50 376
1977
90

N° d'ordre : 396

50376
1977
90

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences Mathématiques

par

JEAN-PIERRE STEEN

# DECOMPOSITION DES MATRICES ET TABLEAUX A TROIS DIMENSIONS A ELEMENTS ENTIERS NON-NEGATIFS AU MOYEN DES MATRICES DE PERMUTATION

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
Section de SCIENCES
LILLE

Thèse soutenue le 27 octobre 1977 devant la Commission d'Examen

| | | |
|---|---|---|
| Messieurs | P. BACCHUS | Président |
| | J.C. HERZ | Rapporteur |
| | M. PARREAU | Examinateur |
| | M. CHEIN | " |
| | V. CORDONNIER | " |
| | R. FAURE | Invité |
| | J.C. BERMOND | " |

## PERMUTATIONS

n = 4

(1)+ (8) = (2)+ (7)
+(17) = (6)+(15)
+(24) = (3)+(22)

(2)+ (7) = (1)+( 8)
+(18) = (5)+(16)
+(23) = (4)+(21)

(3)+(11) = (5)+ (9)
+(14) = (4)+(13)
+(22) = (1)+(24)

(4)+(12) = (6)+(10)
+(13) = (3)+(14)
+(21) = (2)+(23)

(5)+ (9) = (3)+(11)
+(16) = (2)+(18)
+(20) = (6)+(19)

(6)+(10) = (4)+(12)
+(15) = (1)+(17)
+(19) = (5)+(20)

(7)+(18) = (12)+(13)
+(23) = (9)+(20)

(8)+(17) = (11)+(14)
+(24) = (10)+(19)

(9)+(16) = (10)+(15)
+(20) = (7)+(23)

(10)+(15) = (9)+(16)
+(19) = (8)+(24)

(11)+(14) = (8)+(17)
+(22) = (12)+(21)

(12)+(13) = (7)+(18)
+(21) = (11)+(22)

(13)+(21) = (15)+(19)

(14)+(22) = (16)+(20)

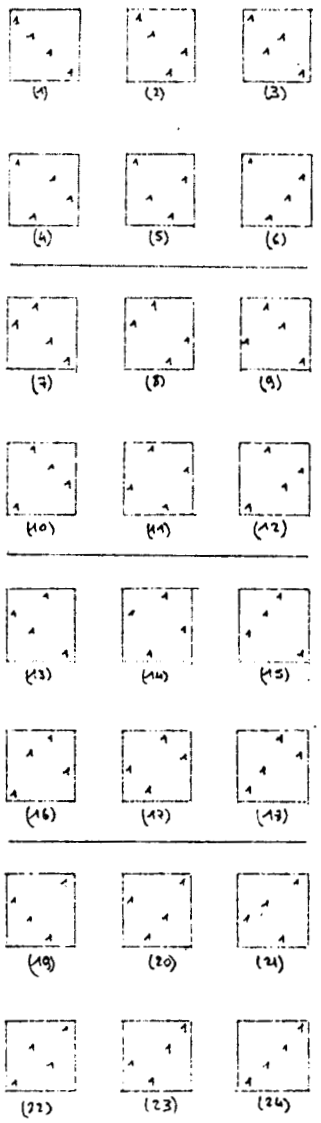
(15)+(19) = (13)+(21)

(16)+(20) = (14)+(22)

(17)+(24) = (18)+(23)

(18)+(23) = (17)+(24)

MATRICES DE PERMUTATION




## B-DECOMPOSITIONS

LES B-DECOMPOSITIONS DE UN(4x4).

| Classes à droite p.dcp. | | Classes à gauche dcp.p. | |
|---|---|---|---|
| [1] | [6],[10],[15],[19],[24]. | [1] | [6],[10],[15],[19],[24]. |
| [2] | [5],[11],[16],[18],[23]. | [2] | [5],[12],[14],[20],[22]. |
| [3] | [7],[12],[14],[17],[21]. | [3] | [8],[11],[13],[18],[21]. |
| [4] | [8],[ 9],[13],[20],[22]. | [4] | [7],[ 9],[16],[17],[23]. |

Equivalences de conjugaison ($p^{-1}$.dcp.p) et large.

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | 1 : [1]. | invariant | sous-groupes transitifs |
| II | 2 : [2],[3],[4]. | conjugués | |
| II | 3 : [5],[9],[21]. | | |
| I | 4 : [6],[10],[24]. | | |
| II | 5 : [7],[8],[11],[12],[13],[14],[16],[17],[18],[20],[22],[23]. | | |
| I | 6 : [15],[19]. | | |

UN(4x4)

[1] : (1)+ (8)+(17)+(24)
[2] : (1)+ (8)+(18)+(23)
[3] : (1)+(10)+(17)+(19)
[4] : (1)+(11)+(14)+(24)
[5] : (2)+ (7)+(17)+(24)
[6] : (2)+ (7)+(18)+(23)
[7] : (2)+ (9)+(18)+(20)
[8] : (2)+(12)+(13)+(23)
[9] : (3)+ (8)+(17)+(22)
[10] : (3)+(11)+(14)+(22)
[11] : (3)+(11)+(16)+(20)
[12] : (3)+(12)+(14)+(21)
[13] : (4)+ (7)+(18)+(21)
[14] : (4)+(11)+(13)+(22)
[15] : (4)+(12)+(13)+(21)
[16] : (4)+(12)+(15)+(19)
[17] : (5)+ (7)+(16)+(23)
[18] : (5)+ (9)+(14)+(22)
[19] : (5)+ (9)+(16)+(20)
[20] : (5)+(10)+(15)+(20)
[21] : (6)+ (8)+(15)+(24)
[22] : (6)+ (9)+(16)+(19)
[23] : (6)+(10)+(13)+(21)
[24] : (6)+(10)+(15)+(19)

LES PERMUTATIONS

Equivalence de conjugaison ($p^{-1}$ . q . p) et cycles

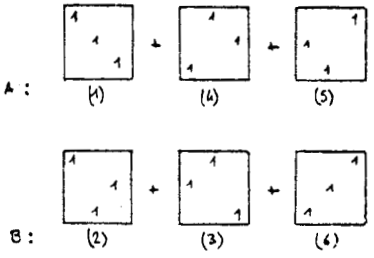
$1^4$ : (1).
$1^2.2$ : (2),(3),(6),(7),(15),(22).
1.3 : (4),(5),(9),(12),(13),(16),(20),(21).
$2^2$ : (8),(17),(24).
4 : (10),(11),(14),(18),(19),(23).

Permutations de {1,2,3,4}

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) : | 1 | 2 | 3 | 4 |
| (2) : | 1 | 2 | 4 | 3 |
| (3) : | 1 | 3 | 2 | 4 |
| (4) : | 1 | 3 | 4 | 2 |
| (5) : | 1 | 4 | 2 | 3 |
| (6) : | 1 | 4 | 3 | 2 |
| (7) : | 2 | 1 | 3 | 4 |
| (8) : | 2 | 1 | 4 | 3 |
| (9) : | 2 | 3 | 1 | 4 |
| (10) : | 2 | 3 | 4 | 1 |
| (11) : | 2 | 4 | 1 | 3 |
| (12) : | 2 | 4 | 3 | 1 |
| (13) : | 3 | 1 | 2 | 4 |
| (14) : | 3 | 1 | 4 | 2 |
| (15) : | 3 | 2 | 1 | 4 |
| (16) : | 3 | 2 | 4 | 1 |
| (17) : | 3 | 4 | 1 | 2 |
| (18) : | 3 | 4 | 2 | 1 |
| (19) : | 4 | 1 | 2 | 3 |
| (20) : | 4 | 1 | 3 | 2 |
| (21) : | 4 | 2 | 1 | 3 |
| (22) : | 4 | 2 | 3 | 1 |
| (23) : | 4 | 3 | 1 | 2 |
| (24) : | 4 | 3 | 2 | 1 |

n = 3

UN(3x3) =




BUS LILLE

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE

01.02.1976

## DOYENS HONORAIRES de l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

## PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, SAVART, WATERLOT, WIEMAN, ZAMANSKI.

## PRESIDENTS HONORAIRES DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R. DEFRETIN, M. PARREAU.

## PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. J. LOMBARD.

## PROFESSEURS TITULAIRES

| | | |
|---|---|---|
| M. | BACCHUS Pierre | Astronomie |
| M. | BEAUFILS Jean-Pierre | Chimie Physique |
| M. | BECART Maurice | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. | BILLARD Jean | Physique du Solide |
| M. | BIAYS Pierre | Géographie |
| M. | BONNEMAN Pierre | Chimie Appliquée |
| M. | BONNOT Ernest | Biologie Végétale |
| M. | BONTE Antoine | Géologie Appliquée |
| M. | BOUGHON Pierre | Algèbre |
| M. | BOURIQUET Robert | Biologie Végétale |
| M. | CELET Paul | Géologie Générale |
| M. | CONSTANT Eugène | Electronique |
| M. | DECUYPER Marcel | Géométrie |
| M. | DELATTRE Charles | Géologie Générale |
| M. | DELHAYE Michel | Chimie Physique |
| M. | DERCOURT Michel | Géologie Générale |
| M. | DURCHON Maurice | Biologie Expérimentale |
| M. | FAURE Robert | Mécanique |
| M. | FOURET René | Physique du Solide |
| M. | GABILLARD Robert | Electronique |
| M. | GLACET Charles | Chimie Organique |
| M. | GONTIER Gérard | Mécanique |
| M. | GRUSON Laurent | Algèbre |
| M. | GUILLAUME Jean | Microbiologie |
| M. | HEUBEL Joseph | Chimie Minérale |
| M. | LABLACHE-COMBIER Alain | Chimie Organique |
| M. | LANSRAUX Guy | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. | LAVEINE Jean-Pierre | Paléontologie |
| M. | LEBRUN André | Electronique |
| M. | LEHMANN Daniel | Géométrie |

| | | |
|---|---|---|
| Mme | LENOBLE Jacqueline | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. | LINDER Robert | Biologie et Physiologie Végétales |
| M. | LOMBARD Jacques | Sociologie |
| M. | LOUCHEUX Claude | Chimie Physique |
| M. | LUCQUIN Michel | Chimie Physique |
| M. | MAILLET Pierre | Sciences Economiques |
| M. | MONTARIOL Frédéric | Chimie Appliquée |
| M. | MONTREUIL Jean | Biochimie |
| M. | PARREAU Michel | Analyse |
| M. | POUZET Pierre | Analyse Numérique |
| M. | PROUVOST Jean | Minéralogie |
| M. | SALMER Georges | Electronique |
| M. | SCHILTZ René | Physique Atomique et Moléculaire |
| Mme | SCHWARTZ Marie-Hélène | Géométrie |
| M. | SEGUIER Guy | Electrotechnique |
| M. | TILLIEU Jacques | Physique Théorique |
| M. | TRIDOT Gabriel | Chimie Appliquée |
| M. | VIDAL Pierre | Automatique |
| M. | VIVIER Emile | Biologie Cellulaire |
| M. | WERTHEIMER Raymond | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. | ZEYTOUNIAN Radyadour | Mécanique |

## PROFESSEURS SANS CHAIRE

| | | |
|---|---|---|
| M. | BELLET Jean | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. | BODARD Marcel | Biologie Végétale |
| M. | BOILLET Pierre | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. | BOILLY Bénoni | Biologie Animale |
| M. | BRIDOUX Michel | Chimie Physique |
| M. | CAPURON Alfred | Biologie Animale |
| M. | CORTOIS Jean | Physique Nucléaire et Corpusculaire |
| M. | DEBOURSE Jean-Pierre | Gestion des entreprises |
| M. | DEPREZ Gilbert | Physique Théorique |
| M. | DEVRAINNE Pierre | Chimie Minérale |
| M. | GOUDMAND Pierre | Chimie Physique |
| M. | GUILBAULT Pierre | Physiologie Animale |
| M. | LACOSTE Louis | Biologie Végétale |
| Mme | LEHMANN Josiane | Analyse |
| M. | LENTACKER Firmin | Géographie |
| M. | LOUAGE Francis | Electronique |
| Mle | MARQUET Simone | Probabilités |
| M. | MIGEON Michel | Chimie Physique |
| M. | MONTEL Marc | Physique du Solide |
| M. | PANET Marius | Electrotechnique |
| M. | RACZY Ladislas | Electronique |
| M. | ROUSSEAU Jean-Paul | Physiologie Animale |
| M. | SLIWA Henri | Chimie Organique |

## MAITRES DE CONFERENCES (et chargés d'Enseignement)

| | | |
|---|---|---|
| M. | ADAM Michel | Sciences Economiques |
| M. | ANTOINE Philippe | Analyse |
| M. | BART André | Biologie Animale |
| M. | BEGUIN Paul | Mécanique |
| M. | BKOUCHE Rudolphe | Algèbre |
| M. | BONNELLE Jean-Pierre | Chimie |
| M. | BONNEMAIN Jean-Louis | Biologie Végétale |
| M. | BOSCQ Denis | Probabilités |
| M. | BREZINSKI Claude | Analyse Numérique |
| M. | BRUYELLE Pierre | Géographie |

| | |
|---|---|
| M. CARREZ Christian | Informatique |
| M. CORDONNIER Vincent | Informatique |
| M. COQUERY Jean-Marie | Psycho-Physiologie |
| Mle DACHARRY Monique | Géographie |
| M. DEBENEST Jean | Sciences Economiques |
| M. DEBRABANT Pierre | Géologie Appliquée |
| M. DE PARIS Jean-Claude | Mathématiques |
| M. DHAINAUT André | Biologie Animale |
| M. DELAUNAY Jean-Claude | Sciences Economiques |
| M. DERIEUX Jean-Claude | Microbiologie |
| M. DOUKHAN Jean-Claude | Physique du Solide |
| M. DUBOIS Henri | Physique |
| M. DYMENT Arthur | Mécanique |
| M. ESCAIG Bertrand | Physique du Solide |
| Me EVRARD Micheline | Chimie Appliquée |
| M. FONTAINE Jacques-Marie | Electronique |
| M. FOURNET Bernard | Biochimie |
| M. FORELICH Daniel | Chimie Physique |
| M. GAMBLIN André | Géographie |
| M. GOBLOT Rémi | Algèbre |
| M. GOSSELIN Gabriel | Sociologie |
| M. GRANELLE Jean-Jacques | Sciences Economiques |
| M. GUILLAUME Henri | Sciences Economiques |
| M. HECTOR Joseph | Géométrie |
| M. JACOB Gérard | Informatique |
| M. JOURNEL Gérard | Physique Atomique et Moléculaire |
| Mle KOSMAN Yvette | Géométrie |
| M. KREMBEL Jean | Biochimie |
| M. LAURENT François | Automatique |
| Mle LEGRAND Denise | Algèbre |
| Mle LEGRAND Solange | Algèbre |
| M. LEROY Jean-Marie | Chimie Appliquée |
| M. LEROY Yves | Electronique |
| M. LHENAFF René | Géographie |
| M. LOCQUENEUX Robert | Physique Théorique |
| M. LOUCHET Pierre | Sciences de l'Education |
| M. MACKE Bruno | Physique |
| M. MAHIEU Jean-Marie | Physique Atomique et Moléculaire |
| Me N'GUYEN VAN CHI Régine | Géographie |
| M. MAIZIERES Christian | Automatique |
| M. MALAUSSENA Jean-Louis | Sciences Economiques |
| M. MESSELYN Jean | Physique Atomique et Moléculaire |
| M. MONTUELLE Bernard | Biologique Appliquée |
| M. NICOLE Jacques | Chimie Appliquée |
| M. PAQUET Jacques | Géologie Générale |
| M. PARSY Fernand | Mécanique |
| M. PECQUE Marcel | Chimie Physique |
| M. PERROT Pierre | Chimie Appliquée |
| M. PERTUZON Emile | Physiologie Animale |
| M. PONSOLLE Louis | Chimie Physique |
| M. POVY Lucien | Automatique |
| M. RICHARD Alain | Biologie |
| M. ROGALSKI Marc | Analyse |
| M. ROY Jean-Claude | Psycho-Physiologie |
| M. SIMON Michel | Sociologie |
| M. SOMME Jean | Géographie |
| Mle SPIK Geneviève | Biochimie |
| M. STANKIEWICZ François | Sciences Economiques |
| M. STEEN Jean-Pierre | Informatique |

| | | |
|---|---|---|
| M. | THERY Pierre | Electronique |
| M. | TOULOTTE Jean-Marc | Automatique |
| M. | TREANTON Jean-René | Sociologie |
| M. | VANDORPE Bernard | Chimie Minérale |
| M. | VILLETTE Michel | Mécanique |
| M. | WALLART Francis | Chimie |
| M. | WERNIER Georges | Informatique |
| M. | WATERLOT Michel | Géologie Générale |
| Mme | ZINN-JUSTIN Nicole | Algèbre |

*A Henriette,*

*A Pascal.*

*Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur P. BACCHUS d'avoir bien voulu m'honorer en présidant le Jury de cette thèse.*

*La présente étude a été menée sous la direction éclairée de Monsieur J.C. HERZ. Je ne pourrais jamais dire combien son aide m'a été précieuse. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.*

*Je remercie Monsieur le Professeur V. CORDONNIER qui a bien voulu me proposer un second sujet.*

*J'adresse, à Messieurs les Membres du Jury, tous mes remerciements d'avoir accepté de juger mes travaux.*

*Je suis reconnaissant à Monsieur MOREAU, Directeur du Service Développement Scientifique d'IBM, de m'avoir admis en stage dans son équipe et d'avoir mis à ma disposition de puissants moyens de calcul.*

*Mes remerciements vont aussi à Madame CARON qui a tapé ce texte avec beaucoup de conscience et de compétence, ainsi qu'à Monsieur et Madame DEBOCK pour la célérité et la gentillesse qu'il ont manifestés dans la réalisation matérielle de cette thèse.*

*Enfin, je tiens à remercier ma femme et tous ceux, très nombreux, qui se sont intéressés et ont participé, de près ou de loin, à ce travail.*

## RESUME

Un problème d'emploi du temps se formalise par la B-DECOMPOSITION (combinaison linéaire à coefficients entiers positifs) des p-VOLTRICES (VOLume maTRICE - tableaux à trois dimensions, à éléments entiers non-négatifs dont les sommes sur les rangées sont étales à p) en sommes de 1-VOLTRICES.

Ceci demande une généralisation à trois dimensions du théorème de VON NEUMANN sur la B-décomposition des matrices bistochastiques en matrices de permutation, applicable aux p-MATRICES (p-voltrices de dimension 2).

La B-décomposition des p-voltrices passant par celle des p-matrices, une première partie est consacrée à l'étude de la construction et de la multiplicité des B-décompositions des p-matrices, en insistant sur les rapports avec : les carrés latins, les ensembles p-TRANSITIFS de permutations (où exactement p permutations appliquent chaque objet sur chaque autre), le pavage des cône polyédriques dans les espaces vectoriels et les cliques maximales du graphe d'INDEPENDANCE des permutations.

Certaines p-voltrices étant B-indécomposables en 1-voltrices, dans la seconde partie, il est proposé d'étendre l'ensemble des voltrices de décomposition aux voltrices MINIMALES, ce qui permet de généraliser le théorème de VON NEUMANN. Une caractérisation des p-voltrices B-indécomposables en 1-voltrices est donnée pour n = 3.

Un dernier chapitre traduit en termes d'hypergraphes les résultats sur les B-décompositions.

# TABLE DES MATIERES

## PARTIE I : GENERALITES

page

1. INTRODUCTION 3
   1.1 PRÉSENTATION 3
   1.2 RÔLE DE L'ORDINATEUR 4
   1.3 DISPOSITIONS PRATIQUES 5
      1.3.1 LE STYLE 5
      1.3.2 LES FIGURES 5
      1.3.3 LA TYPOGRAPHIE 5
      1.3.4 LES PROGRAMMES 6

2. NOTIONS DE BASE 7
   2.1 UN PROBLÈME D'EMPLOI DU TEMPS 7
      2.1.1 DEFINITION DU PROBLEME 7
      2.1.2 LA NOTION DE VOLTRICE 7
      2.1.3 LES MATRICES D'INJECTION 9
   2.2 DÉCOMPOSITION DES MATRICES 9
      2.2.1 MATRICES DE DECOMPOSITION 9
      2.2.2 LES MATRICES B-DECOMPOSABLES 11
      2.2.3 LES MATRICES UN(nxn), LEURS B-DECOMPOSITIONS ET LES CARRES LATINS 13
   2.3 LES p-VOLTRICES CUBIQUES 15
      2.3.1 GENERALISATION DES p-MATRICES 15
      2.3.2 LES 1-VOLTRICES 15
   2.4 CONSTRUCTION DES p-MATRICES ET p-VOLTRICES 17

## PARTIE II : LES p-MATRICES

3. LES PERMUTATIONS 21
   3.1 LES GROUPES DE PERMUTATIONS 21
      3.1.1 INTRODUCTION 21
      3.1.2 LES DIFFERENTES TRANSITIVITES 21
         *3.1.2.1 La transitivité simple* 21
         *3.1.2.2 La k-fois transitivité* 21
         *3.1.2.3 La p-transitivité* 21
      3.1.3 PROPRIETES DE LA p-TRANSITIVITE 23
         *3.1.3.1 Cardinalité* 23
         *3.1.3.2 Ensembles p-transitifs et groupes $G_i$* 23
         *3.1.3.3 Les groupes p-transitifs* 23
         *3.1.3.4 Sur le groupe $S_4$* 23

3.2 L'ESPACE VECTORIEL DES p-MATRICES D'ORDRE n 27

3.2.1 DIMENSIONS DES ESPACES VECTORIELS 27

3.2.2 CONSTRUCTION DES p-MATRICES : SYSTEMES D'INEQUATIONS 29

3.2.3 RESOLUTION THEORIQUE DU SYSTEME D'INEQUATIONS 29

3.2.4 BASES DE L'ESPACE VECTORIEL DES p-MATRICES 31

3.3 RELATIONS ENTRE LES MATRICES DE PERMUTATION 47

4. LES B-DECOMPOSITIONS DE q.UN(nxn) 47

4.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES B-DÉCOMPOSITIONS DES p-MATRICES 47

4.1.1 ALGORITHME DE B-DECOMPOSITION 47

4.1.2 MULTIDECOMPOSITION DES p-MATRICES 47

4.2 B-DÉCOMPOSITIONS DE LA n-MATRICE UN(nxn) 49

4.2.1 GENERALITES 49

4.2.2 CLASSIFICATION DES B-DECOMPOSITIONS 49

4.2.3 NUMEROS DES MATRICES DE PERMUTATION DANS UNE B-DECOMPOSITION 53

4.2.4 ENSEMBLES DE B-DECOMPOSITIONS 53

4.2.5 B-DECOMPOSITIONS ET CARRES LATINS 53

4.2.6 B-DECOMPOSITIONS ET RELATIONS 57

4.2.7 PARTITIONNEMENT DE $S_4$ PAR LES B-DECOMPOSITIONS DE UN(4x4) 59

4.2.8 GRAPHE D'INDEPENDANCE 61

4.3 B-DECOMPOSITIONS DE LA q.n-MATRICE q.UN(nxn) 63

4.3.1 NUMEROS DES MATRICES DANS LES B-DECOMPOSITIONS DE q.UN(nxn) 63

4.3.2 B-DECOMPOSITIONS SPECIALES ET PURES 65

4.3.3 LES B-DECOMPOSITIONS DE LA 4.q-MATRICE q.UN(4x4) 65

*4.3.3.1 Nombre de B-décompositions de q.UN(4x4)* 65

*4.3.3.2 Importance du début de B-décomposition de q.UN(4x4)* 65

*4.3.3.3 Equivalence des débuts de B-décomposition de q.UN(nxn)* 67

*4.3.3.4 Constructions et nombre des B-décompositions de q.UN(nxn)* 69

*4.3.3.5 Les B-décompositions spéciales pures de q.UN(4x4)* 71

5. LES B-DECOMPOSITIONS D'UNE p-MATRICE D'ORDRE n 75

5.1 INTRODUCTION 75

5.2 MATRICES DE PERMUTATION INFÉRIEURES OU ÉGALES À UNE p-MATRICE 75

5.3 LES MATRICES DE PERMUTATION DANS LES B-DÉCOMPOSITIONS D'UNE p-MATRICE 81

5.3.1 RELATION AVEC LES GROUPES $G_i$ 81

5.3.2 POIDS D'UNE MATRICE DE PERMUTATION M DANS UNE p-MATRICE A 81

5.3.3 COEFFICIENT DE M DANS UNE B-DECOMPOSITION DE A 81

5.3.4 LE TABLEAU T DES POIDS 81

*5.3.4.1 . Définition* 81

*5.3.4.2. Les rangées du tableau T* 85

*5.3.4.3. Matrices de permutation différentes dans une B-décomposition* 85

*5.3.4.4. Algorithme d'utilisation du tableau T* 85

*5.3.4.5. Tableau T et groupes $G_i$* 87

5.4 CASE NULLE ET ENSEMBLE INTRANSITIF 87

5.5 RECHERCHE DE TOUTES LES B-DÉCOMPOSITIONS D'UNE p-MATRICE 89

5.6 LE NOMBRE DE B-DÉCOMPOSITIONS D'UNE p-MATRICE 93
5.6.1 MULTIDECOMPOSITION DES p-MATRICES D'ORDRE 3 93
5.6.2 LE NOMBRE DE B-DECOMPOSITIONS D'UNE p-MATRICE D'ORDRE n 93
5.6.3 LES 31 B-DECOMPOSITIONS DE UN(4x4) + (x) 95
5.6.4 LES B-DECOMPOSITIONS DE UN(4x4) + (x) + (y) 95
5.6.5 NOMBRE DE B-DECOMPOSITIONS DE CONFIGURATIONS SPECIALES 97
5.6.6 LES B-DECOMPOSITIONS DES 2-, 3- et 4- MATRICES D'ORDRE 4 97

## PARTIE III : LES VOLTRICES

6. LES p-VOLTRICES 113
6.1 CAS D'APPLICATION DES p-VOLTRICES 113
6.2 PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES p-VOLTRICES 115
6.2.1 RAPPELS SUR LES p-VOLTRICES 115
6.2.2. LES 1-VOLTRICES 115
6.2.3 LES SERIES DE PLANS DES VOLTRICES 115
6.3 STRUCTURE DE L'ESPACE VECTORIEL DES p-VOLTRICES 117
6.4 CONSTRUCTION DES p-VOLTRICES ET MAJORANT DE LEUR NOMBRE 123
6.4.1 PREMIER PROCEDE 123
6.4.2 DEUXIEME PROCEDE 123
6.5 LES SOUS-VOLTRICES NULLES DANS LES p-VOLTRICES 125
6.6 1-VOLTRICES REMARQUABLES 127

7. LES B-DECOMPOSITIONS DE UN(nxnxn) 133
7.1 TABLEAUX D 133
7.2 CONSTRUCTION DES TABLEAUX D 133
7.3 CAS n = 4 135
7.4 TABLEAUX D ET CUBES LATINS 141
7.5 CUBES D ET TABLEAUX DD 143

8. B-DECOMPOSITIONS DES p-VOLTRICES 151
8.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES B-DÉCOMPOSITIONS DES p-VOLTRICES 151
8.1.1 PRINCIPE DE B-DECOMPOSITIONS DES p-VOLTRICES 151
8.1.2 p-VOLTRICES B-INDECOMPOSABLES EN 1-VOLTRICES 151
8.1.3 ALGORITHME DE MULTIDECOMPOSITION DES p-VOLTRICES 153
8.2 p-VOLTRICES MINIMALES ET 1-MINIMALES 155
8.2.1 DEFINITIONS 155
8.2.2 PROPRIETES ELEMENTAIRES 155
8.2.3 PRINCIPES DE CONSTRUCTION DES p-VOLTRICES MINIMALES 157
8.2.4 PRINCIPES DE CONSTRUCTION DES p-VOLTRICES 1-MINIMALES 159

8.3 PROPRIÉTÉS DE p-VOLTRICES 1-MINIMALES 159

8.4 CONSTRUCTIONS DES q-VOLTRICES D'ORDRE 4 MINIMALES 161

8.4.1 CONSTRUCTION DES 2-VOLTRICES MINIMALES 161

8.4.2 UNE B-DECOMPOSITION REMARQUABLE DE 2.UN(4x4) 165

8.4.3 REMARQUES SUR LES 3-VOLTRICES 1-MINIMALES 165

8.4.4 REMARQUE SUR LES 4-VOLTRICES MINIMALES 165

8.5 B-DÉCOMPOSITION DES p-VOLTRICES 169

8.5.1 CAS DES p-VOLTRICES D'ORDRE n 169

8.5.2 MULTIDECOMPOSITION DES p-VOLTRICES D'ORDRE 3 169

*8.5.2.1 Propriétés des matrices R d'une p-voltrice d'ordre 3* 169

*8.5.2.2 Critère de B-indécomposabilité des p-voltrices d'ordre 3* 171

*8.5.2.3 B-Décompositions en 1-voltrices d'ordre 3* 173

*8.5.2.4 B-Décompositions dans la base des 1-voltrices d'ordre 3* 173

*8.5.2.5 Numérotation des 2-voltrices d'ordre 3 indécomposables* 175

*8.5.2.6 Les p-voltrices minimales d'ordre 3* 175

*8.5.2.7 Forme des p-voltrices 1-minimales pour p > 1 et n = 3* 175

*8.5.2.8 B-Décompositions des p-voltrices d'ordre 3* 177

## PARTIE IV : CONSEQUENCES DANS LES HYPERGRAPHES ET CONCLUSION

9. MATRICES, VOLTRICES ET HYPERGRAPHES 187

9.1 HYPERGRAPHES ASSOCIÉS À UN TABLEAU 187

9.2 CARACTÉRISTIQUES DE CES HYPERGRAPHES 187

9.3 CONFORMITÉ 189

9.4 GRAPHE REPRÉSENTATIF 191

9.5 c-COUPLAGES ET d-RECOUVREMENTS 191

9.6 TRANSVERSALITÉ 193

9.7 STABILITÉ 197

9.8 STABILITÉ FORTE ET COLORATION FORTE 197

9.9 CLIQUES 198

9.10 EQUILIBRAGE 198

9.11 UNIMODULARITÉ 200

9.12 HYPERGRAPHES SANS CYCLES IMPAIRS 201

9.13 HYPERGRAPHES ADMETTANT DES FONCTIONS STOCHASTIQUES 202

9.14 BILAN 202

10. CONCLUSIONS 205

10.1 BILAN DES RÉSULTATS 205

10.2 LES GÉNÉRALISATIONS ET LE PRINCIPE D'INDÉPENDANCE 205

10.3 EXTENSIONS ET QUESTIONS OUVERTES 207

# PARTIE V : ANNEXES


11. LES PROGRAMMES 211

11.1 PRÉSENTATION 211

11.1.1 ORDINATEURS ET LANGAGES 211
11.1.2 LA RECURSIVITE 211
11.1.3 DOSSIERS DE PROGRAMMES 212
11.1.4 LISTE DES PROGRAMMES ET LEUR UTILISATION 212

11.2 PERMUTATIONS ET NUMÉROS LEXICOGRAPHIQUES 214

11.2.1 PASSAGE DU NUMERO A LA PERMUTATION : RNUMPR 214
11.2.2 PASSAGE DE LA PERMUTATION AU NUMERO : RPERNU 216

11.3 CONSTRUCTION DES PERMUTATIONS 218

11.3.1 PROCEDURE CONSTRUISANT LES ARRANGEMENTS : ARRANG 218
11.3.2 GENERATEUR RECURSIF DES PERMUTATIONS EN ALGOL 60 219
11.3.3 GENERATEUR RECURSIF DES PERMUTATIONS EN ALGOL 68 219
11.3.4 GENERATEUR RECURSIF DES PERMUTATIONS EN PL/1 : GENPERM 220

11.4 BASES D'ESPACE VECTORIEL 223

11.4.1 PROGRAMME POUR LEUR CONSTRUCTION : BASVOLT 223
11.4.2 BASES POUR LES p-MATRICES ET POUR LES p-VOLTRICES D'ORDRE 4 226

11.5 ALGORITHMES DE FLOTS 230

11.5.1 ALGORITHME DE FLOT COMPATIBLE ET DE FLOT MAXIMUM : FFH 230
11.5.2 ALGORITHME DE FORD-FULKERSON matriciel : APFFMAT 234

11.6 MULTIDÉCOMPOSITION DES p-MATRICES 239

11.6.1 PROGRAMME : MLTDCP3 239
11.6.2 DES EXEMPLES DE RESULTATS 251
11.6.3 LES PERMUTATIONS D'ORDRE 5 259
11.6.4 LES B-DECOMPOSITIONS DE UN(5x5) 260

11.7 ENSEMBLES DE B-DÉCOMPOSITIONS DE UN(4x4) 267

11.7.1 TRIPLETS DE B-DECOMPOSITIONS DE UN(4x4) PAR A3DCP 267
11.7.2 4-UPLES DE B-DECOMPOSITIONS DE UN(4x4) PAR A4DCP 278

11.8 GRAPHES D'INDÉPENDANCE 312

11.8.1 PROGRAMME DE TRAITEMENTS DES CLIQUES D'UN GRAPHE : MPCLIQ 312
11.8.2 RESULTATS POUR LES PERMUTATIONS ET LES B-DECOMPOSITIONS DE UN(4x4) 318

11.9 MULTIDÉCOMPOSITIONS DES p-VOLTRICES 322

11.9.1 MULTIDECOMPOSITION EN 1-VOLTRICES : DEICV 322
11.9.2 EXEMPLES DE RESULTATS 333
11.9.3 B-DECOMPOSITION D'UNE p-VOLTRICE : RESID 338

11.10 RECHERCHE DE p-VOLTRICES MINIMALES 344

11.10.1 CONSTRUCTION DE 2-VOLTRICES MINIMALES D'ORDRE 4 : V2MIN 344

12. BIBLIOGRAPHIE 348

12.1 OUVRAGES D'INTÉRÊT GÉNÉRAL 348

12.1.1 SUR LES GROUPES DE PERMUTATIONS 348

12.1.2 SUR LA COMBINATOIRE 348

12.1.3 SUR LES ESPACES VECTORIELS 348

12.1.4 SUR LES GRAPHES 348

12.1.5 SUR LES LANGAGES 349

12.2 ARTICLES 349

12.1.1 B-DECOMPOSITIONS ET CONFIGURATIONS A PLUSIEURS DIMENSIONS 349

12.2.2 PROBLEME D'EMPLOI DU TEMPS SOUS FORME DE CONFIGURATION A PLUSIEURS DIMENSIONS 350

12.2.3 CÔNES POLYEDRIQUES 350

13. INDEX 351

13.1 SYMBOLES 351

13.2 GLOSSAIRE 352

13.2.1 ESPACES VECTORIELS 352

13.2.2 TABLEAUX 353

13.2.3 LES PERMUTATIONS ET LEUR GROUPE 353

13.2.4 NOTIONS ATTACHEES AUX MATRICES 355

13.2.5 NOTIONS ATTACHEES AUX VOLTRICES 355

13.2.6 LES B-DECOMPOSITIONS DE UN(nxn) ET DE q.UN(nxn) 356

13.2.7 LES B-DECOMPOSITIONS DES p-MATRICES 357

13.2.8 LES B-DECOMPOSITIONS DES p-VOLTRICES 358

13.2.9 COMBINATOIRE 359

13.2.10 GRAPHES ET HYPERGRAPHES 359

13.3 LEXIQUE 361

# I. GENERALITES

# 1. INTRODUCTION

## 1.1 PRÉSENTATION

Un problème d'emploi du temps est à l'origine de ce travail. La tentative faite pour le résoudre à l'aide de l'ordinateur, a nécessité de formaliser des notions attachées aux tableaux à plusieurs dimensions. Pour désigner ces derniers le mot **VOLTRICE** (VOLume maTRICE) (§2.1.2 p.7 ) a été proposé, distinguant ainsi les tableaux à plus de deux dimensions, des matrices.

Les emplois du temps sont alors apparus comme des configurations dont certaines, particulièrement remarquables, sont les **p-voltrices** (§2.3.1 p15), tableaux dont les dimensions sont égales, les éléments entiers et non-négatifs, et les sommes sur les rangées égales à un entier p. Parmi celles-ci se trouvent les **1-voltrices** (§2.3.2 p15), qui n'ont qu'un élément non-nul, de valeur 1, par rangée. Les **matrices de permutation** (§2.1.3 p 9) sont, à ce titre, des **1-matrices** (§2.2.2. p 11).

La résolution du problème d'emploi du temps se ramène à celui de la **B-décomposition** (§2.2.2 p13) **des p-voltrices en sommes de 1-voltrices**. Ceci est résolu par le **théorème de VON-NEUMANN**(§2.2 p 9) pour le cas des matrices, mais la littérature est très pauvre sur les généralisations qu'on peut envisager quand on passe à plus de deux dimensions.

En fait, le problème n'a pas été traité. Les auteurs se contentent de montrer, à l'aide d'un exemple, que toute p-voltrice n'est pas somme de 1-voltrices. Seuls W.B. JURKAT et H.J. RYSER ont publié en 1968 un article se rapportant à des configurations semblables (B.12.2.1) *(1)* où, parmi d'autres problèmes, ils abordent celui de la B-décomposition sous un aspect leur permettant d'envisager d'autres configurations que les p-voltrices dont il va s'agir ici, et où les éléments de décomposition sont des configurations latines.

Le travail est fait ici en deux étapes. Il faut d'abord constater que les p-voltrices sont doublement liées aux p-matrices (sommes sur les rangées égales à p). D'abord parce qu'elles les généralisent et ainsi étendent plusieurs de leurs propriétés, mais ensuite parce qu'elles comprennent elles-mêmes des p-matrices. Aussi la B-décomposition des p-voltrices demande, en première étape, l'étude de la B-décomposition des p-matrices. Dansce domaine non plus la littérature n'est pas riche. H.J. RYSER dans son livre (B.12.1.2) et d'autres auteurs, comme HAK PROU dans sa thèse (B.12.2.1), donnent des théorèmes d'existence de B-décompositions de matrices, et même des algorithmes pour en construire, mais aucun n'envisage la multiplicité des décompositions de ces matrices. Cet aspect apparaît quelque peu dans les problèmes de construction de carrés magiques, qui sont des p-matrices particulières.

La seconde étape, qui est l'étude de la B-décomposition des p-voltrices, poursuit deux buts. D'abord proposer une généralisation des matrices de permutation qui permette , dans tous les cas, de

*(1) Pour les renvois en bibliographie, le symbole § a été remplacé par la lettre B.*

construire des B-décompositions des p-voltrices. Cette généralisation a abouti à la notion de **p-voltrice minimale** (§8.2. p155) qui permet de généraliser le théorème de VON NEUMANN (§8.5 p169). Le second but est de comprendre pourquoi les p-voltrices ne se B-décomposent pas toujours en 1-voltrices. Les investigations de l'auteur ont permis de l'expliquer pour le cas où l'ordre des voltrices est 3. Mais, pour le cas général malgré une étude fouillée des p-voltrices, en particulier de celles d'ordre 3 et d'ordre 4, ces explications ne sont pas une justification, et n'aboutissent pas à une condition nécessaire et suffisante de B-indécomposabilité en 1-voltrices. Ceci restera donc un problème ouvert.

La voie choisie a nécessité la mise en oeuvre de résultats appartenant à des domaines variés des mathématiques dont l'algébre, les graphes et la combinatoire. La convergence de ces théories a permis de les enrichir de notions nouvelles, comme celle de **groupe p-transitif** (§3.1.2 p21) venue de l'introduction de l'addition dans le groupe, habituellement multiplicatif, des permutations, ou encore comme celles de **cube latin** (§7.4 p141) et de **tableau D** (§7.1 p133) qui sont des généralisations des **carrés latins** (§2.2.3 p15).

Les résultats se répartissent en quatre parties. La partie I avec les chapitres 1 et 2 présente l'ensemble du travail. La partie II avec les chapitres 3, 4 et 5 est consacrée à l'étude des p-matrices, et fournit les éléments qui permettent d'étudier les p-voltrices dans la partie III, avec les chapitres 6, 7 et 8. La partie IV, chapitres 9 et 10, exploite ces résultats dans l'étude des **hypergraphes associés aux tableaux** (§9.1 p187) et donne la conclusion.

## 1.2 RÔLE DE L'ORDINATEUR

L'ordinateur a été un moyen indispensable de calculs et d'expériences, mais son rôle essentiel a été de susciter la réflexion. L'écriture d'un programme pose toujours de nouveaux problèmes au programmeur en l'obligeant à envisager tous les cas et à définir les limites de ses données. Ceux-ci deviennent ardus quand l'ordinateur rappelle l'étroitesse de sa mémoire et sa relative "lenteur" de calcul, surtout quand ils entrent en conflit avec le caractère combinatoire des problèmes à traiter.

Certains résultats ont été obtenus sans ordinateur. D'autres fournis par l'ordinateur, auraient pu être obtenus après un temps plus ou moins long de réflexion et de calculs. Il en est qui sont le fruit réel de programmes comme les **décompositions de q . UN(4 X 4)** (§2.2.3 p13), les **décompositions spéciales et pures** (§4.3.2. p 65) pour q égaux à 2 et 3, et surtout, il fallait l'ordinateur pour être assuré qu'il n'y en avait pas pour q = 4.

Enfin, la programmation des méthodes a été l'occasion de mettre au point des algorithmes, certains connus, mais d'autres originaux comme celui du **programme D E I C V** (§8.1.3 p153) qui consiste en l'exploration simultanée de deux arborescences.

## 1.3 DISPOSITIONS PRATIQUES

### 1.3.1 LE STYLE

Il n'est pas aisé, malgré la richesse de notre langue, d'être précis dans le domaine combinatoire. Ainsi la phrase "Tous les éléments de cette matrice sont obtenus par tel procédé" peut être interprétée comme "L'ensemble des éléments de cette matrice est obtenu ..." et il faudra ensuite placer ces éléments dans les cases de la matrice ; ou bien comme "Chaque élément de cette matrice est obtenu..." et dans ce cas sa place est définie avant qu'il soit calculé. De même quand on prend les "premiers" de chaque classe, faut-il en prendre un par classe, ou les quelques-uns qui sont en tête. Ou encore, il faut distinguer une permutation des indices d'une matrice qui modifie de la même façon l'ordre des lignes et celui des colonnes, d'une permutation des rangées qui agit d'une part sur les lignes et / ou d'autre part sur les colonnes.

Nous avons essayé d'éviter ces ambiguités, au risque d'alourdir le style et la ponctuation. Toutefois nous demandons l'indulgence du lecteur s'il doit, quelques fois,relire une phrase pour l'interpréter autrement.

### 1.3.2 LES FIGURES

Il est impossible de présenter ce travail sans faire appel à des figures et des tableaux, et nous n'avons pas hésité à en faire usage, puisque le texte occupe moins de pages que les figures. Nous espérons ainsi soulager la méditation du lecteur, et lui épargner, aussi souvent que possible, de devoir concrétiser lui même les notions manipulées.

Pour les distinguer du texte, les figures sont encadrées. Elles sont numérotées afin d'y faire référence dans le texte. Le bristol, qui a été glissé entre les pages, résume les résultats de base qui permettent de reconstruire ou d'interpréter les figures. C'est une copie d'un document qui a accompagné l'auteur dans sa recherche.

### 1.3.3 LA TYPOGRAPHIE

Une typographie spéciale a été utilisée pour mettre en relief des propriétés et des résultats. On peut ainsi, d'un seul coup, repérer l'idée importante d'un paragraphe, en particulier, lors des renvois.

De la même façon, certains mots ont été appuyés dans le texte. Ils représentent une notion dont il est fait usage dans la suite. Ils sont alors définis dans le texte et réapparaissent dans le lexique où ils sont classés en ordre alphabétique, et dans le glossaire où ils sont classés suivant l'ordre logique des notions introduites. Les symboles ont également été répertoriés dans le glossaire.

## 1.3.4 LES PROGRAMMES

Enfin, une part non négligeable a été accordée à la programmation des algorithmes. Les programmes sont rassemblés au chapitre 11. Pour les principaux, un dossier de programme est résumé en début sous forme de commentaire. Ils sont signalés dans le texte par un astérisque et un renvoi au chapitre 11.

*Hors-texte : Tableau*

*Définitions*

*Un TABLEAU est une application dans un ensemble E (en général $\mathbb{R}$, restreint souvent ici à $\mathbb{N}$) des points du pavé de $\mathbb{N}^d$ défini en prenant sur chaque axe un intervalle borné, de borne inférieure 1.*

*L'élément de E associé à un point du pavé est un ELEMENT du tableau. Les coordonnées du point sont les INDICES de l'élément. Le point, associé à un élément, est la CASE dans laquelle est écrit l'élément.*

*LA DIMENSION du tableau est la dimension d de l'espace $\mathbb{N}^d$. LES DIMENSIONS du tableau sont les indices de l'élément dont les coordonnées sont les bornes supérieures des intervalles définissant le pavé. Dans ce cas on note les indices séparés par des croix.*

*Dans un tableau, on admet de remplacer un indice par un élément d'un ensemble quelconque si une correspondance biunivoque existe entre cet ensemble et l'intervalle de définition auquel appartient l'indice.*

*Une MATRICE est un tableau où d = 2 et E = $\mathbb{R}$, tandis qu'un VECTEUR est un tableau où d = 1 et E = $\mathbb{R}$. Nous proposons le mot VOLTRICE pour les tableaux où d = 3 et E = $\mathbb{R}$.*

*Parties de tableau*

*Par extension, les éléments associés aux points d'une partie du pavé constituent la partie correspondante du tableau. Il y a ainsi dans une voltrice des droites et des plans. Certaines parties ont, en raison de leur situation privilégiée, des noms particuliers.*

*Ainsi, les éléments associés aux points du pavé appartenant à une droite parallèle à un axe, constituent une RANGEE. Dans une matrice, on distingue les lignes où l'abscisse varie, des COLONNES où l'ordonnée varie. Dans les voltrices, il faudrait trois mots pour désigner les trois sortes de rangées. Le mot "file" pourrait être éventuellement utilisé comme troisième mot.*

*Dans les voltrices, le mot PLAN a été réservé aux ensembles de cases correspondant aux plans du pavé perpendiculaires aux axes. Mais ce mot couvre plusieurs notions. D'abord les plans sont des parties de dimension 2 opposées aux parties de dimension 1 que sont les rangées. Ensuite, ce sont des hyperplans des voltrices (une dimension en moins que la voltrice), comme les rangées dans les matrices. Enfin, ils servent à généraliser les mots "lignes" et "colonnes", et à ce titre, ils sont qualifiés par "horizontal", "de face" ou "de côté" (§ 6.2.3, p 117).*

# 2. NOTIONS DE BASE

## 2.1 UN PROBLÈME D'EMPLOI DU TEMPS

### 2.1.1 DEFINITION DU PROBLEME

Quand on débarrasse un problème d'emploi du temps des contraintes à caractère humain, telles que les voeux des professeurs ou les incidences pédagogiques de la répartition équilibrée des matières, son expression devient :

**Des professeurs participent à l'enseignement de plusieurs classes. Chaque professeur $P_i$ doit assurer $H_{ij}$ heures de cours aux élèves de la classe $C_j$. Etablir heure par heure les activités des professeurs et des élèves (fig 1 p 8).**

Ce qui se passe à une heure k se représente par une matrice $H_k$, indicée en lignes par les professeurs et en colonnes par les classes, avec : $H_{kij} = 1$ si le professeur $P_i$ fait cours à la classe $C_j$ et $H_{kij} = 0$ sinon. Comme à une heure donnée un professeur ne peut être avec qu'une classe au plus et inversement, la matrice $H_k$ n'a au plus qu'un élément non-nul par rangée.

Construire un emploi du temps consiste donc à décomposer la matrice H des nombres d'heures que doit assurer chaque professeur dans chaque classe en une somme de matrices $H_k$, la première optimisation consistant à avoir un minimum de matrices $H_k$ dans la décomposition.

### 2.1.2 LA NOTION DE VOLTRICE

Si maintenant nous empilons les matrices $H_k$ trouvées, nous obtenons une représentation de l'emploi du temps sous forme d'un TABLEAU à trois indices dont la représentation idéale se ferait dans un hologramme (h.t., p 6). Ce tableau se compose (de trois façons différentes) de MATRICES (en rassemblant les ELEMENTS pour lesquels un des indices a une valeur donnée), que nous appellerons "PLANS", et (de trois façons différentes) de RANGEES, qui sont des VECTEURS, (en rassemblant les éléments pour lesquels deux des indices sont fixés). Ces plans et ces rangées, ainsi que les sommes de leurs éléments ont des significations précises utiles à l'une ou l'autre des parties de l'école. Ainsi, les activités d'un professeur sont décrites par le plan qui lui est relatif et qui est indicé par les heures et les classes. La somme sur ce plan est le nombre d'heures de cours que devra lui payer l'intendance.

Nous appellerons "VOLTRICE" (VOLume maTRICE) un tableau de DIMENSION 3, et nous l'envisagerons le plus souvent accompagnée des sommes SUR ses plans et ses rangées (fig 2 p 8).

Le problème de l'emploi du temps s'exprime alors :

**Trouver une voltrice à éléments 0 ou 1 dont la somme sur chacune des rangées indicées par les heures soit égale à l'élément correspondant (à la rangée) de la matrice H, et dont les sommes sur les autres rangées soient inférieures ou égales à 1.**

Figure 1 : Un problème d'emploi du temps.

| H | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | 1 | 3 | 0 | 0 |
| $P_2$ | 1 | 0 | 1 | 2 |
| $P_3$ | 1 | 0 | 1 | 2 |

classes

professeurs

Nombres d'heures de cours de chaque professeur dans chaque classe

| $H_1$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | | 1 | | |
| $P_2$ | 1 | | | |
| $P_3$ | | | | 1 |

1ière heure

| $H_2$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | | $P_1$ |
| | | | | 1 | $P_2$ |
| | | | 1 | | $P_3$ |

2ième heure

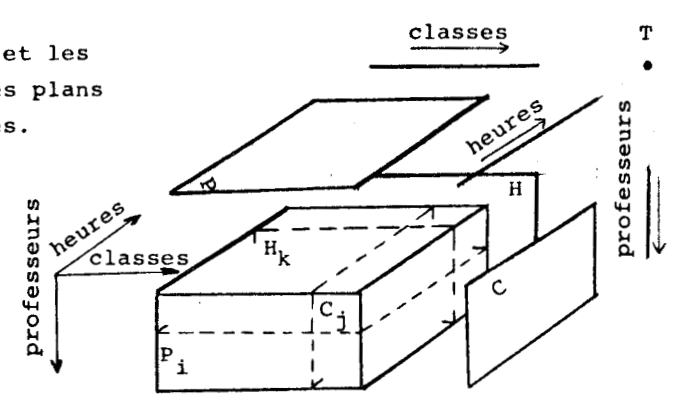
| $H_3$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | | $P_1$ |
| | | | 1 | | $P_2$ |
| | | | | 1 | $P_3$ |

3ième heure

| $H_4$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | | $P_1$ |
| | | | | 1 | $P_2$ |
| | 1 | | | | $P_3$ |

4ième heure

Figure 2 :
Une voltrice et les sommes sur ses plans et ses rangées.




BUS LILLE

La notion de voltrice permet aussi d'envisager une difficulté supplémentaire qui est l'affectation des salles. L'emploi du temps est alors un tableau de dimension 4 et ce qui se passe à une heure donnée est une voltrice indicée par les professeurs, les classes et les salles. Les contraintes sont : le nombre d'heures de cours de chaque professeur dans chaque classe et le nombre de salles ; et il faut minimiser la durée de l'emploi du temps.

### 2.1.3 LES MATRICES D'INJECTION

On conçoit assez bien que pour minimiser le nombre d'heures on a intérêt à avoir à chaque instant le plus d'activités simultanées. Pour cela, il faut occuper à chaque heure tous les éléments du plus petit des ensembles professeurs, classes ou salles. On dira que cet ensemble est "saturé". Cela se traduira par un 1 dans chacune des rangées (pour le cas des matrices $H_k$) ou des plans (pour le cas des voltrices $H_k$) indicés par les éléments de l'ensemble saturé.

Une matrice $H_k$ ayant au plus autant de lignes que de colonnes, et ayant un élément non-nul par ligne et au plus un par colonne est une MATRICE D'INJECTION car elle représente une fonction injective de l'ensemble des lignes dans l'ensemble des colonnes (fig 4 p10). Si elle est CARREE, c'est une MATRICE DE PERMUTATION. Nous verrons plus loin comment il faut envisager la généralisation de ces matrices sous forme de voltrices. Toutefois on constate qu'un "bon" emploi du temps est obtenu en décomposant la matrice H en matrices d'injection.

## 2.2 DÉCOMPOSITION DES MATRICES

La théorie de la DECOMPOSITION des matrices est résumée dans le Théorème de VON NEUMANN (B 12.1.2, 5 chap 20) appelé, dans les ouvrages antérieurs à 1970, comme ceux de C. BERGE, théorème de BIRKHOFF-VON NEUMANN :

Toute matrice BISTOCHASTIQUE est un BARYCENTRE de matrices de permutation.

Nous allons rappeler les résultats les plus intéressants de cette théorie.

### 2.2.1 MATRICES DE DECOMPOSITION

Les matrices DE DECOMPOSITION sont les matrices de permutation et les matrices d'injection.

A chaque ligne d'une matrice de permutation associons le numéro de la colonne contenant le 1. Le VECTEUR formé avec ces valeurs,ordonnées dans l'ordre des lignes,représente cette matrice. Il représente aussi la permutation qu'il faut appliquer aux lignes de la matrice unité pour obtenir la matrice de permutation. Ordonnons lexicographiquement les n! vecteurs associés aux matrices de permutation d'ORDRE n.

Figure 3 : Matricesde permutation,

n= 3. 6 matrices de permutation

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | |
| | 1 | | | | |
| | | 1 | | | |
| | | | 1 | | |
| | | | | 1 | |
| | | | | | 1 |
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |

représentation

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |
| 3 | 3 |

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | |
| 2 | 1 | | |
| 3 | | | 1 |

ordre lexicographique

| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |

Figure 4 : Matrice d'injection.

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 5 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | | | |
| 2 | | | | 1 | |
| 3 | | | | | 1 |
| . | | | | | |
| | | . | | | |

On en déduit pour chacune d'elles un NUMERO LEXICOGRAPHIQUE beaucoup plus maniable que la matrice (fig 3 p10) et que l'on notera entre parenthèses. (Voir fig 10(p24) les permutations d'ordre 4 et paragraphe 11.6.3. (p259) celles d'ordre 5).

Il existe un ALGORITHME* simple pour passer d'un numéro à la permutation et inversement (§ 11.2 p214). Il est basé sur le fait que pour obtenir toutes les permutations de n objets il suffit d'adjoindre à chacun d'eux toutes les permutations des autres. Il y en a alors (n-1)! qui commencent par le même objet, puis parmi celles-ci, par récurrence, on en trouve (n-2)! qui ont un même objet en deuxième position, et ainsi de suite (fig 5 p12).

C'est à partir de cette même propriété qu'on construit les ALGORITHMES* pour engendrer toutes les matrices de permutation d'un ordre n donné (relativement petit) (§11.3 p218).

Une matrice d'injection peut être considérée comme une matrice de permutation à laquelle des lignes ont été enlevées. De ce fait, les résultats relatifs à la décomposition des matrices carrées en matrices de permutation peuvent se généraliser aux matrices rectangulaires décomposées en matrices d'injection.

Les modifications à apporter aux algorithmes pour passer des matrices carrées aux matrices rectangulaires ne présentent pas de difficultés particulières. Quand les méthodes relatives aux matrices carrées ne s'appliquent pas directement, il suffit d'adjoindre à la matrice rectangulaire une rangée contenant les informations qui se trouvaient dans les rangées supprimées (B. 12.2.1,15).

## 2.2.2 LES MATRICES B-DECOMPOSABLES

Une combinaison linéaire de matrices d'injection de mêmes dimensions donne une matrice M dont les sommes sur les lignes sont égales. Si ce sont des matrices carrées, les sommes sur les colonnes sont aussi égales aux sommes sur les lignes.

Les matrices carrées d'ordre n à éléments réels dont les sommes sur les rangées sont égales constituent un espace vectoriel vis-à-vis de la somme des matrices et du produit par un scalaire. Cet espace vectoriel est de DIMENSION $(n-1)^2 + 1$ (voir § 3.2.1. p27)

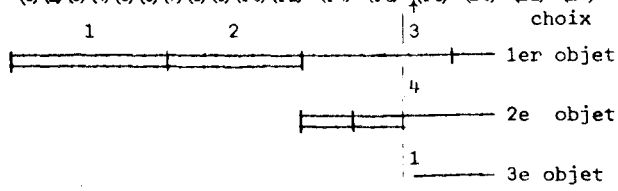
Les matrices de permutation d'ordre n sont des éléments de cet espace vectoriel . On peut toujours en trouver une BASE constituée de matrices de permutation (1). Pour n = 3, l'espace est de dimension 5 et toutes les matrices de permutation d'ordre 3 moins l'une d'elles constituent une base.

*(1) Pour s'en convaincre, on peut remarquer ceci. Soit M une matrice de cet espace vectoriel et P la somme sur chaque rangée. Soit* $a = \max_{a_{ij}<0} |a_{ij}|$ *;* $M' = (M + a.UN(n \times n)) / (p + na)$*, où* $UN(n \times n)$ *(§ 2.2.3 p13) est la matrice carrée remplie de 1, est une matrice bistochastique qui d'après le théorème de VON NEUMANN (p 9) est une combinaison linéaire de matrices de permutation. On en déduit que M est aussi une telle combinaison, et donc que les matrices de permutation sont un système de générateurs de l'espace vectoriel. De ce système de générateurs on peut extraire une base.*

Figure 5 NUMEROS LEXICOGRAPHIQUES DES MATRICES DE PERMUTATION (n = 4)

1° Liste des vecteurs permutation et de leur numéro.

| 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 2 | | | | | | 3 | | | | | | 4 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | | 3 | | 3 | | 4 | | 4 | | 1 | | 3 | | 4 | | 1 | | 2 | | 4 | | 1 | | 2 | | 3 | |
| 3 | 4 | 4 | 3 | 2 | 4 | 4 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 4 | 1 | 4 | 1 | 3 | 2 | 4 | 1 | 4 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) | (12) | (14) | (16) | | (18) | | (20) | | (22) | | (24) | | | | | | | | | |




2° Numéro léxicographique (m) de la permutation $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Si $p_i(u)$ est le rang de l'objet u parmi les n-i+1 qui restent avant le choix de $u_i$ :

$$(m) = \sum_{i=1}^{n-1} (p_i(u_i) - 1) \,.\, (n - i)! + 1$$

Ex

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $u_i$ | $u_1=3$ | $u_2=4$ | $u_3=1$ | 1 |
| dans : | {1,2,3,4} | {1,2,4} | {1,2} | {1} |
| $p_i(u_i)$ | 3° | 3° | 1° | 1 |

formule $(3°-1).(4-1)!+(3°-1).(4-2)!+(1°-1).(4-3)!+1$

$12 + 4 + 0 + 1 = 17$

3° Permutation $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de numéro lexicographique (m).

Algorithme :

1° i:= 1

2° Calculer $p_i(u_i)$ et r tel que $(m-1) := (p_i(u_i)-1)(n-i)!+ r$.

3° n:= n-1 ; m:=r+1 ; i:= i+1.

4° reprendre en 2° si i < n

Ex (m) =(17)(n = 4)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| i | 1 | 2 | 3 | 4 |
| m | 17 | 5 | 1 | 1 |
| n | 4 | 3 | 2 | 1 |
| (n-1)! | 6 | 2 | 1 | 1 |
| $(m-1) = (p_i(u_i)-1)(n-i)!+r$ | 16=2x6+4 | 4=2x2+0 | 0=0x1+0 | 0=0x1+0 |
| $p_i(u_i)$ | 3° | 4° | 1° | 1° |
| dans | {1,2,3,4} | {1,2,4} | {1,2} | {2} |
| $u_i$ | 3 | 4 | 1 | 2 |

BUS LILLE

Une base de l'espace vectoriel, pour n = 4, est constituée des 10 matrices de permutation {(1), (2), (3), (4), (8), (9), (10), (15), (17), (21)}. Les matrices de permutation étant en nombre n! supérieur à la dimension de l'espace, il existe entre les matrices de permutation d'un ordre donné des RELATIONS, dont il sera fait un grand usage dans la suite (§3.3. p33). Par exemple, pour n = 3, on a :
(1) + (4) + (5) = (2) + (3) + (6) ; pour n = 4, on a : (1) + (24) = (3) + (22).

Les matrices carrées d'ordre n dont les sommes sur les rangées sont égales sont donc combinaisons linéaires à coefficients réels quelconques de matrices de permutation (en décomposant la matrice dans une base). Le théorème de VON NEUMANN (p 9) implique que celles de ces matrices qui n'ont pas d'éléments négatifs sont combinaisons linéaires à coefficients réels positifs de matrices de permutation.

Nous appellerons p-MATRICE une matrice à éléments entiers non-négatifs dont les sommes sur les rangées sont égales à p. La lettre "p" qui précéde le mot matrice peut avoir plusieurs significations. D'abord elle signifie que les sommes sur les rangées sont égales et, dans ce cas, p peut ne pas être défini (on parle alors du caractère "p-matriciel" de la matrice). Ensuite, "p" peut représenter la valeur inconnue de ces sommes. Enfin, si p est connu, on peut remplacer p par sa valeur et écrire "3-matrice" par exemple. Cette notation a été introduite par HAK PROU dans sa thèse (B12.2.1). Il distingue parmi les matrices, les C-matrices qui sont à éléments entiers non-négatifs. Si, en plus, le minimum des sommes sur les lignes n'est pas plus petit que le maximum des sommes sur les colonnes, c'est une G-matrice (le "G" rappelant le nom de GALE). Si, de plus encore, ces sommes sur les lignes sont égales à p, c'est une S-matrice de valeur critique p. Si enfin, en plus, elle est carrée, c'est une p-matrice. Une R-matrice est une S-matrice rectangulaire horizontale dont les sommes sur les colonnes sont égales.

Du théorème de VON NEUMANN (p 9) on déduit encore que les p-matrices sont sommes de p matrices de permutation (pas nécessairement toutes distinctes) qui sont des 1-MATRICES.

Les p-matrices ont donc deux types de décompositions en matrices de permutation : celles dans une base de l'espace vectoriel qui les contient et qui est une combinaison linéaire à coefficients quelconques, celles du théorème qui sont les combinaisons à coefficients entiers positifs et que nous avons appelé B-DECOMPOSITIONS. Dans cette notation le "B" rappelle à la fois la notion de barycentre à coefficients positifs et le nom de BIRKHOFF, jadis attaché au théorème sur les décompositions.

C'est à ces B-décompositions que nous nous intéresserons et nous ne parlerons plus que des p-matrices.

### 2.2.3 LES MATRICES UN(n x n), LEURS B-DECOMPOSITIONS ET LES CARRES LATINS

Parmi les p-matrices, il en est de remarquables. Ce sont les n-matrices UN(nxn), matrices carrées, d'ordre n, remplies de 1. Dans la notation "UN(nxn)", le symbole UN rappelle la valeur de tous les éléments du tableau, tandis que les dimensions sont mises entre parenthèses. On verra, de même, la voltrice UN(nxnxn) (§7.1,p133). Les matrices de permutation des B-décompositions de UN(nxn) ont leurs valeurs non-nulles dans des cases différentes.

Figure 6 : Les deux B-décompositions de UN(3 x 3)

$$\underset{UN(3x3)}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{(1)}{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{(4)}{\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}} \quad \underset{(5)}{\begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}} = A$$

$$\underset{(2)}{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}} + \underset{(3)}{\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}} + \underset{(6)}{\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}} = B$$

Figure 7 B-Décomposition de UN (nxn) et Carré latin (n = 3).

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} = \underset{(1)}{\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}} + \underset{(4)}{\begin{array}{c|ccc} 2 & & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{array}} + \underset{(5)}{\begin{array}{c|ccc} 3 & & & \\ \hline & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array} + \begin{array}{c|ccc} 2 & & & \\ \hline & & 2 & \\ & & & 2 \\ 2 & & & \end{array} + \begin{array}{c|ccc} 3 & & & \\ \hline & & & 3 \\ 3 & & & \\ & 3 & & \end{array} = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}$$

(Multiplication par l'indice de l'élément 1 de la 1ière ligne)

Ordre de grandeur:

| p = n | nb. de mat. perm. n! | N = nb. de dcp. de UN(nxn) | n !N |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 6 | 2 | 12 |
| 4 | 24 | 24 | 576 |
| 5 | 120 | 1 344 | 161 280 |
| 6 | 720 | 1 128 960 | 812 851 200 |
| 7 | 5 040 | 12 198 297 600 | 61 479 419 904 000 |

Ainsi la 3-matrice d'ordre 3,UN(3 x 3) se B-décompose en

UN(3 x 3) = (1) + (4) + (5) = (2) + (3) + (6).

On appellera A et B ces deux B-décompositions, et on constatera qu'une matrice de l'une des B-décompositions exclut les matrices de l'autre, car la somme d'une matrice de A et d'une matrice de B contient un élément égal à 2. Ceci est particuler à l'ordre n = 3 (fig 6 p14).

Le nombre des B-décompositions des matrices UN(n x n) est le nombre des CARRES LATINS d'ordre p ayant leur première ligne ordonnée. Le carré latin associé à une B-décomposition de la matrice UN(n x n) s'obtient en faisant la somme des matrices de la B-décomposition, chacune étant multipliée par l'indice de l'élément non-nul de sa première ligne (fig 7 p14).

## 2.3 LES P-VOLTRICES CUBIQUES

### 2.3.1 GENERALISATION DES p-MATRICES

Les p-matrices se généralisent, à la dimension trois, en voltrices cubiques . En fait il y a deux généralisations possibles, celles pour lesquelles les sommes sur les rangées sont égales à p, celles pour lesquelles les sommes sur les plans sont égales à p. Nous ne parlerons pratiquement pas de ces dernières, notre intérêt se portant uniquement sur les premières qui sont appelées : p-voltrices.

Une p-VOLTRICE est un tableau de dimension 3 (ou à 3indices), CUBIQUE, à éléments entiers non-négatifs,tel que les sommes sur les rangées sont égales à p.

Les plans d'une p-voltrice sont des p-matrices.

Nous considérons comme distinctes des p-voltrices déduites l'une de l'autre par une transformation qui conserve globalement chaque rangée. De même quand on parlera des plans d'une p-voltrice il s'agira, sauf exceptions, de la même série (il y en a trois) de plans parallèles qui composent la p-voltrice. (§6.2.1 p 115).

### 2.3.2 LES 1-VOLTRICES

Les 1-VOLTRICES sont une généralisation de dimension trois des matrices de permutation.

Les plans d'une 1-voltrice sont des matrices de permutation

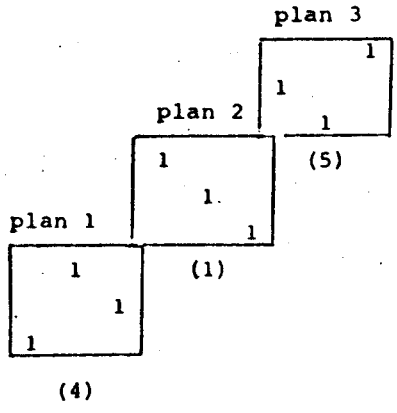
La somme des plans d'une 1-voltrice d'ordre n est la matrice UN(n x n). Ces plans constituent donc une B-décomposition de UN(n x n). Pour chaque B-décomposition de UN(n x n) on construit n! 1-voltrices

Figure 7b : La 1-voltrice A3 d'ordre 3.

1) B-décomposition A de UN(3x3) :

$$\underset{UN(3x3)}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{(1)}{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}} + \underset{(4)}{\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}} + \underset{(5)}{\begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}}$$

2) la 1-voltrice obtenu par la permutation (3) de ces 3 matrices de permutation :




3) le carré latin associé :

$$\underset{1.(4)}{\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}} + \underset{2.(1)}{\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}} + \underset{3.(5)}{\begin{bmatrix} & & 3 \\ 3 & & \\ & 3 & \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

4) représentation de la 1-voltrice :

| | | A | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | (1) | (4) | (5) | (2) | (3) | (6) |
| plan | 1 | | 1 | | | | |
| | 2 | 1 | | | | | |
| | 3 | | | 1 | | | |

BUS LILLE

en permutant de toutes les façons possibles les matrices de permutation de la B-décomposition, et ces 1-voltrices sont toutes différentes. Il y aura donc n! fois plus de 1-voltrices d'ordre n qu'il n'y a de B-décomposition de UN(n x n)(fig 6 p 14).Ce nombre est le nombre de carrés latins d'ordre n. En effet, à chaque 1-voltrice d'ordre n on associera le carré latin obtenu en multipliant chaque plan par son indice et en en faisant la somme (fig 7b p 16).

A chaque 1-voltrice d'ordre n on peut associer un COUPLE de deux nombres. Pour chaque B-décomposition de UN(n x n) classons suivant leurs numéros lexicographiques les matrices de permutation. Classons ensuite lexicographiquement les B-décompositions de UN(n x n). Une 1-voltrice sera désignée par le numéro, noté entre crochets, de la B-décomposition qui a servi à la construire suivi du numéro de la permutation qu'on lui a fait subir. Ainsi pour n = 3, il y a douze 1-voltrices numérotées ([1], (1)) à ([1], (6)) et ([2], (1)) à ([2], (6)). Pour plus de clarté, pour n = 3, on a remplacé les premiers numéros par A et B et on a supprimé les parenthèses. Ainsi on écrit A3 au lieu de ([1], (3)). (fig 7b p 16). Pour ne pas alourdir cette notation, l'ordre n n'y a pas été introduit. Le contexte permet de le retrouver.

Nous nous intéressons,en partie III, à la B-décomposition des p-voltrices en 1-voltrices.

## 2.4 CONSTRUCTION DES p-MATRICES ET p-VOLTRICES

La nécessité de disposer d'un grand nombre de p-matrices et de p-voltrices pour tester les programmes a permis de mettre en évidence les propriétés suivantes.
Une matrice M d'ordre n-1, à éléments entiers non-négatifs se compléte en une p-matrice d'ordre n si le maximum des sommes sur les rangées n'est pas plus grand que la somme des éléments de M,divisée par n-2. Les valeurs de p sont celles comprises entre ces deux quantités

$$\max \sum_{\text{rangées}} \leq p \leq \frac{\sum \text{mat}}{n-2}$$

Connaissant une matrice M d'ordre n-1 et p on peut effectivement construire une p-matrice d'après les propriétés des espaces vectoriels des p-matrices. Les inéquations ci-dessus résultent du calcul des éléments de la ligne et de la colonne qu'on ajoute, ainsi que de celui de l'élément commun à ces deux rangées dans la p-matrice. En effet on veut

$$\forall\, i \neq n,\ a_{in} = p - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} \geq 0$$

$$\forall\, j \neq n,\ a_{nj} = p - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \geq 0$$

et $$a_{nn} = p - \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} = p - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} \geq 0$$

2.4

En faisant le même raisonnement pour les p-voltrices on trouve :

Une voltrice P d'ordre n-1, à éléments entiers non-négatifs se complète en une p-voltrice d'ordre n si les inéquations suivantes sont vérifiées.

$$\max \left( \sum_{\text{rangées}} a_{ijk}, \frac{\sum_{\text{volt}} a_{ijk}}{(n-2)(n-1)+1} \right) \leq p \leq \min \left( \frac{\sum_{\text{mat}} a_{ijk}}{n-2} \right)$$

La borne inférieure est obtenue à partir des éléments des matrices d'ordre n-1 ajoutées et de l'élément $a_{nnn}$, la borne supérieure vient des éléments des rangées adjacentes à deux des matrices ajoutées.

# II. LES P-MATRICES

# 3. LES PERMUTATIONS

## 3.1. LES GROUPES DE PERMUTATIONS

### 3.1.1 INTRODUCTION

Dès que l'ordre n est supérieur ou égal à 4 les problèmes de B-décompositions des p-matrices et p-voltrices deviennent si gros qu'on ne peut plus envisager de prendre en compte toutes leurs solutions.On va donc, aussi souvent que possible, créer des classes d'équivalences entre les données qui induiront des classes d'équivalences entre les résultats. Ces équivalences seront réalisées, dans la plupart des cas, à partir de permutations des rangées.

On se reportera à un ouvrage traitant des groupes finis,comme (B.12.1.1,1),pour les définitions et démonstrations des propriétés utilisées dans ce chapitre. On trouvera également ici quelques notions sur le groupe $\underline{S_n}$ des permutations de n objets qui seront utiles par la suite, en particulier pour n = 4.

### 3.1.2 LES DIFFERENTES TRANSITIVITES

#### *3.1.2.1 La transitivité simple*

Un ensemble K de permutations est dit TRANSITIF si pour deux objets quelconques i et j, il contient une permutation qui CHANGE i en j.

Cette notion est habituellement définie pour les groupes de permutations.

Elle est vérifiée par exemple pour n = 4 par le groupe [1] des 4 permutations {(1), (8), (17), (24)}.

Soit $\Gamma_k(i)$ les transformés de l'objet i par les permutations de K. Si K est un sous-groupe de $S_n$,$\Gamma_k(i)$ est l'ORBITE $\theta_i$ de i. Si K est transitif, $\Gamma_k(i)$ est l'ensemble des n objets à permuter.

#### *3.1.2.2 La k-fois-transitivité*

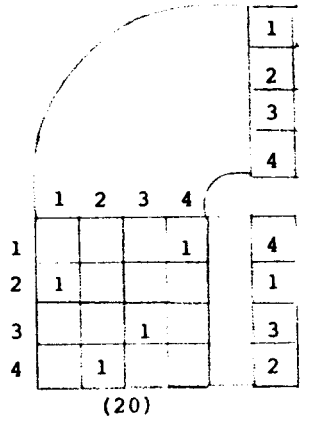
Nous la citons pour mémoire. Elle assure l'existence d'une permutation qui applique un ensemble quelconque de k-objets sur un autre ensemble de même cardinal.

Comme cette permutation applique les (n-k) autres objets sur le complémentaire du second ensemble, la k-fois-transitivité implique la (n-k)-fois-transitivité.

#### *3.1.2.3 La p-transitivité*

Un ensemble K de permutations sera dit p-TRANSITIF si pour deux objets quelconques i et j, il contient exactement p permutations qui changent i en j. C'est une notion nouvelle.

Figure 8 : Image d'une permutation
(Permutation de degré 4 ; n° lexicographique : (20))




$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

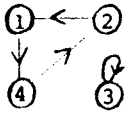



Figure 9 : Permutation et cycles
(Permutation de degré 4 ; n° lexicographique : (20))

La permutation
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

peut se réécrire
$$\begin{matrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

soit encore $1 \to 4 \to 2 \to 1$ et $3 \to 3$

Les cycles sont (1, 4, 2) (3) qu'on écrit (1,4,2)

BIBLI

## 3.1.3 PROPRIETES DE LA p-TRANSITIVITE.

### 3.1.3.1 *Cardinalité d'un ensemble p-transitif*

Un ensemble p-transitif est de cardinal p.n.

En effet pour chaque objet i on peut partitionner l'ensemble en regroupant les permutations qui changent i en chacun des n objets j. Chaque partie est de cardinal p par définition et il y en a n. De même pour chaque position j on peut partitionner l'ensemble en regroupant les permutations qui changent chacun des n objets i en j. Ceci permet d'obtenir 2.n partitions de l'ensemble.

### 3.1.3.2 *Ensembles p-transitifs et groupes $G_i$ :*

D'autre part un ensemble p-transitif a exactement p-permutations dans chacune des CLASSES A GAUCHE et dans chacune des CLASSES A DROITE des n sous-groupes $\underline{G_i}$ d'ordre (n-1)! de $S_n$ qui laissent invariant i, l'un des n objets.

En effet, les sous-groupes de $S_n$ qui laissent invariant un objet sont isomorphes au groupe $S_{n-1}$ des permutations des n-1 objets qui restent. Ils sont bien en nombre n et d'ordre (n-1)!, et ils ont chacun n classes à droite et n classes à gauche. Soit $G_i$ celui qui laisse invariant l'objet i. Chacune de ses classes à gauche, obtenues par permutation des colonnes des matrices des permutations de $G_i$, change l'objet i en un autre objet. Un ensemble p-transitif change l'objet i en chacun des n objets par p permutations. Les p permutations qui changent i en j sont dans la classe correspondante de $G_i$. De même, les classes à droite, obtenues par permutation des lignes des matrices des permutations de $G_i$, changent les autres objets que i, en l'objet i. Un ensemble p-transitif change chacun des n objets en l'objet i, par p permutations. Les p permutations qui changent j en i sont dans la classe correspondante de $G_i$.

La figure 49 (p 88) en donne une illustration pour n = 4.

### 3.1.3.3 *Les groupes p-transitifs*

La p-transitivité implique la transitivité simple.

Cette notion nouvelle est équivalente à la transitivité simple si K est un groupe. En effet

<u>Théorème</u> Un groupe G transitif de degré n est p-transitif avec $p = |G|/n$.

<u>Démonstration</u> :

Si G est transitif, $G_1$ (sous-groupe des permutations qui laissent l'objet 1 invariant)

- est d'indice n par rapport à G ,
- est donc d'ordre $p = \frac{|G|}{n}$.

Pour tout objet i, l'orbite $\theta_i$ est l'ensemble des n objets, et est donc de cardinal n. Or $|G_i| \times |\theta_i| = |G|$. Les sous-groupes $G_i$ (laissant i invariant) sont donc tous de même ordre p.

Quel que soit j, G contient une permutation $P_{ij}$ qui change i en j. Les classes à gauche $P_{ij}.G_i$ sont de même cardinal que les $G_i$, et sont constituées par toutes les permutations de G qui changent i en j.

Figure 10 : Les permutations de degré 4

| n° lexico | permutations (Les objets laissés inva--riants sont soulignés) | cycles | classes de conjugaison | ordre | parité | inverse |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | $\underline{1}\ \underline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}$ | I | $1^4$ | 1 | 1 | (1) |
| (2) | $\underline{1}\ \underline{2}\ 4\ 3$ | (3,4) | $1^2 2$ | 2 | -1 | (2) |
| (3) | $\underline{1}\ 3\ 2\ \underline{4}$ | (2,3) | $1^2 2$ | 2 | -1 | (3) |
| (4) | $\underline{1}\ 3\ 4\ 2$ | (2,3,4) | 1 3 | 3 | 1 | (5) |
| (5) | $\underline{1}\ 4\ 2\ 3$ | (2,4,3) | 1 3 | 3 | 1 | (4) |
| (6) | $\underline{1}\ 4\ \underline{3}\ 2$ | (2,4) | $1^2 2$ | 2 | -1 | (6) |
| (7) | $2\ 1\ \underline{3}\ \underline{4}$ | (1,2) | $1^2 2$ | 2 | -1 | (7) |
| (8) | 2 1 4 3 | (1,2) (3,4) | $2^2$ | 2 | 1 | (8) |
| (9) | $2\ 3\ 1\ \underline{4}$ | (1,2,3) | 1 3 | 3 | 1 | (13) |
| (10) | 2 3 4 1 | (1,2,3,4) | 4 | 4 | -1 | (19) |
| (11) | 2 4 1 3 | (1,2,4,3) | 4 | 4 | -1 | (14) |
| (12) | $2\ 4\ \underline{3}\ 1$ | (1,2,4) | 1 3 | 3 | 1 | (20) |
| (13) | $3\ 1\ 2\ \underline{4}$ | (1,3,2) | 1 3 | 3 | 1 | (9) |
| (14) | 3 1 4 2 | (1,3,4,2) | 4 | 4 | -1 | (11) |
| (15) | $3\ \underline{2}\ 1\ \underline{4}$ | (1,3) | $1^2 2$ | 2 | -1 | (15) |
| (16) | $3\ \underline{2}\ 4\ 1$ | (1,3,4) | 1 3 | 3 | 1 | (21) |
| (17) | 3 4 1 2 | (1,3) (2,4) | $2^2$ | 2 | 1 | (17) |
| (18) | 3 4 2 1 | (1,3,2,4) | 4 | 4 | -1 | (23) |
| (19) | 4 1 2 3 | (1,4,3,2) | 4 | 4 | -1 | (10) |
| (20) | $4\ 1\ \underline{3}\ 2$ | (1,4,2) | 1 3 | 3 | 1 | (12) |
| (21) | $4\ \underline{2}\ 1\ 3$ | (1,4,3) | 1 3 | 3 | 1 | (16) |
| (22) | $4\ \underline{2}\ \underline{3}\ 1$ | (1,4) | $1^2 2$ | 2 | -1 | (22) |
| (23) | 4 3 1 2 | (1,4,2,3) | 4 | 4 | -1 | (18) |
| (24) | 4 3 2 1 | (1,4) (2,3) | $2^2$ | 2 | 1 | (24) |

SUS LILLE

Enfin, pour chaque i, ces n classes à gauche constituent une partition de G.

On en déduit qu'il y a exactement p permutations qui changent i en j dans le groupe G transitif.

C.Q.F.D.

**Si un groupe contient un sous-groupe transitif, il est transitif.** En conséquence,

**Si un groupe contient une permutation constituée d'un cycle de degré n, il est transitif.** En effet, le sous-groupe engendré par cette permutation est transitif.

L'inverse n'est pas vrai, comme le montre le groupe [1] ci-dessus (§3.1.2.1 p 21).

Pour n = 4 ou pour n premier, les permutations constituées d'un cycle de degré n sont les seules d'ordre n. Mais, par exemple pour n = 6, la permutation (1) (2,3,4) (5,6) est d'ordre 6 (le ppcm des degrés de ses cycles) mais n'engendre pas un **sous-groupe cyclique** transitif puisque l'objet 1 est fixe.

**Les transitivités se conservent par CONJUGAISON, mais pas par isomorphisme.** En effet, si K est un ensemble transitif de permutations, alors pour toute permutation m, Km et mK sont encore transitifs. On obtient Km en permutant les lignes des matrices des permutations de K suivant m, et mK en permutant leurs colonnes suivant $m^{-1}$. Par ailleurs, le groupe [1] ci-dessus (§3.1.2.1 p 21) est isomorphe au groupe {(1), (7), (2), (8)} qui n'est pas transitif.

En conséquence, **les classes à droite et à gauche d'un sous-groupe transitif de G sont aussi des ensembles transitifs de permutations.** Et ceci montre en outre, qu'un ensemble transitif de permutations ne contient pas nécessairement un sous-groupe de permutations.

### 3.1.3.4 *Sur le groupe $S_4$*

Le groupe $S_4$ des permutations de degré 4 est d'ordre 4! = 24 = $2^3$ x 3.

Tous les renseignements sur ces permutations sont donnés dans les figures 8 (p22) à 12 (p28). Dans la figure 12, pour des raisons typographiques, les numéros lexicographiques n'ont pas été mis entre parenthèses.

Les **sous-groupes propres** de $S_4$ sont d'ordre 1, 2, 3, 4, 6, 8 ou 12, les diviseurs de 24, selon le **théorème de LAGRANGE.**

Les sous-groupes transitifs ont un ordre multiple de 4. Ils ne peuvent donc être que d'ordre 4, 8 ou 12. $S_4$ d'ordre 24 est 6-transitif.

Il n'y a que quatre sous-groupes d'ordre 4 de $S_4$ (fig 13 p30) qui soient transitifs. Ils sont tous **abéliens** car d'ordre $p^2$, où p est premier. L'un deux, le sous-groupe [1] ci-dessus,

Figure 11 : Classement des permutations de degré 4

| type de la classe | ordre des permutations | parité | classe (n° lexico des permutations) | cardinal de la classe |
|---|---|---|---|---|
| $1^4$ | 1 | 1 | (1) | 1 |
| $1^2 2$ | 2 | -1 | (2),(3),(6),(7),(15),(22) | 6 |
| 1 3 | 3 | 1 | (4),(5),(9),(12),(13),(16),(20),(21) | 8 |
| $2^2$ | 2 | 1 | (8),(17),(24) | 3 |
| 4 | 4 | -1 | (10),(11),(14),(18),(19),(23) | 6 |
| | | | Total | 24 |

BIBLIOTHEQUE

est isomorphe au **groupe quadratique de KLEIN** (Vierergruppe). Il est **invariant** car constitué par la juxtaposition de deux classes de conjugaison. Les trois autres sont les trois sous-groupes cycliques d'ordre 4 de $S_4$ (fig 14 p32). Il sont **conjugués**. Ils sont, tous les quatre, **imprimitifs**, donc ne peuvent être 2-fois-transitifs, et le premier admet les trois **systèmes d'imprimitivité** possibles pour n = 4.

Les trois sous-groupes d'ordre 8 de $S_4$ sont 2-transitifs. Ce sont en effet des **sous-groupes de SYLOW** puisque $8 = 2^3$ et que $24 = 3 \times 2^3$. Ils sont conjugués, puisque non invariants, étant donné qu'on ne peut constituer un groupe d'ordre 8 par juxtaposition des classes de conjugaison. D'autre part ils contiennent le sous-groupe invariant d'ordre 4 car $4 = 2^m$ avec $m < 3$. Ils sont isomorphes au **groupe diédral** d'ordre 8 qui n'est pas abélien mais contient une permutation d'ordre 4. Ceci assure la transitivité qui entraîne, puisque $8 = 2 \times 4$, la 2-transitivité (fig 16 p34). Ils ne sont pas 2-fois-transitifs car 8 n'est pas divisible par 3. Mais ils sont imprimitifs.

Le groupe $S_4$ ne contient qu'un seul groupe d'ordre 12 qui est le groupe $A_4$ **alterné** des **permutations paires**. Il est invariant (parce que constitué par la juxtaposition de classes de conjugaison), et 2-fois-transitif, ce qui implique qu'il est primitif. Il est donc 3-transitif puisque $12 = 3 \times 4$ (fig 15 p 32).

## 3.2 L'ESPACE VECTORIEL DES P-MATRICES D'ORDRE n

### 3.2.1 DIMENSION DE L'ESPACE VECTORIEL

Les p-matrices d'ordre n appartiennent à l'ESPACE VECTORIEL des matrices d'ordre n à éléments réels dont les sommes sur les rangées sont égales entre-elles.

Cet espace vectoriel est de DIMENSION $(n-1)^2 + 1$.

Une matrice A de cet espace est construite avec $n^2+1$ valeurs (les éléments $A_{ij}$ et la valeur p). Le vecteur, constitué par la juxtaposition, complétée par la valeur p, des lignes de cette matrice, est solution d'un **système linéaire** homogène de 2n lignes à $n^2+1$ colonnes constitué en exprimant les relations

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij} - p = 0 \qquad \sum_{j=1}^{n} A_{ij} - p = 0$$

qui signifient que les sommes sur les rangées de la matrice sont égales à p (fig 17 p36).

Figure 12 : Groupe $P_4$ : table de multiplication

(Les parenthèses ont été enlevées aux n° lexicographiques)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 2 | 2 | 1 | 4 | 3 | 6 | 5 | 8 | 7 | 10 | 9 | 12 | 11 | 14 | 13 | 16 | 15 | 18 | 17 | 20 | 19 | 22 | 21 | 24 | 23 |
| 3 | 3 | 5 | 1 | 6 | 2 | 4 | 9 | 11 | 7 | 12 | 8 | 10 | 15 | 17 | 13 | 18 | 14 | 16 | 21 | 23 | 19 | 24 | 20 | 22 |
| 4 | 4 | 6 | 2 | 5 | 1 | 3 | 10 | 12 | 8 | 11 | 7 | 9 | 16 | 18 | 14 | 17 | 13 | 15 | 22 | 24 | 20 | 23 | 19 | 21 |
| 5 | 5 | 3 | 6 | 1 | 4 | 2 | 11 | 9 | 12 | 7 | 10 | 8 | 17 | 15 | 18 | 13 | 16 | 14 | 23 | 21 | 24 | 19 | 22 | 20 |
| 6 | 6 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 | 12 | 10 | 11 | 8 | 9 | 7 | 18 | 16 | 17 | 14 | 15 | 13 | 24 | 22 | 23 | 20 | 21 | 19 |
| 7 | 7 | 8 | 13 | 14 | 19 | 20 | 1 | 2 | 15 | 16 | 21 | 22 | 3 | 4 | 9 | 10 | 23 | 24 | 5 | 6 | 11 | 12 | 17 | 18 |
| 8 | 8 | 7 | 14 | 13 | 20 | 19 | 2 | 1 | 16 | 15 | 22 | 21 | 4 | 3 | 10 | 9 | 24 | 23 | 6 | 5 | 12 | 11 | 18 | 17 |
| 9 | 9 | 11 | 15 | 17 | 21 | 23 | 3 | 5 | 13 | 18 | 19 | 24 | 1 | 6 | 7 | 12 | 20 | 22 | 2 | 4 | 8 | 10 | 14 | 16 |
| 10 | 10 | 12 | 16 | 18 | 22 | 24 | 4 | 6 | 14 | 17 | 20 | 23 | 2 | 5 | 8 | 11 | 19 | 21 | 1 | 3 | 7 | 9 | 13 | 15 |
| 11 | 11 | 9 | 17 | 15 | 23 | 21 | 5 | 3 | 18 | 13 | 24 | 19 | 6 | 1 | 12 | 7 | 22 | 20 | 4 | 2 | 10 | 8 | 16 | 14 |
| 12 | 12 | 10 | 18 | 16 | 24 | 22 | 6 | 4 | 17 | 14 | 23 | 20 | 5 | 2 | 11 | 8 | 21 | 19 | 3 | 1 | 9 | 7 | 15 | 13 |
| 13 | 13 | 19 | 7 | 20 | 8 | 14 | 15 | 21 | 1 | 22 | 2 | 16 | 9 | 23 | 3 | 24 | 4 | 10 | 11 | 17 | 5 | 18 | 6 | 12 |
| 14 | 14 | 20 | 8 | 19 | 7 | 13 | 16 | 22 | 2 | 21 | 1 | 15 | 10 | 24 | 4 | 23 | 3 | 9 | 12 | 18 | 6 | 17 | 5 | 11 |
| 15 | 15 | 21 | 9 | 23 | 11 | 17 | 13 | 19 | 3 | 24 | 5 | 18 | 7 | 20 | 1 | 22 | 6 | 12 | 8 | 14 | 2 | 16 | 4 | 10 |
| 16 | 16 | 22 | 10 | 24 | 12 | 18 | 14 | 20 | 4 | 23 | 6 | 17 | 8 | 19 | 2 | 21 | 5 | 11 | 7 | 13 | 1 | 15 | 3 | 9 |
| 17 | 17 | 23 | 11 | 21 | 9 | 15 | 18 | 24 | 5 | 19 | 3 | 13 | 12 | 22 | 6 | 20 | 1 | 7 | 10 | 16 | 4 | 14 | 2 | 8 |
| 18 | 18 | 24 | 12 | 22 | 10 | 16 | 17 | 23 | 6 | 20 | 4 | 14 | 11 | 21 | 5 | 19 | 2 | 8 | 9 | 15 | 3 | 13 | 1 | 7 |
| 19 | 19 | 13 | 20 | 7 | 14 | 8 | 21 | 15 | 22 | 1 | 16 | 2 | 23 | 9 | 24 | 3 | 10 | 4 | 17 | 11 | 18 | 5 | 12 | 6 |
| 20 | 20 | 14 | 19 | 8 | 13 | 7 | 22 | 16 | 21 | 2 | 15 | 1 | 24 | 10 | 23 | 4 | 9 | 3 | 18 | 12 | 17 | 6 | 11 | 5 |
| 21 | 21 | 15 | 23 | 9 | 17 | 11 | 19 | 13 | 24 | 3 | 18 | 5 | 20 | 7 | 22 | 1 | 12 | 6 | 14 | 8 | 16 | 2 | 10 | 4 |
| 22 | 22 | 16 | 24 | 10 | 18 | 12 | 20 | 14 | 23 | 4 | 17 | 6 | 19 | 8 | 21 | 2 | 11 | 5 | 13 | 7 | 15 | 1 | 9 | 3 |
| 23 | 23 | 17 | 21 | 11 | 15 | 9 | 24 | 18 | 19 | 5 | 13 | 3 | 22 | 12 | 20 | 6 | 7 | 1 | 16 | 10 | 14 | 4 | 8 | 2 |
| 24 | 24 | 18 | 22 | 12 | 16 | 10 | 23 | 17 | 20 | 6 | 14 | 4 | 21 | 11 | 19 | 5 | 8 | 2 | 15 | 9 | 13 | 3 | 7 | 1 |

N. B. : cette table est établie suivant la notation matricielle.

Si f et g sont deux permutations alors :

m.p. (f.g) = m.p.(g) x m.p.(f).

m.p.(g) est l'indice de ligne , et m.p.(f) celui de colonne.

Exemple :

(10)

$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

(13)

$$\begin{pmatrix} & & 1 & \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

notation matricielle :

(13).(10) = (22).

Il s'agit, au sens des applications, de (perm. 10) x (perm. 13)

BUS LILLE

La partie de la matrice de ce système qui ne correspond pas à la dernière coordonnée p du vecteur ci-dessus est TOTALEMENT UNIMODULAIRE, car l'HYPERGRAPHE (§ 9.1. p187),dont les sommets sont les cases de la matrice A et les arêtes ses rangées,est unimodulaire, puisque n'ayant pas de cycles impairs. (B 12.1.2, 5 chap 20) (§ 9.11 p187).

Le système est de rang 2 n-1. D'ailleurs,la dernière ligne est la somme des n premières diminuée de la somme des (n-1) avant-dernières. Ceci signifie que dans la construction d'une p-matrice on peut se dispenser de vérifier l'égalité à p de la somme sur une des rangées.

Il y a, puisque le système est rectangulaire horizontal, $n^2+1 - (2n-1) = (n-1)^2 + 1$ paramètres à définir quand on résoud ce système. Ces paramètres correspondent, par exemple, à une sous-matrice d'ordre n-1 complétée par la valeur de p (fig 18 p38).

### 3.2.2 CONSTRUCTION DES p-MATRICES : SYSTEMES D'INEQUATIONS.

Les p-matrices sont solutions du système. Elles ont leurs éléments positifs. Pour cela il faut, non seulement que les paramètres soient positifs ou nuls : par exemple

1) $\forall A_{ij} \in$ sous-matrice : $A_{ij} \geq 0$

2) $p \geq 0$

mais encore qu'ils vérifient les conditions suivantes, établies au § 2.4.(p17), où les sommations sont faites sur les éléments de la sous-matrice :

3) $\max_{\text{rangées}} \left( \sum_{\text{rangée}} , A_{ij} \right) \leq p \leq \frac{1}{n-2} \sum_{\text{sous-mat}} A_{ij}$

Comme, on ne sait pas, à priori,pour quelle rangée le maximum est atteint , les conditions 3) donnent un système de 2n+1 inéquations, qui complété par les $(n-1)^2$ conditions 1) et la condition 2) donne un système de $n^2+3$ inéquations à $n^2-2n+2$ inconnues (fig 18 p 38 et 19 p 37).

Les solutions entières (non-négatives à cause de 1) et 2)) de ce système d'inéquations donnent reportées dans le système d'équations précédent,les p-matrices.

### 3.2.3 RESOLUTION THEORIQUE DU SYSTEME D'INEQUATIONS

Pour résoudre le système d'équations en nombres entiers, on peut utiliser l'une des mèthodes décrites par J.C. FIOROT (B 12.2.3, 33) faisant appel, soit à une réduite d'HERMITE, soit à une forme normale de SMITH.

Une réduite d'HERMITE d'une matrice C à m lignes et n colonnes de rang r < n à éléments dans un anneau euclidien est une matrice H de même dimension, déduite de C par la formule H = PCV où P est

**Figure 13 :** Permutations de degré 4.

Les 4 groupes 1-transitifs, imprimitifs, d'ordre 4

[1] = {(1), (8), (17), (24)} = { I , (1,2) (3,4) ,(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)}

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 1 & & & \\
2 & & 1 & & \\
3 & & & 1 & \\
4 & & & & 1 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & & 1 & & \\
2 & 1 & & & \\
3 & & & & 1 \\
4 & & & 1 & \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & & & 1 & \\
2 & & & & 1 \\
3 & 1 & & & \\
4 & & 1 & & \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & & & & 1 \\
2 & & & 1 & \\
3 & & 1 & & \\
4 & 1 & & & \\
\hline
\end{array}$$

(1) (8) (17) (24)

systèmes imprimitifs

$$\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ \hline\end{array}
\quad
\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ \hline\end{array}
\quad
\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ \hline\end{array}$$

[2] = {(1), (8), (18), (23)} = { I ,(1,2)(3,4), (1,3,2,4), (1,4,2,3)}

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 1 & & & \\
2 & & 1 & & \\
3 & & & 1 & \\
4 & & & & 1 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & & 1 & & \\
2 & 1 & & & \\
3 & & & & 1 \\
4 & & & 1 & \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & & & 1 & \\
2 & & & & 1 \\
3 & & 1 & & \\
4 & 1 & & & \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & & & & 1 \\
2 & & & 1 & \\
3 & & 1 & & \\
4 & 1 & & & \\
\hline
\end{array}$$

(1) (8) (18) (23)

système imprimitif

$$\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ \hline\end{array}$$

[3] = {(1), (17), (10), (19)} = { I , (1,3)(2,4), (1,2,3,4), (1,4,3,2)}

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 3 & 2 & 4 \\
\hline
1 & 1 & & & \\
3 & & 1 & & \\
2 & & & 1 & \\
4 & & & & 1 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 3 & 2 & 4 \\
\hline
1 & & 1 & & \\
3 & 1 & & & \\
2 & & & & 1 \\
4 & & & 1 & \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 3 & 2 & 4 \\
\hline
1 & & & 1 & \\
3 & & & & 1 \\
2 & & 1 & & \\
4 & 1 & & & \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 3 & 2 & 4 \\
\hline
1 & & & & 1 \\
3 & & & 1 & \\
2 & & 1 & & \\
4 & 1 & & & \\
\hline
\end{array}$$

(1) (17) (10) (19)

système imprimitif

$$\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ \hline\end{array}$$

[4] = {(1), (24), (11), (14)} = { I , (1,4)(2,3), (1,2,4,3), (1,3,4,2)}

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 4 & 2 & 3 \\
\hline
1 & 1 & & & \\
4 & & 1 & & \\
2 & & & 1 & \\
3 & & & & 1 \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 4 & 2 & 3 \\
\hline
1 & & 1 & & \\
4 & 1 & & & \\
2 & & & & 1 \\
3 & & & 1 & \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 4 & 2 & 3 \\
\hline
1 & & & 1 & \\
4 & & & & 1 \\
2 & & 1 & & \\
3 & 1 & & & \\
\hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 4 & 2 & 3 \\
\hline
1 & & & & 1 \\
4 & & & 1 & \\
2 & & 1 & & \\
3 & 1 & & & \\
\hline
\end{array}$$

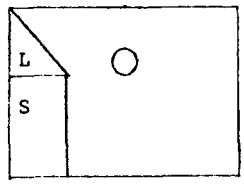
(1) (24) (11) (14)

système imprimitif

$$\begin{array}{|cc|}\hline 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ \hline\end{array}$$

BUS LILLE

une matrice de permutation d'ordre n et V une matrice unimodulaire d'ordre m, toutes deux dépendantes de C, et telles que la matrice H soit composée suivant le schéma ci-dessous où la sous-matrice L est triangulaire inférieure




matrice H

Dans une forme normale de SMITH, la matrice P est une matrice unimodulaire et dans la matrice H, la sous matrice S est nulle et la matrice L est diagonale.

On trouvera, dans B 12.2.3, [33], des procédures, écrites en langage ALGOL 60, pour résoudre les systèmes linéaires en nombres entiers par les méthodes proposées. Dans notre cas particulier, leur emploi ne se justifie pas.

Le système d'inéquations relatif aux conditions sur les paramètres engendre un cône polyédrique de sommet zéro. Les p-matrices sont données par les points entiers de ce cône.

Si la matrice du système d'inéquations est de rang r, en conservant r lignes indépendantes de ce système, on trouve, comme l'indique le théorème V2 de B 12.2.3, [33] que les points entiers du cône sont de la forme

$$x = \overset{\ell}{x} + k_1 B^1 + \ldots + k_r B^r + y_{r+1} V^{r+1} + \ldots + y_n V^n$$

où les $\overset{i}{x}$ sont les points fondamentaux, c'est à dire les points entiers du parallélotope semi-ouvert construit sur les vecteurs $B^i$ ayant, pour origine, le sommet du cône. En d'autres termes, le cône est pavé avec de tels parallélotopes, et chaque point entier est la somme de deux vecteurs, l'un $\overset{i}{x}$ dans le parallélotope contenant le point entier, l'autre, de translation du parallélotope contenant l'origine du cône, au parallélotope contenant le point.

Les procédures fournies par B 12.2.3, [33], écrites en ALGOL 60, pour calculer les éléments de la formule ci-dessus, donnent un seul point fondamental $\overset{i}{x}$ qui est le sommet (zéro) du cône. Les vecteurs $B^i$ et $V^j$ correspondent soit à des matrices de permutation, soit à des combinaisons linéaires à coefficients entiers quelconques de matrices de permutations. Et, dans ce dernier cas, comme elles ont des coefficients négatifs, elles ont des éléments négatifs. Ceci est normal, car, en abandonnant quelques lignes, on a supprimé des conditions du type $a_{ij} \geq 0$

### 3.2.4 BASES DE L'ESPACE VECTORIEL CONTENANT LES p-MATRICES

Les vecteurs $B^i$ et $V^j$ constituent une base de l'espace vectoriel contenant les p-matrices.

**Figure 14 :** Présentation cyclique du groupe [3]

[3] = {(1), (10), (17), (19)}

$$(1)\quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & & & \\ 2 & & 1 & & \\ 3 & & & 1 & \\ 4 & & & & 1 \end{array}$$

$$(10)\quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & 1 & & \\ 2 & & & 1 & \\ 3 & & & & 1 \\ 4 & 1 & & & \end{array}$$

$$(17)\quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & 1 & \\ 2 & & & & 1 \\ 3 & 1 & & & \\ 4 & & 1 & & \end{array}$$

$$(19)\quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & 1 \\ 2 & 1 & & & \\ 3 & & 1 & & \\ 4 & & & 1 & \end{array}$$

**Figure 15 :** Le groupe $A_4$

(Ordre 12, alterné, invariant,
2-fois-transitif et 3-transitif)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | <u>1</u> | <u>2</u> | <u>3</u> | <u>4</u> | $G_1$ |
| (4) | <u>1</u> | 3 | 4 | 2 | |
| (5) | <u>1</u> | 4 | 2 | 3 | |
| (8) | 2 | 1 | 4 | 3 | |
| (9) | 2 | 3 | 1 | <u>4</u> | |
| (12) | 2 | 4 | <u>3</u> | 1 | |
| (13) | 3 | 1 | 2 | <u>4</u> | |
| (16) | 3 | <u>2</u> | 4 | 1 | |
| (17) | 3 | 4 | 1 | 2 | |
| (20) | 4 | 1 | <u>3</u> | 2 | |
| (21) | 4 | <u>2</u> | 1 | 3 | |
| (24) | 4 | 3 | 2 | 1 | |

BUS LILLE

Les $k_i$ sont des entiers positifs ou nuls, les $y_j$ des entiers quelconques. Les $\overset{\ell}{x}$, appartenant au parallélotope construit sur les vecteurs $B^i$, sont de la forme

$$\overset{\ell}{x} = S + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i B^i$$

avec $0 \leq \lambda_i < 1$, où S est le sommet du cône. Comme S est l'origine zéro de l'espace, les p-matrices se décomposent dans cette base sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{r} h_i B^i + \sum_{j=r+1}^{n} y_j V^i$$

où les $h_i = k_i + \lambda_i$ sont des nombres rationnels non-négatifs de partie entière $k_i$ et les $y_j$ des entiers de signes quelconques.

On peut trouver d'autres bases pour l'espace vectoriel contenant les p-matrices et en particulier des bases constituées avec des matrices de permutation. Nous en avons proposé une au § 2.2.2 (p 13) pour n = 4. Pour en construire d'autres on peut utiliser la remarque suivante.

Dans la réduite d'HERMITE, le rôle de la matrice P est de permuter les lignes de la matrice C de façon à amener, en haut de la matrice, des lignes indépendantes.

Comme l'ensemble des matrices de permutation constitue un système de générateurs pour l'espace vectoriel contenant les p-matrices, pour avoir une base il faut en extraire un système libre. Pour cela on peut se servir de la matrice P de la réduite d'HERMITE de la matrice constituée par la juxtaposition des vecteurs lignes construits à partir des matrices de permutation, comme au début du § 3.2.1 (p27). Dans la pratique on ne se servira que d'une partie des matrices de permutation, et si le système libre obtenu n'est pas de cardinal suffisant, avant de recommencer le calcul de P, on remplacera les matrices qui ne sont pas dans le système libre par des matrices non encore envisagées. Un programme a été réalisé pour cet ALGORITHME* (§11.4.1, p223). En proposant les matrices de permutation dans des ordres différents nous avons obtenu des bases différentes (fig 20 p40).

## 3.3 RELATIONS ENTRE LES MATRICES DE PERMUTATION

Les matrices de permutation sont des 1-matrices et sont alors contenues dans l'espace vectoriel considéré dans le paragraphe 3.2. Etant en nombre supérieur à la dimension de cet espace vectoriel, on peut trouver entre elles des RELATIONS déduites de combinaisons linéaires nulles.

Parmi celles-ci, sont importantes les relations où dans chacun des MEMBRES n'apparaissent que des matrices de permutation avec des coefficients égaux à 1. Les plus intéressantes sont celles dont les membres sont égaux à la matrice UN(nxn).

Pour n = 4, ces membres sont les 24 B-décompositions de la matrice UN(4x4) numérotées entre crochet dans la figure 21 (p41).

Figure 16 : Les 3 sous-groupes d'ordre 8 de $S_4$

Groupe diédral : $A^4 = B^2 = I$ ; $A.B = B.A^3$

| | I | A | $A^2$ | $A^3$ | B | B.A | $B.A^2$ | $B.A^3$ | système d'imprimivité |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1°/ | (1) | (18) | (8) | (23) | (2) | (24) | (7) | (17) | 12 / 34 |
| 2°/ | (1) | (10) | (17) | (19) | (6) | (24) | (15) | (8) | 13 / 24 |
| 3°/ | (1) | (11) | (24) | (14) | (3) | (17) | (22) | (8) | 14 / 32 |
| classe | $1^4$ | 4 | $2^2$ | 4 | $1^2 2$ | $2^2$ | $1^2 2$ | $2^2$ | |
| ordre | 1 | 4 | 2 | 4 | 2 | 2 | 2 | 4 | |

le 1°/

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 1 | 2 | 3 | 4 | I |
| (8) | 2 | 1 | 4 | 3 | (1,2)(3,4) |
| (17) | 3 | 4 | 1 | 2 | (1,3)(2,4) |
| (24) | 4 | 3 | 2 | 1 | (1,4)(2,3) |
| (2) | 1 | 2 | 4 | 3 | (3,4) |
| (7) | 2 | 1 | 3 | 4 | (1,2) |
| (18) | 3 | 4 | 2 | 1 | (1,3,2,4) |
| (23) | 4 | 3 | 1 | 2 | (1,4,3,2) |

le 2°/ se déduit du 1°/ en échangeant 2 et 3

le 3°/ se déduit du 1°/ en échangeant 2 et 4

Il y a quatre B-décompositions de UN(4x4) qui contiennent la même matrice de permutation. En l'y supprimant on trouve des membres, somme de trois matrices de permutation, pour former de nouvelles relations (fig 22 p42).

Soit un couple de matrices de permutation. Il appartient à zéro ou deux B-décompositions de UN(4x4). On peut alors,comme ci-dessus, engendrer DES RELATIONS A DEUX MATRICES DE PERMUTATION PAR MEMBRE. On peut en obtenir dix-huit différentes (fig 23 p43). Ces relations peuvent être couplées de façon qu'en prenant les matrices de permutation d'un membre de chacune d'elles on puisse reconstituer une B-décomposition de UN(4x4). On peut ainsi reconstituer avec deux RELATIONS COMPLEMENTAIRES, quatre B-décompositions de UN(4x4), qui se regroupent en deux paires contenant les huit matrices (fig 24 p42).

Les classes de conjugaison des matrices de permutation induisent des classes d'équivalence dans les ensembles de même cardinal de matrices de permutation, en particulier dans les membres des relations et, par conséquence, dans les relations elles-mêmes. Il y a, ainsi, pour n = 4, trois classes de relations à deux matrices par membre.

On peut remarquer que si à une matrice de permutation x on ajoute une matrice de permutation y n'appartenant pas à une B-décomposition contenant x, la somme x + y aura au moins une case contenant un 2. D'autre part, pour n = 4, les seules sommes de deux matrices de permutation qui interviennent dans les relations sont celles envisagées en figure 23(p43) ; une autre somme de deux matrices de permutation ne peut pas être égale à la somme de deux autres matrices.

Pour n = 4, il existe deux autres catégories de relations, à trois matrices de permutation par membre.

Les premières se déduisent des relations établies pour n = 3. En effet, en ajoutant à une matrice de permutation d'ordre n-1 une ligne et une colonne nulles en dehors de leur intersection qui est 1, on obtient une matrice de permutation d'ordre n. A la somme de q matrices de permutation d'ordre n-1 ajoutons une ligne et une colonne nulles et d'intersection q, on a une somme de q matrices de permutation d'ordre n(fig 25 p46).

Les secondes correspondent à des sommes, qui ne contiennent qu'un seul 2, de trois matrices de permutation. Ces sommes contiennent alors un 0 dans la sous-matrice opposée à ce 2. On peut caractériser ces matrices par les indices du 2 suivis par les indices du 0. Il y a $4^2$ positions pour le 2,et $3^2$ positions pour le 0, ce qui donne 144 telles sommes.Chacune d'elles peut être obtenue de 2 façons différentes, ce qui donne 144 relations à trois matrices de permutation par membre (fig 25 p 46 et 27 p 44). Ces relations sont numérotées par les indices du 2 suivis des indices du 0.

Il n'y a pas d'autres relations à trois matrices de permutation par membre. Cela ressort des résultats du paragraphe 5.6.6 (2°C p 99).

Figure 17 :

Système d'équations ayant les p-matrices parmi ses solutions

n=4, 8 équations à 17 inconnues, rang 7, 10 paramètres

| ligne i = | 1 | | | | 2 | | | | 3 | | | | 4 | | | | P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| colonne j = paramètres | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} - p = 0$ | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | -1 |
| | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | -1 |
| | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | -1 |
| | | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | -1 |
| $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} - p = 0$ | 1 | | | | 1 | | | | 1 | | | | 1 | | | | -1 |
| | | 1 | | | | 1 | | | | 1 | | | | 1 | | | -1 |
| | | | 1 | | | | 1 | | | | 1 | | | | 1 | | -1 |
| | | | | 1 | | | | 1 | | | | 1 | | | | 1 | -1 |

$\cdot x = 0$

2 solutions du système :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 1-1 0 0 | -1 1 0 0 | 0 0 0 0 | 0 0 0 0 | 0 |
| mat I | 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 | 1 |

| | |
|---|---|
| 1-1 0 0 | 0 |
| -1 1 0 0 | |
| 0 0 0 0 | |
| 0 0 0 0 | |

a

| | |
|---|---|
| 1 0 0 0 | 1 |
| 0 1 0 0 | |
| 0 0 1 0 | |
| 0 0 0 1 | |

I

BUS LILLE

Figure 19 : Dimensions des systèmes associés aux p-matrices

| ordre | système d'équations | | | Conditions sur les paramètres | |
|---|---|---|---|---|---|
| | nb lignes | nb colonnes | rang | nb lignes | nb colonnes = rang |
| n | 2 n | $n^2+1$ | 2n-1 | $n^2+3$ | $(n-1)^2+1$ |
| 2 | 4 | 5 | 3 | 7 | 2 |
| 3 | 6 | 10 | 5 | 12 | 5 |
| 4 | 8 | 17 | 7 | 19 | 10 |
| 5 | 10 | 26 | 9 | 28 | 17 |
| 6 | 12 | 37 | 11 | 39 | 26 |
| 7 | 14 | 50 | 13 | 52 | 37 |
| 8 | 16 | 65 | 15 | 67 | 50 |

Figure 18 : Conditions sur les paramètres des p-matrices

ORDRE= 4 TYPE= 2 M= 17 N= 10

PARAMETRES D'UNE P-MAT D'ORDRE 4

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | -1 | 1 |
| 4 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | -2 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

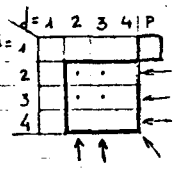
$$-\sum_{i=2}^{4} A_{ij} + p \geqslant 0$$

$$-\sum_{j=2}^{4} A_{ij} + p \geqslant 0$$

$$\sum_{i=2}^{4}\sum_{j=2}^{4} A_{ij} - (4-2)\times p \geqslant 0$$

$$\forall i = 2,\dots,4 \quad \forall j = 2,\dots,4 \qquad A_{ij} \geqslant 0$$

$$p \geqslant 0$$




Conditions retenues à la fig 18 (suite)

CONE POLYEDRIQUE

MATRICE DE PERMUTATION

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

BUS LILLE

Figure 18 (suite)

```
RANG= 10

MATRICE TRAITEE

 1 -1 -1  0  0  0  0  0  0  1
 2  0  0  0 -1 -1 -1  0  0  0  1
 3  0  0  0  0  0  0 -1 -1 -1  1
 4 -1  0  0 -1  0  0 -1  0  0  1
 5  0 -1  0  0 -1  0  0 -1  0  1
 7  1  1  1  1  1  1  1  1  1 -2
 8  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0
 9  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0
11  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0
12  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0

VECTEURS DE TRANSLATION:

X( 1)
 0 0 0 1
 1 0 0 0
 0 0 0 1
 0 1 1-1

X( 2)
 0 0 0 1
 0 0 0 1
 1 0 0 0
 0 1 1-1

X( 3)
 0 0 0 1
 0 0 0 1
 0 0 0 1
 1 1 1-2

X( 4)
 0 1 0-1
 0 0 0 0
 0 0 0 0
 0-1 0 1

X( 5)
 0 0 1-1
 0 0 0 0
 0 0 0 0
 0 0-1 1

X( 6)
 1 0 0 0
 0 0 0 1
 0 0 0 1
 0 1 1-1

X( 7)
 0 0 0 0
 0 1 0-1
 0 0 0 0
 0-1 0 1

X( 8)
 0 0 0 0
 0 0 1-1
 0 0 0 0
 0 0-1 1

X( 9)
 0 0 0 0
 0 0 0 0
 0 1 0-1
 0-1 0 1

X(10)
 0 0 0 0
 0 0 0 0
 0 0 1-1
 0 0-1 1

1 POINTS FONDAMENTAUX

X( 1)
 0 0 0 0
 0 0 0 0
 0 0 0 0
 0 0 0 0
```

Figure 20

```
RANG= 10

BASE DES P-MAT.D'ORDRE 4

MP (5)
1 0 0 0
0 0 0 1
0 1 0 0
0 0 1 0

MP (8)
0 1 0 0
1 0 0 0
0 0 0 1
0 0 1 0

MP (10)
0 1 0 0
0 0 1 0
0 0 0 1
1 0 0 0

MP (11)
0 1 0 0
0 0 0 1
1 0 0 0
0 0 1 0

MP (1)
1 0 0 0
0 1 0 0
0 0 1 0
0 0 0 1

MP (2)
1 0 0 0
0 1 0 0
0 0 0 1
0 0 1 0

MP (3)
1 0 0 0
0 0 1 0
0 1 0 0
0 0 0 1

MP (4)
1 0 0 0
0 0 1 0
0 0 0 1
0 1 0 0

MP (13)
0 0 1 0
1 0 0 0
0 1 0 0
0 0 0 1

MP (19)
0 0 0 1
1 0 0 0
0 1 0 0
0 0 1 0

RIEN TROUVE D'AUTRE
```

BUS LILLE

Figure 21 : Les B-décompositions de UN(4x4)

| n=4<br>n° | décompositions | classes des permutations | Classes<br>d'après les classes des permutations | d'après les groupes à droite | à gauche | réunion des précédentes |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [1] | (1)+ (8)+(17)+(24) | I $2^2$ $2^2$ $2^2$ | 1 | 1 | 1 | I |
| [2] | (1)+ (8)+(18)+(23) | I $2^2$ 4 4 | 2 | 2 | 2 | II |
| [3] | (1)+(10)+(17)+(19) | I 4 $2^2$ 4 | 2 | 3 | 3 | II |
| [4] | (1)+(11)+(14)+(24) | I 4 4 $2^2$ | 2 | 4 | 4 | II |
| [5] | (2)+ (7)+(17)+(24) | 2 2 $2^2$ $2^2$ | 4 | 2 | 2 | II |
| [6] | (2)+ (7)+(18)+(23) | 2 2 4 4 | 5 | 1 | 1 | I |
| [7] | (2)+ (9)+(18)+(20) | 2 3 4 3 | 3 | 3 | 4 | II |
| [8] | (2)+(12)+(13)+(23) | 2 3 3 4 | 3 | 4 | 3 | II |
| [9] | (3)+ (8)+(17)+(22) | 2 $2^2$ $2^2$ 2 | 4 | 4 | 4 | II |
| [10] | (3)+(11)+(14)+(22) | 2 4 4 2 | 5 | 1 | 1 | I |
| [11] | (3)+(11)+(16)+(20) | 2 4 3 3 | 3 | 2 | 3 | II |
| [12] | (3)+(12)+(14)+(21) | 2 3 4 3 | 3 | 3 | 2 | II |
| [13] | (4)+ (7)+(18)+(21) | 3 2 4 3 | 3 | 4 | 3 | II |
| [14] | (4)+(11)+(13)+(22) | 3 4 3 2 | 3 | 3 | 2 | II |
| [15] | (4)+(12)+(13)+(21) | 3 3 3 3 | 6 | 1 | 1 | I |
| [16] | (4)+(12)+(15)+(19) | 3 3 2 4 | 3 | 2 | 4 | II |
| [17] | (5)+ (7)+(16)+(23) | 3 2 3 4 | 3 | 3 | 4 | II |
| [18] | (5)+ (9)+(14)+(22) | 3 3 4 2 | 3 | 2 | 3 | II |
| [19] | (5)+ (9)+(16)+(20) | 3 3 3 3 | 6 | 1 | 1 | I |
| [20] | (5)+(10)+(15)+(20) | 3 4 2 3 | 3 | 4 | 2 | II |
| [21] | (6)+ (8)+(15)+(24) | 2 $2^2$ 2 $2^2$ | 4 | 3 | 3 | II |
| [22] | (6)+ (9)+(16)+(19) | 2 3 3 4 | 3 | 4 | 2 | II |
| [23] | (6)+(10)+(13)+(21) | 2 4 3 3 | 3 | 2 | 4 | II |
| [24] | (6)+(10)+(15)+(19) | 2 4 2 4 | 5 | 1 | 1 | I |

<u>Récapitulation</u> :

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | 1 | I,3x$2^2$ | [1] |
| II | 2 | I,$2^2$,2x4 | [2],[3],[4] |
| | 3 | 2,2x3,4 | [7],[8],[11],[12],[13],[14],[16],[17],[18],[20],[22],[23] |
| | 4 | 2x2,2x$2^2$ | [5],[9],[21] |
| I | 5 | 2x2,2x4 | [6],[10],[24] |
| I | 6 | 4x3 | [15],[19] |

Figure 22 : Relations, à 3 matrices par membre, déduites

n = 4 des décompositions de UN(4 x 4)

[1] => (8) + (17) + (24) =

[2] => (8) + (18) + (23) =

[3] => (10) + (17) + (19) =

[4] => (11) + (14) + (24) .

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Figure 24 : Relations complémentaires

n = 4 ( 2 matrices de permutation par membre)

(1) + (8) = (2) + (7)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(17) + (24) = (18) + (23)

$$\begin{bmatrix} & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \end{bmatrix}$$

(1) + (8) + (17) + (24) = [1] =

(1) + (8) + (18) + (23) = [2] =

(2) + (7) + (17) + (24) = [5] =

(2) + (7) + (18) + (23) = [6] =

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

UN(4 x 4)

[1] + [6] = [2] + [5] = 2 . UN(4 x 4)

[1] + [6] et [2] + [5] contiennent les 8 m.p.

BUS LILLE

Figure 23 : Les 18 relations à deux matrices par membre

n = 4

| somme / | | somme + |
|---|---|---|
| Classe A : I + 2 = 2 + 2 | | Classe C : $2^2 + 2^2 = 4 + 4$ |
| (1) + (8) = (2) + (7) | / / + +<br>/ / + +<br>+ + / /<br>+ + / / | (17) + (24) = (18) + (23) |
| (1) + (17) = (6) + (15) | / + / +<br>+ / + /<br>/ + / +<br>+ / + / | (8) + (24) = (10) + (19) |
| (1) + (24) = (3) + (22) | / + + /<br>+ / / +<br>+ / / +<br>/ + + / | (8) + (17) = (11) + (14) |
| classe B : 2 + 4 = 3 + 3 | | |
| (2) + (18) = (5) + (16) | / + / +<br>+ / + /<br>/ + + /<br>+ / / + | (7) + (23) = ( 9 ) + (20) |
| (2) + (23) = (4) + (21) | / + + /<br>+ / / +<br>/ + + /<br>+ / / + | (7) + (18) = (12) + (13) |
| (3) + (11) = (5) + (9) | / / + +<br>+ + / /<br>/ / + +<br>+ + / / | (22) + (14) = (16) + (20) |
| (3) + (14) = (4) + (13) | / + / +<br>/ + / +<br>+ / + /<br>+ / + / | (22) + (11) = (12) + (21) |
| (6) + (10) = (4) + (12) | / / + +<br>+ + / /<br>+ + / /<br>/ / + + | (15) + (19) = (13) + (21) |
| (6) + (19) = (5) + (20) | / + + /<br>/ + + /<br>+ / / +<br>+ / / + | (15) + (10) = (9) + (16) |

BUS LILLE

Figure 27 144 relations à 3 matrices de permutation par membre
(signes + et ( ) n'ont pas été écrits)

| n° | relations | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1122 | (3) + | (6) + | (8) | = | (4) + | (5) + | (7) |
| 3 | 1 | 5 | 14 | = | 2 | 6 | 13 |
| 4 | 1 | 4 | 19 | = | 2 | 3 | 20 |
| 32 | 1 | 4 | 11 | = | 2 | 6 | 9 |
| 3 | 2 | 3 | 17 | = | 4 | 5 | 15 |
| 4 | 1 | 5 | 23 | = | 3 | 6 | 21 |
| 42 | 1 | 5 | 10 | = | 2 | 3 | 12 |
| 3 | 1 | 4 | 18 | = | 3 | 6 | 16 |
| 4 | 2 | 6 | 24 | = | 4 | 5 | 22 |
| 221 | 1 | 10 | 11 | = | 2 | 9 | 12 |
| 3 | 7 | 11 | 16 | = | 8 | 12 | 15 |
| 4 | 7 | 10 | 21 | = | 8 | 9 | 22 |
| 31 | 3 | 8 | 12 | = | 5 | 7 | 10 |
| 3 | 8 | 9 | 18 | = | 10 | 11 | 13 |
| 4 | 7 | 11 | 24 | = | 9 | 12 | 19 |
| 41 | 4 | 7 | 11 | = | 6 | 8 | 9 |
| 3 | 7 | 10 | 17 | = | 9 | 12 | 14 |
| 4 | 8 | 12 | 23 | = | 10 | 11 | 20 |
| 331 | 3 | 16 | 17 | = | 4 | 15 | 18 |
| 2 | 9 | 14 | 18 | = | 10 | 13 | 17 |
| 4 | 13 | 16 | 23 | = | 14 | 15 | 24 |
| 31 | 1 | 14 | 18 | = | 6 | 13 | 16 |
| 2 | 7 | 16 | 17 | = | 12 | 14 | 15 |
| 4 | 13 | 17 | 22 | = | 15 | 18 | 20 |
| 41 | 2 | 13 | 17 | = | 5 | 14 | 15 |
| 2 | 8 | 15 | 18 | = | 11 | 13 | 16 |
| 4 | 14 | 18 | 21 | = | 16 | 17 | 19 |
| 421 | 5 | 22 | 23 | = | 6 | 21 | 24 |
| 2 | 11 | 20 | 24 | = | 12 | 19 | 23 |
| 3 | 17 | 19 | 22 | = | 18 | 20 | 21 |
| 31 | 2 | 20 | 24 | = | 4 | 19 | 22 |
| 2 | 8 | 22 | 23 | = | 10 | 20 | 21 |
| 3 | 14 | 21 | 24 | = | 16 | 19 | 23 |
| 41 | 1 | 19 | 23 | = | 3 | 20 | 21 |
| 2 | 7 | 21 | 24 | = | 9 | 19 | 22 |
| 3 | 13 | 22 | 23 | = | 15 | 20 | 24 |
| 2112 | 1 | 14 | 19 | = | 2 | 13 | 20 |
| 3 | 3 | 8 | 20 | = | 4 | 7 | 19 |
| 4 | 5 | 7 | 14 | = | 6 | 8 | 13 |
| 32 | 7 | 14 | 21 | = | 8 | 15 | 20 |
| 3 | 8 | 13 | 23 | = | 9 | 14 | 19 |
| 4 | 7 | 17 | 19 | = | 11 | 13 | 20 |
| 42 | 7 | 16 | 19 | = | 8 | 13 | 22 |
| 3 | 7 | 14 | 24 | = | 10 | 13 | 20 |
| 4 | 8 | 18 | 20 | = | 12 | 14 | 19 |
| 211 | 7 | 16 | 21 | = | 8 | 15 | 22 |
| 3 | 1 | 10 | 21 | = | 2 | 9 | 22 |
| 4 | 1 | 11 | 16 | = | 2 | 12 | 15 |
| 31 | 1 | 16 | 19 | = | 2 | 13 | 22 |
| 3 | 2 | 15 | 24 | = | 3 | 16 | 21 |
| 4 | 1 | 18 | 21 | = | 5 | 15 | 22 |
| 41 | 1 | 14 | 21 | = | 2 | 15 | 20 |
| 3 | 1 | 16 | 23 | = | 4 | 15 | 22 |
| 4 | 2 | 17 | 22 | = | 6 | 16 | 21 |
| 311 | 9 | 14 | 24 | = | 10 | 13 | 23 |
| 2 | 3 | 16 | 23 | = | 4 | 15 | 24 |
| 4 | 3 | 10 | 17 | = | 4 | 9 | 18 |
| 31 | 3 | 10 | 20 | = | 4 | 7 | 24 |
| 2 | 1 | 10 | 23 | = | 4 | 9 | 22 |

| n° | relations | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 12 | 23 | = | 6 | 9 | 24 |
| 41 | 3 | 8 | 23 | = | 4 | 9 | 19 |
| 2 | 2 | 9 | 24 | = | 3 | 10 | 21 |
| 4 | 4 | 11 | 24 | = | 5 | 10 | 23 |
| 411 | 11 | 18 | 20 | = | 12 | 17 | 19 |
| 2 | 5 | 17 | 22 | = | 6 | 18 | 21 |
| 3 | 5 | 12 | 23 | = | 6 | 11 | 24 |
| 31 | 5 | 12 | 14 | = | 6 | 8 | 18 |
| 2 | 2 | 12 | 17 | = | 6 | 11 | 16 |
| 3 | 4 | 11 | 18 | = | 5 | 10 | 17 |
| 41 | 5 | 7 | 17 | = | 6 | 11 | 13 |
| 2 | 1 | 11 | 18 | = | 5 | 12 | 15 |
| 3 | 3 | 12 | 17 | = | 6 | 9 | 18 |
| 3112 | 3 | 17 | 21 | = | 5 | 15 | 23 |
| 3 | 1 | 11 | 23 | = | 6 | 9 | 21 |
| 4 | 2 | 9 | 17 | = | 4 | 11 | 15 |
| 22 | 9 | 17 | 19 | = | 11 | 13 | 23 |
| 3 | 7 | 17 | 21 | = | 11 | 15 | 20 |
| 4 | 8 | 15 | 23 | = | 9 | 14 | 21 |
| 41 | 9 | 18 | 21 | = | 11 | 15 | 24 |
| 3 | 9 | 17 | 22 | = | 12 | 15 | 23 |
| 4 | 10 | 17 | 21 | = | 11 | 16 | 23 |
| 211 | 9 | 18 | 19 | = | 11 | 13 | 24 |
| 3 | 3 | 12 | 19 | = | 5 | 7 | 24 |
| 4 | 3 | 8 | 18 | = | 5 | 10 | 13 |
| 41 | 3 | 18 | 21 | = | 5 | 15 | 24 |
| 3 | 1 | 18 | 19 | = | 5 | 13 | 22 |
| 4 | 2 | 13 | 24 | = | 3 | 16 | 19 |
| 44 | 3 | 17 | 19 | = | 5 | 13 | 23 |
| 3 | 3 | 18 | 20 | = | 6 | 13 | 24 |
| 4 | 4 | 18 | 19 | = | 5 | 14 | 24 |
| 311 | 7 | 17 | 22 | = | 12 | 15 | 20 |
| 2 | 1 | 18 | 20 | = | 6 | 13 | 22 |
| 4 | 1 | 12 | 14 | = | 6 | 7 | 16 |
| 21 | 1 | 12 | 23 | = | 6 | 9 | 22 |
| 2 | 3 | 12 | 20 | = | 6 | 7 | 24 |
| 4 | 1 | 10 | 20 | = | 4 | 7 | 22 |
| 41 | 1 | 11 | 20 | = | 6 | 7 | 21 |
| 2 | 1 | 12 | 19 | = | 5 | 7 | 22 |
| 4 | 2 | 12 | 20 | = | 6 | 8 | 22 |
| 411 | 8 | 16 | 23 | = | 10 | 14 | 21 |
| 2 | 2 | 14 | 24 | = | 4 | 16 | 19 |
| 3 | 2 | 10 | 20 | = | 4 | 8 | 22 |
| 21 | 2 | 10 | 17 | = | 4 | 11 | 16 |
| 2 | 4 | 8 | 18 | = | 5 | 10 | 14 |
| 3 | 2 | 12 | 14 | = | 6 | 8 | 16 |
| 41 | 2 | 9 | 14 | = | 4 | 8 | 15 |
| 2 | 2 | 10 | 13 | = | 3 | 8 | 16 |
| 3 | 1 | 10 | 14 | = | 4 | 7 | 16 |
| 4113 | 4 | 18 | 22 | = | 6 | 16 | 24 |
| 3 | 2 | 12 | 24 | = | 5 | 10 | 22 |
| 4 | 1 | 10 | 18 | = | 3 | 12 | 16 |
| 22 | 10 | 18 | 20 | = | 12 | 14 | 24 |
| 3 | 8 | 18 | 22 | = | 12 | 16 | 19 |
| 4 | 7 | 16 | 24 | = | 10 | 13 | 22 |
| 32 | 10 | 17 | 22 | = | 12 | 16 | 23 |
| 3 | 10 | 18 | 21 | = | 11 | 16 | 24 |
| 4 | 9 | 18 | 22 | = | 12 | 15 | 24 |
| 211 | 10 | 17 | 20 | = | 12 | 14 | 23 |
| 3 | 4 | 11 | 20 | = | 6 | 8 | 23 |

BUS LILLE

Figure 27 suite

| n° | Relations | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 7 | 17 | = | 6 | 9 | 14 |
| 21 | 4 | 17 | 22 | = | 6 | 16 | 23 |
| 3 | 2 | 17 | 20 | = | 6 | 14 | 21 |
| 4 | 1 | 14 | 23 | = | 4 | 15 | 20 |
| 31 | 4 | 18 | 20 | = | 6 | 14 | 24 |
| 3 | 4 | 17 | 19 | = | 5 | 14 | 23 |
| 4 | 3 | 17 | 20 | = | 6 | 13 | 23 |
| 311 | 8 | 18 | 21 | = | 11 | 16 | 19 |
| 2 | 2 | 17 | 19 | = | 5 | 14 | 21 |
| 4 | 2 | 11 | 13 | = | 5 | 8 | 15 |
| 21 | 2 | 11 | 24 | = | 5 | 10 | 21 |
| 2 | 4 | 11 | 19 | = | 5 | 8 | 23 |
| 4 | 2 | 9 | 19 | = | 3 | 8 | 21 |
| 31 | 2 | 12 | 19 | = | 5 | 8 | 22 |
| 2 | 2 | 11 | 20 | = | 6 | 8 | 21 |
| 4 | 1 | 11 | 19 | = | 5 | 7 | 21 |
| 411 | 7 | 15 | 24 | = | 9 | 13 | 22 |
| 2 | 1 | 13 | 23 | = | 3 | 15 | 20 |
| 3 | 1 | 9 | 19 | = | 3 | 7 | 21 |
| 21 | 1 | 9 | 18 | = | 3 | 12 | 15 |
| 2 | 3 | 7 | 17 | = | 6 | 9 | 13 |
| 3 | 1 | 11 | 13 | = | 5 | 7 | 15 |
| 31 | 1 | 10 | 13 | = | 3 | 7 | 16 |
| 2 | 1 | 9 | 14 | = | 4 | 7 | 15 |
| 3 | 2 | 9 | 13 | = | 3 | 8 | 15 |

Figure 25 : Construction d'une relation pour n = 4 à partir d'une relation pour n = 3

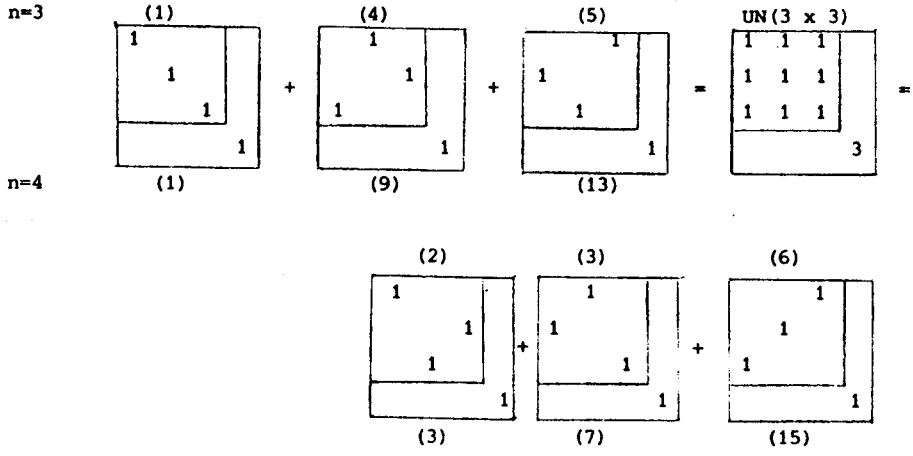
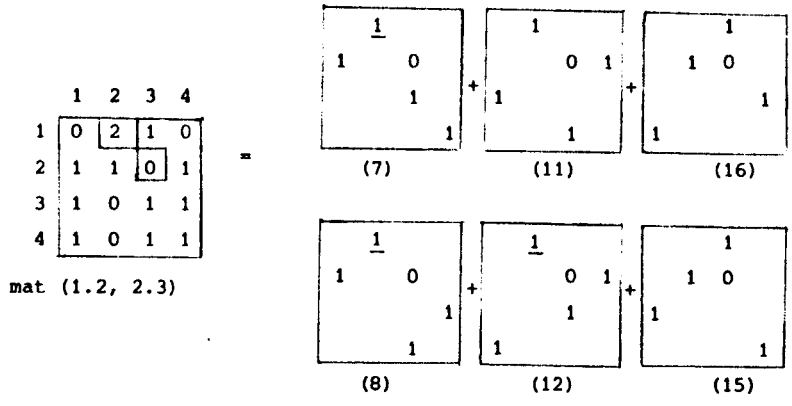



Figure 26 : Une relation à 3 matrices de permutation par membre




(voir la liste de ces relations fig 27)

BUS LILLE

# 4. LES B-DECOMPOSITIONS DE q . UN(n x n)

## 4.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES B-DÉCOMPOSITIONS DES P-MATRICES

### 4.1.1 ALGORITHME DE B-DECOMPOSITION

L'algorithme de B-décomposition d'une p-matrice M en matrices de permutation utilise la remarque suivante (fig 28 p48).

Si P est une matrice de permutation telle que $P \leq M$ alors M-P est une (p-1)-matrice.[1]

Les matrices de permutation $P \leq M$ correspondent à un couplage des lignes de M sur les colonnes et peuvent être obtenues avec un ALGORITHME* de flot du type de l'algorithme hongrois (§11.5 p230).

### 4.1.2 MULTIDECOMPOSITION DES p-MATRICES

En général, une p-matrice n'a pas qu'une seule B-décomposition. La MULTIDECOMPOSER consiste à les rechercher toutes.

Ainsi la 4-matrice UN(4 x 4) à 24 B-décompositions.

Pour chaque p-matrice il est intéressant de connaître :

- le nombre de ses B-décompositions.
- les B-décompositions utilisant le moins (et le plus) de matrices de permutations différentes et le nombre de matrices qu'elles contiennent.

Ces questions ne peuvent être résolues actuellement qu'en calculant toutes les B-décompositions de la p-matrice, sauf pour les matrices UN(n x n).

Pour les obtenir on utilise un ALGORITHME* basé sur une méthode d'énumération. La masse de calcul que nécessite ces méthodes d'exploration arborescente est si importante que l'emploi d'un calculateur est nécessaire, et même dans ces conditions, malgré de nombreuses améliorations, il n'est pas raisonnable d'envisager la multidécomposition de p-matrices d'ordre supérieur à 5. Le programme en question est MLTDCP3 (§11.6.1 p239).

A chaque p-matrice M on peut associer le minimum $N_M$ du nombre de matrices de permutation différentes dans une B-décomposition. Pour l'ensemble des p-matrices d'ordre n, il est intéressant de connaitre le maximum $N_n$ des nombres $N_M$.

Ainsi $N_3 = 5$ car à l'ordre 3 il n'y a qu'une relation qui lie les 6 matrices de permutation. Par exemple, la p-matrice M = (1) + (4) + (3) + 2 . UN(3 x 3) admet deux

*(1) Une matrice P. est "inférieure ou égale" à une matrice M (on écrit $P \leq M$) si elles sont de mêmes dimensions et si $\forall\, i,j\ P_{ij} \leq M_{ij}$*

Figure 28 : Une p-mat. = une mat.perm. + une (p-1)-mat.

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
\hline
1 & & 2 & & 1 & 1 & 4 \\
2 & 1 & & 3 & & & 4 \\
3 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\
4 & 3 & 1 & & & & 4 \\
5 & & & & 2 & 2 & 4 \\
\hline
 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 &
\end{array}
=
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & & 1 & & & \\
2 & & & 1 & & \\
3 & & & & 1 & \\
4 & 1 & & & & \\
5 & & & & & 1 \\
\hline
\end{array}
+
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\
\hline
1 & & 1 & & 1 & 1 & 3 \\
2 & 1 & & 2 & & & 3 \\
3 & & 1 & 1 & & 1 & 3 \\
4 & 2 & 1 & & & & 3 \\
5 & & & & 2 & 1 & 3 \\
\hline
 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 &
\end{array}
$$

Figure 29

Classes de r-uples de B-décompositions différentes (n = 4)

| r | nombre de r-uples : $C_{24}^{r}$ | nombre de classes | cardinaux des classes |
|---|---|---|---|
| 1 | 24 | 2 | 6,18 |
| 2 | 276 | 8 | 6,9,36,72 |
| 3 | 2024 | 28 | 2,18,24,36,72,144 |
| 4 | 10626 | 89 | 6,9,18,24,36,48,72,144,288 |

B-décompositions en 5 matrices de permutation différentes (en prenant pour UN(3 x 3) l'une ou l'autre de ses deux B-décompositions) et une de 6 matrices de permutation (en utilisant les deux B-décompositions de UN(3 x 3)). Elle ne possède pas de B-décomposition en moins de 5 matrices de permutation. D'une façon générale pour toute p-matrice d'ordre 3 qui admet une B-décomposition en les 6 matrices de permutation on peut toujours, en utilisant une seule B-décomposition de UN(3 x 3), en trouver une d'au plus 5 matrices de permutation différentes.

## 4.2 B-DÉCOMPOSITIONS DE LA n-MATRICE UN(n x n)

### 4.2.1 GENERALITE

La n-matrice UN(n x n) admet plusieurs B-décompositions en somme de n matrices de permutation (fig 21 p41). Pour n = 4, il y en a 24. Pour n = 5 il y en a 1344 (§ 11.6.4 p260). Suivant le contexte, ces décompositions seront considérées comme somme ou ensemble de matrices de permutation.

Leur numérotation se fait suivant l'ordre lexicographique. On indique leur NUMERO ENTRE CROCHET.

### 4.2.2 CLASSIFICATIONS DES B-DECOMPOSITIONS

Chaque B-décomposition de la n-matrice UN(n x n) est constituée avec les matrices des permutations d'un ensemble 1-transitif. Les B-décompositions qui contiennent la matrice identité correspondent aux sous-groupes 1-transitifs d'ordre n de $S_n$. Les autres décompositions sont les classes à droite ou à gauche de ces sous-groupes (fig 21 p41). Pour chaque sous-groupe les classes à droite, de même que les classes à gauche, partitionnent l'ensemble des permutations.

Pour n = 4 le sous-groupe [1] étant invariant il admet les mêmes classes à droite et à gauche. On partitionnera les B-décompositions de UN(4 x 4) en deux parties : I avec les classes du sous-groupe [1], II avec les autres B-décompositions.

Le partitionnement des matrices de permutation par les classes de conjugaison induit sur les B-décompositions de UN(n x n) une partition en CLASSES DE CONJUGAISON (fig 21 p 41) telle que, si, dans une B-décomposition, on permute de la même façon les indices des lignes et des colonnes de toutes les matrices de permutation on obtient une B-décomposition de la même classe. Cette partition des B-décompositions est plus fine que la précédente. Ainsi la classe I de la première est formée des classes 1, 5 et 6 de cette seconde.

Si par contre on choisit une permutation des indices des lignes différente de celle des indices des colonnes, mais les deux permutations étant encore appliquées à toutes les matrices de permutation de la B-décomposition, alors l'ensemble des B-décompositions n'est plus formé que de deux classes qui sont les deux parties I et II de ci-dessus. Nous appellerons cette équivalence entre les B-décompositions L'EQUIVALENCE LARGE.

Figure 30 : Représentants des classes de r-uples de B-décompositions différentes

(n = 4)

| r | classes n° | classes représentant | cardinal | observations |
|---|---|---|---|---|
| 1 | I | [1] | 6 | qui sont [1],[6],[10],[15],[19],[24]. |
| | II | [2] | 18 | 2 couples de matrices,membres de relations par B-décompositions |
| 2 | 1 | [1], [2] | 36 | |
| | 2 | [1], [6] | 9 | |
| | 3 | [1], [7] | 72 | |
| | 4 | [1], [15] | 6 | Construite sur la classe I ci-dessus |
| | 5 | [2], [3] | 72 | |
| | 6 | [2], [5] | 9 | |
| | 7 | [2], [11] | 36 | La liste complète des couples de chaque classe |
| | 8 | [2], [12] | 36 | est donnée dans la figure 105 (p162) |
| 3 | 1 | [1], [2] , [3] | 72 | |
| | 2 | [1], [2] , [5] | 18 | |
| | 3 | [1], [2] , [6] | 18 | |
| | 4 | [1], [2] , [7] | 144 | |
| | 5 | [1], [2] , [10] | 72 | |
| | 6 | [1], [2] , [11] | 144 | |
| | 7 | [1], [2] , [12] | 144 | |
| | 8 | [1], [2] , [15] | 72 | |
| | 9 | [1], [6] , [10] | 18 | |
| | 10 | [1], [6] , [11] | 36 | |
| | 11 | [1], [6] , [12] | 36 | |
| | 12 | [1], [7] , [8] | 72 | |
| | 13 | [1], [7] , [11] | 144 | |
| | 14 | [1], [7] , [12] | 72 | |
| | 15 | [1], [7] , [15] | 36 | |
| | 16 | [1], [7] , [16] | 72 | |
| | 17 | [1], [7] , [17] | 36 | |
| | 18 | [1], [15], [19] | 2 | L'autre est [6], [10], [24] (classe I de r = 1) |
| | 19 | [2], [3] , [4] | 24 | |
| | 20 | [2], [3] , [5] | 72 | |
| | 21 | [2], [3] , [7] | 144 | |
| | 22 | [2], [3] , [8] | 144 | |
| | 23 | [2], [3] , [9] | 24 | |
| | 24 | [2], [3] , [11] | 288 | |
| | 25 | [2], [5] , [11] | 36 | |
| | 26 | [2], [5] , [12] | 36 | |
| | 27 | [2], [11], [16] | 24 | |
| | 28 | [2], [12], [20] | 24 | |
| 4 | 1 | [1], [2] , [3] , [4] | 24 | |
| | 2 | [1], [2] , [3] , [5] | 72 | |
| | 3 | [1], [2] , [3] , [6] | 144 | |
| | 4 | [1], [2] , [3] , [7] | 288 | |
| | 5 | [1], [2] , [3] , [8] | 288 | |
| | 6 | [1], [2] , [3] , [9] | 24 | |
| | 7 | [1], [2] , [3] , [10] | 72 | |
| | 8 | [1], [2] , [3] , [11] | 288 | |
| | 9 | [1], [2] , [3] , [15] | 144 | |
| | 10 | [1], [2] , [5] , [6] | 9 | |
| | 11 | [1], [2] , [5] , [7] | 72 | |
| | 12 | [1], [2] , [5] , [10] | 36 | |
| | 13 | [1], [2] , [5] , [11] | 72 | |
| | 14 | [1], [2] , [5] , [12] | 72 | |
| | 15 | [1], [2] , [5] , [15] | 36 | |
| | 16 | [1], [2] , [6] , [10] | 72 | |
| | 17 | [1], [2] , [6] , [11] | 72 | |
| | 18 | [1], [2] , [6] , [12] | 72 | |
| | 19 | [1], [2] , [7] , [8] | 72 | |
| | 20 | [1], [2] , [7] , [10] | 144 | |
| | 21 | [1], [2] , [7] , [11] | 288 | |
| | 22 | [1], [2] , [7] , [12] | 288 | |
| | 23 | [1], [2] , [7] , [13] | 72 | |
| | 24 | [1], [2] , [7] , [15] | 144 | |
| | 25 | [1], [2] , [7] , [16] | 288 | |
| | 26 | [1], [2] , [7] , [17] | 72 | |
| | 27 | [1], [2] , [7] , [19] | 72 | |
| | 28 | [1], [2] , [7] , [20] | 288 | |
| | 29 | [1], [2] , [7] , [24] | 144 | |
| | 30 | [1], [2] , [10], [11] | 72 | |
| | 31 | [1], [2] , [10], [12] | 72 | |
| | 32 | [1], [2] , [10], [15] | 72 | |
| | 33 | [1], [2] , [10], [16] | 144 | |

| r | n° | représentant | cardinal |
|---|---|---|---|
| 4 (suite) | 34 | [1], [2] , [10], [19] | 72 |
| | 35 | [1], [2] , [10], [20] | 144 |
| | 36 | [1], [2] , [10], [24] | 36 |
| | 37 | [1], [2] , [11], [12] | 288 |
| | 38 | [1], [2] , [11], [15] | 144 |
| | 39 | [1], [2] , [11], [16] | 144 |
| | 40 | [1], [2] , [11], [18] | 72 |
| | 41 | [1], [2] , [11], [19] | 72 |
| | 42 | [1], [2] , [11], [20] | 288 |
| | 43 | [1], [2] , [12], [14] | 72 |
| | 44 | [1], [2] , [12], [15] | 72 |
| | 45 | [1], [2] , [12], [19] | 144 |
| | 46 | [1], [2] , [12], [20] | 144 |
| | 47 | [1], [2] , [15], [19] | 36 |
| | 48 | [1], [6] , [10], [15] | 9 |
| | 49 | [1], [6] , [10], [16] | 72 |
| | 50* | [1], [6] , [10], [24] | 6 |
| | 51 | [1], [6] , [11], [12] | 144 |
| | 52 | [1], [6] , [11], [16] | 36 |
| | 53 | [1], [6] , [11], [18] | 18 |
| | 54 | [1], [6] , [12], [14] | 18 |
| | 55 | [1], [6] , [12], [20] | 36 |
| | 56 | [1], [7] , [8] , [11] | 288 |
| | 57 | [1], [7] , [8] , [12] | 288 |
| | 58 | [1], [7] , [8] , [13] | 72 |
| | 59 | [1], [7] , [11], [15] | 72 |
| | 60 | [1], [7] , [11], [16] | 288 |
| | 61 | [1], [7] , [11], [17] | 72 |
| | 62 | [1], [7] , [11], [18] | 72 |
| | 63 | [1], [7] , [11], [20] | 48 |

(* classe I de r = 1)

Figure 30 (suite)

| r | n° | représentant | cardinal |
|---|---|---|---|
| 4 (suite) | 64 | [1], [7], [11], [22] | 48 |
| | 65 | [1], [7], [12], [14] | 72 |
| | 66 | [1], [7], [15], [17] | 18 |
| | 67 | [1], [7], [16], [17] | 72 |
| | 68 | [2], [3], [ 4], [ 5] | 72 |
| | 69 | [2], [3], [ 4], [ 7] | 288 |
| | 70 | [2], [3], [ 5], [ 7] | 72 |
| | 71 | [2], [3], [ 5], [ 8] | 72 |
| | 72 | [2], [3], [ 5], [11] | 144 |
| | 73 | [2], [3], [ 5], [12] | 144 |
| | 74 | [2], [3], [ 5], [16] | 144 |
| | 75 | [2], [3], [ 5], [20] | 144 |
| | 76 | [2], [3], [ 5], [21] | 18 |
| | 77 | [2], [3], [ 7], [ 8] | 288 |
| | 78 | [2], [3], [ 7], [11] | 288 |
| | 79 | [2], [3], [ 7], [12] | 288 |
| | 80 | [2], [3], [ 7], [20] | 144 |
| | 81 | [2], [3], [ 8], [11] | 288 |
| | 82 | [2], [3], [ 8], [12] | 288 |
| | 83 | [2], [3], [11], [12] | 72 |
| | 84 | [2], [3], [11], [14] | 72 |
| | 85 | [2], [3], [11], [18] | 144 |
| | 86 | [2], [5], [11], [16] | 36 |
| | 87 | [2], [5], [11], [18] | 9 |
| | 88 | [2], [5], [12], [14] | 9 |
| | 89 | [2], [5], [12], [20] | 36 |

BUS LILLE

Figure 31 **Carrés latins et B-décompositions de UN(n x n)**

1°) B-Décomposition F : [7] de UN(4 x 4)

$$\underset{(2)}{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{bmatrix}} + \underset{(9)}{\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}} + \underset{(18)}{\begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}} + \underset{(20)}{\begin{bmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{bmatrix}} = \underset{UN(4 \times 4)}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

2°) Juxtaposition des vecteurs colonnes des permutations de F

$$[7] : \overbrace{(2)\,(9)\,(18)\,(20)}^{F} \quad \overset{H}{[3]}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow (1) \\ \leftarrow (10) \\ \leftarrow (19) \\ \leftarrow (17) \end{array} = 1 \cdot \underset{(5)}{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}} + 2 \cdot \underset{(7)}{\begin{bmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{bmatrix}} + 3 \cdot \underset{(16)}{\begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}} + 4 \cdot \underset{(23)}{\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{bmatrix}}$$

positions des

1 2 3 4

C = [17] :

2ème méthode | 1ère méthode

3°) Juxtaposition des vecteurs colonnes des permutations de C

positions de

$$C = [17] : \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \quad H^t \\ (5)\,(7)\,(16)\,(23) \quad [3] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow (1) \\ \leftarrow (19) \\ \leftarrow (10) \\ \leftarrow (17) \end{array} = \underbrace{1 \cdot (2) + 2 \cdot (9) + 3 \cdot (13) + 4 \cdot (20)}_{F = [7]}$$

4°) Symétrisation du carré latin A par permutation des colonnes

$$[7] = (2)\,(9)\,(20)\,(18)$$

$$A' = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (2) \\ (9) \\ (20) \\ (18) \end{array} \Bigg\} [7]$$

d'où on déduit comme au 2°

positions des

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (2) \\ (13) \\ (12) \\ (23) \end{array} \Bigg\} [8] = [7]^t$$

[9] → 1 . (3) + 2 . (8) + 3 . (22) + 4 . (17)

[9] : (3) (8) (22) (17)

[7] → 1 . (2) + 2 . (9) + 3 . (20) + 4 . (18)

BIBS UNIF

### 4.2.3 NUMEROS DES MATRICES DE PERMUTATION DANS UNE B-DECOMPOSITION

De par la 1-transitivité des B-décompositions, également parce que la matrice UN(n x n) ne contient pas de valeur supérieure à 1 les matrices de permutation d'une B-décomposition ont, pour un indice de rangée donné, leurs cases non-nulles différentes. C'est cette propriété, appliquée à la première ligne, qui donne l'ordre léxicographique pour les décompositions. Inversement, comme chaque décomposition contient une seule permutation qui applique l'objet 1 sur n'importe quel autre, disons i, elle contient une seule matrice de permutation de numéro compris entre (i-1).(n-1)!+1 et i.(n-1)!, bornes incluses. Il n'est pas évident d'écrire une telle formule pour les autres rangées. En effet, les matrices de permutation non-nulles dans une même case sont celles des permutations d'une des classes de l'un des groupes $G_i$ laissant un objet i invariant. Alors dans la numérotation lexicographique les n séquences de (n-1)! matrices de permutation sont les classes à droite de $G_1$. Ces séquences sont les INTERVALLES I(n,i) = [(i-1).(n-1)!+1, i.(n-1)!] vus ci-dessus. Pour les autres groupes $G_i$, la numérotation n'est pas si favorable.

### 4.2.4 ENSEMBLES DE B-DECOMPOSITIONS

Quand on prend r B-décompositions on obtient un ensemble r-transitif. Le partitionnement des B-décompositions induit un partitionnement de ces r-UPLES DE B-DECOMPOSITIONS.

Pour n = 4, les classes de l'équivalence large des r-uples de B-décompositions, r variant de 1 à 4 (fig 29 p 48 et 30 p 50), ont été calculées à l'aide de l'ordinateur.

Ceci a été réalisé avec les PROGRAMMES* de la série ArDCP (§11.7, p267). Les r-uples de B-décompositions ont été, dans chaque classe, ordonnés lexicographiquement et on a indiqué quelles étaient les permutations des indices de lignes et des indices de colonnes, qui, appliquées au premier r-uple, permettaient d'obtenir l'un d'eux (§ 11.7.1 p267 et 11.7.2 p 278).

Seuls les r-uples de B-décompositions distinctes sont envisagés La figure 29 (p 48) indique le nombre de classes pour chaque valeur de r et les cardinaux de ces classes. Pour les B-décompositions considérées en tant que 1-uples, on a bien retrouvé les classes I et II définies ci-dessus. Il faut noter que les cardinaux des classes de r-uples pour r ≤ 4 sont toujours composés de puissances de 2 et de 3.

### 4.2.5 B-DECOMPOSITIONS ET CARRES LATINS

Les B-décompositions de UN(n x n) sont en correspondance biunivoque avec les CARRES LATINS d'ordre n ordonnés sur leur première ligne. Le carré latin associé à une B-décomposition de UN(n x n) s'obtient en faisant la somme des matrices de permutation de la B-décomposition, chacune étant multipliée par l'indice de l'élément non-nul de sa première ligne (§ 2.2.3 p 13 et fig 31 1° p52).

Figure 32 Triplets F,C,H des B-décompositions de UN(4 x 4)

| F | C | H | $F^t$ | symé-trie | classes | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | à gauche | | | à droite | | |
| [1] | [1] | [1] | [1] | S | G | | | | | | sous-groupes |
| [2] | [5] | [2] | [2] | | | G | | | G | | |
| [3] | [21] | [3] | [3] | | | | G | | | G | |
| [4] | [9] | [4] | [4] | | | | | G | | | G |
| [5] | [2] | [2] | [5] | S | | X | | | X | | |
| [6] | [1] | [1] | [6] | | X | | | | | | |
| [7] | [17] | [3] | [8] | | | | | X | | X | |
| [8] | [13] | [4] | [7] | | | | X | | | | X |
| [9] | [4] | [4] | [9] | S | | | | X | | | X |
| [10] | [10] | [1] | [10] | | X | | | | | | |
| [11] | [18] | [2] | [12] | | | | X | | X | | |
| [12] | [14] | [3] | [11] | | | X | | | | X | |
| [13] | [8] | [4] | [17] | | | | X | | | | X |
| [14] | [12] | [3] | [18] | | | X | | | | X | |
| [15] | [15] | [1] | [19] | | X | | | | | | |
| [16] | [23] | [2] | [20] | | | | | X | X | | |
| [17] | [7] | [3] | [13] | | | | | X | | X | |
| [18] | [11] | [2] | [14] | | | | X | | X | | |
| [19] | [19] | [1] | [15] | | X | | | | | | |
| [20] | [22] | [4] | [16] | | | X | | | | | X |
| [21] | [3] | [3] | [21] | S | | | X | | | X | |
| [22] | [20] | [4] | [23] | | | X | | | | | X |
| [23] | [16] | [2] | [22] | | | | | X | X | | |
| [24] | [24] | [1] | [24] | | X | | | | | | |

On peut, bien sûr, obtenir d'autres carrés latins en choisissant d'une autre façon les facteurs des matrices de permutation. Ceci apparaitra dans la suite de ce paragraphe et également comme nous le verrons plus tard, en prenant comme facteur, les numéros des matrices d'une B-décomposition, la même ou une autre (§ 7.2 p 133 et fig 80 p 134). C'est une PREMIERE METHODE de construction des carrés latins.

Les B-décompositions de UN(n x n) ont encore un rapport avec les carrés latins, de la façon suivante. Juxtaposons les vecteurs colonnes représentant les permutations d'une B-décomposition F de UN(n x n). La matrice obtenue est un carré latin d'ordre n construit sur les objets permutés. C'est une DEUXIEME METHODE de construction de carrés latins (fig 31 3° p 52). Dans chaque colonne on trouve en effet les n objets, sans répétition, puisqu'il s'agit d'une permutation. De par la 1-transitivité de la B-décomposition, chaque objet apparait une fois et une seule dans chaque ligne. Chaque ligne est donc une permutation, et ces permutations forment un ensemble 1-transitif car,sinon, au moins une des permutations en colonne enverrait une même objet dans deux places différentes. Les permutations en ligne forment donc une B-décomposition H de UN(n x n).

Comme chaque objet n'apparait qu'une fois par ligne et par colonne, il occupe les cases non-nulles d'une matrice de permutation. Le carré latin est donc, suivant la première méthode, la somme des matrices d'une B-décomposition C de UN(n x n), chaque matrice étant multipliée par l'un des n objets à permuter (fig 31 2° p 52).

Si la première ligne de ces carrés latins est ordonnée, alors d'une part, les matrices de permutation de la B-décomposition C de UN(n x n) sont multipliées par l'indice de l'élément non-nul de leur première ligne, ou encore par le numéro de leur place dans la B-décomposition, classée suivant l'ordre lexicographique croissant ; d'autre part, les permutations, que sont les lignes, forment l'une des B-décompositions de UN(n x n) qui contient la permutation identité, c'est-à-dire, qui est un sous-groupe de permutation, et non une classe d'un sous-groupe de $S_n$ (fig 31 2° p 52).

Les carrés latins ne sont pas, en général, symétriques. Toutefois à l'ordre 4, les sous-groupes d'ordre n étant abéliens, il est possible,par permutation de leurs rangées,de les rendre symétriques. Il suffit de ranger la première ligne comme la première colonne (fig 31 4° p52). On obtient alors la même B-décomposition en ligne et en colonne. On en déduit que les B-décompositions F et H ci-dessus sont des classes à droite,ou à gauche d'un même sous-groupe. La B-décomposition C a été remplacée par la classe à droite ou à gauche suivant le cas du sous-groupe dont C était une classe, et qui n'a que des matrices de permutation symétriques (en fait, il s'agit de [1], [5], [9] ou [21]) Ses matrices de permutation sont prises dans l'ordre indiqué par la première permutation de F c'est à dire suivant la première ligne ou la première colonne.

Figure 33 : B-décompositions et relations à deux matrices par membre pour n = 4

| classe | Schémas et relations entre B-décompositions | Relations | classes | B-décompositions déduites avec les relations | classes |
|---|---|---|---|---|---|
| I 1 | [1] : (1)-(8)-(17)-(24) | (1)+(8) = (2)+(7) | $A_1$ | [5] : (2)-(7) (17) (24) | 4 |
| | | (1)+(17) = (6)+(15) | $A_2$ | [21] : (6) (8) (15) (24) | 4 |
| | [1]+[6] = [2]+[5] | (1)+(24) = (3)+(22) | $A_3$ | [9] : (3) (8) (17) (22) | 3 |
| | [1]+[24]=[3]+[21] | (8)+(17) = (11)+(14) | $C_3$ | [4] : (1) (11)-(14) (24) | 2 |
| | [1]+[10]=[4]+[9] | (8)+(24) = (10)+(19) | $C_2$ | [3] : (1) (10) (17) (19) | 2 |
| | | (17)+(24) = (18)+(23) | $C_1$ | [2] : (1) (8) (18)-(23) | 2 |
| | | | | [6] : (2)-(7) (18)-(23) | 5 |
| | | | | [24] : (6) (10) (15) (19) | 5 |
| | | | | [10] : (3) (11)-(14) (22) | 5 |
| II 2 | [2] : (1)-(8) (18)-(23) | (1)+(8) = (2)+(7) | $A_1$ | [6] : (2)-(7) (18) (23) | 5 |
| | [2]+[5]=[1]+[6] | (18)+(23) = (17)+(24) | $C_1$ | [1] : (1) (8) (17)-(24) | 1 |
| | | | | [5] : (2)-(7) (17)-(24) | 4 |
| II 3 | [7] : (2) (9) (18) (20) | (2)+(18) = (5)+(16) | $B_1$ | [19] : (5) (9) (16) (20) | 6 |
| | [7]+[17]=[6]+[19] | (9)+(20) = (7)+(23) | $B_{\bar{1}}$ | [6] : (2) (7) (18) (23) | 5 |
| | | | | [17] : (5) (7) (16) (23) | 3 |
| II 4 | [5] : (2)-(7) (17)-(24) | (2)+(7) = (1)+(8) | $A_1$ | [1] : (1)-(8) (17) (24) | 1 |
| | [5]+[2]=[1]+[6] | (17)+(24) = (18)+(23) | $C_1$ | [6] : (2) (7) (18)-(23) | 5 |
| | | | | [2] : (1)-(8) (18)-(23) | 2 |
| I 5 | [6] : (2)-(7)-(18)-(23) | (2)+(7) = (1)+(18) | $A_1$ | [2] : (1)-(18) (18) (23) | 2 |
| | | (2)+(18) = (5)+(16) | $B_1$ | [17] : (5) (7) (16) (23) | 3 |
| | [6]+[1]=[2]+[5] | (2)+(23) = (4)+(21) | $B_2$ | [13] : (4) (7) (18) (21) | 3 |
| | [6]+[19]=[17]+[7] | (7)+(18) = (12)+(13) | $B_{\bar{2}}$ | [8] : (2) (12)-(13) (23) | 3 |
| | [6]+[15]=[13]+[8] | (7)+(23) = (9)+(20) | $B_{\bar{1}}$ | [7] : (2) (9) (18) (20) | 3 |
| | | (18)+(23) = (17)+(24) | $C_1$ | [5] : (2) (7) (17)-(24) | 4 |
| | | | | [1] : (1)-(8) (17)-(24) | 1 |
| | | | | [19] : (5) (9) (16) (20) | 4 |
| | | | | [15] : (4) (12)-(13) (21) | 6 |
| I 6 | [15] : (4)-(12)-(13)-(21) | (4)+(12) = (6)+(10) | $B_5$ | [23] : (6)-(10) (13) (21) | 3 |
| | | (4)+(13) = (3)+(14) | $B_4$ | [12] : (3) (12) (14) (21) | 3 |
| | [15]+[24]=[23]+[16] | (4)+(21) = (2)+(23) | $B_2$ | [8] : (2) (12) (13) (23) | 3 |
| | [15]+[10]=[12]+[14] | (12)+(13) = (7)+(18) | $B_{\bar{2}}$ | [13] : (4) (7)-(18) (21) | 3 |
| | [15]+[6] = [8]+[13] | (12)+(21) = (11)+(22) | $B_{\bar{4}}$ | [14] : (4) (11) (13) (22) | 3 |
| | | (13)+(21) = (15)+(19) | $B_{\bar{5}}$ | [16] : (4) (12) (15)-(19) | 3 |
| | | | | [24] : (6)-(10) (15)-(19) | 5 |
| | | | | [10] : (3) (11) (14) (22) | 5 |
| | | | | [6] : (2) (7)-(18) (23) | 5 |

BUS LILLE

Le carré latin qu'on peut construire à partir de C suivant la deuxième méthode admet en ligne les matrices de la B-décomposition $H^t$ qui sont les transposées des matrices de la B-décomposition H. $H^t$ et H ne sont pas, en général, classes d'un même sous-groupe de $S_n$. Ce carré latin se construit suivant la première méthode à l'aide de la B-décomposition F de UN(n x n) (fig 31 3° p 52).

Si on transpose le carré latin construit suivant la deuxième méthode à partir de la B-décomposition F, les B-décompositions F et H vont échanger leur rôle, et la décomposition C sera remplacée par $C^t$, ce qui confirme que H et $C^t$, donc $H^t$ et C, sont comme F et C.

La figure 32 (p 54) donne la liste des TRIPLETS(F, C, H) ainsi que les transposés $F^t$ des B-décompositions de UN(4 x 4).

## 4.2.6 B-DECOMPOSITIONS ET RELATIONS POUR n = 4

Considérons les 6 couples de matrices de permutation qu'on peut extraire d'une B-décomposition de UN(4 x 4). Suivant la classe de la B-décomposition, deux ou tous ces couples sont membres de relations à deux matrices de permutation par membre (fig 33 p 56). Les B-décompositions d'une classe de conjugaison font intervenir des ensembles conjugués de relations (qui se déduisent les unes des autres par permutation simultanée des indices de lignes et de colonnes des matrices). Les B-décompositions, où les six couples sont membres de relations sont celles de la partie I (§ 4.2.2 p 49). En effet, vis-à-vis de l'équivalence large, les relations à deux matrices par membre ne forment qu'une seule classe.

Pour une B-décomposition, chaque relation intervient avec sa complémentaire, et, ensemble, elles concernent alors des couples disjoints de matrices de permutation. En remplaçant, dans la relation, les matrices d'un de ces couples par celles de l'autre membre de la relation, on obtient une autre B-décomposition. On peut faire ce remplacement pour deux couples disjoints, et obtenir, à partir des deux relations complémentaires utilisées, trois autres B-décompositions qui, avec la B-décomposition initiale constituent deux paires de B-décompositions, chaque paire contenant les huit matrices de permutation proposées par les deux relations, comme on l'a vu au paragraphe 3.3(p 35) (fig 24 p 42). Deux telles paires de B-décompositions forment UNE RELATION entre B-décompositions, qu'on dira INDUITE par les relations entre matrices de permutation.

Suivant la classe II ou I, une B-décomposition a une ou trois paires de couples disjoints. Par les remplacements ci-dessus, on trouve trois ou neuf autres B-décompositions (fig 33 p 56), et de ce fait, elle intervient dans une ou trois relations induites entre B-décompositions. La figure 34 (p 58) donne la liste de ces relations induites, qui vis-à-vis de l'équivalence large ne forment qu'une classe. Chacune des B-décompositions de la classe I apparait dans trois de ces relations, tandis que les B-décompositions de la classe II n'apparaissent qu'une fois. Ces relations établissent l'égalité entre la somme de deux B-décompositions de la classe I et la somme de deux B-décompositions de la classe II. Plus précisément les deux B-décompositions de la classe I sont prises l'une dans la classe de conjugaison 5 composée des

Figure 34 : Les neuf relations induites dans les B-décompositions par les relations entre matrices de permutation pour n = 4

| n° | Relations entre B-décompositions | sous-groupe d'ordre 8 | | | Relations inductrices entre matrices |
|---|---|---|---|---|---|
| <1> | [1]+[6]=[2]+[5] | SG | | | (1)+(8)=(2)+(7) et (17)+(24)=(18)+(23) |
| <2> | [1]+[10]=[4]+[9] | | SG | | (1)+(24)=(3)+(22) et (8)+(17)=(11)+(14) |
| <3> | [1]+[24]=[3]+[21] | | | SG | (1)+(17)=(6)+(15) et (8)+(24)=(10)+(19) |
| <4> | [6]+[15]=[13]+[8] | | G | D | (2)+(23)=(4)+(21) et (7)+(18)=(12)+(13) |
| <5> | [6]+[19]=[7]+[17] | | D | G | (2)+(18)=(5)+(16) et (7)+(23)=( 9 )+(20) |
| <6> | [10]+[15]=[12]+[14] | D | | G | (3)+(14)=(4)+(13) et (22)+(11)=(12)+(21) |
| <7> | [10]+[19]=[11]+[18] | G | | D | (3)+(11)=(5)+(9) et (22)+(14)=(16)+(20) |
| <8> | [15]+[24]=[16]+[23] | G | D | | (6)+(10)=(4)+(12) et (15)+(19)=(13)+(21) |
| <9> | [19]+[24]=[20]+[22] | D | G | | (6)+(19)=(5)+(20) et (15)+(10)=(9)+(16) |

B-décompositions {[6], [10], [24]}, et l'autre dans les classes de conjugaison 1 et 6 contenant les B-décompositions {[1]} et {[15], [19]}. Il y a ainsi neuf relations en correspondance avec les groupes de relations complémentaires entre matrices de permutation. Remarquons aussi que les membres de ces relations induites ont pour somme la matrice 2 . UN(4 x 4), mais cette matrice est aussi la somme de deux B-décompositions quelconques de UN(4 x 4). Remarquons enfin que les matrices de permutation des B-décompositions dans chacune des trois premières relations induites de la figure 34 (p 58 ) constituent les trois groupes d'ordre 8 de $S_4$, et que les autres relations sont les classes à droite ou à gauche, suivant le cas, de ces sous-groupes.

Au niveau de l'équivalence large, pour une B-décomposition, seul le nombre de couples de matrices intervenant dans les relations, est important. De même pour les r-uples de B-décompositions, qui sont classés suivant l'équivalence large, ne sont étudiés que les couples de matrices, sans regarder le détail des relations. La figure 35 (p 60) montre les liens qui existent entre les classes de couples de B-décompositions et les relations.

### 4.2.7 PARTITIONNEMENT DE $S_4$ PAR LES B-DECOMPOSITIONS DE UN(4 x 4)

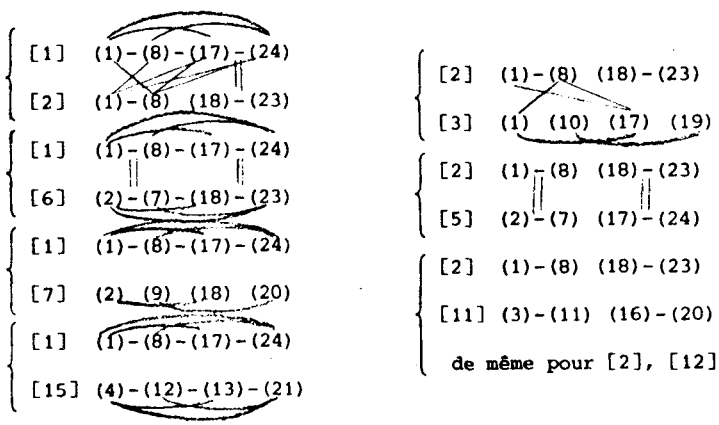
Parmi les r-uples de B-décompositions, se distinguent ceux qui contiennent des matrices de permutation toutes différentes. Pour n = 4, on ne peut trouver au plus que des 6-uples de cette sorte, et il y en a exactement trente-quatre (fig 36 p 62). Ils sont identifiés par des NUMEROS LEXICOGRAPHIQUES entre accolades. Ce sont des partitionnements de l'ensemble des matrices de permutation d'ordre 4 à l'aide des B-décompositions de UN(4 x 4). Certains de ces 6-uples sont constitués avec les classes à droite, d'autres avec les classes à gauche, quand ces dernières sont distinctes des précédentes, des quatre sous-groupes 1-transitifs d'ordre 4, qui sont des B-décompositions de UN(4 x 4) (§ 4.2.2 p 49 ). Ces 6-uples donnent en quelque sorte une généralisation des classes à droite et à gauche des sous-groupes, car chacun de ces 6-uples contient au moins un de ces quatre sous-groupes, puisque contenant nécessairement la matrice de l'identité.

Pour r < 6, les r-uples de B-décompositions ne contenant que des matrices de permutation différentes sont contenus dans au moins un de ces 6-uples. A partir d'un r-uple on construit aisément un des 6-uples le contenant en remarquant que chacun de ces 6-uples n'a, pour chacune des permutations laissant le premier objet invariant, qu'une B-décomposition la contenant. Un 6-uple est donc, pour chaque valeur de i entre 0 et 5, formé avec une seule B-décomposition de numéro lexicographique appartenant à l'intervalle [[4.i+1], [4.(i+1)]].

Les relations entre B-décompositions peuvent servir à construire ces 6-uples. L'un d'eux contient toutes les B-décompositions de la classe I. Il est d'ailleurs formé par les classes du sous-groupe 1-transitif invariant d'ordre 4. Les autres 6-uples se déduisent de celui-là en remplaçant un

Figure 35 : Pour n = 4,

Relations à deux matrices par membres et couples de B-décompositions. (Un trait relie deux matrices de permutation qui forment un couple membre d'une relation à deux matrices par membre ; un double trait relie les deux membres d'une relation).




BUS LILLE

couple de B-décompositions, membre d'une relation induite, par les B-décompositions de l'autre membre. On peut faire ce remplacement pour des couples disjoints de B-décompositions, jusqu'à trois couples simultanément. En tenant compte des incompatibilités entre les couples de relations, on trouve bien trente trois combinaisons possibles, d'où trente-quatre 6-uples, comme annoncés. Remarquons que chaque relation induite intervient sept fois.

### 4.2.8 GRAPHES D'INDEPENDANCE

Les 6-uples de B-décompositions qui ont fait l'objet du paragraphe précédent, présentent de nombreux parallélismes avec les B-décompositions elles-mêmes : il y a des relations entre les B-décompositions, de la même façon qu'il y a des relations entre les matrices de permutation ; de même les numéros des B-décompositions d'un 6-uple vérifient des règles qui sont comparables à celles sur les numéros des matrices de permutation dans les B-décompositions, etc...

Ces phénomènes sont mieux sentis quand on utilise une représentation graphique.

Des permutations sont INDEPENDANTES si elles ne changent aucun objet de la même façon. Leurs matrices de permutation ont alors leurs valeurs non-nulles dans des cases différentes, d'où leur somme ne contient pas de valeur supérieure à 2, d'où cette somme est inférieure à UN(n x n). L'indépendance de deux permutations r et s se traduit par le fait que $s^{-1}.r$ ne laisse aucun objet invariant.

Considérons alors le GRAPHE D'INDEPENDANCE DES PERMUTATIONS d'ordre n (fig 37 p 64). Les sommets sont les permutations et ses arêtes traduisent l'indépendance des permutations. Il a donc n! sommets. On peut vérifier, par le principe d'inclusion et d'exclusion, qu'il est homogène dans son degré. Ses cliques maximales ne peuvent avoir plus de n sommets car, sinon, un objet occuperait nécessairement la même position dans deux permutations de la clique. Le sous-groupe $G_i$ d'ordre (n-1)! des permutations qui laissent un objet i invariant constitue un ensemble stable. De même pour ses classes qui appliquent toutes un même objet dans la même position et qui sont aussi de cardinal (n-1)!
Puisque chacun des n objets peut être appliqué sur chacune des n positions, il y a $n^2$ tels ensembles de permutations, y compris les sous-groupes.

Pour n = 4, ce graphe a vingt-quatre cliques maximales, toutes de 4 sommets. Il contient exactement 16 ensembles stables maximaux de six sommets, mais on peut en trouver 96 autres de quatre sommets dont le premier lexicographiquement est {(1), (2), (3), (15)} où la dépendance des permutations n'est pas réalisée en appliquant toujours le même objet dans la même position (voir § 11.1.4 p213).
Ce graphe n'est pas parfait car il contient un cycle de longueur 5 sans corde : {(1), (8), (3), (12), (19)}.

Les B-décompositions de UN(n x n), qui sont formées avec les matrices de permutations indépendantes, sont les cliques maximales de ce graphe.

Figure 36 : 6-uples de B-décompositions de UN(4 x 4) partitionnant $S_4$

(Les 6-uples sont numérotés en ordre lexicographique)

| n° | Remarques | 6-uples de B-décompositions de UN(4 x 4) | | | | | | Relations induites utilisées |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| {1} | 1 | [1] | [6] | [10] | [15] | [19] | [24] | |
| {2} | | [1] | [6] | [10] | [15] | [20] | [22] | <9> |
| {3} | | [1] | [6] | [10] | [16] | [19] | [23] | <8> |
| {4} | | [1] | [6] | [11] | [15] | [18] | [24] | <7> |
| {5} | | [1] | [6] | [11] | [16] | [18] | [23] | <7>, <8> |
| {6} | | [1] | [6] | [12] | [14] | [19] | [24] | <6> |
| {7} | | [1] | [6] | [12] | [14] | [20] | [22] | <6>, <9> |
| {8} | | [1] | [7] | [10] | [15] | [17] | [24] | <5> |
| {9} | | [1] | [7] | [10] | [16] | [17] | [23] | <5>, <8> |
| {10} | | [1] | [7] | [12] | [14] | [17] | [24] | <5>, <6> |
| {11} | | [1] | [8] | [10] | [13] | [19] | [24] | <4> |
| {12} | | [1] | [8] | [10] | [13] | [20] | [22] | <4>, <9> |
| {13} | | [1] | [8] | [11] | [13] | [18] | [24] | <4>, <7> |
| {14} | | [2] | [5] | [10] | [15] | [19] | [24] | <1> |
| {15} | | [2] | [5] | [10] | [15] | [20] | [22] | <1>, <9> |
| {16} | | [2] | [5] | [10] | [16] | [19] | [23] | <1>, <8> |
| {17} | | [2] | [5] | [11] | [15] | [18] | [24] | <1>, <7> |
| {18} | 2 | [2] | [5] | [11] | [16] | [18] | [23] | <1>, <7>, <8> |
| {19} | | [2] | [5] | [12] | [14] | [19] | [24] | <1>, <6>, <9> |
| {20} | 3 | [2] | [5] | [12] | [14] | [20] | [22] | <1>, <6>, <9> |
| {21} | | [3] | [6] | [10] | [15] | [19] | [21] | <3> |
| {22} | | [3] | [6] | [11] | [15] | [18] | [21] | <3>, <7> |
| {23} | | [3] | [6] | [12] | [14] | [19] | [21] | <3>, <6> |
| {24} | | [3] | [7] | [10] | [15] | [17] | [21] | <3>, <5> |
| {25} | 4 | [3] | [7] | [12] | [14] | [17] | [21] | <3>, <5>, <6> |
| {26} | | [3] | [8] | [10] | [13] | [19] | [21] | <3>, <4> |
| {27} | 5 | [3] | [8] | [11] | [13] | [18] | [21] | <3>, <4>, <7> |
| {28} | | [4] | [6] | [ 9] | [15] | [19] | [24] | <2> |
| {29} | | [4] | [6] | [ 9] | [15] | [20] | [22] | <2>, <9> |
| {30} | | [4] | [6] | [ 9] | [16] | [19] | [23] | <2>, <8> |
| {31} | | [4] | [7] | [ 9] | [15] | [17] | [24] | <2>, <5> |
| {32} | 6 | [4] | [7] | [ 9] | [16] | [17] | [23] | <2>, <5>, <8> |
| {33} | | [4] | [8] | [ 9] | [13] | [19] | [24] | <2>, <4> |
| {34} | 7 | [4] | [8] | [ 9] | [13] | [20] | [22] | <2>, <4>, <9> |

Remarques :

1 Classes du sous-groupe [1]
2 Classes à droite du sous-groupe [2]
3 Classes à gauche du sous-groupe [2]
4 Classes à droite du sous-groupe [3]
5 Classes à gauche du sous-groupe [3]
6 Classes à droite du sous-groupe [4]
7 Classes à gauche du sous-groupe [4]

Des cliques sont INDEPENDANTES si leur intersection est vide. On peut, comme pour les permutations, construire le GRAPHE D'INDEPENDANCE DES CLIQUES D'UN GRAPHE DONNE. Les cliques de ce second graphe ne sont pas sans rapport avec les partitionnements par des cliques des sommets du premier graphe.

Les r-uples de B-décompositions qui contiennent des matrices de permutation toutes différentes sont des cliques du graphe d'indépendance des cliques du graphe d'indépendance des permutations.

Les résultats énoncés dans ce paragraphe ont été vérifiés numériquement pour n = 4 à l'aide d'un PROGRAMME* (§ 11.8.1 p 312) et l'on a constaté que dans ce cas

$$\alpha(G) = \theta(G) = 6$$

$$\gamma(G) = \omega(G) = 4$$

où $\alpha(G)$ = le nombre de stabilité,

$\theta(G)$ = le nombre minimum de cliques qui partitionnent les permutations,

$\gamma(G)$ = le nombre chromatique,

$\omega(G)$ = le nombre maximum de sommets qui forment une clique.

On trouvera figure 37 (p 64) un dessin du graphe d'indépendance des permutations pour n = 4 et les résultats associés au paragraphe 11.8.2 (p318).

## 4.3 LES B-DÉCOMPOSITIONS DE LA q.n-MATRICE q.UN(n x n)

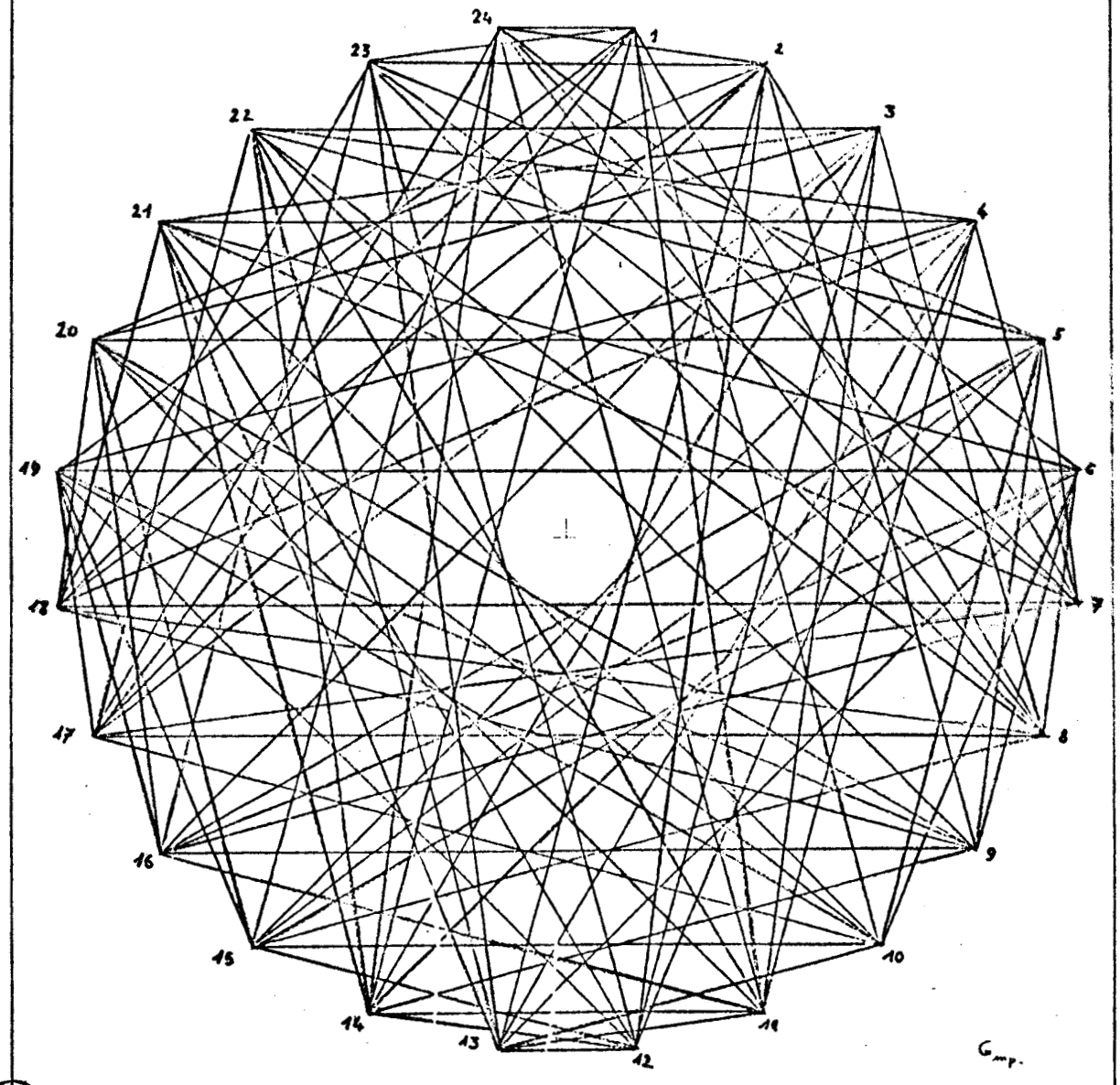
### 4.3.1 NUMEROS DES MATRICES DANS LES B-DECOMPOSITIONS DE q.UN(n x n)

La n.q-matrice q.UN(n x n), qui est la matrice d'ordre n dont tous les éléments égaux à q, admet des B-décompositions contenant n.q matrices de permutation. Comme elle est la somme de q matrices UN(n x n), elle admet, pour B-décompositions, des sommes de q B-décompositions de la matrice UN(n x n). Mais ce ne sont pas ses seules B-décompositions.

Les B-décompositions de la matrice q.UN(n x n) donnent des ensembles q-transitifs de permutations. Pour un indice de rangée donné, il y a exactement q matrices de permutation ayant non-nulle une même case, ce sont celles d'une classe d'un des groupes $G_i$ laissant l'objet i invariant. De ce fait, suivant le résultat du paragraphe 4.2.3(p53) dans chaque B-décomposition de q.UN(n x n), et pour chaque objet i à permuter, il y a exactement q matrices de permutation de numéro appartenant à l'intervalle I(n,i). Par exemple, la 8-matrice 2.UN(4 x 4) a des B-décompositions contenant exactement deux matrices de permutation non-nulles dans la première case de la première ligne, et ces matrices de permutation ont leur numéro lexicographique compris entre 1 et 6 (fig 38 p 66).

Figure 37 :

Graphe d'indépendance des permutations d'ordre 4




LILLE

Mais les matrices de permutation ne sont pas nécessairement différentes dans une B-décomposition de q.UN(n x n). Il y a n.q matrices de permutation dans une B-décomposition de q.UN(n x n) puisque c'est une n.q-matrice, mais il y a entre n et n . q matrices de permutation différentes. En effet, aucune d'elles ne peut y apparaître plus de q fois, sinon dans la somme elle ferait apparaître des valeurs supérieures à q. Il en faut alors au moins n différentes car, sinon, l'une d'elles devrait y être plus de q fois. Quand il y en a n.q, elles sont toutes différentes.

Comme il y a n! matrices de permutation, toute p-matrice avec p plus grand que n! contient, dans chacune de ses B-décompositions au moins deux fois la même matrice de permutation. Ceci se produit pour les matrices q.UN(n x n) dès que q est plus grand que (n-1)!.

## 4.3.2 B-DECOMPOSITIONS SPECIALES ET PURES

Les B-décompositions de q x UN(n x n) qui ne contiennent aucune B-décomposition de UN(n x n) sont appelées B-DECOMPOSITIONS SPECIALES. Celles qui ne contiennent aucune B-décomposition de q'.UN(n x n), avec q' < q, sont appelées B-DECOMPOSITIONS PURES.

Les B-décompositions pures sont spéciales (en prenant q' = 1).

Les B-décompositions de q.UN(n x n) dont tous les coefficients sont minimaux (égaux à 1) sont appelées B-DECOMPOSITIONS A MINIMA. Certaines d'entre-elles sont spéciales, et même pures. Toutefois on n'en trouve que pour q ≤ n.

## 4.3.3 LES B-DECOMPOSITIONS DE LA 4 . q-MATRICE q.UN(4 x 4)

### *4.3.3.1 Nombre de B-décompositions de q.UN(4 x 4)*

Toutes les B-décompositions de la q.4-matrice q.UN(4 x 4) ne sont pas la somme de q B-décompositions de la matrice UN(4 x 4).

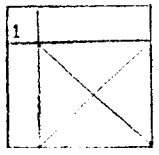
Le tableau de la figure 39 (p 68) donne le nombre de B-décompositions de q.UN(4 x 4). Pour q = 4, il y a 38550 B-décompositions. Leur construction représente une masse importante de calculs. Les paragraphes suivants ont pour but de donner les moyens de les construire. Elles ont été construites jusque q = 4 et partiellement pour q = 5 et 6.

### *4.3.3.2 Importance du début de B-décomposition de q.UN(4 x 4)*

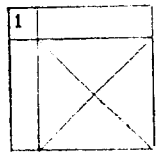
Dans la B-décomposition d'une matrice (n x n) en matrices de permutation nous ordonnons toujours les matrices suivant leur numéro lexicographique des B-décompositions.

Le DEBUT D'UNE B-DECOMPOSITION est alors constitué par les premières matrices de permutation de la B-décomposition et plus précisément par celles de numéro lexicographique inférieur ou égal à (n-1)!. Ces matrices en effet permettent de "REMPLIR" la première case, puisque ce sont les seules qui ne sont pas nulles dans la colonne 1 de la ligne 1. Le début d'une B-décomposition de q.UN(n x n) contient donc q matrices de permutation.

Figure 38 : Numéro des matrices dans les B-décompositions de 2.UN(4 x 4)




+



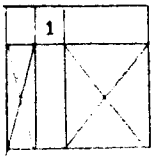

matrices contenant

un 1 dans la

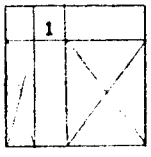
case 1 de la ligne 1.

N° compris entre 1 et 6

+




+

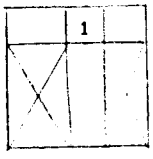



idem

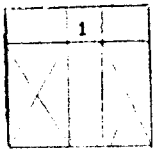
dans la case 2 de la ligne 1.

N° compris entre 7 et 12

+




+

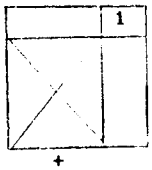



idem

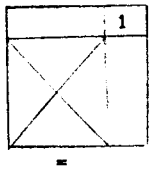
dans la case 3 de la ligne 1

N° compirs entre 13 et 18

+




+

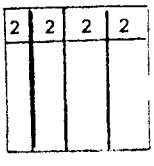



idem

dans la case 4 de la ligne 1.

N° compris entre 19 et 24

=



Ces matrices de permutation étant nulles dans leur première ligne et première colonne, sauf à leur intersection, elles contiennent,dans la sous-matrice inférieure droite,une matrice de permutation d'ordre n-1. Les relations qui lient les matrices d'ordre n-1 induisent directement des relations entre les matrices de permutation d'ordre n, comme nous l'avons vu au paragraphe 3.3 (p 35) et à la figure 25 (p 46).

• Le début d'une B-décomposition de q.UN(n x n) aura une somme qui contiendra ou ne contiendra pas une ou plusieurs valeurs supérieures à 1 dans la sous-matrice inférieure droite d'ordre n-1, selon qu'il contiendra ou ne contiendra pas des matrices de permutation ayant des sous-matrices de permutation inférieures droites d'ordre n-1 appartenant à une B-décomposition de la matrice UN((n-1) x (n-1)).

Par exemple pour n = 4, la relation à trois matrices de permutation par membre

$$(1) + (4) + (5) = (2) + (3) + (6)$$

est directement induite par la relation identique dans les matrices de permutation d'ordre n-1. Un début de B-décomposition de 2.UN(4 x 4) qui utilise les matrices de permutation (1) et (4) aura pour somme une matrice nulle sur la première ligne et la première colonne sauf en leur intersection qui est 2, et de sous-matrice inférieure droite d'ordre n-1 ne contenant que des 0 et des 1. Par contre dans la somme du début de B-décomposition utilisant (1) et (2), il y aura, dans la sous-matrice, au moins un 2 (fig 40 p 70).

On peut aisément, de cette façon, construire une B-décomposition de 3.UN(4 x 4), cas particulier du calcul d'une B-décomposition de (n-1).UN(n x n), à condition de connaître une B-décomposition de UN((n-1) x (n-1)) :transformer la B-décomposition de la matrice UN((n-1) x (n-1)) en une partie de la B-décomposition de la matrice UN(n x n) en ajoutant à chacune des matrices d'ordre (n-1) une première ligne nulle et une colonne d'ordre n contenant un 1 en première ligne. Cette transformation est à faire pour toutes les matrices de la B-décomposition d'ordre n-1, en introduisant la colonne dans les n positions qu'on trouve devant, entre et après les colonnes. Chacune de ces transformations produira les (n-1) matrices de permutation de la B-décomposition de UN(nxn) qui ont l'élément non-nul dans la même case de la première ligne (fig 41 p 72). Pour n = 4, cette B-décomposition contient la moitié des matrices de permutation d'ordre 4. Les matrices inutilisées donnent une autre B-décomposition.

#### *4.3.3.3 Equivalence des débuts de B-décompositions de q.UN(n x n)*

L'EQUIVALENCE LARGE, qui classe ensemble des matrices qui se déduisent l'une de l'autre par permutation des lignes d'une part et des colonnes d'autre part, induit une RELATION D'EQUIVALENCE SUR LES DEBUTS DE B-DECOMPOSITIONS, d'après la forme de la sous-matrice inférieure droite d'ordre n-1 de leur somme, plus précisément d'après les nombres d'éléments ayant les mêmes valeurs dans les rangées.

Figure 39 : Nombres de B-décompositions de q.UN(4 x 4)

| q | Nq = nb de B-décompositions | nb de B-d c p à minima | nb de B-d c p spéciales | nb de B-d c p à minima spec. |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 24 | 24 | / | / |
| 2 | 411 | 255 | 120 | 96 |
| 3 | 4 696 | 640 | 104 | 32 |
| 4 | 38 550 | 255 | 1128 | 0 |
| 5 | 243 000 | 24 | 816 | 0 |
| 6 | 1 242 882 | 1 | 4352 | 0 |
| 7 | | 0 | | |

BUS LILLE

Pour n = 4,cette équivalence se définit par le choix de matrices de permutation dans chacun des membres de la relation à 3 matrices par membre citée au paragraphe précédent, puisque chaque matrice de l'un des membres de la relation a, à part la première case, un élément en commun avec chaque matrice de l'autre membre.

Par exemple sont équivalents des débuts de B-décompositions de 2.UN(4 x 4) contenant {(1), (4)}, {(1), (5)} ou {(2), (3)} dont les matrices sommes contiennent des sous-matrices inférieures droites d'ordre n-1 ayant deux 1 et un 0 par rangée ; et ils sont distincts de {2.(1)} dont la somme contient une sous-matrice ayant des rangées nulles sauf en un élément égal à 2 ; enfin ils sont tous différents des débuts de B-décompositions contenant {(1), (2)} ou {(5), (3)} qui ont une somme ayant une sous-matrice qui ne contient qu'un seul 2 (fig 40 p 70) .

Pour n = 4 et q variant de 1 à 6, ont été construits, dans la figure 42 (p73), les représentants des classes de débuts équivalents de B-décompositions de q.UN(n x n) et ont été calculés les cardinaux de ces classes.

Puisque les débuts de B-décompositions de q.UN(n x n) sont les coefficients des premières matrices de permutation d'ordre n dans les B-décompositions, ils sont en correspondance avec les suites ordonnées de q nombres (numéros lexicographiques de matrices de permutation ) pas nécessairement distinctes compris entre 1 et (n-1)!. Il y a donc

$$\sum_{i_1=1}^{(n-1)!} \sum_{i_2=i_1}^{(n-1)!} \cdots \sum_{i_j=i_{j-1}}^{(n-1)!} \cdots \sum_{i_q=i_{q-1}}^{(n-1)!} 1$$

débuts de B-décompositions de q.UN(n x n)

Par exemple, il y a 792 débuts de B-décompositions de 7.UN(4 x 4). Ils se répartissent en 37 classes.

Le nombre de classes de débuts de B-décompositions de q.UN(n x n) répond à des règles qui se traduisent difficilement dans une formule.

### 4.3.3.4 *Construction et nombre des B-décompositions de q.UN(n x n)*

Un début de B-décomposition de q.UN(n x n) peut se prolonger de nombreuses manières, mais deux débuts équivalents donneront, chacun, le même nombre de B-décompositions ,équivalentes par la même équivalence large.

Pour connaître,et donc compter,les B-décompositions de q.UN(n x n),il suffit alors de construire pour un représentant de chaque classe de débuts de B-décompositions, toutes les B-décompositions qui le contiennent. On a pour cela utilisé le programme MLTDCP3 (§ 4.1.2 p 47) qui a été conçu pour accepter une prédétermination,par le début,des B-décompositions.

La figure 42 (p 73) indique dans un tableau pour chaque classe le cardinal et le nombre de prolongements possibles en B-décompositions de chacun de leurs débuts. On a pu ainsi déduire le nombre de B-décompositions de q.UN(4 x 4).

Figure 40 : **Les 6 premières matrices de permutation d'ordre 4**

$$\underset{(1)}{\begin{array}{|c|ccc|}\hline 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline\end{array}} + \underset{(4)}{\begin{array}{|c|ccc|}\hline 1 & & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \\ \hline\end{array}} + \underset{(5)}{\begin{array}{|c|ccc|}\hline 1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \hline\end{array}} = \underset{(2)}{\begin{array}{|c|ccc|}\hline 1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ \hline\end{array}} + \underset{(3)}{\begin{array}{|c|ccc|}\hline 1 & & & \\ \hline & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ \hline\end{array}} + \underset{(6)}{\begin{array}{|c|ccc|}\hline 1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ \hline\end{array}} = \begin{array}{|c|ccc|}\hline 3 & & & \\ \hline & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$(1) + (4) = \begin{array}{|c|ccc|}\hline 2 & & & \\ \hline & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & 1 & & 1 \\ \hline\end{array} \qquad (1) + (2) = \begin{array}{|c|ccc|}\hline 2 & & & \\ \hline & 2 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$(1) + (5) = \begin{array}{|c|ccc|}\hline 2 & & & \\ \hline & 1 & & 1 \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ \hline\end{array} \qquad (5) + (3) = \begin{array}{|c|ccc|}\hline 2 & & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & 2 & & \\ & & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$(2) + (3) = \begin{array}{|c|ccc|}\hline 2 & & & \\ \hline & 1 & 1 & \\ & 1 & & 1 \\ & & 1 & 1 \\ \hline\end{array} \qquad 2 \times (1) = \begin{array}{|c|ccc|}\hline 2 & & & \\ \hline & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \\ \hline\end{array}$$

*4.3.3.5 Les B-décompositions spéciales pures de q.UN(4 x 4)*

Les B-décompositions pures de q.UN(n x n) ne sont sommes d'aucune B-décomposition de q'.UN(n x n) avec q' < q. Pour q ≤ 3, les B-décompositions spéciales sont aussi pures. Plus q augmente, plus les B-décompositions comportent de matrices de permutation et plus elles ont la possibilité de contenir des B-décompositions rencontrées pour des valeurs de q plus petites.

Pour n = 4, on a 120 B-décompositions pures (parce que spéciales) de 2.UN(4 x 4), et 104 B-décompositions pures de 3.UN(4 x 4). Il n'en existe pas pour q = 4 et q = 5. On peut supposer que cela reste vrai pour q plus grand car une B-décomposition de 6·UN(4 x 4) nécessite déjà 24 = n! (6 = (n-1)!) matrices de permutation.

On trouvera, figure 43 (p 74), les B-décompositions pures de 2.- et 3.UN(4x4) construites sur les représentants des classes de débuts de B-décompositions. Il est intéressant de constater qu'aucune d'elles ne construit les deux ou les trois matrices de permutation non-nulles dans une même case (voir procédé de la figure 41 ( p 72)) toujours à partir du même membre de la relation sur les matrices de permutation d'ordre n = 3.

Une autre constatation à faire depuis la figure 39 (p 68) est que les nombres de B-décompositions spéciales de q.UN(4 x 4) semblent plus faibles pour les valeurs de q impaires.

Figure 41 : Une B-décomposition de 3.UN(4 x 4)

$$UN(3 \times 3) = \underset{(1)}{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}} + \underset{(4)}{\begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix}} + \underset{(5)}{\begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & & & \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \underset{(1)}{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}} + \underset{(4)}{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \end{bmatrix}} + \underset{(5)}{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{bmatrix}} = (2) + (3) + (6)$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$\begin{bmatrix} & 3 & & \\ 1 & & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix} = \underset{(7)}{\begin{bmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}} + \underset{(10)}{\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix}} + \underset{(11)}{\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & & 1 & \end{bmatrix}} = (8) + (9) + (12)$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$\begin{bmatrix} & & 3 & \\ 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix} = \underset{(13)}{\begin{bmatrix} & & 1 & \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}} + \underset{(16)}{\begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{bmatrix}} + \underset{(17)}{\begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{bmatrix}} = (14) + (15) + (18)$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$\begin{bmatrix} & & & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \end{bmatrix} = \underset{(19)}{\begin{bmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{bmatrix}} + \underset{(22)}{\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{bmatrix}} + \underset{(23)}{\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{bmatrix}} = (20) + (21) + (24)$$

$$= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot UN(4 \times 4)$$

BUS LILLE

Figure 42 : Nombres de B-décompositions de q.UN(4 x 4)

| q | classe de débuts 1 4 5 | 2 3 6 | représentant : coefficients des m.p. (1) (2) (3) (4) (5) (6) | Cardinal = N choix 145 236 Symétrie | nombre de B-dcp. par début dcp. D | Spe. S | Min M | MinSpé Ms | nombre de B-dcp par classe N.D | N.S | N.M | N.Ms. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 1 . . . . . | 3x1x2 = 6 | 4 | | | | 24 | 0 | | |
| 2 | 2 | | 2 . . . . . | 3x1x2 = 6 | 11 | 1 | | | 66 | 6 | | |
| | 1 1 | | 1 . . 1 . . | 3x1x2 = 6 | 29 | 13 | 10 | 10 | 174 | 78 | 60 | 60 |
| | 1 | 1 | 1 1 . . . . | 3x3x1 = 9 | 19 | 4 | 4 | 4 | 171 | 36 | 36 | 36 |
| Total : | 3 | | | 21 | 59 | 18 | 14 | 14 | 411 | 120 | 96 | 96 |
| 3 | 3 | | 3 . . . . . | 3x1x2 = 6 | 23 | | | | 138 | | | |
| | 2 1 | | 2 . . 1 . . | 6x1x2 = 12 | 96 | 3 | | | 1152 | 36 | | |
| | 2 | 1 | 2 1 . . . . | 3x3x2 = 18 | 53 | | | | 954 | | | |
| | 1 1 1 | | 1 . . 1 1 . | 1x1x2 = 2 | 182 | 7 | 68 | 7 | 364 | 14 | 136 | 14 |
| | 1 | 1 1 | 1 1 1 . . . | 3x3x2 = 18 | 116 | 3 | 28 | 1 | 2088 | 54 | 504 | 18 |
| Total : | 5 | | | 46 | 470 | 13 | 96 | 8 | 4696 | 104 | 640 | 32 |
| 4 | 4 | | 4 . . . . . | 3x1x2 = 6 | 42 | 1 | | | 252 | 6 | | |
| | 3 1 | | 3 . . 1 . . | 6x1x2 = 12 | 226 | 7 | | | 2712 | 84 | | |
| | 3 | 1 | 3 1 . . . . | 3x3x2 = 18 | 113 | 2 | | | 2034 | 36 | | |
| | 2 2 | | 2 . . 2 . . | 3x1x2 = 6 | 387 | 59 | | | 2322 | 354 | | |
| | 2 | 2 | 2 2 . . . . | 3x3x1 = 9 | 150 | 6 | | | 1350 | 54 | | |
| | 2 1 1 | | 2 . . 1 1 . | 3x1x2 = 6 | 585 | 18 | | | 3510 | 108 | | |
| | 2 1 | 1 | 2 1 . 1 . . | 6x3x2 = 36 | 259 | 10 | | | 12924 | 360 | | |
| | 2 | 1 1 | 2 1 1 . . . | 3x3x2 = 18 | 300 | 4 | | | 5400 | 72 | | |
| | 1 1 1 | 1 1 | 1 1 . 1 1 . | 1x3x2 = 6 | 585 | | 23 | | 3510 | | 138 | |
| | 1 1 | 1 1 | 1 1 1 1 . . | 3x3x1 = 9 | 504 | 6 | 13 | | 4536 | 54 | 117 | |
| | 10 | | | 126 | 3151 | 113 | 36 | | 38550 | 1128 | 255 | |
| 5 | 5 | | 5 . . . . . | 3x1x2 = 6 | 69 | | | | 414 | | | |
| | 4 1 | | 4 . . 1 . . | 6x1x2 = 12 | 440 | 3 | | | 5280 | 36 | | |
| | 4 | 1 | 4 1 . . . . | 3x3x2 = 18 | 207 | | | | 3726 | | | |
| | 3 2 | | 3 . . 2 . . | 6x1x2 = 12 | 1012 | 18 | | | 12144 | 216 | | |
| | 3 | 2 | 3 2 . . . . | 3x3x2 = 18 | 322 | | | | 5796 | | | |
| | 3 1 1 | | 3 . . 1 1 . | 3x1x2 = 6 | 1368 | 7 | | | 8208 | 42 | | |
| | 3 1 | 1 | 3 1 . 1 . . | 6x3x2 = 36 | 814 | 2 | | | 29304 | 72 | | |
| | 3 | 1 1 | 3 1 1 . . . | 3x3x2 = 18 | 616 | 1 | | | 11088 | 18 | | |
| | 2 2 1 | | 2 . . 2 1 . | 3x1x2 = 6 | 1959 | 6 | | | 11754 | 36 | | |
| | 2 2 | 1 | 2 1 . 2 . . | 3x3x2 = 18 | 1244 | 10 | | | 22392 | 180 | | |
| | 2 | 2 1 | 2 2 1 . . . | 3x6x2 = 36 | 901 | 4 | | | 32436 | 144 | | |
| | 2 1 1 | 1 | 2 1 . 1 1 . | 3x3x2 = 18 | 1724 | | | | 31032 | | | |
| | 2 1 | 1 1 | 2 1 1 1 . . | 6x3x2 = 36 | 1374 | 2 | | | 49464 | 72 | | |
| | 2 | 1 1 1 | 2 1 1 . . . | 3x1x2 = 6 | 1368 | | | | 8208 | | | |
| | 1 1 1 | 1 1 | 1 1 1 1 1 . | 1x3x2 = 6 | 1959 | | 4 | | 11754 | | 24 | |
| | 15 | | | 246 | 15377 | 53 | 4 | | 243000 | 816 | 24 | |
| 6 | 6 | | 6 . . . . . | 3x1x2 = 6 | 106 | 1 | | | 936 | 6 | | |
| | 5 1 | | 5 . . 1 . . | 6x1x2 = 12 | 759 | 7 | | | 9108 | 84 | | |
| | 5 | 1 | 5 1 . . . . | 3x3x2 = 18 | 342 | 2 | | | 6156 | 36 | | |
| | 4 2 | | 4 . . 2 . . | 6x1x2 = 12 | 2101 | 23 | | | 25212 | 276 | | |
| | 4 | 2 | 4 2 . . . . | 3x3x2 = 18 | 591 | 2 | | | 10638 | 36 | | |
| | 4 1 1 | | 4 . . 1 1 . | 3x1x2 = 6 | 2656 | 6 | | | 15936 | 36 | | |
| | 4 1 | 1 | 4 1 . 1 . . | 6x3x2 = 36 | 1547 | 4 | | | 55692 | 144 | | |
| | 4 | 1 1 | 4 1 1 . . . | 3x3x2 = 18 | 1101 | 4 | | | 19818 | 72 | | |
| | 3 3 | | 3 . . 3 . . | 3x1x2 = 6 | 2932 | 170 | | | 17592 | 1020 | | |
| | 3 | 3 | 3 3 . . . . | 3x3x1 = 9 | 698 | 8 | | | 6282 | 72 | | |
| | 3 2 1 | | 3 . . 2 1 . | 6x1x2 = 12 | 4732 | 30 | | | 56808 | 360 | | |
| | 3 2 | 1 | 3 1 . 2 . . | 6x3x2 = 36 | 3025 | 18 | | | 108900 | 648 | | |
| | 3 1 | 2 | 3 2 . 1 . . | 6x3x2 = 36 | 2012 | 14 | | | 72432 | 504 | | |
| | 3 | 1 2 | 3 1 2 . . . | 3x6x2 = 36 | 1818 | 4 | | | 65448 | 144 | | |
| | 3 1 1 | 1 | 3 1 . 1 1 . | 3x3x2 = 18 | 3851 | 14 | | | 69318 | 252 | | |
| | 3 1 | 1 1 | 3 1 1 1 . . | 6x3x2 = 36 | 2922 | 4 | | | 105192 | 144 | | |
| | 3 | 1 1 1 | 3 1 1 . . 1 | 3x1x2 = 6 | 2656 | | | | 15936 | | | |
| | 2 2 2 | | 2 . . 2 2 . | 1x1x2 = 2 | 6168 | 7 | | | 12336 | 14 | | |
| | 2 | 2 2 | 2 2 2 . . . | 3x3x2 = 18 | 2913 | 7 | | | 52434 | 126 | | |
| | 2 2 1 | 1 | 2 1 . 2 1 . | 3x3x2 = 18 | 5151 | | | | 92718 | 162 | | |
| | 2 2 | 1 1 | 2 1 1 2 . . | 3x3x2 = 18 | 4001 | 9 | | | 72018 | 216 | | |
| | 2 1 | 2 1 | 2 2 1 1 . . | 6x6x1 = 36 | 3535 | 6 | | | 127260 | | | |
| | 2 | 2 1 1 | 2 2 1 . . 1 | 3x3x2 = 18 | 3851 | | | | 69318 | | | |
| | 2 1 1 | 1 1 | 2 1 1 1 1 . | 3x3x2 = 18 | 5151 | | | | 92718 | | | |
| | 2 1 | 1 1 1 | 2 1 1 1 . 1 | 6x1x2 = 12 | 4734 | | | | 56808 | | | |
| | 1 1 1 | 1 1 1 | 1 1 1 1 1 1 | 1x1x1 = 1 | 6168 | | | | 6168 | | | |
| | 26 | | | 462 | 75523 | 340 | | | 1242882 | 4352 | | |

BIUS LILLE

Figure 43 : Coefficients des B-décompositions pures de q.UN(4 x 4)

| q | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) | (11) | (12) | (13) | (14) | (15) | (16) | (17) | (18) | (19) | (20) | (21) | (22) | (23) | (24) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | | | | | | | | | 1 | 1 | | | 1 | | | | 1 | 1 | | | | 1 | |
| | 1 | 1 | | | | | | | 1 | | | 1 | | 1 | | | 1 | | 1 | | | | | 1 |
| | 1 | 1 | | | | | | | 1 | | | 1 | | 1 | | | | 1 | 1 | | | | 1 | |
| | 1 | 1 | | | | | | | | 1 | 1 | | 1 | | | | 1 | | | 1 | | | | 1 |
| | 1 | 1 | | | | | | | | 1 | 1 | | 1 | | | | | 1 | | 1 | | | 1 | |
| | 1 | | | 1 | | | 1 | | | | 1 | | | | | 1 | 1 | | 1 | | | | | 1 |
| | 1 | | | 1 | | | 1 | | | | 1 | | | | | 1 | | 1 | 1 | | | | 1 | |
| | 1 | | | 1 | | | | 1 | 1 | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | | | 1 | | |
| | 1 | | | 1 | | | | 1 | 1 | | | | | | | | | 2 | | 1 | 1 | | | |
| | 1 | | | 1 | | | | 1 | | | 1 | | | | 1 | | | 1 | | 1 | | | | 1 |
| | 1 | | | 1 | | | | | 1 | | 1 | | | 1 | | | | 1 | 1 | | | 1 | | |
| | 1 | | | 1 | | | | 1 | | | 1 | | | | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | | | |
| | 1 | | | 1 | | | | 1 | | | | 1 | | 1 | | | | 1 | 1 | | 1 | | | |
| | 1 | | | 1 | | | | 1 | | | | 1 | | | | 1 | 1 | | 2 | | | | | |
| | 1 | | | 1 | | | | | | 1 | 1 | | 1 | | | | | 1 | | 1 | 1 | | | |
| | 1 | | | 1 | | | | | | 1 | 1 | | | | 1 | | | 1 | 1 | 1 | | | | |
| | 1 | | | 1 | | | | | | | 2 | | 1 | | | 1 | | | | 1 | | | | 1 |
| | 1 | | | 1 | | | | | | | 1 | 1 | 1 | | | 1 | | | 1 | | | | 1 | |
| 3 | 2 | | | 1 | | | | | 1 | 1 | 1 | | | 1 | | | | 2 | 1 | 1 | 1 | | | |
| | 2 | | | 1 | | | | | 1 | | 1 | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | 2 | | | | 1 | |
| | 2 | | | 1 | | | | | | 1 | 2 | | 1 | | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | | 1 | |
| | 1 | 1 | 1 | | | | | | 1 | | | 2 | | 1 | | 1 | 1 | | 2 | | | | 1 | |
| | 1 | 1 | 1 | | | | | | | 2 | 1 | | 1 | | | | 1 | 1 | | 2 | 1 | | | |
| | 1 | 1 | 1 | | | | | | | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | | | 1 | 1 | 1 | | | 1 | |
| | 1 | | | 1 | 1 | | 1 | | 1 | | | 1 | | 1 | | 1 | 1 | | 1 | | 1 | | | 1 |
| | 1 | | | 1 | 1 | | 1 | | | 1 | 1 | | 1 | | | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | | 1 |
| | 1 | | | 1 | 1 | | 1 | | | 1 | 1 | | 1 | 1 | | | 1 | | 1 | | | 1 | 1 | |
| | 1 | | | 1 | 1 | | | | 1 | 1 | 1 | | 1 | | | | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | | |
| | 1 | | | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | 1 | | | 1 | 1 | |
| | 1 | | | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | | 1 | | 1 | 1 | | | 1 | | 1 | 1 | | | 1 |
| | 1 | | | 1 | 1 | | 1 | | | | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | | | | 1 | | | 1 | 1 |

# 5. LES B-DECOMPOSITIONS D'UNE p-MATRICE D'ORDRE n

## 5.1 INTRODUCTION

Les questions que l'on se pose au sujet des B-décompositions des p-matrices en matrices de permutation sont de connaître leur nombre et le nombre de matrices de permutation qu'elles contiennent. Ceci sous-entend pratiquement de savoir les construire.

Comme les B-décompositions d'une p-matrice ne peuvent être construites qu'avec des matrices de permutation inférieures ou égales à la p-matrice, nous étudierons d'abord celles-ci.

## 5.2 MATRICES DE PERMUTATION INFÉRIEURES OU ÉGALES À UNE p-MATRICE

C'est avec un algorithme de flot du type de l'algorithme hongrois (§ 4.1.1 p 47) qu'on construit une matrice de permutation inférieure ou égale à une p-matrice.

Le programme MLTDCP3 (§ 4.1.2 p 47) qui construit toutes les B-décompositions d'une p-matrice contient une séquence qui construit toutes les matrices de permutation inférieures ou égales à cette p-matrice.

Mais ce qui nous intéresse ici est de connaître, sans les calculer toutes, le nombre des matrices de permutation inférieures ou égales à une p-matrice.

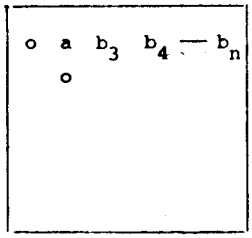
Pour cela nous allons appliquer récursivement le principe qui consiste à compter les matrices de permutation inférieures ou égales à la p-matrice et qui sont différentes de zéro dans les cases non-nulles d'une rangée de la p-matrice.

Supposons que l'on travaille sur une ligne de la p-matrice. Nous la choisissons avec beaucoup de zéros pour avoir le minimum de cases à traiter. Pour cela, il est intéressant de réorganiser la p-matrice en permutant les lignes de façon à avoir un nombre décroissant de zéros par ligne, puis en permutant les colonnes de façon à avoir les zéros cadrés à gauche dans les lignes prises de la première à la dernière. Ces permutations s'appliquent de la même façon aux matrices de permutation inférieures ou égales à la p-matrice, ce qui ne change pas leur nombre.

Comme chaque case de la première ligne est différente de zéro dans (n-1)! matrices de permutation, (celles de la classe de $G_1$ qui appliquent le premier objet sur celui ayant pour numéro celui de la colonne de la case), x zéros dans la première ligne de la p-matrice, imposerons un nombre de matrices de permutation inférieures ou égales à la p-matrice plus petit ou égal à (n-x)(n-1)!, cette valeur maximale étant atteinte si la p-matrice ne contient pas d'autres zéros.

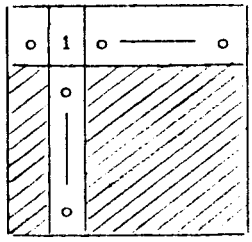
Figure 44 ;

Nombre de matrices de permutation inférieures ou égales à la matrice (nxn) suivante :

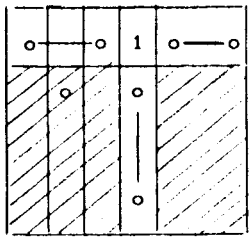



Les valeurs non indiquées sont différentes de zéro

1°) Les matrices de permutation non-nulles dans la case a sont de la forme suivante. Il y an a (n-1)!



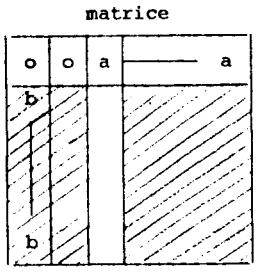

2°) Les matrices de permutation non-nulles sans une des n-2 cases $b_i$ sont de la forme suivante.



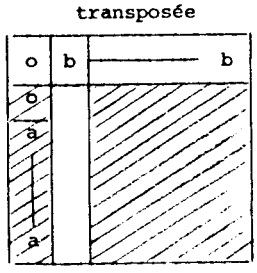

Ce sont des matrices de permutation d'ordre n-1 contenant un zéro en première ligne, complétées par une ligne et une colonne. Il y en a (n-2)(n-2)! (en prenant x=1 et n=n-1)

3°) La matrice nxn est supérieure ou égale à $\underset{a}{(n-1)!} + \underset{b_i}{(n-2)\ \{(n-2)(n-2)!\}}$ matrices de permutation différentes.

Figure 45 : Calcul sur la matrice et sa transposée




(n-2)(n-1)!




(n-1){(n-2)(n-2)!}

Quand il y a des zéros dans plusieurs lignes de la p-matrice, il faut calculer le nombre de matrices de permutation , inférieures ou égales à la p-matrice, associées à chacune des cases de la première ligne. Pour une case donnée de la première ligne, ces matrices de permutation contiennent des matrices de permutation d'ordre n-1 construites sur les rangées différentes de celles de la case. Ce sont ces matrices de permutation d'ordre n-1 qu'il faut compter. On applique donc récursivement le procédé et l'on traitera chaque case d'une ligne de ces sous-matrices.

Toutefois il y a intérêt à rechercher les cases qui donnent des résultats identiques. Ces cases sont dans des colonnes ayant les zéros aux mêmes lignes, ou dans des lignes égales par ailleurs (fig 44 p 76 ).

Ce procédé de comptage est valable pour les matrices carrées. Il peut être accéléré en utilisant les remarques suivantes.

a) On peut transposer la matrice, ce qui revient à travailler sur les colonnes (fig 45 p 76 ).

b) Si une rangée est nulle, il n'y a aucune matrice de permutation inférieure ou égale à la matrice carrée. Si c'était une p-matrice, elle serait nulle.

c) Si une rangée n'a qu'un élément non-nul,dans le cas d'une p-matrice, l'autre rangée passant par cette case non-nulle n'a aussi que cet élément non-nul, qui vaut alors p, et le traitement est celui de la sous-matrice d'ordre n-1 ne contenant pas cette case.

La figure 46 (p 78 ) montre le traitement d'une matrice contenant six zéros.

Les figures 47 (p 80 ) et 48 (p 82 ) donnent le nombre de matrices de permutation inférieures ou égales à une p-matrice d'ordre n, plus certaines configurations de zéros. Elle permet de calculer aisément ce nombre pour les p-matrices d'ordre 4.

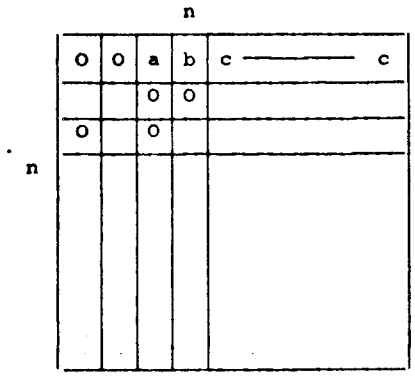
Ces configurations sont construites en introduisant successivement des lignes contenant des zéros, en nombre décroissant. Les configurations qui se déduisent l'une de l'autre par permutation de rangées ou par transpositions, n'apparaissent qu'une fois. Enfin pour les configurations où seule la dernière ligne ne contient pas de zéros, on a indiqué dans chacune des cases de cette ligne, le nombre de matrices de permutation , inférieures ou égales à la p-matrice d'ordre 4 ayant cette configuration de données, qui sont différentes de zéro dans la case correspondante. Enfin, on n'a pas développé les configurations qui se ramènent immédiatement à l'ordre inférieur.

Enfin remarquons que les formules font intervenir (n-z)! où z est le nombre de lignes contenant des zéros. C'est l'ordre des sous-matrices ne contenant pas de zéros.

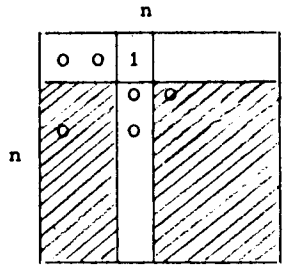
Ces résultats sont liés à la structure des groupes $G_i$ laissant l'objet i invariant et de leurs classes, comme on peut le déduire du tableau T du paragraphe 5.3 (P 85).

**Figure 46 :**

**Nombre de matrices de permutations inférieures ou égales à la matrice carrée suivante :**

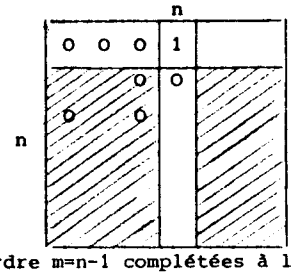



**1°) Les matrices de permutation non-nulles en a sont de la forme**

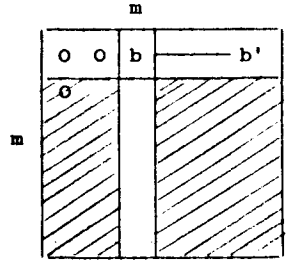



**Ce sont des matrices de permutation d'ordre n-1, complétée à l'ordre n, contenant 2 zéros non alignés. Il y en a d'après la figure 44 (p 76 ) en posant n = n-1 :** $(n-2)! + (n-3)^2(n-3)!$

**2°) Les matrices de permutation non-nulles en b sont de la forme**

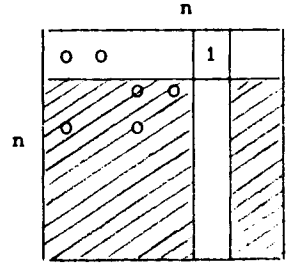



**Ce sont des matrices de permutation d'ordre m=n-1 complétées à l'ordre n, contenant 3 zéros. On les réorganise suivant la forme ci-dessous où l'on trouve des matrices de permutation d'ordre m-1 ayant un seul zéro.**




**Il y en a** $(m-2)\{(m-2)(m-2)!\}$ **. Ce qui, complété à l'ordre n, donne** $(n-3)^2(n-3)!$ **matrices de permutation.**

**3°) Les matrices de permutation non-nulles en l'une des n-4 cases c sont de la forme**

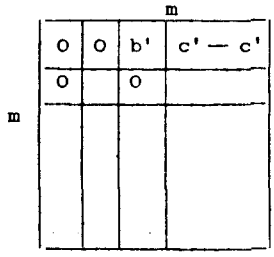



BUS LILLE

**Ce sont des matrices de permutations d'ordre m = n-1 complétées à l'ordre n et contenant 4 zéros en 2 lignes et trois colonnes. Elles sont de la forme ci-dessous.**

.../...

Figure 46 (suite)




Non nulle dans la case b', il y en a

$$(m-2)\,(m-2)\,!$$

Non nulle dans une des (m-3) case c', il y en a

$$(m-3)\,(m-2)\,!$$

ce qui, à l'ordre n, donne

$$(n-4)\{(n-3)\,(n-3)\,!+(n-4)\{(n-4)\,(n-3)\,!\}\}$$

matrices de permutation différentes.

4° La matrice carrée d'ordre n est supérieure où égale à

$$a : (n-2)\,! + (n-3)^2\ (n-3)\,!$$

$$b : \quad + (n-3)^2\ (n-3)\,!$$

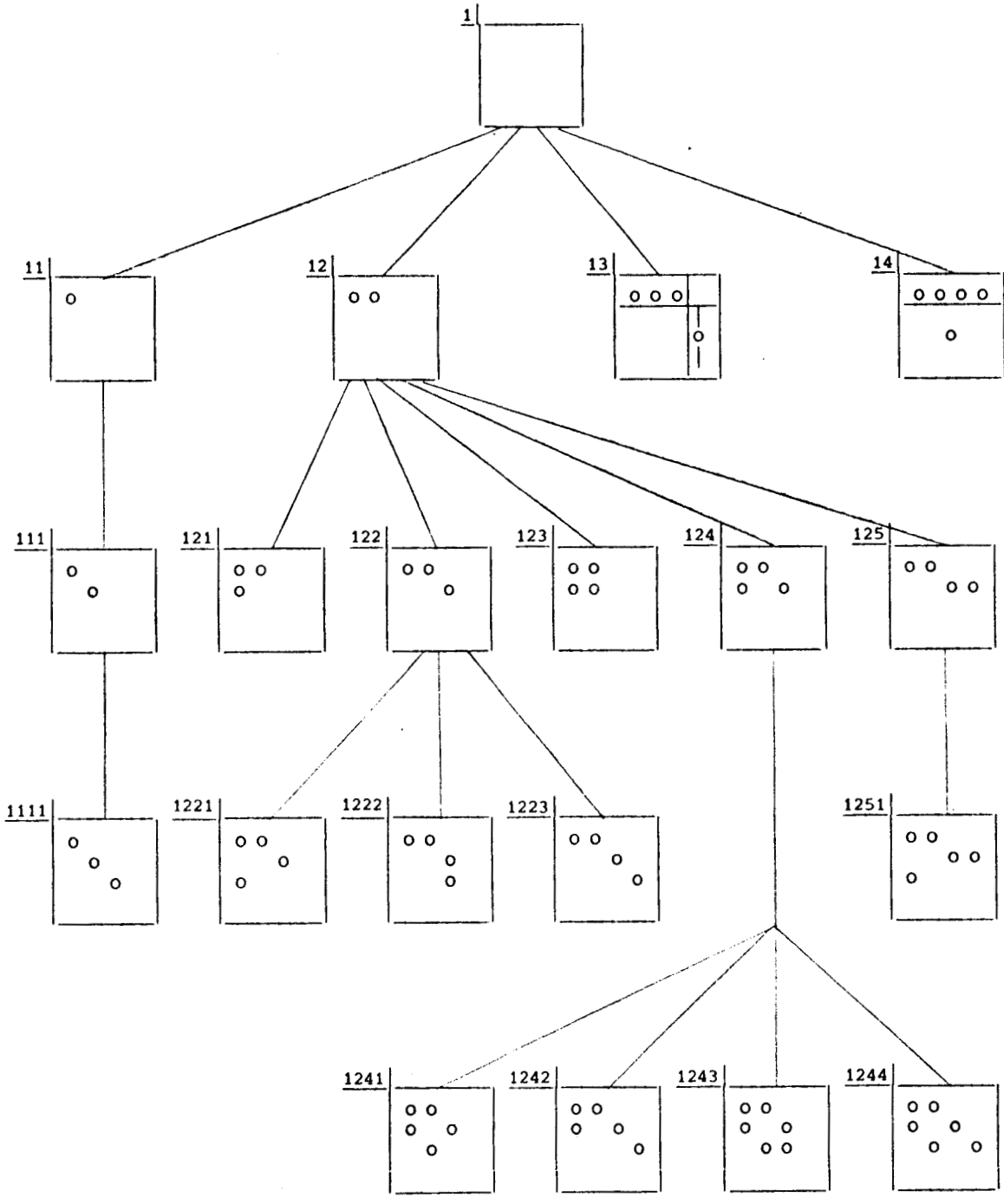
$$c : \quad + (n-4)^3\ (n-3)\,!$$

$$+ (n-4)\,(n-3)\,(n-3)\,!$$

matrices de permutation d'ordre n différentes.

Figure 47 :

Hiérarchie et numérotation des configurations de zéros dans les p-matrices, pour n=4.




BUS LILLE

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée d'ordre n ne soit supérieure ou égale à aucune matrice de permutation est, d'après le théorème de KONIG-HALL (B12.1.2, 5 chap. 7,3), qu'elle ne contienne pas de sous-matrice (r x s) nulle avec $r+s \geq n+1$. Ceci ne peut pas se produire dans une p-matrice, mais l'algorithme ci-dessus appliqué à une matrice carrée ayant une telle sous-matrice fait utiliser, à une profondeur donnée de la récursivité, la sous-matrice d'ordre max(r,s) ayant au moins une rangée nulle.

## 5.3 LES MATRICES DE PERMUTATION DANS LES B-DÉCOMPOSITIONS D'UNE p-MATRICE

### 5.3.1 RELATION AVEC LES GROUPES $G_i$

Les matrices de permutations qui sont non-nulles dans une case d'une rangée donnée sont différentes de celles qui sont non-nulles dans les autres cases de cette rangée.

Considérons alors la première ligne d'une p-matrice. Il faut dans toutes les B-décompositions de cette p-matrice $a_{1i}$ matrices de permutation de numéro léxicographique dans l'intervalle I(n,i) (§ 4.2.3 p 53).

Cette propriété a déjà été vue pour les matrices q.UN(nxn) (§ 4.3.1 p 63 ).

### 5.3.2 POIDS D'UNE MATRICE DE PERMUTATION M DANS UNE p-MATRICE A

Le POIDS d'une matrice de permutation M dans une matrice carrée A est le plus grand entier u tel que

$$A \geq u.M$$

u est la plus petite valeur qu'on trouve dans A pour les cases où M n'est pas nulle. La matrice M est inférieure ou égale à A si u est différent de zéro.

### 5.3.3 COEFFICIENT DE M DANS UNE B-DECOMPOSITION DE A

Soient $(u_j^i)_j$ les poids des matrices de permutation $M_j$ inférieures ou égales à une p-matrice qui sont non nulles dans la case (1,i). Chacune de ces matrices apparaitra dans une B-décomposition de la p-matrice avec un COEFFICIENT $v_j^i \leq u_j^i$ et on a $\sum_j v_j^i = A_{1i}$.

### 5.3.4 LE TABLEAU T DES POIDS

#### *5.3.4.1 Définition*

On n'exploite pas la propriété précédente pour les rangées de la p-matrice autres que la première ligne parce qu'il n'est pas aisé de connaître les matrices de permutation non-nulles dans une case quelconque.

Figure 48 : Nombre de matrices de permutation d'ordre 4 inférieures ou égales à certaines configurations de zéros dans les p-matrices.

| N° | Configuration | nombre | formule |
|---|---|---|---|
| 1 | | 24 | $n!$ |
| 11 | o | 18 | $(n-1)(n-1)!$ |
| 111 | o<br>o | 12 | $(n-2)^2(n-2)!+(n-1)!$ |
| 1111 | o<br>o<br>o<br>3 3 3 2 | 11 | $(n-3)\{(n-2)!+(n-3)^2(n-3)!\}+2(n-2)(n-2)!$ |
| 12 | o o | 12 | $(n-2)(n-1)!$ |
| 121 | o o<br>o | 8 | $(n-2)^2(n-2)!$ |
| 122 | o o<br>o | 10 | $(n-3)(n-2)(n-2)!+(n-1)!$ |
| 1221 | o o<br>o<br>o<br>3 2 1 1 | 7 | $(n-3)\{(n-3)^2(n-3)!+(n-2)!\}+(n-2)(n-2)!$ |
| 1222 | o o<br>o<br>o<br>2 2 2 2 | 8 | $(n-1)!+(n-3)^2(n-2)!$ |

Figure 48 (suite)

| N° | Configuration | nombre | formule |
|---|---|---|---|
| 1223 | o o<br>o<br>o<br>2 2 2 2 | 8 | $(n-4)\{(n-3)^2(n-3)!+(n-2)!\}+2(n-2)(n-2)!$ |
| 123 | o o<br>o o<br>o | 4 | $(n-2)(n-3)(n-2)!$ |
| 124 | o o<br>o o | 6 | $(n-3)^2(n-2)!+(n-2)(n-2)!$ |
| 1241 | o o<br>o o<br>o<br>2 1 1 1 | 5 | $(n-3)\{(n-4)(n-3)(n-3)!+(n-2)!\}+(n-3)^2(n-3)!+(n-2)!$ |
| 1242 | o o<br>o o<br>o<br>2 2 1 1 | 6 | $(n-4)\{(n-4)(n-3)(n-3)!+(n-2)!\}+2\{(n-3)^2(n-3)!+(n-2!\}$ |
| 1243 | o o<br>o o<br>o o<br>1 1 1 1 | 4 | $(n-3)\{(n-4)^2(n-3)!+(n-3)(n-3)!\}+(n-3)^2(n-3)!+(n-2)!$ |
| 1244 | o o<br>o o<br>o o<br>1 1 1 1 | 4 | $(n-4)\{(n-4)^2(n-3)!+(n-3)(n-3)!\}+(n-3)^2(n-3)!+(n-3)^2(n-3)!$<br>$+(n-2)!$ |
| 125 | o o<br>o o | 8 | $(n-4)(n-3)(n-2)!+2(n-2)(n-2)!$ |
| 1251 | o o<br>o o<br>o<br>2 2 1 1 | 6 | $(n-4)\{(n-4)(n-3)(n-3)!+(n-2)!\}+2\{(n-3)^2(n-3)!+(n-2)!\}$ |
| 13 | o o o<br>o | 6 | $(n-1)!$ |
| 14 | o o o o<br>o | 0 | |

Figure 49 : Les matrices de permutation d'ordre 4 non-nulles dans une case.

$$T = \bigcup_{i=1}^{n!} i \times M_i$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | (1) : 1 2 3 4 | (7) : 2 1 3 4 | (13) : 3 1 2 4 | (19) : 4 1 2 3 |
| | (2) : 1 2 4 3 | (8) : 2 1 4 3 | (14) : 3 1 4 2 | (20) : 4 1 3 2 |
| | (3) : 1 3 2 4 | (9) : 2 3 1 4 | (15) : 3 2 1 4 | (21) : 4 2 1 3 |
| | (4) : 1 3 4 2 | (10) : 2 3 4 1 | (16) : 3 2 4 1 | (22) : 4 2 3 1 |
| | (5) : 1 4 2 3 | (11) : 2 4 1 3 | (17) : 3 4 1 2 | (23) : 4 3 1 2 |
| | (6) : 1 4 3 2 | (12) : 2 4 3 1 | (18) : 3 4 2 1 | (24) : 4 3 2 1 |
| 2 | (7) : 2 1 3 4 | (1) : 1 2 3 4 | (3) : 1 3 2 4 | (5) : 1 4 2 3 |
| | (8) : 2 1 4 3 | (2) : 1 2 4 3 | (4) : 1 3 4 2 | (6) : 1 4 3 2 |
| | (13) : 3 1 2 4 | (15) : 3 2 1 4 | (9) : 2 3 1 4 | (11) : 2 4 1 3 |
| | (14) : 3 1 4 2 | (16) : 3 2 4 1 | (10) : 2 3 4 1 | (12) : 2 4 3 1 |
| | (19) : 4 1 2 3 | (21) : 4 2 1 3 | (23) : 4 3 1 2 | (17) : 3 4 1 2 |
| | (20) : 4 1 3 2 | (22) : 4 2 3 1 | (24) : 4 3 2 1 | (18) : 3 4 2 1 |
| 3 | (9) : 2 3 1 4 | (3) : 1 3 2 4 | (1) : 1 2 3 4 | (2) : 1 2 4 3 |
| | (11) : 2 4 1 3 | (5) : 1 4 2 3 | (6) : 1 4 3 2 | (4) : 1 3 4 2 |
| | (15) : 3 2 1 4 | (13) : 3 1 2 4 | (7) : 2 1 3 4 | (8) : 2 1 4 3 |
| | (17) : 3 4 1 2 | (18) : 3 4 2 1 | (12) : 2 4 3 1 | (10) : 2 3 4 1 |
| | (21) : 4 2 1 3 | (19) : 4 1 2 3 | (20) : 4 1 3 2 | (14) : 3 1 4 2 |
| | (23) : 4 3 1 2 | (24) : 4 3 2 1 | (22) : 4 2 3 1 | (16) : 3 2 4 1 |
| 4 | (10) : 2 3 4 1 | (4) : 1 3 4 2 | (2) : 1 2 4 3 | (1) : 1 2 3 4 |
| | (12) : 2 4 3 1 | (6) : 1 4 3 2 | (5) : 1 4 2 3 | (3) : 1 3 2 4 |
| | (16) : 3 2 4 1 | (14) : 3 1 4 2 | (8) : 2 1 4 3 | (7) : 2 1 3 4 |
| | (18) : 3 4 2 1 | (17) : 3 4 1 2 | (11) : 2 4 1 3 | (9) : 2 3 1 4 |
| | (22) : 4 2 3 1 | (20) : 4 1 3 2 | (19) : 4 1 2 3 | (13) : 3 1 2 4 |
| | (24) : 4 3 2 1 | (23) : 4 3 1 2 | (21) : 4 2 1 3 | (15) : 3 2 1 4 |

BUS LILLE

Toutefois, pour n = 4, on peut utiliser le TABLEAU T de la figure 49 (p 84) qui pour une case indique les matrices de permutation non-nulles dans cette case. T est la juxtaposition des matrices de permutation multipliées par leur numéro lexicographique.

Ainsi, pour la 30-matrice d'ordre 4 de la figure 50 (p 86 ), a été calculé le poids de chacune des matrices de permutation et ce poids a été écrit dans les cases où les matrices de permutation ne sont pas nulles. On trouve alors qu'il y a,par exemple,quatre matrices de permutations inférieures ou égales à la 30-matrice, non-nulles dans la case (3,4). Toute B-décomposition de la 30-matrice pourra alors contenir

ou une fois chacune de ces quatre matrices

ou quatre fois la matrice (10) ou la matrice (16)

ou une combinaison, de somme des coefficients égale à quatre, de ces quatre matrices. Une telle combinaison qui contiendrait (8) + (14) se compléterait avec 2.(10) ou 2.(16) ou (10) + (16)...
On peut faire le même raisonnement pour les autres cases. Par exemple, pour la case (4,3) il faut, dans une combinaison, deux fois l'une des matrices de permutation (8), (11), (19) ou (21) ou la somme de deux d'entre elles.

### 5.3.4.2 *Les rangées du Tableau T*

Pour chaque case (i,j), après la valeur de l'élément de la case, on a indiqué un majorant $h_M(i,j)$ et un minorant $h_m(i,j)$ au nombre de matrices de permutation, non-nulles dans cette case, qui se trouvent dans une B-décomposition de la 30-matrice. Par exemple, pour la case (3,4), il faut au plus les quatre matrices, chacune avec le coefficient 1, et au moins une des matrices (10) ou (16).

### 5.3.4.3 *Matrices de permutations différentes dans une B-décomposition*

En faisant alors la somme des majorants des cases d'une rangée r, on trouve un majorant $h_M(r)$ au nombre de matrices de permutation différentes dans une B-décomposition. De même la somme des minorants des cases d'une rangée est un minorant au nombre des matrices de permutation différentes dans une B-décomposition. Comme chaque B-décomposition contient un nombre de matrices de permutation différentes qui doit être compris entre le majorant et le minorant de chacune des rangées, le plus petit de ces majorants et le plus grand de ces minorants encadrent le nombre des matrices de permutation différentes dans une B-décomposition, ces valeurs extrêmes pouvant, pour certaines p-matrices, ne pas être atteintes.

### 5.3.4.4 *Algorithme d'utilisation du tableau T*

Pour résumer ce raisonnement en une formule nous pouvons écrire.

1°) Soit $h_m(i,j)$ le nombre minimum de matrices de permutation différentes nécessaires pour "COUVRIR" la case (i,j). C'est le plus petit $\ell$ tq $\sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k^{ij} \geq A_{ij}$ où $\alpha_k^{ij}$ est le poids de la k-ième, dans l'ordre des poids décroissants, matrice de permutation inférieure ou égale à la p-matrice et non-nulle dans la case (i,j).

Figure 50 : Les matrices de permutation dans une 30-matrice d'ordre 4

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 13 | 14 | 3 | = 30 |
| 2 | 11 | 6 | 5 | 8 | |
| 3 | 7 | 10 | 9 | 4 | |
| 4 | 12 | 1 | 2 | 15 | |
| | = 30 | | | | |

Poids des matrices de permutation non-nulles dans chaque case.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 / 0,0 | (7) : 9 (10) : 4<br>(8) : 2 (11) : 2<br>(9) : 5 (12) : 8<br>13 / 6,2 | (13) : 10 (16) : 4<br>(14) : 1 (17) : 1<br>(15) : 6 (18) : 8<br>14 / 6,2 | (19) : 2 (22) : 3<br>(20) : 1 (23) : 1<br>(21) : 2 (24) : 3<br>3 / 3,1 | 15,5 |
| 2 | (7) : 9 (14) : 1<br>(8) : 2 (19) : 2<br>(13) : 10 (20) : 1<br>11 / 6,2 | (16) : 4<br>(21) : 2<br>(15) : 6 (22) : 3<br>6 / 4,1 | (10) : 4<br>(23) : 1<br>(9) : 5 (24) : 3<br>5 / 4,1 | (12) : 8<br>(17) : 1<br>(11) : 2 (18) : 8<br>8 / 4,1 | 18,5 |
| 3 | (9) : 5 (17) : 1<br>(11) : 2 (21) : 2<br>(15) : 6 (23) : 1<br>7 / 6,2 | (18) : 8<br>(19) : 2<br>(13) : 10 (24) : 3<br>10 / 4,1 | (12) : 8<br>(20) : 1<br>(7) : 9 (22) : 3<br>9 / 4,1 | (10) : 4<br>(14) : 1<br>(8) : 2 (16) : 4<br>4 / 4,1 | 18,5 |
| 4 | (10) : 4 (18) : 8<br>(12) : 8 (22) : 3<br>(16) : 4 (24) : 3<br>12 / 6,2 | (17) : 1<br>(20) : 1<br>(14) : 1 (23) : 1<br>1 / 1,1 | (11) : 2<br>(19) : 2<br>(8) : 2 (21) : 2<br>2 / 2,1 | (9) : 5<br>(13) : 10<br>(7) : 9 (15) : 6<br>15 / 4,2 | 13,6 |
| | 18,6 | 15,5 | 16,5 | 15,5 | |

Nombre de matrices de permutation dans une B-décomposition :

entre 6 et 13.

BUS LILLE

2°) Soit $h_M(i,j)$ le nombre maximum de matrices de permutation différentes nécessaires pour couvrir la case (i,j). Si h(i,j) est le nombre de matrices de permutation inférieues ou égales à la p-matrice et non-nulles dans la case (i,j) on a

$$h_M(i,j) \leq \min (A_{ij}, h(i,j))$$

3°) Si ND est le nombre de matrices de permutation différentes dans une B-décomposition, on a

$$ND_m = \max_{\text{rangées}} \left( \sum_{\text{rangée}} h_m(.,.) \right) \leq ND \leq ND_M = \min_{\text{rangées}} \left( \sum_{\text{rangée}} h_M(.,.) \right)$$

4°) On a, bien entendu,

$$ND \leq \min (n!\ , p, N_M)$$

car si une B-décomposition d'une p-matrice peut contenir toutes les matrices de permutation, elle n'en contient jamais plus de p, différentes ou pas. Rappelons que $N_M$ est le nombre minimum de matrices de permutation différentes dans une B-décomposition de la p-matrice M.

Pour la 30-matrice en exemple, à l'aide du programme MLTDCP3 (§4.1.2.p47) on a trouvé 3092 B-décompositions, dont deux de six matrices de permutation différentes, à savoir

9.(7) + 4.(10) + 6.(15) + 8.(18) + 2.(19) + (23)

5.(9) + 8.(12) +10.(13) + 4.(16) + (20) + 2.(21),

et aucune B-décomposition ayant plus de treize matrices de permutation différentes.

#### 5.3.4.5 *Tableau T et groupes $G_i$*

Remarquons que toutes les permutations qui apparaissent dans une case (i,j) du tableau T appliquent l'objet i sur l'objet j.

De ce fait les permutations qui apparaissent dans une case (i,i) diagonale constituent le sous-groupe d'ordre (n-1)! des permutations qui laissent l'objet i invariant. Les cases non-diagonales d'une rangée contiennent alors les classes à gauche (quand il s'agit des lignes de T) et à droite (quand il s'agit des colonnes de T) du sous-groupe de la case diagonale de la rangée.

Ceci explique que dans une rangée du tableau T se trouvent toutes les permutations du groupe sans répétition. Il est à remarquer, d'autre part, que le tableau T donne des sous-ensembles de permutations qui sont à la fois classe à droite pour un sous-groupe et classe à gauche pour un autre sous-groupe.

## 5.4 CASE NULLE ET ENSEMBLE INTRANSITIF

Remarquons enfin que si une matrice carrée ne contient aucun zéro, toutes les matrices de permutations lui sont inférieures ou égales. S'il s'agit d'une p-matrice, chacune de ses B-décompositions correspondra alors à un ensemble transitif de permutations.

Figure 51 : Les B-décompositions d'une 6-matrice d'ordre 4.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

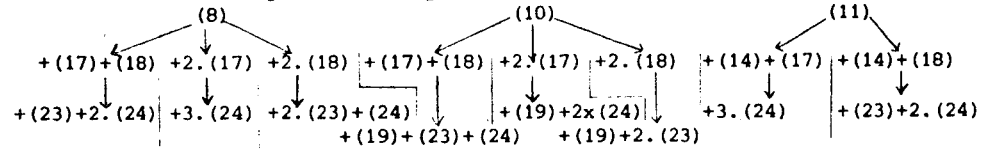
1°) Liste des matrices de permutation inférieures ou égales à la p-matrice

| i | $a_{1i}$ | matrices de permutation |
|---|---|---|
| 1 | 0 | |
| 2 | 1 | 1.(8), 1.(10), 1.(11) |
| 3 | 2 | 1.(14), 2.(17), 2.(18) |
| 4 | 3 | 1.(19), 2.(23), 3.(24) |

2°) Parties possibles de B-décompositions

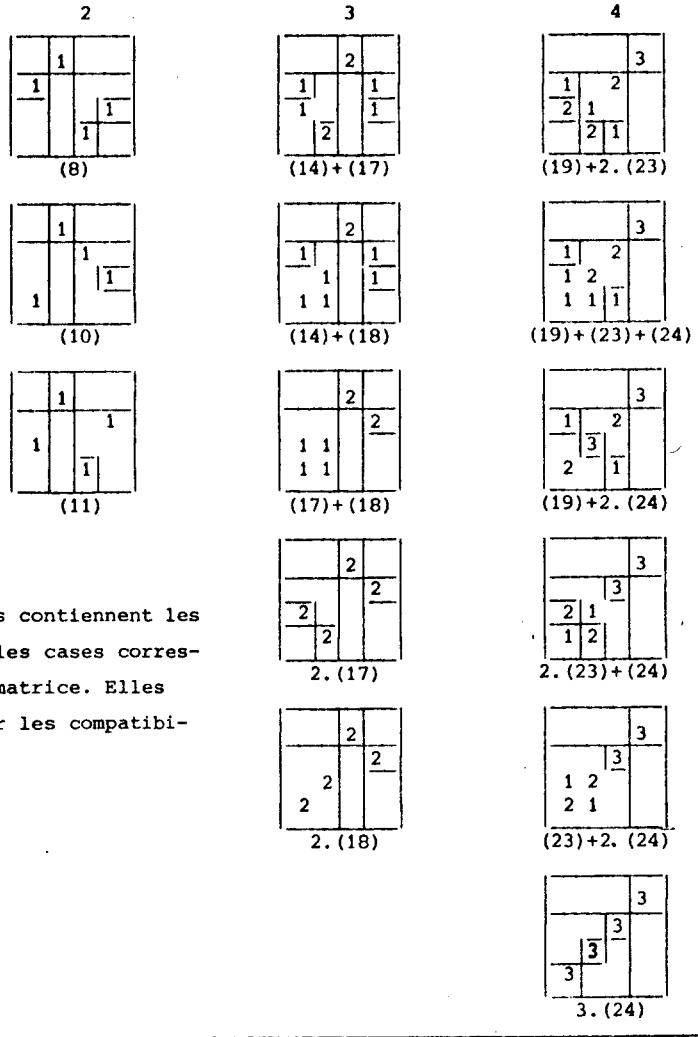
| i | $a_{1i}$ | parties de B-décompositions |
|---|---|---|
| 1 | 0 | |
| 2 | 1 | (8), (10), (11) |
| 3 | 2 | (14) + (17), (14) + (18)<br>2 . (17), (17) + (18)<br>2 · (18) |
| 4 | 3 | (19) + 2· (23), (19) + (23) + (24), (19) + 2.(24)<br>2.(23) + (24), (23) + 2.(24),<br>3.(24) |

3°) Construction des B-décompositions en prenant une partie de B-décomposition pour chaque i et en controlant leur compatibilité à partir de leur somme (voir 4°)




4°) Sommes des parties de B-décompositions

i : 1 2 3 4




Les cases encadrées contiennent les mêmes valeurs que les cases correspondantes de la 6-matrice. Elles servent à controler les compatibilités.

BUS LILLE

Si au contraire la matrice carrée contient au moins un zéro, les matrices de permutations qui lui sont inférieures ou égales correspondent à un ensemble intransitif de permutations et il en est de même pour les B-décompositions dans le cas où il s'agit d'une p-matrice. En effet, pour obtenir un ensemble intransitif de permutations, il suffit d'exclure du groupe $S_n$ de toutes les permutations de degré n, celles qui apparaissent dans une case du tableau T. Tout sous-ensemble de l'ensemble obtenu est aussi intransitif.

L'exploitation de la propriété du paragraphe 5.3.3 (p81) pour la première case de la première ligne d'une p-matrice ramène à la notion de début de B-décomposition déjà vue dans le cas des B-décompositions de q.UN(4x4) (§ 4.3.3 p 65 ). Toutefois, les équivalences entre ces débuts de B-décompositions (qui permettent d'accélérer les calculs en en court-circuitant une partie, les résultats correspondants étant obtenus par permutation des rangées) ne sont utilisables que si la p-matrice est invariable par les permutations correspondantes.

Par contre si les matrices de permutations inférieures ou égales à la p-matrice et non-nulles dans les cases (1,i) ne sont pas trop nombreuses, on peut construire LES PARTIES DE B-DECOMPOSITIONS associées à chacun de ces $a_{1i}$. Ces parties de B-décompositions ont pour sommes des $a_{1i}$-matrices, nulles sur la ligne 1 et la colonne i sauf en leur intersection qui est la case (1,i). Il reste alors à combiner ces $a_{1i}$-matrices pour obtenir une B-décomposition de la p-matrice comme le montre la figure 51 (p 88 ). La $a_{11}$-matrice est la somme des matrices de permutation d'un début de B-décomposition. Les $a_{1i}$-matrices étendent donc cette notion, et ne sont pas sans rapport avec les sous-matrices d'ordre (n-1) comme le montre la figure 52 (p 90 ).

## .5 RECHERCHE DE TOUTES LES B-DÉCOMPOSITIONS D'UNE p-MATRICE

Si la 4-matrice UN(4 x 4) n'admet que 24 B-décompositions, la 16-matrice 4.UN(4 x 4) en admet 38 550. De tels nombres invitent à la prudence quand on veut construire toutes les B-décompositions d'une p-matrice.

Nous avons déjà cité le programme MLTDCP3 (4.1.2 p 47) qui construit toutes les B-décompositions d'une matrice. Il procéde par une méthode d'exploration d'arborescence.

Dans le cas où n = 4 et quand on peut espérer un nombre restreint de B-décompositions, c'est à dire quand le nombre de matrices de permutations inférieures ou égales à la p-matrice est réduit,

Figure 52 : Construction de parties de B-décompositions d'une 6-matrice (fig 51)

à partir des sous-matrices

cas i = 4

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 0 | 3 | 2 |
| 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 3 | |
| 1 | 0 | 3 | | 4 |
| 2 | 3 | 0 | | 5 |
| 3 | 2 | 1 | | 6 |

1°) Matrices d'ordre n-1 inférieures ou égales et leur correspondante d'ordre n

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 |
| n-1 : | 1.(1) | 2.(5) | 3.(6) |
| n : | 1.(19) | 2.(23) | 3.(24) |

2°) Parties de B-décompositions : 3 matrices de permutation.

| n - 1 | n | somme | reste |
|---|---|---|---|
| (1) + 2.(5) | (19) + 2.(23) | 3<br>1 2<br>2 1<br>2 1 | 1<br>2<br>3 |
| (1) + (5) + (6) | (19) + (23) + (24) | 3<br>1 2<br>1 2<br>1 1 1 | 1<br>1 1<br>2 1 |
| (1) + 2.(6) | (19) + 2.(24) | 3<br>1 2<br>3<br>2 1 | 1<br>2<br>1 2 |

etc...

plusieurs méthodes manuelles [1] peuvent être utilisées.

Nous avons vu (fig 51 p 88 ) la méthode utilisant les parties de B-décompositions, qui n'est qu'un raccourci de l'exploration arborescente de MLTDCP3, mais avec un nombre de niveaux au plus égal à n et des choix limités à chaque noeud.

Une autre méthode est basée sur l'exploitation des relations entre les matrices de permutation. Cette méthode n'est susceptible de donner toutes les B-décompositions d'une p-matrice que si l'on est assuré de faire appel à toutes les relations qui existent entre les matrices de permutation inférieures ou égales à la p-matrice.

Nous avons vu en 3.3 (p 33) certaines de ces relations (fig 21 p 41 à 27 p 44). Résumons les dans les figures 53 (p 92 ) et 54 (p 94 ).

Partant d'une B-décomposition de UN(4 x 4), en utilisant les relations de la forme A (fig 53 p 92 ), on peut reconstruire toutes les autres B-décompositions de UN(4 x 4) car, justement, ces relations sont déduites de ces B-décompositions.

Pour déduire, à partir d'une B-décomposition d'une p-matrice, les autres B-décompositions de la même façon, il faut, éventuellement, faire intervenir d'autres relations, certaines matrices de permutation pouvant intervenir plusieurs fois.

Enfin, une p-matrice M ne contenant pas de zéro peut toujours la mettre sous la forme

$$M = M' + q.UN(4 \times 4)$$

où q est le plus petit élément de la matrice M et où M' contient un zéro au moins. Bien des B-décompositions de M sont alors la somme d'une B-décomposition de M' et d'une B-décomposition de q.UN(4 x 4). On les obtient en ajoutant à chaque B-décomposition de M' toutes les B-décompositions de q.UN(4 x 4), mais certaines B-décompositions peuvent se retrouver plusieurs fois, pouvant être obtenues par plusieurs combinaisons. Voir à titre d'exemple la figure 55 1° (p 96).

Une technique plus fine pour construire une matrice M' contenant non pas un mais plusieurs zéros, est de lui extraire individuellement les matrices d'une B-décomposition de UN(4 x 4). On obtient alors au moins quatres zéros, un au moins pour chaque matrice de la B-décomposition, si chaque matrice est extraite un nombre de fois égal à son poids. En effet les matrices de permutation d'une B-décomposition de UN(4 x 4) n'ayant pas de case non-nulle en commun, l'extraction de l'une d'elles n'affecte pas le poids des autres.

*(1) Remarque : Un calcul manuel est plus intéressant qu'un calcul sur ordinateur quand, compte-tenu des contraintes imposées par l'ordinateur (perforation des données, attente de la disponibilité de l'ordinateur, etc...), les temps de calculs et de contrôle sont équivalents.*

Figure 53 :

Classification des relations entre les matrices de permutation d'ordre 4

A) A partir des 24 B-décompositions de UN(4 x 4) :

Aa) à deux matrices de permutation par membre :

18 relations de la forme (u) + (v) = (x) + (y)

Exemple : (1) + (24) = (3) + (22)

(1) + (17) = (6) + (15)

(1) + (8) = (2) + (7)

3 relations contiennent une même matrice de permutation

Ab) à trois matrices de permutation par membre :

96 membres de la forme (x) + (y) + (z) = UN(4 x 4) -(t)

Exemple

$$\left.\begin{array}{r} (8) + (17) + (24) = \\ (8) + (18) + (23) = \\ (10) + (17) + (19) = \\ (11) + (14) + (24) = \end{array}\right\} \text{UN}(4 \times 4) - (1)$$

4 membres pour chaque matrice de permutation (t) d'où

18 relations contiennent une même matrice (fig 54 p 94)

B) A partir des 144 3-matrices de la forme (a.b, c.d) 3 matrices par membre , de la forme

(x) + (y) + (z) = (u) + (v) + (w)

Exemple (1) + (4) + (11) = (2) + (6) + (9) =

$$\begin{array}{c|c|c|cc|} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{a} & & \\ \hline a & 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline c & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

36 relations contiennent une même matrice de permutation.

BUS LILLE

Si une p-matrice contient beaucoup de zéros, le nombre des matrices de permutation qui lui sont inférieures ou égales est restreint, donc aussi le nombre de B-décompositions, lequel se cherche alors dans un domaine plus réduit. Le 2° de la figure 55 (p 96 ) illustre d'une façon spectaculaire l'avantage de passer par une matrice contenant beaucoup de zéros pour construire des B-décompositions d'une p-matrice.

## .6 LE NOMBRE DE B-DÉCOMPOSITIONS D'UNE p-MATRICE

### 5.6.1 MULTIDECOMPOSITION DES p-MATRICES D'ORDRE 3

Le nombre réduit des matrices de permutation d'ordre 3 et de B-décompositions de la matrice UN(3 x 3) permet la mise en évidence de résultats précis sur les p-matrices d'ordre 3.

**Toute p-matrice d'ordre 3 qui a un zéro n'a qu'une seule B-décomposition.**

Pour la construire il suffit de ramener un zéro au milieu de la matrice par une permutation des rangées. Ce zéro élimine alors les matrices de permutations (1) et (6) des B-décompositions. Les éléments aux quatre coins de la matrice sont les coefficients des quatre matrices de permutation qui restent.

**Le nombre de B-décompositions d'une p-matrice M d'ordre 3 est $\min_{ij}(M_{ij})+1$.**

En effet si $q = \min_{i,j}(M_{ij})$, la matrice M' = M-q.UN(3 x 3) a un zéro et n'a donc qu'une B-décomposition. Les B-décompositions de M sont alors de la forme

décomp. de M' + x.A + (q-x).B

où A et B sont les deux B-décompositions de UN(3 x 3). x pouvant prendre les valeurs de 0 à m, il y a q+1 B-décompositions.

On en déduit un procédé pour construire les B-décompositions d'une p-matrice d'ordre 3.(fig 56 p 98 ).

Cette méthode ne se généralise pas immédiatement à l'ordre n = 4 car la matrice UN(4 x 4) admet 24 B-décompositions.

### 5.6.2 LE NOMBRE DE B-DECOMPOSITIONS D'UNE p-MATRICE D'ORDRE n.

Il n'existe pas de méthodes pour connaître le nombre exact des B-décompositions d'une p-matrice, autrement qu'en les construisant toutes. On peut toutefois se faire une idée du nombre de B-décompositions d'une p-matrice d'ordre 4, en sachant comment on les construit et en comparant avec des p-matrices typiques comme q.UN(4 x 4) ou UN(4 x 4) + (1).

Figure 54 : Constructions des 18 relations du type B contenant (1)

1°) UN(4 x 4) = (1) + (8) + (18) + (24) = [1]

(1) + (8) + (18) + (23) = [2]

(3) + (8) + (17) + (22) = [9]

(6) + (8) + (15) + (24) = [21]

2°) UN(4 x 4) - (8) = (1) + (17) + (24) a

= (1) + (18) + (23) b

= (3) + (17) + (22) c

= (6) + (15) + (24) d

{a = b} => une relation à 2 mat. par membre

de même {a = c}, {a = d}

{b = c} => (1) + (18) + (23) = (3) + (17) + (22)

{b = d} => (1) + (18) + (23) = (6) + (15) + (24)

} 2 relations

{c = d} => relation ne contenant pas (1)

3°) De même

UN(4 x 4) - (17) = (1) + (10) + (19) = (2) + (7) + (24)

(1) + (10) + (19) = (3) + (8) + (22)

UN(4 x 4) - (24) = (1) + (11) + (14) = (2) + ( 7) + (17)

(1) + (11) + (14) = (6) + (8) + (15)

4°) Par un raisonnement équivalent on trouve

UN(4 x 4) - (18) = (1) + (18) + (23) = (2) + (9) + (20) = (4) + (7) + (21)

- (23) = (1) + (8) + (18) = (2) + (12) + (13) = (5) + (8) + (16)

- (10) = (1) + (17) + (19) = (5) + (15) + (20) = (6) + (13) + (21)

- (19) = (1) + (10) + (17) = (4) + (12) + (15) = (6) + (9) + (16)

- (11) = (1) + (14) + (24) = (3) + (16) + (20) = (4) + (13) + (22)

- (14) = (1) + (11) + (24) = (3) + (12) + (21) = (5) + (9) + (22)

305 LILLE

### 5.6.3 LES 31 B-DECOMPOSITIONS DE UN(4 x 4) + (x)

La somme de la matrice UN(4 x 4) et d'une quelconque matrice de permutation a 31 B-décompositions. Ce résultat a été vérifié avec le programme MLTDCP3 (§ 4.1.2 p 47 ). On peut construire ces B-décompositions en utilisant les méthodes décrites ci-dessus.

Le résultat est indépendant de la matrice de permutation x qui est ajoutée à la matrice UN(4 x 4). La matrice UN(4 x 4) étant équivalente à elle-même dans l'équivalence large, on peut alors considérer que la matrice de permutation ajoutée est la matrice (1). La matrice à B-décomposer est alors une matrice ayant des 2 sur la diagonale et des zéros ailleurs. Une série de 24 B-décompositions de cette matrice est obtenue en adjoignant la matrice (1) au 24 B-décompositions de UN(4 x 4). Ceci autorise l'utilisation de toutes les relations dont un membre contient la matrice (1), à savoir

3 relations du type Aa

18 relations du type Ab

36 relations du type B (§ 5.5 p 91 et fig 53 p 92 ).

Les relations Aa permettent de construire six B-décompositions supplémentaires, mais on peut construire les sept qui manquent en utilisant les relations du B.

Il est à remarquer que,des trente six relations du type B,seules douze sont exploitables, car dans la matrice à B-décomposer les 2 sont sur la diagonale, et le 2 et le 0 qui servent à la construction des relations B (§3.3 p 35 et fig 27 p 44 ) ne peuvent qu'être sur la diagonale. Les relations B exploitables sont donc numérotées (i.i, j.j). Or UN(4 x 4) + (1) est la somme d'une matrice du type (i.i, j.j) et de la matrice (j.j, i.i) à laquelle on a enlevé la matrice de la permutation qui est le produit de la transposition de i et j et de la transposition des deux autres objets. En fait,ce produit correspond à une matrice de permutation symétrique de diagonale nulle ; à savoir la matrice (8), (17) ou (24). La figure 57 (p 100 ) montre comment à partir de B-décompositions des deux matrices ci-dessus on obtient trois nouvelles B-décompositions de UN(4 x 4) + (1) qui ne contiennent pas (1). Les sept B-décompositions qu'on doit ajouter aux 24 précédentes sont trouvées plusieurs fois.

### 5.6.4 LES B-DECOMPOSITIONS DE UN(4 x 4) + (x) + (y)

Si à la somme UN(4 x 4) + (x) on ajoute encore une autre matrice de permutation (y) on augmente le nombre de B-décompositions d'une façon qui dépend des rapports qui existent entre (x) et (y). Les résultats sont résumés dans la figure 58 (p 102) sans justification, celle-ci se faisant de la même façon que pour construire les B-décompositions de UN(4 x 4) + (x), en faisant,au besoin,usage des équivalences entre matrices de permutation.

Figure55 : B-décomposition d'une 10-matrice ne contenant pas de zéro

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

1°) Création des zéros en enlevant UN(4 x 4)

q = 1; M = M' + UN(4 x 4) avec pour M' la 6-matrice

$$M' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

qui admet 8 décompositions (fig 51 p 88 ) parmi lesquelles

a : (8) + (17) + (18) + (23) + 2.(24)

b :(11) + (14) + (17) + 3.(24)

c :(11) + (14) + (18) + (23) + 2.(24)

M admet comme B-décomposition

(1) + (8) + (11) + (14) + (17) + (18) + (23) + 3.(24)

qui est a + [4] = b + [2] = c + [1]

(en ajoutant à une B-décomposition de M' une B-décomposition de UN(4 x 4) )

2°) Création des zéros en enlevant individuellement les matrices de la B-décomposition

[1]de UN(4 x 4) . [1] = (1) + (8) + (17) + (24)

poids 1 2 3 4

d'où

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 1.(1)+2.(8)+3.(17)+4.(24)$$

BUS LILLE

On aurait obtenu cette B-décomposition en ajoutant [1] à la B-décomposition d : (8) + 2.(17) + 3.(24) de M'

3°) Le programme MLTDCP3 (§ 4.1.2 p 47) a donné 269 B-décompositions contenant 4 à 10 matrices de permutation différentes de cette 10-matrice qui est un carré latin.

La matrice UN(4 x 4) + (x) + (y) a un nombre de B-décompositions égal à

- 32 si (x) = (y)

- 58 si (x) et (y) sont dans le même membre d'une relation à deux matrices par membre. Si (x) = (1) alors (y) = (8), (17) ou (24).

- 38 si (x) et (y) n'interviennent pas ensemble dans un membre d'une relation du type B. Si (x) = (1) alors (y) = (2), (3), (6), (7), (15) ou (22) et (x) et (y) ont au moins, en commun, 2 cases non-nulles.

- 50 si (y) apparait dans UN(4x4) - (x) sans apparaître dans une relation à deux matrices par membre. Si (x) = 1 alors (y) = (10), (11), (14), (18), (19) ou (23).

- 42 sinon. Si (x) = (1) alors (y) = (4), (5), (9), (12), (13), (16), (20) ou (21).

## 5.6.5 NOMBRE DE B-DECOMPOSITIONS DE CONFIGURATIONS SPECIALES.

Nous avons vu (§ 4.3.3 p 65 et fig 39 p 68 ) que, pour n = 4, le nombre $N_q$ de B-décompositions de q.UN(4 x 4) croissait rapidement avec q. Toutefois $N_q/(N_1)^q$ est une fonction décroissante pour les premières valeurs de q(fig 59 p 103).

Soit alors une p-matrice M, de plus petit élément q. Alors M = M' + q.UN(4 x 4) où M', ayant au moins un zéro, n'est pas supérieure à toutes les matrices de permutation. Appelons $N^{(q)}$ le nombre de B-décompositions de M' + q.UN(4x4). On peut supposer que $N^{(1)} \geq N^{(0)}.N_1$ puisque l'adjonction de UN(4 x 4) à M' apporte toutes les matrices de permutation. Une nouvelle adjonction de UN(4x4) ne fait plus croître le nombre de matrices de permutation et on a $N^{(2)} \leq N^{(1)}.N_1$.
D'une façon générale, on peut supposer pour q > 1

$$N^{(0)}.N_q \leq N^{(q)} \leq N^{(q-1)}.N_1$$

Cette conjecture n' a été vérifiée que pour quelques exemples (fig 59 p 103).

## 5.6.6 LES B-DECOMPOSITIONS DES 2-, 3- et 4- matrices d'ordre 4

Il aurait été intéressant d'établir, pour les valeurs de p inférieures ou égales à l'ordre n des p-matrices, la liste des p-matrices et de donner pour chacune d'elles la liste de leurs B-décompositions. Nous ne l'avons fait que pour l'ordre 4 et encore en se restreignant à certaines p-matrices.

Les p-matrices ont été choisies de façon que toute autre p-matrice se déduise de l'une d'elles par une transformation qui conserve le caractère p-matriciel. Ces transformations sont celles qui conservent globalement chaque rangée de la p-matrice. Il s'agit essentiellement des permutations des indices de lignes, des permutations des indices de colonnes, les unes et les autres étant indépendantes, et des transpositions. Les autres transformations, comme rotations et symétries, qu'on peut faire subir

Figure 56 : B-décompositions d'une 30-matrice d'ordre 3.

1)

$$M = \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 6 & 8 & 16 & 30 \\ 2 & 10 & 12 & 8 & 30 \\ 3 & 14 & 10 & 6 & 30 \\ \hline & 30 & 30 & 30 & \end{array} = \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 0 & 2 & 10 & 12 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 8 & 4 & 0 & 12 \\ \hline & 12 & 12 & 12 & \end{array} + 6.\ UN(3x3)$$

$$M' \qquad + m.\ UN(3x3)$$

2)

$$M'' = \text{permutation de } M' = \begin{array}{c|ccc|} & 2 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 10 \\ 3 & 4 & 8 & 0 \\ \hline \end{array} = 6.\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}}_{(2)} + 2.\underbrace{\begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}}_{(5)}$$

$$4.\underbrace{\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}}_{(4)} + 0.\underbrace{\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{(3)}$$

d'où $M' = 2.(4) + 4.(5) + 6.(6)$

3)

| | A | | | B | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | (1) | (4) | (5) | (2) | (3) | (6) | x |
| dcp. de M' | | 2 | 4 | | | 6 | |
| dcp. de M | 6 | 8 | 10 | | | 6 | 6 |
| | 5 | 7 | 9 | 1 | 1 | 7 | 5 |
| | 4 | 6 | 8 | 2 | 2 | 8 | 4 |
| | 3 | 5 | 7 | 3 | 3 | 9 | 3 |
| | 2 | 4 | 6 | 4 | 4 | 10 | 2 |
| | 1 | 3 | 5 | 5 | 5 | 11 | 1 |
| | | 2 | 4 | 6 | 6 | 12 | 0 |

BUS LILLE

à la p-matrice , se construisent à partir des précédentes. On les appellera les p-TRANSFORMATIONS.

Ces p-matrices ont été obtenues de la façon suivante. D'abord on construit les partitions de p. Ce sont les valeurs différentes de zéro qu'on peut trouver dans une rangée de la p-matrice. Ensuite on construit ces p-matrices, colonne par colonne, en utilisant aussi souvent que possible le caractère p-matriciel. Quand pour une case plusieurs valeurs sont possibles on les essaie toutes de la plus forte à la plus faible (ou inversement pour les 4-matrices). La figure 60 (p 104) montre le fonctionnement de la méthode pour la construction des 2-matrices d'ordre 4.

Les figures 61 (p 105), 62 (p 106) et 63 (p 107) donnent les types de 2-, 3- et 4- matrices d'ordre 4 et indiquent d'abord toutes leurs B-décompositions et ensuite les matrices de permutation qu'elles contiennent. On remarquera qu'une p-transformation appliquée à une p-matrice donne une autre p-matrice qui admet pour B-décompositions celles qu'on obtient en p-transformant de la même façon les matrices de permutation des B-décompositions de la première p-matrice.

Les résultats rassemblés dans ces figures montrent que :

1°) Les 2-matrices d'ordre 4 n'ont qu'une B-décomposition sauf si elles sont la somme des matrices de permutation d'un membre d'une relation à deux matrices de permutation par membre.

BUS LILLE

2°) Les 3-matrices d'ordre 4 n'ont qu'une B-décomposition sauf dans quatre cas.

a) elles contiennent la sous-matrice UN(3 x 3). Les deux B-décompositions sont obtenues à partir de celles de UN(3 x 3) par le procédé du paragraphe 3.3 (p 35) et de la figure 25 (p 46).

b) elles contiennent des matrices de permutations d'un membre d'une relation à deux matrices par membre. L'une des B-décompositions est obtenue à partir de l'autre, en utilisant l'autre membre de cette relation.

c) elle ne contient qu'un seul 2, et elles correspondent aux relations à trois matrices par membre vues au § 3.3. (p 35) et à la figure 26 (p 46)

d) elle ne contient ni 2, ni 3. Dans ce cas,c'est la matrice UN(4 x 4) à laquelle on a enlevé une matrice de permutation. Elle admet alors quatre B-décompositions qui sont déduites des quatre B-décompositions de UN ( 4 x 4 ) qui contenaient la matrice de permutation enlevée. L'inexistence d'autres cas de B-décompositions multiples permet d'affirmer que, à l'ordre 4, les seules relations à trois matrices de permutatio par membre sont celles qui ont été étudiées à la fin du paragraphe 3.3 (p 35).

3°) Les 4 matrices d'ordre 4 ont trente six types possibles, différents de la matrice UN(4 x 4), parmi lesquels on retrouve les doubles des cinq types des 2-matrices d'ordre 4. On trouve jusqu'à sept B-décompositions, mais il faut, à l'exception du type numéroté 7, au moins huit valeurs égales (des 2 ou des 1) pour qu'il y ait plus de trois B-décompositions. Ceci ne se produit jamais quand il y a un 4 dans la 4-matrice, et,à l'exception du type numéroté 30, jamais,non plus,quand il y a un 3. Enfin, la

Figure 57 : Construction de B-décompositions de UN(4 x 4) + (1)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{c|c|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c|c|cc} 0 & . & 1 & 1 \\ \hline . & 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & . \\ 1 & 0 & . & 1 \end{array}\right|$$

$$UN(4x4)+(1) = \left\{\begin{array}{l} (1.1\ ,2.2) \\ = (3)+(6)+(8) \\ = (4)+(5)+(7) \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} (2.2,1.1) - (8) \\ = (15) + (22) \\ = (7)+(16)+(21)-(8) \end{array}\right\}$$

$$= (3) + (6) + (8) + (15) + (22)$$

$$= (3) + (6) \qquad + (7) + (16) + (21)$$

$$= (4) + (5) + (7) + (15) + (22)$$

De même on trouve

$$UN(4x4)+(1) = (1.1,3.3) + (3.3,1.1) - (17)$$

$$= (2) + (3) + (7) + (17) + (22)$$

$$= (4) + (5) + (7) + (15) + (22) \quad \text{(déjà vu)}$$

$$= (2) + (3) + (12) + (15) + (20)$$

$$= (1.1,4.4) + (4.4,1.1) - (24)$$

$$= (2) + (6) + (7) + (15) + (24)$$

$$= (4) + (5) + (7) + (15) + (22) \quad \text{(déjà vu)}$$

$$= (2) + (6) + (9) + (13) + (22)$$

$$= (2.2,1.1) + (1.1,2.2) - (8)$$

$$= (2.2,3.3) + (1.1,3.3) - (24)$$

= etc... (La suite n'apportant rien de nouveau).

BIBL LILLE

multiplicité de B-décompositions dépend de l'intervention de relations, entre les matrices de permutation, à deux ou trois matrices par membre, et aucune relation nouvelle, à quatre matrices par membre, n'apparait entre les matrices de permutation.

Figure 58 : Nombres de B-décompositions de UN(4 x 4) + (1) + (y)

| | | nombre de B-décompositions | Observations |
|---|---|---|---|
| UN(4 x 4) | | 24 | |
| | + (1) | 31 | |
| | + (1) | 32 | (x) = (y) |
| | (2) | 38 | (1) + (2) = (1,2,3,4) + (1,2,4,3) |
| | (3) | 38 | |
| | (4) | 42 | (sinon) |
| | (5) | 42 | |
| | (6) | 38 | |
| | (7) | 38 | |
| | (8) | 58 | (1) + (8) = (2) + (7) |
| | (9) | 42 | |
| | (10) | 50 | UN(4x4) - (1) = (10) + (17) + (19) |
| | (11) | 50 | |
| | (12) | 42 | |
| | (13) | 42 | |
| | (14) | 50 | |
| | (15) | 38 | |
| | (16) | 42 | |
| | (17) | 58 | (1) + (17) = (6)+ (15) |
| | (18) | 50 | |
| | (19) | 50 | |
| | (20) | 42 | |
| | (21) | 42 | |
| | (22) | 38 | |
| | (23) | 50 | |
| | (24) | 58 | (1) + (24) = (3) + (22) |

BUS LILLE

Figure 59 : Nombres de B-décompositions

1°) Matrices q.UN(4 x 4)

| $q$ | $N_q$ | $(N_1)^q$ | $N_q/(N_1)^q$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 24 | 24 | 1 |
| 2 | 411 | 576 | 0,713 |
| 3 | 4 696 | 13 824 | 0,339 |
| 4 | 38 550 | 331 776 | 0,116 |
| 5 | 243 000 | 7 962 624 | 0,0305 |
| 6 | 1 242 882 | 191 102 976 | 0,0065 |

2°) Bornes au nombres de B-décompositions de M' + q.UN(4x4)

| | M' | $N^{(0)}$ | $q$ | $N^{(0)}.N_q$ | $\leq N^{(q)} \leq$ | $N^{(q-1)}.N_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a) | 0 | 0 | 1 | 0 | 24 | |
| | | | 2 | | 411 | 576 |
| | | | 3 | | 4696 | 10864 |
| | | | 4 | | | |
| | | | 5 | | | |
| b) | 0 1 2 3<br>1 0 3 2<br>2 3 0 1<br>3 2 1 0 = 6 | 8 | 1 | 192 | 269 | |
| | | | 2 | 3288 | 4265 | 6456 |
| | | | (Pour q = 1, il s'agit d'un carré latin) | | | |
| c) | 0 13 14 3<br>11 6 5 8<br>7 10 9 4<br>12 1 2 15 = 30 | 3092 | 1 | 74208 | ? | |
| | | | 2 | | ? | ? |
| | | | (Pour q = 1, il s'agit d'un carré magique) | | | |
| d) | 3 6 8 1<br>4 5 2 7<br>1 0 7 10<br>10 7 1 0 | 25 | 1 | 600 | 1185 | |
| | | | 2 | | ? | |

? = nombre non calculé

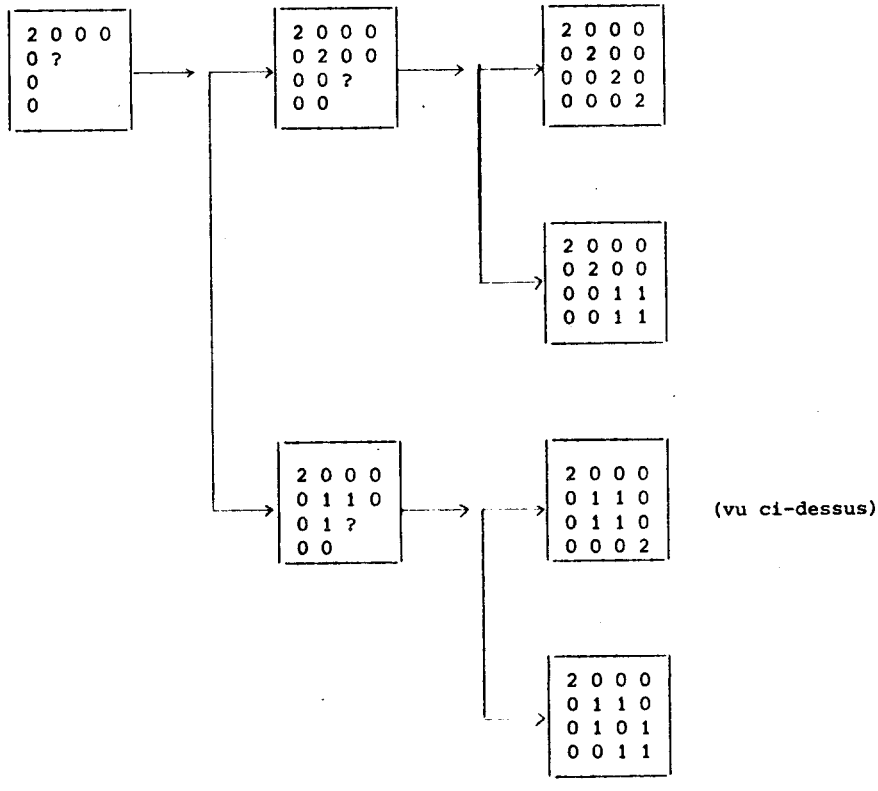
Figure 60 : Construction des types de 2-matrices d'ordre 4

1°) Rangées utilisables (à une permutation près des éléments)

2 0 0 0 et 1 1 0 0

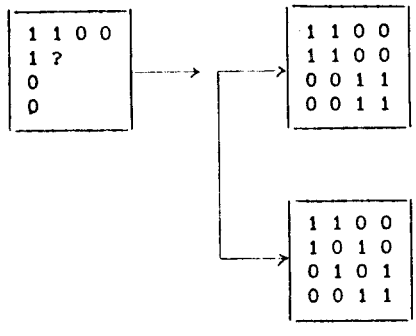
2°) 2-matrices contenant au moins un 2 :

(Le ? dans une case indique un choix à faire.




3°) 2-matrices ne contenant aucun 2

Seule la deuxième rangée est utilisable




BUS LILLE

Figure 61 : B-Décompositions des types des 2-matrices d'ordre 4

1°) Contenant au moins un 2.

| | B-décomposition | Matrices de permutation contenues |
|---|---|---|
| $\begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$ | 2.(1) | 2.(1); ; ; ; |
| $\begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}$ | (1) + (2) | (1), (2); ; ; ; |
| $\begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & 1 & . & 1 \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}$ | (2) + (3) | (2), (3); ; ; ; |

2°) Ne contenant aucun 2

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}$ | (1) + (8)<br>(2) + (7) | (1), (2);<br>(7), (8); ; ; |
| $\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & . & 1 & \\ & 1 & . & 1 \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}$ | (3) + (8) | (3);<br>(8); ; ; |

Figure 62 : B-décompositions des types des 3-matrices d'ordre 4

| 1°) Contenant au moins un 3 | B-décompositions | matrices de permutation contenues |
|---|---|---|
| 3<br>3<br>3<br>3 | 3.(1) | (1);<br>;<br>;<br>; |
| 3<br>3<br>2 1<br>1 2 | 2.(1) + (2) | 2.(1), (2);<br>;<br>;<br>; |
| 3<br>2 1<br>1 1 1<br>1 2 | (1) + (2) + (3) | (1), (2), (3);<br>;<br>;<br>; |
| 3<br>2 1<br>1 . 2<br>2 1 | 2.(2) + (3) | (2), (3);<br>;<br>;<br>; |
| 3<br>1 1 1<br>1 1 1<br>1 1 1 | (1) + (4) + (5)<br>(2) + (3) + (6) | (1), (2), (3), (4), (5), (6);<br>;<br>;<br>;<br>; |
| **2°) Ne contenant aucun 3** | | |
| 2 1<br>1 2<br>2 1<br>1 2 | 2.(1) + (8)<br>(1) + (2) + (7) | 2.(1), (2);<br>(7), (8)<br>;<br>; |
| 2 1<br>1 1 1<br>1 1 1<br>1 2 | (1) + (3) + (8)<br>(2) + (3) + (7) | (1), (2), (3);<br>(7), (8);<br>;<br>; |
| 2 1<br>1 1 1<br>1 . 2<br>2 1 | (2) + (3) + (8) | (2), (3);<br>(8);<br>;<br>; |
| 2 1<br>1 . 2<br>2 . 1<br>1 2 | 2.(3) + (8) | 2.(3);<br>(8);<br>;<br>; |
| 2 1<br>1 . 1 1<br>2 1 .<br>1 2 | (3) + (5) + (7) | (3), (5);<br>(7);<br>;<br>; |
| 2 1<br>1 . 1 1<br>1 2<br>2 . 2 | (3) + (6) + (7) | (3), (6);<br>(7);<br>;<br>; |
| 2 1<br>1 . 1 1<br>1 1 1<br>1 1 1 | (3) + (6) + (8)<br>(4) + (5) + (7) | (3), (4), (5), (6);<br>(7), (8);<br>;<br>; |
| **3°) Ne contenant ni 3, ni 2** | | |
| 1 1 1 .<br>1 1 . 1<br>1 . 1 1<br>. 1 1 1 | (1) + (8) + (17)<br>(1) + (11) + (14)<br>(2) + (7) + (17)<br>(6) + (8) + (15) | (1), (2), (6);<br>(7), (8), (11);<br>(14), (15), (17);<br>; |

BNS LILLE

Figure 63 : B-décompositions des types des 4-matrices d'ordre 4

A) Ne contenant pas de 3

1°) Contenant au moins un 4

| | B-décompositions | matrices de permutation contenues |
|---|---|---|
| 4<br>4<br>4<br>4<br>1 | 4.(1) | 4.(1);<br>;<br>;<br>; |
| 4<br>4<br>2 2<br>2 2<br>2 | 2.(1) + 2.(2) | 2.(1), 2(2);<br>;<br>;<br>; |
| 4<br>. 2 2<br>2 . 2<br>2 2 .<br>3 | 2.(4) + 2.(5) | 2.(4), 2.(5);<br>;<br>;<br>; |
| 4<br>2 2<br>2 1 1<br>2 1 1<br>4 | (3) + (4) + (5) + (6) | (3), (4), (5), (6);<br>;<br>;<br>; |
| 4<br>1 1 2<br>1 2 1<br>2 1 1<br>5 | (1) + (4) + (5) + (6)<br>(2) + (3) + (2.(6) | (1), (2), (3), (4), (5), (6);<br>;<br>;<br>; |

2°) Ne contenant aucun 4

a) 1ère colonne de la forme (2, 2, 0, 0)

| | | |
|---|---|---|
| 2 2<br>2 2<br>2 2<br>2 2<br>6 | 2.(17) + 2.(24)<br>2.(18) + 2.(23)<br>(17) + (18) + (23) + (24) | ;<br>;<br>(17), (18);<br>(23), (24); |
| 2 2<br>2 2<br>2 2<br>2 2<br>7 | 2.(15) + 2.(24) | ;<br>;<br>2.(15), 2.(24);<br>; |
| 2 2<br>2 1 1<br>2 1 1<br>2 2<br>8 | (9) + (12) + (15) + (16)<br>(10) + (12) + 2.(15) | ;<br>(9), (10), (12);<br>2.(15), (16);<br>; |
| 2 1 1<br>2 1 1<br>2 2<br>2 2<br>9 | (9) + (12) + (15) + (22) | ;<br>(9), (12);<br>(15);<br>(22); |
| 2 1 1<br>2 1 1<br>2 1 1<br>2 1 1<br>10 | (15) + (21) + (10) + (12)<br>(15) + (22) + (10) + (11)<br>(16) + (21) + (9) + (12)<br>(16) + (22) + (9) + (11) | ;<br>(9), (10), (11), (12);<br>(15), (16);<br>(21), (22); |
| 2 2<br>2 1 1<br>2 1 1<br>2 1 1<br>11 | (15) + (17) + (22) + (24)<br>(15) + (18) + (22) + (23) | ;<br>;<br>(15), (17), (18);<br>(22), (23), (24); |
| 2 2<br>2 1 1<br>1 1 2<br>1 2 1<br>12 | (4) + (5) + (7) + (8)<br>(3) + (6) + 2.(8) | (3), (4), (5), (6);<br>(7), 2.(8);<br>;<br>; |

Figure 63 (suite 1)

| | B-décompositions | Matrices de permutation contenues |
|---|---|---|
| 2 1 1<br>1 2 1<br>2 1 1<br>2 1 1<br>13 | (9) + (10) + (18) + (21)<br>(9) + (11) + (16) + (24)<br>(10) + (11) + (15) + (24) | ;<br>(9), (10), (11);<br>(15), (16), (18);<br>(21), (24); |

b) 1ère colonne de la forme (2,1,1,0)

| | | |
|---|---|---|
| 1 1 2<br>1 2 1<br>1 2 1<br>2 1 1<br>14 | (8) + (17) + 2.(24)<br>(8) + (18) + (23) + (24)<br>(10) + (17) + (19) + (24)<br>(10) + (18) + (19) + (23)<br>(11) + (14) + 2.(24) | ;<br>(18), (10), (11);<br>(14), (17), (18);<br>(19), (23), 2.(24); |
| . 1 2 1<br>1 . 1 2<br>1 2 . 1<br>2 1 1 .<br>15 | (8) + 2.(18) + (23)<br>(8) + (17) + (18) + (24)<br>(10) + (17) + (18) + (19)<br>(11) + (14) + (18) + (24) | (8), (10), (11);<br>(14), (17), 2.(18);<br>(19), (23), (24); |

c) 1ère colonne de la forme (1,1,1,1)

| | | |
|---|---|---|
| 1 1 1 1<br>1 1 1 1<br>1 1 2 .<br>1 1 . 2<br>16 | (1) + (7) + (17) + (24)<br>(1) + (7) + (18) + (23)<br>(1) + (12) + (13) + (23)<br>(3) + (7) + (17) + (22)<br>(3) + (12) + (15) + (20)<br>(6) + (7) + (15) + (24)<br>(6) + (9) + (13) + (22) | (1), (3), (6);<br>(7), (9), (12);<br>(13), (15), (17), (18);<br>(20), (22), (23), (24); |
| 1 1 1 1<br>1 . 2 1<br>1 1 . 2<br>1 2 1 .<br>17 | (4) + (8) + (17) + (24)<br>(4) + (8) + (18) + (23)<br>(4) + (10) + (17) + (19)<br>(4) + (11) + (14) + (24)<br>(5) + (10) + (14) + (23) | (4), (5);<br>(8), (10), (11);<br>(14), (17), (18);<br>(19), (23), (24); |

d) ne contenant pas non plus de 2.

| | | |
|---|---|---|
| 1 1 1 1<br>1 1 1 1<br>1 1 1 1<br>1 1 1 1<br>UN (4x4) | 24 B-décompositions | Toutes les matrices de permutation |

B) Contenant des 3

1°) Case (2,2) = 0

| | | |
|---|---|---|
| 3 1 . .<br>1 . . 3<br>. . 3 1<br>. 3 1 .<br>18 | 3.(6) + (8) | 3.(6);<br>(8);<br>;<br>; |
| 3 1<br>1 3<br>4<br>3 1<br>19 | 3.(6) + (7) | 3.(6);<br>(7);<br>;<br>; |
| 3 1 . .<br>1 . 1 2<br>. . 3 1<br>. 3 . 1<br>20 | (4) + 2.(6) + (7) | (4), 2.(6);<br>(7);<br>;<br>; |
| 3 1 . .<br>1 . 1 2<br>. 1 1 2<br>. 2 2 .<br>21 | (4) + (5) + (6) + (8) | (4), (5), (6);<br>(8);<br>;<br>; |
| 3 1 . .<br>1 . 1 2<br>. 1 2 1<br>. 2 1 1<br>22 | (4) + (5) + (6) + (7)<br>(3) + 2.(6) + (8) | (3), (4), (5), 2.(6);<br>(7), (8);<br>;<br>; |

Figure 63 (suite 2)

| | B-décompositions | Matrices de permutation contenues |
|---|---|---|
| 3 1 . .<br>1 . 1 2<br>. 1 3 .<br>. 2 . 2<br>23 | (3) + 2.(6) + (7) | (3), 2.(6);<br>(7);<br>;<br>; |
| 2°) Case (2,2) = 1 | | |
| 3 1 . .<br>1 1 . 2<br>. . 2 2<br>. 2 2 .<br>24 | (3) + 2.(6) + (8) | (3), 2.(6);<br>(8);<br>;<br>; |
| 3 1 . .<br>1 1 . 2<br>. . 3 1<br>. 2 1 1<br>25 | (1) + 2.(6) + (8)<br>(2) + 2.(6) + (7) | (1), (2), 2.(6);<br>(7), (8);<br>;<br>; |
| 3 1 . .<br>1 1 . 2<br>. . 4 .<br>. 2 . 2<br>26 | (1) + 2.(6) + (7) | (1), 2.(6);<br>(7);<br>;<br>; |
| 3 1 . .<br>1 1 1 1<br>. . 1 3<br>. 2 2 .<br>27 | (2) + (4) + (6) + (8) | (2), (4), (6);<br>(8); |
| 3 1 . .<br>1 1 1 1<br>. . 2 2<br>. 2 1 1<br>28 | (1) + (4) + (6) + (8)<br>(2) + (4) + (6) + (7) | (1), (2), (4), (6);<br>(7), (8); |
| 3 1 . .<br>1 1 1 1<br>. 1 . 3<br>. 1 3 .<br>29 | (2) + (4) + (5) + (8) | (2), (4), (5);<br>(8);<br>;<br>; |
| 3 1 . .<br>1 1 1 1<br>. 1 1 2<br>. 1 2 1<br>30 = | (1) + (4) + (5) + (8)<br>(2) + (3) + (6) + (8)<br>(2) + (4) + (5) + (7) | (1), (2), (3), (4), (5), (6);<br>(7), (8);<br>;<br>; |
| 3°) Case (2,2) = 2 | | |
| 3 1 . .<br>1 2 . 1<br>. . 2 2<br>. 1 2 1<br>31 = | (1) + (2) + (6) + (8)<br>2.(2) + (6) + (8) | (1), 2.(2), (6);<br>(8);<br>;<br>; |
| 3 1 . .<br>1 2 . 1<br>. . 3 1<br>. 1 1 2<br>32 = | (1) + (2) + (6) + (7)<br>2.(1) + (6) + (8) | 2.(1), (6);<br>(7), (8);<br>;<br>; |
| 3 1<br>1 2 1<br>4<br>1 3<br>33 = | 2.(1) + (6) + (7) | 2.(1), (6);<br>(7);<br>;<br>; |

BUS LILLE

Figure 63 (suite 3)

| 3°) Case (2,2) = 3 | | B-décompositions | Matrices de permutation contenues |
|---|---|---|---|
| $\begin{array}{\|cccc\|}\hline 3 & 1 & . & . \\ 1 & 3 & . & . \\ . & . & . & 4 \\ . & . & 4 & . \\ \hline \end{array}$ 34 | = | 3.(2) + (8) | 3.(2);<br>(8);<br>;<br>; |
| $\begin{array}{\|cccc\|}\hline 3 & 1 & . & . \\ 1 & 3 & . & . \\ . & . & 1 & 3 \\ . & . & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$ 35 | = | (1) + 2.(2) + (8)<br>3.(2) + (7) | (1), 2.(2);<br>(7), (8);<br>;<br>; |
| $\begin{array}{\|cccc\|}\hline 3 & 1 & . & . \\ 1 & 3 & . & . \\ . & . & 2 & 2 \\ . & . & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$ 36 | = | (1) + 2.(2) + (7)<br>2.(1) + (2) + (8) | 2.(1), 2.(2);<br>(7), (8);<br>;<br>; |

BNS LILLE

# III. LES VOLTRICES

# 6. LES p-VOLTRICES

## 6.1 CAS D'APPLICATIONS DES p-VOLTRICES

La B-décomposition des p-matrices trouve son origine dans les problèmes d'emploi du temps (§2.1.1 p 7). Plus précisément, les professeurs indiçant les lignes, les élèves indiçant les colonnes, une matrice de permutation de la B-décomposition représente pour une heure donnée la rencontre des professeurs et des élèves.

On peut bien sûr imaginer d'autres problèmes d'affectation du même type, par exemple : entre des ouvriers et des postes de travail dans un atelier où le personnel change régulièrement d'activité ; ou encore les démonstrateurs dans les boxes d'une exposition, en supposant qu'il change aussi régulièrement de place.

Il existe aussi des problèmes à plus de deux paramètres en dehors de celui qui rythme le temps. Ils donnent naissance en général à des problèmes où la B-décomposition nous amène à des configurations où il n'y a qu'une valeur non-nulle par plan, comme,par exemple,quand on introduit dans le problème d'emploi du temps l'affectation des salles. C'est aussi le cas du problème de l'affectation des chauffeurs sur des véhicules susceptibles de réaliser des itinéraires différents. Le problème est plus compliqué quand le nombre de paramètres augmente comme,par exemple,quand il s'agit d'un pilote, d'un navigateur, d'un avion et d'un itinéraire ; ou bien d'un conducteur, d'une locomotive, d'une rame de wagons et d'un itinéraire ou encore d'un officier, d'un sous-officier, d'une équipe d'hommes du rang et d'un service.

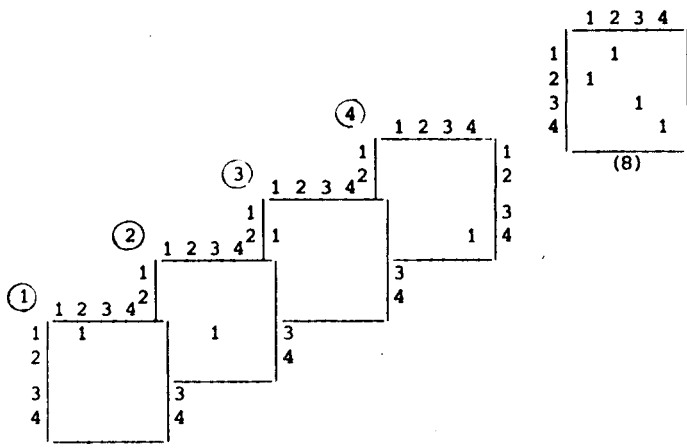
En général on traite le problème en regroupant deux paramètres (par exemple classe et salle, pilote et navigateur, officier et service) puis en introduisant successivement les autres paramètres.

Aussi il est naturel, quand on veut obtenir une configuration à un élément par plan,de répartir dans les plans d'un tableau à de dimension 3 les éléments d'une matrice de permutation en mettant un élément par plan, cet élément occupant la même case que dans la matrice de permutation. On peut de cette façon,à partir d'une matrice de permutation d'ordre n,obtenir n! telles configurations (fig 64, p 114).

Les p-voltrices correspondent à des configurations plus denses, puisque qu'on y envisage un élément par rangée . Leurs plans étant constitués par des p-matrices, elles permettent de résoudre les problèmes à plusieurs paramètres, mais d'une façon théorique, car ce sont des configurations trop particulières : forme cubique et sommes sur les rangées constamment égales à p. Elles n'en présentent pas moins un intérêt intrinséque, plein d'énigmes pour le mathématicien, dont la principale est qu'elles ne permettent pas la généralisation immédiate du théorème de VON NEUMANN (§ 2.2.1 p 9 ) et que, pour décomposer

Figure 64 :
Construction d'une configuration à 1 élément non-nul

par plan depuis une matrice de permutation, à l'ordre 4



une p-voltrice, il faut parfois faire usage d'autres p-voltrices que les 1-voltrices.

Le but de cette étude est de préciser quelles sont ces autres p-voltrices. S'y trouvera également une généralisation des carrés latins en configuration à plusieurs dimensions.

## 6.2 PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES p-VOLTRICES

### 6.2.1 RAPPELS SUR LES p-VOLTRICES

Nous avons défini les p-voltrices en 2.3.1 (p15). Rappelons qu'il s'agit d'un tableau de dimension 3, à éléments entiers non-négatifs et tels que la somme sur une rangée (deux indices fixés) soit toujours le même nombre p. Une p-voltrice est constituée à l'ordre n par un ensemble de n p-matrices dont la somme est p.UN(nxn), et ceci de trois façons différentes, suivant les directions des trois axes. On regarde la p-voltrice suivant un de ces axes. Les p-matrices sont alors ses plans, et, sauf exception, on considère qu'il s'agit d'une autre p-voltrice quand on change l'axe d'observation . On change aussi de p-voltrice quand on permute les valeurs des indices sur au moins un des axes ou quand on échange deux axes (§ 6.2.3, p117).

### 6.2.2 LES 1-VOLTRICES

Les 1-voltrices généralisent directement les matrices de permutation. Leurs plans sont effectivement des matrices de permutation. La somme de ces plans étant UN(nxn) dont les B-décompositions contiennent justement n matrices de permutation, il y a correspondance biunivoque entre les 1-voltrices et toutes les permutations des matrices des B-décompositions de UN(nxn).

Leur mode de numérotation est indiqué en 2.3.2 (p 15).

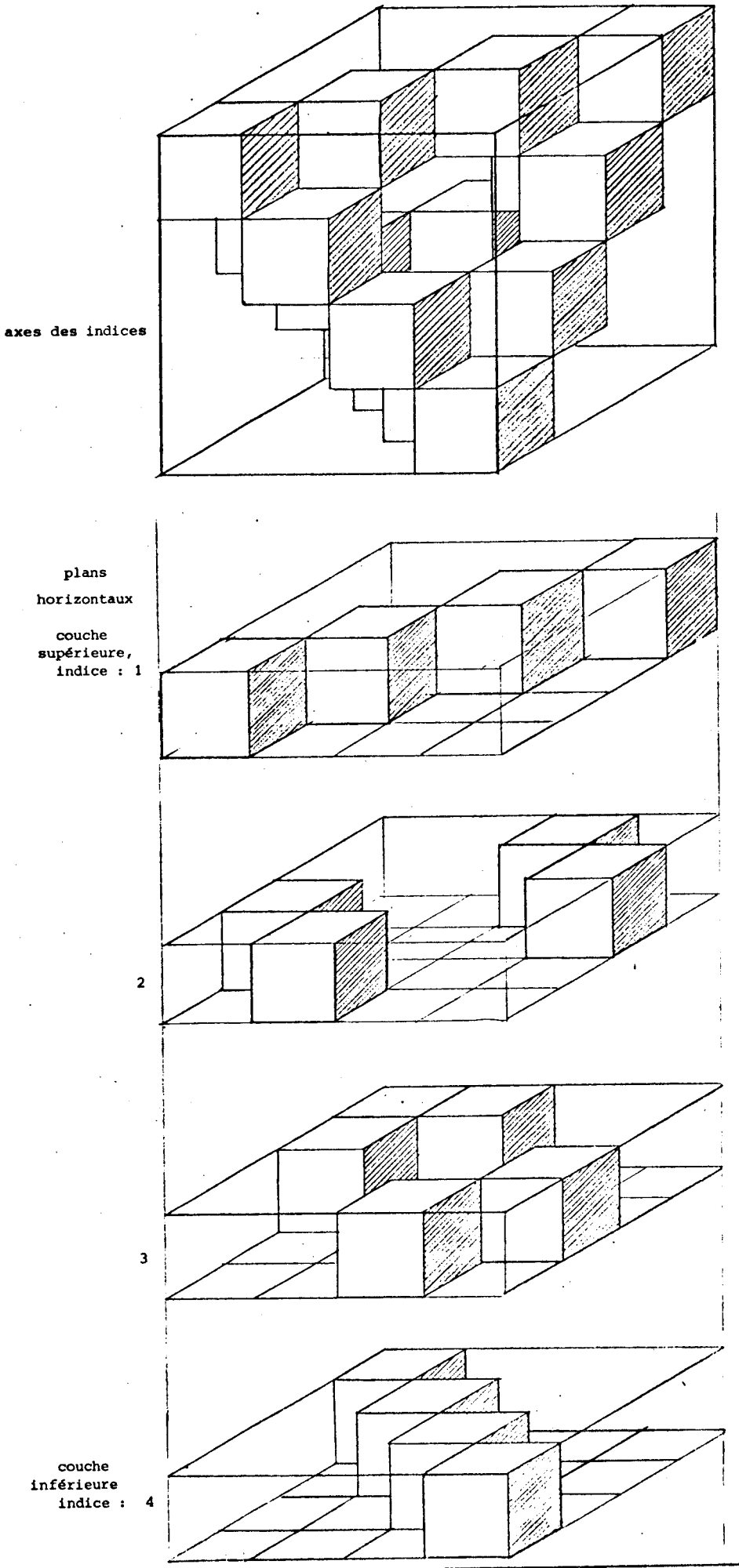
Pour CONCRETISER les 1-voltrices, certaines d'entre elles ont été réalisées en résine, à la manière des inclusions, en introduisant dans un cube transparent des petits cubes noirs, à la place des éléments 1 de la 1-voltrice. Quand on regarde dans le cube par une de ses faces, on voit tous les cubes noirs, sans superposition, mais on ne voit pas au travers du cube. Ces 1-voltrices en résine sont des solides indéformables (§ 6.2.3 p 117).

La figure 65 (p 116) représente l'une d'elles, d'ordre 4.

La figure 66 (p 118) indique pour les principales 1-voltrices d'ordre 4, les B-décompositions de UN (4x4) qui peuvent être observées dans une des séries de plans d'une 1-voltrice en résine. On peut ainsi dans la 1-voltrice ([x],(1)) retrouver, en l'observant par une autre face, une autre 1-voltrice ([y],(a)).

D'une manière générale une I-voltrice est constituée de trois séries de plans qui correspondent à trois B-décompositions de UN(nxn). Dans chacune de ces séries,les n matrices de permutation ne sont pas nécéssairement dans l'ordre lexicographique. Les B-décompositions relatives aux plans horizontaux et de côté, qu'on déduit des plans de face, pour n = 4, sont celles repérées H et C dans la figure 32 (p 56) du paragraphe 4.2.5 (p 57) sur les B-décompositions et les carrés latins.

Figure 65 : Concrétisation en résine de la 1-voltrice [1]




BIBS LILLE

### 6.2.3 LES SERIES DE PLANS DES VOLTRICES

Une voltrice est un tableau à trois dimensions. Chaque case étant représentée par un cube, la voltrice apparait comme un parallélépipède. Les plans sont les couches de cubes, obtenues en fixant un indice. Il y a trois séries de plans parallèles, correspondant chacune à chacun des trois indices susceptibles d'être fixés (fig 65 p 116).

Pour distinguer ces trois séries de plans, il est commode de considérer le parallélépipède posé sur une surface horizontale et d'observer une de ses faces verticales. Il y a alors la série des PLANS "HORIZONTAUX" dont on ne voit que les tranches, et deux séries de plans verticuax : celle dont on ne voit que les tranches et qu'on dira "DE COTE" et celle dont on ne voit que le premier plan et qu'on dira "DE FACE"(1). Les indices qui permettent de repérer les cases sont répartis sur les troix axes que sont les arêtes issues du sommet en haut à gauche de la face vue. Nous appellerons cet indiçage l'INDICAGE CANONIQUE.

Il y a alors plusieurs manières de manipuler une voltrice. On peut abandonner la forme de parallélépipède posé sur une surface, comme, par exemple, le dessin de n matrices. Mais, parmi les modifications que peut subir la voltrice, en gardant sa forme parallélépipèdique, il y en a de deux sortes : celles où on la considère comme un solide indéformable et les modifications ne sont alors que des déplacements, et celles où on la considère comme un tableau quelconque et les modifications sont des permutations de l'ensemble des cases.

Dans le cas d'un solide indéformable, des déplacements qu'on peut faire subir à la voltrice consistent à changer la face sur laquelle elle repose et la face vue. La voltrice obtenue, après ces transformations, en reindiçant canoniquement les cases, se déduit de la première par certaines combinaisons des transformations suivantes : l'inversion de l'ordre des valeurs d'un indice et les permutations de l'ordre des indices. Ces dernières transformations généralisent, dans les voltrices, la transposition des matrices.L'image symétrique par rapport à un plan, qu'on obtient dans un miroir par exemple, quand elle est réindicée canoniquement, est une voltrice qui se déduit de la précédente avec d'autres combinaisons des mêmes transformations.

Dans le cas où la voltrice est considérée comme un tableau quelconque, toutes les permutations sont autorisées sur les valeurs d'un indice, donc dans les plans d'une série (l'inversion de l'ordre des valeurs n'est qu'une permutation particulière). En les combinant avec les permutations de l'ordre des indices on obtient les p-TRANSFORMATIONS des voltrices. Elles généralisent les p-transformations des matrices (§ 5.6.6 p99) car, de même, elles conservent globalement les rangées et donc conservnet les sommes des rangées des p-voltrices.

La représentation normale d'une voltrice, sur le papier, consiste à dessiner les matrices de la série des plans de face en plaçant dans chacune d'elles l'origine des indices en haut à gauche. Les matrices de la série des plans horizontaux sont les plans de face d'une voltrice indicée canoniquement, obtenue en renversant la voltrice initiale sur sa face arrière et en regardant son ancienne face du dessus dans un miroir. De même, un miroir, placé à gauche de la voltrice initiale quand on la regarde, permettrait de voir là voltrice dont les plans de face se représentent comme les matrices de la série des plans de côté de la voltrice initiale.Nous appellerons voltrices ASSOCIEES à la voltrice initiale, les deux voltrices ainsi obtenues.

## 6.3 STRUCTURE DE L'ESPACE VECTORIEL DES $_p$-VOLTRICES

Tout comme les p-matrices, les p-voltrices d'un ordre sont des éléments d'un espace vectoriel(§3.2p27

*(1) La notation des séries de plan a été suggérée par les conventions du dessin industriel.*

Figure 66 : B-décompositions dans les 1-voltrices concrétes d'ordre 4

| 1-voltrice ( x , (1)) [x] | autre B-décomposition en ordre lexicographique | autre B-décomposition en ordre inverse | autres B-décompositions, dans un autre ordre |
|---|---|---|---|
| [1] | | | |
| [2] | [5] | | |
| [3] | [21] | | |
| [4] | [9] | | |
| [5] | voir [2] | | |
| [6] | | | [1] |
| [7] | [17] | | [3], [8], [13], [21] |
| [8] | | [13] | [4], [7], [17] |
| [9] | voir [4] | | |
| [10] | | | [1] |
| [11] | [18] | | [2], [5], [12], [14] |
| [12] | [14] | | [3], [11], [18], [21] |
| [13] | | [8] | [4], [7], [17] |
| [14] | voir [12] | | |
| [15] | | | [1], [19] |
| [16] | [23] | | [2], [5], [20], [22] |
| [17] | voir [7] | | |
| [18] | voir [11] | | |
| [19] | | | [1], [15] |
| [20] | | [22] | [4], [16], [23] |
| [21] | voir [3] | | |
| [22] | | [20] | [4], [16], [23] |
| [23] | Voir [16] | | |
| [24] | | | [1] |

BUS LILLE

Comme pour les p-matrices on peut les obtenir comme solutions d'un système linéaire. Pour cela il faut placer leur $n^3+1$ valeurs (les éléments $A_{ijk}$ et la valeur p) dans un vecteur en juxtaposant les rangées. Le système se construit en exprimant que les sommes sur les rangées sont égales à p : pour i, j, k variant de 1 à n

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ijk}-p=0,\ \sum_{j=1}^{n} A_{ijk} - p = 0,\ \sum_{k=1}^{n} A_{ijk} - p = 0$$

(fig 67 p 120).

Le système contient donc $3n^2$ lignes et $n^3+1$ colonnes. Il est donc rectangulaire horizontal à partir de n = 3 (fig 68 p 122). Il est de rang 3n(n-1)+1. De ce fait il faut pour le résoudre choisir $(n-1)^3+1$ paramètres. Ce sont, par exemple, la valeur de p et celle d'une sous-voltrice d'ordre n-1.

Il faut encore que les solutions soient constituées de valeurs entières positives. Pour cela il faut que les paramètres soient choisis positifs ou nuls, mais encore qu'il vérifient les conditions suivantes établies en 2.4 (p 17) où les sommations sont faites sur des parties de la sous-voltrice

$$\max\left(\max_{\text{rangées}} \sum_{\text{rangée}},\ \frac{\sum_{\text{volt}}}{(n-2)(n-1)+1}\right) \le p \le \min_{\text{matrices}} \frac{\sum_{\text{mat}}}{(n-2)}$$

On obtient ainsi un système d'inéquations à $(n-1)^3+1$ inconnues

| | | | |
|---|---|---|---|
| et | 1°) | $(n-1)^3+1$ | inéquations pour les paramètres non-négatifs |
| plus | 2°) | $3(n-1)^2$ | inéquations pour les sommes sur les rangées |
| plus | 3°) | 1 | inéquation pour la somme sur la sous-voltrice |
| et plus | 4°) | 3(n-1) | inéquations pour les sommes sur les matrices |
| soit | | $n^3+1$ | inéquations (fig 67 p 120). |

Les solutions de ce système d'inéquations peuvent être recherchées avec les mêmes méthodes que celles utilisées pour le système équivalent des p-matrices (§ 3.2.2 p 29). Ces solutions seront les paramètres qu'on reportera dans le système d'équations qui donnera les p-voltrices.

Nous n'avons pas tenté de construire des p-voltrices par ce procédé, en raison de la taille des systèmes à traiter, et du grand nombre de solutions aux systèmes d'inéquations, c'est-à-dire de p-voltrices à trouver. Néanmoins, comme les p-matrices (§ 3.2.3 p 31), les p-voltrices appartiennent à un cône polyedrique dont elles sont les points entiers.

La construction des parallélotopes pavant ce cône polyédrique, en fournissant le moyen de construire les p-voltrices, a donné aussi des bases de l'espace vectoriel des p-voltrices. Ceci a été fait pour n = 4 (§ 11.4.2 p 226).

D'autre part, les 1-voltrices étant en nombre supérieur à la dimension de l'espace vectoriel, il existe des relations entre les 1-voltrices.

Figure 67 :

Forme générale des systèmes d'équations et d'inéquations associés aux p-voltrices

Système d'équations (n=4)

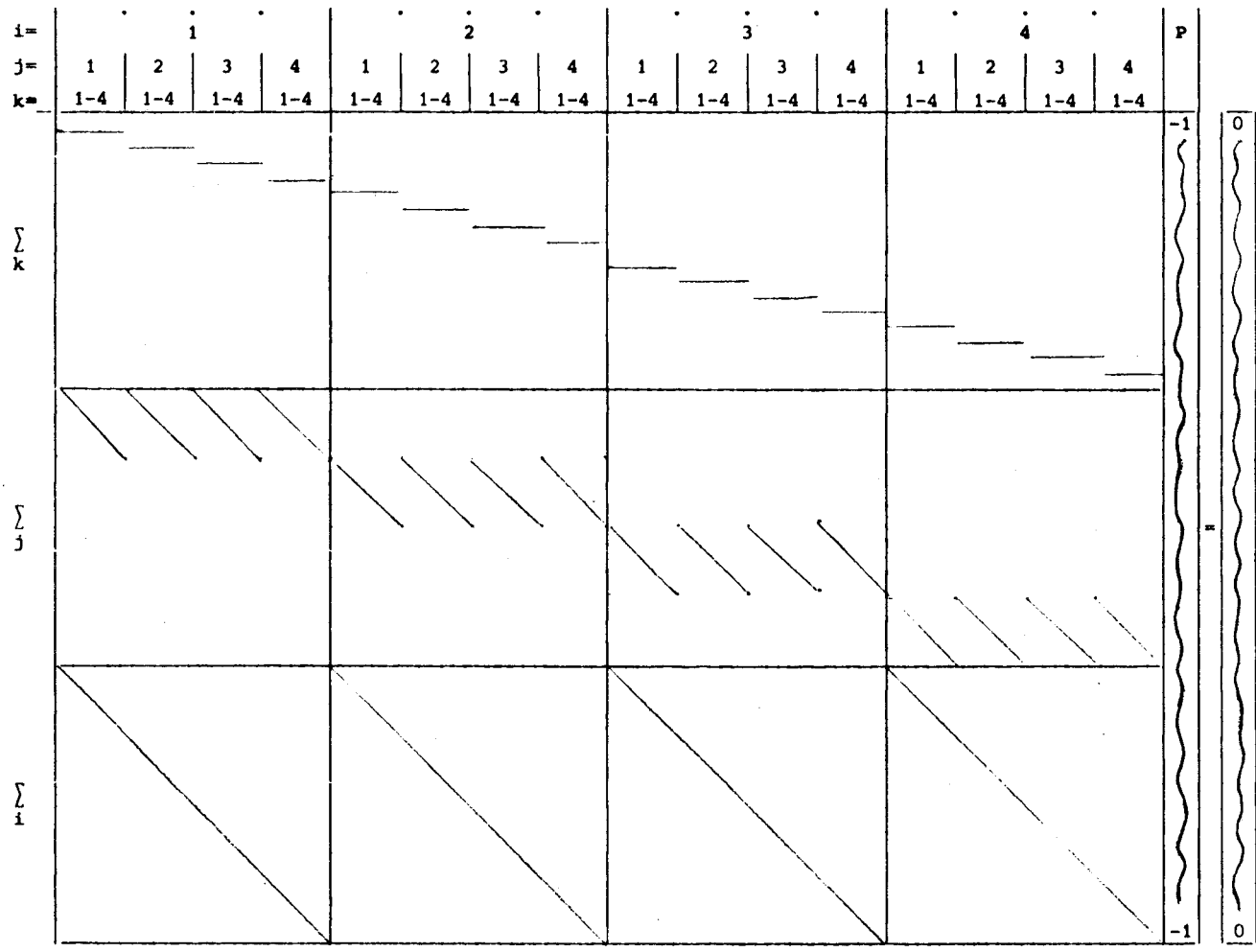
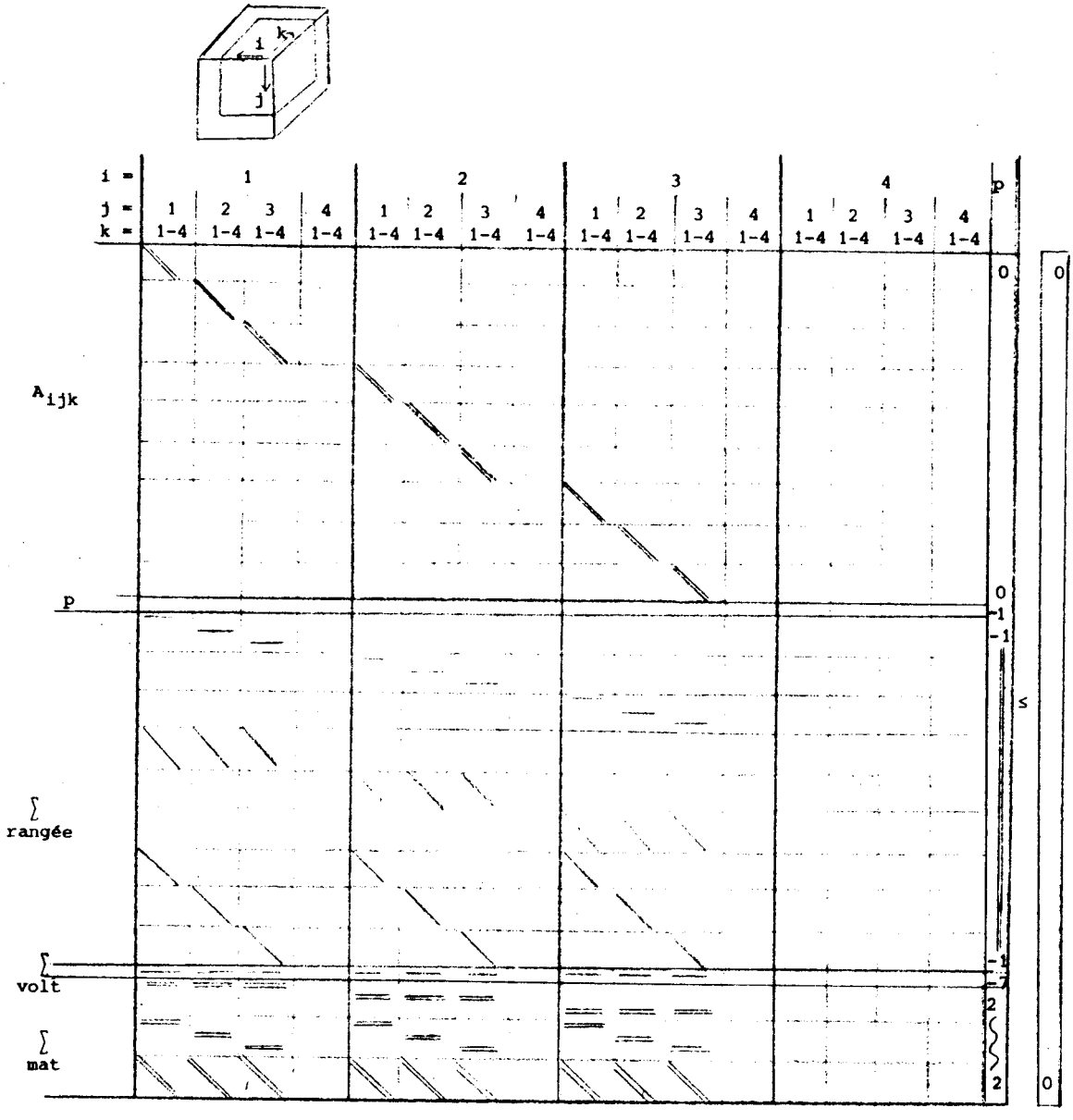


Figure 67 (suite)

Système d'inéquations vérifiées par les paramètres constituant une sous-voltrice d'ordre n-1 (cas n = 4).




BDS LILLE

Figure 68 :

Ordres de grandeurs des systèmes d'équations et d'inéquations associés aux p-voltrices

| Systèmes d'équations | | | | |
|---|---|---|---|---|
| n | rang | lignes | colonnes | paramètres |
| | | | systèmes d'inéquations: lignes | systèmes d'inéquations: colonnes |
| $n$ | $3n^2-3n+1$ | $3n^2$ | $n^3+1$ | $(n-1)^3+1$ |
| 1 | 1 | 3 | 2 | / |
| 2 | 7 | 12 | 9 | 2 |
| 3 | 19 | 27 | 28 | 9 |
| 4 | 37 | 48 | 65 | 28 |
| 5 | 51 | 75 | 126 | 65 |
| 6 | 91 | 108 | 217 | 126 |

Figure 69 :

Construction d'une 3-voltrice d'ordre 4 à partir d'une B-décomposition de 3.UN(4x4)

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad 3.UN(4x4) = (1)+(2)+(3) + (9)+2.(12) + (14)+(16)+(17)+2.(19)+(23)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} & 3 & & \\ & & 1 & 2 \\ 1 & & 2 & \\ 2 & & & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} & & 3 & \\ 1 & 1 & & 1 \\ & 1 & & 2 \\ 2 & 1 & & \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} & & & 3 \\ 2 & & 1 & \\ 1 & 2 & & \\ & 1 & 2 & \end{vmatrix}$$

plan 1 plan 2 plan 3 plan 4

Figure 70 : Majorant du nombre des p-voltrices d'ordre 4

| p | Nombre de B-décompositions de p.UN(4x4) | Nombre de choix $\prod_{i=1}^{n} C_{ip}^{p}$ | Majorant du nombre de p-voltrices d'ordre 4 |
|---|---|---|---|
| 1 | 24 | 24 | 576 |
| 2 | 411 | 2 520 | 1 035 720 |
| 3 | 4 696 | 3 696 000 | 17 356 416 000 |
| 4 | 38 550 | 63 063 000 | 2 431 078 650 000 |
| 5 | 243 000 | 11 732 745 024 | 2 851 057 040 832 000 |
| 6 | 1.242 882 | 2 308 743 493 056 | 2 869 495 730 136 427 392 |

BUS LILLE

Ainsi pour n = 3 on a les relations

A1 + A4 + A5 = A2 + A3 + A6 = B1 + B4 + B5 = B2 + B3 + B6,

et les 1-voltrices

{A1, A4, A5, A2, A3, B1, B4, B2, B3}

constituent une base de l'espace vectoriel des p-voltrices d'ordre 3.

En conséquence les p-voltrices peuvent se décomposer en combinaisons linéaires à coefficients quelconques de 1-voltrices. La suite de cette étude va être de démontrer qu'il n'existe pas toujours de B-décompositions en 1-voltrices, et de définir ce que devront être les p-voltrices à adjoindre aux 1-voltrices pour pouvoir faire des B-décompositions de toutes les p-voltrices d'un ordre donné.

## 6.4 CONSTRUCTION DES p-VOLTRICES ET MAJORANT DE LEUR NOMBRE

Il y a deux procédés pour construire les p-voltrices.

### 6.4.1 PREMIER PROCEDE

Le premier s'inspire de la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des p-voltrices d'un ordre donné. Il y a, comme on a vu, $n^3$ cases dans une p-voltrice d'ordre n. Si p est connu et si l'on choisit les valeurs pour une sous-matrice d'ordre n-1, donc $(n-1)^3$ valeurs, les autres se déduiront en réalisant des sommes sur les $n^2 x 3$ rangées égales à p. C'est un cas particulier de choix de paramétres, le même que celui explicité dans la figure 67 (p 120).

### 6.4.2 DEUXIEME PROCEDE

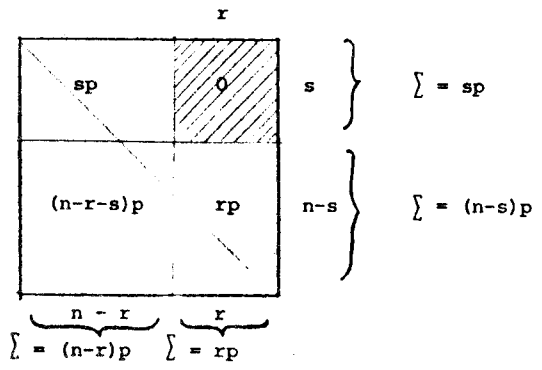
Le deuxième procédé utilise le fait que la somme des plans d'une p-voltrice est p.UN(n x n), et que chaque plan est une p-matrice, donc la somme de p matrices de permutation. p.UN(n x n) étant une n.p-matrice admet des B-décompositions en n.p matrices de permutation. En rassemblant ces n.p matrices en n sommes de p matrices on obtient les n plans d'une p-voltrice (fig 69 p 122).

Ce procédé permet d'obtenir un majorant au nombre des p-voltrices, car en raison des relations qui existent entre les p-matrices, les p-voltrices qu'on obtiendra ainsi ne seront pas toutes distinctes. Ce majorant s'obtient en multipliant le nombre de B-décompositions de p.UN(n x n) (§ 4.3.3 p 65 et fig 39 p 68) par le nombre de façons de partitionner l'ensemble de np matrices de permutation en n parties de p matrices. Ce nombre est

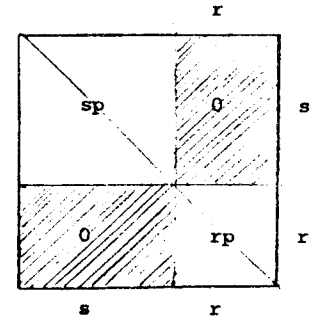
$$C^p_{np} \times C^p_{(n-1)p} \times C^p_{(n-2)p} \times \ldots \times C^p_p = \prod_{i=1}^{n} C^p_{ip},$$

Figure 71 : Sous matrice nulle dans une p-matrice

1°) r + s < n




2°) r + s = n



en considérant que pour le premier plan on choisit p matrices parmi np, que pour le second plan on en choisit p parmi les np-p qui restent, et ainsi de suite, jusqu'à n'avoir plus que p matrices pour la dernière partie. La figure 70 (p 122) donnent les nombres que l'on obtient pour n = 4.

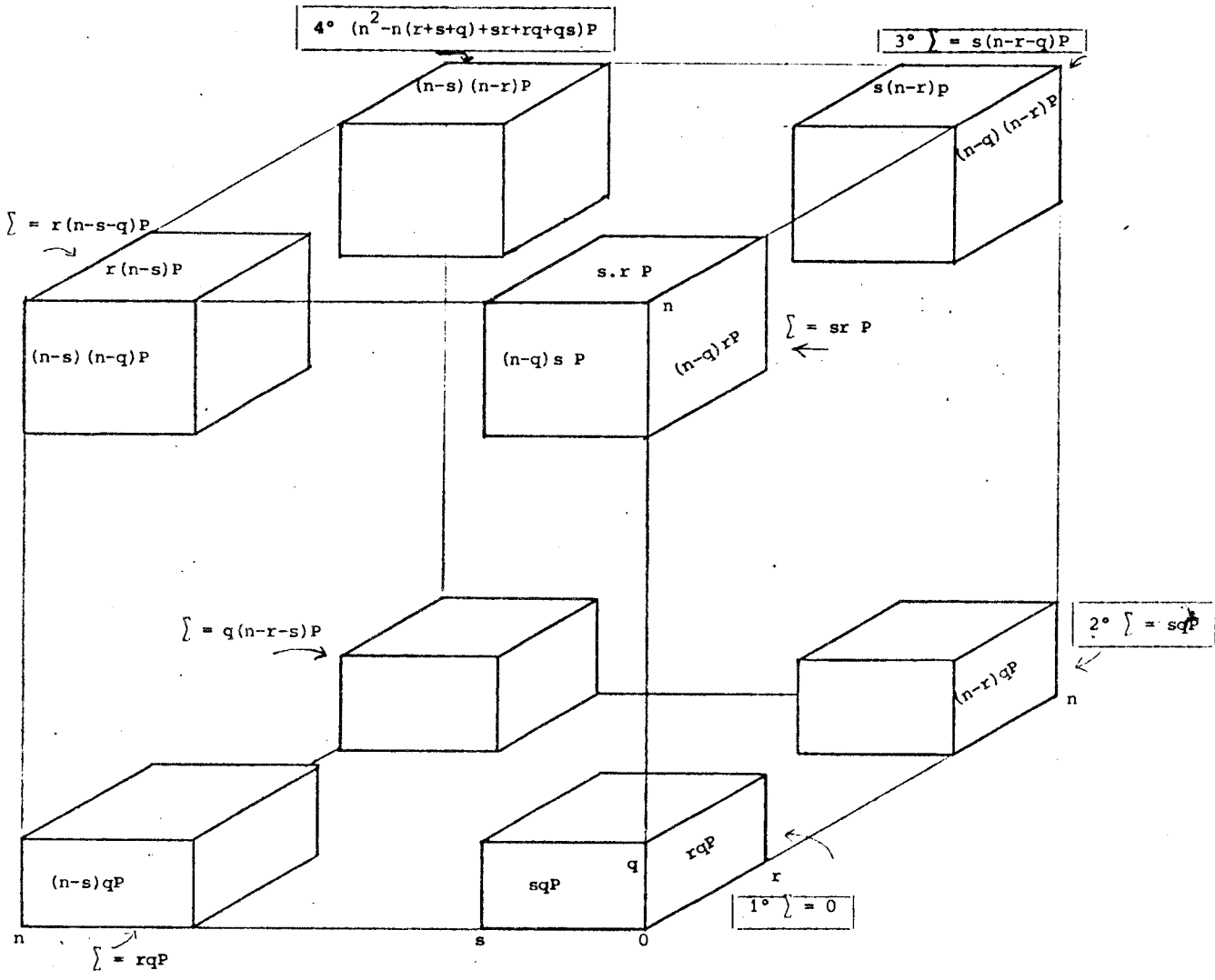
## 6.5 LES SOUS-VOLTRICES NULLES DANS LES P-VOLTRICES

On déduit du théorème de KONIG-HALL (B 12.1.2 , 5 chp 7,3) que dans une p-matrice, avec $p > o$, les sous-matrices nulles sont de dimensions (rxs) avec $r + s \leq n$. Si $r + s = n$, la sous-matrice de dimension (r x s) à l'intersection des rangées qui ne recontrent pas la sous-matrice nulle est aussi nulle. On peut le vérifier en calculant les sommes des éléments appartenant aux sous-matrices et en utilisant le fait que la somme des éléments de x rangées est égal à xp. Ce résultat est d'ailleurs confirmé par le théorème de PERFECT et MIRSKY (B 12.1.2, 5 chap 20,4) (fig 71 p 124).

On n'obtient pas dans les p-voltrices une généralisation intéressante de cette propriété. Elle reste vraie dans chacun des 3 n plans de la p-voltrice, mais on ne peut pas en déduire une relation entre les dimensions d'une sous-voltrice nulle. La figure 72 (p 126) montre une p-voltrice découpée en 8 sous-voltrices. L'une d'elles, de dimensions (qxrxs) est supposée nulle. La somme des éléments des rangées aboutissant dans une face de la sous-voltrice est aussi celle des éléments de la sous-voltrice adjacente à la face opposée de la sous-voltrice. Il y a 3 telles sous-voltrices, et si x et y sont deux côtés de la sous-voltrice nulle leurs sommes sont de la forme xyp. On en déduit, toujours par complément à la somme des rangées aboutissant dans une sous-face de la voltrice, que les 3 sous-voltrices adjacentes par une arête à la sous-voltrice nulle ont une somme de la forme $x \cdot (n-y-z)p$ où x, y, z représentent les dimensions de la sous-voltrice nulle. Enfin, toujours par le même procédé, on en déduit que la dernière sous-voltrice, opposée à la sous-voltrice nulle, est de somme S.p avec $S = n^2-n(q+r+s) + qr + rs + sp$.
Il faut que chaque sous-voltrice ait une somme non-négative. Ceci impose, puisque q, r et s sont compris entre 0 et n, que les facteurs de la forme (n-y-z) soient non-négatifs, à savoir $y+z \leq n$. On retrouve ici le résultat du théorème de KONIG-HALL (B 12.1.2,5 chap 7,3). La dernière sous-voltrice est de somme toujours positive car le volume de cette sous-voltrice est $(n-q)(n-r)(n-s)=nS-qrs$ est positif ou nul, d'où $S \geq \frac{qrs}{n}$ qui est une quantité positive ou nulle. Notons que qrs est le volume de la sous-voltrice nulle.

Si la sous-voltrice nulle vérifie $q + s = n$, la sous-voltrice, qui lui est adjacente par l'arête perpendiculaire à la face de dimension (qxs), aura ses dimensions égales à celles de la sous-voltrice nulle et sera également de somme nulle. Si en plus on a $r+q = n$, alors $r = s = n-q$, et il y a encore une autre sous-voltrice nulle de mêmes dimensions que la première, et elles sont toutes trois

Figure 72 : Sous-voltrices nulles dans une p-voltrice




- Les sommes des rangées aboutissant aux sous-faces y sont directement inscrites.
- Les flèches indiquent les sommes des 8 sous voltrices.

BUS LILLE

adjacentes par une face à une sous-voltrice cubique de somme $s^2p$. Si n est pair, en prenant $r = s = q = \frac{n}{2}$, la p-voltrice se divise en 8 sous-voltrices de dimensions égales. Si l'une est nulle, les trois sous-voltrices qui lui sont adjacentes par une arête le sont aussi, et les 4 autres sous-voltrices sont, chacune, de somme $\frac{n^2p}{4}$(fig 73 p 128). Ceci correspond à la taille maximale des sous-voltrices nulles, et les sous-voltrices non nulles sont des p-voltrices d'ordre n/2.

Dans le cas général, en prenant r = s = q = 1, on peut obtenir les valeurs pour les sous-voltrices associées à une case nulle. En prenant r = s = 1 et q = n - 1, ce sont les sous-voltrices associées à une case contenant p qui sont étudiées. Les résultats sont évidents dans le cas où p = 1 (fig 73 p 128).

Remarquons enfin qu'une p-voltrice ne peut contenir une sous-p-voltrice(même p) que si celle-ci est d'ordre $\frac{n}{2}$ car,sinon,les sous-voltrices adjacentes auraient 2 côtés de somme supérieure à n. Il en résulte qu' il est impossible de compléter une p-voltrice d'ordre n-1 en une p-voltrice d'ordre n avec même valeur de p, comme cela était possible pour les p-matrices. Par contre, à partir des p-voltrices d'ordre n on peut en construire d'ordre 2n en plaçant quatre de ses copies suivant les valeurs non nulles d'une 1-voltrice d'ordre 2. (fig 74 p 130).

Si on applique ce procédé pour passer de n = 2 à n = 4 on obtient la 1-voltrice de la figure 65 (p 116). Cette 1-voltrice est très REMARQUABLE car elle contient, en plus des sous-voltrices nulles qui se placent en quatre sommets n'ayant pas de côté en commun, une sous-voltrice nulle au centre, et d'autre part, ses éléments non nuls sont sur les diagonales des faces et forment une structure en tetraèdre. Elle n'existe que pour n = 4.

Le procédé employé ci-dessus est un cas particulier d'une méthode plus générale de combinaisons des p-voltrices (valable aussi pour les p-matrices). Soit une $p_1$-voltrice $P_1$ d'ordre $n_1$ et une $p_2$-voltrice $P_2$ d'ordre $n_2$. On construira une $p_1 \cdot p_2$-voltrice d'ordre $n_1 \cdot n_2$ en remplaçant chaque case (i,j,k) de $P_1$ par $P_1(i,j,k).P_2$. La p-voltrice qu'on obtiendra sera isomorphe à celle qu'on aurait en échangeant les rôles de $P_1$ et $P_2$.

## 6.6 1-VOLTRICES REMARQUABLES

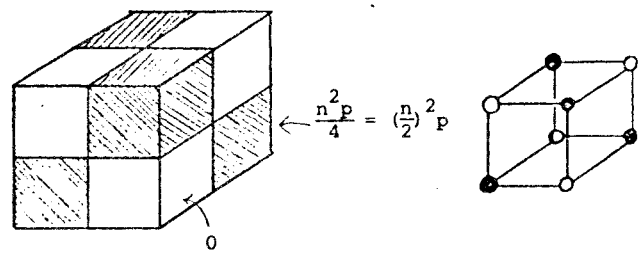
Il ressort du paragraphe précédent que pour n pair, il existe des p-voltrices de formes REMARQUABLES.

Parmi les 1-voltrices, il en est une de forme particulièrement intéressante. A l'ordre 4, c'est la 1-voltrice ([21],(24)) qui s'obtient en prenant dans l'ordre décroissant les matrices de la B-décomposition [21] de UN(4x4). Elle est donc {(24), (15), (8), (6)} (fig 75 p 124). Elle est,

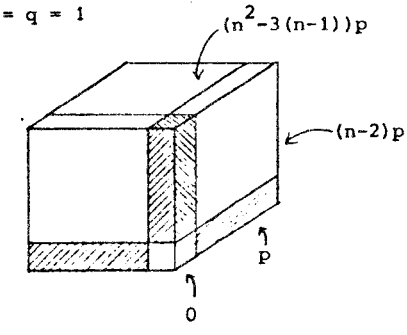
Figure 73 :

Quelques cas particuliers de sous-voltrices nulles

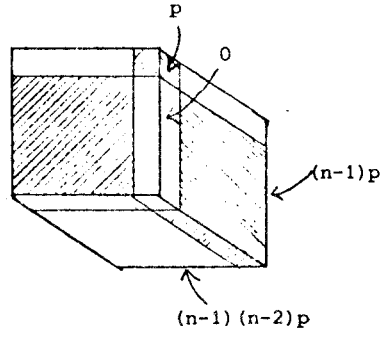
1°) n pair et $r = s = q = \frac{n}{2}$




2°) $r = s = q = 1$




3°) $r = s = 1$ ; $q = n - 1$



parmi les 1-voltrices, une des plus simples à construire. Les plans sont composés de la matrice n'ayant des 1 que sur la seconde diagonale et des matrices qu'on en déduit par permutation circulaire des indices des lignes (ou des colonnes) vers le premier indice.

Le principe de ce procédé de construction qui est de permuter circulairement les rangées d'une matrice de permutation a une forme plus générale, qui est de prémultiplier ou postmultiplier une matrice de permutation par toutes les matrices de permutation d'une B-décomposition de UN(n x n) (§ 4.2.2 p 49). Ceci est conforme aux équivalences,large et de conjugaison,établies entre les B-décompositions de UN(n x n).

L'intérêt de la forme de la 1-voltrice ci-dessus, est qu'elle est la même , dans l'indiçage canonique ( § 6.2.3 , p 117), quelle que soit la série de plans que l'on considère. Elle n'est pas la seule, à l'ordre 4, qui possède cette propriété d'être égale à ses voltrices associées (§ 6.2.3 , p 117 - la figure 76 (p 131) présente les trois autres) mais elle est généralisable à n quelconque.

Ce qui caractérise ces 1-voltrices est que les matrices de permutation qui en constituent les plans sont toutes symétriques[1] par rapport à la première diagonale. Ceci vient de la façon d'indicer les plans (§ 6.2.3 p 117). De ce fait le passage à une voltrice associée (§ 6.2.3 p 117) se traduit par une permutation dans le rôle des indices, comme le montre la figure 77 (p 131).

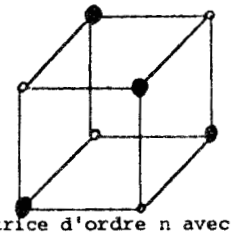
La symétrie par rapport à la première diagonale des plans de côté équivaut alors à l'égalité entre les séries des plans de faces et horizontaux. Celle des plans horizontaux équivaut à l'égalité entre les séries de plans de face et de côté. L'égalité entre les séries de plans horizontaux et de côté implique l'existence d'un axe de rotation traversant la p-voltrice en diagonale depuis le sommet origine des indices, orienté vers l'extérieur de la p-voltrice, et autour duquel la p-voltrice se conserve par rotation de $2\pi/3$.

La figure 78(p132) donne l'aspect schématique de la forme remarquable de la 1-voltrice ([21], (24)) généralisée à l'ordre n quelconque. Les deux triangles qui y apparaissent sont des ensembles de cases adjacentes par certaines arêtes. Nous appellerons une telle forme, la FORME CANONIQUE.

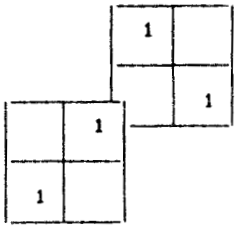
*(1) Rappelons que si la permutation r a une matrice symétrique, alors* $r=r^{-1}$.

Figure 74 : Construction d'une p voltrice d'ordre 2 à partir d'une p-voltrice d'ordre n

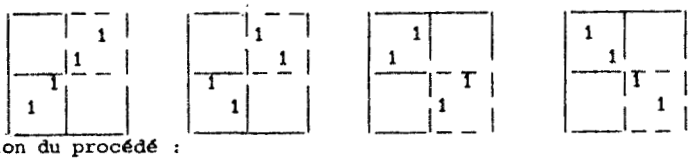
1°) Disposition à utiliser : les p-voltrices d'ordre n sont à la place des points d'une couleur :



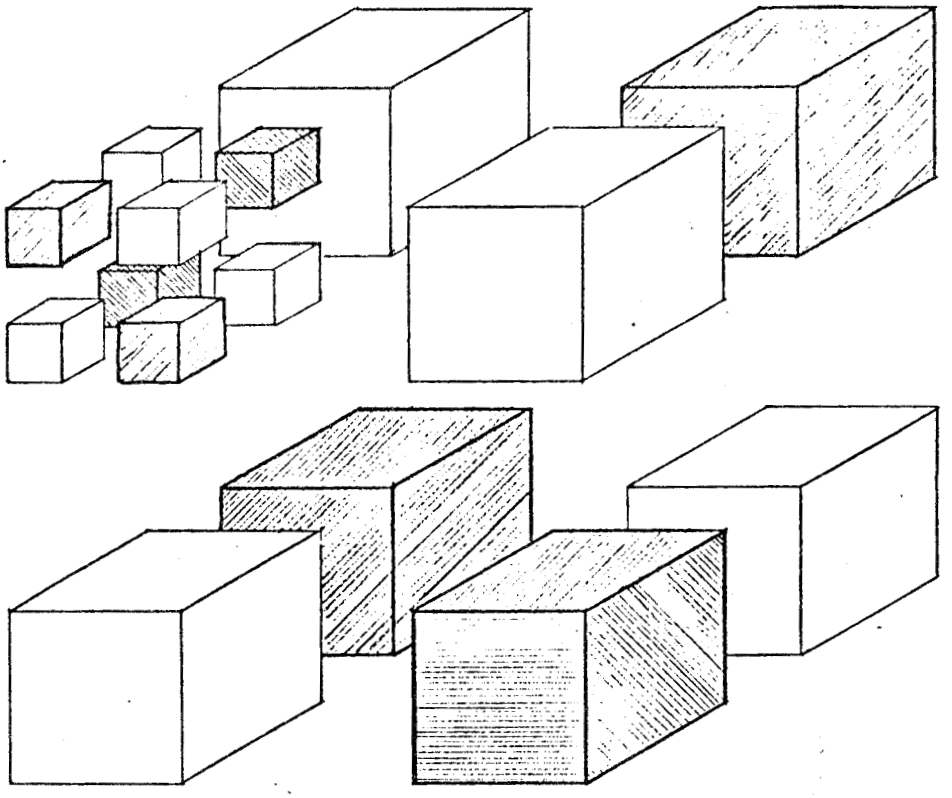
2°) La 1-voltrice d'ordre n avec n = 2




3°) la 1-voltrice d'ordre 2n :

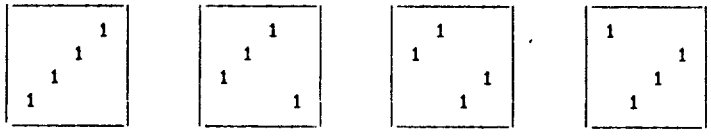



4°) Itération du procédé :



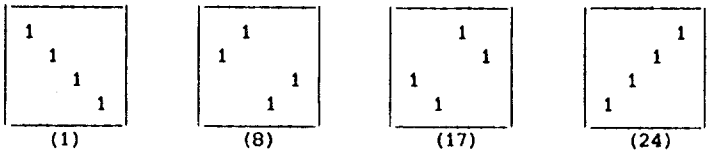
BUS LILLE

Figure 75 : La 1-voltrice ([21], (24)) d'ordre 4

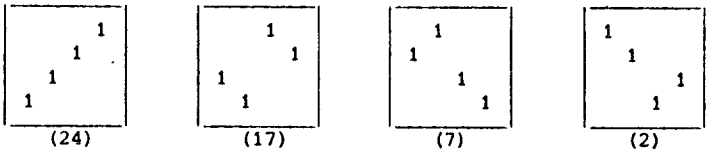


(24) (15) (8) (6)

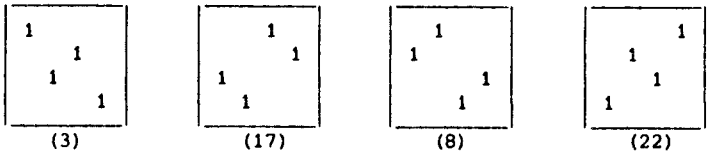
Figure 76 :
1-voltrices d'ordre 4 à plans symétriques par rapport à la première diagonale.



([1], (1)) (1) (8) (17) (24)



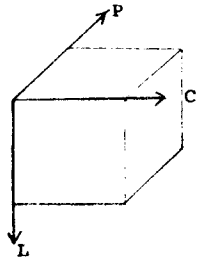
([5], (24)) (24) (17) (7) (2)



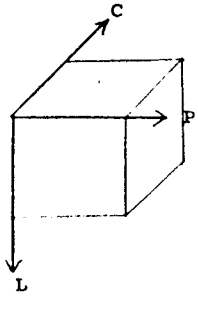
([9], (3)) (3) (17) (8) (22)

Figure 77 : Rôle des indices et séries de plans d'une p-voltrice

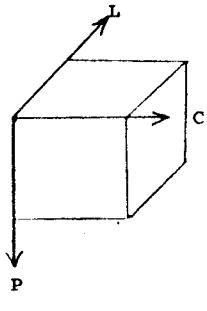
L : indices des lignes
C : indices des colonnes
P : indices des plans




plans de face

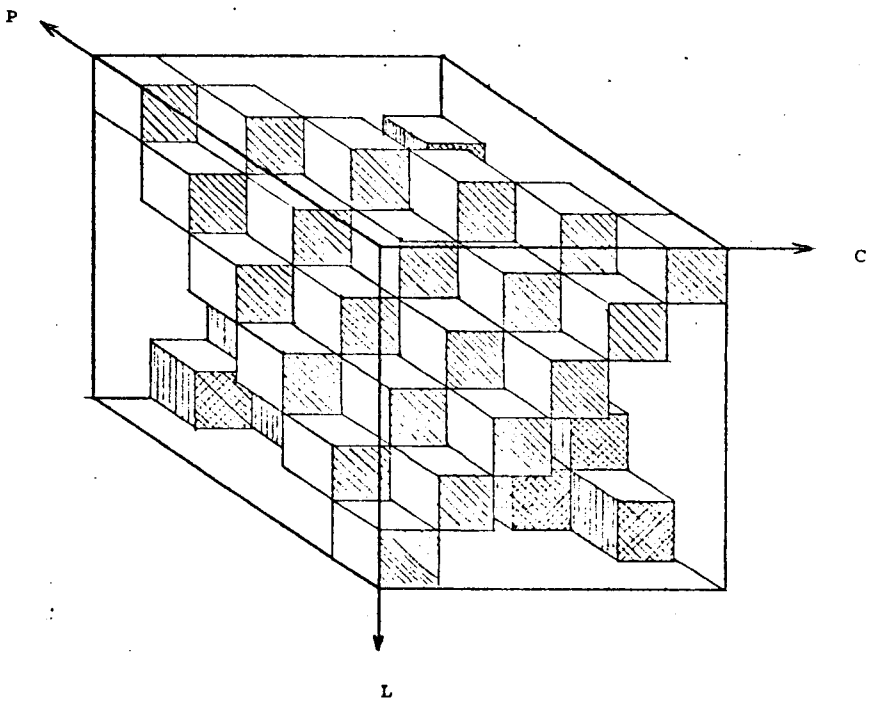


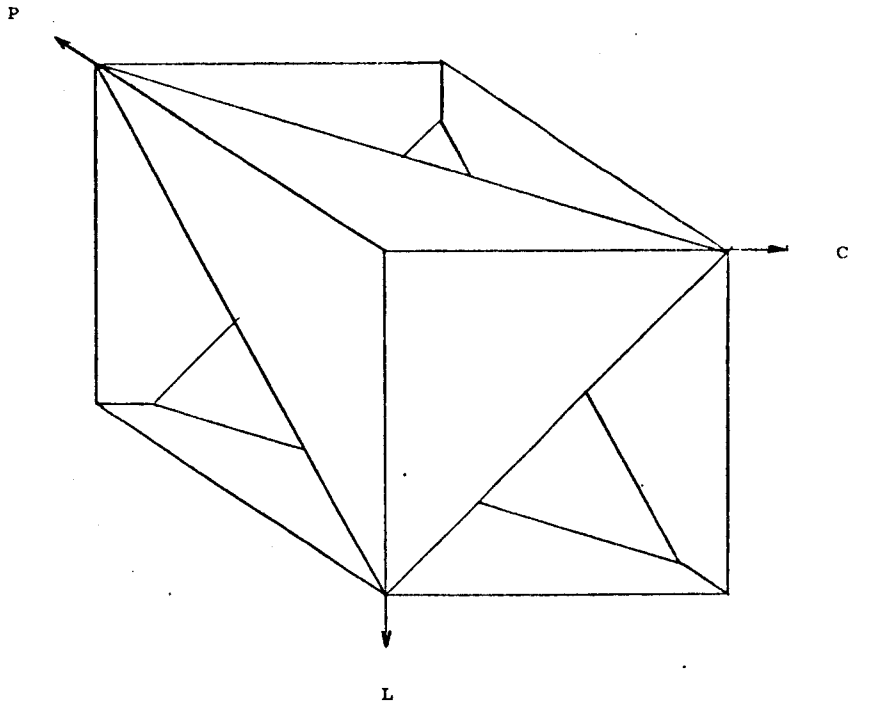

plans de côté




plans horizontaux

Figure 78 : Forme canonique des 1-voltrices




BUS LILLE

# 7. LES DECOMPOSITIONS DE UN(nxnxn)

## 7.1 TABLEAU D

UN(nxnxn) est la n-voltrice dont tous les éléments sont égaux à 1. Ses plans sont alors des n-matrices UN(nxn). Ses B-décompositions sont des sommes de n 1-voltrices. Pour chaque indice, la somme des n plans de ces n 1-voltrices, correspondant à cet indice, sont des B-décompositions de UN(nxn). Une B-décomposition de UN(nxnxn) se représente par un TABLEAU D, carré, d'ordre n, indicé en lignes par les 1-voltrices et en colonnes par les plans et tel que $D_{ij}$ est le numéro de la matrice de permutation du plan j de la 1-voltrice (i). Dans un tel tableau, une rangée contient les numéros d'une B-décomposition de UN(nxn). La recherche des B-décompositions de UN(nxnxn) se ramène donc à la construction de ces tableaux.

## 7.2 CONSTRUCTION DES TABLEAUX D

Voici quatre méthodes pour construire les tableaux D.

La plus simple consiste à placer une B-décomposition de UN(nxn) sur la première ligne du tableau D et à la recopier en la décalant circulairement, d'une case à chaque fois, dans les lignes suivantes (fig.79 p 134).

Une méthode plus évoluée consiste à construire un carré latin avec la B-décomposition de UN(nxn) choisie. Pour cela, prendre une seconde B-décomposition de UN(nxn) (éventuellement la même). Choisir une correspondance biunivoque entre les numéros des matrices de permutation de la première et les matrices de permutation de la seconde et faire la somme des matrices de la seconde B-décomposition multipliée par le numéro correspondant dans la première B-décomposition (fig 80 p 134). C'est la première méthode de construction des carrés latins vu au paragraphe 4.2.5 (p 55).

Une troisième méthode fait appel à la table de multiplication du groupe de permutations. Si on multiplie à droite ou à gauche, les permutations d'une B-décomposition de UN(nxn) on obtient une autre B-décomposition. Ceci est dû au fait que les B-décompositions de UN(nxn) sont des classes à droite ou à gauche de sous-groupes de $S_n$. Après avoir placé une B-décomposition de UN(nxn) dans la première ligne du tableau D et avoir complété avec une autre (ou la même) la première colonne, compléter le tableau, ligne par ligne, en multipliant à gauche la première ligne par les permutations qui permettent d'obtenir la première case de chacune d'elles à partir de la première case de la première ligne. Le tableau D qu'on obtient est une sous-table de la table de multiplication du groupe, car la construction peut se faire aussi bien en travaillant sur les colonnes et en multipliant de l'autre côté (fig 81 p 134).

Figure 79 : Tableau D construit par permutation circulaire (ordre 4)

B-décomposition de UN(4x4) : [1] : (1) + (8) + (17) + (24)

| plans | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1-voltrices | (1) | (8) | (17) | (24) |
| | (24) | (1) | (8) | (17) |
| | (17) | (24) | (1) | (8) |
| | (8) | (17) | (24) | (1) |

dcp de UN(4 x 4)

Figure 80 : Tableau D construit comme un carré latin (ordre 4)

1ère B-décomposition de UN(4x4) : [1] : (1) + (8) + (17) + (24)

2ème B-décomposition de UN(4x4) : [7] : (2) + (9) + (18) + (20)

$$(1)\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{bmatrix}}_{(2)} + (8)\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{(9)} + (17)\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}}_{(18)} + (24)\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{bmatrix}}_{(20)} = \begin{bmatrix} (1) & (8) & (17) & (24) \\ (24) & (1) & (8) & (17) \\ (8) & (17) & (24) & (1) \\ (17) & (24) & (1) & (8) \end{bmatrix}$$

Remarque : En transposant les deux dernières lignes on retrouve le tableau D de la figure 79.

Figure 81 : Tableau D sous-table de multiplication (ordre 4)

| multiplication par | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) x = | (2) | (9) | (18) | (20) | [7] |
| (10) x = | (12) | (14) | (21) | (3) | [12] |
| (19) x = | (13) | (22) | (4) | (11) | [14] |
| (17) x = | (23) | (5) | (7) | (16) | [17] |
| | [8] | [18] | [13] | [11] | n° dcp |

Remarque : Toutes les matrices de permutation de ce tableau D sont différentes.

BUS LILLE

La dernière méthode permet la construction exhaustive de tous les tableaux D en se ramenant à l'exploration d'arborescence . Remplir, comme ci-dessus, les premières rangées ligne et colonne. Compléter simultanément les secondes rangées avec des B-décompositions de UN(nxn) ayant en commun une matrice de permutation pouvant occuper la case à leur intersection, et itérer pour les rangées suivantes. On facilite le travail de recherche en construisant la liste des B-décompositions de UN(nxn) qui possèdent le début de rangée déjà obtenu , et en s'assurant quand on compléte une rangée que les matrices mises en place sont compatibles avec celles qui existent dans les rangées perpendiculaires. Compatible signifie ici, au moins, que les numéros lexicographiques des nouvelles matrices de permutation ne se trouvent pas dans le même intervalle I(n,i) (§ 4.2.3 p 53) que les autres matrices de permutation de la rangée ; au plus, que les matrices de permutation déjà en place dans une rangée sont bien une partie possible de B-décomposition de UN(nxn). Si une incompatibilité persiste après avoir envisagé toutes les permutations possibles des matrices de permutation dans la partie à compléter d'une rangée du tableau D, il faut remettre en cause le choix des B-décompositions utilisées pour compléter les rangées en traitement, et s'il n'y a plus de choix possibles, reprendre le choix fait pour les rangées précédentes (fig 82 p 136).

A partir d'un tableau D, il est possible d'en construire d'autres à l'aide des relations. Par exemple, si un tableau D possède un sous-tableau d'ordre 2 dans les rangées duquel se trouvent les deux matrices de permutation d'un membre d'une relation entre matrices de permutation, on obtient un autre tableau D en échangeant les places de ces matrices, ou bien en les remplaçant par celles de l'autre membre de la relation (fig 83 p 138).

Enfin signalons que les p-transformations (§ 5.6.6 p 99 ),qui respectent globalement chaque rangée, sont applicables aux tableaux D : transpositions, permutations des indices des lignes et des colonnes (voir remarque fig 80 p 134).

## 7.3 Cas n=4

Pour n = 4, 195 tableaux D peuvent être construits,à partir des quels peuvent être déduites toutes les B-décompositions en 1-voltrices de UN(4x4).

Avant de les décrire, faisons quelques rappels.

Les B-décompositions de UN(4x4) se partitionnent en deux classes par l'équivalence large (§ 4.2.2 p 49 ). Dans la classe I il y a 6 B-décompositions. Elles se caractérisent par le fait que tout couple de deux matrices de permutation est membre d'une relation à deux matrices par membre.

Figure 82 : Construction de tableaux D (ordre 4). Méthode arborescente

1°) les premières rangées :

[3]

[2]

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | (8) | (18) | (23) |
| (10) | | | |
| (17) | | | |
| (19) | | | |

2°) liste de B-décompositions compatibles pour les secondes rangées :

a) ligne 2 : dcp. contenant (10)

(1) - (10) - (17) (19) : [3]

(5) - (10) - (15) (20) : [20]

(6) - (10) - (13) (21) : [23]

(6) - (10) - (15) (19) : [24]

b) colonne 2 : dcp contenant (8)

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | (1) | (3) | (6) |
| (8) | (8) | (8) | (8) |
| (17) | (18) | (17) | (15) |
| (24) | (23) | (22) | (24) |
| [1] | [2] | [9] | [21] |

3°) un choix de B-décomposition

Les dcp [20] et [21] contiennent la m.p. (15) qui sera en case (2,2)

[21]

[20]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 18 | 23 |
| 10 | 15 | 20 | 5 |
| 17 | 24 | | |
| 19 | 6 | | |

← (20) et (23) ne peuvent être dans la même colonne car leur somme donne un 2 en case (1,4).
De même (24) et (19)

4°) troisièmes rangées :
(18) (20) ne peut se prolonger que par (2) (9) (dcp [7]).
(17) (24) " (1) (8) ou (2) (7) (dcp [1] et [5])
donc (2) occupera la case (3,3).

[7]

[5]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 18 | 23 |
| 10 | 15 | 20 | 5 |
| 17 | 24 | 2 | 7 |
| 19 | 6 | 9 | |

5°) fin de la construction

La dernière case (4,4) ne peut être occupée que par la matrice de permutation (16).

[17]

[22]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 18 | 23 |
| 10 | 15 | 20 | 5 |
| 17 | 24 | 2 | 7 |
| 19 | 6 | 9 | 16 |

Remarque : le transposé de ce tableau D est une sous-table de multiplication de $S_4$

BNS

En remplaçant ces couples par l'autre membre de la relation, on peut déduire d'une B-décomposition de classe I de UN(4 x 4), neuf autres B-décompositions parmi lesquelles trois sont aussi de la classe I (§ 4.2.6 p 59 , fig 33 p 56 et fig 84 p 140). Les B-décompositions de la classe II ne contiennent que deux couples (complémentaires) de matrices de permutation qui soient membres d'une relation à deux matrices par membre. Le remplacement de l'un, de l'autre ou des deux couples par l'autre membre de la relation donne une B-décomposition de la même classe et deux de l'autre classe. Ces opérations peuvent se faire de trois façons sur les B-décompositions de la classe I, ce qui explique la possiblilité d'en obtenir neuf autres.

Les six B-décompositions de la classe I contiennent toutes les matrices de permutation , chacune une fois. Elles ont donc des intersections,deux à deux,vides. Elles ont des intersections de deux matrices de permutation avec les six B-décompositions de la classe II qui se déduisent d'elles, et elles ne rencontrent pas les autres. Les B-décompositions de la classe II ont une intersection de deux matrices de permutation avec les B-décompositions de la classe I qui s'en déduisent et ont une matrice de permutation en commun avec les B-décompositions de la classe II qui se déduisent des B-décompositions de la classe I qu'elles rencontrent, à l'exception de celle de la classe II qui se déduit d'elles (fig 85 p 142). Les intersections entre B-décompositions sont fondamentales dans les tableaux D où chaque B-décomposition en ligne rencontre chaque B-décomposition en colonne.

Les tableaux D, pour n = 4 sont de quatre TYPES, suivant la classe des B-décompositions qu'on y rencontre. Dans le PREMIER TYPE,sont les tableaux D ne contenant qu'une seule B-décomposition. Dans le SECOND, ceux qui contiennent une B-décomposition de chaque classe,placée deux fois en ligne et en colonne. Dans le TROISIEME type, la situation est semblable, mais ce ne sont pas les mêmes B-décompositions qu'on trouve en ligne et en colonne. Enfin dans le dernier type, se trouvent les tableaux D qui contiennent des B-décompositions toutes différentes.

Les tableaux du dernier type sont au nombre de neuf. Ce sont,tous, des sous-tables de la table de multiplication du groupe $S_4$ et chacun d'eux contient des matrices de permutation toutes différentes. Les B-décompositions sont de la classe II (fig 86 p 142) et sont aussi toutes différentes. De ce fait en ligne, comme en colonne, ces tableaux D sont des parties des 6-uples de B-décompositions de UN(4 x 4) partitionnant $S_4$ (§ 4.2.7 p 59 et fig 36 p 62 ), et la partie manquante correspond toujours à un membre d'une relation induite entre B-décompositions (§ 4.2.6 p 59 et fig 35 p 60 ). Plus précisément, les B-décompositions qui interviennent dans un tableau D du type 4 sont les B-décompositions de classe II qu'on obtient en remplaçant,dans le 6-uple {1} de B-décompositions, les B-décompositions de membres disjoints de deux relations induites,par celles des autres membres (fig. 87, p 142).

Figure 83 : Tableau D, sous-tableau et relations.

| | [1] | [1] | [1] | [1] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [1] | 8 | 1 | 24 | 17 |
| [1] | 17 | 24 | 1 | 8 |
| [1] | 24 | 17 | 8 | 1 |

1°) Exploitation d'une relation : (1) + (8) = (2) + (7)

| | [1] | [1] | [1] | [1] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [1] | 8 | 1 | 24 | 17 |
| [1] | 17 | 24 | 8 | 1 |
| [1] | 24 | 17 | 1 | 8 |

| | [1] | [1] | [5] | [5] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [1] | 8 | 1 | 24 | 17 |
| [5] | 17 | 24 | 2 | 7 |
| [5] | 24 | 17 | 7 | 2 |

| | [1] | [1] | [5] | [5] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [1] | 8 | 1 | 24 | 17 |
| [5] | 17 | 24 | 7 | 2 |
| [5] | 24 | 17 | 2 | 7 |

2°) autres relations :

(1) + (17) = (6) + (15)
(1) + (24) = (3) + (22)
(17) + (24) = (18) + (23)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 17 | 24 |
| 8 | 1 | 24 | 17 |
| 17 | 24 | 1 | 8 |
| 24 | 17 | 8 | 1 |

(8) + (24) = (10) + (19)
(8) + (17) = (11) + (14)

BUS LILLE

La figure 88(p 144) montre comment obtenir les tableaux des trois premiers types à partir des B-décompositions de la classe I et du jeu des relations.

Avec une B-décomposition de la classe I, construire un tableau D en plaçant la relation sur la première ligne ; puis en la recopiant sur la seconde ligne après avoir échangées entre elles les deux premières et les deux dernières matrices de permutation ; puis en recopiant en troisième ligne la seconde en sens inverse et en quatrième ligne, la première en sens inverse également. Ce tableau D est du type 1. C'est un carré latin.

Dans les sous-tableaux d'ordre 2 ne contenant que deux matrices de permutation placées chacune sur une diagonale, on peut,soit échanger les matrices, soit les remplacer par celles de l'autre membre de la relation à deux matrices par membre dont elles sont l'un des membres. En échangeant les matrices, on peut obtenir trois autres tableaux D du type 1, comme le montre la première colonne de la figure 88 (p 144). En remplaçant les matrices, on peut obtenir six autres tableaux D du type 2, correspondant aux six couples de matrices de la B-décomposition initiale. Ce sont ceux de la première ligne de la figure 88 (p 144). En échangeant les matrices de remplacement on obtient les six autres tableaux D du type 2, qui sont au centre de la figure. Enfin, en remplaçant simultanément les couples de matrices dans deux sous-tableaux complémentaires on obtient les six tableaux D du type 3 qui sont dans la dernière ligne de la figure 88 (p 144).

Chaque B-décomposition de la classe I permet de construire d'autres tableaux D. La figure 89 (p 146) schématise ces tableaux. La première ligne de cette figure résume la figure 88 (p 144). Les autres lignes s'en déduisent en comparant les B-décompositions qui se déduisent des différentes B-décompositions de la classe I.

A partir d'une B-décomposition de classe II, par le même procédé,on ne peut obtenir que les deux premières colonnes de la figure 88 (p 144), puisqu'on n'y trouve que deux couples complémentaires de matrices de permutation entrant dans des relations. Comme les tableaux D de type 2,qu'on obtiendrait, ont déjà été obtenus à partir de B-décompositions de la classe I, les B-décompositions de classe II ne permettent d'obtenir de nouveau que les tableaux D de type 1 de la première colonne de la figure 88 (p 144), parmi lesquels se trouve une sous-table de multiplication.

Il faut remarquer que les neuf tableaux D du type 3 font chacun intervenir les quatre B-décompositions d'une des neuf relations induites entre les B-décompositions de UN(4 x 4) (§ 4.2.6 p 59 et fig 34 p 58) par les relations entre les matrices de permutation d'ordre 4.

Certains des tableaux D obtenus sont des sous-tables de la table de multiplication de $S_4$. Nous l'avons déjà précisé pour les tableaux du type 4. C'est aussi le cas de la moitié des tableaux du type 3 comme il apparaît dans la figure 88 (p 144). Enfin, pour chaque B-décomposition, un des 4 tableaux du type 1,

Figure 84 : B-Décompositions de UN(4x4), de la classe I et relations

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | (8) | (17) | (24) | [1] I | (2) | (7) | (18) | (23) | [6] I | (3) | (11) | (14) | (22) | [10] I |
| (2) | (7) | (17) | (24) | [5] | (1) | (8) | (18) | (23) | [2] | (5) | (9) | (14) | (22) | [18] |
| (1) | (8) | (18) | (23) | [2] | (2) | (7) | (17) | (24) | [5] | (3) | (11) | (16) | (20) | [11] |
| (2) | (7) | (18) | (23) | [6] I | (1) | (8) | (17) | (24) | [1] I | (5) | (9) | (16) | (20) | [19] I |
| (6) | (8) | (15) | (24) | [21] | (5) | (7) | (16) | (23) | [17] | (4) | (11) | (13) | (22) | [14] |
| (1) | (10) | (17) | (19) | [3] | (2) | (9) | (18) | (20) | [7] | (3) | (12) | (14) | (21) | [12] |
| (6) | (10) | (15) | (19) | [24] I | (5) | (9) | (16) | (20) | [19] I | (4) | (12) | (13) | (21) | [15] I |
| (3) | (8) | (17) | (22) | [9] | (4) | (7) | (18) | (21) | [13] | (1) | (11) | (14) | (24) | [4] |
| (1) | (11) | (14) | (24) | [4] | (2) | (12) | (13) | (23) | [8] | (3) | (8) | (17) | (22) | [9] |
| (3) | (11) | (14) | (22) | [10] I | (4) | (12) | (13) | (21) | [15] I | (1) | (8) | (17) | (24) | [1] I |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (4) | (12) | (13) | (21) | [15] I | (5) | (9) | (16) | (20) | [19] I | (6) | (10) | (15) | (19) | [24] I |
| (6) | (10) | (13) | (21) | [23] | (3) | (11) | (16) | (20) | [11] | (4) | (12) | (15) | (19) | [16] |
| (4) | (12) | (15) | (19) | [16] | (5) | (9) | (14) | (22) | [18] | (6) | (10) | (13) | (21) | [23] |
| (6) | (10) | (15) | (19) | [24] I | (3) | (11) | (14) | (22) | [10] I | (4) | (12) | (13) | (21) | [15] I |
| (3) | (12) | (14) | (21) | [12] | (2) | (9) | (18) | (20) | [7] | (1) | (10) | (17) | (19) | [3] |
| (4) | (11) | (13) | (22) | [14] | (5) | (7) | (16) | (23) | [17] | (6) | (8) | (15) | (24) | [21] |
| (3) | (11) | (14) | (22) | [10] I | (2) | (7) | (18) | (23) | [6] I | (1) | (8) | (17) | (24) | [1] I |
| (2) | (12) | (13) | (23) | [8] | (6) | (9) | (16) | (19) | [22] | (5) | (10) | (15) | (20) | [20] |
| (4) | (7) | (18) | (21) | [13] | (5) | (10) | (15) | (20) | [20] | (6) | (9) | (16) | (19) | [22] |
| (2) | (7) | (18) | (23) | [6] I | (6) | (10) | (15) | (19) | [24] I | (5) | (9) | (16) | (20) | [19] I |

qu'on peut construire, est une sous-table de multiplication. De ce fait, on peut construire ainsi 42 sous-tables de multiplications.

Les autres tableaux D, correspondant aux B-décompositions de UN(4x4) s'obtiennent en les transposant quand ils ne sont pas symétriques, ou en en permutant les colonnes.

Il n'est pas significatif de permuter les lignes d'un tableau D, ce qui revient à permuter les 1-voltrices dans une B-décomposition de UN(4x4x4) ; par contre, permuter les colonnes revient à permuter les plans de ces 1-voltrices et donc de changer de B-décompositions de UN(4x4x4). Ceci justifie que la figure 88 (p 144) ne donne que quatre tableaux D du type 1, construits comme des carrés latins, car vis-à-vis des permutations des colonnes, comme vis-à-vis des permutations des lignes, il n'y a que quatre classes pour les B-décompositions de UN(4x4). Pour ces quatre classes, les représentants choisis sont symétriques, d'où leur rapport avec les 1-voltrices remarquables.

Suivant leur contenu,les tableaux D donneront,par permutations des colonnes, d'autres tableaux D différents ou pas. Ainsi, de la façon dont se construisent les tableaux du type 1,en échangeant des matrices de permutation d'une ligne à l'autre, on déduit que six permutations des colonnes peuvent donner des tableaux D différents. Ce sont les permutations qui laissent la première colonne invariante. Ceci est conforme aux indications de l'alinéa précédent.

Pour les tableaux D des types 2 et 3 où il y a, en lignes, deux B-décompositions de UN(4x4), on peut faire douze permutations des colonnes, celles qui mettent en première colonne, la colonne 1 ou 3. En plus, les tableaux du type 3, n'étant pas symétriques, peuvent être transposés.

Enfin les tableaux D du type 4 admettent la transposition du tableau et toutes les permutations des colonnes, pour donner d'autres tableaux D.

La figure 90 (p 146) montre qu'on peut alors construire 2304 B-décompositions de UN(4x4x4) en 1-voltrices . Dans ce nombre, ne sont pas comprises les B-décompositions qui font intervenir des p-voltrices B-indécomposables.

## 7.4 TABLEAUX D ET CUBES LATINS

De même que les p-voltrices généralisent les p-matrices, les tableaux D généralisent les carrés latins en CUBES LATINS. Un cube latin est une voltrice dont les plans, quelle que soit la façon de regarder la voltrice, sont des carrés latins.

On obtient des cubes latins à partir des tableaux D par DEUX METHODES différentes, qui rappellent la construction des carrés latins à partir des B-décompositions de UN(n x n).

La PREMIERE METHODE consiste à multiplier les 1-voltrices que sont les lignes du tableau D par des coefficients quelconques mais différents, comme par exemple l'indice de ligne, et de sommer ces 1-voltrices.

Figure 85 : Intersections entre B-décompositions de UN(4x4)

Classe I

| (1) | (8) | (17) | (24) | [1] I |
|---|---|---|---|---|
| (1) | (8) | (18) | (23) | [2] |
| (1) | (10) | (17) | (19) | [3] |
| (1) | (11) | (14) | (24) | [4] |
| (3) | (8) | (17) | (22) | [9] |
| (6) | (8) | (15) | (24) | [21] |
| (2) | (7) | (17) | (24) | [5] |

Classe II

| (1) | (8) | (18) | (23) | [2] II |
|---|---|---|---|---|
| (1) | (8) | (18) | (24) | [1] I |
| (1) | (10) | (17) | (19) | [3] |
| (1) | (11) | (14) | (24) | [4] |
| (2) | (7) | (18) | (23) | [6] I |
| (2) | (9) | (18) | (20) | [7] |
| (2) | (12) | (13) | (23) | [8] |
| (3) | (18) | (17) | (22) | [9] |
| (4) | (7) | (18) | (21) | [13] |
| (5) | (7) | (16) | (23) | [17] |
| (6) | (8) | (15) | (24) | [21] |

Figure 86 : Tableaux D à matrices de permutation différentes (Type 4), pour n=4
(Ce sont des sous-tables de multiplication - les ( ) ont été enlevées)

| | [2] | [20] | [5] | [22] |
|---|---|---|---|---|
| [3] | 1 | 10 | 17 | 19 |
| [21] | 8 | 15 | 24 | 6 |
| [7] | 18 | 20 | 2 | 9 |
| [17] | 23 | 5 | 7 | 16 |

| | [2] | [14] | [12] | [5] |
|---|---|---|---|---|
| [4] | 1 | 11 | 14 | 24 |
| [9] | 8 | 22 | 3 | 17 |
| [13] | 18 | 4 | 21 | 7 |
| [8] | 23 | 13 | 12 | 2 |

| | [8] | [18] | [13] | [11] |
|---|---|---|---|---|
| [7] | 2 | 9 | 18 | 20 |
| [12] | 12 | 14 | 21 | 3 |
| [14] | 13 | 22 | 4 | 11 |
| [17] | 23 | 5 | 7 | 16 |

| | [3] | [21] | [13] | [8] |
|---|---|---|---|---|
| [2] | 1 | 8 | 18 | 23 |
| [23] | 10 | 6 | 21 | 13 |
| [5] | 17 | 24 | 7 | 2 |
| [16] | 19 | 15 | 4 | 12 |

| | [3] | [11] | [18] | [21] |
|---|---|---|---|---|
| [4] | 1 | 11 | 14 | 24 |
| [20] | 10 | 20 | 5 | 15 |
| [9] | 17 | 3 | 22 | 8 |
| [22] | 19 | 16 | 9 | 6 |

| | [7] | [16] | [23] | [17] |
|---|---|---|---|---|
| [8] | 2 | 12 | 13 | 23 |
| [22] | 9 | 19 | 6 | 16 |
| [13] | 18 | 4 | 21 | 7 |
| [20] | 20 | 15 | 10 | 5 |

| | [4] | [9] | [7] | [17] |
|---|---|---|---|---|
| [2] | 1 | 8 | 18 | 23 |
| [11] | 11 | 3 | 20 | 16 |
| [18] | 14 | 22 | 9 | 5 |
| [5] | 24 | 17 | 2 | 7 |

| | [4] | [23] | [9] | [16] |
|---|---|---|---|---|
| [3] | 1 | 10 | 17 | 19 |
| [14] | 11 | 13 | 22 | 4 |
| [12] | 14 | 21 | 3 | 12 |
| [21] | 24 | 6 | 8 | 15 |

| | [12] | [14] | [22] | [20] |
|---|---|---|---|---|
| [11] | 3 | 11 | 16 | 20 |
| [16] | 12 | 4 | 19 | 15 |
| [18] | 14 | 22 | 9 | 5 |
| [23] | 21 | 13 | 6 | 10 |

Figure 87 : Construction d'un tableau D d'ordre 4, du type 4 à l'aide des 6-uples de B-décompositions et les relations induites.

| 6-uple | {1} | [1] - [6] | [10] | [15] | [19] | [24] | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| relations : | <6> | | [12] | [14] | | | } colonnes |
| | <9> | | | | [20] | [22] | |
| | <7> | | [11] | | [18] | | } lignes |
| | <8> | | | [16] | | [23] | |

BUS LILLE

La p-voltrice qu'on obtient est un cube latin. En effet, chaque plan est un carré latin construit par la première methode (§ 4.2.5 p 55 ) car chaque 1-voltrice y contribue par une matrice de permutation et que la somme de ces matrices de permutation était UN(n x n). Voir un exemple en figure 91 (p 147).

La DEUXIEME METHODE consiste à remplacer chaque case du tableau D par le vecteur colonne de la permutation qui y est inscrite. La p-voltrice qu'on obtient, est encore un cube latin. En effet, pour les plans perpendiculaires au tableau D, on obtient des carrés latins construits par la deuxième méthode (§ 4.2.5 p 55 ). Chaque plan parallèle au tableau D est construit avec, pour chaque ligne, le vecteur représentatif (§ 2.2.1, p 9) de la permutation contenue dans le plan horizontal, de même indice que le plan parallele au tableau D, de la 1-voltrice qui est dans la même ligne de D. Comme ces plans des 1-voltrices ont pour somme UN(nxn), le plan de même indice du cube latin est un carré latin construit suivant la deuxième méthode (fig92 p147).

Chaque face d'un cube latin est un tableau D qui permet la construction du cube suivant la deuxième méthode. Les tableaux D de deux faces opposées sont identiques, si on laisse les indices des axes dans le même ordre, sinon ils se déduisent l'un de l'autre en inversant l'ordre des colonnes, et en remplaçant chaque matrice de permutation par sa symétrique suivant un axe horizontal.

Chaque série de plans d'un cube latin est un tableau D qu'on obtient en recherchant les positions de chacun des n objets qui construisent le cube. Ces tableaux D permettent de construire le cube,suivant la première méthode (fig 93 p 148).

Voir un hors-texte (p 150) sur l'usage des carrés latins en statistiques.

## 7.5 CUBES D ET TABLEAUX DD

Les tableaux D ont généralisé les carrés latins construits avec les matrices de permutation de B-décompositions de UN (n x n). Les cubes D généralisent les cubes latins construits avec les matrices de permutation de B-décompositions de UN(n x n). Un CUBE D est une p-voltrice dont les rangées sont des B-décompositions de UN(n x n). Ses plans sont des tableaux D.

On obtient un cube D en multipliant les 1-voltrices d'une B-décomposition de UN(nxnxn) par les numéros des matrices de permutation d'une décomposition de UN(nxn). On trouve alors sur chaque rangée la B-décomposition de UN(nxn) (fig 94 p 148).

Mais on peut en construire à partir de tableaux D où les matrices de permutation sont toutes différentes. Une première méthode consiste à reproduire dans les plans successifs le tableau D en permutant ses lignes, ou ses colonnes, suivant les permutations d'une B-décomposition de UN(nxn) (fig 95 p 149).

Figure 88 : Pour n = 4, tableaux D et relations (les ( ) ont été enlevées).

Type 1 ↓ Type 2 →

| * | [1] | [1] | [1] | [1] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | (1) | (8) | (17) | (24) |
| [1] | (8) | (1) | (24) | (17) |
| [1] | (17) | (24) | (1) | (8) |
| [1] | (24) | (17) | (8) | (1) |

[1] / [1]

(1)+(8)=(2)+(7)

| | [1] | [1] | [5] | [5] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [1] | 8 | 1 | 24 | 17 |
| [5] | 17 | 24 | 2 | 7 |
| [5] | 24 | 17 | 7 | 2 |

[1] / [5]

(17)+(24)=(18)+(23)

| | [2] | [2] | [1] | [1] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [1] | 8 | 1 | 24 | 17 |
| [2] | 18 | 23 | 1 | 8 |
| [2] | 23 | 18 | 8 | 1 |

[1] / [2]

(1)+(17)=(6)+(15)

| | [1] | [21] | [1] | [21] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [21] | 8 | (6) | 24 | (15) |
| [1] | 17 | 24 | 1 | 8 |
| [21] | 24 | (15) | 8 | (6) |

[1] / [21]

(8)+(24)=(10)+(19)

| | [3] | [1] | [3] | [1] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [3] | 10 | 1 | 19 | 17 |
| [1] | 17 | 24 | 1 | 8 |
| [3] | 19 | 17 | 10 | 1 |

[1] / [3]

(1)+(24)=(3)+(22)

| | [1] | [9] | [9] | [1] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [9] | 8 | 3 | 22 | 17 |
| [9] | 17 | 22 | 3 | 8 |
| [1] | 24 | 17 | 8 | 1 |

[1] / [9]

(8)+(17)=(11)+(14)

| | [4] | [1] | [1] | [4] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [4] | 11 | 1 | 24 | 14 |
| [4] | 14 | 24 | 1 | 11 |
| [1] | 24 | 17 | 8 | 1 |

[1] / [4]

(1)-(8)/(17),(24)

| | [1] | [1] | [1] | [1] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [1] | 8 | 1 | 24 | 17 |
| [1] | 17 | 24 | 8 | 1 |
| [1] | 24 | 17 | 1 | 8 |

[1] / [1]

| | [1] | [1] | [5] | [5] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [1] | 8 | 1 | 24 | 17 |
| [5] | 17 | 24 | 7 | 2 |
| [5] | 24 | 17 | 2 | 7 |

| | [2] | [2] | [1] | [1] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [1] | 8 | 1 | 24 | 17 |
| [2] | 18 | 23 | 8 | 1 |
| [2] | 23 | 18 | 1 | 8 |

(1)-(17)/(8),(24)

| | [1] | [1] | [1] | [1] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [1] | 8 | (17) | 24 | (1) |
| [1] | 17 | 24 | 1 | 8 |
| [1] | 24 | (1) | 8 | (17) |

1 / 1

| | [1] | [21] | [1] | [21] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [21] | 8 | (15) | 24 | (6) |
| [1] | 17 | 24 | 1 | 8 |
| [21] | 24 | (6) | 8 | (15) |

| | [3] | [1] | [3] | [1] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [3] | 10 | 17 | 19 | 1 |
| [1] | 17 | 24 | 1 | 8 |
| [3] | 19 | 1 | 10 | 17 |

(1)-(24)/(8),(17)

| | [1] | [1] | [1] | [1] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [1] | 8 | 24 | 1 | 17 |
| [1] | 17 | 1 | 24 | 8 |
| [1] | 24 | 17 | 8 | 1 |

[1] / [1]

| | [1] | [9] | [9] | [1] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [9] | 8 | 22 | 3 | 17 |
| [9] | 17 | 3 | 22 | 8 |
| [1] | 24 | 17 | 8 | 1 |

| | [1] | [4] | [4] | [1] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [4] | 11 | 24 | 1 | 14 |
| [4] | 14 | 1 | 24 | 11 |
| [1] | 24 | 17 | 8 | 1 |

type 3 →

| * | [2] | [2] | [5] | [5] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [1] | 8 | 1 | 24 | 17 |
| [6] | 18 | 23 | 2 | 7 |
| [6] | 23 | 18 | 7 | 2 |

[1],[6] / [2],[5]

| | [2] | [2] | [5] | [5] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [1] | 8 | 1 | 24 | 17 |
| [6] | 18 | 23 | 7 | 2 |
| [6] | 23 | 18 | 2 | 7 |

| * | [3] | [21] | [3] | [21] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [24] | 10 | (6) | 19 | (15) |
| [1] | 17 | 24 | 1 | 8 |
| [24] | 19 | (15) | 10 | (6) |

[1],[24] / [3],[21]

| | [3] | [21] | [3] | [21] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [24] | 10 | (15) | 19 | (6) |
| [1] | 17 | 24 | 1 | 8 |
| [24] | 19 | (6) | 10 | (15) |

| * | [4] | [9] | [9] | [4] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [10] | 11 | 3 | 22 | 14 |
| [10] | 14 | 22 | 3 | 11 |
| [1] | 24 | 17 | 8 | 1 |

[1],[10] / [4],[9]

| | [4] | [9] | [9] | [4] |
|---|---|---|---|---|
| [1] | 1 | 8 | 17 | 24 |
| [10] | 11 | 22 | 3 | 14 |
| [10] | 14 | 3 | 22 | 11 |
| [1] | 24 | 17 | 8 | 1 |

* sous table de multiplication

Les faces de ce cube D sont des TABLEAUX DD. Dans ces tableaux,chaque rangée est formée des numéros de B-décompositions de UN(nxn) qui permettent de construire un tableau D. Les tableaux DD ne permettent pas toujours de construire des cubes D. Ceci est dû au fait que, dans un tableau D, sous un numéro de B-décomposition de UN(4 x 4) sont sous entendus les n! 1-voltrices qu'on peut en déduire.

A l'ordre 4, un cube D peut permettre d'en construire d'autres en remplaçant un sous-cube d'ordre 2, ne contenant que deux matrices de permutation , placées en diagonales et qui forment un membre d'une relation, par celui formé avec les matrices de l'autre membre, suivant la méthode utilisée pour la construction des tableaux D. La figure 96 (p 149) en donne un exemple.

Figure 89 : Tableaux D et couples de B-décompositions de UN(4 x 4)

| Dcp de Classe I | Couples de relations (Tableaux D avec dcp I et II) | | | |
|---|---|---|---|---|
| [1] | [1]/ [5] [1]/ [2]<br>[1], [6]/ [2], [5] | [1]/[21] [1]/ [3]<br>[1],[24]/ [3],[21] | [1]/ [9] [1]/ [4]<br>[1],[10]/ [4], [9] | |
| fig 88 | | | | |
| [6] | [2]/ [6] [5]/ [6]<br>[1], [6]/ [2], [5] | [6]/[17] [6]/ [7]<br>[6],[19]/ [7],[17] | [6]/[13] [6]/ [8]<br>[6],[15]/ [8],[13] | 2 fois |
| [10] | [10]/[18] [10]/[11]<br>[10],[19]/[11],[18] | [10]/[14] [10]/[12]<br>[10],[15]/[12],[14] | [4]/[10] [9]/[10]<br>[1],[10]/ [4], [9] | |
| [15] | [15]/[23] [15]/[16]<br>[15],[24]/[16],[23] | [12]/[15] [14]/[15]<br>[10],[15]/[12],[14] | [8]/[15] [13]/[15]<br>[6],[15]/ [8],[13] | |
| [19] | [11],[19] [18]/[19]<br>[10],[19]/[11],[18] | [7]/[19] [17]/[19]<br>[6],[19]/ [7],[17] | [19]/[22] [19]/[20]<br>[19],[24]/[20],[22] | |
| [24] | [16]/[24] [23]/[24]<br>[15],[24]/[16],[23] | [3]/[24] [21]/[24]<br>[1],[24]/ [3],[21] | [20]/[24] [22]/[24]<br>[19],[24]/[20],[22] | |

Figure 90 : Nombre de B-décompositions de UN(4x4x4)

| type tableaux D | Situations | nb situations | nb tableaux | total tableaux D | Transpo-sition | Permutation Colonne | Total B-décomp. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | xx | 24 | 4 | 96 | | x 6 | 576 |
| 2 | I/II 2 dcp | 36 | 2 | 72 | | x 12 | 864 |
| 3 | 4 dcp | 9 | 2 | 18 | x 2 | x 12 | 432 |
| 4 | II/II | 9 | | 9 | x 2 | x 24 | 432 |
| | | | | 195 | | | 2304 |

**Figure 91 :** Construction d'un cube latin à partir d'un tableau D d'ordre 4

Première méthode

1°) Le tableau D

| | plans : 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1-voltrices [1] | (1) | (24) | (8) | (17) | 1 |
| [1] | (8) | (1) | (17) | (24) | 2 |
| [1] | (17) | (8) | (24) | (1) | 3 |
| [1] | (24) | (17) | (1) | (8) | 4 |
| | [1] | [1] | [1] | [1] | |

Remarque : en ligne on indique le numéro de la décomposition de UN(4x4) et non le numéro de la 1-voltrice.

2°) Le cube latin : Multiplier chaque 1-voltrice par l'indice de sa ligne et sommer.

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 2 3 4 | 2 3 4 1 | 4 1 2 3 | 3 4 1 2 |
| 2 1 4 3 | 3 2 1 4 | 1 4 3 2 | 4 3 2 1 |
| 3 4 1 2 | 4 1 2 3 | 2 3 4 1 | 1 2 3 4 |
| 4 3 2 1 | 1 4 3 2 | 3 2 1 4 | 2 1 4 3 |
| 1.(1)+2.(8)+ 3.(17)+4.(24) | 1.(24)+2.(1) +3.(8)+4.(17) | 1.(8)+2.(17) +3.(24)+4.(1) | 1.(17)+2.(24) +3.(1)+4.(8) |

**Figure 92 :** Construction d'un cube latin à partir d'un tableau D d'ordre 4

deuxième méthode

1°) Le tableau D

| | [8] | [18] | [13] | [11] |
|---|---|---|---|---|
| [7] | (2) | (9) | (18) | (20) |
| [12] | (12) | (14) | (21) | (3) |
| [14] | (13) | (22) | (4) | (11) |
| [17] | (23) | (5) | (7) | (16) |

2°) La décomposition de UN(nxnxn) et une série de plans du cube latin perpendiculaires à D :

plans 1 [8]

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| [7] | 1 | | | |
| | | 1 | | |
| | | | | 1 |
| | | | 1 | |

(2)

2 [18]

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | |
| | | | 1 | |
| | 1 | | | |
| | | | | 1 |

(9)

3 [13]

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | |
| | | | | 1 |
| | | 1 | | |
| | 1 | | | |

(18)

4 [11]

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 |
| | 1 | | | |
| | | | 1 | |
| | | 1 | | |

(20)

[7] (2) (9) (18) (20)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | (1) |
| | 2 | 3 | 4 | 1 | |
| | 4 | 1 | 2 | 3 | |
| | 3 | 4 | 1 | 2 | |

[12]

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| [12] | 2 | | | |
| | | | | 1 |
| | 4 | | | |
| | 3 | | 1 | |
| | 1 | 1 | | |

(12)

3 [14]

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | |
| | | 1 | | |
| | | | | 1 |
| | 1 | | | |

(14)

4 [21]

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | |
| | 1 | | | |
| | | | | 1 |
| | | 1 | | |

(21)

1 [3]

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | |
| | | | | 1 |
| | | 1 | | |
| | | | 1 | |

(3)

[12] (12) (14) (21) (3)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | 1 | (10) |
| | 4 | 1 | 2 | 3 | |
| | 3 | 4 | 1 | 2 | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |

[14]

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| [14] | 3 | | | |
| | | | 1 | |
| | 1 | | | |
| | | 1 | | |
| | 2 | | | |
| | | | | 1 |
| | 4 | | | |
| | | | 1 | |

(13)

2 [22]

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 |
| | | 1 | | |
| | | | 1 | |
| | 1 | | | |

(22)

3 [4]

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | |
| | | | 1 | |
| | | 1 | | |
| | | | | 1 |

(4)

4 [11]

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | |
| | | | | 1 |
| | 1 | | | |
| | | | 1 | |

(11)

[14] (13) (22) (4) (11)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 4 | 1 | 2 | (17) |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| | 2 | 3 | 4 | 1 | |
| | 4 | 1 | 2 | 3 | |

[17]

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| [17] | 4 | | | |
| | | | | 1 |
| | 3 | | | |
| | | 1 | | |
| | 1 | | | |
| | | | 1 | |
| | 2 | | | |
| | | 1 | | |

(23)

2 [5]

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | | | |
| | | | | 1 |
| | | 1 | | |
| | | | 1 | |

(5)

3 [7]

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | |
| | 1 | | | |
| | | | 1 | |
| | | | | 1 |

(7)

4 [16]

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | |
| | | 1 | | |
| | | | | 1 |
| | 1 | | | |

(16)

[17] (23) (5) (7) (16)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 1 | 2 | 3 | (19) |
| | 3 | 4 | 1 | 2 | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| | 2 | 3 | 4 | 1 | |

3°) Le premier plan paralléle à D se construit avec les premières lignes du cube latin :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | 1 | 2 | 3 | 4 |
| (10) | 2 | 3 | 4 | 1 |
| (17) | 3 | 4 | 1 | 2 |
| (19) | 4 | 1 | 2 | 3 |

BUS LILLE

Figure 93 : Un cube latin et ses tableaux D associés, pour n = 4

1°) le cube latin (celui construit avec les plans parallèles à D dans la figure 92) :

| plans 1 | | 2 | | 3 | | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | [3] | | [3] | | [3] | | [3] |
| 1 2 3 4 | (1) | 2 3 4 1 | (10) | 4 1 2 3 | (19) | 3 4 1 2 | (17) |
| 2 3 4 1 | (10) | 4 1 2 3 | (19) | 3 4 1 2 | (17) | 1 2 3 4 | (1) |
| 3 4 1 2 | (17) | 1 2 3 4 | (1) | 2 3 4 1 | (10) | 4 1 2 3 | (19) |
| 4 1 2 3 | (19) | 3 4 1 2 | (17) | 1 2 3 4 | (1) | 2 3 4 1 | (10) |
| [3] (1)(10)(17)(19) | | [14] (1)(19)(22)(4) | | [21] (2)(6)(8)(15) | | [12] (14)(21)(3)(12) | |
| 1.(6)+2.(8) | | 1.(21)+2.(3) | | 1.(10)+2.(17) | | 1.(13)+2.(22) | |
| +3.(15)+4.(24) | | +3.(12)+4.(14) | | +3.(19)+4.(1) | | +3.(4)+4.(11) | |
| [21] | | [12] | | [3] | | [14] | |

2°) Le tableau D pour la construction par la 1ère méthode, à partir des plans :

| positions de | plans 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (6) | (21) | (10) | (13) | [23] |
| 2 | (8) | (3) | (17) | (22) | [9] |
| 3 | (15) | (12) | (19) | (4) | [16] |
| 4 | (24) | (14) | (1) | (11) | [4] |
| | [21] | [12] | [3] | [14] | |

3°) Les tableaux D pour la construction par la 2ème méthode :

de face

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (2) | (9) | (18) | (20) | [7] |
| (12) | (14) | (21) | (3) | [12] |
| (13) | (22) | (4) | (11) | [14] |
| (23) | (5) | (7) | (16) | [17] |
| [8] | [18] | [13] | [11] | |

de côté

| plans : 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|
| (1) | (10) | (19) | (17) | [3] |
| (10) | (19) | (17) | (1) | [3] |
| (17) | (1) | (10) | (19) | [3] |
| (19) | (17) | (1) | (10) | [3] |
| [3] | [3] | [3] | [3] | |

de dessus

| plans ↓ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | (14) | (21) | (3) | (12) | [12] |
| 3 | (24) | (6) | (8) | (15) | [21] |
| 2 | (11) | (13) | (22) | (4) | [14] |
| 1 | (1) | (10) | (17) | (19) | [ 3] |
| | [4] | [23] | [9] | [16] | |

Figure 94 : Construction d'un cube D d'ordre 4 ; première méthode.

Multiplier les 1-voltrices d'une B-décomposition de UN (nxnxn) par les matrices de permutation d'une B-décomposition de UN(nxn)

La B-décomposition de UN(nxnxn) ; la B-décomposition de UN(nxn)

| plans | 1 | 2 | 3 | 4 | | [8] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [1] | (1) | (24) | (8) | (17) | 1 | (2) |
| [1] | (8) | (1) | (17) | (24) | 2 | (12) |
| [1] | (17) | (8) | (24) | (1) | 3 | (13) |
| [1] | (24) | (17) | (1) | (8) | 4 | (23) |

c'est le tableau D de la fig. 91

Le cube D :

| plans 1 | | | | 2 | | | | 3 | | | | 4 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | (12) | (13) | (23) | (12) | (13) | (23) | (2) | (23) | (2) | (12) | (13) | (13) | (23) | (2) | (12) |
| (12) | (2) | (23) | (13) | (13) | (12) | (2) | (23) | (2) | (23) | (13) | (12) | (23) | (13) | (12) | (2) |
| (13) | (23) | (2) | (12) | (23) | (2) | (12) | (13) | (12) | (13) | (23) | (2) | (2) | (12) | (13) | (23) |
| (23) | (13) | (12) | (2) | (2) | (23) | (13) | (12) | (13) | (12) | (2) | (23) | (12) | (2) | (23) | (13) |

C'est le cube latin de la fig. 91 où les éléments sont remplacés par les numéros des matrices de permutation de la B-décomposition de UN(nxn).Cette B-décomposition se retrouve dans chaque rangée du cube D. Les tableaux DD associés sont [8].UN(nxn).

Figure 95 : Construction d'un cube D d'ordre 4 ; deuxième méthode.

Permutation circulaire des lignes d'un tableau D :

plans 1

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (2) | (9) | (18) | (20) | [7] |
| (12) | (14) | (21) | (3) | [12] |
| (13) | (22) | (4) | (11) | [14] |
| (23) | (5) | (7) | (16) | [17] |

2

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (12) | (14) | (21) | (3) | [12] |
| (13) | (22) | (4) | (11) | [14] |
| (23) | (5) | (7) | (16) | [17] |
| (2) | (9) | (18) | (20) | [7] |

3

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (13) | (22) | (4) | (11) | [14] |
| (23) | (5) | (7) | (16) | [17] |
| (2) | (9) | (18) | (20) | [7] |
| (12) | (14) | (21) | (3) | [12] |

4

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (23) | (5) | (7) | (16) | [17] |
| (2) | (9) | (18) | (20) | [ 7] |
| (12) | (14) | (21) | (3) | [12] |
| (13) | (22) | (4) | (11) | [14] |

tableau DD associé (de côté) :

| plans 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| [7] | [12] | [14] | [17] |
| [12] | [14] | [17] | [7] |
| [14] | [17] | [7] | [12] |
| [17] | [7] | [12] | [14] |

[7] x(6)+[12]x(8)+[14]x(15)+[17]x(24).

Figure 96 : Construction de cubes D par échange de sous-cubes, pour n=4

1er cube D. Construit à partir de la décomposition [7] de UN(4x4) :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (2) | (18) | (9) | (20) | [7] |
| (18) | (2) | (20) | (9) | [7] |
| (9) | (20) | (2) | (18) | [7] |
| (20) | (9) | (18) | (2) | [7] |
| [7] | [7] | | | |

(2) + (18) = (5) + (16)

| | | | |
|---|---|---|---|
| (18) | (2) | (20) | (9) |
| (2) | (18) | (9) | (20) |
| (20) | (9) | (18) | (2) |
| (9) | (20) | (2) | (18) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| (9) | (20) | (18) | (2) |
| (20) | (9) | (2) | (18) |
| (18) | (2) | (9) | (20) |
| (2) | (18) | (20) | (9) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| (20) | (9) | (2) | (18) |
| (9) | (20) | (18) | (2) |
| (2) | (18) | (20) | (9) |
| (18) | (2) | (9) | (20) |

(9) + (20) = (7) + (23)

2ème cube D :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (5) | (16) | (9) | (20) | [19] | |
| (16) | (5) | (20) | (9) | [19] | |
| (7) | (23) | (2) | (18) | [6] | |
| (23) | (7) | (18) | (2) | [6] | |
| [17] | [17] | [7] | [7] | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (16) | (5) | (20) | (9) | [19] |
| (5) | (16) | (9) | (20) | [19] |
| (23) | (7) | (18) | (2) | [6] |
| (7) | (23) | (2) | (18) | [6] |
| [17] | [17] | [7] | [7] | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (9) | (20) | (18) | (2) | [7] |
| (20) | (9) | (2) | (18) | [7] |
| (18) | (2) | (7) | (23) | [6] |
| (2) | (18) | (23) | (7) | [6] |
| [7] | [7] | [6] | [6] | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (20) | (9) | (2) | (18) | [7] |
| (9) | (20) | (18) | (2) | [7] |
| (18) | (2) | (23) | (7) | [6] |
| (2) | (18) | (7) | (23) | [6] |
| [7] | [7] | [6] | [6] | |

BUS

*Hors-texte : Carrés latins, p-voltrices et analyse de variance.*

*Les carrés latins sont utilisés en statistiques pour minimiser le nombre d'expériences en analyse de variance quand il y a trois critères.*

*Aspects théoriques.*

*Les critères sont partagés, chacun, en n caractéristiques, et on cherche à mesurer l'influence de chacun des $3n^2$ couples de caractéristiques appartenant à des critères différents. Dans un carré latin construit avec les caractéristiques de l'un des critères et indicé en ligne par les caractéristiques d'un second critère et en colonne par celles du dernier critère, on obtient $n^2$ triplets de caractéristiques appartenant aux trois critères différents et qui contiennent tous les couples désirés. Les triplets indiquent les caractéristiques des expériences à réaliser.*

*Dans une voltrice d'ordre n, où chacune des trois séries de plans est indicée par les caractéristiques d'un des critères, les couples sont associés aux faces et la voltrice contient les $n^3$ triplets possibles. Les $n^2$ cases non-nulles d'une 1-voltrice correspondent aux $n^2$ triplets d'un carré latin (§2.3.2, p 15 et 4.2.5, p 53).*

*Comme avec q critères, il y a $C_q^t\, n^t$ t-uples de caractéristiques appartenant à des critères différents, avec quatre critères, il y a $6n^2$ couples, $4n^3$ triplets et $n^4$ quadruplets de caractéristiques appartenant à des critères différents. Le carré latin (§7.4, p 141) construit avec les caractéristiques d'un critère et indicé par les caractéristiques des trois autres critères, comme la voltrice de l'alinéa précédent, permet d'obtenir $n^3$ quadruplets qui contiennent tous les triplets (en considérant soit les indices des cases, soit le contenu de rangées parallèles) qui, eux-mêmes, contiennent 2n fois tous les couples (en considérant des plans parallèles).*

*Aspects pratiques.*

*Les carrés latins sont utilisés en particulier en agriculture pour la sélection des semences. Les critères peuvent être les variations du terrain suivant deux directions (pentes et vents dominants, par exemple) (ou différents traitements du sol). Le but des expériences est de mesurer l'influence de ces critères sur le rendement de différentes variétés de semences. Les variétés de semences constituent l'un des critères, celui qui sert à la construction du carré latin. Les expériences sont alors réalisées sous forme de parcelles d'environ deux mètres sur six, constituant les cases d'un carré latin, souvent d'ordre 4, implanté dans un champ.*

*Les voltrices ne présentent pas d'intérêt pour ce genre d'étude, pour les raisons suivantes : le travail se fait nécessairement sur une surface; même "étalée", une voltrice couvrirait une superficie trop importante et le temps de récolte pourrait influencer les résultats; enfin, on ne s'intéresse, en général qu'aux actions corrélatives de deux critères. D'autre part, les configutations latines sont de plus en plus abandonnées, en raison de l'impossibilité de prendre en compte des effets secondaires dus aux modifications que les plantes apportent au sol ou aux actions qu'elles ont les unes sur les autres, particulièrement marquées aux bords des parcelles. Une étude, sur plus de deux cents cas, réalisée au Centre d'Etude du C.N.R.A à La Minière (près de Versailles, France) par Mr. FELIX, directeur, montre qu'une disposition au hasard, dite "par bloc", est amplement suffisante.*

SUD LILLE

# 8. B-DECOMPOSITIONS DES p-VOLTRICES

## 8.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES DÉCOMPOSITIONS DES p-VOLTRICES

### 8.1.1 PRINCIPE DE DÉCOMPOSITION DES p-VOLTRICES

Supposons qu'une p-voltrice ait été B-décomposée en 1-voltrices. Les plans de même indice de ces 1-voltrices constituent une B-décomposition du plan correspondant de la p-voltrice (fig. 97 p 152).

Avec une décomposition (à coefficients entiers, positifs ou non) par plan de la p-voltrice, construisons la MATRICE R, rectangulaire (nxn!), indicée en lignes par les plans de la p-voltrice et en colonnes par les matrices de permutation dont l'élément $R_{ij}$ est le coefficient de la matrice de permutation (j) dans la décomposition du plan i. La somme sur une ligne de R est égale à p.

On peut construire une matrice R à partir d'une B-décomposition de la p-voltrice,mais comme pour construire une matrice R il suffit d'avoir une décomposition par plan de la p-voltrice, il n'y a pas biunivocité entre les matrices R et les décompositions d'une p-voltrice. Comme chaque plan d'une p-voltrice est une p-matrice (donc B-décomposable) chaque p-voltrice possède au moins une matrice R à éléments non-négatifs.

Pour n = 3,une matrice R quelconque est la juxtaposition de deux matrices carrées, indicées en colonne, l'une, par les matrices de la B-décomposition A de UN(3 x 3), l'autre, par les matrices de la B-décomposition B. Appellons (RA,RB) ce couple de deux matrices (fig 97 p 152). Comme pour les 1-voltrices d'ordre 3 les couples (RA,RB) sont constitués d'une matrice de permutation et d'une matrice nulle, on trouve une décomposition de la p-voltrice en décomposant, si cela est possible, les matrices RA et RB en matrices de permutation. Si R a été construite à partir d'une B-décomposition de la p-voltrice, les matrices RA et RB sont, l'une, une q-matrice et, l'autre, une (p-q)-matrice. Elles ont donc des B-décompositions à partir desquelles on peut retrouver la B-décomposition de la p-voltrice. Ces remarques permettent de construire un algorithme pour B-décomposer les p-voltrices d'ordre 3 (§8.5.2, p 169).

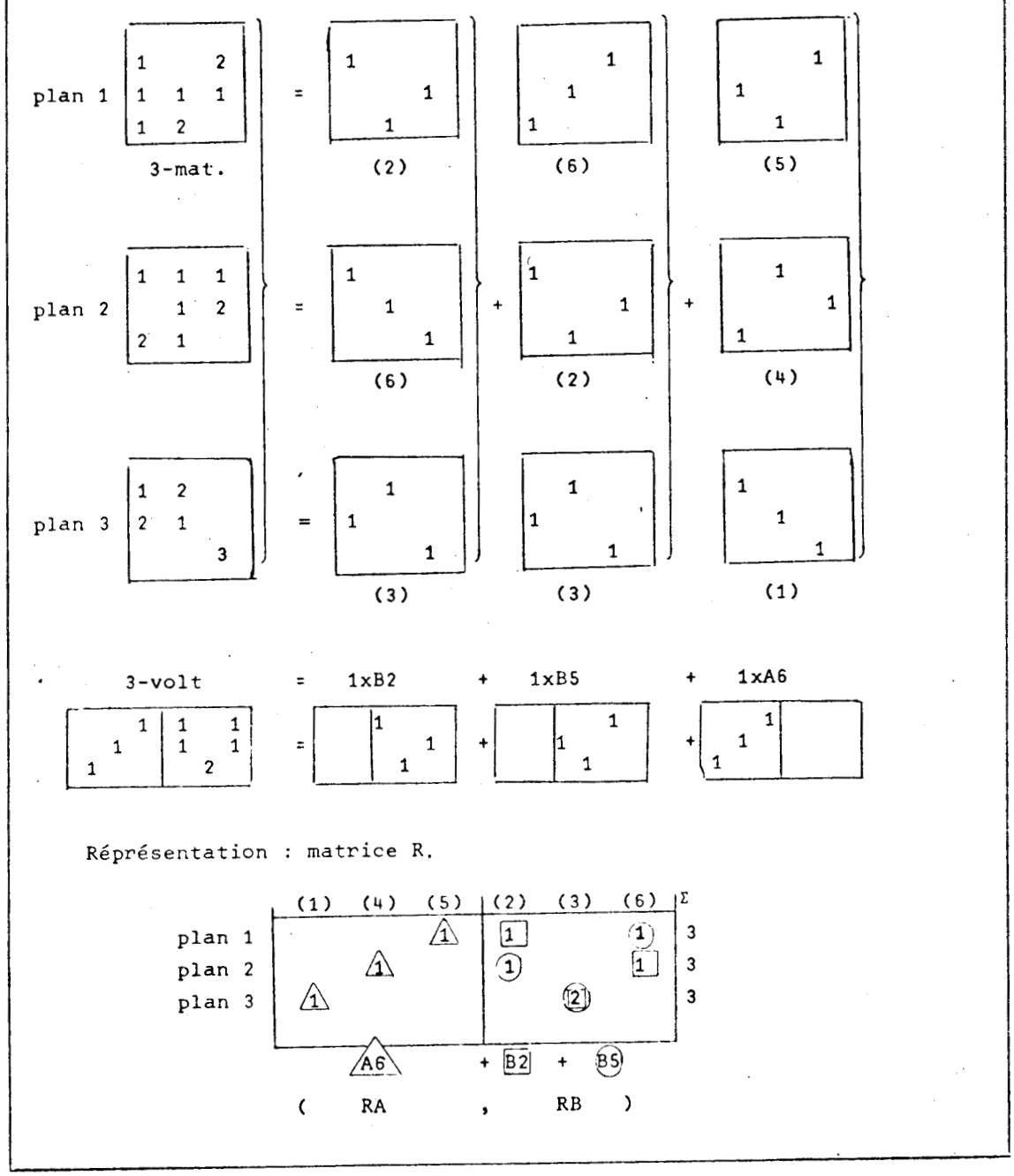
Comme pour les p-matrices, nous ne nous intéresserons, pour les p-voltrices, qu'aux B-décompositions.

### 8.1.2 p-VOLTRICES B-INDECOMPOSABLES EN 1-VOLTRICES

Toutes les p-voltrices ne sont pas B-décomposables en 1-voltrices.

La 2-voltrice d'ordre 3 de la figure 98 (p 154 ) en est un exemple. Chacun de ses plans n'a qu'une B-décomposition et les matrices RA et RB ne sont pas des p-matrices, et ne sont donc pas B-décomposables.

Figure 97 : Une B-décomposition d'une 3-voltrice d'ordre 3.




BUS LILLE

La 2-voltrice d'ordre 4 suivante en est un deuxième exemple. {Plan 1 : (2) + (3), plan 2 : (8) + (18), plan 3 : (7) + (23) = (9) + (20), plan 4 : (17) + (22)}.

Il en résulte que si P est une p-voltrice B-décomposable et si V est une 1-voltrice avec $V \leq P$, P-V est une (p-1)-voltrice, qui n'est pas nécessairement B-décomposable. On ne peut donc pas généraliser l'algorithme de B-décomposition des p-matrices aux p-voltrices.

Par contre, le principe de l'algorithme de multidécomposition des p-matrices reste valable puisqu'il procède par essais. Des aménagements ont permis de le rendre plus efficace.

### 8.1.3 ALGORITHME DE MULTIDECOMPOSITION DES p-VOLTRICES

Il n'existe pas actuellement de critère pour savoir si une p-voltrice est B-décomposable ou pas. Il est donc nécessaire que l'algorithme essaie toutes les B-décompositions possibles. Suivant le cas, il indiquera si la p-voltrice en traitement est B-indécomposable ou donnera toutes ses B-décompositions. On peut toutefois l'arrêter dès obtention d'une B-décomposition.

Soit P la p-voltrice à traiter. Le principe de l'algorithme est :

- de multidécomposer chaque plan de P,
- puis de construire, en prenant une B-décomposition par plan de P, une matrice R (paragraphe 4)(à éléments non-négatifs).
- et enfin de tenter de B-décomposer cette matrice R en une combinaison à coefficents positifs de matrices R correspondant à des 1-voltrices.

Deux méthodes d'énumération sont nécessaires, l'une pour construire les matrices R, l'autre pour B-décomposer chaque matrice R obtenue. L'ALGORITHME* qui a été programmé consiste à construire simultanément la matrice R et ses B-décompositions. En voici le procédé, très simplifié. Il est identifié par DEICV (§ 11.9.1. p 322 ).

Une ligne de R et une 1-voltrice sont dites COMPATIBLES si la B-décomposition dans la ligne de R contient la matrice constituant le plan (de la 1-voltrice) indiçant cette ligne de R.

Après avoir construit les B-décompositions des plans de la p-voltrice P, l'algorithme construit toutes les 1-voltrices $V \leq P$ (aucune autre n'est susceptible d'entrer dans une B-décomposition).

a) Il choisit ensuite une B-décomposition pour construire une ligne de R et il conserve les 1-voltrices qui lui sont compatibles.

Figure 98 : Une 2-voltrice d'ordre 3 B-indécomposable (1,6,3).

plan 3

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | . |
| 1 | . | 1 |
| . | 1 | 1 |

(2)+(3)

plan 2

| | | |
|---|---|---|
| 1 | . | 1 |
| . | 2 | . |
| 1 | . | 1 |

(1)+(6)

plan 1

| | | |
|---|---|---|
| . | 1 | 1 |
| 1 | . | 1 |
| 1 | 1 | . |

(4)+(5)

Représentation

| | | (1) | (4) | (5) | (2) | (3) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| plan | 1 | | 1 | 1 | . | | |
| | 2 | 1 | | | | | 1 |
| | 3 | | | | 1 | 1 | |
| | | RA | | | RB | | |

b) Il choisit alors une 1-voltrice (qui fera partie de la B-décomposition de P), et il conserve pour chaque plan de P, les B-décompositions qui lui sont compatibles.

c) Il itére a) et b) jusqu'à avoir construit toute la matrice R, après quoi il continue à choisir les 1-voltrices comme dans une méthode d'énumération ordinaire.

Quand il lui est impossible de faire un choix (parce que l'ensemble dans lequel le choix doit se faire est épuisé) il revient au choix précédent qu'il modofie après avoir éliminé l'objet qui avait été choisi. Il réagit de même quand il a obtenu une B-décomposition de P. L'exploration est terminée quand toutes les possibilités du premier choix ont été envisagées.

Cet algorithme n'est utilisable que pour B-décomposer les p-voltrices d'ordre 4, car pour $n \geq 5$ le temps de calcul est trop important, et pour $n = 3$ une méthode manuelle (voir plus loin) est préférable.

Le nombre de B-décompositions d'une p-voltrice reste inconnu, ainsi que le nombre de 1-voltrices nécessaires à sa B-décomposition, sauf pour $n = 3$ (§ 8.5.2 p 169)

## 8.2 p-VOLTRICES MINIMALES ET 1-MINIMALES

### 8.2.1 DEFINITIONS

Puisque, dès que p est supérieur ou égal à 2, il existe des p-voltrices qui ne se décomposent pas en 1-voltrices, pour B-décomposer, quand même, il faut utiliser d'autres p-voltrices que les 1-voltrices.

Les p-voltrices qui sont ainsi susceptibles d'intervenir dans les B-décompositions sont les **p-VOLTRICES MINIMALES**, c'est à dire ne contenant pas d'autres p-voltrices. Elles sont, en particulier, **1-MINIMALES**, c'est à dire qu'elles ne contiennent pas de 1-voltrices. Ces notions sont comparables à celles qui concernent les B-décompositions de q.UN(nxn), où une B-décomposition **pure** est une B-décomposition de q.UN(nxn) qui ne contient aucune B-décomposition de q'.UN(nxn) avec q' (strictement) inférieur à q, tandis qu'une B-décomposition **spéciale** de q.UN(nxn) ne contient aucune B-décomposition de UN(nxn) (§ 4.3.2 p 65 )

### 8.2.2 PROPRIETES ELEMENTAIRES

**Si une p-voltrice est minimale, elle est aussi 1-minimale,** mais l'inverse n'est pas vrai. Le double d'une 2-voltrice 1-minimale reste 1-minimale sans être minimale.

**Les valeurs p' des p'-voltrices qui entrent dans une B-décomposition d'une p-voltrice constituent une partition de p.** Comme les partitions non-triviales de 3 et de 2 contiennent au moins un 1,

Figure 99 : Construction de 2-voltrices à partir d'une B-décomposition de 2·UN(4x4)

1°) 2.UN(4x4) = 2.(1) + (10) + (11) + (14) + (18) + (19) + (23)
Cette B- décomposition est pure.

2°) 1er partitionnement en une 2-voltrice :

plans

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 2.(1) | (10)+(11) | (14)+(18) | (19)+(23) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | | | |
| | 2 | | |
| | | 2 | |
| | | | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 | | |
| | | 1 1 | |
| 1 | | 1 | |
| 1 | | 1 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 2 | |
| 1 | | | 1 |
| | 1 | | 1 |
| 1 1 | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 2 |
| 1 | | 1 | |
| 1 1 | | | |
| | 1 1 | | |

Ces 2-matrices ont des B-décompositions uniques ; donc comme la B-décomposition de 2.UN(4x4) est pure, cette 2-voltrice est 1-minimale.

3°) 2ème partitionnement en une 2-voltrice :

a) Relation entre les matrices de permutation

(11) + (14) = (8) + (17)
(18) + (23) = (17) + (24)
(10) + (19) = (8) + (24)

b) plans

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 2.(1) | (10)+(19) | (11)+(14) | (18)+(23) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | | | |
| | 2 | | |
| | | 2 | |
| | | | 2 |
| 2.(1) | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | | 1 |
| 1 | | 1 | |
| | 1 | | 1 |
| 1 | | 1 | |
| (8)+(24) | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | |
| 1 | | | 1 |
| 1 | | | 1 |
| | 1 | 1 | |
| (8)+(17) | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | 1 |
| | | 1 | 1 |
| 1 | 1 | | |
| 1 | 1 | | |
| (17)+(24) | | | |

On y trouve les 1-voltrices ([1], (1)) : {(1), (8), (17), (24)}
et ([1], (5)) : {(1), (24), (8), (17)}
toutes deux d'ordre 4.

Figure 100 : Une 4-voltrice d'ordre 4, 1-minimale mais pas minimale.

1°) 4.UN(4x4) = (2) + 2.(3) + (4) + (7) + (9) + 2.(12) + (14) + (16) + 2.(17) + 2.(19) + (21) + (22)
UN(4x4) = (3) + (12) + (14) + (21)
2.UN(4x4) = 2.(3) + (4) + (7) + 2.(12) + (16) + 2.(17) + 2.(19) + (21)

2°) La 4-voltrice

plans

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 2.(12)+2x(17) | (4)+(7)+(9)+(14) | (2)+(16)+(19)+(22) | 2.(13)+(19)+(21) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 | 2 | |
| | | | 4 |
| 2 | | 2 | |
| 2 | 2 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | |
| 2 | | 2 | |
| 1 | | 1 | 2 |
| | 2 | | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | 2 |
| 1 | 3 | | |
| | 1 | 1 | 2 |
| 2 | | 2 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | | | 2 |
| 1 | 1 | 2 | |
| 1 | 3 | | |
| | | 2 | 2 |

Ces quatre 4-matrices ont des B-décompositions uniques,

3°) Somme de deux 2-voltrices 1-minimales :

plans

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| (12)+(17) | (4)+(7) | (16)+(19) | (3)+(21) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | |
| | | | 2 |
| 1 | | 1 | |
| 1 | 1 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | |
| 1 | | 1 | |
| | | 1 | 1 |
| | 1 | | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | 1 | 1 |
| 1 | 1 | | |
| | 1 | | 1 |
| 1 | | 1 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | 1 |
| | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | | |
| | | 1 | 1 |

plans

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| (12)+(17) | (9)+(14) | (2)+(22) | (3)+(19) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | |
| | | | 2 |
| 1 | | 1 | |
| 1 | 1 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | |
| 1 | | 1 | |
| 1 | | | 1 |
| | 1 | | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | 1 |
| | 2 | | |
| | | 1 | 1 |
| 1 | | 1 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | 1 |
| 1 | | 1 | |
| | 2 | | |
| | | 1 | 1 |

BUS LILLE

les 3 et 2-voltrices 1-minimales sont aussi minimales. Par contre, puisque 4 peut être partitionné en 2+2, si une 4-voltrice est 1-minimale, et si elle n'est pas la somme de deux 2-voltrices 1-minimales, elle est minimale.

## 8.2.3 PRINCIPE DE CONSTRUCTIONS DES p-VOLTRICES MINIMALES.

Les matrices de permutation de toutes les 1-voltrices, d'une B-décomposition en 1-voltrices d'une p-voltrice, constituent une B-décomposition de p.UN(nxn). Inversement, à partir d'une B-décomposition de pxUN(nxn) on peut construire, en la PARTITIONNANT en n parties de p-matrices, n p-matrices qui seront les n plans d'une p-voltrice. Suivant la façon dont sera réalisée la partition, cette p-voltrice sera B-décomposable ou pas en 1-voltrices, que la B-décomposition de p.UN(nxn) soit pure ou pas. La figure 99 (p 156 ) en donne un exemple, où en utilisant les relations entre les matrices de permutation, à partir d'une B-décomposition pure de 2.UN(4x4) a été construite une 2-voltrice minimale et une 2-voltrice contenant une 1-voltrice faite avec des matrices de permutation que ne contenait pas la B-décomposition de 2.UN(4x4).

La construction de la figure 99(p 156) montre comment, à partir d'une B-décomposition pure de p.UN(4x4), construire une p-voltrice d'ordre 4 1-minimale. En effet, dans le premier partitionnement, sont rassemblées, dans chaque plan, les matrices de permutation non-nulles dans une même case de la première ligne. Ces ensembles de matrices de permutation n'apparaissent, sauf exception, dans aucune relation, et donnent de ce fait des p-matrices à B-décomposition unique. Si la B-décomposition est pure, elle ne contient pas les matrices de permutation d'une B-décomposition de UN(4x4), et donc ne peut permettre la construction d'une 1-voltrice à partir de quatre d'entre-elles. La p-voltrice est donc 1-minimale. L'exception vient du cas où la sous-matrice opposée à la valeur non-nulle de la première ligne, qui est une p-matrice d'ordre n-1, à savoir 3, admet plusieurs B-décompositions. Il faut alors au moins p supérieur ou égal à 3.

La figure 100 ( p 156) montre un autre exemple de p-voltrice 1-minimale. Il s'agit d'une 4-voltrice, mais elle n'est pas minimale, puisqu'elle est la somme de deux 2-voltrices minimales. La B-décomposition de 4.UN(4x4) utilisée n'est pas spéciale puisqu'elle contient la B-décomposition [12] de UN(4x4) et des B-décompositions de 2.UN(4x4). C'est le partitionnement judicieusement choisi qui a entraîné la 1-minimalité de la 4-voltrice. En effet, deux matrices de permutation de la B-décomposition de UN(4x4) se sont retrouvées dans le même plan, ce qui enléve la possibilité de trouver une 1-voltrice déduite de cette relation.

Il n'est pas aisé de construire toutes les 4-voltrices par ce procédé de partitionnement. Il y a en effet $C_{16}^4 \times C_{12}^4 \times C_8^4 = 63\ 063\ 000$ partitions d'une B-décomposition de 4·UN(4x4) en quatre parties de quatre matrices. Pour les 3-voltrices, il y a 369 600 partitions possibles d'une B-décomposition de 3.UN(4x4), et pour les 2-voltrices il y a 2520 partitions des B-décompositions de 2.UN(4x4). Certaines p-voltrices apparaitraient, en plus, plusieurs fois (§ 6.4.2 p 123 et fig 70 p 122).

Figure 101 : Construction d'une 2-voltrice 1-minimale à partir de 2 B-décompositions de UN(4x4)

1°) Les deux B-décompositions de UN(4x4) :

[2] : (1) (8) (18) (23)
[10] : (3) (11) (14) (22)

2°) Pour chaque B-décomposition, deux matrices de permutation dans un plan :

plans

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| (1) | (8) | (18) | (3) |
| (23) | (11) | (16) | (20) |

plans

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 1 | 2 | 2 | 1 1 |
| 1 1 | 1 1 | 1 1 | 1 1 |
| 1 1 | 1 1 | 1 1 | 1 1 |
| 1 1 | 2 | 2 | 1 1 |
| (1)+(23) | (8)+(11) | (16)+(18) | (3)+(20) |

Les B-décompositions de ces quatre 2-matrices sont uniques. Cette 2 voltrice ne contient aucune 1-voltrice.

3°) Autre répartition des matrices de permutation :

plans

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| (1) | (8) | (3) | (11) |
| (18) | (23) | (16) | (20) |

plans

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 1 | 1 1 | 1 1 | 1 1 |
| 1 1 | 1 1 | 1 1 | 1 1 |
| 1 1 | 1 1 | 1 1 | 1 1 |
| 1 1 | 1 1 | 1 1 | 1 1 |
| (1)+(18) | (8)+(23) | (3)+(16) | (11)+(20) |

B-décompositions encore uniques et pas de 1-voltrices.

Figure 102 : Construction avortée d'une 2-voltrice 1-minimale

1°) Les deux B-décompositions de UN(4x4)

[2] : (1) (8) (18) (23)
[10] : (3) (11) (14) (22)

2°) Relations dans ces B-décompositions

[2] : (1) + (8) = (2) + (7)
(18) + (23) = (17) + (24)
[10] : (3) + (11) = (5) + (9)
(16) + (20) = (14) + (22)

3°) Répartition des matrices de permutations :

plans

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| (1) | (18) | (23) | (3) |
| (8) | (16) | (20) | (11) |

plans

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 1 | 2 | 2 | 1 1 |
| 1 1 | 1 1 | 1 1 | 1 1 |
| 1 1 | 1 1 | 1 1 | 1 1 |
| 1 1 | 2 | 2 | 1 1 |
| (1)+(8) | (16)+(18) | (20)+(23) | (3)+(11) |
| (2)+(7) | | | (5)+(9) |

Les B-décompositions des 2-matrices ne sont pas uniques. Cette 2-voltrice contient la 1-voltrice d'ordre 4 ([7], (4)) : {(2), (18), (20), (9)}.

Figure 103 : Construction d'une 4-voltrice minimale, à partir de 2 B-décompositions spéciales de 2.UN(4x4)

1°) B-décompositions spéciales de 2.UN(4x4)

n° 6 : (1) (4) (8) (11) (15) (18) (20) (24)
n° 13 : (1) (4) 2.(11) (13) (16) (20) (24)

Ces 2 B-décompositions diffèrent par au moins 3 matrices de permutation . Leur somme reste spéciale.

2°) 4-voltrice minimale

plans

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| (1) | (4) | (20) | (11) |
| (15) | (8) | (24) | (11) |
| (18) | (1) | (20) | (11) |
| (13) | (4) | (24) | (11) |
| | (2) | | |
| | (7) | | |

m.p. des décompositions autres m.p. contenues

plans

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 3 | 3 1 | 4 | 3 1 |
| 1 2 1 | 1 1 2 | 2 2 | 1 3 |
| 1 2 1 | 1 3 | 2 2 | 3 1 |
| 1 3 | 2 1 1 | 2 2 | 1 3 |
| (1)+(13)+(15)+(18) | (1)+2.(4)+(8) | 2.((20)+(24)) | 3.(11)+(16) |
| | (2)+2.(4)+(7) | | |

### 8.2.4 PRINCIPE DE CONSTRUCTION DES p-VOLTRICES 1-MINIMALES

Par contre, on peut envisager la construction de 2-voltrices 1-minimales en répartissant les matrices de deux B-décompositions de UN(4x4) dans leurs plans de façon que les B-décompositions aient toujours au moins une matrice de permutation dans le même plan qu'une autre. La figure 101 (p 158) en montre un exemple. Le programme V2MIN* (§ 11.10 p 344) a été réalisé dans ce but. Cependant, les 2-voltrices minimales qui sont obtenues à partir de B-décompositions spéciales (donc pures) de 2.UN(4x4), comme celles de la figure 100 (p 156 ), ne peuvent pas être obtenues par cette méthode. Tout comme la méthode (fig 99 p 156) de construction des p-voltrices 1-minimales depuis les B-décompositions spéciales de p.UN(nxn), cette méthode ne donne pas à coup sûr une 2-voltrice minimale. La figure 102 (p 158) en donne un exemple. La répartition des matrices de permutation dans les plans de la 2-voltrice a permis l'apparition de nouvelles matrices de permutation par le jeu des relations.

Ce procédé peut être exploité pour construire des 3 voltrices et des 4-voltrices 1-minimales. Cependant, comme les façons de répartir les matrices de permutation des B-décompositions de UN(4x4) dans les plans des p-voltrices se compliquent en forme et en nombre et que, d'autre part, les relations, entre matrices de permutation , susceptibles de faire apparaître d'autres matrices de permutation, sont plus nombreuses, le nombre de p-voltrices 1-minimales qu'on peut obtenir est très petit devant le nombre de p-voltrices qui sont produites.

Ce procédé a aussi servi pour construire des 4-voltrices minimales à partir de couples de B-décompositions spéciales de 2.UN(4x4) comme le montre la figure 103 (p 158). Nous verrons en 8.4.3 (p 165) quelles sont les précautions à prendre pour obtenir la minimalité et comment on peut s'assurer qu'elle est réalisée (§ 8.4.4 p167).

## 8,3 PROPRIÉTÉS DES p-VOLTRICES 1-MINIMALES

Une p-voltrice 1-minimale contient plus de n matrices de permutation différentes.

En effet, les matrices de permutation qui construisent une p-voltrice sont celles d'une B-décomposition de p.UN(nxn) qui est un ensemble p-transitif, ce qui signifie qu'il contient pour chaque case, exactement p matrices de permutation non-nulles dans cette case. En considérant une rangée, on constate qu'il faut au moins n matrices de permutations différentes (par les cases non nulles de cette rangée) pour construire une B-décomposition de p.UN(nxn), chacune d'elles intervenant p fois. Dans le cas où il y en a n exactement, ce seront les n matrices de permutations d'une B-décompositions de UN(nxn) car sinon leur somme, puisqu'elles interviennent p fois, ferait apparaitre des valeurs supérieures à p. Construisons,dans ce cas,la matrice indicée en colonnes par les plans de la p-voltrice et en lignes par les matrices de permutation de la p-voltrice, et dont les cases indiquent le nombre de fois où une matrice de

Figure 104 : Construction de 2-voltrices 1-minimales d'ordre 4
Assemblage de 2 B-décompositions de UN(4x4)

1°) B-décomposition 1 : a, b, c, d
B-décomposition 2 : x, y, z, t

2°) Dispositions du 1er type

plans 1 2 3 4

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a & b & c & z \\ \hline d & x & y & t \\ \hline\end{array}$$

Les 4 matrices de permutation centrales définissent la 2-voltrice.
Pour (b, c), il y a $C_4^2 = 6$ possibilités, de même pour (x, y).

Mais la disposition $\begin{array}{|c|c|}\hline b & c \\ \hline x & y \\ \hline\end{array}$ est différente de $\begin{array}{|c|c|}\hline b & c \\ \hline y & x \\ \hline\end{array}$

D'où il y a $C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot 2 = 72$ dispositions possibles, à une permutation des plans près.

3°) Disposition du 2ème type

plans 1 2 3 4

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a & c & x & z \\ \hline b & d & y & t \\ \hline\end{array}$$

Chacune des deux B-décompositions est mise dans 2 plans suivant trois dispositions du type :

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & c \\ \hline b & d \\ \hline\end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline d & c \\ \hline\end{array}$$

D'où il y a 3.3 = 9 dispositions possibles, à une permutation des plans près.

permutation apparait dans un plan. Cette matrice est une p-matrice car dans chaque plan on doit trouver une p-matrice construite avec p matrices de permutation (somme sur une colonne égale à p), et, pour les lignes chaque matrice de permutation intervient p fois. Cette p-matrice se B-décompose en matrices de permutation qui correspondent à des 1-voltrices construites à partir de la B-décomposition de UN(nxn) ayant donné les n matrices de permutation différentes.

Une p-voltrice 1-minimale contient au moins un zéro sinon elle contiendrait la n-voltrice UN(nxnxn) qui n'est pas 1-minimale.

On peut même voir que si n-1 plans d'une p-voltrice ne contiennent aucun zéro la p-voltrice n'est pas minimale car toute matrice de permutation dans le plan qui reste complétera une B-décomposition de UN(nxn) prise, à raison d'une matrice de permutation par plan, dans les autres plans qui contiennent chacun toutes les matrices de permutation. Une p-voltrice minimale contient donc au moins deux zéros situés dans des plans différents.

Il semblerait, mais ceci est une conjecture, que la plus grande valeur de p pour laquelle on trouve des p-voltrices minimales serait p = n, car au delà, les plans de la p-voltrice,qui sont des p-matrices,contiennent beaucoup de matrices de permutation et donc offrent d'autant plus de chance de contenir des 1-voltrices ou des p'-voltrices minimales (avec p' < p).

## 8.4 CONSTRUCTION DE q-VOLTRICES D'ORDRE 4 MINIMALES

### 8.4.1 CONSTRUCTION DES 2-VOLTRICES MINIMALES D'ORDRE 4

Pour qu'une 2-voltrice soit minimale il suffit qu'elle soit 1-minimale.

Pour vérifier qu'une p-voltrice est 1-minimale il faut établir la liste des matrices de permutations contenues dans chaque plan et vérifier qu'on ne peut construire aucune 1-voltrice en prenant une matrice de permutation dans chaque plan. Pour n = 4, où il n'y a que vingt-quatre B-décompositions de UN(4x4), ceci est facile à faire.

Pour obtenir des 2-voltrices, il faut partitionner en quatre parties de deux matrices de permutation une B-décomposition de 2.UN(4x4). Pour n = 4, on obtient ainsi beaucoup de 2-voltrices, certainement pas toutes différentes, parmi lesquelles il y en a qui sont 1-minimales.

Pour obtenir beaucoup de 2-voltrices 1-minimales, il est intéressant de prendre des précautions dans la construction des 2-voltrices.

Une première précaution consiste à partir des B-décompositions spéciales (§ 4.3.2 p 65) de 2.UN(4x4). Les 2-voltrices obtenues ne sont pas toutes 1-minimales car certains de leurs plans peuvent admettre plusieurs B-décompositions. Pour éviter cela, on peut utiliser le fait qu'une 2-matrice qui

Figure 105 : Construction de 2-voltrices 1-minimales d'ordre 4. Classes des couples de deux B-décompositions de UN(4x4)

| n° de la classe | caractéristique<br>dcp 1 : a,b,c,d dcp 2 : x,y,z,t<br>et représentant | nb de couples | liste des couples |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 mat. perm. en commun et 1 relation commune<br>a \| b \| c + d<br>=<br>a \| b \| x + y<br>[1]x[2] | 3<br>3<br>3<br>12<br><br>3<br>12<br>36 | [1]*([2],[3],[4]).<br>[1]*([5],[9],[21]).<br>[2]x[6],[3]x[24],[4]x[10].<br>[15]*([8],[12],[13],[14],[16],[23])<br>[19]*([7],[11],[17],[18],[20],[22]).<br>[5]x[6],[21]x[24],[9]x[10]<br>[6]*([7],[8],[13],[17]),<br>[24]*([16],[20],[22],[23]),<br>[10]*([11],[12],[14],[18]). |
| 2<br>et<br>6 | 2 relations en commun<br>a ± b \| c ± d<br>x + y \| z + t<br>Dcp ayant chacune 4 ou 6 relations<br>[1]x[6] ou [2]x[5] | 6<br>6<br><br>3<br>3<br>18 | ([6],[24],[10])*([15],[19]).<br>[7]x[17],[8]x[13],[16]x[23],[20]x[22],<br>[11]x[18],[12]x[24].<br>[2]x[5],[3]x[21],[4]x[19].<br>[1]*([6],[24],[10]). |
| 4 | 6 relations chacunes engendrant un même ensemble de 12 mat. perm. Pas de relations en commun.<br>[1]x[15] | 2<br>3<br>1<br>6 | [1]*([15],[19]).<br>[6]x[10],[10]x[24],[24]x[6]<br>[15]x[19] |
| 5 | une mat. perm. en commun et des relations.<br>a - b \| c - d<br>a - y \| z - t<br>[2]x[3] | 3<br>12<br><br><br>6<br>12<br><br><br>3<br>6<br><br>24<br><br><br><br><br><br>6<br>72 | [2]x[3],[3]x[4],[4]x[2]<br>[2]*([7],[8],[13],[17]),<br>[3]*([16],[20],[22],[23]),<br>[4]*([11],[12],[14],[18]).<br>[2]*([9],[21]),[3]*([5],[9]),[4]*([5],[21]).<br>[5]*([7],[8],[13],[17]),<br>[21]*([16],[20],[22],[23]),<br>[9]*([11],[12],[14],[18]).<br>[5]x[9],[9]x[21],[21]x[5].<br>[7]x[8],[22]x[23],[11]x[12],[14]x[18],<br>[16]x[20],[13]x[17].<br>[7]*([11],[18],[20],[22]),<br>[8]*([12],[14],[16],[23]),<br>[11]*([17],[20],[22])<br>[12]*([13],[16],[23]),<br>[13]*([14],[16],[23]),<br>[14]*([16],[23]),<br>[17]*([18],[20],[22]),[18]*([20],[22]).<br>[7]x[13],[8]x[17],[20]x[23],[16]x[22]).<br>[11]x[14],[12]x[18]. |
| 3 | 6 relations dans la B-dcp 1<br>4 relations dans la B-dcp 2<br>a - b \| c - d<br>x y - z t<br>avec<br>a + b = u + v<br>c + d = r + s<br>x + t = a + s<br>y + z = b + r<br>[1]*[11] | 12<br><br>6<br><br>6<br>6<br><br>6<br>12<br><br><br>12<br><br>12<br>72 | [1]*([7],[8],[11],[12],[13],[14],[16],<br>[17],[18],[20],[22],[23]).<br>[2]*([10],[24]),[3]*([6],[10]),<br>[4]*([6],[24]).<br>([2],[3],[4])*([15],[19])<br>[5]*([10],[24]),[21]*([10],[6]),<br>[9]*([24],[6])<br>([5],[21],[9])*([15],[19])<br>[6]*([11],[16],[18],[23]),<br>[24]*([7],[12],[14],[17])<br>[10]*([8],[13],[20],[22]).<br>[6]*([12],[14],[20],[22]),<br>[24]*([8],[11],[13],[18]),<br>[10]*([7],[16],[17],[23]).<br>[15]*([7],[11],[17],[18],[20],[22]),<br>[19]*([8],[12],[13],[14],[16],[23]). |
| 7<br>et<br>8 | 2 relations par B-dcp<br>a - b \| c - d<br>x - y \| z - t<br>[2]x[11] | 12<br><br><br>12<br><br><br>12<br><br><br>12<br><br><br>12<br><br><br>12<br><br><br>12<br>72 | [2]*([11],[16],[18],[23]),<br>[3]*([7],[12],[14],[17]),<br>[4]*([8],[13],[20],[22]).<br>[2]*([12],[14],[20],[22]),<br>[3]*([8],[11],[13],[18]),<br>[4]*([7],[16],[17],[23]).<br>[5]*([11],[16],[18],[23]),<br>[21]*([7],[12],[14],[17]),<br>[9]*([8],[13],[20],[22]).<br>[5]*([12],[14],[20],[22]),<br>[21]*([8],[11],[13],[18]),<br>[9]*([7],[16],[17],[23]).<br>[7]*([12],[14]),[8]*([20],[22]),<br>[11]*([16],[23]),[12]x[17],<br>[13]*([20]*[22]),[14]x[17],<br>([16],[23])*[18].<br>[7]*([16],[23]),[8]*([11],[18]),<br>[11]x[13],[12]*([20],[22]),<br>[13]x[18],[14]*([20],[22]),<br>[17]x([16],[23]) |

BUS LILLE

contient un 2 n'a qu'une B-décomposition. Considérons alors une rangée quelconque de la matrice 2.UN(4x4) et partitionnons les matrices de permutation de sa B-décomposition en rassemblant les matrices non nulles dans les mêmes cases de cette rangée. Les plans de la 2-voltrice obtenue n'auront qu'une B-décomposition et elle sera, puisque la B-décomposition était spéciale, 1-minimale. Ceci est illustré dans la figure 99 (p 156).

Une deuxième précaution consiste à construire la 2-voltrice à partir de deux B-décompositions de UN(4x4). Ceci revient à utiliser une B-décomposition non spéciale de 2.UN(4x4). L'art consiste à répartir les matrices de permutation des deux B-décompositions de façon à ce qu'aucune de ces B-décompositions ne se trouve avoir une matrice de permutation par plan. Il faudra donc que, pour chaque B-décomposition, deux de ses matrices soient dans un même plan. Cette DISPOSITION est illustrée par la figure 101, 2° (p 158). Il se peut que, pour chaque B-décomposition, les matrices de permutations se retrouvent dans deux plans (fig 101 p 158).

Il y a soixante douze ASSEMBLAGES possibles de deux B-décompositions suivant la disposition du premier type et neuf assemblages suivant la disposition du deuxième type (fig 104 p 160).

Les 2-voltrices qu'on obtient par ce procédé ne sont pas toutes 1-minimales, car, ici encore, certains plans peuvent avoir plusieurs B-décompositions. Comme ces plans sont des 2-matrices, s'il y a plusieurs B-décompositions, il ne peut y en avoir que deux, qui sont alors les membres d'une relation à deux matrices par membre. Aussi, une précaution supplémentaire consiste à éviter que des couples de matrices qui sont membres d'une relation ne se retrouvent dans un même plan. Un partitionnement des couples de B-décompositions de UN(4x4) a été fait en 4.2.4 (p 53 ) (fig 30 p 50 ) et ils ont été regroupés ici suivant les couples de matrices, membres de relation, qu'ils contiennent. Il y a six classes (fig 105 p 162 ). Pour un représentant de chacune d'elles, ont été calculées les 2-voltrices 1-minimales qu'il pouvait donner. Mais ces 2-voltrices 1-minimales peuvent être obtenues à partir d'autres couples (fig 106 p 164 et fig 107 p 166 ). De ce fait le nombre de 2-voltrices 1-minimales différentes qu'on peut obtenir sera la somme des cardinaux des classes de couples de B-décompositions de UN(4x4) multipliés par le nombre de 2-voltrices 1-minimales obtenues pour un représentant, lui même modifié par un facteur correctif (fig 108 p 166 ). Le nombre obtenu est 7056. C'est un majorant du nombre de 2-voltrices 1-minimales d'ordre 4 qu'on peut obtenir par ce procédé.

Le programme V2MIN (§ 8.2.4 p 159 ) permet d'obtenir des 2-voltrices 1-minimales par cette méthode. Voir à la figure 106 (p 164 ) un exemple de résultat.

Figure 106 : Construction de 2-voltrices 1-minimales d'ordre 4 (Résultat de V2MIN (§ 11.10 p 344 )

Les deux 2-voltrices obtenues à partir de [1]x[3].

```
     387
B-DCP  1 =   1  8 17 24  DANS  1  3  4  7  SUIT  1 17 24 17
B-DCP  3 =   1 10 17 19        2  6  5  8        8 10  1 19
         1  2  3  4           1  2  3  4           1  2  3  4           1  2  3  4
     +-------------+      +-------------+      +-------------+      +-------------+
   1 |  1  1       |    1 |     1  1    |    1 |  1        1 |    1 |        1  1 |
   2 |  1  1       |    2 |        1  1 |    2 |     1  1    |    2 |  1        1 |
   3 |        1  1 |    3 |  1        1 |    3 |     1  1    |    3 |  1  1       |
   4 |        1  1 |    4 |  1  1       |    4 |  1        1 |    4 |     1  1    |
     +-------------+      +-------------+      +-------------+      +-------------+

                                                                                  64928

     388
B-DCP  1 =   1  8 17 24  DANS  1  3  4  6  SUIT  1 17 24 10
B-DCP  3 =   1 10 17 19        2  8  5  7        8 19  1 17
         1  2  3  4           1  2  3  4           1  2  3  4           1  2  3  4
     +-------------+      +-------------+      +-------------+      +-------------+
   1 |  1  1       |    1 |        1  1 |    1 |  1        1 |    1 |     1  1    |
   2 |  1  1       |    2 |  1        1 |    2 |     1  1    |    2 |        1  1 |
   3 |        1  1 |    3 |  1  1       |    3 |     1  1    |    3 |  1        1 |
   4 |        1  1 |    4 |     1  1    |    4 |  1        1 |    4 |  1  1       |
     +-------------+      +-------------+      +-------------+      +-------------+

                                                                                  64929
```

## 8.4.2 UNE B-DECOMPOSITION REMARQUABLE DE 2.UN(4x4)

La B-décomposition spéciale de 2.UN(4x4)

(1) + (4) + (11) + (12) + (13) + (16) + (19) + (23)

donne toujours des 2-voltrices 1-minimales,quel que soit le partitionnement choisi. En effet à part trois exceptions la somme de deux quelconques de ses matrices de permutation donne une 2-matrice n'ayant qu'une B-décomposition. Les troix exceptions sont (4) + (12) = (6) + (10), (4) + (13) = (3) + (14) et (12) + (13) = (7) + (18). Remarquons qu'une 2-voltrice ne peut utiliser qu'un de ces trois couples puisqu'ils ne font appel qu'à trois matrices de permutation ((4), (12), (13)) de la B-décomposition de 2.UN(4x4). Mais, en plus, la B-décomposition de 2.UN(4x4) augmentée des six matrices de permutation introduites par les trois relations ci-dessus, à savoir{(1), (3), (4), (6) ; (7), (10), (11), (12) ; (13), (14), (16), (18) ; (19)}, (23), reste un ensemble spécial (§ 4.3.2 p 65 ), c'est à dire qui ne contient pas de B-décomposition de UN(4x4). D'où la 1-minimalité des 2-voltrices qui s'en déduisent.

Ce qui est encore remarquable, c'est que les matrices de permutation qui manquent à cet ensemble pour avoir le groupe symétrique $S_4$, à savoir

(2), (5) ; (8), (9) ; (15), (17) ; (20), (21), (22), (24)

forment une base de l'espace vectoriel engendré par les matrices de permutation, qui, de plus est telle que les autres matrices de permutation peuvent s'en déduire en ne faisant appel qu'à des relations entre matrices de permutation à deux matrices par membre. C'est aussi un ensemble spécial.

Cette B-décomposition spéciale n'est pas seule à avoir cette propriété.

## 8.4.3 REMARQUES SUR LES 3-VOLTRICES 1-MINIMALES D'ORDRE 4.

Comme 3 n'admet qu'une partition non triviale qui est 1 + 2 si une 3-voltrice est 1-minimale, elle est aussi minimale.

Pour obtenir des 3-voltrices 1-minimales d'ordre 4 on peut encore utiliser les procédés qui ont donné des 2-voltrices 1-minimales d'ordre 4.

Pour la méthode de partitionnement illustrée par la figure 109 (p 168) une précaution supplémentaire doit être prise pour tenir compte des relations à trois matrices par membre. Les 3-matrices d'ordre 4 qui ont un 3 n'ont qu'une B-décomposition sauf si elles contiennent comme sous-matrice la matrice UN(3x3) qui a deux B-décompositions, et qui induit donc deux B-décompositions pour la matrice d'ordre 4. Ainsi (1) + (4) + (5) = (2) + (3) + (6) a un 3 en position (1,1) et,en sous-matrice opposée,la matrice UN(3x3). De la même façon (1) + (10) + (14) = (4) + (8) + (16) a un 3 en position (3,4). On évitera donc dans la 3-voltrice les plans de cette forme car l'apport de nouvelles matrices de permutation risqueraient de faire apparaître des 1-voltrices (fig 109 p 168).

Figure 107 : Construction de 2-voltrices 1-minimales d'ordre 4

Les deux 2-voltrices 1-minimales obtenues à partir de [1]x[3]

1°) Les B-décompositions :
[1] : (1), (8), (17), (24)
[3] : (1), (10), (17), (19).

2°) Les 2-voltrices 1-minimales :

plans :

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| (1) + (10) | (1) + (19) | (8) + (17) | (17) + (24) |

plans :

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| (1) + (8) | (1) + (24) | (10) + (17) | (17) + (19) |

3°) Autres expressions de la première 2-voltrice :
Relations utilisées (8) + (17) = (11) + (14)
(17) + (24) = (18) + (23)

la 2-voltrice — Couple générateur

plans :

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| (1) + (10) | (1) + (19) | (8) + (17) | (17) + (24) |

⟸ [1] : (1), (8), (17), (24)
[3] : (1), (10), (17), (19)

||

plans :

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| (1) + (10) | (1) + (19) | (11) + (14) | (17) + (24) |

⟸ [4] : (1), (11), (14), (24)
[3] : (1), (10), (17), (19)

||

plans :

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| (1) + (10) | (1) + (19) | (8) + (17) | (18) + (23) |

⟸ [2] : (1), (8), (18), (23)
[3] : (1), (10), (17), (19)

||

plans :

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| (1) + (10) | (1) + (19) | (11) + (14) | (18) + (23) |

2.(1) + (10) + (11) + (14)
+ (18) + (19) + (23)
B-décomposition spéciale de 2.UN(4x4)

Figure 108 : Construction de 2-voltrices 1-minimales d'ordre 4

Tableau récapitulatif :

| classes des couples | représentant | cardinal de la classe C | nb de 2-voltrices 1-minimale | Correction D | nb total de 2-volt. 1-minimales C x D |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | [1] x [2] | 36 | 2 | $2 \times \frac{1}{3}$ | 24 |
| 2 et 6 | [1] x [6] | 18 | 16 | $16 \times \frac{1}{4}$ | 72 |
| 4 | [1] x [15] | 6 | 48 | $48 \times \frac{1}{4}$ | 72 |
| 5 | [2] x [3] | 72 | 22 | $2\times\frac{1}{3}+7\times\frac{1}{2}+13$ | 1236 |
| 3 | [1] x [11] | 72 | 56 | $16\times\frac{1}{4}+40\times\frac{1}{2}$ | 1728 |
| 7 et 8 | [2] x [11] | 72 | 78 | $10\times\frac{1}{4}+32\times\frac{1}{2}+36$ | 3924 |
| | | | | | 7056 |

BIBL LILLE

La méthode des dispositions judicieuses de trois B-décompositions de UN(4x4) se complique par le fait qu'il y a vingt-quatre assemblages de base pouvant donner 8992 dispositions différentes. D'autre part il y a 2024 triplets de B-décompositions de UN(4x4) répartis en 28 classes (§ 4.2.4 p 53). Nous n'avons pas tenté l'exploitation du programme V3MIN qui "aurait pu" donner ces 3-voltrices 1-minimales. La figure 110 (p 168) donne les schémas des assemblages, et la figure 30 (p 50) contient la liste des représentants des classes de triplets de B-décompositions de UN(4x4).

## 8.4.4 REMARQUES SUR LES 4-VOLTRICES MINIMALES D'ORDRE 4

Comme 4 = 1 + 3 = 2 + 2, une 4-voltrice qui est 1-minimale sera minimale si elle n'est pas la somme de deux 2-voltrices 1-minimales.

La 16-matrice 4xUN(4x4) n'ayant pas de B-décompositions pures, on ne doit pas espérer obtenir des 4-voltrices minimales par la méthode de partitionnement des B-décompositions de 4.UN(4x4). Seules les B-décompositions spéciales peuvent éventuellement donner des 4-voltrices 1-minimales.

La figure 111 (p 170) donne un exemple de construction d'une 4-voltrice 1-minimale en utilisant deux fois les matrices de permutation d'une B-décomposition de 2.UN(4x4). Cette 4-voltrice n'est pas minimale car elle est, d'une façon évidente, la somme de deux 2-voltrices 1-minimales.

La méthode qui consiste à assembler des B-décompositions de UN(4x4) est encore ici théoriquement utilisable, bien que pratiquement très difficile à mettre en oeuvre compte-tenu du nombre considérable de dispositions possibles, du nombre de classes de quadruplets (il y en a 89 (fig 30 p 50)), et aussi du nombre de relations qui empêchent d'obtenir des 4-voltrices 1-minimales. La figure 112 (p 170) montre comment a été construite une 4-voltrice 1-minimale à partir de quatre B-décompositions disjointes de UN(4x4). Les seize matrices de permutation ont été placées de façon à"casser" les relations possibles. Mais la disposition obtenue n'est pas minimale car elle apparait dès sa construction comme la somme de deux 2-voltrices 1-minimales.

Quelle que soit la méthode utilisée, la construction d'une 4-voltrice minimale revient toujours à construire une 4-voltrice 1-minimale, puis ensuite à vérifier qu'elle est minimale. Pour cela il faut montrer qu'elle ne se B-décompose pas en deux 2-voltrices 1-minimales.

Une méthode pour cela consiste à B-décomposer chacune des 4-matrices qui constituent les plans de la 4-voltrice en deux 2-matrices, et ceci de toutes les façons possibles. On cherche alors à reconstituer une B-décomposition de 2.UN(4x4) en prenant une 2-matrice dans chaque plan. La figure 113 (p 172) en donne un exemple.

La figure 114 (p 174) montre, par l'échec de cette méthode, que la 4-voltrice de la figure 103 (p 158) est bien minimale.

Figure 109 : Construction de 3-voltrices 1-minimales

Méthode du partitionnement d'une B-décomposition de 3.UN(4x4)

1°) Partitionnement d'une B-décomposition spéciale de 3.UN(4x4)

3.UN(4x4) =

2.(1)+(4) | + (9)+(10)+(11) | + (14)+2.(18) | + (19)+(20)+(21)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 | 3 |
| 2 1 | 2 1 | 1 2 | 2 1 |
| 2 1 | 2 1 | 2 1 | 1 1 1 |
| 1 2 | 1 1 1 | 2 1 | 1 2 |

La B-décomposition de chaque plan est unique. Comme la B-décomposition de 3.UN(4x4) est spéciale, il n'y a pas de 1-voltrice. La 3-voltrice est 1-minimale.

2°) Cas où la 3-voltrice n'est pas 1-minimale.

3.UN(4x4) =

(1)+(2)+(3) | + (10)+(11)+(12) | + (14)+(15)+(18) | + (19)+(20)+(23)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 | 3 |
| 2 1 | 1 2 | 1 1 1 | 2 1 |
| 1 1 1 | 1 1 1 | 1 1 1 | 1 1 1 |
| 1 2 | 2 1 | 1 1 1 | 2 1 |
| | | (13)+(16)+(17) | |

Comme (14)+(15)+(18) = (13)+(16)+(17) on voit apparaitre la 1-voltrice [3] : (1), (10), (17), (19).

Figure 110 : Construction des 3-voltrices 1-minimales.

Schémas des assemblages de B-décompositions de UN(4x4)

1°) Les 3 B-décompositions sont notées 1, 2 et 3 :

plans :

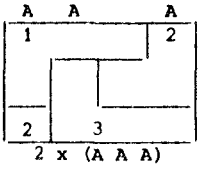
| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 |
| 1 | 3 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 3 | 3 |

Chaque case sera occupée par une matrice de permutation de la B-décomposition correspondante chacune des B-décompositions a 2 matrices de permutation dans un même plan. Il y a deux façons de placer les 3 B-décompositions dans ce schéma d'assemblage qui donne 2 assemblages de base.

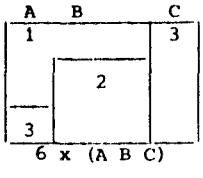
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 2 |
| 2 | 3 | 1 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 3 |

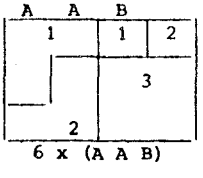
2°) Liste des schémas d'assemblage et notations.



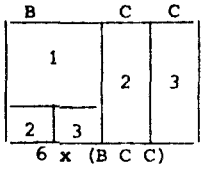
2 x (A A A)



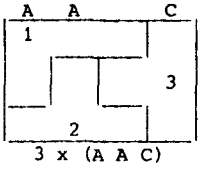
6 x (A B C)



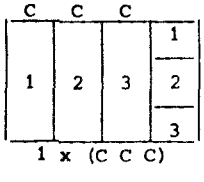
6 x (A A B)



6 x (B C C)



3 x (A A C)



1 x (C C C)

## 8.5 B-DÉCOMPOSITION DES p-VOLTRICES

### 8.5.1 CAS DES p-VOLTRICES D'ORDRE n

Théorème : Les p-voltrices qui ne sont pas minimales se décomposent, en général de plusieurs façons en somme de p-voltrices minimales.

Une B-décomposition peut contenir

- ne contenir que des 1-voltrices
- contenir des 1-voltrices et des p-votrices minimales avec $p > 1$
- ne contenir aucune 1-voltrice.

En général une p-voltrice a des B-décompositions des trois sortes. Si elles n'ont que des B-décompositions sans 1-voltrices, elles sont 1-minimales, et inversement, les p-voltrices 1-minimales ont des B-décompositions sans 1-voltrices.

Pour obtenir une B-décomposition d'une p-voltrice, une méthode simple consiste à en extraire des 1-voltrices jusqu'à obtenir une p'-voltrice 1-minimale dont une B-décomposition complétera celle de la p-voltrice. Les B-décompositions de la p'-voltrice 1-minimale s'obtiennent en en extrayant les q-voltrices minimales avec q croissant depuis 2 en utilisant les techniques du paragraphe précédent. L'intérêt de cette méthode est de décomposer ou de montrer la minimalité.

Le programme DEICV (§ 8.1.3 p 153) permet de calculer toutes les B-décompositions en 1-voltrices des p-voltrices, tandis que RESID* (§ 11.9.3 p 338) décompose en somme de 1-voltrices et d'une q-voltrice 1-minimale.

Comme aucune liste complète des p-voltrices minimales, même à l'ordre 4, n'a été établie, et qu'aucun critère simple ne permet de les reconnaître ou de les construire, aucun programme n'a été écrit pour obtenir toutes les B-décompositions en p'-voltrices minimales d'une p-voltrice. On ne peut donc pas non plus envisager la B-décomposition d'une p-voltrice en un minimum de p-voltrices minimales. Toutefois pour n = 3, compte tenu du nombre réduit de matrices de permutation et de B-décompositions de UN(3x3) une étude compléte des B-décompositions des p-voltrices d'ordre 3 a pu être faite. Elle est transcrite dans le paragraphe suivant.

### 8.5.2 MULTIDECOMPOSITION DES p-VOLTRICES D'ORDRE 3

#### *8.5.2.1 Propriétés des matrices R d'une p-voltrice d'ordre 3.*

Une p-voltrice a en général, plusieurs matrices R (§ 8.1.1 p 151). Comme elles sont construites avec des décompositions des plans, si ces dernières sont à coefficients positifs la matrice R est à éléments positifs. Pour toute p-voltrice il existe toujours au moins une matrice $R \geq 0$.

Figure 111 : Une 4-voltrice d'ordre 4 1-minimale qui n'est pas minimale

1°) B-décomposition spéciale de 2.UN(4x4) :
2.(1) + (10) + (11) + (14) + (18) + (19) + (23)

2°) La 4-voltrice :

plans :

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 4 | 2 2 | 2 2 | 2 2 |
| 4 | 3 1 | 4 | 1 3 |
| 4 | 3 1 | 2 2 | 1 2 1 |
| 4 | 1 2 1 | 2 2 | 3 1 |
| 4.(1) | (10)+(11)+2.(23) | 2.(19)+2.(14) | (10)+(11)+2.(18) |

3°) Elle est somme de deux 2-voltrices 1-minimales qui sont :

plans

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 1 | 1 1 | 1 1 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 1 1 | 1 1 | 1 1 |
| 2 | 1 1 | 1 1 | 1 1 |
| 2.(1) | (10)+(23) | (19)+(14) | (11)+(18) |

plans

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 1 | 1 1 | 1 1 |
| 2 | 1 1 | 2 | 1 1 |
| 2 | 2 | 1 1 | 1 1 |
| 2 | 1 1 | 1 1 | 2 |
| 2.(1) | (11)+(23) | (19)+(14) | (10)+(18) |

Figure 112 : Une 4-voltrice d'ordre 4 1-minimale

1°) 4 B-décompositions disjointes de UN(4x4)

[1] : (1), (10), (17), (19)
[8] : (2), (12), (13), (23)
[11] : (3), (11), (16), (20)
[13] : (4), (7), (18), (21)

2°) Liste des relations susceptibles d'intervenir :

a) introduction de nouvelles matrices de permutation :
(1) + (17) = (18) + (6)
(10) + (19) = (8) + (24)
(3) + (11) = (5) + (9)
(16) + (20) = (14) + (22)

b) relations internes :
(2) + (23) = (4) + (21)
(12) + (13) = (7) + (18)

4°) La 4-voltrice 1-minimale mais pas minimale :

| | | | |
|---|---|---|---|
| (4) + (21) | (7) + (18) | (1)——(17) | 2-voltrice 1-minimale |
| (10)——(19) | | | |
| (2) + (23) | (12) + (13) | (3)——(11) | 2-voltrice 1-minimale |
| (16)——(20) | | | |

BUS LILLE

A l'ordre 3, on passe d'un couple de deux matrices (RA,RB) (une matrice R) à un autre, en enlevant un certain même nombre à tous les éléments d'une ligne de l'une des matrices et en l'ajoutant aux éléments de la ligne correspondante de l'autre, c'est à dire en remplaçant dans un plan un certain nombre de l'une des B-décompositions de UN(3x3) par ce même nombre de l'autre B-décomposition. On peut par ces manipulations trouver des matrices R ayant des éléments négatifs.

En conséquence, pour toutes les matrices RA d'une p-voltrice, les sommes des éléments d'une même ligne appartiennent à la même classe des entiers modulo 3. Il en est de même pour RB.

Puisque, dans une p-voltrice, les sommes sur les rangées ayant un élément par plan sont égales à p, qu'un élément d'une telle rangée est, dans son plan, "COUVERT" par deux matrices de permutation, que chaque matrice de permutation "couvre" simultanément des éléments de trois telles rangées, on peut démontrer que les sommes sur les colonnes de RA sont égales, ainsi que les sommes sur les colonnes de RB, et que les deux valeurs obtenues ont pour somme p. C'est une propriété caractéristique des p-voltrices d'ordre 3. Si alors les sommes sur les lignes de l'une des matrices sont égales, cette matrice sera une q-matrice et l'autre sera une (p-q)-matrice. On peut aussi montrer que si les sommes sur les lignes d'une des matrices ne sont pas égales modulo 3, elles appartiennent, pour chacune des matrices, aux trois classes d'entiers modulo 3 (fig 115 p 176 et 116 p 178). Enfin si l'une des matrices RA ou RB est nulle l'autre matrice est une p-matrice. Dans ce dernier cas la p-voltrice a toujours une B-décomposition.

Si une p-voltrice d'ordre 3 a un zéro elle n'a au plus qu'une seule B-décomposition. En effet, le plan contenant ce zéro ne contiendra pas, les deux matrices de permutation non nulles dans cette case zéro et qui appartiennent chacune à une B-décomposition de UN(3x3). Les matrices RA et RB, quelle que soit la matrice R, auront donc chacune, au moins, un zéro dans la ligne correspondante. Elles n'auront donc qu'une seule B-décomposition au plus (§ 5.6.1, p 93).

### 8.5.2.2 *Critère de B-indécomposabilité des p-voltrices d'ordre 3.*

Comme les seules matrices admettant des B-décompositions sont les p-matrices, et qu'à toute B-décomposition de RA et RB correspond une B-décomposition de la p-voltrice, cette dernière aura des B-décompositions si et seulement s'il existe une matrice RA (ou RB) qui soit une p-matrice, c'est à dire qui ait tous ses éléments non-négatifs et des sommes sur les lignes égales.

Considérons alors pour une p-voltrice une de ses matrices RA $\geq 0$, et envisageons une de ses lignes. Si q est la somme sur cette ligne, $m_A$ le plus petit élément de cette ligne, $m_B$ le plus petit élément de la ligne correspondante de RB, alors toute matrice RA $\geq 0$ de la p-voltrice aura, comme somme possible pour cette ligne, un entier égal a q modulo 3 compris entre $q-3m_A$ et $q+3m_B$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une p-voltrice d'ordre 3 soit B-décomposable est alors que les sommes possibles pour les trois lignes de RA (ou de RB) aient une valeur commune.

Figure 113 :
B-décomposition d'une 4-voltrice d'ordre 4 1-minimale en deux 2-voltrices 1-minimales.

1°) La 4-voltrice :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 2 | 1 2 1 | 1 1 2 | 2 2 |
| 4 | 2 2 | 1 3 | 1 1 2 |
| 2 2 | 1 1 2 | 1 1 2 | 1 3 |
| 2 2 | 2 2 | 2 2 | 2 2 |
| 2.(12)+2.(17) | (4)+(7)+(9)+(14) | (2)+(16)+(19)+(22) | 2.(3)+(19)+(21) |

Les B-décompositions des plans sont uniques.
La seule B-décomposition de UN(4x4) est [12] : (3), (12), (14), (21) mais (3) et (21) sont dans le 4ème plan.

2°) B-décompositons des plans en 2-matrices :
plan 1 : 2.(12)/2.(17) ; (12)+(17)/.
plan 2 : (4)+(7)/(9)+(14) ; (4)+(9)/(7)+(14) ; (4)+(14)/(7)+(9).
plan 3 : (2)+(16)/(19)+(22) ; (2)+(19)/(16)+(22) ; (2)+(22)/(16)+(19)
plan 4 : 2.(3)/(19)+(21) ; (3)+(19)/(3)+(21).

3°) Essais de reconstitution de 2.UN(4x4) avec ces 2-matrices :

A) 1) 2.(12)
2) essais infructueux (apparition d'un 3) jusqu'à (4) + (14)
3) seule (19) peut être ajoutée sans créer de 3.

| |
|---|
| 1 2 1 |
| 1 1 2 |
| 2 2 |
| 2 2 |

(2.(12))+((4)+(14))

B) 1) 2.(17)
2) seule (7) peut être ajoutée sans créer de 3.

| |
|---|
| 2 |
| 2 |
| 2 |
| 2 |

2.(17)

C) 1) (12) + (17)
2) (4) + (7)
3) essais infructueux jusqu'à (2)+(19)
4) aucune matrice du plan 4 ne peut être ajoutée sans créer de 3.

| |
|---|
| 2 2 1 1 |
| 2 1 1 2 |
| 1 1 2 2 |
| 1 2 2 1 |

((12)+(17))
+((4) +(7))
+((2) +(19))

4°) Obtention de la 2-voltrice 1-minimale :

D) 1) (12) + (17)
2) (4) + (7)
3) essais infructueux après (2)+(19) jusqu'à (16)+(19)
4) la matrice qui manque pour obtenir 2.UN(4x4) est

| |
|---|
| 1 2 2 1 |
| 2 1 1 2 |
| 1 1 2 2 |
| 2 2 1 1 |

((12)+(17))
+ ((4)+(7))
+((16)+(19))

| |
|---|
| 1 1 |
| 1 1 |
| 1 1 |
| 1 1 |

qui est (3)+(21), autorisée dans le plan 4.

Une 2-voltrice 1-minimale de la B-décomposition de la 4-voltrice est donc :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 1 | 1 1 | 1 1 | 1 1 |
| 2 | 1 1 | 1 1 | 1 1 |
| 1 1 | 1 1 | 1 1 | 1 1 |
| 1 1 | 1 1 | 1 1 | 1 1 |
| (12)+(17) | (4)+(7) | (16)+(19) | (3)+(21) |

Par différence, on obtient la seconde 2-voltrice 1-minimale :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 1 | 1 1 | 1 1 | 1 1 |
| 2 | 1 1 | 2 | 1 1 |
| 1 1 | 1 1 | 2 1 | 2 |
| 1 1 | 1 1 | 1 1 | 1 1 |
| (12)+(17) | (9)+(14) | (2)+(22) | (3)+(19) |

En conséquence, si les sommes sur les lignes d'une matrice RA (ou RB) n'appartiennent pas à la même classe des entiers modulo 3, la p-voltrice n'est pas B-décomposable (fig 116 p 178).

### 8.5.2.3 *B-décomposition en 1-voltrices des p-voltrices d'ordre 3*

L'algorithme de B-décomposition en 1-voltrices des p-voltrices d'ordre 3 résulte des remarques du paragraphe précédent.

Pour B-décomposer une telle p-voltrice

- Construire pour chaque plan de la p-voltrice une B-décomposition en matrices de permutation en utilisant la méthode suggérée au paragraphe 5.6.1 (p 93 ) (fig 56 p 98 ).
- Construire ensuite, avec les B-décompositions des plans, un couple (RA,RB). Vérifier la B-décomposabilité en calculant les sommes possibles des lignes de RA.
- Si elle est B-décomposable, par échange de B-décompositions de UN(3x3) entre lignes de RA et RB, rendre égales les lignes de RA, et du même coup celles de RB ;
- B - Décomposer les matrices RA et RB qui sont alors des q- et (p-q)-matrices, en utilisant encore la méthode du paragraphe 5.6.1.

Aux B-décompositions de RA et RB correspondent des B-décompositions de la p-voltrice en 1-voltrices.

Pour trouver toutes les B-décompositions de la p-voltrice il faut construire toutes les B-décompositions de ses plans, en déduire tous les couples (RA, RB) et construire toutes les B-décompositions des matrices de chacun d'eux.

La figure 117 (p 180) donne à titre d'exemple les 4 B-décompositions de la 3-voltrice UN(3x3x3) (voltrice cubique d'ordre 3 dont tous les éléments sont 1).

### 8.5.2.4 *Décomposition dans la base des 1-voltrices d'ordre 3.*

Les 1-voltrices , qui ne sont pas dans la base de l'espace vectoriel des p-voltrices d'ordre 3 (§ 6.3. p 119), s'exprimant facilement en fonction de celles de la base, d'une décomposition d'une p-voltrice en 1-voltrice quelconque, on peut déduire sa décomposition dans la base.

Quand la p-voltrice n'a pas de B-décomposition, on transforme simultanément ses matrices RA et RB pour en faire des q- et (p-q)-matrices qu'on B-décomposera, puis on fait les transformations inverses sur la décomposition obtenue.

Les transformations sont :

a) la multiplication par 3 pour rendre les sommes sur les lignes de RA (et de RB) égales à 0 modulo 3 ;

Figure 114 : Une 4-voltrice d'ordre 4 minimale

Il s'agit de la 4-voltrice de la figure 103 (p 158).

1°) Construction :

Assemblage de deux B-décompositions spéciales de 2.UN(4x4) dont la somme reste spéciale pour 4.UN(4x4). Elles diffèrent par au moins trois matrices de permutation. Les assemblages se font en fonction des relations susceptibles d'apparaître.

2°) Les deux B-décompositions de 2.UN(4x4).

{6} : (1) (4) / (1) (4) (8) (11) / (11) (15) (18) (20) (24) / (20) (24)

{13} : 2.

3°) Assemblage :

plans

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 20 | 11 |
| 15 | 8 | 24 | 11 |
| 18 | 1 | 20 | 11 |
| 13 | 4 | 24 | 16 |

Relation : (1) + (8) = (2) + (7)

4°) La 4-voltrice

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 3 / 1 2 1 / 1 2 1 / 1 3 | 3 1 / 1 1 2 / 1 3 / 2 1 1 | 4 / 2 2 / 2 2 | 3 1 / 1 3 / 3 1 / 1 3 |
| (1)+(13)+(15)+(18) | (2)+2.(4)+(7) / (1)+2.(4)+(8) | 2.(20)+2.(24) | 3.(11)+(16) |

5°) Décompositions des plans en 2-matrices :

plan 3 2.(20)/2.(24) ; (20) + (24)/.

plan 4 2.(11) / (11) + (16)

plan 1 liste des mat. de perm. : (1), (13), (15), (18)

plan 2 par différence à 2.UN(4x4)

6°) essais de construction de la 2-voltrice par réalisation d'une décomposition de 2.UN(4x4):

2.(20) + 2.(11) = + aucune des m.p. du plan 1. Elles donnent toutes au moins un 3

idem + (11)+(16) = + choix (1) (13) (15) (18) (15)+(18) = 1 3 2

2.(24) + 2.(11) = + admises individuellement (1) (13) (15) (18) seule (1) est admise. Les autres m.p. du plan 1 donnent un 3.

idem + (11)+(16) = 3

(20)+(24) + 2.(11) = + (1) (13) (15) (18) (1)+(13) =

1 2 1 2 / 2 1 1 2 / 2 2 2 0 / 1 1 2 2 — (20)+(24) + 2.(11) + (1)+(13) — pour avoir 2.UN(4x4) il manque : 1 1 / 1 1 / 2 / 1 1 — (4)+(16) — Or (16) n'est pas dans le plan 2.

idem + (11)+(16) = + (1) (13) (15) (18) (1)+(13) = décomposition unique

1 2 2 2 / 2 2 1 1 / 1 2 2 1 / 2 1 1 2 — pour avoir 2.UN(4x4) il manque : 1 1 / 1 1 / 1 1 / 1 1 — (4)+(11) — Or (11) n'est pas le plan 2

idem + idem = idem + décomposition unique 1 1 / 2 / 1 1 / 2 — (1)+(15) = un 3 en position (2.2)

idem + idem = idem + 2 / 1 1 / 1 1 / 2 — (13)+(15) = un 3 en position (1,3)

Aucun essai n'a abouti . La 4-voltrice est minimale.

BIBS LILLE

b) échanger les B-décompositions de UN(3x3) entre une ligne de RA et sa correspondante de RB pour obtenir des sommes sur les lignes, égales ;

c) faire disparaitre de RA, et RB les valeurs négatives en leur ajoutant UN(3x3), ce qui revient à ajouter UN(3x3x3) à la p-voltrice.

Voir un exemple à la figure 118 (p 181).

### 8.5.2.5 *Numérotation des 2-voltrices d'ordre 3 B-indécomposables.*

Il y a cinquante-quatre 2-voltrices B-indécomposables d'ordre 3 (figure 98 p 154). Elles se déduisent les unes des autres par p-transformations (§ 6.2.3 p 117).

Leur B-indécomposabilité résulte des propriétés des matrices RA et RB.

Elles se caractérisent par le fait qu'un plan ne contient que des matrices de permutation de la B-décomposition A de UN(3x3) et qu'un autre plan ne contient que des matrices de permutation de la B-décomposition B. Le troisième plan contient la matrice de chacune des B-décompositions, non utilisée dans les autres plans. Il y a neuf façons de faire cette répartition des matrices de permutation. Il y a 3! façons de permuter les plans pour obtenir toutes ces 2-voltrices.

Si on place dans le plan 1 les deux matrices de permutation appartenant aux deux B-décompositions et dans le plan 2 les autres matrices de la B-décomposition A de UN(3x3), une 2-voltrice sera repérée par un TRIPLET composé, en première place, du numéro de la matrice de permutation de la B-décomposition A prise dans le plan 1, en deuxième place, du numéro de la matrice de permutation de la B-décomposition B prise dans le même plan 1 et, en troisième place, le numéro de permutation des plans qui a permis d'en déduire la 2-voltrice (fig 119 p 182).

### 8.5.2.6 *Les p-voltrices minimales d'ordre 3.*

Pour généraliser le théorème de VON NEUMANN aux p-voltrices d'ordre 3, et comme toutes les p-voltrices n'ont pas de B-décompositions en 1-voltrices, nous sommes amenés à utiliser dans les B-décompositions, des p-voltrices minimales. Or, pour n = 3, sont minimales, les 1-voltrices et les 2-voltrices B-indécomposables, et ce sont les seules (cela se déduit des résultats du paragraphe suivant).

Elles sont 1-minimales.

### 8.5.2.7 *Forme des p-voltrices 1-minimales pour $p > 1$ et $n = 3$.*

Lemme Les p-voltrices 1-minimales qui ne sont pas des 1-voltrices ($p > 1$) ont pour valeur p un nombre pair et sont de la forme

$$r.(a,b,c) + s.(a,d,c')$$

où (a,b,c) et (a,d,c') sont deux 2-voltrices 1-minimales avec $d \neq b$,

$$(c,c') = (1,6),\ (5,3) \text{ ou } (4,2),$$

et $r + s = p/2$, avec $r,s \geq 0$.

Figure 115 : Une 29-voltrice et des matrices R. (n=3)

plan 1

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 7 | 17 |
| 8 | 9 | 12 |
| 16 | 13 | 0 |

plan 2

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 10 | 9 |
| 11 | 13 | 5 |
| 8 | 6 | 15 |

plan 3

| | | |
|---|---|---|
| 14 | 12 | 3 |
| 10 | 7 | 12 |
| 5 | 10 | 14 |

Une matrice R associée :

| | | Σ ligne RA | (1) | (4) | (5) | (2) | (3) | (6) | Σ ligne RB | Σ globale |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 15 | . | 7 | 8 | 6 | . | 8 | 14 | 29 |
| plan | 2 | 15 | 8 | 3 | 4 | 2 | 7 | 5 | 14 | 29 |
| | 3 | 15 | 7 | 5 | 3 | 6 | 7 | 1 | 14 | 29 |
| | | Σ colonne | 15 | 15 | 15 | 14 | 14 | 14 | | |
| | | | | RA | | | RB | | | |

Une autre matrice R associée :

| Σ | (1) | (4) | (5) | (2) | (3) | (6) | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | . | 7 | 8 | 6 | . | 8 | 14 |
| 9 | 6 | 1 | 2 | 4 | 9 | 7 | 20 |
| 18 | 8 | 6 | 4 | 5 | 6 | . | 11 |
| Σ → | 14 | 14 | 14 | 15 | 15 | 15 | |

obtenue en ajoutant à la première la matrice :

| Σ | | | | | | | Σ | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | 0 | 0 |
| -6 | -2 | -2 | -2 | 2 | 2 | 2 | 6 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -3 | 0 |
| | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | | |

La démonstration de ce lemme fait appel aux propriétés des matrices RA et RB de la p-voltrice.

On choisit un couple (RA,RB) positif où chaque ligne de RA contient un zéro. On montre alors que RA, qui ne contient pas de matrice de permutation, a une sous-matrice nulle qui est, soit une ligne, soit une sous-matrice d'ordre 2. Dans ce dernier cas l'élément, n'appartenant pas aux rangées rencontrant cette sous-matrice, est aussi nul. Chaque colonne de RA contient aussi un élément non nul. Il y a alors, aux permutations des rangées près, trois formes possibles pour la matrice RA.

On montre ensuite que la matrice RB a, de la même façon que RA, une sous-matrice nulle et que les sous-matrices des deux matrices n'ont pas de ligne en commun, sauf quand il s'agit de deux sous-matrices d'ordre 2 qui n'ont alors qu'une ligne en commun. Toujours parce que la p-voltrice est 1-minimale, la matrice RB a au moins un zéro par ligne de la sous-matrice nulle de RA. On ne peut alors, en remplaçant une B-décomposition B de UN(3x3) par la B-décomposition A, détruire la nullité de la sous-matrice de RA. Enfin aucune colonne de RB n'est nulle.

On trouve, dès lors, six dispositions possibles pour les zéros des matrices RA et RB, aux permutations des lignes près (fig 120 p 183)

Il reste à définir les éléments inconnus en utilisant les propriétés suivantes :

- les sommes sur les colonnes de RA sont égales,
- les sommes sur les colonnes de RB sont égales,
- la somme sur une colonne de RA et celle sur une colonne de RB ont pour somme p,
- les sommes sur les lignes du couple (RA,RB) sont égales à p,
- et tous les éléments du couple (RA, RB) sont positifs ou nuls.

Les couples de matrices (RA,RB) qu'on obtient sont, soit ceux de multiples de 2-voltrices 1-minimales, soit la somme de deux d'entre eux. Ces derniers cas sont ceux où l'une des matrices RA et RB n'a, comme sous-matrice nulle, qu'une ligne et, l'autre, qu'une sous-matrice d'ordre 2 (fig 121 p 184) ; les matrices RA des deux 2-voltrices obtenues ont alors les deux matrices de permutation de la B-décomposition A de UN(3x3) dans la même ligne et la dernière matrice de permutation, dans des lignes différentes, mais dans la même colonne

### 8.5.2.8 *B-décomposition des p-voltrices d'ordre 3 :*

Théorème **Toute p-voltrice d'ordre 3 est somme de p-voltrices minimales.**

**Dans tous les cas on peut trouver une B-décomposition faisant intervenir au plus deux 2-voltrices 1-minimales.**

En effet, si on extrait successivement de la p-voltrice toutes les 1-voltrices possibles, la p-voltrice qui reste est 1-minimale et se décompose comme l'indique le lemme précédent. La p-voltrice a donc la forme

Figure 116 : B-décomposabilité et B-**Indécomposabilité des** p-voltrices d'ordre 3.

29-voltrice (voir figure 115)

| Σ ligne RA | (1) | (4) | (5) | (2) | (3) | (6) | $m_A$ | $m_B$ | sommes possibles pour RA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | . | 7 | 8 | 6 | . | 8 | 0 | 0 | 15 |
| 9 | 6 | 1 | 2 | 4 | 9 | 7 | 1 | 4 | 6, 9, 12, 15, 18, 21 |
| 18 | 8 | 6 | 4 | 5 | 6 | . | 4 | 0 | 6, 9, 12, 15, 18 B-décomposable |

14-voltrice

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 7 |
| 5 | 7 | 2 |
| 5 | 4 | 5 |

plan 1

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 6 | 2 |
| 6 | 4 | 4 |
| 2 | 4 | 8 |

plan 2

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 5 | 5 |
| 3 | 3 | 8 |
| 7 | 6 | 1 |

plan 3

| Σ ligne R A | (1) | (4) | (5) | (2) | (3) | (6) | $m_A$ | $m_B$ | sommes possibles pour RA | q(mod3) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 | 4 | 1 | 1 | 4, 7, 10, | 7≡1 |
| 8 | 4 | 2 | 2 | 2 | 4 | . | 2 | 0 | 2, 5, 8, | 8≡2 |
| 6 | . | 4 | 2 | 4 | 1 | 3 | 0 | 1 | 6, 9, | 6≡0 |

B-indécomposable

6-voltrice (3x(1,6,1))

| Σ ligne RA | (1) | (4) | (5) | (2) | (3) | (6) | $m_A$ | $m_B$ | sommes possibles pour RA | q(mod3) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | | | | | 3 | 0 | 0 | 3, | 3≡0 |
| 6 | | 3 | 3 | | | | 0 | 0 | 6, | 6≡0 |
| 0 | | | | 3 | 3 | | 0 | 0 | 0, | 0≡0 |

B-indécomposable.

BNS LILLE

$$V = \sum_i q_i V^i + r.(a,b,c) + s.(a,d,c')$$

avec $\sum_i q_i + 2r + 2s = p$

et $\forall i,\ q_i > 0$

$r \geq 0$

$s \geq 0$

L'algorithme pour construire cette B-décomposition résulte immédiatement des remarques ci-dessus. En regardant les sommes sur les lignes des matrices RA et RB de la p-voltrice 1-minimale qui reste on trouve immédiatement r et s.

Remarquons qu'une p-voltrice qui a une B-décomposition en p-voltrices minimales peut avoir éventuellement des B-décompositions en 1-voltrices

Compte tenu des relations qui existent entre les 1-voltrices d'ordre 3, toute combinaison linéaire à coefficients positifs de 1-voltrices est égale à une combinaison à coefficients positifs contenant au plus neuf 1-voltrices différentes. Comme d'autre part il existe, entre les 2-voltrices 1-minimales, des relations de la forme

$$(1,2,1) + (1,3,6) = -A5 + A2 + A6 + B1 + B5 + B2$$

il semble que toute p-voltrice d'ordre 3 soit une combinaison linéaire à coefficients positifs de au plus cinq p-voltrices minimales. Le cinq est une conjecture.

Figure 117 :Multidécomposition de UN(3x3x3).

$$UN(3x3x3) = \underset{\text{plan 1}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{plan 2}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{plan 3}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Chaque plan est UN(3x3) = (1)+(4)+(5) = (2)+(3)+(6).

Il y a deux couples (RA,RB) où RA est une q-matrice (q=0 ou 3)

Couples (RA,RB) :

$$\underset{\text{couple 1}}{\underset{RA1}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{RB1}{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}} \qquad \underset{\text{couple 2}}{\underset{RA2}{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{RB2}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

Les matrices non-nulles sont UN(3x3).

Il y a pour chacun des couples deux B-décompositions.

B-décompositions à partir du couple 1 :

RA1 = (1)+(4)+(5) = (2)+(3)+(6).

d'où

UN(3x3x3) = A1+A4+A5 (B-décomposition AA)

= A2+A3+A6 (B-décomposition AB).

B-décompositions à partir du couple 2 :

RB2 = (1)+(4)+(5) = (2)+(3)+(6)

d'où

UN(3x3x3) = B1+B4+B5 (B-décomposition BA)

= B2+B3+B6 (B-décomposition BB)

Figure 118 : Décomposition dans une base d'une 2-voltrice d'ordre 3 : (5,6,1).
base : {A1, A4, A5, A2, A3, B1, B4, B2, B3}.

| Σ | (1) | (4) | (5) | (2) | (3) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | 1 | | | 1 |
| 2 | 1 | 1 | | | | |
| 0 | | | | 1 | 1 | |
| | RA | | | RB | | |

$$\frac{5}{3}A1 + \frac{4}{3}A4 + 2xA5 - \frac{2}{3}A2 - \frac{1}{3}A3 - \frac{2}{3}B1 - \frac{1}{3}B4 - \frac{1}{3}B2 - \frac{2}{3}B3$$

multiplication par 3

| Σ (mod 3) | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3≡0 | | | 3 | | | 3 |
| 6≡0 | 3 | 3 | | | | |
| 0≡0 | | | | 3 | 3 | |

division par 3

$$5xA1 + 4xA4 + 6xA5 - 2xA2 - A3 - 2xB1 - B4 - B2 - 2xB3$$

égalisation des lignes

| Σ | | | | | | | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | | 3 | | | 3 | 3 |
| 3 | 2 | 2 | -1 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | -1 | 3 |
| Σ → | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | |

comme

$$A6 = A1 + A4 + A5 - A2 - A3$$
$$B6 = A1 + A4 + A5 - B2 - B3$$

$$- A1 + A3 + A5 + 2xA6$$
$$- B1 + B2 + B5 + 2xB6$$

addition de UN(3x3) à RA et RB

| Σ | | | | | | | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 4 | 6 |
| 6 | 3 | 3 | 0 | 2 | 2 | 2 | 6 |
| 6 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 0 | 6 |
| Σ→ | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | |
| | RA | | | RB | | | |

$$- (A1 + A4 + A5)$$
$$- (B1 + B4 + B5)$$

(soustraction de UN(3x3) à RA et RB)

$$A1 + A3 + 2xA5 + 2xA6 + B2 + B4 + 2xB5 + 2xB6$$

B-décomposition de
RA = (1)+(3)+2(5)+2(6)
RB = (2)+(4)+2(5)+2(6)

d'où

BUS LILLE

Figure 119 : Numérotation des 2-voltrices B-indécomposables ($m = 3$).

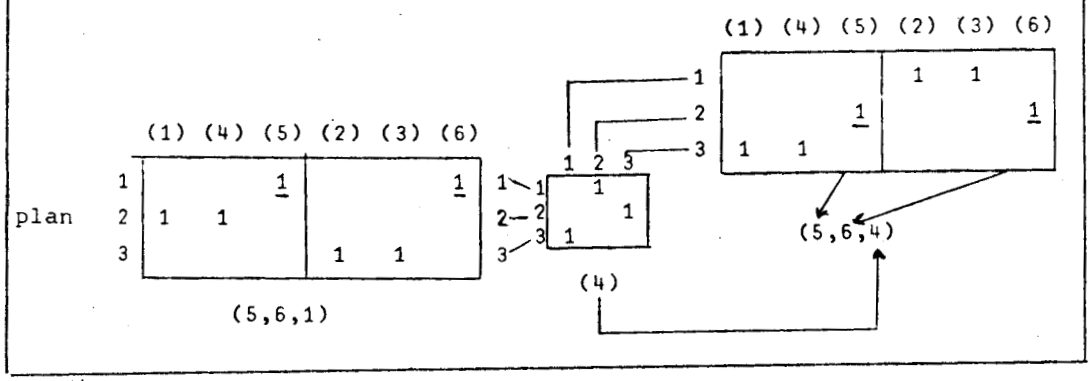


Figure 120: Dispositions des zéros des couples (RA,RB) des p-voltrices 1-minimales non nulles d'ordre 3. ($t = p-x$)

1) Sous-matrice d'ordre 2 et ligne nulle dans RA:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | x | x | | 0 | 0 |
| x | 0 | 0 | | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | $\underline{0}$ | | |

RA RB

1

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | x | x | 0 | 0 | 0 | |
| x | 0 | 0 | t | | | |
| 0 | 0 | 0 | $\underline{0}$ | | | |

RA RB

2

2) Sous-matrice d'ordre 2 dans RA:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | x | x | | 0 | 0 |
| $y_1$ | 0 | 0 | | 0 | 0 |
| $y_2$ | 0 | 0 | $\underline{0}$ | | |

RA RB

3

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | x | x | 0 | 0 | 0 | |
| $y_1$ | 0 | 0 | $\underline{0}$ | t | | |
| $y_2$ | 0 | 0 | t | $\underline{0}$ | | |

RA RB

4

3) Ligne nulle dans RA:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | x | $y_1$ | | 0 | 0 | |
| x | 0 | $y_2$ | | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 0 | $\underline{0}$ | t | t | |

RA RB

5

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | x | $y_1$ | 0 | 0 | 0 | |
| x | 0 | $y_2$ | t | | | |
| 0 | 0 | 0 | $\underline{0}$ | | | |

RA RB

6

Figure 121 : Matrice R des p-voltrices 1-minimales non-nulles d'ordre 3.

1)

$$\underset{RA}{\begin{bmatrix} & r & r \\ r & & \end{bmatrix}} \underset{RB}{\begin{bmatrix} & & \\ r & & \\ & r & r \end{bmatrix}} = r \cdot \underset{(a,b,c)}{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (a) & (b) \end{array} \\ \begin{bmatrix} & 1 & 1 \\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ 1 & & \\ & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}} \begin{array}{c} \Sigma \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

avec $r = p/2$.

2)

$$\underset{RA}{\begin{bmatrix} & r+s & r+s \\ r & & \\ s & & \end{bmatrix}} \underset{RB}{\begin{bmatrix} & & \\ & r+s & s \\ r+s & & r \end{bmatrix}} = r \cdot \underset{(a,b,c)}{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (a) & (b) \end{array} \\ \begin{bmatrix} & 1 & 1 \\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \end{array}} + s \cdot \underset{(a,d,c)}{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} (a) & (d) \end{array} \\ \begin{bmatrix} & 1 & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & 1 & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix} \end{array}}$$

avec $r+s = p/2$ et $r,s \geq 0$

BUS LILLE

# IV. CONSEQUENCES DANS LES HYPERGRAPHES ET CONCLUSION

# 9. MATRICES, VOLTRICES ET HYPERGRAPHES

## 9.1 HYPERGRAPHE ASSOCIÉ À UN TABLEAU

A un tableau est ASSOCIE un hypergraphe[1] dont les sommets sont les cases du tableau et les arêtes, les rangées.

Nous allons, pour les matrices carrées d'ordre n et les voltrices cubiques d'ordre n, étudier les hypergraphes correspondants.

Nous y verrons que

- les rangées parallèles correspondent à des couplages, (§ 9.5 p 191),
- les cases non-nulles des matrices de permutation et des 1-voltrices donnent des ensembles transversaux minimum (§ 9.6 p193),
- les sous-matrices et sous-voltrices permettent la bicoloration des hypergraphes (§ 9.7, p 197),
- La forte stabilité est réalisée par les cases non-nulles des matrices de permutation et des 1-voltrices, et une B-décomposition de UN(nxn) ou UN(nxnxn) est un partitionnement des sommets en n ensembles fortement stables (9.8 p 197),
- Enfin ,les matrices de permutation et les 1-voltrices sont des fonctions stochastiques à valeur {0,1} pour ces hypergraphes.

La remarque la plus importante est que les hypergraphes associés aux matrices sont sans cycles impairs tandis que ceux associés aux voltrices possèdent des cycles impairs de longueur supérieure ou égale à 7. Il en résulte que les hypergraphes associés aux matrices sont équilibrés et unimodulaires tandis que ceux associés aux voltrices ne le sont pas. La B-indécomposabilité de certaines p-voltrices est liée à cette propriété.

## 9.2 CARACTÉRISTIQUES DE CES HYPERGRAPHES

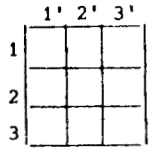
Comme les tableaux considérés sont carrés ou cubiques d'ordre n, les hypergraphes sont uniformes de rang n.

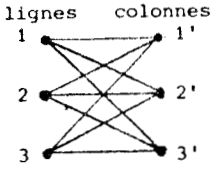
Comme deux rangées qui se rencontrent ne le font qu'en une seule case, le nombre maximum de rangées qui se rencontrent deux à deux est 2 pour les matrices, 3 pour les voltrices. Ce sont les rangs uniformes des duaux des hypergraphes considérés.

*(1) Un hypergraphe est une famille de parties $E = (E_i / i \in I)$ d'un ensemble fini $X$ vérifiant $E_i \neq \emptyset (i \in I)$ et $\bigcup_{i \in I} E_i = X$. Les éléments de $X$ sont les sommets et les parties les arêtes de l'hypergraphe.*

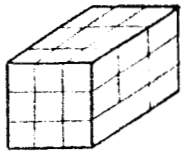
Figure 122 : Dual de l'hypergraphe associé à un tableau

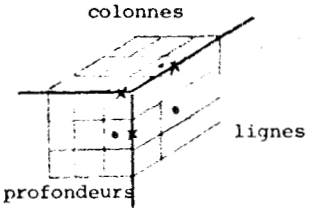
1°) Matrice n = 3




2°) Voltrice n = 3

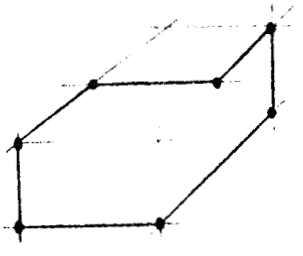





Les cases de faces sont les extrémités des rangées de la voltrice et représentent les arêtes de l'hypergraphe.
Relier par une même arête du dual les 3 cases appartenant à des rangées (des faces) adjacentes par leurs extrémités.

Figure 123 : Le cycle "7"

(ce cycle n'existe que dans les hypergraphes associés aux voltrices d'ordre supérieur ou égal à 3)



Dans le cas particulier où les tableaux sont d'ordre 2 les hypergraphes, de rang 2, sont des graphes.

Les **matrices d'incidence** des hypergraphes se construisent à partir des matrices des systèmes d'équations (§ 3.2.1 p 27 et § 6.3 p 119) qui définissent les p-matrices et p-voltrices, en supprimant la colonne relative à p et en transposant les sous-matrices obtenues . On constate qu'elles ont n éléments non-nuls par colonne, et 2 ou 3 éléments non-nuls par ligne, suivant qu'il s'agit des matrices ou des voltrices. Aussi, suivant le cas, pour n = 2 ou 3 on obtient des p-matrices.

Le **DUAL** de l'hypergraphe associé à une matrice est un **GRAPHE BIPARTI**. On l'obtient en plaçant, d'un côté, les sommets correspondant aux lignes, de l'autre, ceux correspondant aux colonnes, et en reliant chaque ligne à chaque colonne. Le dual de l'hypergraphe associé à une voltrice est un hypergraphe uniforme de rang 3 qui a une structure du type "triparti" due aux trois séries de rangées parallèles (fig 122 p 188).

La différence essentielle entre les hypergraphes associés aux tableaux vient de la **longueur des cycles**. Dans une matrice il n'y a pas de cycles impairs. En effet, les lignes ne rencontrant que des colonnes, et inversement, un cycle, où les arêtes doivent être toutes différentes, est une suite alternée de lignes et de colonnes. Comme cette suite est fermée, on trouve autant de lignes que de colonnes. Par contre dans les voltrices d'ordre supérieur à 2, en usant de la troisième dimension, on peut construire des cycles impairs. La méthode est de faire, dans un plan, un mouvement en deux étapes, puis de passer dans un plan parallèle et de faire le mouvement inverse en trois étapes, comme le montre la figure 123 (p 188). Nous appellerons un tel cycle, le **CYCLE "7"**.

## .3 CONFORMITÉ

La **CONFORMITE** d'un hypergraphe associé à un tableau peut être montrée à partir de sa **2-SECTION** $(H)_2$ (1), d'après le Lemme (B 12.1.2, 5 (chap 17,3)) : "un hypergraphe H est conforme si et seulement si toute **CLIQUE** de $(H)_2$ est contenue dans une arête de H". Le graphe $H_{(2)}$ (fig 124 p 190) ne peut pas contenir de triangle en dehors d'une arête de l'hypergraphe. Cela signifie que dans le tableau, on peut trouver trois rangées se rencontrant en trois cases distinctes. Or, dans un tableau, sur trois rangées qui se rencontrent deux à deux, il y en a toujours une qui est orthogonale aux deux autres qui, alors, sont dans des plans parallèles et ne peuvent se rencontrer. Si les rangées se rencontrent, elles le font en au plus 2 cases distinctes qui sont contenues dans la rangée orthogonales aux autres. Ceci confirme la conformité par le **théorème de GILMORE** (B 12.1.2, 5 chap 17) : "Un hypergraphe H est conforme si, et seulement si, pour trois arêtes il existe une arête de H qui contient la réunion de leur intersection deux à deux".

*(1) La k-section d'un hypergraphe $H = (X, E)$ est $(X, E_{(k)})$ où $E_{(k)}=\{F/F\subset X, 1\leq|F|\leq k, F\subset E_i$ pour un $E_i \in E\}$ $(H)_2$ est la 2-section dont on a enlevé les boucles. C'est un graphe.*

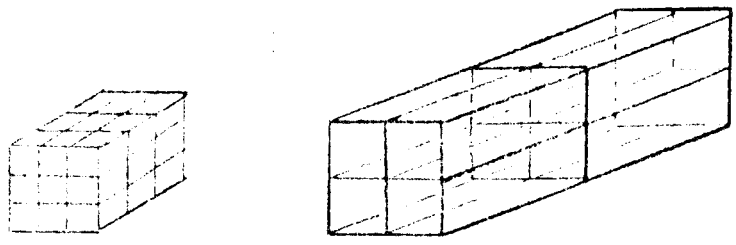
Figure 124 :

2-section de l'hypergraphe associé à un tableau

a) cas d'une matrice (3 x 3) :

b) cas d'une voltrice (3x3x3) :

un graphe construit avec 3 n graphes du type ci-dessus correspondant aux 3 séries de plans :



BUS LILLE

Il résulte de ceci que le dual d'un hypergraphe associé à un tableau possède la propriété de HELLY (B 12.1.2, chap 17, 3). Cette propriété dit que "$H = (X, (E_i / i \in I))$ est tel que pour tout $J \subset I$ avec $E_i \cap E_j \neq 0$, quels que soient $i,j \in J$, on a $\bigcap_{j \in J} E_j \neq \emptyset$". Dans le dual, les arêtes $E_i$ sont les ensembles de rangées qui se rencontrent dans une case. Deux tels ensembles ont une intersection non vide si les cases correspondantes appartiennent à une même rangée du tableau. Puisque en une case ne peuvent se rencontrer que des rangées perpendiculaires deux à deux, et que les rangées sont ou parallèles ou perpendiculaires, les ensembles $(E_j, j \in J)$ induisant la propriété de HELLY sont composés d'arêtes du dual correspondant aux cases d'une rangée du tableau.

## 9.4 GRAPHE REPRÉSENTATIF

Dans le cas des matrices, le GRAPHE REPRESENTATIF de l'hypergraphe associé, qui est la 2-section du dual est le dual lui-même, puisque ce dual est un graphe biparti.

Dans le cas des voltrices, comme le dual de l'hypergraphe associé est uniforme de rang 3, et que deux rangées ne peuvent se rencontrer qu'en une case, le graphe représentatif est formé de TRIANGLES SPECIAUX correspondant aux cases, sans arête commune. D'autre part, comme chaque rangée rencontre 2 n autres rangées, il est uniforme de degré 2 n. Enfin, comme chaque rangée contient n-cases, chaque sommet sera recouvert par n triangles. Sa structure est du type "triparti" (fig 125 p 192).

D'après le théorème de BEINEKE (B 12.1.2, 5 chap 17,4) qui caractérise les graphes représentatifs des arêtes d'un graphe simple, le graphe représentatif de l'hypergraphe associé à une voltrice ne peut pas être représentatif d'un graphe simple sauf dans le cas où n = 2, car alors l'hypergraphe est un graphe (fig 125 p 192). Autrement, en reliant une rangée à toutes celles qui lui sont perpendiculaires, on obtient une configuration du type $G_1$ dans le théorème de BEINEKE, à savoir un sommet ayant trois voisins distincts. Il n'y a pas, dans ce graphe représentatif, de triangles normaux et les cliques maximales sont des triangles spéciaux. Ils recouvrent chaque arête une fois et chaque sommet n fois. Le théorème de BEINEKE nécessite de recouvrir 2 fois chaque sommet pour que le graphe représentatif soit représentatif d'un graphe simple.

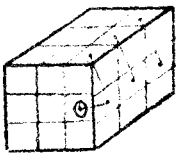
## 9.5 c-COUPLAGES ET d-RECOUVREMENTS

Un couplage d'un hypergraphe est un ensemble d'arêtes deux à deux disjointes. Les ensembles de rangées parallèles constituent des COUPLAGES dans les hypergraphes associés aux tableaux.

Dans les hypergraphes associés aux matrices, on trouve deux couplages de n arêtes MAXIMAUX parce qu'ils recouvrent une fois chaque sommet. Par contre dans les hypergraphes associés aux voltrices, il y a trois couplages maximaux de $n^2$ arêtes, puisqu'il y a dans une voltrice trois séries de

Figure 125 : Graphe représentatif de l'hypergraphe associé à une voltrice

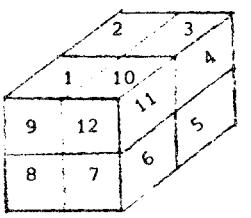
1°) cas n = 3 :

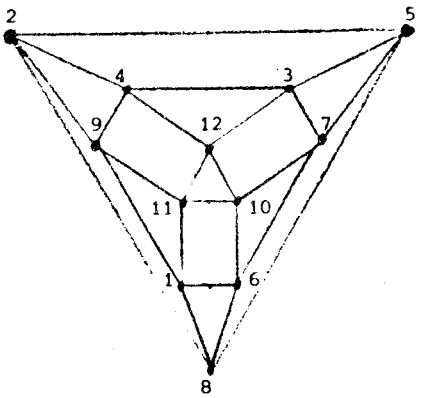


Les rangées de la voltrice aboutissent dans les cases des faces.
Construire le graphe représentatif en reliant 2 à 2 par des arêtes, les 3 cases appartenant à des rangées (de cases des faces) adjacentes par leurs extrémités. Chaque triangle a un sommet dans chacune des faces.

2°) cas particulier n = 2 :

a) numérotation des rangées :




b) l'hypergraphe associé est un graphe simple.

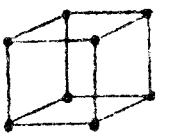
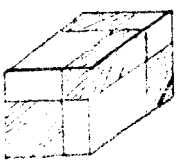


Figure 126 : Ensembles stables et bicoloration des hypergraphes associés aux matrices et aux voltrices



$n^2$ rangées parallèles.

On en déduit que la cardinalité maximum d'un couplage est

$\nu(H) = n$ (matrices)

$\nu(H) = n^2$ (voltrices)

En rassemblant plusieurs des couplages maximaux on obtient des 2-couplages dans les matrices, des 2- et 3-couplages dans les voltrices. Ces c-COUPLAGES sont de DEFICIENCES nulles parce qu'ils recouvrent exactement c fois chaque sommet. Ils sont donc aussi des d-RECOUVREMENTS des hypergraphes associés aux tableaux, qui sont alors MINIMAUX. Ceci résulte du théorème de RAY CHAUDHURI (B 12.1.2, 5 chap 18,2) qui dit que "si c + d est égal au nombre d'arêtes adjacentes à un sommet x, un c-couplage est maximum si et seulement si les arêtes qui ne sont pas dans le c-couplage constituent un d-recouvrement minimum". Ainsi, dans l'hypergraphe associé à une voltrice, les arêtes correspondant à une série de rangées parallèles constituent un 1-couplage maximum tandis que les rangées qui leurs sont orthogonales forment un 2-recouvrement minimum.

Le nombre associé aux recouvrements $\rho(H)$ qui est la cardinalité minimum d'un 1-recouvrement est donc

$\rho(H) = n$ (matrices)

$\rho(H) = n^2$ (voltrices)

## 9.6 TRANVERSALITÉ

Un ensemble TRANSVERSAL d'un hypergraphe est un ensemble de sommets qui rencontre chaque arête de l'hypergraphe.

Les cases non-nulles d'une matrice de permutation ou d'une 1-voltrice rencontrent chaque rangée une et une seule fois. Ce sont donc des ensembles TRANSVERSAUX MINIMAUX pour les arêtes des hypergraphes associés aux tableaux. On a donc, pour les cardinalités minimum de ces enssombles :

$\tau(H) = n$ (matrices)

$\tau(H) = n^2$ (voltrices)

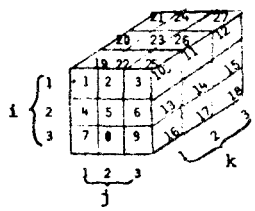
Il y a ,alors,n! ensembles transversaux minimaux distincts dans les hypergraphes associés aux matrices et $(n!)^2$ ensembles transversaux minimaux distincts dans ceux associés aux voltrices.

On en déduit, en considérant les résultats du paragraphe précédent, que pour ces hypergraphes

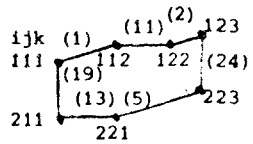
$$\nu(H) = \tau(H)$$

alors qu'on établit en général une inégalité.

Figure 127 : Cycle "7" et non unimodularité des hypergraphes associés aux voltrices




numérotation des rangées




Le cycle "7" dans la voltrice

Rangées

| | | | profondeurs | | | | | | | | | lignes | | | | | | | | colonnes | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i | j | k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 | 19 | 21 | 22 | 24 | 25 | 27 |
| | | 1 | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | |
| | 1 | 2 | 1 | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | |
| | | 3 | 1 | | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | |
| | | 1 | | 1 | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | 1 | | |
| 1 | 2 | 2 | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | 1 | |
| | | 3 | | 1 | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | 1 |
| | | 1 | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | 1 | |
| | 3 | 2 | | | 1 | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | | 1 |
| | | 3 | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | 1 |
| | | 1 | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | 1 | | | | | |
| | 1 | 2 | | | | 1 | | | | | | | | | | 1 | | | | 1 | | | | |
| | | 3 | | | | 1 | | | | | | | | | | | 1 | | | | 1 | | | |
| | | 1 | | | | | 1 | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 2 | 2 | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | | 1 | | |
| | | 3 | | | | | 1 | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | |
| | | 1 | | | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | | | 1 | |
| | 3 | 2 | | | | | | 1 | | | | | | | | 1 | | | | | | | | 1 |
| | | 3 | | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | 1 |
| | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | | | 1 | | 1 | | | | | |
| | 1 | 2 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | 1 | | | | |
| | | 3 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | 1 | | 1 | | | |
| | | 1 | | | | | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | 1 | | |
| 3 | 2 | 2 | | | | | | | | 1 | | | | | | | | 1 | | | | | 1 | |
| | | 3 | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | |
| | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | | 1 | | | | | | 1 | |
| | 3 | 2 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | 1 |
| | | 3 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | 1 | | | | | 1 |

Le cycle "7" dans la matrice d'incidence

BUS LILLE

Figure 127 (suite)

Cycle "7" et non-unimodularité des hypergraphes associés aux voltrices

| | | profon-deurs | | | lignes | | colonnes | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 5 | 11 | 13 | 19 | 24 |
| plan supérieur | 111 | 1 | | | | | 1 | |
| | 112 | 1 | | | 1 | | | |
| | 122 | | 1 | | 1 | | | |
| | 123 | | 1 | | | | | 1 |
| plan inférieur | 211 | | | | | 1 | 1 | |
| | 221 | | | 1 | | 1 | | |
| | 223 | | | 1 | | | | 1 |

Sous-matrice carrée correspondant aux arêtes et sommets rencontrés par le cycle "7" dans la matrice d'incidence. C'est une 2-matrice d'ordre 7.

| | 1 | 19 | 13 | 5 | 24 | 2 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 111 | 1 | 1 | | | | | |
| 211 | | 1 | 1 | | | | |
| 221 | | | 1 | 1 | | | |
| 223 | | | | 1 | 1 | | |
| 123 | | | | | 1 | 1 | |
| 122 | | | | | | 1 | 1 |
| 112 | 1 | | | | | | 1 |

La même matrice réordonnée. Son déterminant est la somme des déterminants de 2 sous-matrices triangulaires ayant des 1 sur la diagonale.

Remarques : 1 - La matrice réordonnée est la somme des matrices de permutation d'ordre 7 de numéro lexicographique $(1)_7$ et $(874)_7$

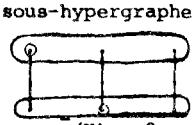
car $874 = \sum_{i=0}^{6} i!$

2 - La matrice d'incidence de l'hypergraphe est une 3-matrice puisque $n = 3$

Figure 128 : Hypergraphe du type H' dans l'hypergraphe associé à une matrice d'ordre 3

Soit une sous-matrice (2x3)

sous-hypergraphe

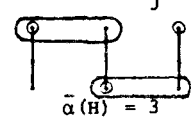


$\bar{\alpha}(H) = 2$
$\rho(H) = 2$

Dans un sous-hypergraphe les"horizontales" doivent rester des arêtes.

hypergraphe H'

$\forall j \in J \subset I$ , $E'_j \subset E_j$



$\bar{\alpha}(H) = 3$
$\rho(H) = 3$

Dans H' on peut réduire les "horizontales".

BUS LILLE

Ces hypergraphes ne sont pas τ-CRITIQUES, car en enlevant une rangée au tableau, on fait disparaître un 1 dans la matrice de permutation ou la 1-voltrice selon le cas. Ce 1 correspond à, au moins, une autre rangée, perpendiculaire à celle disparue ; il faut donc le remettre dans l'ensemble transversal d'où $\tau(H-E_i) = \tau(H)$. $(i = 1,\ldots,m)$.

## 9.7 STABILITÉ

Un ensemble de sommet d'un hypergraphe est dit STABLE s'il ne contient aucune arête de plus de un sommet. On peut en construire dans l'hypergraphe associé à une matrice en prenant les sommets correspondant aux cases d'une sous-matrice . Si on lui adjoint les cases des intersections des rangées qui ne rencontrent pas la sous-matrice, l'ensemble de sommets correspondants reste stable, et, en plus, rencontre toutes les rangées. Son complémentaire est alors aussi un ensemble stable. La même opération peut se faire dans l'hypergraphe associé à une voltrice, à partir d'une sous-voltrice. On en déduit,dans les hypergraphes associés à des tableaux, la possibilité de les BI-COLORER. Il en résulte que le nombre chromatique est $\chi(H) = 2$ pour ces hypergraphes (fig 126 p 192).

Un ensemble qui contient chaque arête, à l'exclusion d'un sommet pour chacune d'elles est stable maximum. C'est le cas pour les sommets correspondant aux cases nulles d'une matrice de permutation ou d'une 1-voltrice . On en déduit que le nombre de stabilité (cardinal du plus grand stable) est

$$\alpha(H) = n^2 - n = n(n-1) \text{ (matrice)}$$

$$\alpha(H) = n^3 - n^2 = n^2(n-1) \text{(voltrice)}.$$

Pour $n = 3$, les hypergraphes associés aux tableaux sont uniformes de rang 3. Comme, par ailleurs, les rangées de ces tableaux ne se rencontrent qu'en,au plus,un sommet, ils vérifient la propriété de ERDOS HAJNAL (B 12.1.2,5 chap 19,1) qui indiquent que alors $\alpha(H) \geq [\sqrt{2|X|}]$. En effet pour les hypergraphes associés aux matrices d'ordre 3, on a $\alpha(H) = n^2(n-1) = 9 \times 2 = 18$ alors que $[\sqrt{2|X|}] = [\sqrt{2n^2}] = [\sqrt{2}\times 3] = 4$ et pour les hypergraphes associés aux voltrices d'ordre 3, on a $\alpha(H) = n^2(n-1) = 9 \times 2 = 18$ alors que $[\sqrt{2|X|}] = [\sqrt{2n^3}] = [\sqrt{6}\times 3] = 7$.

## 9.8 STABILITÉ FORTE ET COLORATION FORTE

Un ensemble de sommets d'un hypergraphe est FORTEMENT STABLE s'il rencontre chaque arête au plus une fois. C'est le cas pour les sommets correspondant aux éléments non-nuls des matrices de permutation et des 1-voltrices pour les hypergraphes associés aux tableaux. Comme ces ensembles rencontrent toutes les arêtes de l'hypergraphe, ils sont maximaux. Il en résulte que la cardinalité maximum d'un ensemble fortement stable est :

$$\bar{\alpha}(H) = n \quad \text{(matrices)}$$
$$\bar{\alpha}(H) = n^2 \quad \text{(voltrices).}$$

Par ailleurs, comme les tableaux UN(nxn) et UN(nxnxn) admettent des B-décompositions en n matrices de permutation ou 1-voltrices suivant le cas, les hypergraphes correspondants admettent des PARTITIONNEMENTS DE LEURS SOMMETS EN n ENSEMBLES FORTEMENT STABLES. Ils ont donc des n-COLORATIONS FORTES. Il en résulte que le nombre chromatique fort, qui correspond à la plus petite valeur de la q-coloration forte de l'hypergraphe, et qui ne peut être inférieure à n, puisqu'ici les hypergraphes sont uniformes de rang n et qu'il faut dans une arête les sommets de couleurs différentes, sera

$$\gamma(H) = n \text{ (matrices et voltrices)}$$

Le fait qu'on ait $\gamma(H) = r(X)$ n'implique pas que les hypergraphes en question soient $\gamma$-PARFAIT, à savoir que $\forall A \subset X, \gamma(H_A) = r(A)$. Les hypergraphes associés aux voltrices ne le sont pas puisque le sous-hypergraphe associé au cycle "7" est uniforme de rang 2 et nécessite au moins 3 couleurs pour admettre une q-coloration forte. Nous n'avons pas testé la $\gamma$-perfection dans les hypergraphes associés aux matrices.

Nous avons vu en 9.5 (p 193) les valeurs du nombre de recouvrement $\rho(H)$. Nous constatons que pour les hypergraphes associés aux tableaux nous avons

$$\bar{\alpha}(H) = \max_{\substack{A \subset X \\ A \neq \emptyset}} \left[\frac{|A|}{r(A)}\right]^* = \rho(H)$$

alors que pour un hypergraphe ordinaire ces trois nombres constituent une suite croissante au sens large. Un ensemble A qui réalise le maximum du nombre central peut être X, par exemple, ou encore un ensemble fortement stable maximum.

## 9.9 CLIQUES

Les seules cliques, des hypergraphes associés aux tableaux, sont les cliques de rang n que constituent les arêtes. Elles sont trop particulières pour pouvoir donner des résultats intéressants.

## 9.10 EQUILIBRAGE

Un hypergraphe est équilibré si tout cycle impair utilise une arête contenant trois des sommets de ce cycle. Les hypergraphes associés aux MATRICES sont EQUILIBRES puisqu'ils n'ont pas de

cycles impairs. Les hypergraphes associés aux VOLTRICES ne sont PAS EQUILIBRES puisque le cycle "7" ne vérifie pas la propriété requise.

Si un hypergraphe est équilibré, son dual l'est aussi, (B 12.1.2, 5 chap 20,2), et réciproquement. Effectivement, le dual d'un hypergraphe associé à une matrice étant un graphe biparti, ne possède pas de cycles impairs, tandis que, d'après le dual de l'hypergraphe associé à une voltrice, tout cycle impair devrait passer par, au moins, un sommet appartenant à trois arêtes du cycle. Ce n'est pas le cas avec le cycle "7".

L'équilibrage d'un hypergraphe est équivalent à la bicoloration possible de toute partie de X (B 12.1.2, chap 20.2). Dans les hypergraphes associés aux voltrices, le cycle "7" correspond à un ensemble de sommets qui n'est pas bicolorable, ce qui confirme le non-équilibrage de ces hypergraphes. Notons cependant que les hypergraphes associés aux tableaux, chacun pris tout entier, sont bicolorables, comme cela a été prouvé au paragraphe 9.7 (p 197).

L'équilibrage d'un hypergraphe est aussi équivalent à la relation $\bar{\alpha}(H') = \rho(H')$ pour tout sous-hypergraphe partiel H' (B 13.1.2, 5 chap 20.2).Dans les hypergraphes associés aux voltrices le cycle "7" correspond à un sous-hypergraphe-partiel pour lequel on a le nombre de stabilité forte est $\bar{\alpha}(H') = 3$ tandis que le nombre de recouvrement est $\rho(H')=4$, d'où, encore, le non-équilibrage de ces hypergraphes. Cependant pour les hypergraphes associés aux tableaux, chacun pris tout entier, on a $\bar{\alpha}(H)=\rho(H)$ comme on l'a vu au paragraphe 9.8 (p 198).

BUS LILLE

L'équilibrage d'un hypergraphe implique un certain nombre de propriétés parmi lesquelles on trouve la propriété de HELLY (B 12.1.2,5 chap 20.2) à savoir "l'intersection de tout sous-ensemble d'arêtes qui se rencontrent deux à deux n'est pas vide". Nous avons déjà vu (§ 9.2 p 187) que dans les hypergraphes associés aux tableaux ces ensembles sont ceux qui correspondent aux rangées qui se rencontrent dans une case, et donc que cette propriété est vérifiée. Les hypergraphes associés aux voltrices sont donc des contre-exemples qui montrent que la réciproque de la déduction de la propriété de HELLY depuis l'équilibrage,n'est pas vérifiée.

L'équilibrage implique aussi la conformité (B 12.1.2, 5 chap 20,2). Les hypergraphes montrent encore ici que la réciproque n'est pas vérifiée.

Le théorème de BERGE - LAS VERGNAS (B12.1.2, 5 chap 20.2) indique que l'équilibrage implique la relation $\nu(H) = \tau(H)$. Les hypergraphes associés aux tableaux vérifient cette relation, et encore les hypergraphes associés aux voltrices interdisent la réciproque. Toutefois, comme les sous-hypergraphes partiels d'un hypergraphe équilibré sont aussi équilibrés (B 12.1.2, 5 chap 20,2), cette propriété est vérifiée pour toute partie A des cases d'une matrice. Les sommets,correspondant au cycle "7" dans l'hypergraphe associé à une voltrice,supportent un sous-hypergraphe,où un couplage maximum contient au plus trois arêtes,tandis qu'un ensemble transversal minimum contient au moins 4 sommets.

Il existe des parties,des sommets des hypergraphes associés aux voltrices,qui ne vérifient pas l'égalité $\nu(H) = \tau(H)$ du théorème.

## 9.11 UNIMODULARITÉ

Un hypergraphe est unimodulaire si tout sous-hypergraphe admet une BI-COLORATION EQUITABLE, c'est à dire que toute arête du sous-hypergraphe admet autant de sommets de l'une des couleurs que de l'autre couleur, à une unité près (si elle a un nombre impair de sommets). L'unimodularité d'un hypergraphe est équivalente à certaines propriétés parmi lesquelles se trouvent l'unimodularité du dual et la totale unimodularité de sa matrice d'incidence (B 12.1.2, 5 chap 20,3).

Les hypergraphes associés aux MATRICES sont UNIMODULAIRES. En effet,leurs duaux sont des graphes bipartis qui,de ce fait,sont unimodulaires (B 12.1.2,5 chap 20,3). Leurs matrices d'incidence sont donc totalement unimodulaires. Nous avions déjà indiqué ce résultat (§ 3.2.1 p 29).

Les hypergraphes associés aux VOLTRICES ne sont PAS UNIMODULAIRES. En effet la sous-matrice carrée de la matrice d'incidence correspondant au cycle "7" est de déterminant égal à 2 en valeur absolue. Elle n'est donc pas totalement unimodulaire. Le calcul de ce déterminant est développé dans la figure 127 (p 194)

L'unimodularité d'un hypergraphe implique son équilibrage. Ceci confirme que les hypergraphes,associés aux voltrices,qui ne sont pas équilibrés,ne sont pas ,non plus, unimodulaires.

Les hypergraphes associés aux voltrices montrent que l'unimodularité est suffisante mais pas nécessaire dans le théorème suivant (B 12.1.2, 5 chap 20, 3). "Si H est un hypergraphe unimodulaire de rang $r(X) = h$ et si $h_1, h_2, \ldots, h_p$ sont des entiers $\geq 0$ de somme h, il existe une partition $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ de X avec $r(X_i) \leq h_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$". Cette propriété est vraie pour les hypergraphes associés aux matrices, comme pour ceux associés aux voltrices, car on peut construire la partition de X en regroupant les matrices de permutation, ou les 1-voltrices, des B-décompositions de UN(nxn), ou UN(nxnxn), suivant le cas. En effet, les 1-voltrices d'une B-décomposition de UN(nxnxn) constituent une partition de la voltrice en n parties de $n^2$ cases qui correspondent, dans l'hypergraphe associé, à un ensemble fortement stable transversal, c'est à dire rencontrant chaque arête exactement une fois. En en regroupant $h_i$, comme ces 1-voltrices n'ont pas de cases en commun, on obtient un ensemble stable rencontrant chaque arête exactement $h_i$ fois. En constituant ainsi p parties de cardinaux répondant à la partition proposée du rang uniforme n de l'hypergraphe, on a le résultat cherché. On peut faire le même raisonnement avec les hypergraphes associés aux matrices.

En prenant $h_i = 1$ pour tout i dans la partition du rang n de l'hypergraphe, et en donnant des couleurs différentes aux n parties de X obtenues, on a une n-coloration forte comme on l'a déjà vu au paragraphe 9.8 (p 197) ce qui confirme que l'unimodularité n'est pas nécessaire pour avoir $\gamma(H) = r(X)$ alors qu'elle est suffisante (B 12.1.2, 5 chap 20.2).

## 9.12 HYPERGRAPHES SANS CYCLES IMPAIRS

Les hypergraphes associés aux matrices sont SANS CYCLES IMPAIRS. L'absence de cycles impairs est équivalente, pour un hypergraphe $H = (X, (E_i \ / \ i \in I))$, à la vérification, par les hypergraphes de la forme $H' = (E'_j \ / \ j \in J)$ avec $J \subset I$ et $E'_j \subset E_j, \forall j \in J$, de la propriété $\tilde{\alpha}(H') = \rho(H')$ (B 12.1.2,5 chap 20,2). L'existence d'une bi-coloration équitable pour ces hypergraphes est aussi équivalente à l'absence de cycles impairs (B 12.1.5 chap 20,3) dans H. Ces hypergraphes ne sont pas des sous-hypergraphes quand ils sont construits depuis un cycle ayant plus de deux sommets dans une même arête.

Les hypergraphes associés aux matrices vérifient ces propriétés. On y trouve effectivement des hypergraphes du type H' qui ne sont pas des sous-hypergraphes (fig 128 p 196).

Dans les hypergraphes associés aux voltrices, le cycle "7" ne peut posséder ces propriétés, naturellement.

L'absence de cycles impairs dans les hypergraphes implique l'unimodularité, ce que nous avons vérifié pour les hypergraphes associés aux matrices.

Cette absence de cycles impairs implique aussi l'existence d'une partition de X en k ensembles transversaux, avec $k = \min |E_i|$. Pour les hypergraphes associés aux matrices, comme ils sont uniformes de rang n, on trouve n ensembles transversaux qui sont, alors, fortement stables. C'est ce qui a été vérifié aux paragraphes 9.8 (p 197) et 9.11 (p 200) à partir d'une B-décomposition de UN(nxn). Le fait, que les hypergraphes associés aux voltrices vérifient aussi cette propriété (paragraphe 9.8 et 9.11), confirme que la réciproque n'est pas vraie.

Remarquons que pour ces hypergraphes on peut trouver une partition de X en n ensembles transversaux, alors que le théorème de LAS VERGNAS (B 12.1.2, 5 chap 20,3) n'en assure qu'un nombre voisin de $\frac{n}{2}$ pour les matrices et $\frac{n}{3}$ pour les voltrices. Ce théorème indique que dans un hypergraphe quelconque on peut partitionner X en k ensembles transversaux si k vérifie pour tout ensemble J non vide d'arêtes : $|\bigcup_{j\in J} E_j| \geq (k-1)|J|+1$. Or, en prenant toutes les arêtes, cette relation devient

$$n^2 \geq (k-1)\ 2n + 1 \qquad \text{(matrices)}$$

$$n^3 \geq (k-1)\ 3n^2 + 1 \qquad \text{(voltrices)}$$

d'où on a

$$k \geq \frac{n^2-1}{2n} + 1 \qquad \text{(matrices)}$$

$$k \geq \frac{n^3-1}{3n^2} + 1 \qquad \text{(voltrices)}$$

## 9.13 HYPERGRAPHES ADMETTANT DES FONCTIONS STOCHASTIQUES

Une FONCTION STOCHASTIQUE associée à un hypergraphe est une fonction $f : X \to [0,1]$ telle que la somme des valeurs pour les sommets de toute arête est 1. Son SUPPORT est l'ensemble des sommets pour lesquels elle n'est pas nulle.

Les hypergraphes uniformes de rang h admettent la fonction stochastique $f(x) \equiv \frac{1}{h}$. Les p-matrices et p-voltrices, quand toutes leurs valeurs sont divisées par p, sont des fonctions stochastiques pour les hypergraphes associés aux matrices et voltrices. Les matrices de permutation et les 1-voltrices sont les fonctions stochastiques à valeurs 0 ou 1 pour ces hypergraphes.

Les résultats sur les hypergraphes admettant des fonctions stochastiques sont obtenues à l'aide de l'unimodularité, mais, dans ce paragraphe, les voltrices ne sont pas un contre-exemple permettant d'affirmer que les réciproques ne sont pas vérifiées.

Le théorème fondamental dit que "si H est un hypergraphe unimodulaire admettant une fonction stochastique, toute fonction stochastique f(x) peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i \, \phi_i(x) \text{ avec } 0 < p_i \leq 1 \; ; \; \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

et les $\phi_i(x)$ sont des fonctions stochastiques à valeurs 0 ou 1". Ce théorème, pour les matrices, est le théorème de VON NEUMANN.

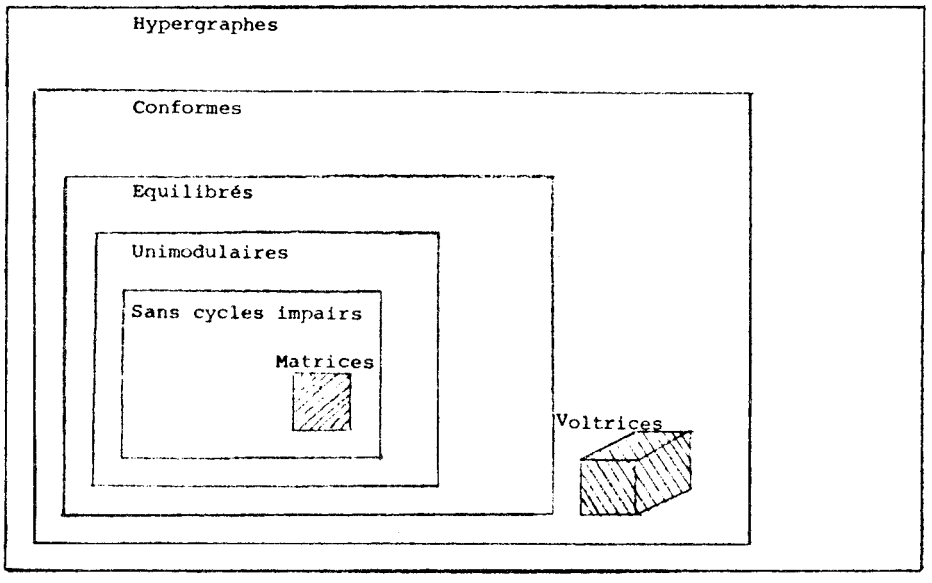
Les hypergraphes associés aux voltrices, qui ne sont pas unimodulaires, ne le vérifient pas. Dans la démonstration, on utilise un lemme qui indique que l'existence de fonction stochastique associée à l'unimodularité implique l'existence d'un ensemble transversal fortement stable. Les voltrices sont, encore ici, un contre exemple qui montre que la récirpoque n'est pas vraie. On utilise ce lemme pour affirmer que le support de la fonction stochastique f(x) est un sous-hypergraphe, qui, donc, est unimodulaire et admet un ensemble $T_1$ transversal et fortement stable. Dans les hypergraphes associés aux voltrices, qui ne sont pas unimodulaires, l'unimodularité du sous-hypergraphe n'est pas assurée, et il existe des cas où l'ensemble $T_1$ n'existe pas. C'est le cas des 2-voltrices indécomposables et le support de la fonction stochastique dans l'hypergraphe associé n'est pas la réunion d'ensembles transversaux fortement stables, alors que dans le cas de l'unimodularité ceci était assuré (B 12.1.2, 5 chap 20,4). Les résultats acquis par ailleurs sur la B-décomposition des p-voltrices montrent qu'il faut utiliser des ensembles transversaux stables uniformes de rang 2, 3, etc... qui ne sont pas réunions d'ensembles transversaux stables de rangs inférieurs.

## 9.14 BILAN

La différence fondamentale entre les hypergraphes associés aux matrices et ceux associés aux voltrices est l'existence, pour ces derniers, du cycle "7". Ce cycle permet de montrer ou de contredire la plupart des

propriétés (fig 129 p 203). D'autre part, ce sont les B-décompositions des tableaux UN(nxn) et UN(nxnxn) qui permettent d'obtenir des résultats sur les couplages, les recouvrements, la transversalité, les stabilités fortes, ou pas, les colorations fortes, ou pas, et les partitionnements de X. Il faut encore remarquer que les relations entre les nombres attachés aux hypergraphes sont vérifiés par des égalités alors qu'en général il s'agit d'inégalités. Autant de facteurs qui justifient l'intérêt qu'on peut porter à de telles configurations.

Figure 129 : Propriétés des hypergraphes associés aux tableaux




| | | |
|---|---|---|
| $\chi(H)$ | 2 | 2 |
| $\nu(H) = \tau(H)$ | n | $n^2$ |
| $\bar{\alpha}(H) = \rho(H)$ | n | $n^2$ |
| prop. de HELLY | x | x |
| Fonctions stochastiques | x | x |

# 10. CONCLUSION

## 10.1 BILAN DES RÉSULTATS

En dehors des résultats sur la B-décomposition des p-matrices et des p-voltrices, ce travail apporte comme nous l'avions annoncé dans l'introduction, une lumière nouvelle sur des notions étudiées dans différents domaines des mathématiques.

En Algèbre, la notion d'addition des matrices de permutations a dégagé la propriété de p-transitivité (§ 3.1.2 p 21) dans le groupe multiplicatif des permutations.

En Combinatoire, la notion de carré latin à été reliée à celle de B-décomposition de UN(nxn). Deux méthodes de construction (§ 4.2.5 p 55 ) permettent de les obtenir, qui entrainent des associations de B-décompositions en triplets (F, C, H), d'où il se dégage des associations entre les B-décompositions. D'autre part, ces carrés latins ont été l'objet de généralisations sous forme de tableaux D, cubes latins, cubes D et tableaux DD (§ 7.4 p 141 et 7.5 p 143).

En Théorie des Graphes, un graphe intéressant vis à vis des permutations est celui de leur indépendance (§ 4.2.8 p 61 ), dont les stables sont les groupes $G_i$ et leurs classes, et les cliques, les B-décompositions de UN(nxn). On a,par ailleurs,une étude détaillée des hypergraphes associés aux tableaux (§ 9.1 p 187 ) qui se sont révélés être remarquables.

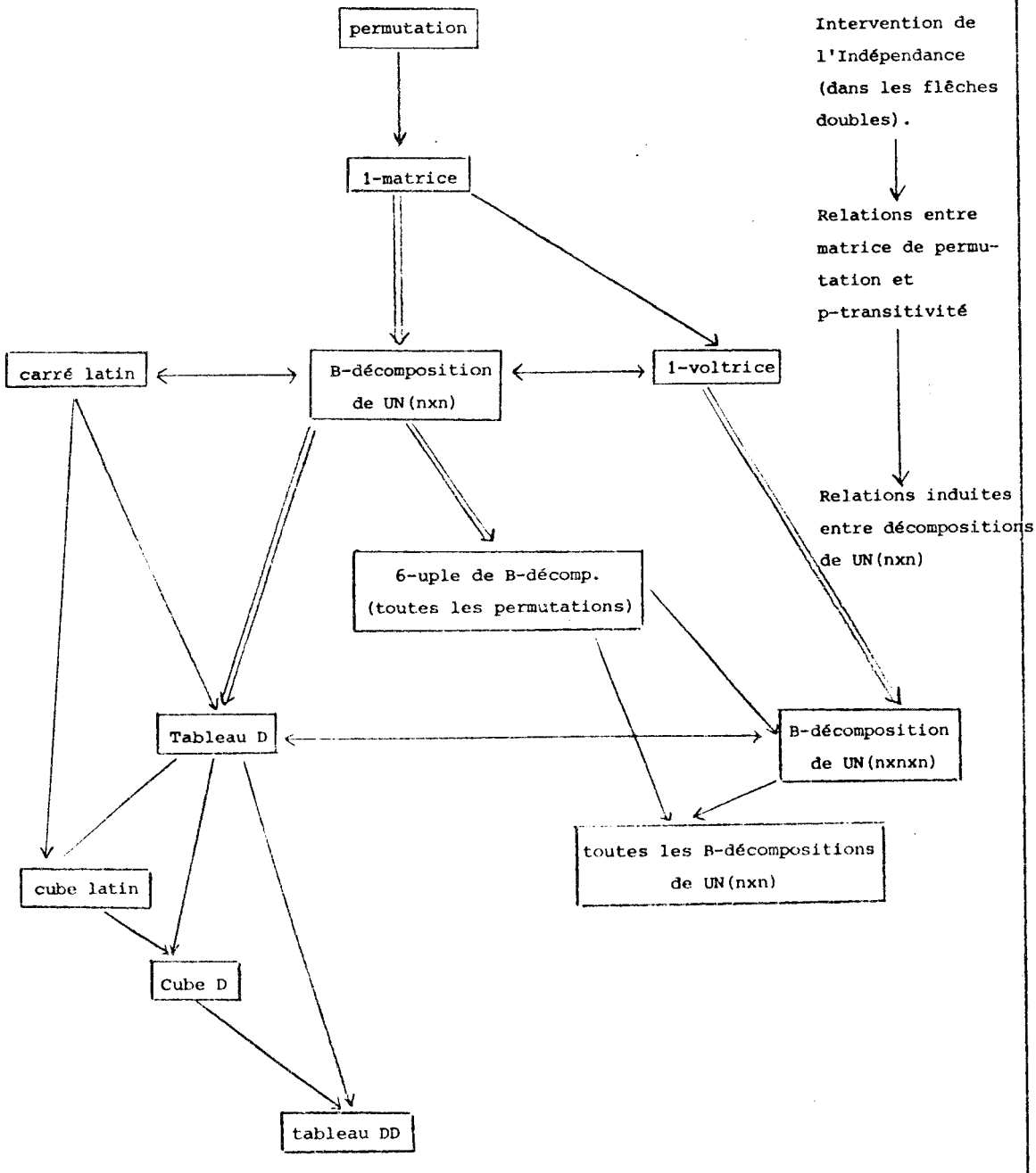
Enfin,du point de vue Informatique, ce travail fournit de nombreuses programmations des algorithmes utilisés, qui sont autant d'explorations dans le domaine de la manipulation de structures discrètes et combinatoires. Nous avons déjà signalé la double exploration d'arborescence que contient le programme DEICV (§ 8.1.3 p 153).

## 10.2 LES GÉNÉRALISATIONS ET LE PRINCIPE D'INDÉPENDANCE

L'idée, qui est à la base de ce travail, était dans la généralisation aux configurations à trois dimensions, des résultats sur les matrices . Les notions qui sont alors apparues se sont déduites les unes des autres suivant une logique qui apparaît dans la figure 130 (p 206).

La notion fondamentale qui s'en dégage est celle d'indépendance qui a été mise en évidence à l'occasion des graphes d'indépendance des matrices de permutations (§ 4.2.8 p 61), et qui a été

Figure 130 : Enchainement des notions




BUS LILLE

utilisée, au niveau des matrices et au niveau des voltrices, dans les B-décompositions de UN(nxn) et de UN(nxnxn). C'est ce principe d'indépendance qui induit la p-transitivité dans les groupes de permutations.

## 10.3 EXTENSIONS ET QUESTIONS OUVERTES

Les limites imposées par les moyens et le temps sont la raison de résultats absents dans ce travail. Nous voulons en noter ici quelques uns.

Au sujet des p-matrices, dès que n est supérieur ou égal à 4 on ne sait pas calculer "facilement" le nombre de B-décompositions d'une p-matrice (§ 5.6. p 93 ) et les B-décompositions particulières comme celles faisant intervenir un nombre minimum ou maximum de matrices de permutation différentes. Dans un domaine proche, on ne sait pratiquement rien sur les rapports qui existent entre les bases de l'espace vectoriel des matrices de permutation et les ensembles spéciaux, comme cela est suggéré au paragraphe 8.4.2 (p 165).

Au chapitre des p-voltrices, en plus des problèmes équivalents à ceux posés pour les p-matrices, relatifs au nombre de B-décompositions et aux B-décompositions particulières, se posent les problèmes relatifs à la recherche des p-voltrices minimales (§ 8.2.3 p 157) et à la construction facile de bases de leur espace vectoriel (§ 6.3 p 119). Un travail intéressant serait de construire toutes les p-voltrices d'ordre 4 pour les valeurs de p allant jusqu'à n = 4 (§ 6.4. p 123).

Il ne faut pas non plus abandonner les configurations proches des p-matrices et des p-voltrices, qui sont souvent plus près de la réalité des problèmes. Il s'agit en particulier des matrices rectangulaires (§ 2.1.3 p 9 ) et des voltrices non-cubiques, ainsi que les configurations à un élément non-nul par plan (§ 6.1 p 113).

Enfin, il faut s'attendre à trouver des résultats nouvaux dans une généralisation à n > 4 des résultats indiqués pour n = 4. En effet le groupe des permutations d'ordre 4 est abélien car 4 est une puissance d'un nombre pair. D'autre part, le rôle particulier de la case centrale des matrices carrées d'ordre impair, n'a pas pu être envisagé. Enfin, le caractère hautement combinatoire des configurations à plus de trois dimensions laisse hésitant le chercheur muni de moyens traditionnels.

Mais le résultat le plus important qu'on aurait voulu donner, est une condition nécessaire et suffisante de B-indécomposabilité des p-voltrices. Parmi les voies qui mènent à sa découverte certaines semblent plus riches que d'autres. Notons en particulier la notion de p-transitivité (§ 3.1.3 p 23) et celle de points entiers du cône polyédrique (§ 3.2.3 p 31) engendré par les 1-voltrices.

Mais il ne faudra pas négliger la liaison qu'il y a avec les fonctions stochastiques dans les hypergraphes (§ 9.13 p 202). Il n'est pas impossible, non plus, que la résolution de cette question passe par l'étude de sous-voltrices particulières. Enfin il faut s'attendre, en y répondant , à résoudre une grande partie des problèmes énoncés dans ce paragraphe.

C'est dans ce but, que ce travail rassemble une grande quantité de résultats, car dans l'exploration d'un domaine nouveau il est mal aisé de distinguer les notions d'intérêt secondaire des pierres qui seront, plus tard, les supports d'une synthèse élégante. Nous sommes toutefois heureux d'avoir dégagé ce problème, qui d'une façon évidente, est fondamental pour la B-décomposition des p-voltrices, et d'avoir quelque peu éclairé cette région qui se trouve au delà des théorèmes connus.

# V. ANNEXES

# 11. LES PROGRAMMES

## 11.1 PRÉSENTATION

Ce chapitre 11 est une programmathèque des algorithmes utilisés pour ce travail. Tous ces programmes ont été réalisés par l'auteur.

### 11.1.1 ORDINATEURS ET LANGAGES

Deux ordinateurs ont été utilisés, à des moments différents, en fonction des possibilités offertes à l'auteur. Le principal , le télé-système RJP d'I.B.M., dont le noyau est un 370/168 ,a été mis à la disposition de l'auteur par le Service Développement Scientifique d'I.B.M.. Les programmes sont alors en PL/1 et ils ont rarement dépassé 200 K octets. Quelques programmes ont été traités sur le CII 10070 de l'Université de Lille. Le langage est alors l'ALGOL 60 et les programmes sont sensiblement de même taille qu'en PL/1.

L'ALGOL 68 fait une timide apparition, mais il n'a pas été réellement utilisé, faute d'un compilateur suffisamment élaboré. APL a été accessible sur le système RJP trop tard pour envisager une reconversion de la programmathèque. Néanmoins il est le langage le mieux adapté à ce genre de calcul.

### 11.1.2 LA RECURSIVITE

A part dans les exemples de construction de toutes les permutations, la récursivité n'a pas été utilisée. La raison est la place, que requièrent les compilateurs, pour le passage des programmes récursifs.

Le programme en ALGOL est un exemple type de récursivité utilisée pour inclure,les unes dans les autres,un nombre variable de boucles "gigognes".

D'autre part, les générateurs de permutations, ou d'autres objets combinatoires, peuvent se classer en deux types, quand il s'agit de les obtenir une à une. Soit,chaque permutation est obtenue au bout des récursivités, s'il est récursif, ou en cours de boucle de calcul, et alors, c'est le générateur qui appelle la procédure de traitement de la permutation. Soit,le générateur fourni une permutation à partir d'une autre, et alors c'est le programme de traitement qui appelle le générateur. Le programme en ALGOL 60 est du premier type, la séquence de traitement se ramenant à l'impression de la permutation (ligne 20, 21 et 22, § 11.3.2 p 219). La procédure ARRANG (§ 11.3.1 p 218) de J.C. HERZ, qui a été retraduite en PL/1, est du deuxième type. Les générateurs récursifs de permutation en ALGOL 68 (§ 11.3.3 p 219) et en PL/1 (§ 11.3.4 p 220) fournissent des tableaux qui contiennent toutes les permutations et sont à classer dans une autre catégorie.

### 11.1.3 DOSSIERS DE PROGRAMMES

La plupart des programmes sont accompagnés d'un dossier de programme, plus ou moins résumé, inclus dans le programme lui-même sous forme de commentaire..

Certains programmes sont accompagnés de résultats. Ceux-ci sont,soit des exemples, soit des résultats,de volume important

### 11.1.4 LISTE DES PROGRAMMES ET LEUR UTILISATION

Voici un panorama des programmes.

## 11.2 Permutations et numéros lexicographiques.

RNUMPR (§ 11.2.1 p 214) fait passer du numéro lexicographique à la permutation.

RPERNU (§ 11.2.2 p 216) fait le passage inverse.

## 11.3 Construction des permutations

Il s'agit de plusieurs programmes,dans des langages différents,présentant des méthodes différentes, en rapport avec le paragraphe 11.1.2 (p 211)

## 11.4 Bases d'espaces vectoriels

Le programme BASVOLT (§ 11.4.1 p 223) permet de calculer une base de l'espace vectoriel contenant les p-matrices, ou une base de l'espace vectoriel contenant les p-voltrices en faisant appel à la structure de cône polyédrique de ces espaces vectoriels. Des résultats sont donnés en paragraphe 11.4.2 (p 226).

## 11.5 Algorithmes de flots

Le programme FFH (§ 11.5.1 p 230) est l'algorithme de HOFFMANN de construction d'un flot compatible. Sa programmation permet de traiter le problème du flot maximum dans un réseau de FORD-FULKERSON (B 12.1.4, 9 et 10).

Le APFFMAT (§ 11.5.2 p 234) permet de traiter ce dernier problème quand le réseau est un graphe biparti . Il peut être utilisé pour construire une matrice de permutation inférieure ou égale à une matrice donnée.

## 11.6 Multidécomposition des p-matrices

Le programme MLTDCP3 (§ 11.6.1 p 239) permet de calculer toutes les B-décompositions d'une p-matrice. Le paragraphe 11.6.4 (p 260) contient les 1344 B-décompositions de UN(5x5) précédées de la liste numérotée des 120 permutations d'ordre 5 (§ 11.6.3 p 259).

## 11.7 Ensembles de décompositions de UN(4x4)

Les programmes AiDCP ont servi à classer les ensembles de i décompositions de UN(4x4) vis-à-vis de l'équivalence large. Ici, se trouvent A3DCP (§ 11.7.1 p 267) et A4DCP (§ 11.7.2 p 278) avec leurs résultats. Les triplets de décompositions ont été encadrés des numéros des permutations qui, par pré- et post-multiplication, associent le premier de chaque classe et chacun d'eux.

## 11.8 Graphes d'indépendance

Le programme MPCLIQ (§ 11.8.1 p312) utilise une procédure qui calcule les cliques d'un graphe. Le traitement du graphe d'indépendance des permutations d'ordre 4 a permis de retrouver les décompositions de UN(4x4). Ses stables, qui sont les cliques de son complémentaire, contiennent les groupes $G_i$, laissant l'objet i invariant, et leurs classes, ainsi que les décompositions de toutes les 4-matrices d'ordre 4 contenant trois 3. Le traitement du graphe d'indépendance des B-décompositions a permis de trouver les trente-quatre 6-uples de B-décompositions de UN(4x4) contenant toutes les permutations(§ 11.8.2 p 318).

## 11.9 Multidécompositions des p-voltrices.

Le programme DEICV (§ 11.9.1 p 322) B-décompose une p-voltrice en 1-voltrices de toutes les façons possibles, tandis que RESID (§ 11.9.3 p 388) donne des B-décompositions contenant éventuellement une p-voltrice 1-minimale.

## 11.10 Construction de p-voltrices 1-minimales

Seul le programme V2MIN (§ 11.10.1 p 344) qui calcule des 2-voltrices d'ordre 4 minimales par assemblage de deux décompositions de UN(4x4) est proposé.

## 11.2 PERMUTATIONS ET NUMÉROS LEXICOGRAPHIQUES

### 11.2.1 PASSAGE DU NUMERO A LA PERMUTATION : R N U M P R

```
CC OPTIONS(MAIN);

RNUMPR: PROC OPTIONS(MAIN);

        /*************************************************
        * PERMUTATION D UN NUMERO LEXICOGRAPHIQUE DONNE *
        *************************************************


BUT

        CALCUL DE LA PERMUTATION DES N PREMIERS ENTIERS AYANT POUR
    NUMERO LEXICOGRAPHIQUE LE NOMBRE NUM DONNE.

DONNEES

    -N        VARIABLE ; ENTREE PAR < DATA > ;
       NOMBRES D ' OBJETS A PERMUTER.

    -NUM      VARIABLE ; ENTREE PAR < DATA >;
       NUMERO DE LA PERMUTATION A CALCULER.

    TOUTES LES VALEURS SONT "FIXED(10,0)".
    ON PEUT TRAITER SUCCESSIVEMENT PLUSIEURS SERIES DE DONNEES.
    ARRET SUR LECTURE.

    EXEMPLE
              NUM=17,N=4;
              NUM=100,N=5;


RESULTATS

        ILS SONT EXPLIQUES.


METHODE

        ON CHERCHE QUEL EST L'ENTIER EN PREMIERE POSITION.
    C'EST (NUM-1)/FACT(N-1)+1,PUIS QU'IL Y A FACT(N-1)
    PERMUTATIONS COMMENCANT PAR UN MEME ENTIER.
        ON EN DEDUIT QUE LA PERMUTATION SE TERMINE PAR LA
    (NUM-(NUM/FACT(N-1))*FACT(N-1)+1(OPERATIONS EN NOMBRES ENTIERS))
    -IEME PERMUTATION DES NOMBRES QUI RESTENT.


REALISATION

        UTILISATION D'UNE PROCEDURE RECURSIVE SE RAPPELANT
    N-1 FOIS EN PROFONDEUR

'R: PROC OPTIONS(MAIN);

ST

        POUR DES RAISONS D ' ENCOMBREMENT LE TABLEAU PERM
    CONTIENT LA PERMUATION RANGEE DANS L'ORDRE INVERSE
    DE L'ORDRE NORMAL (QUI EST CELUI UTILISE EN SORTIE).


SIGNIFICATION DES IDENTIFICATEURS

    N = NB D'OBJETS A PERMUTER.
    NUM = NUMERO LEXICOGRAPHIQUE DE LA PERMUTATION.
    PERM = TABLEAU CONTENANT LA PERMUTATION.
    JBL = TABLEAU DES OBJETS A PERMUTER (LES ENTIERS <=N).
    NUPER = LA PROCEDURE RECURSIVE.
    NPA = NUM-1 = NOMBRE DE PERMUTATION AVANT CELLE CHERCHEE.
    NM1 = N-1.
    F = FACTORIELLE (N-1);
    NPL = NUMERO ALPHABETIQUE DE L ' OBJET EN POSITION 1.
    NR = NUMERO LEXICOGRAPHIQUE DE LA PERMUTATION DES
        OBJETS QUI RESTENT.
    I = INDICE DE TRAVAIL.


REMARQUES

        SI LE NUMERO LEXICOGRAPHIQUE EST PLUS GRAND QUE FACT(N)
    LE RESULTAT EST NON SIGNIFICATIF OU UN INCIDENT PEUT SE PRODUIRE
        SI LE NUMERO LEXICOGRAPHIQUE EST 1 , ON IMPRIMERA LES OBJETS
    DANS LEUR ORDRE ALPHABETIQUE , CE QUI DONNERA LA PERMUTATION
    IDENTITE.


ENCOMBREMENT

        SUR IBM 370/75 DE 754K.
             COMPILATION   5/10.000H   100K
             LINKAGE       3/10.000H   100K
             CALCULS       1/10.000H    50K
                  TOTAL    10/10.000H
    POUR TRAITER 5 NOMBRES , N <=9.


REFERENCES

    JC HERZ      IBM DEVELOPPEMENT SCIENTIFIQUE
    JP STEEN     STAGE 1972

*************************************************************************/
```

```
LA PERMUTATION          24 DE  4 OBJETS EST   4  3  2  1

LA PERMUTATION          17 DE  4 OBJETS EST   3  4  1  2

LA PERMUTATION         1C0 DE  5 OBJETS EST   5  1  3  4  2

LA PERMUTATION           1 DE  4 OBJETS EST   1  2  3  4

LA PERMUTATION       56423 DE  9 OBJETS EST   2  5  3  6  1  9  8  4  7

LA PERMUTATION         254 DE  5 OBJETS EST
IHE806I DATA INTERRUPT IN STATEMENT 00038 AT OFFSET +00312 FROM ENTRY POINT RNUMPR
```

```
PROC OPTIONS(MAIN);
   NUPER: PROC(N,JBL,NUM,PERM) RECURSIVE;
   DCL(N,JBL(*),NUM,PERM(*)) FIXED;
      DCL(NPA,NM1,F,I,NPL,NR) FIXED;
      NM1=N-1;
      IF NM1 =0 THEN GO TO UNOBJ ;
      NPA=NUM-1;
      IF NPA = 0 THEN GO TO ICENT;
      F=1; DO I=2 TO NM1; F=F*I; END;
      NPL=NPA/F+1;
      NR=NPA-(NPL-1)*F+1;
      PERM(N)=JBL(NPL);
      DO I = NPL TO NM1; JBL(I)=JBL(I+1);END;
      CALL NUPER(NM1,JBL,NR,PERM);
      RETURN;
      ICENT: DO I = 1 TO N; PERM(I)=JBL(N-I+1);END;
      RETURN;
      UNOBJ: PERM(1)=JBL(1);
   END NUPER;

   DCL(NUM,N ,I)FIXED;
   REL:
   GET DATA(NUM,N);
   PUT EDIT('LA PERMUTATION',NUM,' DE',N,' OBJETS EST ')
            (SKIP(3),A,F(11),A,F(3),A);
   BEGIN; DCL(PERM(N),JBL(N))FIXED;
      DO I = 1 TO N;JBL(I)=I;END;
      CALL NUPER(N,JBL,NUM,PERM);
      PUT EDIT((PERM(I) DO I=N BY -1 TO 1 )))((N)F(3));
      GO TO REL;
   END RNUMPR;
```

11.2.2 PASSAGE DE LA PERMUTATION AU NUMERO : R P E R N U

```
RCC CPTICNS(MAIN);

RPERNU: PROC OPTIONS(MAIN);

        /*******************************************
        * NUMERC LEXICCGRAPHICUE D'UNE PERMUTATION *
        *******************************************
```

BUT

CALCUL DU NUMERO LEXICOGRAPHIQUE D'UNE PERMUTATION DES N PREMIERS NCMBRES ENTIERS.

DCNNEES

- N VARIABLE ; ENTRE PAR < DATA > ;
  NOMBRE D'OBJETS A PERMUTER.

- PERM TABLEAU ; ENTRE PAR < LIST >;
  LA PERMUTATION DONT CN CHERCHE LE NUMERO LEXICOGRAPHIQUE.

TCUTES LES VALEURS SONT EN "FIXED (1C,0)";
ON PEUT TRAITER SUCCESSIVEMENT PLUSIEURS SERIES DE DONNEES.
ARRET SUR LECTURE.

EXEMPLE

```
N=4;
3,1,2,4,
N=5;
5,4,3,2,1,
```

RESULTATS

ILS SCNT EXPLICUES.

METHCDE

ON CALCULE LE NCMBRE DE PERMUTATICNS CUI PRECEDE CELLE CONT ON VEUT LE NUMERO LEXICOGRAPHICUE , DANS LA LISTE CES PERMUTATIONS ORCONNEES LEXICOGRAPHIQUEMENT.
LE NCMBRE EST FACT(N-2)*PERM(1) (CUI EST LE NCMBRE DE PERMUTATIONS QUI COMMENCENT PAR UN ENTIER INFERIEUR A L'ENTIER EN POSITION 1 DE LA PERMUTATION EN TRAITEMENT) AUGMENTE DL NUMERC LEXICCGRAPHICUE DE LA PERMUTATION DES ENTIERS DIFFERENTS DU PREMIER CONTENUE DANS LES POSITICNS 2 A N DE LA PERMUTATION EN TRAITEMENT.

```
NU: PROC OPTIONS(MAIN);

EST
```

REALISATION

UTILISATION D'UNE FONCTION - PROCEDURE RECURSIVE SE RAPPELANT N-1 FOIS EN PROFCNDEUR.
POUR DES RAISONS D ' ENCOMBREMENT LE TABLEAU PERM CONTIENT LA PERMUTATION RANGEE DANS L'CRDRE INVERSE DE L'CRDRE NORMAL (CUI EST CELUI UTILISE EN ENTREE)

SIGNIFICATION DES IDENTIFICATEURS

N = NCMBRES D'OBJETS A PERMUTER.
PERM = TABLEAU CONTENANT LA PERMUTATION.
NUM = NUMERO LEXICOGRAPHIQUE
JBL = TABLEAU DES OBJETS A PERMUTER (LES ENTIERS <=N).
NPERNU = LA FCNCTICN - PRCCEDURE RECURSIVE.
NM1 = N-1;
F = FACTORIELLE (N-1);
J = RANG D'UN CBJET DANS L'CRDRE ALPHABETIQUE DES OBJETS.
I = INDICE DE TRAVAIL.

REMARCUES

SI LES NOMBRES INTRODUITS NE PEUVENT CONSTITUER UNE PERMUTATION DES N PREMIERS ENTIERS (PAS ASSEZ DE NOMBRES, REPETITICN DE L'UN D'EUX, ENTIER TROP GRAND,...)UN INCIDENT PEUT SE PRCDUIRE, OU LE RESULTAT S'IL EST IMPRIME N'EST PAS SIGNIFICATIF. AUCUN TEST DE SECURITE N'EST FAIT.

ENCOMBREMENT

SUR IBM 370/75 DE 754K.

| | | |
|---|---|---|
| CCMPILATION | 6/10.000H | 100K |
| LINKAGE | 3/10.000H | 100K |
| CALCULS | 1/10.CCCH | 50K |
| TOTAL | 10/10.CCCH | |

POUR TRAITER 5 PERMUTATIONS N <= 9.

REFERENCE

J.C. HERZ IBM DEVELOPPEMENT SCIENTIFIQUE.
J.P. STEEN STAGE 1972.

```
**********************************************************************/
```

```
PROC OPTIONS(MAIN);


    DCL(N,I,NUM)FIXED(10,0);
    PUT PAGE;
    REP :
    GET DATA (N);
    BEGIN;

    NPERNU:PROC(N,PERM,JBL)  RETURNS(FIXED(10,0)) RECURSIVE;
    DCL(N,JBL(*),PERM(*))FIXED(10,0);
      DCL(NUM,I,NM1,F,J)FIXED(10,0);
      NM1=N-1;
      IF NM1=0 THEN GO TO CLS;
      F=1; DO I = 2 TO NM1; F=F*I; END;
      DO J = 1 BY 1 TO N WHILE(PERM(N) ¬= JBL(J)); END;
      DO I = J TO NM1; JBL(I)=JBL(I+1); END;
      NUM=(J-1)*F+NPERNU(NM1,PERM,JBL);
      RETURN (NUM);
      CLS: NUM=1;
      RETURN(NUM);
    END NPERNU;

      DCL(JBL(N),PERM(N))FIXED(10,0);
      DCL NPERNU RETURNS(FIXED(10,0));
      DO I = 1 TO N ; JBL(I)=I; END;
      DO I = N BY -1 TO 1; GET LIST(PERM(I)); END;
      PUT EDIT
        ('LA PERMUTATION',(PERM(I) DO I=N BY -1 TO 1),'  DE',N,
                                                        ' OBJETS EST')
            (SKIP,A,(N)F(3),A,F(3),A);
      NUM=NPERNU(N,PERM,JBL);
      PUT EDIT(' LA PERMUTATION ',NUM)(A,F(11),SKIP);
      GO TO REP;
    END RPERNU;
```

```
LA PERMUTATION  3  1  2  4  DE  4 OBJETS EST LA PERMUTATION        13
LA PERMUTATION  1  2  3  4  DE  4 OBJETS EST LA PERMUTATION         1
LA PERMUTATION  4  3  2  1  DE  4 OBJETS EST LA PERMUTATION        24
LA PERMUTATION  4  1  5  2  3  DE  5 OBJETS EST LA PERMUTATION        77
LA PERMUTATION  7  4  8  9  1  5  2  3  6  DE  9 OBJETS EST LA PERMUTATION      261253
LA PERMUTATION  2  1  2  3  DE  4 OBJETS EST LA PERMUTATION         9
LA PERMUTATION  1  5  3  4  DE  4 OBJETS EST LA PERMUTATION         8 attention

IHE14CI FILE SYSIN - END OF FILE ENCOUNTERED IN STATEMENT 00004 AT OFFSET +C0070 FROM ENTRY POINT RPERNU
```

BUS LILLE

## 11.3 CONSTRUCTION DES PERMUTATIONS

### 11.3.1 PROCEDURE CONSTRUISANT LES ARRANGEMENTS : A R R A N G

```
: : PROC OPTIONS(MAIN);

;T
     ESARPE : PROC OPTIONS(MAIN);
     /*ESSAIS DE ARRANG */

     ARRANG : PROC(F,P,N);
     /* ARRANG FAIT PASSER D'UN ARRANGEMENT DONNE F A UN AUTRE. SON
     APPLICATION REPETEE LES ENGENDRE TOUS A PARTIR DE L'UN QUELCONQUE */
     DCL(P,N) BIN FIXED;
     DCL F(*) BINARY FIXED ;
     DCL (I,J) BINARY FIXED ;
     DO I = 1 TO P;
1      DO J = I TO P ;
2        F(J) = (F(J) ¬= N)*(F(J)+1)+(F(J) = N)*I;
2      END;
1      IF F(I) ¬= I THEN GO TO FIN ;
1    END;
     FIN: ;
     END ARRANG ;

     DCL F(4) BIN FIXED ;
     DCL (M,N,K) BIN FIXED ;
     N=4;M=3;K=0;
     RE:K=K+1; PUT DATA (N,M) SKIP;
     F=0;
     DO I = 1 TO 36 ;
1     CALL ARRANG(F,M,N);
1     PUT EDIT ((F(L) DO L=1TO M)) ( SKIP, (M) F(2));
1    END;
     N=3; IF K=1 THEN GOTO RE ;
     END;
```

Note : La procédure a été initialement écrite en Algol 60 par J.C. HERZ.

```
N=        4          M=        3;
 1 2 3
 2 3 4
 3 4 1
 4 1 2
 1 3 4
 2 4 1
 3 1 2
 4 2 3
 1 4 2
 2 1 3
 3 2 4
 4 3 1
 1 2 4
 2 3 1
 3 4 2
 4 1 3
 1 3 2
 2 4 3
 3 1 4
 4 2 1
 1 4 3
 2 1 4
 3 2 1
 4 3 2
 1 2 3
 2 3 4
 3 4 1
 4 1 2
 1 3 4
 2 4 1
 3 1 2
 4 2 3
 1 4 2
 2 1 3
 3 2 4
 4 3 1
N=        3          M=        3;
 1 2 3
 2 3 1
 3 1 2
 1 3 2
 2 1 3
 3 2 1
 1 2 3
 2 3 1
 3 1 2
 1 3 2
 2 1 3
 3 2 1
 1 2 3
 2 3 1
 3 1 2
 1 3 2
 2 1 3
 3 2 1
 1 2 3
 2 3 1
 3 1 2
```

## 11.3.2 GENERATEUR RECURSIF DES PERMUTATIONS EN A L G O L 60

```
1    :  'BEGIN' 'COMMENT' GENPERM RECURSIF;
2    :    'INTEGER' N;
3    :    'READ'(105,FN)N;
4    :    FN:'FORMAT'(I3);
5    :    'WRITE'(108,FN)N;
6    :    'BEGIN' 'INTEGER' 'ARRAY' P(/1:N/);
7    :      'BOOLEAN' 'ARRAY' T(/1:N/);
8    :      'INTEGER' I,K;
9    :
10   :    'PROCEDURE' CHOIX DU (J);
11   :      'VALUE' J;
12   :      'INTEGER' J;
13   :    'BEGIN' 'INTEGER' I;
14   :      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
15   :        'IF' T(/I/) 'THEN'
16   :          'BEGIN' T(/I/):='FALSE';
17   :            P(/J/):=I;
18   :            'IF' J<N
19   :              'THEN' CHOIX DU (J+1)
20   :              'ELSE' 'WRITE'(108,PS)N,
21   :                'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
22   :                (P(/K/));
23   :            T(/I/):='TRUE';
24   :            PS:'FORMAT'(1H ,NT4)
25   :          'END';
26   :    'END';
27   :
28   :      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' T(/I/):='TRUE';
29   :      CHOIX DU(1);
30   :      'WRITE'(108,FP);
31   :      FP:'FORMAT'(1H1);
32   :    'END';
33   :  'END'
```

```
4
1   2   3   4
1   2   4   3
1   3   2   4
1   3   4   2
1   4   2   3
1   4   3   2
2   1   3   4
2   1   4   3
2   3   1   4
2   3   4   1
2   4   1   3
2   4   3   1
3   1   2   4
3   1   4   2
3   2   1   4
3   2   4   1
3   4   1   2
3   4   2   1
4   1   2   3
4   1   3   2
4   2   1   3
4   2   3   1
4   3   1   2
4   3   2   1
```

## 11.3.3. GENERATEUR RECURSIF DES PERMUTATIONS EN A L G O L 68

```
$JAL;

$ALG68;
ALG68   ANALYZER
0001    STEEN:PERMUT        PAR RECURSIVITE:
0005    'DEBUT' 'CO'?BELLE?MARQUISE?VOS?BEAUX?YEUX?ME?FONT?MOURIR?D?AMOUR?'CO'
0006
0006    'OP' 'CO' FACTORIELLE 'CO'!=('ENT' N)'ENT':(N<=2\N\!(N-1));
0038
0038    'OP'+=('ENT' PREM,[1:0'FLEX',1:0'FLEX'] 'ENT' SUITE)[,] 'ENT':
0065    'CO' AJOUTE DEVANT LE TABLEAU "SUITE" UNE COLONNE DE "PREM" 'CO'
0065    'DEBUT'[1:1'BS' SUITE,1:2'BS' SUITE+1] 'ENT' C;
0084    'POUR' I 'JQA' 1 'BS' C 'FAIRE' C[I,1]:=PREM;
0104    C[1:1 'BS' C,2:2 'BS' C]:=SUITE;
0121    'FIN' 'CO' DE+ 'CO';
0123
0123    'OP'-=([1:0 'FLEX'] 'ENT' LETTRES,'ENT' OBJ) []'ENT':
0144    'CO' RETIRE L'"OBJ" A LA SUITE DES "LETTRES" 'CO'
0144    'DEBUT' 'ENT' P:=0;
0150    [1:'BS' LETTRES-1] 'ENT' R;
0161    'POUR' I 'TTQ' OBJ≠LETTRES[I] 'FAIRE' R[I]:=LETTRES[(P:=I)];
0192    'POUR' I 'DEPUIS' P+2 'JQA' 'BS' LETTRES 'FAIRE'
0203    R[I-1]:=LETTRES[I];
0216    R
0217    'FIN' 'CO' DE-'CO';
0219
0219    'PROC' GENPERM=([1:0'FLEX'] 'ENT' OBJETS)[,]'ENT':
0238    'CO' GENERATION PAR RECURSIVITE DES PERMUTATIONS DES "OBJETS" 'CO'
0238    'DEBUT' 'ENT' M='BS' OBJETS;
0245    'ENT' FNI=!(M-1);
0256    [1:M,1:!M] 'ENT' T;
0269    'POUR' I 'JQA' M 'FAIRE'
0277    T[(I-1)×FNI+1:I×FNI,1:M]:=
0299    I+GENPERM(OBJETS-I);
0309    T
0310    'FIN' 'CO' DE GENPERM 'CO';
0312
0312    [1:!4,1:4] 'ENT' PERM:=GENPERM((1,2,3,4));
0339    [1:4,1:15] 'CAR' FORM;
0351    FORM[1,]:="BELLE?MARQUISE?";
0359    FORM[2,]:="VOS?BEAUX?YEUX?";
0367    FORM[3,]:="ME?FONT?MOURIR?";
0375    FORM[4,]:="D?AMOUR?"+"???????" ;
0385
0385    'POUR' I 'JQA' !4 'FAIRE'
0394    'DEBUT' 'POUR' J 'JQA' 4 'FAIRE'
0403    IMPRIMER(FORM[PERM[I,J],1:(PERM[I,J]=4\8\15)]);
0440    A LA LIGNE
0441    'FIN'
0442    'FIN'
 T0=0000
 T0=0000
 T0=0000
 T0=0000
```

## 11.3.4. GENERATEUR RECURSIF DES PERMUTATIONS EN PL/1 : G E N P E R M

```
PRCC CPTIONS (MAIN) ;


GENPERM : PROC OPTIONS (MAIN) ;

/* ENGENCREMENT RECURSIF CES PERMUTATIONS DE N OBJETS */

/*********************************************************************
```

BUT

CE PROGRAMME REMPLIT LE TABLEAU PERMUT DE N LIGNES ET FACT.N COLONNES AVEC LES PERMUTATIONS DE N OBJETS LUS EN DONNEES. CES OBJETS SONT REPRESENTES PAR 1 OU 2 CARACTERES. IL IMPRIME LA LISTE DES OBJETS ET EN DESSOUS LES PERMUTATIONS DE CES OBJETS,A RAISON D'UNE PERMUTATION PAR LIGNE.

DONNEES

LES DONNEES SONT, DANS L'ORDRE:

- N ENTRE PAR <DATA> ; BIN FIXED.
  NOMBRE D'OBJETS A PERMUTER. IL FAUT N>=2.
  LES PERMUTATIONS ETANT CONSERVEES EN MEMOIRE, LEUR NOMBRE N CROISSANT TRES VITE, IL N'EST PAS RECOMMANDE D'UTILISER CE PROGRAMME AVEC N>7 (ENCOMBREMENT, TEMPS DE CALCUL,NOMBRE DE LIGNES D'IMPRESSION).

- (LISTE DES OBJETS) ENTREE PAR <LIST> ; CHAR(2);
  LES OBJETS SONT PLACES DANS UN ORDRE QUELCONQUE.

EXEMPLE DE DONNEES:

```
N=4;
'A','B','C','D',
```

RESULTATS

LES RESULTATS SONT EXPLIQUES.
EXEMPLE, POUR LES DONNEES CI-DESSUS:

```
LES PERMUTATICNS DE
A  B  C  D
SONT
A  B  C  D
A  B  D  C
A  C  B  D
A  C  D  B
A  D  C  B
A  D  B  C
B  A  C  D
```

```
ERM : PROC OPTIONS (MAIN) ;

IST

B  A  D  C
B  C  A  D
B  C  D  A
B  D  C  A
B  D  A  C
C  B  A  D
C  B  D  A
C  A  B  D
C  A  D  B
C  D  A  B
C  D  B  A
D  B  C  A
D  B  A  C
D  C  B  A
D  C  A  B
D  A  C  B
D  A  B  C
```

DIMENSIONS

- 50 INSTRUCTIONS PL/1.
  SUR SYSTEM RJE IBM SABLON:
  A/-TEMPS TOTAL DE PASSAGE: ENVIRON 6 SECONDES (POUR N=4);
  -REGION REQUISE: 100K (POUR N=4).
  B/-TEMPS DE TRAITEMENT: 1/10000 H (POUR N=4);
  -MEMOIRE GEREE: (N*FACT.N+15) NOMBRES EN BIN FIXED.

METHODE

PRINCIPE

LES PERMUTATIONS DE N OBJETS SONT OBTENUES EN ISOLANT SUCCESSIVEMENT CHACUN DES OBJETS ET EN PERMUTANT LES AUTRES. SOUS CE POINT DE VUE,LA RECURSIVITE S'IMPOSE.

AINSI,POUR LES DONNEES CI-DESSUS, ON PEUT REMARQUER QUE CHACUN DES OBJETS APPARAIT 6 FOIS (EN GENERAL FACT.(N-1) FOIS) EN TETE DES PERMUTATIONS, ET SONT ACCOMPAGNES DES 6 PERMUTATIONS DES 3 (EN GENERAL N-1) OBJETS QUI RESTENT. CELLES-CI SONT OBTENUES PAR LE MEME PROCEDE. ON ECRIT EN TETE DES OBJETS QUI RESTENT (2-IEME POSITON ICI) CHACUN D'EUX UN NOMBRE DE FOIS (ICI 2) EGALE AU NOMBRE DE PERMUTATIONS POSSIBLES SUR LES OBJETS QUI RESTENT ENCORE.

B/ REALISATION

LA PROCEDURE RECURSIVE SOUPERM QUI ENGENDRE LES PERMUTATIONS DES 'OBJETS QUI RESTENT' A 2 PARAMETRES:
- IH QUI INDIQUE LE PREMIER DES 'OBJETS QUI RESTENT',
- JD QUI INDIQUE DANS LE TABLEAU PERMUT LA COLONNE

```
PROC OPTIONS (MAIN) ;

    CONTENANT CES 'OBJETS QUI RESTENT'.
        ELLE REMPLIT DANS LE TABLEAU PERMUT LES LIGNES IH A N ET LES
    COLONNES A PARTIR DE JD SUR UNE LONGUEUR PERMETTANT DE PLACER
    TOUTES LES PERMUTATIONS DES (N-IH+1) 'OBJETS QUI RESTENT'.
    (VOIR LES CADRES EN ***** ).

          JD          JP-------JN TRANSPOSITION
          |           |         | |
         +-+         +-+      +--+--+
         |1|        6|7|      |11|12|      17 18       24
         ***********************************************
     IH-> *A*A A A A A|B B B B B B|C|C C C C C|D D D D D D*
         ***---------************+---------+-----------*
    INH-> *B B|C C|D D*A*         *B          |B          *
         *---*****---***         *-+         |           *
         *C D*B* *B  *C          *A|         |C          *
         *   *** *   *           *-+         |           *
         *D C*D  *C  *D          *C          |A          *
         ***********************************************
             |   |   |           |
             +---+   +-----------+
               |           |
         PERMUTATIONS   PERMUTATIONS
         DE B C         DE A C B

    LE PROGRAMME PRINCIPAL APPELLE  SOUPERM  AVEC  POUR IH: NH=1 ET
    POUR  JD: ND=1.  SOUPERM SE RAPPELLE AVEC POUR IH: INH (VARIANT
    ENTRE 2 ET N) ET POUR JD: JP (DEPENDANT DE INH ) .

        LES PERMUTATIONS SONT BIEN LES PRODUITS DES TRANSPOSITIONS
    OBTENUES EN ECHANGEANT DANS L'ORDRE INITIAL LE PREMIER ET LE I-EME
    OBJET (VOIR COLONNE 12 ) REALISEES PAR LES INSTRUCTIONS:
    29      PERMUT(IH,J)=PERMUT(I,JD);
    34      PERMUT(I,JP)=PERMUT(IH,JD);


REFERENCES
            J.C. HERZ  IBM NEUILLY-VILLIERS.
            J.P. STEEN  STAGE SEPT 71.


*****************************************************************/


/* DONNEES */
    DCL ( N,FN ) BIN FIXED ;
```

```
:RM : PROC OPTIONS (MAIN) ;

:ST

        GET DATA (N) ;
        IF N <= 1 THEN
          DO ; PUT LIST ('IL FAUT AU MOINS 2 OBJETS') PAGE ;
1             RETURN;
1         END ;
        FN = 1 ;
        DO I = 2 TO N ;
1         FN = I*FN ;
1       END ;
        BEGIN ;


      SOUPERM : PROC (IH,JD) RECURSIVE ;

        DCL (IH,JD) BIN FIXED ;

        DCL (NP1,FNP1,I,JP,JN,INH) BIN FIXED ;

        NP1=N-IH;
        IF NP1 = 0 THEN RETURN ;

        INH= IH + 1 ;
        FNP1 = 1 ;
        DO II = 2 TO NP1 ;
1         FNP1 = II*FNP1 ;
1       END ;

        DO I = IH TO N ;
1         JP = JD + (I-IH)*FNP1 ;
1         JN = JP + FNP1 - 1 ;
1         DO II = IH+1 TO N ;
2           PERMUT(II,JP) = PERMUT(II,JD) ;
2         END ;
1         DO J = JP TO JN ;
2           PERMUT(IH,J) = PERMUT(I,JD);
2         END ;
1         PERMUT(I,JP)= PERMUT(IH,JD);
1         CALL SOUPERM(INH,JP);
1       END;

        END SOUPERM ;


      /* APPEL DE SOUPERM */
        DCL PERMUT(N,FN) CHAR (2) ;
        GET LIST (PERMUT(*,1)) ;
```





BUS LILLE

```
PROC OPTIONS (MAIN) ;



      NH,ND = 1 ;

      CALL SOUPERM(NH,ND) ;

/* RESULTATS */
    IMAG : FORMAT (SKIP,(N)A(3)) ;
      PUT LIST ('LES PERMUTATIONS DE ') PAGE;
      PUT EDIT ( (PERMUT(I,1) DO I = 1 TO N ) )( R (IMAG) ) ;
      PUT LIST ( 'SONT')SKIP;
      DO J = 1 TO FN ;
        PUT EDIT ( (PERMUT(I,J) DO I = 1 TO N ) ) ( R ( IMAG ) ) ;
      END ;
    END ;

    END GENPERM ;
```

```
LES PERMUTATIONS DE
A  B  C  D
SONT
A  B  C  D
A  B  D  C
A  C  B  D
A  C  D  B
A  D  C  B
A  D  B  C
B  A  C  D
B  A  D  C
B  C  A  D
B  C  D  A
B  D  C  A
B  D  A  C
C  B  A  D
C  B  D  A
C  A  B  D
C  A  D  B
C  D  A  B
C  D  B  A
D  B  C  A
D  B  A  C
D  C  B  A
D  C  A  B
D  A  C  B
D  A  B  C
```

## 11.4 Bases d'espace vectoriel

### 11.4.1 Programme pour leur construction : B A S V O L T

*BASVOLT*

```
1   :  'BEGIN'
2   :     'COMMENT' RECHERCHE D'UNE BASE P-VOLTRICIENNE;
3   :     'INTEGER''ARRAY'MP(/1:24,1:4/),DOP(/1:24,1:4/),DOP(/1:4);
4   :     'INTEGER'I,J,RANG,PA,ORDRE,TYPE;
5   :
6   :     'PROCEDURE'LMAT(M,BB,N,ORDRE,TYPE,DOP);
7   :       'VALUE'M,N,ORDRE,TYPE;
8   :       'INTEGER'M,N,ORDRE,TYPE;
9   :       'INTEGER''ARRAY'BB,DOP;
10  :       'COMMENT' LMAT TRANSFORME UNE P-MAT OU UNE P-VOLT EN
11  :         VECTEURS;
12  :       'BEGIN''INTEGER'I,J,K,L,D,R;
13  :         R:=ORDRE;
14  :         'IF'TYPE>=3'THEN''GOTO'VOLT;
15  :       MAT:'FOR'L:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'BB(/L/):=0;
16  :         'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'R'DO'
17  :           'BEGIN'L:=(I-1)*R+MP(/M,I/);
18  :             BB(/L/):=1;
19  :           'END';
20  :         BB(/N/):=1;
21  :         'GOTO'TERM;
22  :       VOLT:'FOR'L:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'BB(/L/):=0;
23  :         'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'R'DO'
24  :           'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'R'DO'
25  :             'BEGIN'L:=(K-1)*R*R+(I-1)*R+
26  :                 MP(/DOP(/K/),I/);
27  :               BB(/L/):=1;
28  :             'END';
29  :         BB(/N/):=1;
30  :       TERM:
31  :       'END'DE LMAT;
32  :
33  :     'PROCEDURE'PROMAT(A,MA,NA,B,MB,NB,C);
34  :       'VALUE'MA,NA,MB,NB;
35  :       'INTEGER'MA,NA,MB,NB;
36  :       'INTEGER''ARRAY'A,B,C;
37  :     'BEGIN''INTEGER'I,J,K,L;
38  :       'IF'NA'NE'MB'THEN''GOTO'TERM;
39  :       'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'MA'DO'
40  :         'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'NB'DO'
41  :       'BEGIN'L:=0;
42  :             'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'NA'DO'
43  :           L:=L+A(/I,K/)*B(/K,J/);
44  :           C(/I,J/):=L;
45  :           'END';
46  :       TERM:
47  :     'END' DE PROMAT;
48  :
49  :   'INTEGER' 'PROCEDURE' ABS(I);
50  :     'VALUE' I; 'INTEGER' I;
51  :     ABS:='IF' I < 0 'THEN' -I 'ELSE' I ;
52  :

53  :         'PROCEDURE' MATVOL(BB,N,ORDRE,TYPE);
54  :           'VALUE' N,ORDRE,TYPE;'INTEGER' N,ORDRE,TYPE;'INTEGER''ARRAY'BB;
55  :           'COMMENT' IMPRESSION SOUS FORME DE P-MAT OU P-VOLT
56  :                       D'UN POINT FONDAMENTAL OU D'UN VECTEUR DE
57  :                       TRANSLATION DU CONE POLYEDRIQUE;
58  :
59  :         'BEGIN'
60  :           'INTEGER' R,I,J,S,L,K;
61  :
62  :   'PROCEDURE'SORMT(A,N,M);
63  :     'VALUE'M,N;'INTEGER'N,M;'INTEGER''ARRAY'A;
64  :     'COMMENT'IMPRESSION DE LA MATRICE A A M LIGNES ET N COLONNES;
65  :     'BEGIN''INTEGER'I,J;
66  :       'FOR' I:=1'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO'
67  :         'WRITE'(108,F1)N,'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'(A(/I,J/));
68  :         F1:'FORMAT'(1H ,NI2)
69  :     'END'DE SORMT;
70  :
71  :           R:=ORDRE;
72  :         'GOTO' 'IF' TYPE<=2 'THEN' MAT 'ELSE' VOL;
73  :
74  :         MAT: 'IF' TYPE=1 'THEN' 'GOTO' MAT1;
75  :             'BEGIN' 'INTEGER' 'ARRAY' PMAT(/1:R,1:R/);
76  :           'FOR' I:=2 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO'
77  :           'BEGIN' S:=0;
78  :           'FOR' J:=2 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO'
79  :             'BEGIN' L:=(I-2)*(R-1)+(J-1);
80  :                     PMAT(/I,J/):=BB(/L/);
81  :                     S:=S+BB(/L/) 'END';
82  :           PMAT(/I,1/):=BB(/N/)-S;
83  :           'END';
84  :       'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO'
85  :       'BEGIN' S:=0;
86  :         'FOR' I:=2 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO' S:=S+PMAT(/I,J/);
87  :         PMAT(/1,J/):=BB(/N/)-S;
88  :         'END';
89  :         SORMT(PMAT,R,R);
90  :         'END' DE MAT;
91  :         'GOTO' FMV;
92  :   MAT1: 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO'
93  :       'WRITE'(108,FM)R,'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO'
94  :                                        (BB(/(I-1)*R+J/));
95  :         FM:'FORMAT'(1H ,NI2);
96  :         'GOTO' FMV;
97  :
98  :         VOL:'BEGIN' 'INTEGER' 'ARRAY' PVOL(/1:R,1:R,1:R/);
99  :           'IF' TYPE=3 'THEN' 'GOTO' VOLT1;
100 :           'FOR' K:=2 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO'
101 :           'FOR' I:=2 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO'
102 :             'BEGIN' S:=0;
103 :               'FOR' J:=2 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO'
104 :                 'BEGIN' L:=(K-2)*(R-1)*(R-1)+(I-2)*(R-1)+J-1;
105 :                     PVOL(/I,J,K/):=BB(/L/);
106 :                     S:=S+BB(/L/) 'END';
107 :             PVOL(/I,1,K/):=BB(/N/)-S;

108 :             'END';
109 :         'FOR' K:=2 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO'
110 :         'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO'
```

BUS LILLE

```
        'BEGIN' S:=0;
          'FOR' I:=2 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO' S:=S+PVOL(/I,J,K/);
          PVOL(/1,J,K/):=BB(/N/)-S;
        'END';
    'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO'
    'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO'
      'BEGIN' S:=0;
          'FOR' K:=2 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO' S:=S+PVOL(/I,J,K/);
          PVOL(/I,J,1/):=BB(/N/)-S;
          'END';
        'GOTO' TRUC;
        VOLT1: 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO'
          'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' R  'DO'
            'FOR' K:= 1 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO'
             PVOL(/I,J,K/):=
                      BB(/(K-1)*R*R+(I-1)*R+J/);
        TRUC:
        'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO'
          'WRITE'(108,F1)R,'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO'
                          (R,'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO'
                          (PVOL(/I,J,K/)));
          F1:'FORMAT'(1H ,N(5X,NI2));
        'END' DE VOL;
      FMV:

    'END' DE MATVOL;

'PROCEDURE' HERMITE(P,A  ,N,M);
  'VALUE' N,M;'INTEGER' N,M;'INTEGER' 'ARRAY' P,A  ;
  'COMMENT' CETTE PROCEDURE CALCULE LA REDUITE D'HERMITE DE LA MATRICE
    A QUELCONQUE A M LIGNES ET N COLONNES AINSI QUE LES MATRICES
    UNIMODULAIRES P ET V QUI PERMETTENT D'OBTENIR CETTE REDUITE,CELLE-
    CI ETANT DANS A A LA FIN DU CALCUL.
    PA=2 SIGNIFIE QU'ON CALCULE LA REDUITE D'UNE MATRICE DE RANG
    MAXIMUM (EN PARTICULIER D'UNE MATRICE UNIMODULAIRE) AYANT PLUS DE
    LIGNES QUE DE COLONNES, PA ET RANG SONT DECLARES A L'EXTERIEUR DE LA
    PROCEDURE;
  'BEGIN' 'INTEGER' I,C,Y,Z,T,E1,H,J,Q,JM,K,R;

'PROCEDURE' INF(A,L1,N,JM);
  'VALUE' L1,N;'INTEGER' L1,N,JM;'INTEGER' 'ARRAY' A;
  'COMMENT' CETTE PROCEDURE REPERE PAR JM LA PLUS PETITE VALEUR ABSOLUE
    DES TERMES NON NULS DE LA LIGNE L1 DU TABLEAU A DU L1IEME TERME AU
    NIEME.8388607 EST L'INFINI MACHINE;
  'BEGIN' 'INTEGER' I,X,S;
    S:=8388607;
    'FOR' I:=L1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
      'BEGIN' X:=ABS(A(/L1,I/));
        'IF' X 'NE' 0 'AND' X<S 'THEN'
          'BEGIN' JM:=I;S:=X 'END'
      'END'
  'END' DE INF;


    'IF' PA=2 'THEN' 'GOTO' SUITE;
    'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO'
      'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO'
      P(/I,J/):='IF' I=J 'THEN' 1 'ELSE' 0;
    SUITE:

    'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO'
      'BEGIN' 'FOR' C:=I 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
        'IF' A(/I,C/) 'NE' 0 'THEN' 'GOTO' ETIQ;
        'IF' PA=2 'THEN' 'GOTO' BOND;
        'IF' I<M 'THEN' Y:=I 'ELSE' 'GOTO' FINALE;
        'FOR' Y:=Y+1 'WHILE' Y<=M 'DO'
          'BEGIN' 'FOR' Z:=I 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
            'IF' A(/Y,Z/) 'NE' 0 'THEN'
              'BEGIN' 'FOR' T:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
                'BEGIN'Q:=A(/Y,T/);A(/Y,T/):=A(/I,T/);A(/I,T/):=Q'END';
                'FOR' E1:=1 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO'
                  'BEGIN' H:=P(/I,E1/);P(/I,E1/):=P(/Y,E1/);
                                                P(/Y,E1/):=H 'END';

                'GOTO' ETIQ
              'END'
          'END';
      BOND:'GOTO' FINALE;
        ETIQ:INF(A,I,N,JM);
        'IF' PA=2 'THEN' 'GOTO' SAUT;
        RANG:=I;
        SAUT:'FOR' J:=I 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
          'IF' A(/I,J/) 'NE' 0 'AND' J 'NE' JM 'THEN'
            'BEGIN' Q:=A(/I,J/)'/'A(/I,JM/);
              A(/I,J/):=A(/I,J/)-Q*A(/I,JM/);
              'FOR' R:=I+1 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO'
                A(/R,J/):=A(/R,J/)-Q*A(/R,JM/);

            'END';
          'FOR' E1:=I 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
            'IF' A(/I,E1/) 'NE' 0 'AND' E1 'NE' JM 'THEN' 'GOTO' ETIQ;
              'IF' I 'NE' JM 'THEN' 'FOR' K:=I 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO'
              'BEGIN'Q:=A(/K,I/);A(/K,I/):=A(/K,JM/);A(/K,JM/):=Q'END';

      FINALE:'END'
    'END' DE HERMITE;

    'COMMENT'DONNEES;
      FP:'FORMAT'(1H1);
      F0:'FORMAT'(1H0);
      'WRITE'(108,F3);
      F3:'FORMAT'(' MATRICES DE PERMUTATION');
      'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'24'DO'
        'BEGIN''READ'(105,F1)'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'4'DO'(MP(/I,J/));
      F1:'FORMAT'(4I3);
        'WRITE'(108,F2)'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'4'DO'(MP(/I,J/));
      F2:'FORMAT'(1H ,4I3);
        'END';
      'WRITE'(108,F4);


      F4:'FORMAT'('0DECOMPOSITIONS');
      'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'24'DO'
        'BEGIN''READ'(105,F1)'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'4'DO'(DCP(/I,J/));
```

```
        'WRITE'(108,F2)'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'4'DO'(DCP(/I,J/));
      'END';

'COMMENT' ***************************************************;

    ORDRE:=4;
      STEE:
      'READ'(105,F1)TYPE;
      'IF'TYPE'NE'1 'AND' TYPE'NE'3 'THEN' 'GOTO' STEE;
      'BEGIN''INTEGER'R,T,M,N,P,D,H,MA,NA,L,K,G;
        R:=ORDRE;T:=TYPE;
        M:=48;
        N:='IF'T<=2'THEN'R*R+1'ELSE'R*R*R+1;
      'BEGIN''INTEGER''ARRAY'
        BB(/1:N/),VD(/1:M/),VP(/1:M/),U(/1:M,1:M/),
                    A,MV(/1:M,1:N+2/);
        'COMMENT'BB SERT A METTRE UNE P-MAT OU
          P-VOLT EN LIGNE. MV EST UNE LISTE DE LIGNES
          EN ESSAIS. A EST LA COPIE DE MV EN TRAITEMENT.
          U ET V SERVENT AU TRAITEMENT;
        'IF'TYPE >=3'THEN''GOTO'PVOLT;

        PMAT:
          'WRITE'(108,FP);
        'BEGIN'
          'COMMENT' ENTREE D'UNE LISTE DE AU PLUS 24 M.P. . FIN SUR 0;
          L:=0;
          SUITM:
          'READ'(105,F1)K;
          'IF' K=0 'THEN' 'GOTO' AUTM;
           L:=L+1;
           LMAT(K,BB,N,ORDRE,TYPE,DOP);
           'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N 'DO'
             MV(/L,I/):=BB(/I/);
           MV(/L,N+1/):=K;
           'GOTO' SUITM;
           AUTM:
          'COMMENT'CONSTRUCTION DE 1-MAT;
          'FOR'H:=1'STEP'1'UNTIL'24'DO'
            'BEGIN'LMAT(H,BB,N,ORDRE,TYPE,DOP);
              L:=L+1;
              'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
                MV(/L,I/):=BB(/I/);
              MV(/L,N+1/):=H;
            'END';
          'COMMENT'INDEPENDANCE;
           'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'L'DO'
            'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
              A(/I,J/):=MV(/I,J/);
           PA:=1;RANG:= L;
          HERMITE(U,A,  N,L);
          'WRITE'(108,F7)RANG;


    F7:'FORMAT'('0RANG=',I3);
          PROMAT(U,L,L,MV,L,N+1,MV);
          'WRITE'(108,F10);
```

```
    F10:'FORMAT'('0BASE DES P-MAT.D''ORDRE 4');
          'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'RANG'DO'
          'BEGIN''FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
              BB(/J/):=MV(/I,J/);
            'WRITE'(108,F11)MV(/I,N+1/);
    F11:'FORMAT'('0MP ',I2);
            MATVOL(BB,N,ORDRE,TYPE);
          'END';
        'END'PMAT;
        'GOTO' FINI;

        PVOLT:'WRITE'(108,FP);
         'BEGIN'
          'COMMENT' ENTREE D'UNE LISTE (DCP,MP) DE AU PLUS 48 1-VOLT..
                    FIN SUR (0,0);
          L:=0;
          SUITV:
          'READ'(105,F1)D,P;
          'IF'D=0'THEN' 'GOTO' AUTV;
          L:=L+1;
           VP(/L/):=P;
           VD(/L/):=D;
          'GOTO'SUITV;
           AUTV:
          G:=0;
              'WRITE'(108,F13);
    F13:'FORMAT'('0BASE DES P-VOLT.D''ORDRE 4');
          P:=0;
          RP: P:=P+1;
          D:=0;
          RUT:
          'FOR' D:=D+1 'WHILE' D<=24 'DO'
              'BEGIN'L:=L+1;
                VP(/L/):=P;
                VD(/L/):=D;
                'IF'L=M'THEN''GOTO' CALC;
              'END';
              'IF' P< 24 'THEN' 'GOTO' RP;
                  CALC:
                  'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'L'DO'
                    'BEGIN''FOR'I:=1,2,3,4'DO'
                      DOP(/I/):=DCP(/VD(/K/),MP(/VP(/K/),I/)/);
                      LMAT(0,BB,N,ORDRE,TYPE,DOP);
                      'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
                        MV(/K,I/):=BB(/I/);
                    MV(/K,N+1/):=VD(/K/);
                    MV(/K,N+2/):=VP(/K/);
                    'END';
                  'COMMENT'INDEPENDANCE;
                  'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'L'DO'
                    'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
                      A(/I,J/):=MV(/I,J/);


                    PA:=1;RANG:=L;
                    HERMITE(U,A  ,N,L);
                    PROMAT(U,L,L,MV,L,N+2,MV);
```

```
                    'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'RANG'DO'
                    'BEGIN'
                     VP(/I/):=MV(/I,N+2/);
                     VD(/I/):=MV(/I,N+1/);
                    'END';
                  L:=RANG;
          OUT:
          'IF' G=L 'THEN' 'GOTO' ALL;
          G:=G+1;
          'FOR'I:=G'STEP'1'UNTIL'L 'DO'
            'BEGIN''WRITE'(108,F14)VD(/I/),VP(/I/);
    F14:'FORMAT'('0 DCP ',I3,' MP ',I3);
              'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
                BB(/J/):=MV(/I,J/);
              MATVOL(BB,N,ORDRE,TYPE);
            'END';
             G:=L;
             ALL:
          'IF'P=24 'AND' D=24 'THEN' 'GOTO' FINI;
                  'IF' L<28 'THEN' 'GOTO' RUT;
          'WRITE'(108,F7)RANG;
        'END'DE PVOLT;
      FINI:
          'WRITE'(108,F12);
    F12:'FORMAT'('ORIEN TROUVE D''AUTRE');

      'END'DES TABLEAUX;
      'END' DE ORDRETYPE;
      'GOTO'STEE;
'END'
```

MATRICES DE PERMUTATION

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 4 | 3 |
| 1 | 3 | 2 | 4 |
| 1 | 3 | 4 | 2 |
| 1 | 4 | 2 | 3 |
| 1 | 4 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 2 | 3 | 1 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 2 | 4 | 1 | 3 |
| 2 | 4 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 4 |
| 3 | 1 | 4 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 4 |
| 3 | 2 | 4 | 1 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 2 | 1 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 1 | 3 | 2 |
| 4 | 2 | 1 | 3 |
| 4 | 2 | 3 | 1 |
| 4 | 3 | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

DECOMPOSITIONS

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 17 | 24 |
| 1 | 8 | 18 | 23 |
| 1 | 10 | 17 | 19 |
| 1 | 11 | 14 | 24 |
| 2 | 7 | 17 | 24 |
| 2 | 7 | 18 | 23 |
| 2 | 9 | 18 | 20 |
| 2 | 12 | 13 | 23 |
| 3 | 8 | 17 | 22 |
| 3 | 11 | 14 | 22 |
| 3 | 11 | 16 | 20 |
| 3 | 12 | 14 | 21 |
| 4 | 7 | 18 | 21 |
| 4 | 11 | 13 | 22 |
| 4 | 12 | 13 | 21 |
| 4 | 12 | 15 | 19 |
| 5 | 7 | 16 | 23 |
| 5 | 9 | 14 | 22 |
| 5 | 9 | 16 | 20 |
| 5 | 10 | 15 | 20 |
| 6 | 8 | 15 | 24 |
| 6 | 9 | 16 | 19 |
| 6 | 10 | 13 | 21 |
| 6 | 10 | 15 | 19 |

11.4.2

RANG= 10

BASE DES P-MAT.D'ORDRE 4

MP 5
1 0 0 0
0 0 0 1
0 1 0 0
0 0 1 0

MP 8
0 1 0 0
1 0 0 0
0 0 0 1
0 0 1 0

MP 10
0 1 0 0
0 0 1 0
0 0 0 1
1 0 0 0

MP 11
0 1 0 0
0 0 0 1
1 0 0 0
0 0 1 0

MP 1
1 0 0 0
0 1 0 0
0 0 1 0
0 0 0 1

MP 2
1 0 0 0
0 1 0 0
0 0 0 1
0 0 1 0

MP 3
1 0 0 0
0 0 1 0
0 1 0 0
0 0 0 1

MP 4
1 0 0 0
0 0 1 0
0 0 0 1
0 1 0 0

MP 13
0 0 1 0
1 0 0 0
0 1 0 0
0 0 0 1

MP 19
0 0 0 1
1 0 0 0
0 1 0 0
0 0 1 0

RIEN TROUVE D'AUTRE

BIBS LILLE

ASE DES P-VOLT.D'ORDRE 4

DCP 5 MP 8

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 1 0 0 | 1 0 0 0 | 0 0 0 1 | 0 0 1 0 |
| 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 |
| 0 0 1 0 | 0 0 0 1 | 0 1 0 0 | 1 0 0 0 |
| 0 0 0 1 | 0 0 1 0 | 1 0 0 0 | 0 1 0 0 |

DCP 7 MP 18

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 0 1 0 | 0 0 0 1 | 0 1 0 0 | 1 0 0 0 |
| 0 0 0 1 | 1 0 0 0 | 0 0 1 0 | 0 1 0 0 |
| 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 1 0 0 0 | 0 0 0 1 |
| 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 0 1 | 0 0 1 0 |

DCP 16 MP 3

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 0 0 0 | 0 0 1 0 | 0 1 0 0 | 0 0 0 1 |
| 0 0 1 0 | 0 1 0 0 | 0 0 0 1 | 1 0 0 0 |
| 0 0 0 1 | 1 0 0 0 | 0 0 1 0 | 0 1 0 0 |
| 0 1 0 0 | 0 0 0 1 | 1 0 0 0 | 0 0 1 0 |

DCP 1 MP 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 |
| 0 1 0 0 | 1 0 0 0 | 0 0 0 1 | 0 0 1 0 |
| 0 0 1 0 | 0 0 0 1 | 1 0 0 0 | 0 1 0 0 |
| 0 0 0 1 | 0 0 1 0 | 0 1 0 0 | 1 0 0 0 |

DCP 2 MP 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 |
| 0 1 0 0 | 1 0 0 0 | 0 0 0 1 | 0 0 1 0 |
| 0 0 1 0 | 0 0 0 1 | 0 1 0 0 | 1 0 0 0 |
| 0 0 0 1 | 0 0 1 0 | 1 0 0 0 | 0 1 0 0 |

DCP 3 MP 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 |
| 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 | 1 0 0 0 |
| 0 0 1 0 | 0 0 0 1 | 1 0 0 0 | 0 1 0 0 |
| 0 0 0 1 | 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 1 0 |

DCP 4 MP 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 |
| 0 1 0 0 | 0 0 0 1 | 1 0 0 0 | 0 0 1 0 |
| 0 0 1 0 | 1 0 0 0 | 0 0 0 1 | 0 1 0 0 |
| 0 0 0 1 | 0 0 1 0 | 0 1 0 0 | 1 0 0 0 |

DCP 5 MP 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 |
| 0 1 0 0 | 1 0 0 0 | 0 0 0 1 | 0 0 1 0 |
| 0 0 0 1 | 0 0 1 0 | 1 0 0 0 | 0 1 0 0 |
| 0 0 1 0 | 0 0 0 1 | 0 1 0 0 | 1 0 0 0 |

DCP 7 MP 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 |
| 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 | 1 0 0 0 |
| 0 0 0 1 | 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 1 0 |
| 0 0 1 0 | 0 0 0 1 | 1 0 0 0 | 0 1 0 0 |

DCP 8 MP 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 |
| 0 1 0 0 | 0 0 0 1 | 1 0 0 0 | 0 0 1 0 |
| 0 0 0 1 | 0 0 1 0 | 0 1 0 0 | 1 0 0 0 |
| 0 0 1 0 | 1 0 0 0 | 0 0 0 1 | 0 1 0 0 |

DCP 9 MP 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 |
| 0 0 1 0 | 1 0 0 0 | 0 0 0 1 | 0 1 0 0 |
| 0 1 0 0 | 0 0 0 1 | 1 0 0 0 | 0 0 1 0 |
| 0 0 0 1 | 0 0 1 0 | 0 1 0 0 | 1 0 0 0 |

DCP 11 MP 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 |
| 0 0 1 0 | 0 0 0 1 | 0 1 0 0 | 1 0 0 0 |
| 0 1 0 0 | 1 0 0 0 | 0 0 0 1 | 0 0 1 0 |
| 0 0 0 1 | 0 0 1 0 | 1 0 0 0 | 0 1 0 0 |

DCP 13 MP 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 |
| 0 0 1 0 | 1 0 0 0 | 0 0 0 1 | 0 1 0 0 |
| 0 0 0 1 | 0 0 1 0 | 0 1 0 0 | 1 0 0 0 |
| 0 1 0 0 | 0 0 0 1 | 1 0 0 0 | 0 0 1 0 |

DCP 17 MP 1

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 |
| 0 0 0 1 | 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 1 0 |
| 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 | 1 0 0 0 |
| 0 0 1 0 | 0 0 0 1 | 1 0 0 0 | 0 1 0 0 |

DCP 1 MP 2

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 0 1 | 0 0 1 0 |
| 0 1 0 0 | 1 0 0 0 | 0 0 1 0 | 0 0 0 1 |
| 0 0 1 0 | 0 0 0 1 | 0 1 0 0 | 1 0 0 0 |
| 0 0 0 1 | 0 0 1 0 | 1 0 0 0 | 0 1 0 0 |

DCP 3 MP 2

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 0 1 | 0 0 1 0 |
| 0 1 0 0 | 0 0 1 0 | 1 0 0 0 | 0 0 0 1 |
| 0 0 1 0 | 0 0 0 1 | 0 1 0 0 | 1 0 0 0 |
| 0 0 0 1 | 1 0 0 0 | 0 0 1 0 | 0 1 0 0 |

DCP 4 MP 2

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 0 0 0 | 0 1 0 0 | 0 0 0 1 | 0 0 1 0 |
| 0 1 0 0 | 0 0 0 1 | 0 0 1 0 | 1 0 0 0 |

```
     0 0 1 0      1 0 0 0      0 1 0 0      0 0 0 1
     0 0 0 1      0 0 1 0      1 0 0 0      0 1 0 0

DCP   7 MP   2
     1 0 0 0      0 1 0 0      0 0 0 1      0 0 1 0
     0 1 0 0      0 0 1 0      1 0 0 0      0 0 0 1
     0 0 0 1      1 0 0 0      0 0 1 0      0 1 0 0
     0 0 1 0      0 0 0 1      0 1 0 0      1 0 0 0

DCP   8 MP   2
     1 0 0 0      0 1 0 0      0 0 0 1      0 0 1 0
     0 1 0 0      0 0 0 1      0 0 1 0      1 0 0 0
     0 0 0 1      0 0 1 0      1 0 0 0      0 1 0 0
     0 0 1 0      1 0 0 0      0 1 0 0      0 0 0 1

DCP   1 MP   3
     1 0 0 0      0 0 1 0      0 1 0 0      0 0 0 1
     0 1 0 0      0 0 0 1      1 0 0 0      0 0 1 0
     0 0 1 0      1 0 0 0      0 0 0 1      0 1 0 0
     0 0 0 1      0 1 0 0      0 0 1 0      1 0 0 0

DCP   2 MP   3
     1 0 0 0      0 0 1 0      0 1 0 0      0 0 0 1
     0 1 0 0      0 0 0 1      1 0 0 0      0 0 1 0
     0 0 1 0      0 1 0 0      0 0 0 1      1 0 0 0
     0 0 0 1      1 0 0 0      0 0 1 0      0 1 0 0

DCP   1 MP   4
     1 0 0 0      0 0 1 0      0 0 0 1      0 1 0 0
     0 1 0 0      0 0 0 1      0 0 1 0      1 0 0 0
     0 0 1 0      1 0 0 0      0 1 0 0      0 0 0 1
     0 0 0 1      0 1 0 0      1 0 0 0      0 0 1 0

DCP   1 MP   5
     1 0 0 0      0 0 0 1      0 1 0 0      0 0 1 0
     0 1 0 0      0 0 1 0      1 0 0 0      0 0 0 1
     0 0 1 0      0 1 0 0      0 0 0 1      1 0 0 0
     0 0 0 1      1 0 0 0      0 0 1 0      0 1 0 0

DCP   3 MP   7
     0 1 0 0      1 0 0 0      0 0 1 0      0 0 0 1
     0 0 1 0      0 1 0 0      0 0 0 1      1 0 0 0
     0 0 0 1      0 0 1 0      1 0 0 0      0 1 0 0
     1 0 0 0      0 0 0 1      0 1 0 0      0 0 1 0

DCP   4 MP   7
     0 1 0 0      1 0 0 0      0 0 1 0      0 0 0 1
     0 0 0 1      0 1 0 0      1 0 0 0      0 0 1 0
     1 0 0 0      0 0 1 0      0 0 0 1      0 1 0 0
     0 0 1 0      0 0 0 1      0 1 0 0      1 0 0 0

DCP   1 MP   9
     0 1 0 0      0 0 1 0      1 0 0 0      0 0 0 1
     1 0 0 0      0 0 0 1      0 1 0 0      0 0 1 0
     0 0 0 1      1 0 0 0      0 0 1 0      0 1 0 0
     0 0 1 0      0 1 0 0      0 0 0 1      1 0 0 0

DCP   1 MP  10
     0 1 0 0      0 0 1 0      0 0 0 1      1 0 0 0
     1 0 0 0      0 0 0 1      0 0 1 0      0 1 0 0
     0 0 0 1      1 0 0 0      0 1 0 0      0 0 1 0
     0 0 1 0      0 1 0 0      1 0 0 0      0 0 0 1

DCP   1 MP  19
     0 0 0 1      1 0 0 0      0 1 0 0      0 0 1 0
     0 0 1 0      0 1 0 0      1 0 0 0      0 0 0 1
     0 1 0 0      0 0 1 0      0 0 0 1      1 0 0 0
     1 0 0 0      0 0 0 1      0 0 1 0      0 1 0 0

RANG= 28

RIEN TROUVE D'AUTRE
 brit sur lecture.
FORTRAN RUN-TIME ERROR IN '9BCDREAD' CALLED AT LOC X'0681C'.
END-OF-FILE ON UNIT 105

JOB STEP 03 TERMINATED AFTER 0004.21MIN
.       CORE USED  0055      DISC USED  0014    WAIT TIME 0000,02
*****************************************************************************
     TIME        TIME*CORE      CORE-USE       TIME*DISC      DISC-USE
     04.60         251.84            90%         02.74            00%

  I/O-BYTES  I/O-CALLS  I/O-BYTE/SHR  I/O-CALL/SHR      CR        CP        l
    555275        376          00          00        430        00        1
JOB TERMINATED STEEN        0108    14*16*46*
```

## 11.5 ALGORITHMES DE FLOTS

### 11.5.1 ALGORITHME DE FLOT COMPATIBLE ET DE FLOT MAXIMUM : F F H

```
URE OPTIONS(MAIN);


FFH:PROCEDURE OPTIONS(MAIN);


        /*********************************************/
        /*  ALGORITHME DE HOFFMAN * FORD-FULKERSON  */
        /*********************************************/

        /* ALGORITHME DE HOFFMAN POUR CONTRUIRE UN FLOT COMPATIBLE
           SUR UN GRAPHE, UTILISABLE EN ALGORITHME DE FORD-FULKERSON
           POUR CONTRUIRE UN FLOT MAXIMUM DANS UN RESEAU */


/* EXPLICATIONS

     LES DONNEES SONT POUR LES ENTIERS EN < REAL DEC FIXED (4,0) >
                        POUR LES REELS EN < REAL DEC FIXED (8) > .
  ELLES SONT DANS L'ORDRE

- OPT            ENTRE PAR < DATA > ; ENTIER.
  < OPT='H' > IMPLIQUE UNE UTILISATION EN ALGORITHME DE HOFFMAN,
  TANDIS QUE < PPT='F' > IMPLIQUE L'ALGORITHME DE FORD- FULKERSON.
  DANS CE CAS L'UTILISATEUR PLACERA UN ARC DE RETOUR DE LA SORTIE
  ( SOMMET NUMEROTE N ) A L'ENTREE ( SOMMET NUMEROTE 0 ) DU RESEAU POUR
  LEQUEL IL CHOISIRA DES CAPACITES INFERIEURE ET SUPERIEURE PLUS
  GRANDES QUE LE FLOT MAXIMUM ATTENDU, IL PLACERA CET ARC EN DERNIER.

- INTERM          ENTRE PAR < DATA > ; ENTIER .
  SI INTERM EST DIFFERENT DE ZERO LES CALCULS .INTREM.EDIAIRES
  SERONT IMPRIMES . POUR CHAQUE ITERATION DE MARQUAGE ON AURA
  UCH = ARC IMCOMPATIBLE ,
  XCH = DEPART DU MARQUAGE ,
  YCH = SOMMETE A ATTEINDRE ,
  PUIS UN TABLEAU DONNANT POUR CHAQUE SOMMET
  LE NUMERO D'ORDRE DE .MARQ.UAGE ,
  L'ARC .U UT.ILISE ,
  LE .S.ENS DE .P.ARCOURT ( 1 OU -1 ) ,
  LA .MAJORATIO.N DE FLOT POSSIBLE DEPUIS XCH ,
  LE NUMERO D'ORDRE D'.EXPL.ORATION .

- N,M            ENTRES PAR < DATA > ; ENTIERS ;
  NOMBRE DE SOMMETS - 1 ET NOMBRE D'ARCS ( Y COMPRIS L'ARC DE RETOUR
  EVENTUEL ) DU GRAPHE . LES SOMMETS SONT NUMEROTES DE 0 A N , LES ARCS
  DE 1 A M .

- OR,EXT,B,C          ENTRES PAR < LIST > , 2 ENTIERS , 2 REELS .
  CE SONT POUR CHAQUE ARC , DANS L'ORDRE DE LEUR NUMERO , L'ORIGINE ,
  L'EXTREMITE , LES CAPACITES INFERIEURE ET SUPERIEURE .

  EXEMPLE DE DONNEES :
      OPT='F';
      INTREM=1;
      N=3,M=6;
```

```
ROCEDURE OPTIONS(MAIN);

ST

        0,1,-1,3,
        1,2,2,2,
        2,0,-4,-2,
        2,3,5,7,
        3,1,0,3,
        3,0,1000,1000,
    LES DONNEES SONT IMPRIMEES AU DEBUT DU TRAITEMENT .
    AUCUN TEST N'EST FAIT SUR LA QUALITE DES DONNEES . EN PARTICULIER
    ON N'EST PAS ASSURE D'UN RESULTAT SIGNIFICATIF SI C(U)<B(U) .

       LES RESULTATS SONT EXPLIQUES .


       REF: HERZ IBM NEUILLY 1971 . SIEEN STAGIAIRE SEPT 1971 .

 ***********************************************************/

    DCL (N,M,U,I,IS,J,NE,NM) REAL DEC FIXED (4,0);
    DECLARE (OR(M),EXT(M)) CONTROLLED REAL DEC FIXED (4,0);
    DCL (B(M),C(M),PHI(M)) CONTROLLED REAL DEC FIXED (8,0) ;
    DCL ALGORITHME CHAR (14) VARYING, OPT CHAR (1);

    LIRE: PROCEDURE;
    GET DATA (OPT) ;
    GET DATA (INTERM) ;
    IF OPT = 'F' THEN ALGORITHME = 'FORD-FULKERSON';
    ELSE ALGORITHME = 'HOFFMAN' ;
     GET DATA (N,M);
    ALLOCATE OR,EXT,B,C,PHI;
    DO I=1 TO M;
1   GET LIST ( OR(I),EXT(I), B(I), C(I));
1   END;
    END LIRE;

    ECRIRE: PROCEDURE;
    PUT EDIT ('N=',N,',M=',M)(SKIP(2),A(2),F(4),A(3),F(4));
    PUT EDIT ('ARCS','ORIG','EXTR','FLOT PASS','BORNE INF','BORNE SUP')
             (SKIP,3(A(4),X(1)),3(A(9),X(1)));
    DO U=1 TO M;
1   PUT EDIT (U,OR(U),EXT(U),PHI(U),B(U),C(U) )
            (SKIP,3(F(4),X(1)),3(F(9)  ,X(1)));
1   END;
    PUT PAGE;
    END ECRIRE;

    CALC: PROC ;
    PUT EDIT ('UCH=',U,',XCH=',XCH,',YCH=',YCH)
            (SKIP(2),A(4),F(4),2(A(5),F(9)));
    PUT EDIT ('SOMX','MARQ','U UT','SP', 'MAJORATIO','EXPL')
            (SKIP,3(A(4),X(1)),A(2),X(1),A(9),X(1),A(4));
```

```
DURE OPTIONS(MAIN);


DO I=0 TO N;
PUT EDIT (I,MA(I),PAR(I),SENS(I),D(I),E(I) )
          (SKIP,3(F(4),X(1)),F(2),X(1),F(9)   ,X(1),F(4));
END;
END CALC;

/* DONNEES */
 SPE: ;
FREE     OR,EXT,B,C,PHI;
CALL LIRE;
PHI=0;
PUT LIST ('DONNEES');
PUT DATA (ALGORITHME); PUT SKIP;
CALL ECRIRE ; .

/* ALGORITHME */

DCL PAR(0:N) DEC FIXED (4,0) CONTROLLED;
DCL (MA(0:N),SENS(0:N),E(0:N)) BIN FIXED (15,0)  CONTROLLED;
DCL D(0:N) REAL DEC FIXED (8,0) CONTROLLED ;
ALLOCATE PAR, MA, SENS, E, D;

/* ARC INCOMPATIBLE */
COMP: ;
DO I = 1 TO M;
IF PHI(I)< B(I) | C(I)< PHI(I) THEN
DO; U=I;
GO TO  MARQ ;
END ;
END ;

/* FLOT COMPATIBLE */
PUT PAGE;
PUT DATA (ALGORITHME) ; PUT SKIP;
PUT LIST ( 'FLOT COMPATIBLE');
GO TO RESULT;

MARQ :  /* INTIALISATION */
MA,PAR, SENS,D,E =0;
DCL S BIN FIXED (1,0);
S= PHI(U)<B(U) ;
XCH= S*EXT(U) +(1-S)*OR(U);
YCH = S*OR(U)+(1-S)*EXT(U);
SENS(XCH)= S-(1-S);
D(XCH) = S*(C(U)-PHI(U))+(1-S)*(PHI(U)-B(U)) ;
NM,NE,MA(XCH)=1 ;
PAR(XCH)=U;

/* EXPLORATION */
EXPLO :
```

```
ROCEDURE OPTIONS(MAIN);

ST

      DO I=0 TO N;
1     IF MA(I) ¬= 0 & E(I) = 0 THEN
1     GO TO AGR;
1     END;
      GO TO CUSAT;

      AGR: ;
      DO J= 1 TO M ;
1     IF OR(J) = I & MA( EXT(J))=0 & C(J)>PHI(J) THEN
1     DO;IS =EXT(J) ;
2     NM=NM+1;
2     MA(IS) =NM;
2     PAR(IS) =J;
2     SENS(IS) =1;
2     D(IS) = MIN(C(J)-PHI(J ),D(I));
2     IF IS=YCH THEN GOTO  AMEL;
2     END;
1     IF EXT(J) =I & MA(OR(J)) = 0 & PHI(J) > B(J) THEN
1     DO;IS= OR(J);
2     NM=NM+1;
2     MA(IS) =NM;
2     PAR(IS) = J;
2     SENS(IS)=-1;
2     D(IS)= MIN(PHI(J)-B(J),D(I));
2     IF IS=YCH THEN GOTO  AMEL;
2     END;
1     END;

      E(I)=NE;
      NE=NE+1;
      GO TO EXPLO;

      /* EXPLOITATION */
      CUSAT: /* COUPE SATUREE */;
      IF INTERM ¬= 0 THEN
        CALL CALC;
      DCL (CSB,CSC) DEC FIXED ( 8,0) ;
      CSB,CSC=0;
      PUT DATA (ALGORITHME)PAGE; PUT SKIP;
      IF OPT='H' THEN PUT LIST ('FLOT NON COMPATIBLE') SKIP ;
      ELSE PUT LIST ('FLOT MAXIMUM') SKIP;
      PUT LIST('SOMMETS DE LA COUPE:') SKIP;
      DO I = 0 TO N;
1       IF MA(I) ¬= 0 THEN PUT EDIT (I,',')(F(4),A(1));
1     END ;
      PUT LIST('ARCS SATURES OU IMCOMPATIBLES:') SKIP;
      DO J = 1 TO M ;
1       IF MA(OR(J)) ¬= 0 & MA(EXT(J)) = 0 THEN
1         DO;
2           CSC=CSC+C(J);
```

BUS LILLE

```
DURE OPTIONS(MAIN);



      PUT EDIT(J,'S,') (F(4),A(2));
      END;
  IF MA(EXT(J)) ¬= 0 & MA(OR(J)) = 0 THEN
    DO ;
    CSB=CSB+B(J);
      PUT EDIT (J,'E,') (F(4),A(2));
    END;
END;
IF OPT = 'H' THEN
  DO ;
    PUT EDIT('FLOT ENTRANT MINIMUM',CSB) (SKIP,A(20),F(9));
    PUT EDIT ('FLOT SORTANT MAXIMUM',CSC) (SKIP,A(20),F(9)  );
  END;
ELSE
DO;
  CSB=CSB-B(M);
  PUT LIST ('CAPACITE DE LA COUPE =',CSC-CSB) SKIP;
END ;
GO TO RESULT ;

AMEL : /* AMELIORATION */ ;
IF INTERM ¬= 0 THEN
  CALL CALC;
DCL DIF REAL DEC FIXED (8,0) ;
DIF=D(YCH);
I=YCH;
ENC: PHI(PAR(I))= PHI(PAR(I))+SENS(I)*DIF;
I=OR(PAR(I))*(SENS(I)=1) + EXT(PAR(I))*(SENS(I)=-1);
IF I¬= YCH THEN GO TO ENC;
ELSE GO TO COMP;

/* SORTIE DU FLOT */
RESULT :  CALL ECRIRE;
TERM: ;
GO TO SPE;
END;
```

```
DONNEES                    ALGORITHME='FORD-FULKERSON';
```

```
N=   3,M=   6
ARCS ORIG EXTR FLOT PASS BORNE INF BORNE SUP
   1    0    1          0        -1         3
   2    1    2          0         2         2
   3    2    0          0        -4        -2
   4    2    3          0         5         7
   5    3    1          0         0         3
   6    3    0          0       100       100
```

```
ALGORITHME='FORD-FULKERSON';

FLOT MAXIMUM
SOMMETS DE LA COUPE:     0,    1,
ARCS SATURES OU IMCOMPATIBLES:    2S,    3E,    5E,    6E,
CAPACITE DE LA COUPE =              6

N=   3,M=   6
ARCS ORIG EXTR FLOT PASS BORNE INF BORNE SUP
   1    0    1          2        -1         3
   2    1    2          2         2         2
   3    2    0         -4        -4        -2
   4    2    3          6         5         7
   5    3    1          0         0         3
   6    3    0          6       100       100
```

DONNEES ALGORITHME='HOFFMAN';

N= 3,M= 6

| ARCS | ORIG | EXTR | FLOT PASS | BORNE INF | BORNE SUP |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 0 | 0 | -4 | -2 |
| 4 | 2 | 3 | 0 | 5 | 7 |
| 5 | 3 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| 6 | 3 | 0 | 0 | 5 | 7 |

ALGORITHME='HOFFMAN';
FLOT COMPATIBLE

N= 3,M= 6

| ARCS | ORIG | EXTR | FLOT PASS | BORNE INF | BORNE SUP |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | -1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 0 | -4 | -4 | -2 |
| 4 | 2 | 3 | 6 | 5 | 7 |
| 5 | 3 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| 6 | 3 | 0 | 6 | 5 | 7 |

DONNEES ALGORITHME='HOFFMAN';

N= 3,M= 6

| ARCS | ORIG | EXTR | FLOT PASS | BORNE INF | BORNE SUP |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 0 | 0 | -4 | -2 |
| 4 | 2 | 3 | 0 | 5 | 7 |
| 5 | 3 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| 6 | 3 | 0 | 0 | 7 | 7 |

UCH= 2,XCH= 2,YCH= 1

| SOMX | MARQ | U | UT | SP | MAJORATIO | EXPL |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 0 |
| 1 | 3 | 5 | 1 | | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | 2 | 1 |
| 3 | 2 | 4 | 1 | | 2 | 0 |

UCH= 3,XCH= 2,YCH= 0

| SOMX | MARQ | U | UT | SP | MAJORATIO | EXPL |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 6 | 1 | | 4 | 0 |
| 1 | 3 | 5 | 1 | | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 3 | -1 | | 4 | 1 |
| 3 | 2 | 4 | 1 | | 4 | 0 |

UCH= 6,XCH= 0,YCH= 3

| SOMX | MARQ | U | UT | SP | MAJORATIO | EXPL |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 6 | 1 | | 3 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | | 3 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 0 |
| 3 | 3 | 5 | -1 | | 2 | 0 |

UCH= 6,XCH= 0,YCH= 3

| SOMX | MARQ | U | UT | SP | MAJORATIO | EXPL |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 6 | 1 | | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 0 |

ALGORITHME='HOFFMAN';

FLOT NON COMPATIBLE
SOMMETS DE LA COUPE: 0, 1,
ARCS SATURES OU IMCOMPATIBLES: 2S, 3E, 5E, 6E,
FLOT ENTRANT MINIMUM 3
FLOT SORTANT MAXIMUM 2

N= 3,M= 6

| ARCS | ORIG | EXTR | FLOT PASS | BORNE INF | BORNE SUP |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | -1 | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 0 | -4 | -4 | -2 |
| 4 | 2 | 3 | 6 | 5 | 7 |
| 5 | 3 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| 6 | 3 | 0 | 6 | 7 | 7 |

## 11.5.2 ALGORITHME DE FORD-FULKERSON MATRICIEL : A P F F M A T

```
PROC OPTIONS ( MAIN) ;

APFFMAT : PROC OPTIONS ( MAIN) ;

/*****************************************/
/* ALGORITHME DE FORD-FULKERSON MATRICIEL */
/*****************************************/

/* ALGOTITHME DE FORD-FULKERSON POUR CONSTRUIRE UN FLOT MAXIMUM A
   TRAVERS UN RESEAU A CONTRAINTES INFERIEURES NULLES ET DONT LE
   RESEAU DE TRANSPORT SE REDUIT A UN GRAPHE SIMPLE.
   CE PROGRAMME PERMET DE RESOUDRE LE PROBLEME DE FRECHET ET DONC DE
   TROUVER UNE S-MATRICE INFERIEURE A UNE C-MATRICE.

 DONNEES

   LES DONNEES SONT DANS L'ORDRE

- M,N              ENTRES PAR <DATA> ; BIN FIXED;
   M EST LE NOMBRE DE LIGNES DE LA MATRICE; C'EST AUSSI LE NOMBRE DE
   SOMMETS PRODUCTEURS DU RESEAU.
   N EST LE NOMBRE DE COLONNES DE LA MATRICE; C'EST AUSSI LE NOMBRE DE
   SOMMETS CONSOMMATEURS DU RESEAU.
   CES 2 NOMBRES NE SONT PAS NECESSAIREMENT EGAUX.

- MC               ENTRE PAR <LIST> ; BIN FIXED;
   MC EST LA MATRICE A TRAITER. ELLE DONNE LES CAPACITES SUPERIEURES
   DES ARCS DU GRAPHE SIMPLE CONSTITUANT LE RESEAU DE TRANSPORT.

- LC               ENTRE PAR <LIST> ; BIN FIXED;
   LC EST LE VECTEUR-CONTRAINTE SUR LES LIGNES; IL DONNE LES CAPACITES
   SUPERIEURES DES ARCS DE PRODUCTION.

- CC               ENTRE PAR <LIST> ; BIN FIXED;
   CC EST LE VECTEUR-CONTRAINTE SUR LES COLONNES; IL DONNE LES
   CAPACITES SUPERIEURES SUR LES ARCS DE CONSOMMATIONS.

   EXEMPLE DE DONNEES:
          M=2,N=3;
          1,3,12,
          9,2,6,
          15,15,
          10,5,18,

   ELLES CORESPONDENT AU GRAPHE SUIVANT:
```

| ARCS | | CAPACITES | |
|---|---|---|---|
| ORIGINE | EXTREM. | INF | SUP |
| ALFA | X1 | 0 | 15 |
| ALFA | X2 | 0 | 15 |
| X1 | Y1 | 0 | 1 |
| X1 | Y2 | 0 | 3 |
| X1 | Y3 | 0 | 12 |
| X2 | Y1 | 0 | 9 |
| X2 | Y2 | 0 | 2 |
| X2 | Y3 | 0 | 6 |
| Y1 | BETA | 0 | 10 |
| Y2 | BETA | 0 | 5 |
| Y3 | BETA | 0 | 18 |

```
   ON PEUT TRAITER PLUSIEURS SERIES DE DONNEES SUCCESSIVEMENT EN LES
   PLACANT LES UNES DERRIERE LES AUTRES.LE PROGRAMME S'ARRETE SUR
   EPUISEMENT DES DONNEES.

 RESULTATS

   LES VALEURS DONNEES A DROITE DES MATRICES CORRESPONDENT AUX ARCS DE
   PRODUCTION, CELLES PLACEES EN DESSOUS CORRESPONDENT AUX ARCS DE
   CONSOMMATION.

 METHODE

   MARQUAGE DE L'ALGORITHME DE HOFMANN*FORD-FULKERSON EN TENANT COMPTE
   DE LA FORME PARTICULIERE DU GRAPHE.

 REFERENCES

   J.C. HERZ    IBM NEUILLY-VILLIERS ;
   J.P. STEEN    STAGE SEPT 71.

*********************************************************************/

SORT :PROC  (MAT,LB,CB,L,C) ;

/* IMPRESSION DE LA MATRICE  MAT BORDEE PAR LES TABLEAUX LB A DROITE
   ET CB EN DESSOUS. */

   DCL(MAT(*,*),LB(*),CB(*) ) BIN FIXED;
```

```
PROC OPTIONS ( MAIN) ;

    DCL(L,C) BIN FIXED ;

    DCL (I,J) BIN FIXED ;

    PUT EDIT ((J DO J = 1 TO C)) ( SKIP (3),X(8),(C) F(5));

    PUT EDIT ('+') (SKIP,X(7),A);
    DO J=1 TO C ;
      PUT EDIT ('-----') (A);
    END;
    PUT EDIT ('--+') (A) ;

    DO I = 1 TO L ;
      PUT EDIT ( I,'  |',(MAT(I,J) DO J = 1 TO C ),'  |',LB(I))
              (SKIP,F(5),A,(C)F(5),A,F(5));
    END;

    PUT EDIT ('+') (SKIP,X(7),A);
    DO J=1 TO C ;
      PUT EDIT ('-----') (A);
    END;
    PUT EDIT ('--+') (A) ;

    PUT EDIT((CB(J) DO J=1 TO C))(SKIP,X(8) ,(C)F(5));

    END SORT ;


FFMAT: PROC(MC,LC,CC,MF,LF,CF,M,N,F,FE);
    DCL(M,N,F,FE) BIN FIXED;
    DCL(MC(*,*),LC(*),CC(*),MF(*,*),LF(*),CF(*)) BIN FIXED;

    DCL (LM(M),LE(M),LD(M),CM(N),CE(N),CD(N)) BIN FIXED;
    DCL(DB,U,I,J,V,K) BIN FIXED ;

/* FLOT DEPART */

    F=0;
    IF FE = 0 THEN
      DO; MF=0;
        LF=0;
        CF=0;
      END;
    ELSE DO;
      DO I=1 TO M ;
        F=F+LF(I);
      END;
    END;
```

```
IAT : PROC OPTIONS ( MAIN) ;

ST

    /* INITIALISATION */

    INIT :

    /* MARQUAGE DEPUIS ALPHA */

        DO V=1 TO M ;
1         IF LC(V)>LF(V) THEN
1           DO;
2       LM,LD,LE =0;
2       CD ,CM,CE=0;
2             LM(V) = -1;
2             LD(V)=LC(V)-LF(V);

2       MARC:
        K=0;
2       DO I = 1 TO M;
3         IF LM(I) ¬= 0 & LE(I) = 0 THEN
3           DO ; LE(I) = 1 ;
4             DO J = 1 TO N;
5               IF CM(J) = 0 & MF(I,J) < MC(I,J) THEN
5                 DO; K = 1 ;
6                   CM(J) = I;
6                   CD(J) = MIN(MC(I,J) - MF(I,J), LD(I)) ;
6                 END;
5             END;
4           END;
3       END;
2       IF K = 0 THEN GO TO SATURATION ;

2       K = 0 ;
2       DO J = 1 TO N ;
3         IF CM(J) ¬= 0 & CE(J) = 0 THEN
3       DO ;
4         CE(J)=1;


    /* PEUT ON ATTEINDRE BETA ? */

4         IF CC(J)>CF(J) THEN /* OUI ALORS AMELIORATION */
4         DO ;
5           DB = MIN (CD(J),CC(J)-CF(J));
5           U=J;
5           CF(U) = CF(U)+DB;
5           CH:MF(CM(U),U)=MF(CM(U),U)+DB;
5           IF LM(CM(U)) ¬= -1 THEN
5             DO ;
6       MF(CM(U),LM(CM(U))) = MF(CM(U),LM(CM(U))) - DB;
```

BIBS LILLE

```
: PROC OPTIONS ( MAIN) ;

            U= LM(CM(U));
           GO TO CH ;
         END;
       LF(CM(U))=LF(CM(U))+DB ;
       F=F+DB;
       GO TO INIT;
     END ;

/* PEUT-ON MARQUER DES LIGNES ? */
     DO I = 1 TO M ;
       IF LM(I) = 0 & MF(I,J) > 0 THEN
         DO ; LM(I) = J ;
           K = 1 ;
           LD(I) = MIN (CD(J),MF(I,J));
         END;
       END;
       END;
    END;
    IF K = 1 THEN
      GO TO MARC ;


       END;
    SATURATION : ;
    END;

    END FFMAT ;



/* PROGRAMME PRINCIPAL */

    DCL(M,N,F,FT) BIN FIXED;

    PUT PAGE ;
REPRISE : ;
    GET DATA (M,N) ;
    BEGIN ; DCL(MC(M,N),LC(M),CC(N),
                MF(M,N),LF(M),CF(N)) BIN FIXED ;
GET LIST(MC);
GET LIST (LC);
GET LIST (CC);
      PUT LIST (' POUR LA MATRICE-GRAPHE') ;
      CALL SORT (MC,LC,CC,M,N) ;

    FT=0;
      CALL FFMAT(MC,LC,CC,MF,LF,CF,M,N,F,FT);
```

```
IAT : PROC OPTIONS ( MAIN) ;

ST

      PUT EDIT ('LE FLOT MAXIMUM EST',F,' ,  PASSANT COMME SUIT')
               (SKIP(3),A,F(5),A);
      CALL SORT (MF,LF,CF,M,N);
    END;

    PUT PAGE ;
    GO TO REPRISE ;

    END APFFMAT ;
```

POUR LA MATRICE-GRAPHE

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 0 | 3 |
| 2 | 0 | 3 | 4 | 7 |
| | 1 | 5 | 4 | |

LE FLOT MAXIMUM EST 10 , PASSANT COMME SUIT

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 0 | 3 |
| 2 | 0 | 3 | 4 | 7 |
| | 1 | 5 | 4 | |

POUR LA MATRICE-GRAPHE

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 12 | 15 |
| 2 | 9 | 2 | 6 | 15 |
| | 10 | 5 | 18 | |

LE FLOT MAXIMUM EST 30 , PASSANT COMME SUIT

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 11 | 15 |
| 2 | 9 | 2 | 4 | 15 |
| | 10 | 5 | 15 | |

POUR LA MATRICE-GRAPHE

| | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 9 | 10 |
| 2 | 3 | 2 | 5 |
| 3 | 12 | 6 | 18 |
| | 16 | 17 | |

LE FLOT MAXIMUM EST 33 , PASSANT COMME SUIT

| | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 9 | 10 |
| 2 | 3 | 2 | 5 |
| 3 | 12 | 6 | 18 |
| | 16 | 17 | |

POUR LA MATRICE-GRAPHE

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | |

LE FLOT MAXIMUM EST 3 , PASSANT COMME SUIT

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | |

PCUR LA MATRICE-GRAPHE

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

LE FLOT MAXIMUM EST 5 , PASSANT COMME SUIT

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | |

PCUR LA MATRICE-GRAPHE

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 8 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

LE FLOT MAXIMUM EST 8 , PASSANT COMME SUIT

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | |

## 11.6 MULTIDÉCOMPOSITION DES P-MATRICES

### 11.6.1 PROGRAMME M L T D C P 3

```
PROC OPTIONS(MAIN);


MLTDCP3 : PROC OPTIONS(MAIN);


    /*********************************************************/
    /* DECOMPOSITION D'UNE MATRICE EN MATRICES DE PERMUTATION */
    /*********************************************************/


/*******************************************************************

BUT

    CE PROGRAMME DECOMPOSE UNE MATRICE (M*N) A COEFFICIENTS ENTIERS
    POSITIFS EN MATRICES DE PERMUTATION ET INDIQUE LA MATRICE
    RESTANTE ,OU QUE LA DECOMPOSITION EST IMPOSSIBLE . SI LA MATRICE
    EST RECTANGULAIRE LES MATRICES OBTENUES SONT DES MATRICES
    D'INJECTION.
    CE PROGRAMME DONNE TOUTES LES DECOMPOSITIONS POSSIBLES A
    COEFFICIENTS POSITIFS.

    UNE C-MATRICE EST A COEFFICIENTS POSITIFS OU NUL.
    SI EN PLUS LA SOMME MINIMALE SUIVANT LES LIGNES EST PLUS GRANDE QUE
    LA SOMME MAXIMALE SUIVANT LES COLONNES, C'EST UNE G-MATRICE.
    SI EN PLUS ENCORE LES SOMMES SUIVANT LES LIGNES SONT EGALES, C'EST
    UNE S-MATRICE AYANT POUR VALEUR CRITIQUE LA SOMME SUIVANT LES LIGNES.
    SI ENFIN EN PLUS ELLE EST CARREE, C'EST UNE P-MATRICE.
    UNE R-MATRICE EST UNE S-MATRICE RECTANGULAIRE HORIZONTALE DONT LES
    SOMMES SUIVANT LES COLONNES SONT EGALES.

    SEULES LES R,S ET P-MATRICES SONT DECOMPOSABLES SANS RESTE.

    REMARQUES :

    ON PEUT  PAR CHOIX JUDICIEUX DES DONNEES
    - ARRETER ET REPRENDRE LES CALCULS (VOIR DT,MOD),
    - NE TRAITER QUE CERTAINS TYPES DE MATRICES (PRS=1,U5=1),
    - SORTIR LES RESULTATS INTERMEDIAIRES (PRS=2),
    - PERFORER LES RESULTATS (U5=2),
    - CALCULER CERTAINES DECOMPOSITIONS (U5=3,U5=4,VOIR LP1,MPO).

DONNEES

    LES DONNEES SONT , DANS L'ORDRE ,

- DT                ENTRE PAR < DATA > ; CHAR(4) ;
    TEMPS MMSS DE CALCUL . EXEMPLE DT='0420'; .
    DT DOIT ETRE AU PLUS LE TEMPS DE LA CARTE JOB - 30 SEC.(C'EST LE
    TEMPS DE COMPILATION,DE LINKAGE,DE PERFORATION DES VARIABLES ET
```

BUS LILLE

```
DCP3 : PROC OPTIONS(MAIN);

ST

    TABLEAUX).
    SI DT='0000' ALORS ON PREND DT='3600; (1 HEURE).
    QUAND LE TEMPS EST ECOULE ON PERFORE LES VARIABLES ET LES TABLEAUX.
    SI DT EST TROP GRAND LE PROGRAMME S'ARRETE A L'EPUISEMENT DU
    TEMPS DE LA CARTE JOB.
    DT N'EST MIS QU'UNE SEULE FOIS EN TETE DES DONNEES DE CHAQUE
    PASSAGE.

- MOD                ENTRE PAR < DATA > ; CHAR(7) ;
    SI ON REPREND LE CALCUL D'UNE DECOMPOSITION IL FAUT METTRE
    MOD='REPRISE';  SINON ON PEUT METTRE MOD='INITIAL'.
    SI 'REPRISE' LES DONNEES SONT LES CARTES PERFOREES A LA FIN DU PASSAGE
    PRECEDENT. ON Y TROUVE
    -  DT='MMSS'; LE MEME TEMPS QU'AU PASSAGE PRECEDENT,
    -  MOD='REPRISE';
    -  K,...  OU K EST LE NUMERO DE LA DERNIERE DECOMPOSITION
       CALCULEE,
    -  ET LES AUTRES VARIABLES ET TABLEAUX UTILES A LA SUITE DU
       PROGRAMME.

- PRS                ENTRE PAR < DATA>; BIN FIXED;
    SI PRS = 1  NE SONT TRAITEES QUE LES P-,R- ET S-MATRICES .
    SI PRS = 2 LES RESULTATS INTERMEDIAIRES SONT IMPRIMES (EN VUE DE
    MISE AU POINT) DANS L'ORDRE IP,MOT(IP,,),BTC(,),IC(),COF(),NNP().

- U5                 ENTRE PAR < DATA>; BIN FIXED;
    SI U5 = 1 ON CONSIDERE QUE LA MATRICE A TRAITER EST LA MATRICE
    UN(5*5) POUR LAQUELLE SONT PREVUES DES SORTIES SPECIALES.
    SI U5 = 2 ON PERFORE LES RESULTATS QUELQUE SOIT LA MATRICE
    EN VUE DE SON UTILISATION DANS DEICV.
    SI U5 = 3 SEULLES LES DECOMPOSITIONS N'UTILISANTS PAS 2 FOIS LA
    MEME MATRICE SONT CALCULEES.
    SI U5 = 4 LE COEFFICIENT MAXIMUM DE CHAQUE MATRICE CONTENUE EST
    DONNE (VOIR COEF(MPO) ).(DANS CE CAS MOD='INITIAL';)

- M,N            ENTRES PAR < DATA > ; BINARY FIXED ;
    N EST LE NOMBRE DE LIGNES DE LA MATRICE , N LE NOMBRE DE COLONNES .
    SI M OU N <= 1 UN DIAGNOSTIC D'ERREUR SERA DONNE ET ON
    ENVISAGERA LE TRAITEMENT D'UNE AUTRE MATRICE .
    IL EN EST DE MEME SI M<N.

- MAT            ENTREE PAR < LIST > ; BINARY FIXED ;
    C'EST LA MATRICE A TRAITER , PRESENTEE LIGNE PAR LIGNE .
    LE PROGRAMME NE TRAITE PAS LES MATRICES QUI ONT DES ELEMENTS
    NEGATIFS OU DES LIGNES NULLES.

- LP1            ENTRE PAR < DATA > ; BINARY FIXED ;
    SI LE NOMBRE DE MATRICES CONTENUES EST > LP1 ON NE CHERCHERA QUE
    LES DECOMPOSITIONS FAISANT INTERVENIR UNIQUEMENT LES COEFFICIENTS
    MAXIMUM (VOIR 4A).
```

: PROC OPTIONS(MAIN);

- MPD ENTRE PAR < DATA > ; BINARY FIXED ;
  ON N'IMPRIMERA QUE LES DECOMPOSITIONS DE AU PLUS MPD MATRICES DE PERMUTATION DIFFERENTES.

  DANS LE CAS OU L'ON IGNORE LES VALEURS INTERESSANTES QU'IL FAUT DONNER A LP1 ET MPD, ON PEUT PRENDRE LP1=NOMBRE D'ARRNGEMENTS DE M OBJETS PRIS PARMI N, ET MPD=SOMME MINIMUM SUIVANT LES LIGNES, OU LP1, SI LP1 < MPD . ON OBTIENDRA ALORS TOUTES LES DECOMPOSITIONS POSSIBLES ET ON LES IMPRIMERA.

- COEF(MPU) ENTRE PAR < LIST> ; BINARY FIXED;
  SI U5 = 4 .
  LISTE DES COEFFICIENTS DES MATRICES CONTENUES POUR LE DEPART DU BACK-TRACKING.
  PRENDRE 'U5=4; COEF(MPU(*))=1; KD=1;' EQUIVAUT A POSER 'U5=3;' .
  POUR CONSTRUIRE CETTE LISTE ON CONSIDERE LA DERNIERE DECOMPOSITION DE LA P-MATRICE CALCULEE. EN COMMENCANT A LA PREMIERE MATRICE CONTENUES, TANT QUE LE COEFFICIENT EST NUL ON PREND ZERO, ENSUITE ON PREND LE PREMIER COEFFICIENT NON NUL, PUIS ON PREND LE NOMBRE DE FOIS CONTENUE.
  DE CETTE FACON, ON OBTIENDRA TOUTES LES DECOMPOSITIONS DE LA MATRICE EN PLUSIEURS PASSAGES, AVEC EVENTUELLEMENT DES INTERSECTIONS NON NULLES.

- KD ENTRE PAR <DATA > ; BINARY FIXED ;
  SI U5 = 4 .
  NUMERO DE LA PREMIERE DECOMPOSITION A CALCULER.

  EXEMPLE DE DONNEES :

```
DT='0000';

MOD='INITIAL';
PRS=0;U5=0;
M=3,N=3;
1,2,3,
3,0,3,
2,4,0,
LP1=6;
MPD=4;

MOD='INITIAL';
PRS=1;U5=4;
M=4,N=4;
3,3,3,3, 3,3,3,3, 3,3,3,3, 3,3,3,3,
LP1=24;MPD=24;
0 0 0 0 0 3  3 3 3 3 3 3  3 3 3 3 3 3  3 3 3 3 3 3
KD=4674;
```

  ON PEUT TRAITER PLUSIEURS MATRICES A LA SUITE LES UNES DES AUTRES . IL SUFFIT DE FAIRE SUIVRE LES GROUPES DE DONNEES . ARRET DU

'3 : PROC OPTIONS(MAIN);

.T

PROGRAMME SUR LECTURE .

RESULTATS

LES RESULTATS SONT EXPLIQUES .

POUR UNE MATRICE DE PERMUTATION,EVENTUELLEMENT NOTEE M.P., ON INDIQUE
- SON NUMERO; SE REFERER ALORS A LA LISTE DONNEE AU DEBUT DU TRAITEMENT DE LA MATRICE,
- ET EVENTUELLEMENT, EN LIGNE OU EN COLONNE,
LES POSITIONS DES ELEMENTS NON NULS DANS CHAQUE LIGNE, CELLES-CI ETANT PRISE DE 1 A M.

EXEMPLE :
POUR LA MATRICE DE PERMUTATION

```
        1  2  3
     +----------+
   1 |     1    |
   2 |        1 |
   3 |  1       |
     +----------+
```

ON ECRIRA :

```
2  3  1
```

OU ENCORE :

```
2
3
1
```

LE '=' ENTRE ND ET NP SIGNIFIE QUE TOUTES LES MATRICES DE PREMUTATION ONT LE COEFFICIENT 1.
POUR LES MATRICES (4*4),
LE 'S' APRES ND SIGNIFIE QUE LA DECOMPOSITION NE CONTIENT PAS DE DECOMPOSITION DE UN(4*4).

METHODE

1/ ON INTRODUIT LA MATRICE A TRAITER ET ON CONTROLE
   - QU'ELLE A PLUS D'UNE LIGNE,
   - QU'ELLE N'EST PAS RECTANGULAIRE VERTICALE,
   - QU'ELLE N'A PAS D'ELEMENT NEGATIF,
   - QU'ELLE N'A PAS DE LIGNE NULLE;
   ON DETERMINE ENFIN SA CARACTERISTIQUE (P-MATRICE,...).

2/ ON CONSTRUIT LES MATRICES DE PERMUTATION DE MEMES DIMENSIONS QUE LA MATRICE A TRAITER, A MOINS QUE CETTE MATRICE SOIT DE MEMES DIMENSIONS QUE LA MATRICE TRAITEE JUSTE AVANT,S'IL Y EN A

UNE, AUQUEL CAS ON CONNAIT DEJA CES MATRICES DE PERMUTATION.

3/ ON CHERCHE LES MATRICES DE PERMUTATION CONTENUES DANS LA MATRICE A TRAITER ET LEURS COEFFICIENTS.

4/ ON UTILISE UNE METHODE DE 'BACK-TRACKING' DONT LA TECHNIQUE EST LA SUIVANTE.

A/ ON SOUSTRAIE DE LA MATRICE EN TRAITEMENT CHACUNE DES MATRICES CONTENUES UN NOMBRE DE FOIS INFERIEUR OU EGAL A SON COEFFICIENT MAXIMUM.

B/ POUR CHACUNE DES MATRICES EXTRAITES ON CHERCHE LA SERIE DES MATRICES CONTENUES RESTANTES DIFFERENTES DE LA MATRICE EXTRAITE, ET ON RECOMMENCE UNE NOUVELLE ETAPE COMME EN A/.

C/ S'IL N'Y A PLUS DE MATRICES CONTENUES, ALORS SI LA MATRICE EN TRAITEMENT EST DEVENUE NULLE, ON IMPRIME LA DECOMPOSITION, ET DANS TOUS LES CAS, ON CHERCHE UNE AUTRE DECOMPOSITION EN PRENANT UNE AUTRE MATRICE CONTENUE DANS LA SERIE DE LA MEME ETAPE.

D/ SI CETTE SERIE EST EPUISEE, ON REVIENT A L'ETAPE PRECEDENTE.

E/ S'IL N'Y A PLUS D'ETAPE PRECEDENTE ON A VU TOUTES LES DECOMPOSITIOI POSSIBLES. ON IMPRIME ALORS LA MEILLEURE (LA PREMIERE FAISANT INTERVENIR LE MOINS DE MATRICES DE PERMUTATION DIFFERENTES) OU ON INDIQUE QU'AUCUNE DES DECOMPOSITIONS N'A DONNE UN RESTE NUL.

REMARQUE 1 : CETTE TECHNIQUE POURAIT AVANTAGEUSEMNT ETRE REMPLACEE PAR UN PROCESSUS RECURSIF, LES ETAPES CORRESPONDANT AUX APPELS EN PROFONDEUR DE LA RECURSIVITE. IL FAUDRAIT CEPENDANT CONSERVE DANS UN TABLEAU DU PROGRAMME PRINCIPAL ACESSIBLE A LA PROCEDURE RECURSIVE LE DEBUT DE LA DECOMPOSITION ESSAYEE (ON NE SAIT QU'ELLE EST BONNE QU'A LA FIN , QUAND LE RESTE EST NUL).

REMARQUE 2 : CETTE METHODE, BIEN QUE TRES EVOLUEE, PEUT ETRE LONGUE. EN CONSEQUENCES, SI LE NOMBRE DE MATRICES CONTENUES EST > 120 ON ABANDONNE LE TRAITEMENT APRES LA PHASE 3/.

REMARQUE 3 : POUR ACCELERER L'ALGORITHME, LA METHODE DES TESTS ONT ETE AJOUTES AU 'BACK-TRACKING'. PLUS PRECISEMENT

- LES M.P. SONT DANS L'ORDRE LEXICOGRAPHIQUE ET COMME ON NE S'AUTORISE PAS DE RETOURS EN ARRIERE, SI DANS UN DEBUT DE DECOMPOSITION UNE MATRICE DEPASSEE DEVAIT ETRE UTILISEE, ON ABANDONNE LA DECOMPOSITION ET ON PASSE A LA SUIVANTE

- SI AU COURS D'UNE ETAPE DONNEE, LES M.P. CONTENUES ONT UNE SOMME DE COEFFICIENTS INSUFFISANTE POUR LA P-MATRICE RESTANTE



NEST

ON ABANDONNE CETTE DECOMPOSITION ET ON PASSE A LA SUIVANTE

- SI PAR CONTRE LA MATRICE RESTANTE A UNE DECOMPOSITION EXACTE AVEC LES M.P. CONTENUES, ON VERIFIE CETTE DECOMPOSITION ET ON L'IMPRIME ET ON PASSE A LA DECOMPOSITION SUIVANTE

- SI UN DEBUT DE DECOMPOSITION CONTIENT PLUS DE M.P. DIFFERENTES QUE LA QUANTITE MAXIMUM IMPOSEE PAR MPD ON ABANDONNE CETTE DECOMPOSITION ET ON PASSE A LA SUIVANTE

ORGANIGRAMME

```
PROCEDURES DE SERVICES.
 - SORT        IMPRESSION D'UNE MATRICE AVEC LES SOMMES
 - CARACT      CARACTERISTIQUES D'UNE MATRICE.
               SUIVANT LES RANGEES.
 - SMP         IMPRESSION D'UNE M.P. AVEC SON COEFFICIENT
 - IMPDCP      IMPRESSION D'UNE DECOMPOSITION.
PROGRAMME PRINCIPAL
 - INTRODUCTION DE LA MATRICE A TRAITER
 - CONTROLE ET CARACTERISTIQUES
 - IMPRESSION DES DONNEES
 - SELECTION EVENTUELLE DES P-,R- OU S-MATRICES.

 - CONSTRUCTION DES MATRICES DE PERMUTATION
 - RECHERCHE DES MATRICES CONTENUES
 - SI  PAS DE MATRICES CONTENUES  --> FIN
 - IMPRESSION DES MATRICES CONTENUES
 - TROP DE MATRICES CONTENUES     --> FIN
 - DECOMPOSITION EXACTE           --> FIN

BT:   - INITIALISATION DU "BACK TRACKING"
SOUSTRACT:- SOUSTRACTION
      - RECHERCHE DES MATRICES CONTENUES RESTANTES
      - IP > MPD ET KZ >=0                --> CSUIV
      - SI KZ=PPRIM      CONTROLE         --> IMDCP
      - SI KZ < PPRIM                     --> CSUIV
      - SI KZ ¬=0        IP=IP+1          --> CSUIV
      - SI KZ =0      SI MCT(IP)¬=0       --> CSUIV
                      SINON               --> IMDCP

IMDCP:- NUMERO
      - NOMBRES DE MATRICES
      - SI ND < MPD      IMPRESSION
      - MEILLEURE DECOMPOSITION

CSUIV:- IC(IP)>LP                         --> RA
      - IC(IP)= PREMIERE MATRICE CONTENUE ET--> SOUSTRACT

RA:   - IP=IP-1;
      - IP>0 --> CSUIV
```



BUS LILLE

```
) : PROC OPTIONS(MAIN);

T

      - IMPRESSION DE LA MEILLEURE DECOMPOSITION

  REFERENCES

      J.C. HERZ      I B M   NEUILLY-VILLIERS
      J.P. STEEN     STAGE  SEPT 71.


      ************************************************************ */


  /*****************************************************************/


  SORT : PROC(MAT,M,N,SOL,SOC,MAL,MAC);

  /* IMPRESSION D'UNE MATRICE AVEC LES SOMMES SUIVANT LES RANGEES */

      DCL (MAT(*,*),SOL(*),SOC(*),M,N,MAL,MAC) BIN FIXED;

      DCL (I,J) BIN FIXED;

      PUT EDIT ('SOMME MINIMUM SUIVANT LES LIGNES',MAL)
               (SKIP,A,F(6));
      PUT EDIT ('SOMME MAXIMUM SUIVANT LES COLONNES',MAC)
               (SKIP,A,F(6));
      PUT LIST ('MATRICE ET SOMMES SUIVANT LES RANGEES') SKIP(2);

      DO I = 1 TO M ;
        DO J = 1 TO N ;
          IF MAT(I,J) ¬= 0 THEN GO TO IMPR ;
        END;
      END;
      PUT EDIT ('...NULLES')(A) ;
      GO TO FINS;

      IMPR: ;
          PUT EDIT((J DO J=1 TO N ))(SKIP,X(8),(N )F(5));
          PUT EDIT('+')(SKIP,X(7),A);
          DO J = 1 TO N  ;
            PUT EDIT('-----')(A);
          END ;
             PUT EDIT('--+')(A);
```

```
DCP3 : PROC OPTIONS(MAIN);

NEST

          DO I = 1 TO M;
1               PUT EDIT (I,'  |',(MAT(I,J) DO J = 1 TO N ) ,'  |',SOL(I))
                         (SKIP,F(5),A,(N )F(5),A,F(5)) ;
1         END;
              PUT EDIT('+')(SKIP,X(7),A);
              DO J = 1 TO N  ;
1               PUT EDIT('-----')(A);
1             END ;
                 PUT EDIT('--+')(A);
          PUT EDIT((SOC(J) DO J=1 TO N))(SKIP,X(8),(N)F(5));

          FINS: ;

          END SORT;

      /*****************************************************************/


      CARACT : PROC(MAT,M,N,SOL,SOC,MAL,MAC,NUL,NUC,NEC);

      /* CARACTERISTIQUES D'UNE MATRICE */

          DCL (MAT(*,*),SOC(*),SOL(*),M,N,MAL,MAC,NUL,NUC) BIN FIXED;

          DCL (I,J,NEL,NEC) BIN FIXED;

          NUL =0;
          NEL = 0;
            SOL(1) = MAT(1,1);
            DO J = 2 TO N ;
1             SOL(1) = SOL(1)+MAT(1,J);
1           END;
            MAL = SOL(1) ;
            IF SOL(1) = 0 THEN
              DO ; IF NUL = 0 THEN
1                     DO ; NUL= 1;
2                       PUT LIST ('LIGNE NULLE EN :') SKIP;
2                     END;
1                     PUT EDIT (1,',') (F(4),A(1));
1             END;
          DO I = 2 TO M;
1           SOL(I) = MAT(I,1);
1           DO J = 2 TO N ;
2             SOL(I) = SOL(I)+MAT(I,J);
2           END;
1         IF SOL(I) ¬= SOL(1) THEN NEL=1  ;
1           IF SOL(I) < MAL THEN MAL = SOL(I) ;
```

```
: PRCC CPTIONS(MAIN);

      IF SOL(I) = 0 THEN
        DO ; IF NUL = 0 THEN
                DO ; NUL= 1;
                  PUT LIST ('LIGNE NULLE EN :') SKIP;
                END;
                PUT EDIT (I,',') (F(4),A(1));
        END;
    END;

    NEC,NUC,MAC =0;
    DO J= 1 TO N ;
      SOC(J) = MAT(1,J);
      DO I =2 TO M ;
        SOC(J) = SOC(J)+MAT(I,J);
      END;
      IF SOC(J) > MAC THEN MAC = SOC(J);
      IF SOC(J) ¬= SOC(1) THEN NEC=1;
      IF SOC(J) = 0 THEN
        DO; IF NUC = 0 THEN
              DO ; NUC = 1 ;
                PUT LIST ('COLONNE NULLE EN :') SKIP ;
              END;
              PUT EDIT ( J,',')  (F(4),A(1));
        END;
      END;

    PUT SKIP ;
    IF MAL >= MAC THEN
      IF NEL = 0 THEN
        IF M=N THEN
         DO;
            PUT LIST('C''EST UNE P-MATRICE');
          NEC=2;
          END;
        ELSE
          IF NEC = 0 THEN
            DO; PUT LIST('C''EST UNE R-MATRICE');
              NEC=3;
            END;
          ELSE
            DO; NEC=4;
              PUT LIST('C''EST UNE S-MATRICE');
            END;
      ELSE PUT LIST('C''EST UNE G-MATRICE');
    ELSE PUT LIST('C''EST UNE C-MATRICE');

    END CARACT ;

/*********************************************************************/
```

BIUS LILLE

```
: PRCC CPTIONS(MAIN);

/*********************************************************************/

/* PROGRAMME PRINCIPAL */

    DCL(M,N,I,J,L,MAL,MAC,NUL,NUC,ANP,NP,ND,KZ,LP1,IP,IJ,LP,KS,NPMP,
         IRT,U5,MPD,NEC,MA,NA,C,NBMP) BIN FIXED;
    DCL (K,KNBMP)  DEC FIXED(10);
      DCL (CCEF(ANP),MP(ANP,M)) BIN FIXED CTL ;
      DCL MPU(ANP) BIN FIXED CTL;
    DCL(NNP(0:LP),MDT(0:LP,M,N),BTC(LP,LP+1),IC(0:LP),COF(LP),CEF(LP))
         BIN FIXED CTL;
    DCL TAB(LP) BIN FIXED CTL ;
    DCL TAB1(ANP) BIN FIXED CTL;
    DCL JX(N) BIN FIXED CTL;
      DCL (MAT(M,N),SOL(M),SOC(N),PERM(M),MATR(M,N)) BIN FIXED CTL;
    DCL(KD,PRS,JL) BIN FIXED;
    DCL (HD,HM,DH) DEC FIXED(10);
    DCL (HEUR,DT) CHAR(9);
    DCL MOD CHAR(7);
    /* POUR LES DECOMPOSITIONS NE CONTENANT PAS DE DECOMPOSITONS DE
       UN(4*4) */
    DCL (DI,DJ) BIN FIXED;
     DCL V11(24,4)  BIN FIXED  INIT(
1,8,17,24,
1,8,18,23,
1,10,17,19,
1,11,14,24,
2,7,17,24,
2,7,18,23,
2,9,18,20,
2,12,13,23,
3,8,17,22,
3,11,14,22,
3,11,16,20,
3,12,14,21,
4,7,18,21,
4,11,13,22,
4,12,13,21,
4,12,15,19,
5,7,16,23,
5,9,14,22,
5,9,16,20,
5,10,15,20,
6,8,15,24,
6,9,16,19,
6,10,13,21,
6,10,15,19
     );
```

```
: PRCC CPTIONS(MAIN);

/*********************************************************************/

CCNV: PRCC(HH,TH);
/* CONVERSICN HEURE/SECCNDES */
    DCL HH CHAR(9);
    CCL TH  CEC FIXED(10);
    CCL VAL(6) BIN FIXEC;
    DO DI = 1 TO 6 ;
      VAL( CI)= INDEX('0123456789',SUBSTR(HH,DI,1))-1;
    END;
    TH=VAL(6)+10*VAL(5)+60*VAL(4)+600*VAL(3)+3600*VAL(2)+36000*VAL(1);
    END CONV;

/*********************************************************************/

/* DEBUT DU PRCGRAMME */

    HEUR=TIME;
    CALL CCNV(HEUR,HD);
    PUT LIST('PARAMETRES');
    PUT CATA(HD);
/* ARRET DU FRCGRAMME APRES CT='MMSS' DE CALCUL */
    GET DATA(DT);
    PUT DATA(DT);
    /* EXEMPLE :  CT='3122'; CT='MMSS'; */
    SUBSTR(DT,3,4)=SUBSTR(DT,1,4);
    SUBSTR(DT,7,3)='C00';
    SUBSTR(CT,1,2)='00';
    CALL CCNV(CT,CH);
    IF DH=C THEN DH=3600;
    DH=DH+HC;
    PUT CATA(CH);

    C,M,N=0;
 REPRISE: PUT PACE;
/* GETICN INTERUPTIONS */
    GET DATA(MOD);
    PUT DATA(MOD);
```

```
DCP3 : PRCC CPTIONS(MAIN);

NEST

        IF MOD = 'REPRISE' THEN GO TO REPR ;
        MA=M;
        NA=N;
        KD=0;

      /* DONNEES */

        GET CATA (PRS);
        PUT CATA(PRS);
        GET DATA (U5);
        PUT DATA(U5 );
        PUT PAGE ;
        GET CATA (M,N);

        IF U5=1 &  (M¬=5 |  N¬=5) THEN
        DC; PUT LIST ('ERREUR DE CONNEES') SKIP (2);
1           GO TC REPRISE;
1       END;

        IF U5=1 THEN
        PUT LIST ('RELATIONS DANS LA MATRICE UN(5*5)') SKIP;
        PUT LIST('DECOMPOSITION D''UNE MATRICE EN MATRICES DE PERMUTATICN')
        SKIP; PUT LIST('DE TOUTES LES FACONS POSSIBLES')SKIP ;
         PUT LIST((50)'*') SKIP(4);
        PUT SKIP(2);

        ALLOCATE  MAT,SOL,SCC,PERM,MATR;
          GET LIST (MAT);
          MATR=MAT;
          GET CATA (LP1);
        GET DATA(MPD);

      /* CCNTRCLE */
          IF N<M | M<=1 THEN

            DO; PUT LIST ('ERREUR DE DIMENSION') SKIP(2);
1             GC TC REPRISE;
1           END;

          CO I=1 TO M;
1           DO J = 1 TO N ;
2             IF MAT(I,J) < 0 THEN
2               DO ; PUT EDIT ('ELEMENT NEGATIF EN :',I,',',J)
                                (SKIP(2),A(24),F(4),A(1),F(4));
3                   GC TO  REPRISE;
3               END;
2           END;
1         END;
```

11.6.1

```
: PROC OPTIONS(MAIN);

/* PRESENTATION */

      PUT EDIT('MATRICE DE ',M,' LIGNES ET',N,' COLONNES')
              (SKIP(3),A,F(4),A,F(4),A);
      CALL CARACT(MAT,M,N,SOL,SOC,MAL,MAC,NUL,NUC,NEC);
      CALL SCRT (MAT,M,N,SOL,SOC,MAL,MAC);
     PUT LIST((50)'*') SKIP(4);
      PUT SKIP(3) ;

      IF NUL ¬= 0 THEN
        DO; PUT LIST('ELLE NE CONTIENT PAS DE MATRICE DE PERMUTATION');
          GO TO REPRISE;
        END;
    IF PRS¬= 1 THEN GOTO APRS;
IF NEC < 2 THEN
DO; PUT LIST('CE N''EST PAS UNE P, R OU S-MATRICE')SKIP(5);
PUT LIST(' ...ON ABANDONNE') SKIP;
GO TO REPRISE;
END;
    APRS:;

/* CONSTRUCTION DES MATRICES DE PERMUTATION */

      IF MA=M & NA=N & C=1 THEN GO TO PLCIN ;
      FREE COEF,MP;
      FREE MPU;
      ANP=1;
      DO I = N-M+1 TO N;
          ANP = ANP*I;
      END;
      ALLOCATE COEF,MP;
      ALLOCATE MPU;

    ALLOCATE JX;
INIT : JX=0;
      DO I=1 TO M; PERM(I)=I;JX(I)=1; END;
    DO LP=1 TO ANP;
      MP(LP,*)=PERM;
      I=M;
ANUL: JX(PERM(I))=0;
PLU : IF PERM(I) = N THEN DO ; I=I-1;
        IF I= 0 THEN GO TO FIN ; ELSE GO TO ANUL;
                          END;
      PERM(I)=PERM(I)+1;
      IF JX(PERM(I)) = 1 THEN GO TO PLU;
      JX(PERM(I)) = 1 ;
```

```
DCP3 : PROC OPTIONS(MAIN);

NEST

 1    TER : IF I=M  THEN GO TO FIN;
 1        I=I+1;
 1          DO L = 1 TO N ;
 2            IF JX(L) = 0 THEN
 2              DO ; PERM(I) = L; JX(L) =1; GO TO TER ; END;
 2            END;
 1    FIN : ;
 1        END;

            C=1;
        FREE JX;
            PLCIN : ;

      /* RECHERCHE DES MATRICES CONTENUES */

            KZ,LP=0;
            DO L = 1 TO ANP ;
 1            COEF(L)=MAT(1,MP(L,1));
 1            DO I = 2 TO M;
 2              IF COEF(L) > MAT(I,MP(L,I)) THEN COEF(L)=MAT(I,MP(L,I));
 2            END;
 1            IF COEF(L) ¬= 0 THEN
 1              DO;
 2                LP=LP+1;
 2                MPU(LP)=L;
 2                KZ=KZ+COEF(L);
 2              END;
 1          END;

            IF LP = 0 THEN
              DO; PUT LIST('ELLE NE CONTIENT PAS DE MATRICE DE PERMUTATION');
 1              GO TO REPRISE;
 1            END;

        IF U5=1 THEN GO TO AUN55;
      PUT LIST ('MATRICE DE PERMUTATIONS CONTENUES') SKIP(3);
      DO I=1 TO M;
 1          PUT EDIT ((MP(MPU(L),I) DO L=1 TO LP))
                    (SKIP, X(19),(LP)F(3));
 1    END;
      PUT LIST ('NUMERO DES MATRICES CONTENUES') SKIP;
      PUT EDIT ((MPU(L) DO L=1 TO LP))
                    (SKIP, X(19),(LP)F(3));
      PUT LIST ('COEFFICIENTS MAXIMA') SKIP;
      PUT EDIT ((COEF(MPU(L))DO L=1 TO LP))
                    (SKIP, X(19),(LP)F(3));

        IF U5 = 3 THEN
         /*COEFFICIENTS RAMENES A 1 */
```

BIB LILLE

```
: PRCC CPTICNS(MAIN);

      CO; PUT LIST('COEFFICIENTS MINIMA') SKIP;
          DO L=1 TO LP ;
            COEF(MPU(L))=1;
          END;
          PUT EDIT((COEF(MPU(L)) DO L=1 TO LP))
               (SKIP, X(19),(LP)F(3));
      END;

    IF U5=4 THEN
    /* COEFFICIENTS DONNES */
    DO; PUT LIST('COEFFICIENTS PROPOSES') SKIP;
        GET LIST((COEF(MPU(L)) DO L=1 TO LP));
        PUT EDIT((CCEF(MPU(L)) DO L=1 TO LP))
               (SKIP, X(19),(LP)F(3));
        GET DATA(KD); KD=KD-1;
    END;

    IF U5 = 2 THEN
    /* PERFO DES COEF MAX */
    PUT FILE (PERFO) EDIT (( COEF(L) DO L=1 TO ANP),'  ')
                          ((ANP)F(2),X(78-2*ANP),A);
PUT LIST ('CECOMPOSITIONS') SKIP(2);
    PUT LIST('      K  ND  NP    COEFFICIENTS') SKIP;
    GO TO BUN55;


/*********************************************************************/


SMP : PROC(COEF,IND);
/* IMPRESSION D'UNE MATRICE DE PERMUTATION AVEC SON COEFFICIENT */

    DCL (COEF,IND) BIN FIXED;

    PLT EDIT(COEF,' FOIS LA M.P. NUMERO',IND,' QUI EST',
            (MP(IND,I) DO I =1 TO M)) (SKIP,F(5),A,F(5),A,(M)F(3));

    END SMP;


/*********************************************************************/


    AUN55:;
      PUT LIST('MATRICES DE PERMUTATION CONTENUES')SKIP(3);
          PUT SKIP;
          DC L=1 TC LP;
            CALL SMP (COEF(MPU(L)),MPU(L));
          END;
     PUT LIST((50)'*') SKIP(4);
```

```
DCP3 : PROC OPTIONS(MAIN);

NEST

          BUN55 : ;

            IF LP>120 THEN
              DO; PUT LIST('IL Y A TROP DE MATRICES CONTENUES') SKIP(5);
1               PUT LIST('POUR LES CAPACITES DE LA MACHINE') SKIP;
1               PUT LIST('ON ABANDONNE...') SKIP;
1               GC TC REPRISE;
1             END;


      /* CAS D'UNE DECOMPOSITION EXACTE */

            IF NEC>=2 & KZ=MAL THEN
              DO;
1         DC L = 1 TC ANP;
2           IF CCEF(L) ¬= 0 THEN
2             DO I = 1 TO M ;
3               MAT(I,MP(L,I))=MAT(I,MP(L,I))-COEF(L);
3             ENC;
2         END;
1         DO I = 1 TO M;
2           DC J = 1 TO N;
3             IF MAT(I,J) ¬= 0 THEN DO;MAT=MATR; GO TO BT; END;
3           END;
2         ENC;
1               PUT LIST('LA MATRICE EST LA SOMME EXACTE DES MATRICES')
1               SKIP(5); PUT LIST('CONTENUES AVEC LES COEFFICIENTS INDIQUES')
                SKIP;
1               NP=KZ;
1               ND=LP;


      /* RECAPITULATION CE LA DECOMPOSITION */

I               PUT EDIT ('CE QUI FAIT AU TCTAL',NP,
                          ' MATRICES DE PERMUTATION')(SKIP(3),A,F(5),A);
1               PUT EDIT('IL Y A',NC,' MATRICES DIFFERENTES')
                          (SKIP,A,F(5),A);
1               PUT LIST ('ET IL RESTE')SKIP(2) ;
1               PUT LIST('    ...UNE MATRICE NULLE');

1                 GO TO  REPRISE;
1               ENC;


      /* 'BACK TRACKING' */
      BT : ;
```

```
: PROC OPTIONS(MAIN);

    ALLOCATE BTC,IC,NNP,MOT,COF,CEF;
    IC,NNP=0;
    COF=0;
    BTC=0;
    DO L = 1 TO LP;
      BTC(L,1)=CCEF(MPU(L));
    END;
    MOT(0,*,*)= MAT;
    IP=1;
    DO L=1 TO LP;
      IF BTC(L,1) ¬= 0 THEN GOTO CIC;
    END;
    CIC: IC(1)=L;
    KNBMP,NP=0;
    NBMP=LP+1;
    K=KD;
    KS=0;


SOUSTRACT:;
    IF PRS = 2 THEN
      PUT DATA(IP)SKIP(3);


    MOT(IP,*,*)=MOT(IP-1,*,*);
    DO I=1 TO M;
      MOT(IP,I,MP(MPU(IC(IP)),I))=MOT(IP,I,MP(MPU(IC(IP)),I))
                        -BTC(IC(IP),IP);
    END;
    NNP(IP)=NNP(IP-1)+BTC(IC(IP),IP);
    COF(IP)=BTC(IC(IP),IP);
    BTC(IC(IP),IP)=(BTC(IC(IP),IP)-1)*(LP<=LP1);

    /* TEST SUR ORDRE LEXICOGRAPHIQUE */
    DO IJ=1 TO M;
      IF MOT(IP,1,IJ) ¬=0 & MP(MPU(IC(IP)),1) > IJ THEN
        GO TO RA;
    END;

    IF PRS = 2 THEN
      DO;
        PUT SKIP ;
        DO IL = 1 TO M ;
          PUT EDIT((MOT(IP,IL,JL) DO JL = 1 TO N ))(SKIP,(M)F(3));
        END;
    END;
```

```
DCP3 : PROC OPTIONS(MAIN);

NEST

    /* MATRICES CONTENUES */

        KZ=0;
        BTC(*,IP+1)=0;
        DO L = IC(IP)+1 TO LP;
          IF BTC(L,IP) ¬= 0 THEN
            DO; BTC(L,IP+1) = BTC(L,IP);
              DO I = 1 TO M ;
                IF BTC(L,IP+1)>MOT(IP,I,MP(MPU(L),I)) THEN
                  BTC(L,IP+1)= MOT(IP,I,MP(MPU(L),I));
                IF BTC(L,IP+1) = 0 THEN GO TO EDI;
              END;
          EDI:KZ=KZ+BTC(L,IP+1);
            END;
        END;

        IF PRS = 2 THEN
          DO;
            PUT SKIP ;
            DO IL=1 TO LP;
              PUT EDIT((BTC(IL,JL) DO JL = 1 TO LP))(SKIP,(LP)F(3));
            END;
            PUT EDIT((IC (JL) DO JL = 1 TO LP))(SKIP(2),(LP) F(3));
            PUT EDIT((COF(JL) DO JL = 1 TO LP))(SKIP(2),(LP) F(3));
            PUT EDIT((NNP(JL) DO JL = 1 TO LP))(SKIP(2),(LP) F(3));
        END;


        IF IP>=MPD & KZ¬=0 THEN GO TO CSUIV ;


    /* DECOMPOSITION EXACTE */


        IF KZ ¬= MAL-NNP(IP) & NEC<=2 THEN GO TO DCPAP;
        MAT=MOT(IP,*,*);
        DO L = 1 TO LP ;
          IF BTC(L,IP+1) ¬= 0 THEN
            DO I = 1 TO M ;
              MAT(I,MP(MPU(L),I))=MAT(I,MP(MPU(L),I))-BTC(L,IP+1);
            END;
        END;
        DO I = 1 TO M;
          DO J = 1 TO N;
            IF MAT(I,J) ¬= 0 THEN GO TO DCPAP;
          END;
        END;
        MOT(IP,*,*)=MAT;
```

BIUS LILLE

```
: PRCC CPTICNS(MAIN);

    GO TO IMDCP;

/* DECOMPOSITICN A PCURSUIVRE */

    DCPAP : ;
      IF KZ<MAL-NNP(IP) & NEC <=2 THEN GO TO CSUIV;
    IF KZ ¬= 0 THEN
      DO;
        IP = IP+1;
        IC(IP)=IC(IP-1)+1;
        GO TO CSUIV;
      ENC;

/* RESTE ? */

    DC I=1 TC M;
      DO J=1 TO N;
        IF MOT(IP,I,J)¬= 0 THEN GO TC CSUIV;
      ENC;
    END;

/* TRAITEMENT DE LA DECOMPOSITION OBTENUE */

    IMDCP : ;
/* NUMERO */
    K=K+1;

/* DIMENSIONS */
    NP=NNP(IP);
    NC=IP;
    DO L=IC(IP)+1  TC LP;
      IF BTC(L,IP+1) ¬= 0 THEN
        CC;
          NP=NP+BTC(L,IP+1);
          ND=ND+1;
        ENC;
    END;

/* IMPRESSION */

    IF ND <= MPD THEN CALL IMPDCP;

/*********************************************************************/

IMPDCP: PROC;
```

```
DCP3 : PRCC CPTICNS(MAIN);

NEST

        ALLCCATE TAB,TAB1;
      /* PRCCEDURE D'IMPRESSION D'UNE DECOMPOSITION */

      /* IMPRESSION D'UNE DECOMPOSITION, SECONDE FORME */
        IF U5=1 THEN GO TO XUN55;

        TAB = C ;
      CO IJ=1 TO IP;
1           TAB(IC(IJ))= COF(IJ) ;
1     END;
      DO L=IC(IP)+1 TO LP;
1           IF BTC(L,IP+1)¬=0 THEN
1              TAB(L)= BTC(L,IP+1) ;
1     END;

      PUT EDIT (K,NC)(SKIP,F(7),F(4));

        /* MATRICES DIFFERENTES */
      IF NC = NP THEN PUT EDIT('=')(A); ELSE PUT EDIT(' ')(A);
      PUT EDIT(NP) (F(3));

        /* SANS DECOMPOSITION DE UN(4*4) */
        IF N=4 &M=4 THEN
        DO;
1             TAB1 = C ;
1           DO L = 1 TO LP ;
2             TAB1(MPU(L)) = TAB(L);
2           END;
1             DO DI=1 TO 24;
2               CC CJ=1 TO 4;
3                 IF TAB1(V1I(DI,CJ))=0 THEN GOTO CTRUC;
3               END;
2               GOTO CMAC;
2               CTRUC:
              END;
1     PUT EDIT('S')(A);
1         KS=KS+1;
1         GCTC DCH;
1             DMAC:
      PUT EDIT (' ')(A);
1         DCH:
          END;
          ELSE
      PUT EDIT (' ')(A);

        IF N=4 & M=4 & LP=24 THEN
      PUT EDIT ('|',(TAB(L) DO L = 1 TO 6),'|',
                    (TAB(L) CO L = 7 TO 12),'|',
                    (TAB(L) CC L = 13 TO 18),'|',
                    (TAB(L) DO L = 19 TC 24),'|')
```

```
: PROC OPTIONS(MAIN);

          (X(3),A,P'ZZ',(5)P'ZZZ',A,
                  P'ZZ',(5)P'ZZZ',A,
                  P'ZZ',(5)P'ZZZ',A,
                  P'ZZ',(5)P'ZZZ',A);
    ELSE
PUT EDIT((TAB(L) DO L=1 TO LP))(X(1),(LP)P'ZZZ');

    IF U5=2 THEN
    /* PERFO DES COEF */
      DO; TAB1 = 0 ;
        DO L = 1 TO LP ;
          TAB1(MPU(L)) = TAB(L);
        END;
        PUT FILE (PERFO) EDIT(( TAB1(L) DO L= 1 TO ANP),'  ')
                          ((ANP)F(2),X(78-2*ANP),A);
      END;
/*********************************************************************/

    /* IMPRESSION D'UNE RELATION DANS LA MAT(5*5) */
    GO TO YUN55;
    XUN55:;
    IRT=0;
    DO IJ=1 TO IP;
      IRT=IRT+1;
    TAB(IRT)=MPU(IC(IJ));
    END;
    DO L=IC(IP)+1 TO LP;
      IF BTC(L,IP+1)¬=0 THEN
      DO;
      IRT=IRT+1;
         TAB(IRT)=MPU(L);
      END;
    END;
     PUT EDIT ((TAB(L) DO L= 1 TO IRT)) (SKIP,(IRT)F(4));
    PUT FILE (PERFO) EDIT ((TAB(L) DO L = 1 TO IRT))((IRT)F(4));
    YUN55 : ;
    FREE TAB,TAB1;

END IMPDCP;

/*********************************************************************/


/* POUR LA MEILLEURE DECOMPOSITION */
     IF NBMP>ND THEN
      DO; NBMP=ND;
        KNBMP=K;
        NPMP=NP;
```

BUS LILLE

```
: PROC OPTIONS(MAIN);


        CEF=0;
        DO IJ=1 TO IP;
          CEF(IC(IJ))=COF(IJ);
        END;
        DO IJ=1 TO LP;
          IF BTC(IJ,IP+1) ¬= 0 THEN
            CEF(IJ)= BTC(IJ,IP+1);
        END;
      END;


/* UNE AUTRE DECOMPOSITION */

CSUIV :
    IF IC(IP)>LP THEN GO TO RA;
    DO L = IC(IP) TO LP ;
      IF BTC(L,IP) ¬= 0 THEN
        DO; IC(IP)=L;
          GO TO SOUSTRACT;
        END;
    END;


/* RETOUR EN ARRIERE */

    RA : ;
/* TEST TEMPS */
    HEUR=TIME;
    CALL CONV(HEUR,HM);
    IF HM>=DH THEN GOTO OUST;
    RSUIV:

      BTC(*,IP)=0;
      IC(IP),NNP(IP),CCF(IP)=0;
    IP=IP-1;
    IF IP>0 THEN GO TO CSUIV;


/* CONCLUSION */

     PUT LIST((50)'*') SKIP(4);
    IF KNBMP=0 THEN
      DO; PUT LIST('IL N''Y A PAS DE DECOMPOSITION SANS RESTE')SKIP(5);
        GO TO TERM;
      END;
    ELSE
    PUT EDIT ('IL Y A PLUS DE',K,' DECOMPOSITIONS')(SKIP(6),A,F(5),A);
    IF N=4 &M=4 THEN
```

```
: PROC OPTIONS(MAIN);

      PUT EDIT ('DONT',KS,' SPECIALES') (SKIP,A,F(5),A);
    IF U5 = 2 THEN
    /* PERFO DU NB DE DCP */
    PUT FILE ( PERFO) EDIT (K,',',',' ') (F(2),A,X(76),A);
    PUT EDIT ('LA MEILLEURE DECOMPOSITION, DE NUMERO',KNBMP,',')
                (SKIP(2),A,F(5),A);
    PUT EDIT('CONTIENT',NBMP,' MATRICES DE PERMUTATION DIFFERENTES')
            (SKIP,A,F(5),A);
    PUT SKIP(3);
    DO L=1 TO LP;
      IF CEF(L) ¬= 0 THEN CALL SMP (CEF(L),MPU(L));
    END;
        PUT EDIT ('CE QUI FAIT AU TOTAL',NPMP,
                    ' MATRICES DE PERMUTATION')(SKIP(3),A,F(5),A);
        PUT LIST ('ET IL RESTE')SKIP(2) ;
    PUT LIST('   ...UNE MATRICE NULLE');


TERM : ;
    FREE BTC,IC,NNP,MOT,COF,CEF;
    FREE      MAT,SOL,SOC,PERM,MATR;
          GO TO REPRISE;


/* REPRISE D'UNE DECOMPOSITION */
REPR:
    GET LIST(
    K,NPMP,MPD,NEC,MA,NA,C,PRS,U5,
    M,N,MAL,ANP,NP,NC,KZ,LP1,IP,LP,NBMP,KNBMP,KD,KS
    );
    ALLOCATE
    COEF,MP,MPU,NNP,MOT,BTC,IC,COF,CEF,MAT
    ;
    GET LIST(
    COEF,MP,MPU,NNP,MOT,BTC,IC,COF,CEF,MAT
    );
    PUT PAGE;
    GO TO RSUIV;


/*  TEMPS DEPASSE */
OUST:
    PUT FILE (PERFO) EDIT('DT=''',SUBSTR(DT,3,4),''';')(SKIP,A,A,A);
    PUT FILE (PERFO) EDIT('MOD=''REPRISE'';')(SKIP,A);
    PUT SKIP;
    PUT FILE (PERFO) LIST(
    K,NPMP,MPD,NEC,MA,NA,C,PRS,U5,
    M,N,MAL,ANP,NP,NC,KZ,LP1,IP,LP,NBMP,KNBMP,KD,KS
    );
    PUT FILE (PERFO) LIST(
```

```
DCP3 : PROC OPTIONS(MAIN);

NEST

        COEF,MP,MPU,NNP,MOT,BTC,IC,COF,CEF,MAT
        );
        FREE
        COEF,MP,MPU,NNP,MOT,BTC,IC,COF,CEF,MAT
        ;


    END MLTDCP3;
```

## 11.6.2 DES EXEMPLES DE RESULTATS

DECOMPOSITION D'UNE MATRICE EN MATRICES DE PERMUTATION
DE TOUTES LES FACONS POSSIBLES

**********

MATRICE DE 2 LIGNES ET 3 COLONNES
C'EST UNE R-MATRICE
SOMME MINIMUM SUIVANT LES LIGNES 3
SOMME MAXIMUM SUIVANT LES COLONNES 2

MATRICE ET SOMMES SUIVANT LES RANGEES

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| | 2 | 2 | 2 | |

**********

MATRICE DE PERMUTATIONS CONTENUES

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 |

NUMERO DES MATRICES CONTENUES

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

COEFFICIENTS MAXIMA

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

DECOMPOSITIONS

| K | ND | NP | COEFFICIENTS | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 3 | | 1 | 1 | | 1 |

**********

BNUS LILLE

IL Y A PLUS DE 2 DECOMPOSITIONS

LA MEILLEURE DECOMPOSITION, DE NUMERO 1,
CONTIENT 3 MATRICES DE PERMUTATION DIFFERENTES

1 FOIS LA M.P. NUMERO 1 QUI EST 1 2
1 FOIS LA M.P. NUMERO 4 QUI EST 2 3
1 FOIS LA M.P. NUMERO 5 QUI EST 3 1

CE QUI FAIT AU TOTAL 3 MATRICES DE PERMUTATION

ET IL RESTE ...UNE MATRICE NULLE

DECOMPOSITION D'UNE MATRICE EN MATRICES DE PERMUTATION
DE TOUTES LES FACONS POSSIBLES

**********

MATRICE DE 3 LIGNES ET 3 COLONNES
C'EST UNE P-MATRICE
SOMME MINIMUM SUIVANT LES LIGNES 4
SOMME MAXIMUM SUIVANT LES COLONNES 4

MATRICE ET SOMMES SUIVANT LES RANGEES

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 4 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 4 |
| 3 | 2 | 1 | 1 | 4 |
| | 4 | 4 | 4 | |

**********

MATRICE DE PERMUTATIONS CONTENUES

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |

NUMERO DES MATRICES CONTENUES

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

COEFFICIENTS MAXIMA

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |

DECOMPOSITIONS

| K | ND | NP | COEFFICIENTS | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 | 1 | | | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 4 | | 1 | 1 | | | 2 |

**********

IL Y A PLUS DE 2 DECOMPOSITIONS

LA MEILLEURE DECOMPOSITION, DE NUMERO 2,
CONTIENT 3 MATRICES DE PERMUTATION DIFFERENTES

1 FOIS LA M.P. NUMERO 2 QUI EST 1 3 2
1 FOIS LA M.P. NUMERO 3 QUI EST 2 1 3
2 FOIS LA M.P. NUMERO 6 QUI EST 3 2 1

CE QUI FAIT AU TOTAL 4 MATRICES DE PERMUTATION

ET IL RESTE ...UNE MATRICE NULLE

DECOMPOSITION D'UNE MATRICE EN MATRICES DE PERMUTATION
DE TOUTES LES FACONS POSSIBLES

**********

MATRICE DE 3 LIGNES ET 3 COLONNES
C'EST UNE P-MATRICE
SOMME MINIMUM SUIVANT LES LIGNES 6
SOMME MAXIMUM SUIVANT LES COLONNES 6

MATRICE ET SOMMES SUIVANT LES RANGEES

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 2 | 6 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | 6 |
| 3 | 2 | 2 | 2 | 6 |
| | 6 | 6 | 6 | |

**********

MATRICE DE PERMUTATIONS CONTENUES

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 |

NUMERO DES MATRICES CONTENUES

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

COEFFICIENTS MAXIMA

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

DECOMPOSITIONS

| K | ND | NP | COEFFICIENTS | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 6 | 2 | | | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 6 | | 2 | 2 | | 2 |

**********

BUS LILLE

IL Y A PLUS DE 3 DECOMPOSITIONS

LA MEILLEURE DECOMPOSITION, DE NUMERO 1,
CONTIENT 3 MATRICES DE PERMUTATION DIFFERENTES

2 FOIS LA M.P. NUMERO 1 QUI EST 1 2 3
2 FOIS LA M.P. NUMERO 4 QUI EST 2 3 1
2 FOIS LA M.P. NUMERO 5 QUI EST 3 1 2

CE QUI FAIT AU TOTAL 6 MATRICES DE PERMUTATION

ET IL RESTE ...UNE MATRICE NULLE

DECOMPOSITION D'UNE MATRICE EN MATRICES DE PERMUTATION
DE TOUTES LES FACONS POSSIBLES

**********

MATRICE DE 2 LIGNES ET 3 COLONNES
C'EST UNE S-MATRICE
SOMME MINIMUM SUIVANT LES LIGNES 5
SOMME MAXIMUM SUIVANT LES COLONNES 5

MATRICE ET SOMMES SUIVANT LES RANGEES

```
          1    2    3
     +-----------------+
  1  |   2    3    0  |   5
  2  |   1    2    2  |   5
     +-----------------+
          3    5    2
```

**********

MATRICE DE PERMUTATIONS CONTENUES

```
                1  1  2  2
                2  3  1  3
```

NUMERO DES MATRICES CONTENUES

```
                1  2  3  4
```

COEFFICIENTS MAXIMA

```
                2  2  1  2
```

DECOMPOSITIONS

```
   K  ND  NP  COEFFICIENTS
   1   3   5    2     1  2
```

**********

IL Y A PLUS DE 1 DECOMPOSITIONS

LA MEILLEURE DECOMPOSITION, DE NUMERO 1,
CONTIENT 3 MATRICES DE PERMUTATION DIFFERENTES

2 FOIS LA M.P. NUMERO 1 QUI EST 1 2
1 FOIS LA M.P. NUMERO 3 QUI EST 2 1
2 FOIS LA M.P. NUMERO 4 QUI EST 2 3

CE QUI FAIT AU TOTAL 5 MATRICES DE PERMUTATION

ET IL RESTE ...UNE MATRICE NULLE

```
DECOMPOSITION D'UNE MATRICE EN MATRICES DE PERMUTATION
DE TOUTES LES FACONS POSSIBLES

*************************************************

MATRICE DE    3 LIGNES ET   3 COLONNES
C'EST UNE P-MATRICE
SOMME MINIMUM SUIVANT LES LIGNES      3
SOMME MAXIMUM SUIVANT LES COLONNES      3

MATRICE ET SOMMES SUIVANT LES RANGEES
            1    2    3
       +-----------------+
    1  |    1    1    1  |    3
    2  |    1    1    1  |    3
    3  |    1    1    1  |    3
       +-----------------+
            3    3    3

*************************************************

MATRICE DE PERMUTATIONS CONTENUES
                1  1  2  2  3  3
                2  3  1  3  1  2
                3  2  3  1  2  1
NUMERO DES MATRICES CONTENUES
                1  2  3  4  5  6
COEFFICIENTS MAXIMA
                1  1  1  1  1  1

DECOMPOSITIONS
   K  ND  NP  COEFFICIENTS
   1   3   3    1        1  1
   2   3   3       1  1        1

*************************************************

IL Y A PLUS DE    2 DECOMPOSITIONS

LA MEILLEURE DECOMPOSITION, DE NUMERO    1,
CONTIENT    3 MATRICES DE PERMUTATION DIFFERENTES

1 FOIS LA M.P. NUMERO    1 QUI EST  1  2  3
1 FOIS LA M.P. NUMERO    4 QUI EST  2  3  1
1 FOIS LA M.P. NUMERO    5 QUI EST  3  1  2

CE QUI FAIT AU TOTAL    3 MATRICES DE PERMUTATION

ET IL RESTE                ...UNE MATRICE NULLE
```

DECOMPOSITION D'UNE MATRICE EN MATRICES DE PERMUTATION
DE TOUTES LES FACONS POSSIBLES

**********

MATRICE DE 3 LIGNES ET 3 COLONNES
C'EST UNE P-MATRICE
SOMME MINIMUM SUIVANT LES LIGNES 6
SOMME MAXIMUM SUIVANT LES COLONNES 6

MATRICE ET SOMMES SUIVANT LES RANGEES

```
          1    2    3
     +-----------------+
  1  |   1    2    3  |   6
  2  |   2    4    0  |   6
  3  |   3    0    3  |   6
     +-----------------+
          6    6    6
```

**********

MATRICE DE PERMUTATIONS CONTENUES

```
          1  2  3
          2  1  2
          3  3  1
```

NUMERO DES MATRICES CONTENUES

```
          1  3  6
```

COEFFICIENTS MAXIMA

```
          1  2  3
```

DECOMPOSITIONS
K ND NP COEFFICIENTS

LA MATRICE EST LA SOMME EXACTE DES MATRICES
CONTENUES AVEC LES COEFFICIENTS INDIQUES

CE QUI FAIT AU TOTAL 6 MATRICES DE PERMUTATION
IL Y A 3 MATRICES DIFFERENTES

ET IL RESTE ...UNE MATRICE NULLE

DECOMPOSITION D'UNE MATRICE EN MATRICES DE PERMUTATION
DE TOUTES LES FACONS POSSIBLES

**********

MATRICE DE 3 LIGNES ET 3 COLONNES
C'EST UNE P-MATRICE
SOMME MINIMUM SUIVANT LES LIGNES 4
SOMME MAXIMUM SUIVANT LES COLONNES 4

MATRICE ET SOMMES SUIVANT LES RANGEES

```
          1    2    3
     +-----------------+
  1  |   2    2    0  |   4
  2  |   1    2    1  |   4
  3  |   1    0    3  |   4
     +-----------------+
          4    4    4
```

**********

MATRICE DE PERMUTATIONS CONTENUES

```
          1  2  2
          2  1  3
          3  3  1
```

NUMERO DES MATRICES CONTENUES

```
          1  3  4
```

COEFFICIENTS MAXIMA

```
          2  1  1
```

DECOMPOSITIONS
K ND NP COEFFICIENTS

LA MATRICE EST LA SOMME EXACTE DES MATRICES
CONTENUES AVEC LES COEFFICIENTS INDIQUES

CE QUI FAIT AU TOTAL 4 MATRICES DE PERMUTATION
IL Y A 3 MATRICES DIFFERENTES

ET IL RESTE ...UNE MATRICE NULLE

DECOMPOSITION D'UNE MATRICE EN MATRICES DE PERMUTATION
DE TOUTES LES FACONS POSSIBLES

**********

MATRICE DE 3 LIGNES ET 3 COLONNES
C'EST UNE C-MATRICE
SOMME MINIMUM SUIVANT LES LIGNES 1
SOMME MAXIMUM SUIVANT LES COLONNES 2

MATRICE ET SOMMES SUIVANT LES RANGEES

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | 2 | 1 | 1 | |

**********

CE N'EST PAS UNE P, R OU S-MATRICE
...ON ABANDONNE

DECOMPOSITION D'UNE MATRICE EN MATRICES DE PERMUTATION
DE TOUTES LES FACONS POSSIBLES

**********

MATRICE DE 3 LIGNES ET 3 COLONNES
C'EST UNE C-MATRICE
SOMME MINIMUM SUIVANT LES LIGNES 3
SOMME MAXIMUM SUIVANT LES COLONNES 4

MATRICE ET SOMMES SUIVANT LES RANGEES

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 4 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| | 4 | 3 | 3 | |

**********

CE N'EST PAS UNE P, R OU S-MATRICE
...ON ABANDONNE





BIBS LILLE

DECOMPOSITION D'UNE MATRICE EN MATRICES DE PERMUTATION
DE TOUTES LES FACONS POSSIBLES

**********

MATRICE DE 2 LIGNES ET 2 COLONNES
C'EST UNE C-MATRICE
SOMME MINIMUM SUIVANT LES LIGNES 2
SOMME MAXIMUM SUIVANT LES COLONNES 3

MATRICE ET SOMMES SUIVANT LES RANGEES

```
          1    2
     +-----------+
  1  |    2    1  |    3
  2  |    1    1  |    2
     +-----------+
          3    2
```

**********

CE N'EST PAS UNE P, R OU S-MATRICE
...ON ABANDONNE

DECOMPOSITION D'UNE MATRICE EN MATRICES DE PERMUTATION
DE TOUTES LES FACONS POSSIBLES

**********

MATRICE DE 3 LIGNES ET 3 COLONNES
C'EST UNE C-MATRICE
SOMME MINIMUM SUIVANT LES LIGNES 2
SOMME MAXIMUM SUIVANT LES COLONNES 3

MATRICE ET SOMMES SUIVANT LES RANGEES

```
          1    2    3
     +-----------------+
  1  |    3    0    0  |    3
  2  |    0    2    1  |    3
  3  |    0    1    1  |    2
     +-----------------+
          3    3    2
```

**********

MATRICE DE PERMUTATIONS CONTENUES

```
          1  1
          2  3
          3  2
```

NUMERO DES MATRICES CONTENUES

```
          1  2
```

COEFFICIENTS MAXIMA

```
          1  1
```

DECOMPOSITIONS
K ND NP COEFFICIENTS

**********

IL N'Y A PAS DE DECOMPOSITION SANS RESTE

11/6/3 LES PERMUTATIONS D'ORDRE 5

DELATIONS DANS LA MATRICE UN(5*5)
DECOMPOSITION D'UNE MATRICE EN MATRICES DE PERMUTATION
DE TOUTES LES FACONS POSSIBLES

**********

MATRICE DE 5 LIGNES ET 5 COLONNES
C'EST UNE F-MATRICE
SOMME MINIMUM SUIVANT LES LIGNES 5
SOMME MAXIMUM SUIVANT LES COLONNES 5

MATRICE ET SOMMES SUIVANT LES RANGEES

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | |

**********

MATRICES DE PERMUTATION CONTENUES

1 FOIS LA M.P. NUMERO 1 QUI EST 1 2 3 4 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 2 QUI EST 1 2 3 5 4
1 FOIS LA M.P. NUMERO 3 QUI EST 1 2 4 3 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 4 QUI EST 1 2 4 5 3
1 FOIS LA M.P. NUMERO 5 QUI EST 1 2 5 3 4
1 FOIS LA M.P. NUMERO 6 QUI EST 1 2 5 4 3
1 FOIS LA M.P. NUMERO 7 QUI EST 1 3 2 4 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 8 QUI EST 1 3 2 5 4
1 FOIS LA M.P. NUMERO 9 QUI EST 1 3 4 2 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 10 QUI EST 1 3 4 5 2
1 FOIS LA M.P. NUMERO 11 QUI EST 1 3 5 2 4
1 FOIS LA M.P. NUMERO 12 QUI EST 1 3 5 4 2
1 FOIS LA M.P. NUMERO 13 QUI EST 1 4 2 3 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 14 QUI EST 1 4 2 5 3
1 FOIS LA M.P. NUMERO 15 QUI EST 1 4 3 2 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 16 QUI EST 1 4 3 5 2
1 FOIS LA M.P. NUMERO 17 QUI EST 1 4 5 2 3
1 FOIS LA M.P. NUMERO 18 QUI EST 1 4 5 3 2
1 FOIS LA M.P. NUMERO 19 QUI EST 1 5 2 3 4
1 FOIS LA M.P. NUMERO 20 QUI EST 1 5 2 4 3
1 FOIS LA M.P. NUMERO 21 QUI EST 1 5 3 2 4
1 FOIS LA M.P. NUMERO 22 QUI EST 1 5 3 4 2
1 FOIS LA M.P. NUMERO 23 QUI EST 1 5 4 2 3
1 FOIS LA M.P. NUMERO 24 QUI EST 1 5 4 3 2
1 FOIS LA M.P. NUMERO 25 QUI EST 2 1 3 4 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 26 QUI EST 2 1 3 5 4
1 FOIS LA M.P. NUMERO 27 QUI EST 2 1 4 3 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 28 QUI EST 2 1 4 5 3
1 FOIS LA M.P. NUMERO 29 QUI EST 2 1 5 3 4
1 FOIS LA M.P. NUMERO 30 QUI EST 2 1 5 4 3
1 FOIS LA M.P. NUMERO 31 QUI EST 2 3 1 4 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 32 QUI EST 2 3 1 5 4
1 FOIS LA M.P. NUMERO 33 QUI EST 2 3 4 1 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 34 QUI EST 2 3 4 5 1
1 FOIS LA M.P. NUMERO 35 QUI EST 2 3 5 1 4
1 FOIS LA M.P. NUMERO 36 QUI EST 2 3 5 4 1
1 FOIS LA M.P. NUMERO 37 QUI EST 2 4 1 3 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 38 QUI EST 2 4 1 5 3
1 FOIS LA M.P. NUMERO 39 QUI EST 2 4 3 1 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 40 QUI EST 2 4 3 5 1
1 FOIS LA M.P. NUMERO 41 QUI EST 2 4 5 1 3
1 FOIS LA M.P. NUMERO 42 QUI EST 2 4 5 3 1
1 FOIS LA M.P. NUMERO 43 QUI EST 2 5 1 3 4
1 FOIS LA M.P. NUMERO 44 QUI EST 2 5 1 4 3
1 FOIS LA M.P. NUMERO 45 QUI EST 2 5 3 1 4
1 FOIS LA M.P. NUMERO 46 QUI EST 2 5 3 4 1
1 FOIS LA M.P. NUMERO 47 QUI EST 2 5 4 1 3
1 FOIS LA M.P. NUMERO 48 QUI EST 2 5 4 3 1
1 FOIS LA M.P. NUMERO 49 QUI EST 3 1 2 4 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 50 QUI EST 3 1 2 5 4
1 FOIS LA M.P. NUMERO 51 QUI EST 3 1 4 2 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 52 QUI EST 3 1 4 5 2
1 FOIS LA M.P. NUMERO 53 QUI EST 3 1 5 2 4
1 FOIS LA M.P. NUMERO 54 QUI EST 3 1 5 4 2
1 FOIS LA M.P. NUMERO 55 QUI EST 3 2 1 4 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 56 QUI EST 3 2 1 5 4
1 FOIS LA M.P. NUMERO 57 QUI EST 3 2 4 1 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 58 QUI EST 3 2 4 5 1
1 FOIS LA M.P. NUMERO 59 QUI EST 3 2 5 1 4
1 FOIS LA M.P. NUMERO 60 QUI EST 3 2 5 4 1
1 FOIS LA M.P. NUMERO 61 QUI EST 3 4 1 2 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 62 QUI EST 3 4 1 5 2
1 FOIS LA M.P. NUMERO 63 QUI EST 3 4 2 1 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 64 QUI EST 3 4 2 5 1
1 FOIS LA M.P. NUMERO 65 QUI EST 3 4 5 1 2
1 FOIS LA M.P. NUMERO 66 QUI EST 3 4 5 2 1
1 FOIS LA M.P. NUMERO 67 QUI EST 3 5 1 2 4
1 FOIS LA M.P. NUMERO 68 QUI EST 3 5 1 4 2
1 FOIS LA M.P. NUMERO 69 QUI EST 3 5 2 1 4
1 FOIS LA M.P. NUMERO 70 QUI EST 3 5 2 4 1
1 FOIS LA M.P. NUMERO 71 QUI EST 3 5 4 1 2
1 FOIS LA M.P. NUMERO 72 QUI EST 3 5 4 2 1
1 FOIS LA M.P. NUMERO 73 QUI EST 4 1 2 3 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 74 QUI EST 4 1 2 5 3
1 FOIS LA M.P. NUMERO 75 QUI EST 4 1 3 2 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 76 QUI EST 4 1 3 5 2
1 FOIS LA M.P. NUMERO 77 QUI EST 4 1 5 2 3
1 FOIS LA M.P. NUMERO 78 QUI EST 4 1 5 3 2
1 FOIS LA M.P. NUMERO 79 QUI EST 4 2 1 3 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 80 QUI EST 4 2 1 5 3
1 FOIS LA M.P. NUMERO 81 QUI EST 4 2 3 1 5
1 FOIS LA M.P. NUMERO 82 QUI EST 4 2 3 5 1

BUS LILLE

## 11.6.4. LES B-DECOMPOSITIONS DE UN(5 x 5)

DECOMPOSITIONS DE UN (5x5)

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 28 | 65 | 94 | 109 | 60 | 2 | 27 | 70 | 89 | 115 |
| 2 | 1 | 28 | 66 | 92 | 111 | 61 | 2 | 30 | 61 | 94 | 113 |
| 3 | 1 | 28 | 67 | 89 | 118 | 62 | 2 | 30 | 63 | 92 | 114 |
| 4 | 1 | 28 | 69 | 90 | 116 | 63 | 2 | 30 | 71 | 85 | 118 |
| 5 | 1 | 29 | 62 | 93 | 114 | 64 | 2 | 30 | 72 | 87 | 116 |
| 6 | 1 | 29 | 64 | 91 | 113 | 65 | 2 | 31 | 65 | 94 | 101 |
| 7 | 1 | 29 | 71 | 88 | 115 | 66 | 2 | 31 | 66 | 93 | 102 |
| 8 | 1 | 29 | 72 | 86 | 117 | 67 | 2 | 31 | 71 | 77 | 118 |
| 9 | 1 | 32 | 65 | 94 | 101 | 68 | 2 | 31 | 72 | 78 | 117 |
| 10 | 1 | 32 | 66 | 93 | 102 | 69 | 2 | 33 | 54 | 91 | 118 |
| 11 | 1 | 32 | 71 | 77 | 118 | 70 | 2 | 33 | 54 | 94 | 115 |
| 12 | 1 | 32 | 72 | 78 | 117 | 71 | 2 | 33 | 66 | 92 | 98 |
| 13 | 1 | 34 | 53 | 92 | 117 | 72 | 2 | 33 | 68 | 77 | 118 |
| 14 | 1 | 34 | 53 | 93 | 116 | 73 | 2 | 33 | 70 | 77 | 116 |
| 15 | 1 | 34 | 65 | 91 | 97 | 74 | 2 | 33 | 70 | 78 | 115 |
| 16 | 1 | 34 | 67 | 78 | 117 | 75 | 2 | 36 | 51 | 92 | 117 |
| 17 | 1 | 34 | 69 | 77 | 116 | 76 | 2 | 36 | 51 | 93 | 116 |
| 18 | 1 | 34 | 69 | 78 | 115 | 77 | 2 | 36 | 61 | 93 | 102 |
| 19 | 1 | 35 | 52 | 91 | 118 | 78 | 2 | 36 | 63 | 91 | 102 |
| 20 | 1 | 35 | 52 | 94 | 115 | 79 | 2 | 36 | 63 | 92 | 101 |
| 21 | 1 | 35 | 62 | 94 | 101 | 80 | 2 | 36 | 71 | 73 | 115 |
| 22 | 1 | 35 | 64 | 91 | 102 | 81 | 2 | 37 | 54 | 93 | 114 |
| 23 | 1 | 35 | 64 | 92 | 101 | 82 | 2 | 37 | 70 | 77 | 113 |
| 24 | 1 | 35 | 72 | 74 | 116 | 83 | 2 | 37 | 70 | 89 | 101 |
| 25 | 1 | 38 | 53 | 94 | 113 | 84 | 2 | 37 | 71 | 77 | 112 |
| 26 | 1 | 38 | 69 | 78 | 114 | 85 | 2 | 37 | 71 | 90 | 98 |
| 27 | 1 | 38 | 69 | 90 | 102 | 86 | 2 | 37 | 72 | 89 | 98 |
| 28 | 1 | 38 | 71 | 90 | 97 | 87 | 2 | 41 | 49 | 92 | 114 |
| 29 | 1 | 38 | 72 | 78 | 111 | 88 | 2 | 41 | 51 | 92 | 112 |
| 30 | 1 | 38 | 72 | 89 | 97 | 89 | 2 | 41 | 51 | 94 | 110 |
| 31 | 1 | 41 | 50 | 92 | 114 | 90 | 2 | 41 | 68 | 73 | 114 |
| 32 | 1 | 41 | 52 | 94 | 109 | 91 | 2 | 41 | 70 | 85 | 102 |
| 33 | 1 | 41 | 67 | 88 | 102 | 92 | 2 | 41 | 72 | 73 | 110 |
| 34 | 1 | 41 | 72 | 86 | 97 | 93 | 2 | 42 | 49 | 91 | 113 |
| 35 | 1 | 42 | 50 | 91 | 113 | 94 | 2 | 42 | 51 | 93 | 110 |
| 36 | 1 | 42 | 52 | 91 | 111 | 95 | 2 | 42 | 68 | 87 | 101 |
| 37 | 1 | 42 | 52 | 93 | 109 | 96 | 2 | 42 | 71 | 85 | 98 |
| 38 | 1 | 42 | 67 | 74 | 113 | 97 | 2 | 44 | 51 | 89 | 118 |
| 39 | 1 | 42 | 69 | 86 | 101 | 98 | 2 | 44 | 63 | 78 | 114 |
| 40 | 1 | 42 | 71 | 74 | 109 | 99 | 2 | 44 | 63 | 90 | 102 |
| 41 | 1 | 43 | 52 | 90 | 117 | 100 | 2 | 44 | 65 | 73 | 114 |
| 42 | 1 | 43 | 64 | 77 | 113 | 101 | 2 | 44 | 66 | 73 | 113 |
| 43 | 1 | 43 | 64 | 89 | 101 | 102 | 2 | 44 | 66 | 87 | 102 |
| 44 | 1 | 43 | 65 | 74 | 114 | 103 | 2 | 47 | 49 | 90 | 116 |
| 45 | 1 | 43 | 65 | 88 | 101 | 104 | 2 | 47 | 54 | 85 | 118 |
| 46 | 1 | 43 | 66 | 74 | 113 | 105 | 2 | 47 | 61 | 78 | 112 |
| 47 | 1 | 47 | 50 | 90 | 116 | 106 | 2 | 47 | 66 | 73 | 110 |
| 48 | 1 | 47 | 53 | 86 | 118 | 107 | 2 | 48 | 49 | 89 | 115 |
| 49 | 1 | 47 | 53 | 88 | 116 | 108 | 2 | 48 | 54 | 85 | 117 |
| 50 | 1 | 47 | 62 | 90 | 97 | 109 | 2 | 48 | 54 | 87 | 115 |
| 51 | 1 | 47 | 64 | 78 | 109 | 110 | 2 | 48 | 61 | 89 | 98 |
| 52 | 1 | 47 | 66 | 86 | 97 | 111 | 2 | 48 | 63 | 77 | 110 |
| 53 | 1 | 48 | 50 | 89 | 115 | 112 | 2 | 48 | 65 | 85 | 98 |
| 54 | 1 | 48 | 53 | 86 | 117 | 113 | 3 | 26 | 65 | 91 | 112 |
| 55 | 1 | 48 | 62 | 77 | 111 | 114 | 3 | 26 | 66 | 93 | 110 |
| 56 | 1 | 48 | 65 | 74 | 109 | 115 | 3 | 26 | 68 | 90 | 117 |
| 57 | 2 | 27 | 65 | 91 | 112 | 116 | 3 | 26 | 70 | 89 | 115 |
| 58 | 2 | 27 | 66 | 93 | 110 | 117 | 3 | 30 | 62 | 96 | 111 |
| 59 | 2 | 27 | 68 | 90 | 117 | 118 | 3 | 30 | 64 | 95 | 109 |
| | | | | | | 119 | 3 | 30 | 67 | 88 | 119 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 83 | QUI | EST | 4 | 2 | 5 | 1 | 3 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 84 | QUI | EST | 4 | 2 | 5 | 3 | 1 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 85 | QUI | EST | 4 | 3 | 1 | 2 | 5 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 86 | QUI | EST | 4 | 3 | 1 | 5 | 2 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 87 | QUI | EST | 4 | 3 | 2 | 1 | 5 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 88 | QUI | EST | 4 | 3 | 2 | 5 | 1 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 89 | QUI | EST | 4 | 3 | 5 | 1 | 2 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 90 | QUI | EST | 4 | 3 | 5 | 2 | 1 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 91 | QUI | EST | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 92 | QUI | EST | 4 | 5 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 93 | QUI | EST | 4 | 5 | 2 | 1 | 3 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 94 | QUI | EST | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 95 | QUI | EST | 4 | 5 | 3 | 1 | 2 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 96 | QUI | EST | 4 | 5 | 3 | 2 | 1 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 97 | QUI | EST | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 98 | QUI | EST | 5 | 1 | 2 | 4 | 3 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 99 | QUI | EST | 5 | 1 | 3 | 2 | 4 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 100 | QUI | EST | 5 | 1 | 3 | 4 | 2 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 101 | QUI | EST | 5 | 1 | 4 | 2 | 3 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 102 | QUI | EST | 5 | 1 | 4 | 3 | 2 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 103 | QUI | EST | 5 | 2 | 1 | 3 | 4 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 104 | QUI | EST | 5 | 2 | 1 | 4 | 3 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 105 | QUI | EST | 5 | 2 | 3 | 1 | 4 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 106 | QUI | EST | 5 | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 107 | QUI | EST | 5 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 108 | QUI | EST | 5 | 2 | 4 | 3 | 1 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 109 | QUI | EST | 5 | 3 | 1 | 2 | 4 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 110 | QUI | EST | 5 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 111 | QUI | EST | 5 | 3 | 2 | 1 | 4 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 112 | QUI | EST | 5 | 3 | 2 | 4 | 1 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 113 | QUI | EST | 5 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 114 | QUI | EST | 5 | 3 | 4 | 2 | 1 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 115 | QUI | EST | 5 | 4 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 116 | QUI | EST | 5 | 4 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 117 | QUI | EST | 5 | 4 | 2 | 1 | 3 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 118 | QUI | EST | 5 | 4 | 2 | 3 | 1 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 119 | QUI | EST | 5 | 4 | 3 | 1 | 2 |
| 1 | POIS | LA | M.P. | NUMERO | 120 | QUI | EST | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

**********

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 120 | 3 | 30 | 69 | 86 | 120 |
| 121 | 3 | 32 | 54 | 93 | 120 |
| 122 | 3 | 32 | 54 | 96 | 117 |
| 123 | 3 | 32 | 65 | 96 | 98 |
| 124 | 3 | 32 | 66 | 93 | 100 |
| 125 | 3 | 32 | 66 | 95 | 98 |
| 126 | 3 | 32 | 70 | 77 | 119 |
| 127 | 3 | 35 | 62 | 96 | 98 |
| 128 | 3 | 35 | 64 | 91 | 100 |
| 129 | 3 | 35 | 68 | 74 | 120 |
| 130 | 3 | 35 | 70 | 76 | 115 |
| 131 | 3 | 36 | 50 | 91 | 119 |
| 132 | 3 | 36 | 50 | 95 | 115 |
| 133 | 3 | 36 | 62 | 93 | 99 |
| 134 | 3 | 36 | 67 | 74 | 119 |
| 135 | 3 | 36 | 67 | 76 | 117 |
| 136 | 3 | 36 | 69 | 76 | 115 |
| 137 | 3 | 38 | 53 | 95 | 112 |
| 138 | 3 | 38 | 54 | 96 | 111 |
| 139 | 3 | 38 | 69 | 90 | 100 |
| 140 | 3 | 38 | 70 | 89 | 99 |
| 141 | 3 | 40 | 53 | 93 | 110 |
| 142 | 3 | 40 | 54 | 91 | 111 |
| 143 | 3 | 40 | 54 | 93 | 109 |
| 144 | 3 | 40 | 67 | 89 | 98 |
| 145 | 3 | 40 | 68 | 77 | 111 |
| 146 | 3 | 40 | 69 | 77 | 110 |
| 147 | 3 | 41 | 50 | 96 | 110 |
| 148 | 3 | 41 | 67 | 76 | 112 |
| 149 | 3 | 41 | 67 | 88 | 100 |
| 150 | 3 | 41 | 68 | 88 | 99 |
| 151 | 3 | 41 | 70 | 76 | 109 |
| 152 | 3 | 41 | 70 | 86 | 99 |
| 153 | 3 | 44 | 50 | 89 | 120 |
| 154 | 3 | 44 | 50 | 90 | 119 |
| 155 | 3 | 44 | 53 | 88 | 119 |
| 156 | 3 | 44 | 64 | 89 | 99 |
| 157 | 3 | 44 | 65 | 88 | 99 |
| 158 | 3 | 44 | 66 | 76 | 111 |
| 159 | 3 | 45 | 54 | 88 | 115 |
| 160 | 3 | 45 | 62 | 77 | 112 |
| 161 | 3 | 45 | 62 | 90 | 98 |
| 162 | 3 | 45 | 64 | 77 | 110 |
| 163 | 3 | 45 | 66 | 74 | 110 |
| 164 | 3 | 45 | 66 | 86 | 98 |
| 165 | 3 | 46 | 50 | 89 | 115 |
| 166 | 3 | 46 | 53 | 86 | 117 |
| 167 | 3 | 46 | 62 | 77 | 111 |
| 168 | 3 | 46 | 65 | 74 | 109 |
| 169 | 4 | 25 | 65 | 94 | 109 |
| 170 | 4 | 25 | 66 | 92 | 111 |
| 171 | 4 | 25 | 67 | 89 | 118 |
| 172 | 4 | 25 | 69 | 90 | 116 |
| 173 | 4 | 29 | 61 | 95 | 112 |
| 174 | 4 | 29 | 63 | 96 | 110 |
| 175 | 4 | 29 | 68 | 87 | 120 |
| 176 | 4 | 29 | 70 | 85 | 119 |
| 177 | 4 | 31 | 53 | 94 | 119 |
| 178 | 4 | 31 | 53 | 95 | 118 |
| 179 | 4 | 31 | 65 | 94 | 99 |
| 180 | 4 | 31 | 65 | 96 | 97 |
| 181 | 4 | 31 | 66 | 95 | 97 |
| 182 | 4 | 31 | 69 | 78 | 120 |
| 183 | 4 | 35 | 49 | 92 | 120 |
| 184 | 4 | 35 | 49 | 96 | 116 |
| 185 | 4 | 35 | 61 | 94 | 100 |
| 186 | 4 | 35 | 68 | 73 | 120 |
| 187 | 4 | 35 | 68 | 75 | 118 |
| 188 | 4 | 35 | 70 | 75 | 116 |
| 189 | 4 | 36 | 61 | 95 | 97 |
| 190 | 4 | 36 | 63 | 92 | 99 |
| 191 | 4 | 36 | 67 | 73 | 119 |
| 192 | 4 | 36 | 69 | 75 | 116 |
| 193 | 4 | 37 | 53 | 95 | 112 |
| 194 | 4 | 37 | 54 | 96 | 111 |
| 195 | 4 | 37 | 69 | 90 | 100 |
| 196 | 4 | 37 | 70 | 89 | 99 |
| 197 | 4 | 39 | 53 | 92 | 112 |
| 198 | 4 | 39 | 53 | 94 | 110 |
| 199 | 4 | 39 | 54 | 94 | 109 |
| 200 | 4 | 39 | 67 | 78 | 112 |
| 201 | 4 | 39 | 68 | 90 | 97 |
| 202 | 4 | 39 | 70 | 78 | 109 |
| 203 | 4 | 42 | 49 | 95 | 109 |
| 204 | 4 | 42 | 67 | 87 | 100 |
| 205 | 4 | 42 | 68 | 75 | 111 |
| 206 | 4 | 42 | 68 | 87 | 99 |
| 207 | 4 | 42 | 69 | 75 | 110 |
| 208 | 4 | 42 | 69 | 85 | 100 |
| 209 | 4 | 43 | 49 | 89 | 120 |
| 210 | 4 | 43 | 49 | 90 | 119 |
| 211 | 4 | 43 | 54 | 87 | 120 |
| 212 | 4 | 43 | 63 | 90 | 100 |
| 213 | 4 | 43 | 65 | 75 | 112 |
| 214 | 4 | 43 | 66 | 87 | 100 |
| 215 | 4 | 45 | 49 | 90 | 116 |
| 216 | 4 | 45 | 54 | 85 | 118 |
| 217 | 4 | 45 | 61 | 78 | 112 |
| 218 | 4 | 45 | 66 | 73 | 110 |
| 219 | 4 | 46 | 53 | 87 | 116 |
| 220 | 4 | 46 | 61 | 78 | 111 |
| 221 | 4 | 46 | 61 | 89 | 97 |
| 222 | 4 | 46 | 63 | 78 | 109 |
| 223 | 4 | 46 | 65 | 73 | 109 |
| 224 | 4 | 46 | 65 | 85 | 97 |
| 225 | 5 | 25 | 62 | 93 | 114 |
| 226 | 5 | 25 | 64 | 91 | 113 |
| 227 | 5 | 25 | 71 | 88 | 115 |
| 228 | 5 | 25 | 72 | 86 | 117 |
| 229 | 5 | 28 | 61 | 95 | 112 |
| 230 | 5 | 28 | 63 | 96 | 110 |
| 231 | 5 | 28 | 68 | 87 | 120 |
| 232 | 5 | 28 | 70 | 85 | 119 |
| 233 | 5 | 31 | 52 | 93 | 120 |
| 234 | 5 | 31 | 52 | 96 | 117 |
| 235 | 5 | 31 | 64 | 95 | 101 |
| 236 | 5 | 31 | 71 | 74 | 120 |
| 237 | 5 | 31 | 72 | 74 | 119 |
| 238 | 5 | 31 | 72 | 76 | 117 |
| 239 | 5 | 33 | 62 | 96 | 98 |
| 240 | 5 | 33 | 64 | 91 | 100 |
| 241 | 5 | 33 | 68 | 74 | 120 |
| 242 | 5 | 33 | 70 | 76 | 115 |
| 243 | 5 | 34 | 49 | 91 | 119 |
| 244 | 5 | 34 | 49 | 95 | 115 |
| 245 | 5 | 34 | 61 | 93 | 100 |
| 246 | 5 | 34 | 61 | 95 | 98 |
| 247 | 5 | 34 | 63 | 91 | 100 |
| 248 | 5 | 34 | 68 | 75 | 117 |
| 249 | 5 | 38 | 49 | 95 | 114 |
| 250 | 5 | 38 | 49 | 96 | 113 |
| 251 | 5 | 38 | 51 | 95 | 112 |
| 252 | 5 | 38 | 70 | 75 | 113 |
| 253 | 5 | 38 | 71 | 75 | 112 |
| 254 | 5 | 38 | 72 | 87 | 100 |
| 255 | 5 | 39 | 52 | 91 | 112 |
| 256 | 5 | 39 | 68 | 74 | 114 |
| 257 | 5 | 39 | 68 | 88 | 101 |
| 258 | 5 | 39 | 70 | 86 | 101 |
| 259 | 5 | 39 | 72 | 74 | 110 |
| 260 | 5 | 39 | 72 | 86 | 98 |
| 261 | 5 | 40 | 49 | 91 | 113 |
| 262 | 5 | 40 | 51 | 93 | 110 |
| 263 | 5 | 40 | 68 | 87 | 101 |
| 264 | 5 | 40 | 71 | 85 | 98 |
| 265 | 5 | 44 | 51 | 88 | 119 |
| 266 | 5 | 44 | 52 | 87 | 120 |
| 267 | 5 | 44 | 63 | 76 | 114 |
| 268 | 5 | 44 | 64 | 75 | 113 |
| 269 | 5 | 46 | 51 | 86 | 117 |
| 270 | 5 | 46 | 52 | 85 | 117 |
| 271 | 5 | 46 | 52 | 87 | 115 |
| 272 | 5 | 46 | 61 | 74 | 113 |
| 273 | 5 | 46 | 62 | 87 | 101 |
| 274 | 5 | 46 | 63 | 86 | 101 |
| 275 | 5 | 47 | 49 | 86 | 120 |
| 276 | 5 | 47 | 61 | 76 | 112 |
| 277 | 5 | 47 | 61 | 88 | 100 |
| 278 | 5 | 47 | 62 | 75 | 112 |
| 279 | 5 | 47 | 64 | 75 | 110 |
| 280 | 5 | 47 | 64 | 85 | 100 |
| 281 | 6 | 26 | 61 | 94 | 113 |
| 282 | 6 | 26 | 63 | 92 | 114 |
| 283 | 6 | 26 | 71 | 85 | 118 |
| 284 | 6 | 26 | 72 | 87 | 116 |
| 285 | 6 | 27 | 62 | 96 | 111 |
| 286 | 6 | 27 | 64 | 95 | 109 |
| 287 | 6 | 27 | 67 | 88 | 119 |
| 288 | 6 | 27 | 69 | 86 | 120 |
| 289 | 6 | 32 | 51 | 94 | 119 |
| 290 | 6 | 32 | 51 | 95 | 118 |
| 291 | 6 | 32 | 63 | 96 | 102 |
| 292 | 6 | 32 | 71 | 73 | 120 |
| 293 | 6 | 32 | 71 | 75 | 118 |
| 294 | 6 | 32 | 72 | 73 | 119 |
| 295 | 6 | 33 | 50 | 92 | 120 |
| 296 | 6 | 33 | 50 | 96 | 116 |
| 297 | 6 | 33 | 62 | 94 | 99 |
| 298 | 6 | 33 | 62 | 96 | 97 |
| 299 | 6 | 33 | 64 | 92 | 99 |
| 300 | 6 | 33 | 67 | 76 | 118 |
| 301 | 6 | 34 | 61 | 95 | 97 |
| 302 | 6 | 34 | 63 | 92 | 99 |
| 303 | 6 | 34 | 67 | 73 | 119 |
| 304 | 6 | 34 | 69 | 75 | 116 |
| 305 | 6 | 37 | 50 | 95 | 114 |
| 306 | 6 | 37 | 50 | 96 | 113 |
| 307 | 6 | 37 | 52 | 96 | 111 |
| 308 | 6 | 37 | 69 | 76 | 114 |
| 309 | 6 | 37 | 71 | 88 | 99 |
| 310 | 6 | 37 | 72 | 76 | 111 |
| 311 | 6 | 39 | 50 | 92 | 114 |
| 312 | 6 | 39 | 52 | 94 | 109 |
| 313 | 6 | 39 | 67 | 88 | 102 |
| 314 | 6 | 39 | 72 | 86 | 97 |
| 315 | 6 | 40 | 51 | 92 | 111 |
| 316 | 6 | 40 | 67 | 73 | 113 |
| 317 | 6 | 40 | 67 | 87 | 102 |
| 318 | 6 | 40 | 69 | 85 | 102 |
| 319 | 6 | 40 | 71 | 73 | 109 |
| 320 | 6 | 40 | 71 | 85 | 97 |
| 321 | 6 | 43 | 51 | 88 | 119 |
| 322 | 6 | 43 | 52 | 87 | 120 |
| 323 | 6 | 43 | 63 | 76 | 114 |
| 324 | 6 | 43 | 64 | 75 | 113 |
| 325 | 6 | 45 | 51 | 86 | 118 |
| 326 | 6 | 45 | 51 | 88 | 116 |
| 327 | 6 | 45 | 52 | 85 | 118 |
| 328 | 6 | 45 | 61 | 88 | 102 |
| 329 | 6 | 45 | 62 | 73 | 114 |
| 330 | 6 | 45 | 64 | 85 | 102 |
| 331 | 6 | 48 | 50 | 85 | 119 |
| 332 | 6 | 48 | 61 | 76 | 111 |
| 333 | 6 | 48 | 62 | 75 | 111 |
| 334 | 6 | 48 | 62 | 87 | 99 |
| 335 | 6 | 48 | 63 | 76 | 109 |
| 336 | 6 | 48 | 63 | 86 | 99 |
| 337 | 7 | 26 | 65 | 91 | 108 |
| 338 | 7 | 26 | 66 | 92 | 107 |
| 339 | 7 | 26 | 71 | 84 | 115 |
| 340 | 7 | 26 | 72 | 83 | 116 |
| 341 | 7 | 28 | 59 | 92 | 120 |
| 342 | 7 | 28 | 59 | 96 | 116 |
| 343 | 7 | 28 | 65 | 96 | 103 |
| 344 | 7 | 28 | 66 | 92 | 105 |
| 345 | 7 | 28 | 66 | 95 | 103 |
| 346 | 7 | 28 | 67 | 84 | 119 |
| 347 | 7 | 29 | 58 | 91 | 119 |
| 348 | 7 | 29 | 58 | 95 | 115 |
| 349 | 7 | 29 | 62 | 96 | 107 |
| 350 | 7 | 29 | 71 | 80 | 120 |
| 351 | 7 | 29 | 71 | 82 | 115 |
| 352 | 7 | 29 | 72 | 80 | 119 |
| 353 | 7 | 38 | 53 | 95 | 108 |
| 354 | 7 | 38 | 59 | 96 | 102 |
| 355 | 7 | 38 | 71 | 84 | 99 |
| 356 | 7 | 38 | 72 | 78 | 105 |
| 357 | 7 | 40 | 53 | 92 | 107 |
| 358 | 7 | 40 | 59 | 91 | 102 |
| 359 | 7 | 40 | 59 | 92 | 101 |



LILLE

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 360 | 7 | 40 | 67 | 78 | 107 |
| 361 | 7 | 40 | 67 | 83 | 102 |
| 362 | 7 | 40 | 71 | 77 | 103 |
| 363 | 7 | 41 | 52 | 96 | 103 |
| 364 | 7 | 41 | 56 | 96 | 102 |
| 365 | 7 | 41 | 58 | 92 | 99 |
| 366 | 7 | 41 | 67 | 76 | 108 |
| 367 | 7 | 41 | 67 | 82 | 102 |
| 368 | 7 | 41 | 72 | 76 | 103 |
| 369 | 7 | 42 | 52 | 91 | 105 |
| 370 | 7 | 42 | 56 | 95 | 101 |
| 371 | 7 | 42 | 67 | 76 | 107 |
| 372 | 7 | 42 | 71 | 80 | 99 |
| 373 | 7 | 43 | 52 | 83 | 120 |
| 374 | 7 | 43 | 58 | 77 | 119 |
| 375 | 7 | 43 | 65 | 82 | 101 |
| 376 | 7 | 43 | 66 | 76 | 107 |
| 377 | 7 | 45 | 52 | 84 | 115 |
| 378 | 7 | 45 | 58 | 77 | 116 |
| 379 | 7 | 45 | 58 | 78 | 115 |
| 380 | 7 | 45 | 62 | 77 | 108 |
| 381 | 7 | 45 | 62 | 84 | 101 |
| 382 | 7 | 45 | 66 | 80 | 102 |
| 383 | 7 | 47 | 53 | 82 | 116 |
| 384 | 7 | 47 | 56 | 78 | 120 |
| 385 | 7 | 47 | 62 | 84 | 99 |
| 386 | 7 | 47 | 66 | 76 | 103 |
| 387 | 7 | 48 | 53 | 80 | 119 |
| 388 | 7 | 48 | 56 | 77 | 119 |
| 389 | 7 | 48 | 59 | 76 | 115 |
| 390 | 7 | 48 | 62 | 77 | 105 |
| 391 | 7 | 48 | 62 | 83 | 99 |
| 392 | 7 | 48 | 65 | 80 | 99 |
| 393 | 8 | 25 | 65 | 91 | 108 |
| 394 | 8 | 25 | 66 | 92 | 107 |
| 395 | 8 | 25 | 71 | 84 | 115 |
| 396 | 8 | 25 | 72 | 83 | 116 |
| 397 | 8 | 27 | 60 | 91 | 119 |
| 398 | 8 | 27 | 60 | 95 | 115 |
| 399 | 8 | 27 | 65 | 91 | 106 |
| 400 | 8 | 27 | 65 | 96 | 104 |
| 401 | 8 | 27 | 66 | 95 | 104 |
| 402 | 8 | 27 | 68 | 83 | 120 |
| 403 | 8 | 30 | 57 | 92 | 120 |
| 404 | 8 | 30 | 57 | 96 | 116 |
| 405 | 8 | 30 | 61 | 95 | 108 |
| 406 | 8 | 30 | 71 | 79 | 120 |
| 407 | 8 | 30 | 72 | 79 | 119 |
| 408 | 8 | 30 | 72 | 81 | 116 |
| 409 | 8 | 37 | 54 | 96 | 107 |
| 410 | 8 | 37 | 60 | 95 | 101 |
| 411 | 8 | 37 | 71 | 77 | 106 |
| 412 | 8 | 37 | 72 | 83 | 100 |
| 413 | 8 | 39 | 54 | 91 | 108 |
| 414 | 8 | 39 | 60 | 91 | 102 |
| 415 | 8 | 39 | 60 | 92 | 101 |
| 416 | 8 | 39 | 68 | 77 | 108 |
| 417 | 8 | 39 | 68 | 84 | 101 |
| 418 | 8 | 39 | 72 | 78 | 104 |
| 419 | 8 | 41 | 51 | 92 | 106 |
| 420 | 8 | 41 | 55 | 96 | 102 |
| 421 | 8 | 41 | 68 | 75 | 108 |
| 422 | 8 | 41 | 72 | 79 | 100 |
| 423 | 8 | 42 | 51 | 95 | 104 |
| 424 | 8 | 42 | 55 | 95 | 101 |
| 425 | 8 | 42 | 57 | 91 | 100 |
| 426 | 8 | 42 | 68 | 75 | 107 |
| 427 | 8 | 42 | 68 | 81 | 101 |
| 428 | 8 | 42 | 71 | 75 | 104 |
| 429 | 8 | 44 | 51 | 84 | 119 |
| 430 | 8 | 44 | 57 | 78 | 120 |
| 431 | 8 | 44 | 65 | 75 | 108 |
| 432 | 8 | 44 | 66 | 81 | 102 |
| 433 | 8 | 46 | 51 | 83 | 116 |
| 434 | 8 | 46 | 57 | 77 | 116 |
| 435 | 8 | 46 | 57 | 78 | 115 |
| 436 | 8 | 46 | 61 | 78 | 107 |
| 437 | 8 | 46 | 61 | 83 | 102 |
| 438 | 8 | 46 | 65 | 79 | 101 |
| 439 | 8 | 47 | 54 | 79 | 120 |
| 440 | 8 | 47 | 55 | 78 | 120 |
| 441 | 8 | 47 | 60 | 75 | 116 |
| 442 | 8 | 47 | 61 | 78 | 106 |
| 443 | 8 | 47 | 61 | 84 | 100 |
| 444 | 8 | 47 | 66 | 79 | 100 |
| 445 | 8 | 48 | 54 | 81 | 115 |
| 446 | 8 | 48 | 55 | 77 | 119 |
| 447 | 8 | 48 | 61 | 83 | 100 |
| 448 | 8 | 48 | 65 | 75 | 104 |
| 449 | 9 | 26 | 60 | 92 | 117 |
| 450 | 9 | 26 | 60 | 93 | 116 |
| 451 | 9 | 26 | 65 | 94 | 104 |
| 452 | 9 | 26 | 68 | 83 | 118 |
| 453 | 9 | 26 | 68 | 84 | 117 |
| 454 | 9 | 26 | 70 | 83 | 116 |
| 455 | 9 | 29 | 62 | 93 | 106 |
| 456 | 9 | 29 | 64 | 95 | 104 |
| 457 | 9 | 29 | 68 | 82 | 117 |
| 458 | 9 | 29 | 70 | 80 | 119 |
| 459 | 9 | 30 | 56 | 94 | 119 |
| 460 | 9 | 30 | 56 | 95 | 118 |
| 461 | 9 | 30 | 62 | 94 | 105 |
| 462 | 9 | 30 | 64 | 92 | 105 |
| 463 | 9 | 30 | 64 | 95 | 103 |
| 464 | 9 | 30 | 69 | 82 | 116 |
| 465 | 9 | 38 | 54 | 94 | 105 |
| 466 | 9 | 38 | 59 | 94 | 100 |
| 467 | 9 | 38 | 60 | 95 | 97 |
| 468 | 9 | 38 | 69 | 78 | 106 |
| 469 | 9 | 38 | 69 | 84 | 100 |
| 470 | 9 | 38 | 70 | 78 | 105 |
| 471 | 9 | 40 | 54 | 93 | 103 |
| 472 | 9 | 40 | 59 | 92 | 98 |
| 473 | 9 | 40 | 68 | 83 | 97 |
| 474 | 9 | 40 | 69 | 78 | 104 |
| 475 | 9 | 41 | 50 | 92 | 106 |
| 476 | 9 | 41 | 56 | 94 | 100 |
| 477 | 9 | 41 | 68 | 82 | 97 |
| 478 | 9 | 41 | 70 | 76 | 103 |
| 479 | 9 | 42 | 50 | 95 | 104 |
| 480 | 9 | 42 | 56 | 93 | 100 |
| 481 | 9 | 42 | 56 | 95 | 98 |
| 482 | 9 | 42 | 68 | 74 | 105 |
| 483 | 9 | 42 | 69 | 76 | 104 |
| 484 | 9 | 42 | 69 | 80 | 100 |
| 485 | 9 | 43 | 54 | 82 | 117 |
| 486 | 9 | 43 | 60 | 74 | 119 |
| 487 | 9 | 43 | 60 | 76 | 117 |
| 488 | 9 | 43 | 64 | 83 | 100 |
| 489 | 9 | 43 | 65 | 74 | 106 |
| 490 | 9 | 43 | 65 | 82 | 98 |
| 491 | 9 | 44 | 50 | 84 | 119 |
| 492 | 9 | 44 | 59 | 76 | 118 |
| 493 | 9 | 44 | 64 | 78 | 105 |
| 494 | 9 | 44 | 65 | 82 | 97 |
| 495 | 9 | 45 | 54 | 80 | 118 |
| 496 | 9 | 45 | 60 | 74 | 116 |
| 497 | 9 | 45 | 62 | 84 | 98 |
| 498 | 9 | 45 | 64 | 78 | 104 |
| 499 | 9 | 46 | 50 | 83 | 116 |
| 500 | 9 | 46 | 56 | 78 | 117 |
| 501 | 9 | 46 | 59 | 74 | 116 |
| 502 | 9 | 46 | 62 | 83 | 97 |
| 503 | 9 | 46 | 65 | 74 | 103 |
| 504 | 9 | 46 | 65 | 80 | 97 |
| 505 | 10 | 25 | 59 | 91 | 118 |
| 506 | 10 | 25 | 59 | 94 | 115 |
| 507 | 10 | 25 | 66 | 93 | 103 |
| 508 | 10 | 25 | 67 | 83 | 118 |
| 509 | 10 | 25 | 67 | 84 | 117 |
| 510 | 10 | 25 | 69 | 84 | 115 |
| 511 | 10 | 29 | 55 | 93 | 120 |
| 512 | 10 | 29 | 55 | 96 | 117 |
| 513 | 10 | 29 | 61 | 93 | 106 |
| 514 | 10 | 29 | 63 | 91 | 106 |
| 515 | 10 | 29 | 63 | 96 | 104 |
| 516 | 10 | 29 | 70 | 81 | 115 |
| 517 | 10 | 30 | 61 | 94 | 105 |
| 518 | 10 | 30 | 63 | 96 | 103 |
| 519 | 10 | 30 | 67 | 81 | 118 |
| 520 | 10 | 30 | 69 | 79 | 120 |
| 521 | 10 | 37 | 53 | 93 | 106 |
| 522 | 10 | 37 | 59 | 96 | 98 |
| 523 | 10 | 37 | 60 | 93 | 99 |
| 524 | 10 | 37 | 69 | 77 | 106 |
| 525 | 10 | 37 | 70 | 77 | 105 |
| 526 | 10 | 37 | 70 | 83 | 99 |
| 527 | 10 | 39 | 53 | 94 | 104 |
| 528 | 10 | 39 | 60 | 91 | 97 |
| 529 | 10 | 39 | 67 | 84 | 98 |
| 530 | 10 | 39 | 70 | 77 | 103 |
| 531 | 10 | 41 | 49 | 96 | 103 |
| 532 | 10 | 41 | 55 | 94 | 99 |
| 533 | 10 | 41 | 55 | 96 | 97 |
| 534 | 10 | 41 | 67 | 73 | 106 |
| 535 | 10 | 41 | 70 | 75 | 103 |
| 536 | 10 | 41 | 70 | 79 | 99 |
| 537 | 10 | 42 | 49 | 91 | 105 |
| 538 | 10 | 42 | 55 | 93 | 99 |
| 539 | 10 | 42 | 67 | 81 | 98 |
| 540 | 10 | 42 | 69 | 75 | 104 |
| 541 | 10 | 43 | 49 | 83 | 120 |
| 542 | 10 | 43 | 60 | 75 | 117 |
| 543 | 10 | 43 | 63 | 77 | 106 |
| 544 | 10 | 43 | 66 | 81 | 98 |
| 545 | 10 | 44 | 53 | 81 | 118 |
| 546 | 10 | 44 | 59 | 73 | 120 |
| 547 | 10 | 44 | 59 | 75 | 118 |
| 548 | 10 | 44 | 63 | 84 | 99 |
| 549 | 10 | 44 | 66 | 73 | 105 |
| 550 | 10 | 44 | 66 | 81 | 97 |
| 551 | 10 | 45 | 49 | 84 | 115 |
| 552 | 10 | 45 | 55 | 77 | 118 |
| 553 | 10 | 45 | 60 | 73 | 115 |
| 554 | 10 | 45 | 61 | 84 | 98 |
| 555 | 10 | 45 | 66 | 73 | 104 |
| 556 | 10 | 45 | 66 | 79 | 98 |
| 557 | 10 | 46 | 53 | 79 | 117 |
| 558 | 10 | 46 | 59 | 73 | 115 |
| 559 | 10 | 46 | 61 | 83 | 97 |
| 560 | 10 | 46 | 63 | 77 | 103 |
| 561 | 11 | 25 | 58 | 92 | 117 |
| 562 | 11 | 25 | 58 | 93 | 116 |
| 563 | 11 | 25 | 62 | 93 | 108 |
| 564 | 11 | 25 | 62 | 94 | 107 |
| 565 | 11 | 25 | 64 | 92 | 107 |
| 566 | 11 | 25 | 71 | 80 | 118 |
| 567 | 11 | 27 | 62 | 93 | 106 |
| 568 | 11 | 27 | 64 | 95 | 104 |
| 569 | 11 | 27 | 68 | 82 | 117 |
| 570 | 11 | 27 | 70 | 80 | 119 |
| 571 | 11 | 28 | 55 | 94 | 119 |
| 572 | 11 | 28 | 55 | 95 | 118 |
| 573 | 11 | 28 | 63 | 92 | 106 |
| 574 | 11 | 28 | 68 | 81 | 118 |
| 575 | 11 | 28 | 70 | 79 | 119 |
| 576 | 11 | 28 | 70 | 81 | 116 |
| 577 | 11 | 37 | 52 | 93 | 106 |
| 578 | 11 | 37 | 58 | 93 | 100 |
| 579 | 11 | 37 | 58 | 95 | 98 |
| 580 | 11 | 37 | 70 | 76 | 107 |
| 581 | 11 | 37 | 71 | 74 | 106 |
| 582 | 11 | 37 | 71 | 82 | 98 |
| 583 | 11 | 38 | 49 | 95 | 108 |
| 584 | 11 | 38 | 57 | 94 | 100 |
| 585 | 11 | 38 | 70 | 81 | 102 |
| 586 | 11 | 38 | 71 | 73 | 106 |
| 587 | 11 | 39 | 52 | 94 | 104 |
| 588 | 11 | 39 | 58 | 92 | 98 |
| 589 | 11 | 39 | 68 | 74 | 108 |
| 590 | 11 | 39 | 70 | 80 | 102 |
| 591 | 11 | 40 | 49 | 92 | 107 |
| 592 | 11 | 40 | 55 | 93 | 102 |
| 593 | 11 | 40 | 57 | 92 | 98 |
| 594 | 11 | 40 | 68 | 73 | 107 |
| 595 | 11 | 40 | 71 | 73 | 104 |
| 596 | 11 | 40 | 71 | 79 | 98 |
| 597 | 11 | 44 | 52 | 81 | 118 |
| 598 | 11 | 44 | 57 | 76 | 118 |
| 599 | 11 | 44 | 58 | 73 | 119 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 600 | 11 | 44 | 63 | 76 | 108 |
| 601 | 11 | 44 | 63 | 82 | 102 |
| 602 | 11 | 44 | 64 | 81 | 102 |
| 603 | 11 | 46 | 52 | 79 | 117 |
| 604 | 11 | 46 | 57 | 74 | 116 |
| 605 | 11 | 46 | 62 | 73 | 107 |
| 606 | 11 | 46 | 63 | 80 | 102 |
| 607 | 11 | 47 | 49 | 82 | 116 |
| 608 | 11 | 47 | 55 | 76 | 118 |
| 609 | 11 | 47 | 62 | 73 | 106 |
| 610 | 11 | 47 | 64 | 79 | 100 |
| 611 | 11 | 48 | 49 | 80 | 119 |
| 612 | 11 | 48 | 55 | 74 | 119 |
| 613 | 11 | 48 | 55 | 76 | 117 |
| 614 | 11 | 48 | 62 | 81 | 98 |
| 615 | 11 | 48 | 63 | 76 | 104 |
| 616 | 11 | 48 | 63 | 80 | 100 |
| 617 | 12 | 26 | 57 | 91 | 118 |
| 618 | 12 | 26 | 57 | 94 | 115 |
| 619 | 12 | 26 | 61 | 93 | 108 |
| 620 | 12 | 26 | 61 | 94 | 107 |
| 621 | 12 | 26 | 63 | 91 | 108 |
| 622 | 12 | 26 | 72 | 79 | 117 |
| 623 | 12 | 27 | 56 | 93 | 120 |
| 624 | 12 | 27 | 56 | 96 | 117 |
| 625 | 12 | 27 | 64 | 91 | 105 |
| 626 | 12 | 27 | 67 | 82 | 117 |
| 627 | 12 | 27 | 69 | 80 | 120 |
| 628 | 12 | 27 | 69 | 82 | 115 |
| 629 | 12 | 28 | 61 | 94 | 105 |
| 630 | 12 | 28 | 63 | 96 | 103 |
| 631 | 12 | 28 | 67 | 81 | 118 |
| 632 | 12 | 28 | 69 | 79 | 120 |
| 633 | 12 | 37 | 50 | 96 | 107 |
| 634 | 12 | 37 | 58 | 93 | 99 |
| 635 | 12 | 37 | 69 | 82 | 101 |
| 636 | 12 | 37 | 72 | 74 | 105 |
| 637 | 12 | 38 | 51 | 94 | 105 |
| 638 | 12 | 38 | 57 | 94 | 99 |
| 639 | 12 | 38 | 57 | 96 | 97 |
| 640 | 12 | 38 | 69 | 75 | 108 |
| 641 | 12 | 38 | 72 | 73 | 105 |
| 642 | 12 | 38 | 72 | 81 | 97 |
| 643 | 12 | 39 | 50 | 91 | 108 |
| 644 | 12 | 39 | 56 | 94 | 101 |
| 645 | 12 | 39 | 58 | 91 | 97 |
| 646 | 12 | 39 | 67 | 74 | 108 |
| 647 | 12 | 39 | 72 | 74 | 103 |
| 648 | 12 | 39 | 72 | 80 | 97 |
| 649 | 12 | 40 | 51 | 93 | 103 |
| 650 | 12 | 40 | 57 | 91 | 97 |
| 651 | 12 | 40 | 67 | 73 | 107 |
| 652 | 12 | 40 | 69 | 79 | 101 |
| 653 | 12 | 43 | 51 | 82 | 117 |
| 654 | 12 | 43 | 57 | 74 | 120 |
| 655 | 12 | 43 | 58 | 75 | 117 |
| 656 | 12 | 43 | 63 | 82 | 101 |
| 657 | 12 | 43 | 64 | 75 | 107 |
| 658 | 12 | 43 | 64 | 81 | 101 |
| 659 | 12 | 45 | 51 | 80 | 118 |
| 660 | 12 | 45 | 58 | 73 | 115 |
| 661 | 12 | 45 | 61 | 74 | 108 |
| 662 | 12 | 45 | 64 | 79 | 101 |
| 663 | 12 | 47 | 50 | 79 | 120 |
| 664 | 12 | 47 | 56 | 73 | 120 |
| 665 | 12 | 47 | 56 | 75 | 118 |
| 666 | 12 | 47 | 61 | 82 | 97 |
| 667 | 12 | 47 | 64 | 75 | 103 |
| 668 | 12 | 47 | 64 | 79 | 99 |
| 669 | 12 | 48 | 50 | 81 | 115 |
| 670 | 12 | 48 | 56 | 75 | 117 |
| 671 | 12 | 48 | 61 | 74 | 105 |
| 672 | 12 | 48 | 63 | 80 | 99 |
| 673 | 13 | 26 | 60 | 91 | 113 |
| 674 | 13 | 26 | 68 | 83 | 114 |
| 675 | 13 | 26 | 68 | 90 | 107 |
| 676 | 13 | 26 | 71 | 90 | 104 |
| 677 | 13 | 26 | 72 | 83 | 110 |
| 678 | 13 | 26 | 72 | 89 | 104 |
| 679 | 13 | 28 | 59 | 96 | 110 |
| 680 | 13 | 28 | 60 | 95 | 109 |
| 681 | 13 | 28 | 67 | 89 | 106 |
| 682 | 13 | 28 | 68 | 90 | 105 |
| 683 | 13 | 30 | 56 | 95 | 114 |
| 684 | 13 | 30 | 56 | 96 | 113 |
| 685 | 13 | 30 | 58 | 95 | 109 |
| 686 | 13 | 30 | 67 | 82 | 113 |
| 687 | 13 | 30 | 71 | 82 | 109 |
| 688 | 13 | 30 | 72 | 86 | 105 |
| 689 | 13 | 32 | 54 | 96 | 107 |
| 690 | 13 | 32 | 60 | 95 | 101 |
| 691 | 13 | 32 | 71 | 77 | 106 |
| 692 | 13 | 32 | 72 | 83 | 100 |
| 693 | 13 | 34 | 53 | 95 | 104 |
| 694 | 13 | 34 | 54 | 91 | 105 |
| 695 | 13 | 34 | 59 | 91 | 100 |
| 696 | 13 | 34 | 67 | 83 | 100 |
| 697 | 13 | 34 | 68 | 77 | 105 |
| 698 | 13 | 34 | 68 | 83 | 99 |
| 699 | 13 | 35 | 52 | 91 | 106 |
| 700 | 13 | 35 | 52 | 96 | 104 |
| 701 | 13 | 35 | 58 | 91 | 100 |
| 702 | 13 | 35 | 68 | 82 | 101 |
| 703 | 13 | 35 | 72 | 76 | 104 |
| 704 | 13 | 35 | 72 | 80 | 100 |
| 705 | 13 | 36 | 52 | 91 | 105 |
| 706 | 13 | 36 | 56 | 95 | 101 |
| 707 | 13 | 36 | 67 | 76 | 107 |
| 708 | 13 | 36 | 71 | 80 | 99 |
| 709 | 13 | 44 | 52 | 90 | 105 |
| 710 | 13 | 44 | 53 | 82 | 113 |
| 711 | 13 | 44 | 58 | 89 | 99 |
| 712 | 13 | 44 | 59 | 76 | 114 |
| 713 | 13 | 45 | 52 | 90 | 104 |
| 714 | 13 | 45 | 54 | 80 | 114 |
| 715 | 13 | 45 | 58 | 77 | 110 |
| 716 | 13 | 45 | 60 | 86 | 101 |
| 717 | 13 | 46 | 52 | 83 | 109 |
| 718 | 13 | 46 | 53 | 80 | 113 |
| 719 | 13 | 46 | 53 | 86 | 107 |
| 720 | 13 | 46 | 56 | 77 | 113 |
| 721 | 13 | 46 | 56 | 89 | 101 |
| 722 | 13 | 46 | 59 | 86 | 101 |
| 723 | 13 | 47 | 53 | 82 | 110 |
| 724 | 13 | 47 | 53 | 86 | 106 |
| 725 | 13 | 47 | 54 | 82 | 109 |
| 726 | 13 | 47 | 56 | 90 | 100 |
| 727 | 13 | 47 | 60 | 76 | 109 |
| 728 | 13 | 47 | 60 | 86 | 99 |
| 729 | 14 | 25 | 59 | 92 | 114 |
| 730 | 14 | 25 | 67 | 84 | 113 |
| 731 | 14 | 25 | 67 | 89 | 108 |
| 732 | 14 | 25 | 71 | 84 | 109 |
| 733 | 14 | 25 | 71 | 90 | 103 |
| 734 | 14 | 25 | 72 | 89 | 103 |
| 735 | 14 | 27 | 59 | 96 | 110 |
| 736 | 14 | 27 | 60 | 95 | 109 |
| 737 | 14 | 27 | 67 | 89 | 106 |
| 738 | 14 | 27 | 68 | 90 | 105 |
| 739 | 14 | 29 | 55 | 95 | 114 |
| 740 | 14 | 29 | 55 | 96 | 113 |
| 741 | 14 | 29 | 57 | 96 | 110 |
| 742 | 14 | 29 | 68 | 81 | 114 |
| 743 | 14 | 29 | 71 | 85 | 106 |
| 744 | 14 | 29 | 72 | 81 | 110 |
| 745 | 14 | 31 | 53 | 95 | 108 |
| 746 | 14 | 31 | 59 | 96 | 102 |
| 747 | 14 | 31 | 71 | 84 | 99 |
| 748 | 14 | 31 | 72 | 78 | 105 |
| 749 | 14 | 33 | 53 | 92 | 106 |
| 750 | 14 | 33 | 54 | 96 | 103 |
| 751 | 14 | 33 | 60 | 92 | 99 |
| 752 | 14 | 33 | 67 | 78 | 106 |
| 753 | 14 | 33 | 67 | 84 | 100 |
| 754 | 14 | 33 | 68 | 84 | 99 |
| 755 | 14 | 35 | 51 | 92 | 106 |
| 756 | 14 | 35 | 55 | 96 | 102 |
| 757 | 14 | 35 | 68 | 75 | 108 |
| 758 | 14 | 35 | 72 | 79 | 100 |
| 759 | 14 | 36 | 51 | 92 | 105 |
| 760 | 14 | 36 | 51 | 95 | 103 |
| 761 | 14 | 36 | 57 | 92 | 99 |
| 762 | 14 | 36 | 67 | 81 | 102 |
| 763 | 14 | 36 | 71 | 75 | 103 |
| 764 | 14 | 36 | 71 | 79 | 99 |
| 765 | 14 | 43 | 51 | 89 | 106 |
| 766 | 14 | 43 | 54 | 81 | 114 |
| 767 | 14 | 43 | 57 | 90 | 100 |
| 768 | 14 | 43 | 60 | 75 | 113 |
| 769 | 14 | 45 | 51 | 84 | 110 |
| 770 | 14 | 45 | 54 | 79 | 114 |
| 771 | 14 | 45 | 54 | 85 | 108 |
| 772 | 14 | 45 | 55 | 78 | 114 |
| 773 | 14 | 45 | 55 | 90 | 102 |
| 774 | 14 | 45 | 60 | 85 | 102 |
| 775 | 14 | 46 | 51 | 89 | 103 |
| 776 | 14 | 46 | 53 | 79 | 113 |
| 777 | 14 | 46 | 57 | 78 | 109 |
| 778 | 14 | 46 | 59 | 85 | 102 |
| 779 | 14 | 48 | 53 | 81 | 110 |
| 780 | 14 | 48 | 54 | 81 | 109 |
| 781 | 14 | 48 | 54 | 85 | 105 |
| 782 | 14 | 48 | 55 | 89 | 99 |
| 783 | 14 | 48 | 59 | 75 | 110 |
| 784 | 14 | 48 | 59 | 85 | 100 |
| 785 | 15 | 28 | 59 | 92 | 112 |
| 786 | 15 | 28 | 59 | 94 | 110 |
| 787 | 15 | 28 | 60 | 92 | 111 |
| 788 | 15 | 28 | 68 | 84 | 111 |
| 789 | 15 | 28 | 69 | 84 | 110 |
| 790 | 15 | 28 | 70 | 89 | 103 |
| 791 | 15 | 29 | 58 | 93 | 110 |
| 792 | 15 | 29 | 68 | 88 | 107 |
| 793 | 15 | 29 | 70 | 80 | 113 |
| 794 | 15 | 29 | 70 | 86 | 107 |
| 795 | 15 | 29 | 71 | 80 | 112 |
| 796 | 15 | 29 | 71 | 88 | 104 |
| 797 | 15 | 30 | 56 | 94 | 113 |
| 798 | 15 | 30 | 58 | 92 | 111 |
| 799 | 15 | 30 | 69 | 86 | 108 |
| 800 | 15 | 30 | 71 | 88 | 103 |
| 801 | 15 | 32 | 54 | 93 | 108 |
| 802 | 15 | 32 | 54 | 94 | 107 |
| 803 | 15 | 32 | 60 | 93 | 102 |
| 804 | 15 | 32 | 70 | 78 | 107 |
| 805 | 15 | 32 | 70 | 83 | 102 |
| 806 | 15 | 32 | 71 | 84 | 98 |
| 807 | 15 | 34 | 54 | 93 | 103 |
| 808 | 15 | 34 | 59 | 92 | 98 |
| 809 | 15 | 34 | 68 | 83 | 97 |
| 810 | 15 | 34 | 69 | 78 | 104 |
| 811 | 15 | 35 | 52 | 94 | 104 |
| 812 | 15 | 35 | 58 | 92 | 98 |
| 813 | 15 | 35 | 68 | 74 | 108 |
| 814 | 15 | 35 | 70 | 80 | 102 |
| 815 | 15 | 36 | 50 | 92 | 107 |
| 816 | 15 | 36 | 52 | 93 | 103 |
| 817 | 15 | 36 | 56 | 93 | 102 |
| 818 | 15 | 36 | 69 | 80 | 102 |
| 819 | 15 | 36 | 71 | 74 | 103 |
| 820 | 15 | 36 | 71 | 80 | 97 |
| 821 | 15 | 43 | 52 | 83 | 112 |
| 822 | 15 | 43 | 54 | 88 | 107 |
| 823 | 15 | 43 | 58 | 89 | 98 |
| 824 | 15 | 43 | 60 | 74 | 113 |
| 825 | 15 | 44 | 50 | 84 | 113 |
| 826 | 15 | 44 | 50 | 89 | 108 |
| 827 | 15 | 44 | 52 | 84 | 111 |
| 828 | 15 | 44 | 58 | 78 | 111 |
| 829 | 15 | 44 | 58 | 89 | 97 |
| 830 | 15 | 44 | 59 | 88 | 102 |
| 831 | 15 | 47 | 50 | 84 | 110 |
| 832 | 15 | 47 | 54 | 88 | 103 |
| 833 | 15 | 47 | 56 | 78 | 112 |
| 834 | 15 | 47 | 60 | 86 | 97 |
| 835 | 15 | 48 | 50 | 83 | 110 |
| 836 | 15 | 48 | 50 | 89 | 104 |
| 837 | 15 | 48 | 54 | 80 | 111 |
| 838 | 15 | 48 | 56 | 89 | 98 |
| 839 | 15 | 48 | 59 | 74 | 110 |

BUS LILLE

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 840 | 15 | 48 | 59 | 86 | 98 |
| 841 | 16 | 27 | 59 | 91 | 112 |
| 842 | 16 | 27 | 60 | 91 | 111 |
| 843 | 16 | 27 | 60 | 93 | 109 |
| 844 | 16 | 27 | 67 | 83 | 112 |
| 845 | 16 | 27 | 69 | 90 | 104 |
| 846 | 16 | 27 | 70 | 83 | 109 |
| 847 | 16 | 29 | 55 | 93 | 114 |
| 848 | 16 | 29 | 57 | 91 | 112 |
| 849 | 16 | 29 | 70 | 85 | 107 |
| 850 | 16 | 29 | 72 | 87 | 104 |
| 851 | 16 | 30 | 57 | 94 | 109 |
| 852 | 16 | 30 | 67 | 87 | 108 |
| 853 | 16 | 30 | 69 | 79 | 114 |
| 854 | 16 | 30 | 69 | 85 | 108 |
| 855 | 16 | 30 | 72 | 79 | 111 |
| 856 | 16 | 30 | 72 | 87 | 103 |
| 857 | 16 | 31 | 53 | 93 | 108 |
| 858 | 16 | 31 | 53 | 94 | 107 |
| 859 | 16 | 31 | 59 | 94 | 101 |
| 860 | 16 | 31 | 69 | 77 | 108 |
| 861 | 16 | 31 | 69 | 84 | 101 |
| 862 | 16 | 31 | 72 | 83 | 97 |
| 863 | 16 | 33 | 53 | 94 | 104 |
| 864 | 16 | 33 | 60 | 91 | 97 |
| 865 | 16 | 33 | 67 | 84 | 98 |
| 866 | 16 | 33 | 70 | 77 | 103 |
| 867 | 16 | 35 | 49 | 91 | 108 |
| 868 | 16 | 35 | 51 | 94 | 104 |
| 869 | 16 | 35 | 55 | 94 | 101 |
| 870 | 16 | 35 | 70 | 79 | 101 |
| 871 | 16 | 35 | 72 | 73 | 104 |
| 872 | 16 | 35 | 72 | 79 | 98 |
| 873 | 16 | 36 | 51 | 93 | 103 |
| 874 | 16 | 36 | 57 | 91 | 97 |
| 875 | 16 | 36 | 67 | 73 | 107 |
| 876 | 16 | 36 | 69 | 79 | 101 |
| 877 | 16 | 43 | 49 | 83 | 114 |
| 878 | 16 | 43 | 49 | 90 | 107 |
| 879 | 16 | 43 | 51 | 83 | 112 |
| 880 | 16 | 43 | 57 | 77 | 112 |
| 881 | 16 | 43 | 57 | 90 | 98 |
| 882 | 16 | 43 | 60 | 87 | 101 |
| 883 | 16 | 44 | 51 | 84 | 111 |
| 884 | 16 | 44 | 53 | 87 | 108 |
| 885 | 16 | 44 | 57 | 90 | 97 |
| 886 | 16 | 44 | 59 | 73 | 114 |
| 887 | 16 | 47 | 49 | 84 | 109 |
| 888 | 16 | 47 | 49 | 90 | 103 |
| 889 | 16 | 47 | 53 | 79 | 112 |
| 890 | 16 | 47 | 55 | 90 | 97 |
| 891 | 16 | 47 | 60 | 73 | 109 |
| 892 | 16 | 47 | 60 | 85 | 97 |
| 893 | 16 | 48 | 49 | 83 | 109 |
| 894 | 16 | 48 | 53 | 87 | 104 |
| 895 | 16 | 48 | 55 | 77 | 111 |
| 896 | 16 | 48 | 59 | 85 | 98 |
| 897 | 17 | 25 | 56 | 94 | 113 |
| 898 | 17 | 25 | 58 | 92 | 111 |
| 899 | 17 | 25 | 69 | 86 | 108 |
| 900 | 17 | 25 | 71 | 88 | 103 |
| 901 | 17 | 26 | 55 | 94 | 113 |
| 902 | 17 | 26 | 57 | 92 | 112 |
| 903 | 17 | 26 | 57 | 94 | 110 |
| 904 | 17 | 26 | 68 | 87 | 108 |
| 905 | 17 | 26 | 70 | 79 | 113 |
| 906 | 17 | 26 | 71 | 79 | 112 |
| 907 | 17 | 27 | 56 | 95 | 112 |
| 908 | 17 | 27 | 68 | 82 | 111 |
| 909 | 17 | 27 | 68 | 88 | 105 |
| 910 | 17 | 27 | 69 | 82 | 110 |
| 911 | 17 | 27 | 69 | 86 | 106 |
| 912 | 17 | 27 | 70 | 86 | 105 |
| 913 | 17 | 31 | 50 | 95 | 108 |
| 914 | 17 | 31 | 52 | 94 | 105 |
| 915 | 17 | 31 | 58 | 95 | 97 |
| 916 | 17 | 31 | 69 | 76 | 108 |
| 917 | 17 | 31 | 69 | 82 | 102 |
| 918 | 17 | 31 | 71 | 82 | 97 |
| 919 | 17 | 32 | 49 | 95 | 108 |
| 920 | 17 | 32 | 57 | 94 | 100 |
| 921 | 17 | 32 | 70 | 81 | 102 |
| 922 | 17 | 32 | 71 | 73 | 106 |
| 923 | 17 | 33 | 50 | 92 | 106 |
| 924 | 17 | 33 | 56 | 94 | 100 |
| 925 | 17 | 33 | 68 | 82 | 97 |
| 926 | 17 | 33 | 70 | 76 | 103 |
| 927 | 17 | 34 | 49 | 92 | 105 |
| 928 | 17 | 34 | 49 | 95 | 103 |
| 929 | 17 | 34 | 55 | 95 | 97 |
| 930 | 17 | 34 | 68 | 73 | 105 |
| 931 | 17 | 34 | 68 | 81 | 97 |
| 932 | 17 | 34 | 69 | 79 | 100 |
| 933 | 17 | 43 | 49 | 82 | 113 |
| 934 | 17 | 43 | 52 | 81 | 112 |
| 935 | 17 | 43 | 52 | 87 | 106 |
| 936 | 17 | 43 | 57 | 76 | 112 |
| 937 | 17 | 43 | 57 | 88 | 100 |
| 938 | 17 | 43 | 58 | 87 | 100 |
| 939 | 17 | 45 | 49 | 86 | 108 |
| 940 | 17 | 45 | 52 | 79 | 112 |
| 941 | 17 | 45 | 55 | 88 | 102 |
| 942 | 17 | 45 | 58 | 73 | 110 |
| 943 | 17 | 46 | 50 | 79 | 113 |
| 944 | 17 | 46 | 52 | 79 | 111 |
| 945 | 17 | 46 | 52 | 87 | 103 |
| 946 | 17 | 46 | 56 | 73 | 113 |
| 947 | 17 | 46 | 56 | 87 | 102 |
| 948 | 17 | 46 | 57 | 86 | 97 |
| 949 | 17 | 48 | 49 | 86 | 105 |
| 950 | 17 | 48 | 50 | 81 | 110 |
| 951 | 17 | 48 | 55 | 76 | 111 |
| 952 | 17 | 48 | 56 | 87 | 100 |
| 953 | 18 | 25 | 56 | 93 | 114 |
| 954 | 18 | 25 | 58 | 91 | 111 |
| 955 | 18 | 25 | 58 | 93 | 109 |
| 956 | 18 | 25 | 67 | 88 | 107 |
| 957 | 18 | 25 | 69 | 80 | 114 |
| 958 | 18 | 25 | 72 | 80 | 111 |
| 959 | 18 | 26 | 55 | 93 | 114 |
| 960 | 18 | 26 | 57 | 91 | 112 |
| 961 | 18 | 26 | 70 | 85 | 107 |
| 962 | 18 | 26 | 72 | 87 | 104 |
| 963 | 18 | 28 | 55 | 96 | 111 |
| 964 | 18 | 28 | 67 | 81 | 112 |
| 965 | 18 | 28 | 67 | 87 | 106 |
| 966 | 18 | 28 | 69 | 85 | 106 |
| 967 | 18 | 28 | 70 | 81 | 109 |
| 968 | 18 | 28 | 70 | 85 | 105 |
| 969 | 18 | 31 | 50 | 96 | 107 |
| 970 | 18 | 31 | 58 | 93 | 99 |
| 971 | 18 | 31 | 69 | 82 | 101 |
| 972 | 18 | 31 | 72 | 74 | 105 |
| 973 | 18 | 32 | 49 | 96 | 107 |
| 974 | 18 | 32 | 51 | 93 | 106 |
| 975 | 18 | 32 | 57 | 96 | 98 |
| 976 | 18 | 32 | 70 | 75 | 107 |
| 977 | 18 | 32 | 70 | 81 | 101 |
| 978 | 18 | 32 | 72 | 81 | 98 |
| 979 | 18 | 33 | 50 | 91 | 106 |
| 980 | 18 | 33 | 50 | 96 | 104 |
| 981 | 18 | 33 | 56 | 96 | 98 |
| 982 | 18 | 33 | 67 | 74 | 106 |
| 983 | 18 | 33 | 67 | 82 | 98 |
| 984 | 18 | 33 | 70 | 80 | 99 |
| 985 | 18 | 34 | 49 | 91 | 105 |
| 986 | 18 | 34 | 55 | 93 | 99 |
| 987 | 18 | 34 | 67 | 81 | 98 |
| 988 | 18 | 34 | 69 | 75 | 104 |
| 989 | 18 | 44 | 50 | 81 | 114 |
| 990 | 18 | 44 | 51 | 82 | 111 |
| 991 | 18 | 44 | 51 | 88 | 105 |
| 992 | 18 | 44 | 57 | 88 | 99 |
| 993 | 18 | 44 | 58 | 75 | 111 |
| 994 | 18 | 44 | 58 | 87 | 99 |
| 995 | 18 | 45 | 49 | 80 | 114 |
| 996 | 18 | 45 | 51 | 80 | 112 |
| 997 | 18 | 45 | 51 | 88 | 104 |
| 998 | 18 | 45 | 55 | 74 | 114 |
| 999 | 18 | 45 | 55 | 88 | 101 |
| 1000 | 18 | 45 | 58 | 85 | 98 |
| 1001 | 18 | 46 | 50 | 85 | 107 |
| 1002 | 18 | 46 | 51 | 80 | 111 |
| 1003 | 18 | 46 | 56 | 87 | 101 |
| 1004 | 18 | 46 | 57 | 74 | 109 |
| 1005 | 18 | 47 | 49 | 82 | 109 |
| 1006 | 18 | 47 | 50 | 85 | 106 |
| 1007 | 18 | 47 | 55 | 88 | 99 |
| 1008 | 18 | 47 | 56 | 75 | 112 |
| 1009 | 19 | 25 | 58 | 89 | 115 |
| 1010 | 19 | 25 | 62 | 83 | 114 |
| 1011 | 19 | 25 | 62 | 90 | 107 |
| 1012 | 19 | 25 | 65 | 80 | 114 |
| 1013 | 19 | 25 | 66 | 80 | 113 |
| 1014 | 19 | 25 | 66 | 86 | 107 |
| 1015 | 19 | 28 | 55 | 89 | 120 |
| 1016 | 19 | 28 | 55 | 90 | 119 |
| 1017 | 19 | 28 | 60 | 85 | 119 |
| 1018 | 19 | 28 | 61 | 89 | 106 |
| 1019 | 19 | 28 | 65 | 85 | 106 |
| 1020 | 19 | 28 | 66 | 81 | 110 |
| 1021 | 19 | 30 | 57 | 86 | 120 |
| 1022 | 19 | 30 | 58 | 85 | 119 |
| 1023 | 19 | 30 | 61 | 82 | 113 |
| 1024 | 19 | 30 | 62 | 81 | 114 |
| 1025 | 19 | 31 | 52 | 83 | 120 |
| 1026 | 19 | 31 | 58 | 77 | 119 |
| 1027 | 19 | 31 | 65 | 82 | 101 |
| 1028 | 19 | 31 | 66 | 76 | 107 |
| 1029 | 19 | 33 | 54 | 80 | 120 |
| 1030 | 19 | 33 | 54 | 82 | 115 |
| 1031 | 19 | 33 | 60 | 76 | 115 |
| 1032 | 19 | 33 | 62 | 77 | 106 |
| 1033 | 19 | 33 | 66 | 76 | 104 |
| 1034 | 19 | 33 | 66 | 80 | 100 |
| 1035 | 19 | 34 | 54 | 81 | 115 |
| 1036 | 19 | 34 | 55 | 77 | 119 |
| 1037 | 19 | 34 | 61 | 83 | 100 |
| 1038 | 19 | 34 | 65 | 75 | 104 |
| 1039 | 19 | 36 | 51 | 80 | 119 |
| 1040 | 19 | 36 | 52 | 81 | 115 |
| 1041 | 19 | 36 | 57 | 76 | 115 |
| 1042 | 19 | 36 | 61 | 76 | 107 |
| 1043 | 19 | 36 | 62 | 75 | 107 |
| 1044 | 19 | 36 | 62 | 81 | 101 |
| 1045 | 19 | 38 | 51 | 89 | 106 |
| 1046 | 19 | 38 | 54 | 81 | 114 |
| 1047 | 19 | 38 | 57 | 90 | 100 |
| 1048 | 19 | 38 | 60 | 75 | 113 |
| 1049 | 19 | 39 | 52 | 90 | 104 |
| 1050 | 19 | 39 | 54 | 80 | 114 |
| 1051 | 19 | 39 | 58 | 77 | 110 |
| 1052 | 19 | 39 | 60 | 86 | 101 |
| 1053 | 19 | 40 | 51 | 83 | 110 |
| 1054 | 19 | 40 | 51 | 89 | 104 |
| 1055 | 19 | 40 | 54 | 85 | 107 |
| 1056 | 19 | 40 | 55 | 77 | 113 |
| 1057 | 19 | 40 | 55 | 89 | 101 |
| 1058 | 19 | 40 | 57 | 77 | 110 |
| 1059 | 19 | 41 | 51 | 82 | 110 |
| 1060 | 19 | 41 | 51 | 86 | 106 |
| 1061 | 19 | 41 | 52 | 85 | 106 |
| 1062 | 19 | 41 | 55 | 76 | 114 |
| 1063 | 19 | 41 | 58 | 75 | 110 |
| 1064 | 19 | 41 | 58 | 85 | 100 |
| 1065 | 20 | 26 | 57 | 90 | 116 |
| 1066 | 20 | 26 | 61 | 84 | 113 |
| 1067 | 20 | 26 | 61 | 89 | 108 |
| 1068 | 20 | 26 | 65 | 79 | 114 |
| 1069 | 20 | 26 | 65 | 85 | 108 |
| 1070 | 20 | 26 | 66 | 79 | 113 |
| 1071 | 20 | 27 | 56 | 89 | 120 |
| 1072 | 20 | 27 | 56 | 90 | 119 |
| 1073 | 20 | 27 | 59 | 86 | 120 |
| 1074 | 20 | 27 | 62 | 90 | 105 |
| 1075 | 20 | 27 | 65 | 82 | 109 |
| 1076 | 20 | 27 | 66 | 86 | 105 |
| 1077 | 20 | 29 | 57 | 86 | 120 |
| 1078 | 20 | 29 | 58 | 85 | 119 |
| 1079 | 20 | 29 | 61 | 82 | 113 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1080 | 20 | 29 | 62 | 81 | 114 |
| 1081 | 20 | 32 | 51 | 84 | 119 |
| 1082 | 20 | 32 | 57 | 78 | 120 |
| 1083 | 20 | 32 | 65 | 75 | 108 |
| 1084 | 20 | 32 | 66 | 81 | 102 |
| 1085 | 20 | 33 | 53 | 82 | 116 |
| 1086 | 20 | 33 | 56 | 78 | 120 |
| 1087 | 20 | 33 | 62 | 84 | 99 |
| 1088 | 20 | 33 | 66 | 76 | 103 |
| 1089 | 20 | 34 | 53 | 79 | 119 |
| 1090 | 20 | 34 | 53 | 81 | 116 |
| 1091 | 20 | 34 | 59 | 75 | 116 |
| 1092 | 20 | 34 | 61 | 78 | 105 |
| 1093 | 20 | 34 | 65 | 75 | 103 |
| 1094 | 20 | 34 | 65 | 79 | 99 |
| 1095 | 20 | 35 | 51 | 82 | 116 |
| 1096 | 20 | 35 | 52 | 79 | 120 |
| 1097 | 20 | 35 | 58 | 75 | 116 |
| 1098 | 20 | 35 | 61 | 76 | 108 |
| 1099 | 20 | 35 | 61 | 82 | 102 |
| 1100 | 20 | 35 | 62 | 75 | 108 |
| 1101 | 20 | 37 | 52 | 90 | 105 |
| 1102 | 20 | 37 | 53 | 82 | 113 |
| 1103 | 20 | 37 | 58 | 89 | 99 |
| 1104 | 20 | 37 | 59 | 76 | 114 |
| 1105 | 20 | 39 | 52 | 84 | 109 |
| 1106 | 20 | 39 | 52 | 90 | 103 |
| 1107 | 20 | 39 | 53 | 86 | 108 |
| 1108 | 20 | 39 | 56 | 78 | 114 |
| 1109 | 20 | 39 | 56 | 90 | 102 |
| 1110 | 20 | 39 | 58 | 78 | 109 |
| 1111 | 20 | 40 | 51 | 89 | 103 |
| 1112 | 20 | 40 | 53 | 79 | 113 |
| 1113 | 20 | 40 | 57 | 78 | 109 |
| 1114 | 20 | 40 | 59 | 85 | 102 |
| 1115 | 20 | 42 | 51 | 86 | 105 |
| 1116 | 20 | 42 | 52 | 81 | 109 |
| 1117 | 20 | 42 | 52 | 85 | 105 |
| 1118 | 20 | 42 | 56 | 75 | 113 |
| 1119 | 20 | 42 | 57 | 76 | 109 |
| 1120 | 20 | 42 | 57 | 86 | 99 |
| 1121 | 21 | 27 | 60 | 86 | 117 |
| 1122 | 21 | 27 | 62 | 83 | 112 |
| 1123 | 21 | 27 | 64 | 83 | 110 |
| 1124 | 21 | 27 | 64 | 89 | 104 |
| 1125 | 21 | 27 | 65 | 80 | 112 |
| 1126 | 21 | 27 | 65 | 88 | 104 |
| 1127 | 21 | 28 | 55 | 89 | 118 |
| 1128 | 21 | 28 | 60 | 87 | 116 |
| 1129 | 21 | 28 | 63 | 84 | 110 |
| 1130 | 21 | 28 | 65 | 79 | 112 |
| 1131 | 21 | 30 | 57 | 86 | 118 |
| 1132 | 21 | 30 | 57 | 88 | 116 |
| 1133 | 21 | 30 | 58 | 87 | 116 |
| 1134 | 21 | 30 | 62 | 87 | 108 |
| 1135 | 21 | 30 | 63 | 86 | 108 |
| 1136 | 21 | 30 | 64 | 79 | 113 |
| 1137 | 21 | 31 | 52 | 83 | 118 |
| 1138 | 21 | 31 | 52 | 84 | 117 |
| 1139 | 21 | 31 | 58 | 78 | 117 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1140 | 21 | 31 | 64 | 78 | 107 |
| 1141 | 21 | 31 | 64 | 83 | 102 |
| 1142 | 21 | 31 | 65 | 74 | 108 |
| 1143 | 21 | 33 | 54 | 80 | 118 |
| 1144 | 21 | 33 | 60 | 74 | 116 |
| 1145 | 21 | 33 | 62 | 84 | 98 |
| 1146 | 21 | 33 | 64 | 78 | 104 |
| 1147 | 21 | 34 | 49 | 83 | 116 |
| 1148 | 21 | 34 | 54 | 79 | 117 |
| 1149 | 21 | 34 | 55 | 78 | 117 |
| 1150 | 21 | 34 | 63 | 78 | 104 |
| 1151 | 21 | 34 | 65 | 73 | 104 |
| 1152 | 21 | 34 | 65 | 79 | 98 |
| 1153 | 21 | 36 | 52 | 79 | 117 |
| 1154 | 21 | 36 | 57 | 74 | 116 |
| 1155 | 21 | 36 | 62 | 73 | 107 |
| 1156 | 21 | 36 | 63 | 80 | 102 |
| 1157 | 21 | 37 | 52 | 83 | 112 |
| 1158 | 21 | 37 | 54 | 88 | 107 |
| 1159 | 21 | 37 | 58 | 89 | 98 |
| 1160 | 21 | 37 | 60 | 74 | 113 |
| 1161 | 21 | 38 | 49 | 84 | 113 |
| 1162 | 21 | 38 | 49 | 89 | 108 |
| 1163 | 21 | 38 | 54 | 87 | 108 |
| 1164 | 21 | 38 | 57 | 78 | 112 |
| 1165 | 21 | 38 | 60 | 73 | 113 |
| 1166 | 21 | 38 | 60 | 87 | 102 |
| 1167 | 21 | 41 | 49 | 86 | 108 |
| 1168 | 21 | 41 | 52 | 79 | 112 |
| 1169 | 21 | 41 | 55 | 88 | 102 |
| 1170 | 21 | 41 | 58 | 73 | 110 |
| 1171 | 21 | 42 | 49 | 80 | 113 |
| 1172 | 21 | 42 | 49 | 86 | 107 |
| 1173 | 21 | 42 | 52 | 87 | 104 |
| 1174 | 21 | 42 | 55 | 74 | 113 |
| 1175 | 21 | 42 | 57 | 74 | 110 |
| 1176 | 21 | 42 | 57 | 86 | 98 |
| 1177 | 22 | 27 | 56 | 90 | 117 |
| 1178 | 22 | 27 | 59 | 88 | 115 |
| 1179 | 22 | 27 | 64 | 83 | 109 |
| 1180 | 22 | 27 | 66 | 80 | 111 |
| 1181 | 22 | 28 | 59 | 85 | 118 |
| 1182 | 22 | 28 | 61 | 84 | 111 |
| 1183 | 22 | 28 | 63 | 84 | 109 |
| 1184 | 22 | 28 | 63 | 90 | 103 |
| 1185 | 22 | 28 | 66 | 79 | 111 |
| 1186 | 22 | 28 | 66 | 87 | 103 |
| 1187 | 22 | 29 | 57 | 88 | 115 |
| 1188 | 22 | 29 | 58 | 85 | 117 |
| 1189 | 22 | 29 | 58 | 87 | 115 |
| 1190 | 22 | 29 | 61 | 88 | 107 |
| 1191 | 22 | 29 | 63 | 80 | 114 |
| 1192 | 22 | 29 | 64 | 85 | 107 |
| 1193 | 22 | 32 | 51 | 83 | 118 |
| 1194 | 22 | 32 | 51 | 84 | 117 |
| 1195 | 22 | 32 | 57 | 77 | 118 |
| 1196 | 22 | 32 | 63 | 77 | 108 |
| 1197 | 22 | 32 | 63 | 84 | 101 |
| 1198 | 22 | 32 | 66 | 73 | 107 |
| 1199 | 22 | 33 | 50 | 84 | 115 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1200 | 22 | 33 | 53 | 80 | 118 |
| 1201 | 22 | 33 | 56 | 77 | 118 |
| 1202 | 22 | 33 | 64 | 77 | 103 |
| 1203 | 22 | 33 | 66 | 74 | 103 |
| 1204 | 22 | 33 | 66 | 80 | 97 |
| 1205 | 22 | 34 | 53 | 79 | 117 |
| 1206 | 22 | 34 | 59 | 73 | 115 |
| 1207 | 22 | 34 | 61 | 83 | 97 |
| 1208 | 22 | 34 | 63 | 77 | 103 |
| 1209 | 22 | 35 | 51 | 80 | 118 |
| 1210 | 22 | 35 | 58 | 73 | 115 |
| 1211 | 22 | 35 | 61 | 74 | 108 |
| 1212 | 22 | 35 | 64 | 79 | 101 |
| 1213 | 22 | 37 | 50 | 83 | 114 |
| 1214 | 22 | 37 | 50 | 90 | 107 |
| 1215 | 22 | 37 | 53 | 88 | 107 |
| 1216 | 22 | 37 | 58 | 77 | 111 |
| 1217 | 22 | 37 | 59 | 74 | 114 |
| 1218 | 22 | 37 | 59 | 88 | 101 |
| 1219 | 22 | 38 | 51 | 84 | 111 |
| 1220 | 22 | 38 | 53 | 87 | 108 |
| 1221 | 22 | 38 | 57 | 90 | 97 |
| 1222 | 22 | 38 | 59 | 73 | 114 |
| 1223 | 22 | 41 | 50 | 79 | 114 |
| 1224 | 22 | 41 | 50 | 85 | 108 |
| 1225 | 22 | 41 | 51 | 88 | 103 |
| 1226 | 22 | 41 | 56 | 73 | 114 |
| 1227 | 22 | 41 | 58 | 73 | 109 |
| 1228 | 22 | 41 | 58 | 85 | 97 |
| 1229 | 22 | 42 | 50 | 85 | 107 |
| 1230 | 22 | 42 | 51 | 80 | 111 |
| 1231 | 22 | 42 | 56 | 87 | 101 |
| 1232 | 22 | 42 | 57 | 74 | 109 |
| 1233 | 23 | 25 | 56 | 89 | 118 |
| 1234 | 23 | 25 | 59 | 86 | 118 |
| 1235 | 23 | 25 | 59 | 88 | 116 |
| 1236 | 23 | 25 | 62 | 84 | 111 |
| 1237 | 23 | 25 | 64 | 89 | 103 |
| 1238 | 23 | 25 | 65 | 88 | 103 |
| 1239 | 23 | 26 | 55 | 89 | 118 |
| 1240 | 23 | 26 | 60 | 87 | 116 |
| 1241 | 23 | 26 | 63 | 84 | 110 |
| 1242 | 23 | 26 | 65 | 79 | 112 |
| 1243 | 23 | 29 | 55 | 88 | 119 |
| 1244 | 23 | 29 | 62 | 81 | 112 |
| 1245 | 23 | 29 | 62 | 87 | 106 |
| 1246 | 23 | 29 | 63 | 82 | 110 |
| 1247 | 23 | 29 | 63 | 86 | 106 |
| 1248 | 23 | 29 | 64 | 81 | 110 |
| 1249 | 23 | 31 | 50 | 84 | 119 |
| 1250 | 23 | 31 | 59 | 76 | 118 |
| 1251 | 23 | 31 | 64 | 78 | 105 |
| 1252 | 23 | 31 | 65 | 82 | 97 |
| 1253 | 23 | 32 | 49 | 84 | 119 |
| 1254 | 23 | 32 | 54 | 81 | 118 |
| 1255 | 23 | 32 | 60 | 73 | 119 |
| 1256 | 23 | 32 | 63 | 78 | 106 |
| 1257 | 23 | 32 | 63 | 84 | 100 |
| 1258 | 23 | 32 | 65 | 73 | 106 |
| 1259 | 23 | 35 | 49 | 82 | 116 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1260 | 23 | 35 | 55 | 76 | 118 |
| 1261 | 23 | 35 | 62 | 73 | 106 |
| 1262 | 23 | 35 | 64 | 79 | 100 |
| 1263 | 23 | 36 | 50 | 79 | 119 |
| 1264 | 23 | 36 | 50 | 81 | 116 |
| 1265 | 23 | 36 | 56 | 73 | 119 |
| 1266 | 23 | 36 | 62 | 73 | 105 |
| 1267 | 23 | 36 | 62 | 81 | 97 |
| 1268 | 23 | 36 | 63 | 76 | 103 |
| 1269 | 23 | 37 | 50 | 89 | 106 |
| 1270 | 23 | 37 | 54 | 82 | 111 |
| 1271 | 23 | 37 | 54 | 88 | 105 |
| 1272 | 23 | 37 | 59 | 76 | 112 |
| 1273 | 23 | 37 | 59 | 88 | 100 |
| 1274 | 23 | 37 | 60 | 76 | 111 |
| 1275 | 23 | 39 | 50 | 84 | 110 |
| 1276 | 23 | 39 | 54 | 88 | 103 |
| 1277 | 23 | 39 | 56 | 78 | 112 |
| 1278 | 23 | 39 | 60 | 86 | 97 |
| 1279 | 23 | 40 | 49 | 89 | 103 |
| 1280 | 23 | 40 | 54 | 79 | 111 |
| 1281 | 23 | 40 | 54 | 87 | 103 |
| 1282 | 23 | 40 | 55 | 78 | 111 |
| 1283 | 23 | 40 | 55 | 89 | 97 |
| 1284 | 23 | 40 | 59 | 73 | 110 |
| 1285 | 23 | 42 | 49 | 86 | 105 |
| 1286 | 23 | 42 | 50 | 81 | 110 |
| 1287 | 23 | 42 | 55 | 76 | 111 |
| 1288 | 23 | 42 | 56 | 87 | 100 |
| 1289 | 24 | 25 | 56 | 90 | 117 |
| 1290 | 24 | 25 | 59 | 88 | 115 |
| 1291 | 24 | 25 | 64 | 83 | 109 |
| 1292 | 24 | 25 | 66 | 80 | 111 |
| 1293 | 24 | 26 | 55 | 90 | 117 |
| 1294 | 24 | 26 | 60 | 85 | 117 |
| 1295 | 24 | 26 | 60 | 87 | 115 |
| 1296 | 24 | 26 | 61 | 83 | 112 |
| 1297 | 24 | 26 | 63 | 90 | 104 |
| 1298 | 24 | 26 | 66 | 87 | 104 |
| 1299 | 24 | 30 | 56 | 87 | 120 |
| 1300 | 24 | 30 | 61 | 82 | 111 |
| 1301 | 24 | 30 | 61 | 88 | 105 |
| 1302 | 24 | 30 | 63 | 82 | 109 |
| 1303 | 24 | 30 | 64 | 81 | 109 |
| 1304 | 24 | 30 | 64 | 85 | 105 |
| 1305 | 24 | 31 | 50 | 83 | 120 |
| 1306 | 24 | 31 | 53 | 82 | 117 |
| 1307 | 24 | 31 | 59 | 74 | 120 |
| 1308 | 24 | 31 | 64 | 77 | 105 |
| 1309 | 24 | 31 | 64 | 83 | 99 |
| 1310 | 24 | 31 | 66 | 74 | 105 |
| 1311 | 24 | 32 | 49 | 83 | 120 |
| 1312 | 24 | 32 | 60 | 75 | 117 |
| 1313 | 24 | 32 | 63 | 77 | 106 |
| 1314 | 24 | 32 | 66 | 81 | 98 |
| 1315 | 24 | 35 | 49 | 80 | 120 |
| 1316 | 24 | 35 | 49 | 82 | 115 |
| 1317 | 24 | 35 | 55 | 74 | 120 |
| 1318 | 24 | 35 | 61 | 74 | 106 |
| 1319 | 24 | 35 | 61 | 82 | 98 |



BUS LILLE

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1320 | 24 | 35 | 64 | 75 | 104 |
| 1321 | 24 | 36 | 50 | 81 | 115 |
| 1322 | 24 | 36 | 56 | 75 | 117 |
| 1323 | 24 | 36 | 61 | 74 | 105 |
| 1324 | 24 | 36 | 63 | 80 | 99 |
| 1325 | 24 | 38 | 49 | 90 | 105 |
| 1326 | 24 | 38 | 53 | 81 | 112 |
| 1327 | 24 | 38 | 53 | 87 | 106 |
| 1328 | 24 | 38 | 59 | 75 | 112 |
| 1329 | 24 | 38 | 60 | 75 | 111 |
| 1330 | 24 | 38 | 60 | 87 | 99 |
| 1331 | 24 | 39 | 50 | 90 | 104 |
| 1332 | 24 | 39 | 53 | 80 | 112 |
| 1333 | 24 | 39 | 53 | 88 | 104 |
| 1334 | 24 | 39 | 56 | 77 | 112 |
| 1335 | 24 | 39 | 56 | 90 | 98 |
| 1336 | 24 | 39 | 60 | 74 | 109 |
| 1337 | 24 | 40 | 49 | 83 | 109 |
| 1338 | 24 | 40 | 53 | 87 | 104 |
| 1339 | 24 | 40 | 55 | 77 | 111 |
| 1340 | 24 | 40 | 59 | 85 | 98 |
| 1341 | 24 | 41 | 49 | 82 | 109 |
| 1342 | 24 | 41 | 50 | 85 | 106 |
| 1343 | 24 | 41 | 55 | 88 | 99 |
| 1344 | 24 | 41 | 56 | 75 | 112 |

## 11.7 ENSEMBLES DE B-DÉCOMPOSITIONS DE UN(4 x 4)

### 11.7.1 TRIPLETS DE B-DECOMPOSITIONS DE UN(4 x 4) PAR A 3 D C P

```
:PROC OPTIONS (MAIN);

ST
    A3DCP:PROC OPTIONS (MAIN);
    /*DECLARATIONS */
        DCL PD(1:24,1:24) DEC FIXED (2) INIT (
    1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,
     6, 5, 7, 8, 2,1, 3, 4,13,15,16,14, 9,12,10,11,21,23,24,22,17,20,18,19,
    10,11,12, 9,18,19,17,20, 4,1, 2, 3,22,21,24,23, 7, 5, 6, 8,14,13,16,15,
    15,16,14,13,23,24,21,22, 8, 6, 5, 7,20,17,19,18, 3, 2,1, 4,12, 9,11,10,
    19,18,17,20,11,10,12, 9,22,24,23,21, 4, 3,1, 2,14,16,15,13, 7, 8, 5, 6,
    24,23,21,22,16,15,14,13,20,19,18,17, 8, 7, 6, 5,12,11,10, 9, 3, 4, 2,1,
     6, 5,17,13, 2,1,21, 9, 8,15,23,14, 4,12,10,18, 3,16,24,22, 7,20,11,19,
    1, 2,21, 9, 5, 6,17,13, 4,10,18,12, 8,14,15,23, 7,11,19,20, 3,22,16,24,
    19,18, 7,22,11,10,14, 4,20,24,16,21, 9, 3,1, 5,12,23,15,13,17, 8, 2, 6,
    24,23, 3,20,16,15,12, 8,22,19,11,17,13, 7, 6, 2,14,18,10, 9,21, 4, 5,1,
    10,11,14, 4,18,19, 7,22, 9,1, 5, 3,20,21,24,16,17, 2, 6, 8,12,13,23,15,
    15,16,12, 8,23,24, 3,20,13, 6, 2, 7,22,17,19,11,21, 5,1, 4,14, 9,18,10,
    15,23,14, 8,16,24, 3,22,13, 6, 5,17,20, 7,19,11,21, 2,1, 9,12, 4,18,10,
    10,18,12, 4,11,19, 7,20, 9,1, 2,21,22, 3,24,16,17, 5, 6,13,14, 8,23,15,
    24,16,21,20,23,15,12,13,22,19,18, 7, 8,17, 6, 2,14,11,10, 4, 3, 9, 5,1,
    19,11,17,22,18,10,14, 9,20,24,23, 3, 4,21,1, 5,12,16,15, 8, 7,13, 2, 6,
    1, 5, 3, 9, 2, 6,17, 8, 4,10,11,14,13,12,15,23, 7,18,19,22,21,20,16,24,
     6, 2, 7,13, 5,1,21, 4, 8,15,16,12, 9,14,10,18, 3,22,24,20,17,22,11,19,
    24,16, 3,22,23,15,14, 8,20,19,11, 7,13,17, 6, 5,12,18,10, 4,21, 9, 2,1,
    19,11, 7,20,18,10,12, 4,22,24,16, 3, 9,21,1, 2,14,23,15, 8,17,13, 5, 6,
    15,23,12,13,16,24,21,20, 8, 6, 2,17,22, 7,19,18, 3, 5,1, 9,14, 4,11,10,
    10,18,14, 9,11,19,17,22, 4,1, 5,21,20, 3,24,23, 7, 2, 6,13,12, 8,16,15,
     6, 2,17, 8, 5,1, 3, 9,13,15,23,12, 4,14,10,11,21,16,24,20, 7,22,18,19,
    1, 5,21, 4, 2, 6, 7,13, 9,10,18,14, 3,12, 15,16,17,11,19,22, 3,20,23,24
        );
        DCL DP(1:24,1:24) DEC FIXED (2) INIT (
    1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,
     6, 5, 8, 7, 2,1, 4, 3,17,19,18,20,21,22,24,23, 9,11,10,12,13,14,16,15,
    10,12,11, 9,14,15,16,13, 4,1, 3, 2, 8, 5, 6, 7,23,21,24,22,18,20,17,19,
    15,14,13,16,12,10, 9,11,23,24,21,22,18,20,19,17, 4, 3,1, 2, 8, 5, 7, 6,
    19,20,18,17,22,24,23,21, 7, 6, 8, 5, 3, 2,1, 4,16,13,15,14,11,12, 9,10,
    24,22,21,23,20,19,17,18,16,15,13,14,11,12,10, 9, 7, 8, 6, 5, 3, 2, 4,1,
     6, 5,13,17, 2,1, 9,21, 7,19,18,22, 3,20,24,23, 4,11,10,14, 8,12,16,15,
    1, 2,21, 9, 5, 6,17,13, 4,10,11,14, 8,12, 15,16, 7,18,19,22, 3,20,23,24,
    19,22,18, 7,20,24,23, 3,17, 6,13, 5,21, 2,1, 9,16, 8,15,12,11,14, 4,10,
    24,20, 3,23,22,19, 7,18,16,15, 8,12,11,14,10, 4,17,13, 6, 5,21, 2, 9,1,
    10,14,11, 4,12,15,16, 8, 9,1,21, 2,13, 5, 6,17,23, 3,24,20,18,22, 7,19,
    15,12, 8,16,14,10, 4,11,23,24, 3,20,18,22,19, 7, 9,21,1, 2,13, 5,17, 6,
    15,14, 8,23,12,10, 4,16,16,24,21,20,11,22,19,17, 9, 3,1, 5,13, 2, 7, 6,
    10,12,18, 4,14,15,23, 8, 9,1, 3, 5,13, 2, 6, 7,16,21,24,20,11,22,17,19,
    24,20,21,16,22,19,17,11,23,15, 8,14,18,12,10, 4, 7,13, 6, 2, 3, 5, 9,1,
    19,22,11,17,20,24,16,21, 7, 6,13, 2, 3, 5,1, 9,23, 8,10,14,18,12, 4,10,
    1, 5, 3, 9, 2, 6, 7,13, 4,10,18,12, 8,14,15,23,17,11,19,22,21,20,16,24,
     6, 2,13, 7, 5,1, 9, 3,17,19,11,22,21,20,24,16, 4,18,10,12, 8,14,23,15,
    24,22, 3,16,20,19, 7,11,23,15,13,12,18,14,10, 9,17, 8, 6, 2,21, 5, 4,1,
    19,20,11, 7,22,24,16, 3,17, 6, 8, 2,21, 5,1, 4,23,13,15,12,18,14, 9,10,
    15,12,13,22,14,10, 9,18,16,24, 3,22,11,20,19, 7, 4,21,1, 5, 8, 2,17, 6,
    10,14,18, 9,12,15,23,13, 4,1,21, 5, 3, 2, 6,17,16, 3,24,22,11,20, 7,19,
     6, 2, 8,17, 5,1, 4,21, 7,19,11,20, 3,22,24,16, 9,18,10,14,13,12,23,15,
```

BUS LILLE

```
3DCP:PROC OPTIONS (MAIN);

. NEST

    1, 5,21, 4, 2, 6,17, 8, 9,10,18,14,13,12,15,23, 7,11,19,20, 3,22,16,24
        );
        DCL RR(1:22,2:23,3:24)DEC FIXED(2) INIT(0);
        DCL (PP(1:22,2:23,3:24),QQ(1:22,2:23,3:24))DEC FIXED(2) INIT(1);
        DCL(I,J,L,I1,J1,L1,I2,J2,L2,P,Q)DEC FIXED(2);
        DCL(K,C,C1) DEC FIXED(4);
        CLASST : PROC(A,B,C);
        DCL (A,B,C,D,E)DEC FIXED (2);
          D=A;  E=C;
          A=MIN(A,B,C);  C=MAX(D,B,C);
          IF D¬=A & D¬=C THEN B=D;
          IF E¬=A&E¬=C THEN B=E;
          END  CLASST;
    /* CALCULS */
        C=0;
        K=0;
        RR=C;
        DO I=1 TO 22;
          DO J=I+1 TO 23;
            DO L=J+1 TO 24;
              IF RR(I,J,L)=0 THEN
                DO; C=C+1;
                  DO P=1 TO 24;
                    I1=PD(P,I); J1=PD(P,J); L1=PD(P,L);
                    DO Q=1 TO 24;
                      I2=DP(Q,I1); J2=DP(Q,J1);  L2=DP(Q,L1);
                      CALL CLASST (I2,J2,L2);
                      IF RR(I2,J2,L2)=C THEN
                        DO; K=K+1;
                              RR(I2,J2,L2)=C;
                              PP(I2,J2,L2)=P;
                              QQ(I2,J2,L2)=Q;
                        END;
                    END;
                  END;
                END;
            END;
          END;
        END;
    /* VERIFICATION */
        IF K¬=2024 THEN
          PUT PAGE EDIT('TILT',K) (A,F(5));
        DO I = 1 TO 22;
          PUT SKIP;
          DO J=2 TO 23;
            PUT SKIP;
            DO L = 3 TO 24 ;
              PUT EDIT (RR(I,J,L))(F(4));
            END;
          END;
```

```
P:PROC OPTIONS (MAIN);

EST

1         END;
          PUT PAGE;

      /* RESULTATS */
          PUT EDIT ('TRIPLETS EQUIVALENTS DE DCP DE UN(4*4)') (A);
          PUT SKIP;
          DO C1=1 TO C;
1           K=0;
1           PUT SKIP(2); PUT  EDIT(C1)(F(3)) ; PUT SKIP;
1           DO I=1 TO 22;
2             DO J=I+1 TO 23;
3               DO L=J+1 TO 24;
4                 IF RR(I,J,L)=C1 THEN
4                   DO; K=K+1;
5                     PUT EDIT(K,PP(I,J,L),I,J,L,QQ(I,J,L))
                            (F(5),F(4),F(7),2 F(3),F(7))SKIP;
5                   END;
4               END;
3             END;
2           END;
1     END A3DCP;
```

TRIPLETS EQUIVALENTS DE DCP DE UN(4*4)

1

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1) | [1] | [2] | [3] | (1) |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 4 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 2 | 9 | 7 |
| 4 | 1 | 1 | 2 | 21 | 8 |
| 5 | 5 | 1 | 3 | 4 | 4 |
| 6 | 1 | 1 | 3 | 5 | 17 |
| 7 | 5 | 1 | 3 | 9 | 13 |
| 8 | 2 | 1 | 4 | 5 | 23 |
| 9 | 5 | 1 | 4 | 21 | 21 |
| 10 | 2 | 1 | 5 | 9 | 18 |
| 11 | 1 | 1 | 5 | 21 | 24 |
| 12 | 5 | 1 | 9 | 21 | 12 |
| 13 | 2 | 2 | 6 | 7 | 17 |
| 14 | 1 | 2 | 6 | 8 | 23 |
| 15 | 1 | 2 | 6 | 13 | 18 |
| 16 | 2 | 2 | 6 | 17 | 24 |
| 17 | 5 | 3 | 16 | 24 | 22 |
| 18 | 1 | 3 | 20 | 24 | 10 |
| 19 | 1 | 3 | 22 | 24 | 19 |
| 20 | 5 | 3 | 23 | 24 | 11 |
| 21 | 5 | 4 | 10 | 11 | 7 |
| 22 | 2 | 4 | 10 | 12 | 13 |
| 23 | 2 | 4 | 10 | 14 | 12 |
| 24 | 5 | 4 | 10 | 18 | 18 |
| 25 | 2 | 5 | 6 | 7 | 1 |
| 26 | 1 | 5 | 6 | 8 | 2 |
| 27 | 1 | 5 | 6 | 13 | 7 |
| 28 | 2 | 5 | 6 | 17 | 8 |
| 29 | 5 | 6 | 7 | 8 | 6 |
| 30 | 5 | 6 | 7 | 13 | 15 |
| 31 | 5 | 6 | 8 | 17 | 19 |
| 32 | 5 | 6 | 13 | 17 | 10 |
| 33 | 5 | 7 | 11 | 19 | 24 |
| 34 | 5 | 7 | 18 | 19 | 8 |
| 35 | 2 | 7 | 19 | 20 | 19 |
| 36 | 2 | 7 | 19 | 22 | 10 |
| 37 | 1 | 8 | 12 | 15 | 12 |
| 38 | 1 | 8 | 14 | 15 | 13 |
| 39 | 5 | 8 | 15 | 16 | 9 |
| 40 | 5 | 8 | 15 | 23 | 16 |
| 41 | 5 | 9 | 10 | 11 | 2 |
| 42 | 2 | 9 | 10 | 12 | 4 |
| 43 | 2 | 9 | 10 | 14 | 21 |
| 44 | 5 | 9 | 10 | 18 | 23 |
| 45 | 1 | 10 | 11 | 12 | 3 |
| 46 | 1 | 10 | 11 | 14 | 11 |
| 47 | 1 | 10 | 12 | 18 | 14 |
| 48 | 1 | 10 | 14 | 18 | 22 |
| 49 | 5 | 11 | 17 | 19 | 17 |
| 50 | 1 | 11 | 19 | 20 | 20 |
| 51 | 1 | 11 | 19 | 22 | 16 |
| 52 | 1 | 12 | 13 | 15 | 21 |
| 53 | 2 | 12 | 15 | 16 | 11 |
| 54 | 2 | 12 | 15 | 23 | 22 |
| 55 | 1 | 13 | 14 | 15 | 4 |
| 56 | 5 | 13 | 15 | 16 | 5 |
| 57 | 5 | 13 | 15 | 23 | 20 |
| 58 | 2 | 14 | 15 | 16 | 3 |
| 59 | 2 | 14 | 15 | 23 | 14 |
| 60 | 2 | 16 | 20 | 24 | 16 |
| 61 | 5 | 16 | 21 | 24 | 14 |
| 62 | 2 | 16 | 22 | 24 | 20 |
| 63 | 5 | 17 | 18 | 19 | 1 |
| 64 | 2 | 17 | 19 | 20 | 6 |
| 65 | 2 | 17 | 19 | 22 | 15 |
| 66 | 1 | 18 | 19 | 20 | 5 |
| 67 | 1 | 18 | 19 | 22 | 9 |
| 68 | 1 | 20 | 21 | 24 | 15 |
| 69 | 2 | 20 | 23 | 24 | 9 |
| 70 | 1 | 21 | 22 | 24 | 6 |
| 71 | 5 | 21 | 23 | 24 | 3 |
| 72 | 2 | 22 | 23 | 24 | 5 |

2

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 5 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 3 | 21 | 3 |
| 3 | 4 | 1 | 4 | 9 | 5 |
| 4 | 1 | 2 | 5 | 6 | 2 |
| 5 | 3 | 3 | 21 | 24 | 4 |
| 6 | 4 | 4 | 9 | 10 | 6 |
| 7 | 4 | 6 | 7 | 17 | 3 |
| 8 | 3 | 6 | 8 | 13 | 5 |
| 9 | 4 | 7 | 17 | 19 | 4 |
| 10 | 3 | 8 | 13 | 15 | 6 |
| 11 | 3 | 10 | 11 | 18 | 1 |
| 12 | 1 | 10 | 12 | 14 | 3 |
| 13 | 3 | 11 | 18 | 19 | 2 |
| 14 | 1 | 12 | 14 | 15 | 4 |
| 15 | 4 | 15 | 16 | 23 | 1 |
| 16 | 4 | 16 | 23 | 24 | 2 |
| 17 | 1 | 19 | 20 | 22 | 5 |
| 18 | 1 | 20 | 22 | 24 | 6 |

3

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 6 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 3 | 24 | 3 |
| 3 | 4 | 1 | 4 | 10 | 5 |
| 4 | 1 | 1 | 5 | 6 | 2 |
| 5 | 4 | 1 | 9 | 10 | 6 |
| 6 | 3 | 1 | 21 | 24 | 4 |
| 7 | 4 | 6 | 7 | 19 | 3 |
| 8 | 3 | 6 | 8 | 15 | 5 |
| 9 | 3 | 6 | 13 | 15 | 6 |
| 10 | 4 | 6 | 17 | 19 | 4 |
| 11 | 3 | 10 | 11 | 19 | 1 |
| 12 | 1 | 10 | 12 | 15 | 3 |
| 13 | 1 | 10 | 14 | 15 | 4 |
| 14 | 3 | 10 | 18 | 19 | 2 |
| 15 | 4 | 15 | 16 | 24 | 1 |
| 16 | 4 | 15 | 23 | 24 | 2 |
| 17 | 1 | 19 | 20 | 24 | 5 |
| 18 | 1 | 19 | 22 | 24 | 6 |

4

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 7 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 8 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 2 | 13 | 7 |
| 4 | 1 | 1 | 2 | 17 | 8 |
| 5 | 3 | 1 | 3 | 16 | 14 |
| 6 | 5 | 1 | 3 | 20 | 13 |
| 7 | 5 | 1 | 3 | 22 | 4 |
| 8 | 3 | 1 | 3 | 23 | 3 |
| 9 | 4 | 1 | 4 | 11 | 5 |
| 10 | 6 | 1 | 4 | 12 | 6 |
| 11 | 6 | 1 | 4 | 14 | 19 |
| 12 | 4 | 1 | 4 | 18 | 20 |
| 13 | 1 | 1 | 5 | 7 | 17 |
| 14 | 2 | 1 | 5 | 8 | 23 |
| 15 | 2 | 1 | 5 | 13 | 18 |
| 16 | 1 | 1 | 5 | 17 | 24 |
| 17 | 4 | 1 | 9 | 11 | 9 |
| 18 | 6 | 1 | 9 | 12 | 15 |
| 19 | 6 | 1 | 9 | 14 | 10 |
| 20 | 4 | 1 | 9 | 18 | 16 |
| 21 | 3 | 1 | 16 | 21 | 22 |
| 22 | 5 | 1 | 20 | 21 | 12 |
| 23 | 5 | 1 | 21 | 22 | 21 |
| 24 | 3 | 1 | 21 | 23 | 11 |
| 25 | 2 | 2 | 3 | 6 | 17 |
| 26 | 5 | 2 | 3 | 24 | 11 |
| 27 | 1 | 2 | 4 | 6 | 23 |
| 28 | 6 | 2 | 4 | 10 | 9 |
| 29 | 1 | 2 | 6 | 9 | 18 |
| 30 | 2 | 2 | 6 | 21 | 24 |
| 31 | 6 | 2 | 7 | 19 | 22 |
| 32 | 5 | 2 | 8 | 15 | 16 |
| 33 | 6 | 2 | 9 | 10 | 5 |
| 34 | 5 | 2 | 13 | 15 | 20 |
| 35 | 6 | 2 | 17 | 19 | 14 |
| 36 | 5 | 2 | 21 | 24 | 3 |
| 37 | 4 | 3 | 4 | 10 | 15 |
| 38 | 3 | 3 | 4 | 24 | 21 |
| 39 | 2 | 3 | 5 | 6 | 1 |
| 40 | 5 | 3 | 5 | 24 | 22 |
| 41 | 4 | 3 | 9 | 10 | 6 |
| 42 | 3 | 3 | 9 | 24 | 12 |
| 43 | 4 | 3 | 15 | 16 | 8 |
| 44 | 4 | 3 | 15 | 23 | 24 |
| 45 | 2 | 3 | 19 | 20 | 19 |
| 46 | 2 | 3 | 19 | 22 | 10 |
| 47 | 1 | 4 | 5 | 6 | 2 |
| 48 | 6 | 4 | 5 | 10 | 16 |
| 49 | 4 | 4 | 10 | 21 | 10 |
| 50 | 3 | 4 | 11 | 19 | 18 |
| 51 | 1 | 4 | 12 | 15 | 12 |
| 52 | 1 | 4 | 14 | 15 | 13 |
| 53 | 3 | 4 | 18 | 19 | 7 |
| 54 | 3 | 4 | 21 | 24 | 4 |
| 55 | 1 | 5 | 6 | 9 | 7 |
| 56 | 2 | 5 | 6 | 21 | 8 |
| 57 | 6 | 5 | 7 | 19 | 11 |
| 58 | 5 | 5 | 8 | 15 | 9 |
| 59 | 6 | 5 | 9 | 10 | 20 |
| 60 | 5 | 5 | 13 | 15 | 5 |
| 61 | 6 | 5 | 17 | 19 | 3 |
| 62 | 5 | 5 | 21 | 24 | 14 |
| 63 | 4 | 6 | 7 | 11 | 14 |
| 64 | 4 | 6 | 7 | 18 | 3 |
| 65 | 6 | 6 | 7 | 20 | 4 |
| 66 | 6 | 6 | 7 | 22 | 13 |
| 67 | 5 | 6 | 8 | 12 | 19 |
| 68 | 5 | 6 | 8 | 14 | 6 |
| 69 | 3 | 6 | 8 | 16 | 5 |
| 70 | 3 | 6 | 8 | 23 | 20 |
| 71 | 4 | 6 | 11 | 17 | 22 |
| 72 | 5 | 6 | 12 | 13 | 10 |
| 73 | 5 | 6 | 13 | 14 | 15 |
| 74 | 3 | 6 | 13 | 16 | 9 |
| 75 | 3 | 6 | 13 | 23 | 16 |
| 76 | 4 | 6 | 17 | 18 | 11 |
| 77 | 6 | 6 | 17 | 20 | 21 |
| 78 | 6 | 6 | 17 | 22 | 12 |
| 79 | 3 | 7 | 8 | 15 | 15 |
| 80 | 4 | 7 | 8 | 19 | 21 |
| 81 | 3 | 7 | 10 | 11 | 8 |
| 82 | 3 | 7 | 10 | 18 | 24 |
| 83 | 3 | 7 | 13 | 15 | 6 |
| 84 | 4 | 7 | 13 | 19 | 12 |
| 85 | 1 | 7 | 20 | 24 | 10 |
| 86 | 1 | 7 | 22 | 24 | 19 |
| 87 | 2 | 8 | 10 | 12 | 13 |
| 88 | 2 | 8 | 10 | 14 | 12 |
| 89 | 3 | 8 | 15 | 17 | 10 |
| 90 | 4 | 8 | 16 | 24 | 18 |
| 91 | 4 | 8 | 17 | 19 | 4 |
| 92 | 4 | 8 | 23 | 24 | 7 |
| 93 | 4 | 9 | 10 | 21 | 19 |
| 94 | 3 | 9 | 11 | 19 | 23 |
| 95 | 1 | 9 | 12 | 15 | 21 |
| 96 | 1 | 9 | 14 | 15 | 4 |
| 97 | 3 | 9 | 18 | 19 | 2 |
| 98 | 3 | 9 | 21 | 24 | 13 |
| 99 | 3 | 10 | 11 | 17 | 1 |
| 100 | 5 | 10 | 11 | 20 | 2 |
| 101 | 5 | 10 | 11 | 22 | 7 |
| 102 | 2 | 10 | 12 | 13 | 4 |
| 103 | 1 | 10 | 12 | 16 | 3 |
| 104 | 1 | 10 | 12 | 23 | 14 |
| 105 | 2 | 10 | 13 | 14 | 21 |
| 106 | 1 | 10 | 14 | 16 | 11 |
| 107 | 1 | 10 | 14 | 23 | 22 |
| 108 | 3 | 10 | 17 | 18 | 17 |
| 109 | 5 | 10 | 18 | 20 | 23 |
| 110 | 5 | 10 | 18 | 22 | 18 |
| 111 | 2 | 11 | 12 | 15 | 11 |
| 112 | 5 | 11 | 12 | 19 | 17 |
| 113 | 2 | 11 | 14 | 15 | 3 |
| 114 | 5 | 11 | 14 | 19 | 24 |
| 115 | 2 | 11 | 20 | 24 | 16 |
| 116 | 2 | 11 | 22 | 24 | 20 |
| 117 | 2 | 12 | 15 | 18 | 22 |
| 118 | 6 | 12 | 16 | 24 | 24 |
| 119 | 5 | 12 | 18 | 19 | 1 |
| 120 | 6 | 12 | 23 | 24 | 8 |
| 121 | 3 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| 122 | 4 | 13 | 16 | 24 | 23 |
| 123 | 4 | 13 | 17 | 19 | 13 |
| 124 | 4 | 13 | 23 | 24 | 2 |
| 125 | 2 | 14 | 15 | 18 | 14 |
| 126 | 6 | 14 | 16 | 24 | 17 |
| 127 | 5 | 14 | 18 | 19 | 8 |
| 128 | 6 | 14 | 23 | 24 | 1 |
| 129 | 6 | 15 | 16 | 20 | 7 |
| 130 | 4 | 15 | 16 | 21 | 1 |
| 131 | 6 | 15 | 16 | 22 | 2 |
| 132 | 6 | 15 | 20 | 23 | 18 |
| 133 | 4 | 15 | 21 | 23 | 17 |
| 134 | 6 | 15 | 22 | 23 | 23 |
| 135 | 1 | 16 | 19 | 20 | 20 |
| 136 | 1 | 16 | 19 | 22 | 16 |
| 137 | 1 | 17 | 20 | 24 | 15 |
| 138 | 1 | 17 | 22 | 24 | 6 |
| 139 | 2 | 18 | 20 | 24 | 9 |
| 140 | 2 | 18 | 22 | 24 | 5 |
| 141 | 2 | 19 | 20 | 21 | 6 |
| 142 | 1 | 19 | 20 | 23 | 5 |
| 143 | 2 | 19 | 21 | 22 | 15 |
| 144 | 1 | 19 | 22 | 23 | 9 |

5

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 10 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 24 | 2 |
| 3 | 5 | 1 | 3 | 6 | 4 |
| 4 | 3 | 1 | 3 | 10 | 3 |
| 5 | 6 | 1 | 4 | 6 | 6 |
| 6 | 4 | 1 | 4 | 24 | 5 |
| 7 | 1 | 1 | 5 | 10 | 17 |
| 8 | 2 | 1 | 5 | 24 | 18 |
| 9 | 6 | 1 | 6 | 7 | 4 |
| 10 | 5 | 1 | 6 | 8 | 6 |
| 11 | 6 | 1 | 6 | 9 | 10 |
| 12 | 5 | 1 | 6 | 13 | 10 |
| 13 | 6 | 1 | 6 | 17 | 12 |
| 14 | 5 | 1 | 6 | 21 | 12 |
| 15 | 4 | 1 | 9 | 24 | 9 |
| 16 | 3 | 1 | 10 | 11 | 1 |
| 17 | 1 | 1 | 10 | 12 | 3 |
| 18 | 1 | 1 | 10 | 14 | 11 |
| 19 | 3 | 1 | 10 | 18 | 17 |
| 20 | 3 | 1 | 10 | 21 | 11 |
| 21 | 4 | 1 | 16 | 24 | 18 |
| 22 | 2 | 1 | 20 | 24 | 9 |
| 23 | 2 | 1 | 22 | 24 | 5 |
| 24 | 4 | 1 | 23 | 24 | 2 |
| 25 | 2 | 2 | 6 | 15 | 17 |
| 26 | 1 | 2 | 6 | 19 | 18 |
| 27 | 3 | 3 | 15 | 24 | 12 |
| 28 | 5 | 3 | 19 | 24 | 11 |
| 29 | 6 | 4 | 10 | 15 | 9 |
| 30 | 4 | 4 | 10 | 19 | 10 |
| 31 | 2 | 5 | 6 | 15 | 1 |
| 32 | 1 | 5 | 6 | 19 | 2 |
| 33 | 4 | 6 | 7 | 15 | 3 |
| 34 | 3 | 6 | 8 | 19 | 5 |
| 35 | 3 | 6 | 11 | 19 | 18 |
| 36 | 2 | 6 | 12 | 15 | 11 |
| 37 | 3 | 6 | 13 | 19 | 9 |
| 38 | 2 | 6 | 14 | 15 | 3 |
| 39 | 4 | 6 | 15 | 16 | 1 |
| 40 | 4 | 6 | 15 | 17 | 11 |
| 41 | 4 | 6 | 15 | 23 | 17 |
| 42 | 3 | 6 | 18 | 19 | 2 |
| 43 | 1 | 6 | 19 | 20 | 5 |
| 44 | 1 | 6 | 19 | 22 | 9 |
| 45 | 4 | 7 | 10 | 19 | 12 |
| 46 | 6 | 7 | 19 | 24 | 11 |
| 47 | 5 | 8 | 10 | 15 | 9 |
| 48 | 3 | 8 | 15 | 24 | 10 |
| 49 | 6 | 9 | 10 | 15 | 5 |
| 50 | 4 | 9 | 10 | 19 | 6 |
| 51 | 5 | 10 | 11 | 15 | 2 |
| 52 | 2 | 10 | 12 | 19 | 4 |
| 53 | 5 | 10 | 13 | 15 | 5 |
| 54 | 2 | 10 | 14 | 19 | 12 |
| 55 | 6 | 10 | 15 | 16 | 2 |
| 56 | 5 | 10 | 15 | 18 | 18 |
| 57 | 6 | 10 | 15 | 23 | 18 |
| 58 | 4 | 10 | 17 | 19 | 4 |
| 59 | 2 | 10 | 19 | 20 | 6 |
| 60 | 2 | 10 | 19 | 22 | 10 |
| 61 | 5 | 11 | 19 | 24 | 17 |
| 62 | 1 | 12 | 15 | 24 | 12 |
| 63 | 3 | 13 | 15 | 24 | 6 |
| 64 | 1 | 14 | 15 | 24 | 4 |
| 65 | 1 | 15 | 20 | 24 | 10 |
| 66 | 3 | 15 | 21 | 24 | 4 |
| 67 | 1 | 15 | 22 | 24 | 6 |
| 68 | 6 | 16 | 19 | 24 | 17 |
| 69 | 6 | 17 | 19 | 24 | 3 |
| 70 | 5 | 18 | 19 | 24 | 1 |
| 71 | 5 | 19 | 21 | 24 | 3 |
| 72 | 6 | 19 | 23 | 24 | 1 |

6

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 11 | 1 |
| 2 | 7 | 1 | 2 | 16 | 2 |
| 3 | 8 | 1 | 2 | 18 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 2 | 23 | 2 |
| 5 | 5 | 1 | 3 | 7 | 4 |
| 6 | 3 | 1 | 3 | 12 | 3 |
| 7 | 11 | 1 | 3 | 14 | 3 |
| 8 | 9 | 1 | 3 | 17 | 4 |
| 9 | 6 | 1 | 4 | 8 | 6 |
| 10 | 10 | 1 | 4 | 13 | 6 |
| 11 | 12 | 1 | 4 | 20 | 5 |
| 12 | 4 | 1 | 4 | 22 | 5 |
| 13 | 8 | 1 | 5 | 11 | 17 |
| 14 | 2 | 1 | 5 | 16 | 18 |
| 15 | 1 | 1 | 5 | 18 | 17 |
| 16 | 7 | 1 | 5 | 23 | 18 |



BUS LILLE

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 9 | 1 | 7 | 21 | 12 |
| 18 | 10 | 1 | 8 | 9 | 10 |
| 19 | 6 | 1 | 9 | 13 | 10 |
| 20 | 4 | 1 | 9 | 20 | 9 |
| 21 | 12 | 1 | 9 | 22 | 9 |
| 22 | 11 | 1 | 12 | 21 | 11 |
| 23 | 3 | 1 | 14 | 21 | 11 |
| 24 | 5 | 1 | 17 | 21 | 12 |
| 25 | 1 | 2 | 6 | 11 | 18 |
| 26 | 7 | 2 | 6 | 16 | 17 |
| 27 | 8 | 2 | 6 | 18 | 18 |
| 28 | 2 | 2 | 6 | 23 | 17 |
| 29 | 3 | 2 | 10 | 11 | 1 |
| 30 | 11 | 2 | 10 | 18 | 17 |
| 31 | 3 | 2 | 11 | 19 | 18 |
| 32 | 12 | 2 | 15 | 16 | 1 |
| 33 | 4 | 2 | 15 | 23 | 17 |
| 34 | 12 | 2 | 16 | 24 | 18 |
| 35 | 11 | 2 | 18 | 19 | 2 |
| 36 | 4 | 2 | 23 | 24 | 2 |
| 37 | 6 | 3 | 6 | 7 | 4 |
| 38 | 10 | 3 | 6 | 17 | 12 |
| 39 | 6 | 3 | 7 | 19 | 11 |
| 40 | 5 | 3 | 7 | 24 | 11 |
| 41 | 1 | 3 | 10 | 12 | 3 |
| 42 | 8 | 3 | 10 | 14 | 11 |
| 43 | 1 | 3 | 12 | 15 | 12 |
| 44 | 3 | 3 | 12 | 24 | 12 |
| 45 | 8 | 3 | 14 | 15 | 4 |
| 46 | 11 | 3 | 14 | 24 | 12 |
| 47 | 10 | 3 | 17 | 19 | 3 |
| 48 | 9 | 3 | 17 | 24 | 11 |
| 49 | 5 | 4 | 6 | 8 | 6 |
| 50 | 9 | 4 | 6 | 13 | 10 |
| 51 | 6 | 4 | 8 | 10 | 9 |
| 52 | 5 | 4 | 8 | 15 | 9 |
| 53 | 10 | 4 | 10 | 13 | 9 |
| 54 | 12 | 4 | 10 | 20 | 10 |
| 55 | 4 | 4 | 10 | 22 | 10 |
| 56 | 9 | 4 | 13 | 15 | 5 |
| 57 | 7 | 4 | 19 | 20 | 6 |
| 58 | 2 | 4 | 19 | 22 | 10 |
| 59 | 7 | 4 | 20 | 24 | 9 |
| 60 | 2 | 4 | 22 | 24 | 5 |
| 61 | 8 | 5 | 6 | 11 | 2 |
| 62 | 2 | 5 | 6 | 16 | 1 |
| 63 | 1 | 5 | 6 | 18 | 2 |
| 64 | 7 | 5 | 6 | 23 | 1 |
| 65 | 11 | 5 | 10 | 11 | 1 |
| 66 | 3 | 5 | 10 | 18 | 17 |
| 67 | 11 | 5 | 11 | 19 | 18 |
| 68 | 4 | 5 | 15 | 16 | 1 |
| 69 | 12 | 5 | 15 | 23 | 17 |
| 70 | 4 | 5 | 16 | 24 | 18 |
| 71 | 3 | 5 | 18 | 19 | 2 |
| 72 | 12 | 5 | 23 | 24 | 2 |
| 73 | 12 | 6 | 7 | 12 | 3 |
| 74 | 4 | 6 | 7 | 14 | 3 |
| 75 | 10 | 6 | 7 | 21 | 4 |
| 76 | 9 | 6 | 8 | 9 | 6 |
| 77 | 3 | 6 | 8 | 20 | 5 |
| 78 | 11 | 6 | 8 | 22 | 5 |
| 79 | 5 | 6 | 9 | 13 | 10 |
| 80 | 4 | 6 | 12 | 17 | 11 |
| 81 | 11 | 6 | 13 | 20 | 9 |
| 82 | 3 | 6 | 13 | 22 | 9 |
| 83 | 12 | 6 | 14 | 17 | 11 |
| 84 | 6 | 6 | 17 | 21 | 12 |
| 85 | 7 | 7 | 10 | 12 | 4 |
| 86 | 2 | 7 | 10 | 14 | 12 |
| 87 | 7 | 7 | 12 | 15 | 11 |
| 88 | 12 | 7 | 12 | 19 | 12 |
| 89 | 2 | 7 | 14 | 15 | 3 |
| 90 | 4 | 7 | 14 | 19 | 12 |
| 91 | 10 | 7 | 19 | 21 | 11 |
| 92 | 9 | 7 | 21 | 24 | 3 |
| 93 | 10 | 8 | 9 | 10 | 5 |
| 94 | 9 | 8 | 9 | 15 | 9 |
| 95 | 3 | 8 | 15 | 20 | 10 |
| 96 | 11 | 8 | 15 | 22 | 10 |
| 97 | 1 | 8 | 19 | 20 | 5 |
| 98 | 8 | 8 | 19 | 22 | 9 |
| 99 | 1 | 8 | 20 | 24 | 10 |
| 100 | 8 | 8 | 22 | 24 | 6 |
| 101 | 6 | 9 | 10 | 13 | 5 |
| 102 | 4 | 9 | 10 | 20 | 6 |
| 103 | 12 | 9 | 10 | 22 | 6 |
| 104 | 5 | 9 | 13 | 15 | 5 |
| 105 | 2 | 9 | 19 | 20 | 6 |
| 106 | 7 | 9 | 19 | 22 | 10 |
| 107 | 2 | 9 | 20 | 24 | 9 |
| 108 | 7 | 9 | 22 | 24 | 5 |
| 109 | 5 | 10 | 11 | 16 | 2 |
| 110 | 9 | 10 | 11 | 23 | 2 |
| 111 | 2 | 10 | 12 | 17 | 4 |
| 112 | 8 | 10 | 12 | 21 | 3 |
| 113 | 7 | 10 | 14 | 17 | 12 |
| 114 | 1 | 10 | 14 | 21 | 11 |
| 115 | 9 | 10 | 16 | 18 | 18 |
| 116 | 5 | 10 | 18 | 23 | 18 |
| 117 | 6 | 11 | 15 | 16 | 2 |
| 118 | 10 | 11 | 15 | 23 | 18 |
| 119 | 5 | 11 | 16 | 19 | 17 |
| 120 | 6 | 11 | 16 | 24 | 17 |
| 121 | 9 | 11 | 19 | 23 | 17 |
| 122 | 10 | 11 | 23 | 24 | 1 |
| 123 | 2 | 12 | 15 | 17 | 11 |
| 124 | 8 | 12 | 15 | 21 | 12 |
| 125 | 4 | 12 | 17 | 19 | 4 |
| 126 | 11 | 12 | 21 | 24 | 4 |
| 127 | 11 | 13 | 15 | 20 | 6 |
| 128 | 3 | 13 | 15 | 22 | 6 |
| 129 | 8 | 13 | 19 | 20 | 5 |
| 130 | 1 | 13 | 19 | 22 | 9 |
| 131 | 8 | 13 | 20 | 24 | 10 |
| 132 | 1 | 13 | 22 | 24 | 6 |
| 133 | 7 | 14 | 15 | 17 | 3 |
| 134 | 1 | 14 | 15 | 21 | 4 |
| 135 | 12 | 14 | 17 | 19 | 4 |
| 136 | 3 | 14 | 21 | 24 | 4 |
| 137 | 10 | 15 | 16 | 18 | 2 |
| 138 | 6 | 15 | 18 | 23 | 18 |
| 139 | 9 | 16 | 18 | 19 | 1 |
| 140 | 10 | 16 | 18 | 24 | 17 |
| 141 | 6 | 17 | 19 | 21 | 3 |
| 142 | 5 | 17 | 21 | 24 | 3 |
| 143 | 5 | 18 | 19 | 23 | 1 |
| 144 | 6 | 18 | 22 | 24 | 1 |

7

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 12 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 14 | 8 |
| 3 | 2 | 1 | 2 | 20 | 7 |
| 4 | 2 | 1 | 2 | 22 | 2 |
| 5 | 5 | 1 | 3 | 8 | 4 |
| 6 | 3 | 1 | 3 | 11 | 3 |
| 7 | 5 | 1 | 3 | 13 | 13 |
| 8 | 3 | 1 | 3 | 18 | 14 |
| 9 | 6 | 1 | 4 | 7 | 6 |
| 10 | 4 | 1 | 4 | 16 | 20 |
| 11 | 6 | 1 | 4 | 17 | 19 |
| 12 | 4 | 1 | 4 | 23 | 5 |
| 13 | 1 | 1 | 5 | 12 | 17 |
| 14 | 1 | 1 | 5 | 14 | 24 |
| 15 | 2 | 1 | 5 | 20 | 18 |
| 16 | 2 | 1 | 5 | 22 | 23 |
| 17 | 6 | 1 | 7 | 9 | 15 |
| 18 | 5 | 1 | 8 | 21 | 21 |
| 19 | 4 | 1 | 9 | 16 | 16 |
| 20 | 6 | 1 | 9 | 17 | 10 |
| 21 | 4 | 1 | 9 | 23 | 9 |
| 22 | 3 | 1 | 11 | 21 | 11 |
| 23 | 5 | 1 | 13 | 21 | 12 |
| 24 | 3 | 1 | 18 | 21 | 22 |
| 25 | 2 | 2 | 6 | 12 | 24 |
| 26 | 2 | 2 | 6 | 14 | 17 |
| 27 | 1 | 2 | 6 | 20 | 23 |
| 28 | 1 | 2 | 6 | 22 | 18 |
| 29 | 1 | 2 | 10 | 12 | 3 |
| 30 | 1 | 2 | 10 | 14 | 11 |
| 31 | 2 | 2 | 12 | 15 | 22 |
| 32 | 2 | 2 | 14 | 15 | 14 |
| 33 | 1 | 2 | 19 | 20 | 20 |
| 34 | 1 | 2 | 19 | 22 | 16 |
| 35 | 2 | 2 | 20 | 24 | 9 |
| 36 | 2 | 2 | 22 | 24 | 5 |
| 37 | 5 | 3 | 6 | 8 | 6 |
| 38 | 5 | 3 | 6 | 13 | 15 |
| 39 | 3 | 3 | 8 | 15 | 10 |
| 40 | 3 | 3 | 8 | 24 | 12 |
| 41 | 3 | 3 | 10 | 11 | 1 |
| 42 | 3 | 3 | 10 | 18 | 17 |
| 43 | 5 | 3 | 11 | 19 | 24 |
| 44 | 5 | 3 | 11 | 24 | 22 |
| 45 | 3 | 3 | 13 | 15 | 19 |
| 46 | 3 | 3 | 13 | 24 | 21 |
| 47 | 5 | 3 | 18 | 19 | 8 |
| 48 | 5 | 3 | 18 | 24 | 11 |
| 49 | 6 | 4 | 6 | 7 | 4 |
| 50 | 6 | 4 | 6 | 17 | 21 |
| 51 | 4 | 4 | 7 | 10 | 10 |
| 52 | 4 | 4 | 7 | 19 | 12 |
| 53 | 6 | 4 | 10 | 16 | 9 |
| 54 | 4 | 4 | 10 | 17 | 15 |
| 55 | 6 | 4 | 10 | 23 | 16 |
| 56 | 6 | 4 | 15 | 16 | 7 |
| 57 | 6 | 4 | 15 | 23 | 18 |
| 58 | 4 | 4 | 16 | 24 | 23 |
| 59 | 4 | 4 | 17 | 19 | 13 |
| 60 | 4 | 4 | 23 | 24 | 2 |
| 61 | 2 | 5 | 6 | 12 | 8 |
| 62 | 2 | 5 | 6 | 14 | 1 |
| 63 | 1 | 5 | 6 | 20 | 2 |
| 64 | 1 | 5 | 6 | 22 | 7 |
| 65 | 1 | 5 | 10 | 12 | 14 |
| 66 | 1 | 5 | 10 | 14 | 22 |
| 67 | 2 | 5 | 12 | 15 | 11 |
| 68 | 2 | 5 | 14 | 15 | 3 |
| 69 | 1 | 5 | 19 | 20 | 5 |
| 70 | 1 | 5 | 19 | 22 | 9 |
| 71 | 2 | 5 | 20 | 24 | 16 |
| 72 | 2 | 5 | 22 | 24 | 20 |
| 73 | 6 | 6 | 7 | 9 | 13 |
| 74 | 4 | 6 | 7 | 16 | 3 |
| 75 | 4 | 6 | 7 | 23 | 14 |
| 76 | 3 | 6 | 8 | 11 | 20 |
| 77 | 3 | 6 | 8 | 18 | 5 |
| 78 | 5 | 6 | 8 | 21 | 19 |
| 79 | 6 | 6 | 9 | 17 | 12 |
| 80 | 3 | 6 | 11 | 13 | 16 |
| 81 | 3 | 6 | 13 | 18 | 9 |
| 82 | 5 | 6 | 13 | 21 | 10 |
| 83 | 4 | 6 | 16 | 17 | 11 |
| 84 | 4 | 6 | 17 | 23 | 22 |
| 85 | 4 | 7 | 9 | 10 | 19 |
| 86 | 4 | 7 | 9 | 19 | 21 |
| 87 | 4 | 7 | 15 | 16 | 1 |
| 88 | 4 | 7 | 15 | 23 | 17 |
| 89 | 6 | 7 | 16 | 19 | 22 |
| 90 | 6 | 7 | 16 | 24 | 24 |
| 91 | 6 | 7 | 19 | 23 | 11 |
| 92 | 6 | 7 | 23 | 24 | 8 |
| 93 | 5 | 8 | 10 | 11 | 7 |
| 94 | 5 | 8 | 10 | 18 | 18 |
| 95 | 5 | 8 | 11 | 15 | 9 |
| 96 | 3 | 8 | 11 | 19 | 23 |
| 97 | 5 | 8 | 15 | 18 | 16 |
| 98 | 3 | 8 | 15 | 21 | 15 |
| 99 | 3 | 8 | 18 | 19 | 2 |
| 100 | 3 | 8 | 21 | 24 | 13 |
| 101 | 6 | 9 | 10 | 16 | 5 |
| 102 | 4 | 9 | 10 | 17 | 6 |
| 103 | 6 | 9 | 10 | 23 | 20 |
| 104 | 6 | 9 | 15 | 16 | 2 |
| 105 | 6 | 9 | 15 | 23 | 23 |
| 106 | 4 | 9 | 16 | 24 | 18 |
| 107 | 4 | 9 | 17 | 19 | 4 |
| 108 | 4 | 9 | 23 | 24 | 7 |
| 109 | 5 | 10 | 11 | 13 | 2 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 110 | 3 | 10 | 11 | 21 | 8 |
| 111 | 2 | 10 | 12 | 20 | 4 |
| 112 | 2 | 10 | 12 | 22 | 13 |
| 113 | 5 | 10 | 13 | 18 | 23 |
| 114 | 2 | 10 | 14 | 20 | 21 |
| 115 | 2 | 10 | 14 | 22 | 12 |
| 116 | 3 | 10 | 18 | 21 | 24 |
| 117 | 5 | 11 | 13 | 15 | 5 |
| 118 | 3 | 11 | 13 | 19 | 18 |
| 119 | 5 | 11 | 19 | 21 | 17 |
| 120 | 5 | 11 | 21 | 24 | 14 |
| 121 | 1 | 12 | 15 | 20 | 12 |
| 122 | 1 | 12 | 15 | 22 | 21 |
| 123 | 2 | 12 | 19 | 20 | 6 |
| 124 | 2 | 12 | 19 | 22 | 15 |
| 125 | 1 | 12 | 20 | 24 | 10 |
| 126 | 1 | 12 | 22 | 24 | 19 |
| 127 | 5 | 13 | 15 | 18 | 20 |
| 128 | 3 | 13 | 15 | 21 | 6 |
| 129 | 3 | 13 | 18 | 19 | 7 |
| 130 | 3 | 13 | 21 | 24 | 4 |
| 131 | 1 | 14 | 15 | 20 | 13 |
| 132 | 1 | 14 | 15 | 22 | 4 |
| 133 | 2 | 14 | 19 | 20 | 19 |
| 134 | 2 | 14 | 19 | 22 | 10 |
| 135 | 1 | 14 | 20 | 24 | 15 |
| 136 | 1 | 14 | 22 | 24 | 6 |
| 137 | 4 | 15 | 16 | 17 | 8 |
| 138 | 4 | 15 | 17 | 23 | 24 |
| 139 | 6 | 16 | 17 | 19 | 14 |
| 140 | 6 | 16 | 17 | 24 | 17 |
| 141 | 6 | 17 | 19 | 23 | 3 |
| 142 | 6 | 17 | 23 | 24 | 1 |
| 143 | 5 | 18 | 19 | 21 | 1 |
| 144 | 5 | 18 | 21 | 24 | 3 |

8

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 15 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 19 | 2 |
| 3 | 5 | 1 | 3 | 15 | 4 |
| 4 | 3 | 1 | 3 | 19 | 3 |
| 5 | 4 | 1 | 4 | 15 | 5 |
| 6 | 6 | 1 | 4 | 19 | 6 |
| 7 | 1 | 1 | 5 | 15 | 17 |
| 8 | 2 | 1 | 5 | 19 | 18 |
| 9 | 4 | 1 | 7 | 19 | 12 |
| 10 | 3 | 1 | 8 | 15 | 10 |
| 11 | 4 | 1 | 9 | 15 | 9 |
| 12 | 6 | 1 | 9 | 19 | 10 |
| 13 | 5 | 1 | 11 | 19 | 17 |
| 14 | 2 | 1 | 12 | 15 | 11 |
| 15 | 3 | 1 | 13 | 15 | 6 |
| 16 | 2 | 1 | 14 | 15 | 3 |
| 17 | 6 | 1 | 15 | 16 | 2 |
| 18 | 5 | 1 | 15 | 21 | 12 |
| 19 | 6 | 1 | 15 | 23 | 18 |
| 20 | 4 | 1 | 17 | 19 | 4 |
| 21 | 5 | 1 | 18 | 19 | 1 |
| 22 | 1 | 1 | 19 | 20 | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 3 | 1 | 19 | 21 | 11 |
| 24 | 1 | 1 | 19 | 22 | 9 |
| 25 | 2 | 2 | 6 | 10 | 17 |
| 26 | 1 | 2 | 6 | 24 | 18 |
| 27 | 3 | 3 | 6 | 24 | 12 |
| 28 | 5 | 3 | 10 | 24 | 11 |
| 29 | 4 | 4 | 6 | 10 | 10 |
| 30 | 6 | 4 | 10 | 24 | 9 |
| 31 | 2 | 5 | 6 | 10 | 1 |
| 32 | 1 | 5 | 6 | 24 | 2 |
| 33 | 6 | 6 | 7 | 10 | 4 |
| 34 | 4 | 6 | 7 | 24 | 3 |
| 35 | 3 | 6 | 8 | 10 | 5 |
| 36 | 5 | 6 | 8 | 24 | 6 |
| 37 | 4 | 6 | 9 | 10 | 6 |
| 38 | 5 | 6 | 10 | 11 | 2 |
| 39 | 1 | 6 | 10 | 12 | 3 |
| 40 | 3 | 6 | 10 | 13 | 9 |
| 41 | 1 | 6 | 10 | 14 | 11 |
| 42 | 6 | 6 | 10 | 17 | 12 |
| 43 | 5 | 6 | 10 | 18 | 18 |
| 44 | 5 | 6 | 13 | 24 | 10 |
| 45 | 6 | 6 | 16 | 24 | 17 |
| 46 | 4 | 6 | 17 | 24 | 11 |
| 47 | 2 | 6 | 20 | 24 | 9 |
| 48 | 3 | 6 | 21 | 24 | 4 |
| 49 | 2 | 6 | 22 | 24 | 5 |
| 50 | 6 | 6 | 23 | 24 | 1 |
| 51 | 6 | 7 | 15 | 19 | 11 |
| 52 | 5 | 8 | 15 | 19 | 9 |
| 53 | 6 | 9 | 10 | 24 | 5 |
| 54 | 3 | 10 | 11 | 24 | 1 |
| 55 | 2 | 10 | 12 | 24 | 4 |
| 56 | 2 | 10 | 14 | 24 | 12 |
| 57 | 4 | 10 | 16 | 24 | 18 |
| 58 | 3 | 10 | 18 | 24 | 17 |
| 59 | 1 | 10 | 20 | 24 | 10 |
| 60 | 5 | 10 | 21 | 24 | 3 |
| 61 | 1 | 10 | 22 | 24 | 6 |
| 62 | 4 | 10 | 23 | 24 | 2 |
| 63 | 3 | 11 | 15 | 19 | 18 |
| 64 | 1 | 12 | 15 | 19 | 12 |
| 65 | 5 | 13 | 15 | 19 | 5 |
| 66 | 1 | 14 | 15 | 19 | 4 |
| 67 | 4 | 15 | 16 | 19 | 1 |
| 68 | 6 | 15 | 17 | 19 | 3 |
| 69 | 3 | 15 | 18 | 19 | 2 |
| 70 | 2 | 15 | 19 | 20 | 6 |
| 71 | 2 | 15 | 19 | 22 | 10 |
| 72 | 4 | 15 | 19 | 23 | 17 |

9

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 6 | 10 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 6 | 15 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 6 | 19 | 2 |
| 4 | 2 | 1 | 6 | 24 | 2 |
| 5 | 1 | 1 | 10 | 15 | 3 |
| 6 | 3 | 1 | 10 | 19 | 1 |
| 7 | 3 | 1 | 10 | 24 | 3 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 3 | 1 | 15 | 24 | 4 |
| 9 | 2 | 1 | 19 | 24 | 5 |
| 10 | 2 | 6 | 10 | 15 | 3 |
| 11 | 3 | 6 | 10 | 19 | 2 |
| 12 | 3 | 6 | 15 | 19 | 5 |
| 13 | 3 | 6 | 15 | 24 | 6 |
| 14 | 1 | 6 | 19 | 24 | 5 |
| 15 | 2 | 10 | 15 | 19 | 4 |
| 16 | 1 | 10 | 15 | 24 | 4 |
| 17 | 2 | 10 | 19 | 24 | 6 |
| 18 | 1 | 15 | 19 | 24 | 6 |

10

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 6 | 11 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 6 | 16 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 6 | 18 | 2 |
| 4 | 2 | 1 | 6 | 23 | 2 |
| 5 | 5 | 1 | 7 | 24 | 4 |
| 6 | 6 | 1 | 8 | 10 | 6 |
| 7 | 6 | 1 | 10 | 13 | 5 |
| 8 | 4 | 1 | 10 | 20 | 6 |
| 9 | 4 | 1 | 10 | 22 | 5 |
| 10 | 3 | 1 | 12 | 24 | 3 |
| 11 | 3 | 1 | 14 | 24 | 4 |
| 12 | 5 | 1 | 17 | 24 | 3 |
| 13 | 3 | 2 | 10 | 19 | 1 |
| 14 | 4 | 2 | 15 | 24 | 2 |
| 15 | 6 | 3 | 6 | 19 | 4 |
| 16 | 1 | 3 | 10 | 15 | 3 |
| 17 | 5 | 4 | 6 | 15 | 6 |
| 18 | 2 | 4 | 19 | 24 | 5 |
| 19 | 3 | 5 | 10 | 19 | 2 |
| 20 | 4 | 5 | 15 | 24 | 1 |
| 21 | 5 | 6 | 9 | 15 | 5 |
| 22 | 4 | 6 | 12 | 19 | 4 |
| 23 | 4 | 6 | 14 | 19 | 3 |
| 24 | 3 | 6 | 15 | 20 | 5 |
| 25 | 3 | 6 | 15 | 22 | 6 |
| 26 | 6 | 6 | 19 | 21 | 3 |
| 27 | 2 | 7 | 10 | 15 | 3 |
| 28 | 1 | 8 | 19 | 24 | 5 |
| 29 | 2 | 9 | 19 | 24 | 6 |
| 30 | 2 | 10 | 15 | 17 | 4 |
| 31 | 1 | 10 | 15 | 21 | 4 |
| 32 | 5 | 10 | 16 | 19 | 2 |
| 33 | 5 | 10 | 19 | 23 | 1 |
| 34 | 6 | 11 | 15 | 24 | 2 |
| 35 | 1 | 13 | 19 | 24 | 6 |
| 36 | 6 | 15 | 18 | 24 | 1 |

11

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 6 | 12 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 6 | 14 | 8 |
| 3 | 1 | 1 | 6 | 20 | 2 |
| 4 | 1 | 1 | 6 | 22 | 7 |
| 5 | 4 | 1 | 7 | 10 | 10 |
| 6 | 3 | 1 | 8 | 24 | 12 |
| 7 | 4 | 1 | 10 | 16 | 16 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 4 | 1 | 10 | 17 | 6 |
| 9 | 4 | 1 | 10 | 23 | 5 |
| 10 | 3 | 1 | 11 | 24 | 3 |
| 11 | 3 | 1 | 13 | 24 | 4 |
| 12 | 3 | 1 | 18 | 24 | 14 |
| 13 | 1 | 2 | 10 | 15 | 3 |
| 14 | 1 | 2 | 19 | 24 | 16 |
| 15 | 3 | 3 | 6 | 15 | 10 |
| 16 | 3 | 3 | 10 | 19 | 1 |
| 17 | 4 | 4 | 6 | 19 | 12 |
| 18 | 4 | 4 | 15 | 24 | 2 |
| 19 | 1 | 5 | 10 | 15 | 14 |
| 20 | 1 | 5 | 19 | 24 | 5 |
| 21 | 4 | 6 | 9 | 19 | 4 |
| 22 | 3 | 6 | 11 | 15 | 16 |
| 23 | 3 | 6 | 15 | 18 | 5 |
| 24 | 3 | 6 | 15 | 21 | 6 |
| 25 | 4 | 6 | 16 | 19 | 3 |
| 26 | 4 | 6 | 19 | 23 | 14 |
| 27 | 4 | 7 | 15 | 24 | 1 |
| 28 | 3 | 8 | 10 | 19 | 2 |
| 29 | 4 | 9 | 15 | 24 | 7 |
| 30 | 3 | 10 | 13 | 19 | 7 |
| 31 | 1 | 10 | 15 | 20 | 12 |
| 32 | 1 | 10 | 15 | 22 | 4 |
| 33 | 3 | 10 | 19 | 21 | 8 |
| 34 | 1 | 12 | 19 | 24 | 10 |
| 35 | 1 | 14 | 19 | 24 | 6 |
| 36 | 4 | 15 | 17 | 24 | 8 |

12

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 7 | 8 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 7 | 13 | 17 |
| 3 | 1 | 1 | 8 | 17 | 24 |
| 4 | 4 | 1 | 11 | 12 | 5 |
| 5 | 4 | 1 | 11 | 14 | 9 |
| 6 | 4 | 1 | 12 | 18 | 16 |
| 7 | 1 | 1 | 13 | 17 | 8 |
| 8 | 4 | 1 | 14 | 18 | 20 |
| 9 | 3 | 1 | 16 | 20 | 14 |
| 10 | 3 | 1 | 16 | 22 | 22 |
| 11 | 3 | 1 | 20 | 23 | 11 |
| 12 | 3 | 1 | 22 | 23 | 3 |
| 13 | 4 | 2 | 3 | 10 | 6 |
| 14 | 3 | 2 | 4 | 24 | 4 |
| 15 | 3 | 2 | 7 | 15 | 15 |
| 16 | 4 | 2 | 8 | 19 | 21 |
| 17 | 3 | 2 | 9 | 24 | 12 |
| 18 | 4 | 2 | 10 | 21 | 10 |
| 19 | 4 | 2 | 13 | 19 | 13 |
| 20 | 3 | 2 | 15 | 17 | 19 |
| 21 | 1 | 3 | 4 | 6 | 2 |
| 22 | 4 | 3 | 5 | 10 | 15 |
| 23 | 1 | 3 | 6 | 9 | 18 |
| 24 | 4 | 3 | 15 | 20 | 8 |
| 25 | 4 | 3 | 15 | 22 | 24 |
| 26 | 1 | 3 | 16 | 19 | 20 |
| 27 | 1 | 3 | 19 | 23 | 9 |
| 28 | 3 | 4 | 5 | 24 | 21 |



BIBLIOTHÈQUE LILLE

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 1 | 4 | 6 | 21 | 23 |
| 30 | 1 | 4 | 11 | 15 | 12 |
| 31 | 3 | 4 | 12 | 19 | 18 |
| 32 | 3 | 4 | 14 | 19 | 7 |
| 33 | 1 | 4 | 15 | 18 | 13 |
| 34 | 3 | 5 | 7 | 15 | 6 |
| 35 | 4 | 5 | 8 | 19 | 4 |
| 36 | 3 | 5 | 9 | 24 | 13 |
| 37 | 4 | 5 | 10 | 21 | 19 |
| 38 | 4 | 5 | 13 | 19 | 12 |
| 39 | 3 | 5 | 15 | 17 | 10 |
| 40 | 1 | 6 | 9 | 21 | 7 |
| 41 | 4 | 6 | 11 | 20 | 22 |
| 42 | 4 | 6 | 11 | 22 | 14 |
| 43 | 3 | 6 | 12 | 16 | 9 |
| 44 | 3 | 6 | 12 | 23 | 20 |
| 45 | 3 | 6 | 14 | 16 | 5 |
| 46 | 3 | 6 | 14 | 23 | 16 |
| 47 | 4 | 6 | 18 | 20 | 3 |
| 48 | 4 | 6 | 18 | 22 | 11 |
| 49 | 3 | 7 | 10 | 20 | 24 |
| 50 | 3 | 7 | 10 | 22 | 8 |
| 51 | 1 | 7 | 11 | 24 | 19 |
| 52 | 1 | 7 | 18 | 24 | 10 |
| 53 | 1 | 8 | 10 | 16 | 11 |
| 54 | 1 | 8 | 10 | 23 | 14 |
| 55 | 4 | 8 | 12 | 24 | 7 |
| 56 | 4 | 8 | 14 | 24 | 18 |
| 57 | 1 | 9 | 11 | 15 | 4 |
| 58 | 3 | 9 | 12 | 19 | 2 |
| 59 | 3 | 9 | 14 | 19 | 23 |
| 60 | 1 | 9 | 15 | 18 | 21 |
| 61 | 1 | 10 | 13 | 16 | 3 |
| 62 | 1 | 10 | 13 | 23 | 22 |
| 63 | 3 | 10 | 17 | 20 | 1 |
| 64 | 3 | 10 | 17 | 22 | 17 |
| 65 | 1 | 11 | 17 | 24 | 15 |
| 66 | 4 | 12 | 13 | 24 | 23 |
| 67 | 4 | 13 | 14 | 24 | 2 |
| 68 | 4 | 15 | 20 | 21 | 17 |
| 69 | 4 | 15 | 21 | 22 | 1 |
| 70 | 1 | 16 | 19 | 21 | 16 |
| 71 | 1 | 17 | 18 | 24 | 6 |
| 72 | 1 | 19 | 21 | 23 | 5 |

13

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 7 | 11 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 7 | 18 | 17 |
| 3 | 5 | 1 | 7 | 20 | 13 |
| 4 | 5 | 1 | 7 | 22 | 4 |
| 5 | 6 | 1 | 8 | 12 | 6 |
| 6 | 6 | 1 | 8 | 14 | 19 |
| 7 | 2 | 1 | 8 | 16 | 23 |
| 8 | 2 | 1 | 8 | 23 | 2 |
| 9 | 1 | 1 | 11 | 17 | 8 |
| 10 | 4 | 1 | 11 | 20 | 9 |
| 11 | 4 | 1 | 11 | 22 | 5 |
| 12 | 6 | 1 | 12 | 13 | 15 |
| 13 | 3 | 1 | 12 | 16 | 14 |
| 14 | 3 | 1 | 12 | 23 | 3 |
| 15 | 6 | 1 | 13 | 14 | 10 |
| 16 | 2 | 1 | 13 | 16 | 18 |
| 17 | 2 | 1 | 13 | 23 | 7 |
| 18 | 3 | 1 | 14 | 16 | 22 |
| 19 | 3 | 1 | 14 | 23 | 11 |
| 20 | 1 | 1 | 17 | 18 | 24 |
| 21 | 5 | 1 | 17 | 20 | 12 |
| 22 | 5 | 1 | 17 | 22 | 21 |
| 23 | 4 | 1 | 18 | 20 | 16 |
| 24 | 4 | 1 | 18 | 22 | 20 |
| 25 | 4 | 2 | 3 | 15 | 24 |
| 26 | 6 | 2 | 3 | 19 | 22 |
| 27 | 5 | 2 | 4 | 15 | 16 |
| 28 | 3 | 2 | 4 | 19 | 18 |
| 29 | 3 | 2 | 7 | 10 | 8 |
| 30 | 5 | 2 | 7 | 24 | 11 |
| 31 | 6 | 2 | 8 | 10 | 9 |
| 32 | 4 | 2 | 8 | 24 | 7 |
| 33 | 5 | 2 | 9 | 15 | 20 |
| 34 | 3 | 2 | 9 | 19 | 23 |
| 35 | 6 | 2 | 10 | 13 | 5 |
| 36 | 3 | 2 | 10 | 17 | 1 |
| 37 | 4 | 2 | 13 | 24 | 2 |
| 38 | 4 | 2 | 15 | 21 | 17 |
| 39 | 5 | 2 | 17 | 24 | 3 |
| 40 | 6 | 2 | 19 | 21 | 14 |
| 41 | 1 | 3 | 4 | 15 | 12 |
| 42 | 2 | 3 | 4 | 19 | 10 |
| 43 | 4 | 3 | 5 | 15 | 8 |
| 44 | 6 | 3 | 5 | 19 | 11 |
| 45 | 2 | 3 | 6 | 16 | 1 |
| 46 | 6 | 3 | 6 | 20 | 4 |
| 47 | 6 | 3 | 6 | 22 | 13 |
| 48 | 2 | 3 | 6 | 23 | 17 |
| 49 | 1 | 3 | 9 | 15 | 21 |
| 50 | 2 | 3 | 9 | 19 | 19 |
| 51 | 1 | 3 | 10 | 16 | 3 |
| 52 | 4 | 3 | 10 | 20 | 6 |
| 53 | 4 | 3 | 10 | 22 | 15 |
| 54 | 1 | 3 | 10 | 23 | 14 |
| 55 | 5 | 4 | 5 | 15 | 9 |
| 56 | 3 | 4 | 5 | 19 | 7 |
| 57 | 1 | 4 | 6 | 11 | 23 |
| 58 | 5 | 4 | 6 | 12 | 19 |
| 59 | 5 | 4 | 6 | 14 | 6 |
| 60 | 1 | 4 | 6 | 18 | 2 |
| 61 | 2 | 4 | 11 | 24 | 20 |
| 62 | 3 | 4 | 12 | 24 | 21 |
| 63 | 3 | 4 | 14 | 24 | 4 |
| 64 | 1 | 4 | 15 | 21 | 13 |
| 65 | 2 | 4 | 18 | 24 | 5 |
| 66 | 2 | 4 | 19 | 21 | 15 |
| 67 | 3 | 5 | 7 | 10 | 24 |
| 68 | 5 | 5 | 7 | 24 | 22 |
| 69 | 6 | 5 | 8 | 10 | 16 |
| 70 | 4 | 5 | 8 | 24 | 18 |
| 71 | 5 | 5 | 9 | 15 | 5 |
| 72 | 3 | 5 | 9 | 19 | 2 |
| 73 | 6 | 5 | 10 | 13 | 20 |
| 74 | 3 | 5 | 10 | 17 | 17 |
| 75 | 4 | 5 | 13 | 24 | 23 |
| 76 | 4 | 5 | 15 | 21 | 1 |
| 77 | 5 | 5 | 17 | 24 | 14 |
| 78 | 6 | 5 | 19 | 21 | 3 |
| 79 | 1 | 6 | 9 | 11 | 18 |
| 80 | 5 | 6 | 9 | 12 | 10 |
| 81 | 5 | 6 | 9 | 14 | 15 |
| 82 | 1 | 6 | 9 | 18 | 7 |
| 83 | 4 | 6 | 11 | 12 | 22 |
| 84 | 4 | 6 | 11 | 14 | 14 |
| 85 | 4 | 6 | 12 | 18 | 11 |
| 86 | 4 | 6 | 14 | 18 | 3 |
| 87 | 3 | 6 | 16 | 20 | 5 |
| 88 | 2 | 6 | 16 | 21 | 8 |
| 89 | 3 | 6 | 16 | 22 | 9 |
| 90 | 6 | 6 | 20 | 21 | 21 |
| 91 | 3 | 6 | 20 | 23 | 20 |
| 92 | 6 | 6 | 21 | 22 | 12 |
| 93 | 2 | 6 | 21 | 23 | 24 |
| 94 | 3 | 6 | 22 | 23 | 16 |
| 95 | 2 | 7 | 8 | 10 | 12 |
| 96 | 1 | 7 | 8 | 24 | 10 |
| 97 | 2 | 7 | 10 | 13 | 21 |
| 98 | 2 | 7 | 11 | 15 | 3 |
| 99 | 1 | 7 | 13 | 24 | 19 |
| 100 | 2 | 7 | 15 | 18 | 14 |
| 101 | 3 | 7 | 15 | 20 | 15 |
| 102 | 3 | 7 | 15 | 22 | 6 |
| 103 | 2 | 8 | 10 | 17 | 13 |
| 104 | 4 | 8 | 12 | 19 | 4 |
| 105 | 4 | 8 | 14 | 19 | 21 |
| 106 | 1 | 8 | 16 | 19 | 20 |
| 107 | 1 | 8 | 17 | 24 | 15 |
| 108 | 1 | 8 | 19 | 23 | 5 |
| 109 | 2 | 9 | 11 | 24 | 16 |
| 110 | 3 | 9 | 12 | 24 | 12 |
| 111 | 3 | 9 | 14 | 24 | 13 |
| 112 | 1 | 9 | 15 | 21 | 4 |
| 113 | 2 | 9 | 18 | 24 | 9 |
| 114 | 2 | 9 | 19 | 21 | 6 |
| 115 | 2 | 10 | 13 | 17 | 4 |
| 116 | 5 | 10 | 16 | 20 | 2 |
| 117 | 1 | 10 | 16 | 21 | 11 |
| 118 | 5 | 10 | 16 | 22 | 7 |
| 119 | 4 | 10 | 20 | 21 | 19 |
| 120 | 5 | 10 | 20 | 23 | 23 |
| 121 | 4 | 10 | 21 | 22 | 10 |
| 122 | 1 | 10 | 21 | 23 | 22 |
| 123 | 5 | 10 | 22 | 23 | 18 |
| 124 | 6 | 11 | 12 | 24 | 24 |
| 125 | 6 | 11 | 14 | 24 | 17 |
| 126 | 2 | 11 | 15 | 17 | 11 |
| 127 | 6 | 11 | 15 | 20 | 7 |
| 128 | 6 | 11 | 15 | 22 | 2 |
| 129 | 4 | 12 | 13 | 19 | 13 |
| 130 | 5 | 12 | 16 | 19 | 17 |
| 131 | 6 | 12 | 18 | 24 | 8 |
| 132 | 5 | 12 | 19 | 23 | 1 |
| 133 | 4 | 13 | 14 | 19 | 12 |
| 134 | 1 | 13 | 16 | 19 | 16 |
| 135 | 1 | 13 | 17 | 24 | 6 |
| 136 | 1 | 13 | 19 | 23 | 9 |
| 137 | 5 | 14 | 16 | 19 | 24 |
| 138 | 6 | 14 | 18 | 24 | 1 |
| 139 | 5 | 14 | 19 | 23 | 8 |
| 140 | 2 | 15 | 17 | 18 | 22 |
| 141 | 3 | 15 | 17 | 20 | 10 |
| 142 | 3 | 15 | 17 | 22 | 19 |
| 143 | 6 | 15 | 18 | 20 | 18 |
| 144 | 6 | 15 | 18 | 22 | 23 |

14

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 7 | 12 | 1 |
| 2 | 8 | 1 | 7 | 14 | 8 |
| 3 | 7 | 1 | 8 | 20 | 7 |
| 4 | 2 | 1 | 8 | 22 | 2 |
| 5 | 11 | 1 | 11 | 16 | 3 |
| 6 | 3 | 1 | 11 | 23 | 3 |
| 7 | 8 | 1 | 12 | 17 | 1 |
| 8 | 2 | 1 | 13 | 20 | 7 |
| 9 | 7 | 1 | 13 | 22 | 2 |
| 10 | 1 | 1 | 14 | 17 | 8 |
| 11 | 3 | 1 | 16 | 18 | 14 |
| 12 | 11 | 1 | 18 | 23 | 14 |
| 13 | 1 | 2 | 10 | 16 | 3 |
| 14 | 8 | 2 | 10 | 23 | 3 |
| 15 | 7 | 2 | 11 | 15 | 14 |
| 16 | 7 | 2 | 11 | 24 | 5 |
| 17 | 2 | 2 | 15 | 18 | 14 |
| 18 | 1 | 2 | 16 | 19 | 16 |
| 19 | 2 | 2 | 18 | 24 | 5 |
| 20 | 8 | 2 | 19 | 23 | 16 |
| 21 | 7 | 3 | 6 | 12 | 8 |
| 22 | 2 | 3 | 6 | 14 | 1 |
| 23 | 11 | 3 | 7 | 10 | 1 |
| 24 | 11 | 3 | 7 | 15 | 10 |
| 25 | 3 | 3 | 10 | 17 | 1 |
| 26 | 7 | 3 | 12 | 19 | 6 |
| 27 | 2 | 3 | 14 | 19 | 10 |
| 28 | 3 | 3 | 15 | 17 | 10 |
| 29 | 1 | 4 | 6 | 20 | 2 |
| 30 | 8 | 4 | 6 | 22 | 7 |
| 31 | 11 | 4 | 8 | 19 | 2 |
| 32 | 11 | 4 | 8 | 24 | 12 |
| 33 | 3 | 4 | 13 | 19 | 7 |
| 34 | 3 | 4 | 13 | 24 | 4 |
| 35 | 1 | 4 | 15 | 20 | 12 |
| 36 | 8 | 4 | 15 | 22 | 4 |
| 37 | 8 | 5 | 10 | 16 | 14 |
| 38 | 1 | 5 | 10 | 23 | 14 |
| 39 | 2 | 5 | 11 | 15 | 3 |
| 40 | 2 | 5 | 11 | 24 | 16 |
| 41 | 7 | 5 | 15 | 18 | 3 |
| 42 | 8 | 5 | 16 | 19 | 5 |
| 43 | 7 | 5 | 18 | 24 | 16 |
| 44 | 1 | 5 | 19 | 23 | 5 |
| 45 | 8 | 6 | 9 | 20 | 2 |
| 46 | 1 | 6 | 9 | 22 | 7 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 47 | 11 | 6 | 11 | 16 | 16 |
| 48 | 3 | 6 | 11 | 23 | 16 |
| 49 | 2 | 6 | 12 | 21 | 8 |
| 50 | 7 | 6 | 14 | 21 | 1 |
| 51 | 3 | 6 | 16 | 18 | 5 |
| 52 | 11 | 6 | 18 | 23 | 5 |
| 53 | 3 | 7 | 10 | 21 | 8 |
| 54 | 1 | 7 | 12 | 24 | 10 |
| 55 | 8 | 7 | 14 | 24 | 6 |
| 56 | 3 | 7 | 15 | 21 | 6 |
| 57 | 3 | 8 | 9 | 19 | 2 |
| 58 | 3 | 8 | 9 | 24 | 12 |
| 59 | 7 | 8 | 10 | 20 | 4 |
| 60 | 2 | 8 | 10 | 22 | 12 |
| 61 | 11 | 9 | 13 | 19 | 7 |
| 62 | 11 | 9 | 13 | 24 | 4 |
| 63 | 8 | 9 | 15 | 20 | 12 |
| 64 | 1 | 9 | 15 | 22 | 4 |
| 65 | 2 | 10 | 13 | 20 | 4 |
| 66 | 7 | 10 | 13 | 22 | 12 |
| 67 | 11 | 10 | 17 | 21 | 8 |
| 68 | 8 | 12 | 17 | 24 | 10 |
| 69 | 2 | 12 | 19 | 21 | 6 |
| 70 | 1 | 14 | 17 | 24 | 6 |
| 71 | 7 | 14 | 19 | 21 | 10 |
| 72 | 11 | 15 | 17 | 21 | 6 |

15

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 7 | 15 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 8 | 19 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 11 | 15 | 3 |
| 4 | 5 | 1 | 12 | 19 | 1 |
| 5 | 2 | 1 | 13 | 19 | 7 |
| 6 | 5 | 1 | 14 | 19 | 8 |
| 7 | 1 | 1 | 15 | 17 | 8 |
| 8 | 2 | 1 | 15 | 18 | 14 |
| 9 | 5 | 1 | 15 | 20 | 12 |
| 10 | 5 | 1 | 15 | 22 | 4 |
| 11 | 1 | 1 | 16 | 19 | 16 |
| 12 | 1 | 1 | 19 | 23 | 5 |
| 13 | 5 | 2 | 10 | 24 | 3 |
| 14 | 5 | 2 | 15 | 19 | 16 |
| 15 | 2 | 3 | 6 | 10 | 1 |
| 16 | 2 | 3 | 15 | 19 | 10 |
| 17 | 1 | 4 | 6 | 24 | 2 |
| 18 | 1 | 4 | 15 | 19 | 12 |
| 19 | 5 | 5 | 10 | 24 | 14 |
| 20 | 5 | 5 | 15 | 19 | 5 |
| 21 | 1 | 6 | 9 | 24 | 7 |
| 22 | 1 | 6 | 10 | 16 | 3 |
| 23 | 5 | 6 | 10 | 20 | 2 |
| 24 | 2 | 6 | 10 | 21 | 8 |
| 25 | 5 | 6 | 10 | 22 | 7 |
| 26 | 1 | 6 | 10 | 23 | 14 |
| 27 | 2 | 6 | 11 | 24 | 16 |
| 28 | 5 | 6 | 12 | 24 | 10 |
| 29 | 5 | 6 | 14 | 24 | 6 |
| 30 | 2 | 6 | 18 | 24 | 5 |
| 31 | 1 | 7 | 10 | 24 | 10 |

BIUS LILLE

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 32 | 2 | 8 | 10 | 24 | 12 |
| 33 | 1 | 9 | 15 | 19 | 4 |
| 34 | 2 | 10 | 13 | 24 | 4 |
| 35 | 1 | 10 | 17 | 24 | 6 |
| 36 | 2 | 15 | 19 | 21 | 6 |

16

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 7 | 16 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 7 | 23 | 17 |
| 3 | 2 | 1 | 8 | 11 | 23 |
| 4 | 2 | 1 | 8 | 18 | 2 |
| 5 | 2 | 1 | 11 | 13 | 18 |
| 6 | 5 | 1 | 12 | 20 | 12 |
| 7 | 5 | 1 | 12 | 22 | 21 |
| 8 | 2 | 1 | 13 | 18 | 7 |
| 9 | 5 | 1 | 14 | 20 | 13 |
| 10 | 5 | 1 | 14 | 22 | 4 |
| 11 | 1 | 1 | 16 | 17 | 8 |
| 12 | 1 | 1 | 17 | 23 | 24 |
| 13 | 5 | 2 | 10 | 20 | 23 |
| 14 | 5 | 2 | 10 | 22 | 18 |
| 15 | 5 | 2 | 12 | 19 | 1 |
| 16 | 5 | 2 | 12 | 24 | 3 |
| 17 | 5 | 2 | 14 | 19 | 8 |
| 18 | 5 | 2 | 14 | 24 | 11 |
| 19 | 5 | 2 | 15 | 20 | 20 |
| 20 | 5 | 2 | 15 | 22 | 16 |
| 21 | 2 | 3 | 6 | 11 | 1 |
| 22 | 2 | 3 | 6 | 18 | 17 |
| 23 | 2 | 3 | 8 | 10 | 12 |
| 24 | 2 | 3 | 8 | 19 | 10 |
| 25 | 2 | 3 | 10 | 13 | 21 |
| 26 | 2 | 3 | 11 | 15 | 3 |
| 27 | 2 | 3 | 13 | 19 | 19 |
| 28 | 2 | 3 | 15 | 18 | 14 |
| 29 | 1 | 4 | 6 | 16 | 23 |
| 30 | 1 | 4 | 6 | 23 | 2 |
| 31 | 1 | 4 | 7 | 15 | 12 |
| 32 | 1 | 4 | 7 | 24 | 10 |
| 33 | 1 | 4 | 15 | 17 | 13 |
| 34 | 1 | 4 | 16 | 19 | 20 |
| 35 | 1 | 4 | 17 | 24 | 15 |
| 36 | 1 | 4 | 19 | 23 | 5 |
| 37 | 5 | 5 | 10 | 20 | 2 |
| 38 | 5 | 5 | 10 | 22 | 7 |
| 39 | 5 | 5 | 12 | 19 | 17 |
| 40 | 5 | 5 | 12 | 24 | 14 |
| 41 | 5 | 5 | 14 | 19 | 24 |
| 42 | 5 | 5 | 14 | 24 | 22 |
| 43 | 5 | 5 | 15 | 20 | 5 |
| 44 | 5 | 5 | 15 | 22 | 9 |
| 45 | 1 | 6 | 9 | 16 | 18 |
| 46 | 1 | 6 | 9 | 23 | 7 |
| 47 | 2 | 6 | 11 | 21 | 8 |
| 48 | 5 | 6 | 12 | 20 | 10 |
| 49 | 5 | 6 | 12 | 22 | 19 |
| 50 | 5 | 6 | 14 | 20 | 15 |
| 51 | 5 | 6 | 14 | 22 | 6 |
| 52 | 2 | 6 | 18 | 21 | 24 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 53 | 1 | 7 | 9 | 15 | 21 |
| 54 | 1 | 7 | 9 | 24 | 19 |
| 55 | 1 | 7 | 10 | 16 | 3 |
| 56 | 1 | 7 | 10 | 23 | 14 |
| 57 | 2 | 8 | 10 | 21 | 13 |
| 58 | 2 | 8 | 11 | 24 | 20 |
| 59 | 2 | 8 | 18 | 24 | 5 |
| 60 | 2 | 8 | 19 | 21 | 15 |
| 61 | 1 | 9 | 15 | 17 | 4 |
| 62 | 1 | 9 | 16 | 19 | 16 |
| 63 | 1 | 9 | 17 | 24 | 6 |
| 64 | 1 | 9 | 19 | 23 | 9 |
| 65 | 2 | 10 | 13 | 21 | 4 |
| 66 | 1 | 10 | 16 | 17 | 11 |
| 67 | 1 | 10 | 17 | 23 | 22 |
| 68 | 2 | 11 | 13 | 24 | 16 |
| 69 | 2 | 11 | 15 | 21 | 11 |
| 70 | 2 | 13 | 18 | 24 | 9 |
| 71 | 2 | 13 | 19 | 21 | 6 |
| 72 | 2 | 15 | 18 | 21 | 22 |

17

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 7 | 17 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 8 | 13 | 2 |
| 3 | 4 | 1 | 11 | 18 | 5 |
| 4 | 6 | 1 | 12 | 14 | 6 |
| 5 | 3 | 1 | 16 | 23 | 3 |
| 6 | 5 | 1 | 20 | 22 | 4 |
| 7 | 6 | 2 | 5 | 10 | 5 |
| 8 | 5 | 2 | 5 | 15 | 5 |
| 9 | 6 | 2 | 5 | 19 | 3 |
| 10 | 5 | 2 | 5 | 24 | 3 |
| 11 | 2 | 3 | 6 | 21 | 1 |
| 12 | 4 | 3 | 10 | 21 | 6 |
| 13 | 4 | 3 | 15 | 21 | 1 |
| 14 | 2 | 3 | 19 | 21 | 6 |
| 15 | 1 | 4 | 6 | 9 | 2 |
| 16 | 1 | 4 | 9 | 15 | 4 |
| 17 | 3 | 4 | 9 | 19 | 2 |
| 18 | 3 | 4 | 9 | 24 | 4 |
| 19 | 4 | 6 | 11 | 18 | 3 |
| 20 | 5 | 6 | 12 | 14 | 6 |
| 21 | 3 | 6 | 16 | 23 | 5 |
| 22 | 6 | 6 | 20 | 22 | 4 |
| 23 | 3 | 7 | 10 | 17 | 1 |
| 24 | 3 | 7 | 15 | 17 | 6 |
| 25 | 1 | 7 | 17 | 24 | 6 |
| 26 | 2 | 8 | 10 | 13 | 4 |
| 27 | 4 | 8 | 13 | 19 | 4 |
| 28 | 4 | 8 | 13 | 24 | 2 |
| 29 | 1 | 10 | 16 | 23 | 3 |
| 30 | 5 | 10 | 20 | 22 | 2 |
| 31 | 2 | 11 | 15 | 18 | 3 |
| 32 | 2 | 11 | 18 | 24 | 5 |
| 33 | 5 | 12 | 14 | 19 | 1 |
| 34 | 6 | 12 | 14 | 24 | 1 |
| 35 | 6 | 15 | 20 | 22 | 2 |
| 36 | 1 | 16 | 19 | 23 | 5 |

18

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 15 | 19 | 1 |
| 2 | 1 | 6 | 10 | 24 | 2 |

19

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 7 | 13 | 18 |
| 3 | 1 | 2 | 8 | 17 | 23 |
| 4 | 1 | 2 | 9 | 21 | 8 |
| 5 | 1 | 3 | 5 | 9 | 17 |
| 6 | 1 | 3 | 16 | 22 | 19 |
| 7 | 1 | 3 | 20 | 23 | 10 |
| 8 | 1 | 4 | 5 | 21 | 24 |
| 9 | 1 | 4 | 11 | 14 | 11 |
| 10 | 1 | 4 | 12 | 18 | 14 |
| 11 | 1 | 5 | 7 | 8 | 2 |
| 12 | 1 | 5 | 13 | 17 | 7 |
| 13 | 1 | 7 | 11 | 20 | 20 |
| 14 | 1 | 7 | 18 | 22 | 9 |
| 15 | 1 | 8 | 12 | 16 | 12 |
| 16 | 1 | 8 | 14 | 23 | 13 |
| 17 | 1 | 9 | 11 | 12 | 3 |
| 18 | 1 | 9 | 14 | 18 | 22 |
| 19 | 1 | 11 | 17 | 22 | 16 |
| 20 | 1 | 12 | 13 | 23 | 21 |
| 21 | 1 | 13 | 14 | 16 | 4 |
| 22 | 1 | 16 | 20 | 21 | 15 |
| 23 | 1 | 17 | 18 | 20 | 5 |
| 24 | 1 | 21 | 22 | 23 | 6 |

20

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 21 | 3 |
| 3 | 2 | 2 | 4 | 5 | 2 |
| 4 | 4 | 2 | 4 | 9 | 5 |
| 5 | 2 | 2 | 5 | 7 | 1 |
| 6 | 1 | 2 | 5 | 8 | 2 |
| 7 | 2 | 2 | 5 | 9 | 7 |
| 8 | 1 | 2 | 5 | 13 | 7 |
| 9 | 2 | 2 | 5 | 17 | 8 |
| 10 | 1 | 2 | 5 | 21 | 8 |
| 11 | 4 | 2 | 7 | 17 | 14 |
| 12 | 3 | 2 | 8 | 13 | 16 |
| 13 | 6 | 3 | 4 | 9 | 6 |
| 14 | 5 | 3 | 4 | 21 | 4 |
| 15 | 3 | 3 | 5 | 21 | 14 |
| 16 | 5 | 3 | 9 | 21 | 12 |
| 17 | 5 | 3 | 16 | 21 | 14 |
| 18 | 6 | 3 | 16 | 23 | 8 |
| 19 | 3 | 3 | 20 | 21 | 12 |
| 20 | 1 | 3 | 20 | 22 | 10 |
| 21 | 3 | 3 | 21 | 22 | 4 |
| 22 | 5 | 3 | 21 | 23 | 3 |
| 23 | 4 | 4 | 5 | 9 | 16 |
| 24 | 6 | 4 | 9 | 11 | 5 |
| 25 | 4 | 4 | 9 | 12 | 6 |
| 26 | 4 | 4 | 9 | 14 | 10 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 27 | 6 | 4 | 9 | 18 | 16 |
| 28 | 6 | 4 | 9 | 21 | 10 |
| 29 | 5 | 4 | 11 | 18 | 7 |
| 30 | 2 | 4 | 12 | 14 | 12 |
| 31 | 4 | 5 | 7 | 17 | 3 |
| 32 | 3 | 5 | 8 | 13 | 5 |
| 33 | 5 | 7 | 8 | 13 | 6 |
| 34 | 6 | 7 | 8 | 17 | 4 |
| 35 | 6 | 7 | 11 | 17 | 14 |
| 36 | 5 | 7 | 11 | 18 | 8 |
| 37 | 6 | 7 | 13 | 17 | 12 |
| 38 | 6 | 7 | 17 | 18 | 3 |
| 39 | 4 | 7 | 17 | 20 | 4 |
| 40 | 4 | 7 | 17 | 22 | 12 |
| 41 | 2 | 7 | 20 | 22 | 10 |
| 42 | 3 | 8 | 12 | 13 | 10 |
| 43 | 1 | 8 | 12 | 14 | 12 |
| 44 | 3 | 8 | 13 | 14 | 6 |
| 45 | 5 | 8 | 13 | 16 | 5 |
| 46 | 5 | 8 | 13 | 17 | 10 |
| 47 | 5 | 8 | 13 | 23 | 16 |
| 48 | 6 | 8 | 16 | 23 | 7 |
| 49 | 5 | 9 | 11 | 18 | 2 |
| 50 | 2 | 9 | 12 | 14 | 4 |
| 51 | 1 | 11 | 12 | 14 | 3 |
| 52 | 3 | 11 | 12 | 18 | 1 |
| 53 | 3 | 11 | 14 | 18 | 8 |
| 54 | 5 | 11 | 17 | 18 | 1 |
| 55 | 3 | 11 | 18 | 20 | 2 |
| 56 | 3 | 11 | 18 | 22 | 7 |
| 57 | 1 | 11 | 20 | 22 | 16 |
| 58 | 1 | 12 | 13 | 14 | 4 |
| 59 | 2 | 12 | 14 | 16 | 3 |
| 60 | 1 | 12 | 14 | 18 | 14 |
| 61 | 2 | 12 | 14 | 23 | 14 |
| 62 | 4 | 12 | 16 | 23 | 8 |
| 63 | 6 | 13 | 16 | 23 | 2 |
| 64 | 4 | 14 | 16 | 23 | 1 |
| 65 | 2 | 16 | 20 | 22 | 16 |
| 66 | 4 | 16 | 20 | 23 | 7 |
| 67 | 6 | 16 | 21 | 23 | 1 |
| 68 | 4 | 16 | 22 | 23 | 2 |
| 69 | 2 | 17 | 20 | 22 | 6 |
| 70 | 1 | 18 | 20 | 22 | 5 |
| 71 | 1 | 20 | 21 | 22 | 6 |
| 72 | 2 | 20 | 22 | 23 | 5 |

21

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 7 | 1 |
| 2 | 14 | 2 | 3 | 16 | 11 |
| 3 | 17 | 2 | 3 | 17 | 17 |
| 4 | 3 | 2 | 3 | 23 | 3 |
| 5 | 1 | 2 | 4 | 8 | 23 |
| 6 | 4 | 2 | 4 | 11 | 5 |
| 7 | 17 | 2 | 4 | 13 | 7 |
| 8 | 13 | 2 | 4 | 18 | 9 |
| 9 | 4 | 2 | 7 | 11 | 14 |
| 10 | 13 | 2 | 7 | 18 | 22 |
| 11 | 17 | 2 | 7 | 21 | 24 |
| 12 | 17 | 2 | 8 | 9 | 2 |
| 13 | 14 | 2 | 8 | 16 | 16 |
| 14 | 3 | 2 | 8 | 23 | 20 |
| 15 | 4 | 2 | 9 | 11 | 9 |
| 16 | 1 | 2 | 9 | 13 | 18 |
| 17 | 13 | 2 | 9 | 18 | 5 |
| 18 | 4 | 2 | 11 | 17 | 22 |
| 19 | 14 | 2 | 13 | 16 | 20 |
| 20 | 3 | 2 | 13 | 23 | 16 |
| 21 | 14 | 2 | 16 | 21 | 3 |
| 22 | 13 | 2 | 17 | 18 | 14 |
| 23 | 1 | 2 | 17 | 21 | 8 |
| 24 | 3 | 2 | 21 | 23 | 11 |
| 25 | 4 | 3 | 4 | 12 | 15 |
| 26 | 13 | 3 | 4 | 14 | 19 |
| 27 | 14 | 3 | 4 | 20 | 13 |
| 28 | 3 | 3 | 4 | 22 | 21 |
| 29 | 1 | 3 | 5 | 7 | 17 |
| 30 | 3 | 3 | 5 | 16 | 14 |
| 31 | 17 | 3 | 5 | 17 | 1 |
| 32 | 14 | 3 | 5 | 23 | 22 |
| 33 | 1 | 3 | 7 | 20 | 10 |
| 34 | 1 | 3 | 7 | 22 | 19 |
| 35 | 4 | 3 | 9 | 12 | 6 |
| 36 | 13 | 3 | 9 | 14 | 10 |
| 37 | 3 | 3 | 9 | 20 | 12 |
| 38 | 14 | 3 | 9 | 22 | 4 |
| 39 | 4 | 3 | 12 | 16 | 8 |
| 40 | 4 | 3 | 12 | 23 | 24 |
| 41 | 13 | 3 | 14 | 16 | 17 |
| 42 | 13 | 3 | 14 | 23 | 1 |
| 43 | 17 | 3 | 17 | 20 | 19 |
| 44 | 17 | 3 | 17 | 22 | 10 |
| 45 | 1 | 4 | 5 | 8 | 2 |
| 46 | 13 | 4 | 5 | 11 | 16 |
| 47 | 17 | 4 | 5 | 13 | 18 |
| 48 | 4 | 4 | 5 | 18 | 20 |
| 49 | 1 | 4 | 8 | 12 | 12 |
| 50 | 1 | 4 | 8 | 14 | 13 |
| 51 | 14 | 4 | 11 | 20 | 2 |
| 52 | 3 | 4 | 11 | 22 | 18 |
| 53 | 17 | 4 | 12 | 13 | 4 |
| 54 | 13 | 4 | 12 | 21 | 6 |
| 55 | 17 | 4 | 13 | 14 | 21 |
| 56 | 4 | 4 | 14 | 21 | 10 |
| 57 | 14 | 4 | 18 | 20 | 23 |
| 58 | 3 | 4 | 18 | 22 | 7 |
| 59 | 14 | 4 | 20 | 21 | 12 |
| 60 | 3 | 4 | 21 | 22 | 4 |
| 61 | 13 | 5 | 7 | 11 | 11 |
| 62 | 4 | 5 | 7 | 18 | 3 |
| 63 | 17 | 5 | 7 | 21 | 8 |
| 64 | 17 | 5 | 8 | 9 | 23 |
| 65 | 3 | 5 | 8 | 16 | 5 |
| 66 | 14 | 5 | 8 | 23 | 9 |
| 67 | 13 | 5 | 9 | 11 | 20 |
| 68 | 1 | 5 | 9 | 13 | 7 |
| 69 | 4 | 5 | 9 | 18 | 16 |
| 70 | 13 | 5 | 11 | 17 | 3 |
| 71 | 3 | 5 | 13 | 16 | 9 |
| 72 | 14 | 5 | 13 | 23 | 5 |
| 73 | 3 | 5 | 16 | 21 | 22 |
| 74 | 4 | 5 | 17 | 18 | 11 |
| 75 | 1 | 5 | 17 | 21 | 24 |
| 76 | 14 | 5 | 21 | 23 | 14 |
| 77 | 14 | 7 | 8 | 12 | 19 |
| 78 | 3 | 7 | 8 | 14 | 15 |
| 79 | 4 | 7 | 8 | 20 | 21 |
| 80 | 13 | 7 | 8 | 22 | 13 |
| 81 | 14 | 7 | 11 | 12 | 17 |
| 82 | 3 | 7 | 11 | 14 | 8 |
| 83 | 14 | 7 | 12 | 13 | 10 |
| 84 | 14 | 7 | 12 | 18 | 1 |
| 85 | 3 | 7 | 13 | 14 | 6 |
| 86 | 13 | 7 | 13 | 20 | 4 |
| 87 | 4 | 7 | 13 | 22 | 12 |
| 88 | 3 | 7 | 14 | 18 | 24 |
| 89 | 17 | 7 | 20 | 21 | 6 |
| 90 | 17 | 7 | 21 | 22 | 15 |
| 91 | 17 | 8 | 9 | 12 | 13 |
| 92 | 17 | 8 | 9 | 14 | 12 |
| 93 | 3 | 8 | 12 | 17 | 10 |
| 94 | 14 | 8 | 14 | 17 | 6 |
| 95 | 4 | 8 | 16 | 20 | 18 |
| 96 | 13 | 8 | 16 | 22 | 2 |
| 97 | 4 | 8 | 17 | 20 | 4 |
| 98 | 13 | 8 | 17 | 22 | 12 |
| 99 | 4 | 8 | 20 | 23 | 7 |
| 100 | 13 | 8 | 22 | 23 | 23 |
| 101 | 3 | 9 | 11 | 20 | 23 |
| 102 | 14 | 9 | 11 | 22 | 7 |
| 103 | 1 | 9 | 12 | 13 | 21 |
| 104 | 13 | 9 | 12 | 21 | 15 |
| 105 | 1 | 9 | 13 | 14 | 4 |
| 106 | 4 | 9 | 14 | 21 | 19 |
| 107 | 3 | 9 | 18 | 20 | 2 |
| 108 | 14 | 9 | 18 | 22 | 18 |
| 109 | 3 | 9 | 20 | 21 | 13 |
| 110 | 14 | 9 | 21 | 22 | 21 |
| 111 | 1 | 11 | 12 | 16 | 3 |
| 112 | 3 | 11 | 12 | 17 | 1 |
| 113 | 17 | 11 | 12 | 23 | 11 |
| 114 | 1 | 11 | 14 | 16 | 11 |
| 115 | 14 | 11 | 14 | 17 | 24 |
| 116 | 17 | 11 | 14 | 23 | 3 |
| 117 | 1 | 11 | 16 | 20 | 20 |
| 118 | 1 | 11 | 16 | 22 | 16 |
| 119 | 17 | 11 | 20 | 23 | 16 |
| 120 | 17 | 11 | 22 | 23 | 20 |
| 121 | 3 | 12 | 13 | 17 | 19 |
| 122 | 17 | 12 | 16 | 18 | 22 |
| 123 | 13 | 12 | 16 | 21 | 24 |
| 124 | 3 | 12 | 17 | 18 | 17 |
| 125 | 1 | 12 | 18 | 23 | 14 |
| 126 | 13 | 12 | 21 | 23 | 8 |
| 127 | 14 | 13 | 14 | 17 | 15 |
| 128 | 13 | 13 | 16 | 20 | 7 |
| 129 | 4 | 13 | 16 | 22 | 23 |
| 130 | 13 | 13 | 17 | 20 | 21 |
| 131 | 4 | 13 | 17 | 22 | 13 |
| 132 | 13 | 13 | 20 | 23 | 18 |
| 133 | 4 | 13 | 22 | 23 | 2 |
| 134 | 17 | 14 | 16 | 18 | 14 |
| 135 | 4 | 14 | 16 | 21 | 1 |
| 136 | 14 | 14 | 17 | 18 | 8 |
| 137 | 1 | 14 | 18 | 23 | 22 |
| 138 | 4 | 14 | 21 | 23 | 17 |
| 139 | 17 | 16 | 18 | 20 | 9 |
| 140 | 17 | 16 | 18 | 22 | 5 |
| 141 | 1 | 17 | 20 | 21 | 15 |
| 142 | 1 | 17 | 21 | 22 | 6 |
| 143 | 1 | 18 | 20 | 23 | 5 |
| 144 | 1 | 18 | 22 | 23 | 9 |

22

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 8 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 13 | 18 |
| 3 | 3 | 2 | 3 | 20 | 12 |
| 4 | 3 | 2 | 3 | 22 | 3 |
| 5 | 2 | 2 | 4 | 7 | 2 |
| 6 | 4 | 2 | 4 | 12 | 5 |
| 7 | 4 | 2 | 4 | 14 | 10 |
| 8 | 2 | 2 | 4 | 17 | 24 |
| 9 | 2 | 2 | 7 | 9 | 17 |
| 10 | 4 | 2 | 7 | 20 | 21 |
| 11 | 4 | 2 | 7 | 22 | 14 |
| 12 | 3 | 2 | 8 | 12 | 20 |
| 13 | 3 | 2 | 8 | 14 | 15 |
| 14 | 1 | 2 | 8 | 21 | 23 |
| 15 | 4 | 2 | 9 | 12 | 6 |
| 16 | 4 | 2 | 9 | 14 | 9 |
| 17 | 2 | 2 | 9 | 17 | 7 |
| 18 | 3 | 2 | 12 | 13 | 19 |
| 19 | 3 | 2 | 13 | 14 | 16 |
| 20 | 1 | 2 | 13 | 21 | 8 |
| 21 | 4 | 2 | 17 | 20 | 22 |
| 22 | 4 | 2 | 17 | 22 | 13 |
| 23 | 3 | 2 | 20 | 21 | 11 |
| 24 | 3 | 2 | 21 | 22 | 4 |
| 25 | 6 | 3 | 4 | 11 | 6 |
| 26 | 5 | 3 | 4 | 16 | 22 |
| 27 | 6 | 3 | 4 | 18 | 16 |
| 28 | 5 | 3 | 4 | 23 | 4 |
| 29 | 1 | 3 | 5 | 8 | 2 |
| 30 | 1 | 3 | 5 | 13 | 17 |
| 31 | 3 | 3 | 5 | 20 | 14 |
| 32 | 3 | 3 | 5 | 22 | 21 |
| 33 | 6 | 3 | 8 | 16 | 7 |
| 34 | 6 | 3 | 8 | 23 | 8 |
| 35 | 6 | 3 | 9 | 11 | 5 |
| 36 | 5 | 3 | 9 | 16 | 13 |
| 37 | 6 | 3 | 9 | 18 | 15 |
| 38 | 5 | 3 | 9 | 23 | 11 |
| 39 | 1 | 3 | 11 | 20 | 20 |
| 40 | 1 | 3 | 11 | 22 | 19 |
| 41 | 6 | 3 | 13 | 16 | 24 |
| 42 | 6 | 3 | 13 | 23 | 23 |
| 43 | 1 | 3 | 18 | 20 | 10 |
| 44 | 1 | 3 | 18 | 22 | 9 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 2 | 4 | 5 | 7 | 1 |
| 46 | 4 | 4 | 5 | 12 | 15 |
| 47 | 4 | 4 | 5 | 14 | 20 |
| 48 | 2 | 4 | 5 | 17 | 23 |
| 49 | 5 | 4 | 7 | 11 | 7 |
| 50 | 5 | 4 | 7 | 18 | 8 |
| 51 | 5 | 4 | 11 | 17 | 17 |
| 52 | 6 | 4 | 11 | 21 | 9 |
| 53 | 2 | 4 | 12 | 16 | 11 |
| 54 | 2 | 4 | 12 | 23 | 13 |
| 55 | 2 | 4 | 14 | 16 | 12 |
| 56 | 2 | 4 | 14 | 23 | 14 |
| 57 | 5 | 4 | 16 | 21 | 21 |
| 58 | 5 | 4 | 17 | 18 | 18 |
| 59 | 6 | 4 | 18 | 21 | 19 |
| 60 | 5 | 4 | 21 | 23 | 3 |
| 61 | 2 | 5 | 7 | 9 | 18 |
| 62 | 4 | 5 | 7 | 20 | 3 |
| 63 | 4 | 5 | 7 | 22 | 12 |
| 64 | 3 | 5 | 8 | 12 | 10 |
| 65 | 3 | 5 | 8 | 14 | 5 |
| 66 | 1 | 5 | 8 | 21 | 24 |
| 67 | 4 | 5 | 9 | 12 | 16 |
| 68 | 4 | 5 | 9 | 14 | 19 |
| 69 | 2 | 5 | 9 | 17 | 8 |
| 70 | 3 | 5 | 12 | 13 | 9 |
| 71 | 3 | 5 | 13 | 14 | 6 |
| 72 | 1 | 5 | 13 | 21 | 7 |
| 73 | 4 | 5 | 17 | 20 | 4 |
| 74 | 4 | 5 | 17 | 22 | 11 |
| 75 | 3 | 5 | 20 | 21 | 13 |
| 76 | 3 | 5 | 21 | 22 | 22 |
| 77 | 6 | 7 | 8 | 11 | 22 |
| 78 | 5 | 7 | 8 | 16 | 6 |
| 79 | 6 | 7 | 8 | 18 | 4 |
| 80 | 5 | 7 | 8 | 23 | 16 |
| 81 | 5 | 7 | 9 | 11 | 24 |
| 82 | 5 | 7 | 9 | 18 | 23 |
| 83 | 6 | 7 | 11 | 13 | 13 |
| 84 | 5 | 7 | 13 | 16 | 5 |
| 85 | 6 | 7 | 13 | 18 | 11 |
| 86 | 5 | 7 | 13 | 23 | 15 |
| 87 | 2 | 7 | 16 | 20 | 19 |
| 88 | 2 | 7 | 16 | 22 | 20 |
| 89 | 2 | 7 | 20 | 23 | 9 |
| 90 | 2 | 7 | 22 | 23 | 10 |
| 91 | 1 | 8 | 11 | 12 | 12 |
| 92 | 1 | 8 | 11 | 14 | 11 |
| 93 | 6 | 8 | 11 | 17 | 21 |
| 94 | 1 | 8 | 12 | 18 | 14 |
| 95 | 1 | 8 | 14 | 18 | 13 |
| 96 | 5 | 8 | 16 | 17 | 9 |
| 97 | 6 | 8 | 16 | 21 | 17 |
| 98 | 6 | 8 | 17 | 18 | 3 |
| 99 | 5 | 8 | 17 | 23 | 19 |
| 100 | 6 | 8 | 21 | 23 | 18 |
| 101 | 5 | 9 | 11 | 17 | 2 |
| 102 | 6 | 9 | 11 | 21 | 10 |
| 103 | 2 | 9 | 12 | 16 | 4 |
| 104 | 2 | 9 | 12 | 23 | 22 |
| 105 | 2 | 9 | 14 | 16 | 3 |
| 106 | 2 | 9 | 14 | 23 | 21 |
| 107 | 5 | 9 | 16 | 21 | 14 |
| 108 | 5 | 9 | 17 | 18 | 1 |
| 109 | 6 | 9 | 18 | 21 | 20 |
| 110 | 5 | 9 | 21 | 23 | 12 |
| 111 | 1 | 11 | 12 | 13 | 3 |
| 112 | 3 | 11 | 12 | 20 | 1 |
| 113 | 3 | 11 | 12 | 22 | 18 |
| 114 | 1 | 11 | 13 | 14 | 4 |
| 115 | 6 | 11 | 13 | 17 | 14 |
| 116 | 3 | 11 | 14 | 20 | 23 |
| 117 | 3 | 11 | 14 | 22 | 8 |
| 118 | 1 | 11 | 20 | 21 | 15 |
| 119 | 1 | 11 | 21 | 22 | 16 |
| 120 | 1 | 12 | 13 | 18 | 21 |
| 121 | 4 | 12 | 16 | 20 | 8 |
| 122 | 4 | 12 | 16 | 22 | 23 |
| 123 | 3 | 12 | 18 | 20 | 2 |
| 124 | 3 | 12 | 18 | 22 | 17 |
| 125 | 4 | 12 | 20 | 23 | 7 |
| 126 | 4 | 12 | 22 | 23 | 24 |
| 127 | 1 | 13 | 14 | 18 | 22 |
| 128 | 5 | 13 | 16 | 17 | 10 |
| 129 | 6 | 13 | 16 | 21 | 2 |
| 130 | 6 | 13 | 17 | 18 | 12 |
| 131 | 5 | 13 | 17 | 23 | 20 |
| 132 | 6 | 13 | 21 | 23 | 1 |
| 133 | 4 | 14 | 16 | 20 | 18 |
| 134 | 4 | 14 | 16 | 22 | 1 |
| 135 | 3 | 14 | 18 | 20 | 24 |
| 136 | 3 | 14 | 18 | 22 | 7 |
| 137 | 4 | 14 | 20 | 23 | 17 |
| 138 | 4 | 14 | 22 | 23 | 2 |
| 139 | 2 | 16 | 17 | 20 | 16 |
| 140 | 2 | 16 | 17 | 22 | 15 |
| 141 | 2 | 17 | 20 | 23 | 6 |
| 142 | 2 | 17 | 22 | 23 | 5 |
| 143 | 1 | 18 | 20 | 21 | 5 |
| 144 | 1 | 18 | 21 | 22 | 6 |

23

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 9 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 4 | 21 | 8 |
| 3 | 1 | 2 | 7 | 8 | 23 |
| 4 | 1 | 2 | 13 | 17 | 18 |
| 5 | 1 | 3 | 4 | 5 | 17 |
| 6 | 1 | 3 | 16 | 20 | 10 |
| 7 | 1 | 3 | 22 | 23 | 19 |
| 8 | 1 | 4 | 11 | 12 | 3 |
| 9 | 1 | 4 | 14 | 18 | 22 |
| 10 | 1 | 5 | 7 | 13 | 7 |
| 11 | 1 | 5 | 8 | 17 | 2 |
| 12 | 1 | 5 | 9 | 21 | 24 |
| 13 | 1 | 7 | 11 | 22 | 16 |
| 14 | 1 | 7 | 18 | 20 | 5 |
| 15 | 1 | 8 | 12 | 23 | 12 |
| 16 | 1 | 8 | 14 | 16 | 13 |
| 17 | 1 | 9 | 11 | 14 | 11 |
| 18 | 1 | 9 | 12 | 18 | 14 |
| 19 | 1 | 11 | 17 | 20 | 20 |
| 20 | 1 | 12 | 13 | 16 | 21 |
| 21 | 1 | 13 | 14 | 23 | 4 |
| 22 | 1 | 16 | 21 | 22 | 6 |
| 23 | 1 | 17 | 18 | 22 | 9 |
| 24 | 1 | 20 | 21 | 23 | 15 |

24

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 11 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 12 | 3 |
| 3 | 11 | 2 | 3 | 14 | 14 |
| 4 | 8 | 2 | 3 | 18 | 8 |
| 5 | 7 | 2 | 4 | 16 | 7 |
| 6 | 12 | 2 | 4 | 20 | 20 |
| 7 | 4 | 2 | 4 | 22 | 5 |
| 8 | 2 | 2 | 4 | 23 | 2 |
| 9 | 12 | 2 | 7 | 12 | 3 |
| 10 | 4 | 2 | 7 | 14 | 14 |
| 11 | 7 | 2 | 7 | 16 | 24 |
| 12 | 2 | 2 | 7 | 23 | 17 |
| 13 | 1 | 2 | 8 | 11 | 23 |
| 14 | 8 | 2 | 8 | 18 | 18 |
| 15 | 3 | 2 | 8 | 20 | 20 |
| 16 | 11 | 2 | 8 | 22 | 5 |
| 17 | 7 | 2 | 9 | 16 | 2 |
| 18 | 4 | 2 | 9 | 20 | 9 |
| 19 | 12 | 2 | 9 | 22 | 16 |
| 20 | 2 | 2 | 9 | 23 | 7 |
| 21 | 3 | 2 | 11 | 12 | 1 |
| 22 | 1 | 2 | 11 | 13 | 18 |
| 23 | 3 | 2 | 11 | 14 | 8 |
| 24 | 3 | 2 | 11 | 20 | 23 |
| 25 | 1 | 2 | 11 | 21 | 8 |
| 26 | 3 | 2 | 11 | 22 | 18 |
| 27 | 12 | 2 | 12 | 16 | 1 |
| 28 | 4 | 2 | 12 | 17 | 22 |
| 29 | 11 | 2 | 12 | 18 | 24 |
| 30 | 11 | 2 | 12 | 21 | 22 |
| 31 | 4 | 2 | 12 | 23 | 24 |
| 32 | 8 | 2 | 13 | 18 | 23 |
| 33 | 11 | 2 | 13 | 20 | 9 |
| 34 | 3 | 2 | 13 | 22 | 16 |
| 35 | 12 | 2 | 14 | 16 | 8 |
| 36 | 12 | 2 | 14 | 17 | 11 |
| 37 | 11 | 2 | 14 | 18 | 17 |
| 38 | 3 | 2 | 14 | 21 | 11 |
| 39 | 4 | 2 | 14 | 23 | 17 |
| 40 | 7 | 2 | 16 | 17 | 17 |
| 41 | 12 | 2 | 16 | 20 | 23 |
| 42 | 12 | 2 | 16 | 22 | 18 |
| 43 | 2 | 2 | 17 | 23 | 24 |
| 44 | 11 | 2 | 18 | 20 | 7 |
| 45 | 8 | 2 | 18 | 21 | 1 |
| 46 | 11 | 2 | 18 | 22 | 2 |
| 47 | 4 | 2 | 20 | 23 | 7 |
| 48 | 4 | 2 | 22 | 23 | 2 |
| 49 | 5 | 3 | 4 | 7 | 4 |
| 50 | 6 | 3 | 4 | 8 | 6 |
| 51 | 10 | 3 | 4 | 13 | 19 |
| 52 | 9 | 3 | 4 | 17 | 13 |
| 53 | 8 | 3 | 5 | 11 | 24 |
| 54 | 3 | 3 | 5 | 12 | 14 |
| 55 | 11 | 3 | 5 | 14 | 3 |
| 56 | 1 | 3 | 5 | 18 | 17 |
| 57 | 6 | 3 | 7 | 8 | 4 |
| 58 | 5 | 3 | 7 | 9 | 13 |
| 59 | 6 | 3 | 7 | 11 | 22 |
| 60 | 6 | 3 | 7 | 13 | 13 |
| 61 | 5 | 3 | 7 | 16 | 22 |
| 62 | 6 | 3 | 7 | 18 | 11 |
| 63 | 5 | 3 | 7 | 23 | 11 |
| 64 | 10 | 3 | 8 | 9 | 10 |
| 65 | 1 | 3 | 8 | 12 | 12 |
| 66 | 8 | 3 | 8 | 14 | 4 |
| 67 | 10 | 3 | 8 | 17 | 12 |
| 68 | 1 | 3 | 8 | 20 | 10 |
| 69 | 8 | 3 | 8 | 22 | 6 |
| 70 | 6 | 3 | 9 | 13 | 15 |
| 71 | 9 | 3 | 9 | 17 | 4 |
| 72 | 1 | 3 | 11 | 12 | 3 |
| 73 | 8 | 3 | 11 | 14 | 22 |
| 74 | 6 | 3 | 11 | 16 | 24 |
| 75 | 10 | 3 | 11 | 17 | 3 |
| 76 | 10 | 3 | 11 | 23 | 1 |
| 77 | 1 | 3 | 12 | 13 | 21 |
| 78 | 1 | 3 | 12 | 18 | 14 |
| 79 | 3 | 3 | 12 | 20 | 12 |
| 80 | 3 | 3 | 12 | 22 | 21 |
| 81 | 8 | 3 | 13 | 14 | 13 |
| 82 | 10 | 3 | 13 | 17 | 21 |
| 83 | 8 | 3 | 13 | 20 | 15 |
| 84 | 1 | 3 | 13 | 22 | 19 |
| 85 | 8 | 3 | 14 | 18 | 11 |
| 86 | 11 | 3 | 14 | 20 | 21 |
| 87 | 11 | 3 | 14 | 22 | 12 |
| 88 | 9 | 3 | 16 | 17 | 11 |
| 89 | 10 | 3 | 16 | 18 | 17 |
| 90 | 10 | 3 | 17 | 18 | 14 |
| 91 | 9 | 3 | 17 | 23 | 22 |
| 92 | 6 | 3 | 18 | 23 | 8 |
| 93 | 2 | 4 | 5 | 16 | 23 |
| 94 | 12 | 4 | 5 | 20 | 5 |
| 95 | 4 | 4 | 5 | 22 | 20 |
| 96 | 7 | 4 | 5 | 23 | 18 |
| 97 | 5 | 4 | 7 | 8 | 6 |
| 98 | 7 | 4 | 7 | 12 | 4 |
| 99 | 9 | 4 | 7 | 13 | 10 |
| 100 | 2 | 4 | 7 | 14 | 12 |
| 101 | 7 | 4 | 7 | 20 | 6 |
| 102 | 9 | 4 | 7 | 21 | 12 |
| 103 | 2 | 4 | 7 | 22 | 10 |
| 104 | 6 | 4 | 8 | 11 | 9 |
| 105 | 5 | 4 | 8 | 16 | 9 |
| 106 | 5 | 4 | 8 | 17 | 19 |
| 107 | 6 | 4 | 8 | 18 | 16 |
| 108 | 6 | 4 | 8 | 21 | 19 |
| 109 | 5 | 4 | 8 | 23 | 16 |
| 110 | 10 | 4 | 11 | 13 | 16 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 111 | 5 | 4 | 11 | 16 | 7 |
| 112 | 9 | 4 | 11 | 23 | 2 |
| 113 | 2 | 4 | 12 | 17 | 13 |
| 114 | 12 | 4 | 12 | 20 | 10 |
| 115 | 4 | 4 | 12 | 22 | 15 |
| 116 | 9 | 4 | 13 | 16 | 20 |
| 117 | 9 | 4 | 13 | 17 | 15 |
| 118 | 10 | 4 | 13 | 18 | 9 |
| 119 | 10 | 4 | 13 | 21 | 6 |
| 120 | 9 | 4 | 13 | 23 | 5 |
| 121 | 7 | 4 | 14 | 17 | 21 |
| 122 | 12 | 4 | 14 | 20 | 15 |
| 123 | 4 | 4 | 14 | 22 | 10 |
| 124 | 9 | 4 | 16 | 18 | 23 |
| 125 | 7 | 4 | 16 | 20 | 9 |
| 126 | 2 | 4 | 16 | 22 | 20 |
| 127 | 7 | 4 | 17 | 20 | 19 |
| 128 | 5 | 4 | 17 | 21 | 21 |
| 129 | 2 | 4 | 17 | 22 | 15 |
| 130 | 5 | 4 | 18 | 23 | 18 |
| 131 | 7 | 4 | 20 | 23 | 16 |
| 132 | 2 | 4 | 22 | 23 | 5 |
| 133 | 12 | 5 | 7 | 12 | 14 |
| 134 | 4 | 5 | 7 | 14 | 3 |
| 135 | 2 | 5 | 7 | 16 | 1 |
| 136 | 7 | 5 | 7 | 23 | 8 |
| 137 | 8 | 5 | 8 | 11 | 7 |
| 138 | 1 | 5 | 8 | 18 | 2 |
| 139 | 3 | 5 | 8 | 20 | 5 |
| 140 | 11 | 5 | 8 | 22 | 20 |
| 141 | 2 | 5 | 9 | 16 | 18 |
| 142 | 4 | 5 | 9 | 20 | 16 |
| 143 | 12 | 5 | 9 | 22 | 9 |
| 144 | 7 | 5 | 9 | 23 | 23 |
| 145 | 11 | 5 | 11 | 12 | 8 |
| 146 | 8 | 5 | 11 | 13 | 2 |
| 147 | 11 | 5 | 11 | 14 | 1 |
| 148 | 11 | 5 | 11 | 20 | 18 |
| 149 | 8 | 5 | 11 | 21 | 17 |
| 150 | 11 | 5 | 11 | 22 | 23 |
| 151 | 4 | 5 | 12 | 16 | 8 |
| 152 | 4 | 5 | 12 | 17 | 11 |
| 153 | 3 | 5 | 12 | 18 | 17 |
| 154 | 11 | 5 | 12 | 21 | 11 |
| 155 | 12 | 5 | 12 | 23 | 17 |
| 156 | 1 | 5 | 13 | 18 | 7 |
| 157 | 11 | 5 | 13 | 20 | 16 |
| 158 | 3 | 5 | 13 | 22 | 9 |
| 159 | 4 | 5 | 14 | 16 | 1 |
| 160 | 12 | 5 | 14 | 17 | 22 |
| 161 | 3 | 5 | 14 | 18 | 24 |
| 162 | 3 | 5 | 14 | 21 | 22 |
| 163 | 12 | 5 | 14 | 23 | 24 |
| 164 | 2 | 5 | 16 | 17 | 8 |
| 165 | 4 | 5 | 16 | 20 | 18 |
| 166 | 4 | 5 | 16 | 22 | 23 |
| 167 | 7 | 5 | 17 | 23 | 1 |
| 168 | 3 | 5 | 18 | 20 | 2 |
| 169 | 1 | 5 | 18 | 21 | 24 |
| 170 | 3 | 5 | 18 | 22 | 7 |
| 171 | 12 | 5 | 20 | 23 | 2 |
| 172 | 12 | 5 | 22 | 23 | 7 |
| 173 | 9 | 7 | 8 | 9 | 19 |
| 174 | 10 | 7 | 8 | 21 | 13 |
| 175 | 7 | 7 | 9 | 12 | 13 |
| 176 | 5 | 7 | 9 | 13 | 15 |
| 177 | 2 | 7 | 9 | 14 | 21 |
| 178 | 2 | 7 | 9 | 20 | 19 |
| 179 | 9 | 7 | 9 | 21 | 21 |
| 180 | 7 | 7 | 9 | 22 | 15 |
| 181 | 5 | 7 | 11 | 16 | 24 |
| 182 | 10 | 7 | 11 | 21 | 11 |
| 183 | 9 | 7 | 11 | 23 | 17 |
| 184 | 7 | 7 | 12 | 16 | 22 |
| 185 | 12 | 7 | 12 | 20 | 12 |
| 186 | 12 | 7 | 12 | 22 | 21 |
| 187 | 7 | 7 | 12 | 23 | 11 |
| 188 | 10 | 7 | 13 | 21 | 4 |
| 189 | 2 | 7 | 14 | 16 | 3 |
| 190 | 4 | 7 | 14 | 20 | 21 |
| 191 | 4 | 7 | 14 | 22 | 12 |
| 192 | 2 | 7 | 14 | 23 | 14 |
| 193 | 9 | 7 | 16 | 18 | 1 |
| 194 | 9 | 7 | 16 | 21 | 3 |
| 195 | 10 | 7 | 18 | 21 | 22 |
| 196 | 5 | 7 | 18 | 23 | 8 |
| 197 | 9 | 7 | 21 | 23 | 14 |
| 198 | 10 | 8 | 9 | 11 | 20 |
| 199 | 9 | 8 | 9 | 16 | 16 |
| 200 | 9 | 8 | 9 | 17 | 6 |
| 201 | 10 | 8 | 9 | 18 | 5 |
| 202 | 10 | 8 | 9 | 21 | 15 |
| 203 | 9 | 8 | 9 | 23 | 9 |
| 204 | 6 | 8 | 11 | 16 | 7 |
| 205 | 1 | 8 | 11 | 20 | 20 |
| 206 | 8 | 8 | 11 | 22 | 9 |
| 207 | 10 | 8 | 11 | 23 | 23 |
| 208 | 3 | 8 | 12 | 20 | 10 |
| 209 | 8 | 8 | 12 | 21 | 21 |
| 210 | 11 | 8 | 12 | 22 | 15 |
| 211 | 3 | 8 | 14 | 20 | 15 |
| 212 | 1 | 8 | 14 | 21 | 13 |
| 213 | 11 | 8 | 14 | 22 | 10 |
| 214 | 10 | 8 | 16 | 18 | 2 |
| 215 | 6 | 8 | 17 | 21 | 21 |
| 216 | 1 | 8 | 18 | 20 | 5 |
| 217 | 8 | 8 | 18 | 22 | 16 |
| 218 | 6 | 8 | 18 | 23 | 18 |
| 219 | 1 | 8 | 20 | 21 | 15 |
| 220 | 8 | 8 | 21 | 22 | 19 |
| 221 | 6 | 9 | 11 | 13 | 5 |
| 222 | 5 | 9 | 11 | 16 | 2 |
| 223 | 9 | 9 | 11 | 23 | 7 |
| 224 | 2 | 9 | 12 | 17 | 4 |
| 225 | 4 | 9 | 12 | 20 | 6 |
| 226 | 12 | 9 | 12 | 22 | 19 |
| 227 | 5 | 9 | 13 | 16 | 5 |
| 228 | 5 | 9 | 13 | 17 | 10 |
| 229 | 6 | 9 | 13 | 18 | 20 |
| 230 | 6 | 9 | 13 | 21 | 10 |
| 231 | 5 | 9 | 13 | 23 | 20 |
| 232 | 7 | 9 | 14 | 17 | 12 |
| 233 | 4 | 9 | 14 | 20 | 19 |
| 234 | 12 | 9 | 14 | 22 | 6 |
| 235 | 9 | 9 | 16 | 18 | 18 |
| 236 | 2 | 9 | 16 | 20 | 16 |
| 237 | 7 | 9 | 16 | 22 | 5 |
| 238 | 2 | 9 | 17 | 20 | 6 |
| 239 | 5 | 9 | 17 | 21 | 12 |
| 240 | 7 | 9 | 17 | 22 | 10 |
| 241 | 5 | 9 | 18 | 23 | 23 |
| 242 | 2 | 9 | 20 | 23 | 9 |
| 243 | 7 | 9 | 22 | 23 | 20 |
| 244 | 8 | 11 | 12 | 21 | 14 |
| 245 | 6 | 11 | 13 | 16 | 2 |
| 246 | 8 | 11 | 13 | 20 | 5 |
| 247 | 1 | 11 | 13 | 22 | 16 |
| 248 | 10 | 11 | 13 | 23 | 18 |
| 249 | 1 | 11 | 14 | 21 | 11 |
| 250 | 5 | 11 | 16 | 17 | 17 |
| 251 | 6 | 11 | 16 | 21 | 17 |
| 252 | 6 | 11 | 17 | 21 | 14 |
| 253 | 9 | 11 | 17 | 23 | 24 |
| 254 | 10 | 11 | 21 | 23 | 8 |
| 255 | 11 | 12 | 13 | 20 | 6 |
| 256 | 8 | 12 | 13 | 21 | 12 |
| 257 | 3 | 12 | 13 | 22 | 19 |
| 258 | 2 | 12 | 16 | 17 | 11 |
| 259 | 4 | 12 | 17 | 20 | 4 |
| 260 | 4 | 12 | 17 | 22 | 13 |
| 261 | 2 | 12 | 17 | 23 | 22 |
| 262 | 8 | 12 | 18 | 21 | 3 |
| 263 | 11 | 12 | 20 | 21 | 4 |
| 264 | 11 | 12 | 21 | 22 | 13 |
| 265 | 11 | 13 | 14 | 20 | 19 |
| 266 | 1 | 13 | 14 | 21 | 4 |
| 267 | 3 | 13 | 14 | 22 | 6 |
| 268 | 10 | 13 | 16 | 18 | 7 |
| 269 | 6 | 13 | 17 | 21 | 12 |
| 270 | 8 | 13 | 18 | 20 | 20 |
| 271 | 1 | 13 | 18 | 22 | 9 |
| 272 | 6 | 13 | 18 | 23 | 23 |
| 273 | 8 | 13 | 20 | 21 | 10 |
| 274 | 1 | 13 | 21 | 22 | 6 |
| 275 | 7 | 14 | 16 | 17 | 14 |
| 276 | 12 | 14 | 17 | 20 | 13 |
| 277 | 12 | 14 | 17 | 22 | 4 |
| 278 | 7 | 14 | 17 | 23 | 3 |
| 279 | 1 | 14 | 18 | 21 | 22 |
| 280 | 3 | 14 | 20 | 21 | 13 |
| 281 | 3 | 14 | 21 | 22 | 4 |
| 282 | 9 | 16 | 17 | 18 | 8 |
| 283 | 5 | 16 | 17 | 21 | 14 |
| 284 | 10 | 16 | 18 | 21 | 24 |
| 285 | 6 | 17 | 18 | 21 | 3 |
| 286 | 5 | 17 | 18 | 23 | 1 |
| 287 | 5 | 17 | 21 | 23 | 3 |
| 288 | 6 | 18 | 21 | 23 | 1 |

25

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 5 | 11 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 5 | 16 | 1 |
| 3 | 1 | 2 | 5 | 18 | 2 |
| 4 | 2 | 2 | 5 | 23 | 2 |
| 5 | 3 | 2 | 11 | 18 | 1 |
| 6 | 4 | 2 | 16 | 23 | 2 |
| 7 | 6 | 3 | 7 | 17 | 4 |
| 8 | 5 | 3 | 7 | 21 | 4 |
| 9 | 1 | 3 | 12 | 14 | 3 |
| 10 | 3 | 3 | 12 | 21 | 3 |
| 11 | 3 | 3 | 14 | 21 | 4 |
| 12 | 5 | 3 | 17 | 21 | 3 |
| 13 | 6 | 4 | 8 | 9 | 6 |
| 14 | 5 | 4 | 8 | 13 | 6 |
| 15 | 6 | 4 | 9 | 13 | 5 |
| 16 | 4 | 4 | 9 | 20 | 6 |
| 17 | 4 | 4 | 9 | 22 | 5 |
| 18 | 2 | 4 | 20 | 22 | 5 |
| 19 | 3 | 5 | 11 | 18 | 2 |
| 20 | 4 | 5 | 16 | 23 | 1 |
| 21 | 2 | 7 | 12 | 14 | 3 |
| 22 | 4 | 7 | 12 | 17 | 4 |
| 23 | 4 | 7 | 14 | 17 | 3 |
| 24 | 6 | 7 | 17 | 21 | 3 |
| 25 | 5 | 8 | 9 | 13 | 5 |
| 26 | 3 | 8 | 13 | 20 | 5 |
| 27 | 3 | 8 | 13 | 22 | 6 |
| 28 | 1 | 8 | 20 | 22 | 5 |
| 29 | 2 | 9 | 20 | 22 | 6 |
| 30 | 5 | 11 | 16 | 18 | 2 |
| 31 | 6 | 11 | 16 | 23 | 2 |
| 32 | 5 | 11 | 18 | 23 | 1 |
| 33 | 2 | 12 | 14 | 17 | 4 |
| 34 | 1 | 12 | 14 | 21 | 4 |
| 35 | 1 | 13 | 20 | 22 | 6 |
| 36 | 6 | 16 | 18 | 23 | 1 |

26

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 5 | 12 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 5 | 14 | 8 |
| 3 | 1 | 2 | 5 | 20 | 2 |
| 4 | 1 | 2 | 5 | 22 | 7 |
| 5 | 1 | 2 | 12 | 14 | 3 |
| 6 | 1 | 2 | 20 | 22 | 16 |
| 7 | 3 | 3 | 8 | 13 | 10 |
| 8 | 3 | 3 | 8 | 21 | 12 |
| 9 | 3 | 3 | 11 | 18 | 1 |
| 10 | 3 | 3 | 11 | 21 | 3 |
| 11 | 3 | 3 | 13 | 21 | 4 |
| 12 | 3 | 3 | 18 | 21 | 14 |
| 13 | 4 | 4 | 7 | 9 | 10 |
| 14 | 4 | 4 | 7 | 17 | 12 |
| 15 | 4 | 4 | 9 | 16 | 16 |
| 16 | 4 | 4 | 9 | 17 | 6 |
| 17 | 4 | 4 | 9 | 23 | 5 |
| 18 | 4 | 4 | 16 | 23 | 2 |
| 19 | 1 | 5 | 12 | 14 | 14 |
| 20 | 1 | 5 | 20 | 22 | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 4 | 7 | 9 | 17 | 4 |
| 22 | 4 | 7 | 16 | 17 | 3 |
| 23 | 4 | 7 | 16 | 23 | 1 |
| 24 | 4 | 7 | 17 | 23 | 14 |
| 25 | 3 | 8 | 11 | 13 | 16 |
| 26 | 3 | 8 | 11 | 18 | 2 |
| 27 | 3 | 8 | 13 | 18 | 5 |
| 28 | 3 | 8 | 13 | 21 | 6 |
| 29 | 4 | 9 | 16 | 23 | 7 |
| 30 | 3 | 11 | 13 | 18 | 7 |
| 31 | 3 | 11 | 18 | 21 | 8 |
| 32 | 1 | 12 | 14 | 20 | 12 |
| 33 | 1 | 12 | 14 | 22 | 4 |
| 34 | 1 | 12 | 20 | 22 | 10 |
| 35 | 1 | 14 | 20 | 22 | 6 |
| 36 | 4 | 16 | 17 | 23 | 8 |

27

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 11 | 16 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 11 | 23 | 1 |
| 3 | 13 | 2 | 16 | 18 | 2 |
| 4 | 2 | 2 | 18 | 23 | 2 |
| 5 | 1 | 3 | 7 | 12 | 3 |
| 6 | 2 | 3 | 7 | 14 | 3 |
| 7 | 3 | 3 | 12 | 17 | 3 |
| 8 | 13 | 3 | 14 | 17 | 3 |
| 9 | 1 | 4 | 8 | 20 | 5 |
| 10 | 2 | 4 | 8 | 22 | 5 |
| 11 | 13 | 4 | 13 | 20 | 6 |
| 12 | 3 | 4 | 13 | 22 | 6 |
| 13 | 2 | 5 | 11 | 16 | 1 |
| 14 | 13 | 5 | 11 | 23 | 1 |
| 15 | 3 | 5 | 16 | 18 | 2 |
| 16 | 1 | 5 | 18 | 23 | 2 |
| 17 | 13 | 7 | 12 | 21 | 4 |
| 18 | 3 | 7 | 14 | 21 | 4 |
| 19 | 3 | 8 | 9 | 20 | 5 |
| 20 | 13 | 8 | 9 | 22 | 5 |
| 21 | 2 | 9 | 13 | 20 | 6 |
| 22 | 1 | 9 | 13 | 22 | 6 |
| 23 | 2 | 12 | 17 | 21 | 4 |
| 24 | 1 | 14 | 17 | 21 | 4 |

28

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 12 | 20 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 12 | 22 | 3 |
| 3 | 1 | 2 | 14 | 20 | 11 |
| 4 | 1 | 2 | 14 | 22 | 4 |
| 5 | 3 | 3 | 8 | 11 | 1 |
| 6 | 3 | 3 | 8 | 13 | 2 |
| 7 | 3 | 3 | 11 | 13 | 3 |
| 8 | 3 | 3 | 13 | 18 | 9 |
| 9 | 4 | 4 | 7 | 16 | 1 |
| 10 | 4 | 4 | 7 | 23 | 2 |
| 11 | 4 | 4 | 16 | 17 | 11 |
| 12 | 4 | 4 | 17 | 23 | 5 |
| 13 | 1 | 5 | 12 | 20 | 2 |
| 14 | 1 | 5 | 12 | 22 | 9 |
| 15 | 1 | 5 | 14 | 20 | 5 |
| 16 | 1 | 5 | 14 | 22 | 6 |
| 17 | 4 | 7 | 9 | 16 | 3 |
| 18 | 4 | 7 | 9 | 23 | 9 |
| 19 | 3 | 8 | 11 | 21 | 11 |
| 20 | 3 | 8 | 18 | 21 | 5 |
| 21 | 4 | 9 | 16 | 17 | 4 |
| 22 | 4 | 9 | 17 | 23 | 6 |
| 23 | 3 | 11 | 13 | 21 | 4 |
| 24 | 3 | 13 | 18 | 21 | 6 |





BIBS LILE

# A4DCP

```
:FFCC CPTICNS (MAIN);

;T
    A4DCP:PRCC CPTICNS (MAIN);
    /*DECLARATIONS */
        DCL PD(1:24,1:24) DEC FIXED (2) INIT (
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,2C,21,22,23,24,
 6, 5, 7, 8, 2,1, 3, 4,13,15,16,14, 9,12,1C,11,21,23,24,22,17,2C,18,19,
1C,11,12, 9,18,19,17,2C, 4,1, 2, 3,22,21,24,23, 7, 5, 6, 8,14,13,16,15,
15,16,14,13,23,24,21,22, 8, 6, 5, 7,20,17,19,18, 3, 2,1, 4,12, 9,11,1C,
19,18,17,2C,11,1C,12, 9,22,24,23,21, 4, 3,1, 2,14,16,15,13, 7, 8, 5, 6,
24,23,21,22,16,15,14,13,2C,19,18,17, 8, 7, 6, 5,12,11,1C, 9, 3, 4, 2,1,
 6, 5,17,13, 2,1,21, 9, 8,15,23,14, 4,12,1C,18, 3,16,24,22, 7,2C,11,19,
1, 2,21, 9, 5, 6,17,13, 4,1C,18,12, 8,14,15,23, 7,11,19,2C, 3,22,16,24,
19,18, 7,22,11,1C,14, 4,2C,24,16,21, 9, 3,1, 5,12,23,15,13,17, 8, 2, 6,
24,23, 3,2C,16,15,12, 8,22,19,11,17,13, 7, 6, 2,14,18,1C, 9,21, 4, 5,1,
1C,11,14, 4,18,19, 7,22, 9,1, 5, 3,2C,21,24,16,17, 2, 6, 8,12,13,23,15,
15,16,12, 8,23,24, 3,2C,13, 6, 2, 7,22,17,19,11,21, 5,1, 4,14, 9,18,1C,
15,23,14, 8,16,24, 3,22,13, 6, 5,17,2C, 7,19,11,21, 2,1, 9,12, 4,18,1C,
1C,18,12, 4,11,19, 7,2C, 9,1, 2,21,22, 3,24,16,17, 5, 6,13,14, 8,23,15,
24,16,21,2C,23,15,12,13,22,19,18, 7, 8,17, 6, 2,14,11,1C, 4, 3, 9, 5,1,
19,11,17,22,18,1C,14, 9,2C,24,23, 3, 4,21,1, 5,12,16,15, 8, 7,13, 2, 6,
1, 5, 3, 9, 2, 6,17, 8, 4,1C,11,14,13,12,15,23, 7,18,19,22,21,2C,16,24,
 6, 2, 7,13, 5,1,21, 4, 8,15,16,12, 9,14,1C,18, 3,23,24,2C,17,22,11,19,
24,16, 3,22,23,15,14, 8,2C,19,11, 7,13,17, 6, 5,12,18,1C, 4,21, 9, 2,1,
19,11, 7,2C,18,1C,12, 4,22,24,16, 3, 9,21,1, 2,14,23,15, 8,17,13, 5, 6,
15,23,12,13,16,24,21,2C, 8, 6, 2,17,22, 7,19,18, 3, 5,1, 9,14, 4,11,1C,
1C,18,14, 9,11,19,17,22, 4,1, 5,21,2C, 3,24,23, 7, 2, 6,13,12, 8,16,15,
 6, 2,17, 8, 5,1, 3, 9,13,15,23,12, 4,14,1C,11,21,16,24,2C, 7,22,18,19,
1, 5,21, 4, 2, 6, 7,13, 9,1C,18,14, 8,12,15,16,17,11,19,22, 3,2C,23,24
        );
        DCL DP(1:24,1:24) DEC FIXED (2) INIT (
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,2C,21,22,23,24,
 6, 5, 8, 7, 2,1, 4, 3,17,19,18,2C,21,22,24,23, 9,11,1C,12,13,14,16,15,
1C,12,11, 9,14,15,16,13, 4,1, 3, 2, 8, 5, 6, 7,23,21,24,22,18,2C,17,19,
15,14,13,16,12,1C, 9,11,23,24,21,22,18,2C,19,17, 4, 3,1, 2, 8, 5, 7, 6,
19,2C,18,17,22,24,23,21, 7, 6, 8, 5, 3, 2,1, 4,16,13,15,14,11,12, 9,1C,
24,22,21,23,2C,19,17,18,16,15,13,14,11,12,1C, 9, 7, 8, 6, 5, 3, 2, 4,1,
 6, 5,13,17, 2,1, 9,21, 7,19,18,22, 3,2C,24,23, 4,11,1C,14, 8,12,16,15,
1, 2,21, 9, 5, 6,17,13, 4,1C,11,14, 8,12,15,16, 7,18,19,22, 3,2C,23,24,
19,22,18, 7,2C,24,23, 3,17, 6,13, 5,21, 2,1, 9,16, 8,15,12,11,14, 4,1C,
24,2C, 3,23,22,19, 7,18,16,15, 8,12,11,14,1C, 4,17,13, 6, 5,21, 2, 9,1,
1C,14,11, 4,12,15,16, 8, 9,1,21, 2,13, 5, 6,17,23, 3,24,2C,18,22, 7,19,
15,12, 8,16,14,1C, 4,11,23,24, 3,2C,18,22,19, 7, 9,21,1, 2,13, 5,17, 6,
19,14, 8,23,12,1C, 4,18,16,24,21,2C,11,22,19,17, 9, 3,1, 5,13, 2, 7, 6,
1C,12,18, 4,14,15,23, 8, 9,1, 3, 5,13, 2, 6, 7,16,21,24,2C,11,22,17,19,
24,2C,21,16,22,19,17,11,23,15, 8,14,18,12,1C, 4, 7,13, 6, 2, 3, 5, 9,1,
19,22,11,17,2C,24,16,21, 7, 6,13, 2, 3, 5,1, 9,23, 8,15,14,18,12, 4,1C,
1, 5, 3, 9, 2, 6, 7,13, 4,1C,18,12, 8,14,15,23,17,11,19,22,21,2C,16,24,
 6, 2,13, 7, 5,1, 9, 3,17,19,11,22,21,2C,24,16, 4,18,1C,12, 8,14,23,15,
24,22, 3,16,2C,13, 7,11,23,15,13,12,18,14,1C, 9,17, 8, 6, 2,21, 5, 4,1,
19,2C,11, 7,22,24,16, 3,17, 6, 8, 2,21, 5,1, 4,23,13,15,12,18,14, 9,1C,
15,12,13,23,14,1C, 9,18,16,24, 3,22,11,2C,19, 7, 4,21,1, 5, 8, 2,17, 6,
1C,14,18, 9,12,15,23,13, 4,1,21, 5, 8, 2, 6,17,16, 3,24,22,11,2C, 7,19,
 6, 2, 8,17, 5,1, 4,21, 7,19,11,2C, 3,22,24,16, 9,18,1C,14,13,12,23,15,
```

```
A4DCP:PRCC CPTICNS (MAIN);

EL NEST

        1, 5,21, 4, 2, 6,17, 8, 9,1C,18,14,13,12,15,23, 7,11,19,2C, 3,22,16,2
            );
1           DCL RR(1:21,2:22,3:23,4:24) DEC FIXED (3);
            /*
            DCL FF(1:21,2:22,3:23,4:24) DEC FIXED (2) INIT(1);
            DCL GG(1:21,2:22,3:23,4:24) DEC FIXED (2) INIT(1);
            */
1           DCL (K,M1,M2,I,J,L,I1,J1,L1,I2,J2,L2,P,Q)DEC FIXED(2);
1           DCL(K,C,C1) DEC FIXED(4);

1           CLASS4:PRCC(A,B,C,D);
2           DCL (A,B,C,D,E) DEC FIXED (2);
2           IF B<A THEN DO; E=A;A=B;B=E; END;
2           IF C<E THEN DO; E=E;B=C;C=E; END;
2           IF B<A THEN DO; E=A;A=B;B=E; END;
2           IF D<C THEN DO; E=C;C=D;D=E; END;
2           IF C<B THEN DO; E=E;B=C;C=E; END;
2           IF E<A THEN DO; E=A;A=B;B=E; END;
2           END CLASS4;

        /* CALCULS */
1           C=C;
1           K=C;
1           FF=C;
1           DO I = 1 TO 21;
1     1       DO J=I+1 TO 22;
1     2         DO L=J+1 TO 23;
1     3           DO M= L+1 TO 24;
1     4           IF RR(I,J,L,M)=C THEN
1     4             DO; C=C+1;
1     5               DO P=1 TO 24;
1     6                 I1=PD(P,I); J1=PD(P,J); L1=PD(P,L); M1=PD(P,M);
1     6                 DO Q=1 TO 24;
1     7                   I2=DP(Q,I1); J2=DP(Q,J1);  L2=DP(Q,L1); M2=DP(Q,M1)
1     7                   CALL CLASS4 (I2,J2,L2,M2);
1     7                   IF FF(I2,J2,L2,M2)=C THEN
1     7                     DO; K=K+1;
1     8                           RR(I2,J2,L2,M2)=C;
                                  /*
                          PUT EDIT(K,I,J,L,M )
                                 (F(5),F(7),3 F(3));
                                  PP(I2,J2,L2,M2)=P;
                                  QQ(I2,J2,L2,M2)=Q;
                                  */
1     8                     END;
1     7                   END;
1     6                 END;
1     5               END;
1     4             END;
1     3           END;
1     2         END;
```

```
:FRCC OPTIONS (MAIN);

ST

1       END;

     /* VERIFICATION */
        IF K¬=10626 THEN
          PUT PAGE EDIT('TILT',K) (A,F(5));
        PUT EDIT (C) (F(5));
        PUT PAGE;

     /* RESULTATS */
        PUT EDIT ('QUADRUPLETS EQUIVALENTS DE DCF DE UN(4*4)') (A);
        PUT SKIP;
        DO C1=1 TO C;
1         K=0;
1         PUT SKIP(2); PUT  EDIT(C1)(F(3)) ; PUT SKIP;
1         DO I=1 TO 21;
2           DO J=I+1 TO 22;
3             DO L=J+1 TO 23;
4               DO M=L+1 TO 24;
5               IF RR(I,J,L,M)=C1 THEN
5                 DO; K=K+1;
                   /*
                    PUT EDIT(K,PP(I,J,L,M),I,J,L,M,CC(I,J,L,M ))
                            (F(5),F(4),F(7),3 F(3),F(7));
                    */
6                   PUT EDIT(K,I,J,L,M )
                            (F(5),F(6),3 F(3));
6                   PUT EDIT ('     ')(A);
6                   IF MOD(K,3)=0 THEN PUT SKIP;
                 END;
5                END;
4                END;
3             END;
2           END;
1         END;
     END /4DCF;
```

QUADRUPLETS EQUIVALENTS DE DCF DE UN(4*4)

1

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | [1] | [2] | [3] | [4] | 2 | 1 | 2 | 9 | 21 | 3 | 1 | 3 | 5 | 9 |
| 4 | 1 | 4 | 5 | 21 | 5 | 2 | 6 | 7 | 13 | 6 | 2 | 6 | 8 | 17 |
| 7 | 3 | 16 | 22 | 24 | 8 | 3 | 20 | 23 | 24 | 9 | 4 | 10 | 11 | 14 |
| 10 | 4 | 10 | 12 | 18 | 11 | 5 | 6 | 7 | 8 | 12 | 5 | 6 | 13 | 17 |
| 13 | 7 | 11 | 19 | 20 | 14 | 7 | 18 | 19 | 22 | 15 | 8 | 12 | 15 | 16 |
| 16 | 8 | 14 | 15 | 23 | 17 | 9 | 10 | 11 | 12 | 18 | 9 | 10 | 14 | 18 |
| 19 | 11 | 17 | 19 | 22 | 20 | 12 | 13 | 15 | 23 | 21 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 22 | 16 | 20 | 21 | 24 | 23 | 17 | 18 | 19 | 20 | 24 | 21 | 22 | 23 | 24 |

2

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 2 | 1 | 2 | 3 | 21 | 3 | 1 | 2 | 4 | 5 |
| 4 | 1 | 2 | 4 | 9 | 5 | 1 | 2 | 5 | 9 | 6 | 1 | 2 | 5 | 21 |
| 7 | 1 | 3 | 4 | 9 | 8 | 1 | 3 | 4 | 21 | 9 | 1 | 3 | 5 | 21 |
| 10 | 1 | 3 | 9 | 21 | 11 | 1 | 4 | 5 | 9 | 12 | 1 | 4 | 9 | 21 |
| 13 | 2 | 5 | 6 | 7 | 14 | 2 | 5 | 6 | 8 | 15 | 2 | 5 | 6 | 13 |
| 16 | 2 | 5 | 6 | 17 | 17 | 2 | 6 | 7 | 17 | 18 | 2 | 6 | 8 | 13 |
| 19 | 3 | 16 | 21 | 24 | 20 | 3 | 16 | 23 | 24 | 21 | 3 | 20 | 21 | 24 |
| 22 | 3 | 20 | 22 | 24 | 23 | 3 | 21 | 22 | 24 | 24 | 3 | 21 | 23 | 24 |
| 25 | 4 | 9 | 10 | 11 | 26 | 4 | 9 | 10 | 12 | 27 | 4 | 9 | 10 | 14 |
| 28 | 4 | 9 | 10 | 18 | 29 | 4 | 10 | 11 | 18 | 30 | 4 | 10 | 12 | 14 |
| 31 | 5 | 6 | 7 | 17 | 32 | 5 | 6 | 8 | 13 | 33 | 6 | 7 | 8 | 13 |
| 34 | 6 | 7 | 8 | 17 | 35 | 6 | 7 | 13 | 17 | 36 | 6 | 8 | 13 | 17 |
| 37 | 7 | 11 | 17 | 19 | 38 | 7 | 11 | 18 | 19 | 39 | 7 | 17 | 18 | 19 |
| 40 | 7 | 17 | 19 | 20 | 41 | 7 | 17 | 19 | 22 | 42 | 7 | 19 | 20 | 22 |
| 43 | 8 | 12 | 13 | 15 | 44 | 8 | 12 | 14 | 15 | 45 | 8 | 13 | 14 | 15 |
| 46 | 8 | 13 | 15 | 16 | 47 | 8 | 13 | 15 | 23 | 48 | 8 | 15 | 16 | 23 |
| 49 | 9 | 10 | 11 | 18 | 50 | 9 | 10 | 12 | 14 | 51 | 10 | 11 | 12 | 14 |
| 52 | 10 | 11 | 12 | 18 | 53 | 10 | 11 | 14 | 18 | 54 | 10 | 12 | 14 | 18 |
| 55 | 11 | 17 | 18 | 19 | 56 | 11 | 18 | 19 | 20 | 57 | 11 | 18 | 19 | 22 |
| 58 | 11 | 19 | 20 | 22 | 59 | 12 | 13 | 14 | 15 | 60 | 12 | 14 | 15 | 16 |
| 61 | 12 | 14 | 15 | 23 | 62 | 12 | 15 | 16 | 23 | 63 | 13 | 15 | 16 | 23 |
| 64 | 14 | 15 | 16 | 23 | 65 | 16 | 20 | 22 | 24 | 66 | 16 | 20 | 23 | 24 |
| 67 | 16 | 21 | 23 | 24 | 68 | 16 | 22 | 23 | 24 | 69 | 17 | 19 | 20 | 22 |
| 70 | 18 | 19 | 20 | 22 | 71 | 20 | 21 | 22 | 24 | 72 | 20 | 22 | 23 | 24 |

3

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 6 | 2 | 1 | 2 | 3 | 24 | 3 | 1 | 2 | 4 | 6 |
| 4 | 1 | 2 | 4 | 10 | 5 | 1 | 2 | 6 | 7 | 6 | 1 | 2 | 6 | 8 |
| 7 | 1 | 2 | 6 | 9 | 8 | 1 | 2 | 6 | 13 | 9 | 1 | 2 | 6 | 17 |
| 10 | 1 | 2 | 6 | 21 | 11 | 1 | 2 | 9 | 10 | 12 | 1 | 2 | 21 | 24 |
| 13 | 1 | 3 | 4 | 10 | 14 | 1 | 3 | 4 | 24 | 15 | 1 | 3 | 5 | 6 |
| 16 | 1 | 3 | 5 | 24 | 17 | 1 | 3 | 5 | 10 | 18 | 1 | 3 | 9 | 24 |
| 19 | 1 | 3 | 16 | 24 | 20 | 1 | 3 | 20 | 24 | 21 | 1 | 3 | 22 | 24 |
| 22 | 1 | 3 | 23 | 24 | 23 | 1 | 4 | 5 | 6 | 24 | 1 | 4 | 5 | 10 |
| 25 | 1 | 4 | 10 | 11 | 26 | 1 | 4 | 10 | 12 | 27 | 1 | 4 | 10 | 14 |
| 28 | 1 | 4 | 10 | 18 | 29 | 1 | 4 | 10 | 21 | 30 | 1 | 4 | 21 | 24 |
| 31 | 1 | 5 | 6 | 7 | 32 | 1 | 5 | 6 | 8 | 33 | 1 | 5 | 6 | 9 |
| 34 | 1 | 5 | 6 | 13 | 35 | 1 | 5 | 6 | 17 | 36 | 1 | 5 | 6 | 21 |
| 37 | 1 | 5 | 9 | 10 | 38 | 1 | 5 | 21 | 24 | 39 | 1 | 9 | 10 | 11 |
| 40 | 1 | 9 | 10 | 12 | 41 | 1 | 9 | 10 | 14 | 42 | 1 | 9 | 10 | 18 |
| 43 | 1 | 9 | 10 | 21 | 44 | 1 | 9 | 21 | 24 | 45 | 1 | 16 | 21 | 24 |
| 46 | 1 | 20 | 21 | 24 | 47 | 1 | 21 | 22 | 24 | 48 | 1 | 21 | 23 | 24 |
| 49 | 2 | 6 | 7 | 19 | 50 | 2 | 6 | 8 | 15 | 51 | 2 | 6 | 13 | 15 |
| 52 | 2 | 6 | 17 | 19 | 53 | 3 | 15 | 16 | 24 | 54 | 3 | 15 | 23 | 24 |

BIUS LILLE

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 3 | 19 | 20 | 24 | 56 | 3 | 19 | 22 | 24 | 57 | 4 | 10 | 11 | 19 |
| 58 | 4 | 10 | 12 | 15 | 59 | 4 | 10 | 14 | 15 | 60 | 4 | 10 | 18 | 19 |
| 61 | 5 | 6 | 7 | 19 | 62 | 5 | 6 | 8 | 15 | 63 | 5 | 6 | 13 | 15 |
| 64 | 5 | 6 | 17 | 19 | 65 | 6 | 7 | 8 | 15 | 66 | 6 | 7 | 8 | 19 |
| 67 | 6 | 7 | 11 | 19 | 68 | 6 | 7 | 13 | 15 | 69 | 6 | 7 | 13 | 19 |
| 70 | 6 | 7 | 18 | 19 | 71 | 6 | 7 | 19 | 20 | 72 | 6 | 7 | 19 | 22 |
| 73 | 6 | 8 | 12 | 15 | 74 | 6 | 8 | 14 | 15 | 75 | 6 | 8 | 15 | 16 |
| 76 | 6 | 8 | 15 | 17 | 77 | 6 | 8 | 15 | 23 | 78 | 6 | 8 | 17 | 19 |
| 79 | 6 | 11 | 17 | 19 | 80 | 6 | 12 | 13 | 15 | 81 | 6 | 13 | 14 | 15 |
| 82 | 6 | 13 | 15 | 16 | 83 | 6 | 13 | 15 | 17 | 84 | 6 | 13 | 15 | 23 |
| 85 | 6 | 13 | 17 | 19 | 86 | 6 | 17 | 18 | 19 | 87 | 6 | 17 | 19 | 20 |
| 88 | 6 | 17 | 19 | 22 | 89 | 7 | 10 | 11 | 19 | 90 | 7 | 10 | 18 | 19 |
| 91 | 7 | 19 | 20 | 24 | 92 | 7 | 19 | 22 | 24 | 93 | 8 | 10 | 12 | 15 |
| 94 | 8 | 10 | 14 | 15 | 95 | 8 | 15 | 16 | 24 | 96 | 8 | 15 | 23 | 24 |
| 97 | 9 | 10 | 11 | 19 | 98 | 9 | 10 | 12 | 15 | 99 | 9 | 10 | 14 | 15 |
| 100 | 9 | 10 | 18 | 19 | 101 | 10 | 11 | 12 | 15 | 102 | 10 | 11 | 12 | 19 |
| 103 | 10 | 11 | 14 | 15 | 104 | 10 | 11 | 14 | 19 | 105 | 10 | 11 | 17 | 19 |
| 106 | 10 | 11 | 19 | 20 | 107 | 10 | 11 | 19 | 22 | 108 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| 109 | 10 | 12 | 15 | 16 | 110 | 10 | 12 | 15 | 18 | 111 | 10 | 12 | 15 | 23 |
| 112 | 10 | 12 | 18 | 19 | 113 | 10 | 13 | 14 | 15 | 114 | 10 | 14 | 15 | 16 |
| 115 | 10 | 14 | 15 | 18 | 116 | 10 | 14 | 15 | 23 | 117 | 10 | 14 | 18 | 19 |
| 118 | 10 | 17 | 18 | 19 | 119 | 10 | 18 | 19 | 20 | 120 | 10 | 18 | 19 | 22 |
| 121 | 11 | 19 | 20 | 24 | 122 | 11 | 19 | 22 | 24 | 123 | 12 | 15 | 16 | 24 |
| 124 | 12 | 15 | 23 | 24 | 125 | 13 | 15 | 16 | 24 | 126 | 13 | 15 | 23 | 24 |
| 127 | 14 | 15 | 16 | 24 | 128 | 14 | 15 | 23 | 24 | 129 | 15 | 16 | 20 | 24 |
| 130 | 15 | 16 | 21 | 24 | 131 | 15 | 16 | 22 | 24 | 132 | 15 | 20 | 23 | 24 |
| 133 | 15 | 21 | 23 | 24 | 134 | 15 | 22 | 23 | 24 | 135 | 16 | 19 | 20 | 24 |
| 136 | 16 | 19 | 22 | 24 | 137 | 17 | 19 | 20 | 24 | 138 | 17 | 19 | 22 | 24 |
| 139 | 18 | 19 | 20 | 24 | 140 | 18 | 19 | 22 | 24 | 141 | 19 | 20 | 21 | 24 |
| 142 | 19 | 20 | 23 | 24 | 143 | 19 | 21 | 22 | 24 | 144 | 19 | 22 | 23 | 24 |

4

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 7 | 2 | 1 | 2 | 3 | 16 | 3 | 1 | 2 | 3 | 17 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 23 | 5 | 1 | 2 | 4 | 8 | 6 | 1 | 2 | 4 | 11 |
| 7 | 1 | 2 | 4 | 13 | 8 | 1 | 2 | 4 | 18 | 9 | 1 | 2 | 7 | 21 |
| 10 | 1 | 2 | 8 | 9 | 11 | 1 | 2 | 9 | 11 | 12 | 1 | 2 | 9 | 13 |
| 13 | 1 | 2 | 9 | 18 | 14 | 1 | 2 | 16 | 21 | 15 | 1 | 2 | 17 | 21 |
| 16 | 1 | 2 | 21 | 23 | 17 | 1 | 3 | 4 | 12 | 18 | 1 | 3 | 4 | 14 |
| 19 | 1 | 3 | 4 | 20 | 20 | 1 | 3 | 4 | 22 | 21 | 1 | 3 | 5 | 7 |
| 22 | 1 | 3 | 5 | 16 | 23 | 1 | 3 | 5 | 17 | 24 | 1 | 3 | 5 | 23 |
| 25 | 1 | 3 | 9 | 12 | 26 | 1 | 3 | 9 | 14 | 27 | 1 | 3 | 9 | 20 |
| 28 | 1 | 3 | 9 | 22 | 29 | 1 | 4 | 5 | 8 | 30 | 1 | 4 | 5 | 11 |
| 31 | 1 | 4 | 5 | 13 | 32 | 1 | 4 | 5 | 18 | 33 | 1 | 4 | 12 | 21 |
| 34 | 1 | 4 | 14 | 21 | 35 | 1 | 4 | 20 | 21 | 36 | 1 | 4 | 21 | 22 |
| 37 | 1 | 5 | 7 | 21 | 38 | 1 | 5 | 8 | 9 | 39 | 1 | 5 | 9 | 11 |
| 40 | 1 | 5 | 9 | 13 | 41 | 1 | 5 | 9 | 18 | 42 | 1 | 5 | 16 | 21 |
| 43 | 1 | 5 | 17 | 21 | 44 | 1 | 5 | 21 | 23 | 45 | 1 | 9 | 12 | 21 |
| 46 | 1 | 9 | 14 | 21 | 47 | 1 | 9 | 20 | 21 | 48 | 1 | 9 | 21 | 22 |
| 49 | 2 | 3 | 6 | 7 | 50 | 2 | 3 | 6 | 17 | 51 | 2 | 3 | 16 | 24 |
| 52 | 2 | 3 | 23 | 24 | 53 | 2 | 4 | 6 | 8 | 54 | 2 | 4 | 6 | 13 |
| 55 | 2 | 4 | 10 | 11 | 56 | 2 | 4 | 10 | 18 | 57 | 2 | 6 | 7 | 11 |
| 58 | 2 | 6 | 7 | 18 | 59 | 2 | 6 | 7 | 21 | 60 | 2 | 6 | 8 | 9 |
| 61 | 2 | 6 | 8 | 16 | 62 | 2 | 6 | 8 | 23 | 63 | 2 | 6 | 9 | 13 |
| 64 | 2 | 6 | 11 | 17 | 65 | 2 | 6 | 13 | 16 | 66 | 2 | 6 | 13 | 23 |
| 67 | 2 | 6 | 17 | 18 | 68 | 2 | 6 | 17 | 21 | 69 | 2 | 7 | 11 | 19 |
| 70 | 2 | 7 | 18 | 19 | 71 | 2 | 8 | 15 | 16 | 72 | 2 | 8 | 15 | 23 |
| 73 | 2 | 9 | 10 | 11 | 74 | 2 | 9 | 10 | 18 | 75 | 2 | 11 | 17 | 19 |
| 76 | 2 | 13 | 15 | 16 | 77 | 2 | 13 | 15 | 23 | 78 | 2 | 16 | 21 | 24 |
| 79 | 2 | 17 | 18 | 19 | 80 | 2 | 21 | 23 | 24 | 81 | 3 | 4 | 10 | 12 |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 82 | 3 | 4 | 10 | 14 | 83 | 3 | 4 | 20 | 24 | 84 | 3 | 4 | 22 | 24 |
| 85 | 3 | 5 | 6 | 7 | 86 | 3 | 5 | 6 | 17 | 87 | 3 | 5 | 16 | 24 |
| 88 | 3 | 5 | 23 | 24 | 89 | 3 | 7 | 19 | 20 | 90 | 3 | 7 | 19 | 22 |
| 91 | 3 | 7 | 20 | 24 | 92 | 3 | 7 | 22 | 24 | 93 | 3 | 9 | 10 | 12 |
| 94 | 3 | 9 | 10 | 14 | 95 | 3 | 9 | 20 | 24 | 96 | 3 | 9 | 22 | 24 |
| 97 | 3 | 12 | 15 | 16 | 98 | 3 | 12 | 15 | 23 | 99 | 3 | 12 | 16 | 24 |
| 100 | 3 | 12 | 23 | 24 | 101 | 3 | 14 | 15 | 16 | 102 | 3 | 14 | 15 | 23 |
| 103 | 3 | 14 | 16 | 24 | 104 | 3 | 14 | 23 | 24 | 105 | 3 | 17 | 19 | 20 |
| 106 | 3 | 17 | 19 | 22 | 107 | 3 | 17 | 20 | 24 | 108 | 3 | 17 | 22 | 24 |
| 109 | 4 | 5 | 6 | 8 | 110 | 4 | 5 | 6 | 13 | 111 | 4 | 5 | 10 | 11 |
| 112 | 4 | 5 | 10 | 18 | 113 | 4 | 8 | 10 | 12 | 114 | 4 | 8 | 10 | 14 |
| 115 | 4 | 8 | 12 | 15 | 116 | 4 | 8 | 14 | 15 | 117 | 4 | 10 | 11 | 20 |
| 118 | 4 | 10 | 11 | 22 | 119 | 4 | 10 | 12 | 13 | 120 | 4 | 10 | 12 | 21 |
| 121 | 4 | 10 | 13 | 14 | 122 | 4 | 10 | 14 | 21 | 123 | 4 | 10 | 18 | 20 |
| 124 | 4 | 10 | 18 | 22 | 125 | 4 | 11 | 19 | 20 | 126 | 4 | 11 | 19 | 22 |
| 127 | 4 | 12 | 13 | 15 | 128 | 4 | 13 | 14 | 15 | 129 | 4 | 18 | 19 | 20 |
| 130 | 4 | 18 | 19 | 22 | 131 | 4 | 20 | 21 | 24 | 132 | 4 | 21 | 22 | 24 |
| 133 | 5 | 6 | 7 | 11 | 134 | 5 | 6 | 7 | 18 | 135 | 5 | 6 | 7 | 21 |
| 136 | 5 | 6 | 8 | 9 | 137 | 5 | 6 | 8 | 16 | 138 | 5 | 6 | 8 | 23 |
| 139 | 5 | 6 | 9 | 13 | 140 | 5 | 6 | 11 | 17 | 141 | 5 | 6 | 13 | 16 |
| 142 | 5 | 6 | 13 | 23 | 143 | 5 | 6 | 17 | 18 | 144 | 5 | 6 | 17 | 21 |
| 145 | 5 | 7 | 11 | 19 | 146 | 5 | 7 | 18 | 19 | 147 | 5 | 8 | 15 | 16 |
| 148 | 5 | 8 | 15 | 23 | 149 | 5 | 9 | 10 | 11 | 150 | 5 | 9 | 10 | 18 |
| 151 | 5 | 11 | 17 | 19 | 152 | 5 | 13 | 15 | 16 | 153 | 5 | 13 | 15 | 23 |
| 154 | 5 | 16 | 21 | 24 | 155 | 5 | 17 | 18 | 19 | 156 | 5 | 21 | 23 | 24 |
| 157 | 6 | 7 | 8 | 12 | 158 | 6 | 7 | 8 | 14 | 159 | 6 | 7 | 8 | 20 |
| 160 | 6 | 7 | 8 | 22 | 161 | 6 | 7 | 12 | 13 | 162 | 6 | 7 | 13 | 14 |
| 163 | 6 | 7 | 13 | 20 | 164 | 6 | 7 | 13 | 22 | 165 | 6 | 8 | 12 | 17 |
| 166 | 6 | 8 | 14 | 17 | 167 | 6 | 8 | 17 | 20 | 168 | 6 | 8 | 17 | 22 |
| 169 | 6 | 12 | 13 | 17 | 170 | 6 | 13 | 14 | 17 | 171 | 6 | 13 | 17 | 20 |
| 172 | 6 | 13 | 17 | 22 | 173 | 7 | 8 | 12 | 15 | 174 | 7 | 8 | 14 | 15 |
| 175 | 7 | 8 | 19 | 20 | 176 | 7 | 8 | 19 | 22 | 177 | 7 | 10 | 11 | 12 |
| 178 | 7 | 10 | 11 | 14 | 179 | 7 | 10 | 12 | 18 | 180 | 7 | 10 | 14 | 18 |
| 181 | 7 | 11 | 12 | 19 | 182 | 7 | 11 | 14 | 19 | 183 | 7 | 12 | 13 | 15 |
| 184 | 7 | 12 | 18 | 19 | 185 | 7 | 13 | 14 | 15 | 186 | 7 | 13 | 19 | 20 |
| 187 | 7 | 13 | 19 | 22 | 188 | 7 | 14 | 18 | 19 | 189 | 7 | 19 | 20 | 21 |
| 190 | 7 | 19 | 21 | 22 | 191 | 7 | 20 | 21 | 24 | 192 | 7 | 21 | 22 | 24 |
| 193 | 8 | 9 | 10 | 12 | 194 | 8 | 9 | 10 | 14 | 195 | 8 | 9 | 12 | 15 |
| 196 | 8 | 9 | 14 | 15 | 197 | 8 | 12 | 15 | 17 | 198 | 8 | 14 | 15 | 17 |
| 199 | 8 | 15 | 16 | 20 | 200 | 8 | 15 | 16 | 22 | 201 | 8 | 15 | 20 | 23 |
| 202 | 8 | 15 | 22 | 23 | 203 | 8 | 16 | 20 | 24 | 204 | 8 | 16 | 22 | 24 |
| 205 | 8 | 17 | 19 | 20 | 206 | 8 | 17 | 19 | 22 | 207 | 8 | 20 | 23 | 24 |
| 208 | 8 | 22 | 23 | 24 | 209 | 9 | 10 | 11 | 20 | 210 | 9 | 10 | 11 | 22 |
| 211 | 9 | 10 | 12 | 13 | 212 | 9 | 10 | 12 | 21 | 213 | 9 | 10 | 13 | 14 |
| 214 | 9 | 10 | 14 | 21 | 215 | 9 | 10 | 18 | 20 | 216 | 9 | 10 | 18 | 22 |
| 217 | 9 | 11 | 19 | 20 | 218 | 9 | 11 | 19 | 22 | 219 | 9 | 12 | 13 | 15 |
| 220 | 9 | 13 | 14 | 15 | 221 | 9 | 18 | 19 | 20 | 222 | 9 | 18 | 19 | 22 |
| 223 | 9 | 20 | 21 | 24 | 224 | 9 | 21 | 22 | 24 | 225 | 10 | 11 | 12 | 16 |
| 226 | 10 | 11 | 12 | 17 | 227 | 10 | 11 | 12 | 23 | 228 | 10 | 11 | 14 | 16 |
| 229 | 10 | 11 | 14 | 17 | 230 | 10 | 11 | 14 | 23 | 231 | 10 | 12 | 16 | 18 |
| 232 | 10 | 12 | 17 | 18 | 233 | 10 | 12 | 18 | 23 | 234 | 10 | 14 | 16 | 18 |
| 235 | 10 | 14 | 17 | 18 | 236 | 10 | 14 | 18 | 23 | 237 | 11 | 12 | 15 | 16 |
| 238 | 11 | 12 | 15 | 23 | 239 | 11 | 12 | 17 | 19 | 240 | 11 | 14 | 15 | 16 |
| 241 | 11 | 14 | 15 | 23 | 242 | 11 | 14 | 17 | 19 | 243 | 11 | 16 | 19 | 20 |
| 244 | 11 | 16 | 19 | 22 | 245 | 11 | 16 | 20 | 24 | 246 | 11 | 16 | 22 | 24 |
| 247 | 11 | 19 | 20 | 23 | 248 | 11 | 19 | 22 | 23 | 249 | 11 | 20 | 23 | 24 |
| 250 | 11 | 22 | 23 | 24 | 251 | 12 | 13 | 15 | 17 | 252 | 12 | 15 | 16 | 18 |
| 253 | 12 | 15 | 16 | 21 | 254 | 12 | 15 | 18 | 23 | 255 | 12 | 15 | 21 | 23 |
| 256 | 12 | 16 | 21 | 24 | 257 | 12 | 17 | 18 | 19 | 258 | 12 | 21 | 23 | 24 |
| 259 | 13 | 14 | 15 | 17 | 260 | 13 | 15 | 16 | 20 | 261 | 13 | 15 | 16 | 22 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 262 | 13 | 15 | 20 | 23 |
| 265 | 13 | 16 | 22 | 24 |
| 268 | 13 | 20 | 23 | 24 |
| 271 | 14 | 15 | 16 | 21 |
| 274 | 14 | 16 | 21 | 24 |
| 277 | 16 | 18 | 19 | 20 |
| 280 | 16 | 18 | 22 | 24 |
| 283 | 17 | 20 | 21 | 24 |
| 286 | 18 | 19 | 22 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 263 | 13 | 15 | 22 | 23 |
| 266 | 13 | 17 | 19 | 20 |
| 269 | 13 | 22 | 23 | 24 |
| 272 | 14 | 15 | 18 | 23 |
| 275 | 14 | 17 | 18 | 19 |
| 278 | 16 | 18 | 19 | 22 |
| 281 | 17 | 19 | 20 | 21 |
| 284 | 17 | 21 | 22 | 24 |
| 287 | 18 | 20 | 23 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 264 | 13 | 16 | 20 | 24 |
| 267 | 13 | 17 | 19 | 22 |
| 270 | 14 | 15 | 16 | 18 |
| 273 | 14 | 15 | 21 | 23 |
| 276 | 14 | 21 | 23 | 24 |
| 279 | 16 | 18 | 20 | 24 |
| 282 | 17 | 19 | 21 | 22 |
| 285 | 18 | 19 | 20 | 23 |
| 288 | 18 | 22 | 23 | 24 |

5

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 8 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 22 |
| 7 | 1 | 2 | 4 | 14 |
| 10 | 1 | 2 | 8 | 21 |
| 13 | 1 | 2 | 9 | 17 |
| 16 | 1 | 2 | 21 | 22 |
| 19 | 1 | 3 | 4 | 18 |
| 22 | 1 | 3 | 5 | 13 |
| 25 | 1 | 3 | 9 | 11 |
| 28 | 1 | 3 | 9 | 23 |
| 31 | 1 | 4 | 5 | 14 |
| 34 | 1 | 4 | 16 | 21 |
| 37 | 1 | 5 | 7 | 9 |
| 40 | 1 | 5 | 9 | 14 |
| 43 | 1 | 5 | 20 | 21 |
| 46 | 1 | 9 | 16 | 21 |
| 49 | 2 | 3 | 6 | 8 |
| 52 | 2 | 3 | 22 | 24 |
| 55 | 2 | 4 | 10 | 12 |
| 58 | 2 | 6 | 7 | 20 |
| 61 | 2 | 6 | 8 | 14 |
| 64 | 2 | 6 | 12 | 13 |
| 67 | 2 | 6 | 17 | 20 |
| 70 | 2 | 7 | 19 | 22 |
| 73 | 2 | 9 | 10 | 12 |
| 76 | 2 | 13 | 14 | 15 |
| 79 | 2 | 20 | 21 | 24 |
| 82 | 3 | 4 | 10 | 18 |
| 85 | 3 | 5 | 6 | 8 |
| 88 | 3 | 5 | 22 | 24 |
| 91 | 3 | 8 | 16 | 24 |
| 94 | 3 | 9 | 10 | 18 |
| 97 | 3 | 11 | 19 | 20 |
| 100 | 3 | 11 | 22 | 24 |
| 103 | 3 | 13 | 16 | 24 |
| 106 | 3 | 18 | 19 | 22 |
| 109 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 112 | 4 | 5 | 10 | 14 |
| 115 | 4 | 7 | 11 | 19 |
| 118 | 4 | 10 | 11 | 21 |
| 121 | 4 | 10 | 14 | 16 |
| 124 | 4 | 10 | 18 | 21 |
| 127 | 4 | 12 | 15 | 23 |
| 130 | 4 | 16 | 21 | 24 |
| 133 | 5 | 6 | 7 | 9 |
| 136 | 5 | 6 | 8 | 12 |
| 139 | 5 | 6 | 9 | 17 |
| 142 | 5 | 6 | 13 | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | 3 | 13 |
| 5 | 1 | 2 | 4 | 7 |
| 8 | 1 | 2 | 4 | 17 |
| 11 | 1 | 2 | 9 | 12 |
| 14 | 1 | 2 | 13 | 21 |
| 17 | 1 | 3 | 4 | 11 |
| 20 | 1 | 3 | 4 | 23 |
| 23 | 1 | 3 | 5 | 20 |
| 26 | 1 | 3 | 9 | 16 |
| 29 | 1 | 4 | 5 | 7 |
| 32 | 1 | 4 | 5 | 17 |
| 35 | 1 | 4 | 18 | 21 |
| 38 | 1 | 5 | 8 | 21 |
| 41 | 1 | 5 | 9 | 17 |
| 44 | 1 | 5 | 21 | 22 |
| 47 | 1 | 9 | 18 | 21 |
| 50 | 2 | 3 | 6 | 13 |
| 53 | 2 | 4 | 6 | 7 |
| 56 | 2 | 4 | 10 | 14 |
| 59 | 2 | 6 | 7 | 22 |
| 62 | 2 | 6 | 8 | 21 |
| 65 | 2 | 6 | 13 | 14 |
| 68 | 2 | 6 | 17 | 22 |
| 71 | 2 | 8 | 12 | 15 |
| 74 | 2 | 9 | 10 | 14 |
| 77 | 2 | 17 | 19 | 20 |
| 80 | 2 | 21 | 22 | 24 |
| 83 | 3 | 4 | 16 | 24 |
| 86 | 3 | 5 | 6 | 13 |
| 89 | 3 | 8 | 15 | 16 |
| 92 | 3 | 8 | 23 | 24 |
| 95 | 3 | 9 | 16 | 24 |
| 98 | 3 | 11 | 19 | 22 |
| 101 | 3 | 13 | 15 | 16 |
| 104 | 3 | 13 | 23 | 24 |
| 107 | 3 | 18 | 20 | 24 |
| 110 | 4 | 5 | 6 | 17 |
| 113 | 4 | 7 | 10 | 11 |
| 116 | 4 | 7 | 18 | 19 |
| 119 | 4 | 10 | 12 | 16 |
| 122 | 4 | 10 | 14 | 23 |
| 125 | 4 | 11 | 17 | 19 |
| 128 | 4 | 14 | 15 | 16 |
| 131 | 4 | 17 | 18 | 19 |
| 134 | 5 | 6 | 7 | 20 |
| 137 | 5 | 6 | 8 | 14 |
| 140 | 5 | 6 | 12 | 13 |
| 143 | 5 | 6 | 17 | 20 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 | 3 | 20 |
| 6 | 1 | 2 | 4 | 12 |
| 9 | 1 | 2 | 7 | 9 |
| 12 | 1 | 2 | 9 | 14 |
| 15 | 1 | 2 | 20 | 21 |
| 18 | 1 | 3 | 4 | 16 |
| 21 | 1 | 3 | 5 | 8 |
| 24 | 1 | 3 | 5 | 22 |
| 27 | 1 | 3 | 9 | 18 |
| 30 | 1 | 4 | 5 | 12 |
| 33 | 1 | 4 | 11 | 21 |
| 36 | 1 | 4 | 21 | 23 |
| 39 | 1 | 5 | 9 | 12 |
| 42 | 1 | 5 | 13 | 21 |
| 45 | 1 | 9 | 11 | 21 |
| 48 | 1 | 9 | 21 | 23 |
| 51 | 2 | 3 | 20 | 24 |
| 54 | 2 | 4 | 6 | 17 |
| 57 | 2 | 6 | 7 | 9 |
| 60 | 2 | 6 | 8 | 12 |
| 63 | 2 | 6 | 9 | 17 |
| 66 | 2 | 6 | 13 | 21 |
| 69 | 2 | 7 | 19 | 20 |
| 72 | 2 | 8 | 14 | 15 |
| 75 | 2 | 12 | 13 | 15 |
| 78 | 2 | 17 | 19 | 22 |
| 81 | 3 | 4 | 10 | 11 |
| 84 | 3 | 4 | 23 | 24 |
| 87 | 3 | 5 | 20 | 24 |
| 90 | 3 | 8 | 15 | 23 |
| 93 | 3 | 9 | 10 | 11 |
| 96 | 3 | 9 | 23 | 24 |
| 99 | 3 | 11 | 20 | 24 |
| 102 | 3 | 13 | 15 | 23 |
| 105 | 3 | 18 | 19 | 20 |
| 108 | 3 | 18 | 22 | 24 |
| 111 | 4 | 5 | 10 | 12 |
| 114 | 4 | 7 | 10 | 18 |
| 117 | 4 | 10 | 11 | 17 |
| 120 | 4 | 10 | 12 | 23 |
| 123 | 4 | 10 | 17 | 18 |
| 126 | 4 | 12 | 15 | 16 |
| 129 | 4 | 14 | 15 | 23 |
| 132 | 4 | 21 | 23 | 24 |
| 135 | 5 | 6 | 7 | 22 |
| 138 | 5 | 6 | 8 | 21 |
| 141 | 5 | 6 | 13 | 14 |
| 144 | 5 | 6 | 17 | 22 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 145 | 5 | 7 | 19 | 20 |
| 148 | 5 | 8 | 14 | 15 |
| 151 | 5 | 12 | 13 | 15 |
| 154 | 5 | 17 | 19 | 22 |
| 157 | 6 | 7 | 8 | 11 |
| 160 | 6 | 7 | 8 | 23 |
| 163 | 6 | 7 | 13 | 18 |
| 166 | 6 | 8 | 16 | 17 |
| 169 | 6 | 11 | 13 | 17 |
| 172 | 6 | 13 | 17 | 23 |
| 175 | 7 | 8 | 15 | 23 |
| 178 | 7 | 9 | 10 | 18 |
| 181 | 7 | 11 | 13 | 19 |
| 184 | 7 | 13 | 18 | 19 |
| 187 | 7 | 16 | 20 | 24 |
| 190 | 7 | 19 | 22 | 23 |
| 193 | 8 | 10 | 11 | 12 |
| 196 | 8 | 10 | 14 | 18 |
| 199 | 8 | 11 | 17 | 19 |
| 202 | 8 | 15 | 16 | 17 |
| 205 | 8 | 15 | 21 | 23 |
| 208 | 8 | 21 | 23 | 24 |
| 211 | 9 | 10 | 12 | 16 |
| 214 | 9 | 10 | 14 | 23 |
| 217 | 9 | 11 | 17 | 19 |
| 220 | 9 | 14 | 15 | 16 |
| 223 | 9 | 17 | 18 | 19 |
| 226 | 10 | 11 | 12 | 20 |
| 229 | 10 | 11 | 14 | 20 |
| 232 | 10 | 12 | 18 | 20 |
| 235 | 10 | 14 | 18 | 20 |
| 238 | 11 | 12 | 19 | 20 |
| 241 | 11 | 13 | 17 | 19 |
| 244 | 11 | 19 | 20 | 21 |
| 247 | 11 | 21 | 22 | 24 |
| 250 | 12 | 15 | 16 | 22 |
| 253 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| 256 | 12 | 18 | 19 | 22 |
| 259 | 13 | 14 | 15 | 18 |
| 262 | 13 | 15 | 17 | 23 |
| 265 | 13 | 17 | 18 | 19 |
| 268 | 14 | 15 | 16 | 22 |
| 271 | 14 | 16 | 20 | 24 |
| 274 | 14 | 18 | 19 | 22 |
| 277 | 16 | 17 | 19 | 20 |
| 280 | 16 | 17 | 22 | 24 |
| 283 | 17 | 20 | 23 | 24 |
| 286 | 18 | 19 | 21 | 22 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 146 | 5 | 7 | 19 | 22 |
| 149 | 5 | 9 | 10 | 12 |
| 152 | 5 | 13 | 14 | 15 |
| 155 | 5 | 20 | 21 | 24 |
| 158 | 6 | 7 | 8 | 16 |
| 161 | 6 | 7 | 11 | 13 |
| 164 | 6 | 7 | 13 | 23 |
| 167 | 6 | 8 | 17 | 18 |
| 170 | 6 | 13 | 16 | 17 |
| 173 | 7 | 8 | 11 | 19 |
| 176 | 7 | 8 | 18 | 19 |
| 179 | 7 | 9 | 11 | 19 |
| 182 | 7 | 13 | 15 | 16 |
| 185 | 7 | 16 | 19 | 20 |
| 188 | 7 | 16 | 22 | 24 |
| 191 | 7 | 20 | 23 | 24 |
| 194 | 8 | 10 | 11 | 14 |
| 197 | 8 | 11 | 12 | 15 |
| 200 | 8 | 12 | 15 | 18 |
| 203 | 8 | 15 | 16 | 21 |
| 206 | 8 | 16 | 21 | 24 |
| 209 | 9 | 10 | 11 | 17 |
| 212 | 9 | 10 | 12 | 23 |
| 215 | 9 | 10 | 17 | 18 |
| 218 | 9 | 12 | 15 | 16 |
| 221 | 9 | 14 | 15 | 23 |
| 224 | 9 | 21 | 23 | 24 |
| 227 | 10 | 11 | 12 | 22 |
| 230 | 10 | 11 | 14 | 22 |
| 233 | 10 | 12 | 18 | 22 |
| 236 | 10 | 14 | 18 | 22 |
| 239 | 11 | 12 | 19 | 22 |
| 242 | 11 | 14 | 19 | 20 |
| 245 | 11 | 19 | 21 | 22 |
| 248 | 12 | 13 | 15 | 18 |
| 251 | 12 | 15 | 20 | 23 |
| 254 | 12 | 16 | 22 | 24 |
| 257 | 12 | 20 | 23 | 24 |
| 260 | 13 | 15 | 16 | 17 |
| 263 | 13 | 15 | 21 | 23 |
| 266 | 13 | 21 | 23 | 24 |
| 269 | 14 | 15 | 20 | 23 |
| 272 | 14 | 16 | 22 | 24 |
| 275 | 14 | 20 | 23 | 24 |
| 278 | 16 | 17 | 15 | 22 |
| 281 | 17 | 19 | 20 | 23 |
| 284 | 17 | 22 | 23 | 24 |
| 287 | 18 | 20 | 21 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 147 | 5 | 8 | 12 | 15 |
| 150 | 5 | 9 | 10 | 14 |
| 153 | 5 | 17 | 19 | 20 |
| 156 | 5 | 21 | 22 | 24 |
| 159 | 6 | 7 | 8 | 18 |
| 162 | 6 | 7 | 13 | 16 |
| 165 | 6 | 8 | 11 | 17 |
| 168 | 6 | 8 | 17 | 23 |
| 171 | 6 | 13 | 17 | 18 |
| 174 | 7 | 8 | 15 | 16 |
| 177 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| 180 | 7 | 9 | 18 | 19 |
| 183 | 7 | 13 | 15 | 23 |
| 186 | 7 | 16 | 19 | 22 |
| 189 | 7 | 19 | 20 | 23 |
| 192 | 7 | 22 | 23 | 24 |
| 195 | 8 | 10 | 12 | 18 |
| 198 | 8 | 11 | 14 | 15 |
| 201 | 8 | 14 | 15 | 18 |
| 204 | 8 | 15 | 17 | 23 |
| 207 | 8 | 17 | 18 | 19 |
| 210 | 9 | 10 | 11 | 21 |
| 213 | 9 | 10 | 14 | 16 |
| 216 | 9 | 10 | 18 | 21 |
| 219 | 9 | 12 | 15 | 23 |
| 222 | 9 | 16 | 21 | 24 |
| 225 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 228 | 10 | 11 | 13 | 14 |
| 231 | 10 | 12 | 13 | 18 |
| 234 | 10 | 13 | 14 | 18 |
| 237 | 11 | 12 | 13 | 15 |
| 240 | 11 | 13 | 14 | 15 |
| 243 | 11 | 14 | 19 | 22 |
| 246 | 11 | 20 | 21 | 24 |
| 249 | 12 | 15 | 16 | 20 |
| 252 | 12 | 15 | 22 | 23 |
| 255 | 12 | 18 | 19 | 20 |
| 258 | 12 | 22 | 23 | 24 |
| 261 | 13 | 15 | 16 | 21 |
| 264 | 13 | 16 | 21 | 24 |
| 267 | 14 | 15 | 16 | 20 |
| 270 | 14 | 15 | 22 | 23 |
| 273 | 14 | 18 | 19 | 20 |
| 276 | 14 | 22 | 23 | 24 |
| 279 | 16 | 17 | 20 | 24 |
| 282 | 17 | 19 | 22 | 23 |
| 285 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| 288 | 18 | 21 | 22 | 24 |

6

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 9 |
| 4 | 1 | 5 | 9 | 21 |
| 7 | 3 | 16 | 20 | 24 |
| 10 | 4 | 10 | 14 | 18 |
| 13 | 7 | 11 | 19 | 22 |
| 16 | 8 | 14 | 15 | 16 |
| 19 | 11 | 17 | 19 | 20 |
| 22 | 16 | 21 | 22 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | 4 | 21 |
| 5 | 2 | 6 | 7 | 8 |
| 8 | 3 | 22 | 23 | 24 |
| 11 | 5 | 6 | 7 | 13 |
| 14 | 7 | 18 | 19 | 20 |
| 17 | 9 | 10 | 11 | 14 |
| 20 | 12 | 13 | 15 | 16 |
| 23 | 17 | 18 | 19 | 22 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 2 | 6 | 13 | 17 |
| 9 | 4 | 10 | 11 | 12 |
| 12 | 5 | 6 | 8 | 17 |
| 15 | 8 | 12 | 15 | 23 |
| 18 | 9 | 10 | 12 | 18 |
| 21 | 13 | 14 | 15 | 23 |
| 24 | 20 | 21 | 23 | 24 |

7

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 10 | 2 | 1 | 2 | 4 | 24 | 3 | 1 | 2 | 9 | 24 |
| 4 | 1 | 2 | 10 | 21 | 5 | 1 | 3 | 4 | 6 | 6 | 1 | 3 | 5 | 10 |
| 7 | 1 | 3 | 6 | 9 | 8 | 1 | 4 | 5 | 24 | 9 | 1 | 4 | 6 | 21 |
| 10 | 1 | 5 | 9 | 24 | 11 | 1 | 5 | 10 | 21 | 12 | 1 | 6 | 7 | 8 |
| 13 | 1 | 6 | 7 | 13 | 14 | 1 | 6 | 8 | 17 | 15 | 1 | 6 | 9 | 21 |
| 16 | 1 | 6 | 13 | 17 | 17 | 1 | 10 | 11 | 12 | 18 | 1 | 10 | 11 | 14 |
| 19 | 1 | 10 | 12 | 18 | 20 | 1 | 10 | 14 | 18 | 21 | 1 | 16 | 20 | 24 |
| 22 | 1 | 16 | 22 | 24 | 23 | 1 | 20 | 23 | 24 | 24 | 1 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 2 | 6 | 7 | 15 | 26 | 2 | 6 | 8 | 19 | 27 | 2 | 6 | 13 | 19 |
| 28 | 2 | 6 | 15 | 17 | 29 | 3 | 15 | 20 | 24 | 30 | 3 | 15 | 22 | 24 |
| 31 | 3 | 16 | 19 | 24 | 32 | 3 | 19 | 23 | 24 | 33 | 4 | 10 | 11 | 15 |
| 34 | 4 | 10 | 12 | 19 | 35 | 4 | 10 | 14 | 19 | 36 | 4 | 10 | 15 | 18 |
| 37 | 5 | 6 | 7 | 15 | 38 | 5 | 6 | 8 | 19 | 39 | 5 | 6 | 13 | 19 |
| 40 | 5 | 6 | 15 | 17 | 41 | 6 | 11 | 19 | 20 | 42 | 6 | 11 | 19 | 22 |
| 43 | 6 | 12 | 15 | 16 | 44 | 6 | 12 | 15 | 23 | 45 | 6 | 14 | 15 | 16 |
| 46 | 6 | 14 | 15 | 23 | 47 | 6 | 18 | 19 | 20 | 48 | 6 | 18 | 19 | 22 |
| 49 | 7 | 10 | 19 | 20 | 50 | 7 | 10 | 19 | 22 | 51 | 7 | 11 | 19 | 24 |
| 52 | 7 | 18 | 19 | 24 | 53 | 8 | 10 | 15 | 16 | 54 | 8 | 10 | 15 | 23 |
| 55 | 8 | 12 | 15 | 24 | 56 | 8 | 14 | 15 | 24 | 57 | 9 | 10 | 11 | 15 |
| 58 | 9 | 10 | 12 | 19 | 59 | 9 | 10 | 14 | 19 | 60 | 9 | 10 | 15 | 18 |
| 61 | 10 | 13 | 15 | 16 | 62 | 10 | 13 | 15 | 23 | 63 | 10 | 17 | 19 | 20 |
| 64 | 10 | 17 | 19 | 22 | 65 | 11 | 17 | 19 | 24 | 66 | 12 | 13 | 15 | 24 |
| 67 | 13 | 14 | 15 | 24 | 68 | 15 | 20 | 21 | 24 | 69 | 15 | 21 | 22 | 24 |
| 70 | 16 | 19 | 21 | 24 | 71 | 17 | 18 | 19 | 24 | 72 | 19 | 21 | 23 | 24 |

8

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 11 | 2 | 1 | 2 | 3 | 12 | 3 | 1 | 2 | 3 | 14 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 18 | 5 | 1 | 2 | 4 | 16 | 6 | 1 | 2 | 4 | 20 |
| 7 | 1 | 2 | 4 | 22 | 8 | 1 | 2 | 4 | 23 | 9 | 1 | 2 | 9 | 16 |
| 10 | 1 | 2 | 9 | 20 | 11 | 1 | 2 | 9 | 22 | 12 | 1 | 2 | 9 | 23 |
| 13 | 1 | 2 | 11 | 21 | 14 | 1 | 2 | 12 | 21 | 15 | 1 | 2 | 14 | 21 |
| 16 | 1 | 2 | 18 | 21 | 17 | 1 | 3 | 4 | 7 | 18 | 1 | 3 | 4 | 8 |
| 19 | 1 | 3 | 4 | 13 | 20 | 1 | 3 | 4 | 17 | 21 | 1 | 3 | 5 | 11 |
| 22 | 1 | 3 | 5 | 12 | 23 | 1 | 3 | 5 | 14 | 24 | 1 | 3 | 5 | 18 |
| 25 | 1 | 3 | 7 | 9 | 26 | 1 | 3 | 8 | 9 | 27 | 1 | 3 | 9 | 13 |
| 28 | 1 | 3 | 9 | 17 | 29 | 1 | 4 | 5 | 16 | 30 | 1 | 4 | 5 | 20 |
| 31 | 1 | 4 | 5 | 22 | 32 | 1 | 4 | 5 | 23 | 33 | 1 | 4 | 7 | 21 |
| 34 | 1 | 4 | 8 | 21 | 35 | 1 | 4 | 13 | 21 | 36 | 1 | 4 | 17 | 21 |
| 37 | 1 | 5 | 9 | 16 | 38 | 1 | 5 | 9 | 20 | 39 | 1 | 5 | 9 | 22 |
| 40 | 1 | 5 | 9 | 23 | 41 | 1 | 5 | 11 | 21 | 42 | 1 | 5 | 12 | 21 |
| 43 | 1 | 5 | 14 | 21 | 44 | 1 | 5 | 18 | 21 | 45 | 1 | 7 | 9 | 21 |
| 46 | 1 | 8 | 9 | 21 | 47 | 1 | 9 | 13 | 21 | 48 | 1 | 9 | 17 | 21 |
| 49 | 2 | 6 | 7 | 12 | 50 | 2 | 6 | 7 | 14 | 51 | 2 | 6 | 7 | 16 |
| 52 | 2 | 6 | 7 | 23 | 53 | 2 | 6 | 8 | 11 | 54 | 2 | 6 | 8 | 18 |
| 55 | 2 | 6 | 8 | 20 | 56 | 2 | 6 | 8 | 22 | 57 | 2 | 6 | 11 | 13 |
| 58 | 2 | 6 | 12 | 17 | 59 | 2 | 6 | 13 | 18 | 60 | 2 | 6 | 13 | 20 |
| 61 | 2 | 6 | 13 | 22 | 62 | 2 | 6 | 14 | 17 | 63 | 2 | 6 | 16 | 17 |
| 64 | 2 | 6 | 17 | 23 | 65 | 2 | 10 | 11 | 12 | 66 | 2 | 10 | 11 | 14 |
| 67 | 2 | 10 | 12 | 18 | 68 | 2 | 10 | 14 | 18 | 69 | 2 | 11 | 19 | 20 |
| 70 | 2 | 11 | 19 | 22 | 71 | 2 | 12 | 15 | 16 | 72 | 2 | 12 | 15 | 23 |
| 73 | 2 | 14 | 15 | 16 | 74 | 2 | 14 | 15 | 23 | 75 | 2 | 16 | 20 | 24 |
| 76 | 2 | 16 | 22 | 24 | 77 | 2 | 18 | 19 | 20 | 78 | 2 | 18 | 19 | 22 |
| 79 | 2 | 20 | 23 | 24 | 80 | 2 | 22 | 23 | 24 | 81 | 3 | 6 | 7 | 8 |
| 82 | 3 | 6 | 7 | 13 | 83 | 3 | 6 | 8 | 17 | 84 | 3 | 6 | 13 | 17 |
| 85 | 3 | 7 | 11 | 19 | 86 | 3 | 7 | 16 | 24 | 87 | 3 | 7 | 18 | 19 |
| 88 | 3 | 7 | 23 | 24 | 89 | 3 | 8 | 12 | 15 | 90 | 3 | 8 | 14 | 15 |
| 91 | 3 | 8 | 20 | 24 | 92 | 3 | 8 | 22 | 24 | 93 | 3 | 10 | 11 | 12 |
| 94 | 3 | 10 | 11 | 14 | 95 | 3 | 10 | 12 | 18 | 96 | 3 | 10 | 14 | 18 |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 97 | 3 | 11 | 16 | 24 | 98 | 3 | 11 | 17 | 19 | 99 | 3 | 11 | 23 | 24 |
| 100 | 3 | 12 | 13 | 15 | 101 | 3 | 12 | 20 | 24 | 102 | 3 | 12 | 22 | 24 |
| 103 | 3 | 13 | 14 | 15 | 104 | 3 | 13 | 20 | 24 | 105 | 3 | 13 | 22 | 24 |
| 106 | 3 | 14 | 20 | 24 | 107 | 3 | 14 | 22 | 24 | 108 | 3 | 16 | 17 | 24 |
| 109 | 3 | 16 | 18 | 24 | 110 | 3 | 17 | 18 | 19 | 111 | 3 | 17 | 23 | 24 |
| 112 | 3 | 18 | 23 | 24 | 113 | 4 | 6 | 7 | 8 | 114 | 4 | 6 | 7 | 13 |
| 115 | 4 | 6 | 8 | 17 | 116 | 4 | 6 | 13 | 17 | 117 | 4 | 7 | 10 | 12 |
| 118 | 4 | 7 | 10 | 14 | 119 | 4 | 7 | 19 | 20 | 120 | 4 | 7 | 19 | 22 |
| 121 | 4 | 8 | 10 | 11 | 122 | 4 | 8 | 10 | 18 | 123 | 4 | 8 | 15 | 16 |
| 124 | 4 | 8 | 15 | 23 | 125 | 4 | 10 | 11 | 13 | 126 | 4 | 10 | 11 | 16 |
| 127 | 4 | 10 | 11 | 23 | 128 | 4 | 10 | 12 | 17 | 129 | 4 | 10 | 12 | 20 |
| 130 | 4 | 10 | 12 | 22 | 131 | 4 | 10 | 13 | 18 | 132 | 4 | 10 | 14 | 17 |
| 133 | 4 | 10 | 14 | 20 | 134 | 4 | 10 | 14 | 22 | 135 | 4 | 10 | 16 | 18 |
| 136 | 4 | 10 | 18 | 23 | 137 | 4 | 13 | 15 | 16 | 138 | 4 | 13 | 15 | 23 |
| 139 | 4 | 16 | 20 | 24 | 140 | 4 | 16 | 22 | 24 | 141 | 4 | 17 | 19 | 20 |
| 142 | 4 | 17 | 19 | 22 | 143 | 4 | 20 | 23 | 24 | 144 | 4 | 22 | 23 | 24 |
| 145 | 5 | 6 | 7 | 12 | 146 | 5 | 6 | 7 | 14 | 147 | 5 | 6 | 7 | 16 |
| 148 | 5 | 6 | 7 | 23 | 149 | 5 | 6 | 8 | 11 | 150 | 5 | 6 | 8 | 18 |
| 151 | 5 | 6 | 8 | 20 | 152 | 5 | 6 | 8 | 22 | 153 | 5 | 6 | 11 | 13 |
| 154 | 5 | 6 | 12 | 17 | 155 | 5 | 6 | 13 | 18 | 156 | 5 | 6 | 13 | 20 |
| 157 | 5 | 6 | 13 | 22 | 158 | 5 | 6 | 14 | 17 | 159 | 5 | 6 | 16 | 17 |
| 160 | 5 | 6 | 17 | 23 | 161 | 5 | 10 | 11 | 12 | 162 | 5 | 10 | 11 | 14 |
| 163 | 5 | 10 | 12 | 18 | 164 | 5 | 10 | 14 | 18 | 165 | 5 | 11 | 19 | 20 |
| 166 | 5 | 11 | 19 | 22 | 167 | 5 | 12 | 15 | 16 | 168 | 5 | 12 | 15 | 23 |
| 169 | 5 | 14 | 15 | 16 | 170 | 5 | 14 | 15 | 23 | 171 | 5 | 16 | 20 | 24 |
| 172 | 5 | 16 | 22 | 24 | 173 | 5 | 18 | 19 | 20 | 174 | 5 | 18 | 19 | 22 |
| 175 | 5 | 20 | 23 | 24 | 176 | 5 | 22 | 23 | 24 | 177 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 178 | 6 | 7 | 8 | 21 | 179 | 6 | 7 | 9 | 13 | 180 | 6 | 7 | 13 | 21 |
| 181 | 6 | 8 | 9 | 17 | 182 | 6 | 8 | 17 | 21 | 183 | 6 | 9 | 13 | 17 |
| 184 | 6 | 13 | 17 | 21 | 185 | 7 | 9 | 10 | 12 | 186 | 7 | 9 | 10 | 14 |
| 187 | 7 | 9 | 19 | 20 | 188 | 7 | 9 | 19 | 22 | 189 | 7 | 11 | 16 | 19 |
| 190 | 7 | 11 | 19 | 21 | 191 | 7 | 11 | 19 | 23 | 192 | 7 | 12 | 15 | 16 |
| 193 | 7 | 12 | 15 | 23 | 194 | 7 | 12 | 19 | 20 | 195 | 7 | 12 | 19 | 22 |
| 196 | 7 | 14 | 15 | 16 | 197 | 7 | 14 | 15 | 23 | 198 | 7 | 14 | 19 | 20 |
| 199 | 7 | 14 | 19 | 22 | 200 | 7 | 16 | 18 | 19 | 201 | 7 | 16 | 21 | 24 |
| 202 | 7 | 18 | 19 | 21 | 203 | 7 | 18 | 19 | 23 | 204 | 7 | 21 | 23 | 24 |
| 205 | 8 | 9 | 10 | 11 | 206 | 8 | 9 | 10 | 18 | 207 | 8 | 9 | 15 | 16 |
| 208 | 8 | 9 | 15 | 23 | 209 | 8 | 11 | 15 | 16 | 210 | 8 | 11 | 15 | 23 |
| 211 | 8 | 11 | 19 | 20 | 212 | 8 | 11 | 19 | 22 | 213 | 8 | 12 | 15 | 20 |
| 214 | 8 | 12 | 15 | 21 | 215 | 8 | 12 | 15 | 22 | 216 | 8 | 14 | 15 | 20 |
| 217 | 8 | 14 | 15 | 21 | 218 | 8 | 14 | 15 | 22 | 219 | 8 | 15 | 16 | 18 |
| 220 | 8 | 15 | 18 | 23 | 221 | 8 | 18 | 19 | 20 | 222 | 8 | 18 | 19 | 22 |
| 223 | 8 | 20 | 21 | 24 | 224 | 8 | 21 | 22 | 24 | 225 | 9 | 10 | 11 | 13 |
| 226 | 9 | 10 | 11 | 16 | 227 | 9 | 10 | 11 | 23 | 228 | 9 | 10 | 12 | 17 |
| 229 | 9 | 10 | 12 | 20 | 230 | 9 | 10 | 12 | 22 | 231 | 9 | 10 | 13 | 18 |
| 232 | 9 | 10 | 14 | 17 | 233 | 9 | 10 | 14 | 20 | 234 | 9 | 10 | 14 | 22 |
| 235 | 9 | 10 | 16 | 18 | 236 | 9 | 10 | 18 | 23 | 237 | 9 | 13 | 15 | 16 |
| 238 | 9 | 13 | 15 | 23 | 239 | 9 | 16 | 20 | 24 | 240 | 9 | 16 | 22 | 24 |
| 241 | 9 | 17 | 19 | 20 | 242 | 9 | 17 | 19 | 22 | 243 | 9 | 20 | 23 | 24 |
| 244 | 9 | 22 | 23 | 24 | 245 | 10 | 11 | 12 | 21 | 246 | 10 | 11 | 14 | 21 |
| 247 | 10 | 12 | 18 | 21 | 248 | 10 | 14 | 18 | 21 | 249 | 11 | 13 | 15 | 16 |
| 250 | 11 | 13 | 15 | 23 | 251 | 11 | 13 | 19 | 20 | 252 | 11 | 13 | 19 | 22 |
| 253 | 11 | 16 | 17 | 19 | 254 | 11 | 16 | 21 | 24 | 255 | 11 | 17 | 19 | 21 |
| 256 | 11 | 17 | 19 | 23 | 257 | 11 | 21 | 23 | 24 | 258 | 12 | 13 | 15 | 20 |
| 259 | 12 | 13 | 15 | 21 | 260 | 12 | 13 | 15 | 22 | 261 | 12 | 15 | 16 | 17 |
| 262 | 12 | 15 | 17 | 23 | 263 | 12 | 17 | 19 | 20 | 264 | 12 | 17 | 19 | 22 |
| 265 | 12 | 20 | 21 | 24 | 266 | 12 | 21 | 22 | 24 | 267 | 13 | 14 | 15 | 20 |
| 268 | 13 | 14 | 15 | 21 | 269 | 13 | 14 | 15 | 22 | 270 | 13 | 15 | 16 | 18 |
| 271 | 13 | 15 | 18 | 23 | 272 | 13 | 18 | 19 | 20 | 273 | 13 | 18 | 19 | 22 |
| 274 | 13 | 20 | 21 | 24 | 275 | 13 | 21 | 22 | 24 | 276 | 14 | 15 | 16 | 17 |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 277 | 14 | 15 | 17 | 23 | 278 | 14 | 17 | 19 | 20 | 279 | 14 | 17 | 19 | 22 |
| 280 | 14 | 20 | 21 | 24 | 281 | 14 | 21 | 22 | 24 | 282 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 283 | 16 | 17 | 21 | 24 | 284 | 16 | 18 | 21 | 24 | 285 | 17 | 18 | 19 | 21 |
| 286 | 17 | 18 | 19 | 23 | 287 | 17 | 21 | 23 | 24 | 288 | 18 | 21 | 23 | 24 |

9

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 15 | 2 | 1 | 2 | 3 | 19 | 3 | 1 | 2 | 4 | 15 |
| 4 | 1 | 2 | 4 | 19 | 5 | 1 | 2 | 9 | 15 | 6 | 1 | 2 | 9 | 19 |
| 7 | 1 | 2 | 15 | 21 | 8 | 1 | 2 | 19 | 21 | 9 | 1 | 3 | 4 | 15 |
| 10 | 1 | 3 | 4 | 19 | 11 | 1 | 3 | 5 | 19 | 12 | 1 | 3 | 5 | 19 |
| 13 | 1 | 3 | 9 | 15 | 14 | 1 | 3 | 9 | 19 | 15 | 1 | 4 | 5 | 15 |
| 16 | 1 | 4 | 5 | 19 | 17 | 1 | 4 | 15 | 21 | 18 | 1 | 4 | 19 | 21 |
| 19 | 1 | 5 | 9 | 15 | 20 | 1 | 5 | 9 | 19 | 21 | 1 | 5 | 15 | 21 |
| 22 | 1 | 5 | 19 | 21 | 23 | 1 | 7 | 11 | 19 | 24 | 1 | 7 | 18 | 19 |
| 25 | 1 | 7 | 19 | 20 | 26 | 1 | 7 | 19 | 22 | 27 | 1 | 8 | 12 | 15 |
| 28 | 1 | 8 | 14 | 15 | 29 | 1 | 8 | 15 | 16 | 30 | 1 | 8 | 15 | 23 |
| 31 | 1 | 9 | 15 | 21 | 32 | 1 | 9 | 19 | 21 | 33 | 1 | 11 | 17 | 19 |
| 34 | 1 | 11 | 19 | 20 | 35 | 1 | 11 | 19 | 22 | 36 | 1 | 12 | 13 | 15 |
| 37 | 1 | 12 | 15 | 16 | 38 | 1 | 12 | 15 | 23 | 39 | 1 | 13 | 14 | 15 |
| 40 | 1 | 13 | 15 | 16 | 41 | 1 | 13 | 15 | 23 | 42 | 1 | 14 | 15 | 16 |
| 43 | 1 | 14 | 15 | 23 | 44 | 1 | 17 | 18 | 19 | 45 | 1 | 17 | 19 | 20 |
| 46 | 1 | 17 | 19 | 22 | 47 | 1 | 18 | 19 | 20 | 48 | 1 | 18 | 19 | 22 |
| 49 | 2 | 6 | 7 | 10 | 50 | 2 | 6 | 7 | 24 | 51 | 2 | 6 | 8 | 10 |
| 52 | 2 | 6 | 8 | 24 | 53 | 2 | 6 | 10 | 13 | 54 | 2 | 6 | 10 | 17 |
| 55 | 2 | 6 | 13 | 24 | 56 | 2 | 6 | 17 | 24 | 57 | 3 | 6 | 16 | 24 |
| 58 | 3 | 6 | 20 | 24 | 59 | 3 | 6 | 22 | 24 | 60 | 3 | 6 | 23 | 24 |
| 61 | 3 | 10 | 16 | 24 | 62 | 3 | 10 | 20 | 24 | 63 | 3 | 10 | 22 | 24 |
| 64 | 3 | 10 | 23 | 24 | 65 | 4 | 6 | 10 | 11 | 66 | 4 | 6 | 10 | 12 |
| 67 | 4 | 6 | 10 | 14 | 68 | 4 | 6 | 10 | 18 | 69 | 4 | 10 | 11 | 24 |
| 70 | 4 | 10 | 12 | 24 | 71 | 4 | 10 | 14 | 24 | 72 | 4 | 10 | 18 | 24 |
| 73 | 5 | 6 | 7 | 10 | 74 | 5 | 6 | 7 | 24 | 75 | 5 | 6 | 8 | 10 |
| 76 | 5 | 6 | 8 | 24 | 77 | 5 | 6 | 10 | 13 | 78 | 5 | 6 | 10 | 17 |
| 79 | 5 | 6 | 13 | 24 | 80 | 5 | 6 | 17 | 24 | 81 | 6 | 7 | 8 | 10 |
| 82 | 6 | 7 | 8 | 24 | 83 | 6 | 7 | 10 | 13 | 84 | 6 | 7 | 13 | 24 |
| 85 | 6 | 8 | 10 | 17 | 86 | 6 | 8 | 17 | 24 | 87 | 6 | 9 | 10 | 11 |
| 88 | 6 | 9 | 10 | 12 | 89 | 6 | 9 | 10 | 14 | 90 | 6 | 9 | 10 | 18 |
| 91 | 6 | 10 | 11 | 12 | 92 | 6 | 10 | 11 | 14 | 93 | 6 | 10 | 12 | 18 |
| 94 | 6 | 10 | 13 | 17 | 95 | 6 | 10 | 14 | 18 | 96 | 6 | 13 | 17 | 24 |
| 97 | 6 | 16 | 20 | 24 | 98 | 6 | 16 | 21 | 24 | 99 | 6 | 16 | 22 | 24 |
| 100 | 6 | 20 | 21 | 24 | 101 | 6 | 20 | 23 | 24 | 102 | 6 | 21 | 22 | 24 |
| 103 | 6 | 21 | 23 | 24 | 104 | 6 | 22 | 23 | 24 | 105 | 7 | 11 | 15 | 19 |
| 106 | 7 | 15 | 18 | 19 | 107 | 7 | 15 | 19 | 20 | 108 | 7 | 15 | 19 | 22 |
| 109 | 8 | 12 | 15 | 19 | 110 | 8 | 14 | 15 | 19 | 111 | 8 | 15 | 16 | 19 |
| 112 | 8 | 15 | 19 | 23 | 113 | 9 | 10 | 11 | 24 | 114 | 9 | 10 | 12 | 24 |
| 115 | 9 | 10 | 14 | 24 | 116 | 9 | 10 | 18 | 24 | 117 | 10 | 11 | 12 | 24 |
| 118 | 10 | 11 | 14 | 24 | 119 | 10 | 12 | 18 | 24 | 120 | 10 | 14 | 18 | 24 |
| 121 | 10 | 16 | 20 | 24 | 122 | 10 | 16 | 21 | 24 | 123 | 10 | 16 | 22 | 24 |
| 124 | 10 | 20 | 21 | 24 | 125 | 10 | 20 | 23 | 24 | 126 | 10 | 21 | 22 | 24 |
| 127 | 10 | 21 | 23 | 24 | 128 | 10 | 22 | 23 | 24 | 129 | 11 | 15 | 17 | 19 |
| 130 | 11 | 15 | 19 | 20 | 131 | 11 | 15 | 19 | 22 | 132 | 12 | 13 | 15 | 19 |
| 133 | 12 | 15 | 16 | 19 | 134 | 12 | 15 | 19 | 23 | 135 | 13 | 14 | 15 | 19 |
| 136 | 13 | 15 | 16 | 19 | 137 | 13 | 15 | 19 | 23 | 138 | 14 | 15 | 16 | 19 |
| 139 | 14 | 15 | 19 | 23 | 140 | 15 | 17 | 18 | 19 | 141 | 15 | 17 | 19 | 20 |
| 142 | 15 | 17 | 19 | 22 | 143 | 15 | 18 | 19 | 20 | 144 | 15 | 18 | 19 | 22 |

10

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 5 | 6 | 2 | 1 | 3 | 21 | 24 | 3 | 1 | 4 | 9 | 10 |
| 4 | 6 | 7 | 17 | 19 | 5 | 6 | 8 | 13 | 15 | 6 | 10 | 11 | 18 | 19 |
| 7 | 10 | 12 | 14 | 15 | 8 | 15 | 16 | 23 | 24 | 9 | 19 | 20 | 22 | 24 |

11

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 5 | 7 | 2 | 1 | 2 | 5 | 8 | 3 | 1 | 2 | 5 | 13 |
| 4 | 1 | 2 | 5 | 17 | 5 | 1 | 3 | 16 | 21 | 6 | 1 | 3 | 20 | 21 |
| 7 | 1 | 3 | 21 | 22 | 8 | 1 | 3 | 21 | 23 | 9 | 1 | 4 | 9 | 11 |
| 10 | 1 | 4 | 9 | 12 | 11 | 1 | 4 | 9 | 14 | 12 | 1 | 4 | 9 | 18 |
| 13 | 2 | 3 | 5 | 6 | 14 | 2 | 3 | 21 | 24 | 15 | 2 | 4 | 5 | 6 |
| 16 | 2 | 4 | 9 | 10 | 17 | 2 | 5 | 6 | 9 | 18 | 2 | 5 | 6 | 21 |
| 19 | 2 | 7 | 17 | 19 | 20 | 2 | 8 | 13 | 15 | 21 | 3 | 4 | 9 | 10 |
| 22 | 3 | 4 | 21 | 24 | 23 | 3 | 5 | 21 | 24 | 24 | 3 | 9 | 21 | 24 |
| 25 | 3 | 15 | 16 | 23 | 26 | 3 | 19 | 20 | 22 | 27 | 4 | 5 | 9 | 10 |
| 28 | 4 | 9 | 10 | 21 | 29 | 4 | 11 | 18 | 19 | 30 | 4 | 12 | 14 | 15 |
| 31 | 5 | 7 | 17 | 19 | 32 | 5 | 8 | 13 | 15 | 33 | 6 | 7 | 11 | 17 |
| 34 | 6 | 7 | 17 | 18 | 35 | 6 | 7 | 17 | 20 | 36 | 6 | 7 | 17 | 22 |
| 37 | 6 | 8 | 12 | 13 | 38 | 6 | 8 | 13 | 14 | 39 | 6 | 8 | 13 | 16 |
| 40 | 6 | 8 | 13 | 23 | 41 | 7 | 8 | 13 | 15 | 42 | 7 | 8 | 17 | 19 |
| 43 | 7 | 10 | 11 | 18 | 44 | 7 | 13 | 17 | 19 | 45 | 7 | 20 | 22 | 24 |
| 46 | 8 | 10 | 12 | 14 | 47 | 8 | 13 | 15 | 17 | 48 | 8 | 16 | 23 | 24 |
| 49 | 9 | 11 | 18 | 19 | 50 | 9 | 12 | 14 | 15 | 51 | 10 | 11 | 17 | 18 |
| 52 | 10 | 11 | 18 | 20 | 53 | 10 | 11 | 18 | 22 | 54 | 10 | 12 | 13 | 14 |
| 55 | 10 | 12 | 14 | 16 | 56 | 10 | 12 | 14 | 23 | 57 | 11 | 12 | 14 | 15 |
| 58 | 11 | 12 | 18 | 19 | 59 | 11 | 14 | 18 | 19 | 60 | 11 | 20 | 22 | 24 |
| 61 | 12 | 14 | 15 | 18 | 62 | 12 | 16 | 23 | 24 | 63 | 13 | 16 | 23 | 24 |
| 64 | 14 | 16 | 23 | 24 | 65 | 15 | 16 | 20 | 23 | 66 | 15 | 16 | 21 | 23 |
| 67 | 15 | 16 | 22 | 23 | 68 | 16 | 19 | 20 | 22 | 69 | 17 | 20 | 22 | 24 |
| 70 | 18 | 20 | 22 | 24 | 71 | 19 | 20 | 21 | 22 | 72 | 19 | 20 | 22 | 23 |

12

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 5 | 10 | 2 | 1 | 2 | 5 | 24 | 3 | 1 | 3 | 6 | 21 |
| 4 | 1 | 3 | 10 | 21 | 5 | 1 | 4 | 6 | 9 | 6 | 1 | 4 | 9 | 24 |
| 7 | 1 | 6 | 7 | 17 | 8 | 1 | 6 | 8 | 13 | 9 | 1 | 10 | 11 | 18 |
| 10 | 1 | 10 | 12 | 14 | 11 | 1 | 16 | 23 | 24 | 12 | 1 | 20 | 22 | 24 |
| 13 | 2 | 5 | 6 | 15 | 14 | 2 | 5 | 6 | 19 | 15 | 3 | 15 | 21 | 24 |
| 16 | 3 | 19 | 21 | 24 | 17 | 4 | 9 | 10 | 19 | 18 | 4 | 9 | 10 | 19 |
| 19 | 6 | 7 | 15 | 17 | 20 | 6 | 8 | 13 | 19 | 21 | 6 | 11 | 18 | 19 |
| 22 | 6 | 12 | 14 | 15 | 23 | 6 | 15 | 16 | 23 | 24 | 6 | 19 | 20 | 22 |
| 25 | 7 | 10 | 17 | 19 | 26 | 7 | 17 | 19 | 24 | 27 | 8 | 10 | 13 | 15 |
| 28 | 8 | 13 | 15 | 24 | 29 | 10 | 11 | 15 | 18 | 30 | 10 | 12 | 14 | 19 |
| 31 | 10 | 15 | 16 | 23 | 32 | 10 | 19 | 20 | 22 | 33 | 11 | 18 | 19 | 24 |
| 34 | 12 | 14 | 15 | 24 | 35 | 15 | 20 | 22 | 24 | 36 | 16 | 19 | 23 | 24 |

13

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 5 | 11 | 2 | 1 | 2 | 5 | 16 | 3 | 1 | 2 | 5 | 18 |
| 4 | 1 | 2 | 5 | 23 | 5 | 1 | 3 | 7 | 21 | 6 | 1 | 3 | 12 | 21 |
| 7 | 1 | 3 | 14 | 21 | 8 | 1 | 3 | 17 | 21 | 9 | 1 | 4 | 8 | 9 |
| 10 | 1 | 4 | 9 | 13 | 11 | 1 | 4 | 9 | 20 | 12 | 1 | 4 | 9 | 22 |
| 13 | 2 | 5 | 6 | 11 | 14 | 2 | 5 | 6 | 16 | 15 | 2 | 5 | 6 | 18 |
| 16 | 2 | 5 | 6 | 23 | 17 | 2 | 10 | 11 | 18 | 18 | 2 | 11 | 18 | 19 |
| 19 | 2 | 15 | 16 | 23 | 20 | 2 | 16 | 23 | 24 | 21 | 3 | 6 | 7 | 17 |
| 22 | 3 | 7 | 17 | 19 | 23 | 3 | 7 | 21 | 24 | 24 | 3 | 10 | 12 | 14 |
| 25 | 3 | 12 | 14 | 15 | 26 | 3 | 12 | 21 | 24 | 27 | 3 | 14 | 21 | 24 |
| 28 | 3 | 17 | 21 | 24 | 29 | 4 | 6 | 8 | 13 | 30 | 4 | 8 | 9 | 10 |
| 31 | 4 | 8 | 13 | 15 | 32 | 4 | 9 | 10 | 13 | 33 | 4 | 9 | 10 | 20 |
| 34 | 4 | 9 | 10 | 22 | 35 | 4 | 19 | 20 | 22 | 36 | 4 | 20 | 22 | 24 |
| 37 | 5 | 10 | 11 | 18 | 38 | 5 | 11 | 18 | 19 | 39 | 5 | 15 | 16 | 23 |
| 40 | 5 | 16 | 23 | 24 | 41 | 6 | 7 | 12 | 17 | 42 | 6 | 7 | 14 | 17 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 43 | 6 | 7 | 17 | 21 | 44 | 6 | 8 | 9 | 13 | 45 | 6 | 8 | 13 | 20 | 16 | 1 | 5 | 6 | 24 |
| 46 | 6 | 8 | 13 | 22 | 47 | 7 | 10 | 12 | 14 | 48 | 7 | 12 | 14 | 15 | 19 | 1 | 6 | 9 | 10 |
| 49 | 7 | 12 | 17 | 19 | 50 | 7 | 14 | 17 | 19 | 51 | 7 | 17 | 19 | 21 | 22 | 1 | 6 | 21 | 24 |
| 52 | 8 | 9 | 13 | 15 | 53 | 8 | 13 | 15 | 20 | 54 | 8 | 13 | 15 | 22 | 25 | 1 | 9 | 10 | 24 |
| 55 | 8 | 19 | 20 | 22 | 56 | 8 | 20 | 22 | 24 | 57 | 9 | 19 | 20 | 22 | 28 | 1 | 10 | 14 | 15 |
| 58 | 9 | 20 | 22 | 24 | 59 | 10 | 11 | 16 | 18 | 60 | 10 | 11 | 18 | 23 | 31 | 1 | 15 | 16 | 24 |
| 61 | 10 | 12 | 14 | 17 | 62 | 10 | 12 | 14 | 21 | 63 | 11 | 15 | 16 | 23 | 34 | 1 | 19 | 20 | 24 |
| 64 | 11 | 16 | 18 | 19 | 65 | 11 | 16 | 23 | 24 | 66 | 11 | 18 | 19 | 23 | 37 | 6 | 7 | 10 | 19 |
| 67 | 12 | 14 | 15 | 17 | 68 | 12 | 14 | 15 | 21 | 69 | 13 | 19 | 20 | 22 | 40 | 6 | 8 | 10 | 15 |
| 70 | 13 | 20 | 22 | 24 | 71 | 15 | 16 | 18 | 23 | 72 | 16 | 18 | 23 | 24 | 43 | 6 | 10 | 11 | 19 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 46 | 6 | 10 | 14 | 15 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 49 | 6 | 13 | 15 | 19 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 52 | 6 | 15 | 17 | 19 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 55 | 6 | 19 | 20 | 24 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 58 | 10 | 11 | 19 | 24 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 61 | 10 | 14 | 15 | 19 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 64 | 10 | 15 | 18 | 19 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 67 | 10 | 19 | 20 | 24 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 70 | 15 | 19 | 20 | 24 |

14

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 5 | 12 | 2 | 1 | 2 | 5 | 14 | 3 | 1 | 2 | 5 | 20 |
| 4 | 1 | 2 | 5 | 22 | 5 | 1 | 3 | 8 | 21 | 6 | 1 | 3 | 11 | 21 |
| 7 | 1 | 3 | 13 | 21 | 8 | 1 | 3 | 18 | 21 | 9 | 1 | 4 | 7 | 9 |
| 10 | 1 | 4 | 9 | 16 | 11 | 1 | 4 | 9 | 17 | 12 | 1 | 4 | 9 | 23 |
| 13 | 2 | 5 | 6 | 12 | 14 | 2 | 5 | 6 | 14 | 15 | 2 | 5 | 6 | 20 |
| 16 | 2 | 5 | 6 | 22 | 17 | 2 | 10 | 12 | 14 | 18 | 2 | 12 | 14 | 15 |
| 19 | 2 | 19 | 20 | 22 | 20 | 2 | 20 | 22 | 24 | 21 | 3 | 6 | 8 | 13 |
| 22 | 3 | 8 | 13 | 15 | 23 | 3 | 8 | 21 | 24 | 24 | 3 | 10 | 11 | 18 |
| 25 | 3 | 11 | 18 | 19 | 26 | 3 | 11 | 21 | 24 | 27 | 3 | 13 | 21 | 24 |
| 28 | 3 | 16 | 21 | 24 | 29 | 4 | 6 | 7 | 17 | 30 | 4 | 7 | 9 | 10 |
| 31 | 4 | 7 | 17 | 19 | 32 | 4 | 9 | 10 | 16 | 33 | 4 | 9 | 10 | 17 |
| 34 | 4 | 9 | 10 | 23 | 35 | 4 | 15 | 16 | 23 | 36 | 4 | 16 | 23 | 24 |
| 37 | 5 | 10 | 12 | 14 | 38 | 5 | 12 | 14 | 19 | 39 | 5 | 19 | 20 | 22 |
| 40 | 5 | 20 | 22 | 24 | 41 | 6 | 7 | 9 | 17 | 42 | 6 | 7 | 16 | 17 |
| 43 | 6 | 7 | 17 | 23 | 44 | 6 | 8 | 11 | 13 | 45 | 6 | 8 | 13 | 18 |
| 46 | 6 | 8 | 13 | 21 | 47 | 7 | 9 | 17 | 19 | 48 | 7 | 15 | 16 | 23 |
| 49 | 7 | 16 | 17 | 19 | 50 | 7 | 16 | 23 | 24 | 51 | 7 | 17 | 19 | 23 |
| 52 | 8 | 10 | 11 | 18 | 53 | 8 | 11 | 13 | 15 | 54 | 8 | 11 | 18 | 19 |
| 55 | 8 | 13 | 15 | 18 | 56 | 8 | 13 | 15 | 21 | 57 | 9 | 15 | 16 | 23 |
| 58 | 9 | 16 | 23 | 24 | 59 | 10 | 11 | 13 | 18 | 60 | 10 | 11 | 18 | 21 |
| 61 | 10 | 12 | 14 | 20 | 62 | 10 | 12 | 14 | 22 | 63 | 11 | 13 | 18 | 19 |
| 64 | 11 | 18 | 19 | 21 | 65 | 12 | 14 | 15 | 20 | 66 | 12 | 14 | 15 | 22 |
| 67 | 12 | 19 | 20 | 22 | 68 | 12 | 20 | 22 | 24 | 69 | 14 | 19 | 20 | 22 |
| 70 | 14 | 20 | 22 | 24 | 71 | 15 | 16 | 17 | 23 | 72 | 16 | 17 | 23 | 24 |

15

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 5 | 15 | 2 | 1 | 2 | 5 | 19 | 3 | 1 | 3 | 15 | 21 |
| 4 | 1 | 3 | 19 | 21 | 5 | 1 | 4 | 9 | 15 | 6 | 1 | 4 | 9 | 19 |
| 7 | 1 | 7 | 17 | 19 | 8 | 1 | 8 | 13 | 15 | 9 | 1 | 11 | 18 | 19 |
| 10 | 1 | 12 | 14 | 15 | 11 | 1 | 15 | 16 | 23 | 12 | 1 | 19 | 20 | 22 |
| 13 | 2 | 5 | 6 | 10 | 14 | 2 | 5 | 6 | 24 | 15 | 3 | 6 | 21 | 24 |
| 16 | 3 | 10 | 21 | 24 | 17 | 4 | 6 | 9 | 10 | 18 | 4 | 9 | 10 | 24 |
| 19 | 6 | 7 | 10 | 17 | 20 | 6 | 7 | 17 | 24 | 21 | 6 | 8 | 10 | 13 |
| 22 | 6 | 8 | 13 | 24 | 23 | 6 | 10 | 11 | 18 | 24 | 6 | 10 | 12 | 14 |
| 25 | 6 | 16 | 23 | 24 | 26 | 6 | 20 | 22 | 24 | 27 | 7 | 15 | 17 | 19 |
| 28 | 8 | 13 | 15 | 19 | 29 | 10 | 11 | 18 | 24 | 30 | 10 | 12 | 14 | 24 |
| 31 | 10 | 16 | 23 | 24 | 32 | 10 | 20 | 22 | 24 | 33 | 11 | 15 | 18 | 19 |
| 34 | 12 | 14 | 15 | 19 | 35 | 15 | 16 | 19 | 23 | 36 | 15 | 19 | 20 | 22 |

16

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 6 | 10 | 2 | 1 | 2 | 6 | 15 | 3 | 1 | 2 | 6 | 19 |
| 4 | 1 | 2 | 6 | 24 | 5 | 1 | 3 | 6 | 24 | 6 | 1 | 3 | 10 | 24 |
| 7 | 1 | 3 | 15 | 24 | 8 | 1 | 3 | 19 | 24 | 9 | 1 | 4 | 6 | 10 |
| 10 | 1 | 4 | 10 | 15 | 11 | 1 | 4 | 10 | 19 | 12 | 1 | 4 | 10 | 24 |
| 13 | 1 | 5 | 6 | 10 | 14 | 1 | 5 | 6 | 15 | 15 | 1 | 5 | 6 | 19 |
| 16 | 1 | 5 | 6 | 24 | 17 | 1 | 6 | 7 | 19 | 18 | 1 | 6 | 8 | 15 |
| 19 | 1 | 6 | 9 | 10 | 20 | 1 | 6 | 13 | 15 | 21 | 1 | 6 | 17 | 19 |
| 22 | 1 | 6 | 21 | 24 | 23 | 1 | 9 | 10 | 15 | 24 | 1 | 9 | 10 | 19 |
| 25 | 1 | 9 | 10 | 24 | 26 | 1 | 10 | 11 | 19 | 27 | 1 | 10 | 12 | 15 |
| 28 | 1 | 10 | 14 | 15 | 29 | 1 | 10 | 18 | 19 | 30 | 1 | 10 | 21 | 24 |
| 31 | 1 | 15 | 16 | 24 | 32 | 1 | 15 | 21 | 24 | 33 | 1 | 15 | 23 | 24 |
| 34 | 1 | 19 | 20 | 24 | 35 | 1 | 19 | 21 | 24 | 36 | 1 | 19 | 22 | 24 |
| 37 | 6 | 7 | 10 | 19 | 38 | 6 | 7 | 15 | 19 | 39 | 6 | 7 | 19 | 24 |
| 40 | 6 | 8 | 10 | 15 | 41 | 6 | 8 | 15 | 19 | 42 | 6 | 8 | 15 | 24 |
| 43 | 6 | 10 | 11 | 19 | 44 | 6 | 10 | 12 | 15 | 45 | 6 | 10 | 13 | 15 |
| 46 | 6 | 10 | 14 | 15 | 47 | 6 | 10 | 17 | 19 | 48 | 6 | 10 | 18 | 19 |
| 49 | 6 | 13 | 15 | 19 | 50 | 6 | 13 | 15 | 24 | 51 | 6 | 15 | 16 | 24 |
| 52 | 6 | 15 | 17 | 19 | 53 | 6 | 15 | 23 | 24 | 54 | 6 | 17 | 19 | 24 |
| 55 | 6 | 19 | 20 | 24 | 56 | 6 | 19 | 22 | 24 | 57 | 10 | 11 | 15 | 19 |
| 58 | 10 | 11 | 19 | 24 | 59 | 10 | 12 | 15 | 19 | 60 | 10 | 12 | 15 | 24 |
| 61 | 10 | 14 | 15 | 19 | 62 | 10 | 14 | 15 | 24 | 63 | 10 | 15 | 16 | 24 |
| 64 | 10 | 15 | 18 | 19 | 65 | 10 | 15 | 23 | 24 | 66 | 10 | 18 | 19 | 24 |
| 67 | 10 | 19 | 20 | 24 | 68 | 10 | 19 | 22 | 24 | 69 | 15 | 16 | 19 | 24 |
| 70 | 15 | 19 | 20 | 24 | 71 | 15 | 19 | 22 | 24 | 72 | 15 | 19 | 23 | 24 |

17

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 6 | 11 | 2 | 1 | 2 | 6 | 16 | 3 | 1 | 2 | 6 | 18 |
| 4 | 1 | 2 | 6 | 23 | 5 | 1 | 3 | 7 | 24 | 6 | 1 | 3 | 12 | 24 |
| 7 | 1 | 3 | 14 | 24 | 8 | 1 | 3 | 17 | 24 | 9 | 1 | 4 | 8 | 10 |
| 10 | 1 | 4 | 10 | 13 | 11 | 1 | 4 | 10 | 20 | 12 | 1 | 4 | 10 | 22 |
| 13 | 1 | 5 | 6 | 11 | 14 | 1 | 5 | 6 | 16 | 15 | 1 | 5 | 6 | 18 |
| 16 | 1 | 5 | 6 | 23 | 17 | 1 | 7 | 21 | 24 | 18 | 1 | 8 | 9 | 10 |
| 19 | 1 | 9 | 10 | 13 | 20 | 1 | 9 | 10 | 20 | 21 | 1 | 9 | 10 | 22 |
| 22 | 1 | 12 | 21 | 24 | 23 | 1 | 14 | 21 | 24 | 24 | 1 | 17 | 21 | 24 |
| 25 | 2 | 10 | 11 | 19 | 26 | 2 | 10 | 18 | 19 | 27 | 2 | 15 | 16 | 24 |
| 28 | 2 | 15 | 23 | 24 | 29 | 3 | 6 | 7 | 19 | 30 | 3 | 6 | 17 | 19 |
| 31 | 3 | 10 | 12 | 15 | 32 | 3 | 10 | 14 | 15 | 33 | 4 | 6 | 8 | 15 |
| 34 | 4 | 6 | 13 | 15 | 35 | 4 | 19 | 20 | 24 | 36 | 4 | 19 | 22 | 24 |
| 37 | 5 | 10 | 11 | 19 | 38 | 5 | 10 | 18 | 19 | 39 | 5 | 15 | 16 | 24 |
| 40 | 5 | 15 | 23 | 24 | 41 | 6 | 7 | 12 | 19 | 42 | 6 | 7 | 14 | 19 |
| 43 | 6 | 7 | 19 | 21 | 44 | 6 | 8 | 9 | 15 | 45 | 6 | 8 | 15 | 20 |
| 46 | 6 | 8 | 15 | 22 | 47 | 6 | 9 | 13 | 15 | 48 | 6 | 12 | 17 | 19 |
| 49 | 6 | 13 | 15 | 20 | 50 | 6 | 13 | 15 | 22 | 51 | 6 | 14 | 17 | 19 |
| 52 | 6 | 17 | 19 | 21 | 53 | 7 | 10 | 12 | 15 | 54 | 7 | 10 | 14 | 15 |
| 55 | 8 | 19 | 20 | 24 | 56 | 8 | 19 | 22 | 24 | 57 | 9 | 19 | 20 | 24 |
| 58 | 9 | 19 | 22 | 24 | 59 | 10 | 11 | 16 | 19 | 60 | 10 | 11 | 19 | 23 |
| 61 | 10 | 12 | 15 | 17 | 62 | 10 | 12 | 15 | 21 | 63 | 10 | 14 | 15 | 17 |
| 64 | 10 | 14 | 15 | 21 | 65 | 10 | 16 | 18 | 19 | 66 | 10 | 18 | 19 | 23 |
| 67 | 11 | 15 | 16 | 24 | 68 | 11 | 15 | 23 | 24 | 69 | 13 | 19 | 20 | 24 |
| 70 | 13 | 19 | 22 | 24 | 71 | 15 | 16 | 18 | 24 | 72 | 15 | 18 | 23 | 24 |

18

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 6 | 12 | 2 | 1 | 2 | 6 | 14 | 3 | 1 | 2 | 6 | 20 |
| 4 | 1 | 2 | 6 | 22 | 5 | 1 | 3 | 8 | 24 | 6 | 1 | 3 | 11 | 24 |
| 7 | 1 | 3 | 13 | 24 | 8 | 1 | 3 | 18 | 24 | 9 | 1 | 4 | 7 | 10 |
| 10 | 1 | 4 | 10 | 16 | 11 | 1 | 4 | 10 | 17 | 12 | 1 | 4 | 10 | 23 |
| 13 | 1 | 5 | 6 | 12 | 14 | 1 | 5 | 6 | 14 | 15 | 1 | 5 | 6 | 20 |
| 16 | 1 | 5 | 6 | 22 | 17 | 1 | 7 | 9 | 10 | 18 | 1 | 8 | 21 | 24 |
| 19 | 1 | 9 | 10 | 16 | 20 | 1 | 9 | 10 | 17 | 21 | 1 | 9 | 10 | 23 |
| 22 | 1 | 11 | 21 | 24 | 23 | 1 | 13 | 21 | 24 | 24 | 1 | 18 | 21 | 24 |
| 25 | 2 | 10 | 12 | 15 | 26 | 2 | 10 | 14 | 15 | 27 | 2 | 19 | 20 | 24 |
| 28 | 2 | 19 | 22 | 24 | 29 | 3 | 6 | 8 | 15 | 30 | 3 | 6 | 13 | 15 |
| 31 | 3 | 10 | 11 | 19 | 32 | 3 | 10 | 18 | 19 | 33 | 4 | 6 | 7 | 19 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 4 | 6 | 17 | 19 | 35 | 4 | 15 | 16 | 24 | 36 | 4 15 23 24 |
| 37 | 5 | 10 | 12 | 15 | 38 | 5 | 10 | 14 | 15 | 39 | 5 19 20 24 |
| 40 | 5 | 19 | 22 | 24 | 41 | 6 | 7 | 9 | 19 | 42 | 6 7 16 19 |
| 43 | 6 | 7 | 19 | 23 | 44 | 6 | 8 | 11 | 15 | 45 | 6 8 15 18 |
| 46 | 6 | 8 | 15 | 21 | 47 | 6 | 9 | 17 | 19 | 48 | 6 11 13 15 |
| 49 | 6 | 13 | 15 | 18 | 50 | 6 | 13 | 15 | 21 | 51 | 6 16 17 19 |
| 52 | 6 | 17 | 19 | 23 | 53 | 7 | 15 | 16 | 24 | 54 | 7 15 23 24 |
| 55 | 8 | 10 | 11 | 19 | 56 | 8 | 10 | 18 | 19 | 57 | 9 15 16 24 |
| 58 | 9 | 15 | 23 | 24 | 59 | 10 | 11 | 13 | 19 | 60 | 10 11 19 21 |
| 61 | 10 | 12 | 15 | 20 | 62 | 10 | 12 | 15 | 22 | 63 | 10 13 18 19 |
| 64 | 10 | 14 | 15 | 20 | 65 | 10 | 14 | 15 | 22 | 66 | 10 18 19 21 |
| 67 | 12 | 19 | 20 | 24 | 68 | 12 | 19 | 22 | 24 | 69 | 14 19 20 24 |
| 70 | 14 | 19 | 22 | 24 | 71 | 15 | 16 | 17 | 24 | 72 | 15 17 23 24 |

19

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 7 | 8 | 2 | 1 | 2 | 13 | 17 | 3 | 1 3 16 20 |
| 4 | 1 | 3 | 22 | 23 | 5 | 1 | 4 | 11 | 12 | 6 | 1 4 14 18 |
| 7 | 1 | 5 | 7 | 13 | 8 | 1 | 5 | 8 | 17 | 9 | 1 9 11 14 |
| 10 | 1 | 9 | 12 | 18 | 11 | 1 | 16 | 21 | 22 | 12 | 1 20 21 23 |
| 13 | 2 | 3 | 6 | 9 | 14 | 2 | 3 | 9 | 10 | 15 | 2 3 9 24 |
| 16 | 2 | 4 | 6 | 21 | 17 | 2 | 4 | 10 | 21 | 18 | 2 4 21 24 |
| 19 | 2 | 7 | 8 | 15 | 20 | 2 | 7 | 8 | 19 | 21 | 2 13 15 17 |
| 22 | 2 | 13 | 17 | 19 | 23 | 3 | 4 | 5 | 6 | 24 | 3 4 5 10 |
| 25 | 3 | 4 | 5 | 24 | 26 | 3 | 15 | 16 | 20 | 27 | 3 15 22 23 |
| 28 | 3 | 16 | 19 | 20 | 29 | 3 | 19 | 22 | 23 | 30 | 4 11 12 15 |
| 31 | 4 | 11 | 12 | 19 | 32 | 4 | 14 | 15 | 18 | 33 | 4 14 18 19 |
| 34 | 5 | 6 | 9 | 21 | 35 | 5 | 7 | 13 | 15 | 36 | 5 7 13 19 |
| 37 | 5 | 8 | 15 | 17 | 38 | 5 | 8 | 17 | 19 | 39 | 5 9 10 21 |
| 40 | 5 | 9 | 21 | 24 | 41 | 6 | 7 | 11 | 22 | 42 | 6 7 18 20 |
| 43 | 6 | 8 | 12 | 23 | 44 | 6 | 8 | 14 | 16 | 45 | 6 11 17 20 |
| 46 | 6 | 12 | 13 | 16 | 47 | 6 | 13 | 14 | 23 | 48 | 6 17 18 22 |
| 49 | 7 | 10 | 11 | 22 | 50 | 7 | 10 | 18 | 20 | 51 | 7 11 22 24 |
| 52 | 7 | 18 | 20 | 24 | 53 | 8 | 10 | 12 | 23 | 54 | 8 10 14 16 |
| 55 | 8 | 12 | 23 | 24 | 56 | 8 | 14 | 16 | 24 | 57 | 9 11 14 15 |
| 58 | 9 | 11 | 14 | 19 | 59 | 9 | 12 | 15 | 18 | 60 | 9 12 18 19 |
| 61 | 10 | 11 | 17 | 20 | 62 | 10 | 12 | 13 | 16 | 63 | 10 13 14 23 |
| 64 | 10 | 17 | 18 | 22 | 65 | 11 | 17 | 20 | 24 | 66 | 12 13 16 24 |
| 67 | 13 | 14 | 23 | 24 | 68 | 15 | 16 | 21 | 22 | 69 | 15 20 21 23 |
| 70 | 16 | 19 | 21 | 22 | 71 | 17 | 18 | 22 | 24 | 72 | 19 20 21 23 |

20

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 7 | 10 | 2 | 1 | 2 | 8 | 24 | 3 | 1 2 10 17 |
| 4 | 1 | 2 | 13 | 24 | 5 | 1 | 3 | 6 | 20 | 6 | 1 3 6 22 |
| 7 | 1 | 3 | 10 | 16 | 8 | 1 | 3 | 10 | 23 | 9 | 1 4 6 12 |
| 10 | 1 | 4 | 6 | 14 | 11 | 1 | 4 | 11 | 24 | 12 | 1 4 18 24 |
| 13 | 1 | 5 | 7 | 10 | 14 | 1 | 5 | 8 | 24 | 15 | 1 5 10 17 |
| 16 | 1 | 5 | 13 | 24 | 17 | 1 | 6 | 7 | 20 | 18 | 1 6 7 22 |
| 19 | 1 | 6 | 8 | 12 | 20 | 1 | 6 | 8 | 14 | 21 | 1 6 9 12 |
| 22 | 1 | 6 | 9 | 14 | 23 | 1 | 6 | 12 | 13 | 24 | 1 6 13 14 |
| 25 | 1 | 6 | 17 | 20 | 26 | 1 | 6 | 17 | 22 | 27 | 1 6 20 21 |
| 28 | 1 | 6 | 21 | 22 | 29 | 1 | 7 | 10 | 11 | 30 | 1 7 10 18 |
| 31 | 1 | 8 | 16 | 24 | 32 | 1 | 8 | 23 | 24 | 33 | 1 9 11 24 |
| 34 | 1 | 9 | 18 | 24 | 35 | 1 | 10 | 11 | 17 | 36 | 1 10 12 16 |
| 37 | 1 | 10 | 12 | 23 | 38 | 1 | 10 | 14 | 16 | 39 | 1 10 14 23 |
| 40 | 1 | 10 | 16 | 21 | 41 | 1 | 10 | 17 | 18 | 42 | 1 10 21 23 |
| 43 | 1 | 11 | 20 | 24 | 44 | 1 | 11 | 22 | 24 | 45 | 1 13 16 24 |
| 46 | 1 | 13 | 23 | 24 | 47 | 1 | 18 | 20 | 24 | 48 | 1 18 22 24 |
| 49 | 2 | 3 | 6 | 15 | 50 | 2 | 3 | 19 | 24 | 51 | 2 4 6 19 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 52 | 2 | 4 | 10 | 15 | 53 | 2 | 6 | 9 | 19 | 54 | 2 6 15 21 |
| 55 | 2 | 7 | 19 | 24 | 56 | 2 | 8 | 10 | 15 | 57 | 2 9 10 15 |
| 58 | 2 | 10 | 13 | 15 | 59 | 2 | 17 | 19 | 24 | 60 | 2 19 21 24 |
| 61 | 3 | 4 | 10 | 19 | 62 | 3 | 4 | 15 | 24 | 63 | 3 5 6 15 |
| 64 | 3 | 5 | 19 | 24 | 65 | 3 | 6 | 15 | 16 | 66 | 3 6 15 23 |
| 67 | 3 | 9 | 10 | 19 | 68 | 3 | 9 | 15 | 24 | 69 | 3 10 19 20 |
| 70 | 3 | 10 | 19 | 22 | 71 | 4 | 5 | 6 | 19 | 72 | 4 5 10 15 |
| 73 | 4 | 6 | 11 | 19 | 74 | 4 | 6 | 18 | 19 | 75 | 4 10 19 21 |
| 76 | 4 | 12 | 15 | 24 | 77 | 4 | 14 | 15 | 24 | 78 | 4 15 21 24 |
| 79 | 5 | 6 | 9 | 19 | 80 | 5 | 6 | 15 | 21 | 81 | 5 7 19 24 |
| 82 | 5 | 8 | 10 | 15 | 83 | 5 | 9 | 10 | 15 | 84 | 5 10 13 15 |
| 85 | 5 | 17 | 19 | 24 | 86 | 5 | 19 | 21 | 24 | 87 | 6 7 11 15 |
| 88 | 6 | 7 | 15 | 18 | 89 | 6 | 8 | 16 | 19 | 90 | 6 8 19 23 |
| 91 | 6 | 9 | 11 | 19 | 92 | 6 | 9 | 18 | 19 | 93 | 6 11 12 15 |
| 94 | 6 | 11 | 14 | 15 | 95 | 6 | 11 | 15 | 17 | 96 | 6 12 15 18 |
| 97 | 6 | 13 | 16 | 19 | 98 | 6 | 13 | 19 | 23 | 99 | 6 14 15 18 |
| 100 | 6 | 15 | 16 | 21 | 101 | 6 | 15 | 17 | 18 | 102 | 6 15 21 23 |
| 103 | 6 | 16 | 19 | 20 | 104 | 6 | 16 | 19 | 22 | 105 | 6 19 20 23 |
| 106 | 6 | 19 | 22 | 23 | 107 | 7 | 8 | 10 | 19 | 108 | 7 8 15 24 |
| 109 | 7 | 10 | 13 | 19 | 110 | 7 | 13 | 15 | 24 | 111 | 7 15 20 24 |
| 112 | 7 | 19 | 22 | 24 | 113 | 8 | 10 | 12 | 19 | 114 | 8 10 14 19 |
| 115 | 8 | 10 | 17 | 19 | 116 | 8 | 15 | 17 | 24 | 117 | 9 10 19 21 |
| 118 | 9 | 12 | 15 | 24 | 119 | 9 | 14 | 15 | 24 | 120 | 9 15 21 24 |
| 121 | 10 | 11 | 15 | 20 | 122 | 10 | 11 | 15 | 22 | 123 | 10 12 13 19 |
| 124 | 10 | 13 | 14 | 19 | 125 | 10 | 13 | 17 | 19 | 126 | 10 15 16 20 |
| 127 | 10 | 15 | 16 | 22 | 128 | 10 | 15 | 18 | 20 | 129 | 10 15 18 22 |
| 130 | 10 | 15 | 20 | 23 | 131 | 10 | 15 | 22 | 23 | 132 | 10 19 20 21 |
| 133 | 10 | 19 | 21 | 22 | 134 | 11 | 12 | 19 | 24 | 135 | 11 14 19 24 |
| 136 | 12 | 16 | 19 | 24 | 137 | 12 | 18 | 19 | 24 | 138 | 12 19 23 24 |
| 139 | 13 | 15 | 17 | 24 | 140 | 14 | 16 | 19 | 24 | 141 | 14 18 19 24 |
| 142 | 14 | 19 | 23 | 24 | 143 | 15 | 17 | 20 | 24 | 144 | 15 17 22 24 |

21

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 7 | 11 | 2 | 1 | 2 | 7 | 18 | 3 | 1 2 8 16 |
| 4 | 1 | 2 | 8 | 23 | 5 | 1 | 2 | 11 | 17 | 6 | 1 2 13 16 |
| 7 | 1 | 2 | 13 | 23 | 8 | 1 | 2 | 17 | 18 | 9 | 1 3 7 20 |
| 10 | 1 | 3 | 7 | 22 | 11 | 1 | 3 | 12 | 16 | 12 | 1 3 12 23 |
| 13 | 1 | 3 | 14 | 16 | 14 | 1 | 3 | 14 | 23 | 15 | 1 3 17 20 |
| 16 | 1 | 3 | 17 | 22 | 17 | 1 | 4 | 8 | 12 | 18 | 1 4 8 14 |
| 19 | 1 | 4 | 11 | 20 | 20 | 1 | 4 | 11 | 22 | 21 | 1 4 12 13 |
| 22 | 1 | 4 | 13 | 14 | 23 | 1 | 4 | 18 | 20 | 24 | 1 4 18 22 |
| 25 | 1 | 5 | 7 | 11 | 26 | 1 | 5 | 7 | 18 | 27 | 1 5 8 16 |
| 28 | 1 | 5 | 8 | 23 | 29 | 1 | 5 | 11 | 17 | 30 | 1 5 13 16 |
| 31 | 1 | 5 | 13 | 23 | 32 | 1 | 5 | 17 | 18 | 33 | 1 7 20 21 |
| 34 | 1 | 7 | 21 | 22 | 35 | 1 | 8 | 9 | 12 | 36 | 1 8 9 14 |
| 37 | 1 | 9 | 11 | 20 | 38 | 1 | 9 | 11 | 22 | 39 | 1 9 12 13 |
| 40 | 1 | 9 | 13 | 14 | 41 | 1 | 9 | 18 | 20 | 42 | 1 9 18 22 |
| 43 | 1 | 12 | 16 | 21 | 44 | 1 | 12 | 21 | 23 | 45 | 1 14 16 21 |
| 46 | 1 | 14 | 21 | 23 | 47 | 1 | 17 | 20 | 21 | 48 | 1 17 21 22 |
| 49 | 2 | 3 | 6 | 16 | 50 | 2 | 3 | 6 | 23 | 51 | 2 3 7 19 |
| 52 | 2 | 3 | 7 | 24 | 53 | 2 | 3 | 15 | 16 | 54 | 2 3 15 23 |
| 55 | 2 | 3 | 17 | 19 | 56 | 2 | 3 | 17 | 24 | 57 | 2 4 6 11 |
| 58 | 2 | 4 | 6 | 18 | 59 | 2 | 4 | 8 | 10 | 60 | 2 4 8 15 |
| 61 | 2 | 4 | 10 | 13 | 62 | 2 | 4 | 11 | 19 | 63 | 2 4 13 19 |
| 64 | 2 | 4 | 18 | 19 | 65 | 2 | 6 | 9 | 11 | 66 | 2 6 9 18 |
| 67 | 2 | 6 | 16 | 21 | 68 | 2 | 6 | 21 | 23 | 69 | 2 7 10 11 |
| 70 | 2 | 7 | 10 | 18 | 71 | 2 | 7 | 19 | 21 | 72 | 2 7 21 24 |
| 73 | 2 | 8 | 9 | 10 | 74 | 2 | 8 | 9 | 15 | 75 | 2 8 16 24 |
| 76 | 2 | 8 | 23 | 24 | 77 | 2 | 9 | 10 | 13 | 78 | 2 9 11 19 |



BIUS LILLE

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 79 | 2 | 9 | 13 | 15 |
| 82 | 2 | 10 | 17 | 18 |
| 85 | 2 | 15 | 16 | 21 |
| 88 | 2 | 17 | 21 | 24 |
| 91 | 3 | 4 | 12 | 15 |
| 94 | 3 | 4 | 14 | 24 |
| 97 | 3 | 5 | 6 | 16 |
| 100 | 3 | 5 | 7 | 24 |
| 103 | 3 | 5 | 17 | 19 |
| 106 | 3 | 6 | 7 | 22 |
| 109 | 3 | 9 | 10 | 20 |
| 112 | 3 | 9 | 12 | 24 |
| 115 | 3 | 9 | 19 | 20 |
| 118 | 3 | 10 | 12 | 23 |
| 121 | 4 | 5 | 6 | 11 |
| 124 | 4 | 5 | 8 | 15 |
| 127 | 4 | 5 | 13 | 15 |
| 130 | 4 | 6 | 8 | 14 |
| 133 | 4 | 10 | 20 | 21 |
| 136 | 4 | 11 | 22 | 24 |
| 139 | 4 | 14 | 15 | 21 |
| 142 | 4 | 18 | 22 | 24 |
| 145 | 5 | 6 | 9 | 11 |
| 148 | 5 | 6 | 21 | 23 |
| 151 | 5 | 7 | 19 | 21 |
| 154 | 5 | 8 | 9 | 15 |
| 157 | 5 | 9 | 10 | 13 |
| 160 | 5 | 9 | 18 | 19 |
| 163 | 5 | 13 | 16 | 24 |
| 166 | 5 | 15 | 21 | 23 |
| 169 | 6 | 7 | 11 | 12 |
| 172 | 6 | 7 | 14 | 18 |
| 175 | 6 | 8 | 9 | 12 |
| 178 | 6 | 8 | 16 | 22 |
| 181 | 6 | 9 | 12 | 13 |
| 184 | 6 | 11 | 14 | 17 |
| 187 | 6 | 13 | 16 | 22 |
| 190 | 6 | 14 | 17 | 18 |
| 193 | 7 | 8 | 10 | 12 |
| 196 | 7 | 8 | 14 | 19 |
| 199 | 7 | 8 | 20 | 24 |
| 202 | 7 | 10 | 13 | 14 |
| 205 | 7 | 12 | 13 | 19 |
| 208 | 7 | 13 | 15 | 20 |
| 211 | 7 | 13 | 22 | 24 |
| 214 | 8 | 10 | 14 | 17 |
| 217 | 8 | 15 | 17 | 20 |
| 220 | 8 | 16 | 19 | 22 |
| 223 | 8 | 19 | 20 | 23 |
| 226 | 9 | 10 | 21 | 22 |
| 229 | 9 | 12 | 15 | 21 |
| 232 | 9 | 14 | 21 | 24 |
| 235 | 9 | 19 | 20 | 21 |
| 238 | 10 | 11 | 16 | 22 |
| 241 | 10 | 12 | 13 | 17 |
| 244 | 10 | 13 | 14 | 17 |
| 247 | 10 | 16 | 18 | 20 |
| 250 | 10 | 18 | 22 | 23 |
| 253 | 11 | 12 | 16 | 24 |
| 256 | 11 | 14 | 15 | 17 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 80 | 2 | 9 | 18 | 19 |
| 83 | 2 | 13 | 16 | 24 |
| 86 | 2 | 15 | 21 | 23 |
| 89 | 3 | 4 | 10 | 20 |
| 92 | 3 | 4 | 12 | 24 |
| 95 | 3 | 4 | 19 | 20 |
| 98 | 3 | 5 | 6 | 23 |
| 101 | 3 | 5 | 15 | 16 |
| 104 | 3 | 5 | 17 | 24 |
| 107 | 3 | 6 | 17 | 20 |
| 110 | 3 | 9 | 10 | 22 |
| 113 | 3 | 9 | 14 | 19 |
| 116 | 3 | 9 | 19 | 22 |
| 119 | 3 | 10 | 14 | 16 |
| 122 | 4 | 5 | 6 | 18 |
| 125 | 4 | 5 | 10 | 13 |
| 128 | 4 | 5 | 18 | 19 |
| 131 | 4 | 6 | 12 | 13 |
| 134 | 4 | 10 | 21 | 22 |
| 137 | 4 | 12 | 15 | 21 |
| 140 | 4 | 14 | 21 | 24 |
| 143 | 4 | 19 | 20 | 21 |
| 146 | 5 | 6 | 9 | 18 |
| 149 | 5 | 7 | 10 | 11 |
| 152 | 5 | 7 | 21 | 24 |
| 155 | 5 | 8 | 16 | 24 |
| 158 | 5 | 9 | 11 | 19 |
| 161 | 5 | 10 | 11 | 17 |
| 164 | 5 | 13 | 23 | 24 |
| 167 | 5 | 17 | 19 | 21 |
| 170 | 6 | 7 | 11 | 14 |
| 173 | 6 | 7 | 20 | 21 |
| 176 | 6 | 8 | 9 | 14 |
| 179 | 6 | 8 | 20 | 23 |
| 182 | 6 | 9 | 13 | 14 |
| 185 | 6 | 12 | 17 | 18 |
| 188 | 6 | 13 | 20 | 23 |
| 191 | 6 | 17 | 20 | 21 |
| 194 | 7 | 8 | 10 | 14 |
| 197 | 7 | 8 | 15 | 20 |
| 200 | 7 | 8 | 22 | 24 |
| 203 | 7 | 11 | 12 | 19 |
| 206 | 7 | 12 | 19 | 18 |
| 209 | 7 | 13 | 19 | 22 |
| 212 | 7 | 14 | 19 | 18 |
| 215 | 8 | 12 | 17 | 19 |
| 218 | 8 | 15 | 17 | 22 |
| 221 | 8 | 17 | 20 | 24 |
| 224 | 8 | 19 | 22 | 23 |
| 227 | 9 | 11 | 20 | 24 |
| 230 | 9 | 12 | 21 | 24 |
| 233 | 9 | 18 | 20 | 24 |
| 236 | 9 | 19 | 21 | 22 |
| 239 | 10 | 11 | 20 | 23 |
| 242 | 10 | 12 | 16 | 21 |
| 245 | 10 | 14 | 16 | 21 |
| 248 | 10 | 16 | 18 | 22 |
| 251 | 11 | 12 | 19 | 17 |
| 254 | 11 | 12 | 19 | 23 |
| 257 | 11 | 14 | 16 | 19 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 81 | 2 | 10 | 11 | 17 |
| 84 | 2 | 13 | 23 | 24 |
| 87 | 2 | 17 | 19 | 21 |
| 90 | 3 | 4 | 10 | 22 |
| 93 | 3 | 4 | 14 | 15 |
| 96 | 3 | 4 | 19 | 22 |
| 99 | 3 | 5 | 7 | 19 |
| 102 | 3 | 5 | 15 | 23 |
| 105 | 3 | 6 | 7 | 20 |
| 108 | 3 | 6 | 17 | 22 |
| 111 | 3 | 9 | 12 | 15 |
| 114 | 3 | 9 | 14 | 24 |
| 117 | 3 | 10 | 12 | 16 |
| 120 | 3 | 10 | 14 | 23 |
| 123 | 4 | 5 | 8 | 10 |
| 126 | 4 | 5 | 11 | 19 |
| 129 | 4 | 6 | 8 | 12 |
| 132 | 4 | 6 | 13 | 14 |
| 135 | 4 | 11 | 20 | 24 |
| 138 | 4 | 12 | 21 | 24 |
| 141 | 4 | 18 | 20 | 24 |
| 144 | 4 | 19 | 21 | 22 |
| 147 | 5 | 6 | 16 | 21 |
| 150 | 5 | 7 | 10 | 18 |
| 153 | 5 | 8 | 9 | 10 |
| 156 | 5 | 8 | 23 | 24 |
| 159 | 5 | 9 | 13 | 15 |
| 162 | 5 | 10 | 17 | 18 |
| 165 | 5 | 15 | 16 | 21 |
| 168 | 5 | 17 | 21 | 24 |
| 171 | 6 | 7 | 12 | 18 |
| 174 | 6 | 7 | 21 | 22 |
| 177 | 6 | 8 | 16 | 20 |
| 180 | 6 | 8 | 22 | 23 |
| 183 | 6 | 11 | 12 | 17 |
| 186 | 6 | 13 | 16 | 20 |
| 189 | 6 | 13 | 22 | 23 |
| 192 | 6 | 17 | 21 | 22 |
| 195 | 7 | 8 | 12 | 19 |
| 198 | 7 | 8 | 15 | 22 |
| 201 | 7 | 10 | 12 | 13 |
| 204 | 7 | 11 | 14 | 15 |
| 207 | 7 | 13 | 14 | 19 |
| 210 | 7 | 13 | 20 | 24 |
| 213 | 8 | 10 | 12 | 17 |
| 216 | 8 | 14 | 17 | 19 |
| 219 | 8 | 16 | 19 | 20 |
| 222 | 8 | 17 | 22 | 24 |
| 225 | 9 | 10 | 20 | 21 |
| 228 | 9 | 11 | 22 | 24 |
| 231 | 9 | 14 | 15 | 21 |
| 234 | 9 | 18 | 22 | 24 |
| 237 | 10 | 11 | 16 | 20 |
| 240 | 10 | 11 | 22 | 23 |
| 243 | 10 | 12 | 21 | 23 |
| 246 | 10 | 14 | 21 | 23 |
| 249 | 10 | 18 | 20 | 23 |
| 252 | 11 | 12 | 16 | 19 |
| 255 | 11 | 12 | 23 | 24 |
| 258 | 11 | 14 | 16 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 259 | 11 | 14 | 19 | 23 |
| 262 | 11 | 15 | 16 | 22 |
| 265 | 12 | 13 | 17 | 19 |
| 268 | 12 | 16 | 18 | 24 |
| 271 | 13 | 14 | 17 | 19 |
| 274 | 13 | 16 | 19 | 20 |
| 277 | 13 | 17 | 22 | 24 |
| 280 | 14 | 15 | 17 | 18 |
| 283 | 14 | 18 | 19 | 23 |
| 286 | 15 | 16 | 18 | 22 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 260 | 11 | 14 | 23 | 24 |
| 263 | 11 | 15 | 20 | 23 |
| 266 | 12 | 15 | 17 | 18 |
| 269 | 12 | 18 | 19 | 23 |
| 272 | 13 | 15 | 17 | 20 |
| 275 | 13 | 16 | 19 | 22 |
| 278 | 13 | 19 | 20 | 23 |
| 281 | 14 | 16 | 18 | 19 |
| 284 | 14 | 18 | 23 | 24 |
| 287 | 15 | 18 | 20 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 261 | 11 | 15 | 16 | 20 |
| 264 | 11 | 15 | 22 | 23 |
| 267 | 12 | 16 | 18 | 19 |
| 270 | 12 | 18 | 23 | 24 |
| 273 | 13 | 15 | 17 | 22 |
| 276 | 13 | 17 | 20 | 24 |
| 279 | 13 | 19 | 22 | 23 |
| 282 | 14 | 16 | 24 | 24 |
| 285 | 15 | 16 | 18 | 20 |
| 288 | 15 | 18 | 22 | 23 |

22

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 7 | 12 |
| 4 | 1 | 2 | 8 | 22 |
| 7 | 1 | 2 | 13 | 22 |
| 10 | 1 | 3 | 8 | 22 |
| 13 | 1 | 3 | 13 | 20 |
| 16 | 1 | 3 | 18 | 23 |
| 19 | 1 | 4 | 11 | 16 |
| 22 | 1 | 4 | 14 | 17 |
| 25 | 1 | 5 | 7 | 12 |
| 28 | 1 | 5 | 8 | 22 |
| 31 | 1 | 5 | 13 | 22 |
| 34 | 1 | 7 | 9 | 14 |
| 37 | 1 | 9 | 11 | 16 |
| 40 | 1 | 9 | 14 | 17 |
| 43 | 1 | 11 | 16 | 21 |
| 46 | 1 | 13 | 21 | 22 |
| 49 | 2 | 3 | 6 | 12 |
| 52 | 2 | 3 | 18 | 24 |
| 55 | 2 | 4 | 10 | 16 |
| 58 | 2 | 6 | 9 | 22 |
| 61 | 2 | 7 | 16 | 19 |
| 64 | 2 | 8 | 15 | 18 |
| 67 | 2 | 10 | 12 | 16 |
| 70 | 2 | 10 | 14 | 23 |
| 73 | 2 | 11 | 14 | 15 |
| 76 | 2 | 11 | 22 | 24 |
| 79 | 2 | 14 | 15 | 18 |
| 82 | 2 | 16 | 19 | 22 |
| 85 | 2 | 18 | 21 | 24 |
| 88 | 2 | 19 | 22 | 23 |
| 91 | 3 | 4 | 10 | 17 |
| 94 | 3 | 5 | 6 | 14 |
| 97 | 3 | 6 | 8 | 12 |
| 100 | 3 | 6 | 13 | 14 |
| 103 | 3 | 7 | 10 | 11 |
| 106 | 3 | 7 | 15 | 16 |
| 109 | 3 | 8 | 15 | 17 |
| 112 | 3 | 10 | 11 | 17 |
| 115 | 3 | 11 | 14 | 19 |
| 118 | 3 | 12 | 19 | 22 |
| 121 | 3 | 14 | 19 | 20 |
| 124 | 3 | 15 | 17 | 23 |
| 127 | 4 | 5 | 10 | 16 |
| 130 | 4 | 6 | 7 | 22 |
| 133 | 4 | 7 | 8 | 19 |
| 136 | 4 | 8 | 11 | 19 |
| 139 | 4 | 8 | 18 | 19 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | 7 | 14 |
| 5 | 1 | 2 | 12 | 17 |
| 8 | 1 | 2 | 14 | 17 |
| 11 | 1 | 3 | 11 | 16 |
| 14 | 1 | 3 | 13 | 22 |
| 17 | 1 | 4 | 7 | 12 |
| 20 | 1 | 4 | 11 | 23 |
| 23 | 1 | 4 | 16 | 18 |
| 26 | 1 | 5 | 7 | 14 |
| 29 | 1 | 5 | 12 | 17 |
| 32 | 1 | 5 | 14 | 17 |
| 35 | 1 | 8 | 20 | 21 |
| 38 | 1 | 9 | 11 | 23 |
| 41 | 1 | 9 | 16 | 18 |
| 44 | 1 | 11 | 21 | 23 |
| 47 | 1 | 16 | 18 | 21 |
| 50 | 2 | 3 | 6 | 14 |
| 53 | 2 | 4 | 6 | 20 |
| 56 | 2 | 4 | 10 | 23 |
| 59 | 2 | 6 | 12 | 21 |
| 62 | 2 | 7 | 19 | 23 |
| 65 | 2 | 9 | 10 | 16 |
| 68 | 2 | 10 | 12 | 23 |
| 71 | 2 | 11 | 12 | 15 |
| 74 | 2 | 11 | 20 | 24 |
| 77 | 2 | 12 | 15 | 18 |
| 80 | 2 | 16 | 17 | 19 |
| 83 | 2 | 17 | 19 | 23 |
| 86 | 2 | 18 | 22 | 24 |
| 89 | 3 | 4 | 7 | 10 |
| 92 | 3 | 4 | 13 | 24 |
| 95 | 3 | 5 | 11 | 24 |
| 98 | 3 | 6 | 8 | 14 |
| 101 | 3 | 7 | 8 | 19 |
| 104 | 3 | 7 | 10 | 18 |
| 107 | 3 | 7 | 15 | 23 |
| 110 | 3 | 9 | 10 | 17 |
| 113 | 3 | 10 | 17 | 18 |
| 116 | 3 | 12 | 18 | 19 |
| 119 | 3 | 13 | 15 | 17 |
| 122 | 3 | 14 | 19 | 22 |
| 125 | 4 | 5 | 6 | 20 |
| 128 | 4 | 5 | 10 | 23 |
| 131 | 4 | 6 | 17 | 20 |
| 134 | 4 | 7 | 10 | 21 |
| 137 | 4 | 8 | 16 | 24 |
| 140 | 4 | 8 | 21 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 | 8 | 20 |
| 6 | 1 | 2 | 13 | 20 |
| 9 | 1 | 3 | 8 | 20 |
| 12 | 1 | 3 | 11 | 23 |
| 15 | 1 | 3 | 16 | 18 |
| 18 | 1 | 4 | 7 | 14 |
| 21 | 1 | 4 | 12 | 17 |
| 24 | 1 | 4 | 18 | 23 |
| 27 | 1 | 5 | 8 | 20 |
| 30 | 1 | 5 | 13 | 20 |
| 33 | 1 | 7 | 9 | 12 |
| 36 | 1 | 8 | 21 | 22 |
| 39 | 1 | 9 | 12 | 17 |
| 42 | 1 | 9 | 18 | 23 |
| 45 | 1 | 13 | 20 | 21 |
| 48 | 1 | 18 | 21 | 23 |
| 51 | 2 | 3 | 11 | 24 |
| 54 | 2 | 4 | 6 | 22 |
| 57 | 2 | 6 | 9 | 20 |
| 60 | 2 | 6 | 14 | 21 |
| 63 | 2 | 8 | 11 | 15 |
| 66 | 2 | 9 | 10 | 23 |
| 69 | 2 | 10 | 14 | 16 |
| 72 | 2 | 11 | 13 | 15 |
| 75 | 2 | 11 | 21 | 24 |
| 78 | 2 | 13 | 15 | 18 |
| 81 | 2 | 16 | 19 | 20 |
| 84 | 2 | 18 | 20 | 24 |
| 87 | 2 | 19 | 20 | 23 |
| 90 | 3 | 4 | 8 | 24 |
| 93 | 3 | 5 | 6 | 12 |
| 96 | 3 | 5 | 18 | 24 |
| 99 | 3 | 6 | 12 | 13 |
| 102 | 3 | 7 | 9 | 10 |
| 105 | 3 | 7 | 13 | 15 |
| 108 | 3 | 8 | 9 | 24 |
| 111 | 3 | 9 | 13 | 24 |
| 114 | 3 | 11 | 12 | 19 |
| 117 | 3 | 12 | 19 | 20 |
| 120 | 3 | 14 | 18 | 19 |
| 123 | 3 | 15 | 16 | 17 |
| 126 | 4 | 5 | 6 | 22 |
| 129 | 4 | 6 | 7 | 20 |
| 132 | 4 | 6 | 17 | 22 |
| 135 | 4 | 7 | 13 | 19 |
| 138 | 4 | 8 | 17 | 19 |
| 141 | 4 | 8 | 23 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 142 | 4 | 10 | 17 | 21 |
| 145 | 4 | 12 | 15 | 22 |
| 148 | 4 | 13 | 18 | 19 |
| 151 | 4 | 14 | 15 | 20 |
| 154 | 4 | 15 | 16 | 22 |
| 157 | 5 | 6 | 9 | 20 |
| 160 | 5 | 6 | 14 | 21 |
| 163 | 5 | 8 | 11 | 15 |
| 166 | 5 | 9 | 10 | 23 |
| 169 | 5 | 10 | 14 | 16 |
| 172 | 5 | 11 | 13 | 15 |
| 175 | 5 | 11 | 21 | 24 |
| 178 | 5 | 13 | 15 | 18 |
| 181 | 5 | 16 | 19 | 20 |
| 184 | 5 | 18 | 20 | 24 |
| 187 | 5 | 19 | 20 | 23 |
| 190 | 6 | 7 | 9 | 22 |
| 193 | 6 | 7 | 16 | 18 |
| 196 | 6 | 8 | 11 | 23 |
| 199 | 6 | 8 | 16 | 18 |
| 202 | 6 | 9 | 17 | 22 |
| 205 | 6 | 11 | 16 | 17 |
| 208 | 6 | 13 | 14 | 21 |
| 211 | 6 | 16 | 17 | 18 |
| 214 | 7 | 8 | 15 | 21 |
| 217 | 7 | 10 | 11 | 21 |
| 220 | 7 | 12 | 20 | 24 |
| 223 | 7 | 13 | 15 | 21 |
| 226 | 7 | 14 | 22 | 24 |
| 229 | 7 | 15 | 21 | 23 |
| 232 | 8 | 9 | 17 | 19 |
| 235 | 8 | 9 | 23 | 24 |
| 238 | 8 | 10 | 12 | 20 |
| 241 | 8 | 10 | 14 | 22 |
| 244 | 8 | 15 | 17 | 21 |
| 247 | 9 | 12 | 15 | 20 |
| 250 | 9 | 13 | 17 | 19 |
| 253 | 9 | 13 | 23 | 24 |
| 256 | 9 | 15 | 16 | 20 |
| 259 | 9 | 15 | 22 | 23 |
| 262 | 10 | 11 | 17 | 21 |
| 265 | 10 | 13 | 14 | 20 |
| 268 | 10 | 13 | 18 | 22 |
| 271 | 11 | 14 | 19 | 21 |
| 274 | 12 | 17 | 22 | 24 |
| 277 | 12 | 19 | 20 | 21 |
| 280 | 14 | 16 | 17 | 24 |
| 283 | 14 | 17 | 23 | 24 |
| 286 | 14 | 19 | 21 | 22 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 143 | 4 | 11 | 13 | 19 |
| 146 | 4 | 13 | 16 | 24 |
| 149 | 4 | 13 | 21 | 24 |
| 152 | 4 | 14 | 15 | 22 |
| 155 | 4 | 15 | 20 | 23 |
| 158 | 5 | 6 | 9 | 22 |
| 161 | 5 | 7 | 16 | 19 |
| 164 | 5 | 8 | 15 | 18 |
| 167 | 5 | 10 | 12 | 16 |
| 170 | 5 | 10 | 14 | 23 |
| 173 | 5 | 11 | 14 | 19 |
| 176 | 5 | 11 | 22 | 24 |
| 179 | 5 | 14 | 15 | 18 |
| 182 | 5 | 16 | 19 | 22 |
| 185 | 5 | 18 | 21 | 24 |
| 188 | 5 | 19 | 22 | 23 |
| 191 | 6 | 7 | 11 | 16 |
| 194 | 6 | 7 | 18 | 23 |
| 197 | 6 | 8 | 12 | 21 |
| 200 | 6 | 8 | 18 | 23 |
| 203 | 6 | 11 | 13 | 16 |
| 206 | 6 | 11 | 17 | 23 |
| 209 | 6 | 13 | 16 | 18 |
| 212 | 6 | 17 | 18 | 23 |
| 215 | 7 | 9 | 10 | 21 |
| 218 | 7 | 10 | 18 | 21 |
| 221 | 7 | 12 | 22 | 24 |
| 224 | 7 | 14 | 16 | 24 |
| 227 | 7 | 14 | 23 | 24 |
| 230 | 8 | 9 | 11 | 19 |
| 233 | 8 | 9 | 18 | 19 |
| 236 | 8 | 10 | 11 | 20 |
| 239 | 8 | 10 | 12 | 22 |
| 242 | 8 | 10 | 18 | 20 |
| 245 | 9 | 10 | 17 | 21 |
| 248 | 9 | 12 | 15 | 22 |
| 251 | 9 | 13 | 18 | 19 |
| 254 | 9 | 14 | 15 | 20 |
| 257 | 9 | 15 | 16 | 22 |
| 260 | 10 | 11 | 13 | 20 |
| 263 | 10 | 12 | 13 | 20 |
| 266 | 10 | 13 | 14 | 22 |
| 269 | 10 | 17 | 18 | 21 |
| 272 | 12 | 16 | 17 | 24 |
| 275 | 12 | 17 | 23 | 24 |
| 278 | 12 | 19 | 21 | 22 |
| 281 | 14 | 17 | 20 | 24 |
| 284 | 14 | 18 | 19 | 21 |
| 287 | 15 | 16 | 17 | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 144 | 4 | 12 | 15 | 20 |
| 147 | 4 | 13 | 17 | 19 |
| 150 | 4 | 13 | 23 | 24 |
| 153 | 4 | 15 | 16 | 20 |
| 156 | 4 | 15 | 22 | 23 |
| 159 | 5 | 6 | 12 | 21 |
| 162 | 5 | 7 | 19 | 23 |
| 165 | 5 | 9 | 10 | 16 |
| 168 | 5 | 10 | 12 | 23 |
| 171 | 5 | 11 | 12 | 15 |
| 174 | 5 | 11 | 20 | 24 |
| 177 | 5 | 12 | 15 | 18 |
| 180 | 5 | 16 | 17 | 19 |
| 183 | 5 | 17 | 19 | 23 |
| 186 | 5 | 18 | 22 | 24 |
| 189 | 6 | 7 | 9 | 20 |
| 192 | 6 | 7 | 11 | 23 |
| 195 | 6 | 8 | 11 | 16 |
| 198 | 6 | 8 | 14 | 21 |
| 201 | 6 | 9 | 17 | 20 |
| 204 | 6 | 11 | 13 | 23 |
| 207 | 6 | 12 | 13 | 21 |
| 210 | 6 | 13 | 18 | 23 |
| 213 | 7 | 8 | 9 | 19 |
| 216 | 7 | 9 | 13 | 19 |
| 219 | 7 | 12 | 16 | 24 |
| 222 | 7 | 12 | 23 | 24 |
| 225 | 7 | 14 | 20 | 24 |
| 228 | 7 | 15 | 16 | 21 |
| 231 | 8 | 9 | 16 | 24 |
| 234 | 8 | 9 | 21 | 24 |
| 237 | 8 | 10 | 11 | 22 |
| 240 | 8 | 10 | 14 | 20 |
| 243 | 8 | 10 | 18 | 22 |
| 246 | 9 | 11 | 13 | 19 |
| 249 | 9 | 13 | 16 | 24 |
| 252 | 9 | 13 | 21 | 24 |
| 255 | 9 | 14 | 15 | 22 |
| 258 | 9 | 15 | 20 | 23 |
| 261 | 10 | 11 | 13 | 22 |
| 264 | 10 | 12 | 13 | 22 |
| 267 | 10 | 13 | 18 | 20 |
| 270 | 11 | 12 | 19 | 21 |
| 273 | 12 | 17 | 20 | 24 |
| 276 | 12 | 18 | 19 | 21 |
| 279 | 13 | 15 | 17 | 21 |
| 282 | 14 | 17 | 22 | 24 |
| 285 | 14 | 19 | 20 | 21 |
| 288 | 15 | 17 | 21 | 23 |

23

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 7 | 13 |
| 4 | 1 | 3 | 20 | 23 |
| 7 | 1 | 5 | 7 | 8 |
| 10 | 1 | 9 | 14 | 18 |
| 13 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| 16 | 2 | 6 | 9 | 21 |
| 19 | 2 | 8 | 15 | 17 |
| 22 | 2 | 9 | 21 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | 8 | 17 |
| 5 | 1 | 4 | 11 | 14 |
| 8 | 1 | 5 | 13 | 17 |
| 11 | 1 | 16 | 20 | 21 |
| 14 | 2 | 3 | 4 | 10 |
| 17 | 2 | 7 | 13 | 15 |
| 20 | 2 | 8 | 17 | 19 |
| 23 | 3 | 5 | 6 | 9 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 3 | 16 | 22 |
| 6 | 1 | 4 | 12 | 18 |
| 9 | 1 | 9 | 11 | 12 |
| 12 | 1 | 21 | 22 | 23 |
| 15 | 2 | 3 | 4 | 24 |
| 18 | 2 | 7 | 13 | 19 |
| 21 | 2 | 9 | 10 | 21 |
| 24 | 3 | 5 | 9 | 10 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 3 | 5 | 9 | 24 |
| 28 | 3 | 16 | 19 | 22 |
| 31 | 4 | 5 | 10 | 21 |
| 34 | 4 | 11 | 14 | 19 |
| 37 | 5 | 7 | 8 | 15 |
| 40 | 5 | 13 | 17 | 19 |
| 43 | 6 | 8 | 12 | 16 |
| 46 | 6 | 12 | 13 | 23 |
| 49 | 7 | 10 | 11 | 20 |
| 52 | 7 | 18 | 22 | 24 |
| 55 | 8 | 12 | 16 | 24 |
| 58 | 9 | 11 | 12 | 19 |
| 61 | 10 | 11 | 17 | 22 |
| 64 | 10 | 17 | 18 | 20 |
| 67 | 13 | 14 | 16 | 24 |
| 70 | 16 | 19 | 20 | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 26 | 3 | 15 | 16 | 22 |
| 29 | 3 | 19 | 20 | 23 |
| 32 | 4 | 5 | 21 | 24 |
| 35 | 4 | 12 | 15 | 18 |
| 38 | 5 | 7 | 8 | 19 |
| 41 | 6 | 7 | 11 | 20 |
| 44 | 6 | 8 | 14 | 23 |
| 47 | 6 | 13 | 14 | 16 |
| 50 | 7 | 10 | 18 | 22 |
| 53 | 8 | 10 | 12 | 16 |
| 56 | 8 | 14 | 23 | 24 |
| 59 | 9 | 14 | 15 | 18 |
| 62 | 10 | 12 | 13 | 23 |
| 65 | 11 | 17 | 22 | 24 |
| 68 | 15 | 16 | 20 | 21 |
| 71 | 17 | 18 | 20 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 27 | 3 | 15 | 20 | 23 |
| 30 | 4 | 5 | 6 | 21 |
| 33 | 4 | 11 | 14 | 15 |
| 36 | 4 | 12 | 18 | 19 |
| 39 | 5 | 13 | 15 | 17 |
| 42 | 6 | 7 | 18 | 22 |
| 45 | 6 | 11 | 17 | 22 |
| 48 | 6 | 17 | 18 | 20 |
| 51 | 7 | 11 | 20 | 24 |
| 54 | 8 | 10 | 14 | 23 |
| 57 | 9 | 11 | 12 | 15 |
| 60 | 9 | 14 | 18 | 19 |
| 63 | 10 | 13 | 14 | 16 |
| 66 | 12 | 13 | 23 | 24 |
| 69 | 15 | 21 | 22 | 23 |
| 72 | 19 | 21 | 22 | 23 |

24

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 7 | 15 |
| 4 | 1 | 2 | 15 | 17 |
| 7 | 1 | 3 | 16 | 19 |
| 10 | 1 | 4 | 12 | 19 |
| 13 | 1 | 5 | 7 | 15 |
| 16 | 1 | 5 | 15 | 17 |
| 19 | 1 | 7 | 13 | 15 |
| 22 | 1 | 8 | 17 | 19 |
| 25 | 1 | 9 | 14 | 19 |
| 28 | 1 | 11 | 12 | 19 |
| 31 | 1 | 12 | 15 | 18 |
| 34 | 1 | 13 | 17 | 19 |
| 37 | 1 | 15 | 16 | 20 |
| 40 | 1 | 15 | 20 | 23 |
| 43 | 1 | 16 | 19 | 20 |
| 46 | 1 | 19 | 20 | 23 |
| 49 | 2 | 3 | 6 | 10 |
| 52 | 2 | 4 | 10 | 24 |
| 55 | 2 | 7 | 15 | 19 |
| 58 | 2 | 10 | 21 | 24 |
| 61 | 3 | 4 | 6 | 10 |
| 64 | 3 | 5 | 10 | 24 |
| 67 | 3 | 15 | 16 | 19 |
| 70 | 3 | 15 | 19 | 23 |
| 73 | 4 | 6 | 10 | 21 |
| 76 | 4 | 12 | 15 | 19 |
| 79 | 5 | 6 | 9 | 24 |
| 82 | 5 | 8 | 15 | 19 |
| 85 | 5 | 13 | 15 | 19 |
| 88 | 6 | 7 | 10 | 22 |
| 91 | 6 | 8 | 10 | 16 |
| 94 | 6 | 8 | 14 | 24 |
| 97 | 6 | 10 | 11 | 20 |
| 100 | 6 | 10 | 12 | 23 |
| 103 | 6 | 10 | 14 | 16 |
| 106 | 6 | 10 | 17 | 22 |
| 109 | 6 | 11 | 17 | 24 |
| 112 | 6 | 12 | 13 | 24 |
| 115 | 6 | 13 | 14 | 24 |
| 118 | 6 | 17 | 18 | 24 |
| 121 | 7 | 10 | 11 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | 8 | 19 |
| 5 | 1 | 3 | 15 | 20 |
| 8 | 1 | 3 | 19 | 23 |
| 11 | 1 | 4 | 14 | 19 |
| 14 | 1 | 5 | 8 | 19 |
| 17 | 1 | 7 | 8 | 15 |
| 20 | 1 | 7 | 13 | 19 |
| 23 | 1 | 5 | 11 | 15 |
| 26 | 1 | 9 | 15 | 18 |
| 29 | 1 | 11 | 14 | 15 |
| 32 | 1 | 12 | 18 | 19 |
| 35 | 1 | 14 | 15 | 18 |
| 38 | 1 | 15 | 16 | 22 |
| 41 | 1 | 15 | 21 | 22 |
| 44 | 1 | 16 | 19 | 21 |
| 47 | 1 | 19 | 21 | 23 |
| 50 | 2 | 3 | 10 | 24 |
| 53 | 2 | 6 | 9 | 24 |
| 56 | 2 | 8 | 15 | 19 |
| 59 | 2 | 13 | 15 | 19 |
| 62 | 3 | 4 | 6 | 24 |
| 65 | 3 | 6 | 9 | 10 |
| 68 | 3 | 15 | 19 | 20 |
| 71 | 4 | 5 | 6 | 24 |
| 74 | 4 | 6 | 21 | 24 |
| 77 | 4 | 14 | 15 | 19 |
| 80 | 5 | 6 | 10 | 21 |
| 83 | 5 | 9 | 10 | 24 |
| 86 | 5 | 15 | 17 | 19 |
| 89 | 6 | 7 | 11 | 24 |
| 92 | 6 | 8 | 10 | 23 |
| 95 | 6 | 9 | 10 | 21 |
| 98 | 6 | 10 | 11 | 22 |
| 101 | 6 | 10 | 13 | 16 |
| 104 | 6 | 10 | 14 | 23 |
| 107 | 6 | 10 | 18 | 20 |
| 110 | 6 | 11 | 20 | 24 |
| 113 | 6 | 12 | 16 | 24 |
| 116 | 6 | 14 | 16 | 24 |
| 119 | 6 | 18 | 20 | 24 |
| 122 | 7 | 10 | 18 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 | 13 | 19 |
| 6 | 1 | 3 | 15 | 22 |
| 9 | 1 | 4 | 11 | 15 |
| 12 | 1 | 4 | 15 | 18 |
| 15 | 1 | 5 | 13 | 19 |
| 18 | 1 | 7 | 8 | 19 |
| 21 | 1 | 8 | 15 | 17 |
| 24 | 1 | 9 | 12 | 19 |
| 27 | 1 | 11 | 12 | 15 |
| 30 | 1 | 11 | 14 | 19 |
| 33 | 1 | 13 | 15 | 17 |
| 36 | 1 | 14 | 18 | 19 |
| 39 | 1 | 15 | 20 | 21 |
| 42 | 1 | 15 | 22 | 23 |
| 45 | 1 | 16 | 19 | 22 |
| 48 | 1 | 19 | 22 | 23 |
| 51 | 2 | 4 | 6 | 24 |
| 54 | 2 | 6 | 10 | 21 |
| 57 | 2 | 9 | 10 | 24 |
| 60 | 2 | 15 | 17 | 19 |
| 63 | 3 | 5 | 6 | 10 |
| 66 | 3 | 6 | 9 | 24 |
| 69 | 3 | 15 | 19 | 22 |
| 72 | 4 | 5 | 10 | 24 |
| 75 | 4 | 11 | 15 | 19 |
| 78 | 4 | 15 | 18 | 19 |
| 81 | 5 | 7 | 15 | 19 |
| 84 | 5 | 10 | 21 | 24 |
| 87 | 6 | 7 | 10 | 20 |
| 90 | 6 | 7 | 18 | 24 |
| 93 | 6 | 8 | 12 | 24 |
| 96 | 6 | 9 | 21 | 24 |
| 99 | 6 | 10 | 12 | 16 |
| 102 | 6 | 10 | 13 | 23 |
| 105 | 6 | 10 | 17 | 20 |
| 108 | 6 | 10 | 18 | 22 |
| 111 | 6 | 11 | 22 | 24 |
| 114 | 6 | 12 | 23 | 24 |
| 117 | 6 | 14 | 23 | 24 |
| 120 | 6 | 18 | 22 | 24 |
| 123 | 7 | 10 | 20 | 24 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 124 | 7 10 22 24 | 125 | 8 10 12 24 | 126 | 8 10 14 24 |
| 127 | 8 10 16 24 | 128 | 8 10 23 24 | 129 | 9 11 15 19 |
| 130 | 9 12 15 19 | 131 | 9 14 15 19 | 132 | 9 15 18 19 |
| 133 | 10 11 17 24 | 134 | 10 12 13 24 | 135 | 10 13 14 24 |
| 136 | 10 13 16 24 | 137 | 10 13 23 24 | 138 | 10 17 18 24 |
| 139 | 10 17 20 24 | 140 | 10 17 22 24 | 141 | 15 16 19 21 |
| 142 | 15 19 20 21 | 143 | 15 19 21 22 | 144 | 15 19 21 23 |

25

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 2 7 16 | 2 | 1 2 7 23 | 3 | 1 2 8 11 |
| 4 | 1 2 8 18 | 5 | 1 2 11 13 | 6 | 1 2 13 18 |
| 7 | 1 2 16 17 | 8 | 1 2 17 23 | 9 | 1 3 7 16 |
| 10 | 1 3 7 23 | 11 | 1 3 12 20 | 12 | 1 3 12 22 |
| 13 | 1 3 14 20 | 14 | 1 3 14 22 | 15 | 1 3 16 17 |
| 16 | 1 3 17 23 | 17 | 1 4 8 11 | 18 | 1 4 8 18 |
| 19 | 1 4 11 13 | 20 | 1 4 12 20 | 21 | 1 4 12 22 |
| 22 | 1 4 13 18 | 23 | 1 4 14 20 | 24 | 1 4 14 22 |
| 25 | 1 5 7 16 | 26 | 1 5 7 23 | 27 | 1 5 8 11 |
| 28 | 1 5 8 18 | 29 | 1 5 11 13 | 30 | 1 5 13 18 |
| 31 | 1 5 16 17 | 32 | 1 5 17 23 | 33 | 1 7 16 21 |
| 34 | 1 7 21 23 | 35 | 1 8 9 11 | 36 | 1 8 9 18 |
| 37 | 1 9 11 13 | 38 | 1 9 12 20 | 39 | 1 9 12 22 |
| 40 | 1 9 13 18 | 41 | 1 9 14 20 | 42 | 1 9 14 22 |
| 43 | 1 12 20 21 | 44 | 1 12 21 22 | 45 | 1 14 20 21 |
| 46 | 1 14 21 22 | 47 | 1 16 17 21 | 48 | 1 17 21 23 |
| 49 | 2 3 6 11 | 50 | 2 3 6 18 | 51 | 2 3 12 24 |
| 52 | 2 3 14 24 | 53 | 2 4 6 16 | 54 | 2 4 6 23 |
| 55 | 2 4 10 20 | 56 | 2 4 10 22 | 57 | 2 6 9 16 |
| 58 | 2 6 9 23 | 59 | 2 6 11 21 | 60 | 2 6 18 21 |
| 61 | 2 7 12 19 | 62 | 2 7 14 19 | 63 | 2 8 15 20 |
| 64 | 2 8 15 22 | 65 | 2 9 10 20 | 66 | 2 9 10 22 |
| 67 | 2 10 11 20 | 68 | 2 10 11 22 | 69 | 2 10 18 20 |
| 70 | 2 10 18 22 | 71 | 2 11 12 19 | 72 | 2 11 14 19 |
| 73 | 2 12 16 24 | 74 | 2 12 17 19 | 75 | 2 12 18 19 |
| 76 | 2 12 21 24 | 77 | 2 12 23 24 | 78 | 2 13 15 20 |
| 79 | 2 13 15 22 | 80 | 2 14 16 24 | 81 | 2 14 17 19 |
| 82 | 2 14 18 19 | 83 | 2 14 21 24 | 84 | 2 14 23 24 |
| 85 | 2 15 16 20 | 86 | 2 15 16 22 | 87 | 2 15 20 23 |
| 88 | 2 15 22 23 | 89 | 3 4 7 24 | 90 | 3 4 8 10 |
| 91 | 3 4 10 13 | 92 | 3 4 17 24 | 93 | 3 5 6 11 |
| 94 | 3 5 6 18 | 95 | 3 5 12 24 | 96 | 3 5 14 24 |
| 97 | 3 6 7 11 | 98 | 3 6 7 18 | 99 | 3 6 11 17 |
| 100 | 3 6 17 18 | 101 | 3 7 8 19 | 102 | 3 7 9 24 |
| 103 | 3 7 13 19 | 104 | 3 8 9 10 | 105 | 3 8 10 12 |
| 106 | 3 8 10 14 | 107 | 3 8 17 19 | 108 | 3 8 19 20 |
| 109 | 3 8 19 22 | 110 | 3 9 10 13 | 111 | 3 9 17 24 |
| 112 | 3 10 12 13 | 113 | 3 10 13 14 | 114 | 3 11 12 15 |
| 115 | 3 11 14 15 | 116 | 3 11 15 16 | 117 | 3 11 15 23 |
| 118 | 3 12 15 18 | 119 | 3 13 17 19 | 120 | 3 13 19 20 |
| 121 | 3 13 19 22 | 122 | 3 14 15 18 | 123 | 3 15 16 18 |
| 124 | 3 15 18 23 | 125 | 4 5 6 16 | 126 | 4 5 6 23 |
| 127 | 4 5 10 20 | 128 | 4 5 10 22 | 129 | 4 6 8 16 |
| 130 | 4 6 8 23 | 131 | 4 6 13 16 | 132 | 4 6 13 23 |
| 133 | 4 7 8 15 | 134 | 4 7 12 15 | 135 | 4 7 13 15 |
| 136 | 4 7 14 15 | 137 | 4 7 20 24 | 138 | 4 7 21 24 |
| 139 | 4 7 22 24 | 140 | 4 8 10 21 | 141 | 4 8 15 17 |
| 142 | 4 10 13 21 | 143 | 4 11 16 19 | 144 | 4 11 19 23 |
| 145 | 4 12 15 17 | 146 | 4 13 15 17 | 147 | 4 14 15 17 |
| 148 | 4 16 18 19 | 149 | 4 16 19 20 | 150 | 4 16 19 22 |
| 151 | 4 17 20 24 | 152 | 4 17 21 24 | 153 | 4 17 22 24 |
| 154 | 4 18 19 23 | 155 | 4 19 20 23 | 156 | 4 19 22 23 |
| 157 | 5 6 9 16 | 158 | 5 6 9 23 | 159 | 5 6 11 21 |
| 160 | 5 6 18 21 | 161 | 5 7 12 19 | 162 | 5 7 14 19 |
| 163 | 5 8 15 20 | 164 | 5 8 15 22 | 165 | 5 9 10 20 |
| 166 | 5 9 10 22 | 167 | 5 10 11 20 | 168 | 5 10 11 22 |
| 169 | 5 10 18 20 | 170 | 5 10 18 22 | 171 | 5 11 12 19 |
| 172 | 5 11 14 19 | 173 | 5 12 16 24 | 174 | 5 12 17 19 |
| 175 | 5 12 18 19 | 176 | 5 12 21 24 | 177 | 5 12 23 24 |
| 178 | 5 13 15 20 | 179 | 5 13 15 22 | 180 | 5 14 16 24 |
| 181 | 5 14 17 19 | 182 | 5 14 18 19 | 183 | 5 14 21 24 |
| 184 | 5 14 23 24 | 185 | 5 15 16 20 | 186 | 5 15 16 22 |
| 187 | 5 15 20 23 | 188 | 5 15 22 23 | 189 | 6 7 11 21 |
| 190 | 6 7 12 20 | 191 | 6 7 12 22 | 192 | 6 7 14 20 |
| 193 | 6 7 14 22 | 194 | 6 7 18 21 | 195 | 6 8 9 16 |
| 196 | 6 8 9 23 | 197 | 6 8 12 20 | 198 | 6 8 12 22 |
| 199 | 6 8 14 20 | 200 | 6 8 14 22 | 201 | 6 9 13 16 |
| 202 | 6 9 13 23 | 203 | 6 11 17 21 | 204 | 6 12 13 20 |
| 205 | 6 12 13 22 | 206 | 6 12 17 20 | 207 | 6 12 17 22 |
| 208 | 6 13 14 20 | 209 | 6 13 14 22 | 210 | 6 14 17 20 |
| 211 | 6 14 17 22 | 212 | 6 17 18 21 | 213 | 7 8 9 15 |
| 214 | 7 8 19 21 | 215 | 7 9 12 15 | 216 | 7 9 13 15 |
| 217 | 7 9 14 15 | 218 | 7 9 20 24 | 219 | 7 9 21 24 |
| 220 | 7 9 22 24 | 221 | 7 10 11 16 | 222 | 7 10 11 23 |
| 223 | 7 10 12 16 | 224 | 7 10 12 23 | 225 | 7 10 14 16 |
| 226 | 7 10 14 23 | 227 | 7 10 16 18 | 228 | 7 10 18 23 |
| 229 | 7 13 19 21 | 230 | 8 9 10 21 | 231 | 8 9 15 17 |
| 232 | 8 10 12 21 | 233 | 8 10 14 21 | 234 | 8 11 16 24 |
| 235 | 8 11 20 24 | 236 | 8 11 22 24 | 237 | 8 11 23 24 |
| 238 | 8 16 18 24 | 239 | 8 17 19 21 | 240 | 8 18 20 24 |
| 241 | 8 18 22 24 | 242 | 8 18 23 24 | 243 | 8 19 20 21 |
| 244 | 8 19 21 22 | 245 | 9 10 13 21 | 246 | 9 11 16 19 |
| 247 | 9 11 19 23 | 248 | 9 12 15 17 | 249 | 9 13 15 17 |
| 250 | 9 14 15 17 | 251 | 9 16 18 19 | 252 | 9 16 19 20 |
| 253 | 9 16 19 22 | 254 | 9 17 20 24 | 255 | 9 17 21 24 |
| 256 | 9 17 22 24 | 257 | 9 18 19 23 | 258 | 9 19 20 23 |
| 259 | 9 19 22 23 | 260 | 10 11 16 17 | 261 | 10 11 17 23 |
| 262 | 10 12 13 21 | 263 | 10 12 16 17 | 264 | 10 12 17 23 |
| 265 | 10 13 14 21 | 266 | 10 14 16 17 | 267 | 10 14 17 23 |
| 268 | 10 16 17 18 | 269 | 10 17 18 23 | 270 | 11 12 15 21 |
| 271 | 11 13 16 24 | 272 | 11 13 20 24 | 273 | 11 13 22 24 |
| 274 | 11 13 23 24 | 275 | 11 14 15 21 | 276 | 11 15 16 21 |
| 277 | 11 15 21 23 | 278 | 12 15 18 21 | 279 | 13 16 18 24 |
| 280 | 13 17 19 21 | 281 | 13 18 20 24 | 282 | 13 18 22 24 |
| 283 | 13 18 23 24 | 284 | 13 19 20 21 | 285 | 13 19 21 22 |
| 286 | 14 15 18 21 | 287 | 15 16 18 21 | 288 | 15 18 21 23 |

26

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 2 7 17 | 2 | 1 2 8 13 | 3 | 1 3 16 23 |
| 4 | 1 3 20 22 | 5 | 1 4 11 18 | 6 | 1 4 12 14 |
| 7 | 1 5 7 17 | 8 | 1 5 8 13 | 9 | 1 9 11 18 |
| 10 | 1 9 12 14 | 11 | 1 16 21 23 | 12 | 1 20 21 22 |
| 13 | 2 3 5 24 | 14 | 2 3 6 21 | 15 | 2 4 5 10 |
| 16 | 2 4 6 9 | 17 | 2 5 7 19 | 18 | 2 5 8 15 |
| 19 | 2 5 9 10 | 20 | 2 5 13 15 | 21 | 2 5 17 19 |
| 22 | 2 5 21 24 | 23 | 3 4 9 24 | 24 | 3 4 10 21 |
| 25 | 3 5 6 21 | 26 | 3 9 10 21 | 27 | 3 15 16 21 |
| 28 | 3 15 21 23 | 29 | 3 19 20 21 | 30 | 3 19 21 22 |
| 31 | 4 5 6 9 | 32 | 4 9 11 15 | 33 | 4 9 12 15 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 4 | 5 | 14 | 15 | 35 | 4 | 9 | 18 | 19 | 36 | 4 | 9 | 21 | 24 | 52 | 2 | 3 | 8 | 24 | 53 | 2 | 3 | 13 | 15 | 54 | 2 | 3 | 13 | 24 |
| 37 | 6 | 7 | 11 | 18 | 38 | 6 | 7 | 20 | 22 | 39 | 6 | 8 | 12 | 14 | 55 | 2 | 3 | 19 | 20 | 56 | 2 | 3 | 19 | 22 | 57 | 2 | 4 | 6 | 12 |
| 40 | 6 | 8 | 16 | 23 | 41 | 6 | 11 | 17 | 18 | 42 | 6 | 12 | 13 | 14 | 58 | 2 | 4 | 6 | 14 | 59 | 2 | 4 | 7 | 10 | 60 | 2 | 4 | 7 | 19 |
| 43 | 6 | 13 | 16 | 23 | 44 | 6 | 17 | 20 | 22 | 45 | 7 | 8 | 13 | 19 | 61 | 2 | 4 | 10 | 17 | 62 | 2 | 4 | 12 | 15 | 63 | 2 | 4 | 14 | 15 |
| 46 | 7 | 8 | 15 | 17 | 47 | 7 | 10 | 11 | 17 | 48 | 7 | 10 | 17 | 18 | 64 | 2 | 4 | 17 | 19 | 65 | 2 | 6 | 9 | 12 | 66 | 2 | 6 | 9 | 14 |
| 49 | 7 | 13 | 15 | 17 | 50 | 7 | 17 | 20 | 24 | 51 | 7 | 17 | 22 | 24 | 67 | 2 | 6 | 20 | 21 | 68 | 2 | 6 | 21 | 22 | 69 | 2 | 7 | 9 | 10 |
| 52 | 8 | 10 | 12 | 13 | 53 | 8 | 10 | 13 | 14 | 54 | 8 | 13 | 16 | 24 | 70 | 2 | 7 | 9 | 19 | 71 | 2 | 7 | 20 | 24 | 72 | 2 | 7 | 22 | 24 |
| 55 | 8 | 13 | 17 | 19 | 56 | 8 | 13 | 23 | 24 | 57 | 10 | 11 | 20 | 22 | 73 | 2 | 8 | 10 | 12 | 74 | 2 | 8 | 10 | 14 | 75 | 2 | 8 | 15 | 21 |
| 58 | 10 | 12 | 16 | 23 | 59 | 10 | 14 | 16 | 23 | 60 | 10 | 18 | 20 | 22 | 76 | 2 | 8 | 21 | 24 | 77 | 2 | 9 | 10 | 17 | 78 | 2 | 9 | 12 | 15 |
| 61 | 11 | 12 | 14 | 19 | 62 | 11 | 12 | 15 | 18 | 63 | 11 | 14 | 15 | 18 | 79 | 2 | 9 | 14 | 15 | 80 | 2 | 9 | 17 | 19 | 81 | 2 | 10 | 12 | 13 |
| 64 | 11 | 18 | 20 | 24 | 65 | 11 | 18 | 22 | 24 | 66 | 12 | 14 | 16 | 24 | 82 | 2 | 10 | 13 | 14 | 83 | 2 | 13 | 15 | 21 | 84 | 2 | 13 | 21 | 24 |
| 67 | 12 | 14 | 18 | 19 | 68 | 12 | 14 | 23 | 24 | 69 | 15 | 16 | 20 | 22 | 85 | 2 | 17 | 20 | 24 | 86 | 2 | 17 | 22 | 24 | 87 | 2 | 19 | 20 | 21 |
| 70 | 15 | 20 | 22 | 23 | 71 | 16 | 19 | 20 | 23 | 72 | 16 | 19 | 22 | 23 | 88 | 2 | 19 | 21 | 22 | 89 | 3 | 4 | 10 | 16 | 90 | 3 | 4 | 10 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 91 | 3 | 4 | 11 | 19 | 92 | 3 | 4 | 11 | 24 | 93 | 3 | 4 | 15 | 16 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 94 | 3 | 4 | 15 | 23 | 95 | 3 | 4 | 18 | 19 | 96 | 3 | 4 | 18 | 24 |
| 27 | | | | | | | | | | | | | | | 97 | 3 | 5 | 6 | 20 | 98 | 3 | 5 | 6 | 22 | 99 | 3 | 5 | 8 | 15 |
| 1 | 1 | 2 | 7 | 19 | 2 | 1 | 2 | 8 | 15 | 3 | 1 | 2 | 13 | 15 | 100 | 3 | 5 | 8 | 24 | 101 | 3 | 5 | 13 | 19 | 102 | 3 | 5 | 13 | 24 |
| 4 | 1 | 2 | 17 | 19 | 5 | 1 | 3 | 15 | 16 | 6 | 1 | 3 | 15 | 23 | 103 | 3 | 5 | 19 | 20 | 104 | 3 | 5 | 19 | 22 | 105 | 3 | 6 | 8 | 16 |
| 7 | 1 | 3 | 19 | 20 | 8 | 1 | 3 | 19 | 22 | 9 | 1 | 4 | 11 | 19 | 106 | 3 | 6 | 8 | 23 | 107 | 3 | 6 | 13 | 16 | 108 | 3 | 6 | 13 | 23 |
| 10 | 1 | 4 | 12 | 15 | 11 | 1 | 4 | 14 | 19 | 12 | 1 | 4 | 18 | 19 | 109 | 3 | 9 | 10 | 16 | 110 | 3 | 9 | 10 | 23 | 111 | 3 | 9 | 11 | 19 |
| 13 | 1 | 5 | 7 | 19 | 14 | 1 | 5 | 8 | 19 | 15 | 1 | 5 | 13 | 19 | 112 | 3 | 9 | 11 | 24 | 113 | 3 | 9 | 15 | 16 | 114 | 3 | 9 | 15 | 23 |
| 16 | 1 | 5 | 17 | 19 | 17 | 1 | 9 | 11 | 19 | 18 | 1 | 9 | 12 | 15 | 115 | 3 | 9 | 18 | 19 | 116 | 3 | 9 | 18 | 24 | 117 | 3 | 10 | 11 | 20 |
| 19 | 1 | 9 | 14 | 15 | 20 | 1 | 9 | 18 | 19 | 21 | 1 | 15 | 16 | 21 | 118 | 3 | 10 | 11 | 22 | 119 | 3 | 10 | 18 | 20 | 120 | 3 | 10 | 18 | 22 |
| 22 | 1 | 15 | 21 | 23 | 23 | 1 | 19 | 20 | 21 | 24 | 1 | 19 | 21 | 22 | 121 | 4 | 5 | 6 | 12 | 122 | 4 | 5 | 6 | 14 | 123 | 4 | 5 | 7 | 10 |
| 25 | 2 | 3 | 6 | 24 | 26 | 2 | 4 | 6 | 10 | 27 | 2 | 6 | 9 | 10 | 124 | 4 | 5 | 7 | 19 | 125 | 4 | 5 | 10 | 17 | 126 | 4 | 5 | 12 | 15 |
| 28 | 2 | 6 | 21 | 24 | 29 | 3 | 4 | 10 | 24 | 30 | 3 | 5 | 6 | 24 | 127 | 4 | 5 | 14 | 15 | 128 | 4 | 5 | 17 | 19 | 129 | 4 | 6 | 7 | 11 |
| 31 | 3 | 9 | 10 | 24 | 32 | 4 | 5 | 6 | 10 | 33 | 4 | 10 | 21 | 24 | 130 | 4 | 6 | 7 | 18 | 131 | 4 | 6 | 11 | 17 | 132 | 4 | 6 | 17 | 18 |
| 34 | 5 | 6 | 9 | 10 | 35 | 5 | 6 | 21 | 24 | 36 | 6 | 7 | 10 | 11 | 133 | 4 | 10 | 16 | 21 | 134 | 4 | 10 | 21 | 23 | 135 | 4 | 11 | 19 | 21 |
| 37 | 6 | 7 | 10 | 18 | 38 | 6 | 7 | 20 | 24 | 39 | 6 | 7 | 22 | 24 | 136 | 4 | 11 | 21 | 24 | 137 | 4 | 12 | 16 | 24 | 138 | 4 | 12 | 23 | 24 |
| 40 | 6 | 8 | 10 | 12 | 41 | 6 | 8 | 10 | 14 | 42 | 6 | 8 | 16 | 24 | 139 | 4 | 14 | 16 | 24 | 140 | 4 | 14 | 23 | 24 | 141 | 4 | 15 | 16 | 21 |
| 43 | 6 | 8 | 23 | 24 | 44 | 6 | 10 | 11 | 17 | 45 | 6 | 10 | 12 | 13 | 142 | 4 | 15 | 21 | 23 | 143 | 4 | 18 | 19 | 21 | 144 | 4 | 18 | 21 | 24 |
| 46 | 6 | 10 | 13 | 14 | 47 | 6 | 10 | 17 | 18 | 48 | 6 | 13 | 16 | 24 | 145 | 5 | 6 | 9 | 12 | 146 | 5 | 6 | 9 | 14 | 147 | 5 | 6 | 20 | 21 |
| 49 | 6 | 13 | 23 | 24 | 50 | 6 | 17 | 20 | 24 | 51 | 6 | 17 | 22 | 24 | 148 | 5 | 6 | 21 | 22 | 149 | 5 | 7 | 9 | 10 | 150 | 5 | 7 | 9 | 19 |
| 52 | 7 | 8 | 15 | 19 | 53 | 7 | 13 | 15 | 19 | 54 | 8 | 15 | 17 | 19 | 151 | 5 | 7 | 20 | 24 | 152 | 5 | 7 | 22 | 24 | 153 | 5 | 8 | 10 | 12 |
| 55 | 9 | 10 | 21 | 24 | 56 | 10 | 11 | 20 | 24 | 57 | 10 | 11 | 22 | 24 | 154 | 5 | 8 | 10 | 14 | 155 | 5 | 8 | 15 | 21 | 156 | 5 | 8 | 21 | 24 |
| 58 | 10 | 12 | 16 | 24 | 59 | 10 | 12 | 23 | 24 | 60 | 10 | 14 | 16 | 24 | 157 | 5 | 9 | 10 | 17 | 158 | 5 | 9 | 12 | 15 | 159 | 5 | 9 | 14 | 15 |
| 61 | 10 | 14 | 23 | 24 | 62 | 10 | 18 | 20 | 24 | 63 | 10 | 18 | 22 | 24 | 160 | 5 | 9 | 17 | 19 | 161 | 5 | 10 | 12 | 13 | 162 | 5 | 10 | 13 | 14 |
| 64 | 11 | 12 | 15 | 19 | 65 | 11 | 14 | 15 | 19 | 66 | 12 | 15 | 18 | 19 | 163 | 5 | 13 | 15 | 21 | 164 | 5 | 13 | 21 | 24 | 165 | 5 | 17 | 20 | 24 |
| 67 | 13 | 15 | 17 | 19 | 68 | 14 | 15 | 18 | 19 | 69 | 15 | 16 | 19 | 20 | 166 | 5 | 17 | 22 | 24 | 167 | 5 | 19 | 20 | 21 | 168 | 5 | 19 | 21 | 22 |
| 70 | 15 | 16 | 19 | 22 | 71 | 15 | 19 | 20 | 23 | 72 | 15 | 19 | 22 | 23 | 169 | 6 | 7 | 9 | 11 | 170 | 6 | 7 | 9 | 18 | 171 | 6 | 7 | 16 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 172 | 6 | 7 | 16 | 22 | 173 | 6 | 7 | 20 | 23 | 174 | 6 | 7 | 22 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 175 | 6 | 8 | 11 | 12 | 176 | 6 | 8 | 11 | 14 | 177 | 6 | 8 | 12 | 18 |
| 28 | | | | | | | | | | | | | | | 178 | 6 | 8 | 14 | 18 | 179 | 6 | 8 | 16 | 21 | 180 | 6 | 8 | 21 | 23 |
| 1 | 1 | 2 | 7 | 20 | 2 | 1 | 2 | 7 | 22 | 3 | 1 | 2 | 8 | 12 | 181 | 6 | 9 | 11 | 17 | 182 | 6 | 9 | 17 | 18 | 183 | 6 | 11 | 12 | 13 |
| 4 | 1 | 2 | 8 | 14 | 5 | 1 | 2 | 12 | 13 | 6 | 1 | 2 | 13 | 14 | 184 | 6 | 11 | 13 | 14 | 185 | 6 | 12 | 13 | 18 | 186 | 6 | 13 | 14 | 18 |
| 7 | 1 | 2 | 17 | 20 | 8 | 1 | 2 | 17 | 22 | 9 | 1 | 3 | 8 | 16 | 187 | 6 | 13 | 16 | 21 | 188 | 6 | 13 | 21 | 23 | 189 | 6 | 16 | 17 | 20 |
| 10 | 1 | 3 | 8 | 23 | 11 | 1 | 3 | 11 | 20 | 12 | 1 | 3 | 11 | 22 | 190 | 6 | 16 | 17 | 22 | 191 | 6 | 17 | 20 | 23 | 192 | 6 | 17 | 22 | 23 |
| 13 | 1 | 3 | 13 | 16 | 14 | 1 | 3 | 13 | 23 | 15 | 1 | 3 | 18 | 20 | 193 | 7 | 8 | 10 | 11 | 194 | 7 | 8 | 10 | 18 | 195 | 7 | 8 | 11 | 15 |
| 16 | 1 | 3 | 18 | 22 | 17 | 1 | 4 | 7 | 11 | 18 | 1 | 4 | 7 | 18 | 196 | 7 | 8 | 15 | 18 | 197 | 7 | 8 | 16 | 19 | 198 | 7 | 8 | 16 | 24 |
| 19 | 1 | 4 | 11 | 17 | 20 | 1 | 4 | 12 | 16 | 21 | 1 | 4 | 12 | 23 | 199 | 7 | 8 | 19 | 23 | 200 | 7 | 8 | 23 | 24 | 201 | 7 | 10 | 11 | 13 |
| 22 | 1 | 4 | 14 | 16 | 23 | 1 | 4 | 14 | 23 | 24 | 1 | 4 | 17 | 18 | 202 | 7 | 10 | 13 | 18 | 203 | 7 | 11 | 13 | 15 | 204 | 7 | 13 | 15 | 18 |
| 25 | 1 | 5 | 7 | 20 | 26 | 1 | 5 | 7 | 22 | 27 | 1 | 5 | 8 | 12 | 205 | 7 | 13 | 16 | 19 | 206 | 7 | 13 | 16 | 24 | 207 | 7 | 13 | 19 | 23 |
| 28 | 1 | 5 | 8 | 14 | 29 | 1 | 5 | 12 | 13 | 30 | 1 | 5 | 13 | 14 | 208 | 7 | 13 | 23 | 24 | 209 | 7 | 15 | 16 | 20 | 210 | 7 | 15 | 16 | 22 |
| 31 | 1 | 5 | 17 | 20 | 32 | 1 | 5 | 17 | 22 | 33 | 1 | 7 | 9 | 11 | 211 | 7 | 15 | 20 | 23 | 212 | 7 | 15 | 22 | 23 | 213 | 8 | 10 | 11 | 17 |
| 34 | 1 | 7 | 9 | 18 | 35 | 1 | 8 | 16 | 21 | 36 | 1 | 8 | 21 | 23 | 214 | 8 | 10 | 17 | 18 | 215 | 8 | 11 | 12 | 19 | 216 | 8 | 11 | 14 | 19 |
| 37 | 1 | 9 | 11 | 17 | 38 | 1 | 9 | 12 | 16 | 39 | 1 | 9 | 12 | 23 | 217 | 8 | 11 | 15 | 17 | 218 | 8 | 12 | 18 | 19 | 219 | 8 | 14 | 18 | 19 |
| 40 | 1 | 9 | 14 | 16 | 41 | 1 | 9 | 14 | 23 | 42 | 1 | 9 | 17 | 18 | 220 | 8 | 15 | 17 | 18 | 221 | 8 | 16 | 17 | 19 | 222 | 8 | 16 | 17 | 24 |
| 43 | 1 | 11 | 20 | 21 | 44 | 1 | 11 | 21 | 22 | 45 | 1 | 13 | 16 | 21 | 223 | 8 | 17 | 19 | 23 | 224 | 8 | 17 | 23 | 24 | 225 | 9 | 10 | 16 | 21 |
| 46 | 1 | 13 | 21 | 23 | 47 | 1 | 18 | 20 | 21 | 48 | 1 | 18 | 21 | 22 | 226 | 9 | 10 | 21 | 23 | 227 | 9 | 11 | 19 | 21 | 228 | 9 | 11 | 21 | 24 |
| 49 | 2 | 3 | 6 | 20 | 50 | 2 | 3 | 6 | 22 | 51 | 2 | 3 | 8 | 15 | 229 | 9 | 12 | 16 | 24 | 230 | 9 | 12 | 23 | 24 | 231 | 9 | 14 | 16 | 24 |



BIBLIOTHEQUE

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 232 | 9 | 14 | 23 | 24 |
| 235 | 9 | 18 | 19 | 21 |
| 238 | 10 | 11 | 20 | 21 |
| 241 | 10 | 12 | 16 | 22 |
| 244 | 10 | 13 | 17 | 18 |
| 247 | 10 | 14 | 20 | 23 |
| 250 | 10 | 18 | 21 | 22 |
| 253 | 11 | 12 | 15 | 22 |
| 256 | 11 | 13 | 14 | 19 |
| 259 | 11 | 14 | 15 | 22 |
| 262 | 12 | 13 | 18 | 19 |
| 265 | 12 | 16 | 19 | 20 |
| 268 | 12 | 18 | 22 | 24 |
| 271 | 13 | 14 | 18 | 19 |
| 274 | 13 | 16 | 17 | 24 |
| 277 | 14 | 15 | 18 | 20 |
| 280 | 14 | 16 | 19 | 22 |
| 283 | 14 | 19 | 20 | 23 |
| 286 | 15 | 16 | 17 | 22 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 233 | 9 | 15 | 16 | 21 |
| 236 | 9 | 18 | 21 | 24 |
| 239 | 10 | 11 | 21 | 22 |
| 242 | 10 | 12 | 20 | 23 |
| 245 | 10 | 14 | 16 | 20 |
| 248 | 10 | 14 | 22 | 23 |
| 251 | 11 | 12 | 13 | 19 |
| 254 | 11 | 12 | 20 | 24 |
| 257 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| 260 | 11 | 14 | 20 | 24 |
| 263 | 12 | 15 | 18 | 20 |
| 266 | 12 | 16 | 19 | 22 |
| 269 | 12 | 19 | 20 | 23 |
| 272 | 13 | 15 | 17 | 18 |
| 275 | 13 | 17 | 19 | 23 |
| 278 | 14 | 15 | 18 | 22 |
| 281 | 14 | 18 | 20 | 24 |
| 284 | 14 | 19 | 22 | 23 |
| 287 | 15 | 17 | 20 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 234 | 9 | 15 | 21 | 23 |
| 237 | 10 | 11 | 13 | 17 |
| 240 | 10 | 12 | 16 | 20 |
| 243 | 10 | 12 | 22 | 23 |
| 246 | 10 | 14 | 16 | 22 |
| 249 | 10 | 18 | 20 | 21 |
| 252 | 11 | 12 | 15 | 20 |
| 255 | 11 | 12 | 22 | 24 |
| 258 | 11 | 14 | 15 | 20 |
| 261 | 11 | 14 | 22 | 24 |
| 264 | 12 | 15 | 18 | 22 |
| 267 | 12 | 18 | 20 | 24 |
| 270 | 12 | 19 | 22 | 23 |
| 273 | 13 | 16 | 17 | 19 |
| 276 | 13 | 17 | 23 | 24 |
| 279 | 14 | 16 | 19 | 20 |
| 282 | 14 | 18 | 22 | 24 |
| 285 | 15 | 16 | 17 | 20 |
| 288 | 15 | 17 | 22 | 23 |

29

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 7 | 24 |
| 4 | 1 | 2 | 17 | 24 |
| 7 | 1 | 3 | 10 | 20 |
| 10 | 1 | 4 | 6 | 18 |
| 13 | 1 | 5 | 7 | 24 |
| 16 | 1 | 5 | 17 | 24 |
| 19 | 1 | 6 | 8 | 16 |
| 22 | 1 | 6 | 9 | 18 |
| 25 | 1 | 6 | 13 | 23 |
| 28 | 1 | 6 | 21 | 23 |
| 31 | 1 | 8 | 10 | 12 |
| 34 | 1 | 9 | 14 | 24 |
| 37 | 1 | 10 | 12 | 13 |
| 40 | 1 | 10 | 18 | 22 |
| 43 | 1 | 12 | 16 | 24 |
| 46 | 1 | 14 | 23 | 24 |
| 49 | 2 | 3 | 6 | 19 |
| 52 | 2 | 4 | 10 | 19 |
| 55 | 2 | 7 | 10 | 19 |
| 58 | 2 | 10 | 17 | 19 |
| 61 | 3 | 4 | 10 | 15 |
| 64 | 3 | 9 | 15 | 24 |
| 67 | 3 | 9 | 10 | 15 |
| 70 | 3 | 10 | 15 | 23 |
| 73 | 4 | 6 | 12 | 15 |
| 76 | 4 | 11 | 19 | 24 |
| 79 | 5 | 6 | 9 | 15 |
| 82 | 5 | 8 | 15 | 24 |
| 85 | 5 | 13 | 15 | 24 |
| 88 | 6 | 7 | 15 | 22 |
| 91 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| 94 | 6 | 11 | 14 | 19 |
| 97 | 6 | 13 | 14 | 19 |
| 100 | 6 | 15 | 16 | 22 |
| 103 | 6 | 15 | 20 | 23 |
| 106 | 6 | 19 | 21 | 22 |
| 109 | 7 | 10 | 11 | 15 |
| 112 | 7 | 13 | 19 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | 8 | 10 |
| 5 | 1 | 3 | 6 | 16 |
| 8 | 1 | 3 | 10 | 22 |
| 11 | 1 | 4 | 12 | 24 |
| 14 | 1 | 5 | 8 | 10 |
| 17 | 1 | 6 | 7 | 11 |
| 20 | 1 | 6 | 8 | 23 |
| 23 | 1 | 6 | 11 | 17 |
| 26 | 1 | 6 | 16 | 21 |
| 29 | 1 | 7 | 20 | 24 |
| 32 | 1 | 8 | 10 | 14 |
| 35 | 1 | 10 | 11 | 20 |
| 38 | 1 | 10 | 13 | 14 |
| 41 | 1 | 10 | 20 | 21 |
| 44 | 1 | 12 | 23 | 24 |
| 47 | 1 | 17 | 20 | 24 |
| 50 | 2 | 3 | 15 | 24 |
| 53 | 2 | 6 | 9 | 19 |
| 56 | 2 | 8 | 15 | 24 |
| 59 | 2 | 13 | 15 | 24 |
| 62 | 3 | 4 | 19 | 24 |
| 65 | 3 | 6 | 19 | 20 |
| 68 | 3 | 9 | 19 | 24 |
| 71 | 4 | 5 | 6 | 19 |
| 74 | 4 | 6 | 14 | 19 |
| 77 | 4 | 18 | 19 | 24 |
| 80 | 5 | 6 | 19 | 21 |
| 83 | 5 | 9 | 10 | 19 |
| 86 | 5 | 15 | 21 | 24 |
| 89 | 6 | 8 | 12 | 19 |
| 92 | 6 | 9 | 14 | 19 |
| 95 | 6 | 12 | 13 | 19 |
| 98 | 6 | 14 | 18 | 19 |
| 101 | 6 | 15 | 17 | 20 |
| 104 | 6 | 15 | 22 | 23 |
| 107 | 7 | 8 | 10 | 19 |
| 110 | 7 | 10 | 13 | 19 |
| 113 | 8 | 10 | 15 | 17 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 | 10 | 13 |
| 6 | 1 | 3 | 6 | 23 |
| 9 | 1 | 4 | 6 | 11 |
| 12 | 1 | 4 | 14 | 24 |
| 15 | 1 | 5 | 10 | 13 |
| 18 | 1 | 6 | 7 | 18 |
| 21 | 1 | 6 | 9 | 11 |
| 24 | 1 | 6 | 13 | 16 |
| 27 | 1 | 6 | 17 | 18 |
| 30 | 1 | 7 | 22 | 24 |
| 33 | 1 | 9 | 12 | 24 |
| 36 | 1 | 10 | 11 | 22 |
| 39 | 1 | 10 | 18 | 20 |
| 42 | 1 | 10 | 21 | 22 |
| 45 | 1 | 14 | 16 | 24 |
| 48 | 1 | 17 | 22 | 24 |
| 51 | 2 | 4 | 6 | 15 |
| 54 | 2 | 6 | 19 | 21 |
| 57 | 2 | 9 | 10 | 19 |
| 60 | 2 | 15 | 21 | 24 |
| 63 | 3 | 5 | 6 | 19 |
| 66 | 3 | 6 | 19 | 22 |
| 69 | 3 | 10 | 15 | 16 |
| 72 | 4 | 5 | 10 | 19 |
| 75 | 4 | 10 | 15 | 21 |
| 78 | 4 | 19 | 21 | 24 |
| 81 | 5 | 7 | 10 | 19 |
| 84 | 5 | 10 | 17 | 19 |
| 87 | 6 | 7 | 15 | 20 |
| 90 | 6 | 8 | 14 | 19 |
| 93 | 6 | 11 | 12 | 19 |
| 96 | 6 | 12 | 18 | 19 |
| 99 | 6 | 15 | 16 | 20 |
| 102 | 6 | 15 | 17 | 22 |
| 105 | 6 | 19 | 20 | 21 |
| 108 | 7 | 8 | 19 | 24 |
| 111 | 7 | 10 | 15 | 18 |
| 114 | 8 | 16 | 19 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 115 | 8 | 17 | 19 | 24 |
| 118 | 9 | 11 | 19 | 24 |
| 121 | 10 | 11 | 15 | 17 |
| 124 | 10 | 13 | 15 | 17 |
| 127 | 10 | 15 | 16 | 21 |
| 130 | 10 | 16 | 19 | 20 |
| 133 | 10 | 19 | 22 | 23 |
| 136 | 11 | 15 | 20 | 24 |
| 139 | 13 | 16 | 19 | 24 |
| 142 | 14 | 15 | 18 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 116 | 8 | 19 | 23 | 24 |
| 119 | 9 | 18 | 19 | 24 |
| 122 | 10 | 12 | 16 | 19 |
| 125 | 10 | 14 | 16 | 19 |
| 128 | 10 | 15 | 17 | 18 |
| 131 | 10 | 16 | 19 | 22 |
| 134 | 11 | 12 | 15 | 24 |
| 137 | 11 | 15 | 22 | 24 |
| 140 | 13 | 17 | 19 | 24 |
| 143 | 15 | 18 | 20 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 117 | 9 | 10 | 15 | 21 |
| 120 | 9 | 19 | 21 | 24 |
| 123 | 10 | 12 | 19 | 23 |
| 126 | 10 | 14 | 19 | 23 |
| 129 | 10 | 15 | 21 | 23 |
| 132 | 10 | 19 | 20 | 23 |
| 135 | 11 | 14 | 15 | 24 |
| 138 | 12 | 15 | 18 | 24 |
| 141 | 13 | 19 | 23 | 24 |
| 144 | 15 | 18 | 22 | 24 |

30

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 10 | 11 |
| 4 | 1 | 2 | 23 | 24 |
| 7 | 1 | 3 | 10 | 12 |
| 10 | 1 | 4 | 6 | 13 |
| 13 | 1 | 5 | 10 | 11 |
| 16 | 1 | 5 | 23 | 24 |
| 19 | 1 | 6 | 9 | 13 |
| 22 | 1 | 9 | 22 | 24 |
| 25 | 2 | 6 | 11 | 19 |
| 28 | 2 | 6 | 18 | 19 |
| 31 | 3 | 14 | 15 | 24 |
| 34 | 4 | 10 | 13 | 15 |
| 37 | 5 | 6 | 11 | 19 |
| 40 | 5 | 6 | 18 | 19 |
| 43 | 6 | 8 | 19 | 20 |
| 46 | 6 | 13 | 19 | 20 |
| 49 | 7 | 10 | 12 | 19 |
| 52 | 8 | 9 | 10 | 15 |
| 55 | 9 | 10 | 13 | 15 |
| 58 | 10 | 11 | 15 | 16 |
| 61 | 10 | 14 | 17 | 19 |
| 64 | 11 | 16 | 19 | 24 |
| 67 | 13 | 15 | 20 | 24 |
| 70 | 16 | 18 | 19 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | 10 | 18 |
| 5 | 1 | 3 | 6 | 7 |
| 8 | 1 | 3 | 10 | 14 |
| 11 | 1 | 4 | 20 | 24 |
| 14 | 1 | 5 | 10 | 18 |
| 17 | 1 | 6 | 7 | 21 |
| 20 | 1 | 6 | 17 | 21 |
| 23 | 1 | 10 | 12 | 21 |
| 26 | 2 | 6 | 15 | 16 |
| 29 | 3 | 7 | 19 | 24 |
| 32 | 3 | 17 | 19 | 24 |
| 35 | 4 | 10 | 19 | 20 |
| 38 | 5 | 6 | 15 | 16 |
| 41 | 6 | 7 | 12 | 19 |
| 44 | 6 | 8 | 19 | 22 |
| 47 | 6 | 13 | 19 | 22 |
| 50 | 7 | 10 | 14 | 19 |
| 53 | 8 | 15 | 20 | 24 |
| 56 | 9 | 10 | 19 | 20 |
| 59 | 10 | 11 | 15 | 23 |
| 62 | 10 | 15 | 16 | 18 |
| 65 | 11 | 19 | 23 | 24 |
| 68 | 13 | 15 | 22 | 24 |
| 71 | 17 | 19 | 21 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 | 16 | 24 |
| 6 | 1 | 3 | 6 | 17 |
| 9 | 1 | 4 | 6 | 8 |
| 12 | 1 | 4 | 22 | 24 |
| 15 | 1 | 5 | 16 | 24 |
| 18 | 1 | 6 | 8 | 9 |
| 21 | 1 | 9 | 20 | 24 |
| 24 | 1 | 10 | 14 | 21 |
| 27 | 2 | 6 | 15 | 23 |
| 30 | 3 | 12 | 15 | 24 |
| 33 | 4 | 8 | 10 | 15 |
| 36 | 4 | 10 | 19 | 22 |
| 39 | 5 | 6 | 15 | 23 |
| 42 | 6 | 7 | 14 | 15 |
| 45 | 6 | 12 | 15 | 17 |
| 48 | 6 | 14 | 15 | 17 |
| 51 | 7 | 19 | 21 | 24 |
| 54 | 8 | 15 | 22 | 24 |
| 57 | 9 | 10 | 19 | 22 |
| 60 | 10 | 12 | 17 | 19 |
| 63 | 10 | 15 | 18 | 23 |
| 66 | 12 | 15 | 21 | 24 |
| 69 | 14 | 15 | 21 | 24 |
| 72 | 18 | 19 | 23 | 24 |

31

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 10 | 12 |
| 4 | 1 | 2 | 22 | 24 |
| 7 | 1 | 3 | 10 | 11 |
| 10 | 1 | 4 | 6 | 17 |
| 13 | 1 | 5 | 10 | 12 |
| 16 | 1 | 5 | 22 | 24 |
| 19 | 1 | 6 | 9 | 17 |
| 22 | 1 | 9 | 23 | 24 |
| 25 | 2 | 6 | 12 | 15 |
| 28 | 2 | 6 | 19 | 22 |
| 31 | 3 | 13 | 15 | 24 |
| 34 | 4 | 10 | 15 | 16 |
| 37 | 5 | 6 | 12 | 15 |
| 40 | 5 | 6 | 19 | 22 |
| 43 | 6 | 8 | 11 | 19 |
| 46 | 6 | 13 | 18 | 19 |
| 49 | 7 | 9 | 10 | 19 |
| 52 | 8 | 10 | 11 | 15 |
| 55 | 9 | 10 | 15 | 16 |
| 58 | 10 | 11 | 13 | 15 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | 10 | 14 |
| 5 | 1 | 3 | 6 | 8 |
| 8 | 1 | 3 | 10 | 18 |
| 11 | 1 | 4 | 16 | 24 |
| 14 | 1 | 5 | 10 | 14 |
| 17 | 1 | 6 | 7 | 9 |
| 20 | 1 | 6 | 13 | 21 |
| 23 | 1 | 10 | 11 | 21 |
| 26 | 2 | 6 | 14 | 15 |
| 29 | 3 | 8 | 15 | 24 |
| 32 | 3 | 18 | 19 | 24 |
| 35 | 4 | 10 | 15 | 23 |
| 38 | 5 | 6 | 14 | 15 |
| 41 | 6 | 7 | 15 | 16 |
| 44 | 6 | 8 | 18 | 19 |
| 47 | 6 | 15 | 16 | 17 |
| 50 | 7 | 16 | 19 | 24 |
| 53 | 8 | 10 | 15 | 18 |
| 56 | 9 | 10 | 15 | 23 |
| 59 | 10 | 12 | 19 | 20 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 | 20 | 24 |
| 6 | 1 | 3 | 6 | 13 |
| 9 | 1 | 4 | 6 | 7 |
| 12 | 1 | 4 | 23 | 24 |
| 15 | 1 | 5 | 20 | 24 |
| 18 | 1 | 6 | 8 | 21 |
| 21 | 1 | 9 | 16 | 24 |
| 24 | 1 | 10 | 18 | 21 |
| 27 | 2 | 6 | 19 | 20 |
| 30 | 3 | 11 | 19 | 24 |
| 33 | 4 | 7 | 10 | 19 |
| 36 | 4 | 10 | 17 | 19 |
| 39 | 5 | 6 | 19 | 20 |
| 42 | 6 | 7 | 15 | 23 |
| 45 | 6 | 11 | 13 | 19 |
| 48 | 6 | 15 | 17 | 23 |
| 51 | 7 | 19 | 23 | 24 |
| 54 | 8 | 15 | 21 | 24 |
| 57 | 9 | 10 | 17 | 19 |
| 60 | 10 | 12 | 19 | 22 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 61 | 10 | 13 | 15 | 18 | 62 | 10 | 14 | 19 | 20 | 63 | 10 | 14 | 19 | 22 | 79 | 4 | 10 | 13 | 19 |
| 64 | 11 | 19 | 21 | 24 | 65 | 12 | 15 | 20 | 24 | 66 | 12 | 15 | 22 | 24 | 82 | 4 | 13 | 15 | 24 |
| 67 | 13 | 15 | 21 | 24 | 68 | 14 | 15 | 20 | 24 | 69 | 14 | 15 | 22 | 24 | 85 | 5 | 6 | 11 | 15 |
| 70 | 16 | 17 | 19 | 24 | 71 | 17 | 19 | 23 | 24 | 72 | 18 | 19 | 21 | 24 | 88 | 5 | 6 | 19 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 91 | 5 | 10 | 15 | 18 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 94 | 5 | 16 | 19 | 24 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 97 | 6 | 7 | 15 | 21 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 80 | 4 | 10 | 15 | 20 | 81 | 4 | 10 | 15 | 22 | 82 | 4 | 10 | 15 | 22 | 83 | 4 | 15 | 20 | 24 |
| 84 | 4 | 15 | 22 | 24 | 85 | 5 | 6 | 11 | 15 | 86 | 5 | 6 | 15 | 18 | 87 | 5 | 6 | 16 | 19 |
| 88 | 5 | 6 | 19 | 23 | 89 | 5 | 10 | 11 | 15 | 90 | 5 | 10 | 15 | 16 | 91 | 5 | 10 | 15 | 18 |
| 92 | 5 | 10 | 15 | 23 | 93 | 5 | 11 | 19 | 24 | 94 | 5 | 16 | 19 | 24 | 95 | 5 | 18 | 19 | 24 |
| 96 | 5 | 19 | 23 | 24 | 97 | 6 | 7 | 15 | 21 | 98 | 6 | 8 | 9 | 19 | 99 | 6 | 9 | 13 | 19 |
| 100 | 6 | 9 | 19 | 20 | 101 | 6 | 9 | 19 | 22 | 102 | 6 | 11 | 15 | 16 | 103 | 6 | 11 | 15 | 23 |
| 104 | 6 | 11 | 16 | 19 | 105 | 6 | 11 | 19 | 23 | 106 | 6 | 12 | 15 | 21 | 107 | 6 | 14 | 15 | 21 |
| 108 | 6 | 15 | 16 | 18 | 109 | 6 | 15 | 17 | 21 | 110 | 6 | 15 | 18 | 23 | 111 | 6 | 16 | 18 | 19 |
| 112 | 6 | 18 | 19 | 23 | 113 | 7 | 10 | 19 | 21 | 114 | 7 | 12 | 15 | 24 | 115 | 7 | 12 | 19 | 24 |
| 116 | 7 | 14 | 15 | 24 | 117 | 7 | 14 | 19 | 24 | 118 | 7 | 15 | 21 | 24 | 119 | 8 | 9 | 10 | 19 |
| 120 | 8 | 9 | 15 | 24 | 121 | 8 | 10 | 15 | 20 | 122 | 8 | 10 | 15 | 22 | 123 | 8 | 10 | 19 | 20 |
| 124 | 8 | 10 | 19 | 22 | 125 | 9 | 10 | 13 | 19 | 126 | 9 | 10 | 15 | 20 | 127 | 9 | 10 | 15 | 22 |
| 128 | 9 | 13 | 15 | 24 | 129 | 9 | 15 | 20 | 24 | 130 | 9 | 15 | 22 | 24 | 131 | 10 | 12 | 19 | 21 |
| 132 | 10 | 13 | 15 | 20 | 133 | 10 | 13 | 15 | 22 | 134 | 10 | 13 | 19 | 22 | 135 | 10 | 13 | 19 | 22 |
| 136 | 10 | 14 | 19 | 21 | 137 | 10 | 17 | 19 | 21 | 138 | 12 | 15 | 17 | 24 | 139 | 12 | 17 | 19 | 24 |
| 140 | 12 | 19 | 21 | 24 | 141 | 14 | 15 | 17 | 24 | 142 | 14 | 17 | 19 | 24 | 143 | 14 | 19 | 21 | 24 |
| 144 | 15 | 17 | 21 | 24 | | | | | | | | | | | | | | | |

32

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 10 | 15 | 2 | 1 | 2 | 19 | 24 | 3 | 1 | 3 | 6 | 15 | 4 | 1 | 3 | 10 | 19 |
| 7 | 1 | 5 | 10 | 15 | 8 | 1 | 5 | 19 | 24 | 9 | 1 | 6 | 7 | 10 | 10 | 1 | 6 | 8 | 24 |
| 11 | 1 | 6 | 9 | 19 | 12 | 1 | 6 | 10 | 12 | 13 | 1 | 6 | 10 | 14 | 14 | 1 | 6 | 10 | 17 |
| 15 | 1 | 6 | 12 | 15 | 16 | 1 | 6 | 13 | 24 | 17 | 1 | 6 | 14 | 15 | 18 | 1 | 6 | 15 | 21 |
| 19 | 1 | 6 | 19 | 22 | 20 | 1 | 6 | 19 | 20 | 21 | 1 | 6 | 20 | 24 | 22 | 1 | 6 | 22 | 24 |
| 23 | 1 | 7 | 10 | 19 | 24 | 1 | 8 | 15 | 24 | 25 | 1 | 9 | 15 | 24 | 26 | 1 | 10 | 11 | 24 |
| 27 | 1 | 10 | 15 | 16 | 28 | 1 | 10 | 15 | 23 | 29 | 1 | 10 | 16 | 24 | 30 | 1 | 10 | 17 | 19 |
| 31 | 1 | 10 | 18 | 24 | 32 | 1 | 10 | 19 | 21 | 33 | 1 | 10 | 23 | 24 | 34 | 1 | 11 | 19 | 24 |
| 35 | 1 | 13 | 19 | 24 | 36 | 1 | 18 | 19 | 24 | 37 | 2 | 6 | 10 | 15 | 38 | 2 | 6 | 19 | 24 |
| 39 | 3 | 6 | 15 | 24 | 40 | 3 | 10 | 19 | 24 | 41 | 4 | 6 | 10 | 19 | 42 | 4 | 10 | 15 | 24 |
| 43 | 5 | 6 | 10 | 15 | 44 | 5 | 6 | 19 | 24 | 45 | 6 | 7 | 15 | 24 | 46 | 6 | 8 | 10 | 19 |
| 47 | 6 | 9 | 10 | 19 | 48 | 6 | 10 | 11 | 15 | 49 | 6 | 10 | 13 | 19 | 50 | 6 | 10 | 15 | 18 |
| 51 | 6 | 11 | 15 | 19 | 52 | 6 | 15 | 16 | 19 | 53 | 6 | 15 | 17 | 24 | 54 | 6 | 15 | 18 | 19 |
| 55 | 6 | 15 | 19 | 23 | 56 | 6 | 15 | 21 | 24 | 57 | 6 | 16 | 19 | 24 | 58 | 6 | 19 | 23 | 24 |
| 59 | 7 | 15 | 19 | 24 | 60 | 8 | 10 | 15 | 19 | 61 | 9 | 10 | 15 | 24 | 62 | 10 | 12 | 19 | 24 |
| 63 | 10 | 13 | 15 | 19 | 64 | 10 | 14 | 19 | 24 | 65 | 10 | 15 | 19 | 20 | 66 | 10 | 15 | 19 | 22 |
| 67 | 10 | 15 | 20 | 24 | 68 | 10 | 15 | 22 | 24 | 69 | 10 | 19 | 21 | 24 | 70 | 12 | 15 | 19 | 24 |
| 71 | 14 | 15 | 19 | 24 | 72 | 15 | 17 | 19 | 24 | | | | | | | | | | |

33

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 10 | 16 | 2 | 1 | 2 | 10 | 23 | 3 | 1 | 2 | 11 | 24 | 4 | 1 | 2 | 18 | 24 |
| 7 | 1 | 3 | 7 | 10 | 8 | 1 | 3 | 10 | 17 | 9 | 1 | 4 | 6 | 20 | 10 | 1 | 4 | 6 | 22 |
| 11 | 1 | 4 | 8 | 24 | 12 | 1 | 4 | 13 | 24 | 13 | 1 | 5 | 10 | 16 | 14 | 1 | 5 | 10 | 23 |
| 15 | 1 | 5 | 11 | 24 | 16 | 1 | 5 | 18 | 24 | 17 | 1 | 6 | 7 | 12 | 18 | 1 | 6 | 7 | 14 |
| 19 | 1 | 6 | 8 | 20 | 20 | 1 | 6 | 8 | 22 | 21 | 1 | 6 | 9 | 20 | 22 | 1 | 6 | 9 | 22 |
| 23 | 1 | 6 | 12 | 17 | 24 | 1 | 6 | 12 | 21 | 25 | 1 | 6 | 13 | 20 | 26 | 1 | 6 | 13 | 22 |
| 27 | 1 | 6 | 14 | 17 | 28 | 1 | 6 | 14 | 21 | 29 | 1 | 7 | 10 | 12 | 30 | 1 | 7 | 10 | 14 |
| 31 | 1 | 7 | 10 | 21 | 32 | 1 | 8 | 9 | 24 | 33 | 1 | 8 | 20 | 24 | 34 | 1 | 8 | 22 | 24 |
| 35 | 1 | 9 | 13 | 24 | 36 | 1 | 10 | 11 | 16 | 37 | 1 | 10 | 11 | 23 | 38 | 1 | 10 | 12 | 17 |
| 39 | 1 | 10 | 14 | 17 | 40 | 1 | 10 | 16 | 18 | 41 | 1 | 10 | 17 | 21 | 42 | 1 | 10 | 18 | 23 |
| 43 | 1 | 11 | 16 | 24 | 44 | 1 | 11 | 23 | 24 | 45 | 1 | 13 | 20 | 24 | 46 | 1 | 13 | 22 | 24 |
| 47 | 1 | 16 | 18 | 24 | 48 | 1 | 18 | 23 | 24 | 49 | 2 | 6 | 11 | 15 | 50 | 2 | 6 | 15 | 18 |
| 51 | 2 | 6 | 16 | 19 | 52 | 2 | 6 | 19 | 23 | 53 | 2 | 10 | 11 | 15 | 54 | 2 | 10 | 15 | 16 |
| 55 | 2 | 10 | 15 | 18 | 56 | 2 | 10 | 15 | 23 | 57 | 2 | 11 | 19 | 24 | 58 | 2 | 16 | 19 | 24 |
| 59 | 2 | 18 | 19 | 24 | 60 | 2 | 19 | 23 | 24 | 61 | 3 | 6 | 7 | 15 | 62 | 3 | 6 | 12 | 15 |
| 63 | 3 | 6 | 14 | 15 | 64 | 3 | 6 | 15 | 17 | 65 | 3 | 7 | 10 | 19 | 66 | 3 | 7 | 15 | 24 |
| 67 | 3 | 10 | 12 | 19 | 68 | 3 | 10 | 14 | 19 | 69 | 3 | 10 | 17 | 19 | 70 | 3 | 12 | 19 | 24 |
| 71 | 3 | 14 | 19 | 24 | 72 | 3 | 15 | 17 | 24 | 73 | 4 | 6 | 8 | 19 | 74 | 4 | 6 | 13 | 19 |
| 75 | 4 | 6 | 19 | 20 | 76 | 4 | 6 | 19 | 22 | 77 | 4 | 8 | 10 | 19 | 78 | 4 | 8 | 15 | 24 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 79 | 4 | 10 | 13 | 19 | 80 | 4 | 10 | 15 | 20 | 81 | 4 | 10 | 15 | 22 | 82 | 4 | 13 | 15 | 24 |
| 83 | 4 | 15 | 20 | 24 | 84 | 4 | 15 | 22 | 24 | 85 | 5 | 6 | 11 | 15 | 86 | 5 | 6 | 15 | 18 |
| 87 | 5 | 6 | 16 | 19 | 88 | 5 | 6 | 19 | 23 | 89 | 5 | 10 | 11 | 15 | 90 | 5 | 10 | 15 | 16 |
| 91 | 5 | 10 | 15 | 18 | 92 | 5 | 10 | 15 | 23 | 93 | 5 | 11 | 19 | 24 | 94 | 5 | 16 | 19 | 24 |
| 95 | 5 | 18 | 19 | 24 | 96 | 5 | 19 | 23 | 24 | 97 | 6 | 7 | 15 | 21 | 98 | 6 | 8 | 9 | 19 |
| 99 | 6 | 9 | 13 | 19 | 100 | 6 | 9 | 19 | 20 | 101 | 6 | 9 | 19 | 22 | 102 | 6 | 11 | 15 | 16 |
| 103 | 6 | 11 | 15 | 23 | 104 | 6 | 11 | 16 | 19 | 105 | 6 | 11 | 19 | 23 | 106 | 6 | 12 | 15 | 21 |
| 107 | 6 | 14 | 15 | 21 | 108 | 6 | 15 | 16 | 18 | 109 | 6 | 15 | 17 | 21 | 110 | 6 | 15 | 18 | 23 |
| 111 | 6 | 16 | 18 | 19 | 112 | 6 | 18 | 19 | 23 | 113 | 7 | 10 | 19 | 21 | 114 | 7 | 12 | 15 | 24 |
| 115 | 7 | 12 | 19 | 24 | 116 | 7 | 14 | 15 | 24 | 117 | 7 | 14 | 19 | 24 | 118 | 7 | 15 | 21 | 24 |
| 119 | 8 | 9 | 10 | 19 | 120 | 8 | 9 | 15 | 24 | 121 | 8 | 10 | 15 | 20 | 122 | 8 | 10 | 15 | 22 |
| 123 | 8 | 10 | 19 | 20 | 124 | 8 | 10 | 19 | 22 | 125 | 9 | 10 | 13 | 19 | 126 | 9 | 10 | 15 | 20 |
| 127 | 9 | 10 | 15 | 22 | 128 | 9 | 13 | 15 | 24 | 129 | 9 | 15 | 20 | 24 | 130 | 9 | 15 | 22 | 24 |
| 131 | 10 | 12 | 19 | 21 | 132 | 10 | 13 | 15 | 20 | 133 | 10 | 13 | 15 | 22 | 134 | 10 | 13 | 19 | 20 |
| 135 | 10 | 13 | 19 | 22 | 136 | 10 | 14 | 19 | 21 | 137 | 10 | 17 | 19 | 21 | 138 | 12 | 15 | 17 | 24 |
| 139 | 12 | 17 | 19 | 24 | 140 | 12 | 19 | 21 | 24 | 141 | 14 | 15 | 17 | 24 | 142 | 14 | 17 | 19 | 24 |
| 143 | 14 | 19 | 21 | 24 | 144 | 15 | 17 | 21 | 24 | | | | | | | | | | |

34

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 10 | 19 | 2 | 1 | 2 | 15 | 24 | 3 | 1 | 3 | 6 | 19 | 4 | 1 | 3 | 10 | 15 |
| 7 | 1 | 5 | 10 | 19 | 8 | 1 | 5 | 15 | 24 | 9 | 1 | 6 | 7 | 24 | 10 | 1 | 6 | 8 | 10 |
| 11 | 1 | 6 | 9 | 15 | 12 | 1 | 6 | 10 | 11 | 13 | 1 | 6 | 10 | 13 | 14 | 1 | 6 | 10 | 18 |
| 15 | 1 | 6 | 11 | 19 | 16 | 1 | 6 | 15 | 16 | 17 | 1 | 6 | 15 | 23 | 18 | 1 | 6 | 16 | 24 |
| 19 | 1 | 6 | 17 | 24 | 20 | 1 | 6 | 18 | 19 | 21 | 1 | 6 | 19 | 21 | 22 | 1 | 6 | 23 | 24 |
| 23 | 1 | 7 | 19 | 24 | 24 | 1 | 8 | 10 | 15 | 25 | 1 | 9 | 19 | 24 | 26 | 1 | 10 | 12 | 24 |
| 27 | 1 | 10 | 13 | 15 | 28 | 1 | 10 | 14 | 24 | 29 | 1 | 10 | 15 | 21 | 30 | 1 | 10 | 19 | 20 |
| 31 | 1 | 10 | 19 | 22 | 32 | 1 | 10 | 20 | 24 | 33 | 1 | 10 | 22 | 24 | 34 | 1 | 12 | 15 | 24 |
| 35 | 1 | 14 | 15 | 24 | 36 | 1 | 17 | 19 | 24 | 37 | 2 | 6 | 10 | 19 | 38 | 2 | 6 | 15 | 24 |
| 39 | 2 | 6 | 19 | 24 | 40 | 3 | 10 | 15 | 24 | 41 | 4 | 6 | 10 | 19 | 42 | 4 | 10 | 19 | 24 |
| 43 | 5 | 6 | 10 | 19 | 44 | 5 | 6 | 15 | 24 | 45 | 6 | 7 | 10 | 15 | 46 | 6 | 8 | 19 | 24 |
| 47 | 6 | 9 | 10 | 19 | 48 | 6 | 10 | 12 | 19 | 49 | 6 | 10 | 14 | 19 | 50 | 6 | 10 | 15 | 17 |
| 51 | 6 | 12 | 15 | 19 | 52 | 6 | 13 | 19 | 24 | 53 | 6 | 14 | 15 | 19 | 54 | 6 | 15 | 19 | 20 |
| 55 | 6 | 15 | 19 | 22 | 56 | 6 | 15 | 20 | 24 | 57 | 6 | 15 | 22 | 24 | 58 | 6 | 19 | 21 | 24 |
| 59 | 7 | 10 | 15 | 19 | 60 | 8 | 15 | 19 | 24 | 61 | 9 | 10 | 19 | 24 | 62 | 10 | 11 | 15 | 24 |
| 63 | 10 | 15 | 16 | 19 | 64 | 10 | 15 | 17 | 19 | 65 | 10 | 15 | 18 | 24 | 66 | 10 | 15 | 19 | 23 |
| 67 | 10 | 15 | 21 | 24 | 68 | 10 | 16 | 19 | 24 | 69 | 10 | 19 | 23 | 24 | 70 | 11 | 15 | 19 | 24 |
| 71 | 13 | 15 | 19 | 24 | 72 | 15 | 18 | 19 | 24 | | | | | | | | | | |

35

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 10 | 20 | 2 | 1 | 2 | 10 | 22 | 3 | 1 | 2 | 12 | 24 | 4 | 1 | 2 | 14 | 24 |
| 7 | 1 | 3 | 8 | 10 | 8 | 1 | 3 | 10 | 13 | 9 | 1 | 4 | 6 | 16 | 10 | 1 | 4 | 6 | 23 |
| 11 | 1 | 4 | 7 | 24 | 12 | 1 | 4 | 17 | 24 | 13 | 1 | 5 | 10 | 20 | 14 | 1 | 5 | 10 | 22 |
| 15 | 1 | 5 | 12 | 24 | 16 | 1 | 5 | 14 | 24 | 17 | 1 | 6 | 7 | 16 | 18 | 1 | 6 | 7 | 23 |
| 19 | 1 | 6 | 8 | 11 | 20 | 1 | 6 | 8 | 18 | 21 | 1 | 6 | 9 | 16 | 22 | 1 | 6 | 9 | 23 |
| 23 | 1 | 6 | 11 | 13 | 24 | 1 | 6 | 11 | 21 | | | | | | | | | | |



BUS LILLE

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 1 | 6 | 13 | 18 | 26 | 1 | 6 | 16 | 17 | 27 | 1 | 6 | 17 | 23 | 7 | 1 | 2 | 20 | 23 | 8 | 1 | 2 | 22 | 23 | 9 | 1 | 3 | 7 | 8 |
| 28 | 1 | 6 | 18 | 21 | 29 | 1 | 7 | 9 | 24 | 30 | 1 | 7 | 16 | 24 | 10 | 1 | 3 | 7 | 13 | 11 | 1 | 3 | 8 | 17 | 12 | 1 | 3 | 11 | 12 |
| 31 | 1 | 7 | 23 | 24 | 32 | 1 | 8 | 10 | 11 | 33 | 1 | 8 | 10 | 18 | 13 | 1 | 3 | 11 | 14 | 14 | 1 | 3 | 12 | 18 | 15 | 1 | 3 | 13 | 17 |
| 34 | 1 | 8 | 10 | 21 | 35 | 1 | 9 | 17 | 24 | 36 | 1 | 10 | 11 | 13 | 16 | 1 | 3 | 14 | 18 | 17 | 1 | 4 | 7 | 8 | 18 | 1 | 4 | 7 | 13 |
| 37 | 1 | 10 | 12 | 20 | 38 | 1 | 10 | 12 | 22 | 39 | 1 | 10 | 13 | 18 | 19 | 1 | 4 | 8 | 17 | 20 | 1 | 4 | 13 | 17 | 21 | 1 | 4 | 16 | 20 |
| 40 | 1 | 10 | 13 | 21 | 41 | 1 | 10 | 14 | 20 | 42 | 1 | 10 | 14 | 22 | 22 | 1 | 4 | 16 | 22 | 23 | 1 | 4 | 20 | 23 | 24 | 1 | 4 | 22 | 23 |
| 43 | 1 | 12 | 20 | 24 | 44 | 1 | 12 | 22 | 24 | 45 | 1 | 14 | 20 | 24 | 25 | 1 | 5 | 11 | 12 | 26 | 1 | 5 | 11 | 14 | 27 | 1 | 5 | 12 | 18 |
| 46 | 1 | 14 | 22 | 24 | 47 | 1 | 16 | 17 | 24 | 48 | 1 | 17 | 23 | 24 | 28 | 1 | 5 | 14 | 18 | 29 | 1 | 5 | 16 | 20 | 30 | 1 | 5 | 16 | 22 |
| 49 | 2 | 6 | 12 | 19 | 50 | 2 | 6 | 14 | 19 | 51 | 2 | 6 | 15 | 20 | 31 | 1 | 5 | 20 | 23 | 32 | 1 | 5 | 22 | 23 | 33 | 1 | 7 | 8 | 9 |
| 52 | 2 | 6 | 15 | 22 | 53 | 2 | 10 | 12 | 19 | 54 | 2 | 10 | 14 | 19 | 34 | 1 | 7 | 8 | 21 | 35 | 1 | 7 | 9 | 13 | 36 | 1 | 7 | 13 | 21 |
| 55 | 2 | 10 | 19 | 20 | 56 | 2 | 10 | 19 | 22 | 57 | 2 | 12 | 15 | 24 | 37 | 1 | 8 | 9 | 17 | 38 | 1 | 8 | 17 | 21 | 39 | 1 | 9 | 13 | 17 |
| 58 | 2 | 14 | 15 | 24 | 59 | 2 | 15 | 20 | 24 | 60 | 2 | 15 | 22 | 24 | 40 | 1 | 9 | 16 | 20 | 41 | 1 | 9 | 16 | 22 | 42 | 1 | 9 | 20 | 23 |
| 61 | 3 | 6 | 8 | 19 | 62 | 3 | 6 | 11 | 19 | 63 | 3 | 6 | 13 | 19 | 43 | 1 | 9 | 22 | 23 | 44 | 1 | 11 | 12 | 21 | 45 | 1 | 11 | 14 | 21 |
| 64 | 3 | 6 | 18 | 19 | 65 | 3 | 8 | 10 | 15 | 66 | 3 | 8 | 19 | 24 | 46 | 1 | 12 | 18 | 21 | 47 | 1 | 13 | 17 | 21 | 48 | 1 | 14 | 18 | 21 |
| 67 | 3 | 10 | 11 | 15 | 68 | 3 | 10 | 13 | 15 | 69 | 3 | 10 | 15 | 18 | 49 | 2 | 3 | 10 | 11 | 50 | 2 | 3 | 10 | 12 | 51 | 2 | 3 | 10 | 14 |
| 70 | 3 | 11 | 15 | 24 | 71 | 3 | 13 | 19 | 24 | 72 | 3 | 15 | 18 | 24 | 52 | 2 | 3 | 10 | 18 | 53 | 2 | 4 | 16 | 24 | 54 | 2 | 4 | 20 | 24 |
| 73 | 4 | 6 | 7 | 15 | 74 | 4 | 6 | 15 | 16 | 75 | 4 | 6 | 15 | 17 | 55 | 2 | 4 | 22 | 24 | 56 | 2 | 4 | 23 | 24 | 57 | 2 | 6 | 11 | 20 |
| 76 | 4 | 6 | 15 | 23 | 77 | 4 | 7 | 10 | 19 | 78 | 4 | 7 | 19 | 24 | 58 | 2 | 6 | 11 | 22 | 59 | 2 | 6 | 12 | 16 | 60 | 2 | 6 | 12 | 23 |
| 79 | 4 | 10 | 15 | 17 | 80 | 4 | 10 | 16 | 19 | 81 | 4 | 10 | 19 | 23 | 61 | 2 | 6 | 14 | 16 | 62 | 2 | 6 | 14 | 23 | 63 | 2 | 6 | 18 | 20 |
| 82 | 4 | 16 | 19 | 24 | 83 | 4 | 17 | 19 | 24 | 84 | 4 | 19 | 23 | 24 | 64 | 2 | 6 | 18 | 22 | 65 | 2 | 7 | 12 | 15 | 66 | 2 | 7 | 14 | 19 |
| 85 | 5 | 6 | 12 | 19 | 86 | 5 | 6 | 14 | 19 | 87 | 5 | 6 | 15 | 20 | 67 | 2 | 7 | 19 | 16 | 68 | 2 | 7 | 15 | 23 | 69 | 2 | 8 | 11 | 19 |
| 88 | 5 | 6 | 15 | 22 | 89 | 5 | 10 | 12 | 19 | 90 | 5 | 10 | 14 | 19 | 70 | 2 | 8 | 18 | 19 | 71 | 2 | 8 | 19 | 20 | 72 | 2 | 8 | 19 | 22 |
| 91 | 5 | 10 | 19 | 20 | 92 | 5 | 10 | 19 | 22 | 93 | 5 | 12 | 15 | 24 | 73 | 2 | 9 | 16 | 24 | 74 | 2 | 9 | 20 | 24 | 75 | 2 | 9 | 22 | 24 |
| 94 | 5 | 14 | 15 | 24 | 95 | 5 | 15 | 20 | 24 | 96 | 5 | 15 | 22 | 24 | 76 | 2 | 9 | 23 | 24 | 77 | 2 | 10 | 11 | 21 | 78 | 2 | 10 | 12 | 21 |
| 97 | 6 | 7 | 9 | 15 | 98 | 6 | 8 | 19 | 21 | 99 | 6 | 9 | 15 | 16 | 79 | 2 | 10 | 14 | 21 | 80 | 2 | 10 | 18 | 21 | 81 | 2 | 11 | 13 | 19 |
| 100 | 6 | 9 | 15 | 17 | 101 | 6 | 9 | 15 | 23 | 102 | 6 | 11 | 19 | 21 | 82 | 2 | 12 | 15 | 17 | 83 | 2 | 13 | 18 | 19 | 84 | 2 | 13 | 19 | 20 |
| 103 | 6 | 12 | 15 | 20 | 104 | 6 | 12 | 15 | 22 | 105 | 6 | 12 | 19 | 20 | 85 | 2 | 13 | 19 | 22 | 86 | 2 | 14 | 15 | 17 | 87 | 2 | 15 | 16 | 17 |
| 106 | 6 | 12 | 19 | 22 | 107 | 6 | 13 | 19 | 21 | 108 | 6 | 14 | 15 | 20 | 88 | 2 | 15 | 17 | 23 | 89 | 3 | 4 | 6 | 7 | 90 | 3 | 4 | 6 | 8 |
| 109 | 6 | 14 | 15 | 22 | 110 | 6 | 14 | 19 | 20 | 111 | 6 | 14 | 19 | 22 | 91 | 3 | 4 | 6 | 13 | 92 | 3 | 4 | 6 | 17 | 93 | 3 | 5 | 10 | 11 |
| 112 | 6 | 18 | 19 | 21 | 113 | 7 | 9 | 10 | 15 | 114 | 7 | 9 | 19 | 24 | 94 | 3 | 5 | 10 | 12 | 95 | 3 | 5 | 10 | 14 | 96 | 3 | 5 | 10 | 18 |
| 115 | 7 | 10 | 15 | 16 | 116 | 7 | 10 | 15 | 23 | 117 | 7 | 10 | 16 | 19 | 97 | 3 | 6 | 7 | 9 | 98 | 3 | 6 | 8 | 9 | 99 | 3 | 6 | 9 | 13 |
| 118 | 7 | 10 | 19 | 23 | 119 | 8 | 10 | 15 | 21 | 120 | 8 | 11 | 15 | 24 | 100 | 3 | 6 | 9 | 17 | 101 | 3 | 7 | 11 | 24 | 102 | 3 | 7 | 16 | 19 |
| 121 | 8 | 11 | 19 | 24 | 122 | 8 | 15 | 18 | 24 | 123 | 8 | 18 | 19 | 24 | 103 | 3 | 7 | 18 | 24 | 104 | 3 | 7 | 19 | 23 | 105 | 3 | 8 | 12 | 24 |
| 124 | 8 | 19 | 21 | 24 | 125 | 9 | 10 | 15 | 17 | 126 | 9 | 10 | 16 | 19 | 106 | 3 | 8 | 14 | 24 | 107 | 3 | 8 | 15 | 20 | 108 | 3 | 8 | 15 | 22 |
| 127 | 9 | 10 | 19 | 23 | 128 | 9 | 16 | 19 | 24 | 129 | 9 | 17 | 19 | 24 | 109 | 3 | 11 | 16 | 19 | 110 | 3 | 11 | 17 | 24 | 111 | 3 | 11 | 19 | 23 |
| 130 | 9 | 19 | 23 | 24 | 131 | 10 | 11 | 15 | 21 | 132 | 10 | 13 | 15 | 21 | 112 | 3 | 12 | 13 | 24 | 113 | 3 | 12 | 15 | 20 | 114 | 3 | 12 | 15 | 22 |
| 133 | 10 | 15 | 16 | 17 | 134 | 10 | 15 | 17 | 23 | 135 | 10 | 15 | 18 | 21 | 115 | 3 | 13 | 14 | 24 | 116 | 3 | 13 | 15 | 20 | 117 | 3 | 13 | 15 | 22 |
| 136 | 10 | 16 | 17 | 19 | 137 | 10 | 17 | 19 | 23 | 138 | 11 | 13 | 15 | 24 | 118 | 3 | 14 | 15 | 20 | 119 | 3 | 14 | 15 | 22 | 120 | 3 | 16 | 17 | 19 |
| 139 | 11 | 13 | 19 | 24 | 140 | 11 | 15 | 21 | 24 | 141 | 13 | 15 | 18 | 24 | 121 | 3 | 16 | 18 | 19 | 122 | 3 | 17 | 18 | 24 | 123 | 3 | 17 | 19 | 23 |
| 142 | 13 | 18 | 19 | 24 | 143 | 13 | 19 | 21 | 24 | 144 | 15 | 18 | 21 | 24 | 124 | 3 | 18 | 19 | 23 | 125 | 4 | 5 | 16 | 24 | 126 | 4 | 5 | 20 | 24 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 127 | 4 | 5 | 22 | 24 | 128 | 4 | 5 | 23 | 24 | 129 | 4 | 6 | 7 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 130 | 4 | 6 | 8 | 21 | 131 | 4 | 6 | 13 | 21 | 132 | 4 | 6 | 17 | 21 |
| 36 | | | | | | | | | | | | | | | 133 | 4 | 7 | 10 | 20 | 134 | 4 | 7 | 10 | 22 | 135 | 4 | 7 | 12 | 19 |
| 1 | 1 | 2 | 10 | 24 | 2 | 1 | 3 | 6 | 10 | 3 | 1 | 4 | 6 | 24 | 136 | 4 | 7 | 14 | 19 | 137 | 4 | 8 | 10 | 16 | 138 | 4 | 8 | 10 | 23 |
| 4 | 1 | 5 | 10 | 24 | 5 | 1 | 6 | 7 | 15 | 6 | 1 | 6 | 8 | 19 | 139 | 4 | 8 | 11 | 15 | 140 | 4 | 8 | 15 | 18 | 141 | 4 | 10 | 13 | 16 |
| 7 | 1 | 6 | 9 | 24 | 8 | 1 | 6 | 10 | 21 | 9 | 1 | 6 | 13 | 19 | 142 | 4 | 10 | 13 | 23 | 143 | 4 | 10 | 17 | 20 | 144 | 4 | 10 | 17 | 22 |
| 10 | 1 | 6 | 15 | 17 | 11 | 1 | 10 | 11 | 15 | 12 | 1 | 10 | 12 | 19 | 145 | 4 | 11 | 13 | 15 | 146 | 4 | 11 | 15 | 16 | 147 | 4 | 11 | 15 | 23 |
| 13 | 1 | 10 | 14 | 19 | 14 | 1 | 10 | 15 | 18 | 15 | 1 | 15 | 20 | 24 | 148 | 4 | 12 | 17 | 19 | 149 | 4 | 12 | 19 | 20 | 150 | 4 | 12 | 19 | 22 |
| 16 | 1 | 15 | 22 | 24 | 17 | 1 | 16 | 19 | 24 | 18 | 1 | 19 | 23 | 24 | 151 | 4 | 13 | 15 | 18 | 152 | 4 | 14 | 17 | 19 | 153 | 4 | 14 | 19 | 20 |
| 19 | 2 | 6 | 15 | 19 | 20 | 3 | 15 | 19 | 24 | 21 | 4 | 10 | 15 | 19 | 154 | 4 | 14 | 19 | 22 | 155 | 4 | 15 | 16 | 18 | 156 | 4 | 15 | 18 | 23 |
| 22 | 5 | 6 | 15 | 19 | 23 | 6 | 10 | 15 | 16 | 24 | 6 | 10 | 15 | 23 | 157 | 5 | 6 | 11 | 20 | 158 | 5 | 6 | 11 | 22 | 159 | 5 | 6 | 12 | 16 |
| 25 | 6 | 10 | 19 | 20 | 26 | 6 | 10 | 19 | 22 | 27 | 6 | 11 | 19 | 24 | 160 | 5 | 6 | 12 | 23 | 161 | 5 | 6 | 14 | 16 | 162 | 5 | 6 | 14 | 23 |
| 28 | 6 | 12 | 15 | 24 | 29 | 6 | 14 | 15 | 24 | 30 | 6 | 18 | 19 | 24 | 163 | 5 | 6 | 18 | 20 | 164 | 5 | 6 | 18 | 22 | 165 | 5 | 7 | 12 | 15 |
| 31 | 7 | 10 | 19 | 24 | 32 | 8 | 10 | 15 | 24 | 33 | 9 | 10 | 15 | 19 | 166 | 5 | 7 | 14 | 15 | 167 | 5 | 7 | 15 | 16 | 168 | 5 | 7 | 15 | 23 |
| 34 | 10 | 13 | 15 | 24 | 35 | 10 | 17 | 19 | 24 | 36 | 15 | 19 | 21 | 24 | 169 | 5 | 8 | 11 | 19 | 170 | 5 | 8 | 18 | 19 | 171 | 5 | 8 | 19 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 172 | 5 | 8 | 19 | 22 | 173 | 5 | 9 | 16 | 24 | 174 | 5 | 9 | 20 | 24 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 175 | 5 | 9 | 22 | 24 | 176 | 5 | 9 | 23 | 24 | 177 | 5 | 10 | 11 | 21 |
| 37 | | | | | | | | | | | | | | | 178 | 5 | 10 | 12 | 21 | 179 | 5 | 10 | 14 | 21 | 180 | 5 | 10 | 18 | 21 |
| 1 | 1 | 2 | 11 | 12 | 2 | 1 | 2 | 11 | 14 | 3 | 1 | 2 | 12 | 18 | 181 | 5 | 11 | 13 | 19 | 182 | 5 | 12 | 15 | 17 | 183 | 5 | 13 | 18 | 19 |
| 4 | 1 | 2 | 14 | 18 | 5 | 1 | 2 | 16 | 20 | 6 | 1 | 2 | 16 | 22 | 184 | 5 | 13 | 19 | 20 | 185 | 5 | 13 | 19 | 22 | 186 | 5 | 14 | 15 | 17 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 187 | 5 | 15 | 16 | 17 |
| 190 | 6 | 7 | 12 | 16 |
| 193 | 6 | 7 | 14 | 23 |
| 196 | 6 | 8 | 11 | 22 |
| 199 | 6 | 9 | 13 | 21 |
| 202 | 6 | 11 | 13 | 22 |
| 205 | 6 | 13 | 18 | 20 |
| 208 | 6 | 14 | 17 | 23 |
| 211 | 7 | 9 | 12 | 19 |
| 214 | 7 | 10 | 12 | 22 |
| 217 | 7 | 11 | 16 | 24 |
| 220 | 7 | 16 | 18 | 24 |
| 223 | 7 | 18 | 23 | 24 |
| 226 | 8 | 9 | 10 | 23 |
| 229 | 8 | 10 | 11 | 16 |
| 232 | 8 | 10 | 18 | 23 |
| 235 | 8 | 12 | 22 | 24 |
| 238 | 8 | 14 | 22 | 24 |
| 241 | 9 | 10 | 13 | 16 |
| 244 | 9 | 10 | 17 | 22 |
| 247 | 9 | 11 | 15 | 23 |
| 250 | 9 | 12 | 19 | 22 |
| 253 | 9 | 14 | 19 | 20 |
| 256 | 9 | 15 | 18 | 23 |
| 259 | 10 | 12 | 17 | 20 |
| 262 | 10 | 13 | 18 | 23 |
| 265 | 11 | 16 | 17 | 24 |
| 268 | 11 | 17 | 23 | 24 |
| 271 | 12 | 13 | 21 | 24 |
| 274 | 12 | 15 | 21 | 22 |
| 277 | 13 | 14 | 22 | 24 |
| 280 | 14 | 15 | 20 | 21 |
| 283 | 16 | 17 | 19 | 21 |
| 286 | 17 | 18 | 23 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 188 | 5 | 15 | 17 | 23 |
| 191 | 6 | 7 | 12 | 23 |
| 194 | 6 | 8 | 9 | 21 |
| 197 | 6 | 8 | 18 | 20 |
| 200 | 6 | 9 | 17 | 21 |
| 203 | 6 | 12 | 16 | 17 |
| 206 | 6 | 13 | 18 | 22 |
| 209 | 7 | 9 | 10 | 20 |
| 212 | 7 | 9 | 14 | 19 |
| 215 | 7 | 10 | 14 | 20 |
| 218 | 7 | 11 | 21 | 24 |
| 221 | 7 | 16 | 19 | 21 |
| 224 | 7 | 19 | 21 | 23 |
| 227 | 8 | 9 | 11 | 15 |
| 230 | 8 | 10 | 11 | 23 |
| 233 | 8 | 12 | 20 | 24 |
| 236 | 8 | 14 | 20 | 24 |
| 239 | 8 | 15 | 20 | 21 |
| 242 | 9 | 10 | 13 | 23 |
| 245 | 9 | 11 | 13 | 15 |
| 248 | 9 | 12 | 17 | 19 |
| 251 | 9 | 13 | 15 | 18 |
| 254 | 9 | 14 | 19 | 22 |
| 257 | 10 | 11 | 13 | 16 |
| 260 | 10 | 12 | 17 | 22 |
| 263 | 10 | 14 | 17 | 20 |
| 266 | 11 | 16 | 19 | 21 |
| 269 | 11 | 19 | 21 | 23 |
| 272 | 12 | 13 | 22 | 24 |
| 275 | 13 | 14 | 20 | 24 |
| 278 | 13 | 15 | 20 | 21 |
| 281 | 14 | 15 | 21 | 22 |
| 284 | 16 | 18 | 19 | 21 |
| 287 | 17 | 19 | 21 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 189 | 6 | 7 | 9 | 21 |
| 192 | 6 | 7 | 14 | 16 |
| 195 | 6 | 8 | 11 | 20 |
| 198 | 6 | 8 | 18 | 22 |
| 201 | 6 | 11 | 13 | 20 |
| 204 | 6 | 12 | 17 | 23 |
| 207 | 6 | 14 | 16 | 17 |
| 210 | 7 | 9 | 10 | 22 |
| 213 | 7 | 10 | 12 | 20 |
| 216 | 7 | 10 | 14 | 22 |
| 219 | 7 | 11 | 23 | 24 |
| 222 | 7 | 18 | 21 | 24 |
| 225 | 8 | 9 | 10 | 16 |
| 228 | 8 | 9 | 15 | 18 |
| 231 | 8 | 10 | 16 | 18 |
| 234 | 8 | 12 | 21 | 24 |
| 237 | 8 | 14 | 21 | 24 |
| 240 | 8 | 15 | 21 | 22 |
| 243 | 9 | 10 | 17 | 20 |
| 246 | 9 | 11 | 15 | 16 |
| 249 | 9 | 12 | 19 | 20 |
| 252 | 9 | 14 | 17 | 19 |
| 255 | 9 | 15 | 16 | 18 |
| 258 | 10 | 11 | 13 | 23 |
| 261 | 10 | 13 | 16 | 18 |
| 264 | 10 | 14 | 17 | 22 |
| 267 | 11 | 17 | 21 | 24 |
| 270 | 12 | 13 | 20 | 24 |
| 273 | 12 | 15 | 20 | 21 |
| 276 | 13 | 14 | 21 | 24 |
| 279 | 13 | 15 | 21 | 22 |
| 282 | 16 | 17 | 18 | 24 |
| 285 | 17 | 18 | 21 | 24 |
| 288 | 18 | 19 | 21 | 23 |

38

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 11 | 15 |
| 4 | 1 | 2 | 19 | 23 |
| 7 | 1 | 3 | 14 | 19 |
| 10 | 1 | 4 | 13 | 19 |
| 13 | 1 | 5 | 11 | 15 |
| 16 | 1 | 5 | 19 | 23 |
| 19 | 1 | 7 | 14 | 15 |
| 22 | 1 | 8 | 9 | 19 |
| 25 | 1 | 8 | 19 | 20 |
| 28 | 1 | 9 | 15 | 20 |
| 31 | 1 | 11 | 15 | 23 |
| 34 | 1 | 12 | 15 | 17 |
| 37 | 1 | 13 | 15 | 20 |
| 40 | 1 | 13 | 19 | 22 |
| 43 | 1 | 14 | 19 | 21 |
| 46 | 1 | 15 | 18 | 23 |
| 49 | 2 | 6 | 10 | 16 |
| 52 | 2 | 6 | 18 | 24 |
| 55 | 2 | 10 | 18 | 24 |
| 58 | 2 | 15 | 16 | 19 |
| 61 | 3 | 6 | 7 | 10 |
| 64 | 3 | 6 | 10 | 17 |
| 67 | 3 | 7 | 10 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | 15 | 18 |
| 5 | 1 | 3 | 7 | 15 |
| 8 | 1 | 3 | 15 | 17 |
| 11 | 1 | 4 | 15 | 20 |
| 14 | 1 | 5 | 15 | 18 |
| 17 | 1 | 7 | 12 | 15 |
| 20 | 1 | 7 | 14 | 19 |
| 23 | 1 | 8 | 15 | 20 |
| 26 | 1 | 8 | 19 | 22 |
| 29 | 1 | 9 | 15 | 22 |
| 32 | 1 | 11 | 16 | 19 |
| 35 | 1 | 12 | 17 | 19 |
| 38 | 1 | 13 | 15 | 22 |
| 41 | 1 | 14 | 15 | 17 |
| 44 | 1 | 15 | 16 | 18 |
| 47 | 1 | 16 | 18 | 19 |
| 50 | 2 | 6 | 10 | 23 |
| 53 | 2 | 10 | 11 | 24 |
| 56 | 2 | 10 | 23 | 24 |
| 59 | 2 | 15 | 18 | 19 |
| 62 | 3 | 6 | 10 | 12 |
| 65 | 3 | 6 | 12 | 24 |
| 68 | 3 | 7 | 15 | 19 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 | 16 | 19 |
| 6 | 1 | 3 | 12 | 19 |
| 9 | 1 | 4 | 8 | 19 |
| 12 | 1 | 4 | 15 | 22 |
| 15 | 1 | 5 | 16 | 19 |
| 18 | 1 | 7 | 12 | 19 |
| 21 | 1 | 7 | 15 | 21 |
| 24 | 1 | 8 | 15 | 22 |
| 27 | 1 | 9 | 13 | 19 |
| 30 | 1 | 11 | 15 | 16 |
| 33 | 1 | 11 | 19 | 23 |
| 36 | 1 | 12 | 19 | 21 |
| 39 | 1 | 13 | 19 | 20 |
| 42 | 1 | 14 | 17 | 19 |
| 45 | 1 | 15 | 17 | 21 |
| 48 | 1 | 18 | 19 | 23 |
| 51 | 2 | 6 | 11 | 24 |
| 54 | 2 | 10 | 16 | 24 |
| 57 | 2 | 11 | 15 | 19 |
| 60 | 2 | 15 | 19 | 23 |
| 63 | 3 | 6 | 10 | 14 |
| 66 | 3 | 6 | 14 | 24 |
| 69 | 3 | 10 | 17 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 70 | 3 | 12 | 15 | 19 |
| 73 | 4 | 6 | 8 | 24 |
| 76 | 4 | 6 | 13 | 24 |
| 79 | 4 | 8 | 10 | 24 |
| 82 | 4 | 13 | 15 | 19 |
| 85 | 5 | 6 | 10 | 16 |
| 88 | 5 | 6 | 18 | 24 |
| 91 | 5 | 10 | 18 | 24 |
| 94 | 5 | 15 | 16 | 19 |
| 97 | 6 | 7 | 10 | 21 |
| 100 | 6 | 8 | 9 | 24 |
| 103 | 6 | 9 | 10 | 20 |
| 106 | 6 | 9 | 20 | 24 |
| 109 | 6 | 10 | 11 | 23 |
| 112 | 6 | 10 | 13 | 22 |
| 115 | 6 | 10 | 17 | 21 |
| 118 | 6 | 11 | 23 | 24 |
| 121 | 6 | 14 | 17 | 24 |
| 124 | 6 | 18 | 23 | 24 |
| 127 | 7 | 10 | 21 | 24 |
| 130 | 8 | 9 | 15 | 19 |
| 133 | 9 | 10 | 13 | 24 |
| 136 | 9 | 15 | 19 | 22 |
| 139 | 10 | 13 | 22 | 24 |
| 142 | 12 | 15 | 19 | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 71 | 3 | 14 | 15 | 19 |
| 74 | 4 | 6 | 10 | 20 |
| 77 | 4 | 6 | 20 | 24 |
| 80 | 4 | 8 | 15 | 19 |
| 83 | 4 | 15 | 19 | 20 |
| 86 | 5 | 6 | 10 | 23 |
| 89 | 5 | 10 | 11 | 24 |
| 92 | 5 | 10 | 23 | 24 |
| 95 | 5 | 15 | 18 | 19 |
| 98 | 6 | 7 | 12 | 24 |
| 101 | 6 | 8 | 10 | 20 |
| 104 | 6 | 9 | 10 | 22 |
| 107 | 6 | 9 | 22 | 24 |
| 110 | 6 | 10 | 12 | 21 |
| 113 | 6 | 10 | 14 | 21 |
| 116 | 6 | 10 | 18 | 23 |
| 119 | 6 | 12 | 17 | 24 |
| 122 | 6 | 14 | 21 | 24 |
| 125 | 7 | 10 | 12 | 24 |
| 128 | 7 | 15 | 19 | 21 |
| 131 | 8 | 10 | 20 | 24 |
| 134 | 9 | 13 | 15 | 19 |
| 137 | 10 | 12 | 17 | 24 |
| 140 | 10 | 14 | 17 | 24 |
| 143 | 14 | 15 | 19 | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 72 | 3 | 15 | 17 | 19 |
| 75 | 4 | 6 | 10 | 22 |
| 78 | 4 | 6 | 22 | 24 |
| 81 | 4 | 10 | 13 | 24 |
| 84 | 4 | 15 | 19 | 22 |
| 87 | 5 | 6 | 11 | 24 |
| 90 | 5 | 10 | 16 | 24 |
| 93 | 5 | 11 | 15 | 19 |
| 96 | 5 | 15 | 19 | 23 |
| 99 | 6 | 7 | 14 | 24 |
| 102 | 6 | 8 | 10 | 22 |
| 105 | 6 | 9 | 13 | 24 |
| 108 | 6 | 10 | 11 | 16 |
| 111 | 6 | 10 | 13 | 20 |
| 114 | 6 | 10 | 16 | 18 |
| 117 | 6 | 11 | 16 | 24 |
| 120 | 6 | 12 | 21 | 24 |
| 123 | 6 | 16 | 18 | 24 |
| 126 | 7 | 10 | 14 | 24 |
| 129 | 8 | 9 | 10 | 24 |
| 132 | 8 | 10 | 22 | 24 |
| 135 | 9 | 15 | 19 | 20 |
| 138 | 10 | 13 | 20 | 24 |
| 141 | 10 | 17 | 21 | 24 |
| 144 | 15 | 17 | 19 | 21 |

39

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 11 | 16 |
| 4 | 1 | 2 | 18 | 23 |
| 7 | 1 | 3 | 12 | 17 |
| 10 | 1 | 4 | 8 | 22 |
| 13 | 1 | 5 | 11 | 16 |
| 16 | 1 | 5 | 18 | 23 |
| 19 | 1 | 8 | 9 | 20 |
| 22 | 1 | 9 | 13 | 22 |
| 25 | 2 | 6 | 11 | 16 |
| 28 | 2 | 6 | 18 | 23 |
| 31 | 2 | 10 | 16 | 18 |
| 34 | 2 | 11 | 15 | 23 |
| 37 | 2 | 11 | 19 | 23 |
| 40 | 2 | 15 | 18 | 23 |
| 43 | 2 | 18 | 19 | 23 |
| 46 | 3 | 6 | 7 | 14 |
| 49 | 3 | 7 | 10 | 12 |
| 52 | 3 | 7 | 12 | 19 |
| 55 | 3 | 7 | 14 | 19 |
| 58 | 3 | 10 | 14 | 17 |
| 61 | 3 | 12 | 17 | 24 |
| 64 | 3 | 14 | 17 | 24 |
| 67 | 4 | 6 | 13 | 20 |
| 70 | 4 | 8 | 10 | 22 |
| 73 | 4 | 8 | 19 | 20 |
| 76 | 4 | 8 | 22 | 24 |
| 79 | 4 | 13 | 15 | 20 |
| 82 | 4 | 13 | 19 | 22 |
| 85 | 5 | 6 | 11 | 16 |
| 88 | 5 | 6 | 18 | 23 |
| 91 | 5 | 10 | 16 | 18 |
| 94 | 5 | 11 | 15 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | 11 | 23 |
| 5 | 1 | 3 | 7 | 12 |
| 8 | 1 | 3 | 14 | 17 |
| 11 | 1 | 4 | 13 | 20 |
| 14 | 1 | 5 | 11 | 23 |
| 17 | 1 | 7 | 12 | 21 |
| 20 | 1 | 8 | 9 | 22 |
| 23 | 1 | 12 | 17 | 21 |
| 26 | 2 | 6 | 11 | 23 |
| 29 | 2 | 10 | 11 | 16 |
| 32 | 2 | 10 | 18 | 23 |
| 35 | 2 | 11 | 16 | 19 |
| 38 | 2 | 11 | 23 | 24 |
| 41 | 2 | 16 | 18 | 19 |
| 44 | 2 | 18 | 23 | 24 |
| 47 | 3 | 6 | 12 | 17 |
| 50 | 3 | 7 | 10 | 14 |
| 53 | 3 | 7 | 12 | 24 |
| 56 | 3 | 7 | 14 | 24 |
| 59 | 3 | 12 | 15 | 17 |
| 62 | 3 | 14 | 15 | 17 |
| 65 | 4 | 6 | 8 | 20 |
| 68 | 4 | 6 | 13 | 22 |
| 71 | 4 | 8 | 15 | 20 |
| 74 | 4 | 8 | 19 | 22 |
| 77 | 4 | 10 | 13 | 20 |
| 80 | 4 | 13 | 15 | 22 |
| 83 | 4 | 13 | 20 | 24 |
| 86 | 5 | 6 | 11 | 23 |
| 89 | 5 | 10 | 11 | 16 |
| 92 | 5 | 10 | 18 | 23 |
| 95 | 5 | 11 | 16 | 19 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 | 16 | 18 |
| 6 | 1 | 3 | 7 | 14 |
| 9 | 1 | 4 | 8 | 20 |
| 12 | 1 | 4 | 13 | 22 |
| 15 | 1 | 5 | 16 | 18 |
| 18 | 1 | 7 | 14 | 21 |
| 21 | 1 | 9 | 13 | 20 |
| 24 | 1 | 14 | 17 | 21 |
| 27 | 2 | 6 | 16 | 18 |
| 30 | 2 | 10 | 11 | 23 |
| 33 | 2 | 11 | 15 | 16 |
| 36 | 2 | 11 | 16 | 24 |
| 39 | 2 | 15 | 16 | 18 |
| 42 | 2 | 16 | 18 | 24 |
| 45 | 3 | 6 | 7 | 12 |
| 48 | 3 | 6 | 14 | 17 |
| 51 | 3 | 7 | 12 | 15 |
| 54 | 3 | 7 | 14 | 15 |
| 57 | 3 | 10 | 12 | 17 |
| 60 | 3 | 12 | 17 | 19 |
| 63 | 3 | 14 | 17 | 19 |
| 66 | 4 | 6 | 8 | 22 |
| 69 | 4 | 8 | 10 | 20 |
| 72 | 4 | 8 | 15 | 22 |
| 75 | 4 | 8 | 20 | 24 |
| 78 | 4 | 10 | 13 | 22 |
| 81 | 4 | 13 | 19 | 20 |
| 84 | 4 | 13 | 22 | 24 |
| 87 | 5 | 6 | 16 | 18 |
| 90 | 5 | 10 | 11 | 23 |
| 93 | 5 | 11 | 15 | 16 |
| 96 | 5 | 11 | 16 | 24 |



BIBS LILLE

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 97 | 5 | 11 | 19 | 23 | 98 | 5 | 11 | 23 | 24 | 99 | 5 | 15 | 16 | 18 | 43 | 6 | 7 | 21 | 24 |
| 100 | 5 | 15 | 18 | 23 | 101 | 5 | 16 | 18 | 19 | 102 | 5 | 16 | 18 | 24 | 44 | 6 | 8 | 9 | 10 |
| 103 | 5 | 18 | 19 | 23 | 104 | 5 | 18 | 23 | 24 | 105 | 6 | 7 | 12 | 21 | 45 | 6 | 8 | 20 | 24 |
| 106 | 6 | 7 | 14 | 21 | 107 | 6 | 8 | 9 | 20 | 108 | 6 | 8 | 9 | 22 | 46 | 6 | 8 | 22 | 24 |
| 109 | 6 | 9 | 13 | 20 | 110 | 6 | 9 | 13 | 22 | 111 | 6 | 12 | 17 | 21 | 47 | 6 | 9 | 10 | 13 |
| 112 | 6 | 14 | 17 | 21 | 113 | 7 | 10 | 12 | 21 | 114 | 7 | 10 | 14 | 21 | 48 | 6 | 10 | 12 | 17 |
| 115 | 7 | 12 | 15 | 21 | 116 | 7 | 12 | 19 | 21 | 117 | 7 | 12 | 21 | 24 | 49 | 6 | 10 | 14 | 17 |
| 118 | 7 | 14 | 15 | 21 | 119 | 7 | 14 | 19 | 21 | 120 | 7 | 14 | 21 | 24 | 50 | 6 | 13 | 20 | 24 |
| 121 | 8 | 9 | 10 | 20 | 122 | 8 | 9 | 10 | 22 | 123 | 8 | 9 | 15 | 20 | 51 | 6 | 13 | 22 | 24 |
| 124 | 8 | 9 | 15 | 22 | 125 | 8 | 9 | 19 | 20 | 126 | 8 | 9 | 19 | 22 | 52 | 6 | 17 | 21 | 24 |
| 127 | 8 | 9 | 20 | 24 | 128 | 8 | 9 | 22 | 24 | 129 | 9 | 10 | 13 | 20 | 53 | 7 | 12 | 15 | 19 |
| 130 | 9 | 10 | 13 | 22 | 131 | 9 | 13 | 15 | 20 | 132 | 9 | 13 | 15 | 22 | 54 | 7 | 14 | 15 | 19 |
| 133 | 9 | 13 | 19 | 20 | 134 | 9 | 13 | 19 | 22 | 135 | 9 | 13 | 20 | 24 | 55 | 8 | 15 | 19 | 20 |
| 136 | 9 | 13 | 22 | 24 | 137 | 10 | 12 | 17 | 21 | 138 | 10 | 14 | 17 | 21 | 56 | 8 | 15 | 19 | 22 |
| 139 | 12 | 15 | 17 | 21 | 140 | 12 | 17 | 19 | 21 | 141 | 12 | 17 | 21 | 24 | 57 | 9 | 10 | 20 | 24 |
| 142 | 14 | 15 | 17 | 21 | 143 | 14 | 17 | 19 | 21 | 144 | 14 | 17 | 21 | 24 | 58 | 9 | 10 | 22 | 24 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 59 | 10 | 11 | 16 | 24 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 60 | 10 | 11 | 23 | 24 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 61 | 10 | 12 | 21 | 24 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 62 | 10 | 14 | 21 | 24 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 63 | 10 | 16 | 18 | 24 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 64 | 10 | 18 | 23 | 24 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 65 | 11 | 15 | 16 | 19 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 66 | 11 | 15 | 19 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 67 | 12 | 15 | 17 | 19 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 68 | 13 | 15 | 19 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 69 | 13 | 15 | 19 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 70 | 14 | 15 | 17 | 19 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 71 | 15 | 16 | 18 | 19 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 72 | 15 | 18 | 19 | 23 |

40

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 11 | 18 | 2 | 1 | 2 | 16 | 23 | 3 | 1 | 3 | 7 | 17 |
| 4 | 1 | 3 | 12 | 14 | 5 | 1 | 4 | 8 | 12 | 6 | 1 | 4 | 20 | 22 |
| 7 | 1 | 5 | 11 | 18 | 8 | 1 | 5 | 16 | 23 | 9 | 1 | 7 | 17 | 21 |
| 10 | 1 | 8 | 9 | 13 | 11 | 1 | 9 | 20 | 22 | 12 | 1 | 12 | 14 | 21 |
| 13 | 2 | 5 | 10 | 11 | 14 | 2 | 5 | 10 | 18 | 15 | 2 | 5 | 11 | 19 |
| 16 | 2 | 5 | 15 | 16 | 17 | 2 | 5 | 15 | 23 | 18 | 2 | 5 | 16 | 24 |
| 19 | 2 | 5 | 18 | 19 | 20 | 2 | 5 | 23 | 24 | 21 | 2 | 6 | 11 | 18 |
| 22 | 2 | 6 | 16 | 23 | 23 | 3 | 6 | 7 | 21 | 24 | 3 | 6 | 17 | 21 |
| 25 | 3 | 7 | 17 | 24 | 26 | 3 | 7 | 19 | 21 | 27 | 3 | 10 | 12 | 21 |
| 28 | 3 | 10 | 14 | 21 | 29 | 3 | 12 | 14 | 24 | 30 | 3 | 12 | 15 | 21 |
| 31 | 3 | 14 | 15 | 21 | 32 | 3 | 17 | 19 | 21 | 33 | 4 | 6 | 8 | 9 |
| 34 | 4 | 6 | 9 | 13 | 35 | 4 | 8 | 9 | 15 | 36 | 4 | 8 | 10 | 13 |
| 37 | 4 | 9 | 13 | 15 | 38 | 4 | 9 | 19 | 20 | 39 | 4 | 9 | 19 | 22 |
| 40 | 4 | 9 | 20 | 24 | 41 | 4 | 9 | 22 | 24 | 42 | 4 | 10 | 20 | 22 |
| 43 | 5 | 6 | 11 | 18 | 44 | 5 | 6 | 16 | 23 | 45 | 6 | 7 | 12 | 14 |
| 46 | 6 | 8 | 20 | 22 | 47 | 6 | 12 | 14 | 17 | 48 | 6 | 13 | 20 | 22 |
| 49 | 7 | 10 | 12 | 17 | 50 | 7 | 10 | 14 | 17 | 51 | 7 | 12 | 14 | 19 |
| 52 | 7 | 12 | 15 | 17 | 53 | 7 | 14 | 15 | 17 | 54 | 7 | 17 | 21 | 24 |
| 55 | 8 | 9 | 10 | 13 | 56 | 8 | 13 | 19 | 20 | 57 | 8 | 13 | 19 | 22 |
| 58 | 8 | 13 | 20 | 24 | 59 | 8 | 13 | 22 | 24 | 60 | 8 | 15 | 20 | 22 |
| 61 | 9 | 10 | 20 | 22 | 62 | 10 | 11 | 16 | 23 | 63 | 10 | 16 | 18 | 23 |
| 64 | 11 | 15 | 16 | 18 | 65 | 11 | 15 | 18 | 23 | 66 | 11 | 16 | 18 | 24 |
| 67 | 11 | 16 | 19 | 23 | 68 | 11 | 18 | 23 | 24 | 69 | 12 | 14 | 17 | 19 |
| 70 | 12 | 14 | 21 | 24 | 71 | 13 | 15 | 20 | 22 | 72 | 16 | 18 | 19 | 23 |

41

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 11 | 19 | 2 | 1 | 2 | 15 | 16 | 3 | 1 | 2 | 15 | 23 |
| 4 | 1 | 2 | 18 | 19 | 5 | 1 | 3 | 7 | 19 | 6 | 1 | 3 | 12 | 15 |
| 7 | 1 | 3 | 14 | 15 | 8 | 1 | 3 | 17 | 19 | 9 | 1 | 4 | 8 | 15 |
| 10 | 1 | 4 | 13 | 15 | 11 | 1 | 4 | 19 | 20 | 12 | 1 | 4 | 19 | 22 |
| 13 | 1 | 5 | 11 | 19 | 14 | 1 | 5 | 15 | 16 | 15 | 1 | 5 | 15 | 23 |
| 16 | 1 | 5 | 18 | 19 | 17 | 1 | 7 | 19 | 21 | 18 | 1 | 8 | 9 | 15 |
| 19 | 1 | 9 | 13 | 15 | 20 | 1 | 9 | 19 | 20 | 21 | 1 | 9 | 19 | 22 |
| 22 | 1 | 12 | 15 | 21 | 23 | 1 | 14 | 15 | 21 | 24 | 1 | 17 | 19 | 21 |
| 25 | 2 | 6 | 10 | 11 | 26 | 2 | 6 | 10 | 18 | 27 | 2 | 6 | 16 | 24 |
| 28 | 2 | 6 | 23 | 24 | 29 | 3 | 6 | 7 | 24 | 30 | 3 | 6 | 17 | 24 |
| 31 | 3 | 10 | 12 | 24 | 32 | 3 | 10 | 14 | 24 | 33 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 34 | 4 | 6 | 10 | 13 | 35 | 4 | 10 | 20 | 24 | 36 | 4 | 10 | 22 | 24 |
| 37 | 5 | 6 | 10 | 11 | 38 | 5 | 6 | 10 | 18 | 39 | 5 | 6 | 16 | 24 |
| 40 | 5 | 6 | 23 | 24 | 41 | 6 | 7 | 10 | 12 | 42 | 6 | 7 | 10 | 14 |

42

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 11 | 20 | 2 | 1 | 2 | 11 | 22 | 3 | 1 | 2 | 12 | 16 |
| 4 | 1 | 2 | 12 | 23 | 5 | 1 | 2 | 14 | 16 | 6 | 1 | 2 | 14 | 23 |
| 7 | 1 | 2 | 18 | 20 | 8 | 1 | 2 | 18 | 22 | 9 | 1 | 3 | 7 | 11 |
| 10 | 1 | 3 | 7 | 18 | 11 | 1 | 3 | 8 | 12 | 12 | 1 | 3 | 8 | 14 |
| 13 | 1 | 3 | 11 | 17 | 14 | 1 | 3 | 12 | 13 | 15 | 1 | 3 | 13 | 14 |
| 16 | 1 | 3 | 17 | 18 | 17 | 1 | 4 | 7 | 20 | 18 | 1 | 4 | 7 | 22 |
| 19 | 1 | 4 | 8 | 16 | 20 | 1 | 4 | 8 | 23 | 21 | 1 | 4 | 13 | 16 |
| 22 | 1 | 4 | 13 | 23 | 23 | 1 | 4 | 17 | 20 | 24 | 1 | 4 | 17 | 22 |
| 25 | 1 | 5 | 11 | 20 | 26 | 1 | 5 | 11 | 22 | 27 | 1 | 5 | 12 | 16 |
| 28 | 1 | 5 | 12 | 23 | 29 | 1 | 5 | 14 | 16 | 30 | 1 | 5 | 14 | 23 |
| 31 | 1 | 5 | 18 | 20 | 32 | 1 | 5 | 18 | 22 | 33 | 1 | 7 | 9 | 20 |
| 34 | 1 | 7 | 9 | 22 | 35 | 1 | 7 | 11 | 21 | 36 | 1 | 7 | 18 | 21 |
| 37 | 1 | 8 | 9 | 16 | 38 | 1 | 8 | 9 | 23 | 39 | 1 | 8 | 12 | 21 |
| 40 | 1 | 8 | 14 | 21 | 41 | 1 | 9 | 13 | 16 | 42 | 1 | 9 | 13 | 23 |
| 43 | 1 | 9 | 17 | 20 | 44 | 1 | 9 | 17 | 22 | 45 | 1 | 11 | 17 | 21 |
| 46 | 1 | 12 | 13 | 21 | 47 | 1 | 13 | 14 | 21 | 48 | 1 | 17 | 18 | 21 |
| 49 | 2 | 3 | 11 | 19 | 50 | 2 | 3 | 12 | 15 | 51 | 2 | 3 | 14 | 15 |
| 52 | 2 | 3 | 18 | 19 | 53 | 2 | 4 | 15 | 16 | 54 | 2 | 4 | 15 | 23 |
| 55 | 2 | 4 | 19 | 20 | 56 | 2 | 4 | 19 | 22 | 57 | 2 | 6 | 11 | 12 |
| 58 | 2 | 6 | 11 | 14 | 59 | 2 | 6 | 12 | 18 | 60 | 2 | 6 | 14 | 18 |
| 61 | 2 | 6 | 16 | 20 | 62 | 2 | 6 | 16 | 22 | 63 | 2 | 6 | 20 | 23 |
| 64 | 2 | 6 | 22 | 23 | 65 | 2 | 7 | 10 | 12 | 66 | 2 | 7 | 10 | 14 |
| 67 | 2 | 7 | 16 | 24 | 68 | 2 | 7 | 23 | 24 | 69 | 2 | 8 | 10 | 11 |
| 70 | 2 | 8 | 10 | 18 | 71 | 2 | 8 | 20 | 24 | 72 | 2 | 8 | 22 | 24 |
| 73 | 2 | 9 | 15 | 16 | 74 | 2 | 9 | 15 | 23 | 75 | 2 | 9 | 19 | 20 |
| 76 | 2 | 9 | 19 | 22 | 77 | 2 | 10 | 11 | 13 | 78 | 2 | 10 | 12 | 17 |
| 79 | 2 | 10 | 13 | 18 | 80 | 2 | 10 | 14 | 17 | 81 | 2 | 11 | 19 | 21 |
| 82 | 2 | 12 | 15 | 21 | 83 | 2 | 13 | 20 | 24 | 84 | 2 | 13 | 22 | 24 |
| 85 | 2 | 14 | 15 | 21 | 86 | 2 | 16 | 17 | 24 | 87 | 2 | 17 | 23 | 24 |
| 88 | 2 | 18 | 19 | 21 | 89 | 3 | 4 | 7 | 19 | 90 | 3 | 4 | 8 | 15 |
| 91 | 3 | 4 | 13 | 15 | 92 | 3 | 4 | 17 | 19 | 93 | 3 | 5 | 11 | 19 |
| 94 | 3 | 5 | 12 | 15 | 95 | 3 | 5 | 14 | 19 | 96 | 3 | 5 | 18 | 19 |
| 97 | 3 | 6 | 7 | 16 | 98 | 3 | 6 | 7 | 23 | 99 | 3 | 6 | 8 | 20 |
| 100 | 3 | 6 | 8 | 22 | 101 | 3 | 6 | 13 | 20 | 102 | 3 | 6 | 13 | 22 |
| 103 | 3 | 6 | 16 | 17 | 104 | 3 | 6 | 17 | 23 | 105 | 3 | 7 | 8 | 24 |
| 106 | 3 | 7 | 9 | 19 | 107 | 3 | 7 | 13 | 24 | 108 | 3 | 8 | 9 | 15 |
| 109 | 3 | 8 | 17 | 24 | 110 | 3 | 9 | 13 | 19 | 111 | 3 | 9 | 17 | 19 |
| 112 | 3 | 10 | 11 | 16 | 113 | 3 | 10 | 11 | 23 | 114 | 3 | 10 | 12 | 20 |
| 115 | 3 | 10 | 12 | 22 | 116 | 3 | 10 | 14 | 20 | 117 | 3 | 10 | 14 | 22 |
| 118 | 3 | 10 | 16 | 18 | 119 | 3 | 10 | 18 | 23 | 120 | 3 | 11 | 12 | 24 |
| 121 | 3 | 11 | 14 | 24 | 122 | 3 | 12 | 18 | 24 | 123 | 3 | 13 | 17 | 24 |
| 124 | 3 | 14 | 18 | 24 | 125 | 4 | 5 | 15 | 18 | 126 | 4 | 5 | 15 | 23 |
| 127 | 4 | 5 | 19 | 20 | 128 | 4 | 5 | 19 | 22 | 129 | 4 | 6 | 7 | 12 |
| 130 | 4 | 6 | 7 | 14 | 131 | 4 | 6 | 8 | 11 | 132 | 4 | 6 | 8 | 18 |
| 133 | 4 | 6 | 11 | 13 | 134 | 4 | 6 | 12 | 17 | 135 | 4 | 6 | 13 | 18 |
| 136 | 4 | 6 | 14 | 17 | 137 | 4 | 7 | 8 | 10 | 138 | 4 | 7 | 10 | 13 |
| 139 | 4 | 7 | 19 | 21 | 140 | 4 | 8 | 10 | 17 | 141 | 4 | 8 | 15 | 21 |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 142 | 4 | 10 | 13 | 17 | 143 | 4 | 10 | 16 | 20 | 144 | 4 | 10 | 16 | 22 | |
| 145 | 4 | 10 | 20 | 23 | 146 | 4 | 10 | 22 | 23 | 147 | 4 | 11 | 16 | 24 | |
| 148 | 4 | 11 | 23 | 24 | 149 | 4 | 12 | 20 | 24 | 150 | 4 | 12 | 22 | 24 | |
| 151 | 4 | 13 | 15 | 21 | 152 | 4 | 14 | 20 | 24 | 153 | 4 | 14 | 22 | 24 | |
| 154 | 4 | 16 | 18 | 24 | 155 | 4 | 17 | 19 | 21 | 156 | 4 | 18 | 23 | 24 | |
| 157 | 5 | 6 | 11 | 12 | 158 | 5 | 6 | 11 | 14 | 159 | 5 | 6 | 12 | 18 | |
| 160 | 5 | 6 | 14 | 18 | 161 | 5 | 6 | 16 | 20 | 162 | 5 | 6 | 16 | 22 | |
| 163 | 5 | 6 | 20 | 23 | 164 | 5 | 6 | 22 | 23 | 165 | 5 | 7 | 10 | 12 | |
| 166 | 5 | 7 | 10 | 14 | 167 | 5 | 7 | 16 | 24 | 168 | 5 | 7 | 23 | 24 | |
| 169 | 5 | 8 | 10 | 11 | 170 | 5 | 8 | 10 | 18 | 171 | 5 | 8 | 20 | 24 | |
| 172 | 5 | 8 | 22 | 24 | 173 | 5 | 9 | 15 | 16 | 174 | 5 | 9 | 15 | 23 | |
| 175 | 5 | 9 | 19 | 20 | 176 | 5 | 9 | 19 | 22 | 177 | 5 | 10 | 11 | 13 | |
| 178 | 5 | 10 | 12 | 17 | 179 | 5 | 10 | 13 | 18 | 180 | 5 | 10 | 14 | 17 | |
| 181 | 5 | 11 | 19 | 21 | 182 | 5 | 12 | 15 | 21 | 183 | 5 | 13 | 20 | 24 | |
| 184 | 5 | 13 | 22 | 24 | 185 | 5 | 14 | 15 | 21 | 186 | 5 | 16 | 17 | 24 | |
| 187 | 5 | 17 | 23 | 24 | 188 | 5 | 18 | 19 | 21 | 189 | 6 | 7 | 9 | 12 | |
| 190 | 6 | 7 | 9 | 14 | 191 | 6 | 7 | 16 | 21 | 192 | 6 | 7 | 21 | 23 | |
| 193 | 6 | 8 | 9 | 11 | 194 | 6 | 8 | 9 | 18 | 195 | 6 | 8 | 20 | 21 | |
| 196 | 6 | 8 | 21 | 22 | 197 | 6 | 9 | 11 | 13 | 198 | 6 | 9 | 12 | 17 | |
| 199 | 6 | 9 | 13 | 18 | 200 | 6 | 9 | 14 | 17 | 201 | 6 | 13 | 20 | 21 | |
| 202 | 6 | 13 | 21 | 22 | 203 | 6 | 16 | 17 | 21 | 204 | 6 | 17 | 21 | 23 | |
| 205 | 7 | 8 | 9 | 10 | 206 | 7 | 8 | 21 | 24 | 207 | 7 | 9 | 10 | 13 | |
| 208 | 7 | 9 | 19 | 21 | 209 | 7 | 11 | 15 | 16 | 210 | 7 | 11 | 15 | 23 | |
| 211 | 7 | 12 | 15 | 20 | 212 | 7 | 12 | 15 | 22 | 213 | 7 | 12 | 16 | 19 | |
| 214 | 7 | 12 | 19 | 23 | 215 | 7 | 13 | 21 | 24 | 216 | 7 | 14 | 15 | 20 | |
| 217 | 7 | 14 | 15 | 22 | 218 | 7 | 14 | 16 | 19 | 219 | 7 | 14 | 19 | 23 | |
| 220 | 7 | 15 | 16 | 18 | 221 | 7 | 15 | 18 | 23 | 222 | 8 | 9 | 10 | 17 | |
| 223 | 8 | 9 | 15 | 21 | 224 | 8 | 11 | 15 | 20 | 225 | 8 | 11 | 15 | 22 | |
| 226 | 8 | 11 | 16 | 19 | 227 | 8 | 11 | 19 | 23 | 228 | 8 | 12 | 19 | 20 | |
| 229 | 8 | 12 | 19 | 22 | 230 | 8 | 14 | 19 | 20 | 231 | 8 | 14 | 19 | 22 | |
| 232 | 8 | 15 | 18 | 20 | 233 | 8 | 15 | 18 | 22 | 234 | 8 | 16 | 18 | 19 | |
| 235 | 8 | 17 | 21 | 24 | 236 | 8 | 18 | 19 | 23 | 237 | 9 | 10 | 13 | 17 | |
| 238 | 9 | 10 | 16 | 20 | 239 | 9 | 10 | 16 | 22 | 240 | 9 | 10 | 20 | 23 | |
| 241 | 9 | 10 | 22 | 23 | 242 | 9 | 11 | 16 | 24 | 243 | 9 | 11 | 23 | 24 | |
| 244 | 9 | 12 | 20 | 24 | 245 | 9 | 12 | 22 | 24 | 246 | 9 | 13 | 15 | 21 | |
| 247 | 9 | 14 | 20 | 24 | 248 | 9 | 14 | 22 | 24 | 249 | 9 | 16 | 18 | 24 | |
| 250 | 9 | 17 | 19 | 21 | 251 | 9 | 18 | 23 | 24 | 252 | 10 | 11 | 16 | 21 | |
| 253 | 10 | 11 | 21 | 23 | 254 | 10 | 12 | 20 | 21 | 255 | 10 | 12 | 21 | 22 | |
| 256 | 10 | 14 | 20 | 21 | 257 | 10 | 14 | 21 | 22 | 258 | 10 | 16 | 18 | 21 | |
| 259 | 10 | 18 | 21 | 23 | 260 | 11 | 12 | 21 | 24 | 261 | 11 | 13 | 15 | 20 | |
| 262 | 11 | 13 | 15 | 22 | 263 | 11 | 13 | 16 | 19 | 264 | 11 | 13 | 19 | 23 | |
| 265 | 11 | 14 | 21 | 24 | 266 | 11 | 15 | 16 | 17 | 267 | 11 | 15 | 17 | 22 | |
| 268 | 12 | 13 | 19 | 20 | 269 | 12 | 13 | 19 | 22 | 270 | 12 | 15 | 17 | 20 | |
| 271 | 12 | 15 | 17 | 22 | 272 | 12 | 16 | 17 | 19 | 273 | 12 | 17 | 19 | 23 | |
| 274 | 12 | 18 | 21 | 24 | 275 | 13 | 14 | 19 | 20 | 276 | 13 | 14 | 19 | 22 | |
| 277 | 13 | 15 | 18 | 20 | 278 | 13 | 15 | 18 | 22 | 279 | 13 | 16 | 18 | 19 | |
| 280 | 13 | 17 | 21 | 24 | 281 | 13 | 18 | 19 | 23 | 282 | 14 | 15 | 17 | 20 | |
| 283 | 14 | 15 | 17 | 22 | 284 | 14 | 16 | 17 | 19 | 285 | 14 | 17 | 19 | 23 | |
| 286 | 14 | 18 | 21 | 24 | 287 | 15 | 16 | 17 | 18 | 288 | 15 | 17 | 18 | 23 | |

43

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 12 | 14 | 2 | 1 | 2 | 20 | 22 | 3 | 1 | 3 | 8 | 13 | |
| 4 | 1 | 3 | 11 | 18 | 5 | 1 | 4 | 7 | 17 | 6 | 1 | 4 | 16 | 23 | |
| 7 | 1 | 5 | 12 | 14 | 8 | 1 | 5 | 20 | 22 | 9 | 1 | 7 | 9 | 17 | |
| 10 | 1 | 8 | 13 | 21 | 11 | 1 | 9 | 16 | 23 | 12 | 1 | 11 | 18 | 21 | |
| 13 | 2 | 5 | 10 | 12 | 14 | 2 | 5 | 10 | 14 | 15 | 2 | 5 | 12 | 15 | |
| 16 | 2 | 5 | 14 | 15 | 17 | 2 | 5 | 19 | 20 | 18 | 2 | 5 | 19 | 22 | |
| 19 | 2 | 5 | 20 | 24 | 20 | 2 | 5 | 22 | 24 | 21 | 2 | 6 | 12 | 14 | |
| 22 | 2 | 6 | 20 | 22 | 23 | 3 | 6 | 8 | 21 | 24 | 3 | 6 | 13 | 21 | |
| 25 | 3 | 8 | 13 | 24 | 26 | 3 | 8 | 15 | 21 | 27 | 3 | 10 | 11 | 21 | |
| 28 | 3 | 10 | 18 | 21 | 29 | 3 | 11 | 18 | 24 | 30 | 3 | 11 | 19 | 21 | |
| 31 | 3 | 13 | 15 | 21 | 32 | 3 | 18 | 19 | 21 | 33 | 4 | 6 | 7 | 9 | |
| 34 | 4 | 6 | 9 | 17 | 35 | 4 | 7 | 9 | 19 | 36 | 4 | 7 | 10 | 17 | |
| 37 | 4 | 9 | 15 | 16 | 38 | 4 | 9 | 15 | 23 | 39 | 4 | 9 | 16 | 24 | |
| 40 | 4 | 9 | 17 | 19 | 41 | 4 | 9 | 23 | 24 | 42 | 4 | 10 | 16 | 23 | |
| 43 | 5 | 6 | 12 | 14 | 44 | 5 | 6 | 20 | 22 | 45 | 6 | 7 | 16 | 22 | |
| 46 | 6 | 8 | 11 | 18 | 47 | 6 | 11 | 13 | 18 | 48 | 6 | 16 | 17 | 23 | |
| 49 | 7 | 9 | 10 | 17 | 50 | 7 | 15 | 16 | 17 | 51 | 7 | 15 | 17 | 23 | |
| 52 | 7 | 16 | 17 | 24 | 53 | 7 | 16 | 19 | 23 | 54 | 7 | 17 | 23 | 24 | |
| 55 | 8 | 10 | 11 | 13 | 56 | 8 | 10 | 13 | 18 | 57 | 8 | 11 | 13 | 19 | |
| 58 | 8 | 11 | 15 | 18 | 59 | 8 | 13 | 18 | 19 | 60 | 8 | 13 | 21 | 24 | |
| 61 | 9 | 10 | 16 | 23 | 62 | 10 | 12 | 20 | 22 | 63 | 10 | 14 | 20 | 22 | |
| 64 | 11 | 13 | 15 | 18 | 65 | 11 | 18 | 21 | 24 | 66 | 12 | 14 | 19 | 20 | |
| 67 | 12 | 14 | 19 | 22 | 68 | 12 | 14 | 20 | 24 | 69 | 12 | 14 | 22 | 24 | |
| 70 | 12 | 15 | 20 | 22 | 71 | 14 | 15 | 20 | 22 | 72 | 16 | 17 | 19 | 23 | |

44

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 12 | 15 | 2 | 1 | 2 | 14 | 19 | 3 | 1 | 2 | 19 | 20 | |
| 4 | 1 | 2 | 19 | 22 | 5 | 1 | 3 | 8 | 19 | 6 | 1 | 3 | 11 | 19 | |
| 7 | 1 | 3 | 13 | 15 | 8 | 1 | 3 | 18 | 19 | 9 | 1 | 4 | 7 | 19 | |
| 10 | 1 | 4 | 15 | 16 | 11 | 1 | 4 | 15 | 23 | 12 | 1 | 4 | 17 | 19 | |
| 13 | 1 | 5 | 12 | 15 | 14 | 1 | 5 | 14 | 19 | 15 | 1 | 5 | 19 | 20 | |
| 16 | 1 | 5 | 19 | 22 | 17 | 1 | 7 | 9 | 19 | 18 | 1 | 8 | 15 | 21 | |
| 19 | 1 | 9 | 15 | 16 | 20 | 1 | 9 | 15 | 23 | 21 | 1 | 9 | 17 | 19 | |
| 22 | 1 | 11 | 19 | 21 | 23 | 1 | 13 | 15 | 21 | 24 | 1 | 18 | 19 | 21 | |
| 25 | 2 | 6 | 10 | 12 | 26 | 2 | 6 | 10 | 14 | 27 | 2 | 6 | 20 | 24 | |
| 28 | 2 | 6 | 22 | 24 | 29 | 3 | 6 | 8 | 24 | 30 | 3 | 6 | 13 | 24 | |
| 31 | 3 | 10 | 11 | 24 | 32 | 3 | 10 | 18 | 24 | 33 | 4 | 6 | 7 | 10 | |
| 34 | 4 | 6 | 10 | 17 | 35 | 4 | 10 | 16 | 24 | 36 | 4 | 10 | 23 | 24 | |
| 37 | 5 | 6 | 10 | 12 | 38 | 5 | 6 | 10 | 14 | 39 | 5 | 6 | 20 | 24 | |
| 40 | 5 | 6 | 22 | 24 | 41 | 6 | 7 | 9 | 10 | 42 | 6 | 7 | 16 | 24 | |
| 43 | 6 | 7 | 23 | 24 | 44 | 6 | 8 | 10 | 11 | 45 | 6 | 8 | 10 | 18 | |
| 46 | 6 | 8 | 21 | 24 | 47 | 6 | 9 | 10 | 17 | 48 | 6 | 10 | 11 | 13 | |
| 49 | 6 | 10 | 13 | 18 | 50 | 6 | 13 | 21 | 24 | 51 | 6 | 16 | 17 | 24 | |
| 52 | 6 | 17 | 23 | 24 | 53 | 7 | 15 | 16 | 19 | 54 | 7 | 15 | 19 | 23 | |
| 55 | 8 | 11 | 15 | 19 | 56 | 8 | 15 | 18 | 19 | 57 | 9 | 10 | 16 | 24 | |
| 58 | 9 | 10 | 23 | 24 | 59 | 10 | 11 | 21 | 24 | 60 | 10 | 12 | 20 | 24 | |
| 61 | 10 | 12 | 22 | 24 | 62 | 10 | 14 | 20 | 24 | 63 | 10 | 14 | 22 | 24 | |
| 64 | 10 | 18 | 21 | 24 | 65 | 11 | 13 | 15 | 19 | 66 | 12 | 15 | 19 | 20 | |
| 67 | 12 | 15 | 19 | 22 | 68 | 13 | 15 | 18 | 19 | 69 | 14 | 15 | 19 | 20 | |
| 70 | 14 | 15 | 19 | 22 | 71 | 15 | 16 | 17 | 19 | 72 | 15 | 17 | 19 | 23 | |

45

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 12 | 19 | 2 | 1 | 2 | 14 | 19 | 3 | 1 | 2 | 15 | 20 | |
| 4 | 1 | 2 | 15 | 22 | 5 | 1 | 3 | 8 | 19 | 6 | 1 | 3 | 11 | 15 | |
| 7 | 1 | 3 | 13 | 19 | 8 | 1 | 3 | 15 | 18 | 9 | 1 | 4 | 7 | 15 | |
| 10 | 1 | 4 | 15 | 17 | 11 | 1 | 4 | 16 | 19 | 12 | 1 | 4 | 19 | 23 | |
| 13 | 1 | 5 | 12 | 19 | 14 | 1 | 5 | 14 | 19 | 15 | 1 | 5 | 15 | 20 | |
| 16 | 1 | 5 | 15 | 22 | 17 | 1 | 7 | 9 | 19 | 18 | 1 | 7 | 15 | 16 | |
| 19 | 1 | 7 | 15 | 23 | 20 | 1 | 7 | 16 | 19 | 21 | 1 | 7 | 19 | 23 | |
| 22 | 1 | 8 | 11 | 15 | 23 | 1 | 8 | 11 | 19 | 24 | 1 | 8 | 15 | 18 | |
| 25 | 1 | 8 | 18 | 19 | 26 | 1 | 8 | 19 | 21 | 27 | 1 | 9 | 15 | 17 | |
| 28 | 1 | 9 | 16 | 19 | 29 | 1 | 9 | 19 | 23 | 30 | 1 | 11 | 13 | 15 | |
| 31 | 1 | 11 | 13 | 19 | 32 | 1 | 11 | 15 | 21 | 33 | 1 | 12 | 15 | 20 | |
| 34 | 1 | 12 | 15 | 22 | 35 | 1 | 12 | 19 | 20 | 36 | 1 | 12 | 19 | 22 | |
| 37 | 1 | 13 | 15 | 18 | 38 | 1 | 13 | 18 | 19 | 39 | 1 | 13 | 19 | 21 | |
| 40 | 1 | 14 | 15 | 20 | 41 | 1 | 14 | 15 | 22 | 42 | 1 | 14 | 19 | 20 | |



BIBS LILLE

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 43 | 1 | 14 | 19 | 22 |
| 46 | 1 | 15 | 18 | 21 |
| 49 | 2 | 6 | 10 | 20 |
| 52 | 2 | 6 | 14 | 24 |
| 55 | 2 | 10 | 20 | 24 |
| 58 | 2 | 14 | 15 | 19 |
| 61 | 3 | 6 | 8 | 10 |
| 64 | 3 | 6 | 10 | 18 |
| 67 | 3 | 8 | 10 | 24 |
| 70 | 3 | 11 | 15 | 19 |
| 73 | 4 | 6 | 7 | 24 |
| 76 | 4 | 6 | 16 | 24 |
| 79 | 4 | 7 | 10 | 24 |
| 82 | 4 | 15 | 16 | 19 |
| 85 | 5 | 6 | 10 | 20 |
| 88 | 5 | 6 | 14 | 24 |
| 91 | 5 | 10 | 20 | 24 |
| 94 | 5 | 14 | 15 | 19 |
| 97 | 6 | 7 | 9 | 24 |
| 100 | 6 | 8 | 10 | 21 |
| 103 | 6 | 9 | 10 | 16 |
| 106 | 6 | 9 | 17 | 24 |
| 109 | 6 | 10 | 12 | 20 |
| 112 | 6 | 10 | 14 | 20 |
| 115 | 6 | 10 | 17 | 23 |
| 118 | 6 | 11 | 21 | 24 |
| 121 | 6 | 12 | 18 | 24 |
| 124 | 6 | 18 | 21 | 24 |
| 127 | 7 | 10 | 16 | 24 |
| 130 | 8 | 10 | 18 | 24 |
| 133 | 9 | 10 | 17 | 24 |
| 136 | 9 | 15 | 19 | 23 |
| 139 | 10 | 13 | 21 | 24 |
| 142 | 11 | 15 | 19 | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 44 | 1 | 15 | 16 | 17 |
| 47 | 1 | 16 | 17 | 19 |
| 50 | 2 | 6 | 10 | 22 |
| 53 | 2 | 10 | 12 | 24 |
| 56 | 2 | 10 | 22 | 24 |
| 59 | 2 | 15 | 19 | 20 |
| 62 | 3 | 6 | 10 | 11 |
| 65 | 3 | 6 | 11 | 24 |
| 68 | 3 | 8 | 15 | 19 |
| 71 | 3 | 13 | 15 | 19 |
| 74 | 4 | 6 | 10 | 16 |
| 77 | 4 | 6 | 17 | 24 |
| 80 | 4 | 7 | 15 | 19 |
| 83 | 4 | 15 | 17 | 19 |
| 86 | 5 | 6 | 10 | 22 |
| 89 | 5 | 10 | 12 | 24 |
| 92 | 5 | 10 | 22 | 24 |
| 95 | 5 | 15 | 19 | 20 |
| 98 | 6 | 7 | 10 | 16 |
| 101 | 6 | 8 | 11 | 24 |
| 104 | 6 | 9 | 10 | 23 |
| 107 | 6 | 9 | 23 | 24 |
| 110 | 6 | 10 | 12 | 22 |
| 113 | 6 | 10 | 14 | 22 |
| 116 | 6 | 10 | 18 | 21 |
| 119 | 6 | 12 | 20 | 24 |
| 122 | 6 | 14 | 20 | 24 |
| 125 | 7 | 9 | 10 | 24 |
| 128 | 7 | 10 | 23 | 24 |
| 131 | 8 | 10 | 21 | 24 |
| 134 | 9 | 15 | 16 | 19 |
| 137 | 10 | 11 | 13 | 24 |
| 140 | 10 | 16 | 17 | 24 |
| 143 | 13 | 15 | 19 | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 45 | 1 | 15 | 17 | 23 |
| 48 | 1 | 17 | 19 | 23 |
| 51 | 2 | 6 | 12 | 24 |
| 54 | 2 | 10 | 14 | 24 |
| 57 | 2 | 12 | 15 | 19 |
| 60 | 2 | 15 | 19 | 22 |
| 63 | 3 | 6 | 10 | 13 |
| 66 | 3 | 6 | 18 | 24 |
| 69 | 3 | 10 | 13 | 24 |
| 72 | 3 | 15 | 18 | 19 |
| 75 | 4 | 6 | 10 | 23 |
| 78 | 4 | 6 | 23 | 24 |
| 81 | 4 | 10 | 17 | 24 |
| 84 | 4 | 15 | 19 | 23 |
| 87 | 5 | 6 | 12 | 24 |
| 90 | 5 | 10 | 14 | 24 |
| 93 | 5 | 12 | 15 | 19 |
| 96 | 5 | 15 | 19 | 22 |
| 99 | 6 | 7 | 10 | 23 |
| 102 | 6 | 8 | 18 | 24 |
| 105 | 6 | 9 | 16 | 24 |
| 108 | 6 | 10 | 11 | 21 |
| 111 | 6 | 10 | 13 | 21 |
| 114 | 6 | 10 | 16 | 17 |
| 117 | 6 | 11 | 13 | 24 |
| 120 | 6 | 12 | 22 | 24 |
| 123 | 6 | 14 | 22 | 24 |
| 126 | 7 | 9 | 15 | 19 |
| 129 | 8 | 10 | 11 | 24 |
| 132 | 8 | 15 | 19 | 21 |
| 135 | 9 | 15 | 17 | 19 |
| 138 | 10 | 13 | 18 | 24 |
| 141 | 10 | 17 | 23 | 24 |
| 144 | 15 | 18 | 19 | 21 |

46

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 12 | 20 |
| 4 | 1 | 2 | 14 | 22 |
| 7 | 1 | 3 | 11 | 13 |
| 10 | 1 | 4 | 7 | 23 |
| 13 | 1 | 5 | 12 | 20 |
| 16 | 1 | 5 | 14 | 22 |
| 19 | 1 | 8 | 11 | 21 |
| 22 | 1 | 9 | 17 | 23 |
| 25 | 2 | 6 | 12 | 20 |
| 28 | 2 | 6 | 14 | 22 |
| 31 | 2 | 10 | 14 | 20 |
| 34 | 2 | 12 | 15 | 22 |
| 37 | 2 | 12 | 20 | 24 |
| 40 | 2 | 14 | 15 | 22 |
| 43 | 2 | 14 | 20 | 24 |
| 46 | 3 | 6 | 8 | 18 |
| 49 | 3 | 8 | 10 | 11 |
| 52 | 3 | 8 | 11 | 19 |
| 55 | 3 | 8 | 18 | 19 |
| 58 | 3 | 10 | 13 | 18 |
| 61 | 3 | 11 | 13 | 24 |
| 64 | 3 | 13 | 18 | 24 |
| 67 | 4 | 6 | 16 | 17 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 2 | 12 | 22 |
| 5 | 1 | 3 | 8 | 11 |
| 8 | 1 | 3 | 13 | 18 |
| 11 | 1 | 4 | 16 | 17 |
| 14 | 1 | 5 | 12 | 22 |
| 17 | 1 | 7 | 9 | 16 |
| 20 | 1 | 8 | 18 | 21 |
| 23 | 1 | 11 | 13 | 21 |
| 26 | 2 | 6 | 12 | 22 |
| 29 | 2 | 10 | 12 | 20 |
| 32 | 2 | 10 | 14 | 22 |
| 35 | 2 | 12 | 19 | 20 |
| 38 | 2 | 12 | 22 | 24 |
| 41 | 2 | 14 | 19 | 20 |
| 44 | 2 | 14 | 22 | 24 |
| 47 | 3 | 6 | 11 | 13 |
| 50 | 3 | 8 | 10 | 18 |
| 53 | 3 | 8 | 11 | 24 |
| 56 | 3 | 8 | 18 | 24 |
| 59 | 3 | 11 | 13 | 19 |
| 62 | 3 | 13 | 15 | 18 |
| 65 | 4 | 6 | 7 | 16 |
| 68 | 4 | 6 | 17 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 | 14 | 20 |
| 6 | 1 | 3 | 8 | 18 |
| 9 | 1 | 4 | 7 | 16 |
| 12 | 1 | 4 | 17 | 23 |
| 15 | 1 | 5 | 14 | 20 |
| 18 | 1 | 7 | 9 | 23 |
| 21 | 1 | 9 | 16 | 17 |
| 24 | 1 | 13 | 18 | 21 |
| 27 | 2 | 6 | 14 | 20 |
| 30 | 2 | 10 | 12 | 22 |
| 33 | 2 | 12 | 15 | 20 |
| 36 | 2 | 12 | 19 | 22 |
| 39 | 2 | 14 | 15 | 20 |
| 42 | 2 | 14 | 19 | 22 |
| 45 | 3 | 6 | 8 | 11 |
| 48 | 3 | 6 | 13 | 18 |
| 51 | 3 | 8 | 11 | 15 |
| 54 | 3 | 8 | 15 | 18 |
| 57 | 3 | 10 | 11 | 13 |
| 60 | 3 | 11 | 13 | 19 |
| 63 | 3 | 13 | 18 | 19 |
| 66 | 4 | 6 | 7 | 23 |
| 69 | 4 | 7 | 10 | 16 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 70 | 4 | 7 | 10 | 23 |
| 73 | 4 | 7 | 16 | 19 |
| 76 | 4 | 7 | 23 | 24 |
| 79 | 4 | 15 | 16 | 17 |
| 82 | 4 | 16 | 17 | 24 |
| 85 | 5 | 6 | 12 | 20 |
| 88 | 5 | 6 | 14 | 22 |
| 91 | 5 | 10 | 14 | 20 |
| 94 | 5 | 12 | 15 | 22 |
| 97 | 5 | 12 | 20 | 24 |
| 100 | 5 | 14 | 15 | 22 |
| 103 | 5 | 14 | 20 | 24 |
| 106 | 6 | 7 | 9 | 23 |
| 109 | 6 | 9 | 16 | 17 |
| 112 | 6 | 13 | 18 | 21 |
| 115 | 7 | 9 | 15 | 16 |
| 118 | 7 | 9 | 16 | 24 |
| 121 | 8 | 10 | 11 | 21 |
| 124 | 8 | 11 | 19 | 21 |
| 127 | 8 | 18 | 19 | 21 |
| 130 | 9 | 10 | 17 | 23 |
| 133 | 9 | 16 | 17 | 19 |
| 136 | 9 | 17 | 23 | 24 |
| 139 | 11 | 13 | 15 | 21 |
| 142 | 13 | 15 | 18 | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 71 | 4 | 7 | 15 | 16 |
| 74 | 4 | 7 | 16 | 24 |
| 77 | 4 | 10 | 16 | 17 |
| 80 | 4 | 15 | 17 | 23 |
| 83 | 4 | 17 | 19 | 23 |
| 86 | 5 | 6 | 12 | 22 |
| 89 | 5 | 10 | 12 | 20 |
| 92 | 5 | 10 | 14 | 22 |
| 95 | 5 | 12 | 19 | 20 |
| 98 | 5 | 12 | 22 | 24 |
| 101 | 5 | 14 | 19 | 20 |
| 104 | 5 | 14 | 22 | 24 |
| 107 | 6 | 8 | 11 | 21 |
| 110 | 6 | 9 | 17 | 23 |
| 113 | 7 | 9 | 10 | 16 |
| 116 | 7 | 9 | 15 | 23 |
| 119 | 7 | 9 | 19 | 23 |
| 122 | 8 | 10 | 18 | 21 |
| 125 | 8 | 11 | 21 | 24 |
| 128 | 8 | 18 | 21 | 24 |
| 131 | 9 | 15 | 16 | 17 |
| 134 | 9 | 16 | 17 | 24 |
| 137 | 10 | 11 | 13 | 21 |
| 140 | 11 | 13 | 19 | 21 |
| 143 | 13 | 18 | 19 | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 72 | 4 | 7 | 15 | 23 |
| 75 | 4 | 7 | 19 | 23 |
| 78 | 4 | 10 | 17 | 23 |
| 81 | 4 | 16 | 17 | 19 |
| 84 | 4 | 17 | 23 | 24 |
| 87 | 5 | 6 | 14 | 20 |
| 90 | 5 | 10 | 12 | 22 |
| 93 | 5 | 12 | 15 | 20 |
| 96 | 5 | 12 | 19 | 22 |
| 99 | 5 | 14 | 15 | 20 |
| 102 | 5 | 14 | 19 | 22 |
| 105 | 6 | 7 | 9 | 16 |
| 108 | 6 | 8 | 18 | 21 |
| 111 | 6 | 11 | 13 | 21 |
| 114 | 7 | 9 | 10 | 23 |
| 117 | 7 | 9 | 16 | 19 |
| 120 | 7 | 9 | 23 | 24 |
| 123 | 8 | 11 | 15 | 21 |
| 126 | 8 | 15 | 18 | 21 |
| 129 | 9 | 10 | 16 | 17 |
| 132 | 9 | 15 | 17 | 23 |
| 135 | 9 | 17 | 19 | 23 |
| 138 | 10 | 13 | 18 | 21 |
| 141 | 11 | 13 | 21 | 24 |
| 144 | 13 | 18 | 21 | 24 |

47

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 15 | 19 |
| 4 | 1 | 5 | 15 | 19 |
| 7 | 1 | 9 | 15 | 19 |
| 10 | 1 | 13 | 15 | 19 |
| 13 | 1 | 15 | 17 | 19 |
| 16 | 1 | 15 | 19 | 21 |
| 19 | 2 | 6 | 10 | 24 |
| 22 | 5 | 6 | 10 | 24 |
| 25 | 6 | 9 | 10 | 24 |
| 28 | 6 | 10 | 13 | 24 |
| 31 | 6 | 10 | 17 | 24 |
| 34 | 6 | 10 | 21 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | 15 | 19 |
| 5 | 1 | 7 | 15 | 19 |
| 8 | 1 | 11 | 15 | 19 |
| 11 | 1 | 14 | 15 | 19 |
| 14 | 1 | 15 | 18 | 19 |
| 17 | 1 | 15 | 19 | 22 |
| 20 | 3 | 6 | 10 | 24 |
| 23 | 6 | 7 | 10 | 24 |
| 26 | 6 | 10 | 11 | 24 |
| 29 | 6 | 10 | 14 | 24 |
| 32 | 6 | 10 | 18 | 24 |
| 35 | 6 | 10 | 22 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 4 | 15 | 19 |
| 6 | 1 | 8 | 15 | 19 |
| 9 | 1 | 12 | 15 | 19 |
| 12 | 1 | 15 | 16 | 19 |
| 15 | 1 | 15 | 19 | 20 |
| 18 | 1 | 15 | 19 | 23 |
| 21 | 4 | 6 | 10 | 24 |
| 24 | 6 | 8 | 10 | 24 |
| 27 | 6 | 10 | 12 | 24 |
| 30 | 6 | 10 | 16 | 24 |
| 33 | 6 | 10 | 20 | 24 |
| 36 | 6 | 10 | 23 | 24 |

48

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 6 | 10 | 15 |
| 4 | 1 | 6 | 19 | 24 |
| 7 | 6 | 10 | 15 | 19 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 6 | 10 | 19 |
| 5 | 1 | 10 | 15 | 24 |
| 8 | 6 | 15 | 19 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 6 | 15 | 24 |
| 6 | 1 | 10 | 19 | 24 |
| 9 | 10 | 15 | 19 | 24 |

49

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 6 | 10 | 16 |
| 4 | 1 | 6 | 10 | 23 |
| 7 | 1 | 6 | 12 | 19 |
| 10 | 1 | 6 | 14 | 24 |
| 13 | 1 | 6 | 15 | 22 |
| 16 | 1 | 6 | 19 | 23 |
| 19 | 1 | 7 | 15 | 24 |
| 22 | 1 | 8 | 19 | 24 |
| 25 | 1 | 10 | 15 | 17 |
| 28 | 1 | 10 | 16 | 19 |
| 31 | 1 | 11 | 15 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 6 | 10 | 20 |
| 5 | 1 | 6 | 11 | 15 |
| 8 | 1 | 6 | 12 | 24 |
| 11 | 1 | 6 | 15 | 18 |
| 14 | 1 | 6 | 16 | 19 |
| 17 | 1 | 7 | 10 | 19 |
| 20 | 1 | 8 | 10 | 19 |
| 23 | 1 | 10 | 13 | 19 |
| 26 | 1 | 10 | 15 | 20 |
| 29 | 1 | 10 | 17 | 24 |
| 32 | 1 | 12 | 19 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 6 | 10 | 22 |
| 6 | 1 | 6 | 11 | 24 |
| 9 | 1 | 6 | 14 | 19 |
| 12 | 1 | 6 | 15 | 20 |
| 15 | 1 | 6 | 18 | 24 |
| 18 | 1 | 7 | 10 | 24 |
| 21 | 1 | 8 | 10 | 24 |
| 24 | 1 | 10 | 13 | 24 |
| 27 | 1 | 10 | 15 | 22 |
| 30 | 1 | 10 | 19 | 23 |
| 33 | 1 | 13 | 19 | 24 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 1 | 14 | 19 | 24 | 35 | 1 | 15 | 17 | 24 | 36 | 1 15 18 24 |
| 37 | 2 | 10 | 15 | 19 | 38 | 2 | 10 | 15 | 24 | 39 | 2 10 19 24 |
| 40 | 2 | 15 | 19 | 24 | 41 | 3 | 6 | 10 | 15 | 42 | 3 6 10 19 |
| 43 | 3 | 6 | 15 | 19 | 44 | 3 | 10 | 15 | 19 | 45 | 4 6 15 19 |
| 46 | 4 | 6 | 15 | 24 | 47 | 4 | 6 | 19 | 24 | 48 | 4 15 19 24 |
| 49 | 5 | 10 | 15 | 19 | 50 | 5 | 10 | 15 | 24 | 51 | 5 10 19 24 |
| 52 | 5 | 15 | 19 | 24 | 53 | 6 | 9 | 15 | 19 | 54 | 6 9 15 24 |
| 55 | 6 | 9 | 19 | 24 | 56 | 6 | 10 | 15 | 20 | 57 | 6 10 15 21 |
| 58 | 6 | 10 | 15 | 22 | 59 | 6 | 10 | 16 | 19 | 60 | 6 10 19 21 |
| 61 | 6 | 10 | 19 | 23 | 62 | 6 | 11 | 15 | 24 | 63 | 6 12 19 24 |
| 64 | 6 | 14 | 19 | 24 | 65 | 6 | 15 | 18 | 24 | 66 | 6 15 19 21 |
| 67 | 7 | 10 | 15 | 24 | 68 | 8 | 10 | 19 | 24 | 69 | 9 15 19 24 |
| 70 | 10 | 13 | 19 | 24 | 71 | 10 | 15 | 17 | 24 | 72 | 10 15 19 21 |

50

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 6 | 10 | 24 | 2 | 1 | 6 | 15 | 19 | 3 | 1 10 15 19 |
| 4 | 1 | 15 | 19 | 24 | 5 | 6 | 10 | 15 | 24 | 6 | 6 10 19 24 |

51

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 6 | 11 | 12 | 2 | 1 | 6 | 11 | 14 | 3 | 1 6 11 20 |
| 4 | 1 | 6 | 11 | 22 | 5 | 1 | 6 | 12 | 16 | 6 | 1 6 12 18 |
| 7 | 1 | 6 | 12 | 23 | 8 | 1 | 6 | 14 | 16 | 9 | 1 6 14 18 |
| 10 | 1 | 6 | 14 | 23 | 11 | 1 | 6 | 16 | 20 | 12 | 1 6 16 22 |
| 13 | 1 | 6 | 18 | 20 | 14 | 1 | 6 | 18 | 22 | 15 | 1 6 20 23 |
| 16 | 1 | 6 | 22 | 23 | 17 | 1 | 7 | 8 | 10 | 18 | 1 7 8 24 |
| 19 | 1 | 7 | 10 | 13 | 20 | 1 | 7 | 10 | 20 | 21 | 1 7 10 22 |
| 22 | 1 | 7 | 11 | 24 | 23 | 1 | 7 | 13 | 24 | 24 | 1 7 18 24 |
| 25 | 1 | 8 | 10 | 16 | 26 | 1 | 8 | 10 | 17 | 27 | 1 8 10 23 |
| 28 | 1 | 8 | 12 | 24 | 29 | 1 | 8 | 14 | 24 | 30 | 1 8 17 24 |
| 31 | 1 | 10 | 13 | 16 | 32 | 1 | 10 | 13 | 17 | 33 | 1 10 13 23 |
| 34 | 1 | 10 | 16 | 20 | 35 | 1 | 10 | 16 | 22 | 36 | 1 10 17 20 |
| 37 | 1 | 10 | 17 | 22 | 38 | 1 | 10 | 20 | 23 | 39 | 1 10 22 23 |
| 40 | 1 | 11 | 12 | 24 | 41 | 1 | 11 | 14 | 24 | 42 | 1 11 17 24 |
| 43 | 1 | 12 | 13 | 24 | 44 | 1 | 12 | 18 | 24 | 45 | 1 13 14 24 |
| 46 | 1 | 13 | 17 | 24 | 47 | 1 | 14 | 18 | 24 | 48 | 1 17 18 24 |
| 49 | 2 | 3 | 10 | 15 | 50 | 2 | 3 | 10 | 19 | 51 | 2 4 15 24 |
| 52 | 2 | 4 | 19 | 24 | 53 | 2 | 7 | 10 | 19 | 54 | 2 7 15 24 |
| 55 | 2 | 8 | 10 | 19 | 56 | 2 | 8 | 19 | 24 | 57 | 2 9 15 24 |
| 58 | 2 | 9 | 19 | 24 | 59 | 2 | 10 | 13 | 19 | 60 | 2 10 15 17 |
| 61 | 2 | 10 | 15 | 21 | 62 | 2 | 10 | 19 | 21 | 63 | 2 13 19 24 |
| 64 | 2 | 15 | 17 | 24 | 65 | 3 | 4 | 6 | 19 | 66 | 3 4 6 19 |
| 67 | 3 | 5 | 10 | 15 | 68 | 3 | 5 | 10 | 19 | 69 | 3 6 9 15 |
| 70 | 3 | 6 | 9 | 19 | 71 | 3 | 6 | 15 | 20 | 72 | 3 6 15 22 |
| 73 | 3 | 6 | 16 | 19 | 74 | 3 | 6 | 19 | 23 | 75 | 3 10 15 20 |
| 76 | 3 | 10 | 15 | 22 | 77 | 3 | 10 | 16 | 19 | 78 | 3 10 19 23 |
| 79 | 4 | 5 | 15 | 24 | 80 | 4 | 5 | 19 | 24 | 81 | 4 6 11 15 |
| 82 | 4 | 6 | 12 | 19 | 83 | 4 | 6 | 14 | 19 | 84 | 4 6 15 18 |
| 85 | 4 | 6 | 15 | 21 | 86 | 4 | 6 | 19 | 21 | 87 | 4 11 15 24 |
| 88 | 4 | 12 | 19 | 24 | 89 | 4 | 14 | 19 | 24 | 90 | 4 15 18 24 |
| 91 | 5 | 7 | 10 | 15 | 92 | 5 | 7 | 15 | 24 | 93 | 5 8 10 19 |
| 94 | 5 | 8 | 19 | 24 | 95 | 5 | 9 | 15 | 24 | 96 | 5 9 19 24 |
| 97 | 5 | 10 | 13 | 19 | 98 | 5 | 10 | 15 | 17 | 99 | 5 10 15 21 |
| 100 | 5 | 10 | 19 | 21 | 101 | 5 | 13 | 19 | 24 | 102 | 5 15 17 24 |
| 103 | 6 | 9 | 11 | 15 | 104 | 6 | 9 | 12 | 19 | 105 | 6 9 14 19 |
| 106 | 6 | 9 | 15 | 18 | 107 | 6 | 9 | 15 | 21 | 108 | 6 9 19 21 |
| 109 | 6 | 11 | 15 | 20 | 110 | 6 | 11 | 15 | 22 | 111 | 6 12 16 19 |
| 112 | 6 | 12 | 19 | 23 | 113 | 6 | 14 | 16 | 19 | 114 | 6 14 19 23 |
| 115 | 6 | 15 | 18 | 20 | 116 | 6 | 15 | 16 | 22 | 117 | 6 15 20 21 |
| 118 | 6 | 15 | 21 | 22 | 119 | 6 | 16 | 19 | 21 | 120 | 6 19 21 23 |
| 121 | 7 | 10 | 15 | 20 | 122 | 7 | 10 | 15 | 22 | 123 | 7 11 15 24 |
| 124 | 7 | 15 | 18 | 24 | 125 | 8 | 10 | 16 | 19 | 126 | 8 10 19 23 |
| 127 | 8 | 12 | 19 | 24 | 128 | 8 | 14 | 19 | 24 | 129 | 9 11 15 24 |
| 130 | 9 | 12 | 19 | 24 | 131 | 9 | 14 | 19 | 24 | 132 | 9 15 18 24 |
| 133 | 10 | 13 | 16 | 19 | 134 | 10 | 13 | 19 | 23 | 135 | 10 15 17 20 |
| 136 | 10 | 15 | 17 | 22 | 137 | 10 | 15 | 20 | 21 | 138 | 10 15 21 22 |
| 139 | 10 | 16 | 19 | 21 | 140 | 10 | 19 | 21 | 23 | 141 | 11 15 17 24 |
| 142 | 12 | 13 | 19 | 24 | 143 | 13 | 14 | 19 | 24 | 144 | 15 17 18 24 |

52

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 6 | 11 | 16 | 2 | 1 | 6 | 11 | 23 | 3 | 1 6 16 18 |
| 4 | 1 | 6 | 18 | 23 | 5 | 1 | 7 | 12 | 24 | 6 | 1 7 14 24 |
| 7 | 1 | 8 | 10 | 20 | 8 | 1 | 8 | 10 | 22 | 9 | 1 10 13 20 |
| 10 | 1 | 10 | 13 | 22 | 11 | 1 | 12 | 17 | 24 | 12 | 1 14 17 24 |
| 13 | 2 | 10 | 16 | 19 | 14 | 2 | 10 | 19 | 23 | 15 | 2 11 15 24 |
| 16 | 2 | 15 | 18 | 24 | 17 | 3 | 6 | 12 | 19 | 18 | 3 6 14 19 |
| 19 | 3 | 7 | 10 | 15 | 20 | 3 | 10 | 15 | 17 | 21 | 4 6 15 20 |
| 22 | 4 | 6 | 15 | 22 | 23 | 4 | 8 | 19 | 24 | 24 | 4 13 19 24 |
| 25 | 5 | 10 | 16 | 19 | 26 | 5 | 10 | 19 | 23 | 27 | 5 11 15 24 |
| 28 | 5 | 15 | 18 | 24 | 29 | 6 | 9 | 15 | 20 | 30 | 6 9 15 22 |
| 31 | 6 | 12 | 19 | 21 | 32 | 6 | 14 | 19 | 21 | 33 | 7 10 15 21 |
| 34 | 8 | 9 | 19 | 24 | 35 | 9 | 13 | 19 | 24 | 36 | 10 15 17 21 |

53

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 6 | 11 | 18 | 2 | 1 | 6 | 16 | 23 | 3 | 1 7 17 24 |
| 4 | 1 | 8 | 10 | 13 | 5 | 1 | 10 | 20 | 22 | 6 | 1 12 14 24 |
| 7 | 2 | 5 | 10 | 19 | 8 | 2 | 5 | 15 | 24 | 9 | 3 6 19 21 |
| 10 | 3 | 10 | 15 | 21 | 11 | 4 | 6 | 9 | 19 | 12 | 4 9 19 24 |
| 13 | 6 | 12 | 14 | 19 | 14 | 6 | 15 | 20 | 22 | 15 | 7 10 15 17 |
| 16 | 8 | 13 | 19 | 24 | 17 | 10 | 16 | 19 | 23 | 18 | 11 15 18 24 |

54

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 6 | 12 | 14 | 2 | 1 | 6 | 20 | 22 | 3 | 1 7 10 17 |
| 4 | 1 | 8 | 13 | 24 | 5 | 1 | 10 | 16 | 23 | 6 | 1 11 18 24 |
| 7 | 2 | 5 | 10 | 15 | 8 | 2 | 5 | 19 | 24 | 9 | 3 6 15 21 |
| 10 | 3 | 10 | 19 | 21 | 11 | 4 | 6 | 9 | 19 | 12 | 4 9 15 24 |
| 13 | 6 | 11 | 15 | 18 | 14 | 6 | 16 | 19 | 23 | 15 | 7 15 17 24 |
| 16 | 8 | 10 | 13 | 19 | 17 | 10 | 15 | 20 | 22 | 18 | 12 14 19 24 |

55

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 6 | 12 | 20 | 2 | 1 | 6 | 12 | 22 | 3 | 1 6 14 20 |
| 4 | 1 | 6 | 14 | 22 | 5 | 1 | 7 | 10 | 16 | 6 | 1 7 10 23 |
| 7 | 1 | 8 | 11 | 24 | 8 | 1 | 8 | 18 | 24 | 9 | 1 10 16 17 |
| 10 | 1 | 10 | 17 | 23 | 11 | 1 | 11 | 13 | 24 | 12 | 1 13 18 24 |
| 13 | 2 | 10 | 15 | 20 | 14 | 2 | 10 | 15 | 22 | 15 | 2 12 19 24 |
| 16 | 2 | 14 | 19 | 24 | 17 | 3 | 6 | 11 | 19 | 18 | 3 6 15 18 |
| 19 | 3 | 8 | 10 | 19 | 20 | 3 | 10 | 13 | 19 | 21 | 4 6 16 19 |
| 22 | 4 | 6 | 19 | 23 | 23 | 4 | 7 | 15 | 24 | 24 | 4 15 17 24 |
| 25 | 5 | 10 | 15 | 20 | 26 | 5 | 10 | 15 | 22 | 27 | 5 12 19 24 |
| 28 | 5 | 14 | 19 | 24 | 29 | 6 | 9 | 16 | 19 | 30 | 6 9 19 23 |
| 31 | 6 | 11 | 15 | 21 | 32 | 6 | 15 | 18 | 21 | 33 | 7 9 15 24 |
| 34 | 8 | 10 | 19 | 21 | 35 | 9 | 15 | 17 | 24 | 36 | 10 13 19 21 |

56



BUS LILLE

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 8 | 11 |
| 4 | 1 | 7 | 8 | 23 |
| 7 | 1 | 7 | 13 | 18 |
| 10 | 1 | 7 | 16 | 22 |
| 13 | 1 | 8 | 11 | 12 |
| 16 | 1 | 8 | 12 | 18 |
| 19 | 1 | 8 | 17 | 18 |
| 22 | 1 | 11 | 12 | 20 |
| 25 | 1 | 11 | 13 | 17 |
| 28 | 1 | 12 | 13 | 18 |
| 31 | 1 | 12 | 18 | 20 |
| 34 | 1 | 12 | 22 | 23 |
| 37 | 1 | 13 | 17 | 18 |
| 40 | 1 | 14 | 16 | 22 |
| 43 | 1 | 14 | 20 | 23 |
| 46 | 1 | 16 | 17 | 22 |
| 49 | 2 | 3 | 8 | 10 |
| 52 | 2 | 3 | 10 | 20 |
| 55 | 2 | 3 | 15 | 20 |
| 58 | 2 | 4 | 7 | 24 |
| 61 | 2 | 4 | 14 | 19 |
| 64 | 2 | 4 | 17 | 24 |
| 67 | 2 | 7 | 10 | 20 |
| 70 | 2 | 7 | 15 | 22 |
| 73 | 2 | 8 | 12 | 24 |
| 76 | 2 | 8 | 19 | 21 |
| 79 | 2 | 9 | 14 | 19 |
| 82 | 2 | 9 | 17 | 24 |
| 85 | 2 | 10 | 17 | 22 |
| 88 | 2 | 12 | 13 | 19 |
| 91 | 2 | 13 | 14 | 24 |
| 94 | 2 | 15 | 17 | 22 |
| 97 | 3 | 4 | 6 | 11 |
| 100 | 3 | 4 | 6 | 23 |
| 103 | 3 | 4 | 16 | 19 |
| 106 | 3 | 5 | 8 | 19 |
| 109 | 3 | 5 | 10 | 22 |
| 112 | 3 | 5 | 15 | 22 |
| 115 | 3 | 6 | 9 | 18 |
| 118 | 3 | 6 | 11 | 22 |
| 121 | 3 | 8 | 10 | 16 |
| 124 | 3 | 8 | 19 | 23 |
| 127 | 3 | 9 | 16 | 19 |
| 130 | 3 | 10 | 13 | 23 |
| 133 | 3 | 12 | 16 | 19 |
| 136 | 3 | 15 | 18 | 22 |
| 139 | 4 | 5 | 12 | 19 |
| 142 | 4 | 5 | 14 | 24 |
| 145 | 4 | 6 | 11 | 21 |
| 148 | 4 | 6 | 14 | 16 |
| 151 | 4 | 6 | 18 | 21 |
| 154 | 4 | 7 | 11 | 24 |
| 157 | 4 | 11 | 15 | 17 |
| 160 | 4 | 12 | 16 | 19 |
| 163 | 4 | 14 | 19 | 23 |
| 166 | 4 | 16 | 19 | 21 |
| 169 | 5 | 7 | 9 | 15 |
| 172 | 5 | 7 | 10 | 22 |
| 175 | 5 | 8 | 10 | 21 |
| 178 | 5 | 8 | 14 | 19 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 7 | 8 | 16 |
| 5 | 1 | 7 | 11 | 13 |
| 8 | 1 | 7 | 13 | 23 |
| 11 | 1 | 7 | 20 | 23 |
| 14 | 1 | 8 | 11 | 14 |
| 17 | 1 | 8 | 14 | 18 |
| 20 | 1 | 8 | 17 | 23 |
| 23 | 1 | 11 | 12 | 22 |
| 26 | 1 | 11 | 14 | 20 |
| 29 | 1 | 12 | 16 | 20 |
| 32 | 1 | 12 | 18 | 22 |
| 35 | 1 | 13 | 14 | 18 |
| 38 | 1 | 13 | 17 | 23 |
| 41 | 1 | 14 | 18 | 20 |
| 44 | 1 | 14 | 22 | 23 |
| 47 | 1 | 17 | 20 | 23 |
| 50 | 2 | 3 | 8 | 19 |
| 53 | 2 | 3 | 10 | 22 |
| 56 | 2 | 3 | 15 | 22 |
| 59 | 2 | 4 | 12 | 19 |
| 62 | 2 | 4 | 14 | 24 |
| 65 | 2 | 7 | 9 | 19 |
| 68 | 2 | 7 | 10 | 22 |
| 71 | 2 | 8 | 10 | 21 |
| 74 | 2 | 8 | 14 | 19 |
| 77 | 2 | 9 | 12 | 19 |
| 80 | 2 | 9 | 14 | 24 |
| 83 | 2 | 10 | 13 | 21 |
| 86 | 2 | 10 | 20 | 21 |
| 89 | 2 | 12 | 13 | 24 |
| 92 | 2 | 13 | 19 | 21 |
| 95 | 2 | 15 | 20 | 21 |
| 98 | 3 | 4 | 6 | 16 |
| 101 | 3 | 4 | 11 | 15 |
| 104 | 3 | 4 | 19 | 23 |
| 107 | 3 | 5 | 10 | 13 |
| 110 | 3 | 5 | 13 | 19 |
| 113 | 3 | 6 | 9 | 11 |
| 116 | 3 | 6 | 9 | 23 |
| 119 | 3 | 6 | 18 | 20 |
| 122 | 3 | 8 | 10 | 23 |
| 125 | 3 | 9 | 11 | 19 |
| 128 | 3 | 9 | 19 | 23 |
| 131 | 3 | 11 | 15 | 20 |
| 134 | 3 | 13 | 19 | 23 |
| 137 | 4 | 5 | 7 | 19 |
| 140 | 4 | 5 | 12 | 24 |
| 143 | 4 | 5 | 15 | 17 |
| 146 | 4 | 6 | 12 | 16 |
| 149 | 4 | 6 | 14 | 23 |
| 152 | 4 | 6 | 21 | 23 |
| 155 | 4 | 7 | 15 | 18 |
| 158 | 4 | 11 | 15 | 21 |
| 161 | 4 | 12 | 19 | 23 |
| 164 | 4 | 15 | 17 | 18 |
| 167 | 4 | 17 | 18 | 24 |
| 170 | 5 | 7 | 9 | 24 |
| 173 | 5 | 7 | 15 | 20 |
| 176 | 5 | 8 | 12 | 19 |
| 179 | 5 | 8 | 14 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 7 | 8 | 18 |
| 6 | 1 | 7 | 13 | 16 |
| 9 | 1 | 7 | 16 | 20 |
| 12 | 1 | 7 | 22 | 23 |
| 15 | 1 | 8 | 11 | 17 |
| 18 | 1 | 8 | 16 | 17 |
| 21 | 1 | 11 | 12 | 13 |
| 24 | 1 | 11 | 13 | 14 |
| 27 | 1 | 11 | 14 | 22 |
| 30 | 1 | 12 | 16 | 22 |
| 33 | 1 | 12 | 20 | 23 |
| 36 | 1 | 13 | 16 | 17 |
| 39 | 1 | 14 | 16 | 20 |
| 42 | 1 | 14 | 18 | 22 |
| 45 | 1 | 16 | 17 | 20 |
| 48 | 1 | 17 | 22 | 23 |
| 51 | 2 | 3 | 10 | 13 |
| 54 | 2 | 3 | 13 | 19 |
| 57 | 2 | 4 | 7 | 15 |
| 60 | 2 | 4 | 12 | 24 |
| 63 | 2 | 4 | 15 | 17 |
| 66 | 2 | 7 | 9 | 24 |
| 69 | 2 | 7 | 15 | 20 |
| 72 | 2 | 8 | 12 | 19 |
| 75 | 2 | 8 | 14 | 24 |
| 78 | 2 | 9 | 12 | 24 |
| 81 | 2 | 9 | 15 | 17 |
| 84 | 2 | 10 | 17 | 20 |
| 87 | 2 | 10 | 21 | 22 |
| 90 | 2 | 13 | 14 | 19 |
| 93 | 2 | 15 | 17 | 20 |
| 96 | 2 | 15 | 21 | 22 |
| 99 | 3 | 4 | 6 | 18 |
| 102 | 3 | 4 | 15 | 18 |
| 105 | 3 | 5 | 8 | 10 |
| 108 | 3 | 5 | 10 | 20 |
| 111 | 3 | 5 | 15 | 20 |
| 114 | 3 | 6 | 9 | 16 |
| 117 | 3 | 6 | 11 | 20 |
| 120 | 3 | 6 | 18 | 22 |
| 123 | 3 | 8 | 16 | 19 |
| 126 | 3 | 9 | 15 | 18 |
| 129 | 3 | 10 | 13 | 16 |
| 132 | 3 | 11 | 15 | 22 |
| 135 | 3 | 15 | 18 | 20 |
| 138 | 4 | 5 | 7 | 24 |
| 141 | 4 | 5 | 14 | 19 |
| 144 | 4 | 5 | 17 | 24 |
| 147 | 4 | 6 | 12 | 23 |
| 150 | 4 | 6 | 16 | 21 |
| 153 | 4 | 7 | 11 | 15 |
| 156 | 4 | 7 | 18 | 24 |
| 159 | 4 | 11 | 17 | 24 |
| 162 | 4 | 14 | 16 | 19 |
| 165 | 4 | 15 | 18 | 21 |
| 168 | 4 | 19 | 21 | 23 |
| 171 | 5 | 7 | 10 | 20 |
| 174 | 5 | 7 | 15 | 22 |
| 177 | 5 | 8 | 12 | 24 |
| 180 | 5 | 8 | 19 | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 181 | 5 | 9 | 12 | 19 |
| 184 | 5 | 9 | 14 | 24 |
| 187 | 5 | 10 | 13 | 21 |
| 190 | 5 | 10 | 20 | 21 |
| 193 | 5 | 12 | 13 | 24 |
| 196 | 5 | 13 | 19 | 21 |
| 199 | 5 | 15 | 20 | 21 |
| 202 | 6 | 9 | 12 | 16 |
| 205 | 6 | 9 | 14 | 23 |
| 208 | 6 | 9 | 21 | 23 |
| 211 | 6 | 11 | 14 | 20 |
| 214 | 6 | 11 | 21 | 22 |
| 217 | 6 | 12 | 18 | 20 |
| 220 | 6 | 12 | 22 | 23 |
| 223 | 6 | 14 | 18 | 20 |
| 226 | 6 | 14 | 22 | 23 |
| 229 | 7 | 8 | 10 | 16 |
| 232 | 7 | 8 | 18 | 24 |
| 235 | 7 | 9 | 15 | 18 |
| 238 | 7 | 10 | 13 | 23 |
| 241 | 7 | 10 | 20 | 23 |
| 244 | 7 | 13 | 18 | 24 |
| 247 | 8 | 10 | 17 | 23 |
| 250 | 8 | 11 | 14 | 24 |
| 253 | 8 | 14 | 18 | 24 |
| 256 | 8 | 19 | 21 | 23 |
| 259 | 9 | 11 | 17 | 24 |
| 262 | 9 | 14 | 16 | 19 |
| 265 | 9 | 15 | 18 | 21 |
| 268 | 9 | 19 | 21 | 23 |
| 271 | 10 | 13 | 17 | 23 |
| 274 | 10 | 16 | 17 | 22 |
| 277 | 11 | 12 | 13 | 24 |
| 280 | 11 | 15 | 20 | 21 |
| 283 | 13 | 14 | 18 | 24 |
| 286 | 13 | 19 | 21 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 182 | 5 | 9 | 12 | 24 |
| 185 | 5 | 9 | 15 | 17 |
| 188 | 5 | 10 | 17 | 20 |
| 191 | 5 | 10 | 21 | 22 |
| 194 | 5 | 13 | 14 | 19 |
| 197 | 5 | 15 | 17 | 20 |
| 200 | 5 | 15 | 21 | 22 |
| 203 | 6 | 9 | 12 | 23 |
| 206 | 6 | 9 | 16 | 21 |
| 209 | 6 | 11 | 12 | 20 |
| 212 | 6 | 11 | 14 | 22 |
| 215 | 6 | 12 | 16 | 20 |
| 218 | 6 | 12 | 18 | 22 |
| 221 | 6 | 14 | 16 | 20 |
| 224 | 6 | 14 | 18 | 22 |
| 227 | 6 | 18 | 20 | 21 |
| 230 | 7 | 8 | 10 | 23 |
| 233 | 7 | 9 | 11 | 19 |
| 236 | 7 | 9 | 18 | 24 |
| 239 | 7 | 10 | 16 | 20 |
| 242 | 7 | 10 | 22 | 23 |
| 245 | 8 | 10 | 16 | 17 |
| 248 | 8 | 10 | 21 | 23 |
| 251 | 8 | 11 | 17 | 24 |
| 254 | 8 | 16 | 19 | 21 |
| 257 | 9 | 11 | 15 | 17 |
| 260 | 9 | 12 | 16 | 19 |
| 263 | 9 | 14 | 19 | 23 |
| 266 | 9 | 16 | 19 | 21 |
| 269 | 10 | 13 | 16 | 17 |
| 272 | 10 | 13 | 21 | 23 |
| 275 | 10 | 17 | 20 | 23 |
| 278 | 11 | 13 | 14 | 24 |
| 281 | 11 | 15 | 21 | 22 |
| 284 | 13 | 16 | 19 | 21 |
| 287 | 15 | 18 | 20 | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 183 | 5 | 9 | 14 | 19 |
| 186 | 5 | 9 | 17 | 24 |
| 189 | 5 | 10 | 17 | 22 |
| 192 | 5 | 12 | 13 | 19 |
| 195 | 5 | 13 | 14 | 24 |
| 198 | 5 | 15 | 17 | 22 |
| 201 | 6 | 9 | 11 | 21 |
| 204 | 6 | 9 | 14 | 16 |
| 207 | 6 | 9 | 18 | 21 |
| 210 | 6 | 11 | 12 | 22 |
| 213 | 6 | 11 | 20 | 21 |
| 216 | 6 | 12 | 16 | 22 |
| 219 | 6 | 12 | 20 | 23 |
| 222 | 6 | 14 | 16 | 22 |
| 225 | 6 | 14 | 20 | 23 |
| 228 | 6 | 18 | 21 | 22 |
| 231 | 7 | 8 | 11 | 24 |
| 234 | 7 | 9 | 11 | 24 |
| 237 | 7 | 10 | 13 | 16 |
| 240 | 7 | 10 | 16 | 22 |
| 243 | 7 | 11 | 13 | 24 |
| 246 | 8 | 10 | 16 | 21 |
| 249 | 8 | 11 | 12 | 24 |
| 252 | 8 | 12 | 18 | 24 |
| 255 | 8 | 17 | 18 | 24 |
| 258 | 9 | 11 | 15 | 21 |
| 261 | 9 | 12 | 19 | 23 |
| 264 | 9 | 15 | 17 | 18 |
| 267 | 9 | 17 | 18 | 24 |
| 270 | 10 | 13 | 16 | 21 |
| 273 | 10 | 16 | 17 | 20 |
| 276 | 10 | 17 | 22 | 23 |
| 279 | 11 | 13 | 17 | 24 |
| 282 | 12 | 13 | 18 | 24 |
| 285 | 13 | 17 | 18 | 24 |
| 288 | 15 | 18 | 21 | 22 |

57

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 8 | 12 |
| 4 | 1 | 7 | 8 | 22 |
| 7 | 1 | 7 | 12 | 13 |
| 10 | 1 | 7 | 13 | 20 |
| 13 | 1 | 8 | 12 | 17 |
| 16 | 1 | 8 | 16 | 22 |
| 19 | 1 | 8 | 20 | 23 |
| 22 | 1 | 11 | 12 | 17 |
| 25 | 1 | 11 | 14 | 17 |
| 28 | 1 | 11 | 16 | 22 |
| 31 | 1 | 12 | 13 | 17 |
| 34 | 1 | 12 | 18 | 23 |
| 37 | 1 | 13 | 16 | 22 |
| 40 | 1 | 13 | 20 | 23 |
| 43 | 1 | 14 | 17 | 18 |
| 46 | 1 | 16 | 18 | 22 |
| 49 | 2 | 3 | 7 | 10 |
| 52 | 2 | 3 | 10 | 17 |
| 55 | 2 | 3 | 16 | 19 |
| 58 | 2 | 4 | 8 | 24 |
| 61 | 2 | 4 | 13 | 19 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 7 | 8 | 14 |
| 5 | 1 | 7 | 11 | 12 |
| 8 | 1 | 7 | 12 | 18 |
| 11 | 1 | 7 | 13 | 22 |
| 14 | 1 | 8 | 14 | 17 |
| 17 | 1 | 8 | 17 | 20 |
| 20 | 1 | 8 | 22 | 23 |
| 23 | 1 | 11 | 12 | 23 |
| 26 | 1 | 11 | 14 | 23 |
| 29 | 1 | 11 | 20 | 23 |
| 32 | 1 | 12 | 16 | 18 |
| 35 | 1 | 13 | 14 | 17 |
| 38 | 1 | 13 | 17 | 20 |
| 41 | 1 | 13 | 22 | 23 |
| 44 | 1 | 14 | 18 | 23 |
| 47 | 1 | 18 | 20 | 23 |
| 50 | 2 | 3 | 7 | 15 |
| 53 | 2 | 3 | 10 | 23 |
| 56 | 2 | 3 | 19 | 23 |
| 59 | 2 | 4 | 11 | 19 |
| 62 | 2 | 4 | 13 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 7 | 8 | 20 |
| 6 | 1 | 7 | 11 | 14 |
| 9 | 1 | 7 | 13 | 14 |
| 12 | 1 | 7 | 14 | 18 |
| 15 | 1 | 8 | 16 | 20 |
| 18 | 1 | 8 | 17 | 22 |
| 21 | 1 | 11 | 12 | 16 |
| 24 | 1 | 11 | 14 | 16 |
| 27 | 1 | 11 | 16 | 20 |
| 30 | 1 | 11 | 22 | 23 |
| 33 | 1 | 12 | 17 | 18 |
| 36 | 1 | 13 | 16 | 20 |
| 39 | 1 | 13 | 17 | 22 |
| 42 | 1 | 14 | 16 | 18 |
| 45 | 1 | 16 | 18 | 20 |
| 48 | 1 | 18 | 22 | 23 |
| 51 | 2 | 3 | 10 | 16 |
| 54 | 2 | 3 | 15 | 17 |
| 57 | 2 | 4 | 8 | 19 |
| 60 | 2 | 4 | 11 | 24 |
| 63 | 2 | 4 | 15 | 18 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 64 | 2 | 4 | 18 | 24 | 65 | 2 | 7 | 10 | 21 | 66 | 2 | 7 | 11 | 15 | 244 | 7 | 15 | 21 | 22 |
| 67 | 2 | 7 | 11 | 24 | 68 | 2 | 7 | 15 | 18 | 69 | 2 | 7 | 15 | 21 | 247 | 8 | 9 | 14 | 19 |
| 70 | 2 | 7 | 18 | 24 | 71 | 2 | 8 | 9 | 19 | 72 | 2 | 8 | 9 | 24 | 250 | 8 | 10 | 16 | 22 |
| 73 | 2 | 8 | 10 | 16 | 74 | 2 | 8 | 10 | 23 | 75 | 2 | 8 | 16 | 19 | 253 | 8 | 10 | 20 | 23 |
| 76 | 2 | 8 | 19 | 23 | 77 | 2 | 9 | 11 | 15 | 78 | 2 | 9 | 11 | 24 | 256 | 8 | 14 | 17 | 24 |
| 79 | 2 | 9 | 13 | 19 | 80 | 2 | 9 | 13 | 24 | 81 | 2 | 9 | 15 | 18 | 259 | 9 | 12 | 13 | 19 |
| 82 | 2 | 9 | 18 | 24 | 83 | 2 | 10 | 13 | 16 | 84 | 2 | 10 | 13 | 23 | 262 | 9 | 12 | 14 | 19 |
| 85 | 2 | 10 | 16 | 21 | 86 | 2 | 10 | 17 | 21 | 87 | 2 | 10 | 21 | 23 | 265 | 9 | 15 | 18 | 20 |
| 88 | 2 | 11 | 15 | 17 | 89 | 2 | 11 | 17 | 24 | 90 | 2 | 13 | 16 | 19 | 268 | 9 | 15 | 21 | 22 |
| 91 | 2 | 13 | 19 | 23 | 92 | 2 | 15 | 17 | 18 | 93 | 2 | 15 | 17 | 21 | 271 | 10 | 13 | 17 | 20 |
| 94 | 2 | 16 | 19 | 21 | 95 | 2 | 17 | 18 | 24 | 96 | 2 | 19 | 21 | 23 | 274 | 10 | 13 | 22 | 23 |
| 97 | 3 | 4 | 6 | 12 | 98 | 3 | 4 | 6 | 14 | 99 | 3 | 4 | 6 | 20 | 277 | 11 | 12 | 17 | 24 |
| 100 | 3 | 4 | 6 | 22 | 101 | 3 | 4 | 12 | 19 | 102 | 3 | 4 | 14 | 19 | 280 | 12 | 16 | 19 | 21 |
| 103 | 3 | 4 | 15 | 20 | 104 | 3 | 4 | 15 | 22 | 105 | 3 | 5 | 7 | 10 | 283 | 13 | 14 | 17 | 24 |
| 106 | 3 | 5 | 7 | 15 | 107 | 3 | 5 | 10 | 16 | 108 | 3 | 5 | 10 | 17 | 286 | 14 | 19 | 21 | 23 |
| 109 | 3 | 5 | 10 | 23 | 110 | 3 | 5 | 15 | 17 | 111 | 3 | 5 | 16 | 19 | | | | | |
| 112 | 3 | 5 | 19 | 23 | 113 | 3 | 6 | 9 | 12 | 114 | 3 | 6 | 9 | 14 | | | | | |
| 115 | 3 | 6 | 9 | 20 | 116 | 3 | 6 | 9 | 22 | 117 | 3 | 6 | 12 | 16 | | | | | |
| 118 | 3 | 6 | 12 | 23 | 119 | 3 | 6 | 14 | 16 | 120 | 3 | 6 | 14 | 23 | | | | | |
| 121 | 3 | 7 | 10 | 20 | 122 | 3 | 7 | 10 | 22 | 123 | 3 | 7 | 15 | 20 | | | | | |
| 124 | 3 | 7 | 15 | 22 | 125 | 3 | 9 | 12 | 19 | 126 | 3 | 9 | 14 | 19 | | | | | |
| 127 | 3 | 9 | 15 | 20 | 128 | 3 | 9 | 15 | 22 | 129 | 3 | 10 | 17 | 20 | | | | | |
| 130 | 3 | 10 | 17 | 22 | 131 | 3 | 12 | 16 | 19 | 132 | 3 | 12 | 19 | 23 | | | | | |
| 133 | 3 | 14 | 16 | 19 | 134 | 3 | 14 | 19 | 23 | 135 | 3 | 15 | 17 | 20 | | | | | |
| 136 | 3 | 15 | 17 | 22 | 137 | 4 | 5 | 8 | 19 | 138 | 4 | 5 | 8 | 24 | | | | | |
| 139 | 4 | 5 | 11 | 15 | 140 | 4 | 5 | 11 | 24 | 141 | 4 | 5 | 13 | 19 | | | | | |
| 142 | 4 | 5 | 13 | 24 | 143 | 4 | 5 | 15 | 18 | 144 | 4 | 5 | 18 | 24 | | | | | |
| 145 | 4 | 6 | 11 | 20 | 146 | 4 | 6 | 11 | 22 | 147 | 4 | 6 | 12 | 21 | | | | | |
| 148 | 4 | 6 | 14 | 21 | 149 | 4 | 6 | 18 | 20 | 150 | 4 | 6 | 18 | 22 | | | | | |
| 151 | 4 | 6 | 20 | 21 | 152 | 4 | 6 | 21 | 22 | 153 | 4 | 8 | 12 | 19 | | | | | |
| 154 | 4 | 8 | 12 | 24 | 155 | 4 | 8 | 14 | 19 | 156 | 4 | 8 | 14 | 24 | | | | | |
| 157 | 4 | 11 | 15 | 20 | 158 | 4 | 11 | 15 | 22 | 159 | 4 | 12 | 13 | 19 | | | | | |
| 160 | 4 | 12 | 13 | 24 | 161 | 4 | 12 | 19 | 21 | 162 | 4 | 13 | 14 | 19 | | | | | |
| 163 | 4 | 13 | 14 | 24 | 164 | 4 | 14 | 19 | 21 | 165 | 4 | 15 | 18 | 20 | | | | | |
| 166 | 4 | 15 | 18 | 22 | 167 | 4 | 15 | 20 | 21 | 168 | 4 | 15 | 21 | 22 | | | | | |
| 169 | 5 | 7 | 10 | 21 | 170 | 5 | 7 | 11 | 15 | 171 | 5 | 7 | 11 | 24 | | | | | |
| 172 | 5 | 7 | 15 | 18 | 173 | 5 | 7 | 15 | 21 | 174 | 5 | 7 | 18 | 24 | | | | | |
| 175 | 5 | 8 | 9 | 19 | 176 | 5 | 8 | 9 | 24 | 177 | 5 | 8 | 10 | 16 | | | | | |
| 178 | 5 | 8 | 10 | 23 | 179 | 5 | 8 | 16 | 19 | 180 | 5 | 8 | 19 | 23 | | | | | |
| 181 | 5 | 9 | 11 | 15 | 182 | 5 | 9 | 11 | 24 | 183 | 5 | 9 | 13 | 19 | | | | | |
| 184 | 5 | 9 | 13 | 24 | 185 | 5 | 9 | 15 | 18 | 186 | 5 | 9 | 18 | 24 | | | | | |
| 187 | 5 | 10 | 13 | 16 | 188 | 5 | 10 | 13 | 23 | 189 | 5 | 10 | 16 | 21 | | | | | |
| 190 | 5 | 10 | 17 | 21 | 191 | 5 | 10 | 21 | 23 | 192 | 5 | 11 | 15 | 17 | | | | | |
| 193 | 5 | 11 | 17 | 24 | 194 | 5 | 13 | 16 | 19 | 195 | 5 | 13 | 19 | 23 | | | | | |
| 196 | 5 | 15 | 17 | 18 | 197 | 5 | 15 | 17 | 21 | 198 | 5 | 16 | 19 | 21 | | | | | |
| 199 | 5 | 17 | 18 | 24 | 200 | 5 | 19 | 21 | 23 | 201 | 6 | 9 | 11 | 20 | | | | | |
| 202 | 6 | 9 | 11 | 22 | 203 | 6 | 9 | 12 | 21 | 204 | 6 | 9 | 14 | 21 | | | | | |
| 205 | 6 | 9 | 18 | 20 | 206 | 6 | 9 | 18 | 22 | 207 | 6 | 9 | 20 | 21 | | | | | |
| 208 | 6 | 9 | 21 | 22 | 209 | 6 | 11 | 12 | 16 | 210 | 6 | 11 | 12 | 23 | | | | | |
| 211 | 6 | 11 | 14 | 16 | 212 | 6 | 11 | 14 | 23 | 213 | 6 | 11 | 16 | 20 | | | | | |
| 214 | 6 | 11 | 16 | 22 | 215 | 6 | 11 | 20 | 23 | 216 | 6 | 11 | 22 | 23 | | | | | |
| 217 | 6 | 12 | 16 | 18 | 218 | 6 | 12 | 16 | 21 | 219 | 6 | 12 | 18 | 23 | | | | | |
| 220 | 6 | 12 | 21 | 23 | 221 | 6 | 14 | 16 | 18 | 222 | 6 | 14 | 16 | 21 | | | | | |
| 223 | 6 | 14 | 18 | 23 | 224 | 6 | 14 | 21 | 23 | 225 | 6 | 16 | 18 | 20 | | | | | |
| 226 | 6 | 16 | 18 | 22 | 227 | 6 | 18 | 20 | 23 | 228 | 6 | 18 | 22 | 23 | | | | | |
| 229 | 7 | 8 | 10 | 20 | 230 | 7 | 8 | 10 | 22 | 231 | 7 | 8 | 12 | 24 | | | | | |
| 232 | 7 | 8 | 14 | 24 | 233 | 7 | 10 | 13 | 20 | 234 | 7 | 10 | 13 | 22 | | | | | |
| 235 | 7 | 10 | 20 | 21 | 236 | 7 | 10 | 21 | 22 | 237 | 7 | 11 | 12 | 24 | | | | | |
| 238 | 7 | 11 | 14 | 24 | 239 | 7 | 12 | 13 | 24 | 240 | 7 | 12 | 18 | 24 | | | | | |
| 241 | 7 | 13 | 14 | 24 | 242 | 7 | 14 | 18 | 24 | 243 | 7 | 15 | 20 | 21 | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 245 | 8 | 9 | 12 | 19 | 246 | 8 | 9 | 12 | 24 | | | | | | | | | | |
| 248 | 8 | 9 | 14 | 24 | 249 | 8 | 10 | 16 | 20 | | | | | | | | | | |
| 251 | 8 | 10 | 17 | 20 | 252 | 8 | 10 | 17 | 22 | | | | | | | | | | |
| 254 | 8 | 10 | 22 | 23 | 255 | 8 | 12 | 17 | 24 | | | | | | | | | | |
| 257 | 9 | 11 | 15 | 20 | 258 | 9 | 11 | 15 | 22 | | | | | | | | | | |
| 260 | 9 | 12 | 13 | 24 | 261 | 9 | 12 | 19 | 21 | | | | | | | | | | |
| 263 | 9 | 13 | 14 | 24 | 264 | 9 | 14 | 19 | 21 | | | | | | | | | | |
| 266 | 9 | 15 | 18 | 22 | 267 | 9 | 15 | 20 | 21 | | | | | | | | | | |
| 269 | 10 | 13 | 16 | 20 | 270 | 10 | 13 | 16 | 22 | | | | | | | | | | |
| 272 | 10 | 13 | 17 | 22 | 273 | 10 | 13 | 20 | 23 | | | | | | | | | | |
| 275 | 10 | 17 | 20 | 21 | 276 | 10 | 17 | 21 | 22 | | | | | | | | | | |
| 278 | 11 | 14 | 17 | 24 | 279 | 12 | 13 | 17 | 24 | | | | | | | | | | |
| 281 | 12 | 17 | 18 | 24 | 282 | 12 | 19 | 21 | 23 | | | | | | | | | | |
| 284 | 14 | 16 | 19 | 21 | 285 | 14 | 17 | 18 | 24 | | | | | | | | | | |
| 287 | 15 | 17 | 20 | 21 | 288 | 15 | 17 | 21 | 22 | | | | | | | | | | |

58

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 8 | 13 | 2 | 1 | 7 | 8 | 17 | 3 | 1 | 7 | 13 | 17 |
| 4 | 1 | 8 | 13 | 17 | 5 | 1 | 11 | 12 | 14 | 6 | 1 | 11 | 12 | 18 |
| 7 | 1 | 11 | 14 | 18 | 8 | 1 | 12 | 14 | 18 | 9 | 1 | 16 | 20 | 22 |
| 10 | 1 | 16 | 20 | 23 | 11 | 1 | 16 | 22 | 23 | 12 | 1 | 20 | 22 | 23 |
| 13 | 2 | 3 | 5 | 10 | 14 | 2 | 3 | 10 | 21 | 15 | 2 | 4 | 5 | 24 |
| 16 | 2 | 4 | 9 | 24 | 17 | 2 | 5 | 7 | 15 | 18 | 2 | 5 | 8 | 19 |
| 19 | 2 | 5 | 9 | 24 | 20 | 2 | 5 | 10 | 21 | 21 | 2 | 5 | 13 | 19 |
| 22 | 2 | 5 | 15 | 17 | 23 | 2 | 7 | 15 | 17 | 24 | 2 | 8 | 13 | 19 |
| 25 | 3 | 4 | 6 | 9 | 26 | 3 | 4 | 6 | 21 | 27 | 3 | 5 | 10 | 21 |
| 28 | 3 | 6 | 9 | 21 | 29 | 3 | 15 | 20 | 21 | 30 | 3 | 15 | 20 | 22 |
| 31 | 3 | 15 | 21 | 22 | 32 | 3 | 16 | 19 | 21 | 33 | 3 | 16 | 19 | 23 |
| 34 | 3 | 19 | 21 | 23 | 35 | 4 | 5 | 9 | 24 | 36 | 4 | 6 | 9 | 21 |
| 37 | 4 | 9 | 11 | 15 | 38 | 4 | 9 | 12 | 19 | 39 | 4 | 9 | 14 | 19 |
| 40 | 4 | 9 | 15 | 18 | 41 | 4 | 11 | 15 | 18 | 42 | 4 | 12 | 14 | 19 |
| 43 | 5 | 7 | 15 | 17 | 44 | 5 | 8 | 13 | 19 | 45 | 6 | 11 | 18 | 20 |
| 46 | 6 | 11 | 18 | 22 | 47 | 6 | 11 | 20 | 22 | 48 | 6 | 12 | 14 | 16 |
| 49 | 6 | 12 | 14 | 23 | 50 | 6 | 12 | 16 | 23 | 51 | 6 | 14 | 16 | 23 |
| 52 | 6 | 18 | 20 | 22 | 53 | 7 | 10 | 17 | 20 | 54 | 7 | 10 | 17 | 22 |
| 55 | 7 | 10 | 20 | 22 | 56 | 7 | 11 | 17 | 24 | 57 | 7 | 11 | 18 | 24 |
| 58 | 7 | 17 | 18 | 24 | 59 | 8 | 10 | 13 | 16 | 60 | 8 | 10 | 13 | 23 |
| 61 | 8 | 10 | 16 | 23 | 62 | 8 | 12 | 13 | 24 | 63 | 8 | 12 | 14 | 24 |
| 64 | 8 | 13 | 14 | 24 | 65 | 9 | 11 | 15 | 18 | 66 | 9 | 12 | 14 | 19 |
| 67 | 10 | 13 | 16 | 23 | 68 | 10 | 17 | 20 | 22 | 69 | 11 | 17 | 18 | 24 |
| 70 | 12 | 13 | 14 | 24 | 71 | 15 | 20 | 21 | 22 | 72 | 16 | 19 | 21 | 23 |

59

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 11 | 15 | 2 | 1 | 7 | 15 | 18 | 3 | 1 | 7 | 15 | 20 |
| 4 | 1 | 7 | 15 | 22 | 5 | 1 | 8 | 12 | 19 | 6 | 1 | 8 | 14 | 19 |
| 7 | 1 | 8 | 16 | 19 | 8 | 1 | 8 | 19 | 23 | 9 | 1 | 11 | 15 | 17 |
| 10 | 1 | 11 | 15 | 20 | 11 | 1 | 11 | 15 | 22 | 12 | 1 | 12 | 13 | 19 |
| 13 | 1 | 12 | 16 | 19 | 14 | 1 | 12 | 19 | 23 | 15 | 1 | 13 | 14 | 19 |
| 16 | 1 | 13 | 16 | 19 | 17 | 1 | 13 | 19 | 23 | 18 | 1 | 14 | 16 | 19 |
| 19 | 1 | 14 | 19 | 23 | 20 | 1 | 15 | 17 | 18 | 21 | 1 | 15 | 17 | 20 |
| 22 | 1 | 15 | 17 | 22 | 23 | 1 | 15 | 18 | 20 | 24 | 1 | 15 | 18 | 22 |
| 25 | 2 | 3 | 15 | 19 | 26 | 2 | 4 | 15 | 19 | 27 | 2 | 7 | 10 | 24 |
| 28 | 2 | 8 | 10 | 24 | 29 | 2 | 9 | 15 | 19 | 30 | 2 | 10 | 13 | 24 |
| 31 | 2 | 10 | 17 | 24 | 32 | 2 | 15 | 19 | 21 | 33 | 3 | 4 | 15 | 19 |
| 34 | 3 | 5 | 15 | 19 | 35 | 3 | 6 | 10 | 16 | 36 | 3 | 6 | 10 | 20 |
| 37 | 3 | 6 | 10 | 22 | 38 | 3 | 6 | 10 | 23 | 39 | 3 | 9 | 15 | 19 |
| 40 | 4 | 5 | 15 | 19 | 41 | 4 | 6 | 11 | 24 | 42 | 4 | 6 | 12 | 24 |
| 43 | 4 | 6 | 14 | 24 | 44 | 4 | 6 | 18 | 24 | 45 | 4 | 15 | 19 | 21 |



BIUS LILLE

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 46 | 5 | 7 | 10 | 24 | 47 | 5 | 8 | 10 | 24 | 48 | 5 | 9 | 15 | 19 | 145 | 4 | 6 | 11 | 16 | 146 | 4 | 6 | 11 | 23 | 147 | 4 | 6 | 12 | 20 |
| 49 | 5 | 10 | 13 | 24 | 50 | 5 | 10 | 17 | 24 | 51 | 5 | 15 | 19 | 21 | 148 | 4 | 6 | 12 | 22 | 149 | 4 | 6 | 14 | 20 | 150 | 4 | 6 | 14 | 22 |
| 52 | 6 | 9 | 11 | 24 | 53 | 6 | 9 | 12 | 24 | 54 | 6 | 9 | 14 | 24 | 151 | 4 | 6 | 16 | 18 | 152 | 4 | 6 | 16 | 20 | 153 | 4 | 6 | 16 | 22 |
| 55 | 6 | 9 | 18 | 24 | 56 | 6 | 10 | 16 | 20 | 57 | 6 | 10 | 16 | 21 | 154 | 4 | 6 | 18 | 23 | 155 | 4 | 6 | 20 | 23 | 156 | 4 | 6 | 22 | 23 |
| 58 | 6 | 10 | 16 | 22 | 59 | 6 | 10 | 20 | 21 | 60 | 6 | 10 | 20 | 23 | 157 | 4 | 7 | 8 | 24 | 158 | 4 | 7 | 12 | 24 | 159 | 4 | 7 | 13 | 24 |
| 61 | 6 | 10 | 21 | 22 | 62 | 6 | 10 | 21 | 23 | 63 | 6 | 10 | 22 | 23 | 160 | 4 | 7 | 14 | 24 | 161 | 4 | 7 | 15 | 20 | 162 | 4 | 7 | 15 | 21 |
| 64 | 6 | 11 | 12 | 24 | 65 | 6 | 11 | 14 | 24 | 66 | 6 | 12 | 18 | 24 | 163 | 4 | 7 | 15 | 22 | 164 | 4 | 8 | 11 | 24 | 165 | 4 | 8 | 16 | 19 |
| 67 | 6 | 14 | 18 | 24 | 68 | 7 | 8 | 10 | 24 | 69 | 7 | 10 | 13 | 24 | 166 | 4 | 8 | 17 | 24 | 167 | 4 | 8 | 18 | 24 | 168 | 4 | 8 | 19 | 21 |
| 70 | 8 | 10 | 17 | 24 | 71 | 9 | 15 | 19 | 21 | 72 | 10 | 13 | 17 | 24 | 169 | 4 | 8 | 19 | 23 | 170 | 4 | 11 | 13 | 24 | 171 | 4 | 12 | 17 | 24 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 172 | 4 | 13 | 16 | 19 | 173 | 4 | 13 | 17 | 24 | 174 | 4 | 13 | 18 | 24 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 175 | 4 | 13 | 19 | 21 | 176 | 4 | 13 | 19 | 23 | 177 | 4 | 14 | 17 | 24 |
| 60 | | | | | | | | | | | | | | | 178 | 4 | 15 | 17 | 20 | 179 | 4 | 15 | 17 | 21 | 180 | 4 | 15 | 17 | 22 |
| 1 | 1 | 7 | 11 | 16 | 2 | 1 | 7 | 11 | 23 | 3 | 1 | 7 | 12 | 16 | 181 | 5 | 7 | 10 | 16 | 182 | 5 | 7 | 10 | 23 | 183 | 5 | 7 | 12 | 24 |
| 4 | 1 | 7 | 12 | 20 | 5 | 1 | 7 | 12 | 22 | 6 | 1 | 7 | 12 | 23 | 184 | 5 | 7 | 14 | 24 | 185 | 5 | 8 | 10 | 20 | 186 | 5 | 8 | 10 | 22 |
| 7 | 1 | 7 | 14 | 16 | 8 | 1 | 7 | 14 | 20 | 9 | 1 | 7 | 14 | 22 | 187 | 5 | 8 | 11 | 24 | 188 | 5 | 8 | 18 | 24 | 189 | 5 | 9 | 15 | 20 |
| 10 | 1 | 7 | 14 | 23 | 11 | 1 | 7 | 16 | 18 | 12 | 1 | 7 | 18 | 23 | 190 | 5 | 9 | 15 | 22 | 191 | 5 | 9 | 16 | 19 | 192 | 5 | 9 | 19 | 23 |
| 13 | 1 | 8 | 11 | 16 | 14 | 1 | 8 | 11 | 20 | 15 | 1 | 8 | 11 | 22 | 193 | 5 | 10 | 13 | 20 | 194 | 5 | 10 | 13 | 22 | 195 | 5 | 10 | 16 | 17 |
| 16 | 1 | 8 | 11 | 23 | 17 | 1 | 8 | 12 | 20 | 18 | 1 | 8 | 12 | 22 | 196 | 5 | 10 | 16 | 20 | 197 | 5 | 10 | 16 | 22 | 198 | 5 | 10 | 17 | 23 |
| 19 | 1 | 8 | 14 | 20 | 20 | 1 | 8 | 14 | 22 | 21 | 1 | 8 | 16 | 18 | 199 | 5 | 10 | 20 | 23 | 200 | 5 | 10 | 22 | 23 | 201 | 5 | 11 | 12 | 24 |
| 22 | 1 | 8 | 18 | 20 | 23 | 1 | 8 | 18 | 22 | 24 | 1 | 8 | 18 | 23 | 202 | 5 | 11 | 13 | 24 | 203 | 5 | 11 | 14 | 24 | 204 | 5 | 11 | 15 | 20 |
| 25 | 1 | 11 | 13 | 16 | 26 | 1 | 11 | 13 | 20 | 27 | 1 | 11 | 13 | 22 | 205 | 5 | 11 | 15 | 21 | 206 | 5 | 11 | 15 | 22 | 207 | 5 | 12 | 16 | 19 |
| 28 | 1 | 11 | 13 | 23 | 29 | 1 | 11 | 16 | 17 | 30 | 1 | 11 | 17 | 23 | 208 | 5 | 12 | 17 | 24 | 209 | 5 | 12 | 18 | 24 | 210 | 5 | 12 | 19 | 21 |
| 31 | 1 | 12 | 13 | 20 | 32 | 1 | 12 | 13 | 22 | 33 | 1 | 12 | 16 | 17 | 211 | 5 | 12 | 19 | 23 | 212 | 5 | 13 | 18 | 24 | 213 | 5 | 14 | 16 | 19 |
| 34 | 1 | 12 | 17 | 20 | 35 | 1 | 12 | 17 | 22 | 36 | 1 | 12 | 17 | 23 | 214 | 5 | 14 | 17 | 24 | 215 | 5 | 14 | 18 | 24 | 216 | 5 | 14 | 19 | 21 |
| 37 | 1 | 13 | 14 | 20 | 38 | 1 | 13 | 14 | 22 | 39 | 1 | 13 | 16 | 18 | 217 | 5 | 14 | 19 | 23 | 218 | 5 | 15 | 18 | 20 | 219 | 5 | 15 | 18 | 21 |
| 40 | 1 | 13 | 18 | 20 | 41 | 1 | 13 | 18 | 22 | 42 | 1 | 13 | 18 | 23 | 220 | 5 | 15 | 18 | 22 | 221 | 6 | 9 | 11 | 16 | 222 | 6 | 9 | 11 | 23 |
| 43 | 1 | 14 | 16 | 17 | 44 | 1 | 14 | 17 | 20 | 45 | 1 | 14 | 17 | 22 | 223 | 6 | 9 | 12 | 20 | 224 | 6 | 9 | 12 | 22 | 225 | 6 | 9 | 14 | 20 |
| 46 | 1 | 14 | 17 | 23 | 47 | 1 | 16 | 17 | 18 | 48 | 1 | 17 | 18 | 23 | 226 | 6 | 9 | 14 | 22 | 227 | 6 | 9 | 16 | 18 | 228 | 6 | 9 | 16 | 20 |
| 49 | 2 | 3 | 11 | 15 | 50 | 2 | 3 | 12 | 19 | 51 | 2 | 3 | 14 | 19 | 229 | 6 | 9 | 16 | 22 | 230 | 6 | 9 | 18 | 23 | 231 | 6 | 9 | 20 | 23 |
| 52 | 2 | 3 | 15 | 18 | 53 | 2 | 4 | 15 | 20 | 54 | 2 | 4 | 15 | 22 | 232 | 6 | 9 | 22 | 23 | 233 | 6 | 11 | 12 | 21 | 234 | 6 | 11 | 14 | 21 |
| 55 | 2 | 4 | 16 | 19 | 56 | 2 | 4 | 19 | 23 | 57 | 2 | 7 | 10 | 16 | 235 | 6 | 11 | 16 | 21 | 236 | 6 | 11 | 21 | 23 | 237 | 6 | 12 | 18 | 21 |
| 58 | 2 | 7 | 10 | 23 | 59 | 2 | 7 | 12 | 24 | 60 | 2 | 7 | 14 | 24 | 238 | 6 | 12 | 20 | 21 | 239 | 6 | 12 | 21 | 22 | 240 | 6 | 14 | 18 | 21 |
| 61 | 2 | 8 | 10 | 20 | 62 | 2 | 8 | 10 | 22 | 63 | 2 | 8 | 11 | 24 | 241 | 6 | 14 | 20 | 21 | 242 | 6 | 14 | 21 | 22 | 243 | 6 | 16 | 18 | 21 |
| 64 | 2 | 8 | 18 | 24 | 65 | 2 | 9 | 15 | 20 | 66 | 2 | 9 | 15 | 22 | 244 | 6 | 18 | 21 | 23 | 245 | 7 | 8 | 9 | 24 | 246 | 7 | 8 | 10 | 21 |
| 67 | 2 | 9 | 16 | 19 | 68 | 2 | 9 | 19 | 23 | 69 | 2 | 10 | 13 | 20 | 247 | 7 | 9 | 12 | 24 | 248 | 7 | 9 | 13 | 24 | 249 | 7 | 9 | 14 | 24 |
| 70 | 2 | 10 | 13 | 22 | 71 | 2 | 10 | 16 | 17 | 72 | 2 | 10 | 16 | 20 | 250 | 7 | 9 | 15 | 20 | 251 | 7 | 9 | 15 | 21 | 252 | 7 | 9 | 15 | 22 |
| 73 | 2 | 10 | 16 | 22 | 74 | 2 | 10 | 17 | 23 | 75 | 2 | 10 | 20 | 23 | 253 | 7 | 10 | 13 | 21 | 254 | 7 | 10 | 16 | 21 | 255 | 7 | 10 | 21 | 23 |
| 76 | 2 | 10 | 22 | 23 | 77 | 2 | 11 | 12 | 24 | 78 | 2 | 11 | 13 | 24 | 256 | 7 | 11 | 15 | 21 | 257 | 7 | 15 | 18 | 21 | 258 | 8 | 9 | 11 | 24 |
| 79 | 2 | 11 | 14 | 24 | 80 | 2 | 11 | 15 | 20 | 81 | 2 | 11 | 15 | 21 | 259 | 8 | 9 | 16 | 19 | 260 | 8 | 9 | 17 | 24 | 261 | 8 | 9 | 18 | 24 |
| 82 | 2 | 11 | 15 | 22 | 83 | 2 | 12 | 16 | 19 | 84 | 2 | 12 | 17 | 24 | 262 | 8 | 9 | 19 | 21 | 263 | 8 | 9 | 19 | 23 | 264 | 8 | 10 | 17 | 21 |
| 85 | 2 | 12 | 18 | 24 | 86 | 2 | 12 | 19 | 21 | 87 | 2 | 12 | 19 | 23 | 265 | 8 | 10 | 20 | 21 | 266 | 8 | 10 | 21 | 22 | 267 | 8 | 12 | 19 | 21 |
| 88 | 2 | 13 | 18 | 24 | 89 | 2 | 14 | 16 | 19 | 90 | 2 | 14 | 17 | 24 | 268 | 8 | 14 | 19 | 21 | 269 | 9 | 11 | 13 | 24 | 270 | 9 | 12 | 17 | 24 |
| 91 | 2 | 14 | 18 | 24 | 92 | 2 | 14 | 19 | 21 | 93 | 2 | 14 | 19 | 23 | 271 | 9 | 13 | 16 | 19 | 272 | 9 | 13 | 17 | 24 | 273 | 9 | 13 | 18 | 24 |
| 94 | 2 | 15 | 18 | 20 | 95 | 2 | 15 | 18 | 21 | 96 | 2 | 15 | 18 | 22 | 274 | 9 | 13 | 19 | 21 | 275 | 9 | 13 | 19 | 23 | 276 | 9 | 14 | 17 | 24 |
| 97 | 3 | 4 | 7 | 15 | 98 | 3 | 4 | 8 | 19 | 99 | 3 | 4 | 13 | 19 | 277 | 9 | 15 | 17 | 20 | 278 | 9 | 15 | 17 | 21 | 279 | 9 | 15 | 17 | 22 |
| 100 | 3 | 4 | 15 | 17 | 101 | 3 | 5 | 11 | 19 | 102 | 3 | 5 | 12 | 19 | 280 | 10 | 13 | 17 | 21 | 281 | 10 | 13 | 20 | 21 | 282 | 10 | 13 | 21 | 22 |
| 103 | 3 | 5 | 14 | 19 | 104 | 3 | 5 | 15 | 18 | 105 | 3 | 6 | 11 | 12 | 283 | 10 | 16 | 17 | 21 | 284 | 10 | 17 | 21 | 23 | 285 | 11 | 15 | 17 | 21 |
| 106 | 3 | 6 | 11 | 14 | 107 | 3 | 6 | 11 | 16 | 108 | 3 | 6 | 11 | 23 | 286 | 12 | 13 | 19 | 21 | 287 | 13 | 14 | 19 | 21 | 288 | 15 | 17 | 18 | 21 |
| 109 | 3 | 6 | 12 | 18 | 110 | 3 | 6 | 12 | 20 | 111 | 3 | 6 | 12 | 22 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 112 | 3 | 6 | 14 | 18 | 113 | 3 | 6 | 14 | 20 | 114 | 3 | 6 | 14 | 22 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 115 | 3 | 6 | 16 | 18 | 116 | 3 | 6 | 18 | 23 | 117 | 3 | 7 | 8 | 10 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 118 | 3 | 7 | 9 | 15 | 119 | 3 | 7 | 10 | 13 | 120 | 3 | 7 | 10 | 16 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 121 | 3 | 7 | 10 | 23 | 122 | 3 | 7 | 11 | 19 | 123 | 3 | 7 | 15 | 18 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 124 | 3 | 8 | 9 | 19 | 125 | 3 | 8 | 10 | 17 | 126 | 3 | 8 | 10 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 127 | 3 | 8 | 10 | 22 | 128 | 3 | 8 | 12 | 19 | 129 | 3 | 8 | 14 | 19 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 130 | 3 | 9 | 13 | 19 | 131 | 3 | 9 | 15 | 17 | 132 | 3 | 10 | 13 | 17 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 133 | 3 | 10 | 13 | 20 | 134 | 3 | 10 | 13 | 22 | 135 | 3 | 10 | 16 | 17 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 136 | 3 | 10 | 17 | 23 | 137 | 3 | 11 | 15 | 17 | 138 | 3 | 12 | 13 | 19 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 139 | 3 | 13 | 14 | 19 | 140 | 3 | 15 | 17 | 18 | 141 | 4 | 5 | 15 | 20 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 142 | 4 | 5 | 15 | 22 | 143 | 4 | 5 | 16 | 19 | 144 | 4 | 5 | 19 | 23 | | | | | | | | | | | | | | | |

61

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 11 | 17 | 2 | 1 | 7 | 17 | 18 | 3 | 1 | 7 | 20 | 22 | | | | | | | | | |
| 4 | 1 | 8 | 12 | 14 | 5 | 1 | 8 | 13 | 16 | 6 | 1 | 8 | 13 | 23 | | | | | | | | | |
| 7 | 1 | 11 | 18 | 20 | 8 | 1 | 11 | 18 | 22 | 9 | 1 | 12 | 13 | 14 | | | | | | | | | |
| 10 | 1 | 12 | 16 | 23 | 11 | 1 | 14 | 16 | 23 | 12 | 1 | 17 | 20 | 22 | | | | | | | | | |
| 13 | 2 | 3 | 5 | 19 | 14 | 2 | 3 | 15 | 21 | 15 | 2 | 4 | 5 | 15 | | | | | | | | | |
| 16 | 2 | 4 | 9 | 19 | 17 | 2 | 5 | 7 | 24 | 18 | 2 | 5 | 8 | 10 | | | | | | | | | |
| 19 | 2 | 5 | 9 | 15 | 20 | 2 | 5 | 10 | 13 | 21 | 2 | 5 | 17 | 24 | | | | | | | | | |
| 22 | 2 | 5 | 19 | 21 | 23 | 2 | 7 | 10 | 17 | 24 | 2 | 8 | 13 | 24 | | | | | | | | | |
| 25 | 3 | 4 | 9 | 15 | 26 | 3 | 4 | 19 | 21 | 27 | 3 | 5 | 15 | 21 | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 28 | 3 | 6 | 16 | 21 | 29 | 3 | 6 | 20 | 22 | 30 | 3 | 6 | 21 | 23 | 46 | 12 | 13 | 19 | 23 |
| 31 | 3 | 9 | 19 | 21 | 32 | 3 | 10 | 16 | 23 | 33 | 3 | 10 | 20 | 21 | | | | | |
| 34 | 3 | 10 | 21 | 22 | 35 | 4 | 5 | 9 | 19 | 36 | 4 | 6 | 9 | 11 | | | | | |
| 37 | 4 | 6 | 9 | 18 | 38 | 4 | 6 | 12 | 14 | 39 | 4 | 9 | 12 | 24 | | | | | |
| 40 | 4 | 9 | 14 | 24 | 41 | 4 | 9 | 15 | 21 | 42 | 4 | 11 | 18 | 24 | | | | | |
| 43 | 5 | 7 | 10 | 17 | 44 | 5 | 8 | 13 | 24 | 45 | 6 | 9 | 12 | 14 | | | | | |
| 46 | 6 | 11 | 12 | 18 | 47 | 6 | 11 | 14 | 18 | 48 | 6 | 16 | 20 | 23 | | | | | |
| 49 | 6 | 16 | 22 | 23 | 50 | 6 | 20 | 21 | 22 | 51 | 7 | 8 | 10 | 13 | | | | | |
| 52 | 7 | 8 | 17 | 24 | 53 | 7 | 11 | 15 | 18 | 54 | 7 | 13 | 17 | 24 | | | | | |
| 55 | 7 | 15 | 17 | 20 | 56 | 7 | 15 | 17 | 22 | 57 | 8 | 10 | 13 | 17 | | | | | |
| 58 | 8 | 12 | 13 | 19 | 59 | 8 | 13 | 14 | 19 | 60 | 8 | 16 | 19 | 23 | | | | | |
| 61 | 9 | 11 | 18 | 24 | 62 | 10 | 16 | 20 | 22 | 63 | 10 | 16 | 21 | 23 | | | | | |
| 64 | 10 | 20 | 22 | 23 | 65 | 11 | 12 | 14 | 24 | 66 | 11 | 15 | 17 | 18 | | | | | |
| 67 | 11 | 15 | 20 | 22 | 68 | 12 | 14 | 16 | 19 | 69 | 12 | 14 | 18 | 24 | | | | | |
| 70 | 12 | 14 | 19 | 23 | 71 | 13 | 16 | 19 | 23 | 72 | 15 | 18 | 20 | 22 | | | | | |

62

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 11 | 18 | 2 | 1 | 7 | 17 | 20 | 3 | 1 | 7 | 17 | 22 | | | | | |
| 4 | 1 | 8 | 12 | 13 | 5 | 1 | 8 | 13 | 14 | 6 | 1 | 8 | 16 | 23 | | | | | |
| 7 | 1 | 11 | 17 | 18 | 8 | 1 | 11 | 20 | 22 | 9 | 1 | 12 | 14 | 16 | | | | | |
| 10 | 1 | 12 | 14 | 23 | 11 | 1 | 13 | 16 | 23 | 12 | 1 | 18 | 20 | 22 | | | | | |
| 13 | 2 | 3 | 5 | 15 | 14 | 2 | 3 | 19 | 21 | 15 | 2 | 4 | 5 | 19 | | | | | |
| 16 | 2 | 4 | 9 | 15 | 17 | 2 | 5 | 7 | 10 | 18 | 2 | 5 | 8 | 24 | | | | | |
| 19 | 2 | 5 | 9 | 19 | 20 | 2 | 5 | 10 | 17 | 21 | 2 | 5 | 13 | 24 | | | | | |
| 22 | 2 | 5 | 15 | 21 | 23 | 2 | 7 | 17 | 24 | 24 | 2 | 8 | 10 | 13 | | | | | |
| 25 | 3 | 4 | 9 | 19 | 26 | 3 | 4 | 15 | 21 | 27 | 3 | 5 | 19 | 21 | | | | | |
| 28 | 3 | 6 | 16 | 23 | 29 | 3 | 6 | 20 | 21 | 30 | 3 | 6 | 21 | 22 | | | | | |
| 31 | 3 | 9 | 15 | 21 | 32 | 3 | 10 | 16 | 21 | 33 | 3 | 10 | 20 | 22 | | | | | |
| 34 | 3 | 10 | 21 | 23 | 35 | 4 | 5 | 9 | 15 | 36 | 4 | 6 | 9 | 12 | | | | | |
| 37 | 4 | 6 | 9 | 14 | 38 | 4 | 6 | 11 | 18 | 39 | 4 | 9 | 11 | 24 | | | | | |
| 40 | 4 | 9 | 18 | 24 | 41 | 4 | 9 | 19 | 21 | 42 | 4 | 12 | 14 | 24 | | | | | |
| 43 | 5 | 7 | 17 | 24 | 44 | 5 | 8 | 10 | 13 | 45 | 6 | 9 | 11 | 18 | | | | | |
| 46 | 6 | 11 | 12 | 14 | 47 | 6 | 12 | 14 | 18 | 48 | 6 | 16 | 20 | 22 | | | | | |
| 49 | 6 | 16 | 21 | 23 | 50 | 6 | 20 | 22 | 23 | 51 | 7 | 8 | 10 | 17 | | | | | |
| 52 | 7 | 8 | 13 | 24 | 53 | 7 | 10 | 13 | 17 | 54 | 7 | 11 | 15 | 17 | | | | | |
| 55 | 7 | 15 | 17 | 18 | 56 | 7 | 15 | 20 | 22 | 57 | 8 | 12 | 14 | 19 | | | | | |
| 58 | 8 | 13 | 16 | 19 | 59 | 8 | 13 | 17 | 24 | 60 | 8 | 13 | 19 | 23 | | | | | |
| 61 | 9 | 12 | 14 | 24 | 62 | 10 | 16 | 20 | 23 | 63 | 10 | 16 | 22 | 23 | | | | | |
| 64 | 10 | 20 | 21 | 22 | 65 | 11 | 12 | 18 | 24 | 66 | 11 | 14 | 18 | 24 | | | | | |
| 67 | 11 | 15 | 18 | 20 | 68 | 11 | 15 | 18 | 22 | 69 | 12 | 13 | 14 | 19 | | | | | |
| 70 | 12 | 16 | 19 | 23 | 71 | 14 | 16 | 19 | 23 | 72 | 15 | 17 | 20 | 22 | | | | | |

63

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 11 | 20 | 2 | 1 | 7 | 18 | 22 | 3 | 1 | 8 | 12 | 16 | | | | | |
| 4 | 1 | 8 | 14 | 23 | 5 | 1 | 11 | 17 | 22 | 6 | 1 | 12 | 13 | 23 | | | | | |
| 7 | 1 | 13 | 14 | 16 | 8 | 1 | 17 | 18 | 20 | 9 | 2 | 3 | 4 | 15 | | | | | |
| 10 | 2 | 3 | 4 | 19 | 11 | 2 | 7 | 10 | 13 | 12 | 2 | 7 | 13 | 24 | | | | | |
| 13 | 2 | 8 | 10 | 17 | 14 | 2 | 8 | 17 | 24 | 15 | 2 | 9 | 15 | 21 | | | | | |
| 16 | 2 | 9 | 19 | 21 | 17 | 3 | 5 | 9 | 15 | 18 | 3 | 5 | 9 | 19 | | | | | |
| 19 | 3 | 6 | 16 | 22 | 20 | 3 | 6 | 20 | 23 | 21 | 3 | 10 | 16 | 22 | | | | | |
| 22 | 3 | 10 | 20 | 23 | 23 | 4 | 5 | 15 | 21 | 24 | 4 | 5 | 19 | 21 | | | | | |
| 25 | 4 | 6 | 11 | 14 | 26 | 4 | 6 | 12 | 18 | 27 | 4 | 11 | 14 | 24 | | | | | |
| 28 | 4 | 12 | 18 | 24 | 29 | 5 | 7 | 8 | 10 | 30 | 5 | 7 | 8 | 24 | | | | | |
| 31 | 5 | 10 | 13 | 17 | 32 | 5 | 13 | 17 | 24 | 33 | 6 | 9 | 11 | 12 | | | | | |
| 34 | 6 | 9 | 14 | 18 | 35 | 6 | 16 | 20 | 21 | 36 | 6 | 21 | 22 | 23 | | | | | |
| 37 | 7 | 11 | 15 | 20 | 38 | 7 | 15 | 18 | 22 | 39 | 8 | 12 | 16 | 19 | | | | | |
| 40 | 8 | 14 | 19 | 23 | 41 | 9 | 11 | 12 | 24 | 42 | 9 | 14 | 18 | 24 | | | | | |
| 43 | 10 | 16 | 20 | 21 | 44 | 10 | 21 | 22 | 23 | 45 | 11 | 15 | 17 | 22 | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 46 | 12 | 13 | 19 | 23 | 47 | 13 | 14 | 16 | 19 | 48 | 15 | 17 | 18 | 20 | | | | | |

64

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 11 | 22 | 2 | 1 | 7 | 18 | 20 | 3 | 1 | 8 | 12 | 23 | | | | | |
| 4 | 1 | 8 | 14 | 16 | 5 | 1 | 11 | 17 | 20 | 6 | 1 | 12 | 13 | 16 | | | | | |
| 7 | 1 | 13 | 14 | 23 | 8 | 1 | 17 | 18 | 22 | 9 | 2 | 3 | 9 | 15 | | | | | |
| 10 | 2 | 3 | 9 | 19 | 11 | 2 | 4 | 15 | 21 | 12 | 2 | 4 | 19 | 21 | | | | | |
| 13 | 2 | 7 | 8 | 10 | 14 | 2 | 7 | 8 | 24 | 15 | 2 | 10 | 13 | 17 | | | | | |
| 16 | 2 | 13 | 17 | 24 | 17 | 3 | 4 | 5 | 15 | 18 | 3 | 4 | 5 | 19 | | | | | |
| 19 | 3 | 6 | 16 | 20 | 20 | 3 | 6 | 22 | 23 | 21 | 3 | 10 | 16 | 20 | | | | | |
| 22 | 3 | 10 | 22 | 23 | 23 | 4 | 6 | 11 | 12 | 24 | 4 | 6 | 14 | 18 | | | | | |
| 25 | 4 | 11 | 12 | 24 | 26 | 4 | 14 | 18 | 24 | 27 | 5 | 7 | 10 | 13 | | | | | |
| 28 | 5 | 7 | 13 | 24 | 29 | 5 | 8 | 10 | 17 | 30 | 5 | 8 | 17 | 24 | | | | | |
| 31 | 5 | 9 | 15 | 21 | 32 | 5 | 9 | 19 | 21 | 33 | 6 | 9 | 11 | 14 | | | | | |
| 34 | 6 | 9 | 12 | 18 | 35 | 6 | 16 | 21 | 22 | 36 | 6 | 20 | 21 | 23 | | | | | |
| 37 | 7 | 11 | 15 | 22 | 38 | 7 | 15 | 18 | 20 | 39 | 8 | 12 | 19 | 23 | | | | | |
| 40 | 8 | 14 | 16 | 19 | 41 | 9 | 11 | 14 | 24 | 42 | 9 | 12 | 18 | 24 | | | | | |
| 43 | 10 | 16 | 21 | 22 | 44 | 10 | 20 | 21 | 23 | 45 | 11 | 15 | 17 | 20 | | | | | |
| 46 | 12 | 13 | 16 | 19 | 47 | 13 | 14 | 19 | 23 | 48 | 15 | 17 | 18 | 22 | | | | | |

65

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 12 | 14 | 2 | 1 | 7 | 12 | 17 | 3 | 1 | 7 | 14 | 17 | | | | | |
| 4 | 1 | 8 | 13 | 20 | 5 | 1 | 8 | 13 | 22 | 6 | 1 | 8 | 20 | 22 | | | | | |
| 7 | 1 | 11 | 16 | 18 | 8 | 1 | 11 | 16 | 23 | 9 | 1 | 11 | 18 | 23 | | | | | |
| 10 | 1 | 12 | 14 | 17 | 11 | 1 | 13 | 20 | 22 | 12 | 1 | 16 | 18 | 23 | | | | | |
| 13 | 2 | 5 | 10 | 16 | 14 | 2 | 5 | 10 | 23 | 15 | 2 | 5 | 11 | 15 | | | | | |
| 16 | 2 | 5 | 11 | 24 | 17 | 2 | 5 | 15 | 18 | 18 | 2 | 5 | 16 | 19 | | | | | |
| 19 | 2 | 5 | 18 | 24 | 20 | 2 | 5 | 19 | 23 | 21 | 2 | 10 | 16 | 23 | | | | | |
| 22 | 2 | 11 | 15 | 18 | 23 | 2 | 11 | 18 | 24 | 24 | 2 | 16 | 19 | 23 | | | | | |
| 25 | 3 | 6 | 12 | 14 | 26 | 3 | 6 | 12 | 21 | 27 | 3 | 6 | 14 | 21 | | | | | |
| 28 | 3 | 7 | 10 | 17 | 29 | 3 | 7 | 10 | 21 | 30 | 3 | 7 | 15 | 17 | | | | | |
| 31 | 3 | 7 | 15 | 21 | 32 | 3 | 10 | 17 | 21 | 33 | 3 | 12 | 14 | 19 | | | | | |
| 34 | 3 | 12 | 19 | 21 | 35 | 3 | 14 | 19 | 21 | 36 | 3 | 15 | 17 | 21 | | | | | |
| 37 | 4 | 6 | 9 | 20 | 38 | 4 | 6 | 9 | 22 | 39 | 4 | 6 | 20 | 22 | | | | | |
| 40 | 4 | 8 | 9 | 19 | 41 | 4 | 8 | 9 | 24 | 42 | 4 | 8 | 13 | 19 | | | | | |
| 43 | 4 | 8 | 13 | 24 | 44 | 4 | 9 | 13 | 19 | 45 | 4 | 9 | 13 | 24 | | | | | |
| 46 | 4 | 9 | 15 | 20 | 47 | 4 | 9 | 15 | 22 | 48 | 4 | 15 | 20 | 22 | | | | | |
| 49 | 5 | 10 | 16 | 23 | 50 | 5 | 11 | 15 | 18 | 51 | 5 | 11 | 18 | 24 | | | | | |
| 52 | 5 | 16 | 19 | 23 | 53 | 6 | 9 | 20 | 22 | 54 | 6 | 11 | 16 | 18 | | | | | |
| 55 | 6 | 11 | 16 | 23 | 56 | 6 | 11 | 18 | 23 | 57 | 6 | 12 | 14 | 21 | | | | | |
| 58 | 6 | 16 | 18 | 23 | 59 | 7 | 10 | 17 | 21 | 60 | 7 | 12 | 14 | 24 | | | | | |
| 61 | 7 | 12 | 17 | 24 | 62 | 7 | 14 | 17 | 24 | 63 | 7 | 15 | 17 | 21 | | | | | |
| 64 | 8 | 9 | 13 | 19 | 65 | 8 | 9 | 12 | 24 | 66 | 8 | 10 | 13 | 20 | | | | | |
| 67 | 8 | 10 | 13 | 22 | 68 | 8 | 10 | 20 | 22 | 69 | 9 | 15 | 20 | 22 | | | | | |
| 70 | 10 | 13 | 20 | 22 | 71 | 12 | 14 | 17 | 24 | 72 | 12 | 14 | 19 | 21 | | | | | |

66

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 15 | 17 | 2 | 1 | 8 | 13 | 19 | 3 | 1 | 11 | 15 | 18 | | | | | |
| 4 | 1 | 12 | 14 | 19 | 5 | 1 | 15 | 20 | 22 | 6 | 1 | 16 | 19 | 23 | | | | | |
| 7 | 2 | 5 | 10 | 24 | 8 | 2 | 5 | 15 | 19 | 9 | 3 | 6 | 10 | 21 | | | | | |
| 10 | 3 | 15 | 19 | 21 | 11 | 4 | 6 | 9 | 24 | 12 | 4 | 9 | 15 | 19 | | | | | |
| 13 | 6 | 10 | 16 | 23 | 14 | 6 | 10 | 20 | 22 | 15 | 6 | 11 | 18 | 24 | | | | | |
| 16 | 6 | 12 | 14 | 24 | 17 | 7 | 10 | 17 | 24 | 18 | 8 | 10 | 13 | 24 | | | | | |

67

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 16 | 17 | 2 | 1 | 7 | 16 | 23 | 3 | 1 | 7 | 17 | 23 | | | | | |



SHS LILLE

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 8 | 11 | 13 |
| 7 | 1 | 11 | 13 | 18 |
| 10 | 1 | 12 | 20 | 22 |
| 13 | 2 | 5 | 10 | 20 |
| 16 | 2 | 5 | 12 | 24 |
| 19 | 2 | 5 | 15 | 20 |
| 22 | 2 | 12 | 14 | 19 |
| 25 | 3 | 6 | 11 | 18 |
| 28 | 3 | 8 | 10 | 13 |
| 31 | 3 | 8 | 19 | 21 |
| 34 | 3 | 11 | 15 | 21 |
| 37 | 4 | 6 | 9 | 16 |
| 40 | 4 | 7 | 9 | 15 |
| 43 | 4 | 7 | 17 | 24 |
| 46 | 4 | 9 | 17 | 24 |
| 49 | 5 | 10 | 20 | 22 |
| 52 | 5 | 15 | 20 | 22 |
| 55 | 6 | 12 | 14 | 20 |
| 58 | 6 | 14 | 20 | 22 |
| 61 | 7 | 10 | 16 | 17 |
| 64 | 8 | 10 | 13 | 21 |
| 67 | 8 | 13 | 18 | 24 |
| 70 | 10 | 16 | 17 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 8 | 11 | 18 |
| 8 | 1 | 12 | 14 | 20 |
| 11 | 1 | 14 | 20 | 22 |
| 14 | 2 | 5 | 10 | 22 |
| 17 | 2 | 5 | 14 | 19 |
| 20 | 2 | 5 | 15 | 22 |
| 23 | 2 | 12 | 14 | 24 |
| 26 | 3 | 6 | 11 | 21 |
| 29 | 3 | 8 | 10 | 21 |
| 32 | 3 | 10 | 13 | 21 |
| 35 | 3 | 13 | 19 | 21 |
| 38 | 4 | 6 | 9 | 23 |
| 41 | 4 | 7 | 9 | 24 |
| 44 | 4 | 9 | 15 | 17 |
| 47 | 4 | 9 | 19 | 23 |
| 50 | 5 | 12 | 14 | 19 |
| 53 | 6 | 9 | 16 | 23 |
| 56 | 6 | 12 | 14 | 22 |
| 59 | 7 | 9 | 15 | 17 |
| 62 | 7 | 10 | 16 | 23 |
| 65 | 8 | 11 | 13 | 24 |
| 68 | 8 | 13 | 19 | 21 |
| 71 | 11 | 13 | 18 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 | 13 | 18 |
| 9 | 1 | 12 | 14 | 22 |
| 12 | 1 | 16 | 17 | 23 |
| 15 | 2 | 5 | 12 | 19 |
| 18 | 2 | 5 | 14 | 24 |
| 21 | 2 | 10 | 20 | 22 |
| 24 | 2 | 15 | 20 | 22 |
| 27 | 3 | 6 | 18 | 21 |
| 30 | 3 | 8 | 13 | 19 |
| 33 | 3 | 11 | 15 | 18 |
| 36 | 3 | 15 | 18 | 21 |
| 39 | 4 | 6 | 16 | 23 |
| 42 | 4 | 7 | 15 | 17 |
| 45 | 4 | 9 | 16 | 19 |
| 48 | 4 | 16 | 19 | 23 |
| 51 | 5 | 12 | 14 | 24 |
| 54 | 6 | 11 | 18 | 21 |
| 57 | 6 | 12 | 20 | 22 |
| 60 | 7 | 9 | 17 | 24 |
| 63 | 7 | 10 | 17 | 23 |
| 66 | 8 | 11 | 18 | 24 |
| 69 | 9 | 16 | 19 | 23 |
| 72 | 11 | 15 | 18 | 21 |

68

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 2 | 3 | 5 | 9 |
| 7 | 2 | 4 | 9 | 21 |
| 10 | 2 | 5 | 8 | 17 |
| 13 | 2 | 7 | 8 | 13 |
| 16 | 2 | 8 | 13 | 17 |
| 19 | 3 | 5 | 9 | 21 |
| 22 | 3 | 16 | 20 | 23 |
| 25 | 3 | 20 | 21 | 23 |
| 28 | 4 | 5 | 9 | 21 |
| 31 | 4 | 9 | 12 | 18 |
| 34 | 4 | 11 | 12 | 18 |
| 37 | 5 | 7 | 8 | 13 |
| 40 | 5 | 8 | 13 | 17 |
| 43 | 7 | 11 | 18 | 20 |
| 46 | 7 | 17 | 18 | 20 |
| 49 | 8 | 12 | 13 | 16 |
| 52 | 8 | 12 | 14 | 23 |
| 55 | 8 | 13 | 14 | 23 |
| 58 | 9 | 11 | 12 | 18 |
| 61 | 11 | 17 | 18 | 20 |
| 64 | 12 | 13 | 14 | 16 |
| 67 | 13 | 14 | 16 | 23 |
| 70 | 16 | 21 | 22 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 3 | 4 | 9 |
| 5 | 2 | 3 | 9 | 21 |
| 8 | 2 | 5 | 7 | 8 |
| 11 | 2 | 5 | 9 | 21 |
| 14 | 2 | 7 | 8 | 17 |
| 17 | 3 | 4 | 5 | 9 |
| 20 | 3 | 16 | 20 | 21 |
| 23 | 3 | 16 | 21 | 22 |
| 26 | 3 | 20 | 22 | 23 |
| 29 | 4 | 9 | 11 | 12 |
| 32 | 4 | 9 | 14 | 18 |
| 35 | 4 | 11 | 14 | 18 |
| 38 | 5 | 7 | 8 | 17 |
| 41 | 7 | 11 | 17 | 20 |
| 44 | 7 | 11 | 18 | 22 |
| 47 | 7 | 17 | 18 | 22 |
| 50 | 8 | 12 | 13 | 23 |
| 53 | 8 | 12 | 16 | 23 |
| 56 | 8 | 14 | 16 | 23 |
| 59 | 9 | 11 | 14 | 18 |
| 62 | 11 | 17 | 18 | 22 |
| 65 | 12 | 13 | 14 | 23 |
| 68 | 16 | 20 | 21 | 22 |
| 71 | 17 | 18 | 20 | 22 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 3 | 4 | 21 |
| 6 | 2 | 4 | 5 | 21 |
| 9 | 2 | 5 | 7 | 13 |
| 12 | 2 | 5 | 13 | 17 |
| 15 | 2 | 7 | 13 | 17 |
| 18 | 3 | 4 | 5 | 21 |
| 21 | 3 | 16 | 20 | 22 |
| 24 | 3 | 16 | 22 | 23 |
| 27 | 3 | 21 | 22 | 23 |
| 30 | 4 | 9 | 11 | 14 |
| 33 | 4 | 11 | 12 | 14 |
| 36 | 4 | 12 | 14 | 18 |
| 39 | 5 | 7 | 13 | 17 |
| 42 | 7 | 11 | 17 | 22 |
| 45 | 7 | 11 | 20 | 22 |
| 48 | 7 | 18 | 20 | 22 |
| 51 | 8 | 12 | 14 | 16 |
| 54 | 8 | 13 | 14 | 16 |
| 57 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| 60 | 9 | 12 | 14 | 18 |
| 63 | 11 | 17 | 20 | 22 |
| 66 | 12 | 13 | 16 | 23 |
| 69 | 16 | 20 | 21 | 23 |
| 72 | 20 | 21 | 22 | 23 |

69

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 7 |
| 4 | 2 | 3 | 4 | 12 |
| 7 | 2 | 3 | 4 | 16 |
| 10 | 2 | 3 | 4 | 20 |
| 13 | 2 | 3 | 7 | 13 |
| 16 | 2 | 3 | 20 | 23 |
| 19 | 2 | 4 | 11 | 14 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 3 | 4 | 8 |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 13 |
| 8 | 2 | 3 | 4 | 17 |
| 11 | 2 | 3 | 4 | 22 |
| 14 | 2 | 3 | 8 | 17 |
| 17 | 2 | 4 | 7 | 13 |
| 20 | 2 | 4 | 12 | 18 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 3 | 4 | 11 |
| 6 | 2 | 3 | 4 | 14 |
| 9 | 2 | 3 | 4 | 18 |
| 12 | 2 | 3 | 4 | 23 |
| 15 | 2 | 3 | 16 | 22 |
| 18 | 2 | 4 | 8 | 17 |
| 21 | 2 | 7 | 9 | 13 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 22 | 2 | 7 | 9 | 21 |
| 25 | 2 | 7 | 12 | 13 |
| 28 | 2 | 7 | 13 | 18 |
| 31 | 2 | 7 | 13 | 22 |
| 34 | 2 | 8 | 9 | 17 |
| 37 | 2 | 8 | 12 | 16 |
| 40 | 2 | 8 | 14 | 23 |
| 43 | 2 | 8 | 17 | 20 |
| 46 | 2 | 8 | 17 | 23 |
| 49 | 2 | 9 | 12 | 21 |
| 52 | 2 | 9 | 14 | 21 |
| 55 | 2 | 9 | 18 | 21 |
| 58 | 2 | 9 | 21 | 23 |
| 61 | 2 | 13 | 14 | 16 |
| 64 | 2 | 21 | 22 | 23 |
| 67 | 3 | 4 | 16 | 22 |
| 70 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 73 | 3 | 5 | 9 | 12 |
| 76 | 3 | 5 | 9 | 16 |
| 79 | 3 | 5 | 9 | 20 |
| 82 | 3 | 5 | 13 | 17 |
| 85 | 3 | 7 | 11 | 20 |
| 88 | 3 | 7 | 20 | 23 |
| 91 | 3 | 8 | 16 | 22 |
| 94 | 3 | 9 | 14 | 18 |
| 97 | 3 | 11 | 16 | 22 |
| 100 | 3 | 12 | 13 | 23 |
| 103 | 3 | 13 | 14 | 16 |
| 106 | 3 | 14 | 16 | 22 |
| 109 | 3 | 16 | 18 | 22 |
| 112 | 3 | 18 | 20 | 23 |
| 115 | 4 | 5 | 8 | 21 |
| 118 | 4 | 5 | 12 | 18 |
| 121 | 4 | 5 | 13 | 21 |
| 124 | 4 | 5 | 17 | 21 |
| 127 | 4 | 5 | 21 | 22 |
| 130 | 4 | 7 | 11 | 20 |
| 133 | 4 | 8 | 11 | 14 |
| 136 | 4 | 8 | 14 | 23 |
| 139 | 4 | 11 | 14 | 17 |
| 142 | 4 | 11 | 14 | 22 |
| 145 | 4 | 12 | 13 | 18 |
| 148 | 4 | 12 | 17 | 18 |
| 151 | 4 | 12 | 18 | 22 |
| 154 | 4 | 16 | 20 | 21 |
| 157 | 5 | 7 | 8 | 9 |
| 160 | 5 | 7 | 8 | 14 |
| 163 | 5 | 7 | 8 | 20 |
| 166 | 5 | 7 | 8 | 23 |
| 169 | 5 | 8 | 12 | 16 |
| 172 | 5 | 9 | 13 | 17 |
| 175 | 5 | 11 | 17 | 22 |
| 178 | 5 | 13 | 14 | 16 |
| 181 | 5 | 13 | 17 | 18 |
| 184 | 5 | 13 | 17 | 22 |
| 187 | 5 | 17 | 18 | 20 |
| 190 | 7 | 8 | 12 | 16 |
| 193 | 7 | 9 | 11 | 12 |
| 196 | 7 | 9 | 18 | 22 |
| 199 | 7 | 11 | 14 | 20 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 | 2 | 7 | 11 | 13 |
| 26 | 2 | 7 | 13 | 14 |
| 29 | 2 | 7 | 13 | 20 |
| 32 | 2 | 7 | 13 | 23 |
| 35 | 2 | 8 | 9 | 21 |
| 38 | 2 | 8 | 12 | 17 |
| 41 | 2 | 8 | 16 | 17 |
| 44 | 2 | 8 | 17 | 21 |
| 47 | 2 | 9 | 11 | 12 |
| 50 | 2 | 9 | 13 | 21 |
| 53 | 2 | 9 | 16 | 21 |
| 56 | 2 | 9 | 20 | 21 |
| 59 | 2 | 11 | 17 | 22 |
| 62 | 2 | 16 | 20 | 21 |
| 65 | 3 | 4 | 11 | 14 |
| 68 | 3 | 4 | 20 | 23 |
| 71 | 3 | 5 | 8 | 9 |
| 74 | 3 | 5 | 9 | 13 |
| 77 | 3 | 5 | 9 | 17 |
| 80 | 3 | 5 | 9 | 22 |
| 83 | 3 | 5 | 16 | 22 |
| 86 | 3 | 7 | 16 | 22 |
| 89 | 3 | 8 | 12 | 16 |
| 92 | 3 | 8 | 20 | 23 |
| 95 | 3 | 9 | 16 | 22 |
| 98 | 3 | 11 | 17 | 22 |
| 101 | 3 | 12 | 16 | 22 |
| 104 | 3 | 13 | 16 | 22 |
| 107 | 3 | 14 | 20 | 23 |
| 110 | 3 | 17 | 18 | 20 |
| 113 | 4 | 5 | 7 | 8 |
| 116 | 4 | 5 | 11 | 14 |
| 119 | 4 | 5 | 12 | 21 |
| 122 | 4 | 5 | 14 | 21 |
| 125 | 4 | 5 | 18 | 21 |
| 128 | 4 | 5 | 21 | 23 |
| 131 | 4 | 7 | 12 | 18 |
| 134 | 4 | 8 | 12 | 16 |
| 137 | 4 | 11 | 13 | 14 |
| 140 | 4 | 11 | 14 | 20 |
| 143 | 4 | 11 | 14 | 23 |
| 146 | 4 | 12 | 13 | 23 |
| 149 | 4 | 12 | 18 | 20 |
| 152 | 4 | 12 | 18 | 23 |
| 155 | 4 | 17 | 18 | 20 |
| 158 | 5 | 7 | 8 | 11 |
| 161 | 5 | 7 | 8 | 16 |
| 164 | 5 | 7 | 8 | 21 |
| 167 | 5 | 7 | 11 | 20 |
| 170 | 5 | 8 | 14 | 23 |
| 173 | 5 | 9 | 14 | 18 |
| 176 | 5 | 12 | 13 | 17 |
| 179 | 5 | 13 | 14 | 17 |
| 182 | 5 | 13 | 17 | 20 |
| 185 | 5 | 13 | 17 | 23 |
| 188 | 5 | 21 | 22 | 23 |
| 191 | 7 | 8 | 14 | 23 |
| 194 | 7 | 9 | 11 | 20 |
| 197 | 7 | 11 | 12 | 20 |
| 200 | 7 | 11 | 16 | 20 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 2 | 7 | 11 | 20 |
| 27 | 2 | 7 | 13 | 16 |
| 30 | 2 | 7 | 13 | 21 |
| 33 | 2 | 7 | 18 | 22 |
| 36 | 2 | 8 | 11 | 17 |
| 39 | 2 | 8 | 14 | 17 |
| 42 | 2 | 8 | 17 | 18 |
| 45 | 2 | 8 | 17 | 22 |
| 48 | 2 | 9 | 11 | 21 |
| 51 | 2 | 9 | 14 | 18 |
| 54 | 2 | 9 | 17 | 21 |
| 57 | 2 | 9 | 21 | 22 |
| 60 | 2 | 12 | 13 | 23 |
| 63 | 2 | 17 | 18 | 20 |
| 66 | 3 | 4 | 12 | 18 |
| 69 | 3 | 5 | 7 | 8 |
| 72 | 3 | 5 | 9 | 11 |
| 75 | 3 | 5 | 9 | 14 |
| 78 | 3 | 5 | 9 | 18 |
| 81 | 3 | 5 | 9 | 23 |
| 84 | 3 | 5 | 20 | 23 |
| 87 | 3 | 7 | 18 | 22 |
| 90 | 3 | 8 | 14 | 23 |
| 93 | 3 | 9 | 11 | 12 |
| 96 | 3 | 9 | 20 | 23 |
| 99 | 3 | 11 | 20 | 23 |
| 102 | 3 | 12 | 20 | 23 |
| 105 | 3 | 13 | 20 | 23 |
| 108 | 3 | 16 | 17 | 22 |
| 111 | 3 | 17 | 20 | 23 |
| 114 | 4 | 5 | 7 | 21 |
| 117 | 4 | 5 | 11 | 21 |
| 120 | 4 | 5 | 13 | 17 |
| 123 | 4 | 5 | 16 | 21 |
| 126 | 4 | 5 | 20 | 21 |
| 129 | 4 | 7 | 11 | 14 |
| 132 | 4 | 7 | 18 | 22 |
| 135 | 4 | 8 | 12 | 18 |
| 138 | 4 | 11 | 14 | 16 |
| 141 | 4 | 11 | 14 | 21 |
| 144 | 4 | 11 | 17 | 22 |
| 147 | 4 | 12 | 16 | 18 |
| 150 | 4 | 12 | 18 | 21 |
| 153 | 4 | 13 | 14 | 16 |
| 156 | 4 | 21 | 22 | 23 |
| 159 | 5 | 7 | 8 | 12 |
| 162 | 5 | 7 | 8 | 18 |
| 165 | 5 | 7 | 8 | 22 |
| 168 | 5 | 7 | 18 | 22 |
| 171 | 5 | 9 | 11 | 12 |
| 174 | 5 | 11 | 13 | 17 |
| 177 | 5 | 12 | 13 | 23 |
| 180 | 5 | 13 | 16 | 17 |
| 183 | 5 | 13 | 17 | 21 |
| 186 | 5 | 16 | 20 | 21 |
| 189 | 7 | 8 | 11 | 20 |
| 192 | 7 | 8 | 18 | 22 |
| 195 | 7 | 9 | 14 | 18 |
| 198 | 7 | 11 | 13 | 20 |
| 201 | 7 | 11 | 20 | 21 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 202 | 7 | 11 | 20 | 23 | 203 | 7 | 12 | 13 | 23 | 204 | 7 12 18 22 |
| 205 | 7 | 13 | 14 | 16 | 206 | 7 | 13 | 18 | 22 | 207 | 7 14 18 22 |
| 208 | 7 | 16 | 18 | 22 | 209 | 7 | 16 | 20 | 21 | 210 | 7 18 21 22 |
| 211 | 7 | 18 | 22 | 23 | 212 | 7 | 21 | 22 | 23 | 213 | 8 9 11 12 |
| 214 | 8 | 9 | 12 | 16 | 215 | 8 | 9 | 14 | 18 | 216 | 8 9 14 23 |
| 217 | 8 | 11 | 12 | 16 | 218 | 8 | 11 | 14 | 23 | 219 | 8 11 17 22 |
| 220 | 8 | 12 | 16 | 17 | 221 | 8 | 12 | 16 | 18 | 222 | 8 12 16 20 |
| 223 | 8 | 12 | 16 | 21 | 224 | 8 | 12 | 16 | 22 | 225 | 8 14 17 23 |
| 226 | 8 | 14 | 18 | 23 | 227 | 8 | 14 | 20 | 23 | 228 | 8 14 21 23 |
| 229 | 8 | 14 | 22 | 23 | 230 | 8 | 16 | 20 | 21 | 231 | 8 17 18 20 |
| 232 | 8 | 21 | 22 | 23 | 233 | 9 | 11 | 12 | 13 | 234 | 9 11 12 16 |
| 235 | 9 | 11 | 12 | 17 | 236 | 9 | 11 | 12 | 20 | 237 | 9 11 12 21 |
| 238 | 9 | 11 | 12 | 22 | 239 | 9 | 11 | 12 | 23 | 240 | 9 11 17 22 |
| 241 | 9 | 12 | 13 | 23 | 242 | 9 | 13 | 14 | 16 | 243 | 9 13 14 18 |
| 244 | 9 | 14 | 16 | 18 | 245 | 9 | 14 | 17 | 18 | 246 | 9 14 18 20 |
| 247 | 9 | 14 | 18 | 21 | 248 | 9 | 14 | 18 | 22 | 249 | 9 14 18 23 |
| 250 | 9 | 16 | 20 | 21 | 251 | 9 | 17 | 18 | 20 | 252 | 9 21 22 23 |
| 253 | 11 | 12 | 13 | 23 | 254 | 11 | 12 | 17 | 22 | 255 | 11 13 14 16 |
| 256 | 11 | 13 | 17 | 22 | 257 | 11 | 14 | 17 | 22 | 258 | 11 16 17 22 |
| 259 | 11 | 16 | 20 | 21 | 260 | 11 | 17 | 21 | 22 | 261 | 11 17 22 23 |
| 262 | 11 | 21 | 22 | 23 | 263 | 12 | 13 | 17 | 23 | 264 | 12 13 18 23 |
| 265 | 12 | 13 | 20 | 23 | 266 | 12 | 13 | 21 | 23 | 267 | 12 13 22 23 |
| 268 | 12 | 16 | 20 | 21 | 269 | 12 | 17 | 18 | 20 | 270 | 12 21 22 23 |
| 271 | 13 | 14 | 16 | 17 | 272 | 13 | 14 | 16 | 18 | 273 | 13 14 16 20 |
| 274 | 13 | 14 | 16 | 21 | 275 | 13 | 14 | 16 | 22 | 276 | 13 16 20 21 |
| 277 | 13 | 17 | 18 | 20 | 278 | 13 | 21 | 22 | 23 | 279 | 14 16 20 21 |
| 280 | 14 | 17 | 18 | 20 | 281 | 14 | 21 | 22 | 23 | 282 | 16 17 18 20 |
| 283 | 16 | 17 | 20 | 21 | 284 | 16 | 18 | 20 | 21 | 285 | 17 18 20 21 |
| 286 | 17 | 18 | 20 | 23 | 287 | 17 | 21 | 22 | 23 | 288 | 18 21 22 23 |

70

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 2 | 2 | 3 | 5 | 17 | 3 | 2 3 16 21 |
| 4 | 2 | 3 | 21 | 23 | 5 | 2 | 4 | 5 | 8 | 6 | 2 4 5 13 |
| 7 | 2 | 4 | 9 | 11 | 8 | 2 | 4 | 9 | 18 | 9 | 2 5 7 21 |
| 10 | 2 | 5 | 8 | 9 | 11 | 2 | 5 | 9 | 13 | 12 | 2 5 17 21 |
| 13 | 2 | 7 | 11 | 17 | 14 | 2 | 7 | 17 | 18 | 15 | 2 8 13 16 |
| 16 | 2 | 8 | 13 | 23 | 17 | 3 | 4 | 9 | 12 | 18 | 3 4 9 14 |
| 19 | 3 | 4 | 20 | 21 | 20 | 3 | 4 | 21 | 22 | 21 | 3 5 16 21 |
| 22 | 3 | 5 | 21 | 23 | 23 | 3 | 7 | 20 | 22 | 24 | 3 9 20 21 |
| 25 | 3 | 9 | 21 | 22 | 26 | 3 | 12 | 16 | 23 | 27 | 3 14 16 23 |
| 28 | 3 | 17 | 20 | 22 | 29 | 4 | 5 | 9 | 11 | 30 | 4 5 9 18 |
| 31 | 4 | 8 | 12 | 14 | 32 | 4 | 9 | 12 | 21 | 33 | 4 9 14 21 |
| 34 | 4 | 11 | 18 | 20 | 35 | 4 | 11 | 18 | 22 | 36 | 4 12 13 14 |
| 37 | 5 | 7 | 11 | 17 | 38 | 5 | 7 | 17 | 18 | 39 | 5 8 13 16 |
| 40 | 5 | 8 | 13 | 23 | 41 | 7 | 8 | 12 | 13 | 42 | 7 8 13 14 |
| 43 | 7 | 8 | 17 | 20 | 44 | 7 | 8 | 17 | 22 | 45 | 7 11 12 18 |
| 46 | 7 | 11 | 14 | 18 | 47 | 7 | 13 | 17 | 20 | 48 | 7 13 17 22 |
| 49 | 7 | 20 | 21 | 22 | 50 | 8 | 9 | 12 | 14 | 51 | 8 12 13 17 |
| 52 | 8 | 13 | 14 | 17 | 53 | 8 | 16 | 20 | 23 | 54 | 8 16 22 23 |
| 55 | 9 | 11 | 18 | 20 | 56 | 9 | 11 | 18 | 22 | 57 | 9 12 13 14 |
| 58 | 11 | 12 | 14 | 16 | 59 | 11 | 12 | 14 | 23 | 60 | 11 12 17 18 |
| 61 | 11 | 14 | 17 | 18 | 62 | 11 | 16 | 20 | 22 | 63 | 11 20 22 23 |
| 64 | 12 | 14 | 16 | 18 | 65 | 12 | 14 | 18 | 23 | 66 | 12 16 21 23 |
| 67 | 13 | 16 | 20 | 23 | 68 | 13 | 16 | 22 | 23 | 69 | 14 16 21 23 |
| 70 | 16 | 18 | 20 | 22 | 71 | 17 | 20 | 21 | 22 | 72 | 18 20 22 23 |

71

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 2 | 2 | 3 | 5 | 13 | 3 | 2 3 20 21 |
| 4 | 2 | 3 | 21 | 22 | 5 | 2 | 4 | 5 | 7 | 6 | 2 4 5 17 |
| 7 | 2 | 4 | 9 | 12 | 8 | 2 | 4 | 9 | 14 | 9 | 2 5 7 9 |
| 10 | 2 | 5 | 8 | 21 | 11 | 2 | 5 | 9 | 17 | 12 | 2 5 13 21 |
| 13 | 2 | 7 | 17 | 20 | 14 | 2 | 7 | 17 | 22 | 15 | 2 8 12 13 |
| 16 | 2 | 8 | 13 | 14 | 17 | 3 | 4 | 9 | 11 | 18 | 3 4 9 18 |
| 19 | 3 | 4 | 16 | 21 | 20 | 3 | 4 | 21 | 23 | 21 | 3 5 20 21 |
| 22 | 3 | 5 | 21 | 22 | 23 | 3 | 8 | 16 | 23 | 24 | 3 9 16 21 |
| 25 | 3 | 9 | 21 | 23 | 26 | 3 | 11 | 20 | 22 | 27 | 3 13 16 23 |
| 28 | 3 | 18 | 20 | 22 | 29 | 4 | 5 | 9 | 12 | 30 | 4 5 9 14 |
| 31 | 4 | 7 | 11 | 18 | 32 | 4 | 9 | 11 | 21 | 33 | 4 9 18 21 |
| 34 | 4 | 11 | 17 | 18 | 35 | 4 | 12 | 14 | 16 | 36 | 4 12 14 23 |
| 37 | 5 | 7 | 17 | 20 | 38 | 5 | 7 | 17 | 22 | 39 | 5 8 12 13 |
| 40 | 5 | 8 | 13 | 14 | 41 | 7 | 8 | 11 | 17 | 42 | 7 8 13 16 |
| 43 | 7 | 8 | 13 | 23 | 44 | 7 | 8 | 17 | 18 | 45 | 7 9 11 18 |
| 46 | 7 | 11 | 13 | 17 | 47 | 7 | 13 | 17 | 18 | 48 | 7 16 20 22 |
| 49 | 7 | 20 | 22 | 23 | 50 | 8 | 11 | 12 | 14 | 51 | 8 12 14 18 |
| 52 | 8 | 13 | 16 | 17 | 53 | 8 | 13 | 17 | 23 | 54 | 8 16 21 23 |
| 55 | 9 | 11 | 17 | 18 | 56 | 9 | 12 | 14 | 16 | 57 | 9 12 14 23 |
| 58 | 11 | 12 | 13 | 14 | 59 | 11 | 12 | 18 | 20 | 60 | 11 12 18 22 |
| 61 | 11 | 14 | 18 | 20 | 62 | 11 | 14 | 18 | 22 | 63 | 11 20 21 22 |
| 64 | 12 | 13 | 14 | 18 | 65 | 12 | 16 | 20 | 23 | 66 | 12 16 22 23 |
| 67 | 13 | 16 | 21 | 23 | 68 | 14 | 16 | 20 | 23 | 69 | 14 16 22 23 |
| 70 | 16 | 17 | 20 | 22 | 71 | 17 | 20 | 22 | 23 | 72 | 18 20 21 22 |

72

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 | 11 | 2 | 2 | 3 | 5 | 18 | 3 | 2 3 12 21 |
| 4 | 2 | 3 | 14 | 21 | 5 | 2 | 4 | 5 | 16 | 6 | 2 4 5 23 |
| 7 | 2 | 4 | 9 | 20 | 8 | 2 | 4 | 9 | 22 | 9 | 2 5 7 16 |
| 10 | 2 | 5 | 7 | 23 | 11 | 2 | 5 | 8 | 11 | 12 | 2 5 8 18 |
| 13 | 2 | 5 | 9 | 16 | 14 | 2 | 5 | 9 | 23 | 15 | 2 5 11 13 |
| 16 | 2 | 5 | 11 | 21 | 17 | 2 | 5 | 13 | 18 | 18 | 2 5 16 17 |
| 19 | 2 | 5 | 17 | 23 | 20 | 2 | 5 | 18 | 21 | 21 | 2 7 12 17 |
| 22 | 2 | 7 | 14 | 17 | 23 | 2 | 8 | 13 | 20 | 24 | 2 8 13 22 |
| 25 | 2 | 11 | 12 | 18 | 26 | 2 | 11 | 14 | 18 | 27 | 2 11 18 20 |
| 28 | 2 | 11 | 18 | 22 | 29 | 2 | 12 | 16 | 23 | 30 | 2 14 16 23 |
| 31 | 2 | 16 | 20 | 23 | 32 | 2 | 16 | 22 | 23 | 33 | 3 4 7 21 |
| 34 | 3 | 4 | 8 | 9 | 35 | 3 | 4 | 9 | 13 | 36 | 3 4 17 21 |
| 37 | 3 | 5 | 12 | 21 | 38 | 3 | 5 | 14 | 21 | 39 | 3 7 8 17 |
| 40 | 3 | 7 | 9 | 21 | 41 | 3 | 7 | 11 | 17 | 42 | 3 7 13 17 |
| 43 | 3 | 7 | 16 | 21 | 44 | 3 | 7 | 17 | 18 | 45 | 3 7 21 23 |
| 46 | 3 | 8 | 12 | 14 | 47 | 3 | 8 | 20 | 22 | 48 | 3 9 17 21 |
| 49 | 3 | 11 | 12 | 14 | 50 | 3 | 11 | 16 | 23 | 51 | 3 12 13 14 |
| 52 | 3 | 12 | 14 | 18 | 53 | 3 | 12 | 20 | 21 | 54 | 3 12 21 22 |
| 55 | 3 | 13 | 20 | 22 | 56 | 3 | 14 | 20 | 21 | 57 | 3 14 21 22 |
| 58 | 3 | 16 | 17 | 21 | 59 | 3 | 16 | 18 | 23 | 60 | 3 17 21 23 |
| 61 | 4 | 5 | 9 | 20 | 62 | 4 | 5 | 9 | 22 | 63 | 4 7 8 13 |
| 64 | 4 | 7 | 12 | 14 | 65 | 4 | 7 | 20 | 22 | 66 | 4 8 9 11 |
| 67 | 4 | 8 | 9 | 18 | 68 | 4 | 8 | 9 | 21 | 69 | 4 8 13 16 |
| 70 | 4 | 8 | 13 | 17 | 71 | 4 | 8 | 13 | 23 | 72 | 4 9 11 13 |
| 73 | 4 | 9 | 12 | 20 | 74 | 4 | 9 | 12 | 22 | 75 | 4 9 13 18 |
| 76 | 4 | 9 | 13 | 21 | 77 | 4 | 9 | 14 | 20 | 78 | 4 9 14 22 |
| 79 | 4 | 11 | 16 | 18 | 80 | 4 | 11 | 18 | 23 | 81 | 4 12 14 17 |
| 82 | 4 | 16 | 20 | 22 | 83 | 4 | 17 | 20 | 22 | 84 | 4 20 22 23 |
| 85 | 5 | 7 | 12 | 17 | 86 | 5 | 7 | 14 | 17 | 87 | 5 8 13 20 |
| 88 | 5 | 8 | 13 | 22 | 89 | 5 | 11 | 12 | 18 | 90 | 5 11 14 18 |
| 91 | 5 | 11 | 18 | 20 | 92 | 5 | 11 | 18 | 22 | 93 | 5 12 16 23 |
| 94 | 5 | 14 | 16 | 23 | 95 | 5 | 16 | 20 | 23 | 96 | 5 16 22 23 |
| 97 | 7 | 8 | 9 | 13 | 98 | 7 | 8 | 17 | 21 | 99 | 7 9 12 14 |
| 100 | 7 | 9 | 20 | 22 | 101 | 7 | 11 | 16 | 18 | 102 | 7 11 17 21 |



BIBS LILLE

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 103 | 7 | 11 | 18 | 23 | 104 | 7 | 12 | 14 | 16 | 105 | 7 | 12 | 14 | 23 | |
| 106 | 7 | 12 | 17 | 20 | 107 | 7 | 12 | 17 | 22 | 108 | 7 | 13 | 17 | 21 | |
| 109 | 7 | 14 | 17 | 20 | 110 | 7 | 14 | 17 | 22 | 111 | 7 | 17 | 18 | 21 | |
| 112 | 8 | 9 | 13 | 16 | 113 | 8 | 9 | 13 | 17 | 114 | 8 | 9 | 13 | 23 | |
| 115 | 8 | 11 | 16 | 23 | 116 | 8 | 11 | 20 | 22 | 117 | 8 | 12 | 13 | 20 | |
| 118 | 8 | 12 | 13 | 22 | 119 | 8 | 12 | 14 | 21 | 120 | 8 | 13 | 14 | 20 | |
| 121 | 8 | 13 | 14 | 22 | 122 | 8 | 16 | 18 | 23 | 123 | 8 | 18 | 20 | 22 | |
| 124 | 8 | 20 | 21 | 22 | 125 | 9 | 11 | 16 | 18 | 126 | 9 | 11 | 18 | 23 | |
| 127 | 9 | 12 | 14 | 17 | 128 | 9 | 16 | 20 | 22 | 129 | 9 | 17 | 20 | 22 | |
| 130 | 9 | 20 | 22 | 23 | 131 | 11 | 12 | 14 | 21 | 132 | 11 | 13 | 16 | 23 | |
| 133 | 11 | 13 | 20 | 22 | 134 | 11 | 16 | 17 | 18 | 135 | 11 | 16 | 21 | 23 | |
| 136 | 11 | 17 | 18 | 23 | 137 | 12 | 13 | 14 | 21 | 138 | 12 | 14 | 16 | 17 | |
| 139 | 12 | 14 | 17 | 23 | 140 | 12 | 14 | 18 | 21 | 141 | 13 | 16 | 18 | 23 | |
| 142 | 13 | 18 | 20 | 22 | 143 | 13 | 20 | 21 | 22 | 144 | 16 | 18 | 21 | 23 | |

73

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 | 12 | 2 | 2 | 3 | 5 | 14 | 3 | 2 | 3 | 11 | 21 | |
| 4 | 2 | 3 | 18 | 21 | 5 | 2 | 4 | 5 | 20 | 6 | 2 | 4 | 5 | 22 | |
| 7 | 2 | 4 | 9 | 16 | 8 | 2 | 4 | 9 | 23 | 9 | 2 | 5 | 7 | 12 | |
| 10 | 2 | 5 | 7 | 14 | 11 | 2 | 5 | 8 | 20 | 12 | 2 | 5 | 8 | 22 | |
| 13 | 2 | 5 | 9 | 20 | 14 | 2 | 5 | 9 | 22 | 15 | 2 | 5 | 12 | 17 | |
| 16 | 2 | 5 | 12 | 21 | 17 | 2 | 5 | 13 | 20 | 18 | 2 | 5 | 13 | 22 | |
| 19 | 2 | 5 | 14 | 17 | 20 | 2 | 5 | 14 | 21 | 21 | 2 | 7 | 16 | 17 | |
| 22 | 2 | 7 | 17 | 23 | 23 | 2 | 8 | 11 | 13 | 24 | 2 | 8 | 13 | 18 | |
| 25 | 2 | 11 | 12 | 14 | 26 | 2 | 11 | 20 | 22 | 27 | 2 | 12 | 14 | 16 | |
| 28 | 2 | 12 | 14 | 18 | 29 | 2 | 12 | 14 | 23 | 30 | 2 | 16 | 20 | 22 | |
| 31 | 2 | 18 | 20 | 22 | 32 | 2 | 20 | 22 | 23 | 33 | 3 | 4 | 7 | 9 | |
| 34 | 3 | 4 | 8 | 21 | 35 | 3 | 4 | 9 | 17 | 36 | 3 | 4 | 13 | 21 | |
| 37 | 3 | 5 | 11 | 21 | 38 | 3 | 5 | 18 | 21 | 39 | 3 | 7 | 8 | 13 | |
| 40 | 3 | 7 | 11 | 18 | 41 | 3 | 7 | 16 | 23 | 42 | 3 | 8 | 9 | 21 | |
| 43 | 3 | 8 | 12 | 13 | 44 | 3 | 8 | 13 | 14 | 45 | 3 | 8 | 13 | 17 | |
| 46 | 3 | 8 | 20 | 21 | 47 | 3 | 8 | 21 | 22 | 48 | 3 | 9 | 13 | 21 | |
| 49 | 3 | 11 | 12 | 18 | 50 | 3 | 11 | 14 | 18 | 51 | 3 | 11 | 16 | 21 | |
| 52 | 3 | 11 | 17 | 18 | 53 | 3 | 11 | 21 | 23 | 54 | 3 | 12 | 20 | 22 | |
| 55 | 3 | 13 | 20 | 21 | 56 | 3 | 13 | 21 | 22 | 57 | 3 | 14 | 20 | 22 | |
| 58 | 3 | 16 | 17 | 23 | 59 | 3 | 16 | 18 | 21 | 60 | 3 | 18 | 21 | 23 | |
| 61 | 4 | 5 | 9 | 16 | 62 | 4 | 5 | 9 | 23 | 63 | 4 | 7 | 8 | 17 | |
| 64 | 4 | 7 | 9 | 12 | 65 | 4 | 7 | 9 | 14 | 66 | 4 | 7 | 9 | 21 | |
| 67 | 4 | 7 | 13 | 17 | 68 | 4 | 7 | 17 | 20 | 69 | 4 | 7 | 17 | 22 | |
| 70 | 4 | 8 | 11 | 18 | 71 | 4 | 8 | 16 | 23 | 72 | 4 | 9 | 11 | 16 | |
| 73 | 4 | 9 | 11 | 23 | 74 | 4 | 9 | 12 | 17 | 75 | 4 | 9 | 14 | 17 | |
| 76 | 4 | 9 | 16 | 18 | 77 | 4 | 9 | 17 | 21 | 78 | 4 | 9 | 18 | 23 | |
| 79 | 4 | 11 | 13 | 18 | 80 | 4 | 12 | 14 | 20 | 81 | 4 | 12 | 14 | 22 | |
| 82 | 4 | 12 | 16 | 23 | 83 | 4 | 16 | 20 | 23 | 84 | 4 | 16 | 22 | 23 | |
| 85 | 5 | 7 | 16 | 17 | 86 | 5 | 7 | 17 | 23 | 87 | 5 | 8 | 11 | 13 | |
| 88 | 5 | 8 | 13 | 18 | 89 | 5 | 11 | 12 | 14 | 90 | 5 | 11 | 20 | 22 | |
| 91 | 5 | 12 | 14 | 16 | 92 | 5 | 12 | 14 | 18 | 93 | 5 | 12 | 14 | 23 | |
| 94 | 5 | 16 | 20 | 22 | 95 | 5 | 18 | 20 | 22 | 96 | 5 | 20 | 22 | 23 | |
| 97 | 7 | 8 | 9 | 17 | 98 | 7 | 8 | 13 | 21 | 99 | 7 | 9 | 13 | 17 | |
| 100 | 7 | 9 | 17 | 20 | 101 | 7 | 9 | 17 | 22 | 102 | 7 | 11 | 16 | 17 | |
| 103 | 7 | 11 | 17 | 23 | 104 | 7 | 11 | 18 | 21 | 105 | 7 | 12 | 16 | 23 | |
| 106 | 7 | 12 | 20 | 22 | 107 | 7 | 14 | 16 | 23 | 108 | 7 | 14 | 20 | 22 | |
| 109 | 7 | 16 | 17 | 18 | 110 | 7 | 16 | 21 | 23 | 111 | 7 | 17 | 18 | 23 | |
| 112 | 8 | 9 | 11 | 18 | 113 | 8 | 9 | 16 | 23 | 114 | 8 | 11 | 13 | 16 | |
| 115 | 8 | 11 | 13 | 23 | 116 | 8 | 11 | 18 | 20 | 117 | 8 | 11 | 18 | 22 | |
| 118 | 8 | 12 | 13 | 21 | 119 | 8 | 12 | 14 | 20 | 120 | 8 | 12 | 14 | 22 | |
| 121 | 8 | 13 | 14 | 21 | 122 | 8 | 13 | 16 | 18 | 123 | 8 | 13 | 17 | 21 | |
| 124 | 8 | 13 | 18 | 23 | 125 | 9 | 11 | 13 | 18 | 126 | 9 | 12 | 14 | 20 | |
| 127 | 9 | 12 | 14 | 22 | 128 | 9 | 13 | 16 | 23 | 129 | 9 | 16 | 20 | 23 | |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 130 | 9 | 16 | 22 | 23 | 131 | 11 | 12 | 18 | 21 | 132 | 11 | 13 | 18 | 20 | |
| 133 | 11 | 13 | 18 | 22 | 134 | 11 | 14 | 18 | 21 | 135 | 11 | 17 | 18 | 21 | |
| 136 | 12 | 13 | 14 | 20 | 137 | 12 | 13 | 14 | 22 | 138 | 12 | 16 | 17 | 23 | |
| 139 | 12 | 17 | 20 | 22 | 140 | 12 | 20 | 21 | 22 | 141 | 14 | 16 | 17 | 23 | |
| 142 | 14 | 17 | 20 | 22 | 143 | 14 | 20 | 21 | 22 | 144 | 16 | 17 | 21 | 23 | |

74

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 | 16 | 2 | 2 | 3 | 5 | 23 | 3 | 2 | 3 | 7 | 17 | |
| 4 | 2 | 3 | 7 | 21 | 5 | 2 | 3 | 16 | 23 | 6 | 2 | 3 | 17 | 21 | |
| 7 | 2 | 4 | 5 | 11 | 8 | 2 | 4 | 5 | 18 | 9 | 2 | 4 | 8 | 9 | |
| 10 | 2 | 4 | 8 | 13 | 11 | 2 | 4 | 9 | 13 | 12 | 2 | 4 | 11 | 18 | |
| 13 | 2 | 5 | 7 | 11 | 14 | 2 | 5 | 7 | 18 | 15 | 2 | 5 | 8 | 16 | |
| 16 | 2 | 5 | 8 | 23 | 17 | 2 | 5 | 9 | 11 | 18 | 2 | 5 | 9 | 18 | |
| 19 | 2 | 5 | 11 | 17 | 20 | 2 | 5 | 13 | 16 | 21 | 2 | 5 | 13 | 23 | |
| 22 | 2 | 5 | 16 | 21 | 23 | 2 | 5 | 17 | 18 | 24 | 2 | 5 | 21 | 23 | |
| 25 | 2 | 7 | 11 | 18 | 26 | 2 | 7 | 17 | 21 | 27 | 2 | 8 | 9 | 13 | |
| 28 | 2 | 8 | 16 | 23 | 29 | 2 | 9 | 11 | 18 | 30 | 2 | 11 | 17 | 18 | |
| 31 | 2 | 13 | 16 | 23 | 32 | 2 | 16 | 21 | 23 | 33 | 3 | 4 | 9 | 20 | |
| 34 | 3 | 4 | 9 | 22 | 35 | 3 | 4 | 12 | 14 | 36 | 3 | 4 | 12 | 21 | |
| 37 | 3 | 4 | 14 | 21 | 38 | 3 | 4 | 20 | 22 | 39 | 3 | 5 | 7 | 17 | |
| 40 | 3 | 5 | 7 | 21 | 41 | 3 | 5 | 16 | 23 | 42 | 3 | 5 | 17 | 21 | |
| 43 | 3 | 7 | 17 | 20 | 44 | 3 | 7 | 17 | 22 | 45 | 3 | 7 | 20 | 21 | |
| 46 | 3 | 7 | 21 | 22 | 47 | 3 | 9 | 12 | 14 | 48 | 3 | 9 | 12 | 21 | |
| 49 | 3 | 9 | 14 | 21 | 50 | 3 | 9 | 20 | 22 | 51 | 3 | 12 | 14 | 16 | |
| 52 | 3 | 12 | 14 | 23 | 53 | 3 | 12 | 16 | 21 | 54 | 3 | 12 | 21 | 23 | |
| 55 | 3 | 14 | 16 | 21 | 56 | 3 | 14 | 21 | 23 | 57 | 3 | 17 | 20 | 21 | |
| 58 | 3 | 17 | 21 | 22 | 59 | 4 | 5 | 8 | 9 | 60 | 4 | 5 | 8 | 13 | |
| 61 | 4 | 5 | 9 | 13 | 62 | 4 | 5 | 11 | 18 | 63 | 4 | 8 | 9 | 12 | |
| 64 | 4 | 8 | 9 | 14 | 65 | 4 | 8 | 12 | 13 | 66 | 4 | 8 | 13 | 14 | |
| 67 | 4 | 9 | 11 | 20 | 68 | 4 | 9 | 11 | 22 | 69 | 4 | 9 | 12 | 13 | |
| 70 | 4 | 9 | 13 | 14 | 71 | 4 | 9 | 18 | 20 | 72 | 4 | 9 | 18 | 22 | |
| 73 | 4 | 9 | 20 | 21 | 74 | 4 | 9 | 21 | 22 | 75 | 4 | 11 | 20 | 22 | |
| 76 | 4 | 12 | 14 | 21 | 77 | 4 | 18 | 20 | 22 | 78 | 4 | 20 | 21 | 22 | |
| 79 | 5 | 7 | 11 | 18 | 80 | 5 | 7 | 17 | 21 | 81 | 5 | 8 | 9 | 13 | |
| 82 | 5 | 8 | 16 | 23 | 83 | 5 | 9 | 11 | 18 | 84 | 5 | 11 | 17 | 18 | |
| 85 | 5 | 13 | 16 | 23 | 86 | 5 | 16 | 21 | 23 | 87 | 7 | 8 | 12 | 14 | |
| 88 | 7 | 8 | 12 | 17 | 89 | 7 | 8 | 13 | 20 | 90 | 7 | 8 | 13 | 22 | |
| 91 | 7 | 8 | 14 | 17 | 92 | 7 | 8 | 20 | 22 | 93 | 7 | 11 | 12 | 14 | |
| 94 | 7 | 11 | 12 | 17 | 95 | 7 | 11 | 14 | 17 | 96 | 7 | 12 | 13 | 14 | |
| 97 | 7 | 12 | 13 | 17 | 98 | 7 | 12 | 14 | 18 | 99 | 7 | 12 | 17 | 18 | |
| 100 | 7 | 13 | 14 | 17 | 101 | 7 | 13 | 20 | 22 | 102 | 7 | 14 | 17 | 18 | |
| 103 | 7 | 17 | 20 | 21 | 104 | 7 | 17 | 21 | 22 | 105 | 8 | 9 | 12 | 13 | |
| 106 | 8 | 9 | 13 | 14 | 107 | 8 | 12 | 14 | 17 | 108 | 8 | 13 | 16 | 20 | |
| 109 | 8 | 13 | 16 | 22 | 110 | 8 | 13 | 17 | 20 | 111 | 8 | 13 | 17 | 22 | |
| 112 | 8 | 13 | 20 | 23 | 113 | 8 | 13 | 22 | 23 | 114 | 8 | 16 | 20 | 22 | |
| 115 | 8 | 17 | 20 | 22 | 116 | 8 | 20 | 22 | 23 | 117 | 9 | 11 | 20 | 22 | |
| 118 | 9 | 12 | 14 | 21 | 119 | 9 | 18 | 20 | 22 | 120 | 9 | 20 | 21 | 22 | |
| 121 | 11 | 12 | 14 | 17 | 122 | 11 | 12 | 16 | 18 | 123 | 11 | 12 | 16 | 23 | |
| 124 | 11 | 12 | 18 | 23 | 125 | 11 | 14 | 16 | 18 | 126 | 11 | 14 | 16 | 23 | |
| 127 | 11 | 14 | 18 | 23 | 128 | 11 | 16 | 18 | 20 | 129 | 11 | 16 | 18 | 22 | |
| 130 | 11 | 16 | 20 | 23 | 131 | 11 | 16 | 22 | 23 | 132 | 11 | 18 | 20 | 23 | |
| 133 | 11 | 18 | 22 | 23 | 134 | 12 | 13 | 14 | 17 | 135 | 12 | 14 | 16 | 21 | |
| 136 | 12 | 14 | 17 | 18 | 137 | 12 | 14 | 21 | 23 | 138 | 12 | 16 | 18 | 23 | |
| 139 | 13 | 16 | 20 | 22 | 140 | 13 | 17 | 20 | 22 | 141 | 13 | 20 | 22 | 23 | |
| 142 | 14 | 16 | 18 | 23 | 143 | 16 | 18 | 20 | 23 | 144 | 16 | 18 | 22 | 23 | |

75

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 | 20 | 2 | 2 | 3 | 5 | 22 | 3 | 2 | 3 | 8 | 13 | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 3 | 8 | 21 | 5 | 2 | 3 | 13 | 21 | 6 | 2 | 3 | 20 | 22 | 4 | 2 | 3 | 9 | 11 |
| 7 | 2 | 4 | 5 | 12 | 8 | 2 | 4 | 5 | 14 | 9 | 2 | 4 | 7 | 9 | 7 | 2 | 3 | 9 | 14 |
| 10 | 2 | 4 | 7 | 17 | 11 | 2 | 4 | 9 | 17 | 12 | 2 | 4 | 12 | 14 | 10 | 2 | 3 | 9 | 18 |
| 13 | 2 | 5 | 7 | 20 | 14 | 2 | 5 | 7 | 22 | 15 | 2 | 5 | 8 | 12 | 13 | 2 | 3 | 9 | 23 |
| 16 | 2 | 5 | 8 | 14 | 17 | 2 | 5 | 9 | 12 | 18 | 2 | 5 | 9 | 14 | 16 | 2 | 3 | 22 | 23 |
| 19 | 2 | 5 | 12 | 13 | 20 | 2 | 5 | 13 | 14 | 21 | 2 | 5 | 17 | 20 | 19 | 2 | 4 | 8 | 21 |
| 22 | 2 | 5 | 17 | 22 | 23 | 2 | 5 | 20 | 21 | 24 | 2 | 5 | 21 | 22 | 22 | 2 | 4 | 12 | 21 |
| 25 | 2 | 7 | 9 | 17 | 26 | 2 | 7 | 20 | 22 | 27 | 2 | 8 | 12 | 14 | 25 | 2 | 4 | 14 | 18 |
| 28 | 2 | 8 | 13 | 21 | 29 | 2 | 9 | 12 | 14 | 30 | 2 | 12 | 13 | 14 | 28 | 2 | 4 | 17 | 21 |
| 31 | 2 | 17 | 20 | 22 | 32 | 2 | 20 | 21 | 22 | 33 | 3 | 4 | 9 | 16 | 31 | 2 | 4 | 21 | 22 |
| 34 | 3 | 4 | 9 | 23 | 35 | 3 | 4 | 11 | 18 | 36 | 3 | 4 | 11 | 21 | 34 | 2 | 7 | 8 | 11 |
| 37 | 3 | 4 | 16 | 23 | 38 | 3 | 4 | 18 | 21 | 39 | 3 | 5 | 8 | 13 | 37 | 2 | 7 | 8 | 16 |
| 40 | 3 | 5 | 8 | 21 | 41 | 3 | 5 | 13 | 21 | 42 | 3 | 5 | 20 | 22 | 40 | 2 | 7 | 8 | 21 |
| 43 | 3 | 8 | 13 | 16 | 44 | 3 | 8 | 13 | 23 | 45 | 3 | 8 | 16 | 21 | 43 | 2 | 7 | 11 | 22 |
| 46 | 3 | 8 | 21 | 23 | 47 | 3 | 9 | 11 | 18 | 48 | 3 | 9 | 11 | 21 | 46 | 2 | 8 | 14 | 16 |
| 49 | 3 | 9 | 16 | 23 | 50 | 3 | 9 | 18 | 21 | 51 | 3 | 11 | 18 | 20 | 49 | 2 | 9 | 13 | 17 |
| 52 | 3 | 11 | 18 | 22 | 53 | 3 | 11 | 20 | 21 | 54 | 3 | 11 | 21 | 22 | 52 | 2 | 12 | 13 | 16 |
| 55 | 3 | 13 | 16 | 21 | 56 | 3 | 13 | 21 | 23 | 57 | 3 | 18 | 20 | 21 | 55 | 2 | 13 | 14 | 23 |
| 58 | 3 | 18 | 21 | 22 | 59 | 4 | 5 | 7 | 9 | 60 | 4 | 5 | 7 | 17 | 58 | 2 | 13 | 17 | 20 |
| 61 | 4 | 5 | 9 | 17 | 62 | 4 | 5 | 12 | 14 | 63 | 4 | 7 | 9 | 11 | 61 | 2 | 13 | 17 | 23 |
| 64 | 4 | 7 | 9 | 18 | 65 | 4 | 7 | 11 | 17 | 66 | 4 | 7 | 17 | 18 | 64 | 2 | 20 | 21 | 23 |
| 67 | 4 | 9 | 11 | 17 | 68 | 4 | 9 | 12 | 16 | 69 | 4 | 9 | 12 | 23 | 67 | 3 | 4 | 5 | 11 |
| 70 | 4 | 9 | 14 | 16 | 71 | 4 | 9 | 14 | 23 | 72 | 4 | 9 | 16 | 21 | 70 | 3 | 4 | 5 | 14 |
| 73 | 4 | 9 | 17 | 18 | 74 | 4 | 9 | 21 | 23 | 75 | 4 | 11 | 18 | 21 | 73 | 3 | 4 | 5 | 18 |
| 76 | 4 | 12 | 16 | 23 | 77 | 4 | 14 | 16 | 23 | 78 | 4 | 16 | 21 | 23 | 76 | 3 | 4 | 5 | 23 |
| 79 | 5 | 7 | 9 | 17 | 80 | 5 | 7 | 20 | 22 | 81 | 5 | 8 | 12 | 14 | 79 | 3 | 4 | 16 | 20 |
| 82 | 5 | 8 | 13 | 21 | 83 | 5 | 9 | 12 | 14 | 84 | 5 | 12 | 13 | 14 | 82 | 3 | 5 | 8 | 17 |
| 85 | 5 | 17 | 20 | 22 | 86 | 5 | 20 | 21 | 22 | 87 | 7 | 8 | 11 | 13 | 85 | 3 | 7 | 11 | 22 |
| 88 | 7 | 8 | 11 | 18 | 89 | 7 | 8 | 13 | 18 | 90 | 7 | 8 | 16 | 17 | 88 | 3 | 7 | 22 | 23 |
| 91 | 7 | 8 | 16 | 23 | 92 | 7 | 8 | 17 | 23 | 93 | 7 | 9 | 11 | 17 | 91 | 3 | 8 | 16 | 20 |
| 94 | 7 | 9 | 17 | 18 | 95 | 7 | 11 | 13 | 18 | 96 | 7 | 13 | 16 | 17 | 94 | 3 | 9 | 12 | 18 |
| 97 | 7 | 13 | 16 | 23 | 98 | 7 | 13 | 17 | 23 | 99 | 7 | 16 | 17 | 20 | 97 | 3 | 11 | 16 | 20 |
| 100 | 7 | 16 | 17 | 22 | 101 | 7 | 16 | 20 | 23 | 102 | 7 | 16 | 22 | 23 | 100 | 3 | 12 | 13 | 16 |
| 103 | 7 | 17 | 20 | 23 | 104 | 7 | 17 | 22 | 23 | 105 | 8 | 11 | 12 | 13 | 103 | 3 | 13 | 14 | 23 |
| 106 | 8 | 11 | 12 | 18 | 107 | 8 | 11 | 13 | 14 | 108 | 8 | 11 | 13 | 17 | 106 | 3 | 14 | 16 | 20 |
| 109 | 8 | 11 | 14 | 18 | 110 | 8 | 11 | 17 | 18 | 111 | 8 | 12 | 13 | 18 | 109 | 3 | 16 | 18 | 20 |
| 112 | 8 | 13 | 14 | 18 | 113 | 8 | 13 | 16 | 21 | 114 | 8 | 13 | 17 | 18 | 112 | 3 | 18 | 22 | 23 |
| 115 | 8 | 13 | 21 | 23 | 116 | 8 | 16 | 17 | 23 | 117 | 9 | 11 | 18 | 21 | 115 | 4 | 5 | 11 | 12 |
| 118 | 9 | 12 | 16 | 23 | 119 | 9 | 14 | 16 | 23 | 120 | 9 | 16 | 21 | 23 | 118 | 4 | 7 | 11 | 22 |
| 121 | 11 | 12 | 13 | 18 | 122 | 11 | 12 | 14 | 20 | 123 | 11 | 12 | 14 | 22 | 121 | 4 | 8 | 11 | 12 |
| 124 | 11 | 12 | 20 | 22 | 125 | 11 | 13 | 14 | 18 | 126 | 11 | 13 | 17 | 18 | 124 | 4 | 8 | 14 | 18 |
| 127 | 11 | 14 | 20 | 22 | 128 | 11 | 18 | 20 | 21 | 129 | 11 | 18 | 21 | 22 | 127 | 4 | 11 | 12 | 17 |
| 130 | 12 | 14 | 16 | 20 | 131 | 12 | 14 | 16 | 22 | 132 | 12 | 14 | 18 | 20 | 130 | 4 | 11 | 12 | 22 |
| 133 | 12 | 14 | 18 | 22 | 134 | 12 | 14 | 20 | 23 | 135 | 12 | 14 | 22 | 23 | 133 | 4 | 12 | 13 | 16 |
| 136 | 12 | 16 | 20 | 22 | 137 | 12 | 18 | 20 | 22 | 138 | 12 | 20 | 22 | 23 | 136 | 4 | 14 | 16 | 18 |
| 139 | 13 | 16 | 17 | 23 | 140 | 14 | 16 | 20 | 22 | 141 | 14 | 18 | 20 | 22 | 139 | 4 | 14 | 18 | 21 |
| 142 | 14 | 20 | 22 | 23 | 143 | 16 | 17 | 20 | 23 | 144 | 16 | 17 | 22 | 23 | 142 | 4 | 16 | 21 | 22 |
| 145 | 5 | 7 | 9 | 13 | 146 | 5 | 7 | 9 | 21 | 147 | 5 | 7 | 11 | 13 | 148 | 5 | 7 | 11 | 22 |
| 151 | 5 | 7 | 13 | 16 | 152 | 5 | 7 | 13 | 18 | 153 | 5 | 7 | 13 | 20 | 154 | 5 | 7 | 13 | 21 |
| 157 | 5 | 7 | 18 | 20 | 158 | 5 | 8 | 9 | 17 | 159 | 5 | 8 | 9 | 21 | 160 | 5 | 8 | 11 | 17 |
| 163 | 5 | 8 | 14 | 16 | 164 | 5 | 8 | 14 | 17 | 165 | 5 | 8 | 16 | 17 | 166 | 5 | 8 | 17 | 18 |
| 169 | 5 | 8 | 17 | 22 | 170 | 5 | 8 | 17 | 23 | 171 | 5 | 9 | 11 | 14 | 172 | 5 | 9 | 11 | 21 |
| 175 | 5 | 9 | 13 | 21 | 176 | 5 | 9 | 14 | 21 | 177 | 5 | 9 | 16 | 21 | 178 | 5 | 9 | 17 | 21 |
| 181 | 5 | 9 | 21 | 22 | 182 | 5 | 9 | 21 | 23 | 183 | 5 | 11 | 17 | 20 | | | | | |

76

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 | 21 | 2 | 2 | 4 | 5 | 9 | 3 | 2 | 5 | 7 | 17 |
| 4 | 2 | 5 | 8 | 13 | 5 | 3 | 4 | 9 | 21 | 6 | 3 | 16 | 21 | 23 |
| 7 | 3 | 20 | 21 | 22 | 8 | 4 | 9 | 11 | 18 | 9 | 4 | 9 | 12 | 14 |
| 10 | 7 | 8 | 13 | 17 | 11 | 7 | 11 | 17 | 18 | 12 | 7 | 17 | 20 | 22 |
| 13 | 8 | 12 | 13 | 14 | 14 | 8 | 13 | 16 | 23 | 15 | 11 | 12 | 14 | 18 |
| 16 | 11 | 18 | 20 | 22 | 17 | 12 | 14 | 16 | 23 | 18 | 16 | 20 | 22 | 23 |

77

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 7 | 8 | 2 | 2 | 3 | 7 | 9 | 3 | 2 | 3 | 8 | 9 |

BIUS LILLE

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 184 | 5 | 12 | 13 | 16 |
| 187 | 5 | 17 | 18 | 22 |
| 190 | 7 | 8 | 12 | 23 |
| 193 | 7 | 9 | 11 | 14 |
| 196 | 7 | 9 | 18 | 20 |
| 199 | 7 | 11 | 14 | 22 |
| 202 | 7 | 11 | 22 | 23 |
| 205 | 7 | 13 | 14 | 23 |
| 208 | 7 | 16 | 18 | 20 |
| 211 | 7 | 18 | 20 | 23 |
| 214 | 8 | 9 | 12 | 18 |
| 217 | 8 | 11 | 12 | 23 |
| 220 | 8 | 12 | 17 | 23 |
| 223 | 8 | 12 | 21 | 23 |
| 226 | 8 | 14 | 16 | 18 |
| 229 | 8 | 14 | 16 | 22 |
| 232 | 8 | 20 | 21 | 23 |
| 235 | 9 | 11 | 14 | 17 |
| 238 | 9 | 11 | 14 | 22 |
| 241 | 9 | 12 | 13 | 16 |
| 244 | 9 | 12 | 17 | 18 |
| 247 | 9 | 12 | 18 | 22 |
| 250 | 9 | 16 | 21 | 22 |
| 253 | 11 | 12 | 13 | 16 |
| 256 | 11 | 12 | 17 | 20 |
| 259 | 11 | 16 | 21 | 22 |
| 262 | 11 | 20 | 21 | 23 |
| 265 | 12 | 13 | 16 | 20 |
| 268 | 12 | 16 | 21 | 22 |
| 271 | 13 | 14 | 17 | 23 |
| 274 | 13 | 14 | 21 | 23 |
| 277 | 13 | 17 | 18 | 22 |
| 280 | 14 | 17 | 18 | 22 |
| 283 | 16 | 17 | 21 | 22 |
| 286 | 17 | 18 | 22 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 185 | 5 | 13 | 14 | 23 |
| 188 | 5 | 20 | 21 | 23 |
| 191 | 7 | 8 | 14 | 16 |
| 194 | 7 | 9 | 11 | 22 |
| 197 | 7 | 11 | 12 | 22 |
| 200 | 7 | 11 | 16 | 22 |
| 203 | 7 | 12 | 13 | 16 |
| 206 | 7 | 13 | 18 | 20 |
| 209 | 7 | 16 | 21 | 22 |
| 212 | 7 | 20 | 21 | 23 |
| 215 | 8 | 9 | 12 | 23 |
| 218 | 8 | 11 | 14 | 16 |
| 221 | 8 | 12 | 18 | 23 |
| 224 | 8 | 12 | 22 | 23 |
| 227 | 8 | 14 | 16 | 20 |
| 230 | 8 | 16 | 21 | 22 |
| 233 | 9 | 11 | 13 | 14 |
| 236 | 9 | 11 | 14 | 20 |
| 239 | 9 | 11 | 14 | 23 |
| 242 | 9 | 12 | 13 | 18 |
| 245 | 9 | 12 | 18 | 20 |
| 248 | 9 | 12 | 18 | 23 |
| 251 | 9 | 17 | 18 | 22 |
| 254 | 11 | 12 | 17 | 20 |
| 257 | 11 | 14 | 17 | 20 |
| 260 | 11 | 17 | 20 | 21 |
| 263 | 12 | 13 | 16 | 17 |
| 266 | 12 | 13 | 16 | 21 |
| 269 | 12 | 17 | 18 | 22 |
| 272 | 13 | 14 | 18 | 23 |
| 275 | 13 | 14 | 22 | 23 |
| 278 | 13 | 20 | 21 | 23 |
| 281 | 14 | 20 | 21 | 23 |
| 284 | 16 | 18 | 21 | 22 |
| 287 | 17 | 20 | 21 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 186 | 5 | 16 | 21 | 22 |
| 189 | 7 | 8 | 11 | 22 |
| 192 | 7 | 8 | 18 | 20 |
| 195 | 7 | 9 | 12 | 18 |
| 198 | 7 | 11 | 13 | 22 |
| 201 | 7 | 11 | 21 | 22 |
| 204 | 7 | 12 | 18 | 20 |
| 207 | 7 | 14 | 18 | 20 |
| 210 | 7 | 18 | 20 | 21 |
| 213 | 8 | 9 | 11 | 14 |
| 216 | 8 | 9 | 14 | 16 |
| 219 | 8 | 11 | 17 | 20 |
| 222 | 8 | 12 | 20 | 23 |
| 225 | 8 | 14 | 16 | 17 |
| 228 | 8 | 14 | 16 | 21 |
| 231 | 8 | 17 | 18 | 22 |
| 234 | 9 | 11 | 14 | 16 |
| 237 | 9 | 11 | 14 | 21 |
| 240 | 9 | 11 | 17 | 20 |
| 243 | 9 | 12 | 16 | 18 |
| 246 | 9 | 12 | 18 | 21 |
| 249 | 9 | 13 | 14 | 23 |
| 252 | 9 | 20 | 21 | 23 |
| 255 | 11 | 13 | 14 | 23 |
| 258 | 11 | 16 | 17 | 20 |
| 261 | 11 | 17 | 20 | 23 |
| 264 | 12 | 13 | 16 | 18 |
| 267 | 12 | 13 | 16 | 22 |
| 270 | 12 | 20 | 21 | 23 |
| 273 | 13 | 14 | 20 | 23 |
| 276 | 13 | 16 | 21 | 22 |
| 279 | 14 | 16 | 21 | 22 |
| 282 | 16 | 17 | 18 | 22 |
| 285 | 17 | 18 | 21 | 22 |
| 288 | 18 | 20 | 21 | 23 |

78

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 7 | 11 |
| 4 | 2 | 3 | 7 | 23 |
| 7 | 2 | 3 | 12 | 23 |
| 10 | 2 | 3 | 16 | 17 |
| 13 | 2 | 4 | 8 | 11 |
| 16 | 2 | 4 | 8 | 23 |
| 19 | 2 | 4 | 11 | 22 |
| 22 | 2 | 4 | 13 | 23 |
| 25 | 2 | 7 | 11 | 12 |
| 28 | 2 | 7 | 12 | 18 |
| 31 | 2 | 7 | 18 | 21 |
| 34 | 2 | 8 | 9 | 16 |
| 37 | 2 | 8 | 16 | 20 |
| 40 | 2 | 8 | 22 | 23. |
| 43 | 2 | 9 | 11 | 22 |
| 46 | 2 | 9 | 13 | 23 |
| 49 | 2 | 11 | 12 | 17 |
| 52 | 2 | 12 | 16 | 21 |
| 55 | 2 | 13 | 16 | 20 |
| 58 | 2 | 13 | 22 | 23 |
| 61 | 2 | 14 | 21 | 23 |
| 64 | 2 | 17 | 21 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 3 | 7 | 16 |
| 5 | 2 | 3 | 11 | 17 |
| 8 | 2 | 3 | 14 | 16 |
| 11 | 2 | 3 | 17 | 18 |
| 14 | 2 | 4 | 8 | 16 |
| 17 | 2 | 4 | 11 | 13 |
| 20 | 2 | 4 | 13 | 16 |
| 23 | 2 | 4 | 18 | 20 |
| 26 | 2 | 7 | 11 | 14 |
| 29 | 2 | 7 | 14 | 18 |
| 32 | 2 | 7 | 21 | 23 |
| 35 | 2 | 8 | 9 | 18 |
| 38 | 2 | 8 | 16 | 22 |
| 41 | 2 | 9 | 11 | 13 |
| 44 | 2 | 9 | 13 | 16 |
| 47 | 2 | 9 | 18 | 20 |
| 50 | 2 | 11 | 14 | 17 |
| 53 | 2 | 12 | 17 | 18 |
| 56 | 2 | 13 | 16 | 22 |
| 59 | 2 | 14 | 16 | 21 |
| 62 | 2 | 16 | 17 | 21 |
| 65 | 3 | 4 | 7 | 20 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 3 | 7 | 18 |
| 6 | 2 | 3 | 12 | 16 |
| 9 | 2 | 3 | 14 | 23 |
| 12 | 2 | 3 | 17 | 23 |
| 15 | 2 | 4 | 8 | 18 |
| 18 | 2 | 4 | 11 | 20 |
| 21 | 2 | 4 | 13 | 18 |
| 24 | 2 | 4 | 18 | 22 |
| 27 | 2 | 7 | 11 | 21 |
| 30 | 2 | 7 | 16 | 21 |
| 33 | 2 | 8 | 9 | 11 |
| 36 | 2 | 8 | 9 | 23 |
| 39 | 2 | 8 | 20 | 23 |
| 42 | 2 | 9 | 11 | 20 |
| 45 | 2 | 9 | 13 | 18 |
| 48 | 2 | 9 | 18 | 22 |
| 51 | 2 | 11 | 17 | 21 |
| 54 | 2 | 12 | 21 | 23 |
| 57 | 2 | 13 | 20 | 23 |
| 60 | 2 | 14 | 17 | 18 |
| 63 | 2 | 17 | 18 | 21 |
| 66 | 3 | 4 | 7 | 22 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 67 | 3 | 4 | 8 | 12 |
| 70 | 3 | 4 | 12 | 20 |
| 73 | 3 | 4 | 14 | 20 |
| 76 | 3 | 4 | 17 | 22 |
| 79 | 3 | 5 | 7 | 18 |
| 82 | 3 | 5 | 12 | 16 |
| 85 | 3 | 5 | 14 | 23 |
| 88 | 3 | 5 | 17 | 23 |
| 91 | 3 | 7 | 9 | 20 |
| 94 | 3 | 7 | 13 | 22 |
| 97 | 3 | 8 | 17 | 20 |
| 100 | 3 | 9 | 12 | 20 |
| 103 | 3 | 9 | 14 | 20 |
| 106 | 3 | 9 | 17 | 22 |
| 109 | 3 | 11 | 14 | 16 |
| 112 | 3 | 12 | 18 | 23 |
| 115 | 3 | 14 | 16 | 18 |
| 118 | 4 | 5 | 8 | 16 |
| 121 | 4 | 5 | 11 | 13 |
| 124 | 4 | 5 | 13 | 16 |
| 127 | 4 | 5 | 18 | 20 |
| 130 | 4 | 7 | 8 | 14 |
| 133 | 4 | 7 | 20 | 21 |
| 136 | 4 | 8 | 12 | 21 |
| 139 | 4 | 11 | 16 | 20 |
| 142 | 4 | 11 | 22 | 23 |
| 145 | 4 | 12 | 20 | 21 |
| 148 | 4 | 13 | 14 | 21 |
| 151 | 4 | 16 | 18 | 20 |
| 154 | 4 | 17 | 21 | 22 |
| 157 | 5 | 7 | 11 | 12 |
| 160 | 5 | 7 | 12 | 18 |
| 163 | 5 | 7 | 18 | 21 |
| 166 | 5 | 8 | 9 | 16 |
| 169 | 5 | 8 | 16 | 20 |
| 172 | 5 | 8 | 22 | 23 |
| 175 | 5 | 9 | 11 | 22 |
| 178 | 5 | 9 | 13 | 23 |
| 181 | 5 | 11 | 12 | 17 |
| 184 | 5 | 12 | 16 | 21 |
| 187 | 5 | 13 | 16 | 20 |
| 190 | 5 | 13 | 22 | 23 |
| 193 | 5 | 14 | 21 | 23 |
| 196 | 5 | 17 | 21 | 23 |
| 199 | 7 | 8 | 12 | 20 |
| 202 | 7 | 8 | 14 | 22 |
| 205 | 7 | 9 | 12 | 13 |
| 208 | 7 | 9 | 21 | 22 |
| 211 | 7 | 11 | 14 | 16 |
| 214 | 7 | 12 | 13 | 22 |
| 217 | 7 | 13 | 14 | 20 |
| 220 | 7 | 13 | 21 | 22 |
| 223 | 8 | 9 | 12 | 17 |
| 226 | 8 | 9 | 14 | 21 |
| 229 | 8 | 11 | 20 | 23 |
| 232 | 8 | 12 | 17 | 22 |
| 235 | 8 | 16 | 18 | 20 |
| 238 | 8 | 17 | 21 | 22 |
| 241 | 9 | 11 | 16 | 20 |
| 244 | 9 | 11 | 22 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 68 | 3 | 4 | 8 | 14 |
| 71 | 3 | 4 | 12 | 22 |
| 74 | 3 | 4 | 14 | 22 |
| 77 | 3 | 5 | 7 | 11 |
| 80 | 3 | 5 | 7 | 23 |
| 83 | 3 | 5 | 12 | 23 |
| 86 | 3 | 5 | 16 | 17 |
| 89 | 3 | 7 | 8 | 20 |
| 92 | 3 | 7 | 9 | 22 |
| 95 | 3 | 8 | 9 | 12 |
| 98 | 3 | 8 | 17 | 22 |
| 101 | 3 | 9 | 12 | 22 |
| 104 | 3 | 9 | 14 | 22 |
| 107 | 3 | 11 | 12 | 16 |
| 110 | 3 | 11 | 14 | 23 |
| 113 | 3 | 13 | 17 | 20 |
| 116 | 3 | 14 | 18 | 23 |
| 119 | 4 | 5 | 8 | 18 |
| 122 | 4 | 5 | 11 | 20 |
| 125 | 4 | 5 | 13 | 18 |
| 128 | 4 | 5 | 18 | 22 |
| 131 | 4 | 7 | 12 | 13 |
| 134 | 4 | 7 | 21 | 22 |
| 137 | 4 | 8 | 14 | 17 |
| 140 | 4 | 11 | 16 | 22 |
| 143 | 4 | 12 | 13 | 17 |
| 146 | 4 | 12 | 21 | 22 |
| 149 | 4 | 14 | 20 | 21 |
| 152 | 4 | 16 | 18 | 22 |
| 155 | 4 | 18 | 20 | 23 |
| 158 | 5 | 7 | 11 | 14 |
| 161 | 5 | 7 | 14 | 18 |
| 164 | 5 | 7 | 21 | 23 |
| 167 | 5 | 8 | 9 | 18 |
| 170 | 5 | 8 | 16 | 22 |
| 173 | 5 | 9 | 11 | 13 |
| 176 | 5 | 9 | 13 | 16 |
| 179 | 5 | 9 | 18 | 20 |
| 182 | 5 | 11 | 14 | 17 |
| 185 | 5 | 12 | 17 | 18 |
| 188 | 5 | 13 | 16 | 22 |
| 191 | 5 | 14 | 16 | 21 |
| 194 | 5 | 16 | 17 | 21 |
| 197 | 7 | 8 | 9 | 12 |
| 200 | 7 | 8 | 12 | 22 |
| 203 | 7 | 8 | 20 | 21 |
| 206 | 7 | 9 | 13 | 14 |
| 209 | 7 | 11 | 12 | 16 |
| 212 | 7 | 11 | 14 | 23 |
| 215 | 7 | 12 | 16 | 18 |
| 218 | 7 | 13 | 14 | 22 |
| 221 | 7 | 14 | 16 | 18 |
| 224 | 8 | 9 | 12 | 21 |
| 227 | 8 | 11 | 16 | 20 |
| 230 | 8 | 11 | 22 | 23 |
| 233 | 8 | 14 | 17 | 20 |
| 236 | 8 | 16 | 18 | 22 |
| 239 | 8 | 18 | 20 | 23 |
| 242 | 9 | 11 | 16 | 22 |
| 245 | 9 | 12 | 13 | 17 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 69 | 3 | 4 | 12 | 13 |
| 72 | 3 | 4 | 13 | 14 |
| 75 | 3 | 4 | 17 | 20 |
| 78 | 3 | 5 | 7 | 16 |
| 81 | 3 | 5 | 11 | 17 |
| 84 | 3 | 5 | 14 | 16 |
| 87 | 3 | 5 | 17 | 18 |
| 90 | 3 | 7 | 8 | 22 |
| 93 | 3 | 7 | 13 | 20 |
| 96 | 3 | 8 | 9 | 14 |
| 99 | 3 | 9 | 12 | 13 |
| 102 | 3 | 9 | 13 | 14 |
| 105 | 3 | 9 | 17 | 20 |
| 108 | 3 | 11 | 12 | 23 |
| 111 | 3 | 12 | 16 | 18 |
| 114 | 3 | 13 | 17 | 22 |
| 117 | 4 | 5 | 8 | 11 |
| 120 | 4 | 5 | 8 | 23 |
| 123 | 4 | 5 | 11 | 22 |
| 126 | 4 | 5 | 13 | 23 |
| 129 | 4 | 7 | 8 | 12 |
| 132 | 4 | 7 | 13 | 14 |
| 135 | 4 | 8 | 12 | 17 |
| 138 | 4 | 8 | 14 | 21 |
| 141 | 4 | 11 | 20 | 23 |
| 144 | 4 | 12 | 13 | 21 |
| 147 | 4 | 13 | 14 | 17 |
| 150 | 4 | 14 | 21 | 22 |
| 153 | 4 | 17 | 20 | 21 |
| 156 | 4 | 18 | 22 | 23 |
| 159 | 5 | 7 | 11 | 21 |
| 162 | 5 | 7 | 16 | 21 |
| 165 | 5 | 8 | 9 | 11 |
| 168 | 5 | 8 | 9 | 23 |
| 171 | 5 | 8 | 20 | 23 |
| 174 | 5 | 9 | 11 | 20 |
| 177 | 5 | 9 | 13 | 18 |
| 180 | 5 | 9 | 18 | 22 |
| 183 | 5 | 11 | 17 | 21 |
| 186 | 5 | 12 | 21 | 23 |
| 189 | 5 | 13 | 20 | 23 |
| 192 | 5 | 14 | 17 | 18 |
| 195 | 5 | 17 | 18 | 21 |
| 198 | 7 | 8 | 9 | 14 |
| 201 | 7 | 8 | 14 | 20 |
| 204 | 7 | 8 | 21 | 22 |
| 207 | 7 | 9 | 20 | 21 |
| 210 | 7 | 11 | 12 | 23 |
| 213 | 7 | 12 | 13 | 20 |
| 216 | 7 | 12 | 18 | 23 |
| 219 | 7 | 13 | 20 | 21 |
| 222 | 7 | 14 | 18 | 23 |
| 225 | 8 | 9 | 14 | 17 |
| 228 | 8 | 11 | 16 | 22 |
| 231 | 8 | 12 | 17 | 20 |
| 234 | 8 | 14 | 17 | 22 |
| 237 | 8 | 17 | 20 | 21 |
| 240 | 8 | 18 | 22 | 23 |
| 243 | 9 | 11 | 20 | 23 |
| 246 | 9 | 12 | 13 | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 247 | 9 | 12 | 20 | 21 |
| 250 | 9 | 13 | 14 | 21 |
| 253 | 9 | 16 | 18 | 20 |
| 256 | 9 | 17 | 21 | 22 |
| 259 | 11 | 12 | 16 | 17 |
| 262 | 11 | 12 | 21 | 23 |
| 265 | 11 | 13 | 20 | 23 |
| 268 | 11 | 14 | 16 | 21 |
| 271 | 12 | 13 | 17 | 20 |
| 274 | 12 | 16 | 18 | 21 |
| 277 | 13 | 14 | 17 | 20 |
| 280 | 13 | 16 | 18 | 22 |
| 283 | 13 | 18 | 20 | 23 |
| 286 | 14 | 16 | 18 | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 248 | 9 | 12 | 21 | 22 |
| 251 | 9 | 14 | 20 | 21 |
| 254 | 9 | 16 | 18 | 22 |
| 257 | 9 | 18 | 20 | 23 |
| 260 | 11 | 12 | 16 | 21 |
| 263 | 11 | 13 | 16 | 20 |
| 266 | 11 | 13 | 22 | 23 |
| 269 | 11 | 14 | 17 | 23 |
| 272 | 12 | 13 | 17 | 22 |
| 275 | 12 | 17 | 18 | 23 |
| 278 | 13 | 14 | 17 | 22 |
| 281 | 13 | 17 | 20 | 21 |
| 284 | 13 | 18 | 22 | 23 |
| 287 | 14 | 17 | 18 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 249 | 9 | 13 | 14 | 17 |
| 252 | 9 | 14 | 21 | 22 |
| 255 | 9 | 17 | 20 | 21 |
| 258 | 9 | 18 | 22 | 23 |
| 261 | 11 | 12 | 17 | 23 |
| 264 | 11 | 13 | 16 | 22 |
| 267 | 11 | 14 | 16 | 17 |
| 270 | 11 | 14 | 21 | 23 |
| 273 | 12 | 16 | 17 | 18 |
| 276 | 12 | 18 | 21 | 23 |
| 279 | 13 | 16 | 18 | 20 |
| 282 | 13 | 17 | 21 | 22 |
| 285 | 14 | 16 | 17 | 18 |
| 288 | 14 | 18 | 21 | 23 |

79

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 7 | 12 |
| 4 | 2 | 3 | 11 | 23 |
| 7 | 2 | 3 | 16 | 18 |
| 10 | 2 | 4 | 8 | 22 |
| 13 | 2 | 4 | 13 | 20 |
| 16 | 2 | 4 | 18 | 23 |
| 19 | 2 | 7 | 12 | 21 |
| 22 | 2 | 7 | 18 | 23 |
| 25 | 2 | 8 | 11 | 16 |
| 28 | 2 | 8 | 18 | 23 |
| 31 | 2 | 9 | 13 | 20 |
| 34 | 2 | 9 | 18 | 23 |
| 37 | 2 | 11 | 13 | 16 |
| 40 | 2 | 11 | 14 | 23 |
| 43 | 2 | 11 | 16 | 21 |
| 46 | 2 | 11 | 20 | 23 |
| 49 | 2 | 12 | 16 | 18 |
| 52 | 2 | 13 | 16 | 18 |
| 55 | 2 | 14 | 17 | 21 |
| 58 | 2 | 16 | 18 | 20 |
| 61 | 2 | 17 | 18 | 23 |
| 64 | 2 | 18 | 22 | 23 |
| 67 | 3 | 4 | 8 | 20 |
| 70 | 3 | 4 | 13 | 20 |
| 73 | 3 | 5 | 7 | 12 |
| 76 | 3 | 5 | 11 | 23 |
| 79 | 3 | 5 | 16 | 18 |
| 82 | 3 | 7 | 8 | 14 |
| 85 | 3 | 7 | 11 | 12 |
| 88 | 3 | 7 | 12 | 16 |
| 91 | 3 | 7 | 12 | 22 |
| 94 | 3 | 7 | 14 | 16 |
| 97 | 3 | 7 | 14 | 22 |
| 100 | 3 | 8 | 9 | 22 |
| 103 | 3 | 9 | 12 | 17 |
| 106 | 3 | 9 | 14 | 17 |
| 109 | 3 | 12 | 13 | 17 |
| 112 | 3 | 12 | 17 | 20 |
| 115 | 3 | 13 | 14 | 17 |
| 118 | 3 | 14 | 17 | 20 |
| 121 | 4 | 5 | 8 | 20 |
| 124 | 4 | 5 | 11 | 23 |
| 127 | 4 | 5 | 16 | 18 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 3 | 7 | 14 |
| 5 | 2 | 3 | 12 | 17 |
| 8 | 2 | 3 | 18 | 23 |
| 11 | 2 | 4 | 11 | 16 |
| 14 | 2 | 4 | 13 | 22 |
| 17 | 2 | 7 | 11 | 16 |
| 20 | 2 | 7 | 14 | 21 |
| 23 | 2 | 8 | 9 | 20 |
| 26 | 2 | 8 | 11 | 23 |
| 29 | 2 | 9 | 11 | 16 |
| 32 | 2 | 9 | 13 | 22 |
| 35 | 2 | 11 | 12 | 16 |
| 38 | 2 | 11 | 13 | 23 |
| 41 | 2 | 11 | 16 | 17 |
| 44 | 2 | 11 | 16 | 22 |
| 47 | 2 | 11 | 21 | 23 |
| 50 | 2 | 12 | 17 | 21 |
| 53 | 2 | 13 | 18 | 23 |
| 56 | 2 | 14 | 18 | 23 |
| 59 | 2 | 16 | 18 | 21 |
| 62 | 2 | 18 | 20 | 23 |
| 65 | 3 | 4 | 7 | 12 |
| 68 | 3 | 4 | 8 | 22 |
| 71 | 3 | 4 | 13 | 22 |
| 74 | 3 | 5 | 7 | 14 |
| 77 | 3 | 5 | 12 | 17 |
| 80 | 3 | 5 | 18 | 23 |
| 83 | 3 | 7 | 9 | 12 |
| 86 | 3 | 7 | 11 | 14 |
| 89 | 3 | 7 | 12 | 18 |
| 92 | 3 | 7 | 12 | 23 |
| 95 | 3 | 7 | 14 | 18 |
| 98 | 3 | 7 | 14 | 23 |
| 101 | 3 | 8 | 12 | 17 |
| 104 | 3 | 9 | 13 | 20 |
| 107 | 3 | 11 | 12 | 17 |
| 110 | 3 | 12 | 16 | 17 |
| 113 | 3 | 12 | 17 | 22 |
| 116 | 3 | 14 | 16 | 17 |
| 119 | 3 | 14 | 17 | 22 |
| 122 | 4 | 5 | 8 | 22 |
| 125 | 4 | 5 | 13 | 20 |
| 128 | 4 | 5 | 18 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 3 | 11 | 16 |
| 6 | 2 | 3 | 14 | 17 |
| 9 | 2 | 4 | 8 | 20 |
| 12 | 2 | 4 | 11 | 23 |
| 15 | 2 | 4 | 16 | 18 |
| 18 | 2 | 7 | 11 | 23 |
| 21 | 2 | 7 | 16 | 18 |
| 24 | 2 | 8 | 9 | 22 |
| 27 | 2 | 8 | 16 | 18 |
| 30 | 2 | 9 | 11 | 23 |
| 33 | 2 | 9 | 16 | 18 |
| 36 | 2 | 11 | 12 | 23 |
| 39 | 2 | 11 | 14 | 16 |
| 42 | 2 | 11 | 16 | 20 |
| 45 | 2 | 11 | 17 | 23 |
| 48 | 2 | 11 | 22 | 23 |
| 51 | 2 | 12 | 18 | 23 |
| 54 | 2 | 14 | 16 | 18 |
| 57 | 2 | 16 | 17 | 18 |
| 60 | 2 | 16 | 18 | 22 |
| 63 | 2 | 18 | 21 | 23 |
| 66 | 3 | 4 | 7 | 14 |
| 69 | 3 | 4 | 12 | 17 |
| 72 | 3 | 4 | 14 | 17 |
| 75 | 3 | 5 | 11 | 16 |
| 78 | 3 | 5 | 14 | 17 |
| 81 | 3 | 7 | 8 | 12 |
| 84 | 3 | 7 | 9 | 14 |
| 87 | 3 | 7 | 12 | 13 |
| 90 | 3 | 7 | 12 | 20 |
| 93 | 3 | 7 | 13 | 14 |
| 96 | 3 | 7 | 14 | 20 |
| 99 | 3 | 8 | 9 | 20 |
| 102 | 3 | 8 | 14 | 17 |
| 105 | 3 | 9 | 13 | 22 |
| 108 | 3 | 11 | 14 | 17 |
| 111 | 3 | 12 | 17 | 18 |
| 114 | 3 | 12 | 17 | 23 |
| 117 | 3 | 14 | 17 | 18 |
| 120 | 3 | 14 | 17 | 23 |
| 123 | 4 | 5 | 11 | 16 |
| 126 | 4 | 5 | 13 | 22 |
| 129 | 4 | 7 | 8 | 20 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 130 | 4 | 7 | 8 | 22 |
| 133 | 4 | 7 | 13 | 22 |
| 136 | 4 | 8 | 11 | 22 |
| 139 | 4 | 8 | 14 | 20 |
| 142 | 4 | 8 | 16 | 22 |
| 145 | 4 | 8 | 18 | 20 |
| 148 | 4 | 8 | 20 | 23 |
| 151 | 4 | 11 | 13 | 20 |
| 154 | 4 | 12 | 13 | 22 |
| 157 | 4 | 13 | 14 | 22 |
| 160 | 4 | 13 | 17 | 20 |
| 163 | 4 | 13 | 18 | 22 |
| 166 | 4 | 13 | 21 | 22 |
| 169 | 5 | 7 | 11 | 16 |
| 172 | 5 | 7 | 14 | 21 |
| 175 | 5 | 8 | 9 | 20 |
| 178 | 5 | 8 | 11 | 23 |
| 181 | 5 | 9 | 11 | 16 |
| 184 | 5 | 9 | 13 | 22 |
| 187 | 5 | 11 | 12 | 16 |
| 190 | 5 | 11 | 13 | 23 |
| 193 | 5 | 11 | 16 | 17 |
| 196 | 5 | 11 | 16 | 22 |
| 199 | 5 | 11 | 21 | 23 |
| 202 | 5 | 12 | 17 | 21 |
| 205 | 5 | 13 | 18 | 23 |
| 208 | 5 | 14 | 18 | 23 |
| 211 | 5 | 16 | 18 | 21 |
| 214 | 5 | 18 | 20 | 23 |
| 217 | 7 | 8 | 9 | 20 |
| 220 | 7 | 8 | 14 | 21 |
| 223 | 7 | 9 | 13 | 22 |
| 226 | 7 | 11 | 14 | 21 |
| 229 | 7 | 12 | 18 | 21 |
| 232 | 7 | 12 | 21 | 23 |
| 235 | 7 | 14 | 18 | 21 |
| 238 | 7 | 14 | 21 | 23 |
| 241 | 8 | 9 | 12 | 20 |
| 244 | 8 | 9 | 14 | 22 |
| 247 | 8 | 9 | 17 | 20 |
| 250 | 8 | 9 | 18 | 22 |
| 253 | 8 | 9 | 21 | 22 |
| 256 | 8 | 14 | 17 | 21 |
| 259 | 9 | 12 | 13 | 20 |
| 262 | 9 | 13 | 14 | 20 |
| 265 | 9 | 13 | 16 | 22 |
| 268 | 9 | 13 | 18 | 20 |
| 271 | 9 | 13 | 20 | 23 |
| 274 | 9 | 14 | 17 | 21 |
| 277 | 12 | 13 | 17 | 21 |
| 280 | 12 | 17 | 20 | 21 |
| 283 | 13 | 14 | 17 | 21 |
| 286 | 14 | 17 | 20 | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 131 | 4 | 7 | 12 | 21 |
| 134 | 4 | 7 | 14 | 21 |
| 137 | 4 | 8 | 12 | 20 |
| 140 | 4 | 8 | 14 | 22 |
| 143 | 4 | 8 | 17 | 20 |
| 146 | 4 | 8 | 18 | 22 |
| 149 | 4 | 8 | 21 | 22 |
| 152 | 4 | 11 | 13 | 22 |
| 155 | 4 | 12 | 17 | 21 |
| 158 | 4 | 13 | 16 | 20 |
| 161 | 4 | 13 | 17 | 22 |
| 164 | 4 | 13 | 20 | 21 |
| 167 | 4 | 13 | 22 | 23 |
| 170 | 5 | 7 | 11 | 23 |
| 173 | 5 | 7 | 16 | 18 |
| 176 | 5 | 8 | 9 | 22 |
| 179 | 5 | 8 | 16 | 18 |
| 182 | 5 | 9 | 11 | 23 |
| 185 | 5 | 9 | 16 | 18 |
| 188 | 5 | 11 | 12 | 23 |
| 191 | 5 | 11 | 14 | 16 |
| 194 | 5 | 11 | 16 | 20 |
| 197 | 5 | 11 | 17 | 23 |
| 200 | 5 | 11 | 22 | 23 |
| 203 | 5 | 12 | 18 | 23 |
| 206 | 5 | 14 | 16 | 18 |
| 209 | 5 | 16 | 17 | 18 |
| 212 | 5 | 16 | 18 | 22 |
| 215 | 5 | 18 | 21 | 23 |
| 218 | 7 | 8 | 9 | 22 |
| 221 | 7 | 9 | 12 | 21 |
| 224 | 7 | 9 | 14 | 21 |
| 227 | 7 | 12 | 13 | 21 |
| 230 | 7 | 12 | 20 | 21 |
| 233 | 7 | 13 | 14 | 21 |
| 236 | 7 | 14 | 20 | 21 |
| 239 | 8 | 9 | 11 | 20 |
| 242 | 8 | 9 | 12 | 22 |
| 245 | 8 | 9 | 16 | 20 |
| 248 | 8 | 9 | 17 | 22 |
| 251 | 8 | 9 | 20 | 21 |
| 254 | 8 | 9 | 22 | 23 |
| 257 | 9 | 11 | 13 | 20 |
| 260 | 9 | 12 | 13 | 22 |
| 263 | 9 | 13 | 14 | 22 |
| 266 | 9 | 13 | 17 | 20 |
| 269 | 9 | 13 | 18 | 22 |
| 272 | 9 | 13 | 21 | 22 |
| 275 | 11 | 12 | 17 | 21 |
| 278 | 12 | 16 | 17 | 21 |
| 281 | 12 | 17 | 21 | 22 |
| 284 | 14 | 16 | 17 | 21 |
| 287 | 14 | 17 | 21 | 22 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 132 | 4 | 7 | 13 | 20 |
| 135 | 4 | 8 | 11 | 20 |
| 138 | 4 | 8 | 12 | 22 |
| 141 | 4 | 8 | 16 | 20 |
| 144 | 4 | 8 | 17 | 22 |
| 147 | 4 | 8 | 20 | 21 |
| 150 | 4 | 8 | 22 | 23 |
| 153 | 4 | 12 | 13 | 20 |
| 156 | 4 | 13 | 14 | 20 |
| 159 | 4 | 13 | 16 | 22 |
| 162 | 4 | 13 | 18 | 20 |
| 165 | 4 | 13 | 20 | 23 |
| 168 | 4 | 14 | 17 | 21 |
| 171 | 5 | 7 | 12 | 21 |
| 174 | 5 | 7 | 18 | 23 |
| 177 | 5 | 8 | 11 | 16 |
| 180 | 5 | 8 | 18 | 23 |
| 183 | 5 | 9 | 13 | 20 |
| 186 | 5 | 9 | 18 | 23 |
| 189 | 5 | 11 | 13 | 16 |
| 192 | 5 | 11 | 14 | 23 |
| 195 | 5 | 11 | 16 | 21 |
| 198 | 5 | 11 | 20 | 23 |
| 201 | 5 | 12 | 16 | 18 |
| 204 | 5 | 13 | 16 | 18 |
| 207 | 5 | 14 | 17 | 21 |
| 210 | 5 | 16 | 18 | 20 |
| 213 | 5 | 17 | 18 | 23 |
| 216 | 5 | 18 | 22 | 23 |
| 219 | 7 | 8 | 12 | 21 |
| 222 | 7 | 9 | 13 | 20 |
| 225 | 7 | 11 | 12 | 21 |
| 228 | 7 | 12 | 16 | 21 |
| 231 | 7 | 12 | 21 | 22 |
| 234 | 7 | 14 | 16 | 21 |
| 237 | 7 | 14 | 21 | 22 |
| 240 | 8 | 9 | 11 | 22 |
| 243 | 8 | 9 | 14 | 20 |
| 246 | 8 | 9 | 16 | 22 |
| 249 | 8 | 9 | 18 | 20 |
| 252 | 8 | 9 | 20 | 23 |
| 255 | 8 | 12 | 17 | 21 |
| 258 | 9 | 11 | 13 | 22 |
| 261 | 9 | 12 | 17 | 21 |
| 264 | 9 | 13 | 16 | 20 |
| 267 | 9 | 13 | 17 | 22 |
| 270 | 9 | 13 | 20 | 21 |
| 273 | 9 | 13 | 22 | 23 |
| 276 | 11 | 14 | 17 | 21 |
| 279 | 12 | 17 | 18 | 21 |
| 282 | 12 | 17 | 21 | 23 |
| 285 | 14 | 17 | 18 | 21 |
| 288 | 14 | 17 | 21 | 23 |

80

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 7 | 20 |
| 4 | 2 | 3 | 8 | 23 |
| 7 | 2 | 3 | 17 | 20 |
| 10 | 2 | 4 | 7 | 18 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 3 | 7 | 22 |
| 5 | 2 | 3 | 13 | 16 |
| 8 | 2 | 3 | 17 | 22 |
| 11 | 2 | 4 | 8 | 12 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 3 | 8 | 16 |
| 6 | 2 | 3 | 13 | 23 |
| 9 | 2 | 4 | 7 | 11 |
| 12 | 2 | 4 | 8 | 14 |



BUS LILLE

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 2 | 4 | 11 | 17 | 14 | 2 | 4 | 12 | 13 | 15 | 2 | 4 | 13 | 14 | 40 | 2 | 12 | 13 | 20 |
| 16 | 2 | 4 | 17 | 18 | 17 | 2 | 7 | 9 | 11 | 18 | 2 | 7 | 9 | 18 | 43 | 2 | 12 | 16 | 22 |
| 19 | 2 | 7 | 20 | 21 | 20 | 2 | 7 | 21 | 22 | 21 | 2 | 8 | 9 | 12 | 46 | 2 | 12 | 18 | 20 |
| 22 | 2 | 8 | 9 | 14 | 23 | 2 | 8 | 16 | 21 | 24 | 2 | 8 | 21 | 23 | 49 | 2 | 12 | 20 | 23 |
| 25 | 2 | 9 | 11 | 17 | 26 | 2 | 9 | 12 | 13 | 27 | 2 | 9 | 13 | 14 | 52 | 2 | 13 | 14 | 20 |
| 28 | 2 | 9 | 17 | 18 | 29 | 2 | 13 | 16 | 21 | 30 | 2 | 13 | 21 | 23 | 55 | 2 | 14 | 16 | 20 |
| 31 | 2 | 17 | 20 | 21 | 32 | 2 | 17 | 21 | 22 | 33 | 3 | 4 | 11 | 20 | 58 | 2 | 14 | 17 | 22 |
| 34 | 3 | 4 | 11 | 22 | 35 | 3 | 4 | 12 | 16 | 36 | 3 | 4 | 12 | 23 | 61 | 2 | 14 | 20 | 21 |
| 37 | 3 | 4 | 14 | 16 | 38 | 3 | 4 | 14 | 23 | 39 | 3 | 4 | 18 | 20 | 64 | 2 | 14 | 22 | 23 |
| 40 | 3 | 4 | 18 | 22 | 41 | 3 | 5 | 7 | 20 | 42 | 3 | 5 | 7 | 22 | 67 | 3 | 4 | 8 | 11 |
| 43 | 3 | 5 | 8 | 16 | 44 | 3 | 5 | 8 | 23 | 45 | 3 | 5 | 13 | 16 | 70 | 3 | 4 | 13 | 18 |
| 46 | 3 | 5 | 13 | 23 | 47 | 3 | 5 | 17 | 20 | 48 | 3 | 5 | 17 | 22 | 73 | 3 | 5 | 8 | 11 |
| 49 | 3 | 9 | 11 | 20 | 50 | 3 | 9 | 11 | 22 | 51 | 3 | 9 | 12 | 16 | 76 | 3 | 5 | 12 | 20 |
| 52 | 3 | 9 | 12 | 23 | 53 | 3 | 9 | 14 | 16 | 54 | 3 | 9 | 14 | 23 | 79 | 3 | 5 | 14 | 20 |
| 55 | 3 | 9 | 18 | 20 | 56 | 3 | 9 | 18 | 22 | 57 | 4 | 5 | 7 | 11 | 82 | 3 | 7 | 8 | 18 |
| 58 | 4 | 5 | 7 | 18 | 59 | 4 | 5 | 8 | 12 | 60 | 4 | 5 | 8 | 14 | 85 | 3 | 7 | 11 | 13 |
| 61 | 4 | 5 | 11 | 17 | 62 | 4 | 5 | 12 | 13 | 63 | 4 | 5 | 13 | 14 | 88 | 3 | 8 | 9 | 18 |
| 64 | 4 | 5 | 17 | 18 | 65 | 4 | 11 | 20 | 21 | 66 | 4 | 11 | 21 | 22 | 91 | 3 | 8 | 11 | 16 |
| 67 | 4 | 12 | 16 | 21 | 68 | 4 | 12 | 21 | 23 | 69 | 4 | 14 | 16 | 21 | 94 | 3 | 8 | 11 | 22 |
| 70 | 4 | 14 | 21 | 23 | 71 | 4 | 18 | 20 | 21 | 72 | 4 | 18 | 21 | 22 | 97 | 3 | 8 | 14 | 18 |
| 73 | 5 | 7 | 9 | 11 | 74 | 5 | 7 | 9 | 18 | 75 | 5 | 7 | 20 | 21 | 100 | 3 | 8 | 18 | 20 |
| 76 | 5 | 7 | 21 | 22 | 77 | 5 | 8 | 9 | 12 | 78 | 5 | 8 | 9 | 14 | 103 | 3 | 9 | 11 | 13 |
| 79 | 5 | 8 | 16 | 21 | 80 | 5 | 8 | 21 | 23 | 81 | 5 | 9 | 11 | 17 | 106 | 3 | 9 | 17 | 23 |
| 82 | 5 | 9 | 12 | 13 | 83 | 5 | 9 | 13 | 14 | 84 | 5 | 9 | 17 | 18 | 109 | 3 | 11 | 13 | 16 |
| 85 | 5 | 13 | 16 | 21 | 86 | 5 | 13 | 21 | 23 | 87 | 5 | 17 | 20 | 21 | 112 | 3 | 11 | 13 | 22 |
| 88 | 5 | 17 | 21 | 22 | 89 | 7 | 8 | 11 | 12 | 90 | 7 | 8 | 11 | 14 | 115 | 3 | 13 | 14 | 18 |
| 91 | 7 | 8 | 12 | 18 | 92 | 7 | 8 | 14 | 18 | 93 | 7 | 8 | 16 | 20 | 118 | 3 | 13 | 18 | 20 |
| 94 | 7 | 8 | 16 | 22 | 95 | 7 | 8 | 20 | 23 | 96 | 7 | 8 | 22 | 23 | 121 | 4 | 5 | 7 | 16 |
| 97 | 7 | 11 | 12 | 13 | 98 | 7 | 11 | 13 | 14 | 99 | 7 | 12 | 13 | 18 | 124 | 4 | 5 | 12 | 22 |
| 100 | 7 | 13 | 14 | 18 | 101 | 7 | 13 | 16 | 20 | 102 | 7 | 13 | 16 | 22 | 127 | 4 | 5 | 16 | 17 |
| 103 | 7 | 13 | 20 | 23 | 104 | 7 | 13 | 22 | 23 | 105 | 8 | 11 | 12 | 17 | 130 | 4 | 7 | 8 | 23 |
| 106 | 8 | 11 | 14 | 17 | 107 | 8 | 12 | 17 | 18 | 108 | 8 | 14 | 17 | 18 | 133 | 4 | 7 | 12 | 16 |
| 109 | 8 | 16 | 17 | 20 | 110 | 8 | 16 | 17 | 22 | 111 | 8 | 17 | 20 | 23 | 136 | 4 | 7 | 13 | 23 |
| 112 | 8 | 17 | 22 | 23 | 113 | 9 | 11 | 20 | 21 | 114 | 9 | 11 | 21 | 22 | 139 | 4 | 7 | 16 | 18 |
| 115 | 9 | 12 | 16 | 21 | 116 | 9 | 12 | 21 | 23 | 117 | 9 | 14 | 16 | 21 | 142 | 4 | 7 | 16 | 22 |
| 118 | 9 | 14 | 21 | 23 | 119 | 9 | 18 | 20 | 21 | 120 | 9 | 18 | 21 | 22 | 145 | 4 | 7 | 21 | 23 |
| 121 | 11 | 12 | 13 | 17 | 122 | 11 | 12 | 16 | 20 | 123 | 11 | 12 | 16 | 22 | 148 | 4 | 8 | 16 | 17 |
| 124 | 11 | 12 | 20 | 23 | 125 | 11 | 12 | 22 | 23 | 126 | 11 | 13 | 14 | 17 | 151 | 4 | 11 | 13 | 21 |
| 127 | 11 | 14 | 16 | 20 | 128 | 11 | 14 | 16 | 22 | 129 | 11 | 14 | 20 | 23 | 154 | 4 | 12 | 16 | 17 |
| 130 | 11 | 14 | 22 | 23 | 131 | 12 | 13 | 17 | 18 | 132 | 12 | 16 | 18 | 20 | 157 | 4 | 13 | 17 | 23 |
| 133 | 12 | 16 | 18 | 22 | 134 | 12 | 18 | 20 | 23 | 135 | 12 | 18 | 22 | 23 | 160 | 4 | 14 | 17 | 23 |
| 136 | 13 | 14 | 17 | 18 | 137 | 13 | 16 | 17 | 20 | 138 | 13 | 16 | 17 | 22 | 163 | 4 | 16 | 17 | 21 |
| 139 | 13 | 17 | 20 | 23 | 140 | 13 | 17 | 22 | 23 | 141 | 14 | 16 | 18 | 20 | 166 | 4 | 17 | 20 | 23 |
| 142 | 14 | 16 | 18 | 22 | 143 | 14 | 18 | 20 | 23 | 144 | 14 | 18 | 22 | 23 | 169 | 5 | 7 | 9 | 16 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 172 | 5 | 7 | 12 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 175 | 5 | 8 | 11 | 21 |
| 81 | | | | | | | | | | | | | | | 178 | 5 | 8 | 14 | 20 |
| 1 | 2 | 3 | 8 | 11 | 2 | 2 | 3 | 8 | 18 | 3 | 2 | 3 | 11 | 13 | 181 | 5 | 9 | 12 | 20 |
| 4 | 2 | 3 | 12 | 20 | 5 | 2 | 3 | 12 | 22 | 6 | 2 | 3 | 13 | 18 | 184 | 5 | 9 | 14 | 22 |
| 7 | 2 | 3 | 14 | 20 | 8 | 2 | 3 | 14 | 22 | 9 | 2 | 4 | 7 | 16 | 187 | 5 | 11 | 12 | 20 |
| 10 | 2 | 4 | 7 | 23 | 11 | 2 | 4 | 12 | 20 | 12 | 2 | 4 | 12 | 22 | 190 | 5 | 11 | 14 | 20 |
| 13 | 2 | 4 | 14 | 20 | 14 | 2 | 4 | 14 | 22 | 15 | 2 | 4 | 16 | 17 | 193 | 5 | 12 | 13 | 22 |
| 16 | 2 | 4 | 17 | 23 | 17 | 2 | 7 | 9 | 16 | 18 | 2 | 7 | 9 | 23 | 196 | 5 | 12 | 17 | 20 |
| 19 | 2 | 7 | 12 | 20 | 20 | 2 | 7 | 12 | 22 | 21 | 2 | 7 | 14 | 20 | 199 | 5 | 12 | 18 | 22 |
| 22 | 2 | 7 | 14 | 22 | 23 | 2 | 8 | 11 | 21 | 24 | 2 | 8 | 12 | 20 | 202 | 5 | 12 | 21 | 22 |
| 25 | 2 | 8 | 12 | 22 | 26 | 2 | 8 | 14 | 20 | 27 | 2 | 8 | 14 | 22 | 205 | 5 | 13 | 14 | 22 |
| 28 | 2 | 8 | 18 | 21 | 29 | 2 | 9 | 12 | 20 | 30 | 2 | 9 | 12 | 22 | 208 | 5 | 14 | 16 | 22 |
| 31 | 2 | 9 | 14 | 20 | 32 | 2 | 9 | 14 | 22 | 33 | 2 | 9 | 16 | 17 | 211 | 5 | 14 | 18 | 20 |
| 34 | 2 | 9 | 17 | 23 | 35 | 2 | 11 | 12 | 20 | 36 | 2 | 11 | 12 | 22 | 214 | 5 | 14 | 20 | 23 |
| 37 | 2 | 11 | 13 | 21 | 38 | 2 | 11 | 14 | 20 | 39 | 2 | 11 | 14 | 22 | 217 | 7 | 8 | 9 | 16 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 41 | 2 | 12 | 13 | 22 | 42 | 2 | 12 | 16 | 20 | 43 | 2 | 12 | 16 | 22 | 44 | 2 | 12 | 17 | 20 |
| 45 | 2 | 12 | 17 | 22 | 46 | 2 | 12 | 18 | 20 | 47 | 2 | 12 | 18 | 22 | 48 | 2 | 12 | 20 | 21 |
| 49 | 2 | 12 | 20 | 23 | 50 | 2 | 12 | 21 | 22 | 51 | 2 | 12 | 22 | 23 | 52 | 2 | 13 | 14 | 22 |
| 53 | 2 | 13 | 14 | 22 | 54 | 2 | 13 | 18 | 21 | 55 | 2 | 14 | 16 | 22 | 56 | 2 | 14 | 17 | 20 |
| 57 | 2 | 14 | 17 | 22 | 58 | 2 | 14 | 18 | 20 | 59 | 2 | 14 | 18 | 22 | 60 | 2 | 14 | 18 | 22 |
| 61 | 2 | 14 | 20 | 23 | 62 | 2 | 14 | 20 | 23 | 63 | 2 | 14 | 21 | 22 | 64 | 2 | 14 | 22 | 23 |
| 65 | 3 | 4 | 7 | 16 | 66 | 3 | 4 | 7 | 23 | 67 | 3 | 4 | 8 | 11 | 68 | 3 | 4 | 8 | 18 |
| 69 | 3 | 4 | 11 | 13 | 70 | 3 | 4 | 13 | 18 | 71 | 3 | 4 | 16 | 17 | 72 | 3 | 4 | 17 | 23 |
| 73 | 3 | 5 | 8 | 11 | 74 | 3 | 5 | 8 | 18 | 75 | 3 | 5 | 11 | 13 | 76 | 3 | 5 | 12 | 20 |
| 77 | 3 | 5 | 12 | 22 | 78 | 3 | 5 | 13 | 18 | 79 | 3 | 5 | 14 | 20 | 80 | 3 | 5 | 14 | 22 |
| 81 | 3 | 7 | 8 | 11 | 82 | 3 | 7 | 8 | 18 | 83 | 3 | 7 | 9 | 16 | 84 | 3 | 7 | 9 | 23 |
| 85 | 3 | 7 | 11 | 13 | 86 | 3 | 7 | 13 | 18 | 87 | 3 | 8 | 9 | 11 | 88 | 3 | 8 | 9 | 18 |
| 89 | 3 | 8 | 11 | 12 | 90 | 3 | 8 | 11 | 14 | 91 | 3 | 8 | 11 | 16 | 92 | 3 | 8 | 11 | 17 |
| 93 | 3 | 8 | 11 | 20 | 94 | 3 | 8 | 11 | 22 | 95 | 3 | 8 | 11 | 23 | 96 | 3 | 8 | 12 | 18 |
| 97 | 3 | 8 | 14 | 18 | 98 | 3 | 8 | 16 | 18 | 99 | 3 | 8 | 17 | 18 | 100 | 3 | 8 | 18 | 20 |
| 101 | 3 | 8 | 18 | 22 | 102 | 3 | 8 | 18 | 23 | 103 | 3 | 9 | 11 | 13 | 104 | 3 | 9 | 13 | 18 |
| 105 | 3 | 9 | 16 | 17 | 106 | 3 | 9 | 17 | 23 | 107 | 3 | 11 | 12 | 13 | 108 | 3 | 11 | 13 | 14 |
| 109 | 3 | 11 | 13 | 16 | 110 | 3 | 11 | 13 | 17 | 111 | 3 | 11 | 13 | 20 | 112 | 3 | 11 | 13 | 22 |
| 113 | 3 | 11 | 13 | 23 | 114 | 3 | 12 | 13 | 18 | 115 | 3 | 13 | 14 | 18 | 116 | 3 | 13 | 16 | 18 |
| 117 | 3 | 13 | 17 | 18 | 118 | 3 | 13 | 18 | 20 | 119 | 3 | 13 | 18 | 22 | 120 | 3 | 13 | 18 | 23 |
| 121 | 4 | 5 | 7 | 16 | 122 | 4 | 5 | 7 | 23 | 123 | 4 | 5 | 12 | 20 | 124 | 4 | 5 | 12 | 22 |
| 125 | 4 | 5 | 14 | 20 | 126 | 4 | 5 | 14 | 22 | 127 | 4 | 5 | 16 | 17 | 128 | 4 | 5 | 17 | 23 |
| 129 | 4 | 7 | 8 | 16 | 130 | 4 | 7 | 8 | 23 | 131 | 4 | 7 | 11 | 16 | 132 | 4 | 7 | 11 | 23 |
| 133 | 4 | 7 | 12 | 16 | 134 | 4 | 7 | 12 | 23 | 135 | 4 | 7 | 13 | 16 | 136 | 4 | 7 | 13 | 23 |
| 137 | 4 | 7 | 14 | 16 | 138 | 4 | 7 | 14 | 23 | 139 | 4 | 7 | 16 | 18 | 140 | 4 | 7 | 16 | 20 |
| 141 | 4 | 7 | 16 | 21 | 142 | 4 | 7 | 16 | 22 | 143 | 4 | 7 | 18 | 23 | 144 | 4 | 7 | 20 | 23 |
| 145 | 4 | 7 | 21 | 23 | 146 | 4 | 7 | 22 | 23 | 147 | 4 | 8 | 11 | 21 | 148 | 4 | 8 | 16 | 17 |
| 149 | 4 | 8 | 17 | 23 | 150 | 4 | 8 | 18 | 21 | 151 | 4 | 11 | 13 | 21 | 152 | 4 | 11 | 16 | 17 |
| 153 | 4 | 11 | 17 | 23 | 154 | 4 | 12 | 16 | 17 | 155 | 4 | 12 | 17 | 23 | 156 | 4 | 13 | 16 | 17 |
| 157 | 4 | 13 | 18 | 21 | 158 | 4 | 13 | 18 | 21 | 159 | 4 | 14 | 16 | 17 | 160 | 4 | 14 | 17 | 23 |
| 161 | 4 | 16 | 17 | 18 | 162 | 4 | 16 | 17 | 20 | 163 | 4 | 16 | 17 | 21 | 164 | 4 | 16 | 17 | 22 |
| 165 | 4 | 17 | 18 | 23 | 166 | 4 | 17 | 20 | 23 | 167 | 4 | 17 | 21 | 23 | 168 | 4 | 17 | 22 | 23 |
| 169 | 5 | 7 | 9 | 16 | 170 | 5 | 7 | 9 | 23 | 171 | 5 | 7 | 12 | 20 | 172 | 5 | 7 | 12 | 22 |
| 173 | 5 | 7 | 14 | 20 | 174 | 5 | 7 | 14 | 22 | 175 | 5 | 8 | 11 | 21 | 176 | 5 | 8 | 12 | 20 |
| 177 | 5 | 8 | 12 | 22 | 178 | 5 | 8 | 14 | 20 | 179 | 5 | 8 | 14 | 22 | 180 | 5 | 8 | 18 | 21 |
| 181 | 5 | 9 | 12 | 20 | 182 | 5 | 9 | 12 | 22 | 183 | 5 | 9 | 14 | 20 | 184 | 5 | 9 | 14 | 22 |
| 185 | 5 | 9 | 16 | 17 | 186 | 5 | 9 | 17 | 23 | 187 | 5 | 11 | 12 | 20 | 188 | 5 | 11 | 12 | 22 |
| 189 | 5 | 11 | 13 | 21 | 190 | 5 | 11 | 14 | 20 | 191 | 5 | 11 | 14 | 22 | 192 | 5 | 12 | 13 | 20 |
| 193 | 5 | 12 | 13 | 22 | 194 | 5 | 12 | 16 | 20 | 195 | 5 | 12 | 16 | 22 | 196 | 5 | 12 | 17 | 20 |
| 197 | 5 | 12 | 17 | 22 | 198 | 5 | 12 | 18 | 20 | 199 | 5 | 12 | 18 | 22 | 200 | 5 | 12 | 20 | 21 |
| 201 | 5 | 12 | 20 | 23 | 202 | 5 | 12 | 21 | 22 | 203 | 5 | 12 | 22 | 23 | 204 | 5 | 13 | 14 | 20 |
| 205 | 5 | 13 | 14 | 22 | 206 | 5 | 13 | 18 | 21 | 207 | 5 | 14 | 16 | 20 | 208 | 5 | 14 | 16 | 22 |
| 209 | 5 | 14 | 17 | 20 | 210 | 5 | 14 | 17 | 22 | 211 | 5 | 14 | 18 | 20 | 212 | 5 | 14 | 18 | 22 |
| 213 | 5 | 14 | 20 | 21 | 214 | 5 | 14 | 20 | 23 | 215 | 5 | 14 | 21 | 22 | 216 | 5 | 14 | 22 | 23 |
| 217 | 7 | 8 | 9 | 16 | 218 | 7 | 8 | 9 | 23 | 219 | 7 | 8 | 11 | 21 | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 220 | 7 | 8 | 18 | 21 | 221 | 7 | 9 | 11 | 16 | 222 | 7 | 9 | 11 | 23 | 103 | 3 | 9 | 13 | 23 |
| 223 | 7 | 9 | 12 | 16 | 224 | 7 | 9 | 12 | 23 | 225 | 7 | 9 | 13 | 16 | 104 | 3 | 9 | 16 | 18 |
| 226 | 7 | 9 | 13 | 23 | 227 | 7 | 9 | 14 | 16 | 228 | 7 | 9 | 14 | 23 | 105 | 3 | 9 | 17 | 18 |
| 229 | 7 | 9 | 16 | 18 | 230 | 7 | 9 | 16 | 20 | 231 | 7 | 9 | 16 | 21 | 106 | 3 | 9 | 18 | 23 |
| 232 | 7 | 9 | 16 | 22 | 233 | 7 | 9 | 18 | 23 | 234 | 7 | 9 | 20 | 23 | 107 | 3 | 11 | 12 | 20 |
| 235 | 7 | 9 | 21 | 23 | 236 | 7 | 9 | 22 | 23 | 237 | 7 | 11 | 13 | 21 | 108 | 3 | 11 | 12 | 22 |
| 238 | 7 | 13 | 18 | 21 | 239 | 8 | 9 | 11 | 21 | 240 | 8 | 9 | 16 | 17 | 109 | 3 | 11 | 14 | 20 |
| 241 | 8 | 9 | 17 | 23 | 242 | 8 | 9 | 18 | 21 | 243 | 8 | 11 | 12 | 21 | 110 | 3 | 11 | 14 | 22 |
| 244 | 8 | 11 | 14 | 21 | 245 | 8 | 11 | 16 | 21 | 246 | 8 | 11 | 17 | 21 | 111 | 3 | 12 | 18 | 20 |
| 247 | 8 | 11 | 20 | 21 | 248 | 8 | 11 | 21 | 22 | 249 | 8 | 11 | 21 | 23 | 112 | 3 | 12 | 18 | 22 |
| 250 | 8 | 12 | 18 | 21 | 251 | 8 | 14 | 18 | 21 | 252 | 8 | 16 | 18 | 21 | 113 | 3 | 13 | 16 | 17 |
| 253 | 8 | 17 | 18 | 21 | 254 | 8 | 18 | 20 | 21 | 255 | 8 | 18 | 21 | 22 | 114 | 3 | 13 | 17 | 23 |
| 256 | 8 | 18 | 21 | 23 | 257 | 9 | 11 | 13 | 21 | 258 | 9 | 11 | 16 | 17 | 115 | 3 | 14 | 18 | 20 |
| 259 | 9 | 11 | 17 | 23 | 260 | 9 | 12 | 16 | 17 | 261 | 9 | 12 | 17 | 23 | 116 | 3 | 14 | 18 | 22 |
| 262 | 9 | 13 | 16 | 17 | 263 | 9 | 13 | 17 | 23 | 264 | 9 | 13 | 18 | 21 | 117 | 4 | 5 | 7 | 12 |
| 265 | 9 | 14 | 16 | 17 | 266 | 9 | 14 | 17 | 23 | 267 | 9 | 16 | 17 | 18 | 118 | 4 | 5 | 7 | 14 |
| 268 | 9 | 16 | 17 | 20 | 269 | 9 | 16 | 17 | 21 | 270 | 9 | 16 | 17 | 22 | 119 | 4 | 5 | 7 | 20 |
| 271 | 9 | 17 | 18 | 23 | 272 | 9 | 17 | 20 | 23 | 273 | 9 | 17 | 21 | 23 | 120 | 4 | 5 | 7 | 22 |
| 274 | 9 | 17 | 22 | 23 | 275 | 11 | 12 | 13 | 21 | 276 | 11 | 13 | 14 | 21 | 121 | 4 | 5 | 12 | 16 |
| 277 | 11 | 13 | 16 | 21 | 278 | 11 | 13 | 17 | 21 | 279 | 11 | 13 | 20 | 21 | 122 | 4 | 5 | 12 | 17 |
| 280 | 11 | 13 | 21 | 22 | 281 | 11 | 13 | 21 | 23 | 282 | 12 | 13 | 18 | 21 | 123 | 4 | 5 | 12 | 23 |
| 283 | 13 | 14 | 18 | 21 | 284 | 13 | 16 | 18 | 21 | 285 | 13 | 17 | 18 | 21 | 124 | 4 | 5 | 14 | 16 |
| 286 | 13 | 18 | 20 | 21 | 287 | 13 | 18 | 21 | 22 | 288 | 13 | 18 | 21 | 23 | 125 | 4 | 5 | 14 | 17 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 126 | 4 | 5 | 14 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 127 | 4 | 5 | 17 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 128 | 4 | 5 | 17 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 129 | 4 | 7 | 8 | 11 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 130 | 4 | 7 | 8 | 18 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 131 | 4 | 7 | 11 | 13 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 132 | 4 | 7 | 11 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 133 | 4 | 7 | 13 | 18 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 134 | 4 | 7 | 18 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 135 | 4 | 8 | 11 | 17 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 136 | 4 | 8 | 16 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 137 | 4 | 8 | 17 | 18 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 138 | 4 | 8 | 21 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 139 | 4 | 11 | 13 | 17 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 140 | 4 | 11 | 16 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 141 | 4 | 11 | 17 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 142 | 4 | 11 | 21 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 143 | 4 | 12 | 16 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 144 | 4 | 12 | 16 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 145 | 4 | 12 | 20 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 146 | 4 | 12 | 22 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 147 | 4 | 13 | 16 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 148 | 4 | 13 | 17 | 18 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 149 | 4 | 13 | 21 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 150 | 4 | 14 | 16 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 151 | 4 | 14 | 16 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 152 | 4 | 14 | 20 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 153 | 4 | 14 | 22 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 154 | 4 | 16 | 18 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 155 | 4 | 17 | 18 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 156 | 4 | 18 | 21 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 157 | 5 | 7 | 9 | 12 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 158 | 5 | 7 | 9 | 14 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 159 | 5 | 7 | 9 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 160 | 5 | 7 | 9 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 161 | 5 | 7 | 16 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 162 | 5 | 7 | 16 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 163 | 5 | 7 | 20 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 164 | 5 | 7 | 22 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 165 | 5 | 8 | 11 | 12 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 166 | 5 | 8 | 11 | 14 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 167 | 5 | 8 | 12 | 18 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 168 | 5 | 8 | 12 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 169 | 5 | 8 | 14 | 18 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 170 | 5 | 8 | 14 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 171 | 5 | 8 | 20 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 172 | 5 | 8 | 21 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 173 | 5 | 9 | 12 | 16 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 174 | 5 | 9 | 12 | 17 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 175 | 5 | 9 | 12 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 176 | 5 | 9 | 14 | 16 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 177 | 5 | 9 | 14 | 17 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 178 | 5 | 9 | 14 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 179 | 5 | 9 | 17 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 180 | 5 | 9 | 17 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 181 | 5 | 11 | 12 | 13 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 182 | 5 | 11 | 13 | 14 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 183 | 5 | 11 | 20 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 184 | 5 | 11 | 21 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 185 | 5 | 12 | 13 | 18 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 186 | 5 | 12 | 13 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 187 | 5 | 13 | 14 | 18 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 188 | 5 | 13 | 14 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 189 | 5 | 13 | 20 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 190 | 5 | 13 | 21 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 191 | 5 | 16 | 17 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 192 | 5 | 16 | 17 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 193 | 5 | 17 | 20 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 194 | 5 | 17 | 22 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 195 | 5 | 18 | 20 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 196 | 5 | 18 | 21 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 197 | 7 | 8 | 9 | 11 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 198 | 7 | 8 | 9 | 18 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 199 | 7 | 8 | 11 | 16 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 200 | 7 | 8 | 11 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 201 | 7 | 8 | 16 | 18 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 202 | 7 | 8 | 16 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 203 | 7 | 8 | 18 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 204 | 7 | 8 | 21 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 205 | 7 | 9 | 11 | 13 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 206 | 7 | 9 | 11 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 207 | 7 | 9 | 13 | 18 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 208 | 7 | 9 | 18 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 209 | 7 | 11 | 13 | 16 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 210 | 7 | 11 | 13 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 211 | 7 | 12 | 16 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 212 | 7 | 12 | 16 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 213 | 7 | 12 | 20 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 214 | 7 | 12 | 22 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 215 | 7 | 13 | 16 | 18 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 216 | 7 | 13 | 16 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 217 | 7 | 13 | 18 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 218 | 7 | 13 | 21 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 219 | 7 | 14 | 16 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 220 | 7 | 14 | 16 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 221 | 7 | 14 | 20 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 222 | 7 | 14 | 22 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 223 | 8 | 9 | 11 | 17 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 224 | 8 | 9 | 16 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 225 | 8 | 9 | 17 | 18 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 226 | 8 | 9 | 21 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 227 | 8 | 11 | 12 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 228 | 8 | 11 | 12 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 229 | 8 | 11 | 14 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 230 | 8 | 11 | 14 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 231 | 8 | 11 | 16 | 17 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 232 | 8 | 11 | 17 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 233 | 8 | 12 | 18 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 234 | 8 | 12 | 18 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 235 | 8 | 14 | 18 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 236 | 8 | 14 | 18 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 237 | 8 | 16 | 17 | 18 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 238 | 8 | 16 | 17 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 239 | 8 | 17 | 18 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 240 | 8 | 17 | 21 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 241 | 9 | 11 | 13 | 17 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 242 | 9 | 11 | 16 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 243 | 9 | 11 | 17 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 244 | 9 | 11 | 21 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 245 | 9 | 12 | 16 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 246 | 9 | 12 | 16 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 247 | 9 | 12 | 20 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 248 | 9 | 12 | 22 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 249 | 9 | 13 | 16 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 250 | 9 | 13 | 17 | 18 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 251 | 9 | 13 | 21 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 252 | 9 | 14 | 16 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 253 | 9 | 14 | 16 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 254 | 9 | 14 | 20 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 255 | 9 | 14 | 22 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 256 | 9 | 16 | 18 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 257 | 9 | 17 | 18 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 258 | 9 | 18 | 21 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 259 | 11 | 12 | 13 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 260 | 11 | 12 | 13 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 261 | 11 | 12 | 20 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 262 | 11 | 12 | 21 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 263 | 11 | 13 | 14 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 264 | 11 | 13 | 14 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 265 | 11 | 13 | 16 | 17 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 266 | 11 | 13 | 17 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 267 | 11 | 14 | 20 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 268 | 11 | 14 | 21 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 269 | 12 | 13 | 18 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 270 | 12 | 13 | 18 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 271 | 12 | 16 | 17 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 272 | 12 | 16 | 17 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 273 | 12 | 17 | 20 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 274 | 12 | 17 | 22 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 275 | 12 | 18 | 20 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 276 | 12 | 18 | 21 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 277 | 13 | 14 | 18 | 20 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 278 | 13 | 14 | 18 | 22 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 279 | 13 | 16 | 17 | 18 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 280 | 13 | 16 | 17 | 21 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 281 | 13 | 17 | 18 | 23 |
| | | | | | | | | | | | | | | | 282 | 13 | 17 | 21 | 23 |

82

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 8 | 12 | 2 | 2 | 3 | 8 | 14 | 3 | 2 | 3 | 8 | 20 | | | | | |
| 4 | 2 | 3 | 8 | 22 | 5 | 2 | 3 | 11 | 20 | 6 | 2 | 3 | 11 | 22 | | | | | |
| 7 | 2 | 3 | 12 | 13 | 8 | 2 | 3 | 13 | 14 | 9 | 2 | 3 | 13 | 20 | | | | | |
| 10 | 2 | 3 | 13 | 22 | 11 | 2 | 3 | 18 | 20 | 12 | 2 | 3 | 18 | 22 | | | | | |
| 13 | 2 | 4 | 7 | 12 | 14 | 2 | 4 | 7 | 14 | 15 | 2 | 4 | 7 | 20 | | | | | |
| 16 | 2 | 4 | 7 | 22 | 17 | 2 | 4 | 12 | 16 | 18 | 2 | 4 | 12 | 17 | | | | | |
| 19 | 2 | 4 | 12 | 23 | 20 | 2 | 4 | 14 | 16 | 21 | 2 | 4 | 14 | 17 | | | | | |
| 22 | 2 | 4 | 14 | 23 | 23 | 2 | 4 | 17 | 20 | 24 | 2 | 4 | 17 | 22 | | | | | |
| 25 | 2 | 7 | 9 | 12 | 26 | 2 | 7 | 9 | 14 | 27 | 2 | 7 | 9 | 20 | | | | | |
| 28 | 2 | 7 | 9 | 22 | 29 | 2 | 7 | 16 | 20 | 30 | 2 | 7 | 16 | 22 | | | | | |
| 31 | 2 | 7 | 20 | 23 | 32 | 2 | 7 | 22 | 23 | 33 | 2 | 8 | 11 | 12 | | | | | |
| 34 | 2 | 8 | 11 | 14 | 35 | 2 | 8 | 12 | 18 | 36 | 2 | 8 | 12 | 21 | | | | | |
| 37 | 2 | 8 | 14 | 18 | 38 | 2 | 8 | 14 | 21 | 39 | 2 | 8 | 20 | 21 | | | | | |
| 40 | 2 | 8 | 21 | 22 | 41 | 2 | 9 | 12 | 16 | 42 | 2 | 9 | 12 | 17 | | | | | |
| 43 | 2 | 9 | 12 | 23 | 44 | 2 | 9 | 14 | 16 | 45 | 2 | 9 | 14 | 17 | | | | | |
| 46 | 2 | 9 | 14 | 23 | 47 | 2 | 9 | 17 | 20 | 48 | 2 | 9 | 17 | 22 | | | | | |
| 49 | 2 | 11 | 12 | 13 | 50 | 2 | 11 | 13 | 14 | 51 | 2 | 11 | 20 | 21 | | | | | |
| 52 | 2 | 11 | 21 | 22 | 53 | 2 | 12 | 13 | 18 | 54 | 2 | 12 | 13 | 21 | | | | | |
| 55 | 2 | 13 | 14 | 18 | 56 | 2 | 13 | 14 | 21 | 57 | 2 | 13 | 20 | 21 | | | | | |
| 58 | 2 | 13 | 21 | 22 | 59 | 2 | 16 | 17 | 20 | 60 | 2 | 16 | 17 | 22 | | | | | |
| 61 | 2 | 17 | 20 | 23 | 62 | 2 | 17 | 22 | 23 | 63 | 2 | 18 | 20 | 21 | | | | | |
| 64 | 2 | 18 | 21 | 22 | 65 | 3 | 4 | 7 | 11 | 66 | 3 | 4 | 7 | 18 | | | | | |
| 67 | 3 | 4 | 8 | 16 | 68 | 3 | 4 | 8 | 23 | 69 | 3 | 4 | 11 | 16 | | | | | |
| 70 | 3 | 4 | 11 | 17 | 71 | 3 | 4 | 11 | 23 | 72 | 3 | 4 | 13 | 16 | | | | | |
| 73 | 3 | 4 | 13 | 23 | 74 | 3 | 4 | 16 | 18 | 75 | 3 | 4 | 17 | 18 | | | | | |
| 76 | 3 | 4 | 18 | 23 | 77 | 3 | 5 | 8 | 12 | 78 | 3 | 5 | 8 | 14 | | | | | |
| 79 | 3 | 5 | 8 | 20 | 80 | 3 | 5 | 8 | 22 | 81 | 3 | 5 | 11 | 20 | | | | | |
| 82 | 3 | 5 | 11 | 22 | 83 | 3 | 5 | 12 | 13 | 84 | 3 | 5 | 13 | 14 | | | | | |
| 85 | 3 | 5 | 13 | 20 | 86 | 3 | 5 | 13 | 22 | 87 | 3 | 5 | 18 | 20 | | | | | |
| 88 | 3 | 5 | 18 | 22 | 89 | 3 | 7 | 8 | 16 | 90 | 3 | 7 | 8 | 23 | | | | | |
| 91 | 3 | 7 | 9 | 11 | 92 | 3 | 7 | 9 | 18 | 93 | 3 | 7 | 13 | 16 | | | | | |
| 94 | 3 | 7 | 13 | 23 | 95 | 3 | 8 | 9 | 16 | 96 | 3 | 8 | 9 | 23 | | | | | |
| 97 | 3 | 8 | 16 | 17 | 98 | 3 | 8 | 17 | 23 | 99 | 3 | 9 | 11 | 16 | | | | | |
| 100 | 3 | 9 | 11 | 17 | 101 | 3 | 9 | 11 | 23 | 102 | 3 | 9 | 13 | 16 | | | | | |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 283 | 14 | 16 | 17 | 20 | 284 | 14 | 16 | 17 | 22 | 285 | 14 | 17 | 20 | 23 |
| 286 | 14 | 17 | 22 | 23 | 287 | 14 | 18 | 20 | 21 | 288 | 14 | 18 | 21 | 22 |

83

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 11 | 12 | 2 | 2 | 3 | 14 | 18 | 3 | 2 | 4 | 16 | 20 |
| 4 | 2 | 4 | 22 | 23 | 5 | 2 | 7 | 12 | 16 | 6 | 2 | 7 | 14 | 23 |
| 7 | 2 | 8 | 11 | 20 | 8 | 2 | 8 | 18 | 22 | 9 | 2 | 9 | 16 | 22 |
| 10 | 2 | 9 | 20 | 23 | 11 | 2 | 11 | 13 | 22 | 12 | 2 | 11 | 14 | 21 |
| 13 | 2 | 12 | 17 | 23 | 14 | 2 | 12 | 18 | 21 | 15 | 2 | 13 | 18 | 20 |
| 16 | 2 | 14 | 16 | 17 | 17 | 3 | 4 | 7 | 8 | 18 | 3 | 4 | 13 | 17 |
| 19 | 3 | 5 | 11 | 14 | 20 | 3 | 5 | 12 | 18 | 21 | 3 | 7 | 9 | 13 |
| 22 | 3 | 7 | 11 | 16 | 23 | 3 | 7 | 18 | 23 | 24 | 3 | 8 | 9 | 17 |
| 25 | 3 | 8 | 12 | 20 | 26 | 3 | 8 | 14 | 22 | 27 | 3 | 11 | 17 | 23 |
| 28 | 3 | 12 | 13 | 22 | 29 | 3 | 13 | 14 | 20 | 30 | 3 | 16 | 17 | 18 |
| 31 | 4 | 5 | 16 | 22 | 32 | 4 | 5 | 20 | 23 | 33 | 4 | 7 | 12 | 20 |
| 34 | 4 | 7 | 13 | 21 | 35 | 4 | 7 | 14 | 22 | 36 | 4 | 8 | 11 | 16 |
| 37 | 4 | 8 | 17 | 21 | 38 | 4 | 8 | 18 | 23 | 39 | 4 | 11 | 13 | 23 |
| 40 | 4 | 12 | 17 | 22 | 41 | 4 | 13 | 16 | 18 | 42 | 4 | 14 | 17 | 20 |
| 43 | 5 | 7 | 12 | 23 | 44 | 5 | 7 | 14 | 16 | 45 | 5 | 8 | 11 | 22 |
| 46 | 5 | 8 | 18 | 20 | 47 | 5 | 9 | 16 | 20 | 48 | 5 | 9 | 22 | 23 |
| 49 | 5 | 11 | 12 | 21 | 50 | 5 | 11 | 13 | 20 | 51 | 5 | 12 | 16 | 17 |
| 52 | 5 | 13 | 18 | 22 | 53 | 5 | 14 | 17 | 23 | 54 | 5 | 14 | 18 | 21 |
| 55 | 7 | 8 | 9 | 21 | 56 | 7 | 9 | 12 | 22 | 57 | 7 | 9 | 14 | 20 |
| 58 | 7 | 11 | 21 | 23 | 59 | 7 | 16 | 18 | 21 | 60 | 8 | 9 | 11 | 23 |
| 61 | 8 | 9 | 16 | 18 | 62 | 8 | 12 | 21 | 22 | 63 | 8 | 14 | 20 | 21 |
| 64 | 9 | 11 | 13 | 16 | 65 | 9 | 12 | 17 | 20 | 66 | 9 | 13 | 17 | 21 |
| 67 | 9 | 13 | 18 | 23 | 68 | 9 | 14 | 17 | 22 | 69 | 11 | 16 | 17 | 21 |
| 70 | 12 | 13 | 20 | 21 | 71 | 13 | 14 | 21 | 22 | 72 | 17 | 18 | 21 | 23 |

84

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 11 | 14 | 2 | 2 | 3 | 12 | 18 | 3 | 2 | 4 | 16 | 22 |
| 4 | 2 | 4 | 20 | 23 | 5 | 2 | 7 | 12 | 23 | 6 | 2 | 7 | 14 | 16 |
| 7 | 2 | 8 | 11 | 22 | 8 | 2 | 8 | 18 | 20 | 9 | 2 | 9 | 16 | 20 |
| 10 | 2 | 9 | 22 | 23 | 11 | 2 | 11 | 12 | 21 | 12 | 2 | 11 | 13 | 20 |
| 13 | 2 | 12 | 16 | 17 | 14 | 2 | 13 | 18 | 22 | 15 | 2 | 14 | 17 | 23 |
| 16 | 2 | 14 | 18 | 21 | 17 | 3 | 4 | 7 | 13 | 18 | 3 | 4 | 8 | 17 |
| 19 | 3 | 5 | 11 | 12 | 20 | 3 | 5 | 14 | 18 | 21 | 3 | 7 | 8 | 9 |
| 22 | 3 | 7 | 11 | 23 | 23 | 3 | 7 | 16 | 18 | 24 | 3 | 8 | 12 | 22 |
| 25 | 3 | 8 | 14 | 20 | 26 | 3 | 9 | 13 | 17 | 27 | 3 | 11 | 16 | 17 |
| 28 | 3 | 12 | 13 | 20 | 29 | 3 | 13 | 14 | 22 | 30 | 3 | 17 | 18 | 23 |
| 31 | 4 | 5 | 16 | 20 | 32 | 4 | 5 | 22 | 23 | 33 | 4 | 7 | 8 | 21 |
| 34 | 4 | 7 | 12 | 22 | 35 | 4 | 7 | 14 | 20 | 36 | 4 | 8 | 11 | 23 |
| 37 | 4 | 8 | 16 | 18 | 38 | 4 | 11 | 13 | 16 | 39 | 4 | 12 | 17 | 20 |
| 40 | 4 | 13 | 17 | 21 | 41 | 4 | 13 | 18 | 23 | 42 | 4 | 14 | 17 | 22 |
| 43 | 5 | 7 | 12 | 16 | 44 | 5 | 7 | 14 | 23 | 45 | 5 | 8 | 11 | 20 |
| 46 | 5 | 8 | 18 | 22 | 47 | 5 | 9 | 16 | 22 | 48 | 5 | 9 | 20 | 23 |
| 49 | 5 | 11 | 13 | 22 | 50 | 5 | 11 | 14 | 21 | 51 | 5 | 12 | 17 | 23 |
| 52 | 5 | 12 | 18 | 21 | 53 | 5 | 13 | 18 | 20 | 54 | 5 | 14 | 16 | 17 |
| 55 | 7 | 9 | 12 | 20 | 56 | 7 | 9 | 13 | 21 | 57 | 7 | 9 | 14 | 22 |
| 58 | 7 | 11 | 16 | 21 | 59 | 7 | 18 | 21 | 23 | 60 | 8 | 9 | 11 | 16 |
| 61 | 8 | 9 | 17 | 21 | 62 | 8 | 9 | 18 | 23 | 63 | 8 | 12 | 20 | 21 |
| 64 | 8 | 14 | 21 | 22 | 65 | 9 | 11 | 13 | 23 | 66 | 9 | 12 | 17 | 22 |
| 67 | 9 | 13 | 16 | 18 | 68 | 9 | 14 | 17 | 20 | 69 | 11 | 17 | 21 | 23 |
| 70 | 12 | 13 | 21 | 22 | 71 | 13 | 14 | 20 | 21 | 72 | 16 | 17 | 18 | 21 |

85

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 11 | 18 | 2 | 2 | 3 | 12 | 14 | 3 | 2 | 4 | 16 | 23 |
| 4 | 2 | 4 | 20 | 22 | 5 | 2 | 5 | 11 | 12 | 6 | 2 | 5 | 11 | 14 |
| 7 | 2 | 5 | 11 | 20 | 8 | 2 | 5 | 11 | 22 | 9 | 2 | 5 | 12 | 16 |
| 10 | 2 | 5 | 12 | 18 | 11 | 2 | 5 | 12 | 23 | 12 | 2 | 5 | 14 | 16 |
| 13 | 2 | 5 | 14 | 18 | 14 | 2 | 5 | 14 | 23 | 15 | 2 | 5 | 16 | 20 |
| 16 | 2 | 5 | 16 | 22 | 17 | 2 | 5 | 18 | 20 | 18 | 2 | 5 | 18 | 22 |
| 19 | 2 | 5 | 20 | 23 | 20 | 2 | 5 | 22 | 23 | 21 | 2 | 7 | 12 | 14 |
| 22 | 2 | 7 | 16 | 23 | 23 | 2 | 8 | 11 | 18 | 24 | 2 | 8 | 20 | 22 |
| 25 | 2 | 9 | 16 | 23 | 26 | 2 | 9 | 20 | 22 | 27 | 2 | 11 | 13 | 18 |
| 28 | 2 | 11 | 18 | 21 | 29 | 2 | 12 | 14 | 17 | 30 | 2 | 12 | 14 | 21 |
| 31 | 2 | 13 | 20 | 22 | 32 | 2 | 16 | 17 | 23 | 33 | 3 | 4 | 7 | 17 |
| 34 | 3 | 4 | 8 | 13 | 35 | 3 | 5 | 11 | 18 | 36 | 3 | 5 | 12 | 14 |
| 37 | 3 | 7 | 8 | 21 | 38 | 3 | 7 | 9 | 17 | 39 | 3 | 7 | 11 | 21 |
| 40 | 3 | 7 | 13 | 21 | 41 | 3 | 7 | 16 | 17 | 42 | 3 | 7 | 17 | 23 |
| 43 | 3 | 7 | 18 | 21 | 44 | 3 | 8 | 9 | 13 | 45 | 3 | 8 | 12 | 21 |
| 46 | 3 | 8 | 13 | 20 | 47 | 3 | 8 | 13 | 22 | 48 | 3 | 8 | 14 | 21 |
| 49 | 3 | 8 | 17 | 21 | 50 | 3 | 11 | 12 | 21 | 51 | 3 | 11 | 14 | 21 |
| 52 | 3 | 11 | 16 | 18 | 53 | 3 | 11 | 17 | 21 | 54 | 3 | 11 | 18 | 23 |
| 55 | 3 | 12 | 13 | 21 | 56 | 3 | 12 | 14 | 20 | 57 | 3 | 12 | 14 | 22 |
| 58 | 3 | 12 | 18 | 21 | 59 | 3 | 13 | 14 | 21 | 60 | 3 | 13 | 17 | 21 |
| 61 | 3 | 14 | 18 | 21 | 62 | 3 | 17 | 18 | 21 | 63 | 4 | 5 | 16 | 23 |
| 64 | 4 | 5 | 20 | 22 | 65 | 4 | 7 | 8 | 9 | 66 | 4 | 7 | 9 | 13 |
| 67 | 4 | 7 | 9 | 20 | 68 | 4 | 7 | 9 | 22 | 69 | 4 | 7 | 12 | 17 |
| 70 | 4 | 7 | 14 | 17 | 71 | 4 | 7 | 17 | 21 | 72 | 4 | 8 | 9 | 16 |
| 73 | 4 | 8 | 9 | 17 | 74 | 4 | 8 | 9 | 23 | 75 | 4 | 8 | 11 | 13 |
| 76 | 4 | 8 | 13 | 18 | 77 | 4 | 8 | 13 | 21 | 78 | 4 | 9 | 13 | 16 |
| 79 | 4 | 9 | 13 | 17 | 80 | 4 | 9 | 13 | 23 | 81 | 4 | 9 | 16 | 20 |
| 82 | 4 | 9 | 16 | 22 | 83 | 4 | 9 | 17 | 20 | 84 | 4 | 9 | 17 | 22 |
| 85 | 4 | 9 | 20 | 23 | 86 | 4 | 9 | 22 | 23 | 87 | 4 | 11 | 16 | 23 |
| 88 | 4 | 12 | 20 | 22 | 89 | 4 | 14 | 20 | 22 | 90 | 4 | 16 | 18 | 23 |
| 91 | 5 | 7 | 12 | 14 | 92 | 5 | 7 | 16 | 23 | 93 | 5 | 8 | 11 | 18 |
| 94 | 5 | 8 | 20 | 22 | 95 | 5 | 9 | 16 | 23 | 96 | 5 | 9 | 20 | 22 |
| 97 | 5 | 11 | 13 | 18 | 98 | 5 | 11 | 18 | 21 | 99 | 5 | 12 | 14 | 17 |
| 100 | 5 | 12 | 14 | 21 | 101 | 5 | 13 | 20 | 22 | 102 | 5 | 16 | 17 | 23 |
| 103 | 7 | 9 | 12 | 17 | 104 | 7 | 9 | 14 | 17 | 105 | 7 | 9 | 17 | 21 |
| 106 | 7 | 11 | 16 | 23 | 107 | 7 | 12 | 14 | 20 | 108 | 7 | 12 | 14 | 22 |
| 109 | 7 | 12 | 16 | 17 | 110 | 7 | 12 | 17 | 23 | 111 | 7 | 14 | 16 | 17 |
| 112 | 7 | 14 | 17 | 23 | 113 | 7 | 16 | 17 | 21 | 114 | 7 | 16 | 18 | 23 |
| 115 | 7 | 17 | 21 | 23 | 116 | 8 | 9 | 11 | 13 | 117 | 8 | 9 | 13 | 18 |
| 118 | 8 | 9 | 13 | 21 | 119 | 8 | 11 | 13 | 20 | 120 | 8 | 11 | 13 | 22 |
| 121 | 8 | 11 | 16 | 18 | 122 | 8 | 11 | 18 | 23 | 123 | 8 | 12 | 20 | 22 |
| 124 | 8 | 13 | 18 | 20 | 125 | 8 | 13 | 18 | 22 | 126 | 8 | 13 | 20 | 21 |
| 127 | 8 | 13 | 21 | 22 | 128 | 8 | 14 | 20 | 22 | 129 | 9 | 11 | 16 | 23 |
| 130 | 9 | 12 | 20 | 22 | 131 | 9 | 14 | 20 | 22 | 132 | 9 | 16 | 18 | 23 |
| 133 | 11 | 13 | 16 | 18 | 134 | 11 | 13 | 18 | 23 | 135 | 11 | 16 | 17 | 23 |
| 136 | 11 | 16 | 18 | 21 | 137 | 11 | 18 | 21 | 23 | 138 | 12 | 13 | 20 | 22 |
| 139 | 12 | 14 | 17 | 20 | 140 | 12 | 14 | 17 | 22 | 141 | 12 | 14 | 20 | 21 |
| 142 | 12 | 14 | 21 | 22 | 143 | 13 | 14 | 20 | 22 | 144 | 16 | 17 | 18 | 23 |

86

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 | 11 | 16 | 2 | 2 | 5 | 11 | 23 | 3 | 2 | 5 | 16 | 18 |
| 4 | 2 | 5 | 18 | 23 | 5 | 2 | 11 | 16 | 18 | 6 | 2 | 11 | 16 | 23 |
| 7 | 2 | 11 | 18 | 23 | 8 | 2 | 16 | 18 | 23 | 9 | 3 | 7 | 12 | 14 |
| 10 | 3 | 7 | 12 | 17 | 11 | 3 | 7 | 12 | 21 | 12 | 3 | 7 | 14 | 17 |
| 13 | 3 | 7 | 14 | 21 | 14 | 3 | 12 | 14 | 17 | 15 | 3 | 12 | 17 | 21 |
| 16 | 3 | 14 | 17 | 21 | 17 | 4 | 8 | 9 | 20 | 18 | 4 | 8 | 9 | 22 |
| 19 | 4 | 8 | 13 | 20 | 20 | 4 | 8 | 13 | 22 | 21 | 4 | 8 | 20 | 22 |
| 22 | 4 | 9 | 13 | 20 | 23 | 4 | 9 | 13 | 22 | 24 | 4 | 13 | 20 | 22 |
| 25 | 5 | 11 | 16 | 18 | 26 | 5 | 11 | 16 | 23 | 27 | 5 | 11 | 18 | 23 |
| 28 | 5 | 16 | 18 | 23 | 29 | 7 | 12 | 14 | 21 | 30 | 7 | 12 | 17 | 21 |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 7 | 14 | 17 | 21 | 32 | 6 | 5 | 13 | 20 | 33 | 8 | 9 | 13 | 22 |
| 34 | 8 | 5 | 20 | 22 | 35 | 9 | 13 | 20 | 22 | 36 | 12 | 14 | 17 | 21 |

87

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 | 11 | 18 | 2 | 2 | 5 | 16 | 23 | 3 | 3 | 7 | 17 | 21 |
| 4 | 3 | 12 | 14 | 21 | 5 | 4 | 8 | 9 | 13 | 6 | 4 | 9 | 20 | 22 |
| 7 | 7 | 12 | 14 | 17 | 8 | 8 | 13 | 20 | 22 | 9 | 11 | 16 | 18 | 23 |

88

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 | 12 | 14 | 2 | 2 | 5 | 20 | 22 | 3 | 3 | 8 | 13 | 21 |
| 4 | 3 | 11 | 18 | 21 | 5 | 4 | 7 | 9 | 17 | 6 | 4 | 9 | 16 | 23 |
| 7 | 7 | 16 | 17 | 23 | 8 | 8 | 11 | 13 | 18 | 9 | 12 | 14 | 20 | 22 |

89

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 | 12 | 20 | 2 | 2 | 5 | 12 | 22 | 3 | 2 | 5 | 14 | 20 |
| 4 | 2 | 5 | 14 | 22 | 5 | 2 | 12 | 14 | 20 | 6 | 2 | 12 | 14 | 22 |
| 7 | 2 | 12 | 20 | 22 | 8 | 2 | 14 | 20 | 22 | 9 | 3 | 8 | 11 | 13 |
| 10 | 3 | 8 | 11 | 18 | 11 | 3 | 8 | 11 | 21 | 12 | 3 | 8 | 13 | 18 |
| 13 | 3 | 8 | 18 | 21 | 14 | 3 | 11 | 13 | 18 | 15 | 3 | 11 | 13 | 21 |
| 16 | 3 | 13 | 18 | 21 | 17 | 4 | 7 | 9 | 16 | 18 | 4 | 7 | 9 | 23 |
| 19 | 4 | 7 | 16 | 17 | 20 | 4 | 7 | 16 | 23 | 21 | 4 | 7 | 17 | 23 |
| 22 | 4 | 9 | 16 | 17 | 23 | 4 | 9 | 17 | 23 | 24 | 4 | 16 | 17 | 23 |
| 25 | 5 | 12 | 14 | 20 | 26 | 5 | 12 | 14 | 22 | 27 | 5 | 12 | 20 | 22 |
| 28 | 5 | 14 | 20 | 22 | 29 | 7 | 9 | 16 | 17 | 30 | 7 | 9 | 16 | 23 |
| 31 | 7 | 9 | 17 | 23 | 32 | 8 | 11 | 13 | 21 | 33 | 8 | 11 | 18 | 21 |
| 34 | 8 | 13 | 18 | 21 | 35 | 9 | 16 | 17 | 23 | 36 | 11 | 13 | 18 | 21 |

## 11.8 GRAPHES D'INDÉPENDANCE

### 11.8.1 PROGRAMME DE TRAITEMENT DES CLIQUES D'UN GRAPHE : M P C L I C Q

GRAPHES D'INDEPENDANCE

MPCLIQ:

```
:    'BEGIN'
:      'COMMENT'  MP ET CLIQUE.
:        LE BUT DE CE PROGRAMME EST D'ETABLIR UN RAPPORT ENTRE
:      LES DECOMPOSITIONS DE UN(4X4) ET LES CLIQUES DES GRAPHES DONT
:      LES SOMMETS SONT LES MATRICES DE PERMUTATIONS ET OU LES
:      ARCS EXPRIMENT L'INDEPENDANCE.
:        SON UTILISATION EST ENVISAGEE AVEC LE GRAPHE DONT
:      LES SOMMETS SONT LES DECOMPOSITIONS DE UN(4X4)- ET D'UNE
:      FACON ITERATIVE SUR LES CLIQUES DE CE GRAPHE.
:        CE PROGRAMME CONTIENT UNE PROCEDURE DE CONSTRUCTION
:      DE TOUTES LES CLIQUES AVEC INDICATION DES CLIQUES MAXIMALES;
:
:      'INTEGER' IWW,IWP,I,J,N,NO,LM,LD,NC,LS,LMB,AN,T,J1,K,LFM;
:   'INTEGER' NB;
:   'INTEGER' LOA,LOS,EA,ES;
:       LFM:=4000;
:         FT: 'FORMAT' (1H ,25I4);
:         FT2:'FORMAT'(1H ,T4,I5,10T4);
:       'BEGIN'
:      'INTEGER' 'ARRAY' MP,DCP(/1:24,1:24/);
:      'INTEGER' 'ARRAY' AS ,ASB(/1:LFM'/'20/),SUC,SUCB(/1:LFM'/'3+2/),
:                        DC,FC,CC(/0:LFM /);
:
:
:     'PROCEDURE' COMP(AS,N,SUC,ASB,SUCB,LMB);
:      'VALUE' N;
:      'INTEGER'N,LMB ;
:      'INTEGER' 'ARRAY' AS,SUC,ASB,SUCB;
:     'BEGIN'
:      'INTEGER' JS1,I,JS,J,K;
:      JS1:=1;
:      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
:        'BEGIN'
:          JS:=AS(/I/);
:          ASB(/I/):=JS1;
:          SUCB(/JS1/):=0;
:          J:=I+1;
:          PA:JS:=JS+1;
:          'IF' SUC(/JS/)=0 'THEN'
:            'BEGIN'
:              'FOR' K:=J 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
:                'BEGIN' JS1:=JS1+1;
:                  SUCB(/JS1/):=K;
:                'END';
:              'GOTO' FIN;
:            'END';
:          'IF' J<SUC(/JS/) 'THEN'
:            'BEGIN'
:              'FOR' K:=J 'STEP' 1 'UNTIL' SUC(/JS/)-1 'DO'
:                'BEGIN' JS1:=JS1+1;
:                  SUCB(/JS1/):=K;
:                'END';
:            'END';
:          J:=SUC(/JS/)+1;
:          'GOTO' PA;
:          FIN:JS1:=JS1+1;
:        'END';
:      SUCB(/JS1/):=0;
:      LMB:=JS1;
:   'IF'T=6'THEN'
:        'BEGIN' T:=-1;
:    T:=4;
:   'WRITE'(IWW,FT)'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'(ASB(/I/));
:   'WRITE'(IWW,FT)'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'LMB'DO'(SUCB(/I/));
:        'END';
:    'END' COMP;
:
:   'PROCEDURE' GR(AS,N,SUC,LM);
:   'VALUE' N,LM;
:   'INTEGER' N,LM;
:   'INTEGER' 'ARRAY' AS,SUC;
:   'BEGIN' 'INTEGER' I,J;
:    LA: 'WRITE' (IWW,F3); F3: 'FORMAT' ('  GRAPHE');
:      J:=1;
:      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
:        'WRITE' (IWW,F6) I,AS(/I/),J,SUC(/J/),
:          'FOR' J:=J+1 'WHILE' SUC (/J/) 'NE' 0
:                                  'AND'J<=LM 'DO'(SUC(/J/));
:        F6: 'FORMAT' (1H ,T4,I5,I5,25I4);
:   'END';
:
:    'PROCEDURE' INTER(Z1,IZ1,Z2,IZ2,Z3,IZ3,AN);
:      'VALUE' IZ1,IZ2;
:      'INTEGER' IZ1,IZ2,IZ3,AN;
:      'INTEGER' 'ARRAY' Z1,Z2,Z3;
:      'COMMENT' INTERSECTION DE 2 SUITES CROISSANTES, SE TERMINANT SUR
:        UNE CASE NULLE,L'UNE DANS Z1 A PARTIR DE IZ1,
:        L'AUTRE DANS Z2 A PARTIR DE IZ2. LE RESULTAT
:        IRA DANS Z3 A PARTIR DE IZ3. ON POINTE TOUJOURS
:        SUR LES ZEROS. IZ3 EST APPELE PAR NOM;
:    'BEGIN'
:      IZ1:=IZ1+1; IZ2:=IZ2+1;IZ3:=IZ3+1;
:    CONT:'IF' Z1(/IZ1/)=0 'THEN' 'GOTO' FINT;
:      'IF' Z2(/IZ2/)=0 'THEN' 'GOTO' FINT;
:      'IF' Z1(/IZ1/) =Z2(/IZ2/) 'THEN'
:        'BEGIN' Z3(/IZ3/):=Z1(/IZ1/);
:          IZ1:=IZ1+1;
:          IZ2:=IZ2+1;
:          'IF'IZ3>LFM'THEN'
:            'BEGIN'
:              'WRITE'(IWW,FMAX)LS;
:              FMAX:'FORMAT'( ' FC EST PLEIN',I6);
:              AN:=1;
:              'GOTO' FINT;
:            'END';
:          IZ3:=IZ3+1;
:          'GOTO' CONT;
:        'END';
:      'IF' Z1(/IZ1/)>Z2(/IZ2/)
:          'THEN' IZ2:=IZ2+1
```

```
:        'ELSE' IZ1:=IZ1+1;
:    'GOTO' CONT;
:   FINT:Z3(/IZ3/):=0;
:  'END' DE INTER;

:  'PROCEDURE' CLIQUEMAX(DC,FC,CC,LD,AS,N,SUC,LM,AN);
:    'VALUE' N,LM;
:    'INTEGER' N,LM,LD,AN;
:    'INTEGER' 'ARRAY' DC,FC,CC,AS,SUC;
:    'COMMENT'
:       UNE CLIQUE SE DECOMPOSE EN UN DEBUT ET UNE FIN
:    DE 1 SOMMET. LE DEBUT EST DANS DC, TOUTES LES FINS
:    DE CE DEBUT REGROUPEES DANS FC.
:       LES SOMMETS SONT TOUJOURS EN ORDRE CROISSANT ET
:    LES CLIQUES EN ORDRE LEXICOGRAPHIQUE.
:       3 TABLEAUX SONT UTILISES.
:    DC:  CONTIENT LES DEBUTS DE CLIQUES SEPARES PAR DES
:       ZEROS-SEPARATEURS. UN DEBUT DE CLIQUE EST CONSTITUE
:       PAR
:       - LA LISTE DES SOMMETS,
:       - L'ADRESSE DANS FC DE SES FINS.
:       IL Y A UN ZERO-SEPARATEUR DEVANT TOUTES LES CLIQUES,
:       EN POSITION 0 ET UN APRES,EN POSITION LD.
:    FC:CONTIENT LES FINS D'UNE MEME CLIQUE, SEPAREES PAR
:       DES ZEROS-SEPARATEURS. LE TABLEAU COMMENCE EN 1
:       OU SE TROUVE UN ZERO-SEPARATEUR ET SE TERMINE
:       EN LF, OU SE TROUVE AUSSI UN ZERO-SEPARATEUR.
:    CC:DONNE DES INDICATIONS SUR LA MAXIMALITE DES CLIQUES
:       CC(/IF/) INDIQUE L'ADRESSE DANS DC D'UNE CLIQUE CONTENANT OU
:       OBTENUE EN PROLONGEANT CELLE QUI SE TERMINE EN FC(/IF/).
:       QUAND IF CORRESPOND A UN ZERO-SEPARATEUR ALORS
:       CC(/IF/) INDIQUE LE CARDINAL DES CLIQUES SE TERMINANT
:       JUSTE APRES CE ZERO-SEPARATEUR.
:       EN TOUTE CIRCONSTANCE ON REPERE UNE CLIQUE PAR
:    LE ZERO-SEPARATEUR QUI LA PRECEDE,OU QUI LA SUIT.
:    SI LE BALAYAGE EST RETROGRADE-
:       LES CLIQUES SERONT CONSTRUITES EN ORDRE LEXICOGRAPHIQUE.
:    LES CLIQUES MAXIMALES SERONT RECHERCHEES EN ORDRE RETROGRADE.
:    LES COMPARAISONS D'INCLUSION NE SE FAISANT QU'ENTRE CLIQUES
:    SUSCEPTIBLES D'ETRE MAXIMALES.
:       ON UTILISE LA PROCEDURE INTER POUR TROUVER L'INTERSECTION
:    DE SUITES CROISSANTES DE SOMMETS SE TERMINANT SUR DES ZEROS,
:    EGALEMENT POUR VERIFIER QU'UNE SUITE EST INCLUSE DANS UNE
:    AUTRE.
:       REF DE L'ALGORITHME:6.AILLAUD.P20.
:    DONNEES
:       AS(/I/)=ADRESSE DES SUCCESSEURS DE I DANS FC.
:                C'EST AUSSI LA FIN DES CLIQUES DE DEBUT I.
:       SUC = TABLEAU DES SUCCESSEURS - DEBUT DE FC.
:       N   = NOMBRE DE SOMMETS.
:       LM  = LONGUEUR DE SUC.
:       DC,FC,CC SONT TROIS TABLEAUX A 1 INDICE COMMENCANT
:       A ZERO, DECLARER DANS LE PROGRAMME PRINCIPAL,QUI
:       CONTIENDRONT A LA FIN LES RESULTATS. DE LONGUEUR LM EN
:       ENTREE. EN SORTIE LM EST LA FIN DES CLIQUES TROUVEES.
:       . LA PROCEDURE INTER EST NECESSAIRE AU FONCTIONNEMENT DE CETTE
:     PROCEDURE. ;
:   'BEGIN'
:     'INTEGER' I,J,JD,K, ID,KD,ND,FD,
:                 DPLC,JF,LF,IF,NF,FF;
:     'INTEGER' 'ARRAY' ZIT(/0:N+1/);

:   'PROCEDURE' ECRASE;
:   'COMMENT' ELIMINATION DES CLIQUES NON MAXIMALES;
:   'BEGIN'
:   'COMMENT' ON RECOPIE EN (ID,IF) PARCOURUE PAR(=,KF)
:            LES CLIQUES DE(JD,JF) NON MAXIMALES;
:     'INTEGER' ID,IF,KF,JD,JF,I,K,J;
:     'COMMENT' DEPART ECRITURE;
:       ID:=0;IF:=1;
:       DC(/ID/):=0; FC(/IF/):=0;
:       KF:=IF;
:     'COMMENT' DEPART LECTURE;
:       JD:=0;JF:=1;
:     'COMMENT' RECOPIE DE FC;
:     COP:CC(/IF/):=CC(/JF/);
:       'FOR' JF:=JF+1 'WHILE' FC(/JF/) 'NE' 0 'DO'
:         'IF' CC(/JF/)=0 'THEN'
:           'BEGIN' KF:=KF+1;
:             FC(/KF/):=FC(/JF/);
:             CC(/KF/):=0;
:           'END';
:     'COMMENT' A-T-ON DES CLIQUES MAX?;
:       'IF' IF 'NE' KF 'THEN'
:         'BEGIN' KF:=KF+1;
:           FC(/KF/):=0;CC(/KF/):=CC(/JF/);
:     'COMMENT' RECOPIE DE DC;
:           'FOR' JD:=JD+1 'WHILE' DC(/JD/) 'NE' 0 'DO'
:             'BEGIN' ID:=ID+1;
:               DC(/ID/):=DC(/JD/);
:             'END';
:           DC(/ID/):=IF;
:           ID:=ID+1;
:           DC(/ID/):=0;
:           'COMMENT' PASSAGE A LA SUIVANTE;
:           IF:=KF;
:           'GOTO' RECOP
:         'END';
:     'COMMENT' ON N'A PAS DE CLIQUES MAX,PASSAGE AUX CLIQUES SUIVANTES;
:       'FOR' JD:=JD+1 'WHILE' DC(/JD/) 'NE' 0 'DO';
:     'COMMENT' TEST DE FIN DE RECOPIE;
:      RECOP:'IF' JD<LD 'THEN' 'GOTO' COP;
:       LD:=ID;
:       LF:=IF;
:       DC(/LD+1/):=FC(/LF+1/):=0;
:        'IF' LD=0 'THEN'
:          'BEGIN' 'WRITE'(TUW,FF);
:            FF:'FORMAT'(' GRAPHE VIDE');
:            'GOTO' PAMAX;
:          'END';
```



BIBLIOTHEQUE LILLE

```
1   :     'COMMENT' VERIF;
2   :       'IF' T=4 'THEN'
3   :         'BEGIN' I:=0;
4   :    T:=4;
5   :    T:=-1;
6   :          ALL4:K:=I;
7   :            'FOR' I:=I+1 'WHILE' DC(/I/) 'NE' 0 'DO';
8   :              'WRITE'(IWW,FT2)K,
9   :                  'FOR' J:=K+1 'STEP' 1 'UNTIL' I-1 'DO' (DC(/J/))];
0   :              J1:=J:=DC(/I-1/)];
1   :              'WRITE'(IWW,F2)J,
2   :                  'FOR' J:=J+1 'WHILE' FC(/J/) 'NE' 0
3   :                      'AND' J<=LF 'DO' (FC(/J/))];
4   :              'WRITE'(IWW,F2)'FOR' K:=J1 'STEP' 1 'UNTIL' J-1 'DO'
5   :              (CC(/K/))];
6   :              'IF' I<LD 'THEN' 'GOTO' ALL4;
7   :              F2:'FORMAT' (1H ,I4,I5,25I4)];
8   :          'END';
9   :   'END' DE ECRASE;
0   :
1   :    CC(/0/):=FC(/0/):=0;
2   :    'FOR' I:=0 'STEP' 1 'UNTIL' LM 'DO' CC(/I/):=0;
3   :   INITIALISATION:
4   :    'COMMENT' RECOPIE DE AS DANS DC;
5   :      DC(/0/):=0;
6   :      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
7   :        'BEGIN' J:=3*(I-1);
8   :          DC(/J+1/):=I;
9   :          DC(/J+2/):=AS (/I/);
0   :          DC(/J+3/):=0;
1   :        'END';
2   :    'COMMENT' RECOPIE DE SUC DANS FC;
3   :      FC(/0/):=0;
4   :      'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' LM 'DO'
5   :        'BEGIN' FC(/I/):=SUC(/I/);
6   :          'IF' FC(/I/)=0 'THEN' CC(/I/):=2;
7   :        'END';
8   :    'COMMENT' INITIALISATION POUR LA CONSTRUCTION DE TOUTES LES CLIQUES;
9   :      JD:=0;JF:=1;
0   :      LS:=CC(/JF/);
1   :      LF:=LMILD:=3*N;
2   :      ECRASE;
3   :   'IF' T=0 'THEN'
4   :    'BEGIN' I:=0;
5   :    T:=0;
6   :    T:=-1;
7   :      ALL0:K:=I;
8   :          'FOR'I:=I+1'WHILE'DC(/I/)'NE'0'DO';
9   :          'WRITE'(IWW,FT2)K,'FOR'J:=K+1'STEP'1'UNTIL'I-1'DO'(DC(/J/))];
0   :      J1:=J:=DC(/I-1/)];
1   :      'WRITE'(IWW,F11)J,
2   :                  'FOR'  J:=J+1 'WHILE' FC(/J/) 'NE'0
3   :                                  'AND'J<=LF 'DO'(FC(/J/))];
4   :      'WRITE' (IWW,F11) 'FOR' K:=J1 'STEP' 1 'UNTIL' J-1 'DO' (CC(/K/))];
5   :      'IF' I<LD 'THEN' 'GOTO' ALL0;
```

```
276 :    F11: 'FORMAT' (1H ,I4, I5,25I4)];
277 :      'END';
278 :      'GOTO' CLIC;
279 :
280 :   CLIC:
281 :      'COMMENT'
282 :        ON PREND UN DEBUT DE CLIQUE EN DC(/JD/) D'INDICE
283 :        COURANT KD, ET POUR CHACUNE DE SES FINS,
284 :        TROUVEE EN FC(/JF/),ON CREE DE NOUVELLES
285 :        CLIQUES EN DC(/LD/) D'INDICE COURANT ID ET FC(/LF/)
286 :        D'INDICE COURANT IF;
287 :      'FOR' JF:=JF+1 'WHILE' FC(/JF/)'NE'0 'DO'
288 :        'BEGIN'
289 :          'COMMENT' CALCUL DES FINS DE LA CLIQUE(DC(/JD/),FC(/JF/));
290 :            IF:=LF;
291 :            CC(/IF/):=LS+1;
292 :            INTER(FC,JF,SUC,AS(/FC(/JF/)/),FC,IF,AN);
293 :            'IF'AN=1 'THEN' 'GOTO' PAMAX;
294 :            'IF' IF>LF+1
295 :              'THEN'
296 :                'COMMENT' L'INTERSECTION N'EST PAS VIDE CAR
297 :                  ON A OBTENU DE NOUVELLES CLIQUES;
298 :                'BEGIN'
299 :                  'FOR'I:=LF+1'STEP'1'UNTIL'IF'DO'
300 :                    CC(/I/):=0;
301 :                  'COMMENT' RECOPIE DU DEBUT DE CLIQUE;
302 :                    KD:=JD;
303 :                    ID:=LD+1;
304 :                    'FOR' KD:=KD+1 'WHILE' DC(/KD/)'NE'0 'DO'
305 :                     'BEGIN' DC(/ID/):=DC(/KD/);ID:=ID+1;
306 :                       'IF'ID>LFM-2 'THEN'
307 :                         'BEGIN'
308 :                           'WRITE'(IWW,DMAX)LS;
309 :                           AN:=1;
310 :                           DMAX:'FORMAT'(' DC EST PLEIN',I4);
311 :                           'GOTO' PAMAX;
312 :                         'END';
313 :                     'END';
314 :                    DC(/ID-1/):=FC(/JF/);
315 :                    DC(/ID/):=LF;ID:=ID+1;
316 :                    DC(/ID/):=0;
317 :                  'COMMENT' ADRESSE DES NVELLES CLIQUES;
318 :                    CC(/JF/):=ID;
319 :                  'COMMENT' PASSAGE A UNE NOUVELLE CLIQUE;
320 :                    LD:=ID;
321 :                    LF:=IF;
322 :                'END' DE IF;
323 :        'END' DE JF;
324 :      'COMMENT' PASSAGE AUX CLIQUES SUIVANTES;
325 :        KD:=JD;
326 :        'FOR' KD:=KD+1 'WHILE' DC(/KD/)'NE'0 'DO';
327 :   'IF' T=1 'THEN'
328 :      'WRITE' (IWW,FT) T,JD,KD,JF,0,0,0,LD,ID,LF,IF;
329 :    T:=1;
330 :    T:=-1;
```

```
:        JD:=KD;
:        'IF' JD=LD 'THEN' 'GOTO' CMAX;
:        'FOR' KD:=KD+1 'WHILE' DC(/KD/)'NE'0 'DO';
:        JF:=DC(/KD-1/);
:         'IF'LS<CC(/JF/) 'THEN'
:           'BEGIN'
:             LS:=CC(/JF/);
:             ECRASE;
:             KD:=0;
:             'FOR'KD:=KD+1'WHILE'DC(/KD/)'NE'0'OR'LS>CC(/DC(/KD-1/)/)'DO';
:             JF:=DC(/KD-1/);
:             'FOR'KD:=KD-1'WHILE'DC(/KD/)'NE'0'DO';
:             JD:=KD;
:           'END';
:        'GOTO' CLIC;

:     CMAX:
:     'IF' T =2 'THEN'
:       'BEGIN' T:=0;
:      T:=2;
:      T:=-1;
:        ALL1:K:=T;
:            'FOR'I:=I+1'WHILE'DC(/I/)'NE'0'DO';
:             'WRITE'(IWW,F2)K,'FOR'J:=K+1'STEP'1'UNTIL'I-1'DO'(DC(/J/));
:        J1:=J:=DC(/I-1/);
:        'WRITE'(IWW,F2)J,
:                        'FOR'  J:=J+1 'WHILE' FC(/J/) 'NE'0
:                                              'AND'J<=LF 'DO'(FC(/J/));
:        'WRITE' (IWW,F2) 'FOR' K:=J1 'STEP' 1 'UNTIL' J-1 'DO' (CC(/K/));
:        'IF' I<LD 'THEN' 'GOTO' ALL1;
:      F2: 'FORMAT' (1H ,I4, I5,25I4);
:      'END';
:      'COMMENT' RECHERCHE DES CLIQUES MAXIMALES.
:         CE SONT CELLES QUI NE SONT CONTENUES DANS AUCUNE AUTRE.
:      EN PARTICULIER, ELLES NE SE SONT PAS PROLONGEES. C'EST LE CAS
:      POUR CELLES DE LA DERNIERE COLONNE, QUI SONT TOUTES DE
:      MEME CARDINAL, QUI EST MAXIMUM.
:         DANS UN BALAYAGE EN SENS RETROGRADE DES CLIQUES,
:      POUR LA CLIQUE(DC(/JD/),FC(/JF/)),DE LONGUEUR LS,QUI NE
:      S'EST PAS PROLONGEE(CC(/JF/)=0),ON VA BALAYER EN
:      SENS RETROGRADE LES CLIQUES MAXIMALES TROUVEES(CELLES
:      QUI SONT PLUS LOIN EN ORDRE LEXICOGRAPHIQUE ET QUI VERIFIENT ENCORE
:      CC(/JF/)=0) ET TESTER SI LA CLIQUE CONSIDEREE EST INCLUSE
:      DANS L'UNE D'ELLES. LE BALAYAGE DES CLIQUES MAXIMALES
:      S'ARRETE A DPLC QUI EST L'ADRESSE DE DEBUT DE LA
:      PREMIERE CLIQUE DE CARDINAL LS+1.
:         POUR TESTER L'INCLUSION ON UTILISE INTER,QUI
:      NECESSITE QUE LES SUITES DE SOMMETS SOIENT CROISSANTES
:      ET SE TERMINENT SUR DES ZEROS-SEPARATEURS. POUR CELA
:      ON POSERA A LA PLACE DES ADRESSES DE FINS DE CLIQUE,LE
:      SOMMET FIN. POUR LES CLIQUES A TESTER D'INDICE
:      (JD,JF) CETTE ADRESSE SERA KD. POUR LA CLIQUE MAXIMALE
:      D'INDICE (ID,IF) CETTE ADRESSE SERA ND. ZIT DE LONGUEUR
:      NF SERA L'INTERSECTION DES DEUX CLIQUES. IL Y A CONTENANCE
:      SI NF=LS-1(A CAUSE DU ZERO-SEPARATEUR).
:         SI UNE CLIQUE EST INCLUSE DANS UNE AUTRE,ON
:      INDIQUERA EN CC(/JF/) L'ADRESSE ID DE LA CONTENANTE.
:         UNE COLONNE EST UN ENSEMBLE DES CLIQUES DE MEME CARDINAL;
:         ECRASE;
:      'COMMENT' CARDINAL DES DERNIERES CLIQUES;
:        LS:=CC(/DC(/LD-1/)/);
:         'IF'LS=2'THEN' 'GOTO' PAMAX;
:      'COMMENT' DEBUT DE LA COLONNE;
:        ID:=LD;
:        'FOR' ID:=ID-1 'WHILE' DC(/ID/)'NE'0 'OR'
:                                LS=CC(/DC(/ID-1/)/)  'DO';
:        DPLC:=ID;
:        LS:=CC(/DC(/ID-1/)/);
:      'COMMENT' BALAYAGE RETROGRADE DES CLIQUES A TESTER;
:        JD:=DPLC;
:        KD:=JD-1;JF:=FD:=DC(/KD/);
:        'FOR' JD:=JD-1 'WHILE' DC(/JD/)'NE'0 'DO';
:        'FOR' JF:=JF+1 'WHILE' FC(/JF/)'NE'0 'DO';
:      'FOR' JF:=JF-1 'WHILE' JF>1 'DO'
:        'BEGIN' 'IF' FC(/JF/)=0 'THEN'
:          'COMMENT' PASSAGE AUX DEBUTS A TESTER PRECEDENTS;
:          'BEGIN' DC(/KD/):=FD;
:            KD:=ID-1;FD:=DC(/KD/);
:            'COMMENT' CHANGEMENT DE COLONNE;
:            'IF' LS>CC(/FD/) 'THEN'
:            'BEGIN' DPLC:=JD;LS:=CC(/FD/);'END';
:            'FOR' JD:=JD-1 'WHILE' DC(/JD/)'NE'0 'DO';
:          'END';
:          'IF' CC(/JF/)=0 'THEN' 'COMMENT' A TESTER;
:          'BEGIN' DC(/KD/):=FC(/JF/);
:            'COMMENT' BALAYAGE RETROGRADE DES CLIQUES MAX;
:            ID:=LD;IF:=LF;
:            ND:=ID-1;FF:=DC(/ND/);
:            'FOR' ID:=ID-1 'WHILE' DC(/ID/)'NE'0 'DO';
:            'FOR' IF:=IF-1 'WHILE' ID>=DPLC 'DO'
:              'BEGIN' 'IF' FC(/IF/)=0 'THEN'
:                'COMMENT' PASSAGE AU DEBUT PRECEDENT;
:                'BEGIN' DC(/ND/):=FF;
:                  ND:=ID-1;FF:=DC(/ND/);
:                  'FOR' ID:=ID-1 'WHILE' DC(/ID/)'NE'0 'DO';
:                'END';
:                'IF' CC(/IF/)=0 'THEN' 'COMMENT' TEST;
:                 'BEGIN' DC(/ND/):=FC(/IF/);
:                    'COMMENT' TEST;
:                    NF:=0 ; ZIT(/NF/):=0;
:                    INTER(DC,JD,DC,ID,ZIT,NF,AN);
:                    DC(/ND/):=FF;
:                    'IF' NF=LS+1 'THEN' 'GOTO' NONMAX;
:                    'COMMENT' PASSAGE A LA CLIQUE MAX PRECED;
:                  'END';
:              'END' DE IF;
:              'COMMENT' LA CLIQUE JD,JF EST MAXIMALE;
:              'GOTO' CJFS;
:              NONMAX;'COMMENT' LA CLIQUE(JD,JF) N'EST PAS MAX
:              PUISQUE CONTENUE DANS CELLE EN ID;
```

```
:            CC(/JF/):=ID;
:            CJFS:'COMMENT' PASSAGE A LA CLIQUE EN JF
:            PRECEDENTE APRES REMISE EN PLACE;
:        'END' DE CC(/JF/)=0;
:      DC(/KD/):=FD;
:  'IF' T=2 'THEN'
:    'WRITE' (IWW,FT)T,JF,JD,KD,FD,0,0,IF,ID,ND,FF,0,0,DPLC,LS,LD,LF;
:  T:=2;
:   T:=-1;
:    'END' DE JF;
:    ECRASE;
:    PAMAX;
:  'END' DE CLIQUEMAX ;

:  'PROCEDURE' SORCM(DC,FC,CC,LD,NC);
:    'VALUE' LD;
:    'INTEGER' LD,NC;
:    'INTEGER' 'ARRAY' DC,FC,CC;
:    'COMMENT' IMPRESSION DES CLIQUES MAXIMALES;
:  'BEGIN'
:     'INTEGER' ID,LF,   I,NF,KD,LSM,IF;
:     'INTEGER' 'ARRAY' ZIT(/0:200/);
:    LF:=DC(/LD-1/);LSM:=CC(/LF/);
:    'FOR' LF:=LF+1 'WHILE' FC(/LF/)'NE'0 'DO';
:    NC:=0;
:    'COMMENT' BALAYAGE RETROGRADE;
:      ID:=LD;IF:=LF;
:      'FOR' ID:=ID-1 'WHILE' DC(/ID/)'NE'0 'DO';
:      'FOR' IF:=IF-1 'WHILE' ID>=0 'DO'
:        'BEGIN' 'IF' FC(/IF/)=0 'THEN'
:                  'FOR' ID:=ID-1 'WHILE' DC(/ID/)'NE'0 'DO';
:          'IF' CC(/IF/)=0 'THEN'
:            'BEGIN' NF:=0;KD:=ID  ; ZIT(/NF/):=0;
:              'FOR' KD:=KD+1 'WHILE' DC(/KD/)'NE'0 'DO'
:                'BEGIN' NF:=NF+1;ZIT(/NF/):=DC(/KD/);'END';
:                  ZIT(/NF/):=FC(/IF/);
:                  NC:=NC+1;
:                  CC(/IF/):=-NC;
:                  'WRITE'(IWW,F1)NC,NF,NF,
:                     'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NF 'DO'(ZIT(/I/));
:                  F1:'FORMAT'(1H ,I4,I6,2H  ,N I4);
:            'END';
:        'END';
:  'IF' T =2 'THEN'
:    'BEGIN' I:=0;
:   T:=2;
:   T:=-1;
:     ALL2:K:=I;
:         'FOR'I:=I+1'WHILE'DC(/I/)'NE'0'DO';
:          'WRITE'(IWW,FT2)K,'FOR'J:=K+1'STEP'1'UNTIL'I-1'DO'(DC(/J/));
:      J1:=J:=DC(/I-1/);
:      'WRITE'(IWW,F9)J,
:                  'FOR'  J:=J+1 'WHILE' FC(/J/) 'NE'0
:                                  'AND'J<=LF 'DO'(FC(/J/));
:      'WRITE' (IWW,F9) 'FOR' K:=J1 'STEP' 1 'UNTIL' J-1 'DO' (CC(/K/));
:        'IF' I<LD 'THEN' 'GOTO' ALL2;
:    F9: 'FORMAT' (1H ,I4, I5,25I4);
:    'END';
:  'END' DE SORCM;

:  'PROCEDURE' MPIND(MP,N,M,AS,SUC,LD);
:    'VALUE' N,M;
:    'INTEGER' N,M,LD;
:    'INTEGER' 'ARRAY' MP,AS,SUC;
:    'COMMENT' CONSTRUCTION DU GRAPHE D'INDEPENDANCE DES LIGNES DE MP;
:  'BEGIN'
:    'INTEGER' I,J,K;
:    LD:=1;
:    'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N  'DO'
:      'BEGIN' AS(/I/):=LD;
:        SUC(/LD/):=0;LD:=LD+1;
:        'FOR' J:=I+1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
:          'BEGIN' 'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' M 'DO'
:            'IF' MP(/I,K/)=MP(/J,K/) 'THEN' 'GOTO' DEP;
:            SUC(/LD/):=J;LD:=LD+1;
:          DEP:'END';
:      'END';
:    SUC(/LD+1/):=0;
:    SUC(/LD/):=0;
:  'END' MPIND;

:  'PROCEDURE' CLICIND (DC,FC,CC,LD,NC,AS,N,SUC,LM,AN);
:     'VALUE'NC;
:    'INTEGER' LD,N,LM,NC,AN;
:    'INTEGER' 'ARRAY' DC,FC,CC,AS,SUC;
:  'COMMENT' DEUX CLIQUES SONT INDEPENDANTES SI ELLES N'ONT PAS
:    DE SOMMETS EN COMMUN. CETTE PROCEDURE CONSTRUIT LE
:    GRAPHE D'INDEPENDANCE DES CLIQUES MAXIMALES D'UN GRAPHE. ;
:  'BEGIN'
:    'INTEGER' I,J,NF,NA    ,JD,KD,FD,JF,ID,ND,FF,IF,JS;
:    'INTEGER' 'ARRAY' ZIT (/0:N+1/);
:    'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'AS(/I/):=0;
:    'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'LM'DO'SUC(/I/):=0;
:    'COMMENT' BALAYAGE RETROGRADE DES CLIQUES MAX;
:    JD:=LD;JS:=1;
:    JSUIV: 'IF' JD=0  'THEN' 'GOTO' JFINI;
:     KD:=JD;
:    'FOR' KD:=KD-1 'WHILE' DC(/KD/) 'NE'0 'DO' ;
:    JF:= FD:=DC(/JD-1/);
:    'FOR' JF:=JF+1 'WHILE' FC(/JF/)'NE'0'DO';
:    'FOR' JF:=JF-1 'WHILE' FC(/JF/)'NE'0'DO'
:      'IF'CC(/JF/)<0'THEN'
:      'BEGIN' NA:=-CC(/JF/);
:                              AS(/NA/):=JS; SUC(/JS/):=0;
:        DC(/JD-1/):=FC(/JF/);
:        ID:=KD;
:        ISUIV: 'IF' ID=0  'THEN' 'GOTO' IFINI;
:        ND:=ID;
:        'FOR' ND:=ND-1 'WHILE' DC(/ND/)'NE'0'DO';
:          IF:= FF:= DC(/ID-1/);
```

```
:          'FOR' IF:=IF+1 'WHILE' FC(/IF/)'NE'0 'DO';
:          'FOR' IF:=IF-1 'WHILE' FC(/IF/)'NE'0 'DO'
:            'IF' CC(/IF/)<0 'THEN'
:            'BEGIN'
:              DC(/ID-1/):=FC(/IF/); NF:=0;
:              INTER(DC,KD,DC,ND,ZIT,NF,AN);
:              'IF' NF=1 'THEN'
:                'BEGIN' JS:=JS+1; SUC(/JS/):=  -CC(/IF/);
:                  'IF'JS>LFM'/'3'THEN'
:                    'BEGIN' 'WRITE'(IWW,FI); LM:=1;
:                        AN:=1;
:                        FI:'FORMAT'('  GRAPHE   TROP D''ARCS');
:                        'GOTO' CIN;
:                    'END';
:                'END';
:            'END' DE IF;
:            DC(/ID-1/):=FF;
:            ID:=ND;
:            'GOTO' ISUIV;
:            IFIN: JS:=JS+1; SUC(/JS/):=0;
:      'END' DE JF;
:    'IF' T=3 'THEN'
:      'WRITE' (IWW,FT) T,JD,KD,FD,JF,NC,NF,ID,ND,FF,IF,JS,NA;
:    T:=3;
:    T:=-1;
:      JD:=KD;
:      'GOTO' JSUIV;
:      JFIN: N:=NC;
:      LM:=JS;SUC(/LM+1/):=0;
:    'IF' T=3 'THEN'
:      'BEGIN'
:        J:=1  ;
:        'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NC 'DO'
:          'WRITE' (IWW,F6) T,AS(/I/),J,SUC(/J/),
:            'FOR' J:=J+1 'WHILE' SUC (/J/) 'NE'0
:                                  'AND'J<=JS 'DO'(SUC(/J/));
:        F6: 'FORMAT' (1H ,I4,I5,I5,25I4);
:      'END';
:       CIN:
:    'END' DE CLICIND;
:
:     'COMMENT' PROCEDURE MPT1;
:
:
:
:
:    'COMMENT' DONNEES;
:      'COMMENT' NUMERO DES GRAPHES:
:        1:MP, 2:DCP, 3:AILLAUD1, 4:AILLAUD2, 5:PLEIN, 6:DIVERS;
:     T:=-1;
:      IWW:=108; IWR:=105;
:       FR:'FORMAT'(1H ,4I4);
:       F1:'FORMAT'(4I3);
:       'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'24'DO'
:         'BEGIN'
:         'READ'(IWR,F1) 'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'4'DO'(MP(/I,J/));
:         'WRITE'(IWW,FR) 'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'4'DO'(MP(/I,J/));
:         'END';
:       'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'24'DO'
:         'BEGIN'
:         'READ'(IWR,F1) 'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'4'DO'(DCP(/I,J/));
:         'WRITE'(IWW,FR) 'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'4'DO'(DCP(/I,J/));
:         'END';
:    ENCOR: 'READ' (IWR,F1) NO,N,LM;
:      'IF' NO<=2 'THEN' N:=24;
:      'IF' N > 50 'THEN'
:        'BEGIN' 'WRITE' (IWW,FA); FA: 'FORMAT' ('0 TROP DE SOMMETS');
:          'GOTO' ENCOR;
:        'END';
:      'WRITE' (IWW,FR)NO,N,LM;FB:'FORMAT' ('1GRAPHE ',3(I3));
:      'IF' NO<=2
:        'THEN'
:          'BEGIN'
:          'IF'NO=1'THEN'
:            MPIND(MP,N,4,AS,SUC,LM)
:          'ELSE'
:            MPIND(DCP,N,4,AS,SUC,LM)
:          'END'
:        'ELSE'
:          'BEGIN'
:            F2:'FORMAT'( 25I3);
:          'READ'(IWR,F2)'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'(AS(/I/));
:          'READ'(IWR,F2)'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'LM'DO'(SUC(/I/));
:        'END';
:
:    'COMMENT' PROGRAMME PRINCIPAL;
:    'COMMENT' PROGRAMME PRINCIPAL;
:       'READ'(IWR,F2)N;'COMMENT' VALEUR DU DERNIER N ENTIEREMENTTRAITE;
:       'GOTO' SOUSEN;
:    LA:
:    'COMMENT' GRAPHE COMPLEMENTAIRE;
:      AN:=0;
:      'WRITE'(IWW,FGC); FGC:'FORMAT' ('1 COMPLEMENTAIRE');
:      COMP(AS,N,SUC,ASB,SUCB,LMB);
:      GR(ASB,N,SUCB,LMB) ;
:      CLIQUEMAX(DC,FC,CC,LD,ASB,N,SUCB,LMB,AN);
:        'IF' AN=1 'THEN' 'GOTO' OILCOMP;
:      'WRITE' (IWW,F5);
:      SORCM (DC,FC,CC,LD,NC);
:    OILCOMP:
:    'COMMENT' CLIQUES DU COMPLEMENTAIRE  ;
:      'WRITE' (IWW,FGCC); FGCC:'FORMAT' ('0 CLICOMP');
:      AN:=0;
:      CLICIND(DC,FC,CC,LD,NC,ASB,NB,SUCB,LMB,AN);
:        'IF' AN=1 'THEN' 'GOTO' DIR;
:      GR(ASB,NB,SUCB,LMB);
:      CLIQUEMAX (DC,FC,CC,LD,ASB,NB,SUCB,LMB,AN);
:        'IF' AN=1 'THEN' 'GOTO' DIR;
:      'WRITE' (IWW,F5);
:      SORCM(DC,FC,CC,LD,NC) ;
:    DIR:
```

BUS LILLE

## 11.8.2. RESULTATS SUR LES PERMUTATIONS ET LES B-DECOMPOSITIONS DE UN(4 x 4)

```
'COMMENT' GRAPHE DIRECT;
  'WRITE' (IWW,FGD); FGD: 'FORMAT' ('0 DIRECT');
  AN:=0;
  GR (AS,N,SUC,LM);
  CLIQUEMAX(DC,FC,CC,LD,AS,N,SUC,LM,AN);
    'IF' AN=1 'THEN' 'GOTO' DILCDIR;
  'WRITE' (IWW,FS); FS: 'FORMAT' ('0 CLIQUES MAXIMALES');
  SORCM(DC,FC,CC,LD,NC) ;
DILCDIR:
'COMMENT' CLIQUES DU DIRECT ;
  'WRITE' (IWW,FGDC);FGDC : 'FORMAT' ('0 CLICDIR');
  AN:=0 ;
  CLICIND (DC,FC,CC,LD,NC,ASB,NB,SUCB,LMB,AN);
    'IF' AN=1 'THEN' 'GOTO' SOUSEN;
  GR (ASB,NB,SUCB,LMB);
  CLIQUEMAX (DC,FC,CC,LD,ASB,NB,SUCB,LMB,AN);
    'IF' AN=1 'THEN' 'GOTO' SOUSEN;
  'WRITE' (IWW,FS);
  SORCM(DC,FC,CC,LD,NC) ;
SOUSEN :
'COMMENT' PASSAGE A UN SOUS-GRAPHE;
  FA:=FS:=0;
  'FOR' LOA:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N-1 'DO'
    'BEGIN' LOS:=AS(/LOA/);
      FS:=FS+1 ;  SUC(/FS/):=0;
      FA:=FA+1;   AS(/FA/):=FS;
      'FOR' LOS:=LOS+1 'WHILE' SUC(/LOS/) 'NE' 0
                                    'AND' SUC(/LOS/) < N 'DO'

        'BEGIN' FS:=FS+1;
          SUC(/FS/):= SUC(/LOS/);
        'END' ;
      'END' ;
  FS:=FS+1; SUC(/FS/):=0;
  LM:=FS; N:=N-1;
  'IF' N>=2 'THEN' 'GOTO' LA;
   'END';
'END'
```

COMPLEMENTAIRE = graphe de non-independance des permutations d'ordre 4.

| GRAPHE | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (9) | (12) | (13) | (15) | (16) | (20) | (21) | (22) |
| 2 | 16 | 16 | 0 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 11 | 14 | 15 | 16 | 19 | 21 | 22 | |
| 3 | 30 | 30 | 0 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 13 | 15 | 18 | 19 | 23 | 24 | | |
| 4 | 43 | 43 | 0 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 14 | 16 | 17 | 20 | 23 | 24 | | | |
| 5 | 55 | 55 | 0 | 6 | 8 | 11 | 12 | 13 | 17 | 18 | 19 | 21 | 24 | | | | |
| 6 | 66 | 66 | 0 | 7 | 11 | 12 | 14 | 17 | 18 | 20 | 22 | 23 | | | | | |
| 7 | 76 | 76 | 0 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 19 | 20 | 22 | | | |
| 8 | 88 | 88 | 0 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 16 | 19 | 20 | 21 | | | | |
| 9 | 99 | 99 | 0 | 10 | 11 | 12 | 13 | 15 | 17 | 21 | 23 | 24 | | | | | |
| 10 | 109 | 109 | 0 | 11 | 12 | 14 | 16 | 18 | 22 | 23 | 24 | | | | | | |
| 11 | 118 | 118 | 0 | 12 | 15 | 17 | 18 | 19 | 21 | 23 | | | | | | | |
| 12 | 126 | 126 | 0 | 16 | 17 | 18 | 20 | 22 | 24 | | | | | | | | |
| 13 | 133 | 133 | 0 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 24 | | | | | | |
| 14 | 142 | 142 | 0 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 23 | | | | | | | |
| 15 | 150 | 150 | 0 | 16 | 17 | 18 | 21 | 22 | 23 | | | | | | | | |
| 16 | 157 | 157 | 0 | 17 | 18 | 21 | 22 | 24 | | | | | | | | | |
| 17 | 163 | 163 | 0 | 18 | 20 | 21 | 23 | | | | | | | | | | |
| 18 | 168 | 168 | 0 | 19 | 22 | 24 | | | | | | | | | | | |
| 19 | 172 | 172 | 0 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | | | | | | | | | |
| 20 | 178 | 178 | 0 | 21 | 22 | 23 | 24 | | | | | | | | | | |
| 21 | 183 | 183 | 0 | 22 | 23 | 24 | | | | | | | | | | | |
| 22 | 187 | 187 | 0 | 23 | 24 | | | | | | | | | | | | |
| 23 | 190 | 190 | 0 | 24 | | | | | | | | | | | | | |
| 24 | 192 | 192 | 0 | | | | | | | | | | | | | | |

CLIQUES MAXIMALES = Groupes $G_i$ et leurs classes.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | (19) | (20) | (21) | (22) | (23) | (24) |
| 2 | 6 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 3 | 6 | 10 | 12 | 16 | 18 | 22 | 24 |
| 4 | 6 | 9 | 11 | 15 | 17 | 21 | 23 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 13 | 14 | 19 | 20 |
| 6 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 7 | 6 | 5 | 6 | 11 | 12 | 17 | 18 |
| 8 | 6 | 4 | 6 | 14 | 17 | 20 | 23 |
| 9 | 6 | 3 | 5 | 13 | 18 | 19 | 24 |
| 10 | 6 | 3 | 4 | 9 | 10 | 23 | 24 |
| 11 | 6 | 2 | 5 | 8 | 11 | 19 | 21 |
| 12 | 6 | 2 | 4 | 8 | 10 | 14 | 16 |
| 13 | 6 | 1 | 6 | 7 | 12 | 20 | 22 |
| 14 | 6 | 1 | 3 | 7 | 9 | 13 | 15 |
| 15 | 6 | 1 | 2 | 15 | 16 | 21 | 22 |
| 16 | 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 17 | 4 | (18) | (19) | (22) | (24) | | |
| 18 | 4 | 17 | 20 | 21 | 23 | | |
| 19 | 4 | 16 | 21 | 22 | 24 | | |
| 20 | 4 | 15 | 21 | 22 | 23 | | |
| 21 | 4 | 15 | 16 | 18 | 22 | | |
| 22 | 4 | 15 | 16 | 17 | 21 | | |
| 23 | 4 | 14 | 19 | 20 | 23 | | |

Ensembles de matrices de permutation dont la somme est une 4-matrice contenant étoiles 3.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 4 | 14 | 15 | 17 | 23 |
| 25 | 4 | 13 | 19 | 20 | 24 |
| 26 | 4 | 13 | 16 | 18 | 24 |
| 27 | 4 | 13 | 14 | 18 | 19 |
| 28 | 4 | 13 | 14 | 17 | 20 |
| 29 | 4 | 12 | 20 | 22 | 24 |
| 30 | 4 | 12 | 16 | 17 | 18 |
| 31 | 4 | 11 | 19 | 21 | 23 |
| 32 | 4 | 11 | 15 | 17 | 18 |
| 33 | 4 | 10 | 22 | 23 | 24 |
| 34 | 4 | 10 | 14 | 16 | 18 |
| 35 | 4 | 10 | 11 | 12 | 18 |
| 36 | 4 | 9 | 21 | 23 | 24 |
| 37 | 4 | 9 | 13 | 15 | 17 |
| 38 | 4 | 9 | 11 | 12 | 17 |
| 39 | 4 | 9 | 10 | 12 | 24 |
| 40 | 4 | 9 | 10 | 11 | 23 |
| 41 | 4 | 8 | 19 | 20 | 21 |
| 42 | 4 | 8 | 13 | 14 | 16 |
| 43 | 4 | 8 | 10 | 12 | 16 |
| 44 | 4 | 8 | 9 | 11 | 21 |
| 45 | 4 | 7 | 19 | 20 | 22 |
| 46 | 4 | 7 | 13 | 16 | 15 |
| 47 | 4 | 7 | 10 | 12 | 22 |
| 48 | 4 | 7 | 9 | 11 | 15 |
| 49 | 4 | 7 | 8 | 12 | 20 |
| 50 | 4 | 7 | 8 | 11 | 19 |
| 51 | 4 | 7 | 8 | 10 | 14 |
| 52 | 4 | 7 | 8 | 9 | 13 |
| 53 | 4 | 6 | 20 | 22 | 23 |
| 54 | 4 | 6 | 16 | 17 | 18 |
| 55 | 4 | 6 | 12 | 18 | 22 |
| 56 | 4 | 6 | 12 | 17 | 20 |
| 57 | 4 | 6 | 11 | 17 | 23 |
| 58 | 4 | 6 | 7 | 16 | 20 |
| 59 | 4 | 6 | 7 | 11 | 12 |
| 60 | 4 | 5 | 19 | 21 | 24 |
| 61 | 4 | 5 | 13 | 17 | 18 |
| 62 | 4 | 5 | 12 | 18 | 24 |
| 63 | 4 | 5 | 11 | 18 | 19 |
| 64 | 4 | 5 | 11 | 17 | 21 |
| 65 | 4 | 5 | 8 | 13 | 19 |
| 66 | 4 | 5 | 8 | 11 | 12 |
| 67 | 4 | 4 | 20 | 23 | 24 |
| 68 | 4 | 4 | 16 | 16 | 17 |
| 69 | 4 | 4 | 10 | 16 | 24 |
| 70 | 4 | 4 | 10 | 14 | 23 |
| 71 | 4 | 4 | 9 | 17 | 23 |
| 72 | 4 | 4 | 8 | 14 | 20 |
| 73 | 4 | 4 | 8 | 9 | 10 |
| 74 | 4 | 4 | 5 | 6 | 17 |
| 75 | 4 | 3 | 19 | 23 | 24 |
| 76 | 4 | 3 | 13 | 15 | 18 |
| 77 | 4 | 3 | 10 | 18 | 24 |
| 78 | 4 | 3 | 9 | 15 | 23 |
| 79 | 4 | 3 | 9 | 13 | 24 |
| 80 | 4 | 3 | 7 | 13 | 19 |
| 81 | 4 | 3 | 7 | 9 | 10 |
| 82 | 4 | 3 | 5 | 6 | 18 |
| 83 | 4 | 3 | 4 | 6 | 23 |
| 84 | 4 | 3 | 4 | 5 | 24 |
| 85 | 4 | 2 | 19 | 21 | 22 |
| 86 | 4 | 2 | 14 | 15 | 16 |
| 87 | 4 | 2 | 11 | 15 | 21 |
| 88 | 4 | 2 | 10 | 16 | 22 |
| 89 | 4 | 2 | 8 | 16 | 21 |
| 90 | 4 | 2 | 8 | 14 | 19 |
| 91 | 4 | 2 | 8 | 10 | 11 |
| 92 | 4 | 2 | 5 | 6 | 11 |
| 93 | 4 | 2 | 4 | 6 | 16 |
| 94 | 4 | 2 | 4 | 5 | 8 |
| 95 | 4 | 2 | 3 | 5 | 19 |
| 96 | 4 | 2 | 3 | 4 | 10 |
| 97 | 4 | 1 | 20 | 21 | 22 |
| 98 | 4 | 1 | 13 | 15 | 16 |
| 99 | 4 | 1 | 12 | 16 | 22 |
| 100 | 4 | 1 | 9 | 15 | 21 |
| 101 | 4 | 1 | 7 | 15 | 22 |
| 102 | 4 | 1 | 7 | 13 | 20 |
| 103 | 4 | 1 | 7 | 9 | 12 |
| 104 | 4 | 1 | 5 | 6 | 12 |
| 105 | 4 | 1 | 4 | 6 | 20 |
| 106 | 4 | 1 | 3 | 6 | 7 |
| 107 | 4 | 1 | 3 | 5 | 13 |
| 108 | 4 | 1 | 3 | 4 | 9 |
| 109 | 4 | 1 | 2 | 6 | 22 |
| 110 | 4 | 1 | 2 | 5 | 21 |
| 111 | 4 | 1 | 2 | 4 | 16 |
| 112 | 4 | 1 | 2 | 3 | 15 |

CLICOMP
GRAPHE TROP D'ARCS

DIRECT
GRAPHE

graphe d'independance des permutations d'ordre 4

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | (8) | (10) | (11) | (14) | (17) | (18) | (19) | (23) | (24) |
| 2 | 11 | 11 | 0 | 7 | 9 | 12 | 13 | 17 | 18 | 20 | 23 | 24 |
| 3 | 21 | 21 | 0 | 8 | 11 | 12 | 14 | 16 | 17 | 20 | 21 | 22 |
| 4 | 31 | 31 | 0 | 7 | 11 | 12 | 13 | 15 | 18 | 19 | 21 | 22 |
| 5 | 41 | 41 | 0 | 7 | 9 | 10 | 14 | 15 | 16 | 20 | 22 | 23 |
| 6 | 51 | 51 | 0 | 8 | 9 | 10 | 13 | 15 | 16 | 19 | 21 | 24 |
| 7 | 61 | 61 | 0 | 16 | 17 | 18 | 21 | 23 | 24 | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 68 | 68 | 0 | 15 | 17 | 18 | 22 | 23 | 24 |
| 9 | 75 | 75 | 0 | 14 | 16 | 18 | 19 | 20 | 22 |
| 10 | 82 | 82 | 0 | 13 | 15 | 17 | 19 | 20 | 21 |
| 11 | 89 | 89 | 0 | 13 | 14 | 16 | 20 | 22 | 24 |
| 12 | 96 | 96 | 0 | 13 | 14 | 15 | 19 | 21 | 23 |
| 13 | 103 | 103 | 0 | 21 | 22 | 23 | | | |
| 14 | 107 | 107 | 0 | 21 | 22 | 24 | | | |
| 15 | 111 | 111 | 0 | 19 | 20 | 24 | | | |
| 16 | 115 | 115 | 0 | 19 | 20 | 23 | | | |
| 17 | 119 | 119 | 0 | 19 | 22 | 24 | | | |
| 18 | 123 | 123 | 0 | 20 | 21 | 23 | | | |
| 19 | 127 | 127 | 0 | | | | | | |
| 20 | 128 | 128 | 0 | | | | | | |
| 21 | 129 | 129 | 0 | | | | | | |
| 22 | 130 | 130 | 0 | | | | | | |
| 23 | 131 | 131 | 0 | | | | | | |
| 24 | 132 | 132 | 0 | | | | | | |

CLIQUES MAXIMALES = Decompositions de UN(4x4).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [1] | 4 | (6) | (10) | (15) | (19) | |
| 2 | 4 | 6 | 10 | 13 | 21 | |
| 3 | 4 | 6 | 9 | 16 | 19 | |
| 4 | 4 | 6 | 8 | 15 | 24 | |
| 5 | 4 | 5 | 10 | 15 | 20 | |
| 6 | 4 | 5 | 9 | 16 | 20 | |
| 7 | 4 | 5 | 9 | 14 | 22 | |
| 8 | 4 | 5 | 7 | 16 | 23 | |
| 9 | 4 | 4 | 12 | 15 | 19 | |
| 10 | 4 | 4 | 12 | 13 | 21 | |
| 11 | 4 | 4 | 11 | 13 | 22 | |
| 12 | 4 | 4 | 7 | 18 | 21 | |
| 13 | 4 | 3 | 12 | 14 | 21 | |
| 14 | 4 | 3 | 11 | 16 | 20 | |
| 15 | 4 | 3 | 11 | 14 | 22 | |
| 16 | 4 | 3 | 8 | 17 | 22 | |
| 17 | 4 | 2 | 12 | 13 | 23 | |
| 18 | 4 | 2 | 9 | 18 | 20 | |
| 19 | 4 | 2 | 7 | 18 | 23 | |
| 20 | 4 | 2 | 7 | 17 | 24 | |
| 21 | 4 | 1 | 11 | 14 | 24 | |
| 22 | 4 | 1 | 10 | 17 | 19 | |
| 23 | 4 | 1 | 8 | 18 | 23 | |
| [24] | 4 | (1) | (8) | (17) | (24) | |

ordre inverse de l'ordre lexicographique

CLICDIR graphe d'indépendance des décompositions de UN(4x4).

| GRAPHE | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | [23] | [24] |
| 1 | 1 | 1 | 0 | [6] | [7] | [8] | [10] | [11] | [12] | [13] | [14] | [15] | [16] | [17] | [18] | [19] | [20] | [21] | | | | | | |
| 2 | 19 | 19 | 0 | 6 | 7 | 8 | 9 | 14 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 21 | 23 | 24 | | | | | | | | |
| 3 | 33 | 33 | 0 | 5 | 10 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 17 | 19 | 20 | 21 | 23 | 24 | | | | | | | | |
| 4 | 47 | 47 | 0 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 17 | 18 | 19 | 22 | | | | | | | | |
| 5 | 61 | 61 | 0 | 10 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 17 | 19 | 20 | 21 | 23 | 24 | | | | | | | | | |
| 6 | 74 | 74 | 0 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 17 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | | | | | | | |
| 7 | 89 | 89 | 0 | 9 | 10 | 12 | 14 | 17 | 19 | 20 | 22 | 23 | 24 | | | | | | | | | | | |
| 8 | 100 | 100 | 0 | 9 | 10 | 11 | 13 | 15 | 16 | 18 | 21 | 22 | 24 | | | | | | | | | | | |
| 9 | 111 | 111 | 0 | 14 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 21 | 23 | 24 | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 121 | 121 | 0 | 14 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | | | | | | | | | | | |
| 11 | 132 | 132 | 0 | 13 | 18 | 19 | 20 | 22 | 23 | 24 | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | 140 | 140 | 0 | 14 | 15 | 16 | 17 | 21 | 22 | 24 | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 148 | 148 | 0 | 18 | 19 | 20 | 22 | 23 | 24 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | 155 | 155 | 0 | 17 | 19 | 20 | 22 | 23 | 24 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | 162 | 162 | 0 | 17 | 18 | 19 | 20 | 22 | 23 | 24 | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 170 | 170 | 0 | 17 | 18 | 19 | 21 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | 175 | 175 | 0 | 21 | 22 | 24 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 18 | 179 | 179 | 0 | 21 | 22 | 24 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 19 | 183 | 183 | 0 | 21 | 22 | 24 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 20 | 187 | 187 | 0 | 23 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 189 | 189 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 22 | 190 | 190 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 23 | 191 | 191 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 24 | 192 | 192 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

CLIQUES MAXIMALES = Ensembles de décompositions contenant toutes les permutations.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [1] | 6 | [4] | [8] | [11] | [13] | [18] | [22] |
| 2 | 6 | 4 | 8 | 10 | 15 | 18 | 22 |
| 3 | 6 | 4 | 7 | 12 | 14 | 17 | 22 |
| 4 | 6 | 4 | 7 | 10 | 14 | 19 | 22 |
| 5 | 6 | 4 | 6 | 12 | 15 | 17 | 22 |
| 6 | 6 | 4 | 6 | 11 | 13 | 19 | 22 |
| 7 | 6 | 4 | 6 | 10 | 15 | 19 | 22 |
| 8 | 6 | 3 | 5 | 12 | 16 | 17 | 21 |
| 9 | 6 | 3 | 5 | 12 | 15 | 17 | 24 |
| 10 | 6 | 3 | 5 | 11 | 13 | 20 | 23 |
| 11 | 6 | 3 | 5 | 11 | 13 | 19 | 24 |
| 12 | 6 | 3 | 5 | 10 | 16 | 19 | 21 |
| 13 | 6 | 3 | 5 | 10 | 15 | 20 | 23 |
| 14 | 6 | 3 | 5 | 10 | 15 | 19 | 24 |
| 15 | 6 | 2 | 8 | 9 | 16 | 18 | 21 |
| 16 | 6 | 2 | 8 | 9 | 15 | 18 | 24 |
| 17 | 6 | 2 | 7 | 9 | 14 | 20 | 23 |
| 18 | 6 | 2 | 7 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 19 | 6 | 2 | 6 | 9 | 16 | 19 | 21 |
| 20 | 6 | 2 | 6 | 9 | 15 | 20 | 23 |
| 21 | 6 | 2 | 6 | 9 | 15 | 19 | 24 |
| 22 | 6 | 1 | 8 | 11 | 13 | 18 | 24 |
| 23 | 6 | 1 | 8 | 10 | 16 | 18 | 21 |
| 24 | 6 | 1 | 8 | 10 | 15 | 18 | 24 |
| 25 | 6 | 1 | 7 | 12 | 14 | 17 | 24 |
| 26 | 6 | 1 | 7 | 10 | 14 | 20 | 23 |
| 27 | 6 | 1 | 7 | 10 | 14 | 19 | 24 |
| 28 | 6 | 1 | 6 | 12 | 16 | 17 | 21 |
| 29 | 6 | 1 | 6 | 12 | 15 | 17 | 24 |
| 30 | 6 | 1 | 6 | 11 | 13 | 20 | 23 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 6 | 1 | 6 | 11 | 13 | 19 | 24 |
| 32 | 6 | 1 | 6 | 10 | 16 | 19 | 21 |
| 33 | 6 | 1 | 6 | 10 | 15 | 20 | 23 |
| 34 | 6 | 1 | 6 | 10 | 15 | 19 | 24 |

BIBS LILLE

## 11.9 MULTIDÉCOMPOSITIONS DES P-VOLTRICES

### 11.9.1. MULTIDECOMPOSITION EN 1-VOLTRICES : D E I C V

```
   DEICV: PROC OPTIONS(MAIN);
/*
   (SLBRG):
(CHECK(JP,LP,MP,RP,SP,LP1,AUTDCP,CELV1,AUTV1,CELDCP,AUTV2,
  PN,REST,VERIF,RIEN,NVS,TERM,
  BTDCPV,RETP,APS,NC,LC,SCRT,DEB
   ,JPP,NA2,NA3,NVE,APS2,FSV1,PD
   ,NCM,NC1
      )):
  */


   /*****************************************************************/
   /* DECOMPOSITION D'UNE P-VOLTRICE EN 1-VOLTRICES DE MEME TYPE */
   /*****************************************************************
```

BUT

CE PROGRAMME DECOMPOSE UNE P-VOLTRICE CUBIQUE DE COTE N A ELEMENTS ENTIERS POSITIFS EN 1-VOLTRICES DE MEME TYPE OU INDIQUE QUE LA DECOMPOSITION EST IMPOSSIBLE .
LE PROGRAMME DONNE TOUTES LES DECOMPOSITIONS POSSIBLES A COEFFICENTS POSITIFS.

IL N'EST PAS CONSEILLE DE L'UTILISER POUR N=3 POUR DES RAISONS DE METHODE.
IL N'EST PAS CONSEILLE DE L'UTILISER POUR N>=5 POUR DES RAISONS D'ENCOMBREMENT.

DONNEES

TOUS LES NOMBRES TRAITES SONT DEC FIXED(5,0) (FORME PAR DEFAUT);

-MIP VARIABLE ENTREE PAR < DATA COPY>;
SI MIP>=0 ON IMPRIME LES RESULTATS IINTERMEDIAIRES

-N,PP VARIABLES ENTREES PAR <DATA>;
C'EST UNE PP-VOLTRICE CUBIQUE DE COTE N.

-NMP VARIABLE ENTREE PAR <DATA>;
NMP MATRICES DE PERMUTATION (M.P.).

-MAT TABLEAU ENTRE PAR <LIST>;
LES M.P. PROJETEE SUR UNE COLONNE.

-LV VARIABLE ENTREE PAR <DATA>;
LV 1-VOLTRICES INITIALES.

:ST

-V1I TABLEAU ENTRE PAR <LIST>
LES 1-VOLTRICES INITIALES;ON INDIQUE POUR CHACUNE D'ELLES LES NUMEROS DES M.P. CONSTITUANT DES PLANS, EN ORDRE CROISSANT.

CES 4 DERNIERES DONNEES DOIVENT ETRE PRESENTES POUR UNE P-VOLTRICE SI N¬=3 &N¬=4 & N¬= A LA VALEUR DE N POUR LA P-VOLTRICE PRECEDENTE ( SI ELLE EXISTE).

-PV CUBE ENTRE PAR <LIST>;
LA P-VOLTRICE A TRAITER.

-NDM VARIABLE ENTREE PAR <DATA>;
LE NOMBRE MAX. DE DCP DANS UN PLAN.

-ND,CD,DP LIGNE,TABLEAU,CUBE ENTRES PAR <LIST>;
POUR CHAQUE PLAN ON TROUVE
LE NB DE DCP.
LES COEF. MAX DES M.P. .
LES DCP.
QUI SONT CONSTRUITS PAR MLTDCP2 .

EXEMPLE DE DONNEES

```
MIP=0;
N=4,PP=5;

5,0,0,0,
0,4,1,0,
0,1,2,2,
0,0,2,3,

0,5,0,0,
3,0,1,1,
1,0,2,2,
1,0,2,2,

0,0,5,0,
0,1,0,4,
4,0,0,1,
1,4,0,0,

0,0,0,5,
2,0,3,0,
0,4,1,0,
3,1,1,0,

NDM=2;
```

```
1,
2,2,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
2,2,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
2,
0,0,0,0,0,0,2,2,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,2,1,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,1,2,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
1,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,4,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,4,0,0,0,0,0,0,0,
1,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,3,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,3,
```

RESULTATS

LES RESULTATS SONT EXPLIQUES.
LES NUMEROS DES 1-VOLTRICES SONT DONNES PRESQU'AU HASARD.

REMARQUES

-DCP SIGNIFIE DECOMPOSITION D'UN PLAN TANDIS QU'ON UTILISE DECOMP. OU DECOMPOSITION POUR PARLER DE LA P-VOLTRICE.

-REMPLACER GOTO RIEN ; PAR GOTO ENCORE (LIGNE 575) POUR N'OBTENIR QU'UNE SEULE DECOMPOSITION

-ON PEUT TRAITER PLUSIEURS P-VOLTRICES SUCCESSIVEMENTS ARRET SUR LECTURE

-LE CHECK ET LE SUBGR EN TETE DU PROGRAMME PEUVENT ETRE RETIRES DES COMMENTAIRES ET PLACES DEVANT LE PROGRAMME POUR UNE MISE AU POINT. DE MEME AVEC EN DONNEE <MIP=1;> ON POURRA SUIVRE L'EVOLUTION DES TABLEAUX.

METHODE

DOUBLE BACK-TRACKING SUR LES DCP ET LES 1-VOLTRICES SUIVIS DE BACK-TRAKING ORDINAIRE SUR LES 1-VOLTRICES OU SUR LES DCP SUIVANT P>=N OU NON.

LES M.P. DES 1 - VOLTRICES DANS UN PLAN DONNE SONT UNE DCP DE LA P-MATRICE DU PLAN CORRESPONDANT DE LA P-VOLTRICE. IL FAUT DONC TROUVER DES 1-VOLTRICES ET SIMULTANEMENT UNE DCP PAR PLAN ET QUE L'ENSEMBLE SOIT COHERENT.

LA METHODE UTILISEE CONSISTE A CHOISIR UNE DCP DANS UN PLAN PUIS A SELECTIONNER LES 1-VOLTRICES QUI ONT, DANS CE PLAN, UNE DES M.P. DE CETTE DCP. ON CHOISI ALORS UNE 1-VOLTRICE DE CELLES SELECTIONNEES, CE QUI EN ELIMINE D'AUTRES, ET ON RECHERCHE DANS LES AUTRES PLANS LES DCP QUI CONTIENNENT LA M.P. CORRESPONDANTE DE LA 1-VOLTRICE CHOISIE. PUIS DANS UN PLAN NON ENCORE TRAITE ON CHOISI UNE DCP, ET AINSI DE SUITE.
QUAND UN CHOIX NE PEUT PAS ETRE FAIT, SOIT PAR ABSENCE, SOIT PAR EPUISEMENT DE LA LISTE DANS LAQUELLE ON PEUT CHOISIR, ON REVIENT AU CHOIX JUSTE PRECEDENT QU'ON MODIFIE. SI ON EPUISE LES POSSIBILITES DU PREMIER CHOIX, IL N'Y A PAS DE DECOMPOSITION.
ON PEUT
S'ARRETER A L'OBTENTION D'UNE DECOMPOSITION (MODIFICATION LEGERE DU PROGRAMME)
OU LES CHERCHER TOUTES; DANS CE DERNIER CAS, APRES L'OBTENTION D'UNE DECOMPOSITION ON MODIFIE LE DERNIER CHOIX.

LE BACK-TRACKING EST DOUBLE EN CE SENS QU'ON LE FAIT SUR LES 1-VOLTRICES ET SUR LES DCP ET QUE LA PROGRESSION DE L'UN EST CONDITIONNEE PAR LA PROGRESSION DE L'AUTRE.

LES TESTS D'ACCELERATION DONT ON DISPOSE SONT :
- LA SOMME DES COEFFICIENTS MAXIMAUX DES 1-VOLTRICES CONTENUES QUI RESTENT DOIT ETRE SUPERIEURE OU EGALE A P-DIMINUE DU NOMBRE DE 1-VOLTRICES CHOISIES.
- S'IL Y A EGALITE LA DECOMPOSITION EST UNIQUE. PAR PRECAUTION ON LA TESTE.
- DANS CHAQUE PLAN IL DOIT Y AVOIR AU MOINS UNE DECOMPOSITION
- LES 1-VOLTRICES CONTENUES QUI RESTENT, QUI CONTIENNENT DANS UN PLAN UNE MEME M.P. DOIVENT AVOIR UNE SOMME DE COEFFICIENTS MAXIMAUX SUPERIEURE OU EGALE AU COEFFICIENT DE CETTE M.P. DANS LA DCP CHOISIE DANS CE PLAN

POUR ACCELERER LE PROGRAMME , A CHAQUE ETAPE ON CHERCHE A FAIRE LE CHOIX DANS L'ENSEMBLE OU IL Y A LE MOINS DE POSSIBILITES : PAR EXEMPLE DANS LE PLAN OU IL Y A LE MOINS DE DCP OU DANS LE PLUS PETIT GROUPE DE 1-VOLTRICE CONTENANT UNE MEME M.P. DANS UN PLAN DONNE.

PROCEDURES UTILISEES

PROCEDURES DE SERVICE
IMPV(V) = IMPRESSION D'UNE VOLTRICE V CUBIQUE.
IMPV1(TAB)=IMPRESSION D'UNE 1-VOLTRICE DONT LES PLANS SONT LES M.P. DONT LES NUMEROS SONT

:ST

```
    DONNES PAR TAB.
  CONTROL= SI LA DECOMPOSITION CONTENUE DANS DAC
    A POUR SOMME LA VOLTRICE CUBIQUE PV ALORS
    VERC=1 SINON VERC=0.
  SORT=IMPRIME UNE DECOMPOSITION ET LA COMPARE
    A LA MEILLEURE.
  MISPT1= IMPRESSION D'UN TABLEAU A UNE DIMENSION.
  MISPT2= IMPRESSION D'UN TABLEAU A DEUX DIMENSIONS TRANSPOSE
  MISPT3= IMPRESSION D'UN TABLEAU A DEUX DIMENSIONS

PROCEDURES DE CALCUL
  CHODCP = CHOIX D'UNE DCP DANS LE PLAN LP ET
    RECTIFICATION EVENTUELLE DE LA DECOMPOSITION.
  SELV1 = SELECTION DES 1-VOLTRICES,
          COEFFICIENTS MAXIMAUX,
          COEFFICIENTS MAXIMAUX DES M.P.DE CES 1-VOLTRICES,
          GROUPES DE 1-VOLTRICES.
  CHOV1 = CHOIX D'UNE 1-VOLTRICE DANS LE GROUPE RP.
  SELDCP= SELECTION DES DCP DANS LES AUTRES PLANS.
          INDICATION DU PLAN EN CONTENANT LE MOINS.
  CGV1  = OUBLI DE LA DERNIERE 1-VOLTRICE CHOISIE.


ORGANIGRAMME


  LA _> SIGNIFIE 'ALLER A'; % SIGNIFIE 'FIN'.
A/ INTRODUCTION DES DONNEES.

ENCORE:
     - LISTE DES M.P.(PAR INIT SI N=4, AFFECTATIONS SI N=3)
     - LISTE DES 1-VOLTRICES INITIALES (NON PERMUTEES)
       (MEME METHODE)
     - INTRODUCTION DE LA P-VOLTRICE A DECOMPOSER ET
       POUR CHAQUE PLAN :  LES COEFFICIENTS MAXIMAUX
                           LES DCP.

B/ TRAITEMENT INITIAL

     - SELECTION DES 1-VOLTRICES CONTENUES PAR CONSIDERATIONS
       DES COEFFICIENTS MAXIMAUX DES M.P. DANS LES DIFFERENTS
       PLANS ET PERMUTATIONS DES 1-VOLT INITIALE.
     - TESTS DE QUANTITE :
                 SI PAS ASSEZ DE 1-VOLTRICES CONTENUES OU
                 SI DECOMPOSITION UNIQUE ALORS %

C/ TRAITEMENT GENERAL

ETDCPV:
     - LP EST LE PLAN CONTENANT LE MOINS DE DCP.
       S'IL N'EN CONTIENT PAS %
     - INITIALISER LES VARIABLES

DOUBLE BACK-TRACKING

AUTDCP:
     - MP EST UNE DCP DU PLAN LP (CHODCP)
       SI MP=0 (PLUS DE DCP DANS CE PLAN) _ RETP
       (RETOUR AU PLAN PRECEDENT).
     - SELV1 POUR SELECTION DES 1-VOLTRICES AYANT UNE M.P. DANS
       CETTE DCP.
            RP EST LE PLUS PETIT GROUPE DE 1-VOLTRICES AYANT LA MEME
            M.P.
       TESTS DE QUANTITE PARTIELLE: CHAQUE GROUPE NE CONTIENT PAS
       MOINS DE M.P. QUE LE COEFF. DANS LA DCP.
            SI = ALORS CONTROL - SORT ET RP = 0
            SI < ALORS RP = 0
       SI RP = 0 -> AUTDCP (POUR FAIRE UN AUTRE CHOIX DE DCP).

AUTV1:
     - SP= UNE 1-VOLTRICE DU PLUS PETIT GROUPE (CHOV1).
       SI SP=0(PLUS DE 1-VOLTRICE DANS CE GROUPE) Z AUTDCP
              (POUR CHANGER LA DERNIERE DCP CHOISIE
       TEST DE QUANTITE : SI LA SOMME DES COEFFICIENTS DU DEBUT
            DE DECOMPOSITION = P -> PN (CAS P<N).
       SI ON A CHOISI N DCP ET N 1-VOLTRICES -> REST(CAS P>=N).
     - SELDCP POUR SELECTION DES AUTRES DCP DANS LES PLANS OU
            AUCUN CHOIX N'A ETE FAIT. LP1 EST LE PLAN CONTENANT
            LE MOINS DE DCP.

AUTV2:
     - SI LP1=0 (PAS DE DCP DANS UN PLAN ) ALORS CGV1(OUBLI DE LA
            DERNIERE 1-VOLT) -> AUTV1 (POUR EN CHOISIR UNE AUTRE).
       SINON -> AUTDCP(POUR CHOISIR UNE DCP DANS LE PLAN LP1).

SEQUENCES ANNEXES

RETP:
     - REVENIR A L'ETAPE (CHOIX D'UN DCP ET D'UNE 1-VOLT)
       PRECEDENTE, ET POUR CHANGER LE CHOIX DE LA 1-VOLTRICE
       FAIRE CGV1 ET -> AUTV1.
     - SI PAS D'ETAPE PRECEDENTE, LA P-VOLTRICE N'EST PLUS OU PAS
       DECOMPOSABLE
       ET -> %

REST:(P>N. ENUMERATION SIMPLE POUR TROUVER LES AUTRES 1-VOLTRICES)
   -   SI LA SOMME DES COEFFICIENTS DES 1-VOLTRICES
       CHOISIES = P -> VERIF.
   NVS : SELV1 POUR SELECTION DES 1-VOLTRICES CONTENUES RESTANTES
            (VOIR+HAUT)
```

```
            SI RP=0 -> APS(POUR RETOUR AU CHOIX PRECEDENT).
   NVE :  SP= UNE 1-VOLTRICE OU PLUS PETIT GROUPE (CHOV1).
            SI SP=0(GROUPE EPUISE) -> APS.
            SINON -> REST (POUR EN CHOISIR UNE AUTRE)
   APS : RETOUR AU CHOIX D'UN 1-VOLT PRECEDENT.

 RIEN:SI CE CHOIX(OU LE DERNIER) EST LE N-IEME (LE DERNIER FAIT JUSTE
            APRES LE CHOIX D'UNE DCP) -> AUTV2 AVEC LP1=0
      SINON CGV1(DOUBLE DE LA DERNIERE 1-VOLT), -> NVE.

 PN: (P<N RECHERCHE DES AUTRES DCP PAR ENUMERATION SIMPLE POUR VERIF).
      - SI 1 DCP CHOISIE PAR PLAN -> VERIF.
      - LA DECOMPOSITION INDIQUE LES M.P. UTILISEES DANS CHAQUE PLAN.
            PAR COMPARAISON CHERCHEE LA DCP CONFORME
            SI DANS UN PLAN IL N'Y EN A PAS -> RIEN

 VERIF : (ON A UNE DECOMPOSITION : CONTROLE ET IMPRESSION).
      - CONTROL
            SI VERC=0(LA DECOMPOSITION EST FAUSSE) -> RIEN
      - POUR TROUVER UNE AUTRE DECOMPOSITION -> RIEN(SINON -> %)

 %: (CONCLUSION)
      - OU IL N'Y A PAS DE DECOMPOSITION
      - OU ON IMPRIMER LE NUMERO DE CELLE QUI CONTIENT LE MOINS
            DE 1-VOLT. DIFFERENTES.
      - POUR TRAITER UNE AUTRE P-VOLTRICE -> ENCORE


REFERENCE

      JC HERZ  IBM DEVELOPPEMENT SCIENTIFIQUE.
      JP STEEN  STAGE MARS 72  */

/*********************************************************************/


   DCL(N,L,M,S,P,JP,I,J,K,R,Q,LP,MP,SP,RP,NMP,PP,LV,LC,
     NAS,D,N1,NDN,NRP,NCM,CAS,BV,BP,NC,NCM,NC1,MIP,LP1
     ,NCV,NA2,VERC
   ,JPP,NA3
      )FIXED;

/*   N = DIMENSION DE LA P-VOLTRICE
     PP= POUR PP-VOLTRICE
     L= UN PLAN
     M= UNE DECOMPOSITION
     P,R= UNE 1-MATRICE
     J= INDICE DE LIGNE
     K= INDICE DE COLONNE
     C= UNE 1-VOLTRICE INITIALE
     LP= PLAN DE TRAVAIL
     LP1= PLAN DE TRAVAIL POUR LA PROCHAINE ITERATION
     MP= DECOMPOSITION DE TRAVAIL
     SP= 1-VOLTRICE DE TRAVAIL
     RP= GROUPE DE 1-VOLTRICES DE TRAVAIL
     NMP= NB DE 1-MAT=FACT(N)
     LV= NB DE 1-VOLTRICES INITIALES
     LC= NB DE 1-VOLTRICES CONTENUES
     I= COMPTEUR DANS BOUCLE
     NDN= NB DE DCP DANS LE PLAN EN CONTENANT LE MOINS
     NDM= NB DE DCP DANS LE PLAN EN CONTENANT LE PLUS
     NC= NUMERO D'UNE DECOMPOSITION
     NCM= NUMERO DE LA MEILLEURE DECOMPOSITION
     NC1= NB DE 1-VOLTRICES DIFFERENTE DANS LA MEILLEURE DECOMP.
     MIP= VARIABLE D'OPTION DE MISE AU POINT
     NCV= POUR EVITER DE REINTRODUIRE MAT ET V1I
     NA2= DECOMPOSITION ANTICIPEE
     NA3= DECOMPOSITION PRE-ANTICIPEE.
     JP= NB DE 1-VOLT DIFFERENTES UTILISEES.
     JPP= NB DE 1-VOLT UTILISEES
     VERC= POUR VERIFICATION
     LES AUTRES IDENTIFICATEURS SONT DES VARIABLES DE TRAVAIL LOCALES
    */

  DCL(PV(N,N,N),
    CP(N,NMP),CP(N,NCM,NMP),ND(N),
    LPT(N),MPT(N),RPT(N),SPT(PP),SDP(N,NDM),
    NAV(N,NMP),DAC(LC)  ,NRT(N,NMP),
    V1C(LC,N),CEC(LC),NAI(LC,0:PP),  TAB(N)
   ) FIXED CTL;
    DCL MAT(MAX(NMP,24),MAX(N,4)) FIXED CTL INIT(
  1,2,3,4,
  1,2,4,3,
  1,3,2,4,
  1,3,4,2,
  1,4,2,3,
  1,4,3,2,
  2,1,3,4,
  2,1,4,3,
  2,3,1,4,
  2,3,4,1,
  2,4,1,3,
  2,4,3,1,
  3,1,2,4,
  3,1,4,2,
  3,2,1,4,
  3,2,4,1,
  3,4,1,2,
```

```
3,4,2,1,
4,1,2,3,
4,1,3,2,
4,2,1,3,
4,2,3,1,
4,3,1,2,
4,3,2,1
     );
     DCL V1I(MAX(LV,24),MAX(N,4)) FIXED CTL INIT(
1,8,17,24,
1,8,18,23,
1,10,17,19,
1,11,14,24,
2,7,17,24,
2,7,18,23,
2,9,18,20,
2,12,13,23,                                          1
3,8,17,22,                                           1
3,11,14,22,
3,11,16,20,
3,12,14,21,                                          1
4,7,18,21,                                           1
4,11,13,22,                                          2
4,12,13,21,                                          2
4,12,15,19,                                          1
5,7,16,23,                                           1
5,9,14,22,
5,9,16,20,
5,10,15,20,                                          1
6,8,15,24,                                           2
6,9,16,19,
6,10,13,21,                                          2
6,10,15,19                                           1
     );                                              1

/*   PV= P-VOLTRICE A DECOMPOSER
     MAT= LES NMP 1-MATRICES                         1
     V1I= LE LV 1-VOLTRICES INITIALES                1
     CP= COEFFICIENTS DES 1-MAT CONTENUES DANS CHAQUE PLAN   2
     DP= LES DECOMPOSITIONS DES DIFFERENTS PLANS     2
     ND= NOMBRE DE DECOMPOSITIONS DANS CHAQUE PLAN   1
     LPT(JP)= PLAN TRAITE A L'ETAPE JP               1
     MPT= DOP CHOISIES AUX DIFFERENTES ETAPES
     RPT(JP)= GROUPE DES 1-VOLTRICES POUR L'ETAPE VP
     SPT(JP)= 1-VOLTRICE CHOISIE A L'ETAPE JP
     SDP= DECOMPOSITIONS UTILISABLES A L'ETAPE JP
     NAV(L,P)= NB DE 1-MAT P POUR CE PLAN L DANS LE GROUPE
     DE 1-VOLTRICES
     NR (L,P)= NB DE 1-VOLTRICE CONTENANT LA 1-MAT P DANS LE PLAN L
     NRT(L,P)= NB DE 1-MAT P POUR LE PLAN L DANS LES 1-VOLT. DE LA
     DECOMP.
     V1C = 1-VOLTRICES CONTENUES
     DEC = DECOMPOSITION
     NA1 = 1-VOLTRICES UTILISABLES A CHAQUE ETAPE
     TAB = LISTE DES PLANS D'UNE 1-VOLT AU MOMENT DE L'IMPRESSION.
     CES TABLEAUX SONT UTILISES EN GENERAL AVEC LES MEMES
     IDENTIFICATEURS POUR INDICES
*/

/*******************************************************************/

IMPV: PROC(V);
  DCL V(*,*,*) FIXED;
/* IMPRESSION D'UNE VOLTRICE CUBIQUE */
  PUT SKIP;
  DO L=1 TO N;
     PUT EDIT ((K DO K=1 TO N),'     ')(X(4),(N)F(3),A);   1
  END;                                                     1
  PUT SKIP;
  DO L=1 TO N;
     PUT EDIT ('+')(X(3),A);                               1
     DO K=1 TO N;                                          1
       PUT EDIT ('---')(A);                                2
     END;                                                  2
     PUT EDIT('-+   ')(A);                                 1
  END;                                                     1
  PUT SKIP;
  DO J=1 TO N;
     DO L=1 TO N;                                          1
      PUT EDIT(J,' |',(V(L,J,K) DO K=1 TO N),' |   ')      2
        (F(2),A,(N)P'ZZZ',A);
     END;                                                  2
     PUT SKIP;                                             1
  END;                                                     1
  DO L=1 TO N;
     PUT EDIT ('+')(X(3),A);                               1
     DO K= 1 TO N;                                         1
      PUT EDIT('---')(A);                                  2
     END;                                                  2
     PUT EDIT('-+   ')(A);                                 1
  END;                                                     1
  PUT SKIP;
 END IMPV;


IMPV1: PROC(TAB) ;
  DCL  TAB(*)  FIXED;
/* IMPRESSION D'UNE 1-VOLTRICE DONT LES PLANS SONT LES M.P. DONT LES
   NUMEROS SONT CONNES PAR TAB */
    PUT SKIP;
```

:ST

```
    DO L=1 TO N;
     PUT EDIT ((K DO K=1 TO N),'     ')(X(4),(N)F(3),A);
   END;
   PUT SKIP;
   DO L=1 TO N;
     PUT EDIT ('+')(X(3),A);
      DO K=1 TO N;
        PUT EDIT('---')(A);
      END;
      PUT EDIT ('-+   ')(A);
   END;
   PUT SKIP;
   DO J=1 TO N;
    DO L=1 TO N;
     BV=MAX( MAT(TAB(L),J)-1 ,0)*3;
     BP=     (N-MAT(TAB(L),J))     *3;
     PUT EDIT(J,' |',L,' |    ')
       (F(2),A,X(BV),P'ZZZ',X(BP),A);
    END;
    PUT SKIP;
   END;
   DO L=1 TO N;
     PUT EDIT ('+')(X(3),A);
     DO K=1 TO N;
       PUT EDIT('---')(A);
     END;
     PUT EDIT('-+   ')(A);
   END;
END IMPV1;

/*********************************************************************/

CONTROL: PROC;
     VERC=0;
     DO L=1 TO N;
        DO J=1 TO N;
           DO K=1 TO N;
               CAS=0; /* VALEUR DE LA CASE(L,V,K) */
               DO S=1 TO LC;
                  IF DAC(S) ¬= 0 & MAT(V1C(S,L),J) = K THEN
                        CAS=CAS+DAC(S);
               END;
               IF CAS¬=PV(L,J,K) THEN GO TO FCONT ; /*DECOMP FAUSSE */
           END;
        END;
     END;
     VERC=1;
     FCONT:
END CONTROL;
```

```
/*********************************************************************/

SORT : PROC ;
/*ON A UNE BONNE DECOMPOSITION.ON L'IMPRIME*/
              PUT SKIP(2);
   PUT SKIP(3); NC=NC+1;
   PUT EDIT('DECOMPOSITION',NC)(A,F(3));
   PUT SKIP;
   NRP=0;
   N1=0;
   DO S=1 TO LC;
      IF DAC(S)¬=0 THEN
         DO; NRP=NRP+1;
             N1=N1+DAC(S);
             PUT SKIP;
             PUT EDIT('1-VOLTRICE ',S,' POUR',DAC(S),
                       ' FOIS. M.P. :',(V1C(S,I) DO I = 1 TO N ))
                       (A,F(3),A,F(3),A,(N)F(3));
             DO L=1 TO N;
                 TAB(L)=V1C(S,L);
             END;
             CALL IMPV1(TAB);
         END;
   END;
   PUT SKIP;
   PUT EDIT('CE QUI FAIT',N1 ,' 1-VOLTRICES')
             (A,F(3),A);
   PUT EDIT(' DONT',NRP,' DIFFERENTES')
             (A,F(3),A);
   PUT SKIP(2);

   IF NC1>NRP THEN DO;NCM=NC;NC1=NRP;END;
   /*ON VIENT D'ENREGISTRER LA MEILLEURE DECOMPOSITION*/
END  SORT;

/*********************************************************************/

CHCDCP: PROC;
 /* CHOIX D'UNE DCP DANS LE PLAN LP ET RECTIFICATION EVENTUELLE
      DE LA DECOMPOSITION */
 DO M=MPT(LP)+1 TO NC(LP);
   IF SDP(LP,M)>= JP-1 THEN
    DO; MP,MPT(LP)=M;
    GOTO AM;
   END;
 END;
 MP,MPT(LP)=0;
 AM:
END CHCDCP;
```

:ST

```
/*********************************************************************/

SELV1 : PROC;
 /* SELECTION DES 1-VOLTRICES,
    NB D'APPARITION;
    NB D'APPARITION DES 1-MAT DE CES 1-VOLT,
    GROUPES DE 1-VOLT    */
    NA1(*,JP)=0;
    NRP=PP*LC+1;
    NAV(LP,*)= 0;
    RP=0;
    NA3=0;
T129: IF MIP ¬=0 THEN CALL MISPT1('LPT  ',LPT,N);
    DO P=1 TO NMP;
      D=DP(LP,MP,P)-NRT(LP,P);
      IF D¬=0 THEN
       DO; DO S=1 TO LC;
          IF NA1(S,JP-1)¬=0 & DEC(S)=0 & P=V1C(S,LP) THEN
           DO;  NA1(S,JP)=NA1(S,JP-1);
                IF D<NA1(S,JP) THEN NA1(S,JP)=D;
                DO L = 1 TO N ;
                  IF LPT(L) ¬= 0 & L¬=LP THEN
          DO; IF NA1(S,JP) > DP(LPT(L),MPT(LPT(L)),V1C(S,LPT(L)))
                                    -NRT(LPT(L),V1C(S,LPT(L)))
            THEN NA1(S,JP) = DP(LPT(L),MPT(LPT(L)),V1C(S,LPT(L)))
                                    -NRT(LPT(L),V1C(S,LPT(L)));
                      END;
                END;
                NAV(LP,P)= NAV(LP,P)+NA1(S,JP);
                NA3=NA3+NA1(S,JP);
           END;
           END;
    N1=NAV(LP,P);
      IF N1 < D THEN
       DO; RP=0;
            GOTO FSV1;
      END;
    IF N1>0 & N1<NRP THEN
      DO; NRP=N1;
       RP=P;
      END;
    END;
  END;
  FSV1:
END SELV1;

/*********************************************************************/

CHOV1: PROC;
```

```
/* CHOIX D'UNE 1-VOLTRICE DANS LE GROUPE RP*/
    IF SPT(JP)=0 THEN SPT(JP) = 1 ;
    DO S=SPT(JP)   TO LC;
      IF NA1(S,JP)¬=0 & DEC(S)=0&V1C(S,LP)=RP THEN
       DO; SP,SPT(JP)=S;
        DEC(S)=NA1(S,JP);
        DO L=1 TO N;
          NRT(L,V1C(S,L))=NRT(L,V1C(S,L))+DEC(S);
        END;
      GO TO AS ;
      END;
   END;
  SP,SPT(JP)=0;
    AS:
END CHOV1;

/*********************************************************************/

SELDCP: PROC;
  /* SELECTION DES DCP DANS LES AUTRES PLANS.
      INDICATION DU PLAN EN CONTENANT LE MOINS */
  NDN=NDM+1;
  DO L=1 TO N;
    IF MPT(L)=0 THEN
      DO; NRP=0;
        DO M=1 TO ND(L);
          IF SDP(L,M)>= JP-1 THEN
             DO ; SDP(L,M) = JP-1;
                IF DP(L,M,V1C(SP,L)) ¬=0 THEN
                  DO; DO P= 1 TO NMP ;
                        IF DP(L,M,P) < NRT(L,P) THEN GO TO PD;
                      END;
                      SDP(L,M) = JP ;
                      NRP=NRP+1;
                  END;
             END;
     PD: ;
        END;
           IF NRP=0 THEN
             DO; LP1=0;
                 GOTO FSDCP;
             END;
           IF NDN>NRP THEN
             DO; NDN=NRP;
               LP1=L ;
             END;
           END;
  END;
  FSDCP:
END SELDCP;
```

:ST

```
/*****************************************************************/

CGV1: PROC;
/* OUBLI DE LA DERNIERE 1-VOLTRICE CHOISIE */
 DO L=1 TO N;
    NRT(L,V1C(SP,L))=NRT(L,V1C(SP,L))-DEC(SP);
 END;
 P=V1C(SP,LP);
 JPP=JPP-DEC(SP);
NAV(LP,P)=NAV(LP,P)-NA1(SP,JP);
 NA1(SP,JP)=NA1(SP,JP)-1;
 DEC(SP)=0;
END CGV1;

/*****************************************************************/

/* POUR LA MISE AU POINT */
 MISPT1:PROC(NOM,T,LG);
    DCL(T (*),LG)FIXED;
    DCL NOM CHAR(5)VAR;
 /* IMPRESSION DU TABLEAU T  DE LONGUEUR LG APPELE  NOM                1
    EXEMPLE:   CALL MISPT1('ND   ',ND,N); */                            1
    PUT EDIT(NOM,(T(I) DO I=1 TO LG))
            (SKIP,A,X(4),(LG)F(3));                                    1
END MISPT1;                                                            1

 MISPT2:PROC(NOM,T,LG1,LG2);
    DCL(T(*,*),LG1,LG2)FIXED;
    DCL NOM CHAR(5) VAR;
/* IMPRESSION D'UN TABLEAU T(LG1,LG2) APPELE NOM ET TRANSPOSE */       1
   PUT EDIT (NOM,1,(T(I,1) DO I=1 TO LG1))                             1
                  (SKIP,A,F(2),X(2),(LG1)F(3));                        1
   DO J=2 TO LG2;
      PUT EDIT(J,(T(I,J) DO I=1 TO LG1))                               1
                     (SKIP,X(5),F(2),X(2),(LG1)F(3));                  1
END MISPT2;

 MISPT3:PROC(NOM,T,LG1,LG2);
    DCL(T(*,*),LG1,LG2)FIXED;
    DCL NOM CHAR(5) VAR;
/* IMPRESSION D'UN TABLEAU T(LG1,LG2) APPELE NOM  */
   PUT EDIT (NOM,1,(T(1,I) DO I=1 TO LG2))
                  (SKIP,A,F(2),X(2),(LG2)F(3));
   DO J=2 TO LG1;
      PUT EDIT(J,(T(J,I) DO I=1 TO LG2))                               1
                     (SKIP,X(5),F(2),X(2),(LG2)F(3));                  1
END MISPT3;                                                            1
/*****************************************************************/    1
```

```
/*****************************************************************/

    NCV,N=0;
MP=24;LV=24;
ENCORE : ;
/* INTRODUCTION DES DONNES */
      GET DATA (MIP)COPY; PUT PAGE;
      PUT LIST('DECOMPOSITION D''UNE P-VOLTRICE CUBIQUE');
      GET DATA (N,PP);
      PUT EDIT('AVEC N=',N,' ET P=',PP)
          (SKIP,A,F(2),A,F(3));

   /* MAT EST LA LISTE DES 1-MAT*/
    IF N=NCV THEN GO TO DEB ;
    NCV=N;
    FREE MAT;
    IF N = 3 THEN DO; NMP=6;
                      LV=2;
                  END;
    ELSE DO ; IF N=4 THEN NMP,LV=24;
              ELSE
      GET DATA(NMP);
         END;
      ALLOCATE MAT;
    IF N=3 THEN
      DO; MAT(1,1),MAT(2,1),MAT(3,2),MAT(4,3),MAT(5,2),MAT(6,3)=1;
          MAT(1,2),MAT(2,3),MAT(3,1),MAT(4,1),MAT(5,3),MAT(6,2)=2;
          MAT(1,3),MAT(2,2),MAT(3,3),MAT(4,2),MAT(5,1),MAT(6,1)=3;
      END;
    ELSE DO;IF N¬= 4 THEN
      GET LIST(MAT);
         END;
P1C1: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT2('MAT  ',MAT,NMP,N);

   /* V1I EST LA LISTE DES 1-VOLT INITIALES*/
      FREE V1I;
      IF N¬=3 & N¬=4 THEN
      GET DATA (LV);
      ALLOCATE V1I;
      IF N =3 THEN
        DO; V1I(1,1)=1;
            V1I(1,2)=4;
            V1I(1,3)=5;
            V1I(2,1)=2;
            V1I(2,2)=3;
            V1I(2,3)=6;
        END;
```

BUS LILLE

```
                                                                    :ST

      ELSE DO; IF N¬=4 THEN
      GET LIST (V1I);
           END;
P1C2: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT2('V1I  ',V1I,LV,N);

   /* POUR LE COMPTAGE DES DECOMPOSITIONS*/
DEB:
       NC=0; NC1=PP+1;

   /* PV EST LA P-VOLTRICE A DECOMPOSER */
      ALLOCATE PV;
      GET LIST (PV);                                                1
      PUT SKIP;                                                     2
      CALL IMPV(PV);                                                2
                                                                    3
   /* CP INDIQUE LES COEF. MAX DES 1-MAT CONTENUES DANS CHAQUE PLAN  3
      DP CONTIENT LES DCP DES PLANS ET ND LA NB DE DCP PAR PLAN */   3
      ALLOCATE ND;                                                  3
      ALLOCATE CP;                                                  4
      GET DATA(NDM);                                                4
      ALLOCATE DP;                                                  4
      DO L=1 TO N;                                                  3
          GET LIST(ND(L));                                          3
          GET LIST((CP(L,P) DO P=1 TO NMP));                        2
          GET LIST(((DP(L,M,P) DO P=1 TO NMP) DO M=1 TO ND(L)));    2
      END;                                                          2
P103: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('ND   ',ND,N);                     2
P104: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT3('CP   ',CP,N,NMP);
P1CA: IF MIP¬=0 THEN                                                1
         DO L=1 TO N;
            PUT EDIT('PLAN',L)(SKIP,A,F(3));
            DO M=1 TO ND(L);                                        1
               PUT EDIT(M,(DP(L,M,P) DO P=1 TO NMP))                1
                        (SKIP,X(5),F(2),X(2),(NMP)F(3));
            END;
         END;

/* TABLEAUX DE TRAVAIL NETTOYAGE */
   LC= NMP*LV;
   ALLOCATE LPT,MPT,RPT,SPT,
            SDP,
            NAV,NRT,
            V1C,DEC,NA1, DAC,                                       1
            TAB;                                                    1
   LPT,MPT,RPT=0;
   SPT=0;
   SDP=0;                                                           1
   NAV,NRT=0;                                                       1
   V1C=0;                                                           1
   DEC=0;                                                           2
   NA1=0;
   TAB=0;

/*********************************************************************/

/* SELECTION DES 1-VOLTRICES CONTENUES PAR CONSIDERATIONS DES
   COEFFICIENTS MAXIMUM DES 1-MAT DANS LES DIFFERENTS PLANS
   ET PERMUTATIONS DE 1-VOLT INITIALES */
      S=1;
      NA2=0;
      DO R=1 TO NMP;
          DO Q=1 TO LV;
            NAS  =PP+1;
            DO J=1 TO N;
             L=MAT(R,J);
             P=V1I(Q,L);
             IF CP(J,P) ¬=0 THEN
              DO; IF CP(J,P)<NAS THEN
                     NAS=CP(J,P);
                  V1C(S,J)=P;
              END;
             ELSE GOTO SV1I;
            END;
            NA1(S,0)=NAS;
            NA2=NA2+NAS;
            S=S+1;
            SV1I:
          END;
      END;
      IF S=1 THEN
          DO; PUT LIST('AUCUNE 1-VOLTRICE CONTENUE')SKIP;
            GOTO TERM;
          END;
         LC=S-1;
P12: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT2('V1C  ',V1C,LC,N);
P13A: IF MIP¬=0 THEN
          PUT EDIT ('NA10 ',(NA1(S,0)DO S=1 TO LC))
                              (SKIP,A,X(4),(LC)F(3));

/* ON CONNAIT MAINTENANT LES 1-VOLT CONTENUES AVEC LEUR COEFF MAX */
    IF NA2 < PP THEN
      DO; PUT LIST ('PAS ASSEZ DE 1-VOLT CONTENUES')SKIP;
          GO TO TERM;
      END;
    IF NA2 = PP THEN
      DO; DAC=NA1(*,0);
          CALL CONTROL;
          IF VERC = 1 THEN
            DO;  CALL SORT ;
                 PUT LIST ('DECOMPOSITION UNIQUE')SKIP;
```

```
                NC,NCM=1;
                NC1=PP;
            END;
          ELSE PUT LIST ('1-VOLT CONTENUES INSUFFISANTES')SKIP;
          GO TO TERM;
      END;

/*****************************************************************/


/* PROGRAMME PRINCIPAL */
 BTDCPV:
  /* PLAN CONTENANT LE MOINS DE DCP :LP */
     NDN= NDM+1;
     DO L= 1 TO N;
      IF NDN>ND(L) THEN
        DO; NDN=ND(L);
          LP=L;
        END;
      END;
      IF NDN=0 THEN
          DO; PUT LIST('UN PLAN N''A PAS DE DCP')SKIP;
            GOTO TERM;
          END;

  /* INITIALISATION */
     SDP=0;
     LPT,MPT,RPT=0;
     SPT=0;
     JP=1;
     JPP=0;
     LPT(JP)=LP;
     GOTO AUTDCP;

/* RETOUR SUR JP */
 RETP:
      LPT(JP)=0;
      JP=JP-1;
      IF JP=0 THEN
        DO; PUT LIST('EPUISEMENT DE L''ENUMERATION')SKIP;
            GOTO TERM ;
        END;
      LP=LPT(JP);
      MP=MPT(LP);
      RP=RPT(JP);
      SP=SPT(JP);
      LP1=0;
P151: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('LPT  ',LPT,N);
P152: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('MPT  ',MPT,N);
P153: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('RPT  ',RPT,N);
P154: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('SPT  ',SPT,PP);
      GOTO AUTV2;

/*****************************************************************/

/* DESCENTE DU BACK-TRACKING */
 AUTDCP: CALL CHCDCP;/* CHOIX DE LA DCP:MP */
P160: IF MIP ¬= 0 THEN CALL MISPT1('LPT  ',LPT,N);
P161: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('MPT  ',MPT,N);
P1611: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT3('NRT  ',NRT,N,NMP);
P1612: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('DEC  ',DEC,LC);
          IF MP=0 THEN GOTO RETP;
     CELV1: CALL SELV1; /* SELECTION DES 1-VOLTRICES */
P162: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT2('NA1  ',NA1,LC,N);
P1621: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT3('NAV  ',NAV,N,NMP);
            NA2=NA3+JPP;
            IF NA2<=PP THEN RP=0;
            IF NA2=PP THEN
              DO; DAC=DEC+NA1(*,JP);
S1612: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('DAC  ',DAC,LC);
                CALL CONTROL;
                IF VERC ¬= 0 THEN CALL SORT;
              END;
            RPT(JP)=RP; /* RP EST LE PLUS PETIT GROUPE */
P163: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('RPT  ',RPT,N);
            IF RP=0 THEN GOTO AUTDCP;
 AUTV1:     CALL CHCV1; /* CHOIX D'UNE 1-VOLT.*/
P164: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('SPT  ',SPT,PP);
P1641: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT3('NRT  ',NRT,N,NMP);
P166:  IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('DEC  ',DEC,LC);
            IF SP=0 THEN
                  DO;RP,RPT(JP)=0;
P165: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('RPT  ',RPT,N);
                     GOTO AUTDCP;
                  END;
            JPP=JPP+DEC(SP);
            IF JPP = PP THEN GO TO PN;  /* CAS P<N */
            IF JP=N THEN GOTO REST;/* CAS P>=N */
      CELDCP: CALL SELDCP; /* SELECTION DES AUTRES DCP */
P167: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT2('SDP  ',SDP,N,NDM);
 AUTV2: IF LP1=0 THEN /* LP1 EST LE PLAN EN CONTENANT LE MOINS */
            DO; CALL CGV1; /* OUBLI DE LA DERNIERE 1-VOLT */
P168: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT2('NA1  ',NA1,LC,N);
P169: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('DEC  ',DEC,LC);
P1692: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT3('NAV  ',NAV,N,NMP);
R1641: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT3('NRT  ',NRT,N,NMP);
                GOTO AUTV1;
            END;
        JP=JP+1;
        LP,LPT(JP)=LP1;
```

```
P16A: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('LPT  ',LPT,N);
        GOTO AUTDCP;

/*********************************************************************/

REST:
/* CAS P>N;RECHERCHE DES AUTRES 1-VOLTRICE PAR B.T.*/
P171: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('SPT  ',SPT,PP);
P172: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('DEC  ',DEC,LC);
       IF JPP=PP THEN GOTO VERIF; /* ON A FINI */
       JP=JP+1;      /* ON PASSE A LA RECHERCHE DES 1-VOLT SUIVANTES*/
       SPT(JP)=0;
NVS: /* DESCENTE */
         /* SELECTION DES 1-VOLT */
    CALL SELV1;
Q162: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT2('NA1  ',NA1,LC,N);
Q1621: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT3('NAV  ',NAV,N,NMP);
        /* IL N'Y EN A PLUS. OUBLI DE LA DERN. CHOISIE */
     IF RP = 0 THEN GO TO APS ;
         /* CHOIX D'UNE 1-VOLT*/
  NVE: CALL CHOV1;
Q164: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('SPT  ',SPT,PP);
Q1641: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT3('NRT  ',NRT,N,NMP);
Q166:  IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('DEC  ',DEC,LC);
        /* IL N'Y EN A PLUS NON PLUS.  OUBLI DE LA DERN. CHOISIE */
     IF SP = 0 THEN GO TO APS;
     JPP= JPP+DEC(SP);
     GO TO REST;     /* EN PRENDRE UNE AUTRE */
APS: /* REMONTEE DANS LE CAS OU L'ON N'A PLUS RIEN POUR LA PLACE JP */
P174: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('DEC  ',DEC,LC);
P173: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('SPT  ',SPT,PP);
                SPT(JP)=0;
                JP=JP-1;
        RIEN: IF JP<=N THEN /* INCOMPATIBILITE DE LA DECOMP AVEC LES
               DCP */
                   DO; LP1=0;
                       GOTO AUTV2;
                   END;
  APS2: CALL CGV1; /* OUBLI DE LA DERNIERE */
Q168: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT2('NA1  ',NA1,LC,N);
Q169: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT1('DEC  ',DEC,LC);
Q1692: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT3('NAV  ',NAV,N,NMP);
       GO TO NVE;  /* EN CHOISIR UNE AUTRE */
/* FIN DE LA REMONTEE */

/*********************************************************************/

PN: /* CAS P<N;RECHERCHE DES AUTRES DCP PAR BT. CETTE SEQUENCE
       N'EST PAS STRICTEMENT NECESSAIRE - ELLE PERMET UNE
       VERIFICATION */

P191: IF MIP¬=0 THEN CALL MISPT3('NRT  ',NRT,N,NMP);
/* B.T SUR LES DCP */
   IF JP>= N THEN GO TO VERIF;
   DO L= 1 TO N;
      IF MPT(L)=0 THEN
         DO; DO M=1 TO ND(L);
                IF SDP(L,M)>=JP THEN
                   DO; DO P=1 TO NMP;
                          IF DP(L,M,P)¬=NRT(L,P) THEN GOTO PASCM;
                   END;
                   GOTO LSUIV; /*PLAN SUIVANT */
                   PASCM:/* PASSER A LA DEP SUIVANTE */
                 END;
             END;
             GOTO RIEN; /*POUR CE PLAN */
             LSUIV: /*PASSER AU PLAN SUIVANT */
         END;
   END;
   /* ON A UNE DCP PAR PLAN */

/*********************************************************************/

VERIF: /* ON A UNE DECOMPOSITION.VERIFICATION ET IMPRESSION */
    DAC=DEC;
    CALL CONTROL ;
    IF VERC = 0 THEN GO TO RIEN;
    CALL SORT ;
/*ON A UNE BONNE DECOMPOSITION.ON L'IMPRIME*/

/*ON CHERCHE UNE AUTRE DECOMPOSITION */
     GOTO RIEN;

TERM:/*FIN DES DECOMPOSITIONS*/
    IF NC=0 THEN
        PUT LIST('IL N''Y A PAS DE DECOMPOSITION')SKIP;
    ELSE
    DO;PUT EDIT('IL Y A PLUS DE',NC,' DECOMPOSITIONS')
              (SKIP,A,F(3),A);
       PUT EDIT('LA MEILLEURE DE NUMERO',NCM,' CONTIENT',
                 NC1,' 1-VOLTRICES DIFFERENTES')
               (SKIP,A,F(3),A,F(3),A);
    END;
    FREE PV,
         CP,DP,NC,
         LPT,MPT,RPT,SPT,SDP,
         NAV,NRT,
         V1C,DEC,NA1,TAB;
   GO TO ENCORE;
```

## 11.9.2 EXEMPLES DE RESULTATS

```
END DEICV;
```

```
DECOMPOSITION D'UNE P-VOLTRICE CUBIQUE
AVEC N= 4 ET P=  5

     1  2  3  4          1  2  3  4          1  2  3  4          1  2  3  4
   +-------------+      +-------------+      +-------------+      +-------------+
 1 | 5           |    1 |     5       |    1 |        5    |    1 |           5 |
 2 |     4  1    |    2 | 3     1  1  |    2 |     1     4 |    2 |  2     3    |
 3 |     1  2  2 |    3 | 1     2  2  |    3 | 4         1 |    3 |     4  1    |
 4 |        2  3 |    4 | 1     2  2  |    4 | 1  4        |    4 |  3  1  1    |
   +-------------+      +-------------+      +-------------+      +-------------+

DECOMPOSITION  1

1-VOLTRICE   1 POUR  1 FOIS. M.P. :  1  8 17 24
     1  2  3  4          1  2  3  4          1  2  3  4          1  2  3  4
   +-------------+      +-------------+      +-------------+      +-------------+
 1 | 1           |    1 |     1       |    1 |        1    |    1 |           1 |
 2 |     1       |    2 | 1           |    2 |           1 |    2 |        1    |
 3 |        1    |    3 |           1 |    3 | 1           |    3 |     1       |
 4 |           1 |    4 |        1    |    4 |     1       |    4 | 1           |
   +-------------+      +-------------+      +-------------+      +-------------+
1-VOLTRICE   2 POUR  1 FOIS. M.P. :  1 10 17 19
     1  2  3  4          1  2  3  4          1  2  3  4          1  2  3  4
   +-------------+      +-------------+      +-------------+      +-------------+
 1 | 1           |    1 |     1       |    1 |        1    |    1 |           1 |
 2 |     1       |    2 |        1    |    2 |           1 |    2 | 1           |
 3 |        1    |    3 |           1 |    3 | 1           |    3 |     1       |
 4 |           1 |    4 | 1           |    4 |     1       |    4 |        1    |
   +-------------+      +-------------+      +-------------+      +-------------+
1-VOLTRICE   3 POUR  2 FOIS. M.P. :  2  7 17 24
     1  2  3  4          1  2  3  4          1  2  3  4          1  2  3  4
   +-------------+      +-------------+      +-------------+      +-------------+
 1 | 1           |    1 |     1       |    1 |        1    |    1 |           1 |
 2 |     1       |    2 | 1           |    2 |           1 |    2 |        1    |
 3 |           1 |    3 |        1    |    3 | 1           |    3 |     1       |
 4 |        1    |    4 |           1 |    4 |     1       |    4 | 1           |
   +-------------+      +-------------+      +-------------+      +-------------+
1-VOLTRICE   4 POUR  1 FOIS. M.P. :  3 11 16 20
     1  2  3  4          1  2  3  4          1  2  3  4          1  2  3  4
   +-------------+      +-------------+      +-------------+      +-------------+
 1 | 1           |    1 |     1       |    1 |        1    |    1 |           1 |
 2 |        1    |    2 |           1 |    2 |     1       |    2 | 1           |
 3 |     1       |    3 | 1           |    3 |           1 |    3 |        1    |
 4 |           1 |    4 |        1    |    4 | 1           |    4 |     1       |
   +-------------+      +-------------+      +-------------+      +-------------+
CE QUI FAIT  5 1-VOLTRICES DONT  4 DIFFERENTES

EPUISEMENT DE L'ENUMERATION
IL Y A PLUS DE  1 DECOMPOSITIONS
LA MEILLEURE DE NUMERO  1 CONTIENT  4 1-VOLTRICES DIFFERENTES
MIP=0;
```

BUS LILLE

DECOMPOSITION D'UNE P-VOLTRICE CUBIQUE
AVEC N= 4 ET P= 3

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 1 | 1 |
| 2 | | 1 | | 2 |
| 3 | 2 | | 1 | |
| 4 | | 2 | 1 | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | 2 |
| 2 | | 1 | 2 | |
| 3 | 1 | 1 | | 1 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 2 | 1 | |
| 2 | 2 | | 1 | |
| 3 | | 1 | | 2 |
| 4 | 1 | | 1 | 1 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 2 | 1 | 1 | | 1 |
| 3 | | 1 | 2 | |
| 4 | 1 | | | 2 |

DECOMPOSITION D'UNE P-VOLTRICE CUBIQUE
AVEC N= 4 ET P= 7

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 1 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 4 | | 2 |
| 4 | 2 | 1 | 4 | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 4 | 1 | | 2 |
| 3 | | 2 | 3 | 2 |
| 4 | 1 | 3 | 3 | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | | 1 | 5 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| 4 | 2 | 3 | | 2 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 3 | |
| 2 | | 4 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | | 3 | |
| 4 | 2 | | | 5 |

EPUISEMENT DE L'ENUMERATION
IL N'Y A PAS DE DECOMPOSITION
MIP=0;

DECOMPOSITION 1

1-VOLTRICE 1 POUR 1 FOIS. M.P. : 6 21 10 13

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | |
| 2 | | | | 1 |
| 3 | | | 1 | |
| 4 | | 1 | | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | 1 |
| 2 | | 1 | | |
| 3 | 1 | | | |
| 4 | | | 1 | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | | |
| 2 | | | 1 | |
| 3 | | | | 1 |
| 4 | 1 | | | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | 1 | |
| 2 | 1 | | | |
| 3 | | 1 | | |
| 4 | | | | 1 |

1-VOLTRICE 2 POUR 1 FOIS. M.P. : 17 24 8 1

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | | |
| 2 | | | | 1 |
| 3 | 1 | | | |
| 4 | | 1 | | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | 1 |
| 2 | | | 1 | |
| 3 | | 1 | | |
| 4 | 1 | | | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | | |
| 2 | 1 | | | |
| 3 | | | | 1 |
| 4 | | | 1 | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | |
| 2 | | 1 | | |
| 3 | | | 1 | |
| 4 | | | | 1 |

1-VOLTRICE 3 POUR 1 FOIS. M.P. : 21 4 13 12

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | 1 |
| 2 | | 1 | | |
| 3 | 1 | | | |
| 4 | | | 1 | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | |
| 2 | | | 1 | |
| 3 | | | | 1 |
| 4 | | 1 | | |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | 1 | |
| 2 | 1 | | | |
| 3 | | 1 | | |
| 4 | | | | 1 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | | |
| 2 | | | | 1 |
| 3 | | | 1 | |
| 4 | 1 | | | |

CE QUI FAIT 3 1-VOLTRICES DONT 3 DIFFERENTES

DECOMPOSITION UNIQUE
IL Y A PLUS DE 1 DECOMPOSITIONS
LA MEILLEURE DE NUMERO 1 CONTIENT 3 1-VOLTRICES DIFFERENTES
MIP=0;

DECOMPOSITION D'UNE P-VOLTRICE CUBIQUE
AVEC N= 3 ET P= 3

```
      1  2  3          1  2  3          1  2  3
   +----------+     +----------+     +----------+
 1 |  1  1  1 |   1 |  1  1  1 |   1 |  1  1  1 |
 2 |  1  1  1 |   2 |  1  1  1 |   2 |  1  1  1 |
 3 |  1  1  1 |   3 |  1  1  1 |   3 |  1  1  1 |
   +----------+     +----------+     +----------+
```

DECOMPOSITION 1

1-VOLTRICE 1 POUR 1 FOIS. M.P. : 1 4 5

```
      1  2  3          1  2  3          1  2  3
   +----------+     +----------+     +----------+
 1 |  1       |   1 |     1    |   1 |        1 |
 2 |     1    |   2 |        1 |   2 |  1       |
 3 |        1 |   3 |  1       |   3 |     1    |
   +----------+     +----------+     +----------+
```

1-VOLTRICE 7 POUR 1 FOIS. M.P. : 4 5 1

```
      1  2  3          1  2  3          1  2  3
   +----------+     +----------+     +----------+
 1 |     1    |   1 |        1 |   1 |  1       |
 2 |        1 |   2 |  1       |   2 |     1    |
 3 |  1       |   3 |     1    |   3 |        1 |
   +----------+     +----------+     +----------+
```

1-VOLTRICE 9 POUR 1 FOIS. M.P. : 5 1 4

```
      1  2  3          1  2  3          1  2  3
   +----------+     +----------+     +----------+
 1 |        1 |   1 |  1       |   1 |     1    |
 2 |  1       |   2 |     1    |   2 |        1 |
 3 |     1    |   3 |        1 |   3 |  1       |
   +----------+     +----------+     +----------+
```

CE QUI FAIT 3 1-VOLTRICES DONT 3 DIFFERENTES

DECOMPOSITION 2

1-VOLTRICE 3 POUR 1 FOIS. M.P. : 1 5 4

```
      1  2  3          1  2  3          1  2  3
   +----------+     +----------+     +----------+
 1 |  1       |   1 |        1 |   1 |     1    |
 2 |     1    |   2 |  1       |   2 |        1 |
 3 |        1 |   3 |     1    |   3 |  1       |
   +----------+     +----------+     +----------+
```

1-VOLTRICE 5 POUR 1 FOIS. M.P. : 4 1 5

```
      1  2  3          1  2  3          1  2  3
   +----------+     +----------+     +----------+
 1 |     1    |   1 |  1       |   1 |        1 |
 2 |        1 |   2 |     1    |   2 |  1       |
 3 |  1       |   3 |        1 |   3 |     1    |
   +----------+     +----------+     +----------+
```

1-VOLTRICE 11 POUR 1 FOIS. M.P. : 5 4 1

```
      1  2  3          1  2  3          1  2  3
   +----------+     +----------+     +----------+
 1 |     1    |   1 |     1    |   1 |  1       |
 2 |  1       |   2 |        1 |   2 |     1    |
 3 |     1    |   3 |  1       |   3 |        1 |
   +----------+     +----------+     +----------+
```

CE QUI FAIT 3 1-VOLTRICES DONT 3 DIFFERENTES

DECOMPOSITION 3

1-VOLTRICE 2 POUR 1 FOIS. M.P. : 2 3 6

```
      1  2  3          1  2  3          1  2  3
   +----------+     +----------+     +----------+
 1 |  1       |   1 |     1    |   1 |        1 |
 2 |        1 |   2 |  1       |   2 |     1    |
 3 |     1    |   3 |        1 |   3 |  1       |
   +----------+     +----------+     +----------+
```

1-VOLTRICE 8 POUR 1 FOIS. M.P. : 3 6 2

```
      1  2  3          1  2  3          1  2  3
   +----------+     +----------+     +----------+
 1 |     1    |   1 |        1 |   1 |  1       |
 2 |  1       |   2 |     1    |   2 |        1 |
 3 |        1 |   3 |  1       |   3 |     1    |
   +----------+     +----------+     +----------+
```

1-VOLTRICE 10 POUR 1 FOIS. M.P. : 6 2 3

```
      1  2  3          1  2  3          1  2  3
   +----------+     +----------+     +----------+
 1 |        1 |   1 |  1       |   1 |     1    |
 2 |     1    |   2 |        1 |   2 |  1       |
 3 |  1       |   3 |     1    |   3 |        1 |
   +----------+     +----------+     +----------+
```

CE QUI FAIT 3 1-VOLTRICES DONT 3 DIFFERENTES

DECOMPOSITION 4

1-VOLTRICE 4 POUR 1 FOIS. M.P. : 2 6 3

```
      1  2  3          1  2  3          1  2  3
   +----------+     +----------+     +----------+
 1 |  1       |   1 |        1 |   1 |     1    |
 2 |        1 |   2 |     1    |   2 |  1       |
 3 |     1    |   3 |  1       |   3 |        1 |
   +----------+     +----------+     +----------+
```

1-VOLTRICE 6 POUR 1 FOIS. M.P. : 3 2 6

```
      1  2  3          1  2  3          1  2  3
   +----------+     +----------+     +----------+
 1 |     1    |   1 |  1       |   1 |        1 |
 2 |  1       |   2 |        1 |   2 |     1    |
 3 |        1 |   3 |     1    |   3 |  1       |
   +----------+     +----------+     +----------+
```

BIUS LILLE

```
1-VOLTRICE  12 POUR  1 FOIS. M.P. :  6  3  2
      1  2  3            1  2  3            1  2  3
   +----------+       +----------+       +----------+
 1 |        1 |     1 |     1    |     1 |  1       |
 2 |     1    |     2 |  1       |     2 |        1 |
 3 |  1       |     3 |        1 |     3 |     1    |
   +----------+       +----------+       +----------+
CE QUI FAIT  3 1-VOLTRICES DONT  3 DIFFERENTES

EPUISEMENT DE L'ENUMERATION
IL Y A PLUS DE  4 DECOMPOSITIONS
LA MEILLEURE DE NUMERO  1 CONTIENT  3 1-VOLTRICES DIFFERENTES
MIP=0;
```

```
DECOMPOSITION D'UNE P-VOLTRICE CUBIQUE
AVEC N= 3 ET P= 30

      1  2  3            1  2  3            1  2  3
   +----------+       +----------+       +----------+
 1 | 6  7 17  |     1 | 10 11  9 |     1 | 14 12  4 |
 2 |  8  9 13 |     2 | 12 13  5 |     2 | 10  8 12 |
 3 | 16 14    |     3 |  8  6 16 |     3 |  6 10 14 |
   +----------+       +----------+       +----------+
```

```
DECOMPOSITION  1

1-VOLTRICE   1 POUR  1 FOIS. M.P. :  2  3  6
      1  2  3            1  2  3            1  2  3
   +----------+       +----------+       +----------+
 1 |  1       |     1 |     1    |     1 |        1 |
 2 |        1 |     2 |  1       |     2 |     1    |
 3 |     1    |     3 |        1 |     3 |  1       |
   +----------+       +----------+       +----------+
1-VOLTRICE   2 POUR  5 FOIS. M.P. :  2  6  3
      1  2  3            1  2  3            1  2  3
   +----------+       +----------+       +----------+
 1 |  1       |     1 |        1 |     1 |     1    |
 2 |        1 |     2 |     1    |     2 |  1       |
 3 |     1    |     3 |  1       |     3 |        1 |
   +----------+       +----------+       +----------+
1-VOLTRICE   3 POUR  3 FOIS. M.P. :  4  1  5
      1  2  3            1  2  3            1  2  3
   +----------+       +----------+       +----------+
 1 |     1    |     1 |  1       |     1 |        1 |
 2 |        1 |     2 |     1    |     2 |  1       |
 3 |  1       |     3 |        1 |     3 |     1    |
   +----------+       +----------+       +----------+
1-VOLTRICE   4 POUR  4 FOIS. M.P. :  4  5  1
      1  2  3            1  2  3            1  2  3
   +----------+       +----------+       +----------+
 1 |     1    |     1 |        1 |     1 |  1       |
 2 |        1 |     2 |  1       |     2 |     1    |
 3 |  1       |     3 |     1    |     3 |        1 |
   +----------+       +----------+       +----------+
1-VOLTRICE   5 POUR  5 FOIS. M.P. :  5  1  4
      1  2  3            1  2  3            1  2  3
   +----------+       +----------+       +----------+
 1 |        1 |     1 |  1       |     1 |     1    |
 2 |  1       |     2 |     1    |     2 |        1 |
 3 |     1    |     3 |        1 |     3 |  1       |
   +----------+       +----------+       +----------+
1-VOLTRICE   6 POUR  2 FOIS. M.P. :  6  2  3
      1  2  3            1  2  3            1  2  3
   +----------+       +----------+       +----------+
 1 |        1 |     1 |  1       |     1 |     1    |
 2 |     1    |     2 |        1 |     2 |  1       |
 3 |  1       |     3 |     1    |     3 |        1 |
   +----------+       +----------+       +----------+
1-VOLTRICE   7 POUR  3 FOIS. M.P. :  5  4  1
      1  2  3            1  2  3            1  2  3
```

```
   +-----------+       +-----------+       +-----------+
 1 |         1 |     1 |     1     |     1 |  1        |
 2 |  1        |     2 |         1 |     2 |     1     |
 3 |     1     |     3 |  1        |     3 |         1 |
   +-----------+       +-----------+       +-----------+
1-VOLTRICE   8 POUR  7 FOIS. M.P. :  6  3  2
      1  2  3           1  2  3            1  2  3
   +-----------+       +-----------+       +-----------+
 1 |         1 |     1 |     1     |     1 |  1        |
 2 |     1     |     2 |  1        |     2 |         1 |
 3 |  1        |     3 |         1 |     3 |     1     |
   +-----------+       +-----------+       +-----------+
CE QUI FAIT 30 1-VOLTRICES DONT  8 DIFFERENTES

EPUISEMENT DE L'ENUMERATION
IL Y A PLUS DE  1 DECOMPOSITIONS
LA MEILLEURE DE NUMERO  1 CONTIENT  8 1-VOLTRICES DIFFERENTES

IHE140I FILE SYSIN - END OF FILE ENCOUNTERED IN STATEMENT 00254 AT OFFSET +00(
```

## 11.9.3 B-DECOMPOSITION D'UNE p-VOLTRICE : R E S I D

```
C OPTIONS(MAIN);


RESID: PROC OPTIONS(MAIN);
 /* B-DECOMPOSITION D'UNE P-VOLTRICE */

   /*********************************************/
   /* B-DECOMPOSITION D'UNE P-VOLTRICE D'ORDRE N */
   /*********************************************


BUT

      CE PROGRAMME DECOMPOSE UNE P-VOLTRICE D'ORDRE N
   A ELEMENTS ENTIERS NON-NEGATIFS EN COMBINAISON LINEAIRE
   A COEFFICIENTS ENTIERS POSITIFS DE 1-VOLTRICES COMPLETEE
   PAR UN RESIDU QUI EST UNE P-VOLTRICE 1-MINIMALE.

      IL N'EST PAS CONSEILLE DE L'UTILISER POUR N=8 POUR DES
   RAISONS DE METHODE, NI POUR N>=6 POUR DES RAISONS
   D'ENCOMBREMENT.

DONNEES

      TOUS LES NOMBRES TRAITES SONT DEC FIXED(5,0) (FORME PAR DEFAUT).

  *N     VARIABLE ENTREE PAR <LIST>;
      ORDRE DE LA P-VOLTRICE A TRAITER.

  *MAT   TABLEAU ENTRE PAR <LIST>;
      LES PERMUTATIONS D'ORDRE N.

  *NV1   VARIABLE ENTREE PAR <LIST>;
      LE NOMBRE DE 1-VOLTRICES INITIALES.

  *NII   TABLEAU ENTRE PAR <LIST>;
      LES 1-VOLTRICES INITIALES(DECOMPOSITIONS DE UN(N*N));ON
      INDIQUE POUR CHACUNE D'ELLES LES NUMEROS DES M.P. CONSTITUANT
      LES PLANS, EN ORDRE CROISSANT.

  *CES QUATRE PREMIERES DONNEES DOIVENT ETRE SUPPRIMEES
   SI N=3 OU N=4 OU N= LA VALEUR DU N DE LA
   P-VOLTRICE PRECEDENTE (SI ELLE EXISTE).

  -N     VARIABLE ENTREE PAR <LIST>;
      ORDRE DE LA P-VOLTRICE A TRAITER.

  -PP    VARIABLE ENTREE PAR <LIST>;
      VALEUR DE P DE LA P-VOLTRICE A TRAITER.

  -PV    TABLEAU A TROIS DIMENSIONS ENTRE PAR <LIST>;
      LA P-VOLTRICE (PLAN PAR PLAN, ET DANS
      CHACUN D'EUX LIGNE PAR LIGNE)A TRAITER.
```

```
: PROC OPTIONS(MAIN);

ST

      CET ENSEMBLE DE DONNEES PEUT ETRE REPETE PLUSIEURS FOIS.
   ARRET DU PROGRAMME SUR EPUISEMENT DES DONNEES.

   EXEMPLES DE DONNEES

      3,3,
      1,0,2, 1,1,1, 1,2,0,  1,1,1, 0,1,2, 2,1,0,  1,2,0, 2,1,0, 0,0,3,

      4,3,
      3,0,0,0, 0,2,1,1, 0,1,1,1, 0,0,1,2,
      0,1,1,1, 1,0,1,1, 1,1,0,1, 1,1,1,0,
      0,1,1,1, 1,0,1,1, 1,1,0,1, 1,1,0,1,
      0,1,1,1, 1,1,0,1, 1,0,1,1, 1,1,1,0,

      5,PP,
      MAT(120,5),
      1344,
      V1I(1344,5),
      5,PP,
      PV(5,5,5)

RESULTATS

      LES RESULTATS SONT EXPLIQUES.
      X*(Y,Z,...,T) SIGNIFIE X FOIS LA 1-VOLTRICE CONTENUE DE PLANS
   Y,Z,...,T. LES NUMEROS DES 1-VOLTRICES SONT DONNES PRESQUE AU HASARD.
      POUR PERMETTRE DE MESURER LE TEMPS DE CALCUL, L'HEURE EST
   IMPRIMEE
   - AVANT UN TRAITEMENT,
   - AVANT LE DECLENCHEMENT DU B.-T.,
   - APRES UN TRAITEMENT,
   SOUS LA FORME 'HHMMSSTTT'.
      ON INDIQUE AUSSI A LA FIN DU TRAITEMENT LE NOMBRE D'ESSAIS QUE
   LE B.-T. A FAIT.

REMARQUE

      POUR DES RAISONS D'ENCOMBREMENT ET DE TEMPS, QUAND IL Y A PLUS
   DE 600 1-VOLTRICES CONTENUES, SEULES LES 600 PREMIERES SERONT
   UTILISEES POUR ESSAYER DE CONSTRUIRE DES B-DECOMPOSITIONS.

METHODE

      APRES AVOIR LU N, L'ORDRE DE LA P-VOLTRICE A TRAITER,
   ON CONSTRUIT LES PERMUTATIONS(MAT) DES N OBJETS ET LES
   1-VOLTRICES INITIALES(V1I=DECOMPOSITIONS DE UN(N*N))
   PAR CALCUL (N=3), PAR INITIALISATION DE TABLEAU (N=4) OU
```

```
OC OPTIONS(MAIN);
```

PAR LECTURE (N>=5-IL Y EN A ALORS BEAUCOUP - ON PEUT LES OBTENIR A PARTIR DU PROGRAMME MLTDCP2).
ON ENREGISTRE ALORS LA P-VOLTRICE DANS LE TABLEAU PV, ET ON CONSTRUIT DANS LE TABLEAU V1 LA LISTE DES 1-VOLTRICES CONTENUES(AU PLUS 600-POUR N=4 IL Y EN A AU PLUS 576). UNE 1-VOLTRICE EST UNE PERMUTATION (MAT) D'UNE 1-VOLTRICE INITIALE(V1I).
PAR UNE METHODE DE BACK-TRACKING ON CONSTRUIT TOUTES LES COMBINAISONS LINEAIRES DES 1-VOLTRICES CONTENUES. CHACUNE D'ELLE EST EXTRAITE DE LA P-VOLTRICE PV- SI LE RESTE EST NUL OU EST UNE P-VOLTRICE 1-MINIMALE (QUI NE CONTIENT PAS DE 1-VOLTRICE) ON IMPRIME LA COMBINAISON ET LE RESTE.

CE BACK-TRACKING UTILISE 5 TABLEAUX.
II EST L'INDICE DE PROFONDEUR. C'EST AUSSI LE NOMBRE DE 1-VOLTRICES PRISES POUR CONSTRUIRE UNE COMBINAISON OU TOUT AU MOINS SON DEBUT.
UNS(I1) EST LE NUMERO DE LA I1-EME 1-VOLTRICE DE LA COMBINAISON, NDFS(I1) SON COEFFICIENT.
PVL(I1,,,) EST LA P-VOLT DIMINUEE DU DEBUT DE COMBINAISON (JUSQUE I1 COMPRIS),PPP(I1) LA VALEUR DE P DE CETTE P-VOLTRICE.
NDF(V,I1) EST LE NOMBRE DE FOIS OU LA 1-VOLTRICE V EST CONTENUE DANS LA P-VOLTRICE PVL(I1,,,).

LA METHODE CONSISTE EN
1/ INITIALISER LES TABLEAUX PVL(0,,,)=PV,PPP(0)=PP,NDFS(0) ET VNS(0)=0.
ON CONSTRUIT EGALEMENT NDF(,0).
2/ II=1.
3/ ON CHOISIT DANS NDF(,II-1) LA PROCHAINE 1-VOLTRICE CONTENUE V POUR LAQUELLE NDF(V,II-1)¬=0, ON LA CHOISIT NDF(V,II-1).
ON L'ENREGISTRE DANS NDFS(II) ET VNS(II).
4/ ON L'EXTRAIT NDFS(II) FOIS DE PVL(II-1,,,) CE QUI DONNE PVL(II,,,) ET ON AJUSTE PPP(II).
5/ ON CALCULE LES 1-VOLTRICES CONTENUES DANS PVL(II,,,) ET ON REMPLIT NDF(,II).
6/ II=II+1 ET ON ITERE AU 2/.

SI ON NE TROUVE PAS DE V AU 3/,ON CONSIDERE LA DECOMPOSITION OBTENUE JUSQUE II-1. SI LE RESTE EST 1-MINIMAL ON L'IMPRIME. ON DIMINUE D'UNE UNITE NDFS(II-1) (NOMBRE DE FOIS CHOISIE) ET ON REPREND EN 4/- SI NDFS(II-2) EST DEVENU NUL, ON CHERCHE UNE AUTRE 1-VOLTRICE CONTENUE EN 3/. S'IL N'Y EN A PLUS ON DIMINUE II POUR REMETTRE EN CAUSE LE CHOIX PRECEDENT. SI II EST DEVENU NUL ON A FINI L'EXPLORATION.

L'OBJET DE CE PROGRAMME EST D'OBTENIR DES P-VOLTRICES 1-MINIMALES.
TOUTEFOIS EN AJOUTANT APRES L'ETIQUETTE

BNS LILLE

```
: PROC OPTIONS(MAIN);
```

ST

ICI:
(LIGNE 217) L'INSTRUCTION

IF PPP(II) ¬= 0 THEN GOTO NOUV ;

ON N'OBTIENDRA QUE LES DECOMPOSITIONS SANS RESIDU. CE PROGRAMME EST ALORS EQUIVALENT A 'DEICV', MAIS NETTEMENT PLUS LONG EN CALCUL.

REFERENCE

J.C. HERZ IBM DEVELOPPEMENT SCIENTIFIQUE
J.P. STEEN OCT.73

```
/*****************************************/
/* VARIABLES */
DCL(N,NMP,NV1,NVM,PP,P,V,VN,L,I,J,VNC,NVC,II,
     K,NF,NCV,I1,BC
   )FIXED);
/*
   N = DIMENSION DES MATRICES ET VOLTRICES.
   NMP = FACTORIELLE(N).
   NV1 = NOMBRE DE 1-VOLTRICES INITIALES (DECOMPOSITION ORDONNEE
         DE UN(N*N)).
   NVM = NOMBRE DE 1-VOLTRICES  MIN(V1I*MAT,600).
   PP = VALEUR DE P DE LA P-VOLTRICE EN TRAITEMENT.
   P = NUMERO LEXICOGRAPHIQUE D'UNE MAT.PERM.
   V = NUMERO LEXICOGRAPHIQUE D'1-VOLTRICE INITIALE.
   VN = NUMERO D'UNE 1-VOLTRICE
         (V= (VN-1)%NMP+1,P= MOD(VN-1,NMP)+1).
   L = NUMERO DE PLAN.
   I = NUMERO DE LIGNE.
   J = NUMERO DE COLONNE.
   VNC = NUMERO D'UNE 1-VOLTRICE CONTENUE.
   NVC = NOMBRE DE 1-VOLTRICES CONTENUES (<= NVM).
   II,I1 = INDICE D'ITERATION.
   K = INDICE DE BOUCLE.
   NF = NOMBRE DE FOIS CONTENU.
   NCV = ORDRE LA 1-VOLT. PRECEDENTE.
   BC = NOMBRE D'ESSAIS.
*/
DCL HEURE CHAR(9);
/*
   HEURE = POUR CONNAITRE LE TEMPS DE CALCUL.
*/

/* TABLEAUX */
DCL(
    V1(NVM,N),
```

```
DC OPTIONS(MAIN);

     NDF(NVM,0:PP),
     PPP(0:PP),
     NDFS(0:PP),
     VNS(0:PP),
     PVL(0:PP,N,N,N),
     PV (N,N,N)
    )FIXED CTL;
 DCL(MAT(MAX(NMP,24),MAX(N,4)))FIXED CTL INIT(
     1,2,3,4,
     1,2,4,3,
     1,3,2,4,
     1,3,4,2,
     1,4,2,3,
     1,4,3,2,
     2,1,3,4,
     2,1,4,3,
     2,3,1,4,
     2,3,4,1,
     2,4,1,3,
     2,4,3,1,
     3,1,2,4,
     3,1,4,2,
     3,2,1,4,
     3,2,4,1,
     3,4,1,2,
     3,4,2,1,
     4,1,2,3,
     4,1,3,2,
     4,2,1,3,
     4,2,3,1,
     4,3,1,2,
     4,3,2,1
    );
 DCL(VII(MAX(NV1,24),MAX(N,4)))FIXED CTL INIT(
     1,8,17,24,
     1,8,18,23,
     1,10,17,19,
     1,11,14,24,
     2,7,17,24,
     2,7,18,23,
     2,9,18,20,
     2,12,13,23,
     3,8,17,22,
     3,11,14,22,
     3,11,16,20,
     3,12,14,21,
     4,7,18,21,
     4,11,13,22,
     4,12,13,21,
     4,12,15,19,
     5,7,16,23,
```

```
: PROC OPTIONS(MAIN);

ST

          5,9,14,22,
          5,9,16,20,
          5,10,15,20,
          6,8,15,24,
          6,9,16,19,
          6,10,13,21,
          6,10,15,19
         );
       /*
         MAT= MAT-PERM..
         VII= I-VOLT. INITIALES.
         VI= I-VOLT. CONTENUES.
         NDF= TABLEAU DU NB DE FOIS CONTENU POUR B.-T.
         PPP= VALEUR DE P AU COURS DU B.-T.
         VNS= NJ DE LA I-VOLT CHOISIE.
         NDFS= NB DE FOIS CHOISI.
         PVL= EVOLUTION DE LA P-VOLT DANS LE B.-T.
         PV= P-VOLTRICE DE MANEOUVRE
       */

         /*********************************************/

       SORT: PROC;
        /* IMPRESSION DE PVL(II)*/
        PUT SKIP;
        DO L=1 TO N;
1         PUT EDIT((K DO K=1 TO N),'      ')(X(4),(N)F(3),A);
1       END;
        PUT SKIP;
        DO L=1 TO N;
1         PUT EDIT('+')(X(3),A);
1         DO K=1 TO N;
2           PUT EDIT('---')(A);
2         END;
1         PUT EDIT('-+    ')(A);
1       END;
        PUT SKIP;
        DO J=1 TO N;
1         DO L=1 TO N;
2            PUT EDIT(J,' |')(F(2),A);
2            DO K=1 TO N;
3               IF PVL(II,L,J,K)=0 THEN PUT EDIT('    ')(A);
3               ELSE PUT EDIT(PVL(II,L,J,K))(F(3));
3            END;
2            PUT EDIT(' |    ')(A);
2         END;
1         PUT SKIP;
1       END;
        DO L=1 TO N;
1         PUT EDIT ('+')(X(3),A);
1         DO K=1 TO N;
```

```
ROC OPTIONS(MAIN);

      PUT EDIT('---')(A);
    END;
    PUT EDIT('-+    ')(A);
  END;
  PUT SKIP;

  PUT EDIT('CONTENANT')(A);
  PUT SKIP;
  DO L = 1 TO N;
    PUT EDIT(L,'  (')(F(2),A);
    DO P = 1 TO NMP;
      NF = PP +1;
      DO I = 1 TO N;
        IF PVL(II,L,I,MAT(P,I)) <=NF
        THEN NF=PVL(II,L,I,MAT(P,I));
        IF NF = 0 THEN GOTO ZER;
      END;
      PUT EDIT (NF,'*',P,' ,')(F(2),A,F(2),A);
      ZER:
    END;
    PUT EDIT(' ),')(A);
    PUT SKIP;
  END;
  PUT SKIP;
  END SORT;

    /*********************************************/

  /* ENTREE DES DONNEES */
    NOV=0;
ENCORE: PUT PAGE;
    HEURE = TIME;
    PUT DATA (HEURE);
    PUT SKIP(2);
    BC=0;
    PUT LIST('PSEUDO B-DECOMPOSITION D''UNE P-VOLTRICE D''ORDRE');
    GET LIST (N);
    PUT EDIT(N)(F(2));
    PUT SKIP(2);
  /* MAT EST LA LISTE DES MAT-PERM- */
    IF N=NOV THEN GOTO DEB ;
    NOV=N;
    FREE MAT,PV;
    IF N=3 THEN DO;NMP=6;NV1=2;END;
    ELSE DO;IF N=4 THEN NMP,NV1=24;
                  ELSE DO; NMP=1;
                           DO K=2 TO N;NMP=NMP*N;END;
                        END;
        END;
    ALLOCATE MAT,PV;
    IF N=3 THEN
```

```
: PROC OPTIONS(MAIN);

ST

          DO;MAT(1,1),MAT(2,1),MAT(3,2),MAT(4,3),MAT(5,2),MAT(6,3)=1;
1            MAT(1,2),MAT(2,3),MAT(3,1),MAT(4,1),MAT(5,3),MAT(6,2)=2;
1            MAT(1,3),MAT(2,2),MAT(3,3),MAT(4,2),MAT(5,1),MAT(6,1)=3;
1         END;
        ELSE DO; IF N¬=4 THEN GET LIST(MAT);END;
      /* VII EST LA LISTE DES 1-VOLT. INITIALES */
        FREE VII;
        IF N¬=3 & N¬=4 THEN GET LIST(NV1);
        ALLOCATE VII;
        IF N=3 THEN
          DO; VII(1,1)=1;
1             VII (1,2)=4;
1             VII (1,3)=5;
1             VII (2,1)=2;
1             VII(2,2)=3;
1             VII(2,3)=6;
1         END;
        ELSE DO;IF N¬=4 THEN GET LIST(VII);END;
        IF N¬=3 & N¬=4 THEN GET LIST(N);

      DEB : GET LIST(PP);
      /*PV EST LA P-VOLT A TRAITER */
        GET LIST(PV);
      /* PRESENTATION DES DONNEES
        N,     OU   3,PP,    OU   4,PP,
        MAT,        PV,           PV,
        NV1,        3,PP,         4,PP,
        VII,        PV,           PV,
        N,PP,       ---           ---
        PV,
        N,PP,
        ---
      */

      /* TABLEAUX DE TRAVAIL */
        NVM= MIN(NV1*NMP,600);
        ALLOCATE V1,NDF,PPP,NDFS,VNS,PVL;


      /* RECHERCHE DES 1-VOLTRICES CONTENUES DANS PV*/
        VN=0;
        VNC=1;
        DO V= 1 TO NV1;
1          DO P=1 TO NMP;
2             VN=VN+1; /* NO DE LA 1-VOLTRICE */
2             NF= PP+1;/* NB DE FOIS CONTENU */
2             DO L=1 TO N;
3                V1(VNC,L)=VII(V,MAT(P,L));
3                DO I=1 TO N;
4                   DO;IF PV(L,I,MAT(V1(VNC,L),I)) <=NF
5                         THEN NF=PV(L,I,MAT(V1(VNC,L),I));
```

```
PROC OPTIONS(MAIN);

                    IF NF=0 THEN GOTO VNT;
                 END;
              END;
           END;
           NDF(VNC,0)=NF;
           VNC=VNC+1;
           IF VNC>600 THEN
              DO;PUT LIST('PLUS DE 600 1-VOLT. CONTENUES');
                 PUT SKIP(2);
                  GOTO TNS;
              END;
     VNT:END;
     END;
   TNS: NVC=VNC-1; /* NB DE 1-VOLT. CONTENUES */

   /* IMPRESSION DE LA P-VOLT. */
     DO L=1 TO N;
        DO I=1 TO N;
           DO J=I TO N;
              PVL(0,L,I,J)=PV(L,I,J);
           END;
        END;
     END;
     PUT LIST ('LA P-VOLTRICE SUIVANTE');
     PUT EDIT('AVEC N=',N,' ET P=',PP)
              (A,F(2),A,F(3));
     II=0;
     CALL SORT;
        IF NVC=0 THEN
           DO; PUT LIST('EST 1-MINIMALE: PAS DE 1-VOLT CONTENUES');
           PUT SKIP(2);
           HEURE=TIME;
           PUT DATA(HEURE);
           PUT EDIT('ESSAIS',BC)(SKIP,A,F(6));
                 GOTO ENCORE;
           END;

   /* INITIALISATION DU BACK-TRACKING */
     PPP(0)=PP; /* VALEUR DE P DE LA P-VOLT PVL */
     VNS(0)=0; /*NO DE LA 1-VOLT CHOISIE */
     NDFS(0)=0; /* NB DE FOIS CHOISIE */

     /*************************************************/

   /* BACK-TRACKING */
     PUT SKIP;
     HEURE=TIME;
     PUT DATA(HEURE);
     II=1; /* INDICE DE PROFONDEUR */
   /* CHOIX D'UNE 1-VOLT */
   ITER: VNC=VNS(II-1)+1;  /* LA 1-VOLT SUIVANTE */
```

```
: PROC OPTIONS(MAIN);

ST

      VNCS: IF VNC>NVC THEN GOTO TERV1;
                                /* IL N'Y A PLUS DE 1-VOLT */
      VNCS1: IF NDF(VNC,II-1)=0
                THEN DO; VNC=VNC+1;GOTO VNCS;END;
                                /*PASSER A LA SUIVANTE CAR ELLE
                                  N'EST PLUS CONTENUE */
            NDFS(II)=NDF(VNC,II-1);
                                /* NB DE FOIS CHOISIE */
            VNS(II)=VNC;/* NO DE LA 1-VOLT CHOISIE */

      /*SOUSTRACTION:PVL(II)=PVL(II-1) - 1-VOLT(VNC)*/
      REM1:PPP(II)=PPP(II-1)-NDFS(II);/*VALEUR DE P*/
           IF PPP(II)=0 THEN GOTO EPUIS;/*CAR PVL(II)=0*/
           DO L=1 TO N;
1             DO I=1 TO N;
2                DO J=1 TO N;
3                  IF J¬=MAT(V1(VNS(II),L),I)
3                  THEN PVL(II,L,I,J)=PVL(II-1,L,I,J);
3                  ELSE PVL(II,L,I,J)=PVL(II-1,L,I,J)-NDFS(II);
3                END;
2             END;
1          END;

      /* REMPLISSAGE DE NDF(II): NDF(VNC,II)*V1(VNC)<=PVL(II) */
        DO VNC=VNS(II)+1 TO NVC;
1          NF=PP+1;
1          DO L=1 TO N;
2             DO I=1 TO N;
3                IF PVL(II,L,I,MAT(V1(VNC,L),I))<=NF
3                THEN NF=PVL(II,L,I,MAT(V1(VNC,L),I));
3                IF NF=0 THEN GOTO NFS;
3             END;
2          END;
1     NFS: NDF(VNC,II)=NF;
1       END;
        II=II+1; /*PROGRESSION DU B.T. EN PROFONDEUR */
        GOTO ITER;

      /* EPUISEMENT DE LA LISTE DES 1-VOLT. CONTENUES */
      TERV1: II=II-1; /* REMONTEE */
            IF II=0 THEN GOTO FIN; /*DU B.T. */

                                    ICI:
        BC=BC+1;
      /* TEST DE MINIMALITE DU RESIDU */
        DO VNC=1 TO NVC;
1          NF=PP+1;/* NB DE FOIS CONTENUE */
1          DO L=1 TO N;
2             DO I=1 TO N;
3                IF PVL(II,L,I,MAT(V1(VNC,L),I))<=NF
3                THEN NF=PVL(II,L,I,MAT(V1(VNC,L),I));
```

```
: PROC OPTIONS(MAIN);

ST

3                 IF NF=0 THEN GOTO NFSC;
3              END;
2           END;
1       NFSC: IF NF¬=0 THEN GOTO NCUV;/* C'EST UN RESIDU NON 1-MINIMAL */
1       END;

      /*C'EST UN RESIDU 1-MINIMAL */
      EPUIS:
        PUT SKIP(2);
        PUT LIST('SE DECOMPOSE EN');
        DO I1=1 TO II;
1          PUT SKIP;
1          PUT EDIT(NDFS(I1),'*(',V1(VNS(I1),1))(F(3),A,F(3));
1          DO L= 2 TO N;
2             PUT EDIT(',',V1(VNS(I1),L))(A,F(3));
2          END;
1          PUT EDIT(')')(A);
1       END;
        IF PPP(II)¬=0 THEN /*CAS TERVI,SINON PPP(II)=0*/
        DO; PUT SKIP;
1           PUT LIST('SUIVI DU RESIDU 1-MINIMAL');
1           CALL SORT;
1       END;

      NOUV: /* MARCHE ARRIERE DU B.-T. */
        IF VNS(II)=NVC THEN GOTO FC;/* DERNIERE 1-VOLT PRISE AU MAX*/
        NDFS (II) = NDFS(II)-1;/*1-VOLT CHOISIE 1 FOIS EN MOINS */
        IF NDFS(II)¬=0 THEN GOTO REM1;
                          /* SINON CHOISIR UNE AUTRE 1-VOLT */
        VNC=VNS(II)+1;
        IF VNC<=NVC THEN GOTO VNCS1;
     FC:II=II-1;/* PLUS DE 1-VOLT. ON REMONTE DANS LE B.-T.*/
        IF II¬=0 THEN GOTO NOUV;

      FIN: PUT SKIP(2);
           PUT LIST('C''EST TOUT');
           FREE V1,NDF,PPP,NDFS,VNS,PVL;
           PUT SKIP(2);
           HEURE=TIME;
           PUT DATA (HEURE);
           PUT EDIT('ESSAIS',BC)(SKIP,A,F(6));
           GOTO ENCORE;

      END RESID;
```

BIBS LILLE

## 11.10 RECHERCHE DE P-VOLTRICES MINIMALES

### 11.10.1 CONSTRUCTION DE 2-VOLTRICES MINIMALES D'ORDRE 4 - V 2 M I N

```
V2MIN:  PROC OPTIONS(MAIN);
Calcul de 2- volts minimales -

   DCL (I,   I2,J,C,M,A,N,   F,A1,A2,K,L,P,V
       )DEC FIXED(3);
   DCL C DEC FIXED(5);
   DCL  (FELR,DT) CHAR(9);
   DCL  (FD,FM,DM,DH) DEC FIXED(10);
   DCL  MOD  CHAR(7);
   DCL (2(1:8) DEC FIXED(2);
   DCL(VP1(1:576,1:4))DEC FIXED(2);
   DCL  V2(1:4,1:4,1:4) DEC FIXED(1);

   DCL FAM(1:4,1:6) DEC FIXED(2) INIT(
       1,6,10,15,19,24,
       2,5,11,16,18,23,
       3,7,12,14,17,21,
       4,8,9,13,20,22
       );

   DCL DCF(1:24,1:4) DEC FIXED(2) INIT(
       1,8,17,24,
       1,8,18,23,
       1,10,17,19,
       1,11,14,24,
       2,7,17,24,
       2,7,18,23,
       2,9,18,20,
       2,12,13,23,
       3,8,17,22,
       3,11,14,22,
       3,11,16,20,
       3,12,14,21,
       4,7,18,21,
       4,11,13,22,
       4,12,13,21,
       4,12,15,19,
       5,7,16,23,
       5,9,14,22,
       5,9,16,20,
       5,10,15,20,
       6,8,15,24,
       6,9,16,19,
       6,10,13,21,
       6,10,15,19
       );

   DCL ASS(1:81,1:2,1:4)DEC FIXED(1) INIT(
       1,3,5,7,
       2,4,6,8,
```

Données : DT='MMSS'
MOD='INITIAL' ;
ou 'REPRISE'
(données perforées)

EST

```
1,3,5,6,
2,4,7,8,
1,3,5,6,
2,4,8,7,
1,2,5,7,
3,4,6,8,
1,2,5,6,
3,4,7,8,
1,2,5,6,
3,4,8,7,
1,2,5,7,
4,3,6,8,
1,2,5,6,
4,3,7,8,
1,2,5,6,
4,3,8,7,
3,1,2,7,
4,5,6,8,
3,1,2,7,
4,6,5,8,
3,1,2,6,
4,5,7,8,
3,1,2,6,
4,7,5,8,
3,1,2,6,
4,5,8,7,
3,1,2,6,
4,8,5,7,
3,1,2,5,
4,6,7,8,
3,1,2,5,
4,7,6,8,
3,1,2,5,
4,6,8,7,
3,1,2,5,
4,8,6,7,
3,1,2,5,
4,7,8,6,
3,1,2,5,
4,8,7,6,
2,1,3,7,
4,5,6,8,
2,1,3,7,
4,6,5,8,
2,1,3,6,
4,5,7,8,
2,1,3,6,
4,7,5,8,
2,1,3,6,
4,5,8,7,
2,1,3,6,
```

```
4,8,5,7,
2,1,3,5,
4,6,7,8,
2,1,3,5,
4,7,6,8,
2,1,3,5,
4,6,8,7,
2,1,3,5,
4,8,6,7,
2,1,3,5,
4,7,8,6,
2,1,3,5,
4,8,7,6,
2,1,4,7,
3,5,6,8,
2,1,4,7,
3,6,5,8,
2,1,4,6,
3,5,7,8,
2,1,4,6,
3,7,5,8,
2,1,4,6,
3,5,8,7,
2,1,4,6,
3,8,5,7,
2,1,4,5,
3,6,7,8,
2,1,4,5,
3,7,6,8,
2,1,4,5,
3,6,8,7,
2,1,4,5,
3,8,6,7,
2,1,4,5,
3,7,8,6,
2,1,4,5,
3,8,7,6,
1,2,3,7,
4,5,6,8,
1,2,3,7,
4,6,5,8,
1,2,3,6,
4,5,7,8,
1,2,3,6,
4,7,5,8,
1,2,3,6,
4,5,8,7,
1,2,3,6,
4,8,5,7,
1,2,3,5,
4,6,7,8,
```

```
1,2,3,5,
4,7,6,8,
1,2,3,5,
4,6,8,7,
1,2,3,5,
4,8,6,7,
1,2,3,5,
4,7,8,6,
1,2,3,5,
4,8,7,6,
1,2,4,7,
3,5,6,8,
1,2,4,7,
3,6,5,8,
1,2,4,6,
3,5,7,8,
1,2,4,6,
3,7,5,8,
1,2,4,6,
3,5,8,7,
1,2,4,6,
3,8,5,7,
1,2,4,5,
3,6,7,8,
1,2,4,5,
3,7,6,8,
1,2,4,5,
3,6,8,7,
1,2,4,5,
3,8,6,7,
1,2,4,5,
3,7,8,6,
1,2,4,5,
3,8,7,6,
1,3,4,7,
2,5,6,8,
1,3,4,7,
2,6,5,8,
1,3,4,6,
2,5,7,8,
1,3,4,6,
2,7,5,8,
1,3,4,6,
2,5,8,7,
1,3,4,6,
2,8,5,7,
1,3,4,5,
2,6,7,8,
1,3,4,5,
2,7,6,8,
1,3,4,5,
```

```
        2,6,8,7,
        1,3,4,5,
        2,8,6,7,
        1,3,4,5,
        2,7,8,6,
        1,3,4,5,
        2,8,7,6
        );

    DCL(PP(1:24,1:4))DEC FIXED(1) INIT(
        1,2,3,4,
        1,2,4,3,
        1,3,2,4,
        1,3,4,2,
        1,4,2,3,
        1,4,3,2,
        2,1,3,4,
        2,1,4,3,
        2,3,1,4,
        2,3,4,1,
        2,4,1,3,
        2,4,3,1,
        3,1,2,4,
        3,1,4,2,
        3,2,1,4,
        3,2,4,1,
        3,4,1,2,
        3,4,2,1,
        4,1,2,3,
        4,1,3,2,
        4,2,1,3,
        4,2,3,1,
        4,3,1,2,
        4,3,2,1
        );

CONV:  PROC(HH,TH);
  /* CONVERSION HEURE/SECONDES */
    DCL  HH CHAR(9);
    DCL DI DEC FIXED(1);
    DCL  TH DEC FIXED(10);
    DCL  VAL(6) BIN FIXED;
    DO DI=1 TO 6;
      VAL(DI)=INDEX('0123456789',SUBSTR(HH,DI,1))-1;
    END;
    TH=VAL(6)+10*VAL(5)+60*VAL(4)+600*VAL(3)+
          3600*VAL(2)+36000*VAL(1);
END CONV;
/* CONSTRUCTION DES 576 VFI */
    V=1;
    DO D=1 TO 24;
```

```
EST

 1          DO M=1 TO 24;
 2            DO P=1 TO 4;
 3              VP1(V,P)=DCP(D,PP(M,P));
 3            END;
 2            V=V+1;
 2          END;
 1        END;

          /* DEBUT DU PROGRAMME */;
          HEUR= TIME;
          CALL CONV(HEUR,HD);
          PUT LIST('PARAMETRES');
          PUT DATA(HD);
          /* ARRET DU PROGRAMME APRES DT= 'PASS' DE CALCUL */
          GET DATA(DT);
          PUT DATA(DT);
          SUBSTR(DT,3,4)=SUBSTR(DT,1,4);
          SUBSTR(DT,7,3)='000';
          SUBSTR(DT,1,2)='00';
          CALL CONV (DT,DH);
          IF DH=0 THEN DH=3600;
          DH=DH+HD;
          PUT DATA(DH);
      /* GESTION INTERRUPTIONS */
          GET DATA (MOD);
          PUT DATA (MOD);
          IF MOD='REPRISE' THEN GOTO REPR;


      /* PROGRAMME */
          C=0;
          PUT PAGE;
          PUT EDIT ('2-VOLTRICES D''ORDRE 4 MINIMALES') (A);
          PUT SKIP;
          PUT SKIP;
          PUT SKIP;
      /* CONSTRUCTION DES 60 ASSOCIATIONS */
          A1=0;
      EA1: A1=A1+1;
          IF A1>4 THEN GOTO FA1;
            F=A1-1;
        EF: F=F+1;
            IF F>4 THEN GOTO FF;
              I2=0;
          EI2: I2=I2+1;
              IF I2>6 THEN GOTO FI2;
                A2 =PAR(F,I2);
      /*CALCUL DE D2 */
              DO I=1 TO 4;
 1                D2(I)=DCP(A1,I);
 1              END;
```

```
        DO I=5 TO 8;
          D2(I)=DCP(A2,I-4);
        END;
        A=0;
      EA:A=A+1;
        IF A>81 THEN GOTO FA;
/* CONSTRUCTION DE V2 */
          V2=0;
          DO P=1 TO 4;
            DO I=1 TO 4;
              V2(P,I,MP(D2(ASS(A,1,P)),I))=1;
              V2(P,I,MP(D2(ASS(A,2,P)),I))=
                V2(P,I,MP(D2(ASS(A,2,P)),I))+1;
            END;
          END;
/* TEST */
          DO V=1 TO 576;
            DO P=1 TO 4;
              DO I=1 TO 4;
                IF V2(P,I,MP(VP1(V,P),I))=0 THEN
                  GO TO V1PGV2;
              END;
            END;
          V1FFV2:GOTO ALTV2;
    V1PGV2:END/*DE V*/;
    V2MIN:


  PUT SKIP;
  PUT SKIP;
  C=C+1;
  PUT EDIT(C) ( F(5));
  PUT SKIP;
  PUT EDIT('DCP',A1,' =',(D2(I) DO I = 1 TO 4),'  DANS',
          (ASS(A,1,J)DO J=1 TO 4),
          '  SOIT',(D2(ASS(A,1,J))DO J = 1 TO 4))
         (A,F(3),A,4 F(3),A,4 F(3),A,4 F(3));
  PUT SKIP;
  PUT EDIT('DCP',A2,' =',(D2(I)DO I=5 TO 8),'       ',
          (ASS(A,2,J)DO J=1 TO 4),
          '       ',(D2(ASS(A,2,J))DO J = 1 TO 4))
         (A,F(3),A,4 F(3),A,4 F(3),A,4 F(3));

  /* IMPRESSION D'UNE VOLTRICE CUBIQUE */
    PUT SKIP;
  N=4;
    DO L=1 TO N;
        PUT EDIT ((K DO K=1 TO N),'     ')(X(4),(N)F(3),A);
    END;
```

```
          PUT SKIP;
          DO I=1 TO N;
1             PUT EDIT('+')(X(3),A);
1             DO K=1 TO N;
2               PUT EDIT ('---')(A);
2             END;
1             PUT EDIT('-+  ')(A);
1         END;
          PUT SKIP;
          DO J = 1 TO N ;
1             DO L=1 TO N;
2               PUT EDIT(J,' |',(V2(L,J,K) DO K=1 TO N),' |  ')
                (F(2),A,(N)P'ZZZ',A);
2             END;
1             PUT SKIP;
1         END;
          DO L=1 TO N;
1             PUT EDIT('+')(X(3),A);
1             DO K=1 TO N;
2              PUT EDIT('---')(A);
2             END;
1             PUT EDIT('-+  ')(A);
1         END;
          PUT SKIP;


                /* TEST TEMPS */
                HEUR=TIME;
                CALL CONV(HEUR,HM);
                IF HM >=DH THEN GOTO OUST;
                SUITE:


             ALTV2:
             GOTO EA; FA:
           GOTO EI2; FI2:
         GOTO EF; FF:
       GOTO EA1; FA1:


REFR:
/* REPRISE */
    GET LIST(A1,A2,A,F,I2,C,D2);
    PUT PAGE;
    GOTO SUITE;


OUST:
/* TEMPS DEPASSE */
    PUT FILE(PERFO)EDIT
        ('DT=''',SUBSTR(DT,3,4),''';')(SKIP,A,A,A);

    PUT FILE (PERFO) EDIT
        ('ACC=''REPRISE'';')(SKIP,A);
    PUT FILE(PERFO) SKIP;
    PUT FILE(PERFO) LIST(A1,A2,A,F,I2,C,D2);


END V2MIN;
```

BUS LILLE

# 12. BIBLIOGRAPHIE

## 12.1 OUVRAGES D'INTÉRÊT GÉNÉRAL

On peut consulter

### 12.1.1 Sur les groupes de permutations

1 - LEDERMAN
*"Introduction to the theory of finite groups"*. OLIVER and Boyd, Edimburg (  )

### 12.1.2 Sur la combinatoire

2 - H. J. RYSER
*"Mathématiques Combinatoires"* (Traduit par P. CAMION) DUNOD Paris (1968)
*où on trouvera, en particulier, des configurations latines, et des matrices décomposables.*

3 - A. KAUFMANN
*"Introduction à la Combinatorique en vue de ses applications"*. DUNOD Paris (1968)
*où on trouvera, en particulier, des flots et aussi des configurations latines.*

4 - L. COMTET
*"Analyse Combinatoire"* 2 tomes. P.U.F. Paris (1970)

5 - C. BERGE
*"Principes de Combinatoire"* DUNOD Paris (1968)

### 12.1.3 Sur les espaces vectoriels

6 - A. LENTIN et J. RIVAUD
*"Leçons d'algèbre moderne"* VUIBERT Paris (1964)

7 - T.J. FLETCHER
*"L'algèbre Linéaire par ses applications"*(Traduit par M et V. GLAYMANN) CEDIC Paris-Lyon(1972)
*où l'on trouvera des décompositions de carrés magiques qui sont des p-matrices.*

### 12.1.4 Sur les graphes

8 - C. BERGE
*"Graphes et hypergraphes"* DUNOD Paris (1970)

9 - L.R. FORD et D.R. FULKERSON
*"Flots dans les graphes"* (Traduit par J.C. ARINAL) GAUTHIER-VILLARS (1967)

10 - J.P. STEEN
*"Cours de théorie des graphes"* Polycopié ; Informatique Université de Lille 1 (1968)
*qui contient la démonstration du théorème de HOFFMANN d'où est tiré l'algorithme FFH.*

### 12.1.5 Sur les langages

11 - C. BERTHET
*"Le langage de programmation PL/1"* DUNOD Paris (1972)

12 - L. BOLLIET - N. GASTINEL - P.J. LAURENT

*"Un nouveau Langage Scientifique ALGOL"* Manuel Pratique HERMANN Paris (1964)

13 - Groupe ALGOL de l'AFCET

*"Manuel du Langage Algorithmique ALGOL 68"* HERMANN Paris (1975)

## 12.2 ARTICLES

### 12.2.1 B-Décompositions et configurations à plusieurs dimensions

14 - W.B. JURKAT et H.J. RYSER

*"Extremal configurations and decomposition theorem"* 1 - J. Algebra, 8 (1968) 194-222

15 - HAK PROU

*"Etude de la décomposition d'une matrice à coëfficients entiers naturels en matrices d'injection dont certaines sont soumises à des conditions particulières. Application aux problèmes d'emploi du temps"* Thèse Paris VI (1969)

16 - J. CSIMA

*"Multidimensional Stochastic Matrices and Patterns"* J. Algebra 14, (1970), 194-202

17 - J. CSIMA

*"Stochastic functions on hypergraphs"*
"Combinatorial theory and its applications" (P. Erdös, A. Renyi et V.T. Sos. Ed.). North Holland Publishing Cie, London 1970.

18 - J. CSIMA

*"Patterns, Coincident with their crosspattern"* Combinatorial Structures and their applications. Proceeding of Calgary international Conference on combinatorial (1969). Gordon and Breach, New-York 1970, by R. Guy, N. Sauer, H. Hanani, J. Schonheim. p 53-54

19 - J. CSIMA

*"Restricted Patterns"* J. Comb. Theory, Ser A, 12 (1972), 346-356

20 - C.R. JOHNSON

*"A matrix theoretic construction of magic squares"* Amer. Math. Montly 79 (1972), 1004-1006

21 - M. ABRAMSOB et W.O.J. MOSER

*"Arrays with fixed row and column sums"* Disc. Math. 6 (1973) 1-14

22 - M.A. HARRISON

*"On the Number of Classes of Binary Matrices"* IEEE Trans. on Comput., Vol C 22, n°12, dec 1973.

23 - R.A. BRUALDI and J. CSIMA

*"Extremal Plane Stochastic Matrices of Dimension Three"* Lin. Alg. and Appl. 11 (1975) 105-133

24 - R.A. BRUALDI and J.CSIMA

*"Stochastic Patterns"* J. Comb. Theory, Ser. A 19 (1975) 1-12

25 - R.A. BRUALDI and J. CSIMA
*"On the Plane Term Rank of a three Dimensional Matrix"* Proceed. of Amer. Math. Soc. 54 (1976) 471-473

26 - A. STOFFEL
*"Totally diagonal Latin squares"* Stud. Cerc. Mat. 28 (1976), n° 1, 113-119

12.2.2 Problème d'emploi du temps sous forme de configuration à trois dimensions

27 - J. CSIMA - C.C. GOTLIEB
*"Tests on a Computer Method for Constructing School Timetables"* Com. ACM V7 N3 Mars 1964.

28 - V. BADIN et V. STOICESCU
*"Considerations on the multi-index transportation problem for the case of symetrical contraints"* (Centre of economic computation and economic cybernetics. Bucaris Romania 1970)

29 - J. C. HERZ
*"Sur un problème combinatoire"* Actes du 3ème Cong. AFCALTI, Mai 1963, Dunod (Paris),291-298
*à la fin duquel se trouve la procédure ARRANG (§11.1.2 p211)*

30 - J. C. HERZ
*"Quelques considérations sur les problèmes d'emplois du temps"* Revue Française de recherche Opérationnelle, n° 38, 1966,85-91.

12.2.3 Cônes polyédriques

31 - J. C. HERZ
*"Points frontières entiers des polyèdres convexes"* Rev. Franç. de l'Information 1964-2 91-103.

32 - J. C. FIOROT
*"Algorithme de génération des points entiers d'un cône polyédrique"* EDF Bulletin de la Direction des études et recherches. Série C Math. Info. n° 1, 1970, 5-28.

33 - J. C. FIOROT
*"Points entiers d'un cône polyédrique"* Thèse Informatique Université de Lille I.

# 13. INDEX

## 13.1 SYMBOLES

| *N° dans le glossaire* | *paragraphe* | *page* | *symbole* | *signification* |
|---|---|---|---|---|
| 32 | 2.2.1 | *11* | (x) | Numéro lexicographique d'une matrice de permutation |
| 70 | 4.2.1 | *49* | [x] | Numéro lexicographique d'une B-décomposition de UN(nxn) |
| 79 | 4.2.7 | *59* | {x} | Numéro lexicographique d'une 6-uple de B-dcp de UN(4x4) |
| 115 | 9.2 | *189* | 7 | (Cycle). Cycle caractéristique des hypergraphes associés aux voltrices. |
| 70 | 2.2.3 | *17* | A,B | Les deux B-décompositions de UN(3x3) |
| | 2.2.2 | *13* | B-... | Pour préciser qu'il s'agit de B-décomposition, à coefficients entiers positifs. |
| 95 | 7.1 | *133* | D | (tableau) B-Décomposition de UN(nxnxn) |
| 110 | 7.5 | *143* | D | (cube) Généralisation du tableau D |
| 111 | 7.5 | *145* | DD | (tableau) Autre généralisation du tableau D |
| 3 | 2.2 | *9* | dcp | Abréviation de "décomposition" pour les matrices |
| 4 | 2.2 | *9* | décomp. | Abréviation de "décomposition" pour les voltrices |
| 100 | 8.1.3 | *153* | DEICV | Identification du programme de multidécomposition des p-voltrices. |
| 78 | 4.2.5 | *57* | (F,C,H) | Triplet de décompositions associées aux carrés latins et aux 1-voltrices |
| 43 | 3.1.3.2 | *23* | $G_i$ | Sous groupe de $S_n$ laissant l'objet i invariant |
| 33 | 4.2.3 | *53* | I(n,i) | Permutations qui changent 1 en i. |
| 30 | 2.1.3 | *9* | mat. perm. | Abréviation pour "matrice de permutation" |
| 31 | 2.1.3 | *9* | m. p. | Autre abréviation pour "matrice de permutation" |
| 86 | 4.1.2 | *47* | MLTDCP3 | Identification du programme de multidécomposition des p-matrices |
| 87 | 4.1.2 | *47* | $N_M$ | Nombre minimum de m.p. différentes dans les B-dcp d'une p-mat. |
| 88 | 4.1.2 | *47* | $N_n$ | Maximum des nombres $N_M$ pour les p-mat. d'ordre n. |
| | 2.2.2 | *13* | p-... | Caractérise les tableaux à sommes, sur les rangées, égales à p |
| 52 | 2.2.2 | *13* | p-mat. | Abréviation de p-matrice |
| 60 | 2.3.1 | *13* | p-volt | Abréviation de p-voltrice |
| 97 | 8.1.1 | *151* | R | Matrice pour la B-décomposition des p-voltrices |
| 98 | 8.1.1 | *151* | (RA,RB) | Partition de R pour les p-voltrices d'ordre 3 |
| 77 | 4.2.4 | *53* | r-uple | Ensembles de r objets de même nature. |
| 39 | 3.1.1 | *21* | $S_n$ | Groupe symétrique des permutations de n objets |
| 92 | 5.3.4.1 | *85* | T | (tableau) Pour B-décomposer une p-matrice |
| 54 | 2.2.3 | *13* | UN(nxn) | Matrice d'ordre n remplie de 1 |
| 63 | 7.1 | *133* | UN(nxnxn) | Voltrice d'ordre n remplie de 1 |

# 13.2 GLOSSAIRE

## 13.2.1 ESPACES VECTORIELS

| *N° dans le glossaire* | *paragraphe* | *page* | *notion* | *signification* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.2.2 | *11 et 27* | dimension | La DIMENSION d'un espace vectoriel est le nombre de coordonnées de ses vecteurs. C'est aussi le nombre de vecteurs qu'il a dans une base. Les matrices (nxn) sont des vecteurs d'un certain espace vectoriel de dimension n.m.(Voir N° 18 § 13.2.2 p 353). |
| 2 | 2.2.2 | *11* | base | Ensemble de vecteurs d'un espace vectoriel constituant à la fois un système libre et un système de générateurs. Tout vecteur de l'espace vectoriel est une combinaison linéaire à coefficients (scalaires) quelconque de vecteurs de base. Cette décomposition est unique. Mais il y a plusieurs bases pour un espace vectoriel. |
| 3 | 2.2 | *9* | décomposition | Une décomposition d'un vecteur est une combinaison linéaire d'autres vecteurs qui lui est égale. Les vecteurs en question sont les p-matrices et les p-voltrices. |
| 4 | 2.2 | *9* | dcp | Abréviation de "décomposition",utilisée pour les p-matrices et employée dans quelques figures ou programmes. |
| 5 | 2.2 | *9* | décomp. | Autre abréviation de "décomposition", mais utilisée pour les p-voltrices. |
| 6 | 2.2.2 | *13* | B-décomposition | Décomposition d'un vecteur V en une combinaison linéaire à coefficients positifs d'autres vecteurs. Si V et les vecteurs sont à coordonnées entières, les coefficients doivent être entiers, si bien que le vecteur V est alors somme d'une série d'autres vecteurs. Le "B" rappelle à la fois la notion de barycentre et le nom de BIRKHOFF qui est associé au théorème de VON NEUMANN. |
| 7 | 2.2.1 | *9* | vecteurs de décomposition | Vecteurs vérifiant une propriété donnée (coordonnées 0 ou 1, ou minimaux) et destinés à construire des B-décompositions de vecteurs. Suivant le cas il s'agit des matrices de permutation ou des p-voltrices minimales. |
| 8 | 2.2.2 | *13* | B-décomposable | Qualifie les vecteurs qui admettent des B-décompositions dans un certain ensemble de vecteurs de décomposition préalablement défini. |
| 9 | 2.2.2 | *13* | B-indécomposable | Qualifie les vecteurs qui ne sont pas B-décomposables dans l'ensemble de vecteurs de décomposition. |
| 10 | 4.1.2 | *47* | multidécomposition | Se dit des algorithmes cherchant à construire toutes les B-décompositions d'un vecteur dans un ensemble de vecteurs de décomposition. |
| 11 | 3.3 | *33* | relation | Deux sommes égales de vecteurs. Sont vecteurs dans une relation : les matrices de permutations et les B-décompositions de UN (nxn). |
| 12 | 3.3 | *33* | membre d'une relation | L'une des sommes de vecteurs dans la relation. |
| 13 | 3.3. | *33* | relation à x vecteurs par membre | Les relations, dont les vecteurs sont à coordonnées 0 ou 1, ont le même nombre de vecteurs dans chaque membre. Deux B-décompositions d'une p-matrice en matrices de permutation sont les membres d'une relation à p matrices de permutation par membre. |

On trouvera dans un ouvrage d'Algèbre les notions classiques suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| 3.2.1 | *27* | Système linéaire |
| 3.2.1 | *29* | Rang d'un système linéaire |
| 3.2.2 | *29* | Système d'inéquations |
| 3.2.1 | *29* | Paramètres d'un système linéaire rectangulaire horizontal |
| 3.2.3 | *31* | Indépendance des lignes d'un système linéaire |
| 3.2.3 | *31* | Cône polyédrique |
| 3.2.3 | *29* | Réduite d'HERMITE |
| 3.2.3 | *31* | Forme normale de SMITH |

## 13.2.2 TABLEAUX

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 14 | 2.1.2 | 7 | tableau | Ensemble de nombres disposés dans des cases régulièrement alignées. (voir h.t. p 6) |
| 15 | 2.1.2 | 7 | vecteur | Tableau d'une seule ligne. Un indice suffit pour désigner une case. C'est aussi le point d'un espace vectoriel, dont les coordonnées constituent le tableau. |
| 16 | 2.1.2 | 7 | matrice | Tableau de forme rectangulaire. Il faut deux indices pour désigner une case. C'est de deux façons une ligne de lignes. |
| 17 | 2.1.2 | 7 | voltrice | Tableau de forme parallélipipédique. Il faut trois indices pour désigner une case. C'est de trois façons une ligne de matrices. |
| 18 | 2.1.2 | 7 | dimension(s) d'un tableau | Au singulier : Dimension de l'espace vectoriel dans lequel se placent les cases du tableau. C'est aussi le nombre d'indices d'une case. Par abus de langage, une voltrice est une matrice de dimension 3. Au pluriel : longueurs des cotés de l'espace occupé par le tableau. Ainsi une matrice de n lignes de m cases est de dimensions (nxm). |
| 19 | 2.2.1 | 9 | ordre n | Quand un tableau a ses dimensions égales à n, il est dit d'ordre n. |
| 20 | 2.1.3 | 9 | matrice carrée | Une matrice d'ordre n est carrée |
| 21 | 2.3.1 | 15 | voltrice cubique | Une voltrice d'ordre n est cubique |
| 22 | 2.1.2 | 7 | élément d'un tableau | Un élément d'un tableau est une case avec la valeur qu'elle contient. Elle est repérée par ses indices. |
| 23 | 2.1.2 | 7 | rangée | Une rangée d'un tableau est un sous-tableau a une dimension. Elle peut être une ligne ou une colonne d'une matrice. |
| 24 | 2.1.2 | 7 | plan | Un plan d'un tableau est un sous-tableau de dimension 2. Une voltrice est de trois façons, une rangée de plans bien que en général on ne considère qu'une seule des trois façons. |
| 25 | 2.1.2 | 7 | somme sur | Somme sur un sous-tableau : somme des éléments du sous-tableau. On utilise très souvent la somme sur une rangée. |

## 13.2.3 LES PERMUTATIONS ET LEUR GROUPE

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 26 | 2.1.3 | 9 | permutation | Bijection d'un ensemble fini, de n objets, dans lui-même. |
| 27 | 3.1.2.1 | 21 | changer | On dit qu'une permutation change i en j si elle remplace i par j. Si les objets sont en ordre, le j-ème est alors mis à la place du i-ème. |
| 28 | 2.2.1 | 9 | vecteur représentatif d'une permutation | Les objets étant les nombres de 1 à n, en ordre croissant, le vecteur représentatif d'une permutation est la liste obtenue en faisant la permutation sur ces nombres. |
| 29 | 2.1.3 | 9 | matrice de permutation | Matrice carrée d'ordre n, à éléments {0,1}, associée à une permutation de n objets, et dont le j-ème élément de la ligne i vaut 1 si, et seulement si, la permutation change i en j. La matrice de la permutation $r^{-1}$ s'obtient en transposant celle de r. |
| 30 | 2.1.3 | 9 | Abréviation : mat. perm. | |
| 31 | 2.1.3 | 9 | m. p. | |
| 32 | 2.2.1 | 11 | (x) numéro lexicographique d'une permutation | le numéro lexicographique d'une permutation est le rang, dans l'ordre léxicographique, de son vecteur représentatif. Il est noté entre parenthèses. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 33 | 4.2.3 | 53 | Intervalle I(n,i) | Numéros lexicographiques des permutations de n objets qui changent 1 en i. C'est, dans l'ensemble des entiers, l'intervalle [(i-1).(n-1)!+1, i.(n-1)!]. |
| 34 | 4.2.1 | 42 | Ensembles de permutations | Dans certains ouvrages un tel ensemble est aussi appelé complexe. Les ensembles dont il s'agit dans le texte sont<br>. les classes (à droite et à gauche d'un sous-groupe,<br>. les membres de relations entre matrices de permutation,<br>. les B-décompositions de UN(nxn)<br>. les r-uples de ces B-décompositions,<br>. les débuts de B-décompositions, d'une p-matrice. |
| 35 | 3.1.3 | 25 et 49 | classe de conjugaison des permutations | Deux permutations r et s sont conjuguées s'il existe une permutation q telle que $r = q.s.q^{-1}$. Elles ont alors autant de cycles de chaque longueur. On obtient la matrice de permutation de r en permutant suivant q les lignes et les colonnes de celle de s. |
| 36 | 4.2.2 | 49 | des ensembles de permutations | Deux ensembles de permutations sont conjugués s'il existe une permutation q telle que, pour toute permutation s du premier ensemble, $q.s.q^{-1}$ appartienne au second.<br>Dans les deux cas, c'est une relation d'équivalence. |
| 37 | 4.2.2 | 49 | équivalence large des ensembles de permutations | Deux ensembles de permutations sont équivalents au sens large, s'il existe des permutations p et q telles que pour toute permutation s du premier ensemble $p.s.q^{-1}$ appartienne au second. |
| 38 | 4.2.8 | 61 | permutations indépendantes | Deux permutations r et s sont indépendantes si elles ne changent aucun objet de la même façon, c'est à dire si $r.s^{-1}$ ne laisse aucun objet invariant. Ce n'est pas une relation d'équivalence. |
| 39 | 3.1.1 | 21 | Groupe Sn | Groupe des permutations de n objets, dit encore groupe symétrique. Il est d'ordre n!. |
| 40 | 3.1.2.1 | 21 | ensemble transitif de permutations | Un ensemble de permutations est dit transitif si pour deux objets i et j, il possède une permutation qui change i en j. |
| 41 | 3.1.2.2 | 21 | ensemble k-fois-transitif de permutations | Un ensemble de permutations est dit k-fois-transitif si, pour deux ensembles de k objets, il possède une permutation qui applique l'un sur l'autre. |
| 42 | 3.1.2.3 | 21 | ensemble p-transitif de permutations | Un ensemble de permutations est dit p-transitif si, pour deux objets i et j, il possède exactement p permutations qui changent i en j. |
| 43 | 3.1.3.2 | 23 | Sous-groupe $G_i$ | Sous-groupe de $S_n$, laissant invariant l'objet i. Il est d'ordre (n-1)!. |
| 44 | 3.1 f.12 | 28 | r.s produit de deux permutations | On obtient la permutation q = r.s, telle que, pour l'objet i, q(i) = r(s(i)). Cependant, au niveau des matrices de permutation, on a m.p.(q) = m.p.(s) x m.p.(r). |
| 45<br>46 | 3.1.3.2<br>3.1.3.2 | 23<br>23 | classe à droite<br>classe à gauche de $G \subset S_n$ | Les classes à droite (gauche) de G s'obtiennent en multipliant G à droite (gauche) par des permutations m de $S_n$. On les note G.m(m.G). Les matrices des permutations d'une classe à droite (à gauche) s'obtiennent en multipliant celle de m par celles des permutations de G, ces dernières étant placée à droite (à gauche). |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | On trouvera dans un ouvrage d'algébre les notions classiques suivantes : |
| | 3.1.2.1 | 21 | $\Gamma_K(i)$ = transformés par le complexe K de l'objet i, |
| | 3.1.2.1 | 21 | $\theta_i$ = orbite de i dans un groupe, |
| | 3.1.3.3 | 25 | Cycle de degré n dans une permutation, |
| | 3.1.3.4 | 27 | permutations paires et impaires, |
| | 3.1.3.4 | 27 | sous-groupe propre, |
| | 3.1.3.3 | 25 | isomorphisme, |
| | 3.1.3.4 | 25 | Théorème de LAGRANGE, |
| | 3.1.3.4 | 25 | groupe abélien |
| | 3.1.3.4 | 25 | groupe alterné, |
| | 3.1.3.3 | 25 | groupe cyclique, |
| | 3.1.3.4 | 27 | sous-groupe conjugués, |
| | 3.1.3.4 | 27 | sous-groupe invariant, |
| | 3.1.3.4 | 27 | groupe quadratique de KLEIN |
| | 3.1.3.4 | 27 | groupe de SYLOW |
| | 3.1.3.4 | 27 | groupes primitifs et imprimitifs, |
| | 3.1 f.13 | 30 | système d'imprimitivité, |
| | 3.1.3.4 | 27 | groupe dehedral. |

## 13.2.4 NOTIONS ATTACHEES AUX MATRICES

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 47 | 2.1.3 | 9 | matrice <u>d'injection</u> | Matrice ayant moins de lignes que de colonnes, et ayant un elmt. non-nul et égal à 1 par ligne et, au plus, un par colonne On l'obtient en enlevant des lignes à une matrice de permutation. |
| 48 | 2.2 | 9 | matrice <u>bistochastique</u> | Matrice carrée, à éléments réels compris entre 0 et 1 et telle que la somme sur une rangée soit égale à 1. Ces matrices représentent des processus Markovien. |
| 49 | 3.2.1 | 29 | matrice <u>unimodulaire</u> | Matrice dont les déterminants sont égaux à 1, -1, ou 0. |
| 50 | 3.2.1 | 29 | matrice <u>totalement unimodulaire</u> | Matrice dont tous les déterminants et sous-déterminants sont égaux à 1, -1 ou 0. |
| 51 | 2.2.2 | 13 | <u>p-matrice</u> | Matrice à éléments entiers non-négatifs dont les sommes sur les rangées sont égales à p. Elle est nécessairement carrée. |
| 52 | 2.2.2 | 13 | Abréviation <u>p-mat.</u> | |
| 53 | 2.2.2 | 13 | <u>1-matrice</u> | Les matrices de permutation sont des 1-matrices. |
| 54 | 2.2.3 | 13 | <u>UN(nxn)</u> | Notation utilisée pour désigner une matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 1. C'est une n-matrice. |
| 55 | 8.5.2 | 171 | <u>Couvert</u> | Se dit, pour une matrice carrée, des cases correspondant aux éléments non nuls d'une matrice de permutation de même ordre . S'utilise également pour les voltrices. |

## 13.2.5 NOTIONS ATTACHEES AUX VOLTRICES

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 56 | 6.2.3 | 117 | plans <u>horizontal</u> | Quand on considère une voltrice comme un solide indéformable, si on la suppose posée sur une surface horizontale et qu'on regarde une de ses faces verticales, on y distingue trois séries de plans qui sont : les plans horizontaux et, parmi les plans verticaux, la série des plans parallèles à la face vue, dits de face, et l'autre série, dite de côté |
| 57 | 6.2.3 | 117 | <u>de côté</u> | |
| 58 | 6.2.3 | 117 | <u>de face</u> | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 59 | 2.3.1 | 15 | p-voltrice | Voltrice, à éléments entiers non-négatifs dont les sommes sur les rangées sont égales à p. Elle est nécessairement cubique. Elle est considérée comme une rangée de plans, qui sont des p-matrices |
| 60 | 2.3.1 | 15 | abréviation p-volt. | |
| 61 | 2.3.2 | 15 | 1-voltrice | p-voltrice particulière qui est une généralisation des matrices de permutation . |
| 62 | 2.3.2 | 17 | couple d'identification d'une 1-volt d'ordre n | C'est le couple de deux nombres. Il est constitué du numéro lexicographique de la décomposition de UN(nxn) et de celui de la permutation, qui ont permis de construire la 1-voltrice. |
| 63 | 7.1 | 133 | UN(nxnxn) | Notation utilisée pour désigner une voltrice cubique d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 1. C'est une n-voltrice. |
| 64 | 6.2.2 | 115 | 1-voltrice concrète | 1-Voltrice considérée comme un solide indéformable Certaines d'entre-elles ont été réalisées dans un bloc de résine. |
| 65 | 6.6 | 127 | 1-voltrice remarquable | 1-Voltrice possédant des propriétés intéressantes. |
| 66 | 6.6 | 129 | forme canonique | Schéma de 1-voltrice, généralisable à l'ordre n, qui se construit à l'aide de permutations circulaires, et pouvant servir de modèle. |
| 67 | 8.2 | 155 | p-voltrice 1-minimale | p-Voltrice ne contenant strictement pas de (qui n'est supérieure à aucune) 1-voltrice. (Ce sont à l'ordre 3, la 0-voltrice, les 1-voltrices, les 2-voltrices B-indécomposables et certaines de leurs combinaisons). |
| 68 | 8.2 | 155 | p-voltrice minimale | p-Voltrice ne contenant pas d'autre (qui n'est supérieure à aucune autre) p-voltrice. (Ce sont à l'ordre 3, la 0-voltrice, les 1-voltrices et les 2-voltrices B-indécomposables). Elles sont les voltrices de décompositions de toutes les p-voltrices. |

## 13.2.6 LES B-DECOMPOSITIONS de UN(nxn) ET DE q.UN(nxn)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 69 | 4.2.1 | 49 | B-décomposition de UN(nxn) | Somme de n matrices de permutation égale à UN(nxn). Voir B-décomposition (§ 13.2.1 p 352). C'est un complexe 1-transitif. |
| 70 | 4.2.1<br>2.2.3 | 49<br>17 | [x]<br>A,B | Numéro léxicographique d'une B-décomposition de UN(nxn). L'ordre n des matrices est déduit du contexte. Pour n = 3 on utilise A et B. |
| 71 | 4.2.2 | 49 | classe de conjugaison des B-décompositions | Voir ensemble de permutations (§ 13.2.3 N° 34 p 354) et conjugaison (§ 13.2.3 N° 36 p 354). Il s'agit des classes pour cette relation d'équivalence. |
| 72 | 4.2.2 | 49 | équivalence large des B-décompositions | Voir ensemble de permutation (§ 13.2.3 N° 34 p 354) et équivalence large (§ 13.2.3 N° 37 p 354). |
| 73 | 3.3 | 33 | relation entre m.p. | Voir relation (§ 13.2.1 N° 11 p 352). |
| 74 | 3.3 | 35 | relation à x m.p. par membres | Voir relation à x vecteurs par membre (§ 13.2.1 N° 13 p 352). |
| 75 | 3.3 | 35 | relations complémentaires entre m.p. | A l'ordre 4, deux relations, à deux matrices par membre, permettant de reconstruire, avec un membre de chacune d'elles, une décomposition de UN(4x4). En combinant les membres on peut obtenir quatre B-décompositions. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 76 | 4.2.6 | 57 | relation induite entre B-décompositions | Les quatre B-décompositions ci-dessus peuvent se se rassembler en deux paires qui contiennent chacune les huit matrices de permutation proposées par les deux relations complémentaires. C'est l'égalité entre ces paires qui est la relation, entre B-décompositions de UN(nxn), induite par les relations entre matrices de permutation . |
| 77 | 4.2.4 | 53 | r-uple de B-décompositions | Ensemble de r B-décompositions. C'est un complexe r-transitif. |
| 78 | 4.2.5 | 57 | triplet (F,C,H) | Ensembles de trois décompositions de UN(nxn) associées à un carré-latin. Ils correspondent aux trois séries de plans d'une 1-voltrice concrète (de face, de côté, horizontale). |
| 79 | 4.2.7 | 59 | {x} | Numéro lexicographique d'un (n-1)!-uple de B-décompositions de UN(nxn). L'ordre n des matrices est déduite du contexte. |
| 80 | 4.3.2 | 65 | B-décomposition spéciale | B-décomposition de q.UN(nxn) qui ne contient pas les matrices d'une B-décomposition de UN(nxn). (Notion équivalente à la 1-minimalité des p-voltrices). |
| 81 | 4.3.2 | 65 | B-décomposition pure | B-décomposition de q.UN(nxn) qui ne contient les matrices d'aucune B-décomposition de q'.UN(nxn) avec q' < q. |
| 82 | 4.3.2 | 65 | B-décomposition à minima | B-décomposition de q.UN(nxn) dont tous les coefficients sont minimaux (égaux à 1). |
| 83 | 4.3.3.2 | 65 | remplir une case | Dans la construction d'une B-décomposition d'une p-matrice (ou d'une p-voltrice), choix d'un ensemble de matrices de permutation, dont la case correspondante de leur somme est égale à la case de la p-matrice. |
| 84 | 4.3.3.2 | 65 | début de décomposition | Dans une B-décomposition d'une p-matrice, l'ensemble des matrices de permutation de numéro lexicographique inférieur ou égal à (n-1)!. Ce sont celles des permutations du sous-groupe $G_1$, et qui remplissent la case (1,1) |

## 13.2.7 LES B-DECOMPOSITIONS DES p-MATRICES

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 85 | 2.2.2 | 13 | B-décomposition d'une p-matrice | Somme de p matrices de permutation égale à la p-matrice. Voir B-décomposition (§ 13.2.1 N° 6 p 352). |
| 86 | 4.1.2 | 47 | MLTDCP3 | Identification d'un programme de multidécomposition d'une p-matrice. |
| 87 | 4.1.2 | 47 | $N_M$ | Pour une p-matrice d'ordre n, minimum du nombre de matrices de permutation différentes dans ses B-décompositions. Pour UN(nxn) ce nombre est n |
| 88 | 4.1.2 | 47 | $N_n$ | Pour l'ensemble des p-matrices d'ordre n, maximum des nombres $N_M$. Il est au moins égal à n. |
| 89 | 2.2 | 9 | Théorème de VON NEUMANN | "Toute matrice bistochastique P est barycentre de matrices de permutation $M_i$ ; c'est à dire $P = \sum_{i=1}^{k} p_i M_i$ avec $0 < p_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$" Une p-matrice, divisée par p, est une matrice bistochastique. |
| 90 | 5.3.2 | 81 | poids | Le poids d'une matrice de permutation M dans une matrice carrée A de même ordre est le plus grand entier u tel que A ≥ u.M |
| 91 | 5.3.3 | 81 | Coefficient | Coefficient d'une matrice de permutation M dans une décomposition d'une p-matrice : c'est le coefficient au sens connu dans les combinaisons linéaires. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 92 | 5.3.4.1 | *85* | Tableau T | Tableau carré d'ordre n qui, dans chaque case, contient la liste des numéros lexicographiques des matrices de permutation non-nulles dans cette case. Ces listes correspondent aux classes des sous-groupes $G_i$. Il n'est, pratiquement, utilisé que pour n = 4. |
| 93 | 5.4 | *89* | partie de décomposition associée à une case | Somme de matrices de permutation remplissant la case en question. Un début de décomposition est une partie de décomposition associée à la case (1.1). |
| 94 | 5.6.6 | *99* | p-transformation | Transformation qui conserve globalement chaque rangée d'une p-matrice (ou p-voltrice). Elle conserve le caractère p-matriciel. C'est le cas des transpositions et permutations d'indices |

13.2.8 LES B-DECOMPOSITIONS DES p-VOLTRICES

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 95 | 7.1 | *133* | Tableau D | Tableau représentant une B-décomposition de UN(nxnxn) en 1-voltrices. Les lignes contiennent les numéros des matrices de permutation des 1-voltrices et les colonnes correspondent aux plans de la n-voltrice. Les rangées contiennent donc des B-décompositions de UN(nxn). |
| 96 | 7.3 | *137* | type des tableaux D d'ordre 4. | Les tableaux D, pour n = 4, sont de quatre types, suivant la classe des B-décompositions de UN(nxn) qu'on y rencontre. |
| 97 | 8.1.1 | *151* | Matrice R | Matrice, associée à une p-voltrice, indicée en ligne par ses plans et en colonne par les matrices de permutation , et construite avec une décomposition de chaque plan, telle que l'élément $R_{ij}$ est le nombre de fois où la matrice de permutation (j) intervient dans la décomposition du plan i. Elles servent à construire des décompositions, mais ne sont réellement exploitables que pour n = 3 ou 4. |
| 98 | 8.1.1 | *151* | (RA,RB) | Pour n = 3, parties de la matrice R associées à chacune des deux décompositions, A et B, de UN(3x3) |
| 99 | 8.1.3 | *153* | ligne de R et 1-volt. compatibles | Une ligne de R et une 1-voltrice sont dites compatibles si la B-décomposition dans la ligne de R contient la matrice constituant le plan (de la 1-voltrice) indiçant cette ligne de R. |
| 100 | 8.1.3 | *153* | DEICV | Identification d'un programme de multidécomposition en 1-voltrices d'une p-voltrice. Il procède par l'exploration simultanée de deux arborescences, l'une pour construire les lignes de R, l'autre pour choisir des 1-voltrices compatibles avec les lignes construites. |
| 101 | 8.5.2 | *171* | somme possible d'une ligne de RA | Valeur susceptible d'être la somme sur une ligne de RA. |
| 102 | 8.2.3 | *157* | partition d'une B-dcp de UN(nxn). | Partitionnement d'une B-décomposition de p.UN(nxn), en n fois p matrices, pour constituer les n plans d'une p-voltrice. |
| 103 | 8.4.1 | *163* | Assemblage de p B-dcp. de UN(nxn) | Réunion et partitionnement des matrices de p décompositions de UN(nxn) pour construire une p-voltrice. |
| 104 | 8.4.1 | *163* | disposition des m.p. | Dans un assemblage de plusieurs décompositions de UN(nxn), un partitionnement, judicieusement choisi, permet d'obtenir une p-voltrice 1-minimale Ce choix correspond à une disposition des matrices de permutation dans les différents plans. |
| 105 | 8.5.2 | *175* | triplet d'identification | Pour l'identification des 2-voltrices minimales d'ordre 3, un ensemble de trois nombres est utilisé. Le premier est le numéro de la matrice de permutation de la B-décomposition A prise dans le plan 1, le second, le numéro de la matrice de B-décomposition B prise dans le plan 1 et le troisième, le numéro de la permutation des plans qui a permis d'en déduire la 2-voltrice. Il y a cinquante-quatre 2-voltrices minimales d'ordre 3. |

## 13.2.9 COMBINATOIRE

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 106 | 2.2.3 | *15* | carré latin | Matrice carrée, d'ordre n, où les rangées contiennent des permutations d'un ensemble de n objets. Si les n objets sont des entiers non-négatifs, c'est une p-matrice, et chaque objet apparait dans les cases non-nulles d'une matrice de permutation. |
| 107 | 4.2.5 | *55* | méthodes de construction des carrés latins | Les rapports entre les carrés latins d'ordre n et des décompositions de UN(nxn) sont envisageables sous deux aspects qui induisent deux méthodes de construction des carrés latins. |
| 108 | 7.1 | *133* | tableau D | (§ 13.2.2 N° 95 p 358) Certains d'entre eux sont des carrés latins; les autres peuvent être considérés comme une généralisation. |
| 109 | 7.4 | *141* | cube latin | p-voltrice dont tous les plans sont des carrés latins. On les obtient à partir des tableaux D. |
| 110 | 7.5 | *143* | Cube D | p-Voltrice dont les rangées sont des B-décompositions de UN(nxn). Ses plans sont des tableaux D. Certains sont des cubes latins, les autres en sont une généralisation. |
| 111 | 7.5 | *145* | tableau DD | Tableau carré d'ordre n dont chaque rangée est formée de numéros de B-décompositions de UN(nxn) qui permettent de construire un tableau D. Les faces des cubes D sont des tableaux DD. |

## 13.2.10 GRAPHES ET HYPERGRAPHES

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 112 | 4.2.8 | *61* | graphe d'indépendance des permutations | Graphe dont les n! sommets sont les permutations de n objets et dont les arêtes expriment l'indépendance (§ 13.2.3 N° 38, p 354) des permutations. |
| 113 | 4.2.8 | *63* | cliques indépendantes | Deux cliques d'un graphe sont indépendantes si leur intersection est vide. On peut construire le graphe d'indépendance des cliques d'un graphe. |
| 114 | 9.1 | *187* | hypergraphe associé à un tableau | Hypergraphe dont les sommets sont les cases du tableau et les arêtes, ses rangées. |
| 115 | 9.2 | *189* | cycle "7" | Cycles de longueur 7 que contiennent les hypergraphes associés aux voltrices d'ordre supérieur ou égal à 3. Il s'obtient en faisant un mouvement en deux étapes dans un plan, puis en passant dans un plan parallèle et en faisant le mouvement inverse en trois étapes. |

On trouvera dans un ouvrage sur les graphes et hypergraphes les notions classiques suivantes.

| | | |
|---|---|---|
| 6.5 | *125* | Théorème de KONIG HALL |
| 6.5 | *125* | Théorème de PERFECT et MIRSKY |
| 9.1 | *187* | hypergraphe |
| 9.2 | *187* | hypergraphe uniforme de rang n, |
| 9.2 | *189* | hypergraphe dual d'un hypergraphe |
| 9.2 | *189* | matrice d'incidence |
| 9.2 | *189* | graphe biparti |
| 9.2 | *189* | longueur d'un cycle |
| 9.3 | *189* | hypergraphe conforme |
| 9.3 | *189* | 2-section d'un hypergraphe |
| 9.3 | *189* | clique |
| 9.3 | *191* | propriété de HELLY |
| 9.3 | *189* | Théorème de GILMORE |

| | | |
|---|---|---|
| 9.4 | 191 | graphe représentatif des arêtes d'un hypergraphe |
| 9.4 | 191 | triangles spéciaux et normaux |
| 9.4 | 191 | Théorème de BEINECKE |
| 9.5 | 191 | couplage |
| 9.5 | 191 | couplage maximal |
| 9.5 | 193 | déficience d'un couplage |
| 9.5 | 193 | c-couplage |
| 9.5 | 193 | d-recouvrement |
| 9.5 | 193 | d-recouvrement minimum |
| 9.5 | 193 | $\nu(H)$ = cardinalité maximum d'un couplage |
| 9.5 | 193 | $\rho(H)$ = cardinalité minimum d'un 1-recouvrement |
| 9.5 | 193 | Théorème de RAY CHAUDHURI |
| 9.6 | 193 | ensemble transversal |
| 9.6 | 193 | ensemble transversal minimum |
| 9.6 | 193 | $\tau(H)$ = cardinalité minimum des ensembles transversaux |
| 9.6 | 197 | hypergraphe $\tau$-critique |
| 9.7 | 197 | stable |
| 9.7 | 197 | bi-coloration d'un hypergraphe |
| 9.7 | 197 | $\chi(H)$ = nombre chromatique |
| 9.7 | 197 | stable maximum |
| 9.7 | 197 | $\alpha(H)$ = nombre de stablilité |
| 9.7 | 197 | propriété de ERDÖS HAJNAL |
| 9.8 | 197 | ensemble fortement stable |
| 9.8 | 197 | ensemble fortement stable maximal |
| 9.8 | 198 | $\bar{\alpha}(H)$ = cardinalité maximum d'un ensemble fortement stable |
| 9.8 | 198 | n - coloration forte |
| 9.8 | 198 | $\gamma(H)$ = nombre chromatique fort |
| 9.8 | 198 | hypergraphe $\gamma$-parfait |
| 9.10 | 198 | hypergraphe équilibré |
| 9.10 | 199 | Théorème de BERGE-LAS VERGNAS |
| 9.11 | 200 | hypergraphe unimodulaire |
| 9.11 | 200 | bi-coloration équitable |
| 9.12 | 201 | hypergraphe sans cycles impairs |
| 9.13 | 202 | fonction stochastique associée à un hypergraphe |
| 9.13 | 202 | support d'une fonction stochastique |

## 13.3 LEXIQUE

| *N° dans le glossaire* | *parag.* | *page* | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | A | |
| 103 | 8.4.1 | *163* | | assemblage | de p B-décompositions de UN(nxn) |
| 114 | 9.1 | *187* | hypergraphe | associé | à un tableau |
| 93 | 5.4 | *89* | partie de B-décomposition | associée | à une case |
| | | | | B | |
| 8 | 2.2.2 | *13* | | B-décomposable | |
| 6 | 2.2.2 | *13* | | B-décomposition | |
| 9 | 2.2.2 | *13* | | B-indécomposable | |
| 2 | 2.2.2 | *11* | | base | d'un espace vectoriel |
| 48 | 2.2 | *9* | matrice | bistochastique | |
| | | | | C | |
| 66 | 6.6 | *129* | forme | canonique | |
| 106 | 2.2.3 | *15* | | carré | latin |
| 20 | 2.1.3 | *9* | matrice | carrée | |
| 107 | 4.2.5 | *55* | méthode de construction des | carrés | latins |
| 93 | 5.4 | *89* | partie de B-décomposition associée à une | case | |
| 83 | 4.3.3.2 | *65* | remplir une | case | |
| 27 | 3.1.2.1 | *21* | | changer | |
| 45 | 3.1.3.2 | *23* | | classe | à droite de G dans $S_n$ |
| 46 | 3.1.3.2 | *23* | | classe | à gauche de G dans $S_n$ |
| 36 | 4.2.2 | *49* | | classe | de conjugaison des ensembles de permutations |
| 35 | 3.1.3 | *25-49* | | classe | de conjugaison des permutations |
| 71 | 4.2.2 | *49* | | classe | de conjugaison des B-décompositions |
| 113 | 4.2.8 | *63* | | cliques | indépendantes |
| 91 | 5.3.3 | *81* | | coefficient | |
| 96 | 8.1.3 | *137* | ligne de R et 1-voltrice | compatibles | |
| 75 | 3.3 | *35* | relations | complémentaires | entre matrices de permutation |
| 64 | 6.2.2 | *115* | 1-voltrice | concréte | |
| 71 | 4.2.2 | *49* | classe de | conjugaison | des B-décompositions |
| 36 | 4.2.2 | *49* | classe de | conjugaison | des ensembles de permutations |
| 35 | 3.1.3 | *25-49* | classe de | conjugaison | des permutations |
| 107 | 4.2.5 | *55* | méthodes de | construction | des carrés latins |
| 57 | 6.2.3 | *117* | plan de | coté | |
| 62 | 2.3.2 | *17* | | couple | d'identification d'une 1-voltrice d'ordre n |
| 55 | 8.5.2 | *171* | | couvert | |
| 110 | 7.5 | *143* | | cube | D |
| 109 | 7.4 | *141* | | cube | latin |
| 21 | 2.3.1 | *15* | voltrice | cubique | |
| 115 | 9.2 | *189* | | cycle | 7 |
| | | | | D | |
| 110 | 7.5 | *143* | cube | D | |
| 95 | 7.1 | *133* | tableau | D | |
| 96 | 7.3 | *137* | type des tableaux | D | d'ordre 4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 111 | 7.5 | 145 | tableau DD | |
| 4 | 2.2 | 9 | dcp. | |
| 7 | 2.2.1 | 9 | vecteur de | décomposition |
| 84 | 4.3.3.2 | 65 | début | de B-décomposition |
| 5 | 2.2 | 9 | décomp. | |
| 8 | 2.2.2 | 13 | B- décomposable | |
| 3 | 2.2 | 9 | décomposition | |
| 7 | 2.2.1 | 9 | vecteur de décomposition | |
| 6 | 2.2.2 | 13 | B- décomposition | |
| 85 | 2.2.2 | 13 | B- décomposition | d'une p-matrice |
| 82 | 4.3.2 | 65 | B- décomposition | à minima |
| 81 | 4.3.2 | 65 | B- décomposition | pure de q.UN(nxn) |
| 80 | 4.3.2 | 65 | B- décomposition | spéciale de q.UN(nxn) |
| 69 | 4.2.1 | 49 | B- décomposition | de UN(nxn) |
| 103 | 8.4.1 | 163 | assemblage de p B- décompositions | de UN(nxn) |
| 71 | 4.2.2 | 49 | classe de conjugaison des B- décompositions | de UN(nxn) |
| 84 | 3.3.3.2 | 65 | début de B- décomposition | de UN(nxn) |
| 72 | 4.2.2 | 49 | équivalence large des B- décompositions | de UN(nxn) |
| 70 | 4.2.1 | 49 | Numéro lexicographique d'une B- décomposition | de UN(nxn) |
| 93 | 5.4 | 89 | partie de B- décomposition | associée à une case |
| 102 | 8.2.3 | 157 | partition d'une B- décomposition | de UN(nxn) |
| 77 | 4.2.4 | 53 | r-uple de B- décompositions | de UN(nxn) |
| 76 | 4.2.6 | 57 | relation induite entre B- décompositions | |
| 100 | 8.1.3 | 153 | DEICV | |
| 1 | 2.2.2 | 11-27 | dimension | |
| 18 | 2.1.2 | 7 | dimension(s) | d'un tableau |
| 104 | 8.4.1 | 163 | disposition | des matrices de permutation |
| 45 | 3.1.3.2 | 23 | classe à droite | de G dans $S_n$ |
| | | | E | |
| 22 | 2.1.2 | 7 | élément | d'un tableau |
| 34 | 2.1.2 | 43 | ensemble | de permutations |
| 41 | 3.1.2.2 | 21 | ensemble | k-fois-transitif de permutations |
| 42 | 3.1.2.3 | 21 | ensemble | p-transitif de permutations |
| 40 | 3.1.2.1 | 21 | ensemble | transitif de permutations |
| 37 | 4.2.3 | 49 | équivalence large des ensembles | de permutations |
| 36 | 4.2.2 | 49 | classe de conjugaison des ensembles | de permutations |
| 72 | 4.2.2 | 49 | équivalence | large des B-décompositions |
| 37 | 4.2.2 | 49 | équivalence | large des ensembles de permutations |
| | | | F | |
| 58 | 6.2.3 | 117 | plan de face | |
| 66 | 6.6 | 129 | forme | canonique |
| | | | G | |
| 46 | 3.1.3.2 | 23 | classe à gauche | de G dans $S_n$ |
| 112 | 4.2.8 | 61 | graphe | d'indépendance des permutations |
| 39 | 3.1.3 | 21 | groupe | $S_n$ |
| 43 | 3.1.3.2 | 23 | sous- groupe | $G_i$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | H | |
| 56 | 6.2.3 | *117* | plan horizontal | |
| 114 | 9.1 | *187* | hypergraphe | associé à un tableau |
| | | | I | |
| 33 | 4.2.3 | *53* | intervalle I(n,i) | |
| 62 | 2.3.2 | *17* | couple d' identification | d'une 1-voltrice d'ordre n |
| 105 | 8.5.2 | *175* | triplet d' identification | d'une 2-voltrice 1 minimale d'ordre 3 |
| 9 | 2.2.2 | *13* | B- indécomposable | |
| 112 | 4.2.8 | *61* | graphe d' indépendance | des permutations |
| 113 | 4.2.8 | *63* | cliques indépendantes | |
| 38 | 4.2.8 | *61* | permutations indépendantes | |
| 76 | 4.2.6 | *57* | relation induite | entre B-décompositions de UN(nxn) |
| 47 | 2.1.3 | *9* | matrice d' injection | |
| 33 | 4.2.3 | *53* | Intervalle | I(n,i) |
| | | | J | |
| | | | K | |
| 41 | 3.1.2.2 | *21* | ensemble k-fois transitif | de permutations |
| | | | L | |
| 37 | 4.2.2 | *49* | équivalence large | des ensembles de permutations |
| 72 | 4.2.2 | *49* | équivalence large | des B-décompositions |
| 106 | 2.2.3 | *15* | carré latin | |
| 107 | 4.2.5 | *55* | méthodes de constructions des carrés latins | |
| 109 | 7.4 | *141* | cube latin | |
| 32 | 2.2.1 | *11* | numéro lexicographique | d'une permutation |
| 70 | 4.2.1 | *49* | numéro lexicographique | d'une B-décomposition de UN(nxn) |
| 99 | 8.1.3 | *153* | ligne | de R et 1-voltrices compatibles |
| 101 | 8.1.2 | *171* | somme possible d'une ligne | de RA |
| | | | M | |
| 30 | 2.1.3 | *9* | m.p. | |
| 30 | 2.1.3 | *9* | mat. perm. | |
| 52 | 2.2.2 | *13* | p- mat. | |
| 16 | 2.1.2 | *7* | matrice | |
| 48 | 2.2 | *9* | matrice | bistochastique |
| 20 | 2.1.3 | *9* | matrice | carrée |
| 47 | 2.1.3 | *9* | matrice | d'injection |
| 29 | 2.1.3 | *9* | matrice | de permutation |
| 73 | 3.3 | *33* | relation entre matrices | de permutation |
| 104 | 8.4.1 | *163* | disposition des matrices | de permutation |
| 74 | 3.3 | *35* | relation à x matrices | de permutation par membre |
| 75 | 3.3 | *35* | relations complémentaires entre matrices | de permutation |
| 97 | 8.1.1 | *151* | matrice | R |
| 50 | 3.2.1 | *29* | matrice | totalement unimodulaire |
| 53 | 2.2.2 | *13* | 1- matrice | |
| 51 | 2.2.2 | *13* | p- matrice | |
| 85 | 2.2.2 | *13* | B-décomposition d'une p- matrice | |
| 12 | 3.3 | *33* | membre | d'une relation |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 74 | 3.3 | 35 | relation à x matrices de permutation par membre | |
| 13 | 3.3 | 33 | relation à x vecteurs par membre | |
| 107 | 4.2.5 | 55 | méthodes | de construction des carrés latins |
| 82 | 4.3.2 | 65 | B-décomposition à minima | |
| 68 | 8.2 | 155 | p-voltrice minimale | |
| 67 | 8.2 | 155 | p-voltrice 1- minimale | |
| 105 | 8.5.2 | 175 | Triplet d'identification d'une 1 volt. 1- minimale | d'ordre 3 |
| 86 | 4.1.2 | 47 | MLTDCP3 | |
| 10 | 4.1.2 | 47 | multidécomposition | |
| | | | N | |
| 19 | 2.2.1 | 9 | ordre n | |
| 70 | 4.2.1 | 49 | numéro | lexicographique d'une B-décomposition de UN(nxn) |
| 32 | 2.2.1 | 11 | numéro | lexicographique d'une permutation |
| | | | O | |
| 19 | 2.2.1 | 9 | ordre | n |
| 62 | 2.3.2 | 17 | triplet d'identification d'une 1-voltrice d' ordre | n |
| 105 | 8.5.2 | 175 | triplet d'identification d'une 2-volt. 1-min. d' ordre | 3 |
| 96 | 7.5 | 137 | type des tableaux D d' ordre | 4 |
| | | | P | |
| 52 | 2.2.2 | 13 | p-mat. | |
| 51 | 2.2.2 | 13 | p-matrice | |
| 85 | 2.2.2 | 13 | B-décomposition d'une p-matrice | |
| 94 | 5.6.6 | 99 | p-transformation | |
| 42 | 3.1.2.3 | 21 | ensemble p-transitif | de permutation |
| 60 | 2.3.1 | 15 | p-volt. | |
| 59 | 2.3.1 | 15 | p-voltrice | |
| 68 | 8.2 | 155 | p-voltrice | minimale |
| 67 | 8.2 | 155 | p-voltrice | 1-minimale |
| 93 | 5.4 | 89 | partie | de B-décomposition associée à une case |
| 102 | 8.2.3 | 157 | partition | d'une B-décomposition de UN(nxn) |
| 30 | 2.1.3 | 9 | mat. perm. | |
| 26 | 2.1.3 | 9 | permutation | |
| 38 | 4.2.8 | 61 | permutations | indépendantes |
| 35 | 3.1.3 | 25-49 | classe de conjugaison des permutations | |
| 34 | 4.2.1 | 42 | ensemble de permutations | |
| 36 | 4.2.2 | 49 | classe de conjugaison des ensembles de permutations | |
| 37 | 4.2.2 | 49 | équivalence large des ensembles de permutations | |
| 42 | 3.1.2.3 | 21 | ensemble p-transitif de permutations | |
| 41 | 3.1.2.2 | 21 | ensemble k-fois-transitif de permutations | |
| 40 | 3.1.2.1 | 21 | ensemble transitif de permutations | |
| 112 | 4.2.8 | 21 | graphe d'indépendance des permutations | |
| 32 | 2.2.1 | 11 | numéro lexicographique d'une permutation | |
| 28 | 2.2.1 | 9 | vecteur représentatif d'une permutation | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 44 | 3.1.F12 | 28 | produit de deux permutations | |
| 29 | 2.1.3 | 9 | matrice de permutation | |
| 104 | 8.4.1 | 163 | dispositions des matrices de permutation | |
| 73 | 3.3 | 33 | relation entre matrices de permutation | |
| 75 | 3.3 | 35 | relations complémentaires entre mat. de permutation | |
| 74 | 3.3 | 35 | relation à x matrices de permutation | par membre |
| 24 | 2.1.2 | 7 | plan | |
| 57 | 6.2.3 | 117 | plan | de côté |
| 58 | 6.2.3 | 117 | plan | de face |
| 56 | 6.2.3 | 117 | plan | horizontal |
| 90 | 5.3.2 | 81 | poids | |
| 101 | 8.5.2 | 171 | somme possible | d'une ligne de RA |
| 44 | 3.1.F12 | 28 | produit | de deux permutations |
| 81 | 4.3.2 | 65 | B-décomposition pure | de q.UN(nxn) |
| | | | Q | |
| | | | R | |
| 97 | 8.1.1 | 151 | matrice R | |
| 99 | 8.1.3 | 153 | ligne de R | et 1-voltrice compatibles |
| 77 | 4.2.4 | 53 | r | -uple de B-décompositions |
| 101 | 8.5.2 | 171 | somme possible d'une ligne de RA | |
| 23 | 2.1.2 | 7 | rangée | |
| 11 | 3.3 | 33 | relation | |
| 13 | 3.3 | 33 | relation | à x vecteurs par membre |
| 74 | 3.3 | 35 | relation | à x matrices de permutation par membre |
| 75 | 3.3 | 35 | relations | complémentaires entre matrices de permutations |
| 73 | 3.3 | 33 | relation | entre matrices de permutation |
| 76 | 4.2.6 | 57 | relation | induite entre B-décompositions |
| 12 | 3.3 | 33 | membre d'une relation | |
| 65 | 6.6 | 127 | 1-voltrice remarquable | |
| 83 | 4.3.3.2 | 65 | remplir | une case |
| 28 | 2.2.1 | 9 | Vecteur représentatif | d'une permutation |
| | | | S | |
| 80 | 4.3.2 | 65 | B-décomposition spéciale | de q.UN(nxn) |
| 101 | 8.5.2 | 171 | somme | possible d'une ligne de RA |
| 25 | 2.1.2 | 7 | somme | sur |
| 43 | 3.1.3.2 | 23 | sous | groupe $G_i$ |
| 25 | 2.1.2 | 7 | somme sur | |
| | | | T | |
| 92 | 5.3.4.1 | 85 | tableau T | |
| 14 | 2.1.2 | 7 | tableau | |
| 97 | 7.5 | 151 | tableau | D |
| 111 | 7.5 | 145 | tableau | DD |
| 92 | 5.3.4.1 | 85 | tableau | T |
| 18 | 2.1.2 | 7 | dimension(s) d'un tableau | |
| 22 | 2.1.2 | 7 | élément d'un tableau | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 114 | 9.1 | *187* | hypergraphe associé à un tableau | |
| 96 | 7.3 | *137* | type des tableaux | D d'ordre 4 |
| 89 | 2.2 | *9* | théorème | de VON NEUMANN |
| 50 | 3.2.1 | *29* | matrice totalement | unimodulaire |
| 94 | 5.6.6 | *99* | p- transformation | |
| 42 | 3.1.2.1 | *21* | ensemble transitif | de permutations |
| 41 | 3.1.2.2 | *21* | ensemble k-fois- transitif | de permutations |
| 42 | 3.1.2.3 | *21* | ensemble p- transitif | de permutations |
| 105 | 8.5.2 | *175* | triplet | d'identification d'une 2-volt. 1-mini. d'ordre 3 |
| 78 | 4.2.5 | *57* | triplet | (F,C,H) |
| 96 | 7.3 | *137* | type | des tableaux D d'ordre 4 |
| | | | U | |
| 54 | 2.2.3 | *13* | UN(nxn) | |
| 63 | 7.1 | *133* | UN(nxnxn) | |
| 49 | 3.2.1 | *29* | matrice unimodulaire | |
| 50 | 3.2.1 | *29* | matrice totalement unimodulaire | |
| 77 | 4.2.4 | *53* | r- uple | de B-décompositions |
| | | | V | |
| 15 | 2.1.2 | *7* | vecteur | |
| 28 | 2.2.1 | *9* | vecteur | représentatif d'une permutation |
| 7 | 2.2.1 | *9* | vecteur | de décomposition |
| 13 | 3.3 | *33* | relation à x vecteurs | par membre |
| 17 | 2.1.2 | *7* | volt. | |
| 17 | 2.1.2 | *7* | voltrice | |
| 21 | 2.3.1 | *9* | voltrice | cubique |
| 61 | 2.3.2 | *15* | 1- voltrice | |
| 64 | 6.2.2 | *115* | 1- voltrice | concréte |
| 65 | 6.6 | *127* | 1- voltrice | remarquable |
| 62 | 2.3.2 | *17* | Couple d'identification d'une 1- voltrice | d'ordre n |
| 99 | 8.1.3 | *153* | ligne de R et 1- voltrice | compatibles |
| 105 | 8.5.2 | *175* | triplet d'identification d'une 2- voltrice | 1-minimale d'ordre 3 |
| 60 | 2.3.1 | *15* | p- volt. | |
| 59 | 2.3.1 | *15* | p- voltrice | |
| 67 | 8.2 | *155* | p- voltrice | 1-minimale |
| 68 | 8.2 | *155* | p- voltrice | minimale |
| 89 | 2.2 | *9* | théorème de VON NEUMANN | |
| | | | W | |
| | | | X | |
| | | | Y | |
| | | | Z | |


BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE Section de SCIENCES LILLE