

50376
1978
1

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ès SCIENCES PHYSIQUES

par

Jacques LESENNE

Ingénieur H.E.I., Docteur-Ingénieur

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES COMPOSANTES
RELATIVES ET A LEUR EMPLOI POUR L'ETUDE
ANALYTIQUE DU MOTEUR ASYNCHRONE ALIMENTE
PAR DES MONTAGES A REDRESSEURS



0300103459

Soutenue le 30 Juin 1978, devant la Commission d'Examen

MM.	R. BONNEFILLE	Président
	G. SEGUIER	Rapporteur
	C. MAIZIERES	Rapporteur
	C. SOL	Rapporteur
	F. NOTELET	Examineur
	A. WIART	Examineur

AVANT PROPOS

Nos recherches ont été effectuées sous la direction de Monsieur le Professeur G. SEGUIER dans le cadre du Laboratoire "Applications des redresseurs de puissance" de l'Université des Sciences et Techniques de Lille. Après avoir éveillé notre vocation pour l'enseignement et suscité notre goût pour la recherche, Monsieur SEGUIER nous a constamment guidé et encouragé. Il a été pour nous un guide attentif et bienveillant. Nous tenons à lui témoigner notre profonde gratitude.

Nous remercions très vivement Monsieur le Professeur R. BONNE-FILLE d'avoir accepté de présider le Jury auquel nous soumettons ce mémoire et de nous avoir encouragé à présenter notre modeste contribution à ce vaste et délicat domaine des machines électriques où tant de brillants chercheurs nous ont précédé.

Nous exprimons notre profonde gratitude à Monsieur le Professeur C. MAIZIERES qui a bien voulu examiner notre travail. Grâce à lui nous avons toujours trouvé au Service d'Electrotechnique de l'U.E.R. d'I.E.E.A. un excellent accueil et l'aide que nous sollicitons.

Nous sommes heureux que Monsieur C. SOL ait, lui aussi, accepté de juger ce mémoire. Les hautes fonctions qu'il assume à l'E.N.S.E.T. nous permettent d'espérer que notre travail pourra être un peu utile aux futurs enseignants en électrotechnique.

C'est une nouvelle preuve d'amitié que nous donne Monsieur F. NOTELET en participant à ce Jury. Il dirige le Département I.U.T. dans lequel nous exerçons notre enseignement et c'est pour nous un plaisir de le seconder dans cette responsabilité. Il nous a fait profiter de sa longue expérience des machines électriques dans certaines recherches effectuées en commun.

Notre travail n'aurait pas été possible sans les liens étroits unissant notre Laboratoire à la Société JEUMONT-SCHNEIDER. Celle-ci nous a donné accès à tous les relevés expérimentaux qu'elle a effectués sur les divers équipements destinés à faire varier la vitesse du moteur asynchrone qu'elle a réalisés, nous permettant ainsi de vérifier les conclusions auxquelles nous conduisaient nos calculs.

Monsieur A. WIART, Directeur Scientifique de JEUMONT-SCHNEIDER, a suivi notre travail depuis la phase exploratoire où nous mettions largement à contribution le Service Documentation de sa Société. Il a suivi tout le

déroulement de nos recherches, nous faisant bénéficier de ses conseils et de ses encouragements. Nous sommes heureux qu'il soit là au moment où nous exposons les résultats obtenus et nous lui redisons notre profonde gratitude.

Nous remercions tous nos collègues de l'I.U.T. de Béthune et plus particulièrement Monsieur G. RAVALITERA auprès duquel nous avons trouvé une aide très efficace.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude à Madame REMY du Centre Interuniversitaire de Traitement de l'Information ; sans elle, la mise au point de nombreux programmes aurait été particulièrement laborieuse.

Nous ne saurions omettre de remercier très vivement Madame M. CARNEZ, Monsieur P. LEROY, Monsieur J. HOUZE qui ont assuré la réalisation matérielle de ce mémoire.

INTRODUCTION. PRESENTATION DE L'ETUDE.

Le moteur asynchrone est certainement la machine électrique la plus fréquemment utilisée dans l'industrie. Cela tient, surtout s'il s'agit du moteur à cage, à sa grande robustesse, à la facilité avec laquelle on peut le démarrer, à son prix de revient qui à puissance donnée est plus faible que celui de la machine à courant continu ou de la machine synchrone et à la possibilité de l'alimenter directement par le réseau industriel.

LES TROIS METHODES D'ETUDE DU MOTEUR ASYNCHRONE :

De très nombreux travaux ont été consacrés au fonctionnement du moteur asynchrone tant en régime permanent qu'en régime transitoire (démarrage, changement de couplage, court-circuit triphasé, etc...) dans le cas de l'alimentation par le réseau industriel.

Depuis le développement des dispositifs d'électronique de puissance, l'étude des régimes permanents et transitoires de cette machine est de nouveau un sujet de recherche car les grandeurs d'entrée, qui sont non sinusoïdales, sont à l'origine d'anomalies (couple pulsatoire, pointes de courant élevées, etc...). Trois méthodes principales sont utilisées pour de telles études :

- La plus connue utilise le schéma monophasé équivalent du moteur asynchrone. Plus spécialement utilisée pour l'étude du régime permanent sinusoïdal, elle peut être étendue à l'étude du régime permanent d'un moteur asynchrone alimenté par des signaux non sinusoïdaux. Il suffit en effet de décomposer le signal appliqué en série de Fourier et de rechercher la réponse à chaque harmonique. On obtient alors la réponse globale par application du principe de superposition, car toutes les études mathématiques ne peuvent actuellement être réalisées qu'à partir d'un modèle linéaire. Cette méthode a été employée, par exemple, pour la détermination des pertes supplémentaires car elle permet de tenir compte de la variation de certains paramètres avec la fréquence (effet de peau par exemple). Elle n'est malheureusement pas satisfaisante lorsqu'il s'agit d'étudier les oscillations du couple ou les courants statoriques car pour obtenir des résultats pro-

ches de la réalité, il est alors nécessaire de tenir compte d'un grand nombre d'harmoniques et les sommations à réaliser sont alors très complexes.

- Un grand nombre d'auteurs ont eu recours *aux méthodes d'intégration numérique*, du type Runge Kutta par exemple, pour résoudre globalement l'étude du régime permanent ou transitoire d'un moteur asynchrone diversement alimenté. Outre que cette méthode est d'une mise au point délicate, les erreurs inhérentes aux approximations numériques successives ou le temps de calcul prohibitif ne permettent pas de réaliser l'étude globale des dispositifs en fonction des divers paramètres soit caractéristiques de la machine, soit caractéristiques de l'alimentation. Néanmoins, il faut signaler que la méthode numérique, ou ce qui revient au même la simulation analogique, restent les seuls outils dont dispose actuellement le chercheur lorsqu'il doit abandonner le modèle linéaire.

- La troisième méthode consiste à *résoudre analytiquement* le problème considéré. Sous la forme classique, le comportement d'un moteur asynchrone est décrit par un système différentiel d'ordre six à coefficients périodiques. Il ne peut donc être résolu directement. De manière à obtenir un système différentiel plus simple et à coefficients constants, divers auteurs ont proposé des systèmes de composantes relatives. Dès 1929, R.H. PARK a proposé un système de composantes relatives permettant de simplifier considérablement l'étude des machines électriques alternatives, en particulier celle des machines synchrones. Ce type de composantes est très largement employé dans les pays anglo saxons. A la même époque, Y.H. KU présentait un autre système de composantes relatives, proches de celles de C.L. FORTESCUE. Ce système n'a pas connu un développement comparable à celui de R.H. PARK car, à notre avis, l'interprétation physique est moins aisée et il n'apporte pas pour l'étude des machines synchrones de plus grandes simplifications. Mais ainsi que nous allons le montrer, ce système est nettement préférable pour l'étude analytique des régimes transitoires du moteur asynchrone alimenté par des tensions sinusoïdales et pour l'étude du régime permanent du moteur asynchrone alimenté par des convertisseurs statiques.

LES CONVERTISSEURS STATIQUES DE FREQUENCE POUR MOTEUR ASYNCHRONE :

Les progrès de l'Electronique de Puissance ont permis de faire varier la vitesse des moteurs asynchrones dans de larges proportions grâce à la réalisation de convertisseurs de fréquence à étage intermédiaire à courant continu appelés onduleurs non autonomes à commutation forcée.

Certes ces dispositifs ne sont pas les seuls employés et dans un article récent [1] R. CHAUPRADE passe en revue les divers dispositifs actuellement employés ou en cours de développement. On peut, par exemple, rappeler le montage en cascade hyposynchrone qui est l'équivalent statique des montages Scherbius ou Kreamer, mais il faut avoir recours au moteur à rotor bobiné. Le dispositif cycloconvertisseur permet, lui, une conversion directe de fréquence mais il ne donne que des fréquences nettement inférieures à celles du réseau d'alimentation.

Aussi poursuit-on les travaux sur la variation de vitesse des moteurs à cage à l'aide d'onduleurs autonomes à fréquence variable alimentés en continu à partir du réseau industriel par l'intermédiaire d'un montage redresseur. On peut schématiquement diviser les montages proposés en deux familles :

- les onduleurs imposant *la tension* aux bornes de chaque phase du moteur. Cette famille regroupe les redresseurs commutateurs de tension, les hacheurs commutateurs de tension, les onduleurs à modulation de largeur des impulsions (PWM), les onduleurs à ponts décalés ou à couplage polygonal.

- les onduleurs imposant *le courant* dans chacune des phases. Cette famille regroupe les redresseurs commutateurs de courant et les hacheurs commutateurs de courant.

Dans la littérature anglo-saxonne, la première famille est désignée par le sigle V.S.I. (voltage source inverter) et la seconde par C.S.I. (current source inverter). Il ne semble pas, de plus, que se soit dégagée une philosophie générale des montages onduleurs à commutation forcée analogue à celle proposée par G. SEGUIER pour les montages redresseurs [2], mais que chaque type ait été étudié et réalisé en fonction d'un cahier des charges donné.

PRESENTATION DE NOTRE ETUDE ET DE NOTRE APPORT :

Ce mémoire est divisé en deux parties :

- *la première est consacrée à la présentation des composantes relatives de Y.H. KU.* Elle montre comment l'emploi de ces composantes conduit à la simplification de l'étude analytique du moteur asynchrone. Nous mettrons en évidence, pour cette machine, leur supériorité sur celles de R.H. PARK en particulier pour la recherche du régime libre et du schéma équivalent.
- *la seconde partie traite de la machine asynchrone alimentée, en régime permanent, par des signaux issus de convertisseurs statiques.* Après l'étude des signaux usuels, nous examinerons successivement l'alimentation du moteur par des tensions formées de paliers de largeur constante et d'amplitudes différentes, puis par des tensions dites à modulation de largeur d'impulsions, enfin par des créneaux de courants.

Il est évident que, vu le sujet traité, nous ne saurions nous limiter à n'exposer que ce qui constitue notre contribution originale à cette vaste étude. Il nous a paru utile d'insérer nos apports dans un exposé général et de faire ainsi profiter nos collègues, enseignants et chercheurs, de la *synthèse* que nous avons faite des travaux antérieurs. Ce choix explique l'importance de la bibliographie d'une part, la nécessité de rapporter en annexes certains calculs encombrants d'autre part.

Nous avons, en ce qui nous concerne, affiné l'étude des composantes généralisées en soulignant l'importance de la conservation de la puissance ; nous avons perfectionné la formulation des composantes de Y.H. KU et montré que la simplification qu'elles apportent au calcul est indépendante du nombre de phases des deux armatures de la machine asynchrone.

Lors de l'alimentation par un onduleur fournissant des tensions en paliers optimisés, nous avons indiqué la règle générale de génération de tels signaux et montré qu'ils permettent une nouvelle simplification lorsqu'on emploie la transformation de Y.H. KU. Pour les onduleurs à modulation de largeur des pulsations, nous avons indiqué le mode de conduite des calculs à adopter pour arriver le plus rapidement possible à l'expression des courants et du couple. Lors de l'alimentation en courant, nous proposons une méthode très rapide d'obtention des tensions et du couple.

PREMIERE PARTIE

LES COMPOSANTES RELATIVES DE **Y.H KU**

C H A P I T R E I

HISTORIQUE

Il est toujours délicat d'essayer de découvrir celui qui est à l'origine d'une découverte scientifique ou d'une méthode de calcul car elle est souvent le fait d'un certain nombre de chercheurs isolés ou d'équipes travaillant au même moment sur des sujets voisins et on est tenté d'attribuer à ou aux auteurs qui ont effectué les premiers travaux de synthèse la pérennité de la découverte. Les coordonnées symétriques et relatives n'ont pas échappé à cette règle quasi générale.

I - NAISSANCE DE L'IDEE DE COMPOSANTES. LES COMPOSANTES SYMETRIQUES DE C.L. FORTESCUE

L'idée de base de la notion de composantes semble avoir été trouvée vers 1895 par FERRARIS alors qu'il étudiait le moteur monophasé. Il décomposa, en effet, le champ monophasé en deux champs tournant en sens inverse. L'idée de décomposer un ou des vecteurs en une somme de vecteurs était ainsi énoncée pour la première fois en électrotechnique.

Un peu plus tard, E.F.W. ALEXANDER et L.G. STOCKVIS, l'un pour l'étude des compensateurs de phase, l'autre pour la régulation de la tension des générateurs, décomposaient un système de courants déséquilibrés en deux systèmes de vecteurs, systèmes que l'on désigne maintenant par les qualificatifs de direct et inverse. L.G. STOCKVIS [3] montrait en particulier que le système direct produit un champ tournant direct origine d'un couple constant. S'il avait trouvé les éléments essentiels nécessaires à l'établissement d'un système de composantes qui ne réagissent pas les unes sur les autres dans le cas de systèmes de constitution symétrique, il n'avait pas découvert la nécessité d'un nouvel ensemble de vecteurs ne produisant ni champ tournant, ni champ pulsatoire, à savoir ce que l'on appelle de nos jours la composante homopolaire.

C.L. FORTESCUE qui étudiait avec son équipe (R.E. GILMAN, J.F. PETERS, J. SLEPIAN) le problème des circuits déséquilibrés, perçut la généralité de la méthode. Il développa une étude nouvelle et complète des circuits déséquilibrés qui fut publiée en 1918 [4]. C'est lui qui introduisit la notion de composante homopolaire, qui démontra que dans les parties symétriques les courants et les tensions d'un même type de composantes n'ont aucune influence sur les autres et qui montra que les machines présentent des impédances différentes pour chaque type de composantes. Le mémoire de C.L. FORTESCUE fut vulgarisé en France principalement par V. GENKIN, en Grande Bretagne par B. HAGUE et au Japon par S. BEKKU.

Cette méthode donna naissance à un grand nombre de travaux qui s'orientèrent soit vers le calcul des courants de court-circuit avec l'introduction de différents réseaux équivalents suivant les composantes considérées, soit vers la stabilité des systèmes (avec les travaux de C.F. WAGNER et R.D. EVANS), soit vers la prédétermination et la mesure des différentes impédances rencontrées lors du calcul des courants de court-circuit des machines synchrones (avec S. BEKKU, C.F. WAGNER, R.H. PARK, B.L. ROBERTSON, L.A. KILGORE, R.E. DOHERTY et C.A. NICKLE). Les auteurs français ont plus spécialement étudié la détermination des courants de court-circuit dans les réseaux (V. GENKIN, G. DARRIEUS, J. FALLOU), la protection contre ces courants ou ceux nés d'un contact phase-terre. En France, les études théoriques ont été réalisées plus particulièrement par L.G. STOCKVIS, V. GENKIN, J. FALLOU et A. ILLIOVICI.

La synthèse de ces très nombreux études, publiées de 1912 à 1932 a été faite aux U.S.A. par C.F. WAGNER et R.D. EVANS [5] et en France par A. ILLIOVICI [6]. Ces ouvrages ainsi que l'article de B. HAGUE [7] comportent une importante bibliographie.

II - AUTRES COMPOSANTES SYMETRIQUES

Si la méthode des composantes de C.L. FORTESCUE est encore de nos jours la plus largement employée et enseignée, elle n'est pas la seule à permettre l'étude des systèmes déséquilibrés. De nombreux autres systèmes de composantes symétriques ont été mis au point, par E. CLARKE [8][9], C. CONCORDIA [10], E.W. KIMBARK [11], etc... Dans l'importante discussion qui

suivit ce dernier article, de nombreux auteurs, en soulignant que les composantes symétriques pouvaient être représentées par des transformations linéaires, montrent la puissance du calcul matriciel appliqué à l'électrotechnique. Des chercheurs tels que L.A. PIPES [12][13] et G. KRON [14] ont surtout essayé de dégager à quelles conditions les transformations linéaires pouvaient être intéressantes (problème de l'invariance de la puissance instantanée et complexe, problème des impédances mutuelles réciproques).

C'est à partir de certaines de ces considérations que A. BOYAJIAN [15] introduisit ses composantes symétriques peu différentes de celles de E.W. KIMBARK mais qui permettaient de garder invariante la puissance, et que F.H. RYAMOND [16][17] définit une transformation très intéressante gardant à la fois invariante la puissance complexe et la puissance instantanée. Depuis la fin des années 40, un certain nombre de composantes ont été proposées, permettant de simplifier tel ou tel cas particulier. Nous nous contenterons de signaler dans cet historique la transformation de C. SZENDY [18] qui par sa forme générale permet, en fixant des valeurs particulières aux différents paramètres de retrouver la totalité des composantes symétriques proposées par les différents auteurs.

Depuis, les ouvrages de C.F. WAGNER et R.D. EVANS et celui de A. ILLIOVICI, deux livres traitant des composantes symétriques ont été publiés par S.A. STJGANT [19][20] ; N. DHARMA RAO et N.H. RAMACHANDRA [21] ont étudié un certain nombre de composantes symétriques vues sous l'aspect transformation linéaire. En France, G. NASSE [22][23] a publié des articles dans lesquels il met en relief l'application des espaces vectoriels à l'électrotechnique et où il donne comme exemples d'illustration les composantes symétriques de C.L. FORTESCUE et de F.H. RAYMOND.

III - LES COMPOSANTES RELATIVES

On peut faire remonter l'origine des composantes relatives à la théorie des deux réactions de A. BLONDEL [24][25] et aux travaux de L. DREYFUS [26][27] qui dans ses calculs considérait une machine diphasée avec amortisseur transversal et pôles saillants (ce qui correspond à la machine idéalisée de R.H. PARK). Ces travaux étendus par ceux de R.E. DOHERTY et C.A. NICKLE [28] ont abouti simultanément à la théorie des deux axes de R.H. PARK [29][30][31] et à la méthode de Y.H. KU [32].

La méthode de R.H. PARK qui à l'origine avait été employée pour l'étude de la machine à pôles saillants à nombre quelconque de circuits rotoriques, fut appliquée au cas des machines débitant sur charges inductives et capacitatives (S.B. CRARY), au débit sur des charges quelconques (C. CONCORDIA), puis à l'étude de la synchronisation et à celle des oscillations transitoires et permanentes. Y.H. KU [33] appliqua cette méthode aux machines synchrones multiphasées et aux machines d'induction polyphasées [34]. L'application de la théorie généralisée des deux axes à d'autres types de moteurs fut faite par E.M. SABBAGH [35] et B. ADKINS [36][37] réalisa l'étude complète de la théorie des générateurs synchrones en régime transitoire. Cette théorie des deux axes, souvent couplée avec l'emploi du système per-unit [38] a amené certains auteurs tels C.V. JONES [39] et B. ADKINS [40] à proposer une théorie générale des machines électriques. Cette manière d'aborder les machines électriques commence à être employée en France [41] alors qu'elle l'est depuis un certain nombre d'années dans les pays anglo-saxons [42].

Les composantes relatives de Y.H. KU ont eu pour but de faciliter l'étude et l'analyse des régimes transitoires des machines alternatives. Cet auteur les introduisit en appliquant le théorème du retard d'Heaviside à l'analyse transitoire des machines asynchrones. Il publia par la suite une très intéressante monographie [43] dans laquelle il étudiait, par la théorie des champs tournants, les machines synchrones et les machines d'induction dans le cas général, y incluant, par exemple, les lignes à constantes réparties et l'études des groupements de machines synchrones et asynchrones.

Depuis ces travaux fondamentaux sur les composantes relatives, peu de réelles découvertes ont été faites. Nous pouvons signaler le livre de T.J. TAKEUCHI [44] dans lequel cet auteur introduit la théorie des poly-axes. Assez semblable à celle de Y.H. KU, elle permet la mise en équations et la résolution sous forme opérationnelle de la plupart des régimes transitoires et permanents survenant aux machines de construction symétrique ou dissymétrique. Cet auteur a étendu sa théorie à l'emploi de dispositifs électroniques d'alimentation des machines électriques [45]. Malheureusement, il n'est pas facile de revenir aux originaux, ce qui limite l'emploi de cette méthode.

IV - L'APPORT DE G. KRON

On ne peut ignorer lorsque l'on étudie les composantes symétriques

et les composantes relatives, l'immense contribution de G. KRON à l'analyse des réseaux et des machines électriques [46][47][48]. Par l'emploi systématique des notations tensorielles, des règles de calcul tensoriel et d'une machine synthétique, il obtient une équation tensorielle valable pour tous les types de machines électriques. L'introduction du tenseur de transformation permet alors de déterminer le tenseur de telle machine particulière. Si cette façon de procéder n'est pas nécessaire dans bien des cas simples, l'étude des états de fonctionnement à vitesse variable (oscillations pendulaires de couplage, synchronisation automatique, etc...) nécessite des métriques riemaniennes et les symboles de Christoffel correspondants.

La méthode de G. KRON ne présente pas d'avantages essentiels pour l'étude des composantes symétriques ; mais des articles ultérieurs de G. KRON [49][50] établissant les équations fondamentales des réseaux stationnaires relatifs à des systèmes d'axes de référence tournant uniformément ont montré que les composantes de R.H. PARK et de Y.H. KU appartiennent toutes deux au même système d'axes de référence tournant, c'est-à-dire qu'elles ne sont que deux formes de la même solution du point de vue de l'analyse tensorielle. (une introduction à la méthode de G. KRON est donnée, par exemple, dans l'ouvrage de F. DACOS [51] ou dans celui de M. DENIS PAPIN et A. KAUFMANN [52]).

Depuis, si les travaux de G. KRON ont été poursuivis par W.J. GIBBS [53], J.W. LYNN, U.A. VON DER EMBSE, aucune méthode réellement nouvelle n'a été proposée.

Les impédances Z intervenant dans ces relations sont soit des impédances complexes de la forme $R + iX$, soit des impédances opérationnelles de la forme $R + X(p)$. Cela n'affecte pas la généralité de l'étude.

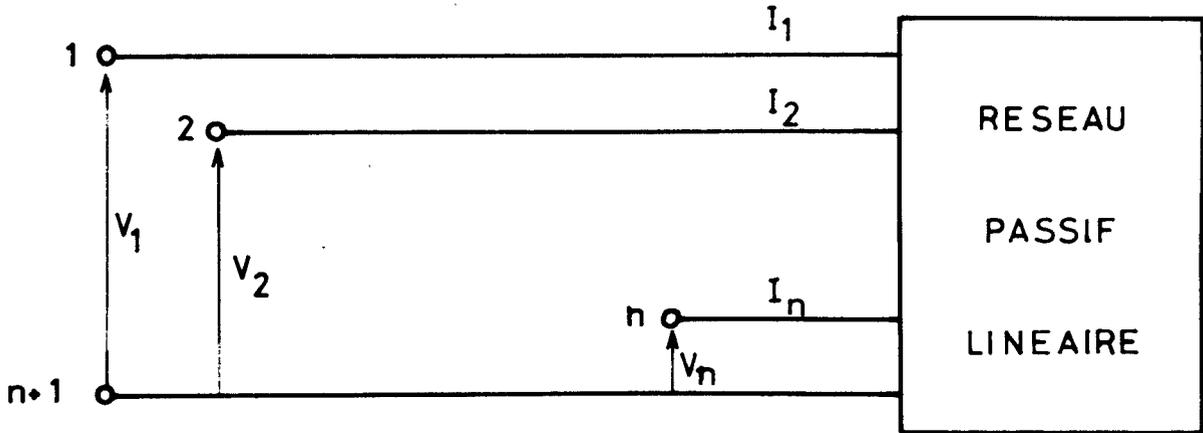


FIGURE 1

Dans un espace vectoriel ϵ_n à n dimensions, ce système d'équations représente la transformation linéaire qui au vecteur $[I]$ de composantes (I_1, I_2, \dots, I_n) fait correspondre le vecteur $[V]$ de composantes (V_1, V_2, \dots, V_n) .

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ Z_{n1} & \dots & Z_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_n \end{pmatrix}$$

L'équation matricielle régissant le réseau considéré est alors :

$$[V] = [Z][I], \quad (1)$$

expression dans laquelle Z est une matrice carrée d'ordre n , possédant n^2 termes a priori tous distincts notés Z_{ij} .

- Parmi les réseaux rencontrés en électrotechnique, deux sont d'un type particulièrement intéressant.

a) les réseaux stationnaires réciproques

Pour de tels réseaux, les impédances mutuelles satisfont à la

condition de réciprocité :

$$Z_{ij} = Z_{ji} ;$$

La matrice $[Z]$ est alors telle que :

$$[Z] = [Z]_t$$

Il ne subsiste alors que $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients distincts.

Pour un système triphasé, par exemple, si les impédances propres à chacune des phases sont égales et si toutes les impédances mutuelles ont même valeur, la matrice impédance se présente sous la forme :

$$[Z] = \begin{vmatrix} Z_L & Z_M & Z_M \\ Z_M & Z_L & Z_M \\ Z_M & Z_M & Z_L \end{vmatrix}$$

b) les réseaux cycliques

Un réseau de structure polyphasé symétrique est caractérisé par son invariance vis à vis des permutations circulaires des tensions appliquées à ses bornes. Analytiquement, cette propriété se traduit par l'identité du système d'équations lorsque l'on permute circulairement dans le même ordre les lignes et les colonnes. Pour de tels réseaux, les coefficients Z_{ij} de la matrice $[Z]$ vérifient :

$$Z_{ij} = Z_{i+1, j+1}$$

La matrice $[Z]$ d'un tel réseau est dite circulante ou cyclique. Dans le cas d'un réseau triphasé, une telle matrice impédance présentera la forme suivante :

$$[Z] = \begin{vmatrix} Z_A & Z_B & Z_C \\ Z_C & Z_A & Z_B \\ Z_B & Z_C & Z_A \end{vmatrix}$$

2.1. But

Dans de nombreux cas, la *résolution analytique* de l'équation $[V] = [Z][I]$ est difficile, même dans le cas de réseaux à coefficients constants, et cette résolution devient impossible si le réseau est à coefficients non constants (cas de machines électriques tournantes). Il est donc normal de se demander si des *changements de variables appropriés* ne permettent pas d'obtenir une expression plus simple, telle la forme de Jordan ou mieux la forme diagonale, de la matrice impédance.

Les transformées de (V_1, V_2, \dots, V_n) seront appelées les composantes (symétriques ou relatives suivant le cas) des tensions réelles, de même les transformées de (I_1, I_2, \dots, I_n) seront les composantes des courants réels.

2.2. Emploi de matrices de transformation

Considérons de nouveau le cas du réseau passif linéaire et considérons deux matrices $[A]$ et $[B]$, non singulières, transformant respectivement le vecteur $[V]$ en un vecteur des composantes de tension $[V_c]$ et le vecteur $[I]$ en un vecteur des composantes de courant $[I_c]$, tels que :

$$[V] = [A][V_c] \quad \text{et} \quad [I] = [B][I_c]$$

En reportant dans l'équation (1), on obtient :

$$[A][V_c] = [Z][B][I_c]$$

$$[V_c] = [A]^{-1} [Z][B][I_c]$$

soit $[V_c] = [Z_c][I_c]$ avec $[Z_c] = [A]^{-1} [Z][B]$.

Ces changements de variables ne présentent d'intérêt que dans la mesure où $[Z_c]$ est d'une expression bien moins complexe que $[Z]$ et sous réserve que l'on sache déterminer les matrices $[A]$ et $[B]$.

L.A. PIPES [13] a montré comment à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes on peut diagonaliser $[Z]$ et obtenir les matrices $[A]$ et $[B]$. Généralement, les matrices ainsi obtenues ont des termes qui dépendent des coefficients Z_{ij} de la matrice $[Z]$ du départ.

Une autre méthode, sur laquelle nous reviendrons, consiste à rechercher une matrice $[Z_c]$ semblable à $[Z]$, c'est-à-dire telle que :

$$[Z_c] = [R]^{-1} [Z] [R]$$

Pour cela, il est nécessaire de rechercher les valeurs propres λ_i de la matrice $[Z]$ en résolvant l'équation caractéristique de $\{[Z] - \lambda[1]\} = [0]$ puis les vecteurs propres $[X_i]$ associés à chaque λ_i et définis par $[Z][X_i] = \lambda[X_i]$.

Les théorèmes généraux du calcul matriciel nous indiquent qu'une matrice carrée d'ordre $n \times n$ n'est diagonalisable que si tous ses vecteurs propres sont linéairement indépendants. S'il n'en est pas ainsi, on peut toujours réduire la matrice $[Z]$ à une forme triangulaire, c'est-à-dire à une matrice dont tous les éléments situés en dessous de la diagonale principale sont nuls, ou à une forme de Jordan, c'est-à-dire à une matrice ne possédant que des termes sur la diagonale principale et éventuellement des 1 sur la diagonale immédiatement supérieure. Dans ces deux cas, le problème de la résolution analytique de :

$$[V_c] = [Z_c][I_c]$$

est néanmoins simplifié.

2.3. Conditions que doivent remplir les matrices de transformation

Que l'on essaie de simplifier la résolution de $[V] = [Z][I]$ par l'emploi de deux matrices de transformation ou par la recherche de la matrice semblable à $[Z]$, il est nécessaire d'un point de vue physique :

- que $[Z_c]$ soit réalisable (il faut par exemple dans l'étude des réseaux que les mutuelles de la matrice impédance transformée restent égales),
- que la ou les transformations laissent la puissance complexe ou instantanée invariante.

Ce problème délicat a fait l'objet d'un grand nombre de publications |47||48||39||58||59||60||61||62||63||64||65||66||67||68|.

a) Invariante de la puissance complexe

La puissance complexe dans le réseau de la figure est donnée par :

$$P_c = V_1 J_1^* + V_2 J_2^* + \dots + V_n J_n^*$$

Cette quantité est le produit scalaire, sur C , du vecteur $|V|$ et du vecteur $|I|$.

$$P_c = [V]_t [I]^*$$

Considérons l'effet de transformations sur l'invariance de la puissance complexe :

. *Emploi de deux transformations*

$$[V] = [A][V_c] \quad \text{et} \quad [I] = [B][I_c]$$

$$P_c = \{ [A][V_c] \}_t \{ [B][I_c] \}^*$$

$$P_c = [V_c]_t [A]_t [B]^* [I_c]^*$$

Pour que la puissance reste invariante, il faut que les deux formes bilinéaires :

$$P_c = [V]_t [I]^* \quad \text{et} \quad P_c = [V_c]_t [I_c]^*$$

soient égales, c'est-à-dire que les matrices $[A]$ et $[B]$ doivent vérifier :

$$[A]_t [B]^* = [1]$$

. *Emploi d'une seule transformation*

$$[V] = [R][V_c] \quad \text{et} \quad [I] = [R][I_c]$$

$$P_c = \{ [R][V_c] \}_t \{ [R][I_c] \}^*$$

$$P_c = [V_c]_t [R]_t [R]^* [I_c]^*$$

Pour que la puissance complexe reste invariante, il faut donc que :

$$[R]_t [R]^* = [1]$$

c'est-à-dire que la matrice $[R]$ soit *unitaire*

NOTE

On dit qu'une transformation garde pseudo-invariante la puissance si $[V]_t [I]^* = q [V_c]_t [I_c]^*$. Notons dès à présent que les différentes transformations de composantes symétriques ou relatives ne conservent pas toutes la puissance invariante ou pseudo-invariante.

b) *Invariante de la puissance instantanée*

La puissance instantanée dans le réseau de la figure 1 est donnée par :

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + \dots + v_n i_n$$

Cette quantité est le produit scalaire, sur \mathbb{R} , du vecteur $[v] = [v_1, v_2, \dots, v_n]_t$ et du vecteur $[i] = [i_1, i_2, \dots, i_n]_t$.

$$p = [v]_t [i]$$

Considérons l'effet de transformations sur l'invariance de la puissance instantanée :

. *Emploi de deux transformations*

$$[v] = [R] [v_c] \quad \text{et} \quad [i] = [R] [i_c]$$

$$p = \{ [R] [v_c] \}_t \{ [R] [i_c] \}$$

$$p = [v_c]_t [R]_t [R] [i_c]$$

Pour que la puissance instantanée reste invariante, il faut donc que :

$$[R]_t [R] = [1]$$

c'est-à-dire que la matrice $[R]$ soit *orthogonale*.

NOTE

F.H. RAYMOND s'est attaché [17] à rechercher une transformation qui laisse invariante à la fois la puissance complexe et la puissance instantanée, ce qui l'a amené à proposer les composantes dites quasi-symétriques. Cette étude peut d'ailleurs être appliquée de la même manière aux composantes relatives et on peut obtenir des composantes que l'on pourrait appeler quasi-relatives.

c) *"Réalisisabilité" des réseaux transformés*

Par "réalisisabilité" d'un réseau transformé on entend la possibilité de le concevoir à partir d'éléments passifs (résistance, capacité, self).

H. EDELMANN [69] | 70 | et A. CALVAER [71] | 72 | ont montré qu'il fallait que :

. La partie hermitique de la matrice des impédances ou des admittances

soit définie positive, c'est-à-dire que ces matrices correspondent à des réseaux passifs.

. La matrice des impédances ou des admittances soit symétrique par rapport à la diagonale principale.

La première condition est réalisée avec l'utilisation de transformations assurant l'invariance de la puissance. Pour que la seconde condition soit remplie, il faut, dans le cas d'une seule matrice de transformation, que celle-ci soit orthogonale, la matrice unitaire ne gardant pas la symétrie.

C H A P I T R E I I I

DES COMPOSANTES DE C.L. FORTESCUE AUX COMPOSANTES GENERALISEES

Nous allons d'abord montrer ici comment, à partir des propriétés de la matrice de permutation $[P]$, on peut retrouver la matrice de la transformation de C.L. FORTESCUE classique d'ordre n . Celle-ci n'est que la matrice de passage permettant d'obtenir une matrice diagonale semblable à la matrice circulante d'origine caractérisant un réseau polyphasé cyclique.

Nous rappellerons ensuite dans le cas général, puis en triphasé, la forme normée de la matrice de la transformation de C.L. FORTESCUE.

Enfin, après avoir examiné le cas où le réseau cyclique devient de plus stationnaire réciproque, nous montrerons, en triphasé, comment on peut déterminer la matrice d'une transformation généralisée permettant de retrouver les nombreuses composantes symétriques et relatives proposées dans la littérature technique depuis soixante ans.

I - DIAGONALISATION D'UNE MATRICE CIRCULANTE. COMPOSANTES DE C.L. FORTESCUE

Dans une matrice circulante, que nous supposerons d'ordre n , les n^2 coefficients Z_{ij} ne sont pas tous distincts [73] ; seuls n éléments au plus sont différents. Elle s'écrit :

$$[Z] = \begin{pmatrix} Z_A & Z_B & Z_C & \dots\dots\dots & Z_N \\ Z_N & Z_A & Z_B & \dots\dots\dots & Z_M \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ Z_B & Z_C & Z_D & \dots\dots\dots & Z_A \end{pmatrix}$$

Considérons la *matrice de permutation* $[P]$ définie par :

$$[P] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est aisé de montrer que la matrice $[Z]$ peut alors s'écrire :

$$[Z] = z_A [1] + z_B [P] + z_C [P]^2 + \dots + z_N [P]^{n-1}$$

autrement dit $[Z]$ s'exprime à l'aide d'un polynôme matriciel de degré $(n-1)$ en $[P]$.

Les valeurs propres de $[P]$ sont données par l'équation :

$$[P][X] = \lambda[X]$$

où $[X]$ est un vecteur colonne d'ordre n de composantes x_i . Cette équation matricielle conduit à :

$$\begin{aligned} x_2 &= \lambda x_1 \\ x_3 &= \lambda x_2 \\ &\dots \\ &\dots \\ x_n &= \lambda x_{n-1} \\ x_1 &= \lambda x_n \end{aligned}$$

C'est-à-dire à :

$$x_1 = \lambda x_n = \lambda(\lambda x_{n-1}) = \dots = \lambda^{n-1} x_2 = \lambda^n x_1$$

Puisque x_1 est différent de zéro (sinon tous les x_i seraient nuls ce qui constituerait une solution triviale évidente sans intérêt de l'équation $[P][X] = \lambda[X]$), les valeurs propres de la matrice $[P]$ sont donc données par

les solutions de l'équation de degré n :

$$\lambda^n - 1 = 0$$

qui admet n racines distinctes sur \mathbb{C}

$$\lambda_K = e^{\frac{i2\pi}{n} K} = a^K \quad \text{avec} \quad K = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

en posant
$$a = e^{\frac{i2\pi}{n}} .$$

Les composantes des vecteurs propres de $[P]$ associés à chaque valeur propre λ_i sont données par

$$x_2 = \lambda_i x_1$$

$$x_3 = \lambda_i x_2$$

.....

$$x_1 = \lambda_i x_n$$

Ces composantes étant définies à une constante près, si l'on choisit par exemple $x_1 = 1$, on obtient alors $x_2 = \lambda_i$, $x_3 = \lambda_i^2$, ..., $x_n = \lambda_i^{n-1}$. De ce fait, le vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_i est donc :

$$[X_i] = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix}$$

Si l'on range les valeurs propres dans l'ordre $1, a^{n-1}, a^{n-2}, \dots, a$ on obtient une *matrice de passage* :

$$Z_A + (n-1) Z_B$$

et une racine d'ordre (n-1) :

$$Z_A - Z_B$$

Il est possible de vérifier que les n vecteurs propres définis précédemment restent linéairement indépendants les uns des autres, qu'ils constituent donc une base et que la matrice de C.L. FORTESCUE, modifiée ou non pour garder l'invariance de la puissance complexe, peut être encore utilisée pour diagonaliser $[Z]$ mais ce n'est plus la seule.

II - VECTEURS PROPRES DE LA MATRICE IMPEDANCE D'UN RESEAU TRIPHASE

Lorsque le réseau triphasé est *cyclique* tous les vecteurs propres déterminant la matrice de la transformation de C.L. FORTESCUE sont égaux, à une constante près, à :

$$[X_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [X_2] = \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} \quad [X_3] = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}$$

Lorsque les termes Z_B et Z_C , traduisant le couplage entre les différentes phases, sont de plus égaux l'équation caractéristique de la matrice $[Z]$ admet pour valeurs propres :

$$\mu_1 = Z_A + 2Z_B$$

$$\mu_2 = \mu_3 = Z_A - Z_B$$

et les vecteurs propres $[X'_1]$, $[X'_2]$ et $[X'_3]$ associés aux valeurs propres μ_1 , μ_2 , μ_3 sont de la forme :

$$[X'_1] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \quad [X'_2] = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ -\alpha_2 - \beta_2 \end{bmatrix} \quad [X'_3] = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ -\alpha_3 - \beta_3 \end{bmatrix}$$

sous réserve que $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$ soit différent de $\frac{\beta_2}{\beta_3}$ pour que la matrice de passage n'ait pas un déterminant nul, donc qu'elle soit inversible.

Les matrices de passage des composantes symétriques de CLARKE [9], KIMBARK [11], BOYAJIAN [15], HWANG [78][79], celles définissant les composantes relatives de PARK [30] ou de KU [32] sont effectivement de la forme :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 - \beta_2 & -\alpha_3 - \beta_3 \end{bmatrix}$$

avec $\frac{\alpha_2}{\alpha_3} \neq \frac{\beta_2}{\beta_3}$

III - COMPOSANTES GENERALISEES

3.1. Considérations préliminaires

Soit deux vecteurs $[V_1]$ et $[V_2]$ de l'espace à trois dimensions, définis sur le corps des complexes, orthogonaux entre eux au sens hermitien, de norme égale à l'unité. Nous allons montrer que le vecteur $[V_3]$, défini par :

$$[V_3] = [\bar{V}_1] \times [\bar{V}_2],$$

où $[\bar{V}]$ désigne le vecteur dont les composantes sont les conjuguées de celles de $[V]$, et \times le produit vectoriel de deux vecteurs, est orthogonal au sens hermitien à $[V_1]$ et $[V_2]$ et que sa norme est égale à l'unité.

Si x, y, z désignent les composantes de $[V_1]$, x', y', z' celles de $[V_2]$, les composantes l, m, n du vecteur $[V_3]$ ont pour expressions :

$$\begin{aligned}
 l &= \overline{yz'} - y'z \\
 m &= \overline{zx'} - z'x \\
 n &= \overline{xy'} - x'y
 \end{aligned}$$

le produit scalaire, au sens hermitien, de $[V_1]$ et de $[V_3]$ noté $\langle [V_1], [V_3] \rangle$ a pour expression :

$$\begin{aligned}
 \langle [V_1], [V_3] \rangle &= \overline{x}l + \overline{y}m + \overline{z}n \\
 &= x(\overline{yz'} - y'z) + y(\overline{zx'} - z'x) + z(\overline{xy'} - x'y) \\
 \langle [V_1], [V_3] \rangle &= 0
 \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
 \langle [V_2], [V_3] \rangle &= \overline{x'}l + \overline{y'}m + \overline{z'}n \\
 &= x'(\overline{yz'} - y'z) + y'(\overline{zx'} - z'x) + z'(\overline{xy'} - x'y) \\
 \langle [V_2], [V_3] \rangle &= 0
 \end{aligned}$$

le vecteur $[V_3]$ est donc orthogonal, au sens hermitien, à $[V_1]$ et à $[V_2]$.

De plus, puisque $||[V_1]|| = ||[V_2]|| = 1$ et que $\langle [V_1], [V_2] \rangle = 0$, le système $\{[V_1], [V_2], [V_3]\}$ détermine une base arthonormée de l'espace à trois dimensions. En effet, l'identité de LAGRANGE :

$$\begin{aligned}
 &(\overline{yz'} - \overline{zy'}) (\overline{yz'} - \overline{zy'}) + (\overline{zx'} - \overline{xz'}) (\overline{zx'} - \overline{xz'}) \\
 &+ (\overline{xy'} - \overline{yx'}) (\overline{x\bar{y}'} - \overline{y\bar{x}'}) + (\overline{xx'} + \overline{yy'} + \overline{zz'}) (\overline{xx'} + \overline{yy'} + \overline{zz'}) \\
 &= (\overline{xx} + \overline{yy} + \overline{zz}) (\overline{x'x'} + \overline{y'y'} + \overline{z'z'})
 \end{aligned}$$

peut s'écrire :

$$||[V_3]||^2 + \langle [V_1], [V_2] \rangle \langle [V_2], [V_1] \rangle = ||[V_1]||^2 ||[V_2]||^2$$

Il en résulte bien :

$$||[V_3]|| = 1$$

3.2. Composantes généralisées en triphasé : |80|

Le choix des vecteurs $[V_1]$ et $[V_2]$ est arbitraire, sous réserve

qu'ils soient orthogonaux au sens hermitien et de norme égale à l'unité. Nous choisirons [68] :

$$[V_1] = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} ; [V_2] = \frac{e^{i\theta'}}{\sqrt{2}} \cos \phi \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{e^{i\theta''}}{\sqrt{6}} \sin \phi \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$$

Le vecteur $[V_3]$ a alors pour expression :

$$[V_3] = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} -\frac{3}{\sqrt{6}} \sin \phi e^{-i\theta''} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \phi e^{-i\theta'} \\ \frac{3}{\sqrt{6}} \sin \phi e^{-i\theta''} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \phi e^{-i\theta'} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \cos \phi e^{-i\theta'} \end{vmatrix}$$

et puisque l'on ne change pas les propriétés de ce vecteur en multipliant chacune de ses composantes par un même nombre complexe $e^{-i\theta''}$ de module égal à l'unité, la forme la plus générale du vecteur $[V_3]$ est alors :

$$[V_3] = \frac{e^{-i(\theta + \theta''')}}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} -\frac{3}{\sqrt{6}} \sin \phi e^{-i\theta''} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \phi e^{-i\theta'} \\ \frac{3}{\sqrt{6}} \sin \phi e^{-i\theta''} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \phi e^{-i\theta'} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \cos \phi e^{-i\theta'} \end{vmatrix}$$

Ce vecteur est bien de la forme $\begin{vmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ -\alpha_3 - \beta_3 \end{vmatrix}$ que doit présenter le troisième vecteur

propre relatif à la valeur propre μ_3 .

La matrice des composantes ainsi généralisées s'écrit donc :

$$\begin{vmatrix} \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{3}} & \frac{e^{i\theta'}}{\sqrt{2}} \cos \phi + \frac{e^{i\theta''}}{\sqrt{6}} \sin \phi & \frac{e^{-i(\theta + \theta''')}}{\sqrt{3}} \left(\frac{e^{-i\theta'}}{\sqrt{2}} \cos \phi - \frac{3}{\sqrt{6}} e^{-i\theta''} \sin \phi \right) \\ \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{3}} & \frac{e^{i\theta'}}{\sqrt{2}} \cos \phi + \frac{e^{i\theta''}}{\sqrt{6}} \sin \phi & \frac{e^{-i(\theta + \theta''')}}{\sqrt{3}} \left(\frac{e^{-i\theta'}}{\sqrt{2}} \cos \phi + \frac{3}{\sqrt{6}} e^{-i\theta''} \sin \phi \right) \\ \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} e^{i\theta''} \sin \phi & \frac{e^{-i(\theta + \theta''')}}{\sqrt{3}} \left(-\frac{2}{\sqrt{2}} e^{-i\theta'} \cos \phi \right) \end{vmatrix}$$

Cette matrice introduit cinq paramètres θ , θ' , θ'' , θ''' , et ϕ . Cette forme de matrice généralisée est donc semblable à celle de SZENDY |18| dans laquelle on avait généralisé le vecteur propre intervenant dans la première colonne.

IV - PASSAGE AUX COMPOSANTES USUELLES

De nombreuses transformations ont été proposées pour passer des variables réelles à leurs composantes. On peut les décomposer en deux grandes familles.

. Les composantes symétriques pour lesquelles les matrices de passage sont à coefficients constants, réels ou complexes.

. Les composantes relatives pour lesquelles les matrices de transformation introduisent des coefficients, réels ou complexes fonctions du temps.

4.1. Composantes symétriques

Ainsi que nous l'avons précédemment rappelé les composantes symétriques peuvent elles mêmes se diviser en deux catégories :

. *Celles utilisant une transformation identique pour les courants ou les tensions :*

Certaines ont été d'abord proposées sous une forme ne conservant pas invariante la puissance complexe ou instantanée mais il est possible de les modifier de manière à rendre soit unitaire, soit orthogonale la matrice de passage. On a vu comment modifier la matrice de la transformation de C.L. FORTESCUE ; de même C. CONCORDIA |10| a modifié les composantes proposées par E. CLARKE |9|. Citons encore les composantes, soit proposées directement par leurs auteurs sous la forme donnant l'invariance de la puissance, soit modifiées de façon à l'obtenir : les composantes du type PPN (positive plus négative) et PMN (positive moins négative) |8|, celles de F.H. RAYMOND |17| (du type + et de type -), celles de B.L. COLEMAN |76|, de H.H. HWANG |74|, de B.I. GURURAJ |78|, et de M. POLOUJADOFF et Th. BARTON |81|.

. *Celles utilisant deux transformations distinctes, une pour les courants, une pour les tensions.*

Les composantes de E. CLARKE |21| à deux matrices de passage peuvent être modifiées pour conserver l'invariance de la puissance. Cette condition est

respectée par les transformations de E.W. KIMBARK [11], de A. BOYAJIAN [15] et celles de N. KOGA [82][83][84].

4.2. Composantes relatives

Parmi les composantes relatives, utilisées notamment pour l'étude des machines tournantes, les plus utilisées sont celles de R.H. PARK [10] et de Y.H. KU [32]. Elles utilisent la même transformation pour les courants et les tensions, du moins ceux de la même armature ; on peut aisément modifier leur présentation initiale pour qu'elles assurent l'invariance de la puissance (soit complexe, soit réelle).

4.3. Obtention des diverses composantes à une matrice de transformation à partir des composantes généralisées.

Le tableau 1 montre comment par un choix judicieux des cinq paramètres on peut retrouver les composantes symétriques et relatives à une seule transformation conservant l'invariance de la puissance apparente ou instantanée. Pour chaque type, on a indiqué s'il s'agissait de composantes symétriques (S), ou relatives (R) et éventuellement si elles avaient été modifiées (M) ; on a noté le nom de l'auteur qui les a proposées et les indices usuellement proposés pour repérer les trois variables transformées.

NOTE

On trouvera dans l'Annexe 1 une présentation plus détaillée des diverses composantes symétriques proposées. Les composantes relatives, elles, seront plus particulièrement étudiées dans la suite de ce mémoire.

TYPE	AUTEUR(S) ou DENOMINATION DES COMPOSANTES	SYMBOLES	θ	θ'	θ''	θ'''	ϕ
S, M	FORTESCUE	0, 1, 2	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
S, M	PPN, PMN	0, +, -	0	0	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
S	CONCORDIA	0, α , β	0	0	0	0	$\frac{\pi}{6}$
S	RAYMOND (+)	0, I, II	0	0	0	0	$-\frac{\pi}{12}$
S	RAYMOND (-)	0, I, II	0	0	0	π	$\frac{5\pi}{12}$
S	HWANG	I, α , β	0	0	0	π	$\frac{\pi}{6}$
S	POLOUJADOFF-BARTON	ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3	ϕ_1	$\phi_2 + \frac{\pi}{6}$	$\phi_2 + \frac{2\pi}{3}$	$\begin{matrix} -\phi_1 & -\phi_2 \\ -\phi_3 & -\frac{\pi}{2} \end{matrix}$	$-\frac{\pi}{6}$
S, M	COLEMAN	t, d, s	0	0	0	0	$-\frac{\pi}{6}$
S, M	GURURAJ	0, μ , ν	0	0	0	π	$\frac{5\pi}{6}$
R, M	PARK	0, d, q	0	0	0	0	$+\frac{\pi}{6}$
R, M	KU	0, f, b	0	$\theta + \frac{\pi}{6}$	$\theta + \frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$

TABLEAU 1

C H A P I T R E IV

PRESENTATION DES COMPOSANTES RELATIVES DE R.H. PARK ET DE Y.H. KU

La plupart des composantes que nous avons rappelées et présentées au Chapitre III s'appliquent plus particulièrement à l'étude des réseaux passifs. Elles permettent, ainsi que nous l'avons montré, de diagonaliser les matrices impédances soit symétriques, soit circulantes. Elles peuvent aussi s'appliquer aux machines tournantes asynchrones et synchrones mais la matrice obtenue après simplifications reste à *coefficients fonctions de temps* et les équations différentielles qui lui sont associées ne sont donc pas à coefficients constants [85].

Si certaines méthodes [86][87] permettent de résoudre de telles équations dans des cas relativement simples, l'emploi de matrices de transformation plus complexes, à coefficients non constants, permet de ramener le système différentiel à coefficients périodiques caractérisant le fonctionnement d'une machine tournante à un système différentiel à *coefficients constants* présentant de plus de nombreux zéros.

Ces matrices de transformation définissent les composantes relatives, les plus remarquables étant celles de R.H. PARK et de Y.H. KU. Si les premières sont relativement connues, les secondes permettent de plus grandes simplifications dans l'étude des machines tournantes classiques. Mais, ainsi que D.W.C. SHEN [88] l'a montré ces deux types de composantes ne sont que deux formes de la même solution du point de vue de l'analyse tensorielle.

Ces composantes rapportent les équations régissant le système physique tournant considéré à des systèmes d'axes de référence fixes par rapport soit au stator, soit au rotor par exemple. De tels systèmes d'axes ne sont que des exemples de divers systèmes d'axes que l'on peut considérer. Ils ont été étudiés et classifiés par G. KRON [50][89] qui a montré le lien qui existe entre les équations ainsi obtenues et celles de la mécanique Lagrangienne.

Nous allons dans ce chapitre présenter les deux types de composantes, en donner une interprétation physique, indiquer leur forme modifiée qui assure l'invariance de la puissance. Nous montrerons enfin la relation qui existe entre ces deux systèmes de composantes.

I - LES COMPOSANTES DE R.H. PARK |30||31|

Parmi les différentes composantes relatives possibles, celles introduites par R.H. PARK sont les plus connues. Couramment étudiées et employées dans les pays anglosaxons, elles sont maintenant introduites dans l'enseignement de l'Electrotechnique en France |41|.

1.1. Matrice de la transformation de R.H. PARK

La matrice de la transformation de R.H. PARK, applicable aux tensions, aux flux et aux courants est définie, dans le cas des tensions par exemple, par :

$$\begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 1 & \cos(\theta - 2\pi/3) & -\sin(\theta - 2\pi/3) \\ 1 & \cos(\theta - 4\pi/3) & -\sin(\theta - 4\pi/3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_o \\ v_d \\ v_q \end{pmatrix}$$

ou sous forme matricielle

$$[V] = [P(\theta)] [V_c]$$

$[P(\theta)]^{-1}$ a pour expression :

$$[P(\theta)]^{-1} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \cos \theta & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta - 4\pi/3) \\ -\sin \theta & -\sin(\theta - 2\pi/3) & -\sin(\theta - 4\pi/3) \end{pmatrix}$$

Ces transformations portent souvent le nom de transformation des deux axes.

NOTES :

- le troisième axe est "l'axe homopolaire" que l'on néglige généralement soit parce que l'on envisage une alimentation équilibrée, soit parce que l'on considère que le neutre des machines n'est pas sorti.
- Quelques modifications apparaissent parfois dans les matrices que nous venons de définir ; elles portent sur le signe des termes en sinus que certains auteurs choisissent positifs. Elles n'affectent pas le principe de la méthode, elles ne font que modifier l'interprétation géométrique que l'on peut donner aux axes d et q.

1.2. Présentation. Propriétés. Conséquences sur les schémas équivalents

PARK a présenté ses composantes, à partir des équations de la machine

synchrone, comme un moyen de simplifier les études relatives à celle-ci. Aussi pour introduire sa transformation, nous considérerons une machine synchrone simplifiée et à rotor lisse (fig.2).

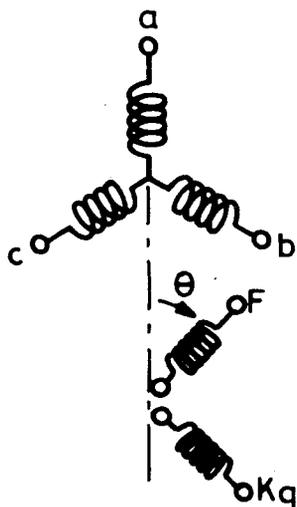


FIGURE 2

Outre les enroulements statoriques a, b, c, la machine simplifiée ne comporte au rotor qu'un bobinage repéré par F suivant l'axe polaire et un bobinage noté Kq dans l'axe interpolaire que PARK appelle en quadrature. La constance de l'entrefer permet d'écrire que la mutuelle inductance entre deux enroulements varie comme le cosinus de l'angle que font leurs axes $|90|$.

Le flux dans l'axe polaire ou direct a pour expression :

$$\phi_F = m_{Fa} i_a + m_{Fb} i_b + m_{Fc} i_c + L_F i_F.$$

Les mutuelles inductances entre les trois phases du stator et l'enroulement F d'inductance propre L_F ayant pour valeurs :

$$m_{Fa} = M_{Fam} \cos \theta ; m_{Fb} = M_{Fam} \cos(\theta - 2\pi/3) ; m_{Fc} = M_{Fam} \cos(\theta - 4\pi/3)$$

Il vient donc :

$$\phi_F = M_{Fam} (i_a \cos \theta + i_b \cos(\theta - 2\pi/3) + i_c \cos(\theta - 4\pi/3)) + L_F i_F$$

PARK a alors posé :

$$i_d = K_d (i_a \cos \theta + i_b \cos(\theta - 2\pi/3) + i_c \cos(\theta - 4\pi/3))$$

et a choisi la constante K_d de manière à ce que i_d soit égal à l'unité lorsque les courants i_a, i_b, i_c ont une amplitude elle aussi égale à l'unité (utilisation du système "per unit" [38]).

$$1 = K_d (\cos^2 \theta + \cos^2(\theta - 2\pi/3) + \cos^2(\theta - 4\pi/3)) = 3/2 K_d$$

Le flux dans l'axe direct a pour expressions :

- dans le cas général :
$$\phi_F = \frac{M_{fam}}{K_d} i_d + L_F i_F$$

- dans le cas particulier :
$$\phi_F = 3/2 M_{Fam} i_d + L_F i_F$$

Le flux dans l'axe interpolaire s'écrit de la même façon :

$$\phi_{Kq} = m_{Kqa} i_a + m_{Kqb} i_b + m_{Kqc} i_c + L_{Kq} i_{Kq}$$

Si l'axe interpolaire considéré est celui déphasé de $\pi/2$ en avant de l'axe direct dans le sens de rotation, les mutuelles inductances entre les phases statoriques et l'enroulement K_q d'inductance propre L_{Kq} ont pour valeurs :

$$m_{Kqa} = M_{Kqam} \cos(\theta + \pi/2); m_{Kqb} = M_{Kqam} \cos(\theta - 2\pi/3 + \pi/2);$$

$$m_{Kqc} = M_{Kqam} \cos(\theta - 4\pi/3 + \pi/2)$$

ou

$$m_{Kqa} = - M_{Kqam} \sin \theta; m_{Kqb} = - M_{Kqam} \sin(\theta - 2\pi/3); m_{Kqc} = - M_{Kqam} \sin(\theta - 4\pi/3)$$

Le flux dans l'axe interpolaire a pour expression :

$$\phi_{Kq} = M_{Kqam} (- i_a \sin \theta - i_b \sin(\theta - 2\pi/3) - i_c \sin(\theta - 4\pi/3))$$

et il choisit $K_q = 2/3$ de manière à ce que i_q soit égal à l'unité lorsque l'amplitude des courants i_a , i_b et i_c est elle-même égale à l'unité.

Le flux dans l'axe en quadrature a pour expressions :

- dans le cas général :
$$\phi_{Kq} = \frac{M_{Kqam}}{K_q} i_q + L_{Kq} i_{Kq}$$

- dans le cas particulier :
$$\phi_{Kq} = 3/2 M_{Kqam} i_q + L_{Kq} i_{Kq}$$

Les équations de flux régissant la machine synchrone sont :

$$\phi_F = \frac{M_{Fam}}{K_d} i_d + L_F i_F \quad \text{et} \quad \phi_{Kq} = \frac{M_{Kqam}}{K_q} i_{Kq} + L_{Kq} i_{Kq}$$

K_d et K_q étant pris par PARK égaux à $2/3$.

REMARQUE :

Si l'on projette les flux totaux ϕ_a , ϕ_b et ϕ_c à travers les trois phases statoriques sur l'axe direct, on obtient une quantité, notée ϕ_d , définie par :

$$\phi_d = \phi_a \cos \theta + \phi_b \cos(\theta - 2\pi/3) + \phi_c \cos(\theta - 4\pi/3)$$

compte tenu des expressions de ϕ_a , ϕ_b et ϕ_c et de celle de i_d , on obtient :

$$\phi_d = L_d i_d + 3/2 K_d M_{Fam} i_F$$

De même si l'on projette ces mêmes flux sur l'axe en quadrature, on obtient une quantité, notée ϕ_q , définie par :

$$\phi_q = \phi_a \cos(\theta + \pi/2) + \phi_b \cos(\theta - 2\pi/3 + \pi/2) + \phi_c \cos(\theta - 4\pi/3 + \pi/2)$$

c'est-à-dire, après simplifications :

$$\phi_q = L_q i_q + 3/2 K_q M_{Kqam} i_{Kq}$$

De sorte que les équations de flux donnant ϕ_d et ϕ_q sont :

$$\phi_d = L_d i_d + 3/2 K_d M_{Fam} i_F \text{ et } \phi_q = L_q i_q + 3/2 K_q M_{Kqam} i_{Kq}$$

à comparer avec :

$$\phi_F = L_F i_F + \frac{M_{Fam}}{K_d} i_d \text{ et } \phi_{Kq} = L_{Kq} i_{Kq} + \frac{M_{Kqam}}{K_q} i_{Kq}$$

Avec les composantes de R.H. PARK ainsi définies, on obtient des circuits équivalents pour lesquels les *mutuelles inductances ne sont pas réciproques*. Si cette caractéristique n'est pas gênante du strict point de vue mathématique, ces composantes ne permettent pas de présenter les circuits équivalents par des éléments simples (résistance, inductance, capacité) puisque les paramètres mutuels pour de tels éléments sont réciproques. C'est une conséquence de la non orthogonalité de la matrice de la transformation initiale de R.H. PARK.

1.3. Les composantes relatives modifiées de R.H. PARK [10][91]

Les vecteurs colonnes de la matrice $[P]$ de la transformation précédente forment une base orthogonale de l'espace à trois dimensions, mais les normes de ces vecteurs sont différentes de l'unité et de ce fait la matrice $[P]$ n'est pas orthogonale. Mais en divisant chaque vecteur colonne par sa norme, on obtient une matrice $[P_1]$ orthogonale et laissant de ce fait la puissance instantanée invariante. Cette matrice $[P_1]$ est définie par :

$$[P_1(\theta)] = \sqrt{2/3} \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & \cos \theta & -\sin \theta \\ 1/\sqrt{2} & \cos(\theta - 2\pi/3) & -\sin(\theta - 2\pi/3) \\ 1/\sqrt{2} & \cos(\theta - 4\pi/3) & -\sin(\theta - 4\pi/3) \end{vmatrix}$$

$$\text{et } [P_1(\theta)]^{-1} = [P_1(\theta)]_t$$

Cette matrice transformée correspond au choix $K_d = K_q = \sqrt{2/3}$ pour lequel nous obtenons des impédances mutuelles des circuits situés sur l'axe direct réciproques et de même pour l'axe en quadrature. En effet, pour qu'il y ait réciprocité, il faut :

$$3/2 K_d M_{Fam} = \frac{M_{Fam}}{K_d} \text{ et } 3/2 K_q M_{Kqam} = \frac{M_{Kqam}}{K_q}$$

C'est-à-dire : $K_d^2 = K_q^2 = 2/3$, ce qui conduit à :

$$K_d = \pm \sqrt{2/3} \text{ et } K_q = \pm \sqrt{2/3}$$

Le choix du signe est arbitraire et nous obtenons la matrice $[P_1(\theta)]$ en choisissant le signe + mais d'autres auteurs ont utilisé une matrice modifiée. Ainsi W.A. LEWIS [91] par exemple choisit $K_q = -\sqrt{2/3}$. Ceci revient à choisir l'axe intermédiaire en quadrature arrière par rapport à l'axe direct.

1.4. Interprétation des composantes modifiées de R.H. PARK

On peut noter que l'on obtient la matrice $[P_1(\theta)]$ par :

$$[P_1(\theta)] = [A][B]$$

avec :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & 3/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \text{ et } [B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

La matrice $[A]$ est la matrice des composantes de C. CONCORDIA (voir Annexe 1 - § 1.3.)

$$\begin{bmatrix} v_o \\ v_d \\ v_q \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} v_o \\ v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{bmatrix} v_o \\ v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}$$

La transformation de C. CONCORDIA permet de passer d'un système de trois axes décalés entre eux de $2\pi/3$ à un système de deux axes α et β en quadrature (et d'un "axe homopolaire"), l'axe α coïncidant avec celui a du système triphasé.

La matrice $[B]$ opère la rotation de θ dans le sens horaire qui fait passer des composantes (α, β) aux composantes (d, q) , l'axe α vient en d , l'axe β en q .

La transformation $[P_1(\theta)]$ correspond donc à un passage de trois axes à deux axes en quadrature, puis à une rotation de ces derniers qui les rend solidaires du rotor. Elle rend les inductances propres et mutuelles indépendantes de θ .⁽¹⁾

La figure 3 illustre l'interprétation vectorielle des composantes de C. CONCORDIA et de R.H. PARK

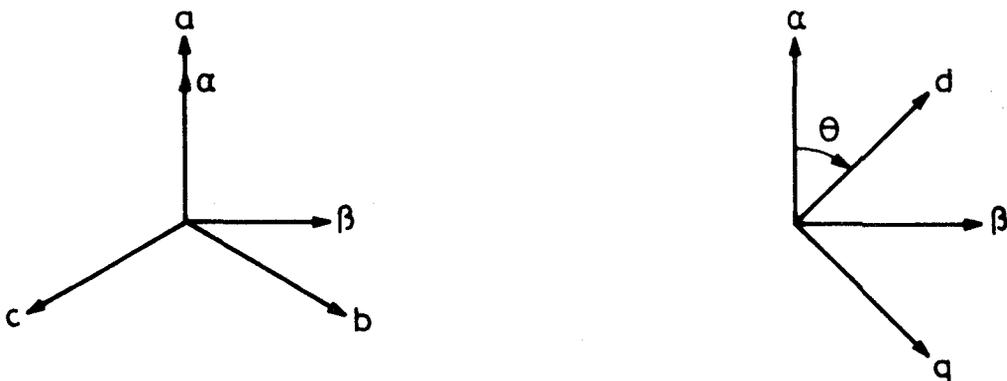


FIGURE 3

(1) Outre les composantes de C. CONCORDIA, les composantes de R.H. PARK permettent de retrouver d'autres composantes symétriques (voir Annexe II).

Ces composantes permettent aussi de définir la machine équivalente dans les divers systèmes d'axes de référence considérés (fig.4).

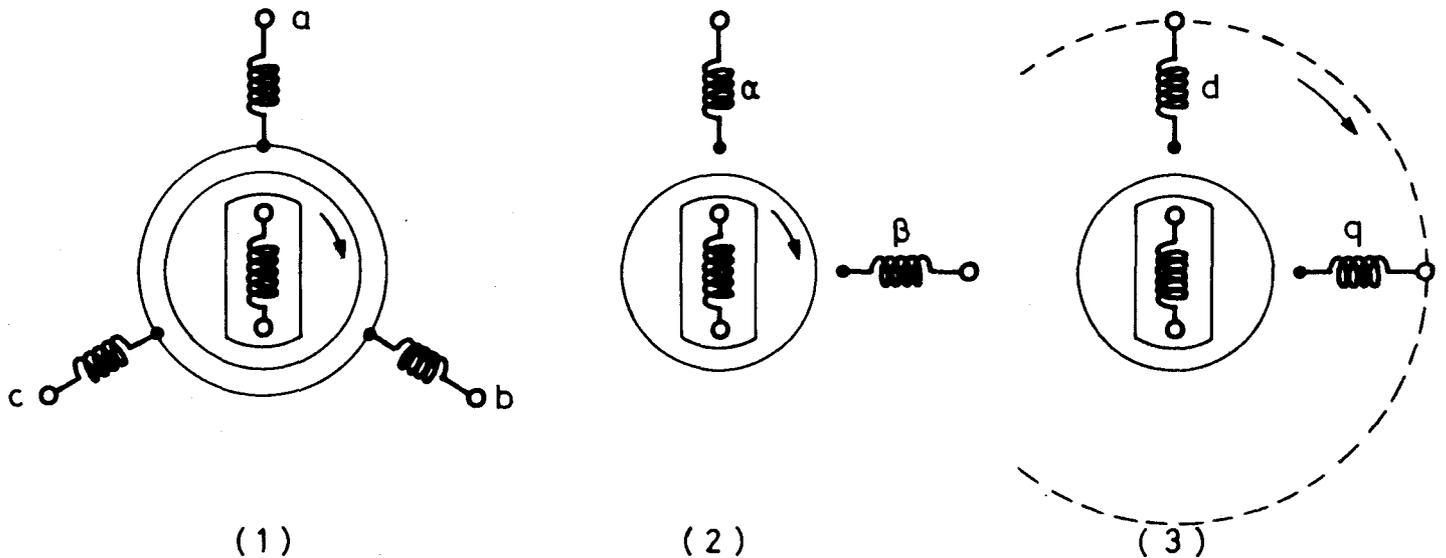


FIGURE 4

- (1) La machine réelle, structure triphasée au stator, mouvement relatif entre stator et rotor.
- (2) La machine équivalente avec les composantes de C. CONCORDIA, structure diphasée au stator, mouvement relatif entre le stator et le rotor.
- (3) La machine équivalente avec les composantes de R.H. PARK, structure diphasée au stator, pas de mouvement relatif entre le stator et le rotor.

II - LES COMPOSANTES DE Y.H. KU |32| |43| |92|

C'est en 1929, c'est-à-dire au moment où R.H. PARK bâtissait la théorie dite des deux axes et développait les composantes qui portent son nom, que Y.H. KU dans un article reprenant les travaux de S. BEKKU |93| découvrait les composantes relatives qu'il dénomma (o, f, b). Il devait montrer quelques années plus tard le lien qui existe entre ses composantes relatives et celles de R.H. PARK.

2.1. Introduction à la transformation de Y.H. KU

A l'inverse de ce que nous avons fait au § 1.1. nous allons partir des équations simplifiées de la machine synchrone et montrer comment par l'emploi des composantes de C.L. FORTESCUE, suivi d'un simple changement de variables, on arrive, tout naturellement, aux composantes de Y.H. KU.

Considérons donc de nouveau la machine synchrone simplifiée à entrefer constant et supposons que le rotor ne présente qu'un enroulement dans l'axe polaire (l'existence d'enroulement(s) dans l'axe interpolaire ne modifie en rien ce qui va suivre, cela ne fait que compliquer les calculs que nous reprendrons dans leur généralité au chapitre suivant).

Les équations des trois enroulements statoriques et du bobinage rotorique s'écrivent :

$$\begin{aligned} v_a &= (R_1 + L_1 p) i_a + M_p i_b + M_p i_c + p(m_{aF} i_F) \\ v_b &= M_p i_a + (R_1 + L_1 p) i_b + M_p i_c + p(m_{bF} i_F) \\ v_c &= M_p i_a + M_p i_b + (R_1 + L_1 p) i_c + p(m_{cF} i_F) \\ v_F &= p(m_{Fa} i_a + m_{Fb} i_b + m_{Fc} i_c) + (R_F + L_F p) i_F \end{aligned}$$

expressions dans lesquelles p représente l'opérateur d/dt . Le neutre n'étant en général pas connecté et les tensions d'alimentation v_a, v_b, v_c étant en général équilibrées, nous avons, en posant $\mathcal{L}_1 = L_1 - M_1$,

$$\begin{aligned} v_a &= (R_1 + \mathcal{L}_1 p) i_a + p(m_{aF} i_F) \\ v_b &= (R_1 + \mathcal{L}_1 p) i_b + p(m_{bF} i_F) \\ v_c &= (R_1 + \mathcal{L}_1 p) i_c + p(m_{cF} i_F) \\ v_F &= p(m_{Fa} i_a + m_{Fb} i_b + m_{Fc} i_c) + (R_F + L_F p) i_F \end{aligned}$$

et compte tenu des expressions de $m_{aF}, m_{bF}, m_{cF}, m_{Fa}, m_{Fb}, m_{Fc}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} v_a &= (R_1 + \mathcal{L}_1 p) i_a + p M_{Fam} (i_F \cos \theta) \\ v_b &= (R_1 + \mathcal{L}_1 p) i_b + p M_{Fam} (i_F \cos(\theta - 2\pi/3)) \\ v_c &= (R_1 + \mathcal{L}_1 p) i_c + p M_{Fam} (i_F \cos(\theta - 4\pi/3)) \\ v_F &= p M_{Fam} (i_a \cos \theta + i_b \cos(\theta - 2\pi/3) + i_c \cos(\theta - 4\pi/3)) + (R_F + p L_F) i_F \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{pmatrix} = (R_1 + \mathcal{L}_1 p) \begin{pmatrix} i_q \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} + M_{Fam} p \begin{pmatrix} i_F \cos \theta \\ i_F \cos(\theta - 2\pi/3) \\ i_F \cos(\theta - 4\pi/3) \end{pmatrix}$$

En appliquant la transformation classique de C.L. FORTESCUE, nous obtenons :

$$[F][v_c] = (R_1 + \mathcal{L}_1 p) \{ [F][I_c] \} + M_{Fam} p \begin{pmatrix} i_F \cos \theta \\ i_F \cos(\theta - 2\pi/3) \\ i_F \cos(\theta - 4\pi/3) \end{pmatrix}$$

La matrice $[F]$, comme $[F]^{-1}$, étant formée de coefficients constants,

$$[F]^{-1} p \{ [X] \} = p \{ [F]^{-1} [X] \}$$

on obtient :

$$[v_c] = (R_1 + \mathcal{L}_1 p) [I_c] + M_{Fam} p \{ [F]^{-1} \begin{pmatrix} i_F \cos \theta \\ i_F \cos(\theta - 2\pi/3) \\ i_F \cos(\theta - 4\pi/3) \end{pmatrix} \}$$

$$[v_c] = (R_1 + \mathcal{L}_1 p) I_c + \frac{1}{3} M_{Fam} p \begin{pmatrix} \cos \theta + \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) + \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) \\ \cos \theta + a \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) + a^2 \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) \\ \cos \theta + a^2 \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) + a \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{pmatrix} i_F$$

Soit après passage à la forme exponentielle complexe des expressions cosinusoidales puis simplifications :

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (R_1 + \mathcal{L}_1 p) \begin{pmatrix} i_0 \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + 1/2 M_{Fam} p \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\theta} i_F \\ e^{-i\theta} i_F \end{pmatrix}$$

L'équation des tensions au rotor s'écrit :

$$v_F = p M_{Fam} \{ \cos \theta \cdot (i_0 + i_1 + i_2) + \cos(\theta - 2\pi/3) \cdot (i_0 + a^2 i_1 + a i_2) + \cos(\theta - 4\pi/3) \cdot (i_0 + a i_1 + a^2 i_2) \} + (R_F + p L_F) i_F$$

soit après simplifications de même nature :

$$v_F = 3/2 M_{Fam} p (i_1 e^{-i\theta} + i_2 e^{i\theta}) + (R_F + p L_F) i_F$$

Si l'on ne tient pas compte de la composante homopolaire qui est nulle dans les hypothèses faites présentement alors :

$$v_1 = (R_1 + \mathcal{L}_1 p) i_1 + 1/2 M_{Fam} p (e^{i\theta} i_F)$$

$$v_2 = (R_1 + \mathcal{L}_1 p) i_2 + 1/2 M_{Fam} p (e^{-i\theta} i_F)$$

$$v_F = 3/2 p P_{Fam} (i_1 e^{-i\theta} + i_2 e^{i\theta}) + (R_F + p L_F) i_F$$

La validité de l'emploi du théorème de superposition dans le cas d'un tel circuit ou certains coefficients sont fonctions du temps a été démontrée par F. GARDNER [94]. Y.H. KU, néanmoins, de manière à obtenir des équations à coefficients constants, effectua ensuite dans le système simplifié les *changements de variables* :

$$\begin{aligned} v_1 &= v_f e^{i\theta} & v_2 &= v_b e^{-i\theta} \\ i_1 &= i_f e^{i\theta} & i_2 &= i_b e^{-i\theta} \end{aligned}$$

ce qui conduit aux résultats suivants :

$$v_f e^{i\theta} = [R_1 + \mathcal{L}_1 (p + i\theta'_t)] i_f e^{i\theta} + 1/2 M_{Fam} (p + i\theta'_t) i_F e^{i\theta}$$

$$v_b e^{-i\theta} = [R_1 + \mathcal{L}_1 (p - i\theta'_t)] i_b e^{-i\theta} + 1/2 M_{Fam} (p - i\theta'_t) i_F e^{-i\theta}$$

$$v_F = 3/2 M_{Fam} p (i_f + i_b) + (R_F + p L_F) i_F$$

soit après simplifications :

$$v_f = [R_1 + \mathcal{L}_1 (p + i\theta'_t)] i_f + 1/2 M_{Fam} (p + i\theta'_t) i_F$$

$$v_b = [R_1 + \mathcal{L}_1 (p - i\theta'_t)] i_b + 1/2 M_{Fam} (p - i\theta'_t) i_F$$

$$v_F = 3/2 M_{Fam} p (i_f + i_b) + (R_F + p L_F) i_F$$

Le système différentiel ainsi obtenu est un système différentiel linéaire à coefficients constants et à second membre variable que l'on peut résoudre par les méthodes classiques, en particulier par le calcul opérationnel ce qui était d'ailleurs le but initial des travaux de Y.H. KU.

Ce qui n'apparaît dans ce qui précède comme n'étant qu'un changement de variables judicieux peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} i_o \\ i_f \\ i_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$\begin{pmatrix} i_o \\ i_f \\ i_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & i_a \\ 1 & a & a^2 & i_b \\ 1 & a^2 & a & i_c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i_o \\ i_f \\ i_b \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-i\theta} & a e^{-i\theta} & a^2 e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & a^2 e^{i\theta} & a e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} \quad \text{et inversement}$$

$$\begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{i\theta} & e^{-i\theta} \\ 1 & a^2 e^{i\theta} & a e^{-i\theta} \\ 1 & a e^{i\theta} & a^2 e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_o \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Cette dernière relation matricielle définit la matrice $[K]$ de la transformation de Y.H. KU. On peut voir immédiatement que cette transformation n'étant pas unitaire ne gardera pas invariante la puissance complexe mais, ainsi que nous le montrerons plus loin, il n'est pas difficile de déterminer une transformation de matrice $[K_1]$ gardant cette puissance invariante.

REMARQUE :

Contrairement aux composantes relatives de R.H. PARK, les composantes relatives de Y.H. KU ne présentent pas d'interprétation physique aisée. C'est ce manque d'interprétation simple qui, à notre avis, a fait que les composantes relatives de Y.H. KU n'ont pas eu le développement qu'ont connu celles de R.H. PARK.

2.2. Passage des composantes relatives de R.H. PARK à celles de Y.H. KU

En exprimant les quantités i_d et i_q sous la forme exponentielle complexe, nous obtenons :

$$\begin{aligned} i_d &= 2/3 [i_a \cos \theta + i_b \cos(\theta - 2\pi/3) + i_c \cos(\theta - 4\pi/3)] \\ &= 1/3 [\{i_a + i_b a^2 + i_c a\} e^{i\theta} + \{i_a + a i_b + a^2 i_c\} e^{-i\theta}] \end{aligned}$$

soit
$$i_d = i_f + i_b$$

et de même

$$\begin{aligned} i_q &= -2/3 [i_a \sin \theta + i_b \sin(\theta - 2\pi/3) + i_c \sin(\theta - 4\pi/3)] \\ &= i/3 [\{i_a + a^2 i_b + a i_c\} e^{i\theta} - \{i_a + a i_b + a^2 i_c\} e^{-i\theta}] \end{aligned}$$

soit
$$i_q = i(i_b - i_f)$$

La composante homopolaire ayant la même expression dans les deux types de composantes relatives, nous avons donc sous la forme matricielle :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_o \\ i_f \\ i_b \end{pmatrix} && \text{et inversement} \\ \begin{pmatrix} i_o \\ i_f \\ i_b \end{pmatrix} &= 1/2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice permettant de passer des composantes (o, d, q) aux composantes (o, f, b) n'est pas unitaire.

2.3. Les composantes relatives modifiées de Y.H. KU

Pour obtenir une matrice $[K_1]$ de transformation gardant invariante la puissance complexe, il suffit de remplacer la matrice de C.L. FORTESCUE $[F]$ par la matrice modifiée $[F_1]$. Nous obtenons ainsi :

$$[K_1] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & e^{i\theta} & e^{-i\theta} \\ 1 & a^2 e^{i\theta} & a e^{-i\theta} \\ 1 & a e^{i\theta} & a^2 e^{-i\theta} \end{vmatrix}; [K_1]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-i\theta} & a e^{-i\theta} & a^2 e^{i\theta} \\ e^{i\theta} & a^2 e^{-i\theta} & a e^{i\theta} \end{vmatrix}$$

Ces composantes modifiées sont reliées aux composantes relatives modifiées de R.H. PARK et l'on peut montrer facilement, par un calcul identique à celui effectué au paragraphe précédent, que :

$$\begin{vmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_o \\ i_f \\ i_b \end{vmatrix}$$

et inversement

$$\begin{vmatrix} i_o \\ i_f \\ i_b \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 1 & -i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \end{vmatrix}$$

Si l'on ne s'occupe pas des composantes homopolaires, on obtient :

$$\begin{vmatrix} i_d \\ i_q \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_f \\ i_b \end{vmatrix}$$

et la matrice

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{vmatrix}$$

est la matrice des composantes symétriques modifiées d'un système diphasé, c'est-à-dire que les composantes f et b sont les composantes symétriques des composantes d et q.

C H A P I T R E V

EMPLOI DES COMPOSANTES RELATIVES DE R.H. PARK ET DE Y.H. KU POUR LA SIMPLIFICATION DE L'ETUDE ANALYTIQUE DE LA MACHINE SYNCHRONE

Ayant présenté les deux types de composantes relatives les plus usitées, nous allons rapidement montrer l'intérêt de leur emploi pour l'étude analytique de la machine à pôles saillants.

Après avoir rappelé les équations régissant le modèle mathématique d'ordinaire adopté pour cette machine, nous examinerons les simplifications que permet la transformation de R.H. PARK ou de Y.H. KU. Si celle-ci est nettement supérieure à la première pour les machines asynchrones, nous pourrions voir qu'elle ne présente pas moins d'intérêt que la transformation de R.H. PARK pour les machines synchrones.

I - MODELE MATHEMATIQUE D'UNE MACHINE SYNCHRONE

Une machine synchrone est formée d'un stator portant le bobinage triphasé dans lequel est induit le système triphasé de forces électromotrices.

L'inducteur constitue le rotor. Il est à pôles saillants sauf pour les unités de forte puissance où l'enroulement inducteur est réparti dans des encoches fraisées dans la masse du rotor.

La quasi-totalité des machines à pôles saillants sont munies d'amortisseurs formés de barres placées dans les épanouissements polaires et reliées entre elles aux deux extrémités de la machine.

Si le stator est symétrique par rapport à l'axe des trois phases, la non uniformité de l'entrefer dans les machines à pôles saillants, le rôle de la partie massive du rotor pour celles à rotor lisse et la nature du ou des bobinages rotoriques rendent inévitablement compliquée la mise en équation. Et cela même si on fait d'importantes hypothèses.

Pour arriver au modèle mathématique, on négligera en effet :

- la saturation magnétique, l'hystérésis et les courants de Foucault,
- l'effet de peau qui augmente les résistances et diminue les inductances,
- les couplages capacitifs entre les enroulements,
- l'effet de la température sur la valeur des résistances.

1.1. Méthode de détermination des inductances propres et mutuelles

On déduit les inductances des flux embrassés par unité de courant. Cette méthode permet la détermination analytique des inducteurs dans le cas général [101] et se déroule en quatre étapes.

a) On détermine d'abord la répartition de la *force magnétomotrice* produite par l'enroulement considéré en fonction de la position angulaire x des points de l'entrefer. Cette f.m.m. $F(x)$, établie en tenant compte des particularités de l'enroulement (coefficient de bobinage, raccourcissement des bobinages, cumul des effets des phases du même enroulement ...), s'exprime à l'aide d'une série de Fourier.

b) On détermine *la perméance de l'entrefer* $P(x)$ en fonction du développement angulaire. On peut déduire cette courbe du tracé des lignes de force effectué en utilisant les équations de Lagrange ou la méthode des "carrés de LEHMANN" ou par application de la transformation conforme ou, expérimentalement, par la méthode rhéoélectrique.

Pour les machines à pôles saillants si on prend comme origine des angles l'axe d'un pôle, la perméance s'exprime par une série de cosinus pairs.

$$P(x) = \sum_{K=0}^{\infty} P_{2K} \cos 2 Kx$$

c) On en déduit *l'induction le long de l'entrefer* par :

$$B(x) = P(x) \cdot F(x)$$

puisque l'on néglige la saturation du circuit magnétique, ce qui revient à négliger toutes les réluctances devant celle de l'entrefer.

R.E. DOHERTY et C.A. NICKLE [28] puis L.V. BEWLEY [102] ont montré que cette hypothèse conduisait à une bonne première approximation même si le circuit magnétique est saturé à condition que la courbe de perméance reste symétrique par rapport à l'axe des pôles.

d) Par intégration de l'induction, on passe au *flux*. Si le courant i_{α} passant dans un bobinage α crée à travers celui-ci un flux $\phi_{\alpha\alpha}$, ce bobinage a une inductance propre $L_{\alpha\alpha}$ égale à $\frac{\phi_{\alpha\alpha}}{i_{\alpha}}$. Si ce courant passant dans l'enroulement α , crée dans l'enroulement β un flux $\phi_{\beta\alpha}$ la mutuelle $m_{\beta\alpha}$ a pour valeur $\frac{\phi_{\beta\alpha}}{i_{\alpha}}$.

1.2. Application à la machine synchrone simplifiée

Si l'on suppose la machine à pôles saillants mais dépourvue d'amortisseurs ou de pièces massives jouant le même rôle, il n'y a que l'enroulement triphasé statorique et l'enroulement inducteur au rotor.

De nombreuses inductances dépendent de l'angle θ que fait l'axe d'un pôle et l'axe de la phase a du stator, angle mesuré dans le sens de rotation du rotor qui est aussi le sens de succession des phases a, b et c de l'induit.

On s'en tient au premier terme alternatif du développement en série de la perméance.

L'inductance propre d'un enroulement statorique est maximale quand un pôle est dans son axe, minimale quand son axe est face à l'axe interpolaire. On écrira donc :

$$\begin{aligned} L_{aa} &= L_{sa} + L_{sv} \cos 2\theta \\ L_{bb} &= L_{sa} + L_{sv} \cos 2(\theta - 2\pi/3) \\ L_{cc} &= L_{sa} + L_{sv} \cos 2(\theta - 4\pi/3) \end{aligned}$$

L'inductance mutuelle entre deux phases du stator est maximale quand un pôle est à égale distance de leurs axes. D'où les trois mutuelles inductances statoriques :

$$\begin{aligned} m_{ab} &= -L_{ma} + L_{sv} \cos(2\theta - 2\pi/3) \\ m_{bc} &= -L_{ma} + L_{sv} \cos 2\theta \\ m_{ca} &= -L_{ma} + L_{sv} \cos(2\theta - 4\pi/3) \end{aligned}$$

On montre en effet que l'amplitude des variations est la même pour les impédances propres et mutuelles. D'autre part, L_{ma} est peu différent de $\frac{L_{sa}}{2}$.

D'où les flux résultants à travers les trois phases du stator et à travers l'inducteur :

$$\begin{aligned} \phi_a &= L_{aa} i_a + m_{ab} i_b + m_{ac} i_c + m_{aF} i_F \\ \phi_b &= m_{ba} i_a + L_{bb} i_b + m_{bc} i_c + m_{bF} i_F \\ \phi_c &= m_{ca} i_a + m_{cb} i_b + L_{cc} i_c + m_{cF} i_F \\ \phi_F &= m_{Fa} i_a + m_{Fb} i_b + m_{Fc} i_c + L_{FF} i_F \end{aligned}$$

et si R_s est la résistance des enroulements de l'induit, R_F celle de l'inducteur :

$$e_a = R_s i_a + p(\phi_a)$$

$$e_b = R_s i_b + p(\phi_b)$$

$$e_c = R_s i_c + p(\phi_c)$$

$$e_F = R_F i_F + p(\phi_F)$$

1.3. Schématisation des amortisseurs

La figure 5 représente le développement frontal d'un rotor bipolaire muni d'amortisseurs à cinq barres par pièce polaire et la façon dont on en tient

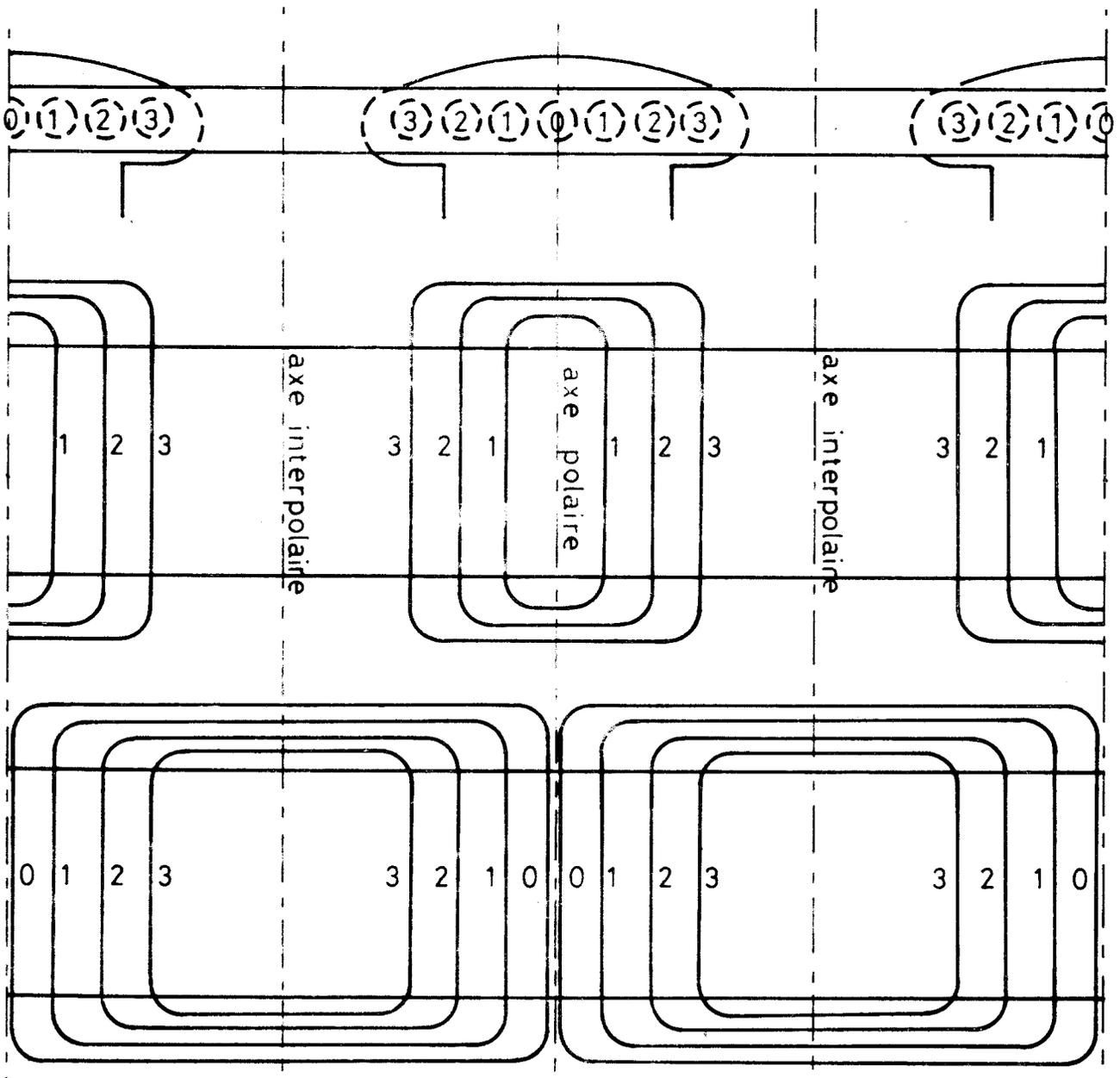


FIGURE 5

compte par deux groupes de circuits reliant deux à deux les barres symétriques par rapport à l'axe polaire, puis les barres symétriques par rapport à l'axe interpolaire.

S'il y a $2n$ ou $2n+1$ barres par pièces polaire, axées suivant l'axe polaire, on a n cadres en court-circuit. Chacun équivaut à un circuit couplé magnétiquement aux $n-1$ autres, à l'inducteur et aux trois enroulements statoriques. Les n premières mutuelles inductances sont constantes, les trois autres sont fonctions de θ . En plus de leur couplage magnétique les n cadres présentent des résistances mutuelles car une partie du trajet de leurs courants est commune.

De même suivant l'axe interpolaire les amortisseurs équivalent à n ou à $n+1$ circuits, suivant qu'il y a $2n$ ou $2n+1$ barres, couplés magnétiquement et électriquement entre eux et présentant par rapport aux phases du stator des mutuelles inductances fonctions de θ .

Les circuits dont l'axe est l'axe polaire ne présentent pas d'inductance mutuelle avec ceux centrés sur l'axe interpolaire. De même, les chutes ohmiques mutuelles entre cadres des deux familles sont nulles à cause de la symétrie des amortisseurs par rapport aux axes polaire et interpolaire. Ceci est dû au fait que toute chute de tension apparaissant dans tout circuit situé d'un côté d'un pôle est exactement contrebalancée par une chute égale et opposée dans le circuit symétrique situé de l'autre côté.

Malgré cette simplification, même en négligeant les effets des pièces massives du rotor et en s'en tenant au premier terme alternatif des inductances mutuelles variables, on arrive à un système d'équations trop complexes.

1.4. Machine synchrone idéalisée. Equations

Devant la lourdeur du système qui voudrait suivre de près le fonctionnement de la machine réelle, de nombreux auteurs ont proposé une machine "idéalisée" qui par un choix convenable des paramètres permet de rendre assez bien compte des principales caractéristiques de la machine réelle.

La machine idéalisée (fig.6) comporte :

- au stator, les bobinages a , b , c des trois phases déclarées deux à deux de 120° électriques.
- au rotor, le bobinage inducteur F et sur le même axe un bobinage K_d "équivalent" aux circuits amortisseurs situés sur l'axe polaire et un bobinage K_q "équivalent" aux circuits amortisseurs centrés sur l'axe interpolaire.

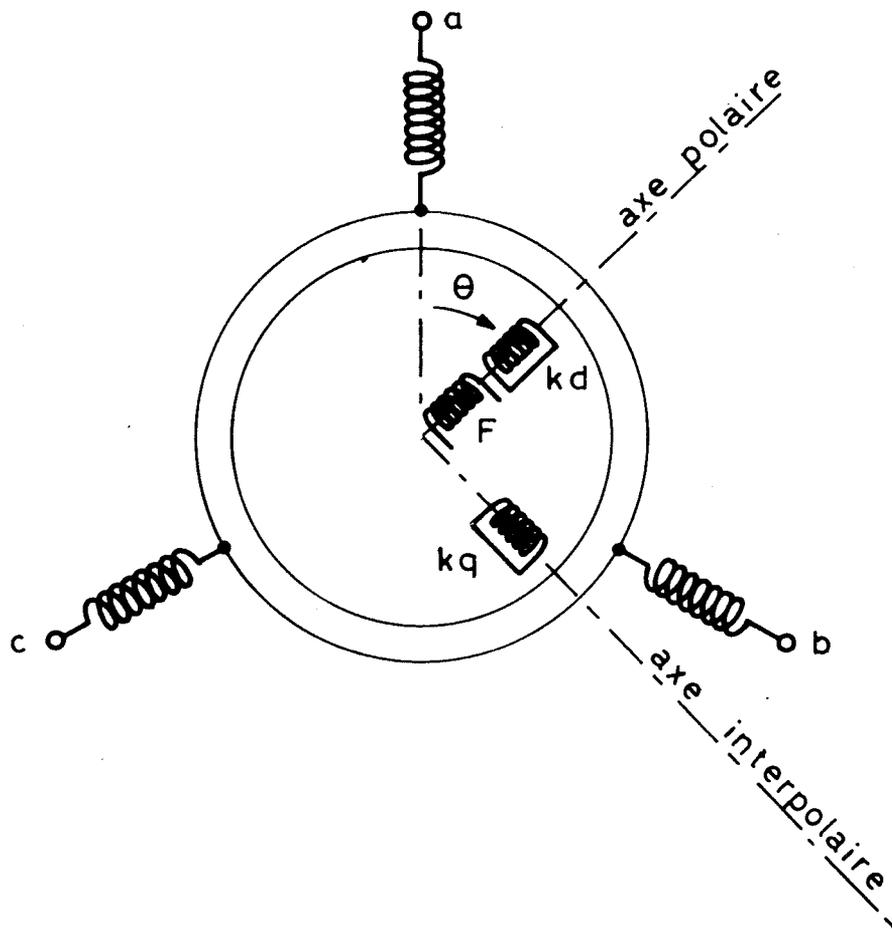


FIGURE 6

Les flux à travers les six enroulements de cette machine ont pour expressions :

$$\begin{aligned}
 \phi_a &= L_{aa} i_a + m_{ab} i_b + m_{ac} i_c + m_{aF} i_F + m_{akd} i_{kd} + m_{akq} i_{kq} \\
 \phi_b &= m_{ba} i_a + L_{bb} i_b + m_{bc} i_c + m_{bF} i_F + m_{bkd} i_{kd} + m_{bkq} i_{kq} \\
 \phi_c &= m_{ca} i_a + m_{cb} i_b + L_{cc} i_c + m_{cF} i_F + m_{ckd} i_{kd} + m_{ckq} i_{kq} \\
 \phi_F &= m_{Fa} i_a + m_{Fb} i_b + m_{Fc} i_c + L_{FF} i_F + M_{Fkd} i_{kd} \\
 \phi_{kd} &= m_{kda} i_a + m_{kdb} i_b + m_{kdc} i_c + M_{kdF} i_F + L_{kd} i_{kd} \\
 \phi_{kq} &= m_{kqa} i_a + m_{kqb} i_b + m_{kqc} i_c + L_{kq} i_{kq}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

avec

$$\begin{aligned}
 L_{aa} &= L_{sa} + L_{sv} \cos 2\theta \\
 L_{bb} &= L_{sa} + L_{sv} \cos 2(\theta - 2\pi/3) \\
 L_{cc} &= L_{sa} + L_{sv} \cos 2(\theta - 4\pi/3) \\
 m_{ab} &= m_{ba} = -L_{ma} + L_{sv} \cos(2\theta - 2\pi/3) \\
 m_{bc} &= m_{cb} = -M_{ma} + L_{sv} \cos 2\theta \\
 m_{ca} &= m_{ac} = -L_{ma} + L_{sv} \cos(2\theta - 4\pi/3) \\
 m_{aF} &= m_{Fa} = M_{Fam} \cos \theta \\
 m_{bF} &= m_{Fb} = M_{Fam} \cos(\theta - 2\pi/3) \\
 m_{cF} &= m_{Fc} = M_{Fam} \cos(\theta - 4\pi/3) \\
 m_{akd} &= m_{kda} = M_{akdm} \cos \theta \\
 m_{bkd} &= m_{kdb} = M_{akdm} \cos(\theta - 2\pi/3) \\
 m_{ckd} &= m_{kdc} = M_{akdm} \cos(\theta - 4\pi/3) \\
 m_{akq} &= m_{kqa} = -M_{akqm} \sin \theta \\
 m_{bkq} &= m_{kqb} = -M_{akqm} \sin(\theta - 2\pi/3) \\
 m_{ckq} &= m_{kqc} = -M_{akqm} \sin(\theta - 4\pi/3)
 \end{aligned}$$

Des flux, on passe aux équations de base de la machine synchrone [95]. Certains auteurs, tels D.B. BREEDON et R.W. FERGUSON [96] ont ajouté un quatrième enroulement au rotor situé sur l'axe interpolaire et les bobinages sont alors appelés "bobinage transitoire" et "bobinage subtansitoire".

Néanmoins, les équations précédentes sont généralement admises par la plupart des ouvrages classiques traitant des machines synchrones [39][40]. Notons que dans de nombreux cas, de manière à obtenir des résultats simples, on ne tient pas compte des amortisseurs [97] et parfois des résistances [98].

II - SIMPLIFICATION DES EQUATIONS DE LA MACHINE SYNCHROME A L'AIDE DES COMPOSANTES RELATIVES DE R.H. PARK

Pour simplifier les équations générales de la machine synchrone la transformation de R.H. PARK rapporte les équations statoriques à un système d'axes de référence tournant à la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ du rotor.

2.1. Les équations simplifiées

Les équations des tensions statoriques et rotoriques se déduisent des expressions de flux par :

$$\begin{aligned} e_a &= R_s i_a + p(\phi_a) \\ e_b &= R_s i_b + p(\phi_b) \\ e_c &= R_s i_c + p(\phi_c) \\ e_F &= R_F i_F + p(\phi_F) \\ e_{kd} &= R_{kd} i_{kd} + p(\phi_{kd}) \\ e_{kq} &= R_{kq} i_{kq} + p(\phi_{kq}) \end{aligned}$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{cases} [E_S] = R_S [I_S] + p\{[L_{SS}] [I_S] + [L_{SR}] [I_R]\} \\ [E_R] = [R_R] [I_R] + p\{[L_{RS}] [I_S] + [L_{RR}] [I_R]\} \end{cases} \quad (2)$$

Effectuons les changements de variables :

$$[E_S] = [P_1(\theta)] [E_{cS}] \quad \text{et} \quad [I_S] = [P_1(\theta)] [I_{cS}]$$

On obtient :

$$\begin{aligned} [P_1(\theta)] [E_{cS}] &= R_S [P_1(\theta)] [I_{cS}] + p\{[L_{SS}] [P_1(\theta)] [I_{cS}] + [L_{SR}] [I_R]\} \\ [E_R] &= [R_R] [I_R] + p\{[L_{RS}] [P_1(\theta)] [I_{cS}] + [L_{RR}] [I_R]\} \end{aligned}$$

soit après prémultiplication par $[P_1(\theta)]^{-1}$

$$\begin{aligned} [\bar{E}_{cS}] &= R_S [I_{cS}] + [P_1(\theta)]^{-1} \cdot p\{[L_{SS}] [P_1(\theta)] [I_{cS}] + [L_{SR}] [I_R]\} \\ [E_R] &= [R_R] [I_R] + p \cdot \{[L_{RS}] [P_1(\theta)] [I_{cS}] + [L_{RR}] [I_R]\} \end{aligned}$$

Après les calculs et les simplifications résumés dans l'Annexe 3 et en posant :

$$\begin{aligned}
 L_d &= L_{sa} + L_{ma} + 3/2 L_{sv} \\
 L_q &= L_{sa} + L_{ma} - 3/2 L_{sv} \\
 L_o &= L_{sa} - 2 L_{ma} \\
 \sqrt{3/2} M_{FaM} &= M_F \\
 \sqrt{3/2} M_{akdM} &= M_{kd} \\
 \sqrt{3/2} M_{akqM} &= M_{kq} \\
 M_{kdF} &= M_{Fd}
 \end{aligned} \tag{3}$$

nous obtenons l'expression matricielle (4)

e_o	$R_S + L_o p$	0	0	0	0	0	i_o
e_d	0	$R_S + L_d p$	$-L_q \omega$	$M_F \cdot p$	$M_{kd} \cdot p$	$-M_{kq} \cdot \omega$	i_d
e_q	0	$L_d \omega$	$R_S + L_q p$	$M_F \cdot p$	$M_{kd} \cdot \omega$	$M_{kq} \cdot p$	i_q
e_F	0	$M_F \cdot p$	0	$R_F + L_{FF} p$	$M_{Fd} \cdot p$	0	i_F
e_{kd}	0	$M_{kd} \cdot p$	0	$M_{Fd} \cdot p$	$R_{KD} + L_{kd} p$	0	i_{kd}
e_{kq}	0	0	$M_{kq} \cdot p$	0	0	$R_{kq} + L_{kq} p$	i_{kq}

Cette expression est bien plus simple que celle du départ car :

- 17 coefficients sont nuls sur les 36 constituant la matrice 6 x 6,
- les 19 coefficients non nuls se réduisent à des constantes. On peut donc résoudre par les procédés classiques ce système, en particulier utiliser le calcul symbolique.

Ce résultat est identique à celui établi par B. ADKINS [40] en remplaçant e_q par $-e_q$, i_q par $-i_q$, e_{kq} par $-e_{kq}$ et i_{kq} par $-i_{kq}$ ceci à la suite d'une convention de signe différente relative aux termes d'indice q . Signalons de plus que cet auteur n'utilise pas la forme modifiée de la matrice de R.H. PARK et que de ce fait la puissance instantanée n'est pas conservée.

On peut à partir de ce système d'équation déterminer les principales constantes de temps intervenant dans l'étude des régimes transitoires des machines ainsi que les schémas équivalents : un pour l'axe direct et l'autre pour l'axe en quadrature. Le détail des manipulations mathématiques est donné par l'Annexe 4.

2.2. Calcul du couple

Partons de l'expression générale du couple établie par D.C. WHITE et H.H. WOODSON [99], soit :

$$C = 1/2 \left(\begin{bmatrix} [I_S] \\ [I_R] \end{bmatrix}_t \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \begin{bmatrix} [L_{SS}] & [L_{SR}] \\ [L_{RS}] & [L_{RR}] \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} [I_S] \\ [I_R] \end{bmatrix}$$

Comme la matrice $[L_{RR}]$ est, quelque soit le nombre d'enroulements au rotor, formée de termes constants il en résulte que $\frac{\partial}{\partial \theta} [L_{RR}] = [0]$. En développant l'expression précédente, nous obtenons :

$$C = 1/2 \left\{ \begin{bmatrix} [I_S] \\ [I_R] \end{bmatrix}_t \left[\frac{\partial L_{SS}}{\partial \theta} \right] \begin{bmatrix} [I_S] \\ [I_R] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [I_S] \\ [I_R] \end{bmatrix}_t \left[\frac{\partial L_{SR}}{\partial \theta} \right] \begin{bmatrix} [I_S] \\ [I_R] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [I_S] \\ [I_R] \end{bmatrix}_t \left[\frac{\partial L_{RS}}{\partial \theta} \right] \begin{bmatrix} [I_S] \\ [I_R] \end{bmatrix} \right\}$$

Les matrices $[L_{SS}]$, $[L_{SR}]$, et $[L_{RS}]$ n'étant fonctions que de la seule variable θ on peut remplacer les dernières partielles par des dérivées ordinaires.

De plus :

$$[I_S]_t \left[\frac{\partial L_{SR}}{\partial \theta} \right] [I_R] = [I_R]_t \left[\frac{\partial L_{RS}}{\partial \theta} \right] [I_S]$$

de sorte que la formule de D.C. WHITE et H.H. WOODSON se réduit à :

$$C = 1/2 \{ [I_S]_t \left[\frac{dL_{SS}}{d\theta} \right] [I_S] + 2 [I_S]_t \left[\frac{dL_{RS}}{d\theta} \right] [I_R] \} \quad (5)$$

effectuons le changement de variables :

$$[I_S] = [P_1(\theta)] [I_{cS}]$$

il vient :

$$C = 1/2 \{ [I_{cS}]_t \left[\frac{dL_{SS}}{d\theta} \right] [P_1(\theta)] [I_{cS}] + [I_{cS}]_t [P_1(\theta)] \left[\frac{dL_{RS}}{d\theta} \right] [I_R] \}$$

Après simplifications, nous obtenons :

$$C = 2 \cdot \frac{3}{2} L_{sv} i_d i_q + \sqrt{\frac{3}{2}} \{ M_{FaM} i_F i_q + M_{akdM} i_{kd} i_q - M_{akqM} i_{kq} i_d \}$$

ou encore :

$$C = i_q \left((L_{sa} + L_{ma} + \frac{3}{2} L_{sv}) i_d + \sqrt{\frac{3}{2}} M_{akdM} i_{kd} + \sqrt{\frac{3}{2}} M_{FaM} i_F \right) - (L_{sa} + L_{ma}) i_d i_q \\ - i_d \left((L_{sa} + L_{ma} - \frac{3}{2} L_{sv}) i_q + \sqrt{\frac{3}{2}} M_{akqM} i_{kq} \right) + (L_{sa} + L_{ma}) i_d i_q$$

De ce fait, en posant :

$$\phi_d = (L_{sa} + L_{ma} + \frac{3}{2} L_{sv}) i_d + \sqrt{\frac{3}{2}} M_{FaM} i_F + \sqrt{\frac{3}{2}} M_{akdM} i_{kd}$$

$$\phi_q = (L_{sa} + L_{ma} - \frac{3}{2} L_{sv}) i_q + \sqrt{\frac{3}{2}} M_{akqM} i_{kq}$$

ou, d'après les relations (3)

$$\phi_d = L_d i_d + M_F i_F + M_{kd} i_{kd}$$

$$\phi_q = L_q i_q + M_{kd} i_{kd}$$

On obtient :

$$C = (\phi_d i_q - \phi_q i_d) \quad (6)$$

ϕ_d est le flux de couplage produit par les différents bobinages fictifs situés sur l'axe direct.

ϕ_q est le flux de couplage produit par les différents bobinages fictifs situés sur l'axe en quadrature.

On peut remarquer qu'aucun couple n'est produit par l'interaction entre un flux et un courant d'un même axe ou avec des quantités homopolaires.

Les composantes relatives de R.H. PARK facilitent beaucoup l'étude analytique de la machine synchrone : le système d'équations différentielles liant les tensions et les courants est nettement plus simple et le couple se déduit directement des composantes. Le seul désavantage réside dans la nécessité de deux schémas équivalents, un pour chaque axe, comme nous le montrons dans l'annexe 3.

Dans celui-ci, nous montrons que toutes les grandeurs intervenant dans les équations de R.H. PARK de la machine synchrone se déduisent de celles du modèle mathématique de la machine synchrone idéalisée. Ainsi que l'a montré CANAY [100] les différences entre les résultats expérimentaux et ceux obtenus à partir des équations de R.H. PARK sont dues à la simplicité relative du modèle utilisé. Divers auteurs ont proposé des modèles de plus en plus élaborés mais la complexité des calculs qui en résulte ne permet plus de mettre en évidence l'influence des paramètres constitutifs de la machine.

III - SIMPLIFICATION DES EQUATIONS DE LA MACHINE SYNCHRONE A L'AIDE DES COMPOSANTES RELATIVES DE Y.H. KU

3.1. Les équations simplifiées

Repartons des équations de la machine synchrone simplifiée, soit :

$$\begin{cases} [E_S] = R_S [I_S] + p \{ [L_{SS}] [I_S] + [L_{SR}] [I_R] \} \\ [E_R] = [a_R] [I_R] + p \{ [I_{RS}] [I_S] + [I_{RR}] [I_R] \} \end{cases} \quad (2)$$

Effectuons les changements de variables :

$$[E_S] = [K_1(\theta)] [E_{cS}] \quad \text{et} \quad [I_S] = [K_1(\theta)] [I_{cS}]$$

nous obtenons après prémultiplication par $[K_1(\theta)]^{-1}$ et simplifications :

$$\begin{aligned} [E_{cS}] &= R_S [I_{cS}] + [K_1(\theta)]^{-1} p \{ [L_{SS}] [K_1(\theta)] [I_{cS}] + [L_{SR}] [I_R] \} \\ [E_R] &= [a_R] [I_R] + p \{ [L_{RS}] [K_1(\theta)] [I_{cS}] + [L_{RR}] [I_R] \} \end{aligned}$$

Après avoir effectué les calculs et les simplifications résumés dans l'Annexe 5, on obtient l'expression matricielle (7) page 57.

Cette expression est bien plus simple que celle du départ car :

- 14 coefficients sont nuls sur les 36 de la matrice 6 x 6
- les 22 coefficients non nuls se réduisent à des constantes qui peuvent être complexes mais qui sont indépendantes de θ .

3.2. Expression du couple

Dans l'expression du couple donné par la relation (5), effectuons le changement de variables :

$$[I_S] = [K_1(\theta)] [I_{cS}]$$

il vient :

$$C = 1/2 \left([I_{cS}]_t [K_1(\theta)]_t \left[\frac{dL_{SS}}{d\theta} \right] [K_1(\theta)] [I_{cS}] + [I_{cS}]_t [K_1(\theta)] \left[\frac{dL_{RS}}{d} \right] [I_R] \right)$$

Après simplifications, nous obtenons :

$$\begin{aligned} C = \frac{3}{2} i L_{sv} (i_b^2 - i_f^2) + i \frac{\sqrt{3}}{2} \{ &M_{aFm} i_F (i_b - i_f) + M_{akdm} i_{kd} (i_b - i_f) \\ &+ i M_{akqm} i_{kq} (i_f + i_b) \} \end{aligned}$$

e_o	$R_s + (L_{sa} - 2L_{ma})p$	0	0	0	0	0	0	i_o
e_f	0	$R_s + (L_{sa} + L_{ma})(iw+p)$	$\frac{3}{2} L_{sv} (iw+p)$	$\frac{\sqrt{3}}{2} M_{aFm} (iw+p)$	$\frac{\sqrt{3}}{2} M_{akdm} (iw+p)$	$i \frac{\sqrt{3}}{2} M_{akqm} (iw+p)$		i_f
e_b	0	$\frac{3}{2} L_{sv} (-iw+p)$	$R_s + (L_{sa} + L_{ma})(-iw+p)$	$\frac{\sqrt{3}}{2} M_{aFm} (-iw+p)$	$\frac{\sqrt{3}}{2} M_{akdm} (-iw+p)$	$i \frac{\sqrt{3}}{2} M_{akqm} (-iw+p)$		i_b
e_F	0	$\frac{\sqrt{3}}{2} M_{aFm} p$	$\frac{\sqrt{3}}{2} M_{aFm} \cdot p$	$R_F + L_{FF} \cdot p$	$M_{KDF} p$	0		i_F
e_{kd}	0	$\frac{\sqrt{3}}{2} M_{akdm} p$	$\frac{\sqrt{3}}{2} M_{akdm} p$	$M_{KDF} p$	$R_{kd} + L_{kd} \cdot p$	0		i_{kd}
e_{kq}	0	$-i \frac{\sqrt{3}}{2} M_{akqm} p$	$i \frac{\sqrt{3}}{2} M_{akdm} p$	0	0	$R_{kq} + L_{kq} \cdot p$		i_{kq}

X

=

en posant :

$$\begin{aligned}\phi_f = & (L_{sa} + L_{ma} + \frac{3}{2} L_{sv}) i_f + \frac{3}{2} L_{sv} i_b + \frac{\sqrt{3}}{2} M_{aFm} i_F + \frac{\sqrt{3}}{2} M_{akdm} i_{kd} \\ & + i \frac{\sqrt{3}}{2} M_{akqm} i_{kq}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\phi_b = & (L_{sa} + L_{ma} + \frac{3}{2} L_{sv}) i_b + \frac{3}{2} L_{sv} i_f + \frac{\sqrt{3}}{2} M_{aFm} i_F + \frac{\sqrt{3}}{2} M_{akdm} i_{kd} \\ & - i \frac{\sqrt{3}}{2} M_{akqm} i_{kq}\end{aligned}$$

on trouve :

$$C = i(\phi_f i_b - \phi_b i_f) \quad (8)$$

3.3. Conclusion

Les composantes relatives de Y.H. KU facilitent l'étude analytique de la machine synchrone, en simplifiant le système différentiel liant les tensions et les courants, en donnant du couple une expression commode.

De plus, les composantes de Y.H. KU conduisent à un schéma équivalent unique comme le montre l'Annexe 6.

IV - COMPARAISON DES DEUX METHODES DE SIMPLIFICATION

Si l'on compare les relations matricielles simplifiées (4) et (7), il apparaît que la transformation de R.H. PARK conduit à plus de termes nuls que celle de Y.H. KU.

Cet avantage est illusoire compte tenu du fait que la résolution de ces systèmes différentiels conduit à des calculs d'une complexité comparable. L'interprétation physique simple des composantes de R.H. PARK et le choix des termes "direct" et "quadrature" explique que les électrotechniciens anglo-saxons aient plutôt développé cette transformation que celle de Y.H. KU.

Cette dernière permet seule d'obtenir un schéma équivalent unique ce qui tend à montrer sa supériorité mathématique qui deviendra évidente lors de l'étude de la machine asynchrone.

C H A P I T R E V I

EMPLOI DES COMPOSANTES RELATIVES DE R.H. PARK ET DE Y.H. KU POUR LA SIMPLIFICATION DE L'ETUDE ANALYTIQUE DE LA MACHINE ASYNCHRONE

Nous allons maintenant examiner comment les composantes relatives de R.H. PARK et de Y.H. KU permettent de simplifier les équations de la machine d'induction asynchrone triphasée idéale et montrer la supériorité de la transformation de Y.H. KU. Nous ferons les hypothèses suivantes :

- a) l'entrefer est uniforme et l'effet d'encochage est négligé,
- b) la saturation magnétique, l'hystérésis et les courants de Foucault dans les deux armatures sont négligeables,
- c) les enroulements produisent des flux à répartition sinusoïdale,
- d) les résistances ne varient pas en fonction de la température et on néglige l'effet de peau.

De plus, nous supposerons le rotor triphasé comme le stator.

I - MODELE MATHEMATIQUE DE LA MACHINE ASYNCHRONE

Avec de telles hypothèses, les équations régissant le fonctionnement général d'une machine d'induction asynchrone triphasée idéale sont : |105|

$$\begin{aligned} v_{Sa} &= R_S i_{Sa} + \frac{d}{dt}(\phi_{Sa}) & v_{Ra} &= R_R i_{Ra} + \frac{d}{dt}(\phi_{Ra}) \\ v_{Sb} &= R_S i_{Sb} + \frac{d}{dt}(\phi_{Sb}) & v_{Rb} &= R_R i_{Rb} + \frac{d}{dt}(\phi_{Rb}) \\ v_{Sc} &= R_S i_{Sc} + \frac{d}{dt}(\phi_{Sc}) & v_{Rc} &= R_R i_{Rc} + \frac{d}{dt}(\phi_{Rc}) \end{aligned}$$

en désignant par v_{Sa} , v_{Sb} et v_{Sc} les tensions appliquées aux trois phases primaires, i_{Sa} , i_{Sb} et i_{Sc} les courants qui les traversent, ϕ_{Sa} , ϕ_{Sb} , ϕ_{Sc} les flux totaux à travers les enroulements, R_S leur résistance. On adopte pour le rotor les mêmes notations en remplaçant l'indice S par l'indice R.

Le flux traversant la phase a du stator est donné par :

$$\phi_{Sa} = m'_{aa} i_{Sa} + m'_{ab} i_{Sb} + m'_{ac} i_{Sc} + m_{aa} i_{Ra} + m_{ab} i_{Rb} + m_{ac} i_{Rc}$$

de même le flux traversant la phase a du rotor est donné par :

$$\phi_{Ra} = m''_{aa} i_{Ra} + m''_{ab} i_{Rb} + m''_{ac} i_{Rc} + m_{aa} i_{Sa} + m_{ba} i_{Sb} + m_{ca} i_{Sc}$$

Compte tenu du fait que la machine est symétrique à entrefer constant et triphasé, les inductances propres et mutuelles entre enroulements d'une même armature sont constantes :

$$\text{- au stator } m'_{ij} = M_S \quad (i \neq j) \quad \text{et } m'_{ii} = L_S$$

$$\text{- au rotor } m''_{ij} = M_R \quad (i \neq j) \quad \text{et } m''_{ii} = L_R$$

L_S est l'inductance propre d'une phase statorique

L_R est l'inductance propre d'une phase rotorique

M_S est l'inductance mutuelle entre phases statoriques

M_R est l'inductance mutuelle entre phases rotoriques.

Les neuf termes m_{sr} ($s = a, b, c$ et $r = a, b, c$) qui représentent les coefficients de mutuelle inductance entre la phase s du stator et la phase r du rotor sont donnés par [90]

$$m_{sr} = M \cos(\theta + (r - 1)2\pi/3 - (s - 1)2\pi/3)$$

où M est la mutuelle inductance entre une phase du stator et une phase du rotor lorsque leurs axes coïncident et où θ désigne l'angle "électrique" séparant ces deux axes à l'instant t .

$$v_{Sa} = R_S i_{Sa} + \frac{d}{dt}(L_S i_{Sa} + M_S i_{Sb} + M_S i_{Sc}) \\ + \frac{d}{dt}(m_{aa} i_{Ra} + m_{ab} i_{Rb} + m_{ac} i_{Rc})$$

$$v_{Ra} = R_R i_{Ra} + \frac{d}{dt}(L_R i_{Ra} + M_R i_{Rb} + M_R i_{Rc}) \\ + \frac{d}{dt}(m_{aa} i_{Sa} + m_{ba} i_{Sb} + m_{ca} i_{Sc})$$

c'est -à-dire sous la forme matricielle et désignant toujours par p l'opérateur $\frac{d}{dt}$

$$\begin{pmatrix} [\bar{V}_S] \\ [\bar{V}_R] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [R_S] + p[L_{SS}] & p[M_{SR}] \\ p[M_{RS}] & [R_R] + p[L_{RR}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [I_S] \\ [I_R] \end{pmatrix} \quad (1)$$

expression matricielle dans laquelle :

$$[V_S] = \begin{bmatrix} v_{Sa} \\ v_{Sb} \\ v_{Sc} \end{bmatrix} ; [V_R] = \begin{bmatrix} v_{Ra} \\ v_{Rb} \\ v_{Rc} \end{bmatrix} ; [I_S] = \begin{bmatrix} i_{Sa} \\ i_{Sb} \\ i_{Sc} \end{bmatrix} ; [I_R] = \begin{bmatrix} i_{Ra} \\ i_{Rb} \\ i_{Rc} \end{bmatrix}$$

$$[R_S] = R_S [1] ; [R_R] = R_R [1]$$

$$[L_{SS}] = \begin{bmatrix} L_S & M_S & M_S \\ M_S & L_S & M_S \\ M_S & M_S & L_S \end{bmatrix} ; [L_{RR}] = \begin{bmatrix} L_R & M_R & M_R \\ M_R & L_R & M_R \\ M_R & M_R & L_R \end{bmatrix} ; [M_{SR}] = \begin{bmatrix} m_{aa} & m_{ab} & m_{ac} \\ m_{ba} & m_{bb} & m_{bc} \\ m_{ca} & m_{cb} & m_{cc} \end{bmatrix}$$

et

$$[M_{SR}] = [M_{RS}]^t$$

Les six équations différentielles ainsi obtenues sont des équations différentielles non linéaires car certains coefficients dépendent de la position du rotor, donc du temps. Elles ne peuvent être résolues que par la simulation analogique ou par l'utilisation des méthodes d'intégration numérique. Ces méthodes, difficiles à mettre en oeuvre, nécessitent un calculateur puissant et conduisent à des résultats entachés d'erreurs. Les composantes relatives vont nous permettre, en simplifiant le système différentiel précédent, de résoudre analytiquement les équations transformées.

II - SIMPLIFICATION DES EQUATIONS PAR LA TRANSFORMATION DE R.H. PARK

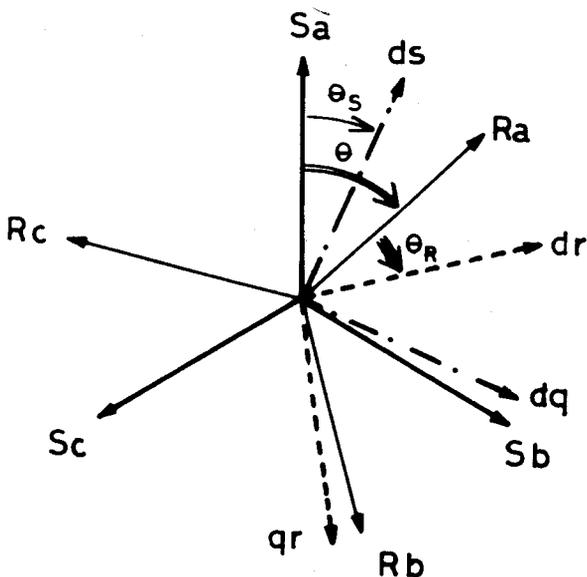


FIGURE 7

Au lieu de rapporter les équations de la machine asynchrone à des axes de référence fixe par rapport au stator ou par rapport au rotor, nous allons les rapporter à un système d'axes tournant à la vitesse angulaire $\omega_S = d\theta_S/dt$ pour la stator et à un système d'axes tournant à la vitesse angulaire $\omega_R = d\theta_R/dt$ pour le rotor. Nous rechercherons ensuite quelle doit être la relation liant θ , θ_S et θ_R pour que le système de six

équations différentielles non linéaires à six inconnues se simplifie.

2.1. Forme générale des équations transformées

Désignons par $[P_1(\theta_S)]$ la matrice de la transformation de R.H. PARK, d'angle θ_S , appliquée aux grandeurs statoriques et par $[P_1(\theta_R)]$ celle d'angle θ_R appliquée aux grandeurs rotoriques.

Dans les équations différentielles :

$$[V_S] = [R_S][I_S] + p\{[L_{SS}][I_S]\} + p\{[M_{SR}][I_R]\}$$

$$[V_R] = [R_R][I_R] + p\{[L_{RR}][I_R]\} + p\{[M_{RS}][I_R]\},$$

effectuons les changements de variables suivants :

$$[V_S] = [P_1(\theta_S)][V_{cS}] ; [I_S] = [P_1(\theta_S)][I_{cS}]$$

$$[V_R] = [P_1(\theta_R)][V_{cR}] ; [I_R] = [P_1(\theta_R)][I_{cR}]$$

nous obtenons après remplacement :

$$\begin{aligned} [P_1(\theta_R)][V_{cS}] &= [R_S][P_1(\theta_S)][I_{cS}] + p\{[L_{SS}][P_1(\theta_S)][I_{cS}]\} \\ &\quad + p\{[M_{SR}][P_1(\theta_R)][I_{cR}]\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [P_1(\theta_R)][V_{cR}] &= [R_R][P_1(\theta_R)][I_{cR}] + p\{[M_{RS}][P_1(\theta_S)][I_{cS}]\} \\ &\quad + p\{[L_{RR}][P_1(\theta_R)][I_{cR}]\} \end{aligned}$$

En prémultipliant la première équation par $[P_1(\theta_S)]^{-1}$ et la seconde par $[P_1(\theta_R)]^{-1}$, il vient :

$$\begin{aligned} [V_{cS}] &= [R_S][I_{cS}] + [P_1(\theta_S)]^{-1} [P \cdot \{[L_{SS}][P_1(\theta_S)][I_{cS}]\}] \\ &\quad + [P_1(\theta_S)]^{-1} [P \cdot \{[M_{SR}][P_1(\theta_R)][I_{cR}]\}] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 [V_{cR}] &= [R_R] [I_{cR}] + [P_1(\theta_R)]^{-1} [P \cdot \{ [M_{SR}] [P_1(\theta_S)] [I_{cS}] \}] \\
 &\quad + [P_1(\theta_R)]^{-1} [P \cdot \{ [L_{RR}] [P_1(\theta_R)] [I_{cR}] \}]
 \end{aligned}$$

nous obtenons, après simplifications et en posant :

$$(\theta + \theta_R) - \theta_S = \mu$$

le système différentiel donné sous la forme matricielle page 64.

2.2. Conditions de simplification

Ce système d'équations se simplifie lorsque :

$$\theta + \theta_R = \theta_S$$

en effet dans ces conditions $\mu = 0$ et le système se réduit à celui de la page 65 dans lequel :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_S &= L_S - M_S \text{ est l'inductance cyclique du stator,} \\
 \mathcal{L}_R &= L_R - M_R \text{ est l'inductance cyclique du rotor,} \\
 \mathcal{L}_{S0} &\text{ est l'inductance homopolaire du stator,} \\
 \mathcal{L}_{R0} &\text{ est l'inductance homopolaire du rotor.}
 \end{aligned}$$

Parmi toutes les solutions satisfaisant la relation :

$$\theta + \theta_R = \theta_S$$

trois d'entre elles sont intéressantes.

v_{So}	$R_S + (L_S + 2M_S)p$	0	0	0	0	0	i_{So}
v_{Sd}	$R_S + (L_S - M_S)p$	$-\frac{d\theta_S}{dt} - (L_S - M_S)\frac{d\theta_S}{dt}$	0	$\frac{d\theta_R}{dt} \sin\mu + \cos\mu \cdot p$	$\frac{3M}{2} \left\{ -\left(\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\theta_R}{dt}\right) \cos\mu \right.$	$\left. - \sin\mu \cdot p \right\}$	i_{Sd}
v_{Sq}	$(L_S - M_S)\frac{d\theta_S}{dt}$	$R_S + (L_S - M_S)p$	0	$\frac{d\theta_R}{dt} \cos\mu + \sin\mu \cdot p$	$\frac{3M}{2} \left\{ -\left(\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\theta_R}{dt}\right) \sin\mu \right.$	$\left. + \cos\mu \cdot p \right\}$	i_{Sq}
v_{Ro}	0	0	$R_R + (L_R + 2M_R)p$	0	0	0	i_{Ro}
v_{Rd}	$\frac{3M}{2} \left\{ \left(\frac{d\theta_S}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\right) \sin\mu + \cos\mu \cdot p \right\}$	$-\frac{3M}{2} \left\{ \left(\frac{d\theta_S}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\right) \cos\mu + \sin\mu \cdot p \right\}$	0	$R_R + (L_R - M_R)p$	$\frac{d\theta_R}{dt} (L_R - M_R)$	$-\frac{d\theta_R}{dt} (L_R - M_R)$	i_{Rd}
v_{Rq}	$\frac{3M}{2} \left\{ \left(\frac{d\theta_S}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\right) \cos\mu - \sin\mu \cdot p \right\}$	$\frac{3M}{2} \left\{ \left(\frac{d\theta_S}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\right) \sin\mu + \cos\mu \cdot p \right\}$	0	$\frac{d\theta_R}{dt} (L_R - M_R)$	$R_R + (L_R - M_R)p$	$R_R + (L_R - M_R)p$	i_{Rq}

=

X

V_{So}						
V_{Sd}						
V_{Sq}						
V_{Ro}						
V_{Rd}						
V_{Rq}						

=

$R_S + \mathcal{L}_{oS} P$	0	0	0	0	0
0	$R_S + \mathcal{L}_S P$	$-\mathcal{L}_S \frac{d\theta}{dt}$	0	$\frac{3}{2} M P$	$-\frac{3}{2} M \left(\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\theta_R}{dt} \right)$
0	$\mathcal{L}_S \frac{d\theta}{dt}$	$R_S + \mathcal{L}_S P$	0	$\frac{3}{2} M \left(\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\theta_R}{dt} \right)$	$\frac{3}{2} M P$
0	0	0	$R_R + oR P$	0	0
0	$\frac{3}{2} M P$	$-\frac{3}{2} M \left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\theta}{dt} \right)$	0	$R_R + \mathcal{L}_R P$	$-\mathcal{L}_R \frac{d\theta}{dt}$
0	$\frac{3}{2} M \left(\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\theta}{dt} \right)$	$\frac{3}{2} M P$	0	$\mathcal{L}_R \frac{d\theta}{dt}$	$R_R + \mathcal{L}_R P$

X

i_{So}					
i_{Sd}					
i_{Sq}					
i_{Ro}					
i_{Rd}					
i_{Rq}					

1ère solution : $\theta_S = 0$; $\theta_R = -\theta$

Nous obtenons alors :

V_{So}	$R_R + \mathcal{L}_{oR} p$	0	0	0	0	0	i_{So}
V_{Sd}	0	$R_S + \mathcal{L}_S p$	0	0	$\frac{3}{2} M p$	0	i_{Sd}
V_{Sq}	0	0	$R_S + \mathcal{L}_S p$	0	0	$\frac{3}{2} M p$	i_{Sq}
V_{Ro}	0	0	0	$R_R + \mathcal{L}_{oR} p$	0	0	i_{Ro}
V_{Rd}	0	$\frac{3}{2} M p$	$\frac{3}{2} M \omega'$	0	$R_R + \mathcal{L}_R p$	$\mathcal{L}_R \omega'$	i_{Rd}
V_{Rq}	0	$-\frac{3}{2} M \omega'$	$\frac{3}{2} M p$	0	$-\mathcal{L}_R \omega'$	$R_R + \mathcal{L}_R p$	i_{Rq}

avec $\frac{d\theta}{dt} = \omega'$ vitesse angulaire du rotor.

On dira dans ce cas que les équations du moteur asynchrone sont rapportées à un système *d'axes de référence fixes par rapport au stator*.

La matrice comporte vingt deux termes nuls sur les trente six la composant.

2ème solution : $\theta_R = 0$; $\theta_S = \theta$

On dira, dans ce cas, que les équations du moteur asynchrone sont rapportées à un système *d'axes de référence fixes par rapport au rotor*.

La matrice comporte vingt deux termes nuls sur les trente six la composant.

V_{So}	$R_S + \mathcal{L}_{oS} p$	0	0	0	0	0	i_{So}
V_{Sd}	0	$R_S + \mathcal{L}_S p$	$-\mathcal{L}_S \omega'$	0	$\frac{3}{2} M p$	$-\frac{3}{2} M \omega'$	i_{Sd}
V_{Sq}	0	$\mathcal{L}_S \omega'$	$R_S + \mathcal{L}_S p$	0	$\frac{3}{2} M \omega'$	$\frac{3}{2} M p$	i_{Sq}
V_{Ro}	0	0	0	$R_R + \mathcal{L}_{oR} p$	0	0	i_{Ro}
V_{Rd}	0	$\frac{3}{2} M p$	0	0	$R_R + \mathcal{L}_R p$	0	i_{Rd}
V_{Rq}	0	0	$\frac{3}{2} M p$	0	0	$R_R + \mathcal{L}_R p$	i_{Rq}

3ème solution : $\theta_S = \omega t$; $\theta = \omega' t = (1 - g)\omega t$; $\theta_R = g\omega t$

Nous obtenons dans ce troisième cas :

V_{So}	$R_S + \mathcal{L}_{oS} p$	0	0	0	0	0	i_{So}
V_{Sd}	0	$R_S + \mathcal{L}_S p$	$-\mathcal{L}_S \omega$	0	$\frac{3}{2} M p$	$-\frac{3}{2} M \omega$	i_{Sd}
V_{Sq}	0	$\mathcal{L}_S \omega$	$R_S + \mathcal{L}_S p$	0	$\frac{3}{2} M \omega$	$\frac{3}{2} M p$	i_{Sq}
V_{Ro}	0	0	0	$R_R + \mathcal{L}_{oR} p$	0	0	i_{Ro}
V_{Rd}	0	$\frac{3}{2} M p$	$-\frac{3}{2} M g \omega$	0	$R_R + \mathcal{L}_R p$	$-\mathcal{L}_R g \omega$	i_{Rd}
V_{Rq}	0	$\frac{3}{2} M g \omega$	$\frac{3}{2} M p$	0	$-\mathcal{L}_R g \omega$	$R_R + \mathcal{L}_R p$	i_{Rq}

avec g , glissement du moteur asynchrone,

ω , pulsation des tensions d'alimentation.

On dira, dans ce cas, que les équations du moteur asynchrone sont rapportées à un système d'axes de référence tournant au synchronisme.

La matrice comporte alors dix huit termes nuls sur les trente six la composant.

2.3. Choix d'un système d'axes de référence

- Si l'on effectue une étude analytique du moteur asynchrone par l'emploi des composantes de R.H. PARK, il est préférable de partir d'un système différentiel le plus simple possible.

C'est pour cette raison que l'on choisira soit un système d'axes de référence fixes par rapport au stator, soit celui fixe par rapport au rotor. Dans les deux cas deux des sous matrices d'ordre trois sont diagonales, ce qui simplifie les calculs.

- Si l'on effectue une étude du moteur asynchrone par simulation analogique par exemple, il est préférable de choisir le système conduisant à des expressions simples des seconds membres v_{So} , v_{Sd} , v_{Sq} . (En effet, v_{Ro} , v_{Rd} et v_{Rq} sont nuls généralement car le moteur asynchrone présente un rotor en court-circuit). Les tensions d'alimentation étant équilibrées :

$$v_{Sa} = V_{Sm} \sin(\theta_a + \psi_S)$$

$$v_{Sb} = V_{Sm} \sin(\theta_a + \psi_S - 2\pi/3)$$

$$v_{Sc} = V_{Sm} \sin(\theta_a + \psi_S - 4\pi/3)$$

par le changement de variables :

$$[v_{cS}] = [P_1(\theta_S)]^{-1} [v_S]$$

nous obtenons

$$v_{So} = 0$$

$$v_{Sd} = \sqrt{\frac{3}{2}} V_{Sm} \sin(\theta_a + \psi_S - \theta_S)$$

$$v_{Sq} = -\sqrt{\frac{3}{2}} V_{Sm} \cos(\theta_a + \psi_S - \theta_S)$$

Si $\theta_a = \omega t = \theta_S$

alors :

$$v_{Sd} = \sqrt{\frac{3}{2}} V_{Sm} \sin \psi_S$$

$$v_{Sq} = -\sqrt{\frac{3}{2}} V_{Sm} \cos \psi_S$$

Ces tensions sont donc constantes, ce qui dans le cas d'une simulation analogique évite l'emploi d'un module générateur basse fréquence. Le système d'axes tournant au synchronisme est alors le plus commode.

III - SIMPLIFICATION DES EQUATIONS PAR LA TRANSFORMATION DE Y.H. KU

Comme pour la transformation de R.H. PARK, nous allons rapporter les équations de la machine asynchrone à des systèmes d'axes de référence fictifs tournants et nous examinerons ceux qui présentent le plus d'intérêt.

3.1. Forme générale des équations transformées

On repart des équations du système (1).

En effectuant les changements de variables :

$$[V_S] = [K_1(\theta_S)] [v_{cS}] \quad ; \quad [I_S] = [K_1(\theta_S)] [I_{cS}]$$

$$[V_R] = [K_1(\theta_R)] [v_{cR}] \quad ; \quad [I_R] = [K_1(\theta_R)] [I_{cR}]$$

nous obtenons après remplacement :

$$[K_1(\theta_S)] [v_{cS}] = [R_S] [K_1(\theta_S)] [I_{cS}] + p \{ [L_{SS}] [K_1(\theta_S)] [I_{cS}] \}$$

$$+ p \{ [M_{SR}] [K_1(\theta_K)] [I_{cR}] \}$$

et

$$[K_1(\theta_R)] [v_{cR}] = [R_R] [K_1(\theta_K)] [I_{cR}] + p \{ [M_{RS}] [K_1(\theta_S)] [I_{cS}] \}$$

$$+ p \{ [L_{RR}] [K_1(\theta_R)] [I_{cR}] \}$$

En prémultipliant la première équation par $[K_1(\theta_S)]^{-1}$ et la seconde par $[K_1(\theta_R)]^{-1}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} [V_{cS}] &= [R_S] [I_{cS}] + [K_1(\theta_S)]^{-1} [P \cdot \{ [L_{SS}] [K_1(\theta_S)] [I_{cS}] \}] \\ &\quad + [K_1(\theta_S)]^{-1} [P \cdot \{ [M_{SR}] [K_1(\theta_R)] [I_{cR}] \}] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [V_{cR}] &= [R_R] [I_{cR}] + [K_1(\theta_R)]^{-1} [P \cdot \{ [M_{RS}] [K_1(\theta_S)] [I_{cS}] \}] \\ &\quad + [K_1(\theta_R)]^{-1} [P \cdot \{ [L_{RR}] [K_1(\theta_R)] [I_{cR}] \}] \end{aligned}$$

Nous obtenons, après simplifications et en posant :

$$\mu = (\theta + \theta_R) - \theta_S,$$

$$\mathcal{L}_S = L_S - M_S$$

$$\mathcal{L}_R = L_R - M_R$$

$$\mathcal{L}_{So} = L_S + 2M_S$$

$$\mathcal{L}_{Ro} = L_R + 2M_R$$

le système différentiel donné sous forme matricielle à la page 71.

3.2. Conditions de simplification

Le système d'équation de la page 71 se simplifie lorsque :

$$\theta + \theta_R = \theta_S$$

en effet, dans ces conditions $\mu = 0$ et le système se réduit alors à celui de la page 72.

Cette matrice est nettement plus simple que celle de départ car seuls dix termes ne sont pas nuls sur les trente six la constituant. Les coefficients de cette matrice sont constants.

Parmi toutes les solutions satisfaisant la condition de simplification trois d'entre elles sont particulièrement intéressantes.

v_{So}	$R_S + \mathcal{L}_{OS} p$	0	0	0	0	0	i_{So}
v_{Sf}	0	$R_S + \mathcal{L}_S(p + i \frac{d\theta_S}{dt})$	0	0	0	$\frac{3}{2} M e^{-i\mu} \times (p - i(\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\theta_R}{dt}))$	i_{Sf}
v_{Sb}	0	0	$R_S + \mathcal{L}_S(p - i \frac{d\theta_S}{dt})$	0	0	$\frac{3}{2} M e^{-i\mu} \times (p - i(\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\theta_R}{dt}))$	i_{Sb}
v_{Ro}	0	0	0	$R_R + \mathcal{L}_{OR} \cdot p$	0	0	i_{Ro}
v_{Rf}	0	$\frac{3}{2} M e^{-i\mu} \times (p + i(\frac{d\theta_S}{dt} - \frac{d\theta}{dt}))$	0	0	0	$R_R + \mathcal{L}_R(p + i \frac{d\theta_R}{dt})$	i_{Rf}
v_{Rb}	0	0	$\frac{3}{2} M e^{-i\mu} \times (p - i(\frac{d\theta_S}{dt} - \frac{d\theta}{dt}))$	0	0	$R_R + \mathcal{L}_R(p - i \frac{d\theta_R}{dt})$	i_{Rb}

=

X

v_{So}	$R_S + \mathcal{L}_{OS} p$	0	0	0	0	i_{So}
v_{Sf}	0	$R_S + \mathcal{L}_S(p + i \frac{d\theta_S}{dt})$	0	0	$\frac{3M}{2}(p + i \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\theta_R}{dt})$	i_{Sf}
v_{Sb}	0	0	$R_S + \mathcal{L}_S(p - i \frac{d\theta_S}{dt})$	0	$\frac{3M}{2}(p - i \frac{d\theta}{dt} + \frac{d\theta_R}{dt})$	i_{Sb}
v_{Ro}	0	0	0	$R_R + \mathcal{L}_{OR} p$	0	i_{Ro}
v_{Rf}	0	$\frac{3M}{2}(p + i \frac{d\theta_S}{dt} - \frac{d\theta}{dt})$	0	0	$R_R + \mathcal{L}_R(p + i \frac{d\theta_R}{dt})$	i_{Rf}
v_{Rb}	0	0	$\frac{3M}{2}(p - i \frac{d\theta_S}{dt} - \frac{d\theta}{dt})$	0	$R_R + \mathcal{L}_R(p - i \frac{d\theta_R}{dt})$	i_{Rb}

X

=

1ère solution : $\theta_S = 0$; $\theta_R = -\theta$

En posant $d\theta/dt = \omega'$, vitesse angulaire du rotor, nous obtenons :

v_{So}	=	$R_S + \mathcal{L}_{oS} p$	0	0	0	0	0	X	i_{So}
v_{Sf}		0	$R_S + \mathcal{L}_S p$	0	0	$\frac{3}{2} M p$	0		i_{Sf}
v_{Sb}		0	0	$R_S + \mathcal{L}_S p$	0	0	$\frac{3}{2} M p$		i_{Sb}
v_{Ro}		0	0	0	$R_R + \mathcal{L}_{oR} p$	0	0		i_{Ro}
v_{Rf}		0	$\frac{3}{2} M(p - i\omega')$	0	0	$R_R + \mathcal{L}_R(p - i\omega')$	0		i_{Rf}
v_{Rb}		0	0	$\frac{3}{2} M(p + i\omega')$	0	0	$R_R + \mathcal{L}_R(p + i\omega')$		i_{Rb}

Lorsque l'on ne s'intéresse pas aux termes homopolaires (tensions équilibrées, neutres non connectés), le système précédent se réduit à :

v_{Sf}	=	$R_S + \mathcal{L}_S p$	0	$\frac{3}{2} M p$	0	X	i_{Sf}
v_{Sb}		0	$R_S + \mathcal{L}_S p$	0	$\frac{3}{2} M p$		i_{Sb}
v_{Rf}		$\frac{3}{2} M(p - i\omega')$	0	$R_R + \mathcal{L}_R(p - i\omega')$	0		i_{Rf}
v_{Rb}		0	$\frac{3}{2} M(p + i\omega')$	0	$R_R + \mathcal{L}_R(p + i\omega')$		i_{Rb}

Système que l'on peut résoudre par la technique des sous-matrices en l'écrivant sous la forme :

$$\begin{bmatrix} [V_S] \\ [V_R] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_S] \\ [I_R] \end{bmatrix}$$

dans le cas usuel où le rotor est en court-circuit, ce qui conduit à $[V_R] = [0]$, on obtient aisément :

$$[I_S] = \{ [A] - [B][D]^{-1}[C] \}^{-1} [V_S]$$

$$[I_R] = -[D]^{-1}[C] \cdot \{ [A] - [B][D]^{-1}[C] \}^{-1}$$

Toutes les matrices sont des matrices diagonales de sorte que le calcul des expressions précédentes est très simple.

2ème solution : $\theta_R = 0$; $\theta_S = \theta$

Nous obtenons directement dans le cas où l'on ne tient pas compte des composantes homopolaires :

v_{Sf}	$R_S + \mathcal{L}_S(p+i\omega')$	0	$\frac{3}{2}M(p+i\omega')$	0	i_{Sf}
v_{Sb}	0	$R_S + \mathcal{L}_S(p-i\omega')$	0	$\frac{3}{2}M(p-i\omega')$	i_{Sb}
v_{Rf}	$\frac{3}{2}M p$	0	$R_R + \mathcal{L}_R p$	0	i_{Rf}
v_{Rb}	0	$\frac{3}{2}M p$	0	$R_R + \mathcal{L}_R p$	i_{Rb}

3ème solution : $\theta_S = \omega t$; $\theta = \omega' t = (1-g)\omega t$; $\theta_R = g t \omega$

Les composantes, autres que celles homopolaires sont liées par :

v_{Sf}	$R_S + \mathcal{L}_S(p+i\omega)$	0	$\frac{3}{2}M(p+i\omega)$	0	i_{Sf}
v_{Sb}	0	$R_S + \mathcal{L}_S(p-i\omega)$	0	$\frac{3}{2}M(p-i\omega)$	i_{Sb}
v_{Rf}	$\frac{3}{2}M(p+ig\omega)$	0	$R_r + \mathcal{L}_r(p+ig\omega)$	0	i_{Rf}
v_{Rb}	0	$\frac{3}{2}M(p-ig\omega)$	0	$R_r + \mathcal{L}_r(p-ig\omega)$	i_{Rb}

= X

3.3. Comparaison des solutions. Comparaison avec les résultats de la transformation de R.H. PARK.

- Ces trois solutions conduisent à des matrices de même forme et de complexité équivalente.

On dira que dans le premier cas on rapporte les équations du moteur asynchrone à un système d'axes de référence fictifs liés au stator, dans le second cas liés au rotor et dans le troisième cas on dira que les équations sont rapportées à un système d'axes fictifs synchrones.

- La simplification obtenue par la transformation de Y.H. KU est plus importante que celle donnée par la transformation de R.H. PARK.

Dans le cas général :

a) sur les trente six termes de la matrice impédance complexe, vingt six sont nuls au lieu de dix huit ou de vingt deux si on prend une des deux solutions les plus favorables.

b) surtout la matrice est diagonale, ce qui comme nous le montrerons au § 3.5 divise par deux les calculs à effectuer.

3.4. Calcul du couple

La formule de D.C. WHITE et de H.H. WOODSON utilisée lors de l'étude de la machine synchrone reste bien entendu valable et se simplifie compte tenu des expressions de L_{SS}

$$C = [I_S]_t \left[\frac{dM_{SR}}{d\theta} \right] [I_R]$$

Effectuons dans cette expression les changements de variables :

$$[I_S] = [K_1(\theta_S)] [I_{cS}] \quad \text{et} \quad [I_R] = [K_1(\theta_R)] [I_{cR}]$$

nous obtenons :

$$C = [I_{cS}]_t [K_1(\theta_S)]_t \left[\frac{dM_{SR}}{dt} \right] [K_1(\theta_R)] [I_{cR}]$$

Après simplifications, on obtient :

$$C = \frac{3}{2} i M(i_{Sb} i_{Rf} e^{i(\theta+\theta_R-\theta_S)} - i_{Sf} i_{Rb} e^{-i(\theta+\theta_R-\theta_S)})$$

c'est-à-dire, lorsque la condition de simplification est vérifiée :

$$C = 3/2 i M(i_{Sb} i_{Rf} - i_{Sf} i_{Rb})$$

On peut obtenir le couple permanent à partir de :

$$C_p = [I_S]^* \int_t \left[\frac{dL_{SR}}{dt} \right] [I_R]$$

En effectuant les mêmes changements de variables et compte tenu des propriétés des matrices $[K_1(\theta)]$, nous obtenons

$$C_p = [I_{cS}]^* \int_t [K_1(\theta_S)]^{-1} \left[\frac{dL_{SR}}{dt} \right] [K_1(\theta_R)] [I_R]$$

ce qui conduit à :

$$C_p = 3/2 M i (I_{Sf}^* I_{Rf} - I_{Sb}^* I_{Rb})$$

Cette formule est identique à celle du couple instantané en remarquant que :

$$I_{Sf}^* = i_{Sb} \quad \text{et} \quad I_{Sb}^* = i_{sf}$$

3.5. Schéma équivalent

Les circuits équivalents des différentes machines sont depuis longtemps des aides précieux pour l'étude de comportement de ces machines tant en régime permanent sinusoïdal, qu'en régime transitoire ou déséquilibré. G. KRON dans de nombreux articles ou ouvrages a établi les schémas équivalents d'un grand nombre de machines électriques [89] | 103 | 104 |.

Les équations de R.H. PARK de la machine asynchrone présentant des inductances mutuelles non réciproques, il faudrait pour établir un schéma équivalent introduire des éléments déphaseurs purs.

Au contraire, à partir des équations de Y.H. KU de la machine asynchrone, une fois la condition de simplification réalisée, il est aisé de déterminer le schéma équivalent dans des systèmes d'axes de référence fictifs quelconques.

Pour le montrer regroupons les équations relatives à la même composante. En développant les *relations générales* de la page 72

$$\begin{aligned} v_{Sf} &= (R_S + \mathcal{L}_S(p + i \frac{d\theta_S}{dt}))i_{Sf} + 3/2 M(p + i \frac{d\theta_S}{dt})i_{Rf} \\ v_{Rf} &= 3/2 M(p + i \frac{d\theta_R}{dt})i_{Sf} + (R_R + \mathcal{L}_R(p + i \frac{d\theta_R}{dt}))i_{Rf} \end{aligned}$$

et un second système d'indice b du même type :

$$\begin{aligned} \frac{v_{Rf}}{p+i\frac{d\theta_S}{dt}} &= \left\{ \frac{R_S}{p+i\frac{d\theta_S}{dt}} + (\mathcal{L}_S - 3/2M) \right\} i_{Sf} + 3/2M(i_{Sf} + i_{Rf}) \\ \frac{v_{Rf}}{p+i\frac{d\theta_R}{dt}} &= \frac{R_R}{p+i\frac{d\theta_R}{dt}} + (\mathcal{L}_R - 3/2M) i_{Rf} + 3/2M(i_{Sf} + i_{Rf}) \end{aligned}$$

et de même, nous obtenons pour le système d'indice b :

$$\begin{aligned} \frac{v_{Sb}}{p-i\frac{d\theta_S}{dt}} &= \left\{ \frac{R_S}{p-i\frac{d\theta_S}{dt}} + (\mathcal{L}_S - 3/2M) \right\} i_{Sb} + 3/2M(i_{Sb} + i_{Rb}) \\ \frac{v_{Rb}}{p-i\frac{d\theta_R}{dt}} &= \left\{ \frac{R_R}{p-i\frac{d\theta_R}{dt}} + (\mathcal{L}_R - 3/2M) \right\} i_{Rb} + 3/2M(i_{Sb} + i_{Rb}) \end{aligned}$$

Ces deux systèmes d'équations conduisent au schéma équivalent unique de la figure 8

Lorsque l'on considère les systèmes d'axes de référence fictifs fixes par rapport au stator :

$$\theta_S = 0 \quad \theta_R = -\theta = -(1-g)\omega t$$

nous obtenons en régime permanent sinusoïdal, qui correspond à $p = i\omega$, dans le cas d'un moteur asynchrone triphasé à rotor en court-circuit le schéma équivalent de la figure 9.

On reconnaît à la partir supérieure le schéma équivalent classique d'un moteur asynchrone alimenté par des tensions sinusoïdales équilibrées, et à la

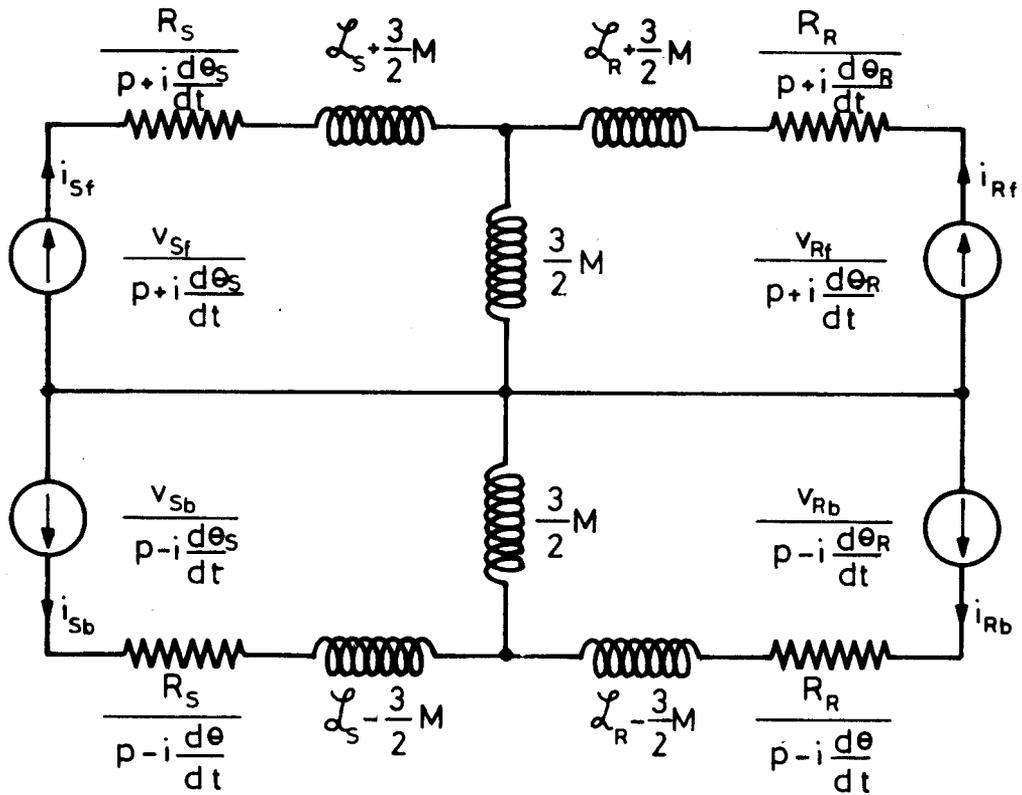


FIGURE 8

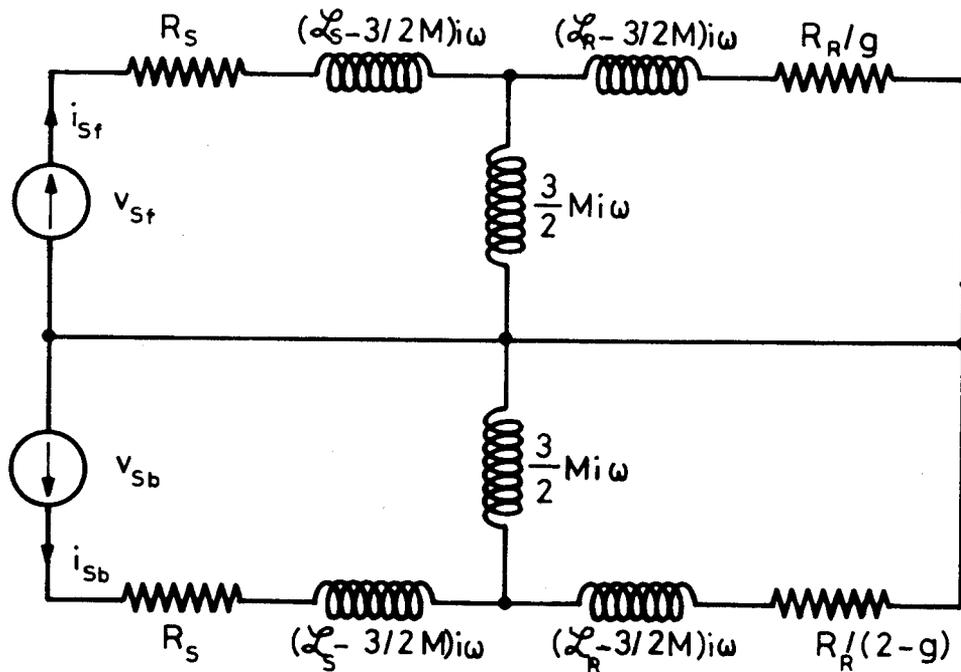


FIGURE 9

partie inférieure le schéma équivalent de ce même moteur alimenté par un système de tensions inverses.

Notons que lorsque la machine asynchrone est alimentée par un système de tensions triphasées équilibrées :

$$v_{Sa} = V_{SM} \sin(\theta_a + \psi_S)$$

$$v_{Sb} = V_{SM} \sin(\theta_a + \psi_S - 2\pi/3)$$

$$v_{Sc} = V_{SM} \sin(\theta_a + \psi_S - 4\pi/3)$$

on obtient :

$$v_{So} = 0$$

$$v_{Sf} = -i \sqrt{3}/2 V_{Sm} e^{i(\theta_a + \psi_S - \theta_S)}$$

$$v_{Sb} = i \sqrt{3}/2 V_{Sm} e^{-i(\theta_a + \psi_S - \theta_S)}$$

de sorte que les deux courants i_{Sf} et i_{Sb} existent. Mais puisque :

$$i_{Sf} = i_{Sb}^*$$

$$i_{Rf} = i_{Rb}^*$$

il ne sera donc nécessaire que d'étudier un seul système différentiel, le second étant le conjugué du premier.

C'est cette dernière remarque qui constitue la puissance principale des composantes de Y.H. KU. De plus, les sous-matrices obtenues étant diagonales la résolution littérale du régime libre deviendra alors très simple.

C H A P I T R E V I I

EMPLOI DES COMPOSANTES DE Y.H. KU POUR LA SIMPLIFICATION DE L'ETUDE ANALYTIQUE
D'UNE MACHINE ASYNCHRONE A NOMBRES QUELCONQUES DE PHASES

Nous allons montrer comment la généralisation de l'étude précédente permet de simplifier l'étude analytique d'une machine de construction symétrique q_S phasée - q_R phasée en ramenant l'étude d'un système différentiel de $q_S + q_R$ équations à coefficients fonctions du temps à celle de deux systèmes différentiels à coefficients constants et de $q_S + q_R - 4$ équations différentielles ordinaires à coefficients eux aussi constants.

I - SYSTEME ETUDIE. EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Nous considérons une machine asynchrone formée de deux armatures polyphasées, la première de q_S phases, l'autre de q_R phases, mobiles l'une par rapport à l'autre, toutes deux de construction symétrique, séparées par un entrefer constant, alimentées par des tensions quelconques. [85]. Figure 10.

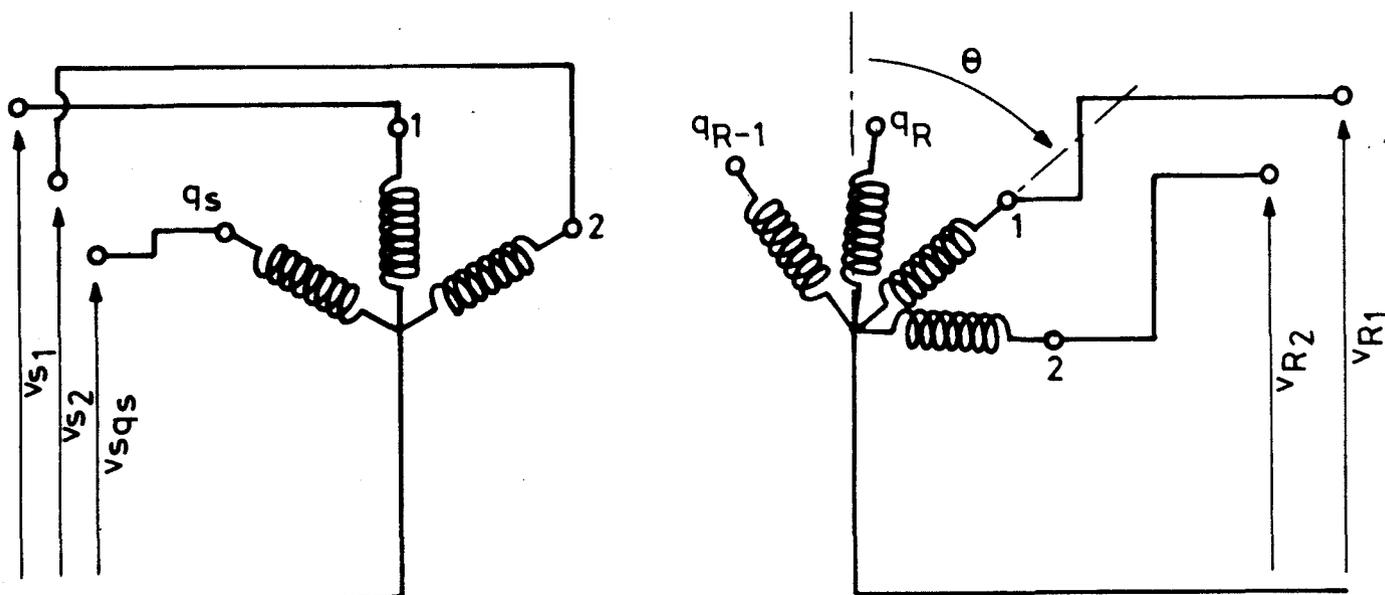


FIGURE 10

1.1. Notations

On désigne par :

$v_{S1}, v_{S2}, \dots, v_{Sq_S}$ les tensions appliquées aux phases statoriques,

$i_{S1}, i_{S2}, \dots, i_{Sq_S}$ les courants dans celles-ci,

$v_{R1}, v_{R2}, \dots, v_{Rq_R}, i_{R1}, i_{R2}, \dots, i_{Rq_R}$ les tensions et les courants rotoriques.

R_S et L_S la résistance et l'inductance propre par phase de l'armature statorique,

m'_{ij} la mutuelle inductance entre les phases i et j du stator,

R_R, L_R, m''_{ij} les mêmes grandeurs pour le rotor,

m_{sr} la mutuelle inductance entre la phase de rang s du stator et celle de rang r du rotor.

1.2. Valeur des inductances mutuelles

On suppose que chaque phase crée dans l'entrefer et dans la zone où se trouvent les bobinages un flux à répartition sinusoïdale. Dans ces conditions :

$$m'_{ij} = M_S \cos(i-j)2\pi/q_S$$

$$m''_{ij} = M_R \cos(i-j)2\pi/q_R$$

Si θ désigne l'écart angulaire électrique, fonction du temps, entre les phases de même rang des deux armatures,

$$m_{sr} = M \cos(\theta + (r-1)2\pi/q_R - (s-1)2\pi/q_S)$$

1.3. Equations différentielles du système

L'équation différentielle de la première phase statorique s'écrit :

$$v_{S1} = R_S i_{S1} + L_S \frac{di_{S1}}{dt} + m'_{12} \frac{di_{S2}}{dt} + \dots + m'_{1q_S} \frac{di_{Sq_S}}{dt} \\ + \frac{d}{dt}(m_{11} i_{R1} + m_{12} i_{R2} + \dots + m_{1q_R} i_{Rq_R})$$

et pour la $i^{\text{ème}}$ phase :

$$v_{Si} = R_S i_{Si} + (L_S - m'_{ii}) \frac{di_{Si}}{dt} + \sum_{k=1}^{q_S} m'_{ik} \frac{di_{Sk}}{dt} \\ + \sum_{j=1}^{q_R} (m_{ij} \frac{di_{Rj}}{dt} + i_{Rj} \frac{dm_{ij}}{dt})$$

De même au rotor l'équation des tensions de la $i^{\text{ème}}$ phase s'écrit :

$$v_{Ri} = R_R i_{Ri} + (L_R - m''_{ii}) \frac{di_{Ri}}{dt} + \sum_{k'=1}^{q_R} m''_{ik'} \frac{di_{Rk'}}{dt} + \sum_{j'=1}^{q_S} (m_{ij'} \frac{di_{Sj'}}{dt} + i_{Sj'} \frac{dm_{ij'}}{dt})$$

Les q_S courants du stator et les q_R courants du rotor sont solutions de :

$$(1) \begin{cases} [V_S] = [R_S] [I_S] + [\lambda_S] \left[\frac{dI_S}{dt} \right] + [M'_S] \left[\frac{dI_S}{dt} \right] + [M_{SR}] \left[\frac{dI_R}{dt} \right] + \left[\frac{dM_{SR}}{dt} \right] [I_R] \\ [V_R] = [R_R] [I_R] + [\lambda_R] \left[\frac{dI_R}{dt} \right] + [M'_R] \left[\frac{dI_R}{dt} \right] + [M_{RS}] \left[\frac{dI_S}{dt} \right] + \left[\frac{dM_{RS}}{dt} \right] [I_S] \end{cases}$$

II - COMPOSANTES RELATIVES DE Y.H. KU GENERALISEES. APPLICATIONS

2.1. Diagonalisation d'une matrice circulante. Composantes de Y.H. KU généralisées

Considérons une matrice circulante d'ordre q de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B & C & \dots & \dots & \dots & Q \\ Q & A & B & \dots & \dots & \dots & P \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C & D & E & \dots & \dots & \dots & B \\ B & C & D & \dots & \dots & \dots & A \end{pmatrix}$$

Divers auteurs ont déterminé l'équation caractéristique associée à cette matrice carrée [16][106]. De la connaissance des valeurs propres, on déduit celle des vecteurs propres. Ce calcul conduit à la définition de la matrice de C.L. FORTESCUE d'ordre q . Si on la modifie pour garder l'invariance de la puissance, elle s'écrit :

$$[F_q] = \frac{1}{\sqrt{q}} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 1 \\ & i 2\pi (q-1)/q & & & & & i 2\pi/q \\ 1 & e & & & & & e \\ & i 2.2\pi (q-1)/q & & & & & 2i 2\pi/q \\ 1 & e & & & & & e \\ & & & & & & \\ & i 2\pi (q-1)(q+1)/q & & & & & (q-1)i 2\pi/q \\ 1 & e & & & & & e \end{pmatrix}$$

Mais ainsi que l'ont montré M. POLOUJADOFF et Th. BARTON [81] la matrice de Fortescue d'ordre q n'est qu'un cas particulier de la matrice de passage très générale définie en multipliant chaque vecteur propre par un nombre complexe de la forme $e^{i\phi_i}$ de module égal à l'unité.

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & e^{i\phi_2} & & & e^{i\phi_q} \\ e^{i\phi_1} & e^{i\phi_2} & e^{i\frac{2\pi}{q}(q-1)} & & e^{i\phi_q} e^{i\frac{2\pi}{q}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{i\phi_1} & e^{i\phi_2} & e^{i\frac{2\pi}{q}(q-1)^2} & & e^{i\phi_q} e^{i\frac{2\pi}{q}(q-1)} \end{pmatrix}$$

les quantités $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q$ étant quelconques et pouvant être en particulier des fonctions du temps.

Pour l'étude des composantes relatives d'ordre q , il suffira de choisir convenablement les fonctions $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q$.

Dans une étude précédente [85] nous avons montré que l'utilisation des fonctions :

$$\phi_1 = \phi_3 = \dots = \phi_{q-1} = 0, \quad \phi_2 = -\theta \quad \text{et} \quad \phi_q = \theta$$

permettait de simplifier considérablement l'étude de la machine $q_S \times q_R$ phasée. Ce choix permet de définir les composantes relatives de Y.H. KU généralisées :

$$[K_q(\theta)]$$

$$[k_q(\theta)] = \frac{1}{\sqrt{q}} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\theta} & & & 1 & & & & e^{i\theta} \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{q}(q-1)} & e^{-i\theta} & e^{i\frac{2\pi}{q}(q-2)} & & & & & e^{i\theta} e^{i\frac{2\pi}{q}} \\ \dots & \dots \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{q}(q-1)^2} & e^{-i\theta} & e^{i\frac{2\pi}{q}(q-2)(q-1)} & & & & & e^{i\theta} e^{i\frac{2\pi}{q}(q-1)} \end{pmatrix}$$

2.2. Changements de variables

Effectuons dans les équations matricielles (1) les changements de variables suivants :

$$[V_S] = [F_{qS}] [V_{cS}] ; [I_S] = [F_{qS}] [I_{cS}] ; [V_R] = [K_{qR}] [V_{cR}] \quad \text{et} \quad [I_R] = [K_{qR}] [I_{cR}]$$

Ces équations matricielles s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} [F_{qS}] [V_{cS}] &= [R_S] [F_{qS}] [I_{cS}] + [\lambda_S] \left[\frac{d}{dt} \{ [F_{qS}] [I_{cS}] \} \right] \\ &+ [M'_S] \left[\frac{d}{dt} \{ [F_{qS}] [I_{cS}] \} \right] + [M_{SR}] \left[\frac{d}{dt} \{ [K_{qR}] [I_{cR}] \} \right] \\ &+ \left[\frac{dM_{SR}}{dt} \right] [K_{qR}] [I_{cR}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K_{qR}] [V_{cR}] &= [R_R] [K_{qR}] [I_{cR}] + [\lambda_R] \left[\frac{d}{dt} \{ [K_{qR}] [I_{cR}] \} \right] \\ &+ [M'_R] \left[\frac{d}{dt} \{ [K_{qR}] [I_{cR}] \} \right] + [M_{RS}] \left[\frac{d}{dt} \{ [F_{qS}] [I_{cS}] \} \right] \\ &+ \left[\frac{dM_{RS}}{dt} \right] [F_{qS}] [I_{cS}] \end{aligned}$$

On passe aux relations entre les composantes en prémultipliant la première équation par $[F_{qS}]^{-1}$, la seconde par $[K_{qR}]^{-1}$. Lors des dérivations des produits de matrices on doit remarquer que si $[F_{qS}]$ et $[F_{qS}]^{-1}$ sont formés de termes constants il n'en est pas de même de $[K_{qR}]$ et $[K_{qR}]^{-1}$ qui contiennent des termes fonctions du temps.

$$\begin{aligned} [V_{cS}] &= [R_S] [I_{cS}] + [\mathcal{L}_S] \left[\frac{dI_{cS}}{dt} \right] + [\mathcal{M}_S] \left[\frac{dI_{cS}}{dt} \right] + [F_{qS}]^{-1} [M_{SR}] \left[\frac{dK_{qR}}{dt} \right] [I_{cR}] \\ &+ [F_{qS}]^{-1} [M_{SR}] [K_{qR}] \left[\frac{dI_{cR}}{dt} \right] + [F_{qS}]^{-1} \left[\frac{dM_{SR}}{dt} \right] [K_{qR}] [I_{cR}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad [V_{cR}] &= [R_R] [I_{cR}] + [\mathcal{L}_R] \left[\frac{dI_{cR}}{dt} \right] + [K_{qR}]^{-1} [\lambda_R] \left[\frac{dK_{qR}}{dt} \right] [I_{cR}] \\ &+ [K_{qR}]^{-1} [M'_R] \left[\frac{dK_{qR}}{dt} \right] [I_{cR}] + [K_{qR}]^{-1} [M'_R] [K_{qR}] \left[\frac{dI_{cR}}{dt} \right] \\ &+ [K_{qR}]^{-1} [M_{RS}] [F_{qS}] \left[\frac{dI_{cS}}{dt} \right] + [K_{qR}]^{-1} \left[\frac{dM_{RS}}{dt} \right] [F_{qS}] [I_{cS}] \end{aligned}$$

2.3. Etude et simplification des divers termes

Examinons un à un les divers termes du système (2)

2.3.1. Termes de l'expression de $[V_{CS}]$

Notons tout d'abord que $[R_S]$ est une matrice diagonale égale à $R_S [1]$.
Il en est de même de $[L_S] = (L_S - M_S) [1]$.

a) Simplification de $[M_S] = [F_{qS}]^{-1} [M'_S] [F_{qS}]$

- le terme général de $[F_{qS}]^{-1} [M'_S]$ est :

$$\alpha_{j1} = \frac{M_S}{\sqrt{q_S}} \sum_{k=1}^{q_S} e^{i \frac{2\pi}{q_S} (j-1)(k-1)} \cos (k-1) \frac{2\pi}{q_S}$$

c'est-à-dire après passage à la forme exponentielle complexe

$$\alpha_{j1} = \frac{M_S}{2\sqrt{q_S}} \left\{ \sum_{k=1}^{q_S} e^{i \frac{2\pi}{q_S} \{j+1-1+(k-1)j\}} + \sum_{k=1}^{q_S} e^{i \frac{2\pi}{q_S} \{(k-1)(j-2)-1+1\}} \right\}$$

$$\alpha_{j1} = \frac{M_S}{2\sqrt{q_S}} \left\{ e^{i \frac{2\pi}{q_S} (j+1-1)} \frac{e^{i 2\pi j} - 1}{e^{i \frac{2\pi}{q_S} j} - 1} + e^{i \frac{2\pi}{q_S} (1-1)} \frac{e^{i 2\pi (j-2)} - 1}{e^{i \frac{2\pi}{q_S} (j-2)} - 1} \right\}$$

Ces quantités sont nulles sauf pour $j = 2$ et $j = q_S$

$$\alpha_{21} = \frac{M_S}{2\sqrt{q_S}} q_S e^{i \frac{2\pi}{q_S} (1-1)} = \frac{M_S}{2} \sqrt{q_S} e^{i \frac{2\pi}{q_S} (1-1)}$$

$$\alpha_{q_S 1} = \frac{M_S}{2\sqrt{q_S}} q_S e^{i\frac{2\pi}{q_S}(q_S+1-1)} = \frac{M_S}{2} \sqrt{q_S} e^{i\frac{2\pi}{q_S}(1-1)}$$

- le terme général de $[\mathcal{M}'_S]$ s'écrit :

$$\beta_{1n} = \sum \alpha_{1k} \gamma_{kn}$$

Seules deux séries de termes peuvent exister β_{2m} , $\beta_{q_S m}$. On obtient :

$$\begin{aligned} \beta_{2m} &= \sum_{k=1}^{q_S} \frac{1}{\sqrt{q_S}} \frac{M_S}{2} \sqrt{q_S} e^{i\frac{2\pi}{q_S}(k-1)} e^{i\frac{2\pi}{q_S}(q_S-m+1)(k-1)} \\ &= \frac{M_S}{2} \sum_{k=1}^{q_S} e^{i\frac{2\pi}{q_S}(k+1)(q_S-m+2)} = \frac{M_S}{2} \frac{e^{i2\pi(q_S-m+2)} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{q_S}(q_S-m+2)} - 1} \end{aligned}$$

Tous ces termes sont nuls sauf celui correspondant à $m = 2$ qui vaut :

$$\beta_{22} = \frac{q_S}{2} M_S$$

De même

$$\beta_{q_S m} = \frac{M_S}{2} \frac{e^{i2\pi(q_S-m)} - 1}{e^{i\frac{2\pi}{q_S}(q_S-m)} - 1}$$

Tous ces termes sont nuls sauf celui correspondant à $m = q_S$ qui vaut :

$$\beta_{q_S q_S} = \frac{q_S}{2} M_S$$

d'où l'expression de la matrice $[\mathcal{M}'_S]$

$$[\mathcal{M}'_S] = \frac{q_S}{2} M_S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

b) Simplification de $[F_{qS}]^{-1} \left[\frac{dM_{SR}}{dt} \right] [K_{qR}]$ et de $[F_{qS}]^{-1} [M_{SR}] \left[\frac{dK_{qR}}{dt} \right]$

- La matrice $[F_{qS}]^{-1} \left[\frac{dM_{SR}}{dt} \right]$ a même expression que $\frac{d}{dt} \{ [F_{qS}] [M_{SR}] \}$.
En effet la matrice $[F_{qS}]$ n'est formée que de constants.

Le terme général du produit $[F_{qS}]^{-1} [M_{SR}]$ est :

$$\alpha_{j1} = \sum_{k=1}^{q_S} \frac{1}{\sqrt{q_S}} e^{i \frac{2\pi}{q_S} (j-1)(k-1)} M \cos \left(\theta + (1-1) \frac{2\pi}{q_R} - (k-1) \frac{2\pi}{q_S} \right)$$

c'est-à-dire :

$$\alpha_{j1} = \frac{M}{2\sqrt{q_S}} \left\{ \sum_{k=1}^{q_S} e^{i\alpha} e^{i \frac{2\pi}{q_S} (k-1)(j-2)} + \sum_{k=1}^{q_S} e^{-i\alpha} e^{i \frac{2\pi}{q_S} (k-1)j} \right\}$$

en posant $\alpha = \theta + (1-1) \frac{2\pi}{q_R}$.

Nous obtenons après sommation :

$$\alpha_{j1} = \frac{M}{2\sqrt{q_S}} \left\{ e^{i\alpha} \frac{e^{i2\pi(j-2)} - 1}{e^{i \frac{2\pi}{q_S} (j-2)} - 1} + e^{-i\alpha} \frac{e^{i2\pi j} - 1}{e^{i \frac{2\pi}{q_S} j} - 1} \right\}$$

Ces termes sont nuls sauf ceux relatifs à $j = 2$ et $j = q_S$ qui valent :

$$\alpha_{21} = \frac{M}{2} q_S e^{i\alpha} \quad \text{et} \quad \alpha_{q_S 1} = \frac{M}{2} q_S e^{-i\alpha}$$

De ce fait le produit $[F_{q_S}]^{-1} [M_{SR}]$ a pour expression :

$$\frac{M}{2} \sqrt{q_S} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ e^{i\theta} & e^{i(\theta + \frac{2\pi}{q_R})} & \dots & e^{i(\theta + (q_R - 1)\frac{2\pi}{q_R})} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ e^{-i\theta} & e^{-i(\theta + \frac{2\pi}{q_R})} & \dots & e^{-i(\theta + (q_R - 1)\frac{2\pi}{q_R})} & 0 \end{pmatrix}$$

et de même $[F_{q_S}]^{-1} \left[\frac{dM_{SR}}{dt} \right]$ devient :

$$\frac{M}{2} \sqrt{q_S} i\omega' \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ e^{i\theta} & e^{i(\theta + \frac{2\pi}{q_R})} & \dots & e^{-i(\theta + (q_R - 1)\frac{2\pi}{q_R})} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -e^{-i\theta} & -e^{-i(\theta + \frac{2\pi}{q_R})} & \dots & e^{-i(\theta + (q_R - 1)\frac{2\pi}{q_R})} & -e \end{pmatrix}$$

- Dans le produit $[F_{q_S}]^{-1} \left[\frac{dM_{SR}}{dt} \right] [K_{q_R}]$ seuls existent les termes de la forme α_{2m} et $\alpha_{q_S^m}$. On a :

$$\alpha_{2m} = \frac{M}{2} \sqrt{\frac{q_S}{q_R}} i\omega' \sum_{k=1}^{q_R} e^{i(\theta + (k-1)\frac{2\pi}{q_R})} i\phi_m e^{i\frac{2\pi}{q_R}(q_R - m + 1)(k-1)}$$

$$\alpha_{2m} = \frac{M}{2} \sqrt{\frac{q_S}{q_R}} i\omega' e^{i(\theta + \phi_m)} e^{i2\pi(q_R - m + 2)} \frac{-1}{e^{i\frac{2\pi}{q_R}(q_R - m + 2)}} - 1$$

Cette expression est nulle sauf pour $m = 2$. Dans ce cas $\phi_m = -\theta$ et α_{22} vaut :

$$\alpha_{22} = \frac{M}{2} \sqrt{q_S q_R} i\omega'$$

De même tous les termes de $\alpha_{q_S m}$ seront nuls sauf celui correspondant à $m = q_R$.

$$\alpha_{q_S q_R} = -\frac{M}{2} \sqrt{q_S q_R} i\omega'$$

D'une manière analogue, puisque $\left[\frac{dK}{dt}\right]_{q_R}$ a pour expression :

$$\frac{i\omega'}{\sqrt{q_R}} \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\theta} & & 0 & \cdot & 0 & e^{i\theta} \\ & & & & \cdot & & \\ 0 & -e^{-i\theta} & e^{\frac{i2\pi}{q_R}(q_R-1)} & & \cdot & 0 & e^{i\theta} e^{\frac{i2\pi}{q_R}} \\ & & & & \cdot & & \\ \dots & & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & & \\ 0 & -e^{-i\theta} & e^{\frac{i2\pi}{q_R}(q_R-1)^2} & & \cdot & 0 & e^{i\theta} e^{\frac{i2\pi}{q_R}(q_R-1)} \\ & & & & \cdot & & \end{pmatrix}$$

Seuls peuvent exister dans le produit $[F_{q_S}] [M_{SR}] \left[\frac{dK}{dt}\right]_{q_R}$ de terme général α_{j1} que les termes α_{22} et α_{2q_R} , $\alpha_{q_S 2}$ et $\alpha_{q_S q_R}$. Des calculs conduits d'une manière analogue conduisent à :

$$\begin{aligned} \alpha_{22} &= -\frac{M}{2} \sqrt{q_S q_R} i\omega' & \alpha_{2q_R} &= 0 \\ \alpha_{q_S 2} &= 0 & \alpha_{q_S q_R} &= \frac{M}{2} \sqrt{q_S q_R} i\omega' \end{aligned}$$

de sorte que :

$$[F_{q_S}]^{-1} \left[\frac{dM_{SR}}{dt}\right] [K_{q_R}] + [F_{q_S}]^{-1} [M_{SR}] \left[\frac{dK}{dt}\right]_{q_R} = [0]$$

c) Simplification de $[F_{q_S}]^{-1} [M_{SR}] [K_{q_R}]$

Seuls les termes α_{2m} et $\alpha_{q_S m}$ sont non nuls a priori compte tenu de l'expression de $[F_{q_S}]^{-1} [M_{SR}]$. Un calcul identique montre que seuls α_{22} et $\alpha_{q_S q_R}$ ne sont pas nuls et l'on obtient :

$$[F_{qS}]^{-1} [M_{SR}] [K_{qR}] = \frac{M}{2} \sqrt{q_S q_R} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

2.3.2. Termes de l'expression de $[V_{cR}]$

Notons d'abord que $[R_R]$ et $[L_R]$ sont des matrices diagonales

$$[R_R] = R_R [1]$$

$$[L_R] = (L_R - M_R) [1]$$

a) Simplification de $[K_{qR}]^{-1} [\lambda_R] \left[\frac{dK_{qR}}{dt} \right]$

Puisque $[\lambda_R] = (L_R - M_R) [1]$ nous obtenons :

$$[K_{qR}]^{-1} [\lambda_R] \left[\frac{dK_{qR}}{dt} \right] = (L_R - M_R) [K_{qR}]^{-1} \left[\frac{dK_{qR}}{dt} \right]$$

Dans ce cas, seuls les termes a_{m2} et a_{mqR} ne sont pas nuls a priori et un calcul rapide conduit à :

$$[K_{qR}]^{-1} [\lambda_R] \left[\frac{dK_{qR}}{dt} \right] = i\omega' (L_R - M_R) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

b) Simplification de $[K_{qR}]^{-1} [M'_R] \left[\frac{dK_{qR}}{dt} \right]$

Comme la matrice $\left[\frac{dK_{qR}}{dt} \right]$ ne comporte que deux colonnes et que le terme général de la matrice $[M'_R]$ est $m'_{ij} = M_R \cos(i-j) \frac{2\pi}{q_R}$, le terme général du produit $[M'_R] \left[\frac{dK_{qR}}{dt} \right]$ ne comportera que deux séries de termes non nuls.

$$\alpha_{m2} = -\frac{M_R}{2} \sqrt{q_R} e^{-i\theta} e^{-i\frac{2\pi}{q_R}(m-1)} i\omega'$$

$$\alpha_{mqR} = \frac{M_R}{2} \sqrt{q_R} e^{i\theta} e^{i\frac{2\pi}{q_R}(m-1)} i\omega'$$

de sorte que seuls deux termes ne seront pas nuls dans le produit

$[K_{qR}]^{-1} [M'_R] \left[\frac{dK_{qR}}{dt} \right]$ qui se réduit à :

$$\frac{q_R}{2} M_R i\omega' \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \dots\dots\dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

c) Simplification de $[K_{qR}]^{-1} [M'_R] [K_{qR}]$; $[K_{qR}]^{-1} [M_{RS}] [F_{qS}]$;
 $[K_{qR}]^{-1} \left[\frac{dM_{RS}}{dt} \right] [F_{qS}]$

Ces expressions se simplifient de la même manière et conduisent à :

$$[K_{qR}]^{-1} [M'_R] [K_{qR}] = q_R \frac{M_R}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \dots\dots\dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

$$[K_{qR}]^{-1} [M_{RS}] [F_{qS}] = \sqrt{q_S q_R} \frac{M}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \dots\dots\dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

$$[K_{qR}]^{-1} \left[\frac{dM_{RS}}{dt} \right] [F_{qS}] = i\omega' \sqrt{q_S q_R} \frac{M}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \dots\dots\dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

2.4. Relations matricielles entre les composantes

$$\begin{pmatrix} v_{cS1} \\ v_{cS2} \\ v_{cS3} \\ \dots \\ v_{cSq_S} \end{pmatrix} = R_S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{cS1} \\ i_{cS2} \\ i_{cS3} \\ \dots \\ i_{cSq_S} \end{pmatrix} + (L_S - M_S) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} di_{cS1}/dt \\ di_{cS2}/dt \\ di_{cS3}/dt \\ \dots \\ di_{cSq_S}/dt \end{pmatrix} \\
 + q_S \frac{M_S}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} di_{cS1}/dt \\ di_{cS2}/dt \\ di_{cS3}/dt \\ \dots \\ di_{cSq_S}/dt \end{pmatrix} + M \frac{\sqrt{q_S q_R}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} di_{cR1}/dt \\ di_{cR2}/dt \\ di_{cR3}/dt \\ \dots \\ di_{cRq_R}/dt \end{pmatrix}$$

et pour les quantités rotoriques :

$$\begin{pmatrix} v_{cR1} \\ v_{cR2} \\ v_{cR3} \\ \dots \\ v_{cRq_R} \end{pmatrix} = R_R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{cR1} \\ i_{cR2} \\ i_{cR3} \\ \dots \\ i_{cRq_R} \end{pmatrix} + (L_R - M_R) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} di_{cR1}/dt \\ di_{cR2}/dt \\ di_{cR3}/dt \\ \dots \\ di_{cRq_R}/dt \end{pmatrix}$$

$$+ i\omega' (L_R - M_R + \frac{q_R}{2} M_R) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{cR1} \\ i_{cR2} \\ i_{cR3} \\ \dots \\ i_{cRq_R} \end{pmatrix} + \frac{M_R}{2} q_R \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} di_{cR1}/dt \\ di_{cR2}/dt \\ di_{cR3}/dt \\ \dots \\ di_{cRq_R}/dt \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{M}{2} \sqrt{q_S q_R} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} di_{cS1}/dt \\ di_{cS2}/dt \\ di_{cS3}/dt \\ \dots \\ di_{cSq_S}/dt \end{pmatrix} + \frac{M}{2} i\omega' \sqrt{q_S q_R} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{cS1} \\ i_{cS2} \\ i_{cS3} \\ \dots \\ i_{cSq_S} \end{pmatrix}$$

2.5. Equations simplifiées de la machine q_S -x- q_R -phasée

En développant les relations matricielles précédentes, nous obtenons :

$$v_{cSi} = R_S i_{cSi} + \mathcal{L}'_S \frac{d}{dt} i_{cSi} \quad \text{pour } i = 1, 3, 4, \dots, q_S - 1$$

$$v_{cS2} = R_S i_{cS2} + \mathcal{L}'_S \frac{d}{dt} i_{cS2} + \frac{M}{2} \sqrt{q_S q_R} \frac{d}{dt} i_{cR2}$$

$$v_{cSq_S} = R_S i_{cSq_S} + \mathcal{L}'_S \frac{d}{dt} i_{cSq_S} + \frac{M}{2} \sqrt{q_S q_R} \frac{d}{dt} i_{cRq_R}$$

$$\text{avec } \mathcal{L}'_S = L_S - M_S \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_S = \mathcal{L}'_S + 1/2 q_S M_S$$

$$v_{cRi} = R_R i_{cRi} + \mathcal{L}'_R \frac{d}{dt} i_{cRi} \quad \text{pour } i = 1, 3, 4, \dots, q_R - 1$$

$$v_{cR2} = (R_R - i\omega' \mathcal{L}_R) i_{cR2} + \mathcal{L}'_R \frac{d}{dt} i_{cR2} + \frac{M}{2} \sqrt{q_S q_R} \frac{d}{dt} i_{cS2}$$

$$- i\omega' \frac{M}{2} \sqrt{q_S q_R} i_{cS2}$$

$$v_{cRq_R} = (R_R + i\omega' \mathcal{L}_R) i_{cRq_R} + \mathcal{L}'_R \frac{d}{dt} i_{cRq_R} + \frac{M}{2} \sqrt{q_S q_R} \frac{d}{dt} i_{cSq_S}$$

$$- i\omega' \frac{M}{2} \sqrt{q_S q_R} i_{cSq_S}$$

$$\text{avec } \mathcal{L}'_R = L_R - M_R \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_R = \mathcal{L}'_R + 1/2 q_R M_R$$

Ces équations constituent les équations simplifiées de la machine $q_S \times q_R$ phasée par l'utilisation des composantes de Y.H. KU généralisées et rapportées à un système d'axes de référence fictifs liés au stator. On constate qu'il y a :

- q_S - 2 composantes découplées au stator,
- q_R - 2 composantes découplées au rotor,
- deux systèmes de composantes couplées (i_{cS2}, i_{cR2}) et (i_{cSq_S}, i_{cRq_R}) .

$$\begin{cases} v_{cS2} = R_S i_{cS2} + \mathcal{L}_S \frac{d}{dt} i_{cS2} + \frac{M}{2} \sqrt{q_S q_R} \frac{d}{dt} i_{cR2} \\ v_{cR2} = (R_R - i\omega' \mathcal{L}_R) i_{cR2} + \mathcal{L}_R \frac{d}{dt} i_{cR2} + \frac{M}{2} \sqrt{q_S q_R} \frac{d}{dt} i_{cS2} \\ \quad - i\omega' \frac{M}{2} \sqrt{q_S q_R} i_{cS2} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v_{cSq_S} = R_S i_{cSq_S} + \mathcal{L}_S \frac{d}{dt} i_{cSq_S} + \frac{M}{2} \sqrt{q_S q_R} \frac{d}{dt} i_{cRq_R} \\ v_{cRq_R} = (R_R + i\omega' \mathcal{L}_R) i_{cRq_R} + \mathcal{L}_R \frac{d}{dt} i_{cRq_R} + \frac{M}{2} \sqrt{q_S q_R} \frac{d}{dt} i_{cSq_S} \\ \quad + i\omega' \frac{M}{2} \sqrt{q_S q_R} i_{cSq_S} \end{cases}$$

Les deux systèmes d'équations étant de plus conjugués l'un de l'autre, il ne sera donc nécessaire que d'en étudier un seul. Les équations différentielles étant à coefficients constants la résolution pourra s'effectuer par les méthodes classiques de l'analyse.

Signalons qu'une étude analogue a été réalisée pour la machine synchrone généralisée au moyen de diverses composantes tant symétriques que relatives |107|.

DEUXIEME PARTIE

APPLICATION AU MOTEUR ASYNCHRONE
ALIMENTE PAR LES SIGNAUX DE
L'ELECTRONIQUE DE PUISSANCE

C H A P I T R E I

L'ELECTRONIQUE DE PUISSANCE ET LA VARIATION DE VITESSE DU MOTEUR ASYNCHRONE

L'Electronique de Puissance a vu se développer son champ d'application avec l'introduction vers 1957 du redresseur contrôlé au silicium communément appelé thyristor.

Notons que de nombreux montages avaient déjà été étudiés et mis au point soit avec des thyratrons ou des redresseurs à vapeur de mercure |108|, soit avec des amplificateurs magnétiques.

Un des domaines privilégiés d'application des thyristors est la *variation de vitesse* des machines électriques. Ils ont en effet permis de remplacer ou de compléter les nombreuses solutions purement "électrotechniques" qui avaient été proposées depuis le début du siècle :

- machines alternatives à collecteur,
- machines à courant continu alimentées sous tension variable par un groupe convertisseur : montages Ward-Léonard, Ilgner,
- machines à courant alternatif à bagues avec récupération par d'autres machines de la puissance de glissement : systèmes Kraemer, Scherbius.

Ces dispositifs ont permis de réaliser dans d'excellentes conditions les entraînements à vitesse variable nécessaires dans les industries les plus diverses.

L'augmentation des puissances unitaires, la nécessité de régulations de plus en plus élaborées et la réduction des temps de réponse d'une part, la possibilité de réduire les investissements et les coûts d'exploitation d'autre part, ont conduit à n'utiliser les machines que pour remplir la fonction qu'elles peuvent seules assurer, la conversion électro-mécanique. On a cherché à réaliser par des équipements statiques les modifications de la présentation de l'énergie électrique.

On a tout d'abord utilisé *la machine à courant continu* associée à un convertisseur statique réversible ou non |109|, lui même alimenté par le réseau alternatif industriel. Cette solution est de nos jours encore la plus employée. La variation de vitesse s'obtient par variation de la tension

appliquée à l'induit au moyen de ponts redresseurs soit mixtes (variateurs non réversibles), soit tout thyristors (variateurs réversibles). L'utilisation d'un asservissement de vitesse permet des réglages précis et la gamme de vitesse que l'on peut obtenir est très étendue.

Néanmoins la machine à courant continu présente le désavantage de nécessiter un collecteur qui limite :

- la tension nominale de la machine,
- le courant qu'elle peut absorber,
- la vitesse périphérique.

Il ne faut pas exagérer ces difficultés et l'utilisation préférentielle de ce type de variateur montre que ses limites ne sont atteintes que dans les cas :

- des très fortes puissances,
- des très grandes vitesses de rotation.

De par sa conception plus rustique, le *moteur asynchrone à cage* d'écureuil semble être le concurrent le plus sérieux du moteur à courant continu. Il est en effet beaucoup moins cher, il ne présente ni l'inconvénient du collecteur, ni même celui des bagues. Mais on ne peut faire varier sa vitesse dans de bonnes conditions de rendement que par *variation de la fréquence* des tensions d'alimentation grâce à l'utilisation d'un convertisseur.

A partir du réseau industriel, on peut utiliser :

- soit un convertisseur direct de fréquence ou montage cycloconvertisseur |110||111||112|
- soit un convertisseur indirect de fréquence à étage intermédiaire à courant continu |113||114||115|.

Ces dispositifs avaient soulevé de grandes espérances au milieu des années 60 mais ils n'ont pas donné lieu au développement massif prévu.

Pour les convertisseurs directs où les commutations forcées sont assurées par le réseau, cela semble tenir au grand nombre de redresseurs nécessaires, à la complexité de la commande et à la possibilité de n'obtenir des signaux convenables que lorsque les tensions de sortie ont une fréquence nettement inférieure à celle du réseau.

Pour les convertisseurs indirects, c'est le coût des auxiliaires à ajouter pour obtenir les commutations forcées qui s'est révélé très important.

Progressivement les constructeurs semblent se ranger à l'idée énoncée par H. STEMLER [116] dès 1967 selon laquelle ces dispositifs resteront limités soit aux très fortes puissances, soit aux très grandes vitesses, soit aux très faibles, soit à l'alimentation d'un ensemble de machines électriques, soit évidemment au cas où tout contact glissant doit être exclu. Cette diversité des domaines d'applications montre en outre que la possibilité d'une solution unique doit être exclue.

Le problème se complique du fait des possibilités que présente le moteur synchrone alimenté à fréquence variable [1] [157]. Il peut assurer lui même les commutations forcées grâce aux forces électromotrices qu'il développe. L'excitation peut être obtenue par un ensemble alternateur auxiliaire-diodes, ce qui supprime tout contact glissant.

L'électronique de puissance semble actuellement marquée par un temps de réflexion et l'on voit apparaître les premières tentatives de synthèse basées sur l'approfondissement des comparaisons entre les divers montages proposés [117] [118].

Aussi nous semble-t-il intéressant de rappeler ce qu'on attend de l'ensemble formé par le moteur à courant alternatif et le convertisseur qui l'alimente [119].

Pour le moteur : Il doit être robuste, sûr, sans contact glissant et présenter un bon rendement. Il doit pouvoir délivrer son couple maximum à toutes les vitesses et doit posséder un bon facteur de puissance.

Pour le convertisseur : Il doit délivrer un système de tensions triphasées dont l'amplitude puisse être modifiée en même temps que la fréquence de manière à maintenir dans la machine une induction sensiblement constante. Le résidu harmonique de la tension de sortie doit être faible car la présence d'harmoniques augmente les pertes et fait apparaître des harmoniques de couple [120]. Le facteur de puissance à l'entrée du convertisseur doit être bon et les courants harmoniques injectés sur le réseau d'alimentation doivent être réduits.

Dans l'étude du moteur asynchrone alimenté par les signaux de l'électronique de puissance qui suit, nous nous intéresserons principalement aux convertisseurs de fréquence à étage intermédiaire à courant continu. Ces dispositifs nécessitent des auxiliaires de commutation forcée. De très nombreux schémas ont été proposés mais tous utilisent des capacités pour appliquer une tension inverse aux bornes des thyristors à bloquer. Ces convertisseurs, pour lesquels nous supposerons nulle la durée de commutation, permettent :

- soit d'imposer aux bornes des phases une tension de forme convenable, ce sont les onduleurs de tension (VSI),

- soit d'imposer dans une phase un courant de forme convenable, ce sont les onduleurs de courant (CSI).

Avant d'envisager l'étude analytique de comportement de la machine asynchrone alimentée par de tels signaux, il convient d'examiner quelles sont les formes d'onde utilisées, puis d'étudier le régime libre d'un moteur asynchrone, régime libre que l'on retrouvera quel que soit le type d'alimentation de tension.

C H A P I T R E I I

ONDES DELIVREES PAR LES CONVERTISSEURS STATIQUES

Les ondes délivrées par les convertisseurs statiques doivent présenter les deux caractéristiques suivantes :

- constituer une approximation aussi bonne que possible de la sinusoïde car les harmoniques produisent des effets nuisibles,
- présenter un fondamental de fréquence désirée dont on puisse faire varier l'amplitude de façon continue.

Le problème est technologiquement difficile à résoudre et c'est pour avoir voulu trop bien répondre à cette double contrainte que certains variateurs de vitesse pour moteur asynchrone se sont révélés trop onéreux.

Deux procédés de génération de forme d'onde approximant la sinusoïde sont, actuellement employés :

- *découpage d'une tension continue* par l'utilisation du procédé dit de *modulation de largeur des impulsions* (PWM dans la littérature anglo-saxonne) [130]. On peut ainsi obtenir des formes d'onde pour lesquelles les premiers harmoniques soient nuls, ou ont une valeur faible par rapport au fondamental. Ce procédé peut par exemple être utilisé dans les alimentations de secours de manière à obtenir une forme d'onde pure, ce

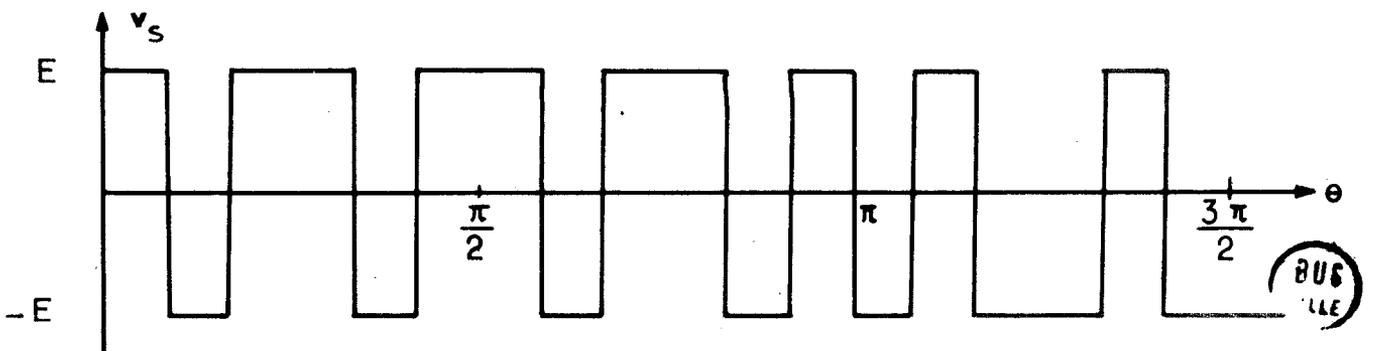


FIGURE 11

qui facilite le filtrage car les harmoniques restants sont alors d'ordre élevé.

- synthétisation d'une onde quasi sinusoïdale soit par paliers d'amplitudes

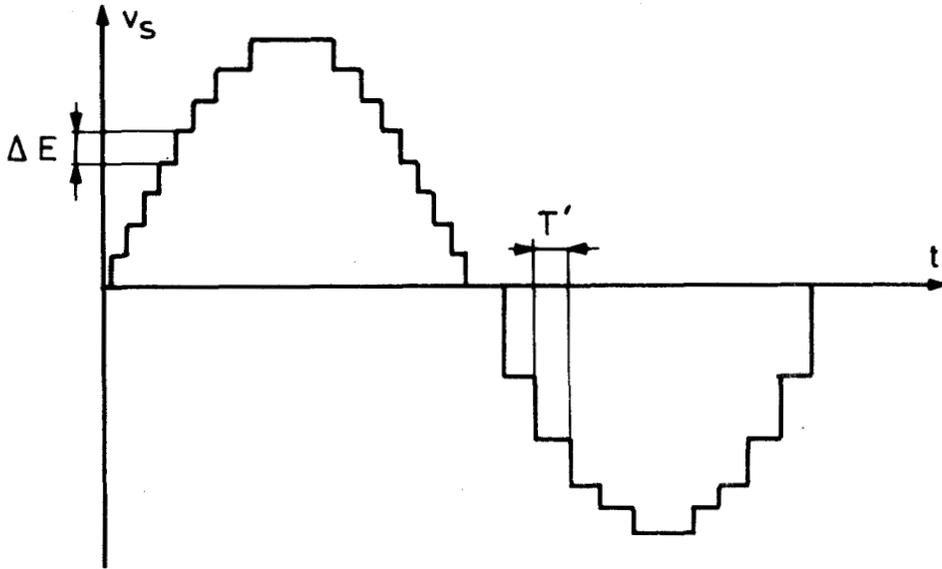


FIGURE 12

ne différant que d'une constante ΔE mais de durée variable (alternance positive de la figure 12), soit par des paliers d'amplitudes variables mais de durée fixe T' (alternance négative de la figure 12).

Nous considérerons ici comme paramètre caractéristique d'une onde le *résidu harmonique* ρ rapporté à la valeur efficace du fondamental défini par :

$$\rho = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} v_k^2}}{V_1} = \frac{\sqrt{V^2 - V_1^2}}{V_1}$$

V étant la valeur efficace de l'onde considérée,
 V_1 la valeur efficace de son fondamental,
 V_k la valeur efficace de l'harmonique de rang K .

I - MODULATION DE LARGEUR DES IMPULSIONS. PROCÉDES DE MODULATION

La modulation de largeur d'impulsions consiste à découper le signal continu en un certain nombre d'impulsions bistables ou tristables de largeur variable.

I.1. Onduleurs utilisés

Ces impulsions peuvent être obtenues à partir de l'un des deux schémas de principe suivant :

a) *Impulsions tristables*

Elles sont obtenues par le montage de principe suivant (fig.13) :

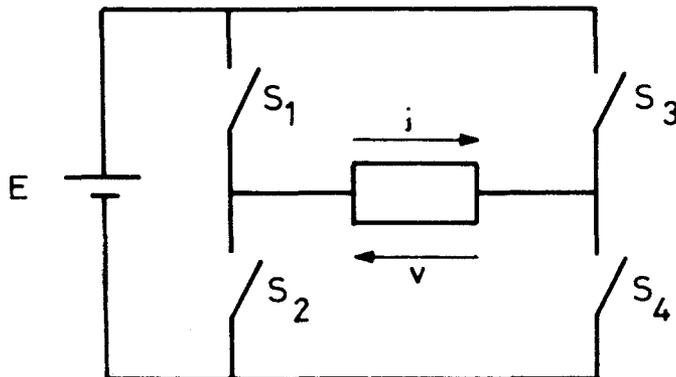


FIGURE 13

dans lequel $S_1 = \overline{S_2}$ et $S_3 = \overline{S_4}$, les interrupteurs S_i représentant le thyristor muni de son dispositif d'extinction et de sa diode de récupération.

Le tableau de vérité d'un tel dispositif se réduit aux quatre cas suivants compte tenu des remarques précédentes :

S_1	S_2	S_3	S_4	v
1	0	1	0	0
1	0	0	1	E
0	1	1	0	-E
0	1	0	1	0

un tel système est appelé onduleur en pont et il permet de générer des formes d'onde de pulsation fondamentale ω ayant l'allure représentée sur la figure 14 :

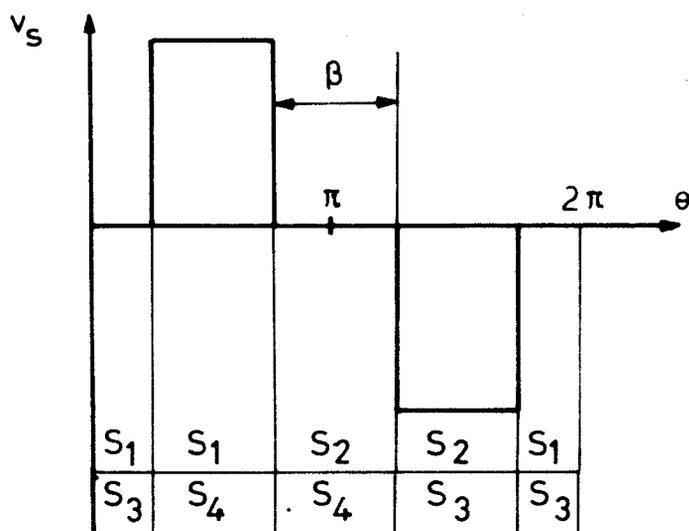


FIGURE 14

b) Impulsions bistables

Elles sont obtenues à l'aide d'onduleur à point milieu soit côté sortie, soit côté entrée (figure 15)

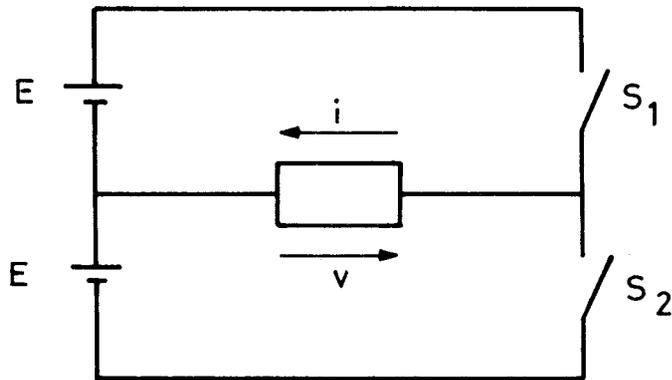


FIGURE 15

Ici $S_1 = \overline{S_2}$.

Lorsque $S_1 = 1$, $v = E$; lorsque $S_1 = 0$, $v = -E$. Un tel montage permet de générer des signaux dont la forme d'onde a l'allure représentée sur la figure 16.

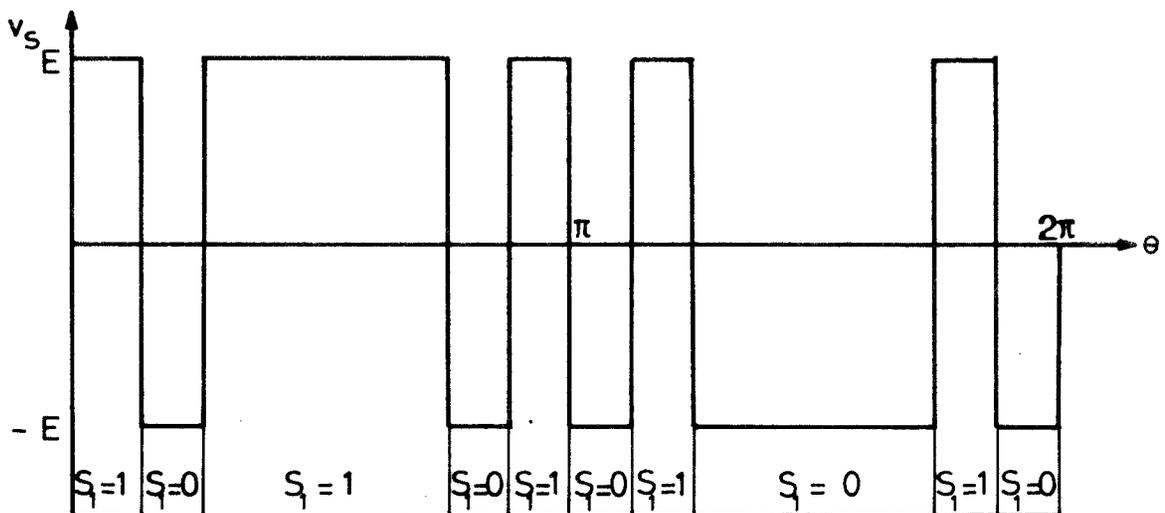


FIGURE 16

Le nombre d'impulsions est variable et dépend de la qualité de l'onde souhaitée. La largeur des impulsions est :

- soit déterminée une fois pour toute lorsque l'on désire éliminer certains harmoniques,

- soit obtenue par modification de la profondeur de modulation des impulsions qui s'effectue par la variation de l'amplitude de l'onde de référence (rectangulaire, trapézoïdale ou sinusoïdale) qui est superposée à une porteuse généralement triangulaire.

Le nombre d'impulsions par période dépend de la fréquence de commutation de l'onduleur. Pour des dispositifs devant avoir une gamme étendue de variation de fréquence, on peut prévoir plusieurs fonctions de modulation et les commuter.

I.2. Ondes formées d'impulsions tristables. Relations générales

Considérons les ondes de la figure 17 correspondant à un nombre n' pair ou impair d'impulsions par alternance.

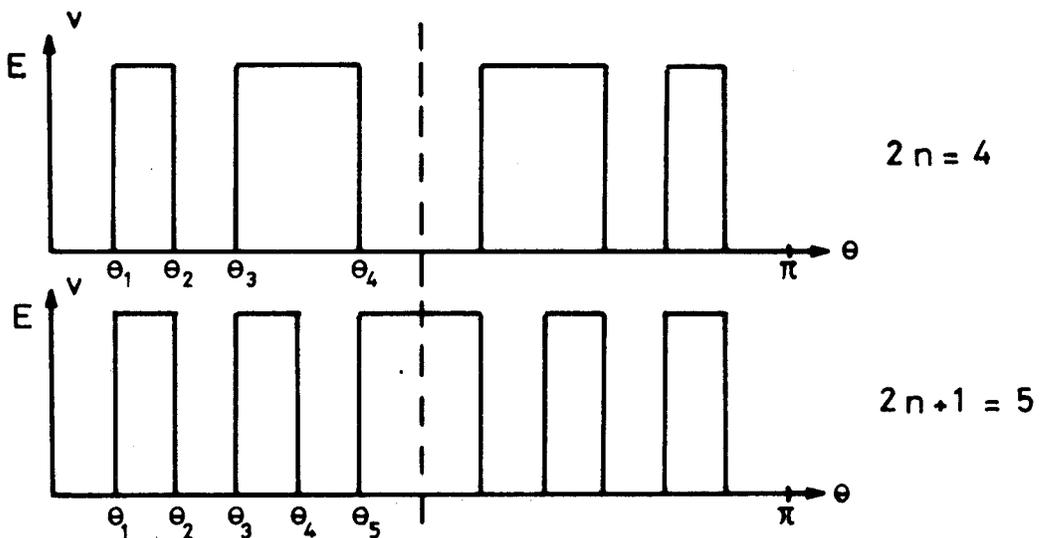


FIGURE 17

- Si n' est pair et égal à $2n$

Compte tenu de la symétrie de l'onde considérée sa valeur efficace est donnée par :

$$V^2 = \frac{4}{2\pi} \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} E^2 d\theta + \int_{\theta_3}^{\theta_4} E^2 d\theta + \dots + \int_{\theta_{2n-1}}^{\theta_{2n}} E^2 d\theta \right\}$$

donc

$$V = E \sqrt{\frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n (\theta_{2i} - \theta_{2i-1})}$$

et l'amplitude de l'harmonique de rang $(2K+1)$ est donné par :

$$V_{2K+1}'m = \frac{8}{2\pi} \left\{ \int_{\theta_1}^{\theta_2} E \sin(2K+1)\theta d\theta + \int_{\theta_3}^{\theta_4} E \sin(2K+1)\theta d\theta + \dots + \int_{\theta_{2n-1}}^{\theta_{2n}} E \sin(2K+1)\theta d\theta \right\}$$

$$V_{2K+1}'m = \frac{4}{\pi} \frac{E}{2K+1} \sum_{i=1}^n (\cos(2K+1)\theta_{2i-1} - \cos(2K+1)\theta_{2i})$$

d'où sa valeur efficace :

$$V_{2K+1} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{E}{2K+1} \sum_{i=1}^n (\cos(2K+1)\theta_{2i-1} - \cos(2K+1)\theta_{2i})$$

- Si n' est impair et égal à $2n+1$

Les relations précédentes restent valables à condition de remplacer n par $n+1$ et de poser $\theta_{2n+2} = \frac{\pi}{2}$

On peut profiter du choix arbitraire des θ_i pour éliminer par exemple l'harmonique de rang $(2K+1)$. Il suffit de choisir les θ_i tels que :

$$\sum_{i=1}^n (\cos(2p + 1) \theta_{2i-1} - \cos(2p + 1) \theta_{2i}) = 0$$

De sorte qu'avec $2n$ degrés de liberté, il est possible de se fixer $2n$ contraintes. Généralement les équations obtenues sont non linéaires et doivent être résolues numériquement. $|121||122|$.

Ainsi dans le cas $2n = 2$, si l'on désire éliminer les harmoniques de rang 5 et 7, il suffira de choisir :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 15,4226^\circ \\ \theta_2 &= 87,3949^\circ \end{aligned}$$

Dans le cas $2n + 1 = 5$, si l'on désire éliminer les harmoniques de rang 5, 7, 11, 13 et 17, il suffira de choisir :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 11,3490^\circ & \theta_4 &= 34,8708^\circ \\ \theta_2 &= 17,2616^\circ & \theta_5 &= 37,2567^\circ \\ \theta_3 &= 23,8017^\circ & & \end{aligned}$$

I.3. Procédés de modulation utilisés pour obtenir des ondes formées d'impulsions tri-stables

Généralement dans les onduleurs alimentant des moteurs asynchrones on ne réalise pas l'élimination d'un certain nombre d'harmoniques déterminés à l'avance mais on utilise pour déterminer les θ_i la technique de la modulation.

I.3.1. Modulation par signaux triangulaires et référence rectangulaire

L'onde modulatrice est triangulaire, unidirectionnelle, d'amplitude E_m et de fréquence $(2n + 1)$ fois celle de l'onde de référence rectangulaire d'amplitude E_r (figure 18). $|124||125|$.

On règle la valeur de la tension v par action sur E_r .

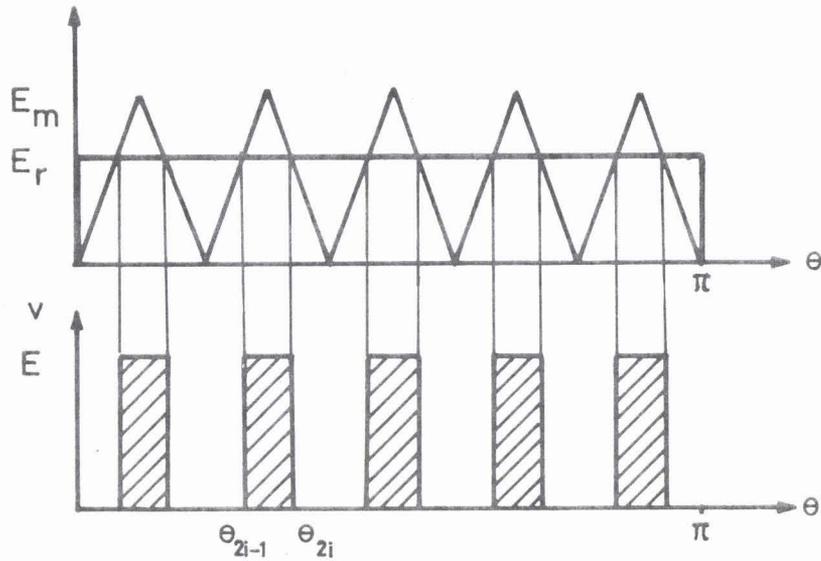


FIGURE 18

La valeur efficace de v est donnée par :

$$V^2 = \frac{4}{2\pi} \left\{ n \int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \left(2 - \frac{E_r}{E_m} \right) E^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{E_r}{E_m} E^2 d\theta \right\}$$

soit, après simplifications :

$$V = E \sqrt{1 - \frac{E_r}{E_m}}$$

L'amplitude de l'harmonique de rang $(2K+1)$ est donnée par :

$$V_{2K+1, m} = \frac{4}{2\pi} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{\pi i}{2n+1} + \frac{\pi}{2(2n+1)} \frac{E_r}{E_m}}^{\frac{\pi(i+1)}{2n+1} - \frac{\pi}{2(2n+1)} \frac{E_r}{E_m}} E \sin(2K+1)\theta d\theta + \int_{\frac{n\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{2(2n+1)} \frac{E_r}{E_m}}^{\frac{\pi}{2}} E \sin(2K+1)\theta d\theta \right\}$$

On obtient après sommations et simplifications détaillées dans

l'Annexe 7 :

$$V_{2K+1} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{E}{2K+1} \frac{\sin \frac{2K+1}{2n+1} \left(1 - \frac{E_r}{E_m} \right) \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{2K+1}{2n+1} \frac{\pi}{2}}$$

Lorsque le nombre d'impulsions est élevé, en remplaçant les sinus par le premier terme de leur développement limité, on obtient :

$$V_{2K+1} \approx \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{E}{2K+1} \left(1 - \frac{E_r}{E_m}\right)$$

de sorte que l'on peut réaliser simplement la commande $\frac{V_1}{E} = \text{constante}$ en jouant sur le niveau de la référence E_r .

L'erreur relative commise sur le fondamental par cette approximation :

$$\frac{\Delta V_1}{V_1} \% = 100 \frac{\sin \left(1 - \frac{E_r}{E_m}\right) \frac{\pi}{2n+1} - \left(1 - \frac{E_r}{E_m}\right)}{\left(1 - \frac{E_r}{E_m}\right)}$$

reste faible même lorsque le nombre d'impulsions par alternance est faible. Dès que $n = 7$ l'erreur relative ne dépasse pas 1%, ce qui est tout à fait convenable comparativement à la précision des déclenchements.

Le résidu harmonique ρ est donné par :

$$\rho = \frac{\sqrt{V^2 - V_1^2}}{V_1} = \sqrt{\left(1 - \frac{E_r}{E_m}\right) \frac{\pi^2}{8} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2(2n+1)}}{\sin^2 \frac{\pi}{2(2n+1)} \left(1 - \frac{E_r}{E_m}\right)} - 1}$$

Lorsque n est grand, ρ peut s'écrire :

$$\rho \approx \sqrt{\frac{\pi^2}{8} \frac{1}{1 - E_r/E_m} - 1}$$

Même pour n égal à 3, les courbes (figure 19) donnant ρ en fonction de E_r/E_m sont peu différentes de celle qu'on obtiendrait pour n infini. On voit que ρ est très important et croît, tendant vers l'infini, lorsque le rapport E_r/E_m tend vers 1.

Ce type de modulation permet de faire varier de façon simple la valeur efficace du fondamental car la commande est sensiblement linéaire même pour un faible nombre d'impulsions par demi-période. Par contre le résidu harmonique de ce type de modulation est très important.

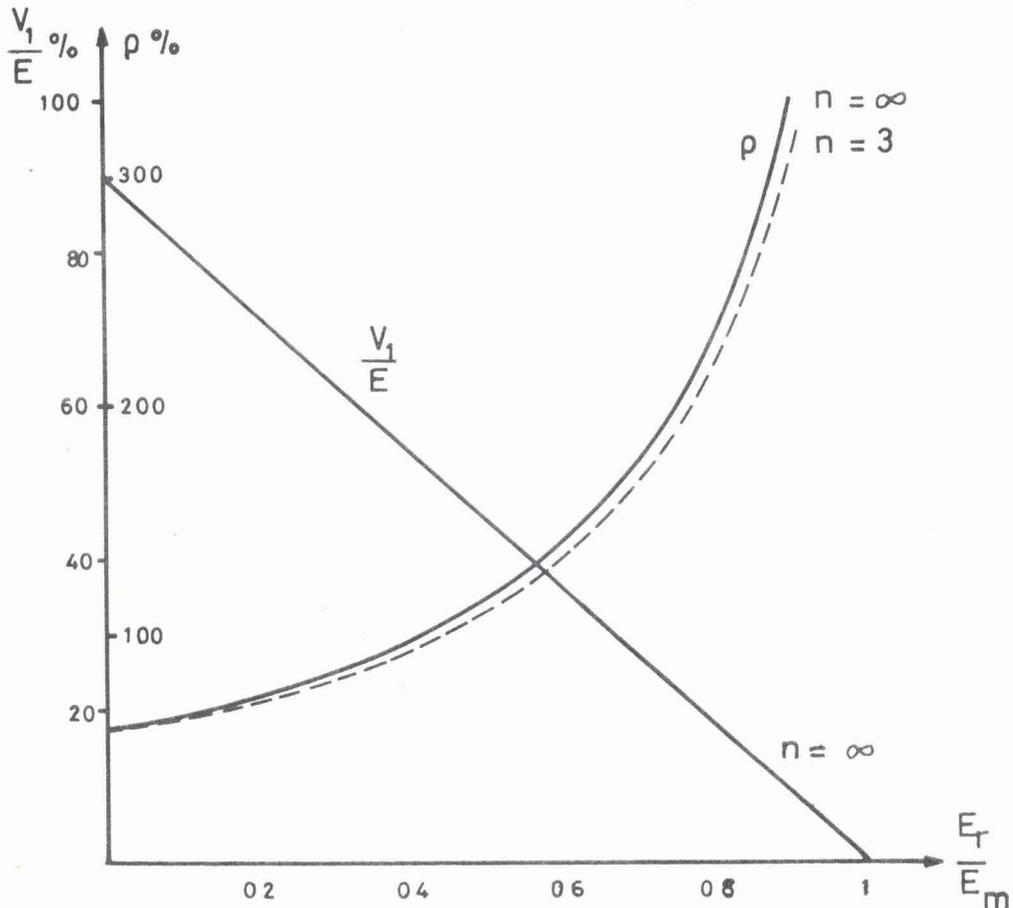


FIGURE 19

I.3.2. Modulation par des signaux triangulaires et référence en gradins |126|

B. MOKRITSKY |123| et J.J. POLLACK |127| utilisent une modulation pour laquelle la largeur des impulsions est déterminée par les intersections d'une sinusoïde approximée par $2n+1$ paliers d'égale largeur avec $2n+1$ signaux triangulaires d'amplitude E_m pour chaque alternance de v (figure 20). La largeur des impulsions est alors proportionnelle à l'aire de la sinusoïdale qu'elle approxime.
 - L'aire de cette portion de sinusoïde est (figure 21) :

$$A_i = \int_{\theta_{2i-1}}^{\theta_{2i}} \sin \theta \, d\theta = \cos \theta_{2i-1} - \cos \theta_{2i}$$

Pour l'impulsion centrale, dans le cas d'un nombre impair d'impulsions par alternance, on obtient :

$$A = 2 \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta = 2 \cos \theta$$

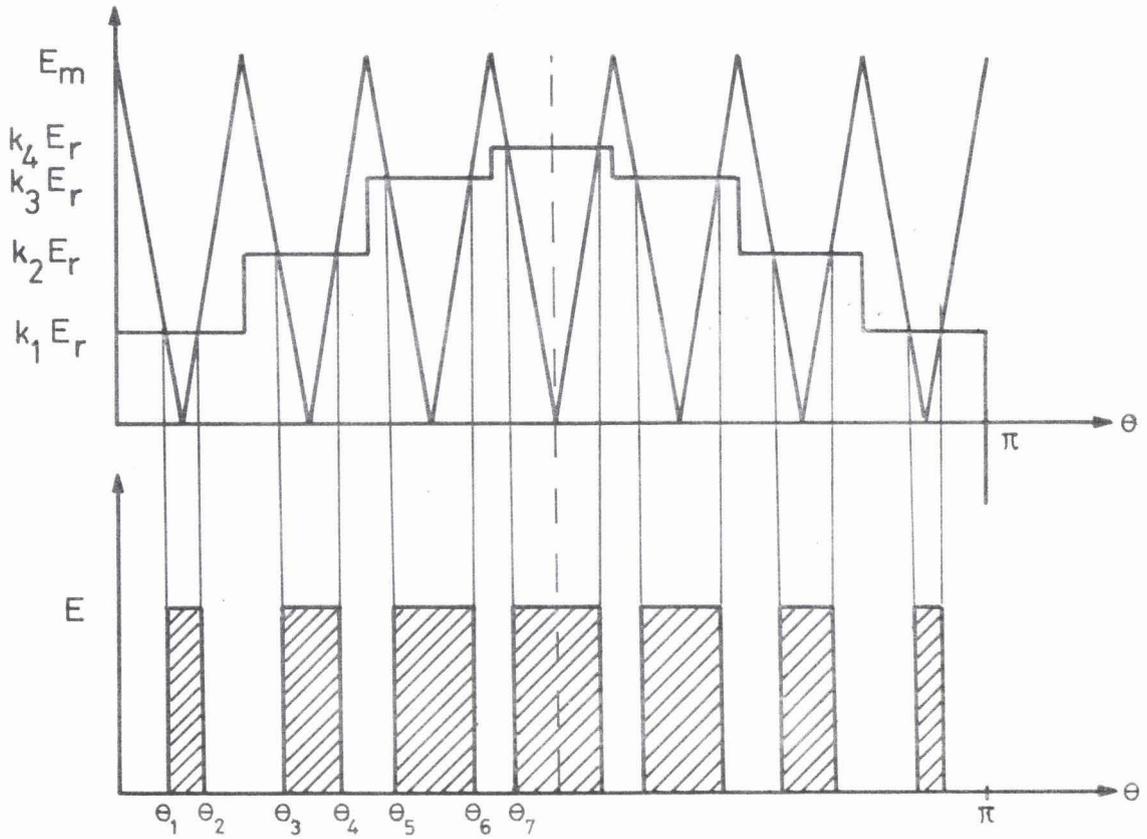


FIGURE 20

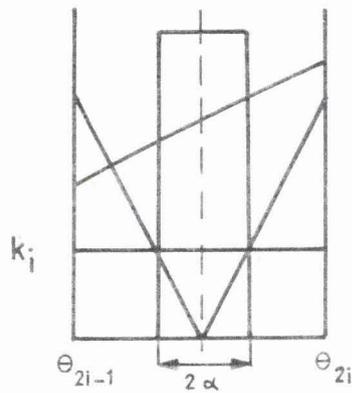


FIGURE 21

Si l'on choisit le coefficient de proportionnalité de sorte que l'aire \mathcal{A} soit égale à l'unité, on obtient alors :

$$K_1 = \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_{n+1}} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{2n+1}}{2 \cos \frac{n\pi}{2n+1}} = \sin \frac{\pi}{2(2n+1)}$$

$$K_2 = \frac{A_2}{A_{n+1}} = \frac{\cos \frac{\pi}{2n+1} - \cos \frac{2\pi}{2n+1}}{2 \cos \frac{n\pi}{2n+1}} = \sin \frac{3\pi}{2(2n+1)}$$

$$K_n = \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{\cos \frac{(n-1)\pi}{2n+1} - \cos \frac{n\pi}{2n+1}}{2 \cos \frac{n\pi}{2n+1}} = \sin \frac{(2n-1)\pi}{2(2n+1)}$$

$$K_{n+1} = 1$$

D'où les valeurs de K_i pour les premières valeurs de $2n+1$

K_i	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
$2n+1$					
3	0,5	1			
5	0,309 017	0,809 018	1		
7	0,222 521	0,623 490	0,900 968	1	
9	0,173 647	0,500 000	0,766 043	0,939 691	1

TABLEAU II

- Chaque impulsion est centrée sur un multiple impair de $\frac{\pi}{2(2n+1)}$. On obtient :

$$\theta_{2i+1} = \frac{\pi(2i+1)}{2(2n+1)} - \frac{\pi}{2(2n+1)} \frac{E_r}{E_m} K_{i+1}$$

$$\theta_{2i+2} = \frac{\pi(2i+1)}{2(2n+1)} + \frac{\pi}{2(2n+1)} \frac{E_r}{E_m} K_{i+1}$$

La valeur efficace de l'harmonique de rang $(2K+1)$ de la tension v est donnée par :

$$\begin{aligned}
 V_{2K+1} &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{E}{2K+1} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \{ \cos(2K+1)\theta_{2i+1} - \cos(2K+1)\theta_{2i+2} \} + \cos(2K+1)\theta_{2n+1} \right\} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{E}{2K+1} \left\{ 2 \sum_{i=0}^{n-1} \sin \frac{(2K+1)(2i+1)}{2n+1} \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{(2K+1)}{2n+1} \frac{\pi}{2} \frac{E_r}{E_m} K_{i+1} \right. \\
 &\quad \left. + \sin (2K+1) \frac{\pi}{2} \sin \frac{2K+1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \frac{E_r}{E_m} K_{n+1} \right\}
 \end{aligned}$$

et compte tenu de la valeur des coefficients K_{i+1}

$$\begin{aligned}
 V_{2K+1} &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{E}{2K+1} \left\{ 2 \sum_{i=0}^{n-1} \sin \frac{(2K+1)(2i+1)}{2n+1} \frac{\pi}{2} \sin \left[\frac{2K+1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \frac{E_r}{E_m} \sin \left(\frac{2i+1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \sin (2K+1) \frac{\pi}{2} \sin \frac{2K+1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \frac{E_r}{E_m} \right\}
 \end{aligned}$$

En particulier le fondamental a pour valeur :

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} E \left\{ 2 \sum_{i=0}^{n-1} \sin \frac{2i+1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \sin \left[\frac{\pi}{2(2n+1)} \frac{E_r}{E_m} \sin \left(\frac{2i+1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \sin \frac{\pi}{2(2n+1)} \frac{E_r}{E_m} \right\}
 \end{aligned}$$

On peut alors remplacer les sinus par l'approximation du premier ordre :

$$V_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} E \left\{ 2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\pi}{2(2n+1)} \frac{E_r}{E_m} \sin^2 \frac{(2i+1)\pi}{2n+1} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2(2n+1)} \frac{E_r}{E_m} \right\}$$

On obtient après simplifications :

$$V_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} E \frac{\pi}{4} \frac{E_r}{E_m}$$

Dans ce cas encore la commande est linéaire.

La figure 22 montre d'abord comment évolue le rapport $\frac{V_1}{E}$ en fonction

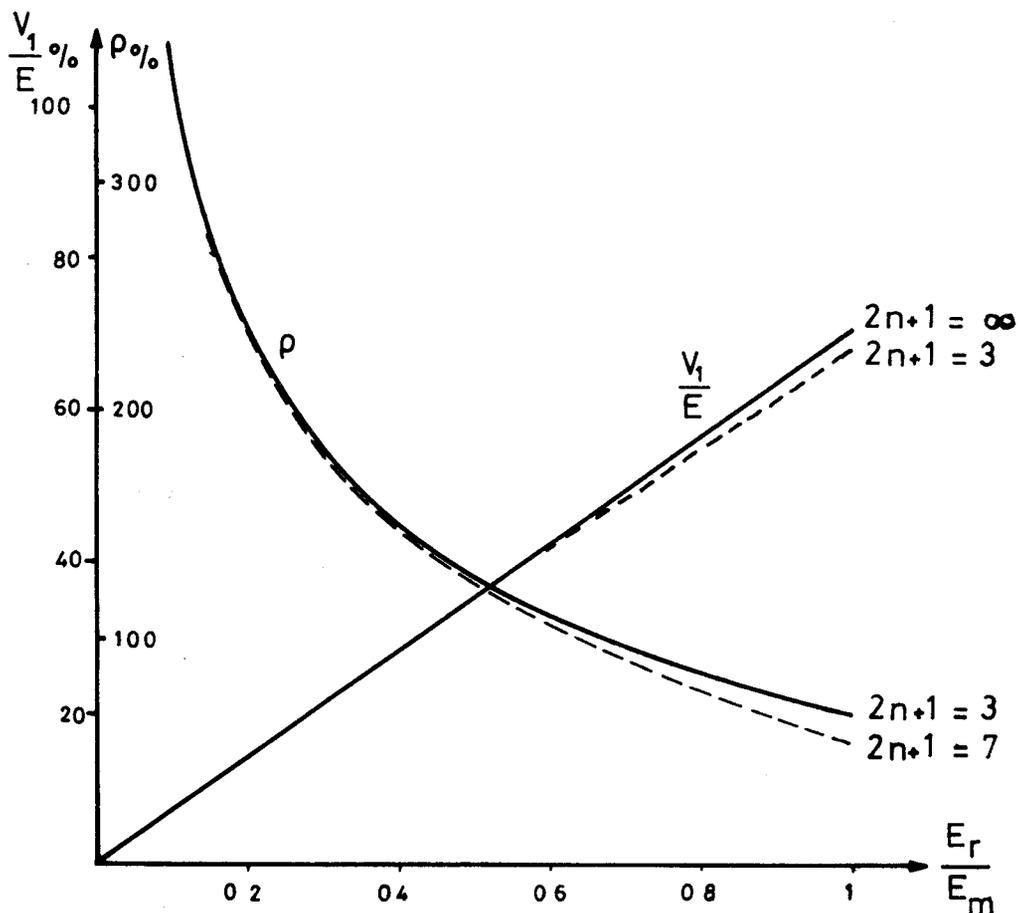


FIGURE 22

de $\frac{E_r}{E_m}$ pour n infini. La comparaison avec la courbe tracée pour $2n+1 = 3$ montre que l'approximation sur V_1 est bonne quelque soit n .

Les courbes de cette figure montrent comment évolue le résidu harmonique en fonction de $\frac{E_r}{E_m}$. Comme précédemment ce résidu harmonique a une valeur élevée, et croît quand le fondamental diminue.

I.3.3. Modulation par signaux triangulaires et référence sinusoïdale

Parmi les signaux de référence utilisés, la sinusoïde est considérée par divers auteurs [128] [129] comme celui conduisant au taux d'harmonique le plus réduit.

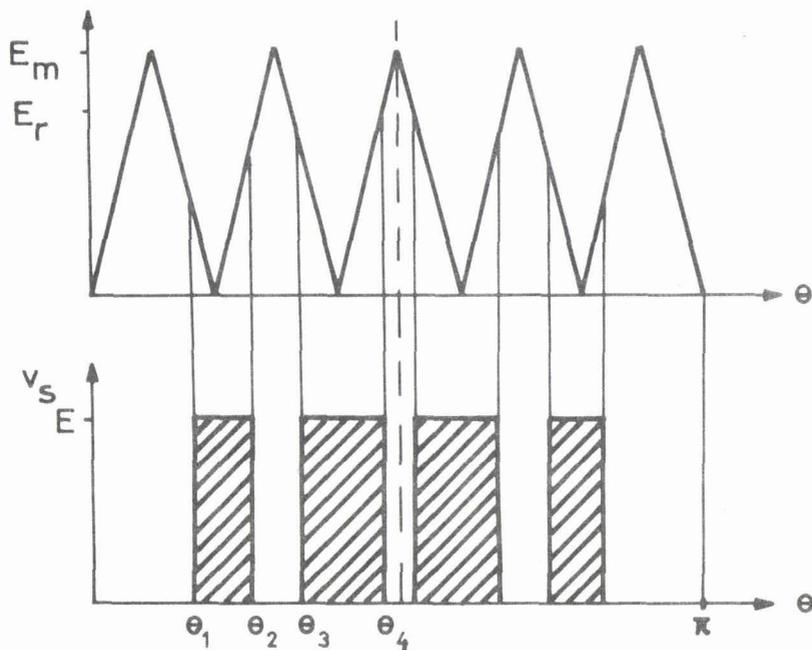


FIGURE 23

La largeur des impulsions de sortie (figure 23) ne demeure pas constante et la détermination des θ_1 ne peut s'effectuer de manière analytique.

Nous proposons ci-dessous une méthode permettant de déterminer avec une assez bonne précision ces différents angles de commutation même lorsque le nombre $(2n+1)$ de triangles par alternance est faible.

a) Détermination des angles θ_i lorsque i est impair (figure 24)

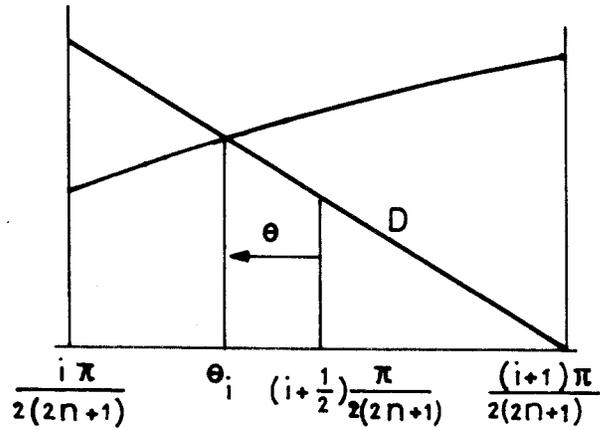


FIGURE 24

L'angle θ_i est alors compris entre $\frac{i\pi}{2(2n+1)}$ et $\frac{(i+1)\pi}{2(2n+1)}$

L'équation de la droite D a pour équation :

$$y = -\frac{2(2n+1)}{\pi} E_m x + (i+1)E_m$$

Pour $x = \theta_i = \theta + (i + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{2(2n+1)}$ nous obtenons :

$$E_r \sin(\theta + \alpha(i)) = -\frac{2(2n+1)}{\pi} E_m (\theta) + \frac{1}{2} E_m$$

$$\text{avec } \alpha(i) = (i + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{2(2n+1)}$$

d'où, en développant et en confondant $\sin \theta$ avec θ et $\cos \theta$ avec 1 :

$$\theta = \frac{\frac{1}{2} E_m - E_r \sin \alpha(i)}{\frac{2(2n+1)}{\pi} E_m + E_r \cos \alpha(i)}$$

ce qui donne

$$\theta_i = \alpha(i) + \frac{\frac{1}{2} - \frac{E_r}{E_m} \sin \alpha(i)}{\frac{2(2n+1)}{\pi} + \frac{E_r}{E_m} \cos \alpha(i)}$$

b) Détermination des angles θ_i lorsque i est pair

On posera comme précédemment : $\theta_i = \theta + \alpha(i)$

L'équation de la droite D' est alors :

$$y = \frac{2(2n+1)}{\pi} E_m x - i E_m$$

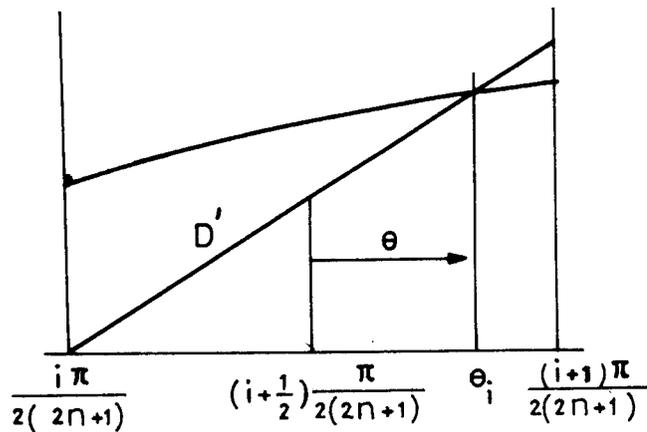


FIGURE 25

Pour $x = \theta + \alpha(i)$ nous obtenons :

$$E_r \sin(\theta + \alpha(i)) = \frac{2(2n+1)}{\pi} E_m \theta + \frac{1}{2} E_m$$

c'est-à-dire en développant :

$$\theta = \frac{\frac{E_r}{E_m} \sin \alpha(i) - \frac{1}{2}}{\frac{2(2n+1)}{\pi} - \frac{E_r}{E_m} \cos \alpha(i)}$$

soit finalement :

$$\theta_{2K+1} = (2K+3) \frac{\pi}{2(2n+1)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{E_r}{E_m} \sin \left((2K+\frac{3}{2}) \frac{\pi}{2(2n+1)} \right)}{\frac{2(2n+1)}{\pi} + \frac{E_r}{E_m} \cos \left((2K+\frac{3}{2}) \frac{\pi}{2(2n+1)} \right)}$$

$$\theta_{2K+2} = (2K+\frac{5}{2}) \frac{\pi}{2(2n+1)} + \frac{\frac{E_r}{E_m} \sin \left((2K+\frac{5}{2}) \frac{\pi}{2(2n+1)} \right) - \frac{1}{2}}{\frac{2(2n+1)}{\pi} - \frac{E_r}{E_m} \cos \left((2K+\frac{5}{2}) \frac{\pi}{2(2n+1)} \right)}$$

La figure 26 montre comment évolue les différents angles θ_i pour les premières valeurs du nombre $2n+1$ de triangles par alternance.

La figure 27 montre que la valeur efficace relative $\frac{V_1}{E}$ du fondamental varie peu avec le nombre $(2n+1)$ de triangles de modulation et que la commande est sensiblement linéaire. Cette même figure montre comment évolue le résidu harmonique en fonction de $\frac{E_r}{E_m}$. Comme précédemment ce résidu harmonique est élevé lorsque la valeur du fondamental devient faible.

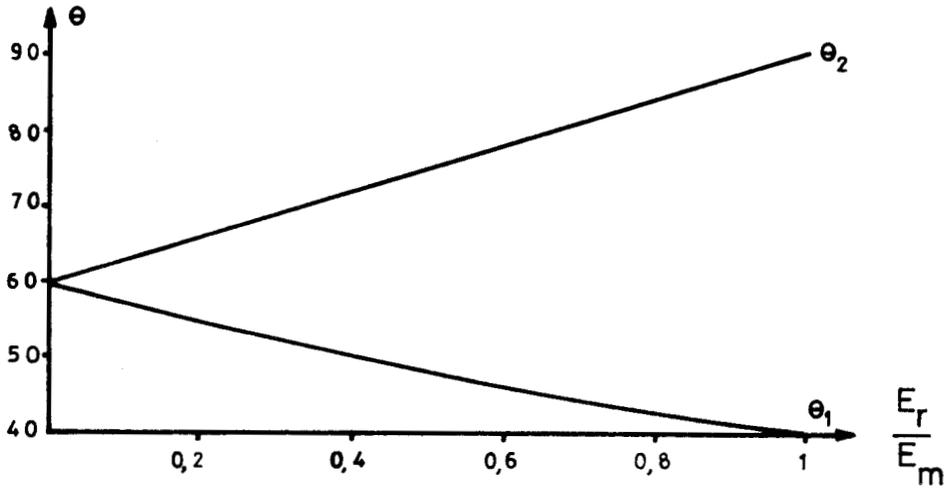
I.3.4. Comparaison des modes de modulation

Les courbes des figures 19, 22, 27 donnent :

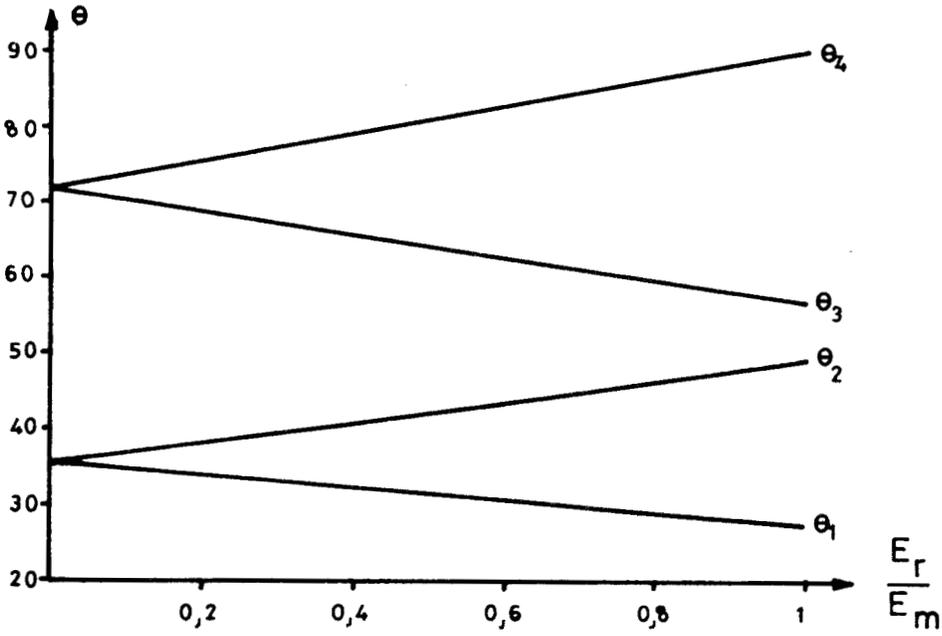
$$V_1/E = f(E_r/E_m)$$

et le résidu harmonique

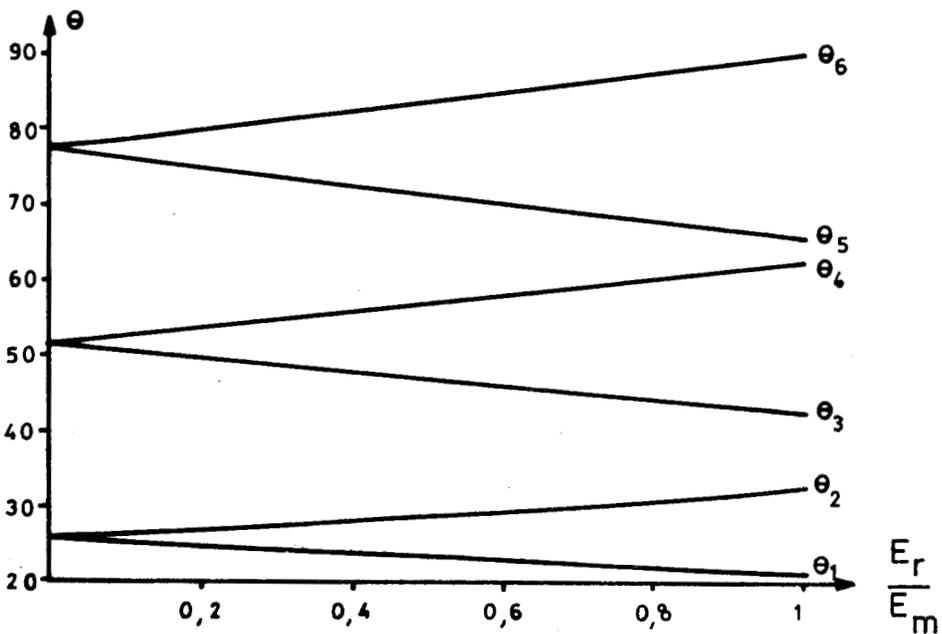
$$\rho = g(E_r/E_m)$$



$2n+1 = 3$



$2n+1 = 5$



$2n+1 = 7$

FIGURE 26

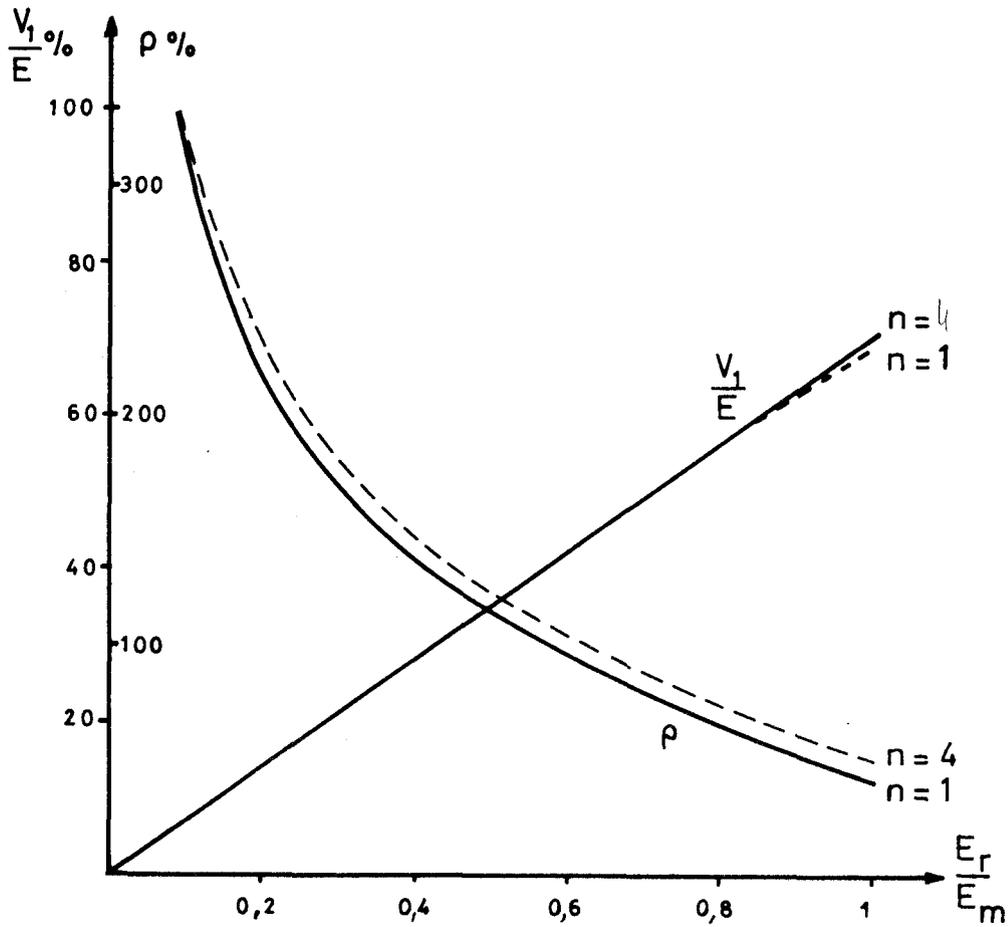


FIGURE 27

dans les trois cas de modulation décrits par P.H. NAYAK et R.G. HOFT [124]. Elles sont sensiblement identiques et montrent que les faibles valeurs du fondamental V_1 sont obtenues au prix d'un résidu harmonique très élevé.

Nous avons pu dans les trois cas établir une expression analytique simple des divers angles θ_i de commutation et montrer que la caractéristique de commande $V_1/E = f(E_r/E_m)$ est très sensiblement linéaire.

Surtout, on voit que la qualité de la tension v dépend assez peu du nombre de créneaux par alternance.

1.4. Ondes formées d'impulsions bistables. Relations générales [130]

Les signaux bistables ont la forme d'onde rappelée sur la figure

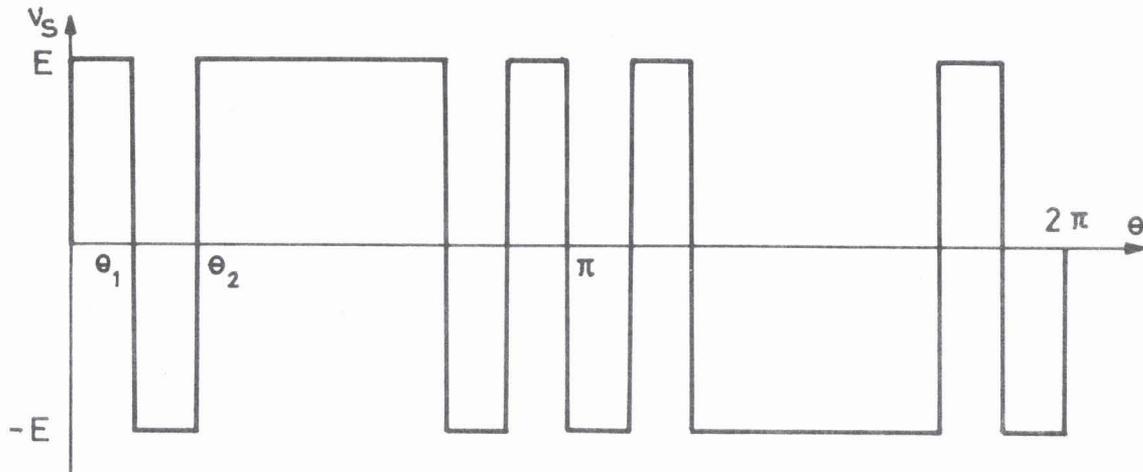


FIGURE 28

La valeur efficace d'un tel signal est :

$$V = E$$

et la valeur efficace de l'harmonique de rang $(2K+1)$ calculée par :

$$V_{2K+1} = \frac{4}{\pi\sqrt{2}} \left\{ \int_0^{\theta_1} E \sin(2K+1)\theta \, d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} E \sin(2K+1)\theta \, d\theta + \dots + (-1)^M \int_{\theta_M}^{\frac{\pi}{2}} E \sin(2K+1)\theta \, d\theta \right\}$$

a pour valeur

$$V_{2K+1} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{E}{2K+1} \left\{ 1 - 2 \sum_{i=1}^M (-1)^{i+1} \cos(2K+1)\theta_i \right\}$$

On peut ici encore profiter du choix arbitraire des θ_i pour éliminer par exemple l'harmonique de rang $(2p+1)$. Il suffit de choisir les θ_i tels que :

$$1 - 2 \sum_{i=1}^M (-1)^{i+1} \cos(2p+1)\theta_i = 0$$

de sorte qu'avec $2n$ degrés de liberté, on peut éliminer $2n$ harmoniques.

D'après B.D. BEDFORD et R.G. HOFT [113] pour éliminer les harmoniques de rang 5 et 7, il faut

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 16,2448^\circ \\ \theta_2 &= 22,0630^\circ \end{aligned}$$

les harmoniques de rang 5, 7, 11, 13, 17, il faut

$$\theta_1 = 6,7952^\circ$$

$$\theta_2 = 17,2962^\circ$$

$$\theta_3 = 21,0252^\circ$$

$$\theta_4 = 34,6566^\circ$$

$$\theta_5 = 35,9840^\circ$$

I.5. Procédés de modulation utilisés pour obtenir des ondes formées d'impulsions bistables

Généralement, on ne réalise pas l'élimination de certains harmoniques déterminés à l'avance mais on utilise comme dans le cas des ondes formées d'impulsions tristables les techniques de modulation.

Nous nous limiterons au cas d'une modulation par signaux triangulaires et d'une référence rectangulaire (figure 29)

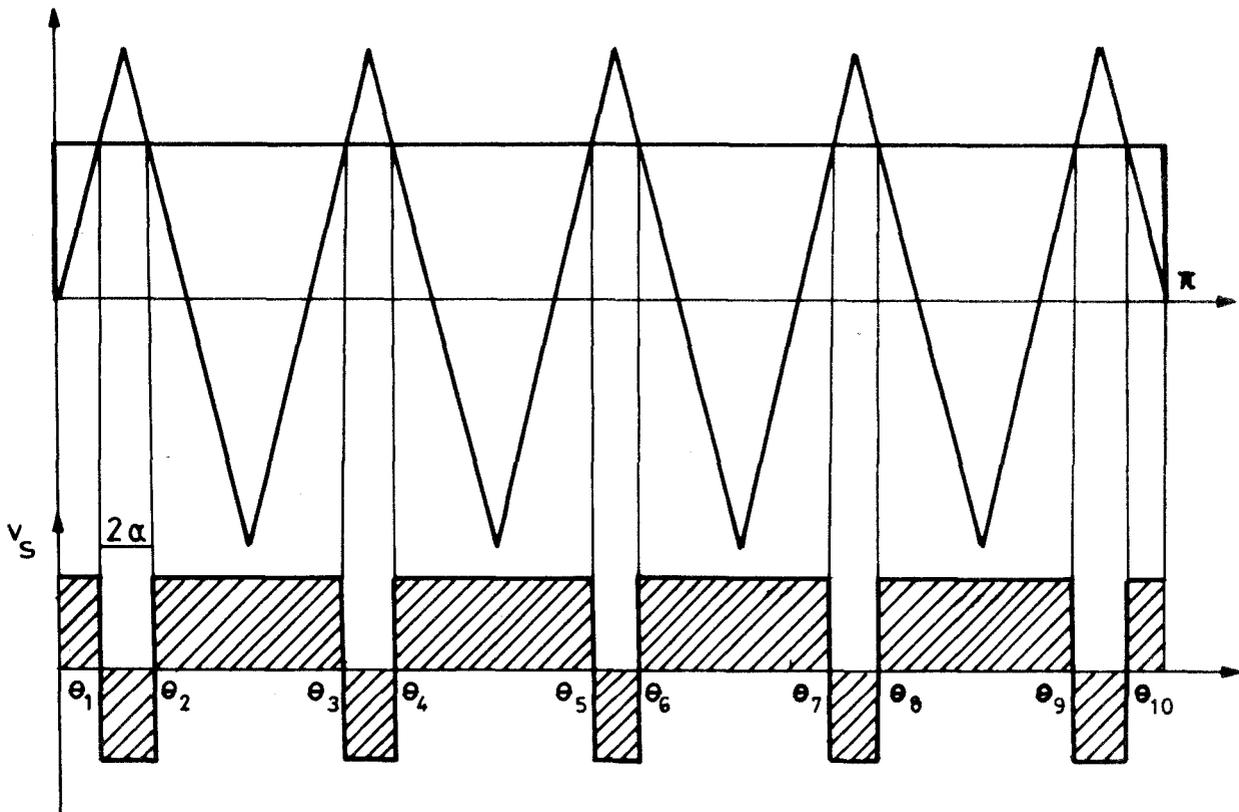


FIGURE 29

Lorsqu'il y a $(2n+1)$ alternances positives de l'onde modulatrice par alternance positive de la référence, la droite D a pour équation :

$$y = E_m \frac{2(4n+1)}{\pi} x$$

L'intersection avec $y = E_r$ a lieu pour θ tel que :

$$E_r = E_m \frac{2(4n+1)}{\pi} \theta \quad \text{soit} \quad \theta = \frac{\pi}{2(4n+1)} \frac{E_r}{E_m}$$

D'où la demi largeur d'une impulsion :

$$\alpha = \frac{\pi}{2(4n+1)} - \frac{\pi}{2(4n+1)} \frac{E_r}{E_m} = \frac{\pi}{2(4n+1)} \left(1 - \frac{E_r}{E_m}\right)$$

La valeur efficace de l'harmonique de rang $(2K+1)$ est donné par :

$$V_{2K+1} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{E}{2K+1} \left\{ 1 - 2 \sum_{i=1}^M (-1)^{i+1} \cos(2K+1)\theta_i \right\}$$

soit pour le fondamental :

$$V_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} E \left\{ 1 - 2 \left[(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) + (\cos \theta_3 - \cos \theta_4) + \dots + (\cos(\theta_{2n-1}) - \cos \theta_{2n}) \right. \right. \\ \left. \left. + (\cos \theta_{2n+1} - \cos \frac{\pi}{2}) \right] \right\}$$

Or :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\pi}{2(4n+1)} - \alpha & \theta_2 &= \frac{\pi}{2(4n+1)} + \alpha \\ \theta_3 &= \frac{5\pi}{2(4n+1)} - \alpha & \theta_4 &= \frac{5\pi}{2(4n+1)} + \alpha \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\ \theta_{2i+1} &= \frac{(4i+1)\pi}{2(4n+1)} - \alpha & \theta_{2i+2} &= \frac{(4i+1)\pi}{2(4n+1)} + \alpha \\ \theta_{2n+1} &= \frac{\pi}{2} - \alpha & & \end{aligned}$$

$$V_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} E \left\{ 1 - 4 \left[\sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \sin \frac{\theta_3 + \theta_4}{2} \sin \frac{\theta_4 - \theta_3}{2} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \sin \frac{\theta_{2n-1} + \theta_{2n}}{2} \sin \frac{\theta_{2n} - \theta_{2n-1}}{2} \right] - 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right\}$$

$$V_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} E \left\{ 1 - 4 \sin \alpha \left[\sin \frac{\pi}{2(4n+1)} + \sin \frac{5\pi}{2(4n+1)} + \dots + \sin \frac{(4-3)\pi}{2(4n+1)} \right] \right. \\ \left. - 2 \sin \alpha \right\}$$

$$V_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} E \left\{ 1 - 2 \sin \alpha \left(1 + 2 \frac{\sin \frac{n\pi}{4n+1} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2(2n+1)}}{\sin \frac{\pi}{4n+1}} \right) \right\}$$

soit après simplifications et remplacement de α par sa valeur :

$$\frac{V_1}{E} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left\{ 1 - 2 \frac{\sin \frac{\pi}{2(4n+1)} \left(1 - \frac{E_r}{E_m} \right)}{\sin \frac{\pi}{4n+1}} \cos \frac{\pi}{2(4n+1)} \right\}$$

Lorsque $\frac{E_r}{E_m} = 1$, $V_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} E$, ce qui correspond au fondamental du développement en série de Fourier d'un créneau. Lorsque $\frac{E_r}{E_m} = 0$, $V_1 = 0$ car dans ces conditions la fréquence du fondamental du signal obtenu est $(4n+1)$ fois celle du signal de référence.

En remplaçant les sinus et les cosinus par le premier terme de leur développement limité, on obtient :

$$\frac{V_1}{E} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{E_r}{E_m}$$

La figure 30 montre que cette approximation linéaire est justifiée même pour les valeurs faibles de v et de n .

Le tracé du résidu harmonique montre que celui-ci est plus important que lorsque l'on utilisait des signaux tristables.

Avec les autres types de modulation, on arriverait aux mêmes conclusions.

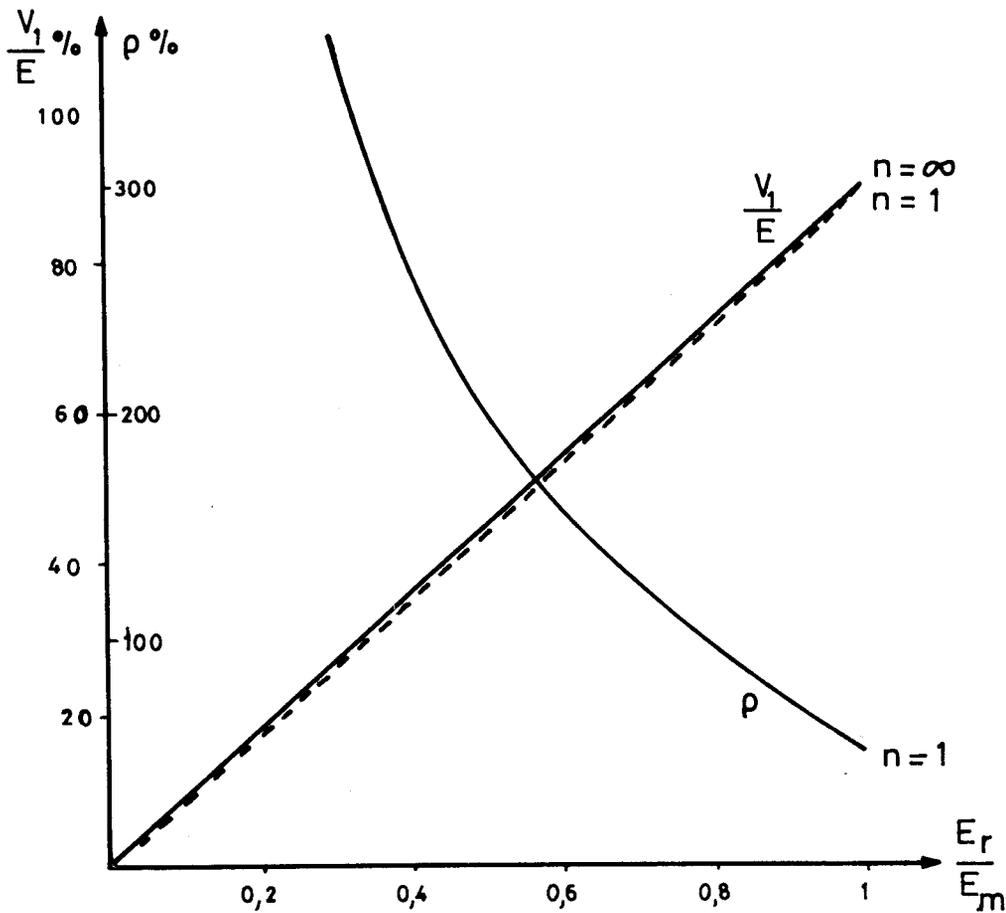


FIGURE 30

II - SYNTHETISATION D'ONDES QUASI-SINUSOIDALES

La synthétisation d'une onde sinusoïdale consiste à approximer une sinusoïde par une onde formée de paliers d'amplitude égale ou non et de durée égale ou non.

Ces formes d'ondes peuvent être obtenues par l'association d'onduleurs [113].

II.1. Synthétisation par paliers d'écartés en amplitude constants [131][132]

L'erreur commise en approxinant la sinusoïde par cette fonction en escalier (figure 31) d'amplitude $1E$ durant l'intervalle $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_{l+1}$ est

$$\varepsilon_{l+1} = (NE \sin \theta - 1 \cdot E)$$

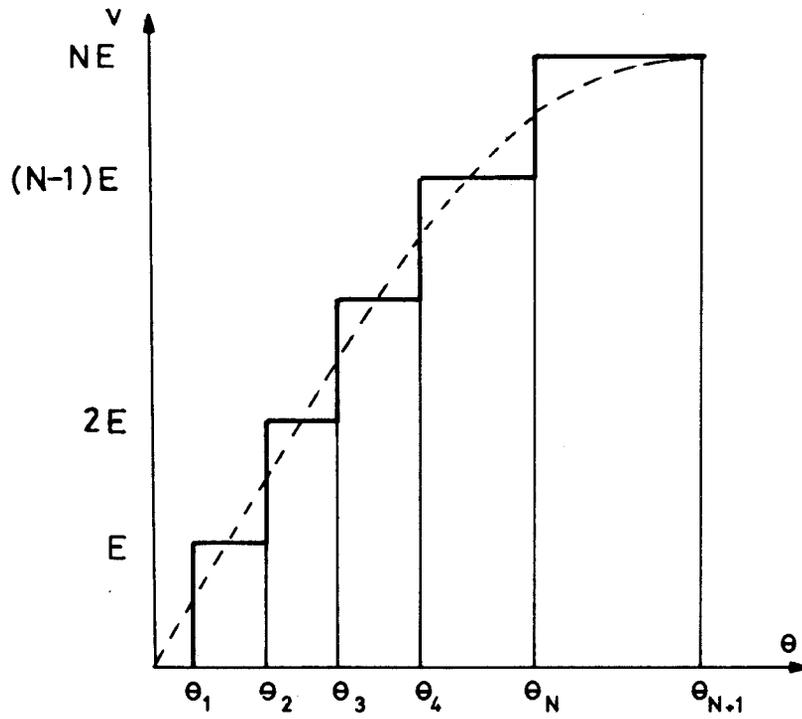


FIGURE 31

L'erreur quadratique commise par cette approximation est

$$\epsilon_q = \sum_{l=0}^N \int_{\theta_l}^{\theta_{l+1}} \epsilon_{l+1}^2 d\theta = \sum_{l=0}^N \int_{\theta_l}^{\theta_{l+1}} (NE \sin \theta - l E)^2 d\theta$$

$$\epsilon_q = N^2 E^2 \sum_{l=0}^N \int_{\theta_l}^{\theta_{l+1}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta + E^2 \sum_{l=0}^N \int_{\theta_l}^{\theta_{l+1}} l^2 d\theta$$

$$- 2 NE^2 \sum_{l=0}^N \int_{\theta_l}^{\theta_{l+1}} l \sin \theta d\theta$$

soit après simplifications :

$$\epsilon_q = \frac{\pi}{4} N^2 E^2 - 2 NE^2 \sum_{l=0}^N \cos \theta_l - E^2 \sum_{l=1}^N (2l-1)\theta_l$$

cette quantité ϵ_q est une fonction de N variables $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$.

Les dérivées partielles $\frac{\delta \varepsilon}{\delta \theta_1}$ ont pour expression :

$$\frac{\delta \varepsilon}{\delta \theta_1} = 2 NE^2 \sin \theta_1 - E^2(2l-1)$$

de sorte que $\frac{\delta \varepsilon}{\delta \theta_1} = 0$ pour $\sin \theta_1 = \frac{2l-1}{2N}$ $l = 1, 2, \dots, N$.

c'est-à-dire qu'il faut choisir les instants de déclenchement au milieu de l'intervalle d'amplitude E.

Dans ces conditions la valeur efficace de l'onde a pour expression :

$$V = \frac{4}{2\pi} \sum_{l=1}^N \int_{\theta_1}^{\theta_{l+1}} (lE)^2 d\theta = \frac{2}{\pi} E^2 \sum_{l=1}^N l^2 (\theta_{l+1} - \theta_l)$$

$$V = NE \sqrt{1 - \frac{2}{\pi} \sum_{l=1}^N \frac{(2l-1)\theta_l}{N^2}}$$

et la valeur efficace de l'harmonique de rang $(2K+1)$ est

$$V_{2K+1} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{l=1}^N \int_{\theta_l}^{\theta_{l+1}} lE \sin (2K+1)\theta d\theta$$

$$V_{2K+1} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} NE \sum_{l=1}^N \frac{\cos (2K+1)\theta_l}{N}$$

La figure 22 montre comment évolue V/NE et V_1/NE en fonction de N. Elle montre que dès que N est supérieur ou égal à trois ces deux grandeurs restent sensiblement constantes. L'évolution du résidu harmonique confirme ce résultat.

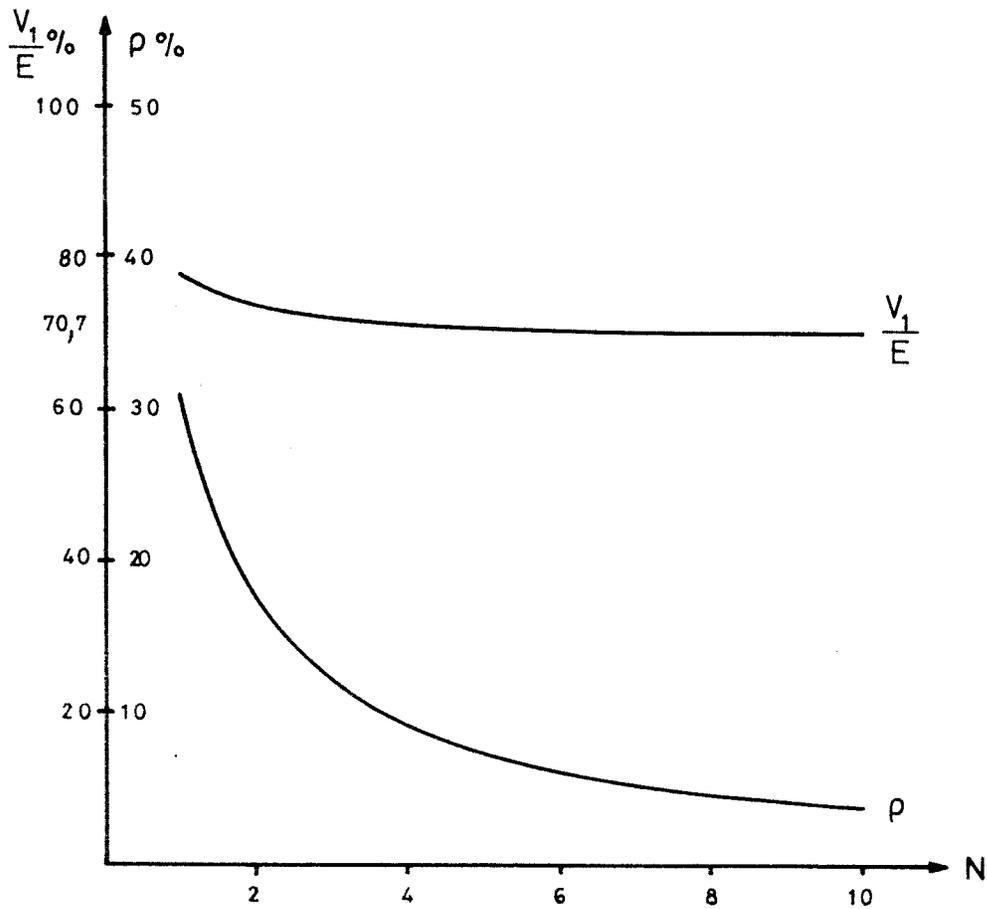


FIGURE 32

Cette propriété se généralise au cas de *créniaux d'écarte inégaux*.

L'erreur commise en approximant la sinusoïde par une fonction en escalier est durant l'intervalle $\theta_{1-1} \leq \theta \leq \theta_1$

$$\varepsilon_1 = (V \sin \theta - E_1)$$

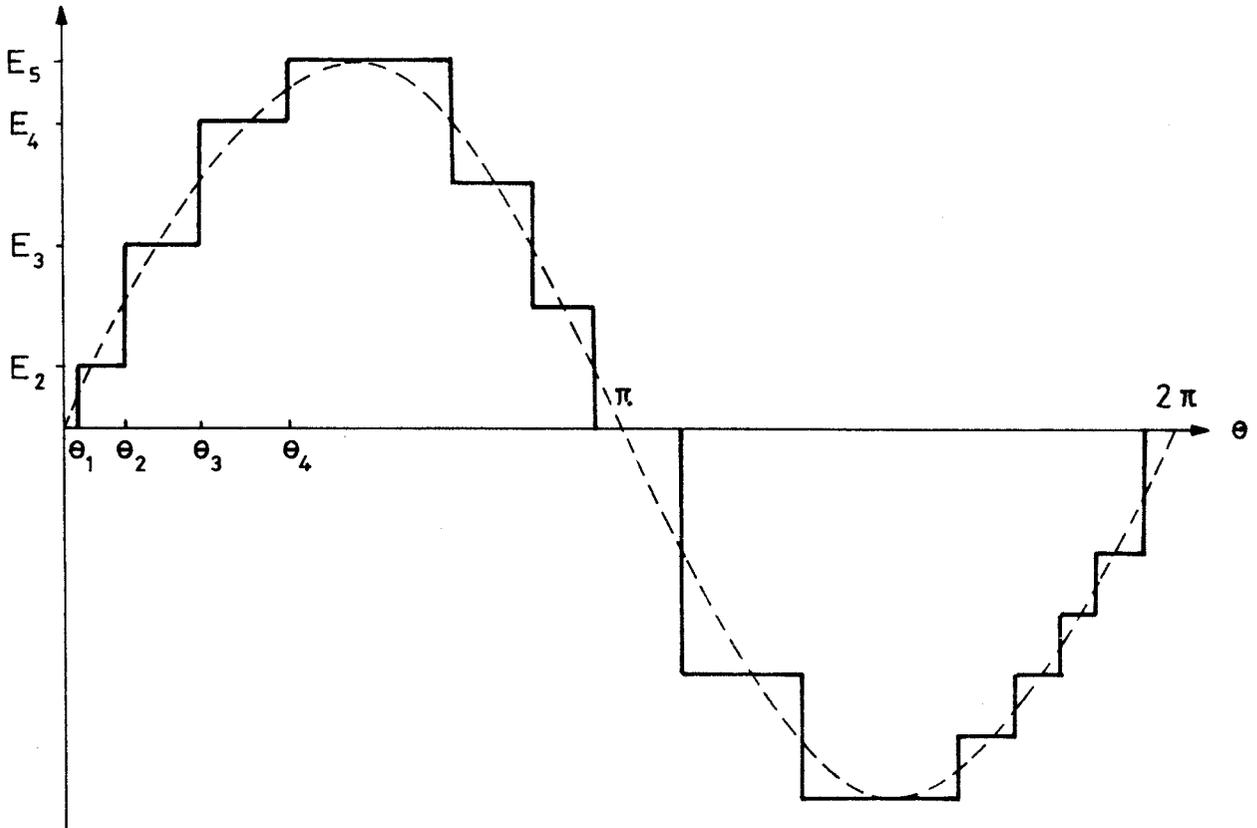


FIGURE 33

et l'erreur quadratique commise est :

$$\epsilon_q = \sum_{l=1}^N \int_{\theta_{l-1}}^{\theta_l} \epsilon^2_l d\theta = \sum_{l=1}^N \int_{\theta_{l-1}}^{\theta_l} (V \sin \theta - E_l)^2 d\theta$$

$$\epsilon_q = \sum_{l=1}^N \int_{\theta_{l-1}}^{\theta_l} \left(V^2 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} - 2 V E_l \sin \theta + E_l^2 \right) d\theta$$

$$\epsilon_q = \pi V^2 - 2 V \sum_{l=0}^N \cos \theta_l (E_{l+1} - E_l) + \sum_{l=0}^N \theta_l (E_l^2 - E_{l+1}^2)$$

avec $E_0 = E_{N+1} = 0$

$$\text{d'où} \quad \frac{\delta \varepsilon}{\delta \theta_1} q = 2 V (E_{1+1} - E_1) \sin \theta_1 + (E_1^2 - E_{1+1}^2)$$

$$\frac{\delta \varepsilon}{\delta \theta_1} q = 0 \text{ pour } \sin \theta_1 = \frac{E_1 + E_{1+1}}{2}$$

Généralement, néanmoins, on générera des formes d'onde pour lesquelles $f(\frac{T}{4} - \alpha) = f(\frac{T}{4} + \alpha)$ ce que ne supposait pas la démonstration précédente.

II.2. Synthétisation par paliers de même durée

Considérons (figure 34) une onde en gradins réalisée à partir de $2p$ paliers d'égale durée dont les amplitudes sont désignées par E_1, E_2, \dots, E_{2p} . Puisque les tensions appliquées aux moteurs ne doivent comporter ni valeur moyenne, ni harmoniques pairs, il est donc nécessaire que :

$$v(\frac{T}{4} - t) = v(\frac{T}{4} + t)$$

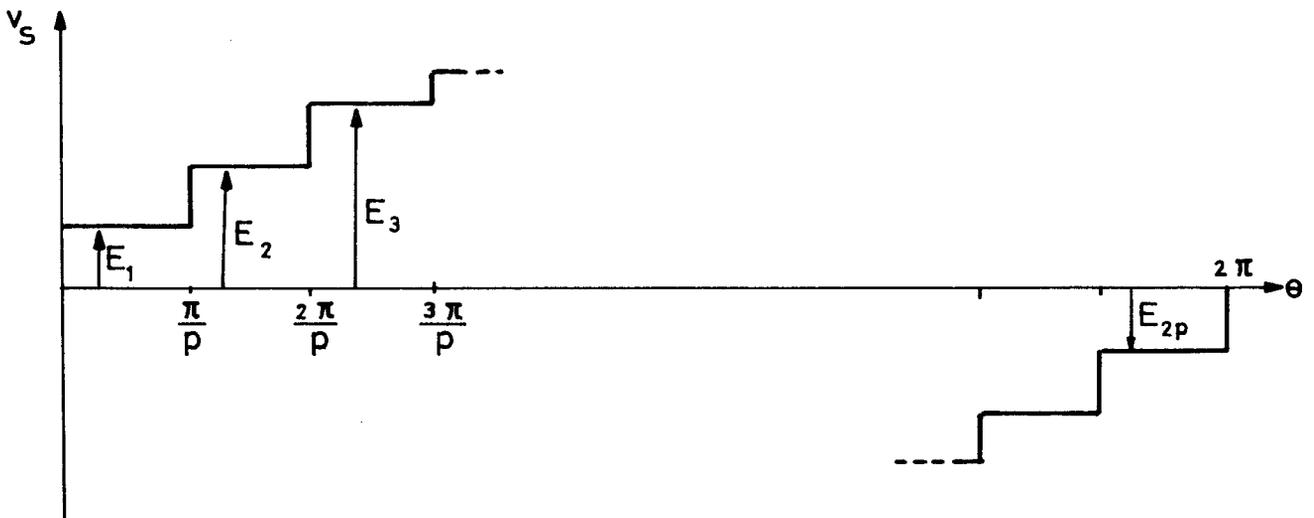


FIGURE 34

L'amplitude A_m de l'harmonique de rang m est donné par :

$$\begin{aligned}
 A_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta) \sin m\theta \, d\theta \\
 &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{2p} E_K \int_{(k-1)\frac{\pi}{p}}^{k\frac{\pi}{p}} \sin m\theta \, d\theta
 \end{aligned}$$

soit après simplifications :

$$A_m = \frac{2 \sin \frac{m\pi}{2p}}{m\pi} \sum_{k=1}^{2p} E_K \sin (2K - 1) \frac{m\pi}{2p}$$

Soit $[C]$ une matrice rectangulaire de p lignes de $2p$ colonnes de terme général

$$C_{mk} = \sin (2K - 1) \frac{m\pi}{2p} \quad \text{si } m \neq p$$

$$C_{mk} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin (2K - 1) \frac{\pi}{2} \quad \text{si } m = p$$

Soit $[Y]$ une matrice colonne présentant $2p$ lignes et de terme général E_K , le produit matriciel

$$[A] = [C][Y]$$

a pour terme général :

$$a_m = \sum_{k=1}^{2p} C_{mk} E_K = \sum_{k=1}^{2p} E_K \sin (2K - 1) \frac{m\pi}{2p} \quad m \neq p$$

$$= \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{\sqrt{2}} E_K \sin (2K - 1) \frac{\pi}{2} \quad m = p$$

de sorte que :

$$a_m = \frac{m\pi A_m}{2 \sin \frac{m\pi}{2p}} \quad \sin m \neq p$$

$$a_p = \frac{p\pi A_p}{2\sqrt{2}}$$

La matrice $[C]$ présente les deux propriétés suivantes :

- a) la somme des carrés des termes de chaque ligne est égal à p ,
- b) la somme des produits de termes correspondants de deux lignes quelconques est nulle de sorte que :

$$[C]_t [C] = \frac{1}{p} [I]$$

expression dans laquelle $[I]$ est une matrice carrée d'ordre $2p$ et $[C]_t$ est la transposée de la matrice $[C]$.

Il est alors possible d'obtenir la matrice $[Y]$ lorsque l'on désire certains harmoniques A_m autrement dit lorsque l'on se fixe les a_m c'est-à-dire la matrice $[A]$. Pour cela, prémultiplions l'équation matricielle $[A] = [C][Y]$ par $[C]_t$ nous obtenons alors :

$$[C]_t [A] = [C]_t [C][Y] = p [I][Y] = p [Y]$$

de sorte que :

$$[Y] = \frac{1}{p} [C]_t [A]$$

En électronique de puissance, il est intéressant d'obtenir des ondes pour lesquelles le premier harmonique ait une valeur donnée, $V\sqrt{2}$, et exempté des $p - 1$ harmoniques suivants, de sorte que :

$$a_1 = \frac{\pi V\sqrt{2}}{2 \sin \frac{\pi}{2p}} ; a_2 = \dots = a_p = 0$$

A partir de l'équation $[Y] = \frac{1}{p} [C]_t [A]$ nous obtenons :

$$E_1 = \frac{1}{p} \frac{\pi V\sqrt{2}}{2 \sin \frac{\pi}{2p}} \sin \frac{\pi}{2p} = \frac{1}{p} \frac{\pi V\sqrt{2}}{2}$$

$$E_2 = \frac{1}{p} \frac{\pi V\sqrt{2}}{2 \sin \frac{\pi}{2p}} \sin \frac{3\pi}{2p} = E_1 \frac{\sin \frac{3\pi}{2p}}{\sin \frac{\pi}{2p}}$$

.....

$$E_{2p} = \frac{1}{p} \frac{\pi V\sqrt{2}}{2 \sin \frac{\pi}{2p}} \sin (4p - 1) \frac{\pi}{2p} = E_1 \frac{\sin (4p - 1) \frac{\pi}{2p}}{\sin \frac{\pi}{2p}}$$

Mais de plus $E_i = -E_{p+1}$ puisque $E_{p+1} = \frac{\sin (2p + 1) \frac{\pi}{2p}}{\sin \frac{\pi}{2p}} E_1$ de sorte qu'il n'est nécessaire de définir que les p premiers E_i . Il n'en est pas nécessaire d'en définir autant. En effet :

- si p est pair, il n'est nécessaire d'en définir que $\frac{p}{2}$ puisque $E_{p-1} = E_{\frac{p}{2} + 1 - 1}$

$$\text{car } E_1 \frac{\sin(p-2l-1) \frac{\pi}{2p}}{\sin \frac{\pi}{2p}} = E_1 \frac{\sin(p+2l+1) \frac{\pi}{2p}}{\sin \frac{\pi}{2p}}$$

- si p est impair, il n'est nécessaire d'en définir que $\frac{p+1}{2}$ puisque $E_{\frac{p+1}{2} - 1}$

$$\text{car } E_1 \frac{\sin(p-2l) \frac{\pi}{2p}}{\sin \frac{\pi}{2p}} = E_1 \frac{\sin(p+2l) \frac{\pi}{2p}}{\sin \frac{\pi}{2p}}$$

On obtient donc les différents E_i par les règles suivantes :

$$E_j = -E_{p+j}$$

avec, si p est pair :

$$E_{\frac{p}{2}-1} = E_{\frac{p}{2}+1+1}$$

$$p \text{ est impair } E_{\frac{p+1}{2}-1} = E_{\frac{p+1}{2}+1}$$

$$\text{et } E_K = E_1 \frac{\sin(2K-1)\frac{\pi}{2p}}{\sin \frac{\pi}{2p}} \quad \begin{array}{l} K \in [1, p/2] \text{ } p \text{ pair} \\ K \in [1, \frac{p+1}{2}] \text{ } p \text{ impair} \end{array}$$

d'où le Tableau III donnant les niveaux des $p/2$ ou $(p+1)/2$ paliers pour quelques unes des premières valeurs de p .

p	3	4	5	7	9	11	13
$\frac{E_2}{E_1}$	2	2,414 213	2,618 033	2,801 937	2,879 385	2,918 985	2,941 883
$\frac{E_3}{E_1}$			3,236 067	4,048 917	4,411 474	4,601 493	4,712 795
$\frac{E_4}{E_1}$				4,493 959	5,411 474	5,911 214	6,209 817
$\frac{E_5}{E_1}$					5,758 770	6,742 044	7,345 946
$\frac{E_6}{E_1}$						7,026 674	8,055 156
$\frac{E_7}{E_1}$							8,296 229

TABLEAU III

Il est alors possible de déterminer les harmoniques restants et de déterminer ainsi le spectre de l'onde ainsi optimisée.

a) Cas où p est pair

$$V_{2K+1,m} = \frac{4}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{p}} E_1 \sin(2K+1)\theta \, d\theta + \dots + \int_{\left(\frac{p}{2}-2\right)\frac{\pi}{p}}^{\left(\frac{p}{2}-1\right)\frac{\pi}{p}} E_{\frac{p}{2}-1} \sin(2K+1)\theta \, d\theta \right. \\ \left. + \int_{\left(\frac{p}{2}-1\right)\frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{2}} E_{\frac{p}{2}} \sin(2K+1)\theta \, d\theta \right\}$$

c'est-à-dire :

$$V_{2K+1,m} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2K+1} \left\{ E_1 + (E_2 - E_1) \cos(2K+1) \frac{\pi}{p} + \dots + (E_{\frac{p}{2}} - E_{\frac{p}{2}-1}) \cos(2K+1) \left(\frac{p}{2}-1\right) \frac{\pi}{p} \right\}$$

soit en remplaçant les E_i par leurs valeurs et après simplifications :

$$V_{2K+1,m} = \frac{4 E_1}{\pi(2K+1)} \left\{ -1 + \frac{\sin \frac{K\pi}{2} \cos K \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p}\right)}{\sin K \frac{\pi}{p}} + \frac{\sin(K+1) \frac{\pi}{2} \cos(K+1) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p}\right)}{\sin(K+1) \frac{\pi}{p}} \right\}$$

$$V_{2K+1,m} = \frac{2 E_1}{\pi(2K+1)} \left\{ \frac{\sin K\pi \cos \frac{K\pi}{p}}{\sin \frac{K\pi}{p}} + \frac{\sin(K+1)\pi \cos(K+1) \frac{\pi}{p}}{\sin(K+1) \frac{\pi}{p}} \right\}$$

Tous les termes du crochet sont nuls sauf pour les valeurs de k annulant à la fois le numérateur et dénominateur, c'est-à-dire $K = \lambda p$ et $K = \lambda p - 1$.

Dans ce cas, les harmoniques restants sont d'ordre $2\lambda p \pm 1$ et leurs amplitudes ont pour expression :

$$V_{2\lambda p \pm 1,m} = \frac{2p E_1}{\pi(2\lambda p \pm 1)} (-1)^\lambda$$

b) Cas où p est impair

$$V_{2K+1,m} = \frac{4}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{p}} E_1 \sin(2K+1)\theta \, d\theta + \dots + \int_{\frac{p-3}{2} \frac{\pi}{p}}^{\frac{p-1}{2} \frac{\pi}{p}} E_{\frac{p-1}{2}} \sin(2K+1)\theta \, d\theta \right. \\ \left. + \int_{\frac{p-1}{2} \frac{\pi}{p}}^{\frac{\pi}{2}} E_{\frac{p+1}{2}} \sin(2K+1)\theta \, d\theta \right\}$$

soit

$$V_{2K+1,m} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2K+1} \left\{ E_1 + (E_2 - E_1) \cos(2K+1) \frac{\pi}{p} + \dots \right. \\ \left. + (E_{\frac{p+1}{2}} - E_{\frac{p-1}{2}}) \cos(2K+1) \left(\frac{p-1}{2} \frac{\pi}{p} \right) \right\}$$

et en remplaçant les E_i par leurs valeurs et après simplifications :

$$V_{2K+1,m} = \frac{2 E_1}{\pi(2K+1)} \left\{ \frac{\sin K\pi}{\sin \frac{K\pi}{p}} + \frac{\sin(K+1)\pi}{\sin(K+1) \frac{\pi}{p}} \right\}$$

Tous les harmoniques sont nuls sauf ceux de rang $2\lambda p \pm 1$:

$$V_{2\lambda p \pm 1,m} = \frac{2p E_1}{\pi(2\lambda p \pm 1)}$$

Quelle que soit la parité de p , seuls subsistent les harmoniques de rang $2\lambda p \pm 1$.

II.3. Obtention des tensions en paliers

Pour obtenir plusieurs paliers par alternance de la tension alternative de sortie v , il faut ajouter des tensions fournies par plusieurs onduleurs.

II.3.1. Obtention de la forme d'onde

On obtient des signaux présentant des écarts de niveau constants entre les paliers en additionnant les tensions de mêmes amplitudes mais de largeurs différentes des onduleurs élémentaires délivrant chacun un créneau par période (Figure 35 b).

Pour obtenir des signaux à écarts de durée constants entre les paliers, on ajoute des tensions de même largeur mais d'amplitudes différentes, décalées entre elles (Figure 35 c).

La figure 35 montre la mise en série de deux tensions fournies par deux onduleurs élémentaires en ponts schématisés puis la construction de la tension v à partir de v_1 et de v_2

II.3.2. Variation de la valeur du fondamental

Les onduleurs alimentant les moteurs asynchrones doivent délivrer des tensions dont la valeur diminue au fur et à mesure que leur fréquence décroît.

Il y a deux façons d'obtenir la variation de la valeur du fondamental V_1 des tensions de sortie d'un onduleur.

- Alimenter l'onduleur par une *tension continue E proportionnelle* à V_1 .

Entre le réseau industriel à tension et fréquence constantes et

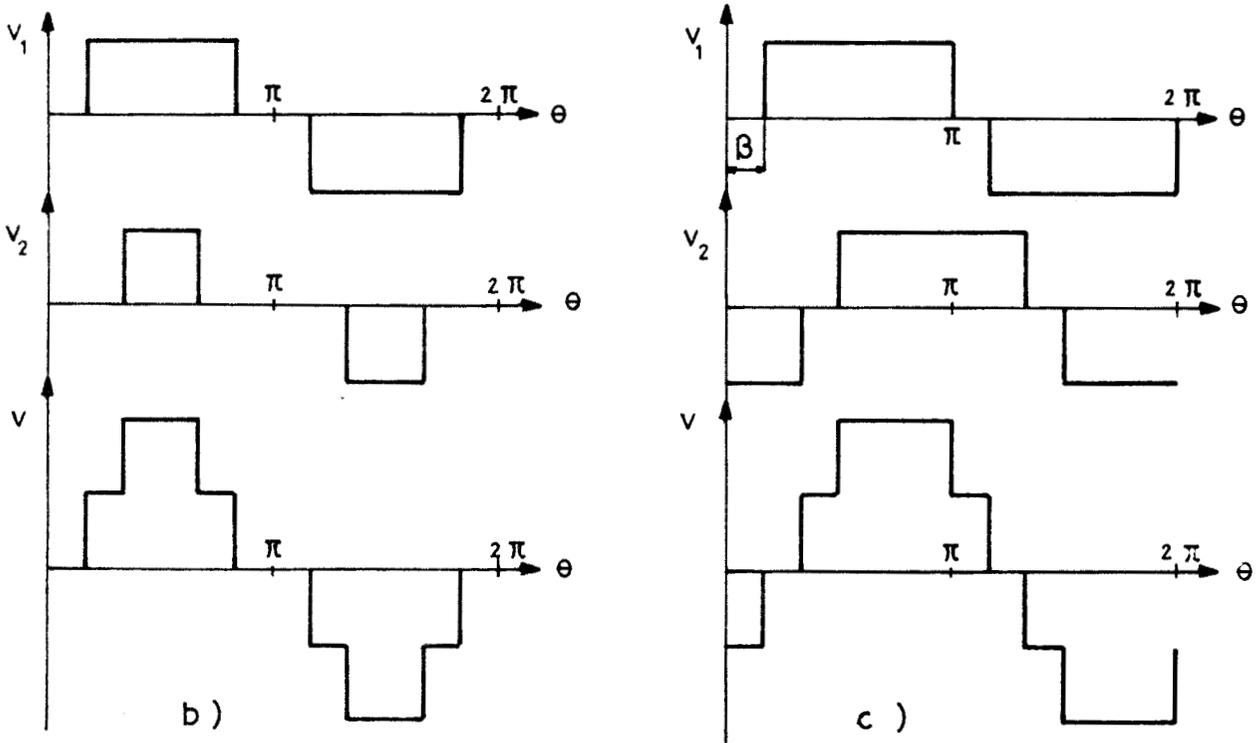
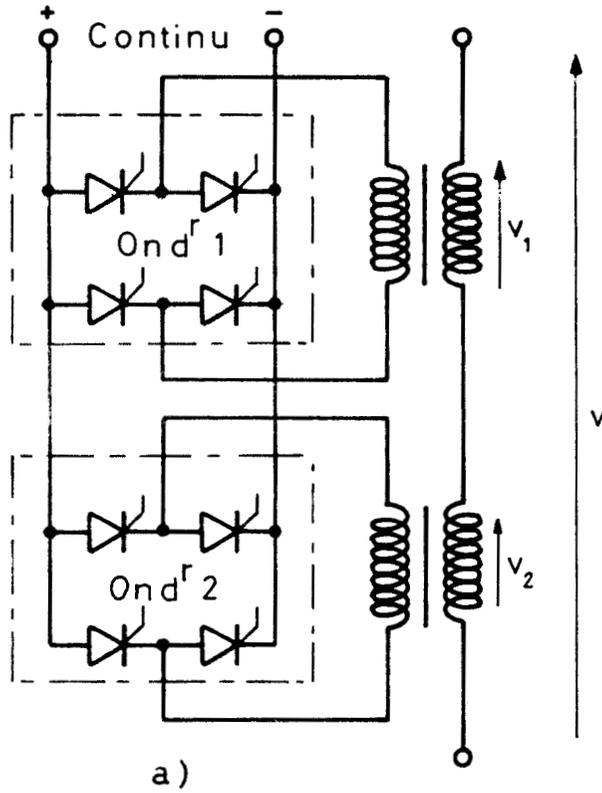


FIGURE 35

l'onduleur, on peut placer un montage redresseur à thyristors et un filtre. La tension continue E est alors sensiblement proportionnelle à $|\cos \psi|$, ψ désignant l'angle de retard à l'amorçage des thyristors. L'inconvénient de cette solution est que pour les faibles valeurs de $|\cos \psi|$ la puissance

est prise au réseau avec un facteur de puissance très mauvais.

On peut pour éviter cela placer entre le réseau et l'onduleur un montage redresseur à diodes, un filtre, un hacheur, un second filtre. On règle E par le taux de hachage. Tel que le montage n'est plus, comme le précédent, réversible. Si on veut pouvoir freiner le moteur en récupération, il faut que le hacheur soit réversible et utiliser un second montage à diodes.

L'inconvénient de l'alimentation de l'onduleur sous tension continue variable est que pour les faibles valeurs de celle-ci, il est difficile de charger les condensateurs de commutation. Il est souvent nécessaire d'ajouter une source distincte pour assurer cette charge.

- Alimenter l'onduleur *sous tension E constante* et lui demander d'assurer lui-même la variation du rapport V_1/E . C'est possible avec les onduleurs en pont ; en faisant varier l'angle β (figure 35), on fait varier la valeur de V_1 .

Dans le cas où on ajoute les tensions de sortie de plusieurs onduleurs pour obtenir une tension en paliers, si ceux-ci approximent la sinusoïde par des paliers de même hauteur mais de largeur variable, il est très difficile d'obtenir des intervalles dont la valeur soit proportionnelle à la fréquence. De plus, il faut alimenter les onduleurs élémentaires sous une tension E variable.

Au contraire, la réalisation de signaux en paliers d'égale durée relative est aisée. S'il y a $2p$ paliers par période, on génère des impulsions de fréquence $2pf$, f étant la fréquence désirée ; les impulsions successives sont orientées vers les onduleurs adéquats. On règle V_1/E en déphasant du même angle toutes les impulsions.

De plus, ce procédé présente un autre avantage ; en montant sur chacun des onduleurs des transformateurs de sortie à plusieurs secondaires de rapports convenablement choisis, on peut obtenir trois tensions de même forme d'onde, déphasées de $\frac{2\pi}{3}$, et dont la valeur est simultanément réglable par action sur l'angle β . On reviendra d'ailleurs sur ce point au chapitre IV.

II.3.3. Remarque sur l'alimentation des récepteurs triphasés

Si le moteur est relié à l'onduleur triphasé qui l'alimente par une liaison à trois fils, la tension aux bornes des phases du moteur ne peut comporter

d'harmonique de rang trois ou multiple de trois quelque soit le couplage de ses phases.

Si l'onduleur délivre des tensions simples :

$$v_{OA} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{2K+1,m} \sin(2K+1)\omega t$$

$$v_{OB} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{2K+1,m} \sin(2K+1)\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$v_{OC} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{2K+1,m} \sin(2K+1)\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

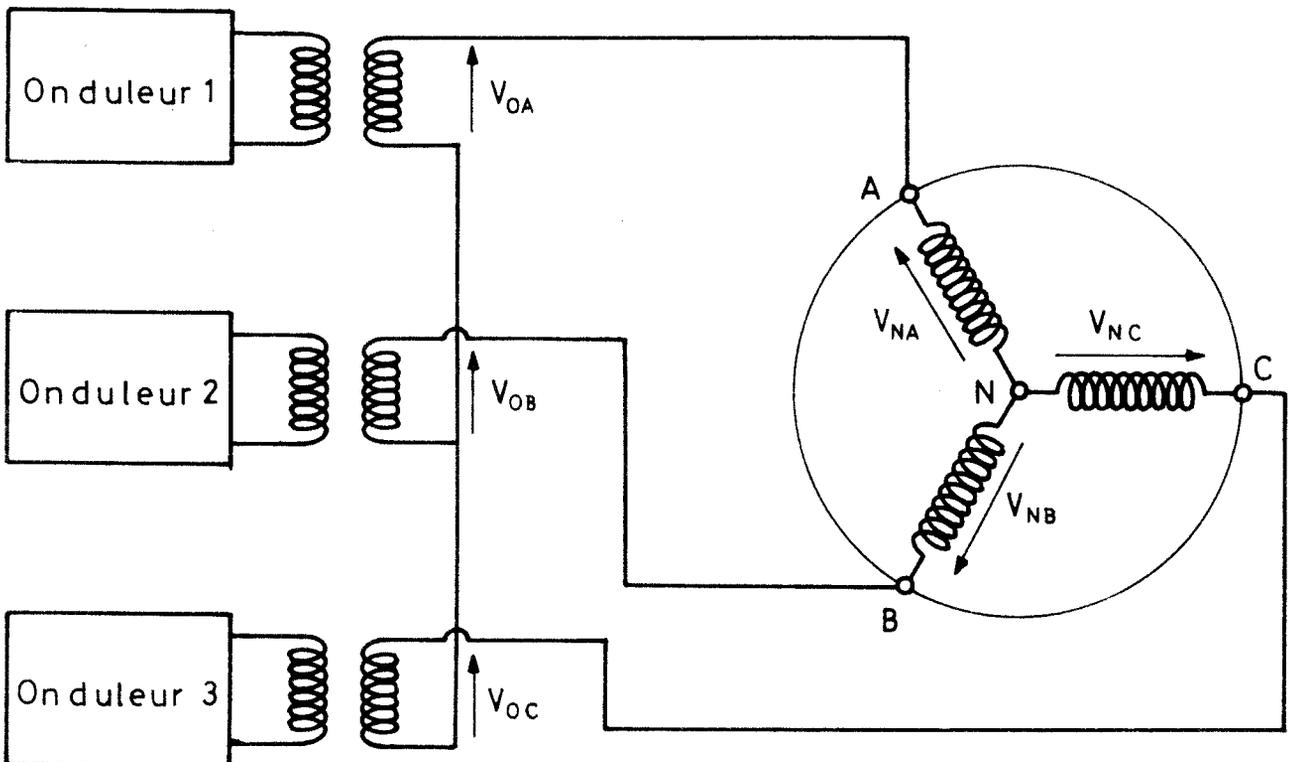


FIGURE 36

$$v_{OA} = v_{ON} + v_{NA}$$

$$v_{OB} = v_{ON} + v_{NB}$$

$$v_{OC} = v_{ON} + v_{NC}$$

de sorte que $v_{OA} + v_{OB} + v_{OC} = 3 v_{ON} + (v_{NA} + v_{NB} + v_{NC}) = 3 v_{ON}$

On en déduit alors :

$$v_{NA} = v_{OA} - 1/3(v_{OA} + v_{OB} + v_{OC}) = 2/3 v_{OA} - 1/3 v_{OB} - 1/3 v_{OC}$$

$$U_{AB} = v_{NA} - v_{NB}$$

$$v_{OA} + v_{OB} + v_{OC} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{2K+1,m} \sin(2K+1)\omega t + \sum_{k=0}^{\infty} V_{2K+1,m} \sin(2K+1)\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} V_{2K+1,m} \sin(2K+1)\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$v_{OA} + v_{OB} + v_{OC} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{2K+1,m} \sin(2K+1)\omega t \cdot \left[1 - 2 \cos(2K+1)\frac{\pi}{3}\right]$$

$$v_{NA} = v_{OA} - 1/3(v_{OA} + v_{OB} + v_{OC})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} V_{2K+1,m} \sin(2K+1)\omega t \left[1 - 1/3 + 2/3 \cos(2K+1)\frac{\pi}{3}\right]$$

$$v_{AN} = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} V_{2K+1,m} (1 + \cos(2K+1) \frac{\pi}{3}) \sin((2K+1)\omega t)$$

Il est ensuite possible de déterminer l'expression de la tension composée

$$u_{AB} = v_{AN} - v_{BN} = \sum_{k=1}^{\infty} V_{2K+1,m} \sin(2K+1)\omega t - \sum_{k=1}^{\infty} V_{2K+1,m} \sin(2K+1)(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

$$u_{AB} = \sum_{k=0}^{\infty} 2 V_{2K+1,m} \sin(2K+1)\frac{\pi}{3} \cos(2K+1)(\omega t - \frac{\pi}{3})$$

Pour illustrer cette remarque, considérons le cas du plus simple des onduleurs triphasés, celui n'utilisant que six thyristors principaux (figure 37).

Les tensions v_{OA} , v_{OB} , v_{OC} comptées par rapport au point milieu fictif de la source sont formées de deux alternances rectangulaires. Les tensions aux bornes des phases v_{NA} , v_{NB} , v_{NC} ont l'allure représentée.

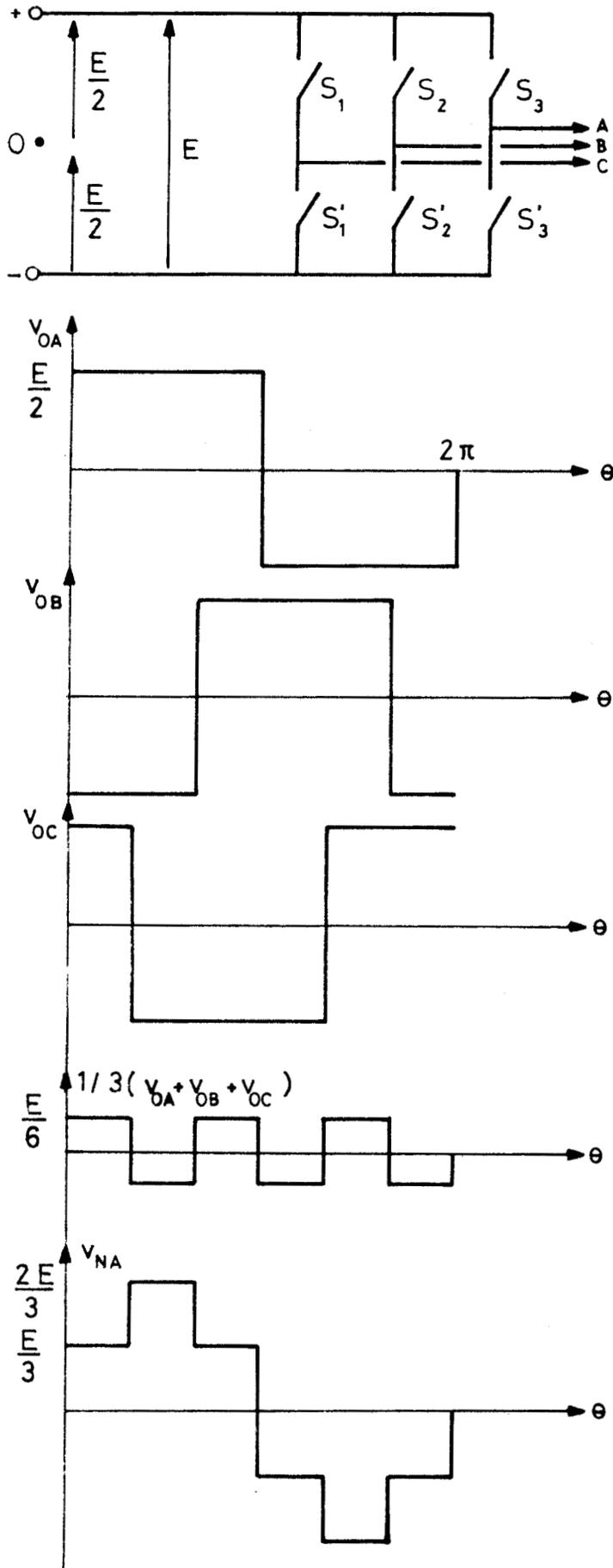


FIGURE 37

C H A P I T R E I I I

REGIMES LIBRES ET FORCES DU MOTEUR ASYNCHRONE TRIPHASE

De très nombreux travaux ont été consacrés aux régimes transitoires de la machine asynchrone alimentée par des signaux alternatifs sinusoïdaux équilibrés ou non et à la fin de l'étude générale de ces régimes effectuée par F. NOTELET [133], on trouve une importante bibliographie consacrée à ce sujet.

Nous allons dans ce chapitre montrer comment à partir des équations obtenues à l'aide des composantes relatives de Y.H. KU, il est relativement aisé de déterminer le régime transitoire du moteur asynchrone considéré comme la superposition du régime libre et du régime forcé.

I - REGIME LIBRE DU MOTEUR ASYNCHRONE TRIPHASE

Nous avons établi au chapitre VI de la première partie les équations liant les composantes relatives de tension et de courant lorsque $\theta + \theta_R = \theta_S$.

En particulier, si nous choisissons la troisième solution caractérisée par :

$$\theta_S = \omega t \quad ; \quad \theta = (1 - g)\omega t = \omega' t \quad ; \quad \theta_R = g\omega t$$

le système différentiel caractérisant le fonctionnement de la machine asynchrone est alors :

$$(1) \begin{cases} v_{Sf} = (R_S + i\omega \mathcal{L}_S) i_{Sf} + \mathcal{L}_S \frac{di_{Sf}}{dt} + 3/2 M i\omega i_{Rf} + 3/2 M \frac{di_{Rf}}{dt} \\ v_{Rf} = 3/2 M i g \omega i_{Sf} + 3/2 M \frac{di_{Sf}}{dt} + (R_R + i g \omega \mathcal{L}_R) i_{Rf} + \mathcal{L}_R \frac{di_{Rf}}{dt} \end{cases}$$

En général, le rotor est en court-circuit ; de ce fait v_{Ra} , v_{Rb} , v_{Rc} et donc v_{Rf} sont nuls. L'écriture opérationnelle de ce système est alors, en l'absence de conditions initiales :

$$\begin{cases} V_{Sf} = (R_S + i\omega \mathcal{L}_S) I_{Sf} + p \mathcal{L}_S I_{Sf} + 3/2 M i \omega I_{Rf} + 3/2 M p I_{Rf} \\ 0 = 3/2 M i g \omega I_{Sf} + 3/2 M p I_{Sf} + (R_R + i g \omega \mathcal{L}_R) I_{Rf} + \mathcal{L}_R p I_{Rf} \end{cases}$$

en appelant par V_{Sf} , I_{Sf} et I_{Rf} les images des grandeurs v_{Sf} , i_{Sf} et i_{Rf} .

. Ce système va nous permettre de déterminer l'équation caractéristique du système différentiel sans second membre. De la seconde équation, nous obtenons

$$I_{Rf} = - \frac{3/2 M (p + i g \omega)}{R_R + (p + i g \omega) \mathcal{L}_R} I_{Sf}$$

d'où, en reportant dans la première :

$$\left[(R_S + (p + i \omega) \mathcal{L}_S) - \frac{9/4 M^2 (p + i \omega)(p + i g \omega)}{R_R + (p + i g \omega) \mathcal{L}_R} \right] I_{Sf} = 0$$

l'équation caractéristique s'écrit :

$$\left[(R_S + (p + i \omega) \mathcal{L}_S) \right] \left[R_R + (p + i g \omega) \mathcal{L}_R \right] - 9/4 M^2 (p + i \omega)(p + i g \omega) = 0$$

c'est-à-dire, en développant et en ordonnant :

$$\begin{aligned} p^2 (\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2) + p [(R_S \mathcal{L}_R + R_R \mathcal{L}_S) + i (\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2) (\omega + g \omega)] \\ + [R_S R_R - \omega^2 g (\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2)] + i [\omega R_R \mathcal{L}_S + g \omega R_S \mathcal{L}_R] = 0 \end{aligned}$$

. Les racines C_1 et C_2 de cette équation du second degré à coefficients complexes sont :

$$C_{1,2} = \frac{-[R_S \mathcal{L}_R + R_R \mathcal{L}_S + i(2\omega - \omega')] (\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2) \pm \sqrt{\alpha + i\beta}}{2(\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2)}$$

avec

$$\alpha = (R_S \mathcal{L}_R - R_R \mathcal{L}_S)^2 - \omega'^2 (\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2) + 9 M^2 R_S R_R$$

$$\beta = 2\omega' (R_S \mathcal{L}_R - R_R \mathcal{L}_S) (\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2)$$

c'est-à-dire, en posant : $\sqrt{\alpha + i\beta} = \pm (P + iQ)$

$$C_1 = -1/T_1 - i\Omega_3 \qquad C_2 = -1/T_2 - i\Omega_4$$

avec :

$$T_1 = \frac{2(\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2)}{\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_R \mathcal{L}_S - P} \quad ; \quad T_2 = \frac{2(\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2)}{\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_R \mathcal{L}_S + P}$$

et

$$\Omega_3 = \frac{2\omega - \omega'}{2} - \frac{Q}{2(\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2)}$$

$$\Omega_4 = \frac{2\omega - \omega'}{2} + \frac{Q}{2(\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2)}$$

. Pour tenir compte des *conditions initiales*, on écrit qu'en régime libre les courants i_{Sf} et i_{Rf} sont de la forme :

$$i_{Sf} = \lambda_1 e^{C_1 t} + \lambda_2 e^{C_2 t}$$

$$i_{Rf} = \lambda_3 e^{C_2 t} + \lambda_4 e^{C_2 t}$$

λ_1 et λ_2 sont deux constantes complexes découlant directement des conditions initiales. λ_3 et λ_4 sont deux autres constantes complexes que l'on peut déterminer à partir de λ_1 et de λ_2 . Nous posons :

$$\lambda_3 = K_1 \lambda_1$$

$$\lambda_4 = K_2 \lambda_2$$

On déterminera K_1 et K_2 par identification dans le système d'équation (1) où l'on fait $v_{Sf} = v_{Rf} = 0$.

De

$$0 = (R_S + i\omega \mathcal{L}_S)(\lambda_1 e^{C_1 t} + \lambda_2 e^{C_2 t}) + \mathcal{L}_S(\lambda_1 C_1 e^{C_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{C_2 t}) + 3/2 M i\omega (K_1 \lambda_1 e^{C_1 t} + \lambda_2 K_2 e^{C_2 t}) + 3/2 (K_1 \lambda_1 e^{C_1 t} + K_2 \lambda_2 e^{C_2 t}) = 0$$

On en déduit :

$$\lambda_1 e^{C_1 t} \{ (R_S + i\omega \mathcal{L}_S) + \mathcal{L}_S C_1 + K_1 3/2 M i\omega + K_1 3/2 M C_1 \} = 0$$

$$K_1 = - \frac{R_S + \mathcal{L}_S (C_1 + i\omega)}{3/2 M (C_1 + i\omega)}$$

et de même

$$K_2 = - \frac{R_S + \mathcal{L}_S (C_2 + i\omega)}{3/2 M (C_2 + i\omega)}$$

II - REGIME FORCE DU MOTEUR ASYNCHRONE TRIPHASE

A la tension v_{Sf} correspond une solution forcée i_{Sf} que l'on obtient soit par identification, soit mathématiquement par la méthode de Lagrange.

Si nous considérons par exemple l'alimentation du moteur asynchrone par un système équilibré de tensions triphasées :

$$v_a = V_m \sin \omega t, v_b = V_m \sin(\omega t - 2\pi/3), v_c = V_m \sin(\omega t - 4\pi/3)$$

Nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} v_{So} \\ v_{Sf} \\ v_{Sb} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-i\omega t} & a e^{-i\omega t} & a^2 e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & a^2 e^{i\omega t} & a e^{i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{Sa} \\ v_{Sb} \\ v_{Sc} \end{pmatrix}$$

$$v_{Sf} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\omega t} (v_{Sa} + a v_{Sb} + a^2 v_{Sc})$$

$$v_{Sf} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\omega t} \frac{V_m}{2i} \left[(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) + a(e^{+i(\omega t - 2\pi/3)} - e^{-i(\omega t - 2\pi/3)}) + a^2(e^{i(\omega t - 4\pi/3)} - e^{-i(\omega t - 4\pi/3)}) \right]$$

$$v_{Sf} = \frac{\sqrt{3}}{2i} V_m = V$$

v_{Sf} est donc une constante complexe à laquelle correspond en régime forcé une autre constante complexe pour i_{Sf} et pour i_{Rf} . Nous poserons :

$$i_{Sff} = \frac{V}{Z e^{i\phi}}$$

$$i_{Rff} = K \frac{V}{Z e^{i\phi}}$$

en reportant dans le système différentiel (1) et en identifiant, il vient :

$$\begin{cases} V = (R_S + i\omega \mathcal{L}_S) \frac{V}{Z e^{i\phi}} + 3/2 M i \omega K \frac{V}{Z e^{i\phi}} \\ 0 = 3/2 M i g \omega \frac{V}{Z e^{i\phi}} + (R_R + i g \omega \mathcal{L}_R) K \frac{V}{Z e^{i\phi}} \end{cases}$$

on en déduit aisément :

$$K = \frac{-3/2 M i g \omega}{R_R + i g \omega L_R}$$

et

$$Z e^{i\phi} = R_S + i \omega L_S - \frac{(3/2 M i \omega)(3/2 M i g \omega)}{R_R + i g \omega L_R}$$

$$Z e^{i\phi} = \frac{R_S R_R - (L_S L_R - 9/4 M^2) g^2 + i \omega (R_R L_S + g R_S L_R)}{R_R + i g \omega L_R}$$

dont le module est :

$$Z = \frac{\sqrt{[R_S R_R - (L_S L_R - 9/4 M^2) g^2]^2 + \omega^2 [R_R L_S + g R_S L_R]^2}}{\sqrt{R_R^2 + g^2 L_R^2}}$$

et l'argument :

$$\phi = \text{Arctg} \frac{\omega (R_R L_S + g R_S L_R)}{R_S R_R - (L_S L_R - 9/4 M^2) g^2} - \text{Arctg} \frac{g L_R}{R_R}$$

III - DETERMINATION DES CONSTANTES D'INTEGRATION

Les solutions du système différentiel (1) sont alors :

$$i_{Sf} = i_{Sff} + \lambda_1 e^{C_1 t} + \lambda_2 e^{C_2 t}$$

$$i_{RE} = K i_{Sff} + K_1 \lambda_1 e^{C_1 t} + K_2 \lambda_2 e^{C_2 t}$$

A l'instant $t = 0$ choisi comme origine des temps de l'étude du régime transitoire, nous avons :

$$i_{Sf}(0) = I_{Sf}(0) \quad i_{SSf}(0) = I_{SSf}(0)$$

$$i_{Rf}(0) = I_{Rf}(0)$$

avec

$$i_{Sf}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} (i_{Sa}(0) + a^2 i_{Sb}(0) + a i_{Sc}(0))$$

de même

$$i_{Rf}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} (i_{Ra}(0) + a^2 i_{Rb}(0) + a i_{Rc}(0))$$

$i_{Sa}(0), \dots, i_{Ra}(0), \dots$, étant les valeurs que possédaient les courants statoriques et rotoriques à l'instant $t = 0$.

$$\begin{pmatrix} I_{Sf}(0) - I_{Sff}(0) \\ I_{Rf}(0) - K I_{Sff}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ K_1 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Par inversion, on détermine facilement λ_1 et λ_2 . En effet :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{K_2 - K_1} \begin{pmatrix} K_2 & -1 \\ -K_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{Sf}(0) - I_{Sff}(0) \\ I_{Rf}(0) - K I_{Sff}(0) \end{pmatrix}$$

soit en développant :

$$\lambda_1 = \frac{1}{K_2 - K_1} [K_2(I_{Sf}(0) - I_{Sff}(0)) - (I_{Rf}(0) - K I_{Sff}(0))]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{K_2 - K_1} [-K_1(I_{Sf}(0) - I_{Sff}(0)) + (I_{Rf}(0) - K I_{Sff}(0))]$$

en reportant, il vient :

$$i_{Sf} = i_{Sff} + \frac{K_2}{K_2 - K_1} (I_{Sf}(o) - I_{Sff}(o)) e^{C_1 t} - \frac{1}{K_2 - K_1} (I_{Rf}(o) - K I_{Sff}(o)) e^{C_1 t} \\ - \frac{K_1}{K_2 - K_1} (I_{Sf}(o) - I_{Sff}(o)) e^{C_2 t} + \frac{1}{K_2 - K_1} (I_{Rf}(o) - K I_{Sff}(o)) e^{C_2 t}$$

et l'on peut obtenir de la même façon l'équation de i_{Rf} .

Si l'on prend comme exemple d'illustration, l'alimentation du moteur asynchrone préalablement au repos on obtient alors :

$$i_{Sff} = I_{Sff}(o)$$

puisque la quantité i_{Sff} se réduisant à une constante complexe est indépendante du temps.

De plus

$$I_{Sf}(o) = I_{Rf}(o) = 0$$

puisque par hypothèse nous supposons que le moteur asynchrone part de l'état du repos.

Nous obtenons alors :

$$i_{Sf} = I_{Sff}(o) \left[1 - \frac{K_2}{K_2 - K_1} e^{C_1 t} + \frac{K}{K_2 - K_1} e^{C_1 t} \right. \\ \left. + \frac{K_1}{K_2 - K_1} e^{C_2 t} - \frac{K}{K_2 - K_1} e^{C_2 t} \right]$$

ou

$$i_{Sf} = \frac{\sqrt{3}}{2i} \frac{V_m}{Z e^{i\phi}} \left[1 - M_1 e^{i\delta_1} e^{C_1 t} + M_2 e^{i\delta_2} e^{C_2 t} \right]$$

en posant

$$\frac{K_2 - K}{K_2 - K_1} = M_1 e^{i\delta_1}$$

$$\frac{K_1 - K}{K_2 - K_1} = M_2 e^{i\delta_2}$$

et

$$I_{SSf}(o) = \frac{\sqrt{3}}{2i} V_m \cdot \frac{1}{Z e^{i\phi}}$$

IV - OBTENTION DES COURANTS REELS

De

$$\begin{pmatrix} i_{Sa} \\ i_{Sb} \\ i_{Sc} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\omega t} & e^{-i\omega t} \\ 1 & a^2 e^{i\omega t} & a e^{-i\omega t} \\ 1 & a e^{i\omega t} & a^2 e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{So} \\ i_{Sf} \\ i_{Sb} \end{pmatrix}$$

On déduit :

$$i_{Sa} = \frac{1}{\sqrt{3}} (e^{i\omega t} i_{Sf} + e^{-i\omega t} i_{Sb})$$

en l'absence de courant homopolaire. Or les quantités i_{Sf} et i_{Sb} sont conjuguées l'une de l'autre, de sorte que :

$$i_{Sa} = \frac{2}{\sqrt{3}} \mathcal{R}(i_{Sf} e^{i\omega t})$$

\mathcal{R} désignant la partie réelle de la quantité spécifiée. Nous en déduisons immédiatement :

$$i_{Sa} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{V_m}{Z} \mathcal{R} \left(\frac{e^{i(\omega t - \phi)}}{i} \times \left[1 - M_1 e^{i\delta_1} e^{C_1 t} + M_2 e^{i\delta_2} e^{C_2 t} \right] \right)$$

En notant :

$$C_1 + i\omega = -\frac{1}{T_1} + i\Omega_1$$

$$C_2 + i\omega = -\frac{1}{T_2} + i\Omega_2$$

nous obtenons :

$$i_{Sa} = \frac{V_m}{Z} \mathcal{R} \left[\frac{e^{i(\omega t - \phi)} - M_1 e^{-\frac{t}{T_1}} e^{i(\Omega_1 t + \delta_1 - \phi)}}{i} + \frac{M_2 e^{-\frac{t}{T_2}} e^{i(\Omega_2 t + \delta_2 - \phi)}}{i} \right]$$

soit

$$i_{Sa} = \frac{V_m}{Z} \left[\sin(\omega t - \phi) - M_1 e^{-t/T_1} \sin(\Omega_1 t + \delta_1 - \phi) + M_2 e^{-t/T_2} \sin(\Omega_2 t + \delta_2 - \phi) \right]$$

Cette méthode de calcul simple et élégante sera utilisée dans les chapitres qui suivent pour l'étude analytique du fonctionnement d'un moteur asynchrone alimenté par des signaux issus de convertisseurs statiques.

On peut en déduire *le couple* de la formule établie au chapitre VI de la première partie :

$$C = 3/2 M i (i_{Sb} i_{Rf} - i_{Sf} i_{Rb})$$

les quantités i_{Sb} et i_{Sf} d'une part, i_{Rf} et i_{Rb} d'autre part étant conjuguées, cette expression se réduit à :

$$C = 3 M \mathcal{J}(i_{Sf} i_{Rb})$$

\mathcal{J} désignant la partie imaginaire de la quantité spécifiée.

C H A P I T R E I V

ETUDE ANALYTIQUE DU MOTEUR ASYNCHRONE ALIMENTÉ PAR DES TENSIONS QUASI-SINUSOIDALES

L'étude du fonctionnement en régime permanent du moteur asynchrone alimenté par un onduleur quasi-sinusoidal a été entreprise par de nombreux auteurs. Ceux-ci ont utilisé les divers procédés d'étude cités lors de l'introduction générale.

- Utilisation des développements en série de Fourier

Les performances du moteur asynchrone alimenté par des ondes non sinusoïdales a fait depuis longtemps |134| l'objet de nombreux travaux. Nous pouvons citer ceux de E.A. KLINGSHIRN et H.E. JORDAN |135|, de G.W. Mc LEAN, F. NIX et S.R. ALWASH |136|, de G. JAIN |137|, de P.L. ALGER |138|. Tous utilisent le développement en série de Fourier des tensions appliquées et le schéma monophasé équivalent relatif à l'harmonique de rang considéré. Si cette méthode permet de calculer les pertes supplémentaires qu'occasionnent ces harmoniques, elle est très difficile à mettre en oeuvre pour déterminer la forme d'onde des courants et du couple.

- Utilisation de la simulation analogique

P.C. KRAUSE et L.T. WOLOSZYK |139| ont établi le schéma général de la simulation analogique de l'ensemble onduleur-moteur asynchrone, en utilisant d'ailleurs les composantes relatives de R.H. PARK. Ce schéma très complexe nécessite l'utilisation d'un calculateur analogique de grande taille. De ce fait, P.C. KRAUSE et T.A. LIPO |140| ont repris l'étude précédente et proposé un modèle simplifié qui leur permet ensuite avec H.E. JORDAN |158| d'étudier le couple développé par le moteur asynchrone alimenté par un tel convertisseur.

- Utilisation de la simulation numérique

W. CHARLTON |141| |142| et R. MAGUREANU |143| ont utilisé une méthode matricielle associée à l'utilisation des variables d'état. Cette forme de mise en équation conduit à une formulation simple de la solution mais sa mise en application fait appel à un ordinateur pour l'évaluation de la matrice de transition. Cette méthode conduit à une bonne approximation des courbes des courants et du couple, mais elle nécessite l'emploi d'un ordinateur de grandes performances et de programmes difficiles à mettre au point.

- Utilisation de méthodes analytiques

Divers essais ont été menés à partir de la méthode de W.V. LYON |92|. Les études de E.M. SABBAGH et W. SHEWAN |144|, comme celle de J. STEPINA |145| conduisent à des résultats difficilement exploitables.

La méthode que nous proposons est simple, directe et conduit à une solution analytique qu'il est ensuite facile d'exploiter sur de minicalculateurs programmables même pour la détermination du couple.

I - PROPRIETES DES TRANSFORMEES DES ONDES DE TENSION

Considérons un convertisseur délivrant un système triphasé de tensions équilibrées formées de paliers d'égale durée. Nous avons vu (chapitre II, § II.1.2) que pour qu'un tel système ne présente pas de composante homopolaire, il fallait que le nombre $2p$ de paliers par période soit un multiple de 6. Dans ces conditions, il y a $2p$ intervalles durant lesquels les tensions v_{Sa} , v_{Sb} , v_{Sc} restent constantes. La figure 38 donne leur forme d'onde lorsque $p = 9$.

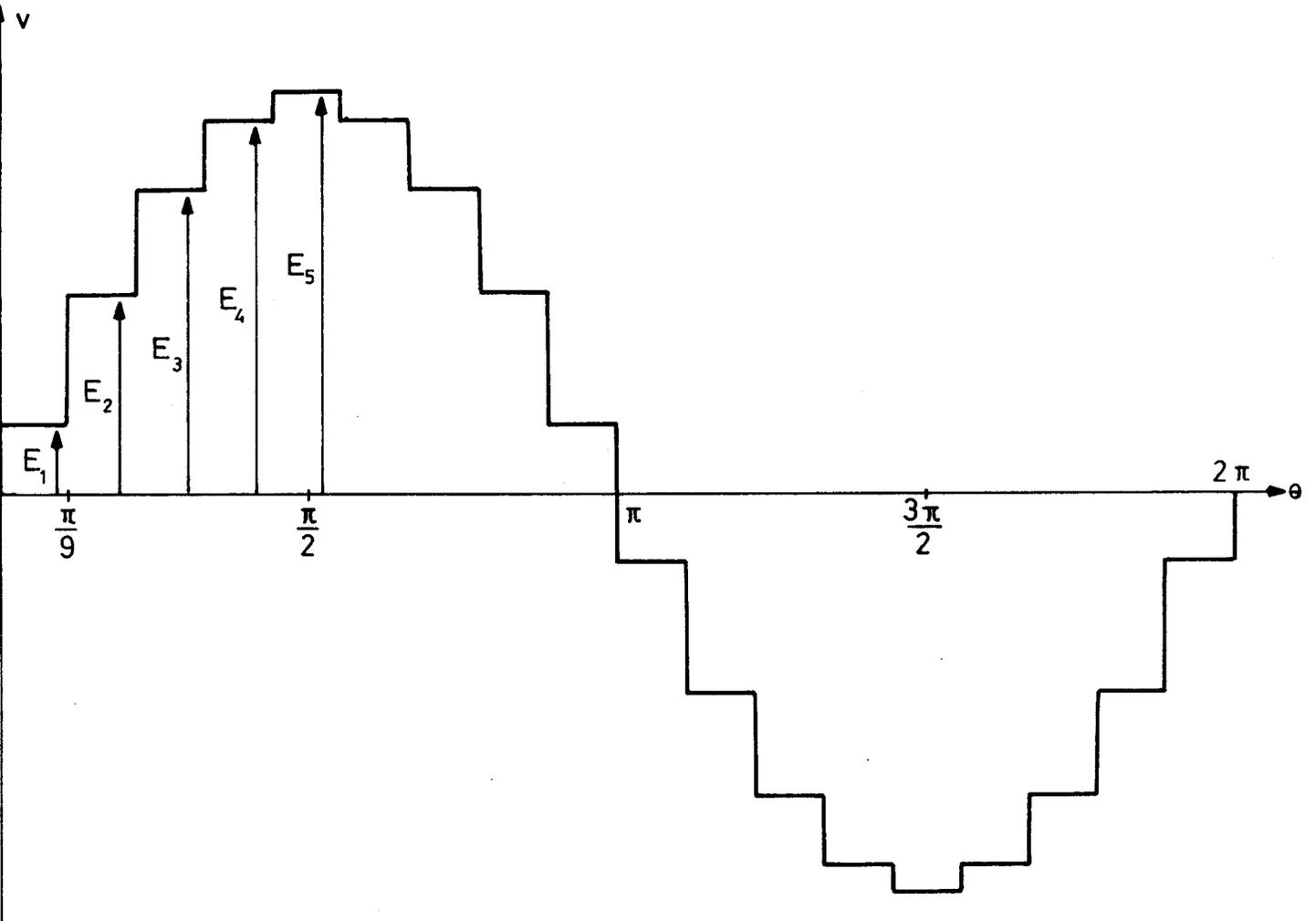


FIGURE 38

D'une façon générale :

- durant le premier intervalle,

$$v_{Sa_1} = E_1$$

$$v_{Sb_1} = E_{4/3} p + 1$$

$$v_{Sc_1} = E_{2/3} p + 1$$

- durant le $K^{\text{ième}}$ intervalle,

$$v_{Sa_k} = E_K$$

$$v_{Sb_K} = E_{4/3} p + k$$

$$v_{Sc_k} = E_{2/3} p + k$$

. Les composantes relatives de Y.H. KU de ces systèmes de tensions sont :

- durant le premier intervalle :

$$\begin{pmatrix} v_{So_1} \\ v_{Sf_1} \\ v_{Sb_1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-i\omega t} & a e^{-i\omega t} & a^2 e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & a^2 e^{i\omega t} & a e^{i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{Sa_1} \\ v_{Sb_1} \\ v_{Sc_1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Puisque } E_i = E_1 \frac{\sin(2i - 1)\pi/2p}{\sin \pi/2p},$$

$$v_{So_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} E_1 \left(1 + \frac{\sin(\pi/2p + 4\pi/3)}{\sin \pi/2p} + \frac{\sin(\pi/2p + 2\pi/3)}{\sin \pi/2p} \right) = 0$$

$$v_{Sf_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} E_1 e^{-i\omega t} \left(1 + a \frac{\sin(\pi/2p + 4\pi/3)}{\sin \pi/2p} + a^2 \frac{\sin(\pi/2p + 2\pi/3)}{\sin \pi/2p} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{E_1 e^{-i\omega t}}{\sin \pi/2p} \{ \sin \pi/2p (1 + a \cos 4\pi/3 + a^2 \cos 2\pi/3)$$

$$+ \cos \pi/p (a \sin 4\pi/3 + a^2 \sin 2\pi/3) \}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{E_1 e^{-i\omega t}}{\sin \pi/2p} \cdot 3/2 \{ \sin \pi/2p - i \cos \pi/2p \} \\
 &= -i \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{E_1}{\sin \pi/2p} e^{-i\omega t} e^{i \pi/2p}
 \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
 v_{Sb_1} &= \frac{1}{\sqrt{3}} E_1 e^{i\omega t} \left(1 + a^2 \frac{\sin(\pi/2p + 4\pi/3)}{\sin \pi/2p} + a \frac{\sin(\pi/2p + 2\pi/3)}{\sin \pi/2p} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{E_1 e^{i\omega t}}{\sin \pi/2p} \{ \sin \pi/2p (1 + a^2 \cos 4\pi/3 + a \cos 2\pi/3) \\
 &\quad + \cos \pi/2p (a^2 \sin 4\pi/3 + a \sin 2\pi/3) \} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{E_1 e^{i\omega t}}{\sin \pi/2p} \cdot 3/2 \{ i \cos \pi/2p + \sin \pi/2p \} \\
 &= i \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{E_1}{\sin \pi/2p} e^{i\omega t} e^{-i \pi/2p}
 \end{aligned}$$

En appliquant cette transformation durant le $K^{\text{ième}}$ intervalle, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} v_{So_K} \\ v_{Sf_K} \\ v_{Sb_K} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-i\omega t} & a e^{-i\omega t} & a^2 e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & a^2 e^{i\omega t} & a e^{i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \frac{\sin(2K-1)\pi/2p}{\sin \pi/2p} \\ E_1 \frac{\sin[(2K-1)\pi/2p + 4\pi/3]}{\sin \pi/2p} \\ E_1 \frac{\sin[(2K-1)\pi/2p + 2\pi/3]}{\sin \pi/2p} \end{pmatrix}$$

Un calcul identique donne :

$$v_{So_K} = 0$$

$$v_{Sf_K} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{E_1 e^{-i\omega t}}{\sin \pi/2p} \{ \sin(2K-1)\pi/2p + a \sin[(2K-1)\pi/2p + 4\pi/3] \\ + a^2 \sin[(2K-1)\pi/2p + 2\pi/3] \}$$

ou

$$v_{Sf_K} = -\frac{\sqrt{3}}{2} i \frac{E_1}{\sin \pi/2p} e^{-i\omega t} e^{-i(2K-1)\pi/2p}$$

De même, nous obtenons :

$$v_{Sb_K} = \frac{\sqrt{3}}{2} i \frac{E_1}{\sin \pi/2p} e^{i\omega t} e^{i(2K-1)\pi/2p}$$

Si dans les expressions de v_{Sf_K} et v_{Sb_K} nous effectuons le changement de variable :

$$\omega t = \omega' t + (K-1)\pi/p$$

nous obtenons :

$$v_{Sf_K} = -\frac{\sqrt{3}}{2} i \frac{E_1}{\sin \pi/2p} e^{-i(\omega t' + (K-1)\pi/p)} e^{i(2K-1)\pi/2p}$$

c'est-à-dire :

$$v_{Sf_K} = -\frac{\sqrt{3}}{2} i \frac{E_1}{\sin \pi/2p} e^{-i\omega t'} e^{i\pi/2p}$$

et de même :

$$v_{Sb_K} = \frac{\sqrt{3}}{2} i \frac{E_1}{\sin \pi/2p} e^{i\omega t'} e^{-i \pi/2p}$$

On voit que les fonctions v_{Sf_K} et v_{Sb_K} sont identiques aux fonctions v_{Sf_1} et v_{Sb_1} pour :

$$(K - 1)\pi/p \leq \omega t \leq K \pi/p$$

Il en résulte que les fonctions v_{Sf} et v_{Sb} sont des fonctions périodiques de période T définie par :

$$T = T_0/2p$$

T_0 étant la période des tensions simples délivrées par l'onduleur "quasi-sinusoïdal".

C'est cette périodicité des fonctions v_{Sf} et v_{Sb} qui permet la simplification de l'étude analytique de l'ensemble onduleur-moteur asynchrone triphasé
|146|

II - DETERMINATION DES EXPRESSIONS ANALYTIQUES DES COURANTS ET DU COUPLE |147|

Le système différentiel utilisé pour l'étude du moteur asynchrone est celui établi au chapitre III

$$(1) \quad \begin{cases} v_{Sf_1} = (R_S + i\omega L_S) i_{Sf_1} + L_S \frac{di_{Sf_1}}{dt} + 3/2 M i\omega i_{Rf_1} + 3/2 M \frac{di_{Rf_1}}{dt} \\ 0 = 3/2 M i\omega i_{Sf_1} + 3/2 M \frac{di_{Sf_1}}{dt} + (R_R + i\omega L_R) i_{Rf_1} + L_R \frac{di_{Rf_1}}{dt} \end{cases}$$

avec

$$v_{Sf_1} = V_c e^{-i\omega t}$$

et ici :

$$V_c = -i \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{E_1}{\sin \pi/2p} e^{i \pi/2p}$$

Nous utilisons ces expressions pour :

$$0 \leq t \leq \pi/\omega p$$

elles resteront utilisables pour :

$$(K - 1)\pi/p\omega \leq t \leq K \pi/p\omega$$

à condition de remplacer ωt par $\omega t + (K - 1)\pi/p$ avec $K \in \mathbf{N}$.

Les solutions du système (1) sont :

$$i_{Sf_1} = B e^{-i\omega t} + \lambda_1 e^{C_1 t} + \lambda_2 e^{C_2 t}$$

$$i_{Rf_1} = D e^{-i\omega t} + K_1 \lambda_1 e^{C_1 t} + K_2 \lambda_2 e^{C_2 t}$$

λ_1, λ_2 étant des constantes complexes d'intégration, K_1, K_2 des coefficients complexes obtenus par identification et C_1 et C_2 les racines de l'équation caractéristique qui est à coefficients complexes.

Les quantités $B e^{-i\omega t}$ et $D e^{-i\omega t}$ donnent le régime forcé correspondant à l'entrée $v_{Sf_1} = V_c e^{-i\omega t}$. On obtient les expressions de B et de D par identification :

$$B = V_c / R_s \quad D = V_c / R_s \frac{3/2 M i \omega'}{R_R - i \omega' \mathcal{L}_R}$$

Pour déterminer les constantes d'intégration, notons que de par la périodicité de la fonction v_{Sf_1} , nous avons en régime permanent établi :

$$i_{Sf_1}(o) = i_{Sf_1}(T)$$

$$i_{Rf_1}(o) = i_{Rf_1}(T)$$

Cette condition de périodicité s'écrit :

$$B(1 - e^{-i\omega T}) + \lambda_1(1 - e^{C_1 T}) + \lambda_2(1 - e^{C_2 T}) = 0$$

$$D(1 - e^{-i\omega T}) + K_1 \lambda_1(1 - e^{C_1 T}) + K_2 \lambda_2(1 - e^{C_2 T}) = 0$$

ce qui donne :

$$\lambda_1 = \frac{1}{K_2 - K_1} \frac{1 - e^{-i\omega T}}{1 - e^{C_1 T}} (B K_2 - D)$$

$$\lambda_2 = - \frac{1}{K_2 - K_1} \frac{1 - e^{-i\omega T}}{1 - e^{C_2 T}} (B K_1 + D)$$

ou, en revenant aux grandeurs initiales,

$$\lambda_1 = - V_c / R_S \frac{1 - e^{-i\omega T} \frac{C_1 + i\omega R_S R_R + R_R \mathcal{L}(C_2 + i\omega) - i\omega' R_S \mathcal{L} - i\omega'(C_2 + i\omega) (\mathcal{L} \mathcal{L}^{-9/4M^2})}{C_1 T} \frac{C_2 - C_1}{C_2 - C_1}}{1 - e^{C_1 T} \frac{C_2 - C_1}{C_2 - C_1}} \frac{R_S (R_R - i\omega' \mathcal{L}_R)}{R_S (R_R - i\omega' \mathcal{L}_R)}$$

$$\lambda_2 = + V_c / R_S \frac{1 - e^{-i\omega T} \frac{C_2 + i\omega R_S R_S + R_R \mathcal{L}(C_1 + i\omega) - i\omega' R_S \mathcal{L} - i\omega'(C_1 + i\omega) (\mathcal{L} \mathcal{L}^{-9/4M^2})}{C_2 T} \frac{C_1 - C_2}{C_1 - C_2}}{1 - e^{C_2 T} \frac{C_1 - C_2}{C_1 - C_2}} \frac{R_S (R_R - i\omega' \mathcal{L}_R)}{R_S (R_R - i\omega' \mathcal{L}_R)}$$

2.1. Détermination des courants statoriques

De manière à simplifier les expressions, posons à nouveau :

$$C_1 + i\omega = - 1/T_1 + i \Omega_1$$

$$C_2 + i\omega = - 1/T_2 + i \Omega_2$$

T_1, T_2 étant les deux constantes de temps caractéristiques des régimes libres du moteur asynchrone triphasé, Ω_1, Ω_2 étant les deux pseudopulsations intervenant dans ces mêmes régimes libres.

Posons de plus :

$$1 - i \Omega_1 T_1 = P_1 e^{-i\psi_1}$$

$$1 - i \Omega_2 T_2 = P_2 e^{-i\psi_2}$$

$$(T_2 - T_1) - i T_1 T_2 (\Omega_1 - \Omega_2) = P_3 e^{-i\psi_3}$$

$$\begin{aligned} & \left[R_S R_S + \omega' \Omega_2 (\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2) - \frac{R_R \mathcal{L}_S}{T_2} \right] + i \left[R_R \mathcal{L}_S \Omega_2 - R_S \mathcal{L}_R \omega' + \omega' / T_2 (\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2) \right] \\ & = P_4 e^{i\psi_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[R_S R_R + \omega' \Omega_1 (\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2) - \frac{R_R \mathcal{L}_S}{T_2} \right] + i \left[R_R \mathcal{L}_S \Omega_1 - R_S \mathcal{L}_R \omega' + \omega' / T_1 (\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2) \right] \\ & = P_5 e^{+i\psi_5} \end{aligned}$$

$$R_R - i \omega' \mathcal{L}_R = Z_R e^{-i\phi_R}$$

$$1 - e^{C_1 T} = (1 - e^{-T/T_1} \cos \Omega_3 T) + i (e^{-T/T_1} \sin \Omega_3 T) = N_1 e^{i\chi_1}$$

$$1 - e^{C_2 T} = (1 - e^{-T/T_2} \cos \Omega_4 T) + i (e^{-T/T_2} \sin \Omega_4 T) = N_2 e^{i\chi_2}$$

On obtient alors :

$$\lambda_1 = -V_c / R_S \ 2i \sin \pi/2p \ \frac{T_2 P_1 P_4}{R_S N_1 P_3 Z_R} e^{i(\psi_4 + \psi_3 + \phi_R - \chi_1 - \psi_1 - \pi/2p)}$$

$$\lambda_2 = V_c / R_S \ 2i \sin \pi/2p \ \frac{T_1 P_2 P_5}{R_S N_2 P_4 Z_R} e^{i(\psi_5 + \psi_3 + \phi_P - \chi_2 - \psi_2 - \pi/2p)}$$

Puisque :

$$i_{Sf_1} = R e^{-i\omega t} + \lambda_1 e^{C_1 t} + \lambda_2 e^{C_2 t}$$

et que :

$$i_{Sa} = \frac{2}{\sqrt{3}} (i_{Sf_1} e^{i\theta})$$

$$\text{avec } \theta = \omega t + (K - 1)\pi/p \text{ et } t \in [0, \pi/p]$$

le courant statorique i_{Sa} est donné par :

$$i_{Sa} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Re \left\{ (B e^{i(K-1)\pi/p} + \lambda_1 e^{(C_1 + i\omega)t + i(K-1)\pi/p} + \lambda_2 e^{(C_2 + i\omega)t + i(K-1)\pi/p}) \right\}$$

c'est-à-dire en tenant compte des expressions de B et de V_c :

$$i_{Sa} = E_1/R_S \left\{ \frac{\sin(2K-1)\pi/2p}{\sin \pi/2p} - 2 \frac{T_2 P_1 P_4}{R_S N_1 P_3 Z_R} e^{-t/T_1} \cos(\Omega_1 t + (K-1)\pi/p + \psi_3 + \psi_4 + \phi_R - \psi_1 - \chi_1) + 2 \frac{T_1 P_2 P_5}{R_S N_2 P_3 Z_R} e^{-t/T_2} \cos(\Omega_2 t + (K-1)\pi/p + \psi_3 + \psi_5 + \phi_R - \psi_2 - \chi_2) \right\}$$

On obtiendrait d'une manière identique l'expression des courants i_{Sb} et i_{Sc} .

2.2. Détermination des courants rotoriques

En posant :

$$R_S + \mathcal{L}_S(C_1 + i\omega) = - \{ (\mathcal{L}_S/T_1 - R_S) - i\mathcal{L}_S\Omega_1 \} = - P_6 e^{-i\psi_6}$$

$$R_S + \mathcal{L}_S(C_2 + i\omega) = - \{ (\mathcal{L}_S/T_2 - R_S) - i\mathcal{L}_S\Omega_2 \} = - P_7 e^{-i\psi_7}$$

nous obtenons :

$$K_1 \lambda_1 = V_c / R_S \frac{T_1 T_2 F_4 P_6}{N_1 3/2 M P_3 R_S Z_R} 2i \sin \pi/2p e^{i(\psi_4 + \psi_3 + \phi_R - \psi_6 - \chi_1 - \pi/2p)}$$

$$K_2 \lambda_2 = - V_c / R_S \frac{T_1 T_2 P_5 P_7}{N_2 3/2 M P_3 R_S Z_R} 2i \sin \pi/2p e^{i(\psi_5 + \psi_3 + \phi_R - \psi_7 - \chi_2 - \pi/2p)}$$

D'une manière analogue à celle présentée lors du chapitre III.§.IV, par l'emploi de la matrice $[T(\theta')]$ nous obtenons :

$$i_{Ra} = \frac{2}{\sqrt{3}} (i_{Rf} e^{i\theta'})$$

avec

$$\theta' = g\omega t + (K - 1)\pi/p \quad g\omega/\omega$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} i_{Ra} = & E_1 / R_S \left\{ \frac{3/2 M \omega'}{Z_R \sin \pi/2p} \cos(g\omega t - \phi_R - (K - 1)\pi/p g) \right. \\ & + 2 \frac{T_1 T_2 P_4 P_6}{N_1 3/2 M P_2 R_S Z_R} e^{-t/T_1} \cos [(\Omega_1 - \omega')t + (K-1)\pi/p \cdot g + \psi_4 + \psi_3 - \phi_R - \psi_6 - \chi_1] \\ & \left. - 2 \frac{T_1 T_2 P_5 P_7}{N_1 3/2 M P_3 R_S Z_R} e^{-t/T_2} \cos [(\Omega_2 - \omega')t + (K-1)\pi/p \cdot g + \psi_5 + \psi_3 - \phi_R - \psi_7 - \chi_1] \right\} \end{aligned}$$

et l'on peut obtenir les courants i_{Rb} et i_{Rc} de la même façon.

2.3. Détermination du couple

Puisque nous connaissons les expressions de i_{Sf} et de i_{Rf} nous connaissons celle de i_{Rb} et donc du couple qui est donnée par :

$$C = 3 M \mathcal{J}(i_{Sf} i_{Rf})$$

En posant :

$$C_2 + \bar{C}_1 = -1/T - i\Omega \qquad \bar{C}_2 + C_1 = -1/T + i\Omega$$

$$\text{avec} \quad 1/T = 1/T_1 + 1/T_2 \qquad \text{et} \quad \Omega = \Omega_1 - \Omega_2$$

nous obtenons après simplifications :

$$C = -9/4 \frac{M}{(\sin \pi/2p)^2} E_1^2 / R_S^2 \left[\frac{3M\omega'}{2Z_R} \left\{ \cos \phi_R + \frac{T_2 P_1 P_4}{R_S N_1 P_3 Z_R} e^{-t/T_1} \sin(\Omega_1 t + \psi_4 + \psi_3 - \psi_1 - \chi_1 - \frac{\pi}{2p}) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{T_1 P_2 P_5}{R_S N_2 P_3 Z_R} e^{-t/T_2} \sin(\Omega_2 t + \psi_5 + \psi_3 - \psi_2 - \chi_2 - \frac{\pi}{2p}) \right\} \right. \\ \left. + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2p}\right) \left\{ \frac{T_1 T_2 P_4 P_6}{3M N_1 P_3 R_S Z_R} e^{-t/T_1} \cos(\Omega_1 t + \psi_4 + \psi_3 + \phi_R - \psi_6 - \chi_1 - \frac{\pi}{2p}) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{T_1 T_2 P_5 P_7}{3M N_2 P_3 R_S Z_R} e^{-t/T_2} \cos(\Omega_2 t + \psi_5 + \psi_3 + \phi_R - \psi_7 - \chi_2 - \frac{\pi}{2p}) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
& - (2 \sin \frac{\pi}{2p})^2 \left\{ \frac{T_1^2 T_2^2 P_1 P_4^2 P_6}{R_S^2 N_1^2 P_3^2 Z_R^2 \frac{3}{2}^M} e^{-\frac{2t}{T}} \sin(\psi_1 - \psi_6) + \frac{T_1^2 T_2^2 P_2 P_5^2 P_7}{R_S^2 N_2^2 P_3^2 Z_R^2 \frac{3}{2}^M} e^{-\frac{2t}{T_2}} \sin(\psi_2 - \psi_7) \right\} \\
& - (2 \sin \frac{\pi}{2p})^2 \left\{ \frac{T_1 T_2^2 P_1 P_4 P_5 P_7}{R_S^2 P_3^2 Z_R^2 N_1 N_2 \frac{3}{2}^M} \sin(\Omega t + \psi_4 - \chi_1 - \psi_1 - \psi_5 + \psi_7 + \chi_2) \right. \\
& \left. - \frac{T_1^2 T_2^2 P_2 P_4 P_5 P_6}{R_S^2 P_3^2 Z_R^2 N_1 N_2 \frac{3}{2}^M} \sin(\Omega t + \psi_4 - \chi_1 - \psi_2 - \psi_5 + \psi_6 + \chi_2) \right\} e^{-\frac{t}{T}}
\end{aligned}$$

Le couple est une fonction périodique de période $T/2p$.

Il se compose d'une constante, de termes amortis et de termes pseudo-sinusoïdaux amortis.

III - "REALISABILITE" DES FORMES D'ONDE QUASI-SINUSOIDALES TRIPHASEES

Il reste à montrer comment on peut obtenir un système triphasé de tensions en gradins optimisés.

3.1. Utilisation d'un simple onduleur triphasé

Le schéma de principe de l'onduleur triphasé à six redresseurs contrôlés principaux a été donné dès la figure 36. Les formes d'onde obtenues sont celles de la figure 37.

Ce montage donne aux bornes de chaque phase du moteur une tension présentant $2p = 6$ gradins optimisés puisque

$$E_2/E_1 = 2$$

et que chaque gradin a une durée égale à $\pi/3\omega$ avec $\omega = 2\pi f$, f étant la fréquence de commutation de chaque bras de pont.

3.2. Utilisation d'onduleurs monophasés et de transformateurs [148]

Considérons p onduleurs monophasés délivrant des tensions rectangulaires $u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_p$ de même amplitude mais déphasées deux à deux de π/p .

Ces tensions appliquées aux primaires de p transformateurs à trois secondaires (figure 39) permettent d'engendrer trois groupes de p tensions secondaires dont les sommes constituent les tensions v_{Sa}, v_{Sb}, v_{Sc} .

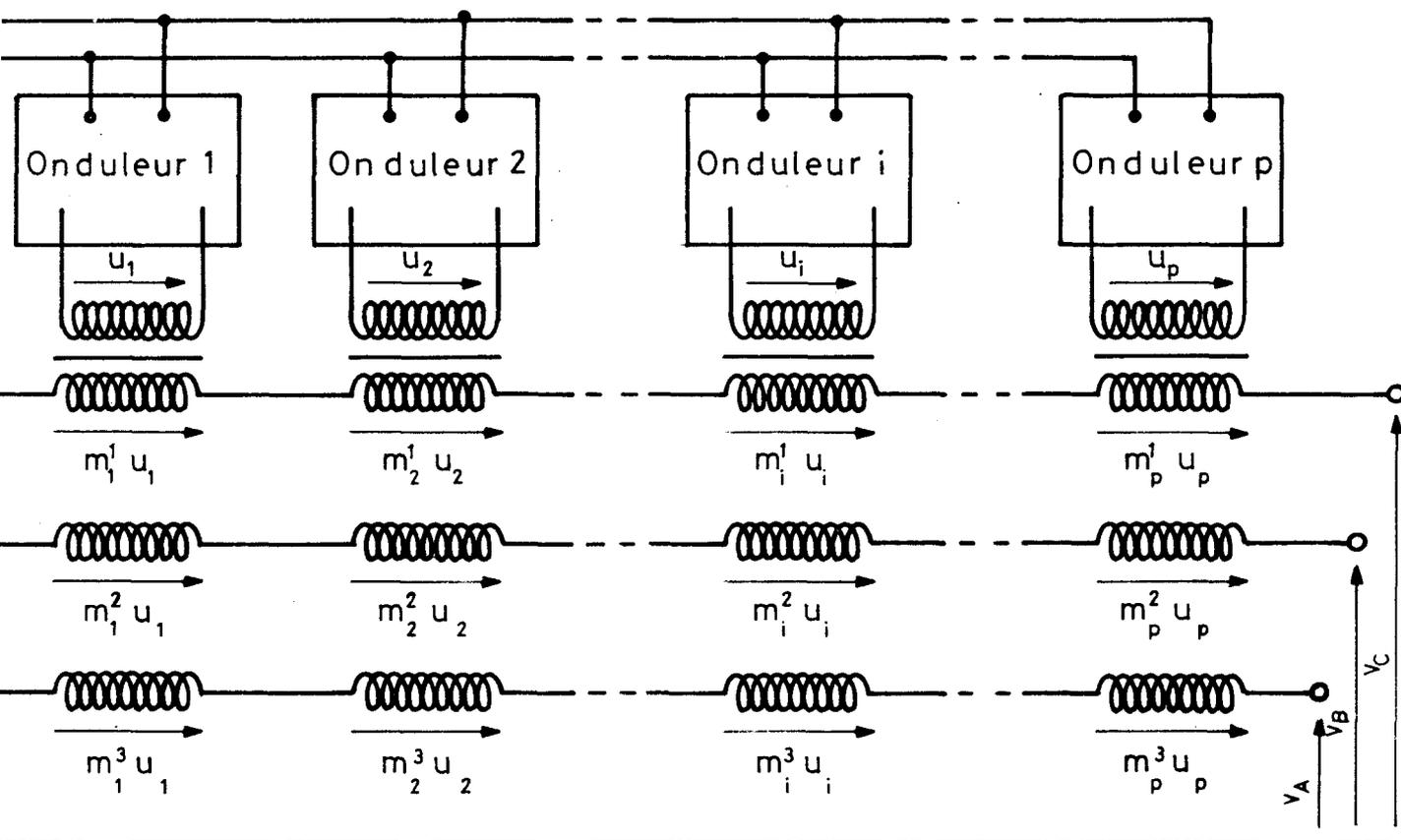


FIGURE 39

$$v_{Sa} = \sum_{i=1}^n m_i^1 u_i ; v_{Sb} = \sum_{i=1}^n m_i^2 u_i ; v_{Sc} = \sum_{i=1}^n m_i^3 u_i$$

On peut calculer les rapports de transformation m_i^1, m_i^2, m_i^3 de manière à engendrer un système triphasé de tensions en gradins optimisés de somme nulle ($p = 3n$). Si le passage, pour $t = 0$, de la tension u_1 de la valeur $-U$ à la valeur $+U$ fait varier v_{Sa} de E_{2p} à E_1 alors :

$$2m_1^1 U = E_1 - E_{2p} = 2 E_1$$

Pour $t = T/2p$, l'inversion de u_2 fait varier v_{Sa} de :

$$2m_2^1 U = E_2 - E_1 = 2 E_1 \cos \pi/p$$

Pour $t = \frac{T(i-1)}{2p}$, l'inversion de u_i fait varier v_{Sa} de :

$$2m_i^1 U = E_i - E_{i-1} = 2 E_1 \cos(i-1)\pi/p$$

et enfin pour $t = \frac{T(p-1)}{2p}$, l'inversion de u_p fait varier v_{Sa} de :

$$2m_p^1 U = E_p - E_{p-1} = 2 E_1 \cos(p-1)\pi/p$$

On peut alors en déduire les valeurs de $m_2^1, m_3^1, \dots, m_i^1, \dots$, et m_p^1 rapportées à m_1^1

$$m_2^1/m_1^1 = \cos \pi/p ; m_3^1/m_1^1 = \cos 2\pi/p ; \dots ; m_i^1/m_1^1 = \cos(i-1)\pi/p ;$$

$$\dots ; m_p^1/m_1^1 = \cos(p-1)\pi/p$$

Les ondes v_{Sb} et v_{Sc} étant déphasées de $2p/3 \pi/p$ et de $4p/3 \pi/p$ en arrière de celle de v_{Sa} , les rapports m_i^2 et m_i^3 seront donnés par :

$$m_i^2/m_i^1 = \cos(i-1-2p/3)\pi/p ; m_i^3/m_i^1 = \cos(i-1-4p/3)\pi/p$$

Les rapports de transformation ont pour expression générale :

$$m_i^r = E_1/U \cos(i-1-(r-1)2p/3)\pi/p$$

avec $r = 1, 2$ ou 3 suivant qu'il s'agit des phases A, B ou C.

Les p transformateurs n'ont pas tous des rapports différents.

En effet :

$$m_{i+n}^1 = -m_i^2 ; m_{i+n}^2 = -m_i^3 ; m_{i+n}^3 = -m_i^1$$

Les transformateurs $2n+1, 2n+2, \dots, n+1, n+2$ ont les mêmes enroulements secondaires que $1, 2, \dots$. Il suffit de prendre les enroulements adéquats dans le sens convenable.

De plus, si n est impair et supérieur à 1 , les $n-1$ transformateurs compris entre ceux de rang 1 et $n+1$ peuvent être groupés deux à deux, 2 avec n , 3 avec $n-1, \dots$

Dans chaque groupe, on trouve au signe et au numéro de la phase près, les mêmes rapports de transformation.

Il n'y a donc que $1 + (n-1)/2$ soit $1/2 + p/6$ transformateurs de construction différente.

Si n est pair et supérieur à 2 , parmi les $n-1$ transformateurs compris entre le premier et le $(n+1)^{i\text{ème}}$, on peut en grouper $n-2$ deux à deux, celui de rang 2 avec celui de rang n , celui de rang 3 avec le $(n-1)^{i\text{ème}}$...

Il faut donc $1 + (n-2)/2 + 1$ soit $1 + p/6$ transformateurs différents.

La formule générale permet de déterminer rapidement les éléments nécessaires à la réalisation d'un système triphasé équilibré de tensions alternatives en paliers optimisés.

Redonnant les valeurs connues $|1||113|$ pour les signaux à 6 et 12 paliers par période, elle permet de les établir pour les nombres plus élevés de paliers.

Le tableau IV donne, par exemple, les p rapports de transformation

	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2p = 6	m_i^1/m_i	1	0,2	-0,5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	m_i^2/m_i	-0,5	0,5	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	m_i^3/m_i	-0,5	-1	-0,5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2p = 12	m_i^1/m_i	1	0,866	0,5	0	-0,5	-0,866	-	-	-	-	-	-
	m_i^2/m_i	-0,5	0	0,5	0,866	1	0,866	-	-	-	-	-	-
	m_i^3/m_i	-0,5	-0,866	-1	-0,866	-0,5	0	-	-	-	-	-	-
2p = 18	m_i^1/m_i	1	0,940	0,766	0,5	0,174	-0,174	-0,5	-0,766	-0,940	-	-	-
	m_i^2/m_i	-0,5	-0,174	0,174	0,5	0,766	0,940	1	0,940	0,766	-	-	-
	m_i^3/m_i	-0,5	-0,766	-0,940	-1	-0,940	-0,766	-0,5	-0,174	0,174	-	-	-
2p = 24	m_i^1/m_i	1	0,966	0,866	0,707	0,5	0,259	0	-0,259	-0,5	-0,707	-0,866	-0,966
	m_i^2/m_i	-0,5	-0,259	0	0,259	0,5	0,707	0,866	0,966	1	0,966	0,866	0,707
	m_i^3/m_i	-0,5	-0,707	-0,866	-0,966	-1	-0,966	-0,866	-0,707	-0,5	-0,259	0	0,259

TABLEAU IV

ramenés à m_1^1 pour $2p$ égal à 6, 12, 18 et 24.

IV - EXEMPLES DE FORMES D'ONDE

Après avoir montré que les formes d'ondes de tension considérées étaient facilement réalisables, nous allons pour terminer donner un exemple d'application des formules générales des courants et du couple.

Le tracé des formes d'ondes, à partir des expressions, a été effectué pour le moteur suivant :

Moteur CEM - Type L 580236 ; 7,5 CV ; 50 Hz ; 1420 t/mn ;
triphasé ; stator 220/380 V , 21,5 A/12,5 A ; rotor 110 V ;
30,5 A.

Des essais classiques conduisent aux valeurs suivantes des paramètres de la machine :

$R_S = 0,54 \Omega$; $R_R = 0,076 \Omega$; $L_S = 0,127 \text{ H}$; $L_R = 0,0098 \text{ H}$;
 $M = 0,0223 \text{ H}$.

Ce moteur est alimenté par les plus simples des tensions en paliers optimisés ($2p = 6$).

4.1. Variation des constantes de temps et des pseudopulsations

La figure 40 montre comment varient les deux constantes de temps T_1 et T_2 et les deux pseudopulsations Ω_1 et Ω_2 lorsque la période des tensions appliquées est de 20 ms, en fonction de la vitesse angulaire relative ω'/ω .

4.2. Forme d'onde du courant i_{Sa}

Nous avons tracé point par point (figure 41) la forme d'onde du courant statorique i_{Sa} à partir de l'équation obtenue au §.2.1., pour deux valeurs du glissement. Nous avons choisi E_1 de façon que la valeur efficace du premier harmonique soit 220 V, c'est-à-dire $E_1 = 163 \text{ V}$.

La valeur du premier glissement 1% correspond à une faible charge, la seconde, 10%, à une surcharge.

On peut noter que la première forme d'onde est très éloignée d'une

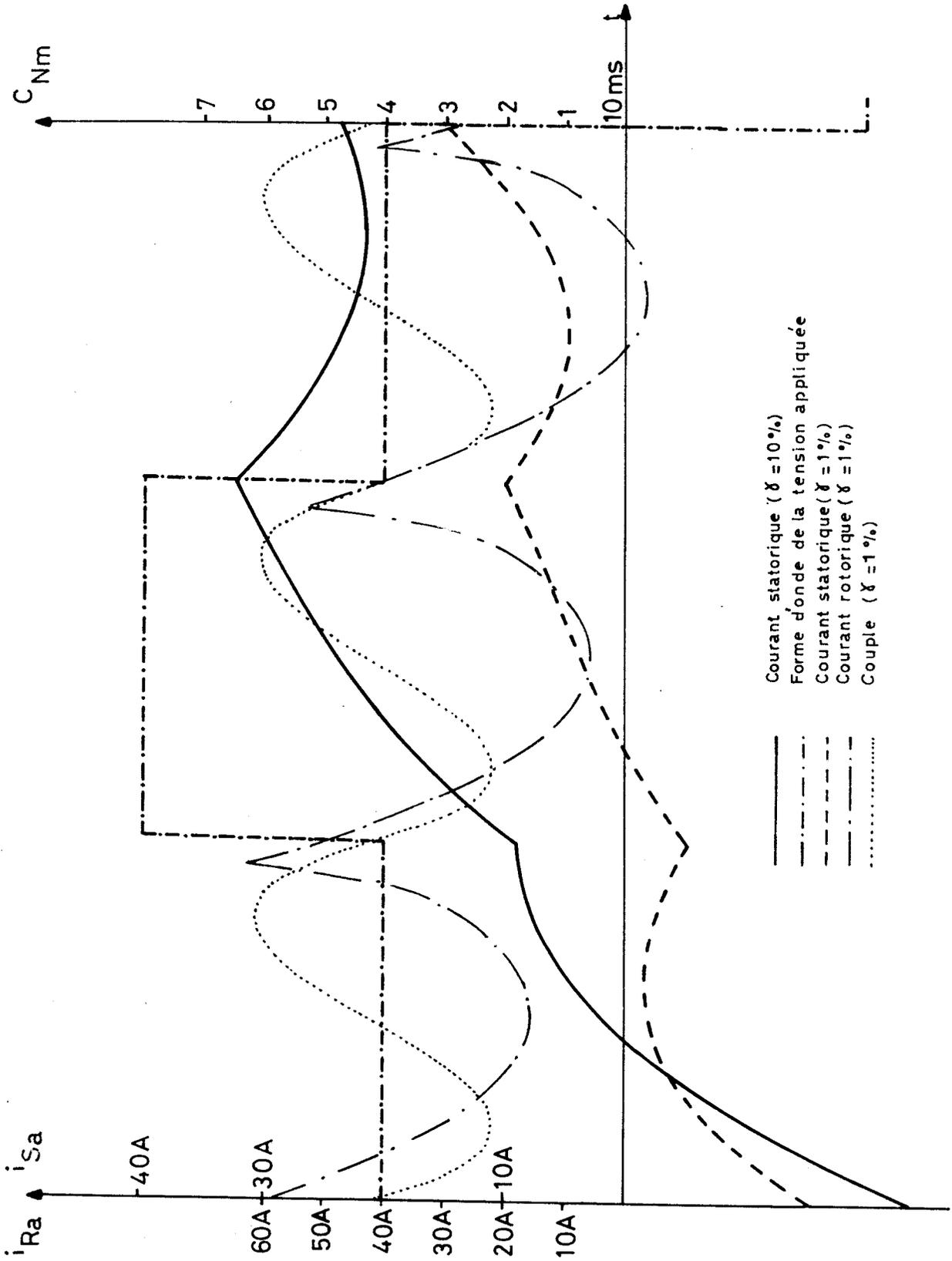
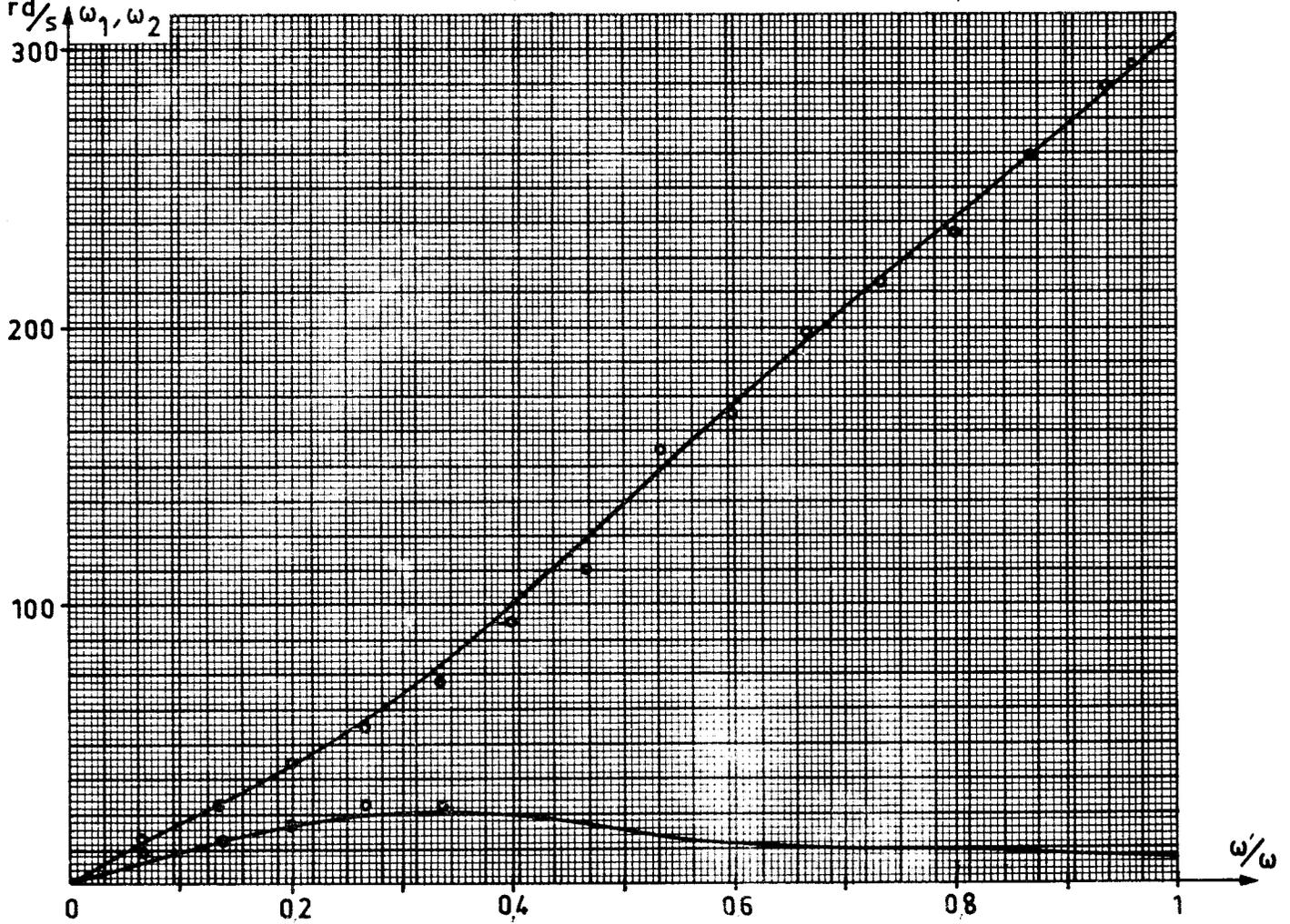
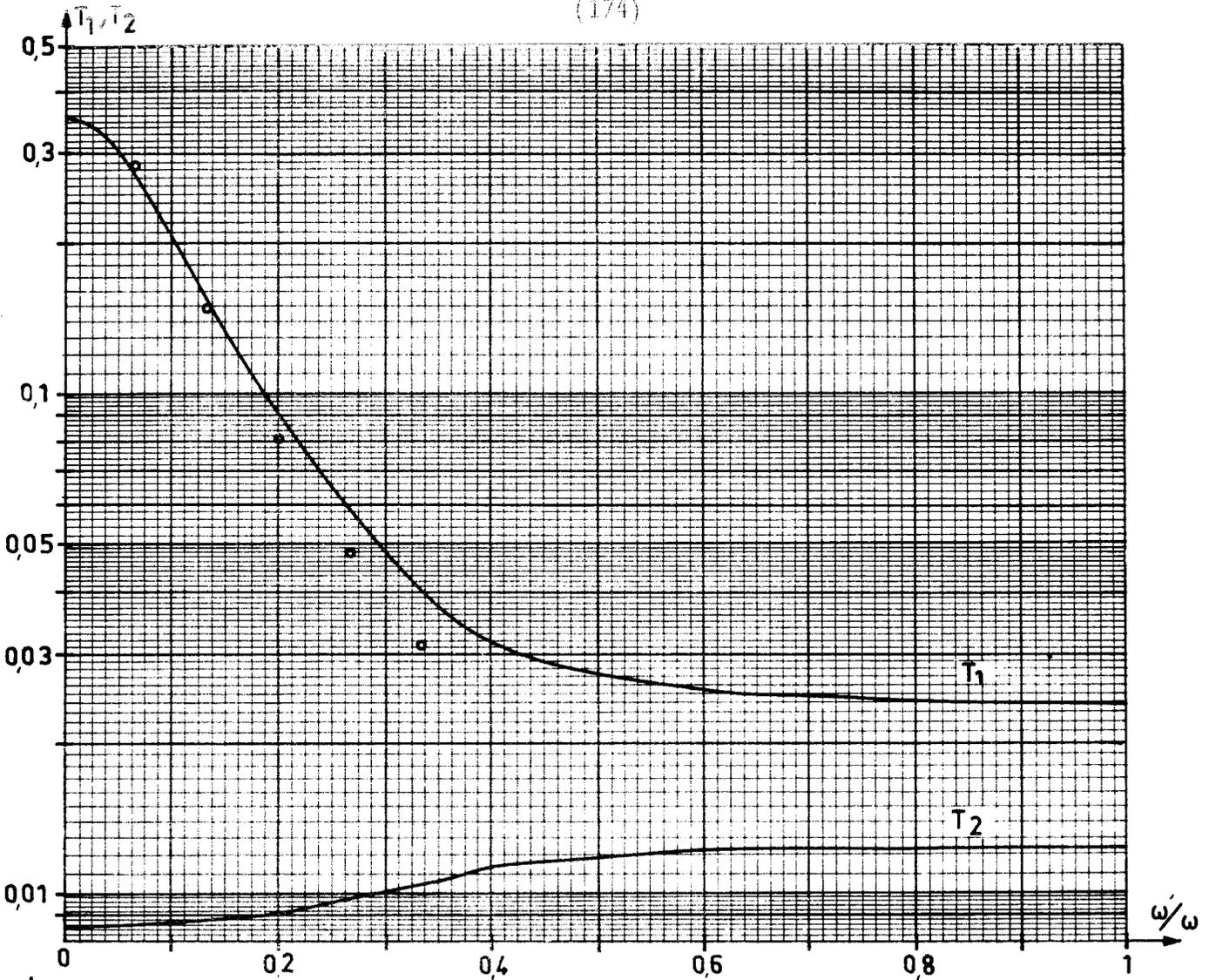


FIGURE 41



sinusoïde. Elle présente des pseudo-oscillations assez marquées. Lorsque la charge du moteur asynchrone augmente, la forme d'onde du courant absorbé se rapproche de celle d'une sinusoïde.

4.3. Forme d'onde du courant rotorique

La figure 41 donne aussi un exemple de l'évolution du courant rotorique i_{Ra} durant une demi-période des tensions d'alimentation. Elle correspond à une valeur importante du glissement (10%). Cette courbe montre que les enroulements rotoriques sont soumis à des pointes de courant de valeur relative élevée.

Ceci est le cas chaque fois que l'on désire modifier de façon brusque le flux tournant par modification des tensions d'entrée [133].

On doit noter que la phase de la forme d'onde des courants rotoriques dépend de la valeur de l'angle θ_0 entre l'axe de la phase A du stator et l'axe de la phase A du rotor à l'instant initial.

L'exemple traité correspond à l'alimentation d'un moteur asynchrone à rotor bobiné, mais il peut s'étendre à celui d'un moteur rotorique à cage d'écureuil. Cette étude du courant rotorique permet d'expliquer les ruptures de cage que l'on observe parfois.

Les formes d'ondes des courants statoriques et rotoriques ainsi obtenues par le calcul ont bien l'allure de celles expérimentalement relevées.

4.4. Forme d'onde du couple

La figure 42 montre enfin comment évolue le couple durant une alternance des tensions d'alimentation, et la courbe tracée correspond à une valeur faible du glissement (1%).

Cette courbe montre que le couple présente des oscillations de fréquence égale à $2p$ fois celle des tensions d'alimentation, d'amplitude relativement importante. (Dans cet exemple, l'amplitude crête à crête des oscillations est sensiblement voisine de la valeur moyenne).

V - CONCLUSION

L'étude que nous venons de présenter sur l'alimentation d'un moteur asynchrone triphasé par un convertisseur délivrant un système triphasé de tensions équilibrées en paliers optimisés constitue le premier exemple d'application de la méthode basée sur les composantes de Y.H. KU que nous avons proposée.

Elle illustre bien l'intérêt de cette méthode. En effet :

- les expressions analytiques des courants statoriques et rotoriques s'obtiennent aisément en fonction de paramètres facilement mesurables.
- l'expression analytique du couple, bien qu'un peu plus complexe, s'obtient néanmoins sans difficulté.

Ces expressions permettaient de rechercher les caractéristiques de construction optimales du moteur asynchrone triphasé destiné à être alimenté par un convertisseur de ce genre. Nous le montrerons lors de la troisième application.

C H A P I T R E V

ETUDE ANALYTIQUE DU MOTEUR ASYNCHRONE ALIMENTÉ PAR UN ONDULEUR A MODULATION DE LARGEUR DES IMPULSIONS.

De très nombreuses publications ont été consacrées à l'étude des différents types d'onduleur pouvant fonctionner suivant le principe de la modulation de largeur des impulsions ou à l'étude des différentes techniques de modulation et de commande, mais à notre connaissance aucune étude n'a été consacrée au comportement du moteur asynchrone alimenté par un tel convertisseur.

L'emploi des composantes relatives de Y.H. KU va nous permettre de donner une expression analytique relativement simple des courants et du couple. Nous n'explicitons pas complètement ces expressions que nous laisserons sous la forme matricielle qui nous a semblé la plus judicieuse pour l'exploitation numérique. L'ordinateur dans ce cas n'est qu'un outil de calcul ; il ne sert pas à résoudre pas à pas le système différentiel. La précision des calculs est ainsi très grande et on peut ensuite utiliser des techniques numériques pour le calcul des développements en série de Fourier des courants et du couple par exemple, sans que les résultats soient entachés de l'erreur de résolution que donnerait un traitement purement numérique des équations initiales.

De manière à étudier le cas le plus général, on supposera tout d'abord que les tensions aux bornes des phases statoriques peuvent aussi présenter une composante homopolaire (alimentation par quatre fils d'un stator couplé en étoile). L'étude du courant produit par cette composante nous permettra de montrer, dans ce cas simple, comment on mène les calculs. Nous étudierons ensuite les courants produits par les deux autres types de composantes ; nous en déduirons les expressions matricielles des courants réels et du couple.

I - SYSTEME D'EQUATIONS UTILISEES. INTERVALLES A ETUDIER

Nous utiliserons le système d'équations simplifiées (1) après

emploi de la transformation de Y.H. KU rappelée au Chapitre III, auquel nous ajouterons l'équation différentielle régissant le comportement de la composante homopolaire, soit :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{So} = R_S i_{So} + \mathcal{L}_{So} \frac{di_{So}}{dt} \\ v_{Sf} = (R_S + i\omega \mathcal{L}_S) i_{Sf} + \mathcal{L}_S \frac{di_{Sf}}{dt} + 3/2 M i\omega i_{Rf} + 3/2 M \frac{di_{Rf}}{dt} \\ v_{Rf} = 3/2 M i\omega i_{Sf} + 3/2 M \frac{di_{Sf}}{dt} + (R_R + i\omega \mathcal{L}_R) i_{Rf} + \mathcal{L}_R \frac{di_{Rf}}{dt} \end{array} \right.$$

Le rotor du moteur asynchrone étant court-circuité, les tensions v_{Ra} , v_{Rb} et v_{Rc} sont nulles, de même v_{Rf} . Les quantités v_{So} et v_{Sf} sont les transformées des tensions statoriques v_{Sa} , v_{Sb} , v_{Sc} . Ces tensions ne sont pas constantes durant toute la période T mais on peut définir un certain nombre d'intervalles durant lesquels v_{Sa} , v_{Sb} , v_{Sc} étant constants, v_{So} et v_{Sf} conservent la même expression.

Considérons par exemple trois tensions déphasées de $2\pi/3$ engendrées par trois onduleurs en pont commandés de manière à éliminer les harmoniques trois et cinq.

Les figures 42, 43, 44 montrent qu'il y a au maximum soixante intervalles durant lesquels ces trois tensions demeurent constantes.

Pour étudier la composante homopolaire, nous ne considérerons que les m intervalles situés entre $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi/3$. (Pour cet exemple $m = 20$). En effet, les tensions v_{Sa} , v_{Sb} et v_{Sc} étant décomposables en série de Fourier sous la forme :

$$v_{Sa} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{2K+1,m} \sin(2K+1)\omega t$$

$$v_{Sb} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{2K+1,m} \sin(2K+1)(\omega t - 2\pi/3)$$

$$v_{Sc} = \sum_{k=0}^{\infty} V_{2K+1,m} \sin(2K+1)(\omega t - 4\pi/3)$$

$$\text{de } v_{S_0} = 1/\sqrt{3}(v_{S_a} + v_{S_b} + v_{S_c})$$

On déduit :

$$v_{S_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_{2K+1,m}}{2i\sqrt{3}} (1 + a^{2K+1} + a^{K+2}) (e^{i(2K+1)\omega t} - e^{-i(2K+1)\omega t})$$

Compte tenu des propriétés du nombre complexe a , on voit que :

$$v_{S_0}(t + 2\pi/3\omega) = v_{S_0}(t)$$

La quantité complexe $v_{S_0}(t)$ est donc une fonction périodique de période $2\pi/3\omega$.

De même pour étudier les deux autres composantes, on restreindra l'étude aux n intervalles compris entre $\theta = 0$ et $\theta = \pi/3$ (pour cet exemple $n = 10$). En effet, puisque :

$$v_{S_f} = 1/\sqrt{3} e^{-i\omega t} (v_{S_a} + a v_{S_b} + a^2 v_{S_c})$$

cette composante des tensions d'entrée peut s'écrire :

$$v_{S_f} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_{2K+1,m}}{2i\sqrt{3}} e^{i2K\omega t} (1 + a^K + a^{2K}) - e^{-i2(K+1)\omega t} (1 + a^{2K+2} + a^{K+1})$$

Donc

$$v_{S_f}(t) = v_{S_f}(t + \pi/6\omega)$$

La quantité complexe $v_{S_f}(t)$ est donc une fonction périodique de période $\pi/3\omega$. On démontrerait qu'il en est de même pour la composante v_{S_b} .

A ces grandeurs périodiques correspondent, en régime permanent, d'autres grandeurs périodiques, solutions du système différentiel (1).

II - ETUDE DU COURANT HOMOPOLAIRE $i_{So,1}(t)$

Durant le $l^{\text{ième}}$ intervalle tel que $\theta_{1-1} \leq \theta \leq \theta_1$, la tension et le courant homopolaire sont $v_{So,1}(t)$ et $i_{So,1}(t)$. Leurs expressions sont liées par l'équation différentielle :

$$v_{So,1}(t) = R_S i_{So,1} + \mathcal{L}_{So} \frac{di_{So,1}}{dt}$$

dont la solution est :

$$i_{So,1}(t) = I_{1-1} e^{-\left(\frac{\theta - \theta_{1-1}}{Q_{So}}\right)} - D_1 e^{-\left(\frac{\theta - \theta_{1-1}}{Q_{So}}\right)} + D_1 \quad (2)$$

avec $Q_{So} = \frac{\mathcal{L}_{So}\omega}{R_S}$, $\theta = \omega t$, $D_1 = 1/\sqrt{3} \cdot 1/R_S (V_{A,1} + V_{B,1} + V_{C,1})$

$V_{A,1}$, $V_{B,1}$, $V_{C,1}$ étant les valeurs constantes que prennent les tensions v_{Sa} , v_{Sb} et v_{Sc} durant l'intervalle considéré. L'équation (2) donne l'expression du courant $i_{So,1}$ durant cet intervalle en fonction de la valeur I_{1-1} qui était celle du courant homopolaire pour $\theta = \theta_{1-1}$. Nous obtenons ainsi successivement :

$$I_1 = I_0 e^{-\left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{Q_{So}}\right)} - D_1 e^{-\left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{Q_{So}}\right)} + D_1$$

$$I_2 = I_0 e^{-\left(\frac{\theta_2 - \theta_0}{Q_{So}}\right)} - D_1 e^{-\left(\frac{\theta_2 - \theta_0}{Q_{So}}\right)} - (D_2 - D_1) e^{-\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{Q_{So}}\right)} + D_2$$

et d'une manière générale :

$$I_{1-1} = I_0 e^{-\left(\frac{\theta_{1-1} - \theta_0}{Q_{So}}\right)} - \sum_{k=0}^{1-2} (D_{k+1} - D_k) e^{-\left(\frac{\theta_{1-1} - \theta_k}{Q_{So}}\right)} + D_{1-1} \quad (3)$$

Il est alors possible de déterminer I_0 compte tenu de la condition de périodicité

$$i_{So,1}(0) = i_{So,m}(2\pi/3\omega) = I_0$$

on obtient :

$$I_o = \frac{D_m - \sum_{k=0}^{m-1} (D_{K+1} - D_K) e^{-\left(\frac{\theta}{m} - \frac{\theta}{K}\right) \frac{Q_{So}}{Q_{So}}}}{1 - e^{-\left(\frac{\theta}{m} - \frac{\theta}{0}\right) \frac{Q_{So}}{Q_{So}}}}$$

En reportant l'expression de I_o dans la relation (3), on obtient I_{1-1} et ainsi $i_{So,1}$ en régime permanent pour un intervalle quelconque. Après simplifications, $i_{So,1}(t)$ s'écrit :

$$i_{So,1}(t) = \frac{e^{-\left(\frac{\omega t - \theta}{Q_{So}}\right)}}{1 - e^{-\left(\frac{\theta}{m} - \frac{\theta}{0}\right) \frac{Q_{So}}{Q_{So}}}} \left\{ D_m - \sum_{k=0}^{m-1} (D_{K+1} - D_K) e^{-\left(\frac{\theta}{m} - \frac{\theta}{K}\right) \frac{Q_{So}}{Q_{So}}} \right\} - \sum_{k=0}^{1-1} (D_{K+1} - D_K) e^{-\left(\frac{\omega t - \theta}{Q_{So}}\right)} + D_1 \quad (4)$$

avec $D_0 = 0$.

III - ETUDE DES COMPOSANTES $i_{Sf,j}(t)$ ET $i_{Sb,j}(t)$

Pour obtenir les expressions de $i_{Sf,j}(t)$ et $i_{Sb,j}(t)$, il est nécessaire de résoudre les deux dernières équations différentielles du système (1). Pour le $j^{\text{ème}}$ intervalle, c'est-à-dire pour $\theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j$, elles s'écrivent :

$$\left\{ \begin{aligned} E_j e^{-i\omega t} &= (R_S + i\omega L_S) i_{Sf,j} + L_S \frac{di_{Sf,j}}{dt} + 3/2Mi\omega i_{Rf,j} + 3/2M \frac{di_{Rf,j}}{dt} \\ 0 &= 3/2Mig\omega i_{Sf,j} + 3/2M \frac{di_{Sf,j}}{dt} + (R_R + ig\omega L_R) i_{Rf,j} + L_R \frac{di_{Rf,j}}{dt} \end{aligned} \right. \quad (5)$$

avec

$$E_j = 1/\sqrt{3} (V_{A,j} + a V_{B,j} + a^2 V_{C,j})$$

$V_{A,j}$, $V_{B,j}$ et $V_{C,j}$ étant les valeurs constantes prises par les tensions statoriques v_{Sa} , v_{Sb} et v_{Sc} durant le $j^{\text{ème}}$ intervalle.

Les solutions du système différentiel (5) sont alors :

$$\begin{cases} i_{Sf,j} = A_j e^{-i\omega t} + K_{1,j} e^{C_1 t} + K_{2,j} e^{C_2 t} \\ i_{Rf,j} = B_j e^{-i\omega t} + K_{3,j} e^{C_1 t} + K_{4,j} e^{C_2 t} \end{cases} \quad (6)$$

On obtient A_j et B_j par identification :

$$A_j = E_j / R_S \quad B_j = \frac{3/2 M(1-g)\omega}{R_R - i(1-g)\omega} \frac{1}{R}$$

Les quantités C_1 et C_2 sont les solutions de l'équation caractéristique correspondant au régime libre et ont été définies au Chapitre III, §.II.

On peut exprimer les constantes d'intégration à partir des valeurs $I_{S,j-1}$ et $I_{R,j-1}$ qu'avaient les composantes $i_{Sf,j}$ et $i_{Rf,j}$ au début du $j^{\text{ème}}$ intervalle ; puis on peut exprimer $I_{S,j-1}$ et $I_{R,j-1}$ en fonction de $I_{S,0}$ et de $I_{R,0}$. Il est alors possible, compte tenu des conditions de périodicité,

$$I_{S,n} = I_{S,0} \text{ et } I_{R,n} = I_{R,0}$$

d'obtenir les expressions littérales de $I_{S,0}$ et de $I_{R,0}$, celles de $I_{S,j-1}$ et de $I_{R,j-1}$ et ainsi celles de $K_{1,j}$ et de $K_{2,j}$.

En effet, pour $\theta = \theta_{j-1}$ les équations (6) donnent :

$$I_{S,j-1} = A_j e^{-i\theta_{j-1}} + K_{1,j} e^{C_1/\omega \theta_{j-1}} + K_{2,j} e^{C_2/\omega \theta_{j-1}}$$

$$I_{R,j-1} = B_j e^{-i\theta_{j-1}} + K_{3,j} e^{C_1/\omega \theta_{j-1}} + K_{4,j} e^{C_1/\omega \theta_{j-1}}$$

D'où

$$K_{1,j} = \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} \left(\lambda_3 I_{S,j-1} e^{-C_1/\omega \theta_{j-1}} - \lambda_3 A_j e^{-(C_1/\omega + i)\theta_{j-1}} \right. \\ \left. - I_{R,j-1} e^{-C_1/\omega \theta_{j-1}} + \lambda_1 A_j e^{-(C_2/\omega + i)\theta_{j-1}} \right)$$

$$K_{2,j} = \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} \left(-\lambda_2 I_{S,j-1} e^{-C_2/\omega \theta_{j-1}} + \lambda_2 A_j e^{-(C_2/\omega + i)\theta_{j-1}} \right. \\ \left. + I_{R,j-1} e^{-C_2/\omega \theta_{j-1}} - \lambda_1 A_j e^{-(C_2/\omega + i)\theta_{j-1}} \right)$$

avec $K_{3,j} = \lambda_2 K_{1,j}$ et $K_{4,j} = \lambda_3 K_{2,j}$.

Connaissant $K_{1,j}$ et $K_{2,j}$, on peut ensuite exprimer $I_{S,j}$ et $I_{R,j}$ à partir de $I_{S,0}$ et de $I_{R,0}$.

$$I_{S,j} = A_j e^{-i\theta_j} + \sum_{k=0}^{j-1} (A_{K+1} - A_K) e^{-i\theta_K} \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} e^{C_1/\omega (\theta_j - \theta_K)} - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} e^{C_2/\omega (\theta_j - \theta_K)} \right) \\ + I_{S,0} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} e^{C_1/\omega \theta_j} - \frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} e^{C_2/\omega \theta_j} \right) - \frac{I_{R,0}}{\lambda_3 - \lambda_2} \left(e^{C_1/\omega \theta_j} - e^{C_2/\omega \theta_j} \right)$$

et de même

$$I_{R,j} = \lambda_1 A_j e^{-i\theta j} + \sum_{k=0}^{j-1} (A_{K+1} - A_K) e^{-i\theta K} \left(\lambda_2 \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} e^{C_1/\omega(\theta_j - \theta_K)} - \lambda_3 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} e^{C_2/\omega(\theta_j - \theta_K)} \right) \\ + I_{S,o} \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} (e^{C_1/\omega \theta_j} - e^{C_2/\omega \theta_j}) - I_{R,o} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} e^{C_1/\omega \theta_j} - \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} e^{C_2/\omega \theta_j} \right)$$

avec les conventions $A_0 = 0$ et $\theta_0 = 0$.

Grâce à la condition de périodicité, on en déduit :

$$I_{S,o} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} \frac{e^{-i\theta n}}{1 - e^{C_1/\omega \theta_n}} \sum_{k=0}^n (A_{K+1} - A_K) e^{(C_1/\omega + i)(\theta_n - \theta_K)} \\ - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} \frac{e^{-i\theta n}}{1 - e^{C_2/\omega \theta_n}} \sum_{k=0}^n (A_{K+1} - A_K) e^{(C_2/\omega + i)(\theta_n - \theta_K)}$$

et

$$I_{R,o} = \lambda_2 \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} \frac{e^{-i\theta n}}{1 - e^{C_2/\omega \theta_n}} \sum_{k=0}^n (A_{K+1} - A_K) e^{(C_1/\omega + i)(\theta_n - \theta_K)} \\ - \lambda_3 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} \frac{e^{-i\theta n}}{1 - e^{C_2/\omega \theta_n}} \sum_{k=0}^n (A_{K+1} - A_K) e^{(C_2/\omega + i)(\theta_n - \theta_K)}$$

Il est alors possible de calculer les valeurs de $I_{S,j}$ et $I_{R,j}$ puis celles de $K_{1,j}$ et de $K_{2,j}$ et d'obtenir les expressions de $i_{Sf,j}(t)$ et $i_{Rf,j}(t)$. Elles s'écrivent :

$$\begin{aligned}
i_{Sf,j} &= \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} \frac{e^{C_1 t}}{1 - e^{C_1/\omega \theta_n}} \left(\sum_{k=0}^{j-1} (A_{K+1} - A_K) e^{-(C_1/\omega+i)\theta_K} + e^{C_1/\omega \theta_n} \sum_{k=0}^n (A_{K+1} - A_K) e^{-(C_1/\omega+i)\theta_K} \right) \\
&\quad - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} \frac{e^{C_2 t}}{1 - e^{C_2/\omega \theta_n}} \left(\sum_{k=0}^{j-1} (A_{K+1} - A_K) e^{-(C_2/\omega+i)\theta_K} + e^{C_2/\omega \theta_n} \sum_{k=0}^n (A_{K+1} - A_K) e^{-(C_2/\omega+i)\theta_K} \right) \\
&\quad + A_j e^{-i\omega t}
\end{aligned} \tag{7}$$

et

$$\begin{aligned}
i_{Sj}(t) &= \lambda_2 \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} \frac{e^{C_1 t}}{1 - e^{C_1/\omega \theta_n}} \left(\sum_{k=0}^{j-1} (A_{K+1} - A_K) e^{-(C_1/\omega+i)\theta_K} + e^{C_1/\omega \theta_n} \sum_{k=j}^n (A_{K+1} - A_K) e^{-(C_1/\omega+i)\theta_K} \right) \\
&\quad - \lambda_3 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} \frac{e^{C_2 t}}{1 - e^{C_2/\omega \theta_n}} \left(\sum_{k=0}^{j-1} (A_{K+1} - A_K) e^{-(C_2/\omega+i)\theta_K} + e^{C_2/\omega \theta_n} \sum_{k=j}^n (A_{K+1} - A_K) e^{-(C_2/\omega+i)\theta_K} \right) \\
&\quad + \lambda_1 A_j e^{-i\omega t}
\end{aligned}$$

avec

$$\lambda_1 = \frac{3/2 M i \omega'}{R_R - i \omega' \mathcal{L}_R} ; \quad \lambda_2 = \frac{R_R + \mathcal{L}_S(i\omega + C_1)}{3/2 M(i\omega + C_1)} ; \quad \lambda_3 = - \frac{R_S + \mathcal{L}_S(i\omega + C_2)}{3/2 M(i\omega + C_2)}$$

et

$$A_{n+1} = A_0 = 0 ; \quad \theta_n = \pi/3 \quad \text{et} \quad \theta_0 = 0.$$

A partir des expressions littérales de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et en posant :

$$C_1 + i\omega = -1/T_1 + i\Omega_1$$

$$C_2 + i\omega = -1/T_2 + i\Omega_2$$

$$1 - i\Omega_1 T_1 = P_1 e^{-i\psi_1}$$

$$1 - i\Omega_2 T_2 = P_2 e^{-i\psi_2}$$

$$(T_2 - T_1) - i T_1 T_2 (\Omega_1 - \Omega_2) = P_3 e^{-i\psi_3}$$

$$\begin{aligned} & (R_S R_R - \frac{R_R \mathcal{L}_S}{T_2} + \omega' \Omega_2 (\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2) + i(R_R \mathcal{L}_S \Omega_2 - R_S \mathcal{L}_R \omega' + \omega'/T_2 (\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2))) \\ & = P_4 e^{i\psi_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (R_S R_R - \frac{R_R \mathcal{L}_S}{T_1} + \omega' \Omega_1 (\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2) + i(R_R \mathcal{L}_S \Omega_1 - R_S \mathcal{L}_R \omega' + \omega'/T_1 (\mathcal{L}_S \mathcal{L}_R - 9/4 M^2))) \\ & = P_5 e^{i\psi_5} \end{aligned}$$

$$R_R - i\omega' \mathcal{L}_R = Z_R e^{-i\phi_R}$$

$$1 - e^{C_1/\omega \theta_n} = N_1 e^{i\chi_1}$$

$$1 - e^{C_2/\omega \theta_n} = N_2 e^{i\chi_2}$$

$$M_1 = 1/R_S \frac{T_2 P_1 P_4}{P_3 Z_R N_1}$$

$$M_2 = 1/R_S \frac{T_1 P_2 P_5}{P_3 Z_R N_2}$$

$$\delta_1 = \psi_3 + \psi_4 + \phi_R - \psi_1 - \chi_1$$

$$\delta_2 = \psi_3 + \psi_5 + \phi_R - \psi_2 - \chi_2$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
i_{Sf,j}(t) = & M_2 e^{i\delta_2} e^{C_2 t} \left(\sum_{k=0}^{j-1} (A_{K+1} - A_K) e^{-(C_2/\omega+i)\theta_K} + e^{C_2/\omega} e_n \sum_{k=j}^n (A_{K+1} - A_K) e^{-(C_2/\omega+i)\theta_K} \right) \\
& - M_1 e^{i\delta_1} e^{C_1 t} \left(\sum_{k=0}^{j-1} (A_{K+1} - A_K) e^{-(C_1/\omega+i)\theta_K} + e^{C_1/\omega} e_n \sum_{k=j}^n (A_{K+1} - A_K) e^{-(C_1/\omega+i)\theta_K} \right) \\
& + A_j e^{-i\omega t}
\end{aligned} \tag{9}$$

De même, en posant :

$$R_S + \mathcal{L}_S(C_1+i\omega) = -\left[(\mathcal{L}_S/T_1 - R_S) - i\mathcal{L}_S \Omega_1 \right] = -P_6 e^{-i\psi_6}$$

$$R_S + \mathcal{L}_S(C_2+i\omega) = -\left[(\mathcal{L}_S/T_2 - R_S) - i\mathcal{L}_S \Omega_2 \right] = -P_7 e^{-i\psi_7}$$

$$M_3 = \frac{3/2 M\omega'}{Z_R} ; M_4 = \frac{T_1 T_2 P_4 P_6}{3/2 M R_S P_3 Z_R N_1} ; M_5 = \frac{T_1 T_2 P_7 P_5}{3/2 M R_S P_3 Z_R N_2}$$

$$\delta_3 = \pi/2 + \phi_R ; \delta_4 = \psi_3 + \psi_4 + \phi_R - \chi_1 - \psi_6 ; \delta_5 = \psi_3 + \psi_5 + \phi_R - \chi_2 - \psi_7$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
i_{Rf,j}(t) = & M_4 e^{i\delta_4} e^{C_1 t} \left(\sum_{k=0}^{j-1} (A_{K+1} - A_K) e^{-(C_1/\omega+i)\theta_K} + e^{C_1/\omega} e_n \sum_{k=j}^n (A_{K+1} - A_K) e^{-(C_1/\omega+i)\theta_K} \right) \\
& - M_5 e^{i\delta_5} e^{C_2 t} \left(\sum_{k=0}^{j-1} (A_{K+1} - A_K) e^{-(C_2/\omega+i)\theta_K} + e^{C_2/\omega} e_n \sum_{k=j}^n (A_{K+1} - A_K) e^{-(C_2/\omega+i)\theta_K} \right) \\
& + M_3 A_j e^{i\delta_3} e^{-i\omega t}
\end{aligned} \tag{10}$$

Les expressions (9) et (10) se révèlent difficiles à utiliser numériquement, aussi nous allons en proposer une forme plus facilement exploitable.

IV - FORME MATRICIELLE DES COURANTS TRANSFORMES

L'exploitation des relations (9) et (10) est plus aisée si on les présente sous la forme matricielle.

Puisque :

$$A_j = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - a - a^2) \begin{vmatrix} V_{A,j}/R_S \\ V_{B,j}/R_S \\ V_{C,j}/R_S \end{vmatrix}$$

On peut mettre la quantité :

$$\sum_{k=0}^{j-1} (A_{K+1} - A_K) e^{-(C_1/\omega+i)\theta_K} + e^{C_1/\omega} \theta_n \sum_{k=j}^n (A_{K+1} - A_K) e^{-(C_1/\omega+i)\theta_K}$$

sous la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1 - a - a^2) \begin{pmatrix} \frac{\Delta V_{A,0}}{R_S} & \dots & \frac{\Delta V_{A,n}}{R_S} \\ \frac{\Delta V_{B,0}}{R_S} & \dots & \frac{\Delta V_{B,n}}{R_S} \\ \frac{\Delta V_{C,0}}{R_S} & \dots & \frac{\Delta V_{C,n}}{R_S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1^{-\theta_0} & & \\ & \mu_1^{-\theta_1} & \\ & & \ddots \\ & & & \mu_1^{-\theta_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $\Delta V_{A,K} = V_{A,K+1} - V_{A,K}$, et de même pour $\Delta V_{B,K}$ et $\Delta V_{C,K}$, et avec :

$$\mu_1 = e \quad (C_1/\omega+i) \quad \text{et} \quad \nu_1 = e \quad C_1/\omega$$

On obtient une expression similaire par :

$$\sum_{k=0}^{j-1} (A_{K+1}^{-A_K}) e^{-((C_2/\omega+i) + e \sum_{k=j}^n (A_{K+1}^{-A_K}) e^{-(C_1/\omega+i)\theta_K}} C_1/\omega \theta^n$$

en remplaçant μ_1 par μ_2 et ν_1 par ν_2 avec :

$$\mu_2 = e \quad (C_2/\omega+i) \quad \text{et} \quad \nu_2 = e \quad C_2/\omega$$

De sorte que nous obtenons pour $i_{Sf,j}$ et $i_{Rf,j}$ les expressions matricielles suivantes :

$$\frac{i_{Sf,j}(t)}{E/R_S} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ e^{-i\omega t} (1 \ a \ a^2) \begin{pmatrix} \frac{V_{A,j}}{E} \\ \frac{V_{B,j}}{E} \\ \frac{V_{C,j}}{E} \end{pmatrix} \right\}$$

$$-M_1 e^{i\delta_1} \nu_1^{\omega t} (1 \ a \ a^2) \begin{pmatrix} \frac{\Delta V_{A,0}}{E} & \dots & \dots & \frac{\Delta V_{A,n}}{E} \\ \frac{\Delta V_{B,0}}{E} & \dots & \dots & \frac{\Delta V_{B,n}}{E} \\ \frac{\Delta V_{C,0}}{E} & \dots & \dots & \frac{\Delta V_{C,n}}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1^{-\theta_0} & & & \\ & \mu_1^{-\theta_1} & & \\ & & \dots & \\ & & & \mu_1^{-\theta_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^{\theta_1} & & & \\ & \nu_1^{\theta_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \nu_1^{\theta_n} \end{pmatrix}$$

$$+ M_2 e^{i\delta_2} v_2^{\omega t} (1 - a - a^2) \left(\begin{array}{c} \frac{\Delta V_{A,o}}{E} \dots \dots \frac{\Delta V_{A,n}}{E} \\ \frac{\Delta V_{B,o}}{E} \dots \dots \frac{\Delta V_{B,n}}{E} \\ \frac{\Delta V_{C,o}}{E} \dots \dots \frac{\Delta V_{C,n}}{E} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} -\theta_0 \\ \mu_2 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \theta_n \\ \theta_n \\ \dots \\ \theta_n \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ v_2 \\ \dots \\ v_2 \end{array} \right) \quad (11)$$

et d'une manière analogue :

$$\frac{i R_{f,j}}{E/R_S} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ e^{-i\omega t} e^{+i\delta_3} M_3 (1 - a - a^2) \left(\begin{array}{c} \frac{V_{A,j}}{E} \\ \frac{V_{B,j}}{E} \\ \frac{V_{C,j}}{E} \end{array} \right) \right.$$

$$+ M_4 e^{i\delta_4} v_1^{\omega t} (1 - a - a^2) \left(\begin{array}{c} \frac{\Delta V_{A,o}}{E} \dots \dots \frac{\Delta V_{A,n}}{E} \\ \frac{\Delta V_{B,o}}{E} \dots \dots \frac{\Delta V_{B,n}}{E} \\ \frac{\Delta V_{C,o}}{E} \dots \dots \frac{\Delta V_{C,n}}{E} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} -\theta_0 \\ \mu_1 \\ \mu_1 \\ \dots \\ \mu_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \theta_n \\ \theta_n \\ \dots \\ \theta_n \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ v_1 \\ \dots \\ v_1 \end{array} \right)$$

$$- M_5 e^{i\delta_5} v_2^{\omega t} (1 - a - a^2) \left(\begin{array}{c} \frac{V_{A,o}}{E} \dots \dots \frac{\Delta V_{A,n}}{E} \\ \frac{\Delta V_{B,o}}{E} \dots \dots \frac{\Delta V_{B,n}}{E} \\ \frac{\Delta V_{C,o}}{E} \dots \dots \frac{\Delta V_{C,n}}{E} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} -\theta_0 \\ \mu_2 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \theta_n \\ \theta_n \\ \dots \\ \theta_n \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ v_2 \\ \dots \\ v_2 \end{array} \right) \quad (12)$$

avec $V_{A,o} = V_{B,o} = V_{C,o} = V_{A,n+1} = V_{B,n+1} = V_{C,n+1} = 0$

On passe aux courants réels à l'aide de la matrice inverse de la transformation de Y.H. KU, $[K_1(\theta)]^{-1}$.

Le courant circulant dans la phase A du stator sera la somme du courant i'_{Sa} obtenu à partir des composantes i_{Sf} et i_{Sb} et du courant i''_{Sa} du à la composante homopolaire i_{So} :

$$i_{Sa} = i'_{Sa} + i''_{Sa}$$

Puisque les enroulements du rotor sont en court-circuit, le courant i_{Ra} dans la phase A de cette armature est :

$$i_{Ra} = i'_{Ra},$$

i'_{Ra} étant obtenu à partir des composantes i_{Rf} et i_{Rb} .

5.1. Détermination de i'_{Sa} -

$$\begin{pmatrix} i'_{Sa,j} \\ i'_{Sb,j} \\ i'_{Sc,j} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & e^{-i\omega t} \\ a^2 e^{i\omega t} & a e^{-i\omega t} \\ a e^{i\omega t} & a^2 e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{Sf,j}(t) \\ i_{Sb,j}(t) \end{pmatrix}$$

On peut utiliser ces expressions pour $0 \leq t \leq \pi/3\omega$. De manière à déterminer toute la courbe de i_{Sa} durant une période, on doit tenir compte de la condition de périodicité et utiliser le changement de variable suivant

$$t' = t + (h-1)\pi/3\omega$$

avec

$$0 \leq t \leq \pi/3\omega$$

et

$$h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Il serait possible de déterminer l'expression mathématique du courant i'_{Sa} en combinant judicieusement les expressions de $i_{Sf,j} e^{i\omega t}$ et $i_{Sb,j} e^{-i\omega t}$. Mais puisque ces deux quantités sont conjuguées l'une de l'autre, on écrira :

$$i'_{Sa} = 2/\sqrt{3} \mathcal{R}(e^{i(\omega t + (h-1)\pi/3)} i_{Sf,j}(t)) \quad (13)$$

expression dans laquelle $\mathcal{R}(z)$ désigne la partie réelle du nombre complexe z .

5.2. Détermination de i''_{Sa}

$$i''_{Sa} = 1/\sqrt{3} i_{So,1}(t)$$

On peut utiliser cette expression pour $0 \leq t \leq 2\pi/3\omega$. De manière à obtenir la forme d'onde complète de ce courant durant toute la période, on utilisera la périodicité de cette fonction $i_{So}(t)$.

5.3. Détermination de i'_{Ra}

Puisque :

$$\begin{pmatrix} i_{Ra} \\ i_{Rb} \\ i_{Rc} \end{pmatrix} = 1/\sqrt{3} \begin{pmatrix} e^{ig\omega t} & e^{-ig\omega t} \\ a^2 e^{ig\omega t} & a e^{-ig\omega t} \\ a e^{ig\omega t} & a^2 e^{-ig\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{Rf,j}(t) \\ i_{Rb,j}(t) \end{pmatrix}$$

On en déduit facilement que :

$$i'_{Ra} = 2/\sqrt{3} \mathcal{R}(e^{ig\omega t} i_{Rf,j}(t))$$

On peut utiliser cette expression pour $0 \leq t \leq \pi/3\omega$. De manière à obtenir toute la courbe de i_{Ra} , on utilisera la condition de périodicité et l'on effectuera donc le changement de variable :

$$t' = t + (h-1)\pi/3$$

On obtient alors :

$$i_{Ra} = 2/\sqrt{3} \Re (e^{ig\omega t} e^{ig(h-1)\pi/3} i_{Rf,j}(t))$$

VI - EXPRESSION DU COUPLE

Nous utiliserons pour calculer l'expression du couple la formule :

$$C = 3 M \Im (i_{Sf,j} \cdot i_{Rb,j})$$

établie au Chapitre III, §. 4 . La quantité $i_{Rb,j}$ est la conjuguée de $i_{Sf,j}$, de sorte que nous obtenons.

$$\frac{i_{Rb,j}}{E/R_S} = 1/\sqrt{3} \left\{ e^{i\omega t} e^{-i\delta_3} M_3(1 \quad a^2 \quad a) \begin{pmatrix} \frac{V_{A,j}}{E} \\ \frac{V_{B,j}}{E} \\ \frac{V_{C,j}}{E} \end{pmatrix} \right.$$

$$+ M_4 e^{-i\delta_4} (\overline{v_1})^{\omega t} (1 \ a^2 \ a) \left(\begin{array}{c} \frac{V_{A,o}}{E} \dots\dots \frac{V_{A,n}}{E} \\ \frac{V_{B,o}}{E} \dots\dots \frac{V_{B,n}}{E} \\ \frac{V_{C,o}}{E} \dots\dots \frac{V_{C,n}}{E} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \overline{\mu_1}^{-\theta_0} \\ \overline{\mu_1}^{-\theta_1} \\ \overline{\mu_1}^{-\theta_n} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \frac{1}{\overline{v_1}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\overline{v_1}} \\ \vdots \\ \theta_n \\ \vdots \\ \theta_n \end{array} \right)$$

$$- M_5 e^{-i\delta_5} (\overline{v_2})^t (1 \ a^2 \ a) \left(\begin{array}{c} \frac{V_{A,o}}{E} \dots\dots \frac{V_{A,n}}{E} \\ \frac{V_{B,o}}{E} \dots\dots \frac{V_{B,n}}{E} \\ \frac{V_{C,o}}{E} \dots\dots \frac{V_{C,n}}{E} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \overline{\mu_2}^{-\theta_0} \\ \overline{\mu_2}^{-\theta_1} \\ \overline{\mu_2}^{-\theta_n} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \frac{1}{\overline{v_2}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\overline{v_2}} \\ \vdots \\ \theta_n \\ \vdots \\ \theta_n \end{array} \right)$$

$\overline{\mu_1}$ étant le conjuguée de μ_1 , de même pour $\overline{\mu_2}$, $\overline{v_1}$ et $\overline{v_2}$.

VII - EXEMPLES DE FORMES D'ONDE

Considérons de nouveau le moteur dont les paramètres ont été définis au Chapitre IV et son convertisseur constitué de trois onduleurs PWM dont les angles de commutation ont été calculés de manière à éliminer les deux premiers harmoniques impairs. Par le décalage β de la commande des deux demi-ponts, on peut faire varier la valeur efficace du fondamental.

La forme d'onde pour une demi-période des trois tensions v_{OA} , v_{OB} , v_{OC} engendrées par les convertisseurs pour trois valeurs de β est tracée en haut des figures 42, 43, 44.⁽¹⁾ Aux bas de celles-ci, on a porté la forme d'onde de la tension aux bornes de la phase A du moteur asynchrone supposé couplé en étoile sans conducteur neutre.

7.1. Forme d'onde du courant i_{SA}

Nous avons tracé sur les figures 45, 46, 47 la forme d'onde du courant

(1) L'ensemble des courbes caractéristiques tracées a été regroupée à la fin du texte de ce chapitre.

i_{Sa} pour trois valeurs du glissement :

$g = 1\%$ qui correspond à une faible charge,

$g = 5\%$ qui correspond sensiblement à la charge nominale,

$g = 10\%$ qui correspond à une forte surcharge,

et pour trois valeurs du décalage de la commande des demi-bras de pont ($\beta = 0 ; 80 ; 135^\circ$).

Ces courbes montrent que le courant absorbé par le moteur asynchrone est loin d'être sinusoïdal quel que soit l'angle β et le glissement g .

La décomposition en série de Fourier de ces formes d'ondes a conduit aux résultats groupés dans le tableau 5 lorsque $g = 5\%$.

Les calculs effectués montrent que la valeur maximale des différents harmoniques, quel que soit le décalage β considéré, n'est pratiquement pas influencée par la valeur du glissement.

Nous avons ensuite tracé l'évolution, en fonction de g et pour trois valeurs de β , de la valeur maximale du courant à commuter (figure 48). Cette valeur est une des données nécessaires pour l'établissement du projet de l'onduleur PWM. Ces courbes suivent sensiblement l'évolution de I_{Im} avec le glissement et confirment l'existence de pointes de courant relatives importantes surtout pour les faibles valeurs de g .

7.2. Forme d'onde du couple

La figure 49 montre l'évolution du couple moyen C_o développé par le moteur en fonction de g et pour différentes valeurs de β . La courbe est régulière et présente, comme pour le cas de l'alimentation par des signaux sinusoïdaux une concavité, vers le bas.

Les figures 50, 51, 52 donnent la forme d'onde du couple instantané durant une de ses périodes, c'est-à-dire un sixième de celle des tensions primaires pour diverses valeurs de β et de g . On peut remarquer que les courbes du couple sont nettement moins perturbées que celles du courant.

La décomposition en série de Fourier de ces ondes a conduit aux résul-

tats reproduits dans les tableaux 6, 7, 8.

Ces tableaux montrent que la teneur en harmonique du couple dépend peu, à β donné, du glissement, mais l'importance relative des divers harmoniques dépend beaucoup de β .

VIII - CONCLUSION

La méthode des composantes relatives nous permet d'étudier analytiquement le comportement du moteur asynchrone alimenté par un onduleur PWM (à modulation de largeur des impulsions). La forme matricielle proposée s'est révélée très intéressante pour l'exploitation numérique des résultats.

Ce mode d'alimentation conduit à des courants statoriques très perturbés, mais la courbe de couple est elle nettement moins distordue. Nous avons vu l'influence du glissement et du réglage des tensions d'entrée sur les formes d'ondes et leurs harmoniques. De telles études permettraient de déterminer les caractéristiques optimales pour le moteur alimenté par de tels signaux.

Nous avons simplement voulu ici illustrer la puissance de la méthode d'étude proposée en l'appliquant à un cas particulièrement difficile, voire même a priori impossible.

β \ K	1	7	11	13	17	19	23	25	29	31	35	37	41	43	
$\beta = 0$	$\frac{IK}{E/3R_S} 10^{-3}$	93,75	18,15	14,07	1,09	4,03	1,53	4,23	1,19	0,88	0,21	0,72	0,38	0,69	0,57
$\beta = 80^\circ$	$\frac{IK}{E/3R_S} 10^{-3}$	71,82	3,15	2,44	1,03	3,09	1,18	3,97	0,21	0,16	0,21	0,56	0,29	0,65	0,10
$\beta = 135^\circ$	$\frac{IK}{E/3R_S} 10^{-3}$	29,81	1,63	9,52	4,99	1,44	2,74	3,14	1,39	1,37	0,95	0,46	0,93	0,68	0,59

TABLEAU 5

9% \ C	C_1 $(E/3R_S)^2 10^{-6}$	C_2 $(E/3R_S)^2 10^{-6}$	C_3 $(E/3R_S)^2 10^{-6}$	C_4 $(E/3R_S)^2 10^{-6}$	C_5 $(E/3R_S)^2 10^{-6}$	C_6 $(E/3R_S)^2 10^{-6}$	C_7 $(E/3R_S)^2 10^{-6}$	C_8 $(E/3R_S)^2 10^{-6}$
1	248,7	177,6	76	41,5	15	4,7	1,7	2
2	247,1	176,1	75,4	41,3	14,9	4,7	1,9	2,1
3	245,5	174,6	74,5	41,1	14,8	4,8	2,3	2,3
4	243,4	173,0	73,4	41,1	14,6	4,9	2,8	2,5
5	241,0	171,2	72,2	41,1	14,4	5,1	3,4	2,6
6	238,3	169,3	70,8	41,2	14,1	5,3	3,9	2,9
7	235,3	167,2	69,4	41,2	13,8	5,5	4,3	3
8	232,2	165,1	67,8	41,3	13,5	5,7	4,8	3,2
9	228,8	162,9	66,1	41,4	13,2	5,9	5,2	3,4
10	225,4	160,6	64,4	41,4	13	6,1	5,5	3,5

TABLEAU 6 ($\beta = 0$)

9% \	$\frac{C_1}{(E/3R_S)^2} 10^{-6}$	$\frac{C_2}{(E/3R_S)^2} 10^{-6}$	$\frac{C_3}{(E/3R_S)^2} 10^{-6}$	$\frac{C_4}{(E/3R_S)^2} 10^{-6}$	$\frac{C_5}{(E/3R_S)^2} 10^{-6}$	$\frac{C_6}{(E/3R_S)^2} 10^{-6}$	$\frac{C_7}{(E/3R_S)^2} 10^{-6}$	$\frac{C_8}{(E/3R_S)^2} 10^{-6}$
1	33	36,3	44,7	43,8	0,5	2,8	7,8	3,7
2	32,9	36	44,3	43,4	0,6	2,8	7,8	3,6
3	32,6	35,6	43,8	43	0,6	2,8	7,7	3,6
4	32,4	35,1	43,1	42,5	0,7	2,9	7,6	3,5
5	32	34,5	42,4	42	0,9	3	7,4	3,5
6	31,7	33,8	41,6	41,3	1	3,1	7,3	3,4
7	31,3	33,1	40,7	40,7	1,1	3,2	7,2	3,3
8	30,9	32,3	39,8	40	1,1	3,3	7,1	3,3
9	30,4	31,5	38,8	39,3	1,2	3,5	6,9	3,2
10	30	30,7	37,8	38,5	1,3	3,6	6,8	3,1

TABLEAU 7

($\beta = 80^\circ$)

9%	$\frac{C_1}{(E/3R_S)^2} \cdot 10^{-6}$	$\frac{C_2}{(E/3R_S)^2} \cdot 10^{-6}$	$\frac{C_3}{(E/3R_S)^2} \cdot 10^{-6}$	$\frac{C_4}{(E/3R_S)^2} \cdot 10^{-6}$	$\frac{C_5}{(E/3R_S)^2} \cdot 10^{-6}$	$\frac{C_6}{(E/3R_S)^2} \cdot 10^{-6}$	$\frac{C_7}{(E/3R_S)^2} \cdot 10^{-6}$	$\frac{C_8}{(E/3R_S)^2} \cdot 10^{-6}$
1	43,6	61,6	10,4	10,5	6,2	4,4	4,4	0,3
2	43,2	61,6	10,8	10,9	6,5	4,5	4,5	0,3
3	42,9	61,4	11,2	11,3	6,7	4,6	4,6	0,3
4	42,5	61	11,5	11,6	6,9	4,7	4,7	0,3
5	42,1	60,5	11,9	11,9	7,1	4,7	4,7	0,4
6	41,8	59,8	12,2	12,2	7,2	4,8	4,7	0,4
7	41,4	59	12,4	12,4	7,3	4,8	4,8	0,5
8	41	58	12,6	12,6	7,4	4,9	4,8	0,5
9	40	57	12,7	12,7	7,5	4,9	4,8	0,5
10	40	55,9	12,8	12,9	7,5	4,9	4,7	0,6

($\beta = 135^\circ$)

TABLEAU 8

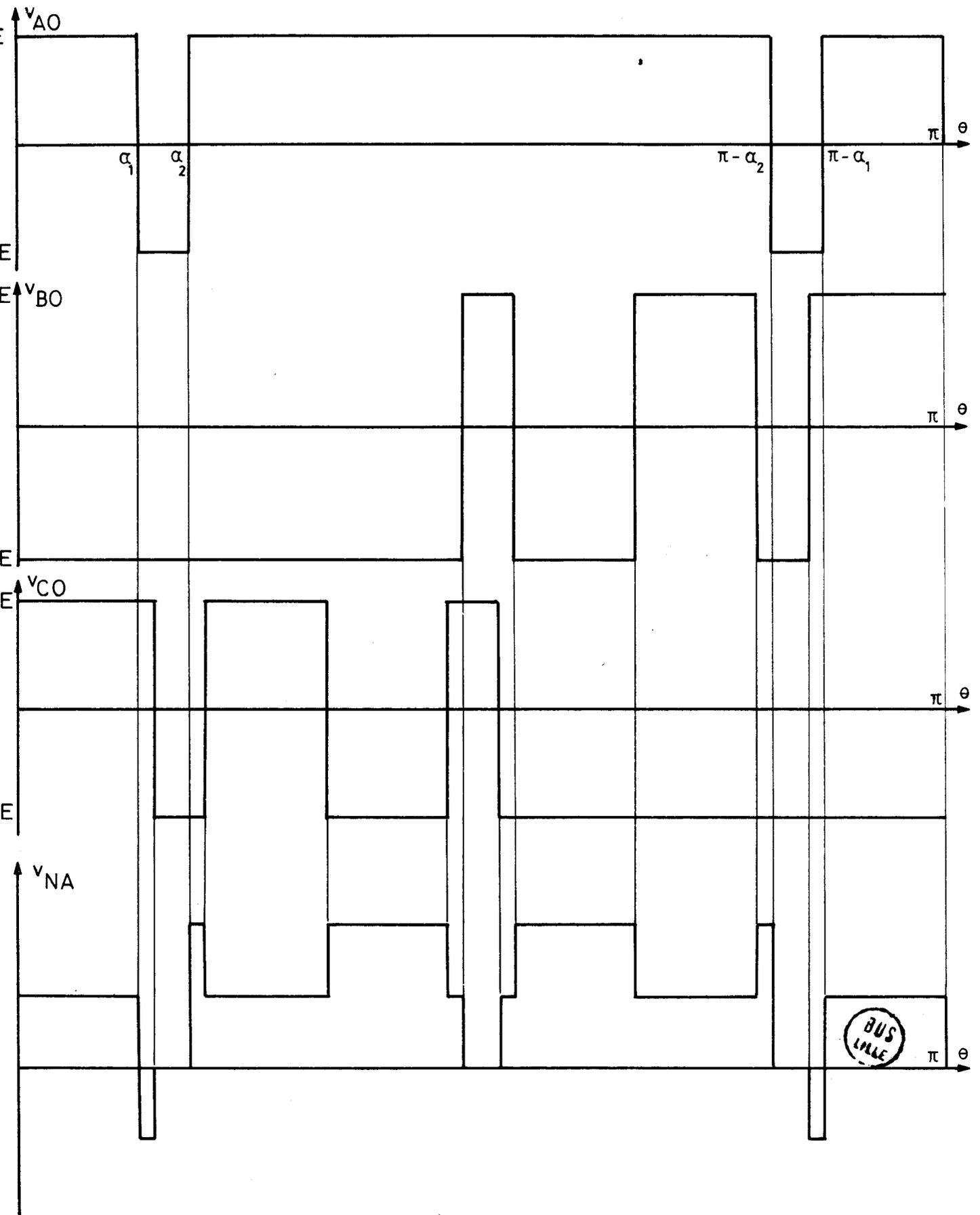


FIGURE 42

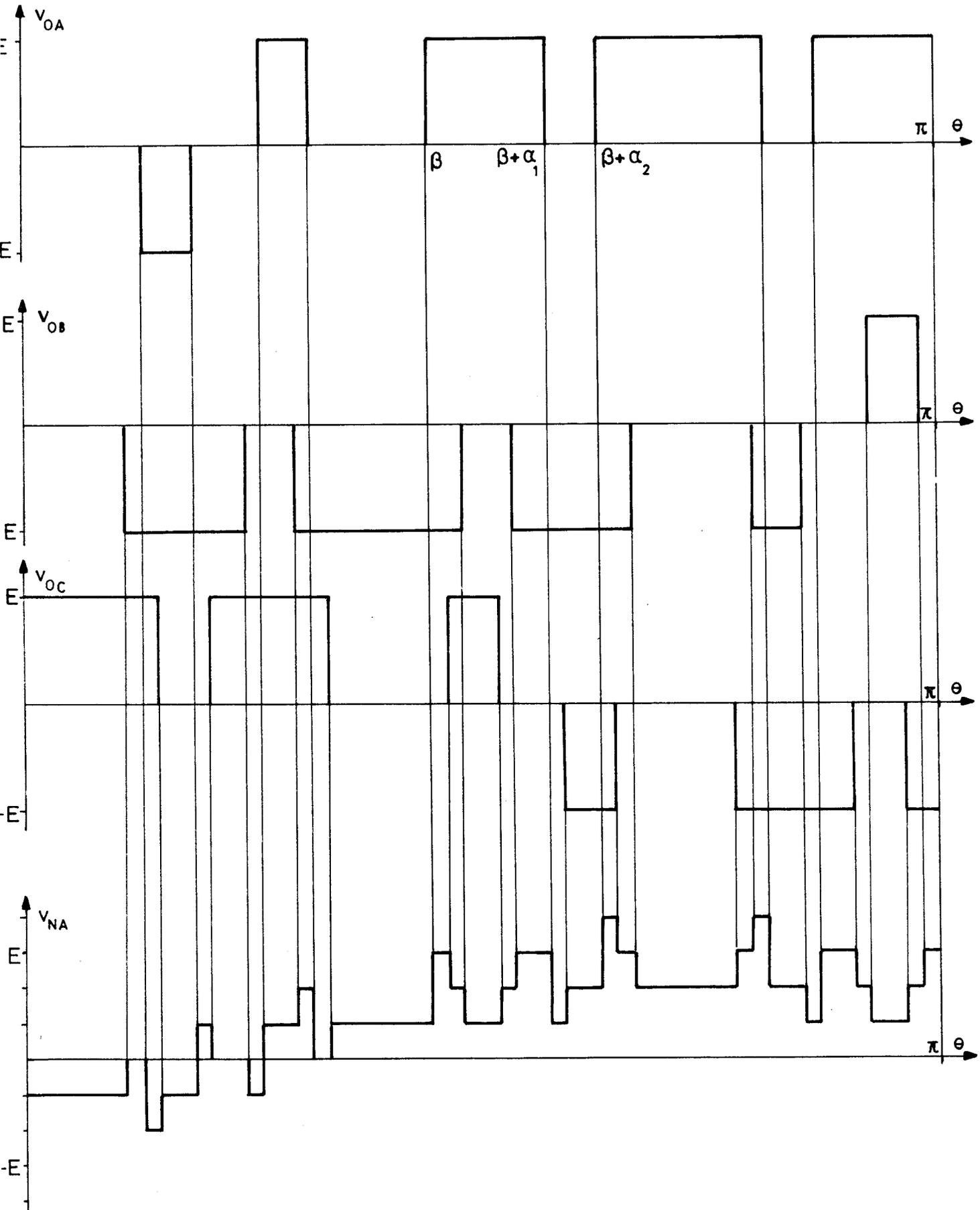


FIGURE 43

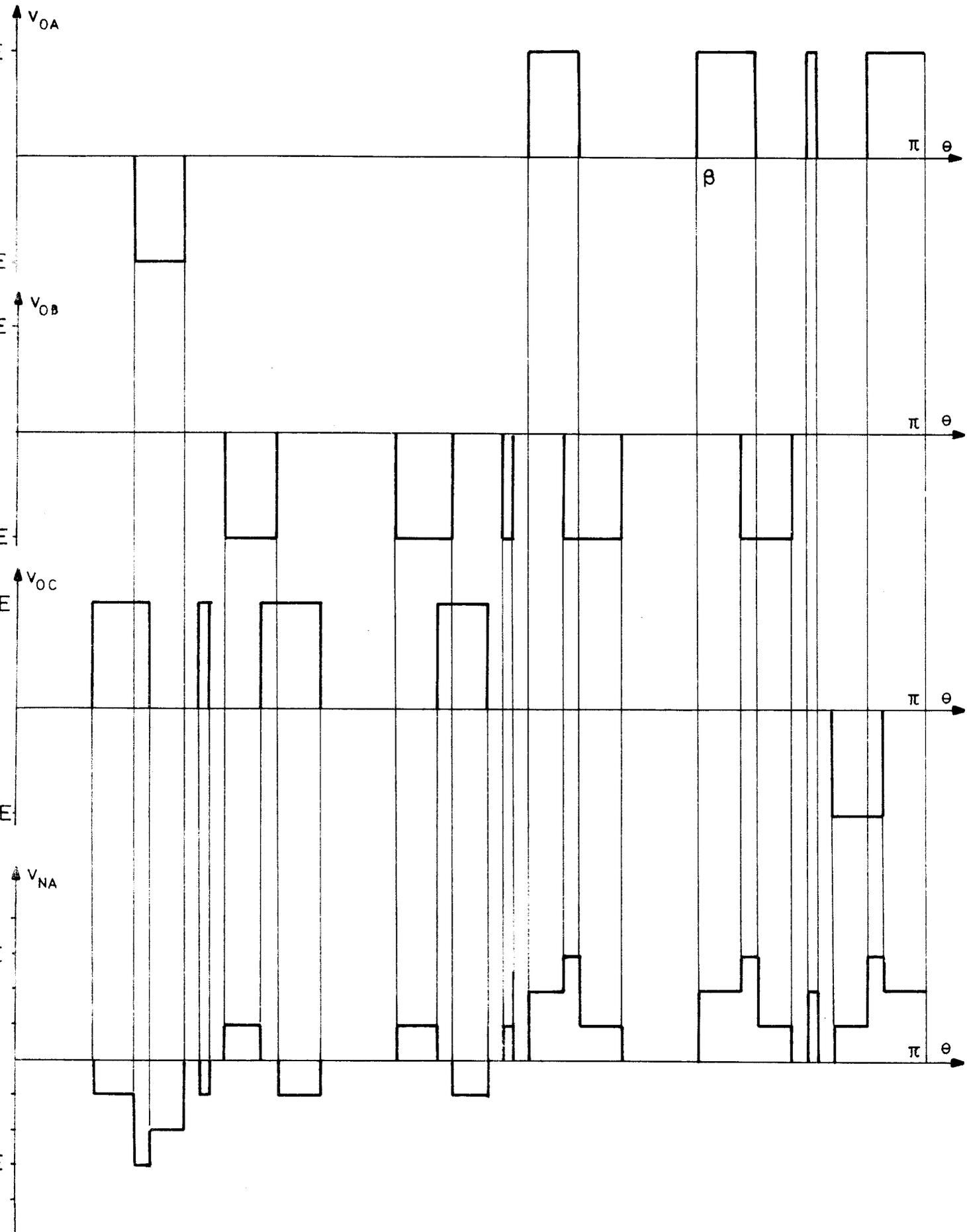
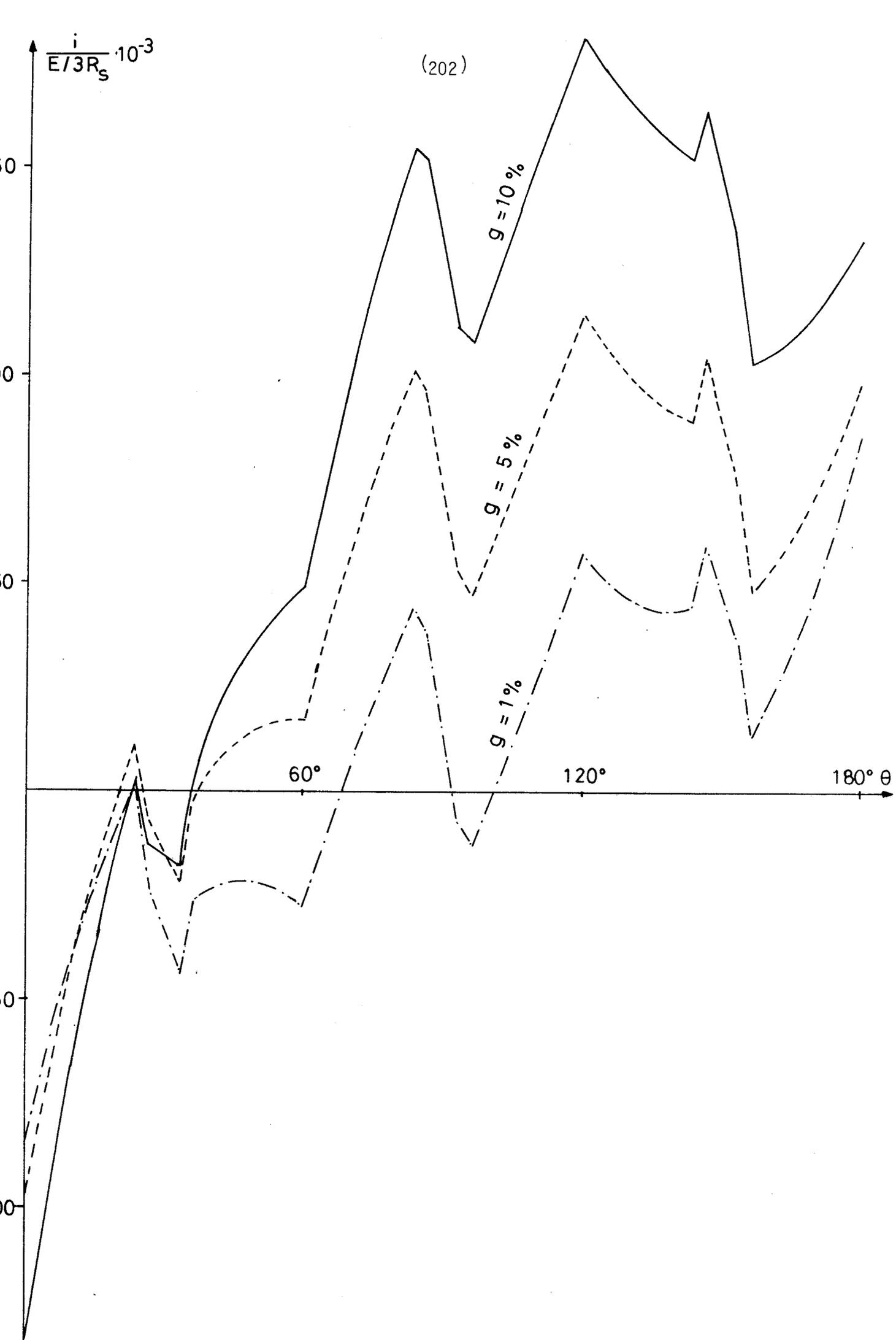


FIGURE 44



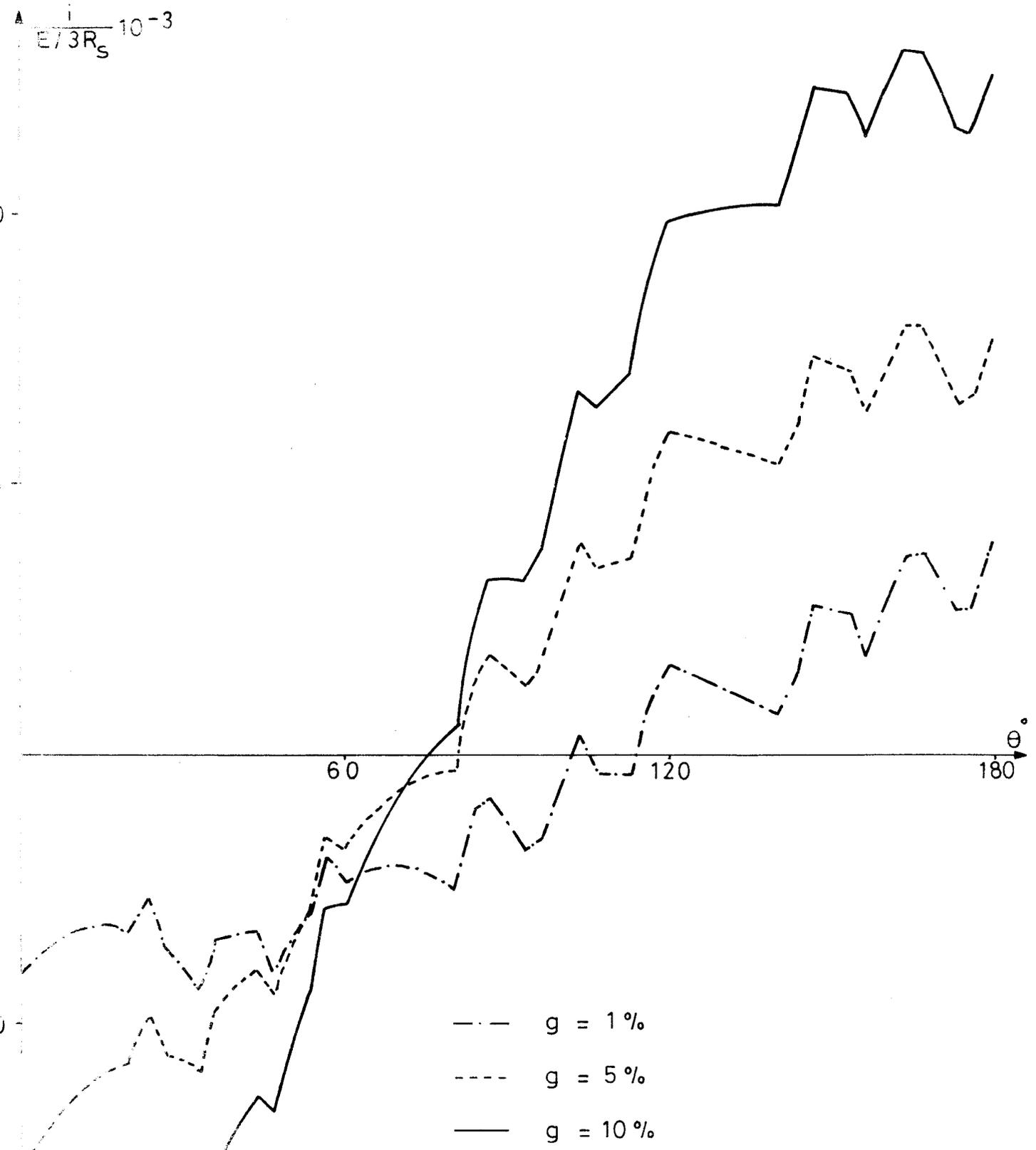


FIGURE 46

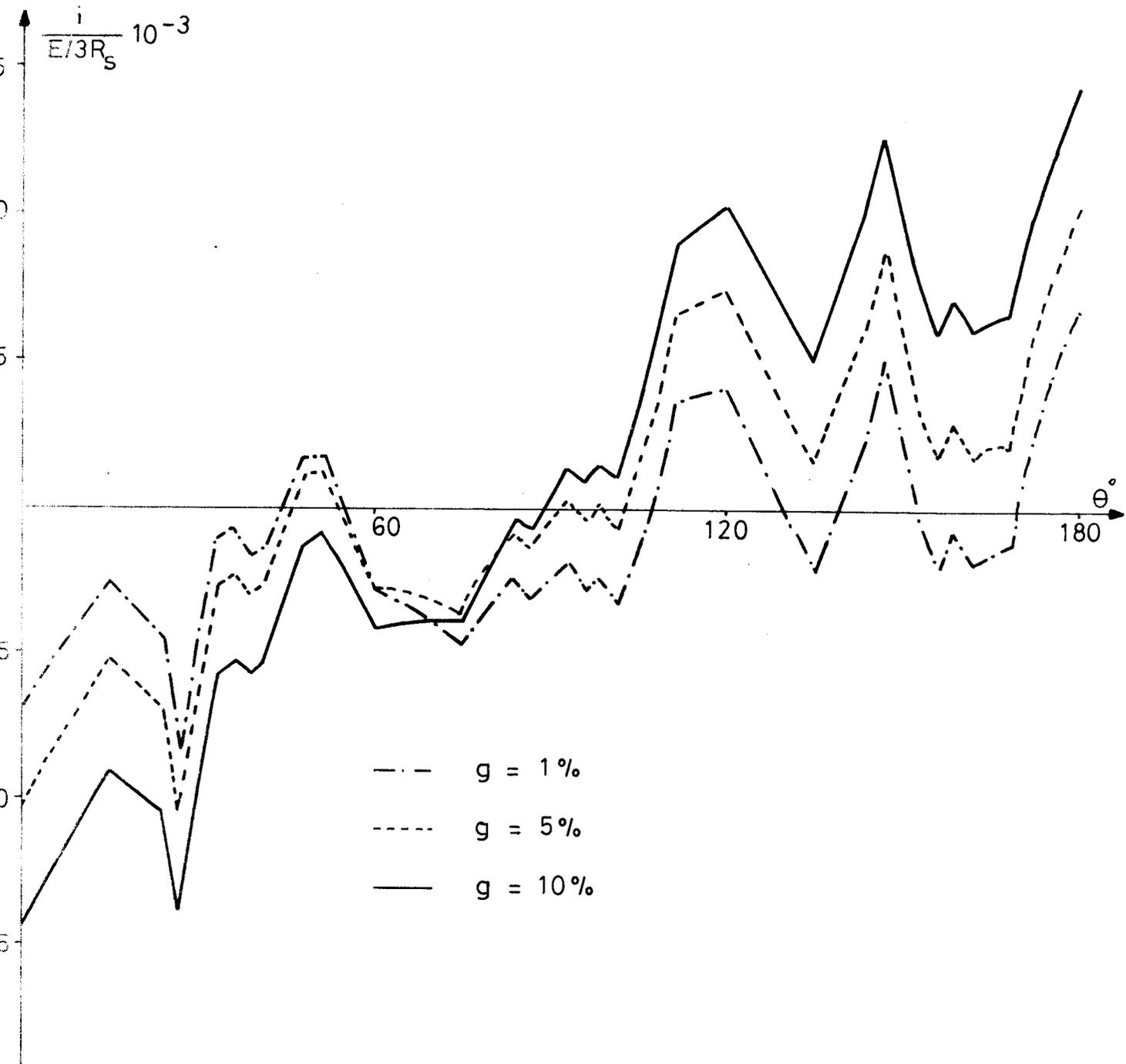


FIGURE 47

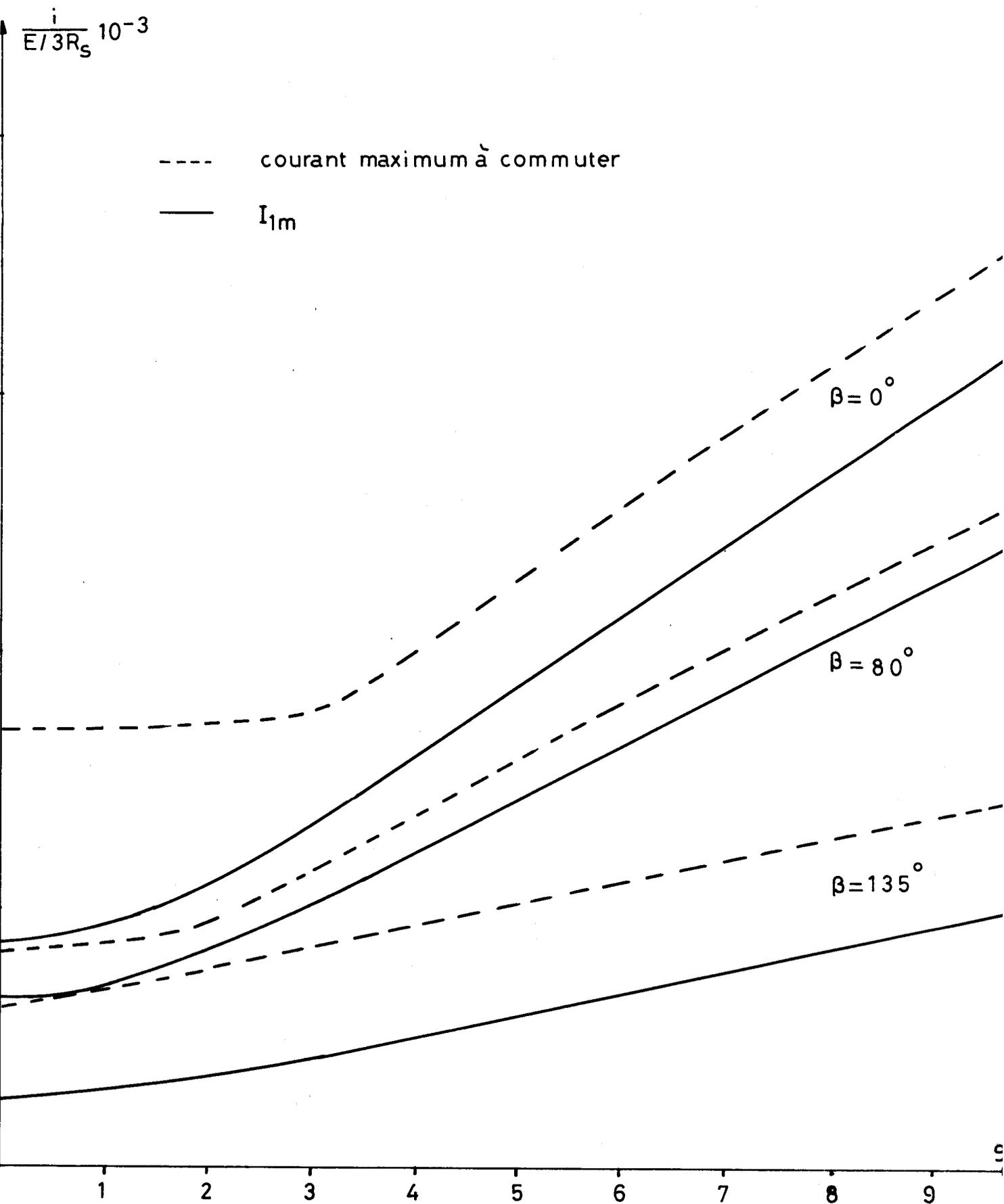


FIGURE 48

$$\frac{C_0}{(3R_S)^2} 10^{-6}$$

00

00

00

00

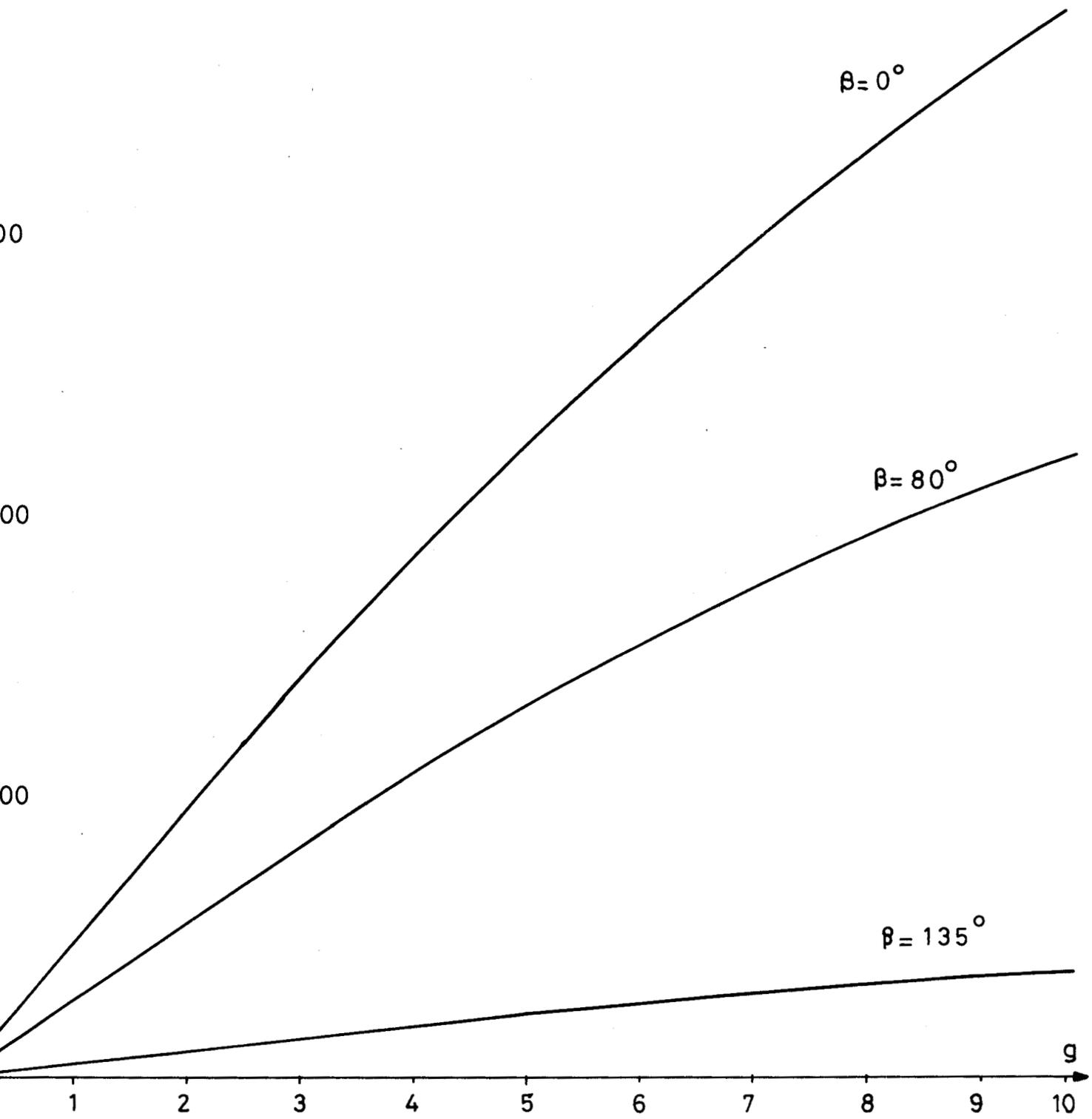
$\beta = 0^\circ$

$\beta = 80^\circ$

$\beta = 135^\circ$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 g

FIGURE 49



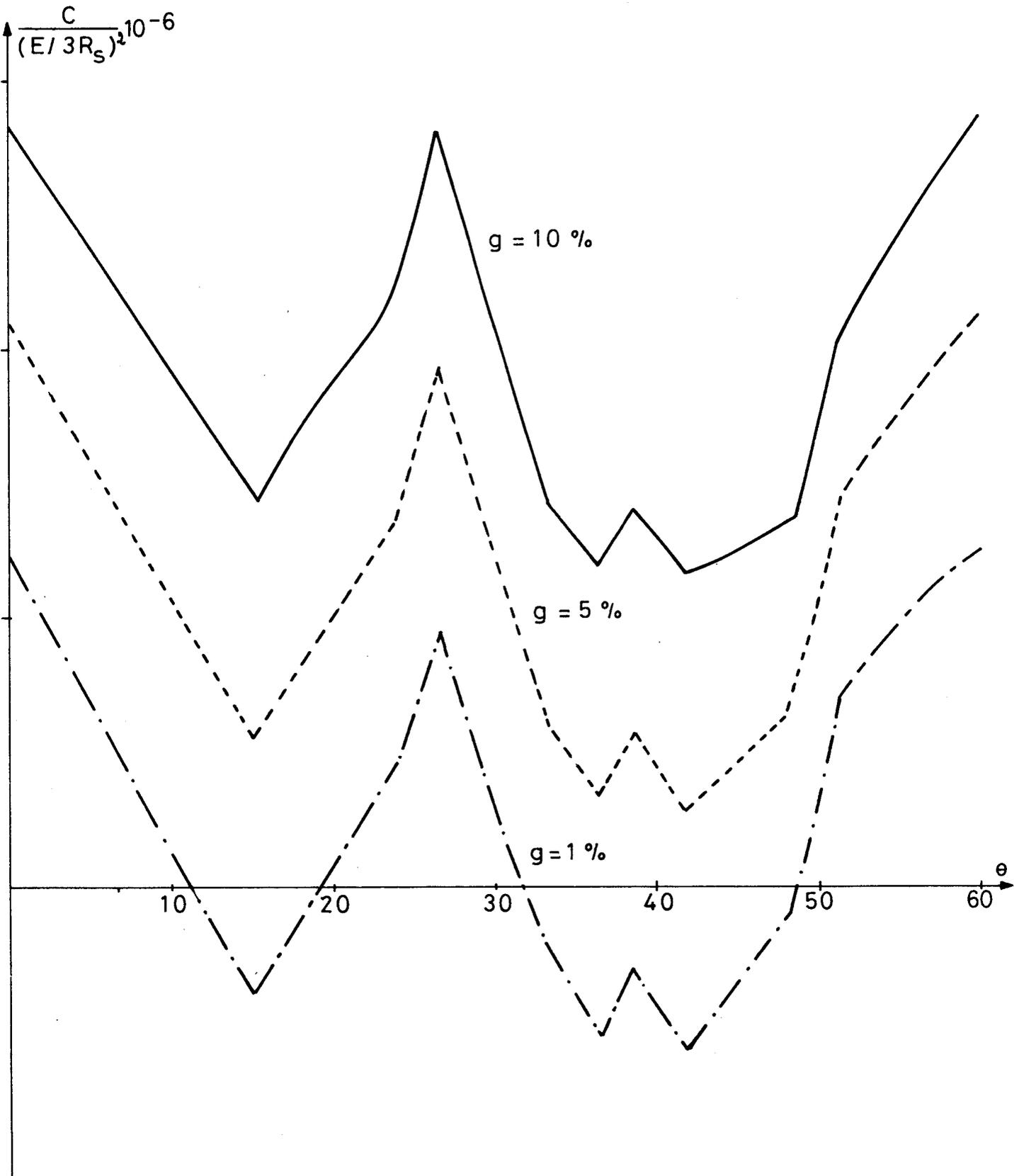
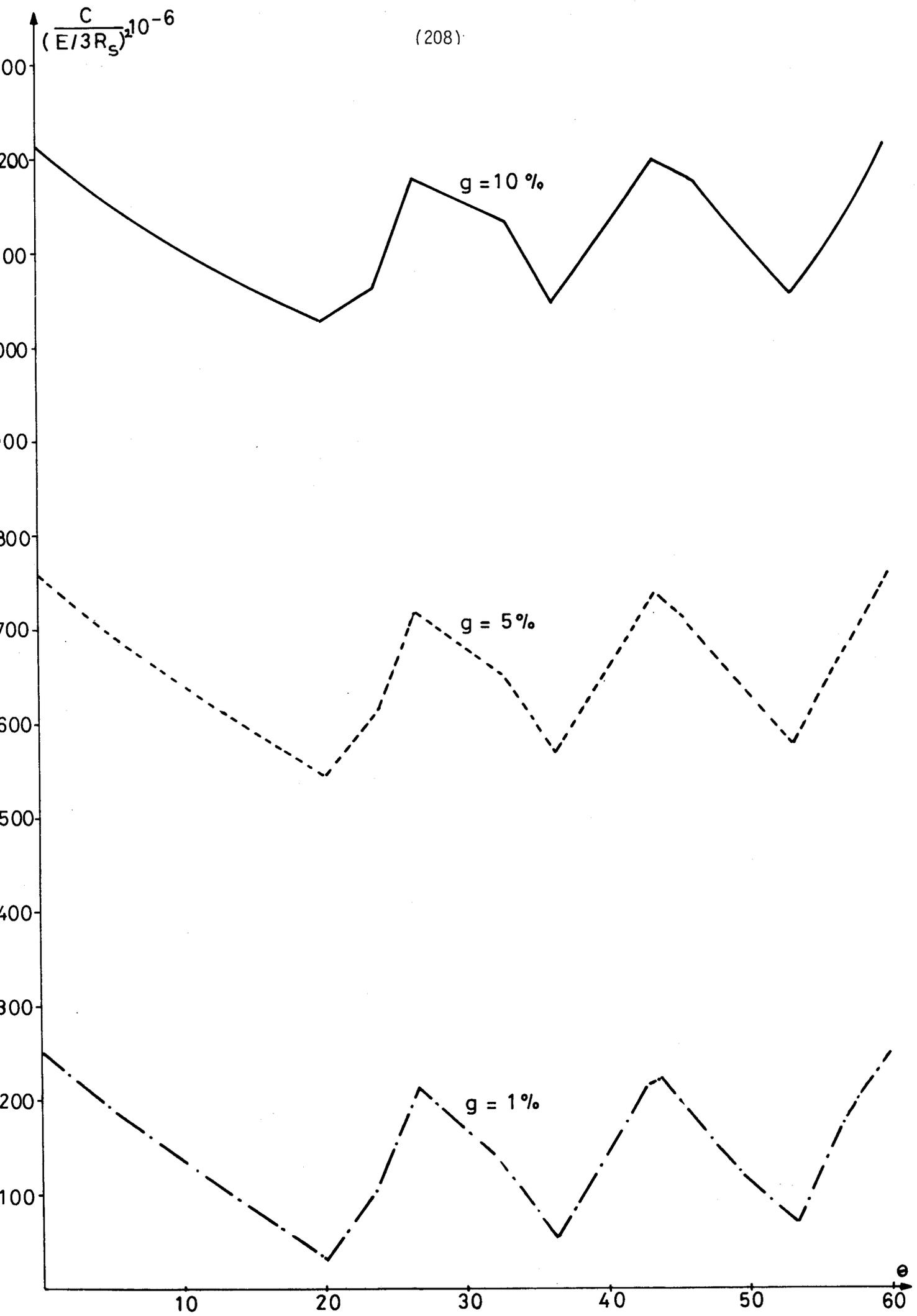


FIGURE 50



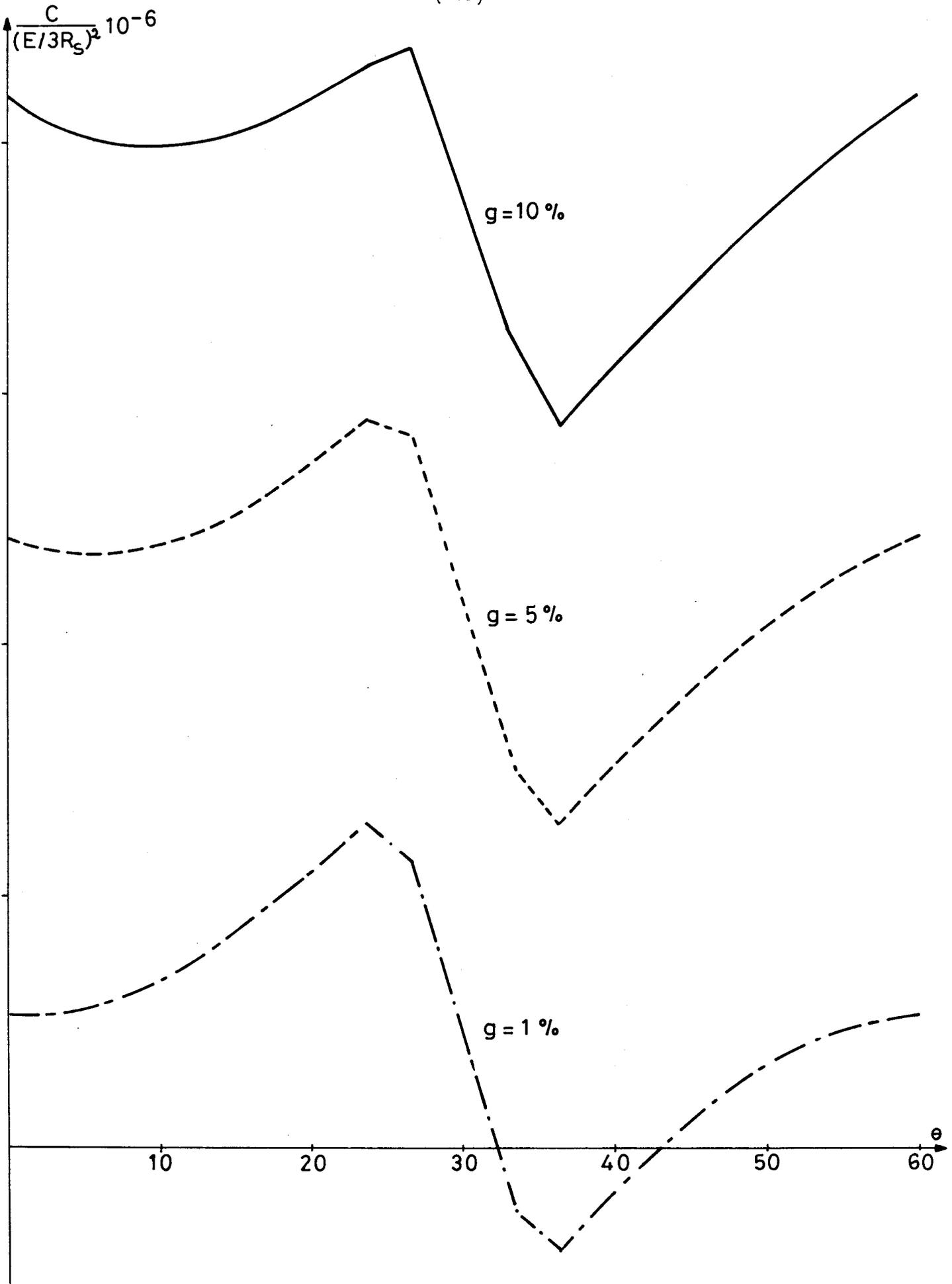


FIGURE 52

C H A P I T R E V I

ETUDE ANALYTIQUE DU MOTEUR ASYNCHRONE ALIMENTÉ PAR UN REDRESSEUR COMMUTATEUR
DE COURANT

Parmi les dispositifs permettant de faire varier la vitesse d'un moteur asynchrone, les onduleurs du type redresseur commutateur de courant font actuellement l'objet de nombreuses études [149][150][151][152][153][154]. Ils présentent en effet sur les onduleurs de tension un certain nombre d'avantages quant à la robustesse, la fiabilité et la facilité de construction. Ils peuvent fonctionner dans une grande gamme de fréquence, dans les quatre quadrants du plan couple-vitesse.

Ces montages imposent une forme d'onde du courant statorique discontinue ; de ce fait, le couple produit présentera lui aussi des discontinuités ainsi que les tensions simples, qui sont à la chute de tension dans les résistances statoriques près, les f.e.m induites. Ces tensions simples contrairement aux montages imposant une forme d'onde de tension ne sont plus contrôlées et il ne peut donc plus être question de maintenir le rapport U/f constant.

La discontinuité du couple ainsi que le fait que les caractéristiques de commutation des onduleurs soient fonctions des courants dans la charge sont les principaux désavantages de ce type d'alimentation.

Après un bref rappel sur les onduleurs commutateurs de courant, nous établirons les expressions analytiques du couple instantané, du couple moyen et de la tension simple. Nous mettons ensuite en évidence dans ces expressions les paramètres caractéristiques du moteur asynchrone et du convertisseur statique et nous montrerons comment on peut juger de l'influence de ces paramètres sur la valeur et la forme d'onde du couple.

I - GENERALITES SUR LES VARIATEURS DE VITESSE UTILISANT DES ONDULEURS DU TYPE REDRESSEUR-COMMUTATEUR DE COURANT

Le schéma de principe d'un variateur de vitesse pour moteur asynchrone alimenté par le réseau industriel et utilisant un onduleur de courant (CSI)

comporte :

- un pont triphasé à thyristors fournissant la tension continue variable u_c
- une inductance lissant le courant I fourni à l'onduleur
- un onduleur de courant dont l'un des schémas de principe est celui de la figure 53 :

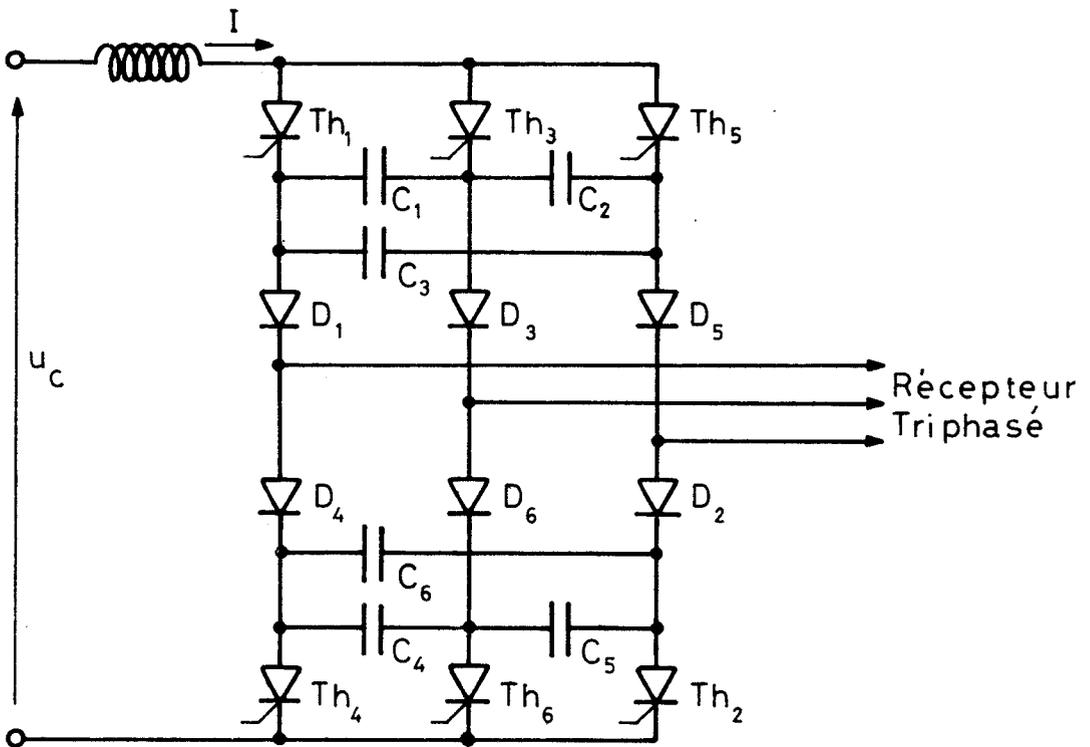


FIGURE 53

Les thyristors Th_1, Th_2, \dots, Th_6 font passer le courant dans le récepteur à une fréquence variable.

Les capacités C_1, C_2, \dots, C_6 , de même valeur, fournissent l'énergie nécessaire pour réaliser les commutations.

Les diodes D_1, D_2, \dots, D_6 isolent les capacités de la charge.

A chaque instant seuls deux thyristors sont conducteurs et un thyristor est commuté par l'allumage du thyristor suivant. Le diagramme de conduction est celui de la figure 54.

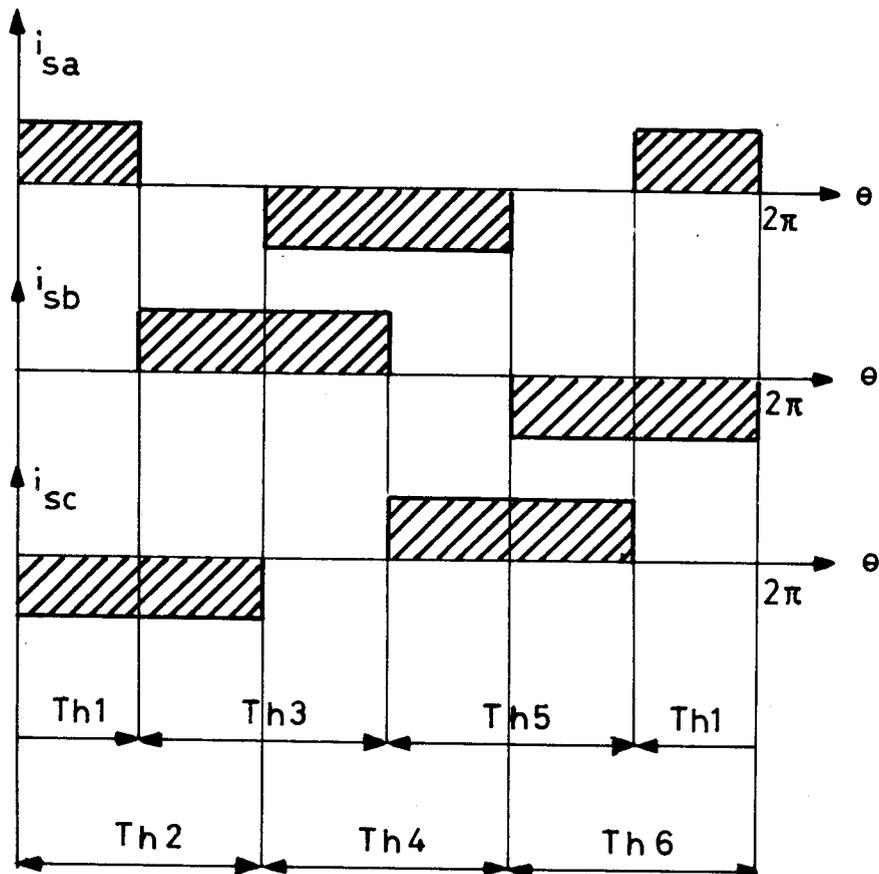


FIGURE 54

L'angle de conduction de chaque thyristor est de $2\pi/3$ durant une période. Ce type d'onduleur est dit à commutation auto-séquentielle [155].

Divers montages sont étudiés dans [156] et leurs performances en tant que commutateur de courant sont comparées.

II - EQUATIONS UTILISEES. PROPRIETES DES TRANSFORMEES DES COURANTS

Nous utilisons encore le système (1) d'équations établi au chapitre

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} v_{Sf} = (R_S + i\omega L_S) i_{Sf} + L_S \frac{di_{Sf}}{dt} + 3/2 M i\omega i_{Rf} + 3/2 M \frac{di_{Rf}}{dt} \\ v_{Rf} = 0 = 3/2 M i\omega i_{Sf} + 3/2 M \frac{di_{Sf}}{dt} + (R_R + i\omega L_R) i_{Rf} + L_R \frac{di_{Rf}}{dt} \end{array} \right.$$

expressions dans lesquelles, du fait de l'alimentation en courant i_{Sf} est une fonction complexe connue et i_{Rf} et v_{Sf} sont des fonctions complexes à déterminer.

L'étude de ce système est simplifiée par le fait que la fonction $i_{Sf}(t)$ est une fonction périodique de période $T = \pi/3\omega$. En effet :

- durant le premier intervalle, $0 \leq t \leq \pi/3\omega$,

$$i_{Sf,1} = 1/\sqrt{3} e^{-i\omega t} (1 - a^2) I ;$$

- durant le second intervalle, $\pi/3\omega \leq t \leq 2\pi/3\omega$,

$$i_{Sf,2} = 1/\sqrt{3} e^{-i\omega t} (a - a^2) I$$

et des expressions de forme analogue donnent i_{Sf} pour les autres intervalles.

Si dans l'expression de $i_{Sf,2}$, on remplace t par $t' + \pi/3\omega$, on obtient :

$$\begin{aligned} i_{Sf,2} &= 1/\sqrt{3} e^{-i\omega(t' + \pi/3\omega)} (a - a^2) I \\ &= 1/\sqrt{3} e^{-i\omega t'} (1 - a^2) I \end{aligned}$$

de sorte qu'avec ce changement d'origine des temps $i_{Sf,2}$ a la même expression que $i_{Sf,1}$. Il n'est donc nécessaire d'étudier les grandeurs i_{Rf} et v_{Sf} que durant le premier intervalle $[0, \pi/3\omega]$.

Pour obtenir l'évolution de ces grandeurs durant toute la période, il suffira ensuite d'effectuer pour chaque intervalle le changement convenable d'origine des temps.

III - RESOLUTION

Effectuons dans la seconde équation le changement de variable :

$$i_{Rf} = y_{Rf} - \frac{3/2 M}{\mathcal{L}_R} i_{Sf}$$

On obtient après report et simplifications :

$$R_R \frac{3/2 M}{\mathcal{L}_R} i_{Sf} = R_R + i \mathcal{L}_R g \omega y_{Rf} + \mathcal{L}_R \frac{dy_{Rf}}{dt}$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre en y_{Rf} à second membre périodique de période $T = \pi/3\omega$, dont le régime libre est donné par :

$$y_{Rf,1} = K e^{-(\alpha + i\beta)}$$

avec
$$\alpha = \frac{R_R}{\mathcal{L}_R} \quad \text{et} \quad \beta = g\omega$$

Durant le premier intervalle de fonctionnement, nous avons :

$$i_{Sf,1} = 1/\sqrt{3} I (1 - a^2) e^{-i\omega t}$$

Le régime forcé correspondant est donc du type $B e^{-i\omega t}$ et l'on

obtient le coefficient B par identification :

$$B = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 - a^2) I \frac{3/2 M \mathcal{L}_R}{R_R - i \mathcal{L}_R \omega'} \frac{R_R}{R_R - i \mathcal{L}_R \omega'}$$

et $y_{R,f}$ a pour expression :

$$y_{R,f}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 - a^2) I \frac{3/2 M \mathcal{L}_R}{R_R - i \mathcal{L}_R \omega'} \frac{R_R}{R_R - i \mathcal{L}_R \omega'} e^{-i\omega t} + K e^{-(\alpha + i\beta)t}$$

Puisque l'on a une équation différentielle avec second membre périodique, la solution en régime permanent établi est une fonction périodique et l'on a donc :

$$y_{Rf}(0) = y_{Rf}(\pi/3\omega)$$

Il est possible de déterminer la constante d'intégration complexe K. On obtient :

$$K = - \frac{1}{\sqrt{3}} (1 - a^2) \frac{3/2 M}{\mathcal{L}_R} \frac{R_R}{R_R - i \mathcal{L}_R \omega'} I \frac{1 - e^{-i\pi/3}}{1 - e^{-(\alpha + i\beta)\pi/3\omega}}$$

et la première composante relative du courant rotorique s'écrit :

$$i_{Rf}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 - a^2) I \frac{3/2 M}{R_R - i \mathcal{L}_R \omega'} \left(i\omega' e^{-i\omega t} - \frac{R_R}{\mathcal{L}_R} \frac{1 - e^{-i\pi/3}}{1 - e^{-(\alpha + i\beta)\pi/3\omega}} e^{-(\alpha + i\beta)t} \right)$$

Le couple est obtenu à partir de la relation :

$$C = - 3 M \mathcal{J} (i_{Sb} i_{Rf})$$

Puisque dans le premier intervalle :

$$i_{Rf} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 - a) I e^{i\omega t}$$

nous obtenons en posant :

$$R_R - i\omega' L_R = Z_R e^{-i\phi_R}$$

$$(1 - e^{-R_R/L_R \omega' \pi/3} \cos g \pi/3) + i(e^{-R_R/L_R \omega' \pi/3} \sin g \pi/3) = N_1 e^{i\chi_1}$$

$$i_{Sb} i_{Rf} = 3/2 \omega I^2 \left\{ i\omega'/Z_R e^{i\phi_R} - R_R/L_R 1/(N_1 Z_R) e^{i\phi_R} e^{-i\chi_1} e^{i\pi/3} e^{(-\alpha+i\omega')t} \right\}$$

Il en résulte :

$$C = -9/2 \frac{M^2 I^2}{Z_R} \left\{ \omega' \cos \phi_R - \frac{R_R}{L_R} N_1 e^{-R_R/L_R t} \sin(\omega' t + \pi/3 + \phi_R - \chi_1) \right\}$$

On peut alors calculer l'expression du couple moyen par :

$$C_o = 3/\pi \int_0^{\pi/3} C(\theta) d\theta$$

Un calcul simple conduit à :

$$C_o = -9/2 \frac{M^2 I^2}{Z_R} \left\{ \omega' \cos \phi_R - 3/\pi \frac{R_R}{Z_R N_1} \omega (\sin(\pi/3 + 2\phi_R - \chi_1) - e^{-R_R/L_R \omega \pi/3} \sin(\omega'/\omega \pi/3 + \pi/3 + 2\phi_R - \chi_1)) \right\}$$

Enfin la première équation du système (1) permet de calculer la composante v_{Sf} des tensions d'alimentation. On obtient après simplifications :

$$v_{Sf} = 1/\sqrt{3} (1 - a^2) I \left\{ R_S e^{-i\omega t} + 9/4 M^2/L_R^2 R_R \frac{1 - e^{-i\pi/3}}{1 - e^{-(\alpha + i\beta)\pi/3\omega}} e^{-(\alpha + i\beta)t} \right\}$$

et puisque :

$$v_{Sa} = 2/\sqrt{3} \mathcal{R}(e^{i(\omega t + (K-1)\pi/3)} v_{Sf})$$

l'expression de la tension simple v_{Sa} , après simplifications, s'écrit :

$$v_{Sa} = 2/\sqrt{3} \{ R_S I \cos(\pi/6 + (K-1)\pi/3) - 9/4 M^2 / \mathcal{L}_R^2 R_R / N_1 I e^{-R_R / \mathcal{L}_R t} \sin(\omega' t - \chi_1 + (K-1)\pi/3) \}$$

expression dans laquelle

$$0 \leq t \leq \pi/3\omega$$

et où K est un entier naturel pouvant prendre successivement les valeurs de 1 à 6.

Des tensions aux bornes des phases on déduit la tension u_c , de période $\pi/3\omega$, à appliquer à l'entrée de l'onduleur.

Durant le premier intervalle, par exemple, $u_c = V_{Sa} - V_{Sc}$:

$$u_c = 2 R_S I - \frac{9/4 M^2}{\mathcal{L}_R^2} R_R / N_1 I e^{-R_R / \mathcal{L}_R t} \sin(\omega' t - \chi_1 - \pi/6)$$

D'où, à la chute de tension dans la résistance de la bobine de lissage près, la tension redressée moyenne U_{co} que doit fournir le montage redresseur :

$$U_{co} = 2 R_S I - \frac{9/4 M^2 \omega}{\mathcal{L}_R N_1} \cos \phi_R I \left(\sin(\phi_R - \chi_1 - \pi/6) - e^{-\pi/3 R_R / \mathcal{L}_R \omega} \sin(\omega' / \omega \pi/3 - \chi_1 - \pi/6 + \phi_R) \right)$$

IV - MISE EN EVIDENCE DES PARAMETRES CARACTERISTIQUES

On peut réécrire les relations donnant c , C_o , V_{AN} , u_c et U_{co} en mettant en évidence :

- les paramètres caractéristiques du moteur :

Son coefficient de dispersion σ , la constante de temps du stator $\tau_S = \mathcal{L}_S/R_S$, celle du rotor $\tau_R = \mathcal{L}_R/R_R$ et le glissement g .

- Les caractéristiques de commutateur de courant

Le courant I qu'il fournit et la pulsation ω qu'il impose aux grandeurs statoriques.

On obtient ainsi :

$$\frac{C}{2(1-\sigma)\omega R_S I^2} = -\tau_S \tau_R \cos^2 \phi_R \left\{ (1-g) - \frac{e^{-\theta_S/\tau_R \omega}}{\tau_R \omega N_1 \cos \phi_R} \sin((1-g)\theta_S + \pi/3 + \phi_R - \chi_1) \right\}$$

$$\frac{C_o}{2(1-\phi)\omega R_S I^2} = -\tau_S \tau_R \cos^2 \phi_R \left\{ (1-g) - \frac{3}{\pi N_1} \left[\sin(\pi/3 + 2\phi_R - \chi_1) - e^{-\pi/3\tau_R \omega} \sin(2\pi/3 - g\pi/3 + 2\phi_R - \chi_1) \right] \right\}$$

$$\frac{V_{Sa}}{R_S I} = 2/\sqrt{3} \left\{ \cos(\pi/6 + (K-1)\pi/3) - (1-\sigma) \tau_S/\tau_R N_1 e^{-\theta_S/\tau_R \omega} \sin((1-g)\theta_S - \chi_1 + (K-1)\pi/3) \right\}$$

$$\frac{u_c}{R_S I} = 2 - 2\tau_S/\tau_R (1-\sigma)/N_1 e^{-\theta_S/\tau_R \omega} \sin((1-g)\theta_S - \chi_1 - \pi/6)$$

$$\frac{U_{co}}{R_S I} = 2 - 6/\pi(1-\sigma) \tau_S \omega/N_1 \cos \phi_R \left\{ \sin(\phi_R - \chi_1 - \pi/6) - e^{-\pi/3\tau_R \omega} \sin((1-g)\pi/3 - \chi_1 - \pi/6 + \phi_R) \right\}$$

Ces relations permettent de tracer point par point les formes d'ondes de c , v_{Sa} et u_c pour un moteur donné (σ , τ_S , τ_R) lors d'un fonctionnement donné (I , ω , g).

La figure 55 en donne un exemple :

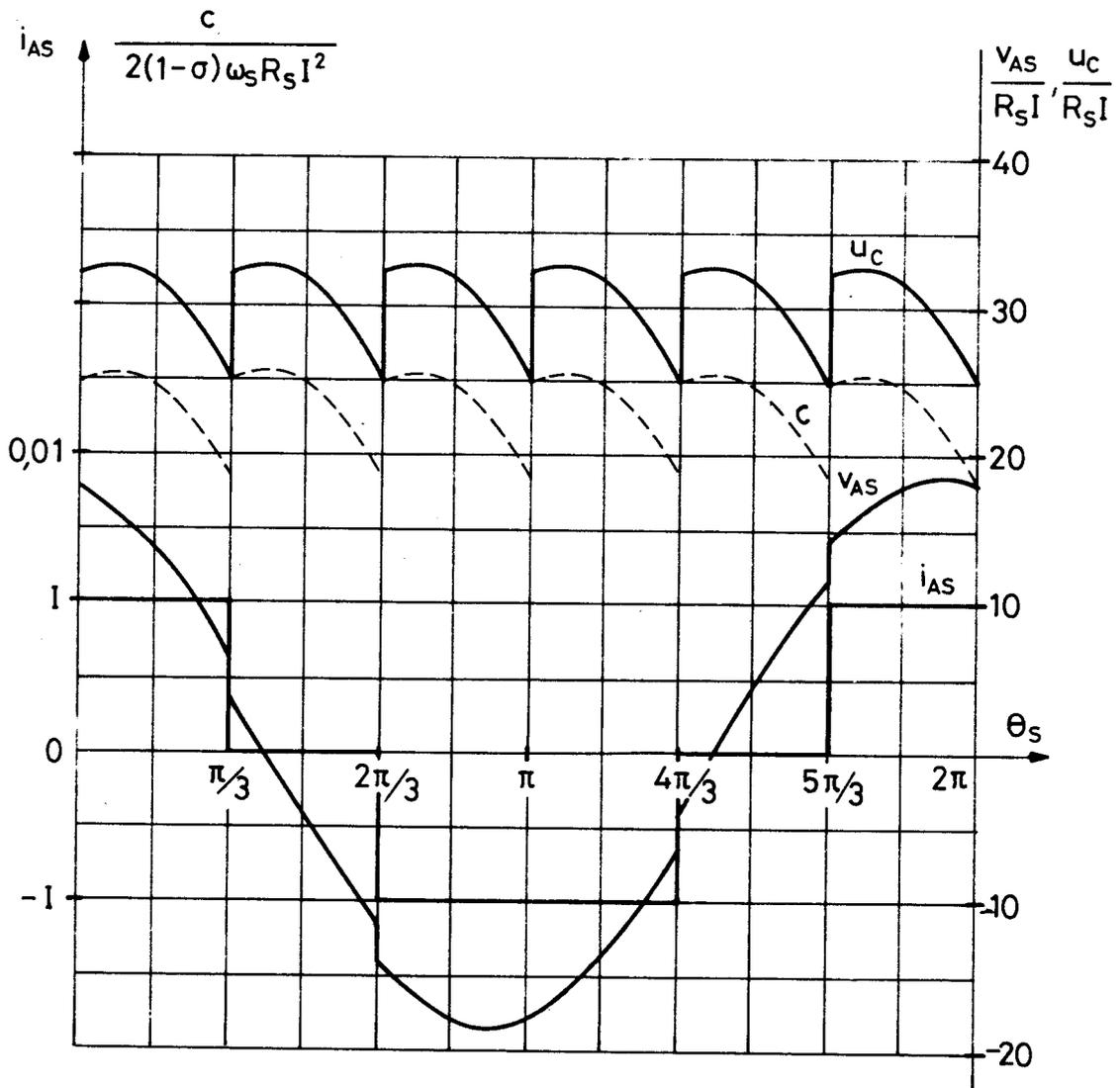


FIGURE 55

Elles permettent surtout de choisir le type de moteur, la plage de variation de ω et le mode de commande les plus favorables pour une application donnée, en illustrant par des familles de courbes les remarques formulées par A. WIART [119] sur les particularités du fonctionnement du moteur asynchrone auquel les ondes du courant sont imposées.

Nous nous limiterons ici, parce qu'elle est la plus difficile, à l'étude du couple et de ses variations.

V - ETUDE DU COUPLE

5.1. Couple moyen

La relation établie montre que le couple moyen C_o est proportionnel à $\tau_S(1-\sigma)R_S I^2$ et fonction de $\tau_R\omega$ et de g . Les courbes, telles celles de la figure 56, montrant l'évolution de $C_o/(1-\sigma)R_S I^2 \tau_S$ avec le glissement pour diverses valeurs de $\tau_R\omega$, ou à τ_R donné, de f , présentent un maximum pratiquement indépendant de f ; ce maximum est obtenu pour un glissement variant sensiblement comme l'inverse de la fréquence f . D'ailleurs tout au long des courbes le glissement nécessaire pour obtenir une même valeur de $C_o/(1-\sigma)R_S I^2 \tau_S$ est à peu près proportionnel à $1/f$.

Ces courbes montrent :

- que le couple maximum est proportionnel à $(1-\sigma)\tau_S I^2$, donc au produit du courant statorique par le flux que crée ce courant; il ne dépend pas des caractéristiques du rotor.
- que le glissement pour obtenir un couple donné est inversement proportionnel à $\tau_R\omega$. Il diminue quand la résistance du rotor diminue, quand la fréquence statorique augmente.

5.2. Forme d'onde du couple instantané

La forme d'onde du couple c durant chacune de ses périodes et l'importance relative de la brusque variation de c à chaque changement de période ne

dépendent, elles aussi, que de $\tau_R \omega$ et de g . La figure 57 donne l'onde C pour une valeur de $\tau_R \omega$ et diverses valeurs de g . Plus le glissement croît moins le couple varie et moins les à-coups sont importants. Quand g est suffisant, au lieu de décroître tout au long de sa période, le couple passe par un maximum durant celle-ci.

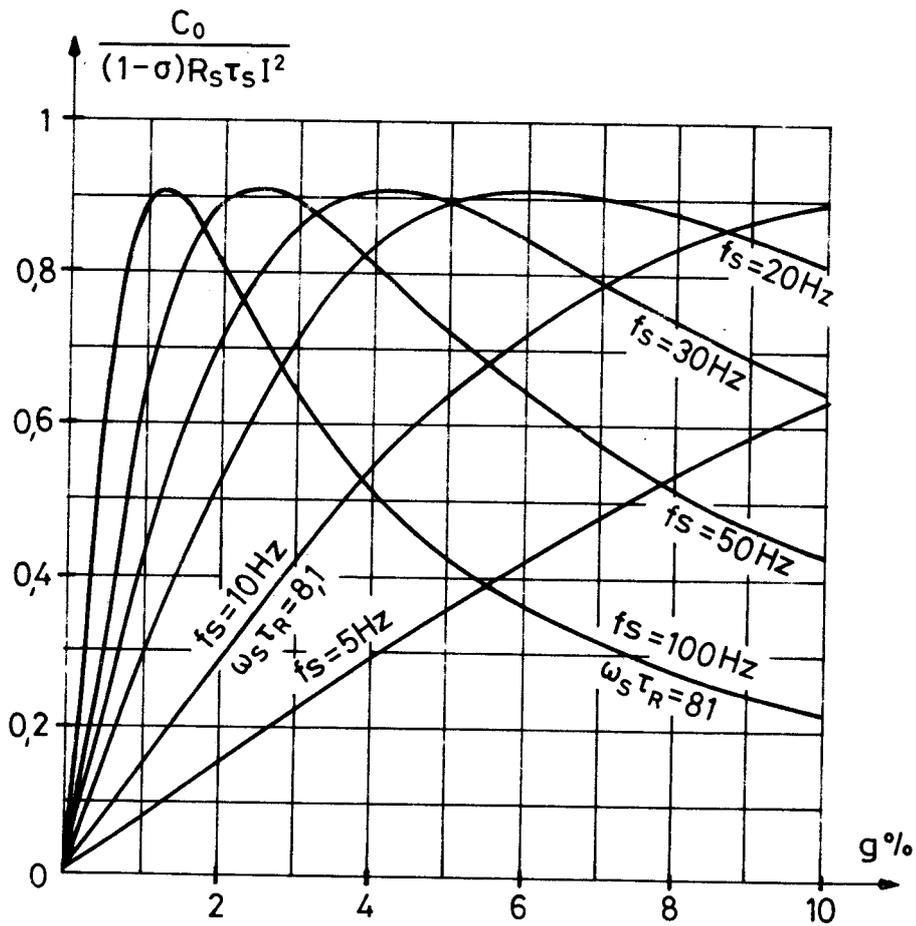


FIGURE 56

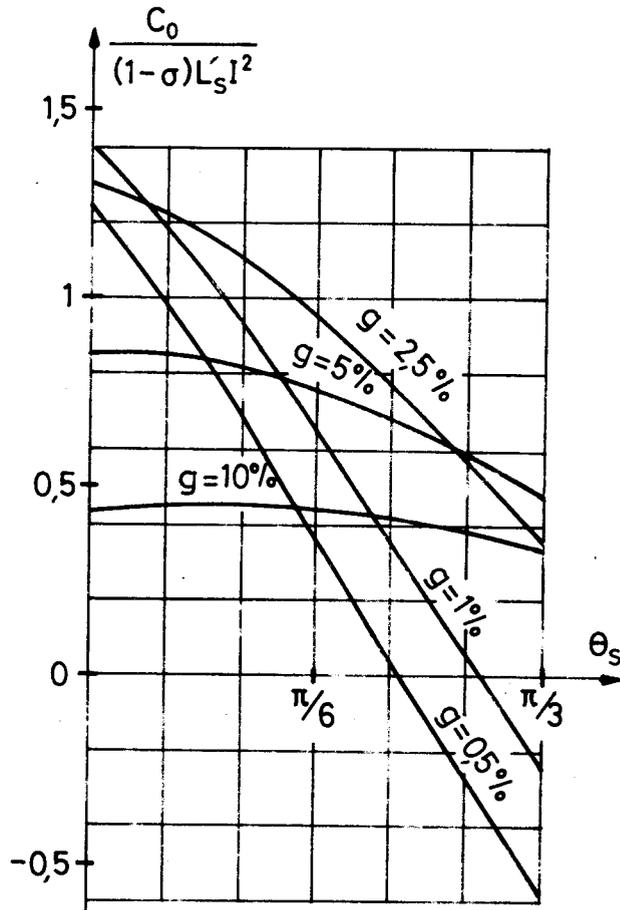


FIGURE 57

Dans le système d'axes $\tau_R \omega$, g nous avons tracé (figure 58) les courbes donnant au cours de l'intervalle $[0, \pi/3]$, la valeur θ_{Smax} de l'angle θ_S pour laquelle C passe par son maximum.

θ_{Smax} , valeur de θ_S qui annule $dc/d\theta_S$ est donné par :

$$\theta_{Smax} = \frac{\chi_1 - \pi/3}{1-g}$$

Quand $\tau_R \omega$ et g sont tels que θ_{Smax} s'annule, on passe du domaine où C présente un maximum à celui où il décroît sans cesse durant chacune de ses périodes.

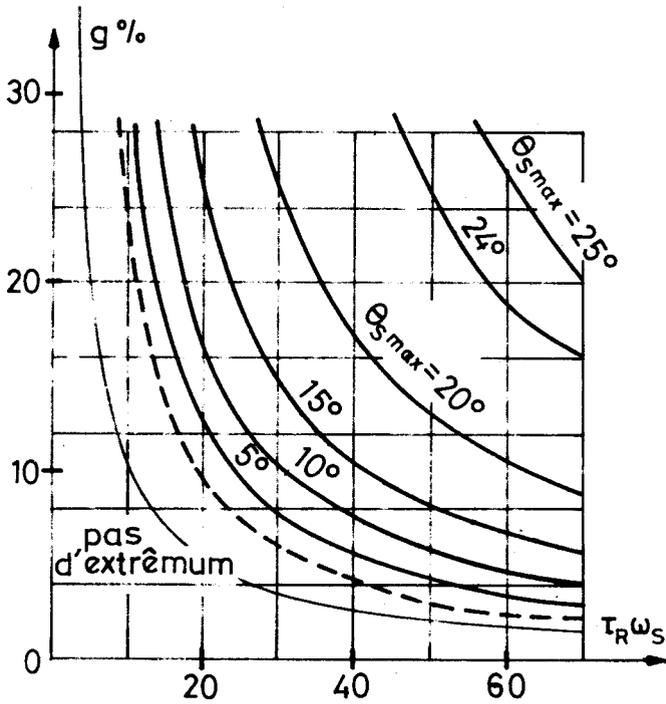


FIGURE 58

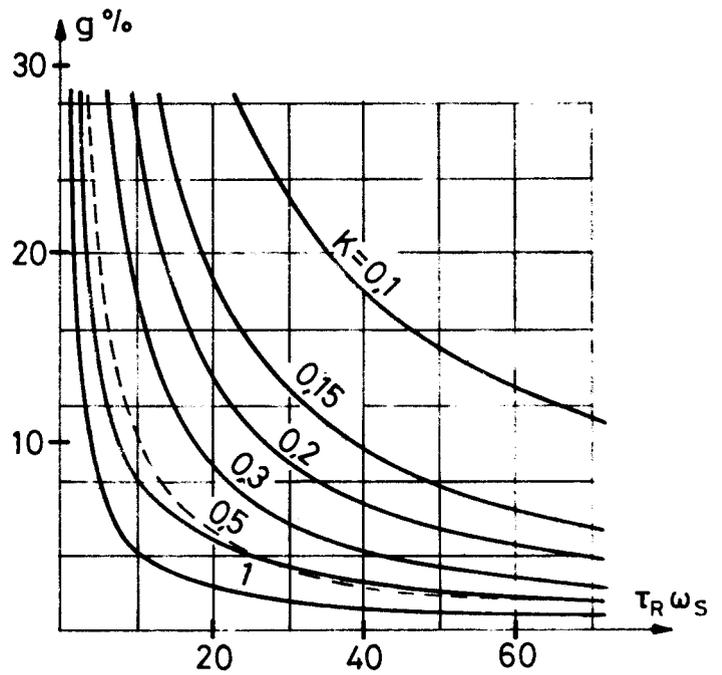


FIGURE 59

Il est alors possible (figure 59) de tracer, toujours dans le même système d'axes, les courbes d'égal variation relative du couple, c'est-à-dire d'égal rapport :

$$K_c = \frac{c_{\max} - c_{\min}}{2C_0}$$

Le couple varie d'autant moins de part et d'autre de sa valeur moyenne C_0 que $\tau_R \omega$ et g sont plus importants.

L'étude du couple moyen (figure 56) et celle de ses variations instantanées (figure 57) conduisent aux mêmes choix :

- Pour avoir le même couple moyen C_o , à courant statorique donné, il faut adopter un glissement qui *augmente quand la fréquence statorique f diminue*. Cet accroissement de g permet de maintenir K_c faible même aux basses valeurs de f .

- Pour réduire le glissement nécessaire à l'obtention des mêmes valeurs de C_o et de K_c , à f_s donné, il faut augmenter *la constante de temps du rotor* et, en particulier, utiliser une cage de résistance relative réduite.

VI - CONCLUSION

L'étude de l'alimentation du moteur asynchrone par un onduleur de courant a permis de montrer que l'emploi des composantes relatives de Y.H. KU permettait, ici encore, d'obtenir aisément les expressions instantanées des variables.

On peut facilement obtenir ces expressions en fonction des paramètres caractéristiques de la machine et montrer ainsi l'influence de ces paramètres sur les performances de celle-ci. C'est ce que nous avons fait pour le couple.

Nous avons voulu à propos de cette dernière application montrer *la supériorité de l'étude analytique* qui permet seule d'obtenir les expressions littérales des variables ce qui facilite beaucoup l'examen de l'influence des caractéristiques du moteur et de son alimentation sur leurs performances et permet, pour chaque application précise, de faire travailler l'ensemble dans les conditions optimales.

C O N C L U S I O N

Parmi les divers dispositifs permettant de faire varier la vitesse des moteurs électriques, les montages statiques à redresseurs se substituent progressivement aux associations de machines électriques.

L'Electronique de Puissance a d'abord permis le développement des variateurs de vitesse alimentant des moteurs à courant continu. Les caractéristiques tant statiques que dynamiques de ces convertisseurs sont actuellement assez bien connues.

Il n'en est pas de même des montages permettant de faire varier la vitesse du moteur asynchrone. L'étude que nous venons de présenter a essentiellement pour but de forger l'outil nécessaire à l'étude quantitative du comportement du moteur asynchrone à cage alimenté par les divers convertisseurs statiques permettant son alimentation à tension et fréquence variables. Il s'avère nécessaire d'effectuer une comparaison des diverses solutions possibles et de leur domaine d'intérêt. Cela devrait déboucher sur une philosophie de la variation de la vitesse du moteur asynchrone, comme cela a été fait pour les montages redresseurs et pour la variation de vitesse du moteur à courant continu.

Pour cela, nous avons tout d'abord rappelé l'avantage que présentait l'emploi de composantes relatives pour la simplification de l'étude analytique des machines alternatives. Nous avons indiqué que celles proposées voilà près d'un demi-siècle par Y.H. KU nous semblaient les plus intéressantes tant pour l'étude de la machine asynchrone, pour laquelle leur supériorité sur celles proposées par R.H. PARK est manifeste, que pour l'étude de la machine synchrone, bien que dans ce dernier cas on perde l'interprétation physique commode des composantes de R.H. PARK.

Notre contribution a surtout consisté à montrer que les composantes synétriques et relatives pouvaient toutes se déduire de composantes généralisées, que la simplification qu'apportaient les composantes de Y.H. KU pour une machine triphasée pouvait se généraliser à une machine $q_S \times q_R$ phasée.

Dans le souci de mettre à la disposition des enseignants les éléments qui nous ont permis notamment de comparer les deux systèmes de composantes relatives nous avons, dans quelques annexes, présenté le déroulement des calculs effectués.

Ils montrent en particulier que les paramètres de la machine généralisée, introduits par G. KRON, peuvent se déduire aisément de ceux présentés lors de l'étude classique des machines.

Dans la deuxième partie, nous avons d'abord fait remarquer que la forme d'onde des signaux appliqués au moteur asynchrone par les équipements destinés à en faire varier la vitesse est souvent complexe ; or cette complexité, qui entraîne l'élévation du coût de leur réalisation et explique le développement plus lent que prévu des variateurs de vitesse pour moteurs asynchrones, est peu justifiée pour l'amélioration des performances de la machine.

Nous avons ensuite détaillé l'étude des régimes libres et forcés du moteur asynchrone. Ces régimes interviennent quel que soit le type d'alimentation et seules sont modifiées la solution forcée, et, du fait de la modification des conditions aux limites, les constantes d'intégration.

Nous avons pu employer la méthode mathématique précédemment développée pour étudier le fonctionnement du moteur asynchrone alimenté par trois types de convertisseurs statiques :

- le premier type fournit à la machine des tensions en gradins optimisés. Nous avons montré comment obtenir de tels signaux à partir d'onduleurs simples et de transformateurs. Nous avons ensuite mis en évidence la périodicité des grandeurs transformées qui facilite l'étude analytique du comportement de la machine ainsi alimentée. Les équations obtenues ne font intervenir que les grandeurs caractéristiques de la machine et du convertisseur qui lui est associé.

- le deuxième type considéré est celui utilisant la modulation de largeur d'impulsions. Nous avons proposé une formulation matricielle permettant l'étude systématique de la réponse de la machine à des signaux apparemment fort complexes.

- le troisième cas traité est celui où le convertisseur impose les ondes de courant. Là encore, les composantes de Y.H. KU permettent de simplifier considérablement l'étude du moteur ; il est aisé de déterminer les expressions des variables et de mettre en évidence l'influence des paramètres caractéristiques de la machine sur ses performances.

L'emploi des composantes relatives de Y.H. KU permet l'étude analytique du moteur asynchrone tant en régime équilibré que déséquilibré lorsqu'il est alimenté par des tensions sinusoïdales. Elles facilitent beaucoup l'examen du comportement de

la machine recevant d'un convertisseur statique un système équilibré de tensions ou de courants. A ce double titre, ces composantes et leur utilisation nous semblent mériter qu'on leur fasse une place dans l'enseignement de l'Electrotechnique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. CHAUPRADE, *Commande électronique du moteur à courant alternatif*, RGE, Oct 1976, N°10, T 85, p 819-841
- [2] G. SEGUIER, *Les montages redresseurs*, Dunod 1970
- [3] L.G. STOCKVIS, *Sur la creation des harmoniques trois dans les altermateurs par suite des déséquilibrages des phases*, CR Acad Sci, 1913, Vol 159, p 46-49
- [4] C.L. FORTESCUE, *Method of symmetrical coordinates applied to the solution of polyphase network*, AIEE Trans, 1918, Vol 37, p 1027-1140
- [5] C.F. WAGNER et R.D. EVANS, *Symmetrical components as applied to the analysis of unbalanced electrical circuits*, Mc Graw Hill Book Company, New York and London 1933.
- [6] A. ILLIOVICI, *Les coordonnées symétriques en électrotechnique*, Librairie J.B. Baillièrè et fils Paris 1934
- [7] B. HAGUE, *Méthode des coordonnées symétriques*, 4e section, Rapport 4, Congrès International d'Electricite, Paris 1932
- [8] E. CLARKE, *Determination of voltages and currents during unbalanced faults : use of the sum and difference of positive and negative sequence symmetrical components*, G.E.R, Vol 40, Nov 1937, p 511-513
- [9] E. CLARKE, *Problems solved by modified symmetrical components*, GER, Vol 41 Nov 1938, p 488-494 ; Dec 1938, p 545-549
- [10] C. CONCORDIA, *Relations among transformations used in electrical engineering problems*, G.E.R, Vol 41, 1938, p 323-325
- [11] E.W. KIMBARK, *Two phase co-ordinates of a three phase circuit*, AIEE Trans, 1939, Vol 58, p 894-910
- [12] L.A. PIPES, *Matrices in engineering*, El. Enging (AIEE), Sept 1937, p 1177-1190
- [13] L.A. PIPES, *Linear transformations in three phase circuits*, AIEE Trans, 1940, Vol 60, p 351-356
- [14] G. KRON, *Tensor analysis of networks*, John Wiley and Sons Inc, New York, 1939
- [15] A. BOYAJIAN, *Discussion de l'article de E.W. KIMBARK [11] page 904-906*
- [16] F.H. RAYMOND, *Remarques sur les coordonnées symétriques de Fortescue*, CR Acad Sci, 1944, Tome 218, p 113-115
- [17] F.H. RAYMOND, *Sur les changements de coordonnées en électrotechnique*, CR Acad Sci, 1944, Tome 213, p.121-122.

- [18] C. SZENDY, *Transformation of a three phase alternating current system with the aid of matrix calculus*, Acta Techn. Acad. Sci. Hungarica, 1958, Vol 19, N° 3.4, p 379-403
- [19] S.A. STIGANT, *Master equations and tables for symmetrical components fault studies*, Mac Donald, 1964
- [20] S.A. STIGANT, *Mathematical and geometrical techniques for symmetrical component fault studies*, Mac Donald, 1965
- [21] N. DHARNA RAO et H.N. RAMACHANDRA, *Study of symmetrical and related components through the theory of linear space vectors*, Proc. IEE 1966, T 113, N° 6, p 1057-1062
- [22] G. NASSE, *L'espace vectoriel, domaine de représentation de l'électronique*, Bull SFE 1949 6ème série Tome IX N° 96 p 459-474
Bull SFE 1950 6ème série Tome X N°104 p 247-251
- [23] G. NASSE, *L'espace vectoriel, domaine de représentation de l'électronique*, Bull Dir Etud. et Rech. Série B N°1 p 5-26 et N° 4 p 5-38
- [24] A. BLONDEL, *Sur la théorie empirique des alternateurs*, CR Acad Sci 16 Oct 1899 t129 p 586-588
- [25] A. BLONDEL, *Sur la théorie empirique des alternateurs*. L'industrie électrique 10 nov, 10 dec, 25 déc. 1899, vol 8, p 481-484, 529-531, 555-556
- [26] L. DREYFUS, *Freie magnetische energie zwischen verkel teten mehrphasensystemen*, Eu M, 29 Oct 1911, t 29, p 891-897
- [27] L. DREYFUS, *Ausgleichvorgange in der symmetrischen mehrphasen maschine*, Eu M 14 jan, 11 et 18 fev 1912, t 30, p 25-32, 121-127, 139-144
- [28] R.E DOHERTY et C.A. NICKEL, *Synchronous machines*, AIEE Trans, 1926, Vol 45, p 912-947
- [29] R.H. PARK, *Definition of an ideal synchronous machine and formula for the armature flux linkages*, G.E.R, juin 1928, Vol 31, p 332-334
- [30] R.H. PARK, *Two reaction theory of synchronous machines; generalized method of analysis, part I*, AIEE Trans, 1929, Vol 48, p 716-730
- [31] R.H. PARK, *Two reaction theory of synchronous machines, part II*, AIEE Trans, 1933, Vol 52, p 352-355
- [32] Y.H. KU, *Transient analysis of AC machinery*, AIEE Trans, 1929, Vol 48, p 707-715
- [33] Y.H. KU, *Extension of two reaction theory to multiphase synchronous machines*, AIEE Trans, 1937, Vol 56, p 1197-1201
- [34] Y.H. KU, *Application of the two reaction theory to three phase induction machines*, Engineering Quarterly, 1937, N° 1

- [35] E.M. SABBAGH, *Application of the two reaction theory to electric motor*, AIEE Trans, 1951, Vol 70, p 1748-1759
- [36] B. ADKINS, *Transient theory of synchronous generators connected to power systems*, IEE Journ, 1951, Vol 97, p 510
- [37] Y.K. CHING et B. ADKINS, *Transient theory of synchronous generators under unbalanced conditions*, IEE Journ, 1954, Vol 101, p.166-182.
- [38] M.R. HARRIS, P.J. LAWRENSON, J.M. STEPHENSON, *Per unit systems with special reference to electrical machines*, IEE Monograph N°4 Cambridge University Press 1970
- [39] C.V. JONES, *The unified theory of electrical machines*, Plenum Press 1968
- [40] B. ADKINS, *The general theory of electrical machines*, Chapman and Hall 1957
- [41] Ph. BARRET, *Electrotechnique générale*, Cours de l'ESE
- [42] A.J. ELLISON, *Introduction of general theory of electrical machines into University courses*,
Proc IEE, Vol 111, N°7, Juillet 64, p 1359-1370
Proc IEE, Vol 112, N°9, Sept. 65, p 1802-1805 (discussion)
- [43] Y.H. KU, *Rotating field theory and general analysis of synchronous and induction machines*, IEE Monograph, N°54, 1952, Vol 99, pt IV, p 410-427
- [44] T.J. TAKEUCHI, *Matrix theory of electrical machinery*, Ohm-Sha, Tokyo 1958
- [45] T.J. TAKEUCHI, *Theory of SCR (Thyristor) circuit and application to motor control*, Tokyo Electrical Engineering College Press, 1968
- [46] G. KRON, *Generalized theory of electrical machinery*, AIEE Trans, 1930, Vol 49, p 666-685
- [47] G. KRON, *The application of tensors to the analysis of rotating electrical machinery*, 23 articles publiés de 1935 à 1938 dans G.E.R.
- [48] G. KRON, *Tensor analysis of networks*, John Wiley and Sons 1939
- [49] G. KRON, *Stationnary networks and transmission lines along uniformly rotating reference frames*, AIEE Trans, 1949, Vol 69, p 690-696
- [50] G. KRON, *Classification of the reference frames of a synchronous machine*, AIEE Trans, 1950, Vol 70, p 720-727
- [51] F. DACOS, *Electricité théorique*, Dunod Paris
- [52] M. DENIS PAPIN et A. KAUFMANN, *Cours de calcul tensoriel appliqué*, Albin Michel, Paris, 1966
- [53] W.J. GIBBS, *Tensor in electrical machine theory*, Chapman and Hall, 1952
- [54] M. DENIS PAPIN et A. KAUFMANN, *Cours de calcul matriciel appliqué*, Albin Michel, 1969
- [55] F. AYRES Jr, *Matrices*, Edisciences SA, 1973

- [56] SEYMOUR LIPSCHUTZ, *Algèbre linéaire*, Edisciences SA, 1973
- [57] R. FORTET, *Vecteurs, matrices, déterminants et tenseurs*, Bull SFE 7ème série, Tome V, N°58, Oct 1955, p 710-726
- [58] B. HOFFMANN, *On the problem of power invariance*. The matrix and tensor quarterly, Sept 1958, Vol 8, p 78
- [59] B. HOFFMANN, *Power invariance*, The matrix and tensor quarterly, 1957, Vol 7, p 2
- [60] G.S. BROSAN, *Circuit transformation with singular matrices*, The matrix and tensor quarterly, 1952, Vol 2, p 14
- [61] J.P. CHAR, *Solution of orthogonal networks*, The matrix and tensor quarterly, 1958, Vol 8, p 102
- [62] W.J GIBBS, *Power invariance in electrical machines*, The matrix and tensor quarterly, 1957, Vol 7, p 42
- [63] S.A. NASAR, *Discussion on invariance of power in electric networks*, IEEE Commu. Electro. 1963, Vol 82, p 572
- [64] W.A. BLACKWELL et H.E. KOENIG, *On the general properties of terminal equations for polyphase machines*, The matrix and tensor quarterly, 1958, Vol 8, p 2
- [65] M.R. HARRIS et K.H. LOW, *Note on transformation under power invariance*, Proc IEE, Vol 113, N°12, Dec 1966, p 2035-2037
- [66] S.A. NASAR, *Discussion de l'article précédent*, Proc IEE, Vol 114, N°8 Aout 1967, p 1162-1163
- [67] G.S. BROSAN, *Power invariance in electrical networks*, AIEE Trans, Vol.2, Nov 1963, p 569-573
- [68] J.C. SABONNADIÈRE et M. POULOUJADOFF, *Multiple eigenvalues and corresponding eigenvectors in the study of symmetrical and related components*, The matrix and tensor quarterly, Vol.18 Dec. 67, p 44-54
- [69] H. EDELMANN, *Théorie et calcul des réseaux de transport d'énergie électrique*, Dunod 1966
- [70] H. EDELMANN, *Normierte Komponentensysteme zur Behandlung von unsymmetrischen Aufgaben in Drehstrom- und Zweiphasennetzen (mit besonderer Berücksichtigung der Enferdennisse der Netzmodells)*, Arch. für Elekt. Vol 42, 1956, N°6, p 317-331
- [71] A. CALVAER, *Théorie des réseaux en quadrature antisymétriquement complés et applications à l'électrotechnique*, Bull Sci. de l'Association des ingénieurs sortis de l'Institut Montefiore, Mai 1957, N°5
- [72] A. CALVAER, *Sur quelques propriétés des systèmes de composantes cohérentes et l'expression générale des systèmes pratiques*, Revue E, Vol II, N°10, 1959, p 261-267

- [73] L.A. PIPES, *Circulant matrices and the theory of symmetrical components*, The matrix and tensor quarterly, Dec 66, Vol 17, N°2, p 35-50
- [74] H.H. HWANG, *Unbalanced operations of AC machines*, IEEE Trans (PAS), Vol 84, 1965, p 1054-1066
- [75] H.H. HWANG, *Transient analysis of unbalanced short circuit of synchronous machines*, IEEE Trans (PAS), Vol 88, 1969, p 67-72
- [76] B.L. COLEMAN, *Oscillations in a transformer winding*, Proc IEE, Vol 107 pt A, Oct 1960, p 432-438
- [77] F.H. RAYMOND, *Contribution à la théorie des réseaux électriques polyphasés symétriques*, Thèse de Doctorat de l'Université de Paris 1945
- [78] B.I. GURURAJ, *Natural frequencies of 3 phases transformer windings*, AIEE Trans, Vol 82, 1963, p 318-329
- [79] B.I. GURURAJ, *Influence of phase connection and terminal conditions on natural frequencies of three phases transformer windings*, AIEE Trans, Vol 87, 1968, p 1
- [80] J. LESENNE et G. SEGUIER, *Conditions to be fulfilled for generalized symmetrical or related components. Derivation to usual transformations* The Matrix and tensor quarterly, Sept 77, p 1-10
- [81] M. POLOUJADOFF et Th. BARTON, *A generalized symmetrical component transformation for cylindrical electrical machines*, IEEE Trans (PAS), Vol.91, 1972, p 1781-1786
- [82] N. KOGA, *Transformation circuit of α , β , o components and its application*, Ohm (Japon) 1965 T 43, N°2, p 235-240
- [83] N. RAMA RAO et PSR MURPHY, *Double unbalances and transient analysis of power systems using R, S, T components*, Proc. IEE, June 1967, Vol 114, N°6, p 755-759
- [84] T. HSIAO, *Fault analysis by modified α , β , o components*, AIEE Vol.81, 1962, p 136-142 et 142-146
- [85] J. LESENNE, *Composantes permettant la simplification de l'étude des machines tournantes à nombres quelconques de phases*, Revue E, 1974, Vol VII, N°12, p 303-315
- [86] R.E. VOWELS, *Laplace transform solution of linear differential equations with variable coefficients*, AIEE Trans, Vol.82, 1963, Nov, p 573-579
- [87] L.A. PIPES, *Matrix analysis of linear time varying circuits*, Journal of applied physics, Vol 25, 1954, p 1179-1185
- [88] D.W.C SHEN, *Generalized coordinates in substitutive networks*, The philosophical magazine, Vol 39, 1948, p 890-901

- [89] G. KRON, *Equivalent circuits of electrical machines*, John Wiley, New York, 1951
- [90] F. NOTELET, *Etude du couple transitoire de démarrage du moteur asynchrone triphasé*, Thèse de Docteur Ingénieur de l'Université de Lille, N°95, 1969
- [91] W.A. LEWIS, *A basic analysis of synchronous machines*, AIEE Trans, Vol 77, 1958, Août, p 436-456
- [92] W.V. LYON, *Transient analysis of alternating current machinery*, John Wiley and sons 1954
- [93] S. BEKKU, *Sudden short circuit of an alternator*, Res. Elec. Lab, Tokyo, Japon, N° 203, June 1927
- [94] F. GARDNER, *Discussion de l'article de Y.H. KU [32]*, AIEE Trans, Vol 48, 1929, p 714-715
- [95] D.W.C. SHEN et H.N.G. BROADBENT, *Analysis of partly symmetrical machines by means of unitary transformations*, Journal of Franklin Institute 1952, tome 256, N° 6, p.473-485.
- [96] H.E. KOENIG, *Application of network theory to the analysis of rotating machines*, AIEE Trans, Vol 73, 1954, p 162-169 et 169-177
- [97] H.E. KOENIG, *Application of network theory to the analysis of rotating machines*, AIEE Trans, Vol 73, 1954, p 162-169 et 169-177
- [98] V.S. SUBBA RAO et A. LANGHAN, *Analysis of synchronous machines under unbalanced operation*, IEEE Trans (PAS), Vol 89, 1970, p 698-706
- [99] D.C. WHITE et H.H. WOODSON, *Electromechanical energy conversion*, John Wiley and sons, New York, 1959
- [100] I.M. CANAY, *Causes of discrepancies on calculation of rotor quantities and exact equivalent diagrams of the synchronous machine*, IEEE Trans, on (PAS), Vol PAS 88, 1969, p 1114-1120
- [101] Th. BARTON, *Inductances of a practical slip ring primitive machine*, IEEE Trans on PAS, Vol PAS 85, 1966, p 140-145
- [102] L.V. BEWLEY, *Induced voltage of electric machines*, AIEE Trans, Vol 49, 1930, Avril, p 456-466
- [103] G. KRON, *Equivalent circuit of the primitive rotating machine*, G.E.R mars 1946, p 43-49
- [104] G. KRON, *Steady state equivalent circuits of synchronous and induction machines*, AIEE Trans, Vol 67, 1948, p 175-181
- [105] Y.H. KU et D.W.C. SHEN, *Two reaction theory of a general induction machine and its equivalent circuit*, AIEE Trans, Vol 76, 1957, p 729-734
- [106] F.H. RAYMOND, *sur certains déterminants intervenant dans la théorie des oscillations de systèmes symétriques*, Revue Scientifique, 1942, Tome 80, p 128-129
- [107] A.M. EL SERAFI, *Equivalent Two phase representation of an n-m phase salient pole machine*, IEEE Trans on PAS, vol PAS 94, 1975, p 18-26

- [108] E.F.W. ALEXANDERSON, *The "thyatron motor"*, Electrical engineering Vol 53, 1934, Nov, p 1517-1523
- [109] R. CHAUPRADE, *Commande électronique des moteurs à courant continu*, Eyrolles, 1976
- [110] B.R. PELLY, *Thyristor phase controlled converters and cycloconverters*, J. Willey Interscience, New York, 1971
- [111] L. GYUGYI et B.R. PELLY, *Static Power Frequency changer*, J. Willey Interscience, New York, 1976
- [112] W. Mc MURRAY, *The theory and design of cycloconverters*, MIT Press, 1972
- [113] B.D. BEDFORD et R.G. HOFT, *Principles of inverter circuits*, John Wiley New York, 1964
- [114] J.M.D. MURPHY, *Thyristor control of AC motor*, Pergamon Press Oxford, 1973
- [115] F.F. MAZDA, *Thyristor control* Newnes Butterworths London, 1973
- [116] H. STEMLER, *Moteurs triphasés alimentés par des convertisseurs statiques avec réglage de vitesse sans pertes*, Revue Brown Boveri, Vol 54, Mai/Juin 1967, p 217-232
- [117] R.M. DAVIES et J.R. MELLING, *Quantitative comparison of commutation circuits for bridge inverters*, Proc. IEE, Vol 124, N°3, March 1977, p 237-246
- [118] A. ABBONDANTI et P. WOOD, *A Criterion for performance comparison between high power inverter circuits*, IEEE Trans on IA, Vol IA 13, N°2, March/April 1977, p 154-160
- [119] A. WIART, *Association d'ondeleurset de machines asynchrones*, Revue Jeumont Schneider, N°20, 1975, p 3-16
- [120] G.S. BUJA et G.B. INDRI, *Optimal pulsewidth modulation for feeding, AC motors*, IEEE Trans on IA, Vol IA 13, Jan/Feb 1977, p 38-44
- [121] H.S. PATEL et R.G. HOFT, *Generalized techniques of harmonic elimination and voltage control in Thyristor inverters, Part I, Harmonic elimination*, IEEE Trans on IA, Vol IA 9, 1973, p 310-317
- [122] H.S. PATEL et R.G. HOFT, *Generalized techniques of harmonic elimination and voltage control in Thyristor inverters, Part II, Voltage Control Techniques*, IEEE Trans on IA, Vol IA 10, 1974, p 666-673
- [123] B. MOKRYTZKI, *Pulsewidth modulated inverters for AC motor drives* IEEE Trans on IGA, Vol IGA 3, 1967, p 493-503
- [124] P.H. NAYAK et R.G. HUFT, *Optimizing the PWM Waveform of a Thyristor inverter*, IEEE Trans on IA, Vol IA 11, Sept/Oct 1975, p 526-530
- [125] R.D. ADAMS et R.S. FOX, *Several modulation techniques for a pulsewidth modulated inverter*, IEEE Trans on IA, Vol IA 8, Sept/Oct 1972, p 63 p 636-643

- [126] S.R. BOWES, *New sinusoidal pulsewidth modulated inverter*, Proc IEE Vol 122, N°11, Nov 1975, p 1279-1285
- [127] J.J. POLLACK, *Advanced pulsewidth modulated inverter techniques*, IEEE Trans on IA, Vol IA 8, March/April 1972, p 145-154
- [128] A. SCHONUNG et H. STEMLER, *Réglage d'un moteur triphasé réversible à l'aide d'un convertisseur statique de fréquence commande suivant le procédé de la sous oscillation*, Revue BrownBoveri, 1964, Vol 51 N°819, p 555-576
- [129] G.B. KLIMAN et A.B. PLUNKETT, *Developpent of a modulation strategy for a PWM inverter drive*, IAS Annual meeting 1975, p 915-921
- [130] L.J. PENKOWSKI et K.E. PRUZINSKY, *Fundamentals of a pulsewidth modulated power circuits*, IEEE Trans on IA, Vol IA 8, N°5, 1972, p 584-592
- [131] T. LISSAK et J. APPELBAUM, *Stepped voltage DC/AC converter, Part I, Analysis*, IEEE Trans on IECI, Vol IECI 24, N°2, May 1977, p 192-199
- [132] T. LISSAK et J. APPELBAUM, *Stepped voltage DC/AC converter, Part II, Optimal construction of waveforms by means of discret level*, IEEE Trans on IECI, Vol IECI 24, N°3, August 1977, p 273-276
- [133] F. NOTELET, *Regimes transitoires des courants et du couple du moteur asynchrone triphasé*, Thèse de Doctorat es sciences physiques Lille 1975
- [134] L.A. DOGGETT et E.R. QUEER, *Induction motor operation with non sinusoidal impressed voltages*, AIEE Trans Vol 48, 1929, p 1217-1220
- [135] E.A. KLINGSHIRN et H.E. JORDAN, *Polyphase inductions motor performance and losses on non sinusoidal voltage source*, IEEE Trans on PAS, Vol PAS 87, 1968, N°3, p 624-631
- [136] G.W. MAC LEAN, G.F. NIX et S.R. ALWASH, *Performance and design of induction motors with square wave excitation*, Proc IEE, 1969, Aug Vol 116, p 1404-1411
- [137] G.C. JAIN, *The effect of voltage waveshape on the performance of a 3-phase induction motor*, IEEE, Vol.83, 1964, p.561-575.
- [138] P.L. ALGER, *The nature of Induction machines*, J. Wiley 1965, New York
- [139] P.C. KRAUSE et L.T. WOLOSZYK, *Comparison of computer and test results of a static AC drive system*, IEEE Trans on IA, Vol IGA 4, 1968, Nov Nov/Dec, p 583-588
- [140] P.C. KRAUSE et T.A. LIPO, *Analysis and simplified representations of a rectifier inverter induction motor drive*, IEEE Trans on PAS, Vol PAS 88, N°5, 1969, p 566-596
- [141] W. CHARLTON, *Matrix method for steady state analysis of inverter fed induction motors*, Proc IEE, 1973, Vol 120, N°3, p 363-364

- [142] W. CHARLTON, *Analytical methods for inverter fed induction motor*, Proc. IEE, 1975, Vol 122, N°11, p 1273-1274
- [143] R. MAGUREANU, *A state variable analysis of inverter fed AC machines*, Rev. Roum. Sci. Tech. Electro et Energ., 1973, Vol 18, N°4, p 663-678
- [144] E.M. SABBAGH et W. SHEWAN, *Characteristics of an adjustable speed polyphase induction machine*, IEEE Trans on PAS, 1968, Vol PAS 87, N°3 p 613-623
- [145] J. STEPINA, *Betriebsverhalten der von wechsellrichter gespeiten asynchronmaschine*, E. u. M., 1966, Mai, Heft 5
- [146] J. LESENNE, G. SEGUIER et G. RAVALITERA, *Periodicité des composantes relatives d'un système triphasé de signaux alternatifs en paliers optimisés*, CR Acad. Sc., 1977, Tome 284, Série B, p 61-64
- [147] J. LESENNE et F. NOTELET, *Simplification, by use of KU'S transformation, of the analytical study of an asynchrone motor fed by stepped voltages*, Proc. IEE, Vol 124, June 1977, p 554-556
- [148] J. LESENNE et G. SEGUIER, *Optimisation des générateurs de signaux rectangulaires et des transformateurs donnant un système triphasé de tensions en paliers*, CR Acad. Sci, 1977, Tome 285, Série B, p 37-40
- [149] N. SAWAKI et N. SATO, *Steady State and Stability Analysis of Induction Motor driven by Current Source Inverter*, IEEE Trans on IA, Vol IA 13, May 77, p 244-253
- [150] K.P. PHILIPS, *Current Source converter for AC motor drives*, IEEE Trans on IA, Vol IA 8, Nov 72, p 679-683
- [151] K. RANGANATHA RAO et V.V. SASTRY, *Current fed induction motor analysis using boundary-value approach*, IEEE Trans on IECI, Vol IECI 24, May 77, p 178-182
- [152] G.N. REVANKAR et A. BASHIR, *Effect of circuit and induction motor parameters on current source Inverter operation*, IEEE Trans on IECI, Vol IECI 24, Feb 77, p 126-132
- [153] C.M ONG et T.A. LIPO, *Steady state analysis of a current source inverter/reluctance motor drive*, IAS Annual Meeting 1975, p 841-847
- [154] E.P. CORNELL et T.A. LIPO, *Modeling and design of controlled current induction motor drive system*, IEEE Trans on IA, Vol IA 13, July 77, p 321-330
- [155] E.E. WARD, *Inverter suitable for operation over a range of frequency*, Proc. IEE, Vol 111, N°8, p 1423-1434, Août 1964
- [156] S.B. DEWAN, S.A. ROSENBERG, N.M. NICHOLSON, *Comparison of single phase current source inverter configurations*, IAS 75, Annual meeting, p 783-789
- [157] LAJOIE MAZENC M, *Quelques aspects de l'étude du remplacement du collecteur par un commutateur statique*, R.G.E., Tome 81, 1972, p.573-581.
- [158] P.C. KRAUSE, T.A. LIPU, H.E. JORDAN, *Harmonic torque and speed pulsations in rectifier inverter induction motor drive*, IEEE, Tome 88, 1969, p.579-587.

T A B L E D E S M A T I E R E S

<u>INTRODUCTION. PRESENTATION DE L'ETUDE</u>	P.1
Trois méthodes d'étude du moteur asynchrone	P.1
Les convertisseurs statiques de fréquence pour moteur asynchrone	P.3
Présentation de notre étude et de notre apport	P.4
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <p style="text-align: center;">P R E M I E R E P A R T I E</p> <p style="text-align: center;">Les composantes relatives de Y.H. KU</p> </div>	
<u>CHAPITRE I : HISTORIQUE</u>	P.5
I. Naissance de l'idée de composante. Les composantes symétriques de C.L. FORTESCUE	P.5
II. Autres composantes symétriques	P.6
III. Les composantes relatives	P.7
IV. L'apport de G. KRON	P.8
<u>CHAPITRE II : INTRODUCTION A LA NOTION DE COMPOSANTE</u>	P.10
I. Mise sous forme matricielle d'un réseau électrique	P.10
II. Forme réduite d'une matrice impédance . Transformations	P.12
2.1. But	
2.2. Emploi de matrices de transformation	
2.3. Conditions que doivent remplir les matrices de transformation.	
<u>CHAPITRE III : DES COMPOSANTES DE C.L. FORTESCUE AUX COMPOSANTES GENERALISEES</u>	P.18
I. Diagonalisation d'une matrice circulante. Composantes de C.L. FORTESCUE	P.18
II. Vecteurs propres d'une matrice impédance d'un réseau triphasé	P.23
III. Composantes généralisées	P.24
3.1. Considérations préliminaires	
3.2. Composantes généralisées en triphasé	
IV. Passage aux composantes usuelles	P.27
4.1. Composantes symétriques	
4.2. Composantes relatives	
4.3. Obtention des diverses composantes à une matrice de transfor-	

mation à partir des composantes généralisées

CHAPITRE IV : PRESENTATION DES COMPOSANTES RELATIVES DE R.H. PARK ET DE
Y.H. KU

P.30

I. Les composantes de R.H. PARK

P.31

1.1. Matrice de la transformation de R.H. PARK

1.2. Présentation. Propriétés. Conséquence sur les schémas équivalents

1.3. Les composantes relatives modifiées de R.H. PARK

1.4. Interprétation des composantes modifiées de R.H. PARK

II. Les composantes de Y.H. KU

P.37

2.1. Introduction à la transformation de Y.H. KU

2.2. Passage des composantes relatives de R.H. PARK à celles de Y.H. KU

2.3. Les composantes relatives modifiées de Y.H. KU

CHAPITRE V : EMPLOI DES COMPOSANTES RELATIVES DE R.H. PARK ET DE Y.H. KU
POUR LA SIMPLIFICATION DE L'ETUDE ANALYTIQUE DE LA MACHINE
SYNCHRONE

P.44

I. Modèle mathématique d'une machine synchrone

P.44

1.1. Méthode de détermination des inductances propres et mutuelles

1.2. Application à la machine synchrone simplifiée

1.3. Schématisation des amortisseurs

1.4. Machine synchrone idéalisée. Equations

II. Simplification des équations de la machine synchrone à l'aide des composantes relatives de R.H. PARK

P.51

2.1. Equations simplifiées

2.2. Calcul du couple

III. Simplification des équations de la machine synchrone à l'aide des composantes relatives de Y.H. KU

P.55

3.1. Equations simplifiées

3.2. Expression du couple

3.3. Conclusion

IV. Comparaison des deux méthodes de simplification

P.58

<u>CHAPITRE VI : EMPLOI DES COMPOSANTES RELATIVES DE R.H. PARK ET DE Y.H. KU</u>	
<u>POUR LA SIMPLIFICATION DE L'ETUDE ANALYTIQUE DE LA MACHINE</u>	
<u>ASYNCHRONE</u>	P.59
I. Modèle mathématique de la machine asynchrone	P.59
II. Simplification des équations par la transformation de R.H. PARK	P.61
2.1. Forme générale des équations transformées	
2.2. Conditions de simplification	
2.3. Choix d'un système d'axes de référence.	
III. Simplification des équations par la transformation de Y.H. KU	P.69
3.1. Forme générale des équations transformées	
3.2. Conditions de simplification	
3.3. Comparaison des solutions. Comparaison avec les résultats de la transformation de R.H. PARK	
3.4. Calcul du couple	
3.5. Schémas équivalents.	

<u>CHAPITRE VII : EMPLOI DES COMPOSANTES DE Y.H. KU POUR LA SIMPLIFICATION DE</u>	
<u>L'ETUDE ANALYTIQUE D'UNE MACHINE ASYNCHRONE A NOMBRES QUEL-</u>	
<u>CONQUES DE PHASES</u>	P.80
I. Système étudié. Equations différentielles	P.80
1.1. Notations	
1.2. Valeur des inductances mutuelles	
1.3. Equations différentielles du système	
II. Composantes relatives de Y.H. KU généralisées. Applications	P.82
2.1. Diagonalisation d'une matrice circulante. Composantes de Y.H. KU généralisées	
2.2. Changements de variables	
2.3. Etude de la simplification des divers termes	
2.4. Relations matricielles entre les composantes	
2.5. Equations simplifiées de la machine $q_S \times q_R$ phasée	

<p>DEUXIEME PARTIE</p> <p>Application au moteur asynchrone alimenté par les signaux de l'Electronique de Puissance</p>
--

CHAPITRE I : L'ELECTRONIQUE DE PUISSANCE ET LA VARIATION DE VITESSE

<u>DU MOTEUR ASYNCHRONE</u>	P.95
<u>CHAPITRE II : ONDES DELIVREES PAR LES CONVERTISSEURS STATIQUES</u>	P.99
I. Modulation de largeur des impulsions. Procédés de modulation	P.101
1.1. Onduleurs utilisés	
1.2. Ondes formées d'impulsions tristables. Relations générales	
1.3. Procédés de modulation utilisés pour obtenir des ondes formées d'impulsions tristables	
1.4. Ondes formées d'impulsions bistables. Relations générales	
1.5. Procédés de modulation utilisés pour obtenir des ondes formées d'impulsions bistables	
II. Synthétisation d'ondes quasi-sinusoïdales	P.124
2.1. Synthétisation par paliers d'écart en amplitude constants	
2.2. Synthétisation par paliers de même durée	
2.3. Obtention des tensions en paliers	
<u>CHAPITRE III : REGIMES LIBRES ET FORCES DU MOTEUR ASYNCHRONE TRIPHASE</u>	P.143
I. Régime libre du moteur asynchrone triphasé	P.143
II. Régime forcé du moteur asynchrone triphasé	P.146
III. Détermination des constantes d'intégration	P.148
IV. Obtention des courants réels	P.151
<u>CHAPITRE IV : ETUDE ANALYTIQUE DU MOTEUR ASYNCHRONE ALIMENTE PAR DES TENSIONS QUASI-SINUSOIDALES</u>	P.154
I. Propriétés des transformées des ondes de tension	P.155
II. Détermination des expressions analytiques des courants et du couple	P.160
2.1. Détermination des courants statoriques	
2.2. Détermination des courants rotoriques	
2.3. Détermination du couple	
III. "Réalabilité" des formes d'onde quasi-sinusoïdales triphasées	P.167
3.1. Utilisation d'un simple onduleur triphasé	
3.2. Utilisation d'onduleurs monophasés et de transformateurs	
IV. Exemple de formes d'onde	P.172
4.1. Variation des constantes de temps et des pseudopulsations	
4.2. Forme d'onde du courant i_{Sa}	
4.3. Forme d'onde du courant rotorique	

4.4. Forme d'onde du couple	
V. Conclusion	P.176

<u>CHAPITRE V : ETUDE ANALYTIQUE DU MOTEUR ASYNCHRONE ALIMENTE PAR UN ONDULEUR A MODULATION DE LARGEUR DES IMPULSIONS</u>	P.177
I. Système d'équations utilisées. Intervalles à étudier	P.177
II. Etude du courant $i_{S_{0,1}}(t)$	P.180
III. Etude des composantes $i_{S_{f,j}}(t)$ et $i_{S_{b,j}}(t)$	P.181
IV. Forme matricielle des courants transformés	P.188
V. Obtention des courants réels	P.190
5.1. Détermination de i'_{S_a}	
5.2. Détermination de i''_{S_a}	
5.3. Détermination de i'_{R_a}	
VI. Expression du couple	P.193
VII. Exemples de formes d'onde	P.194
7.1. Forme d'onde du courant i_{S_a}	
7.2. Forme d'onde du couple	
VIII. Conclusion	P.196

<u>CHAPITRE VI : ETUDE ANALYTIQUE DU MOTEUR ASYNCHRONE ALIMENTE PAR UN REDRESSEUR COMMUTATEUR DE COURANT</u>	P.210
I. Généralités sur les variateurs de vitesse utilisant des onduleurs du type redresseur-commutateur de courant	P.210
II. Equations utilisées. Propriétés des transformées des courants	P.213
III. Résolution	P.214
IV. Mise en évidence des paramètres caractéristiques	P.217
V. Etude du couple	P.220
5.1. Couple moyen	
5.2. Forme d'onde du couple instantané	
VI. Conclusion	P.224

<u>CONCLUSION</u>	P.225
-------------------	-------

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	P.228
----------------------	-------

<u>TABLE DES MATIERES</u>	P.237
---------------------------	-------

