THESES

PRESENTEES A

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

MICHELINE VIGUÉ - POIRRIER

PREMIERE THESE

QUELQUES PROBLEMES D'HOMOTOPIE RATIONNELLE

DEUXIEME THESE

Etude des zéros des fonctions holomorphes de la classe de NEVANLINNA

Thèses soutenues le 8 décembre 1978 devant la Commission d'Examen

MM.	G. Cœuré,	Président
	S. Halperin,	Rapporteur
	D. Lehmann,	Rapporteur
	D. Sullivan,	Rapporteur
	R. Barre,	Examinateur

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

DOYENS HONORAIRES de l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R. DEFRETIN, H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

M. ARNOULT, Mme BEAUJEU, MM. BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DECUYPER DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P. GERMAIN, GLACET, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, MM. LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SAVARO, WATERLOT, WIEMAN, ZAMANSKI.

PRESIDENTS HONORAIRES DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R. DEFRETIN, M. PARREAU.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. M. MIGEON.

PROFESSEURS TITULAIRES

M.	BACCHUS Pierre	Astronomie
M.	BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Physique
M.	BECART Maurice	Physique Atomique et Moléculaire
M.	BILLARD Jean	Physique du Solide
M.	BIAYS Pierre	Géographie
M.	BONNEMAN Pierre	Chimie Appliquée
M.	BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M.	BONTE Antoine	Géologie Appliqué
M.	BOUGHON Pierre	Algèbre
M.	BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M.	CELET Paul	Géologie Générale
M.	COEURE Gérard	Analyse
M.	CONSTANT Eugène	Electronique
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des Entreprises
M.	DELATTRE Charles	Géologie Générale
M.	DELHAYE Michel	Chimie Physique
M.	DERCOURT Jean	Géologie Générale
M.	DURCHON Maurice	Biologie Expérimentale
M.	FAURE Robert	Mécanique
M.	FOURET René	Physique du Solide
M.	GABILLARD Robert	Electronique
M.	GONTIER Gérard	Mécanique
M.	GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M.	GRUSON Laurent	Algèbre
M.	GUILLAUME Jean	Microbiologie
M.	HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M.	LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique
M.	LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M.	LANSRAUX Guy	Physique Atomique et Moléculaire
M.	LAVEINE Jean-Pierre	Paléontologie
M.	LEBRUN André	Electronique
M.	LEHMANN Daniel	Géométrie

Mme LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M. LINDER Robert	Biologie et Physiologie Végétales
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M. LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M. MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M. MONTARIOL Frédéric	Chimie Appliquée
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. POUZET Pierre	Analyse numérique
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. SALMER Georges	Electronique
M. SCHILTZ René	Physique Atomique et Moléculaire
Mme SCHWARTZ Marie-Hélène	Géométrie
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique
M. TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M. TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. VIVIER Emile	Biologie Cellulaire
M. WERTHEIMER Raymond	Physique Atomique et Moléculaire
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie Végétale
M. BOILLET Pierre	Physique Atomique et Moléculaire
M. BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M. BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M. CAPURON Alfred	Biologie Animale
M. CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
Mme DACHARRY Monique	Géographie
M. DEPREZ Gilbert	Physique Théorique
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
Mme EVRARD Micheline	Chimie Appliquée
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M. HERMAN Maurice	Physique Spatiale
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LENTACKER Firmin	Géographie
M. LEROY Jean-Marie	Chimie Appliquée
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
Mle MARQUET Simone	Probabilités
M. MIGEON Michel	Chimie Physique
M. MONTEL Marc	Physique du Solide
M. MONTUELLE Bernard	Biologie Appliquée
M. NICOLE Jacques	Chimie Appliquée
M. PAQUET Jacques	Géologie Générale
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M. SLIWA Henri	Chimie Organique
M. WATERLOT Michel	Géologie Générale

MAITRES DE CONFERENCES (Et Chargés d'Enseignement)

M. ADAM Michel	Sciences Economiques
M. ANTOINE Philippe	Analyse
M. BART André	Biologie Animale
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie

.../...

M.	BEGUIN Paul	Mécanique
M.	BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M.	BOSCQ Denis	Probabilités
M.	BREZINSKI Claude	Analyse Numérique
M.	BRUYELLE Pierre	Géographie
M.	CARREZ Christian	Informatique
M.	COQUERY Jean-Marie	Psycho-Physiologie
M.	CORDONNIER Vincent	Informatique
M.	COUTURIER Daniel	Chimie Organique
M.	CRAMPON Norbert	Géologie
M.	CROSNIER Yves	Electronique
M.	DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M.	DEGAUQUE Pierre	Electronique
M.	DELORME Pierre	Physiologie Animale
M.	DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M.	DHAINAUT André	Biologie Animale
M.	DELAUNAY Jean-Claude	Sciences Economiques
M.	DERIEUX Jean-Claude	Microbiologie
M.	DOUKHAN Jean-Claude	Physique du Solide
M.	DUBOIS Henri	Physique
M.	DUEE Gérard	Géologie
M.	DYMENT Arthur	Mécanique
M.	ESCAIG Bertrand	Physique du Solide
M.	FAKIR Sabah	Algèbre
M.	FLAMME Jean-Marie	Technologie de Construction
M.	FOCT Jacques	Génie Mécanique
M.	FONTAINE Hubert	Physique
M.	FONTAINE Jacques	Electronique
M.	FOURNET Bernard	Biochimie
M.	GAMBLIN André	Géographie
M.	GERVAIS Michel	Gestion des Entreprises
M.	GOBLOT Rémi	Algèbre
M.	HECTOR Joseph	Géométrie
M.	JACOB Gérard	Informatique
M.	JOURNEL Gérard	Physique Atomique et Moléculaire
M.	KREMBEL Jean	Biochimie
M.	LAURENT François	Automatique
Mle	LEGRAND Denise	Algèbre
Mle	LEGRAND Solange	Algèbre
M.	LEROY Yves	Electronique
M.	LHENAFF René	Géographie
M.	LOCQUENEUX Robert	Physique théorique
M.	MACKE Bruno	Physique
M.	MAHIEU Jean-Marie	Physique Atomique et Moléculaire
M.	MESSELYN Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M.	MIGNOT Fulbert	Analyse Numérique
M.	N'GUYEN VAN CHI Régine	Géographie
M.	NOTELET Francis	Electrotechnique
M.	NUSSEMBAUM Maurice	Sciences Economiques
M.	PARSY Fernand	Mécanique
M.	PAUPARDIN Colette	Biologie Physiologie Végétales
M.	PECQUE Marcel	Chimie Physique
M.	PERROT Pierre	Chimie Appliquée
M.	PERTUZON Emile	Physiologie Animale
M.	PETIT Francis	Chimie Organique
M.	PONSOLLE Louis	Chimie Physique
M.	POVY Lucien	Automatique
M.	RICHARD Alain	Biologie
M.	ROGALSKI Marc	Analyse
M.	ROY Jean-Claude	Psycho-Physiologie
M.	SIMON Michel	Sociologie
M.	SOMME Jean	Géographie

.../...

Mle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. STERBOUL François	Informatique
M. TAILLEZ Roger	Biologie
M. THERY Pierre	Electronique
M. TOP Gérard	Sciences Economiques
M. TOULOTTE Jean-Marc	Automatique
M. TREANTON Jean-René	Sociologie
M. VANDORPE Bernard	Chimie Minérale
M. VILLETTE Michel	Mécanique
M. WALLART Francis	Chimie
M. WERNER Georges	Informatique
Mme ZIN-JUSTIN Nicole	Algèbre

Je voudrais exprimer ici mes remerciements à toutes les personnes qui m'ont aidée dans l'élaboration de ce travail. Et tout d'abord, je tiens à dire toute ma gratitude à Monsieur P. Samuel qui a guidé mes premiers pas dans la recherche mathématique.

C'est Dennis Sullivan qui m'a initiée à la théorie de l'homotopie rationnelle. J'ai bénéficié de sa connaissance profonde de la question. Sans son aide et ses encouragements enthousiastes, ce travail n'aurait pas vu le jour. Je l'en remercie vivement.

L'équipe de topologie algébrique de Lille m'a accueillie chaleureusement et m'a permis d'exposer à son séminaire une partie des résultats de cette thèse. Raymond Barre a bien voulu faire partie du jury de cette thèse et je l'en remercie. Durant l'année scolaire 1976-77, j'ai trouvé auprès de Stephen Halperin un maître et un ami qui n'a cessé de me prodiguer généreusement conseils et encouragements. C'est grâce à lui que ce travail a pu être mené à bien. Je lui exprime toute ma reconnaissance et je suis très heureuse que, malgré l'éloignement, il puisse faire partie du jury de cette thèse. Daniel Lehmann a toujours porté un intérêt constant à mon travail ; les discussions que j'ai eues avec lui ces dernières années ont eu une grande influence sur l'achèvement et la rédaction de ce travail. Son aide précieuse et généreuse m'a permis d'améliorer bon nombre de mes résultats. Je lui en sais infiniment gré.

Monsieur Gérard Coeuré m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse et m'a proposé un sujet de seconde thèse qui fut pour moi une occasion intéressante d'approfondir la théorie des fonctions holomorphes ; et je l'en remercie.

Que Madame Bérat et Madame Lengaigne qui ont dactylographié avec soin et compétence mon manuscrit, ainsi que les services de l'imprimerie de l'Université de Lille I trouvent ici mes sincères remerciements.

Enfin, puisque l'occasion m'en est donnée, je remercie mon mari, ma famille et tous ceux qui m'ont aidée et encouragée dans la voie de la recherche mathématique.

INTRODUCTION GENERALE

Un problème qui a été étudié depuis de nombreuses années en topologie algébrique est d'associer, de manière fonctorielle, à un espace X, une algèbre différentielle graduée commutative rationnelle dont la cohomologie soit isomorphe à la cohomologie singulière de X et qui contienne des informations sur le type d'homotopie rationnelle de X. Dès 1950, H. Cartan construisait, pour tout espace homogène, une algèbre différentielle graduée réelle, produit tensoriel d'une algèbre de polynômes par une algèbre extérieure, dont la cohomologie était isomorphe à celle de l'espace [3]. Puis, en 1955, R. Thom pensait qu'on pouvait associer, à tout C.W complexe, une algèbre de cochaines commutatives, et qu'on pouvait étendre, à ces algèbres, la théorie de la suite spectrale d'une fibration (Séminaire Cartan, exposé 17). Enfin, Quillen établit une équivalence de catégories entre la catégorie homotopique rationnelle et une catégorie algébrique.

C'est Dennis Sullivan qui construira une théorie complète et fructueuse sur cette question en établissant une équivalence de catégories entre la catégorie des types d'homotopie rationnelle de C.W complexes nilpotents de type fini et celle des algèbres différentielles graduées minimales nilpotentes. A tout espace nilpotent X, il associe une algèbre minimale $\mathcal{M}_X$ qui décrit entièrement le type d'homotopie rationnelle de X et dont la construction reflète la décomposition en tour de Postnikov de X.

Dans notre étude, nous utiliserons la théorie de Sullivan de manière fondamentale. Ce travail se divise en trois articles :

Le premier, écrit en collaboration avec D. Sullivan et publié au Journal of differential geometry (vol. 11, n° 4, déc. 1976) fournit une réponse complète au problème de l'existence d'une infinité de géodésiques fermées sur une variété riemannienne compacte : on y démontre essentiellement que si M est une variété compacte telle que $\pi_1(M)$ est fini, alors M admet une infinité de géodésiques périodiques distinctes pour toute métrique riemannienne sur M dès que l'algèbre de cohomologie réelle de M ne peut pas être engendrée par un élément.

Le second article, écrit avec K. Grove et S. Halperin, et qui sera publié à Acta Mathematica*, traite d'un problème voisin du premier. On y établit une condition suffisante pour qu'il existe, sur une variété riemannienne compacte 1-connexe, une infinité de géodésiques fermées invariantes par une isométrie d'ordre fini.

Dans le troisième article, nous étudions le problème topologique suivant : étant donnés deux C.W complexes nilpotents de type fini S et T, et un morphisme $f : H^*(S,Q) \leftarrow H^*(T,Q)$, existe-t-il une application entre les types d'homotopie rationnelle de S et T induisant f en cohomologie ? Le cas d'un isomorphisme est traité par S. Halperin et J. Stasheff dans [14]. Nous calculons des obstructions à la réalisation de tels morphismes et nous donnons des conditions simples pour que le morphisme soit réalisable pour certains espaces. Pour étudier ce problème, nous construisons un modèle minimal bigradué d'un morphisme d'algèbres graduées puis nous construisons un modèle filtré d'un morphisme d'algèbres différentielles graduées. Cette construction se révèle être très intéressante pour l'étude de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore d'un carré fibré de fibrations de Serre. Nous donnons des formules explicites des termes (E_r, d_r) de cette suite spectrale, et nous en déduisons de nombreux résultats sur le collapsing de cette suite spectrale.

---

* "The rational homotopy theory of certain path spaces with applications to geodesics". Acta Math. vol. 140, 1978.

THE HOMOLOGY THEORY OF THE CLOSED GEODESIC PROBLEM

MICHELINE VIGUE-POIRRIER & DENNIS SULLIVAN

Reprinted from
JOURNAL OF DIFFERENTIAL GEOMETRY
Vol. 11, No. 4 Dec. 1976, pp. 633–644

J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
11 (1976) 633-644

THE HOMOLOGY THEORY OF THE CLOSED GEODESIC PROBLEM

MICHELINE VIGUÉ-POIRRIER & DENNIS SULLIVAN

The problem—*does every closed Riemannian manifold of dimension greater than one have infinitely many geometrically distinct periodic geodesics*—has received much attention. An affirmative answer is easy to obtain if the fundamental group of the manifold has infinitely many conjugacy classes, (up to powers). One merely needs to look at the closed curve representations with minimal length.

In this paper we consider the opposite case of a *finite* fundamental group and show by using algebraic calculations and the work of Gromoll-Meyer [2] that *the answer is again affirmative if the real cohomology ring of the manifold or any of its covers requires at least two generators.*

The calculations are based on a method of the second author sketched in [6], and he wishes to acknowledge the motivation provided by conversations with Gromoll in 1967 who pointed out the surprising fact that the available techniques of algebraic topology loop spaces, spectral sequences, and so forth seemed inadequate to handle the "rational problem" of calculating the Betti numbers of the space of all closed curves on a manifold. He also acknowledges the help given by John Morgan in understanding what goes on here.

The Gromoll-Meyer theorem which uses nongeneric Morse theory asserts the following. Let $\Lambda(M)$ denote the space of all maps of the circle S^1 into M (not based). Then there are *infinitely many* geometrically distinct periodic geodesics in *any* metric on M *if* the Betti numbers of $\Lambda(M)$ are unbounded. (The round 2-sphere shows the condition is not actually necessary.)

In [6] a description of the *minimal model of* $\Lambda(M)$ is given in terms of the minimal model of M, and is valid if, for instance, M is simply connected. This gives an explicit algorithm for calculating the Betti numbers of $\Lambda(M)$. This algorithm yields the fact that the Betti numbers of $\Lambda(M)$ are always nonzero in an infinite number of dimensions (which can be taken to lie in an arithmetic sequence.)

We explicate and extend this study of $\Lambda(M)$ here by

(i) giving the description and proof of the algorithm for the homology when $\pi_1 M = \{e\}$, and by

(ii) showing that the Betti numbers of $\Lambda(M)$ are unbounded if and only if

Communicated by W. P. A. Klingenberg, July 3, 1975.

the real cohomology ring of M requires at least two generators.

Thus the question of infinitely many geodesics is still open when either

(i) $\pi_1(M)$ is infinite but has only finitely many conjugacy classes (up to powers), or

(ii) $\pi_1 M$ is finite but the real cohomology of the universal cover is of the form

$$\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n\} \quad \text{with} \quad x^{n+1} = 0;$$

for example, spheres and projective spaces have these properties.

In the latter case, Klingenberg [4] claim the conjecture for the *generic* metric, and we include a specific calculation of the rational cohomology ring of $\Lambda(M)$ for possible use in a further Morse study for the special metric.

Remark on covers. If $\tilde{M} \to M$ is a finite regular cover, then the cohomology ring of M is isomorphic to the subring of $H^*\tilde{M}$ which is fixed by the finite group of deck transformations. If $H^*(\tilde{M})$ has one generator an easy argument shows H^*M has one generator. Thus, if $\pi_1 M$ is finite the cohomology ring of M or one of its covers requires two generators if and only if this is so for the universal cover.

Also an easy geometric argument shows the property of having infinitely many distinct periodic geodesics is shared by a manifold and its finite covers. Thus in the study of the finite π_1 case in the calculations below we may actually assume $\pi_1 M = \{e\}$ and the cohomology ring requires at least two generators. We will see that the Betti numbers of $\Lambda(M)$ are unbounded and the asserted theorem will follow.

The description of the space of all closed curves on M. In [6] and [7] an algebraic description of homotopy problems via differential algebras and differential forms was given. The nature of this description is such that if a proferred formula for $\Lambda(M)$ has the correct algebraic properties it must be correct. This method works here and in other contexts as well, for example in the study of Gelfand-Fuks cohomology [7].

To each simply connected space M (or even a nonsimply connected space of nilpotent homotopy type) the theory associates (see [6], [7], [1]) a special differential algebra over $\boldsymbol{Q}$ (or $\boldsymbol{R}$) which describes its rational (or real) homotopy type, [8]. The cohomology of this special differential algebra, called the minimal model of M, is the cohomology of M, and the generators of the algebra (which is free of relations besides graded commutativity) give a dual basis of the rational homotopy groups of M. If X is any space, the homotopy classes of maps of X into the rational homotopy type M_Q of M, [8], is in one to one correspondence with the homotopy classes of maps of the minimal model of M into the rational de Rham complex of X. By a homotopy between two maps of differential graded algebras $\mathscr{A} \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \mathscr{B}$ we mean a dga map $\mathscr{A} \xrightarrow{H} \mathscr{B}(t, dt)$

where $\mathscr{B}(t, dt)$ means $\mathscr{B}$ with a variable t adjoined in degree zero and dt is its differential in degree one, and f and g are obtained by composing H with the two evaluations $\mathscr{B}(t, dt) \rightrightarrows \mathscr{B}$, obtained by setting $t = 0$, $dt = 0$ and $t = 1$, $dt = 0$; see [1]. In the statement about maps the forms on X may be replaced by any other dga which maps to the forms by a map inducing an isomorphism on cohomology. If X is nilpotent the minimal model of X itself is one such dga.

Now consider $\Lambda(M)$ the space of all maps of the circle into M. A map f of an arbitrary space K into $\Lambda(M)$ is the same as a map $\tilde{f}$ of $K \times S^1$ into M. In fact we have a universal map

$$\Lambda(M) \times S^1 \xrightarrow{u} M$$

and a commutative diagram determining this correspondence between f and $\tilde{f}$:

$$\begin{tikzcd} \Lambda(M) \times S^1 \arrow[rr, "u"] & & M \\ & K \times S^1 \arrow[ul, "f \times \mathrm{Id}"] \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

A correct formula for the minimal model of $\Lambda(M)$ will be given by the dga which bears the analogous relation to $\mathscr{M}$, the minimal model of M. In fact, we look for a dga $\Lambda\mathscr{M}$ and a universal dga map $\mathscr{M} \xrightarrow{u} \Lambda\mathscr{M}(\xi)$ (where $\mathscr{A}(\xi)$ means adjoining a closed one-dimensional generator to the dga $\mathscr{A}$) so that the universal property expressed by

$$\begin{tikzcd} \Lambda\mathscr{M}(\xi) \arrow[dr, "f \otimes 1_\xi"'] & & \mathscr{M} \arrow[ll, "u"'] \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ & \mathscr{X}(\xi) & \end{tikzcd}$$

$\mathscr{X}$ arbitrary

is satisfied. That is, dga maps $\mathscr{M} \xrightarrow{\tilde{f}} \mathscr{X}(\xi)$ correspond to dga maps $\Lambda(\mathscr{M}) \xrightarrow{f} \mathscr{X}$ in a one to one fashion, the connection being provided by the commutative diagram.

We proceed as follows. If $\mathscr{M}$ is the free commutative algebra $\Lambda(x_1, x_2, \cdots; d)$ on $x_1, x_2, \cdots$ with differential d, let $\Lambda\mathscr{M}$ have generators $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \cdots$ where $\dim \bar{x}_i = \dim x_i - 1$. Here it is convenient that $\mathscr{M}$ is simply connected and has no generators in degree one, in which case more discussion is required [9]. Note that the symbol "Λ" is used in three distinct ways.

The universal map $\mathscr{M} \xrightarrow{u} \Lambda(\mathscr{M})(\xi)$ is defined by $x_i \to x_i + \xi\bar{x}_i$. We must define $\bar{d}$ in $\Lambda(\mathscr{M})$ so that u is a dga map. Notice that if $x \to x + \xi\bar{x}$ and $y \to y + \xi\bar{y}$, then

$$xy \to (x + \xi\bar{x})\cdot(y + \xi\bar{y}) = xy + \xi(\bar{x}y + (-1)^{|x|}x\bar{y}) ,$$

where $|x| = \dim x$. So $x \to$ coefficient of ξ in $u(x)$ defines a derivation $\mathcal{M} \xrightarrow{i} \Lambda\mathcal{M}$ of degree minus one over the natural inclusion $\mathcal{M} \subset \Lambda\mathcal{M}$.

If we write u in the form

$$x \to x + \xi\cdot i(x) ,$$

then $dx \to dx + \xi\cdot i(dx)$ and for u to commute with d we must have

$$dx + \xi\cdot i(dx) = \bar{d}(x + \xi\cdot i(x)) .$$

This is equivalent to the two equations:

$$\bar{d}x = dx ,$$
$$i\cdot(dx) + \bar{d}(ix) = 0 , \qquad \text{for all } x \in \mathcal{M} .$$

Thus we define $\bar{d}$ in $\Lambda(\mathcal{M})$ so that $\mathcal{M}$ is a differential subcomplex and the relation $\bar{d}i + id = 0$ holds. Hence we obtain the following result:

Given the dga $\mathcal{M} = \Lambda(x_1, x_2, \cdots, d)$, *define the* dga $\Lambda\mathcal{M} = \Lambda(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \cdots, \bar{d})$, *with* $\dim \bar{x}_i = \dim x_i - 1$, *by* $\bar{d}x_i = dx_i$ *and* $\bar{d}\bar{x}_i = -idx_i$ *where* $i\colon \mathcal{M} \to \Lambda\mathcal{M}$ *is the unique derivation of degree* -1 *extending* $x_i \to \bar{x}_i$. *Then the map* $\mathcal{M} \xrightarrow{u} \Lambda(\mathcal{M})(\xi)$ *defined by* $x_i \to x_i + \xi\bar{x}_i$ *is a* dga *map which is universal and sets up a one to one correspondence between* dga *maps* $\mathcal{M} \xrightarrow{\bar{f}} \mathcal{K}(\xi)$ *and* $\Lambda\mathcal{M} \xrightarrow{f} \mathcal{K}$ *via the diagram*:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & \Lambda(\mathcal{M})(\xi) \arrow[d, "f\otimes 1_\xi"] \\ & \mathcal{K}(\xi) \end{tikzcd} \qquad \mathcal{K} \text{ arbitrary}$$

At this point we could pass to homotopy classes of dga maps, and assert that $\Lambda\mathcal{M}$ defines the correct homotopy functor and so must be the minimal model of $\Lambda(M)$. We will detail a more explicit argument.

The universal geometric map $\Lambda(M) \times S^1 \to M$ corresponds to a map of minimal models $\mathcal{M} \xrightarrow{g} \mathcal{M}(\Lambda(M))(\xi)$ implying by the above algebraic universality the existence of a dga map

$$\Lambda(\mathcal{M}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}(\Lambda(M)) .$$

Now since M is simply connected, $\Lambda(M)$ is at least nilpotent [8], so the homotopy groups of $\Lambda(M)$ correspond to the free generators of $\mathcal{M}(\Lambda(M))$. Now the fibration $\Omega M \to \Lambda(M) \to M$, where ΩM is the based loop space, has a natural cross section, the constant maps of S^1 into M, so that $\pi_i\Lambda(M) \approx \pi_i\Omega M \oplus \pi_i M$. Of course, $\pi_i\Omega M \approx \pi_{i+1}M$ so that $\mathscr{M}(\Lambda(M))$ is the free algebra on the generators x_i of $\mathscr{M}$ (which is a d-subalgebra of $\mathscr{M}(\Lambda(M))$) and another set y_i obtained by shifting the x_i down one:

$$\mathscr{M}(\Lambda(M)) = \Lambda(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots) ,$$

with $\dim y_i = \dim x_i - 1$. If one examines the minimal model form of the universal geometric map $\mathscr{M} \xrightarrow{g} \mathscr{M}(\Lambda(M))(\xi)$, one finds that in terms of all these identifications $x_i \to x_i + \xi y_i$ modulo decomposables of $\mathscr{M}$. It follows that the map $\Lambda(\mathscr{M}) \xrightarrow{\pi} \mathscr{M}(\Lambda(M))$ described above must be an isomorphism.

In summary we state the

Theorem. *If M is a simply connected finite complex, and M has minimal model $\Lambda(x_1, x_2, \cdots, d)$ then the space of closed curves on M has model $\Lambda(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \cdots, d)$ where $\dim \bar{x}_i = \dim x_i - 1$, d is defined by $di + id = 0$, and i is the derivation of $\Lambda(x_1, x_2, \cdots)$ into $\Lambda(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \cdots)$ defined by $ix_j = \bar{x}_j$.*

Remark. Note that $\Lambda(x_1, x_2, \cdots)$ is a d-subcomplex of $\Lambda(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \cdots)$, and the image of d in $\Lambda(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \cdots)$ is contained in the ideal of $(x_1, x_2, \cdots)$. Thus the induced d in $\Lambda(\bar{x}_i)$ is zero. This algebraic picture corresponds to the natural fibration

$$\Omega M \to \Lambda(M) \to M$$

since the model of $\Omega(M)$ is $\Lambda(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots ; d = 0)$. (The minimal model of any H-space is just the free algebra in the dual homotopy groups with the differential identically zero.)

In the following, we use the notation (Λ, d) for the minimal model of a simply connected finite complex M, and (Λ', d') for the minimal model of the space of all maps of S^1 into M. The generators in even (resp. odd) degrees will be denoted by $x_1, x_2, \cdots$ (resp. $y_1, y_2, \cdots$). We shall prove the

Theorem. *The following properties are equivalent:*

(i) *the cohomology algebra of M requires at least two generators,*

(ii) *the Betti numbers of the space of all maps of S^1 into M are unbounded.*

Before proceeding to the details, we give the structure of the argument. Suppose the generators of the model of M (arranged by degree) begin with

$$x_1, \cdots, x_n ; y_1 ; x_{n+1}, \cdots, x_r ; y_2, \cdots$$

where y_1 and y_2 are the first two exterior generators, and the x_i are the first polynomial generators.

In Λ', the classes $\left\{\left(\prod_{i=1}^{n} \bar{x}_i\right)\bar{y}_1^{\alpha}\right\}$, $\alpha = 1, 2, \cdots$, show that for any nontrivial finite complex, $H^*(\Lambda')$ is nonzero in an infinity of dimensions, [6]. This uses

$dx_i = 0, i = 1, \cdots, n$ and $dy_1 = Q(x_1, \cdots, x_n)$. If we knew $dx_j = 0$ for $j = n+1, \cdots, r$, then the classes $\left\{\left(\prod_{i=1}^{r} \bar{x}_i\right)\bar{y}_1^\alpha \bar{y}_2^\beta\right\}$ with integers α and β would give us the unbounded Betti numbers. (y_1 must be present if $H^*(M)$ is finite dimensional and distinct from the ground field, and y_1 and y_2 must be present except when H^*M is generated by one element (Propositions 1, 2, 3).

If $dy_1 \neq 0$, then $d^2 = 0$, $dx_1 = 0, \cdots, dx_n = 0$ and $dx_{n+1} = Q_{n+1}(x_1, \cdots, x_n)y_1, \cdots, dx_r = Q_r(x_1, \cdots, x_{r-1})y_1$ imply $Q_j = 0, j = n+1, \cdots, r$, and the above argument works. If $dy_1 = 0$, this argument does not work. However, if dy_2 were also zero, we could use the classes $\{\bar{y}_1^\alpha \bar{y}_2^\beta\}$ with integers α, β to obtain enough cohomology. We do know $dy_2 = Q(x_1, \cdots, x_r)$ so that $d\bar{y}_2 = \sum_i Q_i(x_j, \bar{x}_j)x_i$ in Λ' by the formula. If we set $x_i = 0$, $i = 1, \cdots, r$ in Λ', $d\bar{y}_2$ becomes zero, the above classes work, and an inductive argument shows this quotient differential graded algebra has unbounded Betti numbers only if Λ' does (Proposition 4).

1. Some results about differential graded algebras

We will consider differential graded algebras $\Lambda = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda_n$ over a ground field $k = \boldsymbol{Q}$ or $\boldsymbol{R}$, endowed with a differential d of degree one. These algebras are the tensor product of a polynomial algebra graded in even degrees and an exterior algebra generated in odd degrees. We assume that $\Lambda_0 = k$, and that, for every $z \in \Lambda$, dz belongs to $\Lambda^+ \cdot \Lambda^+$ where $\Lambda^+ = \bigoplus_{n>0} \Lambda_n$. Actually, if there are generators in degree one, we assume in addition that all the generators can be ordered $z_1, z_2, \cdots$ so that each dz_i is a polynomial $Q_i(z_1, z_2, \cdots, z_{i-1})$ in earlier generators. If a finite complex M is simply connected, the minimal models of M and $\Lambda(M)$ satisfy these conditions.

Proposition 1. *Let (Λ, d) be such a differential graded algebra. We have the following equivalences:*

(1) *the cohomology algebra $H^*(\Lambda, d)$ is generated by one element,*

(2) *(Λ, d) has one of the following types:*

(a) *Λ is generated by one element,*

(b) *Λ is generated by two elements x and y, where x is a polynomial generator with $dx = 0$, and y is an exterior generator with $dy = \lambda x^h$, $\lambda \in k^*$, and an integer $h \geq 2$.*

Proof. (2) $\Rightarrow$ (1) is easy. If $\Lambda = k(z)$, then $H^*(\Lambda) = \Lambda = k(z)$. If $\Lambda = k[x] \otimes k(y)$, then $H^*(\Lambda) = \dfrac{k[x]}{x^h k[x]}$. To show (1) $\Rightarrow$ (2), we assume first that the generators of lowest degree of Λ are exterior. By (1) there is only one such generator and we have $dy = 0$. Another generator of Λ of lowest degree is also closed, again a contradiction to (1). So we have $\Lambda = k(y)$.

Assume now that the generators of lowest degree of Λ are polynomial. Again there is only one such generator, say x_1, and $dx_1 = 0$. If Λ has other generators, we consider the generators of lowest degree among the generators distinct from x_1. If these generators are polynomial $x_2, \cdots$, we have $dx_2 = 0$ and this is not possible by (1). If these generators are exterior, let y_1 be one of them. Then we have $dy_1 = \lambda_1 x_1^h$, where $\lambda_1 \in k^*$, and h is an integer ≥ 2. In the set of generators distinct from x_1 and y_1, we look at the generators of lowest degree. If such a generator x_2 is of even degree, we have $dx_2 = \mu_2 x_1^\alpha y_1$, with $\mu_2 \in k$, $\alpha \geq 1$. Since $d^2 x_2 = 0$, we have $0 = \mu_2 \lambda_1 x_1^{\alpha+h}$, which implies that $dx_2 = 0$ and contradicts (1). Therefore, if the set of generators of Λ distinct from x_1 and y_1 is not empty, the generators of lowest degree in this set are exterior. Let y_2 be one of them. Then we have $dy_2 = \lambda_2 x_1^m$, where m is an integer ≥ 2 and $\lambda_2 \in k$. It follows that $d(y_2 - (\lambda_2/\lambda_1)x_1^{m-h}y_1) = 0$. Then $H^*(\Lambda)$ should contain the class of x_1 and the class of $y_2 - (\lambda_2/\lambda_1)x_1^{m-h}y_1$, contradicting (1). So we have

$$\Lambda = k[x_1] \otimes k(y_1) \qquad \text{with } dx_1 = 0 \ , \ dy_1 = \lambda_1 x^h \neq 0 \ .$$

Proposition 2. *Let (Λ, d) be a differential graded algebra. Let $\mathcal{O}$ be the ideal of Λ, generated by the exterior generators, and let $A = \Lambda/\mathcal{O}$. If y is an exterior generator of Λ such that the image of dy in A is nonzero, we have $H^*(\bar{\Lambda}, \bar{d}) = H^*(\Lambda, d)$, where $\bar{\Lambda} = \Lambda/(y, dy)\Lambda$, and $\bar{d}$ is the induced differential on $\bar{\Lambda}$.*

Proof. See also [3]. Let ξ be an element of Λ such that $d\xi \in (dy, y)\Lambda$. Then $d\xi = y\alpha + d(y\beta)$. We shall prove that $\operatorname{Ker} d \cap y\Lambda = 0$. Let $y\gamma$ be such that $d(y\gamma) = 0$. Then we have $d(y)\gamma + yd\gamma = 0$. Since $dy = a + \alpha$ with $\alpha \in \mathcal{O}$ and $a \neq 0, a \in A$, we show easily that $\gamma \in y\Lambda$, and $y\gamma = 0$. Thus we have $d\xi = d(y\beta)$ and

$$\operatorname{Ker} \bar{d} = (\operatorname{Ker} d \oplus y\Lambda)/(dy, y)\Lambda \ .$$

Since $\operatorname{Im} \bar{d} = (\operatorname{Im} d + y\Lambda)/(dy, y)\Lambda$ and $\operatorname{Im} d \subset \operatorname{Ker} d$, we have

$$H^*(\bar{\Lambda}, \bar{d}) = \frac{\operatorname{Ker} \bar{d}}{\operatorname{Im} \bar{d}} = \frac{\operatorname{Ker} d \oplus y\Lambda}{\operatorname{Im} d \oplus y\Lambda} = \frac{\operatorname{Ker} d}{\operatorname{Im} d} = H^*(\Lambda, d) \ .$$

In the remainder of this section, we assume that Λ has a finite number of generators in each degree. So, for all $n \in N$, Λ_n and $H^n(\Lambda)$ are finite dimensional vector spaces.

We can consider the Poincaré series

$$S_\Lambda(T) = \sum_{n\geq 0} (\dim_k \Lambda_n)T^n \ , \qquad S_{H^*(\Lambda)}(T) = \sum_{n\geq 0} (\dim_k H^n(\Lambda))T^n \ .$$

Definition. Let $S(T) = \sum_{n\in N} a_n T^n$ and $S'(T) = \sum_{n\in N} b_n T^n$ be two formal series with real coefficients, we say that $S(T) \leq S'(T)$ if and only if we have $a_n \leq b_n$, for every $n \in N$.

Proposition 3. *Let (Λ, d) be a differential graded algebra, and y an exterior generator of degree $2r+1 \geq 3$ such that $dy = 0$. Then we have*

$$S_{H^*(\Lambda/y\Lambda,\bar{d})}(T) \leq S_{H^*(\Lambda,d)}(T)/(1-T^{2r}) ,$$

where $\bar{d}$ is the induced differential on the quotient.

Proof. Let π be the canonical morphism $\Lambda \to \Lambda/y\Lambda$. If $s \in N$, we define $\Lambda[-s] = \bigoplus_{n \in N} \Lambda[-s]_n$ by

$$\Lambda[-s]_n = 0 \quad \text{for } n < s , \qquad \Lambda[-s]_n = \Lambda_{n-s} \quad \text{for } n \geq s .$$

Let φ be the map $\Lambda/y\Lambda[-2r-1] \to \Lambda$ defined by

$$\varphi(\xi) = \xi y \qquad \text{for all } \xi \in \Lambda/y\Lambda[-2r-1] .$$

We check easily that the sequence

$$0 \longrightarrow \Lambda/y\Lambda[-2r-1] \xrightarrow{\varphi} \Lambda \xrightarrow{\pi} \Lambda/y\Lambda \longrightarrow 0$$

is an exact sequence of differential graded algebras. So we have the long exact sequence of cohomology:

$$\begin{array}{l}\cdots \xrightarrow{d_n} H^n(\Lambda/y\Lambda[-2r-1]) \xrightarrow{H^n(\varphi)} H^n(\Lambda) \\ \qquad\qquad \| \\ \qquad H^{n-2r-1}(\Lambda/y\Lambda) \\ \longrightarrow H^n(\Lambda/y\Lambda) \xrightarrow{d_{n+1}} H^{n+1}(\Lambda/y\Lambda[-2r-1]) \longrightarrow \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \| \\ \qquad\qquad\qquad H^{n-2r}(\Lambda/y\Lambda)\end{array}$$

Let $K_n = \operatorname{Im} H^n(\varphi)$ and $K = \bigoplus_{n \in N} K_n$. The long exact sequence splits and gives

$$0 \to K_n \to H^n(\Lambda) \to H^n(\Lambda/y\Lambda) \to H^{n-2r}(\Lambda/y\Lambda) \to K_{n+1} \to 0 ,$$

then we have, for every $n \in N$,

$$\begin{aligned}\dim_k K_n - \dim_k H^n(\Lambda) + \dim_k H^n(\Lambda/y\Lambda) \\ - \dim_k H^{n-2r}(\Lambda/y\Lambda) + \dim_k K_{n+1} = 0 .\end{aligned}$$

Hence

$$(1+T) \times (1/T) \times S_K(T) - S_{H^*(\Lambda)}(T) + (1-T^{2r})S_{H^*(\Lambda/y\Lambda)}(T) = 0 ,$$

or

$$\begin{aligned} S_{H^*(\Lambda/y\Lambda)(T)} &= [1/(1 - T^{2r})]S_{H^*(\Lambda)}(T) \\ &\quad - [(1 + T)/(1 - T^{2r})] \times (1/T) \times S_K(T) . \end{aligned}$$

Since $S_K(T)$ has positive coefficients, the product $[(1 + T)/(1 - T^{2r})] \times (1/T) \times S_K(T)$ also has positive coefficients, and we have the inequality.

Proposition 4. *Let (Λ, d) be a differential graded algebra, and x a polynomial generator of degree $2s$ such that $dx = 0$. Then we have*

$$S_{H^*(\Lambda/x\Lambda,\bar{d})}(T) \leq (1 + T^{2s-1})S_{H^*(\Lambda,d)}(T) ,$$

where $\bar{d}$ is the differential deduced from d by quotient.

Proof. Let $\mu\colon \Lambda[-2s] \to \Lambda$ be the multiplication by x. The sequence $0 \to \Lambda[-2s] \xrightarrow{\mu} \Lambda \xrightarrow{\pi} \Lambda/x\Lambda \to 0$, where π is the canonical morphism, is an exact sequence of differential graded algebras. Then we can write the long exact sequence

$$\cdots \longrightarrow H^{n-2s}(\Lambda) \xrightarrow{H^n(\mu)} H^n(\Lambda) \longrightarrow H^n(\Lambda/x\Lambda) \longrightarrow H^{n-2s+1}(\Lambda) \longrightarrow \cdots .$$

Let $I_n = \operatorname{Im}(H^n(\mu))$, and $I = \oplus I_n$. For every $n \in N$, we have

$$0 \to I_n \to H^n(\Lambda) \to H^n(\Lambda/x\Lambda) \to H^{n-2s+1}(\Lambda) \to I_{n+1} \to 0 ,$$

which gives us

$$(1 + T) \times (1/T) \times S_I(T) - S_{H^*(\Lambda)}(T) + S_{H^*(\Lambda/x\Lambda)}(T) - T^{2s-1}S_{H^*(\Lambda)}(T) = 0 ,$$

or

$$S_{H^*(\Lambda/x\Lambda,\bar{d})}(T) = (1 + T^{2s-1})S_{H^*(\Lambda,d)}(T) - (1 + T) \times (1/T) \times S_I(T)$$

with $S_I(T) \geq 0$.

2. Proof of the theorem

Since M is a simply connected finite complex, its minimal model Λ has a finite number of generators in each degree and $\Lambda_1 = 0$. Also, $H^*(\Lambda)$ is a finite dimensional vector space, and the algebra $H^*(\Lambda)$ has at least one generator except when $\Lambda = k$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). If $H^*(\Lambda, d)$ is generated by one element, we use Proposition 1 and make a direct calculation to show that the Betti numbers of the space of all maps of S^1 into M are bounded. See Addendum.

(i) $\Rightarrow$ (ii). (a) We claim that when M is a finite complex, the algebra $H^*(M)$ requires at least two generators if and only if the minimal model Λ of M has at least two exterior generators.

We first remark that Λ has exterior generators since $H^*(\Lambda)$ is finite. By

Proposition 1, if Λ has at least two exterior generators, then $H^*(\Lambda)$ has at least two generators.

Conversely, assume that Λ has one exterior generator. Let $\Lambda = k[x_i]_{i\in I} \otimes k(y)$ where the x_i are polynomial generators, and $dy = P(x_1, \cdots, x_n)$. If $dy \neq 0$, we have, by Proposition 2,

$$H^*(\Lambda) = H^*(\Lambda/y, dy)\Lambda) = k[x_i]_{i\in I}/Pk[x_i] .$$

Since $k[x_i]_{i\in I}/Pk[x_i]$ is a finite dimensional vector space, it is easy to prove that card $I \leq 1$. (The results of [5] about the dimension of local rings can be extended to graded algebras.) Then we should have $\Lambda = k[x] \otimes k(y)$ with $dy = \lambda x^h$, $\lambda \in k^*$, $h \geq 2$, and therefore $H^*(\Lambda, d)$ is generated by one element. If $dy = 0$, we have, by Proposition 3,

$$S_{k[x_i]_{i\in I}}(T) \leq [1/(1 - T^{2r})]S_{H^*(\Lambda)(T)} = P(T)/(1 - T^{2r}) ,$$

where $P(T) \in \mathbf{Z}[T]$, and $2r + 1 = \deg y$. Let $A = k[x_i]_{i\in I} = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$. The above inequality shows that the dimension of A_n is bounded, independent of n. This proves card $I \leq 1$. If $\Lambda = k[x] \otimes k(y)$ with $dy = 0$, we have necessarily $dx = 0$, contradicting the fact that $H^*(\Lambda)$ is finite dimensional. So we have $\Lambda = k(y)$ with $\deg y$ odd, and $H^*(\Lambda) = \Lambda$ is generated by one element. This proves our claim.

(b) Let y_1 and y_2 be the first two exterior generators of Λ. We denote the generators of Λ by increasing degrees: $x_1, \cdots, x_n; y_1; x_{n+1}, \cdots, x_r; y_2; \cdots,$ where the $(x_i)_{1\leq i\leq r}$ are the first polynomial generators (perhaps $r = 0$, or $n = 0$). We have $dx_1 = \cdots = dx_n = 0$.

1st case: $dy_1 \neq 0$. Then $dy_1 = P_1(x_1, \cdots, x_n)$, $n \geq 1$, and $dy_2 = P_2(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_r)$ where $P_1 \in k[x_1, \cdots, x_n]$ and $P_2 \in k[x_1, \cdots, x_r]$. Let $m \in [n, r - 1]$, and assume that $dx_1 = \cdots = dx_m = 0$. We shall prove that $dx_{m+1} = 0$.

We have $dx_{m+1} = Q(x_1, \cdots, x_m)y_1$ where $Q \in k[x_1, \cdots, x_m]$. Since we have $d^2x_{m+1} = 0$, we deduce that $Qdy_1 = 0$, so that $Q = 0$. This proves that $dx_1 = \cdots = dx_r = 0$.

In Λ', the elements $\left(\prod_{i=1}^r \bar{x}_i\right)\bar{y}_1^\alpha \bar{y}_2^\beta$ where $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2$ are cycles, because $d'\bar{x}_i = 0$, $d'\bar{y}_1 \in (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)\Lambda'$ and $d'\bar{y}_2 \in (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_r)\Lambda'$. It is easy to see that $\operatorname{Im} d' \subset (x_i, y_i)\Lambda'$. Thus the elements $\left(\prod_{i=1}^r \bar{x}_i\right)\bar{y}_1^\alpha \bar{y}_2^\beta$ are homologically independent.

If $\deg y_1 = 2r_1 + 1$, and $\deg y_2 = 2r_2 + 1$, then let $m = \text{l.c.m.}\ (r_1, r_2)$. For every $N \in \mathbf{N}$, in $H^{2Nm+\sum_{i=1}^r \deg x_i}(\Lambda')$ there are $N + 1$ elements $\left(\prod_{i=1}^r \bar{x}_i\right)\bar{y}_1^\alpha \bar{y}_2^\beta$ which are homologically independent. Hence the dimensions of $H^r(\Lambda', d')$ are unbounded.

2nd case: $dy_1 = 0$. If $dy_2 = 0$, let $\deg y_1 = 2r_1 + 1$, $\deg y_2 = 2r_2 + 1$,

$m = \text{l.c.m.}\,(r_1, r_2)$. Then for every $N \in \boldsymbol{N}$ in $H^{2Nm}(\Lambda')$ we have $N+1$ elements $\bar{y}_1^\alpha \bar{y}_2^\beta$, where $(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{N}^2$, which are linearly independent. So the dimensions of $H^n(\Lambda', d')$ are not bounded. Assume $dy_2 = P(x_1, \cdots, x_r) \neq 0$. Then we have

$$dx_1 = 0\,, \quad \cdots\,, \quad dx_n = 0\,, \quad dx_{n+1} = Q_{n+1}(x_1, \cdots, x_n)y_1\,, \quad \cdots\,,$$
$$dx_i = Q_i(x_1, \cdots, x_{i-1})y_1, \quad \cdots\,, \quad dx_r = Q_r(x_1, \cdots, x_{r-1})y_1\,, \qquad (r \geq 1)\,,$$

where Q_i is a polynomial of degree ≥ 1. Let $2s_i$ be the degree of x_i for $i = 1, \cdots, r$. Let $\Lambda'_{(1)} = \Lambda'/x_1\Lambda'$ with the differential $d'_{(1)}$ induced by d'. Then we have $d'_{(1)}x_2 = 0$ and, by Proposition 4,

$$S_{H^*(\Lambda'_{(1)}, d'_{(1)})}(T) \leq (1 + T^{2s_1 - 1})S_{H^*(\Lambda', d')}(T)\ .$$

So consider the successive quotients

$$\Lambda'_{(2)} = \Lambda'/(x_1, x_2)\Lambda'\,, \quad \cdots\,, \quad \Lambda'_{(r)} = \Lambda'/(x_1, \cdots, x_r)\Lambda'\ .$$

Let $d'_{(r)}$ be the differential on $\Lambda'_{(r)}$ induced by d'. By an inductive argument, we see that

$$S_{H^*(\Lambda'_{(r)}, d'_{(r)})}(T) \leq \prod_{i=1}^{r} (1 + T^{2s_i - 1})S_{H^*(\Lambda', d')}(T)\ .$$

So, if the dimensions of $H^n(\Lambda'_{(r)})$ are not bounded, then the dimensions of $H^n(\Lambda')$ will be unbounded also. Since $dy_2 = P_2(x_1, \cdots, x_r)$ where P_2 is a polynomial of degree ≥ 2, by the formula we have $d'\bar{y}_2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial P_2}{\partial x_i}\bar{x}_i$; thus we have $d'_{(r)}\bar{y}_2 = 0$. The elements $\bar{y}_1^\alpha \bar{y}_2^\beta$ with $(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{N}^2$ are closed in $\Lambda'_{(r)}$ and are homologically independent. So the dimensions of $H^n(\Lambda'_{(r)}, d'_{(r)})$ are unbounded. This completes the proof of the theorem.

Addendum. Now we calculate the cohomology ring of $\Lambda(M)$ when H^*M has one generator.

1. If H^*M is the exterior algebra on one generator y in degree $2n+1$, then clearly $H^*\Lambda(M)$ is $\Lambda(y, \bar{y})$ the exterior algebra on y tensor the polynomial algebra on $\bar{y}$ in degree $2n$.

2. If $H^*M = \{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ with $x^{n+1} = 0$ and degree $x = 2k$, then the model of M is $\Lambda(x, y; dy = x^{n+1})$, and we have to calculate $H^*(\Lambda', d')$ where $\Lambda' = \Lambda(x, y, \bar{x}, \bar{y})$ with $d'x = d'\bar{x} = 0$, $d'y = x^{n+1}$ and $d'\bar{y} = (n+1)x^n\bar{x}$.

By Proposition 2 we can set $y = 0$ and $d'y = x^{n+1}$ equal to zero, and calculate the cohomology of $\bar{\Lambda} = \Lambda(x, \bar{x}, \bar{y})$ where $x^{n+1} = 0$, $dx = d\bar{x} = 0$ and $d\bar{y} = x^n\bar{x}$ (the constant can be ignored by replacing $\bar{y}$ by $\bar{y}/(n+1)$). So in $\bar{\Lambda}$ the cycles in positive degrees make up the ideal of x and $\bar{x}$, while the boundaries make up the ideal of $x^n\bar{x}$. The reduced cohomology ring of $\Lambda(M)$ can then be described as the quotient of the ideal of x and $\bar{x}$ in $\bar{\Lambda}$ modulo the ideal of

$x^n\bar{x}$. This quotient is isomorphic to the finite dimensional ring $\Lambda^+(x, \bar{x})/(x^{n+1}, x^n\bar{x})$ (without unit) tensor the polynomial algebra (with unit) on one generator $\bar{y}$ in degree $2(k(n+1)-1)$ where degree $x = 2k$, degree $\bar{x} = 2k-1$. Clearly, the Betti numbers of $\Lambda(M)$ are bounded.

Notice that the reduced cohomology ring of $\Lambda(M)$ is totally nilpotent (every $(n+1)$ foldp roduct is zero). For example, for $M = S^2$ we obtain the zero ring on additive generators in dimensions $1, 2, 3, 4, \cdots$ for $H^*\Lambda(M)$. This degeneracy in the ring structure belies the structure of the homotopy groups of $\Lambda(M)$ which has total rank 4 (over Q).

This difference is made up by a rich structure of M assey products or higher order cup-products. All this information is carried by the minimal model which is simpler to describe for these spaces than the cohomology ring itself.

Bibliography

[1] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan & D. Sullivan, *The real homotopy theory of Kaehler manifolds*, Invent. Math. **29** (1975) 245–274.

[2] D. Gromoll & W. Meyer, *Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds*, J. Differential Geometry **3** (1969) 493–510.

[3] M. C. Heydemann-Tcherkez & M. Vigué-Poirrier, *Application de la théorie des polynômes de Hilbert-Samuel à l'étude de certaines algèbres différentielles*, C. R. Acad. Sci. Paris **278** (1974) 1607–1610.

[4] W. Klingenberg, *Existence of infinitely many closed geodesics*, J. Differential Geometry **11** (1976) 299–308.

[5] M. Matsumura, *Commutative algebra*, Benjamin, New York, 1970.

[6] D. Sullivan, *Differential forms and the topology of manifolds*, Manifolds-Tokyo 1973 (Proc. Internat. Conf. on Manifolds and Related Topics in Topology), University of Tokyo Press, Tokyo, 1975, 37–49.

[7] ——, *Infinitesimal computations in topology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 47 (1977).

[8] ——, *Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture*, Ann. of Math. **100** (1974) 1–79.

[9] ——, *A formula for the homology of function spaces*, to appear in Bull. Amer. Math. Soc.

Université de Paris-sud, Orsay
Institut des Hautes Etudes Scientifiques
Bures-sur Yvette

Offered by the Authors

THE RATIONAL HOMOTOPY THEORY OF CERTAIN PATH SPACES WITH APPLICATIONS TO GEODESICS

BY KARSTEN GROVE, STEPHEN HALPERIN AND MICHELINE VIGUÉ-POIRRIER

Reprint from *Acta mathematica*, Vol. 140, 1978

THE RATIONAL HOMOTOPY THEORY OF CERTAIN PATH SPACES WITH APPLICATIONS TO GEODESICS

BY

KARSTEN GROVE(1), STEPHEN HALPERIN and MICHELINE VIGUÉ–POIRRIER

University of Copenhagen, Denmark *University of Toronto, Canada*
Université de Paris-Sud, Orsay, France

It is well known that the topology of various path spaces on a complete riemannian manifold M is closely related to the existence of various kinds of geodesics on M. Classical Morse theory and the theory of closed geodesics are beautiful examples of this sort.

The motivation for the present paper is the study of geodesics satisfying a very general boundary condition of which the above examples and the example of isometry-invariant geodesics are particular cases. In particular, we generalize a result of Sullivan–Vigué [16].

Let $N \subset M \times M$ be a submanifold of the riemannian product $M \times M$. An *N-geodesic* on M is a geodesic c: $[0, 1] \to M$ which satisfies the boundary condition

$$(N) \qquad (c(0), c(1)) \in N \quad \text{and} \quad (\dot{c}(0), -\dot{c}(1)) \in TN^{\perp},$$

where $TN^{\perp}$ is the normal bundle of N in $M \times M$. If $N = V_1 \times V_2$, where $V_i \subset M$, $i = 1, 2$ are submanifolds of M then an N-geodesic is simply a $V_1 - V_2$ *connecting geodesic* (orthogonal to each V_i). If N is the graph of an isometry, A, of M then an N-geodesic is a geodesic which extends uniquely to an *A-invariant geodesic* c: $\mathbf{R} \to M$; i.e.

$$c(t+1) = A(c(t)), \quad t \in \mathbf{R}.$$

When A has finite order ($A^k = \mathrm{id}$) then c is in fact closed ($c(t+k) = c(t)$, $t \in \mathbf{R}$).

The study of N-geodesics on M proceeds via critical point theory for the energy integral on a suitable Hilbert manifold of curves with endpoints in N. This Hilbert manifold is homotopy equivalent to the space M_N^I of continuous curves f: $[0, 1] \to M$ satisfying $(f(0), f(1)) \in N$, with the compact open topology (cf. Grove [4], [6]).

(1) Part of this work was done while the first named author visited the IHES at Bures-sur-Yvette during May 1976.

In this paper we apply Sullivan's theory of minimal models to study the rational homotopy type of M_N^I, and hence to obtain information about N-geodesics.

Sullivan's theory (cf. [14], [15] and [8]) associates with each path connected space S a certain differential algebra $(\Lambda X_S, d_S)$ over $\mathbf{Q}$ which describes its rational homotopy type. $(\Lambda X_S, d_S)$ is called the minimal model of S and $H(\Lambda X_S)$ is the rational (singular) cohomology of S. As an algebra ΛX_S is the free graded commutative algebra over the graded space X_S. If S is nilpotent and its rational cohomology has finite type then X_S is the (rational) dual of the graded space $\pi_*(S)\otimes\mathbf{Q}$. (See section 1 for more details.)

Our main result is an explicit construction of the *minimal* model for the space $M_{G(g)}^I$, where $G(g)$ is the graph of a so called 1-rigid map and M is any 1-connected topological space whose rational cohomology has finite type (Theorem 3.17). This gives in particular a new proof of Sullivan's theorem for the space of closed curves M^{S^1} [14]. Surprisingly enough the minimal model for $M_{G(g)}^I$ has exactly the same form as the minimal model for the space of closed curves on a space M'. This space, however, is not obviously related to M and it can be much bigger than M. For this reason the results of Sullivan–Vigué [16] do not carry over to our more general case in a completely satisfactory manner although some of the methods from [16] are important for us.

The minimal model for $M_{G(g)}^I$ contains all information about the rational homotopy theory of $M_{G(g)}^I$, in particular about the cohomology. An immediate consequence of the model is the following (Theorem 4.1).

THEOREM. *If the rational cohomology of $M_{G(g)}^I$ is non trivial and g is rigid at* 1 *then $M_{G(g)}^I$ has non-zero cohomology in an infinite arithmetic sequence of dimensions.*

The main application of the model is however (cf. Theorem 4.5).

THEOREM. *If M is* 1*-connected, $H^*(M)$ finite dimensional and $g\colon M\to M$ rigid at* 1, *then $M_{G(g)}^I$ has a bounded sequence of Betti numbers if and only if*

$$\dim \pi_*^{\text{even}}(M)^{g_\#}\otimes\mathbf{Q}\leqslant \dim \pi_*^{\text{odd}}(M)^{g_\#}\otimes\mathbf{Q}\leqslant 1$$

where $\pi_*(M)^{g_\#}$ is the homotopy of M fixed by the induced map $g_\#$.

When $g=\mathrm{id}$ this specializes to the main theorem of Sullivan–Vigué [16]. If we combine this result with the main theorem of Grove–Tanaka [7] we obtain (generalizing the application by Sullivan–Vigué of Gromoll–Meyer [3]).

THEOREM. *Let M be a compact* 1*-connected riemannian manifold and let g be a finite order isometry of M. If g has at most finitely many invariant geodesics then*

$$\dim \pi_*^{\text{even}}(M)^{g_\#} \otimes \mathbf{Q} \leqslant \dim \pi_*^{\text{odd}}(M)^{g_\#} \otimes \mathbf{Q} \leqslant 1.$$

As a consequence we obtain (cf. Cor. 4.10).

COROLLARY. *Let M be a 1-connected, compact riemannian manifold whose cohomology is spherically generated (e.g. M formal) and let g be a finite order isometry of M. If the induced map g^* on cohomology fixes at least two generators then g has infinitely many invariant geodesics.*

The paper is divided into 4 sections. In section 1 we recall briefly the main results in the theory of (minimal) models and explain how they generalize when an action of a finite group is involved. Besides being of interest in itself we use these results in section 3. In section 2 we translate the fibration

$$\Omega M \longrightarrow M_N^I \xrightarrow{\pi_N} N,$$

to models. Here M is any 1-connected space, and N a path connected subspace of $M \times M$. Furthermore, $\pi_N(f) = (f(0), f(1))$, ΩM is the ordinary loop space of M and M_N^I is defined as above. We exhibit a (not necessarily minimal) model for M_N^I (Theorem 2.8). In particular (Cor. 2.11) we obtain explicitly the space of generators for the minimal model of M_N^I. We also apply results from the theory of models to our model of M_N^I (Theorem 2.15 and Cor. 2.16).

In particular, suppose N is a closed submanifold of $M \times M$ and M is a complete riemannian manifold. Let p_i: $N \to M$, $i=0, 1$ be the left and right projections and assume that either $p_0(N)$ or $p_1(N)$ is compact and that $V = N \cap \triangle(M)$ is a closed submanifold of N. Then according to Grove [5] if there are no N-geodesics on M the inclusion $V \to M_N^I$ is a homotopy equivalence. Thus Theorem 2.15 yields:

THEOREM. *Suppose in addition to the above conditions N is 1-connected and let*

$$(p_i)_\#: \pi_*(N) \otimes \mathbf{Q} \to \pi_*(M) \otimes \mathbf{Q}, \quad i = 0, 1$$

be the linear maps induced by p_i, $i=0, 1$. If for some complete metric on M there are no N-geodesics, then coker $((p_0)_\# - (p_1)_\#)$ *is spanned by elements of even degree and*

$$\dim \text{coker } ((p_0)_\# - (p_1)_\#) \leqslant \dim V.$$

As a second application we get from Example 2.21 the

THEOREM. *Let Σ, Σ_1 and Σ_2 be spheres (possibly exotic) and suppose Σ_1 and Σ_2 are imbedded in Σ so that $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ is a (collection of) closed submanifold(s) of Σ. Then for any riemannian metric on Σ there are $\Sigma_1 - \Sigma_2$ connecting geodesics.*

Finally in section 3 and section 4 we specialize to the case $N=G(g)$ and get the results on isometry invariant geodesics.

1. Equivariant minimal models

Throughout the paper all vector spaces are defined over the rationals $\mathbf{Q}$ unless otherwise said. We begin by recalling some facts from Sullivan's theory of minimal models (see Sullivan [14], [15] and Halperin [8]).

A *commutative graded differential algebra* (*c.g.d.a.*) is a pair (A, d_A) where $A=\oplus_{p=0}^{\infty} A^p$ is a non-negatively graded algebra (over $\mathbf{Q}$) with identity, such that $ab=(-1)^{pq}ba$ for $a\in A^p$, $b\in A^q$ and d_A: $A\to A$ is a derivation of degree 1 with $d_A^2=0$.

$\wedge X$ will denote the *free graded commutative algebra* over a graded space X i.e.

$$\wedge X = \text{exterior } (X^{\text{odd}})\otimes \text{symmetric } (X^{\text{even}}).$$

$\wedge^+ X$ is the ideal of polynomials with no constant term i.e. $\wedge^+X=\sum_{j>1}\wedge^j X$.

A *KS-complex* is a c.g.d.a. $(\wedge X, d)$ which satisfies:

(ks_1) There is a homogeneous basis $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$ for X indexed by a well ordered set J such that dx_α is a polynomial in the x_β with $\beta<\alpha$.

If $(\wedge X, d)$ in addition to (ks_1) satisfies

(ks_2) $dX\subset\wedge^+X\cdot\wedge^+X$

then $(\wedge X, d)$ is said to be *minimal.*

In the rest of the paper $(\wedge X, d)$ is always assumed to be a connected KS-complex. Let $Q(\wedge X)=\wedge^+X/\wedge^+X\cdot\wedge^+X$ be the indecomposables of $\wedge X$ and ζ: $\wedge^+X\to Q(\wedge X)$ the projection. Define a differential $Q(d)$ on $Q(\wedge X)$ by $Q(d)\zeta=\zeta d$. Then $(\wedge X, d)$ is minimal if and only if $Q(d)=0$. If ψ: $(\wedge X, d)\to(\wedge X', d')$ is a c.g.d.a. map, we define $Q(\psi)$: $Q(\wedge X)\to Q(\wedge X')$ by $Q(\psi)\zeta=\zeta'\psi$. Note that ζ restricts to an isomorphism $X\to Q(\wedge X)$ which allows us to identify these spaces.

We shall now recall the notation of homotopy due to Sullivan [15, § 3] (see also [8; chap. 5]). Let $(\wedge X, d)$ be a KS-complex with X strictly positively graded (i.e. $\wedge X$ is connected.)

$(\wedge X^I, D)$ is the c.g.d.a. obtained by tensoring $(\wedge X, d)$ with the "contractible" c.g.d.a. $(\wedge\bar{X}\otimes\wedge D\bar{X}, D)$, where

(c_1) $\bar{X}$ is the suspension of X i.e. $\bar{X}^p=X^{p+1}$

and

(c_2) D: $\bar{X}\to D\bar{X}$ is an isomorphism.

The degree -1 isomorphism $X = \bar{X}$ is written $x \mapsto \bar{x}$.

A derivation i of degree -1 and a derivation θ of degree zero in ΛX^I are defined by

$$ix = \bar{x},\ i\bar{x} = iD\bar{x} = 0 \quad \text{for all } x \in X$$

and

$$\theta = Di + iD.$$

Let λ_0: $\Lambda X \to \Lambda X^I$ denote the standard inclusion and set $\lambda_1 = e^\theta \circ \lambda_0$. Here e^θ is well defined because for any $\Phi \in \Lambda X^I$ there is an integer n such that $\theta^n \Phi = 0$ [8]. Note that if Π: $\Lambda X^I \to \Lambda X$ is the projection defined by

$$\Pi\, x = x,\ \Pi\, \bar{x} = \Pi\, D\bar{x} = 0 \quad \text{for all } x \in X$$

then λ_0 and Π induce inverse cohomology isomorphisms because $(\Lambda \bar{X} \otimes \Lambda D\bar{X}, D)$ is acyclic.

Definition 1.1. Two homomorphisms γ_0, γ_1: $(\Lambda X, d) \to (A, d_A)$ of c.g.d.a.'s are called *homotopic* (written $\gamma_0 \sim \gamma_1$) if there is a c.g.d.a. map Γ: $(\Lambda X^I, D) \to (A, d_A)$ such that $\Gamma \circ \lambda_i = \gamma_i$ $i = 0, 1$.

If the c.g.d.a. (A, d_A) is homology connected i.e. $H^0(A) = \mathbf{Q}$ a *model* for (A, D_A) is a KS-complex $(\Lambda X, d)$ together with a homomorphism of c.g.d.a.'s

$$\varphi\colon (\Lambda X, d) \to (A, d_A)$$

which satisfies

(m) φ induces an isomorphism φ^* on cohomology.

If the KS-complex $(\Lambda X, d)$ is minimal we speak of the *minimal model* φ: $(\Lambda X, d) \to (A, d_A)$.

We can now state the following important result (see [15, § 5] and [8, chap. 6]).

THEOREM 1.2. *Let (A, d_A) be a c.g.d.a. with $H^0(A) = \mathbf{Q}$. Then there is a minimal model*

$$\varphi\colon (\Lambda X, d) \to (A, d_A).$$

If φ': $(\Lambda X', d') \to (A, d_A)$ is another minimal model, then there is an isomorphism of c.g.d.a.'s α: $(\Lambda X, d) \to (\Lambda X', d')$ such that $\varphi \sim \varphi' \circ \alpha$. Finally, α is unique up to homotopy.

A number of choices are involved in the construction of φ: $(\Lambda X, d) \to (A, d_A)$. If a finite group G acts on (A, d_A), the flexibility in the construction enables us to obtain an induced action of G on $(\Lambda X, d)$ and to make φ equivariant. In fact, one can carry out Sullivan's proof of Theorem 1.2 equivariantly using that any G-invariant subspace of a vector space has a G-invariant complement. Hence

THEOREM 1.3. *Let (A, d_A) be a c.g.d.a. with $H^0(A)=\mathbf{Q}$ and let G be a finite group acting on A by c.g.d.a. maps. Then there is a minimal model*

$$\varphi\colon (\Lambda X, d) \to (A, d_A)$$

such that G acts on $(\Lambda X, d)$ and φ is equivariant. If $\varphi'\colon (\Lambda X', d') \to (A, d_A)$ is another G-equivariant minimal model, then there is a G-isomorphism $\alpha\colon (\Lambda X, d) \to (\Lambda X', d')$ such that $\varphi \sim \varphi' \circ \alpha$ and α is unique up to homotopy.

There is also an equivariant theorem for maps which again can be proved by making the corresponding non-equivariant proof (cf. e.g. [8, Theorem 5.19]) equivariant.

THEOREM 1.4. *Let (A, d_A) and $(A', d_{A'})$ be a c.g.d.a.'s with $H^0(A)=H^0(A')=\mathbf{Q}$ and with actions of a finite group G. Furthermore, let*

$$\varphi\colon (\Lambda X, d) \to (A, d_A) \quad \text{and } \varphi'\colon (\Lambda X', d') \to (A', d_A)$$

be equivariant minimal models as in Theorem 1.3. Then for any equivariant c.g.d.a. map Ω: $(A, d_A) \to (A', d_{A'})$ there is an equivariant c.g.d.a. map $\omega\colon (\Lambda X, d) \to (\Lambda X', d')$ such that $\varphi' \circ \omega \sim \Omega \circ \varphi$.

Now suppose M is a topological space. Denote by $(A(M), d)$ the c.g.d.a. of *rational differential (PL) forms* on M.

A *rational p-form* $\Phi \in A^p(M)$ on M is a function which assigns to each singular q-simplex $\sigma\colon \Delta^q \to M$ a C^∞ differential p-form Φ_σ on the standard q-simplex Δ^q such that

(d_1) Φ_σ is in the c.g.d.a. generated (over $\mathbf{Q}$) by the barycentric coordinate functions.

and

(d_2) The map $\sigma \mapsto \Phi_\sigma$ is compatible with face and degeneracy operations.

Multiplication and differentiation are defined in $A(M)$ by $(\Phi \wedge \Psi)_\sigma = \Phi_\sigma \wedge \Psi_\sigma$ and $(d\Phi)_\sigma = d(\Phi_\sigma)$.

If $g\colon M \to M'$ is a continuous map, there is an induced map $A(g)\colon A(M') \to A(M)$ of c.g.d.a.'s given by $(A(g)\Phi)_\sigma = \Phi_{g \circ \sigma}$. One has the following important result.

THEOREM 1.5. (Sullivan–Whitney–Thom). *Integration yields a natural isomorphism of graded algebras*

$$\int^* : H^*(A(M)) \to H^*(M)$$

where $H^*(M)$ denotes singular cohomology with coefficients in $\mathbf{Q}$.

When M is path connected a (minimal) model for $(A(M), d)$ is called simply a *(minimal) model for* M. The minimal model for M will be denoted by

$$\varphi_M\colon (\Lambda X_M, d_M) \to (A(M), d).$$

The space of indecomposable elements:

$$\pi_\psi^*(M) = Q(\Lambda X_M) \cong X_M$$

is called the *pseudo dual homotopy of* M. If $H^*(M)$ has finite type (i.e. finite dimensional in each degree) and M is nilpotent then there is a natural isomorphism

$$\pi_\psi^*(M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_*(M), \mathbf{Q})$$

(cf. [15] and [8]).

2. A model for the space M_N^I

Let M be a simply connected space whose rational cohomology has finite type, and fix a path connected subspace $N \subset M \times M$.

Let M^I be the space of continuous maps $f\colon [0, 1] \to M$ with the compact open topology. In this section we shall determine a model for the subspace $M_N^I \subset M^I$ given by

$$M_N^I = \{f \in M^I \,|\, (f(0), f(1)) \in N\}.$$

We have the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} M \times M & M^I \arrow[l, "\pi"'] & \Omega M \arrow[l, "j"'] \\ N \arrow[u, "i_N"] & M_N^I \arrow[l, "\pi_N"] \arrow[u] & \Omega M \arrow[l, "j_N"] \arrow[u, equal, "\text{incl.}"'] \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

where $\pi(f) = (f(0), f(1))$, π_N is the restriction of π and $\Omega M = \pi_N^{-1}(m_0, m_1) = \{f \in M^I \,|\, f(0) = m_0$ and $f(1) = m_1\}$ for a chosen base point $(m_0, m_1) \in N$.

Both rows in (2.1) are Hurewicz fibrations which we denote respectively by $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{F}_N$. Note that $\mathfrak{F}_N = i_N^*(\mathfrak{F})$.

We also have a homotopy equivalence $\eta\colon M \to M^I$ given by: $\eta(m)$ is the constant map $I \to m$. Clearly

$$\pi \circ \eta = \Delta\colon M \to M \times M \tag{2.2}$$

is the diagonal of M.

Now we begin the translation of (2.1) to models. Since M is 1-connected and $H^*(M)$ has finite type it follows that ΛX_M is 1-connected; i.e. $X_M^0 = X_M^1 = 0$, and has finite type (see [8; Cor. 3.11 and Cor. 3.15]).

Consider the diagram

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & (\Lambda X_M^I, D) \arrow[drr, "\bar{\varrho}"] & & \\ \Lambda X_M \otimes \Lambda X_M \arrow[urr, "\lambda_0\otimes\lambda_1"] \arrow[dr, "\text{incl.}"'] & & & & (\Lambda \bar{X}_M, 0) \\ & \Lambda X_M \otimes \Lambda X_M \otimes \Lambda \bar{X}_M \arrow[uu, "h"] \arrow[urrr, "\text{proj.}"'] & & & \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

where λ_0 and λ_1 are defined on page 281 and

$$\lambda_0 \otimes \lambda_1 (\Phi \otimes \Psi) = \lambda_0 \Phi \cdot \lambda_1 \Psi$$

$$\bar{\varrho} x = \bar{\varrho} D \bar{x} = 0 \quad \text{and } \bar{\varrho}\bar{x} = \bar{x}$$

and

$$h(\Phi \otimes \Psi \otimes \bar{x}) = \lambda_0 \Phi \cdot \lambda_1 \Psi \cdot (1 \otimes \bar{x} \otimes 1).$$

By [8, Lemma 5.28] h is an isomorphism of graded algebras (because ΛX_M is minimal.) Since ΛX_M is 1-connected, $d_M X_M^p \subset \Lambda\, (\oplus_{j=2}^{p-1} X_M^j)$. Hence (5.5) and (5.6) of [8] yield

$$\lambda_1 x - \lambda_0 x = D\bar{x} + \Omega(x), \quad x \in X_M^p \tag{2.4}$$

where

$$\Omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iD)^n}{n!} x \in \{\Lambda(X_M^{<p}) \otimes \Lambda(\bar{X}_M^{<p-1}) \otimes \Lambda(D\bar{X}_M^{<p})\} \cap \ker \Pi$$

and Π is defined on p. 281.

An easy calculation shows that $\bar{\varrho} D = \bar{\varrho} i D = 0$, and it follows from (2.4) that (2.3) is commutative. Thus (cf. [8, chapers 1 and 5]) (2.3) exhibits $\Lambda X_M \otimes \Lambda X_M \to \Lambda X_M^I \to \Lambda \bar{X}_M$ as a minimal KS-extension.

We shall now define a commutative diagram of c.g.d.a.'s

$$\begin{tikzcd} \Lambda X_M \otimes \Lambda X_M \arrow[r, "\lambda_0\otimes\lambda_1"] \arrow[d, "\varphi_{M\times M}"'] & \Lambda X_M^I \arrow[r, "\bar{\varrho}"] \arrow[d, "\psi"] & \Lambda X_M \arrow[d, "\varphi_\Omega"] \\ A(M \times M) \arrow[r, "A(\pi)"'] & A(M^I) \arrow[r, "A(j)"'] & A(\Omega M) \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

in which all the vertical maps induce isomorphisms on cohomology.

First let P_L, P_R: $M \times M \to M$ be the left and right projections, and define

$$\varphi_{M\times M}(\Phi \otimes \Psi) = A(P_L) \circ \varphi_M \Phi \cdot A(P_R) \circ \varphi_M \Psi.$$

Since $H^*(M)$ has finite type, the Künneth theorem holds and $\varphi_{M\times M}$ induces an isomorphism $\varphi^*_{M\times M}$ on cohomology. In particular $\varphi_{M\times M}$: $\wedge X_M\otimes\wedge X_M\to A(M\times M)$ is a minimal model for $M\times M$.

Next, note that the projection Π: $\wedge X^I_M\to\wedge X_M$ satisfies $\Pi\circ\lambda_0=\Pi\circ\lambda_1=\mathrm{id}$. Hence $\Pi\circ(\lambda_0\otimes\lambda_1)=\mu$ is the multiplication homomorphism

$$\mu\colon \wedge X_M\otimes\wedge X_M\to\wedge X_M.$$

From this and (2.2) we see that the following diagram is commutative.

$$\begin{tikzcd} A(M^I) \arrow[r, "A(\eta)"] & A(M) \\ \wedge X_M\otimes\wedge X_M \arrow[u, "A(\pi)\circ\varphi_{M\times M}"] \arrow[r, "\lambda_0\otimes\lambda_1"'] & \wedge X^I_M \arrow[u, "\varphi_M\circ\pi"'] \end{tikzcd}$$

Since η is a homotopy equivalence it induces an isomorphism $A(\eta)^*$ on cohomology. Therefore by Sullivan [15, § 3] or Theorem 5.19 of [8] there is a homomorphism of c.g.d.a.'s

$$\psi\colon (\wedge X^I_M, D)\to(A(M^I), d)$$

such that $\psi\circ(\lambda_0\otimes\lambda_1)=A(\pi)\circ\varphi_{M\times M}$ and $A(\eta)\circ\psi\sim\varphi_M\circ\Pi$. Because $A(\eta)^*$, φ^*_M and Π^* are all cohomology isomorphisms, so is ψ^*.

Finally (2.3) shows that ker $\bar{\varrho}$ is generated by $\lambda_0\otimes\lambda_1(X_M\oplus X_M)$ and hence ψ (ker $\bar{\varrho}$) is generated by $A(\pi)\circ\varphi_{M\times M}(X_M\oplus X_M)$. Since $A(j)\circ A(\pi)=0$ on elements of degree >0 it follows that ψ factors to give a c.g.d.a. homomorphism

$$\varphi_\Omega\colon (\wedge\bar{X}_M, 0)\to(A(\Omega M), d)$$

such that (2.5) commutes.

Now since $\mathcal{J}$ is a Hurewicz fibration, M is 1-connected and $H^*(M)$ has finite type, a theorem of Grivel [2] or [8, Th. 20.3] asserts that because $\varphi^*_{M\times M}$ and ψ^* are isomorphisms so is φ^*_Ω. In particular φ_Ω: $(\wedge\bar{X}_M, 0)\to A(\Omega M)$ is a minimal model for the loop space of M.

We now turn our attention to the fibration $\mathcal{J}_N$. Recall that φ_N: $(\wedge X_N, d_N)\to(A(N), d)$ is a minimal model for the path connected space N.

Use (2.1) to obtain from (2.5) the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \wedge X_M\otimes\wedge X_M \arrow[r, "\lambda_0\otimes\lambda_1"] \arrow[d, "A(i_N)\circ\varphi_{M\times M}"'] & \wedge X^I_M \arrow[r, "\bar{\varrho}"] \arrow[d, "A(\mathrm{incl.})\circ\psi"] & \wedge\bar{X}_M \arrow[d, "\varphi_\Omega"] \\ A(N) \arrow[r, "A(\pi_N)"'] & A(M^I_N) \arrow[r, "A(j_N)"'] & A(\Omega M) \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Using again Sullivan [15, § 5] or [8, Th. 5.19] we obtain unique (up to homotopy) c.g.d.a. maps

$$\varphi_0: (\Lambda X_M, d_M) \to (\Lambda X_N, d_N)$$

and

$$\varphi_1: (\Lambda X_M, d_M) \to (\Lambda X_N, d_N)$$

such that $\varphi_N \circ \varphi_0 \sim A(P_L \circ i_N) \circ \varphi_M$ and $\varphi_N \circ \varphi_1 \sim A(P_R \circ i_N) \circ \varphi_M$. Define a homomorphism of c.g.d.a.'s

$$\mu_N: \Lambda X_M \otimes \Lambda X_M \to \Lambda X_N$$

by

$$\mu_N(\Phi \otimes \Psi) = \varphi_0(\Phi) \cdot \varphi_1(\Psi).$$

Then

$$\varphi_N \circ \mu_N \sim A(i_N) \circ \varphi_{M \times M}.$$

Therefore we can apply (9.15.4) of [8] to obtain from (2.6) another commutative diagram of c.g.d.a.'s

$$\begin{array}{ccccc}
\Lambda X_M \otimes \Lambda X_M & \xrightarrow{\lambda_0 \otimes \lambda_1} & \Lambda X_M^I & \xrightarrow{\bar{\varrho}} & \Lambda \bar{X}_M \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi_N \circ \mu_N} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_N} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'_\Omega} \\
A(N) & \xrightarrow[A(\pi_N)]{} & A(M_N^I) & \xrightarrow[A(j_N)]{} & A(\Omega M)
\end{array}$$

in which $\varphi'_\Omega \sim \varphi_\Omega$. In particular φ'^*_Ω is an isomorphism.

Finally, write $\Lambda X_M^I = \Lambda X_M \otimes \Lambda X_M \otimes \Lambda \bar{X}_M$ using the isomorphism h of (2.3). The ideal $\ker \mu_N \otimes \Lambda \bar{X}_M$ is D-stable, and so a c.g.d.a.

$$(\Lambda X_N \otimes \Lambda \bar{X}_M, D_N)$$

is defined by

$$D_N(\Phi \otimes 1) = d_N \Phi \otimes 1 \quad \text{and} \quad D_N \circ (\mu_N \otimes \mathrm{id}) = (\mu_N \otimes \mathrm{id}) \circ D.$$

Clearly ψ_N factors through $(\Lambda X_N \otimes \Lambda \bar{X}_M, D_N)$ to produce the commutative diagram of c.g.d.a.'s

$$\begin{array}{ccccc}
\Lambda X_N & \xrightarrow{\text{incl.}} & (\Lambda X_N \otimes \Lambda \bar{X}_M, D_N) & \xrightarrow{\text{proj.}} & \Lambda \bar{X}_M \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi_N} & & \downarrow{\scriptstyle \psi'_N} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'_\Omega} \\
A(N) & \xrightarrow[A(\pi_N)]{} & A(M_N^I) & \xrightarrow[A(j_N)]{} & A(\Omega M)
\end{array} \tag{2.7}$$

Because φ_N^* and φ'^*_Ω are isomorphisms the comparison theorem, applied to the spectral sequence of Grivel [2] or [8, Th. 20.5] for the fibration $\mathfrak{F}_N$, shows that $\psi_N'^*$ is an isomorphism. Thus we have established

THEOREM 2.8. *A model for the space M_N^I is given by*

$$\psi_N': (\Lambda X_N \otimes \Lambda \bar{X}_M, D_N) \to (A(M_N^I), d).$$

In particular (cf. Sullivan [15] or [8, Cor. 2.4]) the minimal model of M_N^I is generated by $H(X_N \oplus \bar{X}_M, Q(D_N))$, i.e.

$$\pi_\psi^*(M_N^I) = H(X_N \oplus \bar{X}_M, Q(D_N)).$$

Next recall that ΛX_N is minimal and (cf. sec. 1) project the top row of (2.7) to the short exact sequence

$$0 \to (X_N, 0) \to (X_N \oplus \bar{X}_M, Q(D_N)) \to (\bar{X}_M, 0) \to 0.$$

This leads to a long exact sequence

$$\dots \xrightarrow{\partial^*} X_N^p \longrightarrow H^p(X_N \oplus \bar{X}_M, Q(D_N)) \longrightarrow \bar{X}_N^p \xrightarrow{\partial^*} X_N^{p+1} \longrightarrow \dots \tag{2.9}$$

in which clearly $\partial^* = Q(D_N)$.

A straightforward calculation using (2.4) shows that

$$D_N(1 \otimes \bar{x}) = (\varphi_1 - \varphi_0)x - (\mu_N \otimes \mathrm{id})\Omega(x), \quad x \in X_M.$$

Since $\Omega(x)$ is decomposable we conclude

$$\partial^* \bar{x} = (Q(\varphi_1) - Q(\varphi_0))x.$$

If ∂_M^*: $\bar{X}_M \to X_M$ is the canonical isomorphism we can write this as

$$\partial^* = [Q(\varphi_1) - Q(\varphi_0)] \circ \partial_M^*. \tag{2.10}$$

Now the sequence (2.9) allows us to identify $H(X_N \oplus \bar{X}_M, Q(D_N))$ with coker $\partial^* \oplus \overline{\ker \partial^*}$, and so Theorem 2.8 has the following

COROLLARY 2.11. *The space of generators for the minimal model of M_N^I is given by*

$$\pi_\psi^*(M_N^I) = H(X_N \oplus \bar{X}_M, Q(D_N)) = \operatorname{coker}(Q(\varphi_1) - Q(\varphi_0)) \oplus \overline{\ker (Q(\varphi_1) - Q(\varphi_0))}.$$

Next recall that we identify $X_N = \pi_\psi^*(N)$ etc. Since φ_0 and φ_1 correspond respectively to $p_0 = P_L \circ i_N$: $N \to M$ and $p_1 = P_R \circ i_N$: $N \to M$ we have $Q(\varphi_i) = p_i^*$, and (2.9) can be written in the form (cf. [10, sec. 4])

$$\dots \longrightarrow \pi_\psi^p(N) \xrightarrow{\pi_N^*} \pi_\psi^p(M_N^I) \xrightarrow{j_N^*} \pi_\psi^p(\Omega M) \xrightarrow{(p_1^* - p_0^*)\partial_M^*} \pi_\psi^{p+1}(N) \longrightarrow \dots \tag{2.12}$$

Observe that (2.10) is analogous to a result of Grove [6] and that (2.12) is the ψ-analogue of a sequence in [6, Theorem 1.3]. However, unless N is assumed nilpotent (2.12) cannot be obtained from [6] by dualizing; it may be a different sequence entirely!

Now let $V = N \cap \Delta(M)$ and let σ: $V \to M_N^I$ be the inclusion defined by

$$\sigma(x, x): I \to x, \quad (x, x) \in N \cap \Delta(M).$$

Because of applications to geodesics we consider the following conditions:

$$\sigma \text{ is a homotopy equivalence} \tag{2.13}$$

$$H^p(V) = 0, \quad p > r. \tag{2.14}$$

Note that (2.13) implies that V is path connected, and that σ induces an isomorphism $\pi_\psi^*(M_N^I) \to \pi_\psi^*(V)$. Moreover if γ: $V \to N$ is the inclusion then $\pi_N \circ \sigma = \gamma$, and so we can identify $\pi_N^\#$ with $\gamma^\#$.

THEOREM 2.15. *Suppose* (2.13) *and* (2.14) *hold. Then*

(i) $\ker (p_1^\# - p_0^\#)$ *has finite dimension* $\leqslant r$, *and is spanned by elements of even degree.*

(ii) *The sequence*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_\psi^{\mathrm{odd}}(M) \arrow[r, "p_1^\# - p_0^\#"] & \pi_\psi^{\mathrm{odd}}(N) \arrow[r, "\gamma^\#"] & \pi_\psi^{\mathrm{odd}}(V) \arrow[dl, "\partial_M^* \circ j_N^\# \circ (\sigma^\#)^{-1}"] & \\
& & \pi_\psi^{\mathrm{even}}(M) \arrow[r, "p_1^\# - p_0^\#"'] & \pi_\psi^{\mathrm{even}}(N) \arrow[r, "\gamma^\#"'] & \pi_\psi^{\mathrm{even}}(V) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

is exact.

Proof. (i) follows from Lemma 2.18 below, applied to $(\Lambda X_N \otimes \Lambda \bar{X}_M, D_N)$. (ii) follows from (i) and the exactness of (2.12).

COROLLARY 2.16. *The following are equivalent when* (2.13) *and* (2.14) *hold*

(i) $\dim \pi_\psi^*(N) < \infty$

and

(ii) $\dim \pi_\psi^*(V) < \infty$ *and* $\dim \pi_\psi^*(M) < \infty$.

Furthermore, if (i) and (ii) *hold then*

$$\chi_\pi(N) = \chi_\pi(M) + \chi_\pi(V),$$

where $\chi_\pi = \dim \pi_\psi^{\mathrm{even}} - \dim \pi_\psi^{\mathrm{odd}}$ *is the homotopy Euler characteristic.*

Proof. If (i) holds then $\dim \pi_\varphi^{\mathrm{odd}}(M) < \infty$; then $\pi_\varphi^{2p-1}(M) = 0$, if $2p-1 \geqslant m$, some m. Apply Theorem 5.9 of [10] to the projection $(\wedge X_M, d) \to \wedge(\sum_{j>m} X_M^j), 0)$ to obtain $X_M^j = 0$, $j > m$. Hence $\dim \pi_\varphi^*(M) < \infty$ and so (i) implies (ii).

Consider in general (cf. top row of (2.7)) a sequence of connected KS complexes of the form

$$(\wedge Y, d) \xrightarrow{i} (\wedge Y \otimes \wedge X, D) \xrightarrow{\varrho} (\wedge X, 0)$$

in which $(\wedge Y, d)$ is minimal. As above we obtain a long exact sequence

$$\dots \longrightarrow Y^p \xrightarrow{Q(i)^*} H^p(Y \oplus X, Q(D)) \xrightarrow{Q(\varrho)^*} X^p \xrightarrow{\partial^*} Y^{p+1} \longrightarrow \dots \tag{2.17}$$

LEMMA 2.18. *If $H^i(\wedge Y \otimes \wedge X, D) = 0$ for $i > r$ then every homogeneous element in* $\ker \partial^*$ *has odd degree and* $\dim \ker \partial^* \leqslant r$.

Proof. Choose a graded subspace $X_1 \subset X$ so that

$$X = X_1 \oplus \ker \partial^*.$$

This decomposition defines a linear projection $X \to \ker \partial^*$ which extends to a homorphism

$$\varrho_1 \colon \wedge X \to \wedge \ker \partial^*.$$

Composing with ϱ we obtain

$$\varrho_2 = \varrho_1 \circ \varrho \colon (\wedge Y \otimes \wedge X, D) \to (\wedge \ker \partial^*, 0).$$

Moreover, by exactness $\ker \partial^* = \operatorname{im} Q(\varrho)^*$ and since $Q(\varrho_1)$ is the identity in $\ker \partial^*$ we obtain that $Q(\varrho_2)^*$ is surjective. Thus Theorem 5.9 of [10] applies and shows that the product of any $r+1$ elements of positive degree in $H(\wedge \ker \partial^*)$ is zero. Since $H(\wedge \ker \partial^*) = \wedge \ker \partial^*$ this implies the lemma.

We close this section with two examples in which $N = V_0 \times V_1$ and $V_i \subset M$, $i = 0, 1$. Note by the way that it would be no real restriction to consider only the case $N = V_0 \times V_1$ since in fact $M_N^I = M \times M_{N \times \Delta(M)}^I$.

If $N = V_0 \times V_1$ and $i_j \colon V_j \to M$, $j = 0, 1$ are the inclusions then $p_1^\# - p_0^\# \colon \pi_\varphi^*(M) \to \pi_\varphi^*(N)$ can be written as

$$i_1^\# - i_0^\# \colon \pi_\varphi^*(M) \to \pi_\varphi^*(V_0) \oplus \pi_\varphi^*(V_1) \tag{2.19}$$

and if (2.13) and (2.14) hold this can be substituted in the sequence of Theorem 2.15 (ii).

Example 2.20. Suppose V_0 and V_1 are even spheres of dimensions $2l$ and $2m$, and $V = V_0 \cap V_1$ is properly contained in each. Assume (2.13) and (2.14) hold and $\dim H^*(M) < \infty$. Then

$$H^*(V) = H^*(pt)$$

and

$$\sum_p \dim H^p(M)t^p = (1+t^{2l})(1+t^{2m}). \tag{2.21}$$

Indeed, since V is contractible in each of V_0 and V_1, $\gamma^\# = 0$. From (ii) of Theorem 2.15 we then deduce that

$$i_1^\# - i_0^\# : \pi_\psi^{\text{odd}}(M) \to \pi_\psi^{\text{odd}}(V_0 \times V_1)$$

is an isomorphism and

$$i_1^\# - i_0^\# : \pi_\psi^{\text{even}}(M) \to \pi_\psi^{\text{even}}(V_0 \times V_1)$$

is surjective. Since $\dim \pi_\psi^{\text{odd}}(V_0 \times V_1) = \dim \pi_\psi^{\text{even}}(V_0 \times V_1) = 2$ on the one hand, and since by Theorem 1′ of [9]

$$\dim \pi_\psi^{\text{odd}}(M) \geqslant \dim \pi_\psi^{\text{even}}(M)$$

on the other, we must have equality above and hence

$$i_1^\# - i_0^\# : \pi_\psi^*(M) \to \pi_\psi^*(V_0 \times V_1)$$

is an isomorphism. Again by Theorem 2.15 (ii), this implies $\pi_\psi^*(V) = 0$ and so $H^*(V) = H^*(pt)$. It also allows us to apply Corollary 2 to Theorem 5 of [9] which gives (2.21).

Example 2.22. Let M, V_0 and V_1 all be spheres and suppose $V_0 \cap V_1$ is properly contained in each V_i, $i = 0, 1$. Then (2.13) and (2.14) cannot hold. Otherwise as in the above example

$$i_1^\# - i_0^\# : \pi_\psi^{\text{odd}}(M) \to \pi_\psi^{\text{odd}}(V_0 \times V_1)$$

would be an isomorphism, but $\dim \pi_\psi^{\text{odd}}(M) = 1$ and $\dim \pi_\psi^{\text{odd}}(V_0 \times V_1) = 2$.

3. The minimal model for the space of g-invariant curves

Let M continue to denote a 1-connected space whose rational cohomology has finite type, and fix a continuous map $g: M \to M$. We shall apply the results of section 2 to the case N is the graph of g:

$$N = G(g) = \{(x, g(x)) \mid x \in M\}.$$

When g satisfies a condition we call *rigidity at* **1** (this is always true if $g^k = \mathrm{id}$, some k) then we give an explicit form of the minimal model of $M^I_{G(g)}$.

Since $M^I_{G(g)}$ consists of paths $f: I \to M$ such that $f(1) = g(f(0))$ we can identify it with the space of paths

$$f: \mathbf{R} \to M \quad \text{satisfying } f(t+1) = g(f(t)),$$

i.e. the space of *g-invariant curves*. Similarly if $g^k = \mathrm{id}$ we can identify $M^I_{G(g)}$ with the space of continuous maps

$$f\colon S^1 \to M \quad \text{such that } f(e^{2\pi i/k}e^{i\theta}) = g(f(e^{i\theta})),$$

i.e. $M^I_{G(g)}$ is then the space of *g-invariant circles* on M.

For the moment let $g\colon M \to M$ be any continuous map. We translate from section 2 with $N = G(g)$. Note that $p_0\colon G(g) \to M$ is a homeomorphism, and so φ_0 (which represents it) is an isomorphism. Moreover if

$$\psi_g\colon (\Lambda X_M, d_M) \to (\Lambda X_M, d_M)$$

represents g ($\varphi_M \circ \psi_g \sim A(g) \circ \varphi_M$) then p_1 is represented by $\varphi_1 = \varphi_0 \circ \psi_g$.

Next recall (Theorem 2.8) the model $(\Lambda X_{G(g)} \otimes \Lambda \bar{X}_M, D_{G(g)})$ for $M^I_{G(g)}$. Define a c.g.d.a. $(\Lambda X_M \otimes \Lambda \bar{X}_M, D_g)$ by requiring that

$$\varphi_0 \otimes \mathrm{id}\colon (\Lambda X_M \otimes \Lambda \bar{X}_M, D_g) \to (\Lambda X_{G(g)} \otimes \Lambda \bar{X}_M, D_{G(g)})$$

be an isomorphism. Set $\varphi'_g = \psi'_{G(g)} \circ (\varphi_0 \otimes \mathrm{id})$, then Theorem 2.8 reads:

COROLLARY 3.1. *A model for $M^I_{G(g)}$ is given by*

$$\varphi'_g\colon (\Lambda X_M \otimes \Lambda \bar{X}_M, D_g) \to (A(M^I_{G(g)}), d),$$

where D_g is determined by

$$D_g \circ (\mu_g \otimes \mathrm{id}) = (\mu_g \otimes \mathrm{id}) \circ D,$$

and $\mu_g\colon \Lambda X_M \otimes \Lambda X_M \to \Lambda X_M$ is given by

$$\mu_g(\Phi \otimes \Psi) = \Phi \cdot \psi_g(\Psi).$$

For the induced differential $Q(D_g)$ we have

$$Q(D_g) X_M = 0 \quad \textit{and via } (2.10)$$

$$Q(D_g)\bar{x} = (Q(\psi_g) - id)x, \quad \bar{x} \in \bar{X}_M \tag{3.2}$$

which translates Lemma 1.5 of [6].

Remark 3.3. In view of our hypotheses on M there is a canonical isomorphism as mentioned at the end of section 1,

$$Q(\Lambda X_M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_*(M); \mathbf{Q}).$$

Because M is simply connected g induces a well defined homomorphism of homotopy groups

$$g_{\#}\colon \pi_*(M) \to \pi_*(M)$$

even though g may not preserve base points. Moreover if

$$g^{\#}\colon \mathrm{Hom}\,(\pi_*(M); \mathbf{Q}) \to \mathrm{Hom}\,(\pi_*(M); \mathbf{Q})$$

is the dual of $g_{\#}$, then the isomorphism above identifies $Q(\psi_g)$ with $g^{\#}$. In particular the generators for the minimal model of $M^I_{G(g)}$ are determined by $g_{\#}$.

Now let $(\Lambda X_M)_0$ be the subalgebra of ΛX_M of elements Φ satisfying

$$\psi_g \Phi = \Phi,$$

and let $Q(\Lambda X_M)_0$ be the subspace of elements $a \in Q(\Lambda X_M)$ satisfying

$$Q(\psi_g) a = a.$$

Definition 3.4. A map $g\colon M \to M$ will be called ***rigid at*** 1 if

$$Q(\Lambda X_M) = Q(\Lambda X_M)_0 \oplus \mathrm{im}\,(Q(\psi_g) - \mathrm{id}) \tag{3.5}$$

and if for a suitable choice of ψ_g the projection

$$\zeta\colon (\Lambda^+ X_M)_0 \to Q(\Lambda X_M)_0 \tag{3.6}$$

is surjective.

Remark 3.7. Since $Q(\Lambda X_M) \cong X_M$ is a graded space of finite type, condition (3.5) simply says that if $(Q(\psi_g) - \mathrm{id})^n a = 0$ then $Q(\psi_g) a = a$. Equivalently, $Q(\psi_g) - \mathrm{id}$ restricts to an isomorphism of the subspace $\mathrm{im}\,(Q(\psi_g) - \mathrm{id})$.

Condition (3.6) says that any $Q(\psi_g)$-invariant vector can be represented by a ψ_g-invariant element in ΛX_M.

Thus while (3.5) can be interpreted as a condition on $g_{\#}$, (3.6) is more subtle. *Note that if ψ_g and X_M can be chosen so that X_M is stable under ψ_g then* (3.6) *is automatic.*

Example 3.8. Suppose $g\colon M \to M$ is a continuous map such that $g^k = \mathrm{id}$ for some $k \in \mathbf{Z}$. Thus g makes M into a G-space, where $G = \mathbf{Z}_k$. In this case by Theorem 1.3 we can choose ψ_g so that $\psi_g^k = \mathrm{id}$, which allows us to choose X_M to be stable under ψ_g. (In fact the constructions in the proof of 1.3 already make ψ_g act on X_M with order k.) According to the remark above g is rigid at 1.

Using another approach we have more generally

THEOREM 3.9. *Let M be 1-connected and suppose $g\colon M \to M$ satisfies*

$$g^k \sim \mathrm{id}.$$

Then g is rigid at 1.

Proof. Let $\varphi_M\colon \Lambda X \to A(M)$ be the minimal model and choose $\psi_1\colon \Lambda X \to \Lambda X$ so that

$$\varphi_M \psi_1 \sim A(g)\varphi_M.$$

Then $\psi_1^k \sim \mathrm{id}$.

By a result of Sullivan [15; Prop. 6.5] or [8, Th. 11.21], this implies

$$\psi_1^k = e^\theta = \sum_0^\infty \frac{\theta^m}{m!}$$

where $\theta = sd + ds$ and s is a derivation of degree -1 in ΛX. Moreover

$$\theta = \ln(\psi_1^k) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(\psi_1^k - \mathrm{id})^n}{n}.$$

In particular

$$\theta \psi_1 = \psi_1 \theta$$

Set $\theta_1 = -\theta/k = -\left(\frac{s}{k}\, d + d\,\frac{s}{k}\right)$; then $e^{\theta_1} \sim \mathrm{id}$ (cf. Sullivan [15, Prop. A.3]) or [8, Th. 11.21]. Also $\theta_1\psi_1 = \psi_1\theta_1$, whence

$$e^{\theta_1}\psi_1 = \psi_1 e^{\theta_1}.$$

Hence
$$(e^{\theta_1}\psi_1)^k = e^{k\theta_1}\psi_1^k = e^{-\theta}\psi_1^k = \mathrm{id}$$

and
$$e^{\theta_1}\psi_1 \sim \psi_1.$$

Put $\psi = e^{\theta_1}\psi_1$. Then

$$\psi \sim \psi_1 \Rightarrow \varphi_M \psi \sim A(g)\varphi_M$$

and so ψ represents g. On the other hand

$$\psi^k = \mathrm{id} \quad \text{in } \Lambda X$$

and so by the argument above ψ is rigid at 1.

Remark 3.10. Without proof we mention that there are many more 1-rigid maps e.g. retractions and more generally maps g satisfying $g^{k+s} = g^k$ for some k and s.

Henceforth we assume g to be rigid at 1 and determine the minimal model of $M^I_{G(g)}$.

It is immediate from definition 3.4 that we can choose X_M and ψ_g so that $X_M = Y \oplus U$, where

$$\psi_g y = y, \quad y \in Y$$

and

$$U \subset \mathrm{im}\,(\psi_g - \mathrm{id}).$$

LEMMA 3.11. *With the choices above*

(i) im $(\psi_g - \mathrm{id}) \subset \Lambda Y \otimes \Lambda^+ U$, *and*

(ii) $\Lambda Y \otimes \Lambda^+ U$ *is* d_M*-stable.*

Proof. (i): Choose a graded subspace $V \subset \Lambda^+ X_M$ so that $\zeta(V) \subset U$ and $(\psi_g - \mathrm{id})$: $V \to U$ is an isomorphism. If we regard U as a subspace of $Q(\Lambda X_M)$, then clearly

$$(\psi_g - \mathrm{id}) = (Q(\psi_g) - \mathrm{id}) \circ \zeta \colon V \to U.$$

Since $\psi_g - \mathrm{id}$: $V \to U$ is an isomorphism it follows that ζ: $V \to U$ is an isomorphism. Therefore

$$\Lambda^+ X_M = \Lambda^+ X_M \cdot \Lambda^+ X_M \oplus Y \oplus V$$

and so

$$(\psi_g - \mathrm{id}) \Lambda^+ X_M = (\psi_g - \mathrm{id})(\Lambda^+ X_M \cdot \Lambda^+ X_M) + U \subset [(\psi_g - \mathrm{id}) \Lambda^+ X_M] \cdot \Lambda^+ X_M + \Lambda Y \otimes \Lambda^+ U.$$

An easy degree argument completes the proof.

(ii): Since $\Lambda Y \otimes \Lambda^+ U$ is the ideal generated by U, (ii) follows from the relation

$$d_M U \subset d_M \,\mathrm{im}\, (\psi_g - \mathrm{id}) \subset \mathrm{im}\, (\psi_g - \mathrm{id}) \subset \Lambda Y \otimes \Lambda^+ U.$$

Since the ideal $\Lambda Y \otimes \Lambda^+ U$ is d_M-stable we may divide out by it to obtain a c.g.d.a. $(\Lambda Y, \delta)$ such that the projection

$$P \colon \Lambda X_M \to \Lambda Y \tag{3.12}$$

is a homomorphism of c.g.d.a.'s.

We now associate to $(\Lambda Y, \delta)$ the corresponding c.g.d.a. $(\Lambda Y^I, D)$ (p. 280), with $\Lambda Y^I = \Lambda Y \otimes \Lambda \bar{Y} \otimes \Lambda D\bar{Y}$, and derivations i and θ in ΛY^I, and c.g.d.a. maps λ_0, λ_1: $\Lambda Y \to \Lambda Y^I$. Moreover λ_0 and λ_1 determine an isomorphism

$$\lambda_0 \otimes \lambda_1 \otimes \mathrm{id} \colon \Lambda Y \otimes \Lambda Y \otimes \Lambda \bar{Y} \to \Lambda Y^I$$

(compare (2.3)). Thus a homomorphism of graded algebras

$$\mu \otimes \mathrm{id} \colon \Lambda Y^I \to \Lambda Y \otimes \Lambda \bar{Y}$$

is defined by

$$(\mu \otimes \mathrm{id}) \lambda_0 \Phi = (\mu \otimes \mathrm{id}) \lambda_1 \Phi = \Phi \quad \text{and } (\mu \otimes \mathrm{id}) \bar{y} = \bar{y}$$

for all $\Phi \in \Lambda Y$ and $\bar{y} \in \bar{Y}$. As in section 2 a differential $\bar{D}$ in $\Lambda Y \otimes \Lambda \bar{Y}$ is defined by requiring $\mu \otimes \mathrm{id}$ to be a map of c.g.d.a.'s.

In order to identify $\bar{D}$, we define a degree -1 derivation i_Y in $\Lambda Y \otimes \Lambda \bar{Y}$ by

$$i_Y y = \bar{y} \quad \text{and} \quad i_Y \bar{y} = 0,$$

and a degree $+1$ derivation d_g in $\wedge Y \otimes \wedge \bar{Y}$ by

$$d_g y = \delta y \quad \text{and} \quad d_g \bar{y} = -i_Y \delta y, \quad y \in Y.$$

Since obviously $i_Y^2 = 0$ we get

$$d_g \circ i_Y + i_Y \circ d_g = 0 \tag{3.13}$$

and therefore $d_g^2 = 0$; i.e. $(\wedge Y \otimes \wedge \bar{Y}, d_g)$ is a c.g.d.a.

Remark. $(\wedge Y \otimes \wedge \bar{Y}, d_g)$ is obviously a minimal KS complex. If Y is the minimal model for a space S, then $(\wedge Y \otimes \wedge \bar{Y}, d_g)$ is Sullivan's model for the space of maps $S^1 \to S$ ([14], [16]).

LEMMA 3.14. *The differentials $\bar{D}$ and d_g agree, i.e.*

$$\mu \otimes \mathrm{id}\colon (\wedge Y^I, D) \to (\wedge Y \otimes \wedge \bar{Y}, d_g)$$

is a homomorphism of c.g.d.a.'s.

Proof. Note that $\bar{D} = \delta$ in $\wedge Y$. Hence we need only show

$$\bar{D}\bar{y} = -i_Y \delta y, \quad y \in Y.$$

which we do by induction on the degree of y.

First recall that the derivation i in $\wedge Y^I$ (p. 281) satisfies $i^2 = 0$, whence by (2.4) $i(\lambda_1 y) = i(\lambda_0 y) = \bar{y}$ for all $y \in Y$. If follows that

$$(\mu \otimes \mathrm{id}) \circ i = i_Y \circ (\mu \otimes \mathrm{id})$$

and using (2.4) we conclude

$$\bar{D}\bar{y} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i_Y \bar{D})^n}{n!} y = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i_Y \bar{D})^n}{(n+1)!} i_Y \delta y$$

$$= -i_Y \delta y - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i_Y \bar{D})^n}{(n+1)!} i_Y \delta y$$

If $\deg y = p$ then δy is a polynomial in the y_j's with $\deg y_j < p$ ($(\wedge Y, \delta)$ is a 1-connected KS-complex) and it follows from (3.13) and our induction hypothesis that

$$\bar{D} i_Y \delta y = d_g i_Y \delta y = i_Y \delta^2 y = 0.$$

Hence the equation above reads $\bar{D}\bar{y} = -i_Y \delta y$ and we are done.

Now extend the c.g.d.a. map P of (3.12) to a c.g.d.a. map $P^I\colon (\wedge X_M^I, D) \to (\wedge Y^I, D)$ by setting

$$P^I \bar{x} = \overline{Px} \quad \text{and} \quad P^I D\bar{x} = D\,\overline{Px}, \quad x \in Y$$

and

$$P^I \bar{x} = P^I D\bar{x} = 0, \quad x \in U.$$

Then P^I commutes with i and θ so that

$$P^I \circ \lambda_0 = \lambda_0 \circ P \quad \text{and} \quad P^I \circ \lambda_1 = \lambda_1 \circ P. \tag{3.15}$$

Also, extend P to an algebra homomorphism

$$P_g \colon \wedge X_M \otimes \wedge \bar{X}_M \to \wedge Y \otimes \wedge \bar{Y}$$

by setting $P_g \bar{x} = \overline{Px}$ for all $x \in X_M$ (i.e. $P_g \bar{x} = 0$, $x \in U$).

For these extensions we have

LEMMA 3.16. *The diagram*

$$\begin{tikzcd} \wedge X_M^I \arrow[r, "P^I"] \arrow[d, "\mu_g \otimes \mathrm{id}"'] & \wedge Y \arrow[d, "\mu \otimes \mathrm{id}"] \\ \wedge X_M \otimes \wedge \bar{X}_M \arrow[r, "P_g"'] & \wedge Y \otimes \wedge \bar{Y} \end{tikzcd}$$

commutes. In particular $P_g \circ D_g = d_g \circ P_g$, i.e. P_g is a homomorphism of c.g.d.a.'s.

Proof. If $x \in X_M$ then $(\mu \otimes \mathrm{id}) \circ P^I \bar{x} = P_g \circ (\mu_g \otimes \mathrm{id}) \bar{x}$ is immediate from the definitions. Moreover by (3.15)

$$(\mu \otimes \mathrm{id}) \circ P^I \lambda_0 x = (\mu \otimes \mathrm{id}) \circ \lambda_0 \circ Px = Px = P_g \circ (\mu_g \otimes \mathrm{id}) \lambda_0 x.$$

Finally recall that im $(\psi_g - \mathrm{id}) \subset \wedge Y \otimes \wedge^+ U$ by Lemma 3.11. It follows that

$$P \circ \psi_g = P$$

and hence by (3.15)

$$(\mu \otimes \mathrm{id}) \circ P^I \circ \lambda_1 x = (\mu \otimes \mathrm{id}) \circ \lambda_1 \circ Px = Px = P \circ \psi_g x = P_g \circ \psi_g x = P_g \circ (\mu_g \otimes \mathrm{id}) \circ \lambda_1 x$$

i.e. the diagram commutes. Since $\mu_g \otimes \mathrm{id}$, P^I and $\mu \otimes \mathrm{id}$ are all morphisms of c.g.d.a.'s and $\mu_g \otimes \mathrm{id}$ is surjective, it follows that P_g is also a c.g.d.a. homomorphism.

THEOREM 3.17. *The homomorphism P_g induces an isomorphism*

$$H(\wedge X_M \otimes \wedge \bar{X}_M, D_g) \to H(\wedge Y \otimes \wedge \bar{Y}, d_g)$$

of cohomology. In particular $(\wedge Y \otimes \wedge \bar{Y}, d_g)$ is the minimal model of $M^I_{G(g)}$.

Proof. According to Theorem 7.1 in [8] we need only check that

$$Q(P_g)^* \colon H(X_M \oplus \bar{X}_M, Q(D_g)) \to Y \oplus \bar{Y}$$

is an isomorphism. But it follows from 3.2 that $Q(D_g)$ is zero on X_M and on $\bar{Y}$ and restricts to an isomorphism $\bar{U}\to U$. Hence $Q(P_g)^*$ identifies $H(X_M\oplus\bar{X}_M, Q(D_g))$ with $Y\oplus\bar{Y}$.

Finally, consider the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc}\Lambda X_M\otimes\Lambda\bar{X}_M & \xrightarrow{P_g} & \Lambda Y\otimes\Lambda\bar{Y}\\ \downarrow & & \downarrow \text{id}\\ \mathbf{Q} & \longrightarrow & \Lambda Y\otimes\Lambda\bar{Y}.\end{array}$$

Since P_g^* is an isomorphism Sullivan [15] or Theorem 5.19 of [8] implies there is a homomorphism φ: $(\Lambda Y\otimes\Lambda\bar{Y}, d_g)\to(\Lambda X_M\otimes\Lambda\bar{X}_M, D_g)$ of c.g.d.a.'s such that φ^* is the isomorphism inverse to P_g.

Thus

$$\varphi_g\colon (\Lambda Y\otimes\Lambda\bar{Y}, d_g)\to(A(M^I_{G(g)}), d)$$

is a minimal model for $A(M^I_{G(g)})$, where $\varphi_g=\varphi_g'\circ\varphi$.

Remark. As mentioned earlier the c.g.d.a. $(\Lambda Y\otimes\Lambda\bar{Y}, d_g)$ is exactly Sullivan's construction applied to $(\Lambda Y, \delta)$. Moreover if $g=\mathrm{id}_M$ then $\psi_g=\mathrm{id}$, $X_M=Y$ and $P_g=\mathrm{id}$. Hence we recover Sullivan's theorem [14] (with a different proof) as a special case of Theorem 3.15.

Remark 3.18. The fact that the minimal model of $M^I_{G(g)}$ appears to be the minimal model for a space of closed curves can be explained as follows:

Let $A(p)$ be the rational c.g.d.a.$\subset A(\Delta^p)$ generated by the barycentric coordinate functions. In [15, § 8] Sullivan constructs the function adjoint to "differential forms" which associates with each c.g.d.a. (R, d_R) the simplicial set $\langle R\rangle$ given by

$$\langle R\rangle_p=\{\text{all homomorphisms } (R, d_R)\to(A(p), d))\}.$$

Now suppose g is rigid at 1. The homomorphism ψ_g yields a map of simplicial sets

$$\langle\psi_g\rangle\colon\langle\Lambda X_M\rangle\to\langle\Lambda X_M\rangle.$$

The fixed point set of $\langle\psi_g\rangle$ is the sub-simplicial set $\langle\Lambda X_M\rangle^g$ defined by

$$\langle\Lambda X_M\rangle^g_p=\{\text{all homomorphisms } (\Lambda X_M, d_M)\xrightarrow{\eta}(A(p), d)\quad\text{such that } \eta\circ\psi_g=\eta\}.$$

On the other hand, since g is rigid at 1 we have that the ideal generated by im $(\psi_g-\mathrm{id})$ is exactly $\Lambda Y\otimes\Lambda^+U$. Hence we obtain $\langle\Lambda X_M\rangle^g_p=\langle\Lambda Y\rangle_p$ i.e.

$$\langle\Lambda X_M\rangle^g=\langle\Lambda Y\rangle.$$

Let $|\langle \Lambda X_M \rangle|$ and $|\langle \Lambda Y \rangle|$ be the geometric realizations (cf. Milnor [13]). $\langle \psi_g \rangle$ defines a continuous map $\bar{g}$ of $|\langle \Lambda X_M \rangle|$ and we have that the fixed point set of $\bar{g}$ is given by

$$|\langle \Lambda X_M \rangle|^{\bar{g}} = |\langle \Lambda Y \rangle|.$$

Finally note that $|\langle \Lambda X_M \rangle|$ is the "rationalization of M" and $\bar{g}$ is the rationalization of g; thus ΛY is the minimal model of the fixed point set of the rationalization of g. Moreover the model of the g-invariant paths on M coincides with the model of the space of all closed paths in the fixed point set of the rationalization of g, $\bar{g}$.

Remark 3.19. Note that if $g: M \to M$ is periodic i.e. $g^k = \mathrm{id}_M$ then we can prove Theorem 3.17 directly via Sullivan's theorem by studying the inclusion of $M^I_{G(g)}$ into the space of all circles on M (cf. the beginning of sec. 3) and using (3.3) and the remarks concluding section 1.

4. On the cohomology of $M^I_{G(g)}$

Throughout this section M is a 1-connected space whose rational cohomology has finite type and $g: M \to M$ is a 1-rigid map. In particular we have a minimal model for the space $M^I_{G(g)}$ of g-invariant curves as in Theorem 3.17.

We show how one can use the minimal model for $M^I_{G(g)}$ in order to obtain information about the cohomology $H^*(M^I_{G(g)})$. In particular we are interested in the Betti-numbers of $M^I_{G(g)}$, because of their significance in applications to geodesics.

As a first application we have the following immediate generalization of a theorem due to Sullivan [14].

THEOREM 4.1. *If the rational cohomology of $M^I_{G(g)}$ is not trivial, then $M^I_{G(g)}$ has non-zero Betti numbers in an infinite arithmetic sequence of dimensions.*

Proof. First suppose $(\Lambda Y, \delta)$ ((3.12)) has no odd dimensional generators; i.e. ΛY is a polynomial algebra in even dimensional generators (which exist for otherwise $Y = \overline{Y} = \{0\}$ and consequently $H^*(M^I_{G(g)})$ would be trivial) and $\delta = 0$. Then $d_g = 0$ and the d_g-closed elements $\{x^j\}_{j \in \mathbf{N}}$ in $\Lambda Y \otimes \Lambda \overline{Y}$ provides us with an infinite sequence of non-zero cohomology classes.

Secondly, if ΛY has odd dimensional generators we proceed exactly as in Sullivan [14, p. 46].

We are now interested in finding necessary and sufficient conditions in order for $M^I_{G(g)}$ to have an unbounded sequence of Betti numbers. Note that as a consequence of Theorem 4.1 we have

COROLLARY 4.2. *Suppose the rational cohomology of the spaces* $(M_i)^I_{G(g_i)}$, $i=1, 2$ *is non-trivial. Then* $(M_1 \times M_2)^I_{G(g_1\times g_2)}$ *has an unbounded sequence Betti numbers.*

We return to the general case corresponding to the direct sum decomposition $Y = Y^{\text{odd}} \oplus Y^{\text{even}}$

$$\chi_0 = \dim\ Y^{\text{odd}}$$

and

$$\chi_e = \dim\ Y^{\text{even}}$$

if both χ_0 and χ_e are finite

$$\chi_\pi = \chi_e - \chi_0$$

is the homotopy Euler characteristic of $(\Lambda Y, \delta)$.

PROPOSITION 4.3. *The sequence of Betti numbers for* $M^I_{G(g)}$ *is unbounded if and only if one of the following conditions is fulfilled:*

(i) $\chi_0 \geqslant 2$

(ii) $\chi_0 = 0$ and $\chi_e \geqslant 2$

(iii) $\chi_0 = 1$, $\delta Y^{\text{odd}} = \{0\}$ *and* $\chi_e \geqslant 1$

(iv) $\chi_0 = 1$, $\delta Y^{\text{odd}} \neq \{0\}$ *and* $\chi_e \geqslant 3$

(v) $\chi_0 = 1$, $\delta Y^{\text{odd}} \neq \{0\}$, $\chi_e = 2$ *and* $\dim \mathbf{Q}[x_1, x_2]/(\partial P/\partial x_1, \partial P/\partial x_2) = \infty$, *where* $Y^{\text{even}} = \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$ *and* $\delta y = P(x_1, x_2)$, $y \in Y^{\text{odd}}$.

Proof. In [16] it has in particular been proved that $\chi_0 \geqslant 2$ implies that $H(\Lambda Y \otimes \Lambda \bar{Y}, d_g)$ has an unbounded sequence $\{b_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ of Betti numbers.

If $\chi_0 = 0$ then $d_g = 0$ and $\{b_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ is clearly unbounded if and only if $\chi_e \geqslant 2$.

Assume in the following that $\chi_0 = 1$. First let $\delta Y^{\text{odd}} = \{0\}$. If $\chi_e = 0$ then $\Lambda Y = \mathbf{Q}(y, \bar{y})$ and $d_g = 0$. Thus $\{b_i\}$ is bounded. Suppose now on the other hand that $\chi_e \geqslant 1$. Then clearly the ideal $\operatorname{im} d_g$ in $\ker d_g$ is contained in the ideal generated by y and $\bar{y}$, where $y \in Y^{\text{odd}}$. Hence $\dim \ker \delta \cap Y^{\text{even}} \geqslant 2$ implies that $\{b_i\}_{i\in N}$ is unbounded. If there are not two even closed generators of Y we range the generators of Y^{even} by increasing degrees $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ so that $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 = x_1^\alpha y, \ldots, \delta x_n = P_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) y, \ldots$ and P_n, $n \geqslant 3$, belongs to the ideal generated by $x_2, \ldots, x_{n-1}$. Then we have

$$d_g \bar{x}_2 = \alpha x_1^{\alpha-1} \bar{x}_1 y + x_1^\alpha \bar{y}$$

and

$$d_g \bar{x}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial P_n}{\partial x_k} \bar{x}_k y + P_n \cdot \bar{y}$$

for $n \geqslant 3$. Hence in $\Lambda Y \otimes \Lambda \bar{Y}$, $\operatorname{im} d_g$ is contained in the ideal

$$(d_g x_2, d_g \bar{x}_2, x_2 \bar{y}, \ldots, x_n \bar{y}, \ldots, \bar{x}_2 y, \ldots, \bar{x}_n y, \ldots, x_2 y, \ldots, x_n y, \ldots)$$

so the family of closed elements $\{x_1^a\bar{y}^b\}$, $(a, b) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}$ are homologically independent, in particular $\{b_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ is unbounded.

In the rest of the proof we assume besides $\chi_0=1$ that $\delta Y^{\text{odd}} \neq \{0\}$. Then $\delta Y^{\text{even}}=0$ since $\delta^2=0$.

If $\chi_e=1$ we have $\Lambda Y=\mathbf{Q}(x, y)$ with $\delta x=0$ and $\delta y=x^h$. It is then easy to prove that $\{b_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ are bounded (see Addendum in [16]). If $\chi_e=\infty$ we obviously have $\{b_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ unbounded.

We shall now show that $3\leqslant\chi_e<\infty$ implies $\{b_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ unbounded. Let $x_1, ..., x_p$, $p\geqslant 3$, be a basis for Y^{even}. An element of the polynomial ring $\mathbf{Q}[x_1, ..., x_p]$ is easily seen to be a boundary in $(\Lambda Y\otimes\Lambda\bar{Y}, d_g)$ if and only if it is in the ideal generated by $d_g y$, $y\in Y^{\text{odd}}$. Now, consider the graded ring $A=\mathbf{Q}[x_1, ..., x_p]/(d_g y)$ of Krull dimension $q=p-1\geqslant 2$. By lemme 1 of [12] there are positive integers N and α and a polynomial P with $\deg P= q-1\geqslant 1$, such that for all $n\geqslant N$ and $n\equiv 0 \pmod{\alpha}$ we have $\dim A_n=P(n)$, where A_n is the subspace of A of elements of degree n.

Finally assume $\chi_e=2$ and let x_1, x_2 be a basis for Y^{even}. If $y\in Y^{\text{odd}}$ $\delta y=P(x_1, x_2)$ and hence $\operatorname{im} d_g$ is contained in the ideal generated by $\partial P/\partial x_1$ and $\partial P/\partial x_2$. If $A=\mathbf{Q}[x_1, x_2]/(\partial P/\partial x_1, \partial P/\partial x_2)$ is not finite dimensional, then A has Krull dimension $\geqslant 1$ and the ring $B=A\otimes\mathbf{Q}(\bar{y})$ has therefore Krull dimension $\geqslant 2$. Again by Lemma 1 of [12] we conclude that $\{\dim B_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ is unbounded. But for any non-zero element $\bar{\beta}\in B$ the element $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{\beta}$ is a cocycle in $(\Lambda Y\otimes\Lambda\bar{Y}, d_g)$ and not a boundary i.e. $\{b_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ is unbounded. If $\dim A<\infty$ a direct but lengthy computation of $H(\Lambda Y\otimes\Lambda\bar{Y}, d_g)$ in even and odd degrees shows that $\{b_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ is bounded.

From Proposition 1 in [16] and the above proposition we get

Corollary 4.4. *The sequence of Betti numbers for $M^I_{G(g)}$ is bounded if and only if the cohomology ring $H(\Lambda Y, \delta)$ has one of the following types:*

(i) $H(\Lambda Y, \delta)=\mathbf{Q}$

(ii) *$H(\Lambda Y, \delta)$ is generated by one element*

(iii) *$H(\Lambda Y, \delta)$ is a polynomial algebra in two variables x_1, x_2 truncated by an ideal generated by one element P such that* $\dim \mathbf{Q}[x_1, x_2]/(\partial P/\partial x_1, \partial P/\partial x_2)<\infty$.

In Proposition 4.3 and Corollary 4.4 the cohomology of M was only supposed to be of finite type. If we assume $H^*(M)$ to be finite dimensional (e.g. M a finite complex) we can apply some recent results of Halperin [9] and [10] to obtain:

Theorem 4.5. *Let M be a 1-connected space with finite dimensional cohomology $H^*(M)$ and let $g\colon M\to M$ be a 1-rigid map. Then exactly one of the following holds:*

(I) $\chi_0=\chi_e=0$. *In this case* $\wedge Y=\mathbf{Q}$ *and* $H^*(M_G^I(g))=\mathbf{Q}$.

(II) $\chi_0=1$, $\chi_e=0$. *In this case* $\wedge Y=\wedge(y)$ *and* $H^*(M_{G(g)}^I)=\wedge(y,\bar{y})$ *is the exterior algebra on* y *tensor the polynomial algebra on* $\bar{y}$.

(III) $\chi_0=\chi_e=1$. *In this case* $\wedge Y=\wedge(y,x)$ *with* $\delta x=0$, $\delta y=x^{n+1}$ *and* $H^*(M_{G(g)}^I)=\wedge^+(x,\bar{x})/(x^{n+1},x^n\bar{x})\otimes\wedge(\bar{y})$. *In particular* $\{b_i(M_{G(g)}^I)\}$ *is bounded.*

(IV) $\{b_i(M_{G(g)}^I)\}_{i\in\mathbf{N}}$ *is unbounded.*

In particular $\{b_i\}$ *is bounded if and only if* $\chi_e\leqslant\chi_0\leqslant 1$.

Proof. If $\dim Y=\infty$ we see from Proposition 4.3 that $\{b_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ is unbounded.

Suppose now that $\dim Y<\infty$. Since $\dim H^*(M)=\dim H(\wedge X_M, d_m)<\infty$ Corollary 5.13 of Halperin [10] implies that $\dim H(\wedge Y,\delta)<\infty$. We can therefore apply the finiteness results of Halperin [9]. In particular $\chi_\pi=\chi_e-\chi_0\leqslant 0$ by Theorem 1 in [9].

If $\chi_0\geqslant 2$ we know from Proposition 4.3 that $\{b_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ is unbounded.

If $\chi_0=1$ we must have $\chi_e\leqslant 1$. Suppose $\chi_e=1$. Then $\delta x=0$ and $\delta y=x^{n+1}$ for some n because $H(\wedge Y,\delta)$ is finite dimensional. The actual computation of $H^*(M_{G(g)}^I)$ is then contained in the Addendum of [16].

The case $\chi_0=1$ and $\chi_e=0$ is clear.

Finally $\chi_0=\chi_e=0$ if and only if $H^*(M_{G(g)}^I)$ is trivial.

Note that if $\dim H^*(M)<\infty$ then (iii) in Corollary 4.4 is impossible. If $g=\mathrm{id}_M$ then $Y=X_M$; i.e. (i) is also impossible and Corollary 4.4 is nothing but the main theorem of Sullivan and Vigué [16].

Theorem 4.5 gives a necessary and sufficient condition on the action of g on $\pi_*(M)\otimes\mathbf{Q}$ in order for $H^*(M_{G(g)}^I)$ to have an unbounded sequence of Betti numbers. As in the case $g=\mathrm{id}_M$ it would be interesting also to have a (necessary and sufficient) condition on the action of g on $H^*(M)$ in order for $H^*(M_{G(g)}^I)$ to have an unbounded sequence of Betti numbers. We can illustrate the subtlety of this problem with the following examples.

Example 4.6. Let $M=S^{2p}\times S^{2q}$ with $p\neq q$ and $p,q\geqslant 1$. Then $\wedge X_{S^{2p}}=\wedge(x_1,y_1)$ with $\deg x_1=2p$, $\deg y_1=4p-1$, $dx_1=0$ and $dy_1=x_1^2$ and similarly for $\wedge X_{S^{2q}}=\wedge(x_2,y_2)$. Thus any 1-rigid homotopy equivalence g of M will fix at least the generators y_i, $i=1,2$ and by Theorem 4.5 $M_{G(g)}^I$ will have an unbounded sequence of Betti numbers. However, g may map x_i to $-x_i$, $i=1,2$ and hence not fix any generators in the cohomology $H^*(M)$.

Example 4.7. Take $M=\mathbf{C}P^{2p+1}\times\mathbf{C}P^{2q+1}$ with $p\neq q$ and $p,q\geqslant 0$. Then $\wedge X_{\mathbf{C}P^{2p+1}}=\wedge(x_1,y_1)$ with $\deg x_1=2$, $\deg y_1=2(2p+1)+1$, $dx_1=0$ and $dy_1=x_1^{2p+2}$ and similarly for $\wedge X_{\mathbf{C}P^{2q+1}}=\wedge(x_2,y_2)$. We can therefore draw exactly the same conclusions as above.

Example 4.8. Endow S^{2p} and CP^{2q} with their standard riemannian metrics and $S^{2p}\times CP^{2q}$ with the product metric. Let $q_1=-\mathrm{id}_{S^{2p}}$ be the antipodal map on S^{2p} and g_2 the conjugate map on CP^{2q} i.e. in homogeneous coordinates $g_2(z_1, ..., z_{2q+1})=(\bar{z}_1, ..., \bar{z}_{2q+1})$. If $M=T_1(S^{2p}\times CP^{2q})$ is the unit tangent bundle of $S^{2p}\times CP^{2q}$ then the differential of the involutive isometry $g_1\times g_2$ restricts to an involution g on M.

Note that M is the total space of the fibre bundle $M\to S^{2p}\times CP^{2q}$ with fiber $S^{2p+4q-1}$. Therefore $\wedge X_M=\wedge X_{S^{2p}}\otimes\wedge X_{CP^{2q}}\otimes\wedge X_{S^{2p+4q-1}}=\wedge(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)$ with $\deg x_1=2p$, $\deg x_2=2$, $\deg y_1=4p-1$, $\deg y_2=4q+1$, $\deg y_3=2p+4q-1$ and $dx_1=dx_2=0$, $dy_1=x_1^2$, $dy_2=x_2^{2q+1}$ and $dy_3=(4q+2)x_1x_2^{2q}$ ($x_1x_2^{2q}$ = orientation class of $S^{2p}\times CP^{2q}$ and Euler class of bundle $=(4q+2)\cdot$orientation class). Furthermore g induces an involution on $\wedge X_M$ which is given on generators by $x_1\to -x_1$, $x_2\to -x_2$ and hence $y_1\to y_1$, $y_2\to -y_2$ and $y_3\to -y_3$; i.e. $\chi_0=1$ and $\chi_e=0$. According to Theorem 4.5 the Betti numbers for $M^I_{G(g)}$ are uniformly bounded, in fact $H^*(M^I_{G(g)})=\wedge(y_1, \bar{y}_1)$.

On the other hand, let $u_1=(4q+2)x_2^{2q}y_1-x_1y_3$ and $u_2=(4q+2)x_1y_2-x_2y_3$. Then a family of generators for $H(\wedge X_M, d)$ contains x_1, x_2, u_1 and u_2 (or linear combinations of these), and on cohomology $g^*(u_i)=u_i$, $i=1, 2$ i.e. g fixes two generators of $H^*(M)$ but the sequence of Betti numbers for $M^I_{G(g)}$ is bounded.

We finally restrict our attention to spaces whose cohomology (over $\mathbf{Q}$) is spherically generated.

Definition 4.9. Let M be a 1-connected space whose cohomology is of finite type. We say that $H^*(M)$ is spherically generated if

$$\ker\zeta^*=H^+(\wedge X_M)\cdot H^+(\wedge X_M)$$

where ζ^* is the induced map on cohomology by the projection $\zeta\colon \wedge^+X_M\to Q(\wedge X_M)$ (p. 280).

Note that ζ^* is the dual of the Hurewicz map. The above definition is therefore equivalent to saying that ζ^* imbeds the generators of $H^*(M)$ into $\mathrm{Hom}\,(\pi^*(M), \mathbf{Q})$.

COROLLARY 4.10. *Let M be a 1-connected space whose cohomology is finite dimensional and spherically generated, and let g be a 1-rigid map of M. Then $M^I_{G(g)}$ has an unbounded sequence of Betti numbers if the induced map g^* on cohomology $H^*(M)$ fixes at least two generators.* (1)

Proof. By hypothesis, $H^*(M)$ is spherically generated, so ζ^* induces an embedding

$$H^+(M)/H^+(M)\cdot H^+(M)\to Q(\wedge X_M)$$

(1) i.e. the subspace fixed by the linear map induced by g^* on $H^+(M)/H^+(M)\cdot H^+(M)$ has dimension $\geqslant 2$.

commuting with the induced actions by g. Hence we can choose the generators of $\wedge X_M$ so that we have two closed generators fixed by ψ_g. They give two closed generators of $\wedge Y$, and we conclude using Theorem 4.5.

Remark 4.11. According to example 8.13 of [11] any formal space (its minimal model is a formal consequence of its cohomology) has spherically generated cohomology. Thus Corollary 4.10 applies in particular to formal spaces. Among formal spaces are riemannian symmetric spaces [14] and Kähler manifolds [1] (and [11, Cor. 6.9]).

References

[1]. Deligne, P., Griffith, P., Morgen, J. & Sullivan, D., The real homotopy theory of Kähler manifolds. *Invent. Math.*, 29 (1975), 245–274.

[2]. Grivel, P., Thèse, Université de Geneve, 1977.

[3]. Gromoll, D. & Meyer, W., Periodic geodesics on compact riemannian manifolds. *J. Differential Geometry*, 3 (1969), 493–510.

[4]. Grove, K., Conditions (C) for the energy integral on certain path spaces and applications to the theory of geodesics. *J. Differential Geometry*, 8 (1973), 207–223.

[5]. —— Isometry-invariant geodesics. *Topology*, 13 (1974), 281–292.

[6]. —— Geodesics satisfying general boundary conditions. *Comment. Math. Helv.*, 48 (1973), 376–381.

[7]. Grove, K. & Tanaka, M., On the number of invariant closed geodesics. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 82 (1976), 497–498; *Acta Math.*, 140 (1978), 33–48.

[8]. Halperin, S., Lecture notes on minimal models. Publ. internes de l'U.E.R. de Math. Université de Lille 1, No. 111 (1977).

[9]. —— Finiteness in the minimal models of Sullivan. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 230 (1977), 173–199.

[10]. —— Rational fibrations, minimal models, and fibrings of homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[11]. Halperin, S. & Stasheff, J., Obstructions to homotopy equivalences. *Advances in Math.*, to appear.

[12]. Heydemann, M. C. & Vigué, M., Application de la théorie des polynômes de Hilbert–Samuel à l'étude de certaines algèbres différentielles. *C.R. Acad. Sci Paris Sér A–B*, 278 (1974), 1607–1610.

[13]. Milnor, J., The geometric realisation of a semi-simplicial complex. *Ann. of Math.*, 65 (1965), 357–362.

[14]. Sullivan, D., Differential forms and topology of manifolds. *Proceedings Japan conference on manifolds*, 1973.

[15]. —— *Infinitesimal computations in topology*. Vol. 47, publications I.H.E.S.

[16]. Vigué-Poirrier, M. & Sullivan, D., The homology theory of the closed geodesic problem. *J. Differential Geometry*, 11 (1976), 633–644.

Received March 20, 1977

Table des matières

INTRODUCTION

Dans un article intitulé "Obstructions to homotopy equivalences", S. Halperin et J. Stasheff étudient le problème suivant : étant donnés deux C.W complexes de type fini simplement connexes et un isomorphisme $f : H^*(S,\mathbb{Q}) \leftarrow H^*(T,\mathbb{Q})$, peut-on réaliser f par une équivalence d'homotopie rationnelle entre les types d'homotopie rationnelle de S et T ?

L'outil privilégié pour l'étude d'un tel problème est la théorie du modèle minimal de D. Sullivan [22]. Cette théorie établit une équivalence de catégories entre la catégorie des espaces topologiques nilpotents (ayant le type d'homotopie rationnelle d'un C.W complexe de type fini) et celles des algèbres différentielles graduées minimales. A un espace X connexe, on associe une algèbre minimale $\mathcal{M}_X$ sur $\mathbb{Q}$ qui décrit entièrement l'homotopie rationnelle de X et dont la cohomologie est isomorphe à la cohomologie singulière rationnelle de X. On construit $\mathcal{M}_X$ comme le modèle minimal de l'algèbre différentielle graduée A(X), solution au problème des cochaînes commutatives (voir [16]). S. Halperin et J. Stasheff associent à un tel espace un modèle (minimal) portant une bonne filtration qui leur permet de construire une suite d'obstructions à la réalisation d'un isomorphisme en cohomologie.

L'origine de notre travail était de généraliser l'étude de S. Halperin et J. Stasheff ; nous nous sommes posée la question suivante :

Soient S et T deux C.W complexes nilpotents de type fini et soit f un morphisme $H^*(S,\mathbb{Q}) \leftarrow H^*(T,\mathbb{Q})$. Est-ce que f est réalisable par une application (définie à homotopie près) entre les types d'homotopie rationnelle de S et T ?

L'outil essentiel de cette étude est encore la théorie de Sullivan [22] ou [11]. Non seulement, nous utiliserons la notion de modèle minimal d'un espace topologique connexe, mais surtout nous utiliserons la notion de modèle (minimal) d'une application continue. Soient X et Y deux espaces connexes et f une application continue : $X \leftarrow Y$. Si $A(f) : A(X) \rightarrow A(Y)$ est le morphisme induit par f entre les algèbres de cochaînes commutatives il existe un diagramme commutatif d'algèbres différentielles graduées :

$$\begin{tikzcd} A(X) \arrow[r, "A(f)"] \arrow[dr, "i"'] & A(Y) \\ & A(X) \otimes \Lambda U \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

où i est l'inclusion, ψ^* est un isomorphisme et ΛU est une algèbre libre.

Ceci est l'analogue algébrique du résultat topologique bien connu : soit $f : X \leftarrow Y$ une application continue, il existe un fibré de Serre

$F \longrightarrow E \xrightarrow{g} X$ et une équivalence d'homotopie $h : Y \rightarrow E$ tel que le diagramme $\begin{tikzcd} X & & Y \arrow[ll] \arrow[dl] \\ & E \arrow[ul] & \end{tikzcd}$ commute à homotopie près.

Tous ces résultats sont rappelés dans le chapitre 1. On y précise le dictionnaire entre la topologie et l'algèbre, et on énonce un résultat de S. Halperin, [11] utile dans toute la suite (voir aussi P.P. Grivel [10]) : (Théorème 1.2.5. et 1.2.6.).

Dans le chapitre 2, nous définissons la notion de modèle minimal bigradué d'un morphisme d'algèbres graduées, puis la notion de modèle filtré d'un morphisme d'algèbres différentielles graduées. Nous appliquons nos résultats au calcul explicite du modèle minimal d'un espace homogène.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la réalisation d'un morphisme $f : H^*(S,\mathbb{Q}) \longleftarrow H^*(T,\mathbb{Q})$; où S et T sont des C.W complexes nilpotents de type fini. On définit la notion de n-réalisabilité de f pour $n \in \mathbb{N}$, et on construit une obstruction à prolonger une n-réalisation en une $n+1$-réalisation (théorème 3.2.4.). On montre en particulier :

Théorème 3.2.5.- S'il existe un entier $\ell \geq 1$ tel que $H^p(T,\mathbb{Q}) = 0$ $1 \leq p \leq \ell$ et $H^p(S,\mathbb{Q}) = 0$ $p > 3\ell + 1$, alors f est réalisable.

Théorème 3.2.8. - S'il existe un entier $\ell \geq 1$ tel que $H^p(T,\mathbb{Q}) = 0$ $1 \leq p \leq \ell$ et $H^p(S,\mathbb{Q}) = 0$ $p > 4\ell + 1$, alors f est réalisable si et seulement si une certaine obstruction $0_2(f) = 0$.

On montre aussi que, dans ce cas, la notion de réalisabilité est indépendante du corps de base.

Dans le chapitre 4, nous donnons une autre application importante de la théorie du modèle filtré exposée au chapitre 2. Soient un fibré de Serre, $F \longrightarrow E_o \xrightarrow{f_o} B_o$, g une application continue $B \to B_o$, et soit $F \to E \to B$ le fibré image réciproque par g.

Lorsque B_o est simplement connexe, Eilenberg et Moore ont construit une suite spectrale d'algèbres commutatives graduées telle que $E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(B_o)}(H^*(B),H^*(E))$ et $E_r \Longrightarrow H^*(E)$ (voir [20]). On peut trouver une théorie analogue faite en homologie dans le séminaire Cartan 1959-60 [17]. L'existence de cette suite spectrale découle de l'existence de résolution projective propre de modules différentiels gradués. Jusqu'à maintenant, on exhibait une résolution projective propre, appelée la bar construction, qui était assez peu pratique à manipuler. L'originalité de notre travail est de calculer explicitement les termes E_r de la suite spectrale sans utiliser la bar construction. On établit le théorème fondamental :

Théorème 4.2.5. - Soient $F \longrightarrow E_o \xrightarrow{f_o} B_o$ un fibré de Serre, g une application continue de B dans B_o et $F \longrightarrow E \xrightarrow{f} B$ le fibré image réciproque, vérifiant les hypothèses du théorème de Halperin 1.2.5.

Soit $(\Lambda Z,d) \longrightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda X,d')$ le modèle minimal bigradué de f_o^*, et soit $(\Lambda Z,D) \longrightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda X,D')$ le modèle filtré de f_o.

Alors il existe une suite spectrale d'algèbres commutatives graduées telle que $E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(B_o)}(H^*(B),H^*(E_o))$ et $\varinjlim_r E_r = \mathrm{Gr}\, H^*(E)$.

Cette suite spectrale est isomorphe à une suite spectrale associée à une filtration définie sur l'ADG $\mathcal{M}_B \otimes_{\Lambda Z}(\Lambda Z \otimes \Lambda X) \simeq \mathcal{M}_B \otimes \Lambda X$ munie de la différentielle déduite du ΛZ-produit tensoriel des différentielles d_B sur

$\mathcal{M}_B$ et D' sur $\Lambda Z \otimes \Lambda X$. (Ici $(\mathcal{M}_B, d_B)$ est le modèle minimal de B). Le terme E_2 est isomorphe à la cohomologie de l'ADG : $H^*(B) \otimes_{\Lambda Z} (\Lambda Z \otimes \Lambda X) \simeq H^*(B) \otimes \Lambda X$ munie de la différentielle déduite du ΛZ-produit tensoriel des différentielles 0 sur $H^*(B)$ et d' sur $\Lambda Z \otimes \Lambda X$. Si B_o est simplement connexe, cette suite spectrale est isomorphe à la suite spectrale définie par Eilenberg et Moore.

On donne ensuite de nombreuses applications de ce théorème.

<u>*Théorème*</u> *4.5.1.* - Lorsque les espaces E_o, B, B_o sont formels et les applications f_o et g sont formelles, alors la suite spectrale collapse au terme E_2 et on a un isomorphisme algébrique :

$$H^*(E) = \mathrm{Tor}_{H^*(B_o)}(H^*(B), H^*(E_o)).$$

On montre aussi que, si B_o est simplement connexe, si $H^*(F)$ est de type fini, si la suite spectrale de Serre du fibré $F \longrightarrow E_o \xrightarrow{f_o} B_o$ collapse au terme E_2, alors la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du carré fibré :

$$\begin{array}{ccc} F & = & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & E_o \\ f\downarrow & & \downarrow f_o \\ B & \xrightarrow{g} & B_o \end{array}$$

collapse et, on a un isomorphisme algébrique : $H^*(E) = H^*(B) \otimes_{H^*(B_o)} H^*(E_o)$. De plus, la fibre du modèle filtré de f_o est le modèle filtré de F.

(Théorème 4.5.6).

Enfin, on applique le théorème fondamental 4.2.5. au calcul de la cohomologie de l'espace total d'un fibré principal dont le groupe structural est un groupe de Lie compact connexe.

CHAPITRE I

PRELIMINAIRES ALGEBRIQUES ET TOPOLOGIQUES.

----

§ 1 - Algèbres différentielles graduées commutatives.

Dans toute la suite, on considère des k-algèbres graduées où k est un corps de caractéristique 0 et l'indice de la graduation parcourt $\mathbb{N}$. Sauf dans le chapitre 4, § 1, ces algèbres sont commutatives dans le sens suivant : si $H = \bigoplus_{p \geq 0} H^p$ est une k-algèbre graduée si $a \in H^p$ et $b \in H^q$, alors $b.a = (-1)^{pq}\, a.b$.

On notera $|a|$ le degré de a.

Une algèbre commutative graduée est dite connexe si $H^o = k$.

Une algèbre différentielle graduée commutative (notée ADG) est une algèbre commutative graduée, A, munie d'une différentielle $d : A^p \to A^{p+1}$ vérifiant $d(a.b) = da.b + (-1)^{|a|}\, a.db$, et $d^2 = 0$.

Une algèbre différentielle graduée (A,d) est dite c-connexe si $H^o(A) = k$.

Une algèbre graduée $H = \bigoplus H^p$ est dite de type fini si les espaces vectoriels H^p sont de dimension finie pour tout p.

Si un morphisme d'ADG induit un isomorphisme en cohomologie, on dit que c'est un quasi-isomorphisme.

Si (A,d_A) et (B,d_B) sont deux algèbres différentielles graduées, on définit l'algèbre différentielle graduée $A \otimes_k B$ munie de la différentielle d produit tensoriel de d_A et d_B de la manière suivante :

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{|b|.|a'|}\, aa' \otimes bb'$$

$$d(a \otimes b) = d_A a \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes d_B b$$

où $\quad a \in A$, $a' \in A$, $b \in B$, $b' \in B$.

Dans la suite, on omettra souvent d'écrire la lettre k dans $A \otimes_k B$.

Si $X = \bigoplus_{p\geqslant 0} X^p$ est un k-espace vectoriel gradué, on notera ΛX, l'algèbre commutative graduée libre suivante :

$$\Lambda X = S(\bigoplus_p X^{2p}) \otimes E(\bigoplus_p X^{2p+1}) \quad \text{où} \quad S(\oplus X^{2p})$$

est l'algèbre symétrique engendrée par les éléments de degrés pairs de X, et $E(\oplus X^{2p+1})$ est l'algèbre extérieure engendrée par les éléments de degrés impairs.

Définition 1.1.1. [11] .- Soit (B,d_B) une ADG munie d'une augmentation $\varepsilon : B \to k$. Une extension de Koszul-Sullivan (en abrégé K-S extension) de base B est une suite d'ADG :

$$(B,d_B) \xhookrightarrow{i} (B \otimes \Lambda X, d') \xrightarrow{\varepsilon\otimes 1} (\Lambda X, d'')$$

ayant les propriétés suivantes :

1) ΛX est une algèbre libre, il existe un ensemble bien ordonné I tel que $X = \bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha$, et pour tout α, il existe n_α tel que $X_\alpha \subset X^{n_\alpha}$ (i.e. les éléments de X_α sont homogènes de degré n_α).

2) $d'(X_\alpha) \subset B \otimes \Lambda(\bigoplus_{\beta<\alpha} X_\beta) \quad \alpha \in I$.

3) l'inclusion i et la projection $p = \varepsilon \otimes 1$ sont des morphismes d'ADG.

Une K-S extension est dite minimale si n_α est une fonction croissante de α.

Si $B = k$, une algèbre libre $(\Lambda X, d)$ vérifiant 1) 2) et 3) est appelée une K-S algèbre libre.

Définition 1.1.2. *Notion d'homotopie* : [11] .- Soit $(B,d_B) \xhookrightarrow{\text{incl.}} (B \otimes \Lambda X, d') \xrightarrow{p} (\Lambda X, d'')$ une K-S extension dont la base (B,d_B) est une K-S algèbre libre connexe et dont la fibre ΛX est connexe.

Soit $\eta : (G,d_G) \to (E,d_E)$ un morphisme d'ADG, et soient $(\varphi_j)_{j=0,1}$ et $(\Psi_j)_{j=0,1}$ des morphismes d'ADG rendant les diagrammes suivants commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
(B,d_B) \arrow[rr, "\Psi_j"] \arrow[d, "\text{incl.}"'] & & (G,d_G) \arrow[d, "\eta"] \\
(B \otimes \Lambda X, d') \arrow[rr, "\varphi_j"] & & (E,d_E)
\end{tikzcd} \qquad j = 0,1 .$$

Si $B = (\Lambda Z,d)$, on définit l'ADG (B^I,D) comme étant l'ADG $(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z} \otimes \Lambda D\bar{Z},D)$ où

i) $D_{|\Lambda Z} = d$

ii) $\bar{Z}$ est l'espace gradué défini par $\bar{Z}^p = Z^{p+1}$

Une dérivation i de degré -1 est définie par $iz = \bar{z}$, $i\bar{z} = 0$, $iD\bar{z} = 0$, alors $\exp(iD + Di) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iD + Di)^n}{n!}$ est un automorphisme de l'ADG (B^I,D) ; (la somme $\sum_0^{\infty} \frac{(iD + Di)^n}{n!}(x)$ est finie, pour tout $x \in B^I$).

Soit λ_o l'inclusion $(\Lambda Z,d) \longrightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda\bar{Z} \otimes \Lambda D\bar{Z}, D)$, et posons $\lambda_1 = \exp(iD + Di)\, \lambda_o$.

On définit de même l'ADG $[(B \otimes \Lambda X)^I, D']$.

Le couple $(\Psi_o, \mathcal{J}_o)$ est dit homotope au couple $(\Psi_1, \mathcal{J}_1)$ s'il existe un carré commutatif de morphismes d'ADG

$$\begin{tikzcd} (B^I, D) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\text{inclusion}"'] & (G, d_G) \arrow[d, "\eta"] \\ ((B \otimes \Lambda X)^I, D') \arrow[r, "\Phi"] & (E, d_E) \end{tikzcd}$$

tel que $\Psi \circ (\lambda_j)_B = \psi_j$ et $\Phi \circ \lambda_{j(B \otimes \Lambda X)} = \mathcal{J}_j$, $j = 0,1$.

Si $B = k = G$, alors Φ est une homotopie de $\mathcal{J}_o$ à $\mathcal{J}_1$.

On peut alors énoncer le théorème d'existence et d'unicité du modèle minimal d'un morphisme d'ADG. Ce théorème démontré dans [22] et [11] généralise la notion de modèle minimal d'une algèbre différentielle graduée.

Théorème 1.1.3.- Soit $\gamma : (B, d_B) \longrightarrow (E, d_E)$ un morphisme d'ADG c-connexes. Alors il existe une K-S extension minimale de base B : $(B, d_B) \xrightarrow{i} (B \otimes \Lambda X, d') \xrightarrow{p} (\Lambda X, d'')$ et un morphisme $\mathcal{J} : (B \otimes \Lambda X, d') \longrightarrow (E, d_E)$ tel que

i) $\mathcal{J} \circ i = \gamma$

ii) $\mathcal{J}^*$ est un isomorphisme .

On montre qu'une K-S extension minimale de base B vérifiant (i) et (ii) est unique à isomorphisme près. Elle est appelée le modèle minimal de γ de base B.

On déduit du théorème 1.1.3. le théorème suivant :

Théorème 1.1.4.- Soit $\gamma : (G, d_G) \longrightarrow (E, d_E)$ un morphisme d'ADG c-connexes. Alors il existe une K-S algèbre libre minimale $(\Lambda Z, d)$ et un morphisme $\psi : (\Lambda Z, d) \longrightarrow (G, d_G)$ et il existe une K-S extension minimale de base $(\Lambda Z,d)$: $(\Lambda Z,d) \xrightarrow{i} (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \xrightarrow{p} (\Lambda X,d'')$ et un morphisme $\vartheta : (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \longrightarrow (E,d_E)$ tels que :

i) $\vartheta \circ i = \gamma \circ \psi$

ii) ψ^* et ϑ^* sont des isomorphismes.

De plus, si $(\Lambda\tilde{Z}, \tilde{d}) \xrightarrow{\tilde{i}} (\Lambda\tilde{Z} \otimes \Lambda\tilde{X}, \tilde{d}') \xrightarrow{\tilde{p}} (\Lambda\tilde{X}, \tilde{d}'')$ est une K-S extension minimale où $(\Lambda\tilde{Z}, \tilde{d})$ est minimale et telle qu'il existe des morphismes $\tilde{\psi} : (\Lambda\tilde{Z}, \tilde{d}) \longrightarrow (G,d_G)$ et $\tilde{\vartheta} : (\Lambda\tilde{Z} \otimes \Lambda\tilde{X}, \tilde{d}') \longrightarrow (E,d_E)$ vérifiant (i) et (ii) , alors on a un diagramme commutatif de morphismes d'ADG

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda\tilde{Z}, \tilde{d}) \arrow[r, "\tilde{i}"] \arrow[d, "\bar{\psi}"'] & (\Lambda\tilde{Z} \otimes \Lambda\tilde{X}, \tilde{d}') \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "\bar{\vartheta}"] & (\Lambda\tilde{X},\tilde{d}'') \arrow[d, "\bar{\alpha}"] \\
(\Lambda Z,d) \arrow[r, "i"] & (\Lambda Z \otimes \Lambda X,d') \arrow[r, "p"] & (\Lambda X,d'')
\end{tikzcd}$$

où $\bar{\psi}$, $\bar{\vartheta}$, $\bar{\alpha}$ sont des isomorphismes et $(\psi\bar{\psi} , \vartheta\bar{\vartheta})$ est homotope à $(\tilde{\psi},\tilde{\vartheta})$.

La K-S extension minimale $(\Lambda Z,d) \longrightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d')$ est appelée le modèle minimal du morphisme γ.

Définition 1.1.5.- Une K-S algèbre libre minimale $(\Lambda X,d)$ est dite nilpotente si la fonction : $I \ni \alpha \longrightarrow n_\alpha \in \mathbb{N}$ est finie en chaque dimension. Si, de plus, X_α est de dimension finie pour tout α, on dit que l'algèbre est nilpotente de type fini.

On définit alors la catégorie $\mathcal{M}_k$ dont les objets sont les K-S algèbres minimales nilpotentes de type fini et les morphismes sont les classes d'homotopie de morphismes.

§ 2 - *Rappels de topologie - Dictionnaire entre la topologie et l'algèbre.*

Rappelons que Sullivan définit un foncteur contrevariant A^* de la catégorie des ensembles simpliciaux dans celles des $\mathbb{Q}$-algèbres différentielles graduées commutatives : si K est un ensemble simplicial, on a $A^*(K) = \bigoplus_{p\geq 0} A^p(K)$ où un élément de $A^p(K)$ est une application qui associe à un n-simplexe euclidien de coordonnées $(t_o, t_1, \ldots, t_n)$ vérifiant $\sum t_i = 1$, une p-forme différentielle $\sum \omega_{i_1 \ldots i_p} dt_{i_1} \wedge \ldots \wedge dt_{i_p}$ où $\omega_{i_1 \ldots i_p}$ est une fonction polynomiale à coefficients rationnels des coordonnées $(t_o, \ldots, t_n)$.

Si M est un espace topologique, on considère l'ensemble simplicial Sing M de ses simplexes singuliers et on définit une application fonctorielle qui associe à M, l'ADG $A^*(\text{Sing } M)$, notée $A^*_{\mathbb{Q}}(M)$. Si k est un corps de caractéristique 0, on définit $A^*_k(M)$ par $A^*_k(M) = A^*_{\mathbb{Q}}(M) \otimes_{\mathbb{Q}} k$, on notera souvent $A(M)$ cette ADG lorsque le corps k est fixé.

Théorème 1.2.1. (de Rham simplicial) [11] ou [22] .- L'intégration des formes différentielles définit un isomorphisme algébrique : $H^*(A^*_{\mathbb{Q}}(M)) \simeq H^*(M, \mathbb{Q})$ où $H^*(M, \mathbb{Q})$ est la cohomologie singulière rationnelle de M.

Si M est connexe par arcs, on définit alors une application qui associe, à l'espace M, le modèle minimal ΛX_M de l'ADG $A(M)$.

Définition 1.2.2.- Un espace M connexe par arcs dont tous les groupes d'homotopie sont de rang fini est dit nilpotent s'il existe une famille indexée par un ensemble I bien ordonné de fibrations principales,

$(q_\alpha)_{\alpha\in I} : K(\pi_\alpha, n_\alpha) \longrightarrow M_{\alpha+1} \longrightarrow M_\alpha$ et des applications $f_\alpha : M \longrightarrow M_\alpha$ telles que :

i) $q_\alpha \; f_{\alpha+1} = f_\alpha$

ii) $\pi_i(M_\alpha) = 0 \quad i > n_\alpha$

iii) f_α induit un isomorphisme $\pi_i(M) \longrightarrow \pi_i(M_\alpha)$ pour $i < n_\alpha$

iv) $M_o = \{\text{point}\}$ si 0 est le plus petit élément de I

v) la fonction $\alpha \longrightarrow n_\alpha$ de I dans $\mathbb{N}$ est croissante et finie en chaque dimension.

On rappelle qu'une fibration $Y \xrightarrow{q} X$ de fibre $K(\pi,n)$ est dite principale si π est un groupe abélien de rang fini et si elle est induite par une application classifiante $\ell : X \longrightarrow B_{K(\pi,n)} = K(\pi, n+1)$.

Beaucoup d'espacestopologiques sont nilpotents. Une caractérisation des espaces nilpotentes est que leur π_1 est un groupe nilpotent et que l'action du π_1 sur π_n (pour $n \geq 2$) est nilpotente. Ainsi, les espaces simplement connexes, les H-espaces sont nilpotents.

Définition 1.2.3.- Un espace nilpotent X est un $\mathbb{Q}$-espace si :

i) $\pi_n(X)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel pour tout $n \geq 2$ (i.e., pour tout entier $p > 0$, la multiplication par p est bijective dans $\pi_n(X)$).

ii) $\pi_1(X)$ est limite d'une suite finie d'extensions centrales $0 \longrightarrow A^\alpha \longrightarrow \pi_1^{\alpha+1} \longrightarrow \pi_1^\alpha \longrightarrow 1$ $(\alpha = 0,1,\dots,r-1$ et $\pi_1^r = \pi_1(X))$, où A^α est un groupe abélien et un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

On trouve des définitions équivalentes de la notion d'espace nilpotent et de $\mathbb{Q}$-espace dans [16].

Tout espace nilpotent M possède un localisé $M_{\mathbb{Q}}$ qui est un $\mathbb{Q}$-espace possédant la propriété suivante :

Il existe une application continue $\psi : M \longrightarrow M_{\mathbb{Q}}$ telle que, pour tout $\mathbb{Q}$-espace Y et toute application continue $g : M \longrightarrow Y$, il existe une application continue $\bar{g} : M_{\mathbb{Q}} \longrightarrow Y$, unique à homotopie près, telle que $\bar{g} \circ \psi$ soit homotope à g.

On démontre que $\psi : M \longrightarrow M_{\mathbb{Q}}$ est une localisation de M si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

i) $\psi^* : H^*(M_{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(M,\mathbb{Q})$ est un isomorphisme.

ii) ψ induit un isomorphisme $\pi_n(M) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \pi_n(M_{\mathbb{Q}})$ pour tout $n \geq 1$. ($\pi_1(M) \otimes \mathbb{Q}$ désigne le complété de Malcev).

On voit donc que le type d'homotopie de $M_{\mathbb{Q}}$ est bien défini ; il sera souvent appelé le type d'homotopie rationnelle de M.

On montre [16], [22], que le modèle minimal d'un espace nilpotent M (sur un corps k de caractéristique 0) est une K-S algèbre libre minimale nilpotente de type fini $(\Lambda X_M = \Lambda(\bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha)$, d), qu'on peut construire comme réunion d'algèbres libres $(\mathcal{M})_\alpha = \Lambda(\bigoplus_{\beta<\alpha} X_\beta)$, d) où $(\mathcal{M}_\alpha$, d) est le modèle minimal de M_α. De plus, on a :
$\bigoplus_{\beta<\alpha} X_\beta^n = \mathrm{Hom}(\pi_n(M_\alpha), k)$, et la différentielle d est donnée par les invariants de Postnikov associés à la décomposition de M. Il est clair alors qu'un espace nilpotent et son localisé ont même modèle minimal.

Plus précisément, on définit la catégorie homotopique rationnelle $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ dont les objets sont les $\mathbb{Q}$-espaces ayant le type d'homotopie d'un C-W complexe de type fini et dont les morphismes sont les classes d'homotopie d'applications continues.

Réciproquement, à toute algèbre différentielle graduée $(\Lambda X,d)$ de $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$, D. Sullivan associe, de manière fonctorielle, un $\mathbb{Q}$-espace de type fini appelé réalisation géométrique de $(\Lambda X,d)$.

Théorème 1.2.4. [16].- Le foncteur de Sullivan $\mathcal{F} : \mathcal{M}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ est une équivalence de catégories.

Ceci implique en particulier que, si M est un C-W complexe connexe nilpotent de type fini, son modèle minimal détermine le type d'homotopie rationnelle de M.

En conclusion, tout problème de topologie portant sur l'homotopie rationnelle (ou éventuellement la cohomologie rationnelle) d'un espace $M \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ aura une traduction algébrique et la solution du problème algébrique donnera la solution du problème topologique grâce au dictionnaire précédent. La théorie de Sullivan, donne aussi des résultats intéressants sur les modèles minimaux des différents espaces d'un fibré de Serre.

Soit $F \longrightarrow E \xrightarrow{f} B$ un fibré de Serre dont les espaces F,E,B sont connexes par arcs.

On notera $A(M) = A^*_k(M) = A^*_{\mathbb{Q}}(M) \otimes_{\mathbb{Q}} k$ la k-algèbre différentielle graduée associée à un espace M, où k est un corps de caractéristique 0.

D'après le théorème 1.1.3, on peut déterminer le modèle minimal de base $A(B)$ du morphisme $A(f) : A(B) \longrightarrow A(E)$. C'est une K-S extension minimale : $A(B) \longrightarrow A(B) \otimes \Lambda U \longrightarrow \Lambda U$; et le morphisme $\mathcal{J} : A(B) \otimes \Lambda U \longrightarrow A(E)$ induit un morphisme $\alpha : \Lambda U \longrightarrow A(F)$.

Le problème était de savoir si ΛU est le modèle minimal de la fibre. Ceci a été démontré par Halperin [11], ou Grivel [10] dans le cas 1-connexe.

Théorème 1.2.5.- Supposons que :

1) $H^*(B,k)$ ou $H^*(F,k)$ soit de type fini.

2) $\pi_1(B)$ agisse de manière nilpotente sur $H^*(F,k)$.

Alors α^* est un isomorphisme, donc $\alpha : (\Lambda U,d'') \longrightarrow A(F)$ est le modèle minimal de F.

Soit maintenant une application continue $g : B' \longrightarrow B$ où B' est connexe par arcs, on construit le fibré image réciproque :

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, equal] \arrow[d] & F \arrow[d] \\
E' = B' \times_B E \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & E \arrow[d, "f"] \\
B' \arrow[r, "g"] & B
\end{tikzcd}$$

Alors $A(g)$ est un morphisme d'ADG : $A(B) \longrightarrow A(B')$, on peut former l'ADG : $A(B') \otimes_{A(B)} (A(B) \otimes_k \Lambda U)$ et il est clair que : $A(B') \longrightarrow A(B') \otimes_{A(B)} (A(B) \otimes_k \Lambda U) \simeq A(B') \otimes_k \Lambda U \longrightarrow \Lambda U$ est une K-S extension minimale.

De plus, on a des diagrammes commutatifs d'ADG :

$$\begin{tikzcd}
A(B') \arrow[r, "A(f')"] \arrow[d, equal] & A(E') \arrow[r] & A(F) \\
A(B') \arrow[r] & A(B') \otimes_{A(B)} (A(B) \otimes \Lambda U) \arrow[r] \arrow[u, "\psi_1"] & \Lambda U \arrow[u, "\alpha_1"]
\end{tikzcd}$$

où ψ_1 est induit par ψ et α_1 est induit par α.

On déduit, du théorème 1.2.5. et d'un théorème d'isomorphie, le théorème suivant :

<u>*Théorème*</u> *1.2.6.* [11] : Supposons que :

1) $\pi_1(B)$ agisse de manière nilpotente sur $H^*(F,k)$.

2) ou bien $H^*(F,k)$ soit de type fini, ou bien $H^*(B,k)$ et $H^*(B',k)$ soient de type fini.

Alors ψ_1^* est un isomorphisme, donc $A(B') \longrightarrow A(B') \otimes_{A(B)} (A(B) \otimes \Lambda U)$ est le modèle minimal de $A(f')$ de base $A(B')$.

CHAPITRE II

LE MODELE MINIMAL BIGRADUE D'UN MORPHISME D'ALGEBRES GRADUEES ET LE MODELE FILTRE D'UN MORPHISME D'ALGEBRES DIFFERENTIELLES GRADUEES.

---

§ 1 - Modèle minimal bigradué d'un morphisme d'algèbres commutatives graduées.

Dans [14], Halperin et Stasheff construisent le modèle minimal bigradué d'une algèbre H connexe, vérifiant les propriétés suivantes.

Théorème 2.1.1. (Halperin - Stasheff).- Il existe des espaces gradués $(Z_i)_{i\geq 0}$ et une différentielle d homogène de degré inférieur -1 sur $\Lambda Z = \Lambda(\bigoplus_{i\geq 0} Z_i)$, il existe un morphisme d'ADG $\rho : (\Lambda Z,d) \longrightarrow (H,0)$ nul sur $\Lambda(\bigoplus_{i>0} Z_i)$ tel que :

1) $\rho^* : H_0(\Lambda Z,d) \longrightarrow H$ est un isomorphisme.

2) $H_+(\Lambda Z,d) = 0$.

3) $(\Lambda Z,d) \xrightarrow{\rho} H$ est le modèle minimal de H.

Soient H et H' deux algèbres commutatives graduées connexes (sur un corps k) et β un morphisme H dans H'. On suppose, dans toute la suite, que $\beta^1 : H^1 \longrightarrow H'^1$ est injective. On verra que, dans les applications topologiques qui nous intéressent, cette hypothèse est toujours satisfaite.

Soit donc $(\Lambda Z,d) \xrightarrow{\rho} H$ le modèle minimal bigradué de H donné par le théorème 2.1.1. On va construire un modèle minimal de β vérifiant les conclusions du théorème 1.1.4, tel que ΛX soit bigradué :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\beta"] & H' \\ & \\ (\Lambda Z,d) \arrow[uu, "\rho"] \arrow[r, "i"] & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \arrow[uu, "\rho'"'] \arrow[r, "p"] & (\Lambda X, d'') \end{tikzcd}$$

On va définir des espaces bigradués $X_o, X_1, \dots, X_n, \dots$ et on posera $X = \bigoplus_{n\geq 0} X_n$. Si $Y_n = Z_n \oplus X_n$, on construira une différentielle d' sur $\Lambda Y = \Lambda(\oplus Y_n) = \Lambda Z \otimes \Lambda X$ abaissant la graduation inférieure de ΛY de un. L'application ρ' sera définie sur $\Lambda Y_o = \Lambda Z_o \otimes \Lambda X_o$, de façon que $\rho' i = \beta\rho$ et prolongée par 0 sur Y_n, $n \geq 1$. On écrira

$$Z_{(n)} = \bigoplus_{i\leq n} Z_i \quad , \quad X_{(n)} = \bigoplus_{i\leq n} X_i \quad \text{et} \quad Y_{(n)} = \bigoplus_{i\leq n} (X_i \oplus Z_i)$$

Pour tout n, la sous-algèbre $\Lambda Y_{(n)}$ est stable par d' et on note

$$H_i(\Lambda Y_{(n)}, d') = \frac{(\Lambda Y_{(n)})_i \cap \operatorname{Ker} d'}{d'\left[(\Lambda Y_{(n)})_{i+1}\right]} \qquad \text{pour} \quad i \geq 0$$

et on vérifie que $H(\Lambda Y_{(n)}, d') = \bigoplus_{i\geq 0} H_i(\Lambda Y_{(n)}, d')$.

La différentielle d' et le morphisme ρ' seront construits de façon que les conditions (c_i) suivantes soient vérifiées :

(c_o) $\quad \rho' : \Lambda Y_o = \Lambda Z_o \otimes \Lambda X_o \longrightarrow H'$ est surjective

(c_1) $\quad \rho'^* : H_o(\Lambda Y_{(1)}, d') \xrightarrow{\simeq} H'$ est un isomorphisme

(c_n) $\quad \rho'^* : H_o(\Lambda Y_{(n)}, d') \xrightarrow{\simeq} H'$ est un isomorphisme ,

et $H_i(\Lambda Y_{(n)}, d') = 0$ pour $1 \leq i < n$

et $n \geq 2$.

Nous allons maintenant expliquer la construction un peu technique des X_n, de d' et de ρ'.

Construction en degré 0 : Soit $Z_o = H^+/H^+ . H^+$ l'espace des générateurs de l'algèbre H et π la projection : $H^+ \longrightarrow Z_o$. De même, on définit $Z'_o = H'^+/H'^+ . H'^+$ et π' est la projection : $H'^+ \longrightarrow Z'_o$.

Le morphisme β induit une application linéaire $\bar\beta : Z_o \longrightarrow Z'_o$ telle que $\bar\beta\pi = \pi'\beta$. Soit μ la projection de Z'_o sur Coker $\bar\beta$.

On pose alors $X_o = \text{Coker } \bar\beta$ et $d' = 0$ sur X_o.

Soit σ une section de la projection $\mu\pi'$: $H'^+ \longrightarrow X_o = \text{Coker } \beta$.

On définit alors $\rho' : \Lambda Y_o = \Lambda Z_o \otimes \Lambda X_o \longrightarrow H'$ par ses restrictions à ΛZ_o et ΛX_o, on pose $\rho'_{|Z_o} = \beta\rho$, $\rho'_{|X_o} = \sigma$.

Lemme 2.1.2.- $\rho' : \Lambda Y_o \longrightarrow H'$ est surjective.

Démonstration.- Il s'agit de montrer que H' est engendrée en tant que k-algèbre par $\beta\rho(Z_o)$ et $\sigma(X_o)$. Comme H' est graduée, cela équivaut à montrer que l'espace vectoriel Z'_o est engendré par $\pi'\ \beta\rho(Z_o)$ et $\pi'\sigma(X_o)$. Or $\pi'\beta\rho\ (Z_o) = \bar\beta\ \pi\rho(Z_o) = \bar\beta(Z_o)$ puisque, par construction, ρ est une section de π. D'autre part, on a $\mu(\pi'\sigma) = id_{|X_o}$, donc $\pi'\sigma$ est une section de la projection μ.

On a donc $Z'_o \simeq \bar\beta(Z_o) \oplus \pi'\sigma(X_o)$.

Construction en degré 1 : La condition (c_1) sera vérifiée si et seulement si on a $\text{Ker } \rho' = d'(Y_1 . \Lambda Y_o) = d'((\Lambda Y)_1)$. L'idéal engendré par $d'(Z_1) = d(Z_1)$ dans ΛY_o est évidemment dans le noyau de ρ'. Notons $d'(Z_1) . \Lambda Y_o$ cet idéal, et posons $L_1 = \dfrac{\text{Ker } \rho'}{d'(Z_1) . \Lambda Y_o}$; L_1 est un ΛY_o-module gradué, comme quotient de deux ΛY_o-modules gradués.

On a $L_1 = \bigoplus_{n>0} L_1^n$; et on vérifie que $L_1^1 = (\text{Ker } \rho')^1 \simeq (\text{Ker } \beta)^1$.

On a donc $L_1 = \bigoplus_{n>1} L_1^n$ d'après l'hypothèse de départ.

On pose alors : $X_1^p = \left(\dfrac{L_1}{\Lambda^+ Y_o . L_1}\right)^{p+1}$ pour $p \geq 1$ et $X_1 = \bigoplus_{p\geq 1} X_1^p$ (X_1 est l'espace des générateurs du ΛY_o-module L_1). On aura

$Y_1 = \bigoplus_{p\geq 1} (Z_1^p \oplus X_1^p)$.

On définit $d' : X_1 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\rho' \subset \Lambda Y_o$ en choisissant une section de la projection $\pi_1\, \mu_1 : \mathrm{Ker}\,\rho' \xrightarrow{\mu_1} L_1 \xrightarrow{\pi_1} X_1 \longrightarrow 0$.

On pose $d'|_{Z_1} = d$.

Il est clair que d' est une différentielle sur $\Lambda Y_{(1)}$, homogène de degré inférieur -1, et on a $\rho'\, d' = 0$.

<u>*Lemme*</u> *2.1.3.-*

i) $\rho'^* : H_o(\Lambda Y_{(1)}, d') \longrightarrow H'$ est un isomorphisme.

ii) $d'(X_1) \subset \mathrm{Ker}\,\bar\beta + \Lambda^+Y_o . \Lambda^+ Y_o \subset Z_o + \Lambda^+ Y_o . \Lambda^+ Y_o$

<u>*Démonstration*</u>.-

i) Par construction, on a $d'((\Lambda Y_{(1)})_1) \subset \mathrm{Ker}\,\rho'$.

Montrons l'inclusion en sens inverse :

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une base du k-espace vectoriel X_1 , alors $(\mu_1\, d'(x_i))_{i\in I}$ est un système de générateurs du ΛY_o-module L_1. Si $\alpha \in \mathrm{Ker}\,\rho'$, il existe donc des éléments $(\lambda_i)_{i\in I}$ de ΛY_o tels que : $\mu_1(\alpha) = \sum_i \lambda_i\, \mu_1\, d'(x_i)$. Ceci donne que $\mu_1(\alpha - \sum_i \lambda_i\, d'(x_i)) = 0$. Il existe donc $\beta \in Z_1 . \Lambda Y_o$ tel que :

$$\alpha = \sum \lambda_i\, d'(x_i) + d'\beta = d'(\sum \lambda_i\, x_i + \beta)$$

ii) Soit $x_1 \in X_1$ et écrivons $d'x = x_o + z_o + \sum_{i=1}^{m} u_i\, v_i$ où $x_o \in X_o$, $z_o \in Z_o$, $u_i \in \Lambda^+ Y_o$, $v_i \in \Lambda^+ Y_o$.

On a $0 = \rho'\, d'x = \rho'(x_o) + \rho'(z_o) + \sum \rho'(u_i)\, \rho'(v_i)$.

d'où $\quad 0 = \pi'\, \rho'(x_o) + \pi'\, \rho'(z_o) + 0 = \pi'\, \sigma(x_o) + \pi'\, \beta\rho(z_o)$,

d'où
$$0 = \pi'\, \sigma(x_o) + \bar\beta(z_o)$$
$$0 = \mu'\, \pi'\, \sigma(x_o) + 0 = x_o$$

donc on a $\quad x_o = 0$ et $\bar\beta(z_o) = 0$

Ceci montre que $d'(X_1) \subset \operatorname{Ker} \bar{\beta} + \Lambda^+ Y_o \, . \, \Lambda^+ Y_o$.

Construction en degré $n \geq 2$. Supposons que $(\Lambda Y_{(n)}, d')$ ait été construit pour un certain $n \geq 1$ de façon que le diagramme suivant soit un diagramme commutatif de morphismes d'ADG :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\quad\beta\quad} & H' \\ {\scriptstyle\rho}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\rho'} \\ (\Lambda Z_{(n)}, d) & \longrightarrow & [(\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(n)}, d'] \end{array}$$

On remarque que $H_n(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)}, d') = \dfrac{(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)})_n \cap \operatorname{Ker} d'}{d'([\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)}]_{n+1})}$

est un $H_o(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)})$ - module gradué.

On pose alors :

$$X^p_{n+1} = \left[H_n(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)}) \Big/ H_o^+(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)}) \, . \, H_n(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)}) \right]^{p+1}$$

et $X_{n+1} = \oplus X^p_{n+1}$, on définit $d' : X^p_{n+1} \longrightarrow (\Lambda Y_{(n)} \cap \operatorname{Ker} d')^{p+1}_n$ comme étant une section de la composée des projections :

$$(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)})_n \cap \operatorname{Ker} d' \longrightarrow H_n(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)}) \longrightarrow X_{n+1} \, .$$

On pose $d'|_{Z_{n+1}} = d$ et $\rho'|_{Y_{n+1}} = 0$.

Lemme 2.1.4.-

i) $(\Lambda Y)_n \cap \operatorname{Ker} d' \subset Z_n + \Lambda^+ Y \, . \, \Lambda^+ Y$ pour tout $n \geq 1$

ii) $Y_n = \bigoplus_{p \geq 1} Y^p_n$ pour tout $n \geq 0$

iii) Les conditions (c_n) sont vérifiées pour tout $n \geq 0$.

iv) $d'(X_{n+1}) \subset Z_n + \Lambda^+ Y \, . \, \Lambda^+ Y$ pour tout $n \geq 0$.

Démonstration :

i) Pour $n = 1$, soit $u \in (\Lambda Y)_1 \cap \operatorname{Ker} d'$, écrivons

$$u = x_1 + z_1 + \sum_{i=1}^{m} u_i\, v_i \quad \text{où} \quad x_1 \in X_1 \ , \ z_1 \in Z_1 \ , \ u_i \in Y_1 \ , \ v_i \in \Lambda^+ Y_o \ .$$

$$0 = d'u = d'x_1 + dz_1 + \sum d'u_i \,.\, v_i$$

Par définition de X_1 et d', on a $0 = \pi_1\, \mu_1\, d'x_1 + 0 = x_1$.

Si $n \geq 2$, soit $u \in (\Lambda Y)_n \cap \operatorname{Ker} d'$, écrivons

$$u = x_n + z_n + \sum_{i=1}^{m} u_i\, v_i + w \quad \text{où} \quad x_n \in X_n \ , \ z_n \in Z_n \ , \ u_i \in Y_n \ , \ v_i \in \Lambda^+ Y_o \ ,$$

$w \in \Lambda Y_+ . \Lambda Y_+$. Donc $w \in \Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n-1)}$, d'où $\tau_{n-1}\, d'w = 0$.

La classe de $\sum d'u_i \,.\, v_i$ dans $H_{n-1}(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n-1)})$ appartient à $H_o^+(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n-1)}) \,.\, H_{n-1}(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n-1)})$, donc $\tau_{n-1}(\sum_{i=1}^{m} d'u_i \,.\, v_i) = 0$.

On en déduit $0 = \tau_{n-1}\, d'u = \tau_{n-1}\, d'x_n + \tau_{n-1}\, d'z_n = x_n$.

ii) Ceci a été démontré pour $n = 0$ et 1. On le démontre par récurrence sur n.

D'après (i), on a $d'(X^p_{n+1}) \subset Z^{p+1}_n + (\Lambda^+ Y \,.\, \Lambda^+ Y)^{p+1}$.

Comme d' est injective sur X_{n+1}, on en déduit $X^p_{n+1} = 0$, $p < 0$ et $d'(X^o_{n+1}) \subset Z^1_n$.

Si $x \in X^o_{n+1}$, on a : $d'x = z \in Z^1_n$ et $0 = d'^2 x = dz$; d'où $x = 0$.

iii) Les conditions (c_o) et (c_1) ont été montrées. Il suffit de montrer que $H_n(\Lambda Y_{(n+1)}), d') = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Par définition de X_{n+1} et d', on a :

$$(\Lambda Y_{(n)})_n \cap \operatorname{Ker} d' = d'(X_{n+1}) + \operatorname{Ker} \tau_n \ .$$

On vérifie que :
$$\operatorname{Ker} \tau_n = d(Z_{n+1}) \,.\, \Lambda Y_o + (\Lambda Y_{(n)} \cap \operatorname{Ker} d')_n \,.\, \Lambda^+ Y_o + d'\left[(\Lambda Y_{(n)})_{n+1}\right] \ .$$

d'où l'on déduit :

$$(\Lambda Y_{(n+1)})_n \cap \operatorname{Ker} d' = d'(Y_{n+1}) \,.\, \Lambda Y_o + d'([\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)}]_{n+1})$$

$$+ [(\Lambda Y_{(n+1)})_n \cap \operatorname{Ker} d'] \,.\, \Lambda^+ Y_o$$

Comme $Y_q = \bigoplus_{p\geq 1} Y_q^p$ pour tout q, on en déduit (iii).

iv) est une conséquence de (i) et du lemme 2.1.3.

On peut maintenant énoncer le théorème d'existence et d'unicité du modèle minimal bigradué d'un morphisme.

Théorème 2.1.5.-

1) *Existence* : Soient H et H' deux algèbres commutatives graduées connexes et $\beta : H \longrightarrow H'$ un morphisme d'algèbres graduées injectif en degré 1. Alors il existe un modèle minimal bigradué de β :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\beta"] & H' & \\ (\Lambda Z, d) \arrow[u, "\rho"] \arrow[r] & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \arrow[u, "\rho'"'] \arrow[r, "p"] & (\Lambda X, d'') \end{tikzcd}$$

De plus :

i) $\rho^* : H_o(\Lambda Z,d) \xrightarrow{\sim} H$ et $H_+(\Lambda Z,d) = 0$

ii) $\rho'^* : H_o(\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \xrightarrow{\sim} H'$ et $H_+(\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') = 0$

2) *Unicité* : Supposons qu'il existe un modèle minimal de β :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\beta"] & H' & \\ (\Lambda W, \delta) \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "j"] & (\Lambda W \otimes \Lambda T, \delta') \arrow[u, "\mu'"'] \arrow[r, "q"] & (\Lambda T, \delta'') \end{tikzcd}$$

tel que

i) $W = \oplus W_n^p$ est bigradué et δ est homogène de degré inférieur - 1.

ii) $T = \oplus T_n^p$ est bigradué et δ' est homogène de degré inférieur - 1 dans $\Lambda W \otimes \Lambda T$.

iii) $\mu^* : H_o(\Lambda W,\delta) \simeq H$, $H_+(\Lambda W) = 0$, $\mu(\Lambda W_+) = 0$

iv) $\mu'^* : H_o(\Lambda W \otimes \Lambda T, \delta') \simeq H'$, $H_+(\Lambda W \otimes \Lambda T) = 0$, $\mu' [(\Lambda W \otimes \Lambda T)_+] = 0$

Alors il existe des isomorphismes d'ADG :

$\zeta : (\Lambda Z,d) \longrightarrow (\Lambda W,\delta)$, $\theta : (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \longrightarrow (\Lambda W \otimes \Lambda T, \delta')$,

$\eta : (\Lambda X,d'') \longrightarrow (\Lambda T,\delta'')$, homogènes de bidegré 0, rendant commutatifs les carrés suivants :

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda Z,d) \arrow[r, hook, "\text{incl.}"] \arrow[d, "\zeta"'] & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\theta"'] & (\Lambda X, d'') \arrow[d, "\eta"] \\
(\Lambda W,\delta) \arrow[r, hook] & (\Lambda W \otimes \Lambda T, \delta') \arrow[r] & (\Lambda T, \delta'')
\end{tikzcd}$$

De plus, $\rho' = \mu'\theta$ et $\rho = \mu\,\zeta$.

Démonstration :

1) *Existence* : Les parties ii) et iii) du lemme 2.1.4. montrent que $(\Lambda Z,d) \longrightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \longrightarrow (\Lambda X, d'')$ est une K-S extension et que les conclusions 1) (i) et (ii) du théorème sont vraies. De plus, $(\Lambda Z,d) \xrightarrow{\rho} H$ est le modèle minimal de H et la partie (i) du lemme 2.1.4. montre que la K-S extension est minimale. C'est donc le modèle minimal de β.

2) *Unicité* : Dans [14], Halperin et Stasheff prouvent l'existence d'un isomorphisme ζ tel que $\rho = \mu\,\zeta$. Par la même méthode, on montre l'existence d'un morphisme d'ADG $\theta : \Lambda Z \otimes \Lambda X \longrightarrow \Lambda W \otimes \Lambda T$ bihomogène de degré 0 tel que $\theta i = j\,\zeta$ et $\rho' = \mu'\,\theta$. Par passage au quotient, θ définit un morphisme d'ADG $\eta : (\Lambda X,d'') \longrightarrow (\Lambda T,\delta'')$,

bihomogène de degré 0 et on a $\eta p = q\theta$. Des théorèmes d'isomorphisme entre K-S extensions minimales de [11], on déduit que η est un isomorphisme, puis que θ est un isomorphisme.

Définition 2.1.6.- La K-S extension minimale $(\Lambda Z,d) \longrightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d')$ définie par le théorème 2.1.5. s'appelle le modèle minimal bigradué de β.

Remarques 2.1.7.-

1) Si $H = k$ et β est l'inclusion $k \longrightarrow H'$, alors $\Lambda Z = k$, et la construction précédente est celle de Halperin-Stasheff [14].

2) Si β est un isomorphisme, la construction précédente donne que $X = 0$, et $(\Lambda Z,d) \xrightarrow{\beta\rho} H'$ est le modèle minimal bigradué de H'.

3) Par construction, on a $X_o = 0$ si et seulement si β est surjective.

4) En général, la K-S algèbre libre $(\Lambda Y,d')$ n'est pas minimale, comme on le verra sur des exemples. Cependant, on a le résultat suivant :

Proposition 2.1.8.- $(\Lambda Y_{(1)}, d')$ est minimale si et seulement si

$$\beta^{-1}(H'^{+} . H'^{+}) \subset H^{+} . H^{+}$$

Cette proposition résulte facilement du lemme 2.1.3.

Corollaire 2.1.9.- Si H est une algèbre libre, alors $(\Lambda Y,d') \xrightarrow{\rho'} H'$ est le modèle minimal bigradué de H' si et seulement si $\beta^{-1}(H'^{+} . H'^{+}) \subset H^{+} . H^{+}$.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.1.8. et du lemme 2.1.4.

Exemple 2.1.10.- Soit H une algèbre commutative graduée connexe telle que $H^1 = 0$, et soit β la projection : $H \longrightarrow k=H^0$.

Soit

$$\begin{array}{ccccc} & & H & \xrightarrow{\beta} & k \\ & & \uparrow{\scriptstyle\rho} & & \uparrow{\scriptstyle\rho'} \\ (\Lambda Z,d) & \longrightarrow & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') & \longrightarrow & (\Lambda X,d'') \end{array}$$

le modèle minimal bigradué de β.

Notons $Q(d')$ l'application linéaire induite par d' sur l'espace vectoriel $Z \oplus X$ des éléments indécomposables.

On va montrer que $Q(d')$ est un isomorphisme de X_m^p sur Z_{m-1}^{p+1}, et que $d'' = 0$.

En effet, on définit des espaces vectoriels bigradués $\bar{Z}_m^p$ par la condition : $\bar{Z}_m^p = Z_{m-1}^{p+1}$, $m \geqslant 1$, $p \geqslant 1$ et on considère l'algèbre bigraduée contractile $\Lambda Z \otimes \Lambda\bar{Z}$ munie de la différentielle δ nulle sur ΛZ, et si $\bar{z} \in \bar{Z}_m^p$, $\delta\bar{z}$ est l'élément $z \in Z_{m-1}^{p+1}$ correspondant. On définit $\bar{\rho} : (\Lambda Z \otimes \Lambda\bar{Z},\delta) \longrightarrow k$ comme étant la projection sur k. La démonstration de l'unicité du modèle (minimal) bigradué d'une algèbre dans [14] montre qu'il existe un morphisme homogène de bidegré 0, $\psi : (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \longrightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda\bar{Z},\delta)$ tel que $\bar{\rho}\,\psi = \rho'$; il s'en suit que ψ^* est un isomorphisme. Grâce au théorème d'isomorphie de [11], on sait que ψ induit des isomorphismes d'espaces vectoriels :

$$Q(\psi)^{*p}_{n} : H_n^p\,(Z \oplus X\ ,\ Q(d')) \xrightarrow{\sim} H_n^p(Z \oplus \bar{Z}\ ,\ Q(\delta')) = 0$$

Or $$H_n^p\,(Z \oplus X\ ,\ Q(d')) = \frac{Z_n^p}{Q(d')(X_{n+1}^{p-1})} \oplus X_n^p \cap \operatorname{Ker} Q(d')$$

Ceci montre que $Q(d')$ est un isomorphisme de X^{p-1}_{n+1} sur Z^p_n. Le théorème 5.2. de [12] entraîne que $d'' = 0$.

Remarque 2.1.11.- L'exemple précédent montre que, en général, $H_+(\Lambda X,d'') \neq 0$. La K-S algèbre libre minimale bigraduée $(\Lambda X,d'')$ n'est pas le modèle minimal bigradué, au sens du théorème 2.1.1., d'une algèbre commutative graduée. On verra, au chapitre 4, que l'hypothèse que $H_+(\Lambda X,d'') = 0$ est forte ; en effet, si $\beta : H \to H'$ est l'application induite en cohomologie par une fibration de Serre $E \xrightarrow{f} B$, ayant certaines propriétés, et si $H_+(\Lambda X, d'') = 0$, alors les suites spectrales de Serre et d'Eilenberg-Moore du fibré collapsent.

Remarque 2.1.12.- La sous-algèbre $H_o(\Lambda X,d'')$ de $H(\Lambda X,d'')$ peut se calculer à partir de H et H'. Plus précisément, le morphisme $\rho' : (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \longrightarrow H'$ induit un morphisme d'ADG : $\rho'' : (\Lambda X,d'') \longrightarrow H'/I$ (où I est l'idéal engendré par $\beta(H^+)$ dans H'). Ce morphisme est surjectif en degré 0, nul en degrés inférieurs strictement positifs et $\rho''^* : H_o(\Lambda X,d'') \longrightarrow H'/I$ est un isomorphisme.

§ 2 - *Modèle filtré d'un morphisme d'algèbres différentielles graduées.*

Dans [14], Halperin et Stasheff démontrent le théorème suivant :

Théorème 2.2.1.- Soit (A,d_A) une ADG c-connexe, et soit $(\Lambda Z,d)$ une ADG telle que $\Lambda Z = \Lambda(\bigoplus_{\substack{p>0 \\ n\geq 0}} Z^p_n)$ est bigradué et d est homogène de degré inférieur -1, et soit ρ un morphisme d'ADG $(\Lambda Z,d) \longrightarrow H(A)$ tel que $\rho(\Lambda Z_+) = 0$. On suppose que les conditions $(c_n)_{n\geq 0}$ du paragraphe 1 sont vérifiées, pour le morphisme $\rho : (\Lambda Z,d) \longrightarrow H(A)$. (On ne suppose pas que $(\Lambda Z,d)$ est minimale). Alors il existe une ADG $(\Lambda Z,D)$ et un morphisme $\pi : (\Lambda Z,D) \longrightarrow (A,d_A)$ tel que :

$E_1)$ $D - d : Z_n \longrightarrow \sum_{\ell \leq n-2} (\Lambda Z)_\ell$, $n \geq 0$

$E_2)$ $c\ell(\pi z) = \rho(z)$ si $z \in \Lambda Z_o$

$E_3)$ π^* est un isomorphisme.

De plus, si $\pi' : (\Lambda Z,D') \longrightarrow (A,d_A)$ vérifie les conclusions $(E_i)_{i=1,2,3}$, alors il existe un isomorphisme $\psi : (\Lambda Z,D) \longrightarrow (\Lambda Z,D')$ tel que

i) $\psi - id : Z_n \longrightarrow \sum_{\ell \leq n-1} (\Lambda Z)_\ell$

ii) $\pi'\psi$ est homotope à π.

$(\Lambda Z,D) \xrightarrow{\pi} (A,d_A)$ est appelé un modèle filtré de (A,d_A). Si $(\Lambda Z,d)$ est minimale, $(\Lambda Z,D) \xrightarrow{\pi} (A,d_A)$ s'appelle le modèle filtré de (A,d_A). C'est une K-S algèbre libre, non minimale en général.

Dans toute la suite, on filtrera l'algèbre bigraduée ΛZ de la manière suivante $F^{-p}(\Lambda Z) = \sum_{n \leq p} (\Lambda Z)_n$, $p \geq 0$, et $F^{+1} = 0$. C'est une filtration décroissante, et la différentielle D préserve la filtration.

La démonstration du théorème 2.2.1. repose, de manière fondamentale, sur le lemme suivant :

Lemme 2.2.2.- [14] Soit H une algèbre graduée connexe, soit $(\Lambda Z,d)$ une ADG telle que $\Lambda Z = \Lambda(\bigoplus_{\substack{p>0 \\ n\geq 0}} Z_n^p)$ est bigradué et d est homogène de degré inférieur -1, et soit ρ un morphisme d'ADG : $(\Lambda Z,d) \longrightarrow H$ tel que $\rho(\Lambda Z_+) = 0$. On suppose que les conditions $(c_n)_{n\geq 0}$ du paragraphe 1 sont vérifiées. On fixe une application linéaire

$\eta : H \longrightarrow \Lambda Z_o$ tel que $\rho\eta = id_H$. Soit $(\Lambda Z_{(n)}, D)$ une ADG telle que $D-d : Z_\ell \longrightarrow F^{-(\ell-2)}(\Lambda Z)$, $0 \leq \ell \leq n$. Alors, si $u \in F^{-(n-1)}(\Lambda Z)$ et vérifie $Du = 0$, il existe

$$v \in F^{-n}(\Lambda Z) \text{ et } \alpha \in H \text{ tels que :}$$

$$u = Dv + \eta(\alpha) .$$

Corollaire 2.2.3.- Soit $(\Lambda Z,d) \xrightarrow{\rho} H$ vérifiant les hypothèses du lemme 2.2.2. Soit $(\Lambda Z,D)$ une ADG telle que $D-d : Z_n \longrightarrow F^{-(n-2)}(\Lambda Z)$, $n \geq 0$. Alors l'inclusion $\lambda : \Lambda Z_o \hookrightarrow \Lambda Z$ induit un isomorphisme

$$\lambda^* : H_o(\Lambda Z,d) = \Lambda Z_o \Big/ d\left[(\Lambda Z)_1\right] \longrightarrow H(\Lambda Z,D) .$$

On définit ainsi un isomorphisme $\rho^* (\lambda^*)^{-1} : H(\Lambda Z,D) \longrightarrow H$.

Démonstration du corollaire : D'après le lemme 2.2.2., λ^* est surjective.

Soit maintenant $u_o \in \Lambda Z_o$, tel que $\lambda^*[u_o] = 0$; il existe donc $(v_i)_{i=1,\dots,n}$, $v_i \in (\Lambda Z)_i$ tel que $u_o = D(\sum_{i=1}^{n} v_i)$. Si $n \geq 2$, on a $dv_n = 0$. Or $H_n(\Lambda Z,d) = 0$, donc il existe $w_{n+1} \in (\Lambda Z)_{n+1}$ tel que $v_n = dw_{n+1}$, et $Dw_{n+1} = v_n - w'_{n-1}$ où $w'_{n-1} \in F^{-(n-1)}(\Lambda Z)$. Alors u_o s'écrit $u_o = D(\sum_{i=1}^{n-1} v_i + Dw_{n+1} + w'_{n-1}) = D(\sum_{i=1}^{n-1} v'_i)$ où $v'_i \in (\Lambda Z)_i$, $i = 1,\dots,n-1$.

En itérant cet argument, on peut écrire $u_o = Du'_1$ avec $u'_1 \in (\Lambda Z)_1$, donc $u_o = du'_1$ et $[u_o] = 0$ dans $H_o(\Lambda Z,d)$.

Enonçons maintenant le théorème fondamental d'existence et d'"unicité" du modèle filtré d'un morphisme d'ADG.

Théorème 2.2.4.- Soient (A,d_A) et $(A',d_{A'})$ deux ADG c-connexes, et soit $\alpha : (A,d_A) \longrightarrow (A',d_{A'})$ un morphisme d'ADG tel que α^* est injectif en degré 1. Soit :

$$\begin{tikzcd} H(A) \arrow[r, "\alpha^*"] & H(A') \\ (\Lambda Z,d) \arrow[u, "\rho"] \arrow[r] & (\Lambda Z \otimes \Lambda X,\ d') = (\Lambda Y,d') \arrow[u, "\rho'"'] \end{tikzcd}$$

le modèle minimal bigradué de α^* défini au théorème 2.1.5.

Soit $(\Lambda Z,D) \xrightarrow{\pi} (A,d_A)$ le modèle filtré de A défini au théorème 2.1.1.

1) *Existence* : Alors il existe une ADG $(\Lambda Z \otimes \Lambda X,\ D')$ et un morphisme $\pi' : (\Lambda Z \otimes \Lambda X,\ D') \longrightarrow (A',d_{A'})$ vérifiant les conditions :

E_1) $D'-d' : Y_n \longrightarrow F^{-(n-2)}(\Lambda Y)$

E_2) $cl\pi'(y) = \rho'(y) \quad , \quad y \in \Lambda Y_o$

E_3) π'^* est un isomorphisme.

De plus, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} (A,d_A) \arrow[r, "\alpha"] & (A',d_{A'}) \\ (\Lambda Z,D) \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, dash, "i"] & (\Lambda Z \otimes \Lambda X,\ D') \arrow[u, "\pi'"'] \end{tikzcd} \qquad i = \text{inclusion}$$

et $(\Lambda Z,D) \xrightarrow{i} (\Lambda Z \otimes \Lambda X,\ D') \xrightarrow{p} (\Lambda X,\ D'')$ est une K-S extension.

2) *Unicité* : Supposons qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (A,d_A) \arrow[r, "\alpha"] & (A',d_{A'}) \\ (\Lambda Z,\tilde{D}) \arrow[u, "\tilde{\pi}"] \arrow[r, "i"] & (\Lambda Z \otimes \Lambda X,\ \tilde{D}') \arrow[u, "\tilde{\pi}'"'] \end{tikzcd}$$

où les couples $(\Lambda Z,\tilde{D}) \xrightarrow{\tilde{\pi}} (A,d_A)$ et $(\Lambda Z \otimes \Lambda X,\ \tilde{D}') \xrightarrow{\tilde{\pi}'} (A',d_{A'})$ vérifient chacun les conditions E_1, E_2, E_3.

Alors il existe un isomorphisme $\psi : (\Lambda Z,D) \longrightarrow (\Lambda Z,\tilde{D})$ et un isomorphisme $\psi' : (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \longrightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda X, \tilde{D}')$ tels que :

i) $\psi - id_{\Lambda Z}$ et $\psi' - id_{\Lambda Z\otimes\Lambda X}$ font décroitre strictement la filtration.

ii) $\psi' i = i\psi$

iii) le couple $(\tilde{\pi}\psi, \tilde{\pi}'\psi')$ est homotope au couple (π,π').

<u>*Démonstration*</u> :

1) <u>*Existence*</u> : On construit D' et π' par récurrence sur $Y_o = Z_o \oplus X_o, \dots, Y_n = Z_n \oplus X_n, \dots$. Sur Z_n, on prendra $D' = D$ et $\pi' = \alpha\pi$. On construira D' et π' sur X_n par une méthode analogue à celle utilisée pour construire D et π sur ΛZ : (voir [14], démonstration du théorème 4.4.). Les axiomes E_1 et E_2 sont bien vérifiés. Si λ'^* est l'isomorphisme : $H_o(\Lambda Y,d') \longrightarrow H(\Lambda Y,D)$, la condition E_2 implique que $\pi'^* = \rho'^*(\lambda'^*)^{-1}$, donc π'^* est un isomorphisme.

2) <u>*Unicité*</u> : D'après le théorème 2.2.1., il existe un isomorphisme $\psi : (\Lambda Z,D) \longrightarrow (\Lambda Z,\tilde{D})$ tel que $\psi - id$ fait décroitre la filtration, et un morphisme $\Phi : (\Lambda Z,D)^I \longrightarrow (A,d_A)$ tel que $\Phi(\lambda_o)_{\Lambda Z} = \pi$ et $\Phi(\lambda_1)_{\Lambda Z} = \tilde{\pi}\psi$.

On va construire un morphisme $\Phi' : (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')^I \longrightarrow (A',d_{A'})$ et un isomorphisme $\psi' : (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \longrightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda X, \tilde{D}')$, par récurrence sur le degré inférieur. On posera sur Y_o : $\psi' = id$, $\Phi' = \pi'$; sur $\overline{Z_o} \otimes D\,\overline{Z_o}$, on posera $\Phi' = \alpha\Phi$, et sur $\bar{X}_o \otimes D\,\overline{X_o}$ on fera la construction du théorème 4.4 de [14]. Plus généralement, on posera $\Phi' = \alpha\Phi$ sur $Z_n \oplus \bar{Z}_n \oplus D\bar{Z}_n$ et $\psi' = \psi$ sur Z_n, et on construira ψ' sur X_n et Φ' sur $X_n \oplus \bar{X}_n \oplus D'\,\bar{X}_n$ selon la méthode de [14]. Il est facile de vérifier que $\Phi'(\lambda_o)_{\Lambda Z\otimes\Lambda X} = \pi'$ et $\phi'(\lambda_1)_{\Lambda Z\otimes\Lambda X} = \tilde{\pi}'\,\psi'$. Par construction, on a $\phi' i = \alpha\phi$. Ceci achève la démonstration du théorème.

Définition 2.2.5.- La K-S extension libre :
$(\Lambda Z, D) \xrightarrow{i} (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \xrightarrow{p} (\Lambda X, D'')$ vérifiant les conclusions du théorème 2.2.4. s'appelle le modèle filtré de α.

§ 3 - *Applications topologiques : modèle filtré d'une application continue.*

Définition 2.3.1.- Soient S et T deux espaces topologiques connexes par arcs et soit f une application continue $S \longrightarrow T$. Le modèle filtré du morphisme $A(f) : A(T) \longrightarrow A(S)$ s'appelle le modèle filtré de f (relativement au corps k de caractéristique 0 fixé).

Définition 2.3.2.- Un espace topologique connexe S est dit formel (sur k) si le modèle minimal de $A(S)$ est égal au modèle minimal de $H^*(S,k)$.

On démontre, [14] ou [22], que la notion de formalité est indépendante du corps de base. Sullivan démontre que tout espace nilpotent qui possède une structure d'espace riemannien symétrique compact orientable est formel (voir [22] ou [8], [14]).

On remarque qu'un espace S est formel si et seulement si le modèle filtré de $A(S)$ est égal au modèle minimal bigradué de $H^*(S,k)$. Plus précisément si $\rho : (\Lambda Z,d) \longrightarrow H^*(S,k)$ est le modèle minimal bigradué de $H^*(S,k)$, S est formel si et seulement si il existe un morphisme $\pi : (\Lambda Z,d) \longrightarrow A(S)$ tel que $\pi^* = \rho^*$.

Soit S un espace formel, et soit $m_S : \Lambda X_S \longrightarrow A(S)$ le modèle minimal de $A(S)$, il existe alors un morphisme d'ADG $\psi_S : \Lambda X_S \longrightarrow H^*(S,k)$ tel que $\psi_S^* = m_S^*$.

Définition 2.3.3.- Soient S et T deux espaces topologiques connexes formels de modèles minimaux ΛX_S et ΛX_T. Soit $f : S \longrightarrow T$ une application continue, elle induit un morphisme d'ADG $\hat{f} : \Lambda X_T \longrightarrow \Lambda X_S$. On dit que l'application f est formelle sur k si le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda X_T & \xrightarrow{\hat{f}} & \Lambda X_S \\ {\scriptstyle \psi_T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_S} \\ H^*(T,k) & \xrightarrow{f^*} & H^*(S,k) \end{array}$$

(où ψ_S et ψ_T sont les morphismes définis plus haut).

Dans [5], Deligne, Griffiths, Morgan et Sullivan montrent que les variétés kähleriennes compactes simplement connexes sont formelles et que toute application holomorphe entre de telles variétés est formelle. On peut se demander si la notion d'application formelle peut s'exprimer à l'aide du modèle filtré de l'application.

Proposition 2.3.4.- Soient S et T deux espaces formels connexes par arcs et f une application continue $S \longrightarrow T$. Si le modèle filtré de f est égal au modèle minimal bigradué de $f^* : H^*(T,k) \longrightarrow H^*(S,k)$. Alors l'application f est formelle.

Démonstration : Supposons que :

$$\begin{array}{ccc} H^*(T,k) & \xrightarrow{f^*} & H^*(S,k) \\ \uparrow{\scriptstyle \rho} & & \uparrow{\scriptstyle \rho'} \\ (\Lambda Z,d) & \xrightarrow{i} & (\Lambda Z \otimes \Lambda X,\ d') \end{array}$$

soit le modèle minimal bigradué de f^* et que :

$$\begin{array}{ccc} A(T) & \xrightarrow{A(f)} & A(S) \\ \uparrow{\scriptstyle\pi} & & \uparrow{\scriptstyle\pi'} \\ (\Lambda Z,d) & \xrightarrow{i} & (\Lambda Z \otimes \Lambda X,\ d') \end{array}$$

soit le modèle filtré de $A(f)$.

On remarque que $\pi : (\Lambda Z,d) \longrightarrow A(T)$ est le modèle minimal de $A(T)$ et que $\rho : (\Lambda Z,d) \longrightarrow H^*(T,k)$ est le modèle minimal de $H^*(T,k)$ avec $\rho^* = \pi^*$.

Soit $m_S : \Lambda X_S \longrightarrow A(S)$ le modèle minimal de $A(S)$; il existe un morphisme d'ADG $\theta' : \Lambda X_S \longrightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda X,\ d')$ tel que $\pi'\ \theta'$ est homotope à m_S. Puisque $\theta'^* = (\pi'^*)^{-1}\ m_S^*$ est un isomorphisme, il existe un morphisme d'ADG $\theta : (\Lambda Z \otimes \Lambda X,\ d') \longrightarrow \Lambda X_S$ tel que $\theta'\theta$ est homotope à $Id_{\Lambda Z\otimes\Lambda X}$. On a $A(f)\pi = \pi' i$; et d'autre part, $m_S\theta i$ est homotope à $\pi'\theta'\theta i$; et comme la relation d'homotopie est transitive, on en déduit que $m_S(\theta i)$ est homotope à $\pi' i = A(f)\pi$. Ceci montre que $A(f)$ induit le morphisme $\hat{f} = \theta i$ entre les modèles minimaux. De plus $\rho'\theta' : \Lambda X_S \longrightarrow H^*(S,k)$ est telle que $(\rho'\theta')^* = \pi'^*\ \theta'^* = m_S^*$.

Calculons maintenant $f^*\rho = \rho' i$ d'une part et $\rho'\theta'\hat{f}$ d'autre part ; on a $\rho'\theta'\hat{f} = \rho'\theta'\theta i$, donc $\rho'\theta'\hat{f}$ est homotope à $\rho' i = f^*\rho$. Ceci montre bien que l'application f est formelle.

Question : La réciproque de la proposition 2.3.4. est-elle vraie ?

Remarque 2.3.5.- Il est facile de construire des applications non formelles entre espaces formels. Par exemple, on montre que la fibration de Hopf $S^1 \longrightarrow S^3 \xrightarrow{f} S^2$ n'est pas une application formelle : en effet, f est triviale en cohomologie et non triviale en homotopie puisque son invariant de Hopf est égal à un.

Nous allons nous intéresser maintenant au modèle filtré d'une fibration de Serre. Il va résulter, du théorème 1.2.5. et des théorèmes d'isomorphie entre K-S extensions, le théorème suivant :

Théorème 2.3.6.- Soit $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{f} B$ un fibré de Serre dont les espaces E, B, F sont connexes par arcs et tel que

1) $H^*(B,k)$ ou $H^*(F,k)$ est de type fini.

2) $\pi_1(B)$ agit de manière nilpotente sur $H^*(F,k)$.

Alors la fibre $(\Lambda X, D'')$ du modèle filtré $(\Lambda Z, D) \xrightarrow{i} (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \xrightarrow{p} (\Lambda X, D'')$ de f est un modèle (non minimal en général) de F.

Plus précisément, le morphisme d'ADG $\pi' : (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \longrightarrow A(E)$ induit un quasi-isomorphisme $\pi'' : (\Lambda X, D'') \longrightarrow A(F)$.

On remarque que, puisque F est connexe par arcs, la suite exacte d'homotopie s'écrit : $\ldots \longrightarrow \pi_1(E) \xrightarrow{f_\#} \pi_1(B) \longrightarrow 0$ où $f_\#$ est l'application induite par f entre les groupes d'homotopie ; de même, l'application induite par f entre les groupes d'homologie $f_* : H_1(E,\mathbb{Q}) \longrightarrow H_1(B,\mathbb{Q})$ est surjective, donc, par dualité $f^{*1} : H^1(B,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^1(E,\mathbb{Q})$ est injective. On peut donc construire le modèle filtré de $A(f) : A(B) \longrightarrow A(E)$.

Malheureusement, $(\Lambda X, D'') \xrightarrow{\pi''} A(F)$ n'est pas le modèle filtré de F selon la définition du théorème 2.1.1. En particulier, $H^*(\Lambda X,d'')$ n'est pas en général isomorphe à $H^*(F)$. On a seulement le résultat suivant :

Proposition 2.3.7.- Soit $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{f} B$ un fibré de Serre vérifiant les hypothèses du théorème 2.3.6. et soit

$$\begin{tikzcd} H^*(B,k) \arrow[r, "f^*"] & H^*(E,k) \arrow[r, "j^*"] & H^*(F,k) \\ (\Lambda Z,d) \arrow[u, "\rho"] \arrow[r] & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \arrow[u, "\rho'"'] \arrow[r, "p"] & (\Lambda X, d'') \end{tikzcd}$$

le modèle minimal bigradué de f^*.

Alors ρ' induit un morphisme d'ADG $\rho'' : (\Lambda X,d'') \longrightarrow H^*(F,k)$ tel que $\rho''p = j^*\rho'$. On a $\rho'' = 0$ sur ΛX_+ et $\pi''^*[x] = \rho''(x)$ si $x \in \Lambda X_o$.

Si B est simplement connexe, la suite spectrale de Serre du fibré collapse au terme E_2 si et seulement si ρ'' est surjective.

Dans le paragraphe 4, on va appliquer les résultats précédents sur la construction du modèle filtré d'une fibration au calcul du modèle minimal (bigradué) d'un espace homogène.

§ *4 - Modèle minimal d'un espace homogène.*

Soit G un groupe de Lie compact connexe, K un sous-groupe de Lie connexe fermé et G/K l'espace homogène correspondant. Soit j l'inclusion $K \hookrightarrow G$. Notons B_K et B_G les espaces classifiants de K et de G ; on sait que l'inclusion $j : K \hookrightarrow G$ induit une fibration $Bj : B_K \longrightarrow B_G$ de fibre G/K.

Soit P_G (resp. P_K) l'espace vectoriel des éléments primitifs de G (resp. de K). On sait que $H^*(G,\mathbb{R}) = E(P_G)$, $H^*(K,\mathbb{R}) = E(P_K)$ et le morphisme d'algèbres $j^* : H^*(G,\mathbb{R}) \longrightarrow H^*(K,\mathbb{R})$ est induit par une application linéaire $\bar{j}^* : P_G \longrightarrow P_K$ (voir [9]), (i.e. $j^* = E(\bar{j}^*)$).

Notons Q_G (resp. Q_K) l'espace vectoriel défini par $Q_G^{2p} = P_G^{2p-1}$ (resp. $Q_K^{2p} = P_K^{2p-1}$) pour $p \geq 1$; on a alors $H^*(B_G,\mathbb{R}) = S(Q_G)$

et $H^*(B_K,\mathbb{R}) = S(Q_K)$. Le morphisme d'algèbres $Bj^* : S(Q_G) \longrightarrow S(Q_K)$ induit, par passage au quotient, une application linéaire $\overline{Bj}^* : Q_G \longrightarrow Q_K$. En général, $\overline{Bj}^*$ n'est pas la restriction de Bj^* au sous-espace des indécomposables, comme le montrent les calculs du chapitre XI de [9].

On peut choisir des transgressions $\tau_G : P_G \longrightarrow Q_G$ et $\tau_K : P_K \longrightarrow Q_K$ de façon que $\overline{Bj}^*\tau_G = \tau_K \bar{j}^*$ (voir [1]).

En 1950, H. Cartan exhibait une algèbre différentielle graduée libre non minimale dont la cohomologie était isomorphe à celle de $H^*(G/K, \mathbb{R})$, (voir [2] et [3]). C'était l'ADG : $S(Q_K) \otimes E(P_G)$ munie de la différentielle δ égale à 0 sur Q_K et $\delta\xi = Bj^* \tau_G(\xi)$ si $\xi \in P_G$.

On va construire le modèle filtré de Bj, mais, comme les algèbres de cohomologie de B_G et de B_K sont des algèbres polynomiales, le modèle filtré de Bj sera égal au modèle minimal bigradué de Bj^* donc $(\Lambda X,d'')$ sera le modèle minimal de G/K. Plus précisément, on a :

Théorème 2.4.1.- Le modèle minimal de G/K est $(\Lambda X, d'')$ où $\Lambda X = S(\mathrm{Coker}\ \overline{Bj}^*) \otimes E(\mathrm{Ker}\ j^*)$, $d'' = 0$ sur $\mathrm{Coker}\ \overline{Bj}^*$ et $d''(\mathrm{Ker}\ j^*) \subset S(\mathrm{Coker}\ \overline{Bj}^*)$.

On donnera aussi une formule explicite pour d''.

On trouve, ainsi, comme application de la construction du modèle filtré, une algèbre libre minimale quasi-isomorphe à l'algèbre exhibée par Cartan dans [3]. La théorie générale de Sullivan [22, Théorème 2.2] permet d'affirmer que l'ADG $(S(Q_K) \otimes E(P_G), \delta)$ de Cartan est isomorphe au produit tensoriel de $(\Lambda X, d'')$ par une algèbre contractile.

En corollaire, on obtientun résultat sur les groupes d'homotopie réels d'un espace homogène. Ce résultat est donné par Lehmann [16] et Wu-Wen-Tsün [25] pour des espaces simplement connexes.

Corollaire 2.4.2.- Soit G un groupe de Lie compact connexe, et soit K un sous-groupe fermé connexe. On a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\bigoplus_{n>0} \pi_{2n}(G/K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathrm{Coker}\ \overline{Bj}^*(Q_G \longrightarrow Q_K)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\bigoplus_{n\geq 0} \pi_{2n+1}(G/K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\ j^*(P_G \longrightarrow P_K)\ .$$

Démonstration du corollaire.- G/K étant la fibre d'une fibration dont l'espace total est simplement connexe, c'est un espace nilpotent. Donc, on peut définir $\pi_1(G/K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$, et le corollaire découle du théorème 2.4.1. et de la théorie de Sullivan.

Démonstration du théorème.- On va construire le modèle minimal bigradué de Bj^* : $H^*(B_G,\mathbb{R}) = S(Q_G) \longrightarrow H^*(B_K,\mathbb{R}) = S(Q_K)$.

On a $(\Lambda Z,d) = (\Lambda Z_o,d)$ avec $Z_o = Q_G$, et $X_o = \mathrm{Coker}(\overline{Bj}^*)$

Soit q la projection $Q_K \longrightarrow X_o$ et τ une section de cette projection.

On définit $\rho' : \Lambda Z_o \otimes \Lambda X_o \longrightarrow S(Q_K)$ par $\rho|_{Z_o} = Bj^*$ et $\rho|_{X_o} = \mathrm{incl.}\ \tau$ où $\mathrm{incl} : Q_K \hookrightarrow S(Q_K)$.

Soit U_o un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\ \overline{Bj}^*$ dans Z_o , on a un isomorphisme d'espaces vectoriels $\overline{Bj}^* \oplus \tau : U_o \oplus X_o \longrightarrow \mathrm{Im}\ \overline{Bj}^* \oplus \tau(X_o) = Q_K$, et on remarque que $\rho' : S(U_o) \otimes S(X_o) \longrightarrow S(Q_K)$ induit cet isomorphisme sur l'espace vectoriel des indécomposables, donc $\rho'|_{S(U_o) \otimes S(X_o)}$ est un isomorphisme. En particulier, pour tout $z \in \mathrm{Ker}\ \overline{Bj}^*$, il existe un (unique) $\alpha \in S(U_o) \otimes S(X_o)$ tel que $\rho'(z+\alpha) = 0$ et α est décomposable. Soit $(z_i)_{1\leq i\leq m}$ une base de $\mathrm{Ker}\ \overline{Bj}^*$, il est clair que $\mathrm{Ker}\ \rho'$ est engendré par les éléments $(z_i + \alpha_i)_{1\leq i\leq m}$. Posons alors $X_1 = \tau_G^{-1}(\mathrm{Ker}\ \overline{Bj}^*) = \mathrm{Ker}\ j^*$, on voit que la famille $(\xi_i = \tau_G^{-1}(z_i))_{1\leq i\leq m}$ est une base de X_1 , et on définit $d'\xi_i = \tau_G(\xi_i) + \alpha_i$.

Donc $\rho'^{*} : H_o(\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \xrightarrow{\simeq} H(B_K,\mathbb{R}) = S(Q_K)$ est un isomorphisme.

Les générateurs $(\xi_i)_{1\leq i\leq m}$ de X_1 sont de degré impair et la suite $(d'\xi_i)_{1\leq i\leq m}$ est régulière dans $\Lambda Z_o \otimes \Lambda X_o$, donc, d'après le théorème d'isomorphisme de [15], on voit que :

$$H^*(\Lambda Z_o \otimes \Lambda X_o \otimes \Lambda X_1 , d') \simeq H^*(\Lambda Z_o \otimes \Lambda X_o / (d'(\xi_i)) , 0)$$

d'où
$$H^*(\Lambda Z_o \otimes \Lambda X_o \otimes \Lambda X_1 , d') \simeq H_o(\Lambda Z \otimes \Lambda X , d')$$

et
$$H_i(\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') = 0 \quad \text{pour } i > 0.$$

Le modèle minimal bigradué de Bj^* est donc :

$$\begin{tikzcd} S(Q_G) \arrow[r, "Bj^*"] \arrow[d, equal] & S(Q_K) \\ S(Q_G) \arrow[r, hook] & S(Q_G) \otimes S(\mathrm{Coker}\,\overline{Bj}^*) \otimes E(\mathrm{Ker}\ j^*), d') \arrow[u, "\rho'"'] \end{tikzcd}$$

Le modèle filtré de Bj est égal au modèle bigradué puisque $Z = Z_o$ et $X = X_o \oplus X_1$, donc le modèle minimal de G/K est $(\Lambda X, d'')$ où $\Lambda X = S(\mathrm{Coker}\,\overline{Bj}^*) \otimes E(\mathrm{Ker}\ j^*)$ et $d'' = 0$ sur $S(\mathrm{Coker}\,\overline{Bj}^*)$, $d''\xi = p(\alpha)$ si p est la projection de $S(Q_G) \otimes \Lambda X$ sur ΛX. On peut écrire $\alpha = \beta + \sum_i u_i\ \beta_i$ où $\beta \in S(X_o)$, $u_i \in U_o$ et $\beta_i \in S(U_o) \otimes S(X_o)$ donc $d''\xi = \beta$. On a : $Bj^*\tau_G(\xi) = -\rho'(\alpha) = -\rho'(\beta) - \sum_i Bj^*(u_i)\ \rho'(\beta_i)$. On va définir un morphisme surjectif $r : S(Q_K) \longrightarrow S(X_o)$ de la manière suivante : on pose $r_{|\tau(X_o)} = -q$ (où q était la projection $Q_K \longrightarrow X_o$), et r est défini sur $\mathrm{Im}\ \overline{Bj}^*$ de manière que $rBj^*_{|U_o} = 0$. Alors on a :

$$r\ Bj^*\ \tau_G(\xi) = +\ q\ \rho'(\beta) = \beta\ ,$$ d'où la formule donnant d'' :

$$d''\xi = r\,Bj^*\ \tau_G(\xi)\ .$$

Le théorème 2.4.1. a diverses conséquences. On peut d'abord préciser des résultats bien connus sur les espaces homogènes (Greub - Halperin - Van Stone [9], chapitre XI). Si Bj^* est surjective, alors $\mathrm{Coker}\ \overline{Bj}^* = 0$

et on a $H^*(G/K) = E(\mathrm{Ker}\ j^*)$. Le sous-espace de Samelson $\hat{P}_G = (\mathrm{Im}\ p_G^*)^+ \cap P_G$ (où p_G^* est induite par la projection $G \xrightarrow{p_G} G/K$), est alors égal à $\mathrm{Ker}\ j^*$.

Si G et K ont même rang, alors on a $\dim \mathrm{Ker}\ j^* = \dim \mathrm{Coker}\ \overline{Bj}^*$, et donc la caractéristique $\chi_\pi = \sum_{i \geq 1} (-1)^i \dim(\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q})$ de G/K est égal à 0. En appliquant les résultats de [13], on en déduit que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi_c = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim H^i(G/K, \mathbb{R})$ de G/K est strictement positive et que

$$H^*(G/K) \simeq S(\mathrm{Coker}\ \overline{Bj}^*) / r\ Bj^*(\mathrm{Ker}\ j^*)\ .\ S(\mathrm{Coker}\ \overline{Bj}^*).$$

On va maintenant donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le modèle minimal de G/K pour que (K,G) soit une paire de Cartan. La définition d'une paire de Cartan se trouve, par exemple, dans [9]. Une des définitions équivalentes est que G/K est formel.

Théorème 2.4.3.- Soit G un groupe de Lie compact connexe et soit K un sous-groupe fermé connexe de G.

Alors (K,G) est une paire de Cartan si et seulement si l'idéal $r\ Bj^*\ \tau_G(\mathrm{Ker}\ j^*)\ .\ S(\mathrm{Coker}\ \overline{Bj}^*)$ peut être engendré par une suite régulière d'éléments homogènes. [r est le morphisme surjectif : $S(Q_K) \longrightarrow S(\mathrm{Coker}\ \overline{Bj}^*)$ défini dans la démonstration précédente].

Démonstration : Si l'idéal $r\ Bj^*\ \tau_G(\mathrm{Ker}\ j^*)\ .\ S(\mathrm{Coker}\ \overline{Bj}^*)$ peut être engendré par une suite régulière formée de q éléments ; il existe des éléments $(\xi_i)_{1 \leq i \leq q}$ linéairement indépendants dans $\mathrm{Ker}\ j^*$ tels que $(a_i = d''\xi_i)_{1 \leq i \leq q}$ forment une suite régulière engendrant l'idéal. D'après un théorème de [15], on en déduit que $H^*(G/K)$ est isomorphe à la cohomologie de l'ADG : $(S(\mathrm{Coker}\ \overline{Bj}^*) / (a_1, \dots, a_q) \otimes E(V)\ ,\ \bar{d})$ où V est un supplémentaire de $\bigoplus_{i=1}^{q} \mathbb{R}\,\xi_i$ dans $\mathrm{Ker}\ j^*$ et $\bar{d}$ est la différentielle induite par d'' par passage au quotient. Mais il est clair que $\bar{d} = 0$, donc on a :

$$H^*(G/K) \simeq S(\mathrm{Coker}\ \overline{Bj}^*) \, / _{(a_1,\dots,a_q)} \otimes E(V) \quad .$$

Comme $H^*(G/K)$ est de dimension finie, on a nécessairement $q = \dim \mathrm{Coker}\ \overline{Bj}^*$, d'où $\dim V = \mathrm{rg}\ G - \mathrm{rg}\ K$. Il est facile de voir que le modèle minimal bigradué de $H^*(G/K)$ est de la forme $(\Lambda Z = \Lambda(Z_o \oplus Z_1) \ , \ d)$; donc toutes les ADG dont la cohomologie est égale à $H^*(G/K)$ sont formelles (on dit que $H^*(G/K)$ est intrinsèquement formelle). En particulier, G/K est formel ; ce qui entraîne que (K,G) est une paire de Cartan [9].

Réciproquement, si (K,G) est une paire de Cartan, alors le modèle minimal $(\Lambda X, d'')$ de G/K est formel. On a, de plus $d''_{|X^{pair}} = 0$ et $d''(X^{impair}) \subset \Lambda X^{paire}$ où $\Lambda X^{paire} = \Lambda(\bigoplus_{p>0} X^{2p})$.

Soit $(a_1,\dots,a_q)$ un système minimal de générateurs de l'idéal $d''(X^{impair}).\Lambda X^{paire}$. Il existe donc des éléments $(\xi_i)_{1\leq i\leq q}$ de X^{impair} tels que $d''\xi_i = a_i$. Soient $\xi_{q+1},\dots,\xi_r$ des éléments de X^{impair} tels que la famille $(\xi_i)_{1\leq i\leq r}$ soit une base de X^{impair}. Si $i > q$, il existe des éléments $\lambda_{ij} \in \Lambda X^{paire}$ tels que $d''\xi_i = \sum_{j=1}^{q} \lambda_{ij}\, a_j$, donc $d''(\xi_i - \sum_{j=1}^{q} \lambda_{ij}\, \xi_j) = 0$.
Soit φ l'automorphisme de ΛX égal à l'identité sur $\Lambda X^{paire} \otimes E(\xi_1,\dots,\xi_q)$ et qui envoie ξ_i sur $\xi_i + \sum_j \lambda_{ij}\, \xi_j$ pour tout $i \geq q+1$; et soit $\delta = \varphi\, d''\varphi^{-1}$; alors on a $\delta\xi_i = a_i$ pour tout $i \leq q$ et $\delta\xi_i = 0$ pour tout $i \geq q+1$.

Comme $(\Lambda X, \delta)$ est formelle ; il existe un morphisme d'ADG $\psi : (\Lambda X,\delta) \longrightarrow H^*(\Lambda X,\delta)$ induisant l'identité en cohomologie. On peut décomposer $(\Lambda X,\delta)$ en

$$(\Lambda X^{paire} \otimes E(\xi_1,\dots,\xi_q),\ \delta) \otimes (E(\xi_{q+1},\dots,\xi_r)\ ,\ 0)$$

De plus, on a $H^*(\Lambda X,\delta) \simeq H^*(\Lambda X^{paire} \otimes E(\xi_1,\dots,\xi_q),\delta) \otimes E(\xi_{q+1},\dots,\xi_r)$.

Comme ψ^* est l'identité, il est clair que $\psi(\xi_i) = \xi_i$ pour $i > q$.

Le morphisme ψ définit un morphisme d'ADG ψ' :

$$(\Lambda X^{paire} \otimes E(\xi_1,\ldots,\xi_q), \delta) \longrightarrow H^*(\Lambda X^{paire} \otimes E(\xi_1,\ldots,\xi_q), \delta)$$

et ψ'^* est un isomorphisme.

Ceci prouve que $(\Lambda X^{paire} \otimes E(\xi_1,\ldots,\xi_q), \delta)$ est formelle. Montrons que sa cohomologie H est graduée en degrés pairs. Supposons le contraire et soit $2p+1$ le plus petit entier tel que $H^{2p+1} \neq 0$. Si on construit le modèle minimal bigradué $(\Lambda Z,d)$ de H, alors $Z_o^{2p+1} \neq 0$. Comme l'ADG $(\Lambda U,\delta) = (\Lambda X^{paire} \otimes E(\xi_1,\ldots,\xi_q), \delta)$ est formelle, il existe un isomorphisme $\varphi : (\Lambda Z,d) \longrightarrow (\Lambda U,\delta)$. Soit $z \in Z_o^{2p+1}$, $\varphi(z)$ est nécessairement de la forme : $y + \alpha$, où $y \neq 0$, $y = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \xi_i$, $\lambda_i \in R$ et $\alpha \in (\xi_1,\ldots,\xi_q).\Lambda^+ U$.

Comme $dz = 0$, on a $0 = \delta\varphi(z) = \delta y + \delta\alpha$, ceci implique que $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i a_i = \delta y = - \delta\alpha = \sum_{i=1}^{q} P_i a_i$ où $P_i \in \Lambda^+ X^{paire}$. Ceci contredit le fait que $(a_1,\ldots,a_q)$ est un système minimal de générateurs de l'idéal $d''(X^{impair}) . \Lambda X^{paire}$. On a donc montré que H est gradué en degré pairs. Comme H est de dimension finie, on en déduit que la dimension de X^{paire} est q et que la suite $(a_1,\ldots,a_q)$ est régulière (théorème 5 de [13]). Comme $d''\xi = r\, Bj^* \tau_G(\xi)$ pour tout $\xi \in \operatorname{Ker} j^*$, on en déduit le théorème.

Corollaire 2.4.4.- Soit $h_P : H^*(B_K,\mathbb{R}) \longrightarrow H^*(G/K)$ l'homomorphisme de Weil. Si (K,G) est une paire de Cartan, alors $\operatorname{Im} h_P$ est isomorphe au quotient de $S(\operatorname{Coker} \overline{Bj}^*)$ par une suite régulière d'éléments.

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du fait que si (K,G) est une paire de Cartan, alors $H^*(G/K) = \operatorname{Im} h_P \otimes \Lambda\hat{P}_G$ où $\dim \hat{P}_G = \operatorname{rg} G - \operatorname{rg} K$, et de la démonstration du théorème précédent.

CHAPITRE III

ETUDE DE LA REALISATION D'UN MORPHISME DONNE EN COHOMOLOGIE.

§ 1 - *Exposés topologique et algèbrique du problème.*

Soient S et T deux espaces nilpotents ayant le type d'homotopie d'un C-W-complexe de type fini, et soit f un morphisme : $H^*(T,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(S,\mathbb{Q})$. Le problème suivant se pose : Est-ce que le morphisme f est le morphisme induit en cohomologie par une application continue de S dans T ?

On va étudier ce problème dans la catégorie homotopique rationnelle $T_{\mathbb{Q}}$ définie au chapitre 1. On trouvera, dans Quillen [18], une autre définition de la catégorie homotopique rationnelle. Ici, nous poserons le problème en ces termes : soient $S_{\mathbb{Q}}$ (resp. $T_{\mathbb{Q}}$) les localisés de S (resp. T), on note encore f le morphisme induit : $H^*(T_{\mathbb{Q}},\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(S_{\mathbb{Q}},\mathbb{Q})$ et on cherche s'il existe une classe d'applications continues définies à homotopie près de $S_{\mathbb{Q}}$ dans $T_{\mathbb{Q}}$ induisant en cohomologie le morphisme f donné. On dira alors que f est réalisable s'il existe une telle "application".

On peut formuler un problème analogue dans la catégorie $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ définie au chapitre 1 : Soient (A,d_A) et $(A',d_{A'})$ deux ADG dans $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$, et soit β un morphisme d'algèbres : $H^*(A,d_A) \longrightarrow H^*(A',d_{A'})$. Existe-t-il une classe de morphismes d'ADG définis à homotopie près induisant en cohomologie le morphisme β donné ? Si cette classe existe, on dira que β est réalisable dans $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$.

Le théorème 1.2.4. du chapitre 1 nous donne le résultat évident suivant :

Proposition 3.1.1.- Soient S et T deux espaces nilpotents ayant le type d'homotopie d'un C-W complexe de type fini. Soit f un morphisme $H^*(T,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(S,\mathbb{Q})$. Alors f est réalisable par une application de $S_{\mathbb{Q}}$ dans $T_{\mathbb{Q}}$ si et seulement si le morphisme correspondant $\hat{f} : H^*(\Lambda X_T) \longrightarrow H^*(\Lambda X_S)$ est réalisable dans $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$. (ΛX_T (resp. ΛX_S) est le modèle minimal de T (resp. de S)).

Nous sommes donc ramenés à étudier un problème purement algébrique. En fait, nous allons étudier un problème algébrique un peu plus général dont les données ne seront plus nécessairement dans la catégorie $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$.

Définition 3.1.2.- Soient (A,d_A) et $(A',d_{A'})$ deux algèbres différentielles graduées sur un corps k de caractéristique 0, c-connexes ; et soit $\beta : H(A,d_A) \longrightarrow H(A',d_{A'})$ un morphisme fixé. On dit que β est réalisable s'il existe une suite finie d'ADG c-connexes (A_i, d_i) $i = 0,\ldots, n+1$ où $(A_o,d_o) = (A,d_A)$ et $(A_{n+1}, d_{n+1}) = (A',d_{A'})$, et s'il existe des morphismes d'ADG : $(A_i, d_i) \longrightarrow (A_{i+1}, d_{i+1})$ ou des quasi-isomorphismes $(A_{i+1}, d_{i+1}) \longrightarrow (A_i, d_i)$, tels que, en cohomologie, le morphisme composé soit égal à β.

Notons $m_A : (\Lambda X_A,d) \longrightarrow (A,d_A)$ et $m'_{A'} : (\Lambda X'_{A'},d') \longrightarrow (A',d_{A'})$ les modèles minimaux de (A,d_A) et $(A',d_{A'})$. On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.1.3.- Un morphisme $\beta : H(A,d_A) \longrightarrow H(A',d_{A'})$ est réalisable si et seulement si il existe un morphisme d'ADG $\varphi : (\Lambda X_A,d) \longrightarrow (\Lambda X'_{A'},d')$ tel que $\beta = m'^*_{A'}\varphi^*(m_A^*)^{-1}$.

Démonstration : Supposons que β soit réalisable. Soit $\psi_i : (A_i,d_i) \longrightarrow (A_{i+1},d_{i+1})$ un morphisme d'ADG ; et soit $m_i : (\Lambda X_i,\delta_i) \longrightarrow (A_i,d_i)$ le modèle minimal de (A_i,d_i). Le morphisme ψ_i définit un morphisme φ_i : $(\Lambda X_i,\delta_i) \longrightarrow (\Lambda X_{i+1},\delta_{i+1})$ tel que $m_{i+1}\,\varphi_i$ soit homotope à $\psi_i\ m_i$. De même si $\psi'_k : (A_k, d_k) \longrightarrow (A_{k-1}, d_{k-1})$ est un morphisme d'ADG tel que ψ'^*_k est un isomorphisme, on définit $\varphi'_k : (\Lambda X_k, \delta_k) \longrightarrow (\Lambda X_{k-1}, \delta_{k-1})$ tel que $m_{k-1}\, \varphi'_k$ soit homotope à $\psi'_k\, m_k$. On a donc $m_{k-1}^{\;*}\varphi'^*_k = \psi'^*_k\, m_k^*$, ce qui prouve que φ'^*_k est un isomorphisme. Ceci entraîne que φ'_k est un isomorphisme puisque $(\Lambda X_k, \delta_k)$ et $(\Lambda X_{k-1}, \delta_{k-1})$ sont des algèbres libres minimales. On posera alors $\varphi_{k-1} = (\varphi'_k)^{-1}$. Soit $\varphi = \varphi_n \cdot \ldots \cdot \psi_1 \cdot \psi_o$, c'est un morphisme d'ADG : $(\Lambda X_A, d) \longrightarrow (\Lambda X'_{A'}, d')$ et on vérifie que $\beta = m'_{A'}{}^{*} \varphi^* (m_A{}^*)^{-1}$.

Remarque 3.1.4.- Il est clair que le morphisme φ est défini à homotopie près et que si les ADG (A, d_A) et $(A', d_{A'})$ sont deux algèbres libres minimales nilpotentes de type fini, la notion de réalisabilité au sens de la définition 3.1.2. coïncide avec celle donnée dans la catégorie $\mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$.

Remarque 3.1.5.- Compte-tenu de la proposition 3.1.3., on peut supposer que (A, d_A) et $(A', d_{A'})$ sont deux algèbres libres minimales et le problème de la réalisation s'exprime ainsi : soit $\beta : H(A, d_A) \longrightarrow H(A', d_{A'})$ un morphisme d'algèbres graduées, existe-t-il un morphisme d'ADG $\alpha : (A, d_A) \longrightarrow (A', d_{A'})$ tel que $\alpha^* = \beta$?

Nous terminerons ce paragraphe par l'énoncé d'un cas où la réalisation triviale.

Proposition 3.1.6.- Soient S et T deux C-W complexes nilpotents de type fini formels. Alors tout morphisme $f : H^*(T, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(S, \mathbb{Q})$ est réalisable dans la catégorie homotopique rationnelle par une application formelle.

Remarque 3.1.7.- Il se peut que f soit aussi réalisable par une application (non formelle) non homotope à l'application formelle. Ainsi, l'application triviale de $H^*(S^2, \mathbb{Q})$ dans $H^*(S^3, \mathbb{Q})$ peut être réalisée d'une infinité de manières.

§ 2 - *Etude d'une obstruction à la réalisation.*

Dans ce paragraphe, on se donne deux ADG (A,d_A) et $(A',d_{A'})$ qui sont des algèbres libres minimales c-connexes sur un corps k de caractéristique 0. On suppose fixé un morphisme d'algèbres graduées $\beta : H(A,d_A) \longrightarrow H(A',d_{A'})$ injectif en degré 1 ; et on cherche s'il existe un morphisme d'ADG $\alpha : (A,d_A) \longrightarrow (A',d_{A'})$ tel que $\alpha^* = \beta$.

On va exposer une théorie de l'obstruction nous disant sous quelles conditions β est réalisable. Les méthodes employées généralisent celles de Halperin - Stasheff, chapitre 5, [14] , qui envisagent le cas où β est un isomorphisme , et $H(A)$ est de type fini. Dans ce cas particulier , ils montrent que β est réalisable si et seulement si une certaine suite d'obstructions $O_n(\beta)$ est nulle. Nous verrons que, lorsque β est un morphisme quelconque, le problème est beaucoup plus compliqué, et que les obstructions que nous pouvons définir en degré n dépendent des choix faits en degrés inférieurs .

L'outil essentiel de cette étude est la théorie développée au chapitre 2.

On construit le modèle minimal bigradué du morphisme β :

$$\begin{array}{ccc} H(A) & \xrightarrow{\beta} & H(A') \\ \rho \uparrow & & \uparrow \rho' \\ (\Lambda Z,d) & \longrightarrow & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \end{array}$$

défini par le théorème 2.1.5.

On construit ensuite le modèle filtré $(\Lambda Z,D) \xrightarrow{\pi} (A,d_A)$ de l'algèbre différentielle graduée (A,d_A).

Le morphisme d'ADG $\rho' : (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \longrightarrow H(A',d_{A'})$ satisfait aux hypothèses du théorème 2.2.1., donc on peut construire un modèle filtré de $(A',d_{A'})$: $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \xrightarrow{\pi'} (A',d_{A'})$ vérifiant les conditions E_1, E_2, E_3 du théorème 2.2.1.

On se donne aussi des applications linéaires $\eta : H(A) \longrightarrow \Lambda Z_o$ et $\eta' : H(A') \longrightarrow \Lambda Y_o$ telles que $\rho\eta = id_{H(A)}$ et $\rho'\eta' = id_{H(A')}$.

Dans toute la suite, on suppose fixés ces deux modèles filtrés de (A,d_A) et $(A',d_{A'})$ ainsi que les applications η et η'. On mettra toujours sur ΛZ et sur $\Lambda Z \otimes \Lambda X$ les filtrations définies au chapitre 2 § 2.

Il est bien évident que, en général, $D'(\Lambda Z)$ n'est pas contenu dans ΛZ et a fortiori que $D'_{|\Lambda Z} \neq D$.

Théorème 3.2.1.- β est réalisable si et seulement si il existe une différentielle $\bar{D}$ sur $\Lambda Z \otimes \Lambda X$ satisfaisant E_1, telle que $\bar{D}_{|\Lambda Z} = D$ et s'il existe un isomorphisme d'ADG φ : $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, \bar{D}) \longrightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')$ tel que φ-id soit décroissante pour la filtration (φ n'est pas ΛZ-linéaire).

[Dans toute la suite, une application est dite décroissante pour la filtration si elle est strictement décroissante pour la filtration].

Démonstration : Si β est réalisable par $\alpha : (A,d_A) \longrightarrow (A',d_{A'})$; on sait construire, grâce au théorème 2.2.4., un modèle filtré de α :

$$\begin{array}{ccc} (A,d_A) & \xrightarrow{\alpha} & (A',d_{A'}) \\ \uparrow{\scriptstyle \pi} & & \uparrow{\scriptstyle \bar{\pi}} \\ (\Lambda Z,D) & \xrightarrow{i} & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, \bar{D}) \end{array}$$

tel que le diagramme ci-dessus soit un diagramme commutatif de morphismes d'ADG. En particulier, on a $\bar{D}_{|\Lambda Z} = D$.

Mais $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, \bar{D}) \xrightarrow{\bar{\pi}} (A',d_{A'})$ et $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \xrightarrow{\pi'} (A',d_{A'})$ sont deux modèles filtrés de $(A',d_{A'})$ vérifiant les conclusions du théorème 2.2.1. Ce même théorème nous assure l'existence d'un isomorphisme

$\varphi : (\Lambda Z \otimes \Lambda X, \bar{D}) \longrightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')$ tel que φ-id soit décroissante pour la filtration et tel que $\pi'\varphi$ soit homotope à $\bar{\pi}$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une différentielle $\bar{D}$ sur $\Lambda Z \otimes \Lambda X$ vérifiant E_1, telle que $\bar{D}_{|\Lambda Z} = D$, et supposons qu'il existe un isomorphisme $\varphi : (\Lambda Z \otimes \Lambda X, \bar{D}) \longrightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')$ tel que φ-id soit décroissante pour la filtration. On a alors le diagramme suivant de morphismes d'ADG :

$$(A,d_A) \xleftarrow{\pi} (\Lambda Z,D) \xrightarrow{i} (\Lambda Z \otimes \Lambda X, \bar{D}) \xrightarrow{\varphi} (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \xrightarrow{\pi'} (A',d_{A'})$$

Montrons que $\pi'^{*}\varphi^{*}i^{*}(\pi^{*})^{-1} = \beta$:

Soit $u \in H(A)$, on a $u = \rho\eta(u) = \pi^{*}[\eta(u)]$, donc

$\pi^{*-1}(u)=[\eta(u)]$ où $[\eta(u)]$ désigne la classe de $\eta(u)$ dans $(\Lambda Z,D)$.

Comme $\varphi_{|\Lambda Z_o} = id_{|\Lambda Z_o}$, on a :

$\pi'^{*}\varphi^{*}i^{*}(\pi^{*})^{-1}(u) = \pi'^{*}[\eta(u)] = \rho'(\eta(u)) = \beta\rho\eta(u) = \beta(u)$.

Ceci prouve que β est réalisable, et la proposition 3.1.3. nous prouve l'existence d'un morphisme $\alpha : (A,d_A) \longrightarrow (A',d_{A'})$ tel que $\alpha^{*} = \beta$.

Nous sommes alors amenés à poser la définition suivante :

Définition 3.2.2.- Le morphisme $\beta : H(A,d_A) \longrightarrow H(A',d_{A'})$ est dit n-réalisable $(n \geq 0)$ s'il existe une différentielle $\bar{D}$ sur $(\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(n)}$ satisfaisant E_1, telle que $\bar{D}_{|\Lambda Z_{(n)}} = D$ et s'il existe un isomorphisme $\varphi : ((\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(n)}, \bar{D}) \longrightarrow ((\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(n)}, D')$ tel que φ-id soit décroissante pour la filtration.

Un tel couple $(\bar{D},\varphi)$ s'appelle une n-réalisation de β.

Si $(\bar{D},\varphi)$ est une n-réalisation de β, on définit une application linéaire de degré 1 par :

$$O_{n+1}(\bar{D},\psi)(z) = [\pi'\psi Dz] \quad \text{si} \quad z \in Z_{n+1} \ ;$$

($[\ ]$ désigne la classe de l'élément dans $H(A')$).

Alors $O_{n+1}(\bar{D},\psi)$ est un élément de $\mathrm{Hom}^1(Z_{n+1}, H(A'))$ et s'appelle l'obstruction définie par le couple $(\bar{D},\psi)$.

Remarques 3.2.3.-

i) Le morphisme β est toujours 1-réalisable par la différentielle $\bar{D} = d' = D'$ et le morphisme $\psi = id_{|(\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(1)}}$.

ii) Il est clair, grâce au théorème 3.2.1., que si β est réalisable, alors β est n-réalisable pour tout n. On verra, que dans certains cas, la réciproque est vraie.

La première question qui se pose alors est de savoir si une n-réalisation se prolonge en une n+1-réalisation. La réponse est fournie par le théorème suivant :

Théorème 3.2.4.- Une n-réalisation $(\bar{D},\psi)$ se prolonge en une (n+1)-réalisation si et seulement si $O_{n+1}(\bar{D},\psi) = 0$.

Démonstration : Si $(\bar{D},\psi)$ se prolonge en une (n+1)-réalisation notée encore $(\bar{D},\psi)$, alors, pour tout $z \in Z_{n+1}$, on a :

$$[\pi'\psi Dz] = [\pi' D'\psi z] = 0 \ .$$

Réciproquement, supposons que $O_{n+1}(\bar{D},\psi) = 0$. Nous voulons d'abord prolonger $\bar{D}$ et ψ à Z_{n+1}. Si $z \in Z_{n+1}$, on a $Dz \in F^{-(n)}(\Lambda Z)$, et $\psi(Dz) - D'z \in F^{-(n-1)}(\Lambda Y) \cap \mathrm{Ker}\, D'$. D'après le lemme 2.2.2., il existe $w \in F^{-n}(\Lambda Y)$ et $u \in H(A')$ tels que $\psi(Dz) = D'(z+w) + \eta'(\alpha')$.

Comme $O_{n+1}(\bar{D},\psi)(z) = 0$, on a : $0 = [\pi' D'(z+w)] + \alpha' = \alpha'$.

On pose alors $\psi(z) = z + w$, on définit ainsi une application linéaire ψ, en choisissant w dépendant linéairement de z. Par construction, on a :

$$(\psi - \mathrm{id})(Z_{n+1}) \in F^{-n}(\Lambda Y) \quad \text{et} \quad \psi(Dz) = D'\psi(z) \quad \text{si} \quad z \in Z_{n+1} .$$

Il reste à prolonger $\bar{D}$ et ψ à X_{n+1}. Soit $x \in X_{n+1}$, alors $\bar{D}\,dx \in F^{-(n-2)}(\Lambda Y) \cap \operatorname{Ker} \bar{D}$; d'après le lemme 2.2.2., il existe $v \in F^{-(n-1)}(\Lambda Y)$ et il existe $\alpha' \in H(A')$ tels que

$$\bar{D}\,dx = \bar{D}v + \eta'(\alpha').$$

On a alors $D'\psi(dx) = \psi(\bar{D}\,dx) = D'\,\psi(v) + \eta'(\alpha')$

d'où $$0 = [\pi' D' \psi(dx)] = \alpha' ;$$

Ceci implique que $\bar{D}(dx-v) = 0$.

Posons alors $\bar{D}x = dx - v - \eta'\,([\pi'\psi(dx-v)])$. Alors on a $[\pi'\psi\bar{D}x] = 0$, et on peut prolonger ψ à X_{n+1} par la méthode précédente. On étend alors $(\bar{D},\psi)$ à $\Lambda Y_{(n+1)}$; par construction, c'est une $(n+1)$-réalisation de β.

On peut alors énoncer les théorèmes :

<u>*Théorème*</u> 3.2.5.- Soit un morphisme $\beta : H(A) \longrightarrow H(A')$. Supposons qu'il existe un entier $\ell \geq 1$ tel que

$$H^p(A) = 0 \quad 1 \leq p \leq \ell \quad \text{et} \quad H^p(A') = 0 \quad p > 3\ell + 1.$$

Alors β est réalisable.

On verra des exemples d'application de ce théorème au paragraphe suivant.

<u>*Théorème*</u> 3.2.5'.- Soient S et T deux C-W complexes nilpotents de type fini et soit un morphisme $f : H^*(T,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(S,\mathbb{Q})$.

Supposons qu'il existe un entier $\ell \geq 1$ tel que $H^p(T,\mathbb{Q}) = 0$ $1 \leq p \leq \ell$, $H^p(S,\mathbb{Q}) = 0$ $p > 3\ell + 1$, alors f est réalisable par une application (définie à homotopie près) de $S_{\mathbb{Q}}$ dans $T_{\mathbb{Q}}$.

Démonstration du théorème 3.2.5.- D'après la remarque 3.8.4. de [14], on a $Z_n^p = 0$, $1 \leq p \leq (n+1)\ell$ puisque $H^p(A) = 0$ pour $1 \leq p \leq \ell$.

Soit $(\bar{D},\psi)$ une 1-réalisation quelconque, alors $0_2(\bar{D},\psi) \in \mathrm{Hom}^1(Z_2,H(A'))$ et $Z_2^p = 0$ pour $1 \leq p \leq 3\ell$. Donc si $z \in Z_2^p$ et $p \leq 3\ell$, on a alors $0_2(\bar{D},\psi)(z) = 0$; de plus si $z \in Z_2^p$ et $p \geq 3\ell + 1$, alors $0_2(\bar{D},\psi)(z)$ est un élément de $H^{p+1}(A')$, donc $0_2(\bar{D},\psi)(z) = 0$ d'après l'hypothèse sur $H^*(A')$. Ceci prouve que $0_2(\bar{D},\psi) = 0$, donc $(\bar{D},\psi)$ se prolonge en une 2-réalisation de β.

En itérant cette démonstration, on construit une suite $(\bar{D}_n,\psi_n)$ où $(\bar{D}_n,\psi_n)$ est une n-réalisation prolongeant $(\bar{D}_{n-1}, \psi_{n-1})$.

On définit alors une différentielle $\bar{D}$ sur $\Lambda Z \otimes \Lambda X$ satisfaisant E_1 et telle que $\bar{D}_{|\Lambda Z} = D$, et on définit un morphisme ψ : $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, \bar{D}) \longrightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')$ tel que ψ-id soit décroissante pour la filtration de la manière suivante :

si $u \in (\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(n)}$, on pose $\bar{D}u = \bar{D}_n u$ et $\psi(u) = \psi_n(u)$.

Le théorème 3.2.1. montre que β est réalisable.

La seconde question qui se pose dans un problème de ce type est la suivante : soit $(\bar{D},\psi)$ une n-réalisation de β qui ne se prolonge pas en une n+1-réalisation , existe-t-il une autre n-réalisation qui va se prolonger ?

Cela nous amène à comparer deux n-réalisations et les deux obstructions qui leur sont associées.

Notation : $0_n(\beta) = \{0_n(\bar{D},\psi) \mid (\bar{D},\psi)$ est une (n-1) - réalisation de $\beta\}$.

Par définition, une 1-réalisation est un automorphisme ψ de l'ADG $[(\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(1)}, d']$ tel que ψ-id soit décroissante pour la filtration.

Soit M_1 l'espace vectoriel des k-dérivations de degré 0 définies sur $(\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(1)}$ strictement décroissantes pour la filtration.

Si ψ est une 1-réalisation, on définit $\theta = \log \psi$ par la formule $\log \psi(u) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} (\psi - \mathrm{id})^p(u)$, pour tout $u \in (\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(1)}$; (la somme est toujours finie et a donc un sens). On vérifie facilement que $\theta = \log \psi$ est un élément de M_1.

Réciproquement, soit $\theta \in M_1$ et posons $\psi = e^\theta$ où e^θ est défini par $e^\theta(u) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} \theta^p(u)$ pour tout $u \in (\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(1)}$. Alors ψ est un automorphisme de l'ADG $((\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(1)}, d')$ tel que ψ-id soit décroissante pour la filtration.

Il est facile de vérifier que $e^{\log \psi} = \psi$ et $\log e^\theta = \theta$, ce qui prouve que les 1-réalisations de β sont les automorphismes e^θ , où $\theta \in M_1$.

Définissons alors une application linéaire $\gamma : M_1 \longrightarrow \mathrm{Hom}^1(Z_2, H(A'))$ par $\gamma(\theta)(z) = [\pi' \theta D'z] = [\pi' \theta dz]$ si $z \in Z_2$.

On peut alors énoncer les résultats suivants :

<u>*Proposition*</u> *3.2.6.-* $O_2(d', e^\theta) = O_2(d', \mathrm{id}) + \gamma(\theta)$.

<u>*Corollaire*</u> *3.2.7.-* Le morphisme β est 2-réalisable si et seulement si $O_2(\beta) = \gamma(M_1)$.

<u>*Remarque*</u>.- Si on regarde l'image $\overline{O_2(\beta)}$ de $O_2(\beta)$ dans l'espace vectoriel quotient $\mathrm{Hom}^1(Z_2, H(A'))/_{\gamma(M_1)}$, alors β est 2-réalisable si et seulement si $\overline{O_2(\beta)} = 0$.

<u>*Démonstration du corollaire*</u> : Si β est 2-réalisable, il existe une 2-réalisation $(\bar{D}_o, \psi_o)$ de β ; alors $\psi_o|_{\Lambda Y_{(1)}}$ est de la forme e^{θ_o} et on a $O_2(d', e^{\theta_o}) = 0$. La proposition 3.2.6. montre que $O_2(d', \mathrm{id}) = -\gamma(\theta_o) = \gamma(-\theta_o)$.

Si (d',φ) est une 1-réalisation de β, alors il existe $\theta \in M_1$ tel que $\varphi = e^\theta$ et $O_2(d',\varphi) = \gamma(\theta) - \gamma(\theta_o) = \gamma(\theta-\theta_o)$. Ceci implique que $O_2(\beta) = \gamma(M_1)$.

Réciproquement si $O_2(\beta) = \gamma(M_1)$, il existe une 1-réalisation (d',φ) tel que $O_2(\varphi) = \gamma(0) = 0$; par suite (d',φ) se prolonge en une 2-réalisation, d'après le théorème 3.2.4.

Démonstration de la proposition :

On a $$O_2(e^\theta) = [\pi' e^\theta Dz] \quad \text{et} \quad O_2(id) = [\pi' Dz]$$

d'où $$O_2(e^\theta) - O_2(id) = [\pi'(e^\theta - id)(Dz)]$$

$Dz \in F^{-1}(\Lambda Z)$, donc $(e^\theta - id)(Dz) = \theta(Dz) + \sum_{p\geq 2} \frac{\theta^{p-1}}{p!} \theta Dz$.

Or $\theta Dz \in \Lambda Z_o \otimes \Lambda X_o$, donc on a $\sum_{p\geq 2} \frac{\theta^{p-1}}{p!} \theta Dz = 0$.

On en déduit immédiatement la formule.

Ceci nous conduit à énoncer un raffinement du théorème 3.2.5.

Théorème 3.2.8.- Soit β un morphisme $H(A) \longrightarrow H(A')$. Supposons qu'il existe un entier $\ell \geq 1$ tel que :

$$H^p(A) = 0 \quad 1 \leq p \leq \ell \quad \text{et} \quad H^p(A') = 0 \quad p > 4\ell + 1.$$

Alors β est réalisable si et seulement si $\overline{O_2(\beta)} = 0$.

Théorème 3.2.8.'.- Soient S et T deux C-W complexes nilpotents de type fini et soit un morphisme $f : H^*(T,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(S,\mathbb{Q})$. Supposons qu'il existe un entier $\ell \geq 1$ tel que $H^p(T,\mathbb{Q}) = 0$ $1 \leq p \leq \ell$ et $H^p(S,\mathbb{Q}) = 0$ $p > 4\ell + 1$, alors f est réalisable par une application de $S_\mathbb{Q}$ dans $T_\mathbb{Q}$ si et seulement si $\overline{O_2(f)} = 0$.

Par définition, $O_2(f) = O_2(\hat{f})$, où $\hat{f}$ est le morphisme induit par f, de $H^*(\Lambda X_T)$ dans $H^*(\Lambda X_S)$ et ΛX_T (resp. ΛX_S) est le modèle minimal de T (resp. de S).

Démonstration du théorème 3.2.8.- Si β est réalisable, alors β est 2-réalisable d'après la remarque 3.2.4., et par suite on a $\overline{O_2(\beta)} = 0$ d'après le corollaire 3.2.7.

Réciproquement, si $\overline{O_2(\beta)} = 0$, alors il existe une 2-réalisation $(\bar{D},\phi)$ de β d'après le corollaire 3.2.7. Cette 2-réalisation définit une obstruction $O_3(\bar{D},\phi) \in \mathrm{Hom}^1(Z_3, H(A'))$.

Par hypothèse, on a $H^p(A) = 0$ si $p \leq \ell$; on a vu que ceci entraîne que $Z_3^p = 0$ si $p \leq 4\ell$. Donc si $z \in Z_3^p$ et $p \leq 4\ell$, alors on a $O_3(\bar{D},\phi)(z) = 0$. Si $z \in Z_3^p$ et $p > 4\ell$, alors $O_3(D,\phi)(z) \in H^{p+1}(A')$, mais, par hypothèse, on a $H^{p+1}(A') = 0$ si $p > 4\ell$, donc $O_3(\bar{D},\phi)(z) = 0$ pour tout $z \in Z_3$. On termine alors la démonstration par la même méthode que celle utilisée dans la démonstration du théorème 3.2.5.

Nous allons voir maintenant que le problème se complique lorsque nous voulons prolonger des 2-réalisations.

On se fixe une 2-réalisation $(\bar{D},\phi)$ de β , et on définit l'espace vectoriel $M_2(\phi)$ des k-dérivations θ de $\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(2)}$ de degré 0 strictement décroissantes pour la filtration et telles que $D'\theta = \theta D'$ sur $\phi(\Lambda Z_{(2)})$.
On a :

Proposition 3.2.9.- Si $(\bar{D},\phi)$ est une 2-réalisation de β, alors toutes les deux réalisations sont de la forme $e^\theta\phi$, où $\theta \in M_2(\phi)$.

Démonstration : Soit $(\bar{D}',\phi')$ une 2-réalisation quelconque de β et soit $\psi = \phi' \phi^{-1}$, on a $\psi D' = D'\psi$ sur $\phi(\Lambda Z_{(2)})$.

Comme précédemment, on pose $\theta = \log \psi$ et on vérifie que $D'\theta = \theta D'$ sur $\phi(\Lambda Z_{(2)})$, donc $\theta \in M_2(\phi)$.

Réciproquement, si $\theta \in M_2(\phi)$, on pose $\psi = e^\theta = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \theta^p$.

On définit ainsi un automorphisme de $(\Lambda Y)_{(2)}$ tel que ψ-id soit décroissante pour la filtration. On pose :

$$\bar{D}' = \psi^{-1} e^{-\theta} D' e^{\theta} \psi \quad \text{et on montre que} \quad \bar{D}'_{|\Lambda Z_{(2)}} = D .$$

Suivant la méthode précédente, on définit une application (non linéaire) $\gamma : M_2(\psi) \longrightarrow \mathrm{Hom}^1(Z_3, H(A'))$ par

$$\gamma(\theta) = \{z \mapsto [\pi'(e^{\theta}-id)\, \psi\, Dz] = [\pi'\, \theta\, \psi\, Dz + \pi' \frac{\theta^2}{2} Dz]\}$$

On peut alors énoncer les propositions immédiates suivantes :

Proposition 3.2.10.- $O_3(e^{\theta}\psi) = O_3(\psi) + \gamma(\theta)$ si $\theta \in M_2(\psi)$, et si $(\bar{D},\psi)$ est une 2-réalisation fixée de β.

Corollaire 3.2.11.-

i) On a : $O_3(\beta) = O_3(\psi) + \gamma(M_2(\psi))$ où $(\bar{D},\psi)$ est une 2-réalisation fixée de β.

ii) Si $O_3(\beta) = \gamma(M_2(\psi))$, alors β est 3-réalisable.

§ 3 - *Applications et exemples.*

Halperin et Stasheff [14] démontrent, que la notion de réalisabilité d'un isomorphisme donné entre deux algèbres de cohomologie est indépendante du corps de base.

Ici, nous allons poser un problème analogue.

Soient (A,d_A) et $(A',d_{A'})$ deux ADG c-connexes sur un corps k et soit β un morphisme $H(A,d_A) \longrightarrow H(A',d_{A'})$.

Soit K un corps contenant k, et supposons que :

$$f \otimes 1_K : H(A) \otimes_k K \longrightarrow H(B) \otimes_k K \quad \text{est réalisable} .$$

Est-ce que $f : H(A) \longrightarrow H(B)$ est réalisable ?

Nous donnerons une réponse dans le cas particulier suivant :

Théorème 3.3.1.- S'il existe un entier $\ell \geq 1$ tel que $H^p(A) = 0$ pour $1 \leq p \leq \ell$ et $H^p(A') = 0$ $p > 4\ell + 1$, alors β est réalisable si et seulement si $\beta \otimes 1_K$ est réalisable.

Compte-tenu du théorème 3.2.8, la démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 6.8 de [14].

Exemple 3.3.2.- Morphisme non réalisable par une application de S dans T, où S est un $\mathbb{Q}$-espace fixé, et T est un $\mathbb{Q}$-espace quelconque dont la cohomologie est isomorphe à une algèbre graduée H donnée.

Dans cet exemple, l'espace topologique S sera un $\mathbb{Q}$-espace simplement connexe dont la cohomologie rationnelle H' est égale à celle de $(S^3 \vee S^5) \times S^2$, mais qui n'a pas le type d'homotopie rationnelle de $(S^3 \vee S^5) \times S^2$, On verra qu'un tel espace existe, et on le définira par son modèle minimal.

D'autre part, soit H la cohomologie rationnelle de $(S^2 \vee S^2) \times S^3$. On va exhiber un espace S et un morphisme β tels que, quel que soit le $\mathbb{Q}$-espace T dont la cohomologie rationnelle est H, le morphisme $\beta : H^*(T,\mathbb{Q}) = H = \mapsto H^*(S,\mathbb{Q}) = H'$ n'est pas réalisable.

D'après l'exemple 6.5 de [14], il existe deux types d'homotopie rationnelle ayant pour cohomologie H. On en déduit que l'espace S n'a pas le type d'homotopie rationnelle de $(S^3 \vee S^5) \times S^2$, et donc n'est pas formel. En effet, si S avait le type d'homotopie de $(S^3 \vee S^5) \times S^2$, on prendrait $T = [S^3 \times (S^2 \vee S^2)]_{\mathbb{Q}}$ et β serait un morphisme entre espaces formels, et serait donc réalisable.

On a $H^*(T,\mathbb{Q}) = H = H^*(S^3 \times (S^2 \vee S^2),\mathbb{Q}) = \Lambda(x_1,x_2,x_3) \big/ (x_1^2,x_2^2,x_1x_2)$

où $|x_1| = |x_2| = 2$ et $|x_3| = 3$.

On écrit $H = \Lambda(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$.

$$H^*(S,\mathbb{Q}) = H' = H^*(S^2 \times (S^3 \vee S^5),\mathbb{Q}) = \Lambda(x'_1,x'_2,x'_3) \Big/ (x'^2_2, x'_3\, x'_1)$$

où $|x'_2| = 2$, $|x'_3| = 3$, $|x'_1| = 5$.

On écrit $H' = \Lambda(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2,\bar{x}'_3)$.

On pose $\beta(\bar{x}_1) = 0$, $\beta(\bar{x}_2) = \bar{x}'_2$, $\beta(\bar{x}_3) = \bar{x}'_3$

On a $H^1 = 0$ et $H'^p = 0$ si $p > 7$.

Les méthodes développées au chapitre 2 nous donnent le modèle minimal bigradué $\rho : (\Lambda Z,d) \longrightarrow H$. On trouve, comme bases de : $Z_o : x_1,x_2,x_3$, $Z_1 : y_1,y_2,y_3$ avec $dy_1 = x_1^2$, $dy_2 = x_2^2$, $dy_3 = x_1x_2$; $Z_2 : z_1,z_2$, avec $dz_1 = x_2\, y_1 - x_1\, y_3$, $dz_2 = x_1\, y_2 - x_2\, y_3$. Nous n'expliciterons pas Z_n, pour $n > 2$.

Puis on détermine le modèle minimal bigradué de β sur $\mathbb{Q}$.

On trouve que :

X_o est engendré par x'_1 , avec $\rho'(x'_1) = \bar{x}'_1$, $\rho'(x_1) = 0$, $\rho'(x_2) = \bar{x}'_2$, $\rho'(x_3) = \bar{x}'_3$

X_1 par y'_1 , y'_2 , avec $d'\, y'_1 = x_1$ $d'\, y'_2 = x_3\, x'_1$

X_2 par z'_1 , z'_2 , avec $d'\, z'_1 = y_1 - y'_1\, x_1$, $d'\, z'_2 = y_3 - y'_1\, x_2$.

On définit alors une algèbre filtrée $((\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(2)}, D')$ en posant $D' = d'$ sur $(\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(1)}$, $D'z_1 = dz_1 + x'_1$, $D'z_2 = dz_2$, $D'z'_1 = d'z'_1$, $D'z'_2 = d'z'_2$.

Grâce au lemme 2.2.2., on peut étendre D' à $\Lambda Z \otimes \Lambda X$ de façon que :

$$D' - d' : Y_n \longrightarrow F^{-(n-2)}(\Lambda Y) \text{ pour tout } n.$$

D'après le corollaire 2.2.3., on définit ainsi une algèbre filtrée dont la cohomologie est isomorphe à H' ; on prend comme espace S, le $\mathbb{Q}$-espace dont le modèle minimal est égal à celui de $(\Lambda Y, D')$.

Montrons que, pour tout $\mathbb{Q}$-espace T de cohomologie H, on a $\overline{O_2(\beta)} \neq 0$.

Un élément $\theta \in M_1$ est défini par la donnée des images de $y_1, y_2, y_3, y_1', y_2'$. Pour des raisons de degrés, on a $\theta(y_1) = \lambda_1 x_3$, $\theta(y_2) = \lambda_2 x_3$, $\theta(y_3) = \lambda_3 x_3$, avec $\lambda_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1,2,3$. $\theta(y_1') = 0$,

Par définition, $O_2(id)(z_i) = [\pi' Dzi]$ pour $i = 1,2$.

Des considérations sur le degré montrent que :

$$Dz_i = dz_i + \alpha_i x_1 x_3 + \beta_i x_2 x_3 \quad i = 1,2 \quad , \text{ où } \alpha_i \in \mathbb{Q} , \beta_i \in \mathbb{Q} .$$

donc $$Dz_1 = D'z_1 - x_1' + \alpha_1 x_1 x_3 + \beta_1 x_2 x_3 .$$

Par suite, $O_2(id)(z_1) = [\pi' D' z_1] - [\pi' x_1] + [\pi'(\alpha_1 x_1 x_3 + \beta_1 x_2 x_3)]$ d'où $O_2(id)(z_1) = - \bar{x}_1' + \beta_1 \bar{x}_2' \bar{x}_3'$.

On vérifie que, si $\theta \in M_1$, alors $\gamma(\theta)(z_1) = \lambda_1 \bar{x}_2' \bar{x}_3'$.

Ceci prouve que, quel que soit $\beta_1 \in \mathbb{Q}$, il n'existe pas de dérivations $\theta \in M_1$ tel que $O_2(id) = \gamma(\theta)$; donc le morphisme n'est pas réalisable.

Exemple 3.3.3.- Morphisme pas toujours réalisable par une application de S dans T, où T est un $\mathbb{Q}$-espace fixé, et S parcourt l'ensemble des types d'homotopie rationnelle ayant une cohomologie égale à une algèbre graduée H' donnée.

Le $\mathbb{Q}$-espace T est le localisé de $(S^2 \vee S^2) \times S^3$; on a donc $H = H^*(T,\mathbb{Q}) = \Lambda(x_1,x_2,x_3) \big/ (x_1^2, x_2^2, x_1 x_2)$ où $|x_1| = |x_2| = 2$ et $|x_3| = 3$. On écrit $H = \Lambda(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.

Il a été démontré dans l'exemple 6.5 de [14], qu'il existe deux types d'homotopie rationnelle ayant une cohomologie rationnelle isomorphe à $H = H^*(T,\mathbb{Q})$; le premier type est défini par l'espace formel $T = ((S^2 \vee S^2) \times S^3)_{\mathbb{Q}}$; le second type est défini par un $\mathbb{Q}$-espace noté S.

Considérons le morphisme $\beta : H \longrightarrow H$ défini par $\beta(\bar{x}_1) = \bar{x}_1$, $\beta(\bar{x}_2) = \bar{x}_2$, $\beta(\bar{x}_3) = 0$. Au morphisme β , on peut, d'une part, associer l'endomorphisme $\beta_T = \beta$:

$$H^*((S^2 \vee S^2) \times S^3, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(S^2 \vee S^2) \times S^3, \mathbb{Q})$$

alors il est clair que l'application $f : (S^2 \vee S^2) \times S^3 \longrightarrow (S^2 \vee S^2) \times S^3$ définie par $f(x,y) = (x,y_o)$ pour tout $x \in S^2 \vee S^2$, pour tout $y \in S^3$, réalise β_T ; (y_o est un point fixé de S^3).

D'autre part, on peut considérer le morphisme $\beta_S = \beta$:

$$H = H^*((S^2 \vee S^2) \times S^3, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(S,\mathbb{Q}) = H \quad \text{où } S \text{ est le}$$

$\mathbb{Q}$-espace non formel ayant H pour cohomologie rationnelle.

On a $H^1(T,\mathbb{Q}) = 0$ et $H^p(S,\mathbb{Q}) = 0$ $p > 5$.

D'après le théorème 3.2.8., β_S est réalisable par une application de S dans T si et seulement si $0_2\overline{(\beta)} = 0$.

Il est facile de vérifier que le modèle minimal bigradué de β est :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\beta} & H \\ \uparrow{\scriptstyle\rho} & & \uparrow{\scriptstyle\rho'} \\ (\Lambda Z,d) & \longrightarrow & (\Lambda Z \otimes \Lambda X,d') \end{array}$$

où Z_o est engendré par x_1,x_2,x_3 , Z_1 est engendré par y_1,y_2,y_3 ,

Z_2 est engendré par z_1,z_2 et d a été calculé dans l'exemple précédent.

X_o est engendré par u $|u| = 3$ $\rho'(u) = \bar{x}_3$,

X_1 est engendré par v $|v| = 2$ $dv = x_3$.

Le modèle filtré de T est égal au modèle minimal bigradué, car T est formel.

Un modèle filtré de S est de la forme $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')$ où

(*) $D'z_i = dz_i + \alpha_i x_1 x_3 + \beta_i x_2 x_3 + \alpha'_i x_1 u + \beta'_i x_2 u$ pour $i = 1,2$;

et $\alpha_i \in \mathbb{Q}$, $\beta_i \in \mathbb{Q}$, $\alpha'_i \in \mathbb{Q}$, $\beta'_i \in \mathbb{Q}$.

Une dérivation $\theta \in M_1$ est définie par la donnée des images des éléments y_1,y_2,y_3,v. Pour des raisons de degrés, on a $\theta(y_i) = \lambda_i x_3 + \lambda'_i u$ où λ_i et λ'_i parcourt $\mathbb{Q}$ pour $i = 1,2,3$.

On a donc $\gamma(\theta)\ (z_1) = \lambda'_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 - \lambda'_3 \bar{x}_1 \bar{x}_3$

$\gamma(\theta)\ (z_2) = \lambda'_2 \bar{x}_1 \bar{x}_3 - \lambda'_3 \bar{x}_2 \bar{x}_3$.

Calculons maintenant $O_2(id)(z) = [\pi'Dz] = [\pi'dz]$, $z \in Z_2$.

$O_2(id)(z_i) = [\pi'(D'z_i - \alpha_i x_1 x_3 - \beta_i x_2 x_3 - \alpha'_i x_1 u - \beta'_i x_2 u)]$ pour $i=1,2$.

$O_2(id)(z_i) = - \alpha'_i \bar{x}_1 \bar{x}_3 - \beta'_i \bar{x}_2 \bar{x}_3$.

D'après le théorème 3.2.8., β est réalisable si et seulement si il existe $\theta \in M_1$ tel que $O_2(id) = \gamma(\theta)$.

Par suite, β est réalisable si et seulement il existe des scalaires (λ_i,λ'_i) , $i = 1,2,3$, tels que :

$$- \lambda'_3 = - \alpha'_1 \quad , \quad \lambda'_1 = - \beta'_1$$

$$\lambda'_2 = - \alpha'_2 \quad , \quad -\lambda'_3 = - \beta'_2$$

β est donc réalisable si et seulement si $\alpha'_1 = \beta'_2$.

Définissons alors une algèbre filtrée $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')$ en imposant que $D' - d' : Y_n \longrightarrow F^{-(n-2)}(\Lambda Y)$, et $D'z_i$ vérifie la formule (*) pour $i = 1,2$ avec $\alpha'_1 \neq \beta'_2$; alors la théorie développée au chapitre 2 montre que $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')$ est le modèle filtré d'un $\mathbb{Q}$-espace R ayant une cohomologie égale à H. De plus, β n'est pas réalisable par une application de cet espace dans $((S^2 \vee S^2) \times S^3)_{\mathbb{Q}}$. Comme il y a exactement deux types d'homotopie rationnelle $T = ((S^2 \vee S^2) \times S^3)_{\mathbb{Q}}$ et S, de cohomologie H, et que β est réalisable par une application de T dans T ; on en déduit que R = S et que β n'est pas réalisable par une application de S dans T.

Exemple 3.3.4.- Morphisme réalisable par une application entre deux $\mathbb{Q}$-espaces donnés.

Soit T le $\mathbb{Q}$-localisé de $S^5 \vee S^5$, on a

$$H^*(T,\mathbb{Q}) = \Lambda(z_1,z_2) \big/ (z_1.z_2) \quad \text{où } |z_i| = 5 \quad i = 1,2$$

Considérons $S^2 \times S^2$ muni de la métrique riemannienne standard et soit U le sous-espace de l'espace tangent $T(S^2 \times S^2)$ formé des vecteurs unitaires. Alors U est l'espace total d'un fibré localement trivial $S^3 \longrightarrow U \xrightarrow{p} S^2 \times S^2$. On prend, pour $\mathbb{Q}$-espace S, le localisé de U. On montre, à l'aide de la suite exacte d'homotopie, que le modèle minimal de U est $(\Lambda(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3),\delta)$ avec $|x_i| = 2$ $i = 1,2$, $|y_i| = 3$, $i = 1, 2, 3$; $\delta x_i = 0$ $i = 1,2$ $\delta y_1 = x_1^2$, $\delta y_2 = x_2^2$. Comme le fibré n'est pas trivial, on peut prendre $\delta y_3 = x_1 x_2$.

Le calcul montre que $H^*(S,\mathbb{Q}) = H^*(U,\mathbb{Q})$ vaut :

$$\Lambda(x_1,x_2,u_1,u_2) \big/ (x_1^2,x_1x_2,x_2^2,x_1u_1,x_2u_2,x_2u_1-x_1u_2,u_1u_2)$$

où $u_1 = [x_2y_1 - x_1y_3]$ et $u_2 = [x_1y_2 - x_2y_3]$.

On écrit $H^*(U,\mathbb{Q}) = \Lambda(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{u}_1,\bar{u}_2)$.

On vérifie que U n'est pas formel.

On définit un morphisme $\beta : H^*(S^5 \vee S^5, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(U,\mathbb{Q})$ par $\beta(\bar{z}_i) = u_i$ $i = 1,2$. On a $H^p(S^5 \vee S^5, \mathbb{Q}) = 0$ $1 \leq p \leq 4$ et $H^p(U,\mathbb{Q}) = 0$ si $p > 7$.

Le théorème 3.2.5. (avec $\ell = 2$) prouve qu'il existe une application continue $f : U_{\mathbb{Q}} \longrightarrow (S^5 \vee S^5)_{\mathbb{Q}}$ telle que $f^* = \beta$.

Cette application définit un morphisme d'ADG entre les modèles minimaux de $S^5 \vee S^5$ et de U ; et il serait facile de construire un tel morphisme degré par degré , mais ce serait relativement long étant donné que le modèle minimal de $S^5 \vee S^5$ a une infinité de générateurs !

CHAPITRE IV

LA SUITE SPECTRALE D'EILENBERG-MOORE.

Dans [6], Eilenberg et Moore ont introduit une suite spectrale permettant de comparer les différentes cohomologies d'un carré de fibrations de Serre. Ils ont démontré le théorème suivant :

<u>*Théorème*</u> *4.0.* - Soit $F \longrightarrow E_o \xrightarrow{f_o} B_o$ une fibration de Serre dont la base B_o est simplement connexe, soit $g : B \to B_o$ une application continue, et soit

$$\begin{array}{ccc} & F & = & F \\ & \downarrow & & \downarrow \\ E = B \times_{B_o} & E_o & \longrightarrow & E_o \\ & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_o} \\ & B & \xrightarrow{g} & B_o \end{array}$$

le fibré image réciproque.

Alors il existe une suite spectrale d'algèbres commutatives (E_r, d_r) telle que

(i) $\quad E_r \Rightarrow H^*(E,k)$

(ii) $\quad E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(B_o)}(H^*(B,k), H^*(E_o,k))$

(où k est un corps commutatif quelconque).

Cette suite spectrale est appelée la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du carré fibré.

Si $B = \{1 \text{ point}\}$, la suite spectrale s'appelle la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du fibré.

On trouve la démonstration de ce théorème, ainsi que diverses applications, dans L. Smith [20].

L'existence de cette suite spectrale découle de l'existence de résolution projective propre de modules différentiels. Dans la pratique, on voudrait pouvoir calculer explicitement les termes (E_r,d_r) de cette suite spectrale, et, par exemple, savoir dans quelles conditions, elle collapse au terme E_2.

On rappelle qu'une suite spectrale (E_r,d_r) collapse au terme E_m si $d_i = 0$ pour tout $i \geq m$.

Jusqu'à maintenant, on calculait les termes (E_r,d_r) de la suite spectrale en exhibant une résolution projective propre appelée la bar construction.

La théorie du modèle filtré d'un morphisme d'ADG va nous permettre de démontrer un théorème un peu plus général que celui d'Eilenberg-Moore (théorème 4.2.5.) ; elle va surtout nous fournir une manière explicite de calculer les termes (E_r,d_r) de cette suite spectrale.

Avant d'énoncer ce théorème, nous allons faire quelques rappels d'algèbres différentielles qui nous seront utiles dans la suite.

§ 1 - *Algèbre cohomologique différentielle* - *Théorème algébrique d'Eilenberg-Moore* (*Rappels*).

La plupart des résultats énoncés dans ce paragraphe se trouvent dans [20].

Dans toute la suite, k sera un corps commutatif de caractéristique 0.

On se fixe une k-algèbre différentielle graduée connexe (Λ,d_Λ) (pas nécessairement commutative). Un Λ-module différentiel gradué à gauche M est un Λ-module gradué à gauche $M = \bigoplus_{n\geq 0} M^n$ muni d'une différentielle d_M, tel que :

(i) Si $\lambda \in \Lambda^p$, $m \in M^q$, $\lambda.m \in M^{p+q}$

(ii) $d_M(\lambda.m) = d_\Lambda(\lambda).m + (-1)^{|\lambda|}\lambda.d_M(m)$.

Définition 4.1.1. - Une résolution propre d'un Λ-module différentiel gradué à gauche M est une suite de Λ-modules différentiels gradués, indexée par les entiers négatifs.

$$(*) \qquad \ldots \longrightarrow M^{n-1} \longrightarrow M^{n} \xrightarrow{d_E^n} \ldots \longrightarrow M^{o} \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0$$

telle que les trois suites suivantes de k-espaces vectoriels sont exactes :

$$\text{(i)} \quad \ldots \rightarrow (M^{n-1})^{\#} \longrightarrow (M^{n})^{\#} \longrightarrow \ldots \longrightarrow (M^{o})^{\#} \longrightarrow M^{\#} \rightarrow 0$$

où $(M^n)^{\#}$ est l'espace gradué M^n muni de la structure de k-espace vectoriel sous-jacente à celle de Λ-module.

$$\text{(ii)} \quad \ldots \rightarrow Z(M^{n-1}) \rightarrow Z(M^{n}) \rightarrow \ldots \rightarrow Z(M^{o}) \rightarrow Z(M) \rightarrow 0$$

où
$$Z(M^n) = \{m \in M^n \mid d_{M^n}(m) = 0\}$$

$$\text{(iii)} \quad \ldots \rightarrow H(M^{n-1}) \rightarrow H(M^{n}) \rightarrow \ldots \rightarrow H(M^{o}) \rightarrow H(M) \rightarrow 0.$$

Chaque module M^n étant gradué, et muni d'une différentielle interne $d_I^n = d_{M^n}$, on peut associer, à la résolution propre (*), un Λ-module différentiel gradué à gauche $D(M) = \bigoplus_{n,q} M^{n,q}$ muni de la différentielle totale $\nabla = d_I + d_E$.

Un Λ-module différentiel gradué P est dit projectif si, tout diagramme de Λ-modules différentiels et de morphismes

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où f est surjective et $Z(f) : Z(M) \rightarrow Z(N)$ est surjective, peut être complété en un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "g'"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

par un morphisme g' de Λ-modules différentiels.

On montre que tout Λ-module différentiel gradué possède une résolution propre formée de modules projectifs. Une telle résolution est appelée une résolution projective propre de M.

Si $\ldots \to M^{n-1} \to M^n \to \ldots \to M^o \to M \to 0$ est une résolution projective propre du Λ-module différentiel M, alors :

$\ldots \to H(M^{n-1}) \to H(M^n) \to \ldots \to H(M^o) \to H(M) \to 0$ est une résolution projective du $H(\Lambda)$-module $H(M)$.

On fait une théorie analogue pour les Λ-modules différentiels gradués à droite.

<u>*Définition*</u> *4.1.2.* - Soient M un Λ-module différentiel gradué à gauche, et N un Λ-module différentiel gradué à droite, on pose :

$$\text{Tor dif}_\Lambda(N,M) = H(D(N) \otimes_\Lambda D(M))$$

où $D(N)$ et $D(M)$ sont les Λ-modules différentiels associés à des résolutions projectives propres de N et de M.

On montre que cette définition est indépendante de la résolution choisie et que l'on a :

$$\text{Tor dif}_\Lambda(N,M) = H(N \otimes_\Lambda D(M)) = H(D(N) \otimes_\Lambda M).$$

Munissons le Λ-module différentiel gradué $N \otimes_\Lambda D(M)$ de la filtration décroissante $F^{-p}(N \otimes_\Lambda D(M)) = \bigoplus_{i \geq -p} (N \otimes_\Lambda D(M)^{i,*})$ si $p \geq 0$, $F^{+1} = 0$

Cette filtration est compatible avec la graduation totale de $N \otimes_\Lambda D(M)$ (i.e. : $F^{-p}(N \otimes_\Lambda D(M)) = \bigoplus_n F^{-p}(N \otimes_\Lambda D(M)) \cap (N \otimes_\Lambda D(M))^n$).

De plus, la différentielle totale de $N \otimes_\Lambda D(M)$ préserve la filtration, on définit ainsi une suite spectrale (E_r, d_r) située dans le second quadrant. Si $\Lambda^1 = 0$, la filtration est finie en chaque degré et la suite spectrale est donc convergente.

A l'aide de cette filtration, on montre facilement le théorème algébrique d'Eilenberg-Moore suivant :

Théorème 4.1.3. [20]. - Soit Λ une k-algèbre différentielle graduée connexe, soit M un Λ-module différentiel gradué à gauche et, soit N un Λ-module différentiel gradué à droite. Alors il existe une suite spectrale de Λ-modules (E_r, d_r) appelée suite spectrale d'Eilenberg-Moore du triplet (Λ, N, M) telle que

(i) $E_2^{-p} = \mathrm{Tor}^p_{H(\Lambda)}(H(N), H(M))$ si $p \geq 0$.

(ii) $\varinjlim_r E_r = \mathrm{Gr}(\mathrm{Tor\ dif}_\Lambda(N,M))$ (où Gr signifie le gradué associé).

(iii) Si $\Lambda^1 = 0$, $E_r \Longrightarrow \mathrm{Tor\ dif}_\Lambda(N,M)$

Démonstration : Si $\ldots \to M^n \longrightarrow M^{n-1} \to \ldots \to M^o \to M \to 0$ est une résolution projective propre de M, on montre que $E_1^{-p} = H(N) \otimes_{H(\Lambda)} H(M^{-p})$ si $p \geq 0$, et que la différentielle d_1 est induite par la différentielle externe d_E de la résolution de M.

Remarque 4.1.4. - Eilenberg et Moore démontrent le théorème topologique 4.0. en considérant les algèbres $C^*(E_o)$ et $C^*(B)$ comme des $C^*(B_o)$-modules différentiels, et ils appliquent le théorème 4.1.3. Ils montrent, de plus, que la suite spectrale (E_r, d_r) est, en fait, une suite spectrale d'algèbres commutatives et qu'il existe un isomorphisme algébrique entre $\mathrm{Tor\ dif}_{C^*(B_o)}(C^*(B), C^*(E_o))$ et $H^*(B \times_{B_o} E_o, k)$.

Nous aurons souvent besoin dans la suite du théorème de comparaison suivant :

Proposition 4.1.5. [20]. - Soient Λ et Λ' des algèbres différentielles graduées connexes sur k (non nécessairement commutatives). Soient M (resp. M') un Λ (resp. Λ') module différentiel à gauche et soient N (resp. N') un Λ (resp. Λ') module différentiel à droite. On se donne des applications $f : \Lambda \to \Lambda'$, $g : N \to N'$, $h : M \to M'$ telles que

(i) f est un morphisme d'algèbres différentielles graduées.

(ii) g et h sont des applications de k-modules différentiels.

(iii) g et h sont des morphismes de Λ-modules lorsqu'on munit M' et N' de la structure de Λ-module induite par leur structure de Λ'-module et par f.

Si f, g, h induisent des isomorphismes en cohomologie, alors les suites spectrales définies par le théorème 4.1.3. pour (Λ,N,M) et (Λ',N',M') sont isomorphes à partir du terme E_2.

§ 2 - *Enoncé des théorèmes fondamentaux.*

Soient (A,d_A), $(A',d_{A'})$, (C,d_c) des algèbres commutatives différentielles graduées connexes sur un corps k de caractéristique 0. On se donne des morphismes d'ADG $\alpha : A \to A'$ et $\gamma : A \to C$. On considérera A' comme un A-module différentiel à gauche (au couple (a,a') on associe $\alpha(a)a'$ où $a \in A$, $a' \in A'$) ; et on considérera C comme un A-module différentiel à droite en associant au couple (c,a) l'élément $c\gamma(a)$, où $c \in C$, $a \in A$.

Le théorème 4.1.3. nous assure l'existence d'une suite spectrale d'Eilenberg-Moore (E_r,d_r) telle que $E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(A)}(H^*(C),H^*(A'))$ et $\varinjlim_r E_r = \mathrm{Gr\ Tor\ dif}_A(C,A')$. On montre, de plus, que chaque (E_r,d_r) est une k-algèbre différentielle graduée.

Supposons que $\alpha^{*1} : H^1(A) \to H^1(A')$ soit injective, alors on peut construire le modèle filtré de α :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \pi\uparrow & & \uparrow\pi' \\ (\Lambda Z,D) & \longrightarrow & (\Lambda Z\otimes\Lambda X,D') \end{array}$$

à partir du modèle minimal bigradué de α^* :

$$\begin{array}{ccc} H^*(A) & \longrightarrow & H^*(A') \\ \rho\uparrow & & \uparrow\rho' \\ (\Lambda Z,d) & \longrightarrow & (\Lambda Z\otimes\Lambda X,d') \end{array}$$

comme nous l'avons expliqué au chapitre 2.

Alors $\gamma' = \gamma\,\pi$ fait de C un $(\Lambda Z,D)$-module différentiel, et $\gamma^*\rho$ fait de $H^*(C)$ un $(\Lambda Z,d)$-module différentiel.

Nous énonçons alors le théorème algébrique fondamental de ce chapitre.

Théorème 4.2.1.- La suite spectrale d'Eilenberg-Moore du triplet (A,C,A') peut être identifiée, par un isomorphisme algébrique, à partir du terme E_2, à une suite spectrale d'algèbres commutatives graduées associée à une filtration définie sur l'ADG : $C \otimes_{\Lambda Z}(\Lambda Z \otimes_k \Lambda X) = C \otimes_k \Lambda X$ munie de la différentielle Δ' induite par le $(\Lambda Z,D)$-produit tensoriel des différentielles d_c sur C et D' sur $\Lambda Z \otimes \Lambda X$.

Le terme E_2 de la suite spectrale est isomorphe à la cohomologie de l'ADG : $H^*(C) \otimes_{\Lambda Z}(\Lambda Z \otimes_k \Lambda X) = H^*(C) \otimes_k \Lambda X$ munie de la différentielle δ' induite par le $(\Lambda Z,d)$-produit tensoriel des différentielles 0 sur $H^*(C)$ et d' sur $\Lambda Z \otimes_k \Lambda X$. On a $E_2^{-p,q} = H_p^{q-p}(H^*(C)\otimes_k \Lambda X,\delta') =$
$\left[H^*(C) \otimes_k (\Lambda X)_p \cap \mathrm{Ker}\,\delta' / \delta'(H^*(C) \otimes_k (\Lambda X)_{p+1}\right]^{q-p}$.

Corollaire 4.2.2. - (i) On a un isomorphisme d'algèbres graduées :

$$\mathrm{Tor\,dif}_A(C,A') \simeq H^*(C \otimes_{\Lambda Z}(\Lambda Z \otimes_k \Lambda X),\Delta')$$

(ii) On a un isomorphisme d'algèbres bigraduées :

$$\mathrm{Tor}_{H^*(A)}(H^*(C),H^*(A')) \simeq H^*(H^*(C) \otimes_{\Lambda Z}(\Lambda Z \otimes_k \Lambda X),\delta')$$

L'augmentation $\varepsilon : A \to k$ fait de k un A-module différentiel à droite, ce qui nous permet d'énoncer le résultat suivant :

<u>*Théorème*</u> *4.2.3.* - La suite spectrale d'Eilenberg-Moore du triplet (A,k,A') peut être identifiée à partir du terme E_2, par un isomorphisme algébrique, à une suite spectrale d'algèbres commutatives graduées associée à une filtration définie sur l'ADG $(\Lambda X,D'')$ où D'' est la projection sur ΛX de la différentielle D'. Le terme E_2 est isomorphe à la cohomologie de l'ADG $(\Lambda X,d'')$ où d'' est la projection de d' sur ΛX.

On a un isomorphisme d'algèbres graduées :

$$\mathrm{Tor\ dif}_A(k,A') \simeq H^*(\Lambda X,D'')$$

et un isomorphisme d'algèbres bigraduées :

$$\mathrm{Tor}_{H^*(A)}(k,H^*(A')) \simeq H^*(\Lambda X,d'').$$

La démonstration du théorème 4.2.3. est immédiate à partir de celle du théorème 4.2.1. On établira, plus loin, les formules explicites de Δ' et δ', et il sera clair que, lorsque $C = k$, on a $\Delta' = D''$ et $\delta' = d''$.

On peut énoncer un cas encore plus particulier du théorème 4.2.1. On prend pour A' le corps de base k qu'on considère comme un A-module différentiel à gauche. On obtient un résultat voisin du théorème principal du chapitre 7 de [14].

<u>*Théorème*</u> *4.2.4.* - Soit (A,d_A) une k-algèbre commutative différentielle graduée connexe de modèle filtré $(\Lambda Z,D)$ et telle que $H^1(A) = 0$. La suite spectrale d'Eilenberg-Moore du triplet (A,k,k) peut être identifiée à partir du terme E_2, par un isomorphisme algébrique, à une suite

spectrale d'algèbres commutatives graduées définie sur l'ADG $(\Lambda\bar{Z},D'')$, où $(\Lambda Z,D) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda\bar{Z},D') \to (\Lambda\bar{Z},D'')$ est le modèle filtré de la projection $\varepsilon : (A,d_A) \to k$ et $\bar{Z}$ est définie par $\bar{Z}^p_m = Z^{p+1}_{m-1}$ $m \geq 1$, $p \geq 1$.

On a un isomorphisme d'algèbres graduées :

$$\mathrm{Tor\ dif}_A(k,k) \simeq H^*(\Lambda\bar{Z},D'')$$

et un isomorphisme d'algèbres bigraduées :

$$\mathrm{Tor}_{H^*(A)}(k,k) \simeq \Lambda\bar{Z}.$$

Ce théorème se démontre à partir du théorème 4.2.3. et de l'exemple 2.1.10.

L'intérêt du théorème algèbrique 4.2.1. est de nature géométrique. On va pouvoir démontrer, par une méthode différente, un théorème topologique analogue ou théorème 4.0. d'Eilenberg-Moore :

Théorème *4.2.5.* - Soit $F \longrightarrow E_o \xrightarrow{f_o} B_o$ un fibré de Serre et soit $B \xrightarrow{g} B_o$ une application continue. On note $F \to E = B \times_{B_o} E_o \xrightarrow{f} B$ le fibré image réciproque. Soit k un corps de caractéristique 0 fixé.

On suppose que :

1) F, E_o, B_o, B sont connexes par arcs.
2) $\pi_1(B_o)$ agit de manière nilpotente sur $H^*(F,k)$.
3) ou bien $H^*(F,k)$ est de type fini, ou bien $H^*(B_o,k)$ et $H^*(B,k)$ sont de type fini.

Alors :

(i) Il existe une suite spectrale d'algèbres commutatives graduées (E_r,d_r) située dans le second quadrant, telle que :

$$E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(B_o,k)}(H^*(B,k), H^*(E_o,k))$$

$$\varinjlim_r E_r = \mathrm{Gr}\, H^*(E,k) \quad \text{(où Gr est le gradué associé)}$$

$$E_r \Longrightarrow H^*(E,k) \quad \text{si } B_o \text{ est simplement connexe.}$$

(ii) Si $f_o^* : H^*(B_o) \to H^*(E_o)$ a pour modèle minimal bigradué $(\Lambda Z,d) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda X,d')$, si $A(f_o) : A(B_o) \to A(E_o)$ a pour modèle filtré $(\Lambda Z,D) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda X,D')$, et si $(\mathcal{M}_B,d_B) \xrightarrow{\Psi} A(B)$ est le modèle minimal de $A(B)$, alors la suite spectrale est isomorphe, à partir du terme E_2, par un isomorphisme algébrique, à une suite spectrale associée à une filtration définie sur l'ADG $\mathcal{M}_B \otimes_{\Lambda Z}(\Lambda Z \otimes \Lambda X) \simeq \mathcal{M}_B \otimes_k \Lambda X$ munie de la différentielle Δ' déduite du $(\Lambda Z,D)$-produit tensoriel des différentielles d_B et D'. Le terme E_2 est isomorphe à la cohomologie de l'ADG $H^*(B) \otimes_{\Lambda Z}(\Lambda Z \otimes_k \Lambda X) \simeq H^*(B) \otimes_k \Lambda X$ munie de la différentielle δ' déduite du $(\Lambda Z,d)$-produit tensoriel des différentielles 0 sur $H^*(B)$ et d' sur $\Lambda Z \otimes \Lambda X$.

(iii) Si B_o est simplement connexe, cette suite spectrale est isomorphe, à partir du terme E_2, à la suite spectrale d'Eilenberg-Moore définie par le théorème 4.0.

Remarque : Il existe un morphisme d'ADG $\theta : A(B_o) \to (\mathcal{M}_B,d_B)$ tel que $\Psi\theta$ est homotope à $A(g)$. On choisit un tel morphisme pour définir une structure de $A(B_o)$-module différentiel sur $(\mathcal{M}_B,d_B)$. La différentielle δ' est définie en considérant $H^*(B)$ comme un $(\Lambda Z,d)$-module grâce à $g^*\rho$.

Lorsque B est réduit à un point, le théorème 4.2.5 s'énonce ainsi :

Théorème 4.2.6. - Soit $F \longrightarrow E \xrightarrow{f} B$ un fibré de Serre et k un corps de caractéristique 0. On suppose que :

1) F, E, B sont connexes par arcs.

2) $\pi_1(B)$ agit de manière nilpotente sur $H^*(F,k)$

3) ou bien $H^*(F,k)$ est de type fini, ou bien $H^*(B,k)$ est de type fini.

Alors

(i) il existe une suite spectrale d'algèbres commutatives graduées (E_r,d_r), située dans le second quadrant, telle que :

$$E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(B,k)}(k,H^*(E,k))$$

$$\varinjlim_r E_r = \mathrm{Gr}\, H^*(F,k)$$

$$E_r \Longrightarrow H^*(F,k) \quad \text{si } B \text{ est simplement connexe.}$$

(ii) Si $f^* : H^*(B,k) \to H^*(E,k)$ a pour modèle minimal bigradué $(\Lambda Z,d) \to (\Lambda Z\otimes\Lambda X,d') \to (\Lambda X,d'')$, et si $A(f) : A(B) \to A(E)$ a pour modèle filtré $(\Lambda Z,D) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda X,D')$, alors la suite spectrale est isomorphe, à partir du terme E_2, à une suite spectrale associée à une filtration définie sur $(\Lambda X,D'')$ (où D'' est la projection de D' sur ΛX) ; et le terme E_2 est isomorphe à $H^*(\Lambda X,d'')$.

(iii) Si B est simplement connexe, cette suite spectrale est isomorphe à la suite spectrale d'Eilenberg-Moore.

4.2.7. - *Exemple d'application du théorème 4.2.6.* - Soit B un espace simplement connexe de modèle filtré $(\Lambda Z,D)$. Alors il existe une suite spectrale d'algèbres commutatives graduées telles que :

(i) $E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(B,k)}(k,k) = \Lambda\bar{Z}$ (où $\bar{Z}^p_m = Z^{p+1}_{m-1}$ $m \geq 1$, $p \geq 1$) ;

(ii) $E_r \Longrightarrow H^*(\Omega B,k)$.

En effet, il suffit d'appliquer le théorème 4.2.6. à la fibration $\Omega B \to E_B \xrightarrow{p} (B,b_o)$ où E_B est l'espace contractile des chemins d'origine b_o et l'application p envoie un chemin sur son extrémité. On utilise alors les résultats du théorème 4.2.4.

Cet exemple est à rapprocher de la suite spectrale d'Adams définie en homologie.

Nous verrons d'autres exemples d'applications du théorème 4.2.5. au paragraphe 5.

Le théorème 4.2.5 se démontre essentiellement à partir du théorème 4.2.1.

La démonstration du théorème 4.2.1. est assez longue, elle utilise la notion de bar construction. Dans le paragraphe 3, on va rappeler les propriétés de la bar construction utiles dans la suite.

§ 3 - *La bar construction.*

Nous reprenons les définitions et propriétés exposées dans [20].
On se donne toujours trois ADG connexes sur k : $(A,d_A),(A',d_{A'}),(C,d_C)$ et des morphismes d'ADG $\alpha : A \to A'$, $\gamma : A \to C$.

On pose $A^+ = \{a \in A \mid |a| > 0\}$ et on définit pour $n \geq 0$

$$\mathcal{B}_A^{-n}(A,A') = A \otimes_k \underbrace{A^+ \otimes_k \dots \otimes_k A^+}_{n \text{ fois}} \otimes_k A'$$

$$\mathcal{B}_A(A,A') = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{B}_A^{-n}(A,A').$$

Pour chaque $n \geq 0$, $\mathcal{B}_A^{-n}(A,A')$ a une structure de k-espace vectoriel gradué comme produit tensoriel d'espaces gradués et a une structure naturelle de A-module à gauche.

Si $a \in A$, si $a_i \in A^+$ pour $i = 1,\ldots,n$ et $a' \in A'$, on notera $a[a_1|a_2|\ldots|a_n]a'$ l'élément $a \otimes a_1 \otimes a_2 \ldots \otimes a_n \otimes a'$.
Son degré est donc $|a| + \sum_{i=1}^{n} |a_i| + |a'|$.

Pour tout élément $a[a_1|\ldots|a_n]a'$, on définit pour $i \in [1,\ldots,n]$

$$s(i) = |a| + \sum_{j\leqslant i} (|a_j|-1), \quad \text{et} \quad s(0) = |a|.$$

On définit une application k-linéaire de degré +1 sur $\mathcal{B}_A^{-n}(A,A')$ par $d_{oI}(a[a_1|\ldots|a_n]a') = d_A a\ [a_1|\ldots|a_n]a'$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{s(i-1)} a[a_1|\ldots|d_A a_i|\ldots]\, a' + (-1)^{s(n)} a[a_1|\ldots|a_n] d_{A'} a'.$$

On vérifie que $d_{oI}^{\,2} = 0$ et que $\mathcal{B}_A^{-n}(A,A')$ est un A-module différentiel gradué à gauche.

On définit aussi une application $d_{oE} : \mathcal{B}_A^{-n,q}(A,A') \to \mathcal{B}_A^{-n+1,q}$
par $\quad d_{oE}(a[a_1|\ldots|a_n]a') = (-1)^{|a\ a_1|} (a\ a_1)[a_2|\ldots|a_n]a'$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{s(i)} a[a_1|\ldots|a_i\ a_{i+1}|\ldots\ a_n]a'$$

$$+ (-1)^{s(n)} a[a_1|\ldots|\ldots a_{n-1}](\alpha(a_n)a').$$

On vérifie que $d_{oE}^{\,2} = 0$ et que $d_{oI}d_{oE} + d_{oE}d_{oI} = 0$, ce qui permet de définir une application A-linéaire de modules différentiels ∂_E : $\mathcal{B}_A^{-n}(A,A') \to \mathcal{B}_A^{-n+1}(A,A')$, $n \geqslant 1$.

Proposition 4.3.1. [20]. -

$$\ldots \to \mathcal{B}_A^{-n}(A,A') \xrightarrow{\partial_E} \mathcal{B}_A^{-n+1}(A,A') \to \ldots \to \mathcal{B}_A^{o}(A,A') \xrightarrow{\varepsilon} A' \to 0$$

est une résolution projective propre du A-module différentiel à gauche A' (où $\varepsilon(a \otimes a') = \alpha(a)a'$).

On remarque que $C \otimes_A \mathcal{B}_A^{-n}(A,A') \simeq C \otimes (A^+)^{\otimes n} \otimes A'$, ce qu'on notera $\mathcal{B}_A^{-n}(C,A')$.

On a $C \otimes_A \mathcal{B}_A(A,A') = \mathcal{B}_A(C,A') = \bigoplus_n \mathcal{B}_A^{-n}(C,A')$.

Un élément $c[a_1|\ldots|a_n]a'$ de $\mathcal{B}_A(C,A')$ a pour bidegré $(-n, |c| + \sum_{i=1}^{n} |a_i| + |a'|)$; où $c \in C$, $a_i \in A^+$, $a' \in A'$.

Son degré total est donc : $|c| + \sum_{i=1}^{n} (|a_i| -1) + |a'|$.

Pour tout élément $c[a_1|\ldots|a_n]a'$, on définit $s(0) = |c|$ et $s(i) = |c| + \sum_{j\leq i} (|a_j| - 1)$, $i \in [1,\ldots,n]$.

On munit le complexe $C \otimes_A \mathcal{B}_A(A,A') = \mathcal{B}_A(C,A')$ du A-produit tensoriel des différentielles d_C sur C et $d_I^o + d_E^o$ sur $\mathcal{B}_A(A,A')$. Soit ∇ cette différentielle, on a $\nabla = d_I + d_E$ avec

$$d_I(c[a_1|\ldots|a_n]a') = d_C(c)[a_1|\ldots|a_n]a' + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{s(i-1)} c[a_1|\ldots|d_A a_i|\ldots a_n]a' + (-1)^{s(n)} c[a_1|\ldots|a_n]d_{A'}a'.$$

$$d_E(c[a_1|\ldots|a_n]a') = (-1)^{|c|+|a_1|} c\gamma(a_1)[a_2|\ldots|a_n]a' + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{s(i)} c[a_1|\ldots|a_i a_{i+1}|\ldots a_n]a' + (-1)^{s(n)} c[a_1|\ldots|a_{n-1}]\alpha(a_n)a'$$

(où $c \in C$, $a_i \in A^+$, $i = 1,\ldots,n$; $a' \in A'$).

$[\mathcal{B}_A(C,A'),\nabla]$ s'appelle la bar construction du triplet (A,C,A').

On filtre $\mathcal{B}_A(C,A')$ de la manière suivante :

$F^{-p}\mathcal{B}_A(C,A') = \{c[a_1|\ldots|a_n]a' \text{ avec } n \leq p\}$

$F^{+1} = 0$.

D'après la définition 4.1.2. et la proposition 4.3.1., on a $\mathrm{Tor\,dif}_A(C,A') = H^*(\mathcal{B}_A(C,A'),\nabla)$.

Le théorème 4.1.3. nous dit que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore $(\tilde{E}_i,\tilde{d}_i)$ du triplet (A,C,A') est la suite spectrale définie sur $\mathcal{B}_A(C,A')$ par la filtration ci-dessus. On a :

$$\tilde{E}_2 = \operatorname{Tor}_{H^*(A)}(H^*(C),H^*(A'))$$

$$\varinjlim \tilde{E}_r = \operatorname{Gr} H^*(\mathcal{B}_A(C,A'),\nabla).$$

Le terme $\tilde{E}_2$ est égal à la cohomologie de la bar construction pour le triplet $(H^*(A),H^*(C),H^*(A'))$ où $H^*(A')$ est considéré comme un $H^*(A)$-module à gauche grâce à α^*, et $H^*(C)$ un $H^*(A)$-module à droite grâce à γ^*.

Proposition 4.3.2. - $(\mathcal{B}_A(C,A'),\nabla)$ a une structure de k-algèbre différentielle graduée commutative augmentée.

Si A est simplement connexe (i.e. $A^1 = 0$), alors $\mathcal{B}_A(C,A')$ est connexe.

Démonstration : Comme A, C, A' sont des algèbres commutatives, on définit une structure d'algèbre commutative sur $\mathcal{B}_A(C,A')$ en posant :

$$(c[a_1|\dots|a_m]a') * (c'[a_{m+1}|\dots|a_{m+n}]a'')$$
$$= \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \; cc'[a_{\sigma(1)}|\dots|a_{\sigma(m+n)}]a'a'',$$

où $c \in C$, $c' \in C'$, $a_i \in A^+$, $a' \in A'$, $a'' \in A''$.

La somme $\sum$ est étendue à toutes les permutations $\sigma \in S_{n+m}$ telles que : $\sigma(1) < \dots < \sigma(m)$ et $\sigma(m+1) < \dots < \sigma(m+n)$. On a $\varepsilon_\sigma = (-1)^{\mu_\sigma}$ où μ_σ dépend de la signature de la permutation, des degrés des a_i, et des degrés de c, c', a', a''.

On peut aussi considérer $\mathcal{B}_A(C,A')$ comme le k-produit tensoriel des algèbres C, $\mathcal{B}_A(k,k)$ et A'. Sur $\mathcal{B}_A(k,k)$, on met la structure de k-algèbre définie dans [14] chapitre 7, et on munit $\mathcal{B}_A(C,A') = C \otimes_k \mathcal{B}_A(k,k) \otimes_k A'$ de la structure de k-algèbre commutative produit.

On vérifie ensuite que $(\mathcal{B}_A(C,A'),\nabla)$ est bien une ADG.

Les éléments de $\mathcal{B}_A(C,A')$ de degré 0 sont de la forme $\lambda[a_1|\ldots|a_n]\mu$, $\lambda \in k$, $\mu \in k$, $|a_i| = 1$.

On définit $\varepsilon : \mathcal{B}_A(C,A') \to k$ par $\varepsilon(\lambda[a_1|\ldots,a_n]\mu) = 0$ si $n \geqslant 1$; $\varepsilon(\lambda\otimes\mu) = \lambda\mu$.

Remarque : Il est clair que les termes (E_r,d_r) de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du triplet (A,C,A') sont des k-ADG.

Nous aurons souvent besoin de la proposition suivante, généralisant la proportion 4.1.5. :

Proposition 4.3.3. - Soient (A,d_A), $(A',d_{A'})$, $(A'',d_{A''})$, (B,d_B), $(B',d_{B'})$ $(B'',d_{B''})$ des algèbres différentielles graduées commutatives connexes sur un corps k de caractéristique 0. On suppose que (B,d_B) est une K-S algèbre libre.

On suppose donnés des morphismes d'ADG $\alpha : A \to A'$, $\alpha' : A \to A''$, $\beta : B \to B'$, $\beta' : B \to B''$ et des quasi-isomorphismes $\pi : B \to A$, $\pi' : B' \to A'$, $\pi'' : B'' \to A''$ tels que :

i) $\alpha\pi$ est homotope à $\pi'\beta$

ii) $\alpha'\pi$ est homotope à $\pi''\beta'$.

Alors les suites spectrales d'Eilenberg-Moore des triplets (A,A'',A') et (B,B'',B') sont isomorphes, à partir du terme E_2, par un isomorphisme algébrique.

Démonstration : 1) Remarquons d'abord que la proposition est vraie lorsque les diagrammes sont commutatifs (i.e lorsque $\alpha\pi = \pi'\beta$ et $\alpha'\pi = \pi''\beta'$).

En effet, dans ce cas, on définit une application $\mathcal{B}_\pi(\pi'',\pi')$:

$$\mathcal{B}_B(B'',B') \longrightarrow \mathcal{B}_A(A'',A') \quad \text{par :}$$

$\mathcal{B}_\pi(\pi'',\pi')(b''[b_1|\ldots|b_n]b') = \pi''(b'')[\pi(b_1)|\ldots|\pi(b_n)]\pi'(b')$ où $b_i \in B^+$ $i = 1,\ldots n$; $b' \in B'$; $b'' \in B''$.

Il est clair que $\mathcal{B}_\pi(\pi'',\pi')$ est un morphisme d'ADG préservant les filtrations qui définissent les suites spectrales d'Eilenberg-Moore ; donc il induit un morphisme entre les suites spectrales, noté $\mathcal{B}_\pi(\pi'',\pi')_i$. On a de plus $\mathcal{B}_\pi(\pi'',\pi')_1 \simeq \mathcal{B}_{\pi^*}(\pi''^*,\pi'^*)$.

Comme π^*, π'^*, π''^* sont des isomorphismes, alors $\mathcal{B}_{\pi^*}(\pi''^*,\pi'^*)$ est un isomorphisme algébrique.

2) Dans le cas général, on se ramène à des diagrammes commutatifs :

Par définition de l'homotopie, il existe un morphisme d'ADG $\phi : B^I \to A'$ tel que $\phi\lambda_o = \alpha\pi$, $\phi\lambda_1 = \pi'\beta$.

De même, il existe un morphisme $\Psi : B^I \to A''$ tel que $\Psi\lambda_o = \alpha'\pi$, $\Psi\lambda_1 = \pi''\beta'$.

On applique alors la première partie de la démonstration aux trois diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
A'' & B^I \arrow[l, "\Psi"'] \arrow[r, "\phi"] & A' \\
B'' \arrow[u, "\pi''"] & B \arrow[l, "\beta'"'] \arrow[r, "\beta"] \arrow[u, "\lambda_1"'] & B' \arrow[u, "\pi'"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A'' & B^I \arrow[l, "\Psi"'] \arrow[r, "\phi"] & A' \\
A'' \arrow[u, "id"'] & B \arrow[l, "\Psi\lambda_o"'] \arrow[r, "\phi\lambda_o"] \arrow[u, "\lambda_o"'] & A' \arrow[u, "id"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A'' & A \arrow[l, "\alpha'"'] \arrow[r, "\alpha"] & A' \\
A'' \arrow[u, "id"] & B \arrow[l, "\Psi\lambda_o"'] \arrow[r, "\phi\lambda_o"] \arrow[u, "\pi"] & A' \arrow[u, "id"']
\end{tikzcd}$$

§ 4 - *Démonstration des théorèmes fondamentaux.*

Nous démontrerons d'abord le théorème topologique 4.2.5. en supposant connu le théorème 4.2.1. ; puis nous démontrerons le théorème 4.2.1.

Démonstration du théorème 4.2.5. :

A la fibration $F \longrightarrow E_o \xrightarrow{f_o} B_o$, on associe le morphisme d'ADG : $A(f_o) : A(B_o) \longrightarrow A(E_o)$ de modèle minimal, au sens du théorème 1.1.3.,

$$\begin{array}{ccccc} A(B_o) & \longrightarrow & A(E_o) & \longrightarrow & A(F) \\ \| & & \uparrow & & \uparrow \\ A(B_o) & \longrightarrow & A(B_o) \otimes \Lambda U & \longrightarrow & \Lambda U \end{array} .$$

On considère $A(E_o)$ comme un $A(B_o)$-module différentiel à gauche, grâce à $A(f_o)$; de même, on considère $A(B)$ comme un $A(B_o)$-module différentiel à droite grâce à $A(g)$.

On étudie alors la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du triplet $(A(B_o), A(B), A(E_o))$. C'est une suite spectrale d'algèbres commutatives graduées dont le terme E_2 est $\mathrm{Tor}_{H^*(B_o,k)}(H^*(B,k), H^*(E_o,k))$. D'après la proposition 4.3.3., elle est isomorphe à la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du triplet : $(A(B_o), \mathcal{M}_B, A(E_o))$ où $(\mathcal{M}_B, d_B) \xrightarrow{\Psi} A(B)$ est le modèle minimal de B. Le théorème 4.2.1 nous donne alors la partie (ii) du théorème 4.2.5. On note toujours $(\Lambda Z, D) \xrightarrow{i} (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')$ le modèle filtré de $A(f_o)$.

Cette suite spectrale est telle que $\varinjlim E_r = G_r(\mathcal{M}_B \otimes \Lambda X, \Delta')$.

Montrons maintenant la partie (i) du théorème :

Les hypothèses du théorème 4.2.5 entraînent, grâce au théorème 1.2.6., que $H^*(E,k) \simeq H^*(A(B) \otimes_{A(B_o)} (A(B_o) \otimes \Lambda U))$.

Il est facile de voir que le diagramme commutatif suivant dont les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
A(B_o) \arrow[r] & A(B_o) \otimes \Lambda U \arrow[r] & \Lambda U \\
(\Lambda Z,D) \arrow[u, "\pi"] \arrow[r] & (\Lambda Z \otimes \Lambda X,D') \arrow[u, "\pi'"] \arrow[r] & (\Lambda X,D'') \arrow[u, "\pi''"]
\end{tikzcd}$$

induit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A(B) \arrow[r] & A(B) \otimes_{A(B_o)} (A(B_o) \otimes \Lambda U) \arrow[r] & \Lambda U \\
A(B) \arrow[u, equal] \arrow[r] & A(B) \otimes_{\Lambda Z} (\Lambda Z \otimes \Lambda X) \arrow[u, "\pi'_1"] \arrow[r] & \Lambda X \arrow[u, "\pi''"]
\end{tikzcd}$$

Les théorèmes d'isomorphisme de Halperin [11] impliquent que $\pi_1'^{*}$ est un isomorphisme.

Les suites spectrales des triplets $((\Lambda Z,D),A(B), (\Lambda Z \otimes \Lambda X,D'))$ et $((\Lambda Z,D),\mathfrak{m}_B,(\Lambda Z \otimes \Lambda X,D'))$ étant isomorphes à partir du terme E_2, la partie (i) du théorème est démontré.

Montrons maintenant la partie (iii) du théorème : Eilenberg et Moore définissent la suite spectrale d'un carré fibré comme étant la suite spectrale construite à partir du triplet d'algèbres différentielles graduées non commutatives $(C^*(B_o,k),C^*(B,k), C^*(E_o,k))$ où $C^*(.,k)$ désigne le foncteur des cochaînes simpliciales à valeurs dans k (voir [16]).

Au foncteur $C^*(.,k)$, on peut associer une k-ADG simpliciale C_k définie par $(C_k)_n = C^*(\Delta(n),k)$; de plus, $C_k(.)$ est isomorphe à $C^*(.,k)$ (voir [16]).

Les inclusions de k-ADG simpliciales $i : A_k \to A_k \otimes C_k$ et $j : C_k \to A_k \otimes C_k$ définissent des transformations naturelles de foncteurs

$$i^* : A(.) \to A_k \otimes C_k(.) = D(.)$$
$$j^* : C^*(.) \to A_k \otimes C_k(.) = D(.)$$

où $A(.)$ est le foncteur de Sullivan défini sur le corps k fixé, et où A_k est la k-ADG simpliciale telle que $(A_k)_n$ est l'espace des formes différentielles sur le n-simplexe Δ_n dont les coefficients sont des fonctions polynomiales (à coefficients dans k) des coordonnées barycentriques de Δ_n.

Par définition d'une transformation de foncteurs, on a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} A(B) \arrow[d, "i^*(B)"] & A(B_o) \arrow[l, "A(g)"'] \arrow[r, "A(f_o)"] \arrow[d, "i^*(B_o)"] & A(E_o) \arrow[d, "i^*(E_o)"] \\ D(B) & D(B_o) \arrow[l, "D(g)"'] \arrow[r, "D(f_o)"] & D(E_o) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C^*(B) \arrow[d, "j^*(B)"] & C^*(B_o) \arrow[l, "C^*(g)"'] \arrow[r, "C^*(f_o)"] \arrow[d, "j^*(B_o)"] & C^*(E_o) \arrow[d, "j^*(E_o)"] \\ D(B) & D(B_o) \arrow[l, "D(g)"'] \arrow[r, "D(f_o)"] & D(E_o) \end{tikzcd}$$

D'après le théorème III.3 de [16], ou [4], toutes les flèches verticales induisent des isomorphismes en cohomologie.

La proposition 4.1.5. permet alors de conclure

Démonstration du théorème 4.2.1.-

Dans toute cette démonstration, on suppose fixés (A,d_A), $(A',d_{A'})$, (C,d_C), $\alpha : A \to A'$, $\gamma : A \to C$; ainsi que le modèle minimal bigradué de

$$\begin{tikzcd} \alpha^* : & H^*(A) \arrow[r] & H^*(A') & \\ & (\Lambda Z,d) \arrow[u, "\rho"] \arrow[r, "i"] & (\Lambda Z \otimes \Lambda X,d') \arrow[u, "\rho'"] \arrow[r] & (\Lambda X,d'') \end{tikzcd}$$

et le modèle filtré de

$$\begin{tikzcd} \alpha : A \arrow[r] & A' & \\ (\Lambda Z,D) \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "i"] & (\Lambda Z \otimes \Lambda X,D') \arrow[u, "\pi'"] \arrow[r] & (\Lambda X,D''). \end{tikzcd}$$

D'après la proposition 4.3.3., la suite spectrale d'Eilbenberg-Moore du triplet (A,C,A') est isomorphe, de manière algébrique, à la suite spectrale du triplet $((\Lambda Z,D),C,(\Lambda Z\otimes\Lambda X,D'))$ où (C,d_C) est considéré comme un $(\Lambda Z,D)$-module différentiel à droite grâce à $\gamma' = \gamma\pi$. Nous démontrerons donc le théorème en supposant que $(A,d_A) = (\Lambda Z,D)$, $(A',d_{A'}) = (\Lambda Z \otimes \Lambda X,D')$, $\alpha = i$.

Proposition 4.4.1. - La différentielle Δ' sur $C \otimes \Lambda X$ induite par le ΛZ-produit tensoriel des différentielles d_C sur C et D' sur $\Lambda Z \otimes \Lambda X$ est donnée par la formule : si $c \in C$ et $v \in \Lambda X$,

$$\Delta'(c \otimes v) = d_C(c) \otimes v + (-1)^{|c|}\left[c \otimes D''v + \sum_{i=1}^{n} c\gamma'(a_i) \otimes v_i\right] \quad \text{si}$$

$$D'v = 1 \otimes D''v + \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes v_i .$$

Démonstration : On considère le k-produit tensoriel des ADG : (C,d_C) et $(\Lambda Z \otimes \Lambda X,D')$ muni de la différentielle produit tensoriel de d_c et D'.

L'idéal W de $C \otimes_k(\Lambda Z \otimes_k\Lambda X)$, engendré par les éléments de la forme $c\gamma'(a) \otimes a' - c \otimes i(a)a'$ pour tout $c \in C$, $a \in \Lambda Z, a' \in \Lambda Z \otimes \Lambda X$, est stable par la différentielle. On pose $C \otimes_{\Lambda Z}(\Lambda Z \otimes \Lambda X) = C \otimes_k(\Lambda Z \otimes \Lambda X)/W$, et on munit cette algèbre de la différentielle déduite par passage aux quotients.

L'application $\Phi : C \otimes_{\Lambda Z}(\Lambda Z \otimes \Lambda X) \to C \otimes_k\Lambda X$ définie par $\Phi(c \otimes u \otimes v) = c\gamma'(u) \otimes v$ pour $c \in C$, $u \in \Lambda Z$, $v \in \Lambda X$, est un isomorphisme d'algèbres.

Soit Δ' la différentielle de $C \otimes_k\Lambda X$ déduite de celle de $C \otimes_{\Lambda Z}(\Lambda Z \otimes_k\Lambda X)$ par l'isomorphisme Φ.

Si $v \in \Lambda X$, on a $D'v = 1 \otimes D''v + \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes v_i$, avec $a_i \in \Lambda^+Z$ et $v_i \in \Lambda X$, pour $i = 1,\dots,n$.

On voit alors que :

$$\Delta'(c\otimes v) = d_c(c) \otimes v + (-1)^{|c|}\left[c \otimes D''v + \sum_{i=1}^{n} c\gamma'(a_i) \otimes v_i\right]$$

où $c \in C$, $v \in \Lambda X$. C.Q.F.D.

On remarque que $\Delta'(c \otimes 1) = d_c(c) \otimes 1$ et que :

$p'\Delta'(c \otimes v) = D''p'(c \otimes v)$ si p' est la projection :

$$C \otimes \Lambda X \to \Lambda X.$$

On remarque aussi que, si $C = k$, alors $\Delta' = D''$.

Ceci entraîne que : $(C,d_c) \xhookrightarrow{\text{incl}} (C \otimes \Lambda X, D') \xrightarrow{p'} (\Lambda X, D'')$ est une K-S extension (au sens de la définition 1.1.1.).

On va maintenant définir un morphisme d'ADG :

$$\sigma : (\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X),\nabla) \longrightarrow (C \otimes_k \Lambda X, \Delta').$$

Soit ε la projection : $\mathcal{B}_{\Lambda Z}(\Lambda Z,\Lambda Z) \to (\Lambda Z, D)$ qui envoie $\mathcal{B}^{-n}$ sur 0 si $n > 0$ et qui, sur $\mathcal{B}^{o}_{\Lambda Z}(\Lambda Z,\Lambda Z) = \Lambda Z \otimes \Lambda Z$, est égale à l'opérateur de multiplication.

On munit $\mathcal{B}_{\Lambda Z}(\Lambda Z,\Lambda Z)$ de la différentielle totale ∇_{oo} définie au paragraphe 3 (en prenant $A = A' = C = (\Lambda Z, D)$).

Il est facile de voir que ε est un morphisme d'ADG.

Alors, on regarde le morphisme d'ADG :

$$\mathbb{1}_C \otimes_{\Lambda Z} \varepsilon \quad : C \otimes_{\Lambda Z} \mathcal{B}_{\Lambda Z}(\Lambda Z,\Lambda Z) \longrightarrow C \otimes_{\Lambda Z} \Lambda Z.$$

Si on identifie $C \otimes_{\Lambda Z} \mathcal{B}_{\Lambda Z}(\Lambda Z,\Lambda Z)$ avec $\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z)$ et $C \otimes_{\Lambda Z} \Lambda Z$ avec ΛZ, le morphisme précédent définit un morphisme d'ADG ψ :

$$(\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z),\nabla_o) \longrightarrow (C,d_c)$$

où ∇_o est la différentielle totale de $\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z)$ définie au paragraphe 3.

On a $\psi = 0$ sur $\mathcal{B}^{-n}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z)$ et $n > 0$

$$\psi(c \otimes \lambda) = c\gamma'(\lambda) \quad \text{si} \quad c \in C, \quad \lambda \in \Lambda Z.$$

$(\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z),\nabla_o)$ a une structure naturelle de ΛZ-module différentiel à droite.

On regarde alors le morphisme d'ADG, $\psi \otimes_{\Lambda Z} \mathbb{1}_{(\Lambda Z \otimes \Lambda X)}$:

$$\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z) \otimes_{\Lambda Z}(\Lambda Z \otimes_k \Lambda X) \rightarrow C \otimes_{\Lambda Z}(\Lambda Z \otimes_k \Lambda X)$$

où $\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z) \otimes_{\Lambda Z}(\Lambda Z \otimes_k \Lambda X)$ est muni de la différentielle ΛZ-produit tensoriel des différentielles ∇_o et D'.

L'application $\Psi : \mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z) \otimes_{\Lambda Z}(\Lambda Z \otimes \Lambda X) \rightarrow \mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X)$ définie par $\Psi(c[a_1|\ldots a_n]a \otimes u \otimes v) = c[a_1|\ldots a_n]au \otimes v$ pour $c \in C$, $a_i \in \Lambda^+ Z$, $i = 1,\ldots,n$, $u \in \Lambda Z$, $v \in \Lambda X$, est un isomorphisme d'algèbres.

On vérifie que la différentielle sur $\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X)$ déduite de celle sur $\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z) \otimes_{\Lambda Z}(\Lambda Z \otimes \Lambda X)$ par l'isomorphisme Ψ est précisément la différentielle $\nabla = d_I + d_E$ définie au paragraphe 3.

Identifions maintenant $C \otimes_{\Lambda Z}(\Lambda Z \otimes_k \Lambda X)$ avec $C \otimes_k \Lambda X$; on a alors défini un morphisme d'ADG :

$$\sigma : (\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X),\nabla) \rightarrow (C \otimes \Lambda X,\Delta')$$

donné par les formules :

$$\sigma = 0 \quad \text{sur} \quad \mathcal{B}^{-n}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X), \quad n > 0$$

$$\sigma(c \otimes u \otimes v) = c\gamma'(u) \otimes v \quad \text{si} \quad c \in C,\ u \in \Lambda Z,\ v \in \Lambda X.$$

Proposition 4.4.2. - L'application $\sigma : (\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X,\nabla) \rightarrow (C \otimes \Lambda X,\Delta')$ définie par $\sigma = 0$ sur $\mathcal{B}^{-n}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X)$ et $n > 0$,

$$\sigma(c \otimes u \otimes v) = c\gamma'(u) \otimes v \quad \text{si} \quad c \in C, u \in \Lambda Z,\ v \in \Lambda X$$

est un quasi-isomorphisme d'ADG.

Corollaire 4.4.3. - On a :

$$H^*(\mathcal{B}_A(C,A'),\nabla) = \mathrm{Tor\,dif}_A(C,A') \simeq H^*(\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X),\nabla)$$
$$\simeq \mathrm{Tor\,dif}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X) \simeq H^*(C \otimes \Lambda X,\Delta').$$

Corollaire 4.4.4. - On a:

$$H^*(\mathcal{B}_A(k,A'),\nabla) = \mathrm{Tor\,dif}_A(k,A') = H^*(\mathcal{B}_{\Lambda Z}(k,\Lambda Z \otimes \Lambda X,\nabla)$$
$$= \mathrm{Tor\,dif}_{\Lambda Z}(k,\Lambda Z \otimes \Lambda X) \simeq H^*(\Lambda X,D'').$$

<u>*Démonstration de la proposition*</u> *4.4.2.* - On vient de montrer que l'application σ ainsi définie est un morphisme d'ADG.

On va maintenant montrer que σ^* est un isomorphisme.

On définit l'inclusion $j : (\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z),\nabla_o) \to (\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X),\nabla)$ par $j(c[a_1|\ldots|a_n]u) = c[a_1|\ldots|a_n]u \otimes 1$, où $c \in C$, $a_i \in \Lambda^+Z$, $i = 1,\ldots,n$, $u \in \Lambda Z$.

Il est clair que j est un morphisme d'ADG.

On définit une projection $q : (\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X),\nabla) \to (\Lambda X, D'')$ par $q = 0$ sur $\mathcal{B}^{-n}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X)$ $n > 0$, et sur $\mathcal{B}^{o}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X) = C \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda X$, q est égale à la projection canonique sur ΛX.

On vérifie que q est un morphisme d'ADG.

En effet, si $U \in \mathcal{B}^{-n}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X)$ avec $n \geq 2$, alors $q(U) = 0$ et $q(\nabla U) = 0$.

Si $U = c[a]u \otimes v$, avec $c \in C$, $a \in \Lambda^+Z$, $u \in \Lambda Z$, $v \in \Lambda X$, on a $\nabla(U) = (-1)^{|c|+|a|}c\gamma'(a) \otimes u \otimes v + (-1)^{|c|+|a|-1}c \otimes au \otimes v + U'$ avec $U' \in \mathcal{B}^{-1}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X)$ donc $q\nabla(U) = 0 = D''q(U)$.

Si $U \in \mathcal{B}^{o}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X)$ on a $q\nabla U = D''qU$.

Alors

$$(*)\qquad \begin{array}{ccccc}
(\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z),\nabla_o) & \xrightarrow{j} & (\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z\otimes\Lambda X),\nabla) & \xrightarrow{q} & (\Lambda X, D'') \\
\downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle id} \\
(C,d_C) & \xrightarrow{i} & (C \otimes \Lambda X, \Delta') & \xrightarrow{p} & (\Lambda X, D'')
\end{array}$$

est un diagramme commutatif de K-S extensions augmentées.

Si on montre que ψ^* est un isomorphisme, alors on a $H^o(\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z),\nabla_o) = H^o(C,d_C) = k$.

On a : $\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z) \otimes_{\Lambda Z}(\Lambda Z \otimes \Lambda X) = \mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z) \otimes_k (\Lambda Z \otimes \Lambda X)/W$ où W est l'idéal engendré par les éléments de la forme :

$c[a_1|\dots a_n]ua \otimes v \otimes w - c[a_1|\dots|a_n]u \otimes av \otimes w$ avec $c \in C$, $a_i \in \Lambda^+Z$, $u \in \Lambda Z$, $a \in \Lambda Z$, $v \in \Lambda Z$, $w \in \Lambda X$.

On a $H^o(\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z) \otimes_k (\Lambda Z \otimes \Lambda X)) \simeq H^o(\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z)) \otimes H^o(\Lambda Z \otimes \Lambda X)$ donc $H^o[\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z) \otimes_k (\Lambda Z \otimes \Lambda X)] \simeq k$.

D'autre part, il est clair que $H^o(W) = 0$ (car $W^o = 0$!).

La suite exacte de cohomologie montre que :

$$H^o(\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X)) = H^o(\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z) \otimes_{\Lambda Z} (\Lambda Z \otimes \Lambda X)) = k.$$

Les ADG figurant dans le diagramme (*) sont donc toutes c-connexes ; les théorèmes d'isomorphisme de [11] montrent que si ψ^* est un isomorphisme, alors σ^* est un isomorphisme.

Montrons que ψ^* est un isomorphisme, ou, ce qui est équivalent, que $\theta = 1_C \otimes_{\Lambda Z} \varepsilon : C \otimes_{\Lambda Z} \mathcal{B}_{\Lambda Z}(\Lambda Z,\Lambda Z) \to C \otimes_{\Lambda Z} \Lambda Z$ est un quasi-isomorphisme :

Filtrons $C \otimes_{\Lambda Z} \mathcal{B}_{\Lambda Z}(\Lambda Z,\Lambda Z)$ par la filtration décroissante :
$p \geq 0$, $\tilde{F}^{-p}(C \otimes_{\Lambda Z} \mathcal{B}_{\Lambda Z}(\Lambda Z,\Lambda Z)) = \{c[a_1|\dots|a_n]u,\ n \leq p\}$ où $c \in C$, $a_i \in \Lambda^+Z$, $u \in \Lambda Z$.

$\tilde{F}^{+1} = 0$.

Filtrons $C \otimes_{\Lambda Z} \Lambda Z$ par :

$p \geq 0$, $F^{-p}(C \otimes_{\Lambda Z} \Lambda Z) = F^o(C \otimes_{\Lambda Z} \Lambda Z) = C$, $F^{+1} = 0$.

On a $E_1^{-p} = E_1^o = H^*(C,d_c)$ et $d_i = 0$, $i \geq 1$.

La différentielle ∇_o sur $C \otimes_{\Lambda Z} \mathcal{B}_{\Lambda Z}(\Lambda Z,\Lambda Z)$ préserve la filtration ; cette filtration donne naissance à une suite spectrale $(\tilde{E}_i,\tilde{d}_i)$ telle que :

$$\tilde{E}_1^{-p} = H^*(C) \otimes_{H^*(\Lambda Z)} \mathcal{B}^{-p}_{H^*(\Lambda Z)}(H^*(\Lambda Z),H^*(\Lambda Z)).$$

Le morphisme θ définit des morphismes θ_i entre les suites spectrales. On a $\theta_1^{-p} = 0$ si $p > 0$, et $\theta_1^o : E_1^o \simeq H^*(C) \otimes H^*(\Lambda Z) \to H^*(C)$ est défini par $\theta_1^o([c] \otimes [\lambda]) = [c]\gamma'^*([\lambda])$.

θ_1^o est donc un isomorphisme.

La différentielle d_1 sur $\tilde{E}_1^{-p}$ est induite par la différentielle externe d_E de $C \otimes_{\Lambda Z} \mathcal{B}_{\Lambda Z}(\Lambda Z, \Lambda Z)$.

Mais $\ldots \to \mathcal{B}^{-p}_{H^*(\Lambda Z)}(H^*(\Lambda Z), H^*(\Lambda Z)) \xrightarrow{d_E} \mathcal{B}^{-p+1}_{H^*(\Lambda Z)} \to \ldots \to H^*(\Lambda Z) \to 0$

est une résolution projective du $H^*(\Lambda Z)$-module $H^*(\Lambda Z)$; donc
$\tilde{E}_2^{-p} = \mathrm{Tor}^p_{H^*(\Lambda Z)}(H^*(C), H^*(\Lambda Z))$.

Ceci entraîne que $\tilde{E}_2^{-p} = 0$ si $p \neq 0$, donc $\theta_2 = \theta_2^o : \tilde{E}_2 = H^*(C) \to E_2 = H^*(C)$ est un isomorphisme.

Comme les filtrations considérées sont dans le second quadrant, comme θ_2 est un isomorphisme, on en déduit que θ^* est un isomorphisme.

Ceci achève la démonstration de la proposition 4.4.2.

On a montré que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du triplet (A,C,A') avait pour terme E_∞ le gradué associé à $H^*(C \otimes \Lambda X, \Delta')$. On va utiliser la bigraduation de ΛX pour trouver une suite spectrale isomorphe à la suite spectrale d'Eilenberg-Moore.

On définit une bigraduation sur $C \otimes_k \Lambda X$ par :

$$(C \otimes \Lambda X)^{-n,q} = [C \otimes (\Lambda X)_n]^{q-n}$$

et une filtration décroissante par $F^{-p}(C \otimes \Lambda X) = \sum_{-n \geq -p} (C \otimes \Lambda X)^{-n,*}$, soit :

$$F^{-p}(C \otimes \Lambda X) = \sum_{n \leq p} C \otimes (\Lambda X)_n \quad \text{si} \quad p \geq 0$$

$$F^{+1} = 0.$$

On remarque que Δ' préserve la filtration et augmente le degré total de $C \otimes \Lambda X$ (égal au degré supérieur) de $+1$. Cette filtration définit une suite spectrale (E_i, d_i) située dans le second quadrant. On a
$\varinjlim_r E_r = E_\infty = \mathrm{Gr}\, H^*(C \otimes \Lambda X, \Delta')$.

Proposition 4.4.5. - $(C \otimes \Lambda X, \Delta')$ étant muni de la filtration ci-dessus, la suite spectrale (E_i, d_i) vérifie

1) $E_o^{-p,q} = (C \otimes (\Lambda X)_p)^{q-p} \qquad d_o = d_c \otimes 1$

2) $E_1^{-p} \;= H^*(C) \otimes (\Lambda X)_p$ et la différentielle d_1 se déduit de la différentielle sur l'ADG $H^*(C) \otimes_{(\Lambda Z, d)} (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d')$ lorsqu'on identifie $H^*(C) \otimes \Lambda X$ et $H^*(C) \otimes_{\Lambda Z} (\Lambda Z \otimes \Lambda X)$ (ici $\gamma^*\rho$ fait de $H^*(C)$ un $(\Lambda Z, d)$-module différentiel à droite).

Démonstration de la proposition 4.4.5. -

Si $c \in C$, $w \in (\Lambda X)_p$, on a $D'w = 1 \otimes d''w + 1 \otimes w' + \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$ avec $w' \in \sum_{n \leq p-2} (\Lambda X)_n$, $a_i \in \Lambda^+ Z$, $b_i \in \sum_{j \leq p-1} (\Lambda X)_j$.

On peut décomposer $\sum a_i \otimes b_i$ ainsi :

$\sum a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i' \otimes b_i' + v$ où $a_i' \in \Lambda^+ Z_o$, $b_i' \in (\Lambda X)_{p-1}$

et $\qquad v \in \sum_{i=1}^{p-1} \Lambda^+ Z_i \otimes (\Lambda X)_{p-1-i} + \sum_{n \leq p-2} (\Lambda Y)_n$.

De plus, v s'écrit toujours $\sum a_i'' \otimes b_i''$, $a_i'' \in \Lambda^+ Z$, $b_i'' \in \Lambda X$.

On a $\Delta'(c \otimes w) = d_c(c) \otimes w + (-1)^{|c|} [c \otimes d''w + c \otimes w']$

$$+ (-1)^{|c|} \left[\sum c\gamma'(a_i') \otimes b_i' + \sum c\gamma'(a_i'') \otimes b_i''\right].$$

On a donc $d_o(c \otimes w) = d_c(c) \otimes w$, soit $d_o = d_c \otimes 1$.

Ceci entraîne que $E_1^{-p} = H^*(C) \otimes (\Lambda X)_p$.

Soit $[c] \in H^*(C)$ et $w \in (\Lambda X)_p$, en utilisant les notations ci-dessus, on voit que :

$$d_1([c] \otimes w) = (-1)^{|c|} \left[[c] \otimes d''w + [c] \gamma'^* [a_i'] \otimes b_i' \right].$$

Remarquons aussi que $d'w = 1 \otimes d''w + \sum_{i=1}^{n} a_i' \otimes b_i' + u$ où $u \in \sum_{i=1}^{p-1} \Lambda^+ Z_i \otimes (\Lambda X)_{p-1-i}$.

Soit ρ le quasi-isomorphisme $(\Lambda Z,d) \to H^*(A)$ nul en degrés inférieurs strictement positifs, alors $\gamma^*\rho : (\Lambda Z,d) \to H^*(C)$ est un morphisme d'ADG qui fait de $(H^*(C),0)$ un $(\Lambda Z,d)$-module différentiel à droite.

De plus, l'inclusion $i : (\Lambda Z,d) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda X,d')$ fait de $(\Lambda Z \otimes \Lambda X,d')$ un $(\Lambda Z,d)$-module différentiel à gauche.

Alors on peut considérer l'ADG $H^*(C) \otimes_{(\Lambda Z,d)}(\Lambda Z \otimes \Lambda X,d')$ munie de la différentielle égale au $(\Lambda Z,d)$-produit tensoriel des différentielles. L'application $\vartheta : H^*(C) \otimes_{\Lambda Z}(\Lambda Z \otimes \Lambda X) \to H^*(C) \otimes \Lambda X$ définie par $\vartheta([c] \otimes u \otimes v) = [c]\gamma^*\rho(u) \otimes v$ est un isomorphisme d'algèbres. Soit δ' la différentielle sur $H^*(C) \otimes \Lambda X$ définie par cette identification. On voit que $d_1 = \delta'$.

On a donc $E_2 = H^*(H^*(C) \otimes \Lambda X,\delta')$.

Ceci achève la démonstration de la proposition.

Dans la suite, d'une part, on note F^{-p} la filtration définie sur $C \otimes \Lambda X$ et (E_i,d_i) la suite spectrale correspondante ; d'autre part, on note $\tilde{F}^{-p}$ la première filtration définie sur la bar construction $\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X)$ et $(\tilde{E}_i,\tilde{d}_i)$ la suite spectrale d'Eilenberg-Moore qui en découle.

Malheureusement, le morphisme σ défini dans la proposition 4.4.2. ne préserve pas les filtrations.

Aussi va-t-on définir une nouvelle filtration sur $\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X)$, notée $\hat{F}^{-p}$, de façon que $\sigma(\hat{F}^{-p}) \subset F^{-p}(C \otimes \Lambda X)$ et que $\hat{F}^{-p} \subset \tilde{F}^{-p}$. On aura des homomorphismes $\sigma_i : \hat{E}_i \to E_i$ induits par σ et des homomorphismes $\vartheta_i : \hat{E}_i \to \tilde{E}_i$ induits par l'identité sur $\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X)$. On montrera que pour $i = 2$ (et donc $i \geq 2$), ces homomorphismes sont des isomorphismes.

On définit une trigraduation sur $\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X)$ de la manière suivante : soient $c \in C^s$, $a_i \in (\Lambda Z)^{-n_i,q_i} = (\Lambda Z)^{q_i-n_i}_{n_i}$ pour $i = 1,\dots,\ell$, et $U \in (\Lambda Z \otimes \Lambda X)^{-m,r} = (\Lambda Z \otimes \Lambda X)^{-m+r}_m$, alors l'élément $c[a_1|\dots|a_\ell]U$ a pour tridegré :

$$(-\ell,\ -(\sum_{i=1}^{\ell} n_i + m),\ s + \sum_{i=1}^{\ell} q_i + r).$$

On a $\quad \mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X) = \sum\limits_{\substack{\ell\geq 0\\ n\geq 0\\ q\geq 0}} \mathcal{B}^{-\ell,-n,q}.$

On pose $\hat{F}^{-p}\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X) = \sum\limits_{\ell+n\leq p} \mathcal{B}^{-\ell,-n,*}$ si $p \geq 0$ et $\hat{F}^{+1} = 0$.

On remarque que $\tilde{F}^{-p} = \sum\limits_{\ell\leq p} \mathcal{B}^{-\ell,*,*}$ et donc que $\hat{F}^{-p} \subset \tilde{F}^{-p}$.

La différentielle ∇ préserve cette filtration décroissante, et on construit une suite spectrale $(\hat{E}_i,\hat{d}_i)$ dans le second quadrant.

Proposition 4.4.6.- La suite spectrale $(\hat{E}_i,\hat{d}_i)$ vérifie :

1) $\hat{E}_o^{-p} = \sum\limits_{\ell+n=p} \mathcal{B}_{\Lambda Z}^{-\ell,-n,*}(C,\Lambda Z \otimes \Lambda X) \qquad \hat{d}_o = d_C \otimes_{\Lambda Z} 1_{\mathcal{B}_{\Lambda Z}(\Lambda Z,\Lambda Z\otimes\Lambda X)}$

2) $\hat{E}_1^{-p} \simeq \mathcal{B}^{-p}_{(\Lambda Z,d)}(H^*(C),(\Lambda Z\otimes\Lambda X,d'))$.

(Ici $\gamma^*\rho$ fait de $H^*(C)$ un $(\Lambda Z,d)$-module différentiel à droite).

$\hat{d}_1$ est égale à la différentielle totale $d'+d_E$ de la bar construction $\mathcal{B}_{(\Lambda Z,d)}(H^*(C),(\Lambda Z\otimes\Lambda X,d'))$.

Démonstration de la proposition 4.4.6. :

Soit $M = c[a_1|\dots|a_\ell]U$ où $c \in C^s$, $a_i \in (\Lambda Z)_{n_i}^{q_i-n_i}$ pour $i = 1,\dots,\ell$, $U \in (\Lambda Z\otimes\Lambda X)_m^{-m+r}$

$$\nabla(M) = (-1)^{s+q_1-n_1} c\gamma'(a_1)[a_2 \dots|a_\ell]U + \sum_{i=1}^{\ell-1}(-1)^{s(i)}c[a_1|\dots|a_ia_{i+1}|\dots|a_\ell]U$$

$$+ (-1)^{s(\ell)}c[a_1|\dots|a_{\ell-1}]a_\ell U + d_c(c)[a_1|\dots|a_\ell]U$$

$$+ \sum_{i=1}^{\ell}(-1)^{s(i-1)}c[a_1|\dots|da_i|\dots|a_\ell]U + (-1)^{s(\ell)}c[a_1|\dots|a_\ell]d'U$$

$$+ \sum_{i=1}^{\ell}(-1)^{s(i-1)}c[a_1|\dots|b_i|\dots|a_\ell]U + (-1)^{s(\ell)}c[a_1|\dots|a_\ell]V$$

où $b_i = Da_i - da_i$ et $V = D'U - d'U$.

L'étude terme à terme de cette formule permet de montrer facilement la proposition 4.4.6.

Proposition 4.4.7. - Le morphisme d'ADG σ défini dans la proposition 4.4.2 est tel que $\sigma(\hat{F}^{-p}) \subset F^{-p}$ et le morphisme induit $\sigma_2 : (\hat{E}_2,\hat{d}_2) \to (E_2,d_2)$ est un isomorphisme.

Démonstration : Soit $M = c[a_1|\dots|a_\ell]U \in \hat{F}^{-p}\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z\otimes\Lambda X)$.

Si $\ell \geq 1$, alors $\sigma(M) = 0$.

Si $\ell = 0$, alors $M = c \otimes U$ avec $c \in C^s$, $U \in (\Lambda Z \otimes \Lambda X)_m^{-m+r}$ et $m \leq p$.

On peut écrire $U = \sum u_i \otimes v_i$ avec $u_i \in \Lambda Z$, $v_i \in \Lambda X$, on a alors $\sigma(c \otimes U) = \sum c\gamma'(u_i) \otimes v_i$.

Comme $U \in (\Lambda Z \otimes \Lambda X)_m$, on a nécessairement $v_i \in \sum_{j\leq m} (\Lambda X)_j$, pour tout i et donc $v_i \in \sum_{j\leq p} (\Lambda X)_j$.

Ceci montre que $\sigma(c \otimes U) \in F^{-p}(C \otimes \Lambda X)$.

A l'aide des propositions 4.4.5 et 4.4.6, on montre facilement que le morphisme σ_1 est le morphisme de $\mathcal{B}_{(\Lambda Z,d)}(H^*(C),(\Lambda Z\otimes\Lambda X,d'))$ dans $(H^*(C) \otimes \Lambda X,\delta')$ qui vaut 0 sur $\mathcal{B}^{-n}$ lorsque $n > 0$, et qui envoie un élément $[c] \otimes u \otimes v$ de $\mathcal{B}^0 = H^*(C) \otimes \Lambda Z\otimes\Lambda X$ sur $[c]\gamma^*\rho[u] \otimes v$ pour tout $[c] \in H^*(C)$, $u \in \Lambda Z$, $v \in \Lambda X$.

On voit donc que le morphisme σ_1 :

$$\mathcal{B}_{(\Lambda Z,d)}(H^*(C),(\Lambda Z\otimes\Lambda X,d')) \to (H^*(C) \otimes \Lambda X,\delta')$$

est égal à l'application définie dans la proposition 4.4.2 lorsqu'on remplace (C,d_c) par $(H^*(C),0)$, $(\Lambda Z,D)$ par $(\Lambda Z,d)$, $(\Lambda Z\otimes\Lambda X,D')$ par $(\Lambda Z\otimes\Lambda X,d')$ et γ par $\gamma^*\rho$.

Cette proposition montre donc que $\sigma_2 = \sigma_1^*$ est un isomorphisme.

Proposition 4.4.8. - On a $\hat{F}^{-p} \subset \tilde{F}^{-p}$ et le morphisme ϑ_2 (induit par l'identité) de $(\hat{E}_2,\hat{d}_2)$ dans $(\tilde{E}_2,\tilde{d}_2)$ est un isomorphisme.

Démonstration de la proposition 4.4.8. -

Rappelons que $\tilde{E}_o^{-p} = \mathcal{B}_{\Lambda Z}^{-p,*,*}(C,\Lambda Z\otimes\Lambda X)$ et que d_o est égale à la différentielle interne d_I.

Soit $M = c[a_1|\ldots|a_\ell]U \in \hat{E}_o^{-p}$, où $c \in C^s$, $a_i \in (\Lambda Z)_{n_i}^{q_i-n_i}$ pour $i = 1,\ldots,\ell$ et $U \in (\Lambda Z\otimes\Lambda X)_m^{-m+r}$.

Alors M a pour tridegré $(-\ell,-n = -(\sum n_i+m), s+\sum q_i+r)$.

Si $\ell < p$, on a $\vartheta_o(M) = 0$.

Si $\ell = p$, comme $M \in \hat{E}_o^{-p}$, on a $n = 0$, ce qui implique que $a_i \in \Lambda^+ Z_o$, $i = 1,\ldots,p$ et $U \in \Lambda Z_o \otimes \Lambda X_o$.

On a alors $\vartheta_o(c[a_1|\ldots|a_p]U) = c[a_1|\ldots|a_p]U$.

Rappelons aussi que $\tilde{E}_1 = H^*(\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C,\Lambda Z\otimes\Lambda X),d_I)$ s'identifie à la bar construction $\mathcal{B}_{H^*(\Lambda Z,D)}(H^*(C),H^*(\Lambda Z\otimes\Lambda X,D'))$; et que $\tilde{d}_1$ s'identifie à la différentielle totale de cette bar construction, égale à $0+d_E$.

Soit μ le morphisme d'ADG : $(\Lambda Z,0) \to (\Lambda Z,D)$ défini comme composé de la projection sur $(\Lambda Z_o,0)$ et de l'inclusion $(\Lambda Z_o,0)$ dans $(\Lambda Z,D)$.

On définit de même $\mu' : (\Lambda Z\otimes\Lambda X,0) \to (\Lambda Z\otimes\Lambda X,D')$.

On a évidemment $\mu^* = \pi^{*-1}\rho : (\Lambda Z,d) \to H^*(\Lambda Z,D)$ et $\mu'^* = \pi'^{*-1}\rho'$.

On vérifie que $\vartheta_o^* = \vartheta_1$:

$$\mathcal{B}_{(\Lambda Z,d)}(H^*(C),(\Lambda Z\otimes\Lambda X,d')) \to \mathcal{B}_{H^*(\Lambda Z,D)}(H^*(C),H^*(\Lambda Z\otimes\Lambda X,D'))$$

est définie par :

$$\vartheta_1([c][a_1|\dots|a_\ell]U) = [c][\mu^*(a_1)|\dots|\mu^*(a_\ell)]\mu'^*(U)$$
$$= [c][\pi^{*-1}\rho(a_1)|\dots|\pi^{*-1}\rho(a_\ell)]\pi'^{*-1}\rho'(U).$$

Considérons les diagrammes commutatifs de morphismes d'ADG suivants :

$$\begin{tikzcd}
H^*(C) & H^*(\Lambda Z,D) \arrow[l, "\gamma'^* = \gamma^*\pi^*"'] \arrow[r, "i^*"] & H^*(\Lambda Z\otimes\Lambda X,D') \\
H^*(C) \arrow[u, "id"] & (\Lambda Z,d) \arrow[l, "\gamma^*\rho"'] \arrow[u, "\pi^{*-1}\rho"] \arrow[r, "i"] & (\Lambda Z\otimes\Lambda X,d') . \arrow[u, "\pi'^{*-1}\rho'"]
\end{tikzcd}$$

On voit que le morphisme d'ADG ϑ_1 est exactement le morphisme $B_{\pi^{*-1}\rho}(id,\pi'^{*-1}\rho')$ défini dans la démonstration de la proposition 4.3.3 , et qui fait passer de la bar construction définie sur le triplet de la ligne horizontale inférieure à la bar construction définie sur le triplet de la ligne horizontale supérieure. Comme $\pi^{*-1}\rho$ et $\pi'^{*-1}\rho'$ sont des quasi-isomorphismes, on en déduit que $\vartheta_1^* = \vartheta_2$ est un isomorphisme.

Les propositions 4.4.7 et 4.4.8 permettent d'achever la démonstration du théorème 4.2.1 et de son corollaire.

§ 5 - *Applications*.

Dans ce paragraphe, nous allons étudier différentes applications du théorème fondamental. Nous étudierons des conditions suffisantes pour que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore d'un carré fibré collapse et pour qu'il existe un isomorphisme d'algèbres entre l'algèbre de cohomologie de l'espace total du fibré image réciproque et le terme E_2 de la suite spectrale.

Pour un fibré de Serre $F \longrightarrow E \xrightarrow{f} B$, nous comparerons les hypothèses que la suite spectrale de Serre collapse et que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore collapse.

Enfin, nous appliquerons le théorème fondamental 4.2.5 au calcul de l'algèbre de cohomologie de l'espace total d'un fibré principal dont le groupe structural est un groupe de Lie compact connexe.

Théorème 4.5.1. - Soit un carré fibré

$$\begin{array}{ccc} F & = & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ B \times_{B_o} E_o = E & \longrightarrow & E_o \\ f \downarrow & & \downarrow f_o \\ B & \xrightarrow{g} & B_o \end{array}$$

vérifiant les hypothèses du théorème 4.2.5.

Supposons que les espaces E_o, B et B_o sont formels, et que les applications f_o et g sont formelles (cf. définition 2.3.3), alors la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du carré fibré collapse au terme E_2, et on a un isomorphisme algébrique :

$$H^*(E,k) = \mathrm{Tor}_{H^*(B,k)}(H^*(B,k),H^*(E_o,k)).$$

Démonstration : On peut d'abord considérer les diagrammes commutatifs à homotopie près :

$$\begin{array}{ccccc} A(B) & \xleftarrow{A(g)} & A(B_o) & \xrightarrow{A(f_o)} & A(E_o) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{M}_B & \xleftarrow{m(g)} & \mathcal{M}_{B_o} & \xrightarrow{m(f_o)} & \mathcal{M}_{E_o} \end{array}$$

où $\mathcal{M}_B$, $\mathcal{M}_{B_o}$, $\mathcal{M}_{E_o}$ sont les modèles minimaux de B, B_o, E_o.

D'après la proposition 4.3.3, la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du carré fibré est isomorphe à la suite spectrale du triplet d'ADG : $(\mathcal{M}_{B_o}, \mathcal{M}_B, \mathcal{M}_{E_o})$.

D'après la définition de la formalité d'un espace et d'une application, il existe des diagrammes commutatifs à homotopie près du type suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}_B & \xleftarrow{m(g)} & \mathcal{M}_{B_o} & \xrightarrow{m(f_o)} & \mathcal{M}_{E_o} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^*(B,k) & \xleftarrow{g^*} & H^*(B_o,k) & \xrightarrow{f_o^*} & H^*(E_o,k). \end{array}$$

(On munit $H^*(B)$, $H^*(B_o)$, $H^*(E_o)$ de la différentielle 0).

De plus, les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes.

La suite spectrale d'Eilenberg-Moore du carré fibré est donc isomorphe à celle du triplet d'ADG $(H^*(B_o), H^*(B), H^*(E_o))$.

On utilise alors le théorème 4.2.1.

Le modèle filtré de $f_o^* : H^*(B_o) \to H^*(E_o)$ est évidemment égal à son modèle minimal bigradué : $(\Lambda Z,d) \to (\Lambda Z\otimes\Lambda X,d')$.

On a, pour tout $W \in (\Lambda X)_p$, $d'W = 1 \otimes d''W + \sum a_i' \otimes b_i' + \sum a_i'' \otimes b_i''$

avec $a_i' \in \Lambda^+Z_o$, $b_i' \in (\Lambda X)_{p-1}$ et $\sum a_i'' \otimes b_i'' \in \sum_{i=1}^{p-1} (\Lambda^+Z_i) \otimes (\Lambda X)_{p-1-i}$.

Si on reprend les notations de la proposition 4.4.5, on a, pour tout $c \in H^*(B)$, $W \in (\Lambda X)_p$,

$$\Delta'(c\otimes W) = (-1)^{|c|}c\otimes d''W + (-1)^{|c|} \sum_i cg^*\rho(a_i') \otimes b_i'.$$

On voit donc que $\Delta' = d_1$.

On a $d_i = 0$, pour tout $i \geqslant 2$, donc, dans la suite spectrale d'Eilenberg-Moore, on a $E_2 = E_\infty$.

Comme $\Delta' = d_1$, on a aussi un isomorphisme algébrique entre $E_2 = H^*(E_1,d_1)$ et $H^*(E,k)$ qui découle du théorème 4.2.5.

Remarque 4.5.2.- La conclusion du théorème 4.5.1 peut être fausse lorsque l'une des applications f_o ou g n'est pas formelle. En effet, soit la fibration de Hopf : $S^1 \to S^3 \xrightarrow{f} S^2$. Il est facile de voir que f n'est pas formelle. On va montrer que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de cette fibration ne collapse pas au terme E_2.

La suite spectrale d'Eilenberg-Moore de la fibration est isomorphe à celle du triplet d'ADG $(\mathcal{M}_{S^2},k,\mathcal{M}_{S^3})$ où $\mathcal{M}_{S^3}$ est considéré comme un $\mathcal{M}_{S^2}$-module différentiel à gauche grâce au morphisme $\alpha : \mathcal{M}_{S^2} \to \mathcal{M}_{S^3}$ induit par f.

Si on pose $\mathcal{M}_{S^2} = (\Lambda(x,y),d)$, avec $|x| = 2$, $dy = x^2$

$\mathcal{M}_{S^3} = \Lambda(z)$ avec $|z| = 3$.

On a $\alpha(x) = 0$, $\alpha(y) = z$, et $\alpha^* = 0$ sur $H^+(S^2,k)$.

Le modèle minimal bigradué de $H^*(S^2,k)$ est $(\Lambda(Z_o \oplus Z_1),d)$ avec $Z_o = kx$, $|x| = 2$, $Z_1 = ky$, $dy = x^2$ et $\rho(x) = cl.x$ dans $H^*(S^2,k)$.

Le modèle minimal bigradué de α^* est
$$\begin{array}{ccc} (\Lambda Z,d) & \longrightarrow & (\Lambda Z \otimes \Lambda X,d') \\ \downarrow{\scriptstyle\rho} & & \downarrow{\scriptstyle\rho'} \\ H^*(S^2,k) & \xrightarrow{\alpha^*} & H^*(S^3,k) \end{array}$$

avec $X_o = kz$, $|z| = 3$ et $\rho'(z) = z$.

$X_1 = kx_1$, $|x_1| = 1$ et $d'x_1 = x$

$X_2 = kx_2$, $|x_2| = 2$ et $d'x_2 = y - x\,x_1$

$X_n = 0$ si $n \geqslant 3$.

On a donc $(\Lambda X, d'') = (\Lambda(z, x_1, x_2), d'' = 0)$.

Il est facile de montrer que le modèle filtré de α est :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{S^2} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{M}_{S^3} \\ \uparrow{\scriptstyle id=\pi} & & \uparrow{\scriptstyle \pi'} \\ (\Lambda Z, d) & \longrightarrow & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \end{array}$$

avec $D = d$ et $\pi = id$, $\pi'(z) = z$, $\pi'(x_1) = 0$, $\pi'(x_2) = 0$

et $D'x_2 = d'x_2 - z$.

On a donc $(\Lambda X, D'') = (\Lambda(z, x_1, x_2), D'')$ avec $D''z = 0$, $D''x_1 = 0$, $D''x_2 = -z$.

Le théorème 4.2.1. montre que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore est isomorphe à une suite spectrale associée à une filtration définie sur $(\Lambda X, D'')$. On a $E_2^{-2} = H_2(\Lambda X, d'') = kx_2$, $E_2^o = H_o(\Lambda X, d'') = kz$ et $d_2(x_2) = -z$.

Ceci prouve que $d_2 \neq 0$.

Remarque 4.5.3.- On a montré que, pour un fibré de Serre $F \longrightarrow E \xrightarrow{f} B$ vérifiant les hypothèses du théorème 4.2.6., tel que E et B sont formels et tel que f est une application formelle, alors on a un isomorphisme algébrique :

$$H^*(F,k) \simeq \mathrm{Tor}_{H^*(B,k)}(k, H^*(E,k))$$

La démonstration utilisait essentiellement le fait que, à homotopie près, l'application f a un modèle filtré

$$(\Lambda Z, D) \longrightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \longrightarrow (\Lambda X, D'') \quad \text{avec } D'' = d''.$$

Plus généralement, si $F \longrightarrow E \xrightarrow{f} B$ est une fibration vérifiant les hypothèses du théorème 4.2.6, et si f a un modèle filtré pour lequel $D'' = d''$, alors on a :

$$H^*(F,k) = \mathrm{Tor}_{H^*(B,k)}(k,H^*(E,k)).$$

L'exemple suivant est l'exemple d'une fibration $F \longrightarrow E \xrightarrow{f} B$ dont la suite spectrale d'Eilenberg-Moore collapse, telle que $H^*(F,k) = \mathrm{Tor}_{H^*(B,k)}(k,H^*(E,k))$ et pourtant les espaces ne sont pas formels.

Exemple 4.5.4.- On considère d'abord le fibré $K(\mathbb{Q},1) \to K(\mathbb{Q}^2,2) \xrightarrow{q_o} K(\mathbb{Q}^3,2)$ image réciproque du fibré universel de base $K(\mathbb{Q},2)$ par l'application classifiante $\ell_o : K(\mathbb{Q}^3,2) \to K(\mathbb{Q},2)$ définie par la propriété que $\ell_o^* : H^2(K(\mathbb{Q},2),\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}t \to H^2(K(\mathbb{Q}^3,2)) = \bigoplus_{i=1}^{3} \mathbb{Q}\, x_i$ envoie t sur x_1-x_3.

On considère ensuite le fibré $K(\mathbb{Q}^2,5) \to B \xrightarrow{q} K(\mathbb{Q}^3,2)$ image réciproque du fibré universel de base $K(\mathbb{Q}^2,6)$ par l'application classifiante $\ell : K(\mathbb{Q}^3,2) \to K(\mathbb{Q}^2,6)$ définie par la propriété que $\ell^* : H^6(K(\mathbb{Q}^2,6)) = \mathbb{Q}y_1 \oplus \mathbb{Q}y_2 \to H^6(K(\mathbb{Q}^3,2))$ envoie y_1 sur $x_1^2x_3$ et y_2 sur $x_1x_2x_3$. (Si $H^6(K(\mathbb{Q}^3,2))$ est engendré par les monômes de degré 3 en x_1, x_2, x_3).

On prend comme fibration : $F = K(\mathbb{Q},1) \longrightarrow E \xrightarrow{f} B$ l'image réciproque par q du fibré $K(\mathbb{Q},1) \to K(\mathbb{Q}^2,2) \xrightarrow{q_o} K(\mathbb{Q}^3,2)$.

On montre que $\mathcal{M}_B = (\Lambda(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2),d)$ avec $|x_i| = 2$ $i = 1, 2, 3$; $|y_i| = 5$, $dx_i = 0$, $dy_1 = x_1^2x_3$, $dy_2 = x_1x_2x_3$.

$$H^*(B,\mathbb{Q}) = \frac{\Lambda(x_1,x_2,x_3,u)}{(x_1^2x_3\ ,x_1x_2x_3,x_1x_2u)} \qquad \text{où } u = \mathrm{cl}(x_1y_2-x_2y_1).$$

On voit que B n'est pas formel.

De même $\mathcal{M}_E = (\Lambda(x'_1,x'_2,y'_1,y'_2),d')$ $|x'_i| = 2$ $i = 1, 2, 3$ $|y'_i| = 5$, $d'x'_i = 0$, $d'y'_1 = x'^3_1$, $d'y'_2 = x'^2_1 x'_2$.

$$H^*(E,\mathbb{Q}) = \frac{\Lambda(x'_1,x'_2,u')}{(x'^3_1, x'^2_1 x'_2, x'^2_1 u')} \quad \text{où} \quad u' = \mathrm{cl}(x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1).$$

On voit que E n'est pas formel.

L'application f induit un morphisme $\alpha : \mathcal{M}_B \to \mathcal{M}_E$ donné par $\alpha(x_1) = x'_1$, $\alpha(x_2) = x'_2$, $\alpha(x_3) = x'_1$, $\alpha(y_i) = y'_i$, $i = 1,2$.

Par suite α^* est surjectif et $\mathrm{Ker}\ \alpha^* = \mathrm{cl}(x_1 - x_3)$.

Des raisonnements d'algèbre commutative impliquent que $\mathrm{Ker}\ \alpha^*$ est engendré par l'élément $\mathrm{cl}(x_1 - x_3)$ qui est non diviseur de zéro dans $H^*(B,\mathbb{Q})$.

Soit $(\Lambda Z,d) \xrightarrow{\rho} H^*(B,\mathbb{Q})$ le modèle minimal bigradué de $H^*(B,\mathbb{Q})$. Comme α^* est surjectif et comme $\mathrm{Ker}\ \alpha^*$ est engendré par un élément non diviseur de 0, on peut montrer que le modèle minimal bigradué de α^* est $(\Lambda Z,d) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda X,d')$ avec $X_n = 0$ pour tout $n \geqslant 2$.

Ceci implique que $D'' = d''$.

Le théorème 4.2.6 permet alors de montrer que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore collapse au terme E_2, et que, de plus, on a un isomorphisme algébrique $H^*(F,\mathbb{Q}) = \Lambda(t) = \mathrm{Tor}_{H^*(B,\mathbb{Q})}(\mathbb{Q},H^*(E,\mathbb{Q}))$ (où t est une variable de degré 1).

On peut ainsi retrouver, dans un cadre un peu plus général, les résultats 3.2 et 3.3 de L. Smith [20]. Plus précisément, on peut montrer que si $F \longrightarrow E \xrightarrow{f} B$ est un fibré de Serre vérifiant les hypothèses du théorème 4.2.6., si f^* est surjective, si $\operatorname{Ker} f^*$ peut être engendré par une suite régulière d'éléments $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $H^*(B,k)$; alors la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du fibré collapse au terme E_2, on a un isomorphisme algébrique entre $E_2 = \operatorname{Tor}_{H^*(B,k)}(k,H^*(E,k))$ et $H^*(F,k)$; de plus, on a $H^*(F,k) = \Lambda V$ où V est un espace vectoriel gradué en degré impair, $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} k\, x_n$ et $|x_n| = |a_n| - 1$.

Rappelons que si $F \xrightarrow{i_o} E_o \xrightarrow{f_o} B_o$ est un fibré de Serre dont les espaces sont connexes par arcs et tel que B_o est simplement connexe, et si k est un corps commutatif, on définit une suite spectrale appelée suite spectrale de Serre du fibré dont le terme E_2 est $H^*(B_o,k) \otimes H^*(F,k)$ et dont le terme E_∞ est le gradué associé à $H^*(E_o,k)$.

On a le résultat suivant :

<u>*Théorème*</u> *4.5.5. (Serre)*.- Si $H^*(F,k)$ ou $H^*(B,k)$ est de type fini, on a les équivalences :

1) la suite spectrale de Serre collapse au terme E_2 ;
2) $i_o^* : H^*(E_o,k) \to H^*(F,k)$ est surjective.

Soit un fibré $F \xrightarrow{i_o} E_o \xrightarrow{f_o} B_o$ tel que F, E_o, B_o sont connexes par arcs, B_o simplement connexe, et $H^*(F,k)$ de type fini, On considère le modèle minimal bigradué de f_o^* :

$$\begin{array}{ccccc}
H^*(B_o) & \longrightarrow & H^*(E_o) & \xrightarrow{i_o^*} & H^*(F) \\
\uparrow{\scriptstyle\rho} & & \uparrow{\scriptstyle\rho'} & & \uparrow{\scriptstyle\rho''} \\
(\Lambda Z,d) & \longrightarrow & (\Lambda Z\otimes\Lambda X,d') & \longrightarrow & (\Lambda X,d'')
\end{array}$$

et le modèle filtré de $A(f_o)$:

$$\begin{tikzcd} A(B_o) \arrow[r] & A(E_o) \arrow[r] & A(F) \\ (\Lambda Z,D) \arrow[r] \arrow[u, "\pi"] & (\Lambda Z\otimes\Lambda X,D') \arrow[r] \arrow[u, "\pi'"] & (\Lambda X,D''). \arrow[u, "\pi''"] \end{tikzcd}$$

On a vu que π'' est un quasi-isomorphisme.

Théorème 4.5.6. - Soit $F \xrightarrow{i_o} E_o \xrightarrow{f_o} B_o$ un fibré de Serre tel que F, E_o, B_o sont connexes par arcs, B_o simplement connexe, et $H^*(F,k)$ de type fini. Alors on a les équivalences suivantes :

1) la suite spectrale de Serre du fibré collapse au terme E_2.

2) la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du fibré collapse au terme E_2.

De plus,

a) on a un isomorphisme algébrique $H^*(F) \simeq k \otimes_{H^*(B_o,k)} H^*(E_o,k)$

b) $H_+(\Lambda X,d'') = 0$ et $\rho''^* : H_o(\Lambda X,d'') \to H^*(F)$ est un isomorphisme.

3) Pour tout espace simplement connexe B, et toute application continue $g : B \to B_o$, la suite spectrale de Serre du fibré image réciproque $F \to E = B \times_{B_o} E_o \xrightarrow{f} B$ collapse au terme E_2.

4) Pour tout espace connexe par arcs B et toute application continue $g : B \to B_o$, la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du carré fibré :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d] & F \arrow[d] \\ E \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & E_o \arrow[d, "f_o"] \\ B \arrow[r, "g"] & B_o \end{tikzcd}$$

collapse au terme $\tilde{E}_2$, et $\tilde{E}_2^{-p} = 0$ si $p \neq 0$.

De plus, on a un isomorphisme algébrique :

$$H^*(E,k) = H^*(B,k) \otimes_{H^*(B_o,k)} (H^*(E_o,k)).$$

Remarque : Les conditions équivalentes du théorème impliquent que, pour tout espace B simplement connexe, la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du fibré image réciproque $F \to E = B \times_{B_o} E_o \to B$ collapse et on a un isomorphisme algébrique : $H^*(F,k) \simeq k \otimes_{H^*(B,k)} H^*(E,k)$.

Démonstration du théorème 4.5.6.- On va montrer

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, Leftrightarrow] & 1 \arrow[r, Rightarrow] & 4 \arrow[dl, Rightarrow] \\ & 3 \arrow[u, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

1) => 4). Si la suite spectrale de Serre collapse, on sait, d'après le théorème de Leray-Hirsh, que $f_o^* : H^*(B_o,k) \to H^*(E_o,k)$ munit $H^*(E_o,k)$ d'une structure de $H^*(B_o,k)$-module libre. Par définition de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du carré fibré, le terme $\tilde{E}_1^{-p}$ de cette suite spectrale s'identifie à $\tilde{F}^{-p}\mathcal{B}_{H^*(B_o,k)}(H^*(B,k),H^*(E_o,k))$ où $\mathcal{B}_{H^*(B_o)}(H^*(B),H^*(E_o))$ désigne la bar construction sur le triplet d'algèbres graduées $(H^*(B_o),H^*(B),H^*(E_o))$ et $\tilde{F}^{-p}$ est la filtration d'Eilenberg-Moore définie au paragraphe 3.

On a $\tilde{E}_2^{-p} = \mathrm{Tor}^p_{H^*(B_o,k)}(H^*(B,k),H^*(E_o,k))$.

Comme $H^*(E_o)$ est un $H^*(B_o)$-module libre, on en déduit $\tilde{E}_2^{-p} = 0$ si $p > 0$ et $\tilde{E}_2 = \tilde{E}_2^o = H^*(B) \otimes_{H^*(B_o)} H^*(E_o)$.

Ceci prouve que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore collapse au terme $\tilde{E}_2$ et que $\tilde{E}_\infty^{-p} = 0$ si $p \neq 0$; donc on a $\tilde{E}_2 = \tilde{E}_\infty = \tilde{E}_\infty^o = H^*(E,k)$.

1) => 2). Prenons $B = \{1 \text{ point}\}$, alors $E = F$ et la propriété 4) dit que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du fibré collapse et on a $H^*(F) = k \otimes_{H^*(B_o,k)} H^*(E_o,k)$.

D'après le théorème de Serre, $i_o^* : H^*(E_o,k) \to H^*(F,k)$ est surjective, donc $\rho'' : (\Lambda X,d'') \to H^*(F)$ est surjective, donc $\rho''^* : H^*(\Lambda X,d'') \to H^*(F)$ est surjective.

On a vu que le terme E_2^{-p} de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore est isomorphe à $H_p(\Lambda X,d'')$ (théorème 4.2.1) ; on a donc $H_+(\Lambda X,d'') = 0$
Pour tout $n \geqslant 0$, $\rho''^{*n} : H_o^n(\Lambda X,d'') \to H^n(F)$ est surjective, et on a

$$H_o^n(\Lambda X,d'') = E_2^{o,n} = E_\infty^{o,n} \simeq H^n(F).$$

Donc ρ''^{*n} est une application linéaire surjective entre espaces vectoriels de même dimension, donc ρ''^{*n} est un isomorphisme.

2) => 1). Montrons que la seule hypothèse $H_+(\Lambda X,d'') = 0$ implique que la suite spectrale de Serre collapse.

En effet, si $H_+(\Lambda X,d'') = 0$, alors la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du fibré collapse ; on a $\tilde{E}_2^o = \tilde{E}_\infty^o$ et $\tilde{E}_\infty^{-p} = \tilde{E}_2^{-p} = 0$ si $p \neq 0$.

Ceci entraîne que $H^*(F) \simeq H^*(\Lambda X,D'') = \tilde{E}_\infty^o$
donc $H^*(\Lambda X,D'') = \{[\alpha] \in H^*(\Lambda X,D'') \mid \alpha \in \Lambda X_o\}$.

D'autre part, on a une surjection évidente :

$$s : H_o(\Lambda X,d'') \to \{[\alpha] \in H^*(\Lambda X,D'') \mid \alpha \in \Lambda X_o\} = H^*(\Lambda X,D'').$$

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} H_o(\Lambda X, d'') \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "\rho''^*"'] & & H^*(\Lambda X, D'') \arrow[dl, "\pi''^*"] \\ & H^*(F) & \end{tikzcd}$$

Il montre que ρ''^* est surjectif, donc ρ'' est surjectif. Ceci implique que $i_o^* : H^*(E_o,k) \to H^*(F,k)$ est surjective. Le théorème de Serre permet de conclure.

4 => 3). Prenons $B = \{1 \text{ point}\}$, alors 4) veut dire que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du fibré collapse et que $H_+(\Lambda X, d'') = \bigoplus_{p>0} \tilde{E}_2^{-p}$ est égal à 0. Ceci implique que la suite spectrale de Serre du fibré $F \to E_o \to B_o$ collapse, et donc que $H^*(E_o)$ est un $H^*(B_o)$-module libre.

Fixons un espace B simplement connexe et $g : B \to B_o$ une application continue. Par hypothèse, on a un isomorphisme algébrique $H^*(E,k) = H^*(B,k) \otimes_{H^*(B_o,k)} H^*(E_o,k)$; par suite , $H^*(E,k)$ est un $H^*(B,k)$-module libre.

Considérons la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du fibré $F \longrightarrow E \xrightarrow{f} B$; le terme E_2^{-p} vaut $\mathrm{Tor}^p_{H^*(B)}(k, H^*(E))$. Comme $H^*(E)$ est un $H^*(B)$-module libre, on a $E_2^{-p} = 0$ si $p \neq 0$ et $E_2^o = k \otimes_{H^*(B)} H^*(E)$. Utilisons alors l'implication 2 => 1 du théorème pour le fibré $F \to E \to B$, on en déduit que la suite spectrale de Serre de ce fibré collapse.

3 => 1). Prendre $B = B_o$ et $g = $ identité.

<u>*Corollaire*</u> 4.5.7.- Soit un carré fibré de fibrations de Serre :

$$\begin{array}{ccc} & F & = & F \\ & \downarrow & & \downarrow \\ B\times_{B_o}E_o = & E & \longrightarrow & E_o \\ & f\downarrow & & \downarrow f_o \\ & B & \xrightarrow{g} & B_o \end{array}$$

tel que : 1) B, B_o, E_o sont connexes par arcs et B_o est simplement connexe.

2) F a le type d'homotopie rationnelle d'un espace homogène de rang nul (i.e F a le type d'homotopie rationnelle d'un quotient G/K où G est un groupe de Lie compact connexe, K un sous-groupe fermé connexe et G et K ont même rang).

Alors, i) la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du carré fibré collapse au terme $\tilde{E}_2$, on a $\tilde{E}_2^{-p} = 0$ si $p \neq 0$, et on a un isomorphisme algébrique : $H^*(E,k) = H^*(B) \otimes_{H^*(B_o)} H^*(E_o)$.

ii) La suite spectrale d'Eilenberg-Moore du fibré $F \to E_o \xrightarrow{f_o} B_o$ collapse au terme E_2. On a un isomorphisme algébrique $H^*(F) = k \otimes_{H^*(B_o)} H^*(E_o)$. La fibre du modèle minimal bigradué de f_o^* est le modèle minimal bigradué de $H^*(F)$. La fibre du modèle filtré de f_o est le modèle filtré de F.

Démonstration : Ce corollaire est une conséquence directe du théorème 4.5.6 et d'un résultat de J.C. Thomas (non publié) qui démontre que si un fibré $F \to E_o \xrightarrow{f_o} B_o$ vérifie 1) et 2) alors la suite spectrale de Serre collapse au terme E_2.

Remarque 4.5.8.- Soit $F \longrightarrow E \xrightarrow{f} B$ un fibré de Serre tel que B, E, F sont connexes par arcs, B simplement connexe et $H^*(F,k)$ de type fini. On a montré que si la suite spectrale de Serre du fibré collapse au terme E_2, alors la fibre $(\Lambda X,d'')$ du modèle minimal bigradué de f^* est le modèle minimal bigradué de $H^*(F,k)$ au sens de Halperin-Stasheff. Dans ce cas, $(\Lambda X,D'') \xrightarrow{\pi''} A(F)$ est le modèle filtré de la fibre F de la fibration au sens du théorème 2.2.1. De plus, si $D'' = d''$, la fibre F est formelle.

Le théorème 4.2.5 va nous permettre d'établir quelques résultats, (certains sont bien connus, voir [9]), sur les fibrés principaux dont le groupe structural G est un groupe de Lie compact connexe et dont la base B est un C.W. complexe. Soit $G \to P \xrightarrow{f} B$ un tel G-fibré principal de classe C^∞. On sait que ce fibré peut être considéré comme l'image réciproque du fibré universel $G \longrightarrow E_G \xrightarrow{f_o} B_G$ par une application continue $g : B \to B_G$. De plus, $g^* : H^*(B_G,\mathbb{R}) \to H^*(B,\mathbb{R})$ est égal à l'homomorphisme de Weil h_P.

On sait que $H^*(G,\mathbb{R}) = E(P_G)$ et $H^*(B_G,\mathbb{R}) = S(Q_G)$ où $Q_G^{2n} = P_G^{2n-1}$. De plus, on a une transgression τ_G :

$$(P_G)^{2n-1} \xrightarrow{\simeq} (Q_G)^{2n}.$$

Proposition 4.5.9. *(Cartan-Chevalley)*. [3].- Il existe un morphisme d'ADG $\theta : (A_{\mathbb{R}}(B) \otimes E(P_G),\Delta) \to A_{\mathbb{R}}(P)$, tel que θ^* est un isomorphisme.

(Ici $A_{\mathbb{R}}(B)$ (resp. $A_{\mathbb{R}}(P)$) désigne l'algèbre de de Rham des formes différentielles C^∞ sur B (resp. sur P)).

La différentielle Δ est définie par $\Delta(b\otimes 1) = db\otimes 1$, $\Delta(1\otimes v) = \gamma_B \circ \tau_G(v)\otimes 1$ où $\gamma_B : H^*(B_G,\mathbb{R}) \to Z(A_{\mathbb{R}}(B))$ est l'homomorphisme associé à la connexion et vérifiant $\gamma_B^* = h_P = g^*$.

Remarque : On pourrait formuler un théorème analogue en remplaçant $A_{\mathbb{R}}(B)$ et $A_{\mathbb{R}}(P)$ par leurs modèles minimaux sur $\mathbb{R}$.

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.5.10.- Soit G un groupe de Lie compact connexe, soit B un espace connexe par arcs et soit g une application continue de B dans B_G (espace classifiant de G), alors la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du carré fibré :

$$\begin{array}{ccc} & G & = & G \\ & \downarrow & & \downarrow \\ B \times_{B_G} E_G = & P & \longrightarrow & E_G \\ & \downarrow f & & \downarrow f_o \\ & B & \xrightarrow{g} & B_G \end{array}$$

collapse au terme E_2.

On a un isomorphisme linéaire :

$$H^*(P,\mathbb{R}) = H^*(H^*(B) \otimes_{g^*\tau_G} E(P_G), \delta') = \mathrm{Tor}_{H^*(B_G)}(H^*(B),\mathbb{R})$$

(où $\delta'([b] \otimes v) = (-1)^{|b|}[b]\, g^*\tau_G(v) \otimes 1$ si $[b] \in H^*(B)$ et $v \in P_G$).

Corollaire.- Soit $G \longrightarrow P \xrightarrow{f} B$ un G-fibré principal C^∞ de groupe structural G, groupe de Lie compact connexe, et de base B un C.W. complexe. Alors on a un isomorphisme linéaire :

$$H^*(P,\mathbb{R}) = H^*(H^*(B) \otimes_{h_P\tau_G} E(P_G)) = \mathrm{Tor}_{H^*(B_G)}(H^*(B),\mathbb{R}).$$

Démonstration du théorème 4.5.10.- Elle utilise essentiellement le théorème 4.2.5.

Il est clair que

$$\begin{array}{ccc} f_o^* : H^*(B_G,\mathbb{R}) & \longrightarrow & H^*(E_G,\mathbb{R}) \\ \| & & \| \\ S(Q_G) & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

a pour modèle minimal bigradué :

$$\Lambda Z = \Lambda Z_o = S(Q_G) \longrightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') = (\Lambda Z_o \otimes \Lambda X_1, d')$$

avec $\Lambda X_1 = E(P_G)$ et $d'(v) = \tau_G(v)$ si $v \in P_G$.

Le modèle filtré de f_o est donc égal au modèle minimal bigradué : $\Lambda Z_o = S(Q_G) \to (S(Q_G) \otimes_{\tau_G} E(P_G), d')$.

On sait que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du carré fibré est isomorphe à une suite spectrale définie sur $(\mathcal{M}_B \otimes E(P_G), \Delta')$ avec

$$\Delta'(b \otimes \prod_{i=1}^{p} v_i) = d_B(b) \otimes (\prod_{i=1}^{p} v_i) +$$

$$+ (-1)^{|b|} \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} b\gamma\tau_G(v_i) \otimes v_1 \dots v_{i-1}\, v_{i+1} \dots v_p$$

où $b \in \mathcal{M}_B$, $v_i \in P_G$ et γ est l'application (induite par g) de $S(Q_G)$ dans $\mathcal{M}_B$ (on a $\gamma^* = g^*$).

Rappelons qu'on filtre $(\mathcal{M}_B \otimes E(P_G), \Delta')$ par la filtration décroissante : $F^{-p}\mathcal{M}_B \otimes E(P_G) = \{\sum b \otimes \prod_{i=1}^{n} v_i,\ n \leqslant p,\ b \in \mathcal{M}_B,\ v_i \in P_G\}$.

Cette filtration définit une suite spectrale isomorphe à la suite spectrale d'Eilenberg-Moore et on remarque que si $V \in (\Lambda X_1)_p$, $b \in \mathcal{M}_B$, alors $\Delta'(b \otimes V) = d_B(b) \otimes V + V'$ et $V' \in \Lambda^+ Z_o \otimes (\Lambda X_1)_{p-1}$.

Ceci entraîne que $d_1 : E_1^{-p} = H^*(B) \otimes (\Lambda X_1)_p \to E_1^{-p+1} = H^*(B) \otimes (\Lambda X_1)_{p-1}$ est définie par : $d_1([b] \otimes \prod_{i=1}^{p} v_i) = (-1)^{|b|} \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} [b] g^* \tau_G(v_i) \otimes v_1 \ldots v_{i-1} v_{i+1} \ldots v_p$

et que $d_i = 0$ pour tout $i \geq 2$.

On a donc $E_2 = E_\infty = H^*(H^*(B) \otimes \Lambda X, d_1)$.

Comme E_∞ est égal au gradué associé à $H^*(P,\mathbb{R})$ (partie i) du théorème 4.2.5), le théorème 4.5.10 est démontré.

Le théorème 4.5.1 nous permet d'énoncer le résultat suivant.

Théorème 4.5.11.- Soit $G \to P \xrightarrow{f} B$ un G-fibré principal de groupe structural un groupe de Lie compact connexe G et dont la base B est un C.W. complexe formel. Alors, on a un isomorphisme algébrique :

$$H^*(P,\mathbb{R}) = H^*(H^*(B) \otimes_{h_p \tau_G} E(P_G)) = \mathrm{Tor}_{H^*(B_G)}(H^*(B),\mathbb{R})$$

Démonstration : Considérons le fibré $G \to P \xrightarrow{f} B$ comme image réciproque du fibré universel : $G \to E_G \to B_G$ par une application continue $g : B \to B_G$. Reprenons les notations et les définitions 2.3.2 et 2.3.3, nous avons alors les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
 & A(B_G) \arrow[r, "A(g)"] & A(B) \\
(S(Q_G),0) = & (\Lambda X_{B_G},0) \arrow[u, "m_{B_G}"] \arrow[r, "\hat{g}"] \arrow[d, "\Psi_{B_G}"'] & (\Lambda X_B, d_B) \arrow[u, "m_B"'] \arrow[d, "\Psi_B"] \\
S(Q_G) = & H^*(B_G,\mathbb{R}) \arrow[r, "g^*"] & H^*(B,\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

On a $(\Psi_B \hat{g}) = (\Psi_B \hat{g})^* = m_B{}^{*}\hat{g}^{*} = (A(g) m_{B_G})^* = g^* \Psi_{B_G}{}^* = g^* \Psi_{B_G}$.

L'application g est donc formelle, et les théorèmes 4.5.1 et 4.2.5 permettent de conclure.

On peut aussi retrouver un théorème démontré dans [9].

Théorème 4.5.12. - Soit $G \longrightarrow P \xrightarrow{f} B$ un G-fibré principal de groupe structural un groupe de Lie compact connexe G et dont la base B est un C W -complexe. Si l'homomorphisme de Weil $h_P : H^i(B_G, \mathbb{R}) \to H^i(B, \mathbb{R})$ est bijectif pour $i \leqslant m$, et injectif pour $i = m+1$, alors $H^i(P, \mathbb{R}) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$.

Démonstration : D'après le théorème 4.5.10, la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du carré fibré

$$\begin{array}{ccc} G & = & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \longrightarrow & E_G \\ f\downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{g} & B_G \end{array}$$

collapse au terme E_2.

On a donc un isomorphisme linéaire entre $H^n(P)$ et $H^n(H^*(B) \otimes_{h_P \tau_G} E(P_G), \delta')$.

On va montrer que $H^i(H^*(B) \otimes E(P_G), \delta') = 0$ pour tout $i \leqslant m$, avec les hypothèses du théorème.

Notons $(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n)$ une base de P_G telle que si $j \leqslant k$, alors $|v_j| \leqslant m$ et si $j \geqslant k+1$, $|v_j| > m$. Posons $u_j = \tau_G(v_j)$ pour tout j.

On peut considérer les ADG quotients successives $(\Lambda_\ell, \delta'_\ell)$ pour $\ell = 1,\ldots,k$, définies par $\Lambda_\ell = \Lambda_{\ell-1}/I_\ell$ si $\ell \geq 1$, I_ℓ est l'idéal de $\Lambda_{\ell-1}$ engendré par $(v_\ell, \delta'_{\ell-1}v_\ell)$, δ'_ℓ est la différentielle déduite de $\delta'_{\ell-1}$ par passage au quotient, $\Lambda_o = H^*(B) \otimes E(P_G)$ et $\delta'_o = \delta'$.

On va montrer que pour tout $\ell = 1,\ldots,k$, on a $H^i(I_\ell) = 0$ si $i \leq m$.

Soit $U \in (I_\ell \cap \mathrm{Ker}\, \delta'_{\ell-1})^i$ et $i \leq m$, alors on peut écrire $U = v_\ell U_\ell + (\delta'_{\ell-1}v_\ell)U''$ où U_ℓ et U'' sont des éléments de $\Lambda_{\ell-1}$ ne contenant pas v_ℓ. On a donc $U = v_\ell U' + \delta'_{\ell-1}(v_\ell U'')$. Comme $U \in \mathrm{Ker}\, \delta'_{\ell-1}$, on a $h_P(u_\ell)U' - v_\ell\delta'_{\ell-1}(U') = 0$ dans $\Lambda_{\ell-1}$, ce qui entraîne $h_P(u_\ell)U' = 0$ dans $\Lambda_{\ell-1}$. L'hypothèse de départ sur h_P entraîne que $U' = 0$ dans $\Lambda_{\ell-1}$ et donc que $U \in \mathrm{Im}\, \delta'_{\ell-1}$.

En considérant la suite exacte de cohomologie associée à la petite suite exacte d'ADG : $0 \longrightarrow I_\ell \longrightarrow \Lambda_{\ell-1} \longrightarrow \Lambda_\ell \longrightarrow 0$ pour tout $\ell = 1,\ldots,k$, on montre que :

$$H^i(H^*(B) \otimes E(P_G), \delta') = H^i(\Lambda_o) = H^i(\Lambda_k) \quad ; \text{ pour tout } i \leq m.$$

Or, si $i \leq m$, on a $H^i(\Lambda_k) = \left[H^*(B)/(h_P(u_j)_{1\leq j\leq k}\right]^i$

Comme $h_P^i : H^i(B_G,\mathbb{R}) \to H^i(B,\mathbb{R})$ est bijectif pour tout $i \leq m$, on a $0 = H^i(\Lambda_k) = H^i(\Lambda_o) = H^i(P)$. C.Q.F.D.

Enfin, on peut énoncer le résultat suivant :

<u>Théorème</u> 4.5.13. - Soit $G \longrightarrow P \xrightarrow{f} B$ un G-fibré principal de groupe structural un groupe de Lie compact connexe G et dont la base B est un C.W. complexe. Si l'idéal $(\mathrm{Im}\, h_P^*).H^*(B)$ peut être engendré par une suite régulière de m éléments homogènes de $H^*(B,\mathbb{R})$, alors on a un isomorphisme linéaire :

$$H^*(P,\mathbb{R}) = H^*(B)/(\mathrm{Im}\ h_P^+).H^*(B) \otimes E(P'_G)$$

où P'_G est un sous-espace vectoriel de P_G de codimension m.

Démonstration : Soit $(a_1,\dots,a_m)$ une suite régulière de générateurs de l'idéal engendré par $\mathrm{Im}\ h_P^+$. Quitte à faire un automorphisme sur $H^*(B)\otimes E(P_G)$, on peut toujours supposer qu'il existe un système libre de vecteurs de P_G $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ tel que $a_i = h_P\tau_G(v_i) = h_P(u_i)$. On applique alors le théorème principal de [15] qui reste vrai même si $H^*(B)$ contient des éléments de degrés impairs. La cohomologie de l'ADG $(H^*(B)\otimes E(P_G),\delta')$ est isomorphe à la cohomologie de l'ADG quotient : $(H^*(B)/(a_1,\dots,a_m)\otimes E(P'_G),\bar{\delta}')$ où P'_G est un supplémentaire du sous-espace de P_G engendré par $(v_1,\dots,v_m)$, et $\bar{\delta}'$ est la différentielle quotient. Comme $(a_1,\dots,a_m)$ engendre $\mathrm{Im}\ h_P^+$, on a $\bar{\delta}' = 0$; ce qui achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL A. - *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts.* Ann. of Math. 57 (1953), 115-207.

[2] CARTAN H. - *Notions d'algèbre différentielle.* Colloque de Topologie - Bruxelles, 1950.

[3] CARTAN H. - *La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal.* Colloque de Topologie - Bruxelles, 1950.

[4] CARTAN H. - *Théories cohomologiques.* Inventiones Math. 35 (1976), 261-271.

[5] DELIGNE P., MORGAN J., GRIFFITHS P., SULLIVAN D. - *The real homotopy theory of kaehler manifolds.* Inventiones Math. 29 (1975), 245-254.

[6] EILENBERG S., MOORE J.C. - *Homological algebra and fibrations.* Colloque du CBRM, Bruxelles (1964).

[7] EILENBERG S., MOORE J.C. - *Homology and Fibrations I.* Comment. Math. Helv. 40 (1966), 199-236.

[8] FRIEDLANDER E., GRIFFITHS P., MORGAN J. - *Homotopy theory and differential forms.* Séminaire de Géométrie de Florence (1972).

[9] GREUB W., HALPERIN S., VANSTONE R. - *Connections, curvature and cohomology.* Vol. III - Academic press (1976).

[10] GRIVEL P.P. - *Suite spectrale et modèle minimal d'une fibration.* Thèse - Université de Genève (1975).

[11] HALPERIN S. - *Lectures on minimal models.* Publications internes de l'U.E.R. de Math. Pures de l'Université de Lille I, Vol. n° 111 (1977).

[12] HALPERIN S. - *Rational fibrations, minimal models and fibrings of homogeneous spaces.* Trans. Am. Math. Soc. (à paraître).

[13] HALPERIN S. - *Finiteness in the minimal models of Sullivan.* Trans. Am. Math. Soc. 230 (1977).

[14] HALPERIN S., STASHEFF J. - *Obstructions to homotopy equivalence.* Advances in Math. (à paraître).

[15] HEYDEMANN M.C., VIGUÉ M. - *Application de la théorie des polynômes de Hilbert-Samuel à l'étude de certaines algèbres différentielles.* C.R.A.S., t. 278 (1974), 1607-1610.

[16] LEHMANN D. - *Théorie homotopique des formes différentielles.* Astérisque 45 (1977).

[17] MOORE J.C. - *Algèbre homologique des espaces classifiants.* Séminaire Cartan - Exposé 7 (1959-60).

[18] QUILLEN D. - *Rational homotopy theory.* Ann. of Math. 90 (1965) 205-295.

[19] SERRE J.P. - *Homologie singulière des espaces fibrés.* Ann. of Math. 54 (1951), 425-505.

[20] SMITH L. - *Homological algebra and the Eilenberg-Moore spectral sequence.* Trans. Am. Math. Soc. 129 (1967) 58-93.

[21] SMITH L. - *Lectures on the Eilenberg-Moore spectral sequence.* Lectures notes, vol. 134, (1970).

[22] SULLIVAN D. - *Infinitesimal computations in topology.* Publications de l'IHES n° 47, (1977).

[23] SULLIVAN D. - *Differential forms and the topology of manifolds.* Proc. of the Conference on manifolds, Tokyo, (1973).

[24] WU-WEN-TSÜN - *Theory of* I^**-functor in topology. Real topology of fiber squares.* Scientia Sinica. Vol. 18, n° 4, (1975), 464-482.

[25] WU-WEN-TSÜN - *Theory of* I^**-functor in topology. Real topology of homogeneous spaces.* Acta Math. Sinica. Vol. 18 (1975), 162-172 (en chinois).

Deuxième thèse :

PROPOSITIONS DONNEES PAR L'UNIVERSITE

ÉTUDE DES ZÉROS DES FONCTIONS HOLOMORPHES DE LA CLASSE DE NEVANLINNA