

N° d'ordre : 735

50376
1978
127

50376
1978
127

THESE

Présentée à

L' UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

Pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE
(INFORMATIQUE)

Par

Annie Françoise MOUYART TASSIN.

UNE NOUVELLE SORTIE

DE

CONFIGURATION COMBINATOIRE :

LES CARRES SIAMOIS



Soutenu le 6 décembre 1978, devant la commission d'examen

MM.	P. BACCHUS	Président
	C. BERGE	Examinateur
	G. JACOB	Examinateur
	JP. STEEN	Examinateur
	F. STERBOUL	Rapporteur

DOYENS HONORAIRES de l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit
et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, NORMANT, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUBINE, ROUELLE, SAVART, WATERLOT, WIEMAN, ZAMANSKI.

PRESIDENTS HONORAIRES DE L'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R. DEFRETIN, M. PARREAU.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE
DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. J. LOMBARD.

PROFESSEURS TITULAIRES

M.	BACCHUS Pierre	Astronomie
M.	BEUFILS Jean-Pierre	Chimie Physique
M.	BECART Maurice	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BILLARD Jean	Physique du Solide
M.	BIAYS Pierre	Géographie
M.	BONNEMAN Pierre	Chimie Appliquée
M.	BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M.	BONTE Antoine	Géologie Appliquée
M.	BOUGHON Pierre	Algèbre
M.	BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M.	CÉLET Paul	Géologie Générale
M.	CONSTANT Eugène	Electronique
M.	DECUYPER Marcel	Géométrie
M.	DELATTRE Charles	Géologie Générale
M.	DELHAYE Michel	Chimie Physique
M.	DERCOURT Michel	Géologie Générale
M.	DURCHON Maurice	Biologie Expérimentale
M.	FAURE Robert	Mécanique
M.	FOURET René	Physique du Solide
M.	GABILLARD Robert	Electronique
M.	GLACET Charles	Chimie Organique
M.	GONTIER Gérard	Mécanique
M.	GRUSON Laurent	Algèbre
M.	GUILLAUME Jean	Microbiologie
M.	HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M.	LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique
M.	LANSRAUX Guy	Physique Atomique et Moléculaire
M.	LAVEINE Jean-Pierre	Paléontologie
M.	LEBRUN André	Electronique
M.	LEHMANN Daniel	Géométrie

Mme	LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M.	LINDER Robert	Biologie et Physiologie Végétales
M.	LOMBARD Jacques	Sociologie
M.	LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M.	LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M.	MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M.	MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M.	MONTREUIL Jean	Biochimie
M.	PARREAU Michel	Analyse
M.	POUZET Pierre	Analyse Numérique
M.	PROUVOST Jean	Minéralogie
M.	SALMER Georges	Electronique
M.	SCHILTZ René	Physique Atomique et Moléculaire
Mme	SCHWARTZ Marie-Hélène	Géométrie
M.	SEQUIER Guy	Electrotechnique
M.	TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M.	TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée
M.	VIDAL Pierre	Automatique
M.	VIVIER Emile	Biologie Cellulaire
M.	WERTHEIMER Raymond	Physique Atomique et Moléculaire
M.	ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M.	BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BODARD Marcel	Biologie Végétale
M.	BOILLET Pierre	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M.	BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M.	CAPURON Alfred	Biologie Animale
M.	CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des entreprises
M.	DEPREZ Gilbert	Physique Théorique
M.	DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M.	GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M.	GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M.	LACOSTE Louis	Biologie Végétale
Mme	LEHMANN Josiane	Analyse
M.	LENTACKER Firmin	Géographie
M.	LOUAGE Francis	Electronique
Mlle	MARQUET Simone	Probabilités
M.	MIGEON Michel	Chimie Physique
M.	MONTEL Marc	Physique du Solide
M.	PANET Marius	Electrotechnique
M.	RACZY Ladislas	Electronique
M.	ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M.	SLIWA Henri	Chimie Organique

MAITRES DE CONFERENCES (et chargés d'Enseignement)

M.	ADAM Michel	Sciences Economiques
M.	ANTOINE Philippe	Analyse
M.	BART André	Biologie Animale
M.	BEGUIN Paul	Mécanique
M.	BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BONNEMAIN Jean-Louis	Biologie Végétale
M.	BOSCQ Denis	Probabilités
M.	BREZINSKI Claude	Analyse Numérique
M.	BRUYELLE Pierre	Géographie

M. CARREZ Christian	Informatique
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. COQUERY Jean-Marie	Psycho-Physiologie
Mlle DACHARRY Monique	Géographie
M. DEBENEST Jean	Sciences Economiques
M. DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M. DHAINAUT André	Biologie Animale
M. DELAUNAY Jean-Claude	Sciences Economiques
M. DERIEUX Jean-Claude	Microbiologie
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique du Solide
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du Solide
Mlle EVRARD Micheline	Chimie Appliquée
M. FONTAINE Jacques-Marie	Electronique
M. FOURNET Bernard	Biochimie
M. FORELICH Daniel	Chimie Physique
M. GAMBLIN André	Géographie
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M. GUILLAUME Henri	Sciences Economiques
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JOURNEL Gérard	Physique Atomique et Moléculaire
Mlle KOSMAN Yvette	Géométrie
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LAURENT François	Automatique
Mlle LEGRAND Denise	Algèbre
Mlle LEGRAND Solange	Algèbre
M. LEROY Jean-Marie	Chimie Appliquée
M. LEROY Yves	Electronique
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique Théorique
M. LOUCHET Pierre	Sciences de l'Education
M. MACKE Bruno	Physique
M. MAHIEU Jean-Marie	Physique Atomique et Moléculaire
Mlle N'GUYEN VAN CHI Régine	Géographie
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MALAUSSENA Jean-Louis	Sciences Economiques
M. MESSELYN Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. MONTUELLE Bernard	Biologie Appliquée
M. NICOLE Jacques	Chimie Appliquée
M. PAQUET Jacques	Géologie Générale
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie Physique
M. PERROT Pierre	Chimie Appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie Animale
M. PONSOLLE Louis	Chimie Physique
M. POVY Lucien	Automatique
M. RICHARD Alain	Biologie
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROY Jean-Claude	Psycho-Physiologie
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SOMME Jean	Géographie
Mlle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. STEEN Jean-Pierre	Informatique

M. THERY Pierre
M. TOULOTTE Jean-Marc
M. TREANTON Jean-René
M. VANDORPE Bernard
M. VILLETTE Michel
M. WALLART Francis
M. WERNIER Georges
M. WATERLOT Michel
Mme ZINN-JUSTIN Nicole

Electronique
Automatique
Sociologie
Chimie Minérale
Mécanique
Chimie
Informatique
Géologie Générale
Algèbre

Ce travail n'a pu être mené à bien que grâce à tous ceux qui m'ont aidée au cours de sa réalisation. Je tiens à remercier particulièrement :

Monsieur le Professeur Bacchus, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury,

Messieurs Berge, Jacob et Steen, qui ont accepté d'en être les examinateurs,

Monsieur Sterboul, qui, depuis le choix du sujet, m'a régulièrement conseillée et guidée avec compétence et efficacité,

mes collègues, qui m'ont fait profiter de leur expérience au cours de discussions enrichissantes,

Messieurs Duthilleul et François, qui m'ont toujours facilité l'accès au calculateur,

Mademoiselle Bénédicte Fiévet, qui a tapé une partie de cette thèse,

Monsieur et Madame Debock, qui se sont chargés des travaux d'imprimerie avec gentillesse et diligence,

les secrétaires de l'EUDIL et du Laboratoire de Calcul, dont l'aide et les conseils m'ont été précieux,

ma famille et mes amis, pour leur soutien et leur compréhension.

Que tous trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Dans un congrès, on échange presque autant d'idées pendant les repas qu'au cours des conférences. Deux anecdotes sont à l'origine de cette thèse.

A Bangkok, Monsieur Virool, thaïlandais, exposa son problème à Monsieur Sterboul. Ne pouvant organiser ses travaux pratiques comme il le désirait, il avait trouvé la condition nécessaire qui lui faisait défaut, et avait construit un exemple. L'étude a été reprise plus tard, et le nom donné aux carrés qui en sont l'objet rappelle leur origine lointaine.

A Bruxelles, au cours d'une conversation sur les carrés latins, Monsieur Hansen suggéra qu'il était temps d'inventer les carrés gaulois. Certaines configurations combinatoires attendaient justement de recevoir un nom, et c'est ainsi que les latins, les grecs, et même les siamois, devinrent gaulois.

à Michel,

à Marc,

à mes parents.

TABLE DES MATIERES

1. PRELIMINAIRES	1
1.1 UN PROBLEME D'ORGANISATION	2
1.2 GRAPHERS ET HYPERGRAPHERS	5
1.2.1 Graphes	5
1.2.2 Hypergraphes	6
1.3 ALPHABET	7
1.4 PERMUTATIONS	8
1.5 TABLEAUX	10
1.5.1 Définition	10
1.5.2 Transposition	11
1.5.3 Union et intersection	11
1.5.4 Permutation des rangées	12
1.5.5 Juxtaposition	15
1.5.6 Changement d'échelle	19
2. CARRES GAULOIS	21
2.1 DEFINITION	22
2.2 CARRES GAULOIS ET TABLEAUX DE PERMUTATIONS	23
2.2.1 Les matrices de permutations	23
2.2.2 Les suites de permutations	24
2.2.3 Les tableaux de permutations	26
2.2.4 Tableaux de permutations particuliers	27

2.3	GRAPHES ET HYPERGRAPHES ASSOCIES A UN CARRE GAULOIS	30
2.3.1	Les k-hypergraphes	30
2.3.2	Les k-dessins	31
2.3.3	Les cycles	32
2.4	OPERATIONS SUR LES CARRES GAULOIS	35
2.4.1	Transposition	35
2.4.2	Permutation des rangées	36
2.4.3	Permutation de l'alphabet	37
2.4.4	Isomorphisme, similitude et équivalence	38
2.4.5	Union	38
2.4.6	Restriction	40
2.4.7	Homomorphisme	41
2.4.8	Carrelage	43
2.4.9	Permutation partielle de l'alphabet	44
2.4.10	Permutation partielle des rangées	46
2.4.11	Permutation incomplète des rangées	48
2.5	CARRES LATINS	51
2.5.1	Tableau de permutations associé à un carré latin	51
2.5.2	Invariants associés à un carré latin	53
2.5.3	Opérations sur les carrés latins	53
2.5.4	Carrés latins orthogonaux et carrés gréco-latins	55
2.6	CARRES DE ROOM	57
2.6.1	Définition	57
2.6.2	Carrés de Room particuliers	58
2.6.3	Existence des carrés de Room de dimension $2n-1$	59
2.6.4	Tableau de permutations associé à un carré de Room	67
2.6.5	Invariants associés à un carré de Room	68
2.6.6	Opérations sur les carrés de Room	68
2.7	CARRES DE ROOM GENERALISES	70
2.7.1	Définition	70
2.7.2	Tableaux de permutations équidistants	70
2.8	CARRES DE HOWELL GENERALISES	73
2.8.1	Définition	73
2.8.2	Existence	73

3.	CARRES SIAMOIS	75
3.1	DEFINITION	76
3.1.1	Le carré siamois $S(n,p)$	76
3.1.2	Relations vérifiées par n et par p	76
3.1.3	Application pratique	78
3.1.4	Le graphe des couples	78
3.1.5	Le dessin	79
3.1.6	Le tableau siamois	79
3.2	COUPLES SIAMOIS	83
3.2.1	Définition	83
3.2.2	Couples siamois premiers	84
3.2.3	Caractérisation de l'ensemble des couples siamois	90
3.3	CONSTRUCTION D'UN CARRE SIAMOIS $S(AB, B^2)$	92
3.3.1	Construction de S	92
3.3.2	S est un carré siamois	94
3.4	CONSTRUCTION D'UN CARRE SIAMOIS $S(AB, 2A^2)$	98
3.4.1	Construction de S	98
3.4.2	S est un carré siamois	99
3.5	CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE DE L'EXISTENCE D'UN CARRE SIAMOIS $S(N,P)$	102
3.6	OPERATIONS SUR LES CARRES SIAMOIS	105
3.6.1	Transposition	105
3.6.2	Permutation des rangées	105
3.6.3	Permutation de l'alphabet	106
3.6.4	Isomorphisme, similitude, équivalence, forme normale	106
3.6.5	Union	108
3.6.6	Restriction	109
3.6.7	Carrelage	109
3.6.8	Permutation partielle de l'alphabet	110
3.6.9	Permutation partielle des rangées	112
3.6.10	Permutation incomplète des rangées	113

3.7	EXEMPLES DE CARRÉS SIAMOIS	114
3.7.1	Un carré siamois S(15,18)	114
3.7.2	Un carré siamois S(15,25)	115
3.7.3	Carrés siamois S(6,8)	116
3.7.4	Carrés siamois S(6,9)	122
	CONCLUSION	126
	REFERENCES	127

PREMIERE PARTIE

P R E L I M I N A I R E S

1.1 UN PROBLEME D'ORGANISATION

Supposons que nous devons organiser des séances de travaux pratiques pour des étudiants en physique.

Le programme nous impose le nombre n des manipulations que chaque étudiant doit effectuer, et nous connaissons le nombre p des étudiants.

Si chaque manipulation occupe une séance entière, il faudra prévoir au moins n séances pour que chaque étudiant puisse faire toutes les manipulations.

Au moment où on élabore le planning, on suppose que les étudiants effectuent une fois et une seule chaque manipulation, et qu'ils sont tous disponibles à chaque séance. Le problème des séances de révision, ou de rattrapage pour les absents, ne sera abordé qu'à la fin du cycle de travaux pratiques, et n'est donc pas de notre ressort.

L'affichage de l'organisation retenue sera fait sous la forme d'un tableau à m lignes, représentant les séances, et à n colonnes, une par manipulation, dont les cases contiennent les noms des étudiants concernés. Un étudiant dont le nom (ou le numéro) figure dans la case (i, j) devra effectuer la $i^{\text{ème}}$ manipulation au cours de la $j^{\text{ème}}$ séance.

exemple 1 : trois manipulations, quatre étudiants,
organisation quelconque.

	TP1	TP2	TP3
lundi	Alain Bernard	Claude	Daniel
mardi	-	Alain Bernard Daniel	-
mercredi	Claude Daniel	-	Alain
jeudi	-	-	Bernard Claude

fig.1.1.1

ou

	1	2	3
1	12	3	4
2	-	124	-
3	34	-	1
4	-	-	23

exemple 2 : trois manipulations, quatre étudiants,
un nom et un seul par case.

	TP1	TP2	TP3
lundi	Alain	Bernard	Claude
mardi	Bernard	Claude	Daniel
mercredi	Claude	Daniel	Alain
jeudi	Daniel	Alain	Bernard

fig.1.1.2

1	2	3
2	3	4
3	4	1
4	1	2

On peut dire qu'une organisation est satisfaisante si ;

- à la fin du cycle, tous les étudiants ont effectué chaque manipulation une fois et une seule. Autrement dit ; chaque nom figure une fois et une seule dans chaque colonne.

- au cours de chaque séance, chaque étudiant effectue au plus une manipulation. Chaque nom figure donc au plus une fois dans chaque ligne.

Mais on peut chercher à l'améliorer, et tout d'abord en réduisant le nombre des séances. Ce nombre ne pouvant être inférieur au nombre n ,

nous imposerons qu'il soit égal à n . Tous les étudiants seront donc présents à chaque séance, chaque nom figurera une fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne. Nous appellerons *carré gaulois* un tableau carré qui possède cette propriété.

On peut ensuite améliorer la répartition des étudiants à chaque séance. Par exemple, le tableau de la figure 1.1.2 est mieux réparti que celui de la figure 1.1.1.

S'il y a exactement n étudiants pour n manipulations et n séances, chaque étudiant peut effectuer seul chaque manipulation, et le tableau est un *carré latin*.

S'il y a un nombre pair d'étudiants, différent de 4 et de 6, si n est inférieur d'une unité à ce nombre, on peut placer les étudiants en "binômes" de toutes les façons possibles en construisant un *carré de Room*.

Si le nombre p des étudiants est compris entre n et $2n$, s'ils travaillent seuls ou à deux, si chacun travaille seul le même nombre de fois, et si aucune case du tableau n'est vide, on obtient un *carré siamois*.

Nous étudierons ces différents carrés dans la deuxième et la troisième parties, après avoir introduit quelques notions préliminaires.

1.2 GRAPHES ET HYPERGRAPHES

L'ouvrage de C. Berge [2] portant ce titre contient toutes les définitions nécessaires. Rappelons les principales :

1.2.1 Graphes

définition : Un graphe $G = (X, U)$ est le couple constitué par :

- un ensemble $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- une famille $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ d'éléments du produit cartésien $X \times X = \{(x, y) / x \in X, y \in Y\}$; un élément (x, y) de $X \times X$ peut apparaître plusieurs fois dans la famille U .

Les éléments de X sont appelés les *sommets* du graphe G , ceux de U les *arcs*.

Les graphes que nous rencontrerons dans cette étude ne seront généralement pas orientés : on parlera de l'*arête* (x, y) sans tenir compte du sens de l'arc reliant les sommets x et y .

Beaucoup de ces graphes seront *réguliers* : tous les sommets auront le même *degré*, qui est le nombre d'arêtes dont un sommet est l'extrémité.

Nous utiliserons également les notions de graphes partiels, de sous-graphes, de cycles et de composantes connexes :

Un *graphe partiel* d'un graphe G est un graphe ayant les mêmes

sommets que G , et dont l'ensemble des arêtes est inclus dans l'ensemble des arêtes de G .

Un *sous-graphe* de G est un graphe dont l'ensemble X' des sommets est contenu dans l'ensemble des sommets de G , et dont l'ensemble des arêtes est l'ensemble des arêtes de G dont les deux extrémités sont dans X' .

Un *sous-graphe partiel* est un graphe partiel d'un sous-graphe, ou un sous-graphe d'un graphe partiel.

Une *chaîne* de longueur n est une suite de n arêtes adjacentes $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_n, x_{n+1})$. Un *cycle* de longueur n est une chaîne de longueur n dans laquelle $x_{n+1} = x_1$.

Une *composante connexe* de G est un sous-graphe de G dont l'ensemble des sommets est une classe de la relation d'équivalence : " $x = y$, ou il existe une chaîne entre x et y ".

1.2.1 Hypergraphes

définition : Un hypergraphe est un couple $H = (X, E)$ où X est un ensemble fini $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, et $E = \{E_i / i \in I\}$ est une famille de parties non vides de X , dont la réunion est X .

Les éléments de X sont les *sommets*, ceux de E sont les *arêtes*.

Un graphe non orienté est donc un hypergraphe dont chaque arête contient un ou deux sommets. Une arête ne contenant qu'un seul sommet s'appelle une *boucle*.

Nous rencontrerons des hypergraphes *k-uniformes* : chaque arête contient k sommets, ou *k-réguliers* : chaque sommet appartient à k arêtes.

1.3 ALPHABET

Nous appellerons *alphabet* un ensemble fini, et *lettres* ou *symboles* ses éléments.

L'*ordre*, ou *cardinal*, d'un alphabet est le nombre de ses lettres.

Tout alphabet de n lettres peut être mis en correspondance biunivoque avec l'ensemble $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ des n premiers entiers, et c'est cet alphabet que nous rencontrerons le plus souvent.

Parfois, quand des calculs modulo n l'exigeront, nous préférerons utiliser l'ensemble $[n]_0 = \{0, 1, \dots, n-1\}$, que nous noterons également $[n]$ si aucune confusion n'est possible. Nous écrirons alors $\bar{x}^{(\text{mod } n)}$, ou \bar{x}^n , ou \bar{x} , pour désigner l'élément de $[n]_0$ congru à x modulo n , c'est-à-dire le reste de la division de x par n .

1.4 PERMUTATIONS

Une *permutation* est une application bijective d'un alphabet sur lui-même.

L'ensemble des $n!$ permutations de $[n]$, muni de la loi de composition des fonctions, est le *groupe symétrique* S_n .

Nous noterons de gauche à droite le produit de deux permutations, dans l'ordre où il s'exécute :

$$(pq)(i) = q(p(i))$$

Nous écrirons le plus souvent les permutations sous leur *forme cyclique réduite*, en mettant les cycles en évidence et en omettant les points fixes :

$$\text{par exemple } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (126)(35)$$

Une *transposition* est un cycle réduit à deux points, c'est-à-dire une permutation qui échange deux lettres et ne modifie pas les autres. Toute permutation peut être décomposée en un produit de transpositions. Le *groupe alterné* A_n est l'ensemble des permutations égales au produit d'un nombre pair de transpositions, il est d'ordre $\frac{n!}{2}$.

L'*ordre* d'une permutation est l'ordre de l'alphabet sur lequel cette permutation est définie, son *degré* est le nombre de points qu'elle modifie effectivement.

La *distance* entre deux permutations p et q de S_n est le nombre de points i de $[n]$ pour lesquels $p(i)$ et $q(i)$ sont différents. C'est aussi le degré des permutations $p^{-1}q$ et $q^{-1}p$.

Un ensemble de permutations de $[n]$ est *transitif* si, pour tout couple d'éléments i et j de $[n]$, il contient une permutation qui transforme i en j .

Il est *k fois transitif* si, pour tout couple d'ensembles $\{a_1, \dots, a_k\}$ et $\{b_1, \dots, b_k\}$ de k éléments de $[n]$, il contient une permutation transformant a_1 en b_1, \dots, a_k en b_k . Il est donc également j fois transitif pour tout j inférieur à k , $(n-k)$ fois transitif, et transitif.

Il est *k-transitif* si, pour tout couple d'éléments i et j de $[n]$, il contient exactement k permutations transformant i en j . Il est donc transitif. Cette notion a été étudiée par J.P. Steen dans [23].

Les ouvrages de W. Ledermann [12], H. Wielandt [27] et J.A. de Séguier [20] et [21] sont consacrés à l'étude des groupes de permutations, et peuvent être consultés avec profit.

1.5 TABLEAUX

1.5.1 Définition

Un tableau $m \times n$ est une application T de $[m] \times [n]$ dans un ensemble E .

Nous écrirons $T(m,n,E)$ pour représenter T .

Un tableau est donc très semblable à une matrice. Nous ferons cependant les remarques suivantes :

- E est un ensemble quelconque, par exemple un alphabet $[p]$, ou encore l'ensemble des parties d'un autre ensemble, ou même un ensemble de tableaux.

- Un élément (i,j) de $[m] \times [n]$ définit une case du tableau. L'élément $T(i,j)$ de E sera appelé l'élément T_i^j du tableau T ou encore le contenu de la case (i,j) . La ligne i ($i \in [m]$) est l'ensemble des cases (i,j) pour $j \in [n]$. De même, la colonne j ($j \in [n]$) est l'ensemble des cases (i,j) pour $i \in [m]$. On les notera respectivement T_i et T^j .

Les lignes et les colonnes sont appelées des *rangées*. Nous écrirons souvent "rangée" à la place de "ligne (respectivement colonne)".

- Si l'application T n'est pas définie en (i,j) , nous dirons que la case (i,j) est *vide*. Les T_i^j seront donc implicitement considérés comme des ensembles, éventuellement vides ou réduits à un seul élément. On considèrera presque toujours E comme l'ensemble des parties d'un autre ensemble, et T sera partout définie.

Nous allons définir plusieurs opérations sur les tableaux.

1.5.2 Transposition

Le transposé d'un tableau $T(m,n,E)$ est un tableau $T'(n,m,E)$ tel que :

$$\forall i \in [m] \quad \forall j \in [n] \quad (T')_j^i = T_i^j$$

Le transposé du transposé est le tableau lui-même.

1.5.3 Union et intersection

L'union de deux tableaux $T(m,n,P(E))$ et $T'(m,n,P(E'))$ est un tableau $T \cup T'(m,n,P(E \cup E'))$ dont les éléments sont :

$$(T \cup T')_i^j = T_i^j \cup T'_i^j$$

L'intersection de T et de T' est un tableau $T \cap T'(m,n,P(E \cap E'))$ dont les éléments sont :

$$(T \cap T')_i^j = T_i^j \cap T'_i^j$$

Si E et E' sont disjoints, les éléments de $T \cap T'$ sont vides.

L'union et l'intersection de deux tableaux de mêmes dimensions sont associatives et commutatives, comme l'union et l'intersection des ensembles.

L'élément neutre de l'union des tableaux $m \times n$ est le tableau vide V_m^n dont chaque élément est l'ensemble vide.

L'ensemble des tableaux $m \times n$ muni de l'union est un monoïde commutatif.

1.5.4 Permutation des rangées

Soit x une permutation de S_m . Le tableau obtenu en permutant les *lignes* de $T(m,n,E)$ à l'aide de x est le tableau ${}_x T(m,n,E)$ dont les éléments sont :

$$({}_x T)_i^j = T_{x(i)}^j$$

De même, si y est une permutation de S_n , les éléments du tableau obtenu en permutant les *colonnes* de T sont :

$$({}_y T)_i^j = T_i^{y(j)}$$

On peut combiner les deux permutations :

Si (x,y) est un élément de $S_m \times S_n$, on obtient, en l'appliquant au tableau $T(m,n,E)$, un tableau ${}_{x,y} T(m,n,E)$ dont les éléments sont :

$$({}_{x,y} T)_i^j = ({}_x ({}_y T))_i^j = ({}_y ({}_x T))_i^j = T_{x(i)}^{y(j)}$$

Si deux éléments de E se trouvaient dans une même rangée du tableau T , ils se trouvent encore dans une même rangée du tableau ${}_{x,y} T$.

Une permutation des rangées d'un tableau est un couple de permutations. Le produit de deux permutations de rangées s'effectue de la façon suivante (en lisant de gauche à droite) :

$$(x_1, y_1) (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$$

L'ensemble $S_m \times S_n$ muni de ce produit possède une structure de groupe dont l'élément neutre est le couple (e_m, e_n) des éléments neutres de S_m et de S_n , et où l'inverse de (x,y) est le couple (x^{-1}, y^{-1}) des inverses de x et de y dans S_m et dans S_n respectivement.

Nous utiliserons en particulier des permutations cycliques qui provoquent des *rotations* des rangées :

Si $[m] = \{0, 1, \dots, m-1\}$ est le groupe cyclique des entiers modulo m , si x est l'un de ses éléments, la permutation x de S_m sera

définie par :

$$\forall i \in [m] \quad x(i) = i+x \pmod{m} \quad \text{que l'on note } \overline{i+x}^m.$$

Le tableau T est obtenu en mettant les x premières lignes de T en bas du tableau :

$$T = \begin{pmatrix} T_0^0 & \dots & T_0^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ T_{x-1}^0 & \dots & T_{x-1}^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ T_x^0 & \dots & T_x^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ T_{m-1}^0 & \dots & T_{m-1}^{n-1} \end{pmatrix} \qquad x^T = \begin{pmatrix} T_x^0 & \dots & T_x^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ T_{m-1}^0 & \dots & T_{m-1}^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ T_0^0 & \dots & T_0^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ T_{x-1}^0 & \dots & T_{x-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

fig.1.5.1

et on aura :

$$(x^T)_i^j = T_{\overline{i+x}^m}^j$$

De même, si y est un élément de $[n]$, on construit le tableau yT en plaçant les y premières colonnes de T à droite du tableau :

$${}^yT = \begin{pmatrix} T_0^y & \dots & T_0^{n-1} & T_0^0 & \dots & T_0^{y-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{m-1}^y & \dots & T_{m-1}^{n-1} & T_{m-1}^0 & \dots & T_{m-1}^{y-1} \end{pmatrix} \qquad \text{fig.1.5.2}$$

$$\text{et } ({}^yT)_i^j = T_i^{\overline{j+y}^n}$$

Si on effectue les deux opérations, dans un ordre indifférent car elles commutent, on obtient le tableau y_xT de la figure 1.5.3.

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} T_x^y & \dots & T_x^{n-1} & T_x^0 & \dots & T_x^{y-1} \end{matrix} \\
 \begin{matrix} T_{m-1}^y \\ T_0^y \\ \vdots \\ T_{x-1}^y \end{matrix} & = & \begin{pmatrix}
 T_x^y & \dots & T_x^{n-1} & T_x^0 & \dots & T_x^{y-1} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 T_{m-1}^y & & T_{m-1}^{n-1} & T_{m-1}^0 & & T_{m-1}^{y-1} \\
 T_0^y & & T_0^{n-1} & T_0^0 & & T_0^{y-1} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 T_{x-1}^y & & T_{x-1}^{n-1} & T_{x-1}^0 & & T_{x-1}^{y-1}
 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

fig.1.5.3

L'élément (i,j) de $\begin{matrix} y \\ x \end{matrix} T$ est :

$$\left(\begin{matrix} y \\ x \end{matrix} T \right)_i^j = \frac{T_{i+x}^{j+y}}{i+x}^m$$

Les tableaux T et $\begin{matrix} y \\ x \end{matrix} T$ sont de la forme :

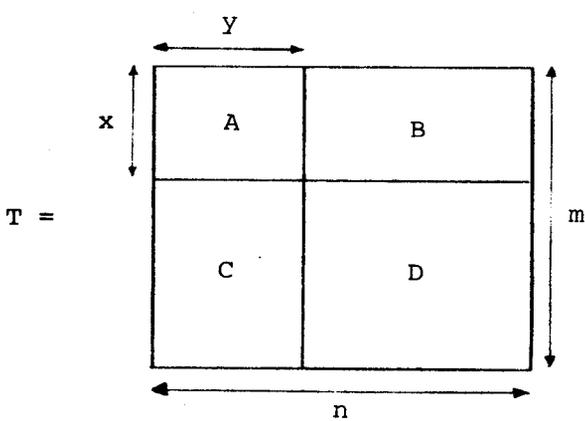
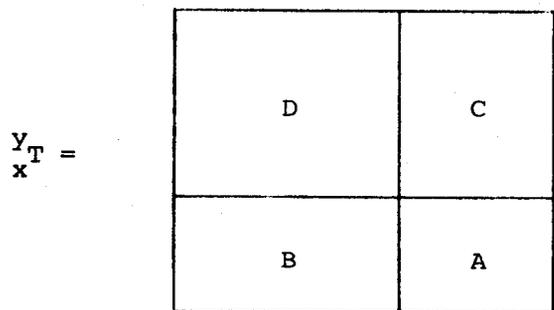


fig.1.5.4



Le tableau $\frac{Y'}{X'}T$ peut être obtenu à partir du tableau $\frac{Y}{X}T$ de la façon suivante :

$$\frac{Y'}{X'}T = \frac{\overline{Y' - Y}^n}{\overline{X' - X}^m} \left(\frac{Y}{X}T \right)$$

1.5.5 Juxtaposition

juxtaposition horizontale

En juxtaposant horizontalement deux tableaux $T(m, n, E)$ et $T'(m, n', E')$, on obtient un tableau $T\theta T'(m, n+n', E \cup E')$ dont les éléments sont :

$$(T\theta T')_{i}^{j} = T_{i}^{j} \quad \text{si } 0 \leq j < n$$

$$T'_{i}^{j-n} \quad \text{sinon}$$

$$T\theta T' = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline n & n' \\ \hline m & \begin{array}{|c|c|} \hline T & T' \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \text{fig.1.5.5}$$

Les propositions suivantes se démontrent facilement :

proposition 1.5.1 : $T'\theta T = {}^n(T\theta T')$

${}^n(\dots)$ désigne le déplacement cyclique des colonnes que nous avons étudié au paragraphe précédent.

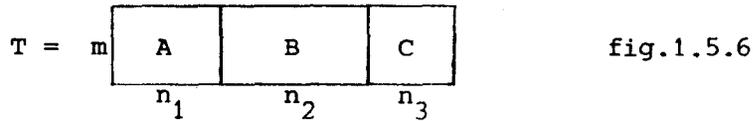
proposition 1.5.2 : La juxtaposition horizontale est associative.

Soient trois tableaux $A(m, n_1, E_1)$, $B(m, n_2, E_2)$ et $C(m, n_3, E_3)$. Comme ils ont le même nombre de lignes, les expressions :

$$(A\theta B)\theta C \quad \text{et} \quad A\theta (B\theta C)$$

ont un sens, et désignent toutes deux le tableau $T(m, n_1+n_2+n_3, E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ de la figure 1.5.6, dont les éléments sont :

$$\begin{aligned}
 0 \leq i < m \quad T_i^j &= A_i^j && \text{si } 0 \leq j < n_1 \\
 &B_i^{j-n_1} && \text{si } n_1 \leq j < n_1+n_2 \\
 &C_i^{j-n_1-n_2} && \text{si } n_1+n_2 \leq j < n_1+n_2+n_3
 \end{aligned}$$

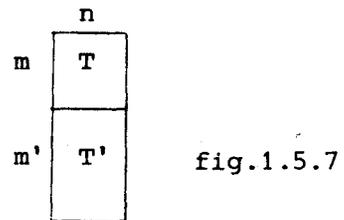


On peut définir un tableau E_m^0 "à m lignes et 0 colonnes" qui servirait d'élément neutre pour donner une structure de monoïde à l'ensemble des tableaux à m lignes muni de la loi de juxtaposition horizontale.

juxtaposition verticale

En juxtaposant verticalement deux tableaux $T(m, n, E)$ et $T'(m', n, E)$, on obtient un tableau $T \circ T'(m+m', n, E \cup E')$ dont les éléments sont :

$$\begin{aligned}
 (T \circ T')_i^j &= T_i^j && \text{si } 0 \leq i < m \\
 &T'_{i-m}^j && \text{sinon}
 \end{aligned}$$



proposition 1.5.3 : $T' \circ T = \begin{matrix} m \\ m' \end{matrix} (T \circ T')$

proposition 1.5.4 : La juxtaposition verticale est associative.

L'ensemble des tableaux à n colonnes, muni de la loi de juxtaposition verticale, possède une structure de monoïde dont l'élément neutre est le tableau E_0^n "à 0 lignes et n colonnes".

Si T_1, T_2, \dots, T_p sont des tableaux ayant le même nombre de lignes, posons :

$$\bigoplus_{i=1}^p T_i = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p$$

De même, s'ils ont le même nombre de colonnes, posons :

$$\bigoplus_{i=1}^p T_i = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p$$

proposition 1.5.5 : Soient m tableaux $T_k^\ell (m_k, n_\ell, E) (0 \leq k < m, 0 \leq \ell < n)$.

Il existe un tableau :

$$T' (\sum_{k=0}^{m-1} m_k, \sum_{\ell=0}^{n-1} n_\ell, E)$$

tel que :

$$T' = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} T_k^\ell = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} T_k^\ell$$

Posons :

$$M_0 = 0$$

$$N_0 = 0$$

$$M_k = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \quad (0 \leq k < m)$$

$$N_l = \sum_{i=0}^{l-1} n_i \quad (0 \leq l < n)$$

$$M = M_m$$

$$N = N_n$$

$$[M] = \{0, 1, \dots, M\}$$

$$[N] = \{0, 1, \dots, N\}$$

$$T_k = \sum_{l=0}^{n-1} T_k^l \quad (0 \leq k < m)$$

$$T^l = \sum_{k=0}^{m-1} T_k^l \quad (0 \leq l < n)$$

Les m tableaux T_k , obtenus en juxtaposant horizontalement les n tableaux $T_k^l (0 \leq l < n)$ à m_k lignes, sont des tableaux à m_k lignes et N colonnes. On peut donc les juxtaposer verticalement, et on obtient un tableau $M \times N$:

$$T' = \sum_{k=0}^{m-1} T_k = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} T_k^l$$

Soient deux entiers i et j compris respectivement entre 0 et $M-1$ et entre 0 et $N-1$: considérons l'élément T_i^j .

Soient k, l, x, y les entiers tels que :

$$i = M_k + x < M_{k+1} \quad \text{et} \quad j = N_l + y < N_{l+1}$$

Ainsi, si tous les m_p (respectivement les n_q) étaient égaux, k et x (resp. l et y) seraient le quotient et le reste de la division de i (resp. j) par m_p (resp. n_q).

L'élément (i,j) de T' est égal à l'élément (x,y) du tableau T_k^l . En effet :

$$(T')_{i,j}^j = (T_k)_x^j = (T_k^l)_x^y$$

De même, les n tableaux T^j à M lignes et n_j colonnes peuvent être juxtaposés horizontalement pour former le tableau T'' :

$$T'' = \bigoplus_{l=0}^{n-1} T^l = \bigoplus_{l=0}^{n-1} \bigoplus_{k=0}^{m-1} T_k^l$$

et $(T'')_{i,j}^j = (T^l)_i^y = (T_k^l)_x^y$, donc $T' = T''$.

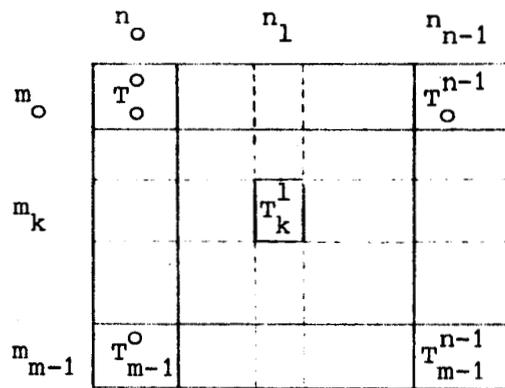


fig.1.5.8

juxtaposition diagonale

La juxtaposition diagonale de deux tableaux $T'(m',n',E')$ et $T''(m'',n'',E'')$ est un tableau $T' \oplus T''(m'+m'',n'+n'',E' \cup E'')$ dont les éléments sont :

$$(T' \oplus T'')_{i,j}^j = (T')_{i,j}^j \quad \text{si } 0 \leq i < m' \text{ et } 0 \leq j < n'$$

$$(T'')_{i-m',j-n'}^{j-n'}$$

$$\emptyset \quad \text{sinon}$$

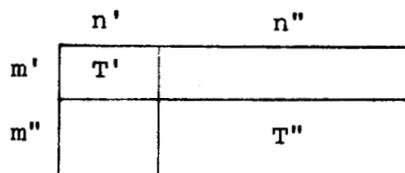


fig.1.5.9

Par conséquent, $T' \circ T''$ est le tableau :

$$T' \circ T'' = (T' \circ V_{m'}^{n''}) \circ (V_{m''}^{n'} \circ T'') = (T' \circ V_{m''}^{n'}) \circ (V_{m'}^{n''} \circ T'')$$

où V_m^n désigne le tableau $m \times n$ vide, élément neutre de l'union.

La juxtaposition diagonale s'apparente au produit tensoriel du magmaïde des matrices défini par A. Arnold et M. Dauchet dans [1]. Elle est associative et donne une structure de monoïde à l'ensemble des tableaux, son élément neutre est le tableau E_0^0 "à 0 lignes et 0 colonnes".

On pourrait également définir une juxtaposition suivant la diagonale ascendante (fig.1.5.10), mais elle se déduit aisément de la précédente :

$$T' \circ T'' = {}^{n'}(T' \circ T'')$$

	n''	n'
m'		T'
m''	T''	

fig.1.5.10

1.5.6 Changement d'échelle

agrandissement (micro)

Soit un tableau $m \times n$ dont les éléments sont des tableaux $T_k^\ell(m_k, n_\ell, E)$ ($0 \leq k < m$, $0 \leq \ell < n$). On appelle μT le tableau :

$$\mu T \left(\sum_{k=0}^{m-1} m_k, \sum_{\ell=0}^{n-1} n_\ell, E \right)$$

défini par la proposition 1.5.5 :

$$\mu T = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} T_k^\ell = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} T_k^\ell$$

vue d'ensemble (macro)

Soit un tableau $T(M, N, E)$. Soient deux suites d'entiers strictement positifs $(m_0, m_1, \dots, m_{m-1})$ et $(n_0, n_1, \dots, n_{n-1})$ dont les sommes sont respectivement M et N . Elles définissent un tableau MT à M lignes et N colonnes, dont les éléments $(MT)_k^l$ sont des tableaux (m_k, n_l, E) , tel que :

$$T = \mu(MT)$$

Choisir une suite de p entiers positifs x_1, x_2, \dots, x_p dont la somme est n revient à séparer l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ en p segments :

$$\{1, \dots, x_1\}, \{x_1+1, \dots, x_1+x_2\}, \dots, \{x_1+\dots+x_{p-1}+1, \dots, x_1+x_2+\dots+x_p\}$$

c'est-à-dire choisir dans cet ensemble $p-1$ points de séparation :

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_1+x_2 \\ &\vdots \\ y_{p-1} &= x_1+x_2+\dots+x_p \end{aligned}$$

Il y a donc C_n^{p-1} façons de choisir cette suite, et $\sum_{p=1}^n C_n^{p-1}$ façons de séparer l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Par conséquent, il y a $(\sum_{k=1}^M C_M^{k-1}) (\sum_{l=1}^N C_N^{l-1})$ tableaux MT tels que : $T = \mu(MT)$.

En particulier, on peut citer le tableau T lui-même, dont les éléments sont considérés comme des tableaux à une ligne et une colonne, et le tableau à une ligne et une colonne dont l'élément unique est le tableau T .

DEUXIEME PARTIE

CARRES GAULOIS

2.1 DEFINITION

Si n et p sont deux entiers strictement positifs, un carré gaulois $G(n,p)$ est un tableau à n lignes et n colonnes dont chaque case contient un sous-ensemble (éventuellement vide) d'un alphabet de p lettres, de telle sorte que chaque lettre apparaisse une fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne.

exemples :

A	BC	D
CD		AB
B	AD	C

$G(3,4)$

fig.2.1.1

12	3
3	12

$G(2,3)$

	1
1	

$G(2,1)$

Nous étudierons plus loin certains carrés gaulois particuliers : les carrés latins, les carrés de Room, les carrés de Room généralisés. Nous définirons ensuite une nouvelle sorte de carrés gaulois : les carrés siamois.

2.2 CARRES GAULOIS ET TABLEAUX DE PERMUTATIONS

2.2.1 Les matrices de permutations

définition : Une matrice de permutation est une matrice carrée dont les coefficients sont 0 ou 1, avec un 1 et un seul dans chaque ligne et dans chaque colonne.

Une matrice de permutation $M(n \times n)$ est associée à une permutation f de S_n . Le produit de M par un vecteur x de dimension n est un vecteur Mx dont les éléments sont obtenus en permutant ceux de x suivant f :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Mx = \begin{pmatrix} x_{f(1)} \\ \vdots \\ x_{f(n)} \end{pmatrix} \qquad \text{fig.2.2.1}$$

Si l'on considère que les cases contenant des zéros sont vides, et que 1 est une lettre, on peut dire qu'une matrice de permutation est un carré gaulois $G(n,1)$.

Il y a donc une correspondance biunivoque entre l'ensemble S_n des permutations d'ordre n et l'ensemble des carrés gaulois $G(n,1)$ sur un alphabet donné n'ayant qu'une lettre.

2.2.2 Les suites de permutations

proposition 2.2.1 : Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des carrés gaulois $G(n,p)$ sur un alphabet donné et l'ensemble des suites de p permutations d'ordre n .

En effet, une lettre a de l'alphabet permet de définir une permutation de l'ensemble $[n]$: à chaque indice $i \in [n]$ d'une ligne de G , on fait correspondre l'indice $f(i) \in [n]$ de la colonne de G telle que la lettre a figure dans la case $(i, f(i))$. La fonction f ainsi définie est une permutation, car la lettre a apparaît une fois et une seule dans chaque rangée du carré gaulois.

Un carré gaulois $G(n,p)$ sur l'alphabet $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ permet donc de définir de façon unique une suite (f_1, f_2, \dots, f_p) de permutations d'ordre n .

Il est possible que deux permutations f_i et f_j soient égales : cela se produit lorsque toute case de G contenant la lettre a_i contient également la lettre a_j . On ne peut donc pas parler d'ensemble de permutations, mais plutôt de suite.

Il y a autant de carrés gaulois $G(n,p)$ sur l'alphabet $\{1, 2, \dots, p\}$ que de suites de p permutations choisies parmi les $n!$ éléments de S_n , ils sont donc au nombre de $(n!)^p$.

La figure 2.2.2 décrit les 16 carrés gaulois $G(2,4)$, et les suites de quatre permutations de $\{1,2\}$ qui leur sont associées.

Il y a deux permutations de $\{1,2\}$: la permutation identique, que nous noterons 1, et la transposition (12) , que nous noterons 0. Nous pouvons donc coder chaque carré gaulois $G(2,p)$ par un nombre binaire de longueur p .

fig.2.2.2

f_1	f_2	f_3	f_4	$G(2,4)$	f_1	f_2	f_3	f_4	$G(2,4)$								
0	0	0	0	<table border="1"><tr><td></td><td>1234</td></tr><tr><td>1234</td><td></td></tr></table>		1234	1234		1	1	1	1	<table border="1"><tr><td>1234</td><td></td></tr><tr><td></td><td>1234</td></tr></table>	1234			1234
	1234																
1234																	
1234																	
	1234																
0	0	0	1	<table border="1"><tr><td>4</td><td>123</td></tr><tr><td>123</td><td>4</td></tr></table>	4	123	123	4	1	1	1	0	<table border="1"><tr><td>123</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>123</td></tr></table>	123	4	4	123
4	123																
123	4																
123	4																
4	123																
0	0	1	0	<table border="1"><tr><td>3</td><td>124</td></tr><tr><td>124</td><td>3</td></tr></table>	3	124	124	3	1	1	0	1	<table border="1"><tr><td>124</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>124</td></tr></table>	124	3	3	124
3	124																
124	3																
124	3																
3	124																
0	0	1	1	<table border="1"><tr><td>34</td><td>12</td></tr><tr><td>12</td><td>34</td></tr></table>	34	12	12	34	1	1	0	0	<table border="1"><tr><td>12</td><td>34</td></tr><tr><td>34</td><td>12</td></tr></table>	12	34	34	12
34	12																
12	34																
12	34																
34	12																
0	1	0	0	<table border="1"><tr><td>2</td><td>134</td></tr><tr><td>134</td><td>2</td></tr></table>	2	134	134	2	1	0	1	1	<table border="1"><tr><td>134</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>134</td></tr></table>	134	2	2	134
2	134																
134	2																
134	2																
2	134																
0	1	0	1	<table border="1"><tr><td>24</td><td>13</td></tr><tr><td>13</td><td>24</td></tr></table>	24	13	13	24	1	0	1	0	<table border="1"><tr><td>13</td><td>24</td></tr><tr><td>24</td><td>13</td></tr></table>	13	24	24	13
24	13																
13	24																
13	24																
24	13																
0	1	1	0	<table border="1"><tr><td>23</td><td>14</td></tr><tr><td>14</td><td>23</td></tr></table>	23	14	14	23	1	0	0	1	<table border="1"><tr><td>14</td><td>23</td></tr><tr><td>23</td><td>14</td></tr></table>	14	23	23	14
23	14																
14	23																
14	23																
23	14																
0	1	1	1	<table border="1"><tr><td>234</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>234</td></tr></table>	234	1	1	234	1	0	0	0	<table border="1"><tr><td>1</td><td>234</td></tr><tr><td>234</td><td>1</td></tr></table>	1	234	234	1
234	1																
1	234																
1	234																
234	1																



2.2.3 Les tableaux de permutations

A une permutation f de $\{1, 2, \dots, n\}$, on peut associer le vecteur $V = (f(1), f(2), \dots, f(n))$.

A partir de la suite de permutations correspondant à un carré gaulois $G(n, p)$, on peut donc construire un tableau à p lignes et n colonnes, dont la ligne k est le vecteur V_k .

Si la case (i, j) de G contient la lettre k , la permutation k transforme i en j , et l'élément (k, i) du tableau est j :

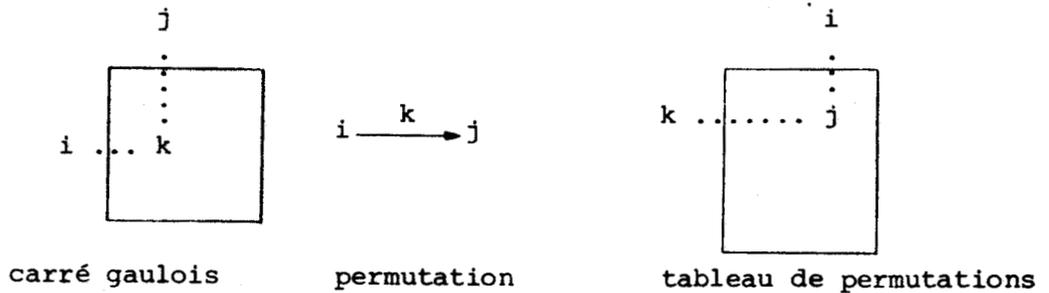


fig.2.2.3

Il y a une correspondance biunivoque entre les carrés gaulois $G(n, p)$ et les tableaux de p permutations d'ordre n :

$$i, j \in [n] \quad k \in [p] \quad k \in G_i^j \Leftrightarrow T_k^i = j$$

Construisons par exemple le tableau de permutations associé à un carré gaulois $G(3, 6)$:

	1	2	3
1	15	23	46
2	4	6	1235
3	236	145	-

fig.2.2.4

	1	2	3
1	1	3	2
2	2	3	1
3	2	3	1
4	3	1	2
5	1	3	2
6	3	2	1

2.2.4 Tableaux de permutations particuliers

Le tableau de permutations associé à un carré gaulois $G(n,p)$ peut être considéré comme un ensemble de p permutations f_1, f_2, \dots, f_p d'ordre n , si l'on admet que deux permutations d'indices différents i et j peuvent avoir la même matrice de permutation.

Certaines propriétés des ensembles de permutations, définies au chapitre 1.4, donneront aux carrés gaulois associés des caractères particuliers.

tableaux de permutations transitifs

Pour tout couple d'éléments i et j de $[n]$, il existe une permutation transformant i en j .

Autrement dit :

- dans le tableau, chaque colonne contient tous les éléments de $[n]$,

- dans le carré, aucune case n'est vide. On dit que le carré gaulois est *plein*.

tableaux de permutations k fois transitifs

Pour tout couple d'ensembles $\{i_1, \dots, i_k\}$ et $\{j_1, \dots, j_k\}$ de k éléments de $[n]$, il existe une permutation transformant i_1 en j_1, \dots, i_k en j_k .

Si on construit un carré $k \times k$ en sélectionnant k lignes et k colonnes du carré gaulois et en les permutant de façon quelconque, il existe une lettre qui figure dans toutes les cases de la diagonale de ce carré.

Par exemple, le carré gaulois $G(3,6)$ de la figure 2.2.4 est trois fois transitif : les six permutations qui lui sont associées sont toutes différentes et forment le groupe symétrique S_3 .

12	34	56	1	1	2	3
35	16	24	2	1	3	2
46	25	13	3	2	1	3
			4	2	3	1
			5	3	1	2
			6	3	2	1

fig.2.2.4

Si on permute les colonnes du tableau de permutations de façon à placer les colonnes i_1, \dots, i_k à gauche, une des lignes du tableau doit commencer par j_1, \dots, j_k .

proposition 2.2.1 : Si $G(n,p)$ est un carré gaulois k fois transitif, alors p est au moins égal à $\frac{n!}{(n-k)!}$.

En effet, dans les k premières colonnes, on doit voir figurer tous les k -uples ordonnés d'éléments de $[n]$, qui sont au nombre de :

$$C_n^k \times k! = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Le carré gaulois $G(4,12)$ de la figure 2.2.5 est deux fois transitif :

A	1	2	3	4	ABC	DEF	GHI	JKL
B	1	3	4	2	DGJ	AHK	BEL	CFI
C	1	4	2	3	EIK	CGL	AFJ	BDH
D	2	1	4	3	FHL	BIJ	CDK	AEG
E	2	3	1	4				
F	2	4	3	1				
G	3	1	2	4				
H	3	2	4	1				
I	3	4	1	2				
J	4	1	3	2				
K	4	2	1	3				
L	4	3	2	1				

fig.2.2.5

tableaux de permutations k-transitifs

Pour tout couple d'éléments i et j de $[n]$, il existe exactement k permutations transformant i en j .

Chaque case du carré gaulois $G(n,p)$ contient donc k lettres, et p est égal à kn .

Chaque élément j de $[n]$ figure k fois dans chaque colonne du tableau de permutations.

La k -transitivité entraîne la transitivité.

Le tableau de la figure 2.2.4 est 2-transitif, celui de la figure 2.2.5 est 3-transitif.

tableaux de permutations équidistants

Deux permutations quelconques ont toujours la même distance d , donc le même nombre de points communs $c = n-d$.

Chaque couple de lettres apparaît donc dans exactement c cases du carré gaulois associé.

On appelle *carré de Room généralisé* un carré gaulois associé à un tableau de permutations équidistant, il fera l'objet d'un chapitre particulier.

exemple :

12	34	--	--	--	--
34	12	--	--	--	--
--	--	13	24	--	--
--	--	24	13	--	--
--	--	--	--	14	23
--	--	--	--	23	14

1	1	2	3	4	5	6
2	1	2	4	3	6	5
3	2	1	3	4	6	5
4	2	1	4	3	5	6

$n=6$; $p=4$; $c=2$

fig.2.2.6

2.3 GRAPHES ET HYPERGRAPHES ASSOCIES A UN CARRE GAULOIS

2.3.1 Les k-hypergraphes

Si k est un entier compris entre 1 et p , le k -hypergraphe d'un carré gaulois $G(n,p)$ représente les cases contenant k lettres :

- les sommets sont les lettres de l'alphabet,
- les arêtes sont les groupes de k lettres figurant dans le carré gaulois.

Le k -hypergraphe est donc un hypergraphe uniforme de rang k .

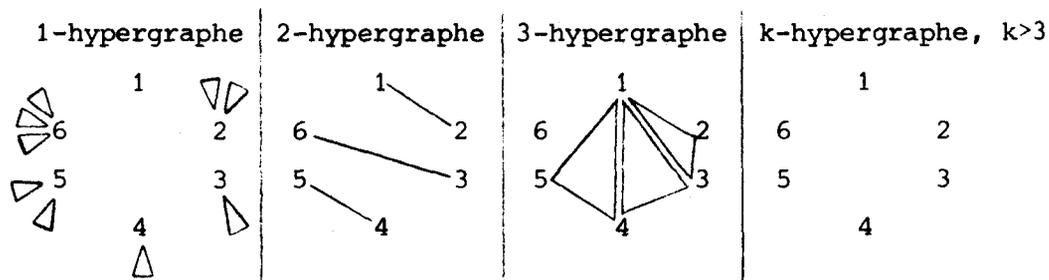
Si la case (i,j) du carré gaulois contient k lettres, donc s'il existe une arête qui lui correspond dans le k -hypergraphe, la colonne i du tableau de permutations contient k fois la lettre j .

Le 1-hypergraphe peut être considéré comme un graphe n'ayant que des boucles, et le 2-hypergraphe comme un graphe sans boucles, que nous appellerons le *graphe des couples*.

exemple :

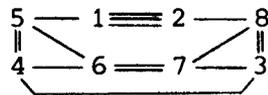
123	45	6	-
4	12	5	36
5	6	134	2
6	3	2	145

fig.2.3.1



Si tous les k -hypergraphes sont réguliers, on dit que le carré gaulois est *régulier*.

exemple :	1234	5678	-	-	-	-
	56	12	3	4	7	8
fig.2.3.2	78	34	1	2	5	6
graphe des couples :	-	-	45	67	38	12
	-	-	28	15	46	37
	-	-	67	38	12	45



2.3.2 Les k -dessins

Si k est un entier compris entre 1 et p , le k -dessin d'un carré gaulois $G(n,p)$ est un hypergraphe sans boucles dont les sommets sont les ensembles de k lettres figurant dans le carré, donc correspondant à une arête du k -hypergraphe. Deux sommets appartiennent à une même arête si les ensembles correspondants se trouvent dans deux cases d'une même rangée.

On peut donc distinguer deux sortes d'arêtes : les arêtes-lignes et les arêtes-colonnes.

Si deux ensembles de k lettres représentent deux sommets d'une même arête, ces ensembles sont évidemment disjoints, sinon une lettre figurerait deux fois dans une rangée. Par conséquent, si k est supérieur à $\frac{p}{2}$, le k -dessin n'a pas d'arêtes.

exemple :	123	456	78	123 — 456
	45	378	126	378 — 126
	678	12	345	678 ——— 345
fig.2.3.3	G(3,8)			3-dessin

2.3.3 Les cycles

Les cycles sont des graphes dont les sommets sont les cases du carré gaulois $G(n,p)$. Il y en a un par couple de lettres de $[p]$, ils sont donc au nombre de $\frac{p(p-1)}{2}$. On les définit de la façon suivante :

Si a et b sont deux lettres différentes, deux cases sont reliées par une arête du cycle (a,b) si et seulement si :

- elles se trouvent sur une même rangée,
- l'une contient a et l'autre b.

Il y a donc deux boucles sur toute case contenant le couple (a,b). D'autre part, comme dans le k-dessin, on peut distinguer les arêtes-lignes et les arêtes-colonnes.

proposition 2.3.1 : *Les composantes connexes du cycle (a,b) sont des cycles de longueur paire au moins égale à 4, ou des boucles doubles, ou des points isolés.*

Dans le cycle (a,b), il y a quatre sorte de sommets : les cases qui contiennent a, celles qui contiennent b, celles qui contiennent a et b, celles qui ne contiennent ni a ni b.

Les cases qui ne contiennent ni a ni b ne sont les extrémités d'aucune arête : ce sont des points isolés.

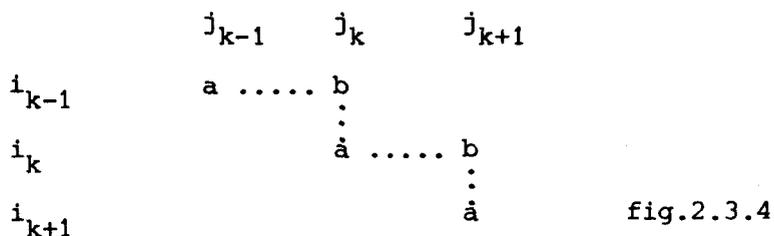
Une case qui contient a et b porte une boucle-ligne et une boucle-colonne, et n'est reliée à aucune autre case. Elle forme donc une composante connexe du cycle (a,b).

Une case qui contient a, mais pas b, est reliée à deux autres cases : celle qui contient b et se trouve sur la même ligne, par une arête-ligne, celle qui contient b et se trouve sur la même colonne, par une arête-colonne. Soit par exemple une case (i_1, j_1) contenant a, mais pas b. b figure ailleurs, une fois et une seule, dans la ligne i_1 : par exemple dans la case (i_1, j_2) , j_2 étant différent de j_1 . Les cases (i_1, j_1) et (i_1, j_2) sont reliées par une arête-ligne, et ne sont reliées par une arête-ligne à aucune autre case.

La lettre a ne figure pas dans la case (i_1, j_2) , puisqu'elle figure en (i_1, j_1) dans la ligne i_1 . Elle apparaît donc dans la case (i_2, j_2) ($i_1 \neq i_2$) de la colonne j_2 , et cette case ne contient pas b, qui se trouve ailleurs dans la même colonne. b se trouve donc dans la case (i_2, j_3) de la ligne i_2 . Si $j_3 = j_1$, en retournant en (i_1, j_1) pour retrouver a, nous parcourons un cycle de longueur 4.

Sinon, nous construisons une séquence :

$(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k), (i_k, j_{k+1}), (i_{k+1}, j_{k+1}), \dots$
 en parcourant alternativement une arête-ligne et une arête-colonne, ou encore un sommet-a et un sommet-b :

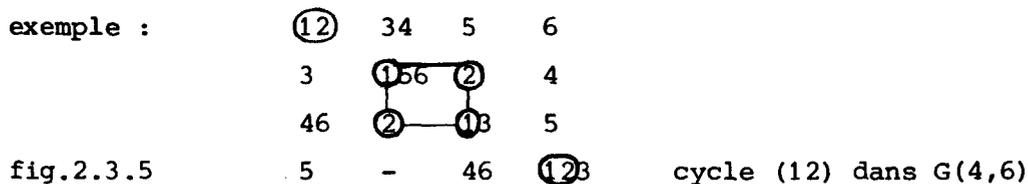


Cette séquence est finie, car le nombre de rangées est fini. Nous allons donc retrouver une case déjà parcourue. Considérons le cas où cela se produit pour la première fois.

Si cette case contient un b, nous y sommes arrivés en parcourant une colonne à partir d'un a. La première fois que nous avons quitté cette case b, c'était en suivant cette colonne jusqu'au a. Cette case contenant un a a donc déjà été parcourue, ce qui est contraire à notre hypothèse.

La case que nous retrouvons pour la deuxième fois contient donc un a, et nous démontrons de la même façon que c'est la première case (i_1, j_1) , la seule à ne pas avoir été atteinte par une arête-colonne au premier passage.

On rencontre ainsi toutes les cases contenant des a ou des b en parcourant des cycles disjoints alternés, donc pairs. Les cycles de longueur 2 sont en fait les boucles doubles, les véritables cycles ont une longueur au moins égale à 4.



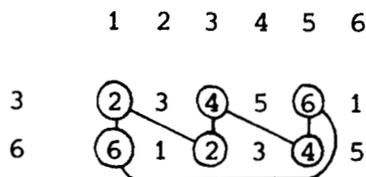
Si le cycle (a,b) a au moins deux composantes connexes qui ne soient pas des boucles, on appellera *cycle partiel* $[a,b]$ chacune de ces composantes connexes.

Les cycles se retrouvent dans le tableau de permutations : les deux lettres a et b représentent deux permutations, donc deux lignes du tableau. Si a figure dans les cases $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)$ et b dans les cases $(i_1, j_2), \dots, (i_{k-1}, j_k), (i_k, j_1)$ du cycle, alors, dans la ligne a du tableau, on trouve : j_1 en colonne i_1 , j_2 en colonne i_2 , ..., j_k en colonne i_k , et dans la ligne b : j_2 en colonne i_1 , ..., j_k en colonne i_{k-1} , j_1 en colonne i_k :

		$j_1=2$	$j_3=4$	$j_2=6$	
12	<u>34</u>	7	5	8	<u>6</u>
56	78	3	1	4	2
8	<u>6</u>	12	<u>34</u>	7	5
4	2	56	78	3	1
7	5	8	<u>6</u>	12	<u>34</u>
3	1	4	2	56	78

$i_1=1$	3	6	
	⋮		⋮	
$i_3=3$	6	3	
		⋮	⋮	
$i_2=5$		6	3

fig.2.3.6



2.4 OPERATIONS SUR LES CARRES GAULOIS

Les opérations que nous avons définies pour les tableaux peuvent être appliquées au tableau particulier qu'est le carré gaulois. Nous verrons sous quelles conditions le tableau résultat est un carré gaulois, et, si c'est le cas, ce que deviennent le tableau de permutations, les graphes et les hypergraphes qui lui sont associés. Nous définirons également de nouvelles opérations qui s'appliquent particulièrement aux carrés gaulois.

2.4.1 Transposition

proposition 2.4.1 : *Le transposé d'un carré gaulois est un carré gaulois $G'(n,p)$ dont le tableau de permutations est l'inverse de celui de G .*

Les k -hypergraphes, les k -dessins et les cycles ne sont pas modifiés.

Si la lettre a figurait dans la case (i,j) de G , elle figure dans la case (j,i) de G' . Par conséquent, la permutation a du tableau T associé à G , qui transformait i en j , est remplacée dans T' par la permutation a' qui transforme j en i : a' est donc l'inverse de a .

Autrement dit, le tableau de permutations associé au transposé du carré gaulois G s'obtient en inversant les permutations du tableau associé à G .

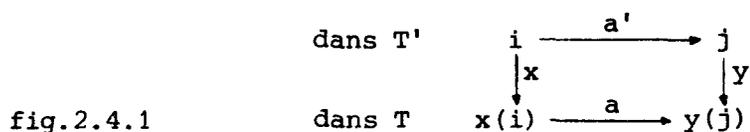
2.4.2 Permutation des rangées

proposition 2.4.2 : Si on permute les rangées d'un carré gaulois $G(n,p)$ à l'aide des permutations x et y de S_n , on obtient un carré gaulois ${}^y_x G(n,p)$, dont le tableau de permutations est obtenu en remplaçant chaque permutation a du tableau associé à G par xay^{-1} .

Les permutations x et y des rangées de G ne changent pas le fait que chaque lettre figure une fois et une seule dans chaque rangée : ${}^y_x G$ est donc un carré gaulois.

La lettre a figurant dans la case (i,j) de ${}^y_x G$ est celle qui se trouvait dans la case $(x(i),y(j))$ de G . La permutation a' qui transforme i en j dans le tableau T' associé à ${}^y_x G$ correspond à la permutation a qui transforme $x(i)$ en $y(j)$ dans le tableau T associé à G . Par conséquent :

$$a' = x a y^{-1}$$



exemple : $x = (12)$, $y = (134)$

$G =$ <table style="border: none; width: 100%;"> <tr><td>12</td><td>34</td><td>5</td><td>6</td><td>-</td></tr> <tr><td>3</td><td>16</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>35</td><td>6</td></tr> <tr><td>-</td><td>5</td><td>36</td><td>1</td><td>24</td></tr> <tr><td>56</td><td>-</td><td>4</td><td>2</td><td>13</td></tr> </table>	12	34	5	6	-	3	16	2	4	5	4	2	1	35	6	-	5	36	1	24	56	-	4	2	13	${}^y_x G =$ <table style="border: none; width: 100%;"> <tr><td>2</td><td>16</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>34</td><td>6</td><td>12</td><td>-</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>35</td><td>4</td><td>6</td></tr> <tr><td>36</td><td>5</td><td>1</td><td>-</td><td>24</td></tr> <tr><td>4</td><td>-</td><td>2</td><td>56</td><td>13</td></tr> </table>	2	16	4	3	5	5	34	6	12	-	1	2	35	4	6	36	5	1	-	24	4	-	2	56	13										
12	34	5	6	-																																																									
3	16	2	4	5																																																									
4	2	1	35	6																																																									
-	5	36	1	24																																																									
56	-	4	2	13																																																									
2	16	4	3	5																																																									
5	34	6	12	-																																																									
1	2	35	4	6																																																									
36	5	1	-	24																																																									
4	-	2	56	13																																																									
$T =$ <table style="border: none; width: 100%;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	1	3	2	5	4	2	1	4	3	5	2	4	1	5	3	3	5	4	2	1	4	2	5	3	1	$T' =$ <table style="border: none; width: 100%;"> <tr><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>2</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>1</td><td>4</td></tr> </table>	2	4	1	3	5	1	4	2	5	3	4	2	3	1	5	3	2	4	5	1	5	1	3	2	4	2	3	5	1	4
1	2	3	4	5																																																									
1	3	2	5	4																																																									
2	1	4	3	5																																																									
2	4	1	5	3																																																									
3	5	4	2	1																																																									
4	2	5	3	1																																																									
2	4	1	3	5																																																									
1	4	2	5	3																																																									
4	2	3	1	5																																																									
3	2	4	5	1																																																									
5	1	3	2	4																																																									
2	3	5	1	4																																																									

fig.2.4.2

Dans T , la permutation 1 est l'identité, car tous les 1 se trouvent sur la diagonale de G . Dans T' , la permutation $1'$ est :

$$1' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (12) 1 (134)^{-1}$$

Pour obtenir T' à partir de T :

- on permute les colonnes de T suivant x ,
- on remplace les éléments k par $y^{-1}(k)$,

l'ordre de ces deux opérations est indifférent, car elles ne concernent pas les mêmes éléments.

Plus simplement :

$$T' = y^{-1}({}^x T) = x({}^{y^{-1}} T)$$

Les k -hypergraphes, les k -dessins et les cycles ne sont pas modifiés par une permutation des rangées de G .

2.4.3 Permutation de l'alphabet

Proposition 2.4.3 : Soit z une permutation de S_p . A partir d'un carré gaulois $G(n,p)$, on obtient un carré gaulois $z(G)(n,p)$ en remplaçant dans G chaque lettre a par $z(a)$.

z peut également être une bijection de $[p]$ sur un autre alphabet de p lettres.

Les k -hypergraphes, les k -dessins et les cycles sont transformés de façon isomorphe, puisque seuls les noms de leurs sommets sont modifiés.

Le tableau $z(T)$ s'obtient en permutant les lignes du tableau T suivant la permutation z : $z(T) = {}_z T$.

exemple : $z = (125)(34)$

	12	3	45	6		25	4	13	6
	56	1	2	34		16	2	5	34
$G =$	4	25	36	1	$z(G) =$	3	15	46	2
	3	46	1	25		4	36	2	15

fig.2.4.3

$T =$	1	1	2	4	3		$z^T =$	1	3	1	2	4
	2	1	3	2	4		2	1	2	4	3	
	3	2	4	3	1		3	3	4	1	2	
	4	3	4	1	3		4	2	4	3	1	
	5	3	1	2	4		5	1	3	2	4	
	6	4	1	3	2		6	4	1	3	2	

fig.2.4.4

2.4.4 Isomorphisme, similitude et équivalence

Deux carrés gaulois sont *isomorphes* si l'un peut être obtenu à partir de l'autre à l'aide des opérations suivantes :

- permutation des rangées
- permutation de l'alphabet

Deux carrés gaulois sont *semblables* si le transposé de l'un est isomorphe à l'autre. Ils sont *équivalents* s'ils sont isomorphes ou semblables. L'isomorphisme et l'équivalence sont des relations d'équivalence.

proposition 2.4.4 : Les *k*-hypergraphes (resp. les *k*-dessins, resp. les cycles) de deux carrés gaulois équivalents sont isomorphes.

. Nous appellerons *invariants* les hypergraphes associés aux carrés gaulois qui ne sont pas modifiés par l'équivalence. Ce sont donc : les *k*-hypergraphes, les *k*-dessins, les cycles.

2.4.5 Union

L'union des tableaux ne peut pas être appliquée telle quelle aux carrés gaulois, si l'on veut que le résultat soit un carré gaulois.

Si nous unissons deux carrés dont les alphabets ne sont pas disjoints, une lettre commune risque d'apparaître deux fois dans la même rangée. Nous devons donc imposer que les lettres communes se trouvent

aux mêmes endroits dans les deux carrés. Nous préférons appliquer l'union aux carrés gaulois dont les alphabets sont disjoints :

proposition 2.4.5 : L'union de deux carrés gaulois $G_1(n, p_1)$ et $G_2(n, p_2)$ dont les alphabets sont disjoints est un carré gaulois $G(n, p_1 + p_2)$.

Le tableau de permutations résultant de l'union de deux carrés gaulois est l'union des deux tableaux de permutations. Même si deux permutations sont égales, elles portent des noms différents si les deux alphabets sont disjoints, et ne seront donc pas confondues par l'union.

proposition 2.4.6 : Un carré gaulois $G(n, p)$ est l'union de p matrices de permutations considérées comme des $G(n, 1)$ aux alphabets tous différents, et son tableau de permutations est l'union des p permutations de S_n que ces matrices représentent.

L'union de deux carrés gaulois est associative et commutative, son élément neutre est le carré vide $G(n, 0)$, dont l'alphabet et le tableau de permutations sont vides.

Les k -hypergraphes et les k -dessins sont profondément modifiés. L'ensemble des cycles du nouveau carré contient les cycles des carrés dont il est l'union, ainsi que les cycles définis par les couples de lettres appartenant à deux alphabets différents.

exemple :

$$\begin{array}{ccc}
 1 & 23 & 4 \\
 4 & - & 123 \\
 23 & 14 & -
 \end{array}
 \cup
 \begin{array}{ccc}
 5 & - & 6 \\
 - & 6 & 5 \\
 6 & 5 & -
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 15 & 23 & 46 \\
 4 & 6 & 1235 \\
 236 & 145 & -
 \end{array}$$

fig.2.4.5

	1	2	3
1	1	3	2
2	2	3	1
3	2	3	1
4	3	1	2
5	1	3	2
6	3	2	1

2.4.6 Restriction

L'intersection de deux carrés gaulois ne sera pas un carré gaulois en général. Si les alphabets sont disjoints, l'intersection sera vide. Sinon, seules les lettres communes subsisteront si elles figurent aux mêmes endroits dans les deux carrés. Si cela ne se produit pas dans chaque rangée, le résultat ne sera pas un carré gaulois. Si cela se produit partout, on obtiendra un carré gaulois où ne figureront que ces lettres communes.

Nous parlerons donc plutôt de restriction, dont voici la définition :

définition : Si $G(n,p)$ est un carré gaulois dont l'alphabet est A , si B est un sous-ensemble de A d'ordre q , la restriction de G à B est un tableau G' dont la case $G'_{i,j}$ contient l'intersection de $G_{i,j}^j$ et de B .

On démontre immédiatement que :

proposition 2.4.7 : La restriction d'un carré gaulois $G(n,p)$ à une partie de son alphabet d'ordre q est un carré gaulois $G'(n,q)$.

Si C est le complémentaire de B dans A , l'union des restrictions de G à B et à C est le carré G lui-même.

exemple :

la restriction de

15	23	46
4	6	1235
236	145	-

fig.2.4.6

à $\{1,2,3,4\}$ est

1	23	4
4	-	123
23	14	-

Il existe une bijection entre l'ensemble des restrictions d'un carré gaulois $G(n,p)$ et l'ensemble des parties de $[p]$: ces restrictions sont donc au nombre de 2^p .

Le tableau de permutations associé à la restriction de G à B est la restriction à B du tableau associé à G : on ne garde que les permutations associées aux lettres de B .

Les k -hypergraphes de $G'(n,q)$ ne sont pas forcément des sous-hypergraphes de ceux de $G(n,p)$. Par exemple, les k -hypergraphes de la restriction à $\{1,2,3,4\}$ du carré de la figure 2.3.1 sont :

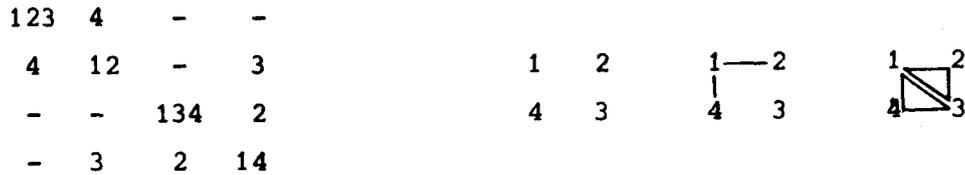


fig.2.4.7

C'est seulement si aucune lettre de B ne se trouve dans la même case de G qu'une lettre de $A-B$, que les k -hypergraphes de la restriction de G à B s'obtiennent en prenant la restriction à B de l'ensemble A des sommets des k -hypergraphes de G .

Les k -dessins sont également modifiés, puisque leurs sommets sont les arêtes des k -hypergraphes.

Les cycles définis par un couple de lettres de B sont inchangés, les autres n'existent plus.

2.4.7 Homomorphisme

définition : Si E et F sont deux ensembles, l'application h de $P(E)$ dans $P(F)$ est un homomorphisme si elle vérifie :

$$\forall A, B \subseteq E \quad h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$$

On en déduit que $h(\emptyset)$ est l'ensemble vide. De plus, comme $P(E)$ et $P(F)$ munis de l'union sont des monoïdes, il suffit de définir h pour toutes les parties de E réduites à un seul élément. Pour toute partie A de E , on aura :

$$h(A) = \bigcup_{a \in E} h(\{a\})$$

Nous noterons $h(a)$ l'ensemble $h(\{a\})$, image du sous-ensemble de A réduit à la lettre a .

Nous appellerons *homomorphisme gaulois* un homomorphisme de $P(A)$ dans $P(B)$, où A et B sont des alphabets, tel que :

$$\forall a, b \in A \quad a \neq b \Rightarrow h(a) \cap h(b) = \emptyset$$

Chaque lettre de B a donc pour inverse un ensemble vide ou réduit à une lettre de A .

proposition 2.4.8 : Si A et B sont deux alphabets, si h est un homomorphisme gaulois de $P(A)$ dans $P(B)$, et si G est un carré gaulois dont l'alphabet est A , alors le tableau $h(G)$ défini par :

$$(h(G))_{i,j}^k = h(G_{i,j}^k)$$

est un carré gaulois dont l'alphabet est $h(A)$.

En effet, $h(G)$ est un carré de la même dimension que G , dont chaque case contient un sous-ensemble de $h(A)$.

Chaque lettre de $h(A)$ figure dans un $h(a)$ et dans un seul. On la trouve donc dans chaque case de $h(G)$ contenant $h(a)$, c'est-à-dire, comme a dans G , une fois et une seule dans chaque rangée.

$$\begin{aligned} \text{exemple : } A &= \{1, 2, 3, 4\} & h(1) &= \{a\} \\ B &= \{a, b, c, d, e\} & h(2) &= \{b, c\} \\ & & h(3) &= \emptyset \\ h(A) &= \{a, b, c, d\} & h(4) &= \{d\} \end{aligned}$$

$$G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 12 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 1 & 23 \\ \hline 3 & 24 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$h(G) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline abc & - & d \\ \hline d & a & bc \\ \hline - & bcd & a \\ \hline \end{array}$$

fig.2.4.8

proposition 2.4.9 : Les permutations de l'alphabet et les restrictions à une partie de l'alphabet sont des homomorphismes gaulois.

Une permutation de l'alphabet A est un homomorphisme de $P(A)$ dans $P(A)$ où, pour toute lettre a de A , $h(a)$ est un ensemble réduit à une lettre de A . Comme on a :

$$a \neq b \Rightarrow h(a) \cap h(b) = \emptyset,$$

l'homomorphisme h est gaulois.

Une restriction à une partie B de l'alphabet A est un homomorphisme de $P(A)$ dans $P(B)$ défini de la façon suivante :

$$a \in B \Rightarrow h(a) = \{a\}$$

$$a \in A-B \Rightarrow h(a) = \emptyset$$

C'est également un homomorphisme gaulois.

On peut enfin démontrer facilement la proposition suivante :

proposition 2.4.10 : Si h est un homomorphisme gaulois, la permutation associée à la lettre a dans le tableau de permutations du carré gaulois G se retrouve dans le tableau de permutations associé à $h(G)$ autant de fois qu'il y a d'éléments dans $h(a)$.

2.4.8 Carrelage

La juxtaposition horizontale ou verticale de deux carrés $n \times n$ donne un rectangle $n \times 2n$ ou $2n \times n$. Pour obtenir un carré gaulois, nous devons juxtaposer plusieurs carrés.

définition : Soient k alphabets disjoints A_1, A_2, \dots, A_k d'ordres p_1, p_2, \dots, p_k . Soit C un carré latin $k \times k$ dont l'alphabet est $\{1, 2, \dots, k\}$. Soient k^2 carrés gaulois $n \times n$ G_{χ}^j ($i, j = 1, 2, \dots, k$) dont l'alphabet est A_{χ} tel que $C_{\chi}^j = \ell$.

On appelle carrelage l'opération qui consiste à juxtaposer les carrés gaulois G_{χ}^j pour obtenir un carré gaulois ${}_{\mu}G(nk, p_1 + p_2 + \dots + p_k)$ où G est le tableau $k \times k$ dont l'élément (i, j) est le carré gaulois G_{χ}^j .

Vérifions que ${}_{\mu}G$ est un carré gaulois :

- ${}_{\mu}G$ est un tableau (k, k, A) où A est l'union des alphabets A_1, \dots, A_k
- chaque ligne de ${}_{\mu}G$ est la juxtaposition horizontale de k lignes de carrés gaulois G_{χ}^j ($j = 1, 2, \dots, k$) dont les alphabets sont tous différents car C est un carré latin. Elle contient donc chaque lettre de A une fois et une seule. Il en est de même pour les colonnes.

La case (q, r) de G_{χ}^j devient la case $((i-1)n+q, (j-1)n+r)$ du carré ${}_{\mu}G$.

exemple :

1	23	4	5	6	7
4	-	123	67	5	-
23	14	-	-	7	56
567	-	-	1	2	34
-	56	7	234	-	1
-	7	56	-	134	2

fig. 2.4.9

Le k -hypergraphe de μG est l'union des k -hypergraphes des G_i^j . Les k -dessins des G_i^j sont des sous-hypergraphes partiels du k -dessin de μG . Le cycle (a,b) de G_i^j est isomorphe à un sous-graphe du cycle (a,b) de μG . Deux lettres appartenant à des alphabets différents définissent de nouveaux cycles.

Si a transforme q en r dans le tableau de permutations associé à G_i^j , alors a transforme $(i-1)n+q$ en $(j-1)n+r$ dans le tableau associé à μG . Ce tableau a $p = p_1+p_2+\dots+p_k$ lignes et nk colonnes.

La juxtaposition diagonale de deux carrés gaulois de même dimension et de même alphabet est un carrelage particulier où k est égal à 2 et où deux des quatre carrés sont vides :

12	3	4	-	-	-
3	14	2	-	-	-
4	2	13	-	-	-
-	-	-	1	23	4
-	-	-	3	4	12
-	-	-	24	1	3

fig.2.4.10

2.4.9 Permutation partielle de l'alphabet

proposition 2.4.11 : Si $[a,b]$ est un cycle partiel du carré gaulois $G(n,p)$, on obtient un carré gaulois $G'(n,p)$ en intervertissant a et b dans toutes les cases de G qui font partie du cycle partiel et qui contiennent a ou b .

En effet, a et b figurent toujours une fois et une seule dans chaque rangée, et les autres lettres ne changent pas de place.

exemple :

12	3	4	5		12	3	4	5	
	5	24	3	1	[15]	5	24	3	1
	34	<u>1</u>	<u>5</u>	2	→	34	<u>5</u>	<u>1</u>	2
fig.2.4.11	-	<u>5</u>	<u>12</u>	34	-	<u>1</u>	<u>25</u>	34	

Les cycles ne changent pas, et les k-dessins ne subissent qu'un isomorphisme.

Par contre, certaines arêtes des k-hypergraphes vont se "débrancher" et se "rebrancher" autrement. Par exemple, le graphe des couples du carré de la figure 2.4.11 devient :

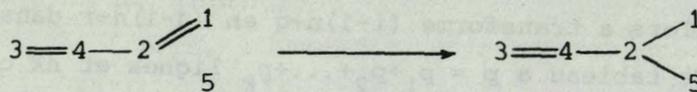


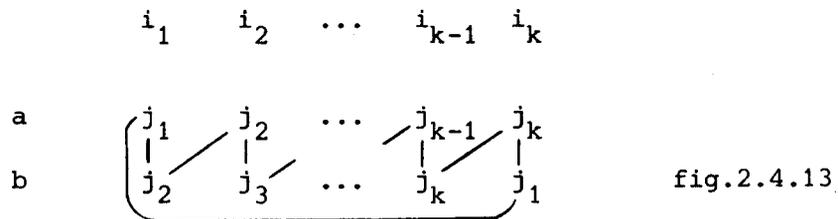
fig.2.4.12

proposition 2.4.12 : Les degrés des sommets du k-hypergraphe ne sont pas modifiés par une permutation partielle $[a,b]$ si et seulement si, dans le cycle partiel, le nombre de k-uples contenant a est égal au nombre de k-uples contenant b.

Le degré de a dans le k-hypergraphe est le nombre de k-uples contenant a dans le carré. Après la permutation partielle $[a,b]$, les k-uples contenant a sont devenus des k-uples contenant b, et inversement, si et seulement si leur case fait partie du cycle partiel. Le degré de a reste donc inchangé si et seulement si le nombre des k-uples contenant a est égal au nombre des k-uples contenant b dans le cycle partiel.

Les autres sommets gardent le même degré : s'ils figurent dans un k-uple ne faisant pas partie du cycle partiel, ce k-uple ne change pas. S'ils se trouvent dans un k-uple du cycle partiel, la composition du k-uple change puisqu'on y remplace a par b ou b par a, mais les autres lettres y figurent toujours.

Dans le tableau de permutations, on parcourt également un cycle. Si a figure dans les cases $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)$ et b dans les cases $(i_1, j_2), \dots, (i_{k-1}, j_k), (i_k, j_1)$, on trouve la disposition suivante dans le tableau :



Après la permutation $[a, b]$, les deux "lignes partielles" a et b du tableau de permutations correspondant aux colonnes i_1, \dots, i_k sont interverties.

Par exemple, dans le cas de la figure 2.4.11, le tableau devient :

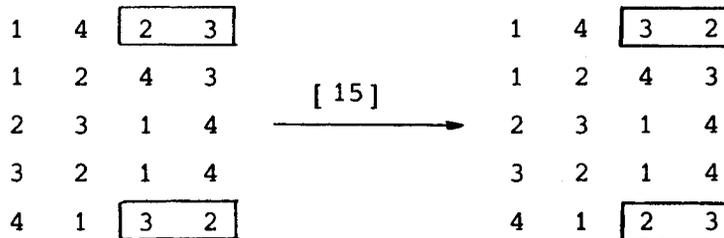
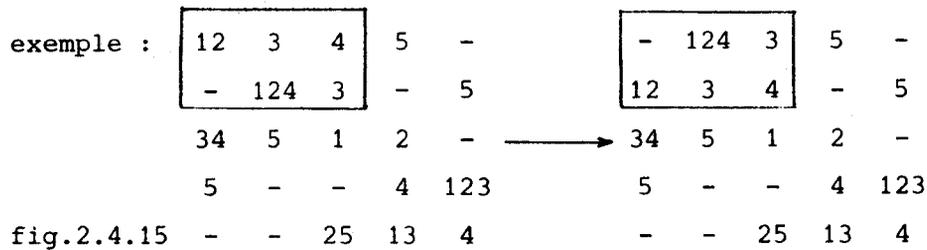


fig.2.4.14

2.4.10 Permutation partielle des rangées

On appelle *rangée partielle* d'un tableau un ensemble de cases se trouvant sur une même rangée. Une ligne partielle (resp. colonne partielle) est définie par un indice de ligne (resp. colonne) et un ensemble d'indices de colonnes (resp. ligne). Si le tableau est un carré gaulois, l'union des cases constituant la rangée partielle est un sous-ensemble de l'alphabet.

proposition 2.4.13 : Si deux lignes (resp. colonnes) partielles d'un carré gaulois déterminées par les mêmes colonnes (resp. lignes) définissent le même ensemble de lettres, on obtient un carré gaulois en les intervertissant.



On appelle *complémentaire* d'une rangée partielle l'ensemble des autres cases de la rangée.

On dit que deux rangées partielles sont *échangeables* si elles vérifient l'hypothèse de la proposition 2.4.13, c'est-à-dire si elles sont déterminées par le même ensemble d'indices et si elles définissent le même ensemble de lettres.

proposition 2.4.14 : *Si deux rangées partielles sont échangeables, leurs complémentaires sont échangeables.*

Si on échange deux rangées partielles, puis leurs complémentaires, on obtient le même carré que si on avait échangé les rangées entières, il est isomorphe au carré de départ.

La notion "être sur la même rangée" est modifiée par l'échange de rangées partielles. Par conséquent, les k -dessins vont être transformés.

Les cycles sont modifiés. Par exemple, le cycle (15) de la figure 2.4.15 se divise en deux cycles partiels :

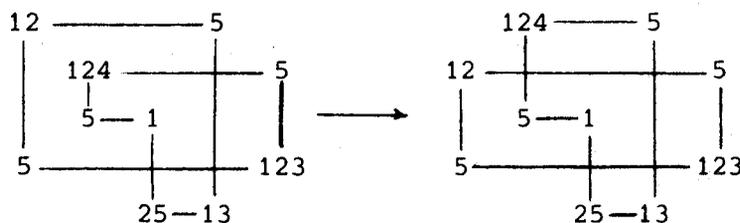


fig.2.4.16

Par contre, les k -hypergraphes ne changent pas.

La permutation partielle des lettres a et b du carré gaulois avait entraîné la permutation partielle des lignes a et b du tableau

de permutations. Cette fois, la permutation partielle des lignes i et j du carré va entraîner la permutation partielle des colonnes i et j du tableau :

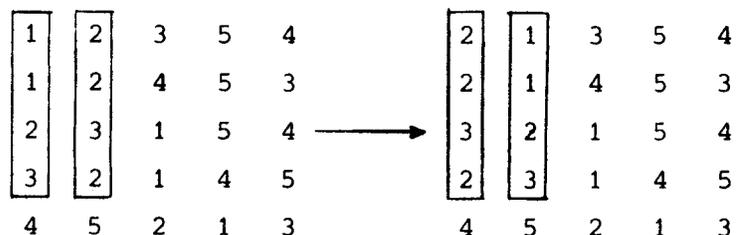


fig.2.4.17

La permutation partielle des colonnes k et l du carré entraîne la permutation des éléments k et l du tableau dans les lignes concernées.

exemple :

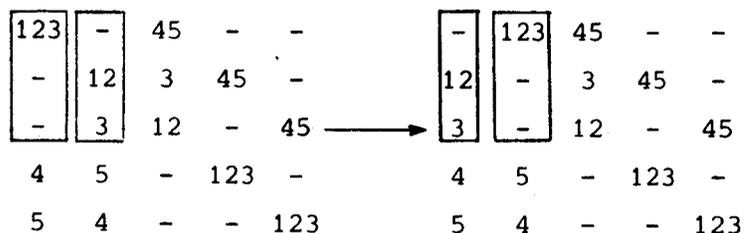


fig.2.4.18

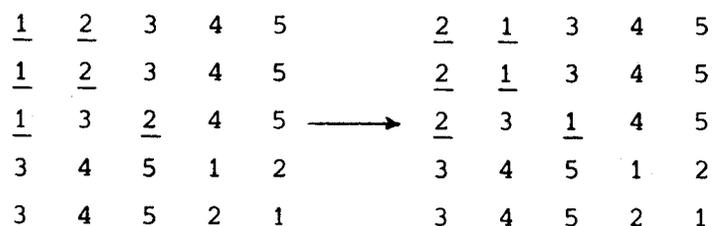


fig.2.4.19

2.4.11 Permutation incomplète des rangées

On appelle *rangée incomplète* déterminée par l'indice i et le sous-ensemble de lettres B , la rangée i de la restriction du carré gaulois à B . Contrairement à la rangée partielle, on considère ici toutes les cases de la rangée, et seulement une partie des lettres

qui s'y trouvent.

proposition 2.4.15 : Si, dans le carré gaulois $G(n,p)$ d'alphabet A , on échange les deux lignes (resp. colonnes) incomplètes i et j déterminées par le sous-ensemble B de A , on obtient un carré gaulois $G'(n,p)$.

exemple : $i = 1$, $j = 2$, $B = \{1,2,3,5\}$, échange de lignes incomplètes :

<u>12</u>	<u>34</u>	<u>5</u>	6		<u>3</u>	<u>14</u>	<u>2</u>	<u>56</u>
<u>3</u>	<u>1</u>	<u>26</u>	<u>45</u>	→	<u>12</u>	<u>3</u>	<u>56</u>	4
45	26	1	3		45	26	1	3
6	5	34	12		6	5	34	12

fig.2.4.20

Les k -hypergraphes, les k -dessins et les cycles sont modifiés.

Le tableau de permutations subit une permutation partielle de colonnes :

1	2	3	4		2	1	3	4
1	3	2	4	→	3	1	2	4
2	1	4	3		1	2	4	3
2	4	1	3		2	4	1	3
3	4	1	2		4	3	1	2
4	3	2	1		4	3	2	1

fig.2.4.21

On peut également échanger les lettres de B dans les colonnes i et j du carré. Les éléments i et j sont alors échangés dans les lignes du tableau de permutations correspondant aux lettres de B .

exemple : mêmes i, j, B que pour la figure 2.4.20 ; colonnes incomplètes :

<u>12</u>	<u>34</u>	5	6		<u>3</u>	<u>124</u>	5	6
<u>3</u>	<u>1</u>	26	45	→	<u>1</u>	<u>3</u>	26	45
<u>45</u>	<u>26</u>	1	3		<u>24</u>	<u>56</u>	1	3
6	<u>5</u>	34	12		<u>56</u>	-	34	12

fig. 2.4.22

tableau de permutations :

<u>1</u>	<u>2</u>	3	4		<u>2</u>	<u>1</u>	3	4
<u>1</u>	3	<u>2</u>	4		<u>2</u>	3	<u>1</u>	4
<u>2</u>	<u>1</u>	4	3	→	<u>1</u>	<u>2</u>	4	3
2	4	1	3		2	4	1	3
3	4	<u>1</u>	<u>2</u>		3	4	<u>2</u>	<u>1</u>
4	3	2	1		4	3	2	1

fig.2.4.23



2.5 CARRES LATINS

définition : Un carré latin d'ordre n est un carré gaulois $G(n,n)$ dont chaque case contient une lettre et une seule.

L'ouvrage de J.Dénes et A.D.Keedwell [5] est une étude très complète des carrés latins et des sujets qui s'y rattachent.

Nous évoquerons ici plus particulièrement les propriétés des carrés latins qui les distinguent des autres carrés gaulois.

2.5.1 Tableau de permutations associé à un carré latin

proposition 2.5.1 : Le tableau de permutations associé à un carré latin d'ordre n est un carré latin d'ordre n .

C'est un tableau carré, puisqu'il y a n colonnes dans le carré latin, et n lettres dans l'alphabet.

Chaque case contient une lettre et une seule, comme dans tout tableau de permutations.

Chaque lettre, c'est-à-dire chaque indice de colonne du carré latin initial, figure une fois et une seule dans chaque ligne du tableau, qui est une permutation de $[n]$.

Chaque lettre figure une fois et une seule dans chaque colonne du tableau, car le tableau est 1-transitif.

exemple :

fig.2.5.1

carré latin

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

groupe cyclique
d'ordre 4

tableau de permutations

	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

groupe de Klein

proposition 2.5.2 : Si T est l'opération qui consiste à associer à un carré latin son tableau de permutations, alors T^3 est l'application identique.

En effet, si A est un carré latin, son tableau de permutations B est défini par :

$$A_i^j = k \Leftrightarrow B_k^i = j$$

On a remplacé (i, j, k) par (k, i, j) : c'est une permutation cyclique de (i, j, k) qui redonne l'ensemble initial si elle est appliquée trois fois.

Si A, B, C, D sont des carrés latins tels que $B = T(A)$, $C = T(B)$, $D = T(C)$, on a :

$$A_i^j = k \Leftrightarrow B_k^i = j \Leftrightarrow C_j^k = i \Leftrightarrow D_i^j = k$$

donc $A = D$.

proposition 2.5.3 : Le tableau de permutations associé à un carré latin est transitif et 1-transitif, mais n'est k fois transitif que si k est égal à 1, ou si n et k sont égaux à 2.

Aucune case du carré latin n'est vide, donc le tableau est transitif. Il est 1-transitif car chaque case du carré latin contient exactement une lettre.

La proposition 2.2.1 permet de démontrer que le tableau ne peut être k fois transitif que si :

$$n \geq \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ceci n'est possible que si k est égal à 1, ou si n et k sont égaux à 2.

Tout carré latin est une fois transitif, car tous les éléments de $[n]$ figurent dans chaque colonne du tableau de permutations. D'autre part, un carré latin d'ordre 2 est deux fois transitif, car son tableau de permutations est le groupe symétrique S_2 .

proposition 2.5.4 : *Le tableau de permutations associé à un carré latin est équidistant d'index 0 : deux permutations différentes n'ont aucun point commun.*

En effet, si deux permutations avaient un point commun, une colonne du tableau de permutations contiendrait deux fois le même élément, ce qui est impossible puisque le tableau est un carré latin.

2.5.2 Invariants associés à un carré latin

Un carré latin d'ordre n n'a qu'un 1-hypergraphe, dont chaque sommet porte n boucles. Les autres k -hypergraphes n'ont pas d'arêtes. C'est donc un carré gaulois régulier.

De même, les arêtes des k -dessins sont vides si k est plus grand que 1. Chacune des $2n$ arêtes du 1-dessin contient les n sommets.

Les cycles ne comportent pas de boucles.

2.5.3 Opérations sur les carrés latins

proposition 2.5.5 : *Si A est un carré latin d'ordre n , si B est son tableau de permutations, et si C est le tableau de permutations associé à B , alors le transposé de C est le tableau de permutations associé au transposé de A .*

$$\forall i, j, k \in [n] \quad A_i^j = k \Leftrightarrow B_k^i = j \Leftrightarrow C_j^k = i$$

Soient A' et C' les transposés de A et de C :

$$A_{i}^{j} = k \Leftrightarrow A'_{j}^{i} = k \quad ; \quad C_{j}^{k} = i \Leftrightarrow C'_{k}^{j} = i$$

Soit D le tableau de permutations associé à A' :

$$A'_{j}^{i} = k \Leftrightarrow D_{k}^{j} = i$$

autrement dit : $D = C'$

proposition 2.5.6 : *Un carré gaulois équivale à un carré latin est un carré latin.*

En effet, permutation de l'alphabet, permutation des rangées et transposition ne modifient pas le nombre de lettres contenues dans les cases.

proposition 2.5.7 : *Le carrelage de k^2 carrés latins d'ordre n sur k alphabets disjoints est un carré latin d'ordre nk .*

C'est un carré gaulois, et chaque case contient une lettre et une seule.

proposition 2.5.8 : *Le résultat de l'application d'une permutation partielle de l'alphabet ou des rangées sur un carré latin est un carré latin.*

En effet, les contenus des cases sont échangés, et chaque case contient toujours une lettre et une seule.

Par contre, le résultat d'une permutation de rangées incomplètes n'est pas toujours un carré latin, comme le montre la figure 2.5.2 : si on échange les restrictions des lignes 1 et 2 aux lettres 2 et 4, on n'obtient pas un carré latin.

1	<u>2</u>	3	<u>4</u>	→	12	-	34	-
<u>2</u>	1	<u>4</u>	3		-	12	-	34
3	4	1	2		3	4	1	2
4	3	2	1		4	3	2	1

fig.2.5.2

Le résultat de l'union, de l'intersection et de l'homomorphisme n'est pas non plus un carré latin en général. Nous allons cependant étudier un carré gaulois particulier : l'union de deux carrés latins orthogonaux.

2.5.4 Carrés latins orthogonaux et carrés gréco-latins

définition : Deux carrés latins L et M d'ordre n et d'alphabets A et B sont orthogonaux si l'ensemble des couples (L_i^j, M_i^j) est égal à l'ensemble $A \times B$, autrement dit si ces couples sont tous différents.

définition : L'union de deux carrés latins orthogonaux d'ordre n et d'alphabets disjoints est un carré gaulois $G(n, 2n)$ dont chaque case contient deux lettres, appelé carré gréco-latin.

Euler [8] a démontré qu'il existait un carré gréco-latin $(n, 2n)$ pour tout entier n impair.

exemple :	1	2	3	4	5	6	14	25	36	
	2	3	1	U	6	4	=	26	34	15
fig.2.5.3	3	1	2		5	6		35	16	24

Les k -dessins et les k -hypergraphes d'un carré gréco-latin n'ont pas d'arêtes si k est différent de 2. Le graphe des couples est complet, le 2-dessin est 3-uniforme et 2-régulier.

Le tableau de permutations est 2-transitif puisque chaque case du carré contient deux lettres.

Le tableau de permutations associé au carré gréco-latin de la figure 2.5.3 est le groupe symétrique S_3 , il est donc trois fois transitif. Par contre, celui de la figure 2.5.4 n'est pas deux fois transitif, car 8 est inférieur à $\frac{4!}{2!}$. En effet, aucune permutation ne transforme par exemple (1,2) en (1,4).

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 3 & 5 & 7 \\
 3 & 1 & 7 & 5 \\
 5 & 7 & 1 & 3 \\
 7 & 5 & 3 & 1
 \end{array}
 \quad U \quad
 \begin{array}{cccc}
 2 & 4 & 6 & 8 \\
 6 & 8 & 2 & 4 \\
 8 & 6 & 4 & 2 \\
 4 & 2 & 8 & 6
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccc}
 12 & 34 & 56 & 78 \\
 36 & 18 & 27 & 45 \\
 58 & 67 & 14 & 23 \\
 47 & 25 & 38 & 16
 \end{array}$$

$$T = \begin{array}{c|cccc}
 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\
 3 & 2 & 1 & 4 & 3 \\
 4 & 2 & 4 & 3 & 1 \\
 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\
 6 & 3 & 1 & 2 & 4 \\
 7 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
 8 & 4 & 2 & 1 & 3
 \end{array}$$

fig.2.5.4



2.6 LES CARRES DE ROOM

2.6.1 Définition

Un carré de Room d'ordre $2n$, ou de dimension $2n-1$, est un carré gaulois $G(2n-1, 2n)$ dont chaque case non vide contient deux lettres, et dans lequel tout couple de lettres apparaît une fois et une seule.

Le carré de Room (9,10) ci-dessous est extrait du livre de W.D.Wallis [25], que nous citerons souvent dans ce chapitre :

09	58	37	--	--	--	--	46	12	
23	01	69	48	--	--	--	--	57	
68	34	02	17	59	--	--	--	--	
--	79	45	03	28	16	--	--	--	
--	--	18	56	04	39	27	--	--	
--	--	--	29	67	05	14	38	--	
--	--	--	--	13	78	06	25	49	
15	--	--	--	--	24	89	07	36	
fig.2.6.1	47	26	--	--	--	--	35	19	08

Un carré de Room d'ordre $2n$ peut représenter l'organisation d'un tournoi de bridge en duplicate, entre $2n$ couples de joueurs. Tous les joueurs participent à chaque partie. Chaque couple de partenaires est opposé une fois et une seule à chacun des autres couples, et occupe chaque table une fois et une seule. En effet, au cours des différentes parties, on retrouve toujours la même donne à une même table, mais elle n'est connue des joueurs qu'au moment où ils viennent s'installer

à cette table. L'étude des carrés de Room montre qu'il faut prévoir $2n-1$ tables et $2n-1$ parties, et construire un carré de Room de dimension $2n-1$.

Déjà en 1897, E.C.Howell avait construit, pour les valeurs de n allant de 4 à 25, des tables utilisées pour l'organisation des tournois de bridge. Mais ce n'est qu'en 1955 que T.G.Room [16] définit les configurations combinatoires qui portent désormais son nom.

2.6.2 Carrés de Room particuliers

Nous pouvons supposer que l'alphabet d'un carré de Room d'ordre n est $\{0,1,\dots,2n-1\}$. Tous les couples de lettres figurent dans le carré de Room, en particulier les couples $(0,i)$ pour $i = 1,\dots,2n-1$.

Nous dirons que le carré de Room est *normalisé* si le couple $(0,i)$ se trouve dans la case (i,i) .

Le transposé d'un carré de Room normalisé est donc aussi normalisé.

Deux carrés de Room sont *complémentaires* si, quand i et j sont différents, la case (i,j) de l'un contient un couple et la case (i,j) de l'autre est vide.

Un carré de Room est *antisymétrique* s'il est complémentaire de son transposé : si i et j sont différents, l'une des deux cases (i,j) et (j,i) contient un couple et l'autre est vide.

Le carré de Room de la figure 2.6.2 est entièrement déterminé par sa première ligne : si la case (\bar{i},\bar{j}) contient le couple (\bar{k},\bar{l}) , où $\bar{i},\bar{j},\bar{k},\bar{l}$ sont des entiers modulo $2n-1$, la case $(\overline{i+1},\overline{j+1})$ contient le couple $(\overline{k+1},\overline{l+1})$. Une seule exception : l'élément particulier ∞ , pour lequel on pose :

$$\infty + \infty = \infty$$

Un tel carré de Room est appelé *cyclique*.

Fig.2.6.2

$\infty 0$	34	16	--	25	--	--
--	$\infty 1$	45	20	--	36	--
--	--	$\infty 2$	56	31	--	40
51	--	--	$\infty 3$	60	42	--
--	62	--	--	$\infty 4$	01	53
64	--	03	--	--	$\infty 5$	12
23	05	--	14	--	--	$\infty 6$

Le carré de Room de la figure 2.6.1 est également cyclique : on a simplement remplacé 0 par 9 et ∞ par 0, puis on a ordonné les couples. On pourrait facilement le normaliser par une rotation d'une ligne et d'une colonne.

Un carré de Room *modèle* est un carré de Room cyclique de dimension $2n-1$ dont la première ligne contient les couples :

$$(\infty, 0), (1, 2n), (2, 2n-1), \dots, (n, n+1)$$

Le carré de la figure 2.6.2 est donc un carré modèle.

Si, dans un carré de Room R de dimension $2n-1$, on sélectionne $2m-1$ lignes et $2m-1$ colonnes, l'intersection de ces lignes et de ces colonnes définit un tableau carré. Si c'est un carré de Room de dimension $2m-1$, on l'appelle un *sous-carré* de R .

On dit qu'un sous-carré est *propre* s'il n'est pas de dimension 0, et s'il n'est pas le carré de Room lui-même.

Tout carré de Room de dimension supérieure à 1 possède un sous-carré propre de dimension 1.

2.6.3 Existence des carrés de Room de dimension $2n-1$

Ce problème a été résolu progressivement.

On a commencé par construire des carrés de Room de petite dimension, à la main ou à l'aide d'un calculateur.

Le seul carré de Room de dimension 1 est :

$$(01) \quad \text{fig.2.6.4}$$

On constate rapidement qu'il est impossible de construire un carré de Room de dimension 3 ou 5. La démonstration a été détaillée par W.D.Wallis [25].

Les figures 2.6.2 et 2.6.1 donnent des exemples de carrés de Room de dimensions 7 et 9. On a pu également reprendre les tables de Howell, jusqu'à la dimension 49.

On a ensuite envisagé des constructions plus générales d'un carré de Room de dimension $2n-1$.

En particulier, R.G.Stanton et R.C.Mullin [22], puis R.C.Mullin et E.Nemeth [14], ont construit des carrés de Room à l'aide du starter d'un groupe et de son adder. Leur méthode est présentée par W.D.Wallis dans [25].

construction par starter-adder

Si G est un groupe abélien additif d'ordre $r = 2s+1$, on note H l'ensemble $G-\{0\}$ d'ordre $2s$.

On appelle *starter* de G un ensemble X de s couples non ordonnés d'éléments de H :

$$X = \{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \dots, \{x_s, y_s\}\}$$

tel que :

$$H = \{x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s\} = \{x_1 - y_1, \dots, x_s - y_s, y_1 - x_1, \dots, y_s - x_s\}$$

Un *adder* A du starter X est un ensemble ordonné de s éléments distincts de H :

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_s)$$

tel que :

$$H = \{x_1 + a_1, \dots, x_s + a_s, y_1 + a_1, \dots, y_s + a_s\}$$

On dit qu'un adder est *antisymétrique* si, pour tout a appartenant à A , $(-a)$ n'appartient pas à A .

proposition 2.6.1 : Si un groupe abélien G d'ordre impair r possède un starter et un adder, alors il existe un carré de Room de dimension r . Si l'adder est antisymétrique, le carré de Room est antisymétrique.

Nous allons étudier la construction de ce carré, et l'illustrer par un exemple pour $r = 7$.

Soit $G = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ le groupe des entiers modulo 7.

L'ensemble :

$$X = \{\{1,6\}, \{2,5\}, \{3,4\}\}$$

est un starter de G qui possède deux adders :

$$A = (2,4,1) \text{ et } A' = (5,3,6)$$

Nous choisirons l'adder A . A' est l'ensemble $-A = (-2,-4,-1)$.

Les éléments de G : $0=g_1, g_2, \dots, g_r$ servent d'indices aux rangées du carré de Room R .

L'alphabet de R doit avoir $r+1$ éléments : nous définissons donc un élément g_0 , qui n'est pas dans G , et que nous noterons ∞ dans notre exemple.

$$\text{Nous poserons : } g_0 + g = g_0 \quad \forall g \in G$$

C'est pourquoi on note souvent ∞ cet élément g_0 .

Nous plaçons $\{g_0, g_1\}$ dans la case (g_1, g_1) . Les autres cases (g_1, g_k) de la ligne g_1 sont vides si $-g_k$ n'appartient pas à A , elles contiennent $\{x_i, y_i\}$ si $-g_k = a_i$.

exemple :

	0	1	2	3	4	5	6	
0	(∞ 0	--	--	25	--	16	34)	fig.2.6.4

Dans la ligne g_j , la case (g_j, g_k) est vide si $(g_1, g_k - g_j)$ est vide. Par contre, si $(g_1, g_k - g_j)$ contient $\{x_i, y_i\}$, alors on place $\{x_i + g_j, y_i + g_j\}$ dans la case (g_j, g_k) . Avec notre convention $g_0 + g = g_0$, la case (g_j, g_j) contient $\{g_0, g_j\}$.

exemple :		0	1	2	3	4	5	6
	0	$\infty 0$	--	--	25	--	16	34
	1	45	$\infty 1$	--	--	36	--	20
	2	31	56	$\infty 2$	--	--	40	--
	3	--	42	60	$\infty 3$	--	--	51
	4	62	--	53	01	$\infty 4$	--	--
	5	--	03	--	64	12	$\infty 5$	--
fig.2.6.5	6	--	--	14	--	05	23	$\infty 6$

Le carré de Room de la figure 2.6.5 est antisymétrique comme l'adder utilisé pour sa construction :

Si A est antisymétrique : $a \in A \Rightarrow -a \notin A$

Si la case (g_j, g_k) du carré de Room contient un couple, c'est que $(g_1, g_k - g_j)$ contient également un couple, et donc que $g_j - g_k$ appartient à A . Par conséquent, $g_k - g_j$ n'appartient pas à A , et la case (g_k, g_j) est vide.

existence d'un starter et d'un adder

Il y a deux starters remarquables :

- le *starter modèle* : tous les $x_i + y_i$ sont nuls
- le *starter fort* : les $x_i + y_i$ sont tous différents et non nuls.

Il est très facile de construire un starter modèle, où tous les couples sont de la forme $\{x_i, -x_i\}$, en effet :

proposition 2.6.2 : *Tout groupe abélien d'ordre impair possède un starter modèle.*

En particulier, dans le groupe des entiers modulo $2n+1$, c'est l'ensemble des couples :

$$\{1, 2n\}, \{2, 2n-1\}, \dots, \{n, n+1\}$$

C'est le starter que nous avons choisi pour notre exemple.

Si le starter modèle possède un adder, celui-ci permet de placer les couples du starter dans la première ligne, pour construire un carré de Room modèle.

Avec l'aide d'un ordinateur, R.G.Stanton et R.C.Mullin [22] ont construit des carrés de Room modèles de dimension impaire de 7 à 49, sauf 9.

Le starter modèle d'ordre 9 ne possède pas d'adder. Le carré de Room de la figure 2.6.1 est cyclique, mais pas modèle.

K.Byleen [4] a démontré la proposition suivante :

proposition 2.6.3 : *Il existe des carrés de Room modèles de dimension p pour tout entier premier impair p qui ne soit pas de la forme $2^s + 1$.*

Le starter fort est plus rare, mais possède toujours un adder :

proposition 2.6.4 : *Si $X = \{(x_1, y_1), \dots, (x_s, y_s)\}$ est un starter fort du groupe G d'ordre $2s+1$, alors l'ensemble :*

$$A = (-x_1 - y_1, \dots, -x_s - y_s)$$

est un adder de X .

R.C.Mullin et E.Nemeth [14] ont ensuite démontré la propriété suivante :

proposition 2.6.5 : *Si p est un entier premier impair tel que :*

$$p^n = 2^k t + 1$$

où t est un entier impair plus grand que 1, alors le corps de Galois $GF(p^n)$ possède un starter fort dont l'adder est antisymétrique.

On en déduit un corollaire :

proposition 2.6.6 : *Si p est un entier premier impair, si p^n n'est pas de la forme $2^k + 1$, alors il existe un carré de Room antisymétrique de dimension p^n .*

On a ensuite construit des carrés de Room à partir de carrés plus petits déjà connus, par exemple ceux que nous pouvons construire par starter-adder.

construction d'après Moore

W.D.Wallis [25] s'inspire d'un théorème de Moore [13] sur les systèmes de Steiner pour construire des carrés de Room :

proposition 2.6.7 : S'il existe un carré de Room R_1 de dimension r_1 , un carré de Room R_2 de dimension r_2 possédant un sous-carré R_3 de dimension r_3 , et deux carrés latins orthogonaux L et M de dimension $n = r_2 - r_3$, alors il existe un carré de Room R de dimension :

$$r = r_1(r_2 - r_3) + r_3$$

possédant des sous-carrés isomorphes à R_1 , R_2 et R_3 .

Si R_1 , R_2 et R_3 sont antisymétriques, R et ses sous-carrés sont antisymétriques.

J.D.Horton [11] avait auparavant démontré ce théorème dans le cas où n est plus grand que 6.

Si R_2 est de la forme :

$$R_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline C & R_3 \\ \hline \end{array}$$

fig.2.6.6

on construit R de la façon suivante :

$$R = \begin{array}{|c|c|} \hline & \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{r_1} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_{r_1} \end{array} & R_3 \\ \hline \end{array}$$

fig.2.6.7

Si $n = r_2 - r_3$, on prend comme alphabet de R l'ensemble :

$$x = \{0, 1_1, 1_2, \dots, 1_{r_1}, 2_1, \dots, 2_{r_1}, \dots, n_1, \dots, n_{r_1}, n+1, n+2, \dots, r_2\}$$

L'alphabet des carrés latins L et M est $\{1, 2, \dots, n\}$, celui du carré de Room R_i ($i=1, 2, 3$) est $\{0, 1, \dots, r_i\}$.

On écrit L_i, M_i, A_i, B_i, C_i pour désigner les tableaux L, M, A, B, C dans lesquels la lettre x a été remplacée par la lettre x_i de X : lettre indicée si x est compris entre 1 et n , x lui-même si x est égal à 0 ou plus grand que n . On procède ainsi pour toutes les lettres qui figurent dans ces tableaux.

S est le tableau obtenu en remplaçant chaque case de R_1 par un carré $n \times n$:

- chaque case vide est remplacée par un carré vide
- $(0, i)$ est remplacé par A_i
- (i, j) , $i \neq 0$, $j \neq 0$, est remplacé par le carré gréco-latin résultant de l'union de L_i et de M_j .

Cette construction reste valable si r_3 est nul, c'est-à-dire si R est réduit au carré S . On démontre ainsi que :

proposition 2.6.8 : *S'il existe deux carrés de Room R_1 et R_2 de dimensions r_1 et r_2 , il existe un carré de Room R de dimension $r_1 r_2$ possédant des sous-carrés isomorphes à R_1 et à R_2 .*

Si R_1 et R_2 sont antisymétriques, R et ses sous-carrés sont antisymétriques.

carrés de Room dont la dimension est un nombre de Fermat

Le $k^{\text{ième}}$ nombre de Fermat est l'entier :

$$f_k = 2^{2^k} + 1$$

Les premiers nombres de Fermat sont :

$$f_0 = 3, f_1 = 5, f_2 = 17, f_3 = 257, f_4 = 65537$$

Ce sont des nombres premiers. Par contre, f_5, f_6, f_7 et f_8 ne sont pas premiers.

En utilisant les propositions 2.6.7 et 2.6.8, W.D.Wallis [25] a démontré la propriété suivante :

proposition 2.6.9 : *Il existe un carré de Room antisymétrique de dimension f_k si k est différent de 0, 1 ou 3.*

carrés de Room de dimension impaire différente de 3, 5 et 257

W.D.Wallis utilise les propositions 2.6.6 et 2.6.9 et les propositions suivantes :

proposition 2.6.10 : Si r et n sont des entiers impairs tels que $r \geq n$, et s'il existe un carré de Room de dimension r , il existe un carré de Room de dimension rn .

proposition 2.6.11 : S'il existe un carré de Room R de dimension $r > 1$, il existe un carré de Room de dimension $4r+1$ ayant un sous-carré de dimension r isomorphe à R .

proposition 2.6.12 : S'il existe un carré de Room antisymétrique de dimension $r > 1$, il existe des carrés de Room de dimensions $2r-1$ et $2r+1$.

Il en déduit :

proposition 2.6.13 : Il existe un carré de Room de toute dimension impaire sauf 3, 5 et 257. 3 et 5 sont impossibles, 257 reste à démontrer.

carrés de Room de dimension 257

L'existence de carrés de Room de dimension 257 est restée longtemps une conjecture. Elle a été démontrée par W.D.Wallis dans [26].

Il utilise le résultat de J.D.Horton (proposition 2.6.7) pour démontrer l'existence d'un carré de Room de dimension 57 ayant des sous-carrés de dimension 7 et 9 : en effet, on connaît un carré de Room de dimension 7, et un autre de dimension 9 ayant un sous-carré de dimension 1, et on a :

$$57 = 7(9-1) + 1$$

Il démontre ensuite :

proposition 2.6.14 : *S'il existe un carré de Room de dimension r ayant un sous-carré de dimension s , il existe un carré de Room de dimension $5(r-s)+s$ ayant des sous-carrés de dimensions r et s , sauf peut-être si $r = 13$ et $s = 1$.*

Puisqu'il existe un carré de Room de dimension $r = 57$ ayant un sous-carré de dimension $s = 7$, il existe un carré de Room de dimension :

$$5(r-s)+s = 5(57-7)+7 = 257$$

On peut donc conclure :

proposition 2.6.15 : *Il existe des carrés de Room de toutes dimensions impaires sauf 3 et 5.*

2.6.4 Tableau de permutations associé à un carré de Room

La figure 2.6.8 décrit le tableau de permutations associé au carré de Room de la figure 2.6.2 :

	1	2	3	4	5	6	7
∞	1	2	3	4	5	6	7
0	1	4	7	5	6	3	2
1	3	2	5	1	6	7	4
2	5	4	3	6	2	7	1
3	2	6	5	4	7	3	1
4	2	3	7	6	5	1	4
5	5	3	4	1	7	6	2
6	3	6	4	5	2	1	7

fig.2.6.8

Tout couple de lettres apparaît une fois et une seule dans le carré de Room, deux permutations du tableau ont donc un point commun et un seul : le tableau de permutations d'un carré de Room est équidistant d'index 1.

Chaque case contient zéro ou deux lettres : chaque indice figure deux fois ou aucune dans chaque colonne du tableau. Chaque colonne du tableau contient n indices, tous répétés deux fois. Ces n indices repèrent les n cases non vides dans la ligne correspondante du carré de Room.

Si le carré de Room est antisymétrique, si i et j sont différents, et si i figure deux fois dans la colonne j du tableau de permutations, alors j ne figure pas dans la colonne i .

2.6.5 Invariants associés à un carré de Room de dimension $2n-1$

Le graphe des couples est complet, les autres k -hypergraphes n'ont pas d'arêtes : le carré de Room est régulier.

Seul le 2-dessin a des arêtes, qui contiennent toutes n sommets.

2.6.6 Opérations sur les carrés de Room

Un carré gaulois équivalent à un carré de Room est évidemment un carré de Room.

Le carrelage de k^2 carrés de Room de dimension r donne un carré gaulois de dimension kr . Son graphe des couples est formé de k composantes connexes, ayant chacune $r+1$ sommets, et à l'intérieur desquelles deux sommets quelconques sont reliés par k arêtes. Ce n'est donc pas le graphe complet K_{kr+1} , qui devrait être le graphe des couples d'un carré de Room de dimension kr : le résultat du carrelage n'est pas un carré de Room, même si k est impair, quand k est plus grand que 1.

De même, le résultat des autres opérations : union, restriction, homomorphisme, permutation partielle ou incomplète des rangées ou de l'alphabet, n'est pas en général un carré de Room.

2.7 LES CARRES DE ROOM GENERALISES

2.7.1 Définition

Un carré de Room généralisé $RG(r, \lambda; v)$ est un carré gaulois $G(r, v)$ tel que chaque couple non ordonné de lettres de $[v]$ apparaisse dans exactement λ cases du carré.

exemple : $RG(6, 3; 3)$	123	-	-	-	-	-	-	-	-
	-	12	3	-	-	-	-	-	-
	-	3	12	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	13	2	-	-	-	-
	-	-	-	2	13	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	23	1	-	-
fig.2.7.1	-	-	-	-	-	-	1	23	-

Un carré de Room de dimension r est un $RG(r, 1; r-1)$. Un carré latin est un $RG(r, 0; r)$.

P.J.Schellenberg et J.Taylor [19] ont construit un $RG(13, 1; 27)$ sans cases vides.

2.7.2 Tableaux de permutations équidistants

Le tableau de permutations associé à un carré de Room généralisé $RG(r, \lambda; v)$ est équidistant d'indice λ : deux permutations ont λ points communs. Ceci a d'ailleurs été démontré par M.Deza, R.C.Mullin et S.A.Vanstone [7].

Sous le nom d'EPA (Equidistant Permutation Arrays), ou de $A(r, \lambda; v)$, les tableaux de permutations équadistants sont actuellement très étudiés. Il s'agit de trouver la valeur maximum $R(r, \lambda)$ que puisse prendre v . Il faut donc construire un tableau de permutations de S_r , équadistant d'indice λ , le plus grand possible. Chaque tableau construit, s'il est plus grand que les autres, permet d'augmenter la borne inférieure de $R(r, \lambda)$. Chaque impossibilité démontrée, si elle est plus contraignante que celles que l'on connaissait, abaisse la borne supérieure.

On s'efforce donc pour l'instant de cerner $R(r, \lambda)$. Citons quelques résultats :

D.W.Bolton [3] :

$$R(r, \lambda) \leq (r-1)^2 \text{ si } r > 1$$

$$R(r, 1) \leq (r-2)^2 - \sqrt{\frac{3}{2} + (2r-6)} \text{ si } r \geq 1191$$

$$R(6, 1) = 10$$

$$R(r, 0) = r \text{ (carrés latins)}$$

$$R(r, r-1) = 1$$

$$R(r, r-2) = 2$$

$$R(r, r-3) = r-1$$

$$R(r, r-4) = \text{partie entière de } \frac{r}{2} \text{ si } r > 9$$

M.Deza [6] :

$$R(r, \lambda) \leq \max \{ r+2, (r-\lambda)^2 + (r-\lambda) + 1 \}$$

S.A.Vanstone et P.J.Schellenberg [24] :

$$R(n^2+n+2, 1) \geq 2n^2+n \text{ si } n \text{ est une puissance d'un nombre premier}$$

M.Deza, R.C.Mullin, S.A.Vanstone [7] :

$$R(r, 1) \leq r(r-3) \text{ si } r \geq 4$$

R.C.Mullin et E.Nemeth [15] :

$$R(r, 1) \leq r^2 - 4r - 1 \text{ si } r \geq 6$$

K.Heinrich et G.H.J.van Rees [10] :

$$R(r, 1) \geq 2r-4 \text{ pour tout } r \text{ sauf } 4 \text{ et } 5$$

$$R(r, 1) = 2r-5 \text{ si } r = 4 \text{ ou } r = 5$$

Des études ont également été faites pour préciser $R(r, \leq \lambda)$ et $R(r, \geq \lambda)$, taille maximum des tableaux de permutations tels que deux permutations aient au plus, ou au moins, λ points communs.

P. Frankl et M. Deza [9] ont démontré les relations suivantes :

$$R(r, \leq \lambda) \leq r \times R(r-1, \geq \lambda-1)$$

$$R(r, \geq \lambda) \leq r \times R(r-1, \leq \lambda-1) \quad r \geq 2, \lambda \geq 1$$

$$R(r, \geq \lambda) \times R(r, \leq \lambda-1) \leq r!$$

$$R(r, \geq 1) = (r-1)!$$

$$R(r, \leq 0) = r \quad (\text{carrés latins})$$

$$R(p^m, \geq 2) = (p^m - 2)! \quad \text{si } p \text{ est premier}$$

$$R(p^m, \leq 1) = p^m (p^m - 1)$$

$$R(p^m + 1, \geq 3) = (p^m - 2)!$$

$$R(p^m + 1, \leq 2) = (p^m + 1) p^m (p^m - 1)$$

$$R(r, \geq r-2) = 2$$

$$R(r, \leq r-3) = \frac{r!}{2}$$

et ont montré que, si $\lambda'(r)$ est une valeur de λ pour laquelle $|R(r, \geq \lambda) - R(r, \leq \lambda)|$ est minimum, alors $\lambda'(r)/r$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand r tend vers l'infini.

En anticipant sur les résultats des chapitres 3.1 et 3.5, nous pouvons remarquer que le tableau de permutations associé à un carré siamois $S(n, p)$ est un $A(n, \leq d; p)$, et que par conséquent :

proposition 2.7.1 : Si (n, p) est un couple siamois :

$$R(n, \leq \frac{2n(p-n)}{p}) \geq p$$

2.8 LES CARRÉS DE HOWELL GÉNÉRALISÉS

2.8.1 Définition

Un carré de Howell généralisé $HG(k,s,n)$ de degré $k \geq 2$, de dimension s et d'ordre n , est un carré gaulois $G(s,n)$ dont chaque case non vide contient k lettres, et dans lequel on trouve au plus une fois chaque ensemble de k lettres.

Un carré de Howell est un $HG(2,s,n)$.

On peut imposer que chaque ensemble de k lettres apparaisse une fois et une seule dans le carré. On obtient alors une configuration que certains auteurs, comme A. Rosa [17] et [18], appellent carré de Room généralisé. Le carré de Room est en effet le cas particulier où k est égal à 2.

2.8.2 Existence

La dimension s d'un carré de Howell généralisé doit vérifier :

$$\frac{n}{k} \leq s \leq C_{n-1}^{k-1}$$

et k doit diviser n .

En effet, si tous les k -uplets contenant une lettre donnée a sont présents dans le carré, ils occupent C_{n-1}^{k-1} cases dans des rangées différentes. Si s est supérieur à C_{n-1}^{k-1} , a doit se trouver dans les rangées supplémentaires, dans des k -uplets non encore rencontrés : c'est impossible.

D'autre part, si s est inférieur à $\frac{n}{k}$, on ne parviendra pas, en mettant k lettres par case, à placer les n lettres dans une rangée.

Si s est égal à $\frac{n}{k}$, chaque case contient k lettres et le carré est k -transitif :

123	456	789	HG(3,3,9)
459	178	236	
678	239	145	fig.2.8.1

Si s est égal à C_{n-1}^{k-1} , chaque ensemble de k lettres apparaît une fois et une seule dans le carré. Ceci n'est pas toujours possible : en effet un carré de Howell généralisé $HG(2,5,6)$ est un carré de Room de dimension 5, ce qui n'existe pas.

L'existence des carrés de Howell généralisés fait encore actuellement l'objet de nombreuses études. Citons un théorème de A.Rosa :

proposition 2.8.1 : *S'il existe un $HG(k,s,n)$, il existe un $HG(k+1,s,n(k+1)/k)$.*

TROISIEME PARTIE

CARRES SIAMOIS

3.1 DEFINITION

3.1.1 Le carré siamois $S(n,p)$

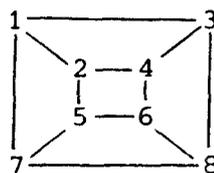
Un carré siamois $S(n,p)$ est un carré gaulois (n,p) tel que :

- chaque case contienne une ou deux lettres,
- le graphe des couples soit régulier.

exemple : $S(6,8)$

12	34	5	6	7	8
5	1	2	38	46	7
7	6	13	5	8	24
4	8	6	17	25	3
3	2	78	4	1	56
68	57	4	2	3	1

fig.3.1.1



graphe des couples

3.1.2 Relations vérifiées par n et par p

Comme chaque case contient une ou deux lettres, et qu'il y a n cases et p lettres par rangée, p doit être compris entre n et $2n$.

Si n et p sont égaux, il y a une lettre et une seule par case : le carré siamois est en fait un carré latin. Comme le graphe des couples n'a pas d'arêtes, tous les sommets sont de degré nul, et la condition de régularité est vérifiée.

Si p est égal à $2n$, chaque case contient deux lettres. Chaque lettre figure dans n cases, donc dans n couples, la régularité du graphe des couples est donc vérifiée car chaque sommet est de degré n .

On ne peut pas dire que tout carré siamois $S(n,2n)$ est un carré gréco-latin, ni même l'union de deux carrés latins non orthogonaux.

En effet, si le carré siamois $(4,8)$ de la figure 3.1.2 était l'union de

deux carrés latins, l'un des alphabets contiendrait 1 et l'autre 2,3,4 et 5 qui se trouvent dans la même case que 1 :

12	34	56	78	
78	15	24	36	
46	78	13	25	
35	26	78	14	fig.3.1.2

La restriction du carré siamois au deuxième alphabet serait :

2	34	5	-	
-	5	24	3	
4	-	3	25	
35	2	-	4	fig.3.1.3

ce qui n'est pas un carré latin.

Nous considérerons que les cas où p est égal à n ou à $2n$, et où la deuxième condition est toujours vérifiée, sont des cas triviaux, et nous imposerons désormais à p d'être strictement compris entre n et $2n$. Chaque rangée contiendra donc au moins une case simple et une case double.

La condition de régularité du graphe des couples impose une autre relation entre n et p .

Il y a $p-n$ couples par rangée, et $n(p-n)$ couples en tout dans le carré siamois. Il y a également $n(p-n)$ arêtes dans le graphe des couples.

On observe donc $2n(p-n)$ occurrences d'une lettre dans un couple, ou $2n(p-n)$ extrémités d'arêtes. Ce nombre doit être réparti équitablement entre les p lettres, par conséquent la valeur :

$$d = \frac{2n(p-n)}{p}$$

qui représente le degré de chaque sommet, doit être entière.

Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante :

proposition 3.1.1 : Si $S(n,p)$ est un carré siamois non trivial, n et p vérifient les deux relations suivantes :

1. $n < p < 2n$
2. $d = \frac{2n(p-n)}{p}$ est un entier.

3.1.3 Application pratique

Nous retrouvons le problème d'organisation du début. Cette fois, nous désirons que toutes les machines soient occupées à chaque séance, mais que les étudiants ne soient pas plus de deux devant une machine. C'est la première condition : chaque case contient une ou deux lettres. Si nous nous trouvons dans la cas général où p est strictement compris entre n et $2n$, à chaque séance $p-n$ machines seront utilisées par un "binôme" d'étudiants, et les $2n-p$ autres par un étudiant seul.

Comme il est plus facile de travailler à deux, les places en binômes seront recherchées, et certains étudiants pourront parvenir à ne pas travailler seuls. Par souci d'égalité, nous imposerons que le nombre de travaux pratiques faits en binômes soit le même pour tous. C'est la deuxième condition.

Si nous parvenons à établir un planning, ce sera un carré siamois. Il arrive que ce soit impossible, quand p ne divise pas $2n(p-n)$.

Il nous faudra caractériser les conditions d'existence des carrés siamois, et donner des méthodes pour les construire.

3.1.4 Le graphe des couples

Comme ses cases ne contiennent qu'une ou deux lettres, le carré siamois $S(n,p)$ n'a qu'un 1-hypergraphe et un 2-hypergraphe.

Le 1-hypergraphe est un graphe dont chacun des p sommets est muni de $n-d$ boucles, correspondant aux $n-d$ cases où la lettre est seule. Il ne présente donc pas d'intérêt.

Le 2-hypergraphe, ou graphe des couples, est un graphe régulier dont chaque sommet est de degré d . Il peut être simple, comme celui de la figure 3.1.1, ou multiple, comme celui du carré ci-après :

12	34	7	5	8	6	
56	78	3	1	4	2	$1 \equiv 2$
8	6	12	34	7	5	$3 \equiv 4$
4	2	56	78	3	1	$5 \equiv 6$
7	5	8	6	12	34	$7 \equiv 8$
3	1	4	2	56	78	

fig.3.1.4

3.1.5 Le dessin

Un carré siamois $S(n,p)$ n'a qu'un 1-dessin et un 2-dessin, qui se déduisent aisément l'un de l'autre. Par exemple, dans un $S(6,8)$, si on trouve dans une rangée les couples 12 et 34, on sait que les autres lettres, soient 5,6,7 et 8, sont seules dans les autres cases de cette rangée. Autrement dit, si une arête du 2-dessin relie 12 et 34, une arête du 1-dessin contient 5,6,7 et 8.

De même que nous n'étudions que le graphe des couples, nous ne parlerons que du 2-dessin que nous appellerons simplement le *dessin*.

Les figures 3.1.5 et 3.1.6 représentent les dessins des carrés des figures 3.1.1 et 3.1.4. Ce sont deux graphes isomorphes.

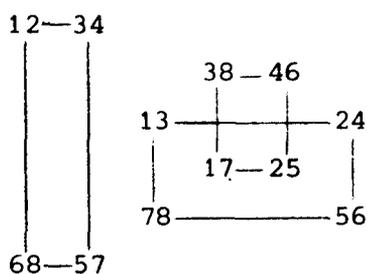


fig.3.1.5

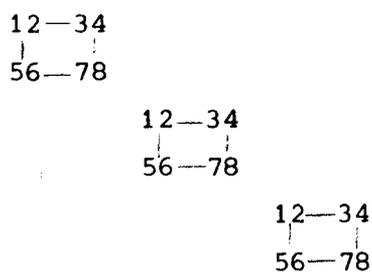


fig.3.1.6

3.1.6 Le tableau siamois

Le *tableau siamois* $T(n,p)$ est le tableau de permutations associé au carré siamois $S(n,p)$. C'est un tableau à p lignes et n colonnes, dont

les éléments sont :

$$T_k^i = j \Leftrightarrow k(i) = j \Leftrightarrow k \in S_i^j \quad i, j \in [n] ; k \in [p]$$

Par exemple, le tableau siamois associé au carré siamois de la figure 3.1.1 est le suivant :

	1	2	3	4	5	6	
1	1	2	3	4	5	6	
2	1	3	6	5	2	4	
3	2	4	3	6	1	5	
4	2	5	6	1	4	3	
5	3	1	4	5	6	2	
6	4	5	2	3	6	1	
7	5	6	1	4	3	2	
8	6	4	5	2	3	1	fig.3.1.7

Les propriétés du carré siamois se retrouvent dans le tableau :

- chaque case contient une ou deux lettres :

Pour tout i et pour tout j appartenant à $[n]$, l'ensemble :

$$\{ k \in [p] / T_k^i = j \}$$

contient un ou deux éléments.

Dans chaque colonne T^i , tous les j sont présents une fois ou deux. $p-n$ sont présents deux fois, $2n-p$ sont présents une seule fois.

Pour tout j , il existe $p-n$ colonnes T^i contenant deux fois j , et $2n-p$ colonnes ne le contenant qu'une fois.

Le tableau est transitif.

- chaque lettre figure dans d couples :

Si la case S_i^j du carré siamois contient le couple (k, l) , on aura :

$$k(i) = l(i) = j \quad \text{et} \quad T_k^i = T_l^i = j$$

Les permutations k et l ont un point commun, les lignes T_k et T_l ont le même élément j en colonne i .

Comme le couple (k, l) apparaît au plus d fois dans le carré siamois, les lignes T_k et T_l ont au plus d éléments communs. Les permutations du tableau sont à une distance au moins égale à $n-d$ les unes des autres.

Cette distance est au moins égale à $n-m$ si le graphe des couples est un m -graphe, c'est-à-dire si deux sommets sont reliés par au plus m arêtes.

Rappelons qu'un élément i commun aux permutations k et l est un point fixe de kl^{-1} , et que son image $j = k(i) = l(i)$ est un point fixe de $k^{-1}l$.

D'autre part, si z est une permutation de S_n , et si T est un sous-ensemble de S_n , notons zT l'ensemble :

$$zT = \{zx / x \in T\}$$

Nous pouvons énoncer la proposition suivante :

proposition 3.1.2 : Si $T(n, p)$ est un tableau siamois associé à un carré siamois dont le graphe des couples est simple, alors, pour toute permutation k de T , le tableau $k^{-1}T$ est un tableau siamois contenant :

- la permutation identique,
- d permutations ayant un point fixe,
- $p-d-1$ permutations sans point fixe.

La permutation identique est $k^{-1}k$, les d permutations ayant un point fixe sont les $k^{-1}l$ telles que les lettres k et l figurent dans un couple, les $p-d-1$ permutations sans point fixe correspondent aux lettres qui ne figurent pas dans la même case que k .

Un groupe de Frobenius est un groupe de permutations dont tous les éléments, autres que l'élément neutre, sont des permutations ayant au plus un point fixe.

On pourrait donc se demander si, quand le graphe des couples est simple, le tableau $k^{-1}T$ de la proposition 3.1.2 n'est pas contenu dans un groupe de Frobenius. On trouve facilement un contre-exemple : le tableau de permutations de la figure 3.1.7, associé au carré siamois de la

figure 3.1.1 dont le graphe des couples est simple, contient la permutation identique et des permutations ayant au plus un point fixe. Mais la permutation associée à la lettre 4 est $(1254)(36)$, dont le carré, $(15)(24)$, a deux points fixes 3 et 6. Elle ne peut donc pas appartenir à un groupe de Frobenius.

3.2 COUPLES SIAMOIS

3.2.1 Définition

Un couple siamois est un couple d'entiers positifs (n, p) vérifiant :

$$(1) \quad n < p < 2n$$

$$(2) \quad \frac{2n(p-n)}{p} = d \in \mathbb{N}$$

La proposition 3.1.1 est donc équivalente à la proposition suivante :

proposition 3.2.1 : *S'il existe un carré siamois $S(n, p)$, alors n et p forment un couple siamois.*

proposition 3.2.2 : *Si (n, p) est un couple siamois, alors n et p ne sont pas premiers entre eux.*

La relation (2) est équivalente à :

$$(3) \quad p(2n-d) = 2n^2$$

p divise donc $2n^2$. Si n et p sont premiers entre eux, p divise 2 et ne peut être égal qu'à 1 ou à 2. Or :

- si $n = 0$, aucun entier p ne vérifie $0 < p < 0$

- si $n = 1$, il n'y a pas d'entier p vérifiant $1 < p < 2$

- donc n est au moins égal à 2, et p , strictement supérieur à n

d'après (1), est au moins égal à 3.

n et p ne sont donc pas premiers entre eux.

proposition 3.2.3 : Si (n,p) est un couple siamois, alors, pour tout entier k strictement positif, (nk, pk) est un couple siamois.

nk et pk vérifient (1) et (2) comme n et p :

$$(1) \quad n < p < 2n \quad \Rightarrow \quad nk < pk < 2nk$$

$$(2) \quad \frac{2n(p-n)}{p} = d \quad \Rightarrow \quad \frac{2nk(pk-nk)}{pk} = dk$$

Nous dirons que le couple (nk, pk) est un *multiple* du couple (n, p) , et que (n, p) est un *diviseur* de (nk, pk) .

3.2.2 Couples siamois premiers

définition : Un couple siamois premier est un couple siamois qui n'a pas d'autre diviseur que lui-même.

proposition 3.2.4 : Pour qu'un couple siamois soit premier, il faut et il suffit que n, p et $d = \frac{2n(p-n)}{p}$ soient premiers entre eux.

1. Soit (n, p) un couple siamois non premier : il existe un couple siamois (n', p') qui divise (n, p) , c'est-à-dire :

$$n = n'k, \quad p = p'k$$

$$n' < p' < 2n'$$

$$\frac{2n'(p'-n')}{p'} = d' \in \mathbb{N}$$

$$\text{Alors } d' = \frac{2n'(p'-n')}{p'} = \frac{2 \frac{n}{k} \left(\frac{p}{k} - \frac{n}{k} \right)}{\frac{p}{k}} = \frac{1}{k} \times \frac{2n(p-n)}{p} = \frac{d}{k}$$

d' est un entier, donc k divise d, n et p .

2. Soient (n, p) un couple siamois et k un diviseur commun à n, p et d :

$$n = n'k, \quad p = p'k, \quad d = d'k \quad n', p', d' \in \mathbb{N}$$

$$d = \frac{2n(p-n)}{p} \Rightarrow d'k = \frac{2n'k(p'k-n'k)}{p'k} \Rightarrow d' = \frac{2n'(p'-n')}{p'}$$

$$n < p < 2n \Rightarrow n'k < p'k < 2n'k \Rightarrow n' < p' < 2n'$$

(n', p') est donc un couple siamois, diviseur de (n, p) , et (n, p) n'est pas premier.

proposition 3.2.5 : Les couples siamois premiers sont de la forme :

$$(ab, b^2) \text{ ou } (ab, 2a^2)$$

où a et b sont deux entiers positifs vérifiant :

$$(1) \quad a < b < 2a$$

$$(2) \quad 2a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux.}$$

Soit (n, p) un couple siamois premier. Soit q le PGCD de n et de p :
 $n = qr$, $p = qs$, $q > 1$, $\text{PGCD}(r, s) = 1$

Soit k un facteur premier de q , différent de 1. k divise n et p ,
il existe n' et p' tels que :

$$n = n'k \text{ , } p = p'k$$

$$(1) \Rightarrow n < p < 2n \Rightarrow n' < p' < 2n'$$

$$(2) \Rightarrow \frac{2n(p-n)}{p} = d \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{2n'(p'-n')}{p'} \times k = d \in \mathbb{N}$$

Comme (n, p) est un couple siamois premier, (n', p') n'est pas un couple siamois et $\frac{2n'(p'-n')}{p'}$ n'est pas un entier.

p' divise $2n'(p'-n')k$ sans diviser $2n'(p'-n')$, donc p' n'est pas premier avec k . Comme k est premier, k divise p' : $p' = p''k$.

$$\text{Par conséquent : } p = p'k \Rightarrow p = p''k^2$$

Si k est un facteur premier de q , alors k^2 divise p . Donc q^2 divise p : $p = q^2 t$

$n = qr$ et $p = q^2 t$ vérifient la relation (3) : $p(2n-d) = 2n^2$,
 p divise donc $2n^2$, $q^2 t$ divise $2q^2 r^2$, d'où t divise $2r^2$.

r et $s = qt$ sont premiers entre eux, donc r et t sont premiers entre eux, ainsi que t et r^2 . t , qui divise $2r^2$ tout en étant premier avec r^2 , divise 2 et ne peut donc être égal qu'à 1 ou à 2.

Il y a donc deux possibilités pour (n, p) :

$$1. \quad n = qr, \quad p = q^2, \quad \text{PGCD}(q,r) = 1$$

$$n < p < 2n \Rightarrow qr < q^2 < 2qr \Rightarrow r < q < 2r \Rightarrow q > r$$

$$2. \quad n = qr, \quad p = 2q^2, \quad \text{PGCD}(2q,r) = 1$$

c'est-à-dire r impair et premier avec q

$$n < p < 2n \Rightarrow qr < 2q^2 < 2qr \Rightarrow r < 2q < 2r \Rightarrow q < r$$

Posons $n = ab$ avec $a < b$, a et b désignant q et r ou r et q .

$$1. \quad \text{si } q > r : \text{ alors } q = b, \quad r = a, \quad p = b^2$$

$$\text{et } r < q < 2r \Rightarrow a < b < 2a$$

$$\text{PGCD}(a,b) = 1$$

si b est pair :

$$n = ab \text{ et } p = b^2 \text{ sont pairs}$$

$$d = \frac{2n(p-n)}{p} = 2a(b-a) \text{ est pair}$$

D'après la proposition 3.2.4, (n,p) n'est donc pas premier.

b doit donc être impair : b et $2a$ sont premiers entre eux.

$$2. \quad \text{si } q < r : \text{ alors } q = a, \quad r = b, \quad p = 2a^2$$

$$r < 2q < 2r \Rightarrow b < 2a < 2b \Rightarrow a < b < 2a$$

$$\text{PGCD}(2a,b) = 1$$

Par conséquent, si (n,p) est un couple siamois premier, n est le produit de deux entiers a et b vérifiant :

$$- \quad a < b < 2a$$

$$- \quad \text{PGCD}(2a,b) = 1$$

et p est égal à b^2 ou à $2a^2$.

proposition 3.2.6 : Si les deux entiers positifs a et b vérifient :

$$- \quad a < b < 2a$$

$$- \quad \text{PGCD}(2a,b) = 1,$$

alors (ab, b^2) et $(ab, 2a^2)$ sont des couples siamois premiers.

a et b ne sont pas nuls, sinon la relation $a < b < 2a$ n'est pas vérifiée.

1. (ab, b^2) est un couple siamois :

Soient $n = ab$ et $p = b^2$.

$$(1) \quad a < b < 2a \Rightarrow ab < b^2 < 2ab \Rightarrow n < p < 2n$$

$$(2) \quad \frac{2n(p-n)}{p} = 2a(b-a) \in \mathbb{N}$$

2. (ab, b^2) est un couple siamois premier :

Soit k un diviseur commun à $n = ab$, $p = b^2$ et $d = 2a(b-a)$.

k divise b , PGCD de n et de p . Donc k est impair comme b , et premier avec a . k divise $d = 2a(b-a)$ en étant premier avec $2a$, donc k divise $b-a$. On arrive à une contradiction, puisque k divise b et $b-a$ mais pas a , sauf si k est égal à 1.

n , p et d sont premiers entre eux : le couple siamois (ab, b^2) est premier d'après la proposition 3.2.4.

3. $(ab, 2a^2)$ est un couple siamois :

Soient $n = ab$ et $p = 2a^2$.

$$(1) \quad a < b < 2a \Rightarrow b < 2a < 2b \Rightarrow ab < 2a^2 < 2ab \Rightarrow n < p < 2n$$

$$(2) \quad \frac{2n(p-n)}{p} = b(2a-b) \in \mathbb{N}$$

4. $(ab, 2a^2)$ est un couple siamois premier :

Tout diviseur k commun à $n = ab$, $p = 2a^2$ et $d = b(2a-b)$

divise a , PGCD de n et de p , donc ne divise pas b , premier avec a , mais par contre divise $2a-b$. Ceci entraîne que k est égal à 1, donc que n , p et d sont premiers entre eux. $(ab, 2a^2)$ est donc premier.

Ces deux propositions peuvent être réunies en une seule :

proposition 3.2.7 : Pour énumérer tous les couples siamois premiers, il est nécessaire et suffisant, pour tout entier a , d'énumérer tous les entiers b impairs, premiers avec a , compris strictement entre a et $2a$.

Chaque couple d'entiers a et b ainsi trouvé définit deux couples siamois premiers :

$$(ab, b^2) \text{ et } (ab, 2a^2)$$

Le tableau de la figure 3.2.1 énumère les couples siamois premiers pour lesquels a est inférieur à 10.

a	2a	b	ab	b ²	ab	2a ²
0	0	-	-	-	-	-
1	2	-	-	-	-	-
2	4	3	6	9	6	8
3	6	5	15	25	15	18
4	8	5	20	25	20	32
		7	28	49	28	32
5	10	7	35	49	35	50
		9	45	81	45	50
6	12	7	42	49	42	72
		11	66	121	66	72
7	14	9	63	81	63	98
		11	77	121	77	98
		13	91	169	91	98
8	16	9	72	81	72	128
		11	88	121	88	128
		13	104	169	104	128
		15	120	225	120	128
9	18	11	99	121	99	162
		13	117	169	117	162
		17	153	289	153	162

fig.3.2.1

définition : Appelons ψ la fonction $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui, à un entier a , fait correspondre le nombre d'entiers b compris entre a et $2a$, et premiers avec $2a$.

D'après la proposition 3.2.7, tout entier a définit $\psi(a)$ couples siamois premiers de la forme (ab, b^2) , et $\psi(a)$ couples siamois premiers de la forme $(ab, 2a^2)$.



proposition 3.2.8 : Si ϕ est la fonction d'Euler, faisant correspondre à un entier a le nombre d'entiers inférieurs ou égaux à a et premiers avec a , alors :

- si a est pair : $\psi(a) = \phi(a)$

- si a est impair : $\psi(a) = \frac{\phi(a)}{2}$ si $a > 1$ et $\psi(1) = 0$

Les propriétés de la fonction d'Euler sont connues. En particulier :

- PGCD $(a,b) = 1 \Rightarrow \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$

- si les facteurs premiers de a sont p_1, p_2, \dots, p_r :

$$\phi(a) = a \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

- k premier $\Rightarrow \phi(k) = k-1$

- k premier $\Rightarrow \phi(ak) = k\phi(a)$ si k divise a

$(k-1)\phi(a)$ sinon

- $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = \phi(2) = 1$, $\phi(a)$ est pair si $a > 2$

Seul 1 est premier avec lui-même. Si a est différent de 1, on ne compte que les entiers strictement inférieurs à a et premiers avec a .

1. Si a est pair :

Tout entier premier avec a est premier avec $2a$. Le nombre d'entiers b compris entre a et $2a$ et premiers avec $2a$ est donc :

$$\psi(a) = \phi(2a) - \phi(a) = 2\phi(a) - \phi(a) = \phi(a)$$

2. Il n'y a pas d'entiers compris entre 1 et 2, donc $\psi(1) = 0$.

3. Si a est impair et différent de 1 : alors $\phi(2a) = \phi(a)$.

L'ensemble des entiers inférieurs à $2a$ et premiers avec $2a$ comprend $\phi(2a) = \phi(a)$ éléments se répartissant en :

- $\psi(a)$ entiers compris entre a et $2a$,

- x entiers inférieurs à a , impairs et premiers avec a . Donc $\psi(a)$ est égal au nombre des entiers inférieurs à a , pairs et premiers avec a . Nous allons montrer que ce nombre est $\frac{\phi(a)}{2}$.

Soit A l'ensemble dénombré par la fonction d'Euler :

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < a, \text{ PGCD}(x,a) = 1 \} \quad |A| = \phi(a)$$

Si a est égal à $2k+1$, partitionnons A en deux sous-ensembles, puis en quatre :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{ x \in A \mid x \text{ impair} \} \\ A_2 &= \{ x \in A \mid x \text{ pair} \} \quad |A_2| = \psi(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \{ x \in A_1 \mid x \leq k \} & A_4 &= \{ x \in A_2 \mid x \leq k \} \\ A_5 &= \{ x \in A_1 \mid x \geq k+1 \} & A_6 &= \{ x \in A_2 \mid x \geq k+1 \} \end{aligned}$$

$$|A_3| + |A_5| = |A_1|, \quad |A_4| + |A_6| = |A_2|, \quad |A_1| + |A_2| = |A|$$

Dans A , il y a autant d'éléments inférieurs ou égaux à k que d'éléments supérieurs à k :

$$x \in A \Leftrightarrow a-x \in A$$

en effet, $a-x$ est compris entre 0 et a , et premier avec a .

$$x \in A, x \leq k \Leftrightarrow a-x \in A \text{ et } a-x \geq k+1$$

$$\text{donc } x \in A_3 \cup A_4 \Leftrightarrow a-x \in A_5 \cup A_6$$

Les deux ensembles sont en correspondance biunivoque.

Il y a autant d'éléments impairs inférieurs ou égaux à k que d'éléments pairs supérieurs à k :

$$\begin{aligned} x \in A_3 &\Leftrightarrow 0 < x \leq k, x \text{ impair}, \text{PGCD}(x,a) = 1 \\ &\Leftrightarrow k+1 \leq a-x < a, a-x \text{ pair}, \text{PGCD}(a-x,a) = 1 \\ &\Leftrightarrow a-x \in A_6 \end{aligned}$$

donc $|A_3| = |A_6|$, et on en déduit que $|A_4| = |A_5|$.

Par conséquent : $A_1 = A_3 \cup A_5$ et $A_2 = A_4 \cup A_6$ ont le même nombre d'éléments :

$$\psi(a) = \frac{\phi(a)}{2}$$

3.2.3 Caractérisation de l'ensemble des couples siamois

définition : Une racine d'un couple siamois (n,p) est un couple siamois premier diviseur de (n,p) .

proposition 3.2.9 : La racine d'un couple siamois est unique.

Soit (n,p) un couple siamois. S'il est premier, il est son seul diviseur et par conséquent sa seule racine.

Si (n,p) n'est pas premier, soit (x,y) une de ses racines :

- il existe k tel que $n = kx$, $p = ky$
- (x,y) est siamois
- (x,y) est premier

D'après la proposition 3.2.4, x , y et $\frac{2x(y-x)}{y}$ sont premiers entre eux.

D'autre part, si d est l'entier $\frac{2n(p-n)}{p}$, $\frac{2x(y-x)}{y}$ est égal à $\frac{d}{k}$.

k est donc le PGCD de n,p et d . L'unicité de ce PGCD entraîne l'unicité de la racine de (n,p) .

proposition 3.2.10 : L'ensemble des couples siamois est l'ensemble des couples (abk, b^2k) et $(abk, 2a^2k)$ où a, b et k sont des entiers vérifiant :

- $a < b < 2a$
- b impair
- a et b premiers entre eux
- $k \geq 1$

D'après les propositions 3.2.3 et 3.2.6, les couples (abk, b^2k) et $(abk, 2a^2k)$ sont siamois.

Inversement, tout couple siamois a une racine unique (proposition 3.2.9), de la forme (ab, b^2) ou $(ab, 2a^2)$ (proposition 3.2.5), donc est (abk, b^2k) ou $(abk, 2a^2k)$.

3.3 CONSTRUCTION D'UN CARRE SIAMOIS $S(AB, B^2)$

3.3.1 Construction de S

Soient a et b deux entiers positifs tels que b soit compris entre a et $2a$, et premier avec $2a$.

D'après la proposition 3.2.6, (ab, b^2) est un couple siamois premier.

Nous prendrons pour alphabet de b^2 lettres l'ensemble :

$$[b] = \{0, 1, \dots, b^2 - 1\}$$

Cet alphabet est disposé dans un tableau à b lignes et b colonnes de la façon suivante :

$$\forall i, j \in \{0, 1, \dots, b-1\} \quad A_i^j = bi + j$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & b-1 \\ b & b+1 & \dots & 2b-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b(b-1) & b(b-1)+1 & \dots & b^2-1 \end{pmatrix}$$

Nous noterons $\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix} A$ le tableau obtenu en permutant les rangées de A selon la définition du paragraphe 1.7.4 :

$$\left(\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix} A \right) \begin{matrix} j \\ i \end{matrix} = A \begin{matrix} j+y(\text{mod } b) \\ i+x(\text{mod } b) \end{matrix}$$

\bar{z} désignera l'entier compris entre 0 et $b-1$, congru à z modulo b .

Soit B le tableau axa , dont chaque élément est un tableau $b \times b$, défini par :

$$\forall i, j \in \{0, 1, \dots, a-1\} \quad B_i^j = \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} A$$

exemple : $a = 2$, $b = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0^A & 1^A \\ 1 & 1 \\ 0^A & 1^A \end{pmatrix} \quad \mu B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6 \\ 7 & 8 & 6 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

fig.3.3.1

Soit V le tableau $b \times b$ dont chaque élément est l'ensemble vide.

Soit C le tableau à une seule ligne et a colonnes dont les éléments sont les tableaux $b \times b$ suivants :

$$0 \leq j < b-a \Rightarrow C^j = \begin{matrix} a+j \\ a+j \end{matrix} A$$

$$b-a \leq j < a \Rightarrow C^j = V$$

Soit D le tableau $a \times a$ dont la ligne i ($0 \leq i < a$) est le vecteur ${}^i C$ obtenu en permutant les éléments de C .

exemple : $a = 2$, $b = 3$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & V \\ 2^A & V \\ V & 2 \\ V & 2^A \end{pmatrix} \quad \mu D = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 7 & - & - & - \\ 2 & 0 & 1 & - & - & - \\ 5 & 3 & 4 & - & - & - \\ - & - & - & 8 & 6 & 7 \\ - & - & - & 2 & 0 & 1 \\ - & - & - & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

fig.3.3.2

Soit E le tableau $B \cup D$. C'est un tableau $a \times a$, ses éléments sont des tableaux $b \times b$ dont les éléments sont des ensembles de une ou deux lettres.

Nous appellerons S le tableau μE . Il a ab lignes et ab colonnes, ses cases contiennent une ou deux lettres.

exemple : $a = 2$, $b = 3$

$$S = \begin{pmatrix} 08 & 16 & 27 & 3 & 4 & 5 \\ 23 & 04 & 15 & 6 & 7 & 8 \\ 56 & 37 & 48 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 48 & 56 & 37 \\ 4 & 5 & 3 & 27 & 08 & 16 \\ 7 & 8 & 6 & 15 & 23 & 04 \end{pmatrix}$$

fig.3.3.3

3.3.2 S est un carré siamois

calcul de l'élément S_{x}^y

Un élément de S est l'union d'un élément de μB , c'est-à-dire une lettre, et d'un élément de μD , qui peut être une lettre ou l'ensemble vide. Chaque case de S contient donc une ou deux lettres.

Soient x et y deux entiers inférieurs à ab : nous allons calculer l'élément S_{x}^y .

Soient i et k (resp. j et l) le quotient et le reste de la division de x (resp. y) par b :

$$x = bi + k \quad 0 \leq k < b$$

$$y = bj + l \quad 0 \leq l < b$$

$$0 \leq x < ab \Rightarrow 0 \leq i < a$$

$$0 \leq y < ab \Rightarrow 0 \leq j < a$$

On a :

$$S_{x}^y = (E_{i}^j)_k^l = (B_{i}^j)_k^l \cup (D_{i}^j)_k^l$$

avec :

$$B_{i}^j = {}_j^i A \Rightarrow (B_{i}^j)_k^l = ({}_j^i A)_k^l = A_{j+k}^{\overline{i+1}} = b(j+k) + \overline{i+1}$$

$$D_{i}^j = ({}^i C)_j^j = C^{\overline{i+j}} = C^m \text{ avec } m \equiv i+j \pmod{a}$$

$$0 \leq m < b-a \Rightarrow C^m = \frac{a+m}{a+m} A$$

$$b-a \leq m < a \Rightarrow C^m = V$$

$$(D_{i,k}^j)^l = (C_{i,k}^m)^l = \begin{cases} \binom{a+m}{a+m} \binom{l}{k} = A \frac{\overline{a+m+1}}{\overline{a+m+k}} = b(\overline{a+m+k}) + \overline{a+m+1} & \text{si } 0 \leq m < b-a \\ \emptyset & \text{si } b-a \leq m < a \end{cases}$$

Par conséquent : si i et k (resp. j et l) sont le quotient et le reste de la division de x (resp. y) par b , alors la case (x,y) de S contient :

- $b(\overline{j+k}) + \overline{i+1}$
- ainsi que $b(\overline{a+m+k}) + \overline{a+m+1}$, où m est l'élément de $\{0,1,\dots,a-1\}$ congru à $i+j$ modulo a , si m est strictement inférieur à $b-a$.

exemple : $x = 4$ et $y = 3$ dans le carré S de la figure 3.3.3

$$a = 2, b = 3$$

$$x = 3 \times 1 + 1 \Rightarrow i = 1, k = 1$$

$$y = 3 \times 1 + 0 \Rightarrow j = 1, l = 0$$

$$i+j = 2 \Rightarrow m = 0 < b-a$$

S_4^3 contient les lettres :

$$- b(\overline{j+k}) + \overline{i+1} = 3 \times 2 + 1 = 7$$

$$- b(\overline{a+m+k}) + \overline{a+m+1} = 3 \times 0 + 2 = 2$$

Rappelons que les rangées de S sont indicées par $0,1,\dots,ab-1$

S est un carré gaulois

Soit x un entier inférieur à ab , soient i et k le quotient et le reste de la division de x par b .

La ligne x de S contient les éléments :

$$- b(\overline{j+k}) + \overline{i+1} \quad \forall j < a \text{ et } \forall l < b$$

$$- b(\overline{a+m+k}) + \overline{a+m+1} \quad \text{si } m \equiv i+j \pmod{a} < b-a$$

Les éléments $b(\overline{j+k}) + \overline{i+1}$ sont au nombre de ab et sont tous différents :

$$b(\overline{j_1+k}) + \overline{i+1}_1 = b(\overline{j_2+k}) + \overline{i+1}_2 \Leftrightarrow j_1 = j_2, l_1 = l_2$$

Les éléments $b(\overline{a+m+k}) + \overline{a+m+1}$ sont différents entre eux, et différents des précédents :

$$b(\overline{a+m_1+k}) + \overline{a+m_1+l_1} = b(\overline{a+m_2+k}) + \overline{a+m_2+l_2}$$

$$\Rightarrow \overline{a+m_1+k} = \overline{a+m_2+k} \quad \text{d'où } m_1 = m_2$$

$$\text{et } \overline{a+m_1+l_1} = \overline{a+m_2+l_2} \quad \text{d'où } l_1 = l_2$$

$$b(\overline{a+m_1+k}) + \overline{a+m_1+l_1} = b(\overline{j_2+k}) + \overline{i+l_2}$$

$$\Rightarrow \overline{a+m_1+k} = \overline{j_2+k} \Rightarrow \overline{a+m_1} = \overline{j_2}$$

$$\text{or } j_2 < a \Rightarrow \overline{j_2} = j_2$$

$$\text{et } m_1 < b-a \Rightarrow a+m_1 < b \Rightarrow \overline{a+m_1} = a+m_1$$

finalement : $j_2 = a + m_1$ est incompatible avec $j_2 < a$

Ces éléments sont au nombre de $b(b-a)$.

La ligne x de S contient donc $ab + b(b-a) = b^2$ éléments tous différents, c'est-à-dire les entiers $0, 1, \dots, b^2 - 1$

Chaque lettre apparaît une fois et une seule dans chaque ligne.

En intervertissant i et j , ainsi que k et l , on fait la même démonstration pour les colonnes.

Si j et l sont le quotient et le reste de la division par b de l'entier y inférieur à ab , alors la colonne y de S contient les éléments :

$$\begin{array}{ll} - & b(\overline{j+k}) + \overline{i+l} \quad \forall i < a \text{ et } \forall k < b \\ - & b(\overline{a+m+k}) + \overline{a+m+l} \quad \text{si } m \equiv i+j \pmod{a} < b-a \end{array}$$

Il y a ab éléments $b(\overline{j+k}) + \overline{(i+l)}$ tous différents.

Il y a $b(b-a)$ éléments $b(\overline{a+m+k}) + \overline{a+m+l}$ tous différents, et différents des précédents :

$$\overline{a+m_1+l} = \overline{i_2+l} \Rightarrow \overline{a+m_1} = \overline{i_2}$$

$$\Rightarrow a+m_1 = i_2 \text{ car } \overline{a+m_1} = a+m_1 < b \text{ et } \overline{i_2} = i_2 < a < b$$

or $i_2 < a$ ne peut pas être égal à $a+m_1$.

Chaque lettre apparaît donc une fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne, et S est un carré gaulois.

le graphe des couples est régulier

Les couples résultent de la superposition d'une case de μB et d'une case non vide de μD .

Le tableau D a $a(b-a)$ éléments non vides dont chacun contient toutes les lettres de l'alphabet. Chaque lettre figure donc $a(b-a)$ fois dans μD .

Au moment de l'union des tableaux B et D, $a(b-a)$ éléments de B vont être réunis aux $a(b-a)$ éléments non vides de D. Chacun de ces éléments est un tableau contenant toutes les lettres de l'alphabet, puisqu'il est obtenu en permutant les rangées du tableau A.

Nous avons démontré au paragraphe précédent qu'une lettre ne pouvait pas figurer deux fois dans une même rangée de S, ni par conséquent dans une même case.

Chaque lettre figure donc dans $2a(b-a)$ couples, et le graphe des couples est régulier.

On retrouve bien :

$$d = \frac{2n(p-n)}{p} = \frac{2ab(b^2-ab)}{b^2} = 2a(b-a)$$

Le graphe des couples du carré siamois de la figure 3.3.3 est le suivant :

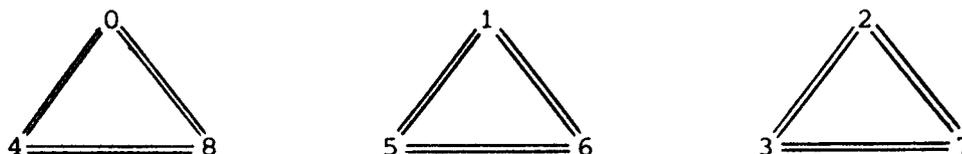


fig.3.3.4

remarque :

Cette construction reste valable si b n'est pas premier avec $2a$, (ab, b^2) est alors un couple siamois non premier. Il en sera de même pour la construction de $S(ab, 2a^2)$.

3.4 CONSTRUCTION D'UN CARRE SIAMOIS $S(AB, 2A^2)$

3.4.1 Construction de S

Nous reprenons les notations utilisées au paragraphe 3.3.1 pour la construction de $S(ab, b^2)$.

b est un entier compris entre a et $2a$, premier avec $2a$, $(ab, 2a^2)$ est donc un couple siamois premier.

\bar{z} désignera cette fois l'entier compris entre 0 et $a-1$, congru à z modulo a .

Les $2a^2$ lettres de l'alphabet sont disposées dans deux tableaux de dimension axa :

$$\forall i \quad 0 \leq i < a ; \forall j \quad 0 \leq j < a \quad (T_0)_i^j = ai+j ; (T_1)_i^j = a^2+ai+j$$

$$T_0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & a-1 \\ \vdots & & \vdots \\ a(a-1) & \dots & a^2-1 \end{pmatrix} \quad T_1 = \begin{pmatrix} a^2 & \dots & a^2+a-1 \\ \vdots & & \vdots \\ a(2a-1) & \dots & 2a^2-1 \end{pmatrix}$$

On pose : $T = T_0 \cup T_1$

$$T_i^j = \{ai+j, a^2+ai+j\}$$

Dans T , toutes les lettres sont présentes et figurent dans un couple.

exemple : $a = 2$, $b = 3$

fig.3.4.1

$$T_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad T_1 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 04 & 15 \\ 26 & 37 \end{pmatrix}$$

Soit L le vecteur-ligne dont les b éléments sont des tableaux de dimension axa :

$$\text{si } 0 \leq j < 2a-b : L^j = \begin{matrix} j \\ j \end{matrix} T$$

$$\text{si } 2a-b \leq j < b : L^j = \begin{matrix} 2a-b+q \\ 2a-b+q \end{matrix} T_r$$

où q et r sont le quotient et le reste de la division de $j-2a+b$ par 2.

$$L = \left(\begin{matrix} 0^T & \dots & 2a-b-1 & T & ; & 2a-b & T_0 & ; & 2a-b & T_1 & ; & 2a-b+1 & T_0 & \dots & a-1 & T_0 & ; & a-1 & T_1 \end{matrix} \right)$$

On appelle V le tableau $b \times b$ dont la ligne i est le vecteur ${}^{b-i}L$, et S le tableau μV .

exemple : $a = 2$, $b = 3$

$$S = \begin{pmatrix} 04 & 15 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 26 & 37 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 04 & 15 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 26 & 37 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 6 & 04 & 15 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 26 & 37 \end{pmatrix}$$

fig.3.4.2



3.4.2 S est un carré siamois

calcul de l'élément $S_{x,y}^y$

Soient x et y deux entiers inférieurs à ab . Soient i et k (resp. j et l) le quotient et le reste de la division de x (resp. y) par a :

$$x = ai+k \quad 0 \leq i < b \quad 0 \leq k < a$$

$$y = aj+l \quad 0 \leq j < b \quad 0 \leq l < a$$

Le contenu de la case $S_{x,y}^y$ est celui de la case (k,l) du tableau v_i^j :

$$S_{x,y}^y = (v_i^j)_{k,l}^1 = (({}^{b-i}L)^j)_{k,l}^1 = (L^{b-i+j \pmod{b}})_k^1$$

soit $m \equiv b-i+j \pmod{b} : 0 \leq m < b$

$$S_{x,y}^y = (L^m)_k^1$$

Chaque lettre apparaît donc une fois et une seule dans chaque ligne.

De même, si y est un entier inférieur à ab dont le reste de la division par a est l , la colonne y de S contient les entiers :

$$\begin{aligned} ra^2 + a(\overline{m+k}) + \overline{(m+1)} & & 0 \leq r < 2 \\ & & 0 \leq m < a \\ & & 0 \leq l < a \end{aligned}$$

Ils sont au nombre de $2a^2$, et tous différents. Chaque lettre apparaît donc une fois et une seule dans chaque colonne, et S est un carré gaulois.

le graphe des couples est régulier

La case (i, j) du tableau T contient le couple :

$$(ai+j, a^2+ai+j)$$

Après avoir subi une permutation de ses rangées, qui ne modifie pas le contenu de ses cases, le tableau T est recopié $2a-b$ fois dans le vecteur L , donc $b(2a-b)$ fois dans le tableau V .

Chaque couple $(ai+j, a^2+ai+j)$ figure donc $b(2a-b)$ fois dans le tableau S .

Chaque lettre de $\{0, 1, \dots, 2a^2-1\}$ s'exprime d'une façon et d'une seule sous la forme :

$$ra^2+ai+j \quad 0 \leq r < 2, \quad 0 \leq i, j < a$$

donc figure dans $b(2a-b)$ couples, tous semblables.

On retrouve bien :

$$d = \frac{2n(p-n)}{p} = \frac{2ab(2a^2-ab)}{2a^2} = b(2a-b)$$

Le graphe des couples est régulier, formé de a^2 composantes connexes réduites à une seule arête multiple reliant deux sommets.

Par exemple, le graphe des couples du carré siamois (6,8) de la figure 3.4.2 est le suivant :

$$0 \equiv 4 \quad 1 \equiv 5 \quad 2 \equiv 6 \quad 3 \equiv 8$$

fig.3.4.3

3.5 CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE

DE L'EXISTENCE D'UN CARRE SIAMOIS $S(N,P)$

théorème : Pour qu'il existe un carré siamois $S(n,p)$, il faut et il suffit que (n,p) soit un couple siamois.

La proposition 3.2.1 a établi que cette condition était nécessaire : nous allons montrer qu'elle est suffisante en construisant un carré siamois $S(n,p)$ dans le cas où (n,p) est un couple siamois.

Soient n et p deux entiers formant un couple siamois :

$$n < p < 2n$$

$$d = \frac{2n(p-n)}{p} \in \mathbf{N}$$

Soit (x,y) la racine de (n,p) . Il existe un entier k tel que :

$$n = kx, \quad p = ky$$

k est le PGCD de n , p et d , (x,y) est un couple siamois premier. (x,y) est de la forme (ab, b^2) ou $(ab, 2a^2)$, où b est un entier impair, premier avec a et compris entre a et $2a$. On calcule facilement a et b : si y est impair, b est sa racine carrée et a est égal à $\frac{x}{b}$; si y est pair, a est la racine carrée de $\frac{y}{2}$ et b est égal à $\frac{x}{a}$.

Dans les deux cas, les chapitres 3.3 et 3.4 nous permettent de construire un carré $S_0(x,y)$, dont l'alphabet est $A_0 = \{0, 1, \dots, y-1\}$.

Pour $i = 0, 1, \dots, k-1$ posons :

$$A_i = \{z+yi \mid z \in A_0\} = \{yi, yi+1, \dots, y(i+1)-1\}$$

Tous les alphabets A_i sont disjoints, et leur union est :

$$A = \{0, 1, \dots, ky-1\}$$

Soit C le carré latin $k \times k$ dont l'alphabet est $\{0, 1, \dots, k-1\}$ défini de la façon suivante :

$$\forall i, j = 0, 1, \dots, k-1 \quad C_i^j \equiv i+j \pmod{k}$$

exemple : $k = 4$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

fig.3.5.1

Soit S_i le carré siamois obtenu en remplaçant chaque lettre z de S_0 par $z+yi$: l'alphabet de S_i est A_i .

L'opération de carrelage définie au paragraphe 3.5.7 nous permet de construire un carré gaulois $\mu G(kx, ky)$ où G est le tableau $k \times k$ dont l'élément (i, j) est le carré siamois S_1 tel que $C_i^j = 1$.

Appelons S ce tableau μG . C'est un carré gaulois dont chaque case contient une ou deux lettres, son alphabet est A .

Si w est une lettre de A , c'est-à-dire un entier inférieur à ky , soient i et z le quotient et le reste de la division de w par y :

$$w = z+yi \quad 0 \leq z < y, \quad 0 \leq i < k$$

w est une lettre de l'alphabet A_i . w figure dans $\frac{2x(y-x)}{y} = \frac{d}{k}$ couples dans le carré S_i , donc dans d couples dans le carré S , où S_i apparaît k fois.

S est donc un carré siamois $(kx, ky) = (n, p)$.

Le graphe des couples de S est obtenu en remplaçant chaque arête du graphe des couples de S_0 par k arêtes, puis en recopiant k fois ce nouveau graphe.

exemple : $n = 12$, $p = 6 \Rightarrow d = 6$, $x = 6$, $y = 8$, $a = 2$, $b = 3$

Le carré siamois (6,8) est celui de la figure 3.4.2. Le carré latin C(2,2) et le carré siamois S(12,16) sont :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

fig.3.5.2

0.4	1.5	3	2	7	6		8.12	9.13	11	10	15	14
2.6	3.7	1	0	5	4		10.14	11.15	9	8	13	12
7	6	0.4	1.5	3	2		15	14	8.12	9.13	11	10
5	4	2.6	3.7	1	0		13	12	10.14	11.15	9	8
3	2	7	6	0.4	1.5		11	10	15	14	8.12	9.13
1	0	5	4	2.6	3.7		9	8	13	12	10.14	11.15

8.12	9.13	11	10	15	14		0.4	1.5	3	2	7	6
10.14	11.15	9	8	13	12		2.6	3.7	1	0	5	4
15	14	8.12	9.13	11	10		7	6	0.4	1.5	3	2
13	12	10.14	11.15	9	8		5	4	2.6	3.7	1	0
11	10	15	14	8.12	9.13		3	2	7	6	0.4	1.5
9	8	13	12	10.14	11.15		1	0	5	4	2.6	3.7

Pour tout couple d'entiers n et p , nous pouvons donc dire s'il existe un carré siamois (n,p) , et, dans l'affirmative, en construire un.

Nous allons maintenant construire d'autres carrés siamois à partir de ceux dont nous disposons.

3.6 OPERATIONS SUR LES CARRÉS SIAMOIS

Les opérations sur les carrés gaulois définies au chapitre 2.5 sont toutes applicables aux carrés siamois. Nous allons déterminer sous quelles conditions le résultat est encore un carré siamois, et observer les modifications du tableau de permutations et des invariants : graphe des couples, dessin et cycles.

3.6.1 Transposition

Le transposé d'un carré siamois $S(n,p)$ est un carré siamois $S'(n,p)$ ayant les mêmes invariants que S .

Seul le tableau de permutations est modifié : chaque permutation du tableau T associé à S est remplacée par son inverse dans le tableau T' associé à S' .

3.6.2 Permutation des rangées

Si on permute les lignes de $S(n,p)$ à l'aide de la permutation x , et les colonnes à l'aide de la permutation y , $S' = \begin{smallmatrix} y \\ x \end{smallmatrix} S$ est un carré siamois (n,p) , dont le tableau de permutations est :

$$T' = y^{-1}(xT) = x(y^{-1}(T))$$

Les invariants ne changent pas.

3.6.3 Permutation de l'alphabet

Si z est une permutation de l'ensemble $[p]$, chaque lettre a de S est remplacée par $z(a)$ dans S et dans ses invariants. $z(S)$ est un carré siamois.

Le tableau de permutations subit une permutation z de ses lignes.

3.6.4 Isomorphisme, similitude, équivalence, forme normale

Deux carrés siamois équivalents ont les mêmes invariants, et sont donc assez voisins. Nous présenterons donc le plus souvent les carrés siamois sous une *forme normale*, en plaçant dans la diagonale la première lettre de l'alphabet (0 ou 1), et en donnant à la première ligne la forme suivante :

$(0,1), (2,3), \dots, (2p-2n-2, 2p-2n-1), 2p-2n, \dots, p-1$

ou $(1,2), (3,4), \dots, (2p-2n-1, 2p-2n), 2p-2n+1, \dots, p$

exemple : pour les carrés (6,8) :

01 23 4 5 6 7	ou	12 34 5 6 7 8
---------------	----	---------------

fig.3.6.1

Pour normaliser un carré siamois (n,p) , on procède de la façon suivante :

- on choisit une ligne parmi les n , qui deviendra la première ligne du carré normal.

- par une permutation des colonnes, on place les $(p-n)$ couples de la ligne dans les colonnes $1,2,\dots,p-n$. Il faut donc choisir l'une des $(p-n)!$ façons d'ordonner les couples, et l'une des $(2n-p)!$ façons d'ordonner les éléments isolés. Il faut ensuite ordonner les deux éléments de chaque couple, ce qui peut se faire de $2(p-n)$ façons.

- une permutation de l'alphabet fait correspondre cette première ligne ordonnée à la première ligne normale.

- une permutation des lignes permet de placer la première lettre sur la diagonale.

Il y a donc en principe $n \times (p-n)! \times (2n-p)! \times 2(p-n)$ façons de normaliser un carré siamois (n,p) , certaines pouvant donner la même forme normale.

Par exemple, nous allons normaliser le carré siamois de la figure 3.4.2 :

	04	15	3	2	7	6
	26	37	1	0	5	4
	7	6	04	15	3	2
	5	4	26	37	1	0
	3	2	7	6	04	15
fig.3.6.2	1	0	5	4	26	37

Nous choisissons la première ligne et nous l'ordonnons :

7 6 04 15 3 2	devient	15 40 7 2 3 6
---------------	---------	---------------

ce qui détermine une permutation des colonnes et une permutation de l'alphabet :

15 40 7 2 3 6	devient	01 23 4 5 6 7
---------------	---------	---------------

par la permutation : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 5 & 6 & 2 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

ce qui transforme le carré en :

2	3	04	6	7	15	5	6	23	7	4	01
0	1	26	4	5	37	3	0	57	2	1	46
15	40	7	2	3	6	01	23	4	5	6	7
37	26	5	0	1	4	46	57	1	3	0	2
6	7	3	15	04	2	7	4	6	01	23	5
4	5	1	37	26	0	2	1	0	46	57	3

fig.3.6.3

Il ne reste plus qu'à effectuer une permutation des lignes pour placer les zéros sur la diagonale. On obtient alors un carré siamois mis sous forme normale, et son tableau de permutations :

01	23	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6
3	0	57	2	1	46	1	5	2	4	3	6
2	1	0	46	57	3	2	4	1	5	6	3
7	4	6	01	23	5	2	1	6	5	4	3
46	57	1	3	0	2	3	6	4	2	1	5
5	6	23	7	4	01	4	3	5	6	2	1
						5	6	4	3	1	2
						6	3	5	1	2	4

fig.3.6.4

On peut diviser par $2(p-n)$ le nombre de formes normales d'un carré siamois (n,p) en imposant que les permutations du tableau soient classées dans l'ordre lexicographique. Ceci détermine l'ordre des éléments des couples de la première ligne.

Par exemple, dans le tableau de la figure 3.6.4, la permutation $[2\ 1\ 6\ 5\ 4\ 2]$ devrait être placée avant $[2\ 4\ 1\ 5\ 6\ 3]$, et on doit donc échanger les lettres 2 et 3 :

01	23	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6
2	0	57	3	1	46	1	5	2	4	3	6
3	1	0	46	57	2	2	1	6	5	4	2
7	4	6	01	23	5	2	4	1	5	6	3
46	57	1	2	0	3	3	6	4	2	1	5
5	6	23	7	4	01	4	3	5	6	2	1
						5	6	4	3	1	2
						6	3	5	1	2	4

fig.3.6.5

3.6.5 Union

Soient deux carrés siamois $S_1(n,p_1)$ et $S_2(n,p_2)$ d'alphabets disjoints A_1 et A_2 .

Leur union est un carré gaulois $G(n,p_1+p_2)$, mais n'est pas un carré siamois :

p_1 et p_2 sont plus grands que n , car (n,p_1) et (n,p_2) sont des couples siamois. Donc p_1+p_2 est plus grand que $2n$, et (n,p_1+p_2) n'est pas un couple siamois.

3.6.6 Restriction

Soit A l'alphabet d'un carré siamois $S(n,p)$, et soit B un sous-ensemble de A d'ordre $q < p$. La restriction de S à B est un carré gaulois $G(n,q)$.

Toute lettre de B figure n fois dans le carré S : d fois dans une case double, et $n-d$ fois dans une case simple. La suppression de cette lettre entraînera donc l'apparition de $n-d$ cases vides dans G , qui ne peut pas être un carré siamois.

3.6.7 Carrelage

Nous avons déjà réalisé un carrelage de carrés siamois dans le chapitre 3.5.

Si (n,p) est un couple siamois, si A_1, \dots, A_k sont k alphabets disjoints d'ordre p , si C est un carré latin $k \times k$ d'alphabet $\{1, 2, \dots, k\}$, et si les S_i^j sont k^2 carrés siamois (n,p) dont l'alphabet est A_1 tel que $C_i^j = 1$, alors la disposition de ces carrés siamois en carrelage permet d'obtenir un carré gaulois $S(nk, pk)$.

Chaque case contient une ou deux lettres, chaque lettre figure dans dk couples : S est un carré siamois.

Le graphe des couples de S a au moins k composantes connexes, puisqu'aucune arête ne relie deux lettres appartenant à deux alphabets différents. Les graphes des couples des S_i^j sont des sous-graphes partiels de celui de S .

exemple : carrelage de quatre carrés siamois (6,8)

fig.3.6.6

	12	34	5	6	7	8		AB	CD	E	F	G	H	
1≡≡2	3	1	78	2	4	56		E	A	F	B	CH	DG	A---E
3≡≡4	4	2	1	78	56	3		D	EF	A	GH	B	C	B---F
5≡≡6	56	78	2	1	3	4		H	G	BC	AE	D	F	C---G
7≡≡8	8	5	6	34	12	7		C	H	G	BC	AF	BE	D---H
	7	6	34	5	8	12		FG	B	DH	C	E	A	
	AB	CD	E	F	G	H		12	34	5	6	7	8	
A---E	G	A	DH	E	BF	C		4	1	68	57	3	2	1---2
B---F	EF	B	A	CG	H	D		5	8	14	23	6	7	3---4
C---G	H	E	BC	A	D	FG		3	67	2	1	58	4	5---6
D---H	C	F	G	DH	AE	B		78	2	3	4	1	56	7---8
	D	GH	F	B	C	AE		6	5	7	8	24	13	

Le graphe des couples du carré siamois (12,16) est :

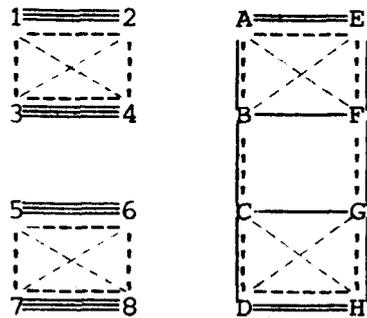


fig.3.6.7

3.6.8 Permutation partielle de l'alphabet

Si a et b sont deux lettres de l'alphabet d'un carré siamois $S(n,p)$ déterminant une permutation partielle $[a,b]$, le résultat de la permutation partielle est un carré siamois si et seulement si le graphe des couples reste régulier, c'est-à-dire, selon la proposition 2.4.12, si et seulement si le nombre de couples contenant a est égal au nombre de couples contenant b dans le cycle partiel. On dit alors que la permutation partielle $[a,b]$ est régulière.

Par exemple, dans le carré siamois (6,8) de la figure 3.6.8, les deux permutations partielles [1,3] sont régulières, les permutations partielles [1,8] ne le sont pas, et (1,2) est une véritable permutation qui ne modifie pas le graphe des couples :

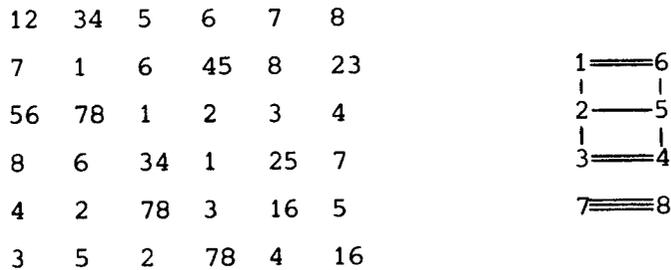


fig.3.6.8

Cycles partiels [1,3] :



fig.3.6.9

qui deviennent, après permutation partielle de 1 et de 3 :



fig.3.6.10

Dans les deux cas, le graphe des couples devient :

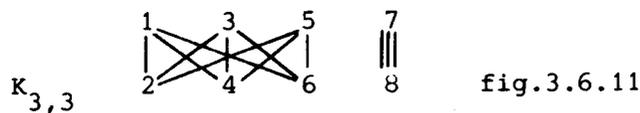


fig.3.6.11

Cycles partiels [1,8] :

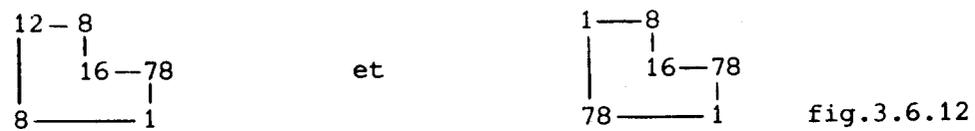


fig.3.6.12

Cycles (1,2) :

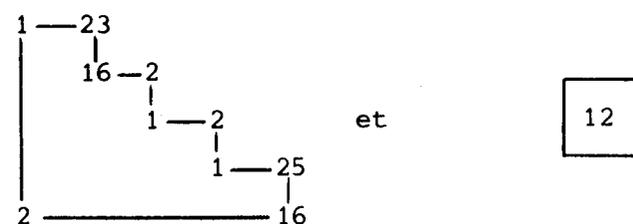


fig.3.6.13



3.6.9 Permutation partielle des rangées

Si on échange deux rangées partielles échangeables d'un carré siamois (n,p), on obtient un carré siamois : les deux rangées partielles contiennent le même ensemble de lettres, donc le même nombre de couples, qui est la différence entre le nombre de lettres et le nombre de cases dans la rangée partielle. Le graphe des couples ne change pas. Le dessin change si les couples se trouvent à des endroits différents des rangées partielles, les cycles concernant deux lettres dont l'une seulement est dans la rangée partielle peuvent être modifiés :

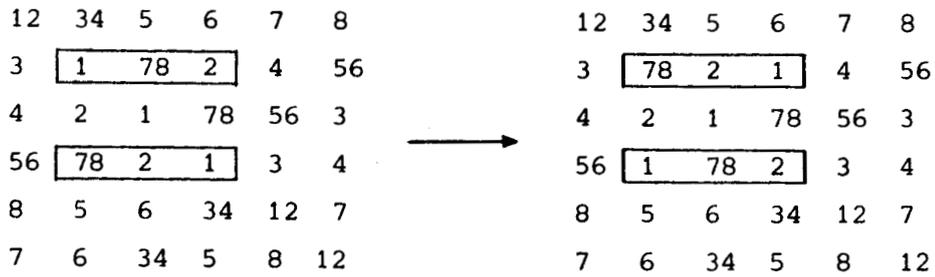
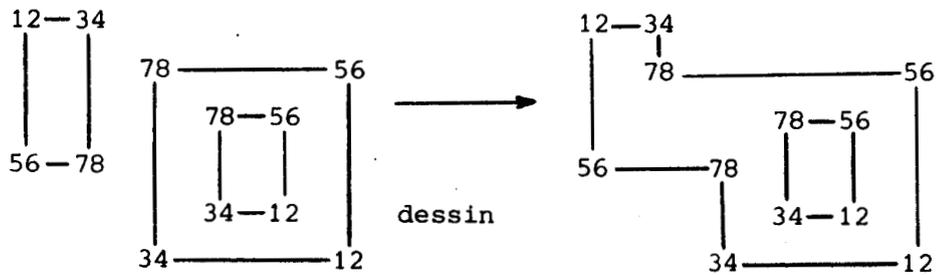
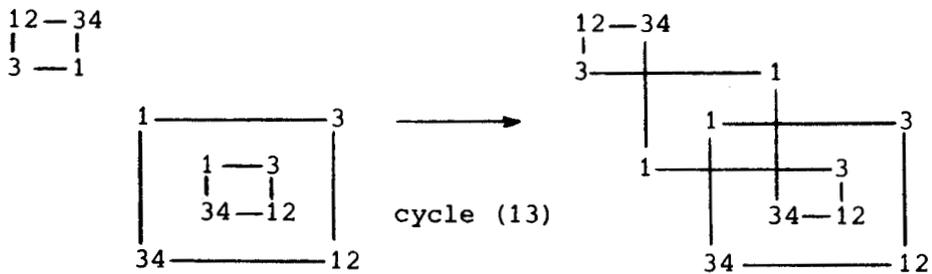


fig.3.6.14



3.6.10 Permutation incomplète des rangées

Si, dans deux rangées d'un carré siamois, on échange certaines lettres, on obtient un carré gaulois. Pour que ce carré soit siamois, il faut :

- que les cases contiennent une ou deux lettres,
- que le graphe des couples soit régulier.

Les permutations incomplètes de rangées, qui ne sont pas un cycle partiel de longueur 4, et qui donnent un carré siamois, sont rares. En voici un exemple :

<u>14</u>	<u>25</u>	<u>36</u>	7	8	9		<u>34</u>	<u>15</u>	<u>26</u>	7	8	9
<u>39</u>	<u>17</u>	<u>28</u>	6	4	5		<u>19</u>	<u>27</u>	<u>38</u>	6	4	5
58	69	47	2	3	1	→	58	69	47	2	3	1
7	8	9	14	25	36		7	8	9	14	25	36
6	4	5	39	17	28		6	4	5	39	17	28
2	3	1	58	69	47		2	3	1	58	69	47

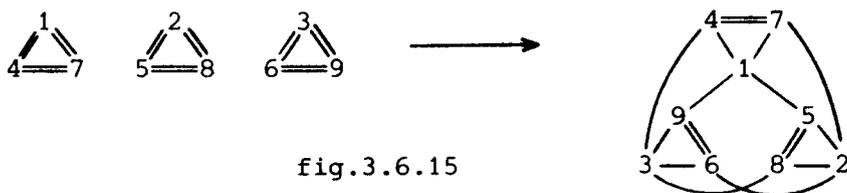


fig.3.6.15

Le graphe des couples est modifié. Les carrés siamois obtenus par permutation partielle ou incomplète des rangées, ou par permutation partielle de l'alphabet, ne sont donc généralement pas équivalents au carré siamois de départ.

3.7 EXEMPLES DE CARRÉS SIAMOIS

3.7.1 Un carré siamois S(15,18)

12	36	45	D	E	C	A	B	F	β	ζ	γ	δ	α	ϵ
β	ϵ	F	56	13	24	α	D	B	C	A	E	ζ	δ	γ
ζ	B	C	α	β	δ	35	14	26	ϵ	γ	A	F	D	E
D	E	α	β	γ	F	ϵ	δ	ζ	46	23	15	A	C	B
E	δ	ϵ	A	F	ζ	C	γ	α	D	B	β	25	16	34
AB	CF	DE	γ	α	β	ζ	ϵ	δ	2	1	3	4	5	6
α	γ	β	EF	AC	BD	4	6	5	ζ	δ	ϵ	1	3	2
ϵ	ζ	δ	1	2	3	BF	CE	AD	5	4	6	α	γ	β
3	2	1	4	5	6	γ	α	β	AE	DF	BC	ϵ	ζ	δ
4	5	6	ζ	δ	ϵ	1	2	3	γ	β	α	BE	AF	CD
5	$\alpha\beta$	$\gamma\zeta$	$\delta\epsilon$	4	A	2	3	1	B	C	D	6	E	F
6	4	A	B	$\epsilon\zeta$	$\alpha\gamma$	$\beta\delta$	5	C	3	E	F	D	2	1
F	1	2	3	6	E	D	$\beta\zeta$	$\gamma\epsilon$	$\alpha\delta$	5	4	C	B	A
C	D	3	2	B	1	6	A	E	F	$\alpha\epsilon$	$\delta\zeta$	$\beta\gamma$	4	5
$\gamma\delta$	A	B	C	D	5	E	F	4	1	6	2	3	$\beta\epsilon$	$\alpha\zeta$

fig.3.7.1

Ce carré a été construit par F. Sterboul.

Le graphe des couples est constitué de trois composantes connexes dont chacune est le graphe complet K_6 :

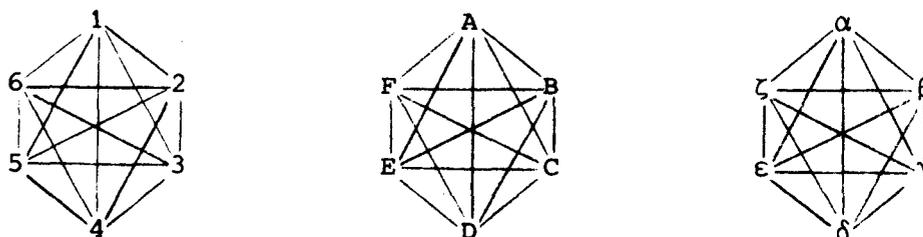


fig.3.7.2





1.2	6.7	11.12	16.17	21.22	3.5	8.10	13.15	18.20	23.25	9	14	19	24	4
22.23	2.3	7.8	12.13	17.18	24.1	4.6	9.11	14.16	19.21	10	15	20	25	5
18.19	23.24	3.4	8.9	13.14	20.22	25.2	5.7	10.12	15.17	6	11	16	21	1
14.15	19.20	24.25	4.5	9.10	16.18	21.23	1.3	6.8	11.13	2	7	12	17	22
10.11	15.16	20.21	25.1	5.6	12.14	17.19	22.24	2.4	7.9	13	18	23	3	8
6	11	16	21	1	23.4	3.9	8.14	13.19	18.24	5.12	10.17	15.22	20.2	25.7
7	12	17	22	2	19.25	24.5	4.10	9.15	14.20	1.8	6.13	11.18	16.23	21.3
3	8	13	18	23	15.21	20.1	25.6	5.11	10.16	22.4	2.9	7.14	12.19	17.24
4	9	14	19	24	11.17	16.22	21.2	1.7	6.12	18.25	23.5	3.10	8.15	13.20
25	5	10	15	20	7.13	12.18	17.23	22.3	2.8	14.21	19.1	24.6	4.11	9.16
21.24	1.4	6.9	11.14	16.19	10	15	20	25	5	23.7	3.12	8.17	13.22	18.2
17.20	22.25	2.5	7.10	12.15	6	11	16	21	1	19.3	24.8	4.13	9.18	14.23
13.16	18.21	23.1	3.6	8.11	2	7	12	17	22	15.24	20.4	25.9	5.14	10.19
9.12	14.17	19.22	24.2	4.7	8	13	18	23	3	11.20	16.25	21.5	1.10	6.15
5.8	10.13	15.18	20.23	25.3	9	14	19	24	4	7.16	12.21	17.1	22.6	2.11

3.7.2 Un carré siamois (15,25)

Fig.3.7.2

Comme le précédent, ce carré siamois est dû à F. Sterboul

A l'intérieur de chaque

carré 5x5, on ajoute 5 si on se déplace d'une case vers la droite, on ajoute 1 si on descend d'une case en diagonale. Les résultats s'expriment modulo 5.

3.7.3 Carrés siamois S(6,8)

Certains de ces carrés ont été construits à la main, directement ou à partir d'un autre par permutations partielles. Mais la plupart ont été obtenus avec l'aide d'un ordinateur. Il y a un grand nombre de carrés siamois (6,8) non équivalents, nous n'en donnons ici que quelques exemples.

Le dessin est un graphe, car il y a deux couples par rangée. Il est composé de cycles pairs disjoints, de longueur au moins égale à 4.

Le graphe des couples est *cubique*, c'est-à-dire régulier de degré 3. Nous allons classer les carrés siamois (6,8) selon la forme de leur graphe des couples. Il peut être connexe ou non, simple ou avec des arêtes doubles ou triples.

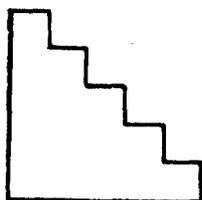
quatre composantes connexes

12 34 5 6 7 8	12 34 5 6 7 8	12 34 5 6 7 8
3 1 2 4 58 67	56 1 78 2 3 4	3 1 2 4 68 57
4 67 1 58 3 2	4 2 1 78 56 3	57 68 1 3 2 4
7 5 8 12 6 34	3 78 2 1 4 56	8 7 34 12 5 6
6 8 34 7 12 5	8 5 6 34 12 7	4 2 68 57 1 3
58 2 67 3 4 1	7 6 34 5 8 12	6 5 7 8 34 12

1≡2 3≡4

5≡8 6≡7

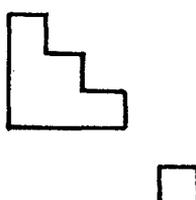
dessin connexe : un cycle de longueur 12.



1≡2 3≡4

5≡6 7≡8

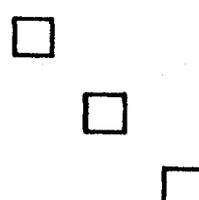
dessin : un cycle de longueur 8, un de longueur 4.



1≡2 3≡4

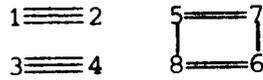
5≡7 6≡8

dessin : trois cycles de longueur 4.



trois composantes connexes

12	34	5	6	7	8
3	1	2	4	58	67
57	68	1	3	2	4
8	7	34	12	6	5
4	2	68	57	1	3
6	5	7	8	34	12



le dessin est formé de trois cycles de longueur 4.

deux composantes connexes

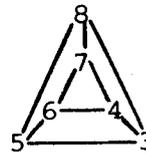
12	34	5	6	7	8
56	78	1	2	3	4
8	6	34	1	25	7
4	2	78	3	16	5
7	1	6	45	8	23
3	5	2	78	4	16



dessin : trois cycles de longueur 4

12	34	5	6	7	8
68	1	2	35	4	7
3	67	1	2	58	4
4	2	78	1	3	56
7	5	46	8	12	3
5	8	3	47	6	12

1≡≡2

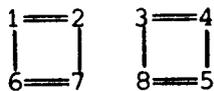


R₃

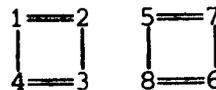
dessin connexe

12	34	5	6	7	8
5	12	38	4	6	7
4	6	1	27	58	3
8	5	67	1	34	2
67	8	2	3	1	45
3	7	4	58	2	16

12	34	5	6	7	8
3	1	2	4	58	67
57	68	1	3	4	2
8	7	34	12	6	5
4	2	68	57	1	3
6	5	7	8	23	14



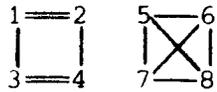
dessin connexe



dessin : trois cycles de longueur 4

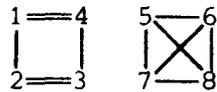


12	34	5	6	7	8
3	1	2	4	58	67
68	2	1	57	3	4
7	8	6	13	24	5
4	56	78	2	1	3
5	7	34	8	6	12



dessin connexe

12	34	5	6	7	8
3	1	2	4	58	67
8	7	14	23	6	5
56	2	78	1	4	3
4	68	3	57	1	2
7	5	6	8	23	14



dessin : un cycle de longueur 8
un cycle de longueur 4

12	34	5	6	7	8
7	6	14	23	8	5
6	8	7	5	13	24
3	57	68	4	2	1
4	1	2	78	56	3
58	2	3	1	4	67

(F. Sterboul)

dessin connexe

12	34	5	6	7	8
3	1	2	4	58	67
8	7	14	23	6	5
56	2	78	1	4	3
7	5	6	8	13	24
4	68	3	56	2	1

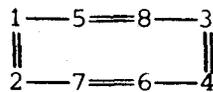


deux fois K_4

dessin : un cycle de longueur 8
un cycle de longueur 4

une composante connexe, quatre arêtes doubles

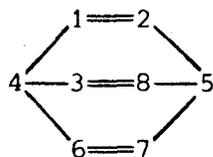
12	34	5	6	7	8
5	12	38	4	6	7
4	6	1	27	58	3
8	5	67	1	34	2
3	7	2	58	1	46
67	8	4	3	2	15



dessin connexe

une composante connexe, trois arêtes doubles

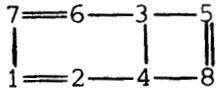
12	34	5	6	7	8
5	12	38	4	6	7
3	7	1	2	58	46
4	8	67	1	3	25
8	6	2	57	14	3
67	5	4	38	2	1



dessin connexe

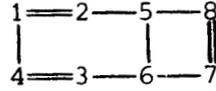


12	34	5	6	7	8
5	12	38	4	6	7
67	8	1	2	3	45
3	6	4	17	58	2
4	7	2	58	1	36
8	5	67	3	24	1



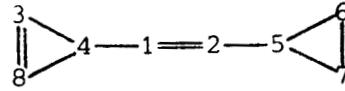
dessin connexe

12	34	5	6	7	8
58	1	2	34	6	7
4	2	1	78	3	56
7	8	36	1	25	4
6	5	78	2	14	3
3	67	4	5	8	12



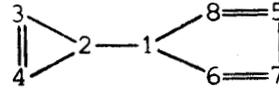
dessin : un cycle de longueur 8
un cycle de longueur 4

12	34	5	6	7	8
5	12	38	4	6	7
3	7	1	2	48	56
4	8	67	1	25	3
67	5	4	38	1	2
8	6	2	57	3	14



dessin connexe

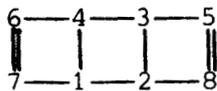
12	34	5	6	7	8
58	1	2	34	6	7
3	67	18	2	4	5
4	2	67	1	58	3
6	8	3	57	1	24
7	5	4	8	23	16



dessin connexe

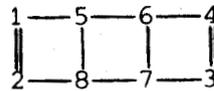
une composante connexe, deux arêtes doubles

12	34	5	6	7	8
58	1	23	4	6	7
7	2	1	3	58	46
6	8	4	17	2	35
3	67	8	5	14	2
4	5	67	28	3	1



dessin connexe

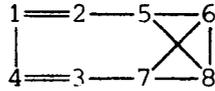
12	34	5	6	7	8
58	1	2	34	6	7
4	2	1	78	3	56
6	5	37	1	28	4
7	8	46	2	15	3
3	67	8	5	4	12



dessin : un cycle de longueur 8
un cycle de longueur 4

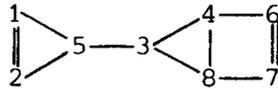


12	34	5	6	7	8
58	1	2	34	6	7
4	2	1	78	3	56
6	8	37	1	25	4
7	5	68	2	14	3
3	67	4	5	8	12



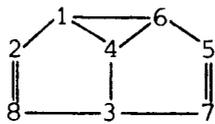
dessin : un cycle de longueur 8
un cycle de longueur 4

12	34	5	6	7	8
5	12	38	4	6	7
8	7	1	25	3	46
4	8	67	1	2	35
3	6	4	78	15	2
67	5	2	3	48	1



dessin connexe

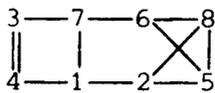
12	34	5	6	7	8
37	1	28	4	5	6
6	2	1	38	4	57
5	7	46	1	28	3
4	8	3	57	16	2
8	56	7	2	3	14



dessin connexe

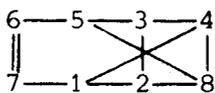
une composante connexe, une arête double

12	34	5	6	7	8
37	1	28	4	5	6
6	2	1	58	34	7
8	56	4	17	2	3
4	8	67	3	1	25
5	7	3	2	68	14



dessin connexe

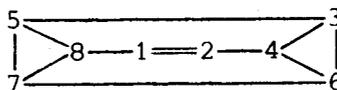
12	34	5	6	7	8
58	1	23	4	6	7
7	2	1	3	48	56
6	8	4	17	35	2
4	5	67	28	1	3
3	67	8	5	2	14



dessin connexe

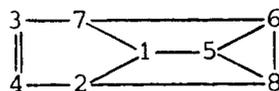


12	34	5	6	7	8
3	1	2	4	58	67
5	2	18	7	46	3
78	6	4	12	3	5
6	8	7	35	1	24
4	57	36	8	2	1



dessin connexe

12	34	5	6	7	8
37	1	28	4	5	6
6	2	1	58	34	7
8	56	4	17	2	3
5	8	67	3	1	24
4	7	3	2	68	15

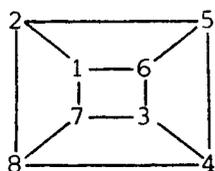


dessin connexe

une composante connexe, graphe simple

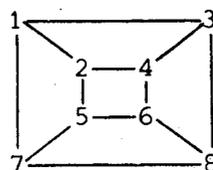
12	34	5	6	7	8
37	1	28	4	5	6
6	2	1	78	3	45
5	7	36	1	48	2
4	8	7	25	16	3
8	56	4	3	2	17

12	34	5	6	7	8
5	1	2	38	46	7
7	6	13	5	8	24
4	8	6	17	25	3
3	2	78	4	1	56
68	57	4	2	3	1



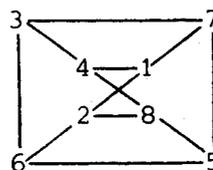
dessin connexe

R₄



dessin : trois cycles de longueur 4

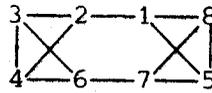
12	34	5	6	7	8
37	1	28	4	5	6
6	2	1	3	48	57
5	8	4	17	26	3
4	7	36	58	1	2
8	56	7	2	3	14



dessin connexe

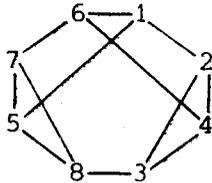


12	34	5	6	7	8
3	1	2	4	58	67
5	2	18	7	46	3
6	8	7	15	3	24
78	6	4	23	1	5
4	57	36	8	2	1



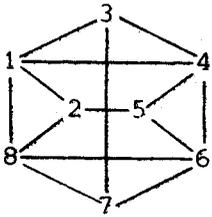
dessin connexe

12	34	5	6	7	8
3	1	2	4	58	67
5	57	16	8	2	3
6	8	7	15	3	24
78	6	4	23	1	5
5	2	38	7	46	1



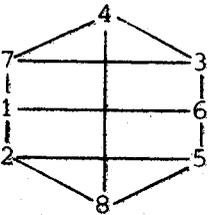
dessin connexe

12	34	5	6	7	8
37	1	28	4	5	6
6	2	1	7	38	45
5	7	3	18	46	2
4	8	67	25	1	3
8	56	4	3	2	17



dessin connexe

12	34	5	6	7	8
37	1	28	4	5	6
6	2	1	58	3	47
8	56	4	17	2	3
4	8	7	3	16	25
5	7	36	2	48	1



dessin connexe

3.7.4 Carrés siamois (6,9)

Dans le graphe des couples, chaque sommet est de degré 4.
Le dessin est un hypergraphe dont chaque arête contient trois sommets.

Nous allons présenter deux sortes de dessins.

dessin non connexe

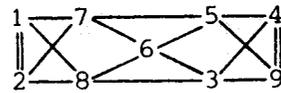
12	34	56	7	8	9
57	18	39	4	6	2
49	67	28	1	3	5
3	5	1	28	49	67
8	9	7	56	12	34
6	2	4	39	57	18



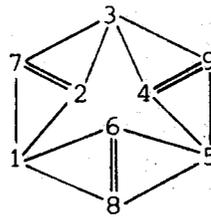
12	34	56	7	8	9
57	18	39	6	4	2
49	67	28	3	1	5
3	5	1	49	27	68
8	9	7	12	56	34
6	2	4	58	39	17



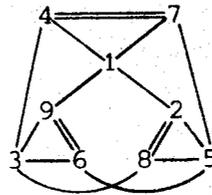
12	34	56	7	8	9
57	18	39	6	4	2
49	67	28	5	1	3
3	5	1	49	27	68
8	9	7	12	36	45
6	2	4	38	59	17



12	34	56	7	8	9
39	58	17	4	2	6
68	27	49	1	5	3
5	1	3	68	49	27
4	6	2	59	37	18
7	9	8	23	16	45

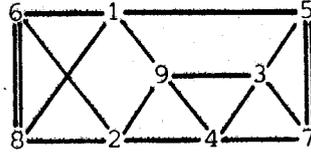


12	34	56	7	8	9
57	19	38	6	4	2
69	28	47	5	3	1
8	7	9	14	25	36
4	6	2	39	17	58
3	5	1	28	69	47

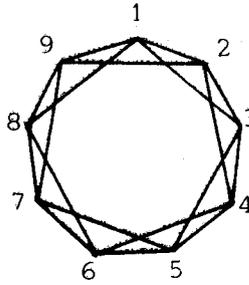


BUS
LILLE

12	34	56	7	8	9
39	58	47	1	2	6
68	27	19	4	5	3
5	1	3	68	49	27
4	6	2	59	37	18
7	9	8	23	16	45

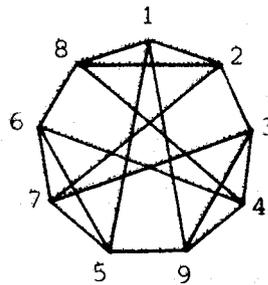


12	45	78	6	9	3
34	67	19	8	2	5
89	23	56	1	4	7
5	8	2	79	13	46
6	9	3	24	57	18
7	1	4	35	68	29



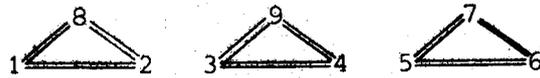
(F. Sterboul)

12	34	56	7	8	9
49	57	28	1	3	6
67	18	39	4	5	2
5	2	4	68	19	37
3	6	1	59	27	48
8	9	7	23	46	15

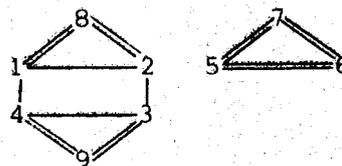


dessin connexe

12	34	56	7	8	9
6	57	18	39	4	2
3	1	49	28	67	5
8	9	7	56	12	34
57	6	2	4	39	18
49	28	3	1	5	67



23	14	56	7	8	9
6	57	18	39	4	2
1	3	49	28	67	5
8	9	7	56	12	34
57	6	2	4	39	18
49	28	3	1	5	67



C O N C L U S I O N

Contrairement à celle des carrés de Room et des tableaux de permutations équidistants de dimension maximale, l'existence des carrés siamois a pu être établie rapidement. Nous pouvons donc maintenant poursuivre leur étude, et plusieurs directions s'offrent à nous.

Il est d'abord possible de trouver d'autres constructions des carrés siamois, plus proches de celles des carrés de Room, ou, inversement, de construire d'autres carrés gaulois par des calculs de congruences.

On peut également essayer de classer les carrés siamois suivant la forme de leurs invariants. Une question se pose alors : deux carrés siamois dont les invariants sont isomorphes sont-ils équivalents ? Il serait intéressant d'énumérer les représentants des classes d'équivalence des carrés siamois $S(n,p)$ pour les petites valeurs de n et de p .

Les opérations que nous avons définies sur les carrés gaulois peuvent être appliquées à un carré siamois donné pour trouver le plus grand nombre possible de carrés siamois non équivalents.

Il est peut-être possible de trouver d'autres opérations internes sur l'ensemble des carrés gaulois, et de les caractériser.

Enfin, mais ceci ne clôt pas la liste des questions, pourquoi ne pas envisager des carrés siamois généralisés ou des hypercubes siamois ?

REFERENCES

- [1] ARNOLD A. et DAUCHET M. *Théorie des magmoïdes* - Publication du Laboratoire de Calcul - Université de Lille I (1977)
- [2] BERGE C. *Graphes et hypergraphes* - Dunod, Paris (1970)
- [3] BOLTON D.W. *Problem - Combinatorics* , édité par D.Y.A.Welsh et D.R.Woodall, Math. Inst. Oxford, pp. 351-352 (1972)
- [4] BYLEEN K. *On Stanton and Mullin's construction of Room squares* Ann. Math. Statist. 41 (1970), pp. 1122-1125
- [5] DENES J. et KEEDWELL A.D. *Latin squares and their applications* Academic Press, New York and London, (1974)
- [6] DEZA M. *Matrices dont deux lignes quelconques coïncident dans un nombre donné de positions communes* - Journal of Combinatorial Theory (A) 20, pp. 306-318 (1976)
- [7] DEZA M., MULLIN R.C. et VANSTONE S.A. *Room squares and equidistant permutation arrays* - Ars Combinatoria, 2 (1976), pp. 235-244
- [8] EULER L. *Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques* Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg le 8 mars 1779
- [9] FRANKL P. et DEZA M. *On the maximum number of permutations with given maximal or minimal distance* - Journal of Combinatorial Theory (A) 22, pp. 352-360 (1977)

- [10] HEINRICH K. et VAN REES G.H.J. *Some constructions for equidistant permutation arrays of index one* - *Utilitas Mathematica*, vol. 13 (1978), pp. 193-200
- [11] HORTON J.D. *Variations on a theme by Moore* - *Proceedings of the First Louisiana Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* (Baton Rouge, 1970), pp. 146-166
- [12] LEDERMANN W. *Introduction to group theory* - Oliver and Boyd, Edinburgh (1973)
- [13] MOORE E.H. *Concerning triple systems* - *Math. Ann.* 43 (1893) pp. 271-285
- [14] MULLIN R.C. et NEMETH E. *An existence theorem for Room squares* *Canad. Math. Bull.* 12 (1969), pp. 493-497
- [15] MULLIN R.C. et NEMETH E. *An improved bound for equidistant permutation arrays of index one* - *Utilitas Mathematica*, vol.13 (1978), pp. 77-85
- [16] ROOM T.G. *A new type of magic square* - *Math. Gazette* (1955) p.307
- [17] ROSA A. *Generalized Room squares and multidimensional Room designs* - *Proc. Second Caribbean Conference in Combinatorics and Computing*, U.W.I., Cave Hill, Barbados, january 1977
- [18] ROSA A. *Generalized Howell Designs* - à paraître
- [19] SCHELLENBERG P.J. et TAYLOR J. *On a conjecture concerning Room squares* - *Ars Combinatoria*, vol.4 (1977), pp. 59-68
- [20] DE SEGUIER J.A. *Théorie des groupes finis : éléments de la théorie des groupes abstraits* - Gauthier-Villars, Paris (1904)
- [21] DE SEGUIER J.A. *Théorie des groupes finis : éléments de la théorie des groupes de substitutions* - Gauthier-Villars, Paris (1912)

- [22] STANTON R.G. et MULLIN R.C. *Construction of Room squares* - Ann. Math. Statist. 39 (1968), pp. 1540-1548
- [23] STEEN J.P. *Décomposition des matrices et tableaux à trois dimensions à éléments entiers non-négatifs au moyen des matrices de permutation* - Thèse d'état n°396 - Université des Sciences et Techniques de Lille (1977)
- [24] VANSTONE S.A. et SCHELLENBERG P.J. *A construction for equidistant permutation arrays of index one* - Journal of Combinatorial Theory (A) 23, pp. 180-186 (1977)
- [25] WALLIS W.D., STREET A.P. et WALLIS J.S. *Combinatorics : Room squares, sum-free sets, Hadamard matrices* - Lecture Notes in Mathematics n°292, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1972)
- [26] WALLIS W.D. *Solution of the Room square existence problem* - Journal of Combinatorial Theory (A) 17, pp.379-383 (1974)
- [27] WIELANDT H. *Finite permutation groups* - Academic Press, New York-London (1964)