

50376  
1978  
115

No d'ordre : 420

50376  
1978  
115

# THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

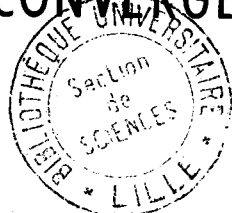
pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Bernard GERMAIN-BONNE

ESTIMATION DE LA LIMITE DE SUITES  
ET  
FORMALISATION DE PROCÉDES D'ACCELERATION  
DE CONVERGENCE



Soutenue le 27 Juin 1978, devant la Commission d'Examen

MM.	P. POUZET	Président et Rapporteur
	J. BARANGER	Examineur
	C. BREZINSKI	Rapporteur
	N. GASTINEL	Rapporteur
	P. HUARD	Examineur



030 020691 4

DOYENS HONORAIRES de l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit  
et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DEHEUVELS,  
DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET,  
KOGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE,  
MAZET, MICHEL, NORMANT, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, SAVART, WATERLOT, WIEMAN,  
ZAMANSKI.

PRESIDENTS HONORAIRES DE L'UNIVERSITE  
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R. DEFRETIN, M. PARREAU.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE  
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. J. LOMBARD.

PROFESSEURS TITULAIRES

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Physique
M. BECART Maurice	Physique Atomique et Moléculaire
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BONNEMAN Pierre	Chimie Appliquée
M. BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M. BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. CELET Paul	Géologie Générale
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. DECUYPER Marcel	Géométrie
M. DELATTRE Charles	Géologie Générale
M. DELHAYE Michel	Chimie Physique
M. DERCOURT Michel	Géologie Générale
M. DURCHON Maurice	Biologie Expérimentale
M. FAURE Robert	Mécanique
M. FOURET René	Physique du Solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. GLACET Charles	Chimie Organique
M. GONTIER Gérard	Mécanique
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique
M. LANSRAUX Guy	Physique Atomique et Moléculaire
M. LAVEINE Jean-Pierre	Paléontologie
M. LEBRUN André	Electronique
M. LEHMANN Daniel	Géométrie

Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M.	LINDER Robert	Biologie et Physiologie Végétales
M.	LOMBARD Jacques	Sociologie
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M.	LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M.	MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M.	MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M.	MONTREUIL Jean	Biochimie
M.	PARREAU Michel	Analyse
M.	POUZET Pierre	Analyse Numérique
M.	PROUVOST Jean	Minéralogie
M.	SALMER Georges	Electronique
M.	SCHILTZ René	Physique Atomique et Moléculaire
Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Géométrie
M.	SEGUIER Guy	Electrotechnique
M.	TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée
M.	VIDAL Pierre	Automatique
M.	VIVIER Emile	Biologie Cellulaire
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique Atomique et Moléculaire
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.	BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BODARD Marcel	Biologie Végétale
M.	BOILLET Pierre	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M.	BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M.	CAPURON Alfred	Biologie Animale
M.	CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des entreprises
M.	DEPREZ Gilbert	Physique Théorique
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M.	GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M.	LACOSTE Louis	Biologie Végétale
Mme	LEHMANN Josiane	Analyse
M.	LENTACKER Firmin	Géographie
M.	LOUAGE Francis	Electronique
Mlle	MARQUET Simone	Probabilités
M.	MIGEON Michel	Chimie Physique
M.	MONTEL Marc	Physique du Solide
M.	PANET Marius	Electrotechnique
M.	RACZY Ladislav	Electronique
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M.	SLIWA Henri	Chimie Organique

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés d'Enseignement)

M.	ADAM Michel	Sciences Economiques
M.	ANTOINE Philippe	Analyse
M.	BART André	Biologie Animale
M.	BEGUIN Paul	Mécanique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
M.	BOSCQ Denis	Probabilités
M.	BREZINSKI Claude	Analyse Numérique
M.	BRUYELLE Pierre	Géographie

M. CARREZ Christian	Informatique
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. COQUERY Jean-Marie	Psycho-Physiologie
M <sup>lle</sup> DACHARRY Monique	Géographie
M. DEBENEST Jean	Sciences Economiques
M. DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M. DHAINAUT André	Biologie Animale
M. DELAUNAY Jean-Claude	Sciences Economiques
M. DERIEUX Jean-Claude	Microbiologie
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique du Solide
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DYMMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du Solide
M <sup>e</sup> EVRARD Micheline	Chimie Appliquée
M. FONTAINE Jacques-Marie	Electronique
M. FOURNET Bernard	Biochimie
M. FORELICH Daniel	Chimie Physique
M. GAMBLIN André	Géographie
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M. GUILLAUME Henri	Sciences Economiques
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JOURNEL Gérard	Physique Atomique et Moléculaire
M <sup>lle</sup> KOSMAN Yvette	Géométrie
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LAURENT François	Automatique
M <sup>lle</sup> LEGRAND Denise	Algèbre
M <sup>lle</sup> LEGRAND Solange	Algèbre
M. LEROY Jean-Marie	Chimie Appliquée
M. LEROY Yves	Electronique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique Théorique
M. LOUCHET Pierre	Sciences de l'Education
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAHIEU Jean-Marie	Physique Atomique et Moléculaire
M <sup>e</sup> N'GUYEN VAN CHI Régine	Géographie
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MALAUSSENA Jean-Louis	Sciences Economiques
M. MESSELYN Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. MONTUELLE Bernard	Biologie Appliquée
M. NICOLE Jacques	Chimie Appliquée
M. PAQUET Jacques	Géologie Générale
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie Physique
M. PERROT Pierre	Chimie Appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie Animale
M. PONSOLLE Louis	Chimie Physique
M. POVY Lucien	Automatique
M. RICHARD Alain	Biologie
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROY Jean-Claude	Psycho-Physiologie
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SOMME Jean	Géographie
M <sup>lle</sup> SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. STEEN Jean-Pierre	Informatique

M. THERY Pierre  
M. TOULOTTE Jean-Marc  
M. TREANTON Jean-René  
M. VANDORPE Bernard  
M. VILLETTE Michel  
M. WALLART Francis  
M. WERNIER Georges  
M. WATERLOT Michel  
Mme ZINN-JUSTIN Nicole

Electronique  
Automatique  
Sociologie  
Chimie Minérale  
Mécanique  
Chimie  
Informatique  
Géologie Générale  
Algèbre

Je remercie vivement Monsieur P. POUZET, Professeur à l'Université de Lille I, qui me fait l'honneur de présider cette thèse.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur N. GASTINEL, Professeur à l'Université de Grenoble, qui a suivi mes travaux avec intérêt ; son appui enthousiaste et sa grande disponibilité ont été pour moi d'une aide très précieuse.

Je remercie tout particulièrement Claude BREZINSKI, dont l'influence a été déterminante sur la réalisation de cette thèse ; j'ai sincèrement apprécié son amical soutien et sa grande compétence.

Je remercie Monsieur P. HUARD et Jacques BARANGER, qui ont accepté de juger mon travail.

Je voudrais aussi remercier mes camarades Florent CORDELLIER et Paul SABLONNIERE, qui, par les discussions que j'ai eues avec eux, ont contribué à l'élaboration de ce travail.

Mes remerciements vont aussi à Madame Patricia CARON qui a fourni une nouvelle preuve de sa grande compétence dans la dactylographie des textes mathématiques, et à Monsieur et Madame DEBOCK pour la rapidité et le soin avec lequel ils ont imprimé cette thèse.

## TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	1
* * *	
CHAPITRE I	
SUITES DE REELS	3
<u>I - LE CRITÈRE D'ACCÉLÉRATION DE CONVERGENCE</u>	4
1 - 1 Problème - Procédés standards d'accélération de convergence	4
1 - 2 Variantes des procédés standards d'accélération de convergence	6
1 - 3 Exemples numériques	17
<u>II - PROCÉDÉS QUASI-LINÉAIRES D'ACCÉLÉRATION DE CONVERGENCE DE DEGRÉ K</u>	20
<u>III - ALGORITHMES QUASI-LINÉAIRES D'ACCÉLÉRATION DE CONVERGENCE DE DEGRÉ K</u>	28
3 - 1 Caractérisation des suites de $S_k$	28
3 - 2 Algorithme d'accélération de convergence de degré k	31
3 - 3 Accélération de la convergence par interpolation inverse généralisée	33
<u>IV - ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE PAR UTILISATION DE FONCTIONS À PLUSIEURS VARIABLES</u>	47
* * *	
CHAPITRE II	
SUITES D'ÉLÉMENTS D'UN ESPACE VECTORIEL NORME	53
<u>I - GÉNÉRALITÉS</u>	53
1 - 1 Critères d'accélération de convergence	53
1 - 2 Accélération de la convergence par rapport à la norme	55
1 - 3 Accélération de la convergence par rapport à un ensemble fini de fonctionnelles	58

<u>II - LE PROCÉDÉ D'AITKEN DANS UN ESPACE DE HILBERT</u>	61
2 - 1 Interprétation géométrique de l'accélération de la convergence dans un espace de Hilbert	61
2 - 2 Algorithmes d'accélération de la convergence	63
2 - 3 Exemples numériques	77

\* \* \*

### CHAPITRE III

#### PROCESSUS ITERATIFS 80

<u>I - LE PROCÉDÉ DE MANN</u>	80
-------------------------------	----

<u>II - UN PROCESSUS ITÉRATIF CONVERGENT</u>	83
--	----

<u>III - ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE D'UN PROCESSUS ITÉRATIF</u>	89
---	----

3 - 1 Définition	90
3 - 2 Un processus de Mann convergent	91
3 - 3 Transformation de processus itératif au moyen de polynomes	92

\* \* \*

### CHAPITRE IV

#### ESTIMATION DE LA LIMITE DE SUITES 100

<u>I - MÉTHODES DE SOMMATION OPTIMALES POUR CERTAINES SUITES DE RÉELS</u>	100
---	-----

1 - 1 Construction générale	100
1 - 2 Formules de sommation optimales	103

<u>II - ESTIMATION DE LA LIMITE DE SUITES D'UN ESPACE DE HILBERT</u>	117
--	-----

\*  
\* \* \*  
\*



## INTRODUCTION

Cette thèse, consacrée à l'estimation de la limite de suites est une formalisation (et résolution) du problème suivant : "Comment obtenir une estimation valable de la limite d'une suite, sur laquelle on ne possède qu'une information limitée".

Notre étude se limite aux suites de réels et d'éléments de  $\mathbb{R}^n$ , qui sont d'usage courant lors de la mise en oeuvre de méthodes d'analyse numérique ; il apparait immédiatement qu'une information purement numérique ne suffit pas, et qu'il faut connaître en outre une propriété vérifiée par tous les éléments de la suite (monotonie, façon de converger ... ), propriété qui se traduit mathématiquement par l'appartenance à une certaine classe de suites.

Une autre remarque évidente est que l'on peut adopter différents critères d'estimation "valable" de la limite d'une suite ; et à chacun de ces critères on peut associer différentes classes de suites pour lesquelles il est possible de construire une estimation de la limite. Nous avons ainsi considéré :

- le critère d'accélération de convergence (auquel on peut associer des classes de suites définies par une propriété concernant la façon de converger).
- Le critère d'accélération d'un processus itératif (les classes de suites étant définies d'une manière "génératrice" à partir d'une fonction dont le point fixe doit être la limite commune à toutes les suites de la classe).
- Le critère d'estimation optimale (les classes étant des espaces de Hilbert de suites convergentes sur lesquels la fonctionnelle "limite" est continue).

Nous avons distribué les quatre chapitres de ce travail selon un ordre qui nous a semblé correspondre à un appauvrissement des renseignements que l'on possède sur les classes de suites. Les méthodes que nous construisons deviennent de moins en moins efficaces, au fur et à mesure des chapitres, mais en contre-partie, elles sont valables sur des classes de suites de plus en plus larges.

Dans le chapitre I (suites de réels), nous examinons le critère d'accélération de convergence de degré  $k$  pour des suites appartenant à des sous-espaces  $S_k$  de  $S_1$  (ensemble des suites à convergence linéaire). Une approche algébrique nous conduit à déterminer explicitement des formules d'accélération de convergence ; un théorème de caractérisation nous permet d'utiliser des procédés d'extrapolation.

Dans le chapitre II nous transposons dans un espace de Hilbert les résultats du chapitre I (critère d'accélération de convergence de degré 1 par rapport à la norme, pour des suites appartenant à l'analogie de  $S_1$  : Suites générées par une itération linéaire). Le procédé d'Aitken est généralisé et nous obtenons un procédé (méthode de type Galerkin) dont l'interprétation géométrique est simple.

Dans le chapitre III nous recherchons le point fixe d'une application  $f$ . Il s'agit de construire un processus itératif qui converge (le processus  $x_{n+1} = f(x_n)$  n'étant pas forcément convergent). Les procédés obtenus sont alors valables pour une classe de fonctions (ou d'opérateurs).

Dans le chapitre IV nous construisons des formules "optimales" pour certains sous-espaces hilbertiens de l'espace des suites de réels convergentes ; l'étude de certains sous-espaces nous permet de retrouver des méthodes connues (le procédé de Cesaro, un procédé d'accélération de convergence).

## CHAPITRE I

## SUITES DE REELS

Dans ce chapitre, nous étudions le critère d'accélération de convergence.

Dans la section 1 nous définissons des espaces de suites pour lesquels on peut construire des formules d'accélération de convergence, et nous examinons quelques variantes d'un "procédé standard" d'accélération de convergence.

Dans la section 2 nous introduisons la notation d'accélération de convergence de degré  $k$ , et les espaces  $S_k$  associés. Nous déterminons des familles de fonctions  $G_k$  ( $k = 1, 2$ ) telles que tout élément de  $G_k$  fournit une formule d'accélération de convergence de degré  $k$  ayant une propriété : la quasi-linéarité.

Dans la section 3 nous caractérisons  $S_k$  grâce à un théorème d'interpolation infinie ; cette caractérisation permet de construire des algorithmes d'accélération de convergence de degré  $k$ , à partir de procédés d'extrapolation.

Enfin dans la section 4 l'utilisation des fonctions de plusieurs variables permet de fabriquer des procédés d'accélération de convergence en utilisant l'idée de composition de formules itératives.

# I - LE CRITÈRE D'ACCÉLÉRATION DE CONVERGENCE

## 1 - 1 Problème - Procédés standard d'accélération de convergence

Soit  $\{S_i\}$  une suite de réels, convergente, dont on veut estimer la limite  $S^*$  à partir d'un nombre fini de termes successifs  $S_i, S_{i+1}, \dots, S_{i+p}$ . Une façon classique d'obtenir une "bonne" estimation de  $S^*$  consiste à "accélérer la convergence" de la suite  $\{S_i\}$ , c'est-à-dire, à calculer une estimation  $T_i$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) & \lim_{i \rightarrow \infty} T_i = S^* \quad (\text{conservation de la limite}) \\ (2) & \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{T_i - S^*}{S_i - S^*} = 0 \quad (\text{accélération de la convergence}) \end{array} \right.$$

Il est alors certain qu'il existe un indice  $i_0$  tel que :

$$\forall \epsilon > 0 \exists i_0 : |T_i - S^*| < \epsilon |S_i - S^*| \quad \forall i > i_0.$$

La nature du critère (2) (appelé critère d'accélération de convergence) nous a amené à définir des espaces de suites et des procédés (procédés "standard" d'accélération de convergence) qui servent de modèle à toutes les méthodes d'accélération de convergence figurant dans ce chapitre.

### Définition

Soient  $\{u_n\}$  et  $\{v_n\}$  deux suites convergentes, de limites respectives  $u^*$  et  $v^*$ . On dit que :

$\{u_n\}$  converge plus vite que  $\{v_n\}$  si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n - u^*}{v_n - v^*} = 0$$

$\{u_n\}$  converge comme  $\{v_n\}$  si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n - u^*}{v_n - v^*} = \rho \quad (0 < |\rho| < \infty)$$

$\{u_n\}$  converge aussi vite que  $\{v_n\}$  si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n - u^*}{v_n - v^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta u_n}{\Delta v_n} = \rho \quad (0 < |\rho| < \infty)$$

( $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$ )

Ces définitions ne sont évidemment valables que si :

$$\forall n \quad v_n \neq v^*, \quad \Delta v_n \neq 0$$

Les espaces de suites  $A_0(\{v_n\})$ ,  $A_1(\{v_n\})$ ,  $A_2(\{v_n\})$

Soit  $\{v_n\}$  une suite convergente, de limite  $v^*$ , telle que :

$$v_n \neq v^* \quad \forall n$$

Soient  $A_0(\{v_n\})$  l'ensemble des suites qui convergent plus vite que  $\{v_n\}$ , et  $A_1(\{v_n\})$  l'ensemble des suites qui convergent comme  $\{v_n\}$ .

$\{v_n\}$  vérifiant en outre  $\Delta v_n \neq 0 \quad \forall n$ , soit  $A_2(\{v_n\})$  l'ensemble des suites qui convergent aussi vite que  $\{v_n\}$

*Remarques :*

1 -  $\{v_n\}$  étant telle que  $v_n \neq v^*$ ,  $\Delta v_n \neq 0 \quad \forall n$ , les ensembles  $A_0(\{v_n\})$ ,  $A_1(\{v_n\})$ ,  $A_2(\{v_n\})$  ne peuvent être vides : la suite constante appartient à  $A_0(\{v_n\})$ , et  $A_1(\{v_n\})$ ,  $A_2(\{v_n\})$  contiennent les suites de terme général  $w_n = v_n + c \quad (c \in \mathbb{R})$

2 -  $A_0(\{v_n\})$  est un espace vectoriel, alors que  $A_1(\{v_n\})$  et  $A_2(\{v_n\})$  n'en sont pas ; en effet, soient  $\{x_n\}, \{y_n\} \in A_1(\{v_n\})$  ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x^*}{v_n - v^*} = \rho_1 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y^*}{v_n - v^*} = \rho_2$$

La suite  $\{z_n\}$  de terme général  $z_n = \rho_2 x_n - \rho_1 y_n$  est telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n - z^*}{v_n - v^*} = 0$  ;

$\{z_n\} (= \rho_2 \{x_n\} - \rho_1 \{y_n\})$  n'appartient donc pas à  $A_1(\{v_n\})$ .

Le problème d'accélération de convergence

Le problème de l'accélération de la convergence d'une suite  $\{S_n\}$  peut se poser ainsi :

Etant donnée une suite convergente  $\{S_n\}$ , trouver  $\{T_n\} \in A_0(\{S_n\})$  sous les contraintes :

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

(b) le calcul de  $T_n$  se fait à partir d'un nombre fini d'éléments successifs de la suite  $\{S_n\}$

Nous dirons que  $\{T_n\}$  accélère la convergence de la suite  $\{S_n\}$ . Remarquons que ce problème ne pourra être résolu que si la suite  $\{S_n\}$  vérifie :  $\forall n \quad S_n \neq S^*$  (condition qui est nécessaire à la définition de  $A_0(\{S_n\})$ ).

Les procédés standard d'accélération de convergence

Soit  $\{x_n\}$  une suite auxiliaire convergente, et les ensembles  $A_1(\{x_n\})$  et  $A_2(\{x_n\})$  associés.

Propriété 1 :

Soit  $\{S_n\}$  une suite appartenant à  $A_1(\{x_n\})$ , telle que  $\lim_n \frac{S_n - S^*}{x_n - x^*} = \rho$ .

La suite de terme général  $T_n = S_n - \rho(x_n - x^*)$  accélère la convergence de la suite  $\{S_n\}$ .

Propriété 2

Soit  $\{S_n\}$  une suite appartenant à  $A_2(\{x_n\})$ . La suite de terme général

$T_n = S_n - (S_{n+1} - S_n) \frac{x_n - x^*}{x_{n+1} - x_n}$  accélère la convergence de la suite  $\{S_n\}$ .

Le procédé  $T_n = S_n - \rho(x_n - x^*)$  sera désormais appelé procédé standard n°1. C'est la transformation de Kummer ([23], [20]), qui est très peu utilisée car le calcul de  $T_n$  exige la connaissance de deux

limites :  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - S^*}{x_n - x^*}$$

Le procédé standard n° 2 ( $T_n = S_n - (S_{n+1} - S_n) \frac{x_n - x^*}{x_{n+1} - x_n}$ ) peut s'interpréter de deux manières

différentes : on peut le considérer comme une variante du procédé standard n° 1, où on a remplacé  $\rho$  par une approximation  $\frac{S_{n+1} - S_n}{x_{n+1} - x_n}$  ; on peut aussi considérer que ce procédé résulte d'une extrapolation linéaire :

Si nous supposons que  $S_n = a x_n + b$ , les constantes  $a$  et  $b$  peuvent être calculées à partir de  $S_n, S_{n+1}, x_n, x_{n+1}$  et alors  $T_n = a x^* + b$ .

1 - 2 Variantes des procédés standard d'accélération de convergence

Lorsqu'on veut accélérer la convergence d'une suite  $\{S_n\}$ , la difficulté réside souvent dans la détermination de la suite auxiliaire  $\{x_n\}$  de limite connue telle que  $\{S_n\} \in A_1(\{x_n\})$  (ou  $A_2(\{x_n\})$ ). Il faut souvent faire appel à des propriétés vérifiées par la suite  $\{S_n\}$ . A titre d'exemple, nous en examinons quelques unes dans ce paragraphe, et nous obtenons ainsi des procédés qui sont des variantes des procédés standard d'accélération de convergence.

L'ensemble  $S_1$  des suites à convergence linéaire

On dit qu'une suite convergente  $\{S_n\}$  est à convergence linéaire si

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{S_{i+1} - S^*}{S_i - S^*} = \rho \quad 0 < |\rho| < 1$$

Soit  $S_1$  l'ensemble des suites à convergence linéaire. Cet ensemble n'est pas un espace vectoriel.

mais possède néanmoins des propriétés intéressantes.

Notons  $e_i = S_i - S^*$ .

Toute suite de  $S_1$  vérifie

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{i+1}}{\Delta S_i}$$

En effet 
$$\frac{\Delta S_{i+1}}{\Delta S_i} = \frac{e_{i+2} - e_{i+1}}{e_{i+1} - e_i} = \frac{e_{i+1}}{e_i} \frac{\frac{e_{i+2}}{e_{i+1}} - 1}{\frac{e_{i+1}}{e_i} - 1}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} \neq 1 \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{i+1}}{\Delta S_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i}$$

Toute suite  $\{S_i\}$  de  $S_1$  appartient à  $A_2(\{\Delta S_i\})$ .

Ceci revient à dire que toute suite  $\{S_i\}$  à convergence linéaire converge aussi vite que  $\{\Delta S_i\}$ .

En effet soit  $\{S_i\} \in S_1$ ; posons  $x_i = \Delta S_i$  et  $\rho = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i}$ . La suite  $\{x_i\}$  a pour limite  $x^* = 0$ .

Tout d'abord nous remarquons que l'ensemble  $A_2(\{\Delta S_i\})$  est bien défini : en effet

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = \rho \neq 0 \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{i+1}}{\Delta S_i} = \rho \neq 0. \text{ Il existe donc un indice } i_0 \text{ tel que}$$

$$\forall i > i_0 \quad \Delta S_i \neq 0$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{S_i - S^*}{x_i - x^*} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_i}{e_{i+1} - e_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{e_{i+1}}{e_i} - 1} = \frac{1}{\rho - 1}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{S_{i+1} - S_i}{x_{i+1} - x_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_i}{\Delta S_{i+1} - \Delta S_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\Delta S_{i+1}}{\Delta S_i} - 1} = \frac{1}{\rho - 1}$$

Donc la suite  $\{S_i\}$  converge aussi vite que  $\{\Delta S_i\}$ .

Soit  $S_1^+$  le sous ensemble de  $S_1$  caractérisé par :

$$\{S_i\} \in S_1^+ \Leftrightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{S_{i+1} - S^*}{S_i - S^*} = \rho \quad \rho > 0$$

(On définit d'une manière analogue  $S_1^-$ ).

Toute suite de  $S_1^+$  est strictement monotone à partir d'un certain rang ; toute suite de  $S_1^-$  est alternée à partir d'un certain rang.

Démontrons par exemple la monotonie d'une suite de  $S_1^+$ .

Soit  $\{S_i\} \in S_1^+$ . On a  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{i+1}}{\Delta S_i} = \rho \quad \rho > 0$ .

Il existe donc  $i_0$  tel que

$\forall i > i_0 \quad \frac{\Delta S_{i+1}}{\Delta S_i} > 0$ . La suite est donc monotone pour  $i > i_0$  (monotone stricte car on ne peut avoir  $\Delta S_i = 0$ ).

Toute suite  $\{S_i\}$  de  $S_1$  vérifie :

$$\exists i_0 \text{ tel que } \forall i > i_0 \quad |\Delta S_{i+1}| < |\Delta S_i|$$

Cette propriété est une conséquence de  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{i+1}}{\Delta S_i} \in ]-1, 1[$

Propriété 3 :

Soit  $\{S_i\}$  une suite de  $S_1$ . Le procédé standard n° 2 est le procédé d'Aitken :

$$T_1 = S_1 - \frac{(S_{i+1} - S_i)^2}{S_{i+2} - 2S_{i+1} + S_i}$$

Démonstration

$\{S_i\}$  appartient à  $A_2(\{\Delta S_i\})$ . La suite auxiliaire  $\{\Delta S_i\}$  étant de limite nulle, le procédé standard n° 2 donne immédiatement :

$$T_1 = S_1 - \frac{(\Delta S_i)^2}{\Delta^2 S_i} \quad \blacksquare$$

Remarque :

Le procédé d'Aitken peut accélérer la convergence de suites qui n'appartiennent pas à  $S_1$  (voir par exemple [7]). Dans ce paragraphe, nous voulons simplement illustrer le phénomène suivant : dès qu'on a montré que la suite  $\{S_n\}$  appartient à un espace du type  $A_1(\{x_n\})$  ou  $A_2(\{x_n\})$ , il suffit d'utiliser l'un des procédés standards élémentaires pour obtenir un procédé d'accélération de la convergence.



Propriété 4 :

Soit  $\{S_i\}$  une suite de  $S_1^*$ . Une variante du procédé standard N° 1 fournit le procédé d'accélération de convergence :

$$T_1 = S_1 + (S_{1+1} - S_1) \frac{1}{1 - |S_{1+1} - S_1|^{\frac{1}{i}}}$$

Démonstration

La suite  $\{S_i\}$  appartient à  $S_1^*$  ; donc, il existe un indice  $i_0$  tel que :

$\forall i > i_0$ , la suite est monotone.

Posons  $a_i = \text{Signe}(\Delta S_i) \times \Delta S_i$  ( $i > i_0$ ).

On sait que si une série  $\sum a_i$  est à termes positifs :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \rho \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} a_i^{\frac{1}{i}} = \rho$$

On a donc, pour  $\{S_i\} \in S_1^*$  :  $\lim_{i \rightarrow \infty} |\Delta S_i|^{\frac{1}{i}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{i+1}}{\Delta S_i}$

$\{S_n\}$  appartenant à  $S_1^*$ , on a  $\{S_n\} \in A_1(\{\Delta S_n\})$ .

Dans le procédé standard n° 1 :

$$T_n = S_n - \left( \lim_n \frac{S_n - S^*}{x_n - x^*} \right) (x_n - x^*)$$

remplaçons  $x_n$  par  $\Delta S_n$  et  $\lim_n \frac{S_n - S^*}{\Delta S_n}$  (c'est-à-dire  $\lim_n \frac{1}{\frac{e_{n+1}}{e_n} - 1}$ ) par  $\frac{1}{|\Delta S_n|^{\frac{1}{n}} - 1}$

On obtient la transformation :

$$T_n = S_n + (S_{n+1} - S_n) \frac{1}{1 - |\Delta S_n|^{\frac{1}{n}}}$$

Cette transformation accélère la convergence de la suite  $\{S_n\}$ . ■

Remarques

1) Soit  $\{S_n\}$  une suite appartenant à  $S_1^-$ . On peut utiliser la transformation ci-dessus, en remarquant que chacune des sous-suites  $\{S_{2n}\}$ ,  $\{S_{2n+1}\}$  appartient à  $S_1^*$ .

2) Pour le procédé d'Aitken, le calcul de  $T_n$  se fait à partir de  $S_n, S_{n+1}, S_{n+2}$  (3 termes successifs de la suite  $\{S_i\}$ ). Pour le procédé qui vient d'être décrit, il faut connaître  $S_n, S_{n+1}$  et  $n$  (indice de  $S_n$ ); la numérotation des éléments d'une suite est souvent conventionnelle et il peut être difficile d'attribuer un numéro d'ordre à l'élément  $S_n$ . Ce qui importe est la notion de succession :

Si on utilise  $(S_n, S_{n+1}, 1)$  pour calculer  $T_n$ , il faut utiliser  $(S_{n+1}, S_{n+2}, 1 + 1)$  pour calculer  $T_{n+1}$ . On montre facilement que la transformation

$$T_n = S_n + (S_{n+1} - S_n) \frac{1}{1 - |\Delta S_n|^{\frac{1}{n+k}}} \quad (k \text{ fixé})$$

accélère aussi la convergence de  $\{S_n\}$ .

En effet, posons  $\bar{S}_n = S_{n-k}$ ; la suite  $\bar{S}_n$  vérifie, à partir d'un certain rang :

$$\lim_j \frac{\Delta \bar{S}_{j+1}}{\Delta \bar{S}_j} = \rho = \lim_j |\Delta \bar{S}_j|^{\frac{1}{j}} \quad (= \lim_p |\Delta S_p|^{\frac{1}{p+k}})$$

Donc  $|\Delta S_p|^{\frac{1}{p+k}}$  peut être considéré comme une approximation de  $\rho$ . ■

#### L'ensemble des suites à convergence logarithmique $L(\{z_i\})$

Une suite convergente  $\{S_n\}$  est à convergence logarithmique si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} = 1$$

Soit  $\{z_i\}$  une suite à convergence logarithmique, de limite nulle, telle que :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\frac{z_{i+1}}{z_i} - 1}{z_i^\alpha} = k \quad (k \text{ réel différent de zéro ; } \alpha \text{ entier})$$

Soit  $L(\{z_i\})$  l'ensemble des suites à convergence logarithmique telles que, si  $\{S_n\} \in L(\{z_i\})$  :

Il existe deux réels ( $a, b \neq 0$ ) et  $\beta$  entier ( $\beta > \alpha$ ) vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} - 1}{z_n^\alpha} = a \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} - 1 - a z_n^\alpha}{z_n^\beta} = b$$

Propriété 5 :

Soit  $\{S_i\}$  une suite à convergence logarithmique appartenant à  $L(\{z_i\})$ . Soit  $\{U_i\}$  la suite transformée de  $\{S_i\}$  par le procédé d'Aitken ( $U_i = S_i - \frac{(\Delta S_i)^2}{\Delta^2 S_i}$ ). La suite  $\{U_i\}$  converge aussi vite que  $\{S_i\}$ .

Démonstration

Posons  $\epsilon_i = U_i - S^*$  et  $e_i = S_i - S^*$

Nous devons montrer que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_i}{e_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+1} - e_i}{e_{i+1} - e_i}$

$$\epsilon_i = e_i - \frac{(e_{i+1} - e_i)^2}{e_{i+2} - 2e_{i+1} + e_i}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_i}{e_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{\left(\frac{e_{i+1}}{e_i} - 1\right)^2}{\frac{e_{i+2}}{e_{i+1}} \frac{e_{i+1}}{e_i} - 2 \frac{e_{i+1}}{e_i} + 1} \right) = 1 - \frac{(a z_i^\alpha)^2}{(1+a z_{i+1}^\alpha)(1+a z_i^\alpha) - 2(1+a z_i^\alpha) + 1}$$

$$= 1 - \frac{(a z_i^\alpha)^2}{a(z_{i+1}^\alpha - z_i^\alpha) + a^2 z_i^\alpha z_{i+1}^\alpha} = 1 - \frac{a z_i^{2\alpha}}{(z_{i+1} - z_i)(z_{i+1}^{\alpha-1} + \dots + z_i^{\alpha-1}) + a z_i^\alpha z_{i+1}^\alpha}$$

$$= 1 - \frac{a z_i^{2\alpha}}{(z_{i+1} - z_i) \alpha z_i^{\alpha-1} + a z_i^{2\alpha}} = 1 - \frac{a z_i^{2\alpha}}{\alpha k z_i^{2\alpha} + a z_i^{2\alpha}}$$

D'où  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_i}{e_i} = 1 - \frac{a}{\alpha k + a} = \frac{\alpha k}{\alpha k + a}$

$$\frac{e_{i+1} - e_i}{e_{i+1} - e_i} = 1 - \frac{\frac{\Delta e_{i+1}}{\Delta e_i}}{\frac{\Delta e_{i+2}}{\Delta e_{i+1}} - 1} + \frac{1}{\frac{\Delta e_{i+1}}{\Delta e_i} - 1}$$

$$\frac{\Delta e_{i+1}}{\Delta e_i} = \frac{e_{i+1}}{e_i} \frac{\frac{e_{i+2}}{e_{i+1}} - 1}{\frac{e_{i+1}}{e_i} - 1}$$

Lorsque  $i$  tend vers l'infini, on peut remplacer

$$\frac{\Delta e_{i+1}}{\Delta e_i} \text{ par } \frac{e_{i+1}}{e_i} \frac{a z_{i+1}^\alpha}{a z_i^\alpha} \text{ c'est à dire } (1 + a z_i^\alpha) (1 + k z_i^\alpha)^\alpha$$

$$= 1 + z_1^\alpha [a + k\alpha]$$

On a alors

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_{i+1} - \epsilon_i}{\epsilon_{i+1} - \epsilon_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1 + [a + k\alpha] z_1^\alpha}{z_{i+1}^\alpha [a + k\alpha]} + \frac{1}{[a + k\alpha] z_1^\alpha} \right)$$

$$= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(a + k\alpha) z_1^\alpha z_{i+1}^\alpha - z_1^\alpha - (a + k\alpha) z_1^\alpha z_{i+1}^\alpha + z_{i+1}^\alpha}{(a + k\alpha) z_1^\alpha z_{i+1}^\alpha}$$

$$= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(z_{i+1}^\alpha - z_1^\alpha) [1 + (a + k\alpha) z_1^\alpha]}{z_1^\alpha z_{i+1}^\alpha (a + k\alpha)}$$

$$= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{k\alpha z_1^{\alpha+1} z_1^{\alpha-1}}{z_1^\alpha z_{i+1}^\alpha (a + k\alpha)} = \frac{k\alpha}{k\alpha + a}$$

On a donc  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_i}{\epsilon_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_{i+1} - \epsilon_i}{\epsilon_{i+1} - \epsilon_i} = \frac{k\alpha}{k\alpha + a} \neq 1$

La suite  $\{U_i\}$  converge aussi vite que la suite  $\{S_i\}$ . ■

Propriété 6 :

Soit  $\{S_i\}$  une suite à convergence logarithmique appartenant à un espace  $L(\{z_i\})$ ; soit  $\{U_i\}$  la suite transformée de  $\{S_i\}$  par le procédé d'Aitken. La transformation

$$T_i = S_i + \frac{S_i - U_i}{\frac{U_{i+1} - U_i}{S_{i+1} - S_i} - 1}$$

accélère la convergence de la suite  $\{S_i\}$ .

Démonstration :

D'après la propriété 5, la suite de terme général  $x_i = S_i - U_i$  converge vers zéro aussi vite que  $\{S_i\}$ .

En effet :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{S_i - S^*}{x_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_i}{\epsilon_i - \epsilon_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{\epsilon_i}{\epsilon_i}}$$

$$\lim \frac{S_{i+1} - S_i}{x_{i+1} - x_i} = \lim \frac{\Delta S_i}{\Delta S_i - \Delta U_i} = \lim \frac{1}{1 - \frac{\Delta U_i}{\Delta S_i}}$$

Comme  $\lim \frac{\epsilon_1}{e_1} = \lim \frac{\Delta U_i}{\Delta S_i} \neq 1$  (propriété 5),  $\{S_i - U_i\}$  converge vers zéro aussi vite que  $\{S_i\}$ .

Donc  $\{S_i\} \in A_2 (\{S_i - U_i\})$ .

Le procédé standard n° 2 s'écrit

$$T_i = S_i + \frac{S_i - U_i}{\frac{U_{i+1} - U_i}{S_{i+1} - S_i} - 1}$$

Remarque 1 :

*pas tout à fait.*

Cette formule est la première étape d'un procédé étudié par Brezinski et Cordellier, le  $\theta$ -Algorithme ([4], [7]). Ce procédé semble avoir été découvert par Lubkin [26].

Remarque 2 :

Soit  $\{S_i\}$  une suite engendrée par  $S_{i+1} = f(S_i)$  où  $f$  est une fonction admettant un point fixe  $S^*$ ,  $j$  fois continument dérivable ( $j \geq 2$ ), telle que  $f'(S^*) = 1$  et que la suite  $\{S_i\}$  converge vers  $S^*$ . Un développement de Taylor de  $f$  autour de  $S^*$  ( $S_{i+1} - S^* = (S_i - S^*) + \frac{f''(S^*)}{2} (S_i - S^*)^2 + \dots$ ) nous montre que  $S_i$  appartient à  $L(\{S_i - S^*\})$ .

Supposons  $f''(S^*) = \dots = f^{(j-1)}(S^*) = 0$ ,  $f^{(j)}(S^*) \neq 0$ .

On a alors  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\frac{S_{i+1} - S^*}{S_i - S^*} - 1}{(S_i - S^*)^j} = k = a$  et si on désigne, conformément à la notation de la propriété 5 :

$$\epsilon_1 = U_i - S^* \quad (= \text{erreur associée au procédé d'Aitken})$$

$$e_1 = S_i - S^* \quad (= \text{erreur associée à la suite})$$

on a 
$$\lim_i \frac{\epsilon_1}{e_1} = \frac{j}{j+1}$$

Propriété 7 :

Soit  $\{S_i\}$  une suite convergente et  $\{x_i^1\} \dots \{x_i^p\}$ ,  $p$  suites de limite nulle convergent aussi vite que  $\{S_i\}$ . Alors, il existe une constante  $M$  et un indice  $i_0$  tels que, pour chaque indice  $i$ , on peut trouver  $p$  scalaires  $a_k^{(1)}$  ( $k = 1 \dots p$ ) vérifiant :

$$\forall i \geq i_0 \quad \begin{cases} 1 + \alpha_1^{(1)} \frac{\Delta x_1}{\Delta S_1} + \dots + \alpha_p^{(1)} \frac{\Delta x_1}{\Delta S_1} = 0 & (1) \\ |\alpha_k^{(1)}| \leq M & k = 1 \dots p \end{cases}$$

La transformation  $T_i = S_i + \alpha_1^{(1)} x_1 + \dots + \alpha_p^{(1)} x_i$  est alors un procédé d'accélération de convergence.

Démonstration :

$$\text{Notons } \rho_j = \lim_i \frac{\Delta x_1^{(j)}}{\Delta S_1} \quad ( = \lim \frac{x_1^{(j)}}{S_1 - S^*} ) \quad j = 1 \dots p$$

$$\rho_j \neq 0 \quad \text{Soit } \epsilon < \min_j |\rho_j|$$

Il existe un indice  $i_0$  tel que

$$\forall i \geq i_0 \quad \frac{\Delta x_1^{(j)}}{\Delta S_1} \in [\rho_j - \epsilon, \rho_j + \epsilon] \quad j = 1 \dots p$$

Il existe donc  $K > 0$  tel que

$$\forall i \geq i_0 \quad \left| \frac{\Delta x_1^{(j)}}{\Delta S_1} \right| > K$$

$$\forall j = 1 \dots p$$

Soit  $i \geq i_0$ . On peut déterminer une solution de l'équation  $1 + \alpha_1^{(1)} \frac{\Delta x_1}{\Delta S_1} + \dots + \alpha_p^{(1)} \frac{\Delta x_1}{\Delta S_1} = 0$

de la manière suivante :

Posons :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta S_1}{1} \\ \Delta x_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -\frac{\Delta S_1}{j} \\ \Delta x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (j = 1 \dots p)$$

$A_j \in \mathbb{R}^p$  et sa  $j^{\text{ème}}$  composante est  $-\frac{\Delta S_1}{j \Delta x_1}$

Les composantes de  $A_j$  vérifient l'équation (1).

On a aussi  $\|A_j\| \leq \frac{1}{K}$  ( $\|\cdot\|$  = norme du max).

Soient  $a_1 \dots a_p$   $p$  réels tels que  $0 < a_k < 1$

$$\sum a_k = 1$$

Les composantes  $\alpha_j^{(1)}$  du vecteur  $A = \sum_{k=1}^p a_k A_k$  vérifient l'équation (1) et  $\|A\| \leq \frac{1}{K} = M$ .

La transformation s'écrit :

$$T_1 = S_1 + \alpha_1^{(1)} x_1 + \alpha_2^{(1)} x_1^2 + \dots + \alpha_p^{(1)} x_1^p$$

Posons

$$\epsilon_1 = T_1 - S^*$$

$$e_1 = S_1 - S^*$$

$$\frac{\epsilon_1}{e_1} = 1 + \alpha_1^{(1)} \frac{x_1}{e_1} + \alpha_2^{(1)} \frac{x_1^2}{e_1} + \dots + \alpha_p^{(1)} \frac{x_1^p}{e_1}$$

et

$$0 = 1 + \alpha_1^{(1)} \frac{\Delta x_1}{\Delta S_1} + \alpha_2^{(1)} \frac{\Delta x_1^2}{\Delta S_1} + \dots + \alpha_p^{(1)} \frac{\Delta x_1^p}{\Delta S_1}$$

Retranchons membre à membre

$$\frac{\epsilon_1}{e_1} = \alpha_1^{(1)} \left( \frac{x_1}{e_1} - \frac{\Delta x_1}{\Delta S_1} \right) + \dots + \alpha_p^{(1)} \left( \frac{x_1^p}{e_1} - \frac{\Delta x_1^p}{\Delta S_1} \right)$$

$$\left| \frac{\epsilon_1}{e_1} \right| \leq M \left| \frac{x_1}{e_1} - \frac{\Delta x_1}{\Delta S_1} \right| + \dots + M \left| \frac{x_1^p}{e_1} - \frac{\Delta x_1^p}{\Delta S_1} \right|$$

Comme  $\lim_1 \left( \frac{x_1^j}{e_1} - \frac{\Delta x_1^j}{\Delta S_1} \right) = 0$ , on a  $\lim_1 \frac{\epsilon_1}{e_1} = 0$  et la transformation est un procédé d'accélération de convergence. ■

*Remarque 1 :*

L'hypothèse de la propriété 7 est manifestement trop riche puisqu'il suffit de connaître une suite  $\{x_1\}$  pour accélérer la convergence de  $\{S_1\}$ . La transformation dépend de  $(p-1)$  paramètres, et on peut songer à imposer une contrainte supplémentaire aux quantités  $\alpha_1^{(1)} \dots \alpha_p^{(1)}$ . On a ainsi, comme corollaires de la propriété 7 :

Corollaire 1 :

Sous les hypothèses de la propriété 7, parmi les  $\alpha_k$  vérifiant  $1 + \alpha_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta S_1} + \dots + \alpha_p \frac{\Delta x_1^p}{\Delta S_1} = 0$ ,

choisissons ceux qui sont tels que  $\text{Max}_k |\alpha_k|$  soit minimum. La transformation  $T_1 = S_1 + \sum_{k=1}^p \alpha_k x_1^k$  est un procédé d'accélération de convergence. (Le calcul des  $\alpha_k$  dépend de l'indice  $i$ ).

Un tel choix des  $\alpha_k$  peut être justifié par l'inégalité

$$\left| \frac{e_i}{e_1} \right| \leq \text{Max}_k |\alpha_k| \left\{ \sum_{k=1}^p \left| \frac{x_1^k}{e_1} - \frac{\Delta x_1^k}{\Delta S_1} \right| \right\}$$

Corollaire 2 :

Sous les hypothèses de la propriété 7, supposons que l'on connaisse  $S_1, S_{i+1}, \dots, S_{i+q}$ ,  
 $x_1 \dots x_{i+q}, \dots, x_1 \dots x_{i+q}$ .

Notons  $G_i$  la matrice

$$G_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta S_1} & \dots & \frac{p}{\Delta S_1} \\ \frac{1}{\Delta S_{i+1}} & \dots & \frac{p}{\Delta S_{i+1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\Delta S_{i+q-1}} & \dots & \frac{p}{\Delta S_{i+q-1}} \end{pmatrix}$$

Soient  $A_j$  les vecteurs de  $\mathbb{R}^p$  tels que  $A_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta S_i}{\Delta x_1^j} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(la  $j^{\text{ème}}$  composante de  $A_j$  est non nulle)

Parmi les vecteurs  $A$  de la forme  $A = \sum_{j=1}^p a_j A_j, 0 < a_j < 1$ ,

choisissons-en un qui minimise une norme de

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + G_i A$$

Les composantes  $\alpha_k^{(1)}$  du vecteur  $A$  peuvent être utilisées pour construire un procédé d'accélération de convergence

$$T_1 = S_1 + \sum_{k=1}^p \alpha_k^{(1)} x_1^k$$

Remarque 2 :

Supposons connues les limites de  $\frac{x_1^j}{e_1} = \rho_j$ .



Pour que la transformation  $T_i = S_i + \alpha_1 x_i^1 + \dots + \alpha_p x_i^p$  soit un procédé d'accélération de convergence il faut :

$$\lim \frac{T_i - S^*}{S_i - S^*} = 0 \quad \text{c'est-à-dire } 0 = 1 + \alpha_1 \rho_1 + \dots + \alpha_p \rho_p$$

On obtient ainsi un procédé analogue au procédé standard n° 1 (cf. § 1 - 1).

Le procédé décrit dans la propriété 7 est une variante de ce procédé, où, à l'étape  $i$  les quantités  $\alpha_j$  (qui dépendent de l'indice  $i$ ) sont liées par :

$$0 = 1 + \alpha_1 \frac{x_i^1}{\Delta S_i} + \dots + \alpha_p \frac{x_i^p}{\Delta S_i}$$

### 1 - 3 Exemples numériques

Suite  $S_{i+1} = 0.1 S_i^2 + 0.9 S_i$

$$S_0 = 0.9 \quad ; \quad \lim_i S_i = 0$$

Cette suite est monotone à convergence linéaire et  $\lim \frac{\epsilon_{i+1}}{\epsilon_i} = 0.9$ .

Utilisons la transformation

$$T_i = S_i + (S_{i+1} - S_i) \frac{1}{1 - |\Delta S_i|^{\frac{1}{1+k}}} \quad \text{pour diverses valeurs de } k$$

indice	Eléments de la suite	Transformées			
		k = 0	k = 1	k = 20	k = 50
1	0.9				
2	0.891	0.890 918	0.890 057	0.857 111	0.799 899
29	0.364 677				
30	0.341 507	0.174 382	0.168 236	0.575 587 $10^{-1}$	-0.126 997
45	0.995 123 $10^{-1}$				
46	0.905 513 $10^{-1}$	0.942 790 $10^{-2}$	0.752 903 $10^{-2}$	-0.266 597 $10^{-1}$	-0.836 593 $10^{-1}$

Pour  $k = 0$  ou  $1$  le rapport  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_i}$  passe de  $1$  à  $\frac{1}{10}$  ; l'accélération de convergence est plus nette que pour  $k = 20, 50$  car  $|\Delta S_i|^{\frac{1}{1+k}}$  approche sa limite mieux que  $|\Delta S_i|^{\frac{1}{1+50}}$  ( $|\Delta S_{45}|^{\frac{1}{45}} = 0.90007$  alors que  $|\Delta S_{45}|^{\frac{1}{45+50}} = 0.95$ )

Suite à convergence logarithmique  $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$

Utilisons la transformation  $T_i = S_i + \frac{S_i - U_i}{\frac{U_{i+1} - U_i}{S_{i+1} - S_i} - 1}$

(La limite  $S^* = 1.644\ 934$ )

Indice	Eléments de la suite	Transformée	Rapport $\frac{\epsilon_i}{e_i}$
2	1.25		
3	1.361 111 111	1.638 888 888	$0.2 \cdot 10^{-1}$
5	1.463 611 111		
6	1.491 388 888	1.644 166 666	$0.5 \cdot 10^{-2}$
16	1.584 346 533		
17	1.587 806 741	1.644 900 166	$0.6 \cdot 10^{-3}$
34	1.615 950 588		
35	1.616 766 914	1.644 930 180	$0.1 \cdot 10^{-3}$

Suite à convergence logarithmique  $S_{n+1} = S_n - 0.005 S_n^2$

( $S_0 = 1$  la limite est 0)

Indice	Eléments de la suite	Transformation d'Aitken	Transformée	Rapport $\frac{\epsilon_i}{e_i}$
22	0.900 475	0.451 258	$-0.207\ 378 \cdot 10^{-2}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$
49	0.802 502	0.402 061	$-0.164\ 296 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$
132	0.601 487	0.301 198	$-0.918\ 267 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$
273	0.430 251	0.215 358	$-0.467\ 821 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$

En accord avec le résultat démontré en remarque 2 propriété 6, on constate que la suite transformée par Aitken converge aussi vite que la suite initiale (le rapport des erreurs étant  $\frac{1}{2}$ )

Récapitulons dans un tableau les principaux résultats de cette section.



Accélération de la convergence d'une suite  $\{S_n\}$  $\{S_n\}$  est transformée en  $\{T_n\}$ 

Procédé	Espace de suite auquel doit appartenir $\{S_n\}$	Eléments nécessaires pour le calcul de $T_n$
Procédé standard n° 1 $T_n = S_n - \rho(x_n - x^*)$	$A_1(\{x_n\})$	Eléments de la suite $\{S_n\}$ Eléments auxiliaires $\begin{cases} x_n \\ x^* \\ \rho \end{cases}$
Procédé standard n° 2 $T_n = S_n - (S_{n+1} - S_n) \frac{x_n - x^*}{x_{n+1} - x_n}$	$A_2(\{x_n\})$	$\{S_n, S_{n+1}\}$ $\begin{cases} x_n, x_{n+1} \\ x^* \end{cases}$
Aitken $T_n = S_n - \frac{(S_{n+1} - S_n)^2}{S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n}$	$S_1$	$\{S_n, S_{n+1}, S_{n+2}\}$ {
Variante du procédé standard n° 1 $T_n = S_n + (S_{n+1} - S_n) \frac{1}{1 -  \Delta S_n ^n}$	$S_1^*$	$\{S_n, S_{n+1}\}$ { n
1° étape du $\theta_2$ -Algorithme $T_n = S_n + \frac{S_n - U_n}{\frac{U_{n+1} - U_n}{S_{n+1} - S_n} - 1}$	$L(\{z_1\})$	$\{S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, S_{n+3}\}$ {

Signalons que ce tableau doit être lu comme une condition suffisante : "Si la suite appartient à tel espace, alors il y a accélération de la convergence". Le procédé d'Aitken est un procédé standard n° 2 où la suite auxiliaire  $\{\Delta S_n\}$  est fabriquée à partir de la suite initiale.



## 2 - PROCÉDÉS QUASI-LINÉAIRES D'ACCÉLÉRATION DE CONVERGENCE DE DEGRÉ K

Parmi les propriétés que possède la transformation d'Aitken, deux d'entre elles semblent intéressantes : Cette transformation ne fait intervenir que les termes de la suite, et si on applique la transformation à la suite  $\{a S_i + b\}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), la suite transformée est  $\{a T_i + b\}$  (propriété que nous appellerons propriété de quasi-linéarité). Dans cette section nous étudions les propriétés que doit posséder une fonction de  $(p + 1)$  variables pour définir un procédé quasi-linéaire d'accélération de convergence.

Soit  $\{S_i\}$  une suite de réels convergente, de limite  $S^*$ , et  $G = G(x_0, x_1, \dots, x_p)$  une application de  $\mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}$ . ( $p \geq 0$ ). La fonction  $G$  est utilisée pour transformer la suite  $\{S_i\}$  en une suite  $\{T_i\}$  de terme général

$$T_i = G(S_i, S_{i+1}, \dots, S_{i+p}).$$

Définition 1 : Accélération de convergence de degré  $k$

$G$  définit un procédé quasi-linéaire d'accélération de convergence de degré  $k$  (pour la suite  $\{S_i\}$ ) si :

- (i)  $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall i \ G(a S_i + b, \dots, a S_{i+p} + b) = a G(S_i, S_{i+1}, \dots, S_{i+p}) + b$   
 (condition de quasi-linéarité)
- (ii)  $\lim_i T_i = S^*$  (condition de régularité)
- (iii)  $\lim_i \frac{T_i - S^*}{(S_i - S^*)^j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, k$   
 (condition d'accélération de convergence de degré  $k$ )

Nous considérerons désormais que (i) et (ii) définissent l'accélération de convergence de degré 0.

Définition 2 : Ensembles associés

Soit  $G$  un ensemble de fonctions de  $(p+1)$  variables et  $S$  un ensemble de suites. On dit que ces deux ensembles sont associés pour la propriété d'accélération de convergence de degré  $k$  si

$$\forall G \in G, \quad G \text{ est un procédé quasi-linéaire d'accélération de convergence de degré } k, \text{ pour la suite } \{S_i\}.$$

Remarque :

On peut définir d'une manière analogue deux ensembles associés pour la quasi-linéarité.

Propriété 8

Soit  $\hat{G}$  un ensemble de fonctions à  $(p+1)$  variables ( $p \geq 0$ ) définies pour tout  $(x_0, x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$  possédant la propriété de quasi-linéarité

$$G(ax_0 + b, \dots, ax_p + b) = aG(x_0, \dots, x_p) + b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Soit  $(m)$  l'ensemble des suites de réels bornées. Les ensembles  $\hat{G}$  et  $(m)$  sont associés pour la quasi-linéarité.

Démonstration

Soit  $\{S_i\}$  une suite appartenant à  $(m)$  et  $G \in \hat{G}$ .  $\forall i, (S_i, S_{i+1}, \dots, S_{i+p})$  est borné et  $G(S_i, S_{i+1}, \dots, S_{i+p})$  est défini.  $G(ax_0 + b, \dots, ax_p + b) = aG(x_0, \dots, x_p) + b$  implique que  $G(aS_i + b, \dots, aS_{i+p} + b) = aG(S_i, \dots, S_{i+p}) + b$ . Les ensembles  $\hat{G}$  et  $(m)$  sont donc associés pour la quasi-linéarité. ■

Propriété 9 :

Soit  $G_0 \subset \hat{G}$  un ensemble de fonctions à  $(p+1)$  variables ( $p \geq 0$ ) quasi-linéaires et continues par rapport à chacune des variables. Soit  $(c) \subset (m)$  l'ensemble des suites convergentes.  $(c)$  et  $G_0$  sont associés pour l'accélération de convergence de degré 0.

Démonstration

Comme  $G_0 \subset \hat{G}$  et  $(c) \subset (m)$ , les deux ensembles  $G_0$  et  $(c)$  sont associés pour la quasi-linéarité. Il suffit donc de montrer que  $\forall G \in G_0, \forall \{S_i\} \in (c)$

$$\lim_i G(S_i, \dots, S_{i+p}) = \lim_i S_i$$

Soit  $G \in G_0$  et  $\{S_i\} \in (c)$ , de limite  $S^*$ .

$G$  possède la propriété de quasi-linéarité :  $G(b, b, \dots, b) = b \quad \forall b$ .

$G$  est continue, donc :

$$\lim G(S_i, \dots, S_{i+p}) = G(S^*, \dots, S^*) = S^*$$

Les deux ensembles sont donc associés pour la propriété d'accélération de convergence de degré 0. ■

Propriété 10 :

Soit  $G \in G_0$ .  $G$  se met sous la forme

$$G(x_0, x_1, \dots, x_p) = x_0 + h(x_1 - x_0, \dots, x_p - x_{p-1})$$

$h(\xi_1, \dots, \xi_p)$  fonction continue et homogène de degré 1, c'est-à-dire telle que

$$h(\alpha \xi_1, \dots, \alpha \xi_p) = \alpha h(\xi_1, \dots, \xi_p) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Démonstration :

$$\text{Soit } y = G(x_0, x_1, \dots, x_p) \quad , \quad G \in G_0$$

On peut écrire

$$y = x_0 + G(0, x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0)$$

Les  $p$  variables  $x_{k+1} - x_k$  ( $k = 0, \dots, p-1$ ) sont fonctions continues de  $x_j - x_0$  ( $j = 1 \dots p$ ).

On peut donc écrire

$$y = x_0 + h(x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0) \quad h : \text{fonction continue de } p \text{ variables.}$$

$G$  étant homogène de degré 1, il en est de même pour  $h$ . ■

Remarque :

$h(\xi_1, \dots, \xi_p)$  étant homogène de degré 1, on a  $h(0, 0, \dots, 0) = 0$ . Ceci implique que si  $G$  est une fonction d'une variable, on ne peut qu'avoir  $h = 0$ , d'où  $G(x) = x$ . Les procédés quasi-linéaires intéressants feront intervenir plusieurs termes successifs d'une suite (on utilisera des fonctions de  $(p+1)$  variables, avec  $p \geq 1$ )

Définition 3 : Famille de suites  $S_k$  ( $k$  entier  $\geq 0$ )

$S_k$  désigne l'ensemble des suites  $\{S_i\}$  telles que

$$\lim_1 S_i \text{ existe} = S^* \quad (\text{posons } e_1 = S_1 - S^*)$$

$$\lim_1 \frac{e_{i+1}}{e_1} = \rho_1 \quad (\rho_1 \in ]-1 + 1[ \quad \rho_1 \neq 0)$$

$$\lim_1 \frac{e_{i+1} - \rho_1 e_i}{e_1^2} = \rho_2 \quad (\rho_2 \text{ est borné})$$

⋮

$$\lim_1 \frac{e_{i+1} - \rho_1 e_i - \rho_2 e_i^2 \dots - \rho_{k-1} e_i^{k-1}}{e_1^k} = \rho_k \quad (\rho_k \text{ borné})$$

On voit que  $S_0$  est identique à (c) (ensemble des suites convergentes), et que

$S_{k+1} \subset S_k$ .  $S_k$  possède donc (pour  $k \geq 1$ ) les propriétés de  $S_1$ , en particulier :

Si  $\{S_n\} \in S_k$  on a :

$$S_n \neq S_{n+1} \quad \forall n > n_0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n - S_{n-1}} = \rho_1 \neq 1$$

Propriété 11 :

Soit  $G_1 \subset G_0$  un ensemble de fonctions à  $(p+1)$  variables ( $p \geq 2$ ), de la forme :

$$G(x_0, x_1, \dots, x_p) = x_0 + (x_1 - x_0) g \left( \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}, \dots, \frac{x_p - x_{p-1}}{x_{p-2} - x_{p-1}} \right)$$

$g$  : fonction de  $(p-1)$  variables  $(\xi_1, \dots, \xi_{p-1})$ , continue pour  $|\xi_i| < 1$  ( $i = 1 \dots p-1$ ) et telle que

$g(\rho, \rho, \dots, \rho) = \frac{1}{1-\rho}$   $\forall \rho$  tel que  $|\rho| < 1$ .  $G_1$  et  $S_1$  sont associés pour le critère d'accélération de convergence de degré 1.

Démonstration

Soit  $G \in G_1$ .

Remarquons que  $G$  n'est pas définie si parmi les  $(p+1)$  variables  $(x_0, x_1, \dots, x_p)$ , on a

$$x_j = x_{j+1} \quad (j = 0 \dots p-1) \text{ ou } \left| \frac{x_{j+1} - x_j}{x_j - x_{j-1}} \right| \geq 1.$$

Soit  $\{S_i\} \in S_1$ .

D'après la propriété 11, à partir d'un certain rang

$$S_i \neq S_{i+1} \text{ et } \left| \frac{\Delta S_{i+1}}{\Delta S_i} \right| < 1 \quad (\text{car } \lim \frac{\Delta S_{i+1}}{\Delta S_i} = \rho_1 \text{ avec } |\rho_1| < 1)$$

La quantité  $T_i = S_i + (S_{i+1} - S_i) g \left( \frac{\Delta S_{i+1}}{\Delta S_i}, \dots, \frac{\Delta S_{i+p-1}}{\Delta S_{i+p-2}} \right)$  est donc bien définie.

$G$  possède la propriété de quasi-linéarité pour la suite  $\{S_i\}$ .

$$\lim_i T_i = \lim S_i + \lim \Delta S_i \lim g \left( \frac{\Delta S_{i+1}}{\Delta S_i}, \dots, \frac{\Delta S_{i+p-1}}{\Delta S_{i+p-2}} \right) = \lim S_i = S^*$$

$$\epsilon_i = T_i - S^* = S_i - S^* + (S_{i+1} - S_i) g \left( \frac{\Delta S_{i+1}}{\Delta S_i}, \dots, \frac{\Delta S_{i+p-1}}{\Delta S_{i+p-2}} \right)$$

$$\lim_i \frac{\epsilon_i}{e_i} = 1 + \lim \left( \frac{e_{i+1}}{e_i} - 1 \right) g \left( \frac{\Delta S_{i+1}}{\Delta S_i}, \dots, \frac{\Delta S_{i+p-1}}{\Delta S_{i+p-2}} \right) = 1 + (\rho - 1) g(\rho, \dots, \rho) = 0$$

Il y a donc accélération de la convergence de degré 1. ■

Remarques :

- Soit  $G \in G_1$  et  $\{S_i\} \in S_1$  de limite  $S^*$ . La quantité  $G(S^*, S^*, \dots, S^*)$  n'est pas définie et c'est une propriété commune à tous les procédés d'accélération de convergence ; on pourra prouver seulement que  $\lim_i (G(S_i, \dots, S_{i+p})) = \lim_i S_i$ . Les résultats sont théoriquement satisfaisants

pour  $i$  grand, mais du point de vue numérique  $i$  grand signifie que  $S_i, S_{i+1} \dots S_{i+p}$  sont voisins de  $S^*$ , c'est-à-dire un point où  $G$  n'est pas définie, d'où le risque d'instabilité numérique.

- Soit une suite telle que  $\lim \frac{S_{i+1} - S^*}{S_i - S^*} = 0$  (une telle suite n'appartient pas à  $G_1$ ,

et est à convergence plus que linéaire). Si on utilise une transformation de  $G_1$ , la condition d'accélération de convergence est vérifiée, mais utiliser une telle transformation n'offre aucun intérêt, car le calcul de  $S_{i+1}$  à partir de  $S_i$  est déjà un procédé d'accélération de convergence.

- Soit une suite telle que  $\lim \frac{S_{i+1} - S^*}{S_i - S^*} = 1$  (convergence logarithmique). Il n'existe aucune fonction de  $G_0$  permettant d'accélérer la convergence de toute suite à convergence logarithmique. En effet la condition d'accélération de degré 1 s'écrit (pour la fonction  $h$  associée à  $G$  (voir propriété 10))

$$\frac{T_i - S^*}{S_i - S^*} = 1 + \frac{1}{S_i - S^*} h(S_{i+1} - S_i, \dots, S_{i+p} - S_i)$$

$$0 = 1 + \lim h \left( \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i - S^*}, \dots, \frac{S_{i+p} - S_i}{S_i - S^*} \right) = 1 + \lim h \left( \frac{e_{i+1}}{e_i} - 1, \dots, \frac{e_{i+p}}{e_i} - 1 \right)$$

$$0 = 1 + h(0, 0, \dots, 0)$$

Or la fonction  $h$ , homogène de degré 1 vérifie  $h(0, \dots, 0) = 0$ . Il ne peut donc y avoir accélération de la convergence.

- Soit  $G \in G_1$  et  $\{S_n\}$  une suite convergente telle que  $\lim \frac{S_{n+1} - S^*}{S_n - S^*} = -1$  (suite alternée à convergence logarithmique).  $G$  définit une transformation qui, appliquée à  $\{S_n\}$  fournit un procédé d'accélération de convergence de degré 1.

- On ne peut pas accélérer la convergence de toute suite de  $S_i$  à l'aide d'une fonction de  $G_1$  à 2 variables. En effet on aurait  $G(x_0, x_1) = x_0 + K(x_1 - x_0)$ . La constante  $K$  ne peut vérifier  $g(\rho \dots \rho) = \frac{1}{1-\rho} \forall \rho$ . Mais si pour une suite particulière  $\{S_i\}$  on connaît  $\rho = \lim \frac{e_{i+1}}{e_i}$ , alors  $G(x_0, x_1) = x_0 + \frac{1}{1-\rho} (x_1 - x_0)$  accélère la convergence de cette suite.

Le procédé ainsi obtenu ( $T_1 = S_1 + \frac{1}{1-\rho} (S_{i+1} - S_i)$ ) est le procédé standard n° 1 (voir propriété 1).

- La fonction  $G$  de 3 variables appartenant à  $G_1$  est

$$G(x_0, x_1, x_2) = x_0 + (x_1 - x_0) \frac{1}{1 - \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}}$$



et la transformation correspondante est le procédé d'Aitken.

Parmi les fonctions  $G \in G_1$  on retrouve les transformations introduites par Pennacchi ([32]).

Posons  $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ .

Les transformations de Pennacchi sont de la forme

$$G(x_0, x_1, \dots, x_p) = x_0 + \frac{P_m(\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{p-1})}{Q_{m-1}(\Delta x_0, \dots, \Delta x_{p-1})}$$

$P_m, Q_{m-1}$  : polynômes homogènes, de degrés respectifs  $m$  et  $m-1$ .

Propriété 12 :

Soit  $G_2 \in G_1$  une famille de fonctions de la forme

$$G(x_0, x_1, \dots, x_p) = x_0 + (x_1 - x_0) g\left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}, \dots, \frac{x_p - x_{p-1}}{x_{p-1} - x_{p-2}}\right) \quad (p \geq 3)$$

$g$  définie continue (voir propriété 11), dérivable, telle que :

$$g(\rho, \rho, \dots, \rho) = \frac{1}{1 - \rho} \quad \forall \rho \quad \text{vérifiant} \quad |\rho| < 1$$

$$g'_{\xi_1} + \rho g'_{\xi_2} + \dots + \rho^{p-2} g'_{\xi_{p-1}} = \frac{1}{(\rho - 1)^2 (\rho + 1)} \quad \forall \rho \quad (|\rho| < 1)$$

$G_2$  et  $S_2$  sont associés pour le critère d'accélération de convergence de degré 2.

Démonstration :

Comme  $G_2 \in G_1$  et  $S_2 \in S_1$ ,  $G_2$  et  $S_2$  sont associés pour le critère d'accélération de degré 1, et il suffit de montrer qu'il y a accélération de convergence de degré 2. Soit  $\{S_1\}$  une suite  $\in S_2$  et  $\{T_1\}$  la suite transformée par  $G \in G_2$ .

$$T_1 = S_1 + (S_{1+1} - S_1) g\left(\frac{\Delta S_{1+1}}{\Delta S_1}, \dots, \frac{\Delta S_{1+p-1}}{\Delta S_{1+p-2}}\right)$$

Notons  $e_1 = T_1 - S^*$

$e_1 = S_1 - S^*$

$$r_{1+j} = \frac{S_{1+j+1} - S_{1+j}}{S_{1+j} - S_{1+j-1}} = \frac{\Delta S_{1+j}}{\Delta S_{1+j-1}} \quad j \geq 1$$

$\{S_1\} \in S_2$ , donc  $\frac{e_{1+1}}{e_1} \sim \rho_1$   $\frac{e_{1+1} - \rho_1 e_1}{e_1^2} \sim \rho_2$

On en déduit :  $r_{1+j} - \rho_1 \sim \rho_2 \rho_1^{j-1} (\rho_1 + 1) e_1$   $j \geq 1$

Utilisons un développement de Taylor de  $g$  autour du point  $(\rho_1, \dots, \rho_1)$ .

$$\epsilon_1 = e_1 + (e_{i+1} - e_i) [g(\rho_1 \dots \rho_1) + (r_{i+1} - \rho_1) g'_1 + \dots + (r_{i+p-1} - \rho_1) g'_{p-1}]$$

( $g'_j$  désigne la dérivée partielle de  $g$  en un point de  $\mathbb{R}^{p-1}$  appartenant au segment

$$[(\rho_1 \dots \rho_1), (r_{i+1} \dots r_{i+p-1})]$$

$$\epsilon_1 = e_1 + \frac{e_{i+1} - e_i}{1 - \rho_1} + (e_{i+1} - e_i) [(r_{i+1} - \rho_1) g'_1 + \dots + (r_{i+p-1} - \rho_1) g'_{p-1}]$$

Estimons  $\frac{\epsilon_1}{e_1}$  en faisant les approximations de  $\frac{e_{i+1} - \rho_1 e_i}{e_1}$  et  $r_{i+j} - \rho_1$

$$\frac{\epsilon_1}{e_1} \sim \frac{\rho_2}{1 - \rho_1} + (\rho_1 - 1) [\rho_2 (\rho_1 + 1) g'_1 + \dots + \rho_2 \rho_1^{p-2} (\rho_1 + 1) g'_{p-1}]$$

$$\lim \frac{\epsilon_1}{e_1} = \rho_2 \left[ \frac{1}{1 - \rho_1} + (\rho_1 - 1) (\rho_1 + 1) (g'_1 + \dots + \rho_1^{p-2} g'_{p-1}) \right]$$

$$= \rho_2 \left[ \frac{1}{1 - \rho_1} + (\rho_1 + 1) (\rho_1 - 1) \frac{1}{(\rho_1 - 1)^2 (\rho_1 + 1)} \right] = 0$$

Les familles  $G_2$  et  $S_2$  sont donc associées pour le critère d'accélération de degré 2. ■

*Remarques :*

- Il n'existe pas de fonction de 3 variables possédant la propriété d'accélération de convergence de degré 2. En effet cette fonction ne peut être que :

$$G(x_0, x_1, x_2) = x_0 + (x_1 - x_0) \frac{1}{1 - \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}} \quad (\text{définissant le procédé d'Aitken}).$$

La fonction  $g$  associée à  $G$  est  $g(x) = \frac{1}{1-x}$ , qui vérifie  $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \neq \frac{1}{(x-1)^2 (x+1)}$ .

Il ne peut donc y avoir accélération de degré 2 par utilisation du procédé d'Aitken.

Nous n'avons pas cherché à déterminer un ensemble  $G_3$  associé à  $S_3$  pour le critère d'accélération de degré 3 (à cause de la complexité des formules).

Pour conclure l'étude de cette section, nous pouvons dire qu'un procédé d'accélération de convergence (quasi-linéaire, et de degré 1 ou 2) est caractérisé par une fonction  $G$  possédant certaines propriétés ; il est facile de construire une telle fonction et on a ainsi une formule explicite permettant d'accélérer la convergence (calcul de  $T_1 = G(S_1, S_{1+1}, \dots, S_{1+p})$ ).

En ce qui concerne l'accélération de convergence de degré élevé (que nous étudions dans la section suivante), nous ne chercherons pas à caractériser les propriétés communes à tous les procédés ; nous décrirons une famille d'algorithmes possédant la propriété d'accélération de convergence.

Exemple numérique :

Cherchons une fonction  $g$  de deux variables telle que

$$g(x, x) = \frac{1}{1-x}$$

$$g'_1 + x g'_2 = \frac{1}{(x-1)^2 (x+1)}$$

Parmi les solutions possibles, nous avons :

$$g_1(x, y) = \frac{1}{1-x} + (y-x) \frac{y}{(1-y)^2 (1-y^2)}$$

$$g_2(x, y) = \frac{1}{1-y} + (x-y) \frac{1-x-x^2}{(1-x)^2 (1-x^2)}$$

Ces deux fonctions déterminent deux fonctions  $G_1$  et  $G_2 \in G_2$  (voir propriété 12).

Comparons les deux procédés d'accélération de convergence ainsi définis avec un procédé d'accélération de degré 1. Prenons par exemple un procédé défini par

$$g_3(x, y) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} \right)$$

Les trois procédés seront donc construits à partir de 4 éléments successifs d'une suite  $\{S_n\}$ .

Suite  $S_{n+1} = e^{-S_n}$  (limite = 0.567 143 290 415)

$$S_0 = 0$$

Indice	Élément de la suite	$G_1$	$G_2$	$G_3$
12	0.568 428 725 036	0.567 143 304 225	0.567 143 294 613	0.567 151 416 787
17	0.567 067 898 398	0.567 143 290 415	0.567 143 290 415	0.567 143 318 428

Les procédés d'accélération de degré 2 donnent des résultats plus satisfaisants que le procédé d'accélération de convergence de degré 1 (nous avons souligné les chiffres exacts)

Tableau récapitulatif des résultats de cette section

Ensembles associés de suites et de fonctions.

Critère	Accélération de degré 2	Accélération de degré 1	Accélération de degré 0	quasi-linéarité
Famille de suites	$S_2$	$S_1$	$S_0 = (c)$	(m)
Famille de fonctions	$G_2$	$G_1$	$G_0$	$\tilde{G}$
Nombre de variables des fonctions	$\geq 4$	$\geq 3$	$\geq 2$	

On a les inclusions  $S_2 \subset S_1 \subset S_0 \subset (m)$

$$G_2 \subset G_1 \subset G_0 \subset \tilde{G}$$

### III - ALGORITHMES QUASI-LINÉAIRES D'ACCÉLÉRATION DE CONVERGENCE DE DEGRÉ K

Dans cette section nous développons l'idée qui est sous-jacente dans la méthode d'Aitken : l'extrapolation linéaire. Après avoir caractérisé les suites de  $S_k$ , nous montrons que la limite de telles suites est le point fixe d'une application, qui peut être approché par des techniques d'interpolation inverse. Nous obtenons ainsi des algorithmes, qui sont des procédés d'accélération de convergence et dont le degré d'accélération est égal à celui du polynôme d'interpolation.

#### 3 - 1 Caractérisation des suites de $S_k$

Propriété 13 :

Soit  $0 = x_0 < x_1 \dots < x_n \dots < 1$  une suite de réels strictement monotone, de limite 1. Soit  $\{y_i\}$  une suite convergente, de limite  $y^*$ . Pour tout entier  $k \geq 1$ , il existe  $f$  de classe  $C^k$  sur  $[0, 1]$ , continue en 1, réalisant les conditions d'interpolation

$$y_i = f(x_i) \quad \forall i$$

$$y^* = f(1)$$

et telle que :  $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$|f(x) - y_i| \leq |y_{i+1} - y_i| \quad \forall i \geq 0$$

Propriété 14 :

Soit  $0 = x_0 < x_1 \dots < x_n \dots < 1$  une suite de réels strictement monotone, de limite 1. Soit  $\{y_i\}$  une suite de réels convergente, de limite  $y^*$ , et  $k \geq 1$  un entier. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe  $f \in C^k[0, 1]$ , telle que

$$y_i = f(x_i) \quad \forall i$$

$$y^* = f(1)$$

est :

$$\lim_1 \frac{\epsilon_i}{e_i} = \rho_1 \quad \begin{array}{l} \epsilon_i = y_i - y^* \\ e_i = x_i - 1 \end{array}$$

$$\lim \frac{\epsilon_i - \rho_1 e_i}{e_i^2} = \rho_2$$

$$\lim \frac{\epsilon_i - \rho_1 e_i - \rho_2 e_i^2 \dots - \rho_{k-1} e_i^{k-1}}{e_i^k} = \rho_k \quad (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k \text{ bornés})$$

Démonstration des propriétés 13 et 14 (Commentaires)

- La construction d'une fonction réalisant les conditions de la propriété 13 se trouve dans Coatmelec [6], chapitre III. (On peut construire  $f$  polynomiale sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ , réalisant les conditions d'interpolation.

$$\begin{aligned} f(x_i) &= y_i \\ f^j(x_i) &= 0 \quad j = 1 \dots k \end{aligned} \quad (\text{fonction } k\text{-plate})$$

La condition  $|f(x) - y_i| \leq |y_{i+1} - y_i|$  entraîne la continuité de  $f$  en 1).

- Les conditions de la propriété 14 permettent d'utiliser le théorème du prolongement de Whitney ([6], [37], [9] chap. 5). La fonction  $f$  de la propriété 13 définit sur  $[0,1[$  un champ de Taylor  $T$  d'ordre  $k$ , qui peut être prolongé sur  $[0,1]$  en  $\bar{T}$  (les quantités  $(y^*, \rho_1, \dots, \rho_k)$  constituent alors le jet d'ordre  $k$  de  $f$  en 1). ■

Propriété 15 : (Caractérisation des suites de  $S_k$ )

Soit  $\{S_i\}$  une suite appartenant à  $S_k$  (voir section 2 déf. 3). Il existe  $f$ , de classe  $C^k$  (dans un voisinage de la limite de  $\{S_i\}$ ), telle que  $S_{i+1} = f(S_i)$  ( $\forall i \geq i_0$ ). Réciproquement soit  $\{S_i\}$  une suite générée par  $S_{i+1} = f(S_i)$ ,  $f$  admettant un point fixe  $S^*$ , de classe  $C^k$ , telle que  $|f'(S^*)| < 1$ ,  $f'(S^*) \neq 0$ ; la suite  $\{S_i\}$  appartient à  $S_k$ .

Démonstration :

La seconde partie du théorème est évidente. Montrons que toute suite de  $S_k$  est générée par  $S_{i+1} = f(S_i)$  ( $f$  de classe  $C^k$ ).

Soit  $\{S_i\}$  une suite de  $S_k$ .

Comme  $S_k \subset S_1$ , il existe un indice au delà duquel la suite est soit monotone, soit alternée.

Supposons que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = \rho_1 > 0$  (suite monotone)

On peut supposer  $\{S_i\}$  monotone croissante (sinon il suffit de poser  $S'_i = -S_i$ ).

Appliquons le résultat de la propriété 14, en posant

$$\begin{aligned} x_i &= S_i \\ y_i &= S_{i+1} \end{aligned}$$

Il existe  $f \in C^k [S_0, S^*]$  telle que

$$\begin{aligned} S_{i+1} &= f(S_i) \\ S^* &= f(S^*) \end{aligned}$$

Supposons  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = \rho_1 < 0$

Comme  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+2}}{e_i} = \rho_1^2$  ( $0 < \rho_1^2 < 1$ ), les deux sous-suites  $\{S_1, S_3 \dots S_{2i+1} \dots\}$  et  $\{S_0, S_2 \dots S_{2i} \dots\}$  sont à convergence linéaire et monotones (à partir d'un certain rang). De plus, elles appartiennent à  $S_k$ . En effet, posons

$$P_j(x) = \rho_1 x + \dots + \rho_j x^j$$

$$\frac{e_{i+1} - P_{j-1}(e_i)}{e_i^j} \rightarrow \rho_j \Rightarrow e_{i+1} - P_j(e_i) \rightarrow 0 \quad j = 1 \dots k$$

Posons  $\epsilon_i = e_{i+1} - P_k(e_i)$ . Soit  $\epsilon > 0$ .

Il existe un indice  $i_0$  tel que pour  $i \geq i_0$   $|\epsilon_i| < \epsilon$

$e_{i+2} - P_k(P_k(e_i)) = e_{i+2} - P_k(e_{i+1} - \epsilon_i) = e_{i+2} - P_k(e_{i+1}) + \epsilon_i P'_k(\eta)$ . ( $\eta \in [S_1 S^*]$  ou  $[S^* S_1]$ , selon la position de  $S_1$  par rapport à  $S^*$ )

$$|e_{i+2} - P_k(P_k(e_i))| \leq |e_{i+2} - P_k(e_{i+1})| + \epsilon |P'_k(\eta)|$$

Donc  $e_{i+2} - P_k(P_k(e_i)) \rightarrow 0$  quand  $i \rightarrow \infty$

$P_k(P_k(e_i))$  est un polynome de degré  $2k$  en  $e_i$ ; il existe donc  $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_k$  tels que

$$\lim_{e_i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+2}}{e_i} = \tilde{\rho}_1$$

$$\lim_{e_i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+2} - \tilde{\rho}_1 e_i - \dots - \tilde{\rho}_{j-1} e_i^{j-1}}{e_i^j} = \tilde{\rho}_j \quad j = 2 \dots k$$

Les deux sous suites appartiennent donc à  $S_k$  et sont caractérisées par les mêmes constantes  $\tilde{\rho}_j$  ( $j = 1 \dots k$ )

Supposons  $\{S_{2i+1}\}$  monotone croissante et  $\{S_{2i}\}$  monotone décroissante.

Posons  $x_1 = S_{2i-1}$   $y_1 = S_{2i}$  Il existe  $f_1 \in C^k [S_1 S^*]$  telle que  $S_{2i} = f_1(S_{2i-1})$

Posons  $x_1 = S_{2i}$   $y_1 = S_{2i+1}$  Il existe  $f_2 \in C^k [S^* S_0]$  telle que  $S_{2i+1} = f_2(S_{2i})$

Soit  $f \in C^k [S_1 S_0]$  telle que  $f(x) = f_1(x)$  si  $x \leq S^*$   
 $f(x) = f_2(x)$  si  $x \geq S^*$

$$f^j(S^*) = f_1^{(j)}(S^*) = f_2^{(j)}(S^*) = j! \tilde{\rho}_j \quad (j = 0 \dots k)$$

$f$  est de classe  $C^k$  sur  $[S_1 S_0]$  et vérifie

$$S_{i+1} = f(S_i) \quad \blacksquare$$

### 3 - 2 Algorithme d'accélération de convergence de degré k (interpolation inverse)

Soit  $\{S_i\}$  une suite de  $S_k$ . D'après la propriété 15, il existe  $F$ , de classe  $C^k$  telle que  $S_{i+1} = F(S_i)$ ;  $S^* = F(S^*)$  et  $|F'(S^*)| < 1$ . Nous montrons dans ce paragraphe que l'approximation de  $S^*$  par une technique d'interpolation inverse, conduit à des méthodes d'accélération de convergence.

Posons  $F(x) = F(x) - x$ .

Comme  $|F'(S^*)| < 1$ , la fonction  $F$  admet dans un voisinage de  $S^*$  une fonction inverse  $f$ .

$$y = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f(y)$$

$$S_{i+1} - S_i = F(S_i) \quad \Leftrightarrow \quad S_i = f(\Delta S_i)$$

De plus  $S^* = f(0)$  et  $f$  est de classe  $C^k$  dans un voisinage de 0.

Approcher la limite  $S^*$  de  $\{S_i\}$  revient donc à approcher  $f(0)$ .

Soient  $S_i, S_{i+1}, \dots, S_{i+p}$  ( $p+1$ ) termes consécutifs de la suite  $\{S_i\}$ . On a donc  $S_i = f(\Delta S_i)$

Supposons (ce qui est vérifié pour  $j > j_0$ ) que

$$|\Delta S_{j+1}| < |\Delta S_j| \quad (j = i, \dots, i + p - 1)$$

Il existe alors un polynôme  $P_1^{p-1}$  (de degré  $p-1$ ) unique tel que

$$\begin{cases} f(\Delta S_i) = P_1^{p-1}(\Delta S_i) \\ \vdots \\ f(\Delta S_{i+p-1}) = P_1^{p-1}(\Delta S_{i+p-1}) \end{cases}$$

Posons  $P_1^{p-1} = P_1^{p-1}(0)$  (Extrapolation polynomiale en 0).

L'erreur d'interpolation polynomiale en 0 s'écrit :

$$|f(0) - P_1^{p-1}| = |\Delta S_i \dots \Delta S_{i+p-1} \frac{f^{(p)}(\xi)}{p!}| \leq |\Delta S_i|^p M \quad (p \leq k)$$

$$|S^* - P_1^{p-1}| \leq |e_{i+1} - e_i|^p M \leq |e_i^p| \left| \frac{e_{i+1}}{e_i} - 1 \right|^p M$$

$$\text{D'où} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|S^* - P_1^{p-1}|}{e_i^{p-1}} = 0$$

-----  
Technique de construction de  $P_1^{p-1}$

L'utilisation du procédé de Neville-Aitken conduit à fabriquer le tableau triangulaire

$$\begin{array}{ccccccc}
 f(\Delta S_1) & = & S_1 & & & & \\
 & & & P_1^1 & & & \\
 & & S_{1+1} & & \cdot & & \\
 & & & P_{1+1}^1 & & \cdot & \\
 & & S_{1+2} & & & & P_1^P \\
 & & \vdots & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & S_{1+p} & & & & 
 \end{array}$$

Dans chaque colonne de ce tableau les quantités  $P_k^j$  ( $j$  fixé) correspondent à un procédé d'accélération de degré  $j$  et dans la colonne 1 on retrouve le procédé d'accélération de convergence d'Aitken.

La formule de Neville-Aitken permet de calculer les quantités de la colonne  $(l+1)$  en fonction de celles de la colonne  $l$ .

$$P_j^{l+1} = \frac{\Delta S_{j+l+1} P_j^l - \Delta S_j P_{j+1}^l}{\Delta S_{j+l+1} - \Delta S_j}$$

D'autre part

$$P_1^j = \frac{
 \begin{vmatrix}
 S_1 & S_{1+1} & \dots & S_{1+j} \\
 \Delta S_1 & & & \Delta S_{1+j} \\
 \vdots & & & \\
 (\Delta S_1)^j & \dots & \dots & (\Delta S_{1+j})^j
 \end{vmatrix}
 }{
 \begin{vmatrix}
 1 & & & 1 \\
 \Delta S_1 & & & \Delta S_{1+j} \\
 \vdots & & & \\
 (\Delta S_1)^j & \dots & \dots & (\Delta S_{1+j})^j
 \end{vmatrix}
 }$$

L'écriture de  $P_1^j$  sous forme d'un rapport de déterminants montre que  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  la suite  $\{a S_1 + b\}$  est transformée en  $\{a P_1^j + b\}$ . Le procédé d'accélération ainsi défini est un procédé quasi-linéaire.

#### Exemple numérique

Suite  $S_{i+1} = e^{-S_i}$  ( $S_0 = 0$   $\lim = 0.5671432904097838$ )

Dans les diverses colonnes du schéma triangulaire de Neville-Aitken, notons les chiffres exacts :



Indice	Colonnes								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0								
2	0	0							
3	0	1	3						
4	1	1	4	3					
5	1	1	4	4	5				
6	1	2	5	6	8	8			
7	1	3	6	7	9	9	9		
8	2	3	7	7	10	11	11	11	12

### 3 - 3 Accélération de la convergence par interpolation inverse généralisée

$\{S_1\}$  étant une suite de  $S_k$ , nous déterminons dans ce paragraphe à quelles conditions une famille de fonctions permet de définir un procédé d'accélération de convergence de degré  $k - 1$ . Nous montrons que l'utilisation d'un procédé d'accélération de degré  $k - 1$  nécessite l'inversion d'une matrice de dimensions  $k \times k$  ; on n'a pas d'algorithme de type Neville-Aitken, et les procédés obtenus n'ont pas la propriété de quasi-linéarité.

Nous montrons enfin que l'utilisation des fractions rationnelles permet de définir des procédés quasi-linéaires pour lesquels il existe un algorithme de calcul (mais on ne peut pas prouver qu'il s'agit d'algorithmes d'accélération de convergence).

#### Un procédé d'extrapolation

Soient  $g_1(x), \dots, g_p(x)$   $p$  fonctions appartenant à  $C^p[-1, +1]$ , formant un système unisolvent sur  $[-1, +1]$ , engendrant un sous-espace  $G$  de  $C^p[-1, +1]$ .

Soit  $\{x_1\}$  une suite d'éléments de  $[-1, +1]$ , de limite 0, telle que la suite  $\{|x_1|\}$  soit strictement monotone décroissante.

Notons

$$G = \begin{pmatrix} g_1(0) & \dots & g_p(0) \\ g'_1(0) & \dots & g'_p(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ g_1^{(p-1)}(0) & \dots & g_p^{(p-1)}(0) \end{pmatrix}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} g_1(x_1) & \dots & g_p(x_1) \\ g_1(x_{i+1}) & \dots & g_p(x_{i+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ g_1(x_{i+p-1}) & \dots & g_p(x_{i+p-1}) \end{pmatrix}$$

Soit  $A_1$  l'ensemble des  $p$  abscisses  $\{x_1, x_{i+1}, \dots, x_{i+p-1}\}$ ; étant donné  $f \in C^k[-1+1]$  ( $k \geq p$ ), notons  $g_{A_1}(x) \in G$  la fonction qui interpole  $f$  aux abscisses  $x_1, x_{i+1}, \dots, x_{i+p-1}$ . L'extrapolation de  $g_{A_1}(x)$  en 0 fournit une valeur  $T_1$ .

$$T_1 = g_{A_1}(0)$$

Propriété 16 :

Sous l'hypothèse  $|G| \neq 0$ , on a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{T_1 - f(0)}{x_1^{p-1}} = 0$$

Démonstration

Le système de fonctions  $g_i(x)$  ( $i = 1 \dots p$ ) étant unisolvent sur  $A_1$ , il y a existence et unicité de l'interpolant  $g_{A_1}(x)$  (V i). On a :

$$g_{A_1}(x) = \sum_{j=1}^p \alpha_j^{(i)} g_j(x)$$

$g_{A_1}(x)$  satisfait aux conditions d'interpolation :

$$(1) \quad f(x_{i+\ell}) = \sum_{j=1}^p \alpha_j^{(i)} g_j(x_{i+\ell}) \quad \ell = 0, \dots, p-1$$

D'où

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{(i)} \\ \vdots \\ \alpha_p^{(i)} \end{pmatrix} = G_1^{-1} \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{i+p-1}) \end{pmatrix}$$

Montrons que les  $\alpha_j^{(i)}$  sont uniformément bornés (indépendamment de l'indice  $i$ ).

Posons  $D^k f(x_1) = k! [f(x_1), \dots, f(x_1 + k)]$  ( $k = 0 \dots p-1$ ), la quantité entre crochets désignant la différence divisée d'ordre  $k$ .

On a  $\lim_{i \rightarrow \infty} D^k f(x_1) = f^{(k)}(0)$   $k = 0, 1 \dots p-1$  (puisque  $f^{(k)}$  existe et est continue)

De même  $\lim_{i \rightarrow \infty} D^k g_j(x_1) = g_j^{(k)}(0)$   $k = 0, 1 \dots p-1$   
 $j = 1 \dots p$ .

Les relations (1) sont équivalentes à :

$$(2) \quad \mathcal{D}^k f(x_1) = \sum_{j=1}^p \alpha_j^{(i)} \mathcal{D}^k g_j(x_1) \quad k = 0, 1, \dots, p-1$$

Notons  $DG_1$  la matrice dont les éléments sont

$$\mathcal{D}^k g_j(x_1) \quad \left( \begin{array}{l} j = 1 \dots p \quad : \text{indice de colonne} \\ k = 0, \dots, p-1 \quad : \text{indice de ligne} \end{array} \right)$$

Notons  $Df_1$  la colonne dont les éléments sont  $\mathcal{D}^k f(x_1)$  ( $k = 0 \dots p-1$ ) .

La matrice  $DG_1$  est régulière (car ses lignes sont des combinaisons linéaires des lignes de  $G_1$ , la  $\ell^{\text{ème}}$  ligne de  $DG_1$  étant combinaison linéaire à coefficients  $\neq 0$ , des lignes  $0, 1, \dots, \ell-1, \ell$  de  $G_1$ )

Les relations (2) s'écrivent matriciellement

$$DG_1 \begin{pmatrix} (1) \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ (1) \\ \alpha_p \end{pmatrix} = Df_1$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Df_1 = \begin{pmatrix} f(0) \\ \vdots \\ f^{(p-1)}(0) \end{pmatrix} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} DG_1 = G$$

$DG_1$  est régulière  $\forall i$

$G$  est régulière

Soit  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$  la solution de

$$G \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ \vdots \\ f^{(p-1)}(0) \end{pmatrix}$$

$$\text{On a} \quad \lim_1 \begin{pmatrix} (1) \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ (1) \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

Ceci montre que l'interpolant  $g_{A_1}(x)$  a pour limite l'interpolant de Taylor en 0, et que les coefficients  $\alpha_j$  sont uniformément bornés.

Il existe donc  $K$  tel que :

$$\forall j \quad |\alpha_j^{(1)}| \leq K \quad j = 1 \dots p$$

Il existe aussi  $K_1$  tel que :

$$\forall x \in [-1 + 1] \quad |g_j^{(p)}(x)| \leq K_1 \quad j = 1 \dots p$$

La fonction d'interpolation  $g_{A_1}(x) = \sum \alpha_j^{(1)} g_j(x)$  vérifie donc

$$|g_{A_1}^{(p)}(x)| \leq K_2$$

$f^{(p)}(x)$  étant borné on a aussi :

$$|f^{(p)}(x) - g_{A_1}^{(p)}(x)| \leq C$$

On sait que si deux fonctions  $f$  et  $g$  coïncident en  $p$  points  $x_1, \dots, x_p$ , il existe  $\xi$  appartenant au plus petit intervalle contenant  $c, x_1, \dots, x_p$  tel que

$$f(c) - g(c) = \frac{(c - x_1) \dots (c - x_p)}{p!} [f^{(p)}(\xi) - g^{(p)}(\xi)]$$

Appliquons ce résultat à l'interpolant  $g_{A_1}(x)$  et en  $c = 0$

$$|f(0) - g_{A_1}(0)| \leq \frac{|x_1 \dots x_{i+p-1}|}{p!} |f^{(p)}(\xi) - g_{A_1}^{(p)}(\xi)| \leq |x_1 \dots x_{i+p-1}| \frac{C}{p!}$$

Comme  $|x_{i+p-1}| < |x_{i+p-2}| \dots < |x_1|$

$$|f(0) - g_{A_1}(0)| \leq |x_1|^p L \quad T_1 = g_{A_1}(0)$$

$$\text{D'où } \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{T_1 - f(0)}{x_1^{p-1}} = 0 \quad \blacksquare$$

*Remarque :*

L'hypothèse  $|G| \neq 0$  est nécessaire.

Soit par exemple, la famille  $\{1, x^3\}$ , unisolvente sur  $[-1 + 1]$

$$\text{On a } G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{T_1 - f(0)}{x_1} = \frac{\left(\frac{x_{i+1}}{x_1}\right)^3 \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1} \frac{x_{i+1}}{x_1} \frac{f(x_{i+1}) - f(0)}{x_{i+1}}}{\left(\frac{x_{i+1}}{x_1}\right)^3 - 1}$$

Soit la suite  $x_{i+1} = \alpha x_1$  ( $0 < \alpha < 1$ ) et  $f$  tel que  $f'(0) \neq 0$

$$\lim_{x_1} \frac{T_1 - f(0)}{x_1} = \frac{\alpha^3 f'(0) - \alpha f''(0)}{\alpha^3 - 1} \neq 0 \quad \blacksquare$$

*Remarque :*

Le procédé d'extrapolation (sur des ensembles  $A_i = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+p-1}\}$ , ( $i = 1, 2, \dots$ )) possède la propriété 16 sous la condition :

$\{|x_i|\}$  strictement monotone décroissante.

Laurent ("Etude de procédés d'extrapolation en analyse numérique", Thèse - Grenoble 1964) a étudié la convergence d'un procédé d'extrapolation sur des ensembles  $X_i = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). La suite  $\{x_i\}$  doit vérifier la condition ( $\alpha$ ):

Il existe  $\alpha > 1$  tel que

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \geq \alpha \quad \forall n \text{ (c'est-à-dire la suite } \{x_i\} \text{ doit être à convergence linéaire,}$$

monotone :  $\{x_i\} \in S_1^+$ ). Cette condition n'est pas nécessaire pour notre propos ; nous utilisons constamment des suites à convergence linéaire, parce qu'il est possible de caractériser ces suites comme suites d'itérés d'une fonction continue, dérivable ( $S_{i+1} = f(S_i)$  ; propriété 15).

Propriété 17 :

Soit  $\{S_i\}$  une suite de  $S_k$  et  $g_1(x) \dots g_p(x)$  un ensemble de fonctions  $p$  fois continuellement dérivables en 0 ( $k \geq p$ ), unisolvent sur  $[-1, +1]$ . Supposons  $|G| \neq 0$ .

Posons

$$G_1 = \begin{pmatrix} g_1(\Delta S_1) & \dots & g_p(\Delta S_1) \\ \vdots & & \\ g_1(\Delta S_{i+p-1}) & \dots & g_p(\Delta S_{i+p-1}) \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit} \quad T_1 = [g_1(0), g_2(0), \dots, g_p(0)] G_1^{-1} \begin{pmatrix} S_i \\ S_{i+1} \\ \vdots \\ S_{i+p-1} \end{pmatrix}$$

Le calcul de  $T_1$  correspond à un procédé d'accélération de convergence de degré  $p - 1$ .

Démonstration :

Appliquons les résultats de la propriété 16.  $\{S_i\}$  appartient à  $S_k$  ; il existe donc  $f$  telle que

$$S_i = f(\Delta S_i) \quad S^* = f(0)$$

Posons  $x_i = \Delta S_i$

On a 
$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{T_i - S^*}{(e_{i+1} - e_i)^{p-1}} = 0 \quad (\text{d'après la propriété 16})$$

Comme  $e_{i+1} - e_i = e_i \left( \frac{e_{i+1}}{e_i} - 1 \right)$ , on a aussi

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{T_i - S^*}{e_i^{p-1}} = 0$$

Le calcul de la quantité  $T_i$  de la propriété 16 correspond donc à un procédé d'accélération de convergence de degré  $p - 1$ .

On a bien :

$$T_i = \sum_{j=1}^p \alpha_j^{(1)} g_j(0) = [g_1(0) \dots g_p(0)] G_i^{-1} \begin{pmatrix} f(\Delta S_i) \\ \vdots \\ f(\Delta S_{i+p-1}) \end{pmatrix} = [g_1(0) \dots g_p(0)] G_i^{-1} \begin{pmatrix} S_i \\ \vdots \\ S_{i+p-1} \end{pmatrix}$$

*Remarque 1 :*

Comme  $\{S_i\}$  appartient à  $S_k$ , on a aussi

$$S_{i+1} = h(\Delta S_i) \quad \text{et le calcul de}$$

$$T_i = [g_1(0) \dots g_p(0)] G_i^{-1} \begin{pmatrix} S_{i+1} \\ \vdots \\ S_{i+p} \end{pmatrix} \quad \text{est aussi un procédé d'accélération de convergence de degré } p-1.$$

*Remarque 2 :*

L'hypothèse  $|G| \neq 0$  est nécessaire pour qu'il y ait accélération de la convergence de degré  $p-1$  pour toute suite de  $S_k$ . (Il suffit de se reporter à la remarque qui suit la propriété 16).

Notons  $G_i = \{g_1(x) \dots g_i(x)\}$  le sous-espace engendré par les  $i$  premières fonctions  $g_j$ .  $G_i$  permet de définir un procédé d'accélération de convergence de degré  $(i-1)$  et nous nous intéressons maintenant aux  $p$  procédés d'accélération de convergence définis par  $G_1, G_2 \dots G_p$ .

Les hypothèses nécessaires et suffisantes à l'existence de tels procédés sont : les déterminants principaux de  $G$  sont tous différents de zéro et chaque famille  $\{g_1(x) \dots g_i(x)\} \quad i = 1 \dots p$ , est unisolvente sur  $[-1, 1]$ .

Nous cherchons à quelles conditions les  $p$  procédés d'accélération de convergence sont quasi-linéaires.

Propriété 18 :

La seule famille définissant  $p$  procédés d'accélération de convergence quasi-linéaires est  $\{1, x, x^2, \dots, x^{p-1}\}$

Démonstration :

Procédons par récurrence en déterminant successivement  $g_k(x)$  ( $k = 1 \dots p$ ) et en écrivant que  $g_k(x)$  doit être tel que 3 conditions soient vérifiées :

(i)  $|G_1| \neq 0$  ce qui permet d'écrire

$$(G_1 \text{ de dimension } k) \\ T_1 = [g_1(0) \dots g_k(0)] G_1^{-1} \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_{1+k-1} \end{pmatrix}$$

(ii) Le procédé doit être quasi-linéaire. Posons  $\bar{S}_1 = a S_1 + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) et soit  $\bar{T}_1$  le transformé de  $\bar{S}_1$ ; on doit avoir

$$\bar{T}_1 = a T_1 + b \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \\ \forall S_1, S_{1+1}$$

$$(iii) \text{ Posons } G = \begin{pmatrix} g_1(0) & \dots & g_k(0) \\ \vdots & & \\ g_1^{(k-1)}(0) & \dots & g_k^{(k-1)}(0) \end{pmatrix} \quad \text{On doit avoir } |G| \neq 0$$

$$k=1 \quad T_1 = \frac{g_1(0)}{g_1(\Delta S_1)} S_1$$

$$(i) \Rightarrow g_1(x) \neq 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$(ii) : \text{ Soit } \bar{S}_1 = a S_1 + b ; \text{ on a } \bar{T}_1 = a T_1 + \frac{g_1(0)}{g_1(a \Delta S_1)} b$$

$$\bar{T}_1 = a T_1 + b \quad \forall 1, a, b \Rightarrow g_1(x) = k \neq 0$$

(iii) est vérifiée

Donc $g_1(x) \equiv 1$
------------------------

Remarquons que le fait que  $g_1(x) = 1$  va apporter plusieurs simplifications dans la détermination des  $g_k(x)$  ( $k = 2 \dots p$ ) :

Tout d'abord, les  $g_k(x)$  pourront être définis à une constante additive près. Si nous choisissons cette constante telle que  $g_k(0) = 0$  ( $k = 2 \dots p$ ), on a :

$$T_1 = (1, 0 \ 0 \ 0 \ 0) G_1^{-1} \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_{i+k-1} \end{pmatrix}$$

$T_1$  est donc la première composante du système linéaire  $G_1 X = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_{i+k-1} \end{pmatrix}$ , et en appliquant la règle de Cramer :

$$T_1 = \frac{\begin{vmatrix} S_1 & g_2(\Delta S_1) & \dots & g_k(\Delta S_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{i+k-1} & & & g_k(\Delta S_{i+k-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & g_k(\Delta S_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & & g_k(\Delta S_{i+k-1}) \end{vmatrix}}$$

Il est alors évident que si  $\bar{S}_1 = S_1 + b$ , on a  $\bar{T}_1 = T_1 + b$ .

Donc la condition de quasi-linéarité s'écrit :

$$\text{si } \bar{S}_1 = a S_1 \quad \text{on doit avoir } \bar{T}_1 = a T_1$$

k = 2 (Détermination de  $g_2$ )

$$T_1 = \frac{\begin{vmatrix} S_1 & g_2(\Delta S_1) \\ S_{i+1} & g_2(\Delta S_{i+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & g_2(\Delta S_1) \\ 1 & g_2(\Delta S_{i+1}) \end{vmatrix}} = \frac{S_1 g_2(\Delta S_{i+1}) - S_{i+1} g_2(\Delta S_1)}{g_2(\Delta S_{i+1}) - g_2(\Delta S_1)}$$

La condition  $\bar{T}_1 = a T_1$  s'écrit :



$$\frac{S_1 g_2(\Delta S_{i+1}) - S_{i+1} g_2(\Delta S_i)}{g_2(\Delta S_{i+1}) - g_2(\Delta S_i)} = \frac{S_1 g_2(a \Delta S_{i+1}) - S_{i+1} g_2(a \Delta S_i)}{g_2(a \Delta S_{i+1}) - g_2(a \Delta S_i)}$$

ce qui donne, (après réduction au même dénominateur)

$$(S_{i+1} - S_1) g_2(\Delta S_{i+1}) g_2(a \Delta S_i) = (S_{i+1} - S_1) g_2(a \Delta S_{i+1}) g_2(\Delta S_i) \quad \forall S_1 \neq S_{i+1}$$

$\forall a$

On doit donc avoir  $\frac{g_2(ax)}{g_2(x)} = \lambda(a) \quad \forall x \quad \forall a \in \mathbb{R}$

La condition  $|G| \neq 0$  s'écrit

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_2'(0) \end{vmatrix} \neq 0$$

$g_2(ax) = \lambda(a) g_2(x)$  entraîne :

$a g_2'(ax) = \lambda(a) g_2'(x)$ , ce qui s'écrit (pour  $x = 0$ )

$$a = \lambda(a)$$

$g_2(x)$  doit donc vérifier  $g_2(ax) = a g_2(x)$ , ce qui donne (pour  $x = 1$ )

$$g_2(a) = a g_2(1) \quad \forall a$$

D'où

$$\boxed{g_2(x) = x}$$

On peut constater que (1) est vérifiée, la famille  $(1, x)$  étant unisolvante sur  $[-1, +1]$

### Récurrance

Supposons avoir démontré que

$$g_j(x) = x^{j-1} \quad (j = 1, 2, \dots, k-1)$$

Cherchons à déterminer  $g_k(x)$

La condition  $\bar{T}_i = a T_i$  s'écrit (après simplifications par puissances de  $a$ )

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} S_1 & \Delta S_1 & \dots & (\Delta S_1)^{k-2} & g_k(\Delta S_1) & S_1 & (\Delta S_1)^{k-2} & g_k(a \Delta S_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{i+k-1} & \Delta S_{i+k-1} & & (\Delta S_{i+k-1})^{k-2} & g_k(\Delta S_{i+k-1}) & S_{i+k-1} & (\Delta S_{i+k-1})^{k-2} & g_k(a \Delta S_{i+k-1}) \end{array} = \begin{array}{c|ccc|ccc} 1 & & & g_k(\Delta S_1) & 1 & & & g_k(a \Delta S_1) \\ 1 & & & \vdots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & & & g_k(\Delta S_{i+k-1}) & 1 & & & g_k(a \Delta S_{i+k-1}) \end{array}$$

$$\frac{\sum_{j=0}^{k-1} A_{jk} (S_1) g_k (\Delta S_{1+j})}{\sum_{j=0}^{k-1} B_{jk} (S_1) g_k (\Delta S_{1+j})} = \frac{\sum A_{jk} g_k (a \Delta S_{1+j})}{\sum B_{jk} g_k (a \Delta S_{1+j})}$$

$A_{jk} (S_1)$  : Cofacteur d'indice  $j$   $k$  pour les numérateurs

$B_{jk} (S_1)$  : Cofacteur d'indice  $j$   $k$  pour les dénominateurs

Posons  $\alpha_j = A_{jk} (S_1)$  ;  $\beta_j = B_{jk} (S_1)$  (On a  $\sum \beta_j = 0$ )

$$a_j = g_k (\Delta S_{1+j}) \quad b_j = g_k (a \Delta S_{1+j})$$

La relation ci-dessus s'écrit :

$$(1) \quad \frac{\sum \alpha_j a_j}{\sum \beta_j a_j} = \frac{\sum \alpha_j b_j}{\sum \beta_j b_j}$$

Considérons dans  $\mathbb{R}^2$  les points :  $A_j = (a_j, b_j)$   $j = 0 \dots k-1$

$$\vec{OA} = \sum \alpha_j \vec{OA}_j \quad a \text{ pour composantes : } (X_1, Y_1)$$

$$\vec{OB} = \sum \beta_j \vec{OA}_j \quad a \text{ pour composantes : } (X_2, Y_2)$$

La relation (1) s'écrit  $\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2}$  ce qui implique que  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$  sont co-linéaires. La relation (1) devant avoir lieu quelque soit  $a$  et quelle que soit la suite  $\{S_1\}$ , ce n'est possible que si les points  $O, A_0, \dots, A_{k-1}$  sont alignés c'est-à-dire :

$$\frac{b_j}{a_j} = p \quad \forall j = 0, 1 \dots k-1$$

On en déduit :

$$\frac{g_k(a x)}{g_k(x)} = \lambda_k(a)$$

$$(2) \quad g_k(a x) = \lambda_k(a) g_k(x)$$

La condition  $|G| \neq 0$  entraîne  $g_k^{(k-1)}(0) \neq 0$

Dérivons  $(k-1)$  fois l'identité (2) ; on obtient :

$$a^{k-1} g_k^{(k-1)}(a x) = \lambda_k(a) g_k^{(k-1)}(x), \text{ ce qui donne (pour } x = 0)$$

$$\lambda_k(a) = a^{k-1}$$

$$g_k(a x) = a^{k-1} g_k(x) \quad \forall a \text{ s'écrit (pour } x = 1)$$

$$g_k(a) = a^{k-1} g_k(1)$$

D'où

$$g_k(x) = x^{k-1}$$

La récurrence est démontrée, et on peut constater que (1) est vérifiée, la famille  $(1, x, \dots, x^{k-1})$  étant unisolvente sur  $[-1, +1]$  ■

#### Exemple numérique

Utilisons la famille  $\{1, e^{a_1 x}, \dots, e^{a_p x}\}$   $a_i \neq a_j$  si  $i \neq j$ .

Il est facile de vérifier que pour cette famille  $|G| \neq 0$  et  $|G_i| \neq 0$  (pour un choix d'abscisses distinctes ; voir, par exemple [24])

Suite  $S_{i+1} = e^{-S_i}$  (famille  $1, e^x, e^{2x}, e^{3x}$ )

Eléments de la suite	Suite transformée (procédé d'accélération de degré 3)
.5004735035636368	.7857451572014514
.6139236569337287	.5597243777530564
.6062435350855973	.6522239324990003
.5542211602259033	.5663795335725237
.5453957859753270	.5907161237327307
.5689332655856187	.5670576168395269
.5796123355033703	.5752557387203079
.5667732366399462	.5671333332167727
.5601154613610391	.5696433329634992
.5672051392642717	.5671423329723373
.5711431150301769	.5679659058627104
.5671314543442931	.5671431874353687
.5648793473913495	.5674043780293547
.5671453212517361	.5671432799957410
.5684287250293607	.5672273943219463
.5671429312657322	.5671432393136303
.5664147331468333	.5671733378937135
.5671433637837463	.5671432932977389
.5675566373232834	.5671523272636729
.5671432775393473	.5671432903931412
.5669089119214953	.5671463763015602
.5671432927565753	.5671432904035317
.5672762321755695	.5671441937369871
.5671432399309953	.5671432934096591
.5670678983937834	.5671435303550931
.5671432904379336	.5671432904097704
.5671363533993570	.5671433338551671
.5671432933955202	.5671432934297823
.5671190407572150	.5671433204623965
.5671432904123947	.5671432904097704
.5671570440012975	.5671433300770249
.5671432904093091	.5671432904097704
.5671354002062784	.5671432935191253
.5671432904093693	.5671432904097704

Le phénomène d'accélération de convergence est moins visible que pour l'extrapolation polynomiale, certainement parce que le procédé n'est pas quasi-linéaire.

Signalons qu'il n'est pas nécessaire de faire de l'extrapolation par des fonctions appartenant à un sous-espace vectoriel. Il est facile de vérifier que l'extrapolation par fractions rationnelles fournit des procédés quasi-linéaires (sous réserve de l'existence et unicité de l'interpolant).

Propriété 19 :

L'extrapolation par fractions rationnelles de "degrés" successifs  $\frac{p}{p}$ ,  $\frac{p+1}{p}$ ,  $\frac{p+1}{p+1}$ , ...., fournit un procédé quasi-linéaire.

Démonstration

La formule d'interpolation de Thiele (pour interpoler  $f(x)$ ) revient à développer  $f(x)$  en fraction continue :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{\alpha_1} + \frac{x - x_1}{\alpha_2} + \dots$$

Les  $\alpha_i$  sont construits à partir des différences réciproques (cf [24], [4]) et le  $k^{\text{ème}}$  approximant de cette fraction continue (soit  $C_k(x)$ ) vérifie :

$$C_k(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, \dots, k$$

Soit  $\{S_i\}$  une suite de  $S_k$  (donc telle que  $S_i = f(\Delta S_i)$ ) ; utilisons la formule d'interpolation de Thiele pour

$$\begin{aligned} x_j &= \Delta S_{i+j} \\ y_j &= S_{i+j} \end{aligned} \quad (j = 0, \dots, k)$$

et soit  $\bar{T}_i$  la valeur du  $k^{\text{ème}}$  approximant prise à l'abscisse 0

$$(1) \quad \bar{T}_i = S_i - \frac{\Delta S_i}{\alpha_1} - \frac{\Delta S_{i+1}}{\alpha_2} - \dots - \frac{\Delta S_{i+k-1}}{\alpha_k}$$

$$\alpha_1 : \text{différence réciproque d'ordre 1} = \frac{\Delta S_{i+1} - \Delta S_i}{S_{i+1} - S_i}$$

$\alpha_i$  : différence réciproque d'ordre  $i$ .

Vérifions la propriété de quasi-linéarité :

Posons  $\bar{S}_i = a S_i + b$  ; la formule de Thiele s'écrit :

$$(2) \quad \bar{T}_i = \bar{S}_i - \frac{\Delta \bar{S}_i}{\bar{\alpha}_1} - \frac{\Delta \bar{S}_{i+1}}{\bar{\alpha}_2} - \dots - \frac{\Delta \bar{S}_{i+k-1}}{\bar{\alpha}_k}$$

Il vient immédiatement que :

$$\text{si } i \text{ est impair} \quad \bar{\alpha}_i = \alpha_i$$

$$i \text{ est pair} \quad \bar{a}_1 = a_{i+1}$$

L'"extrémité" de la fraction continue s'écrit :

$$\alpha_{2p-1} - \frac{\Delta S_{1+2p-1}}{\alpha_{2p}} \quad (\text{dans le cas où } k = 2p)$$

ou bien

$$\alpha_{2p-1} - \frac{\Delta S_{1+2p-1}}{\alpha_{2p} - \frac{\Delta S_{1+2p}}{\alpha_{2p+1}}} \quad (\text{dans le cas où } k = 2p+1)$$

$$\bar{\alpha}_{2p-1} - \frac{\Delta \bar{S}_{1+2p-1}}{\bar{\alpha}_{2p}} = \alpha_{2p-1} - \frac{a \Delta S_{1+2p-1}}{a \alpha_{2p}} = \alpha_{2p-1} - \frac{\Delta S_{1+2p-1}}{\alpha_{2p}}$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{2p-1} - \frac{\Delta \bar{S}_{1+2p-1}}{\bar{\alpha}_{2p} - \frac{\Delta \bar{S}_{1+2p}}{\bar{\alpha}_{2p+1}}} &= \alpha_{2p-1} - \frac{a \Delta S_{1+2p-1}}{a \alpha_{2p} - \frac{a \Delta S_{1+2p}}{\alpha_{2p+1}}} \\ &= \alpha_{2p-1} - \frac{\Delta S_{1+2p-1}}{\alpha_{2p} - \frac{\Delta S_{1+2p}}{\alpha_{2p+1}}} \end{aligned}$$

Il y a donc identité pour les "extrémités" des fractions continues (1) et (2) (j variant de p jusqu'à 1). Donc

$$\alpha_1 - \frac{\Delta S_{1+1}}{\alpha_2} \dots - \frac{\Delta S_{1+k-1}}{\alpha_k} = \bar{\alpha}_1 - \frac{\Delta \bar{S}_{1+1}}{\bar{\alpha}_2} \dots - \frac{\Delta \bar{S}_{1+k-1}}{\bar{\alpha}_k}$$

Il est alors immédiat que  $\bar{T}_1 = a T_1 + b$  ■

*Remarque :*

Nous venons simplement de démontrer la quasi-linéarité d'un procédé de transformation de suites.

L'erreur d'interpolation par fractions rationnelles ne permet pas de déduire que le procédé est un procédé d'accélération de convergence de degré  $k - 1$ . En effet, soit  $C_k^{(1)}$  la fraction rationnelle interpolant  $f(x)$  en  $x_1, \dots, x_{1+k}$  ( $x_1 = \Delta S_1 \dots x_{1+k} = \Delta S_{1+k}$ )

L'erreur d'interpolation en  $x$  est (cf [4]) :

$$f(x) - C_k^{(1)}(x) = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{1+k})}{(k+1)! [B_k^{(1)}(x)]^2} \frac{d^{k+1}}{d\xi^{k+1}} \{f(\xi) [B_k^{(1)}(\xi)]^2\}$$

$B_k^{(1)}(x)$  est le dénominateur de  $C_k^{(1)}(x)$ , et l'erreur d'interpolation en 0 peut être majorée

(à l'étape 1) si  $C_k^{(1)}(x)$  n'a pas de pôle en 0.

$$|f(0) - T_1| \leq |\Delta S_1 \dots \Delta S_{1+k}| M_1$$

(Majoration analogue à celle de l'interpolation polynomiale).

Mais lorsque  $i$  tend vers l'infini, il semble difficile de connaître la position des pôles de  $C_k^{(1)}(x)$  ; on ne peut donc donner une majoration uniforme pour  $M_1$  et on ne peut prouver que le procédé est un procédé d'accélération de convergence de degré  $k-1$ .

### Conclusion

Une suite  $\{S_i\}$  appartenant à  $S_k$  est caractérisé par la propriété : il existe  $f$  de classe  $C^k$  telle que

$$\begin{aligned} S_i &= f(\Delta S_i) & \forall i \geq i_0 \\ (S^* &= f(0)) \end{aligned}$$

$g_{A_1}(x)$  étant une fonction interpolant  $f$  aux abscisses  $\Delta S_1, \dots, \Delta S_{1+k}$ , posons  $T_1 = g_{A_1}(0)$ .

(Extrapolation en 0).

Les propriétés exigées sont :

1) Accélération de convergence de degré  $k-1$  :  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{T_i - S^*}{(S_i - S^*)^j} = 0 \quad j = 0, 1, \dots, k-1$

2) Quasi-linéarité (propriété qui résulte en fait de deux propriétés :

- "translativité" : la transformation  $\bar{S}_n = S_n + b$  implique

$$\bar{T}_n = T_n + b$$

- Homogénéité : la transformation  $\bar{S}_n = a S_n$  implique  $\bar{T}_n = a T_n$

3) Facilité de calcul de  $T_n$

Récapitulons les résultats de cette section.

Forme de l'interpolant	Accélération de la convergence	quasi-linéarité	Algorithme de calcul
Polynomial	Degré $k - 1$	{ Translativité Homogénéité	Neville-Aitken
Appartenant au sous-espace vectoriel engendré par $\{1, g_2(x), \dots, g_k(x)\}$	Degré $k - 1$	Translativité	Résolution système linéaire $k \times k$
Appartenant au sous-espace vectoriel engendré par $\{g_1(x) \dots g_k(x)\}$	Degré $k - 1$	Aucune propriété	Résolution système linéaire $k \times k$
Rationnel	Aucun résultat (pôles éventuels de l'interpolant)	{ Translativité Homogénéité	Algorithme de Thiele

#### IV - ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE PAR UTILISATION DE FONCTIONS À PLUSIEURS VARIABLES

Dans cette section, nous cherchons à approcher la limite  $S^*$  d'une suite  $\{S_i\}$  (appartenant à  $S_k$ ) par des méthodes "directes" ; ces méthodes sont déduites des méthodes de résolution des équations ([35]), et en particulier des méthodes qui résultent de la composition de formules itératives.

Soit  $g(x_0, x_1, \dots, x_q)$  une fonction de  $(q+1)$  variables, définie pour tout ensemble de variables  $(x_0 \dots x_q)$  appartenant à  $\mathbb{R}^{q+1}$ , telle que

$$\begin{cases} g(x, x, \dots, x) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ g \text{ ne s'annule que sur la diagonale de } \mathbb{R}^{q+1} \end{cases}$$

Soit  $\{S_i\} \in S_k$ .  $S^*$  (limite de  $\{S_i\}$ ) vérifie  $g(S^*, S^*, \dots, S^*) = 0$ , et comme il existe  $F$  telle que  $S_{i+1} = F(S_i)$ ,  $S^*$  est une racine de  $g(x, F(x), F(F(x)), \dots) = 0$ .

Notons  $C(x)$  la fonction composée  $g(x, F(x), F(F(x)) \dots)$ . L'unicité de la solution de  $C(x) = 0$  est liée à l'unicité de celle de  $x - F(x) = 0$ , et nous supposons qu'il existe un voisinage  $V(S^*)$  de  $S^*$  tel que  $S^*$  soit la seule racine de  $C(x) = 0$  ( $x \in V(S^*)$ ).

Soient  $S_i, S_{i+1}, \dots, S_{i+p+q}$  ( $p \geq 0$ ) des éléments successifs de la suite  $\{S_i\}$ , appartenant au voisinage  $V(S^*)$  ; il est donc possible de calculer

$$C(S_i), C(S_{i+1}) \dots C(S_{i+p}) \quad (\text{bien que la fonction } y = C(x) \text{ soit inconnue})$$

Supposons pour le moment  $C(x)$  connue, et soit  $\Phi$  une "fonction d'itération d'ordre  $m$ " (cf [35]) à  $k$  points ( $k \leq p + 1$ ), utilisée pour résoudre  $C(x) = 0$  :

$$y_i = \Phi(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k+1}; C)$$

$x_i, \dots, x_{i-k+1}$  étant voisins de  $S^*$ , on a :

$$\left| \frac{y_i - S^*}{(x_i - S^*)^m} \right| \leq M$$

(Cette formule suppose que  $C$ , c'est-à-dire  $g(x_0 \dots x_q)$  est  $m$  fois dérivable)

Propriété 20 :

$g(x_0, \dots, x_q)$  étant  $m$  fois dérivable, soit  $\Phi$  une fonction d'itération d'ordre  $m$  utilisée pour résoudre  $C(x) = 0$  ; la transformation  $T_i = \Phi(S_i, S_{i+1}, S_{i+k-1}; C)$  est un procédé d'accélération de convergence de degré  $m-1$ .

Démonstration

La formule d'erreur donne :

$$\left| \frac{T_i - S^*}{(S_i - S^*)^{m-1}} \right| \leq |S_i - S^*| M$$

$$\text{D'où } \lim_1 \frac{T_1 - S^*}{(S_1 - S^*)^{m-1}} = 0 \quad . \quad \text{On a aussi } \lim_1 \frac{T_1 - S^*}{(S_{1+k-1} - S^*)^{m-1}} = 0$$

car la suite est à convergence linéaire ■

*Remarque :*

La fonction  $\Phi$  risque de faire intervenir des dérivées, qui devront être approchées par des quotients de différences (voir exemples ci-dessous). Le degré du procédé d'accélération de convergence ne sera pas forcément entier.

Exemples d'utilisation de la propriété 20

Soit  $g(x_0, x_1)$  telle que  $g(x, x) = 0 \quad \forall x$  ( $g$  dérivable)

Résolution de  $g(x, F(x)) = 0$  par la méthode de Newton-Raphson

Une itération de Newton-Raphson s'écrit :

$$y_1 = S_1 - \frac{g(S_1, S_{1+1})}{g'_1(S_1, S_{1+1}) + F'(S_1) g'_2(S_1, S_{1+1})}$$

Estimons  $F'(S_1) \sim \frac{S_{1+1} - S_1}{S_1 - S_{1-1}}$

D'où le procédé d'accélération de convergence de degré 1 :

$$T_1 = S_1 - \frac{g(S_1, S_{1+1})}{g'_1(S_1, S_{1+1}) + \frac{S_{1+1} - S_1}{S_1 - S_{1-1}} g'_2(S_1, S_{1+1})}$$

(Si  $g(x_0, x_1) = x_1 - x_0$  ce procédé est le procédé d'Aitken)

Résolution de  $g(x, F(x)) = 0$  par la méthode de la sécante

On obtient

$$T_1 = S_1 - (S_{1+1} - S_1) \frac{g(S_1, S_{1+1})}{g(S_{1+1}, S_{1+2}) - g(S_1, S_{1+1})}$$

Montrons que c'est un procédé d'accélération de la convergence de degré 1 (on ne peut pas appliquer directement la propriété 20 car l'ordre de la sécante est non entier :  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ) (cf [35]).



$$T_1 = S_1 - (S_{i+1} - S_i) \frac{1}{\frac{g(S_{i+1}, S_{i+2})}{g(S_i, S_{i+1})} - 1}$$

Des développements de Taylor de  $g(S_{i+1}, S_{i+2})$  et  $g(S_i, S_{i+1})$  autour de  $(S^*, S^*)$  donnent :

$$\frac{g(S_{i+1}, S_{i+2})}{g(S_i, S_{i+1})} = \frac{e_{i+1} g'_1 + e_{i+2} g'_2}{e_i g'_1 + e_{i+1} g'_2} \quad (\text{Les dérivées ne sont pas prises au même point, que ce soit au numérateur ou au dénominateur}).$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{g(S_{i+1}, S_{i+2})}{g(S_i, S_{i+1})} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} \frac{g'_1 + \frac{e_{i+2}}{e_{i+1}} g'_2}{g'_1 + \frac{e_{i+1}}{e_i} g'_2} = \rho \quad (\text{pourvu que } g'_1 + \rho g'_2 \neq 0)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{T_1 - S^*}{S_i - S^*} = 1 - (\rho - 1) \frac{1}{\rho - 1} = 0$$

Résolution de  $\frac{g}{g'} = 0$  par la méthode de la sécante.

Résoudre  $\frac{g}{g'} = 0$  présente l'avantage de fournir une formule dont l'ordre est indépendant de la multiplicité de la racine.

Posons 
$$u(x) = \frac{g(x, f(x))}{g'_1(x, f(x)) + f'(x) g'_2(x, f(x))}$$

Appliquons la méthode de la corde à  $u(x) = 0$

On obtient

$$T_1 = \frac{u(S_{i+1}) S_i - u(S_i) S_{i+1}}{u(S_{i+1}) - u(S_i)}$$

(Accélération de la convergence de degré 1).

Dans le cas où  $g(x_0, x_1) = x_1 - x_0$ , ce procédé est le procédé déjà vu en section 1 propriété 6 (le  $\theta_2$ -algorithme qui a la particularité d'accélérer certaines suites à convergence logarithmique).

Propriété 21 :

Soit  $\{S_i\}$  une suite de  $S_k$  et  $H(x_1, x_2, \dots, x_p)$  une transformation ayant la propriété d'accélération de convergence de degré  $m$  ; soit  $g(x_1, \dots, x_p)$  une fonction homogène de degré  $m + 1$ , dérivable et vérifiant

$$g(1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{p-1}) \neq 0 \quad \forall \rho \neq 1$$

$$\text{Soit } T_i = H(S_1, \dots, S_{i+p}) - \frac{H(S_{i+1}, \dots, S_{i+p+1}) - H(S_i, \dots, S_{i+p})}{\frac{g(\Delta S_{i+1}, \dots, \Delta S_{i+p})}{g(\Delta S_1, \dots, \Delta S_{i+p-1})} - 1}$$

Le calcul de  $T_i$  correspond à un procédé d'accélération de convergence de degré  $m+1$ .

#### Démonstration

$$\text{Posons } \rho_{i+1} = \frac{\Delta S_{i+1}}{\Delta S_i}$$

$g$  est homogène de degré  $m+1$  :

$$T_i = H(S_1, \dots, S_{i+p}) - \frac{H(S_{i+1}, \dots, S_{i+p+1}) - H(S_i, \dots, S_{i+p})}{\rho_{i+1}^{m+1} \frac{g(1, \rho_{i+2}, \dots, \rho_{i+p}, \rho_{i+p-1}, \dots, \rho_{i+2})}{g(1, \rho_{i+1}, \dots, \rho_{i+p-1}, \dots, \rho_{i+1})} - 1}$$

En faisant les approximations

$$H(S_1, \dots, S_{i+p}) - S^* \sim M e_i^{m+1} + N e_i^{m+2}$$

$$e_{i+1} \sim r_1 e_i + r_2 e_i^2$$

$$\rho_{i+1} \sim r_2 (r_1 + 1) e_i + r_1$$

on obtient

$$\frac{g(1, \rho_{i+2}, \dots)}{g(1, \rho_{i+1}, \dots)} \sim 1 + K e_i$$

D'où

$$T_i - S^* \sim M e_i^{m+1} + N e_i^{m+2} - \frac{M e_{i+1}^{m+1} - N e_i^{m+1}}{r_1^{m+1} - 1} \sim N e_i^{m+2}$$

$$\frac{T_i - S^*}{e_i^{m+1}} \rightarrow 0 \quad \blacksquare$$

#### Application

On peut déduire de la propriété 21 un algorithme d'accélération de convergence (analogue à celui de Overholt [31], [4]).

Notons  $S_{1,0}, S_{1+1,0}, \dots$  les éléments de la suite initiale et  $G = \{g_1, g_2, \dots\}$  une famille de fonctions telles que  $g_j$  est homogène de degré  $j$ .

La suite  $\{S_{1,0}\}$  sera transformée en suites  $\{S_{1,j}\}$  :

$$S_{i,j} = S_{i,j-1} + \frac{S_{i+1,j-1} - S_{i,j-1}}{1 - \rho_{i+1}^j \frac{g_j(1, \rho_{i+2}, \dots, \rho_{i+p}, \rho_{i+p-1}, \dots, \rho_{i+2})}{g_j(1, \rho_{i+1}, \dots, \rho_{i+p-1}, \dots, \rho_{i+1})}}$$

On retrouve le procédé d'Overholt en posant  $g_j(x) = x^j$

La suite  $\{S_{i,j}\}$  ( $j$  fixé) correspond à un procédé d'accélération de degré  $j$ .

#### Exemple numérique

Utilisons les fonctions de deux variables :

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= x e^{\frac{y}{x}} \\ g_2(x, y) &= \frac{y^3}{x} \\ g_3(x, y) &= x y^2 \operatorname{Log} \frac{x^2}{y^2} \\ g_4(x, y) &= x^2 y^2 \sin \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Ces fonctions possèdent les propriétés de dérivabilité et d'homogénéité nécessaires ( $g_1(x, y)$  homogène de degré 1).

Suite  $S_{i+1} = e^{-S_i}$

On trouve dans la colonne 0 les éléments de la suite et dans les colonnes 1, 2, 3, 4 les transformés (qui correspondent à un degré d'accélération 1, 2, 3 ou 4).

## Colonne 0

.3678794411714423  
.6922006275553463  
.5004735005636368  
.6062435350855973  
.5453957859750270  
.5796123355033788  
.5601154613610891  
.5711431150801769  
.5648793473910495  
.5684287250290607  
.5664147331468833  
.5675566373282834  
.5669089119214953  
.5672762321755695  
.5670678983907884  
.5671860500993570  
.5671190400572150  
.5671570440012975  
.5671354902062784  
.5671477142601193  
.5671407814582980  
.5671447133465701  
.5671424834013070  
.5671437480994114  
.5671430308342419  
.5671434376263300  
.5671432069169136  
.5671433377622070  
.5671432635541754  
.5671433056407623  
.5671432817716367  
.5671432953088511  
.5671432876313108  
.5671432919855762  
.5671432895160837  
.5671432909166399  
.5671432901223239  
.5671432905728148  
.5671432903173219

## Colonne 1

.5713055497723089  
.5687000718137484  
.5676050193161730  
.5672988346008679  
.5671920387268823  
.5671592037894909  
.5671483663625515  
.5671449308657126  
.5671438166474379  
.5671434599334519  
.5671433448901615  
.5671433079420834  
.5671432960475050  
.5671432922234517  
.5671432909931006  
.5671432905974181  
.5671432904701350  
.5671432904291962  
.5671432904160278  
.5671432904117922  
.5671432904104299  
.5671432904099916  
.5671432904098506  
.5671432904098053  
.5671432904097908  
.5671432904097861  
.5671432904097846  
.5671432904097841  
.5671432904097840  
.5671432904097839  
.5671432904097839  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838

## Colonne 2

.5669436758051058  
.5671706539930754  
.5671374781186866  
.5671442605137322  
.5671431044638342  
.5671433233825234  
.5671432842979124  
.5671432915146339  
.5671432902071941  
.5671432904466330  
.5671432904030506  
.5671432904110110  
.5671432904095599  
.5671432904098247  
.5671432904097764  
.5671432904097852  
.5671432904097836  
.5671432904097840  
.5671432904097838  
.5671432904097839  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097839  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838

## Colonne 3

.5671425637587235  
.5671430896715980  
.5671432764732466  
.5671432885584301  
.5671432902418428  
.5671432903910127  
.5671432904079233  
.5671432904095865  
.5671432904097637  
.5671432904097817  
.5671432904097837  
.5671432904097838  
.5671432904097839  
.5671432904097839  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838

## Colonne 4

.5671431510128916  
.5671432972335545  
.5671432899695766  
.5671432904342091  
.5671432904083056  
.5671432904098691  
.5671432904097788  
.5671432904097841  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097839  
.5671432904097839  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838  
.5671432904097838



## CHAPITRE 11

## SUITES D'ÉLÉMENTS D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ

Nous traitons ce chapitre dans le même esprit que le chapitre I : connaissant  $(p+1)$  termes successifs  $S_1, S_{1+1}, \dots, S_{1+p}$  d'une suite convergente à éléments dans un espace vectoriel normé, nous cherchons à les transformer en  $T_1$ , tel que la suite  $\{T_1\}$  présente de meilleures qualités de convergence que la suite  $\{S_1\}$ .

Après avoir défini en section 1 les critères d'accélération de convergence, nous étudions en section 2 un procédé qui généralise le procédé d'Aitken.

I - GÉNÉRALITÉS1 - 1 Critères d'accélération de convergence

Soit  $E$  un espace vectoriel normé (sur  $\mathbb{R}$ , de norme  $\| \cdot \|$ ), et  $\{x_n\}, \{y_n\}$  deux suites convergentes d'éléments de  $E$ , de limites respectives  $x^*$  et  $y^*$ .

Soit  $L = \{\ell_1, \dots, \ell_k\}$  un ensemble fini de  $k$  fonctionnelles linéaires bornées, définies sur  $E$ .

$$(\ell_i \in E' \quad i = 1 \dots k)$$

Définition 1 :

On dit que  $\{x_n\}$  converge plus vite que  $\{y_n\}$  (au sens de la norme) si :

$$\lim_n \frac{\|x_n - x^*\|}{\|y_n - y^*\|} = 0$$

Définition 2 :

On dit que  $\{x_n\}$  converge plus vite que  $\{y_n\}$  (par rapport à l'ensemble de fonctionnelles)

si

$$\lim_n \frac{\ell(x_n - x^*)}{\ell(y_n - y^*)} = 0 \quad \forall \ell \in L$$

*Remarque :*

Ces deux définitions correspondent à la convergence forte et à la convergence faible de suites de  $E$ , avec cependant la restriction suivante, pour la définition 2 : la fonctionnelle  $\ell$  doit appartenir à un ensemble fini, et cette restriction nous permettra de construire effectivement des algorithmes d'accélération de convergence.

Propriété 1 :

Si  $E$  est un espace de dimension  $k$  et si les  $k$  fonctionnelles sont linéairement indépendantes,

alors :

$$\lim_n \frac{\ell_j(x_n - x^*)}{\ell_j(y_n - y^*)} = 0 \quad (\forall j = 1 \dots k) \Rightarrow \lim_n \frac{\|x_n - x^*\|}{\|y_n - y^*\|} = 0$$

Démonstration

Soit  $\| \cdot \|$  la norme de  $E$ .

On peut munir  $E$  d'une norme équivalente de la façon suivante :

à  $x \in E$  associons une norme de Holder  $\phi_p$  du vecteur de composantes  $\ell_j(x)$  ( $j = 1 \dots k$ ).

Prenons par exemple  $\phi_2$ . Notons  $\| \cdot \|$  cette norme :  $\| \| x \| \| = \left( \sum_j \ell_j^2(x) \right)^{\frac{1}{2}}$ .

$\forall \epsilon$ , il existe  $i_0$  tel que pour  $i > i_0$  :

$$|\ell_j(x_i - x^*)| < \epsilon |\ell_j(y_i - y^*)| \quad j = 1 \dots k$$

c'est-à-dire  $\ell_j^2(x_i - x^*) < \epsilon^2 \ell_j^2(y_i - y^*)$

d'où  $\sum_{j=1}^k \ell_j^2(x_i - x^*) < \epsilon^2 \sum_{j=1}^k \ell_j^2(y_i - y^*)$

$$\| \| x_i - x^* \| \| < \epsilon \| \| y_i - y^* \| \|$$

On a donc

$$\lim_i \frac{\| \| x_i - x^* \| \|}{\| \| y_i - y^* \| \|} = 0$$

On en déduit

$$\lim_i \frac{\| \| x_i - x^* \| \|}{\| \| y_i - y^* \| \|} = 0 \quad (\text{Les normes étant équivalentes}). \blacksquare$$

*Remarque :*

La réciproque de la propriété 1 est fautive, ainsi que le montre l'exemple suivant :

$$x_n = \left( \frac{\lambda}{2} \right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_n = \lambda^n \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu^n} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} 0 < \lambda < 1 \\ 2 < \mu \end{matrix}$$

Ces deux suites ont pour limite 0 et

$$\frac{\|x_n\|}{\|y_n\|} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \mu^n \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} \quad \lim_n \frac{\|x_n\|}{\|y_n\|} = 0$$

Prenons comme fonctionnelles les fonctionnelles "composantes" (qui à tout élément de  $\mathbb{R}^2$  associent respectivement la première et deuxième composante).

$$\frac{\mathcal{L}_1(x_n)}{\mathcal{L}_1(y_n)} = \left(\frac{\mu}{2}\right)^n \quad \lim \frac{\mathcal{L}_1(x_n)}{\mathcal{L}_1(y_n)} = \infty$$

$$\frac{\mathcal{L}_2(x_n)}{\mathcal{L}_2(y_n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \lim \frac{\mathcal{L}_2(x_n)}{\mathcal{L}_2(y_n)} = 0$$

### 1 - 2 Accélération de la convergence par rapport à la norme

Nous avons étudié au chapitre précédent une famille de suites, dont on pouvait accélérer la convergence ( $S_1$ , ensemble des suites à convergence linéaire). Nous établissons ci-dessous des résultats d'accélération de convergence pour des suites à convergence linéaire dans un espace normé ; malheureusement ces résultats ne semblent pas pouvoir conduire à des algorithmes constructifs d'accélération de convergence, car "l'information" que l'on possède sur la suite est insuffisante.

#### Définition 3 :

Une suite  $\{S_1\}$  d'un espace normé  $E$  est dite à convergence linéaire s'il existe une application  $F$  de  $E \rightarrow E$ , admettant un point fixe  $S^*$ , continue et Fréchet-différentiable dans un voisinage de  $S^*$ , telle que

$$\rho(F'(S^*)) < 1 \quad \text{et} \quad S_{i+1} = F(S_i) \quad (\rho(F'(S^*)) \neq 0)$$

( $\rho$  : rayon spectral)

Une telle suite est évidemment convergente.

Munissons  $E^{p+1}$  de la norme  $\|(x_0, x_1, \dots, x_p)\| = \sum_{i=0}^p \|x_i\|$  et soit  $G$  une application continue de  $E^{p+1} \rightarrow E$  telle que

$$G(x, x, \dots, x) = x \quad \forall x \in E$$

Soit  $\{S_1\}$  une suite d'éléments de  $E$  à convergence linéaire (générée par  $S_{i+1} = F(S_i)$ ) ; notons  $F^{[n]}$  l'application composée  $F \circ F \dots \circ F$  et  $L$  l'application de  $E \rightarrow E$  qui à  $x \in E$  associe  $y$  tel que

$$y = G(x, F(x), F^{[2]}(x), \dots, F^{[p]}(x)) = L(x)$$

Supposons  $L$  différentiable au sens de Fréchet dans un voisinage de  $S^*$ .

Propriété 2 :

Si  $L'(S^*) = 0$  la suite de terme général  $T_1 = L(S_1)$  converge plus vite que  $\{S_1\}$  (au sens de la norme).

Démonstration :

$L$  est différentiable en  $S^*$ , et  $L'(S^*) = 0$  :

$\forall \epsilon \exists r$  tel que  $\forall h$  ( $\|h\| < r$ )

$$\|L(S^* + h) - L(S^*)\| \leq \epsilon \|h\|$$

$\{S_1\}$  est convergente,  $\exists i_0$  tel que  $\forall i > i_0$   $\|S_1 - S^*\| \leq r$

$$\|L(S^* + S_1 - S^*) - L(S^*)\| \leq \epsilon \|S_1 - S^*\|$$

$$\|T_1 - S^*\| \leq \epsilon \|S_1 - S^*\|$$

D'où

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|T_1 - S^*\|}{\|S_1 - S^*\|} = 0 \quad \blacksquare$$

Propriété 3 :

Une application  $L$  vérifiant l'hypothèse de la propriété 2 est

$$L(x) = x - (F'(x) - I)^{-1} (F(x) - x)$$

Démonstration :

On peut vérifier que  $L'(S^*) = I - (F'(S^*) - I)^{-1} (F'(S^*) - I) = 0$ .  $\blacksquare$

Remarque :

La fonction  $L$  de la propriété 3 est la plus simple que l'on puisse trouver (application de  $E \rightarrow E$ ) ; elle exige néanmoins la connaissance de  $F'(S^*)$  ce qui est très rarement réalisé, en pratique.

Il faut cependant noter que l'utilisation de l' $\epsilon$ -Algorithme vectoriel ([39], [4]) à la résolution de  $x - F(x) = 0$  permet d'approcher  $(F'(x) - I)^{-1}$ , et revient donc à transformer la suite  $\{S_1\}$  en  $T_1 = L(S_1)$ .



Propriété 4 :

Soit  $\{S_i\}$  une suite à convergence linéaire engendrée par  $S_{i+1} = F(S_i)$ ,  $F$  étant tel que  $(F'(S^*) - I)^{-1}$  existe.

Notons  $A = F'(S^*)$

Soit  $\{A_i\}$  une suite d'opérateurs linéaires bornés, qui converge en norme vers  $A$ , tels que  $(A_i - I)^{-1}$  existe  $\forall i$ .

Soit  $T_i = S_i - (A_i - I)^{-1} (S_{i+1} - S_i)$ .

La suite  $\{T_i\}$  converge plus vite que  $\{S_i\}$  (au sens de la norme)

Démonstration :

$$\forall \epsilon \exists r \text{ tel que } \|h\| < r \Rightarrow \|F(S^* + h) - F(S^*) - Ah\| \leq \epsilon \|h\|$$

$\{S_i\}$  converge  $\exists i_0$  tel que  $i > i_0 \Rightarrow \|S_i - S^*\| \leq r$

$$\text{Pour } i > i_0 \quad \|F(S^* + S_i - S^*) - F(S^*) - A(S_i - S^*)\| \leq \epsilon \|S_i - S^*\|$$

$$\|e_{i+1} - A e_i\| \leq \epsilon \|e_i\|$$

D'où

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|e_{i+1} - A e_i\|}{\|e_i\|} = 0$$

Posons

$$e_i = T_i - S^*$$

$$e_i = e_i - (A_i - I)^{-1} (e_{i+1} - e_i)$$

$$\|e_i\| = \|(I - A_i)^{-1} (I - A_i) e_i + (I - A_i)^{-1} (e_{i+1} - e_i)\|$$

$$\leq \|(I - A_i)^{-1}\| \|e_{i+1} - A_i e_i\|$$

$$\frac{\|e_i\|}{\|e_i\|} \leq \|(I - A_i)^{-1}\| \frac{\|e_{i+1} - A e_i + (A - A_i) e_i\|}{\|e_i\|} \leq \|(I - A_i)^{-1}\| \left\{ \frac{\|e_{i+1} - A e_i\|}{\|e_i\|} + \frac{\|(A - A_i) e_i\|}{\|e_i\|} \right\}$$

$$\frac{\|e_i\|}{\|e_i\|} \leq \|(I - A_i)^{-1}\| \left\{ \frac{\|e_{i+1} - A e_i\|}{\|e_i\|} + \|A - A_i\| \right\}$$

D'où

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\|e_i\|}{\|e_i\|} \quad \blacksquare$$

Pour conclure ce paragraphe, nous voyons que la possibilité d'accélérer la convergence est liée à la possibilité d'approcher la différentielle d'un opérateur

### 1 - 3 Accélération de la convergence par rapport à un ensemble fini de fonctionnelles

Soit  $L = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k\}$  un ensemble de fonctionnelles linéaires bornées définies sur  $E$ . Sans vouloir traiter dans toute son ampleur le problème de l'accélération de la convergence par rapport à un ensemble de fonctionnelles, nous montrons dans ce paragraphe comment on peut se ramener à  $k$  suites de réels ; nous étudions enfin un procédé d'accélération par rapport à une fonctionnelle, qui se présente comme une modification de la formule d'Aitken.

Soit  $\{S_n\}$  une suite convergente d'éléments de  $E$  et  $\{z_n^{(1)}\}, \dots, \{z_n^{(k)}\}$   $k$  suites auxiliaires (d'éléments de  $E$ ), de limite 0.

Cherchons à quelles conditions une transformation

$$T_n = S_n + \sum_{\ell=1}^k \alpha_{\ell}^{(n)} z_n^{(\ell)}$$

accélère la convergence de  $S_n$  (par rapport à l'ensemble des fonctionnelles).

$$\text{Posons } G_n = \begin{pmatrix} \ell_1^{(1)}(z_n) & \ell_1^{(2)}(z_n) & \dots & \ell_1^{(k)}(z_n) \\ \ell_k^{(1)}(z_n) & \dots & \dots & \ell_k^{(k)}(z_n) \end{pmatrix}$$

Propriété 5 :

Supposons que l'on sache accélérer la convergence des  $k$  suites de réels  $\{\ell_j(S_n)\}$  ( $j = 1 \dots k$ ). On sait donc transformer  $\ell_j(S_n)$  en  $y_n^{(j)}$  ( $y_n^{(j)} \in \mathbb{R}$ ) tel que

$$\lim_n \frac{y_n^{(j)} - y_*^{(j)}}{\ell_j(S_n) - \ell_j(S^*)} = 0 \quad (y_*^{(j)} = \ell_j(S^*))$$

Supposons  $|G_n| \neq 0 \quad \forall n$ .

La transformation  $T_n = S_n + \sum_{\ell=1}^k \alpha_{\ell}^{(n)} z_n^{(\ell)}$  est un procédé d'accélération de convergence, si les  $\alpha_{\ell}^{(n)}$  sont solution du système

$$\begin{pmatrix} (1) \\ y_n & - & \ell_1(S_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (k) \\ y_n & - & \ell_k(S_n) \end{pmatrix} = G_n \begin{pmatrix} (n) \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ (n) \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

Démonstration :

$$\text{On a } \ell_j(T_n) = \ell_j(S_n) + \sum_{\ell=1}^k \ell_j(z_\ell) \alpha_\ell^{(n)} = \ell_j(S_n) + y_n^{(j)} - \ell_j(S_n)$$

$$\ell_j(T_n) = y_n^{(j)}$$

D'où

$$\lim_n \frac{\ell_j(T_n) - \ell_j(S^*)}{\ell_j(S_n) - \ell_j(S^*)} = 0 \quad j = 1 \dots k \quad \blacksquare$$

Remarque :

Cette propriété est souvent utilisée lorsque  $E$  est de dimension  $k$  : pour accélérer la convergence d'une suite de vecteurs de  $\mathbb{R}^k$ , il suffit d'accélérer la convergence des  $k$  suites de réels constitués par les composantes des vecteurs. (D'après la propriété 1, il y a accélération de la convergence par rapport à la norme)

Etudions maintenant un procédé qui est une modification de la formule d'Aitken (cf [17], [22]).

Soit  $\{S_n\}$  une suite faiblement convergente de l'espace normé  $E$  et  $\ell$  une fonctionnelle linéaire bornée.

Posons

$$T_n = S_n - \frac{\ell(S_{n+1} - S_n)}{\ell(S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n)} (S_{n+1} - S_n)$$

Propriété 6 :

Si la suite  $\{S_n\}$  vérifie  $\lim_n \frac{\ell(S_{n+1} - S^*)}{\ell(S_n - S^*)} = \rho$  ( $\rho \in [-1+1[$ ), la suite  $\{T_n\}$  converge plus vite que  $\{S_n\}$  par rapport à la fonctionnelle  $\ell$  ; si  $\lim_1 \frac{\|e_{i+1} - \rho e_i\|}{\|e_i\|} = 0$  ( $e_i = S_i - S^*$ ),

il y a accélération de la convergence par rapport à la norme.

Démonstration

$$\text{Posons } \epsilon_n = T_n - S^*$$

$$\ell(\epsilon_n) = \ell(e_n) - \frac{\ell(\Delta e_n)}{\ell(\Delta e_{n+1}) - \ell(\Delta e_n)} \ell(\Delta e_n)$$

Utilisons la propriété  $\lim \frac{\ell(e_{n+1})}{\ell(e_n)} = \lim \frac{\ell(\Delta e_{n+1})}{\ell(\Delta e_n)}$  (1 - 2 chapitre I)

$$\lim_n \frac{\ell(e_n)}{\ell(e_n)} = 1 - \frac{1}{\lim_n \frac{\ell(\Delta e_{n+1})}{\ell(\Delta e_n)} - 1} \lim_n \left[ \frac{\ell(e_{n+1}) - \ell(e_n)}{\ell(e_n)} \right] = 1 - \frac{1}{\rho - 1} (\rho - 1) = 0$$

Il y a accélération de la convergence par rapport à la fonctionnelle  $\ell$ .

Posons  $\rho_n = \frac{\ell(\Delta e_{n+1})}{\ell(\Delta e_n)}$  (on a  $\lim_n \rho_n = \rho$ )

Supposons que  $\lim_n \frac{\|e_{n+1} - \rho e_n\|}{\|e_n\|} = 0$

$$T_n = S_n - \frac{1}{\rho_n - 1} (S_{n+1} - S_n)$$

$$\|e_n\| = \left\| e_n - \frac{1}{\rho_n - 1} (e_{n+1} - e_n) \right\| = \left| \frac{1}{\rho_n - 1} \right| \|e_{n+1} - \rho_n e_n\|$$

$$\frac{\|e_n\|}{\|e_n\|} = \left| \frac{1}{\rho_n - 1} \right| \frac{\|e_{n+1} - \rho_n e_n\|}{\|e_n\|}$$

$$\lim_n \frac{\|e_n\|}{\|e_n\|} = \frac{1}{1 - \rho} \lim_n \frac{\|e_{n+1} - \rho e_n\|}{\|e_n\|} = 0$$

Il y a donc accélération de la convergence par rapport à la norme. ■

*Remarque :*

Le procédé de la propriété 6 peut s'interpréter de la manière suivante :

Supposons  $\{S_n\}$  engendrée par une formule itérative linéaire ( $S_{n+1} = A(S_n)$  ;  $A$  : opérateur linéaire de  $E \rightarrow E$ ) et cherchons  $T_n$  de la forme  $T_n = S_n + \alpha_n (S_{n+1} - S_n)$  tel que  $\ell(A(T_n) - T_n) = 0$ .

On obtient  $\ell(S_{n+1} - S_n + \alpha_n (S_{n+1} - 2S_{n+1} + S_n)) = 0$ .

$$\text{d'où} \quad \alpha_n = - \frac{\ell(\Delta S_n)}{\ell(\Delta^2 S_n)}$$

Ce procédé est dû à Lyusternick (cité dans [22]).

## II - LE PROCÉDÉ D'AITKEN DANS UN ESPACE DE HILBERT (RÉEL)

Dans cette section, nous étudions un procédé déjà connu sous divers noms (méthode de la sécante généralisée ([30], [16]), méthode des moments ([36]), méthode de Lanczos, des "itérations minima" ([11])) ; le procédé n'a donc rien de nouveau en soi. Par contre, nous montrons comment une approche géométrique du problème de l'accélération de la convergence, permet d'obtenir un tel procédé ; sous des hypothèses convenables ce procédé (d'accélération par rapport à un ensemble de fonctionnelles) devient un procédé d'accélération de la convergence par rapport à la norme.

### 2 - 1 Interprétation géométrique de l'accélération de la convergence dans un espace de Hilbert.

Soit  $H$  un espace de Hilbert se décomposant en :

$$H = H_1 \oplus H_2 \text{ (somme directe de deux sous-espaces orthogonaux)}$$

$\{s_n\}$  étant une suite convergente d'éléments de  $H$ , de limite  $s^*$ ,

nous noterons  $e_n = s_n - s^*$

$e_n^1, e_n^2$  : composantes de  $e_n$  sur  $H_1$  et  $H_2$ .

Propriété 7 :

Supposons que la suite convergente  $\{s_n\}$  soit telle que :

$$\lim_n \frac{\|e_n^2\|}{\|e_n^1\|} = 0$$

Notons  $\hat{H}_n$  la variété affine translatée de  $H_1$  passant par  $s_n$ , et  $\hat{t}_n$  la projection de  $s^*$  sur  $\hat{H}_n$ . La suite  $\{\hat{t}_n\}$  converge plus vite que  $\{s_n\}$  (au sens de la norme).

Démonstration :

Par construction  $\hat{t}_n - s^* = e_n^2$

$\{s_n\}$  converge ; donc  $\lim_n \|e_n^2\| = 0$  d'où  $\lim_n \hat{t}_n = s^*$

$$\frac{\|\hat{t}_n - s^*\|}{\|s_n - s^*\|} = \frac{\|e_n^2\|}{\|e_n\|}$$

Comme  $\|e_n^1\| \leq \|e_n\|$

$$\lim_n \frac{\|e_n^2\|}{\|e_n^1\|} = 0 \text{ entraîne } \lim_n \frac{\|e_n^2\|}{\|e_n\|} = 0$$

Il y a donc accélération de la convergence par rapport à la norme. ■

Propriété 8 :

Soit  $H_1$  une suite de sous-espaces tels que

$$\lim_1 \frac{\|(I - P_1) e_1\|}{\|e_1\|} = 0 \quad (P_1 : \text{opérateur de projection sur } H_1).$$

Soit  $\bar{H}_1$  la variété affine translatée de  $H_1$  passant par  $s_1$  et  $\bar{t}_1$  la projection de  $s^*$  sur  $\bar{H}_1$ .  
La suite  $\{\bar{t}_1\}$  converge plus vite que  $\{s_1\}$  (au sens de la norme).

Démonstration :

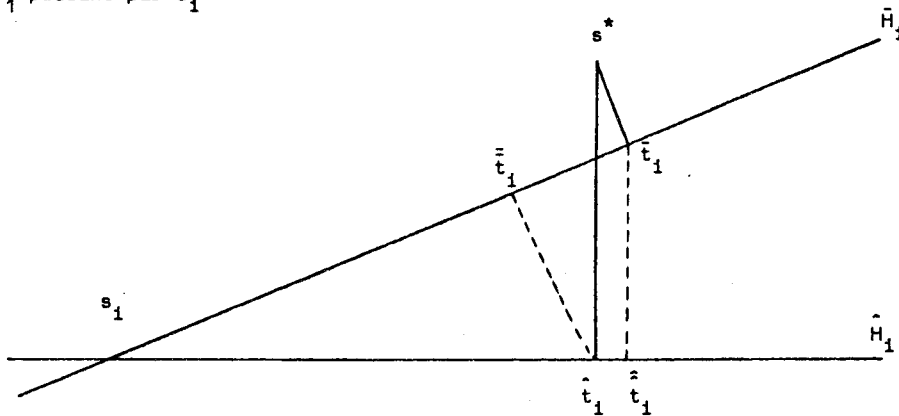
$$\text{Par construction} \quad \bar{t}_1 - s^* = (I - P_1) e_1$$

$$\text{Donc} \quad \lim_1 \frac{\|\bar{t}_1 - s^*\|}{\|s_1 - s^*\|} = 0 \quad \blacksquare$$

Remarques :

1 - Les deux constructions des propriétés 7 et 8 semblent, à priori, théoriques puisque la limite  $s^*$  n'est pas connue ; dans certains cas, on peut néanmoins calculer la projection de  $s^*$  (voir paragraphe 2 - 2)

2 - Les propriétés 7 et 8 admettent un certain nombre de variantes. Soit  $\hat{H}_1$  la variété translatée de  $H_1$  passant par  $s_1$ .



Notons  $\bar{\bar{t}}_1$  la projection de  $\hat{t}_1$  sur  $\hat{H}_1$  et  $\hat{\hat{t}}_1$  la projection de  $\bar{t}_1$  sur  $\hat{H}_1$ .

Tout élément appartenant à l'enveloppe convexe de  $\hat{t}_1$ ,  $\bar{t}_1$ ,  $\hat{\hat{t}}_1$  et  $\bar{\bar{t}}_1$  appartient à une suite qui converge plus vite que  $\{s_1\}$ .

Il suffit de montrer que  $\{\bar{\bar{t}}_1\}$  et  $\{\hat{\hat{t}}_1\}$  convergent plus vite que  $\{s_1\}$  au sens de la norme.

Par applications répétées du théorème de Pythagore, on obtient :

$$\|\bar{t}_1 - s^*\| \leq \|\hat{t}_1 - \bar{t}_1\| + \|\bar{t}_1 - s^*\| \leq \|\hat{t}_1 - s^*\| + 2\|\bar{t}_1 - s^*\|$$

$$\|\hat{t}_1 - s^*\| \leq \|\hat{t}_1 - \bar{t}_1\| + \|\bar{t}_1 - s^*\| \leq 2\|\hat{t}_1 - s^*\| + \|\bar{t}_1 - s^*\|$$

Les deux suites  $\{\bar{t}_1\}$  et  $\{\hat{t}_1\}$  convergent donc plus vite que  $\{s_1\}$  et il en est de même pour tout élément appartenant à l'enveloppe convexe de  $\hat{t}_1$ ,  $\bar{t}_1$ ,  $\hat{t}_1$  et  $\bar{t}_1$ .

3 - On peut remplacer les hypothèses de la propriété 8 par des hypothèses plus fortes :

$$\lim_1 \theta(H_1, H_1) = 0$$

$\theta(H_1, H_1)$  désigne l'angle entre les sous-espaces  $H_1$  de la propriété 8 et le sous-espace  $H_1$  de la propriété 7. (Pour une définition de l'angle entre sous-espaces, voir par exemple [19]).

On a en effet :

$$\|\bar{t}_1 - s^*\| \leq \|\bar{t}_1 - \hat{t}_1\| + \|\hat{t}_1 - s^*\|$$

$$\frac{\|\bar{t}_1 - s^*\|}{\|e_1\|} \leq \frac{\|\bar{t}_1 - \hat{t}_1\|}{\|e_1\|} + \frac{\|\hat{t}_1 - s^*\|}{\|e_1\|} \leq \theta(H_1, H_1) + \frac{\|\hat{t}_1 - s^*\|}{\|e_1\|}$$

D'où 
$$\lim \frac{\|\bar{t}_1 - s^*\|}{\|e_1\|} = 0$$

## 2 - 2 Algorithmes d'accélération de la convergence

Dans ce paragraphe nous utilisons la propriété 8 (projection de la limite de la suite sur une variété affine) pour accélérer la convergence de suites générées par

$$s_{i+1} = A s_i + b$$

A : opérateur linéaire borné de  $H \rightarrow H$ .

Nous obtenons une famille de procédés d'accélération de convergence, valables lorsque A est auto-adjoint.

Lorsque A n'est pas auto-adjoint, il est possible de déterminer la projection de la limite sur certaines variétés mais nous n'avons pu démontrer la propriété d'accélération de convergence que pour un procédé particulier.

Propriété 9 :

(Un algorithme général d'accélération de convergence)

Soit A un opérateur compact, auto-adjoint de  $H \rightarrow H$  à spectre simple, tel que  $\|A\| < 1$ .

Soient  $\lambda_i$  les valeurs propres (avec  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_i| > |\lambda_{i+1}| > \dots$ ) et  $v_i$  les éléments propres associés ( $(v_i, v_j) = 0$  si  $i \neq j$ ).

Soit  $\{s_n\}$  une suite d'éléments de  $H$  engendrée par :

$$s_{n+1} = A s_n + b$$

avec  $s_0$  tel que  $(e_0, v_1) = e_1 \neq 0$

( $e_0$  désigne l'erreur associée à  $s_0$  :  $s_0 - s^*$ ,  $s^*$  étant solution de  $s = A s + b$ ).

Considérons les sous-espaces  $H_n$  engendrés par

$$\Delta z_n, \Delta z_{n+1}, \dots, \Delta z_{n+p-1} \quad \text{avec } p \geq 1$$

où la suite  $z_i$  est telle que :  $z_{i+1} = A z_i$  ( $i \geq 0$ ),  $z_0$  étant choisi de façon que,

$$\text{pour } \Delta z_0 = \sum_1^p b_i v_i, \text{ on ait } b_i \neq 0 \quad (i = 1, \dots, p).$$

Alors la suite de sous-espaces  $H_n$ , de dimension  $p \forall n$ , satisfait pour la suite  $\{s_i\}$  aux hypothèses de la propriété 8, et fournit une suite  $\{y_i\}$  qui converge plus vite que  $\{s_i\}$ .

On a  $y_n = s_n + \sum_{j=1}^p \alpha_j \Delta z_{n+j-1}$ , où les  $\alpha_j$  sont solutions du système :

$$\begin{pmatrix} (\Delta s_n, z_n) \\ \vdots \\ (\Delta s_n, z_{n+p-1}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\Delta z_n, \Delta z_n) & \dots & (\Delta z_{n+p-1}, \Delta z_n) \\ \vdots \\ (\Delta z_n, \Delta z_{n+p-1}) & \dots & (\Delta z_{n+p-1}, \Delta z_{n+p-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = 0$$

Démonstration :

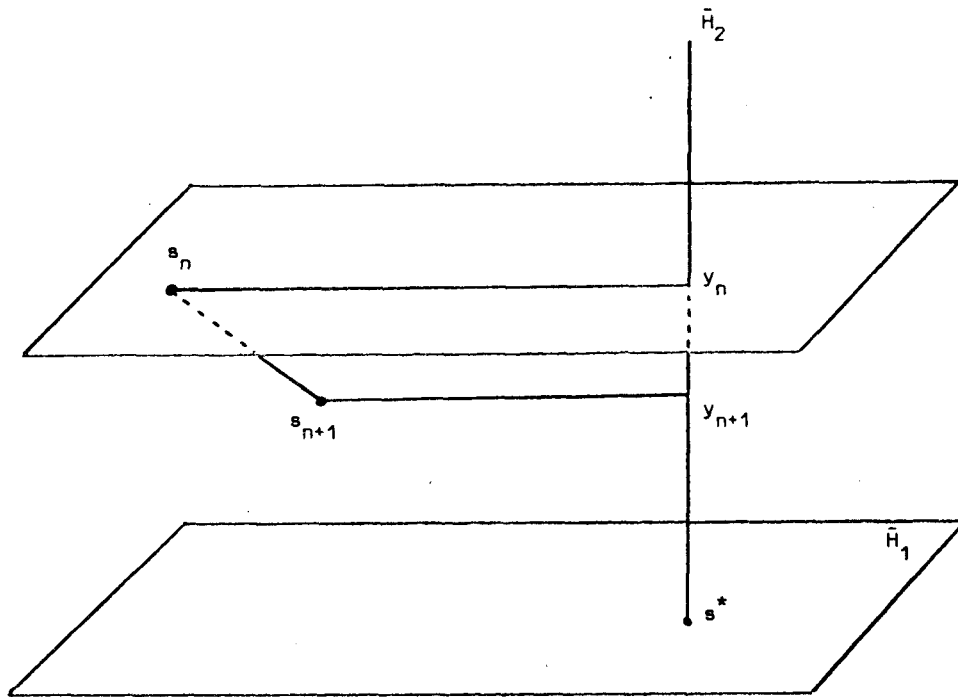
Commentaire de la démonstration, sur un exemple géométrique

Plaçons nous dans  $H = \mathbb{R}^3$ . Soit  $H_1$  le sous-espace propre de  $A$  associé aux deux valeurs propres de plus grand module, et  $H_2$  son complémentaire orthogonal.

La propriété 7 fournirait l'algorithme théorique suivant :

Soient  $\bar{H}_1$  et  $\bar{H}_2$  les variétés linéaires translées de  $H_1$  et  $H_2$  passant par  $s^*$





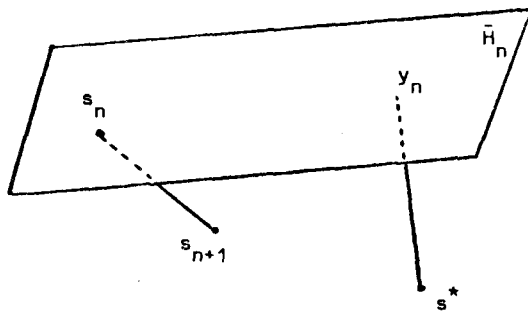
La suite  $\{s_n\}$  est "tangente" à  $\bar{H}_1$

$y_n$  : projection de  $s^*$  sur la variété translatée de  $H_1$  passant par  $s_n$ .

La suite  $\{y_n\}$  converge plus vite  $\{s_n\}$ .

L'algorithme est "théorique" car on ne connaît ni  $H_1$ , ni  $s^*$ .

La propriété 8 fournit un algorithme pratique, et ceci pour trois raisons :



On peut remplacer  $H_1$  par une suite de sous-espaces  $H_n$  tels que :

- 1) La dimension de  $H_n$  est constante
- 2) On peut "approcher" la variété translatée de  $H_1$  par  $\bar{H}_n$
- 3) On peut effectivement déterminer la projection de  $s^*$  sur cette variété.



Démonstration :

$z_0$  étant un élément de  $H$ , générons une suite auxiliaire

$$z_{i+1} = A z_i$$

Supposons que  $\Delta z_0$  se décompose sur les éléments propres de  $A$  :

$$\Delta z_0 = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots$$

Soit  $H_n$  le sous espace vectoriel engendré par  $\Delta z_n, \Delta z_{n+1}, \dots, \Delta z_{n+p-1}$ .

1)  $H_n$  est un sous-espace de dimension  $p$  (et ceci quel que soit  $n$ )

Supposons que  $\Delta z_n, \dots, \Delta z_{n+p-1}$  soient linéairement dépendants entre eux ; il existe donc

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$  tous non nuls tels que :

$$\alpha_0 \Delta z_n + \alpha_1 \Delta z_{n+1} + \dots + \alpha_{p-1} \Delta z_{n+p-1} = 0$$

En décomposant sur les  $p$  éléments propres  $v_1, v_2, \dots, v_p$ , on obtient :

$$b_1 \lambda_1^n (\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_{p-1} \lambda_1^{p-1}) = 0$$

$$b_2 \lambda_2^n (\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 + \dots + \alpha_{p-1} \lambda_2^{p-1}) = 0$$

$\vdots$

$$b_p \lambda_p^n (\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_p + \dots + \alpha_{p-1} \lambda_p^{p-1}) = 0$$

Les  $\lambda_i$  étant distincts et  $b_i \neq 0$  ( $i = 1 \dots p$ ) on ne peut qu'avoir  $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{p-1} = 0$

$H_n$  est donc de dimension  $p$ .

2) Le sous-espace  $H_n$  vérifie l'hypothèse de la propriété 8 :

$$\lim_n \frac{\|(I - P_n) e_n\|}{\|e_n\|} = 0$$

En effet  $\|(I - P_n) e_n\|$  représente la distance de  $e_n$  au sous espace  $H_n$ . Cette distance est inférieure à la distance de  $e_n$  à un élément quelconque de  $H_n$  (par exemple  $\Delta z_n$ )

$$\|(I - P_n) e_n\| \leq d(e_n, \Delta z_n) \quad (\text{distance de } e_n \text{ à la variété engendrée par } \Delta z_n).$$

Soit  $Z_n = \lambda \Delta z_n$  la projection de  $e_n$  sur le sous-espace de dimension 1 engendré par  $\Delta z_n$

$$\lambda = \frac{(e_n, \Delta z_n)}{(\Delta z_n, \Delta z_n)}$$

$$\frac{d^2(e_n, \Delta z_n)}{(e_n, e_n)} = \frac{(\lambda \Delta z_n - e_n, \lambda \Delta z_n - e_n)}{(e_n, e_n)} = 1 - \frac{(e_n, \Delta z_n)^2}{(\Delta z_n, \Delta z_n)(e_n, e_n)}$$

$$= 1 - \cos^2 \theta_n \quad (\theta_n : \text{angle entre } e_n \text{ et } \Delta z_n)$$

Montrons que  $\lim_n \cos^2 \theta_n = 1$

Supposons que  $e_0$  (erreur associée à  $s_0$ ) n'est pas orthogonale à  $v_1$  (élément propre de  $A$  associé à  $\lambda_1$ , valeur propre de plus grand module) :  $e_0 = \sum a_i v_i$  ( $a_1 \neq 0$ )

$$e_n = a_1 \lambda_1^n v_1 + \sum_2^{\infty} a_i \lambda_i^n v_i$$

$$\Delta z_n = b_1 \lambda_1^n v_1 + \sum_2^{\infty} b_i \lambda_i^n v_i$$

$$\cos^2 \theta_n = \frac{[a_1 b_1 + \sum_2^{\infty} a_i b_i (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^{2n}]}{[a_1^2 + \sum_2^{\infty} a_i^2 (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^{2n}] [b_1^2 + \sum_2^{\infty} b_i^2 (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^{2n}]}$$

$\forall \epsilon$  il existe  $N$  tel que pour  $n > N$

$$\sum_2^{\infty} a_i b_i (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^{2n} < \epsilon$$

$$\sum_2^{\infty} a_i^2 (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^{2n} < \infty$$

$$\sum_2^{\infty} b_i^2 (\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^{2n} < \infty$$

Donc  $\lim_n \cos^2 \theta_n = 1$ , d'où  $\lim_n \frac{d^2(e_n, \Delta z_n)}{\|e_n\|^2} = 0$

$$\text{et } \lim_n \frac{\|(I - P_n) e_n\|}{\|e_n\|} = 0$$

3) Calcul de la projection de  $s^*$  sur  $\bar{H}_n$  (variété translatée de  $H_n$  passant par  $s_n$ )

Notons  $y_n$  cette projection.

$y_n$  est de la forme

$$y_n = s_n + \alpha_1 \Delta z_n + \dots + \alpha_p \Delta z_{n+p-1}$$

Les  $\alpha_i$  sont déterminés par la condition

$y_n - s^* \perp H_n$ , ce qui conduit au système linéaire :

$$\begin{pmatrix} (e_n, \Delta z_n) \\ (e_n, \Delta z_{n+1}) \\ \vdots \\ (e_n, \Delta z_{n+p-1}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\Delta z_n, \Delta z_n) & \dots & (\Delta z_{n+p-1}, \Delta z_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta z_n, \Delta z_{n+p-1}) & \dots & (\Delta z_{n+p-1}, \Delta z_{n+p-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = 0$$

Le déterminant de Gram de la matrice est différent de zéro car les  $\Delta z_j$  sont linéairement indépendants.

Montrons qu'il est possible de calculer les produits scalaires du type  $(e_n, \Delta z_n)$

La suite  $\{s_n\}$  vérifie :

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= A e_n \\ e_{n+1} - e_n &= (A - I) e_n \\ e_n &= (A - I)^{-1} \Delta e_n \\ \Delta z_n &= (A - I) z_n \end{aligned}$$

( $A - I$ ) étant auto-adjoint, on a :

$$(e_n, \Delta z_n) = ((A - I)^{-1} \Delta e_n, (A - I) z_n) = (\Delta e_n, z_n) = (\Delta s_n, z_n) \quad \blacksquare$$

Propriété 10 : (Une famille d'algorithmes d'accélération de convergence)

Plaçons nous sous les hypothèses de la propriété 9 ( $p \geq 1$  étant un entier fixé).

Choisissons  $s_0$  de façon que

$$\Delta^q s_n, \dots, \Delta^q s_{n+p-1} \text{ soient linéairement indépendants } (\forall n \geq 0 \quad \forall q > 1).$$

Pour  $q = 1, 2 \dots$  posons

$$y_n^{(q)} = s_n + \alpha_1 \Delta^q s_n + \alpha_2 \Delta^q s_{n+1} + \dots + \alpha_p \Delta^q s_{n+p-1}$$

Les  $\alpha_i$  étant solution du système linéaire :

$$\begin{pmatrix} (\Delta s_n, \Delta s_n) \\ \vdots \\ (\Delta s_n, \Delta s_{n+p-1}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\Delta^q s_n, \Delta^2 s_n) & \dots & (\Delta^q s_{n+p-1}, \Delta^2 s_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta^q s_n, \Delta^2 s_{n+p-1}) & \dots & (\Delta^q s_{n+p-1}, \Delta^2 s_{n+p-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = 0$$

Chacune des suites  $\{y_n^{(q)}\}$  ( $q = 1, 2 \dots$ ) converge plus vite que  $\{s_n\}$  au sens de la norme.

Démonstration :

A étant définie positive, munissons l'espace H du produit scalaire :

$$(x, y)_q = ((I - A)^{2-q} x, y) \quad (q : \text{entier} \geq 1)$$

Soit  $\bar{H}_n$  la variété linéaire affine passant par  $\{s_n\}$  engendrée par  $\Delta^q s_n, \Delta^q s_{n+1}, \dots, \Delta^q s_{n+p-1}$ .

Cette variété est de dimension p (pour une raison analogue à celle qui a été vue dans la propriété précédente).

Projetons  $s^*$  sur  $\bar{H}_n$  (nouveau produit scalaire). On obtient le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} (e_n, \Delta^q s_n)_q \\ (e_n, \Delta^q s_{n+1})_q \\ \vdots \\ (e_n, \Delta^q s_{n+p-1})_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\Delta^q s_n, \Delta^q s_n)_q & \dots & (\Delta^q s_{n+p-1}, \Delta^q s_n)_q \\ \vdots \\ (\Delta^q s_n, \Delta^q s_{n+p-1})_q & \dots & (\Delta^q s_{n+p-1}, \Delta^q s_{n+p-1})_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Or } e_n = (A - I)^{-1} \Delta e_n$$

$$\Delta^q s_n = (A - I)^{q-1} \Delta e_n$$

$$(e_n, \Delta^q s_j)_q = ((I - A)^{2-q} (A - I)^{-1} \Delta e_n, (A - I)^{q-1} \Delta e_j) = -(\Delta e_n, \Delta e_j)$$

$$(\Delta^q s_j, \Delta^q s_k)_q = -(\Delta^q s_j, (A - I)^{2-q} (A - I)^{q-1} \Delta s_k) = -(\Delta^q s_j, \Delta^2 s_k)$$

Les  $\alpha_j$  sont donc solution du système linéaire de l'énoncé de la propriété.

$$\text{D'après la propriété 9} \quad \lim_{(q)} \frac{\|y_n - s^*\|_q}{\|s_n - s^*\|_q} = 0$$

Comme la norme  $\| \cdot \|_q$  associée au produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_q$  est équivalente à la norme initiale, il y a accélération de la convergence par rapport à la norme initiale. ■

Remarque :

Parmi les procédés de la famille, ceux qui correspondent à  $q = 1$  ou  $q = 2$  nécessitent la connaissance de  $p+2$  termes de la suite  $(s_n, s_{n+1}, \dots, s_{n+p+1})$ . Pour  $q \geq 2$  il faut utiliser  $p+q$  termes de la suite.

Propriété 11 :

La transformation correspondant à  $q = 1$  est la méthode des moments ([36]), et dans le cas où  $H = \mathbb{R}^p$ , on obtient le procédé d'Aitken généralisé ([30], [16]).

Démonstration

L'esprit de la méthode des moments consiste à déterminer un opérateur "d'interpolation" et à en chercher le point fixe :

Notons  $\bar{H}_1$  la variété linéaire affine passant par  $s_1, s_{i+1}, \dots, s_{i+p}$  et soit  $A_1$  l'opérateur linéaire de  $H \rightarrow \bar{H}_{i+1}$  défini de la manière suivante :

Soit  $x$  un élément de  $H$ , de la forme :

$$x = \underbrace{s_1 + \alpha_1 \Delta s_1 + \dots + \alpha_p \Delta s_{i+p-1}}_{\in \bar{H}_1} + \underbrace{\alpha_{p+1} \Delta s_{i+p} + \dots}_{\in \bar{H}_1^\perp}$$

A cet élément, associons

$$y = s_{i+1} + \alpha_1 \Delta s_{i+1} + \dots + \alpha_p \Delta s_{i+p}$$

Cet opérateur  $A_1$  "d'interpolation" peut être défini par :

$$P_1 : \text{Opérateur de projection de } H \rightarrow \bar{H}_1$$

et  $A_1, b_1$  tels que :

$$\begin{aligned} s_{i+1} &= A_1 s_i + b_1 \\ s_{i+2} &= A_1 s_{i+1} + b_1 \\ &\vdots \\ s_{i+p+1} &= A_1 s_{i+p} + b_1 \end{aligned}$$

$A_1$  et  $b_1$  définissent un opérateur de rang  $p$  car  $\bar{H}_1$  et  $\bar{H}_{i+1}$  sont de dimension  $p$ . (cf [36])

Cherchons le point fixe  $y_i$  de  $A_1$  sous la forme

$$y_i = y_i^1 + y_i^2 \quad (y_i^1 \in \bar{H}_1, y_i^2 \in \bar{H}_1^\perp)$$

La condition  $y_i = A_1(y_i)$  s'écrit

$$y_i^1 + y_i^2 = s_i + \alpha_1 \Delta s_i + \dots + \alpha_p \Delta s_{i+p-1} + y_i^2 = s_{i+1} + \alpha_1 \Delta s_{i+1} + \dots + \alpha_p \Delta s_{i+p}$$

c'est-à-dire

$\Delta s_i + \alpha_1 \Delta^2 s_i + \dots + \alpha_p \Delta^2 s_{i+p-1} \perp \bar{H}_1$ , ce qui détermine les  $\alpha_i$  comme solution de :

$$\begin{pmatrix} (\Delta s_i, \Delta s_i) \\ \vdots \\ (\Delta s_i, \Delta s_{i+p-1}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\Delta^2 s_i, \Delta s_i) & \dots & (\Delta^2 s_{i+p-1}, \Delta s_i) \\ \vdots \\ (\Delta^2 s_i, \Delta s_{i+p-1}) & \dots & (\Delta^2 s_{i+p-1}, \Delta s_{i+p-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = 0$$

On retrouve le système de la propriété 10, pour  $q = 1$ .

Lorsque  $H = \mathbb{R}^n$  ( $n \geq p$ ) le calcul de  $y_1$  par la méthode ci-dessus (méthode des moments) peut s'exprimer matriciellement :

Notons  $F$  et  $G$  les matrices dont les colonnes sont respectivement  $F = [\Delta s_1, \dots, \Delta s_{1+p-1}]$ ,

$$G = [\Delta^2 s_1 \ \dots \ \Delta^2 s_{1+p-1}].$$

On a  $y_1 = s_1 - F(F^T G)^{-1} F^T \Delta s_1$ .

Et lorsque  $p = n$  (les matrices  $F$  et  $G$  sont alors carrées), on obtient la méthode de Henrici ([16], [30]) :

$$y_1 = s_1 - F G^{-1} \Delta s_1$$

Remarquons que lorsque  $p = 1$  et  $n > 1$ , la méthode devient

$$y_1 = s_1 - \frac{(\Delta s_1, \Delta s_1)}{(\Delta^2 s_1, \Delta s_1)} \Delta s_1$$

Ceci est une variante du procédé de la propriété 6 où la fonctionnelle  $\ell(x)$  a été remplacée par un produit scalaire qui est fonction de l'itération ( $\ell(x)$  devient  $(\Delta s_n, x)$ ). ■

#### Propriété 12 (Une généralisation de l' $\epsilon$ -Algorithme scalaire)

Soit  $\{s_i\}$  une suite générée par  $s_{i+1} = A s_i + b$  ( $A$  : opérateur linéaire compact auto-adjoint), et supposons connus  $2p+1$  éléments successifs  $s_1, s_{1+1}, \dots, s_{1+2p}$ .

Cherchons  $y_1 = s_1 + \alpha_1 \Delta s_1 + \dots + \alpha_p \Delta s_{1+p-1}$

Soient  $y_1^1 = s_{1+1} + \alpha_1 \Delta s_{1+1} + \dots + \alpha_p \Delta s_{1+p}$

⋮

$$y_1^p = s_{1+p} + \alpha_1 \Delta s_{1+p} + \dots + \alpha_p \Delta s_{1+2p-1}$$

$\alpha_1 \dots \alpha_p$  étant déterminés par la condition :

$$y_1^1 - y_1 \perp \Delta s_1$$

⋮

$$y_1^k - y_1 \perp \Delta s_1 \quad (k = 1 \dots p)$$

La suite  $\{y_1\}$  converge plus vite que  $\{s_i\}$ .

#### Démonstration :

Ce procédé peut être considéré comme une généralisation de l' $\epsilon$ -Algorithme scalaire pour la raison suivante :

Les  $\alpha_i$  sont solution du système :

$$0 = \begin{pmatrix} (\Delta s_1, \Delta s_1) \\ (\Delta s_{1+1}, \Delta s_1) \\ \vdots \\ (\Delta s_{1+p-1}, \Delta s_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\Delta^2 s_1, \Delta s_1) & \dots & (\Delta^2 s_{1+p-1}, \Delta s_1) \\ (\Delta^2 s_{1+1}, \Delta s_1) \\ \vdots \\ (\Delta^2 s_{1+p-1}, \Delta s_1) & \dots & (\Delta^2 s_{1+2p-2}, \Delta s_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

Lorsque les éléments de la suite sont réels, le système à résoudre devient :

$$\begin{pmatrix} \Delta s_1 \\ \Delta s_{1+1} \\ \vdots \\ \Delta s_{1+p-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta^2 s_1 & \dots & \Delta^2 s_{1+p-1} \\ \Delta^2 s_{1+1} \\ \vdots \\ \Delta^2 s_{1+p-1} & \dots & \Delta^2 s_{1+2p-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

Or, dans l' $\epsilon$ -Algorithme scalaire, on suppose que les éléments de la suite sont liés par une récurrence de la forme :

$$c = s_j + \alpha_1 \Delta s_j + \dots + \alpha_p \Delta s_{j+p-1}$$

Le calcul de  $c$  (qui se fait à l'aide d'un algorithme en losange) nécessite du point de vue théorique, la résolution du système (1), et le calcul de

$$c = s_1 + \alpha_1 \Delta s_1 + \dots + \alpha_p \Delta s_{1+p-1}$$

Donc, du point de vue formulation, le procédé proposé généralise l' $\epsilon$ -Algorithme scalaire.

(Pour d'autres généralisations, consulter [4]).

La formule du procédé est identique à la formule de la méthode des moments (propriété 11), car

$$(\Delta^2 s_j, \Delta s_k) = ((A - I) \Delta s_j, (A - I)^{-1} \Delta^2 s_k) = (\Delta s_j, \Delta^2 s_k)$$

(L'opérateur  $A$  étant auto-adjoint).

D'après la propriété 10, le procédé accélère donc la convergence de la suite  $\{s_j\}$ . ■

*Remarque :*

La méthode des moments (propriété 11) permet de retrouver la formulation de l' $\epsilon$ -Algorithme scalaire :

Soient  $s_0, s_1, \dots, s_{2p}$   $2p+1$  éléments d'une suite de réels (supposée convergente).

$\epsilon$ -Algorithme : On suppose que la suite est générée par  $s_{n+p} = a_1 s_n + a_2 s_{n+1} + \dots + a_p s_{n+p-1} + c \forall n$

Après avoir déterminé  $a_1, a_2, \dots, a_p$  et  $c$ , on calcule une approximation de la limite :

$$s = \frac{c}{1 - \sum_{i=1}^p a_i}$$



Les  $a_i$  sont solution de :

$$\begin{aligned} s_p &= a_1 s_0 + a_2 s_1 + \dots + a_p s_{p-1} + c \\ &\vdots \\ s_{2p} &= a_1 s_p + a_2 s_{p+1} + \dots + a_p s_{2p-1} + c \end{aligned}$$

et vérifient donc :

$$\begin{pmatrix} \Delta s_p \\ \vdots \\ \Delta s_{2p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta s_0 & \dots & \Delta s_{p-1} \\ \vdots & & \\ \Delta s_{p-1} & \dots & \Delta s_{2p-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

#### Méthode des moments

$$\text{Posons } X_0 = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{p-1} \end{pmatrix} \dots X_1 = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_{i+1} \\ \vdots \\ s_{i+p-1} \end{pmatrix} \quad \Delta X_1 = \begin{pmatrix} \Delta s_1 \\ \vdots \\ \Delta s_{i+p-1} \end{pmatrix}$$

(Supposer que la suite initiale vérifie une récurrence d'ordre  $p$  revient à supposer que la suite  $X_1$  vérifie dans  $\mathbb{R}^p$  une récurrence d'ordre 1).

La méthode des moments consiste à chercher la matrice  $A$  et  $b \in \mathbb{R}^p$  tels que

$$\begin{aligned} X_1 &= A X_0 + b \\ &\vdots \\ X_{k+1} &= A X_k + b \end{aligned}$$

$A$  doit vérifier

$$\begin{aligned} \Delta X_1 &= A \Delta X_0 \\ &\vdots \\ \Delta X_k &= A \Delta X_{k-1} \end{aligned}$$

D'après la forme des vecteurs  $\Delta X_1$ ,  $A$  ne peut être que de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_p & 1 \end{pmatrix}$$

La dernière ligne de chacun des systèmes  $\Delta X_i = A \Delta X_{i-1}$  détermine les  $a_i$  :

$$\begin{pmatrix} \Delta s_p \\ \Delta s_{p+1} \\ \vdots \\ \Delta s_{2p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta s_0 & \dots & \Delta s_{p-1} \\ \Delta s_1 & \dots & \\ \dots & \dots & \\ \Delta s_{p-1} & \dots & \Delta s_{2p-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

Le vecteur  $b$  est de la forme  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_p \end{pmatrix}$  avec

$$b_p = s_p - a_1 s_0 - a_2 s_1 - \dots - a_p s_{p-1}$$

La solution  $X$  de  $X = A X + b$  est de la forme  $X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}$ , et pour la dernière composante de  $X = A X + b$ , on a :

$$x = (a_1 + a_2 + \dots + a_p) x + b_p$$

$$x = \frac{b_p}{1 - \sum_{i=1}^p a_i}$$

Cette quantité est identique à la quantité  $s$  calculée par l' $\epsilon$ -Algorithme scalaire. ■

Propriété 13 :

Soit  $\{s_i\}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{R}^n$  générée par :

$$s_{i+1} = A s_i + b$$

$A$  : matrice  $(n \times n)$  à valeurs propres vérifiant  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$ , telle que  $\|A\| < 1$

( $A$  n'est pas nécessairement symétrique).

Notons  $s^*$  la solution de  $(I - A) s = b$ .

$z_0$  désignant un vecteur non orthogonal à  $w_1$  (vecteur propre de  $A^T$  associé à  $\lambda_1$ ), formons la suite auxiliaire.

$$z_{i+1} = A^T z_i$$

Supposons que  $s_0$  est tel que  $\Delta s_0$  n'appartienne pas à un sous-espace propre de  $A$ , de dimension inférieure à  $p$  ( $p$  : entier inférieur à  $n$ ).

Soit  $L_1$  le sous espace vectoriel de dimension  $p$  engendré par  $\Delta s_1, \Delta s_{1+p}, \dots, \Delta s_{1+p-1}$  et  $\bar{L}_1$  la variété affine translatée de  $L_1$  passant par  $s_1$ .

Soit  $y_1 \in \bar{L}_1$  tel que l'erreur  $(y_1 - s^*)$  associée à  $y_1$  soit orthogonale à  $\Delta z_1, \Delta z_{1+1}, \dots, \Delta z_{1+p-1}$ .  
La recherche de  $y_1$  nécessite la résolution d'un système linéaire de dimension  $p$  et si  $p = 1$  la suite  $\{y_1\}$  converge plus vite que  $\{s_1\}$ .

Démonstration :

$$\text{Soit } y_1 = s_1 + \alpha_1 \Delta s_1 + \dots + \alpha_p \Delta s_{1+p-1}$$

Les  $\alpha_i$  sont déterminés par  $y_1 - s^* \perp \Delta z_1, \dots, \Delta z_{1+p-1}$ , ce qui conduit au système linéaire

$$\begin{pmatrix} (\Delta z_1, e_1) \\ (\Delta z_{1+1}, e_1) \\ \vdots \\ (\Delta z_{1+p-1}, e_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\Delta z_1, \Delta s_1) & \dots & (\Delta z_1, \Delta s_{1+p-1}) \\ (\Delta z_{1+1}, \Delta s_1) \\ \vdots \\ (\Delta z_{1+p-1}, \Delta s_1) & \dots & (\Delta z_{1+p-1}, \Delta s_{1+p-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = 0$$

Les produits scalaires qui apparaissent dans la matrice peuvent être calculés, d'autre part

$$(\Delta z_j, e_i) = (z_j, \Delta e_i)$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{car } \Delta z_j = (A^T - I) z_j \\ e_i = (A - I)^{-1} \Delta e_i \end{array} \right)$$

On peut donc effectivement calculer  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ .

Lorsque  $p = 1$ , le procédé s'écrit :

$$y_1 = s_1 - \frac{z_1^T \Delta s_1}{\Delta z_1^T \Delta s_1} \Delta s_1$$

Munissons  $\mathbb{R}^n$  du produit scalaire suivant :

Si  $x$  et  $y \in \mathbb{R}^n$  se décomposent sur la base des vecteurs propres :

$$\begin{aligned} x &= a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \\ y &= b_1 v_1 + \dots + b_n v_n \end{aligned} \quad , \quad \text{posons } (x, y)_* = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

La nouvelle norme, notée  $\| \cdot \|_*$  est équivalente à la norme initiale.

$$\text{Calculons } \frac{\|y_1 - s^*\|_*^2}{\|s_1 - s^*\|_*^2}$$

En utilisant la décomposition de  $e_0$  sur les vecteurs propres :

$$e_0 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

on a :

$$e_1 = a_0 \lambda_1^{-1} v_1 + \dots + a_n \lambda_n^{-1} v_n$$

Décomposons  $z_0$  sur les vecteurs propres  $w_1 \dots w_n$  de  $A^T$  :

$$z_0 = b_1 w_1 + \dots + b_n w_n$$

Supposons les valeurs propres rangées par module décroissant.

$$\begin{aligned} \frac{(y_1 - s^*, y_1 - s^*)_*}{(s_1 - s^*, s_1 - s^*)_*} &= \frac{(e_1 + \alpha \Delta e_1, e_1 + \alpha \Delta e_1)_*}{(e_1, e_1)_*} & (\alpha = - \frac{z_1^T \Delta s_1}{\Delta z_1^T \Delta s_1}) \\ &= 1 + \alpha^2 \frac{(\Delta e_1, \Delta e_1)_*}{(e_1, e_1)_*} + 2 \alpha \frac{(e_1, \Delta e_1)_*}{(e_1, e_1)_*} \end{aligned}$$

On a :

$$\lim_1 \frac{(\Delta e_1, \Delta e_1)_*}{(e_1, e_1)_*} = (\lambda_1 - 1)^2$$

$$\lim_1 \frac{(e_1, \Delta e_1)_*}{(e_1, e_1)_*} = (\lambda_1 - 1)$$

D'autre part  $\alpha_1 = - \frac{z_1^T \Delta s_1}{\Delta z_1^T \Delta s_1}$  est fonction de  $i$  et

$$\lim_1 \alpha_1 = \frac{1}{\lambda_1 - 1} \quad (\text{en utilisant le fait que chaque } w_j \text{ est orthogonal aux } v_k).$$

On en conclut  $\lim \frac{\|y_1 - s^*\|_*}{\|s_1 - s^*\|_*} = 0$  d'où  $\lim \frac{\|y_1 - s^*\|}{\|s_1 - s^*\|} = 0$

La suite  $\{y_i\}$  converge plus vite que la suite  $\{s_i\}$ . ■

*Remarques :*

- Nous n'avons pas pu démontrer qu'il y avait accélération de la convergence dans le cas général (p quelconque).

- La recherche de  $y_1$  nécessite la résolution d'un système linéaire de dimension p. Pour éviter cette résolution, on peut bi-orthogonaliser les suites  $\{\Delta s_i\}$  et  $\{\Delta z_i\}$  ; on obtient ainsi un algorithme qui au point de vue construction, est analogue au procédé de bi-orthogonalisation de Lanczos, ou la méthode de bi-itération de Bauer ([38]).

### 2 - 3 Exemples numériques

Parmi la famille d'algorithmes d'accélération de la convergence (de la propriété 10), nous n'avons étudié que les procédés correspondant à  $q = 1$  et  $q = 2$ .

#### Méthode I ( $q = 1$ ) (voir propriété 10)

Soient  $s_1, s_{1+1} \dots s_{1+p+1}$   $p+2$  termes successifs de la suite (générée par itérations avec un opérateur auto-adjoint).

Nous avons calculé  $\bar{y}_1 = s_{1+p} + \alpha_1 \Delta s_1 + \dots + \alpha_p \Delta s_{1+p-1}$  (voir propriété 10) ; et cette quantité peut être améliorée :

$$\text{posons } y_1 = s_{1+p+1} + \alpha_1 \Delta s_{1+1} + \dots + \alpha_p \Delta s_{1+p}$$

Pour éviter de résoudre un système linéaire de dimension  $p$ , nous avons bi-orthogonalisé les suites  $\{\Delta s_i\}$  et  $\{\Delta^2 s_i\}$ .

$$\begin{array}{l} \text{Posons } g_1 = \Delta s_1 \\ \vdots \\ g_{1+k} = \Delta s_{1+k} \end{array} \quad \begin{array}{l} \ell_1 = \Delta^2 s_1 \\ \vdots \\ \ell_{1+k} = \Delta^2 s_{1+k} + \sum_{j=0}^{k-1} a_j^{(k)} \ell_{1+j} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{k-1} a_j^{(h)} g_{1+j} \\ \sum_{j=0}^{k-1} a_j^{(k)} \ell_{1+j} \end{array}$$

Dans le calcul de  $g_{1+k}$  et  $\ell_{1+k}^{(k)}$  les coefficients  $a_j^{(k)}$  (qui dépendent de  $k$ ) sont calculés de façon que  $\ell_{1+k}^{(k)}$  soit orthogonal à  $g_1, g_{1+1}, \dots, g_{1+k-1}$ .

(On peut vérifier que si la suite est générée par  $s_{i+1} = A s_i + b$  avec  $A$  auto-adjoint, par la même occasion  $g_{1+k}$  est orthogonal à  $\ell_1 \dots \ell_{1+k}^{(k)}$  : les mêmes coefficients  $a_j^{(k)}$  sont utilisés dans le calcul de  $g_{1+k}$  et  $\ell_{1+k}^{(k)}$ .)

Le calcul de  $\bar{y}_1$  devient donc

$$\bar{y}_1 = s_{1+p} + \tilde{\alpha}_0 g_1 + \tilde{\alpha}_2 g_{1+1} + \dots + \tilde{\alpha}_{p-1} g_{1+p-1}$$

$$\text{avec } \tilde{\alpha}_j = - \frac{(\Delta s_{1+p}, g_{1+j})}{(\ell_{1+j}^{(j)}, g_{1+j})}$$

Lorsqu'on a calculé  $y_1$  à partir de  $s_1 \dots s_{1+p+1}$ , le calcul de  $y_{1+1}$  à partir de  $s_{1+1} \dots s_{1+p+2}$  nécessite le calcul de  $g_{1+p+1}$  et  $\ell_{1+p+1}$  (orthogonaux respectivement à  $\ell_{1+1} \dots \ell_{1+p}$  et  $g_{1+1} \dots g_{1+p}$ ).

#### Méthode II ( $q = 2$ ) (voir propriété 10)

A partir de  $s_1 \dots s_{1+p+1}$ , on calcule

$$t_1 = s_{1+p} + \beta_1 \Delta^2 s_1 \dots + \beta_p \Delta^2 s_{1+p-1}$$

(En utilisant aussi une technique d'orthogonalisation pour éviter de résoudre des systèmes linéaires).

Nous avons comparé les méthodes I et II avec l' $\epsilon$ -Algorithme vectoriel ([39]) pour accélérer la convergence de suites de vecteurs (engendrés par  $x_{i+1} = A x_i + b$ ;  $A$  : symétrique). (Bien entendu nous parlons de l'élément de l' $\epsilon$ -Algorithme vectoriel qui utilise les mêmes vecteurs  $s_1, s_{i+1}, \dots, s_{i+p+1}$  que les méthodes I et II).

Sur les expériences numériques que nous avons effectuées, nous avons constaté que :

1) Faibles valeurs de p ( $p = 1, 2, 3, 4$ )

En général :

{ Méthode I meilleure que  $\epsilon$ -Algorithme vectoriel  
 $\epsilon$ -Algorithme vectoriel meilleur que méthode II

2) Valeurs de p  $\geq 5$

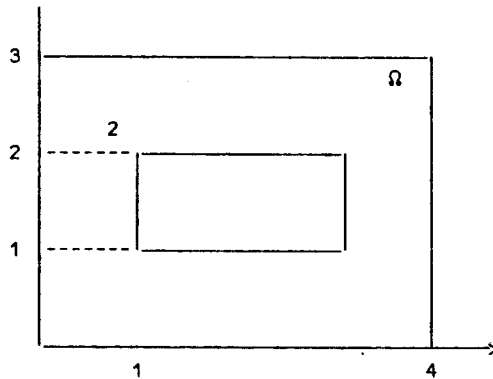
$\epsilon$ -Algorithme meilleur que méthodes I et II.

Pour de grandes valeurs de p les méthodes deviennent instables.

Exemple : A matrice  $10 \times 10$   $s_{i+1} = A s_i$  ( $s^* = 0$ )

	norme de $s_{i+p+1}$	Méthode I	Méthode II	$\epsilon$ -Algorithme 2° colonne
	0.1 E 00	0.39 E-02	0.66 E- 1	0.41 E-01
	0.13 E-01	0.11 E-04	0.69 E-03	0.40 E-03
	0.16 E-02	0.50 E-07	0.34 E-05	0.19 E-05
	0.19 E-03	0.23 E-09	0.16 E-07	0.93 E-08
	0.24 E-04	0.11 E-11	0.76 E-10	0.44 E-10
P = 1	0.29 E-05	0.51 E-14	0.36 E-12	0.20 E-12
-----				
				$\epsilon$ -Algorithme 4° colonne
p = 3	0.16 E-02	0.44 E-15	0.59 E-09	0.74 E-06
	0.19 E-03	0.25 E-17	0.35 E-11	0.14 E-09
	0.24 E-04	0.12 E-19	0.17 E-13	0.24 E-13
	0.29 E-05	0.56 E-29	0.79 E-16	0.42 E-17
-----				
p = 5	0.24 E-04	0.96 E-21	0.77 E-21	0.19 E-14
	0.29 E-05	0.38 E-26	0.26 E-22	0.39 E-19
	0.36 E-06	0.21 E-28	0.31 E-23	0.18 E-23
	0.45 E-07	0.29 E-28	0.38 E-24	0.95 E-28
	0.55 E-08	0.88 E-25	0.47 E-25	0.48 E-32

Résolution de l'équation de Laplace dans un anneau rectangulaire



Soit à résoudre  $\Delta u = 0$   $u \in \Omega$   $u = 1$  sur la frontière extérieure,  $u = 0$  sur la frontière intérieure.  
 Résolvons ce système par différences finies (les vecteurs ont donc une dimension égale au nombre de points du maillage) ; en même temps que sont générées les itérations, utilisons les méthodes I, II et l' $\epsilon$ -Algorithme vectoriel. (Nous testons le moment où la différence de 2 vecteurs successifs est inférieure à  $\epsilon$ , en norme).

Utilisation de 3 vecteurs successifs : ( $\epsilon = 10^{-5}$ )

	Méthode I	Méthode II	$\epsilon$ -Alg	Itérés normaux
Maillage 330 points	24 iter.	28 iter.	20 iter.	43 iter.
Maillage 1100 points	62 iter.	58 iter.	58 iter.	137 iter.

Le coût de l'utilisation de chacune des méthodes est, par itération :

Méthode I	Méthode II	$\epsilon$ -Alg
3n mult.	3n mult.	6n mult.

(n : dimension de l'espace vectoriel).

Lorsqu'on utilise 5 vecteurs successifs les 3 méthodes donnent des résultats analogue (en itérations), le coût d'utilisation étant (par itération) :

Méthode I	Méthode II	$\epsilon$ -Alg
9n mult.	9n mult.	20n mult.

## CHAPITRE III

## PROCESSUS ITERATIFS

Soit à résoudre l'équation  $x = T(x)$ ,  $T$  étant un opérateur continu d'un espace de Banach dans lui-même. Mann [27] a proposé une méthode générale de construction de processus itératifs (appelés les procédés de Mann), permettant d'approcher la solution de  $x = T(x)$ . Les procédés de Mann peuvent être utilisés soit pour construire une suite convergente, soit pour accélérer la convergence d'un processus itératif. Après avoir rappelé en section 1 les principales propriétés de ces procédés, nous construisons en section 2 un procédé de Mann convergent (pour la résolution d'une équation non linéaire) ; enfin, en section 3 nous accélérons la convergence d'un processus itératif (pour la résolution d'une équation linéaire dans  $\mathbb{R}^n$ ).

I - LE PROCÉDÉ DE MANN

Soit  $E$  un espace de Banach,  $C$  un convexe compact (donc fermé) de  $E$  et  $T$  une application continue de  $C$  dans  $C$ . D'après le théorème de Schauder,  $T$  admet au moins un point fixe, mais la suite générée par  $x_{n+1} = T(x_n)$  n'est pas forcément convergente.

Soit  $A$  une matrice infinie dont les éléments  $a_{ij}$  ( $i \geq 0, j \geq 0$ ) vérifient :

$$H1 \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_{ij} \geq 0 & \forall i, j \\ a_{ij} = 0 & j > i \text{ (la matrice est triangulaire inférieure)} \\ \sum_{j=0}^i a_{ij} = 1 & \forall i \\ \lim_n a_{nj} = 0 & \forall j \end{array} \right.$$

Les conditions de Toeplitz sont vérifiées et la matrice  $A$  définit un procédé de sommation régulier ([4]).

Définissons le procédé de Mann  $M(x_0, A, T)$  :

$$\left. \begin{array}{l} x_0 \text{ quelconque dans } C \\ v_n = \sum_{j=0}^n a_{nj} x_j \\ x_{n+1} = T(v_n) \end{array} \right\} n = 0, 1, 2, \dots$$

Remarquons que  $M(x_0, I, T)$  défini par la matrice unité est l'algorithme des approximations successives  $x_{n+1} = T(x_n)$ .





$$\left( \begin{array}{l} a_{1j} \geq 0 \quad \forall 1, j \\ a_{1j} = 0 \quad j > 1 \\ \sum_j a_{1j} = 1 \quad \forall 1 \\ a_{n+1,j} = (1 - a_{n+1, n+1}) a_{nj} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_{nn} \text{ diverge} \end{array} \right.$$

Dans ce cas-là la suite  $\{v_n\}$  d'un procédé de Mann normal vérifie :

$$v_{n+1} = (1 - t_n) v_n + t_n T(v_n) \quad (t_n = a_{n+1, n+1})$$

La plupart des résultats de convergence concernent les procédés de Mann normaux, et on a ainsi :

#### Propriété 3 ([27])

La matrice de Cesaro définit un procédé de Mann normal.

Soit  $T$  une application continue de  $[ab] \rightarrow [ab]$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) la suite générée par

$$v_{n+1} = \frac{T(v_n)}{n+1} + \frac{n}{n+1} v_n$$

converge vers un point fixe de  $T$ , et ceci quel que soit  $v_1 \in [a, b]$ .

Un grand nombre d'auteurs ont utilisé des procédés de Mann normaux dans le cas d'applications "non-expansives" dans un espace de Banach strictement convexe. Un espace de Banach  $E$  est strictement convexe si

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \quad (x \neq 0, y \neq 0) \Rightarrow y = cx \quad (c > 0)$$

Une application  $T$  est non expansive si

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in E$$

Dotson [8] a montré que :

#### Propriété 4 :

Soit  $E$  un espace de Banach strictement convexe,  $C$  un convexe fermé de  $E$  et  $T : C \rightarrow C$  une application continue, non-expansive (telle que  $T(C) \subset K \subset C$ ,  $K$  compact). Soit  $M(x_1, A, T)$  un procédé de Mann normal défini par une suite  $\{t_n\}$  convergent dans  $]0, 1[$ . Alors les suites  $\{x_n\}$  et  $\{v_n\}$  du procédé de Mann convergent (fortement) vers un point fixe de  $T$ .

Pour des propriétés analogues à la propriété 4, on pourra se référer à [8], [22], [21], [15].

## II - UN PROCESSUS ITÉRATIF CONVERGENT

Dans cette section nous établissons un théorème qui généralise la propriété 3.

### Propriété 5

Soit  $\lambda_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) une suite de réels tels que :

$$0 < \lambda_n < 1 \quad \forall n$$

Pour toute application  $f$  continue de  $[0, 1]$  dans lui-même, ayant un nombre fini de points fixes, définissons la méthode itérative :

$$\begin{cases} v_1 \text{ quelconque appartenant à } [0, 1] \\ v_{n+1} = v_n + \lambda_n [f(v_n) - v_n] \end{cases}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite  $\{v_n\}$  converge vers un point fixe de  $f$  (et ceci quel que soit  $f$  continue, ayant un nombre fini de points fixes) est :

$$\begin{cases} \lim_n \lambda_n = 0 \\ \sum_1 \lambda_1 \text{ diverge} \end{cases}$$

### Démonstration :

Nous montrons en remarque 2 que la condition est nécessaire. La condition suffisante est basée sur deux lemmes qui établissent l'existence de points fixes attractifs, et permettent de diviser l'intervalle  $[0, 1]$  en zones d'attraction et de répulsion.

### Définition des intervalles $A_i$

Faisons varier  $x$  de 0 à 1 et notons  $p_1, p_2, \dots, p_q$  ( $0 \leq p_1 < p_2 \dots < p_q \leq 1$ ) les points fixes de  $f$  où  $f(x) - x$  change de signe d'une manière "favorable" (en passant d'une valeur positive à une valeur négative). Plus précisément :

Pour chaque point fixe noté  $p_i$ , il existe  $\delta_i > 0$  tel que :

$$\begin{aligned} (a) & : \forall x \in [p_i - \delta_i, p_i[ \quad f(x) - x > 0 \\ (b) & : \forall x \in ]p_i, p_i + \delta_i] \quad f(x) - x < 0 \end{aligned}$$

Notons  $A_i$  l'intervalle  $[p_i - \delta_i, p_i + \delta_i]$  (Si 0 est point fixe on considérera qu'il y a changement de signe si (b) est vérifiée, et dans ce cas  $A_1 = [0, \delta_1]$  ; de même si 1 est point fixe, il suffit que (a) soit vérifié et  $A_q = [1 - \delta_q, 1]$ ). Soit  $d$  le minimum des distances séparant deux points fixes successifs et posons  $\delta_i = \frac{d}{3}$   $i = 1 \dots q$ . Les intervalles  $A_i$  sont alors disjoints, leur longueur est supérieure ou égale à  $\delta = \frac{d}{3}$  et chaque  $A_i$  contient un seul point fixe.

Lemme 1

(i)  $q \geq 1$

(ii) Notons  $R_i$  l'intervalle ouvert séparant  $A_i$  et  $A_{i+1}$  ( $i = 1 \dots q-1$ ) ; il existe  $\alpha_i$  unique appartenant à  $R_i$  tel que :

$$f(x) - x \leq 0 \quad \text{si } x < \alpha_i, x \in R_i$$

$$f(x) - x \geq 0 \quad \text{si } x > \alpha_i, x \in R_i$$

(L'intervalle  $R_i$  peut contenir plusieurs points fixes mais un seul correspond à un changement de signe de  $f(x) - x$ )

(iii) Si  $p_1 \neq 0$  notons  $R_0$  l'intervalle fermé à gauche compris entre 0 et  $A_1$ .

$$\text{On a } f(x) - x \geq 0 \quad x \in R_0$$

De même si  $p_q \neq 1$  il existe  $R_q$  (intervalle fermé à droite, compris entre  $A_q$  et 1) tel que

$$f(x) - x \leq 0 \quad x \in R_q$$

Lemme 2 :

La longueur des intervalles  $A_i$  étant définie par  $\delta$ , il existe  $N_0(\delta)$  tel que si  $v_p \in A_j$   $p \geq N_0(\delta)$  alors  $v_n \in A_j \forall n \geq p$  et la suite converge vers le point fixe  $p_j$  appartenant à  $A_j$ .  $j \in \{1 \dots q\}$

(L'intervalle  $A_j$  est attractif).

Démonstration du théorème

D'après la propriété 2, l'hypothèse  $\sum \lambda_i$  diverge montre que la suite  $\{v_n\}$  est celle d'un procédé de Mann normal, et s'il y a convergence, la limite est un point fixe de  $f$  (propriété 1).

Soit  $\delta$  définissant la longueur des intervalles  $A_i$ .

La suite  $\{\lambda_n\}$  étant de limite nulle, il existe  $N_1$  tel que

$$\lambda_n \leq \delta \quad \text{pour } n \geq N_1$$

Pour  $n \geq N_1$   $|v_{n+1} - v_n| \leq \lambda_n |f(v_n) - v_n| \leq \lambda_n \leq \delta$ . Soit  $N_0(\delta)$  l'indice du lemme 2 et posons

$$N = \max(N_0, N_1)$$

Considérons l'élément  $v_N$  de la suite générée par

$$v_{n+1} = v_n + \lambda_n [f(v_n) - v_n]$$

Si  $v_N$  est un point fixe de  $f$ , la suite devient stationnaire et la propriété est démontrée. Dans le cas contraire, deux possibilités peuvent se produire :

1ère Possibilité

$v_N$  appartient à un intervalle attractif  $A_j$ . D'après le lemme 2, la suite converge vers le point fixe  $p_j$ .

2ème Possibilité

$v_N$  appartient à un intervalle  $R_j$  ( $j = 1 \dots q-1$ ) et éventuellement  $j = 0$  ou  $q$ ).  
Montrons que cet intervalle est répulsif.

Si  $j \in \{1 \dots q-1\}$ , il existe dans  $R_j$  un point fixe  $\alpha_j$  correspondant à un changement de signe de  $f(x) - x$ .

Supposons  $v_N < \alpha_j$

Alors  $f(v_N) - v_N < 0$  ; donc  $v_{N+1} < v_N$ . Notons  $a_j$  la borne inférieure du segment  $A_j$  (qui est de longueur supérieure à  $\delta$ ).

On a certainement  $v_{N+1} > a_j$  (puisque  $|v_{N+1} - v_N| \leq \delta$ ). Donc  $a_j < v_{N+1} < v_N < \alpha_j$ .

Si la suite  $\{v_n\}$  reste à l'extérieur du segment  $A_j$ , elle est monotone décroissante minorée par  $a_j$  ; elle converge donc et ce ne peut être que vers un point fixe de  $R_j$  (correspondant à un zéro de  $f(x) - x$  sans changement de signe).

Si un élément de la suite  $\{v_n\}$  pénètre dans le segment  $A_j$ , d'après le lemme 2, il y a convergence vers  $p_j$ .

(Ce raisonnement est encore valable si  $v_N$  appartient à  $R_q$ , dans le cas où 1 n'est pas point fixe de  $f$ ).

Supposons  $v_N > \alpha_j$

Un raisonnement analogue montrerait que la suite  $v_N, v_{N+1} \dots$  serait croissante et majorée par la borne supérieure de  $A_{j+1}$ , d'où convergence ■

Démonstration du lemme 1

(1) Supposons que le point fixe est unique

L'une seule des trois situations suivantes peut se produire :

1 - 0 est point fixe et alors  $f(x) - x < 0$  pour  $x > 0$

2 - 1 est point fixe et alors  $f(x) - x > 0$  pour  $x < 1$

3 - Le point fixe  $p$  est compris entre 0 et 1 et  $f(x) - x < 0$  pour  $x > p$   
 $f(x) - x < 0$  pour  $x > p$

Dans les 3 cas  $q = 1$

Supposons qu'il y a  $n$  points fixes ( $n > 1$ )

Trois cas peuvent se produire :

1 - L'une seule des extrémités de l'intervalle est point fixe.

Supposons que 0 est point fixe.

$f(1) - 1 < 0$ . Il se peut que  $f(x) - x \leq 0 \forall x \in [0, 1]$  et dans ce cas là, 0 doit être considéré comme un point de changement de signe ( $q \geq 1$ ).

S'il existe un  $x$  tel que  $f(x) - x > 0$  on a forcément  $q \geq 1$ .

2 - 0 et 1 sont points fixes

Si  $f(x) - x$  est de signe constant entre 0 et 1, l'un des deux points 0 ou 1 doit être considéré comme point de changement de signe (et  $q \geq 1$ ).

Si  $f(x) - x$  change de signe entre 0 et 1,  $f(x) - x$  change alors de signe un nombre pair de fois et il existe forcément un point  $p$  où le changement de signe est tel que  $f(x) - x > 0$  pour  $x < p$  et  $f(x) - x < 0$  pour  $x > p$ .

3 - Si les points fixes sont différents de 0 et de 1

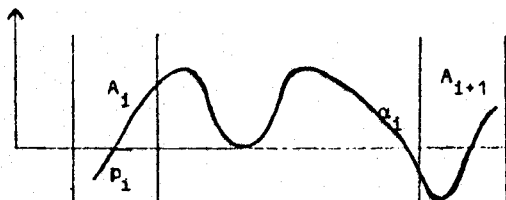
$f(0) - 0 > 0$  et  $f(1) - 1 < 0$  et on a forcément  $q \geq 1$ .

(ii) Entre deux intervalles successifs  $A_i$  et  $A_{i+1}$  il ne peut y avoir qu'un seul point fixe  $\alpha_i$  pour lequel

$$f(x) - x \leq 0 \quad \text{si } x < \alpha_i$$

$$f(x) - x \geq 0 \quad \text{si } x > \alpha_i$$

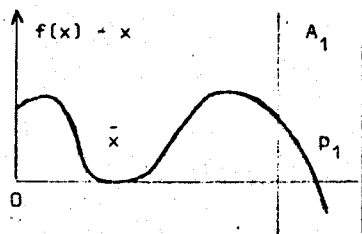
Ce cas est illustré par la figure ci-dessous



Graphes de  $f(x) - x$  entre les intervalles  $A_i$  et  $A_{i+1}$

(iii) Soit  $p_1$  le premier point fixe positif

Pour  $x < p_1$   $f(x) - x > 0$  (éventuellement on peut avoir  $f(\bar{x}) - \bar{x} = 0$  si  $\bar{x}$  est un point fixe où  $f(x) - x$  ne change pas de signe).



Démonstration du lemme 2 :

Nous devons considérer trois sortes d'intervalles  $A_j$ .

1er Cas

Intervalle  $A_1$  de longueur  $\delta$ .  $A_1 = [0, \delta]$ , 0 étant point fixe de  $f$ ;  $f(x) - x < 0 \quad x \in A_1$ .

Dans ce cas là  $N_0 = 1$ .

En effet supposons que  $v_p \in A_1$  ( $p \geq 1$ )  $f(v_p) - v_p < 0$ . Donc  $v_{p+1} \in A_1$  et la suite  $\{v_n\}_{n \geq p}$  est monotone décroissante bornée; elle converge et ce ne peut être que vers le point fixe 0 (d'après la propriété 1).

2ème Cas

Intervalle  $A_q$  de longueur  $\delta$ :  $A_q = [1 - \delta, 1]$ , 1 étant point fixe de  $f$ .

Pour une raison analogue au premier cas, on a  $N_0 = 1$

3ème Cas

Intervalle  $A_j$  de longueur  $2\delta$  entourant un point fixe  $p_j$  différent de 0 et de 1.

Soit  $\epsilon = \max_{i=1 \dots q} \sup_{x \in A_i} |f(x) - x|$

La suite  $\{\lambda_n\}$  converge vers zéro; il existe donc  $N_0(\delta)$  tel que:  $\lambda_n \leq \frac{\delta}{\epsilon}$  pour  $n \geq N_0(\delta)$

Supposons que pour  $p \geq N_0(\delta)$   $v_p \in A_j$ .

Si  $v_p \in [p_j - \delta, p_j[$   $f(v_p) - v_p > 0$

$$\epsilon > f(v_p) - v_p > 0$$

$$\delta \geq \lambda_p \epsilon > \lambda_p [f(v_p) - v_p] > 0$$

$$v_p + \delta > v_{p+1} > v_p$$

Donc  $v_{p+1}$  appartient à  $A_j$ .

Si  $v_p \in ]p_j, p_j + \delta]$  un raisonnement semblable montrerait que  $v_{p+1}$  appartient à  $A_j$ .

On en conclut que  $\{v_n\}_{n \geq p}$  est contenue toute entière dans le segment  $A_j$ .

Montrons que  $\forall \eta < \delta$  ( $\eta > 0$ ) il existe  $N(\eta)$  tel que pour tout  $n > N(\eta)$   $v_n \in [p_j - \eta, p_j + \eta]$ .

Soit  $\alpha = \sup_{x \in [p_j - \eta, p_j + \eta]} |f(x) - x|$ .

Il existe  $\tilde{N}(\eta)$  tel que  $\lambda_n \leq \frac{\eta}{\alpha}$  pour  $n \geq \tilde{N}(\eta)$ . Supposons que  $\forall n > \tilde{N}(\eta)$   $v_n \notin [p_j - \eta, p_j + \eta]$ .

Comme  $|v_{n+1} - v_n| < \lambda_n |f(v_n) - v_n| < \eta$ , la suite  $\{v_n\}_{n \geq \tilde{N}(\eta)}$  reste d'un même côté du segment

$[p_j - \eta, p_j + \eta]$ ; elle est donc monotone bornée et converge (d'après la propriété 1) vers un point fixe de  $f$ , qui ne peut être  $p_j$ . Ceci est impossible (puisque le seul point fixe de  $A_j$  est  $p_j$ ).

Donc il existe  $N(\eta) > \tilde{N}(\eta)$  tel que  $v_{N(\eta)} \in [p_j - \eta, p_j + \eta]$  et il est alors évident que

$$v_n \in [p_j - \eta, p_j + \eta] \quad \forall n \geq N(\eta).$$

Cette propriété ayant lieu quelque soit  $\eta$ , on en conclut que la suite  $\{v_n\}$  converge vers  $p_j$ .

### Remarques

1 - La démonstration repose sur le fait que  $f(x) - x$  change de signe autour de certains points fixes. Nous n'avons pu généraliser le raisonnement au cas d'applications continues de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  (ou dans d'autres espaces).

2 - La condition  $\left| \begin{array}{l} \sum_1 \lambda_i \text{ diverge} \\ \lim_1 \lambda_i = 0 \end{array} \right.$  est nécessaire

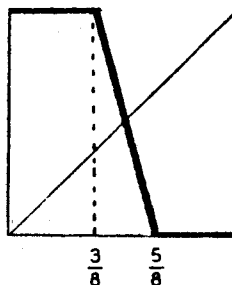
### 1er Contre-exemple

Prenons  $\lambda_i = c \neq 0$  (par exemple  $\lambda_i = \frac{1}{2} \quad \forall i$ ). Il existe des fonctions continues pour lesquelles le processus

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{2} (f(x_i) - x_i) \text{ n'est pas convergent.}$$

Soit en effet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{3}{8}] \\ \frac{5}{2} - 4x & \text{si } x \in [\frac{3}{8}, \frac{5}{8}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{5}{8}, 1] \end{cases}$$



Si  $x_0 \neq \frac{1}{2}$ , les itérés vont tendre vers le cycle  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \dots)$ . Il n'y a donc pas convergence.

La condition  $\lambda_i = 0$  est donc nécessaire.

### 2ème Contre-exemple

Les  $\lambda_i$  étant positifs, la suite  $\sum_{i=1}^n \lambda_i$  est monotone croissante ; le contraire de " $\sum_1 \lambda_i$  diverge" est donc " $\sum_1 \lambda_i$  converge".

Choisissons donc des  $\lambda_i$  tels que :

$$\left| \begin{array}{l} \lim_1 \lambda_i = 0 \\ \sum \lambda_i \text{ converge} \end{array} \right.$$

Le produit infini  $\prod(1 - \lambda_i)$  n'a alors pas forcément une valeur nulle, et c'est ce qui est important.



Exemple (tiré de [18])

$$\lambda_n = \frac{2}{(n+1)^3+1}. \text{ On a bien } \sum_1^{\infty} \lambda_1 \text{ converge et } \prod_1^{\infty} (1 - \lambda_1) = \frac{2}{3}$$

Soit  $f(x) = 0 \quad \forall x$  (dont le point fixe unique est 0).

Le processus itératif  $x_{i+1} = x_i + \lambda_i (f(x_i) - x_i)$  s'écrit ici (en prenant  $x_1 = 1$ )

$$x_{i+1} = x_1 \prod_{j=1}^i (1 - \lambda_j)$$

La suite converge donc vers  $x_{\infty} = \frac{2}{3}$ , qui n'est pas point fixe de  $f$ .

Si on reprend l'exemple de  $f(x) = 0 \quad \forall x$ , le processus s'écrit :

$$x_{i+1} = x_1 \prod_{j=1}^i (1 - \lambda_j).$$

On sait qu'une C.N.S. pour que ce produit infini soit nul (sachant que  $0 < \lambda_1 < 1$ ), est  $\sum_1^{\infty} \lambda_1$  diverge.

La condition  $\sum \lambda_1$  diverge est donc nécessaire.

### 3 - "Rapidité" de convergence du procédé

Supposons  $f$  lipschitzienne. La fonction  $f(x) - x$  l'est aussi et :

$$|f(y) - y - f(x) + x| < M |x - y| \quad \forall x, y$$

Autour du point fixe  $p$ , limite de la suite  $\{v_n\}$ , on a :

$$|f(y) - y| < M |y - p|$$

Posons  $e_n = v_n - p$

$$|f(v_n) - v_n| < M |e_n|$$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{e_n + \lambda_n (f(v_n) - v_n)}{e_n} = 1 + \lambda_n \frac{f(v_n) - v_n}{e_n}$$

Comme  $\lim_n \lambda_n \frac{f(v_n) - v_n}{e_n} = 0$ , on en déduit :  $\lim \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1$  et la convergence est donc logarithmique.

## III - ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE D'UN PROCESSUS ITÉRATIF

Soit à résoudre l'équation :

$$x - Hx = y$$

$H$  : opérateur linéaire dans un espace de Banach. Les auteurs qui ont étudié des itérations du type

$$(1) : x_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \alpha) (Hx_n + y)$$

semblent avoir suivi deux voies de recherche :

La première voie consiste à supposer que  $\|H\| \leq 1$  et que l'espace est strictement convexe ([5], [8]). Une autre catégorie d'auteurs étudient la convergence du processus (1) avec des hypothèses sur la localisation du spectre de H. ([28], [29]).

Dans ce paragraphe, nous adoptons la deuxième optique, en cherchant à résoudre dans  $\mathbb{R}^n$  l'équation matricielle

$$x - Hx = y$$

### 3 - 1 Définition

Soient deux suites convergentes  $\{x_i\}$  et  $\{y_i\}$  d'éléments de  $\mathbb{R}^n$ , de limites respectives  $x^*$  et  $y^*$  engendrées par des processus itératifs

$$x_{i+1} = F(x_i)$$

$$y_{i+1} = G(y_i)$$

F, G : applications de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , différentiables au sens de Fréchet respectivement en  $x^*$  et  $y^*$ .

On dit que le processus itératif  $y_{i+1} = G(y_i)$  est plus rapide que le processus  $x_{i+1} = F(x_i)$

si

$$\rho(G'(y^*)) < \rho(F'(x^*))$$

( $\rho$  désigne le rayon spectral des opérateurs linéaires  $G'(y^*)$  et  $F'(x^*)$ )

#### Remarques

- Il se peut que le processus défini par G soit plus rapide que le processus défini par F et qu'une suite particulière  $\{y_i\}$  ( $y_{i+1} = G(y_i)$ ) converge plus lentement qu'une suite  $\{x_i\}$  ( $x_{i+1} = F(x_i)$ )

#### Exemple (dans $\mathbb{R}^2$ )

$$y_{i+1} = G y_i \quad G = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad \rho(G) = 0.5$$

$$x_{i+1} = F x_i \quad F = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \quad \rho(F) = 0.9$$

$$\text{Prenons } x_0 = y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ (0.1)^1 \end{pmatrix} \quad y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ (0.5)^1 \end{pmatrix}$$

La suite  $\{x_i\}$  converge plus vite que la suite  $\{y_i\}$  et pourtant le processus défini par F est plus lent que le processus défini par G.

2 - Supposons les suites  $\{x_i\}$  et  $\{y_i\}$  engendrées par

$$x_{i+1} = Ax_i + a$$

$A, B$  : matrices symétriques telles que  $\rho(B) < \rho(A) < 1$

$$y_{i+1} = By_i + b$$

Si nous notons  $e_0 = x_0 - x^*$  et  $\epsilon_0 = y_0 - y^*$ , on a :

$$x_i = x^* + A^i e_0$$

$$y_i = y^* + B^i \epsilon_0$$

Le processus itératifs sont donc définis par les suites de matrices  $\{A^i\}$  et  $\{B^i\}$  (de limite nulle).

Comme  $\rho(A) = \|A\|$ ,  $\rho(B) = \|B\|$

$$\lim \frac{\|B^i\|}{\|A^i\|} = \lim \frac{(\rho(B))^i}{(\rho(A))^i} = 0$$

Le processus défini par  $B$  converge plus vite que le processus défini par  $A$  et la suite  $\{B^i\}$  converge plus vite que la suite  $\{A^i\}$  (au sens de la norme).

### 3 - 2 Un processus de Mann convergent

Les résultats de ce paragraphe sont connus. La solution du système linéaire  $x = Hx + y$  est approchée par le processus itératif

$$(1) \quad x_{n+1} = [\alpha I + (1 - \alpha) H] x_n + (1 - \alpha) y \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Posons  $P(z) = \alpha + (1 - \alpha) z$ .

Le processus itératif peut s'écrire :

$$(1) \quad x_{n+1} = P(H) x_n + (1 - \alpha) y.$$

Propriété 6 :

*Si les valeurs propres de  $H$  sont toutes situées dans l'un des deux demi-plans séparés par  $\Re(z) = 1$ , il est possible de trouver  $\alpha$  réel tel que le processus itératif (1) soit convergent.*

Démonstration

Etudions la transformation du plan complexe définie par :

$$Z = \alpha + (1 - \alpha) z$$

Le cercle de centre  $a$  (réel) et de rayon  $R$ ,  $z = a + R e^{i\theta}$  est transformé en  $Z = \alpha + (1 - \alpha) a + (1 - \alpha) R e^{i\theta}$ . Le cercle transformé a donc pour centre  $\alpha + (1 - \alpha) a$  et pour rayon  $|1 - \alpha| R$ .

Supposons que le cercle initial ne contienne pas le point d'abscisse 1 (on a donc soit  $a + R < 1$ , soit  $a - R < 1$ ). Il est toujours possible de déterminer  $\alpha$  réel tel que le cercle transformé soit contenu dans le cercle de rayon 1 centré à l'origine :

Si  $a + R < 1$  on doit avoir  $\frac{-1 - a - R}{1 - a - R} < \alpha < 1$

et  $\frac{-1 - a + R}{1 - a + R} < \alpha < 1$

Si  $a - R > 1$  on doit avoir  $1 < \alpha < \frac{-1 - a - R}{1 - a - R}$

et  $1 < \alpha < \frac{-1 - a + R}{1 - a + R}$

Supposons les valeurs propres de A situées dans l'un des demi-plans séparés par  $R_g(z) = 1$ .

Il est possible de trouver un cercle C centré sur l'axe des x (en un point d'abscisse a), de rayon R, tel que toutes les valeurs propres de A soient à l'intérieur du cercle, et ce cercle ne contient pas le point d'abscisse 1. On peut alors trouver  $\alpha$  tel que :

$$|P(z)| = |\alpha + (1 - \alpha)z| < 1 \quad z \in C$$

Si  $\lambda_1$  est valeur propre de H,  $P(\lambda_1)$  est valeur propre de  $P(H) = \alpha I + (1 - \alpha)H$

Donc  $\forall i (i = 1 \dots n) \quad |P(\lambda_i)| < 1$

$\rho(P(H)) < 1$  et le processus (1) est convergent. ■

#### Corollaire

Si les valeurs propres de H appartiennent à un cercle centré à l'origine, de rayon  $R < 1$ , il est impossible de trouver un polynôme de degré 1 vérifiant  $P(1) = 1$  tel que le processus  $x_{n+1} = P(H)x_n + (1 - \alpha)y$  converge plus vite que le processus  $x_{n+1} = Hx_n + y$  ( $P(z) = \alpha + (1 - \alpha)z$ ).

#### Démonstration

Le cercle de centre 0 et de rayon R est transformé par  $P(z) = \alpha + (1 - \alpha)z$  en un cercle de centre  $\alpha$  et de rayon  $|1 - \alpha|R$ , qui n'est pas contenu dans le cercle initial. On ne peut donc avoir  $\rho(P(H)) < \rho(H)$ . ■

### 3 - 3 Transformation de processus itératif au moyen de polynômes

Le processus de Mann du paragraphe précédent utilise un polynôme de degré 1. On peut généraliser ce procédé avec un degré quelconque.

Soient  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$  ( $p+1$ ) réels tels que  $\sum_{i=0}^p \alpha_i = 1$ .

Posons  $P(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_p z^p$

$$Q(z) = \frac{1 - P(z)}{1 - z}$$

Le système linéaire  $x - Hx = y$  est résolu par le procédé itératif :

$$x_{n+1} = P(H) x_n + Q(H) y$$

Il s'agit de comparer ce procédé au procédé défini par :

$$x_{n+1} = H x_n + y$$

La question se ramène à la suivante :

Dans le cas où  $\rho(H) > 1$  peut-on avoir  $\rho(P(H)) < 1$  ? (On transforme un processus divergent en un processus convergent).

Dans le cas où  $\rho(H) < 1$  peut-on avoir  $\rho(P(H)) < \rho(H)$  ? (On accélère la convergence d'un processus convergent).

Supposons que les valeurs propres de  $H$  appartiennent à un domaine  $D$  simplement connexe dans le plan complexe.

Nous chercherons à résoudre le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Peut-on avoir} & \text{Max}_{z \in D} |P(z)| < 1 \\ \text{ou bien} & \text{Max}_{z \in D} |P(z)| < \text{Max}_{z \in D} |z| \end{array}$$

#### Remarques

1 - Comme  $P(1) = 1$  on ne pourra avoir  $\text{Max}_{z \in D} |P(z)| < 1$  que si 1 est extérieur au domaine  $D$ , ou, à la rigueur sur la frontière (étant entendu que 1 ne peut être valeur propre de  $H$ , le système  $(I - H) x = y$  étant supposé résoluble).

2 - Contrairement à la méthode semi-itérative de Tchebichef, il n'est pas nécessaire que la matrice  $H$  soit symétrique, car on ne cherche pas à avoir  $\|P(H)\| < \|H\|$ , mais seulement  $\rho(P(H)) < \rho(H)$

3 - Soit  $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_p x^p$

Utiliser la formule itérative  $x_{n+1} = P(H) x_n + Q(H) y$  consiste à chaque étape, à calculer  $p$  quantités intermédiaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = x_n \\ u_1 = H u_0 + y \\ \vdots \\ u_p = H u_{p-1} + y \end{array} \right. \quad \text{et } x_{n+1} = \sum_{i=0}^p \alpha_i u_i$$

4- Si le degré de  $P(x)$  est  $> 1$ , le processus  $x_{n+1} = P(H) x_n + Q(H) y$  n'est pas un procédé de Mann. Lorsque les coefficients  $\alpha_1$  de  $P(z)$  sont tous positifs (donc  $0 \leq \alpha \leq 1$  puisque  $\sum \alpha_1 = 1$ ), un tel procédé est appelé "averaging iteration" (on fait la moyenne de  $p + 1$  quantités intermédiaires). En ce qui concerne la suite de ce chapitre, la condition  $0 \leq \alpha_1 \leq 1$  n'est pas nécessaire.

5 - L'idée d'utiliser de telles méthodes semble être due à Abramov (on pourra consulter à ce propos FADDEEV et FADDEEVA (Computational methods of linear algebra) Chapitre 9).

#### Utilisation de transformations du plan complexe

Rappel Etant donnés  $n$  nombres complexes  $z_1, z_2, \dots, z_n$  et  $r > 0$ , l'ensemble des points satisfaisant

$$|(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)| = r^n$$

est une lemniscate de foyers  $z_1, z_2, \dots, z_n$  et de rayon  $r$ . (L'intérieur de la lemniscate est le lieu des points tels que  $|(z - z_1) \dots (z - z_n)| < r^n$ ).

Dans le cas de deux foyers, on retrouve l'équation des ovales de Cassini  $|(z - z_1)(z - z_2)| = r^2$

Si  $r = \frac{1}{2} |z_2 - z_1|$  : lemniscate de Bernoulli  
 $r < \frac{1}{2} |z_2 - z_1|$  : on a deux ovales entourant chacun des foyers  
 $r > \frac{1}{2} |z_2 - z_1|$  : une seule courbe fermée entourant les deux foyers.

#### Propriété 7

Si les valeurs propres de  $H$  sont à l'intérieur de la lemniscate d'équation

$$|(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_p)| = r^p \quad (z_i \text{ réels } i = 1 \dots p) \text{ ou complexes conjugués}$$

et si  $\frac{r^p}{|(1 - z_1) \dots (1 - z_p)|} < 1$  (1 est à l'extérieur de la lemniscate)

alors le processus  $x_{n+1} = P(H) x_n + Q(H) y$  converge, avec :

$$P(z) = \frac{(z - z_1) \dots (z - z_p)}{(1 - z_1) \dots (1 - z_p)}$$

#### Démonstration

Considérons la lemniscate d'équation

$$\frac{|(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_p)|}{|(1 - z_1) \dots (1 - z_p)|} = \frac{r^p}{|(1 - z_1) \dots (1 - z_p)|}$$

(Les foyers de cette lemniscate sont donc distincts du point de coordonnées  $(x = 1, y = 0)$ .)

Posons  $P(z) = \frac{(z - z_1) \dots (z - z_p)}{(1 - z_1) \dots (1 - z_p)}$

Pour tout point  $z$  intérieur à la lemniscate, on a

$$|P(z)| < \frac{r^p}{|(1 - z_1) \dots (1 - z_p)|}$$

Si  $\frac{r^p}{|(1-z_1) \dots (1-z_p)|} < 1$ , on a donc  $|P(z)| < 1$ .

Le processus  $x_{n+1} = P(H) x_n + Q(H) y$  est donc convergent puisque  $\rho(P(H)) < 1$ . ■

*Remarque :*

Brauer [3] a donné des résultats de localisation des valeurs propres à l'aide d'ovales de Cassini (donc à deux foyers) :

Chaque valeur propre d'une matrice A (de dimension n) est à l'intérieur de l'une des  $n(n-1)/2$  ovales de Cassini :

$$|z - a_{kk}| |z - a_{\lambda\lambda}| \leq P_k P_\lambda$$

$$(P_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|)$$

Il ne semble pas que ses résultats puissent être utilisés pour notre propos.

### Applications

#### 1 - Cas d'un polynôme de degré 1

La lemniscate  $|z - z_1| = r$  est alors un cercle. La condition  $\frac{r}{|1 - z_1|} < 1$  implique que les valeurs propres de H doivent appartenir à un cercle ayant le point de coordonnées (1, 0) à l'extérieur. On retrouve la propriété 6.

#### 2 - Cas d'un polynôme de degré 2

Il est alors possible de traiter des cas qu'on ne peut pas traiter avec des polynômes de degré 1.

Exemple 1 :

Les valeurs propres de H appartiennent au segment  $[-a, a]$  ( $0 < a < 1$ ).

Le segment  $[-a, a]$  appartient à la lemniscate de Bernoulli.

$$|(z - \alpha)(z + \alpha)| < \alpha^2 \quad \text{avec } \alpha = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$P(z) = \frac{z^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \quad \text{On a } |P(z)| < \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} < 1 \quad (\forall z \text{ appartenant à l'intérieur de la lemniscate})$$

Comme  $\text{Max}_{z \in [-a, a]} |z| = a^2$ , il y a accélération  $(\text{Max}_{z \in \text{lemniscate}} |P(z)| = \frac{a^2}{2 - a^2} < a^2)$

Exemple 2 :

Les valeurs propres de H appartiennent au segment  $[1 - a, 1 + a]$ .

Ce segment comporte le point de coordonnées  $[1, 0]$ . Considérons la lemniscate d'équation

$$|(z - 1)^2 - a^2| = a^2, \text{ dont le point double est le point } (1, 0).$$

$$\forall z \in [1 - a, 1 + a], z \neq 1, \text{ on a } |(z - 1)^2 - a^2| < a^2. \text{ Prenons } P(z) = -\frac{(z-1)^2 - a^2}{a^2}.$$

$$\text{On a : } |P(z)| < 1 \quad \forall z \in [1 - a, 1 + a], z \neq 1.$$

Le processus itératif défini par  $P(z)$  est donc convergent.

Exemple 3 :

Soient A et B les points de coordonnées  $1 - a$  et  $1 + a$  ; supposons que les valeurs propres de H appartiennent aux cercles de centres A et B, de rayon  $0,1 a$ . On peut constater que les ovales de

Cassini d'équation  $|(z - 1)^2 - a^2| < \frac{a^2}{2}$  entourent ces deux cercles. (Le point  $z = 1$  est à l'extérieur des ovales). Posons  $P(z) = -\frac{(z - 1)^2 - a^2}{a^2}$ . On a  $|P(z)| < \frac{1}{2} \quad \forall z$  appartenant aux

ovales de Cassini. Le processus défini par  $P(z)$  est donc convergent.

### 3 - Cas d'un polynôme de degré p

Il pourra être utile d'utiliser un polynôme de degré p si on a pu montrer que les valeurs propres de H appartiennent à p domaines disjoints du plan complexe. Il faudra alors placer les foyers de la lemniscate dans chacun des domaines (en tenant compte qu'il doivent être sur l'axe x, ou symétriques par rapport à cet axe).

### 4 - Accélération de la convergence d'un processus itératif

La propriété 7 peut aussi être utilisée pour accélérer la convergence d'un processus itératif. Soit  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application différentiable au sens de Fréchet dans un voisinage d'un point fixe  $x^*$  (tel que  $x^* = G(x^*)$ ). Si on peut entourer les valeurs propres de  $G'(x^*)$  par une lemniscate vérifiant  $\frac{r^p}{|(1 - z_1) \dots (1 - z_p)|} < 1$  (c'est-à-dire telle que le point  $z = 1$  est à l'extérieur de la lemniscate), alors on peut fabriquer un processus itératif convergent.

#### Exemple

$$x_{i+1} = f(x_i) \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad 1 < \rho_1 < f'(x^*) < \rho_2$$

Le segment  $[\rho_1, \rho_2]$  est inclus dans le cercle de centre

$$\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \quad \text{et de rayon} \quad \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} \quad \left( \left| z - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \right| < \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} \right)$$

$$P(z) = \frac{z - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}}{1 - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}} = \alpha + (1 - \alpha) z \quad \alpha = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 + \rho_2 - 2}$$

Le processus  $x_{i+1} = \alpha x_i + (1 - \alpha) f(x_i)$  est convergent avec  $\alpha = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 + \rho_2 - 2}$



Propriété 8

Soit  $H$  une matrice dont les valeurs propres appartiennent à un cercle centré en un point  $\alpha$  de l'axe des réels ( $0 < \alpha < 1$ ) et passant par le point d'abscisse 1. Il est possible de trouver un polynôme  $P(z) = a_0 + a_1 z + (1 - a_0 - a_1) z^2$  tel que le processus  $x_{i+1} = P(H) x_i + Q(H) y$  converge plus vite que le processus  $x_{i+1} = H x_i + y$ .

Démonstration

On peut vérifier que le polynôme  $P(z) = a_1 z + (1 - a_1) z^2$  répond à la question ( $a_1$  étant tel que  $\alpha = \frac{a_1}{a_1 - 1}$ ). En effet  $P(z) = a_1 z + (1 - a_1) z^2$  transforme le point de coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  en un point de coordonnées :

$$X = a_1 x + (1 - a_1) (x^2 - y^2)$$

$$Y = a_1 y + 2(1 - a_1) xy$$

$$\text{On a } X^2 + Y^2 = (x^2 + y^2) (a_1^2 + (x^2 + y^2) (1 - a_1)^2 + 2 a_1 x(1 - a_1))$$

$$\text{On aura donc } X^2 + Y^2 < x^2 + y^2 \text{ si}$$

$$a_1^2 + (x^2 + y^2) (1 - a_1)^2 + 2 a_1 x (1 - a_1) < 1, \text{ c'est-à-dire si le point de coordonnées } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ appartient au cercle de centre } \alpha = \frac{a_1}{a_1 - 1} \text{ et de rayon } R = \frac{1}{|1 - a_1|} \quad \blacksquare$$

Remarques

- Par la transformation  $P(z) = a_1 z + (1 - a_1) z^2$  le point  $z = 1$  est invariant. Si 1 était valeur propre de  $H$ , 1 serait aussi valeur propre de  $P(H)$  et il n'y aurait pas d'accélération de convergence. Si  $H$  possède une valeur propre à partie réelle très proche de 1, on peut vérifier que  $P(H)$  possède aussi une valeur propre très proche de 1, et le "gain" en accélération de convergence est très faible.

- Dans le cas où  $\alpha = 0$  (donc dans l'hypothèse où les valeurs propres de  $A$  appartiennent au cercle unité  $C$ ), le polynôme  $P(z)$  devient  $P(z) = z^2$ . La suite  $x_{i+1} = P(H) x_i + Q(H) y$  est donc une sous-suite de la suite  $x_{i+1} = H x_i + y$  (termes de 2 en 2).  
L'accélération de convergence que l'on obtient est illusoire.

Exemples numériques :

$$\text{Soit à résoudre } x = A x + b$$

$A$  symétrique (donc à valeurs propres réelles). L'utilisation des cercles de Gershgorin donne facilement un intervalle  $[1 - a, 1 + a]$  contenant les valeurs propres de  $A$ . (En reprenant l'exemple 2 (qui suit la propriété 7), on construit  $P(z) = -\frac{(z-1)^2 - a^2}{a^2} = \frac{1}{a^2} (a^2 - 1 + 2z - z^2)$ ).

(I)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & 1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$  (matrice 10 x 10 tridiagonale)

$b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$  La solution de  $x = Ax + b$  est  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de A appartiennent à  $[1 - 2, 1 + 2]$ . Ici  $a = 2$ . Le polynome  $P(z)$  est  $P(z) = \frac{1}{4} (3 + 2z - z^2)$ . Le processus itératif  $x_{n+1} = P(A)x_n + Q(A)b$  donne :

Itération 0	Itération 300	Itération 500
0 .....	.999551 .....	.999992
0	.999872	.999997
0	1.00041	1.00000
0	1.00024	1.00000
0	.999657	.999994
0	.999657	.999994
0	1.00024	1.00000
0	1.00041	1.00000
0	.999872	.999997
0	.999551	.999992



II) Soit une matrice symétrique quelconque :

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & -3 & 2 & 6 \\ 4 & -3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 6 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$   $b = \begin{pmatrix} -14 \\ -14 \\ -14 \\ -14 \\ -18 \end{pmatrix}$  : la solution de  $x = Ax + b$  est  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de A appartiennent à  $[1 - 20, 1 + 20]$   $a = 20$

$P(z) = \frac{1}{400} (399 + 2z - z^2)$   $Q(z) = \frac{1}{400} (1 - z)$

Itération 0	Itération 200	Itération 400
0	1.00187	1.00001
0	.998429	.999984
0	.997332	.999973
0	1.00120	1.00001
0	.999664	.999996

### Conclusion

L'information que l'on doit posséder sur les valeurs propres de H doit être du type suivant :  
Les valeurs propres appartiennent à un domaine ne contenant pas le point  $z = 1$ . Dans ce cas là on peut déterminer un processus convergent.

Si le domaine D a le point  $z = 1$  sur sa frontière, l'accélération de convergence risque d'être très faible.

Si le domaine D contient le point  $z = 1$  on ne pourra pas déterminer un processus itératif convergent.

## CHAPITRE IV

## ESTIMATION DE LA LIMITE DE SUITES

Ce chapitre s'inspire des travaux de N. Gastinel [13] et de Baranger [2]. L'idée essentielle consiste à déterminer des sous-espaces hilbertiens de  $(c)$ , à noyau reproduisant ( $(c)$  désigne l'espace des suites de réels convergentes) ; il est alors possible de construire des formules "optimales" (cf. [10], [25]) d'approximation de la limite de suites de ce sous-espace hilbertien.

Dans la section 1 nous construisons des formules de sommation "optimales" pour certains sous-espaces hilbertiens de  $(c)$  ; dans la section 2 nous utilisons les mêmes idées pour traiter le cas d'espaces de suites à éléments dans un espace de Hilbert.

I - MÉTHODES DE SOMMATION OPTIMALES POUR CERTAINES SUITES DE RÉELS1 - 1 Construction générale

La construction qui suit se trouve dans [13], et a été utilisée par Baranger [2] pour construire des sous-espaces hilbertiens de  $\mathcal{L}_1$ . Nous suivons la même démarche pour construire des sous-espaces hilbertiens de  $(c)$ .

Soit  $A$  une matrice infinie, d'éléments réels  $a_{ij}$   $\begin{cases} i = 0, 1 \dots \\ j = 0, 1 \dots \end{cases}$

Notons  $A_n$  sa tronquée de rang  $n$  ( $A_n$  est donc une matrice de dimension  $n+1$ ).

Hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{H1 : } A_n \text{ est symétrique définie positive } \forall n \\ \text{H2 : } \sup_{n,1} |a_{n,1}| \leq M \\ \text{H3 : } \lim_n a_{n,k} = a_{ok} \quad \forall k \end{array} \right.$$

Pour tout  $y \in \mathbb{R}^N$ , notons  $\tilde{y}_n$  son tronqué à l'indice  $n$  ( $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$  et ses composantes sont  $y_0, y_1 \dots y_n$ )

Soit  $h(A) = \{y \in \mathbb{R}^N, \sup_n \tilde{y}_n^T A_n^{-1} \tilde{y}_n < \infty\}$

Propriété 1 : ([13], [2], [10])

L'espace  $h(A)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire.

$$(y, z) = \lim_n \tilde{y}_n^T A_n^{-1} \tilde{z}_n$$

Démonstration :

Rappelons les grandes lignes de la démonstration :

$A_n$  est de la forme  $A_n = R_n^T R_n$  et l'inégalité de Schwarz donne :

$$\tilde{y}_n^T A_n^{-1} \tilde{y}_n = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^{n+1}}} \frac{(x^T \tilde{y}_n)^2}{x^T A_n x}$$

D'où  $\tilde{y}_{n+1}^T A_{n+1}^{-1} \tilde{y}_{n+1} \geq \tilde{y}_n^T A_n^{-1} \tilde{y}_n$ ,  $\tilde{y}_{n+1}$  et  $\tilde{y}_n$  étant les tronqués du même élément  $y \in \mathbb{R}^N$

$$\text{Posons } \|y\|^2 = \sup_n \tilde{y}_n^T A_n^{-1} \tilde{y}_n$$

$$\text{et } (y, z) = \lim_n \tilde{y}_n^T A_n^{-1} \tilde{z}_n$$

On peut vérifier que cette quantité est un produit scalaire et que  $h(A)$  est complet pour la norme associée à ce produit scalaire. ■

Propriété 2 :

L'espace  $h(A)$  est un sous-espace hilbertien de  $\ell_\infty$ ; les fonctionnelles  $v^k$  (qui à  $u \in h(A)$  associent  $u_{k,k}$   $k^{\text{ème}}$  composante de  $u$ ) sont continues et représentées par la  $k^{\text{ème}}$  colonne de  $A$ .

Démonstration

Soit  $y \in h(A)$

$$\tilde{y}_n^T A_n^{-1} \tilde{y}_n \geq \frac{|x^T \tilde{y}_n|^2}{x^T A_n x} \quad \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$x^T A_n x \leq \sum_{i=0}^n |x_i| \left| \sum_{j=0}^n a_{ij} x_j \right| \leq M (\sum |x_i|)^2 = M \|x\|_1^2$$

$$\tilde{y}_n^T A_n^{-1} \tilde{y}_n \geq \frac{1}{M} \sup_{x \neq 0} \frac{|x^T \tilde{y}_n|^2}{\|x\|_1^2} = \frac{1}{M} \|\tilde{y}_n\|_\infty^2$$

Passons à la limite en  $n$  :

$$\|y\|_{h(A)}^2 \geq \frac{1}{M} \|y\|_\infty^2 \quad (\text{L'injection canonique de } h(A) \text{ dans } \ell_\infty \text{ est continue}).$$

Montrons que la forme linéaire  $v^k : u \in h(A) \rightarrow u_k$ , est continue.

$$|u_k| \leq \sup_1 |u_1| = \|u\|_\infty \leq \sqrt{M} \|u\|_{h(A)}$$

Cette forme linéaire est continue sur  $h(A)$ . D'après le théorème de Riesz, il existe  $\frac{k}{v} \in h(A)$  unique tel que  $(\frac{k}{v}, u) = u_k \quad \forall u \in h(A)$ .

Soit  $A.k$  la  $k^{\text{ème}}$  colonne de la matrice infinie  $A$ .

Pour  $n \geq k$

$$A_n^{-1} (A.k)_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k$$

Posons  $\frac{k}{v} = A.k$

$$y_n^T A_n^{-1} \left(\frac{k}{v}\right)_n = y_k \quad \forall n \geq k$$

Comme  $\frac{k}{v}$  appartient à  $h(A)$ ,  $\frac{k}{v}$  est le représentant de  $v^k$  et on a :

$$\|v^k\|^2 = \left(\frac{k}{v}, \frac{k}{v}\right) = a_{kk} \quad \blacksquare$$

### Propriété 3 :

$h(A)$  est un sous-espace hilbertien de  $(c)$  ; la fonctionnelle "limite" (qui associe à toute suite de  $h(A)$  sa limite) est continue et représentée par la colonne de  $A$  d'indice zéro.

### Démonstration :

Il suffit de montrer que  $h(A)$  est algébriquement inclus dans  $(c)$  ; il y aura inclusion topologique car

$$\|x\|_c = \|x\|_\infty = \sup_1 |x_1|$$

Soit  $F = \left\{ \frac{1}{v}, \frac{2}{v}, \dots \right\}$  la famille des représentants des fonctionnelles d'évaluation ; cette famille est totale dans  $h(A)$ . (c'est-à-dire qu'elle engendre un sous-espace dense dans  $h(A)$ ).

La suite de fonctionnelles  $\{v^k\}_{k \geq 1}$  converge faiblement car

$$\|v^k\| \leq M \quad \forall k$$

$$\lim_k \left(\frac{k}{v}, u\right) \text{ existe } \forall u \in F \text{ (d'après Banach-Steinhaus).}$$

Il existe donc une fonctionnelle "limite", continue et on peut constater qu'elle est représentée par  $\frac{0}{v}$  (colonne de  $A$  d'indice zéro).

Pour toute suite  $y \in h(A)$  on a

$$\lim_k \left( \frac{k}{v}, y \right) = \left( \frac{0}{v}, y \right)$$

Toute suite de  $h(A)$  est donc convergente et sa limite est l'élément d'indice zéro. ■

*Remarques :*

1) La première ligne de la matrice  $A$  est constituée par les limites de chacune des colonnes (l'élément  $a_{00}$  étant lui-même la limite de  $a_{01}$ ). Nous avons trouvé la forme de cette matrice en utilisant la construction de Schwartz [34] ; cette matrice définit un opérateur symétrique et défini positif du dual de  $(c)$  dans  $(c)$  ; l'image de  $\ell_1$  par cet opérateur est un espace  $H_0$  dont  $h(A)$  est le complété.

2) D'un point de vue pratique, le critère  $\lim_n \tilde{y}_n^T A_n^{-1} \tilde{y}_n$  est peu maniable, puisque "se donner" une suite  $y$  consiste à se donner ses tronquées d'indice  $n$ , et en particulier  $y_0$  (qui est la limite de la suite, quantité qui est en principe inconnue).

Dans les exemples que nous avons traité nous avons pu donner une autre caractérisation des éléments de  $h(A)$  de façon à pouvoir traiter le problème : approcher la limite d'une suite de  $h(A)$  à partir d'un certain nombre de termes de cette suite.

## 1 - 2 Formules de sommation optimales

Soit  $h(A)$  un sous-espace hilbertien de  $(c)$ . Dans ce paragraphe, nous construisons des procédés de sommation "optimaux" sur  $h(A)$  au sens suivant :

Un procédé de sommation est défini par une matrice infinie  $C$ , triangulaire inférieure, les coefficients  $C_{ni}$  ( $i = 1 \dots n$ ) de la  $n^{\text{ème}}$  ligne de  $C$  étant tels que :

$$\|v^0 - \sum_{i=1}^n C_{ni} v^i\|_{h(A)} \text{ Min}$$

(Les  $v^i$  désignent les fonctionnelles "composantes" de  $y \in h(A)$ ).

Définition :

Le procédé de sommation est régulier sur  $h(A)$  s'il définit une transformation de  $h(A)$  dans  $(c)$  ( $y \in h(A)$  est transformée en  $z \in (c)$ , de composantes  $z_n = \sum_{i=1}^n c_{ni} y_i$ ), telle que toute suite de  $h(A)$  est transformée en une suite possédant la même limite.

Propriété 4 :

Si la matrice  $A$  est telle que  $a_{00} = \lim_1 a_{11}$  le procédé de sommation optimal est régulier sur  $h(A)$ .

Démonstration

$$\lim_1 a_{11} = a_{00} \Rightarrow \lim_1 ||v^1|| = ||v^0||$$

La suite de fonctionnelles  $\{v^k\}$  converge donc fortement vers  $v^0$ .

$$\text{Soit } w^n = \sum_{j=1}^n c_{nj} v^j$$

$$||v^0 - w^n|| \leq ||v^0 - v^n||$$

La suite  $\{w^n\}$  converge vers  $v^0$ .

Pour toute suite  $y$  de  $h(A)$  on a :

$$|\lim_1 y_1 - \sum_{j=1}^n c_{nj} y_j| \leq ||v^0 - w^n||_{h(A)} ||y||_{h(A)}$$

$$\text{On en conclut que } \lim_n \sum_{j=1}^n c_{nj} y_j = \lim_1 y_1$$

Le procédé de sommation transforme donc toute suite de  $h(A)$  en une suite qui converge vers la même limite. ■

Remarques

1) La condition  $\lim_1 a_{11} = a_{00}$  est une condition forte ; elle ne semble pas nécessaire (voir exemple 1 ci-dessous). Mais je n'ai pas pu démontrer sans cette hypothèse que le procédé de sommation était régulier.

2) Si la famille de suites :  $e_0 = (1, 1, 1 \dots 1 \dots)$ ,  $e_1 = (1, 0, 0 \dots)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, 0 \dots)$  est dense dans  $h(A)$ , on peut montrer (par le théorème de Banach-Steinhaus) que le procédé de sommation vérifie deux des conditions de Toeplitz :

$$\left| \begin{array}{l} \lim_n c_{nk} = 0 \quad \forall k \\ \lim_n \sum_{k=1}^n c_{nk} = 1 \end{array} \right.$$

La troisième condition ( $\sum |c_{nk}| < M \quad \forall n$ ) est remplacée par  $||\sum c_{ni} v^i||_{h(A)} < M$ .



Construction des coefficients de la n<sup>ème</sup> ligne de C

La condition  $\|v^0 - \sum_{i=1}^n C_{ni} v^i\|_{h(A)}$  Min conduit au système linéaire :

$$\begin{pmatrix} a_{o1} \\ a_{o2} \\ \vdots \\ a_{on} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{n1} \\ \vdots \\ C_{nn} \end{pmatrix}$$

Remarque :

Selon la terminologie de Brezinski [4], on appelle procédé de sommation total un procédé défini par une matrice C telle que :

$$v_n \sum_{i=1}^n C_{ni} = 1$$

On peut donc définir un procédé "optimum total", les  $C_{ni}$  étant tels que :

$$\begin{cases} \|v^0 - \sum C_{ni} v^i\| \text{ Min} \\ \sum C_{ni} = 1 \end{cases}$$

La recherche des  $C_{ni}$  se fait de la façon suivante :

$$\sum_{i=1}^n C_{ni} v^i = v^1 + \beta_{n1} \Delta v^1 + \dots + \beta_{nn-1} \Delta v^{n-1}$$

Les  $\beta_{ni}$  sont solutions de :

$$\begin{pmatrix} (v^0 - v^1, \Delta v^1) \\ (v^0 - v^1, \Delta v^2) \\ \vdots \\ (v^0 - v^1, \Delta v^{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Delta v^1, \Delta v^1) & \dots & (\Delta v^1, \Delta v^{n-1}) \\ \vdots & & \\ (\Delta v^{n-1}, \Delta v^1) & \dots & (\Delta v^{n-1}, \Delta v^{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{n1} \\ \vdots \\ \beta_{nn-1} \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{l'élément } (\Delta v^1, \Delta v^1) \text{ de la matrice est égal à :} \\ a_{i+1,j+1} + a_{ij} - a_{i+1,j} - a_{i,j+1} \end{array} \right)$$

### 1 - 3 Exemples de procédés de sommation optimaux

Pour les divers exemples, nous appellerons "suite erreur" associée à une suite y convergente de limite  $y_0$ , la suite de terme général  $y_n - y_0$ .

Exemple 1 Les espaces  $h_d$ 

Soit  $d > 1$  et  $h_d$  le sous-espace hilbertien de  $(c)$  défini par  $A$  dont la tronquée  $A_n$  est :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & d & 1 & & \\ & & 1 & d & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & d \end{pmatrix}$$

Propriété 5 (Caractérisation)

$h_d$  est l'espace des suites convergentes telles que la suite erreur associée appartient à  $\ell_2$ .

Le produit scalaire dans  $h_d$  est

$$(y, z) = y_0 z_0 + \frac{1}{d-1} \sum_1^{\infty} (y_n - y_0) (z_n - z_0) \quad \begin{cases} y_0 = \lim y_1 \\ z_0 = \lim z_1 \end{cases}$$

Démonstration

On peut écrire  $A_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) + (d-1) \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

$A_n$  est donc définie positive

$$A_n^{-1} = \frac{1}{d-1} \begin{pmatrix} n+d-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \hline \vdots & & I & & \\ -1 & \hline \end{pmatrix}$$

Soient  $\tilde{y}_n$  et  $\tilde{z}_n$  les tronquées de rang  $n$  des deux suites.

$$\tilde{y}_n^T A_n^{-1} \tilde{z}_n = y_0 z_0 + \frac{1}{d-1} \sum_{i=1}^n (y_i - y_0) (z_i - z_0)$$

L'espace  $h_d$  est l'espace des suites telles que

$$\lim_n \tilde{y}_n^T A_n^{-1} \tilde{y}_n < \infty \quad \text{c'est-à-dire vérifiant} \quad \sum_{i=1}^{\infty} (y_i - y_0)^2 < \infty$$

C'est donc l'espace des suites telles que la suite erreur associée appartient à  $\ell_2$  ; le produit scalaire dans  $h_d$  est :

$$(y, z) = y_0 z_0 + \frac{1}{d-1} \sum_{i=1}^{\infty} (y_i - y_0) (z_i - z_0)$$

(Pour  $d = 2$  on retrouve le produit scalaire habituel de  $\ell_2$ ). ■

Propriété 5bis (Procédés de sommation optimaux)

Sur  $h_d$  le procédé de sommation optimal est défini par la matrice

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & & & & \\ \frac{1}{d+1} & \frac{1}{d+1} & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ \frac{1}{n+d-1} & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{n+d-1} \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

Le procédé de sommation optimum total est le procédé de Cesaro.

Démonstration :

Pour construire le procédé de sommation optimal, il faut résoudre le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 1 & \dots & 1 \\ 1 & d & & \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & 1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{n1} \\ \\ \\ C_{nn} \end{pmatrix}, \text{ dont la solution est } \frac{1}{n+d-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut constater que le procédé défini par C est régulier (les conditions de Toeplitz sont vérifiées), bien que la matrice A ne vérifie pas les hypothèses de la propriété 4.

$$(a_{11} = d \text{ et } a_{00} = 1 \text{ lim } a_{11} \neq a_{00}).$$

En ce qui concerne le procédé total optimum, le système linéaire

$$\begin{pmatrix} (v^0 - v^1, \Delta v^1) \\ \vdots \\ (v^0 - v^1, \Delta v^{n-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Delta v^1, \Delta v^1) & \dots & (\Delta v^1, \Delta v^{n-1}) \\ \vdots \\ (\Delta v^{n-1}, \Delta v^1) & \dots & (\Delta v^{n-1}, \Delta v^{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{n1} \\ \vdots \\ \beta_{nn-1} \end{pmatrix} \text{ s'écrit :}$$

$$(d-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (d-1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & & \\ & & & -1 \\ 0 & & & \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{n1} \\ \\ \\ \beta_{nn-1} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \beta_{n1} \\ \vdots \\ \beta_{nn-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-1 \\ n-2 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \sum c_{n1} v^i = v^1 + \beta_n \Delta v^1 + \dots + \beta_{nn-1} \Delta v^{n-1} = \frac{1}{n} (v^1 + \dots + v^n)$$

Le procédé total optimum est donc le procédé de Cesaro. ■

Exemple 2    Les espaces  $h_\lambda$

Soit  $0 < \lambda < 1$

$$\text{Soit } A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \dots & 1-\lambda^n \\ 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda & \dots & 1-\lambda \\ \vdots & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \dots & 1-\lambda^2 \\ 1-\lambda^n & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \dots & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & \dots & 1-\lambda^n \\ 1-\lambda & & & & \\ \vdots & & B_n & & \\ 1-\lambda^n & & & & \end{pmatrix}$$

Le sous-matrice  $B_n$  est factorisable [10]

$A_n$  est symétrique définie positive (voir [10]) et

$$B_n^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha_{n-1} & \\ 0 & & & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \beta_1 = \frac{1}{\lambda^1(1-\lambda)} \\ \alpha_1 = -\frac{1+\lambda^2}{\lambda(1-\lambda^2)} \\ \alpha_i = -\frac{\lambda+1}{\lambda^i(1-\lambda)} \quad (i=2, \dots, n-1) \\ \alpha_n = -\frac{1}{\lambda^{n-1}(1-\lambda)} \end{cases}$$

On a alors

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^n} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda^n} \\ 0 & & & & & \\ 0 & & B_n^{-1} + \frac{1}{\lambda^n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & & & (0 \ 0 \ 0 \ 1) \\ 0 & & & & & \\ -\frac{1}{\lambda^n} & & & & & \end{pmatrix}$$

Caractérisation

$h_\lambda$  peut être caractérisé comme étant l'espace des suites  $\{x_i\}$  telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{\lambda^i} \{ \Delta x_i - \lambda \Delta x_{i-1} \} < \infty$$

### Formules de sommation optimales

La construction de la formule de sommation optimale nous amène à résoudre

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & & & & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 & \dots & & 1 - \lambda^2 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 - \lambda & & & & 1 - \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n1} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda \\ 1 - \lambda^2 \\ \vdots \\ 1 - \lambda^n \end{pmatrix}$$

dont la solution est  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Le procédé de sommation optimal est donc défini par la matrice unité.

(Le procédé de sommation optimum total est aussi défini par la matrice unité).

### Exemple 3 Sous espaces hilbertiens associés à une matrice de Hankel

Soit  $\{a_n\}$  une suite positive de limite nulle, donc telle que les matrices de Hankel

$$H_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{2n-2} & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad \text{sont définies positives pour } n = 1, 2, \dots$$

Soit  $h(\{a_n\})$  le sous espace hilbertien de  $(c)$  défini par une matrice infinie  $A$  dont la tronquée

$A_n$  est :

$$A_n = \begin{pmatrix} a^* & a^* & \dots & \dots & a^* \\ a^* & & & & \\ \vdots & & & & \\ a^* & a^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & (1 \ 1 \ 1) & + H_n & \end{pmatrix} = a^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & H_n & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$a^* > 0$$

#### Propriété 6 :

L'espace  $h(\{a_n\})$  est l'espace des suites convergentes telles que la suite erreur associée vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{e}_n^T H_n^{-1} \tilde{e}_n < \infty$$

Démonstration

$A_n$  est de la forme :  $A_n = a^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 1 \ 1) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_n & & \\ & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ , elle est donc définie positive.

On a :

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^*} + (1 \ 1 \ 1 \ 1) H_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & - (1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1) H_n^{-1} \\ - H_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} & H_n^{-1} \end{pmatrix}$$

$h(\{a_n\})$  est l'espace des suites telles que

$$\lim_n \tilde{y}_n^T A_n^{-1} \tilde{y}_n < \infty \quad (\tilde{y}_n : \text{tronqué de rang } n \text{ d'une suite } \{y_n\})$$

Un calcul facile montre que

$$\tilde{y}_n^T A_n^{-1} \tilde{y}_n = \frac{y_0^2}{a^*} + (y_1 - y_0, \dots, y_n - y_0) H_n^{-1} \begin{pmatrix} y_1 - y_0 \\ \vdots \\ y_n - y_0 \end{pmatrix}$$

$h(\{a_n\})$  est donc l'espace des suites convergentes telles que la suite erreur associée vérifie  $\lim_n \tilde{e}_n^T H_n^{-1} \tilde{e}_n < \infty$  ■

$C$  étant la variété linéaire (de dimension 1) engendrée par la suite constante,

$h(\{a_n\})$  peut être considéré comme un espace produit :

$$h(\{a_n\}) = C \times H(\{a_n\})$$

$H(\{a_n\})$  : espace de suites de limite nulle.

Nous allons montrer que la théorie des moments permet de caractériser  $H(\{a_n\})$ .

Théorème ([1] p. 41, 45)

Soit  $\{a_n\}$  une suite positive ; il existe alors une mesure  $\sigma$ , solution du problème des moments :

$$a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} u^k d\sigma(u) \quad k = 0, 1, \dots$$

Si de plus la matrice de Jacobi associée à  $\{a_n\}$  (voir [1] p. 19) est de type D, alors il y a unicité de  $\sigma$  et l'ensemble des polynômes est dense dans  $L^2_\sigma$  (espace de Hilbert des fonctions

telles que  $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(u))^2 d\sigma(u) < \infty$ )

Démonstration

Nous renvoyons à [1] pour la démonstration. Signalons qu'il existe des conditions suffisantes (dites de Carleman) assurant que la matrice de Jacobi associée à  $\{a_n\}$  est de type D.

Propriété 7 :

Sous les conditions de Carleman, l'espace  $H(\{a_n\})$  est isométrique à  $L^2_\sigma$ .

Démonstration :

Dans  $L^2_\sigma$  le produit scalaire est :

$$(f, g)_\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \overline{g(u)} d\sigma(u).$$

Pour des polynômes  $(x^i, x^j)_\sigma = a_{i+j}$ .

Notons  $b^0, b^1, \dots, b^n$  les "colonnes" de la matrice de Hankel H. Ce sont des éléments de  $H(\{a_n\})$  qui forment un ensemble dense dans  $H(\{a_n\})$ , et de plus

$$(b^i, b^j)_H = a_{i+j}$$

(Les  $b^i$  sont reliés aux  $v^i$  par  $v^i = \begin{pmatrix} a^* \\ a^* \\ a^* \\ \vdots \end{pmatrix} + b^{i-1}$ )

Si on orthonormalise  $1, x, \dots, x^k$  dans  $L^2_\sigma$  on obtient une famille de polynômes orthogonaux  $P_k(\lambda)$  (polynômes orthogonaux de 1<sup>o</sup> espèce).

Si on orthonormalise  $b^0, b^1, \dots, b^k$  dans  $H(\{a_n\})$  on obtient (en faisant les mêmes opérations) une famille  $p_k$ .

L'isométrie entre  $L^2_\sigma$  et  $H(\{a_n\})$  se fait par l'intermédiaire des séries de Fourier :

Soit  $F(\lambda) \in L^2_\sigma$ , associons lui sa série de Fourier  $\{c_n\}$ , ce qui permet de définir  $f \in H(\{a_n\})$  :

$$F(\lambda) = \sum_n c_n P_n(\lambda) \Leftrightarrow f = \sum_n c_n p_n$$

$$F(\lambda) \in L^2_\sigma \quad f \in H(\{a_n\}) \quad \blacksquare$$

Remarque :

Soit A l'opérateur auto-adjoint de  $H(\{a_n\}) \rightarrow H(\{a_n\})$  associé au problème des moments (tel que  $(A^m p_\sigma, A^n p_\sigma)_H = a_{m+n}$ ). Dans l'isométrie  $L^2_\sigma \leftrightarrow H(\{a_n\})$ , à l'opérateur A correspond dans  $L^2_\sigma$  l'opérateur de multiplication par la variable x.

On a donc dans  $H(\{a_n\})$

$$b^1 = A^1 b^0$$

#### Formules de sommation optimales

Pour rechercher les coefficients de la  $n^{\text{ème}}$  ligne du procédé de sommation, il faut résoudre un système linéaire où intervient  $H_n$  :

$$\begin{pmatrix} a^* \\ a^* \\ a^* \\ \vdots \\ a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ \dots \ 1) + H_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Posons  $h = H_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

On a :

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{a^*}{1 + a^*(1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1)h} h$$

#### Formules de sommation totales optimum

Soit  $y \in h(\{a_n\})$  ; on cherche les coefficients optimaux de la  $n^{\text{ème}}$  ligne du procédé de sommation, pour calculer ensuite

$$\begin{aligned} z_n &= \sum_{i=1}^n c_{ni} y_i \\ &= y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{ni} \Delta y_i \end{aligned}$$

Les  $\beta_{ni}$  sont solution de :

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta a_0 + \Delta^2 a_0 \beta_{n1} + \dots + \Delta^2 a_{n-2} \beta_{nn-1} \\ 0 &= \Delta a_1 + \Delta^2 a_1 \beta_{n1} + \dots + \Delta^2 a_{n-1} \beta_{nn-1} \\ &\vdots \\ 0 &= \Delta a_{n-2} + \Delta^2 a_{n-2} \beta_{n1} + \dots + \Delta^2 a_{2n-4} \beta_{nn-1} \end{aligned}$$

D'où le système de  $n$  équations à  $n$  inconnues



$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \Delta a_0 \\ \Delta a_1 \\ \vdots \\ \Delta a_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \Delta y_1 & \Delta y_2 & \dots & \Delta y_{n-1} \\ 0 & \Delta^2 a_0 & & & \Delta^2 a_{n-2} \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & \Delta^2 a_{n-2} & \dots & \dots & \Delta^2 a_{2n-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_n \\ \beta_{n1} \\ \vdots \\ \beta_{nn-1} \end{pmatrix}$$

dont la solution peut s'écrire (après transformations de déterminants)

$$z_n = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \Delta a_0 & \Delta a_1 & & \Delta a_{n-1} \\ \vdots & & & \\ \Delta a_{n-2} & \dots & & \Delta a_{2n-3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \Delta a_0 & & & \Delta a_{n-1} \\ \Delta a_{n-2} & & & \Delta a_{2n-3} \end{vmatrix}}$$

Pour le calcul de  $z_n$ , il existe des algorithmes récursifs : Procédé q de Brezinski ([4]), procédé G de Pye-Atchison([33]).

*Remarque :*

Si on applique la formule de sommation optimale totale à  $\{y_i\}$  telle que  $y_i = y^* + a_{i-1}$ ,

On obtient :

$$z_n = y^* + \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \Delta a_0 & \dots & \dots & \Delta a_{n-1} \\ \Delta a_{n-2} & & & \Delta a_{2n-3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Delta a_0 & \dots & \Delta a_{n-1} \\ \Delta a_{n-2} & \dots & \Delta a_{2n-3} \end{vmatrix}}$$

Cette formule n'est autre que celle de l' $\epsilon$ -Algorithme appliqué à  $\{y_i\}$ .

#### Exemple 4

Soit  $h$  le sous-espace hilbertien de  $(c)$  défini par une matrice infinie  $A$  dont la tronquée  $A_n$  est :

$$A_n = \begin{pmatrix} a^* & a^* & \dots & a^* \\ a^* & & & \\ \vdots & a^* & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \\ a^* & & & \end{pmatrix} \quad (1 \ 1 \ 1) + B_n$$

$B_n = R_n R_n^T$ , où  $R_n$  est une matrice triangulaire inférieure :

$$a^* \geq 0$$

$$R_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \lambda & & & & \\ \lambda^2 & & & & \\ \vdots & & & & \\ \lambda^{n-1} & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad |\lambda| < 1$$

Propriété 6 bis :

$h$  est l'espace des suites convergentes telles que la suite erreur associée vérifie

$$e_1^2 + \sum_1^{\infty} (e_{i+1} - \lambda e_i)^2 < \infty$$

Démonstration :

La matrice  $B_n$  est définie positive (il en est donc de même pour  $A_n$ ) ; on peut constater que  $B_n$  est de la forme :

$$B_n = \begin{pmatrix} a_1 & \lambda a_1 & \lambda^{n-1} a_1 \\ \lambda a_1 & \sqrt{a_2} & \lambda a_2 \\ \vdots & \sqrt{a_1} & \lambda a_1 \\ \lambda^{n-1} a_1 & \lambda a_1 & \lambda a_1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{L'élément } (i,j) \text{ de } B_n \text{ est } a_i \lambda^{j-1} \text{ (} j > i \text{)} \\ a_i = \sum_{k=0}^{i-1} \lambda^{2k} \end{array}$$

Cette matrice vérifie les conditions pour définir un sous-espace hilbertien de (c)

$$(\lim_j B_{ij} = 0 \quad \forall i)$$

Comme

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^*} + (1 \ 1 \ 1 \ 1) B_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & - (1 \ 1 \ 1 \ 1) B_n^{-1} \\ - B_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & B_n^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$B_n^{-1} = (R_n^{-1})^T R_n^T \quad \text{avec } R_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & -\lambda & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & -\lambda & & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

l'espace peut être défini comme l'espace des suites  $y$  telles que

$$\lim_n \left[ \frac{y_0^2}{a^*} + (y_1 - y_0, \dots, y_n - y_0) B_n^{-1} \begin{pmatrix} y_1 - y_0 \\ \vdots \\ y_n - y_0 \end{pmatrix} \right] < \infty$$

Notons  $e_n = y_n - y_0$  (erreur associée au  $n^{\text{ème}}$  élément)

$$\lim_n (e_1 \dots e_n) B_n^{-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = e_1^2 + \sum_{i=1}^{\infty} (e_{i+1} - \lambda e_i)^2$$

$h$  est donc l'espace des suites telles que la suite erreur associée vérifie

$$e_1^2 + \sum_{i=1}^{\infty} (e_{i+1} - \lambda e_i)^2 < \infty$$

#### Calcul des formules de sommation optimales (totales)

Nous devons résoudre le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} -(v^1, \Delta v^1) \\ \vdots \\ -(v^1, \Delta v^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Delta v^1, \Delta v^1) & \dots & (\Delta v^1, \Delta v^n) \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta v^n, \Delta v^1) & \dots & (\Delta v^n, \Delta v^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Le second membre de ce système s'écrit :

$$(1 - \lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

et les coefficients de la matrice sont (après simplifications) :

$$\begin{aligned} (\Delta v^i, \Delta v^i) &= \frac{1 + \alpha_i}{1 + \lambda} \\ (\Delta v^i, \Delta v^j) &= \frac{-1 + \lambda^{j-1} \alpha_i}{1 + \lambda} \quad (j > i) \end{aligned}$$

$$[\alpha_i = [1 - \lambda^{2i} (1 - \lambda)]]$$

Nous n'avons pas pu trouver les  $\beta_i$  sous une forme explicite.

Dans le cas  $\lambda = \frac{1}{2}$ , le calcul des coefficients de la matrice de sommation donne :

1								
0.6	0.4							
0.5	0.166..	0.333..						
0.2	0.235	0.110 <sup>-1</sup>	0.553					
6.9	-0.9	0.3910 <sup>-1</sup>	0.777	-5.803				
1.23	0.710 <sup>-1</sup>	0.310 <sup>-1</sup>	0.310 <sup>-1</sup>	0.710 <sup>-1</sup>	-0.44			
1.00..	0.11	0.410 <sup>-1</sup>	0.110 <sup>-1</sup>	0.110 <sup>-1</sup>	0.310 <sup>-1</sup>	-0.23		
0.92	0.128	0.410 <sup>-1</sup>	0.110 <sup>-1</sup>	0.810 <sup>-2</sup>	0.110 <sup>-1</sup>	0.210 <sup>-1</sup>	-0.15	

Sur les divers exemples programmés, nous avons constaté une prépondérance des termes des colonnes 1 et 2, et de la diagonale.

#### Remarque

Soit  $P(x) = x^p + \lambda_1 x^{p-1} + \dots + \lambda_p$  un polynôme dont les racines sont de module inférieur à 1.

La matrice  $R_n$  dont l'inverse est :

$$R_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \lambda_1 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ \lambda_p & & & \ddots & \\ 0 & \lambda_p & \lambda_1 & & 1 \end{pmatrix}, \text{ définit une matrice } B_n = R_n R_n^T$$

On pourrait envisager le sous-espace hilbertien de (c) des suites telles que la suite erreur vérifie :

$$\sum_{i=1}^{\infty} (e_{i+p} + \lambda_1 e_{i+p-1} + \dots + \lambda_p e_i)^2 < \infty$$

Nous n'avons aucun résultat sur cet espace.

#### Conclusion

Les procédés que nous avons construits sont plus généraux (et moins efficaces) que les procédés d'accélération de convergence (ce qui est normal, car appartenir à un sous-espace hilbertien ne fournit qu'assez peu d'information). Il était donc normal de voir apparaître les procédés de sommation dans ce chapitre.

## II - ESTIMATION DE LA LIMITE DE SUITES D'UN ESPACE DE HILBERT.

La méthode de la section précédente peut être généralisée à des suites dont les éléments appartiennent à un espace de Hilbert. Dans cette section nous traitons un cas particulier et nous montrons que la méthode semi-itérative de Tchebichef apparaît comme un processus optimal (d'une manière analogue aux procédés de sommation optimaux).

### Notations

$E$  : Espace de Hilbert. Produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_E$

$c_0(E)$ ,  $\ell_1(E)$ ,  $\ell_\infty(E)$  : ensembles de suites à éléments dans  $E$  tels que

$$X = \{x_1, x_2, \dots\} \in c_0(E) \text{ si } \{\|x_1\|_E, \dots, \|x_n\|_E, \dots\} \in c_0$$

$$\|X\|_{c_0(E)} = \sup_1 \|x_1\|_E$$

$$X \in \ell_\infty(E) \text{ si } \{\|x_1\|_E, \dots, \|x_n\|_E, \dots\} \in \ell_\infty$$

$$X \in \ell_1(E) \text{ si } \{\|x_1\|_E, \dots, \|x_n\|_E, \dots\} \in \ell_1$$

$c(E)$  est l'espace des suites convergentes à éléments dans  $E$ .

### Propriété 7 :

Le dual de  $c(E)$  est  $E \times \ell_1(E)$ .

### Démonstration : [12] [14]

Nous renvoyons aux références pour les détails de la démonstration :

Les étapes en sont :

a) Si  $X^{(m)}$  converge vers  $X$  (dans  $c_0(E)$ ,  $\ell_\infty(E)$  ou  $\ell_1(E)$ ) alors  $X^{(m)}$  converge composante par composante.

b) Les espaces  $c_0(E)$ ,  $\ell_\infty(E)$ ,  $\ell_1(E)$  sont complets.

c) Le dual de  $c_0(E)$  est  $\ell_1(E)$ .

Enfin : Toute suite  $X$  de  $c(E)$  peut se mettre sous la forme

$$X = \{x^*, x^*, \dots, x^*\} + \{x_1 - x^*, x_2 - x^*, \dots\}$$

avec  $\{x_1 - x^*\} \in c_0(E)$  et  $x^* = \lim_1 x_1$

On a donc  $c(E) = E \times c_0(E)$ , la dualité étant définie par :

$$\langle X, T \rangle = (x^*, T_0)_E + \sum_{i=1}^{\infty} (x_i, T_i)$$

$$\begin{cases} X \in c(E), \text{ de limite } x^* \\ T = (T_1, T_2, \dots) \in \mathcal{L}_1(E) \\ T_0 \in E \end{cases} \quad \blacksquare$$

Construction de sous-espaces hilbertiens de  $c(E)$

Soit  $\{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$  une suite d'opérateurs bornés de  $L(E, E)$  (espace des opérateurs linéaires de  $E \rightarrow E$ ) tels que

$\forall n, A_n$  est auto-adjoint, inversible

et  $\lim_n \|A_n\| = 0$  (la norme étant prise dans  $L(E, E)$ )

$v' = (v'_0, v'_1, \dots)$  étant un élément de  $E \times \mathcal{L}_1(E)$ ,

soit  $V$  la suite de terme général

$$V_n = v'_0 + \sum_{i=1}^n v'_i + A_n \sum_{i=1}^n A_i v'_i$$

Soit  $H$  l'ensemble des suites  $V$ .

On peut dire que  $H$  est l'image de  $E \times \mathcal{L}_1(E)$  dans  $c(E)$  par la "matrice" d'opérateurs.

$$\begin{pmatrix} I & I & I & \dots \\ I & I + A_1 A_1 & I + A_1 A_2 & \dots \\ I & I + A_2 A_1 & I + A_2 A_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & | & \dots \end{pmatrix}$$

Nous sommes dans un cas très particulier car si  $E$  se réduit à  $\mathbb{R}$  le sous espace obtenu est déterminé par la matrice de rang 2 (définie positive).

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots) + \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix} (0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots)$$

Propriété 8

$H$  est un sous espace hilbertien de  $c(E)$  isomorphe à  $E \times E$ .

Démonstration

L'opérateur de  $E \times \mathcal{L}_1(E)$  dans  $c(E)$  étant symétrique défini positif, il découle des résultats de Schwartz [34] que  $H$  est un pré-hilbertien inclus topologiquement dans  $c(E)$ .

La nature de la transformation étant extrêmement simple, nous pouvons vérifier directement que  $H \subset c(E)$ , et donner une autre forme du produit scalaire dans  $H$ .

Soit  $V' = (V'_0, (V'_i)_{i \geq 1})$  un élément de  $E \times \mathcal{L}_1(E)$ .

On a  $\|V'_0\| + \sum_{i=1}^{\infty} \|V'_i\| < M$

$$\|A_n \sum_{i=1}^{\infty} A_i V'_i\| \leq \|A_n\|_{L(E,E)} \sum \|A_i\| \|V'_i\| \leq K \|A_n\|$$

Donc  $\lim_n \|A_n \sum_{i=1}^{\infty} A_i V'_i\| = 0$

Posons  $\bar{V}_0 = V'_0 + \sum_{i=1}^{\infty} V'_i$

$\bar{V}_0, \bar{V} \in c(E)$

$$\bar{V} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i V'_i$$

$$V_n = \bar{V}_0 + A_n \bar{V}$$

$V_n$  est le terme général d'une suite  $V$  à éléments dans  $E$ , et qui est convergente ( $\lim V_n = \bar{V}_0$ )

Donc  $V \in c(E)$  et  $H \subset c(E)$

Le produit scalaire dans  $H$  est déterminé par la dualité entre  $c(E)$  et  $E \times \mathcal{L}_1(E)$ .

Soient  $U' = (U'_0, (U'_i)_{i \geq 1})$

deux éléments de  $E \times \mathcal{L}_1(E)$

$$V' = (V'_0, (V'_i)_{i \geq 1})$$

Notons  $U$  et  $V$  leurs transformés.

$$\begin{aligned} (U, V)_H &= \langle U, V' \rangle = (U'_0 + \sum U'_i, V'_0)_E + \sum_{i=1}^{\infty} (U'_i, V'_i)_E \\ &= (U'_0, V'_0)_E + \sum (U'_i, V'_0)_E + (\sum_1 U'_i, \sum_1 V'_i)_E + \sum_1 (A_i \sum_j A_j U'_j, V'_i)_E \\ &= (\bar{U}_0, \bar{V}_0)_E + (\bar{U}, \bar{V})_E \end{aligned}$$

La suite  $\{U_n\}$  est déterminée par  $\bar{U}_0$  et  $\bar{U}$ .

$H$  est donc l'espace de Hilbert  $E \times E$  et le produit scalaire est de la forme :

$$(U, V)_H = (\bar{U}_0, \bar{V}_0)_E + (\bar{U}, \bar{V})_E$$

L'injection canonique de  $H \rightarrow c(E)$  est continue

D'après [34]

$$\|V\|_H = \sup_{U' \in E \times \mathcal{L}_1(E)} \frac{|\langle V, U' \rangle|}{|\langle U, U' \rangle|^{1/2}}$$

$$\begin{aligned} \langle U, U' \rangle &= \|\bar{U}_0\|^2 + \|\bar{U}\|^2 \\ &= \|U'_0 + \sum U'_i\|^2 + \|\sum A_i U'_i\|^2 \end{aligned}$$

Soit  $M$  la borne commune aux opérateurs  $A_i$

$$\langle U, U' \rangle \leq \|U'_0 + \sum U'_1\|^2 + M^2 (\sum \|U'_1\|)^2$$

Soit K un majorant de  $1 + M^2$

$$\langle U, U' \rangle \leq \|U'_0\|^2 + 2\|U'_0\| \|\sum U'_1\| + (\|\sum U'_1\|)^2 + M^2 (\sum \|U'_1\|)^2$$

$$\leq K (\|U'_0\| + \sum \|U'_1\|)^2$$

$$\|V\|_H \leq \frac{(V'_0 + \sum V'_1, U'_0)_E + \sum (V'_1, U'_1)_E}{\sqrt{K} (\|U'_0\| + \sum \|U'_1\|)}$$

Soit k tel que  $\|V_k\|_E = \sup_1 \|V_1\|$

Choisissons  $U'_0 = 0 \dots U'_1 = 0 \quad \forall 1 \neq k$   
 $U'_k = V_k$

$$\|V\|_H \geq \frac{(V_k, V_k)_E}{\sqrt{K} \|V_k\|} = \frac{\|V_k\|_E}{\sqrt{K}} = \frac{\|V\|_{c(E)}}{\sqrt{K}}$$

L'injection canonique de  $H \rightarrow c(E)$  est donc continue. ■

#### Résolution d'un problème d'approximation optimale

Soit  $U \in H$ .

Les opérateurs  $W^1$  et  $W^*$  de  $H \rightarrow E$ , qui à  $U \in H$  font correspondre  $U_1$  (1<sup>ème</sup> élément).

$U_*$  (limite à la suite  $U$ )

sont continus car

$$\|U_1\|_E \leq \sup_1 \|U_1\| = \|U\|_{c(E)} \leq \sqrt{K} \|U\|_H$$

$$\|U^*\|_E \leq \dots \leq \sqrt{K} \|U\|_H$$

Ces opérateurs appartiennent donc à  $L(E^2, E)$ .

Nous cherchons les coefficients  $\alpha_1$  ( $i = 1 \dots n$ ) permettant d'estimer la limite de toute suite

$U \in H$  par une combinaison linéaire  $\sum_{i=1}^n \alpha_1 U_1$ , et ceci de façon optimale :

$$\|U^* - \sum \alpha_1 U_1\| \leq \|(W^* - \sum \alpha_1 W^1) U\| \leq \|W^* - \sum \alpha_1 W^1\|_{L(E^2, E)} \|U\|_{c(E)}$$

Le problème revient à chercher les  $\alpha_1$  minimisent

$$\|W^* - \sum_{i=1}^n \alpha_1 W^1\|_{L(E^2, E)} \quad (1)$$

D'une manière analogue à la section précédente, on dit que les  $\alpha_1$  définissent un processus optimal total, s'ils minimisent (1) sous la contrainte  $\sum_{i=1}^n \alpha_1 = 1$

#### Propriété 9

Le processus optimal total est défini par les  $\alpha_1$  qui minimisent

$$\|\sum \alpha_1 A_1\|_{L(E, E)} = \rho(\sum \alpha_1 A_1)$$



Démonstration

Les opérateurs  $W^1$  et  $W^*$  (de  $H \rightarrow E$ ) qui associent à toute suite de  $H$  son  $i^{\text{ème}}$  élément et sa limite, sont déterminés par les couples

$$W^1 = \{I, A_1\}$$

$$W^* = \{I, 0\}$$

Si  $L$  est un opérateur de  $E \times E \rightarrow E$ , il est défini par ses "composantes"  $L = \{L_0, L_1\}$ .

$$\text{Posons } \|L\|_{L(E \times E, E)} = \|L_0\|_{L(E, E)} + \|L_1\|_{L(E, E)}$$

La recherche des  $\alpha_i$  devient :

$$\|I - \sum_{i=1}^n \alpha_i I\| + \|\sum \alpha_i A_i\| \quad \text{Min}$$

Comme  $\sum \alpha_i = 1$  Le problème se réduit à

$$\text{Min } \|\sum \alpha_i A_i\|_{L(E, E)}$$

Les opérateurs étant auto-adjoint, le problème revient à minimiser  $\rho(\sum \alpha_i A_i)$  ■

Corollaire

Lorsque  $A_i = A^i$  (puissances d'un opérateur  $A$  de rayon spectral inférieur à 1), les méthodes semi-itératives de Tchebichef fournissent une réponse au problème précédent.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] AKHIEZER N.I. : "The Classical Moment Problem". Oliver & Boyd Ltd (1965).
- [2] BARANGER J. : "Quelques résultats en optimisation non convexe". Thèse Grenoble (1973).
- [3] BRAUER A. : "Bounds for Characteristic Roots of Matrices" dans "Simultaneous Linear Equations and the Determination of Eigenvalues". Edité par L.J. Paige et Olga Taussky N.B.S.A.M.S. 29.
- [4] BREZINSKI C. : "Accélération de la Convergence en Analyse Numérique" Lectures Notes in Mathematics. 584. (Springer Verlag).
- [5] BROWDER F.E., PETRYSSHYN W.V. : "Construction of Fixed Points of Nonlinear Mappings in Hilbert Space" J. of Math. Analysis and Applications 20 p197-228 (1967).
- [6] COATMELEC C. : "Approximation et interpolation des fonctions différentiables à plusieurs variables" Thèse Annal. de l'E.N.S. 3<sup>e</sup> série n°83 (1966)
- [7] CORDELLIER F. : "Quelques résultats sur le  $\theta$ -Algorithme" Séminaire d'Analyse Numérique de Lille (1976-1977)
- [8] DOTSON W.G. : "On the Mann Iterative Process" Trans. A.M.S. Vol 149 (May 1970) p 65-73.
- [9] DUCATEAU C.F. : "Etude de quelques problèmes d'interpolation". Thèse Grenoble (1971).
- [10] DUC-JACQUET M. : "Approximation des fonctionnelles linéaires sur les espaces hilbertiens autoreproduisants". Thèse Grenoble (1973).
- [11] FRIDMAN V.M. : "The method of Minimum Iteration with Minimum Errors of a system of linear Algebraic Equations with a symmetrical Matrix" U.S.S.R. Computational math. (1963) p 362-363.
- [12] GARNIR H.G., DE WILDE M., SCHMETS J. : "Analyse fonctionnelle (III)" Birkhäuser Verlag (1973).
- [13] GASTINEL N. : "Détermination de certains sous-espaces d'Hilbert d'un espace normé". Colloque d'Analyse Numérique d'Anglet (1971).
- [14] GERMAIN-BONNE B. : "Etude de quelques problèmes d'accélération de convergence". Laboratoire de Calcul de Lille (Publication 65).
- [15] GROETSCH C.W. : "Convex Iteration Procedures and a Related Class of Summability Methods" Ph. D., 1971. Louisiana State University and Agricultural and Mechanical College.
- [16] HENRICI P. : "Elements of numerical analysis". Wiley (1964).
- [17] JENNINGS A. : "Accelerating the Convergence of Matrix Iterative Processes". J. Inst. Maths Applics (1971) 8, p 99-110.

- [18] JOLLEY L.B.W. : "Summation of Series" Dover Publications Inc., New York (1961).
- [19] KATO : "Perturbation theory for linear operators" Springer Verlag, (1966) New York.
- [20] KNOPP K. : "Theory and application of infinite series".Blackie & Son limited. London and Glasgow (1964).
- [21] KOLIHA J.J. : "The solution of linear equations in normed spaces by averaging iteration". SIAM J. Math. Anal. Vol 5 N° 2 (April 1974).
- [22] - KRASNOSEL' SKII et al. : "Approximate solution of operator equations".Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (1972).
- KRASNOSEL' SKII M.A. : "Two remarks on the method of successive approximations" Uspekhi. Mat. Nauk 10 N° 1 (1955).
- [23] KUMMER : J. f.d. reine u. angew. Math Vol 16 p 206 (1837)
- [24] KUNTZMANN J. : "Methodes numériques - Interpolation - Dérivées" Dunod (1959).
- [25] LARKIN F.M. : "Optimal Approximation in Hilbert Spaces with Reproducing Kernel Functions". Math. of Comput Vol 24, N° 112 (Oct. 1970) p 911-921.
- [26] LUBKIN S. : "A method of Summing Infinite Series" J. of Research of N.B.S. Vol 48 N° 3 (March 1952) P 228-254.
- [27] MANN W.R. : "Mean Value Methods in Iteration" Proc. A.M.S. 4(1953) p 506-510.
- [28] NIETHAMMER W. : "Konvergenzbeschleunigung bei einstufigen iterationverfahren durch summierungsmethoden" Ser. Internation. Anal. numer. Suisse (1970) 3 - p 235-243.
- [29] NIETHAMMER W. and SCHEMP W. : "On the construction of Iteration methods for Linear Equations in Banach Spaces by Summation Methods" Aeq. Math. Vol 5 (1970) p 273-284.
- [30] ORTEGA I.M. and RHEINOLDT W.C. : "Iterative solution of nonlinear equations in several variables" Academic Press - New York (1970)
- [31] OVERHOLT K.J. : "Extended Aitken acceleration" Bit 5 (1965) p 122-132.
- [32] PENNACCHI R. : "Le trasformazioni razionale di una successione." Calcolo 5 (1968) p 37-50.
- [33] PYE W.C. and ATCHISON T.A. : "An algorithm for the computation of the higher order G-Transformation" SIAM J. Numer. Anal. Vol 10 N° 1 (March 1973) p 1 - 7.
- [34] SCHWARTZ L. : "Sous- espaces hilbertiens et antinoyaux associés" Séminaire Bourbaki 1961/1962 N° 238.
- [35] TRAUB : "Iterative Methods for the Solution of Equations". Prentice Hall Inc. (1964).

- [36] VOROBYEV YU.V : *"Method of moments in applied mathematics"* Gordon and Breach - New York (1965).
- [37] WHITNEY : *"Analytic extensions of differential functions defined in closed sets"* Trans. Amer. Math. Soc Vol 36-1 (1934).
- [38] WILKINSON : *"The algebraic eigenvalue problem "*. Monographs on numerical analysis Oxford University Press (1965)
- [39] WYNN P. : *"Acceleration techniques for iterated vector and matrix problems"*. Math. Comp. 16 (1962) p 301-327.