, $X_{i_j} \in V$.

<u>Remarque</u> : Cette définition est cohérente car si $u \in M\mathcal{T}$ il appartient aussi à $(M \oplus \tilde{T}(V))\mathcal{T}$ et comme $\langle X_{i_1},\ldots,X_{i_p}\rangle \in T(V) \subset (M \oplus \tilde{T}(V))\mathcal{T}$, $v.\langle X_{i_1},\ldots,X_{i_p}\rangle \in (M \oplus \tilde{T}(V))\mathcal{T}$.

Si $\mathcal{S} = \{X = R_X \ / \ X \in V\}$ est un système régulier, alors pour chaque X appartenant à V, R_X peut s'écrire $S_X + T_X$ où $T_X = R_X \cap M\mathcal{T}_n^1$ et $S_X = R_X - T_X$.

Supposons une numérotation arbitraire des éléments de V. V s'écrit donc $\{X_1,\ldots,X_m\}$. On dira alors qu'un système régulier $\mathcal{S} = \{X_i = S_i + T_i \mid i \leq m\}$ est **sous forme canonique**, si $\forall\, i \leq m$ tout élément de S_i est de la forme $v.\langle X_1,\ldots,X_m\rangle$.

<u>*Proposition 5.1*</u> *Pour tout système régulier $\mathcal{S}$, il existe un système régulier canonique $\mathcal{S}'$ ayant même solution.*

Démonstration : Soit $\mathcal{S} = \{X_i = S_i + T_i \mid i \leq m\}$ un système régulier sur M et V, dont on peut toujours supposer que les éléments de V aient été préalablement ordonnés. On forme alors le système régulier canonique $\mathcal{S}' = \{X_i = S_i' + T_i' \mid i \leq m\}$ où pour tout $i \leq m$

- $T_i' = T_i$
- $S_i' = \{u.<\Pi_m^{j_1},\ldots,\Pi_m^{j_p}>.<X_1,\ldots,X_m> \;/\; u.<X_{j_1},\ldots,X_{j_p}> \in S_i\}$

Le fait que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ ont même solution est immédiat car $u.<\Pi_m^{j_1},\ldots,\Pi_m^{j_p}>.<X_1,\ldots,X_m>$ et $u.<X_{j_1},\ldots,X_{j_p}>$ sont deux écritures différentes du **même** élément de $(M \oplus \tilde{T}(V))\mathcal{T}$.

cqfd.

Soit V un alphabet gradué fini dont on a ordonné les éléments et soit $\mathcal{S} = \{X_i = S_i + T_i \mid i \leq m\}$ un système régulier. Un élément E de $\mathcal{E}(\mathcal{S})$ étant une application de V dans $P(M\mathcal{T})$ qui respecte la fibration, pour tout $X_i \in V$, $E_{X_i} \in P(M\mathcal{T})_n^1$. On peut donc identifier E à l'élément $<E_{X_1},\ldots,E_{X_m}>$ de $P(M\mathcal{T})_n^m$. A cette identification près on pourra considérer la solution d'un système régulier comme un élément de $P(M\mathcal{T})$ ce qui permet d'énoncer le résultat :

Théorème 5.2 : La solution de tout système régulier sur M *est une partie rationnelle de* $P(M\mathcal{T})$.

Démonstration : Soit $\mathcal{S} = \{X_i = S_i + T_i \;/\; i \leq m\}$ qu'on peut supposer sous forme canonique d'après la proposition 5.1. Posons pour chaque $i \leq m$ $\bar{S}_i = \{u \in M\mathcal{T} \;/\; u.<X_1,\ldots,X_m> \in S_i\}$, et comme S_i est en ensemble fini, $\bar{S}_i$ est aussi un ensemble fini.

Tout élément de $\bar{S}_i$ appartient donc à $M\mathcal{T}_m^1$. On pose alors $\bar{S} = <\bar{S}_1,\ldots,\bar{S}_m>$ qui appartient à $P(M\mathcal{T})_m^m$. On pose de même $T = <T_1,\ldots,T_m>$ qui appartient à $P(M\mathcal{T})_n^m$ puisque chacun des T_i appartient à $P(M\mathcal{T})_n^1$. De plus

chacun des T_i et $\bar{S}_i$ étant des ensembles finis, $\bar{S}$ et T sont des polynômes. $\bar{S}^*.T$ est alors une partie rationnelle de $P(M\mathcal{T})_n^m$ et nous allons montrer que c'est la solution de $\mathcal{S}$. D'après la proposition 3.11, $\bar{S}^*.T$ est le plus petit élément de $P(M\mathcal{T})_n^m$ qui vérifie

$$X = T + \bar{S}.X.$$

Pour que $\bar{S}^*.T$ soit solution de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire le plus petit élément de $P(M\mathcal{T})_n^m$ qui vérifie

$$X = \hat{\mathcal{S}}(X)$$

il suffit donc de montrer, compte tenu de l'identification de $E(\mathcal{S})$ à $P(M\mathcal{T})_n^m$, que, quel que soit U appartenant à $P(M\mathcal{T})_n^m$

$$U = T + \bar{S}.U \quad \text{ssi} \quad U = \hat{\mathcal{S}}(U),$$

ce qui est équivalent à

$$\hat{\mathcal{S}}(U) = T + \bar{S}.U$$

Par définition, pour $i \leq m$,

$$\hat{\mathcal{S}}(U_i) = \bigcup_{u \in S_i + T_i} \sigma_U(u) = \bigcup_{u \in S_i} \sigma_U(u) + \bigcup_{u \in T_i} \sigma_U(u).$$

Or si $u \in T_i$, $u \in M\mathcal{T}_n^1$ et $\sigma_U(u) = \{u\}$ d'où $\bigcup_{u \in T_i} \sigma_U(u) = T_i$.

D'autre part $S_i = \{u.\langle X_1,\ldots,X_m\rangle \ / \ u \in \bar{S}_i\}$ d'où

$$\bigcup_{u \in S_i} \sigma_U(u) = \bigcup_{u \in \bar{S}_i} \sigma_U(u.\langle X_1,\ldots,X_m\rangle) = \bigcup_{u \in \bar{S}_i} \sigma_U(u).\langle \sigma_U(X_1),\ldots,\sigma_U(X_m)\rangle =$$

$\bigcup_{u \in \bar{S}_i} \sigma_U(u).\langle U_1,\ldots,U_m\rangle = \bigcup_{u \in \bar{S}_i} \sigma_U(u).U$. De plus comme $\bar{S}_i \subset M\mathcal{T}_n^1$, si $u \in \bar{S}_i$, $\sigma_U(u) = u$ d'où $\bigcup_{u \in \bar{S}_i} \sigma_U(u).U = \bigcup_{u \in \bar{S}_i} u.U = \bar{S}_i.U$. On en déduit que $\hat{\mathcal{S}}(U_i) = T_i + \bar{S}_i.U$ et donc $\hat{\mathcal{S}}(U) = \langle \hat{\mathcal{S}}(U_1),\ldots,\hat{\mathcal{S}}(U_m)\rangle =$

$<T_1 + \bar{S}_1.U,\ldots,T_m + \bar{S}_m.U> =$

$<T_1 ,\ldots,T_m> + <\bar{S}_1,\ldots,\bar{S}_m>.U = T + \bar{S}.U.$

cqfd.

Démontrons maintenant la réciproque de ce théorème :

Théorème 5.3 : *Soit* U *une partie rationnelle de* $P(M\mathcal{T})^p_n$. *Alors il existe un système régulier* $\mathcal{S} = \{X_i = S_i + T_i \mid i \leq m\}$ *et une torsion* Θ *de* Θ^p_m *tels que si* E *est la solution de* $\mathcal{S}$, $U = \Theta.E$.

Démonstration : Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur la construction des parties rationnelles.

a) Si $U = <U_1,\ldots,U_p>$ est un polynôme, chaque U_i est une partie finie de $P(M\mathcal{T})^1_n$ et U est solution du système régulier $\{X_i = U_i \mid i \leq p\}$.

b) Soient U une partie rationnelle de $P(M\mathcal{T})^p_q$ et U' une partie rationnelle de $P(M\mathcal{T})^{p'}_{q'}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe deux systèmes réguliers canoniques $\{X_i = S_i + T_i \mid i \leq m\}$ et $\{X'_i = S'_i + T'_i \mid i \leq m'\}$ dont les solutions sont $E = \bar{S}^*.T$ et $E' = \bar{S}'^*.T'$, deux torsions Θ et Θ' tels que $U = \Theta.E$ et $U' = \Theta'.E'$.

Le système régulier $\mathcal{S}_1$

$\{X_i = S_i + T_i \otimes O_{q'} \mid i \leq m\}$, où chaque X_i est de degré $q + q'$ est encore canonique et a pour solution $\bar{S}^*.(T \otimes O_{q'})$. De même le système $\mathcal{S}_2 = \{X'_i = S'_i + O_q \otimes T'_i \mid i \leq m'\}$ a pour solution $\bar{S}'^*.(O_q \otimes T')$.
Le système $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ a donc pour solution $\bar{E}$ tel que

. si $i \leq p$, $\Pi^i_p.\bar{E} = \Pi^i_p.\ \bar{S}^*.(T \otimes O_{q'}) = (\Pi^i_p.\bar{S}^*.T) \otimes O_{q'} =$

$\Pi^i_{p+p'}\ (\bar{S}^*.T \otimes \bar{S}'^*.T')$

. si $p < i \leq p+p'$, $\Pi^i_p.\bar{E} = \Pi^{i-p}_{p'}\ \bar{S}'^*.(O_q \otimes T') = \Pi^i_{p+p'}(\bar{S}^*.T \otimes \bar{S}'^*.T')$.

On en déduit que $\bar{E} = \bar{S}^*.T \otimes \bar{S}'^*.T' = E \otimes E'$ et

$U \otimes U' = (\Theta.E) \otimes (\Theta'.E') = (\Theta \otimes \Theta').(E \otimes E') = (\Theta \otimes \Theta').\bar{E}$.

c) Soient $U \in P(M\mathcal{T})^p_q$, $U' \in P(M\mathcal{T})^q_r$, et deux systèmes réguliers canoniques $\{X_i = S_i + T_i \mid i \leq m\}$ et $\{X'_i = S'_i + T'_i \mid i \leq m'\}$ dont les solutions sont $E = \bar{S}^*.T$ et $E' = \bar{S}'^*.T'$, deux torsions Θ et Θ' tels que $U = \Theta.E$ et $U' = \Theta'.E'$.

On considère le système

$\mathcal{S} = \{X_i = \hat{S}_i \mid i \leq m\} \cup \{X'_i = S'_i + T'_i \mid i \leq m'\}$ où les X_i et X'_i sont considérés de degré r et où $\hat{S}_i = S_i \cup \{u.\Theta'.\langle X'_1,\ldots,X'_{m'}\rangle \ / \ u \in T_i\}$.

Soient $W = \langle W_1,\ldots,W_m\rangle$,

$W' = \langle W'_1,\ldots,W'_{m'}\rangle$

et $\bar{W} = \langle W_1,\ldots,W_m, W'_1,\ldots,W'_{m'}\rangle$

et calculons $\hat{\mathcal{S}}(\bar{W})$:

$$\hat{\mathcal{S}}(\bar{W})_{X_i} = \bigcup_{u\in S_i} \sigma_{\bar{W}}(u) + \bigcup_{u\in T_i} \sigma_{\bar{W}}(u.\Theta'.\langle X'_1,\ldots,X'_{m'}\rangle)$$

$$= \bigcup_{u\in S_i} \sigma_W(u) + \bigcup_{u\in T_i} u.\Theta'.W'$$

$$= \bar{S}_i.W + T_i.\Theta'.W'$$

et $\hat{\mathcal{S}}(\bar{W})_{X'_i} = \bigcup_{u\in S'_i} \sigma_{\bar{W}}(u) + \bigcup_{u\in T'_i} \sigma_{\bar{W}}(u) = \bar{S}'_i.W' + T'_i$.

On en déduit que $\bar{W} = \hat{\mathcal{S}}(\bar{W})$ ssi

$$W = \bar{S}.W + T.\Theta'.W' \qquad (1)$$

et $$W' = \bar{S}'.W' + T' \qquad (2)$$

et donc que la solution de $\mathcal{S}$ est le plus petit élément $\bar{W} = \langle W,W'\rangle$ qui vérifie ces deux équations, c'est-à-dire

$$W' = \bar{S}'^*T' = E' \text{ et } W = \bar{S}^*.T.\Theta'.W' = E.\Theta'.E'$$

Or $W = (Id_m \otimes O_{m'}).\bar{W}$ d'où $(Id_m \otimes O_{m'}).\bar{W} = E.\Theta'.E'$ et $(\Theta \otimes O_{m'}).\bar{W} = \Theta.(Id_m \otimes O_{m'}).\bar{W} = \Theta.E.\Theta'.E' = U.U'$. Il s'ensuit que $U.U' = \Theta.\bar{W}$ où $\bar{W}$ est la solution d'un système régulier.

d) Soient $U \in P(M\mathcal{T})^p_p$, $\{X_i = S_i + T_i \mid i \leq m\}$ un système régulier canonique dont la solution est $E = \bar{S}^*.T$ et Θ tels que $U = \Theta.E$.

On considère le système $\mathcal{S}$ =
$\{\bar{X}_i = \Pi_m^{\Theta(i)}.\langle X_1,\ldots,X_m\rangle + \Pi_p^i \ / \ i \leq p\} \cup \{X_i = S_i + T_i' \mid i \leq m\}$
où $\{\bar{X}_1,\ldots,\bar{X}_p\}$ est un nouvel ensemble des symboles de degré p disjoint de $\{X_1,\ldots,X_m\}$ et où $T_i' = \{u.\langle\bar{X}_1,\ldots,\bar{X}_p\rangle \ / \ u \in T_i\}$.

Soient alors
$$W = \langle W_1,\ldots,W_m\rangle,$$
$$\bar{W} = \langle\bar{W}_1,\ldots,\bar{W}_p\rangle$$
et
$$W' = \langle W_1,\ldots,W_m, \bar{W}_1,\ldots,\bar{W}_p\rangle.$$

On a $\hat{\mathcal{S}}(W')_{X_i} = \bigcup_{u\in S_i} \sigma_{W'}(u) + \bigcup_{u\in T_i} \sigma_{W'}(u.\langle\bar{X}_1,\ldots,\bar{X}_p\rangle) =$

$$\bigcup_{u\in S_i} \sigma_W(u) + \bigcup_{u\in T_i} u.\bar{W} = \bar{S}_i.W + T_i.\bar{W}$$

et $\hat{\mathcal{S}}(W')_{\bar{X}_i} = \sigma_{W'}(\Pi_m^{\Theta(i)}.\langle X_1,\ldots,X_m\rangle) + \sigma_{W'}(\Pi_p^i) = \Pi_m^{\Theta(i)}.W + \Pi_p^i$.

On en déduit que si $W' = \hat{\mathcal{S}}(W')$ on a

$$W = \bar{S}.W + T.\bar{W} \qquad (1)$$

$$\bar{W} = \Theta.W + Id_p \qquad (2)$$

La solution de $\mathcal{S}$ est donc le plus petit élément $W' = \langle W,\bar{W}\rangle$ qui vérifie (1) et (2).

On en déduit que $W = \bar{S}^*T.\bar{W}$ d'où $\bar{W} = \Theta.\bar{S}^*.T.\bar{W} + Id_p$ et donc $\bar{W} = (\Theta.\bar{S}^*.T)^* = U^*$ d'où $U^* = \bar{W} = (O_m \otimes Id_p).W'$ où W' est la solution de $\mathcal{S}$.

cqfd.

<u>*Corollaire 5.4*</u> *Pour toute partie rationnelle* U *de* $P(M\mathcal{T})^p_q$ *il existe une torsion* Θ *et deux polynômes* S *et* T *de* $P(M\mathcal{T})$ *tels que* $U = \Theta.S^*.T$.

<u>*Théorème 5.5*</u> *La famille des ensembles rationnels est identique à la famille des ensembles réguliers.*

<u>Démonstration</u> : Soit M un magmoïde décomposable et soit U une partie de $M\mathcal{T}^1_p$. Si U est rationnelle, d'après le théorème 5.3, $U = \Theta E$ où E est la solution d'un système régulier. Comme $U \in P(M\mathcal{T})^1_p$, Θ est nécessairement une projection d'où $U = \Pi^i_m.E$ est bien la composante de la solution d'un système régulier, c'est-à-dire un ensemble régulier. Réciproquement, si U est un ensemble régulier, alors $U = \Pi^i_p.E$ où E est la solution d'un système régulier ; d'après le théorème 5.2, E est rationnel et donc $U = \Pi^i_p.E$ est un ensemble rationnel.

<u>cqfd</u>.

<u>*Corollaire 5.6*</u> *Tout ensemble rationnel est de la forme* $\Pi^i_p.S^*.T$ *où* S *et* T *sont des polynômes.*

Ce résultat est obtenu comme cas particulier du corollaire 5.4. Il n'est rien d'autre que la généralisation au cas des magmoïdes du résultat bien connu que tout langage rationnel de X^* est une composante d'un vecteur A^*B où A est une matrice carrée et B un vecteur dont les coefficients sont des parties finies de X^*. Nous avons d'ailleurs expliqué au chapitre I comment une fibre carrée d'un magmoïde de parties pouvait représenter une telle matrice.

Enfin, du théorème 5.5 et du théorème 3.24 on déduit immédiatement le résultat démontré par Brainerd [31] dans le cas "classique".

Théorème 5.7 *Les familles d'ensembles réguliers et reconnaissables d'un magmoïde projetable libre finiment engendré sont les mêmes.*

Comme cas particulier de ce théorème, on retrouve le théorème d'Eilenberg et Wright [46] montrant l'identité des parties algébriques et reconnaissables de la Σ-algèbre libre sans générateurs. En effet cette Σ-algèbre a pour support $T(\Sigma)_0^1$ sur lequel notre notion de reconnaissabilité coïncide avec la notion classique. D'autre part, il est facile de voir que la définition qu'Eilenberg et Wright donnent de ce qu'ils appellent "ensemble algébrique" est, compte-tenu de la différence des formalismes, celle de la composante de la solution d'un système régulier sur $\mathcal{T}(\Sigma)$ et V où V n'a que des symboles 0-aires.

2. Systèmes corégulier

Soient V un alphabet gradué fini et M un magmoïde décomposable. Un système algébrique $\mathcal{S} = \{X = R_X \mid X \in V\}$ est dit **corégulier** si

$$\forall X \in V, \forall u \in R_X \subset (M \oplus \tilde{T}(V))T^1_{d(X)}$$

- soit $u \in MT^1_{d(x)}$
- soit u est de la forme X'.v avec $X' \in V$ et $v \in MT^{d(X')}_{d(X)}$

On pourra donc écrire $R_X = S_X + T_X$ avec $T_X = R_X \cap MT^1_{d(X)}$ et $S_X = R_X - T_X$.

On dira qu'un système corégulier $\mathcal{S} = \{X = R_X \mid X \in V\}$ est **homogène** de degré n si tous les éléments de V sont de degré n. La "dualité" annoncée avec les systèmes réguliers consiste en ce que, dans le cas des systèmes réguliers, on dérive par la droite (ou par les feuilles si on interprète comme un arbre un élément d'un magmoïde) alors que dans les système coréguliers on dérive par la gauche (ou par la racine). Cette dualité est d'ailleurs la généralisation de celle qui existe, en théorie des langages, entre systèmes linéaires à droite et à gauche.

<u>Exemple 5.8</u> Soit $\Sigma = \{b\}$ avec $d(b) = 2$; soit $V = \{X\}$ avec $d(X) = 1$. Alors le système $\{X = X.<1;b(x_1,x_1)>+<1;b(x_1,x_1)>$ est corégulier homogène ; sa solution est la limite de la suite

$E^{(0)} = \emptyset$

$E^{(2)} = \emptyset.<1;b(x_1,x_1)> + <1;b(x_1,x_1)> = <1;b(x_1,x_1)>$

$E^{(2)} = E^{(1)}.<1;b(x_1,x_1)> + <1;b(x_1,x_1)> =$

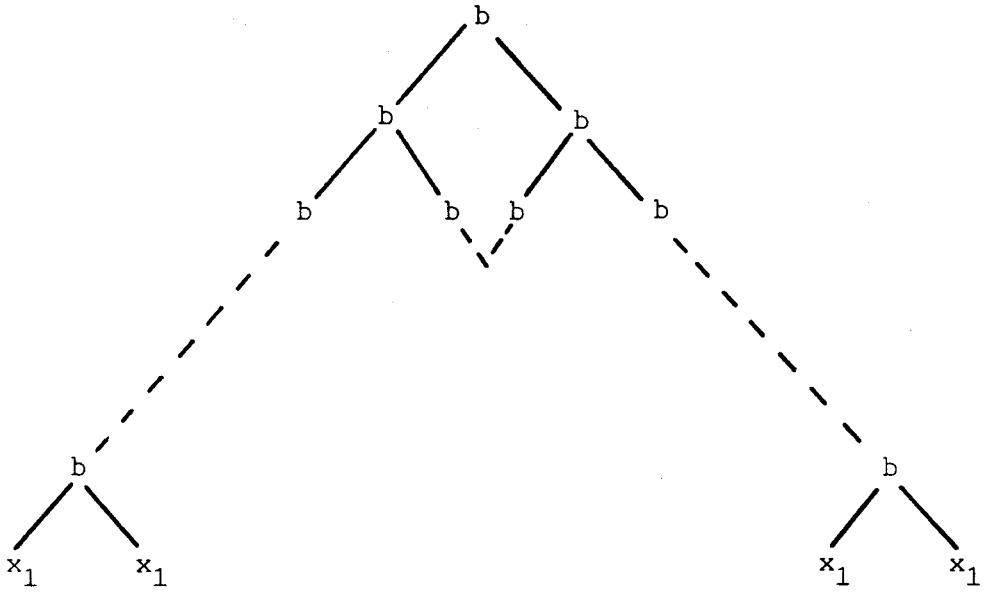
$<1;b(b(x_1,x_1),b(x_1,x_1)> + <1;b(x_1,x_1)>$

$E^{(3)} = E^{(2)}.<1;b(x_1,x_1)> + <1;b(x_1,x_1)> =$

$<1;b(b(b(x_1,x_1),b(x_1,x_1)),b(b(x_1,x_1),b(x_1,x_1)))>$

$+<1;b(b(x_1,x_1),b(x_1,x_1)) + <1;b(x_1,x_1)>$

La limite de cette suite croissante est donc l'ensemble des arbres "équilibrés"



<u>*Proposition 5.9*</u> *Quel que soit le système corégulier S sur $V = \{X_1,\dots,X_m\}$ dont la solution est $E = \langle E_1,\dots,E_m\rangle$ il existe un système corégulier homogène de degré $n = \sup\{d(X_i) \mid X_i \in V\}$ sur $\bar{V} = \{\bar{X}_1,\dots,\bar{X}_m\}$ dont la solution est $E' = \langle E'_1,\dots,E'_m\rangle$ tel que $\forall\, i \le m,\ E'_i = E_i \otimes 0_{n-d(X_i)}$.*

<u>Démonstration</u> : Soit $V = \{X_1,\dots,X_m\}$ où pour tout $i \le m$, $d(X_i) = n_i$. Soit $n = \sup\{n_i \mid i \le m\}$ et soit l'alphabet gradué $\bar{V} = \{\bar{X}_i \mid X_i \in V\}$ avec $d(\bar{X}_i) = n$. Soit le système corégulier $S = \{X_i = S_i + T_i \ /\ i \le m\}$ dont la solution est $E = \langle E_1,\dots,E_m\rangle$. On considère le système corégulier homogène de degré n, $S' = \{\bar{X}_i = \bar{S}_i + \bar{T}_i \mid i \le m\}$ où

$\bar{T}_i = \{u \otimes 0_{n-n_i} \mid u \in T_i\}$ et

$$\bar{S}_i = \{\bar{X}_j.(\langle v_1,\dots,v_{n_j}, \underbrace{\Pi^1_{n_i},\dots,\Pi^1_{n_i}}_{n-n_j}\rangle \otimes 0_{n-n_i}) \ /\ X_j.\langle v_1,\dots,v_{n_j}\rangle \in S_i\}$$

Soit alors $W = \langle W_1,\ldots,W_m\rangle$ appartenant à $E(S)$; on considère $\bar{W} = \langle W_1 \otimes 0_{n-n_1},\ldots,W_m \otimes 0_{n-n_m}\rangle$ appartenant à $E(S')$, et on calcule $\hat{S}'(\bar{W})$.

On a bien $\hat{S}'(\bar{W})_{\bar{X}_i} = \bigcup_{u\in\bar{S}_i} \sigma_{\bar{W}}(u) + \bigcup_{u\in\bar{T}_i} \sigma_{\bar{W}}(u)$. Or si $u \in \bar{S}_i$, il existe $X_j.\langle t_1,\ldots,t_{n_j}\rangle \in S_i$ tel que $u = \bar{X}_j.(\langle t_1,\ldots,t_{n_j},\Pi^1_{n_i},\ldots,\Pi^1_{n_i}\rangle \otimes 0_{n-n_i})$ et

donc $\sigma_{\bar{W}}(u) = \bar{W}_j.(\langle t_1,\ldots,t_{n_j},\Pi^1_{n_i},\ldots,\Pi^1_{n_i} \otimes 0_{n-n_i}) =$

$(W_j \otimes 0_{n-n_j}).(\langle t_1,\ldots,t_{n_j},\Pi^1_{n_i},\ldots,\Pi^1_{n_i}\rangle \otimes 0_{n-n_i}) =$

$(W_j.\langle t_1,\ldots,t_{n_j}\rangle) \otimes 0_{n-n_i} = \sigma_W(X_j.\langle t_1,\ldots,t_{n_j}\rangle) \otimes 0_{n-n_i}$. On en déduit que $\bigcup_{u\in\bar{S}_i} \sigma_{\bar{W}}(u) = \bigcup_{u\in S_i} \sigma_W(u) \otimes 0_{n-n_i}$. De même pour $u \in \bar{T}_i$, $u = u' \otimes 0_{n-n_i}$ avec $u' \in T_i$ et $\sigma_{\bar{W}}(u) = u = u' \otimes 0_{n-n_i} = \sigma_W(u') \otimes 0_{n-n_i}$ d'où $\bigcup_{u\in\bar{T}_i} \sigma_{\bar{W}}(u) = \bigcup_{u\in T_i} \sigma_W(u) \otimes 0_{n-n_i}$. On en déduit que $\hat{S}(\bar{W})_{\bar{X}_i} = \hat{S}(W)_{X_i} \otimes 0_{n-n_i}$.

D'où, si $E^{(i)} = \langle E^{(i)}_1,\ldots,E^{(i)}_m\rangle$ est l'approximation de la solution de S et $F^{(i)} = \langle F^{(i)}_1,\ldots,F^{(i)}_m\rangle$ celle de S' on a

- $E^{(0)}_i = \emptyset = F^{(0)}_i$ d'où $F^{(0)}_i = E^{(0)}_i \otimes 0_{n-n_i}$
- si $\forall\, j \le m$, $F^{(i)}_j = E^{(i)}_j \otimes 0_{n-n_i}$, alors

$$F^{(i+1)}_j = \hat{S}(F^{(i)})_{\bar{X}_j} = \hat{S}(E^{(i)})_{X_j} \otimes 0_{n-n_j} = E^{(i+1)}_j \otimes 0_{n-n_j}$$

On en déduit que pout tout entier i et pour tout $j \le m$,

$$F^{(i)}_j = E^{(i)}_j \otimes 0_{n-n_j}.$$

et en passant à la limite

$$F_j = \bigcup_i F^{(i)}_j = \bigcup_i E^{(i)}_j \otimes 0_{n-n_j} = (\bigcup_i E^{(i)}_j) \otimes 0_{n-n_j} = E_j \otimes 0_{n-n_j}$$

d'où le résultat.

cqfd.

On dira qu'un alphabet gradué Σ est **monadique** si $\forall\ i \geq 2,\ \Sigma_i = \emptyset$. On a donc $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_0$. Tout élément de $T(\Sigma)^1_1$ est donc de la forme $<1;a_1a_2\ldots a_n(x_1)>$ avec $a_i \in \Sigma_1$ et tout élément de $T(\Sigma)^1_0$ est de la forme $<0;a_1a_2\ldots a_n(b)>$ avec $a_i \in \Sigma_1$ et $b \in \Sigma_0$. On peut donc identifier $T(\Sigma)^1_1$ avec le monoïde libre Σ_1^* et $T(\Sigma)^1_0$ avec $\Sigma_1^*\ \Sigma_0$. Compte tenu de cette identification les ensembles reconnaissables de $T(\Sigma)^1_1$ (resp. $T(\Sigma)^1_0$) sont les langages reconnaissables de Σ_1^* (resp. $\Sigma_1^*\ \Sigma_0$), de même les systèmes réguliers sont les systèmes linéaires à droite et les systèmes coréguliers sont les systèmes linéaires à gauche. Les ensembles réguliers et coréguliers sont donc les mêmes.

<u>*Théorème 5.10*</u> *Soit* M *un magmoïde décomposable. Une partie* U *de* MT^1_p *est la composante de la solution d'un système corégulier homogène de degré* n *ssi il existe un alphabet gradué monadique fini* Σ, *un n-morphisme* ϕ *de* $T(\Sigma)$ *dans* MT *et un ensemble reconnaissable* L *de* $T(\Sigma)^1_1$ *tels que* $U = \{\Pi^1_n.\phi(u) \mid u \in L\}$.

<u>Démonstration</u> : <u>Condition nécessaire</u>

Soit $S = \{X_i = S_i + T_i \mid i \leq m\}$ un système corégulier homogène de degré n, dont la solution est $E = <E_1,\ldots,E_m>$ et soit i_0 tel que $U = E_{i_0}$. On définit l'alphabet gradué monadique Σ par :

$$\Sigma = \{f_u \ /\ i \leq m \text{ et } u \in T_i\} \cup \{g_u \ /\ i \leq m,\ j \leq m,\ X_j.u \in S_i\}$$

dont tous les éléments sont de degré 1. On définit alors le n-morphisme ϕ de $T(\Sigma)$ dans MT par

- si $f_u \in \Sigma$ alors $u \in T_i$, donc $u \in MT^1_n$ et on pose
  $\phi(f_u) = <u,\Pi^2_n,\ldots,\Pi^n_n> \in MT^n_n$ (d'où $\Pi^1_n\ \phi(f_u) = u$)

- si $g_u \in \Sigma$ alors $X_j.u \in S_i$ et $u \in MT^n_n$; on pose alors $\phi(g_u) = u$.

On définit ensuite le système corégulier homogène de degré 1, $\mathcal{S}' = \{\bar{X}_i = \bar{S}_i + \bar{T}_i \mid i \leq m\}$ sur $\tilde{T}(\Sigma)$ et $\bar{V} = \{\bar{X}_1,\ldots,\bar{X}_m\}$ par $\bar{S}_i = \{\bar{X}_j.g_u \ / \ X_j.u \in S_i\}$ et $\bar{T}_i = \{f_u \ / \ u \in T_i\}$.

Soient $E^{(i)} = \langle E_1^{(i)},\ldots,E_m^{(i)}\rangle$ et $L^{(i)} = \langle L_1^{(i)},\ldots,L_m^{(i)}\rangle$ les approximations des solutions de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{S}'$; et montrons d'abord par récurrence que $E_j^{(i)} = \{\Pi_n^1.\phi(u) \ / \ u \in L_j^{(i)}\}$.

. On a bien $L_j^{(0)} = \emptyset$

d'où $E_j^{(0)} = \{\Pi_n^1.\phi(u) \ / \ u \in L_j^{(0)}\} = \emptyset$

. Supposons que $\forall\ j \leq m$, $E_j^{(i)} = \{\Pi_n^1.\phi(u) \ / \ u \in L_j^{(i)}\}$.

On a alors $L_j^{(i+1)} = \bigcup_{\bar{X}_k.g_u \in \bar{S}_i} L_k^{(i)}.\{g_u\} + \bigcup_{f_u \in \bar{T}_j} \{f_u\} =$

$$\bigcup_{X_k.u \in S_i} L_k^{(i)}.\{g_u\} + \bigcup_{u \in T_j} \{f_u\}.$$

Or $L_k^{(i)}.g_u = \bigcup_{v \in L_k^{(i)}} \{v\}.\{g_u\} = \bigcup_{v \in L_k^{(i)}} \{v.g_u\}$. On en déduit que

$$\{\Pi_n^1\ \phi(w) \ / \ w \in L_j^{(i+1)}\} = \bigcup_{X_k.u \in S_i} \{\Pi_n^1\ \phi(v).\phi(g_u) \ / \ v \in L_k^{(i)}\} + \bigcup_{u \in T_j} \{\Pi_n^1.\phi(f_u)\} =$$

$$\bigcup_{X_k.u \in S_i} \{\Pi_n^1.\phi(v).u \ / \ v \in L_r^{(i)}\} + T_j.$$

Or, à cause de l'addition à gauche du produit de composition dans le magmoïde des parties, $\{\Pi_n^1.\phi(v).u \ / \ v \in L_k^{(i)}\} = \{\Pi_n^1.\phi(v) \ / \ v \in L_k^{i}\}.u = E_k^{(i)}.u$

d'où $\{\Pi_n^1.\phi(w) \ / \ w \in L_j^{(i+1)}\} = \bigcup_{X_k.u \in S_j} E_k^{(i)}.u + T_j = E_j^{(i+1)}$.

On en déduit que $E_j = \bigcup_i E_j^{(i)} = \bigcup_i \{\Pi_n^1.\phi(w) \ / \ w \in L_j^{(i)}\} =$

$\{\Pi_n^1.\phi(w) \ / \ w \in \bigcup_i L_j^{(i)}\} = \{\Pi_n^1.\phi(w) \ / \ w \in L_j\}$.

Or chacun des L_j est clairement un langage rationnel de Σ^*, donc un ensemble reconnaissable de $T(\Sigma)_1^1$ et que $U = E_{i_0} = \{\Pi_n^1.\phi(w) \ / \ w \in L_{i_0}\}$ la condition nécessaire est démontrée.

Condition suffisante

Soient Σ un alphabet gradué monadique, L une partie reconnaissable de $T(\Sigma)_1^1$ et ϕ un n-morphisme de $T(\Sigma)$ dans MT où M est un magmoïde décomposable.

Comme L est reconnaissable, L peut être considérée comme une partie rationnelle de Σ_1^*. Il existe donc un système linéaire à gauche $S = \{X_i = S_i + T_i \ / \ i \leq m\}$ dont la solution est $\{L_1,\ldots,L_m\}$ tel que $L = L_{i_0}$. Ce système peut être aussi considéré comme un système corégulier homogène de degré 1. On forme alors le système corégulier homogène de degré n, $S' = \{\bar{X}_i = \bar{S}_i + \bar{T}_i \ / \ i \leq m\}$ où pour $i \leq m$, $\bar{S}_i = \{X_j.\phi(u) \ / \ X_j.u \in S_i\}$ et $\bar{T}_i = \{\Pi_n^1.\phi(u) \ / \ u \in T_i\}$. On démontre exactement de la même façon que ci-dessus que si $E = \langle E_1,\ldots,E_m\rangle$ est la solution de S' alors $\forall\ j \leq m$, $E_j = \{\Pi_n^1.\phi(u) \ / \ u \in L_j\}$ d'où $U = \{\Pi_n^1.\phi(u) \ / \ u \in L_{i_0}\} = E_{i_0}$ est bien la composante de la solution d'un système corégulier homogène.

cqfd.

Exemple 5.11 Soit $\Sigma' = \{a\}$ avec $d(a) = 1$. Alors l'ensemble corégulier homogène de degré 1 de l'exemple 5.1 est l'image de $\{\langle 1;a^n(x_1)\rangle \ / \ n \geq 1\}$ par le 1-morphisme ϕ de $T(\Sigma')$ dans $T(\Sigma)$ défini par $\phi(a) = \langle 1;b(x_1,x_1)\rangle$.

$\perp$

Cette caractérisation des ensembles coréguliers homogènes homogènes va nous permettre d'obtenir aisément des propriétés des ensembles coréguliers.

Tout d'abord nous en déduisons une généralisation de la caractérisation classique des "forêts corégulières" [8], [44], puisqu'un n-morphisme est un cas particulier de "transducteur déterministe" (cf. chapitre I, § 3).

Proposition 5.12 *Soit* M *un magmoïde décomposable. Une partie* U *de* MT_0^1 *est un ensemble corégulier ssi il existe un alphabet gradué monadique fini* Σ, *une partie reconnaissable* L *de* $T(\Sigma)_0^1$ *et un k-morphisme* ϕ *de* $T(\Sigma)$ *dans* MT *tels que* $U = \{\Pi_k^1\ \phi(u)\ /\ u \in L\}$.

Démonstration : Condition nécessaire

Soit U un ensemble corégulier de MT_0^1. D'après la proposition 5.9 il existe un système corégulier homogène de degré k tel que $U \otimes O_k$ est une composante de la solution de ce système. D'après le théorème 5.10, il existe un alphabet gradué monadique fini Σ, une partie reconnaissable L de $T(\Sigma)_1^1$ et un k-morphisme de $T(\Sigma)$ dans MT tels que $U \otimes O_k = \{\Pi_k^1.\phi(u)\ /\ u \in L\}$. Soit alors u_0 un élément quelconque de $U(MT)_0^1$, et soit # un symbole 0-aire n'appartenant pas à Σ. On considère l'alphabet $\Sigma' = \Sigma \cup \{\#\}$ et le k-morphisme ϕ' de $T(\Sigma')$ dans MT défini par

$$\phi'(f) = \phi(f) \text{ si } f \in \Sigma$$

$$\phi'(\#) = \langle u_0,\ldots,u_0\rangle \in MT_0^k$$

On considère aussi $L' = \{u.\#\ /\ u \in L\}$ qui est encore un ensemble reconnaissable. D'après le théorème 5.10, $E = \{\Pi_k^1.\phi'(u)\ /\ u \in L'\}$ est donc un ensemble corégulier. Or par définition de L', cet ensemble est égal à

$\{\Pi_k^1.\phi'(u.\#)\ /\ u \in L\} = \{\Pi_k^1.\phi(u).\langle u_0,\ldots,u_0\rangle\ /\ u \in L\} =$

$\{\Pi_k^1.\phi(u)\ /\ u \in L\}.\langle u_0,\ldots,u_0\rangle =$

$(U \otimes O_k).\langle u_0,\ldots,u_0\rangle = \{(v \otimes O_k).\langle u_0,\ldots,u_0\rangle\ /\ v \in U\}$

et comme $v \in U \subset MT_0^1$, $(v \otimes O_k).\langle u_0,\ldots,u_0\rangle = v$

on en déduit que $U = \{\Pi_k^1.\phi'(u)\ /\ u \in L'\}$, ce qui démontre la condition nécessaire.

Condition suffisante

Soit L une partie reconnaissable de $T(\Sigma)_0^1$, où Σ est un alphabet gradué monadique fini, et soit ϕ un k-morphisme de $T(\Sigma)$ dans $M\mathcal{T}$ tels que $U = \{\Pi_k^1.\phi(u) \ / \ u \in L\}$. Supposons que $\Sigma_0 = \{a_1,\ldots,a_n\}$. Alors pour tout $a \in \Sigma_0$ l'ensemble $L_a = \{u \in T(\Sigma)_1^1 \ / \ u.a \in L\}$ est reconnaissable et on a bien $L = \bigcup_{a\in\Sigma_0} L_a.\{A\}$ d'où $U = \bigcup_{a\in\Sigma_0} \{\Pi_k^1.\phi(u) \ / \ u \in L_a\}.\phi(a)$. Posons alors $U_a = \{\Pi_k^1.\phi(u) \ / \ u \in L_a\}$. On a donc $U = \bigcup_{a\in\Sigma_0} U_a.\phi(a)$. D'après le théorème 5.10, pour chaque $a \in \Sigma_0$, U_a est la composante E_ℓ de la solution $<E_1,\ldots,E_m>$ d'un système corégulier homogène $\mathcal{S} = \{X_i = S_i + T_i \ / \ i \leq m\}$. Soit X_0 un symbole de degré 0 qui n'appartient donc pas à $\{X_1,\ldots,X_m\}$ et soit le système corégulier $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \{X_0 = X_\ell.\phi(a)\}$.

Il est immédiat que la solution de ce système est $<E_\ell.\phi(a),E_1,\ldots,E_m>$. Et donc $U_a.\phi(a) = E_\ell.\phi(a)$ est bien la composante de la solution d'un système corégulier. Pour achever la démonstration, il suffit alors de montrer que la réunion de deux ensembles coréguliers est un ensemble corégulier.

Soient donc $<E_1,\ldots,E_m>$ et $<E'_1,\ldots,E'_{m'}>$ les solutions de deux systèmes coréguliers $\mathcal{S} = \{X_i = S_i + T_i \ / \ i \leq m\}$ et $\mathcal{S}' = \{X'_i = S'_i + T'_i \ / \ i \leq m'\}$ sur deux alphabets gradués $\{X_1,\ldots,X_m\}$ et $\{X'_1,\ldots,X'_{m'}\}$ disjoints. Le système $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$ admet pour solution $<E_1,\ldots,E_m,E'_1,\ldots,E'_{m'}>$ et le système $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}' \cup \{X_0 = X_i + X'_j\}$ où X_0 est un nouveau symbole de même degré que X_i et X'_j admet pour solution $<E_i + E'_j, E_1,\ldots,E_m, E'_1,\ldots,E'_{m'}>$ d'où le résultat.

cqfd.

Proposition 5.13 *La classe des ensembles coréguliers est fermée par 1-morphisme quelconque.*

Démonstration : Soient M et M' deux magmoïdes décomposables et ϕ un 1-morphisme de MT dans $M'T$. Soit $U \subset MT_p^1$ un ensemble corégulier. D'après la proposition 5.9 et le théorème 5.10, il existe un alphabet gradué monadique Σ, une partie reconnaissable L de $T(\Sigma)_1^1$, un k-morphisme ψ de $T(\Sigma)$ dans M , avec $k \geq p$, tels que $U \otimes O_{k-p} = \{\Pi_k^1.\psi(u) \ / \ u \in L\}$. On en déduit que $\phi(U) \otimes O_{k-p} = \{\phi(u) \otimes O_{k-p} \ / \ u \in U\} = \{\phi(u \otimes O_{k-p}) \ / \ u \in U\} = \{\phi(\Pi_k^1).\phi(\psi(u)) \ / \ u \in L\} = \{\Pi_k^1.\phi(\psi(u)) \ / \ u \in L\}$ et comme $\phi \circ \psi$ est un k-morphisme, $\phi(U) \otimes O_{k-p}$ est un ensemble corégulier homogène. C'est donc la composante E_ℓ de la solution $<E_1,\ldots,E_m>$ d'un système $S = \{X_i = S_i + T_i \ / \ i \leq m\}$ où le degré de chaque X_i est égal à k. On considère alors un nouveau symbole non terminal de degré p et l'élément $\Theta = <\Pi_p^1,\ldots,\Pi_p^p,\underbrace{\Pi_p^1,\ldots,\Pi_p^1}_{k-p}>$ de $M'T_p^k$ et on considère le système

$S' = S \cup \{X_0 = X_\ell.\Theta\}$ dont la solution est $<E_\ell.\Theta,E_1,\ldots,E_m>$. Or $E_\ell.\Theta = (\phi(U) \otimes O_{k-p}).\Theta = \{(\phi(u) \otimes O_{k-p}).<\Pi_p^1,\ldots,\Pi_p^p,\Pi_p^1,\ldots,\Pi_p^1> \ / \ u \in U\} = \{\phi(u) \ / \ u \in U\} = U$.

cqfd.

Proposition 5.14 *Un ensemble est corégulier ssi il est l'image par un 1-morphisme d'un ensemble corégulier d'un magmoïde projetable libre finiment engendré.*

Démonstration : La condition suffisante est une conséquence immédiate de la proposition 5.13. La condition nécessaire découle des propositions 4.5 et 4.6 en remarquant que si S est un système corégulier, le système S' tel que $S = \phi(S')$ construit dans la démonstration de la proposition 4.6 est aussi corégulier.

cqfd.

Proposition 5.15 *La classe des ensembles coréguliers est fermée par intersection avec un ensemble reconnaissable.*

Démonstration : Montrons d'abord ce résultat pour les ensembles coréguliers d'un magmoïde projetable libre finiment engendré. Soit donc Σ un alphabet gradué fini. Soient $U \subset T(\Sigma)^1_p$ un ensemble corégulier et $K \subset T(\Sigma)^1_p$ un ensemble reconnaissable. D'après la proposition 5.9 et le théorème 5.10 il existe un alphabet gradué monadique Δ, une partie reconnaissable L de $T(\Delta)^1_1$ est un k-morphisme de $T(\Delta)$ dans $T(\Sigma)$, avec $k \geq p$, tels que $U \otimes 0_{k-p} = \{\Pi^1_k.\phi(u) \ / \ u \in L\}$.

Comme les ensembles reconnaissables et rationnels de $T(\Sigma)$ sont les mêmes d'après le théorème 3.24, $K \otimes 0_{k-p}$ est un ensemble reconnaissable et donc

$$K' = \{<v \otimes 0_{k-p}, v_2, \ldots, v_k> \ / \ v \in K, \ v_2, \ldots, v_k \in T(\Sigma)^1_k\}$$

est une partie reconnaissable de $T(\Sigma)^k_k$. $L' = \phi^{-1}(K')$ est donc une partie reconnaissable de $T(\Delta)^1_1$, $V = \{\Pi^1_k.\phi(u) \ / \ u \in L \cap L'\}$ est un ensemble corégulier. D'après la définition de L' et K', V est aussi égal à

$$\{\Pi^1_k.\phi(u) \ / \ u \in L\} \cap (K \otimes 0_{k-p}) = (U \otimes 0_{k-p}) \cap (K \otimes 0_{k-p}).$$

Or $U \otimes 0_{k-p} = \{\tilde{u}.(\Theta \otimes 0_{k-p}) \ / \ \tilde{u}.\Theta \in U\}$
et $K \otimes 0_{k-p} = \{\tilde{u}.(\Theta \otimes 0_{k-p}) \ / \ \tilde{u}.\Theta \in K\}$; on en déduit que $v \in V$ ssi
$v = \tilde{u}_1.(\Theta_1 \otimes 0_{k-p}) = \tilde{u}_2.(\Theta_2 \otimes 0_{k-p})$ avec $\tilde{u}_1.\Theta_1 \in U$ et $\tilde{u}_2.\Theta_2 \in V$.
Mais comme $v \in T(\Sigma)^1_k$, l'égalité $\tilde{u}_1.(\Theta_1 \otimes 0_{k-p}) = \tilde{u}_2.(\Theta_2 \otimes 0_{k-p})$ entraîne $\Theta_1 = \Theta_2$ et $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$, d'où

$$V = (U \cap K) \otimes 0_{k-p}.$$

On montre enfin, de la même façon que dans la démonstration de la proposition 5.13 que $U \cap K = V.<\Pi^1_p, \ldots, \Pi^p_p, \Pi^1_p, \ldots, \Pi^1_p>$ est un ensemble corégulier.

Si maintenant U est un ensemble corégulier de MT^1_p où M est un magmoïde décomposable quelconque, alors d'après la proposition 5.14 il existe un alphabet gradué Σ, un 1-morphisme ϕ de $T(\Sigma)$ dans MT et un ensemble corégulier $V \subset T(\Sigma)^1_p$ tels que $U = \phi(V)$. Si $K \subset MT^1_p$ est reconnaissable $\phi^{-1}(K)$ est encore reconnaissable et d'après ce qui précède $V \cap \phi^{-1}(K)$ est corégulier. D'après la proposition 5.14, $\phi(V \cap \phi^{-1}(K)) = \phi(V) \cap K = U \cap K$ est donc aussi corégulier.

cqfd.

Proposition 5.16 *Soit* U_0 *un ensemble corégulier de* MT^1_p *et soient* $U_1,\ldots,U_p$ *des ensembles coréguliers de* MT^1_q. *Alors* $U_0.\langle U_1,\ldots,U_p\rangle$ *est corégulier.*

Démonstration : Comme $\langle U_1,\ldots,U_p\rangle = U_1 \otimes \ldots \otimes U_p.\langle Id_q,\ldots,Id_q\rangle$, il suffit de montrer que $U_0.(U_1 \otimes \ldots \otimes U_p) = V$ est corégulier puisque nous avons déjà montré que si V est corégulier $V.\langle Id_q,\ldots,Id_q\rangle$ est aussi corégulier. Or $U_1 \otimes \ldots \otimes U_p = (U_1 \otimes Id_{p-1}).(Id_q \otimes U_2 \otimes Id_{p-2}) \ldots .$ $(Id_{q(i-1)} \otimes U_i \; O \; Id_{p-i}) \ldots (Id_{q(p-1)} \otimes U_p)$. Il suffit donc de montrer que si U est corégulier de MT^1_p et V est corégulier de MT^1_q alors $U.(Id_n \otimes V \otimes Id_{n'})$ est encore corégulier, avec $p = n+1+n'$.

Toujours d'après les mêmes raisons que précédemment

$U \otimes O_{k-p} = \{\Pi^1_k.\phi(u) \;/\; u \in L\}$ où $L \subset T(\Sigma)^1_1$ et

$V \otimes O_{k'-p} = \{\Pi^1_k.\phi'(u) \;/\; u \in L'\}$ où $L' \subset T(\Sigma')^1_1$.

On pose alors $\bar{\Sigma} = \Sigma \cup \Sigma' \cup \{c\}$, $r = k+k'$ et on définit le r-morphisme ψ par

$$\psi(a) = \phi(a) \otimes Id_{k'} \text{ si } a \in \Sigma$$

$$\psi(a) = Id_n \otimes \phi'(a) \otimes Id_{k-n} \text{ si } a \in \Sigma'$$

$$\psi(c) = Id_n \otimes \Pi^1_{k'} \otimes Id_{n'} \otimes \Theta \text{ où } \Theta \in \Theta^{k+k'-p}_{k+1-p}$$

On en déduit que l'ensemble corégulier $W = \{\Pi^1_r.\psi(w) \ / \ w \in L \subset L'\}$ est aussi égal à

$\{(\Pi^1_k.\phi(u)) \otimes O_{k'} \ / \ u \in L\}.\psi(c).\{Id_n \otimes \phi'(v) \otimes Id_{k-n} \ / \ v \in L'\}$

qui est aussi égal à $(U \otimes O_{k+k'-p}).(Id_n \otimes V \otimes O_{k'-q} \otimes Id_{n'} \otimes \Theta) =$

$U.(Id_n \otimes V \otimes O_{k'-q} \otimes Id_{n'} \otimes O_{k+1-p}) =$

$U.(Id_n \otimes V \otimes Id_{n'}).(Id_{n+q} \otimes O_{k'-q} \otimes Id_{n'} \otimes O_{k+1-p}).$

$$\text{Si } \bar{\Theta}(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq n+q \\ i-k'+q & \text{si } n+k' < i \leq n'+k'-q \end{cases}$$

alors $(Id_{n+q} \otimes O_{k'-q} \otimes Id_{n'} \otimes O_{k+1-p}).\bar{\Theta} = Id_{n+q+n'}$ d'où $W.\bar{\Theta}$ qui est encore corégulier est égal à $U.\ Id_n \otimes V \otimes Id_{n'}).$

<u>cqfd</u>.

3. Comparaison des ensembles réguliers et coréguliers

Proposition 5.17 *Il existe des ensembles coréguliers non réguliers.*

Démonstration : Soient l'alphabet gradué $\Sigma = \{a,b\}$ avec $d(b) = 2$, $d(a) = 1$, l'alphabet gradué $V = \{X\}$ avec $d(X) = 1$ et $\mathcal{S}$ le système corégulier homogène de degré 1

$$X = \langle 1;b(x_1,x_1)\rangle + X.\langle 1;a(x_1)\rangle.$$

La solution de ce système est la limite de la suite

$$E^{(0)} = \emptyset$$

$$E^{(1)} = \langle 1;b(x_1,x_1)\rangle + \emptyset.\langle 1;a(x_1)\rangle = \langle 1;b(x_1,x_1)\rangle$$

$$E^{(2)} = \langle 1;b(x_1,x_1)\rangle + E^{(1)}.\langle 1;a(x_1)\rangle =$$
$$\langle 1;b(x_1,x_1)\rangle + \langle 1;b(a(x_1),a(x_1)\rangle$$

c'est-à-dire $E = \{\langle 1;b(a^n(x_1),a^n(x_1))\rangle \ / \ n \geq 0\}$.

Si cet ensemble était régulier donc rationnel, l'ensemble $E' = E.\# = \{\langle 0;b(a^n(\#),a^n(\#))\rangle \ / \ n \geq 0\}$, où # est un nouveau symbole 0-aire, serait rationnel, donc reconnaissable. Or nous avons déjà vu (exemple 2.20) qu'il ne l'était pas.

Le résultat qui suit a déjà été démontré par Arnold et Dauchet dans [8].

Proposition 5.18 *Il existe des ensembles réguliers non coréguliers.*

Démonstration : Soit b un symbole de degré 2. L'ensemble $U = T(b)_1^1$ est un ensemble reconnaissable donc régulier. Nous allons montrer qu'il n'est pas corégulier. Supposons qu'il le soit. Il existe, d'après la proposition 5.9 et le théorème 5.10, un alphabet gradué monadique Σ, une partie reconnaissable

L de $T(\Sigma)^1_1$, un k-morphisme ϕ de $T(\Sigma)$ dans $T(b)$ tels que $U \otimes O_{k-1} = \{\Pi^1_k.\phi(u) \ / \ u \in L\}$.

Remarquons d'abord que pour tout entier $q > 0$ et tout élément $\tilde{u}$ de $\tilde{T}(b)^1_q$, le nombre n = taille $(\tilde{u})$ de symboles b figurant dans $\tilde{u}$ est égal à $q-1$.

Pour tout entier $n \geq 0$ on définit l'élément B_n de $T(\Sigma)^1_{2^n}$ par

$$B_0 = Id_1$$
$$B_1 = b$$
$$B_2 = b.(b \otimes b)$$
$$\vdots$$
$$B_{n+1} = b.(B_n \otimes B_n).$$

On considère ensuite l'entier $m = \sup\{\text{taille } (\phi(a))/a \in \Sigma\}$ et l'élément $\tilde{u} = B_{k+m-1}.(B_1 \otimes B_2 \otimes \ldots \otimes B_{2^{k+m-1}})$ de $\tilde{T}(b)^1_1$ ou $r = 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{2^{k+m-1}}$.
On pose $\tilde{u} = u.<\Pi^1_1,\ldots,\Pi^1_1> \in T(b)^1_1$. Il existe donc $a_1 \ldots a_n \in T(\Sigma)^1_1$ tel que $\Pi^1_k.\phi(a_1 \ldots a_n) = u \otimes O_{k-1} = \tilde{u}.<\Pi^1_k,\ldots,\Pi^1_k>$.

On pose pour $0 \leq i \leq n$

$$v_i = \begin{cases} a_1 \ldots a_i & \text{si } i \neq 0 \\ Id_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\bar{v}_i = \begin{cases} a_{i+1} \ldots a_n & \text{si } i \neq n \\ Id_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc bien $a_1 \ldots a_n = v_i.\bar{v}_i$ pour tout $i \in \{0,\ldots,n\}$.

Comme $\Pi^1_k.\phi(a_1 \ldots a_n) = \tilde{u}.<\Pi^1_k,\ldots,\Pi^1_k>$ où $<\Pi^1_k,\ldots,\Pi^1_k>$ n'est pas une injection, il existe nécessairement au moins un entier $i \leq n$ tel que $\pi^1_k.\phi(v_i) = \tilde{v}.\Theta$ où Θ n'est pas une injection. Soit i_0 le plus petit entier ayant cette propriété.

On a alors $\Pi_k^1.\phi(v_{i_0-1}) = \tilde{t}.\Theta'$ où Θ' est injectif. Comme $\tilde{t}.\Theta' \in T(b)_k^1$, $\tilde{t} \in \tilde{T}(b)_q^1$ avec $q \leq k$ d'où taille $(t) = q-1 \leq k-1$. Par ailleurs $\Pi_k^1.\phi(v_{i_0}) = \Pi_k^1.\phi(v_{i_0-1}).\phi(a_{i_0}) = \tilde{t}.\Theta.\phi(a_{i_0})$. On en déduit que $\Pi_k^1.\phi(v_{i_0}) = \tilde{v}.\Theta$ où Θ n'est pas injectif et que taille $(\tilde{v}) \leq$ taille $(\tilde{t})$ + taille $(\phi(a_{i_0})) \leq k-1+m$. Il en résulte que $\tilde{v}$ est un sous arbre initial de B_{k+m-1}, i.e. il existe $\tilde{w}$ tel que $B_{k+m-1} = \tilde{v}.\tilde{w}$ et comme $u = \Pi_k^1.\phi(v_{i_0}.\bar{v}_{i_0}) = \tilde{v}.\Theta.\phi(\bar{v}_{i_0})$, on a $\Theta.\phi(\bar{v}_{i_0}) = \tilde{w}.(B_1 \otimes \ldots \otimes B_{2k+m-1}).<\Pi_k^1,\ldots,\pi_k^1>$. Ceci entraîne en particulier que $\Pi_k^{\Theta(i)}.\phi(\bar{v}_{i_0}) = \Pi_q^i.\tilde{w}.(B_1 \otimes \ldots \otimes B_{2k+m-1}).<\Pi_k^1,\ldots,\Pi_k^1>$.

Or Θ n'est pas injectif. Il existe donc $i < j$ tel que $\Theta(i) = \Theta(j)$ et donc

$$\Pi_q^i.\tilde{w}.(B_1 \otimes \ldots \otimes B_{2k+m-1}).<\Pi_k^1,\ldots,\Pi_k^1> =$$
$$\Pi_q^j.\tilde{w}.(B_1 \otimes \ldots \otimes B_{2k+m-1}) <\Pi_k^1,\ldots,\Pi_k^1>.$$

Or on voit aisément d'après la définition de w que $\Pi_q^i.\tilde{w} = O_{p_1} \otimes B_{n_1} \otimes O_{q_1}$ et $\Pi_q^j.\tilde{w} = O_{p_2} \otimes B_{n_2} \otimes O_{q_2}$ avec

- $p_1 + 2^{n_1} + q_1 = p_2 + 2^{n_2} + q_2 = 2^{k+m-1}$
- $p_2 > p_1 + 2^{n_1}$
- $n_1 < k+m-1$, $n_2 < k+m-1$

d'où $\Pi_k^i.\tilde{w}.<B_1 \otimes \ldots \otimes B_{2k+m-1}>.<\Pi_k^1,\ldots,\Pi_k^1> =$

$$B_{n_1}.(B_{p_1+1} \otimes \ldots \otimes B_{p_1+2^{n_1}}).<\Pi_k^1,\ldots,\Pi_k^1>$$

et de même, $\Pi_k^j.\tilde{w}.(B_1 \otimes \ldots \otimes B_{2k+m-1}).<\Pi_k^1,\ldots,\Pi_k^1> =$

$$B_{n_2}.(B_{p_2+1} \otimes \ldots \otimes B_{p_2+2^{n_2}}).<\Pi_k^1,\ldots,\Pi_k^1>.$$

De l'égalité de ces deux éléments, on déduit l'égalité

$$B_{n_1}.(B_{p_1+1} \otimes \ldots \otimes B_{p_1+2^{n_1}}) = B_{n_2}.(B_{p_2+1} \otimes \ldots \otimes B_{p_2+2^{n_2}}).$$

Le premier de ces éléments est dans $\tilde{T}(b)^1_{r_1}$ avec

$r_1 = 2^{p_1+1} + 2^{p_1+2} + \ldots + 2^{p_1+2^{n_1}} < 2^{p_1+1+2^{n_1}}$ et le second dans

$\tilde{T}(b)^1_{r_2}$ avec $r_2 = 2^{p_2+1} + \ldots + 2^{p_2+2^{n_2}} \geq 2^{p_2+1}$ or $p_1 + 2^{n_1} < p_2$

d'où $p_1+1+2^{n_1} < p_2+1$ et donc $r_1 < 2^{p_1+1+2^{n_1}} < 2^{p_2+1} \leq r_2$; ce qui implique que les deux éléments ci-dessus ne peuvent être égaux puisqu'ils ne sont pas dans la même fibre. On aboutit donc à une contradiction.

cqfd.

Enfin nous allons caractériser les ensembles réguliers d'un magmoïde projetable libre qui sont aussi coréguliers. Cette caractérisation n'est autre que la traduction dans le formalisme que nous utilisons ici de celle donnée par Arnold et Dauchet dans [10].

Nous dirons qu'un ensemble régulier de MT^1_p est **non-expansif** s'il peut se mettre sous la forme $\Pi_k^{i_0}.S^*.T$ où S et T sont deux polynômes de $P(MT)^k_k$ et de $P(MT)^k_p$ tels que :

$\forall\ \tilde{u}.\theta \in \Pi_k^{i_0}.S^*$

$\forall\ i' \leq k$ et $i = \theta(i')$

$\forall\ \tilde{v}.\theta' \in \Pi_k^{i}.S$ tel que $\tilde{u}.\theta.\tilde{v}.\theta'.T \neq \emptyset$

alors si $\theta'(j) = \theta'(j') = i$ on doit avoir $j = j'$.

Proposition 5.19 *Soit Σ un alphabet gradué fini. Un ensemble régulier de $T(\Sigma)$ est corégulier ssi il est non expansif.*

<u>Démonstration</u> : Soit U un ensemble régulier de $T(\Sigma)$ qui peut toujours se mettre sous la forme $\Pi_k^{i_0}.S^*.T$.

<u>Condition nécessaire</u>

Supposons que U ne soit pas non expansif mais qu'il soit corégulier. Il existe donc $\tilde{u}.\theta \in \Pi_k^{i_0}.S^*$, $i' \leq k$ et $i = \theta(i')$, $v'.\theta' \in \Pi_k^{i}.S^*$ tel que $\tilde{u}.\theta.\tilde{v}.\theta'.T \neq \emptyset$, $j \neq j'$ tels que $\theta'(j) = \theta'(j') = i$. On en déduit qu'il existe $w = \langle w_1,\ldots,w_k\rangle \in T$ tel que $\tilde{u}.\theta.\tilde{v}.\theta'.w \in \tilde{u}.\tilde{\theta}.\tilde{v}.\theta'.T$.

On pose $V = \langle \Pi_k^1,\ldots,\Pi_k^{i-1},\tilde{v}.\theta',\Pi_k^{i+1},\ldots,\Pi_k^k\rangle$ et on montre que $\forall\, t \in V^*$, $\tilde{u}.\theta.t.w \neq \emptyset$; d'où $\tilde{u}.\theta.V^*.w \supset \{\tilde{u}.\theta.t.w \mid t \in V^*\}$; de plus comme $\tilde{u}.\theta.V^*.w$ est rationnel donc reconnaissable et qu'elle est incluse dans U on a $U' = \tilde{u}.\theta.V^*.w = \tilde{u}.\theta.V^*.w \cap U$ qui est encore à la fois régulier et corégulier. Mais en vertu de la proposition 5.14 on peut supposer que $\tilde{u}$, et $\tilde{v}$ sont des lettres d'un alphabet et que $w = \langle \tilde{w}_1.\theta_1,\ldots,\tilde{w}_r.\theta_k\rangle$ où les $\tilde{w}_i$ sont aussi des lettres. On considère alors le 1-morphisme linéaire ϕ défini par $\tilde{u} \to \Pi^j_{d(\tilde{u})}$, $\tilde{v} \to b.\langle \Pi^j_{d(\bar{v})}.\Pi^{j'}_{d(\tilde{v})}\rangle$, $\tilde{w}_i \to \Pi^1_{d(\bar{w}_i)}$ qui transforme $\tilde{u}.\theta.V^*.w$ en un ensemble corégulier qui contient $\{\phi(\tilde{u}.\theta.t.w) \;/\; t \in V^*\} =$ $\{\Pi_k^i.\phi(t).\langle \Pi_k^{\theta_1(1)},\ldots,\Pi_k^{\theta_k(1)}\rangle \;/\; t \in V^*\}$. Or comme il est facile de montrer que $\{\Pi_k^i.\phi(t) \;/\; t \in V^*\} = \{\tilde{s}.\langle \Pi_k^i,\ldots,\Pi_k^i\rangle \;/\; p > 0 \text{ et } \tilde{s} \in \tilde{T}(b)^1_p\}$ d'où $\{\Pi_k^i.\phi(t).\langle \Pi_k^{\theta_1(1)},\ldots,\Pi_k^{\theta_k(1)}\rangle \;/\; t \in V^*\} =$ $\{\tilde{s}.\langle \Pi_k^{\theta_i(1)},\ldots,\Pi_k^{\theta_i(1)}\rangle \;/\; \tilde{s} \in \tilde{T}(b)^1_p,\ p > 0\}$ est inclus dans un ensemble corégulier, ce que nous avons déjà montré être contradictoire dans la démonstration de la proposition précédente.

<u>Condition suffisante</u>

Supposons que $U = \Pi_k^{i_0}.S^*.T$ satisfasse aux conditions de non expansivité. On définit sur [k] le préordre $\ll$ par

$i \ll j$ ssi $\exists\ \tilde{u}.\theta \in \Pi_k^i.S^*$ et i' tels que $j = \theta(i')$

et soit $\equiv$ l'équivalence associée et soient $<$ et $\leq$ les ordres stricts et larges associés en préordre $\ll$ sur $[k] / \equiv$. On note $i/\equiv$ la classe de i pour $\equiv$.

Pour chaque classe $i/\equiv$ nous définissons $S^{(i)}$ de $P(T(\Sigma))_k^k$ par

$$\Pi_k^j.S^{(i)} = \begin{cases} \Pi_k^j.S.E(T) \text{ si } j \equiv i \\ \emptyset \text{ sinon.} \end{cases}$$

On démontre alors que $\Pi_k^i.S^*.T = \Pi_k^i(S^{(i)})^*. \bigcup_{j<i} (S^{(j)})^*.T$.

D'autre part, la condition de non-expansivité entraîne que si $\tilde{u}.\theta \in \Pi_k^i.S^*$, il existe au plus un j tel que $\theta(j) \equiv i$. On en déduit que $\Pi_k^i.(S^{(i)})^*$ peut être considérée comme l'image par un k-morphisme d'un système monadique, i.e. $\Pi_k^i(S^{(i)})^*$ est corégulier. On peut alors démontrer par induction sur l'ordre $<$ que $\forall\ i$, $\Pi_k^i.S^*.T$ est corégulier d'où le résultat.

cqfd.

Enfin le fait que $T(b)_1^1$ ne soit pas corégulier va permettre de montrer que les ensembles coréguliers ne sont pas fernés par morphisme inverse.

Proposition 5.20 *La classe des ensembles coréguliers n'est pas fermée par morphisme inverse.*

Démonstration : Soit E l'ensemble corégulier solution du système $X = X.\langle 1;b(x_1,x_1)\rangle + \langle 1;b(x_1,x_1)\rangle$. On considère l'alphabet $\{b,\bar{b}\}$ avec $d(b) = d(b) = 2$ et le morphisme ϕ de $T(b,\bar{b})$ dans $T(b)$ défini par $\phi(b) = \phi(\bar{b}) = b$.

Supposons que $F = \phi^{-1}(E)$ soit un ensemble corégulier de $T(b,\bar{b})^1_1$, alors l'image de F par le 1-morphisme linéaire ψ de $T(b,\bar{b})$ dans $T(b)$ défini par

$$\psi(b) = b$$
$$\psi(\bar{b}) = \langle 2;x_1\rangle = \Pi^1_2$$

est encore un ensemble corégulier de $T(b)^1_1$.

Or nous allons montrer que $\psi(F)$ est $T(b)^1_1$ tout entier, qui n'est pas corégulier ; on obtient donc une contradiction d'où $\phi^{-1}(E)$ n'est pas corégulier. Soit donc $u = \tilde{u}.\Theta \in T(b)^1_1$. On montre alors aisément par récurrence sur la taille de $\tilde{u}$ qu'il existe $\tilde{v} \in \tilde{T}(\bar{b})$ tel que $\phi(\tilde{u}.\tilde{v}) = B_n$. En effet si taille $(\tilde{u}) = 0$, $u = B_0$;
si $\tilde{u} = b.(\tilde{u}_1 \otimes \tilde{u}_2)$ alors $\phi(\tilde{u}_1.\tilde{v}_1) = B_{n_1}$, $\phi(\tilde{u}_2.\tilde{v}_2) = B_{n_2}$. En posant $m = \sup(n_1,n_2)$, on a $\phi(b(\tilde{u}_1 \otimes \tilde{u}_2).(\bar{B}_{m-n_1} \otimes \ldots \otimes \bar{B}_{m-n_1} \otimes \bar{B}_{m-n_2} \otimes \ldots \otimes \bar{B}_{m-n_2}) =$
$b.(B_{n_1} \otimes B_{n_2}).(B_{m-n_1} \otimes \ldots \otimes B_{m-n_1} \otimes B_{m-n_2} \otimes \ldots \otimes B_{m-n_2}) = b.(B_m \otimes B_m) = B_{m+1}$.

On a donc $\phi(\tilde{u}.\tilde{v}.\langle\Pi^1_1,\ldots,\Pi^1_1\rangle) = B_m.\langle\Pi^1_1,\ldots,\Pi^1_1\rangle \in E$ d'où $\tilde{u}.\tilde{v}.\langle\Pi^1_1,\ldots,\Pi^1_1\rangle \in \phi^{-1}(E) = F$. D'autre part $\psi(\tilde{u}.\tilde{v}).\langle\Pi^1_1,\ldots,\Pi^1_1\rangle) = \tilde{u}.\psi(\tilde{v}).\langle\Pi^1_1,\ldots,\Pi^1_1\rangle = \tilde{u}.\langle\Pi^1_1,\ldots,\Pi^1_1\rangle = \tilde{u}.\Theta$ et donc $\tilde{u}.\Theta \in \psi(F)$.

<u>cqfd</u>.

CHAPITRE VI

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

La définition générale des systèmes algébriques a été donnée au chapitre IV. Dans ce chapitre nous allons tout d'abord généraliser la notion de "grammaire algébrique descendante d'arbres" et montrer pour ces grammaires le **théorème d'algébricité** déjà démontré pour le cas classique dans le cadre des Σ-magmas par Nivat [75] et Boudol [29]. Nous montrerons ensuite que les systèmes algébriques admettent des formes normales et des propriétés de réduction. Nous donnerons aussi quelques propriétés de fermeture de la classe des ensembles algébriques, en reportant toutefois l'étude de l'importante question de fermeture par morphisme inverse au chapitre VII.

1. GRAMMAIRES ALGÉBRIQUES DESCENDANTES

Soit MT un magmoïde à torsion et soit V un alphabet gradué fini.

On appelle **grammaire (algébrique descendante)** sur MT et V le triplet $G = \langle V,M,P\rangle$ où P est une partie finie de $V \times (M \oplus \mathfrak{T}(V))T$ appelée **ensemble des règles** de G.

Chaque règle de P, notée $X \to u$, est telle que u appartient à $(M \oplus \mathfrak{T}(V))T^1_{d(X)}$.

On dira qu'un élément u de $(M \oplus \mathfrak{T}(V))T$ **se dérive immédiatement** en $u' \in (M \oplus \mathfrak{T}(V))T$, ce qui se notera $u \underset{G}{\Longrightarrow} u'$, ou $u \Longrightarrow u'$ si G est

déterminée par le contexte s'il existe $\alpha \in M$, β_1, β_2, $\gamma \in (M \oplus \mathcal{T}(V))T$, $X \to v \in P$ tels que

$$u = \alpha.(\beta_1 \otimes X \otimes \beta_2).\gamma \quad \text{et}$$

$$u' = \alpha.(\beta_1 \otimes v \otimes \beta_2).\gamma.$$

Comme X et v appartiennent à la même fibre de $(M \oplus \mathcal{T}(V))T$, u et u' appartiennent aussi à la même fibre.

On dira qu'un élément u **se dérive en** u', ce qui se notera $u \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} u'$, ou $u \overset{*}{\Longrightarrow} u'$, s'il existe une séquence $u_0, u_1, \ldots, u_n$ appelée **dérivation** de u' à partir de u, dont la **longueur** sera par définition l'entier n, telle que $u_0 = u$, $u_n = u'$ et $\forall\, i \in [n]$ $u_{i-1} \Longrightarrow u_i$.

On notera $F_G(X)$ l'ensemble $\{u \in MT \;/\; X \overset{*}{\Longrightarrow} u\}$ appelé **ensemble engendré par G à partir de X.**

Si $M = \mathcal{T}(\Sigma)$ et si on se fixe dans V un symbole particulier 0-aire X appelé axiome, on retrouve bien la définition habituelle des grammaires algébriques descendantes d'arbres. En effet l'écriture $u = \alpha.(\beta_1 \otimes X \otimes \beta_2).\gamma$ revient à faire apparaître dans u **une seule** occurrence du symbole non terminal X puisque $\alpha \in M = \mathcal{T}(\Sigma)$ et à réécrire cette occurrence par v en utilisant la règle $X \to v$, la greffe des composantes de γ qui sont arguments de X aux variables correspondantes de v se faisant automatiquement par le produit de composition. De plus comme $\alpha \in \mathcal{T}(\Sigma)$, α ne contient aucun symbole non-terminal; l'occurrence X réécrite n'est donc "précédée" d'aucun symbole non-terminal ; la définition des dérivations donnée ci-dessus est donc celle des dérivations descendantes.

<u>Exemple 6.1</u> Soit Σ un alphabet gradué qui contient les symboles f et g de degré 3 ; soit V un alphabet gradué qui contient le symbole X de degré 3 et soit G une grammaire qui contient la règle $X \to \langle 3;g(x_1,x_2,x_1)\rangle$.

Soient t_1, t_2, u_1, u_2, $u_3 \in T(\Sigma \cup V)^1_p$ et soit $u = f.\langle t_1,t_2,X.\langle u_1,u_2,u_3\rangle\rangle$ appartenant à $T(\Sigma \cup V)^1_p$. Cet élément peut s'écrire aussi $f.(t_1 \otimes t_2 \otimes X).\langle Id_p,Id_p,u_1,u_2,u_3\rangle$. On a donc $u \Longrightarrow u'$ où $u' = f.(t_1 \otimes t_2 \otimes \langle 3;g(x_1,x_2,x_1)\rangle).\langle Id_p,Id_p,u_1,u_2,u_3\rangle = f.\langle t_1,t_2,g.\langle u_1,u_2,u_1\rangle\rangle$.

Dans le cadre de la théorie classique, ceci correspond à la dérivation $f(t_1,t_2,X(u_1,u_2,u_3)) \Longrightarrow f(t_1,t_2,g(u_1,u_2,u_3))$.

$\perp$

<u>*Lemme 6.2*</u> *Soit* $G = \langle M,V,P\rangle$ *une grammaire algébrique et soient* $\alpha \in M$, $\beta_1,\beta_2,\gamma,u,u' \in (M \oplus \tilde{T}(V))T$. *Si* $u \overset{*}{\Longrightarrow} u'$ *alors* $\alpha.(\beta_1 \otimes u \otimes \beta_2).\gamma \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha.(\beta_1 \otimes u' \otimes \beta_2).\gamma$.

<u>Démonstration</u> : On va démontrer ce résultat par récurrence sur la longueur de la dérivation de u' à partir de u.

Si cette dérivation est de longueur 0, on a donc u = u' et $\alpha.(\beta_1 \otimes u \otimes \beta_2).\gamma \Longrightarrow \alpha.(\beta_1 \otimes u' \otimes \beta_2).\gamma$.

Si cette dérivation est de longueur n+1, alors il existe u" tel que $u \Longrightarrow u''$ et $u'' \overset{*}{\Longrightarrow} u'$ où la dérivation de u' à partir de u" est de longueur n. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui donne

$$\alpha.(\beta_1 \otimes u'' \otimes \beta_2).\gamma \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha.(\beta_1 \otimes u' \otimes \beta_2).\gamma.$$

Il reste donc à montrer que

$$\alpha.(\beta_1 \otimes u \otimes \beta_2).\gamma \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha.(\beta_1 \otimes u'' \otimes \beta_2).\gamma.$$

Or, puisque $u \Longrightarrow u'$, il existe $\alpha' \in M, \beta_1',\beta_2',\gamma' \in (M \oplus \tilde{T}(V))T$, $X \to v \in P$ tels que

$$u = \alpha'.(\beta_1' \otimes X \otimes \beta_2').\gamma' \text{ et } u'' = \alpha'.(\beta_1' \otimes v \otimes \beta_2').\gamma'.$$

D'où $\alpha.(\beta_1 \otimes u \otimes \beta_2).\gamma = \alpha.(\beta_1 \otimes (\alpha'.(\beta_1' \otimes X \otimes \beta_2').\gamma') \otimes \beta_2).\gamma =$
$\alpha.(Id_{p_1} \otimes \alpha' \otimes Id_{p_2}).(\beta_1 \otimes \beta_1' \otimes X \otimes \beta_2' \otimes \beta_2).(Id_{q_1} \otimes \gamma' \otimes Id_{q_2}).\gamma$
et comme $\alpha.(Id_{p_1} \otimes \alpha' \otimes Id_{p_2}) \in M$ alors
$\alpha.(\beta_1 \otimes u \otimes \beta_2).\gamma \Longrightarrow$
$\alpha.(Id_{p_1} \otimes \alpha' \otimes Id_{p_2}).(\beta_1 \otimes \beta_1' \otimes v \otimes \beta_2' \otimes \beta_2).(Id_{q_1} \otimes \gamma' \otimes Id_{q_2}).\gamma =$
$\alpha.(\beta_1 \otimes (\alpha'.(\beta_1' \otimes v \otimes \beta_2').\gamma') \otimes \beta_2).\gamma = \alpha.(\beta_1 \otimes u' \otimes \beta_2).\gamma$.

<u>cqfd</u>.

A toute grammaire $G = \langle M,V,P\rangle$ on associe le système algébrique $S = \{X = R_X \mid X \in V\}$ sur MT et V défini par : $\forall X \in V$, $R_X = \{u \mid X \to u \in P\}$. Réciproquement à tout système $S = \{X = R_X \mid X \in V\}$ sur MT et V, on associe la grammaire $G = \langle M,V,P\rangle$ définie par : $P = \{X \to u \mid X \in V \text{ et } u \in R_X\}$.

On établit ainsi une bijection entre l'ensemble des grammaires algébriques sur M et V et l'ensemble des systèmes algébriques sur MT et V.

De plus il est facile de voir que la restriction de cette bijection aux systèmes réguliers (coréguliers) est une bijection entre systèmes réguliers et grammaires régulières (systèmes coréguliers et grammaires corégulières). Le théorème d'algébricité que nous allons démontrer maintenant est donc encore valable pour ces deux sous-classes.

<u>*Théorème 6.3*</u> *(théorème d'algébricité)*

Soit $S = \{X = R_X \mid X \in V\}$ *un système algébrique sur* MT *et* V *dont la solution est* E, *et soit* $G = \langle M,V,P\rangle$ *la grammaire associée. Alors, quel que soit* X *appartenant à* V, $E_X = F_G(X)$.

<u>Démonstration</u> :

$\boxed{A}$ Montrons d'abord l'inclusion $F_G(X) \subset E_X$.

Pour cela nous allons démontrer par récurrence sur la longueur des dérivations que si $u \overset{*}{\Longrightarrow} u'$ avec u" appartenant à MT, alors $u' \in \sigma_E(u)$. On en déduira immédiatement que $F_G(X) = \{u \in MT \mid X \overset{*}{\Longrightarrow} u\} \subset \sigma_E(X) = E_X$.

Si la dérivation est de longueur 0, $u = u' \in MT$ on a $\sigma_E(u) = \{u\}$ d'où $u' = u \in \{u\} = \sigma_E(u)$.

Si la dérivation est de longueur n+1, il existe u" tel que $u \Longrightarrow u''$ et $u'' \overset{*}{\Longrightarrow} u'$ et d'après l'hypothèse de récurrence, $u' \in \sigma_E(u'')$. De plus, comme $u \Longrightarrow u''$, $u = \alpha.(\beta_1 \otimes X \otimes \beta_2).\gamma$ et $u'' = \alpha.(\beta_1 \otimes v \otimes \beta_2).\gamma$ avec $X \to v \in P$. Par définition v appartient à R_X et comme $\sigma_E(X) = \bigcup_{v \in R_X} \sigma_E(v)$ on a donc $\sigma_E(v) \subset \sigma_E(X)$,

d'où $\sigma_E(u'') = \sigma_E(\alpha).(\sigma_E(\beta_1) \otimes \sigma_E(v) \otimes \sigma_E(\beta_2)).\sigma_E(\gamma) \subset$

$\sigma_E(\alpha).(\sigma_E(\beta_1) \otimes \sigma_E(X) \otimes \sigma_E(\beta_2)).\sigma_E(\gamma) = \sigma_E(u)$ et donc $u' \in \sigma_E(u'') \subset \sigma_E(u)$.

$\boxed{B}$ Montrons ensuite que $E_X \subset F_G(X)$.

Pour cela considérons l'approximation $\{E^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ de la solution E de S ; et montrons par récurrence que pour tout i, pour tout $X \in V$, $E_X^{(i)} \subset F_G(X)$. On en déduit immédiatement que $\forall X$, $E_X \subset F_G(X)$.

- Pour i=0 alors $\forall X \in V$, $E_X^{(0)} = \emptyset \subset F_G(X)$.

- Supposons que $\forall X \in V$, $E_X^{(i)} \subset F_G(X)$.

Montrons alors par récurrence sur la construction de tout élément u de $(M \oplus \overset{\gamma}{T}(V))T_P^1$, $v \in \sigma_{E^{(i)}}(u)$ entraîne $u \overset{*}{\Longrightarrow} v$

. Si $u \in MT_P^1$, $\sigma_{E^{(i)}}(u) = \{u\}$ d'où
$v \in \sigma_{E^{(i)}}(u)$ entraîne $v = u$ et donc $u \overset{*}{\Longrightarrow} v$

. Si $u = X \in V$, $\sigma_{E^{(i)}}(u) = E_X^{(i)} \subset F_G(X)$, d'où
si $v \in \sigma_{E^{(i)}}(u)$, alors $v \in F_G(X)$ et donc $u \overset{*}{\Longrightarrow} v$

. Si $u = \alpha.\langle u_1,\ldots,u_k\rangle$ où $\alpha \in M$, alors
$\sigma_{E^{(i)}}(u) = \alpha.\langle \sigma_{E^{(i)}}(u_1),\ldots,\sigma_{E^{(i)}}(u_k)\rangle$ et
si $v \in \sigma_{E^{(i)}}(u)$, alors $v = \alpha.\langle v_1,\ldots,v_k\rangle$ avec $v_j \in \sigma_{E^{(i)}}(u_i)$.

D'après l'hypothèse de récurrence

$$u_j \overset{*}{\Longrightarrow} v_j$$

et d'après le lemme 6.2, $u \overset{*}{\Longrightarrow} v$.

. Si $u = X.\langle u_1,\ldots,u_k\rangle$ alors

$\sigma_{E^{(i)}}(u) = \sigma_{E^{(i)}}(X).\langle\sigma_{E^{(i)}}(u_1),\ldots,\sigma_{E^{(i)}}(u_k)\rangle \subset$
$F_G(X).\langle\sigma_{E^{(i)}}(u_1),\ldots,\sigma_{E^{(i)}}(u_k)\rangle$.

D'où si $v \in \sigma_{E^{(i)}}(u)$, il existe $\tilde{w}.\Theta$ tel que $X \Longrightarrow \tilde{w}.\Theta$
$v_j \in \sigma_{E^{(i)}}(u_{\Theta(j)})$ tel que $v = \tilde{w}.\langle v_1,\ldots,v_{k'}\rangle$.
Or d'après le lemme 6.2, $u \overset{*}{\Longrightarrow} \tilde{w}.\Theta.\langle u_1,\ldots,u_k\rangle = \tilde{w}\langle u_{\Theta(1)},\ldots,u_{\Theta(k')}\rangle$;
d'après l'hypothèse de récurrence $u_{\Theta(j)} \overset{*}{\Longrightarrow} v_j$ et donc d'après le lemme 6.2, $u \overset{*}{\Longrightarrow} \tilde{w}.\langle u_{(1)},\ldots,u_{(k')}\rangle \overset{*}{\Longrightarrow} \tilde{w}.\langle v_1,\ldots,v_{k'}\rangle = v$.

On en déduit, puisque

$$E_X^{(i+1)} = \bigcup_{u\in R_X} \sigma_{E^{(i)}}(u) = \bigcup_{X\to u\in P} \sigma_{E^{(i)}}(u)$$

que si $v \in E_X^{(i+1)}$, il existe u tel que $X \to u \in P$ et tel que $v \in \sigma_{E^{(i)}}(u)$ et donc que $u \overset{*}{\Longrightarrow} v$ d'où $X \overset{*}{\Longrightarrow} v$ et $v \in F_G(X)$ d'où le résultat.

cqfd.

De ce théorème, et compte tenu de la remarque qui le précède on tire :

Corollaire 6.4 *Un ensemble inclus dans MT_P^1 est algébrique (régulier, corégulier) ssi il est engendré par une grammaire algébrique (régulière, corégulière).*

2. FORMES PARTICULIÈRES DE SYSTÈMES ALGÉBRIQUES

Comme dans le cas de la théorie des langages, on peut définir certaines formes standards pour les systèmes d'équations. Nous allons nous contenter de définir ici la forme normale quadratique de Chomsky, déjà défini dans le cas des grammaires d'arbres par Maibaum [67].

Considérons d'abord le cas des systèmes algébriques sur un magmoïde projetable libre.

Un système algébrique $\{X = R_X \mid X \in V\}$ sur $T(\Sigma)$ est dit **sous forme normale** ssi

$\forall X \in V,\ R_X = PR_X \cup CR_X \cup TR_X$ où

- si $v \in PR_X$, alors $v \in \Theta^1_{d(X)}$

- si $v \in CR_X$, $v = X'.\langle Y_1,\ldots,Y_m\rangle$ avec $X' \in V_m$ et $Y_1,\ldots,Y_m \in V_{d(X)}$

- si $v \in TR_X$, $v = f.\Theta$ où $f \in \Sigma$ et $\Theta \in \Theta$.

Comme il est logique que l'image homomorphe d'un système sous forme normale soit encore sous forme normale, on dira qu'un système $S = \{X = R_X \mid X \in V\}$ sur MT est sous forme normale ssi $\forall X \in V,\ R_X = PR_X \cup CR_X \cup TR_X$ où CR_X et PR_X sont définis comme ci-dessus et où $TR_X \subset MT^1_{d(X)}$.

<u>*Proposition 6.5*</u> *Pour tout système algébrique S, il existe un système algébrique sous forme normale S' tel que toute composante de la solution de S soit composante de la solution de S'.*

<u>Démonstration</u> : Il suffit de montrer ce résultat pour les systèmes algébriques sur $T(\Sigma)$. En effet si S est un système algébrique sur MT et V il existe $T(\Sigma)$, un 1-morphisme ϕ de $\overset{\partial}{T}(\Sigma)$ dans M et un système $\bar{S}$ tels que

si E et $\bar{E}$ sont les solutions de S et $\bar{S}$, alors $\forall X \in V$, $E_X = \phi T(\bar{E}_X)$. Si $\bar{S}$ admet une forme normale $\bar{S}'$, alors $\forall X \in V$, $\exists Y \in V'$ tel que $\bar{E}_X = \bar{E}'_Y$. Le système $S' = \phi(\bar{S}')$ est alors sous forme normale et on a $E_X = \phi T(\bar{E}_X) = \phi T(\bar{E}'_Y) = E'_Y$.

Soit donc $S = \{X = R_X \ / \ X \in V\}$ un système algébrique sur $T(\Sigma)$ et V. On lui associe son "ensemble d'anormalité" : Anorm (S) est l'ensemble des éléments de $\bigcup_{X \in V} R_X$ qui ne sont pas de l'une des trois formes indiquées dans la définition de la forme normale. On définit ensuite le "degré d'anormalité" par $\sum_{v \in \text{Anorm}\ (S)}$ taille (v). On voit qu'un système est sous forme normale ssi son degré d'anormalité est nul. Si un système n'est pas sous forme normale il existe $v = \alpha.<\beta_1,\ldots,\beta_q> \in$ Anorm (S) avec $\alpha \in \Sigma \cup V$, $\beta_1,\ldots,\beta_q \in T(\Sigma \cup V)$. On considère alors les symboles non-terminaux $\bar{X}$ de même degré que α, $\bar{X}_1,\ldots,\bar{X}_q$ de même degré que v ; on remplace v par $\bar{X}_1.<\bar{X}_1,\ldots,\bar{X}_q>$ et on rajoute les équations $\bar{X} = \{\alpha\}$; $\bar{X}_i = \{\beta_i\}$. Ce système S' a pour degré d'anormalité celui de S moins un, et si E est la solution de S , E' celle de S', on démontre que

$$E_X = E'_X \text{ quel que soit } X \in V ,$$

$$E'_{\bar{X}} = \sigma_E(\alpha) = \sigma_{E'}(\alpha) \quad \text{et}$$

$$E'_{\bar{X}_j} = \sigma_E(\beta_j) = \sigma_{E'}(\beta_j).$$

En réitérant cette construction on aboutit donc à un système $\bar{S}$ sur $T(\Sigma)$ et $V \cup V'$ sous forme normale tel que si E est la solution de S et $\bar{E}$ celle de $\bar{S}$, $E_X = \bar{E}_X$ pour tout $X \in V$.

cqfd.

Par contre les systèmes algébriques n'ont pas de forme de Greibach, comme nous allons le montrer ci-dessous. Ceci est dû à ce que la démonstration de Greibach utilise le fait que la solution d'un système linéaire à gauche (i.e. corégulier) est aussi solution d'un système linéaire à droite (i.e. régulier) et que cette propriété n'est plus vraie dans le magmoïde.

On dira qu'un système $\mathcal{S} = \{X = R_X \ / \ X \in V\}$ est sous forme de Greibach ssi tout élément u de $\bigcup_{X \in V} R_X$ est de la forme f.w avec $f \in \Sigma$ et $w \in T(V)$.

<u>Exemple 6.6</u> Considérons le système algébrique (et même corégulier) $X = X.<1;a(x_1)> + <1;b(x_1,x_1)>$. Il a pour solution $E = \{<1;b(a^n(x_1),a^n(x_1))> \ / \ n \geq 0\}$.

Supposons que E soit la composante E'_Y de la solution E' d'un système $\mathcal{S}'$ sous forme normale de Greibach. On a alors

$$E = E'_Y = \bigcup_{f.w \in R_Y} \sigma_{E'}(f.w) = \bigcup_{f.w \in R_Y} f.\sigma_{E'}(w) = \bigcup_{b.<w_1,w_2> \in R_Y} b.<\sigma_{E'}(w_1),\sigma_{E'}(w_2)>.$$

Or $\sigma_{E'}(w_1)$ est réduit à au plus un seul élément car si $a^{n_1}.\Pi_1^1$ et $a^{n_2}.\Pi_1^1 \in \sigma_{E'}(w_1)$, $a^{n_3}.\Pi_1^1 \in \sigma_{E'}(w_2)$ avec $n_1 \neq n_2$, on aurait $<1;b(a^{n_1}(x_1),a^{n_3}(x_1))>$ et $<1;b(a^{n_2}(x_1),a^{n_3}(x_1))>$ qui appartiendrait tous les deux à E et donc $n_1 = n_3 = n_2$ ce qui est contradictoire. De même $\sigma_{E'}(w_2)$ est réduit à au plus un élément , d'où

Card (E) $\leq$ Card (R_Y) et donc E est un ensemble fini,

ce qui est contradictoire.

$\perp$

La propriété suivante de réduction des systèmes algébriques a été démontrée par Boudol [29], par Arnold et Dauchet dans le cas des grammaires algébriques d'arbres [7], et aussi par Fischer [55] pour la notion équivalente de "OI-macro-grammars".

Proposition 6.7 *Si U un ensemble algébrique non vide, on peut construire effectivement un système algébrique S sous forme normale tel que U est une des composantes de sa solution et tel que toutes les composantes de sa solution soient non vides.*

Démonstration : Soit U un ensemble algébrique inclus dans MT_p^1 ; il existe donc un système algébrique S sur MT et V dont la solution est E et un élément X_0 de V tels que $U = E_{X_0}$. De plus, d'après la proposition 6.5, on peut supposer que S est sous forme normale.

$\boxed{A}$ On considère le nouvel ensemble de symboles non-terminaux $\hat{V} = \{X/\alpha \mid X \in V \text{ et } \alpha \subset \{1,\ldots,d(X)\}\}$ avec $d(X/\alpha) = \text{Card}(\alpha)$.

Remarquons que α peut être considéré comme une application croissante de [Card (α)] dans [d(X)] notée également α, qui à i fait correspondre le $i^{\text{ème}}$ élément de α (par rapport à l'ordre naturel sur les entiers).

On forme alors le nouveau système $S' = \{Y = PR'_Y + CR'_Y + TR'_Y \ / \ Y \in \hat{V}\}$ sur MT et $\hat{V}$ défini par :

$$PR'_{X/\alpha} = \{\Pi^j_{\text{Card}(\alpha)} \mid \Pi^i_{d(X)} \in PR_X \text{ et } i = \alpha(j)\}$$

$$CR'_{X/\alpha} = \{Y/\beta.< Y_{\beta(1)}/\alpha,\ldots,Y_{\beta(\text{Card}(\beta))}/\alpha> \ / \ Y.<Y_1,\ldots,Y_{d(Y)}> \in CR_X \text{ et } \beta \subset \{1,\ldots,d(Y)\}\}.$$

$$TR'_{X/\alpha} = \{\tilde{u}.\theta \ / \ \tilde{u}.\theta.\alpha \in TR_{X/\alpha}\}.$$

Cette construction est effective.

On montre alors par récurrence que si $E^{(i)}$ est l'approximation de la solution de S et $E'^{(i)}$ celle de S' alors pour tout i,

$E'^{(i)}_{X/\alpha} = \{u \in MT \ / \ u.\alpha \in E^{(i)}_X\}$; d'où l'on déduira que

$E'_{X/\alpha} = \{u \in MT \ / \ u.\alpha \in E_X\}$.

- Si i = 0, on a bien $E'^{(0)}_{X/\alpha} = \emptyset = \{u \in MT \ / \ u.\alpha \in E^{(0)}_X\}$

- $E'^{(i+1)}_{X/\alpha} = \bigcup_{u \in PR'_{X/\alpha}} \sigma_{E'^{(i)}}(u) + \bigcup_{u \in CR'_{X/\alpha}} \sigma_{E'^{(i)}}(u) + \bigcup_{u \in TR'_{X/\alpha}} \sigma_{E'^{(i)}}(u)$.

mais $\bigcup_{u \in PR'_{X/\alpha}} \sigma_{E'^{(i)}}(u) = \{\Pi^j_{Card(\alpha)} \mid \Pi^i_{d(X)} \in PR_X \text{ et } i = \alpha(j)\} =$

$\{u \mid u.\alpha \in PR_X\} = \{u \mid u.\alpha \in \sigma_{E^{(i)}}(PR_X)\}$;

de même $\bigcup_{u \in TR'_{X/\alpha}} \sigma_{E'^{(i)}}(u) = \{u \ / \ u.\alpha \in \sigma_{E^{(i)}}(PR_X)\}$;

enfin $\bigcup_{u \in CR'_{X/\alpha}} \sigma_{E'^{(i)}}(u) =$

$$\bigcup_{\substack{Y.<Y_1,\ldots,Y_m> \in CR_X \\ \beta \subset \{1,\ldots,m\}}} \sigma_{E'^{(i)}}(Y/\beta).<\sigma_{E'^{(i)}}(Y_{\beta(1)}/\alpha),\ldots,\sigma_{E'^{(i)}}(Y_{\beta(m')}/\alpha)> =$$

$$\bigcup_{\substack{Y.<Y_1,\ldots,Y_m> \in CR_X \\ \beta \subset \{1,\ldots,m\}}} \{u/u.\beta \in E^{(i)}_Y\}.<\{u/u.\alpha \in E^{(i)}_{Y_{\beta(1)}}\},\ldots,\{u/u.\alpha \in E^{(i)}_{Y_{\beta(m')}}\}> ;$$

mais comme $u.\beta.<V_1,\ldots,V_m> = u.<V_{\beta(1)},\ldots,V_{\beta(m')}>$. Cette dernière quantité est égale à

$$\bigcup_{Y.<Y_1,\ldots,Y_m> \in CR_X} E^{(i)}_Y.<\{u/u.\alpha \in E^{(i)}_{Y_1}\},\ldots,\{u/u.\alpha \in E^{(i)}_{Y_m}\}>$$

et il est facile de montrer, d'après la définition du produit de composition dans le magmoïde des parties et compte tenu du fait que

$\hat{v}.\langle u_1.\alpha,\ldots,u_k.\alpha\rangle = \hat{v}.\langle u_1,\ldots,u_k\rangle.\alpha$ que cette quantité est aussi égale à

$$\bigcup_{Y.\langle Y_1,\ldots,Y_m\rangle \in CR_X} \{u/u.\alpha \in E_Y^{(i)}.\langle E_{Y_1}^{(i)},\ldots,E_{Y_m}^{(i)}\rangle\} = \{u/u.\alpha \in \sigma_{E^{(i)}}(CR_X)\}.$$

De ces trois égalités on tire que

$$E'^{(i+1)}_{X/\alpha} = \{u \ / \ u.\alpha \in \sigma_{E^{(i)}}(PR_X + CR_X + TR_X)\} = \{u \ / \ u.\alpha \in E_X^{(i+1)}\}$$

et c'est ce qu'on voulait démontrer.

$\boxed{B}$ On définit alors la suite V_i de parties de $\hat{V}$ par

$$V_1 = \{X/\alpha \in \hat{V} \ / \ R'_{X/\alpha} \cap M\mathcal{T} \neq \emptyset\}$$

$$\vdots$$

$$V_{i+1} = V_i \cup \{X/\alpha \in \hat{V} \ / \ R'_{X/\alpha} \cap (M \oplus \mathfrak{T}(V_i))\mathcal{T} \neq \emptyset\}.$$

Comme cette suite est croissante et majorée par $\hat{V}$, elle est stationnaire à partir d'un certain rang i_0 et sa limite V'' est égale à V_{i_0}. De plus comme la construction de chacun des V_i est effective et que $V_i = V_{i+1} \Longrightarrow \forall\, j > i$, $V_i = V_j$, la construction de V'' est effective.

On construit alors le système

$\mathcal{S}'' = \{Y = R''_Y \mid Y \in V''\}$ où $R''_Y = R'_Y \cap (M \oplus \mathfrak{T}(V''))\mathcal{T}$.

$\mathcal{S}''$ est encore un système sous forme normale dont la construction est effective.

Soient alors E' et E'' les solutions de $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ et $E'^{(i)}$ et $E''^{(i)}$ leur approximation.

$\boxed{\text{B1}}$ On montre d'abord que pour tout $i \geq 1$, si $Y \in V_i$ alors $\emptyset \neq E''^{(i)}_Y$.

. Si $i = 1$ par définition de V_1 on a si $Y \in V_1$,

$\emptyset \neq R'_Y \cap MT \subset R'_Y \cap (M \oplus \tilde{T}(V''))T = R''_Y$

d'où $\emptyset \neq R'_Y \cap MT = \sigma_{E''(0)}(R'_Y \cap MT) \subset \sigma_{E''(0)}(R''_Y) = E''^{(1)}_Y$

. Pour $i = i+1$, par définition de V_{i+1}, si $Y \in V_{i+1}$

$\emptyset \neq R'_Y \cap (MT \oplus \tilde{T}(V_i))T \subset R''_Y$ d'où

$\emptyset \neq \sigma_{E''(i)}(R'_Y \cap (MT \oplus \tilde{T}(V_i))T \subset \sigma_{E''(i)}(R''_Y) = E''^{(i+1)}_Y$

On en déduit, par passage à la limite, que si $Y \in V''$, $E''_Y \neq \emptyset$.

$\boxed{\text{B2}}$ On montre ensuite que pour tout $i \geq 1$, si $Y \in V''$ alors $E''^{(i)}_Y \subset E'_Y$

. pour $i = 0$, $E''^{(0)}_Y = \emptyset \subset E'_Y$

. $E''^{(i+1)}_Y = \sigma_{E''(i)}(R''_Y) = \sigma_{E''(i)}(R'_Y \cap (M \oplus T(V''))T)$.

Or pour tout $X \in V''$, $E''^{(i)}_X \subset E'_X$ d'où

$\sigma_{E''(i)}(R'_Y \cap (M \oplus \tilde{T}(V''))T) \subset \sigma_{E'}(R'_Y \cap (M \oplus \tilde{T}(V''))T) \subset \sigma_{E'}(R'_Y) = E'_Y$.

On en déduit que pour $Y \in V''$, $E''_Y \subset E'_Y$.

$\boxed{\text{B3}}$ Montrons enfin que pour tout $i \geq 0$

$E'^{(i)}_Y \subset E''_Y$ si $Y \in V''$

$E'^{(i)}_Y = \emptyset$ sinon.

Ceci est trivialement vrai pour $i = 0$.

Montrons que si c'est vrai pour i c'est vrai pour i+1. Soit donc $v = Z.<Z_1,\ldots,Z_m> \in CR'_Y$

. si $Z \in \hat{V} - V''$, alors $\sigma_{E'(i)}(Z) = E'^{(i)}_Z = \emptyset$ et $\sigma_{E'(i)}(v) = \emptyset$

. si $Z_1,\ldots,Z_m \in \hat{V}-V''$ on a aussi $\sigma_{E'(i)}(v) = \emptyset$. Supposons alors que $Z \in V''$ et qu'il existe une partie non vide β de $\{1,\ldots,m\}$ telle que $j \in \beta$ ssi $Z_j \in V''$. Mais comme $v \in R'_Y$, alors $Y = X/\alpha$ et il existe γ, X', $X_1,\ldots,X_n$ tels que $X'.<X_1,\ldots,X_n> \in CR_X$, $Z = X'/\gamma$; $Z_i = X_{\gamma(i)}/\alpha$. Considérons alors $v' = X'/\beta.\gamma.<Z_{\beta(1)},\ldots,Z_{\beta(m')}>$ qui appartient encore à CR'_Y et de plus $Z_{\beta(1)},\ldots,Z_{\beta(m')}$ appartiennent à V''. Remarquons que $\sigma_{E'(i)}(\sigma) =$

$$\bigcup_{\tilde{u}.\Theta\in E'^{(i)}_Z} \tilde{u}.\Theta<E'^{(i)}_{Z_1},\ldots,E'^{(i)}_{Z_m}> = \bigcup_{\tilde{u}.\bar{\Theta}.\beta\in E'^{(i)}_Z} \tilde{u}.\bar{\Theta}.\beta \quad <E'^{(i)}_{Z_1},\ldots,E'^{(i)}_{Z_m}>$$

puisque pour que $\tilde{u}.\Theta<E'^{(i)}_Z,\ldots,E'^{(i)}_{Z_m}>$ ne soit pas vide, il faut que Θ se factorise par β. Or comme $Z = X'/\gamma$, $E'^{(i)}_Z = \{\tilde{u}.\Theta \ / \ \tilde{u}.\Theta.\gamma \in E^{(i)}_{X'}\}$ d'où $\{\tilde{u}.\bar{\Theta}.\beta \in E'^{(i)}_Z\} = \{\tilde{u}.\bar{\Theta}.\beta \ / \ \tilde{u}.\bar{\Theta}.\beta.\gamma \in E^{(i)}_{X'}\} = E'^{(i)}_{X'/\beta.\gamma}.\{\beta\}$. On en déduit que $\sigma_{E'(i)}(v) = E'^{(i)}_{X'/\beta.\gamma}.\{\beta\}.<E'^{(i)}_{Z_1},\ldots,E'^{(i)}_{Z_m}> = E'^{(i)}_{X'/\beta.\gamma}.<E'^{(i)}_{Z_{\beta(1)}},\ldots,E'^{(i)}_{Z_{\beta(m')}}> =$

$\sigma_{E'(i)}(v')$.

De plus si $\{\tilde{u}.\bar{\Theta}.\beta \ / \ \tilde{u}.\bar{\Theta}.\beta \in E'^{(i)}_Z\}$ n'est pas vide, $E'^{(i)}_{X'/\beta.\gamma}$ n'est pas vide et donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $X'/\beta.\gamma \in V''$ d'où $v' \in T(V'')$, et comme $v' \in CR'_Y$, $v' \in CR'_Y \cap T(V'')$.

On a donc montré que si $v \in CR'_Y$ et si $\sigma_{E'(i)}(v)$ n'est pas vide, il existe $v' \in R'_Y \cap T(V'')$ tel que $\sigma_{E'(i)}(v) = \sigma_{E'(i)}(v')$. On en déduit donc que $\sigma_{E'(i)}(CR'_Y) \subset \sigma_{E'(i)}(CR'_Y \cap T(V''))$. Il en découle que si $Y \in V''$, $CR'_Y \cap T(V'') = CR''_Y$ d'où

$$E'^{(i+1)}_Y = \sigma_{E'(i)}(PR'_Y + TR'_Y + CR'_Y) =$$
$$PR'_Y + TR'_Y + \sigma_{E'(i)}(CR'_Y) \subset$$
$$PR'_Y + TR'_Y + \sigma_{E'(i)}(CR''_Y) \subset$$
$$PR'_Y + TR'_Y + \sigma_{E''}((CR''_Y) = E''_Y$$

et que si $Y \in \hat{V} - V''$, comme $R'_Y \cap M\mathcal{T} = \emptyset$ alors $R'_Y = CR'_Y$ et $CR'_Y \cap T(V'') = \emptyset$

d'où $E'^{(i+1)}_Y = \sigma_{E'(i)}(CR'_Y) \subset \sigma_{E'(i)}(CR'_Y \cap T(V'')) = \emptyset$

On rassemble maintenant les résultats obtenus :

a) si $Y \in V''$, $E'_Y = E''_Y$

b) si $Y \in \hat{V}$, $Y \notin V''$ ssi $E'_Y = \emptyset$.

On déduit que toutes les composantes E''_Y du système $\mathcal{S}''$ sont non vides car si E''_Y était vide avec $Y \in V''$, E'_Y serait également vide et donc Y n'appartiendrait pas à V, ce qui est contradictoire.

Il reste à montrer que $U = E_{X_0}$ est une composante de la solution de $\mathcal{S}''$. En effet $E'_{X_0/Id} = \{u \ / \ u.Id \in E_{X_0}\} = E_{X_0}$. Comme E_{X_0} n'est pas vide, d'où $X_0/Id \in V''$ et $E''_{X_0/Id} = E'_{X_0/Id} = U$.

cqfd.

Comme l'a fait remarquer Boudol [29], la construction utilisée dans cette démonstration fournit un algorithme de la décidabilité de la vacuité d'une composante de la solution d'un système algébrique.

Proposition 6.8 *Il est décidable de savoir pour tout système algébrique S sur MT et V, étant la solution est E, et pour tout $X \in V$ si $E_X = \emptyset$.*

Démonstration : On met d'abord le système sous forme normale, ce qui peut se faire effectivement, puis on construit le système S' et l'ensemble V" comme ci-dessus. On a alors $E_X = \emptyset$ ssi $X/Id \notin V''$.

cqfd.

Il n'est pas étonnant que l'on obtienne la décidabilité de la vacuité même pour les systèmes sur un magmoïde à torsion quelconque parce que précisément cette vacuité ne dépend en fait que des torsions adjointes et pas des propriétés intrinsèques de ce magmoïde. Remarquons d'autre part que la construction d'un système sous forme normale n'est pas indispensable [29] mais que nous avons préféré par cette première étape pour simplifier les constructions et les démonstrations ultérieures.

3. PROPRIÉTÉS DES ENSEMBLES ALGÉBRIQUES

Proposition 6.9 *Si* U *est un ensemble algébrique de* MT^1_p *et* $V_1,\ldots,V_p$ *des ensembles algébriques de* MT^1_q, *alors* $U.\langle V_1,\ldots,V_p\rangle$ *est un ensemble algébrique.*

Démonstration : Soient $S_0,S_1,\ldots,S_p$ les systèmes dont les solutions sont E_0, $E_1,\ldots,E_p$, dont les ensembles de symboles non terminaux sont disjoints deux à deux, et tels que $U = \sigma_{E_0}(X^{(0)})$, $V_i = \sigma_{E_i}(X^{(i)})$. On considère alors le système $S_0 \cup S_1 \cup S_p \cup \{\bar{X} = X^{(0)}.\langle X^{(1)},\ldots,X^{(p)}\rangle\}$ dont la solution est $\bar{E}$; il est clair que si $X \in V_i$, $\sigma_{\bar{E}}(X) = \sigma_{E_i}(X)$ d'où

$\sigma_{\bar{E}}(X) = \sigma_{E_0}(X^0).\langle\sigma_{E_1}(X^{(1)}),\ldots,\sigma_{E_p}(X^{(p)})\rangle = U.\langle V_1,\ldots,V_p\rangle$.

cqfd.

Soient M et M' deux magmoïdes décomposables. Une 1-substitution σ de MT dans $P(M'T)$ est dite algébrique ssi $\forall\ p \geq 0$, $\forall\ u \in M^1_p$, $\sigma(u) \in P(M'T)^1_p$ est un ensemble algébrique. Nous rappelons qu'elle est aussi linéaire si $\forall\ \tilde{v}.\Theta \in \sigma(u)$, Θ est une injection.

Proposition 6.10 *Une 1-substitution* σ *de* $T(\Sigma)$ *dans* $P(M'T)$ *est algébrique ssi* $\forall\ f \in \Sigma$, $\sigma(f)$ *est un ensemble algébrique.*

Démonstration : La condition nécessaire est une conséquence immédiate de la définition. La condition suffisante découle de la proposition 6.9 et du fait que $T(\Sigma)$ est un magmoïde projetable libre.

cqfd.

Proposition 6.11 *La classe des ensembles algébriques est fermée par 1-substitution algébrique linéaire.*

Démonstration : Soit U un ensemble algébrique inclus dans MT_p^1 et σ une 1-substitution algébrique. D'après le théorème 4.7, il existe un alphabet gradué Σ, un ensemble algébrique V inclus dans $T(\Sigma)$, un 1-morphisme ϕ de $\mathfrak{T}(\Sigma)$ dans M tels que $U = \phi T(V)$. On en déduit que $\sigma(U) = \sigma(\phi T(V))$. Or $\sigma.\phi T$ est une 1-substitution définie sur $T(\Sigma)$ qui vérifie :

si $f \in \Sigma_k$, $\phi T(f) = \phi(f) \in M_k^1$ et donc $\sigma(\phi T(f)) = \sigma(\phi(f))$.

C'est donc bien une 1-substitution algébrique linéaire. Aussi suffit-il de démontrer le résultat énoncé pour les ensembles algébriques de $T(\Sigma)$.

Soit donc un système algébrique S sur $T(\Sigma)$ et V dont la solution est E tel qu'il existe $X_U \in V$ tel que $U = E_{X_U}$. On peut supposer de plus, d'après la proposition 6.7, que S est sous forme normale et qu'aucune composante de E n'est vide.

Soit τ une 1-substitution linéaire de $T(\Sigma)$ dans MT. Comme $\forall f \in \Sigma$, $\tau(f)$ est un ensemble algébrique, il existe un système algébrique $S' = \{Y = R'_Y \mid Y \in V'\}$ sur MT et V' - obtenu éventuellement comme réunion de plusieurs systèmes - dont la solution est E', tel que $\forall f \in \Sigma$ il existe $Y_f \in V'$ tel que $\tau(f) = E'_{Y_f}$. De plus il est clair que Y_f est de même degré que f. On considère alors le 1-morphisme ψ de $\mathfrak{T}(\Sigma \cup V)$ dans $\mathfrak{T}(V \cup V')$ défini par

$$\text{si } X \in U \qquad \psi(X) = X$$

$$\text{si } f \in \Sigma \qquad \psi(f) = Y_f,$$

ce qui permet de définir le système $\psi(S)$. Comme S est sous forme normale $S = \{X = PR_X + CR_X + TR_X \quad X \in V\}$, d'où

$\psi(S) = \{X = \psi T(PR_X) + \psi T(CR_X) + \psi T(TR_X) \mid X \in V\} =$

$$\{X = PR_X + CR_X + TR'_X \mid X \in V\} \text{ où } TR'_X = \{Y_f.\Theta \mid f.\Theta \in TR_X\}.$$

Soit alors F la solution du système
$S'' = \psi(S) \cup S''$ sur MT et $V \cup V'$.

Posons $G = E(S'')$ défini par

- si $X \in V$, $G_X = \tau(E_X)$
- si $Y \in V'$, $G_Y = E'_Y$

et calculons $\hat{S}''(G)$:

- pour $Y \in V'$, $\hat{S}''(G)_Y = \bigcup_{u \in R'_Y} \sigma_G(u)$. Mais, pour $u \in R'_Y \subset (M \oplus \overset{\alpha}{T}(V'))T$,
  $\sigma_G(u) = \sigma_{E'}(u)$ d'où $\hat{S}''(G)_Y = \bigcup_{u \in R'_Y} \sigma_{E'}(u) = \sigma_{E'}(Y) = E'_Y = G_Y$

- pour $X \in V$, $\hat{S}''(G)_X = \sigma_G(PR_X) + \sigma_G(CR_X) + \sigma_G(TR'_X)$.
  Comme $PR_X \subset \Theta$, $\sigma_G(PR_X) = PR_X = \sigma_E(PR_X) = \tau(\sigma_E(PR_X))$.
  Comme $TR'_X = \{Y_f.\Theta \ / \ f.\Theta \in TR_X\}$,
  $\sigma_G(TR'_X) = \bigcup_{f.\Theta \in TR_X} \sigma_G(Y_f).\Theta = \bigcup_{f.\Theta \in TR_X} \sigma_{E'}(Y_f).\Theta = \bigcup_{f.\Theta \in TR_X} \tau(f).\Theta = \tau(TR_X)$.

Enfin si $v \in CR_X$, $v = X_0.\langle X_1,\ldots,X_m\rangle$ d'où
$\sigma_G(v) = G_{X_0}.\langle G_{X_1},\ldots,G_{X_m}\rangle = \tau(E_{X_0}).\langle\tau(E_{X_1}),\ldots,\tau(E_{X_m})\rangle$.

Mais par hypothèse aucun des E_{X_i} n'est vide et comme τ est une 1-substitution linéaire, d'après le lemme 3.15 cette dernière quantité est égale à $\tau(E_{X_0}.\langle E_{X_1},\ldots,E_{X_m}\rangle) = \tau(\sigma_E(v))$, d'où $\sigma_G(CR_X) = \tau(\sigma_E(CR_X))$ et $\hat{S}''(G)_X = \tau(PR_X + TR_X + \sigma_E(CR_X))$. Or $PR_X + TR_X + \sigma_E(CR_X) = \sigma_E(X) = E_X$ d'où $\hat{S}''(G)_X = \tau(E_X) = G_X$.

On en déduit que $G = \hat{S}''(G)$ d'où pour tout $Z \in V \cup V'$, $F_Z \subset G_Z$ et en particulier $F_{X_U} \subset G_{X_U} = \tau(E_{X_U}) = \tau(U)$.

Montrons ensuite que pour $Y \in V'$, $E'_Y \subset F_Y$; par induction sur l'approximation $E'^{(i)}$ de E' : on a bien $E'^{(0)}_Y \subset F_Y$ et

$$E'^{(i+1)}_Y = \bigcup_{u \in R'_Y} \sigma_{E'^{(i)}}(u) \subset \bigcup_{u \in R'_Y} \sigma_F(u) = F_Y.$$

Comme de plus, pour $Y \in U'$, on vient de montrer que $F_Y \subset G_Y = E'_Y$ on a donc $E_Y = F_Y$.

Enfin on montre que pour $X \in V$, $\tau(E_X) \subset F_X$ par induction sur $\tau(E^{(i)}_X)$ ou $E^{(i)}$ est l'approximation de E

- pour $i = 0$, $E^{(0)}_X = \emptyset$ et $\tau(E^{(0)}_X) = \emptyset \subset F_X$

- $E^{(i+1)}_X = PR_X + TR_X + \sigma_{E^{(i)}}(CR_X)$

d'où $\tau(E^{(i+1)}_X) = PR_X + \tau(TR_X) + \tau(\sigma_{E^{(i)}}(CR_X))$.

Or si $v = X_0.\langle X_1,\ldots,X_m\rangle \in CR_X$, $\sigma_{E^{(i)}}(v) = E^{(i)}_{X_0}.\langle E^{(i)}_{X_1},\ldots,E^{(i)}_{X_m}\rangle$ et

$\tau(\sigma_{E^{(i)}}(v)) = \tau(E^{(i)}_{X_0}).\langle \tau(E^{(i)}_{X_1}),\ldots,\tau(E^{(i)}_{X_m})\rangle$

pour les mêmes raisons que précédemment ; et d'après l'hypothèse de récurrence $\tau(\sigma_{E^{(i)}}(v)) \subset F_{X_0}.\langle F_{X_1},\ldots,F_{X_m}\rangle = \sigma_F(v)$.

D'où $\tau(\sigma_{E^{(i)}}(CR_X)) \subset \sigma_F(CR_X)$. De plus comme $PR_X \subset \Theta$, $\sigma_F(PR_X) = PR_X$; par ailleurs $\tau(TR_X) = \bigcup_{f.\Theta \in TR_X} \tau(f).\Theta = \bigcup_{f.\Theta \in TR_X} E'_{Y_f}.\Theta =$

$\bigcup_{f.\Theta \in TR_X} F_{Y_f}.\Theta = \bigcup_{f.\Theta \in TR_X} \sigma_F(Y_f.\Theta) = \sigma_F(TR'_X)$

d'où $\tau(E^{(i+1)}_X) \subset \sigma_F(PR_X + TR'_X + CR_X) = F_X$.

On a donc $\tau(U) = \tau(E_{X_U}) \subset F_{X_U}$. On en déduit que $\tau(U) = F_{X_U}$ est bien une composante de la solution F du système algébrique S''.

cqfd.

Remarquons une fois de plus que l'hypothèse de linéarité de la substitution τ est indispensable. Nous verrons au chapitre suivant, comme corollaire du théorème de duplication que la classe des ensembles algébriques n'est pas fermée par 1-morphisme non linéaire (cf. aussi [7]), un 1-morphisme non linéaire étant bien un cas particulier de 1-substitution algébrique non linéaire.

Les 1-morphismes linéaires étant bien évidemment des cas particuliers de 1-substitutions algébriques linéaires on obtient le résultat :

Corollaire 6.12 *La classe des ensembles algébriques est fermée par 1-morphisme linéaire.*

Proposition 6.13 *La classe des ensembles algébriques est fermée par intersection avec un ensemble reconnaissable.*

Démonstration : Soit U un ensemble algébrique inclus dans MT_p^1 et soit S le système algébrique sous forme normale $\{X = PR_X + TR_X + CR_X \mid X \in V\}$ sur MT et V dont la solution est E, tel qu'il existe $X_U \in V$ tel que $U = E_{X_U}$.

Soit K un ensemble reconnaissable inclus dans MT_p^1, reconnu par l'automate $A = \langle Q,\phi,s,S\rangle$. Supposons que Q ait k états notés $e_1,\ldots,e_k$.

On considère alors l'alphabet gradué $\bar{V} = \{[X,e] \ / \ X \in V \text{ et } e \in Q\}$ où le degré de [X,e] est égal à k fois celui de X.

On construit le système $S' = \{\bar{X} = \overline{PR}_{\bar{X}} + \overline{CR}_{\bar{X}} + \overline{TR}_{\bar{X}} \mid \bar{X} \in \bar{V}\}$ défini par

$$\overline{PR}_{[X,e_j]} = \{\Pi_k^j.\nu_k(\Pi_{d(X)}^i) \ / \ \Pi_{d(X)}^i \in PR_X\}$$

$$\overline{TR}_{[X,e_j]} = \{\tilde{u}.(\Pi_k^{i_1} \otimes \ldots \otimes \Pi_k^{i_m}).\nu_k(\Theta) \ / \ \tilde{u}.\Theta \in TR_X \text{ et } \phi(\tilde{u})(e_{i_1},\ldots,e_{i_m}) = e_j\}$$

$$\overline{CR}_{[X,e_j]} = \{[X_0,e_j].<[X_1,e_1],\ldots,[X_1,e_k],[X_2,e_1],\ldots,[X_2,e_k],\ldots,[X_n,e_1], \ldots$$
$$\ldots,[X_n,e_k]> \mid X_0.<X_1,\ldots,X_n> \in CR_X\}.$$

Si E est une partie de MT_q^1, on notera
$A_j(E)$ l'ensemble $\{\tilde{u}.(\Pi_k^{i_1} \otimes \ldots \otimes \Pi_k^{i_m}).\gamma_k(\Theta) \;/\; \tilde{u}.\Theta \in E \text{ et } e_j = \phi(\tilde{u})(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})\}$.

On a donc par définition $\overline{PR}_{[X,e_j]} = A_j(PR_X)$ et $\overline{TR}_{[X,e_j]} = A_j(TR_X)$.

Soient $E^{(i)}$ et $E'^{(i)}$ les approxiamtions des solutions E et E' de S et S'. On montre alors par induction que $\forall\, i \geq 0$, $\forall\, e_j \in Q$, $\forall\, X \in V$, $E'^{(i)}_{[X,e_j]} = A_j(E_X^{(i)})$:

- c'est évidemment vrai pour i = 0

- $E'^{(i+1)}_{[X,e_j]} = \overline{PR}_{[X,e_j]} + \overline{TR}_{[X,e_j]} + \sigma_{E'^{(i)}}(\overline{CR}_{[X,e_j]})$
$= A_j(PR_X + TR_X) + \sigma_{E'^{(i)}}(\overline{CR}_{[X,e_j]})$.

Or $\sigma_{E'^{(i)}}(\overline{CR}_{[X,e_j]}) = \bigcup_{X_0.<X_1,\ldots,X_n>\in CR_X} E'^{(i)}_{[X_0,e_j]}.<E'^{(i)}_{[X_1,e_1]},\ldots,E'^{(i)}_{[X_n,e_k]}>$

qui est égal, d'après l'hypothèse de récurrence, à
$\bigcup_{X_0.<X_1,\ldots,X_n>\in CR_X} A_j(E_{X_0}^{(i)}).<A_1(E_1^{(i)}),\ldots,A_k(E_n^{(i)})>$.

On montre alors aisément que $A_j(E_{X_0}^{(i)}).<A_1(E_1^{(i)}),\ldots,A_k(E_n^{(i)})> =$
$A_j(E_{X_0}^{(i)}.<E_1^{(i)},\ldots,E_n^{(i)}>)$. En effet cette égalité découle de
$A_j(\tilde{u}.\Theta).<A_1(E_1^{(i)}),\ldots,A_k(E_n^{(i)})> = A_j(\tilde{u}.\Theta.<E_1^{(i)},\ldots,E_n^{(i)}>)$.
Le premier de ces deux ensembles est égal à

$$\bigcup_{i_1,\ldots,i_s/\phi(\tilde{u})(e_{i_1},\ldots,e_{i_s})=e_j} \tilde{u}.<A_{i_1}(E_{\Theta(1)}^{(i)}),\ldots,A_{i_s}(E_{\Theta(1)}^{(i)})$$

et le second à $A_j(u.<E^{(i)}_{\Theta(1)},\dots,E^{(i)}_{\Theta(s)}) =$

$\{\tilde{u}.(\tilde{v}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{v}_x).(\Pi_k^{i_1} \otimes \dots \otimes \Pi_k^{i_r}).\nu_k(<\Theta_1,\dots,\Theta_s>)$ /

$\tilde{v}_j.\Theta_j \in E^{(i)}_{\Theta(j)}$ et $\phi(\tilde{u}.(\tilde{v}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{v}_s))(e^{i_1},\dots e^{i_r}) = e_j\} =$

$\{\tilde{u}.<\tilde{v}_1.(\Pi_k^{i_1} \otimes \dots \otimes \Pi^{i_\ell}).\nu_k(\Theta_1),\dots,\tilde{v}_s.(\Pi^{i_{\ell'}} \otimes \dots \otimes \Pi^{i_r}).\nu_k(\Theta_s)$ /

$\exists\ i'_1,\dots,i'_s$ tq $\phi(\tilde{v}_j)(e_{i_{\ell_j}},\dots,e_{i_{\ell_{j'}}}) = e_{i'_j}$, $\tilde{v}_j.\Theta_j \in E^{(i)}_{\Theta(j)}$

et $\phi(\tilde{u})(e_{i'_1},\dots,e_{i'_s}) = e_j\} =$

$\{\tilde{u}.<v'_1,\dots,v'_s>$ / $\exists\ i'_1,\dots,i'_s$ tq $v'_j \in A_{i'_j}(E^{(i)}_{\Theta(j)})$ et $\phi(\tilde{u})(e_{i'_1},\dots,e_{i'_s}) = e_j\} =$

$$\bigcup_{i_1,\dots,i_s/\phi(\tilde{u})(e_{i_1},\dots,e_{i_s}) = e_j} \tilde{u}.<A_{i_1}(E^{(i)}_{\Theta(1)}),\dots, A_{i_s}(E^{(i)}_{\Theta(s)})>.$$

On en déduit que $\sigma_{E'(i)}(\overline{CR}_{[X,e_j]}) =$

$$\bigcup_{X_0.<X_1,\dots,X_n>\in CR_X} A_j(E^{(i)}_{X_0}.<E^{(i)}_{X_1},\dots,E^{(i)}_{X_n}>) = A_j(\sigma_{E(i)}(CR_X))$$

d'où $E'^{(i+1)}_{[X,e_j]} = A_j(PR_X + TR_X + \sigma_{E(i)}(CR_X)) = A_j(E^{(i+1)}_X)$.

Il en résulte, par passage à la limite que

$$E'_{[X,e_j]} = A_j(E_X).$$

et donc que pour tout $j \le k$ et $X \in V$, $A_j(E_X)$ est un ensemble algébrique de $MT^1_{k\times d(X)}$. On considère alors le polynôme

$W = <W_{1,1},\dots,W_{1,k},W_{2,1},\dots,W_{2,k},\dots,W_{p,1},\dots,W_{p,k}>$ de $P(MT)^{k.p}_p$ défini par

$$W_{i,j} = \begin{cases} \{\Pi^j_p\} & \text{si } \Pi^i_p.s(1,p) = e_j \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après la proposition 6.9, pour tout $j \leq k$

$A_j(U).W = A_j(E_{X_U}).W$ est un ensemble algébrique.

$$\text{Or } A_j(U).W = \bigcup_{\tilde{u}.\bar{\Theta} \in A_j(U)} \{\tilde{u}.\langle v_1,\ldots,v_q\rangle \ / \ v_i \in \Pi_{k.p}^{\bar{\Theta}(i)}.W\} =$$

$$\bigcup_{\tilde{u}.\Theta \in U} \{\tilde{u}.\langle v_1,\ldots,v_q\rangle \ / \ \exists\ i_1,\ldots,i_q \ \text{ tq } \phi(\tilde{u})(e_{i_1},\ldots,e_{i_q}) = e_j \text{ et } v_\ell \in W_{\Theta(\ell),i_\ell}\} =$$

$$\bigcup_{\tilde{u},\Theta \in U} \{\tilde{u}.\Theta \ / \ \exists\ i_1,\ldots,i_q \ \text{ tq } \phi(\tilde{u})(e_{i_1},\ldots,e_{i_q}) = e_j \text{ et } \Pi_p^{\Theta(\ell)}.s(1,p) = e_{i_\ell}\} =$$

$$\bigcup_{\tilde{u}.\Theta \in U} \{\tilde{u}.\Theta \ / \ \phi(\tilde{u}.\Theta)\ s(1,p) = e_j\} = \{u \in U \ / \ \phi(u)\ s(1,p) = e_j\}.$$

On en déduit que $U \cap K = \bigcup_{j \in S(1,p)} A_j(U).W$ est encore un ensemble algébrique.

cqfd.

Nous avons donc montré que la classe des ensembles algébriques est fermée par 1-morphisme linéaire et par intersection avec un ensemble reconnaissable - propriétés déjà connues dans le cadre de la théorie classique des langages d'arbres - ainsi que par 1-substitution algébrique linéaire. Ainsi que nous l'avons déjà signalé, le problème de la fermeture par 1-morphisme non linéaire - résolu négativement dans le cadre de la théorie classique des arbres par Arnold et Dauchet [7] sera traité au chapitre suivant, ainsi que celui de la fermeture par k-morphisme quelconque. Il reste enfin à examiner le problème de fermeture par morphisme inverse, résolu négativement par Arnold et Dauchet [12] dans le cadre de la théorie classique des arbres. C'est l'objet principal du chapitre suivant.

CHAPITRE VII

ENSEMBLES K-ALGÉBRIQUES ET K-RATIONNELS

Il a été démontré dans [12], et nous redémontrerons plus loin, que la classe des ensembles algébriques de $T(\Sigma)_0^1$ n'est pas fermée par morphisme inverse. Or de même qu'en théorie des langages un morphisme inverse peut être obtenu en composant un morphisme alphabétique inverse, une intersection avec un langage reconnaissable et un morphisme, un 1-morphisme linéaire inverse entre deux magmoïdes projetables libres peut être obtenu par un **démarquage** inverse suivi de l'intersection avec un ensemble reconnaissable et - à peu de choses près - un k-morphisme linéaire. Comme la classe des ensembles algébriques est fermée par démarquage inverse - nous le démontrerons - et par intersection avec un ensemble reconnaissable, on est ramené à étudier la fermeture des ensembles algébriques par un k-morphisme linéaire. Or l'image par un k-morphisme de $T(\Sigma)$ dans $T(\Delta)$ d'un ensemble algébrique de $T(\Sigma)$ peut être considérée comme un ensemble algébrique de kdil $T(\Delta)$ ou plus exactement k-dil $T(\Delta)$ DT. On définira ainsi, une nouvelle famille d'ensembles inclus dans $T(\Delta)$, les ensembles k-algébriques, qui contient celle des ensembles algébriques dont nous étudierons les propriétés.

Dans tous ce qui suit, tous les magmoïdes décomposables que nous utiliserons seront de la forme $\tilde{T}(\Sigma)$ ou k-dil $T(\Sigma)$ D, où Σ est un alphabet gradué. Nous désignerons par **alg** et **rat** les familles d'ensembles algébriques et rationnels inclus dans un magmoïde projetable libre finiment engendré.

1. ENSEMBLES ALGÉBRIQUES ET DÉMARQUAGES INVERSES

Soient Σ et Δ deux alphabets gradués finis. Un 1-morphisme μ de $T(\Sigma)$ dans $T(\Delta)$ sera appelé **démarquage** si $\forall\ f \in \Sigma$

$\mu(f) = g.\Theta$ où $g \in \Delta$ et où Θ est une injection de $[d(g)]$ dans $[d(f)]$

ou $\mu(f) \in \Theta^1_{d(f)}$.

Si k est un entier strictement positif et si $i \in [k]$, alors pour $n \geq 0$, $\Pi_k^{i\otimes n}$ est l'élément de Θ^n_{kn} défini inductivement par

$$\Pi_k^{i\otimes 0} = 0_0,\ \Pi_k^{i\otimes n+1} = \Pi_k^i \otimes {}_k^{i\otimes n}.$$

Les deux résultats suivants sont démontrés par Dauchet [D].

<u>*Proposition 7.1*</u> *Soient Σ et Δ deux alphabets gradués finis et ϕ un 1-morphisme linéaire de $T(\Delta)$ dans $T(\Sigma)$. Alors il existe un alphabet gradué fini Γ, un démarquage μ de $T(\Gamma)$ dans $T(\Sigma)$, un k-morphisme linéaire ψ de $T(\Gamma)$ dans $T(\Delta)$, et $\forall\ n \geq 0$ un ensemble reconnaissable K_n de $T(\Gamma)^1_n$ tels que pour tout $u \in T(\Sigma)^1_n$, $\phi^{-1}(u)\ .\ \Pi_k^{1\otimes n} = \Pi_k^1.\psi(\mu^{-1}(u) \cap K_n)$.*

<u>*Proposition 7.2*</u> *Soient Σ, Δ, Γ trois alphabets gradués finis, ϕ un k-morphisme linéaire de $T(\Sigma)$ dans $T(\Delta)$, μ un démarquage de $T(\Gamma)$ dans $T(\Delta)$ et i un entier inférieur ou égal à k. Alors il existe un alphabet gradué fini Ω, un démarquage μ' de $T(\Omega)$ dans $T(\Sigma)$, un $k.k'$-morphisme linéaire ψ de $T(\Omega)$ dans $T(\Gamma)$, et pour tout $n \geq 0$ un ensemble reconnaissable K_n inclus dans $T(\Omega)^1_n$ tels que $\forall\ u \in T(\Sigma)^1_n$, alors $\mu^{-1}(\Pi_k^1.\phi(u)).\Pi_{k'}^{1\otimes kn} = \Pi^1_{kk'}.\psi(\mu'^{-1}\ (u) \cap K_n)$.*

Le lemme technique qui suit exprime une propriété caractéristique des démarquages.

<u>*Lemme 7.3*</u> *Soient* Σ *et* Δ *deux alphabets gradués finis et* μ *un démarquage de* $T(\Sigma)$ *dans* $T(\Delta)$. *Soit* w *appartenant à* $T(\Sigma)^1_n$ *tel* $\mu(w) = \tilde{u}.\langle u_1,\ldots,u_m\rangle$. *Alors il existe* $\tilde{w}_0 \in \tilde{T}(\Sigma)^1_p$, $w_1,\ldots,w_p \in T(\Sigma)^1_n$, *une injection* Θ *de* $[m]$ *dans* $[p]$ *tels que*
$w = \tilde{w}_0.\langle w_1,\ldots,w_p\rangle$, $\mu(\tilde{w}_0) = \tilde{u}.\Theta$ *et* $u_i = \mu(w_{\Theta(i)})$.

<u>Démonstration</u> : Supposons qu'on ait trouvé $\tilde{w}_0$ tel que $\mu(\tilde{w}_0) = \tilde{u}.\Theta$. Comme un démarquage est un 1-morphisme linéaire, Θ est bien une injection et on a $\mu(w) = \tilde{u}.\Theta.\langle\mu(w_1),\ldots,\mu(w_p)\rangle = \tilde{u}.\langle\mu(w_{\Theta(1)}),\ldots,\mu(w_{\Theta(m)})\rangle$ d'où $u_i = \mu(w_{\Theta(i)})$. Il suffit donc de montrer l'existence d'un $\tilde{w}_0$ tel que $\mu(\tilde{w}_0) = \tilde{u}.\Theta$, ce qu'on va démontrer par récurrence sur la taille de w.

Si taille $(w) = 0$, $w = \Pi^i_n$, d'où $\mu(w) = \Pi^i_n = Id_1.\Pi^i_n$. Alors nécessairement $\tilde{u} = Id_1$ et on prend $\tilde{w}_0 = Id_1$.

Si taille $(w) \geq 1$ alors si taille $(\tilde{u}) = 0$, $\tilde{u} = Id_1$ et comme précédemment on prend $\tilde{w}_0 = Id_1$, sinon on écrit w sous la forme $f.w'$. On a alors $\mu(w) = \mu(f).\mu(w') = \tilde{u}.\langle u_1,\ldots,u_m\rangle$.

• Si $\mu(f) = \Pi^i_p$, on a $\mu(w) = \mu(\Pi^i_p.w')$ d'après l'hypothèse de récurrence $\Pi^i_p.w' = \tilde{w}'_0.\langle w'_1,\ldots,w'_{m'}\rangle$ avec $\mu(\tilde{w}'_0) = \tilde{u}.\Theta$. On pose alors $\tilde{w}_0 = f.(Id_{i-1} \otimes w'_0 \otimes Id_{p-i})$. On a alors
$\mu(\tilde{w}_0) = \Pi^i_p.(Id_{i-1} \otimes \tilde{w}'_0 \otimes Id_{p-i}) = O_{i-r} \otimes w'_0 \otimes O_{p-i} = \tilde{u}.(O_{i-1} \otimes \Theta \otimes O_{p-i})$ et
$w = \tilde{w}_0.\langle\Pi^1_p.w',\ldots,\Pi^{i-1}_p.w',w'_1,\ldots,w'_{m'}, \Pi^{i+1}_p,\ldots,\Pi^p_p\rangle$

• Si $\mu(f) = g.\Theta$, alors $\mu(w) = g.\mu(\Theta.w')$ et comme taille $(\tilde{u}) \geq 1$, $u = g.(\tilde{u}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{u}_q)$. On a alors $\mu(\Theta.w') = (\tilde{u}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{u}_q).\langle u_1,\ldots,u_m\rangle.=$ $\langle\tilde{u}_1.v_1,\ldots,\tilde{u}_q.v_q\rangle$ et donc $\Pi^i_q\ \Theta.w' = \tilde{u}_i.v_i$. On applique alors l'hypothèse de récurrence, ce qui donne $\Pi^i_q.\Theta.w' = \tilde{w}_i.w'_i$ avec $\mu(\tilde{w}_i) = \tilde{u}_i.\Theta_i$. On pose alors $\tilde{w}_0 = f.(t_1 \otimes \ldots \otimes t_r)$ avec

$$t_i = \begin{cases} \tilde{w}_j & \text{si } \Theta(j) = i \\ Id_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on démontre comme précédemment que $\tilde{w}_0$ est l'élément cherché.

<u>cqfd</u>.

Proposition 7.4 *Soit* μ *un démarquage de* $T(\Sigma)$ *dans* $T(\Delta)$ *et soient* $U \in P(T(\Delta))^1_p$, $V = \langle V_1,\dots,V_p\rangle \in P(T(\Delta))^p_q$. *Alors* $\mu^{-1}(U.V \otimes O_1) = \mu^{-1}(U \otimes O_1).\langle \mu^{-1}(V_1 \otimes O_1),\dots,\mu^{-1}(V_p \otimes O_1), T(\Sigma)^1_{q+1}\rangle$.

Démonstration : Comme $U.V \otimes O_1 = \bigcup_{u\in U} (u.V \otimes O_1)$,
$\mu^{-1}(U.V \otimes O_1) = \bigcup_{u\in U} \mu^{-1}(u.V \otimes O_1)$; d'autre part
$\mu^{-1}(U \otimes O_1) = \bigcup_{u\in U} \mu^{-1}(u \otimes O_1)$. Il suffit donc de montrer le résultat dans le cas où U n'a qu'un seul élément $\tilde{u}.\theta$.

On a alors $\tilde{u}.\theta.V \otimes O_1 =$
$\tilde{u}.\langle V_{\theta(1)},\dots,V_{\theta(m)}\rangle \otimes O_1 = \tilde{u}.\langle V_{\theta(1)} \otimes O_1,\dots,V_{\theta(m)} \otimes O_1\rangle$
d'où $\mu^{-1}(\tilde{u}.\theta.V \otimes O_1) = \{v/\mu(v) = \tilde{u}.\langle v_1,\dots,v_m\rangle$ et $v_i \in V_{\theta(i)} \otimes O_1\}$.

On désignera cet ensemble par A
et $\mu^{-1}(\tilde{u}.\theta \otimes O_1).\langle \mu^{-1}(V_1 \otimes O_1),\dots,\mu^{-1}(U_p \otimes O_1),T(\Sigma)^1_{q+1}\rangle =$
$\{\tilde{w}.\langle w_1,\dots,w_k\rangle \ / \ \mu(\tilde{w}.\theta') = \tilde{u}.\theta \otimes O_1$ et $\mu(w_i) \in V_{\theta'(i)} \otimes O_1$ si $\theta'(i) \le p\}$
qu'on désignera par B.

Montrons d'abord que $B \subset A$.

En effet si $\tilde{w}.\langle w_1,\dots,w_k\rangle \in B$,
$\mu(\tilde{w}.\langle w_1,\dots,w_k\rangle) = \mu(\tilde{w}).\langle \mu(w_1),\dots,\mu(w_k)\rangle \in$
$\mu(\tilde{w}).\theta'.\langle V_1 \otimes O_1,\dots,V_p \otimes O_1, T(\Sigma)^1_{q+1}\rangle =$
$\mu(\tilde{w}.\theta').\langle V_1 \otimes O_1,\dots,V_p \otimes O_1, T(\Sigma)^1_{q+1}\rangle =$
$\tilde{u}.(\theta \otimes O_1).\langle V_1 \otimes O_1,\dots,V_p \otimes O_1, T(\Sigma)^1_{q+1} =$
$\tilde{u}.\theta.\langle V_1 \otimes O_1,\dots,V_p \otimes O_1\rangle = \tilde{u}.\theta.V \otimes O_1$.

On en déduit que si $w \in B$, $\mu(w) \in \tilde{u}.\theta.V \otimes O_1$ d'où $B \subset \mu^{-1}(\tilde{u}.\theta.V \otimes O_1) = A$.

Montrons ensuite que $A \subset B$.

En effet si $v \in A$, $\mu(v) = \tilde{u}.\langle v_1,\ldots,v_m\rangle$ où $v_i \in V_{\Theta(i)} \otimes O_1$. D'après le lemme 7.3, v s'écrit donc $\tilde{v}_0.\langle w_1,\ldots,w_n\rangle$ avec $\mu(\tilde{v}_0) = \tilde{u}.\bar{\Theta}$, où $\bar{\Theta}$ est une injection de [m] dans [n] et où $v_i = \mu(w_{\bar{\Theta}(i)})$. On définit alors l'application $\hat{\Theta}$ de [n] dans [m+1] par

$$\hat{\Theta}(i) = \begin{cases} \text{l'unique } j \text{ tel que } \bar{\Theta}(j) = i \text{ s'il existe} \\ m+1 \text{ sinon} \end{cases}$$

On a alors $\bar{\Theta}.\hat{\Theta} = Id_m \otimes O_1$ et comme
$\mu(\tilde{v}_0) = \tilde{u}.\bar{\Theta}$, $\mu(\tilde{v}_0.\hat{\Theta}) = \tilde{u} \otimes O_1$.

Posons $\Theta' = \hat{\Theta}.(\Theta \otimes Id_1)$; on a donc bien $\mu(\tilde{v}_0.\Theta') = \mu(\tilde{v}_0.\hat{\Theta}).(\Theta \otimes Id_1) = (\tilde{u} \otimes O_1).(\Theta \otimes Id_1) = \tilde{u}.\Theta \otimes O_1$. Et d'autre part, si $\Theta'(i) \leq p$, alors $\hat{\Theta}(i) \leq m$. On a donc $\bar{\Theta}(\hat{\Theta}(i)) = i$ et donc $w_i = w_{\bar{\Theta}(\hat{\Theta}(i))}$. Par définition $v_i = \mu(w_{\bar{\Theta}(i)})$ et donc $v_{\hat{\Theta}(i)} = \mu(w_{\bar{\Theta}(\hat{\Theta}(i))}) = \mu(w_i)$ et comme $v_i \in V_{\Theta(i)} \otimes O_1$,
$\mu(w_i) \in V_{\Theta(\hat{\Theta}(i))} \otimes O_1 = V_{\Theta'(i)} \otimes O_1$. On a donc bien $v = \tilde{v}_0.\langle w_1,\ldots,w_m\rangle \in B$.

<u>cqfd</u>.

La présence du O_1 dans l'énoncé de la proposition ci-dessous n'est pas gratuite : en effet on n'a pas $\mu^{-1}(U.V) = \mu^{-1}(U).\mu^{-1}(V)$, comme le montre l'exemple ci-dessous. Par contre on pourrait montrer que
$\mu^{-1}(U.V) = \mu^{-1}(U \otimes O_1).\langle\mu^{-1}(V), T(\Sigma)^1_q\rangle$. La raison pour laquelle nous avons choisi un énoncé un peu plus compliqué est tout simplement que c'est celui-là dont nous aurons besoin par la suite.

<u>Exemple 7.5</u> Soit $\Sigma = \{f,a,b\}$; $\Delta = \{g,a\}$ avec $d(f) = 2$, $d(g) = 1$, $d(a) = d(b) = 0$, et soit μ défini par

$$\mu(f) = \langle 2;g(x_1)\rangle,$$
$$\mu(a) = a$$
$$\mu(b) = b.$$

Posons $U = \{<1;g(x_1)>\}$ et $V = \{<0;a>\}$.
On a alors $\mu^{-1}(U) = \{f.<\Pi_1^1,v> \ / \ v \in T(\Sigma)_1^1\}$, $\mu^{-1}(V) = V$,
$U.V = \{<0;g(a)>\}$; $\mu^{-1}(U.V) = \{f.<a,v> \ / \ v \in T(\Sigma)_0^1\}$ et
$\mu^{-1}(U).\mu^{-1}(V) = \{f.<a,v> \ / \ v \in T(\Sigma)_1^1.a\}$. On voit donc que
$\mu^{-1}(U).\mu^{-1}(V) \subsetneq \mu^{-1}(U.V)$. Par contre $\mu^{-1}(U \otimes O_1) =$
$\{f.<\Pi_2^1,v> \ / \ v \in T(\Sigma)_2^1\}$ et $\mu^{-1}(U \otimes O_1).<\mu^{-1}(V),T(\Sigma)_0^1> =$
$\{f.<a,v> \ / \ v \in T(\Sigma)_2^1.<a,T(\Sigma)_0^1>\} = \mu^{-1}(U.V)$.

⊥

Il est bien connu [81] dans la théorie classique des langages d'arbres que la classe des ensembles algébriques est fermée par les inverses de démarquages particuliers, à savoir ceux tels que $\mu(f) = g$. Le résultat a été étendu aux démarquages quelconques par Arnold et Dauchet dans [12]. Nous en donnons ci-dessous une nouvelle démonstration.

<u>*Théorème 7.6*</u> *Soit* μ *un démarquage de* $T(\Sigma)$ *dans* $T(\Delta)$ *et soit* U *un ensemble algébrique de* $T(\Delta)_n^1$. *Alors* $\mu^{-1}(U)$ *est un ensemble algébrique de* $T(\Sigma)_n^1$.

<u>Démonstration</u> ; Soit $\mathcal{S} = \{X = PR_X + CR_X + TR_X \ / \ X \in V\}$ un système algébrique sous forme normale sur $T(\Delta)$ et V, dont la solution est E, tel qu'il existe $X_U \in V$ tel que $U = E_{X_U}$.

Pour chaque $f.\Theta \in \bigcup_{X \in V} TR_X$, $\mu^{-1}(f.\Theta \otimes O_1)$ est un ensemble reconnaissable donc algébrique ; il en est de même pour $T(\Sigma)_{d(X)+1}^1$, et pour chacun des $\mu^{-1}(\Pi_m^i \otimes O_1)$ tel que $\Pi_m^i \in \bigcup_{X \in V} PR_X$. Il existe donc un système algébrique $\mathcal{S}' = \{Y = R'_Y \ / \ Y \in V'\}$ dont la solution est E' tel que

$\forall \ f.\Theta \in \bigcup_{X \in V} TR_X$, $\exists \ Y_{f.\Theta} \in V'$ tel que $E'_{Y_{f.\Theta}} = \mu^{-1}(f.\Theta \otimes O_1)$

$\forall \ \Pi_m^i \in \bigcup_{X \in V} PR_X$, $\exists \ Y_{i,m} \in V'$ tel que $E'_{Y_{i,m}} = \mu^{-1}(\Pi_m^i \otimes O_1)$

$\forall X \in V, \exists \bar{Y}_X \in V'$ tel que $E'_{\bar{Y}_X} = T(\Sigma)^1_{d(X)+1}$.

On suppose alors que le degré de chaque symbole de V est augmenté de 1 et on pose

$$\overline{PR}_X = \{Y_{i,m} \ / \ \Pi^i_m \in PR_X\}$$

$$\overline{TR}_X = \{Y_{f.\Theta} \ / \ f.\Theta \in TR_X\}$$

$$\overline{CR}_X = \{X'.<X_1,\ldots,X_m,\bar{Y}_{d(X)}> \ / \ X'.<X_1,\ldots,X_m> \in CR_X\}$$

On considère alors le système algébrique

$S'' = S' \cup \{X = \overline{PR}_X + \overline{TR}_X + \overline{CR}_X \ / \ X \in V\}$, dont la solution est E".

On pose alors $G \in E(S'')$ défini par

si $X \in V$, $G_X = \mu^{-1}(E_X \otimes O_1)$

si $Y \in V'$, $G_Y = E'_Y$

et calculons $\hat{S}''(G)$:

. si $Y \in V'$, $\hat{S}''(G)_Y = \sigma_G(R'_Y) = \sigma_{E'}(R'_Y) = E'_Y = G_Y$

. si $X \in V$, $\hat{S}''(G)_X = \sigma_G(\overline{PR}_X) + \sigma_G(\overline{TR}_X) + \sigma_G(\overline{CR}_X)$.

Or - $\sigma_G(\overline{PR}_X) = \bigcup_{\Pi^i_m \in PR_X} G_{Y_{i,m}}$ et $G_{Y_{i,m}} = E'_{Y_{i,m}} = \mu^{-1}(\Pi^i_m \otimes O_1)$

d'où $\sigma_G(\overline{PR}_X) = \mu^{-1}(PR_X \otimes O_1)$

- $\sigma_G(\overline{TR}_X) = \bigcup_{f.\Theta \in TR_X} G_{Y_{f.\Theta}}$ et $G_{Y_{f.\Theta}} = E'_{Y_{f.\Theta}} = \mu^{-1}(f.\Theta \otimes O_1)$

d'où $\sigma_G(\overline{TR}_X) = \mu^{-1}(TR_X \otimes O_1)$

- $\sigma_G(\overline{CR}_X) = \bigcup_{X'.<X_1,\dots,X_m>} \sigma_G(X'.<X_1,\dots,X_m,\bar{Y}_{d(X)}>$ et

$\sigma_G(X'.<X_1,\dots,X_m,\bar{Y}_{d(X)}>) = G_{X'}.<G_{X_1},\dots,G_{X_m},E'_{\bar{Y}_{d(X)}}> =$

$\mu^{-1}(E_{X'} \otimes 0_1).<\mu^{-1}(E_{X_1} \otimes 0_1),\dots,\mu^{-1}(E_{X_m} \otimes 0_1), T(\Sigma)^1_{d(X)+1}>$;

d'après la proposition 7.4, ce dernier ensemble est égal à
$\mu^{-1}(E_{X'}.<E_{X_1},\dots,E_{X_m}> \otimes 0_1) = \mu^{-1}(\sigma_E(X'.\ X_1,\dots,X_m>) \otimes 0_1)$
d'où $\sigma_G(\overline{CR}_X) = \mu^{-1}(\sigma_E(CR_X) \otimes 0_1)$. On en déduit que $\hat{S}''(G)_X =$
$\mu^{-1}((PR_X + TR_X + \sigma_E(CR_X)) \otimes 0_1) = \mu^{-1}(E_X \otimes 0_1) = G_X$.

Il en résulte que $\forall\ Z \in V \cup V'$, $E''_Z \subset G_Z$ c'est-à-dire $E''_Y \subset E'_Y$ pour $Y \in V'$ et $E''_X \subset \mu^{-1}(E_X \otimes 0_1)$ pour $X \in V$.

Réciproquement, montrons d'abord que si $Y \in V'$, $E'_Y \subset E''_Y$ par induction sur l'approximation $E'^{(i)}$ de E'. On a bien $\emptyset = E'^{(0)}_Y \subset E''_Y$ et
$E'^{(i+1)}_Y = \sigma_{E'^{(i)}}(R'_Y) \subset \sigma_{E''}(R'_Y) = E''_Y$. D'où pour $Y \in V'$, $E'_Y = E''_Y$.
Montrons ensuite par induction sur l'approximation $E^{(i)}$ de E que
$\mu^{-1}(E_X \otimes 0_1) \subset E''_X$. On a d'abord $\mu^{-1}(E^{(0)}_X \otimes 0_1) = \mu^{-1}(\emptyset) = \emptyset \subset E''_X$.
Ensuite $E^{(i+1)}_X = PR_X + TR_X + \sigma_{E^{(i)}}(CR_X)$ d'où
$\mu^{-1}(E^{(i+1)}_X \otimes 0_1) = \mu^{-1}(PR_X \otimes 0_1) + \mu^{-1}(TR_X \otimes 0_1) + \mu^{-1}(\sigma_{E^{(i)}}(CR_X) \otimes 0_1)$.
Or $\mu^{-1}(PR_X \otimes 0_1) = \bigcup_{\Pi^i_m \in PR_X} \mu^{-1}(\Pi^i_m \otimes 0_1)$, et
$\mu^{-1}(\Pi^i_m \otimes 0_1) = E'_{Y_{i,m}} = E''_{Y_{i,m}}$ d'où $\mu^{-1}(PR_X \otimes 0_1) = \sigma_{E''}(\overline{PR}_X)$. De la même façon, on montre que $\mu^{-1}(TR_X \otimes 0_1) = \sigma_{E''}(\overline{TR}_X)$. Enfin si
$X'.<X_1,\dots,X_m> \in CR_X$, $\sigma_{E^{(i)}}(X'.<X_1,\dots,X_m>) = E^{(i)}_{X'}.<E^{(i)}_{X_1},\dots,E^{(i)}_{X_m}>$ et
$\mu^{-1}(\sigma_{E^{(i)}}(X'.<X_1,\dots,X_m>) \otimes 0_1) = \mu^{-1}(E^{(i)}_{X'}.<E^{(i)}_{X_1},\dots,E^{(i)}_{X_m}> \otimes 0_1) =$
$\mu^{-1}(E^{(i)}_{X'} \otimes 0_1).<\mu^{-1}(E^{(i)}_{X_1} \otimes 0_1),\dots,\mu^{-1}(E^{(i)}_{X_m} \otimes 0_1), T(\Sigma)^1_{d(X)+1}>$.
D'après l'hypothèse de récurrence, ceci est inclus dans
$E''_{X'}.<E''_{X_1},\dots,E''_{X_m},T(\Sigma)^1_{d(X)+1}>$, or $T(\Sigma)^1_{d(X)+1} = E'_{\bar{Y}_{d(X)}} = E''_{\bar{Y}_{d(X)}}$, d'où,

$\mu^{-1}(\sigma_{E^{(i)}}(X'.<X_1,\ldots,X_m>) \otimes 0_1) \subset E''_X.<E''_{X_1},\ldots,E''_{X_m},E''_{\bar{Y}_{d(X)}}> =$
$\sigma_{E''}(X'.<X_1,\ldots,X_m,\bar{Y}_{d(X)})$ et donc $\mu^{-1}(\sigma_{E^{(i)}}(CR_X) \otimes 0_1) \subset \sigma_{E''}(\overline{CR}_X)$.

Il en résulte que $\mu^{-1}(E_X^{(i+1)} \otimes 0_1) \subset \sigma_{E''}(\overline{PR}_X) + \sigma_{E''}(\overline{TR}_X) + \sigma_{E''}(\overline{CR}_X) = E''_X$.

On obtient alors que pour tout $X \in V$, $\mu^{-1}(E_X \otimes 0_1) = E''_X$ et est donc un ensemble algébrique ; en particulier pour $X = X_U$, $U = E_{X_U}$ et donc $\mu^{-1}(U \otimes 0_1)$ est un ensemble algébrique de $T(\Sigma)^1_{n+1}$ et donc aussi $V = \mu^{-1}(U \otimes 0_1).<\Pi^1_n,\ldots,\Pi^n_n,\Pi^n_n>$. Si on montre que $V = \mu^{-1}(U)$, on aura bien montré que $\mu^{-1}(U)$ est un ensemble algébrique.

Or $V = \bigcup_{u\in U} \mu^{-1}(u \otimes 0_1).<\Pi^1_n,\ldots,\Pi^n_n,\Pi^n_n>$ et $\mu^{-1}(U) = \bigcup_{u\in U} \mu^{-1}(u)$.
Pour que $V = \mu^{-1}(U)$ il suffit donc que $\forall\, u \in U$ l'ensemble $A = \mu^{-1}(u \otimes 0_1).<\Pi^1_n,\ldots,\Pi^n_n,\Pi^n_n>$ soit égal à l'ensemble $B = \mu^{-1}(u)$.
Si $v \in \mu^{-1}(u)$ alors $\mu(v) = u$ et donc $\mu(v \otimes 0_1) = u \otimes 0_1$, d'où $v \otimes 0_1 \in \mu^{-1}(u \otimes 0_1)$ et $(v \otimes 0_1).<\Pi^1_n,\ldots,\Pi^n_n,\Pi^n_n> = v.Id_n = v \in A$.
Réciproquement, si $w = v.<\Pi^1_n,\ldots,\Pi^n_n,\Pi^n_n>$ avec $\mu(v) = u \otimes 0_1$, alors $\mu(w) = u \otimes 0_1.<\Pi^1_n,\ldots,\Pi^n_n,\Pi^n_n> = u$ et donc $w \in \mu^{-1}(u) = B$, ce qui achève la démonstration.

cqfd.

2. ENSEMBLES K-ALGÉBRIQUES ET K-RATIONNELS

Nous allons donner maintenant l'exemple fondamental que nous allons retrouver par la suite.

<u>Exemple 7.7</u> Soit $\Sigma = \{b, b_1, b_2, a, \#\}$ avec $d(b) = d(b_1) = d(b_2) = 2$, $d(a) = 1$ et $d(\#) = 0$.

Soit $\Delta = \{c, b, a, \#\}$ avec $d(c) = 3$, $d(b) = 2$, $d(a) = 1$, $d(\#) = 0$.

Considérons le système algébrique sur $T(\Sigma)$

$$S \begin{cases} X_0 = X.\langle b_2.\langle \#,\#\rangle,\#\rangle \\ X = X.\langle Z.\langle \Pi_2^1, a.\Pi_2^2\rangle, \Pi_2^2\rangle + Y.b_1 \\ Y = Y.b.\langle \Pi_1^1, \Pi_1^1\rangle + b.\langle \Pi_1^1, \Pi_1^1\rangle \\ Z = \Pi_1^1 + b_2.\langle \Pi_2^2, \Pi_2^2\rangle \end{cases}$$

qui s'écrirait encore dans l'écriture traditionnelle

$$\begin{aligned} X_0 &= X(b_2(\#,\#),\#) \\ X(x_1,x_2) &= X(Z(x_1,a(x_2),x_2) + Y(b_1(x_1,x_2)) \\ Y(x_1) &= Y(b(x_1,x_1)) + b(x_1,x_1) \\ Z(x_1,x_2) &= x_1 + b_2(x_2,x_2). \end{aligned}$$

On pose $A_n = \{b_1(b_2(a^m(\#), a^m(\#)), a^n(\#)) \ / \ 0 \le m \le n\}$,

B_p défini par $B_1 = b = \langle 2; b(x_1,x_2)\rangle \in \tilde{T}(b)^1_2$

$$B_{i+1} = b.(B_i \otimes B_i) \in \tilde{T}(b)^1_{2^{i+1}}$$

$F_{p,n} = \{B_p.\langle u_1,\ldots,u_r\rangle \ / \ r = 2^p,\ u_i \in A_n\}$.

La composante X_0 de la solution de S est alors $F = \bigcup_{\substack{p\ge 1\\ n\ge 0}} F_{p,n}$.

Considérons maintenant le 1-morphisme linéaire ϕ de $T(\Delta)$ dans $T(\Sigma)$ défini par

$$\phi(a) = a$$

$$\phi(b) = b$$

$$\phi(c) = b_1.(b_2 \otimes Id_1) = \langle 3;b_1(b_2(x_1,x_2),x_3)\rangle$$

$$\phi(\#) = \#$$

Posons $A'_n = \{c(a^m(\#), a^m(\#), a^n(\#)) \ / \ 0 \leq m \leq n\}$

$$F'_{p,n} = \{B_p.\langle u'_1,\ldots,u'_r\rangle \ / \ r = 2^p,\ u'_i \in A'_n\}$$

et $$F' = \bigcup_{\substack{p\geq 1\\ n\geq 0}} F'_{p,n}$$

Alors $\phi^{-1}(F) = F'$ et cependant nous verrons que F' n'est pas algébrique.

Considérons maintenant le 2-morphisme linéaire ψ défini par

$$\psi(b) = \langle 4;\ b(x_1,x_3),\#\rangle$$

$$\psi(b_1) = \langle 4;\ c(x_1,x_2,x_3),\#\rangle$$

$$\psi(b_2) = \langle 4;\ x_1,x_3\rangle$$

$$\psi(a) = \langle 2;\ a(x_1),\#\rangle$$

$$\psi(\#) = \langle 0;\ \#,\#\rangle$$

On montre d'abord par récurrence que

$$\psi(a^n) = \langle 2;\ a^n(x_1),\#\rangle\ ;$$

en effet c'est vrai pour 1 et $\psi(a^{n+1}) = \psi(a^n).\psi(a) =$ $\langle 2;\ a^n(x_1),\#\rangle.\langle 2;\ a(x_1),\#\rangle = \langle 2;\ a^{n+1}(x_1)\rangle$. D'où $\psi(a^n\#) =$ $\langle 2;\ a^n(x_1),\#\rangle.\langle 0;\#,\#\rangle = \langle 2;\ a^n(\#),\#\rangle$. D'autre part $\psi(b_1(b_2 \otimes Id)) =$ $\psi(b_1).(\psi(b_2) \otimes Id_2) = \langle 4;\ c(x_1,x_2,x_3),\#\rangle.\langle 6;\ x_1,x_3,x_5,x_6\rangle =$ $\langle 6;\ c(x_1,x_3,x_5),\#\rangle$ et $\psi(b_1(b_2(a^m(\#), a^m(\#)), a^n(\#)) =$ $\langle 6;\ c(x_1,x_3,x_5),\#\rangle\ .\langle 0;\ a^m(\#),\#,a^m(\#),\#,a^n(\#),\#\rangle =$ $\langle 0;\ c(a^m(\#),a^m(\#),a^n(\#)),\#\rangle$.

On a donc $\psi(A_n) = \{<u,\#> \ / \ u \in A'_n\}$.

Enfin on montre par récurrence que $\psi(B_p) = (B_p \otimes \#).\Pi_2^{1\otimes 2^p}$. En effet

$\psi(B_1) = \psi(b) = <4;\ b(x_1,x_3),\#> = (b \otimes \#).(\Pi_2^1 \otimes \Pi_2^1)$ et

$\psi(B_{p+1}) = \psi(b).(\psi(B_p) \otimes \psi(B_p)) =$

$(b \otimes \#).(\Pi_2^1 \otimes \Pi_2^1).((B_p \otimes \#).\Pi_2^{1\otimes 2^p} \otimes (B_p \otimes \#).\Pi_2^{1\otimes 2^p}) =$

$(b \otimes \#).(B_p.\Pi_2^{1\otimes 2^p} \otimes B_p.\Pi_2^{1\otimes 2^p}) = b.(B_p \otimes B_p).\Pi_2^{1\otimes 2^{p+1}} \otimes \#$.

Il en résulte que $\psi(F) = \{<u,\#> \ / \ u \in F'\}$ et donc que $F' = \Pi_2^1.\psi(F)$.

Mais ψ peut être considéré comme un 1-morphisme de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans le magmoïde 2-dil $T(\Delta)$ et donc dans le magmoïde décomposable 2-dil $T(\Delta)D$. $\psi T(F)$ est alors un ensemble algébrique de 2-dil $T(\Delta)$ DT. Comme la restriction de ψT à $\tilde{T}(\Sigma)_0^1$ qui envoie $\tilde{T}(\Sigma)_0^1$ dans 2-dil $T(\Delta)$ D_0^1 = 2-dil $T(\Delta)_0^1 = T(\Delta)_0^2$ s'identifie à la restriction de ψ à $\tilde{T}(\Sigma)_0^1$, et comme $F \subset T(\Sigma)_0^1 = \tilde{T}(\Sigma)_0^1$, $\psi T(F) = \psi(F)$; on est donc en droit de considérer que $F' = \Pi_2^1.\psi(F)$ est bien, dans une certaine mesure, algébrique. C'est de tels ensembles algébriques que nous allons définir maintenant.

Rappelons que tout élément v de k-dil $T(\Sigma)$ DT_n^1 s'écrit de façon unique $[u;\Theta]$ avec $u \in$ k-dil $T(\Sigma)$ D_m^1 = k-dil $T(\Sigma)_m^1$ et $\Theta \in \Theta_n^m$. Mais comme k-dil $T(\Sigma)_m^1 = T(\Sigma)_{km}^k$, u appartient aussi à $T(\Sigma)_{km}^k$ et comme $\nu_k(\Theta) \in \Theta_{kn}^{km}$, on peut associer à v l'élément $u.\nu_k(\Theta) \in T(\Sigma)_{kn}^k$ ce qui établit une application naturelle de k-dil $T(\Sigma)$ DT_n^1 dans $T(\Sigma)_{kn}^k$. Réciproquement tout élément de $T(\Sigma)_{kn}^k$ peut être considéré comme étant de la forme $u.\nu_k(\Theta)$ et donc associé à un élément de k dil $T(\Sigma)$ DT_n^1 ; mais dans ce sens l'élément associé n'est pas unique.

Nous dirons qu'une partie U de $T(\Sigma)_n^1$ est un **ensemble k-algébrique** (resp. **k-rationnel**) s'il existe un ensemble algébrique (resp. rationnel)

V de k-dil T(Σ) DT^1_n tel que $U.\Pi_k^{1\otimes n} = \{\Pi^1_k.v.\nu_k(\Theta) \ / \ [v;\Theta] \in V\}$.

La raison de la présence du $\Pi_k^{1\otimes n}$ est le fait que d'un côté U est inclus dans $T(\Sigma)^1_n$ et que d'autre part $\{\Pi^1_k.v.\nu_k(\Theta) \ / \ [v;\Theta] \in V\}$ est dans $T(\Sigma)^1_{kn}$. Pour pouvoir les comparer il faut les ramener à une fibre commune. On a choisi cette méthode par analogie avec les résultats des propositions 7.1 et 7.2 où le même problème se posait.

<u>Exemple 7.8</u> Reprenons l'exemple 7.7 et posons pour tout symbole f de Σ, $\bar{f} = \psi(f) \in$ 2-dil T(Δ) $D^1_{d(f)}$. On considère alors le système algébrique sur 2⁻dil T(Δ) *DT*

$$
\begin{aligned}
X_0 &= X.\langle \bar{b}_2.\langle \#,\# \rangle,\# \rangle \\
X &= X.\langle Z.\langle \Pi^1_2,\bar{a}.\Pi^2_2 \rangle,\Pi^2_2 \rangle + Y.\bar{b}_1 \\
Y &= Y.\bar{b}.\langle \Pi^1_1,\Pi^1_1 \rangle + \bar{b}\ \langle \Pi^1_1,\Pi^1_1 \rangle \\
Z &= \Pi^1_1 + \bar{b}_2.\langle \Pi^2_2,\Pi^2_2 \rangle
\end{aligned}
$$

où les torsions Π^i_p sont ici celles du magmoïde projetable 2-dil T(Δ) *DT*.

Il est clair que la solution de ce système est $\psi T(F)$, qui est un ensemble algébrique de 2⁻dil T(Δ) DT^1_0. Si $u \in T(\Sigma)^1_0$, $\psi T(u) = [\psi(u);0_0]$. Or on a vu ci-dessus que $u \in F'$ ssi il existe $v \in F$ tel que $u = \Pi^1_2.\Psi(v)$; et donc ssi il existe $[w;0_0] \in \psi T(F)$ tel que $u = \Pi^1_2.w$. Mais si $u \in F'$, $u \in T(\Delta)^1_0$ et $u = u.\Pi_2^{1\otimes 0}$; de même si $[w;0_0] \in \psi T(F)$, $w \in$ 2-dil $T(\Delta)^1_0 = T(\Delta)^2_0$ et $\nu_2(0_0) = 0_0$ d'où $w = w.\nu_2(0_0)$. On en déduit que $u \in F'$ ssi il existe $[w;0_0] \in \psi T(F)$ tel que $u.\Pi_2^{1\otimes 0} = \Pi^1_2.w.\nu_2(0)$; et comme $\psi T(F)$ est un ensemble algébrique de 2-dil T(Δ) *DT*, F' est un ensemble 2-algébrique de T(Δ).

⊥

Les deux exemples ci-dessus illustrent aussi la caractérisation suivante des ensembles k-algébriques et k-rationnels.

Théorème 7.9 *Une partie* U *de* $T(\Delta)^1_n$ *est un ensemble k-algébrique (resp. k-rationnel) ssi il existe un alphabet gradué fini* Σ, *un ensemble algébrique* V *de* $T(\Sigma)^1_n$, *un k-morphisme* ϕ *de* $T(\Sigma)$ *dans* $T(\Delta)$ *tels que*

$$U \otimes \Pi_k^{1\otimes n} = \Pi_k^1.\phi(V)$$

Démonstration : Condition nécessaire

Si U est un ensemble k-algébrique de $T(\Delta)^1_n$, il existe un ensemble algébrique W de k-dil $T(\Delta)$ DT^1_n tel que

$$U.\Pi_k^{1\otimes n} = \{\Pi_k^1.v.\nu_k(\Theta) \ / \ [v;\Theta] \in W\}.$$

Mais d'après le théorème 4.7, il existe un alphabet gradué fini Σ', un 1-morphisme ϕ' de $\tilde{T}(\Sigma')$ dans k-dil $T(\Delta)$ D et un ensemble algébrique V' de $T(\Sigma')^1_n$ tels que $W = \phi' T(V')$, c'est-à-dire que $W = \{[\phi'(\tilde{v});\Theta] \ / \ \tilde{v}.\Theta \in V'\}$. On en déduit que $U \otimes \Pi_k^{1\otimes n} = \{\Pi_k^1.\phi'(\tilde{v}).\nu_k(\Theta) \ / \ \tilde{v}.\Theta \in V'\}$.

Mais sur $\tilde{T}(\Sigma')^1_p$, ϕ' est un 1-morphisme dans k-dil $T(\Delta)^1_p$, qu'on peut identifier à un k-morphisme de $\tilde{T}(\Sigma)^1_p$ dans $T(\Delta)^k_{kp}$ et étendre en un k-morphisme noté ψ' de $T(\Sigma)$ dans $T(\Delta)$. On a alors si $\tilde{v}.\Theta \in T(\Sigma)^1_n$, $\psi'(\tilde{v}.\Theta) = \phi'(\tilde{v}).\nu_k(\Theta)$ d'où $U \otimes \Pi_k^{1\otimes n} = \{\Pi_k^1.\psi'(\tilde{v}.\Theta) \ / \ \tilde{v}.\Theta \in V'\} = \Pi_k^1.\psi'(V')$.

Condition suffisante

Soit ψ un k-morphisme de $T(\Sigma)$ dans $T(\Delta)$. On en déduit un 1-morphisme ϕT de $T(\Sigma)$ dans k dil $T(\Delta)DT$ et alors $\phi T(\tilde{u}.\Theta) = [\psi(\tilde{u}) ;\Theta]$. Si V est un ensemble algébrique de $T(\Sigma)^1_n$, d'après le théorème 4.7, $W = \phi T(V)$ est un ensemble algébrique de k-dil $T(\Delta)$ DT. On a alors

$\Pi_k^1 \ \phi T(V) = \{\Pi_k^1.\psi(\tilde{u}).\nu_k(\Theta) \ / \ \tilde{u}.\Theta \in V\} = \{\Pi_k^1.w.\nu_k(\Theta) \ / \ [w,\Theta] \in W\}$.

La démonstration se fait de la même façon pour les ensembles rationnels en remplaçant le théorème 4.7 par le théorème 3.20.

cqfd.

Remarque : Dans le cas particulier où on ne considère que des parties de $T(\Delta)^1_0$, c'est-à-dire des ensembles "d'arbres sous variables", $\Pi_k^{1\otimes 0} = 0_0$ d'où $u \otimes \Pi_k^{1\otimes 0} = u$ et la caractérisation de U donnée par ce théorème est $U = \Pi_k^1 . \phi(V)$.

On dira qu'un ensemble k-algébrique (resp. k-rationnel) est **linéaire** si le k-morphisme du théorème 7.9 est linéaire. On remarquera, compte tenu des démonstrations du théorème 7.9 et du théorème 4.7 (resp. 3.20) qu'un ensemble k-algébrique U est linéaire ssi il existe un système algébrique sur k-dil $T(\Sigma)$ *DT* tel que tous les éléments de k-dil $T(\Sigma)$ D_m^1 = k-dil $T(\Sigma)$ figurant dans ce système soient linéaires, et tel qu'il existe une composante V de la solution de *S* telle que $u \in U$ ssi il existe $[v,\Theta] \in V$ tel que $u.\Pi_k^{1\otimes n} = \Pi_k^1 . v . \nu_k(\Theta)$.

On notera

k-alg	la classe des ensembles k-algébriques			
k-alg-lin	"	"	"	linéaires
k-rat	"	"	k-rationnels	
k-rat-lin	"	"	"	linéaires

$\underline{\text{Alg}} = \bigcup_{k\geq 1} \underline{\text{k-alg}}$

$\underline{\text{Alg-lin}} = \bigcup_{k\geq 1} \underline{\text{k-alg-lin}}$,

$\underline{\text{Rat}} = \bigcup_{k\geq 1} \underline{\text{k-rat}}$

$\underline{\text{Rat-lin}} = \bigcup_{k\geq 1} \underline{\text{k-rat-lin}}$

Les inclusions suivantes sont triviales

$\forall\ k \geq 1$ $\quad$ $\underline{\text{k-rat-lin}} \subset \underline{\text{k-rat}} \subset \underline{\text{k-alg}}$

$\underline{\text{k-rat-lin}} \subset \underline{\text{k-alg-lin}} \subset \underline{\text{k-alg}}$

$\underline{\text{Rat-lin}} \subset \underline{\text{Rat}} \subset \underline{\text{Alg}}$

$\underline{\text{Rat-lin}} \subset \underline{\text{Alg-lin}} \subset \underline{\text{Alg}}$

Rappelons que $\underline{\text{alg}}$ et $\underline{\text{rat}}$ sont les classes d'ensembles algébriques et rationnels de $T(\Sigma)$. Comme $T(\Sigma)$ est trivialement inclus dans 1-dil $T(\Sigma)$ *DT* = $T(\Sigma)$ *DT*

$\underline{\text{alg}} \subset \underline{\text{1-alg}}$

$\underline{\text{rat}} \subset \underline{\text{1-rat}}$

De plus si ψ est un k-morphisme (linéaire) de $T(\Sigma)$ dans $T(\Delta)$ on considère le k+1-morphisme (linéaire) ψ' de $T(\Sigma)$ dans $T(\Delta)$ défini par $\forall\ f \in \Sigma_p$, $\psi'(f) = (\psi(f) \otimes Id_1).\gamma_p$ où $\forall\ p \geq 0$, γ_p est l'application de $[kp+1]$ dans $[(k+1)p]$ égale à $<\Pi^1_{(k+1)p},\ldots,\Pi^k_{(k+1)p},\Pi^{k+2}_{(k+1)p},\ldots,\Pi^{2k+1}_{(k+1)p},\ldots$

$\Pi^{k(i-1)+i}_{(k+1)p},\ldots,\Pi^{ki+i-1}_{(k+1)p},\ \Pi^{ki+i+1}_{(k+1)p},\ldots,\ \Pi^{kp}_{(k+1)p},\ \Pi^{(k+1)p}_{(k+1)p}>$.

Comme γ_p est une injection, si ψ est linéaire, ψ' est linéaire. On montre alors par récurrence sur la taille de $u \in T(\Sigma)^1_m$ que $Id_k \otimes O_1\ \psi'(u) = \psi(u).(Id_k \otimes O_1)^{\otimes m}$. En effet

- Si $u = \Pi^i_m$, $\psi'(u) = <\Pi^{(k+1)(i-1)+1}_{(k+1)m},\ldots,\Pi^{(k+1)(i-1)+k+1}_{(k+1)m}>$ et
  $\psi(u) = <\Pi^{k(i-1)+1}_{km},\ldots,\Pi^{ki}_{km}>$ d'où
  $(Id_k \otimes O_1).\psi'(u) = <\Pi^{k(i-1)+i}_{(k+1)m},\ldots,\Pi^{ki+i-1}_{(k+1)m}> = \psi(u).(Id_k \otimes O_1)^{\otimes m}$.

- Si $u = f.<v_1,\ldots,v_p>$, $(Id_k \otimes O_1)\ \psi'(u) =$
  $(Id_k \otimes O_1)\ \psi'(f).<\psi'(v_1),\ldots,\psi'(v_p)> =$
  $\psi(f).(Id_k \otimes O_1)^{\otimes p}\ .\ <\psi'(v_1),\ldots,\psi'(v_p)> =$
  $\psi(f).<\psi(v_1).(Id_k \otimes O_1)^{\otimes m},\ldots,\psi(v_p).(Id_k \otimes O_1)^{\otimes m}> = \psi(u).(Id_k \otimes O_1)^{\otimes m}$.

Et comme $\Pi^1_{k+1} = \Pi^1_k.(Id_k \otimes 0_1)$, $\Pi^{1\otimes n}_{k+1} = \Pi^{1\otimes n}_k.(Id_k \otimes 0_1)^{\otimes n}$,

d'où $\Pi^1_k.\psi(v).(Id_k \otimes 0_1)^{\otimes n} = \Pi^1_{k+1}.\psi'(v)$, et donc comme $(Id_k \otimes 0_1)^{\otimes n}$ est une injection,

$$\Pi^1_{k+1}.\psi'(v) = u.\Pi^{1\otimes n}_{k+1} \text{ ssi } \Pi^1_k.\psi(v) = u.\Pi^{1\otimes n}_k.$$

Il en résulte que tout ensemble k-algébrique (resp. k-rationnel) (linéaire) est aussi k+1-algébrique (resp. k+1-rationnel) (linéaire). D'où les inclusions

<u>k-alg</u>	$\subset$	<u>k+1-alg</u>
<u>k-rat</u>	$\subset$	<u>k+1-rat</u>
<u>k-alg-lin</u>	$\subset$	<u>k+1-alg-lin</u>
<u>k-rat-lin</u>	$\subset$	<u>k+1-rat-lin</u>

<u>*Proposition 7.10*</u> *L'image par un 1-morphisme (linéaire) d'un ensemble k-algébrique ou k-rationnel (linéaire) est un ensemble k-algébrique ou k-rationnel (linéaire).*

<u>Démonstration</u> : Soient U un ensemble k-algébrique linéaire de $T(\Delta)^1_n$ et ψ un 1-morphisme linéaire de $T(\Delta)$ dans $T(\Gamma)$. D'après le théorème 7.9, il existe un k-morphisme linéaire ϕ de $T(\Sigma)$ dans $T(\Delta)$, un ensemble algébrique V de $T(\Sigma)^1_n$ tels que

$$U \otimes \Pi^{1\otimes n}_k = \Pi^1_k.\phi(V).$$

On a donc $\psi(U) \otimes \Pi^{1\otimes n}_k = \psi(U \otimes \Pi^{1\otimes n}_k) = \psi(\Pi^1_k.\phi(V)) = \Pi^1_k.\psi(\phi(V))$. Or $\psi.\phi$ est encore un k-morphisme linéaire ; donc $\psi(U)$ est un ensemble k-algébrique. La démonstration serait exactement la même dans les autres cas.

<u>cqfd</u>.

Proposition 7.11 *Les classes* k-alg, k-alg-lin, k-rat, k-rat-lin *sont fermées par intersection avec un ensemble reconnaissable.*

Démonstration : Démontrons ce résultat pour la classe k-alg-lin.
Soient U un ensemble k-algébrique linéaire de $T(\Delta)^1_n$, et K un ensemble reconnaissable de $T(\Delta)^1_n$. D'après le théorème 7.9, il existe Σ, un k-morphisme linéaire ϕ de $T(\Sigma)$ dans $T(\Delta)$ et un ensemble algébrique V de $T(\Sigma)^1_n$ tels que

$$U \otimes \Pi_k^{1\otimes n} = \Pi_k^1.\phi(V).$$

Considérons alors l'ensemble reconnaissable $\bar{K} = \langle K.\Pi_n^{1\otimes n}, T(\Delta)^1_{kn},\ldots,T(\Delta)^1_{kn}\rangle$. L'ensemble $K' = \phi^{-1}(\bar{K}) \subset T(\Sigma)^1_n$ est encore reconnaissable et donc $V \cap K'$ est encore algébrique.
$K' = \{u \in T(\Sigma)^1_n \ / \ \Pi_k^1.\phi(u) \in K.\Pi_k^{1\otimes n}\}$ d'où $\Pi_k^1.\phi(V \cap K') = \Pi_k^1.\phi(V) \cap K.\Pi_k^{1\otimes n} = U.\Pi_k^{1\otimes n} \cap K.\Pi_k^{1\otimes n}$. Pour que $U \cap K$ soit un ensemble k-algébrique, il suffit donc de montrer que $U.\Pi_k^{1\otimes n} \cap K.\Pi_k^{1\otimes n} = (U \cap K).\Pi_k^{1\otimes n}$.

Dans un sens, il est clair que

$$(U \cap K).\Pi_k^{1\otimes n} \subset U.\Pi_k^{1\otimes n} \cap K.\Pi_k^{1\otimes n}.$$

Réciproquement si $u \in U.\Pi_k^{1\otimes n} \cap K.\Pi_k^{1\otimes n}$, il existe $u' \in U$, $u'' \in K$ tel que $u = u'.\Pi_k^{1\otimes n} = u''.\Pi_k^{1\otimes n}$; comme $\Pi_k^{1\otimes n}$ est une injection, on a $u' = u'' \in U \cap K$ et donc $u \in (U \cap K).\Pi_k^{1\otimes n}$.

cqfd.

Proposition 7.12 *Un ensemble est algébrique (resp. rationnel) ssi il est 1-algébrique linéaire (resp. 1-rationnel linéaire).*

Démonstration : Pour k=1, le théorème 7.9 indique qu'un ensemble U est 1-algébrique (resp. 1-rationnel) linéaire ssi il existe Σ, un 1-morphisme linéaire ϕ de $T(\Sigma)$ dans $T(\Delta)$ un ensemble algébrique (resp. rationnel) V de $T(\Sigma)$ tel que

$$U.\Pi_1^{1\otimes n} = \Pi_1^1.\phi(V)$$

Or comme $\Pi_1^1 = Id_1$, on obtient $U = \phi(V)$. Comme la classe des ensembles algébriques (resp. rationnels) est fermée par 1-morphisme linéaire, U est aussi algébrique (resp. rationnel) et donc 1-alg-lin $\subset$ alg (resp. 1-rat-lin $\subset$ rat). Réciproquement, si on prend pour ϕ le morphisme identité qui est bien linéaire, on obtient que tout ensemble algébrique (resp. rationnel) est 1-algébrique-linéaire (resp. 1-rationnel-linéaire).

cqfd.

De la même façon, on démontre que 1-alg et 1-rat sont les fermetures par 1-morphisme quelconque de alg et rat. Avec ces notations Arnold et Dauchet ont montré [7] que 1-rat $\not\subset$ alg = 1-alg-lin. Plus généralement, comme tout k-morphisme est le composé d'un k-morphisme linéaire et d'un 1-morphisme (cf. [D]) on peut démontrer par une méthode analogue à celle utilisée dans la démonstration de la proposition 7.10 que k-rat et k-alg sont les fermetures par 1-morphisme quelconque de k-rat-lin et k-alg-lin et au paragraphe suivant nous généraliserons le résultat de [7] en montrant que 1-rat $\not\subset$ k-alg-lin.

Proposition 7.13 *Les classes* Alg-lin *et* Rat-lin *sont fermées par démarquage inverse.*

<u>Démonstration</u> : Nous allons considérer le cas de la classe <u>Alg-lin</u> ; celui de <u>Rat-lin</u> serait traité exactement de la même façon.

Soient U un ensemble k-algébrique linéaire de $T(\Delta)^1_n$, Σ un alphabet gradué fini, ϕ un k-morphisme linéaire de $T(\Sigma)$ dans $T(\Delta)$ et V un ensemble algébrique de $T(\Delta)^1_n$ tels que $U.\Pi_k^{1\otimes n} = \Pi_k^1.\phi(V)$.

Soit μ un démarquage de $T(\Omega)$ dans $T(\Delta)$.

D'après la proposition 7.2, il existe un alphabet gradué Ω' un démarquage μ' de $T(\Omega)$ dans $T(\Sigma)$, un k.k'-morphisme linéaire ψ de $T(\Omega)$ dans $T(\Gamma)$, et un ensemble reconnaissable K de $T(\Omega)^1_n$ tels que $\forall\ u \in T(\Sigma)^1_n$, $\mu^{-1}(\Pi_k^1.\phi(u)).\Pi_{k'}^{1\otimes kn} = \Pi^1_{k.k'}.\psi(\mu'^{-1}(u) \cap K')$. On en déduit que $\mu^{-1}(\Pi_k^1.\phi(V)).\Pi_{k'}^{1\otimes kn} = \Pi^1_{k.k'}.\psi(\mu'^{-1}(V) \cap K)$ et donc que $\mu^{-1}(U.\Pi_k^{1\otimes n}).\Pi_{K'}^{1\otimes kn} = \Pi^1_{k.k'}.\psi(V')$ où V' est l'ensemble algébrique $\mu'^{-1}(V) \cap K$.
Soit alors R l'ensemble reconnaissable de $T(\Omega)^1_n$ tel que
$u \in R$ ssi $\Pi^1_{k.k'}.\psi(u) \in T(\Gamma)^1_n.\Pi^{1\otimes n}_{k.k'}$. On a
$\Pi^1_{k.k'}.\psi(V' \cap R) = \mu^{-1}(U.\Pi_k^{1\otimes n}).\Pi_{k'}^{1\otimes kn} \cap T(\Gamma)^1_n.\Pi^{1\otimes n}_{k.k'}$.
Or ce dernier ensemble est précisément égal à $\mu^{-1}(U).\Pi^{1\otimes n}_{k.k'}$. En effet $\Pi^{1\otimes n}_{k.k'} = \Pi_k^{1\otimes n}.\Pi_{k'}^{1\otimes kn}$; d'où pour les mêmes raisons que dans la démonstration de la proposition 7.11, $\mu^{-1}(U.\Pi_k^{1\otimes n}).\Pi_{k'}^{1\otimes kn} \cap T(\Gamma)^1_n.\Pi^{1\otimes n}_{k.k'} =$
$(\mu^{-1}(U.\Pi_k^{1\otimes n}) \cap T(\Gamma)^1_n.\Pi_k^{1\otimes n}).\Pi_{k'}^{1\otimes kn}$.
Soit alors $u \in \mu^{-1}(U.\Pi_k^{1\otimes n})$; on a donc $\mu(u) = v.\Pi_k^{1\otimes n}$ avec $v \in U$.
Si de plus $u \in T(\Gamma)^1_n.\Pi_k^{1\otimes n}$, u s'écrit $u'.\Pi_k^{1\otimes n}$ et $\mu(u) = \mu(u').\Pi_k^{1\otimes n}$;
d'où $v = \mu(u')$ et $u' \in \mu^{-1}(U)$ et donc $u = u'.\Pi_k^{1\otimes n} \in \mu^{-1}(U).\Pi_k^{1\otimes n}$.
Réciproquement si $u \in \pi^{-1}(U).\Pi_k^{1\otimes n}$, u s'écrit $u'.\Pi_k^{1\otimes n}$ avec $\mu(u') \in U$;
et donc $\mu(u) = \mu(u').\Pi_k^{1\otimes n} \in U.\Pi_k^{1\otimes n}$. Il en résulte que
$u \in \mu^{-1}(U.\Pi_k^{1\otimes n}) \cap T(\Gamma)^1_n.\Pi_k^{1\otimes n}$. On a donc $\mu^{-1}(U.\Pi_k^{1\otimes n}) \cap T(\Gamma)^1_n.\Pi_k^{1\otimes n} =$
$\mu^{-1}(U).\Pi_k^{1\otimes n}$ d'où $\Pi^1_{k.k'}.\psi(V' \cap R) = \mu^{-1}(U).\Pi_k^{1\otimes n}.\Pi_{k'}^{1\otimes kn} = \mu^{-1}(U).\Pi^{1\otimes n}_{k.k'}$
ce qui montre que $\mu^{-1}(U)$ est k-algébrique linéaire.

<u>cqfd</u>.

Théorème 7.14 *Les classes* Alg-lin *et* Rat-lin *sont fermées par 1-morphisme linéaire inverse.*

Démonstration : Soit U un ensemble k-algébrique linéaire de $T(\Sigma)^1_n$ et soit ϕ un 1-morphisme linéaire de $T(\Delta)$ dans $T(\Sigma)$. D'après la proposition 7.1, il existe un alphabet gradué fini Γ, un démarquage μ de $T(\Gamma)$ dans $T(\Delta)$, un k'-morphisme linéaire ψ de $T(\Gamma)$ dans $T(\Sigma)$ et un ensemble reconnaissable K de $T(\Sigma)^1_n$ tels que $\forall\ u \in T(\Sigma)^1_n$, $\phi^{-1}(u).\Pi_{k'}^{1\otimes n} = \Pi^1_{k'}.\psi(\mu^{-1}(u) \cap K)$. D'où $\phi^{-1}(U).\Pi_{k'}^{1\otimes n} = \Pi^1_{k'}.\psi(\mu^{-1}(U) \cap K)$. Comme la classe Alg-lin est fermée par démarquage inverse et par intersection avec un reconnaissable (propositions 7.11 et 7.13), $U' = \mu^{-1}(U) \cap K$ est un ensemble k"-algébrique linéaire. Il existe donc un k"-morphisme linéaire ρ et un ensemble algébrique V tels que $U'.\Pi_{k''}^{1\otimes n} = \Pi^1_{k''}.\rho(V)$ et $\phi^{-1}(U).\Pi_{k'}^{1\otimes n} = \Pi^1_{k'}.\psi(U')$. D'où $\phi^{-1}(U).\Pi_{k'}^{1\otimes n}.\psi(\Pi_{k''}^{1\otimes n}) = \Pi^1_{k'}.\psi(U').\psi(\Pi_{k''}^{1\otimes n}) = \Pi^1_{k'}.\psi(U'.\Pi_{k''}^{1\otimes n}) = \Pi^1_{k'}.\psi(\Pi^1_{k''}.\rho(V))$ et comme $\Pi^1_{k'}.\psi(\Pi^1_{k''}) = \Pi^1_{k'.k''}$, on a $\phi^{-1}(U).\Pi_{k'.k''}^{1\otimes n} = \Pi^1_{k'.k''}.\psi(\rho(V))$, et puisque $\psi o \rho$ est un k'k"-morphisme linéaire, $\phi^{-1}(U)$ est bien k'.k" algébrique linéaire.

La démonstration est la même pour la classe Rat-lin.

cqfd.

3. LA HIÉRARCHIE DES ENSEMBLES K-ALGÉBRIQUES

<u>*Lemme 7.15*</u> *Soient* ϕ *un k-morphisme de* $T(\Sigma)$ *dans* $T(\Delta)$, *et* U *un ensemble algébrique non vide de* $T(\Sigma)^1_n$. *Si* $\Pi^1_k.\phi(U) \cap \Theta = \emptyset$ *alors il existe un alphabet gradué fini* Ω, k *symboles de degré 1 :* $a_1,\ldots,a_k$, *une 1-substitution algébrique* σ *de* $T(\Omega)$ *dans* $T(\Sigma)$ *qui vérifie :* $\sigma(f) \neq \emptyset$ *pour tout* $f \in \Omega$, *et un ensemble corégulier* V *de* $T(\Sigma \cup \Omega \cup \{a_1,\ldots,a_k\})^1_n$ *tels que*

i) *si* $w \in V$, *alors* $w = a_i.f.w'$ *avec* $f \in \Sigma$, $w' \in T(\Omega)$ *et* $\Pi^i_k.\phi(f) \notin \Theta$

ii) $$\Pi^1_k.\phi(U) = \bigcup_{a_i.f.w \in V} \Pi^i_k.\phi(f.\sigma(w))$$

<u>Démonstration</u> : Soit $S = \{X = PR_X + CR_X + TR_X \ / \ X \in \Omega\}$ un système algébrique sous forme normale sur $T(\Sigma)$ et Ω dont E est la solution, tel qu'il existe $X_U \in \Omega$ tel que $U = E_{X_U}$. Comme U n'est pas vide, on peut supposer d'après la proposition 6.7 que toutes les composantes de E sont non vides. La 1-substitution algébrique σ_E de $T(\Omega)$ dans $T(\Sigma)$ est donc bien telle que $\sigma_E(X) = E_X \neq \emptyset$ pour tout $X \in \Omega$.

On définit l'alphabet gradué $\bar{V}$ par
$\bar{V} = \{<X,i> \ / \ X \in \Omega,\ i \leq k,\ \Pi^i_k.\phi(E_X) \notin \Theta\}$. Comme $U = E_{X_U}$ et que $\Pi^1_k.\phi(U) \notin \Theta$, on a donc $<X_U,1> \in \bar{V}$.

On définit ensuite le système algébrique
$\bar{S} = \{Y = \overline{MR}_Y + \overline{TR}_Y + \overline{CR}_Y \ / \ Y \in \bar{V}\}$ par
$\overline{MR}_{<X,i>} = \{<X',j> \ / \ \exists\ u \in T(\Sigma)^1_m,\ \exists\ \ell \leq m$ tel que $\Pi^i_k.\phi(u) = \Pi^{k(\ell-1)+j}_{km}$,

et tel qu'il existe $V \in P(MT)^m_{d(X)}$ avec $\Pi^\ell_m.V = E_{X'}$ et

$\emptyset \neq u.V \subset E_X\}$

$\overline{TR}<X,i> = \{a_i.f.\Theta \ / \ f.\Theta \in TR_X$ et $\Pi_k^i.\phi(f) \notin \Theta\}$

$\overline{CR}<X,i> = \{<X',i>.<X_1,\ldots,X_n> \ / \ X'.<X_1,\ldots,X_n> \in CR_X\}$.

C'est bien un système corégulier dont on notera $\bar{E}$ la solution. L'ensemble $V = \bar{E}_{<X_U,1>}$ est donc bien corégulier. De plus, il est immédiat que tout élément de $\bar{E}_{<X,i>}$ est de la forme $a_j.f.w$ avec $w \in T(\Omega)$ et $\Pi_k^j.\phi(f) \notin \Theta$. La condition (i) est donc vérifiée.

On montre ensuite :

P1 : $\forall <X,i> \in \bar{V}$, $\forall u \in E_X$, si $\Pi_k^i.\phi(u) \notin \Theta$ alors

$\exists a_j.f.w \in \bar{E}_{<X,i>}$, $v \in \sigma_E(w)$ tels que

a) $u = \tilde{u}_0.<u_1,\ldots,u_q>$ et il existe $\ell \leq q$ tel que $u_\ell = f.v$

b) $\Pi_k^i.\phi(\tilde{u}_0) = \Pi_{kq}^{k(\ell-1)+j}$

ainsi que

P2 : $\forall <X,i> \in \bar{V}$, $\forall a_j.f.w \in \bar{E}_{<X,i>}$, $\forall v \in \sigma_E(w)$,

$\exists u \in E_X$ tel que

a) $u = \tilde{u}_0.<u_1,\ldots,u_q>$ et il existe $\ell \leq q$ tel que $u_\ell = f.v$

b) $\Pi_k^i.\phi(\tilde{u}_0) = \Pi_{kq}^{k(\ell-1)+j}$

De P1 on déduira $\forall u \in E_{X_U} = U$, alors $\Pi_k^1.\phi(u) \notin \Theta$ et donc il existe $a_j.f.w \in \bar{E}_{<X_U,1>} = V$, $v \in \sigma_E(w)$ tel que $\Pi_k^1.\phi(u) = \Pi_{k.q}^{k(\ell-1)+j}.<\phi(u_1),\ldots,\phi(u_1)> = \Pi_k^j.\phi(u_\ell) = \Pi_k^j.\phi(f.v)$ et donc $\Pi_k^1.\phi(U) \subset \bigcup_{a_j.f.w \in V} \Pi_k^j.\phi(f.\sigma_E(w))$.

De la même façon, si $a_j.f.w \in V = \bar{E}_{<X_U,1>}$ et si $v \in \sigma_E(w)$ il existe $u \in E_{X_U} = U$ tel que $\Pi_k^1.\phi(u) = \Pi_k^j.\phi(f.v)$.

<u>Démonstration de P1</u> On fait cette démonstration par induction sur l'approximation $E^{(i)}$ de E.

Pour i = 0, $E_X^{(i)}$ est vide et P1 est trivialement vérifiée

si $u \in E_X^{(i+1)}$ et si $\Pi_k^i.\phi(u) \notin \Theta$.

<u>Soit</u> $u = f.\Theta \in TR_X$ et alors $a_i.f.\Theta \in \overline{TR}_{<X,i>} \subset \bar{E}_{<X,i>}$.
On pose $w = \Theta$; $v = \Theta \in \sigma_E(w) = \sigma_E(\Theta)$ et $u_0 = Id_1$.
On a donc bien $u = Id_1.f.\Theta = Id_1.f.v$ et $\Pi_k^i.\phi(Id_1) = \Pi_k^i$.

<u>Soit</u> il existe $X'.<X_1,\ldots,X_m> \in CR_X$, $\tilde{u}.\Theta \in E_{X'}^{(i)}$, $u_1 \in E_{X_{\Theta(1)}}^{(i)},\ldots,u_p \in E_{X_{\Theta(p)}}^{(i)}$ tels que $u = \tilde{u}.<u_1,\ldots,u_p>$.

<u>1er cas</u> $\Pi_k^i.\phi(\tilde{u}) \in \Theta$ alors $\Pi_k^i.\phi(\tilde{u}) = \Pi_{kp}^{k(\ell-1)+i'}$
et donc $\Pi_k^i.\phi(u) = \Pi_k^{i'}.\phi(u_\ell) \notin \Theta$. On applique l'hypothèse de récurrence à $u_\ell \in E_{X_{\Theta(\ell)}}^{(i)}$: il existe $a_j.f.w \in \bar{E}_{<X_{\Theta(\ell)},i'>}$, $v \in \sigma_E(w)$ tels que $u_\ell = \tilde{u}_0.<u'_1,\ldots,u'_q>$, $u'_r = f.v$ et
$\Pi_k^{i'}.\phi(\tilde{u}_0) = \Pi_{kq}^{k(r-1)+f}$.

Mais alors $u = \tilde{u}.(Id_{\ell-1} \otimes \tilde{u}_0 \otimes Id_{p-\ell}).<u_1,\ldots,u_{\ell-1},u'_1,\ldots,u'_q,u_{\ell+1},\ldots,u_p> =$
$\tilde{u}'_0.<v'_1,\ldots,v'_{p+q-1}>$ avec $v'_{\ell-1+r} = u'_r = f.v$ et
$\Pi_k^i.\phi(\tilde{u}'_0) = \Pi_{kp}^{k(\ell-1)+i'}.\phi(Id_{\ell-1} \otimes \tilde{u}_0 \otimes Id_{p-\ell}) =$
$Id_{k(\ell-1)} \otimes \Pi_k^{i'}.\phi(\tilde{u}_0) \otimes Id_{k(p-\ell)} = \Pi_{k(p+q-1)}^{k(\ell-1+r-1)+j}$. Pour que P1 soit vérifié, il reste à montrer que $a_j.f.w \in \bar{E}_{<X,i>}$. Or puisque
$\tilde{u}.\Theta \in E_X^{(i)} \subset E_X$, $\tilde{u}.\Theta.<E_{X_1},\ldots,E_{X_m}> \subset E_{X'}.<E_{X_1},\ldots,E_{X_m}> \subset E_X$
et comme $\Pi_k^i.\phi(\tilde{u}).\Theta = \pi_{kp}^{k(\ell-1)+i'}.\nu_k(\Theta) = \Pi_{km}^{k(\Theta(\ell)-1)+i}$ et que
$\Pi_{km}^{\Theta(\ell)}.<E_{X_1},\ldots,E_{X_m}> = E_{X_{\Theta(\ell)}}$, par définition de $\overline{MR}_{<X,i>}$,
$<X_{\Theta(\ell)},i'> \in \overline{MR}_{<X,i>}$ et donc $\bar{E}_{<X_{\Theta(\ell)},i'>} \subset \bar{E}_{<X,i>}$.

<u>2ème cas</u> $\Pi_k^i.\phi(\tilde{u}) \notin \Theta$. Alors $\Pi_k^i.\phi(\tilde{u}.\Theta) \notin \Theta$; il existe donc $a_j.f.w \in \bar{E}_{<X',i>}$, $v \in \sigma(w)$ tels que $\tilde{u}.\Theta = \tilde{u}_0.<u_1',\ldots,u_q'>$, $f.v = u_\ell'$ et $\Pi_k^i.\phi(\tilde{u}_0) = \Pi_{kq}^{k(\ell-1)+j}$.

Ecrivons u_i' sous la forme $\tilde{u}_i.\Theta_i$ et $v = \tilde{v}.\bar{\Theta}$; on a donc $\tilde{u}_\ell.\Theta_\ell = u_\ell = f.v = f.\tilde{v}.\bar{\Theta}$ d'où $\tilde{u}_\ell = f.\tilde{v}$ et $\bar{\Theta} = \Theta_\ell$. De plus $\tilde{u}.\Theta = \tilde{u}_0.<u_1',\ldots,u_q'> = \tilde{u}_0.(\tilde{u}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{u}_q).<\Theta_1,\ldots,\Theta_q>$ d'où $\Theta = <\Theta_1,\ldots,\Theta_q>$; il existe donc r et s tel que $\forall\, j \in [s]$, $\bar{\Theta}(j) = \Theta(r+j)$. On a donc $u_{r+j} \in E^{(i)}_{X_{\Theta(r+j)}} = E^{(i)}_{X_{\bar{\Theta}(j)}}$. Calculons alors $u = \tilde{u}.<u_1,\ldots,u_p> = \tilde{u}_0.(\tilde{u}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{u}_q).<u_1,\ldots,u_p> = \tilde{u}_0.(\tilde{u}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{u}_{\ell-1} \otimes Id_1 \otimes \tilde{u}_{\ell+1} \otimes \ldots \otimes \tilde{u}_q).$ $<u_1,\ldots,u_r, \tilde{u}_\ell.<u_{r+1},\ldots,u_{r+s}>, u_{r+s+1},\ldots,u_p>$ et $\Pi_k^i.\phi(\tilde{u}_0.(\tilde{u}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{u}_{\ell-1} \otimes Id_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{u}_q) = \Pi_{k(p+s-1)}^{kr+j}$.

Par ailleurs, puisque $X'.<X_1,\ldots,X_m> \in CR_X$, $<X',i>.<X_1,\ldots,X_m> \in \overline{CR}_{<X,i>}$ et donc $\bar{E}_{<X',i>}.<X_1,\ldots,X_m> \subset \bar{E}_{<X,i>}$; d'où puisque $a_j.f.w \in \bar{E}_{<X',i>}$, $a_j.f.w.<X_1,\ldots,X_m> \in \bar{E}_{<X,i>}$.
D'autre part, puisque $v = \tilde{v}.\bar{\Theta} \in \sigma_E(w)$ et que $u_{r+j} \in E^{(i)}_{X_{\bar{\Theta}(j)}} \subset E_{X_{\bar{\Theta}(j)}}$, $\tilde{v}.<u_{r+1},\ldots,u_{r+1}> \in \tilde{v}.<E_{X_{\bar{\Theta}(1)}},\ldots,E_{X_{\bar{\Theta}(s)}}> = \tilde{v}.\bar{\Theta}.<E_{X_1},\ldots,E_{X_m}> = \tilde{v}.\Theta.<E_{X_1},\ldots,E_{X_m}> =$
$v.<E_{X_1},\ldots,E_{X_m}> \subset \sigma_E(w).<E_{X_1},\ldots,E_{X_m}> = \sigma_E(w.<X_1,\ldots,X_m>)$. On a donc bien montré qu'il existait $a_j.f.w.<X_1,\ldots,X_m> \in \bar{E}_{<X,i>}$, $\tilde{v}.<u_{r+1},\ldots,u_{r+s}> \in \sigma_E(w.<X_1,\ldots,X_m>)$ tels que $u = \tilde{u}_0'.<\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_r,\bar{u}_{r+1},\ldots,\bar{u}_{p+1-1}>$ avec $\bar{u}_{r+1} = \tilde{u}_\ell.<u_{r+1},\ldots,u_{r+1}> = f.\tilde{v}.<u_{r+1},\ldots,u_{r+s}>$ et $\Pi_k^i.\phi(\tilde{u}_0') = \Pi_{k(p+s-1)}^{kr+j}$.

Démonstration de P2 Cette démonstration se fait aussi par induction sur l'approximation $\bar{E}^{(i)}$ de $\bar{E}$. Si $a_j.f.w \in \bar{E}^{(i+1)}_{<X,i>}$

Soit $a_j.f.w \in \overline{TR}_{<X,i>}$. Dans ce cas $w = \Theta$, $u = f.\Theta \in TR_X \subset E_X$ et si $v \in \sigma_E(w) = \sigma_E(\Theta)$, $v = 0$ et donc $u = Id_1.f.\Theta = Id_1.f.v$.

Soit $a_j.f.w \in \sigma_{\bar{E}^{(i)}}(\overline{MR}_{<X,i>})$. Alors il existe $<X',i'>$ tel que $a_j.f.w \in \bar{E}^{(i)}_{<X',i'>}$. Si $v \in \sigma_E(w)$, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\tilde{u}_0.<u_1,\ldots,u_q> \in E_{X'}$ tel que $\Pi^{i'}_k.\phi(\tilde{u}_0) = \Pi^{k(\ell-1)+j}_{kq}$ et $u_\ell = f.v$. Mais alors d'après la définition de $\overline{MR}_{<X,i>}$, il existe $\bar{u}$ et V tels que $\Pi^i_k.\phi(\bar{u}) = \Pi^{k(\ell'-1)+i'}_{km}$, $\Pi^{\ell'}_m.V = E_{X'}$ et $\emptyset \neq \bar{u}.V \subset E_X$. Il existe donc dans E_X un élément de la forme $\bar{u}.<v_1,\ldots,\tilde{u}_0.<u_1,\ldots,u_q>,\ldots,v_m>$ qu'on pourra écrire $\bar{\bar{u}}.<v_1,\ldots,u_1,\ldots,u_q,\ldots,v_m>$ et tel que $\Pi^i_k\ \phi(\bar{\bar{u}}) = \Pi^{k(\ell''-1)+j}_{kr}$ et que $\Pi^{\ell''}_r.<v_1,\ldots,u_1,\ldots,u_q,\ldots,v_m> = u_\ell = f.v$.

Soit $a_j.f.w \in \sigma_{\bar{E}^{(i)}}(\overline{CR}_{<X,i>})$. Alors il existe $X'.<X_1,\ldots,X_m> \in CR_X$ tel que $a_j.f.w \in \bar{E}^{(i)}_{<X',i>}.<X_1,\ldots,X_m>$. On en déduit que w peut s'écrire $w'.<X_1,\ldots,X_m>$ avec $a_j.f.w' \in \bar{E}^{(i)}_{<X',i>}$. Si $v \in \sigma_E(w)$ il existe $\tilde{v}.\Theta \in \sigma_E(w')$, $v_1 \in E_{X_{\Theta(1)}},\ldots,v_p \in E_{X_{\Theta(p)}}$ tels que $v = \tilde{v}.<v_1,\ldots,v_p>$. Mais d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $u = \tilde{u}_0.<u_1,\ldots,u_q> \in E_{X'}$, $\ell \leq q$ tels que $\Pi^i_k.\phi(\tilde{u}_0) = \Pi^{k(\ell-1)+j}_{kq}$ et $u_\ell = f.\tilde{v}.\Theta$.

On a alors $u.<E_{X_1},\ldots,E_{X_m}> \subset E_{X'}.<E_{X_1},\ldots,E_{X_m}> \subset E_X$. D'où, comme aucun des E_{X_i} n'est vide, E_X contient un élément de la forme $\tilde{u}_0.<u'_1,\ldots,f.\tilde{v}.<v_1,\ldots,v_p>,\ldots,u'_q> = \tilde{u}_0.<u'_1,\ldots,f.v,\ldots,u'_q>$ ce qui montre que P2 est vérifiée.

cqfd.

Théorème 7.16 *(Théorème de duplication)*

Soit $U \subset T(\Sigma)^1_n$ *et soit* α *un symbole de degré* $k+1$ *ne figurant pas dans* Σ. *Alors l'ensemble* $U' = \{\alpha.\langle u,\ldots,u\rangle \ / \ u \in U\}$ *est k-algébrique linéaire ssi* U *est corégulier.*

Démonstration : Condition suffisante

Soit β un symbole de degré 1 ne figurant pas dans $T(\Sigma)$. Alors d'après la proposition 5.16, $\beta.U$ est encore corégulier. Considérons alors le 1-morphisme ϕ de $T(\Sigma \cup \{\beta\})$ dans $T(\Sigma \cup \{\alpha\})$ défini par

si $f \in \Sigma$, $\phi(f) = f$

$$\phi(\beta) = a.\underbrace{\langle \Pi^1_1,\ldots,\Pi^1_1\rangle}_{k+1 \text{ fois}} = a.\varepsilon_{k+1}.$$

On a bien $\phi(U) = U'$ et comme la classe des coréguliers est fermée par 1-morphisme quelconque (proposition 5.13) U' est encore corégulier. U' est donc algébrique, c'est-à-dire 1-algébrique linéaire, et à fortiori k-algébrique linéaire.

Condition nécessaire

Si U' est k-algébrique linéaire, il existe un alphabet gradué Δ, un ensemble algébrique V de $T(\Delta)^1_n$ et un k-morphisme linéaire ϕ tels que $U'.\Pi^{1\otimes n}_k = \Pi^1_k.\phi(V)$. D'après le lemme 7.15, il existe un alphabet gradué Ω, un ensemble corégulier W de $T(\Omega \cup \Delta \cup \{a_1,\ldots,a_n\})$ et une substitution σ de $T(\Omega)$ dans $T(\Delta)$ tels que $\Pi^1_k.\phi(V) = \bigcup_{a_i.f.w \in W} \Pi^i_k.\phi(f.\sigma(w))$. D'où

$$U'.\Pi_k^{1\otimes n} = \bigcup_{a_i.f.w\in W} \Pi_k^i.\phi(f.\sigma(w)) \qquad (*)$$

Considérons maintenant un 1-morphisme arbitraire ψ de $T(\Omega)$ dans $T(\Delta)$ qui vérifie seulement

$$\forall\ f \in \Omega,\ \psi(f) \in \sigma(f)$$

ce qui est possible puisque d'après le lemme 7.15, $\forall\ f \in \Omega$, $\sigma(f) \neq \emptyset$.
Nous montrons alors que si $a_i.f.w \in W$,
$\Pi_k^i.\phi(f.\sigma(w)) = \Pi_k^i.\phi(f.\psi(w))$.

L'inclusion de $\Pi_k^i.\phi(f.\psi(w))$ dans $\Pi_k^i.\phi(f.\sigma(w))$ est immédiate par définition de ψ.

Pour démontrer l'inclusion inverse, posons $d(f) = p$ et $w = \langle w_1,\ldots,w_p\rangle$. Soit $v = \langle v_1,\ldots,v_p\rangle \in \sigma_E(w)$. On a donc $\forall\ i \in [p]$, $v_i \in \sigma_E(w_i)$. De plus d'après $(*)$, il existe $u' \in U'$ tel que $\Pi_k^i.\phi(f.v) = u'.\Pi_k^{1\otimes n}$, il existe donc $u'' \in U$ tel que $u' = \alpha.\langle u'',\ldots,u''\rangle$, et en posant $u = u''.\Pi_k^{1\otimes n}$, il vient

$$\alpha.\langle u,\ldots,u\rangle = \Pi_k^i.\phi(f.v).$$

Comme ϕ est un k-morphisme linéaire, $\Pi_k^i.\phi(f) = \tilde{t}.\Theta$ où Θ est une injection de $[m]$ dans $[kp]$, et comme $\Pi_k^i.\phi(f) = \tilde{t}.\Theta \notin \Theta$, $\tilde{t}$ est de taille ≥ 1.
$\tilde{t}$ peut donc s'écrire $\alpha.(\tilde{t}_1 \otimes \tilde{t}_2 \otimes \ldots \otimes \tilde{t}_{k+1})$ avec $\tilde{t}_i \in \tilde{T}(\Sigma)^1_{q_i}$. Posons alors $\ell_i = \sum_{j=0}^{i-1} q_i$ et $r_i = \sum_{j=i+1}^{k+1} q_j$ pour $i \in [k+1]$. On a donc pour tout i
$\ell_i+q_i+r_i = m$.

Considérons alors l'application Θ_i de $[q_i]$ dans $[kp]$ définie par
$\Theta_i = (0_{\ell_i} \otimes Idq_i \otimes 0_{r_i}).\Theta$. On montre alors que
$\forall\ i \in [p]\ \exists\ j \in [k+1]$ tel que $\forall\ r \in [k]$, $k(i-1)+r \notin \Theta_j[q_j]$.

En effet, sinon il existerait $i \in [p]$ tel que $\forall\, j \in [k+1]$, $\exists\, r_j \in [k]$ tel que $k(i-1) + r_j \in \Theta_j([q_j])$; et donc sur$[m]$, Θ prendrait $k+1$ fois une valeur de la forme $k(i-1)+rj$. Comme rj ne peut prendre que k valeurs, Θ prendrait donc deux fois la même valeur, ce qui est impossible puisque Θ est une injection.

Choisissons un entier i quelconque dans $[p]$ et considérons $v' = \langle v_1,\ldots,v_{i-1},\psi(w_i), v_i,\ldots,v_p\rangle$ qui appartient encore à $\sigma(w)$ puisque $\psi(w_i) \in \sigma(w_i)$. Pour les mêmes raisons que précédemment, il existe $\bar{u}$ tel que $\alpha.\langle\bar{u},\ldots,\bar{u}\rangle = \tilde{t}.\Theta.\phi(v')$. Soit alors $j \in [k+1]$ tel que $\forall\, r \in [k]$, $k(i-1)+r \in \Theta_j([q_j])$. On a $\alpha.\langle u,\ldots,u\rangle = \alpha.\langle\tilde{t}_1.\Theta_1,\ldots,\tilde{t}_{k+1}.\Theta_{k+1}\rangle.\phi(v)$ et $\alpha.\langle\bar{u},\ldots,\bar{u}\rangle = \alpha.\langle\tilde{t}_1.\Theta_1,\ldots,\tilde{t}_{k+1}.\Theta_{k+1}\rangle.\phi(v')$ et donc $u = \tilde{t}_j.\Theta_j.\phi(v)$ et $\bar{u} = \tilde{t}_j.\Theta_j.\phi(v')$. Mais aucune valeur $k(i-1)+r$ ne figurant dans $\Theta_j([q_j])$, la valeur de $\tilde{t}_j.\Theta_j.\phi(v)$ et de $\tilde{t}_j.\Theta_j.\phi(v')$ ne dépend pas des composantes $k(i-1)+r$ de $\phi(v)$ et de $\phi(v')$, c'est-à-dire de $\phi(v_i)$ et de $\phi(\psi(w_i))$. Comme les autres composantes sont égales, $u = \bar{u}$.

En réitérant ce procédé, on peut remplacer de proche en proche chaque composante v_i par $\psi(w_i)$ et on obtient $\Pi_k^i.\phi(f.v) = \Pi_k^i.\phi(f.\psi(w))$. Le résultat (*) peut donc se réécrire $u \in U'$ ssi il existe $a_i.f.w \in W$ tel que $u.\Pi_k^{1\otimes n} = \Pi_k^i.\phi(f.\psi(w))$.

Etendons ψ de $T(\Omega)$ dans $T(\Delta)$ en un 1-morphisme ψ' de $T(\Omega \cup \Delta \cup \{a_1,\ldots,a_k\})$ dans $T(\Delta \cup \{a_1,\ldots,a_k\})$ en le définissant comme étant l'identité sur Δ et $\{a_1,\ldots,a_k\}$. On a donc $\psi'(a_i.f.w) = a_i.f.\psi(w)$. Etendons aussi le k-morphisme linéaire ϕ de $T(\Delta)$ dans $T(\Sigma)$ en un k-morphisme linéaire ϕ' de $T(\Delta \cup \{a_1,\ldots,a_k\})$ dans $T(\Sigma)$ par $\phi'(a_i)$ est la permutation qui échange i et 1. On a donc $\Pi_k^1.\phi'(\psi'(a_i.f.w)) = \Pi_k^1.\phi'(a_i.f.\psi(w)) = \Pi_k^i.\phi(f.\psi(w))$

d'où $U'.\Pi_k^{1\otimes n} = \bigcup_{a_i.f.w\in W} \Pi_k^i.\phi(f.\psi(w)) = \Pi_k^1.\phi'(\psi'(W))$.

Enfin, puisque W est corégulier, $\psi'(W)$ est corégulier. D'après la caractérisation des ensembles coréguliers (proposition 5.9 et théorème 5.10), il existe un alphabet gradué monadique et un ensemble reconnaissable L, ainsi qu'un k'-morphisme ρ tels que

$$\psi'(W) \otimes 0_{k'-n} = \Pi^1_{k'}.\rho(L) \text{ et donc}$$

$$\Pi^1_k.\phi'(\psi'(W)) \otimes 0_{k(k'-n)} = \Pi^1_{k.k'}\ \phi'(\rho(L)).$$

$\Pi^1_k.\phi'(\psi'(W)) \otimes 0_{k(k'-n)}$ est encore corégulier, ainsi que

$$\Pi^1_k.\phi'(\psi'(W)) = \Pi^1_k.\phi'(\psi'(W)) \otimes 0_{k.(k'-n)}.<\Pi^1_{kn},\ldots,\Pi^{kn}_{kn},\Pi^1_{kn},\ldots,\Pi^1_{kn}>$$

d'où $U'.\Pi^{1\otimes n}_k$ est un ensemble corégulier ainsi que $U'.\Pi^{1\otimes n}_k.\varepsilon^{\otimes n}_k$ où $\varepsilon^{\otimes n}_k$ est défini par

$$\varepsilon^{\otimes 0}_k = 0_0$$

$$\varepsilon^{\otimes 1}_k = \varepsilon_k \text{ l'unique application de } [k] \text{ dans } [1]$$

$$\varepsilon^{\otimes n+1}_k = \varepsilon_k \otimes \varepsilon^{\otimes n}_k.$$

Comme $\Pi^1_k.\varepsilon_k = Id_1$, $\Pi^{1\otimes n}_k.\varepsilon^{\otimes n}_k = Id_n$ et donc $U' = U'.\Pi^{1\otimes n}_k.\varepsilon^{\otimes n}_k$, d'où U' est corégulier.

On considère enfin le 1-morphisme de $T(\Sigma)$ dans $T(\Sigma)$ défini par

$$\mu(f) = \begin{cases} \Pi^1_{k+1} \text{ si } f = \alpha \\ f \text{ sinon} \end{cases}$$

On a bien $\mu(\alpha.<u,\ldots,u>) = u$ et donc $U = \mu(U')$. U est donc bien corégulier.

cqfd.

Soit b un symbole de degré 2. Nous avons montré que l'ensemble reconnaissable $T(b)_1^1$ n'était pas corégulier (proposition 5.18). Donc d'après le théorème de duplication $U = \{\alpha.\underbrace{<u,\ldots,u>}_{k+1} \ / \ u \in T(b)_1^1\}$ n'est pas k-algébrique linéaire.

Mais U est l'image de l'ensemble reconnaissable $\beta.T(b)_1^1$ par le 1-morphisme

$$\beta \to \alpha.<\Pi_1^1,\ldots,\Pi_1^1>$$
$$b \to b$$

U est donc un ensemble 1-rationnel.

D'autre part considérons le k+1-morphisme linéaire ϕ défini par

$\beta \to <\alpha, \# \otimes 0_{k+1},\ldots, \# \otimes 0_{k+1}>$ où # est un nouveau symbole 0-aire,

$b \to <b.<\Pi_{2k+2}^1,\Pi_{2k+\ell}^{k+\ell}>, b.<\Pi_{2k+2}^2,\Pi_{2k+2}^{k+3}>,\ldots,$

$b.<\Pi_{2k+2}^i,\Pi_{2k+2}^{k+i+1}>,\ldots, b.<\Pi_{2k+2}^{k+1},\Pi_{2k+2}^{2k+2}> >$

On montre alors aisément par récurrence que si $\tilde{u} \in \tilde{T}(b)_n^1$, $\phi(\tilde{u}) =$

$<\tilde{u}.<\Pi_{kn+n}^1,\Pi_{kn+n}^{k+2},\ldots,\Pi_{kn+n}^{(k+1)(n-1)+1}>,\ldots,\tilde{u}.<\Pi_{kn+n}^i,\ldots,\Pi_{kn+n}^{(k+1)(n-1)+i}>,\ldots$

$\ldots,\tilde{u}.<\Pi_{kn+n}^n,\ldots,\Pi_{kn+n}^{kn+n}> >$ et donc si $u \in T(b)_1^1$, $\phi(u) = u \otimes u \ldots \otimes u$.

On considère alors un nouveau symbole a de degré k+1 sur lequel on définit ϕ, encore linéaire par $\phi(a) = <\Pi_{(k+1)^2}^1,\Pi_{(k+1)^2}^{k+2},\ldots,\Pi_{(k+1)^2}^{(k+1)(i-1)+1},\ldots$

$\ldots, \Pi_{(k+1)^2}^{k(k+1)+1}>$ d'où $\phi(a.<\Pi_1^1,\ldots,\Pi_1^1>) = <\Pi_{k+1}^1,\ldots,\Pi_{k+1}^1>$.

Donc si $u \in T(b)_1^1$, $\phi(u.a.<\Pi_1^1,\ldots,\Pi_1^1>) =$

$<u.\Pi_{k+1}^1,\ldots,u.\Pi_{k+1}^1> = <u,\ldots,u>.\Pi_{k+1}^1$ et donc si V est l'ensemble reconnaissable $\beta.T(b)_1^1.a.<\Pi_1^1,\ldots,\Pi_1^1>$, $\Pi_{k+1}^1.\phi(V) = \{\alpha.<u,\ldots,u>.\Pi_{k+1}^1 \ / \ u \in T(b)_1^1\} =$

$\{\alpha.<u,\ldots,u> \ / \ u \in T(b)_1^1\}.\Pi_{k+1}^1 = U.\Pi_{k+1}^1$. Il en résulte que U est k+1-rationnel

linéaire.

L'existence de cet ensemble U qui est à la fois 1-rationnel et k+1-rationnel linéaire mais pas k-algébrique linéaire permet donc de montrer :

Proposition 7.17

. *Les classes* k-alg-lin *et* k-rat-lin *ne sont pas fermées par 1-morphisme non linéaire*

. k-alg-lin $\subsetneq$ k+1-alg-lin

. k-rat-lin $\subsetneq$ k+1-rat-lin.

. k-alg-lin $\subsetneq$ k-alg

. k-rat-lin $\subsetneq$ k-rat

Démonstration : Si k-alg-lin = k+1-alg-lin alors k+1-rat-lin $\subset$ k+1-alg-lin = k-alg-lin, ce qui n'est pas possible puisque U $\in$ k+1-rat-lin et U $\notin$ k-alg-lin.

De la même façon, si k-rat-lin = k+1-rat-lin alors k+1-rat-lin $\subset$ k-alg-lin ce qui est impossible.

Si k-alg-lin est fermée par 1-morphisme non linéaire, alors comme rat = 1-rat-lin est inclus dans 1-alg-lin $\subset$ k-alg-lin et que 1-rat est la clôture de rat par 1-morphisme, on obtient 1-rat $\subset$ k-alg-lin ce qui est impossible. De même si k-rat-lin est fermée par 1-morphisme l'inclusion de rat = 1-rat-lin dans k-rat-lin entraîne celle de 1-rat dans k-rat-lin et donc dans k-alg-lin ; ce qui est impossible.

Si alors k-alg-lin (resp. k-rat-lin) était égale à k-alg (resp. k-rat) elle serait fermée par 1-morphisme ; ce qui n'est pas possible.

cqfd.

Toutefois, il se pourrait que l'image par un 1-morphisme d'un ensemble k-algébrique linéaire (resp. k-rationnel linéaire) soit k'-algébrique linéaire ou k'-rationnel linéaire.

Il paraît très vraisemblable que ce n'est pas le cas et que les classes Rat-lin et Alg-lin ne sont pas fermées par 1-morphisme non linéaire. Toutefois nous ne sommes pas en mesure d'en donner une démonstration complète :

Soient β un symbole unaire, b et $\bar{b}$ deux symboles binaires et soit l'ensemble rationnel $U = \{\beta^n.u \ / \ n > 0, \ u \in T(\bar{b})^1_1\}$.
Soit $U' = \{B_n.\langle u,\ldots,u\rangle \ / \ n > 0 \text{ et } u \in T(\bar{b})^1_1\}$ l'image de U par le 1-morphisme non linéaire

$$\beta \to b.\langle \Pi^1_1, \Pi^1_1 \rangle$$

$$\bar{b} \to \bar{b}.$$

Comme $U \in$ Rat-lin $\subset$ Alg-lin, si l'une des deux classes était fermée par 1-morphisme, on aurait $U' \in$ Alg-lin. Il existerait donc un entier k tel que U' soit k-algébrique linéaire. Mais comme k-alg-lin est fermée par intersection avec un reconnaissable, $U'' = \{B_k.\langle u,\ldots,u\rangle \ / \ u \in T(\bar{b})^1_1\}$ serait aussi k-algébrique linéaire.

Etant donné que $B_k \in \tilde{T}(b)^1_{2^k}$ et que $2^k \geq k+1$, nous conjecturons, par analogie avec le théorème de duplication, que si U" est k-algébrique linéaire, alors $T(\bar{b})^1_1$ est corégulier, ce qui est manifestement contradictoire.

Le point qui fait que la démonstration de cette conjecture ne saurait être exactement calquée sur celle du théorème de duplication est le suivant :

écrivons $U''.\Pi_k^1 = \Pi_k^1.\phi(V) = \bigcup_{a_i.f.w\in W} \Pi_k^i.\phi(f.\sigma(w))$.

Pour le théorème de duplication on avait $\Pi_k^i.\phi(f) = c.<\tilde{u}_1\Theta_1,\ldots,\tilde{u}_k.\Theta_k>$, mais ici on n'a pas nécessairement $\Pi_k^i.\phi(f) = B_k.<\tilde{u}_1\Theta_1,\ldots,\tilde{u}_{2^k}\Theta_{2^n}>$. La difficulté réside alors dans la construction d'un ensemble corégulier W' dont les éléments sont de la forme $a_i.v.w$ avec $v \in T(\Delta)$ et $w \in T(\Omega)$ tel que

1) $\Pi_k^i.\phi(v) = \tilde{u}.\Theta$ où $\tilde{u} \in T(b,\bar{b})_r^1$ avec $r > k$

2) $\bigcup_{a_i.v.w\in W'} a_i.v.\sigma(w) = \bigcup_{a_i.f.w\in W} a_i.f.\sigma(w)$.

Nous allons maintenant obtenir un résultat plus fort que celui obtenu précédemment et montrer qu'il existe un ensemble k+1-rationnel linéaire qui n'est pas k-algébrique (et pas seulement k-algébrique linéaire).

Soit $\Delta = \{d_1,\ldots,d_{k+1}\}$ un alphabet gradué dont chaque symbole est de degré 1. Soient β un symbole unaire, b un symbole binaire, d un symbole unaire, c et g deux symboles k+1-aire et # un symbole 0-aire. On considère l'ensemble rationnel :

$$V = \{\beta.u.v.g.<\Pi_1^1,\ldots,\Pi_1^1> \ / \ u \in T(\Delta)_1^1,\ v \in T(b)_1^1\}$$

et le k+1 morphisme linéaire ϕ défini par

$$\phi(\beta) = <c,\ \# \otimes 0_{k+1},\ldots,\ \# \otimes 0_{k+1}>$$

$$\phi(d_1) = d \otimes Id_k$$

$$\phi(d_2) = Id_1 \otimes d \otimes Id_{k-1}$$

$$\vdots$$

$$\phi(d_{k+1}) = Id_k \otimes d$$

$$\phi(b) = <b.<\Pi_{2k+2}^1,\Pi_{2k+2}^{k+2}>,\ldots,b.<\Pi_{2k+2}^{k+1},\Pi_{2k+2}^{2k+2}>$$

$$\phi(g) = \langle \Pi^1_{(k+1)^2}, \Pi^{k+2}_{(k+1)^2}, \ldots, \Pi^{(k+1)(i-1)+1}_{(k+1)^2}, \ldots, \Pi^{k(k+1)+1}_{(k+1)^2} \rangle.$$

Comme précédemment si $u \in T(b)^1_1$,

$\phi(u.g.\langle \Pi^1_1, \ldots, \Pi^1_1 \rangle) = \langle u.\Pi^1_{k+1}, \ldots, u.\Pi^1_{k+1} \rangle = \langle u, \ldots, u \rangle . \Pi^1_{k+1}$.

Si $u = d_1^{n_1} d_2^{n_2} \ldots d_{k+1}^{n_{k+1}}$ alors

$\phi(u) = d^{n_1} \otimes d^{n_2} \otimes \ldots \otimes d^{n_{k+1}}$, d'où

$\phi(T(\Delta)^1_1) = \{d^{n_1} \otimes d^{n_2} \otimes \ldots \otimes d^{n_{k+1}} \ / \ n_1, n_2, \ldots, n_{k+1} \geq 0\}$

d'où $\Pi^1_{k+1}.\phi(V) = \{c.\langle d^{n_1}.u, \ldots, d^{n_{k+1}}.u \rangle \ / \ n_1, \ldots, n_{k+1} \geq 0,\ u \in T(b)^1_1\}.\Pi^1_{k+1}$. On en déduit que $U = \{c\langle d^{n_1}.u, \ldots, d^{n_{k+1}}.u \rangle \ / \ n_1, \ldots, n_{k+1} \geq 0,\ u \in T(b)^1_1\}$ est un ensemble k+1-rationnel.

Supposons que U soit k-algébrique. Il existe donc un ensemble algébrique V' et un k-morphisme ψ tels que $U.\Pi^1_k = \Pi^1_k.\psi(V')$ et d'après le lemme 7.15 il existe un corégulier W et une substitution σ tels que

$$U.\Pi^1_k = \Pi^1_k.\psi(V') = \bigcup_{a_i.f.w \in W} \Pi^i_k.\psi(f.\sigma(w)).$$

Considérons les deux ensembles :

$$W_1 = \{a_i.f.w \in W \ / \ \Pi^i_k.\psi(f) = c.(d^{n_1} \otimes \ldots \otimes d^{n_{k+1}}).\Theta \text{ où } \Theta \text{ est injectif}\}$$

$$W_2 = \{a_i.f.w \in W \ / \ \Pi^i_k.\psi(f) = c.(d^{n_1} \otimes \ldots \otimes d^{n_{k+1}}).\Theta \text{ où } \Theta \text{ n'est pas injectif}\}.$$

Ces deux ensembles peuvent être obtenus en intersectant W avec des ensembles reconnaissables ; ils sont donc coréguliers. On considère aussi un entier p tel que $\forall\ i \leq k$, $\forall\ f$, si

$\Pi^i_k.\psi(f) = c.\langle d^{n_1}.u_1, \ldots, d^{n_{k+1}}.u_{k+1} \rangle$ avec $\forall\ j \leq k+1$,

$u_j \in T(b)$, alors $\forall\ j \leq k+1$, $n_j < p$. On définit alors l'ensemble $U' = \{c.\langle d^p.u, d^{2p}.u, \ldots, d^{(k+1)p}.u\rangle \ /\ u \in T(b)_1^1\}$ inclus dans U.

Soit alors $t = c.\langle d^p.u, \ldots, d^{(k+1)p}, u\rangle \in U' \subset U$; il existe donc $a_i.f.w \in W$, $v \in \sigma(w)$ tels que
$t.\Pi_k^1 = \Pi_k^i.\psi(f).\psi(v) = c.\langle d^{n_1}.u_1, \ldots, d^{n_{k+1}}.u_{k+1}\rangle.\psi(v)$ ou $\forall\ j \leq k+1$, $u_j \in T(b)$. On a alors $n_j < p$ pour tout $j \leq k+1$ et donc $u_j.\psi(v) = d^{p.i-n_j}.u.\Pi_k^1$ avec $p.i-n_j > 0$. Comme $u_j \in T(b)$, $u_j \in \Theta$. D'où $\Pi_k^i.\psi(f) = c.(d^{n_1} \otimes d^{n_2} \otimes \ldots \otimes d^{n_{k+1}}).\Theta$ et donc $a_i.f.w \in W_1 \cup W_2$. Supposons que Θ ne soit pas injectif ; il existe donc $i < j$ tels que $\Theta(i) = \Theta(j)$; et on a

$$d^{p.i}.u.\Pi_k^1 = d^{n_i}.\Pi_k^i.\Theta.\psi(v) = d^{n_i}.d^m.u.\Pi_k^1$$

$$d^{p.j}.u.\Pi_k^1 = d^{n_j}.\Pi_k^j.\Theta.\psi(v) = d^{n_j}.d^m.u.\Pi_k^1$$

d'où $p(j-i) = n_j - n_i$. Comme $i < j$, $p(j-i) \geq p$ et comme $n_j < p$, on obtient $p \leq p(j-i) = n_j - n_i \leq n_j < p$ ce qui est contradictoire. La torsion Θ est donc une injection et donc $a_i.f.w \in W_1$. On en déduit que

$$U'.\Pi_k^1 \subset \bigcup_{a_i.f.w \in W_1} \Pi_k^i.\psi(f.\sigma(w)) \subset \bigcup_{a_i.f.w \in W} \Pi_k^i.\psi(f.\sigma(w)) = U.\Pi_k^1$$

Considérons le démarquage μ défini par

$$\mu(c) = c$$

$$\mu(b) = b$$

$$\mu(d) = \Pi_1^1$$

On a alors $\mu(U'.\Pi_k^1) \subset \bigcup_{a_i.f.w \in W_1} \Pi_k^i.\mu(\psi(f.\sigma(w)) \subset \mu(U.\Pi_k^1)$. Or $\psi' = \mu \circ \psi$ est encore un k-morphisme et $\mu(U') = \mu(U) = \{c\langle u, \ldots, u\rangle \ /\ u \in T(b)_1^1\} = U''$

d'où $U''.\Pi_k^1 = \bigcup_{a_i.f.w \in W_1} \Pi_k^i.\psi'(f.\sigma(w))$ et où $\Pi_k^i.\psi'(f) = c.\Theta$ où Θ est une injection. On démontre alors de la même façon que dans la démonstration du théorème de duplication qu'on peut remplacer la substitution σ par un 1-morphisme et donc que U" est corégulier et donc que $T(b)_1^1$ est aussi corégulier, ce qui est impossible. On en déduit que U ne peut pas être k-algébrique.

Proposition 7.18 *La classe* k-alg *(resp.* k-rat*) est strictement incluse dans la classe* k+1-alg *(resp.* k+1-rat*).*

Démonstration : Si k+1-alg = k-alg, alors k+1-rat-lin $\subset$ k+1-alg = k-alg et si k+1-rat = k-rat, k+1-rat-lin $\subset$ k+1-rat = k-rat $\subset$ k-alg. Dans les deux cas on a une contradiction puisque on vient de montrer qu'il existe un ensemble k+1-rationnel linéaire qui n'est pas k-algébrique.

cqfd.

Lemme 7.19 *Sur un alphabet monadique Σ tout ensemble k-algébrique (resp. k-rationnel) de $T(\Sigma)_1^1$ est algébrique (resp. rationnel).*

Démonstration : Nous faisons la démonstration dans le cas algébrique ; elle est la même dans le cas rationnel.

Soient Σ un sous-alphabet gradué monadique d'un alphabet gradué $\bar{\Sigma}$ et U un ensemble k-algébrique inclus dans $T(\Sigma)_1^1$. Il existe donc un alphabet gradué Δ, un ensemble algébrique de $T(\Delta)_1^1$ et un k-morphisme ϕ tels que $U.\Pi_k^1 = \Pi_k^1.\phi(V)$. On considère alors le nouvel alphabet gradué $\bar{\Delta} = \{(f;i;i_1,\ldots,i_{d(f)}) \ / \ f \in \Delta,\ i,\ i_1,\ldots,i_{d(f)} \in [k]\}$ et l'ensemble reconnaissable K de $T(\bar{\Delta})_1^1$, reconnu par l'automate

$\langle Q,\rho,s,S\rangle$ où $Q = [k] \cup \{0\}$ et ρ est défini par

. $\rho(f;i;i_1,\ldots,i_{d(f)})\ (i_1,\ldots,i_{d(f)}) = i$
et 0 dans les autres cas

. $s(1,1) = S(1,1) = 1$

ainsi que le démarquage μ de $T(\bar{\Delta})$ dans $T(\Delta)$ défini par
$\mu(f;i;i_1,\ldots,i_{d(f)}) = f$.

On considère alors la 1-substitution linéaire σ définie par
$\sigma(f;i;i_1,\ldots,i_{d(f)}) = u.\Pi^{\ell}_{d(f)}$ si $u \in T(\Sigma)^1_1$ et $\Pi^i_k.\phi(f) = u.\Pi^{k(\ell-1)+i}_{k.d(f)}$.

On en déduit que si $v \in K$,
$\sigma(v) = u$ si $u \in T(\Sigma)^1_1$ et $\Pi^1_K.\phi(\mu(u)) = u.\Pi^1_k$
$\emptyset$ sinon

d'où $\sigma(\mu^{-1}(V) \cap K) = \{u \in T(\Sigma)^1_1 \ / \ \exists\ v \in V$ t.q. $\Pi^1_k.\phi(v) = u.\Pi^1_k\} = U$.

Comme la classe des ensembles algébriques est fermée par démarquage inverse, intersection avec un reconnaissable et 1-substitution linéaire, U est un ensemble algébrique.

cqfd.

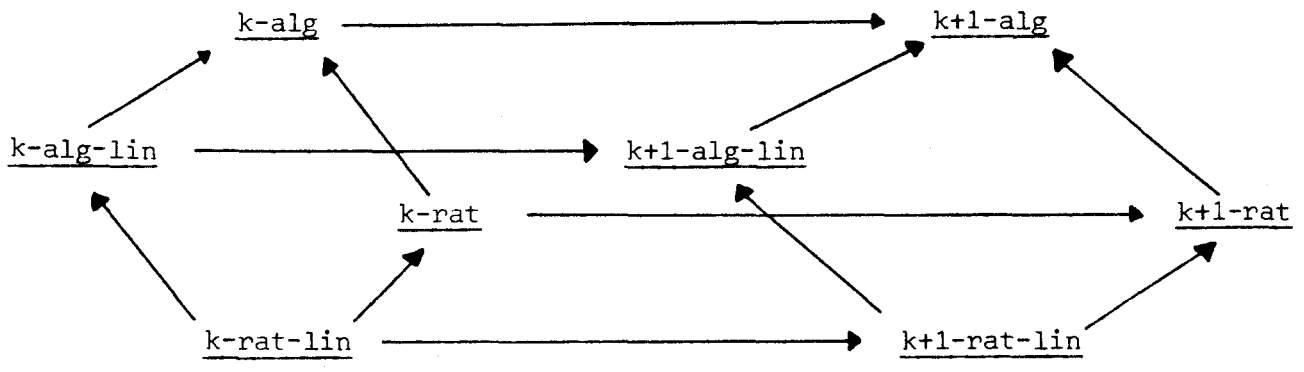
Proposition 7.20 $\quad$ k-rat-lin $\subsetneq$ k-alg-lin

k-rat $\subsetneq$ k-alg.

Démonstration : Soit a^nb^n qui est algébrique donc k-algébrique et k-algébrique linéaire. Si les inclusions ci-dessus n'étaient pas strictes, a^nb^n serait aussi k-rationnel linéaire ou k-rationnel et donc rationnel d'après le lemme 7.19, ce qui est impossible.

cqfd.

On peut donc résumer les résultats des propositions 7.17, 7,18 et 7.20 par la figure suivante, où les flèches représentent des inclusions strictes.



4. RETOUR SUR LES MORPHISMES INVERSES

Nous avons vu (théorème 7.14) que les classes Alg-lin et Rat-lin étaient fermées par 1-morphisme linéaire inverse. Nous allons d'abord examiner le cas des 1-morphismes non linéaires inverses ; puis nous montrerons que le résultat du théorème 7.14 est "global" c'est-à-dire $\forall\ k \geq 1$ il existe un ensemble algébrique U et un 1-morphisme linéaire ϕ tels que $\phi^{-1}(U)$ n'est pas k-algébrique d'où en particulier le résultat déjà annoncé et démontré dans [12] que alg n'est pas fermée par 1-morphisme linéaire inverse.

Soient les alphabets $\Sigma = \{a,b,c,e,\#\}$ et $\Delta = \{a,b,c,\bar{e},\#\}$ avec avec $d(e) = 2$, $d(a) = d(b) = d(c) = d(\bar{e}) = 1$ et $d(\#) = 0$.

Considérons l'ensemble algébrique
$U = \{d(a^n b^n c^m\ \#,\ a^p b^q c^q\ \#)\ /\ m,n,p,q \geq 0\}$ composante en X de la solution de

BUS LILLE

$$\begin{cases} X_1 = a.X_1.b + Id_1 \\ X_2 = c.X_2 + Id_1 \\ X_3 = a.X_3 + Id_1 \\ X_4 = b.X_4.c + Id_1 \\ X = d.\langle X_1.X_2.\#,\ X_3.X_4.\#\rangle \end{cases}$$

et le 1-morphisme non linéaire ϕ défini par

$$\phi(\bar{e}) = e.\langle \Pi_1^1, \Pi_1^1 \rangle$$

$$\phi(a) = a\ ;\ \phi(b) = b\ ;\ \phi(c) = c\ ;\ \phi(\#) = \#.$$

Or comme $\phi(\bar{e}\ a^{n_1}\ b^{n_2}\ c^{n_3}\ \#) = e(a^{n_1}\ b^{n_2}\ c^{n_3}\ \#,\ a^{n_1}\ b^{n_2}\ c^{n_3}\#)$,

$\bar{e}\ a^{n_1}\ b^{n_2}\ c^{n_3}\ \# \in \phi^{-1}(U)$ ssi $n_1 = n_2$ et $n_2 = n_3$ et donc $\phi^{-1}(U) = \bar{e}\ a^n b^n c^n$

qui ne peut pas être k-algébrique d'après le lemme 7.19.

D'autre part comme $\phi(u) = \Pi_2^1.\psi(u)$ où ψ est le 2-morphisme linéaire

$$\psi(\bar{e}) = \langle e, \# \otimes 0_2 \rangle$$
$$\psi(a) = a \otimes a$$
$$\psi(b) = b \otimes b$$
$$\psi(c) = c \otimes c$$
$$\psi(\#) = \# \otimes \#$$

on a aussi le résultat suivant : toute composante de l'image d'un ensemble algébrique par un k-morphisme linéaire inverse n'est pas forcément k'-algébrique.

Considérons enfin l'ensemble reconnaissable
$K = \{\bar{e}\ \bar{a}^m\ a^n\ \bar{b}^p\ c^q\ \# / \ m,n,p,q \geq 0\}$

et le 2-morphisme linéaire ρ défini par

$$\rho(\bar{e}) = \langle e, \# \otimes 0_2 \rangle$$
$$\rho(\bar{a}) = Id_1 \otimes a$$
$$\rho(a) = a \otimes b$$
$$\rho(\bar{b}) = b \otimes c$$
$$\rho(c) = c \otimes Id_1$$
$$\rho(\#) = \# \otimes \#$$

Alors $U' = \Pi_2^1.\rho(K) = \{e.\langle a^n\ b^p\ c^q\ \#,\ a^m\ b^n\ c^p\ \# \rangle / \ m,n,p,q \geq 0\}$ est 2-rationnel linéaire ; et on a encore
$\phi^{-1}(U) = \{\bar{e}.a^n.b^n.c^n.\ \# \ / \ n \geq 0\}$.

On obtient donc :

Proposition 7.21 *La clôture de* alg *et de* 2-rat-lin *par 1-morphisme non linéaire inverse n'est pas incluse dans* Alg.

Par contre 1-rat-lin = rat est bien fermée par 1-morphisme inverse puisque les ensembles rationnels d'un magmoïde projetable libre s'identifient aux ensembles reconnaissables.

Nous allons maintenant généraliser les constructions faites dans l'exemple 7.7. Soit un entier $k \geq 1$ fixé et considérons l'alphabet gradué $\Delta = \{b,c,a,\#\}$ où $d(b) = k+1$, $d(c) = k+2$, $d(a) = 1$, $d(\#) = 0$, et l'alphabet gradué $\Sigma = \{b,b_1,b_2,a,\#\}$ avec $d(b_1) = 2$ et $d(b_2) = k$.

Soit le 1-morphisme linéaire ϕ de $T(\Delta)$ dans $T(\Sigma)$ défini par

$$\phi(b) = b$$
$$\phi(c) = b_1.(b_2 \otimes Id_1)$$
$$\phi(a) = a$$
$$\phi(\#) = \#$$

On définit

$$B_0 = Id_1$$
$$B_1 = b$$
$$B_2 = b.\underbrace{(b \otimes \ldots \otimes b)}_{k+1} \in T(b)^1_{(k+1)^2}$$
$$\vdots$$
$$B_{p+1} = b.\underbrace{(B_p \otimes \ldots \otimes B_p)}_{k+1} \in T(b)^1_{(k+1)^{p+1}}$$

et $A_n = \{b_1.\langle b_2.\langle a^m\#,\ldots,a^m\#\rangle, a^n\#\rangle \ / \ 0 \leq m \leq n\}$,

$A'_n = \{c.\langle a^m\#,\ldots,a^m\#\rangle \ / \ 0 \leq m \leq n\}$,

$F_{p,n} = \{B_p.\langle u_1,\ldots,u_r\rangle \ / \ r = (k+1)^p,\ u_i \in A_n\}$,

$F'_{p,n} = \{B_p.\langle u_1,\ldots,u_r\rangle \ / \ r = (k+1)^p,\ u_i \in A'_n\}$,

$F = \bigcup_{p\geq 1, n\geq 0} F_{p,n}$; $F' = \bigcup_{p\geq 1, n\geq 0} F'_{p,n}$

Pour les mêmes raisons que dans l'exemple 7.7, F est un ensemble algébrique et $F' = \phi^{-1}(F)$ - remarquons que les ensembles F et F' construits dans l'exemple 7.7 correspondent au cas où $k = 1$ -.

Nous allons donc démontrer :

<u>*Lemme 7.22*</u> *L'ensemble F' ci-dessus n'est pas k-algébrique linéaire.*

d'où on déduira immédiatement puisque F est algébrique, donc k-algébrique linéaire :

<u>*Théorème 7.23*</u> *Aucune des classes* <u>k-alg-lin</u>*, et en particulier la classe* <u>1-alg-lin</u> = <u>alg</u> *des ensembles algébriques n'est fermée par 1-morphisme linéaire inverse.*

<u>Démonstration du lemme 7.22</u> : Supposons que F' soit k-algébrique linéaire. Il existe donc un alphabet gradué Γ, un ensemble algébrique V de $T(\Gamma)_0^1$, et un k-morphisme linéaire ψ de $T(\Gamma)$ dans $T(\Delta)$ tels que $F' = \Pi_k^1.\psi(V)$. Il existe aussi d'après le lemme 7.15 un alphabet gradué Ω, un ensemble corégulier W de $T(\Gamma \cup \Omega \cup \{a_1,\ldots,a_k\})_0^1$ et une substitution σ de $T(\Omega)$ dans $P(T(\Gamma))$ tels que $\Pi_k^1.\psi(V) = \bigcup_{a_i.f.w} \Pi_k^i.\psi(f.\sigma(w))$. D'autre part, comme W est corégulier, il existe d'après la proposition 5.12 un alphabet gradué monadique X, un ensemble reconnaissable L de $T(X)_0^1$ et un k'-morphisme ρ de $T(X)$ dans $T(\Gamma \cup \Omega \cup \{a_1,\ldots,a_k\})$ tels que $W = \Pi_{k'}^1.\rho(L)$. De plus, étant donné la construction du système corégulier qui fournit W dans la démonstration du théorème 7.15, ainsi que la construction de ρ et L dans la démonstration de la proposition 5.12, on peut supposer que si $x.s \in L$, où $x \in X$ et si $\Pi_{k''}^1.\rho(x.s) = a_i.f.w$, alors $\Pi_{k'}^1.\rho(x) = a_i.f.\Theta$. Comme L est reconnaissable,

il existe un entier q_0 tel que $\forall$ mm' $\in$ L si longueur de (m') $\geq q_0$, il existe m" tel que longueur (m") $< q_0$ et m.m" $\in$ L.

Définissons maintenant la profondeur d'un élément $u \in T(\Delta)$:

si $u \in \Theta$, prof (u) = 0

si $u \in \Delta$, prof (u) = 1

si $u = f.\langle u_1,\ldots,u_p\rangle$ avec $f \in \Delta_p$

alors prof (u) = 1 + sup (prof $(u_1),\ldots,$prof(u_p)).

On démontre alors aisément par récurrence sur la taille de u que prof (u.v) $\leq$ prof (u) + prof (v).

On considère l'ensemble

$\bar{X} = \{(x,i) \in X \times [k.k'] \ / \ \Pi^i_{k.k'}.\psi(\sigma(\rho(x)))\}$ est un ensemble fini$\}$.

Si $(x,i) \in \bar{X}$ on peut définir

$h_{(x,i)} = \sup \{\text{prof } (u) \ / \ u \in \Pi^i_{k.k'}.\psi(\sigma(\rho(x)))\}$

et $h \quad = \sup \{h_{(x,i)} \ / \ (x,i) \in \bar{X}\}$.

De cette définition, nous allons déduire par récurrence sur la longueur de s que

$$* \quad \left[\begin{array}{l} \forall\ s \in T(X)^1_0,\ \text{si } E = \Theta.\psi(\sigma(\rho(s))) \text{ est un ensemble fini, alors} \\ \forall\ u \in E \ \text{prof } (u) \leq h \times \text{longueur } (s). \end{array}\right]$$

Dans le cas où $s \in X_0$, toute composante de E est finie ; le résultat découle alors de la définition de h.

Montrons ensuite que

$$** \quad \left[\begin{array}{l} \text{Si } s = s_1.s_2 \text{ et si } \Theta.\psi(\sigma(\rho(s))) \text{ est fini, alors } \Theta.\psi(\sigma(\rho(s_1))) \\ \text{est fini.} \end{array}\right]$$

En effet $\sigma(\rho(s)) = \sigma(\rho(s_1)).\sigma(\rho(s_2)) = \bigcup_{\tilde{u}.\Theta'\in\sigma(\rho(s_1))} \tilde{u}.\Theta'.\sigma(\rho(s_2))$

d'où $\Theta.\psi(\sigma(\rho(s)) = \bigcup_{\tilde{u}.\Theta'\in\sigma(\rho(s_1))} \Theta.\psi(\tilde{u}.\Theta').\psi(\sigma(\rho(s_2)) =$

$\bigcup_{v\in\Theta.\psi(\sigma(\rho(s_1))} v.\psi(\sigma(\rho(s_2)).$

Or comme σ est une substitution non vide, $v.\psi(\sigma(\rho(s_2))$ n'est pas vide ; donc pour que $\Theta.\psi(\sigma(\rho(s)))$ soit fini, il faut nécessairement que $\Theta.\psi(\sigma(\rho(s_1)))$. D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que si $v \in \Theta.\psi(\sigma(\rho(s_1))$, alors prof $(v) \leq h \times$ longueur (s_1).

De plus il faut aussi que chacun des $v.\psi(\sigma(\rho(s_2))$ soit fini ; or comme $v = \tilde{v}.\Theta'$, ceci implique que $\Theta'.\psi(\sigma(\rho(s_2))$ soit fini et donc si $u \in \Theta'.\psi(\sigma(\rho(s_2))$, prof $(u) \leq h \times$ longueur (s_2) et comme tout élément w de $v.\psi(\sigma(\rho(s_2))$ est de la forme $\tilde{v}.u$, on a prof $(w) \leq$ prof $(\tilde{v})$ + prof (u) = prof (v) + prof $(u) \leq h.$longueur (s_1) + $h.$longueur (s_2) = $h.$longueur (s).

Considérons alors un entier r tel que, en posant $m = (k+1)^r$,

- $m > (q_0+1) \times h \times k \times k'$
- $\forall\ x_0.s \in L$ tel que $\Pi^1_{k'}.\rho(x_0) = a_i.f.\Theta$ et $\Pi^i_k.\psi(f) = \tilde{u}_0.\bar{\Theta}_0$,

alors prof $(\tilde{u}_0) < r$

On considère alors l'élément u de $F'_{r,m} \subset F'$ défini par $u = B_r.\langle u_1,\ldots,u_m\rangle$ où pour $j \leq m$, $u_j = c.\langle a^j\#,\ldots,a^j\#,a^m.\#\rangle$.

Il existe donc $s = x_0.s' \in L$ avec $\Pi^1_{k'}.\rho(x_0) = a_{i_0}.f.\Theta_0$ et $\Pi^{i_0}_k.\psi(f) = u_0.\bar{\Theta}_0$ où $\bar{\Theta}_0$ est une injection puisque ψ est linéaire et il existe $v \in \sigma(\Theta_0.\rho(s'))$ tels que $u = \tilde{u}_0.\bar{\Theta}_0.\psi(v)$.

Ecrivons maintenant s sous la forme $x_0.s'_1.s_2$; il existe donc $\tilde{v}'_1.\Theta'_1 \in \sigma(\Theta_0.\rho(s'_1))$, $v_2 \in \sigma(\Theta'_1.\rho(s_2))$ tels que $v = \tilde{v}'_1.v_2$.

Posons alors $\bar{\Theta}_0.\psi(\tilde{v}'_1) = \tilde{u}'_1.\Theta'_1$ d'où
$\tilde{u}_0.\bar{\Theta}_0.\psi(\tilde{v}'_1) = \tilde{u}_0\tilde{u}'_1.\bar{\Theta}'_1 = \Pi_k^{i_0}.\psi(f.\tilde{v}'_1)$ et donc $\bar{\Theta}'_1$ est une injection.

Considérons alors le plus petit sous mot initial $x_0s'_1$ de $x_0.s$ tel que $\tilde{u}_0.\tilde{u}'_1$ soit de la forme $B_r.(c \otimes \ldots \otimes c).\tilde{t}$ ou équivalemment, puisque $\tilde{u}_0.\tilde{u}'_1.\bar{\Theta}'_1.\psi(v_2) = \Pi_k^{i_0}.\psi(f.\tilde{v}'_1).\psi(v_2) = u$, $\bar{\Theta}'_1.\psi(v_2)$ soit de la forme $<a^{i_1}\#,\ldots,a^{i_n}\#>$.

On remarque que s' ne saurait être réduit au mot vide, puisque alors $\tilde{u}_0.\tilde{u}'_1 = \tilde{u}_0$. Or on a choisi r suffisamment grand pour que $\tilde{u}_0$ ne soit pas de la forme définie ci-dessus.

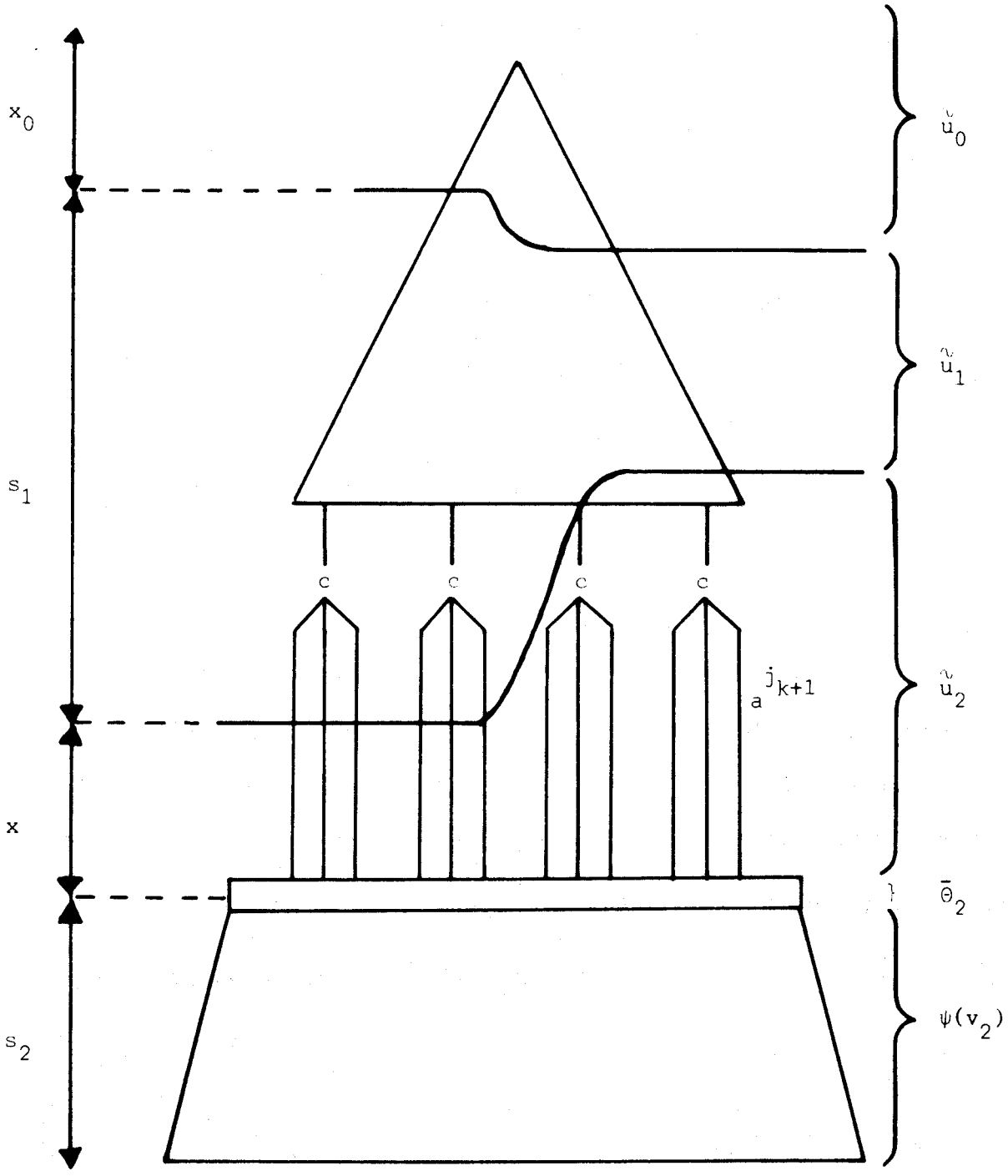
Comme s' est toujours de longueur ≥ 1, écrivons s'_1 sous la forme $s_1.x$, s_1 pouvant éventuellement être le mot vide. Il existe alors $\tilde{v}_1.\Theta_1 \in \sigma(\Theta_0.\rho(s_1))$, $\tilde{v}_2.\Theta_2 \in \sigma(\Theta_1.\rho(x))$ tels que $\tilde{v}_1.\tilde{v}_2.\Theta_2 = \tilde{v}'_1.\Theta'_1$; d'où $\Theta_2 = \Theta'_1$ et $\tilde{v}_1.\tilde{v}_2 = \tilde{v}'_1$.

On pose alors $\bar{\Theta}_0.\psi(\tilde{v}_1) = \tilde{u}_1.\bar{\Theta}_1$,

$$\bar{\Theta}_1.\psi(\tilde{v}_2) = \tilde{u}_2.\bar{\Theta}_2.$$

On a donc $\tilde{u}_0.\tilde{u}_1.\bar{\Theta}_1 = \Pi_k^{i_0}.\psi(f.\tilde{v}_1)$ et donc $\bar{\Theta}_1$ est une injection et $\tilde{u}_0.\tilde{u}_1.\tilde{u}_2.\bar{\Theta}_2 = \Pi_k^{i_0}.\psi(f.\tilde{v}_1.\tilde{v}_2) = \Pi_k^{i_0}.\psi(f.\tilde{v}'_1) = \tilde{u}_0.\tilde{u}'_1.\bar{\Theta}'_1$ d'où $\bar{\Theta}_2 = \bar{\Theta}'_1$ est une injection et $\tilde{u}'_1 = \tilde{u}_1.\tilde{u}_2$, $u = \tilde{u}_0.\tilde{u}_1.\tilde{u}_2.\bar{\Theta}_2.\psi(v_2)$.
Enfin $\tilde{u}_0.\tilde{u}_1$ n'est pas de la forme $B_r.(c \otimes \ldots \otimes c).\tilde{t}$

On a donc obtenu un découpage de u de la façon suivante :



BUS LILLE

Montrons maintenant que $\bar{\Theta}_0.\psi(\Theta_0).\psi(\sigma(\rho(s_1.x.s_2)))$ est fini. On en déduira d'après la démonstration de (**) que puisque

$$\tilde{v}_1.\Theta_1 \in \sigma(\Theta_0.\rho(s_1))$$

alors $\tilde{v}_1.\Theta_1.\sigma(\rho(x.s_2)) \subset \sigma(\Theta_0.\rho(s_1.x.s_2))$

et comme $\tilde{u}_1.\bar{\Theta}_1.\psi(\Theta_1).\psi(\sigma(\rho(x.s_2))) = \bar{\Theta}_0.\psi(\tilde{v}_1.\Theta_1).\psi(\sigma(\rho(x.s_2))$,

$\bar{\Theta}_1.\psi(\Theta_1).\psi(\sigma(\rho(x.s_2)))$ est fini ; et comme

$\tilde{v}_2.\Theta_2 \in \sigma(\Theta_1.\rho(x))$ alors

$\tilde{v}_2.\Theta_2.\sigma(\rho(s_2)) \subset \sigma(\Theta_1.\rho(x.s_2))$ et

$\tilde{u}_2.\bar{\Theta}_2.\psi(\Theta_2).\psi(\sigma(\rho(s_2)) = \bar{\Theta}_1.\psi(\tilde{v}_2.\Theta_2).\psi(\sigma(\rho(s_2)) \subset \bar{\Theta}_1.\psi(\Theta_1).\sigma(\rho(x.s_2))$

d'où d'une part prof $(\tilde{u}_2.\bar{\Theta}_2.\psi(\Theta_2)) =$ prof $(\tilde{u}_2) \leq h$

d'autre part $\bar{\Theta}_2.\psi(\Theta_2).\psi(\sigma(\rho(s_2))$ est fini et comme $v_2 \in \Theta_2.\sigma(\rho(s_2))$,

prof $(\bar{\Theta}_2.\psi(v_2)) \leq h \times$ longueur (s_2).

Supposons donc que $\bar{\Theta}_0.\psi(\sigma(\Theta_0.\rho(s_1.x.s_2))$ est infini. Alors $\Theta_0.\rho(s_1,x.s_2)$ s'écrit $<w_1,\ldots,w_{d(f)}>$. Comme $\Pi_k^{i_0}.\psi(f) = \tilde{u}_0.\bar{\Theta}_0$ n'est pas une torsion, $\tilde{u}_0$ est de la forme $b.\tilde{t}$ et comme $B_r = \tilde{u}_0.\tilde{w}$, $\tilde{u}_0 \in T(b)_n^1$ avec $k+1 \leq n \leq (k+1)^r = m$ et $\bar{\Theta}_0$ est une injection de $[n]$ dans $[k.d(f)]$. Supposons qu'il existe i tel que $\Pi_{\bar{\Theta}_0(i)}^i.\bar{\Theta}_0.\psi(\sigma(\Theta_0.\rho(s_1.x.s_2))$ ne soit pas fini. Alors cet ensemble est égal à $\Pi_{k.d(f)}.\psi(\sigma(\Theta_0.\rho(s_1.x.s_2))$.

Si $\bar{\Theta}_0(i) = k(i'-1) + j'$, ceci devient $\Pi_k^{j'}.\Psi(\Pi_{k'}^{\Theta_0(i')}.\sigma(\rho(s_1.x.s_2)) =$

$\Pi_k^{j'}.\psi(\sigma(w_{\Theta_0(i')}))$ qui est infini.

Comme $v \in \sigma(\Theta_0\rho(s_1.x.s_2))$, v s'écrit $<v_1,\ldots,v_{d(f)}>$ avec $v_i \in \sigma(w_{\Theta_0(i)})$. Remplaçons alors v_i par v_i'. $u' = \tilde{u}_0.\bar{\Theta}_0.\psi\ (<v_1,\ldots,v_i',\ldots,v_{d(f)}>)$ est encore dans F'. Mais comme $\bar{\Theta}_0$ est injectif, la modification apportée pour le remplacement de $v_{i'}$ par $v_{i'}'$ ne joue que sur au plus k des $n \geq k+1$ "arguments" de $\tilde{u}_0$;

il en existe un qui sera inchangé ; on en déduit que $u' \in F'_{r,m}$, et donc que $E = u_0.\bar{\Theta}_0.\psi(<v_1,\ldots,\sigma(w_{\Theta_0(i')}),\ldots,v_{d(f)}>) \subset F'_{r,m}$. E est donc un ensemble fini d'où $\bar{\Theta}_0.\psi(<v_1,\ldots,\sigma(w_{\Theta_0(i')}),\ldots,v_{d(f)}>$ est fini, ainsi que $\Pi^i_{kn}.\bar{\Theta}_0.\psi(<v_1,\ldots,\sigma(w_{\Theta_0(i')}),\ldots,v_{d(f)}> = \Pi^{j'}_k \Psi(\sigma(w_{\Theta_0(i')}))$; d'où une contradiction.

Comme prof $(\tilde{u}_2) \leq h$, si $\tilde{u}_2 = \tilde{\beta}\otimes(\tilde{\alpha}_1.c(a^{j_1} \otimes \ldots \otimes a^{j_{k+1}})\otimes\tilde{\alpha}_2)$ alors $j_{k+1} \leq h-1$ d'où comme $u \in F'_{r,m}$

alors $h-1 + \text{prof}\ (\bar{\Theta}_2.\psi(v_2)) \geq m > (q_0+1).h.k'$ d'où

prof $(\bar{\Theta}_2.\psi(v_2)) > (q_0+1)h.k' - h+1$.

Comme prof $(\bar{\Theta}_2.\psi(v_2)) \leq h \times$ longueur (s_2),

longueur $(s_2) > (q_0+1)\ k'-1 + \frac{1}{h} \geq q_0$.

Comme longueur $(s_2) > q_0$, il existe s'_2 tel que longueur $(s'_2) \leq q_0$ et $x_0 s_1.x.s'_2 \in L$.

Soit alors $v'_2 \in \sigma(\Theta_2\rho(s'_2))$. Alors $\tilde{u}_0.\tilde{u}_1.\tilde{u}_2.\bar{\Theta}_2.\psi(v'_2)$ appartient encore à F' et il est dans $F_{r,m'}$. Or prof $(\bar{\Theta}_2.\psi(v'_2)) \leq h \times$ longueur $(s'_2) \leq h \times q_0$; d'où $m' \leq h.q_0 + j_{k+1} \leq h(q_0+1)-1$. Ecrivons $\tilde{u}_0.\tilde{u}_1.\tilde{u}_2$ sous la forme $B_r.(c \otimes \ldots \otimes c).(a^{j_1} \otimes \ldots \otimes a^{j_n})$. Alors $\forall\ i \leq n$, $j_i + \text{prof}\ (\bar{\Theta}_2.\psi(v'_2)) \leq m' \leq h(q_0+1)-1$ d'où $j_i \leq h(q_0+1)-1$. Les entiers j_i peuvent donc prendre au plus $h \times (q_0+1)$ valeurs.

Considérons alors $v_2 \in \sigma(\Theta_2.\rho(s_2))$. $\Theta_2.\rho(s_2)$ peut s'écrire sous la forme $<w_1,\ldots,w_n>$ et donc $v_2 = <\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_n>$ où $\bar{v}_i \in \sigma(w_i)$. Considérons alors un 1-morphisme γ de $T(\Omega)$ dans $T(\Gamma)$ tel que $\gamma(g) \in \sigma(g)$; et remplaçons une des composantes $\bar{v}_i$ de v_2 par $\gamma(w_i)$ ce qui donne $v''_2 \in \sigma(\Theta_2.\rho(s_2))$ $u' = \tilde{u}_0.\tilde{u}_1.\tilde{u}_2.\bar{\Theta}_2\ \psi(v''_2)$ est encore dans F' ; or comme $\bar{\Theta}_2$ est une injection,

le remplacement de v_2 par v_2'' va modifier au plus k "branches" ; or pour obtenir un u' différent de u il faudrait en modifier au moins k+1. On a donc u' = u. De proche en proche on peut remplacer tous les v_i par $\gamma(w_i)$ sans changer u ; d'où $u = \tilde{u}_0.\tilde{u}_1.\tilde{u}_2.\bar{\Theta}_2.\psi(\Theta_2.\gamma\ \rho(s_2))$. Comme $s_2 \in T(X)_0^1$, $\rho(s_2) \in T(\Omega)_0^{k'}$ et $\gamma(\rho(s_2)) \in T(\Gamma)_0^{k'}$; $\gamma(\rho(s_2))$ contient donc au plus k' composantes différentes ; donc $\Theta_2.\gamma(\rho(s_2))$ contient aussi au plus k' composantes différentes et comme ψ est un k-morphisme linéaire, $\psi(\Theta_2.\gamma(\rho(s_2)))$ contient au plus k.k' composantes différentes, ainsi que $\bar{\Theta}_2.\psi(\Theta_2.\gamma(\rho(s_2)))$. Les éléments $a^{i\#}$ figurant dans u sont donc obtenus en composant les $k(q_0+1)$ éléments de $\tilde{u}_0.\tilde{u}_1.\tilde{u}_2$ et les k.k' de $\bar{\Theta}_2.\psi(\Theta_2.\gamma(\rho(s_2)))$. Il y en a donc au plus $h(q_0+1).k \times k'$ différents ; or dans u il y en a exactement $m = (k+1)^r > h(q_0+1).k.k'$ d'où une contradiction.

cqfd.

Terminons ce chapitre par quelques remarques sur le problème de la fermeture des classes Alg et Rat par 1-morphisme linéaire inverse. Puisque ces classes sont fermées par intersection avec un reconnaissable, il suffit, compte-tenu de la proposition 7.2, de considérer leur fermeture par démarquage inverse.

Or un k-morphisme peut être considéré comme un transducteur déterministe, et il est bien connu que le composé d'un transducteur déterministe et d'un démarquage inverse n'est pas nécessairement un transducteur [83]. Il est même conjecturé par Ogden et Rounds [76] et B. Baker [19] que la suite de D_0 = rat ; D_{i+1} = la fermeture de D_i par transduction forme une suite strictement croissante. Cette conjecture est exactement équivalente à celle que la suite $\underline{Rat}_i$ est strictement croissante où $\underline{Rat}_0$ = Rat et $\underline{Rat}_{i+1}$ est la fermeture de $\underline{Rat}_i$ par l'opération qui consiste à prendre l'image par un démarquage inverse, puis l'intersection avec un reconnaissable et enfin

l'image par un 1-morphisme non nécessairement linéaire. Nous conjecturons aussi qu'il en est de même pour la suite $\underline{Alg}_i$ définie de la même façon.

CHAPITRE VIII

LE MAGMOÏDE ADDITIF DES PARTIES D'UN MAGMOÏDE

Le magmoïde des parties, que nous avons défini au chapitre I et utilisé par la suite, a été construit de façon à ce qu'il soit projetable. Mais en compensation, nous avons vu que le produit de composition n'était pas additif à gauche - i.e. $U.V_1 + U.V_2 \subsetneq U.(V_1+V_2)$. Dans ce chapitre nous allons définir un nouveau magmoïde de parties qui lui aura la propriété d'additivité à gauche. Nous verrons qu'alors il ne peut pas être projetable.

Le produit de composition dans ce magmoïde formalise alors la notion de "greffe restreinte" de Boudol [29] ou celle de "IO-substitution" d'Engelfriet et Schmidt [53]. On définira, de la même façon qu'au chapitre IV les systèmes d'équations dans ce magmoïde des parties ; les ensembles algébriques correspondants seront alors les ensembles "algébriques ascendants" ou "IO sets". On définira aussi les parties rationnelles dont les composantes sont les ensembles coréguliers.

Nous n'en déduirons pas les propriétés des familles d'ensembles ainsi obtenues - cela a déjà été fait pour les ensembles coréguliers - car notre propos est simplement de montrer que la dualité bien connue "algébrique descendant" - "algébrique ascendant" ou régulier-corégulier est basée sur la dualité projetabilité-additivité des magmoïdes de parties.

1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

Soit M un magmoïde **quelconque**. Le **magmoïde additif des parties** de M, noté $P_A(M)$ est défini par :

$$. \ P_A(M)^p_q = \mathcal{P}(M^p_q)$$

. Le produit de composition est défini par si $U \in P_A(M)^p_q$ et $V \in P_A(M)^q_r$; $U.V = \{u.v \ / \ u \in U, \ v \in V\}$.

Il est clair que si $u \in U$ et $v \in V$, $u \in M^p_q$, $v \in M^q_r$ d'où le produit u.v est défini et appartient à M^p_r d'où $U.V \in P_A(M)^p_r$.

. Le produit tensoriel est défini par si $U \in P_A(M)^p_q$ et $V \in P_A(M)^{p'}_{q'}$ alors $U \otimes V = \{u \otimes v \ / \ u \in U, \ v \in V\}$. Comme précédemment $U \otimes V \in P_A(M)^{p+p'}_{q+q'}$.

. L'élément neutre e'_p de $P_A(M)^p_p$ est l'ensemble formé du seul élément neutre e_p de M^p_p.

On vérifie aisément que $P_A(M)$ est bien un magmoïde. De plus, par définition, $P_A(M)$ est **additif** c'est-à-dire que si on définit sur $P_A(M)^p_q$ l'addition notée + par $U+V = U \cup V$, on a bien

$$U.(V_1 + V_2) = U.V_1 + U.V_2$$
$$(U_1 + U_2).V = U_1.V + U_2.V$$
$$U \otimes (V_1 + V_2) = U \otimes V_1 + U \otimes V_2$$
$$(U_1 + U_2) \otimes V = U_1 \otimes V + U_2 \otimes V$$

D'autre part le magmoïde M peut être considéré comme un sous-magmoïde de $P_A(M)$ en identifiant l'élément u de M à l'élément $\{u\}$ de $P_A(M)$.

Enfin, par définition de $P_A(M)$, chaque fibre $P_A(M)^p_q = \mathcal{P}(M^p_q)$ contient la partie vide notée $\emptyset^p_q$. Les parties vides vérifient

$$\begin{array}{llll}
\text{si } U \in P_A(M)^q_r & , \quad \emptyset^p_q.U & = & \emptyset^p_r \\
\text{si } U \in P_A(M)^r_p & , \quad U.\emptyset^r_p & = & \emptyset^q_r \\
\text{si } U \in P_A(M)^{p'}_{q'} & , \quad U \otimes \emptyset^p_q & = & \emptyset^p_q \otimes U \quad = \quad \emptyset^{p+p'}_{q+q'}
\end{array}$$

et peuvent être considérées comme des "zéros".

De plus, l'ensemble de ces éléments zéros forme un sous-magmoïde noté $Z(M)$ de $P_A(M)$ qui n'a qu'un seul élément par fibre et qui est donc isomorphe au magmoïde des fibres ([AD], ch. I).

<u>Exemple 8.1</u> Soit l'alphabet gradué $\Sigma = \{f,g,b,\bar{b},a,\bar{a}\}$ avec $d(f) = 3$, $d(g) = 1$, $d(a) = d(\bar{a}) = d(b) = d(\bar{b}) = 0$.

Soient $U = \{<2;f(x_1,x_1,x_2)>\} \in P_A(T(\Sigma))^1_2$
et $V = \{<0;a,b>,<0;\bar{a},\bar{b}>\} \in P_A(T(\Sigma))^2_0$.
Alors $U.V = \{<0;f(a,a,b)>, <0;f(\bar{a},\bar{a},\bar{b})>\} \in P_A(T(\Sigma))^1_0$.

Soient $U' = \{<1; g(x_1), g(x_1)>\} \in P_A(T(\Sigma))^2_1$
et $V' = \{<0;a>, <0;b>\} \in P_A(T(\Sigma))^1_0$.
Alors $U'.V' = \{<0;g(a),g(a)>, <0;g(b),g(b)>\} \in P_A(T(\Sigma))^2_0$.

Soient $U'' = \{<2;g(x_1)>\} \in P_A(T(\Sigma))^1_2$.
Alors $U''.(V' \otimes \emptyset^1_0) = \emptyset^1_0$.

$\perp$

Proposition 8.2 *Le magmoïde $P_A(M)$ n'est pas projetable.*

Démonstration : S'il était projetable, la fibre 0 - 0 contiendrait un seul élément. Or $P_A(M)_0^0$ contient toujours au moins deux éléments qui sont $\{e_0\}$ et $\emptyset_0^0$.

cqfd.

De la même façon qu'au chapitre I, on peut définir des k-substitutions comme étant des k-morphismes de M dans $P_A(M')$, mais une telle notion n'a plus aucun intérêt dès qu'on considère des magmoïdes projetables, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 8.3 *Si M et M' sont deux magmoïdes projetables, tout k-morphisme de M dans $P_A(M')$ est un k-morphisme de M dans M'.*

Démonstration : Soit donc ϕ un k-morphisme de M dans M'. Comme M' est projetable et que M' est un sous-magmoïde de $P_A(M')$, $P_A(M')$ contient donc un sous-magmoïde des torsions et on a bien $\forall\ \Theta \in \Theta_q^p \subset M_q^p$
$\phi(\Theta) = \nu_k(\Theta) \subset \Theta_{kq}^{kp} \subset M'^{kp}_{kq} \subset P_A(M')_{kq}^{kp}$.

Supposons alors qu'il existe $u \in M_q^p$ tel que $\phi(u)$ soit de cardinal supérieur ou égal à deux. Il en résulte d'abord que $p \neq 0$ car sinon, comme $M_q^p = \{0_q\}$, $\phi(u)$ serait égal à $\{0_{kq}\}$ qui est de cardinal 1. Les deux éléments $\langle Id_p, Id_p\rangle.u$ et $u \otimes u.\langle Id_q, Id_q\rangle$ sont égaux d'où
$\langle Id_{kp}, Id_{kp}\rangle\ \phi(u) = \phi(u) \otimes \phi(u).\langle Id_{kq}, Id_{kq}\rangle$ et donc
$\{\langle v,v\rangle\ /\ v \in \phi(u)\} = \{\langle v_1,v_2\rangle\ /\ v_1 \in \phi(u),\ v_2 \in \phi(u)\}$.
Si Cardinal $\phi(u) \geq 2$, il existe v_1, $v_2 \in \phi(u)$ tels que $v_1 \neq v_2$;
il existe donc aussi $v \in \phi(u)$ tel que $\langle v,v\rangle = \langle v_1,v_2\rangle$ d'où
$(Id_{kp} \otimes 0_{kp}).\langle v,v\rangle = (Id_{kp} \otimes 0_{kp}).\langle v_1,v_2\rangle$ d'où $v = v_1$ et de la même façon, on montre que $v = v_2$ d'où une contradiction.

cqfd.

2. SYSTÈMES ALGÉBRIQUES ET GRAMMAIRES ASCENDANTES

Soient M un magmoïde quelconque et V un alphabet gradué. Nous admettrons l'existence du magmoïde libre $\tilde{T}(M \cup V)$ qui a la propriété suivante : quel que soit le k-morphisme ϕ de M dans un magmoïde M' et l'application k-dilatante ψ de V dans M', il existe un et un seul k-morphisme de $\tilde{T}(M \cup V)$ dans M'. Cette existence peut se démontrer en considérant l'ensemble des expressions formelles formées à partir de M, V et de deux symboles Θ et $\circledast$ et en quotientant cet ensemble par une congruence adéquate.

Signalons aussi que dans le cas où par exemple $M = T(\Sigma)$ le magmoïde $\tilde{T}(T(\Sigma) \cup V)$ est différent du magmoïde $T(\Sigma \cup V)$. En effet soit X un symbole de degré 2 appartenant à V. Dans $T(\Sigma \cup V)$, $X.\langle\Pi_1^1, \Pi_1^1\rangle.X = X.(X \otimes X).\langle Id_2, Id_2\rangle$; ces deux éléments sont encore dans $\tilde{T}(T(\Sigma) \cup V)$ mais ne sont plus égaux.

Un **système algébrique ascendant** sur M et V est un ensemble d'équations $S = \{X = R_X \ / \ X \in V\}$ où $\forall\ X \in V$, R_X est une partie finie de $\tilde{T}(M \cup V)$.

Dans le cas habituel, M sera le magmoïde projetable libre $T(\Sigma)$.

On associe alors à S l'ensemble $E(S)$ des applications de V dans $P_A(M)$ telles que si $F \in E(S)$, $E(X) = E_X \in P_A(M)^1_{d(X)}$. Muni de l'addition définie par $E+E'(X) = E(X) + E'(X)$ et de l'ordre défini par $E \leq E'$ ssi $\forall\ X \in V$, $E_X \subset E'_X$, $E(S)$ forme un treillis complet.

D'autre part, toute application E de $E(S)$ peut être prolongée en un unique 1-morphisme σ_E de $\tilde{T}(M \cup V)$ dans $P_A(M)$ qui vérifie

$$\text{si } X \in V,\ \sigma_E(X) = E_X \in P_A(M)$$

$$\text{si } u \in M,\ \sigma_E(u) = \{u\} \in P_A(M).$$

La solution de S est alors le plus petit élément de $E(S)$ qui vérifie $\forall\ X \in V$, $E_X = \bigcup_{u \in R_X} \sigma_E(u)$.

On démontre par les mêmes méthodes qu'au chapitre IV que cette solution existe toujours et qu'elle est la limite de la suite $\{E^{(i)}\}_i$ définie par

$$\forall X \in V,\ E_X^{(0)} = \emptyset^1_{d(X)} \in P_A(M)^1_{d(X)}$$

$$E_X^{(i-1)} = \bigcup_{u \in R_X} \sigma_{E^{(i)}}(u).$$

Maintenant que ces définitions générales sont données, nous n'allons plus considérer que le cas où $M = T(\Sigma)$. Un système algébrique ascendant $\mathcal{S} = \{X = R_X \ / \ X \in V\}$ sera dit sous <u>forme normale</u> ssi

$$\forall X \in V,\ \forall u \in R_X,\ u \in T(V) \subset \tilde{T}(T(\Sigma) \cup V) \quad \text{ou}$$
$$u \in T(\Sigma) \subset \tilde{T}(T(\Sigma) \cup V).$$

<u>*Proposition 8.4*</u> *Quel que soit le système algébrique ascendant $\mathcal{S}$ sur $T(\Sigma)$ et V dont la solution est E, il existe un système $\mathcal{S}'$ sous forme normale sur $T(\Sigma)$ et $V' \supset V$ dont la solution est E' tel que $\forall X \in V$, $E_X = E'_X$.*

<u>Démonstration</u> : Soit $\mathcal{S} = \{X = R_X \ / \ X \in V\}$ un système algébrique. S'il n'est pas sous forme normale, il existe $X \in V$, $u \in R_X$ tel que $u \notin T(\Sigma)$ et tel que u s'écrit $\alpha.(\beta_1 \otimes \gamma.\tilde{\delta} \otimes \beta_2).\Theta$ avec $\gamma \in T(\Sigma)^p_q$. Alors γ s'écrit $(\tilde{\gamma}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{\gamma}_p).\Theta'$ et u peut s'écrire

$\alpha.(\beta_1 \otimes \tilde{\gamma}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{\gamma}_p \otimes \beta_2).(Id_{p_1} \otimes \Theta' \otimes Id_{p_2}).(Id_{p_1} \otimes \bar{\delta} \otimes Id_{p_2}).\Theta.$

Alors on remplace u dans R_X par

$Y.(Id_{p_1} \otimes \bar{\delta} \otimes Id_{p_2}).\Theta$ et on rajoute les équations

$Y = \alpha.(\beta_1 \otimes Y_1 \otimes \ldots \otimes Y_p \otimes \beta_2).(Id_{p_1} \otimes \Theta' \otimes Id_{p_2})$

$Y_i = \tilde{\gamma}_i$

On obtient ainsi un système $\mathcal{S}'$ sur $T(\Sigma)$ et $V \cup \{Y, Y_1, \ldots, Y_p\}$. Soit E' la solution de $\mathcal{S}'$ et E'' sa restriction à V.

On a bien $E'_{Y_j} = \{\tilde{\gamma}_j\} = \sigma_{E''}(\tilde{\gamma}_j)$ d'où

$$E'_Y = \sigma_{E''}(\alpha.(\beta_1 \otimes \tilde{\gamma}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{\gamma}_p \otimes \beta_2).(Id_{p_1} \otimes \Theta' \otimes Id_{p_2}))$$

et $E'_X = \bigcup_{v \in R_X - \{u\}} \sigma_{E''}(v) + E'_Y.\sigma_{E''}(Id_{p_1} \otimes \bar{\delta} \otimes Id_{p_2}) = \bigcup_{v \in R_X} \sigma_{E''}(v)$.

On en déduit que E' = E" puisqu'ils vérifient les mêmes équations.

De proche en proche, on arrivera ainsi à construire un système sous forme normale vérifiant les conditions voulues.

cqfd.

Définissons maintenant les grammaires algébriques ascendantes :

Une **grammaire algébrique ascendante** sur Σ et V est un triplet $G = \langle \Sigma, V, R \rangle$ où R, l'ensemble des règles, est une partie finie de $V \times T(\Sigma \cup V)$ tel que si $X \to t \in R$ alors $t \in T(\Sigma \cup V)^1_{d(X)}$. Jusque là, cette définition est la même que celle des grammaires descendantes qui figure au chapitre VI. La différence consiste dans la définition des dérivations :

Un élément u de $T(\Sigma \cup V)$ se dérive immédiatement en u', ce qui se notera $u \Longrightarrow u'$, ssi

$\exists\ X \to t \in R$

$\exists\ \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2 \in \tilde{T}(\Sigma \cup V)$, $\tilde{\gamma} \in \tilde{T}(\Sigma)$, $\Theta \in \boldsymbol{\Theta}$ tels que

$u = \tilde{\alpha}.(\tilde{\beta}_1 \otimes (X.\tilde{\gamma}) \otimes \tilde{\beta}_2).\Theta$ et

$u' = \tilde{\alpha}.(\tilde{\beta}_1 \otimes (t.\tilde{\gamma}) \otimes \tilde{\beta}_2).\Theta$.

Autrement dit, on ne peut réécrire un symbole au moyen d'une règle que si aucun de ses arguments ne contient un symbole non terminal.

On dira alors qu'un élément u se dérive en u', ce qui se notera $u \overset{*}{\Longrightarrow} u'$, s'il existe $u_0, u_1, \ldots, u_n$ tels que $u_0 = u$, $u_n = u'$ et $\forall\ i \in [n]$,

$u_{i-1} \Longrightarrow u_i$. L'entier n sera appelé longueur de la dérivation. On note alors $\bar{F}_G(X) = \{u \in T(\Sigma) \ / \ X \overset{*}{\Longrightarrow} u\}$.

Théorème 8.5 (Théorème d'algébricité ascendante)

Soit U *une partie de* $T(\Sigma)^1_n$. *Alors il existe une grammaire ascendante* $G = \langle\Sigma,V,R\rangle$ *et* $X_0 \in V$ *tel que* $U = \bar{F}_G(X_0)$ *ssi il existe un système algébrique ascendant* $S = \{\bar{X} = R_{\bar{X}} \ / \ \bar{X} \in \bar{V}\}$ *et* $\bar{X}_0 \in \bar{U}$ *tel que si* E *est la solution de* S, $U = E_{\bar{X}_0}$.

Démonstration : Condition nécessaire

Soit $G = \langle\Sigma,V,R\rangle$ une grammaire algébrique ascendante. Alors si $X \to t \in R$, $t \in T(\Sigma \cup V)$; t s'écrit donc $\tilde{t}.\Theta$ avec $\tilde{t} \in \tilde{T}(\Sigma \cup V)$; t peut donc être considéré comme un élément de $\tilde{T}(T(\Sigma) \cup V)$. On considère alors le système $S_G = \{X = R_X \ / \ X \in V\}$ où $R_X = \{t \ / \ X \to t \in R\}$.

Soit E la solution de S_G. On montre alors :

$\boxed{A}$ Si $u \overset{*}{\Longrightarrow} u'$ avec u' $T(\Sigma)$ alors $u' \in \sigma_E(u)$.

On le démontre par récurrence sur la longueur de la dérivation $u \overset{*}{\Longrightarrow} u'$.

Si cette dérivation est de longueur 0, $u = u'$ et donc $u' \in \sigma_E(u) = \{u\} = \{u'\}$.

Si cette dérivation est de longueur ≥ 1, il existe u'' tel que $u \Longrightarrow u'' \overset{*}{\Longrightarrow} u'$; et d'après l'hypothèse de récurrence $u' \in \sigma_E(u'')$. il suffit donc de montrer que $\sigma_E(u'') \subset \sigma_E(u)$.

Or u s'écrit $\tilde{\alpha}.(\tilde{\beta}_1 \otimes (X.\tilde{\gamma}) \otimes \tilde{\beta}_2).\Theta$ et u" s'écrit $\tilde{\alpha}.(\tilde{\beta}_1 \otimes (t.\tilde{\gamma}).\tilde{\beta}_2).\Theta$ avec $X \to t \in R$. Or on a toujours $\sigma_E(\tilde{u}.\Theta) = \sigma_E(\tilde{u}).\Theta$; et comme σ_E est un morphisme de magmoïde, il suffit d'après la propriété d'addivité dans $P_A(T(\Sigma))$ de montrer que $\sigma_E(t.\tilde{\gamma}) \subset \sigma_E(X.\tilde{\gamma})$. Or $\sigma_E(\tilde{\gamma})$ est un singleton, on a bien $\sigma_E(t.\tilde{\gamma}) = \sigma_E(t).\{\tilde{\gamma}\}$ et $\sigma_E(X.\tilde{\gamma}) = \sigma_E(X).\{\tilde{\gamma}\}$. Il suffit alors de montrer que $\sigma_E(t) \subset \sigma_E(X) = E_X$ ce qui est immédiat puisque $X \to t \in R$ et donc $t \in R_X$.

$\boxed{B}$ Soit $E^{(i)}$ l'approximation de la solution E de S_G. On montre alors par induction sur i que $E_X^{(i)} \subset \bar{F}_G(X)$; ce qui est manifestement vrai pour i = 0 puisque $E_X^{(0)} = \emptyset$. Soit alors $v \in E_X^{(i+1)}$; il existe donc t tel que $X \to t \in R$ et tel que $v \in \sigma_{E^{(i)}}(t)$. Il suffit alors de montrer par récurrence sur la taille des éléments u de $T(\Sigma \cup V)$ que si $v \in \sigma_{E^{(i)}}(u)$ alors $u \overset{*}{\Longrightarrow} v$; on en déduira bien que $t \overset{*}{\Longrightarrow} v$ et donc $X \overset{*}{\Longrightarrow} v$ d'où $v \in \bar{F}_G(X)$.

Si u est de taille 0, $u = \Pi_p^i$ et $\sigma_{E^{(i)}}(u) = \{\Pi_p^i\}$ donc si $v \in \sigma_{E^{(i)}}(u)$ alors $v = \Pi_p^i$ et $u \overset{*}{\Longrightarrow} v$.

Si u s'écrit $g.(\tilde{u}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{u}_p).\Theta$ avec $g \in V \cup \Sigma$, alors si $v \in \sigma_{E^{(i)}}(u)$ il existe $v_0, v_1, \ldots, v_p$ tels que $v_0 \in \sigma_{E^{(i)}}(g)$, $v_i \in \sigma_{E^{(i)}}(v_i)$ et $v = v_0.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p).\Theta$. D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $\tilde{u}_i \overset{*}{\Longrightarrow} v_i$; il est facile d'en déduire, compte tenu de la définition des dérivations ascendantes, que $g.(\tilde{u}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{u}_p).\Theta \overset{*}{\Longrightarrow} g.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p).\Theta$. Si $g \in \Sigma$ alors $\sigma_{E^{(i)}}(g) = g$ et $v_0 = g$; on a bien le résultat. Si $g \in V$, alors $v_0 \in E_X^{(i)} \subset \bar{F}_G(X)$ d'où $g \overset{*}{\Longrightarrow} v_0$; et toujours à cause de la définition des dérivations ascendantes, on peut montrer facilement par récurrence sur la longueur de la dérivation $g \overset{*}{\Longrightarrow} v_0$, que $g.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p).\Theta \overset{*}{\Longrightarrow} v_0.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p).\Theta$, puisque $(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p).\Theta \in T(\Sigma)$.

On a donc bien d'une part $\bar{F}_G(X) \subset E_X$, d'autre part $E_X \subset \bar{F}_G(X)$, d'où en particulier $\bar{F}_G(X_0) = E_{X_0}$, ce qui montre bien la condition nécessaire.

Conditions suffisante

Soit un système $S = \{X = R_X \ / \ X \in V\}$ dont la solution est E, et soit $X_0 \in V$.

Il existe un système sous forme normale $S' = \{\bar{X} = \bar{R}_{\bar{X}} \ / \ \bar{X} \in \bar{V}\}$ dont la solution est $\bar{E}$ tel que $E_{X_0} = \bar{E}_{X_0}$. Considérons alors la grammaire $G = \langle \Sigma, \bar{V}, R \rangle$ où R est défini par $\bar{X} \to t \in R$ ssi $t \in \bar{R}_{\bar{X}}$. Cette construction est légitime puisque par définition de la forme normale si $t \in \bar{\bar{R}}_X$ alors $t \in T(\Sigma) \cup T(V) \subset T(\Sigma \cup V)$ - d'où la nécessité de passer par la forme normale -. Si maintenant on construit le système algébrique ascendant associé à G comme il a été fait dans la condition nécessaire, on retrouve exactement S' ; on peut alors appliquer la condition nécessaire et on obtient $\bar{F}_G(X_0) = \bar{E}_{X_0} = E_{X_0}$.

cqfd.

3. ENSEMBLES RATIONNELS ASCENDANTS

Si U est un élément de $P_A(T(\Sigma))^p_p$, on définit l'élément U^+ de $P_A(T(\Sigma))^p_p$

$$U^+ = U + U^2 + \ldots + U^n + \ldots$$

Comme dans $P_A(T(\Sigma))$ le produit de composition est additif à droite et à gauche, on aura cette fois, contrairement à ce qui se passe dans le magmoïde projetable des parties, $U^+ = U + U^+.U = U + U.U^+$.

<u>*Proposition 8.6*</u> *Si* $U \in P_A(T(\Sigma))^p_p$, U^+ *est le plus petit élément de* $P_A(T(\Sigma))^p_p$ *qui vérifie*

$$X = X + U.X = X + X.U.$$

<u>Démonstration</u> : Il est clair que $U^2 + U^3 + \ldots + U^n \ldots = U.(U+U^2 + \ldots + U^n) = (U + U^2 + \ldots + U^n + \ldots)U$ d'où $U^+ = U + U^+.U = U + U^+.U$.

Supposons maintenant que $X = U + U.X$. Alors on montre par récurrence que pour tout n, $U^n \subset X$; en effet $U \subset X$ et si $U^n \subset X$ alors $U^{n+1} = U.U^n \subset U.X \subset X$. D'où $U^+ \subset X$. La démonstration serait la même si $X = U + X.U$.

<u>cqfd</u>.

La familles des parties rationnelles ascendantes de $T(\Sigma)$ sera alors la plus petite partie de $P_A(T(\Sigma))$ contenant les ensembles finis et fermée par les opérations +, produit de composition, produit tensoriel et addition.

Théorème 8.7 *Un élément* U *de* $P_A(T(\Sigma))^p_q$ *est une partie rationnelle ascendante ssi il existe un alphabet gradué monadique* Δ, *un ensemble reconnaissable* L *de* $T(\Sigma)^1_1$, *un entier* $k \geq \sup(p,q)$ *un* k-*morphisme* ϕ *de* $T(\Delta)$ *dans* $T(\Sigma)$ *et une injection* $\Theta \in \Theta^p_k$ *tels que*

$$U \otimes O_{k-q} = \Theta.\phi(L).$$

Démonstration : Condition suffisante

A chaque partie L de $T(\Delta)^1_1$ on associe $\phi(L) = \{\phi(u)/u \in L\} \in P_A(T(\Sigma))^k_k$. On a alors

. $\phi(L_1 + L_2) = \phi(L_1) + \phi(L_2)$

. $\phi(L_1 . L_2) = \phi(L_1) . \phi(L_2)$ puisque

$\phi(L_1).\phi(L_2) = \{\phi(u_1).\phi(u_2) \ / \ u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}$

. $\phi(L^+) = (\phi(L))^+$ puisque $\phi(L^n) = (\phi(L))^n$ et que

$\phi(L + L^2 + \ldots + L^n \ldots) = \phi(L) + \phi(L^2) \ldots + \phi(L^n) + \ldots$

De plus si L est fini, $\phi(L)$ est fini d'où si L est rationnel, $\phi(L)$ est rationnel. Alors $U \otimes O_{k-p} = \Theta.\phi(L)$ est aussi rationnel et $U = (U \otimes O_{k-q}).\langle Id_p, \Pi^1_p, \ldots, \Pi^1_p\rangle$ est encore rationnel.

Condition nécessaire

La condition nécessaire va être démontrée par induction sur la construction de U.

- Si U est une partie finie de $T(\Sigma)^p_q$, on pose $\Delta = \{\bar{u} \ / \ u \in U\}$ et $k = \sup(p,q)$

si $k = p \geq q$, on pose $\Theta = Id_p$ et $\phi(\bar{u}) = U \otimes O_{k-q}$

si $k = q \geq p \geq 1$, on pose $\Theta = Id_p \otimes O_{k-q}$ et $\phi(\bar{u}) = \langle u, \Pi^k_k, \ldots, \Pi^k_k\rangle$

On a dans les deux cas $U \otimes O_{k-q} = \Theta.\phi(\Delta)$.

- Si $U = U_1 + U_2$,

alors $U_1 \otimes O_{k-q} = \Theta.\phi_1(L_1)$ et $U_2 \otimes O_{k-q} = \Theta_2.\phi_2(L_2)$.

Comme Θ_1 et Θ_2 sont des injections de [p] dans [k], il existe deux bijections Θ_1' et Θ_2' de [k] dans [k] dont Θ_1 et Θ_2 sont les restrictions à [p]. On pose alors $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{a_1,a_2\}$, $L = a_1L_1 + a_2L_2$

$$\phi = \begin{cases} \phi_1 \text{ sur } \Delta_1 \\ \phi_2 \text{ sur } \Delta_2 \\ \Theta_1' \text{ sur } a_1 \\ \Theta_2' \text{ sur } a_2 \end{cases}$$

On a alors $\phi(L) = \Theta_1'.\phi_1(L_1) + \Theta_2'.\phi_2(L_2)$ et

$(Id_p \otimes O_{p-k}).\phi(L) = \Theta_1.\phi_1(L_1) + \Theta_2.\phi_2(L_2) =$

$U_1 \otimes O_{k-q} + U_2 \otimes O_{k-q} = (U_1 + U_2) \otimes O_{k-q}$.

- Si $U = U_1.U_2$, $U_1 \otimes O_{k_1-q} = \Theta_1.\phi_1(L_1)$ et $U_2 \otimes O_{k_2-r} = \Theta_2.\phi_2(L_2)$.

On pose $k = \sup(k_1,k_2)$, $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{a\}$

$$\text{et} \quad \phi(u) = \begin{cases} \phi_1(u) \otimes Id_{k-k_1} & \text{si } u \in \Delta_1 \\ \phi_2(u) \otimes Id_{k-k_2} & \text{si } u \in \Delta_2 \\ <\Theta_2,\Pi_k^k,\ldots,\Pi_k^k> & \text{si } u = a \end{cases}$$

on a alors $(\Theta_1 \otimes O_{k-k_1}).\phi(L_1.a.L_2) =$

$(\Theta_1 \otimes O_{k-k_1}).(\phi_1(L_1) \otimes O_{k-k_1}).<\Theta_2,\Pi_k^k,\ldots,\Pi_k^k>.(\phi_2(L_2) \otimes O_{k-k_2}) =$

$((\Theta_1.\phi_1(L_1)) \otimes O_{k-k_1}).<\Theta_2,\Pi_k^k,\ldots,\Pi_k^k>.(\phi_2(L_2) \otimes O_{k-k_2}) =$

$(U_1 \otimes O_{k-q}).<\Theta_2,\Pi_k^k,\ldots,\Pi_k^k>.(\phi_2(L_2) \otimes O_{k-k_2}) =$

$U_1.(\Theta_2 \otimes O_{k-q}).(\phi_2(L_2 \otimes O_{k-k_2}) = U_1.(U_2 \otimes O_{k_2-r} \otimes O_{k-k_2}) = (U_1.U_2) \otimes O_{k-r}$.

- Si $U = U_1 \otimes U_2$, $U_1 \otimes O_{k_1-q_1} = \Theta_1.\phi_1(L_1)$ et $U_2 \otimes O_{k_2-q_2} = \Theta_2.\phi_2(L_2)$;

On pose $k = k_1 + k_2$, $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{a\}$ et $\bar{\Theta} \in \Theta_{k+k'}^{k+k'}$ l'injection telle que

$(Id_{q_1} \otimes O_{k_1-q_1} \otimes Id_{q_2} \otimes O_{k_2-q_2}).\bar{\Theta} = Id_{q_1+q_2} \otimes O_{k_1-q_1} \otimes O_{k_2-q_2}$.

On pose aussi

$$\phi(u) = \begin{cases} \phi_1(u) \otimes Id_{k_2} & \text{si } u \in \Delta_1 \\ Id_{k_1} \otimes \phi_2(u) & \text{si } u \in \Delta_2 \\ \bar{\Theta} & \text{si } u = a \end{cases}$$

On a alors $\phi(L_1) = \phi_1(L_1) \otimes Id_{k_1}$,

$\phi(L_2) = Id_{k_2} \otimes \phi_2(L_2)$

d'où $\phi(L_1.L_2.a) = (\phi_1(L_1) \otimes \phi_2(L_2)).\bar{\Theta}$

et $(\Theta_1 \otimes \Theta_2).\phi(L_1.L_2.a) = (U_1 \otimes O_{k_1-q_1} \otimes U_2 \otimes O_{k_2-q_2}).\bar{\Theta} =$

$U_1 \otimes U_2 \otimes O_{k-q_1-q_2}$.

- Si $U = V^+$, alors $V \otimes O_{k-p} = \Theta.\phi(L)$. Comme Θ est une injection de $[p]$ dans $[k]$, il existe une bijection de $[k]$ dans $[k]$ telle que $\Theta = (Id_p \otimes O_{k-p}).\bar{\Theta}$.

On pose alors $\Delta' = \Delta \cup \{a\}$ et on étend ϕ à Δ' par $\phi(a) = \bar{\Theta}$

$$\phi((aL)^n) = [\bar{\Theta}.\phi(L)]^n$$

et $(Id_p \otimes O_{k-p}).\phi((aL)^n) = \Theta.\phi(L).[\bar{\Theta}.\phi(L)]^{n-1} =$

$(V \otimes O_{k-p}).[\bar{\Theta}.\phi(L)]^{n-1} = V.(Id_p \otimes O_{k-p}).[\bar{\Theta}.\phi(L)]^{n-1}$.

On peut démontrer alors par récurrence que

$(Id_p \otimes O_{k-p}).\phi((aL)^n) = V^n \otimes O_{k-p}$ d'où

$(Id_p \otimes O_{k-p}).\phi((aL)^+) = V^+ \otimes O_{k-p}$.

<u>cqfd</u>.

Dans le cas où on considère des ensembles rationnels ascendants, c'est-à-dire des éléments de $P_A(T(\Sigma))^1_n$, la torsion qui figure dans la caractérisation du théorème 8.6 est une projection et cette caractérisation devient exactement la même que celle des ensembles coréguliers donnée par la proposition 5.9 et le théorème 5.10. On en déduit donc l'équivalence de ces deux notions.

Théorème 8.7 *Une partie de $T(\Sigma)^1_n$ est un ensemble rationnel ascendant ssi c'est un ensemble corégulier.*

En fait, ces deux notions coïncident sur un domaine plus vaste que celui des magmoïdes projetables libres. D'une part, comme on peut construire $P_A(M)$ pour un magmoïde M quelconque, on peut définir les ensembles rationnels d'un magmoïde quelconque. D'autre part les systèmes d'équations coréguliers ont une forme très particulière ; et si on les considère comme des grammaires, les dérivations y sont toujours ascendantes ; on peut donc définir les systèmes coréguliers comme des systèmes algébriques ascendants (ce qui ne changera rien au résultat dans le cas des magmoïdes à torsions) et donc définir des ensembles coréguliers dans un magmoïde quelconque ; il est clair que les notions de corégularité et de rationalité ascendante coïncideront encore.

CHAPITRE IX

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS ET SÉMANTIQUE DES SCHÉMAS DE PROGRAMME NON DÉTERMINISTES

Pour définir la sémantique d'un programme (récursif), Nivat [74] considère qu'un tel programme est un système d'équations dans un Σ-magma M, ce qui permet de définir la fonction calculée par un programme connaissant la solution du système d'équations correspondant dans le Σ-magma libre et le morphisme canonique du Σ-magma libre dans M appelé interprétation.

Ce n'est pratiquement qu'une question de formalisme que de considérer un programme comme un système d'équations dans un magmoïde fonctionnel. Mais en adoptant ce point de vue, il apparaît qu'on peut résoudre des systèmes d'équations dans des magmoïdes qui ne sont pas des magmoïdes fonctionnels, tel que les magmoïdes de relations.

Il est alors possible d'envisager des programmes qui calculent des relations. C'est pourquoi nous avons appliqué les méthodes de Nivat et utilisé le formalisme du magmoïde pour étudier les schémas de programme non déterministes.

Pour définir leur sémantique, il faut distinguer le cas de l'appel par nom de l'appel par valeur ; dans le premier cas les interprétations se font toujours dans des magmoïdes fonctionnels alors que dans le second elles se font nécessairement dans des magmoïdes relationnels.

Dans les deux cas, mais pour les domaines plats uniquement, on obtient un théorème analogue à celui de Nivat : la sémantique d'un programme est définie par l'interprétation d'un ensemble d'arbres (finis ou infinis) cet ensemble étant déterminé "syntaxiquement" c'est-à-dire sans tenir compte d'éventuelles interprétations.

Dans tout ce qui suit, on appellera **domaine** un triplet $<\mathbb{D},\perp,\leq>$, qu'on notera plus brièvement $\mathbb{D}$ s'il n'y a pas ambiguïté, tel que

- la relation $\leq$ est un ordre sur $\mathbb{D}$
- $\perp$ est le plus petit élément de $\mathbb{D}$
- l'ordre $\leq$ est complet [94] ou inductif [101]

c'est-à-dire que toute partie dirigée X de $\mathbb{D}$ admet une borne supérieure notée UX. (Une partie dirigée X est une partie telle que $d_1 \in X$, $d_2 \in X \Longrightarrow \exists\, d_3 \in X$ tel que $d_1 \leq d_3$ et $d_2 \leq d_3$).

Si $<\mathbb{D},\perp,\leq>$ est un domaine, il est clair que $<\mathbb{D}^n,\perp^n,\leq^n>$ est encore un domaine, ou $\leq^n$ est l'extension de $\leq$ à $\mathbb{D}^n$ "composante par composante".

Si $\mathbb{D}_1$ et $\mathbb{D}_2$ sont deux domaines, une application f de $\mathbb{D}_1$ dans $\mathbb{D}_2$ est dite **continue** si quelle que soit la partie dirigée X de $\mathbb{D}_1$, l'ensemble $\{f(d) \;/\; d \in X\}$ admet une borne supérieure qui est f(UX). En appliquant cette propriété à des parties dirigées $\{d_1,d_2\}$ avec $d_1 \leq d_2$, on en déduit que toute application continue est croissante et donc que l'image par une fonction continue d'une partie dirigée est encore dirigée.

1. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS SCHÉMATIQUES DANS LES MAGMOÏDES CONTINUS

1.1 DEFINITIONS

On dira qu'un magmoïde M est **ordonné** par $\leq$ ssi

. la relation $\leq$ est fibrée, i.e. si deux éléments de M sont dans la relation, ils sont dans la même fibre ;

. la relation $\leq$ est un ordre partiel sur chacune des fibres de M ;

. la relation $\leq$ est compatible avec le produit de composition et le produit tensoriel, c'est-à-dire :

$$- \; u \leq u',\ v \leq v' \Longrightarrow u.v \leq u'.v'$$

$$- \; u \leq u',\ v \leq v' \Longrightarrow u \otimes v \leq u' \otimes v'.$$

Exemple 9.1 Si $M\mathcal{T}$ est un magmoïde à torsion, le magmoïde $P(M\mathcal{T})$ est ordonné par l'inclusion (cf. ch. III, § 1).

Si $M\mathcal{T}$ est un magmoïde quelconque, le magmoïde $P_A(M)$ est ordonné par l'inclusion (cf. ch. VIII).

⊥

On dira qu'un magmoïde ordonné est **complet** (ou inductif) si toute partie dirigée de chaque fibre admet une borne supérieure et si chaque fibre M^p_q a un plus petit élément noté Ω^p_q.

Exemple 9.2 Les magmoïdes ordonnés $P(M\mathcal{T})$ et $P_A(M)$ sont complets ; les éléments minimaux de chaque fibre sont les éléments vides.

⊥

Un magmoïde ordonné complet est **continu** ssi le produit de composition et le produit tensoriel sont bicontinus, c'est-à-dire, si X et Y sont des parties dirigées,

i) $\sqcup X.\sqcup Y = \sqcup\{u.v \ / \ u \in X,\ v \in Y\}$

ii) $\sqcup X \otimes \sqcup Y = \sqcup\{u \otimes v \ / \ u \in X,\ v \in Y\}$.

Compte tenu du fait que les produits sont compatibles avec l'ordre, si X et Y sont des parties dirigées, $\{u.v \ / \ u \in X,\ v \in Y\}$ et $\{u \otimes v \ / \ u \in X,\ v \in Y\}$ sont encore dirigées, ce qui assure que les conditions i) et ii) ci-dessus ont bien un sens.

<u>Exemple 9.3</u> Le magmoïde $P_A(M)$ est continu. En effet, dans ce magmoïde, si X est une partie dirigée, $\sqcup X = \bigcup X$; la bicontinuité des produits découle alors de leur bi-additivité (cf. ch. VIII).

En ce qui concerne le magmoïde $P(M\mathcal{T})$, on a encore $\sqcup X = \bigcup X$, mais où la réunion est prise ici composante par composante. La bicontinuité du produit tensoriel découle encore de sa bi-additivité. Le produit de composition n'est pas bi-additif, mais cependant, à cause de l'additivité à gauche, on a $\bigcup X.\bigcup Y = \bigcup_{A \in X} A.\bigcup Y$. Il suffit donc de montrer que $A.\bigcup Y = \bigcup\{A.B \ / \ B \in Y\}$.

Mais comme $A.\bigcup Y = \bigcup_{\tilde{u}.\Theta \in A} \tilde{u}.\Theta.\bigcup Y$ et $\bigcup\{A.B/B \in Y\} = \bigcup_{B \in Y} \bigcup_{\tilde{u}.\Theta \in A} \tilde{u}.\Theta.B$, il suffit de montrer que $\{\tilde{u}.\Theta\}.\bigcup Y = \bigcup_{B \in Y} \{\tilde{u}.\Theta\}.B$. L'inclusion de $\bigcup_{B \in Y} \{\tilde{u}.\Theta\}.B$ dans $\{\tilde{u}.\Theta\}.\bigcup Y$ est évidente. Soit donc $v \in \{\tilde{u}.\Theta\}.\bigcup Y$. Il existe donc $w_1 \in \Pi_n^{\Theta(1)}.\bigcup Y, \ldots, w_q \in \Pi_n^{\Theta(q)}.\bigcup Y$ tels que $v = \tilde{u}.\langle w_1, \ldots, w_q \rangle$. Il existe donc, pour $i \leq q$, $B_i \in Y$ tels que $w_i \in \Pi_n^{\Theta(i)}.B_i$. Puisque Y est dirigée, il existe $B \in Y$ tel que $\forall\ i \leq q$, $B_i \subset B$, d'où $v \in \{\tilde{u}.\Theta\}.B \subset \bigcup_{B \in Y} \{\tilde{u}.\Theta\}.B$.

$\perp$

1.2 LES MAGMOÏDES PROJETABLES CONTINUS LIBRES

Soient Σ un alphabet gradué et Ω un symbole 0-aire n'appartenant pas à Σ. On pose $\Sigma' = \Sigma \cup \{\Omega\}$, et pour tout $p \geq 1$, $q \geq 0$, $\Omega_q^p = \langle \Omega.0_q, \ldots, \Omega.0_q \rangle \in T(\Omega)_q^p \subset T(\Sigma')_q^p$. On définit alors sur $(T(\Sigma) \cup T(\Omega)) \times T(\Sigma')$ la relation $\leq$ par :

- $\forall\, p \geq 0,\ \forall\, q \geq 0,\ \forall\, u \in T(\Sigma)_q^p,\ u \leq u,$

- $\forall\, p \geq 1,\ \forall\, q \geq 0,\ \forall\, v \in T(\Sigma)_q^p,\ \Omega_q^p \leq v.$

Il est facile de montrer que l'extension "homomorphe" de cette relation à $T(\Sigma') \times T(\Sigma')$ est une relation d'ordre pour laquelle le plus petit élément de chaque fibre $T(\Sigma')_q^p$ est Ω_q^p.

On construit alors le magmoïde projetable $T_\infty(\Sigma)$ en complétant $T(\Sigma')$ par idéaux, de manière analogue à la construction du F-magma M^∞ [94]. De façon plus précise, on dira qu'une partie U non vide appartenant à $P(T(\Sigma'))$ est un **idéal** ssi $\forall\, u \in U,\ u' \leq u \Longrightarrow u' \in U$. On montre alors que l'ensemble des idéaux dirigés est un sous-magmoïde projetable de $P(T(\Sigma'))$, noté $T_\infty(\Sigma)$, et qu'il est complet pour l'inclusion ensembliste des idéaux. Comme $P(T(\Sigma'))$ est continu pour l'inclusion, son sous-magmoïde complet $T_\infty(\Sigma)$ l'est également. De plus $T_\infty(\Sigma)$ a un sous-magmoïde isomorphe à $T(\Sigma)$.

On dira qu'un k-morphisme ϕ d'un magmoïde projetable continu M dans un magmoïde projetable continu M' est **continu** si

- $\phi(\Omega_q^p)$ est le plus petit élément de M'^{kp}_{kq}

- si X est une partie dirigée de M, $\{\phi(u) \ / \ u \in X\}$ admet une borne supérieure qui est $\phi(\sqcup X)$.

On démontre alors que quelle que soit la k-application ϕ de Σ dans un magmoïde projetable continu M, il existe un et un seul k-morphisme continu de $T_\infty(\Sigma)$ dans M qui coïncide avec ϕ sur Σ et qui sera donc noté aussi ϕ. Autrement dit, en définissant la catégorie des magmoïdes projetables comme celle dont les objets sont les magmoïdes projetables continus et les flèches les morphismes continus, on a :

Proposition 9.4 $T_\infty(\Sigma)$ *est un objet libre dans la catégorie des magmoïdes projetables continus.*

1.3 SYSTEMES D'EQUATIONS SCHEMATIQUES

Pour l'instant, nous nous limitons au cas des systèmes d'équations schématiques sur un magmoïde projetable continu.

Soit donc M un magmoïde projetable continu. Soit $V = \{X_1,\ldots,X_p\}$ un alphabet gradué avec $n_i = d(X_i)$. Un système d'équations schématiques (ou système schématique) sur V et M est un ensemble d'équations $S = \{X_i = t_i \ / \ i \leq p\}$, où $t_i \in (M\mathcal{D} \oplus \tilde{T}(V))T^1_{n_i}$.

A un tel système on associe $E(S) = M^1_{n_1} \times \ldots \times M^1_{n_p}$, ordonné composante par composante par l'ordre de M. $E(S)$ est donc complet pour cet ordre, et son plus petit élément est $\bar{\Omega} = \langle \Omega^1_{n_1},\ldots,\Omega^1_{n_p} \rangle$.

A tout élément $u = \langle u_1,\ldots,u_p \rangle$ de $E(S)$ on associe le morphisme ϕ_u de $(M\mathcal{D} \oplus \tilde{T}(V))T$ dans M défini de la même façon qu'au chapitre IV, c'est-à-dire, ϕ_u est l'unique morphisme dont la restriction à M^1 est l'identité et tel que $\phi(X_i) = u_i$.

On considère alors l'application $\hat{S}$ de $E(S)$ dans $E(S)$ définie par :

$$\hat{S}(u) = \langle \phi_u(t_1),\ldots,\phi_u(t_p) \rangle.$$

Comme M est un magmoïde continu, il est immédiat que $\hat{S}$ est continue, c'est-à-dire : si X est une partie dirigée de $E(S)$, $\hat{S}(X) = \cup\{\hat{S}(u) \ / \ u \in X\}$. On en déduit que $\{\hat{S}^i(\bar{\Omega}) \ / \ i \in \mathbb{N}\}$ est une partie dirigée de $E(S)$ et que sa borne supérieure, v, est le plus petit élément de $E(S)$ qui vérifie $v = \hat{S}(v)$. On appellera cet élément v la solution de S.

Dans le cas particulier où $M = T(\Sigma)$, et alors $(T(\Sigma)D \oplus \mathfrak{T}(V))T = T(\Sigma \cup V)$, le magmoïde $T(\Sigma)$ n'est pas continu, mais peut être plongé dans le magmoïde projetable continu $T_\infty(\Sigma)$. Un système d'équations schématiques $S = \{X_i = t_i \ / \ i \leq p,\ t_i \in T(\Sigma \cup V)\}$ admet donc une solution dans $T_\infty(\Sigma)$.

Soit maintenant une application ϕ de Σ dans un magmoïde projetable continu M ; et soit un système schématique $S = \{X_i = t_i \ / \ i \leq p,\ t_i \in T(\Sigma \cup V)\}$. D'une part ϕ s'étend en un unique 1-morphisme, noté aussi ϕ, de $T_\infty(\Sigma)$ dans M ; d'autre part, à S on associe le système $\phi(S)$ sur V et M, obtenu en remplaçant dans les t_i tout élément f de Σ par $\phi(f)$.

<u>*Proposition 9.5*</u> *Si* u *est la solution de* S, $\phi(u)$ *est la solution de* $\phi(S)$.

<u>Démonstration</u> ; Il est immédiat par construction de $\phi(S)$, que $\widehat{\phi(S)}(\phi(u)) = \phi(\hat{S}(u))$. D'autre part $\phi(\Omega) = \Omega$, d'où $\widehat{\phi(S)}^i(\Omega) = \phi(\hat{S}^i(\Omega))$ et comme ϕ est un morphisme continu, $\phi(\cup\hat{S}^i(\Omega)) = \cup\phi(\hat{S}^i(\Omega)) = \cup\widehat{\phi(S)}^i(\Omega)$.

<u>cqfd</u>.

Réciproquement, de la même façon que pour les systèmes d'équations étudiées au chapitre IV, toute solution d'un système schématique est l'image par un morphisme de la solution d'un système schématique sur un magmoïde libre :

<u>*Proposition 9.6*</u> *Si* S *est un système schématique sur* V *et* M, *dont la solution est* u, *il existe un alphabet gradué* Σ, *un morphisme continu* ϕ *de* $T_\infty(\Sigma)$ *dans* M, *un système schématique* S' *sur* V *et* $T(\Sigma)$, *dont la solution est* v, *tels que* $S = \phi(S')$ *et donc* $u = \phi(v)$.

Enfin le théorème suivant donne une façon de calculer la solution de systèmes schématiques sur $T(\Sigma)$.

<u>*Théorème 9.7*</u> *(Nivat [74]).* *Soit* $S = \{X_i = t_i \ / \ i \leq p,\ t_i \in T(\Sigma \cup V)\}$ *un système schématique dont la solution est* $u \in T_\infty(\Sigma)$. *Soit* $S' = \{X_i = t_i + \Omega.0_{n_i} \ / \ i \leq p\}$ *le système dont la solution dans* $P(T(\Sigma'))$ *est* L. *En identifiant* $T(\Sigma')$ *à un sous-magmoïde de* $T_\infty(\Sigma)$, L *est une partie dirigée de* $T_\infty(\Sigma)$ *et* $u = \sqcup L$.

2. SÉMANTIQUE ALGÉBRIQUE DES SCHÉMAS DÉTERMINISTES

Un schéma de programme n'est rien d'autre qu'un système schématique sur un magmoïde projetable libre $T(\Sigma)$. Une interprétation de $\mathcal{S}$ est la donnée d'un domaine $\mathbb{D}$ et d'une application qui à tout élément de Σ associe une application continue sur $\mathbb{D}$. Une interprétation n'est donc rien d'autre qu'un morphisme du magmoïde projetable $T(\Sigma)$ dans le magmoïde projetable $F(\mathbb{D})$ et plus précisément dans un sous-magmoïde de $F(\mathbb{D})$ que nous allons étudier.

2.1 LE MAGMOÏDE $F_C(\mathbb{D})$

Soit $\mathbb{D}$ un domaine. On définit $F_C(\mathbb{D})$ par $F_C(\mathbb{D})^p_q =$ $\{f \in F(\mathbb{D})^p_q \ / \ f \text{ est continue}\}$. $F_C(\mathbb{D})$ est donc constitué des applications continues de $F(\mathbb{D})$.

<u>*Proposition 9.8*</u> *$F_C(\mathbb{D})$ est un sous-magmoïde projetable de $F(\mathbb{D})$.*

<u>Démonstration</u> : Il est clair que si f et g sont continues, $f.g$ et $f \otimes g$ le sont aussi et donc que $F_C(\mathbb{D})$ est un sous-magmoïde de $F(\mathbb{D})$. Pour qu'il soit projetable, il suffit que les torsions soient continues. Soit donc $\Theta \in \Theta^p_q$ et soit X une partie dirigée de $\mathbb{D}^q$. Posons $X_i = \{d_i \in \mathbb{D} \ / \ \langle d_1,\ldots,d_q\rangle \in X\}$. Chacun des X_i est encore une partie dirigée de $\mathbb{D}$ et de plus $\sqcup X = \langle \sqcup X_1,\ldots,\sqcup X_q\rangle$. D'où $\Theta.\sqcup X = \langle \sqcup X_{\Theta(1)},\ldots,\sqcup X_{\Theta(p)}\rangle$. D'autre part, soit $Y = \{\Theta.x \ / \ x \in X\}$ et posons $Y_i = \{d_i \in \mathbb{D} \ / \ \langle d_1,\ldots,d_p\rangle \in Y\}$. On a donc $Y_i = X_{\Theta(i)}$ et $\sqcup Y = \langle \sqcup Y_1,\ldots,\sqcup Y_p\rangle = \Theta.\sqcup X$.

<u>cqfd</u>.

$F_C(\mathbb{D})$ peut être muni d'un ordre par :
si $f,g \in F_C(\mathbb{D})^p_q$, $f \leq g$ ssi $\forall\, d \in \mathbb{D}^q$, $f(d) \leq g(d)$.

Proposition 9.9 *Muni de cet ordre, $F_C(\mathbb{D})$ est un magmoïde continu.*

Démonstration : Il est bien connu que $F_C(\mathbb{D})$ est complet et que chaque fibre a un plus petit élément Ω^p_q tel que $\Omega^p_q(d) = \langle\perp,\ldots,\perp\rangle$. Montrons que $F_C(\mathbb{D})$ est continu.

Soient F une partie dirigée de $F_C(\mathbb{D})^p_q$ et G une partie dirigée de $F_C(\mathbb{D})^q_r$. Alors $(\sqcup F.\sqcup G)(d) = \sqcup F.(\sqcup\{g(d) \;/\; g \in G\}) =$ $\sqcup\{f(\sqcup\{g(d) \;/\; g \in G\}) \;/\; f \in F\}$ et comme f est continue, ceci est égal à $\sqcup\{\sqcup\{f.g(d) \;/\; g \in G\} \;/\; f \in F\} = \sqcup\{fg(d) \;/\; f \in F,\ g \in G\}$.

De la même façon, on montre que
$(\sqcup F \otimes \sqcup G)(d) = \sqcup\{(f \otimes g)(d) \;/\; f \in F,\ g \in G\}$.

cqfd.

2.2 INTERPRETATIONS

Soit $\mathcal{S} = \{X_i = t_i \;/\; i \leq p\}$ un schéma sur $T(\Sigma)$. Une interprétation I de $\mathcal{S}$ est une application de Σ dans $F_C(\mathbb{D})$. Cette application I s'étend de façon unique en un 1-morphisme de $T(\Sigma)$ dans $F_C(\mathbb{D})$ et en un 1-morphisme continu de $T_\infty(\Sigma)$ dans $F_C(\mathbb{D})$, notés également I. A cette interprétation I, on associe le système schématique $I(\mathcal{S})$ sur $F_C(\mathbb{D})$ (le "programme"). D'après ce que nous avons vu un 1.3, $I(\mathcal{S})$ admet une solution v dans $F_C(\mathbb{D})$ - la fonction calculée par le programme $I(\mathcal{S})$, du point de vue de la sémantique dénotationnelle - et $\mathcal{S}$ admet une solution u dans $T_\infty(\Sigma)$; d'après la proposition 9.5, $v = I(u)$. Compte tenu du théorème de Nivat, et de la continuité de I, si L est la solution de $\{X_i = t_i + \Omega.0_{n_i}\}$ dans $P(T(\Sigma \cup \{\Omega\}))$, v est aussi égal à $\sqcup\{I(v) \;/\; v \in L\}$.

3. SCHÉMAS NON DÉTERMINISTES

Un programme non-déterministe est un programme où les instructions sont remplacées par des ensembles finis d'instructions. Au moment de l'exécution, une instruction quelconque d'un ensemble fini sera exécutée. Cette possibilité de choix peut être représentée en utilisant un opérateur binaire de choix qu'on notera **ou**. Si on se fixe une donnée, le programme aura comme résultat toutes les valeurs calculées en effectuant tous les choix possibles.

Exemple 9.10 Soit le programme (non-déterministe)

```
    Input (x)
A : Print (x) ou (x := x+1 ; goto A)
    Stop.
```

Il est facile de voir que lorsqu'on lui donne un nombre x, ce programme peut imprimer n'importe quel nombre x+n ; il peut aussi ne jamais s'arrêter si on prend systématiquement la partie droite du **ou**. A tout entier n, le programme ci-dessus associe donc $\{\perp, n, n+1, n+2, \ldots\}$; la présence de l'élément indéfini $\perp$ dans cet ensemble signifiant que le programme peut ne pas se terminer.

Ce même programme peut être mis sous forme récursive :

$$\phi(x) = x \text{ ou } \phi(x+1)$$

qui est une instance du schéma

$$\phi(x) = x \text{ ou } \phi(s(x)).$$

$\perp$

Exemple 9.11 Soit le programme récursif

$\phi(x) =$ si x est un nombre premier alors x **ou** $\phi(x+1)$ sinon $\phi(x+1)$.

Intuitivement, et ceci sera démontré plus loin lorsque nous aurons défini la sémantique du point fixe,

$\phi(n)$ est l'ensemble des nombres premiers supérieurs ou égaux à n,
$\phi(n)$ pouvant aussi ne pas s'arrêter.

Ce programme est une instance du schéma

$$\phi(x) = g(x, x \text{ ou } \phi(s(x)), \phi(s(x))).$$

$\perp$

Un schéma non déterministe sur Σ sera donc un système d'équations schématiques

$$\{X_i = t_i \ / \ i \leq p\} \quad \text{avec}$$

$t_i \in T(\Sigma \cup V \cup \{\text{ou}\})$ où **ou** est un symbole binaire n'appartenant pas à $\Sigma \cup V$.

3.1 INTERPRETATIONS ET SEMANTIQUE OPERATIONNELLE

Si on se donne une interprétation I de Σ (c'est-à-dire un 1-morphisme de $T(\Sigma)$ dans un magmoïde fonctionnel continu $F_C(\mathbf{D})$), l'interprétation d'un schéma non déterministe sera alors une application qui à tout élément de $\mathbf{D}^p$ fait correspondre une **partie** de $\mathbf{D}$. Les méthodes usuelles de la sémantique du point fixe et de la sémantique algébrique ne peuvent plus s'appliquer dans ce cas. Nous nous proposons donc de les étendre afin de pouvoir les appliquer au cas des schémas non déterministes. Pour cela, il faut que toute fonction de $F_C(\mathbf{D})$ puisse être calculée quand on lui donne comme argument non plus un élément de $\mathbf{D}^p$ mais un ensemble d'éléments.

Or il y a deux extensions naturelles des applications sur $\mathbf{D}$ à des parties de $\mathbf{D}$:

- les fonctions sur les parties de $\mathbf{D}$
- les relations sur $\mathbf{D}$.

On remarquera que les applications de $\mathbb{D}$ dans $P(\mathbb{D})$, calculées par les programmes non déterministes, rentrent dans ces deux catégories : dans le premier cas, toute application de $P(\mathbb{D})^n$ dans $P(\mathbb{D})$ induit naturellement une application de $\mathbb{D}^n$ dans $P(\mathbb{D})$ puisque $\mathbb{D} \subset P(\mathbb{D})$; dans le second cas, à une relation r de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}^n$ on associe l'application de $\mathbb{D}^n$ dans $P(\mathbb{D})$ qui a $d_1,\ldots,d_n$ fait correspondre $\{d \in \mathbb{D} \ / \ \langle d,d_1,\ldots,d_n\rangle \in r\}$.

Pour interpréter les schémas non déterministes, on se propose donc d'étendre les interprétations dans $F_C(\mathbb{D})$ soit à $F(P(\mathbb{D}))$ soit à $R(\mathbb{D})$. Dans les deux cas l'interprétation du symbole **ou** sera canonique.

Mais il se pose alors la question suivante : y a-t-il une différence entre les interprétations dans $F(P(\mathbb{D}))$ et celles dans $R(\mathbb{D})$. Si oui, à quoi correspond-elle ?

Sans rentrer dans les détails techniques nous pouvons déjà répondre à cette question. Il y aura certainement une différence entre les solutions de systèmes schématiques dans $F(P(\mathbb{D}))$ et dans $R(\mathbb{D})$ - si tant est qu'elles existent - due au fait que l'un des magmoïdes est projetable et pas l'autre et que donc les torsions y auront des effets différents. D'autre part le magmoïde $F(P(\mathbb{D}))$ est projetable mais pas totalement bi-additif, alors que $R(\mathbb{D})$ est totalement bi-additif, mais pas projetable. Cette différence est de la même nature que celle qui existe entre le magmoïde des parties et le magmoïde additif des parties. Mais c'est aussi la différence qui existe entre les interprétations de l'appel par nom et de l'appel par valeur (Engelfriet et Schmidt [53], Boudol [29]).

Il faut donc examiner si dans le cas des schémas non-déterministes, il existe deux sémantiques opérationnelles différentes qui correspondent à l'appel par nom et à l'appel par valeur. Il est clair qu'une telle différence apparaîtra à propos de l'interprétation des torsions.

Soient donc f un symbole binaire de degré 2, $\mathbb{D}$ un domaine et I une interprétation de f. Le terme $t = f(x,x)$ aura deux interprétations :

$I_1(t)$ est défini par

$\forall\ E \subset \mathbf{D},\ I_1(t)(E) = \{I(f)(d_1,d_2)\ /\ d_1 \in E,\ d_2 \in E\}$

$I_2(t)$ est défini par

$\forall\ E \subset \mathbf{D},\ I_2(t)(E) = \{I(f)(d,d)\ /\ d \in E\}$.

Le premier cas (appel par nom) correspond au cas où l'effet de la torsion $\langle x,x\rangle$ est défini par $\langle x,x\rangle.E = E \times E$; le second (appel par valeur) correspond au cas où $\langle x,x\rangle.E$ = diagonale $(E \times E)$.

<u>Exemple 9.12</u> Soit le programme $x = x/2 + 1/x$. Dans $\mathbf{R}_+$, quel que soit $x_0 \in \mathbf{R}_+$, la suite $\{x_i\}_i$ définie par $x_{i+1} = x_i/2 + 1/x_i$ converge vers $\sqrt{2}$. Nous allons étendre l'interprétation du schéma $x = x/2 + 1/x$ de deux façons différentes aux intervalles fermés de $\mathbf{R}_+$ et dans les deux cas étudier la limite de la suite $\{x_i\}_i$ quand $x_0 = [1,2]$.

<u>appel par nom</u>

Dans ce cas, $x_{i+1} = x_i/2 + 1/x_i = \{y/2 + 1/z\ /\ y \in x_i,\ z \in x_i\}$. Si $x_i = [1,2]$ on a donc $x_{i+1} = \{y/2 + 1/z\ /\ y \in [1,2],\ z \in [1,2]\} = \{y'+z'\ /\ y \in [1/2,1],\ z' \in [1/2,1]\} = [1,2]$. Si $x_0 = [1,2]$, on a donc $\forall\ i,\ x_i = [1,2]$. La suite $\{x_i\}_i$ est constante et égale à $[1,2]$.

<u>appel par valeur</u>

Ici, $x_{i+1} = \{y/2 + 1/y\ /\ y \in x_i\}$.

Si, quel que soit $\alpha \in [1,2]$, on définit la suite $\{z_i(\alpha)\}_i$ par $z_0(\alpha) = \alpha$ et $z_{i+1}(\alpha) = z_i(\alpha)/2 + 1/z_i(\alpha)$, on obtient $x_i = \{z_i(\alpha)\ /\ \alpha \in [1,2]\}$ et donc la suite $\{x_i\}_i$ converge vers $[\sqrt{2}]$ puisque chacune des suites $z_i(\alpha)$ converge vers $\sqrt{2}$.

Exemple 9.13

Soit le programme

$\phi(x)$ = si x est un nombre premier alors x sinon ϕ(x ou x+1)

appel par valeur

La sémantique intuitive de ce programme est :

- si n est premier, $\phi(n) = \{n\}$
- si n n'est pas premier, $\phi(n)$ est le plus petit nombre premier supérieur à n, ou $\phi(n)$ ne se termine pas.

Le premier point est évident ; pour le second regardons un exemple :

$\phi(15) = \phi(15 \text{ ou } 16) = \phi(15) \text{ ou } \phi(16)$

$\phi(16) = \phi(16 \text{ ou } 17) = \phi(16) \text{ ou } \phi(17)$

$\phi(17) = 17$

d'où $\phi(15) = \phi(15) \text{ ou } \phi(16) \text{ ou } 17$.

appel par nom

La sémantique du même programme est alors

- si n est premier, $\phi(n) = \{n\}$
- sinon $\phi(n) = \{\perp, n, n+1, \ldots\}$.

Calculons encore $\phi(15)$:

$\phi(15) = \phi(15 \text{ ou } 16) =$

si 15 ou 16 est premier alors 15 ou 16 sinon ϕ(15 ou 16 ou ((15 ou 16)+1) =
si 15 est premier alors 15 ou 16 sinon ϕ(15 ou 16 ou 17) ou
si 16 est premier alors 15 ou 16 sinon ϕ(15 ou 16 ou 17) =

ϕ(15 ou 16 ou 17) =

si 15 est premier alors 15 ou 16 ou 17 sinon ϕ(15 ou 16 ou 17 ou 18) ou
si 16 est premier alors 15 ou 16 ou 17 sinon ϕ(15 ou 16 ou 17 ou 18) ou
si 17 est premier alors 15 ou 16 ou 17 sinon ϕ(15 ou 16 ou 17 ou 18) =

ϕ(15 **ou** 16 **ou** 17 **ou** 18) **ou** 15 **ou** 16 **ou** 17.

De la même façon,

ϕ(15 **ou** 16 **ou** 17 **ou** 18) =

<u>si</u> 15 est premier <u>alors</u> 15 **ou** 16 **ou** 17 **ou** 18 <u>sinon</u> ϕ(15 **ou** 16 **ou** 17 **ou** 18 **ou** 19) **ou**
<u>si</u> 16 est premier <u>alors</u> 15 **ou** 16 **ou** 17 **ou** 18 <u>sinon</u> ϕ(15 **ou** 16 **ou** 17 **ou** 18 **ou** 19) **ou**
<u>si</u> 17 est premier <u>alors</u> 15 **ou** 16 **ou** 17 **ou** 18 <u>sinon</u> ϕ(15 **ou** 16 **ou** 17 **ou** 18 **ou** 19) **ou**
<u>si</u> 18 est premier <u>alors</u> 15 **ou** 16 **ou** 17 **ou** 18 <u>sinon</u> ϕ(15 **ou** 16 **ou** 17 **ou** 18 **ou** 19) =

ϕ(15 **ou** 16 **ou** 17 **ou** 18 **ou** 19) **ou** 15 **ou** 16 **ou** 17 **ou** 18.

$\perp$

La différence essentielle porte donc sur la façon de "calculer" des expressions de la forme

t(x,x) [y **ou** z / x] .

Dans le cas de l'appel par valeur, on obtiendra

t(y,y) **ou** t(z,z)

et dans le cas de l'appel par nom

t(y,y) **ou** t(z,y) **ou** t(y,z) **ou** t(z,z).

3.2 LE DOMAINE $\hat{P}(\mathbb{D})$

Afin de pouvoir utiliser les méthodes du §2 pour étudier la sémantique algébrique des schémas non déterministes, il faudrait que $P(\mathbb{D})$ soit un domaine. Or ce n'est pas le cas.

En effet l'ordre qu'on veut mettre entre deux éléments X et Y de $P(\mathbb{D})$ doit signifier que les valeurs de Y sont des améliorations des valeurs de X c'est-à-dire

i) $\forall x \in X, \exists y \in Y$ tq $x \leq Y$

et ne sont que cela, c'est-à-dire

ii) $\forall y \in Y, \exists x \in X$ tq $x \leq y$.

Il est facile de vérifier que cette relation est un préordre - parfois appelé "préordre de Milner" [101]. Mais dans le cas général, ce n'est par un ordre. En effet, soit $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ muni de l'ordre naturel, qui est bien un domaine. Il est alors facile de vérifier que l'on a simultanément $\{0,2\} \leq \{0,1,2\}$ et $\{0,1,2\} \leq \{0,2\}$.

Cependant, lorsque $\mathbb{D}$ est un **domaine plat** (i.e. $d \leq d' \Longrightarrow d = \perp$ ou $d = d'$), alors le préordre de Milner sur $P(\mathbb{D}) - \{\emptyset\}$ est un ordre. De plus $P(\mathbb{D}) - \{\emptyset\}$ est complet et $\{\perp\}$ est son plus petit élément.

Au lieu de $P(\mathbb{D}) - \{\emptyset\}$, de Bakker [93] et Plotkin [101] considèrent son sous-ensemble, que nous noterons $\hat{P}(\mathbb{D})$, défini par

si X est une partie infinie de $\mathbb{D}$, $X \in \hat{P}(\mathbb{D})$ ssi $\perp \in X$.

La raison intuitive de cette condition est la suivante : à tout programme non déterministe et pour une entrée donnée, on peut associer "l'arbre des choix", chaque branche finie de cet arbre correspond à un calcul qui s'achève. Si donc le programme fournit une infinité de valeurs, son arbre de choix est infini ; d'après le lemme de König, il contient donc une branche infinie qui correspond à un calcul qui ne s'achève pas (Plotkin [101]).

$\hat{P}(\mathbb{D})$ est encore un domaine pour l'ordre de Milner, mais il a de plus la propriété intéressante suivante :

- tout élément infini de $\hat{P}(\mathbb{D})$ est la borne supérieure d'un ensemble dirigé d'éléments finis.

$\hat{P}(\mathbb{D})$ est donc "algébrique" (Plotkin [101], voir aussi Courcelle et Nivat [94]).

4. SÉMANTIQUE DES SCHÉMAS NON DÉTERMINISTES. APPEL PAR NOM

Soient Σ un alphabet gradué, $\Sigma' = \Sigma \cup \{\mathbf{ou}\}$ et $S = \{X_i = t_i \ / \ i \leq p,\ t_i \in T(\Sigma' \cup V)\}$ un schéma sur Σ.

Soit I une interprétation de Σ dans $F_C(\mathbb{D})$. On définit $\hat{I}(\mathbf{ou})$ de $\hat{P}(\mathbb{D}) \times \hat{P}(\mathbb{D})$ dans $P(\mathbb{D})$ par

$$\hat{I}\ (\mathbf{ou})\ (E_1,E_2) = E_1 \cup E_2$$

et pour $f \in \Sigma_n$, $\hat{I}(f)$ est une application de $[\hat{P}(\mathbb{D})]^n$ dans $P(\mathbb{D})$ définie par

$$\hat{I}(f)(E_1,\ldots,E_n) = \{f(d_1,\ldots,d_n) \ / \ d_i \in E_i\}.$$

<u>*Proposition 9.14*</u> *$\hat{I}$ est une interprétation de Σ' dans $F_C(\hat{P}(\mathbb{D}))$.*

<u>Démonstration</u> : On sait déjà [101] que la réunion est continue sur $\hat{P}(\mathbb{D})$ d'où $\hat{I}(\mathbf{ou}) \in F_C(\hat{P}(\mathbb{D}))$.

Soit maintenant $f \in \Sigma_p$ et montrons que $\hat{I}(f) \in F_C(\hat{P}(\mathbb{D}))$. Il faut d'abord montrer que si $E_1,\ldots,E_p \in \hat{P}(\mathbb{D})$, $\hat{I}(f)(E_1,\ldots,E_p) \in \hat{P}(\mathbb{D})$. Supposons donc que $E_0 = \hat{I}(f)(E_1,\ldots,E_p)$ ne contienne pas $\perp$, et supposons que E_i soit infini ; il contient donc $\perp$. On a alors $f(d_1,\ldots,d_{i-1},\perp,d_{i+1},\ldots,d_p) \in E_0$ et est donc différent de $\perp$, d'où, $\forall\ d_i \in E_i$, $f(d_1,\ldots,d_{i-1},d_i,d_{i+1},\ldots,d_p) = f(d_1,\ldots,d_{i-1},\perp,\ldots,d_p)$ à cause de la croissance de f. On a donc $E_0 = \hat{I}(f)(E_1,\ldots,\{\perp\},\ldots,E_p)$. De proche en proche, on montre ainsi que $E_0 = \hat{I}(f)(E'_1,\ldots,E'_p)$ où tous les E'_i sont finis, et donc E_0 est fini. D'où $\perp \notin E_0 \Longrightarrow E_0$ est fini et donc $E_0 \in \hat{P}(\mathbb{D})$.

Soient $X_1,\ldots,X_p$ des parties dirigées de $\hat{P}(\mathbb{D})$. Si $d_i \in \cup X_i$, il existe $E_i \in X_i$ tel que $d_i \in E_i$ et $\forall\ E'_i \in X_i$, $d_i \in E'_i$ ou $\perp \in E'_i$ (on peut le montrer en distinguant le cas où X_i est fini de celui où il est infini).

Si $d \in \hat{I}(f)(UX_1,\ldots,UX_p)$, il existe $d_1 \in UX_1,\ldots,d_p \in UX_p$ tels que $d = f(d_1,\ldots,d_p)$. On a donc

. $d \in \hat{I}(f)(E_1,\ldots,E_p)$ et

. $\forall\ E'_1,\ldots,E'_p$, il existe $d' \leq d$ tel que $d' \in \hat{I}(f)(E'_1,\ldots,E'_p)$.

On en déduit que $\hat{I}(f)(UX_1,\ldots,UX_p) \subset \cup\{\hat{I}(f)(E_1,\ldots,E_p) \ / \ E_i \in X_i\}$.

Réciproquement si $E_1 \leq E'_1,\ldots,E_p \leq E'_p$,
$\hat{I}(f)(E_1,\ldots,E_p) \leq \hat{I}(f)(E'_1,\ldots,E'_p)$ d'où
$\cup\{\hat{I}(f)(E_1,\ldots,E_p) \ / \ E_i \in X_i\} \leq \hat{I}(f)(UX_1,\ldots,UX_p)$.

On a donc obtenu des relations $A \subset B$ et $B \leq A$

- si $\perp \notin B$ alors $B = A$ et la démonstration est achevée
- si $\perp \in B$ alors $B - \{\perp\} \subset A$ d'où $B - \{\perp\} \subset A \subset B$

et $A = B$ ou $A = B - \{\perp\}$. Pour achever la démonstration, il suffit de montrer qu'alors $\perp \in A$, ce qui impliquera $A = B$.

Si $\perp \notin A$, alors A est fini et d'après ce que nous avons vu plus haut

$A = \hat{I}(f)(E'_1,\ldots,E'_p)$ avec

$$\begin{cases} E'_i \in X_i \text{ et } E'_i = UX_i \text{ si } UX_i \text{ est fini} \\ E'_i = \{\perp\} \text{ sinon.} \end{cases}$$

D'autre part si $\perp \in B$, $\forall\ E_i \in X_i$ il existe $d_i \in E_i$ tels que $\perp = f(d_1,\ldots,d_p)$. Ceci est encore vrai pour $E_i = E'_i$ quand UX_i est fini, et d'autre part si UX_i est infini, $\perp \in UX_i$ et donc $\forall\ E_i \in X_i$, $\perp \in E_i$. On a alors $f(d'_1,\ldots,d'_p) \leq f(d_1,\ldots,d_p) = \perp$ où

$$d'_i = \begin{cases} d_i \text{ si } UX_i \text{ est fini} \\ \perp \text{ sinon} \end{cases}$$

On en déduit que $\perp = f(d'_1,\ldots,d'_p) \in \hat{I}(f)(E'_1,\ldots,E'_p) = A$ ce qui est contradictoire. D'où $\perp \in B \Longrightarrow \perp \in A$.

<u>cqfd</u>.

Cette proposition nous permet d'utiliser les résultats des sections 1.3 et 2.2 ci-dessus. On peut donc en particulier énoncer :

Théorème 9.15 *Soit* $S = \{X_i = t_i \ / \ i \leq p\}$ *un schéma non déterministe sur* $T(\Sigma)$ *et soit* I *une interprétation de* Σ *dans* $F_C(\mathbb{D})$. *Alors le système* $\hat{I}(S)$ *a une solution, notée* $val_{\hat{I}}(S)$, *dans* $F_C(\hat{P}(\mathbb{D}))$. *De plus, si* L *est la solution dans* $P(T(\Sigma \cup \{ou, \Omega\}))$ *du système d'équations* $\{X_i = t_i + \Omega.O_{n_i} \ / \ i \leq p\}$, L *est un ensemble dirigé et* $val_{\hat{I}}(S) = \cup\{\hat{I}(u) \ / \ u \in L\}$.

Nous avons ainsi défini la sémantique du point fixe pour les programmes non déterministes dans le cas de l'appel par nom. Nous allons par cette méthode déterminer la sémantique du programme de l'exemple 9.13.

Exemple 9.16 Soit le programme

$$(x) = \underline{\text{si}}\ x \text{ est premier } \underline{\text{alors}}\ x\ \underline{\text{sinon}}\ \phi(x \text{ ou } x+1)$$

où les opérations et prédicats sur $\mathbb{N}$ sont trivialement étendus à $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$.

$\hat{\phi}_0$ vérifie $\hat{\phi}_0(E) = \{\perp\}$, $\forall\ E \subset \mathbb{N} \cup \{\perp\}$

On a donc $\hat{\phi}_1(E) = \bigcup_{x \in E} \underline{\text{si}}\ x \text{ est premier } \underline{\text{alors}}\ E \text{ sinon } \hat{\phi}_0(E \text{ ou } s(E))$

$$= \begin{cases} \{\perp\} & \text{si } x \text{ ne contient aucun nombre premier} \\ E & \text{si } x \text{ ne contient que des nombres premiers} \\ E \cup \{\perp\} & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\hat{\phi}_2(E) = \bigcup_{x \in E} \underline{\text{si}}\ x \text{ est premier } \underline{\text{alors}}\ E \text{ sinon } \hat{\phi}_1\ (E \text{ ou } s(E))$

$$= \begin{cases} E & \text{si } E \text{ ne contient que des nombres premiers} \\ \hat{\phi}_0(E \text{ ou } s(E)) & \text{si } E \text{ ne contient aucun nombre premier} \\ E \cup \hat{\phi}_0(E \text{ ou } s(E)) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} E \text{ si } E \text{ ne contient que des nombres premiers} \\ \{\perp\} \text{ si } \{x, x+1 \ / \ x \in E\} \text{ ne contient aucun nombre premier} \\ \{\perp\} \cup \{x, x+1 \ / \ x \in E\} \text{ sinon.} \end{cases}$$

En posant

$$\hat{\phi}_{i+1}(E) = \bigcup_{x \in E} \underline{\text{si}}\ x \text{ est premier } \underline{\text{alors}}\ E \text{ sinon } \phi_i(E \textbf{ ou } s(E))$$

on montre par induction que

$$\hat{\phi}_{i+1}(E) = \begin{cases} E \text{ si } E \text{ ne contient que des nombres premiers} \\ \{\perp\} \text{ si } \{x+p \ / \ x \in E,\ p \leq i\} \text{ ne contient aucun nombre premier} \\ \{\perp\} \cup \{x+p \ / \ x \in E,\ p \leq i\} \text{ sinon.} \end{cases}$$

La limite de cette suite croissante est donc définie par

$$\hat{\phi}(E) = \begin{cases} E \text{ si } E \text{ ne contient que des nombres premiers} \\ \{\perp\} \text{ si } \{x+p \ / \ x \in E,\ p \in \mathbb{N}\} \text{ ne contient aucun nombre premier} \\ \{\perp\} \cup \{x+p \ / \ x \in E,\ p \in \mathbb{N}\} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Or comme il existe une infinité de nombres premiers, si E n'est pas vide $\{x+p \ / \ x \in E,\ p \in \mathbb{N}\}$ contient nécessairement des nombres premiers, d'où

$$\hat{\phi}(E) = \begin{cases} E \text{ si } E \text{ ne contient que des nombres premiers} \\ \{\perp\} \cup \{x+p \ / \ x \in E,\ p \in \mathbb{N}\} \text{ sinon} \end{cases}$$

Dans le cas particulier ou $E = \{x\}$ on obtient alors

$$\hat{\phi}(E) = \begin{cases} x \text{ si } x \text{ est un nombre premier} \\ \{\perp\} \cup \{x+p \ / \ p \in \mathbb{N}\} \text{ sinon} \end{cases}$$

qui est bien la sémantique intuitive donnée à l'exemple 9.13.

$\perp$

<u>Exemple 9.17</u> Soit le schéma non déterministe

$$\phi(x) = x \textbf{ ou } \phi(s(x))$$

qu'on va interpréter dans le domaine plat $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$ par

$$I(s)(\perp) = \perp$$
$$I(s)(n) = n+1$$
$$I(\Omega) = \perp$$

On étend cette interprétation à $\hat{P}(\mathbb{D})$, d'où

$$\hat{I}(s)(E) = \{x+1 \ / \ x \in E\}. \quad (\text{si } x = \perp,\ x + 1 = \perp).$$

Soit $\hat{\phi} \in F_C(\hat{P}(\mathbb{D}))^1_1$ la solution du programme correspondant.

Il est facile de montrer que la solution de l'équation

$$\phi(x) = x \text{ ou } \phi(s(x)) + \Omega.0_1$$

dans $P(T(s,\text{ou},\Omega))$ est

$L = \{\Omega.0_1,\ x \text{ ou } \Omega.0_1,\ x \text{ ou } (s(x) \text{ ou } \Omega.0_1),$
$x \text{ ou } (s(x) \text{ ou } (s^2(x) \text{ ou } \Omega.0_1)),\ \ldots,\ x \text{ ou } (\ldots \text{ ou}(s^n(x) \text{ ou } \Omega.0_1)\ldots),\ldots\}.$

Soit alors $u \in L$, et donc $u = x \text{ ou } \ldots\ s^n(x) \text{ ou } \Omega.0_1$.
$\hat{I}(u)(E)$ est par définition de $\hat{I}$ égal à
$\hat{I}(x)(E) \cup \hat{I}(s(x))(E) \ldots \cup \hat{I}(s^n(x))(E) \cup \hat{I}(\Omega.0_1)(E)$
qui est aussi égal à
$E \cup \{x+1 \ / \ x \in E\} \cup \ldots \cup \{x+n \ / \ x \in E\} \cup \{\perp\}$ et donc
$\hat{I}(u)(E) = \{\perp\} \cup \{x+p \ / \ x \in E,\ p \leq n\}$. On en déduit que
$\hat{\phi}(E) = (\cup\{\hat{I}(u) \ / \ u \in L\})(E)$ et comme $F_C(\hat{P}(\mathbb{D}))$ est continu,
$\hat{\phi}(E) = \cup\{\hat{I}(u)(E) \ / \ u \in L\}$ et donc $\hat{\phi}(E) = \{\perp\} \cup \{x+n \ / \ x \in E,\ n \geq 0\}$.

Dans le cas particulier où E se réduit à un nombre m, on obtient

$$\hat{\phi}(m) = \{\perp\} \cup \{n \mid n \geq m\}$$

ce qui est bien l'interprétation intuitive du schéma étudié.

Comparons le résultat avec celui obtenu en prenant la sémantique du point fixe

- pour tout $E \subset N \cup \{\perp\}$, $\hat{\phi}_0(E) = \{\perp\}$
- $\hat{\phi}_1(E) = E \cup \hat{\phi}_0(s(E)) = E \cup \{\perp\}$
- $\hat{\phi}_2(E) = E \cup \hat{\phi}_1(s(E)) = E \cup s(E) \cup \{\perp\} = \{\perp\} \cup \{x,x+1 \ / \ x \in E\}$

On démontre alors aisément par induction que
$\hat{\phi}_{n+1}(E) = E \cup \hat{\phi}_n(s(E)) = \{\perp\} \cup \{x+p \ / \ x \in E, \ p \leq n\}$
et que la limite de cette suite croissante est définie par
$\hat{\phi}(E) = \{\perp\} \cup \{x+p \ / \ x \in E, \ p \in \mathbb{N}\}$.

$\perp$

On remarque sur l'exemple ci-dessus que

$$\hat{I}(x \ \mathbf{ou} \ \ldots \ s^n(x) \ \mathbf{ou} \ \Omega.0_1)(E) = \bigcup \{\hat{I}(v)(E) \ / \ v \in \{x,s(x),\ldots s^n(x),\Omega.0_1\}\}$$

Or l'ensemble $\{x,s(x),\ldots,s^n(x),\Omega.0_1\}$ est obtenu à partir de x **ou** ... $s^n(x)$ **ou** $\Omega.0_1$ en interprétant le symbole **ou** au niveau syntaxique dans un sens que nous allons préciser.

Soit τ la substitution de $T(\Sigma \cup \{\Omega,\mathbf{ou}\})$ dans $P(T(\Sigma \cup \{\Omega\}))$ définie par

. si $f \in \Sigma$, $\tau(f) = \{f\}$

. τ (**ou**) $= \{\Pi_2^1,\Pi_2^2\}$.

<u>*Proposition 9.18*</u> *Soit* I *une interprétation de* Σ *dans* $F_C(\mathbb{D})$.
Pour tout $u \in T(\Sigma \cup \{\Omega,\mathbf{ou}\})_n^1$, $E = \langle E_1,\ldots,E_n\rangle \in [\hat{P}(\mathbb{D})]^n$,
$\hat{I}(u)(E) = \bigcup\{\hat{I}(v)(E) \ / \ v \in \tau(u)\}$.

<u>Démonstration</u> : On démontre ce résultat par induction sur la construction de u :

- si $u \in T(\Sigma \cup \{\Omega\})$ alors $\tau(u) = \{u\}$ et le résultat est vrai

- si $u = u_1$ **ou** u_2, alors $\tau(u) = \tau(u_1) \cup \tau(u_2)$ et

$\hat{I}(u)(E) = \hat{I}(u_1)(E) \bigcup \hat{I}(u_2)(E) =$

$\bigcup \{\hat{I}(v)(E) \ / \ v \in \tau(u_1)\} \cup \bigcup \{\hat{I}(v)(E) \ / \ v \in \tau(u_2)\} =$

$\bigcup \{\hat{I}(v)(E) \ / \ v \in \tau(u_1) \ \cup \tau(u_2)\}$.

- si $u = f.\langle u_1,\ldots,u_p\rangle$ alors

$\tau(u) = \{f.\langle v_1,\ldots,v_p\rangle \ / \ v_i \in \tau(u_i)\}$ et

$\hat{I}(u)(E) = \hat{I}(f).\langle\hat{I}(u_1)(E),\ldots,\hat{I}(u_p)(E)\rangle =$

$\{I(f) \langle w_1,\ldots,w_p\rangle \ / \ w_i \in \hat{I}(u_i)(E)\} =$

$\{I(f) \langle w_1,\ldots,w_p\rangle \ / \ \exists \ v_i \in \tau(u_i) \text{ tq } w_i \in \hat{I}(v_i)(E)\}$.

D'autre part $\bigcup \{\hat{I}(w)(E) \ / \ w \in \tau(u)\} =$

$\bigcup \{\hat{I}(f.\langle w_1,\ldots,w_p\rangle)(E) \ / \ v_i \in \tau(u_i)\} =$

$\{I(f).\langle w_1,\ldots,w_p\rangle \ / \ v_i \in \tau(u_i), \ w_i \in \hat{I}(v_i)(E)\}$.

cqfd.

Comme le plus souvent, dans la pratique, les données d'un programme sont des valeurs et non pas des ensembles de valeurs (ainsi Plotkin [101] considère que l'interprétation d'un schéma non déterministe est une application de $\mathbb{D}^p$ dans $\hat{P}(\mathbb{D})$), nous allons envisager le cas où les ensembles E_i de la proposition 9.14 sont des singletons.

Proposition 9.19 *Soit* I *une interprétation de* Σ *dans* $F_C(\mathbb{D})$. *Pour tout* $u \in T(\Sigma \cup \{\Omega,\text{ou}\})^1_n$, *pour tout* $e = \langle e_1,\ldots,e_n\rangle \in \mathbb{D}^n \subset \hat{P}(\mathbb{D})^n$, $\hat{I}(u)(e) = \{I(v)(e) \ / \ v \in \tau(u)\}$.

Démonstration : Compte tenu de la proposition 9.18, il suffit de montrer que pour $v \in T(\Sigma \cup \{\Omega\})^1_n$, $\hat{I}(v)(e) = I(v)(e)$, ce qui se montre aisément par induction sur la construction de v.

cqfd.

Le magmoïde $T(\Sigma \cup \{\Omega, \mathbf{ou}\})$ est ordonné, ainsi que le magmoïde $T(\Sigma \cup \{\Omega\})$. Le magmoïde $P(T(\Sigma \cup \{\Omega\}))$ puet donc être muni d'un préordre de Milner. On montre que τ est alors une application croissante.

Proposition 9.20 *Soient* u *et* $v \in T(\Sigma \cup \{\Omega, \mathbf{ou}\})^1_n$. *Si* $u \leq v$, *alors* $\tau(u) \leq \tau(v)$.

Démonstration : Nous allons démontrer cette proposition par induction sur la construction de u :

- si $u = \Omega.0_n$, $\tau(u) = \{\Omega.0_n\}$ et $\tau(u) \leq \tau(v)$

- si $u \in T(\Sigma)^1_n$, alors $v = u$ et $\tau(u) = \{u\} = \tau(v)$

- si $u = u_1$ **ou** u_2, alors $v = v_1$ **ou** v_2 avec $u_1 \leq v_1$, $u_2 \leq v_2$ et donc $\tau(u_1) \leq \tau(v_1)$ et $\tau(u_2) \leq \tau(v_2)$. On a donc $\tau(u) = \tau(u_1) \cup \tau(u_2) \leq \tau(v_1) \cup \tau(v_2) = \tau(v)$.

- si $u = f.\langle u_1,\ldots,u_p\rangle$ alors $v = f.\langle v_1,\ldots,v_p\rangle$ avec $u_i \leq v_i$ et donc $\tau(u_i) \leq \tau(v_i)$. D'où $\tau(u) = \{f.\langle u'_1,\ldots,u'_p\rangle \ / \ u'_i \in \tau(u_i)\}$ et $\tau(v) = \{f.\langle v'_1,\ldots,v'_p\rangle \ / \ v'_i \in \tau(v_i)\}$. On en déduit alors aisément que $\tau(u) \leq \tau(v)$.

cqfd.

Soit $S = \{X_i = t_i\}$ un schéma non déterministe sur $T(\Sigma)$ et soit I une interprétation de Σ dans $F_C(\mathbf{D})$. Soit L la solution du système $\{X_i = t_i + \Omega.0_{n_i}\}$. D'après le théorème 9.15, $val^{\sim}_I(S) = \cup\{\hat{I}(u) \ / \ u \in L\}$ et donc $val^{\sim}_I(S)(E) = \cup\{\hat{I}(u)(E) \ / \ u \in L\}$. En posant $\tau(L) = \{\tau(u) \ / \ u \in L\}$, on obtient d'après la proposition 9.18,

$$val^{\sim}_I(S)(E) = \cup\{\bigcup_{v \in V} \hat{I}(v)(E) \ / \ V \in \tau(L)\}.$$

Comme L est un ensemble dirigé, $\tau(L)$ est un ensemble dirigé. Malheureusement le préordre de Milner n'étant pas un ordre complet, on ne peut pas parler de borne supérieure de $\tau(L)$. Cependant il est possible d'associer à $\tau(L)$, une partie, notée $\lim \tau(L)$, de $T_\infty(\Sigma)$, qu'on peut dans un certain sens considérer comme une limite et telle que

$$\mathrm{val}_{\hat{I}}(S)(E) = \bigcup_{v \in \lim \tau(L)} \hat{I}(v)(E).$$

Comme L est un ensemble dirigé dénombrable, on peut en extraire une suite croissante $K = \{u_i\}_i$ telle que $\forall\, u \in L$, il existe i tel que $u \leq u_i$. Cette suite $K = \{u_i\}_i$ peut être par exemple la suite de Kleene (Nivat [74]). On considère alors l'ensemble C(K) des suites croissante $\{v_i\}_i$ telles que $\forall\, i \quad v_i \in \tau(u_i)$ et on pose $\lim \tau(L) = \{\cup X \ / \ X \in C(K)\}$.

On en déduit que $\forall\, u_i \in K$, $\tau(u_i) \leq \lim \tau(L)$. En effet si $v_i \in \tau(u_i)$, il existe, puisque $\{\tau(u_i)\}_i$ est une suite croissante, une suite de C(K) qui contient v_i, d'où v_i est plus petit qu'un élément de $\tau(L)$. Réciproquement si $v \in \tau(L)$, v est la borne supérieure d'une suite de C(K) et est donc plus grand qu'un élément de $\tau(u_i)$. Il s'ensuit que $\forall\, u \in L$, $\tau(u) \leq \lim \tau(L)$.

Il se peut que la valeur de $\lim \tau(L)$ dépende du choix de la suite croissante K extraite de L, et donc que $\lim \tau(L)$ ne soit pas à proprement parler une limite. Mais ceci n'a aucune influence dans le résultat suivant.

Théorème 9.21 *Quels que soient le schéma non déterministe S et l'interprétation* I

$$\mathrm{val}_{\hat{I}}(S)(E) = \bigcup_{v \in \lim \tau(L)} \hat{I}(v)(E)$$

Démonstration : Comme la suite K a la même borne supérieure que L et que $\hat{I}$ est continue, $\mathrm{val}_{\hat{I}}(S) = \cup\{\hat{I}(u) \ / \ u \in K\}$ et donc
$\mathrm{val}_{\hat{I}}(S)(E) = \cup\{\bigcup_{v \in \tau(u)} \hat{I}(v)(E) \ / \ u \in K\}$.

D'après la définition de lim $\tau(L)$ et la croissance de $\hat{I}$

$$\bigcup_{v \in \lim \tau(L)} \hat{I}(v)(E) \leq \mathrm{val}_{\hat{I}}(S)(E).$$

Montrons maintenant que

$$\mathrm{val}_{\hat{I}}(S)(E) \leq \bigcup_{v \in \lim \tau(L)} \hat{I}(v)(E).$$

• Soit $d \neq \perp$ un élément de $\mathrm{val}_{\hat{I}}(S)(E)$; il existe donc $u \in K$, $v \in \tau(u)$ tel que $d \in \hat{I}(v)(E)$; il existe aussi un élément v' de lim $\tau(L)$ tel que $v \leq v'$ et donc $\hat{I}(v)(E) \leq \hat{I}(v')(E)$, d'où $d \in \hat{I}(v')(E) \subset \bigcup_{v \in \lim\ (L)} \hat{I}(v)(E)$.

• Soit $d \in \bigcup_{v \in \lim \tau(L)} \hat{I}(v)(E)$. Il existe donc $v \in \lim \tau(L)$ tel que $d \in \hat{I}(v)(E)$. Il existe aussi une suite $\{v_i\}_i$ de $C(K)$ dont la borne supérieure est v d'où $\forall\ i$, $\hat{I}(v_i)(E) \leq \hat{I}(v)(E)$ et donc quel que soit i $\exists\ d_i \in \hat{I}(v_i)(E)$ tel que $d_i \leq d$. On en déduit que $d_i \in \bigcup_{v \in \tau(u_i)} \hat{I}(v)(E)$.

Si pour tout i, $d_i = \perp$, alors $\perp \in \cup \{ \bigcup_{v \in \tau(u)} \hat{I}(v)(E) \ / \ u \in K\}$.

Sinon, il existe i_0 tel que $d_{i_0} = d$ et $d \in \cup\{ \bigcup_{v \in \tau(u)} \hat{I}(v)(E) \ / \ u \in K\}$.

cqfd.

Exemple 9.22 Soit le schéma $\phi(x) = g(x,\phi(x \text{ ou } s(x)))$.

Dans ce cas $L = \{u_0,\ldots,u_n,\ldots\}$ avec

$u_0 = \Omega.0_1$

$u_1 = g(x,\Omega.0_1)$

$u_2 = g(x,g(x \text{ ou } s(x),\Omega.0_1))$

$u_3 = g(x,g(x \text{ ou } s(x),g((x \text{ ou } s(x)) \text{ ou } s(x \text{ ou } s(x)),\Omega.0_1)))$

$\vdots$

On en déduit que $\tau(u_0) = \{\Omega.0_1\}$; $\tau(u_1) = \{g(x,\Omega.0_1)\}$,

$\tau(u_2) = \{g(x,g(x,\Omega.0_1)),\ g(x,g(s(x),\Omega.0_1))\}$,

$$\begin{aligned}\tau(u_3) = \{&g(x,g(x,g(x,\Omega.0_1))),\\ &g(x,g(x,g(s(x),\Omega.0_1))),\\ &g(x,g(x,g(ss(x),\Omega.0_1))),\\ &g(x,g(s(x),g(x,\Omega.0_1))),\\ &g(x,g(s(x),g(s(x),\Omega.0_1))),\\ &g(x,g(s(x),g(s(s(x)),\Omega.0_1)))\}\end{aligned}$$

et de manière générale

$$\tau(u_n) = \{g(s^{i_1}(x),g(s^{i_2}(x),\ldots,g(s^{i_n}(x),\Omega.0_1)\ldots)) \ /\ i_j \le j-1\}.$$

Dans ce cas, en prenant pour K la suite croissante $(u_0,u_1,\ldots,u_n,\ldots)$, on montre aisément que $\lim \tau(L)$ est l'ensemble d'arbres infinis $\{g(s^{i_1}(x),g(s^{i_2}(x),\ldots,g(s^{i_n}(x),\ldots)\ldots)) \ /\ i_p \le p-1\}$.

$\perp$

<u>Exemple 9.23</u> Considérons le schéma S :

$$\phi(x) = f(x,x,\phi(x \text{ ou } s(x))).$$

Le calcul de $\lim \tau(L)$ est très voisin de celui qui a été effectué dans l'exemple précédent. On obtient donc

$$\bar{L} = \lim \tau(L) = \{f(s^{i_1}(x),s^{j_1}(x),f(s^{i_2}(x),s^{j_2}(x),\ldots))) \ /\ i_p \le p-1,\ j_p \le p-1\ .\}$$

Considérons alors l'interprétation I à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$ définie par :

$$\begin{array}{ll} & I(s)(\perp) = \perp \\ \forall\ n\in\mathbb{N} & I(s)(n) = n+1 \\ \forall\ x,y\in\mathbb{N}\cup\{\perp\} & I(f)(\perp,x,y) = \perp \\ \forall\ n\in\mathbb{N},\ \forall\ x,y\in\mathbb{N}\cup\{\perp\}, & I(f)(n,x,y) = \begin{cases} x \text{ si } n \text{ est premier} \\ y \text{ sinon} \end{cases}\end{array}$$

Sous cette interprétation I, ce schéma devient le programme des exemples 9.13 et 9.16

$\phi(x)$ = <u>si</u> x est premier <u>alors</u> x <u>sinon</u> ϕ(x **ou** x+1)

dont on a déjà défini la sémantique par le point fixe. Pour un entier n quelconque nous allons calculer l'ensemble $\{\hat{I}(v)(n) \ / \ v \in \bar{L}\}$ = $\{I(v)(n) \ / \ v \in \bar{L}\}$, qui doit donc être égal à $\hat{\phi}(n)$ défini à l'exemple 9.16.

i) <u>n est premier</u>. Comme tout élément v de $\bar{L}$ est de la forme $f(x,x,f(\ldots))$, on a
$I(v)(n)$ = <u>si</u> n est premier <u>alors</u> n <u>sinon</u> $I(f(\ldots)))(n) = n$
d'où $\{\hat{I}(v)(n) \ / \ v \in \bar{L}\} = \{n\}$.

ii) <u>n n'est pas premier</u>. Soit $v = f(s^{i_1}(x),s^{j_1}(x),f\ldots)) \in \bar{L}$.
Deux cas se présentent :

- la suite d'entiers i_1+n, $i_2+n,\ldots,i_p+n,\ldots$ ne comporte aucun nombre premier. Pour toute approximation finie v' de v, $I(v')(n) = \perp$ et donc $I(v)(n) = \perp$

- sinon, soit p le plus petit indice tel que i_p+n est premier ; alors $I(v)(n) = n+j_p$ d'où $I(v) \in \{\perp\} \cup \{n+p \ / \ p \in \mathbb{N}\}$.

Soit maintenant $v = f(s^{i_1}(x),s^{j_1}(x),\ldots))$ où $\forall$ p, $i_p = 0$ appartenant à $\bar{L}$, comme n n'est pas premier $i_p+n = n$ n'est pas premier ; on est alors dans le premier cas ci-dessus, i.e. $I(v)(n) = \perp$ d'où $\perp \in \{I(v)(n) \ / \ v \in \bar{L}\}$.

Soit enfin un entier m = n+q supérieur ou égal à n. Il existe un entier r>0 tel que n+r soit un nombre premier. Soit $\ell = \sup(q,r)$. Prenons l'élément $v = f(s^{i_1}(x),s^{j_1}(x),f(s^{i_2}(x),s^{j_2}(x),\ldots))$ tel que

pour $i \leq k \leq \ell$, $i_k = 0$ et $j_k = 0$
pour $k > \ell$, $i_k = r$ et $j_k = q$.

On a donc si $1 \leq k \leq \ell$, $i_k = j_k = 0 \leq k-1$ et
si $k > \ell$, $i_k = r \leq \ell \leq k-1$, $j_k = q \leq \ell \leq k-1$; d'où $v \in \bar{L}$.

On est alors dans le cas 2 ci-dessus avec $p = \ell+1$, d'où $I(v)(n) = n + j_{\ell+1} = n + q = m$.

D'où si $m \geq n$, $m \in \{I(v)(n) \ / \ v \in \bar{L}\}$.

On en déduit que si n n'est pas premier

$$\{I(v)(n) \ / \ v \in \bar{L}\} = \{\perp\} \cup \{n+p \ / \ p \in \mathbb{N}\}.$$

On retrouve donc bien la sémantique du point fixe.

$\perp$

Les résultats de ce paragraphe peuvent donc se résumer ainsi : les interprétations discrètes d'un schéma non déterministe sont obtenues en interprétant un ensemble d'arbres (finis ou infinis), ce qui est donc une généralisation, dans le cas discret, du résultat analogue pour les schémas déterministes.

5. SÉMANTIQUE DES SCHÉMAS NON DÉTERMINISTES. APPEL PAR VALEUR

Nous avons déjà fait remarquer que dans l'interprétation d'un schéma non déterministe, la différence entre l'appel par valeur et l'appel par nom provenait de la façon de définir l'effet des torsions sur les parties d'un ensemble. Dans le cas de l'appel par nom, on a par exemple $<1 ; x_1, x_1>.E = E \times E$ et dant le cas de l'appel par valeur $<1 ; x_1, x_1>.E =$ diagonale $(E \times E)$. Dans le cas où E est par exemple une partie d'une fibre 1-p d'un magmoïde $T(\Sigma)$, on retrouve exactement la distinction entre la composition dans le magmoïde projetable des parties $P(T(\Sigma))$ et la composition dans le magmoïde additif $P_A(T(\Sigma))$. De manière plus générale, pour définir la sémantique d'un schéma de programme non déterministe avec appel par valeur, il faudra utiliser des interprétations "additives", c'est-à-dire telles que si $\bar{t}$ est l'interprétation d'un terme t, l'ensemble obtenu en appliquant $\bar{t}$ à l'ensemble $E_1 \cup E_2$ est égal à la réunion de $\bar{t}$ appliqué à E_1 et de $\bar{t}$ appliqué à E_2.

Ceci impose que la torsion $<1 ; x_1, x_1>$ ne soit plus interprétée comme l'application de $P(\mathbf{D})$ dans $P(\mathbf{D})^2$ qui à E associe $E \times E$, mais comme la relation de $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}$ définie par $r = \{<d,d ; d> / d \in \mathbf{D}\}$; et en effet dans ce cas on aura bien $r.E \subset D^2 = \{<d,d> / d \in E\}$.

On est donc amené à prendre comme domaine d'interprétation le magmoïde relationnel $R(\mathbf{D})$. L'interprétation canonique du symbole **ou** est alors bien évidemment la relation $\{<d_1;d_1,d_2> / d_2,d_2 \in \mathbf{D}\} \cup \{<d_2;d_1,d_2> / d_1,d_2 \in \mathbf{D}\}$ $\subset \mathbf{D} \times \mathbf{D}^2$ qui composée avec $E_1 \times E_2 \subset \mathbf{D}^2 = \mathbf{D}^2 \times \mathbf{D}^0$ donne bien $E_1 \cup E_2 \subset \mathbf{D} = \mathbf{D}^1 \times D^0$ (si $E_1 \times E_2 \neq \emptyset$). Mais alors l'interprétation de $<1;x_1,x_1>.$**ou** est la relation
$\{<d_1,d_1;d_1,d_2> / d_1,d_2 \in \mathbf{D}\} \cup \{<d_2,d_2;d_1,d_2> / d_1,d_2 \in \mathbf{D}\}$
tandis que l'interprétation de
$(\mathbf{ou} \otimes \mathbf{ou}).<2;x_1,x_2,x_1,x_2> = <\mathbf{ou},\mathbf{ou}>$ est

$\{<d_1,d_3;d_1,d_2,d_3,d_4>, <d_1,d_4 ; d_1,d_2,d_3,d_4>, <d_2,d_3;d_1,d_2,d_3,d_4>,$
$<d_2,d_4;d_1,d_2,d_3,d_4>\}\cdot\{<d_1,d_2,d_1,d_2;d_1,d_2>\} =$
$\{<d_1,d_1;d_1,d_2>, <d_1,d_2;d_1,d_2>, <d_2,d_1;d_1,d_2> , <d_2,d_2;d_1,d_2>\}.$

Les deux termes $<1;x_1,x_1>.\mathbf{ou}$ et $<\mathbf{ou}\ \mathbf{ou}>$ ont donc des interprétations différentes, alors qu'ils sont égaux en tant qu'éléments du magmoïde projetable libre T (**ou**), (et que dans un $\Sigma \cup \{\mathbf{ou}\}$-magma libre il est également impossible de différencier f(x,x) [x **ou** y / x] et f(x **ou** y, x **ou** y).).

Pour définir la sémantique algébrique du schéma non déterministe $\{X_i = t_i \ / \ i \leq p\}$ sur Σ et $\{X_1,\ldots,X_p\}$, on ne peut donc plus le faire à partir de la solution du système d'équations $\{X_i = t_i + \Omega.0_{n_i} \ / \ i \leq p\}$ dans le magmoïde $P(T(\Sigma))$ - ou, ce qui revient au même quant au résultat, dans le Σ-magma libre - car dans ce cas, il est impossible de faire les distinctions signalées précédemment. Il faut donc considérer les termes t_i non pas comme appartenant à $T(\Sigma \cup V)$, mais à un magmoïde contenant les torsions, et où ces torsions ne sont pas calculées.

Ce magmoïde est $\tilde{T}(\Sigma' \cup V \cup \Theta)$, le magmoïde libre engendré par Σ, V et Θ, qui contient bien Σ, V et les torsions et où ces torsions ne sont pas calculées. On sera donc amené à résoudre des systèmes d'équations dans le magmoïde $P_A(\tilde{T}(\Sigma' \cup \Theta))$, ce que nous avons fait au chapitre précédent.

Nous allons donc pouvoir définir pour les schémas de programme non déterministe avec appel par valeur la sémantique du point fixe et la sémantique algébrique. La démarche fondamentale sera la même que celle qui a été faite dans le cas de l'appel par nom, avec la différence qu'on utilise des magmoïdes non projetables et que les résultats que l'on obtiendra ne découlent pas des résultats déjà connus pour la sémantique des schémas déterministes.

Soit $\mathbb{D}$ un domaine plat. Pour toute relation r de $R(\mathbb{D})^1_n$, $r.<d_1,\ldots,d_n> = \{d \in \mathbb{D} \ / \ <d;d_1,\ldots,d_n> \in r\}$. On définit $R_+(\mathbb{D})^1_n \subset R(\mathbb{D})^1_n$ par $r \in R_+(\mathbb{D})^1_n$ ssi

i) $\forall\ d_1,\ldots,d_n \in \mathbb{D},\ r.<d_1,\ldots,d_n> \in \hat{P}(\mathbb{D})$

ii) si $D_1,\ldots,D_n$ sont des parties dirigées de $\mathbb{D}$, $\{r.<d_1,\ldots,d_n> \ / \ d_i \in D_i\}$ admet une borne supérieure qui est $r.<\cup D_1,\ldots,\cup D_n> \in \hat{P}(\mathbb{D})$.

Comme $\hat{P}(\mathbb{D})$ est un ensemble ordonné complet pour le préordre de Milner, $R_+(\mathbb{D})^1_n$ est encore complet pour l'ordre défini par

$r \leq r'$ ssi $\forall\, d_1,\ldots,d_n \in \mathbb{D}$, $r.\langle d_1,\ldots,d_n\rangle \leq r'.\langle d_1,\ldots,d_n\rangle$.

Soit un alphabet gradué Σ. On peut plonger $\tilde{T}(\Sigma \cup \Theta)$ dans un magmoïde ordonné $\tilde{T}(\Sigma \cup \Theta \cup \bar{\Omega})$ défini de la façon suivante :

pour chaque entier $p \geq 0$ et $q \geq 0$, soit Ω_q^p un nouveau symbole n'appartenant pas à Σ et soit $\bar{\Omega} = \{\Omega_q^p \;/\; p \geq 0,\ q \geq 0\}$. On définit sur $\tilde{T}(\Sigma \cup \Theta \cup \bar{\Omega}\}$ la relation d'ordre notée $\leq$ qui est la plus petite relation d'ordre compatible avec les produits de composition et tensoriel qui vérifie

$$\forall\, p,\ q,\ \forall\, u \in \tilde{T}(\Sigma \cup \Theta \cup \bar{\Omega}),\ \Omega_q^p \leq u.$$

Cette construction reste valable lorsqu'on remplace Σ par $\Sigma \cup \{\mathbf{ou}\}$.

Soit une interprétation I de $T(\Sigma)$ dans $F_C(\mathbb{D})$. On étend I en un morphisme $\bar{I}$ de $\tilde{T}(\Sigma \cup \Theta \cup \bar{\Omega} \cup \mathbf{ou})$ dans le magmoïde relationnel $R(\mathbb{D})$ par

- si $f \in \Sigma_p$, $\bar{I}(f) = \{\langle I(f)(d_1,\ldots,d_p)\ ;\ d_1,\ldots,d_p\rangle \;/\; d_i \in \mathbb{D}\}$

- $\bar{I}\ (\mathbf{ou}) = \{\langle d_1;d_1,d_2\rangle,\ \langle d_2;d_1,d_2\rangle \;/\; d_1,d_2 \in \mathbb{D}\ \}$

- si $\theta \in \Theta_q^p$, $\bar{I}(\theta) = \{\langle d_{\theta(1)},\ldots,d_{\theta(p)}\ ;\ d_1,\ldots,d_q\rangle \;/\; d_i \in \mathbb{D}\}$

- $\bar{I}(\Omega_q^p) = \{\langle \perp,\ldots,\perp\ ;\ d_1,\ldots,d_q\rangle \;/\; d_i \in \mathbb{D}\}$.

Soit $S = \{X_i = t_i \;/\; i \leq p\}$ un schéma non déterministe sur Σ et $V = \{X_1,\ldots,X_p\}$, avec $d(X_i) = n_i$. Comme $t_i \in T(\Sigma \cup V \cup \mathbf{ou})$, t_i s'écrit de façon unique $\tilde{t}_i.\theta_i$ avec $\tilde{t}_i \in \tilde{T}(\Sigma \cup V \cup \mathbf{ou})$ et $\theta_i \in \Theta$. On pose $E_I(S) = R_+(\mathbb{D})^1_{n_1} \times \ldots \times R_+(\mathbb{D})^1_{n_p}$. Comme chacun des $R_+(\mathbb{D})^1_{n_i}$ est un ensemble ordonné complet, $E_I(S)$ est aussi un ensemble ordonné complet pour l'ordre produit. On définit alors l'application $\bar{S}_I$ de $E_I(S)$ dans lui-même par :

. soit $r = \langle r_1,\ldots,r_p\rangle \in E_I(S)$,

. soit ϕ_r le morphisme de $\tilde{T}(\Sigma \cup V \cup \mathbf{ou})$ dans $R(\mathbb{D})$ tel que

- si $f \in \Sigma$, $\phi_r(f) = \bar{I}(f)$

- si $X_i \in V$, $\phi_r(X_i) = r_i$

- $\phi_r(\mathbf{ou}) = \bar{I}(\mathbf{ou})$.

$\bar{S}_I(r)$ est alors égal à $<\phi_r(\tilde{t}_1).\bar{I}(\Theta_1),\ldots,\phi_r(\tilde{t}_p).\bar{I}(\Theta_p)>$.

Proposition 9.24 *$\bar{S}_I$ est une application continue de $E_I(S)$ dans lui-même.*

Démonstration : Remarquons tout d'abord que nous n'avons pas montré que si r appartenait à $E_I(S)$, $\bar{S}_I(r)$ appartenait à $E_I(S)$. Nous allons le faire en même temps que la démonstration de continuité.

A Supposons donc que r est la borne supérieure d'un ensemble dirigé R d'éléments de $E_I(S)$. Nous allons d'abord montrer que pour $\tilde{u} \in \tilde{T}(\Sigma \cup V \cup \mathbf{ou})^1_m$, $\{\phi_{r'}(\tilde{u}) \ / \ r' \in R\}$ est un ensemble dirigé dont la borne supérieure est $\phi_r(\tilde{u}) \in R_+(\mathbf{D})^1_m$.

Il est clair que $\phi_r(Id_1) = \{<d;d> \ / \ d \in \mathbf{D}\} \in R_+(\mathbf{D})^1_1$.
D'autre part, puisque I(f) est continu, $\bar{I}(f) \in R_+(\mathbf{D})^1_p$.
Enfin $\bar{I}(\mathbf{ou}).<d_1,d_2> = \{d_1,d_2\}$ et on en déduit aisément que $\bar{I}(\mathbf{ou}) \in R_+(\mathbf{D})^1_2$.

Comme $\tilde{u}$ peut s'écrire $\tilde{u}_0.(\tilde{u}_1 \otimes \tilde{u}_2 \otimes \ldots \otimes \tilde{u}_m)$ et que $\forall\ r \in E_I(S)$, $\phi_r(\tilde{u}) = \phi_r(\tilde{u}_0).(\phi_r(\tilde{u}_1) \otimes \ldots \otimes \phi_r(\tilde{u}_m))$, il suffit alors, pour obtenir le résultat voulu en raisonnant par récurrence sur la taille de $\tilde{u}$, de montrer que

B Si R est une partie dirigée de $R_+(\mathbf{D})^1_m$ dont la borne supérieure est r, et si pour $i \leq m$, R_i est une partie dirigée de $R_+(\mathbf{D})^1_{q_i}$ de borne supérieure r_i, alors $\{r'.(r'_1 \otimes \ldots \otimes r'_m) \ / \ r' \in R,\ r'_i \in R_i\}$ est un ensemble dirigé dont la borne supérieure est
$r.(r_1 \otimes \ldots \otimes r_m) \in R_+(\mathbf{D})^1_{q_1+q_2+\ldots+q_m}$.

Pour montrer que l'ensemble $\{r'.(r'_1 \otimes \ldots \otimes r'_m) \ / \ r' \in R,\ r'_i \in R_i\}$ est dirigé, il suffit de montrer que l'ordre sur $R_+(\mathbb{D})^1_m$ est "compatible avec les produits", i.e.

$$r' \leq r'',\ r'_i \leq r''_i \Longrightarrow r'.(r'_1 \otimes \ldots \otimes r'_m) \leq r''.(r''_1 \otimes \ldots \otimes r''_m).$$

Par définition, cette dernière inégalité signifie $\forall\ d_1,\ldots,d_\ell$,

$$r'.(r'_1 \otimes \ldots \otimes r'_m).\langle d_1,\ldots,d_\ell\rangle \leq r''.(r''_1 \otimes \ldots \otimes r'_m).\langle d_1,\ldots,d_\ell\rangle.$$

Soit $d^1_1,\ldots,d^1_{p_1},\ldots,d^m_1,\ldots,d^m_{p_m} \in \mathbb{D}$. Comme $r'_i \leq r''_i$, $E'_i = r'_i.\langle d^i_1,\ldots,d^i_{p_i}\rangle \leq r''_i.\langle d^i_1,\ldots,d^i_{p_i}\rangle = E''_i$. D'autre part $r'.(r'_1 \otimes \ldots \otimes r'_m).\langle d^1_1,\ldots,d^m_{p_m}\rangle = E'$, $r'.(E'_1 \times \ldots \times E'_m)$ et $r''(r''_1 \otimes \ldots \otimes r''_m).\langle d^1_1,\ldots,d^m_{p_m}\rangle = r''.(E''_1 \times\ldots\times E''_m) = E''$. Montrons que $E' \leq E''$. Soit $d \in E$; il existe $d'_1 \in E'_1,\ldots,d'_m \in E'_m$ tels que $\langle d;d'_1,\ldots,d'_m\rangle \in r'$. Comme $E'_i \leq E''_i$, il existe $d''_1,\ldots d''_m$ tels que $d''_i \in E''_i$ et $d''_i \geq d'_i$. A cause de la continuité de r'' (condition ii de la définition de $R_+(\mathbb{D})^1_n$) il existe $d' \geq d$ tel que $\langle d';d''_1,\ldots,d''_m\rangle \in r'$ et comme $r' \leq r''$, il existe $d'' \geq d'$ tel que $\langle d'';d''_1,\ldots,d''_m\rangle \in r''$. Mais comme $d''_i \in E''_i$, $d'' \in r''(E''_1 \times \ldots \times E''_m) = E''$. De la même façon, on montre que si $d'' \in E''$, il existe $d \in E'$ tel que $d \leq d''$, d'où $E' \leq E''$.

L'ensemble $\{r'.(r'_1 \otimes \ldots \otimes r'_m) \ / \ r' \in R,\ r'_i \in R_i\}$ étant dirigé, il est facile de montrer que sa borne supérieure est $r.(r_1 \otimes \ldots \otimes r_m)$. D'après ce qui précède on a $\quad r'.(r'_1 \otimes \ldots \otimes r'_m) \leq r.(r_1 \otimes \ldots \otimes r_m)$.

Pour démontrer l'égalité, on considère un élément d de $r.(r_1 \otimes \ldots \otimes r_n).\langle d^1_1,\ldots,d^m_{p_m}\rangle$; cet élément se trouve nécessairement dans un $r'.(r_1 \otimes \ldots \otimes r_m).\langle d^1_1,\ldots,d^m_{p_m}\rangle$; ceci entraîne l'existence d'éléments d_i dans $r_i.\langle d^i_1,\ldots,d^i_{p_i}\rangle$ tels que $\langle d;d_1,\ldots,d_m\rangle \in r'$. Mais ces d_i sont aussi dans des $r'_i.\langle d^i_1,\ldots,d^i_{p_i}\rangle$ et donc $d \in r'.(r'_1 \otimes \ldots \otimes r'_m).\langle d^1_1,\ldots,d^m_{p_m}\rangle$

Le fait que $r.(r_1 \otimes \ldots \otimes r_m) \in R_+(\mathbb{D})^1_\ell$ s'obtient par des considérations analogues.

$\boxed{C}$ Comme $\bar{S}_I(r) = \langle \phi_r(\tilde{t}_1).\bar{I}(\Theta_1)\ldots,\phi_r(\tilde{t}_p).\bar{I}(\Theta_p)\rangle$,

et compte tenu de ce qui précède, il ne suffit plus, pour achever la démonstration de la proposition, que de démontrer : si R est une partie dirigée de $R_+(\mathbb{D})^1_m$ dont la borne supérieure est r, et si $\Theta \in \Theta^m_n$, $\{r'.\bar{I}(\Theta) \ / \ r' \in R\}$ est un ensemble dirigé dont la borne supérieure est $r.\bar{I}(\Theta) \in R_+(\mathbb{D})^1_n$. Ceci découle immédiatement du fait que $r.\bar{I}(\Theta).\langle d_1,\ldots,d_n\rangle = r.\langle d_{\Theta(1)},\ldots,d_{\Theta(m)}\rangle$.

cqfd.

Comme l'application $\bar{S}_I$ est continue, on en déduit que la borne supérieure de la suite croissante $\bar{S}^n_I(\langle \perp_{n_1},\ldots,\perp_{n_p}\rangle)$, où $\perp_{n_i}$ est la relation $\{\langle \perp;d_1,\ldots,d_{n_i}\rangle\}$, notée $val_I(S)$ est le plus petit élément r de $E_\perp(S)$ qui vérifie $r = \bar{S}_I(r)$.

Nous obtenons ainsi une définition de la sémantique d'un schéma non déterministe avec appel par valeur par la méthode du point fixe.

Exemple 9.25 Reprenons le schéma de l'exemple 9.23 $\phi(x) = f(x,x,\phi(x \text{ ou } s(x)))$ avec son interprétation habituelle. Nous laissons apparaître la décomposition $\tilde{u}.\Theta$ en le réécrivant sous la forme

$\phi(x_1) = f(x_1,x_2,\phi(x_3 \text{ ou } s(x_4))).\langle 1;x_1,x_1,x_1,x_1\rangle =$

$f.(Id_2 \otimes \phi).(Id_2 \otimes \text{ou}).(Id_3 \otimes s).\langle 1;x_1,x_1,x_1,x_1\rangle$.

Si $r \in R_+(\mathbb{N} \cup \{\perp\})^1_1$ alors, en appliquant la définition de $\bar{S}_I$, on voit que $\bar{S}_I(r) = \bar{I}(f).\bar{r}$

avec $\bar{r} = \{<d,d,d';d> \ / \ <d',d> \in r \text{ ou } <d',d+1> \in r\}$

et donc $\bar{S}_I(r) = \{<d';d> \ / \ \text{si } d \text{ est premier alors } d'' = d,$

$\text{sinon } <d'',d> \in r \text{ ou } <d'',d+1> \in r\}$

$$\text{d'où } \bar{S}_I(r).<d> = \begin{cases} \{d\} \text{ si } d \text{ est premier} \\ r<d> \cup r.<d+1> \text{ sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que pour $x \in \mathbb{N}$

$$r_0.<n> = \{\perp\}$$

$$r_1.<n> = \bar{S}_I(r_0).<n> = \begin{cases} \{n\} \text{ si } n \text{ est premier} \\ \{\perp\} \text{ sinon} \end{cases}$$

$$r_2.<n> = \bar{S}_I(r_1).<n> = \begin{cases} \{n\} \text{ si } n \text{ est premier} \\ r_1.<n> \cup r_1.<n+1> \text{ sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \{n\} \text{ si } n \text{ est premier} \\ \{\perp,n+1\} \text{ si } n \text{ n'est pas premier et } n+1 \text{ est premier} \\ \{\perp\} \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$r_3.<n> = \begin{cases} \{n\} \text{ si } n \text{ est premier} \\ r_2.<n> \cup r_2.<n+1> \text{ sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \{n\} \text{ si } n \text{ est premier} \\ \{\perp,n+1\} \text{ sinon et si } n+1 \text{ est premier} \\ \{\perp,n+2\} \text{ sinon et si } n+2 \text{ est premier} \\ \{\perp\} \text{ sinon} \end{cases}$$

On montre alors aisément par récurrence que

$$r_{p+1}.\langle n\rangle = \begin{cases} \{n\} \text{ si } n \text{ est premier} \\ \{\perp, n+q\} \text{ si } n+q \text{ est le plus petit nombre premier supérieur à } n \\ \qquad\qquad \text{et } q \leq p \\ \{\perp\} \text{ sinon} \end{cases}$$

Comme il existe une infinité de nombres premiers, la limite de cette suite croissante est définie par

$$r.\langle n\rangle = \begin{cases} \{n\} \text{ si } n \text{ est premier} \\ \{\perp, n'\} \text{ sinon, où } n' \text{ est le plus petit nombre premier supérieur à } n. \end{cases}$$

On retrouve donc bien la sémantique intuitive de l'exemple 9.13.

$\perp$

Pour définir la sémantique algébrique du schéma non déterministe $S = \{X_i = t_i \ / \ i \leq p\}$ dans le cas de l'appel par valeur, on lui associe le système d'équations $S' = \{X_i = t_i + \Omega^1_{n_i} \ / \ i \leq p\}$ qu'on résoud dans $P_A(\tilde{T}(\hat{\Sigma}))$, avec $\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \{\mathbf{ou}\} \cup \Theta \cup \bar{\Omega}$. Par des méthodes identiques à celles utilisées au chapitre précédent, on montre que cette solution est la limite de la suite croissante (pour l'inclusion)

$$L^{(i)} \subset P_A(\tilde{T}(\hat{\Sigma}))^1_{n_1} \times \ldots \times P_A(\tilde{T}(\hat{\Sigma}))^1_{n_p}$$

définie par

$$L^{(0)} = \langle \emptyset, \ldots, \emptyset \rangle$$

$$L^{(i+1)} = \langle \sigma_{L^{(i)}}(t_1 + \Omega^1_{n_1}), \ldots, \sigma_{L^{(i)}}(t_p + \Omega^1_{n_p}) \rangle$$

où σ_L est la substitution de $\mathfrak{T}(\hat{\Sigma} \cup V)$ dans $P_A(\mathfrak{T}(\hat{\Sigma}))$ définie par

$$\text{pour } u \in \hat{\Sigma},\ \sigma_L(u) = \{u\}$$

$$\text{pour } u = X_i \in V,\ \sigma_L(u) = L_i,$$

avec $L = \langle L_1,\ldots,L_p\rangle$.

Nous pouvons démontrer pour la limite L de cette suite un résultat analogue à celui de Nivat [74]

Proposition 9.26 *L est une partie dirigée de* $P_A(\mathfrak{T}(\hat{\Sigma}))^1_{n_1} \times \ldots \times P_A(\mathfrak{T}(\hat{\Sigma}))^1_{n_p}$.

Démonstration : Comme la suite $\{L^{(i)}\}_i$ est croissante, il suffit de montrer que chacun des $L^{(i)}$ est dirigé. En effet, on aura alors : si $u \in L$ et $v \in L$, il existe i tel que $u \in L^{(i)}$ et $v \in L^{(i)}$, et il existe donc $w \in L^{(i)} \subset L$ tel que $u \leq w$ et $v \leq w$.

Montrons alors par récurrence que $L^{(i)}$ est dirigée.
Comme $L^{(0)} = \langle\emptyset,\ldots,\emptyset\rangle$, $L^{(1)} = \langle\sigma_\emptyset(t_1+\Omega^1_{n_1}),\ldots,\sigma_\emptyset(t_p+\Omega^1_{n_p})\rangle$.

Mais $\sigma_\emptyset(t_i) = \begin{cases} \{t_i\} \text{ si } t_i \in \mathfrak{T}(\hat{\Sigma}) \\ \emptyset \text{ sinon} \end{cases}$

et $\sigma_\emptyset(\Omega^1_{n_1}) = \{\Omega^1_{n_1}\}$.

Chacun des $\sigma_\emptyset(t_i+\Omega^1_{n_i})$ est alors un ensemble dirigé qui admet un plus grand élément, à savoir :

$$u_i^{(1)} = \begin{cases} \Omega^1_{n_i} \text{ si } \sigma_\emptyset(t_i) = \emptyset \\ t_i \text{ sinon.} \end{cases}$$

$L^{(1)}$ a donc un plus grand élément $u^{(1)}$ et donc $L^{(1)}$ est dirigé.

Supposons que $L^{(i)}$ admette un plus grand élément $u^{(i)} = \langle u_1^{(i)},\ldots,u_p^{(i)}\rangle$. On définit alors le morphisme ϕ_i de $\mathcal{T}(\hat{\Sigma} \cup V)$ dans $\mathcal{T}(\hat{\Sigma})$ par :

- si $v \in \hat{\Sigma}$, $\phi_i(v) = v$
- si $v = X_j \in V$, $\phi_i(X_j) = u_j^{(i)}$.

On démontre alors aisément par induction sur la taille de l'élément v de $\mathcal{T}(\hat{\Sigma} \cup V)$, puisque l'ordre sur $\mathcal{T}(\hat{\Sigma})$ est compatible avec les produits que

$$\forall\, v \in \sigma_L(i)(w),\ v \leq \phi_i(w).$$

On en déduit que

$$\forall\, v \in \sigma_L(t_j),\qquad v \leq \phi_i(t_j)$$

$$\text{et}\qquad \forall\, v \in \sigma_L(i)(\Omega^1_{n_j}),\ v \leq \phi_i(\Omega^1_{n_j}) = \Omega^1_{n_j}$$

et donc $\forall\, v \in \sigma_L(i)(t_j+\Omega^1_{n_j})$, $v \leq \phi_i(t_j) \leq \sigma_L(i)(t_j) \subset L_j^{(i+1)}$.
D'où tout élément de $L^{(i+1)}$ est majoré par

$$\langle \phi_i(t_1),\ldots,\phi_i(t_p)\rangle$$

Comme chacun des $L^{(i)}$ admet un plus grand élément, c'est un ensemble dirigé.

cqfd.

Proposition 9.27 *Si* u *et* v *sont deux éléments de* $\mathcal{T}(\Sigma \cup \{\mathbf{ou}\} \cup \Theta \cup \{\Omega^1_p \,/\, p \in \mathbb{N}\})^1_n$, *et si* $u \leq v$ *alors* $\bar{I}(u) \leq \bar{I}(v)$.

Démonstration :

. Si $u \in \tilde{T}(\Sigma \cup \{\mathbf{ou}\} \cup \Theta_n^1$ alors $u \leq v$ entraîne $u = v$ et donc $\bar{I}(u) = \bar{I}(v)$.

. Si $u = \Omega_q^1.w$ alors $\bar{I}(u) = \{<\perp;d_1,\ldots,d_n>\}$ et donc $\bar{I}(u) \leq \bar{I}(v)$.

. Sinon u s'écrit nécessairement

$u_0.(u_1 \otimes \ldots \otimes u_p)$ avec $u_0 \in \tilde{T}(\Sigma \cup \{\mathbf{ou}\} \cup \Theta)_p^1$ et

u_i est : - soit de la forme $\Omega_{r_i}^1.w_i$

- soit appartient à $\tilde{T}(\Sigma \cup \{\mathbf{ou}\} \cup \Theta)_{q_i}^{m_i}$

(Ceci peut se démonter par induction sur la taille de u, en utilisant le fait que $u.(v_1.w_1 \otimes v_2) = u.(v_1 \otimes Id_{n_2}).(w_1 \otimes v_2)$.).

Dans ce cas v est nécessairement de la forme $u_0.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p)$ avec $v_i = u_i$ si $u_i \in \tilde{T}(\Sigma \cup \{\mathbf{ou}\} \cup \Theta)$. Il est facile alors d'en déduire, compte tenu du fait que $\bar{I}(u_0) \in R_+(\mathbb{D})_p^1$, que $\bar{I}(u) \leq \bar{I}(v)$.

cqfd.

Il résulte des deux propositions précédentes que $\{<\bar{I}(u_1),\ldots,\bar{I}(u_p)> \ / \ <u_1,\ldots,u_p> \in L\}$ est un ensemble dirigé de $E_I(S)$ que l'on notera, par abus de notation, $\{\bar{I}(u) \ / \ u \in L\}$.

On peut alors énoncer le théorème fondamental :

Théorème 9.28 $\quad val_I(S) = \cup\{\bar{I}(u) \ / \ u \in L\}$.

Démonstration : Nous avons vu dans la démonstration de la proposition 9.26 que chaque $L^{(i)}$ avait un plus grand élément $u^{(i)}$. On a donc

$$\cup\{\bar{I}(u) \ / \ u \in L\} = \cup\{\bar{I}(u^{(i)}) \ / \ i \in \mathbf{N}\}.$$

Comme $<\Omega_{n_1}^1,\ldots,\Omega_{n_p}^1> \in L^{(1)}$,

$$<\Omega_{n_1}^1,\ldots,\Omega_{n_p}^1> \leq u^{(1)}$$

et $<\perp_{n_1},\ldots,\perp_{n_p}> \leq \bar{I}(u^{(1)})$.

D'où $\bar{S}_I^0(<\perp_{n_1},\ldots,\perp_{n_p}>) \leq \bar{I}(u^{(1)})$.

D'autre part, si $u_j^{(1)} = \Omega_{n_j}^1$, $\bar{I}(u_j^{(1)}) = \perp_{n_j}$

si $u_j^{(1)} \neq \Omega_{n_j}^1$ alors $t_j \in \tilde{T}(\hat{\Sigma})$ et $u_j^{(1)} = t_j$

donc $\bar{I}(u_j^{(1)}) = \bar{I}(t_j)$. D'après la définition de $\bar{S}_I$, on en déduit que $\bar{I}(u^{(1)}) \leq \bar{S}_I^1(<\perp_{n_1},\ldots,\perp_{n_p}>)$.

On a donc

$$\bar{S}_I^0(\perp) \leq \bar{I}(u^{(1)}) \leq \bar{S}_I^1(\perp)$$

Démontrons alors par récurrence que pour tout $n \geq 0$

$$(*) \qquad \bar{S}_I^n(\perp) \leq \bar{I}(u^{(n+1)}) \leq \bar{S}_I^{n+1}(\perp).$$

En effet comme $\bar{S}_I$ est continue

$$\bar{S}_I^n(\perp) \leq \bar{S}_I(\bar{I}(u^{(n)})) \leq \bar{S}_I^{n+1}(\perp).$$

Mais, d'après la définition de $\bar{S}_I$,

$\bar{S}_I(\bar{I}(u^{(n)})) = <\bar{I}(\phi_n(t_1)),\ldots,\bar{I}(\phi_n(t_p))> = \bar{I}(u^{(n+1)})$,

on déduit de (*) que

$$\bigcup_n \bar{S}_I^n(\perp) = \bigcup_n \bar{I}(u^{(n+1)}).$$

<u>cqfd</u>.

Comme dans le cas de l'appel par nom, on va maintenant interpréter le symbole **ou** au niveau syntaxique. Pour cela on définit la substitution σ de $\tilde{T}(\Sigma \cup \{\mathbf{ou}\} \cup \Theta \cup \{\Omega_n^1 \ / \ n \geq 0\})$ dans $P_A(T(\Sigma \cup \{\Omega_0^1\}))$ par

- si $f \in \Sigma$, $\sigma(f) = \{f\}$
- $\sigma(\mathbf{ou}) = \{\Pi_2^1, \Pi_2^2\}$
- si $\Theta \in \mathbf{\Theta}$, $\sigma(\Theta) = \{\Theta\}$
- $\sigma(\Omega_n^1) = \{\Omega_0^1.0_n\}$.

Proposition 9.29 *Pour tout* $u \in \mathcal{T}(\Sigma \cup \{\mathbf{ou}\} \cup \mathbf{\Theta} \cup \{\Omega_n^1 \ / \ n \geq 0\})$, $\bar{I}(u) = \bigcup_{v \in \sigma(u)} \bar{I}(v)$.

Démonstration : Comme $\bar{I}(v)$ est une relation, la réunion figurant dans l'énoncé de cette proposition est la réunion des relations au sens habituel.

Le résultat est immédiat lorsque $u \in \Sigma \cup \mathbf{\Theta} \cup \{\Omega_n^1 \ / \ n \geq 0\}$.
D'autre part $\bar{I}(\mathbf{ou}) = \{<d_1;d_1,d_2>, <d_2;d_1,d_2>\}$ et $\sigma(\mathbf{ou}) = \{\Pi_2^1,\Pi_2^2\}$, d'où
$\bigcup_{v \in \sigma(u)} \bar{I}(v) = \bar{I}(\Pi_2^1) \cup \bar{I}(\Pi_2^2) = \{<d_1;d_1,d_2>\} \cup \{<d_2;d_2,d_2>\}$.

Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que l'égalité de l'énoncé est compatible avec les produits du magmoïde, ou en d'autres termes que l'application $u \rightsquigarrow \bigcup_{v \in \sigma(u)} \bar{I}(v)$ est un morphisme de magmoïde, et comme il coïncide avec $\bar{I}$ sur $\Sigma \cup \{\mathbf{ou}\} \cup \mathbf{\Theta} \cup \{\Omega_n^1 \ / \ n \geq 0\}$, il sera alors égal à $\bar{I}$ sur le magmoïde libre engendré.

Remarquons d'abord qu'il découle immédiatement de la définition de $\bar{I}$ que si $u \in T(\Sigma \cup \{\Omega_0^1\})$, $\bar{I}(u) = I(u)$, à condition d'identifier toute fonction de $\mathbf{D}^n$ dans $\mathbf{D}^p$ à une relation de $\mathbf{D}^p \times \mathbf{D}^n$. La restriction de $\bar{I}$ à $T(\Sigma \cup \{\mathbf{ou}\} \cup \{\Omega_n^1 \ / \ n \geq 0\})$ est donc un morphisme de magmoïde et donc $\bar{I}(u \otimes v) = \bar{I}(u) \otimes \bar{I}(v)$; $\bar{I}(u.v) = \bar{I}(u).\bar{I}(v)$.

On a bien d'une part $\sigma(u \otimes v) = \sigma(u) \otimes \sigma(v)$ d'où

$\sigma(u \otimes v) = \{u' \otimes v' \ / \ u' \in \sigma(u),\ v' \in \sigma(v)\}$ et donc

$$\bigcup_{w \in \sigma(u \otimes v)} \bar{I}(w) = \bigcup_{\substack{u' \in \sigma(u) \\ v' \in \sigma(v)}} \bar{I}(u' \otimes v') =$$

$$\bigcup_{u',v'} \bar{I}(u') \otimes \bar{I}(v') = \Big(\bigcup_{u' \in \sigma(u)} \bar{I}(u')\Big) \otimes \Big(\bigcup_{v' \in \sigma(v)} \bar{I}(v')\Big).$$

D'autre part, $\sigma(u.v) = \sigma(u).\sigma(v) = \{u'.v' \ / \ u' \in \sigma(u), v' \in \sigma(v)\}$ d'où

$$\bigcup_{w \in \sigma(u.v)} \bar{I}(w) = \bigcup_{\substack{u' \in \sigma(u) \\ v' \in \sigma(u)}} \bar{I}(u'.v') = \bigcup_{u',v'} \bar{I}(u').\bar{I}(v') =$$

$$\Big(\bigcup_{u' \in \sigma(u)} \bar{I}(u')\Big) . \Big(\bigcup_{v' \in \sigma(v)} \bar{I}(v')\Big).$$

<u>cqfd</u>.

Compte tenu de ce résultat et du fait que sur $T(\Sigma \cup \{\Omega_0^1\})$ on peut identifier $\bar{I}$ et I, le théorème 9.28 peut s'énoncer

<u>*Corollaire 9.30*</u> $\quad \mathrm{val}_I(S) = \cup\{\bigcup_{v \in \sigma(u)} I(v) \ / \ u \in L\}.$

On se retrouve donc dans une situation analogue à celle rencontrée dans le cas de l'appel par nom. On va donc essayer de caractériser $\mathrm{val}_I(S)$ comme l'interprétation d'un ensemble d'arbres finis ou infinis.

Remarquons d'abord que si $u \in \tilde{T}(\Sigma \cup \{\mathbf{ou}\} \cup \Theta \cup \{\Omega_n^1 \ / \ n \geq 0\})_m^1$ $\sigma(u) \in T(\Sigma \cup \{\Omega_0^1\})_m^1$. Les $\sigma(u)$ pourront donc être mis en relation par le préordre de Milner puisque $T(\Sigma \cup \{\Omega_0^1\})$ est un magmoïde ordonné.

Proposition 9.31 *Soient* u *et* $v \in \tilde{T}(\Sigma \cup \{0u\} \cup \Theta \cup \{\Omega_n^1 \ / \ n \geq 0\})_m^1$. *Si* $u \leq v$ *alors* $\sigma(u) \leq \sigma(v)$.

Démonstration : Nous reprenons le raisonnement par induction sur u qui a été utilisé dans la démonstration de la proposition 9.27

. si $u \in \tilde{T}(\Sigma \cup \{0u\} \cup \Theta)_m^1$ alors $u = v$ et $\sigma(u) = \sigma(v)$.

. si $u = \Omega_q^1.w$ alors $\sigma(u) = \sigma(\Omega_q^1).\sigma(w) =$
$\{\Omega_0^1.0_q\}.\sigma(w) = \{\Omega_0^1\}.\{0_q\}.\sigma(w) = \{\Omega_0^1.0_m\}$
qui est inférieur à n'importe quelle partie non vide

. si $u = u_0.(u_1 \otimes \ldots \otimes u_p)$ avec $u_0 \in \tilde{T}(\Sigma \cup \{0u\} \cup \Theta)_p^1$
et u_i est - soit de la forme $\Omega_{r_i}^1.w_i$
- soit appartient à $\tilde{T}(\Sigma \cup \{0u\} \cup \Theta)$,
alors $v = u_0.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_p)$ avec $v_i = u_i$ si $u_i \neq \Omega_{r_i}^1.w_i$.

Dans ce cas $\sigma(u) = \sigma(u_0).(\sigma(u_1) \otimes \ldots \otimes \sigma(u_p)) =$
$\sigma(u_0).(E_1 \otimes \ldots \otimes E_p)$ avec

$$E_i = \begin{cases} \sigma(u_i) \text{ si } u_i \neq \Omega_{r_i}^1 \ w_i \\ \Omega_0^1.0_{m_i} \text{ sinon} \end{cases}$$

et $\sigma(v) = \sigma(u_0).(E_1' \otimes \ldots \otimes E_n')$ tel que si $E_i \neq \{\Omega_0^1.0_{m_i}\}$ alors $E_i' = E_i$.

Il est alors immédiat que $\sigma(u) \leq \sigma(v)$.

cqfd.

Comme L est un ensemble dirigé, $\{\sigma(u) \ / \ u \in L\}$ est aussi un ensemble dirigé. On définit alors $\lim \sigma(L)$ exactement de la même façon que $\lim \tau(L)$, et on obtient, en étendant I par continuité à $T_\infty(\Sigma)$,

Théorème 9.32 $\quad \mathrm{val}_I(S) = \bigcup_{v \in \lim\sigma(L)} I(v).$

Démonstration : Il suffit, d'après le corollaire 9.31 de montrer que

$$\cup \{ \bigcup_{v \in \sigma(u)} I(v) \ / \ u \in L\} = \bigcup_{v \in \lim\sigma(L)} I(v), \text{ c'est-à-dire } \forall\ \bar{d} \in \mathbb{D}^m$$

$$\cup \{ \bigcup_{v \in \sigma(u)} I(v).\bar{d} \ / \ u \in L\} = \bigcup_{v \in \lim\sigma(L)} I(v).\bar{d}.$$

Or pour montrer le théorème 9.21, on a déjà montré que pour $E \in (\hat{P}(\mathbb{D}))^m$, $\cup \{ \bigcup_{v \in \tau(n)} \hat{I}(v).E \ / \ u \in L\} = \bigcup_{v \in \lim\ (L)} \hat{I}(v).E$ en utilisant uniquement le fait que $\{\tau(u) \ / \ u \in L\}$ était une partie dirigée. L'égalité qu'on veut montrer en est un cas particulier, puisque pour $E = \{\bar{d}\}$, $\hat{I}(v).\bar{d} = I(v).\bar{d}$.

cqfd.

Exemple 3.33 Nous reprenons le schéma $\phi(x) = g(x,\phi(x \ \mathbf{ou}\ s(x)))$ de l'exemple 9.22.

En posant $\Theta = \langle \Pi_1^1, \Pi_1^1, \Pi_1^1 \rangle = \langle 1; x_1, x_1, x_1 \rangle$, on réécrit cette égalité de de façon à faire apparaître la torsion :

$$X = g.(Id_1 \otimes X).(Id_1 \otimes \mathbf{ou}).(Id_2 \otimes s).\Theta$$

La solution du système associé

$$X = g.(Id_1 \otimes X).(Id_1 \otimes \mathbf{ou}).(Id_2 \otimes s).\theta + \Omega_1^1$$

dans $P_A(\mathcal{T}(\{g,s,\mathbf{ou},\Omega_1^1\} \cup \Theta))$ est alors $\{u_0,u_1,\ldots,u_n,\ldots\}$ avec

$u_0 = \Omega_1^1$

$u_1 = g.(Id_1 \otimes \Omega_1^1).(Id_1 \otimes \mathbf{ou}).(Id_2 \otimes s).\Theta$

$u_2 = g.(Id_1 \otimes u_1).(Id_1 \otimes \mathbf{ou}).(Id_2 \otimes s).\Theta$

$\vdots$

$u_{n+1} = g.(Id_1 \otimes u_n).(Id_2 \otimes \mathbf{ou}).(Id_2 \otimes s).\Theta.$

On en déduit que

$\sigma(u_{n+1}) = g.<\Pi_1^1,\sigma(u_n).\Pi_1^1> + g.<\Pi_1^1,\sigma(u_n).s.\Pi_1^1>$ d'où, puisque $u_0 = \Omega_1^1$ et $\sigma(u_0) = \Omega_0^1.0_1 = \Omega.0_1$,

$\sigma(u_1) = g.<\Pi_1^1,\Omega.0_1> = g(x,\Omega.0_1)$

$\sigma(u_2) = \{g(x,g(x,\Omega.0_1)),\ g(x,g(s(x),\Omega.0_1))\}$

$\sigma(u_3) = \{g(x,g(x,g(x,\Omega.0_1))),\ g(x,g(s(x),g(s(x),\Omega.0_1))),$
$g(x,g(x,g(s(x),\Omega.0_1))),\ g(x,g(s(x),g(s^2(x),\Omega.0_1)))\}$

et de manière générale

$\sigma(u_n) = \{g(s^{i_1}(x),g(s^{i_2}(x),\ldots,g(s^{i_n}(x),\Omega.0_1)\ldots)) /$
$i_1 = 0$ et $i_j \leq i_{j+1} \leq 1 + i_j\}.$

On en déduit que $\lim \sigma(L) =$
$\{g(s^{i_1}(x),g(s^{i_2}(x),\ldots)) / i_1 = 0 ;\ i_j \leq i_{j+1} \leq i_j+1\}.$

On remarquera que cette limite est bien différente de celle obtenue dans l'exemple 9.22.

⊥

<u>Exemple 9.34</u> On examine maintenant le schéma $\phi(x) = f(x,x,\phi(x\ \mathbf{ou}\ s(x))$. On calcule $\lim \sigma(L)$ par la même méthode que précédemment et on obtient

$\bar{L} = \lim \sigma(L) = \{f(s^{i_1}(x),s^{i_1}(x),f(s^{i_2}(x),s^{i_2}(x),\ldots)) / i_1 = 0 ;$
$i_j \leq i_{j+1} \leq 1+i_j\}$

On considère la même interprétation I à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\perp\}$ que dans l'exemple 9.23.

Pour un entier n quelconque, calculons $\{I(v).\langle n\rangle \ / \ v \in \bar{L}\}$.

i) n est premier. Comme tout élément de $\bar{L}$ est de la forme f(x,x,w), on a $I(v).\langle n\rangle$ = si n est premier alors n sinon I(w) = n,
d'où $\{I(v).\langle n\rangle \ / \ v \in \bar{L}\} = \{n\}$.

ii) n n'est pas premier. Par définition de $\bar{L}$, il existe une bijection entre $\bar{L}$ et les suites d'entiers $\{i_j\}_j$ telles que $i_1 = 0$ et $i_j \leq i_{j+1} \leq 1 + i_j$.

- si la suite $i_1+n, i_2+n, \ldots, i_p+n$ ne comporte aucun nombre premier, alors pour toute approximation finie v' de l'arbre infini v associé à cette suite, $I(v').\langle n\rangle = \perp$ et donc $I(v).\langle n\rangle = \perp$

- sinon, soit p le plus petit indice tel que i_p+n est premier ; alors $I(v).\langle n\rangle = i_p+n$; mais comme la séquence $\langle i_1+n, i_2+n, \ldots, i_p+n\rangle$ prend toutes les valeurs de l'intervalle $[n, i_p+n]$, aucun nombre plus petit que $n+i_p$ n'est premier et donc i_p+n est bien le plus petit nombre premier supérieur à n.

D'où $I(v).\langle n\rangle = \{\perp\} \cup$ {le plus petit nombre premier supérieur à n}.

On retrouve bien la sémantique du point fixe définie dans l'exemple 9.25.

$\perp$

BIBLIOGRAPHIE

Les références [A], [D] et [AD] renvoient respectivement :

à la thèse de A. Arnold

à la thèse de M. Dauchet

au préliminaire commun à ces deux thèses.

[1] A.V. AHO et J.D. ULLMAN, *"The theory of parsing, translation and compiling"*. Prentice Hall (1973).

[2] A.V. AHO et J.D. ULLMAN, *"Translations on a context-free grammar"*. Inf. and Control 19 (1971) 439-475.

[3] A.V. AHO (Ed.), *"Currents in the theory of computing"*. Prentice Hall (1973).

[4] S. ALAGIC, *"Natural state transformations"*. J. Comput. System Sci. 10 (1975) 266-307.

[5] M.A. ARBIB et Y. GIVE'ON, *"Algebra automata I : Parallel programming as a prolegomena to the categorical approach"*. Inf. and Control 12 (1968) 331-345.

[6] M.A. ARBIB et E.G. MANES, *"Basic concepts of category applicable to computation and control"* in "Category theory applied to computation and control". Lect. Notes in Comput. Sci. n° 25 (1975) 1-34.

[7] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"Un théorème de duplication pour les forêts algébriques"*. J. Comput. System Sci. 13 (1976) 223-244.

[8] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"Transductions de forêts reconnaissables monadiques. Forêts corégulières"*. R.A.I.R.O. Informatique théorique 10 (1976) 5-28.

[9] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"Transductions inversibles de forêts"*. Thèse 3° cycle M. DAUCHET, Université de Lille I (1975).

[10] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"Une équivalence décidable sur les forêts régulières"*. Publications du Laboratoire de Calcul n°52, Université de Lille I (1975).

[11] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"Un théorème de Chomsky-Schutzenberger pour les forêts algébriques"*. Publications du Laboratoire de Calcul n°54, Université de Lille I (1975).

[12] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"Forêts algébriques et homomorphismes inverses"*. Publications du Laboratoire de Calcul n°55, Université de Lille I (1975).

[13] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"S-morphismes, bimorphismes et bi-S-morphismes"*. Publications du Laboratoire de Calcul n°59, Université de Lille I (1975).

[14] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"Forêts algébriques strictes"*. Publications du Laboratoire de Calcul n°62, Université de Lille I (1975).

[15] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"Théorie des magmoïdes"*, Colloque de Lille sur les arbres en algèbre et en programmation (1976).

[16] A. ARNOLD et M. DAUCHET, *"Bimorphismes de magmoïdes"*, Colloque de Lille sur les arbres en algèbre et en programmation (1976).

[17] A. ARNOLD, M. DAUCHET et G. JACOB (Eds), *"Actes du Colloque de Lille sur les arbres en algèbre et en programmation"*. Université de Lille I (1976).

[18] J.M. AUTEBERT et J. BEAUQUIER, *"Une caractérisation des générateurs standard"*, R.A.I.R.O. Informatique théorique (1974) 63-83.

[19] B.S. BAKER, *"Tree-transductions and families of tree-languages"*. 5th A.C.M. Proc. on Theory of Computing (1973) 200-206.

[20] J. BENABOU, *"Structures algébriques dans les catégories"*. Thèse d'Etat, Paris (1966).

[21] D.B. BENSON, *"Syntax and Semantics : a categorical view"*. Inf. and Control 17 (1970) 145-160.

[22] D.B. BENSON, *"Semantic-preserving translations"*. Math. Systems Theory 8 (1974) 105-125.

[23] D.B. BENSON, *"The basic algebraic structures in Categories of Derivations"*. Inf. and Control 28 (1975) 1-29.

[24] G. BIRKHOFF et J.D. LIPSON, *"Heterogeneous algebras"*. J. Combinatorial Theory 8 (1970) 115-133.

[25] A. BLIKLE, *"Equational languages"*, Inf. and Control 21 (1972) 134-147.

[26] D. BJORNER, *"The synthesis of finite-state syntax-directed top-down and bottom-up transducers"*. 11th. IEEE Symp. on Switching and automata theory (1970) 122-132.

[27] S.L. BLOOM et C.C. ELGOT, *"The existence of free iterative theories"*. J. Comput. System. Sci. 12 (1976) 305-318.

[28] L. BOASSON, *"Cônes rationnels et familles agréables de langages"*. Thèse 3° cycle, Paris (1971).

[29] G. BOUDOL, *"Langages polyadiques algébriques. Théorie des schémas de programme : sémantique de l'appel par valeur"*. Thèse 3° cycle, Paris (1975).

[30] W.S. BRAINERD, *"The minimalization of tree-automata"*. Inf. and Control 13 (1968) 484-491.

[31] W.S. BRAINERD, *"Tree-generating regular systems"*. Inf. and Control 14 (1969) 217-231.

[32] W.S. BRAINERD, *"Semi-Thue systems and representations of tree"*. 10th IEEE Symp. on switching and automata theory (1969) 240-244.

[33] J.R. BUCHI et C.C. ELGOT, *"Decision problems of weak second-order theories"*. Notices Amer. Math. Soc. (1958).

[34] R.M. BURSTALL et J.W. THATCHER, *"The algebraïc theory of recursive program schemes"*. In "Category applied to Computation and Control" Lect. Notes in Comput. Sci. n°25 (1975) 126-131.

[35] J. CHAUCHE, *"Transducteurs et arborescences"*. Thése d'Etat, Grenoble (1974).

[36] N. CHOMSKY et M.P. SCHUTZENBERGER, *"The algebraic theory of context-free languages"*. In "Computer programming and Formal Systems" (P. Braffort et D. Hirschberg, Eds) North-Holland, Amsterdam (1963) 118-161.

[37] P.M. COHN, *"Universal algebra"*. Harper and Row, New York (1965).

[38] B. COURCELLE, *Recursive schemes, algebraic trees and deterministic languages"*. 15th IEEE Symp. on switching and automata theory (1974) 52-62.

[39] B. COURCELLE,*"Sur les ensembles algébriques d'arbres et les langages déterministes. Quelques applications à la théorie des schémas de programme"*. Thèse d'Etat, Paris (1975).

[40] B. COURCELLE, G. KAHN et J. VUILLEMIN, *"Algorithmes d'équivalence et de réduction à des expressions minimales dans une classe d'équations récursives simples"*. In "Automata, languages and programming", 2nd Colloquium, Saarbrucken (1974) 200-213.

[41] F.G. COUSINEAU et J.M. RIFFLET, *"Schémas de programme : problèmes d'équivalence et complexité"*. Thèse 3ème cycle, Paris (1974).

[42] J. DONER, *"Tree acceptors and some of their applications"*. J. Comput. System Sci. 4 (1970) 406-451.

[43] P. DOWNEY, *"Formal languages and recursion schemes"*, Ph. D. Dissertation, Harvard University (1974).

[44] P. DOWNEY, *"Tree transducers and ETOL Tree systems"*, Conference on formal languages automata and development, Noordwijkerhout, the Netherlands (1975).

[45] S. EILENBERG, *"Automata, languages and machines"*, New-York (1974).

[46] S. EILENBERG et J.B. WRIGHT, *"Automata in general algebras"*. Inf and Control 11 (1967) 217-231.

[47] C.C. ELGOT,*"Algebraic theories and program schemes"*. Symp. on semantics of algorithmic languages. Lect. Notes in Math. n° 188 (1971) 71-88.

[48] J. ENGELFRIET, *"Simple program schemes and formal languages"*. Lect. Notes in Comput. Sci. (1974).

[49] J. ENGELFRIET, *"Surface tree languages and parallel derivation trees"*. DAIMI Report PB 44, University of Aarhus, Danemark (1975).

[50] J. ENGELFRIET, *"Tree automata and tree grammars"*. DAIMI Report FN-10, University of Aarhus, Danemark (1975).

[51] J. ENGELFRIET, *"Bottom-up and top-down tree transformations. A comparison"*. Math. Systems Theory 9 (1975) 198-231.

[52] J. ENGELFRIET, *"Top-down tree transducers with regular look-ahead"*. DAIMI Report PB 49, University of Aarhus, Danemark (1975).

[53] J. ENGELFRIET et M. SCHMIDT, *"IO and OI"*, DAIMI Report PB 47, University of Aarhus, Danemark (1975).

[54] J. ENGELFRIET et S. SKYUM, *"Copying theorems"*, DAIMI Report PB 48, University of Aarhus, Danemark (1975).

[55] M.J. FISCHER, *"Grammars with macro-like productions"*. 9th IEEE Symp. on switching and automata theory (1968) 131-142.

[56] Y. GIVE'ON et M.A. ARBIB, *"Algebra automata II : the categorical framework for dynamic analysis"*. Inf. and Control 12 (1968) 346-370.

[57] J.A. GOGUEN, *"Discrete-time machines in closed monoïdal categories"*. J. Comput. System Sci. 10 (1975) 1-43.

[58] J.A. GOGUEN et J.W. THATCHER, *"Initial algebra semantics"*. 15th IEEE Symp. on switching and automata theory (1974) 63-77.

[59] J.A. GOGUEN, J.W. THATCHER, E.G. WAGNER et J.B. WRIGHT, *"An introduction to categories, algebraic theories and algebras*. IBM Research Report RC 5369 (1975).

[60] F.J. HELTON, *"The semigroups of an algebra automaton"*. J. Comput. System Sci. 12 (1976) 13-24.

[61] G.T. HERMAN et G. ROZENBERG, *"Developmental systems and languages"*, North-Holland - American Elsevier (1975).

[62] A.K. JOSHI, L.S. LEVY et M. TAKAHASHI, *"A tree generating system"*, In "Automata, languages and programming", 1st Colloquium (M. Nivat, Ed) North-Holland (1972).

[63] F.W. LAWVERE, *"Functorial semantics of algebraic theories"*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 50 (1963) 869-872.

[64] L.S. LEVY et A.K. JOSHI, *"Some results in tree automata"*. Math. Systems Theory 6 (1972) 335-342.

[65] S. Mac LANE, *"Categorical algebra"*. Bull. Am. Math. Soc. 71 (1965) 40-106.

[66] S. Mac LANE, *"Categories for the working mathematician"*. Springer Verlag (1974).

[67] T.S.E. MAIBAUM, *"A generalized approach to formal languages"*. J. Comput. System Sci. 8 (1974) 402-432.

[68] P. MARCHAND, *"Bigrammaires et systèmes transformationnels"*. In "Les Arbres en Algèbre et en Programmation", Colloque de Lille (1976) 175-195.

[69] D.F. MARTIN et S.A. VERE, *"On syntax-directed transduction and tree-transducers"*. 2nd A.C.M. Proc on theory of computing (1970) 129-135.

[70] W.J. MEYERS, *"Linear representations of tree structure"*. 3rd ACM Proc. on theory of computing (1971) 50-62.

[71] J. MEZEI et J.B. WRIGHT, *"Algebraic automata and context free sets"*. Inf. and Control 11 (1967) 3-29.

[72] M. NIVAT, *"Transductions des langages de Chomsky"*. Annales de l'Institut Fourier de Grenoble, 18 (1968) 339-456.

[73] M. NIVAT, *"Langages algébriques sur le magma libre et sémantique des schémas de programme"*. In "Automata, languages and programming" 1st Colloquium (M. Nivat Ed.) Springer Verlag (1973) 293-307.

[74] M. NIVAT, *"On the interpretation of recursive program schemas"*. Rapport IRIA n°84 (1974).

[75] M. NIVAT, *"Formalisation de la sémantique des langages de programmation : ses buts et ses moyens"*. Bulletin de liaison IRIA (1976) 2-13.

[76] W.F. OGDEN et W.C. ROUNDS, *"Composition of n tree transducers"*. 4th ACM Proc. on theory of computing (1972) 198-206.

[77] C. PAIR et A. QUERE, *"Définition et étude des bilangages réguliers"*. Inf. and Control 13 (1968) 565-593.

[78] C.R. PERRAULT, *"Intercalation lemmas for tree transducers languages"*. 7th ACM Proc. on theory of computing (1975) 126-136.

[79] B.K. ROSEN, *"Tree-manipulating systems and Church-Rosser theorem"*. Journal of ACM 20 (1973) 160-187.

[80] W.C. ROUNDS, *"Trees, transducers and transformations"*. Ph. D. Dissertation, Stanford University (1968).

[81] W.C. ROUNDS, *"Context-free grammars on trees"*. 1st ACM Proc. on theory of computing (1969) 143-148.

[82] W.C. ROUNDS, *"Tree-oriented proofs of some theorems on context-free and indexed languages"*. 2nd ACM Proc. on theory of computing (1970) 109-116.

[83] W.C. ROUNDS, *"Mappings and grammars on trees"*. Math. Systems Theory 4 (1970) 257-287.

[84] P.P. SCHREIBER, *"Tree transducers and syntax-connected transductions"*. In "Les Arbres en algèbre et en programmation", Colloque de Lille (1976).

[85] C.D. SHEPARD, *"Languages in general algebras"*. 1st ACM Proc. on theory of computing (1968) 155-164.

[86] M. STEINBY, *"On algebras as tree automata"*. non publié (1976).

[87] M. TAKAHASHI, *"Primitive transformations of regular sets and recognizable sets"*. In "Automata, languages and programming" (Nivat, Ed.) North-Holland, Amsterdam (1973) 475-480.

[88] J.W. THATCHER, *"Characterizing derivation trees of context free grammars through a generalization of finite automata theory"*. J. Comput. System Sci. 1 (1967) 317-322.

[89] J.W. THATCHER, *"Generalized^2 sequential machine maps"*. J. Comput. System Sci. 4 (1970) 339-367.

[90] J.W. THATCHER, *"Tree automata : an informal survey"*. In "Currents in the theory of computing" (A.V. Aho, Ed.) Prentice Hall (1973) 143-178.

[91] J.W. THATCHER et J.B. WRIGHT, *"Generalized finite automata theory with an application to a decision problem of second order logic"*. Math. Systems Theory 2 (1968) 57-81.

[92] R.T. YEH, *"Some structural properties of generalized automata and algebras"*. Math. Systems Theory 5 (1971) 306-318.

[93] J.W. de BAKKER, *"Semantics and termination of nondeterministic recursive programs"*. In "Automata, languages and programming", 3rd Colloquium, (Michaelson et Milner, Eds). Edinburgh (1976) 435-477.

[94] B. COURCELLE ET M. NIVAT, *"Algebraic families of interpretation"*. Rapport IRIA (1976).

[95] M. HENNESSY et E.A. ASHCROFT, *"The semantics of nondeterminism"*. In "Automata, languages and programming", 3rd Colloquium, (Michaelson et Milner, Eds.) Edinburgh (1976) 478-493.

[96] K. INDERMARK, *"The continuous algebra of monadic languages"*. In "Mathematical Foundations of Computer Science", Lect. Notes in Comput. Sci. n°32 (1975) 266-270.

[97] P. LESCANNE, *"Equivalence entre la famille des ensembles réguliers et la famille des ensembles algébriques"*. RAIRO Informatique théorique (1976) 57-81.

[98] P. LESCANNE, *"Les classes équationnelles conformes. Un cadre algébrique pour la sémantique des schémas de programme"*. Rapport 76 - R - 030, CRI Nancy (1976).

[99] O. MAYER, *"On the analysis and synthesis problem for context-free expression"*. In "Mathematical Foundations of Computer Science", Lect. Notes in Comput. Sci. n°32 (1975) 308-314.

[100] L.S. MODINA, *"On some formal grammars generating dependency trees"*. In "Mathematical Foundations of Computer Science", Lect. Notes in Comput. Sci. n°32 (1975) 326-329.

[101] G.D. PLOTKIN, "*A Powerdomain construction*". SIAM J. Comput. 5 (1976) 452-486.

[102] E.G. WAGNER, J.B. WRIGHT, J.A. GOGUEN et J.W. THATCHER, "*Some fundamentals of order-algebraic semantics*". IBM Research Report RC 6020 (1976).

[103] J.B. WRIGHT, J.A. GOGUEN, J.W. THATCHER et E.G. WAGNER, "*Rational algebraic theories and fixed-point solutions*". IBM Research Report RC 6116 (1976).

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
Section de SCIENCES
LILLE