

50376  
1978  
181

50376  
1978  
181

# THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ès SCIENCES PHYSIQUES

par

Jacques CITERNE

RECHERCHE D'UNE SOLUTION ANALYTIQUE APPROXIMATIVE  
DU TRAITEMENT ELECTROMAGNETIQUE  
D'UN GUIDE D'ONDE PLANAIRE.

MODELISATION ELLIPTIQUE DES GUIDES MICROFENTES



Soutenu le 12 juillet 1978 devant la Commission d'Examen

MM. R. GABILLARD	Professeur à l'Université de LILLE 1	Président
J. ARNAUD	Professeur à l'Université de LIMOGES	
J. Ch. BOLOMEY	Professeur à l'Université de PARIS XI	
E. CONSTANT	Professeur à l'Université de LILLE 1	Examineurs
Y. GARULT	Professeur à l'Université de LIMOGES	
L. RACZY	Professeur à l'Université de LILLE 1	

*A la mémoire de mon père*

*A ma mère*

*A Monique*

*A Géraldine, Marie-Laure, Anne-Line*

*et à tous mes amis.*

*Car toute science demande infiniment de qualités  
et de sérieux : elle ne peut se faire que dans  
l'honnêteté la plus rigoureuse.*

*L. Leprince-Ringuet*

*Ce travail a été effectué au sein du groupe "Circuits passifs" du Centre Hyperfréquences et Semiconducteurs de l'Université des Sciences et Techniques de Lille dirigé par Monsieur le Professeur E. CONSTANT.*

*Je désire avant tout exprimer une profonde reconnaissance envers Monsieur le Professeur E. CONSTANT qui, m'ayant accueilli dans son Laboratoire, m'a fourni tous les moyens de pratiquer une recherche passionnante.*

*Monsieur le Professeur GABILLARD me fait l'honneur de présider mon jury, je lui en suis profondément reconnaissant.*

*Je remercie tout particulièrement Monsieur Y. GARULT, Professeur à l'U.E.R. des Sciences de l'Université de Limoges pour l'aide qu'il m'a apportée et les conseils qu'il m'a prodigués tout au cours de la réalisation de ce travail. Sa collaboration scientifique a été pour moi un enrichissement inestimable.*

*Mes remerciements vont également à Monsieur J. ARNAUD, Professeur à l'U.E.R. des Sciences de l'Université de Limoges, qui m'a fait découvrir par de nombreuses discussions beaucoup d'aspects de la Théorie Electromagnétique. Son acceptation de juger ce travail m'honore.*

*Monsieur J. Ch. BOLOMEY, Professeur à l'Université de PARIS XI a bien voulu faire partie du jury ; qu'il me soit permis de lui exprimer ma profonde reconnaissance.*

*J'adresse aussi toute ma reconnaissance et toute ma sympathie au Professeur L. RACZY comme à tous les membres du groupe "CIRCUITS PASSIFS" : S. TOUTAIN, Ph GELIN, L. FAUCON, M. PETENZI, P. KENNIS et D. PASQUET qui m'ont apporté leur aide efficace et leur amitié tout au long de ces années ingrates consacrées à l'exploration et au démarrage d'une nouvelle activité de recherche.*

*Enfin, je tiens à remercier tous les membres du personnel technique et administratif de l'U.E.R. d'IEEA pour la grande qualité des services qu'ils m'ont offert durant la réalisation et l'achèvement de ce mémoire*

*Ce travail a bénéficié :*

- \* d'une aide à la recherche auprès de la Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique (DGRST) en collaboration avec le Laboratoire d'Electronique des Microondes de Limoges*
- \* d'une action thématique sur programme du CNRS en collaboration avec le Laboratoire d'Electronique des Microondes de Limoges.*

# AVANT-PROPOS

\* \* \*

## INTRODUCTION

\* \* \*

### CHAPITRE I

#### LE TRAITEMENT GUIDE D'ONDE. LES DIVERSES TENTATIVES DE RESOLUTION SUR LA LIGNE MICROFENTE OUVERTE.

I - 1	LE TRAITEMENT GUIDE D'ONDE	p. 11
I - 1 - 1	Description d'un guide	p. 11
	a) Les guides fermés	
	b) Les guides ouverts	
I - 1 - 2	Le système d'équations à résoudre	p. 13
I - 1 - 3	La notion de mode	p. 14
I - 1 - 4	Les modes spéciaux du type <u>ligne de transmission</u>	p. 16
I - 1 - 5	Considérations énergétiques	p. 17
	a) Le flux de puissance d'un mode	
	b) Orthogonalité et complétion des modes	
I - 1 - 6	Paramètres pratiques d'un mode guidé	p. 19
I - 1 - 6 - 1	<i>Les impédances caractéristiques</i>	
	a) Cas d'un mode du type <u>ligne de transmission</u>	
	b) Cas d'un mode guidé quelconque.	
I - 1 - 6 - 2	<i>Les coefficients d'atténuation d'un mode</i>	
	a) Mise en oeuvre des méthodes de perturbations	
	b) Atténuation dans les matériaux isolants	
	c) Atténuation dans les matériaux conducteurs	
	d) Résolution du système différentiel du premier ordre dans les problèmes de pertes.	

I - 2 REVUE DES TRAVAUX EFFECTUÉS SUR LES LIGNES MICROFENTES p. 37

I - 2 - 1 La modélisation analytique de S.B. COHN p. 37

- a) Transformation du traitement guide d'onde
- b) Résolution approximative des équations de continuité
- c) Les composantes des champs du mode "fente"
- d) Impédance caractéristique équivalente du mode "fente".

I - 2 - 2 Modèle de traitement rigoureux de T. ITOH et R. MITTRA. p. 55

L'Approche Spectrale.

a) Application de l'Intégrale de FOURIER à la résolution du traitement guide d'onde sur une ligne microfente.

b) Application des conditions de continuité.

c) Résolution des équations de continuité par la méthode des moments.  
Forme de GALERKIN.

d) Caractéristiques de dispersion du mode "fente"

e) Impédance caractéristique équivalente du mode "fente"

I - 2 - 3 Conclusions p. 63

\* \* \*

CHAPITRE II

NOUVELLE METHODE ANALYTIQUE UTILISANT LE POINT DE VUE DES METHODES DE PERTURBATIONS. MODELISATION ELLIPTIQUE DES LIGNES MICROFENTES.

II - 1 LE POINT DE VUE DES METHODES DE PERTURBATIONS p. 67

II - 1 - 1 Les guides "peu différents" des lignes microfentes p. 67

II - 1 - 2 Le passage des guides "peu différents" aux guides réels p. 71

a) Description des "différences"

b) Importance des "différences"

c) Correspondance entre les spectres discrets des guides "peu différents" et réels

II - 2 LE GUIDE DIÉLECTRIQUE ÉLLIPTIQUE p. 78

II - 2 - 1 Formulation générale du traitement guide d'onde. p. 78

a) Le système d'équations à résoudre.

- b) Application des conditions aux limites
  - c) Application des conditions de continuité
  - d) Caractéristiques de dispersion des modes
- II - 2 - 2 Résolution numérique des équations caractéristiques modales. . p. 95
- a) La "stratégie" de C. YEH. Tests d'efficacité divers
  - b) Approximation de l'approche mode par mode
  - c) Nouvelle "stratégie" de résolution.
- II - 2 - 3 Comportement des modes dans le domaine basse fréquence du spectre du guide diélectrique elliptique. p. 118
- II - 2 - 4 Conclusions. p. 123

\* \* \*

### CHAPITRE III

## LE SPECTRE DE MODE DISCRET DES LIGNES MICROFENTES.

### PARAMETRES PRATIQUES DU MODE "FENTE".

- III - 1 LE SPECTRE DE MODE DISCRET DES LIGNES MICROFENTES SIMPLES MODÉLISÉES. p. 124
- III - 1 - 1 La ligne microfente modélisée symétrique p. 124
- a) Formulation du problème
  - b) Application des conditions de continuité
  - c) Comportement des modes d'arêtes pairs dans le domaine spectral basse fréquence.
  - d) Caractéristiques de dispersion. Résultats numériques
  - e) Configuration des champs.
- III - 1 - 2 La ligne microfente modélisée dissymétrique p. 145
- a) Formulation du problème
  - b) Application des conditions de continuité
  - c) Comportement des modes d'arêtes dans le domaine spectral basse fréquence
  - d) Caractéristiques de dispersion. Résultats numériques
  - e) Configurations des champs.



III - 2 PASSAGE DES STRUCTURES MICROFENTES MODÉLISÉES AUX  
STRUCTURES RÉELLES. ESTIMATIONS DES PARAMÈTRES PRATIQUES DES  
MODES "FENTE". p. 161

III - 2 - 1 Les modes "fente" dans les lignes microfentes réelles. p. 161

- a) Théorie
- b) Expérience
- c) Conclusions

III - 2 - 2 Estimation des paramètres pratiques des modes "fente" p. 169

III - 2 - 2 - 1 *Les impédances caractéristiques équivalentes*

III - 2 - 2 - 2 *Les coefficients d'atténuation*

- a) Théorie
- b) Expérience

III - 3 LA MODÉLISATION ÉLLIPTIQUE AU SERVICE DE L'APPROCHE  
SPECTRALE. p. 182

III - 3 - 1 Le premier mode supérieur de la ligne microfente dissymétrique. p. 185

III - 3 - 2 Détermination précise des paramètres pratiques du mode "fente"  
dans la ligne microfente dissymétrique. p. 189

III - 3 - 3 Conclusions. p. 196

\* \* \*

CONCLUSION p. 197

\* \* \*

\*

ANNEXE I p. 199  
Calcul des fonctions de MATHIEU d'ordre entier

ANNEXE II p. 222  
Formes limites des fonctions de MATHIEU modifiées d'ordre entier pour les faibles  
valeurs du paramètre.

ANNEXE III p. 228  
Expressions des composantes transversales des champs d'une onde guidée en fonction  
des composantes longitudinales dans le système des coordonnées elliptiques (7, 5, 2).

BIBLIOGRAPHIE

## AVANT - PROPOS

Ce travail aurait pu fort bien s'intituler "Traitement électromagnétique de guides diélectriques de sections droites élliptiques" mais ce titre aurait trahi le but initial pour lequel ces traitements ont été développés, à savoir la modélisation des guides planaires et en particulier celle des guides microfentes. (1)

A l'origine, l'étude des modèles devait s'appuyer sur la résolution complète du spectre de mode du guide diélectrique élliptique proposée dès 1962 par C. YEH <sup>(2)</sup> et considérée depuis cette date comme achevée par la communauté scientifique internationale. En fait l'étude de C. YEH qui porte essentiellement sur les modes dipolaires électriques fondamentaux à fréquence de coupure nulle est menée dans un domaine spectral si restreint qu'elle masque la réelle complexité du problème. C'est l'absence de tabulation exhaustive des harmoniques élliptiques dans des larges gammes de variation de l'ordre et du paramètre, qui a contraint cet auteur à réduire l'ampleur de son investigation. Comme très peu de tables numériques sont encore à ce jour disponibles, il a donc fallu élaborer une bibliothèque mathématique regroupant toutes les harmoniques élliptiques (fonction de Mathieu) d'ordre entier et de paramètre réel. L'étude d'un domaine spectral assez vaste sur une structure élliptique aplatie fait appel à des ordres élevés ainsi qu'à une large gamme de variation du paramètre de ces harmoniques. Ce travail préliminaire fut donc très laborieux mais aussi très complexe car il a fallu maîtriser les problèmes de divergences accidentelles des suites numériques dont les termes sont calculés à partir de fractions continues. Ces divergences n'apparaissent pas lorsque les ordres sont peu élevés et lorsque la gamme de variation du paramètre est relativement restreinte comme en témoignent les travaux récents réalisés vers les années 1970 par J.G. KRETZSCHMAR <sup>(3)</sup> sur les guides élliptiques métalliques.

Ces études annexes des structures élliptiques ont donc finalement acquis peu à peu autant d'originalité sur le plan scientifique que celle de la ligne à microfente qui les avait inspirées, d'autant que, l'Approche Spectrale s'affirmait comme l'une des méthodes d'investigation les plus fécondes des guides planaires. Fallait-il alors abandonner l'aspect modélisation pour ces lignes microfentes ?



La réponse à cette question fut non car l'efficacité numérique de cette méthode d'étude s'est avérée tributaire de renseignements préalables que seule une modélisation pouvait fournir. Dès lors la modélisation elliptique des lignes microfentes est apparue comme la première approche indispensable qui précède une résolution numérique exacte. C'est aussi grâce à elle que l'on a pu augmenter les possibilités de l'Approche Spectrale qui était appliquée jusqu'alors aux calculs des invariants dans la transformation de FOURIER relatifs au mode "fente". Les modes supérieurs furent traités à partir de la représentation du champ électrique tangentiel au plan de la fente issue des modèles. De plus par son aptitude à décrire même approximativement les fonctions de mode, la modélisation elliptique a facilité la mise au point numérique de la Transformation de FOURIER inverse qui reconstruit exactement les champs modaux. Par ces nouvelles possibilités, l'Approche Spectrale a autorisé une estimation de tous les paramètres pratiques d'un mode guidé (impédances caractéristiques équivalentes, atténuations ...) de sorte qu'elle apparaît maintenant comme l'outil numérique indispensable des utilisateurs des circuits microondes intégrés.

#### REFERENCES

- (1) J. CITERNE, S. TOUTAIN, P. CHOTEAU and L. RACZY  
 "The elliptical dielectric waveguide. A very useful model for some Microwave and millimeter wave integrated circuits and components".  
 I.E.E.E. S. MTT Intern. Symposium, CHERRY HILL, pp. 176-178 (June 1976)
- (2) C. YEH  
 "Elliptical dielectric waveguide"  
 J. Appl. Phys., 33, pp. 3235-3243 (1962)
- (3) J.G. KRETZSCHMAR  
 "Wave propagation in hollow conducting elliptical waveguides"  
 I.E.E.E. Trans. on Microwave Theory and Tech., vol. MTT 18, n°9, pp. 547-554 (1970).

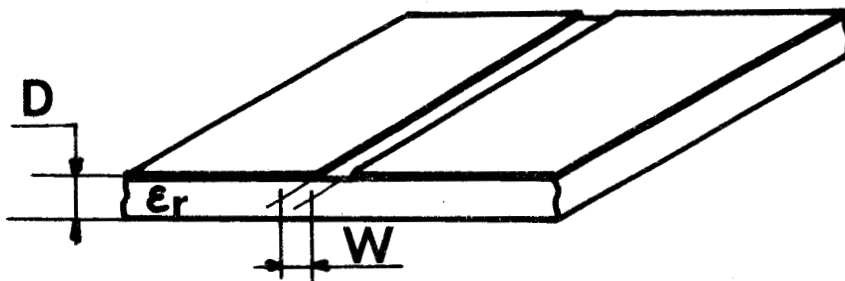
## INTRODUCTION

Ce travail présente une contribution visant à une meilleure connaissance des propriétés électromagnétiques des lignes microfentes ouvertes telles qu'elles sont décrites sur les figures 1 a) et b). On rappelle que la ligne microfente originale, qualifiée de dissymétrique par la suite, consiste en une fente rectiligne de largeur  $W$  réalisée au travers d'un plan conducteur préalablement déposé sur une couche isolante de permittivité relative  $\epsilon_r$  et d'épaisseur  $D$ . (figure 1-a).

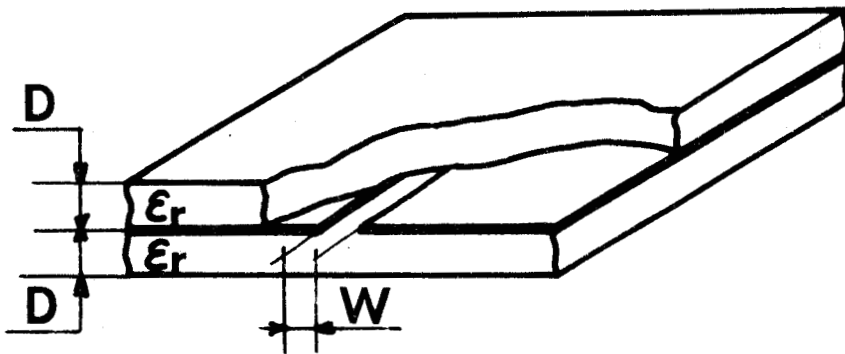
La ligne microfente dissymétrique a été proposée par S.B. COHN [1] en 1968 pour être utilisée avec ou en remplacement de la ligne microruban dans certaines réalisations intégrées dans le domaine des microondes. D'emblée, au regard de la configuration spatiale des champs du mode fondamental susceptible de s'y propager, son inventeur lui a attribué des propriétés potentiellement plus intéressantes que celles de la ligne microruban déjà bien connue à l'époque. Sur la figure 2, on remarque en effet que le champ électrique de ce mode apparaît comme "quasi"transversal (par rapport à l'axe de la fente) et qu'il est tangent au plan de la fente ; son champ magnétique est quant à lui, perpendiculaire au plan de la fente et il se referme par boucles toutes les demi-longueurs d'ondes suivant son axe. Ainsi, comme pour le mode fondamental  $TE_{1,0}$  du guide rectangulaire fermé, le mode fondamental de la ligne microfente dissymétrique peut posséder une région de sa section droite où la polarisation du champ magnétique est elliptique. Cette propriété que l'on ne rencontre pas sur la ligne à microruban est à la base d'une conception aisée d'éléments multipôles non réciproques tels que des dispositifs isolateurs, déphaseurs, ou circulateurs [2].

Par ailleurs, la présence d'une "tension" entre les deux bords de la fente facilite la connexion d'éléments parallèles tels que diodes résistances capacités sans pour cela pénétrer le substrat comme pour la ligne microruban [3].

Ces possibilités d'intégration hybride se perdent bien sûr avec la ligne microfente symétrique [4] obtenue à partir de la ligne précédente par la mise en contact sur ses deux demi-plans conducteurs d'une seconde couche



a)

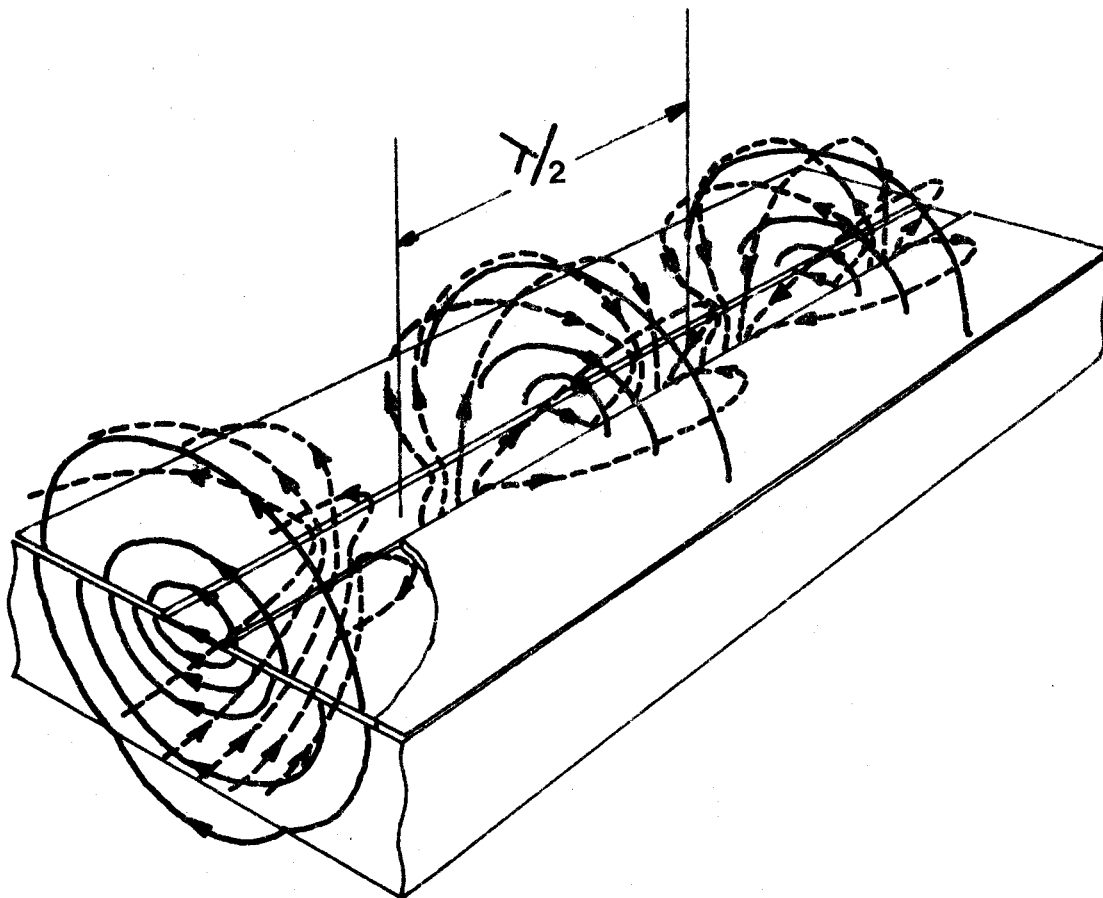


b)

Fig. 1 Lignes microfentes

a) dissymétrique (microslot-line)

b) symétrique ("sandwich" microslot-line)



— Lignes de forces  $\vec{E}$

- - Lignes de forces  $\vec{H}$

Fig. 2 Configuration spatiale du mode "fente"  
dans une ligne microfente dissymétrique

de même permittivité relative  $\epsilon_r$  et de même épaisseur  $D$ . (figure 1-b). Néanmoins, la ligne microfente symétrique, par ses longueurs d'ondes plus courtes, qui résultent d'un confinement de l'énergie électromagnétique plus important que dans la ligne microfente originale, a démontré des qualités indéniables dans la réalisation de filtres microondes miniaturisés à barreaux résonnants [5].

S.B. COHN (1969) [6] propose pour le traitement guide d'onde sur la ligne microfente un modèle de résolution qui est souvent qualifié d'empirique mais qui sert toujours actuellement de référence aux utilisateurs des lignes microfentes.

En 1971 T. ITOH et R. MITTRA [7] s'inspirent des travaux effectués par E. DENLINGER [8] sur la ligne microruban ouverte et transposent le traitement électromagnétique du plan transversal direct  $(x', y')$  (voir figure 3-a) au plan transformé de FOURIER  $(\alpha, y')$  qui lui correspond. Ensuite, contrairement à E. DENLINGER ces auteurs évitent une formulation intégrale du problème déduite de l'application des conditions de continuité dans le plan direct  $y' = 0$ . Ils assurent que cette méthode dépend d'une façon très critique d'un choix judicieux est préalable des composantes du champ électrique dans le plan de la fente. Ils proposent en remplacement une résolution des équations de continuité projetées dans le plan transformé de FOURIER  $(\alpha, y')$  par la méthode des moments prise dans sa version dite "de GALERKIN". Selon T. ITOH et R. MITTRA [9] cette méthode qu'ils baptisent "Approche Spectrale" (Spectral Domain Approach) a une efficacité numérique moins dépendante des choix "à priori" des composantes du champ électrique dans le plan de la fente dont on ne peut toutefois s'affranchir complètement.

T. KITAZAWA, Y. FUJIKI, Y. HAYASHI et M. SUZUKI [10] en 1973 calculent les caractéristiques de dispersion du mode fondamental d'une ligne microfente à bords épais. Ces auteurs expriment le traitement guide d'onde à l'aide des composantes transversales\* et non pas au moyen des composantes longitudinales comme on a coutume de le faire pour des guides rectilignes. Cette variante de la formulation mathématique du traitement guide d'onde, que l'on rencontre habituellement sur les systèmes

(\*) Par rapport à l'axe du guide.

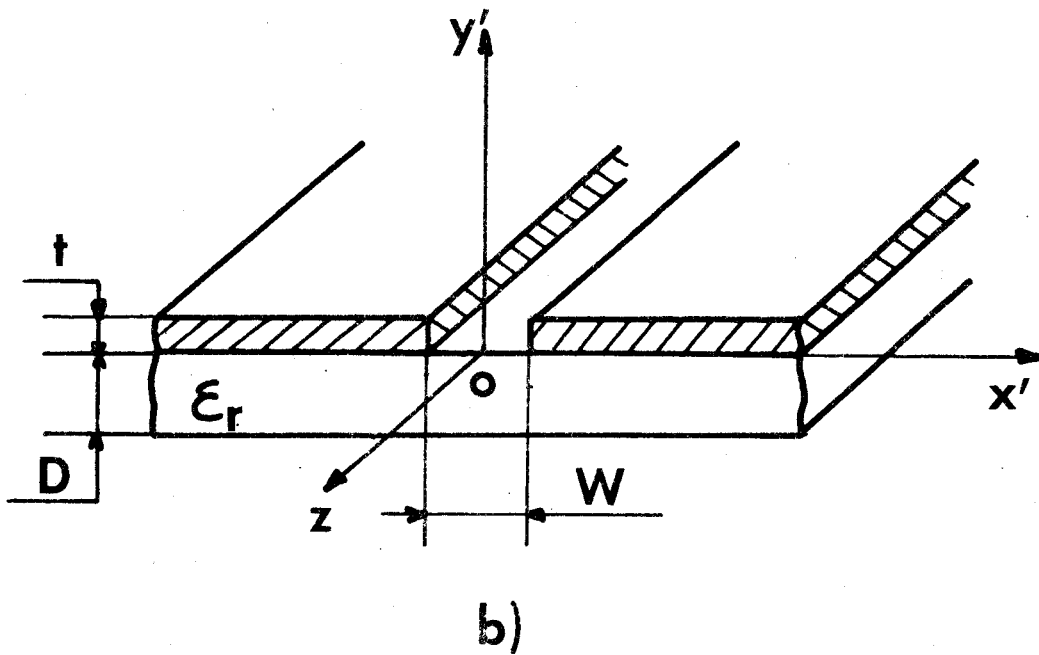
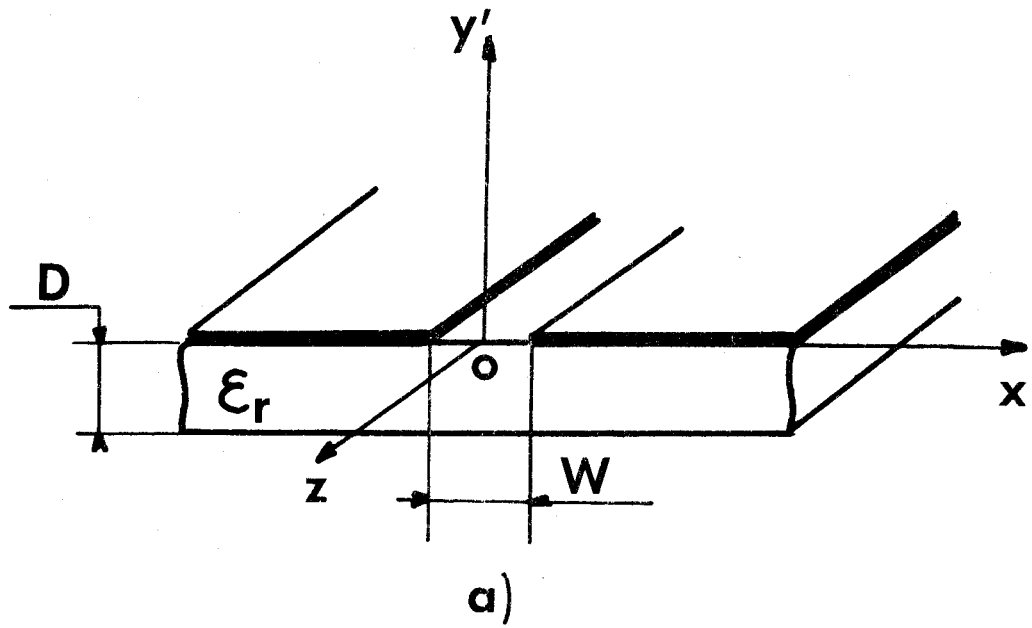


Fig. 3 Sections droites des lignes microfentes dissymétriques rapportées au système de coordonnées cartésiennes

- a) configuration à bords minces
- b) configuration à bords épais

non uniformes permet d'utiliser toutes les ressources du langage de la théorie générale des lignes de transmission. En particulier dans ce langage, l'application des conditions de continuité revient à écrire des conditions de résonance transverse\*. L'étude [10] est donc d'abord menée dans un plan  $(\alpha, \beta)$  transformé de FOURIER du plan direct  $(x', y')$ . Une formulation intégrale finale des conditions de continuité dans les plans "fente"  $y' = 0$  et  $y' = t$  (voir figure 3-b) conduit à des valeurs de la constante de phase sensiblement peu modifiées en comparaison de celles du mode fondamental d'une ligne microfente à bords minces. Comme dans l'Approche Spectrale, un choix préalable et suffisamment précis des composantes du champ électrique à l'interface fente-substrat reste nécessaire.

R. PREGLA et S.G. PINTZOS [11] en 1974 utilisent eux le point de vue général des méthodes de perturbation. Ils remplacent la fente par une distribution de courant magnétique "source" équivalente. La résolution se poursuit alors par la mise en oeuvre d'une méthode, variationnelle dans l'espace transformé de FOURIER  $(\alpha, y')$  de l'espace direct  $(x', y')$ .

Enfin en 1975 J.B. KNORR et K.D. KUCHLER [12] détaillent davantage l'Approche Spectrale suggérée par T. ITOH et R. MITTRA [7] pour les lignes microfentes et la généralise comme d'ailleurs, R. PREGLA et S.G. PINTZOS [11] au cas des lignes coplanaires\*\*.

A ce jour, peu d'études ont été publiées sur la résolution du traitement électromagnétique d'une ligne microfente formée. Seuls E. YAMASHITA et K. ATSUKI [14] relatent dans un article récent les caractéristiques de dispersion du mode fondamental d'une ligne microfente fermée. Ils montrent dans cet article que la présence du boîtier modifie les propriétés électromagnétiques du mode fente en basse fréquence lequel possède alors une fréquence de coupure non nulle. Ces auteurs utilisent une formulation intégrale des équations de continuité dans le plan de la fente. Une discrétisation non uniforme de ce plan permet dans leur résolution numérique de tenir compte des variations rapides possibles du champ électromagnétique aux voisinages des deux bords minces de la fente [15], [16].

(\*) Par rapport à l'axe du guide.

(\*\*) Une étude de la ligne coplanaire à bords épais a été publiée en 1976 par T. KITAZAWA, Y. HAYASHI et M. SUZUKI [13].



En France plusieurs essais de résolution du traitement guide d'ondes sur la ligne microfente fermée ont été tentés. Ainsi B. MANGIN [17] et J. ROUSSET [18] ont testé respectivement la méthode d'analyse de FOURIER et celles des différences finies initiées avec succès sur la ligne micro-ruban par J.S. HORNSBY et A. GOPINATH [19], [20]. De ces travaux il ressort clairement que la présence d'arêtes métalliques minces s'avère beaucoup plus critique pour la ligne microfente qu'elle ne l'est pour la ligne microruban et qu'en conséquence la méthode d'analyse doit nécessairement prendre en compte les discontinuités possibles du champ électromagnétique dans la ligne microfente.

De nouvelles tentatives par la méthode des éléments finis sont actuellement en cours au Laboratoire d'Electronique des Microondes à LIMOGES [21].

## LE CADRE ET LE PLAN DE TRAVAIL

Les lignes microfentes comme d'ailleurs toutes les structures planaires sont des guides d'ondes électromagnétiques très complexes. La compréhension et l'optimisation des propriétés de ces structures dans certaines applications réclament très souvent de puissants moyens d'investigations. Ceci explique le rôle important que tient l'ordinateur dans le domaine des circuits microondes intégrés. L'expérience montre que la solution numérique du traitement guide d'onde sur une structure planaire peut nécessiter des temps de calculs importants si l'on souhaite obtenir une précision satisfaisante des résultats. A cet égard, il apparaît un besoin de modélisations analytiques capables de suppléer parfois et d'augmenter sûrement les possibilités réelles de l'analyse numérique du traitement électromagnétique de certains guides. Ainsi, la connaissance préalable de conditions aux limites particulières peut amener le numéricien à définir une stratégie d'étude efficace de certain modes dans des temps calculs records. Enfin les modélisations analytiques autorisent une estimation rapide des paramètres pratiques liés à la propagation d'un mode dans une structure particulière. L'Approximation T.E.M. d'une ligne microruban est de ce point de vue la meilleure illustration de l'intérêt que peut présenter une modélisation analytique.

L'objet essentiel de ce travail est de bâtir une solution analytique approximative du traitement électromagnétique des lignes microfentes susceptible d'être expérimentée ensuite comme une première approche d'une résolution numérique rigoureuse.

La modélisation proposée est fondée sur une approche des guides réels par perturbations de modèles sur lesquels le traitement électromagnétique reste analytique. La méthode d'analyse rigoureuse est l'Approche Spectrale proposée par T. ITOH et R. MITTRA.

Le chapitre I se divise en deux parties. La première partie se consacre aux rappels concernant le traitement électromagnétique d'un guide et les concepts généraux qui s'y rapportent. Deux exposés sur les travaux parcellaires mais importants déjà effectués sur les lignes microfentes ouvertes composent la seconde partie. Le premier exposé fournit une analyse détaillée de la modélisation analytique approximative proposée par S.B. COHN alors que le second décrit la mise en oeuvre de l'Approche Spectrale.

Le chapitre II comprend également deux parties. Les bases de la modélisation analytique proposée sont développées dans la première partie de ce chapitre. Les guides "peu différents" des lignes microfentes réelles sont des structures ouvertes munies d'arêtes métalliques, dont les sections droites sont entièrement décrits dans le système de coordonnées du cylindre elliptique. Les traitements analytiques des modèles sont voisins de celui du guide diélectrique elliptique. Ce dernier fait l'objet de la seconde partie du chapitre II.

Le traitement électromagnétique des modèles occupe les deux premières parties du chapitre III. La description de leur spectre de mode respectif (première partie) précède une estimation de tous les paramètres pratiques des modes "fente" fondamentaux qui s'en déduisent (seconde partie). Ce chapitre III se termine (troisième partie) par la recherche d'un jugement de valeur sur les prévisions théoriques issues de la modélisation elliptique. Ce jugement est apporté par une comparaison entre les estimations sur les modèles et les résultats numériques rigoureux déduits de l'Approche Spectrale généralisée à l'étude des modes supérieurs et au retour sur les composantes réelles des champs modaux.

## CHAPITRE I

LE TRAITEMENT GUIDE D'ONDE  
LES DIVERSES TENTATIVES DE RESOLUTION  
SUR LA LIGNE MICROFENTE OUVERTE

## I - 1 LE TRAITEMENT GUIDE D'ONDE [22]

## I - 1 - 1 Description d'un guide

On appelle guide d'onde électromagnétique une structure constituée de milieux matériels invariants par translation le long d'un axe  $OZ$ . Les champs électrique et magnétique  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  d'une onde électromagnétique créés dans ce guide, auront du fait de cette propriété d'invariance, une variation spatiale suivant  $OZ$  en :

$$e^{\pm j\beta z} \quad \text{I-1-1}$$

où  $\beta$  est une quantité scalaire qui est appelée constante de phase des ondes guidées.

En régime harmonique (pulsation  $\omega$ ) on doit ajouter à la variation spatiale précédente une variation temporelle en :

$$e^{j\omega t} \quad \text{I-1-2}$$

Ainsi, les champs électrique et magnétique d'une onde guidée s'écrivent sous la forme générale

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}(\mu, \nu) e^{j(\omega t \pm \beta z)} \\ \vec{H} &= \vec{H}(\mu, \nu) e^{j(\omega t \pm \beta z)} \end{aligned} \quad \text{I-1-3}$$

où  $\mu$  et  $\nu$  sont les coordonnées transversales qui repèrent un point dans la section droite du guide.

Désormais dans l'écriture des champs électrique et magnétique d'une onde guidée on omet volontairement le terme en  $e^{j(\omega t \pm \beta z)}$  qu'il ne faut cependant pas oublier dans les dérivations par rapport à la variable  $z$ .

Les milieux linéaires ( $l$ ) entrant dans la composition des guides sont caractérisés par des paramètres constitutifs  $\epsilon_l, \mu_l$  et  $\sigma_l$ . Ces paramètres constants et scalaires traduisent leur homogénéité et leur isotropie.

Puisque l'on utilise les guides pour véhiculer l'énergie électromagnétique on désire pouvoir disposer de structures qui ne l'absorbent pas. Comme les matériaux constituant un guide ont très souvent des pertes (pertes dans les isolants et les conducteurs réels), l'étude des guides est d'abord menée en négligeant ces pertes (approximation des guides sans pertes) qui sont réintroduites à la fin par des méthodes de perturbations.

Dans cette approximation des guides sans pertes les matériaux sont parfaits, autrement dit les paramètres constitutifs des conducteurs sont réels et tels que :

$$\epsilon_l = \epsilon_0 \quad ; \quad \mu_l = \mu_0 \quad ; \quad \sigma_l = \infty \quad \text{I-1-4}$$

alors que pour les isolants ces mêmes paramètres sont toujours réels mais deviennent :

$$\epsilon_l = \epsilon_{r,l} \cdot \epsilon_0 \quad ; \quad \mu_l = \mu_0 \quad ; \quad \sigma_l = 0 \quad \text{I-1-5}$$

les quantités  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  caractérisent ici le vide .

Il existe enfin deux grandes classes de guides :

a) guides fermés :

Ils sont limités par une interface conducteur diélectrique cylindrique d'axe **OZ** (cylindre est ici pris au sens large) isolant complètement l'intérieur du guide du point de vue électromagnétique. L'énergie électromagnétique ne peut sortir du guide, elle est seulement véhiculée suivant l'axe **OZ**. D'un point de vue mathématique la section droite est un domaine borné du plan ( $\mu, \nu$ ).

b) guides ouverts :

Ils sont "limités" par une interface diélectrique-diélectrique cylindrique ; le milieu extérieur étant l'air. Parfois, la section droite comporte des interfaces diélectrique-conducteur qui partagent cette section droite en plusieurs parties. Dans un guide ouvert, l'énergie peut sortir du guide ce qui suppose l'existence possible de champs non nuls à l'infini (rayonnement). D'un point de vue mathématique la section droite n'est plus un domaine borné du plan ( $\mu, \nu$ ).

## I - 1 - 2 Le système d'équations à résoudre

On sépare les champs suivant leurs composantes transversales (notées avec un indice  $T$ ) et longitudinales (notées avec un indice  $z$ ) par rapport à l'axe  $Oz$  :

$$\begin{aligned}\vec{E}_l &= \vec{E}_{T,l} + \vec{\mu} E_{z,l} \\ \vec{H}_l &= \vec{H}_{T,l} + \vec{\mu} H_{z,l}\end{aligned}\quad \text{I-1-6}$$

où  $\vec{\mu}$  est un vecteur unitaire suivant l'axe  $Oz$ . L'indice  $l$  rappelle le milieu où l'on envisage le champ électromagnétique.

Ensuite, à partir des équations de MAXWELL

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_l &= 0 && \text{(Milieu vide de charges)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H}_l &= 0 && \text{(Inexistence de charges magnétiques)} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_l &= -j\omega\mu_l \vec{H}_l && \text{(Loi de Faraday)} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_l &= j\omega\varepsilon_l \vec{E}_l && \text{(Loi d'Ampère)}\end{aligned}$$

on montre que les champs sont entièrement déterminés par les seules composantes longitudinales  $E_{z,l}$  et  $H_{z,l}$  par les deux relations

$$\begin{aligned}(\omega^2\mu_l\varepsilon_l - \beta^2)\vec{H}_{T,l} &= -j\omega\varepsilon_l \vec{\mu} \wedge \vec{\nabla}_T E_{z,l} + (\pm)j\beta \vec{\nabla}_T H_{z,l} \\ (\omega^2\mu_l\varepsilon_l - \beta^2)\vec{E}_{T,l} &= +(\pm)j\beta \vec{\nabla}_T E_{z,l} + j\omega\mu_l \vec{\mu} \wedge \vec{\nabla}_T H_{z,l}\end{aligned}\quad \text{I-1-7}$$

dans lesquelles on pose :

$$\vec{\nabla}_T = \vec{\nabla} - \vec{\mu} \frac{\partial}{\partial z}$$

ou encore :

$$\vec{\nabla}_T = \vec{\nabla} - (\pm j\beta)\vec{\mu}\quad \text{I-1-8}$$

Les équations de MAXWELL précédentes montrent finalement que les deux fonctions scalaires  $E_{z,l}$  et  $H_{z,l}$  sont simultanément solutions des équations différentielles du second ordre :

$$\left\{ \Delta_T + (\omega^2\mu_l\varepsilon_l - \beta^2) \right\} \begin{Bmatrix} E_{z,l} \\ H_{z,l} \end{Bmatrix} = 0\quad \text{I-1-9}$$

dans lesquelles

$$\Delta_T = \Delta - \beta^2$$

I-1-10

Le traitement guide d'onde consiste alors à rechercher les fonctions scalaires  $E_{z,l}$  et  $H_{z,l}$  solutions des équations précédentes (aux constantes d'intégration près) respectant :

- des conditions dites *aux limites* spécifiques à la structure étudiée comme par exemple le bornage des champs, la périodicité, les conditions de symétrie\*, la condition de rayonnement pour les guides ouverts etc...

- des conditions dites *de continuité*\*\* qui expriment ou bien la nullité du champ électrique tangentiel aux interfaces diélectrique-conducteur ou bien alors l'égalité des champs électrique et magnétique tangentiels aux interfaces diélectrique-diélectrique.

Les conditions de continuité relient entre elles les constantes arbitraires intervenant dans les expressions des solutions et déterminent la relation de dispersion ( $\omega - \beta$ ) des ondes guidées par la structure.

### I - 1 - 3 La notion de mode

Les champs électrique et magnétique d'une onde guidée dépendent du temps et de la coordonnée  $z$  par le terme

$$e^{j(\omega t \pm \beta z)}$$

Le spectre du guide est constitué par l'ensemble  $\{\beta\}$  des valeurs possibles pour la constante de phase à une pulsation  $\omega$  fixée à l'avance. Ce spectre peut comprendre des parties *continue* et *discrète* pour un guide ouvert. Pour un guide fermé ce spectre est entièrement *discret*.

(\*) Les conditions de symétrie ne dépendent que de la géométrie de la section droite du guide quand les paramètres constitutifs des milieux le constituant sont scalaires et réels.

(\*\*) Cette condition de continuité peut dans certains cas intervenir aussi comme condition "aux limites".

On appelle *mode*, une certaine configuration spatiale des champs électrique et magnétique qui correspond à un couple de valeurs  $(\omega, \beta)$ .

Si on écrit les champs du mode  $(\omega, \beta)$  sous la forme :

$$\vec{E}_l = \begin{Bmatrix} \vec{E}_{T,l}(\mu, \nu) \\ E_{z,l}(\mu, \nu) \end{Bmatrix} e^{j(\omega t - \beta z)} ; \vec{H}_l = \begin{Bmatrix} \vec{H}_{T,l}(\mu, \nu) \\ H_{z,l}(\mu, \nu) \end{Bmatrix} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad \text{I-1-11}$$

les champs obtenus par *reflectivité*\*\* :

$$\vec{E}'_l = \begin{Bmatrix} \vec{E}_{T,l}(\mu, \nu) \\ -E_{z,l}(\mu, \nu) \end{Bmatrix} e^{j(\omega t + \beta z)} ; \vec{H}'_l = \begin{Bmatrix} -\vec{H}_{T,l}(\mu, \nu) \\ H_{z,l}(\mu, \nu) \end{Bmatrix} e^{j(\omega t + \beta z)} \quad \text{I-1-12}$$

sont aussi des champs du guide et appartiennent au mode  $(\omega, -\beta)$ . Ainsi, les modes  $(\omega, \beta)$  et  $(\omega, -\beta)$  se correspondent et l'usage courant les confond généralement en un seul pouvant se propager dans les deux sens. Cette propriété de *reflectivité* d'un guide rempli de matériaux parfaits linéaires, homogènes et isotropes permet de n'étudier que les modes se propageant suivant un certain sens (généralement suivant les  $z$  croissants). S'il en est besoin, une distinction est faite entre le mode direct  $(\omega, \beta)$  se propageant vers les  $z$  croissants et le mode inverse  $(\omega, -\beta)$  se propageant en sens contraire.

Un mode est dit :

. non dégénéré si à un couple  $(\omega, \beta)$  n'est associée qu'une et une seule configuration spatiale des champs.

. dégénéré si à un couple  $(\omega, \beta)$  sont associées plusieurs configurations spatiales de champs. Cette situation est très importante car le couplage entre deux modes dégénérés est très facile.

(\*\*) La propriété de *reflectivité* traduit l'invariance d'un guide dans une symétrie par rapport à un plan de section droite quelconque.



Il reste à noter que la configuration des champs dans un guide dépend fortement de la présence de symétries dans la section droite. Des considérations sur les propriétés de commutations des symétries existantes peuvent éclairer sur la présence ou non de modes dégénérés. Si l'ensemble des symétries est commutatif on n'a qu'une présomption de dégénérescences que seul le calcul complet peut confirmer ou infirmer. Au contraire si l'ensemble des symétries n'est pas commutatif on a sûrement des dégénérescences [23], [24].

#### I - 1 - 4 Les modes spéciaux du type "ligne de transmission" [25]

Un mode guide est du type "ligne de transmission" lorsqu'il possède la particularité d'être transverse électromagnétique (T.E.M.) autrement dit lorsque :

$$E_{z,l} = H_{z,l} = 0 \quad \text{I-1-13}$$

Les expressions (I-1-7) desquelles on déduit

$$\beta^2 = \omega^2 \mu_l \epsilon_l \quad \text{I-1-14}$$

montrent clairement que si un guide propage un tel mode, sa section droite doit être nécessairement homogène. La relation (I-1-14) définit la relation de dispersion de ce mode particulier.

La configuration spatiale des champs de ce mode s'obtient généralement par projection du problème de propagation guidée dans le domaine de l'Electrostatique puisque des équations de MAXWELL (I-1-6) écrites pour des champs transverses :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_T \cdot \vec{E}_T &= 0 \\ \vec{\nabla}_T \wedge \vec{E}_T &= 0 \end{aligned} \quad \text{I-1-15}$$

on déduit formellement :

$$\vec{E}_T = -\vec{\nabla}_T V(\mu, \epsilon) \quad \text{I-1-16}$$

(\* On peut aussi "projeter" le problème dans le domaine de la Magnétostatique.

et

$$\Delta_T V(\mu, \nu) = 0 \quad \text{I-1-17}$$

où  $V(\mu, \nu)$  est un potentiel scalaire fonction des coordonnées transverses  $(\mu, \nu)$

Pour un mode du type ligne de transmission seules les conditions de continuité aux interfaces diélectrique - conducteur sont à considérer. Ces conditions de continuité projetées à leur tour dans le domaine de l'Electrostatique deviennent des conditions aux limites :

$$V(\mu, \nu) = C^{\text{te}} \quad \text{sur } C_i \quad \text{I-1-18}$$

où  $C_i$  représente la trace du conducteur ( $i$ ) dans un plan de section droite. Ces conditions aux limites montrent bien que le problème ne peut admettre une solution que s'il existe au moins deux conducteurs disjoints portés à des potentiels différents. S'il n'y a qu'un seul conducteur il n'y a pas de solution. Ainsi les modes du type ligne de transmission existent ni dans un conducteur creux (guide fermé) ni à l'extérieur d'un conducteur plein (guide ouvert)\*.

De la connaissance du potentiel  $V(\mu, \nu)$  on déduit le champ électrique par la relation (I-1-16) et le champ magnétique par :

$$\vec{H}_T = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{u} \wedge \vec{E}_T \quad \text{I-1-19}$$

### I - 1 - 5 Considérations énergétiques

#### a) Le flux de puissance

La puissance moyenne complexe associée à un mode est donnée par le flux du vecteur de POYNTING :

$$R = \frac{1}{2} (\vec{E} \wedge \vec{H}^*) \quad \text{I-1-20}$$

à travers la section droite  $S$  du guide.  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont les champs électrique et magnétique du mode et le signe  $*$  dans la relation (I-1-20) indique la conjugaison complexe spatiale et temporelle sur les composantes scalaires

(\*) On note que pour un guide ouvert la condition de rayonnement se projette comme :

$$V(\infty) = 0$$

de  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ . Avec cette convention c'est la nature (réelle ou complexe) de la constante de phase  $\beta$  d'un mode qui impose les caractères actif (partie réelle) et réactif (partie imaginaire) de cette puissance complexe. Seule la partie active de cette puissance traduit physiquement la puissance moyenne transportée par le mode. Cette puissance moyenne transportée s'appelle encore "flux de puissance" et s'exprime sous la forme :

$$P = \frac{1}{2} R \left\{ \int_S (\vec{E} \wedge \vec{H}^*) \vec{u} \, dS \right\} \quad \text{I-1-21}$$

b) Orthogonalité et complétion des modes

Dans les guides réfléchissants et sans pertes, les modes vérifient une relation d'orthogonalité. Si  $\vec{E}_m$  et  $\vec{H}_n$  sont les champs électrique et magnétique des modes  $m$  et  $n$ , ( $m$  et  $n$  peuvent éventuellement être des indices continus) cette relation s'écrit :

$$\int_S (\vec{E}_m \wedge \vec{H}_n^* + \vec{E}_n^* \wedge \vec{H}_m) \vec{u} \, dS = 4 P_m \delta(m, n) \quad \text{I-1-22}$$

$P_m$  représente le flux de puissance associé au mode  $m$ .  $\delta(m, n)$  désigne soit le symbole de KRONEKER pour les modes discrets soit la fonction de Dirac pour les modes continus.

La suite des modes d'un guide est complète. Tout champ  $(\vec{E}, \vec{H})$  créé par des sources quelconques dans le guide peut en conséquence être décomposé sur la base de ses modes mais ceci n'est rigoureusement valable [26] que pour les composantes transverses  $\vec{E}_T$  et  $\vec{H}_T$ . Dans bien des cas on admet (sans démonstration) la décomposition possible sur les composantes longitudinales. On écrit ainsi :

$$\begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} = \sum_m c_m \begin{Bmatrix} \vec{E}_m \\ \vec{H}_m \end{Bmatrix} + \int c_\lambda \begin{Bmatrix} \vec{E}_\lambda \\ \vec{H}_\lambda \end{Bmatrix} d\lambda \quad \text{I-1-23}$$

les sommations discrète et continue dans I-1-23 s'effectuent sur l'ensemble des modes du guide directs et inverses. Les coefficients  $c_m$  et  $c_\lambda$  sont des nombres complexes arbitraires.

## I - 1 - 6 Paramètres pratiques d'un guide

## I - 1 - 6 - 1 Impédances caractéristiques

a) Cas des modes du type ligne de transmission.

Les concepts habituels de tension et de courant ne se retrouvent dans les guides que pour les modes type "ligne de transmission". Il est alors possible pour ces modes spéciaux de définir une impédance caractéristique comme le rapport de cette tension à ce courant.

On a l'habitude d'appliquer les langages de la Magnétostatique (courant, tension, résistance) et de l'Electrostatique (potentiel, charges) à l'étude des propriétés de ces modes [25]. Ainsi, la tension  $U$  entre deux conducteurs s'exprime par la circulation du champ électrique le long d'un chemin quelconque joignant un conducteur à l'autre. Entre les deux conducteurs (1) et (2) d'axe  $Oz$  dont les sections droites sont représentées sur la figure (I-1) il existe la tension  $U$  telle que :

$$U = V(1) - V(2) = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}_T \cdot d\vec{l} \quad \text{I-1-24}$$

Le courant (resp. la charge) sur un conducteur parfait est la cause physique de la discontinuité de la composante tangentielle de  $\vec{H}_T$  (resp. de la composante normale de  $\vec{E}_T$ ) à la surface du conducteur. La densité de courant (resp. de charges) de surface qui s'exprime comme :

$$\vec{J}_s = \vec{n} \wedge \vec{H}_T \quad \left( \text{resp} : \rho_s = \epsilon \vec{n} \cdot \vec{E}_T \right) \quad \text{I-1-25}$$

où  $\vec{n}$  désigne un vecteur unitaire normal et dirigé extérieurement aux surfaces conductrices cylindriques, permet d'obtenir l'expression du courant total parcourant le conducteur  $C_1$  :

$$|I| = \oint_{C_1} |\vec{J}_s| dC_1 \quad \text{I-1-26}$$

ce courant, entièrement longitudinal, peut encore s'écrire, d'après (I-1-26), comme :

$$|I| = \oint_{C_1} |\vec{H}_T \cdot \vec{e}| dC_1 \quad \text{I-1-27}$$

où  $\vec{e}$  désigne cette fois un vecteur unitaire tangent en chaque point du contour  $C_1$ .

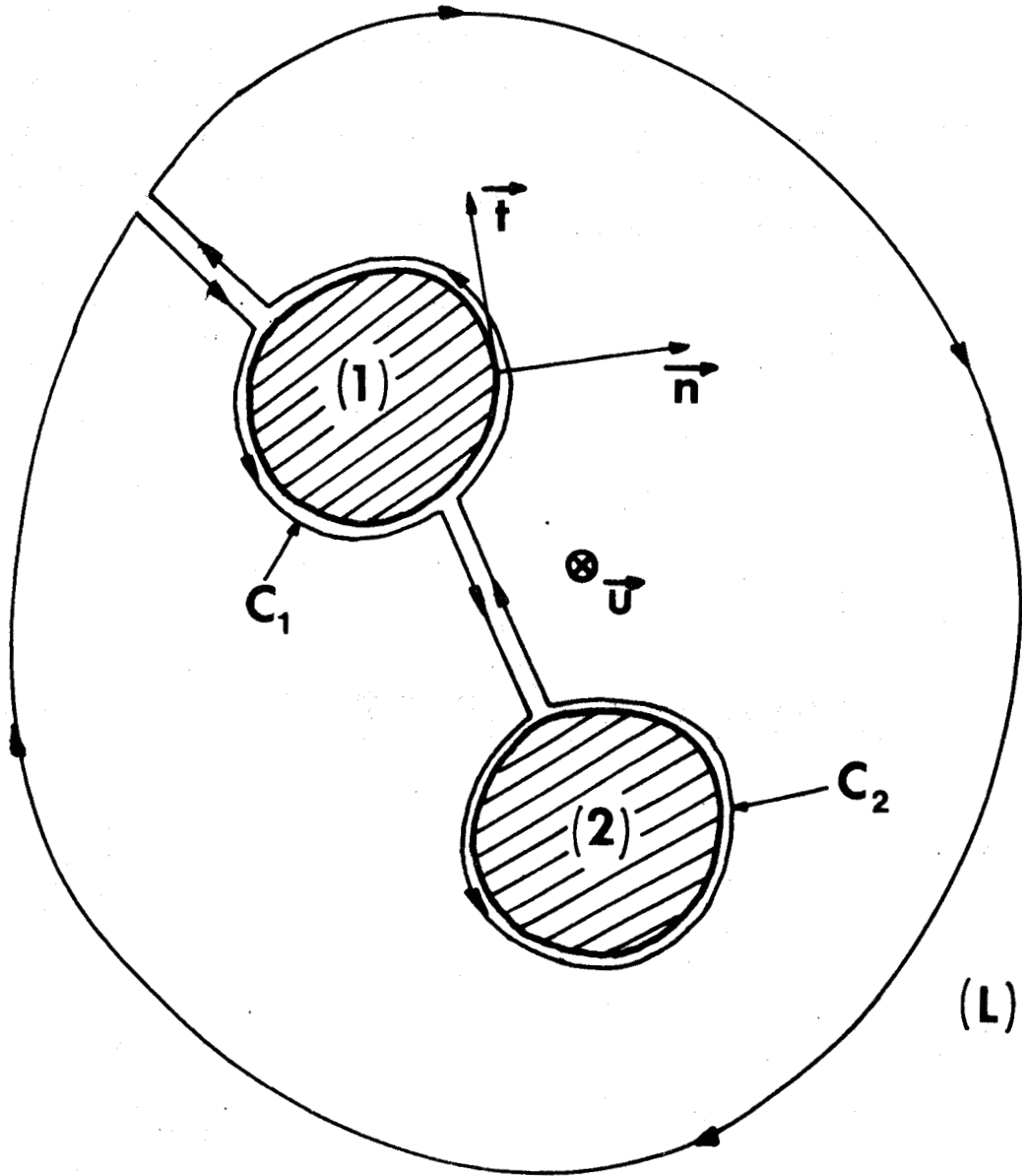


Fig. I-1 Section droite d'une ligne de transmission

Avec le langage de la Magnétostatique, le courant total  $\mathcal{J}$  qui traverse à un instant donné une section droite de la ligne est d'après le théorème d'Ampère :

$$\mathcal{J} = \oint_L \vec{H}_T \cdot d\vec{L} \quad \text{I-1-28}$$

Le contour d'intégration ( $L$ ) est un contour plan, fermé et connexe (ou rendu tel par des coupures appropriées). Il longe la trace des conducteurs du côté où le champ électromagnétique existe. Par la nullité\* de ce courant total  $\mathcal{J}$  on établit qu'il résulte en fait de la somme de deux courants longitudinaux égaux en module mais qui parcourent les conducteurs dans des directions opposées. L'un de ces courants  $|I|$  est direct et parcourt le conducteur  $C_1$ ; on associe à ce courant le mode direct  $(\vec{E}_T, \vec{H}_T)$ . L'autre courant  $-|I|$  est inverse et parcourt le conducteur  $C_2$ ; on lui associe le mode inverse  $(\vec{E}_T, -\vec{H}_T)$ .

Le traitement guide d'onde qui se réduit sur un mode du type ligne de transmission à la recherche des composantes des champs de ce mode peut donc prendre des formes variées selon le langage utilisé. Ainsi, par exemple dans celui de la Magnétostatique la recherche des composantes des champs est entièrement contenue dans celle de l'impédance caractéristique :

. pour un mode direct :  $Z_c = \frac{U}{|I|} \quad \text{I-1-29}$

. pour un mode inverse :  $Z_c = -\frac{U}{|I|} \quad \text{I-1-30}$

Cette impédance caractéristique est un paramètre important car elle possède un caractère conservatif. Ce caractère conservatif réside dans le fait que deux modes du type ligne de transmission de même impédance caractéristique mais propagés par des guides différents doivent pouvoir se raccorder axialement sans réflexions.

Il est clair en effet que lorsque ces deux modes du type ligne de transmission se raccordent ainsi sans réflexions les courants (resp. les charges) sont égaux (resp. égales) à la jonction par le théorème de conservation de l'Electricité. Il en est de même des flux de puissance des modes circulant dans les deux guides par suite du théorème de conservation de l'Energie.

(\*) puisque  $\vec{\nabla}_T \wedge \vec{H}_T = 0$

Ce caractère conservatif de l'impédance caractéristique s'exprime donc avec force dans les deux expressions possible du flux de puissance d'un mode propagé direct :

$$P = \frac{1}{2} Z_c |I|^2 \quad ; \quad P = \frac{1}{2} \frac{|U|^2}{Z_c} \quad \text{I-1-31}$$

b) Cas d'un mode guidé quelconque

Dans le cas des modes guides quelconques nous ne retrouvons pas ces notions habituelles de tension et de courant. Cette défaillance résulte du fait que les champs de ces modes ne sont plus complètement transverses comme le sont ceux des modes du type ligne de transmission.

Malgré cela, de nombreux auteurs [27] [28] ont tenté depuis toujours de définir pour les modes guidés quelconques des impédances caractéristiques équivalentes afin surtout de faciliter certains calculs.

L'intérêt pratique de ces définitions ne s'avère cependant pas négligeable si ces impédances "caractéristiques" ont un caractère énergétique suffisamment conservatif. Si c'est le cas, elles peuvent jouer un rôle significatif dans des problèmes pratiques très divers. Parmi les plus usuels il faut citer les problèmes de transition entre la ligne que l'on étudie et d'autres structures de propagation mieux connues, ceux liés à la présence d'obstacles sur la ligne et enfin tous ceux que l'on rencontre dans la conception à partir de la ligne étudiée d'éléments multipôles actifs ou passifs. Dans la conception d'un coupleur directif codirectionnel par exemple, le changement important d'une impédance caractéristique quand le mode pénètre dans la zone de couplage peut entraîner un couplage contradirectionnel altérant aussi la directivité du coupleur.

On peut donc définir des impédances caractéristiques équivalentes pour un mode guidé quelconque à condition de pouvoir associer à ce mode un courant de conduction de surface réel et une tension. Tout réside alors dans les *définitions* de ce courant et de cette tension dans le guide qui doit donc nécessairement comporter des parties conductrices.

Quel que soit le mode appartenant à un tel guide l'application directe du Théorème d'Ampère montre que le courant longitudinal  $J$  de conduction de surface total traversant la section droite du guide à un instant donné



est toujours nul<sup>\*</sup>. Cela étant, pour se replacer dans les mêmes conditions qu'un mode du type ligne de transmission, on peut associer à un mode direct le courant de conduction direct.

$$|I| = \int_{L'} \vec{H} \cdot d\vec{L} \quad \text{I-1-32}$$

où  $L'$  est une partie du contour  $L$  fermé et connexe qui longe la trace des conducteurs dans la section droite du guide. La circulation de  $\vec{H}$  le long de  $L'$  doit fournir exclusivement un courant direct. Dès lors, comme pour un mode du type ligne de transmission on associe à un mode guide direct par exemple l'impédance caractéristique équivalente définie comme

$$Z_{c,I} = \frac{2P}{|I|^2} \quad \text{I-1-33}$$

où  $P$  représente le flux de puissance du mode considéré. Dans la suite de ce travail on qualifie  $Z_{c,I}$  d'impédance caractéristique équivalente en courant.

Au lieu d'un courant longitudinal de conduction on peut tenter de définir une tension transversale entre deux conducteurs disjoints et parfois même entre deux parties d'un même conducteur.

La démarche suivie pour définir cette tension transversale est généralement la suivante. A partir de la configuration des champs du mode fournie par le traitement guide d'onde il est possible de localiser le champ électrique d'amplitude maximum dans un plan de section droite. La circulation de ce champ électrique maximum entre les deux conducteurs (ou parties d'un même conducteur)  $C_1$  et  $C_2$

$$\int_{C_1}^{C_2} \vec{E}_M \cdot d\vec{L} \quad \text{I-1-34}$$

doit fournir la plus grande tension  $U$  disponible dans la section droite. Cette condition restreint aussi le choix des chemins d'intégration tous contenus dans le plan de section du guide. On définit alors une impédance caractéristique équivalente en tension comme :

$$Z_{c,U} = \frac{|U|^2}{2P} \quad \text{I-1-35}$$

(\*) Car  $\vec{\nabla}_T \wedge \vec{H}_T = j\omega \epsilon \vec{u} E_z = 0$  sur  $C_i$

où  $P$  signifie toujours le flux de puissance du mode (direct par exemple) considéré.

On peut être finalement tenté d'introduire une impédance caractéristique équivalente en courant-tension telle que :

$$Z_{c,U,I} = \frac{|U|}{|I|} \quad \text{I-1-36}$$

Cette impédance caractéristique ne faisant pas intervenir le flux de puissance du mode étudié, possède de ce fait un caractère moins conservatif que celui contenu dans les définitions précédentes I-1-33 et I-1-35.

Toutes ces impédances caractéristiques équivalentes ont toutes généralement la même variation en fonction de la fréquence, seul un facteur numérique les différencie. En outre, elles vérifient entre elles la relation :

$$Z_{c,I} \cdot Z_{c,U} = Z_{c,U,I}^2 \quad \text{I-1-37}$$

#### I - 1 - 6 - 2 Atténuation des modes

Les matériaux réels ont des pertes ; les bons conducteurs ont une conductivité importante mais finie ; les bons isolants ont une conductivité qui n'est pas tout à fait nulle. Si ces pertes sont faibles (dans un sens à préciser ultérieurement) on peut espérer obtenir le spectre de mode du guide réel à partir de celui connu du guide idéal sans pertes au moyen d'un calcul de perturbation [22].

Le point de vue des méthodes de perturbation est à la base de la technique analytique appliquée à la résolution du traitement guide d'onde sur les lignes à microfentes. Pour cette raison on rappelle ses étapes essentielles avant de l'appliquer présentement au calcul de l'atténuation des modes.

##### a) Mise en oeuvre des méthodes de perturbations

Les différences entre le guide réel et le guide idéal sont considérées comme indépendantes du temps. En régime harmonique les champs du "guide" réel sont solutions des équations de MAXWELL :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -j\omega \vec{B} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= j\omega \vec{D} \end{aligned}$$

I-1-38

où  $\vec{B}$  et  $\vec{D}$  sont respectivement les inductions magnétique et électrique qui sont des grandeurs directement reliées aux sources du champ électromagnétique présent dans le guide.

Le guide idéal est lui caractérisé par la distribution de ses paramètres constitutifs  $\epsilon_l$  et  $\mu_l$ . En introduisant ces paramètres constitutifs dans les deux équations I-1-38, celles-ci prennent la forme :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -j\omega\mu_l \vec{H} - \vec{M} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= j\omega\epsilon_l \vec{E} + \vec{J}\end{aligned}\quad \text{I-1-39}$$

les différences entre le guide réel et le guide idéal sont entièrement contenues dans les termes sources :

$$\begin{aligned}\vec{M} &= j\omega(\vec{B} - \mu_l \vec{H}) \\ \vec{J} &= j\omega(\vec{D} - \epsilon_l \vec{E})\end{aligned}\quad \text{I-1-40}$$

On peut alors développer les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  du guide réel suivant les modes  $(\vec{E}_k, \vec{H}_k)$  du guide idéal d'après le principe de complétion généralisé à toutes les composantes.

Pour les guides fermés puisque le spectre de mode est discret, on

a :

$$\begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} = \sum_k c_k(z) \begin{Bmatrix} \vec{E}_k \\ \vec{H}_k \end{Bmatrix}\quad \text{I-1-41}$$

où  $(\vec{E}_k, \vec{H}_k)$  sont les champs électrique et magnétique du mode  $(k)$  (dépendance en  $e^{\pm j\beta_k z}$  comprise).

Pour les guides ouverts un spectre continu vient s'ajouter au spectre discret et I-1-41 se modifie comme :

$$\begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} = \sum_k c_k(z) \begin{Bmatrix} \vec{E}_k \\ \vec{H}_k \end{Bmatrix} + \int c_\nu(z) \begin{Bmatrix} \vec{E}_\nu \\ \vec{H}_\nu \end{Bmatrix} d\nu\quad \text{I-1-42}$$

où  $(\vec{E}_\nu, \vec{H}_\nu)$  désignent maintenant les champs électrique et magnétique des modes rayonnés  $(\nu)$  (dépendance en  $e^{\pm j\beta_\nu z}$  comprise).

L'application du principe de complétion appelle les deux remarques suivantes :

- 1 - Les projections I-1-41 et I-1-42 ne sont rigoureusement valables que sur la section droite  $S$  du guide sans pertes. Des difficultés dans l'application de ce principe, apparaissent si l'effet des pertes est justement d'agrandir  $S$  : c'est le cas pour les pertes dans les conducteurs que le guide soit ouvert ou fermé.

- 2 - Les sommations discrète et continue dans les relations I-1-41 et I-1-42 sont effectuées seulement sur tous les modes directs puisque les pertes n'altèrent pas la propriété de réflectivité de sorte qu'on la retrouve sur le guide réel. Les dépendances en  $z$  des champs des modes discrets et continus dans I-1-41 et I-1-42 sont donc respectivement en  $e^{-j\beta_k z}$  et  $e^{-j\beta_v z}$ .

Pour traiter parallèlement les structures ouverte et fermée, on note  $p$  et  $q$  deux modes directs distincts sans distinguer leur nature discrète ou continue. Dans le guide idéal, il existe une relation d'orthogonalité plus simple que I-1-22 entre ces deux modes directs ( $p$ ) et ( $q$ ); elle s'écrit :

$$\int_S (\vec{E}_p \wedge \vec{H}_q^*) \vec{\mu} dS = 2 P_p \delta(p, q) \quad \text{I-1-43}$$

où  $P_p$  est le flux de puissance du mode direct  $p$ .; c'est une quantité réelle et positive dans le guide idéal qui se définit comme :

$$P_p = \frac{1}{2} \int_S (\vec{E}_p \wedge \vec{H}_p^*) \vec{\mu} dS \quad \text{I-1-44}$$

La fonction  $\delta(p, q)$  que l'on trouve dans le second membre de l'équation I-1-43 désigne la fonction de Dirac telle que :

$$\delta(p, q) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ 1 & \text{si } p = q \end{cases} \quad \text{I-1-45}$$

La relation d'orthogonalité I-1-43 conduit au calcul des coefficients  $C_p(z)$  que l'on rencontre dans les développements I-1-41 et I-1-42. Puisque  $P_p = P_p^*$ , on peut exprimer ces coefficients comme :

$$C_p(z) = \frac{\int_{S''} (\vec{E} \wedge \vec{H}_p^*) \vec{\mu} dS''}{2 P_p} \quad \text{I-1-46}$$

ou encore comme :

$$C_p(z) = \frac{\int_{S''} (\vec{E}_p^* \wedge \vec{H}) \vec{\mu} dS''}{2 P_p} \quad \text{I-1-47}$$

Si  $S'$  est la section droite du guide réel il est clair que les relations I-1-46 et I-1-47 sont valables seulement sur la partie commune à  $S$  et  $S'$  et qui est notée  $S''$ .

Les équations de MAXWELL sont appliquées aux modes du guide idéal.

On obtient ainsi pour le mode ( $p$ ) :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_p = -j\omega \mu_l \vec{H}_p \quad \text{I-1-48}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H}_p = j\omega \epsilon_l \vec{E}_p \quad \text{I-1-49}$$

On multiplie l'équation I-1-49 conjuguée complexe par  $\vec{E}$  et l'équation I-1-48 par  $\vec{E}_p^*$  l'addition membre à membre des équations résultantes conduit à la relation :

$$\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{H}_p^* + \vec{E}_p^* \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} \cdot \vec{E}_p^* \quad \text{I-1-50}$$

De la même façon, on multiplie l'équation I-1-48 conjuguée complexe par  $\vec{H}$  et l'équation I-1-49 par  $\vec{H}_p^*$ . On ajoute membre à membre les équations résultantes pour obtenir :

$$\vec{H} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_p^* + \vec{H}_p^* \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\vec{M} \cdot \vec{H}_p^* \quad \text{I-1-51}$$

La soustraction membre à membre des équations I-1-50 et I-1-51 conduit finalement à la relation générale :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}_p^* + \vec{E}_p^* \wedge \vec{H}) = -(\vec{J} \cdot \vec{E}_p^* + \vec{M} \cdot \vec{H}_p^*) \quad \text{I-1-52}$$

d'où l'on peut déduire l'équation d'évolution des modes d'un guide en présence d'une perturbation  $(\vec{M}, \vec{J})$ . A cet égard on écrit :

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_T + \vec{\mu} \frac{\partial}{\partial z}$$

et la relation générale I-1-52 devient :

$$\frac{\partial}{\partial z} (\vec{E} \wedge \vec{H}_p^* + \vec{E}_p^* \wedge \vec{H}) \vec{\mu} + \vec{\nabla}_T \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}_p^* + \vec{E}_p^* \wedge \vec{H}) = -(\vec{J} \cdot \vec{E}_p^* + \vec{M} \cdot \vec{H}_p^*) \quad \text{I-1-53}$$

On intègre I-1-53 sur  $S''$  et on use successivement des relations I-1-46, I-1-47

et enfin du Théorème de la divergence à deux dimensions [26]. Le résultat obtenu traduit l'évolution de l'onde guidée  $(\vec{E}, \vec{H})$  dans le guide réel. Cette équation d'évolution s'écrit :

$$4P_p \frac{\partial C_p(z)}{\partial z} = - \int_{S''} (\vec{M} \cdot \vec{H}_p^* + \vec{J} \cdot \vec{E}_p^*) dS'' - \oint_{C''} \vec{n} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}_p^* + \vec{E}_p^* \wedge \vec{H}) dC'' \quad \text{I-1-54}$$

où  $C''$  est un contour fermé (ou rendu tel par des coupures appropriées) qui limite  $S''$ .  $\vec{n}$  est un vecteur perpendiculaire en chaque point au contour  $C''$  et dirigé vers l'extérieur.

Les quantités "différences"  $\vec{M}$  et  $\vec{J}$  sont des fonctions des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  de l'onde guidée dans la structure réelle. Ces champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont par ailleurs reliés aux coefficients  $C_p(z)$  par les projections I-1-41 et I-1-42. En définitive, l'ensemble des relations I-1-54 apparaît comme un système d'équations différentielles du premier ordre dont les fonctions inconnues sont les coefficients  $C_p(z)$ .

A ce stade, ce traitement de perturbation indépendant du temps est tout à fait général ; on passe maintenant à la formulation particulière adaptée à l'étude des guides à pertes.

#### b) Atténuation dans les matériaux isolants

Les pertes dans les bons isolants sont considérées comme des perturbations reflectives en volume du guide idéal. L'équation d'évolution des modes I-1-54 s'écrit dans ce cas particulier ( $\vec{M} = 0$ ) :

$$4P_p \cdot \frac{\partial C_p(z)}{\partial z} = - \int_{S''} \vec{J} \cdot \vec{E}_p^* dS'' \quad \text{I-1-55}$$

où

$S'' \equiv D_l$  : Domaine de la section droite occupé par un matériau isolant à perte

$$\vec{J} = j\omega(\epsilon'_l - \epsilon_l)\vec{E} \quad \text{I-1-56}$$

$$\epsilon'_l = \begin{cases} \epsilon_l - j\frac{\sigma}{\omega} & \text{dans } D_l \\ 0 & \text{en dehors de } D_l \end{cases} \quad \text{I-1-57}$$

$\sigma_l$  : conductivité du matériau isolant  $l$

$\omega$  : pulsation de l'onde

A partir des développements I-1-41 ou I-1-42, l'équation d'évolution simplifiée I-1-55 prend la nouvelle forme :

$$\frac{\partial C_p(z)}{\partial z} = \sum_q A_{p,q} e^{j(\beta_p - \beta_q)z} C_q(z) \quad \text{I-1-58}$$

où

$$A_{p,q} = \frac{j\sigma_l}{4P_p} \int_{D_l} \vec{E}_{q,0} \cdot \vec{E}_{p,0} dD_l \quad \text{I-1-59}$$

Dans cette dernière relation I-1-59 les quantités  $\vec{E}_{q,0}$  et  $\vec{E}_{p,0}$  représentent les amplitudes du champ électrique respectivement des modes (q) et (p). Ces quantités ne dépendent pas de  $z$ .

### c) Atténuation dans les matériaux conducteurs

Les pertes dans les conducteurs peuvent être considérées comme une perturbation qui "agrandit" la section droite du guide. En effet, les parois métalliques sont toutes repoussées de l'épaisseur de peau  $\delta$  par rapport aux limites qu'elles occupent dans le cas sans pertes. L'expression de cette épaisseur de peau est :

$$\delta = \left( \frac{2}{\mu \omega \sigma_c} \right)^{1/2} \quad \text{I-1-60}$$

avec :

$\omega$  : pulsation de l'onde

$\mu$  : permabilité du matériau conducteur ( $\mu \approx \mu_0$ )

$\sigma_c$  : conductivité du matériau conducteur.

L'équation d'évolution des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  devient :

$$4P_p \cdot \frac{\partial C_p(z)}{\partial z} = \oint_{C''} \vec{n} (\vec{E} \wedge \vec{H}_p^* + \vec{E}_p^* \wedge \vec{H}) dC'' \quad \text{I-1-61}$$



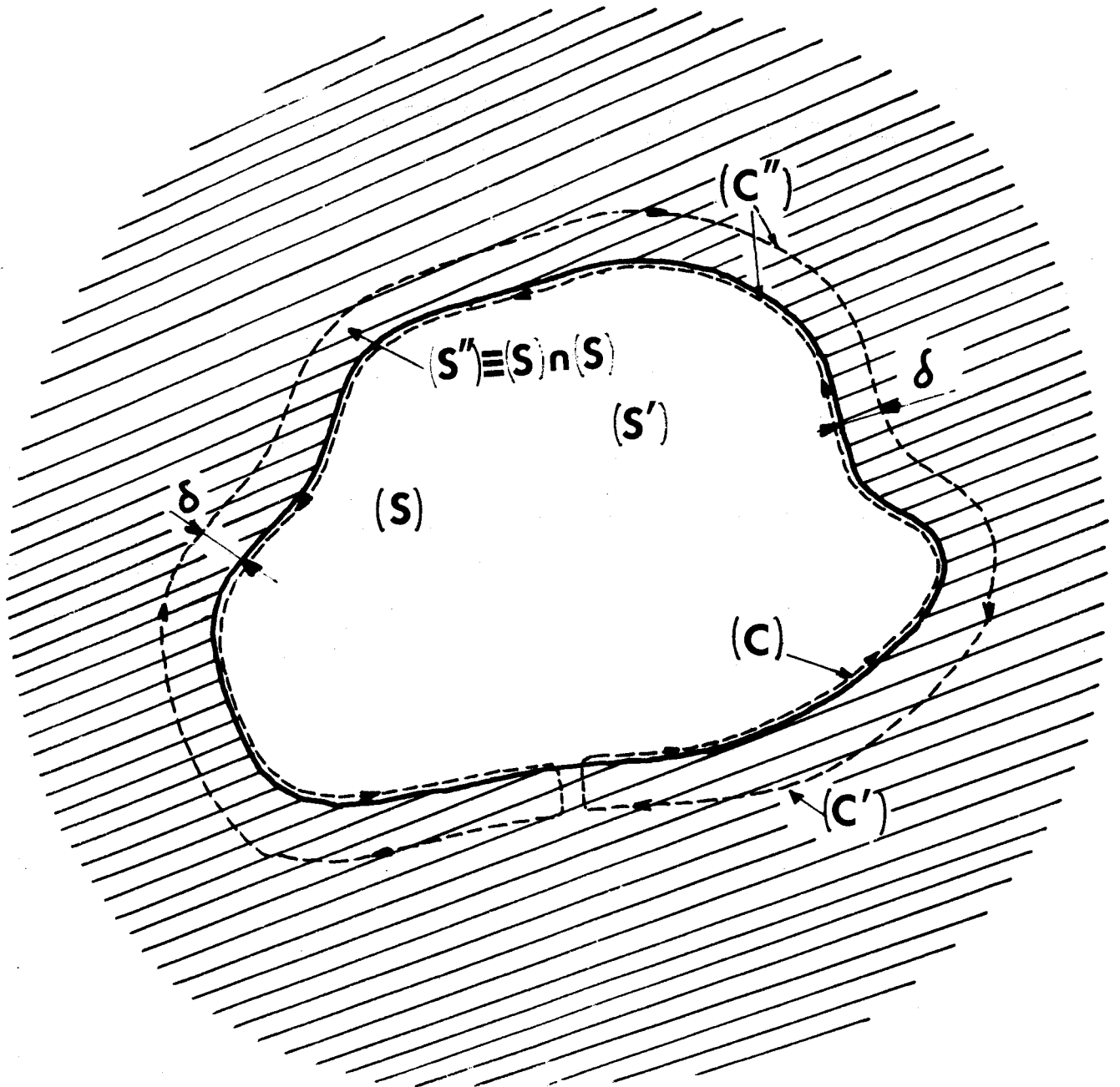


Fig. I-2 Estimation des pertes métalliques.  
Cas d'un guide fermé.

Que le guide soit ouvert ou fermé, une partie du contour  $C''$  s'identifie au contour  $C$  qui détermine initialement la section droite  $S$  de la structure sans perte. La relation générale :  $\vec{E}_p \wedge \vec{n} \simeq 0$  sur  $C$  déduite soit de la condition de continuité aux interfaces diélectrique-conducteur parfait, soit de la condition de rayonnement à l'infini, permet de simplifier l'écriture du second membre de l'équation I-1-60. Cette relation qui décrit l'évolution des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  dans un guide en présence de pertes métalliques s'exprime finalement comme :

$$4 P_p \cdot \frac{\partial C_p(z)}{\partial z} = - \oint_{C'} \vec{n} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}_p^*) dC' \quad \text{I-1-62}$$

où  $C'$  est la partie du contour  $C''$  qui ne s'identifie pas à  $C^*$  (voir figure I-2).

On rencontre ici la difficulté dans l'application du principe de complétion qui a été signalée plus haut. En effet on ne peut rigoureusement projeter le champ  $\vec{E}$  sur les champs  $\vec{E}_p$  des modes  $p$  que sur la surface  $S$  qui limite la section droite du guide idéal. Les considérations qui vont suivre permettent de surmonter cette difficulté.

Soit une interface plan infinie entre deux milieux. L'un de ces milieux est un isolant parfait, l'autre est un bon conducteur. La figure I-3 décrit ce système électromagnétique. Quand la conductivité du métal est infinie (milieu parfait) le champ électrique tangentiel d'une onde électromagnétique est nul à l'interface ( $z'=0$ ). On note  $\vec{E}_T(0)$  ce champ électrique tangentiel. Maintenant, si la conductivité du milieu conducteur est finie alors :

$$\vec{E}_T(0) \neq 0 \quad \text{I-1-63}$$

et ce champ tangentiel décroît dans le milieu conducteur en suivant la loi :

$$\vec{E}_T(z') = \vec{E}_T(0) e^{-(1+j)z'/\delta} \quad \text{I-1-64}$$

puisque  $\vec{E}_T$  obéit à l'équation d'onde :

$$\frac{d^2 \vec{E}_T}{dz'^2} - j\mu\omega\sigma_c \vec{E}_T = 0 \quad \text{I-1-65}$$

dans un milieu conducteur où sévit la condition  $\omega\epsilon \ll \sigma_c$ .

(\*)  $C'$  limite la section droite  $S'$  du guide réel.

Isolant parfait ( $\sigma = 0$ )

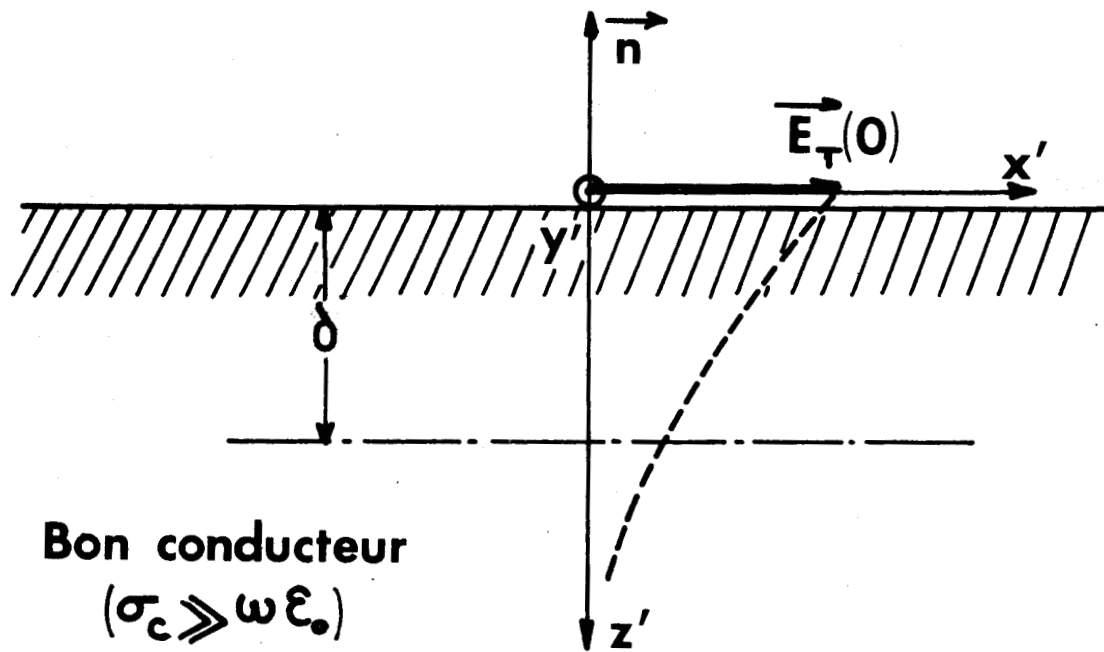


Fig. I-3 Estimation des pertes métalliques.

Modélisation de l'effet de peau à un interface plan

La loi de FARADAY I-1-6 permet alors d'obtenir une relation générale entre le champ électrique  $\vec{E} = \vec{E}_T + \vec{n} E_z$ , ( $\vec{n}$  est un vecteur unitaire perpendiculaire à l'interface plan et dirige vers le milieu diélectrique) et le champ magnétique  $\vec{H}$  dans une région du milieu conducteur dont l'épaisseur n'exède pas  $\delta$ . Cette relation est :

$$\vec{n} \wedge \vec{E} = \frac{1}{2} \omega \mu \delta (1+j) \vec{H} \quad \text{I-1-66}$$

On admet alors que cette relation reste valable pour des interfaces courbes, anguleux pourvu que le rayon de courbure de ces interfaces demeure toujours relativement grand devant l'épaisseur de peau  $\delta$ . Avec ces hypothèses l'équation d'évolution I-1-62 devient :

$$4P_p \cdot \frac{\partial C_p(z)}{\partial z} = -\frac{1}{2} \omega \mu \delta (1+j) \oint_{C'} \vec{H} \cdot \vec{H}_p^* dC' \quad \text{I-1-67}$$

L'amplitude d'un champ magnétique étant importante au voisinage d'une surface métallique, on peut alors, sans prendre trop de risques, développer le champ magnétique  $\vec{H}$  selon les champs magnétiques  $\vec{H}_q$  des modes ( $q$ ) dont le domaine d'existence est prolongé dans le métal sur une épaisseur  $\delta$ .

On écrit enfin l'équation I-1-67 sous la forme I-1-58 avec les coefficients  $A_{p,q}$  qui s'expriment cette fois comme :

$$A_{p,q} = -\frac{\omega \mu \delta (1+j)}{8P_p} \oint_{C'} \vec{H}_{q,0} \cdot \vec{H}_{p,0}^* dC' \quad \text{I-1-68}$$

Les quantités  $\vec{H}_{q,0}$ ,  $\vec{H}_{p,0}$  représentent les amplitudes des champs  $\vec{H}_q$  et  $\vec{H}_p$  des modes ( $q$ ) et ( $p$ ) qui ne dépendent que des coordonnées transversales.

d) Résolution du système différentiel du 1er ordre dans les problèmes de pertes.

Dans le cas général, la résolution du système d'équations différentielles du 1er ordre est une entreprise très laborieuse à moins qu'interviennent au préalable de rudes simplifications. Les conditions expérimentales sont généralement les suivantes. A l'entrée d'un guide ouvert ou fermé réalisé à partir de matériaux à pertes, on excite un mode discret qui se trouve dans bien des cas être le fondamental. Si à la fréquence de travail imposée, ce mode est le seul à pouvoir se propager, une partie de sa puissance va se dissiper dans les milieux. Si le mode n'est pas le seul à se propager alors les pertes

peuvent transférer une partie de la puissance du mode excité aux autres modes qui se propagent à leur tour dans le guide. Ce transfert apparaît d'autant plus important que les écarts entre toutes les constantes de phase de tous les modes sont faibles (dégénérescences). Il n'exclut pas la dissipation dans les milieux et ces couplages augmentent finalement l'atténuation apparente du premier mode excité.

Les pertes dans les matériaux apparaissent comme des perturbations uniformes en  $z$  qui ne détruisent pas l'invariance par translation qui caractérise un guide idéal. Pour ce type de perturbations le système *réel* demeure un guide et cette propriété\* a son importance puisqu'elle signifie que le passage d'un mode du guide idéal au guide réel s'effectuera à puissance *réelle* constante. Autrement dit dans le cas des pertes sur un mode *discret* on assiste simplement à une redistribution de la puissance réelle entre les diverses parties du système qui sont ici tous les autres modes *discrets* éventuellement propagés et le mécanisme dissipateur lui-même.

On peut en conséquence ignorer la partie continue du spectre de mode du guide idéal dans la suite du développement. Les indices  $p$  et  $q$  désignent donc à partir de maintenant exclusivement des nombres entiers.

Comme les coefficients  $A_{p,q}$  définis par les relations I-1-59 ou par les relations I-1-68, sont indépendants de  $z$ , le changement de variable :

$$X_q = c_q(z) e^{-j\beta_q z} \quad \text{I-1-69}$$

conduit à une nouvelle écriture du système différentiel I-1-58 qui est la suivante :

$$\frac{\partial X_p}{\partial z} = \sum_q [-j\beta_p \delta(p,q) + A_{p,q}] X_q \quad \text{I-1-70}$$

(\*) Par analogie, la propriété que possède un système mécanique même perturbé d'être conservatif à la même importance en Mécanique Quantique (voir par exemple [30]).

Les solutions de l'équation I-1-70 sont alors de la forme :

$$X_p = X_{p,0} e^{-j\beta'z} \quad \text{I-1-71}$$

où les grandeurs  $X_{p,0}$  et  $\beta'$  correspondent respectivement aux amplitudes et aux constantes de phase des modes dans le guide réel. La détermination des constantes de phase  $\beta'$  s'avère finalement identique à la recherche des racines de l'équation séculaire issue d'un déterminant de dimension infinie. Cette équation séculaire s'écrit :

$$\| [\beta' - \beta_p] \delta(p,q) - jA_{p,q} \|_{\infty} = 0 \quad \text{I-1-72}$$

Le calcul des racines est laborieux sauf si les coefficients  $A_{p,q}$  satisfont à la condition :

$$A_{p,q} \ll A_{p,p} \quad \text{si} \quad p \neq q \quad \text{I-1-73}$$

Cette condition I-1-72 signifie qu'il ne se produit aucun couplage entre le mode (p) et les autres modes (q). On observe alors simplement une modification du flux de puissance ou ce qui revient au même de la valeur de la constante de phase du mode (p). On rencontre cette situation pour un mode non dégénéré (p) propagé dans un guide à pertes. Sa nouvelle constante de phase est fournie approximativement par la relation ;

$$\beta'_p \approx \beta_p + jA_{p,p} \quad \text{I-1-74}$$

De la variation spatiale en  $e^{-j\beta'z}$  de cette nouvelle onde, on déduit le coefficient d'atténuation du mode (p). Lorsque l'atténuation est due aux pertes dans les matériaux diélectriques on a :

$$\alpha_{D,L} = -jA_{p,p} = \frac{\sigma_L}{4P_p} \int_{D_L} \vec{E}_{p,0} \cdot \vec{E}_{p,0}^* dD_L \quad \text{I-1-75} \quad (\text{Np/m})$$

ou encore :

$$\alpha_{D,L} = \frac{8.686\sigma_L}{4P_p} \int_{D_L} \vec{E}_{p,0} \cdot \vec{E}_{p,0}^* dD_L \quad \text{I-1-76} \quad (\text{dB/m})$$

On peut bien sûr généraliser les formules I-1-75 et I-1-76 au cas où la section droite du guide est constituée de plusieurs matériaux diélectriques à pertes. Si maintenant l'atténuation du mode (p) est due aux pertes dans les

matériaux conducteurs, le coefficient a pour expression :

$$\alpha_C = \text{Imag}(A_{P,P}) = \frac{\omega M \delta}{8P_P} \oint_{C'} \vec{H}_{P,0} \cdot \vec{H}_{P,0}^* dC' \quad \text{I-1-77}$$

(Np/m)

ou encore :

$$\alpha_C = \frac{8,686 \omega M \delta}{8P_P} \oint_{C'} \vec{H}_{P,0} \cdot \vec{H}_{P,0}^* dC' \quad \text{I-1-78}$$

(dB/m)

Remarques :

- Les formules I-1-75 à I-1-78 peuvent être obtenues directement par la méthode simple des pertes de puissance [31]. L'avantage du traitement de perturbation est d'apporter une limite de validité à ces formules. Ainsi l'approximation des faibles pertes pour un mode (P) correspond aux conditions suivantes :

$$|A_{P,q}| \ll |A_{P,P}| \ll |\beta_P - \beta_q| \quad \text{I-1-79}$$

où (q) désigne le plus proche voisin du mode (P) dans le spectre à une fréquence donnée.

- Contrairement aux pertes diélectriques, les pertes dans les conducteurs affectent la constante de phase  $\beta_P$  relative au mode (P) du guide sans pertes. La constante de phase du mode (P) augmente en fait d'une quantité  $\Delta\beta_P$  telle que :

$$\Delta\beta_P = \text{Réal}(A_{P,P}) = \alpha_C \quad \text{I-1-80}$$

On doit tenir compte de cette modification dans les mesures de caractéristiques de dispersion d'un mode propagé dans un guide à pertes.

- Le fait que les pertes ne modifient pas (perte dans diélectriques) ou augmentent (pertes dans les conducteurs) la constante de phase du mode discret (P) confirme l'inexistence pour lui d'une transition dans le spectre continu [32].

Pour terminer, il faut traiter le cas d'un mode (P) se trouvant par exemple n fois dégénéré. On a alors  $\beta_P = \beta_{P1} = \beta_{P2} = \dots = \beta_{Pn}$  et tous les coefficients  $A_{P,P'}$  avec  $P' = P1, \dots, Pn$  peuvent être du même ordre de

grandeur. Les pertes se manifestent alors par une atténuation à laquelle vient s'ajouter éventuellement un phénomène de couplage entre les modes  $p, p_1, \dots, p_n$ . Les  $n$  nouvelles constantes de phase des modes  $p, p_1, \dots, p_n$  dans le guide réel sont maintenant les racines de l'équation séculaire issue d'un déterminant tronqué à la dimension  $n$ . Cette équation s'écrit :

$$\| [\beta' - \beta_p] \delta(p, p') + j A_{p, p'} \|_n = 0 \quad \text{I-1-81}$$

L'équation I-1-81 est une approximation du premier ordre, puisque les conditions I-1-79 sont satisfaites. Il suffit dans le cas dégénéré de substituer  $p'$  à  $p$  tout en conservant le même  $q$ .

## I - 2 REVUE DES TRAVAUX EFFECTUÉS SUR LES LIGNES MICROFENTES

Les travaux déterminants effectués sur les lignes microfentes sont d'une part la modélisation analytique de S.B. COHN et d'autre part le modèle de traitement rigoureux proposé par T. ITOH et R. MITTRA sous le nom d'Approche Spectrale. Le plan des exposés d'analyse de ces travaux est celui imposé par les étapes successives du traitement électromagnétique tel qu'il est présenté au paragraphe I-1.

### I - 2 - 1 La modélisation analytique de S.B. COHN [6]

Cette modélisation rend compte des caractéristiques de dispersion et des composantes de champ des modes "fente" fondamentaux des lignes à microfentes symétrique et dissymétrique. Le traitement guide d'onde est transformé par l'introduction de parois en un problème d'obstacles dans un guide fermé d'axe  $oy'$  (voir figure I-4).

#### a) Transformation du traitement guide d'onde

Dans des plans de section droite distants de  $\lambda/2$  ( $\lambda$  est la longueur d'onde du mode "fente") les composantes transversales de  $\vec{E}$  ainsi que la composante longitudinale de  $\vec{H}$  deviennent nulles. Des murs électriques peuvent en conséquence être placés en  $z=0$  et en  $z = \lambda/2 = a$



sans que pour cela le régime d'onde progressive sur le guide microfente soit perturbé.

Par ailleurs puisque l'on recherche un mode de surface fortement lié à la présence de la fente, on peut placer en  $x' = \pm b/2$  pour  $b/D$  suffisamment grand soit des murs électriques soit des murs magnétiques\*. Ces murs définissent un guide fermé rectangulaire  $(a, b)$  muni dans plan de section droite d'un iris parallèle au grand côté  $b$  du guide. Cet iris qualifié de "capacitif" [32] s'appuie sur une seule couche tampon diélectrique dans la configuration classique de la ligne microfente (figure I-4). Il est situé entre deux couches tampons diélectriques dans les configurations "sandwich" (figure I-5 a et b).

Il est hors de doute que les solutions de ce problème dépendent de la nature des murs placés en  $x' = \pm b/2$ . En augmentant progressivement  $b$ , ces solutions vont finir par s'identifier et la condition de rayonnement sur les champs électrique et magnétique du guide microfente ouvert est ainsi satisfaite dans la direction  $Ox'$ .

Soit une ligne microfente modélisée par un iris-tampon dans un guide rectangulaire fermé à parois toutes métalliques. On affecte d'un exposant  $f$  les champs du mode "fente" pour les distinguer de ceux des modes du guide rectangulaire fermé.

. Le champ électrique de l'onde "fente" doit satisfaire :

$$E_{x'}^f(z, x') = E_{x'}^f(a-z, x') \quad \text{I-2-1}$$

dans la symétrie plane  $z = a/2$ .

. Les modes du guide rectangulaire métallique qui servent à construire l'onde fente vérifient I-2-1 et ne possèdent, suivant l'axe  $Oz$ , que deux noeuds distants de  $\lambda/2$ . Ils se notent [25] :

$$\begin{aligned} TE_{1,2n} & ; n = 0, 1, 2, \dots \\ TM_{1,2n} & ; n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad \text{I-2-2}$$

(\*) Sur un mur magnétique la composante tangentielle du champ magnétique est nulle.

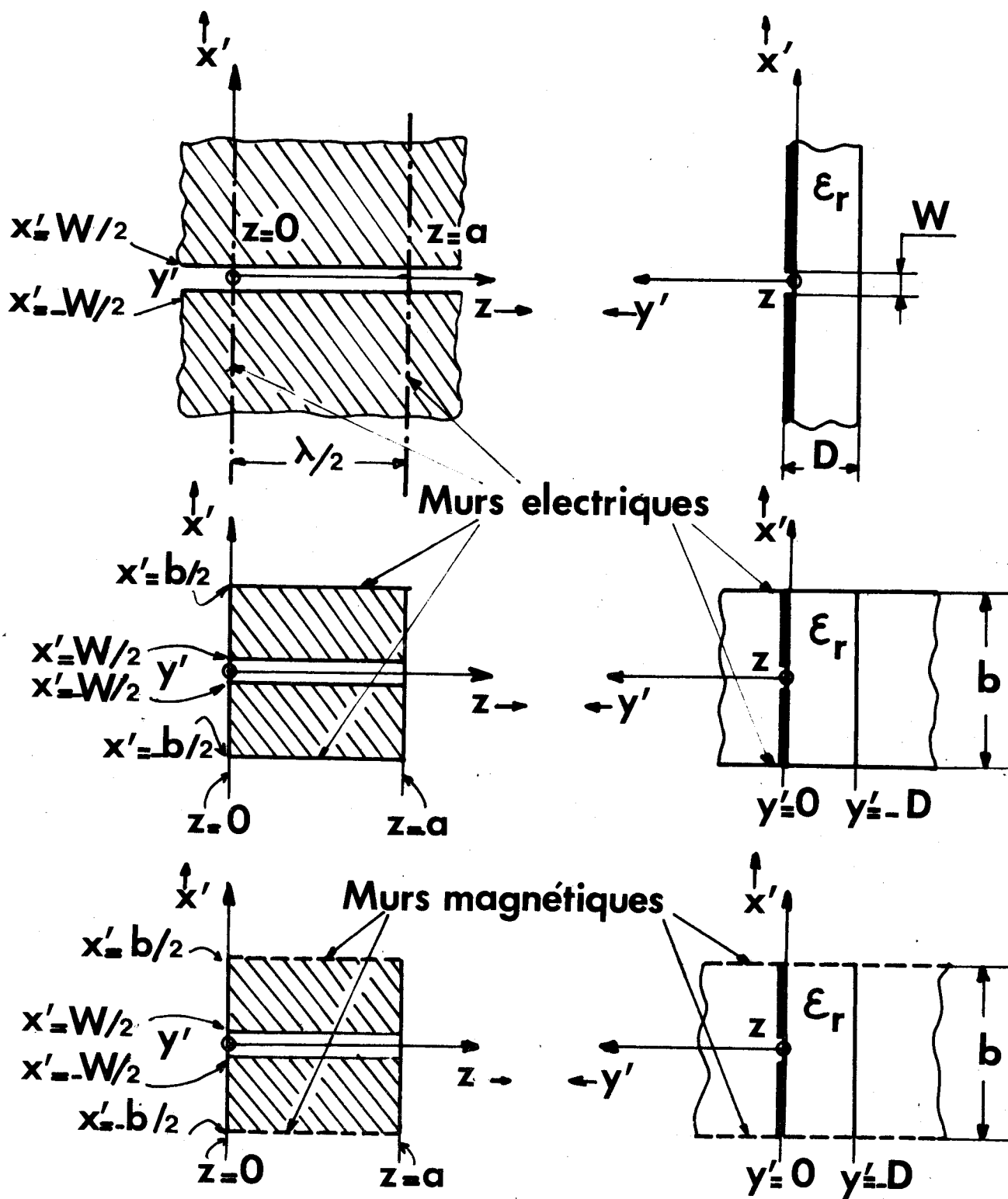
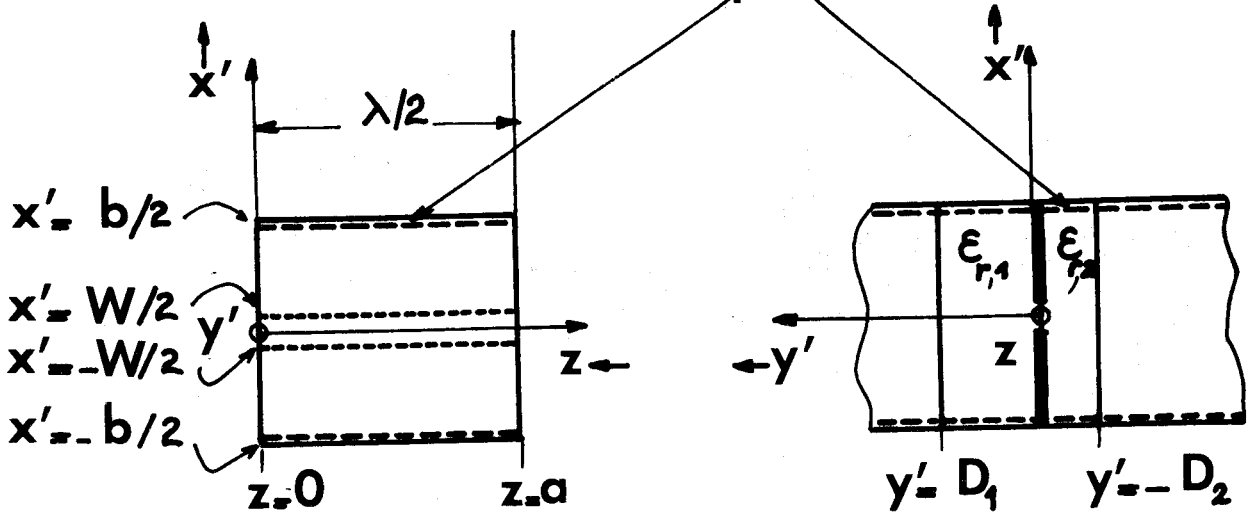


Fig. I-4 Modélisation de S.B. COHN

La ligne microfente est un iris-tampon dans un guide fermé d'axe  $Oy'$

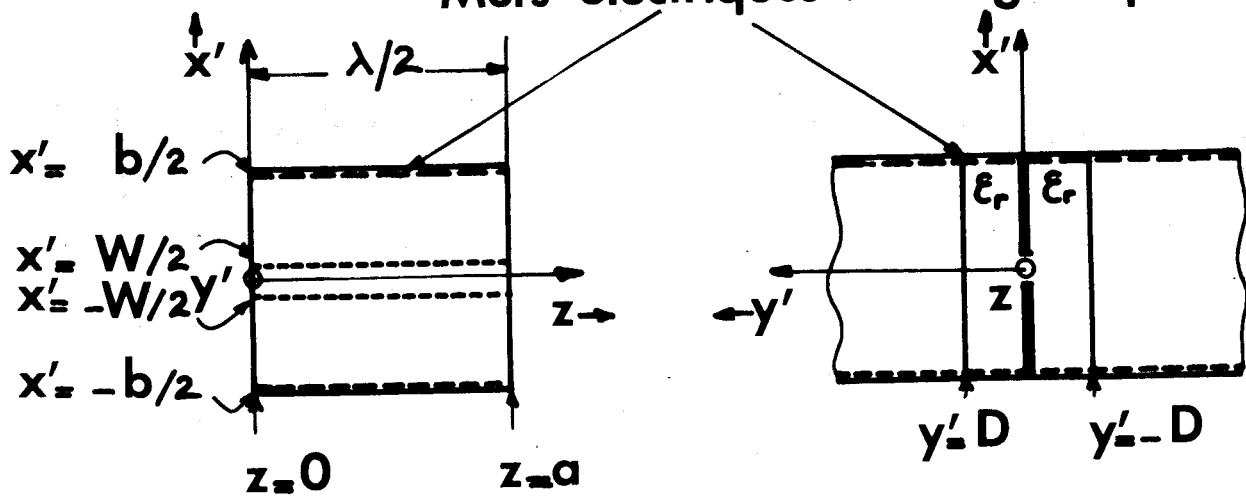


## Murs électriques ou magnétiques



a)

## Murs électriques ou magnétiques



b)

Fig. I-5 Modélisation de S.B. COHN

Configuration "sandwich" des lignes microfentes

a) dissymétrique

b) symétrique

. Tous ces modes  $TE_{1,2n}$  et  $TM_{1,2n}$ ,  $n \neq 0$  sont dégénérés dans le guide métallique à l'exception du fondamental  $TE_{1,0}$ .

. La nature onde lente du mode "fente" impose que sa longueur d'onde est inférieure à celle  $\lambda_0$  de l'onde plane dans le vide d'où la condition :

$$a < \lambda_0/2 \quad \text{I-2-3}$$

Cette condition I-2-3 montre que le mode  $TE_{1,0}$  et à fortiori les modes  $TE_{1,2n}$  et  $TM_{1,2n}$  qui entrent dans la construction de l'onde "fente" sont évanescents (constante de phase imaginaire pure) dans l'air. Dans la couche tampon par contre, quelques uns de ces modes peuvent être considérés comme propagés (constante de phase réelle). Le nombre de modes propagés va dépendre des paramètres géométrique  $b$  et constitutif  $\epsilon_r$  et enfin de la pulsation  $\omega$ .

On remarque que la représentation des champs de l'onde "fente" à l'aide de ceux des modes évanescents du guide vide ne va pas à l'encontre de la condition de rayonnement que ces champs satisfont hors de la couche tampon dans la direction  $oy'$ .

Les champs de l'onde "fente" remplissent finalement les conditions de continuité en  $y'=0$  et en  $y'=D$ .

b) résolution approximative des équations de continuité.

Le champ électrique de l'onde "fente" est transversal en  $y'=0$ . Cette hypothèse impose :

$$E_z^f(z, x', 0) = 0 \quad \text{I-2-4}$$

Cette première condition de continuité fournit une relation entre les amplitudes arbitraires  $E_0$  et  $H_0$  des champs  $TE_{1,2n}$  et  $TM_{1,2n}$ . Elle s'écrit :

$$\frac{H_0}{E_0} = \frac{\beta_{1,2n}}{\omega \mu_0} \cdot \frac{b}{2na} \quad \text{I-2-5}$$

On assure ensuite la continuité en  $y'=0$  des composantes  $E_x^f$  et  $H_z^f$  qui s'expriment respectivement par les développements :

$$E_z^f(z, x', y') = R_0 \sin \frac{\pi}{a} z e^{j\beta_{1,0} y'} + \sum_{n>0} R_n \cos \frac{2n\pi}{b} \left( x' - \frac{b}{2} \right) \sin \frac{\pi}{a} z e^{j\beta_{1,2n} y'}$$

$$H_z^f(z, x', y') = -y_0 R_0 \sin \frac{\pi}{a} z e^{j\beta_{1,0} y'} - \sum_{n>0} y_n R_n \cos \frac{2n\pi}{b} (x' - \frac{b}{2}) \cdot \sin \frac{\pi}{a} z e^{j\beta_{1,2n} y'} \quad \text{I-2-6}$$

$$\text{avec } R_0 = -\frac{j\pi}{k_{1,0}^2} \frac{\omega \mu_0 H_0}{a} ; \quad R_n = -\frac{j\pi}{k_{1,2n}^2} \left( \frac{\omega \mu_0 H_0}{a} + \frac{2n \beta_{1,2n} E_0}{b} \right)$$

$$k_{1,0}^2 = \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 ; \quad k_{1,2n}^2 = k_{1,0}^2 + \left( \frac{2n\pi}{b} \right)^2 \quad \text{I-2-7}$$

et

$$y_0 = -\frac{(H_z)_{TE_{1,0}}}{(E_{x'})_{TE_{1,0}}} ; \quad y_n = \frac{(H_z)_{TE_{1,2n}} + (H_z)_{TM_{1,2n}}}{(E_{x'})_{TE_{1,2n}} + (E_{x'})_{TM_{1,2n}}} \quad \text{I-2-8}$$

Compte tenu de I-2-4, on modifie l'expression de  $y_n$  comme :

$$y_n = \frac{(b/2na)^2 \cdot \beta_{1,2n} / \omega \mu_0 + \omega \epsilon / \beta_{1,2n}}{1 + (b/2na)^2} \quad \text{I-2-9}$$

où les quantités  $\beta_{1,2n} / \omega \mu_0$  et  $\omega \epsilon / \beta_{1,2n}$  représentent respectivement les impédances d'onde des modes  $TE_{1,2n}$  et  $TM_{1,2n}$ . Les constantes de phase sont communes aux deux types de modes puisque ceux-ci sont dénénergés ; elles sont choisies imaginaires pures ou réelles selon que les développements I-2-6 représentent soit des champs décroissants (évanescents) soit des champs modulés spatialement (propagés) suivant la direction  $oy'$ .

La suite du calcul s'effectue à partir du nouveau modèle représenté sur la figure (I-6-a) ; c'est une jonction abrupte de deux guides rectangulaires de même grand côté mais de petits côtés  $W$  et  $b$  différents [33]. En supposant que seul le mode  $TE_{0,1}$  est présent dans le guide de petit côté  $W$  on exprime les champs  $E_{x',0}^f$  et  $H_z^f$  dans la région  $y' > 0$  (voir figure (I-4) par des développements analogues à I-2-6 mais ils sont limités au premier terme  $n=0$ .

On obtient ainsi dans la région vide  $y' > 0$  repérée par l'indice (0) :

$$E_{x',0}^f(z, x', y') = \begin{cases} C_0 \sin \frac{\pi}{a} z e^{-j\beta_{0,1}^{(0)} y'} & \text{si } |x'| \leq w/2 \\ 0 & \text{si } |x'| \geq w/2 \end{cases}$$

$$H_{z,0}^f(z, x', y') = \begin{cases} -y'_0 C_0 \sin \frac{\pi}{a} z e^{-j\beta_{0,1}^{(0)} y'} & \text{si } |x'| \leq w/2 \\ 0 & \text{si } |x'| > w/2 \end{cases} \quad \text{I-2-10}$$

Dans la région  $y' < 0$  repérée par l'indice (1)  $E_{x',1}^f$  et  $H_{z,1}^f$  sont exprimés respectivement par les développements I-2-6 dans lesquelles on affecte l'exposant (1) aux constantes de phase. L'égalité de ces composantes en  $y' = 0$  conduit à écrire :

$$E_{x',0}^f(z, x', 0) = E_{x',1}^f(z, x', 0)$$

$$H_{z,0}^f(z, x', 0) = H_{z,1}^f(z, x', 0) \quad \text{I-2-11}$$

La première condition I-2-11 permet un calcul aisé des coefficients  $R_n$  puisque  $E_{x',1}^f(z, x', 0)$  représente le développement en série de Fourier de la fonction périodique  $G(x')$  qui s'identifie à  $E_{x',0}^f(z, x', 0)$  dans l'intervalle  $-b/2 < x' < b/2$  (figure I-6-b). On obtient :

$$R_0 = C_0 \delta'$$

$$R_n = (-1)^n 2C_0 \delta' \frac{\sin \pi n \delta'}{\pi n \delta'} \quad \text{I-2-12}$$

avec  $\delta' = w/b$ .

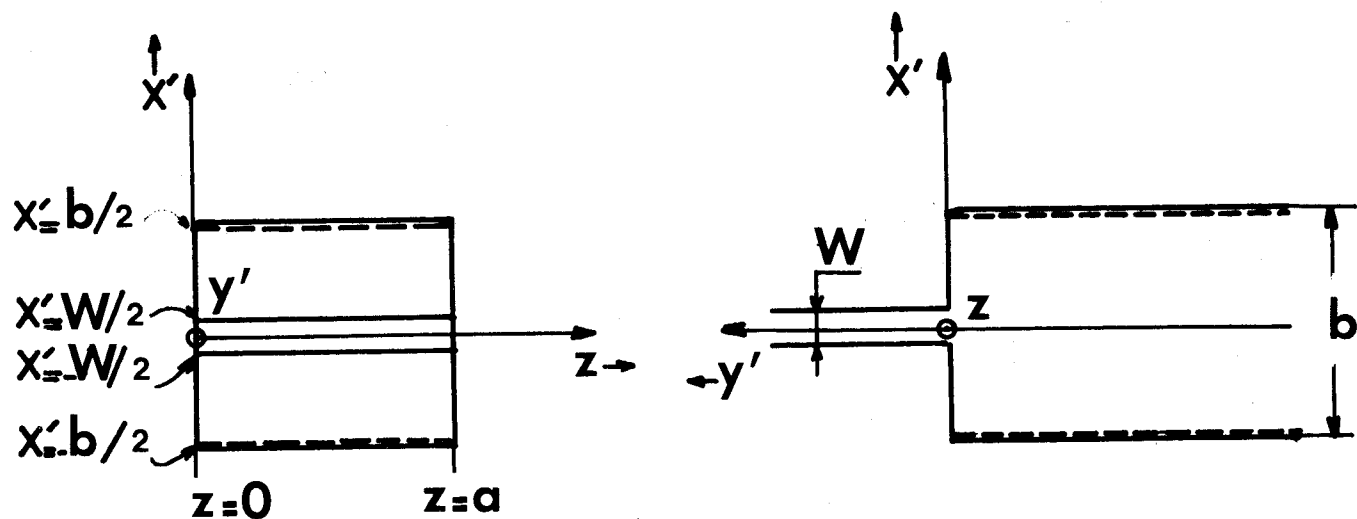
La seconde condition de continuité I-2-11 est appliquée en  $y' = 0$  en tout  $z$  mais seulement pour  $-w/2 < x' < w/2$ . SB COHN l'exprime sous la forme quelque peu surprenante :

$$C_0 y'_0 = y_0 R_0 + \sum_{n>0} y_n R_n \left\langle \cos \frac{2\pi n}{b} \left(x' - \frac{b}{2}\right) \right\rangle$$

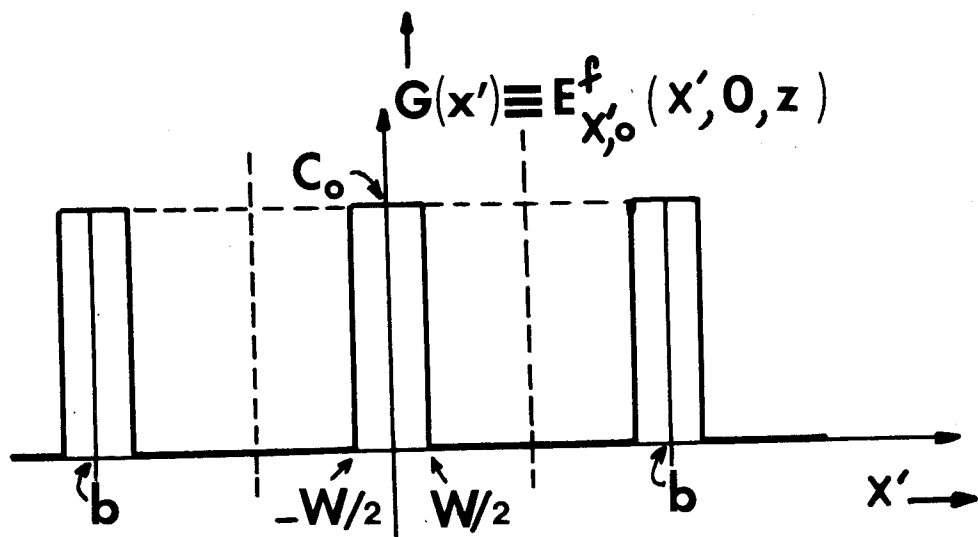
avec

$$\left\langle \cos \frac{2\pi n}{b} \left(x' - \frac{b}{2}\right) \right\rangle = \frac{1}{w} \int_{-w/2}^{w/2} \cos \frac{2\pi n}{b} \left(x' - \frac{b}{2}\right) dx' \quad \text{I-2-13}$$

Les deux conditions de continuité I-2-11 s'expriment donc finalement sous la forme contractée :



a)



b)

Fig.I.6 Modélisation de S.B. COHN

- a) Jonction axiale abrupte de deux guides fermés (a,W) et (a,b)  
 b) Représentation de la fonction périodique  $G(x')$



$$\left(\frac{b}{w}\right) y'_0 = y_0 + 2 \sum_{n>0} y_n \left(\frac{\sin \pi n \delta'}{\pi n \delta'}\right)^2 \quad \text{I-2-14}$$

On introduit les admittances caractéristiques définies en tension pour le mode  $TE_{0,1}$  dans les deux guides  $(w, a)$  et  $(b, a)$  :

$$\begin{aligned} Y_0 &= y_0 \left(\frac{a}{2b}\right) \\ Y'_0 &= y'_0 \left(\frac{a}{2w}\right) \end{aligned} \quad \text{I-2-15}$$

pour donner à la relation I-2-14 la nouvelle forme :

$$Y'_0 = Y_0 + 2 \sum_{n>0} Y_n \left(\frac{\sin \pi n \delta'}{\pi n \delta'}\right)^2 \quad \text{I-2-16}$$

avec :

$$Y_n = \frac{(b/2na)^2 Y_{TE_{1,2n}} + Y_{TM_{1,2n}}}{1 + (b/2na)^2} \quad \text{I-2-17}$$

Dans le langage de la théorie des lignes de transmission les grandeurs qui figurent dans les relations I-2-15 et I-2-16 sont définies de la manière suivante :

- .  $Y'_0$  est l'admittance d'entrée vue dans le plan  $y'=0$  par le mode  $TE_{0,1}$  du guide  $(w, a)$  incident suivant la direction  $y'<0$ .
- .  $Y_0$  est l'admittance caractéristique du mode  $TE_{0,1}$  du guide rectangulaire  $(b, a)$  propagé ou évanescent suivant la direction  $y'<0$ .
- . Les  $Y_{TE_{1,2n}}$  et  $Y_{TM_{1,2n}}$  sont respectivement les admittances caractéristiques des modes  $TE_{1,2n}$  et  $TM_{1,2n}$  du guide  $(b, a)$  propagés ou évanescents suivant la direction  $y'<0$ .

En usant toujours de ce langage il est clair que, du point de vue de la ligne microfente, il devient tout à fait équivalent de satisfaire les conditions de continuité en  $y'=-D$  :



$$E_{x',1}^f(z, x', -D) = E_{x',0}(z, x', -D)$$

I-2-18

$$H_{z,1}^f(z, x', -D) = H_{z,0}(z, x', -D)$$

et d'écrire en  $y' = 0$  une condition de resonance [34] transverse à l'aide de la relation I-2-15. Cette condition de resonance transverse exprime que la somme des susceptances ramenées en  $y' = 0$ , rencontrées suivant  $y' < 0$  par chaque mode du guide rectangulaire est nécessairement nulle. Cette somme est notée  $Y'_0$ ; on l'exprime cette fois comme :

$$Y'_0 = Y_{i,0} + 2 \sum_{n>0} Y_{i,n} \left( \frac{\sin \pi n \delta'}{\pi n \delta'} \right)^2$$

avec

$$Y_{i,n} = \frac{(b/2na)^2 Y_{i,TE_{1,2n}} + Y_{i,TM_{1,2n}}}{1 + (b/2na)^2}$$

I-2-19

où :

$Y_{i,0}$  est l'admittance d'entrée vue dans le plan  $y' = 0$  par le mode  $TE_{1,0}$ , évanescents ou propagés suivant l'axe  $y' < 0$  du guide rectangulaire  $(b, a)$ . Ce guide est rempli par un milieu diélectrique de permittivité  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  et il est vide à partir de  $y' = -D$ .

$Y_{i,TE_{1,2n}}$  et  $Y_{i,TM_{1,2n}}$  sont les admittances d'entrée vues dans le plan  $y' = 0$  par les modes  $TE_{1,2n}$  et  $TM_{1,2n}$  évanescents ou propagés suivant l'axe  $y' < 0$  du guide  $(b, a)$ . Comme précédemment le guide est rempli de diélectrique de permittivité  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  sur une épaisseur  $D$ . Il est vide à partir de  $y' = -D$ .

Les expressions des admittances  $Y_{i,0}$ ,  $Y_{i,TE_{1,2n}}$  et  $Y_{i,TM_{1,2n}}$  s'obtiennent à partir des représentations ligne de transmission de la figure (I-7) Des calculs élémentaires conduisent à :

$$Y_{i,0} = Y_0^{(1)} \frac{\text{th} j \beta_{1,0}^{(1)} D - [Y_0^{(1)} / Y_0^{(0)}]}{1 - [Y_0^{(1)} / Y_0^{(0)}] \text{th} j \beta_{1,0}^{(1)}}$$

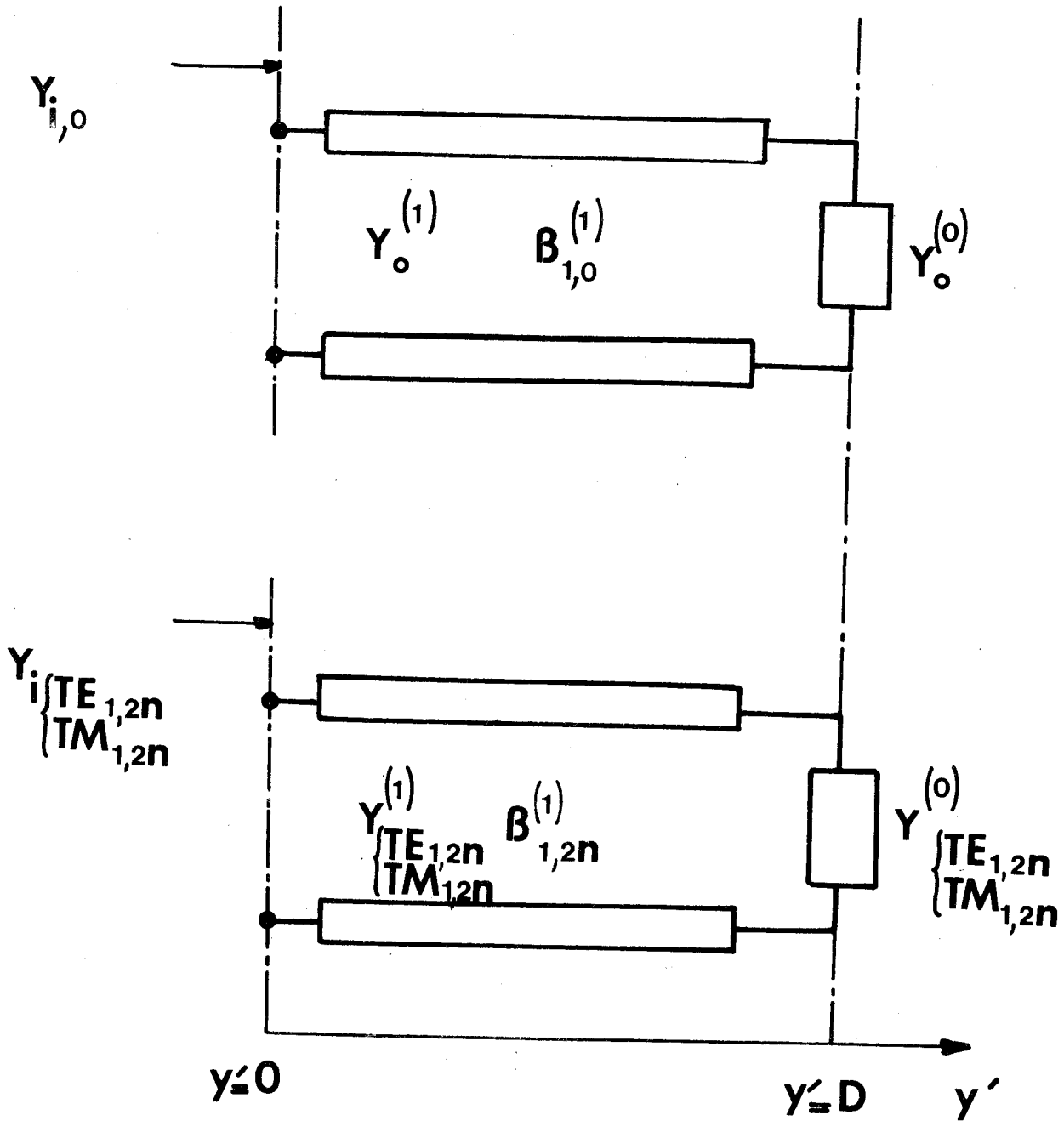


Fig.I.7 Représentations "ligne de transmission"

$$Y_i \begin{cases} TE_{1,2n} \\ TM_{1,2n} \end{cases} = Y \begin{cases} TE_{1,2n}^{(1)} \\ TM_{1,2n}^{(1)} \end{cases} \frac{\text{th} j \beta_{1,2n} D \cdot \left[ \begin{matrix} Y_{\begin{cases} TE_{1,2n} \\ TM_{1,2n} \end{cases}}^{(1)} \\ Y_{\begin{cases} TE_{1,2n} \\ TM_{1,2n} \end{cases}}^{(0)} \end{matrix} \right]}{1 - \left[ \begin{matrix} Y_{\begin{cases} TE_{1,2n} \\ TM_{1,2n} \end{cases}}^{(1)} \\ Y_{\begin{cases} TE_{1,2n} \\ TM_{1,2n} \end{cases}}^{(0)} \end{matrix} \right] \text{th} j \beta_{1,2n} D} \quad \text{I-2-20}$$

Dans ces expressions I-2-20 les exposants (1) et (0) distinguent respectivement les milieux diélectrique et vide. Le mode  $TE_{0,1}$  est propagé dans le guide  $(a, b)$  rempli par le diélectrique de permittivité  $\epsilon_r \epsilon_0 \epsilon$  ; sa constante de phase est prise réelle :

$$\beta_{0,1}^{(1)} = \left[ \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 \epsilon_r - \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{I-2-21}$$

où  $\lambda_0$  représente la longueur d'onde des ondes planes dans le vide. Au contraire ce mode est évanescent dans le guide vide, sa constante de phase est donc prise imaginaire pure :

$$\beta_{0,1}^{(0)} = j \gamma_{0,1}^{(0)}$$

avec

$$\gamma_{0,1}^{(0)} = \left[ \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 - \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{I-2-22}$$

Maintenant, selon les valeurs de  $b, \epsilon_r$  et  $\omega$ , les modes  $TE_{1,2n}$  et  $TM_{1,2n}$  peuvent être considérés soit comme des modes propagés soit comme des modes évanescents dans le guide  $(a, b, \epsilon_r)$ . S'ils sont propagés alors :

$$\beta_{1,2n}^{(1)} = \left[ \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 \epsilon_r - \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 - \left( \frac{\pi}{2nb} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{I-2-23}$$

Par contre, s'ils sont évanescents, on a :

$$\beta_{1,2n} = j \gamma_{1,2n}^{(1)}$$

avec :

$$\gamma_{1,2n}^{(1)} = \left[ \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{2nb} \right)^2 - \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 \epsilon_r \right]^{1/2}$$

I-2-24

Un calcul itératif permet de rechercher avec précision pour chaque valeur de  $\omega$  (ou de  $\lambda_0$ ) la longueur d'onde du mode "fente"  $\lambda' = 2a$  qui annule  $Y_0'$ . A chaque itération tous les paramètres géométriques et constitutifs sont fixés d'avance ; la longueur d'onde  $\lambda$  trouvée est fonction de la nature des murs placés en  $x' = \pm b/2$  et de la valeur du paramètre  $b$  lui-même. La figure I-8 qui illustre cette dépendance montre surtout l'existence d'une valeur seuil  $b_3$  du paramètre  $b$  au delà de laquelle les solutions murs électriques et murs magnétiques s'identifient. C'est avec cette valeur seuil  $b_3$  que s'effectue ensuite la détermination des caractéristiques de dispersion du mode "fente". La figure I-9 décrit des résultats issus de cette modélisation pour des substrats de permittivité relative  $\epsilon_r = 9.6$ .

Remarque :

A aucun moment la continuité de la composante  $H_x^f$  de l'onde fente est assurée ni en  $y' = 0$  ni en  $y' = -D$ . Il en va de même pour la composante  $E_z^f$  en  $y' = -D$ .

c) Les composantes des champs du mode "fente".

En chaque point  $(x', y')$  les composantes des champs du mode "fente" sont générées par des développements modaux du type I-2-6 desquels on extrait la dépendance en  $z$ . Les évolutions des composantes  $H_z^f$  et  $E_x^f$  sont très certainement correctes dès lors que l'on s'éloigne du voisinage immédiat de la fente. En ce qui concerne celles des autres composantes, rien n'est moins sûr car, mis à part les résultats que publie S. B. COHN [35] sur la composante  $H_y^f$ , aucune étude n'a repris à ce jour cette formulation. La figure I-10 montre qu'il faut faire appel à une approche quasi-statique (courbes en traits pointillés) pour décrire les variations rapides du champ électromagnétique à proximité des bords minces de la fente.

d) Impédance "caractéristique" équivalente du mode "fente".

S.B. COHN définit ensuite une impédance caractéristique équivalente en tension comme :

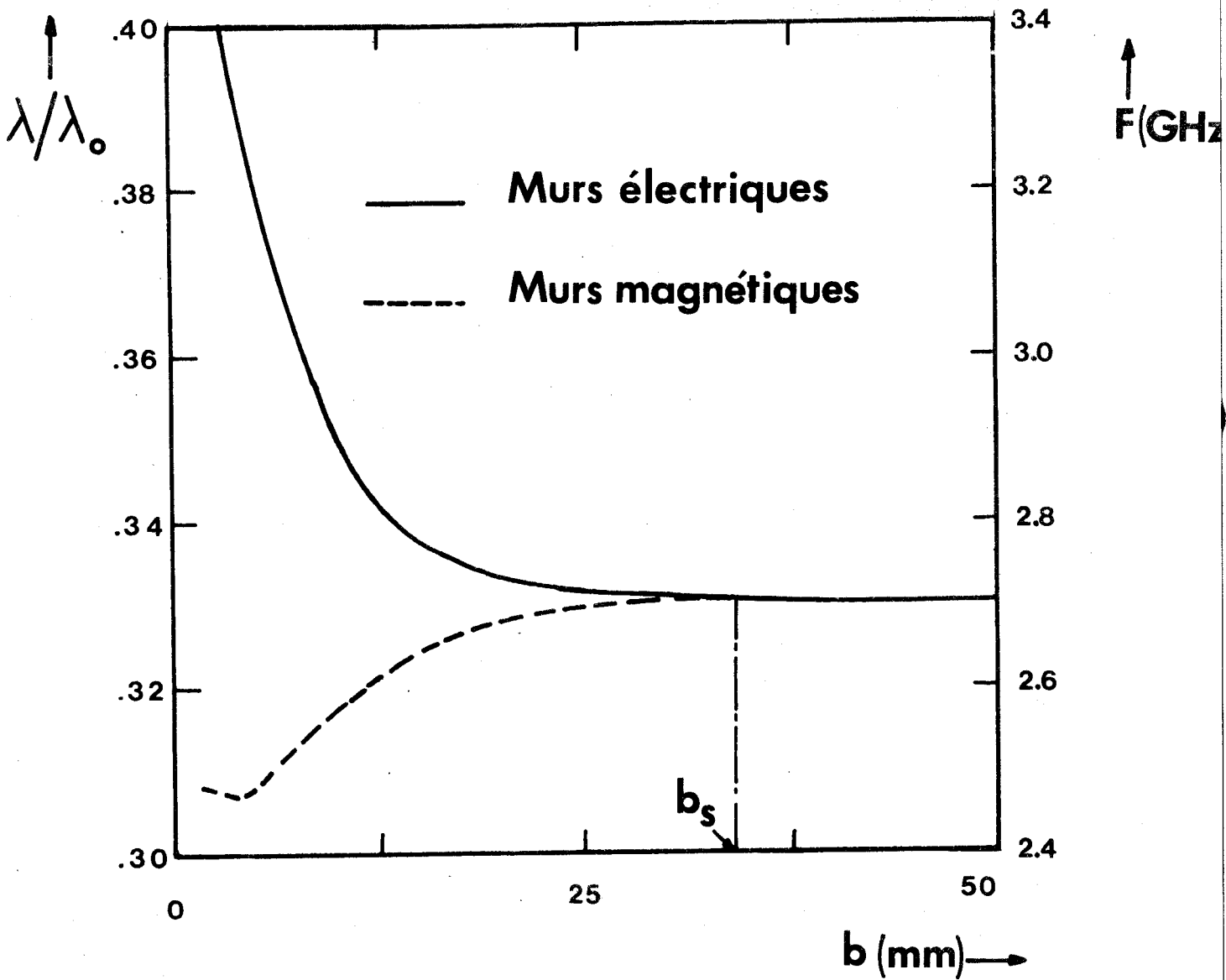


Fig. I-8 Modélisation de S.B. COHN  
Microfente dissymétrique

Caractéristiques de dispersion du mode "fente" en fonction du paramètre  $b$ ;  
quand  $b \gg b_s$  la condition de rayonnement est satisfaite dans la direction  $oy'$

$\epsilon_r = 20$  ;  $W = .635$  mm ;  $D = 3.479$  mm ;  $\lambda = 34.54$  mm



$$Z_{c,u} = \frac{|U|^2}{2P}$$

I-2-25

où  $P$  est le flux de puissance du mode fente (direct par exemple).  $U$  est une tension entre les deux bords de la fente définie comme la circulation du champ électrique tangentiel entre ces bords (c'est dans la fente que le champ électrique a une amplitude maximum).

Le manque de précision sur la connaissance de ce champ électrique conduit l'auteur à poursuivre son calcul à partir du modèle représenté sur la figure I-6-a qui a servi à la détermination des caractéristiques de dispersion du mode "fente". La susceptance  $Y'_0$  donnée par la relation I-2-18 peut être en effet interprétée comme l'admittance d'entrée d'un circuit microonde sans pertes à un seul "accès" [36]. Ce circuit est la cavité ( $a = \lambda/2, b, D$ ) dont l'accès s'effectue par le guide ( $w, a = \lambda/2$ ). Il devient alors possible à partir de ce nouveau point de vue de relier les paramètres  $U, Y'_0$  et  $w$  à l'énergie moyenne emmagasinée  $W_T$  dans la cavité par :

$$W_T = |U|^2 / j \frac{dY'_0}{d\omega}$$

I-2-26

Or il existe une relation générale [37] entre le flux de puissance  $P$  d'un mode et l'énergie emmagasinée par ce mode dans un tronçon de guide de longueur déterminée. Pour un tronçon de ligne microfente de longueur  $\lambda/2$  cette énergie n'est autre que  $W_T$  et la relation cherchée s'écrit :

$$P = W_T / \lambda \left( \frac{v_g}{v_\phi} \right)_{\omega, \beta}$$

I-2-27

où  $v_g$  est la vitesse de groupe du mode "fente" au point  $(\omega, \beta)$  de son diagramme de dispersion. En introduisant la vitesse  $v_\phi$  de phase du mode "fente", la relation précédente I-2-26 devient :

$$P = W_T \frac{\omega}{2\pi} \left( \frac{v_g}{v_\phi} \right)_{\omega, \beta}$$

I-2-28

L'impédance caractéristique  $Z_{c,u}$  définie par I-2-24 s'exprime donc finalement comme :

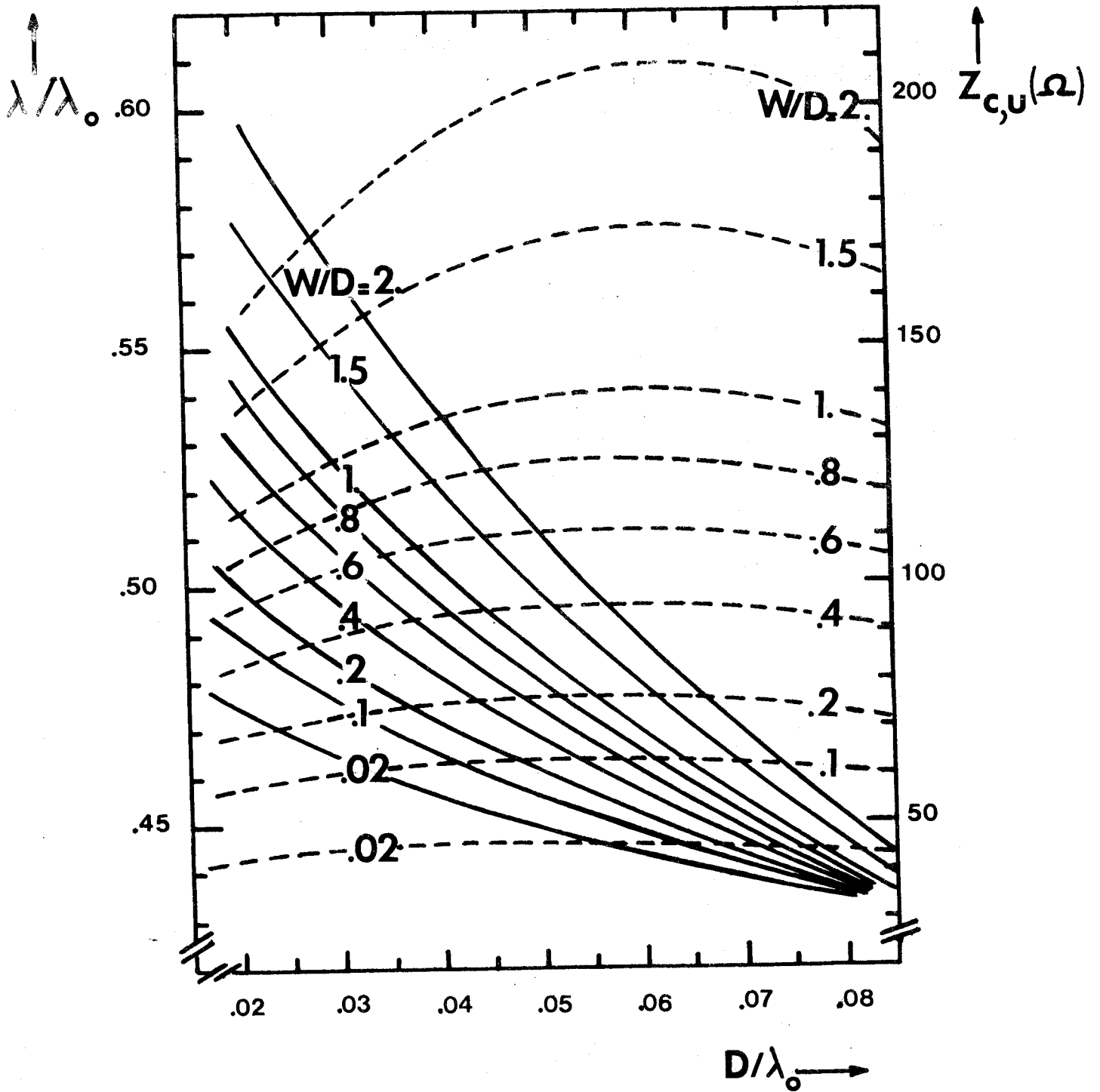


Fig. I-9 Modélisation de S.B. COHN  
Microfente dissymétrique

Caractéristiques de dispersion et impédance caractéristique équivalente en tension.  $\epsilon_r = 9.6$ ; —  $\lambda/\lambda_0$  ;  $Z_{c,u}(\Omega)$  - - - -

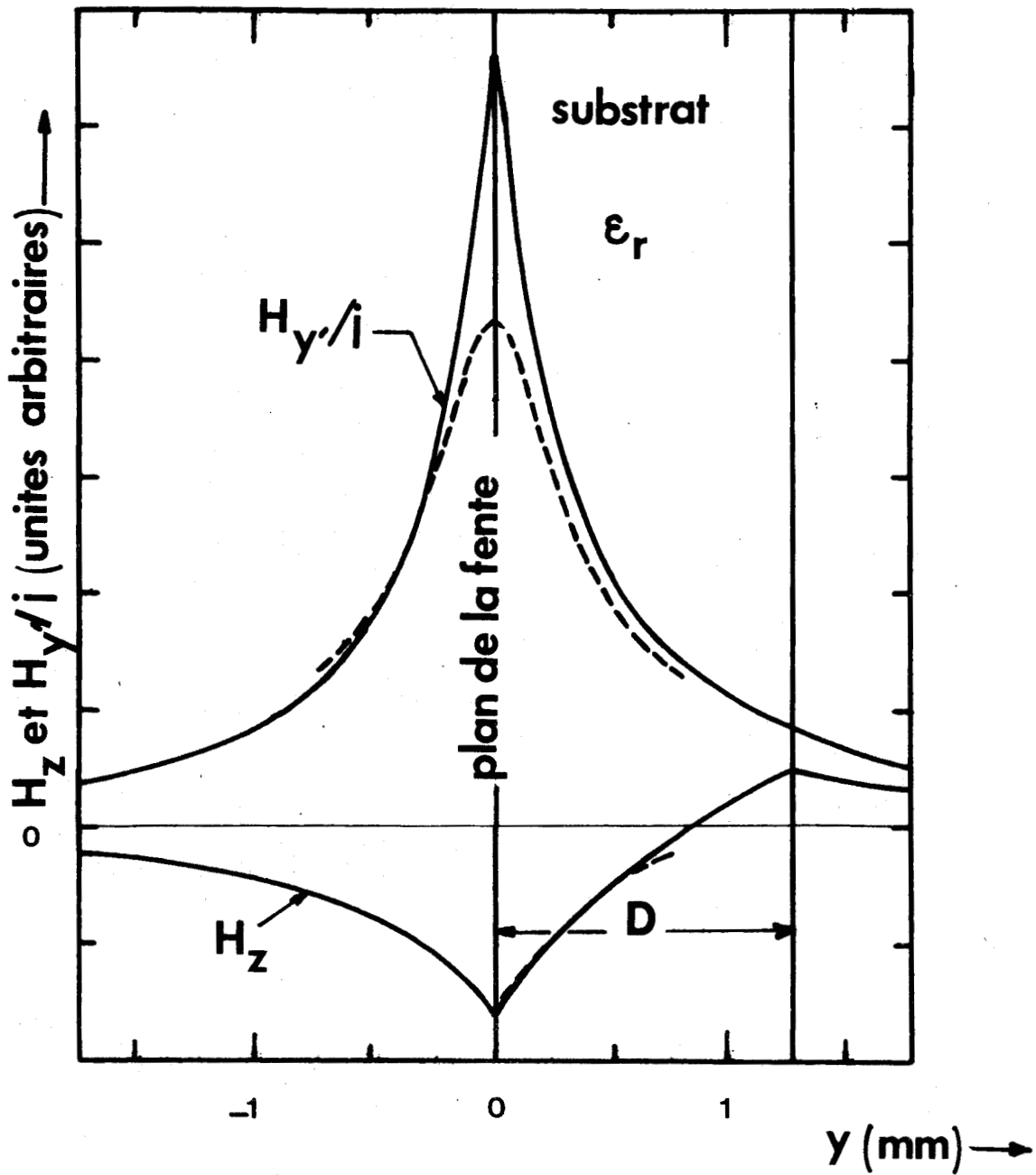


Fig. I-10 Modélisation de S.B. COHN

Microfente dissymétrique

Composantes du champ magnétique du mode "fente"  $\epsilon_r = 16$  ;  $W = 0.50$  mm

$D = 1.27$  mm ;  $F = 10$  GHz

— développements modaux  
 - - - approche "quasi"statique





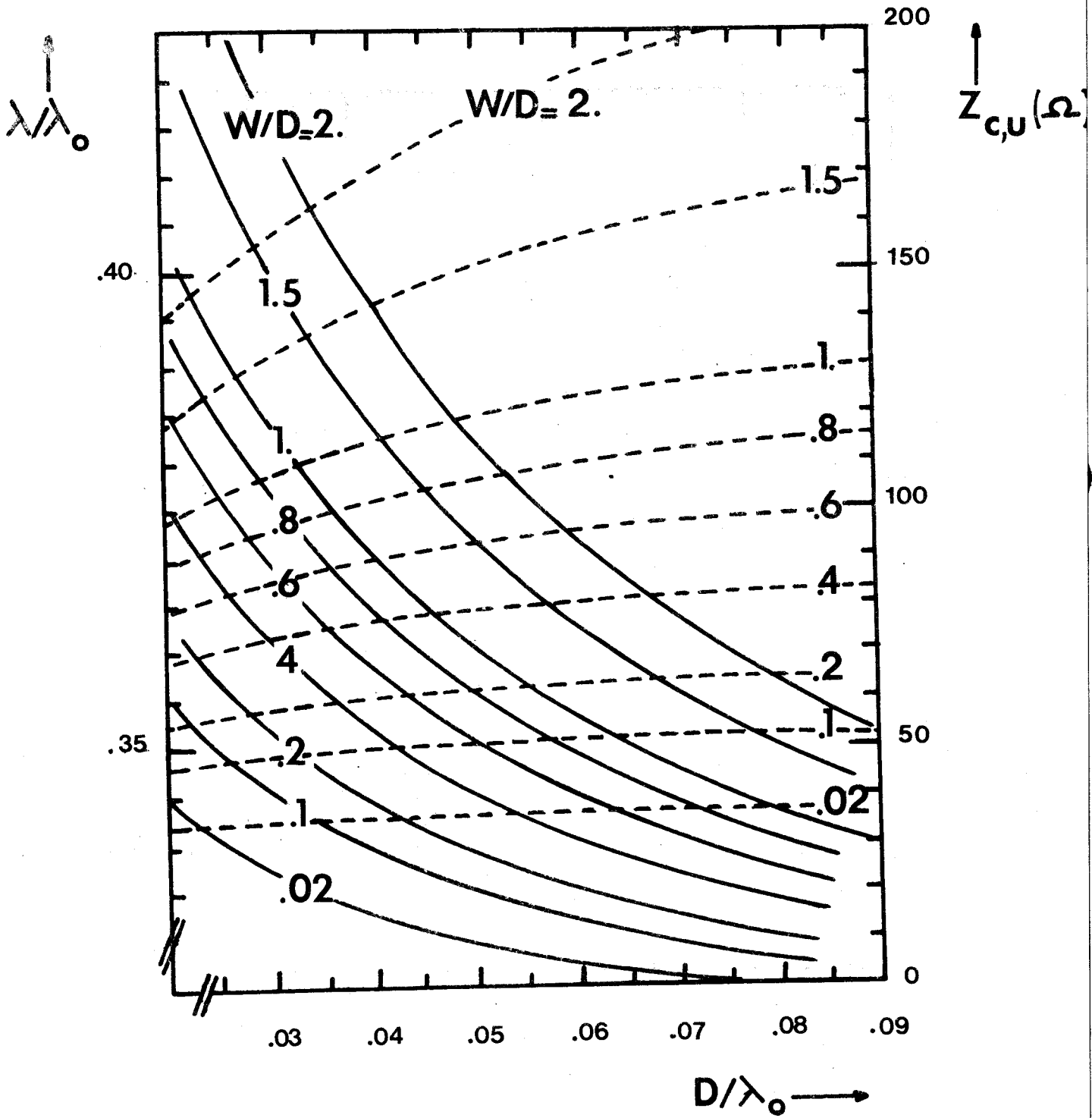


Fig. I-11 Modélisation de S.B. COHN  
Microfente symétrique.

Caractéristiques de dispersion et impédance caractéristique équivalente en tension.  $\epsilon_r = 9.6$ ; —  $\lambda/\lambda_0$ ; - - - -  $Z_{c,u} (\Omega)$ .

$$Z_{c,\nu} = \frac{j\pi}{\omega \left( \frac{dY_0'}{d\omega} \right)_{\omega,\beta}} \cdot \left( \frac{V_\varphi}{V_G} \right)_{\omega,\beta}$$

où

$$(Y_0')_{\omega,\beta} = 0$$

I-2-29

On donne sur la figure I-10 quelques résultats typiques fournis par cette approche que S.B. COHN a généralisé à la ligne microfente symétrique figure I-11.

### I - 2 - 2 Modèle de traitement rigoureux de T. ITOH et R. MITTRA [ 7 ]

#### L'Approche Spectrale.

a) Application de l'Intégrale de FOURIER [38] à la résolution du traitement guide d'onde sur la ligne microfente.

Ces auteurs transposent le traitement guide d'onde décrit au paragraphe I-1 de la section droite directe  $(x', y')$  à la section droite image  $(\alpha, y')$  caractéristique du changement de coordonnée  $x' \rightleftharpoons \alpha$  dans la transformation de FOURIER\*

$$\begin{cases} \tilde{E}_{z,l}(\alpha, y') \\ \tilde{H}_{z,l}(\alpha, y') \end{cases} = \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{cases} E_{z,l}(x', y') \\ H_{z,l}(x', y') \end{cases} e^{j\alpha x'} dx' \quad \text{I-2-30}$$

Dans cette section droite image le système d'équation à résoudre I-1-9 s'exprime comme :

$$\left\{ \frac{d^2}{dy'^2} - \gamma_l^2 \right\} \begin{cases} \tilde{E}_{z,l}(\alpha, y') \\ \tilde{H}_{z,l}(\alpha, y') \end{cases} = 0 \quad \text{I-2-31}$$

(\*) La transformation inverse s'écrit :

$$\begin{cases} E_{z,l}(x', y') \\ H_{z,l}(x', y') \end{cases} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{cases} \tilde{E}_{z,l}(\alpha, y') \\ \tilde{H}_{z,l}(\alpha, y') \end{cases} e^{-j\alpha x'} d\alpha$$

avec

$$\gamma_l^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \omega^2 \mu_l \epsilon_l \quad \text{I-2-32}$$

La condition de rayonnement des guides ouverts suivant la direction  $oy'$  s'exprime simplement dans la section droite image  $(\alpha, y')$  comme :

$$\gamma_0^2 \geq 0 \quad \text{I-2-33}$$

Dés lors, les solutions générales du système d'équations I-2-30 peuvent s'écrire :

. dans la région (0) ;  $y' > 0$

$$\tilde{E}_{z,0}(\alpha, y') = A(\alpha) e^{-\gamma_0 y'}$$

$$\tilde{H}_{z,0}(\alpha, y') = A'(\alpha) e^{-\gamma_0 y'}$$

. dans la région (1) ;  $-D < y' < 0$

$$\tilde{E}_{z,1}(\alpha, y') = B(\alpha) \text{sh} \gamma_1 y' + C(\alpha) \text{ch} \gamma_1 y'$$

$$\tilde{H}_{z,1}(\alpha, y') = B'(\alpha) \text{sh} \gamma_1 y' + C'(\alpha) \text{ch} \gamma_1 y'$$

. et enfin dans la région (0) ;  $y' < -D$

$$\tilde{E}_{z,0}(\alpha, y') = D(\alpha) e^{\gamma_0 (y'+D)}$$

$$\tilde{H}_{z,0}(\alpha, y') = D'(\alpha) e^{\gamma_0 (y'+D)} \quad \text{I-2-34}$$

Il faut ici remarquer que dans la région (1) le paramètre  $\gamma_1^2$  peut devenir négatif pour les faibles valeurs de  $\alpha$ . Ceci s'explique par le fait que la constante de phase  $\beta$  des ondes lentes recherchées est intermédiaire à  $\omega$  fixé, entre la constante de phase des ondes planes dans le vide et celle des ondes planes dans le substrat de permittivité  $\epsilon_1$ . Quand c'est le cas, il faut écrire :

$$\gamma_1^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \beta^2 - \alpha^2 \quad \text{I-2-35}$$

et substituer aux fonctions hyperboliques dans les expressions I-2-33 les fonctions trigonométriques correspondantes.

b) Application des conditions de continuité

Sur le guide direct on écrit successivement en  $y' = -D$ :

$$E_{z,0}(x', -D) = E_{z,1}(x', -D) \quad \text{I-2-36}$$

$$E_{x',0}(x', -D) = E_{x',1}(x', -D)$$

et

$$H_{z,0}(x', -D) = H_{z,1}(x', -D)$$

$$H_{x',0}(x', -D) = H_{x',1}(x', -D) \quad \text{I-2-37}$$

puis en  $y' = 0$ :

$$E_{z,0}(x', 0) = E_{z,1}(x', 0) = E_z(x', 0)$$

I-2-38

$$E_{x',0}(x', 0) = E_{x',1}(x', 0) = E_{x'}(x', 0)$$

et

$$H_{z,0}(x', 0) - H_{z,1}(x', 0) = J_{x'}(x', 0)$$

I-2-39

$$H_{x',0}(x', 0) - H_{x',1}(x', 0) = J_z(x', 0)$$

Ces conditions de continuité transposées dans le guide image en tenant compte des relations I-2-33 et des suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{x',l}(\alpha, y') &= -\frac{j\omega\mu_0}{k_l^2} \cdot \frac{\partial \tilde{H}_{z,l}(\alpha, y')}{\partial y'} - \frac{\beta\alpha}{k_l^2} \cdot \tilde{E}_{z,l}(\alpha, y') \\ H_{x',l}(\alpha, y') &= \frac{\omega\mu_0}{k_l^2} \cdot \alpha \tilde{H}_{z,l}(\alpha, y') - \frac{j\beta}{k_l^2} \cdot \frac{\partial \tilde{E}_{z,l}(\alpha, y')}{\partial y'}\end{aligned}$$

où  $k_l^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_l - \beta^2$  I-2-40

conduisent à un système d'équations linéaires et inhomogènes dont les inconnues sont les constantes\* arbitraires  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$ ,  $C(\alpha)$ ,  $D(\alpha)$ ,  $A'(\alpha)$ ,  $B'(\alpha)$ ,  $C'(\alpha)$  et  $D'(\alpha)$ . Ces constantes interviennent dans les expressions générales des solutions sur le guide image. On écrit ce système d'équations sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} Q(\alpha, \beta, \omega, \epsilon_r, D) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A(\alpha) \\ B(\alpha) \\ C(\alpha) \\ D(\alpha) \\ A'(\alpha) \\ B'(\alpha) \\ C'(\alpha) \\ D'(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{J}_{x'}(\alpha, 0) \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{J}_z(\alpha, 0) \end{bmatrix}$$
I-2-41

où  $[Q]$  est une matrice  $8 \times 8$  dont les coefficients non nuls dépendent tous des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega$ ,  $\epsilon_r$  et  $D$ . Dans les relations I-2-39 et I-2-40 figurent les quantités  $\tilde{E}_z(\alpha, 0)$ ,  $\tilde{E}_{x'}(\alpha, 0)$ ,  $\tilde{J}_z(\alpha, 0)$  et  $\tilde{J}_{x'}(\alpha, 0)$  qui représentent respectivement les transformées de FOURIER de  $E_z(x', 0)$ ,  $E_{x'}(x', 0)$ ,  $J_z(x', 0)$  et  $J_{x'}(x', 0)$ .

Les conditions de continuité I-2-37 que l'on peut encore écrire comme :

$$\tilde{E}_z(\alpha, 0) = A(\alpha)$$

(\* Dans l'espace image.

et  $(\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \beta^2) \tilde{E}_{x'}(\alpha, 0) = j\omega \mu_0 \gamma_0 A'(\alpha) - \beta \alpha A(\alpha)$

s'expriment finalement sous la forme très compacte :

$$\begin{bmatrix} M(\alpha, \beta, \omega, \epsilon, D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_{x'}(\alpha, 0) \\ \tilde{J}_z(\alpha, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{x'}(\alpha, 0) \\ \tilde{E}_z(\alpha, 0) \end{bmatrix} \quad \text{I-2-42}$$

après remplacement de  $A(\alpha)$  et  $A'(\alpha)$  par leurs valeurs calculées à partir du système d'équations I-2-40. La matrice  $[M]$  est maintenant une matrice  $2 \times 2$  dont tous les coefficients dépendent eux aussi des paramètres  $\alpha, \beta, \omega, \epsilon_r$  et  $D$ .

A ce stade de l'exposé, la formulation du traitement guide d'onde est rigoureuse à ceci près que les quantités  $\tilde{E}_z(\alpha, 0), \tilde{E}_{x'}(\alpha, 0), \tilde{J}_z(\alpha, 0)$  et  $\tilde{J}_{x'}(\alpha, 0)$  sont des quantités inconnues pour le champ électromagnétique guidé.

c) Résolutions des équations de continuité par la méthode des moments  
Forme de GALERKIN [39], [40].

Il se fait que pour le mode fente on dispose de plus de renseignements "à priori" sur les composantes du champ électrique dans le plan de la fente que sur celles du courant de conduction de surface parcourant les deux demi-plans conducteurs. On préfère donc au système d'équations I-2-41 le suivant tout à fait équivalent et qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} N(\alpha, \beta, \omega, \epsilon_r, D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_{x'}(\alpha, 0) \\ \tilde{E}_z(\alpha, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{J}_{x'}(\alpha, 0) \\ \tilde{J}_z(\alpha, 0) \end{bmatrix} \quad \text{I-2-43}$$

où  $[N]$  est la matrice inverse de  $[M]$ . Ce système d'équations inhomogène est résolu par la méthode des moments prise sous la forme particulière de GALERKIN. La méthode de GALERKIN nécessite le choix d'une base complète ainsi

que la définition d'un produit scalaire. Les fonctions repérées par l'indice  $n$  dans les développements suivants :

$$\tilde{E}_{x'}(\alpha, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \tilde{E}_{x',n}(\alpha, 0)$$

$$\tilde{E}_z(\alpha, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \tilde{E}_{z,n}(\alpha, 0)$$

I-2-44

constituent cette base. Les  $c_n$  et  $d_n$  sont des constantes inconnues et les fonctions  $\tilde{E}_{x'}(x', 0)$  et  $\tilde{E}_z(x', 0)$  doivent s'annuler impérativement pour  $|x'| \geq w/2$ . Le produit scalaire est défini dans un espace de fonctions complexes images de variables réelles ; il s'exprime pour deux fonctions scalaires quelconques  $\tilde{F}_a(\alpha, y')$  et  $\tilde{G}_b(\alpha, y')$  ( $a, b = x', y'$  ou  $z$ ) comme :

$$\langle \tilde{F}_a(\alpha, y'), \tilde{G}_b(\alpha, y') \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}_a^*(\alpha, y') \tilde{G}_b(\alpha, y') d\alpha \quad \text{I-2-45}$$

Il est nécessaire toutefois que le produit scalaire des fonctions originales correspondantes ait une signification physique dans l'espace direct et ceci pour légitimer le théorème de PARSEVAL [38]. C'est le cas puisque des produits scalaires directs de ce type se rencontrent dans l'expression de la puissance fournie en moyenne dans un certain volume  $V$  de l'espace direct

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV$$

qui enferme une distribution de courants "source"  $\vec{J}$  (Théorème de POYNTING).

Compte tenu de cette définition cohérente du produit scalaire et du choix de la base, la méthode de GALERKIN transforme le système d'équations I-2-42 en un système d'équations linéaires homogène,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{m,n}(\beta) c_n + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{m,n}(\beta) d_n = 0 ; m = 1, 2, 3 \dots \text{etc}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_{m,n}(\beta) c_n + \sum_{n=1}^{\infty} S_{m,n}(\beta) d_n = 0 ; m = 1, 2, 3 \dots \text{etc}$$

I-2-46

dont les inconnues sont les constantes qui figurent dans I-2-42. Les quantités

$P_{m,n}(\beta)$ ,  $Q_{m,n}(\beta)$ ,  $R_{m,n}(\beta)$  et  $S_{m,n}(\beta)$  se calculent comme :

$$P_{m,n}(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{E}}_{x',m}^*(\alpha,0) N_{1,1}(\alpha,\beta,\omega,\epsilon_r,D) \tilde{\mathcal{E}}_{x',n}(\alpha,0) d\alpha$$

$$Q_{m,n}(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{E}}_{x',m}^*(\alpha,0) N_{1,2}(\alpha,\beta,\omega,\epsilon_r,D) \tilde{\mathcal{E}}_{z,n}(\alpha,0) d\alpha$$

$$R_{m,n}(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{E}}_{z,m}^*(\alpha,0) N_{2,1}(\alpha,\beta,\omega,\epsilon_r,D) \tilde{\mathcal{E}}_{x',m}(\alpha,0) d\alpha$$

$$S_{m,n}(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{E}}_{z,m}^*(\alpha,0) N_{2,2}(\alpha,\beta,\omega,\epsilon_r,D) \tilde{\mathcal{E}}_{z,n}(\alpha,0) d\alpha \quad \text{I-2-47}$$

Les grandeurs  $N_{1,1}$ ,  $N_{1,2}$ ,  $N_{2,1}$  et  $N_{2,2}$  sont les éléments de la matrice  $[N]$  définie en I-2-42. L'homogénéité du système d'équations I-2-45 résulte de l'application du théorème de PARSEVAL. En effet à partir de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{E}}_{\begin{matrix} x',m \\ z',m \end{matrix}}^*(\alpha,0) \cdot \tilde{\mathcal{J}}_{\begin{matrix} x',m \\ z \end{matrix}}(\alpha,0) d\alpha = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_{\begin{matrix} x',m \\ z \end{matrix}}(x',0) \cdot \mathcal{J}_{\begin{matrix} x',m \\ z \end{matrix}}(x',0) dx' \quad \text{I-2-48}$$

on déduit que les seconds membres du système d'équations sont nuls puisque si  $|x'| < w/2$ , on a :

$$\mathcal{E}_{\begin{matrix} x',m \\ z',m \end{matrix}}(x',0) \neq 0 \quad \text{mais} \quad \mathcal{J}_{\begin{matrix} x',m \\ z \end{matrix}}(x',0) = 0 \quad \text{I-2-49}$$

alors qu'au contraire si  $|x'| > w/2$  on a :

$$\mathcal{E}_{\begin{matrix} x',m \\ z',m \end{matrix}}(x',0) = 0 \quad \text{mais} \quad \mathcal{J}_{\begin{matrix} x',m \\ z \end{matrix}}(x',0) \neq 0 \quad \text{I-2-50}$$

Les solutions non triviales du système d'équations homogène I-2-45 conduisent à une fréquence donnée aux constantes de phase de tous les modes guidés par la structure.



La résolution du traitement guide d'onde devient effective si on dispose d'une représentation suffisamment précise du champ électromagnétique réel dans le plan de la fente. On insiste encore sur le fait qu'aucune sorte d'approximation ne porte atteinte à la généralité de la méthode à ce niveau.

d) caractéristique de dispersion du mode fente.

Le choix des fonctions  $E_{z,n}(x',0)$  et  $E_{x',n}(x',0)$  (resp:  $\tilde{E}_{z,n}(\alpha,0)$  et  $\tilde{E}_{x',n}(\alpha,0)$ ) est mathématiquement arbitraire. En effet seul le caractère complet de cet ensemble de fonction est nécessaire pour une description fidèle des champs électriques  $E_z(x',0)$  et  $E_{x'}(x',0)$  (resp:  $\tilde{E}_z(\alpha,0)$  et  $\tilde{E}_{x'}(\alpha,0)$ ). Il faut cependant noter, qu'une troncature à un ordre  $n$  peu élevé dans les représentations de ces champs par des séries infinies du type I-2-43 peut s'avérer suffisante pour un mode donné si les premières fonctions sont relativement proches des champs réels. Il est évident que ce choix "judicieux" n'est possible qu'à partir de renseignements préalables sur les vraies distributions de champ. Il est tout aussi évident que les renseignements dont on dispose ne se rapportent pas à l'ensemble du spectre mais à certains modes (généralement les fondamentaux). Les renseignements préalables sont constitués dans la majorité des cas par des conditions aux limites particulières à la structure étudiée tels que le bornage des champs les symétries dans la section droite etc ...

Pour le mode fente, des résultats proches de ceux initialement calculés par S.B. COHN sont obtenus en limitant les développements I-2-43 à un seul terme mais à condition de choisir [7]

$$E_{x',1}(x',0) = \begin{cases} j / \left[ \left( \frac{w}{2} \right)^2 - x'^2 \right]^{1/2} & \text{si } |x'| < w/2 \\ 0 & \text{si } |x'| \geq w/2 \end{cases}$$

$$E_{z,1}(x',0) = \begin{cases} x' \left[ \left( \frac{w}{2} \right)^2 - x'^2 \right]^{1/2} & \text{si } |x'| < w/2 \\ 0 & \text{si } |x'| \geq w/2 \end{cases} \quad \text{I-2-51}$$

Ces fonctions respectent la symétrie par rapport à l'axe  $oy'$  pour ce mode. En effet pour le mode fente  $E_z(x',y')$  et  $H_z(x',y')$  sont respectivement des fonctions impaire et paire de la variable  $x'$ . Les fonctions  $E_{x',1}(x',0)$  et  $E_{z,1}(x',0)$  mettent en évidence des discontinuités possibles du champ électrique en  $x' = \pm w/2$  dans le plan de la fente. Tous ces renseignements préalables assurent une certaine efficacité à la méthode que l'on ne retrouve pas dans la recherche des caractéristiques de dispersion des modes supérieurs [41]. Il est vrai que sur ceux-ci, on dispose que de très peu d'éléments. Quelques résultats [12] sur le mode "fente" sont représentés sur la figure I-12.

e) Impédance caractéristique équivalente du mode "fente".

Le calcul de l'impédance caractéristique équivalent en tension est immédiat car il est possible d'exprimer directement le flux de puissance dans la section droite image  $(\alpha, y')$  par application, une nouvelle fois, du théorème de PARSEVAL. Ce flux de puissance s'exprime comme :

$$P = \frac{1}{4\pi} \int_{S(\alpha, y')} \left[ \tilde{E}_x(\alpha, y') \cdot \tilde{H}_y(\alpha, y') - \tilde{E}_y(\alpha, y') \cdot \tilde{H}_x(\alpha, y') \right] d\alpha dy' \quad \text{I-2-50}$$

où les champs  $\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, \tilde{H}_x$  et  $H_y$  sont ceux fournis par les solutions I-2-33. Les constantes  $A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha), D(\alpha), A'(\alpha), B'(\alpha), C'(\alpha)$  et  $D'(\alpha)$  sont connues à partir des quantités  $\tilde{J}_x(\alpha, 0)$  et  $\tilde{J}_z(\alpha, 0)$  elles-mêmes déterminées à partir des quantités  $\tilde{E}_x(\alpha, 0)$  et  $\tilde{E}_z(\alpha, 0)$  pour tout couple  $(\omega, \beta)$ . La tension  $U$  s'obtient quant à elle directement par la circulation de la composante  $E_x(x', 0)$  d'un bord à l'autre de la fente. Ce calcul de l'impédance caractéristique mis en oeuvre pour la première fois par J.B. KNORR et K.D. KUCHLER [12] fournit des résultats en bon accord avec ceux obtenus par S.B. COHN comme le montre la figure I-13. Cet accord semble se détériorer quelque peu pour les grandes valeurs des facteurs de forme  $w/D$ .

### I - 2 - 3 Conclusions

En dépit de son caractère parfois très approximatif, la modélisation de la ligne microfente proposée par S.B. COHN fournit des caractéristiques de dispersion pour le mode "fente" en bon accord avec l'expérimentation

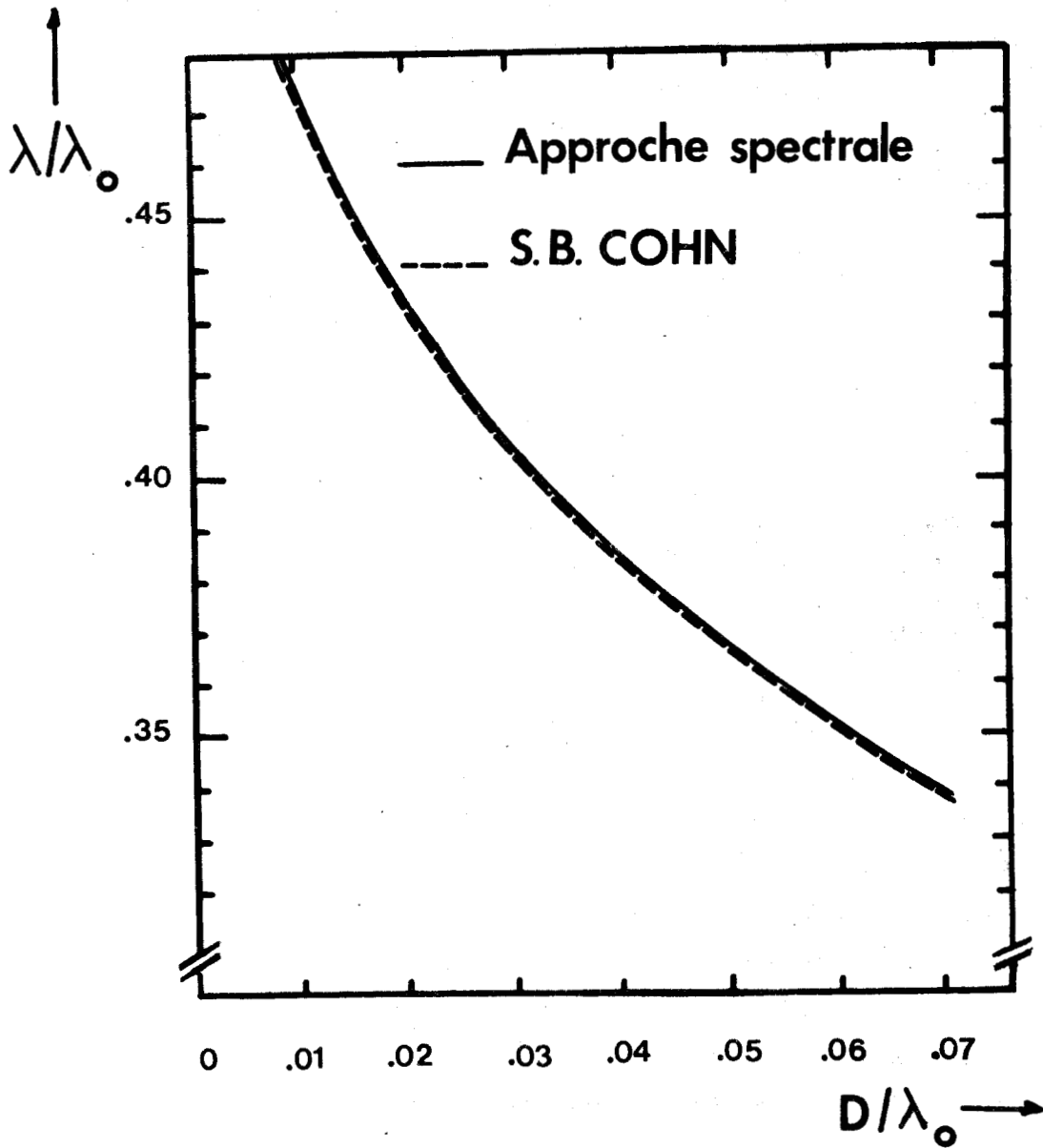


Fig. I-12 Microrfente dissymétrique.

Caractéristiques de dispersion du mode "fente". Comparaison entre la modélisation de S.B. COHN et l'Approche Spectrale  $\epsilon_r = 16.$  ;  $w/D = 1.$

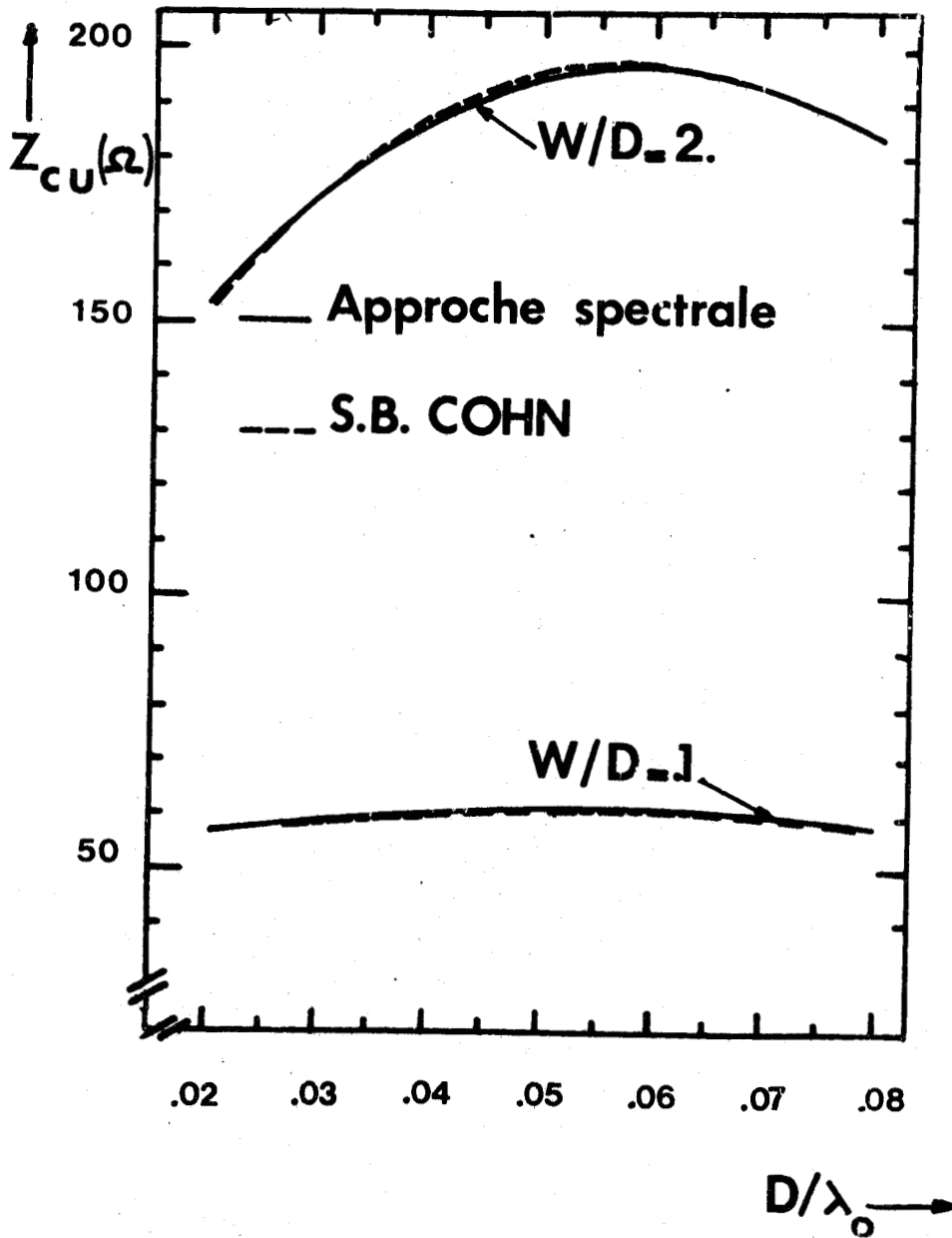


Fig. I-13 Microfente dissymétrique

Impédance caractéristique équivalente du mode "fente". Comparaison entre la modélisation de S.B. COHN et l'Approche Spectrale  $\epsilon_r = 11$ .



ce qui explique son succès. On observe en outre, que cette modélisation ne parvient pas à décrire avec précision la configuration des champs au voisinage de la fente. Elle empêche donc par cette limitation une estimation correcte des paramètres pratiques du mode "fente" tels que les impédances caractéristiques équivalentes en courant (par là même en courant-tension) et les divers coefficients d'atténuation. Il est clair enfin que cette analyse ne peut aussi simplement rendre compte de la propagation des modes supérieurs dans la ligne et pratiquement cela signifie que l'appréciation de la bande passante du mode "fente" s'avère impossible .

La rigueur de l'Approche Spectrale s'oppose à l'empirisme certain qui émane de la modélisation de S.B. COHN. L'efficacité de cette méthode n'a toutefois été prouvée que sur la détermination des caractéristiques de dispersion du seul mode "fente". Face au problème de la caractérisation des modes supérieurs, cette méthode est très certainement potentiellement plus intéressante que la modélisation de S.B. COHN. Il est nécessaire toutefois de disposer sur ces modes supérieurs de renseignements préalables suffisamment précis.

Du point de vue des paramètres pratiques du mode "fente" les deux méthodes d'analyse fournissent aisément l'impédance caractéristique équivalente en tension. L'Approche Spectrale permet en outre d'atteindre directement le coefficient d'atténuation dans le matériau diélectrique puisque son calcul s'effectue sur le guide image par application, sur la formule I-1-76, du théorème de PARSEVAL. On obtient ainsi :

$$\alpha_D = \frac{\sigma}{8\pi P} \int_0^D \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\alpha, y') \cdot \vec{E}^*(\alpha, y') d\alpha dy' \quad \text{I-2-51}$$

A l'opposé, les calculs par l'Approche Spectrale des autres paramètres pratiques du mode "fente" tels que l'impédance caractéristique en "courant" (par là même l'impédance caractéristique en "courant tension") et le coefficient d'atténuation dans le matériau conducteur, sont subordonnés au retour sur les composantes des champs modaux dans l'espace direct.

On décrit ces possibilités inédites qu'offre l'Approche Spectrale au niveau de la détermination des paramètres pratiques du mode "fente" au chapitre III qui termine cette étude.

## CHAPITRE II

NOUVELLE METHODE ANALYTIQUE UTILISANT  
LE POINT DE VUE DES METHODES DE PERTURBATIONS,  
MODELISATION ELLIPTIQUE DES LIGNES A MICROFENTE.

## II - 1 LE POINT DE VUE DES MÉTHODES DE PERTURBATION

On a exposé au paragraphe I-1-6-2 a) le point de vue général des méthodes de perturbations avant d'appliquer cette technique à la détermination des coefficients d'atténuation des modes. Les méthodes de perturbations peuvent aussi être appliquées à la résolution du traitement guide d'onde sur des structures complexes. Il faut pour cela, connaître avec précision le spectre de mode d'un guide "peu différent" de celui que l'on se propose d'étudier ; c'est généralement dans cet esprit que sont appliquées les méthodes de perturbations dans les problèmes de Mécanique Quantique [30].

L'efficacité de ces méthodes repose sur la simplicité que l'on rencontre dans la description du guide "peu différent" et des "différences" elles-mêmes.

## II - 1 - 1 Les guides "peu différents" des lignes à microfentes.

Le guide "peu différent" doit faire partie de la même classe que celle du guide à étudier ; autrement dit, pour une ligne microfente, le guide "peu différent" est un guide ouvert.

Les diverses tentatives de résolution du traitement guide d'onde sur la ligne microfente ont toutes montré la nécessité d'une description précise du comportement du champ électromagnétique au voisinage de la fente. Ainsi, sur les demi-plans conducteurs, les composantes tangentielles du champ magnétique doivent être discontinues de par la présence de courants de conduction de surface. Par ailleurs le champ électrique tangentiel transversal

peut devenir très important, voire même infini, sur les bords minces de la fente de par les charges qui s'y accumulent.

Le traitement guide d'onde appliqué au guide "peu différent" doit donc admettre des solutions analytiques construites de telle sorte, qu'elles satisfassent ces conditions aux limites particulières. Les guides dont les sections droites sont représentées sur la figure II-1 sont en mesure de posséder un spectre de mode qui réponde à ces exigences.

Les sections droites de ces guides sont parfaitement décrites dans le système de coordonnées  $(\xi, \eta, z)$  du cylindre elliptique (figure II-2) que l'on déduit des coordonnées cartésiennes  $(x', y', z')$  par les relations :

$$\begin{aligned} x' &= q \operatorname{ch} \xi \cos \eta \\ y' &= q \operatorname{sh} \xi \sin \eta \\ z' &= z \end{aligned} \quad \text{II-1-1}$$

avec :

$$0 \leq \xi < \infty \quad \text{et} \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi$$

. A chaque valeur de la coordonnée radiale  $\xi$  est associée une ellipse dans le plan  $(x', y')$  tel que :

$$\frac{x'^2}{\operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{y'^2}{\operatorname{sh}^2 \xi} = q^2 \quad \text{II-1-2}$$

. Dans ce même plan  $(x', y')$ , une hyperbole

$$\frac{x'^2}{\cos^2 \eta} - \frac{y'^2}{\sin^2 \eta} = q^2 \quad \text{II-1-3}$$

est associée à chaque valeur de la coordonnée angulaire  $\eta$ .

. Le paramètre  $q$  qui apparait dans toutes les relations précédentes n'est autre que la demi-distance focale  $F_1 F_2$  commune à toutes les ellipses et à toutes les hyperboles.

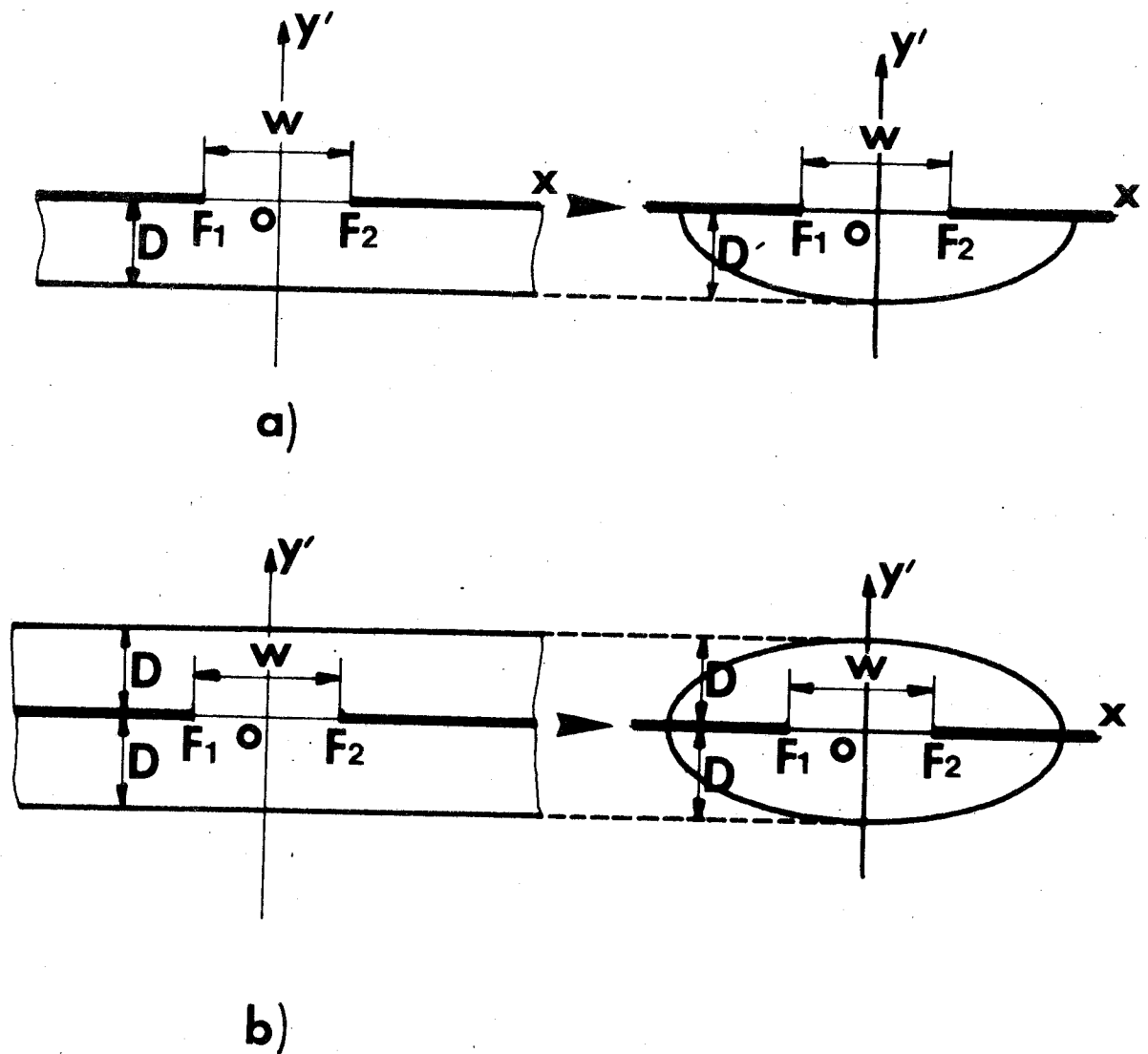


Fig. II-1 Modélisation elliptique des lignes microfentes .

- a) structure dissymétrique
- b) structure symétrique



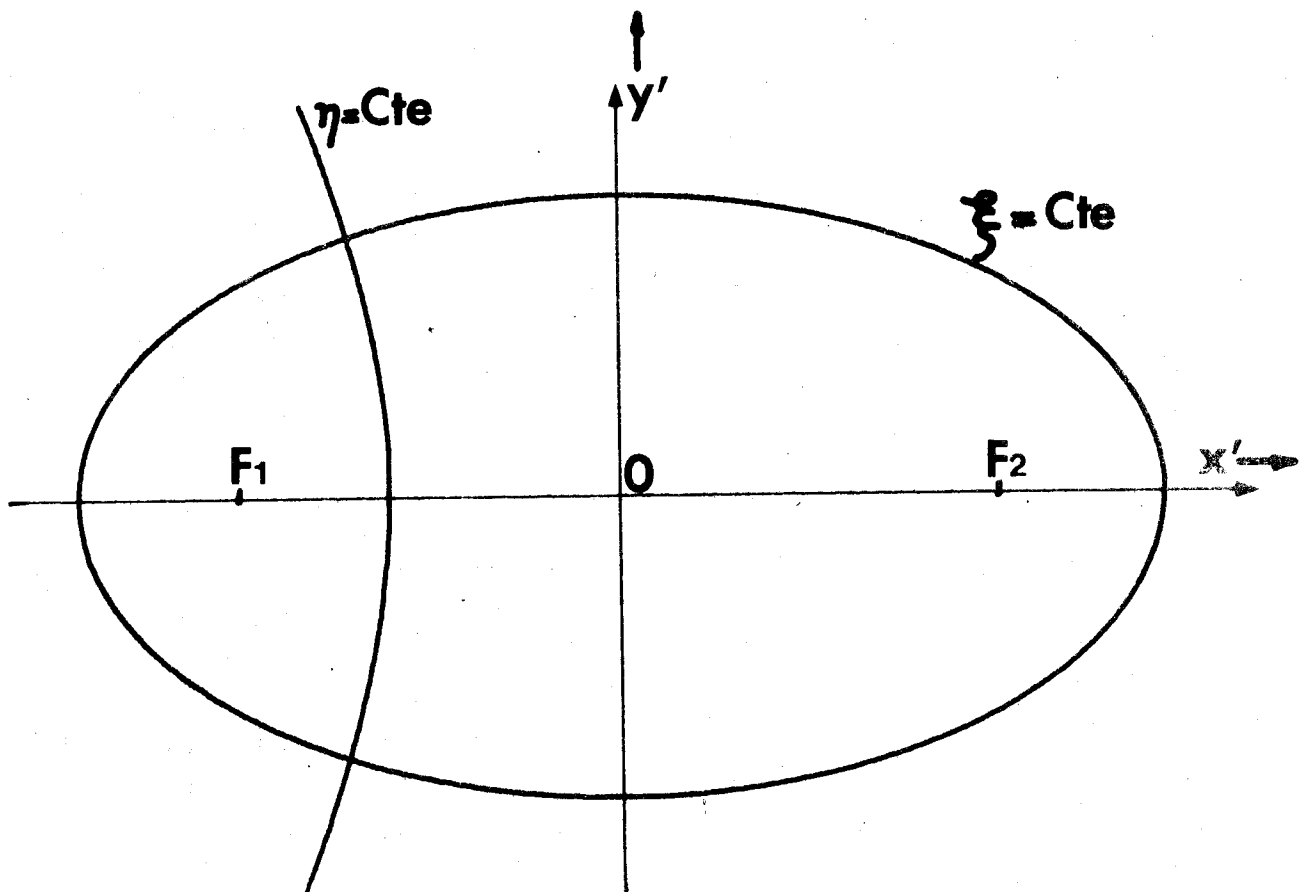


Fig. II-2 Surfaces de coordonnées du système de coordonnées élliptiques

$$2q = F_1 F_2$$



$$\begin{aligned} x' &= q \operatorname{ch} \xi \cos \eta \\ y' &= q \operatorname{sh} \xi \sin \eta \\ z' &= z \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \leq \xi < \infty \\ 0 \leq \eta \leq 2\pi \end{pmatrix}$$

. Sur les modélisations elliptiques des lignes microfentes représentées sur la figure II-1 il est facile de vérifier que si l'on fixe  $W = F_1 F_2$  alors :

. La surface de coordonnée  $\xi = 0$  ;  $0 \leq \eta \leq 2\pi$  représente le plan de la fente  $|x'| \leq W/2$  ;  $y' = 0$ .

. Les deux demi-plans conducteurs  $y' = 0$  ;  $|x'| \geq W/2$  coïncident respectivement avec les deux surfaces de coordonnées  $\eta = 0$  ou  $2\pi$  ;  $0 \leq \xi < \infty$  et  $\eta = \pi$  ;  $0 \leq \xi < \infty$ .

. Les séparatrices de deux milieux diélectriques sont les deux demi-ellipses  $\xi = \xi_0$  ;  $0 \leq \eta \leq \pi$  et  $\xi = \xi_0$  ;  $\pi \leq \eta \leq 2\pi$  dans la structure symétrique (figure II-1-b). Dans la structure dissymétrique (figure II-1-a) cette séparatrice n'est qu'une seule demi-ellipse  $\xi = \xi_0$  ;  $\pi \leq \eta \leq 2\pi$ . Ces séparatrices dans les deux structures peuvent se définir aussi bien par leur excentricité  $e = 1/\text{ch}\xi_0$  que par le facteur de forme  $W/D = 2/\text{sh}\xi_0$ . On donne les lois de correspondance entre ces divers paramètres sur la figure II-3).

De prime abord, la modélisation elliptique des lignes microfentes, peut sembler très hardie puisqu'elle sous-entend une correspondance mode à mode entre le spectre des lignes modélisées et celui des lignes réelles. Tous les problèmes liés à cette correspondance sont abordés dans les paragraphes suivants.

## II - 1 - 2 Le passage des guides "peu différents" aux guides réels.

### a) Description des "différences"

En supposant connu le spectre de mode discret du guide "peu différent", il est clair que l'on peut espérer obtenir celui du guide réel à condition de modifier sa section droite comme il est montré sur la figure II-4 les "différences" consistent donc à remplir d'un matériau de même permittivité les zones hachurées visibles sur la figure II-4 si ces "différences" sont faibles (dans un sens à préciser ultérieurement), elles entrent dans la catégorie des perturbations en volume uniformes et reflectives suivant l'axe du guide au même titre que les pertes dans les matériaux diélectriques décrites au chapitre I. L'uniformité de la perturbation suivant **OZ** justifie

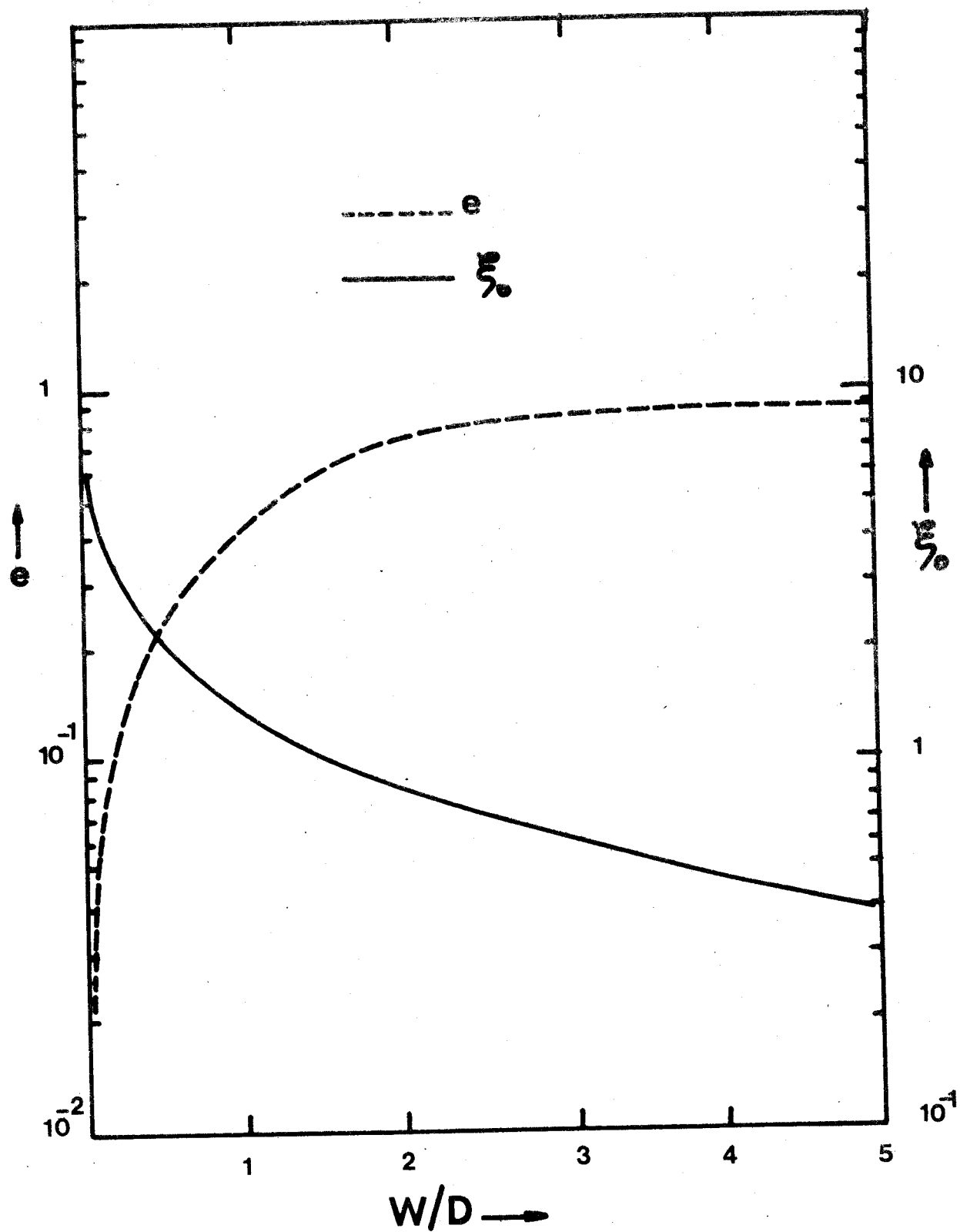
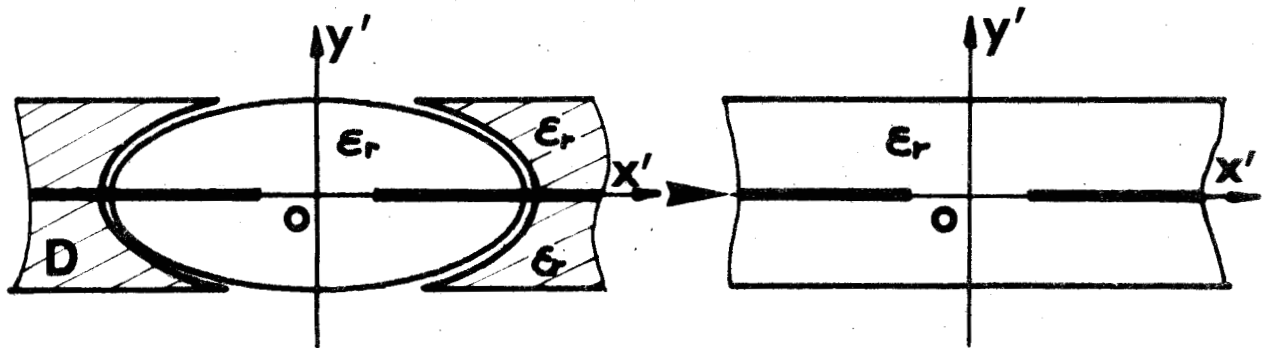
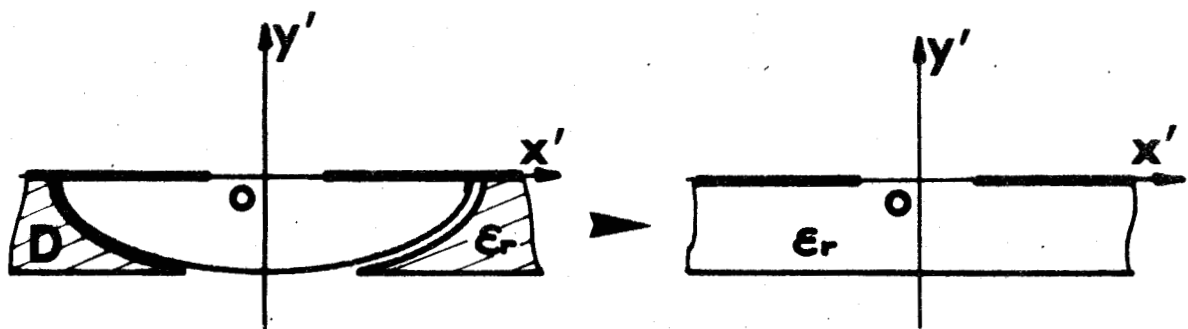


Fig. II-3 Facteurs de forme des structures élliptiques

Relations entre  $\xi_0$ ,  $W/D$  et  $e$



a)



b)

Fig. II-4 Point de vue des méthodes de perturbation.

Description des "différences" entre les lignes microfentes modélisées et les lignes microfentes réelles.



l'appellation de guide pour le système réel. Dans le passage du guide "peu différent" au guide réel il faut donc s'attendre à une simple redistribution de la *puissance réelle* véhiculée par l'ensemble des modes discrets. Ainsi, comme dans le cas des pertes, il n'est donc pas nécessaire de faire appel à la partie continue du spectre du guide "peu différent" pour décrire cette redistribution. En notant (**D**) les zones hachurées de la figure II-4, on décrit finalement ces "différences" comme une perturbation électrique telle que :

$$\vec{J} \begin{cases} j\omega\epsilon_0(\epsilon_r-1)\vec{E} & \text{dans (D)} \\ 0 & \text{en dehors de (D)} \end{cases} \quad \text{II-1-4}$$

désigne le champ électrique de l'onde\* propagé dans le guide réel. Un développement analogue à celui du I-1-6-2 b) établi lors de l'étude des pertes dans les matériaux diélectriques conduit aux expressions des coefficients  $A_{p,q}$ :

$$A_{p,q} = \frac{j\omega\epsilon_0(\epsilon_r-1)}{4P_p} \int_D \vec{E}_{q,0} \vec{E}_{p,0} dD \quad \text{II-1-5}$$

Ces coefficients, qui rendent compte de la perturbation sur le spectre du guide "peu différent", interviennent dans l'équation séculaire I-1-72.

En application de la remarque précédente concernant les perturbations uniformes en  $z$ , il est clair que les indices  $p$  et  $q$  désignent encore ici exclusivement des nombre entiers.

#### b) Importance des "différences"

Dans le passage du guide "peu différent" au guide réel, les "différences" pour le mode ( $p$ ) sont considérées comme faibles au *premier ordre* quand la condition suivante est remplie :

$$|A_{p,q}| \ll |A_{p,p}| \ll |\beta_p - \beta_q| \quad \text{II-1-6}$$

l'indice  $q$  désigne ici le mode ( $q$ ) qui est le plus proche voisin du mode ( $p$ )

(\*) A ce stade la séparation en "mode" n'est pas encore intervenue.

dans le spectre de mode discret du guide "peu différent".

Lorsque ce critère de faiblesse est satisfait, le mode ( $p$ ) se retrouve dans le guide réel avec la constante de phase  $\beta'_p$  telle que :

$$\beta'_p \approx \beta_p + jA_{p,p}$$

II-1-7

Dans ce passage du guide "peu différent" au guide réel, le mode ( $p$ ) conserve (au premier ordre) sa configuration spatiale de champs.

L'énoncé même du critère de faiblesse II-1-6, montre que ce n'est qu'"à posteriori" que l'on peut justifier complètement une approche de résolution du traitement guide d'onde par perturbation. Dans le problème, présent, étant donné la nature de la perturbation et la région de la section droite où elle agit (voir fig.II-4) on peut penser que le critère de faiblesse sur le mode ( $p$ ) d'une ligne à microfente modélisée est d'autant plus vite satisfait que ce mode se situe en fréquence suffisamment loin de sa coupure. Il faut en effet que l'extension de ses champs à l'extérieur du "coeur" soit réduite de sorte que l'énergie captée par la perturbation soit faible vis à vis de celle transportée par le mode.

c) Correspondance entre les spectres discrets des guides "peu différents" et réels.

La correspondance mode à mode entre les parties discrètes des spectres des guides "peu différents" et réels mérite quelques remarques. Cette correspondance mode à mode se conçoit, aisément sur les exemples académiques présentés sur les figures II-5 a et b. Sur la figure II-5 a, le point de vue des méthodes de perturbation sert à construire le spectre de mode du guide diélectrique elliptique à partir de celui du spectre du guide circulaire. Le problème inverse est décrit sur la figure II-5-b. Par contre, cette correspondance n'apparaît pas immédiatement dans les autres exemples (tout aussi académiques que les précédents !) que présentent les figures II.6 a et b. Cette fois le point de vue des méthodes de perturbation sert à construire le spectre de modes du guide plan diélectrique à partir de celui des guides circulaire et elliptique. Elle se conçoit mieux dès lors que les modes du guide plan diélectrique sont considérés comme dégénérés et que l'ordre de dégénérescences de chacun de ces

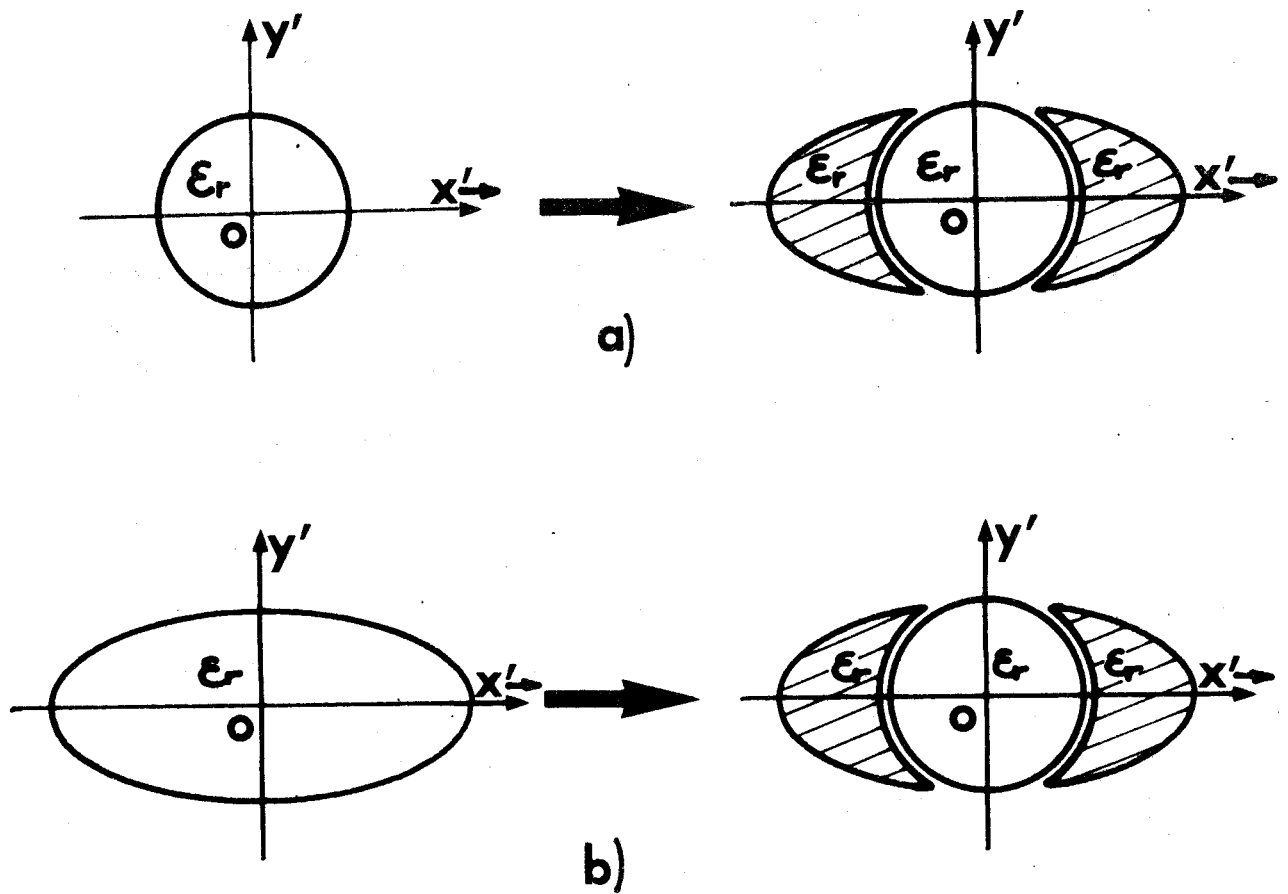


Fig. II-5 Point de vue des méthodes de perturbations.

Correspondance mode à mode entre les spectres discrets des guides diélectriques circulaire et élliptique

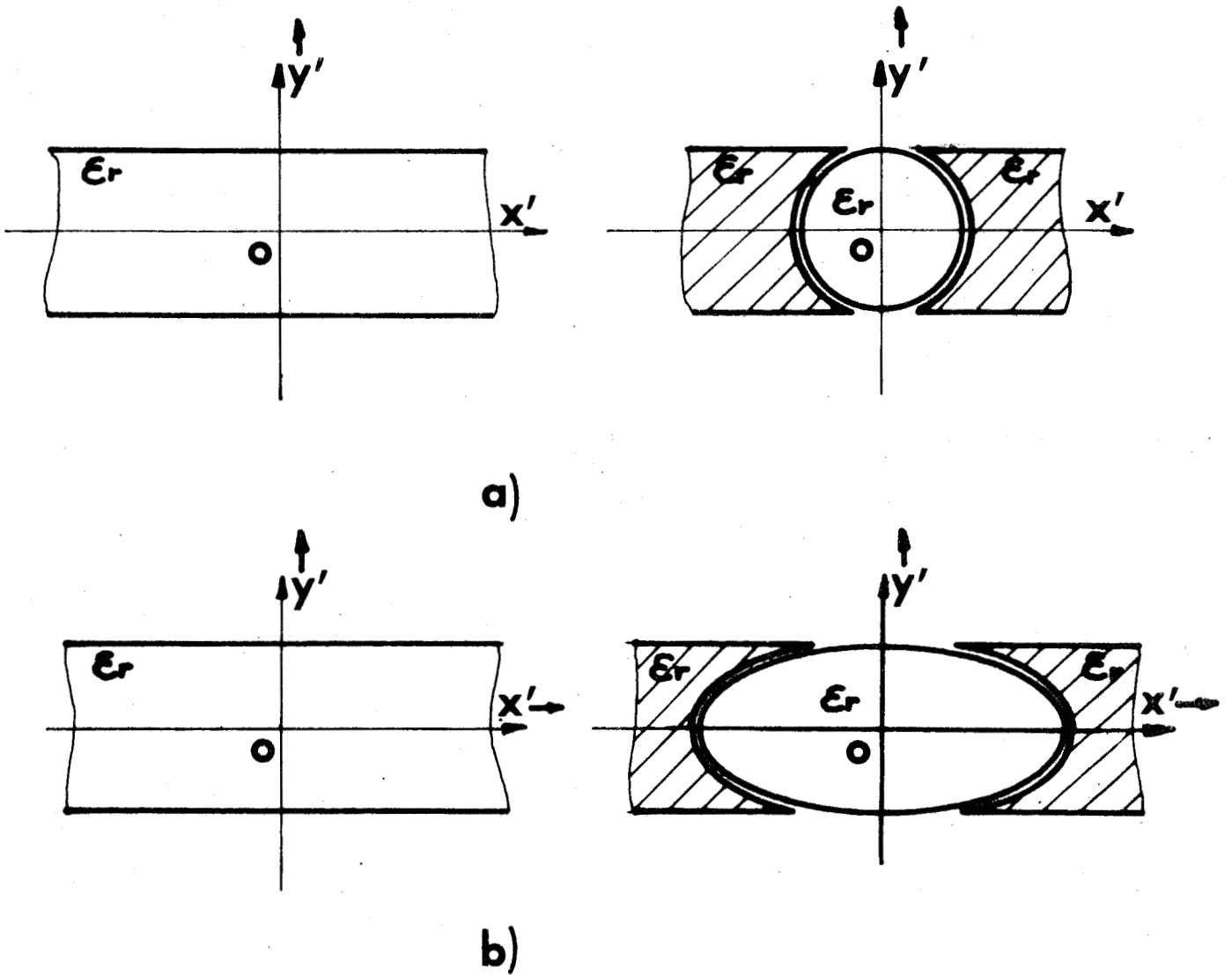


Fig. II-6 Point de vue des méthodes de perturbations.

Correspondance mode à mode entre les spectres discrets des guides diélectriques plan ( $\partial/\partial x' = 0$ ), circulaire et elliptique.



modes est infini. Cette dégénérescence produite par la condition  $\frac{\partial}{\partial x'} = 0$  n'est, il faut le préciser, jamais réalisée pratiquement. On trouve une confirmation de cette dégénérescence des modes discrets dans des structures planes ouvertes dans l'approche approximative des guides rectangulaires diélectriques mise en oeuvre par E.A.J. MARCATILI [42]. Des résultats obtenus par cet auteur, montrent en effet clairement cette amorce de dégénérescence dans le cas de géométries très applaties.

Ces quelques considérations, ont pour seul but de renforcer l'idée que les spectres discrets des structures planaires sont en général très "riches" en modes. Il faut tenir compte de cette propriété importante dans toutes les tentatives de résolution numérique complète du traitement guide d'onde sur ce type de structure.

## II - 2 LE GUIDE DIÉLECTRIQUE ELLIPTIQUE

Les concepts développés au paragraphe précédent laisse entrevoir le rôle essentiel qui va être tenu dans notre approche, par le modèle de traitement du guide d'onde diélectrique de section droite elliptique [43] [44]. En dépit du caractère analytique de ce modèle de traitement il faut préciser qu'à ce jour le spectre de mode discret de cette structure n'est pas encore connu complètement. Les travaux publiés par C. YEH [43] ne portent en effet que sur les caractéristiques de dispersion des modes fondamentaux à fréquence de coupure nulle. La raison de cette insuffisance réside dans l'extrême complexité que l'on rencontre dans la résolution des équations caractéristiques modales. Les paragraphes qui suivent reprennent en le complétant le modèle de traitement proposé par C. YEH. A l'issue d'une analyse très complète on parvient néanmoins à montrer que dans le domaine basse fréquence du spectre on peut substituer à l'étude générale très complexe une étude mode par mode évidemment beaucoup plus simple.

### II - 2 - 1 Formulation générale du traitement guide d'onde

#### a) Le système d'équation à résoudre

Le traitement électromagnétique nécessite ici la résolution des équations I-1-9 qui s'expriment dans le système de coordonnées elliptiques  $(\xi, \eta, z)$  comme :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + q^2 k_l^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) \right\} \begin{Bmatrix} E_{z,l} \\ H_{z,l} \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{II-2-1}$$

avec  $k_l^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{r,l} - \beta^2$  II-2-2

. si  $\xi_0 \leq \xi < \infty$  et  $0 \leq \eta \leq 2\pi$  alors  $l = 0$  et  $\epsilon_{r,0} = 1$

. si  $0 \leq \xi \leq \xi_0$  et  $0 \leq \eta \leq 2\pi$  alors  $l = 1$  et  $\epsilon_{r,1} = \epsilon_r$

Dans chacune des régions ( $l = 0, 1$ ) (voir figure II.7) on écrit les solutions de I-2-1 sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} E_{z,l} \\ H_{z,l} \end{Bmatrix} = R_l(\xi) \cdot \Theta_l(\eta) \quad \text{II-2-3}$$

dans laquelle  $R_l(\xi)$  et  $\Theta_l(\eta)$  sont solutions des équations différentielles :

$$\frac{d^2 R_l}{d\xi^2} - (n^2 - q^2 k_l^2 \operatorname{ch}^2 \xi) R_l = 0 \quad \text{II-2-4}$$

$$\frac{d^2 \Theta_l}{d\eta^2} + (n^2 - q^2 k_l^2 \cos^2 \eta) \Theta_l = 0$$

où  $n^2$  est la constante de séparation. En posant :

$$c_l^2 = n^2 - q^2 k_l^2 \quad \text{II-2-5}$$

$$y_l^2 = q^2 k_l^2 / 4$$

les équations II-2-4 se transforment en :

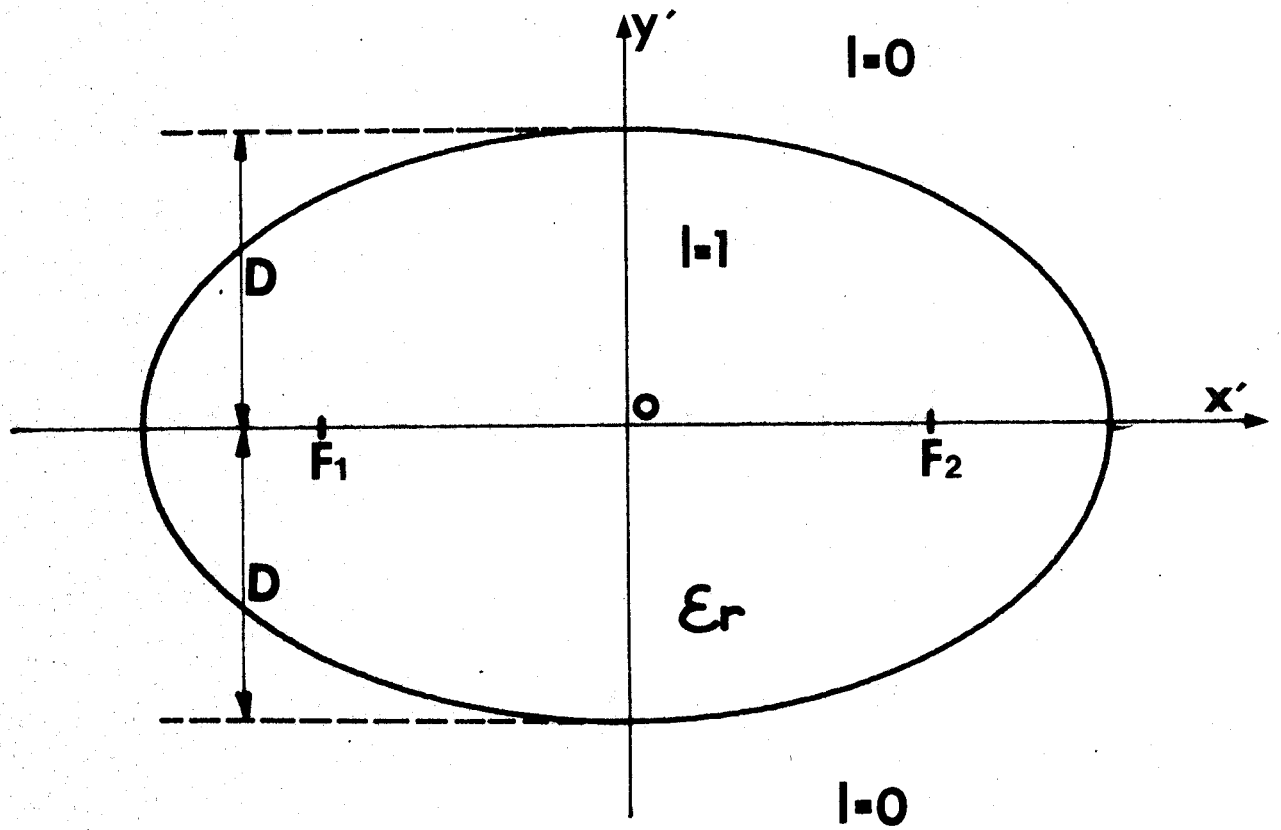


Fig. II-7 Section droite du guide diélectrique elliptique

$$\frac{d^2 R_l}{d\xi^2} - (c_l^2 - 2\gamma_l^2 \operatorname{ch} 2\xi) R_l = 0 \quad \text{II-2-6}$$

$$\frac{d^2 \Theta_l}{d\eta^2} - (c_l^2 - 2\gamma_l^2 \cos 2\eta) \Theta_l = 0 \quad \text{II-2-7}$$

On reconnaît en II-2-6 l'équation de MATHIEU et en II-2-7 l'équation de MATHIEU modifiée [45].

b) Application des conditions aux limites

Cette application est plus aisée lorsque l'on sait décrire avec précision le passage progressif d'une structure de section droite elliptique à une structure de section droite circulaire. Ainsi d'après les relations II-1-1 les coordonnées transversales elliptiques sont reliées aux coordonnées transversales cylindriques  $(r, \theta)$  par :

$$r \cos \theta = q \operatorname{ch} \xi \cos \eta \quad \text{II-2-8}$$

$$r \sin \theta = q \operatorname{sh} \xi \sin \eta$$

donc :

$$r = q (\operatorname{ch}^2 \xi - \sin^2 \eta)^{1/2} = q (\operatorname{sh}^2 \xi + \cos^2 \eta)^{1/2} \quad \text{II-2-9}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{th} \xi \cdot \operatorname{tg} \eta$$

En conséquence lorsque  $\xi$  devient grand on obtient la correspondance :

$$r \longrightarrow q \operatorname{ch} \xi \sim q \operatorname{sh} \xi$$

$$\theta \longrightarrow \eta$$

II-2-10

Pour passer d'une séparatrice elliptique de demi petit axe  $D = q \operatorname{sh} \xi_0$  à

séparatrice circulaire de rayon  $D$  il faut donc que simultanément  $\xi_0$  tende vers l'infini et que  $q$  tende vers zéro ; le produit  $qsh\xi_0$  doit demeurer constant et égal à  $D$ . A partir des équations II-2-5 et de la remarque précédente, il devient clair que le passage d'une section droite elliptique à une section droite circulaire s'effectue en imposant la condition suivante :

$$|\gamma_2^2| \rightarrow 0$$

II-2-11

. périodicité des champs.

Dans l'étude du guide circulaire diélectrique, la périodicité de des champs recherchés a pour conséquence une restriction sur le choix de la constante de séparation  $n$ . Celle-ci doit être en effet choisie parmi la suite naturelle des nombres entiers (la propriété de reflectivité du guide permet encore de restreindre ce choix aux valeurs entières et positives pour des ondes directes). Ici, les conséquences de la périodicité vont porter sur la constante de séparation  $c$ . Ainsi quand  $\gamma_2^2$  (négatif ou positif) est différent de zéro, une valeur caractéristique et une seule détermine une solution angulaire périodique de l'équation de MATHIEU II-2-7. Cette solution périodique à une période de  $2\pi$  et tend soit vers  $\cos n\eta$  soit vers  $\sin n\eta$  lorsque  $|\gamma_2^2| \rightarrow 0$ . Les valeurs caractéristiques  $c^2(\gamma_2^2)$  conduisant à ces solutions angulaires périodiques sont notées  $a_n(|\gamma_2^2|)$  et  $b_n(|\gamma_2^2|)$  selon qu'elles s'identifient respectivement à  $\cos n\eta$  et à  $\sin n\eta$  quand  $|\gamma_2^2|$  tend vers zéro.

. bornage des champs

La condition de rayonnement des guides ouverts est vérifiée pour les champs à l'extérieur du "coeur" diélectrique. Elle impose :

$$k_0^2 < 0 \quad \text{et} \quad \gamma_0^2 < 0$$

A l'intérieur du "coeur" les champs sont bornés (absence de discontinuités) et en particulier en  $\xi = 0$ .

. Symétries dans la section droite

On fait jouer un rôle particulier au grand axe de l'ellipse par rapport auquel on mesure  $\eta$ . Ce grand axe est un axe de symétrie vraie pour la structure. Cette symétrie décrite par la transformation  $\eta \rightarrow 2\pi - \eta$ . impose l'existence de deux types de solutions indépendantes pour les équations II-2-7 à savoir :

. des solutions impaires en  $\eta$  telles que :

$$E_{z,l}^{(i)}(\xi, \eta) = - E_{z,l}^{(i)}(\xi, 2\pi - \eta)$$

II-2-15

$$H_{z,l}^{(i)}(\xi, \eta) = H_{z,l}^{(i)}(\xi, 2\pi - \eta)$$

. des solutions paires en  $\eta$  telles que :

$$E_{z,l}^{(p)}(\xi, \eta) = E_{z,l}^{(p)}(\xi, 2\pi - \eta)$$

II-16

$$H_{z,l}^{(p)}(\xi, \eta) = - H_{z,l}^{(p)}(\xi, 2\pi - \eta)$$

La présence de la symétrie par rapport au petit axe de l'ellipse, que l'on décrit par la transformation  $(\xi, \eta) \rightarrow (\xi, \pi - \eta)$  va entraîner une subdivision nouvelle à l'intérieur de chacune des deux classes d'ondes précédentes. On opère cette subdivision après la construction des solutions générales des équations II-2-1. Compte tenu des conditions aux limites précédentes, les solutions générales des équations II-2-1 s'expriment sous les formes suivantes :

. dans la région (0) ;  $\xi_0 \leq \xi < \infty$  ;  $0 \leq \eta \leq 2\pi$  :

$$E_{z,0} = \sum_n \begin{cases} P_n^{(p)} c_n^*(\eta, \gamma_0^2) \cdot Fek_n(\xi, \gamma_0^2) & \text{(modes pairs)} \\ P_n^{(i)} s_n^*(\eta, \gamma_0^2) \cdot Gek_n(\xi, \gamma_0^2) & \text{(modes impairs)} \end{cases}$$

$$H_{z,0} = \sum_n \begin{cases} L_n^{(P)} se_n^*(\eta, \gamma_0^2) \cdot Gek_n(\xi, \gamma_0^2) & \text{(modes pairs)} \\ L_n^{(i)} ce_n^*(\eta, \gamma_0^2) \cdot Fek_n(\xi, \gamma_0^2) & \text{(modes impairs) II-2-17} \end{cases}$$

. dans la région (1) ;  $0 \leq \xi \leq \xi_0$  ;  $0 \leq \eta \leq 2\pi$  :

$$E_{z,1} = \sum_n \begin{cases} B_n^{(P)} ce_n(\eta, \gamma_1^2) \cdot Ce_n(\xi, \gamma_1^2) & \text{(modes pairs)} \\ B_n^{(i)} se_n(\eta, \gamma_1^2) \cdot Se_n(\xi, \gamma_1^2) & \text{(modes impairs)} \end{cases}$$

$$H_{z,1} = \sum_n \begin{cases} A_n^{(P)} se_n(\eta, \gamma_1^2) \cdot Se_n(\xi, \gamma_1^2) & \text{(modes pairs)} \\ A_n^{(i)} ce_n(\eta, \gamma_1^2) \cdot Ce_n(\xi, \gamma_1^2) & \text{(modes impairs) II-2-18} \end{cases}$$

où :

$$\gamma_1^2 = (\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r - \beta^2) q^2 / 4$$

$$\gamma_0^2 = (\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \beta^2) q^2 / 4$$

II-2-19

Dans les expressions de ces solutions les fonctions angulaires  $ce_n^*(\eta, \gamma_0^2)$ ,  $se_n^*(\eta, \gamma_0^2)$ ,  $ce_n(\eta, \gamma_1^2)$  et  $se_n(\eta, \gamma_1^2)$  sont les fonctions de MATHIEU d'ordre entier. Les fonctions radiales  $Ce_n(\xi, \gamma_1^2)$ ,  $Se_n(\xi, \gamma_1^2)$ ,  $Fek_n(\xi, \gamma_0^2)$  et  $Gek_n(\xi, \gamma_0^2)$  sont les fonctions de MATHIEU modifiées associées aux fonctions angulaires précédentes. Les représentations des fonctions de MATHIEU radiales par des séries de produits de fonctions de BESSEL\* justifient la restriction du paramètre entier  $n$  aux valeurs positives. Les constantes arbitraires  $A_n^{(P),(i)}$ ,  $B_n^{(P),(i)}$ ,  $L_n^{(P),(i)}$  et  $P_n^{(P),(i)}$  sont reliées entre elles par les conditions de continuité.

c) Application des conditions de continuité.

On décrit ci-dessous l'application des conditions de continuité seulement dans le cas des solutions impaires, étant entendu que dans le cas des solutions

(\*) Voir ANNEXE I

paires on procède d'une manière identique. On écrit donc successivement :

$$\sum_n A_n^{(i)} c_n(\eta, \gamma_1^2) C_n(\xi_0, \gamma_0^2) = \sum_n L_n^{(i)} c_n^*(\eta, \gamma_0^2) Fek_n(\xi_0, \gamma_0^2) \quad \text{II-2-20}$$

$$\sum_n B_n^{(i)} s_n(\eta, \gamma_1^2) S_n(\xi_0, \gamma_0^2) = \sum_n P_n^{(i)} s_n^*(\eta, \gamma_0^2) Gek_n(\xi_0, \gamma_0^2) \quad \text{II-2-21}$$

$$\begin{aligned} \sum_n B_n^{(i)} s_n'(\eta, \gamma_1^2) S_n(\xi_0, \gamma_0^2) - \frac{\omega \mu_0}{\beta} \sum_n A_n^{(i)} c_n(\eta, \gamma_1^2) C_n'(\xi_0, \gamma_0^2) = \\ - \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \left\{ \sum_n P_n^{(i)} s_n^*(\eta, \gamma_0^2) Gek_n(\xi_0, \gamma_0^2) - \frac{\omega \mu_0}{\beta} \sum_n L_n^{(i)} c_n^*(\eta, \gamma_0^2) Fek_n(\xi_0, \gamma_0^2) \right\} \quad \text{II-2-22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_n A_n^{(i)} c_n'(\eta, \gamma_1^2) C_n(\xi_0, \gamma_0^2) + \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_r}{\beta} \sum_n B_n^{(i)} s_n(\eta, \gamma_1^2) S_n'(\xi_0, \gamma_0^2) = \\ - \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \left\{ \sum_n L_n^{(i)} c_n^{*'}(\eta, \gamma_0^2) Fek_n(\xi_0, \gamma_0^2) + \frac{\omega \epsilon_0}{\beta} \sum_n P_n^{(i)} s_n^*(\eta, \gamma_0^2) Gek_n'(\xi_0, \gamma_0^2) \right\} \quad \text{II-2-23} \end{aligned}$$

On multiplie alors membre à membre :

. Les équations (II-2-20) et II-2-22 par  $c_m(\eta, \gamma_1^2)$

. Les équations (II-2-21) et II-2-23 par  $s_m(\eta, \gamma_1^2)$

pour ensuite les intégrer de 0 à  $2\pi$  de façon à éliminer la dépendance en  $\eta$  de ces équations de continuité qui deviennent :

$$A_m^{(i)} C_m(\xi_0, \gamma_0^2) = \sum_n L_n^{(i)} Fek_n(\xi_0, \gamma_0^2) \alpha_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) \quad \text{II-2-24}$$

$$B_m^{(i)} S_m(\xi_0, \gamma_0^2) = \sum_n P_n^{(i)} Gek_n(\xi_0, \gamma_0^2) \beta_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) \quad \text{II-2-25}$$

$$\frac{\omega \mu_0}{\beta} A_m^{(i)} C_m'(\xi_0, \gamma_0^2) - \left(1 + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|}\right) \sum_n B_n^{(i)} S_n(\xi_0, \gamma_0^2) \nu_{n,m}(\gamma_1^2)$$

II-2-26

$$= - \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \frac{\omega \mu_0}{\beta} \sum_n L_n^{(i)} Fek_n'(\xi_0, \gamma_0^2) \alpha_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$$



$$\frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_r}{\beta} B_m^{(i)} S e_n'(\xi_0, \gamma_1^2) + \left(1 + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|}\right) \sum_n' A_n^{(i)} C e_n(\xi_0, \gamma_1^2) \chi_{n,m}(\gamma_1^2)$$

II-2-27

$$\text{où } = -\frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \frac{\omega \epsilon_0}{\beta} \sum_n' P_n^{(i)} G e k_n'(\xi_0, \gamma_0^2) \beta_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$$

$$\alpha_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) = \int_0^{2\pi} c e_n^*(\eta, \gamma_0^2) c e_m(\eta, \gamma_1^2) d\eta \Bigg/ \int_0^{2\pi} c e_m^2(\eta, \gamma_1^2) d\eta$$

$$\beta_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) = \int_0^{2\pi} s e_n^*(\eta, \gamma_0^2) s e_m(\eta, \gamma_1^2) d\eta \Bigg/ \int_0^{2\pi} s e_m^2(\eta, \gamma_1^2) d\eta$$

$$\nu_{n,m}(\gamma_1^2) = \int_0^{2\pi} s e_n'(\eta, \gamma_1^2) c e_m(\eta, \gamma_1^2) d\eta \Bigg/ \int_0^{2\pi} c e_m^2(\eta, \gamma_1^2) d\eta$$

$$\chi_{n,m}(\gamma_1^2) = \int_0^{2\pi} c e_n'(\eta, \gamma_1^2) s e_m(\eta, \gamma_1^2) d\eta \Bigg/ \int_0^{2\pi} s e_m^2(\eta, \gamma_1^2) d\eta \quad \text{II-2-28}$$

Le signe  $\sum'$  signifie que la sommation a lieu sur les entiers  $n$  pairs ou impairs suivant que  $m$  est pair ou impair. En simplifiant les équations II-2-26 et II-2-27 et en opérant les identifications :

$$g_{n,m} = \frac{\omega \mu_0}{\beta} \alpha_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) F e k_n(\xi_0, \gamma_0^2) \left\{ \frac{C e_n'(\xi_0, \gamma_1^2)}{C e_n(\xi_0, \gamma_1^2)} + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \frac{F e k_n'(\xi_0, \gamma_0^2)}{F e k_n(\xi_0, \gamma_0^2)} \right\}$$

$$h_{n,m} = -\left(1 + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|}\right) G e k_n(\xi_0, \gamma_0^2) \sum_r' \nu_{r,m}(\gamma_1^2) \cdot \beta_{n,r}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$$

$$t_{n,m} = \left(1 + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|}\right) F e k_n(\xi_0, \gamma_0^2) \sum_r' \chi_{r,m}(\gamma_1^2) \alpha_{n,r}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$$

$$s_{n,m} = \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_r}{\beta} \beta_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) G e k_n(\xi_0, \gamma_0^2) \left\{ \frac{S e_n'(\xi_0, \gamma_1^2)}{S e_n(\xi_0, \gamma_1^2)} + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \frac{1}{\epsilon_r} \frac{G e k_n'(\xi_0, \gamma_0^2)}{G e k_n(\xi_0, \gamma_0^2)} \right\} \quad \text{II-2-29}$$

Les équations de continuité s'expriment alors sous la forme de deux équations linéaires à un nombre infini de termes dont les inconnues sont

les  $L_n^{(i)}$  et les  $P_n^{(i)}$  :

$$\sum_n (L_n^{(i)} g_{n,m} + P_n^{(i)} h_{n,m}) = 0$$

$$\sum_n (L_n^{(i)} t_{n,m} + P_n^{(i)} s_{n,m}) = 0$$

II-2-30

Le déterminant de ces équations doit s'annuler si la solution recherchée n'est pas triviale. L'expression qui en résulte est l'équation caractéristique modale ; ses racines permettent de calculer la constante de phase  $\beta$  .

Ainsi pour les modes  $m = 1, 3, 5 \dots$  etc... on a :

$g_{1,1}$	$h_{1,1}$	$g_{3,1}$	$h_{3,1}$	$g_{5,1}$	$h_{5,1}$	.	
$t_{1,1}$	$s_{1,1}$	$t_{3,1}$	$s_{3,1}$	$t_{5,1}$	$s_{5,1}$	.	
$g_{1,3}$	$h_{1,3}$	$g_{3,3}$	$h_{3,3}$	$g_{5,3}$	$h_{5,3}$	.	
$t_{1,3}$	$s_{1,3}$	$t_{3,3}$	$s_{3,3}$	$t_{5,3}$	$s_{5,3}$	.	= 0
$g_{1,5}$	$h_{1,5}$	$g_{3,5}$	$h_{3,5}$	$g_{5,5}$	$h_{5,5}$	.	
$t_{1,5}$	$s_{1,5}$	$t_{3,5}$	$s_{3,5}$	$t_{5,5}$	$s_{5,5}$	.	
.	.	.	.	.	.	.	

II-2-31

tandis que pour les modes  $m = 0, 2, 4$  etc... on a :

$g_{0,0}$	$g_{2,0}$	$h_{2,0}$	$g_{4,0}$	$h_{4,0}$	.
$g_{0,2}$	$g_{2,2}$	$h_{2,2}$	$g_{4,2}$	$h_{4,2}$	.
$t_{0,2}$	$t_{2,2}$	$s_{2,2}$	$t_{4,2}$	$s_{4,2}$	.
$g_{0,4}$	$g_{2,4}$	$h_{2,4}$	$g_{4,4}$	$h_{4,4}$	.
$t_{0,4}$	$t_{2,4}$	$s_{2,4}$	$t_{4,4}$	$s_{4,4}$	.
.	.	.	.	.	.

= 0

II-2-32

L'inexistence des paramètres

- $\beta_{m,n}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$  pour  $m = n = 0$
- $\gamma_{m,n}(\gamma_1^2)$  pour  $n = 0$  quelque soit  $m$  pair
- $\chi_{m,n}(\gamma_1^2)$  pour  $m = 0$  quelque soit  $n$  pair

II-2-33

explique l'absence d'une ligne et d'une colonne dans le déterminant relatif aux modes  $m = 0, 2, 4$  etc...

La différentiation des modes impairs (dans la symétrie plane  $y' = 0$ ) 1, 3, 5 etc... et 0, 2, 4 etc... s'effectue par leur parité différente dans la symétrie plane  $x' = 0$ . Les modes 0, 2, 4 etc... sont pairs en  $x'$  autrement dit :

$$E_{z,l}^{(i)}(\xi, \eta) = E_{z,l}^{(i)}(\xi, \pi - \eta)$$

$$H_{z,l}(\xi, \eta) = -H_{z,l}(\xi, \pi - \eta)$$

II-2-34

Les modes 1, 3, 5 etc... sont eux impairs en  $x'$  et :

$$E_{z,l}(\xi, \eta) = -E_{z,l}(\xi, \pi - \eta)$$

II-2-35

$$H_{z,l}(\xi, \eta) = H_{z,l}(\xi, \pi - \eta)$$

On obtient pour les solutions paires des résultats tout à fait analogues. Les équations de continuité s'expriment encore sous la forme de deux équations linéaires à un nombre infini de termes dont les inconnues sont les  $L_n^{(P)}$  et les  $P_n^{(P)}$

$$\sum_n' (L_n^{(P)} g_{n,m}^* + P_n^{(P)} h_{n,m}^*)$$

II-2-36

$$\sum_n' (L_n^{(P)} t_{n,m}^* + P_n^{(P)} s_{n,m}^*)$$

Les coefficients de ces équations sont définis comme il suit :

$$g_{n,m}^* = \frac{\omega \mu_0}{\beta} \beta_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) \text{Gek}_n(\xi_0, \gamma_0^2) \left\{ \frac{S e_m'(\xi_0, \gamma_1^2)}{S e_m(\xi_0, \gamma_1^2)} + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \frac{\text{Gek}_n'(\xi_0, \gamma_0^2)}{\text{Gek}_n(\xi_0, \gamma_0^2)} \right\}$$

$$h_{n,m}^* = - \left( 1 + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \right) \text{Fek}_n(\xi_0, \gamma_0^2) \sum_r' \chi_{r,m}(\gamma_1^2) \alpha_{n,r}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$$

$$t_{n,m}^* = \left( 1 + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \right) \text{Gek}_n(\xi_0, \gamma_0^2) \sum_r' \nu_{r,m}(\gamma_1^2) \beta_{n,r}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$$

$$s_{n,m}^* = \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_r}{\beta} \alpha_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) \text{Fek}_n(\xi_0, \gamma_0^2) \left\{ \frac{C e_m'(\xi_0, \gamma_1^2)}{C e_m(\xi_0, \gamma_1^2)} + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \frac{1}{\epsilon_r} \frac{\text{Fek}_n'(\xi_0, \gamma_0^2)}{\text{Fek}_n(\xi_0, \gamma_0^2)} \right\}$$

II-2-37

Pour les modes pairs  $m = 1, 3, 5$  etc... le déterminant des équations de continuité s'écrit comme celui des modes impairs  $m = 1, 3, 5$  etc..., en réalisant la substitution:

$$g_{m,n} \longrightarrow g_{m,n}^*$$

$$h_{m,n} \longrightarrow h_{m,n}^*$$

$$t_{m,n} \longrightarrow t_{m,n}^*$$

$$s_{m,n} \longrightarrow s_{m,n}^*$$

II-2-38

Le déterminant des modes pairs  $m = 0, 2, 4$  etc... adopte une forme légèrement différente de II-2-32 essentiellement au niveau des premières lignes et colonnes à cause des relations II-2-33. Il s'écrit :

$s_{0,0}^*$	$t_{2,0}^*$	$s_{2,0}^*$	$t_{4,0}^*$	$s_{4,0}^*$	•
$h_{0,2}^*$	$g_{2,2}^*$	$h_{2,2}^*$	$g_{4,2}^*$	$h_{4,2}^*$	•
$s_{0,2}^*$	$t_{2,2}^*$	$s_{2,2}^*$	$t_{4,2}^*$	$s_{4,2}^*$	•
$h_{0,4}^*$	$g_{2,4}^*$	$h_{2,4}^*$	$g_{4,4}^*$	$h_{4,4}^*$	•
$s_{0,4}^*$	$t_{2,4}^*$	$s_{2,4}^*$	$t_{4,4}^*$	$s_{4,4}^*$	•
•	•	•	•	•	•

= 0

II-2-39

Il apparaît donc que les équations caractéristiques modales sont des

fonctions extrêmement complexes des paramètres  $\beta, \omega, \epsilon_r$  et  $\xi_0$  de sorte que leur résolution ne peut se poursuivre que numériquement. A cet égard, on remarque qu'il est possible d'extraire de toutes les colonnes des déterminants infinis soit le terme  $Fek_n(\xi_0, \gamma_0^2)$  soit le terme  $Gek_n(\xi_0, \gamma_0^2)$ . Cette précaution élémentaire a pour conséquence d'empêcher le phénomène de saturation numérique des calculateurs, dans le calcul des déterminants de grande dimension. Cette grande complexité au niveau des équations caractéristique modales résulte du fait que les modes de même parité dans les deux symétries miroirs  $y'=0$  et  $x'=0$  s'étudient tous ensemble étant donné leur couplage. Ce couplage introduit des harmoniques au niveau de la génération de leurs fonctions de modes (voir les relations II-2-18). La méthode de collocation numérique élaborée par J.E. GOELL [46] sur le guide diélectrique rectangulaire est aussi une approche globale d'un spectre de mode; elle présente une complexité du même ordre. La mise en oeuvre de méthodes de résolution numériques plus classiques telles que les différences et les éléments finis n'échappe pas à cette complexité qui disparaît dès lors qu'une approche mode par mode est possible. C'est le cas par exemple des guides plan et circulaire diélectrique [47].

d) Caractéristiques de dispersion des modes

On simplifie quelque peu les notations en introduisant les quantités sans dimensions :

$$X^2 = 4 \operatorname{sh}^2 \xi_0 \gamma_1^2$$

II-2-40

$$Y^2 = 4 \operatorname{sh}^2 \xi_0 |\gamma_0^2|$$

qui s'exprime encore comme :

$$X^2 = q^2 \operatorname{sh}^2 \xi_0 k_1^2$$

II-2-41

$$Y^2 = -q^2 \operatorname{sh}^2 \xi_0 k_0^2$$

de sorte que toutes les équations caractéristiques précédentes s'écrivent maintenant pour chaque type de mode sous la forme canonique suivante :

$$f(X, Y, \epsilon_r, \xi_0) = 0$$

II-2-42

A l'aide des nouvelles variables  $X$  et  $Y$  définies en II-2-41, les relations de dispersion ( $\omega - \beta$ ) des modes du guide diélectrique elliptique s'expriment paramétriquement comme :

$$\begin{aligned} (\omega q \operatorname{sh} \xi_0)^2 &= \frac{X^2 + Y^2}{\mu_0 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1)} \\ (\beta q \operatorname{sh} \xi_0)^2 &= \frac{X^2 + \epsilon_r Y^2}{\epsilon_r - 1} \end{aligned} \quad \text{II-2-43}$$

Avant d'aborder la résolution numérique des équations caractéristiques modales il est utile de faire les deux remarques suivantes :

*Remarque 1*

Le passage d'une section droite de petit axe  $D = q \operatorname{sh} \xi_0$  à une section droite circulaire de rayon  $D$  s'effectue lorsque simultanément  $\xi_0 \rightarrow \infty$  et  $q \rightarrow 0$ . Dans un tel passage les paramètres sans dimensions  $X$  et  $Y$  définis par les relations II-2-41 s'identifient exactement aux paramètres sans dimensions  $\kappa D$  et  $\gamma D$  tels que :

$$\begin{aligned} (\kappa D)^2 &= (\omega D)^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r - (\beta D)^2 \\ (\gamma D)^2 &= (\beta D)^2 - (\omega D)^2 \mu_0 \epsilon_0 \end{aligned} \quad \text{II-2-44}$$

que l'on rencontre dans l'étude du guide circulaire diélectrique de rayon  $D$ . Cette identité n'apparaît pas lorsque l'on substitue aux définitions II-2-40 et II-2-41 celles proposées par C. YEH

$$\begin{aligned} X^2 &= 4 \operatorname{ch}^2 \xi_0 \gamma_1^2 \\ Y^2 &= 4 \operatorname{ch}^2 \xi_0 |\gamma_0^2| \end{aligned} \quad \text{II-2-45}$$

ou

$$\begin{aligned} X^2 &= q^2 \operatorname{ch}^2 \xi_0 k_1^2 \\ Y^2 &= -q^2 \operatorname{ch}^2 \xi_0 k_0^2 \end{aligned} \quad \text{II-2-46}$$

Entre ces couples de variables sans dimensions existent les relations :

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \operatorname{th} \xi_0 \quad \text{II-2-47}$$

de sorte que lorsque  $\xi_0 \rightarrow \infty$  ( $\operatorname{th} \xi_0 \rightarrow 1$ ) on obtient :

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \sim \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad \text{II-2-48}$$

Dans le passage de la géométrie élliptique à la géométrie circulaire ces choix de variables sans dimensions conduisent tous deux quelque soit  $\omega$  et  $\beta$  à des paramètres  $|\gamma_0^2|$  et  $\gamma_1^2$  petits ce qui entraînent immédiatement les relations :

$$\alpha_{m,n}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) \sim \beta_{m,n}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) \sim \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

$$\nu_{m,n}(\gamma_1^2) \sim -\chi_{m,n}(\gamma_1^2) \sim \begin{cases} m & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad \text{II-2-49}$$

et les formes limites suivantes [45] quand simultanément  $|\gamma_0^2| \rightarrow 0$ ,  $\gamma_1^2 \rightarrow 0$  et  $\xi_0 \rightarrow \infty$  :

$$\frac{C'_{en}(\xi_0, \gamma_1^2)}{C_{en}(\xi_0, \gamma_1^2)} \sim \frac{S'_{en}(\xi_0, \gamma_1^2)}{S_{en}(\xi_0, \gamma_1^2)} \sim KD \cdot \frac{J'_n(KD)}{J_n(KD)}$$

II-2-50

$$\frac{Fek'_n(\xi_0, \gamma_0^2)}{Fek_n(\xi_0, \gamma_0^2)} \sim \frac{Gek'_n(\xi_0, \gamma_0^2)}{Gek_n(\xi_0, \gamma_0^2)} \sim KD \frac{K'_n(KD)}{K_n(KD)}$$



Les relations II-2-48 rendent très petits les termes des déterminants infinis tels que  $m > n$  et  $m < n$ . Ces déterminants infinis qui fournissent les équations caractéristiques modales se creusent au-dessus et au-dessous des lignes marquées en traits pointillés. L'action de ces relations II-2-48 est suffisante pour que dans le passage de l'ellipse au cercle les développements de ces déterminants prennent les formes simples :

$$g_{0,0} \prod_{m \geq 1} (g_{m,m} \cdot s_{m,m} - h_{m,m} \cdot t_{m,m}) = 0 \quad \text{II-2-51}$$

pour les modes impairs  $m = 0, 1, 2, \text{etc...}$  et

$$s_{0,0}^* \prod_{m \geq 1} (g_{m,m}^* \cdot s_{m,m}^* - h_{m,m}^* \cdot t_{m,m}^*) = 0 \quad \text{II-2-52}$$

pour les modes  $m = 0, 1, 2, \text{etc...}$  pairs. Les équations caractéristiques II-2-50 et II-2-51 sont donc identiques aux suivantes :

$$g_{0,0} = 0 \quad \text{II-2-53}$$

$$s_{0,0}^* = 0$$

$$g_{m,m} s_{m,m} - h_{m,m} \cdot t_{m,m} = 0$$

$$g_{m,m}^* \cdot s_{m,m}^* - h_{m,m}^* \cdot t_{m,m}^* = 0 \quad \text{II-2-54}$$

Les deux dernières équations II-2-54 dégènèrent finalement en une seule et même équation :

$$\left\{ \frac{1 \cdot J'_m(KD)}{KD J_m(KD)} + \frac{1}{\gamma D} \frac{K'_m(\gamma D)}{K_m(\gamma D)} \right\} \left\{ \frac{1 \cdot J'_m(KD)}{KD J_m(KD)} + \frac{1}{\gamma D \epsilon_r} \frac{K'_m(\gamma D)}{K_m(\gamma D)} \right\} \quad \text{II-2-55}$$

$$= m^2 \frac{\beta^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} \left[ \frac{1}{(KD)^2} + \frac{1}{(\gamma D)^2} \right]$$

pour les modes  $m \geq 1$  pairs et impairs. Quant aux modes  $m=0$ , leurs équations caractéristiques II-2-53 deviennent :

$$\frac{1}{KD} \frac{J'_0(KD)}{J_0(KD)} + \frac{1}{\gamma D} \frac{K'_0(\gamma D)}{K_0(\gamma D)} = 0 \quad \text{II-2-56}$$

pour les modes impairs et

$$\frac{1}{KD} \frac{J'_0(KD)}{J_0(KD)} + \frac{1}{\gamma D} \frac{1}{\epsilon_r} \frac{K'_0(\gamma D)}{K_0(\gamma D)} = 0$$

II-2-57

pour les modes pairs. Le lecteur reconnaît en II-2-55, II-2-56 et II-2-57 les équations caractéristiques modales du guide circulaire diélectrique

### Remarque 2

On peut maintenant envisager le passage progressif d'une section droite elliptique de petit axe  $D = qsh\xi_0$  à une section droite plane de demi-épaisseur  $D$ . Ce passage se produit lorsque simultanément  $\xi_0 \rightarrow 0$  et  $q \rightarrow \infty$ . Les paramètres sans dimensions  $X$  et  $Y$  des relations II-2-41 doivent encore s'identifier exactement aux quantités  $KD$  et  $\gamma D$  définies comme en II-2-44 que l'on rencontre aussi dans l'étude du guide plan diélectrique. En outre, quand  $q \rightarrow \infty$  les relations II-2-40 montrent que les paramètres  $|\gamma_i^2|$  et  $\gamma_1^2$  atteignent vite des valeurs très importantes. Dans le domaine d'utilisation actuel de la bibliothèque de fonctions de MATHIEU [48] ( $|\gamma_i^2| \leq 1400; i=0 \text{ et } 1$ ) toute tentative de passage à la limite ne met pas en évidence de propriétés remarquables du type II-2-49 sur les coefficients ou du type II-2-50 sur les fonctions radiales. Il n'existe donc pas de passage à la limite véritable du guide diélectrique elliptique au guide plan ce qui confirme bien la nature académique de ce système électromagnétique.

## II - 2 - 2 Résolution numérique des équations caractéristiques modales

a) La "stratégie" de C. YEH. Tests d'efficacité divers.

La "stratégie" préconisée par C. YEH pour résoudre les équations caractéristiques modales repose sur une méthode générale d'approximations successives en vigueur dans la théorie mathématique des systèmes d'équations linéaires infinis [49]. Elle consiste à substituer à l'étude globale de chaque infinité de modes une étude portant sur un nombre de modes plus restreint. Quand l'aplatissement de la section droite n'est pas trop important C. YEH substitue à l'étude globale une étude mode par mode. Dans cette approximation qui repose essentiellement sur des données numériques les racines  $X$  et  $Y$  correspondant à des modes donnés ( $m, p$ )  $m \geq 1$  sont alors très proches de celles des équations. :

$$f^{(i)}(X, Y, \varepsilon_r, \xi_0, m, 2 \times 2) \equiv \begin{vmatrix} g_{m,m} & h_{m,m} \\ t_{m,m} & s_{m,m} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{II-2-58}$$

pour les modes impairs\* et :

$$f^{(p)}(X, Y, \varepsilon_r, \xi_0, m, 2 \times 2) \equiv \begin{vmatrix} g_{m,m}^* & h_{m,m}^* \\ t_{m,m}^* & s_{m,m}^* \end{vmatrix} = 0 \quad \text{II-2-59}$$

pour les modes pairs. Les modes  $(0, p)$  font exception puisque dans les mêmes conditions leurs racines  $X$  et  $Y$  sont très proches de celles des équations:

$$f^{(i)}(X, Y, \xi_0, 0, 1 \times 1) \equiv \|g_{0,0}\| \quad \text{II-2-60}$$

pour les modes impairs\*

$$f^{(p)}(X, Y, \varepsilon_r, \xi_0, 0, 1 \times 1) \equiv \|s_{0,0}^*\| \quad \text{II-2-61}$$

pour les modes pairs\*

On calcule ensuite avec précision les racines  $X$  et  $Y$  d'un mode donné ( $m$ ) en augmentant successivement les dimensions du déterminant de départ ( $2 \times 2$  si  $m \geq 1$  ou  $1 \times 1$  si  $m = 0$ ). Le processus d'agrandissement du déterminant (voir figure II-8) dont l'annulation fournit les équations caractéristiques modales se bloque dès qu'une stabilité relative (fixée à l'avance et généralement de  $10^{-3}$ ) des racines recherchées est observée. Le couplage transversal des harmoniques elliptiques au niveau de la génération des fonctions de modes apparaît dans les sommations  $\sum_r'$  au sein des termes  $h_{m,n}$  et  $t_{m,n}$  (resp:  $h_{m,n}^*$  et  $t_{m,n}^*$ ). On peut "à priori" effectuer ces sommations de deux manières. La première consiste à initialiser l'indice  $r$  (compte tenu des relations II-2-33 au plus faible ordre entier disponible sur les coefficients du déterminant à annuler ; ces sommations sont ensuite tronquées à l'ordre entier le plus élevé rencontré sur les coefficients du même déterminant. La seconde façon, (qui a été adoptée, semble-t-il, par C. YEH !) consiste à prendre en compte tous les indices de sommations jusqu'à l'apparition d'une stabilité relative fixée à l'avance ( $10^{-3}$  par exemple

(\*) Dans la symétrie miroir  $y' = 0$

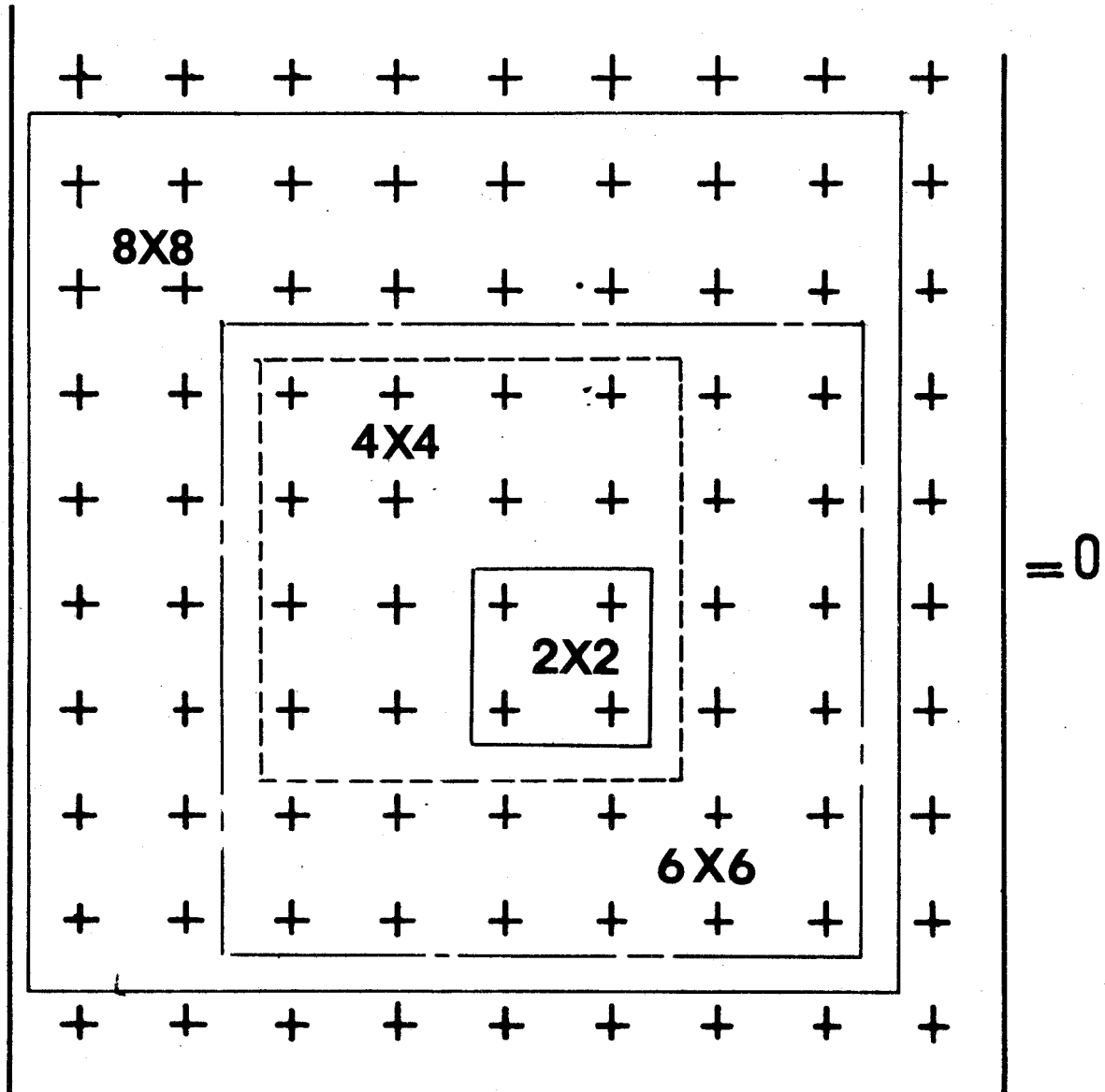


Fig. II-8 "Stratégie" de C. YEH

la figure II - 9) illustre ces deux façons d'opérer sur le mode impair (1,1) d'une structure réalisée à partir d'un matériau de permittivité relative  $\epsilon_r = 2.5$  pour deux géométries différentes  $\xi_0 = .7$  et  $\xi_0 = 3$ . Pour permettre une comparaison directe, on a reproduit sur cette même figure II-9 les résultats obtenus par C. YEH sur le même mode dans des structures de géométrie et de constitution identiques. Sur les modes fondamentaux pairs et impairs, ces deux façons d'opérer les sommations  $\sum_r'$  se manifestent seulement par des écarts de l'ordre de 3 à 5 % sur les résultats (voir tableau 1). Sur les modes supérieurs, on observe que la saturation numérique de ces sommations altère dans certains cas, la convergence du processus d'agrandissement des déterminants modaux. On va le montrer sur l'exemple des modes pairs dans les deux symétries miroir  $y' = 0$  et  $x' = 0$ . L'applatissage de la structure et sa permittivité relative sont respectivement fixés à  $\xi_0 = .62$  et  $\epsilon_r = 9.6$  (alumine). La figure II-10 a) représente les fonctions  $f^{(r)}(x)$  issues d'un déterminant de dimensions  $2 \times 2$  pour  $Y = 5$ . ce qui situe tous les modes  $(2, p)$  dans une situation relativement éloignée de leur coupure. Ces fonctions font apparaître une succession de "poles" et de "zéros" et ces derniers devraient se situer selon C. YEH proches de ceux de l'équation caractéristique modale II-2-39 issue du déterminant de dimension infinie. On constate sur cette figure II-10 a) la grande sensibilité des résultats selon que les sommations au sein des termes  $h_{n,m}^*$  et  $t_{n,m}^*$  s'effectuent ou comme  $\sum_r'$  ou comme  $\sum_r$ . La figure II-10 b) rend maintenant compte de la modification des courbes précédentes lorsque la fonction  $f^{(r)}(x)$  est issue d'un déterminant de dimensions  $3 \times 3$ . Les "zéros" des modes  $(0, p)$  viennent alors s'ajouter à ceux de modes  $(2, p)$ . Et il est clair que les sommations qui interviennent dans les coefficients  $h_{n,m}^*$  et  $t_{n,m}^*$  doivent être nécessairement tronquées à l'ordre 2 pour obtenir une localisation satisfaisante des premiers "zéros" des modes  $(0, p)$  et  $(2, p)$ . C'est sur la base de ces observations, que l'on a finalement opté pour la première façon d'opérer les sommations  $\sum_r'$ , (initialisation et troncature) dans les procédures numériques de calcul [50].

La convergence du processus d'agrandissement des déterminants modaux décrit sur la figure II-8 se détériore au fur et à mesure que la structure elliptique s'applatit. Ainsi, l'annulation de déterminants de dimension supérieure à  $2 \times 2$  s'avère souvent nécessaire à une première localisation satisfaisante des racines des modes surtout si ces derniers sont pris dans une situation relativement éloignée de leur coupure. De plus, sur des structures

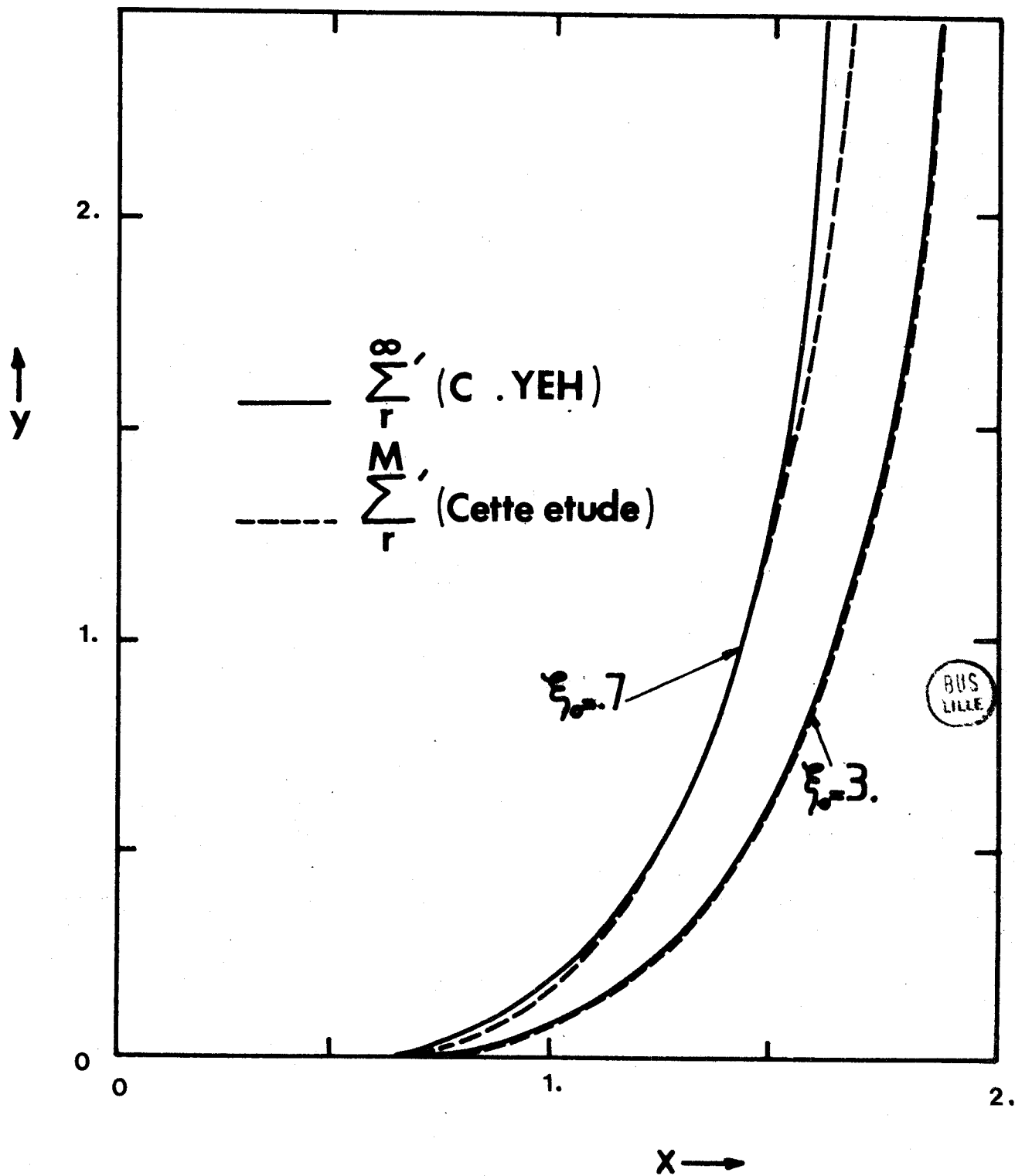


Fig. II-9 Paramètres Spectraux du mode  $i(1,1)$  du guide diélectrique elliptique.

Description du couplage des harmoniques dans la génération des fonctions de modes.  $M = \sup(m, n)$

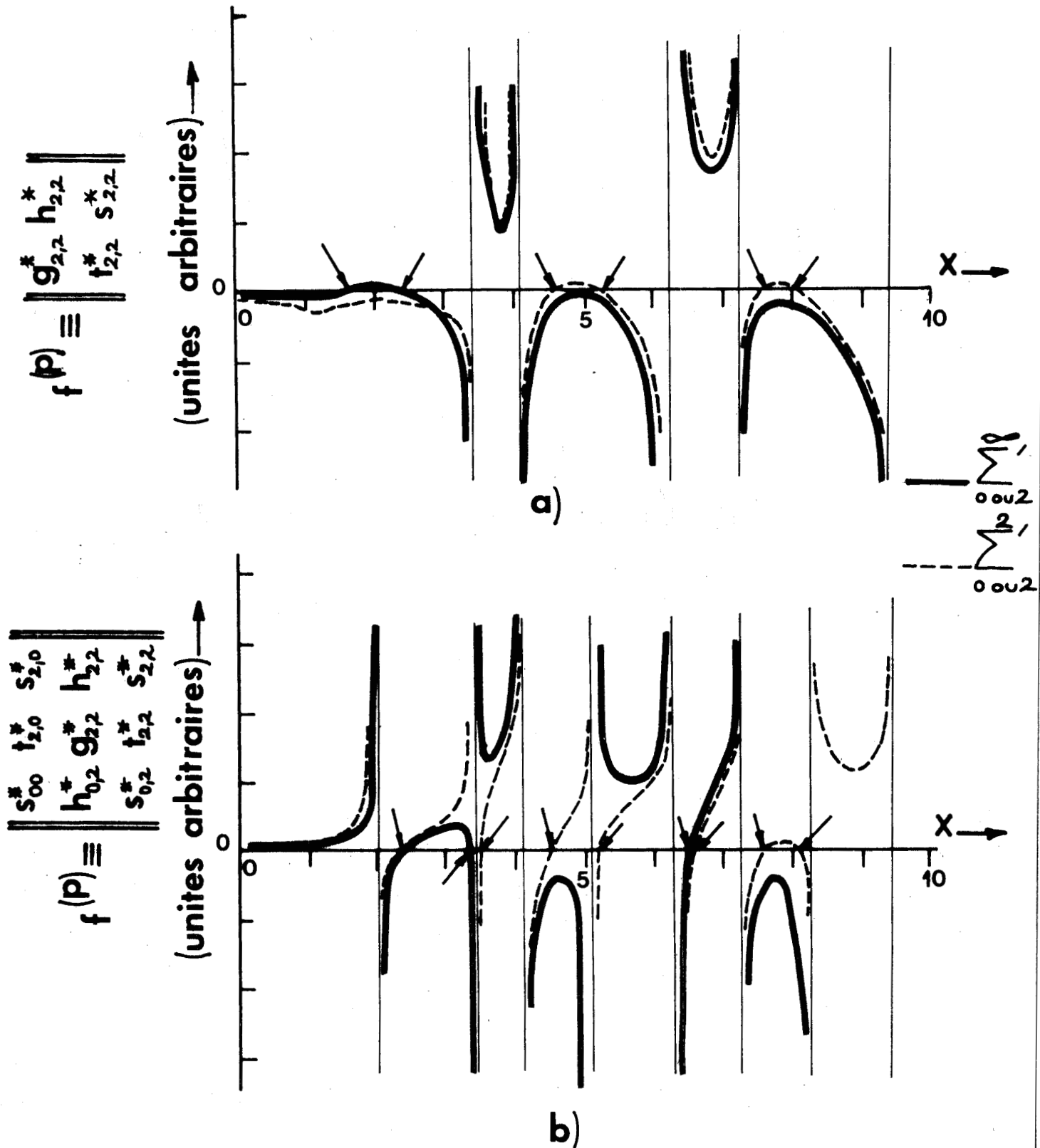


Fig II-10 Evolution des déterminants modaux

a) modes ( 2 , p )

b) modes ( 2 , p ) et ( 0 , p )

$\gamma = 5. ; \epsilon_r = 9.6 ; \xi_0 = .62$ . Les flèches marquent les "zéros".



$\epsilon_r = 2.5$ $\epsilon_o = .2$				
Y	X (2x2)	X (4x4)	X (6x6)	X (8x8)
3.	1.559	1.889	1.580	1.466

Tableau II







Sommmations dans les termes $h_{m,n}$ et $t_{m,n}$		$\sum_1^M$ ; $M = \sup(m,n)$				$\sum_1^\infty$						
Constitution ( $\epsilon_1$ )	Applatissement ( $\epsilon_2$ )	Situation ( $\gamma$ )	$\sum_1^M$ (2x2)		$\sum_1^M$ (4x4)		$\sum_1^M$ (6x6)		$\sum_1^M$ (8x8)			
			X	X	X	X	X	X	X	X		
2.5	3.	3..	2.017	2.017	-	-	-	-	2.017	2.017	-	-
	3.	1.5	1.818	1.818	-	-	-	-	1.818	1.818	-	-
	3.	.5	1.471	1.471	-	-	-	-	1.471	1.471	-	-
	3.	.1	1.089	1.089	-	-	-	-	1.089	1.089	-	-
9.6	.7	3.	1.768	1.795	1.796	1.796	1.796	1.796	1.696	1.746	1.746	-
	.7	1.5	1.611	1.625	1.625	1.625	-	-	1.580	1.594	1.594	-
	.7	.5	1.313	1.316	1.316	1.316	-	-	1.289	1.292	1.292	-
	.7	.1	1.002	1.008	1.008	1.008	-	-	.939	.939	-	-
9.6	3.	3.	2.155	2.155	-	-	-	-	2.155	2.155	-	-
	.3.	1.5	2.075	2.075	-	-	-	-	2.075	2.075	-	-
	3.	.5	1.931	1.931	-	-	-	-	1.931	1.931	-	-
	.7	3.	1.901	1.934	1.935	1.935	-	-	1.828	1.886	1.886	-
9.6	.7	1.5	1.858	1.879	1.879	1.879	-	-	1.821	1.842	1.842	-
	.7	.5	1.775	1.786	1.786	1.786	-	-	1.718	1.727	1.727	-

très aplatis l'instabilité est importante comme l'indique les résultats, rassemblés dans le tableau 2 sur le mode  $i(1,1)$ . Cette dernière observation corrobore celle déjà faite par J.E. GOELL [46] au cours de son approche numérique des guides rectangulaires très aplatis. Elle confirme l'amorce d'une dégénérescence d'ordre élevé dans le spectre du guide diélectrique elliptique qui conduit à la limite de l'applatissage fort ( $\xi_0 \rightarrow 0$ ) au mode  $iTM_0$  du guide plan diélectrique. Seule une augmentation importante des dimensions des déterminants modaux peut remédier à cette situation.

Une telle complexité est incompatible avec l'aspect modélisation qui est recherché dans la première partie de ce chapitre. La définition d'une approximation s'est donc avérée indispensable.

b) Approximation de l'approche mode par mode.

Dans cette approximation il est possible de substituer à l'étude globale du spectre une approche mode par mode par l'usage exclusif des équations caractéristiques modales approchées II-2-58 à II-2-61.

Il est clair que le passage de la géométrie elliptique à la géométrie circulaire conduit à une approche mode par mode rigoureuse sur le domaine spectral tout entier :  $0 \leq X < \infty ; 0 \leq Y < \infty$ . La condition II-2-11 qui accompagne ce passage résulte des relations II-2-19 dans lesquels on fait tendre, pour tout couple  $(\omega, \beta)$ , la demi-distance focale  $q$  de la séparatrice elliptique vers zéro. Simultanément le paramètre  $\xi_0$  devient infini pour signifier l'absence d'applatissage de la structure.

L'approximation de l'approche mode par mode recherchée maintenant, se rapporte à des structures elliptiques dont le paramètre d'applatissage  $\xi_0$  reste toujours fini. La demi-distance focale  $q$  de la séparatrice qui intervient dans les relations II-2-19, n'est en conséquence jamais nulle.

La présence des harmoniques ( $n$ ) dans les fonctions d'onde relatives aux modes  $(m, p)$  résulte du couplage des modes  $(n, p)$  aux modes  $(m, p)$ . Ce couplage s'effectue par les champs modaux longitudinaux et transversaux. Il est décrit longitudinalement par les coefficients  $\alpha_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$ ,  $\alpha_{m,n}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$ ,  $\beta_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$  et  $\beta_{m,n}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$  ( $m \neq n$ ) et transversalement par les coefficients  $\nu_{n,m}(\gamma_1^2)$ ,  $\chi_{n,m}(\gamma_1^2)$ ,  $\nu_{m,n}(\gamma_1^2)$  et

$\chi_{m,n}(\gamma_1^2)$ . L'étude des modes  $(m, p)$  à partir des équations caractéristiques modales approchées II-2-58 à II-2-61 n'est justifiée que dans la mesure où ce couplage reste faible. En d'autres termes les relations suivantes :

$$\begin{aligned} |\alpha_{m,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)| &\gg \left\{ \begin{array}{l} |\alpha_{m,n}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)| \\ |\alpha_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)| \end{array} \right. \\ |\beta_{m,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)| &\gg \left\{ \begin{array}{l} |\beta_{m,n}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)| \\ |\beta_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)| \end{array} \right. \\ |\chi_{m,m}(\gamma_1^2)| &\gg \left\{ \begin{array}{l} |\chi_{m,n}(\gamma_1^2)| \\ |\chi_{n,m}(\gamma_1^2)| \end{array} \right. \\ |\nu_{m,m}(\gamma_1^2)| &\gg \left\{ \begin{array}{l} |\nu_{m,n}(\gamma_1^2)| \\ |\nu_{n,m}(\gamma_1^2)| \end{array} \right. \end{aligned}$$

II-2-62

doivent être satisfaites pour  $m \neq n$ . De l'évolution des coefficients de couplage longitudinaux et transversaux sur tout le spectre  $0 \leq X < \infty$ ,  $0 \leq Y < \infty$ , on déduit le domaine spectral d'application de l'approximation recherchée.

On prend comme exemple les modes impairs  $(1, p)$ . Les fonctions d'onde relatives à ces modes résultent du couplage avec les modes  $(3, p)$ ,  $(5, p)$ ,  $(7, p)$  etc... ; on recherche le domaine spectral  $(X, Y)$  dans lequel les fonctions d'onde des modes  $(1, p)$  vont s'identifier aux seuls harmoniques 1. Les évolutions dans tout le spectre des coefficients de couplage longitudinaux  $\alpha_{n,1}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$ ,  $\alpha_{1,n}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$ ,  $\beta_{n,1}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$  et  $\beta_{1,n}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$  sont données sur les figures II-11 a, b et c. Les évolutions des coefficients de couplage transversaux  $\chi_{n,1}(\gamma_1^2)$ ,  $\chi_{1,n}(\gamma_1^2)$ ,  $\nu_{n,1}(\gamma_1^2)$  et  $\nu_{1,n}(\gamma_1^2)$  ( $n = 3, 5, 7$  etc...) sont elles reportées sur les figures II-12 a et b.

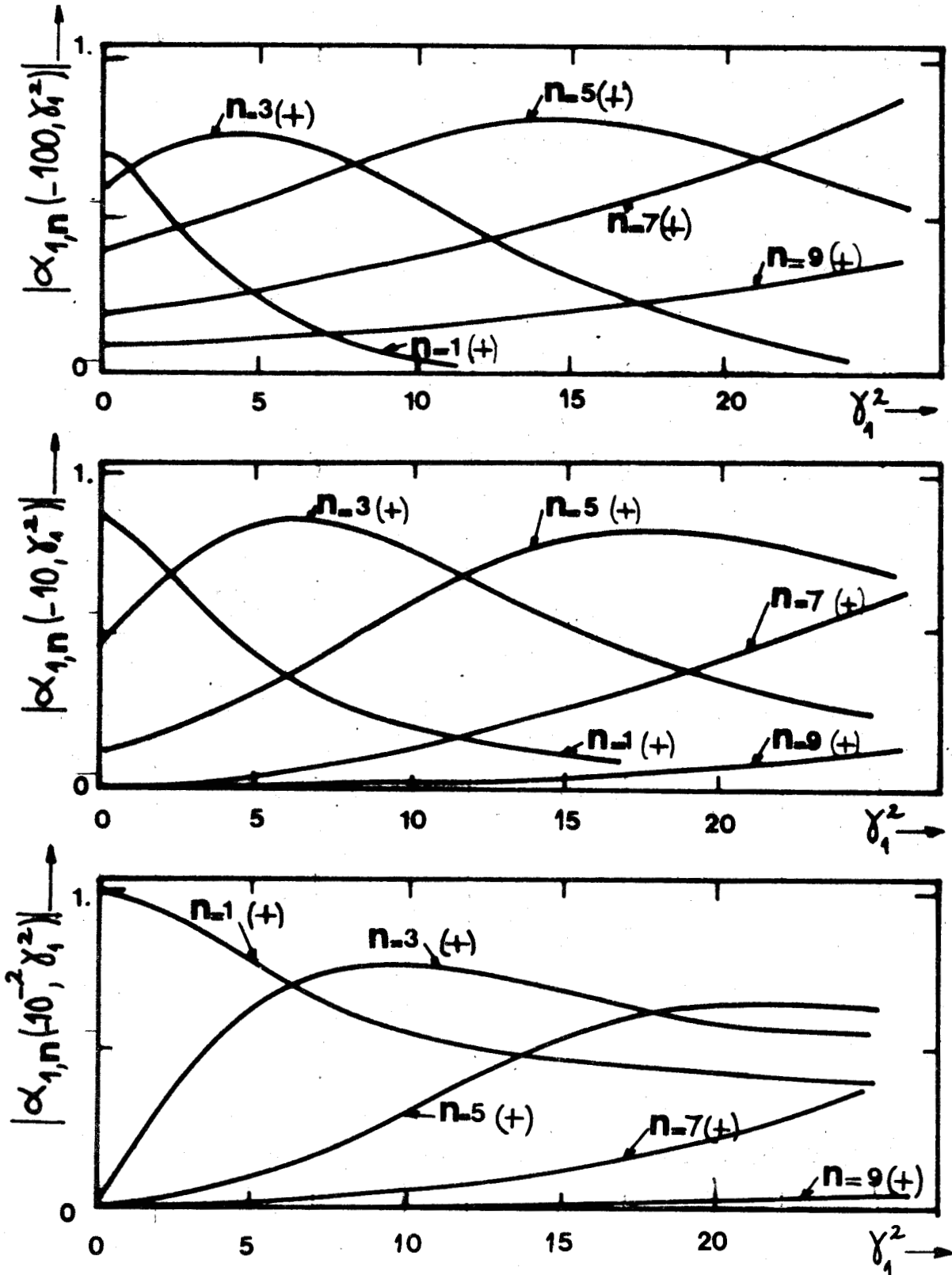


Fig. II-11 a) Variation du couplage longitudinal ; modes ( 1 , p )  
 Le signe entre ( ) indique la polarité du coefficient de couplage.



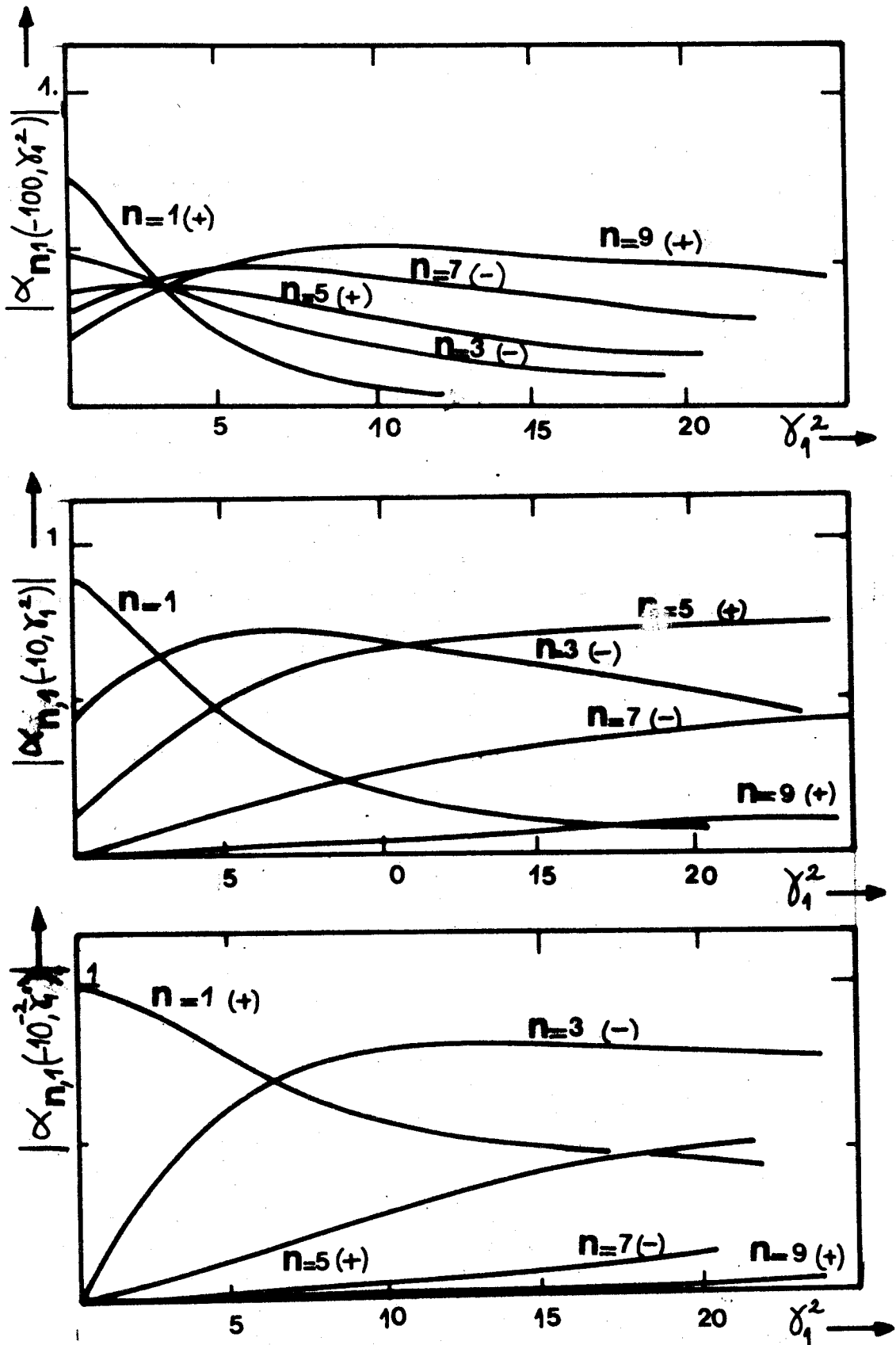


Fig. II-11 b) Variation du couplage longitudinal ; mode  $(1, p)$  le signe entre ( ) indique la polarité du coefficient de couplage.

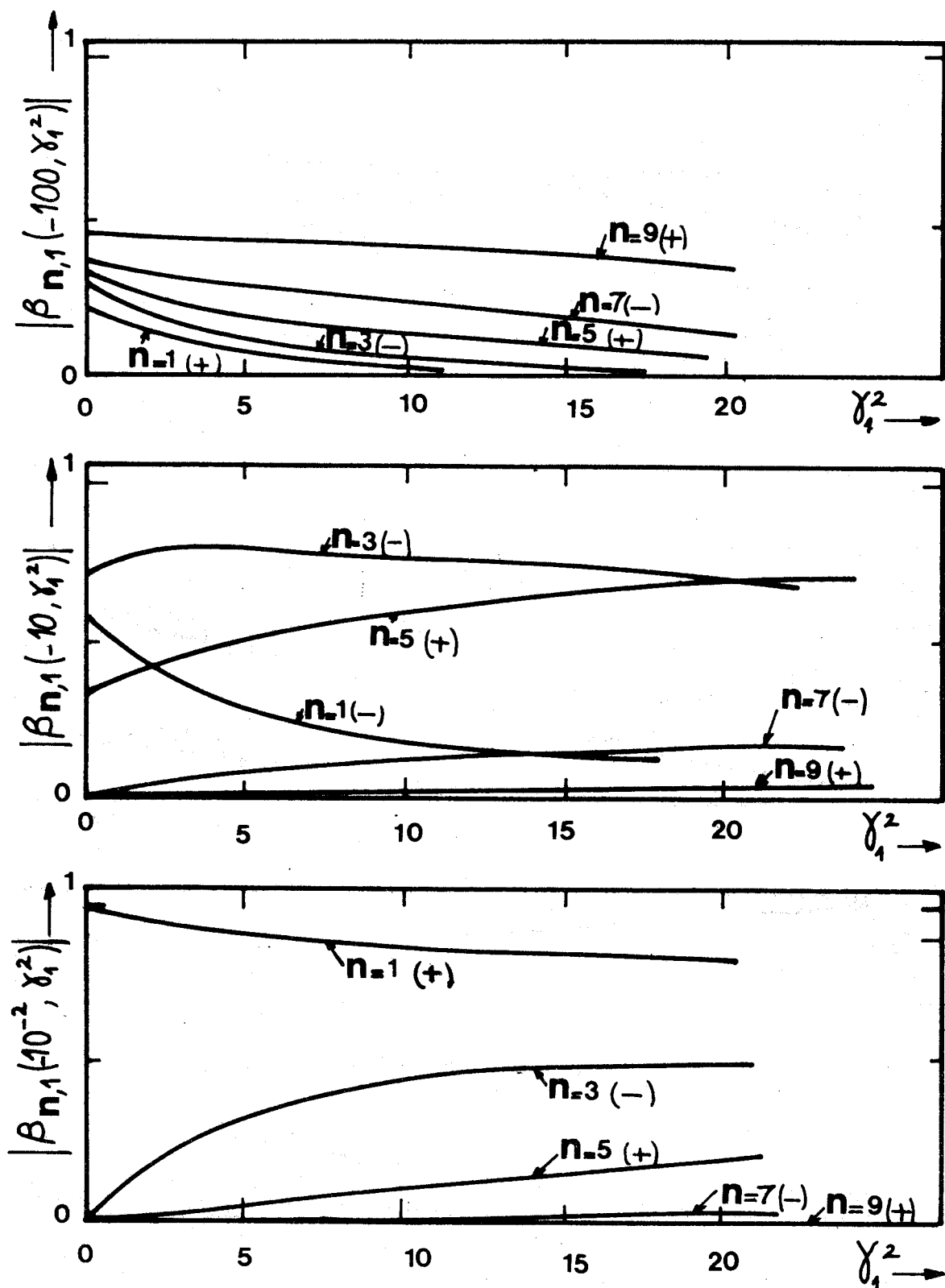


Fig. II-11 c) Variation spectrale du couplage longitudinal ; Modes  $(n, p)$ .  
Le signe entre ( ) indique la polarité du coefficient de couplage.

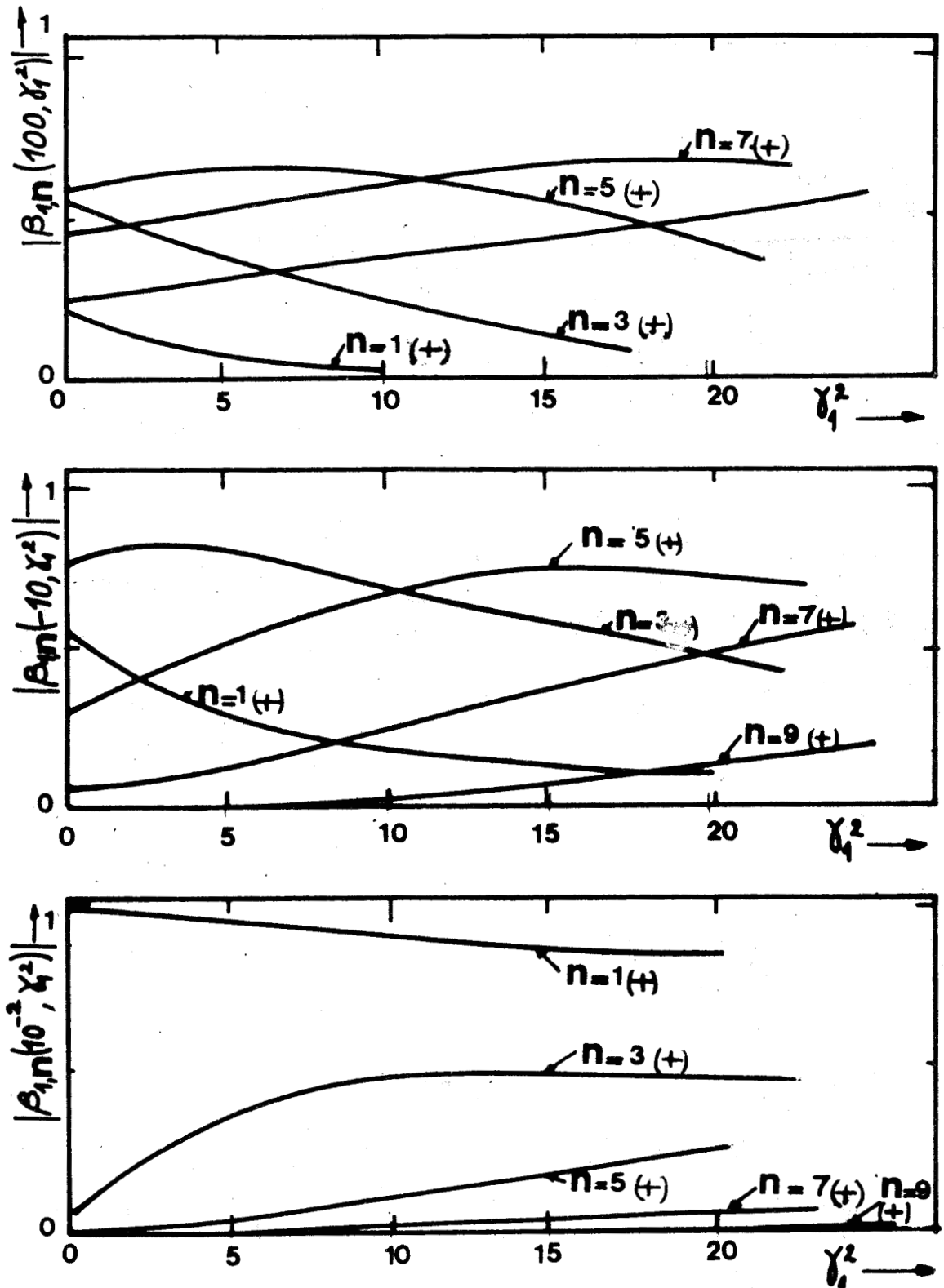


Fig. II-11 d) Variation spectrale du couplage longitudinal. Modes  $(1, p)$ .  
Le signe entre ( ) indique la polarité du coefficient de couplage.



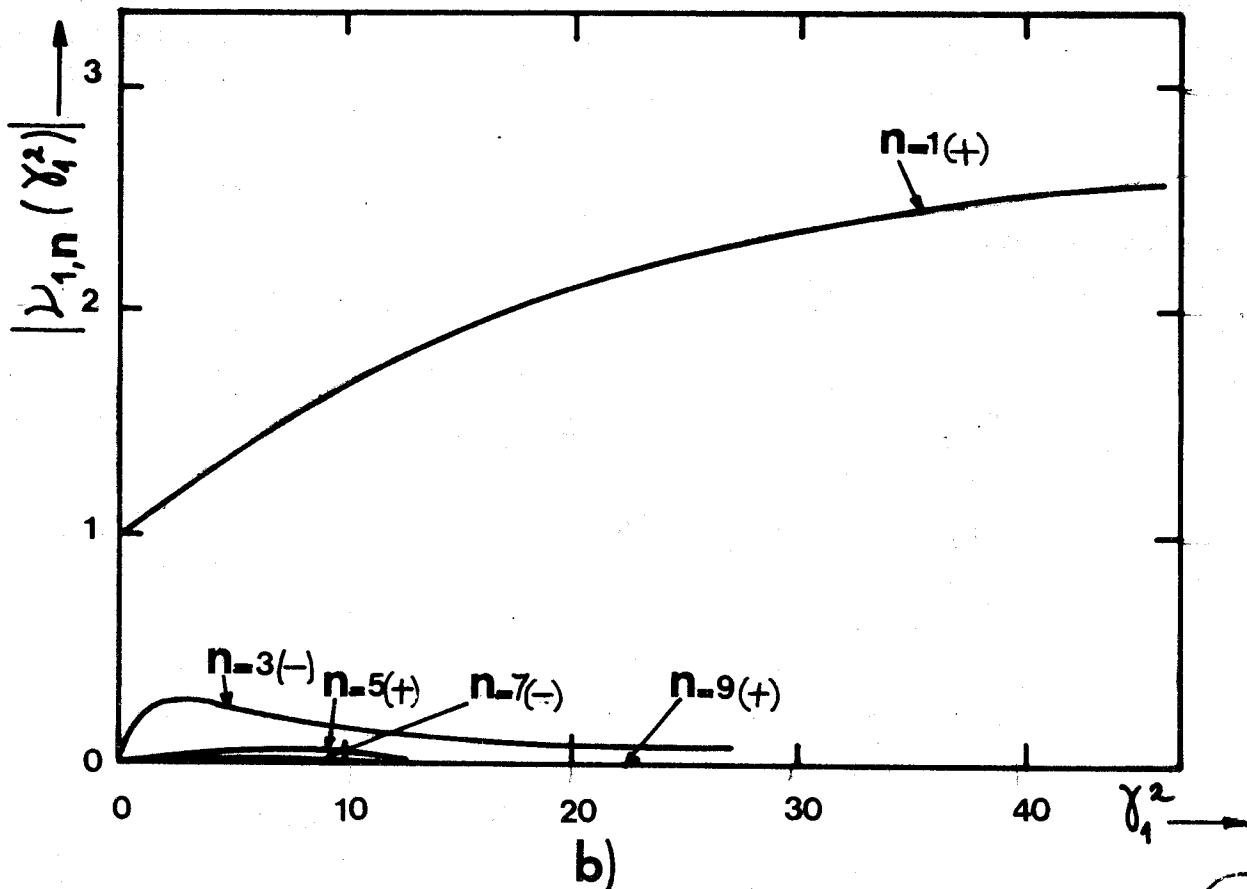
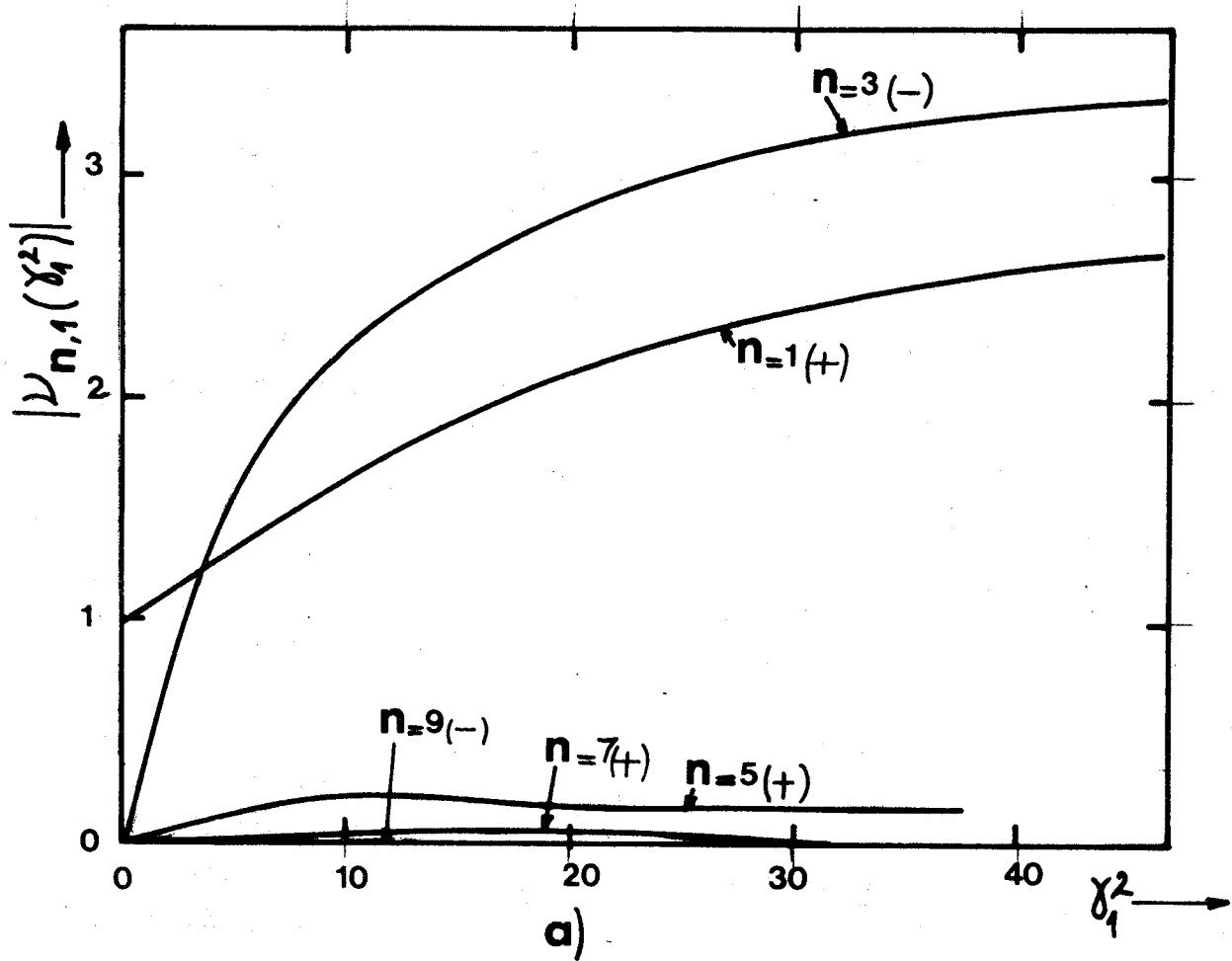


Fig II-12 Variation spectrale du couplage transversal. Modes (1, p).  
Le signe entre ( ) indique la polarité du coefficient de couplage.

$$v_{n,1}(\gamma_1^2) \approx -\chi_{1,n}(\gamma_1^2); \quad v_{1,n}(\gamma_1^2) \approx -\chi_{n,1}(\gamma_1^2)$$



Sur toutes ces figures sont représentés les couplages "propres" longitudinaux et transversaux respectivement décrits par les coefficients  $\alpha_{11}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$ ,  $\beta_{11}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$ ,  $\chi_{1,1}(\gamma_1^2)$  et  $\nu_{11}(\gamma_1^2)$  afin de rendre la comparaison II-2-62 plus immédiate. De cette comparaison résulte finalement la condition II-2-11 qui apparaît ainsi comme la seule condition d'application d'une approche mode par mode sur une structure elliptique. Des relations II-2-19, on déduit donc, que seul le domaine basse fréquence  $\omega \rightarrow 0$ ;  $\beta \rightarrow 0$  (resp :  $X \rightarrow 0$ ;  $Y \rightarrow 0$ ) du spectre peut satisfaire au mieux cette condition II-2-11. Ainsi, dans l'hypothèse où l'applatissage de la structure n'est pas trop important les caractéristiques de dispersion des tous premiers modes peuvent être éventuellement déduites d'une approche mode par mode.

### c) Nouvelle "stratégie" de résolution

La "stratégie" de résolution des équations caractéristiques modales du guide diélectrique elliptique proposée par C. YEH repose en fait sur l'approximation de l'approche mode par mode dont les conditions d'application viennent d'être précisées. Comme on peut le voir sur la figure II-13 les résultats publiés par cet auteur sur les modes fondamentaux (1, 1) impairs et pairs débordent peu le cadre de cette approximation. On observe en effet une diminution progressive du domaine spectral basse fréquence d'intérêt ( $X, Y$ ) (resp:  $\omega, \beta$ ) au fur et à mesure que croît l'applatissage de la structure.

On décrit maintenant une "stratégie" de résolution des équations caractéristiques modales du guide elliptique beaucoup plus générale. Sa formulation nécessite de fixer préalablement la valeur de l'applatissage de la structure ainsi que le domaine spectral d'intérêt ( $X, Y$ ). Il est finalement plus simple de présenter cette nouvelle "stratégie" sur un exemple. On choisit ainsi  $\xi_0 = .62$ ,  $0 \leq X \leq 3$ . et  $0 \leq Y \leq 3$ . A ce domaine spectral la figure II-14 fait correspondre les intervalles de variation des paramètres  $\gamma_0^2$  et  $\gamma_1^2$  :  $|\gamma_0^2| \leq 10$  et  $0 \leq \gamma_1^2 \leq 10$ . On recherche alors la "profondeur" des couplages longitudinaux et transversaux entre tous les modes ( $0, p$ ), ( $1, p$ ), ( $2, p$ ) aux limites extrêmes du domaine spectral d'intérêt :  $|\gamma_0^2| = 10$ ;  $\gamma_1^2 = 10$  les figures II - 15 a) b) et c) illustrent cette investigation ; elles montrent que les couplages longitudinaux agissent à plus longue distance que les couplages transversaux. Ainsi par exemple pour les modes ( $0, p$ ), quand  $\alpha_{0,p}(-10, 10) \sim \alpha_{p,0}(-10, 10)$  cela signifie que si l'un d'entre eux possède un couple de racine ( $X, Y$ )

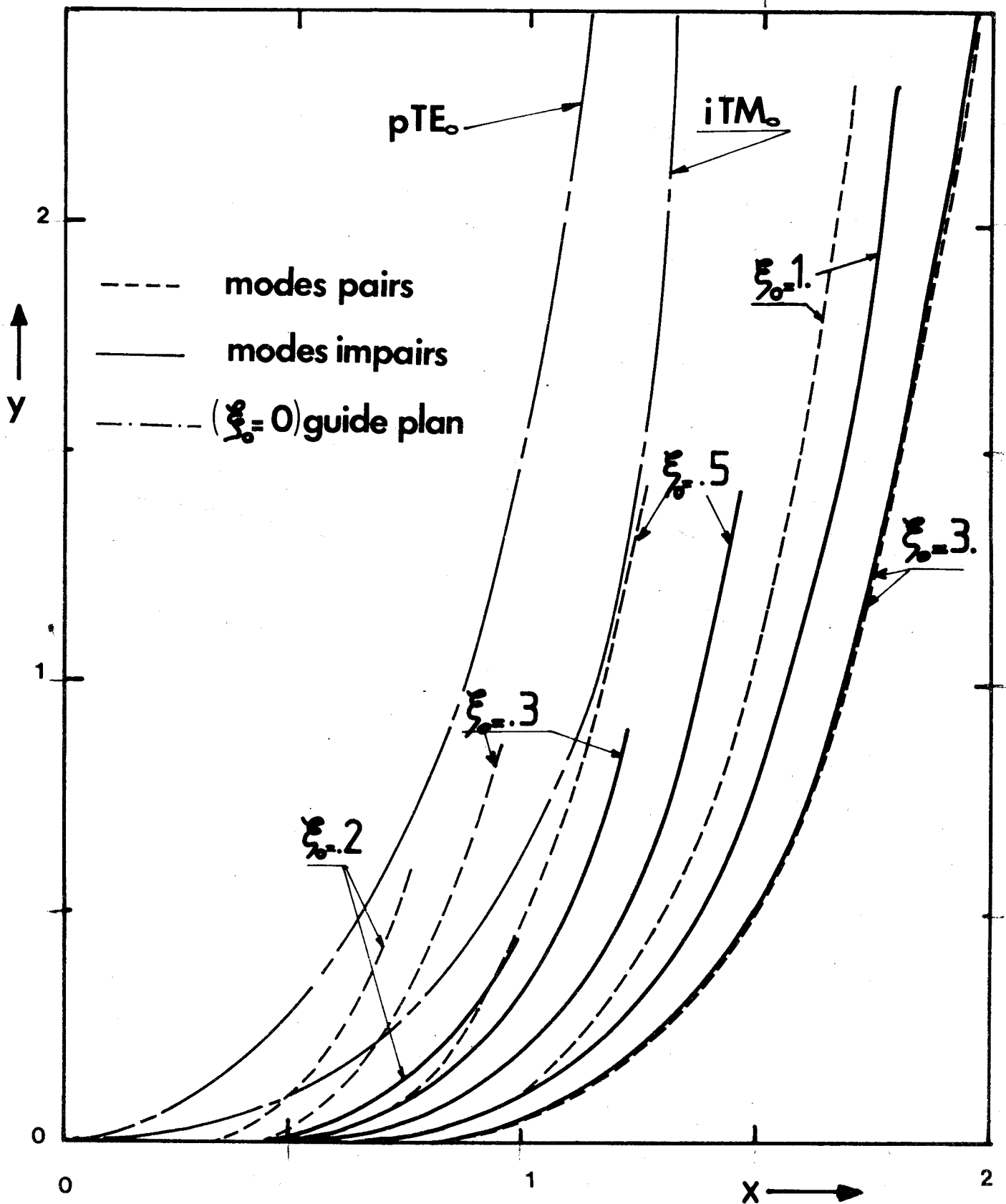


Fig. II-13 Résultats numériques obtenus par C. YEH sur les modes dipolaires électriques à fréquence de coupure nulle.  $\epsilon_r = 2.5$ .

Les modes  $pTE_0$  et  $iTM_0$  constituent les limites des modes  $p(1,1)$  et  $i(1,1)$  quand  $\xi_0 \rightarrow 0$ .

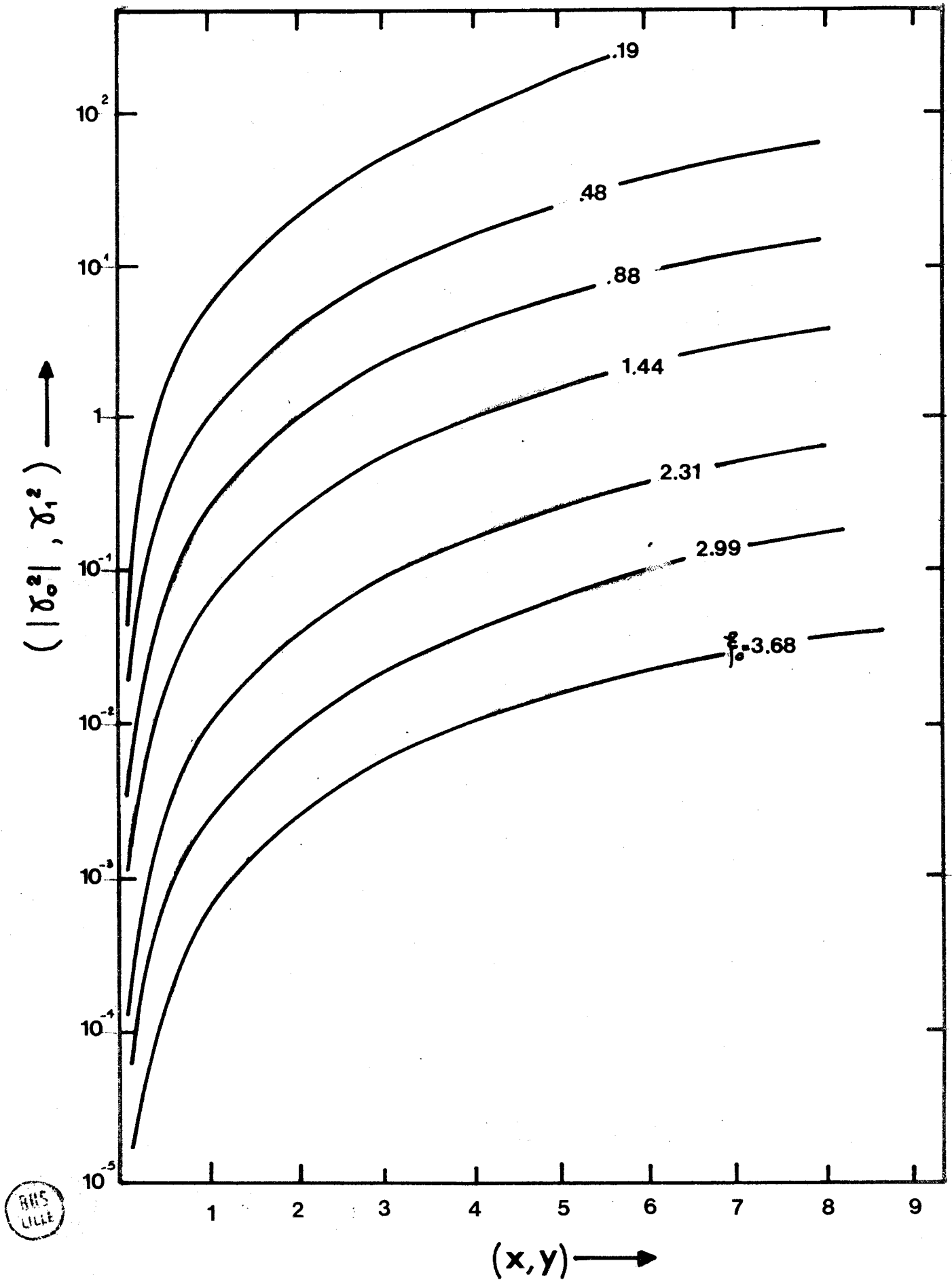


Fig II-14 Relation entre les paramètres spectraux  $X$  et  $Y$  et les quantités  $|\delta_0^2|$  et  $\delta_1^2$  quand la géométrie  $\xi_0$  est fixée.

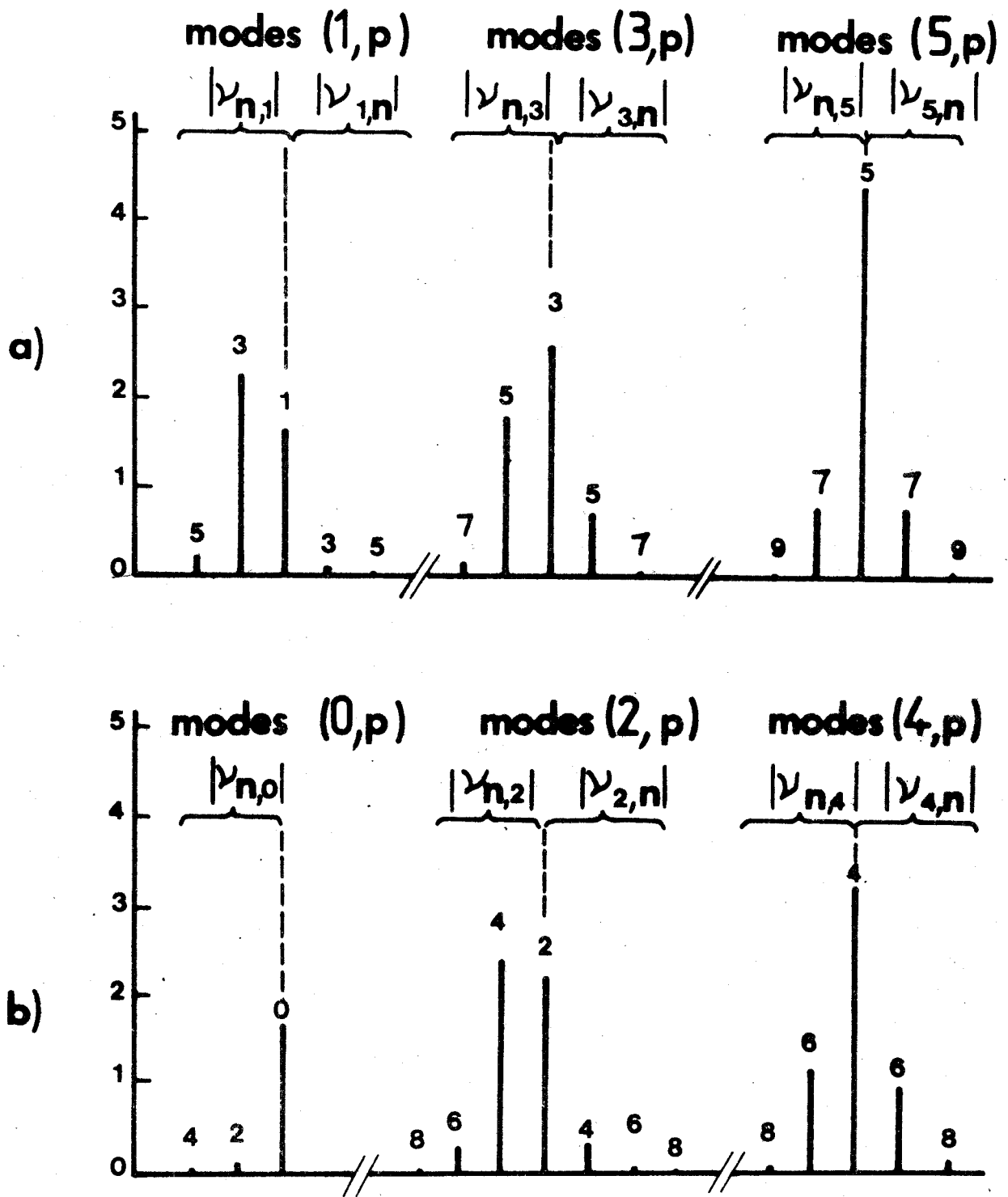


Fig. II-15 a) Guide élliptique couplage transversal

a) modes 1, 3, 5

b) modes 0, 2, 4

$$\gamma_0^2 = -10. ; \gamma_4^2 = 10.$$



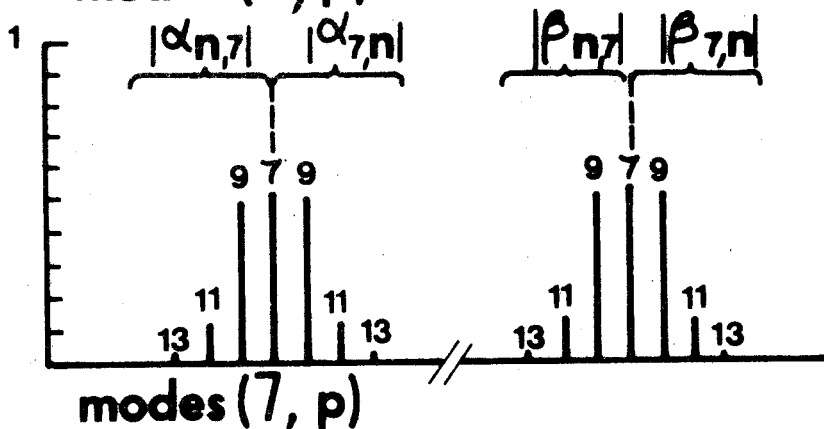
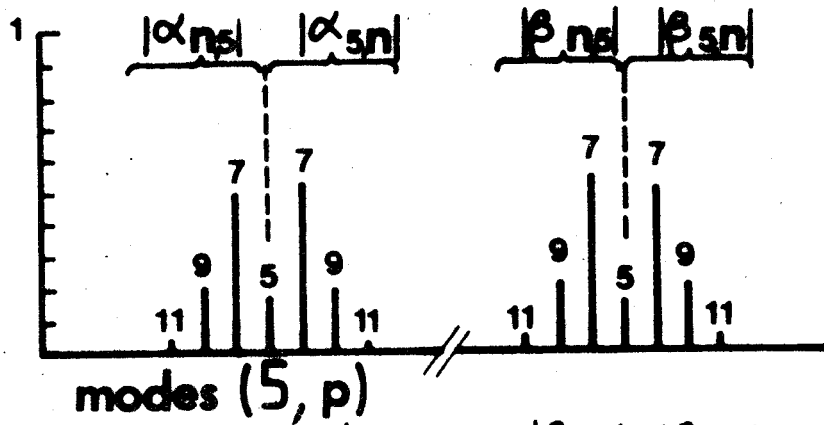
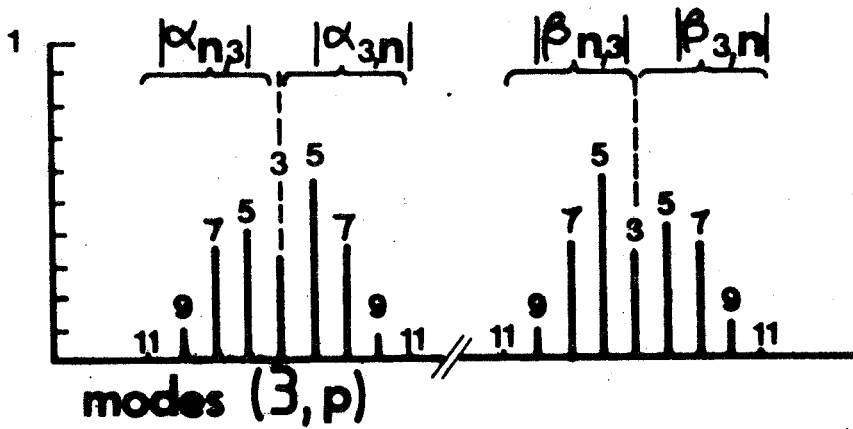
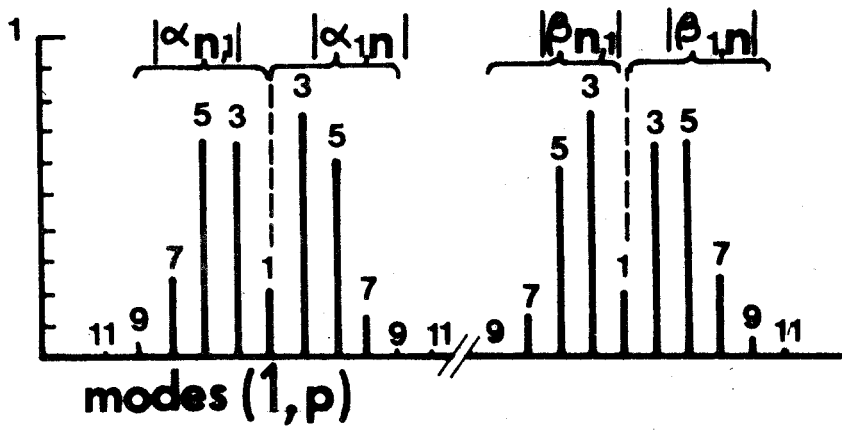


Fig. II-15 b) Guide elliptique Couplage longitudinal

Modes 1, 3, 5, 7

$$\gamma_0^2 = -10.; \gamma_4^2 = 10.$$

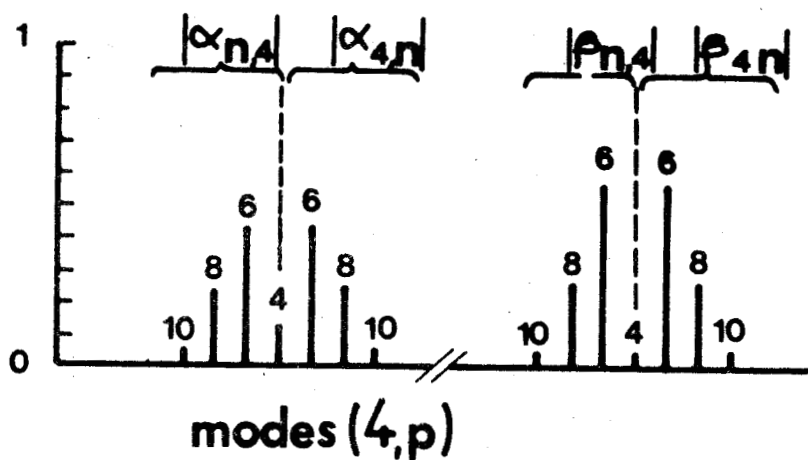
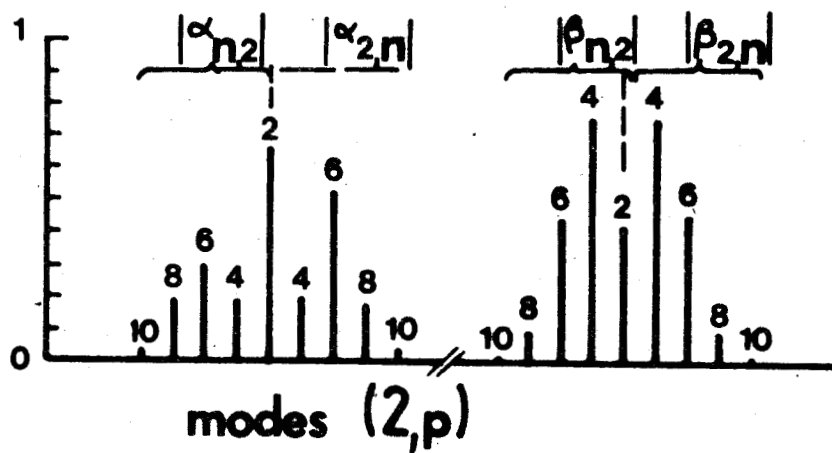
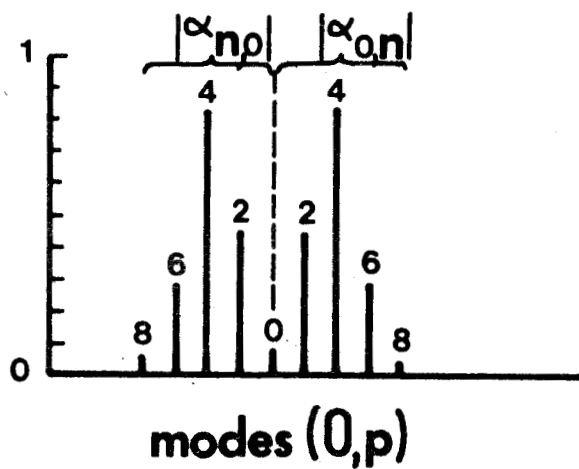


Fig. II-15 c) Guide elliptique. Couplage longitudinal.

Modes 0, 2, 4

$$\gamma_0^2 = -10. ; \gamma_1^2 = 10.$$



au voisinage des limites extrêmes du domaine spectral d'intérêt ( $\chi \sim 3$ ;  $Y \sim 3$ .) celui-ci est correctement localisé par l'annulation d'un déterminant de dimensions  $9 \times 9$  incluant tous les ordres  $m = 0, 2, 4, 6$  et  $8$ . Par suite l'annulation d'un déterminant de dimensions  $9 \times 9$  localise d'autant mieux un autre couple de racines relatif aux modes  $(0, p)$  si ce couple se situe plus à l'intérieur du domaine spectral prédéterminé.

L'application de cette nouvelle "stratégie" de résolution a permis de tracer sur la figure II-16 les lieux caractéristiques des premiers modes discrets du spectre d'un guide diélectrique elliptique. Pour tracer ces lieux le domaine spectral d'intérêt a été volontairement limité pour que les dimensions des déterminants à annuler n'exèdent pas  $8 \times 8$  pour la valeur de l'applatissage choisi ( $\xi_0 = .62$ ). La stabilité relative des racines recherchées est fixée à  $10^{-3}$ .

Sur le guide elliptique tous les modes sont hybrides. Leur désignation s'effectue en relation avec la nomenclature proposée par E. SNITZER [51] sur le guide diélectrique circulaire. Ainsi, un mode  $(m, p)$  avec  $m \gg 1$  impair (resp. pair) du guide elliptique est noté  ${}_i HE_{m,p}$  (resp.  ${}_p HE_{m,p}$ ) ou  ${}_i EH_{m,p}$  (resp.  ${}_p EH_{m,p}$ ) dès lors que dans une diminution progressive de l'applatissage, son lieu caractéristique s'identifie soit à celui de l'un des modes  ${}_i, p HE_{m,p}$  soit à celui de l'un des modes  ${}_i, p EH_{m,p}$  du guide circulaire diélectrique. Les modes impairs et pairs  $(0, p)$  sont eux notés  ${}_i HE_{0,p}$  ou  ${}_p EH_{0,p}$ : dans un passage progressif à la géométrie circulaire leurs lieux caractéristiques viennent se superposer à ceux des modes à symétrie cylindrique  ${}_i TE_{0,p}$  et  ${}_p TM_{0,p}$ . La désignation des modes sur la figure II-16 repose donc finalement sur une étude évolutive des lieux caractéristiques dans un passage progressif de la géométrie elliptique à la géométrie circulaire. Cette étude évolutive fait apparaître des glissements très importants sur les lieux caractéristiques des modes  ${}_p HE_{m,n}$  et  ${}_i HE_{m,n}$  dans les deux structures. On observe en outre que ces glissements peuvent s'accompagner soit d'une disparition du comportement onde inverse [52] au voisinage des coupures (c'est le cas des modes  ${}_p HE_{2,1}$  et  ${}_i HE_{2,1}$ ) soit au contraire de l'établissement d'un tel comportement (c'est le cas pour les modes  ${}_p EH_{0,1}$  et  ${}_i HE_{0,1}$ ). Ces comportements onde inverse de la plupart des modes résultent des dégénérescences importantes qu'ils subissent à l'intérieur de leur parité au fur et à mesure que croît l'applatissage de la structure [53]. Ces dégénérescences sont à l'origine des glissements importants enregistrés sur les lieux caractéristiques. On

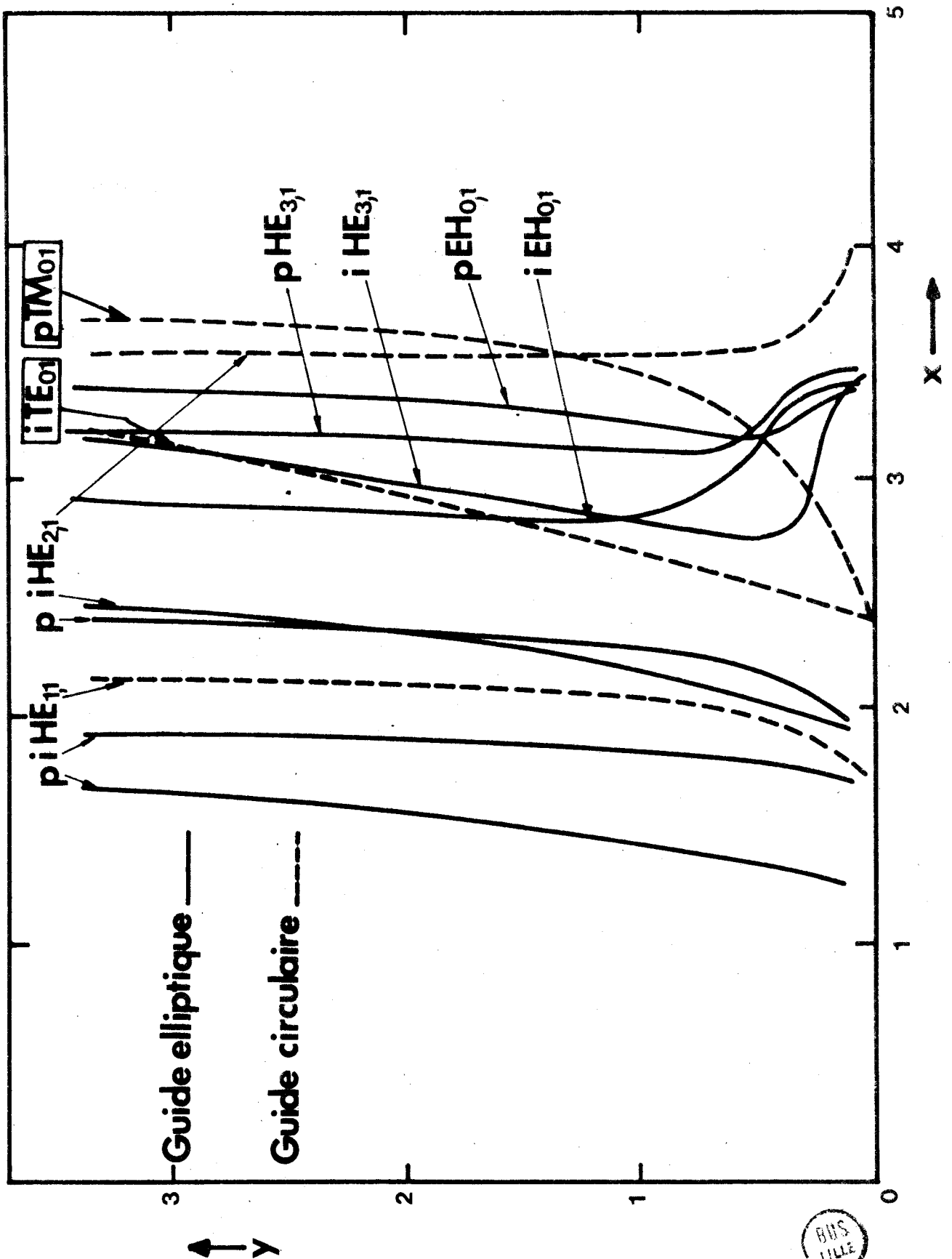


Fig. II-16 Paramètres Spectraux des premiers modes du guide diélectrique elliptique. Les modes notés  $\boxed{\phantom{pHE}}$  sont ceux à "symétrie" de révolution du guide circulaire.



peut établir analytiquement la dégénérescence des modes  $iHE_{m,1}$  et  $pHE_{m,1}$  dans un guide diélectrique fortement aplati. Cette étude qui fait l'objet du paragraphe suivant constitue la meilleure vérification des résultats numériques.

### II - 2 - 3 Comportement des modes dans le domaine basse fréquence du spectre du guide diélectrique elliptique.

On obtient le comportement basse fréquence de tous les modes  $(m, 1)$  par une résolution analytique des équations caractéristiques modales simplifiées II-2-58 à II-2-61 issues de l'approche mode par mode dans les passages à la limite successifs  $Y \rightarrow 0$  et  $X \rightarrow 0$ .

La première étape de cette résolution consiste donc à substituer aux quantités  $Fek'_m(\xi_0, \gamma_0^2) / Fek_m(\xi_0, \gamma_0^2)$  et  $Gek'_m(\xi_0, \gamma_0^2) / Gek_m(\xi_0, \gamma_0^2)$  qui figurent dans ces équations, leurs formes limites [54] construites au premier ordre en  $|\gamma_0^2|$  (resp: au second ordre en  $Y$ ). On obtient ainsi pour  $m \neq 0$  :

$$\frac{Fek'_m(\xi_0, \gamma_0^2)}{Fek_m(\xi_0, \gamma_0^2)} \sim m - Y^2 F(m, \xi_0)$$

et

$$\frac{Gek'_m(\xi_0, \gamma_0^2)}{Gek_m(\xi_0, \gamma_0^2)} \sim m - Y^2 F'(m, \xi_0)$$

II-2-64

Dans les expressions II-2-64 les quantités  $F(m, \xi_0)$  et  $F'(m, \xi_0)$  sont définies différemment selon que l'ordre  $m$  est pris égal ou différent de 1. Ainsi lorsque  $m=1$  on écrit :

$$F(1, \xi_0) = -\frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \xi_0} \left\{ e^{2\xi_0} \operatorname{Log} \left[ \frac{Y e^{\xi_0 + \alpha}}{4 \operatorname{sh} \xi_0} \right] + P_1(\xi_0) \right\}$$

$$F'(1, \xi_0) = -\frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \xi_0} \left\{ e^{2\xi_0} \operatorname{Log} \left[ \frac{Y e^{\xi_0 + \alpha}}{4 \operatorname{sh} \xi_0} \right] + P_2(\xi_0) \right\}$$

avec

$$P_1(\xi_0) = -\frac{1}{8} (5e^{-2\xi_0} - 4e^{2\xi_0} - 4)$$

$$P_2(\xi_0) = -\frac{1}{8} (5e^{-2\xi_0} - 4e^{2\xi_0} + 4)$$

II-2-65

$\alpha$  désigne dans les expressions ci-dessus la constante d'Euler ( $\alpha = 0,5772$ ).

Si maintenant  $m$  est différent de un alors :

$$F(m, \xi_0) = \frac{1}{8 \operatorname{sh}^2 \xi_0 (m^2 - 1)} \left[ (m-1)e^{-2\xi_0} + (m+1)e^{2\xi_0} \right]$$

$$F'(m, \xi_0) = \frac{1}{8 \operatorname{sh}^2 \xi_0 (m^2 - 1)} \left[ (m+1)e^{2\xi_0} - (m-1)e^{-2\xi_0} \right]$$

II-2-66

Enfin quand  $m=0$  la forme limite de la quantité  $Fek'_0(\xi_0, \gamma_0^2) / Fek_0(\xi_0, \gamma_0^2)$  est particulière puisqu'elle s'exprime comme :

$$\frac{Fek'_0(\xi_0, \gamma_0^2)}{Fek_0(\xi_0, \gamma_0^2)} \sim \frac{1}{\operatorname{Log} \left[ \frac{Y e^{\xi_0 + \alpha}}{4 \operatorname{sh} \xi_0} \right]}$$

II-2-67

Dans une seconde étape, on procède au développement des équations caractéristiques modales II-2-58 à II-2-61 en se limitant toujours au second ordre en  $Y$ . Ces équations deviennent pour les modes  $(m, p)$  avec  $m \geq 1$  :

$$\left[ m^2 + \chi_{m,m}(\gamma_1^2) \cdot \nu_{m,m}(\gamma_1^2) \right] X^2 - m Y^2 B^{(i),(p)}(m, \xi_0, \gamma_1^2) +$$

$$m X^2 Y^2 \left[ F(m, \xi_0) + F'(m, \xi_0) \right] + \chi_{m,m}(\gamma_1^2) \cdot \nu_{m,m}(\gamma_1^2) Y^2 (\varepsilon_r + 1) = 0$$

II-2-68

où  $B$  est un facteur qui s'exprime pour les modes impairs comme :

$$B^{(i)}(m, \xi_0, \gamma_1^2) = \varepsilon_r \frac{Ce'_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{Ce_m(\xi_0, \gamma_1^2)} + \frac{Se'_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{Se_m(\xi_0, \gamma_1^2)}$$

II-2-69

ou comme

$$B^{(P)}(m, \xi_0, \gamma_1^2) = \frac{Ce'_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{Ce_m(\xi_0, \gamma_1^2)} + \varepsilon_r \frac{Se'_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{Se_m(\xi_0, \gamma_1^2)} \quad \text{II-2-70}$$

pour les modes pairs.

Les développements au second ordre en  $\gamma$  des équations caractéristiques relatives aux modes  $(0, P)$  impairs et pairs prennent quant à eux tous deux la forme simple suivante :

$$Ce_0(\xi_0, \gamma_1^2) = 0 \quad \text{II-2-71}$$

Enfin dans la dernière étape de cette résolution analytique, on note préalablement que : (voir figure II-17).

$$\lim_{\gamma_1^2 \rightarrow 0} \left[ m^2 + \chi_{m,m}(\gamma_1^2) \nu_{m,m}(\gamma_1^2) \right] = O(\gamma_1^4) \quad \text{II-2-72}$$

si  $m > 1$  et que :

$$\lim_{\gamma_1^2 \rightarrow 0} \left[ 1 + \chi_{1,1}(\gamma_1^2) \nu_{1,1}(\gamma_1^2) \right] = -O(\gamma_1^4) \quad \text{II-2-73}$$

si  $m=1$  avant de substituer aux quantités  $Ce'_m(\xi_0, \gamma_1^2) / Ce_m(\xi_0, \gamma_1^2)$  et  $Se'_m(\xi_0, \gamma_1^2) / Se_m(\xi_0, \gamma_1^2)$  leurs formes limites construites elles aussi en premier ordre en  $\gamma_1^2$  (resp. au second ordre en  $\chi$ ). Ces formes limites sont rassemblés dans le formulaire ci-dessous dans lequel on doit nécessairement distinguer la parité de l'ordre  $m$  :

$$. m = 2n ; n = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ etc}$$

si  $n=0$

$$\frac{Ce'_0(\xi_0, \gamma_1^2)}{Ce_0(\xi_0, \gamma_1^2)} \sim 0$$

si

$$\frac{Ce'_{2n}(\xi_0, \gamma_1^2)}{Ce_{2n}(\xi_0, \gamma_1^2)} \sim \text{cth} \xi_0 \left[ \frac{\sum_{r=0}^n \frac{(n+r-1)! (\text{sh} \xi_0)^{2r}}{(n-r)! 4^{n-r} (2r-1)!}}{\sum_{r=0}^n \frac{(n+r-1)! (\text{sh} \xi_0)^{2r-1}}{(n-r)! 4^{n-r} (2r)!}} \right]$$

II-2-74

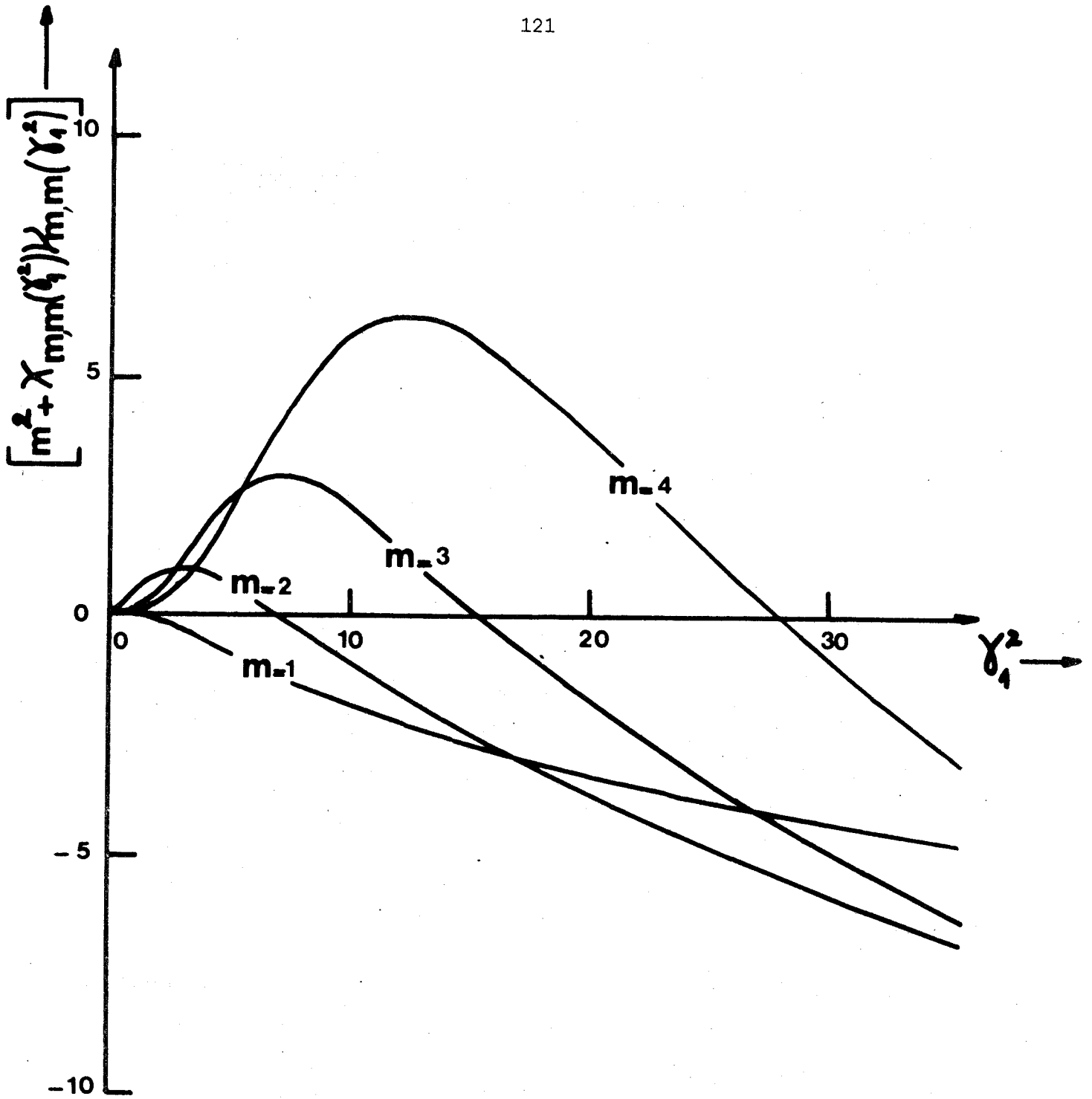


Fig. II-17 Passage à la limite  $\gamma_1^2 \rightarrow 0$

.  $m = 2n + 2$  ;  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  etc

$$\frac{Se'_{2n+2}(\xi_0, \chi_1^2)}{Se_{2n+2}(\xi_0, \chi_1^2)} \sim \coth \xi_0 \left[ \frac{1}{ch^2 \xi_0} + \frac{\sum_{r=0}^n \frac{(n+r+1)! (2r+2) (sh \xi_0)^{2r+2}}{(n-r)! 4^{n-r} (2r+1)!}}{\sum_{r=0}^n \frac{(n+r+1)! (sh \xi_0)^{2r+2}}{(n-r)! 4^{n-r} (2r+1)!}} \right]$$

.  $m = 2n + 1$  ;  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  etc

II-2-75

$$\frac{Ce'_{2n+1}(\xi_0, \chi_1^2)}{Ce_{2n+1}(\xi_0, \chi_1^2)} \sim \coth \left[ \frac{1}{ch^2 \xi_0} + \frac{\sum_{r=0}^n \frac{(n+r)! (2r+1) (sh \xi_0)^{2r+1}}{(n-r)! 4^{n-r} (2r)!}}{\sum_{r=0}^n \frac{(n+r)! (sh \xi_0)^{2r+1}}{(n-r)! 4^{n-r} (2r)!}} \right]$$

II-2-76

$$\frac{Se'_{2n+1}(\xi_0, \chi_1^2)}{Se_{2n+1}(\xi_0, \chi_1^2)} \sim \coth \left[ \frac{\sum_{r=0}^n \frac{(n+r)! (sh \xi_0)^{2r}}{(n-r)! 4^{n-r} (2r)!}}{\sum_{r=0}^n \frac{(n+r)! (sh \xi_0)^{2r}}{(n-r)! 4^{n-r} (2r+1)!}} \right]$$

II-2-77

Compte tenu de II-2-72 et II-2-73, on écrit finalement l'équation caractéristique II-2-68 sous la forme très simple :

$$\chi^2 \approx \frac{B^{(i),(p)} + m(\epsilon_r + 1)}{F(m, \xi_0) + F'(m, \xi_0)}$$

II-2-78

qui sert de support à la discussion suivante.

Quand la valeur de l'aplatissement  $\xi_0$  est bornée toutes les quantités limites qui interviennent dans  $B^{(i),(p)}$  peuvent être considérées comme bornées. On conclut alors comme C. YEH [55] que cette équation caractéristique II-2-78 reste compatible dans le domaine basse fréquence du spectre seulement pour l'ordre  $m=1$ . Ceci résulte de la présence de l'infiniment grand

positif  $F(1, \xi_0) + F'(1, \xi_0)$  au dénominateur de II-2-78. On démontre ainsi analytiquement que les modes impairs et pairs (1, 1) possèdent tous deux une fréquence de coupure nulle.

Si maintenant dans ce domaine basse fréquence du spectre on suppose en outre que l'aplatissement est important ( $\xi_0 \rightarrow 0$ ) toutes les formes limites des quantités  $Ce'_m(\xi_0, \gamma_1^2) / Ce_m(\xi_0, \gamma_1^2)$  et  $Se'_m(\xi_0, \gamma_1^2) / Se_m(\xi_0, \gamma_1^2)$  qui figurent dans  $B^{(i)/P}$  deviennent non bornées. L'équation caractéristique II-2-78 devient alors compatible quelque soit  $m \neq 0$ . Cette compatibilité résulte de l'ordre de l'infiniment grand  $F(m, \xi_0) + F'(m, \xi_0)$  qui reste supérieur à celui des quantités  $Ce'_m(\xi_0, \gamma_1^2) / Ce_m(\xi_0, \gamma_1^2)$  et  $Se'_m(\xi_0, \gamma_1^2) / Se_m(\xi_0, \gamma_1^2)$ . Les modes (m, 1) d'un guide elliptique très aplati subissent donc dans la zone basse fréquence du spectre des dégénérescences d'ordre élevé.

#### II - 2 - 4 Conclusions

Malgré sa formulation analytique, la résolution complète du traitement guide d'onde sur une tige diélectrique elliptique s'avère d'une extrême complexité que les travaux parcellaires de C. YEH révèlent peu. Ces travaux se rapportent aux seuls modes fondamentaux à fréquence de coupure nulle dont les caractéristiques de dispersion sont issues en fait d'une approche mode par mode. Cette approximation permet d'éviter une étude globale mais son domaine d'application, se réduit le plus souvent à la partie basse fréquence du spectre lorsque l'aplatissement de la tige devient relativement important.

Une nouvelle "stratégie" de résolution des équations caractéristiques modales est proposée. Elle repose sur une investigation préalable de couplages modaux dans un domaine spectral déterminé. Cette nouvelle "stratégie" a conduit aux caractéristiques de dispersion des premiers modes supérieurs du guide diélectrique elliptique. Les lieux caractéristiques de la plupart de ces modes font apparaître un comportement onde inverse au voisinage des coupures. Ce comportement est caractéristique de la présence de dégénérescences d'ordre élevé dans le spectre d'une structure diélectrique aplatie ce qui renforce la cohérence de la modélisation elliptique proposée pour les lignes microfentes.

## CHAPITRE III

## LE SPECTRE DE MODES DISCRETS DES LIGNES MICROFENTES

## PARAMETRES PRATIQUES DU MODE FENTE

III - 1 LE SPECTRE DE MODE DISCRET DES LIGNES MICROFENTE SIMPLES  
MODÉLISÉES

Le fait d'avoir complété préalablement le spectre de mode discret du guide diélectrique elliptique permet d'aborder dans de meilleures conditions celui des lignes microfentes modélisées dont les sections droites sont présentées sur la figure I-3. Il apparait clairement au chapitre II que la résolution rigoureuse du traitement guide d'onde sur une structure elliptique s'avère d'un extrême complexité dès lors que l'on sort du cadre de l'approximation d'une approche mode par mode. En conséquence, tous les résultats décrits dans ce dernier chapitre sont essentiellement issus de cette approximation. Les traitements guide d'onde des structures microfentes modélisées sont toutefois formulés rigoureusement pour permettre de tester éventuellement, dans un domaine spectral donné, le domaine de validité de l'approche mode par mode. Il est avantageux d'examiner en premier lieu la ligne microfente simple symétrique modélisée étant donné les points communs importants qui relie son traitement guide d'onde à celui de la tige diélectrique elliptique.

## III - 1 - 1 La ligne microfente modélisée symétrique

## a) Formulation du problème

La ligne microfente modélisée est un guide elliptique muni d'arêtes métalliques. La condition de périodicité de  $2\pi$  pour les champs d'une onde propagée dans le guide diélectrique elliptique est remplacée ici par les conditions aux limites suivantes :

$$E_{z,l}(\xi, 0) = E_{z,l}(\xi, \pi) = 0$$

$$E_{\xi,l}(\xi, 0) = E_{\xi,l}(\xi, \pi) = 0$$

III-1-1

où l'indice  $l = 0, 1$  repère respectivement les milieux air et diélectrique.

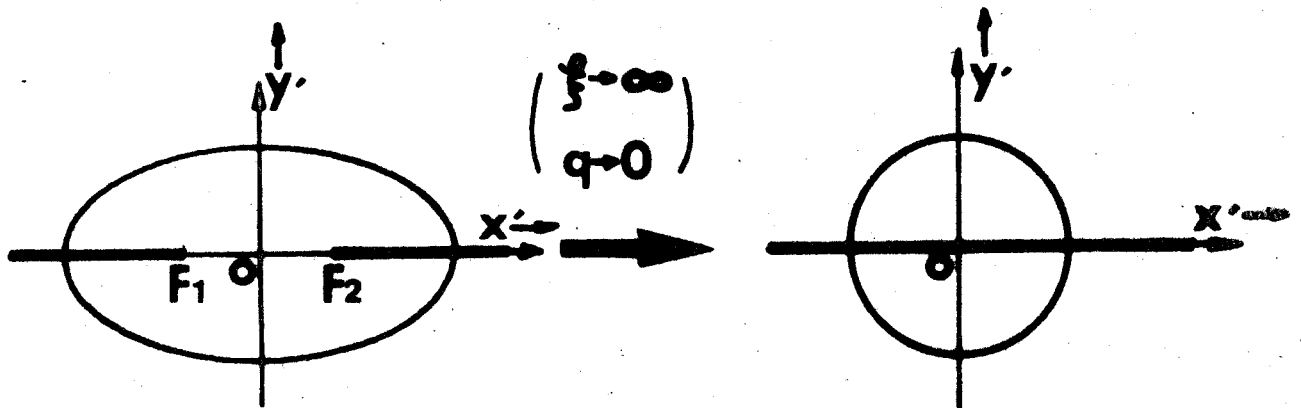
Généralement la métallisation de surfaces de coordonnées angulaires dans une structure cylindrique (au sens large) fait perdre le caractère entier à la constante de séparation  $n$  à moins que cette surface de coordonnées ne soit un plan de symétrie dans la section droite auquel cas la métallisation joue simplement le rôle d'un filtre de modes.

Comme on l'a déjà signalé dans l'étude du guide diélectrique elliptique l'effet des conditions aux limites angulaires III-1-1 est mieux perçu lorsqu'on réalise par la pensée un passage progressif de la section droite elliptique à la section droite circulaire. Dans un tel passage la ligne à microfente simple modélisée s'identifie à deux lignes images circulaires face à face comme le montre la figure III-1-a).

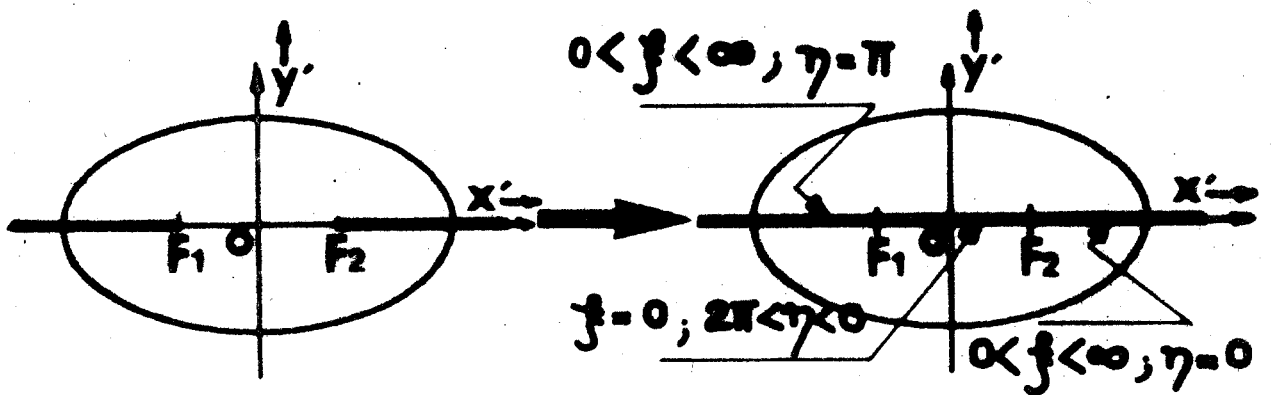
Dans le cas de la section droite elliptique, les arêtes métalliques introduites suivant les surfaces de coordonnées angulaires  $\eta = 0$  et  $\eta = \pi$  ne jouent pas seulement le rôle d'un filtre de mode comme peut le faire le plan métallique placé en  $\eta = 0$ ,  $\eta = \pi$  et  $\xi = 0$  d'une ligne image elliptique ; la présence d'arêtes métalliques crée des discontinuités locales pour les champs d'une onde électromagnétique propagée dans le guide [56].

Malgré l'introduction d'arêtes métalliques suivant l'axe  $OX'$ , la section droite du guide microfente modélisé conserve sa symétrie miroir par rapport au grand axe (qui est précisément suivant l'axe  $OX'$ ). Les solutions du traitement guide d'onde sur la ligne à microfente symétrique modélisée sont en conséquence toujours subdivisées en deux classes d'ondes paires et impaires dans cette symétrie miroir  $Y' = 0$ . Les solutions impaires de guide diélectrique elliptique sont des solutions acceptables pour la ligne à microfente symétrique modélisée puisqu'on vérifie à partir des relations II-2-17 et II-2-18 que les champs électriques de ces modes ne sont en rien perturbés par la présence de deux arêtes métalliques suivant les surfaces de coordonnées  $\eta = 0$  et  $\eta = \pi$ . Par contre, les relations II-2-17 et II-2-18 montrent que les solutions paires sont, de ce point de vue,





a)



b)

Fig III-1 Rôle des arêtes métalliques

a) Passage de la ligne microfente modélisée symétrique aux lignes images circulaires

b) Passage de la ligne diélectrique elliptique à la ligne image elliptique

inadéquates.

Pour que la solution du traitement guide d'onde sur la ligne à microfente symétrique modélisée soit complète il suffit donc de construire une solution paire dans la symétrie miroir  $y'=0$  capable de vérifier en premier lieu les conditions aux limites III-1-1 et de mettre en évidence les discontinuités locales du champ électromagnétique. Une telle solution paire peut être construite de la manière suivante :

- dans la région (0) ;  $\xi_0 < \xi < \infty$  :

$$E_{z,0} = \sum_n P_n^{(p),r} \begin{cases} se_n^*(\eta, \gamma_0^2) \cdot Gek_n(\xi, \gamma_0^2) & ; 0 < \eta < \pi \\ - se_n^*(\eta, \gamma_0^2) \cdot Gek_n(\xi, \gamma_0^2) & ; \pi < \eta < 2\pi \end{cases}$$

$$H_{z,0} = \sum_n L_n^{(p),r} \begin{cases} ce_n^*(\eta, \gamma_0^2) \cdot Fek_n(\xi, \gamma_0^2) & ; 0 < \eta < \pi \\ - ce_n^*(\eta, \gamma_0^2) \cdot Fek_n(\xi, \gamma_0^2) & ; \pi < \eta < 2\pi \end{cases}$$

III-1-2

et dans la région (1) ;  $0 \leq \xi < \xi_0$

$$E_{z,1} = \sum_n B_n^{(p),r} \begin{cases} se_n(\eta, \gamma_1^2) \cdot Ge_n(\xi, \gamma_1^2) & ; 0 < \eta < \pi \\ - se_n(\eta, \gamma_1^2) \cdot Ge_n(\xi, \gamma_1^2) & ; \pi < \eta < 2\pi \end{cases}$$

$$H_{z,1} = \sum_n A_n^{(p),r} \begin{cases} ce_n(\eta, \gamma_1^2) \cdot Fe_n(\xi, \gamma_1^2) \\ - ce_n(\eta, \gamma_1^2) \cdot Fe_n(\xi, \gamma_1^2) \end{cases}$$

III-1-3

où les fonctions de MATHIEU radiales  $Fe_n(\xi, \gamma_1^2)$  et  $Ge_n(\xi, \gamma_1^2)$  sont définies comme :

$$F e_n(\xi, \gamma_1^2) = C e_n(\xi, \gamma_1^2) - \frac{C e_n(0, \gamma_1^2)}{F e_n(0, \gamma_1^2)} \cdot F e_n(\xi, \gamma_1^2)$$

$$G e_n(\xi, \gamma_1^2) = S e_n(\xi, \gamma_1^2) - \frac{S e_n'(0, \gamma_1^2)}{G e_n'(0, \gamma_1^2)} \cdot G e_n(\xi, \gamma_1^2)$$

III-1-4

pour assurer les propriétés suivantes :

$$F e_n(0, \gamma_1^2) = 0$$

III-1-5

$$G e_n'(0, \gamma_1^2) = 0$$

Les signes (-) dans les expressions III-1-2 et III-1-3 sont nécessaires au respect des conditions de symétrie II-2-16 sur les composantes axiales des solutions paires recherchées. Associées aux relations III-1-5, ils permettent aux solutions III-1-3 de remplir des conditions aux limites très spécifiques à la structure étudiée et qu'on rappelle :

- . Continuité de  $E_z$  sur tout l'axe  $OX'$
- . Continuité de  $H_{z,1}$  et  $E_{\eta,1}$  dans la fente  $|x'| \leq w/2$
- . Discontinuité de  $E_{\eta,1}$  sur les bords minces de la fente  $|x'| > w/2$
- . Discontinuité de  $H_z$  et  $H_\eta$  à la traversée des arêtes métalliques  $|x'| \geq w/2$
- . Discontinuité de  $H_{\xi,1}$  sur les bords minces de la fente  $|x'| = w/2$

Ce comportement des champs d'une onde électromagnétique est typique de guides munis d'arêtes minces ; l'exposant  $\Gamma$  dans la description des fonctions de modes III-1-2 et III-1-3 est là pour le rappeler. [56].

#### b) Application des conditions de continuité

Comme pour le guide diélectrique elliptique, il faut maintenant assurer la continuité des composantes tangentielles des champs électrique et

magnétique à l'interface diélectrique -air  $\xi = \xi_0$ . La méthode suivie pour l'application de ces conditions de continuité est en tous points semblable à celle développée sur le guide elliptique ; elle est détaillée au paragraphe II-2-1-c). Il suffit en effet d'y réaliser directement la substitution des fonctions radiales :

$$C e_n(\xi_0, \gamma_1^2) \longrightarrow F e_n(\xi_0, \gamma_1^2)$$

III-1-6

$$S e_n(\xi_0, \gamma_1^2) \longrightarrow G e_n(\xi_0, \gamma_1^2)$$

pour obtenir deux ensembles d'équations linéaires homogènes à un nombre infini de termes dont les inconnues sont les constantes arbitraires  $P_n^{(p),r}$  et  $L_n^{(p),r}$ . Ces équations s'expriment comme :

$$\sum_n' \left( L_n^{(p),r} g_{n,m}^r + P_n^{(p),r} h_{n,m}^r \right) = 0$$

$$\sum_n' \left( L_n^{(p),r} t_{n,m}^r + P_n^{(p),r} s_{n,m}^r \right) = 0$$

III-1-7

où les coefficients  $g_{n,m}^r$ ,  $h_{n,m}^r$ ,  $t_{n,m}^r$  et  $s_{n,m}^r$  sont définis par :

$$g_{n,m}^r = \frac{\omega \mu_0 \alpha_{n,m}}{\beta} (\gamma_0^2, \gamma_1^2) F e_k n(\xi_0, \gamma_0^2) \left\{ \frac{F e'_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{F e_m(\xi_0, \gamma_1^2)} + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \frac{F e'_k m(\xi_0, \gamma_0^2)}{F e'_k m(\xi_0, \gamma_0^2)} \right\}$$

$$h_{n,m}^r = - \left( 1 + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \right) G e_k n(\xi_0, \gamma_0^2) \sum_r' \nu_{r,m}(\gamma_1^2) \cdot \beta_{n,r}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$$

$$t_{n,m}^r = \left( 1 + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \right) F e_k n(\xi_0, \gamma_0^2) \sum_r' \chi_{r,m}(\gamma_1^2) \cdot \alpha_{n,r}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$$

$$s_{n,m}^r = \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_r}{\beta} \beta_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) G e_k n(\xi_0, \gamma_0^2) \left\{ \frac{G e'_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{G e_m(\xi_0, \gamma_1^2)} + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \frac{1}{\epsilon_r} \frac{G e'_k m(\xi_0, \gamma_0^2)}{G e_k m(\xi_0, \gamma_0^2)} \right\}$$

III-1-3

Les équations caractéristiques relatives aux modes impairs et pairs mais cette fois dans la symétrie miroir  $X' = 0$  s'expriment successivement comme :

$g_{1,1}^r$	$h_{1,1}^r$	$g_{1,3}^r$	$h_{1,3}^r$	$g_{1,5}^r$	$h_{1,5}^r$	·
$t_{1,1}^r$	$s_{1,1}^r$	$t_{1,3}^r$	$s_{1,3}^r$	$t_{1,5}^r$	$s_{1,5}^r$	·
$g_{3,1}^r$	$h_{3,1}^r$	$g_{3,3}^r$	$h_{3,3}^r$	$g_{3,5}^r$	$h_{3,5}^r$	·
$t_{3,1}^r$	$s_{3,1}^r$	$t_{3,3}^r$	$s_{3,3}^r$	$t_{3,5}^r$	$s_{3,5}^r$	·
$g_{5,1}^r$	$h_{5,1}^r$	$g_{5,3}^r$	$h_{5,3}^r$	$g_{5,5}^r$	$h_{5,5}^r$	·
$t_{5,1}^r$	$s_{5,1}^r$	$t_{5,3}^r$	$s_{5,3}^r$	$t_{5,5}^r$	$s_{5,5}^r$	·
·	·	·	·	·	·	·

= 0

III-1-9

pour les modes  $m = 1, 3, 5 \dots$  etc ... et comme :

$g_{0,0}^r$	$g_{2,0}^r$	$h_{2,0}^r$	$g_{4,0}^r$	$h_{4,0}^r$	$g_{6,0}^r$	·
$g_{0,2}^r$	$g_{2,2}^r$	$h_{2,2}^r$	$g_{4,2}^r$	$h_{4,2}^r$	$g_{6,2}^r$	·
$t_{0,2}^r$	$t_{2,2}^r$	$s_{2,2}^r$	$t_{4,2}^r$	$s_{4,2}^r$	$t_{6,2}^r$	·
$g_{0,4}^r$	$g_{2,4}^r$	$h_{2,4}^r$	$g_{4,4}^r$	$h_{4,4}^r$	$g_{6,4}^r$	·
$t_{0,4}^r$	$t_{2,4}^r$	$s_{2,4}^r$	$t_{4,4}^r$	$s_{4,4}^r$	$t_{6,4}^r$	·
·	·	·	·	·	·	·

= 0

III-1-10



pour les modes  $m = 0, 2, 4 \dots$  etc...

On peut bien sûr si on le souhaite, résoudre rigoureusement les équations caractéristiques des modes d'arêtes de la ligne microfente symétrique modélisée. On use pour cela de la même "stratégie" générale développée en II-2-2 c) au chapitre précédent. Il suffit pour cela, de se fixer préalablement une valeur de l'aplatissement  $\xi_0$  (resp:  $W/D$ ) et un domaine spectral d'intérêt  $(X, Y)$ . Cette intéressante possibilité va néanmoins à l'encontre de l'efficacité recherchée des méthodes de perturbations. Ces méthodes d'analyse réclament en effet une certaine simplicité dans la description du guide "peu différent" et de ce point de vue l'approximation de l'approche mode par mode semble mieux adaptée que la "stratégie" générale. En contre partie de cette simplicité recherchée, il faut souvent restreindre le domaine spectral de validité des résultats numériques. C'est essentiellement à partir d'une superposition graphique des lieux caractéristiques des couples de racines issus successivement de la "stratégie" générale et de l'approche mode par mode que l'on délimite ce domaine spectral de validité.

c) Comportement des modes d'arêtes pairs dans le domaine spectral basse fréquence.

L'équation caractéristique des modes d'arêtes  $(m, 1)$  pairs avec  $m > 1$  s'écrit dans le domaine basse fréquence du spectre  $X \rightarrow 0$ ,  $Y \rightarrow 0$  formellement comme II-2-78 mais on substitue au terme  $B^{(P)}$  défini en II-2-70, la quantité  $B^{(P)r}$  que l'on exprime comme :

$$B^{(P)r}(m, \xi_0, \gamma_1^2) = \epsilon_r \frac{Fe'_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{Fe_m(\xi_0, \gamma_1^2)} + \frac{Ge'_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{Ge_m(\xi_0, \gamma_1^2)} \quad \text{III-1-11}$$

Quant au mode d'arête pair  $(0, 1)$  ses racines caractéristiques dans le domaine basse fréquence sont pratiquement celles de l'équation :

$$Fa_0(\xi_0, \gamma_1^2) = 0 \quad \text{III-1-12}$$

On peut maintenant s'interroger sur l'existence éventuelle de modes d'arêtes à fréquence de coupure nulle. Pour répondre complètement à cette question il s'avère nécessaire de construire les formes limites des quantités  $Fe'_m(\xi_0, \gamma_1^2)/Fe_m(\xi_0, \gamma_1^2)$  et  $Ge'_m(\xi_0, \gamma_1^2)/Ge_m(\xi_0, \gamma_1^2)$  au premier ordre en  $\gamma_1^2$  (resp. au second ordre en  $X$ ). Il faut ensuite tester la

compatibilité des équations du type II-2-78 (dans laquelle on remplace  $B^{(P)}$  par  $B^{(P),r}$ ) pour les modes  $m \geq 1$  et celle de l'équation III-1-2 pour le mode  $m=0$ .

A partir des relations III-1-4 on exprime les quantités  $F'_{em}(\xi_0, \gamma_1^2) / F_{em}(\xi_0, \gamma_1^2)$  et  $G'_{em}(\xi_0, \gamma_1^2) / G_{em}(\xi_0, \gamma_1^2)$  sous les formes suivantes :

$$\frac{F'_{em}(\xi_0, \gamma_1^2)}{F_{em}(\xi_0, \gamma_1^2)} = \frac{\frac{C'_{em}(\xi_0, \gamma_1^2)}{C_{em}(\xi_0, \gamma_1^2)} - \frac{F'_{eym}(\xi_0, \gamma_1^2)}{F_{eym}(\xi_0, \gamma_1^2)} \cdot \frac{F_{eym}(\xi_0, \gamma_1^2)}{F_{eym}(0, \gamma_1^2)}}{\frac{C_{em}(\xi_0, \gamma_1^2)}{C_{em}(\xi_0, \gamma_1^2)} - \frac{F_{eym}(\xi_0, \gamma_1^2)}{F_{eym}(0, \gamma_1^2)}}$$

$$\frac{G'_{em}(\xi_0, \gamma_1^2)}{G_{em}(\xi_0, \gamma_1^2)} = \frac{\frac{S'_{em}(\xi_0, \gamma_1^2)}{S_{em}(0, \gamma_1^2)} - \left[ \frac{G'_{eym}(\xi_0, \gamma_1^2)}{G_{eym}(\xi_0, \gamma_1^2)} / \frac{G'_{eym}(0, \gamma_1^2)}{G_{eym}(0, \gamma_1^2)} \right]}{\frac{S_{em}(\xi_0, \gamma_1^2)}{S_{em}(0, \gamma_1^2)} - \left[ \frac{G_{eym}(\xi_0, \gamma_1^2)}{G_{eym}(0, \gamma_1^2)} / \frac{G_{eym}(0, \gamma_1^2)}{G_{eym}(0, \gamma_1^2)} \right]}$$

III-1-13

La construction de ces formes limites passe par celle des diverses quantités composantes (ANNEXE II) On écrit ainsi au premier ordre en  $\gamma_1^2$  :

$$\frac{C'_{2n}(\xi_0, \gamma_1^2)}{C_{2n}(0, \gamma_1^2)} \sim 0 \text{ si } n=0 \text{ et } n \neq 0 ; \quad \frac{C_{2n}(\xi_0, \gamma_1^2)}{C_{2n}(0, \gamma_1^2)} \sim \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{C'_{2n+1}(\xi_0, \gamma_1^2)}{C_{2n+1}(0, \gamma_1^2)} \sim \begin{cases} 2 \operatorname{sh} \xi_0 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} ; \quad \frac{C_{2n+1}(\xi_0, \gamma_1^2)}{C_{2n+1}(0, \gamma_1^2)} \sim \begin{cases} \operatorname{ch} \xi_0 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{Se'_{2n+1}(\xi_0, \gamma_1^2)}{Se'_{2n+1}(0, \gamma_1^2)} \sim \begin{cases} \text{ch } \xi_0 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} ; \frac{Se_{2n+1}(\xi_0, \gamma_1^2)}{Se'_{2n+1}(\xi_0, \gamma_1^2)} \sim \begin{cases} \text{sh } \xi_0 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{Se'_{2n+2}(\xi_0, \gamma_1^2)}{Se'_{2n+2}(0, \gamma_1^2)} \sim \begin{cases} \text{ch } \xi_0 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} ; \frac{Se_{2n+2}(\xi_0, \gamma_1^2)}{Se'_{2n+2}(0, \gamma_1^2)} \sim \begin{cases} 1/2 \text{ sh } \xi_0 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

III-1-14

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Fey'_m(\xi, \gamma_1^2)}{Fey_m(\xi, \gamma_1^2)} \\ \frac{Gay'_m(\xi, \gamma_1^2)}{Gay_m(\xi, \gamma_1^2)} \end{array} \right\} = -m \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right\} \frac{\gamma_1^2}{2(m^2-1)} \left[ (m+1)e^{2\xi_0} - (m-1)e^{-2\xi_0} \right] + O(\gamma_1^2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Fey'_1(\xi, \gamma_1^2)}{Fey_1(\xi, \gamma_1^2)} \\ \frac{Gay'_1(\xi, \gamma_1^2)}{Gay_1(\xi, \gamma_1^2)} \end{array} \right\} = -1 - \gamma_1^2 \left\{ \begin{array}{l} P_1(\xi) \\ P_2(\xi) \end{array} \right\} + O(\gamma_1^2)$$

$$\frac{Fey'_0(\xi, \gamma_1^2)}{Fey_0(\xi, \gamma_1^2)} = 1 / \text{Log} \left[ \frac{\gamma_1 e^{\xi+\alpha}}{2} \right]$$





$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Fey_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{Fey_m(0, \gamma_1^2)} \\ \frac{Gey_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{Gey_m(0, \gamma_1^2)} \end{array} \right\} = e^{-m\xi_0} \left[ 1 - \frac{\gamma_1^2}{4(m^2-1)} (m-1)e^{-2\xi_0} - (m+1)e^{2\xi_0} + 2 \right] + o(\gamma_1^2)$$

$m > 1$

$$\frac{Fey_1(\xi_0, \gamma_1^2)}{Fey_1(0, \gamma_1^2)} = e^{-\xi_0} \left[ 1 + \frac{\gamma_1^2}{8} (e^{-2\xi_0} - 1) \right] + o(\gamma_1^2)$$

$$\frac{Fey_0(\xi_0, \gamma_1^2)}{Fey_0(0, \gamma_1^2)} = 1 + \frac{\gamma_1^2}{4} (1 - e^{-2\xi_0}) + o(\gamma_1^2)$$

III-1-15

Il devient alors simple de montrer à l'aide du formulaire ci-dessus que :

$$\lim_{\gamma_1^2 \rightarrow \infty} \frac{Fe'_0(\xi_0, \gamma_1^2)}{Fe_0(\xi_0, \gamma_1^2)} = \infty$$

III-1-16

de sorte que l'équation caractéristique modale III-1-12 demeure compatible lorsque  $|\gamma_0^2|$  (resp:  $Y$ ) et  $\gamma_1^2$  (resp:  $X$ ) tendent simultanément vers zéro.

On établit en outre, à  $\xi_0$  fixé, le caractère borné de toutes les quantités telles que  $Fe'_m(\xi_0, \gamma_1^2)$ ,  $Fe_m(\xi_0, \gamma_1^2)$  et  $Gem(\xi_0, \gamma_1^2)$  pour  $m \geq 1$  dans ce même passage à la limite. C'est donc encore la présence du terme infiniment grand positif  $F(1, \xi_0) + F'(1, \xi_0)$

défini en II-2-65 situé au dénominateur de l'équation II-2-81 qui maintient sa compatibilité.

On prouve ainsi que seuls les modes d'arêtes pairs  $(0, 1)$  et  $(1, 1)$  possèdent une fréquence de coupure nulle.

La ligne microfente modélisée symétrique se caractérise donc finalement par la présence de trois modes à fréquence de coupure nulle.

#### d) Caractéristique de dispersion. Résultats numériques

La figure III - 2 présente les lieux caractéristiques des trois premiers modes à fréquence de coupure nulle d'une ligne microfente symétrique modélisée. Le passage des traits pleins aux traits pointillés sur les lieux caractéristiques marque sur la figure III-2 la limite de validité de l'approche mode par mode.

Le schéma de désignation des modes impairs  $(m, p)$  avec  $m \geq 0$  est analogue à celui établi antérieurement pour les modes impairs du guide diélectrique elliptique. Pour les modes d'arêtes pairs la nomenclature proposée est la suivante :

. Un mode d'arêtes pairs  $(m, p)$  avec  $m \geq 1$  est noté  ${}^p\text{HE}_{m,p}^r$  ou  ${}^p\text{EH}_{m,p}^r$  dès lors que dans une diminution progressive de l'aplatissement de la structure (qui conduit à la suppression de la fente), son lieu caractéristique se superpose à celui du mode  ${}^i\text{HE}_{m,p}$  ou à celui du mode  ${}^i\text{EH}_{m,p}$  de la ligne image circulaire telle que la décrit la figure III 1 a).

. Les modes d'arêtes pairs, sont notés  ${}^p\text{HE}_{0,p}^r$  ; dans le passage à la ligne image circulaire, leurs lieux caractéristiques, à l'exception de celui du mode "fente"  ${}^p\text{HE}_{0,1}^r$ , viennent s'identifier à ceux des modes  ${}^i\text{TE}_{0,p-1}$  ( $p > 1$ ).

Toutes ces propriétés évolutives se vérifient analytiquement à partir des relations suivantes :

$$\lim_{\gamma_1^2 \rightarrow 0} \frac{C_{em}(0, \gamma_1^2)}{F_{eym}(0, \gamma_1^2)} = 0$$

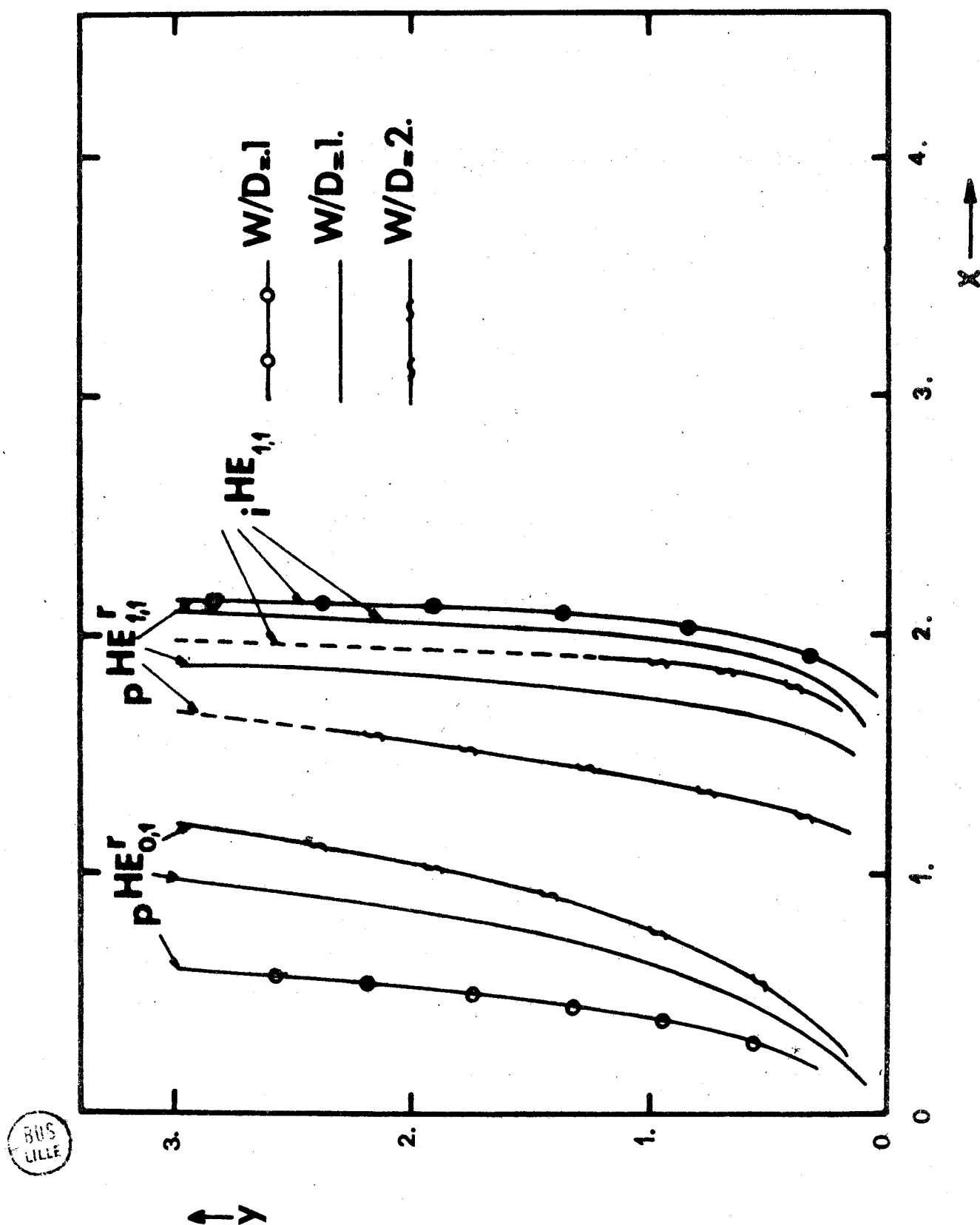


Fig. III-2 Ligne microfente symétrique modélisée

Lieux caractéristiques des trois premiers modes à fréquence de coupure nulle.  
 Les traits pointillés marquent l'abandon nécessaire de l'approche mode par mode  
 $f_c = 9.6$

$$\lim_{\gamma_1^2 \rightarrow 0} \frac{Se'_m(0, \gamma_1^2)}{Gey'_m(0, \gamma_1^2)} = 0$$

III-1-17

que l'on substitue dans III-1-4 avant d'appliquer aux équations caractéristiques modales III-1-9 et III-1-10, les conditions II-2-49 et II-2-50 qui accompagnent le passage à la géométrie circulaire.

Le passage de la ligne microfente modélisée symétrique à la ligne image circulaire doit nécessairement faire disparaître les modes d'arêtes. Cette disparition ne peut être qu'une conséquence de pertes métalliques très importantes que vont subir ces modes dans la structure de propagation réelle.

Les caractéristiques de dispersion des modes s'expriment par la relation entre leurs longueurs d'onde normalisées  $\lambda/\lambda_0$  ( $\lambda_0$  est la longueur d'onde des ondes planes dans le vide) et l'épaisseur normalisée  $D/\lambda_0$  du "coeur" diélectrique. Pour une constitution  $\epsilon_r$  donnée, ces paramètres normalisés se déduisent des couples de racines caractéristiques  $(X, Y)$  par les relations paramétriques suivantes :

$$\frac{D}{\lambda_0} = \left[ \frac{X^2 + Y^2}{\epsilon_r - 1} \right]^{1/2} / 2\pi$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 / \left[ \epsilon_r - X^2 / 4\pi^2 \left( \frac{D}{\lambda_0} \right)^2 \right]^{1/2}$$

III-1-18

Quelques résultats sur le mode "fente"  ${}^pHE_{0,1}$  sont décrits sur les figures III-3, III-4 et III-5. Il faut à leur sujet remarquer que les racines caractéristiques  $(X, Y)$  du mode "fente" extraites de l'approche mode par mode, sont indépendantes de la constitution  $\epsilon_r$  de la ligne dès lors que le facteur de forme  $W/D$  est donné. Cette dernière remarque renforce le caractère universel de l'abaque présenté sur la figure III-3.

#### e) Configuration des champs

La connaissance des caractéristiques de dispersion d'un mode  $(m, p)$  permet en principe la détermination de toutes les constantes  $L_n^{(i)}$ ,  $P_n^{(i)}$ ,  $B_n^{(i)}$  et  $A_n^{(i)}$  (resp:  $L_n^{(p),r}$ ,  $P_n^{(p),r}$ ,  $B_n^{(p),r}$  et  $A_n^{(p),r}$ ) en fonction de l'une quelconque d'entre elles. Des composantes longitudinales  $E_{z,l}$  et

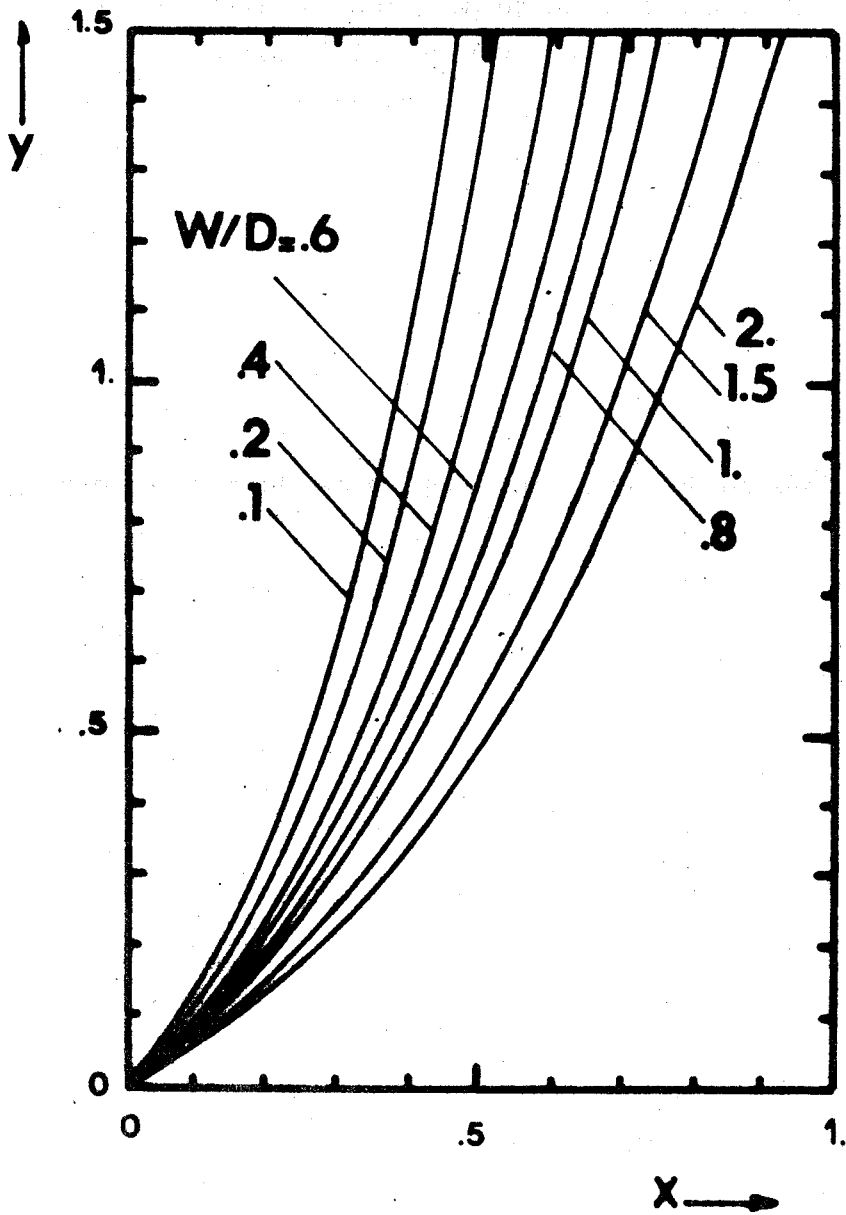


Fig. III-3 Ligne microfente symétrique modélisée  
Lieux caractéristiques des racines du mode "fente"  ${}_{PHE_{0,1}}^r$



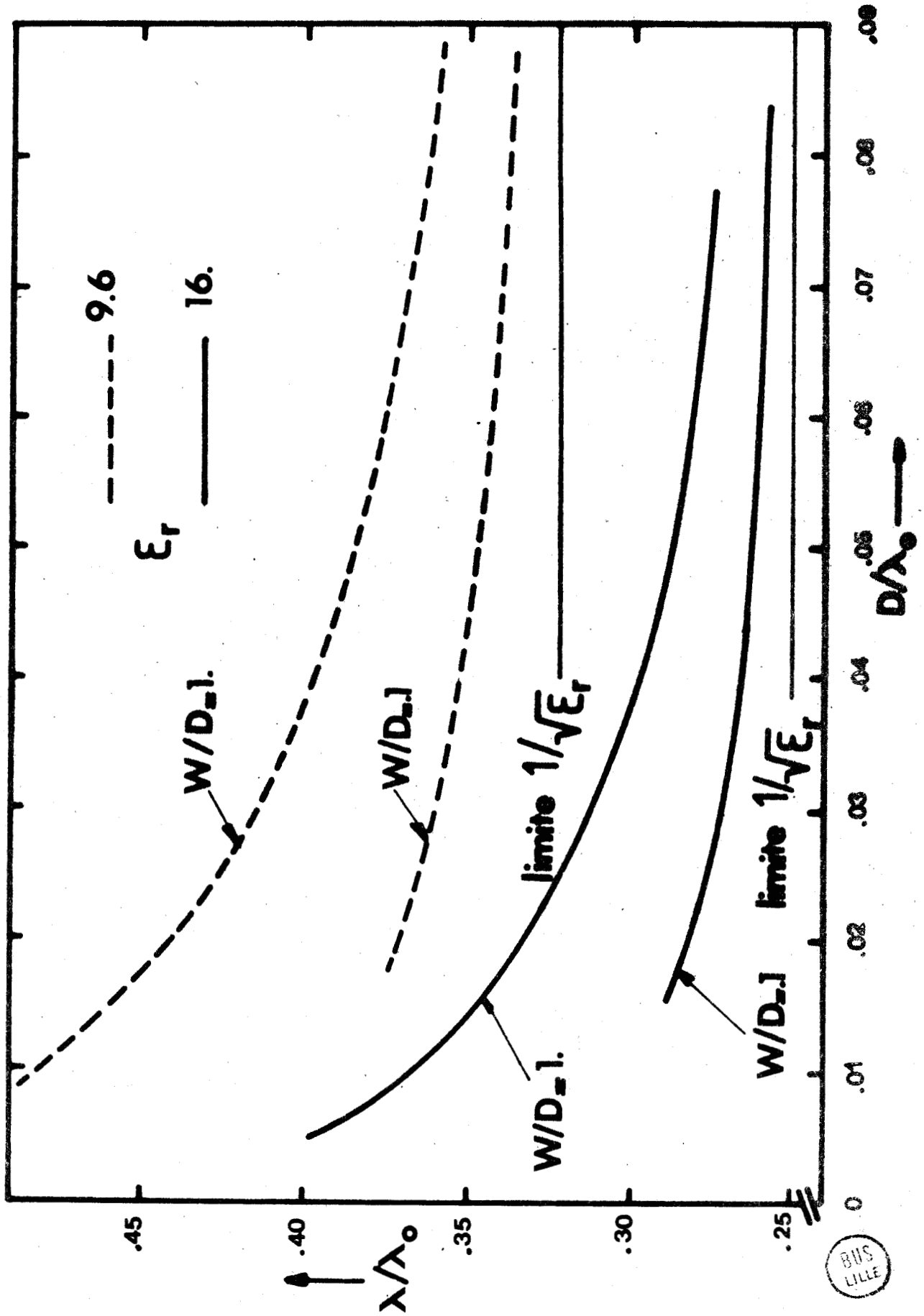


Fig. III-4 Ligne microfente symétrique modélisée. Caractéristiques de dispersion du mode fente  ${}^pHE_{0,1}$

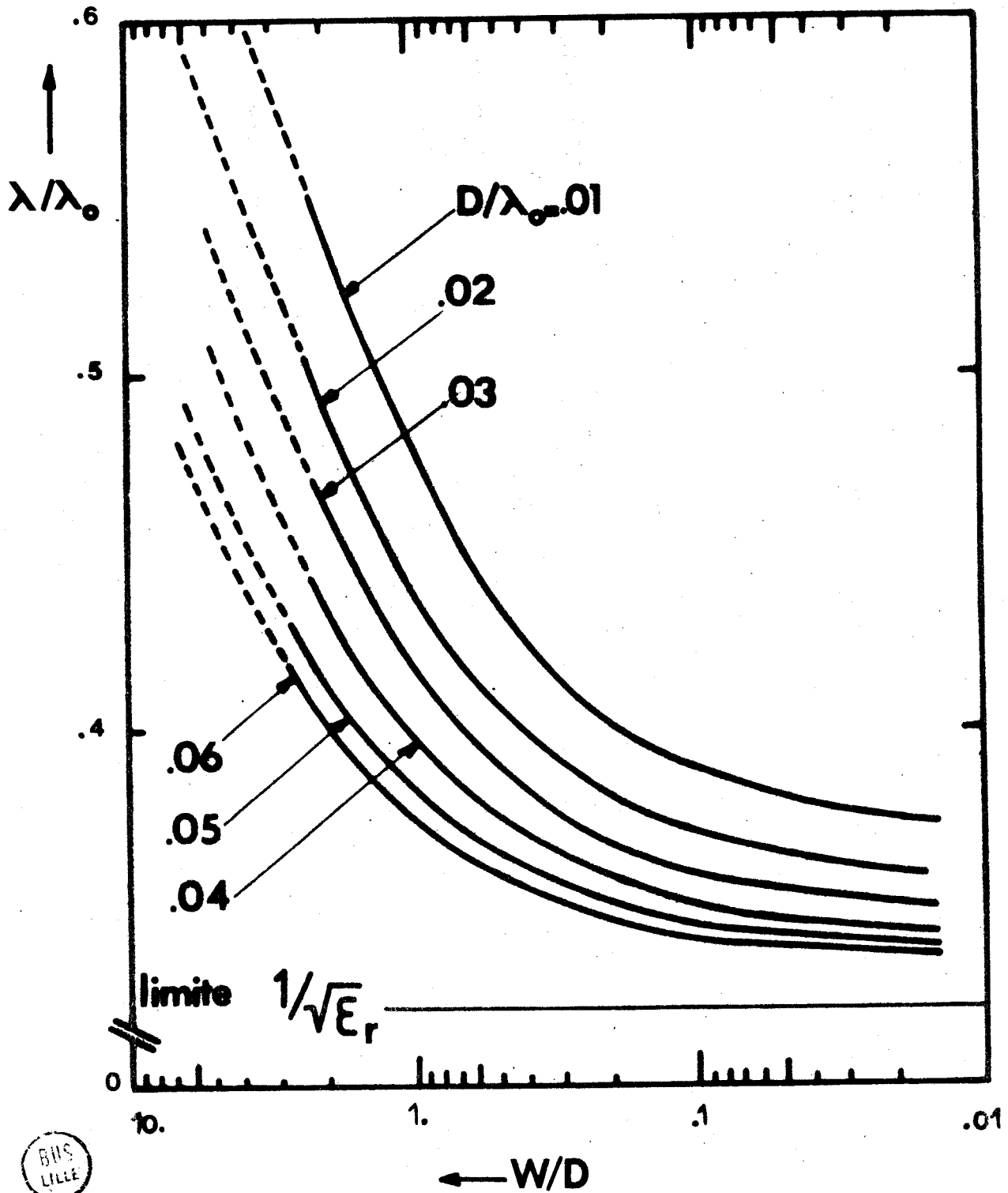


Fig. III-5 Ligne microfente symétrique modélisée. Rôle concentrateur du facteur de forme  $W/D$  sur l'énergie  $E.M$  transportée par le mode fente. Les traits pointillés marquent l'abandon nécessaire de l'approche mode par mode.

$H_{z,l}$  du mode  $(m,p)$  ainsi construites dans chacun des milieux, on dérive toutes ses composantes transversales  $E_{\xi,l}$ ,  $E_{\eta,l}$ ,  $H_{\xi,l}$  et  $H_{\eta,l}^*$ . Le problème des représentations transversales et longitudinales des lignes de forces n'est pas abordé ici dans toute sa généralité. Celles-ci sont simplement déduites des lois d'évolution des composantes des champs en fonction des coordonnées  $\eta, \xi$  (resp.  $x', y'$ ).

Les résultats qui suivent se rapportent essentiellement aux seuls modes à fréquence de coupure nulle dont les caractéristiques de dispersion sont déduites de l'approche mode par mode.

Dans le domaine spectral de validité de cette approximation, le mode "fente" apparaît presque transverse électrique  $E_{z,l} \approx 0$ . Les composantes de son champ magnétique s'expriment dans le système de coordonnées elliptiques  $(\xi, \eta)$  comme :

$$\begin{aligned}
 H_{z,0} &\approx L_0^{(p)r} Fek_0(\xi, \eta^2) \begin{cases} ce_0^*(\eta, \eta^2); \pi < \eta < 0 \\ -ce_0^*(\eta, \eta^2); \pi < \eta < 2\pi \end{cases} \\
 H_{\xi,0} &\approx -j \frac{\beta D}{Y^2} \frac{\text{sh} \xi_0}{P'} L_0^{(p)r} Fek_0'(\xi_0, \eta^2) \begin{cases} ce_0^*(\eta, \eta^2); \pi < \eta < 0 \\ -ce_0^*(\eta, \eta^2); \pi < \eta < 2\pi \end{cases} \\
 H_{\eta,0} &\approx j \frac{\beta D}{Y^2} \frac{\text{sh} \xi_0}{P'} L_0^{(p)r} Fek_0(\xi_0, \eta^2) \begin{cases} ce_0^{*'}(\eta, \eta^2); \pi < \eta < 0 \\ -ce_0^{*'}(\eta, \eta^2); \pi < \eta < 2\pi \end{cases}
 \end{aligned}$$

dans la région  $(0), \xi_0 \leq \xi < \infty$  et comme :

$$H_{z,1} \approx L_0^{(p)r} \cdot F_0 \cdot Fe_0(\xi, \eta^2) \begin{cases} ce_0^*(\eta, \eta^2); \pi < \eta < 0 \\ -ce_0^*(\eta, \eta^2); \pi < \eta < 2\pi \end{cases}$$



$$H_{\xi,1} \approx -j \frac{\beta D}{\chi^2} \frac{\text{sh} \xi_0}{\rho'} L_0^{(P),r} \cdot F_0 \cdot F_{e_0}'(\xi, \chi^2) \begin{cases} ce_0^*(\eta, \chi_0^2); \pi < \eta < 0 \\ -ce_0(\eta, \chi_0^2); \pi < \eta < 2\pi \end{cases}$$

$$H_{\eta,1} \approx j \frac{\beta D}{\chi^2} \frac{\text{sh} \xi_0}{\rho'} L_0^{(P),r} \cdot F_0 \cdot F_{e_0}(\xi, \chi^2) \begin{cases} ce_0^*(\eta, \chi_0^2); \pi < \eta < 0 \\ -ce_0^*(\eta, \chi_0^2); \pi < \eta < 2\pi \end{cases}$$

III-1-19

dans la région (1)  $0 \leq \xi \leq \xi_0$ . Les composantes transversales de son champ électrique se déduisent des composantes transversales du champ magnétique par les relations :

$$E_{\xi,l} = \mu_0 \frac{\omega D}{\beta D} H_{\eta,l}$$

$$E_{\eta,l} = -\mu_0 \frac{\omega D}{\beta D} H_{\xi,l}$$

III-1-20

dans chacun des milieux  $l=0$  et  $l=1$ . Dans les expressions de ces composantes de champ interviennent, en plus des caractéristiques de dispersion  $\beta D$  et  $\omega D$  définies en II-2-43, les quantités  $\rho'$  et  $F_0$  que l'on exprime comme :

$$\rho' = \left[ \text{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta \right]^{1/2} ; F_0 = \frac{F_{ek_0}(\xi_0, \chi_0^2)}{F_{e_0}(\xi_0, \chi_1^2)}$$

On donne sur la figure III-6 l'exemple d'un tracé précis de l'évolution spatiale du champ magnétique du mode "fente"  $\rho H E_{0,1}^r$ . Cette évolution se situe dans le plan longitudinal  $y'oz$  ( $\eta = \pi/2$ ) ; elle est tracée en

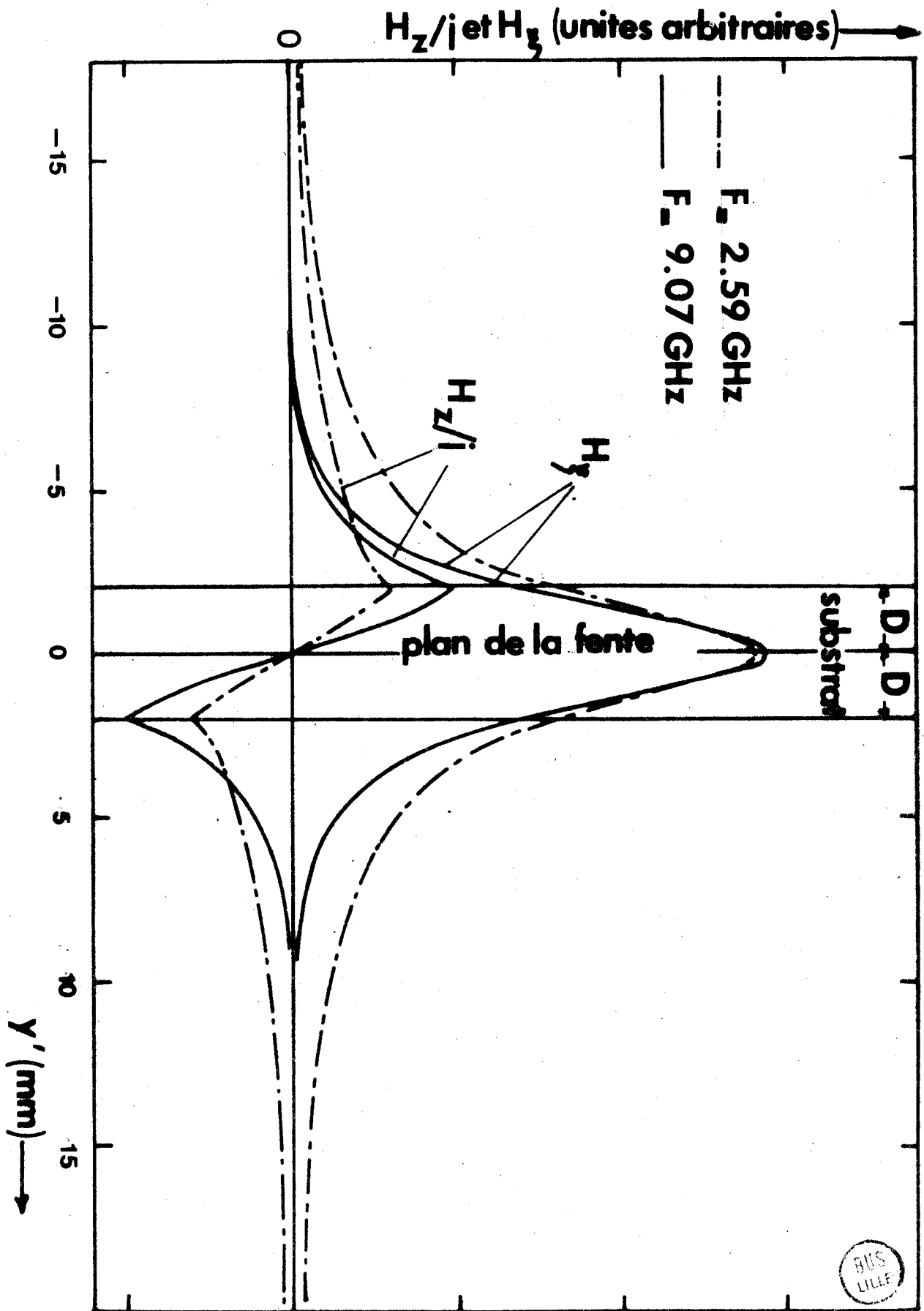


Fig. III-6 Ligne microfente symétrique modélisée  
Evolution spectrale du champ magnétique du mode "fente"  ${}^p\text{HE}_{01}^r$  dans le plan  
longitudinal  $y'Oz$  ( $\eta = \pi/2$ ).  $W = 3\text{mm}$ ;  $D = 2\text{mm}$ ;  $\epsilon_r = 9.6$ .

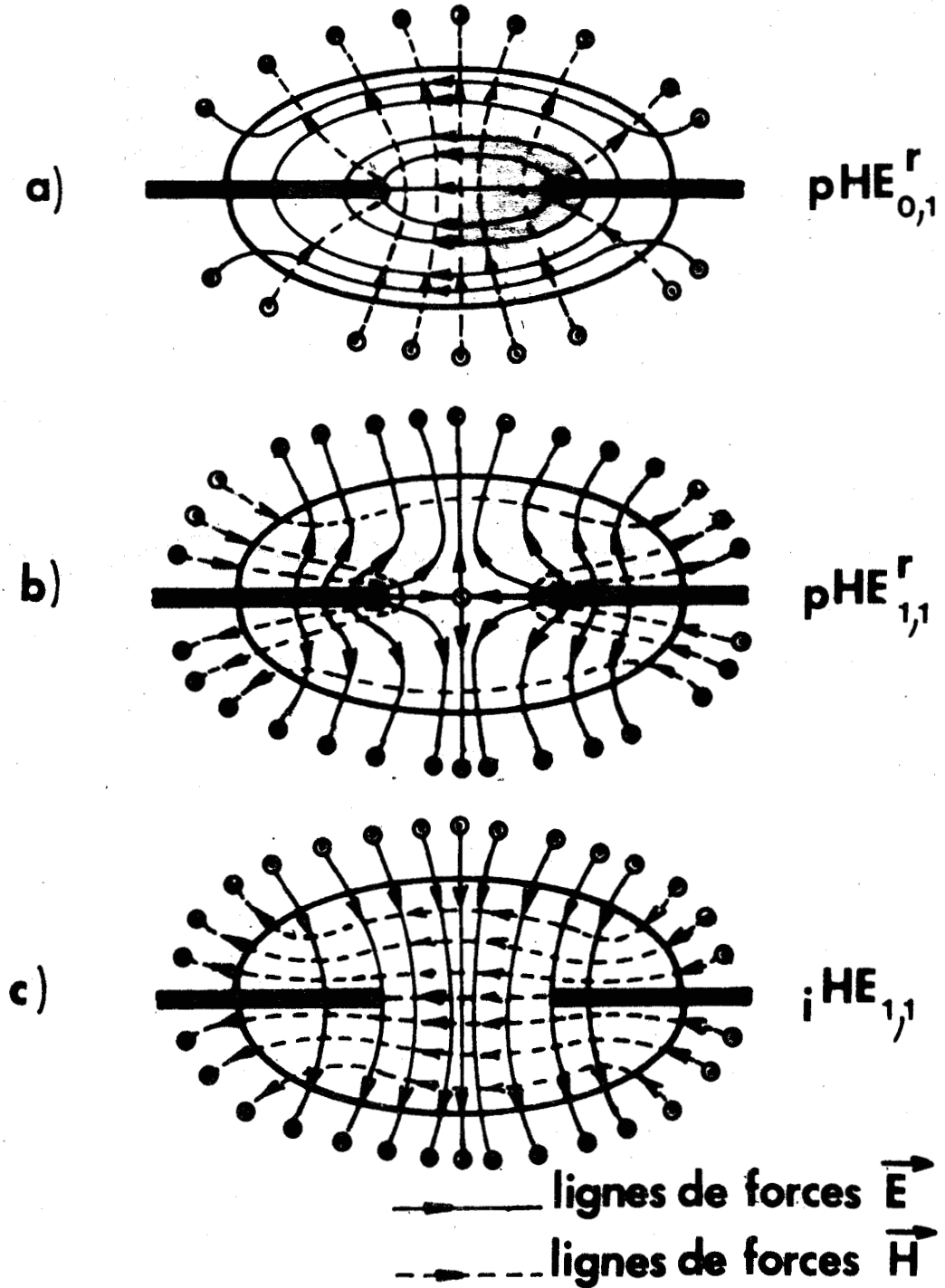


Fig. III-7 Ligne microfente symétrique modélisée

Configuration des lignes de forces électrique et magnétique des trois premiers modes à fréquence de coupure nulle.

fonction de la côte  $y'$  pour permettre une comparaison directe avec des représentations du même type proposées par S.B. COHN sur les lignes micro-fentes symétriques réelles [35]. La configuration transversale des lignes de forces électrique et magnétique du mode "fente" est construite sur la figure III - 7 a) à partir d'une parfaite connaissance de toutes ces évolutions.

Les modes  ${}_{i}HE_{1,1}$  et  ${}_{P}HE_{1,1}^r$  sont hybrides. Les configurations transversales de leurs lignes de forces électrique et magnétique ont des allures très voisines en dehors du voisinage immédiat de la fente ( $\xi=0$ ) Ceci résulte de la similitude\* formelle qui existe en dehors de l'origine entre les courbes  $F_{em}(\xi, \gamma_1^2)$  et  $C_{em}(\xi, \gamma_1^2)$  d'une part et entre les courbes  $G_{em}(\xi, \gamma_1^2)$  et  $S_{em}(\xi, \gamma_1^2)$  d'autre part. Dans le plan de la fente, ces allures sont très distinctes puisque le champ électrique du mode  ${}_{i}HE_{1,1}$  est normal quand celui du mode  ${}_{P}HE_{1,1}^r$  est tangent. Les champs de ces modes ont enfin des parités différentes dans la symétrie miroir  $y'=0$ . Toutes ces propriétés ressortent clairement des figures III - 7 b) et c).

### III - 1 - 2 La ligne microfente modélisée dissymétrique

#### a) Formulation du problème

La symétrie miroir  $y'=0$  disparaît sur cette configuration. L'onde guidée doit être construite en conséquence à partir d'une combinaison linéaire des solutions de la structure symétrique pour vérifier les conditions aux limites III-1-1 et celles plus spécifiques aux structures munies d'arêtes métalliques. Les composantes axiales de cette onde guidée s'écrivent :

- dans la région (0) ;  $0 < \xi < \infty$  ;  $0 < \eta < \pi$  :

$$E_{z,0} = \sum_n N_n^r se_n^*(\eta, \gamma_0^2) \cdot Gek_n(\xi, \gamma_0^2)$$

$$H_{z,0} = \sum_n M_n^r ce_n^*(\eta, \gamma_0^2) \cdot Fek_n(\xi, \gamma_0^2)$$

III-1-22

- dans la région (1) ;  $0 < \xi < \xi_0$  ;  $\pi < \eta < 2\pi$  :

(\* ) Les relations III-1-17 établissent l'identité à la limite  $\gamma_1^2 \rightarrow 0$  si  $\xi \neq 0$ .

$$E_{z,1} = \sum_n \left[ D_n^r \operatorname{Se}_n(\xi, \gamma_1^2) + B_n^r \operatorname{Ge}_n(\xi, \gamma_1^2) \right] \cdot \operatorname{se}_n(\eta, \gamma_1^2)$$

$$H_{z,1} = \sum_n \left[ C_n^r \operatorname{ce}_n(\xi, \gamma_1^2) + A_n^r \operatorname{Fe}_n(\xi, \gamma_1^2) \right] \cdot \operatorname{ce}_n(\eta, \gamma_1^2)$$

III-1-23

- et enfin dans la région (0);  $\xi_0 < \xi < \infty$ ;  $\pi < \eta < 2\pi$ :

$$E_{z,0} = \sum_n Q_n^r \operatorname{se}_n^*(\eta, \gamma_0^2) \cdot \operatorname{Ge}_n(\xi, \gamma_0^2)$$

$$H_{z,0} = \sum_n P_n^r \operatorname{ce}_n^*(\eta, \gamma_0^2) \cdot \operatorname{Fe}_n(\xi, \gamma_0^2)$$

III-1-24

L'exposant (r) rappelle ici encore la spécificité de cette onde.

#### b) Applications des conditions de continuité

La continuité des composantes tangentielles des champs électrique et magnétique à la traversée des deux interfaces diélectrique - air  $\xi = 0$  et  $\xi = \xi_0$  conduit à quatre ensembles d'équations linéaires et homogènes à un nombre infini de termes dont les inconnues sont les constantes arbitraires  $N_n^r, M_n^r, Q_n^r$  et  $P_n^r$ . Ils s'écrivent :

$$\sum_n' \left( M_n^r a_{n,m} + N_n^r b_{n,m} + P_n^r c_{n,m} + Q_n^r d_{n,m} \right) = 0$$

$$\sum_n' \left( M_n^r e_{n,m} + N_n^r f_{n,m} + P_n^r i_{n,m} + Q_n^r j_{n,m} \right) = 0$$

$$\sum_n' \left( M_n^r k_{n,m} + N_n^r l_{n,m} + P_n^r o_{n,m} + Q_n^r p_{n,m} \right) = 0$$

$$\sum_n' \left( M_n^r q_{n,m} + N_n^r u_{n,m} + P_n^r v_{n,m} + Q_n^r w_{n,m} \right) = 0$$

III-1-25

où les coefficients  $a_{n,m}, b_{n,m}, c_{n,m}, d_{n,m}, e_{n,m}, f_{n,m}, i_{n,m}, j_{n,m}, k_{n,m}$ ,

$l_{n,m}$ ,  $o_{n,m}$ ,  $p_{n,m}$ ,  $q_{n,m}$ ,  $u_{n,m}$ ,  $v_{n,m}$  et  $w_{n,m}$  sont identifiées à :

$$a_{n,m} = \frac{\omega \mu_0 \alpha_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) Fek_n(0, \gamma_0^2)}{\beta} \left\{ \frac{Fem'(0, \gamma_1^2)}{Fem(\xi_0, \gamma_1^2)} \cdot \frac{Cem(\xi_0, \gamma_1^2)}{Cem(0, \gamma_1^2)} + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \frac{Fek_n'(0, \gamma_0^2)}{Fek_n(0, \gamma_0^2)} \right\}$$

$$b_{n,m} = - \left( 1 + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \right) Gek_n(0, \gamma_1^2) \sum_r' \nu_{r,m}(\gamma_1^2) \cdot \beta_{n,r}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$$

$$c_{n,m} = - \frac{\omega \mu_0}{\beta} \alpha_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) \frac{Fem'(0, \gamma_1^2)}{Fem(\xi_0, \gamma_1^2)} \cdot Fek_n(\xi_0, \gamma_0^2)$$

$$e_{n,m} = \frac{\omega \mu_0}{\beta} \alpha_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) Fek_n(0, \gamma_0^2) \left\{ \frac{Cem'(\xi_0, \gamma_1^2)}{Cem(0, \gamma_1^2)} - \frac{Fem'(\xi_0, \gamma_1^2)}{Fem(\xi_0, \gamma_1^2)} \cdot \frac{Cem(\xi_0, \gamma_1^2)}{Cem(0, \gamma_1^2)} \right\}$$

$$i_{n,m} = \frac{\omega \mu_0}{\beta} \alpha_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) Fek_n(\xi_0, \gamma_0^2) \left\{ \frac{Fem'(\xi_0, \gamma_1^2)}{Fem(\xi_0, \gamma_1^2)} + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \frac{Fek_n'(\xi_0, \gamma_0^2)}{Fek_n(\xi_0, \gamma_0^2)} \right\}$$

$$j_{n,m} = - \left( 1 + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \right) Gek_n(\xi_0, \gamma_0^2) \sum_r' \nu_{r,m}(\gamma_1^2) \beta_{n,r}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$$

$$k_{n,m} = \left( 1 + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \right) Fek_n(0, \gamma_0^2) \sum_r' \chi_{r,m}(\gamma_1^2) \alpha_{n,r}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$$

$$I_{n,m} = -\frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_r}{\beta} \cdot \beta_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) \text{Gek}_n(0, \gamma_0^2) \left\{ \frac{Se'_m(0, \gamma_1^2)}{Se_m(\xi_0, \gamma_1^2)} \cdot \frac{Ge_n(\xi_0, \gamma_1^2)}{Ge_n(0, \gamma_1^2)} - \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \frac{1}{\epsilon_r} \frac{Gek'_n(0, \gamma_0^2)}{Gek_n(0, \gamma_0^2)} \right\}$$

$$P_{n,m} = \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_r}{\beta} \beta_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) \frac{Se'_m(0, \gamma_1^2)}{Se_m(\xi_0, \gamma_1^2)} \text{Gek}_n(\xi_0, \gamma_0^2)$$

$$U_{n,m} = -\frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_r}{\beta} \beta_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) \text{Gek}_n(0, \gamma_1^2) \left\{ \frac{Ge'_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{Ge_m(0, \gamma_1^2)} - \frac{Se'_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{Se_m(\xi_0, \gamma_1^2)} \cdot \frac{Ge_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{Ge_m(0, \gamma_1^2)} \right\}$$

$$V_{n,m} = \left(1 + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|}\right) \text{Fek}_n(\xi_0, \gamma_0^2) \sum_r' \chi_{r,m}(\gamma_1^2) \alpha_{n,r}(\gamma_0^2, \gamma_1^2)$$

$$W_{n,m} = \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_r}{\beta} \beta_{n,m}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) \text{Gek}_n(\xi_0, \gamma_0^2) \left\{ \frac{Se'_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{Se_m(\xi_0, \gamma_1^2)} + \frac{\gamma_1^2}{|\gamma_0^2|} \frac{1}{\epsilon_r} \frac{Gek'_n(\xi_0, \gamma_0^2)}{Gek_n(\xi_0, \gamma_0^2)} \right\}$$

$$d_{n,m} = f_{n,m} = o_{n,n} = q_{n,m} = 0$$

III-1-26

Les équations caractéristiques relatives aux modes impairs et pairs dans la symétrie miroir  $X' = 0$  s'expriment successivement comme :

$a_{1,1}$	$b_{1,1}$	$c_{1,1}$	$d_{1,1}$	$a_{3,1}$	$b_{3,1}$	$c_{3,1}$	$d_{3,1}$	$a_{5,1}$	$b_{5,1}$	•	= 0
$e_{1,1}$	$f_{1,1}$	$i_{1,1}$	$j_{1,1}$	$e_{3,1}$	$f_{3,1}$	$i_{3,1}$	$j_{3,1}$	$e_{5,1}$	$f_{5,1}$	•	
$k_{1,1}$	$l_{1,1}$	$o_{1,1}$	$p_{1,1}$	$k_{3,1}$	$l_{3,1}$	$o_{3,1}$	$p_{3,1}$	$k_{5,1}$	$l_{5,1}$	•	
$q_{1,1}$	$u_{1,1}$	$v_{1,1}$	$w_{1,1}$	$q_{3,1}$	$u_{3,1}$	$v_{3,1}$	$w_{3,1}$	$q_{5,1}$	$u_{5,1}$	•	
$a_{1,3}$	$b_{1,3}$	$c_{1,3}$	$d_{1,3}$	$a_{3,3}$	$b_{3,3}$	$c_{3,3}$	$d_{3,3}$	$a_{5,3}$	$b_{5,3}$	•	
$e_{1,3}$	$f_{1,3}$	$i_{1,3}$	$j_{1,3}$	$e_{3,3}$	$f_{3,3}$	$i_{3,3}$	$j_{3,3}$	$e_{5,3}$	$f_{5,3}$	•	
$k_{1,3}$	$l_{1,3}$	$o_{1,3}$	$p_{1,3}$	$k_{3,3}$	$l_{3,3}$	$o_{3,3}$	$p_{3,3}$	$k_{5,3}$	$l_{5,3}$	•	
$q_{1,3}$	$u_{1,3}$	$v_{1,3}$	$w_{1,3}$	$q_{3,3}$	$u_{3,3}$	$v_{3,3}$	$w_{3,3}$	$q_{5,3}$	$u_{5,3}$	•	
$a_{1,5}$	$b_{1,5}$	$c_{1,5}$	$d_{1,5}$	$a_{3,5}$	$b_{3,5}$	$c_{3,5}$	$d_{3,5}$	$a_{5,5}$	$b_{5,5}$	•	
$e_{1,5}$	$f_{1,5}$	$i_{1,5}$	$j_{1,5}$	$e_{3,5}$	$f_{3,5}$	$i_{3,5}$	$j_{3,5}$	$e_{5,5}$	$f_{5,5}$	•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	

III-1-27

pour les modes  $m = 1, 3, 5$  etc... et comme :

$a_{0,0}$	$c_{0,0}$	$a_{2,0}$	$b_{2,0}$	$c_{2,0}$	$d_{2,0}$	$a_{4,0}$	$b_{4,0}$	•	= 0
$e_{0,0}$	$i_{0,0}$	$e_{2,0}$	$f_{2,0}$	$i_{2,0}$	$j_{2,0}$	$e_{4,0}$	$f_{4,0}$	•	
$a_{0,2}$	$c_{0,2}$	$a_{2,2}$	$b_{2,2}$	$c_{2,2}$	$d_{2,2}$	$a_{4,2}$	$b_{4,2}$	•	
$e_{0,2}$	$i_{0,2}$	$e_{2,2}$	$f_{2,2}$	$i_{2,2}$	$j_{2,2}$	$e_{4,2}$	$f_{4,2}$	•	
$k_{0,2}$	$l_{0,2}$	$k_{2,2}$	$l_{2,2}$	$o_{2,2}$	$p_{2,2}$	$k_{4,2}$	$l_{4,2}$	•	
$q_{0,2}$	$v_{0,2}$	$q_{2,2}$	$u_{2,2}$	$v_{2,2}$	$w_{2,2}$	$q_{4,2}$	$u_{4,2}$	•	
$a_{0,4}$	$c_{0,4}$	$a_{2,4}$	$b_{2,4}$	$c_{2,4}$	$d_{2,4}$	$a_{4,4}$	$b_{4,4}$	•	
$e_{0,4}$	$i_{0,4}$	$e_{2,4}$	$f_{2,4}$	$i_{2,4}$	$f_{2,4}$	$e_{4,4}$	$f_{4,4}$	•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	

III-1-28





pour les modes 0, 2, 4 etc...

Ces équations caractéristiques modales sont analytiquement plus complexes que celles rencontrées jusqu'à présent sur les guides elliptiques et microfente modélisée symétrique. Toutefois d'un point de vue purement numérique, cette complexité accrue n'apparaît pas comme un handicap sérieux puisque la "stratégie" générale de résolution que nous avons défini au paragraphe II-2-2 c) s'applique ici tout aussi naturellement. L'approche mode par mode fournit les caractéristiques de dispersion dès lors qu'aux limites extrêmes du domaine spectral d'intérêt les paramètres  $|\chi_0^2|$  et  $\chi_1^2$  restent suffisamment faibles

c) Comportement des modes d'arêtes dans le domaine spectral basse fréquence

L'approche mode par mode s'applique dans le domaine basse fréquence du spectre. Dans cette approximation, l'équation caractéristique des modes  $(m, 1)$  avec  $m \gg 1$  est issue de l'annulation du déterminant  $4 \times 4$  que l'on note comme :

$$\begin{vmatrix} a_{m,m} & b_{m,m} & c_{m,m} & d_{m,m} \\ e_{m,m} & f_{m,m} & i_{m,m} & j_{m,m} \\ k_{m,m} & l_{m,m} & o_{m,m} & p_{m,m} \\ q_{m,m} & u_{m,m} & v_{m,m} & w_{m,m} \end{vmatrix} = 0$$

III-1-29

L'annulation du déterminant  $2 \times 2$  suivant :

$$\begin{vmatrix} a_{0,0} & c_{0,0} \\ e_{0,0} & i_{0,0} \end{vmatrix} = 0$$

III-1-30

fournit l'équation caractéristique des modes  $(0, 1)$ .

Sur ces équations caractéristiques modales approchées il faut maintenant réaliser les deux passages à la limite successifs  $Y \rightarrow 0$  et  $X \rightarrow 0$  (resp  $|\chi_0^2| \rightarrow 0$  et  $\chi_1^2 \rightarrow 0$ ). Développés au second ordre en  $Y$ , l'équation III-1-29 devient:

$$\begin{aligned}
& A(m, \gamma_1^2) \cdot B(m, \gamma_1^2) X^2 + A(m, \gamma_1^2) m Y^2 \left\{ \frac{F e'_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{F e_m(\xi_0, \gamma_1^2)} + \epsilon_r \frac{S e'_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{S e_m(\xi_0, \gamma_1^2)} \right\} \\
& + B(m, \gamma_1^2) m Y^2 \left\{ \frac{F e'_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{F e_m(\xi_0, \gamma_1^2)} \frac{C e_m(0, \gamma_1^2)}{C e_m(0, \gamma_1^2)} - \epsilon_r \frac{S e'_m(0, \gamma_1^2)}{S e_m(\xi_0, \gamma_1^2)} \frac{G e_m(\xi_0, \gamma_1^2)}{G e_m(0, \gamma_1^2)} \right\} \\
& - A(m, \gamma_1^2) X^2 Y^2 m \left[ G(m, \xi_0) + G'(m, \xi_0) \right] - B(m, \gamma_1^2) X^2 Y^2 m \left[ G(m, 0) + G'(m, 0) \right] \\
& + \left\{ B(m, \gamma_1^2) - A(m, \gamma_1^2) \right\} Y^2 \left( \frac{\epsilon_r + 1}{2} \right) = 0
\end{aligned}$$

III-1-30

Quand à l'équation III-1-30 son développement au second ordre en  $Y$  devient :

$$\frac{F e'_0(0, \gamma_1^2)}{F e_0(\xi_0, \gamma_1^2)} = \infty$$

III-1-31

d'où l'on déduit :

$$F e_0(\xi_0, \gamma_1^2) = 0$$

III-1-32

L'équation III-1-31 relative aux modes  $(m, 1)$  avec  $m \geq 1$  fait intervenir les coefficients  $A(m, \gamma_1^2)$  et  $B(m, \gamma_1^2)$  ainsi que les quantités  $G(m, \xi)$  et  $G'(m, \xi)$  que l'on définit comme il suit :

$$A(m, \gamma_1^2) = m^2 - \chi_{m,m}(\gamma_1^2) \nu_{m,m}(\gamma_1^2)$$

$$B(m, \gamma_1^2) = m^2 + \chi_{m,m}(\gamma_1^2) \nu_{m,m}(\gamma_1^2)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
G(m, \xi) &= \frac{1}{8 \operatorname{sh}^2 \xi_0 (m^2 - 1)} \left\{ (m-1) e^{-2\xi} + (m+1) e^{2\xi} \right\}; \quad m > 1 \\
G(1, \xi) &= -\frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \xi_0} \left\{ e^{2\xi} \operatorname{Log} \left[ \frac{Y e^{\xi + \alpha}}{4 \operatorname{sh} \xi_0} \right] + P_1(\xi) \right\}
\end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} G'(m, \xi_0) = \frac{1}{8 \operatorname{sh}^2 \xi_0 (m^2 - 1)} \left\{ (m+1) e^{2\xi} - (m-1) e^{-2\xi} \right\}; m > 1 \\ G'(1, \xi_0) = -\frac{1}{4 \operatorname{sh}^2 \xi_0} \left\{ e^{2\xi} \operatorname{Log} \left[ \frac{Y e^{\xi + \alpha}}{4 \operatorname{sh} \xi_0} \right] + P_2(\xi) \right\} \end{cases} \text{III-1-33}$$

Le second passage à la limite  $\chi \rightarrow 0$  (resp:  $\gamma_1^2 \rightarrow 0$ ) entraîne immédiatement  $B(m, \gamma_1^2) \sim 0$  et  $A(m, \gamma_1^2) \sim 2m^2$  de sorte que l'équation caractéristique des modes  $(m, 1)$   $m \geq 1$  dans le domaine spectral basse fréquence s'exprime finalement comme :

$$\chi^2 = \frac{\mathcal{C} + m(\mathcal{E} + 1)}{G(m, \xi_0) + G'(m, \xi_0)} \quad \text{III-1-34}$$

avec

$$\mathcal{C} = \frac{F e_m'(\xi_0, \gamma_1^2)}{F e_m(\xi_0, \gamma_1^2)} + \mathcal{E}_r \frac{S e_m'(\xi_0, \gamma_1^2)}{S e_m(\xi_0, \gamma_1^2)} \quad \text{III-1-35}$$

Il est à nouveau possible de prouver analytiquement la compatibilité des équations caractéristiques relatives aux modes  $(0, 1)$  et  $(1, 1)$  dans le domaine basse fréquence dès lors que  $\xi_0$  n'est pas nul. Quand l'appâtissement devient important  $\xi_0 \rightarrow 0$  (resp:  $W/D \rightarrow \infty$ ) cette compatibilité se retrouve sur l'ensemble des modes  $(m, 1)$   $m \geq 1$ . Ainsi la ligne microfente dissymétrique modélisée propage deux modes à fréquence de coupure nulle.

#### d) Caractéristiques de dispersion - Résultats numériques.

Le schéma de désignation des modes d'arêtes de la ligne microfente symétrique est ici reproduit pour tous les modes d'arêtes de la ligne microfente dissymétrique modélisée. Les modes d'arêtes à fréquence de coupure nulle dont les lieux caractéristiques sont présentés sur la figure III-8 sont notés  $HE_{0,1}^r$  et  $HE_{1,1}^r$  d'après ce schéma. Les traits pointillés marquent l'abandon nécessaire de l'approche mode par mode. Les évolutions avec le facteur de forme  $W/D$  des lieux caractéristiques des modes d'arêtes des lignes microfentes modélisées symétrique et dissymétrique appellent plusieurs remarques :

. Les modes "fente"  ${}^r PHE_{0,1}^r$  et  ${}^r HE_{0,1}^r$

La concentration d'énergie électromagnétique à l'intérieur du "coeur"

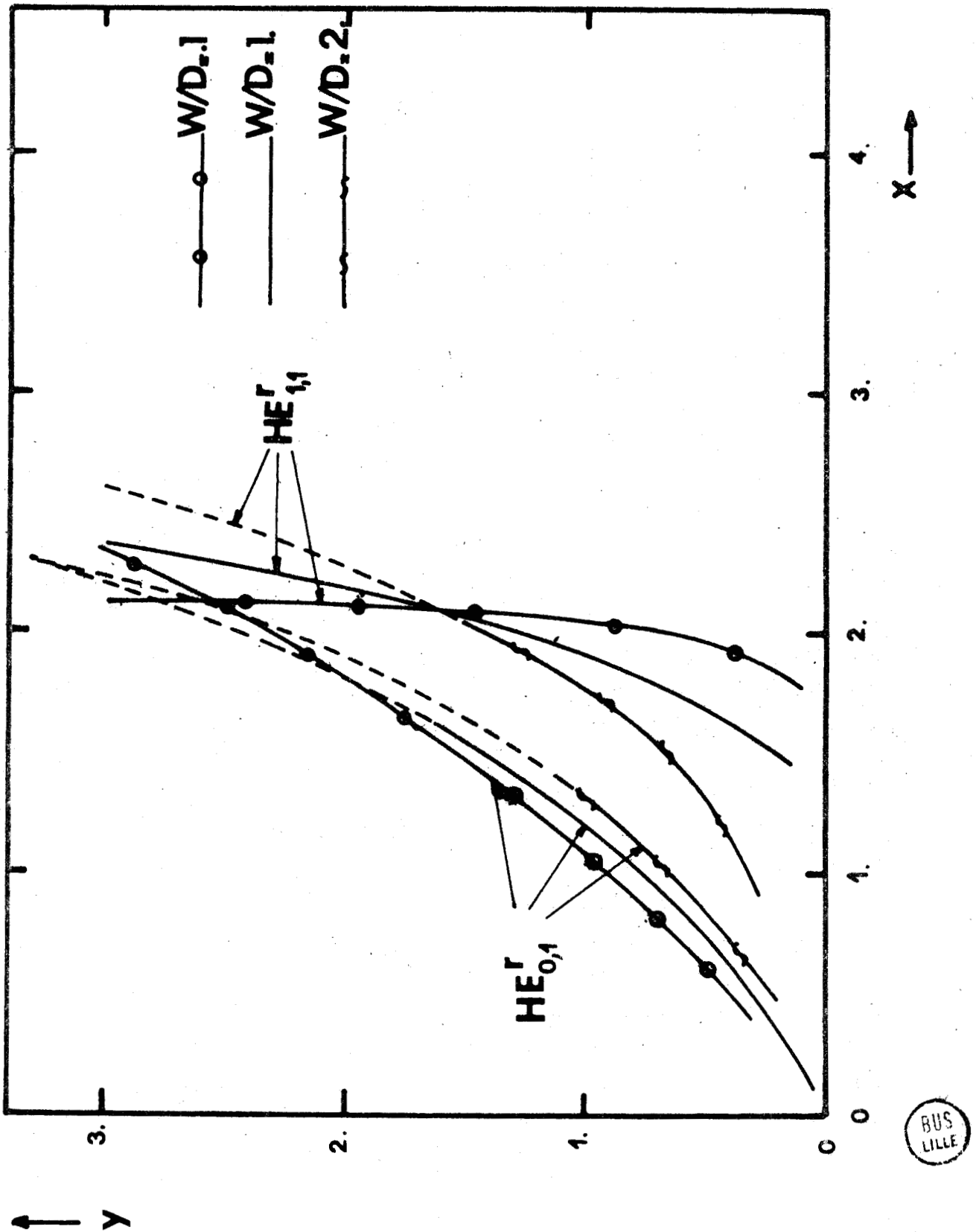


Fig III-8 Ligne microfente dissymétrique modélisée  
 Lieux caractéristiques des premiers modes à fréquence de coupure nulle. Les traits  
 pointillés marquent l'abandon nécessaire de l'approche mode par mode.  $\epsilon_r = 2.6$

diélectrique qui accompagne une diminution du facteur de forme  $W/D$  se produit à toutes les fréquences pour le mode "fente"  ${}^p\text{HE}_{01}^r$  de la ligne symétrique. Sur la ligne dissymétrique on retrouve ce rôle concentrateur de la diminution du facteur de forme seulement en basse fréquence. Vers les hautes fréquences c'est au contraire une déconcentration de l'énergie électromagnétique associée au mode "fente"  $\text{HE}_{01}^r$  qui accompagne une diminution du facteur de forme  $W/D$ .

. Les premiers modes supérieurs  ${}^p\text{HE}_{1,1}^r$  et  $\text{HE}_{1,1}^r$

Bien que ces modes soient caractérisés par une fréquence de coupure nulle, leur propagation dans une structure ouverte est effective seulement lorsque leurs nombres d'onde transversaux  $Y$  deviennent appréciablement différents de zéro. Tant qu'à la fréquence de travail choisie, ces nombres d'onde transversaux restent nuls pour  $0 \leq X \leq X_G$ , l'excitation de ce mode est difficile à réaliser. D'un point de vue pratique la fréquence  $f_G$ , qui correspond à  $X_G$  joue un rôle équivalent à celui d'une fréquence de coupure et certains auteurs désignent souvent  $X_G$  comme le seuil de "guidabilité" d'un mode à fréquence de coupure nulle dans une structure ouverte [57]. A cet égard, les modes "fente" des structures microfentes modélisées se caractérisent par des seuils de "guidabilité" extrêmement faibles. Les seuils de "guidabilité" respectifs des modes d'arêtes  ${}^p\text{HE}_{1,1}^r$  et  $\text{HE}_{1,1}^r$  dans chacune des structures déterminent en outre, l'ordre de grandeur de la bande d'utilisation des seuls modes "fente". L'amplitude de variation du seuil de "guidabilité"  $X_G$  du premier mode supérieur, en fonction du facteur de forme  $W/D$  quand la constitution  $\epsilon_r$  est fixée, apparait plus importante sur la ligne microfente dissymétrique que sur la ligne microfente symétrique.

. Cas des très faibles facteurs de forme

Quand le facteur de forme  $W/D$  devient très faible, le lieu caractéristique du mode "fente"  ${}^p\text{HE}_{01}^r$  de la structure symétrique s'approche de la droite  $X = 0$  du plan spectral  $X \circ Y$ . Dans les mêmes conditions le lieu caractéristique du mode "fente"  $\text{HE}_{0,1}^r$  de la structure dissymétrique tend plutôt à se rapprocher de la droite  $Y = X$ , du plan spectral. Ainsi dans la structure symétrique, les caractéristiques de dispersion du mode "fente" atteignent très rapidement en fonction de la fréquence, celles des ondes planes dans un milieu indéfini de permittivité relative  $\epsilon_r$ . Dans la structure dissymétrique ces caractéristiques limites sont nécessairement atteintes aux très hautes fréquences, mais il existe une gamme intermédiaire

où la longueur d'onde normalisée du mode "fente"  $HE_{01}^r$  est approximativement

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \left[ \frac{2}{\epsilon_r + 1} \right]^{1/2} \quad \text{III-1-36}$$

Autrement dit, dans cette gamme intermédiaire de fréquence, les caractéristiques de dispersion du mode "fente"  $HE_{01}^r$  approchent celles des ondes planes dans un milieu infini de permittivité équivalente  $\epsilon_r'$  telle que :

$$\epsilon_r' = \frac{\epsilon_r + 1}{2} \quad \text{III-1-37}$$

On ne peut que rapprocher ces résultats obtenus sur les modes "fentes" des lignes microfentes modélisées à faibles facteurs de forme  $W/D$  à ceux décrits par S.B. COHN sur les lignes microfentes réelles dans le cadre de son approximation qu'il nomme d'ordre "zéro".\*

L'abaque relatif aux racines caractéristiques du mode "fente" présenté sur la figure III - 9 possède encore un caractère universel. Ces racines sont en effet celles de l'équation modale approchée III-1-30 qui ne fait pas intervenir explicitement la permittivité relative  $\epsilon_r$  du "coeur" diélectrique.

#### e) Configuration des champs .

Dans le cadre de l'approche mode par mode, il existe une identité formelle des composantes des champs des modes d'arêtes dans chacune des deux structures modélisées en tout point des fentes.  $0 < \eta < \pi; \xi = 0$  . A l'intérieur du "coeur" diélectrique, mais en dehors du voisinage immédiat de la fente  $\xi = 0$  , l'allure des lignes de force électrique et magnétique des modes d'arête sur les deux lignes reste formellement très voisine. Ceci résulte encore de la similitude qui existe en dehors de l'origine entre les fonctions  $F_{em}(\xi, \eta^2)$  et  $C_{em}(\xi, \eta^2)$  d'une part et entre les fonctions  $G_{em}(\xi, \eta^2)$  et  $S_{em}(\xi, \eta^2)$  d'autre part. Un dessèchement inévitable de ces lignes de force à la traversée de la fente marque l'extension importante des champs modaux dans la région (0) ;  $0 < \xi < \infty; 0 < \eta < \pi$  . Les configurations transversales des lignes de force électrique et magnétique des modes à fréquence

(\*) La modélisation analytique développée au chapitre I est en fait une approximation dite du "second" ordre dans la nomenclature originale proposée par S.B. COHN

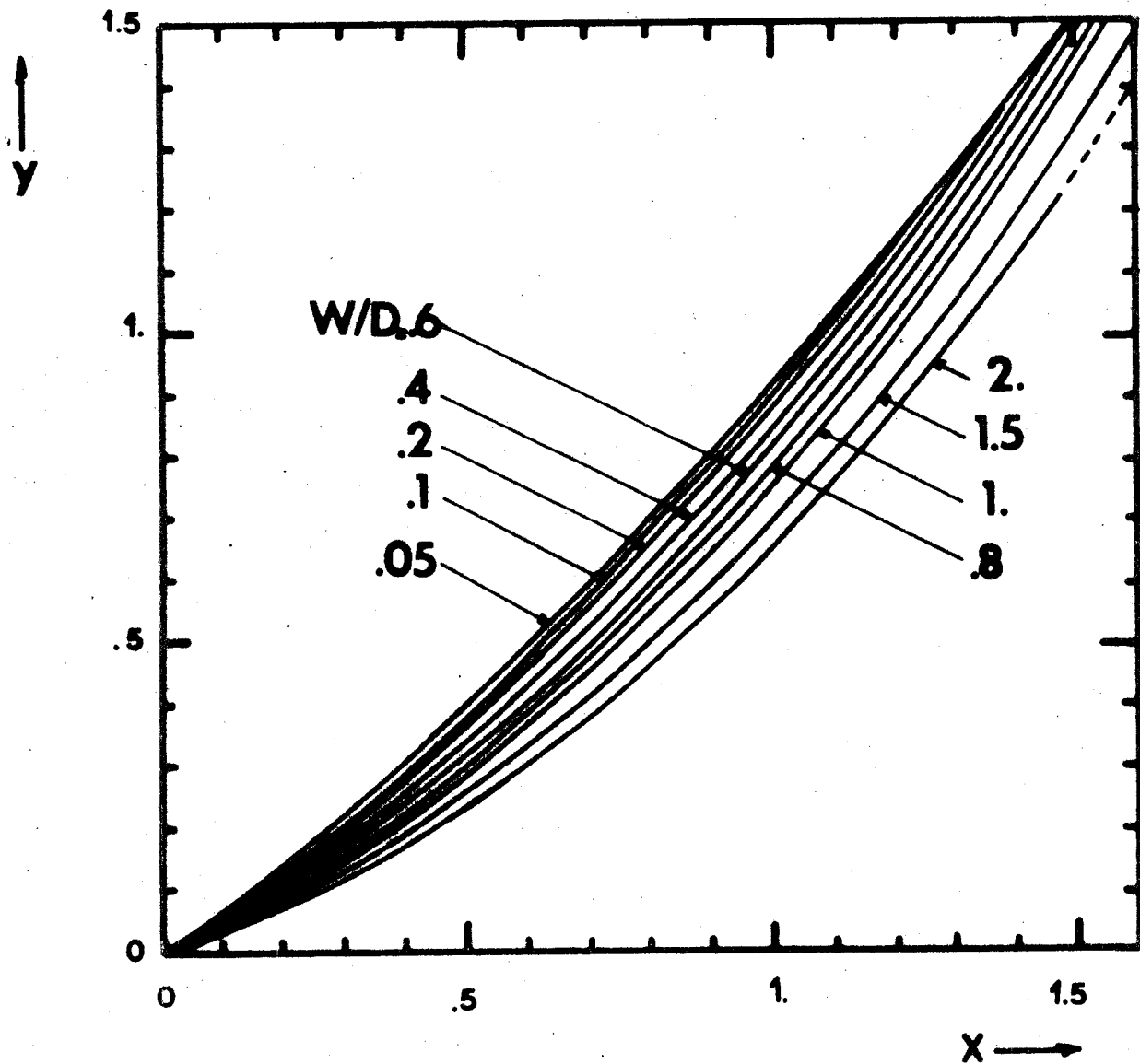


Fig. III-9 Ligne microfente dissymétrique modélisée

Lieux caractéristiques des racines du mode "fente"  $HE_{01}^r$ . Les traits pointillés marquent l'abandon nécessaire de l'approche mode par mode.

de coupure nulle  $HE_{0,1}^r$  et  $HE_{1,1}^r$  sont tracées sur les figures III-10 a) et b).

Dans l'approximation de l'approche mode par mode, le mode "fente" est encore presque transverse électrique ( $E_{z,0} \approx 0$ ); ses composantes de champ magnétique s'expriment comme :

$$H_{z,0} \approx M_0^r Fek_0(\xi, \gamma_0^2) ce_0^*(\eta, \gamma_0^2)$$

$$H_{\xi,0} \approx -j \frac{\beta D}{\gamma^2} \frac{\text{sh} \xi_0}{p'} M_0^r Fek_0'(\xi, \gamma_0^2) ce_0^*(\eta, \gamma_0^2)$$

$$H_{\eta,0} \approx j \frac{\beta D}{\gamma^2} \frac{\text{sh} \xi_0}{p'} M_0^r Fek_0(\xi, \gamma_0^2) ce_0^{*'}(\eta, \gamma_0^2)$$

III-1-38

dans la région (0)  $0 \leq \xi < \infty$ ;  $0 < \eta < \pi$ . Dans la région (1);  $0 \leq \xi \leq \xi_0$ ;  $\pi < \eta < 2\pi$ ; elles s'écrivent comme :

$$H_{z,1} \approx M_0^r \left[ E_0 Ce_0(\xi, \gamma_1^2) + H_0 Fe_0(\xi, \gamma_1^2) \right] ce_0^*(\eta, \gamma_0^2)$$

$$H_{\xi,1} \approx -j \frac{\beta D}{\chi^2} \frac{\text{sh} \xi_0}{p'} M_0^r \left[ E_0 Ce_0'(\xi, \gamma_1^2) + H_0 Fe_0'(\xi, \gamma_1^2) \right] ce_0^*(\eta, \gamma_0^2)$$

$$H_{\eta,1} \approx j \frac{\beta D}{\chi^2} \frac{\text{sh} \xi_0}{p'} M_0^r \left[ E_0 Ce_0(\xi, \gamma_1^2) + H_0 Fe_0(\xi, \gamma_1^2) \right] ce_0^{*'}(\eta, \gamma_0^2)$$

III-1-39

Enfin, dans la région (0)  $\xi_0 \leq \xi < \infty$ ;  $\pi < \eta < 2\pi$ , on a :

$$H_{z,0} \approx M_0^r I_0 Fek_0(\xi, \gamma_0^2) ce_0^*(\eta, \gamma_0^2)$$



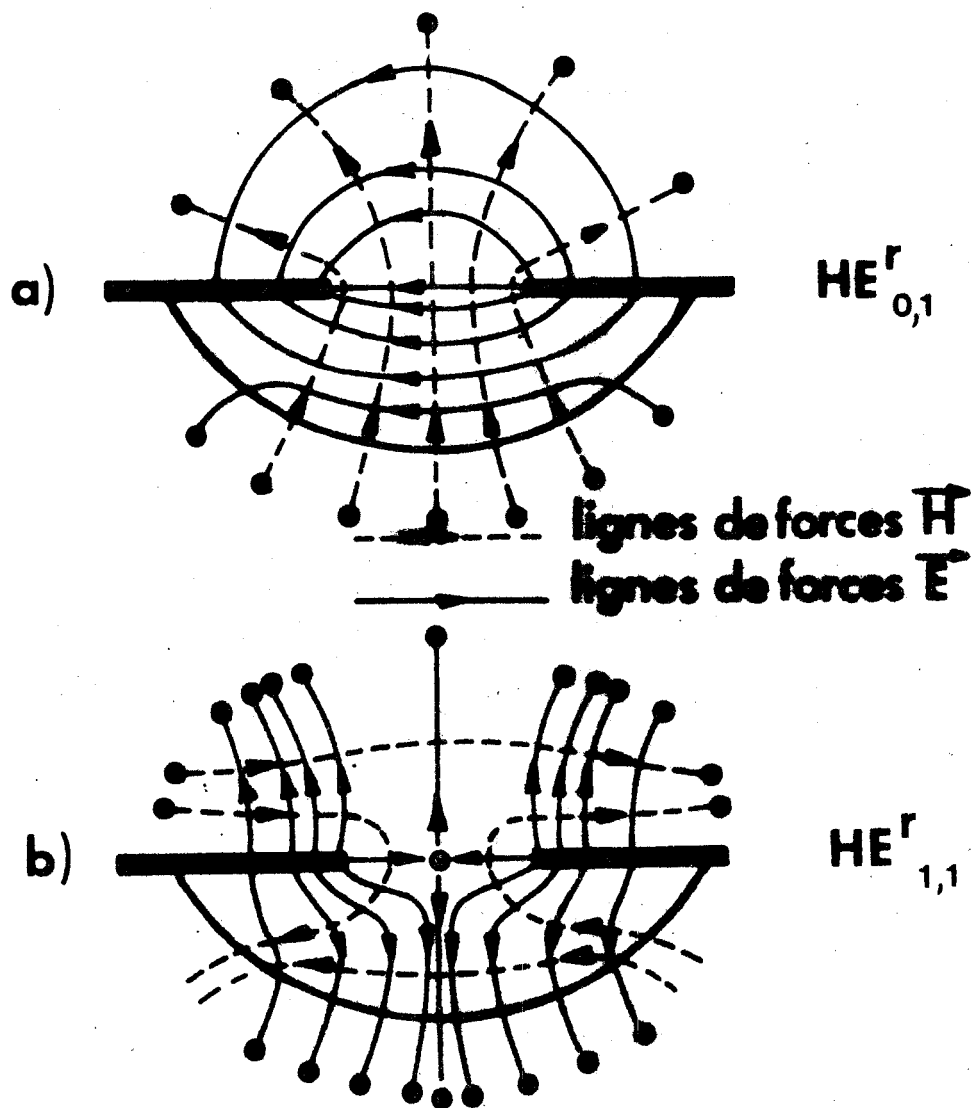


Fig. III-10 Ligne microfente dissymétrique modélisée  
Configuration des lignes de forces électrique et magnétique des deux premiers  
modes à fréquence de coupure nulle.

$$H_{\xi,0} \approx -j \frac{\beta D}{\gamma^2} \frac{\text{sh} \xi_0}{p'} M_0^r I_0 Fek'_0(\xi, \gamma_0^2) ce_0^*(\eta, \gamma_0^2)$$

$$H_{\eta,0} \approx j \frac{\beta D}{\gamma^2} \frac{\text{sh} \xi_0}{p'} M_0^r I_0 Fek_0(\xi, \gamma_0^2) ce_0^*(\eta, \gamma_0^2)$$

III-1-40

Dans ces expressions des composantes du champ magnétique du mode "fente"  $HE_{01}^r$ , seules les quantités  $I_0$ ,  $E_0$  et  $H_0$  restent à définir ; elles s'expriment successivement comme :

$$I_0 = \frac{Ce_0(\xi_0, \gamma_1^2) Fek_0(0, \gamma_0^2)}{Ce_0(0, \gamma_1^2) Fek_0(\xi_0, \gamma_0^2)} + \frac{\chi^2 Fek'_0(0, \gamma_0^2) Fe_0(\xi_0, \gamma_1^2)}{\gamma^2 Fek_0(\xi_0, \gamma_0^2) Fe'_0(0, \gamma_1^2)}$$

$$E_0 = \frac{Fek_0(0, \gamma_0^2)}{Ce_0(0, \gamma_1^2)}$$

$$H_0 = I_0 F_0 - E_0 \frac{Ce_0(\xi_0, \gamma_1^2)}{Fe_0(\xi_0, \gamma_1^2)}$$

III-1-41

Les composantes du champ électrique du mode "fente" sont déduites de celles du champ magnétique par les relations III-1-20.

La figure III - 11 présente les évolutions spatiales des composantes du champ magnétique du mode "fente"  $HE_{01}^r$  dans le plan longitudinal  $y'o'z$  ( $\eta = \pi/2$ ). Ces évolutions sont déduites directement des expressions III-1-39 à III-1-40.

La similitude formelle entre ces tracés et ceux décrits par S.B. COHN sur la ligne microfente dissymétrique nulle [35] (voir figure I-10) est encore évidente.

A condition d'opérer dans le domaine de validité de l'approche.

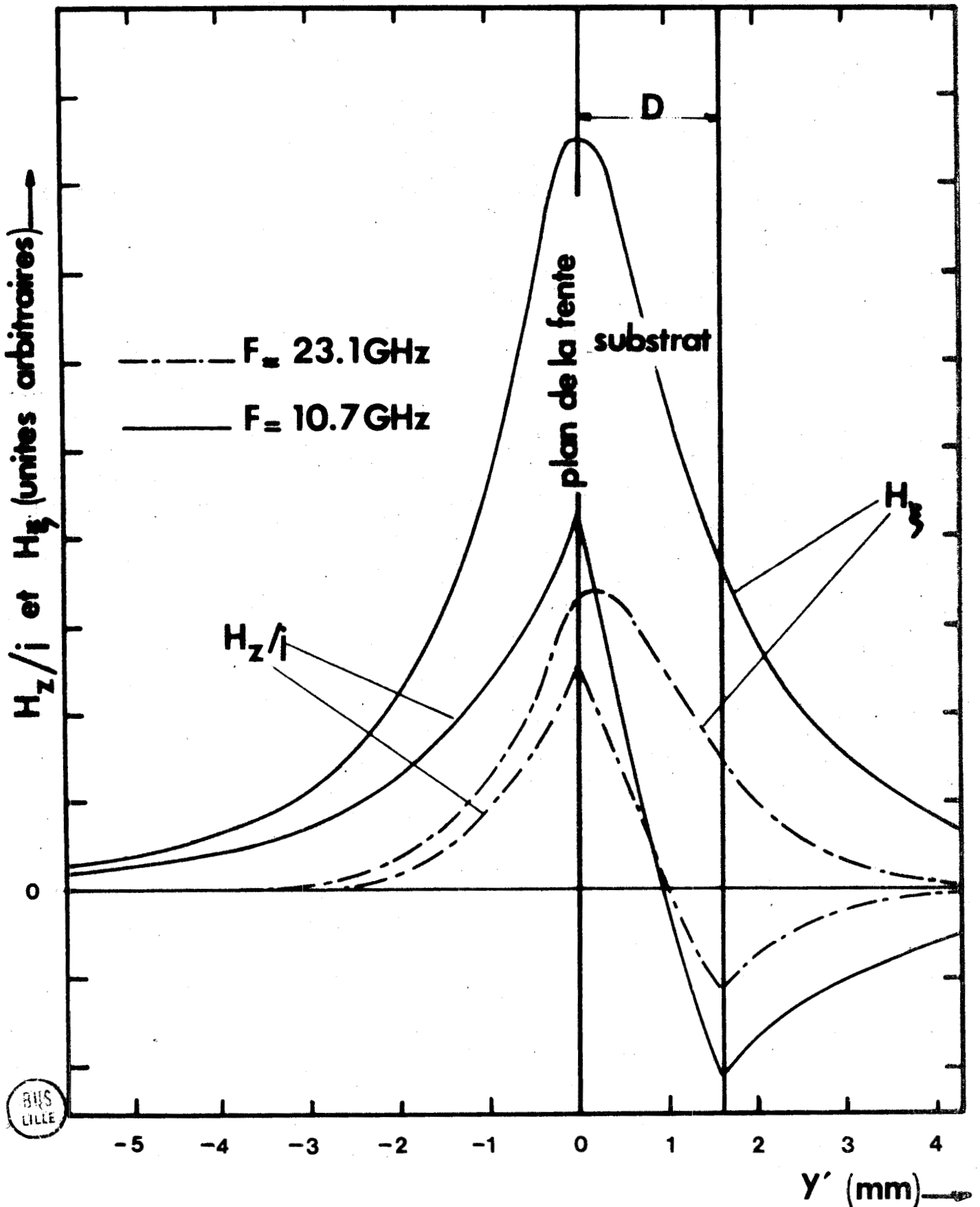


Fig. III-11 Ligne microfente dissymétrique modélisée  
 Evolution spatiale du champ magnétique du mode fente  $HE_{01}^r$  dans le plan  
 longitudinal  $Y'OZ$  ( $\eta = \pi/2$ ).  $W = D = 1.58 \text{ mm}$ ;  $\epsilon_r = 9.6$

mode par mode, on dispose à présent d'une description analytique relativement simple du domaine basse fréquence du spectre des structures microfentes modélisées.

### III - 2 PASSAGE DES STRUCTURES MICROFENTES MODÉLISÉES AUX STRUCTURES RÉELLES - ESTIMATION DES PARAMÈTRES PRATIQUES DES MODES "FENTE",

Par le point de vue général des méthodes de perturbation, on tente le passage aux lignes microfentes réelles. Pour des raisons évidentes de simplicité, ce passage est réalisé au premier ordre en perturbation. Il s'applique en outre, aux seuls modes "fente" pour lesquels on dispose d'éléments de comparaison théoriques et expérimentaux.

#### III - 2 - 1 Les modes "fente" dans les lignes microfentes réelles

##### a) Théorie

La variation au premier ordre  $\Delta\beta$  que subit la constante de phase du mode "fente" de la ligne modélisée lors du passage à la ligne réelle, s'écrit d'après les relations II-1-5 et II-1-7 comme :

$$\Delta\beta = \frac{\omega\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{2} \frac{\int_D \vec{E} \cdot \vec{E}^* dD}{\int_S (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{u} dS}$$

III-2-1

où  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  désignent respectivement les champs électrique et magnétique du mode "fente" dans la ligne modélisée dont la section droite est  $S$ .  $D$  est l'aire des zones hachurées visibles sur les figures II-4 a) et b). Toutes les composantes des champs électrique et magnétique du mode "fente" dans la structure modélisée sont connues dans le système de coordonnées elliptiques planes  $(\xi, \eta)$  de sorte que les intégrations dans III-2-1 ne posent aucune difficulté, que ce soit d'ordre algébrique ou d'ordre numérique.

Les figures III-12 et III-13 illustrent l'intervention de ces corrections du premier ordre sur des lignes microfentes symétrique et dissymétrique de

Fig. III-12 Ligne microfente modélisée symétrique  
 Passage à la ligne microfente réelle au premier ordre en perturbation.  
 Comparaison avec la modélisation de S.B. COHN.  $\epsilon_r = 16$

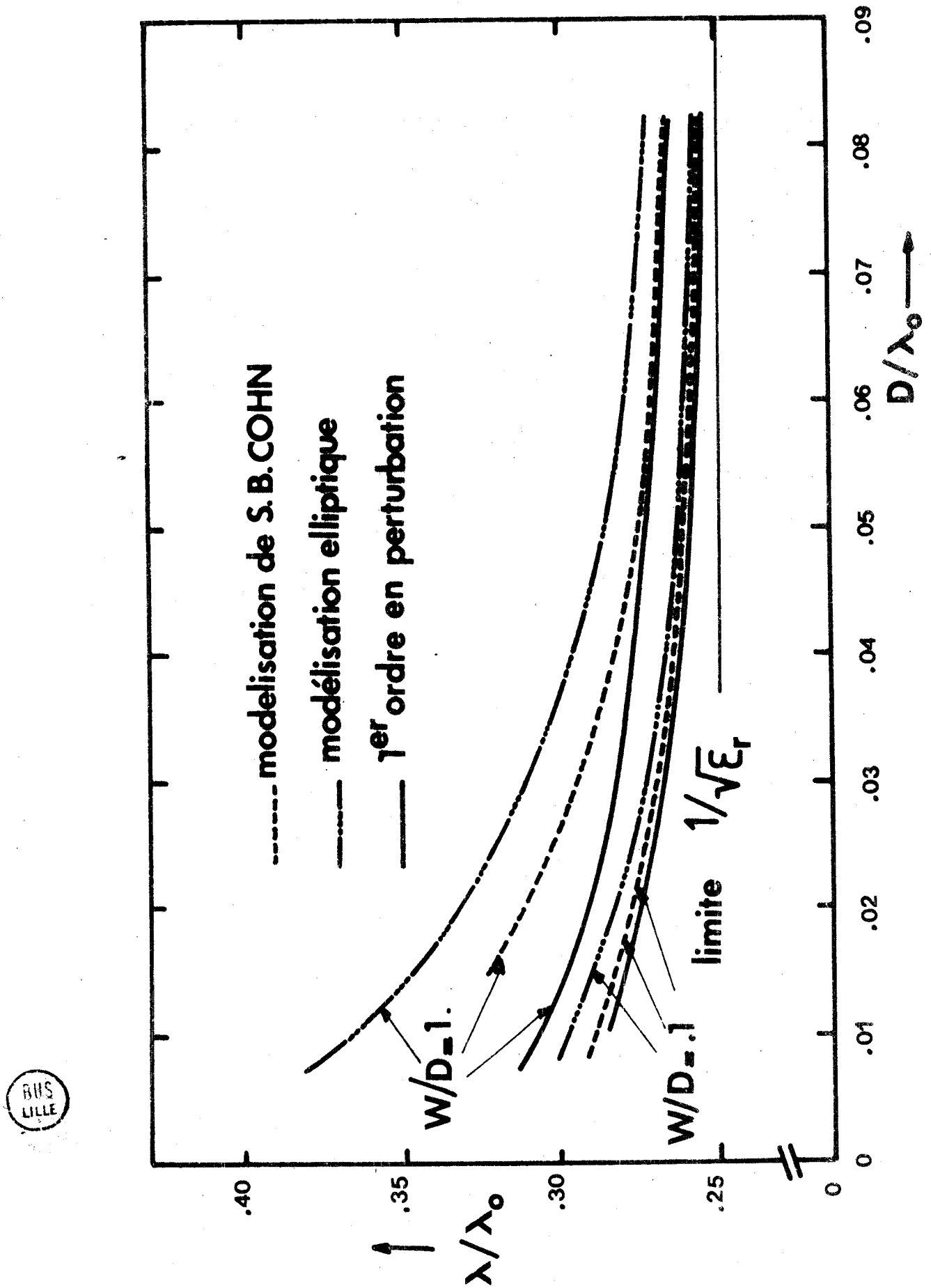
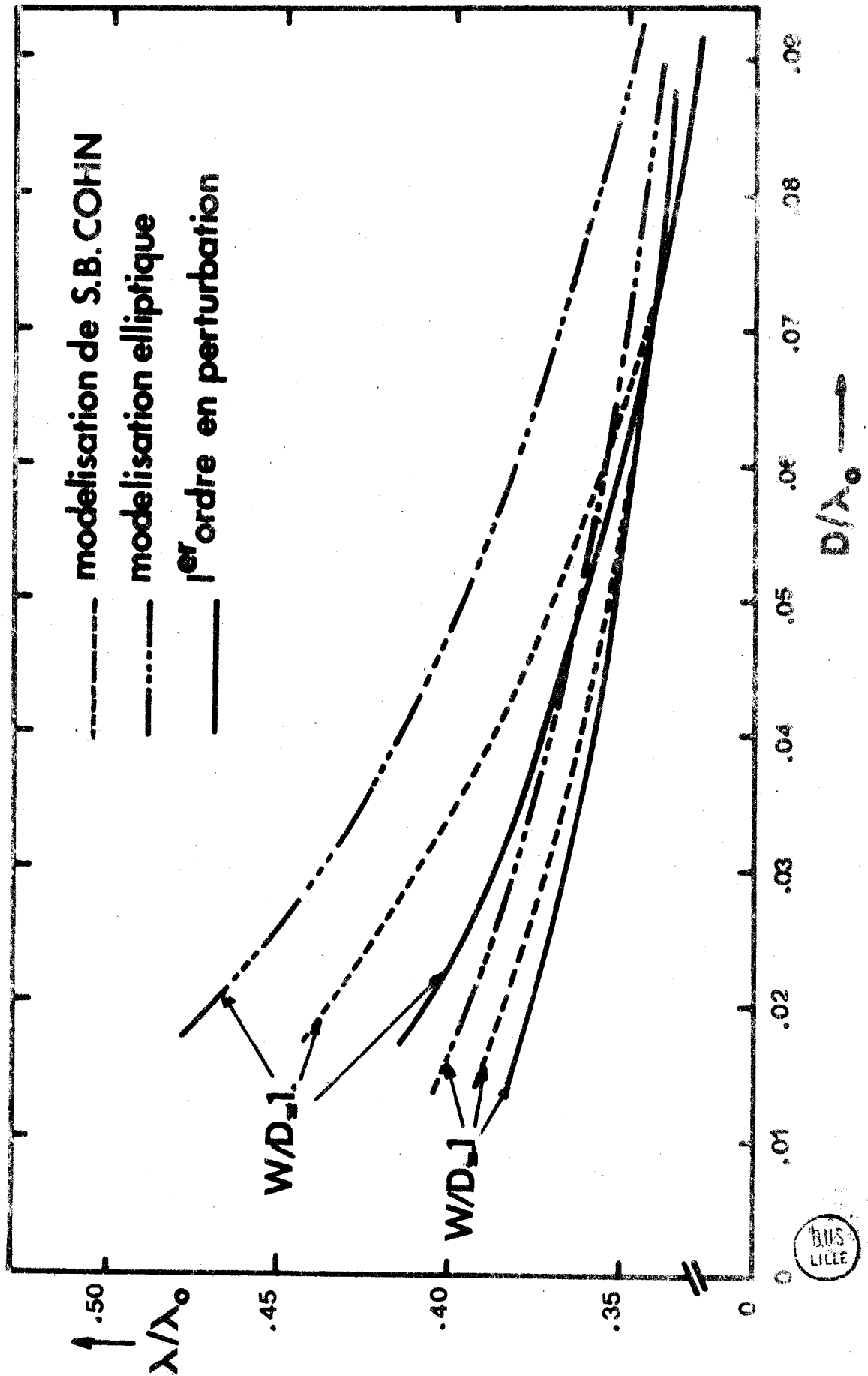


Fig. III-13 Ligne microfente modélisée dissymétrique.  
 Passage à la ligne microfente réelle au premier ordre en perturbation.  
 Comparaison avec la modélisation de S.B. COHN,  $\epsilon = 16$



même constitution dont les facteurs de forme  $W/D$  sont fixés successivement à  $W/D = .1$  et  $W/D = 1$ . Les caractéristiques de dispersion corrigées sont en bon accord avec celles issues de la modélisation de S.B. COHN lorsque le mode fente se situe en fréquence suffisamment loin de sa coupure. Dans cette situation extrême pour un mode, la puissance est presque toute véhiculée à l'intérieur du "coeur" diélectrique de forme elliptique de sorte que les "remplissages" des sections droites qui conduisent aux structures réelles, peuvent être considérées à juste titre comme une perturbation. Ceci n'est plus vrai lorsque le mode "fente" se situe en fréquence près de sa coupure car dans cette autre situation extrême, la majeure partie de la puissance est véhiculée à l'extérieur du "coeur" diélectrique. Les "remplissages" captent alors une fraction de la puissance qui est comparable à celle transportée par le mode ; ils ne peuvent plus en conséquence être considérée comme une perturbation.

Dans la mesure où les résultats au premier ordre en perturbation viennent s'identifier à ceux du "second ordre" de S.B. COHN il semble légitime de reproduire dans la ligne microfente réelle les champs du mode "fente" de la ligne modélisée. C'est ce que suggèrent les représentations de la figure III 14 a) et b).

#### b) Expérience

L'expérimentation a été menée à l'aide des cavités-guides décrites sur les figures III-15 a) et b). Ces cavités modifient la transmission d'un tronçon de ligne à microruban adapté comme il est montré sur la figure III-15 c). Les longueurs d'ondes déduites des fréquences de résonance de ces cavités confirment à quelques 2 ou 3 % les prévisions théoriques de S.B. COHN. La figure III-16 a) montre que cet écart théorie-expérience peut toutefois atteindre 5 ou 6 % vers le haut de la gamme de fréquence de mesure (. 5 - 12,4 GHz). La modélisation elliptique fournit elle aussi d'excellents résultats dès lors que la géométrie ( $W/D, D$ ) et la constitution  $\epsilon_r$  de la ligne, situent aux fréquences de mesure, le mode "fente" suffisamment loin de sa coupure. C'est précisément le cas pour l'expérimentation réalisée avec des lignes microfentes dont le facteur de forme  $W/D$  est fixé à .1. Ces lignes sont gravées sur des substrats d'alumine  $\epsilon_r = 9.6$  d'épaisseurs  $D = .635 \text{ mm}$  ou  $D = 2 \text{ mm}$ .

Dans une ligne microfente symétrique les longueurs d'onde mesurées pour

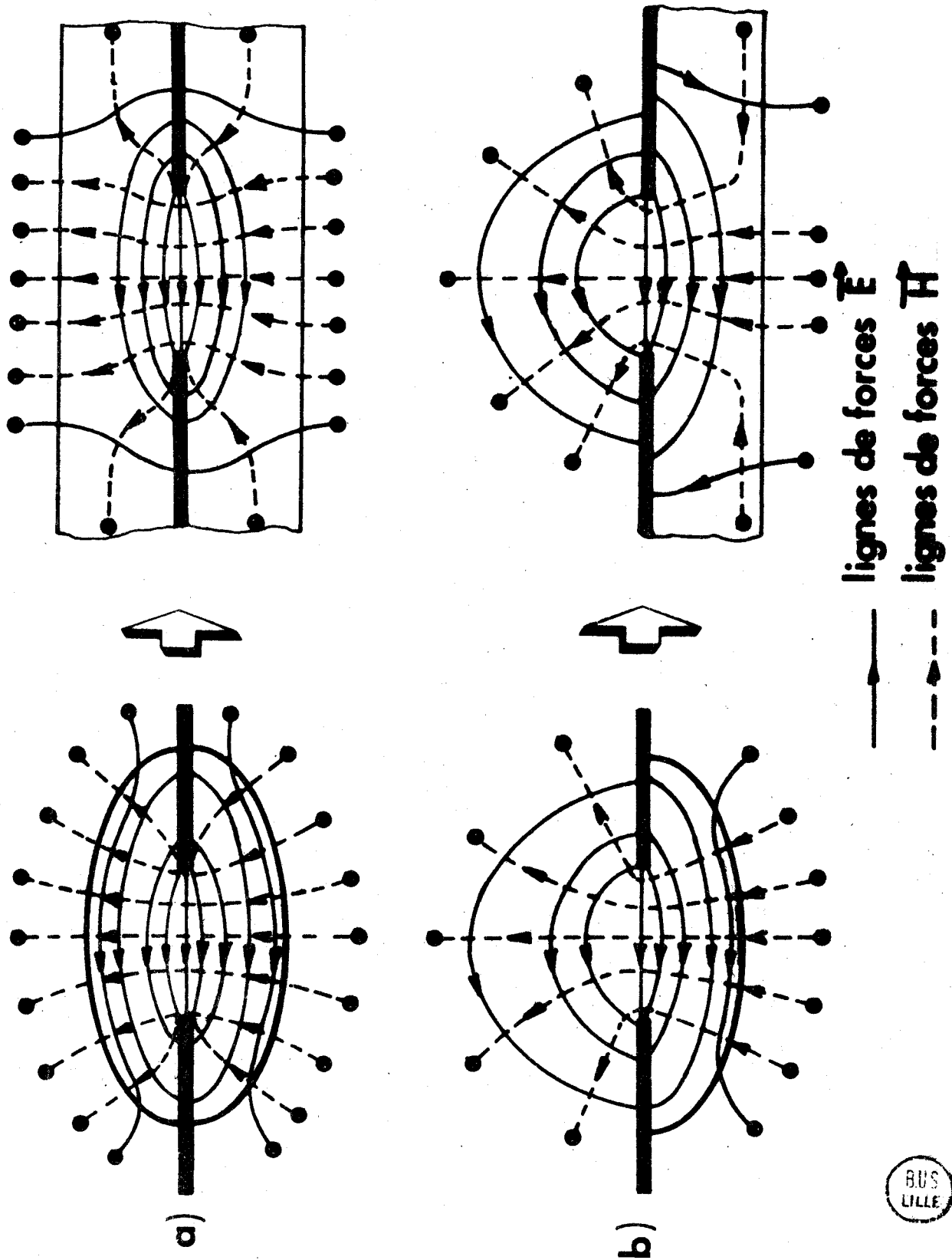
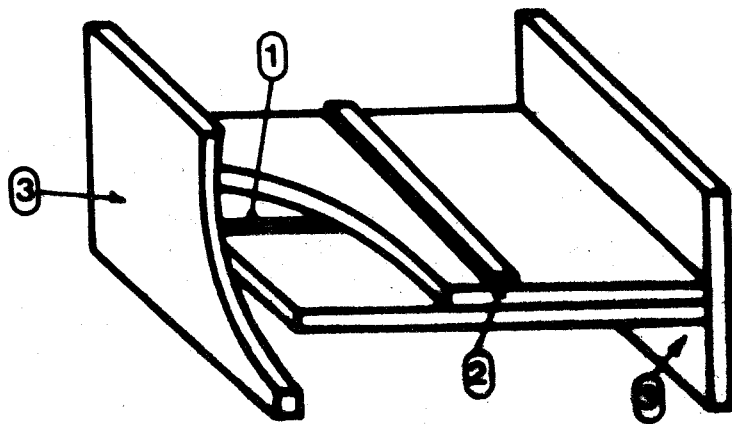


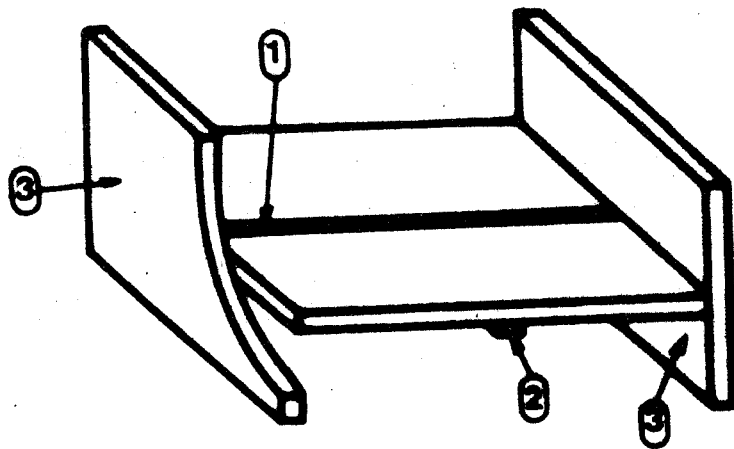
Fig. III-14 Passage des lignes modélisées aux lignes réelles sur les configurations transversales des champs

- a) ligne microfente symétrique  
b) ligne microfente dissymétrique

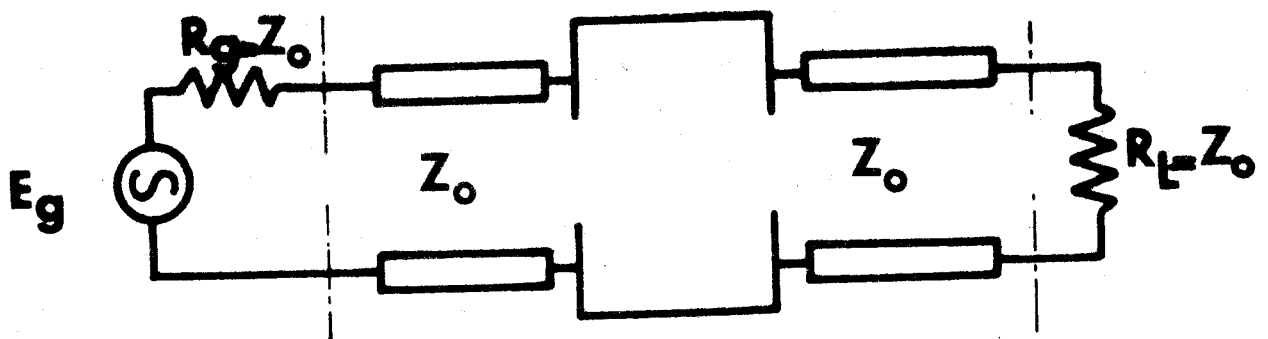




a)



b)



c)



Fig. III-15 Expérimentation

- a) cavité guide microfente symétrique  
 b) cavité guide microfente dissymétrique  
 c) onde mètre microruban. Principe

Fig. III-16-a) Lignes microfente dissymétrique. Comparaison théorie expérience

Substrats Alumine (LTT)

$\Delta, \blacktriangle$ :  $\epsilon_r = 9.6$   
 $D = .635$  mm  
 $L = 50,4$  mm

$\circ, \bullet$ :  $\epsilon_r = 9.6$   
 $D = 2.$  mm  
 $L = 47$  mm

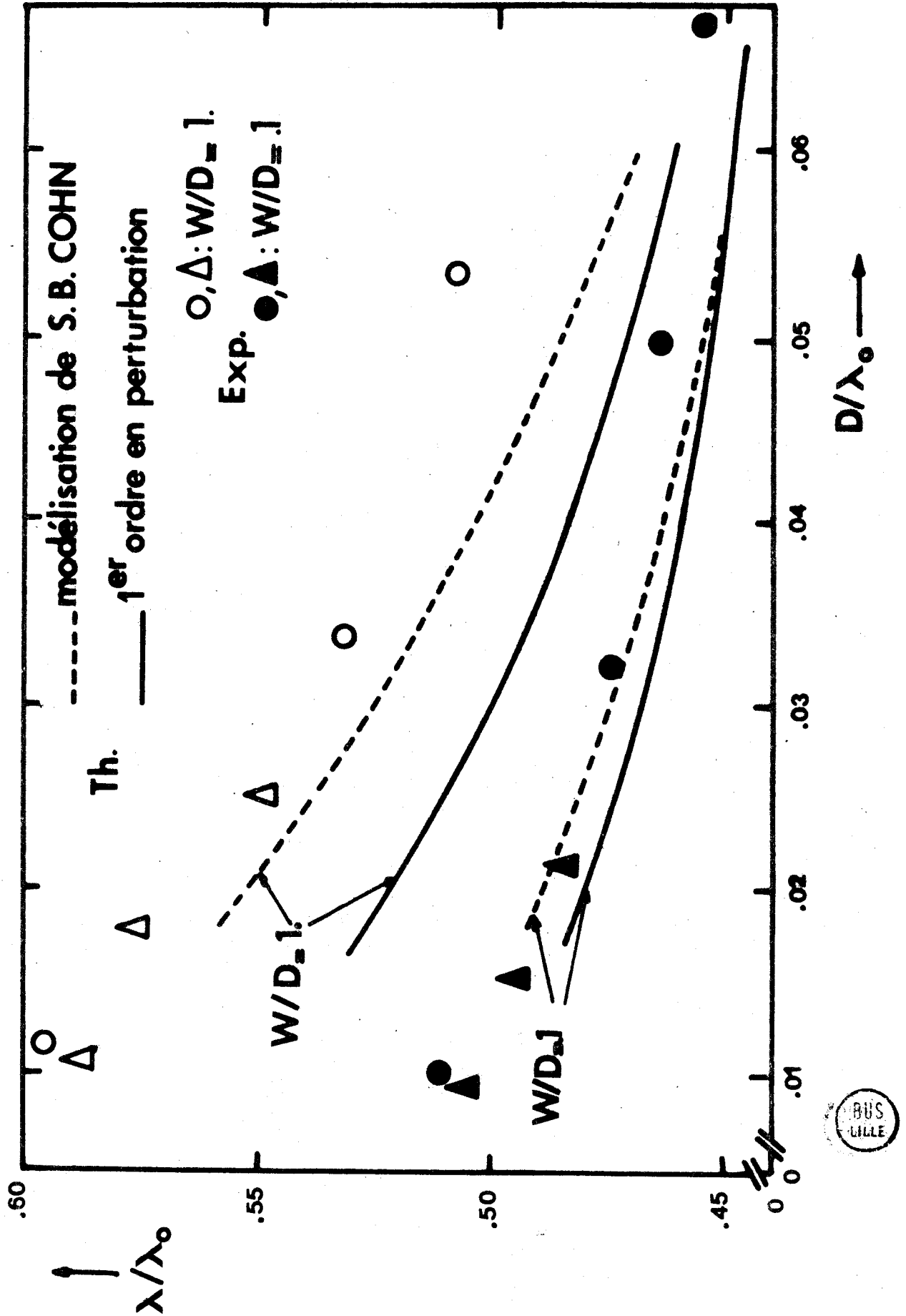
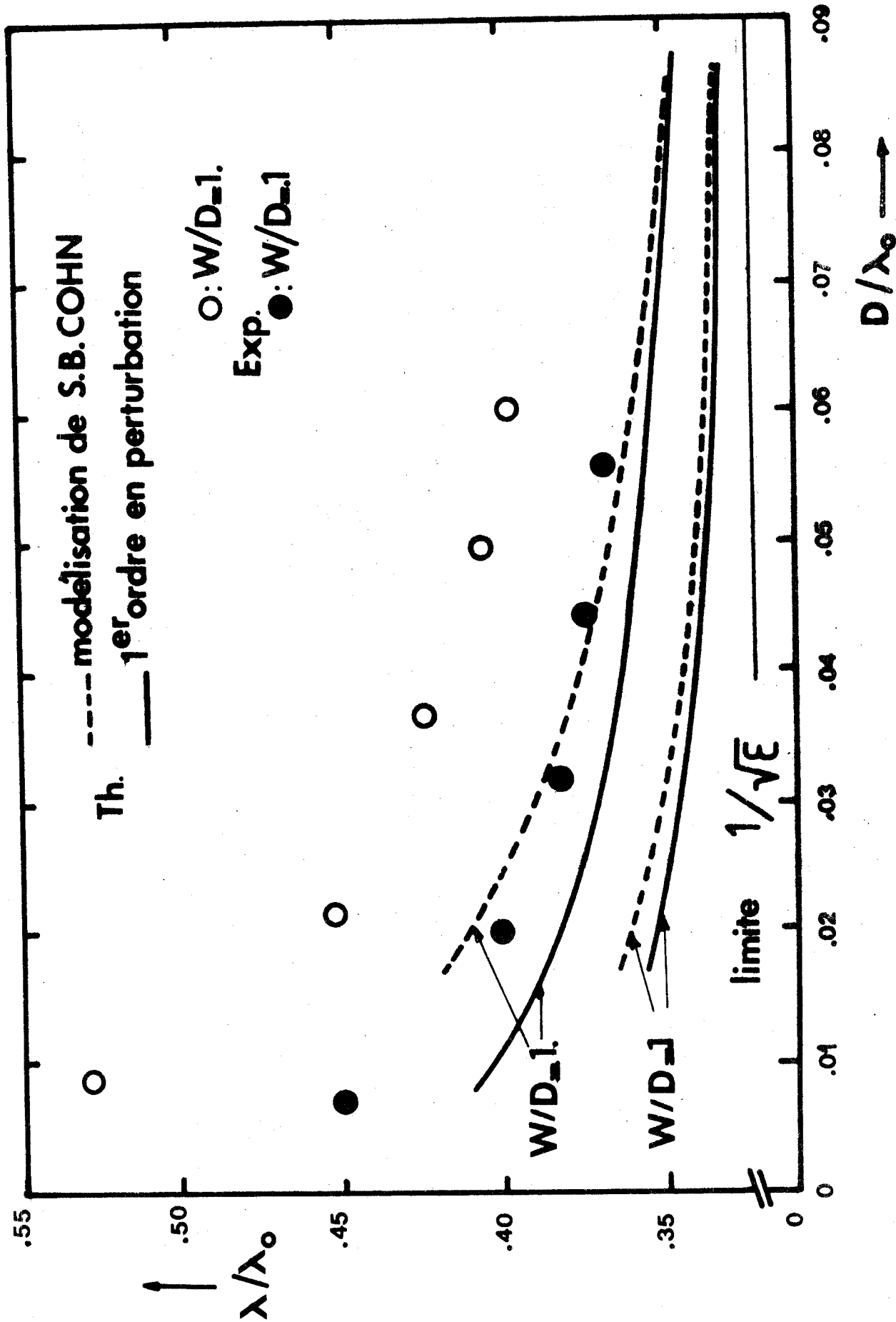


Fig. III-16 b) Ligne microfente symétrique. Comparaison théorie expérience  
Substrat Alumine (LTT)

○, ●  $\epsilon_r = 9.6$        $D = 1.58 \text{ mm}$        $L = 46,7 \text{ mm}$



le mode "fente" sont très différentes des prévisions théoriques issues des deux modélisations. On observe un écart systématique qui est, sur la figure III 16 b) de l'ordre de 8 à 10 % bien que les conditions expérimentales soient excellentes (voir figure III 16 c). Ce désaccord résulte en fait de la présence inévitable de lames d'air au voisinage de la fente lors de la réalisation pratique de ces lignes. Les lames d'air affaiblissent la permittivité réelle des substrats mis en contact dans des proportions qui voisinent ici 15 à 20 %. Ces proportions varient selon l'importance des défauts de planéité des substrats. Le caractère aléatoire de ces défauts de planéité rend mal aisée la poursuite d'une confrontation théorie-expérience sur les lignes microfentes symétriques.

c) Conclusions :

Du point de vue de la détermination des caractéristiques de dispersion des modes "fente" la modélisation de S.B. COHN demeure, par sa simplicité et la qualité de ses prévisions théoriques, plus avantageuse la modélisation elliptique. Dans la description des composantes des champs des modes "fente" c'est au contraire la modélisation elliptique qui prend l'avantage sur la modélisation de S.B. COHN. Par cette aptitude, la modélisation elliptique autorise ainsi une estimation de tous les paramètres pratiques associés aux modes "fente". Ces paramètres pratiques sont calculés sur les lignes microfentes modélisées car il semble raisonnable d'admettre la conservation des ordres de grandeurs de ces différents paramètres dans le passage aux structures réelles.

### III - 2 - 2 Estimation des paramètres pratiques des modes "fente"

#### III - 2 - 2 - 1 Les impédances caractéristiques équivalentes

Le seul élément théorique de comparaison dont on dispose est l'évolution fréquentielle de l'impédance caractéristique équivalente en tension déduite de la modélisation de S.B. COHN. (Voir figure I-9 et I-13). A partir des figures III - 17 a) et b) on définit ici successivement et arbitrairement :

- l'impédance caractéristique équivalente en tension comme :

$$Z_{c,u} = \frac{U \cdot U^*}{2P},$$

$$U = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

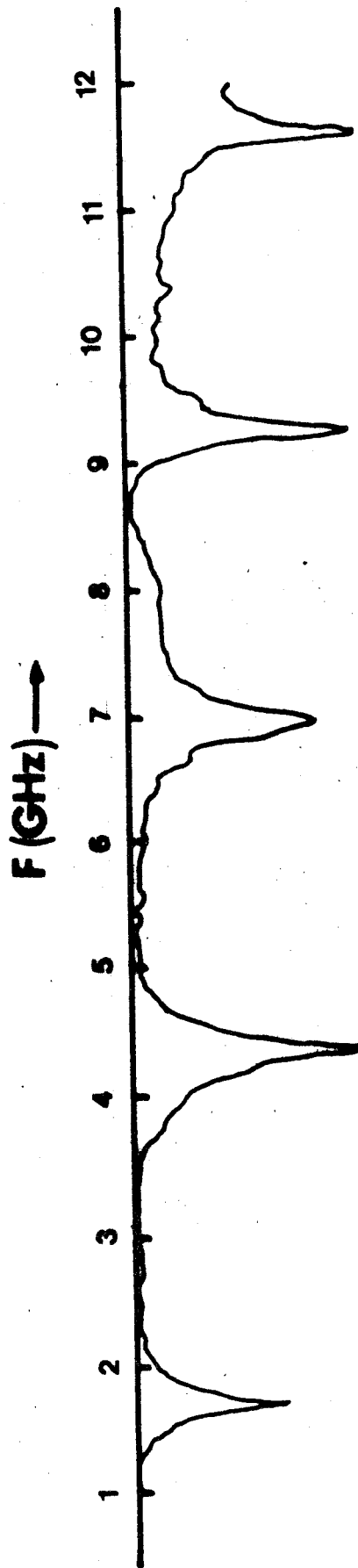
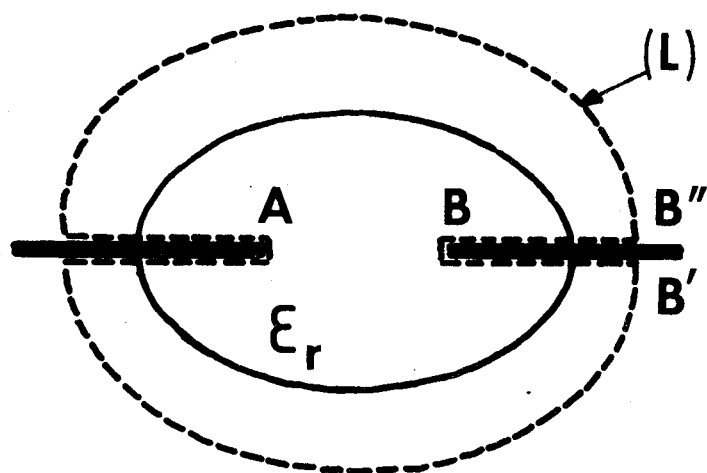
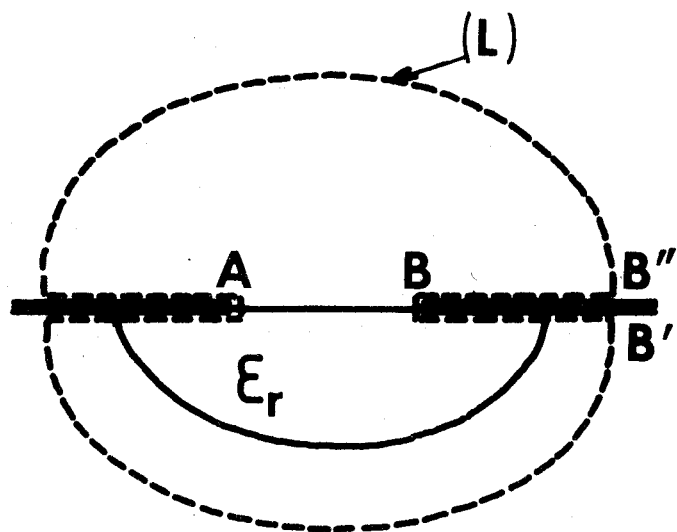


Fig. 16-c) Spectrogramme d'une cavité guide microfente symétrique  
 $w/d = 1$  ;  $D = 1.5$  mm ;  $\epsilon_r = 9.6$  ;  $L = 46,7$  mm





a)



b)

Fig III-17 Calcul des impédances caractéristiques équivalentes. Le contour joint les points  $B''$ ,  $B$  et  $B'$

a) microfente symétrique modélisée

b) microfente dissymétrique modélisée



où  $\vec{E}$  désigne le champ électrique du mode "fente" dans le plan de la fente.

- l'impédance caractéristique équivalente en courant comme

$$Z_{C,I} = \frac{2P}{II^*} \quad \text{III-2-3}$$

$$I = \int_{L'} \vec{H} \cdot d\vec{L}'$$

où  $\vec{H}$  est le champ magnétique du mode "fente" sur les demi-plans conducteurs  $L'$  représente une portion du contour  $L$  qui fournit un courant direct ( $I > 0$ )

- l'impédance caractéristique équivalente en courant tension comme :

$$Z_{C,U,I} = \frac{U}{I} \quad \text{III-2-4}$$

Les résultats de ces estimations sont reportés sur les figures III-18 et III-19 pour les deux types de lignes microfentes. On ne peut conclure que par rapport aux résultats présumés exacts\*, issus de la modélisation de S.B. COHN. Les évolutions fréquentielles des impédances  $Z_{C,U}$  déduites des deux modélisations sont très semblables. Les ordres de grandeurs sont respectés mais les écarts s'accroissent aux fréquences très élevées ; dans le domaine spectral des figures III-18 et III-19, ceci est particulièrement net pour la ligne microfente dissymétrique. Paradoxalement ce désaccord, s'observe quand précisément les caractéristiques de dispersion tirées des deux modélisations s'identifient; il faut en conséquence chercher l'origine de ce désaccord dans le renforcement de la nature hybride du mode "fente". Dans ses estimations, la modélisation elliptique ne prend pas en compte cette éventuelle modification de la structure de l'onde.

### III - 2 - 2 - 2 Les coefficients d'atténuation

#### a) Théorie

On applique ici le formulaire établi au paragraphe I-1-6-2 d), aux cas des modes "fente" des structures microfentes modélisées imparfaites,

(\*) J.B. KNORR et K.D. KUCHLER ont confirmé par la suite l'évolution fréquentielle de  $Z_{C,U}$  à l'aide de l'Approche Spectrale (voir figure I-13).

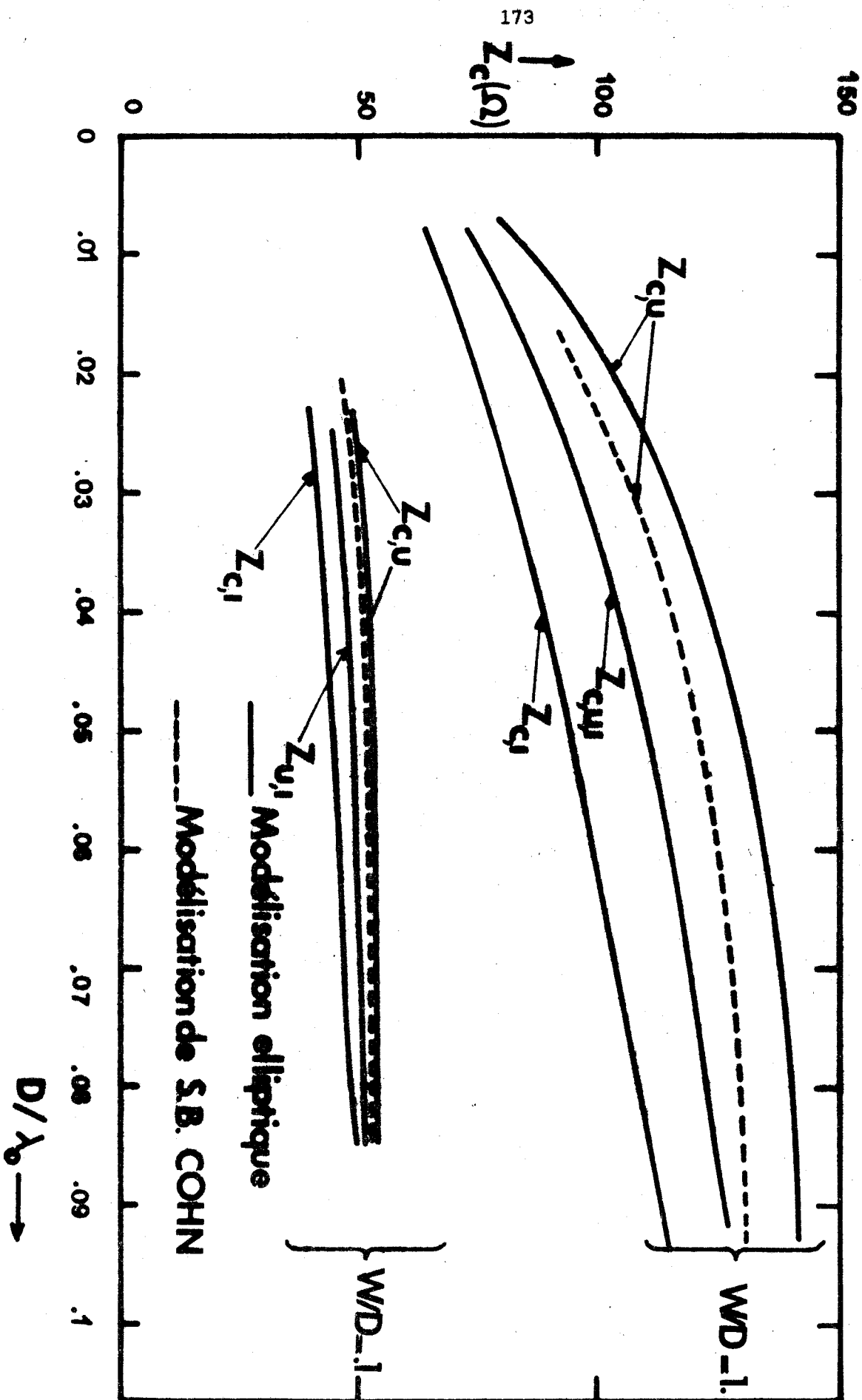


Fig III-18 Ligne microfente modélisée symétrique. Impédances caractéristiques équivalentes du mode "fente". Comparaison entre la modélisation elliptique et la modélisation de S.B. COHN sur  $Z_{c,u}$ .  $\epsilon_r = 9.6$



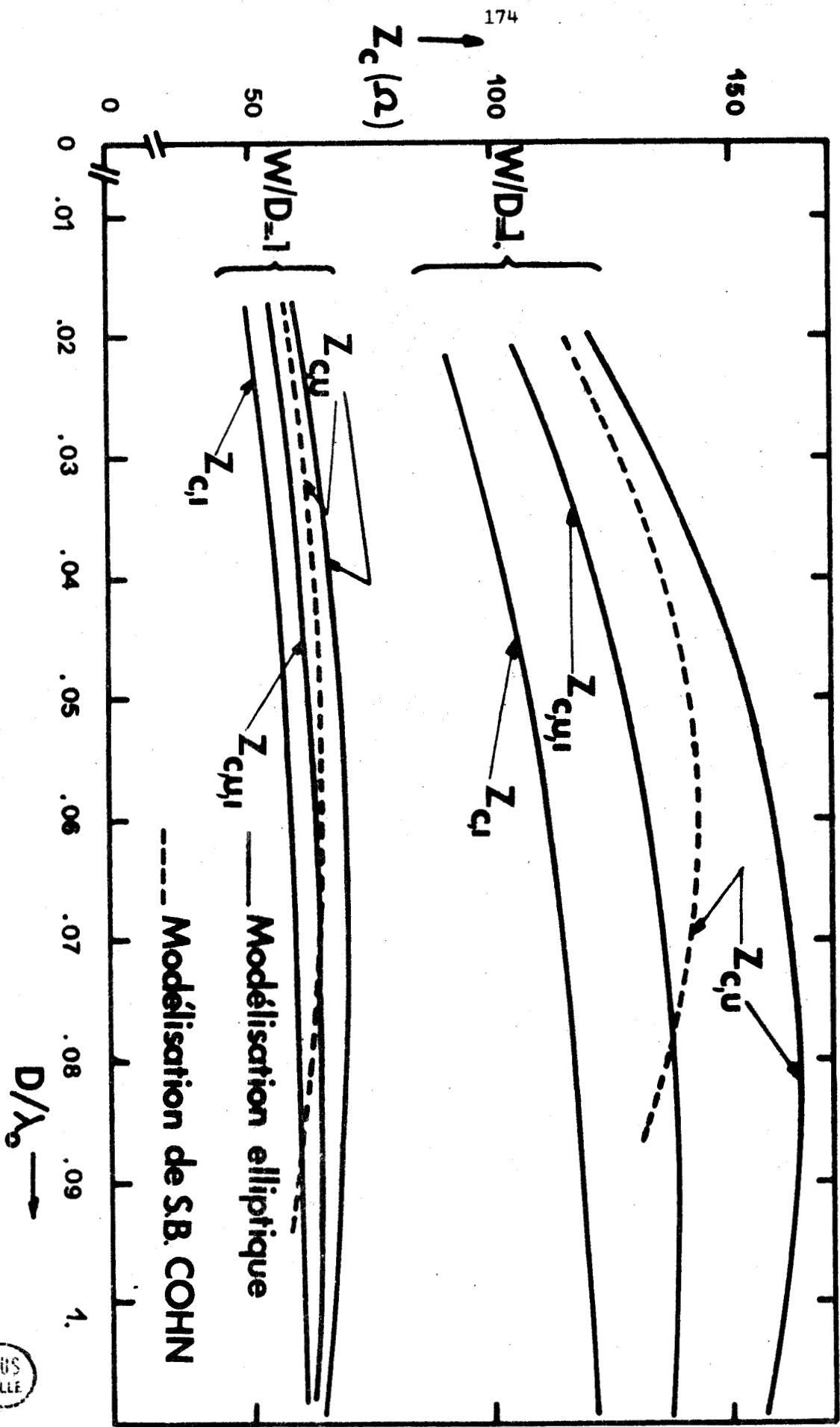


Fig. III-19 Ligne microfente modélisée dissymétrique. Impédance caractéristique équivalente du mode "fente". Comparaison entre la modélisation élliptique et la modélisation de S.B. COHN sur  $Z_{c,u}$ .  $\epsilon_r = 9.6$

des figures III-20 a) et b).

. Le coefficient d'atténuation dû aux pertes dans le "coeur" diélectrique dont la conductivité est  $\sigma$  s'exprime d'après I-1-76 comme :

$$\alpha_D = \frac{8.686 \sigma}{4P} \int_{D'} \vec{E} \vec{E}^* dD \quad (\text{dB/m}) \quad \text{III-2-5}$$

où  $\vec{E}$  désigne le champ électrique du mode "fente" défini en tout point de la section ( $D'$ ) du "coeur" diélectrique (voir figure III-20 a) et b)). Les estimations de ces pertes diélectriques sont reportées sur la figure III-21 pour la ligne microfente symétrique modélisée et sur la figure III-22 pour la ligne microfente dissymétrique modélisée.

. Le coefficient d'atténuation dû aux pertes métalliques dans les demi-plans conducteurs est défini d'après I-1-78 comme :

$$\alpha_C = \frac{8.686 \omega \mu_0 \delta}{8P} \oint_{C'} \vec{H} \cdot \vec{H} dC' \quad (\text{dB/m}) \quad \text{III-2-6}$$

où  $\vec{H}$  désigne le champ magnétique du mode "fente" en tout point du contour (voir figure III-20 a) et b))

*Remarque :*

L'estimation des pertes métalliques pour le mode "fente" est effectuée en excluant du contour fermé ( $C'$ ) les bords minces de la fente sur une épaisseur de peau  $\delta$  comme il est montré sur la figure III-20. Cette précaution supprime les discontinuités que subissent en ces points les fonctions de mode du guide sans pertes, sans gêner pour autant la prise en compte des variations rapides de ces fonctions en leur voisinage. [58]. La figure III-23 illustre l'intervention de cette précaution dans le calcul du produit scalaire  $\vec{H} \cdot \vec{H}$  sur la face supérieure d'un des demi-plans conducteurs d'une ligne microfente.

Les estimations des pertes métalliques dans les lignes microfentes symétrique et dissymétrique modélisées sont décrites respectivement sur les figures III 24 et III 25.

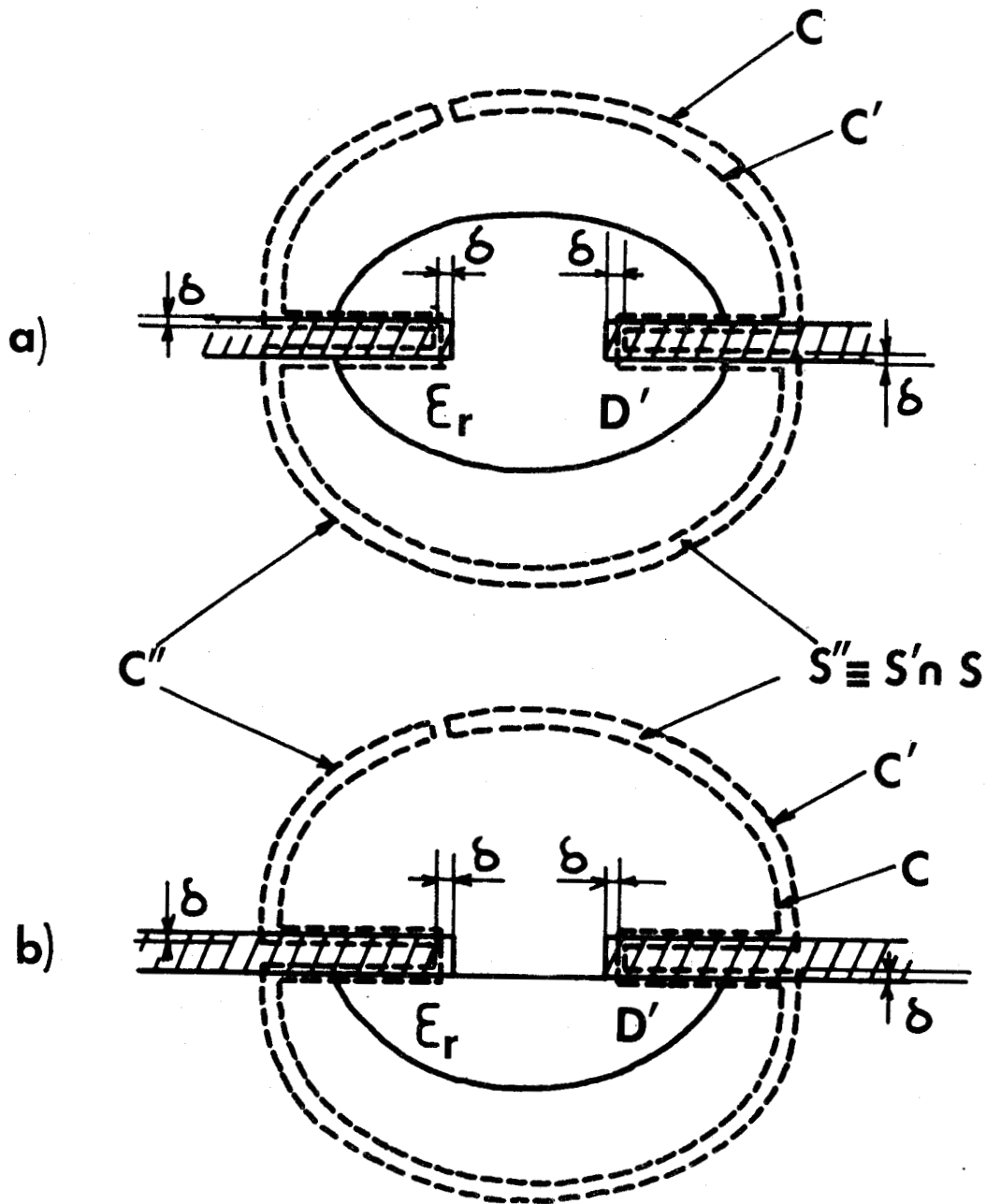


Fig. III-20 Estimation des pertes diélectrique et métallique  
 a) ligne microfente symétrique modélisée  
 b) ligne microfente dissymétrique modélisée



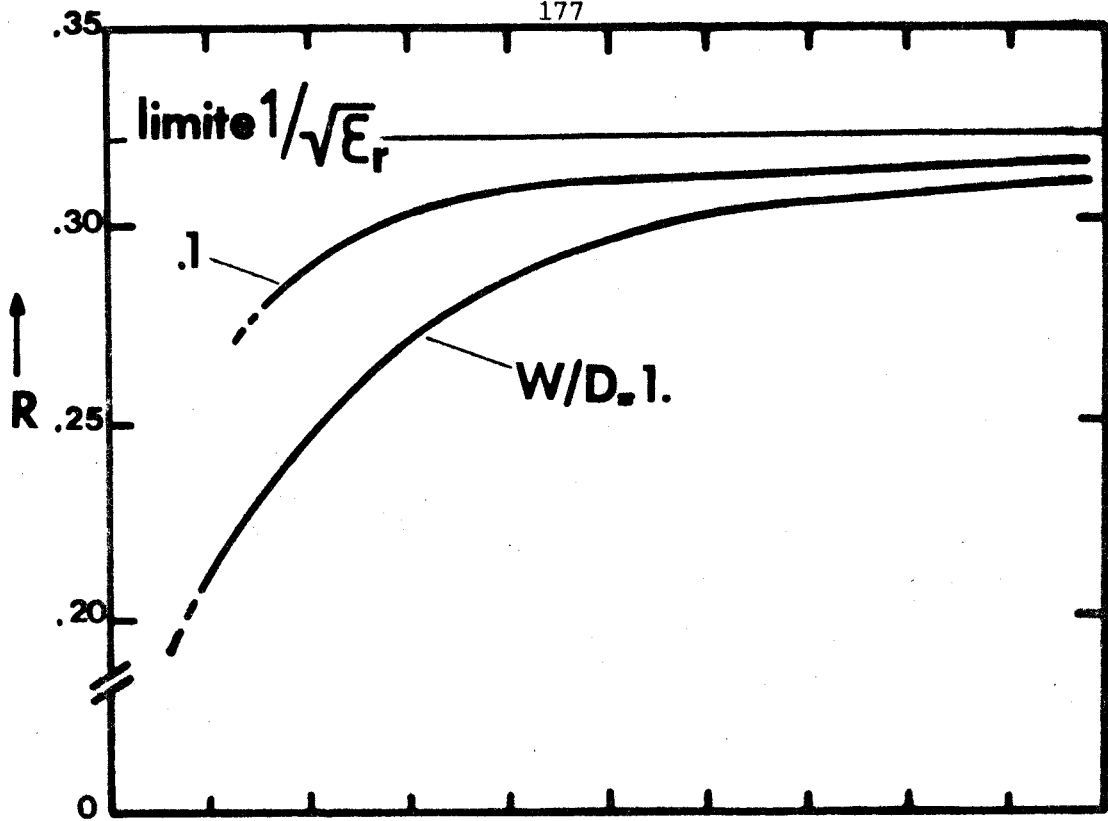


fig. III-21

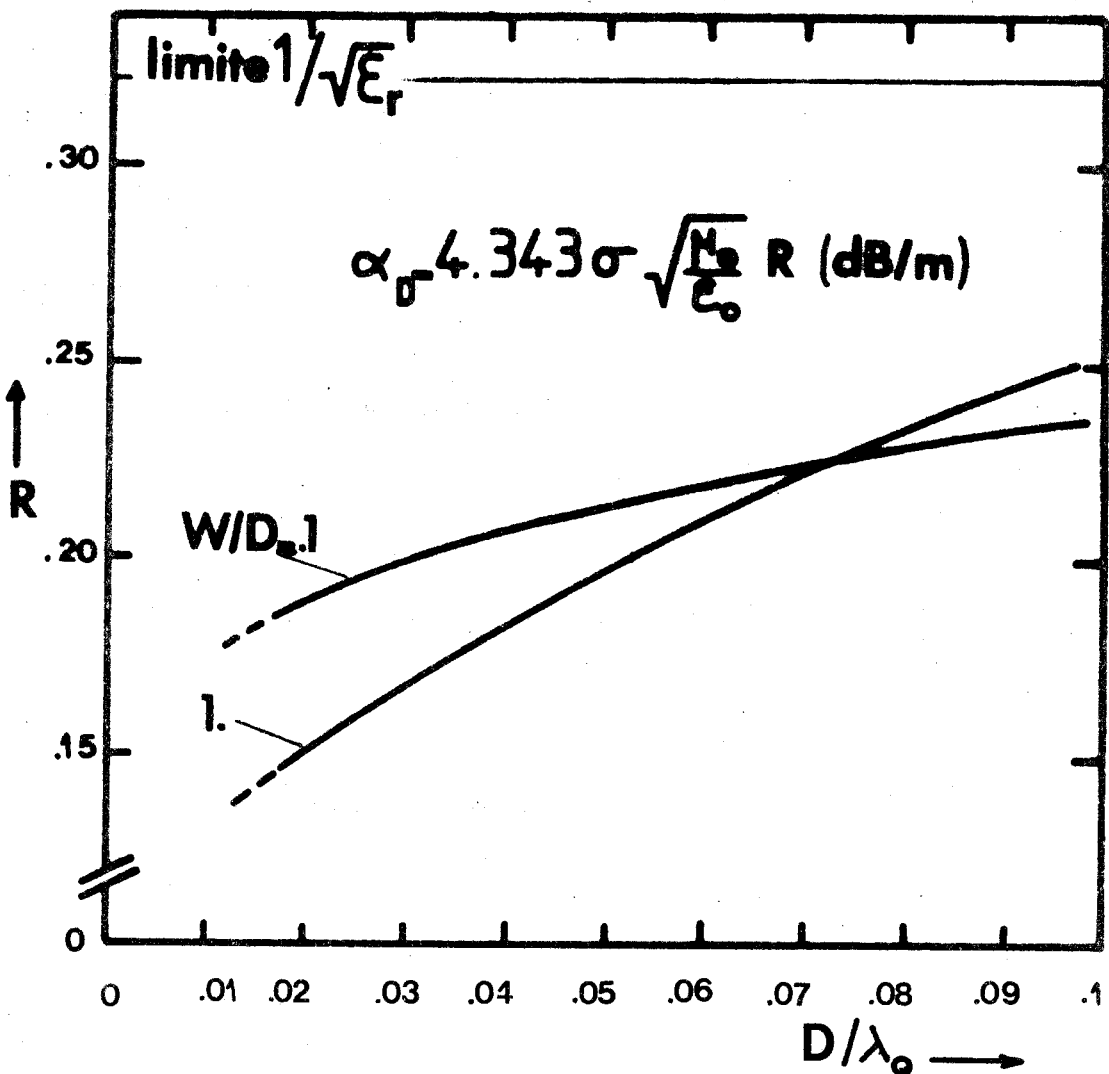


fig. III-22



Lignes microfentes modélisées symétrique (fig.III-21) et dissymétrique (fig III-22)  
 Atténuation dans les matériaux diélectriques.  $\epsilon_r = 9.6$

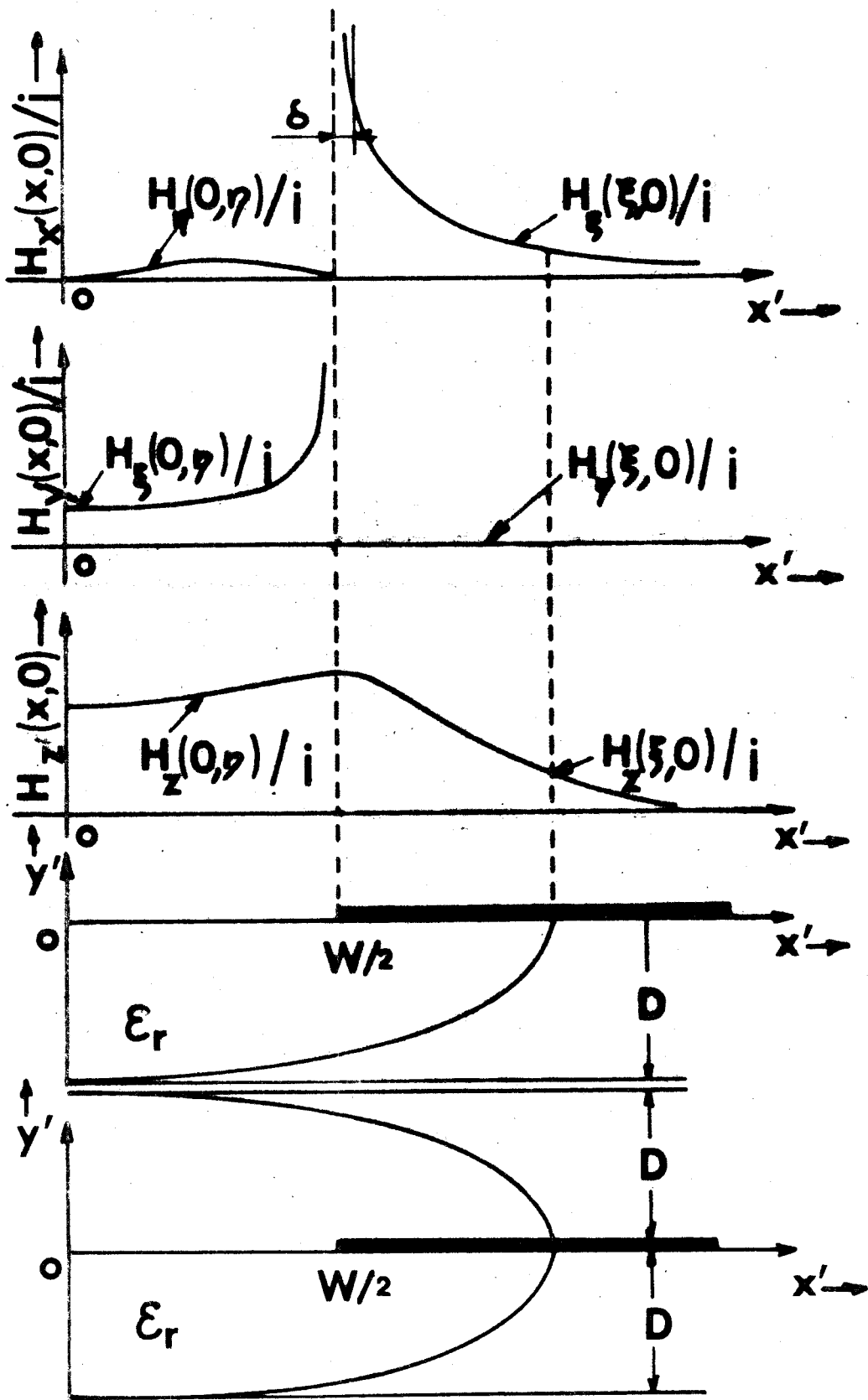


Fig. III-23 Estimation des pertes métalliques. Précaution à prendre pour le calcul du produit scalaire  $\vec{H} \cdot \vec{H}$ .

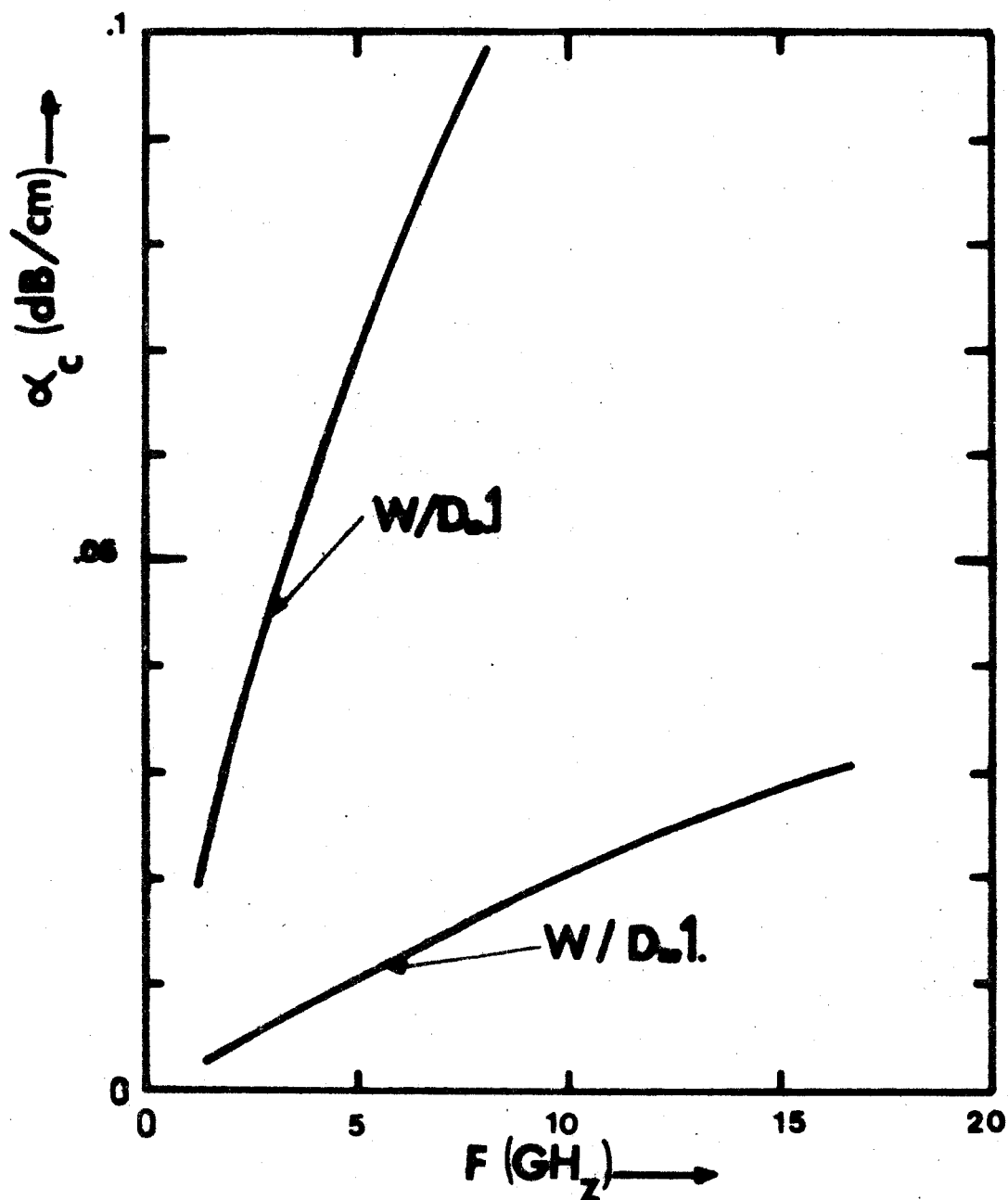


Fig. III-24 Ligne microfente modélisée symétrique. Atténuation dans les matériaux conducteurs  $\epsilon_r = 9.6$  ;  $\sigma_c = 5.8 \cdot 10^7 \text{ } \Omega/\text{m}$   $D = 1.58 \text{ mm}$ .



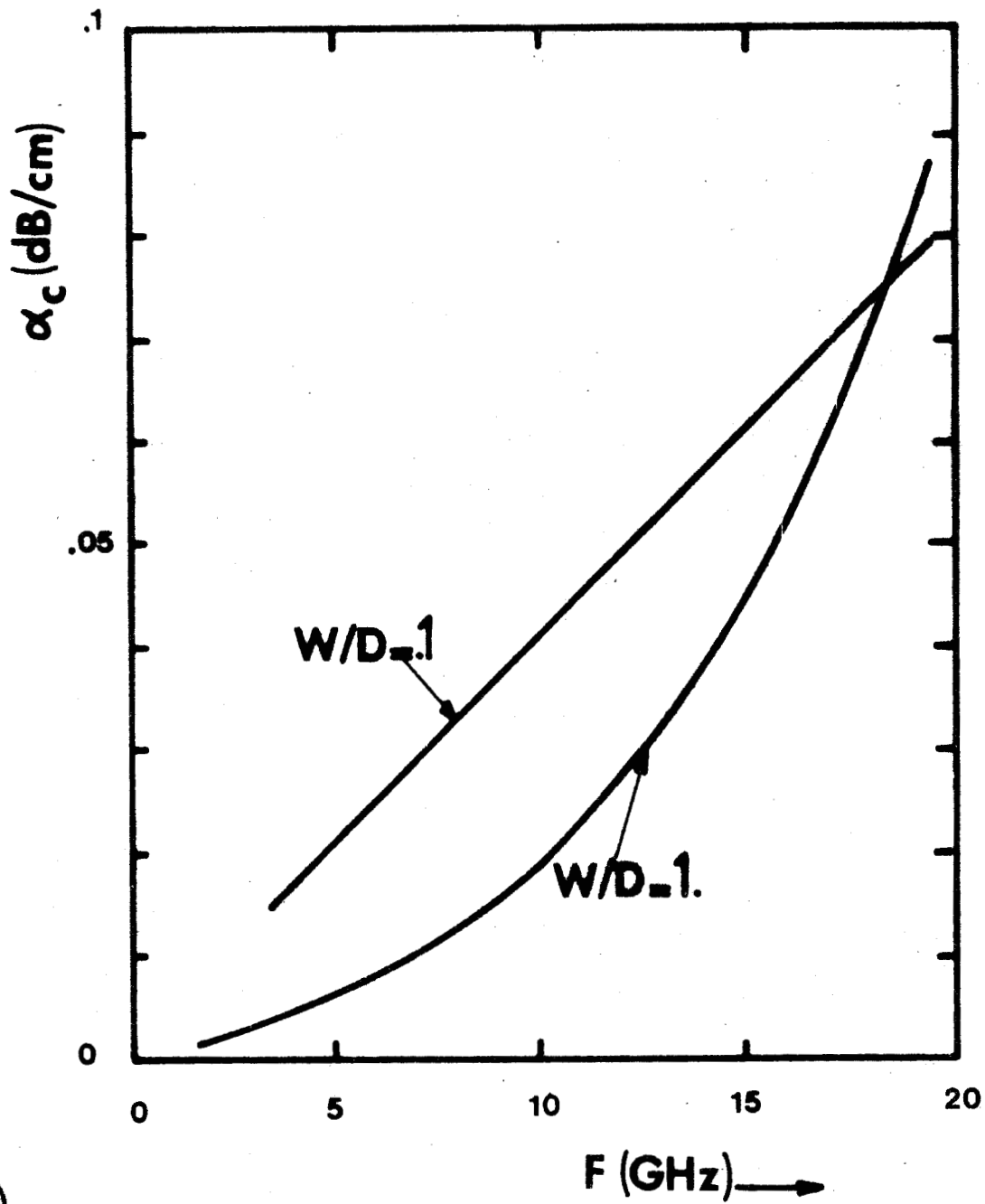


Fig. III-25 Ligne microfente modélisée dissymétrique. Atténuation dans les matériaux conducteurs  $\epsilon_r = 9.6$  ;  $\sigma_c = 5.8 \cdot 10^7 \text{ } \Omega/\text{m}$  ;  $D = 1.58 \text{ mm}$

L'examen de ces résultats conduit aux remarques générales suivantes valables pour les deux types de lignes modélisées. Ainsi, à une même fréquence, l'importance des pertes diélectriques et métalliques reste en relation avec la concentration énergétique à l'intérieur du "coeur" qui est imposée par le choix du facteur de forme  $W/D$ . Enfin, les faibles valeurs des facteurs de forme  $W/D$  conduisent à une croissance très rapide des pertes métalliques avec la fréquence. Ce comportement atteste bien de la spécificité des modes "fente" qui doivent nécessairement disparaître au terme d'un passage progressif à la ligne "image" circulaire ( $W/D \rightarrow 0$ ).

b) Expérience

Dans l'hypothèse où les modes "fente" sont presque transverses électriques il existe une relation générale entre le coefficient de qualité propre  $Q_0$  des cavités-guides microfentes de la figure III-15 et le coefficient d'atténuation global  $\alpha_t = \alpha_c + \alpha_D$  (en Neper/m). Elle s'écrit\* :

$$Q_0 = \frac{N\psi}{v_g} \cdot \frac{\beta}{2\alpha_t} \quad \text{III-2-48}$$

Dans les lignes microfentes modélisées, cette relation est mise sous la forme particulière:

$$Q_0 = \pi \left[ \frac{1 + \epsilon_r \frac{Y}{X} \cdot \frac{dY}{dX}}{1 + \frac{Y}{X} \cdot \frac{dY}{dX}} \right] \cdot \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{D}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{\alpha_t D} \quad \text{III-2-49}$$

en vue de l'utilisation rationnelle des abaques des figures III-3 et III-9.

Sur une cavité guide microfente, les mesures successives de la fréquence de résonance, du coefficient de qualité en charge  $Q_L$  et du couplage à la ligne microruban conduisent en principe à la détermination de  $Q_0$  et par suite à celle de  $\alpha_t$  [59].

(\*) Les pertes métalliques dans les plaques de court-circuit sont ici négligées.



La reproductivité des mesures des fréquences de résonance et des coefficients de qualité en charge  $Q_L$  s'avère très satisfaisante. La présence d'importantes pertes par rayonnement rend délicate la mesure du couplage à la ligne microruban. Ces pertes incontrôlables, modifient sans cesse la relation entre  $Q_0$  et  $Q_L$  de sorte que l'estimation de  $\alpha_L$  devient très imprécise. Des écarts de l'ordre de 40 % peuvent être observés entre deux séries de mesures. Un exemple d'estimation est reproduit sur la figure III - 25. Il montre qu'une telle confrontation théorie expérience ne permet en rien de conclure quant à la qualité des prévisions théoriques issues de la modélisation elliptique.

### III - 3 LA MODÉLISATION ÉLLIPTIQUE AU SERVICE DE L'APPROCHE SPECTRALE

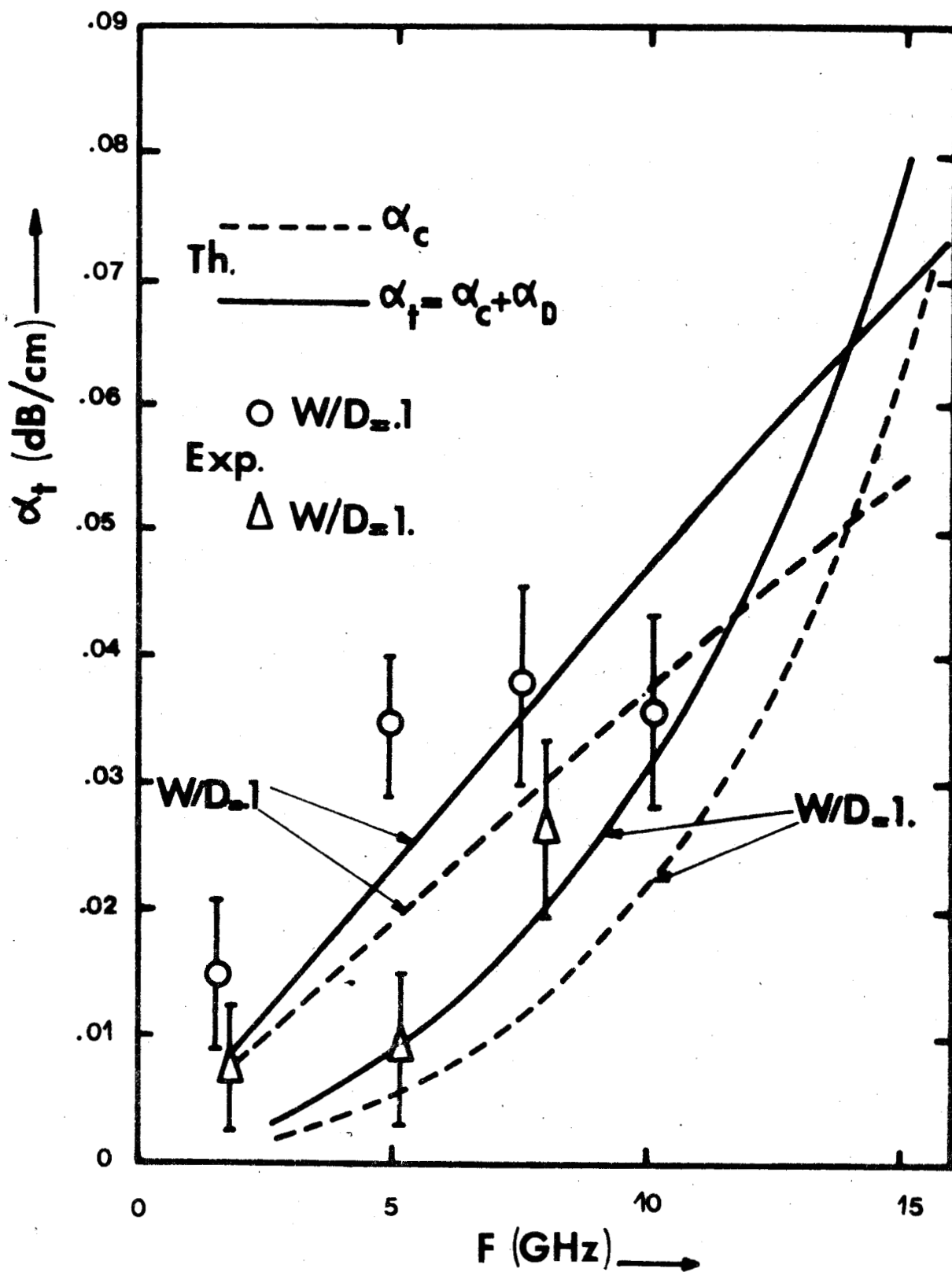
Les prévisions théoriques issues de la modélisation elliptique demeurent très approximatives même si l'expérimentation confirme quelques ordres de grandeurs et quelques évolutions. L'Approche Spectrale peut conduire à une résolution rigoureuse du traitement guide d'onde sur la ligne microfente simple mais à la condition de disposer d'une représentation suffisamment précise du champ électrique tangent au plan de la fente pour l'onde guidée. La modélisation elliptique fournit cette représentation. Ainsi, les composantes tangentielles du champ électrique dans le plan de la fente  $\xi=0 ; 0 \leq \eta \leq \pi$  pour l'onde guidée dans la ligne microfente dissymétrique modélisée s'expriment comme :

$$E_z(\eta, 0) = \sum'_{n \neq 0} B_n G e_n(0, \gamma_1^2) s e_n(\eta, \gamma_1^2) \quad \text{III-3-1}$$

$$E_\eta(\eta, 0) = \frac{2j}{\sin \eta \left(\frac{W}{D}\right)} \left\{ \mu_0 \frac{WD}{X_0^2} A_0 F e'_0(0, \gamma_1^2) c e_0(\eta, \gamma_1^2) \right.$$

$$\left. + \sum'_{n \neq 0} \frac{\beta_P D}{X_P^2} \left[ \mu_0 \frac{WD}{\beta_P D} A_n F e'_n(0, \gamma_1^2) c e_n(\eta, \gamma_1^2) - B_n G e_n(0, \gamma_1^2) s e'_n(\eta, \gamma_1^2) \right] \right\}$$

III-3-2



BUS  
LILLE

Fig. III-25 Ligne microfente modélisée dissymétrique. Estimation expérimentale des pertes diélectrique et métallique. Les mesures sont réalisées sur des lignes microfentes réelles.  $\epsilon_r = 9.6$  ;  $\text{tg} \delta = 5.10^{-4}$  ;  $\sigma_c = 5.8 \cdot 10^7 \text{ } \Omega/\text{m}$  ;  $D = 2 \text{ mm}$

où

$$\left. \begin{aligned} \beta_p D &= \left[ \frac{X_p^2 + \epsilon_r Y_p^2}{\epsilon_r - 1} \right]^{1/2} \\ \omega D &= \left[ \frac{X_p^2 + Y_p^2}{\mu_0 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1)} \right]^{1/2} \\ \gamma_n &= X_p (W/D) / 4 \end{aligned} \right\} p = 1, 2, 3, \dots$$

III-3-3

Les couples  $(X_p, Y_p)$  sont les caractéristiques de dispersion du mode  $(p)$  à une fréquence donnée  $\omega$ . Ils fixent toutes les constantes  $A_n$  et  $B_n$  dans les expressions III-1-1 et III-3-2 où l'index prime sur le signe somme signifie que la sommation s'effectue ou bien sur les entiers pairs ( $n = 2, 4, 6 \dots$ ) pour les modes pairs dans la symétrie miroir  $X' = 0$  ou bien alors sur les entiers impairs  $n = 1, 3, 5$  quand les modes sont impairs dans la symétrie miroir  $X' = 0$ . Le point de vue des méthodes de perturbations permet finalement d'écrire que :

$$E_z(x', 0) \approx E_z(\eta, 0)$$

III-3-4

$$E_{x'}(x', 0) \approx E_\eta(\eta, 0)$$

Compte tenu de la relation entre les variables  $\eta$  et  $X'$  qui s'expriment dans le plan  $y' = 0$  comme :

$$\eta = \arccos\left(\frac{2X'}{W}\right)$$

III-3-5

Les relations III-4 guident dans le choix "arbitraire" des fonctions de base  $E_{z,n}(x', 0)$  et  $E_{x',n}(x', 0)$  qui figurent dans les développements I-2-44. Ces fonctions de base sont identifiées à certaines fonctions simples de la variable  $X'$  dont l'évolution dans le plan de la fente  $-W/2 \leq X' \leq W/2$

correspond à celles des fonctions de la variable  $\eta$  définies comme :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_Z^{(n)} &\sim \operatorname{se}_n(\eta, \gamma_1^2) \\ \mathcal{E}_{X'}^{(n)} &\sim \left[ \operatorname{ce}_n(\eta, \gamma_1^2) - a \operatorname{se}'_n(\eta, \gamma_1^2) / \sin \eta \right] \end{aligned} \right\} m \neq 0$$

$$\mathcal{E}_{X'}^{(0)} \sim \operatorname{ce}_0(\eta, \gamma_1^2) / \sin \eta \quad m = 0$$

III-3-6

dans l'intervalle  $0 \leq \eta \leq \pi$ . Les paramètres  $a$  et  $\gamma_1^2$  dans III-3-6 interviennent essentiellement comme des paramètres d'ajustement éventuels. Autant que possible, le calcul des transformées de FOURIER des fonctions simples de la variable  $X'$  recherchées doit rester analytique.

La figure III-26 illustre la manière de construire des fonctions de base du type  $\mathcal{E}_Z^{(n)}(X', 0)$  à partir de la modélisation elliptique.

Appliquées aux quantités  $\mathcal{E}_{X'}^{(0)} \sim \operatorname{ce}_0(\eta, \gamma_1^2) / \sin \eta$  et  $\mathcal{E}_Z^{(2)}(\eta, \gamma_1^2)$  cette construction génère des fonctions de base  $\mathcal{E}_{X'}^{(0)}(X', 0)$  et  $\mathcal{E}_Z^{(2)}(X', 0)$  analogues à celles introduites au paragraphe I-2-2 d) pour décrire le champ électrique tangentiel du mode "fente". Il n'y a donc plus de doute à avoir sur la complémentarité des deux méthodes d'analyse.

Disposant de tous ces renseignements préalables l'Approche Spectrale\* dont les concepts sont exposés au paragraphe I-2-2 permet de compléter avec sûreté le spectre de mode de la ligne microfente dissymétrique.

### III - 3 - 1 Le premier mode supérieur de la ligne microfente de dissymétrie

La modélisation elliptique fournit par les fonctions  $\mathcal{E}_Z^{(1)}$  et  $\mathcal{E}_{X'}^{(1)}$  une représentation précise du champ électrique tangentiel du premier mode supérieur de la ligne microfente dissymétrique. Les fonctions de base retenues

(\* ) Les problèmes posés par la transcription numérique de cette méthode ne sont pas abordés ici. Ils sont détaillés dans le mémoire de Doctorat 3ème cycle de L. FAUCON consacré à la détermination des paramètres électromagnétiques des lignes microfentes simples et coplanaires. Ce paragraphe ainsi que les suivants reprennent la plupart des résultats originaux décrits dans ce mémoire. [60].

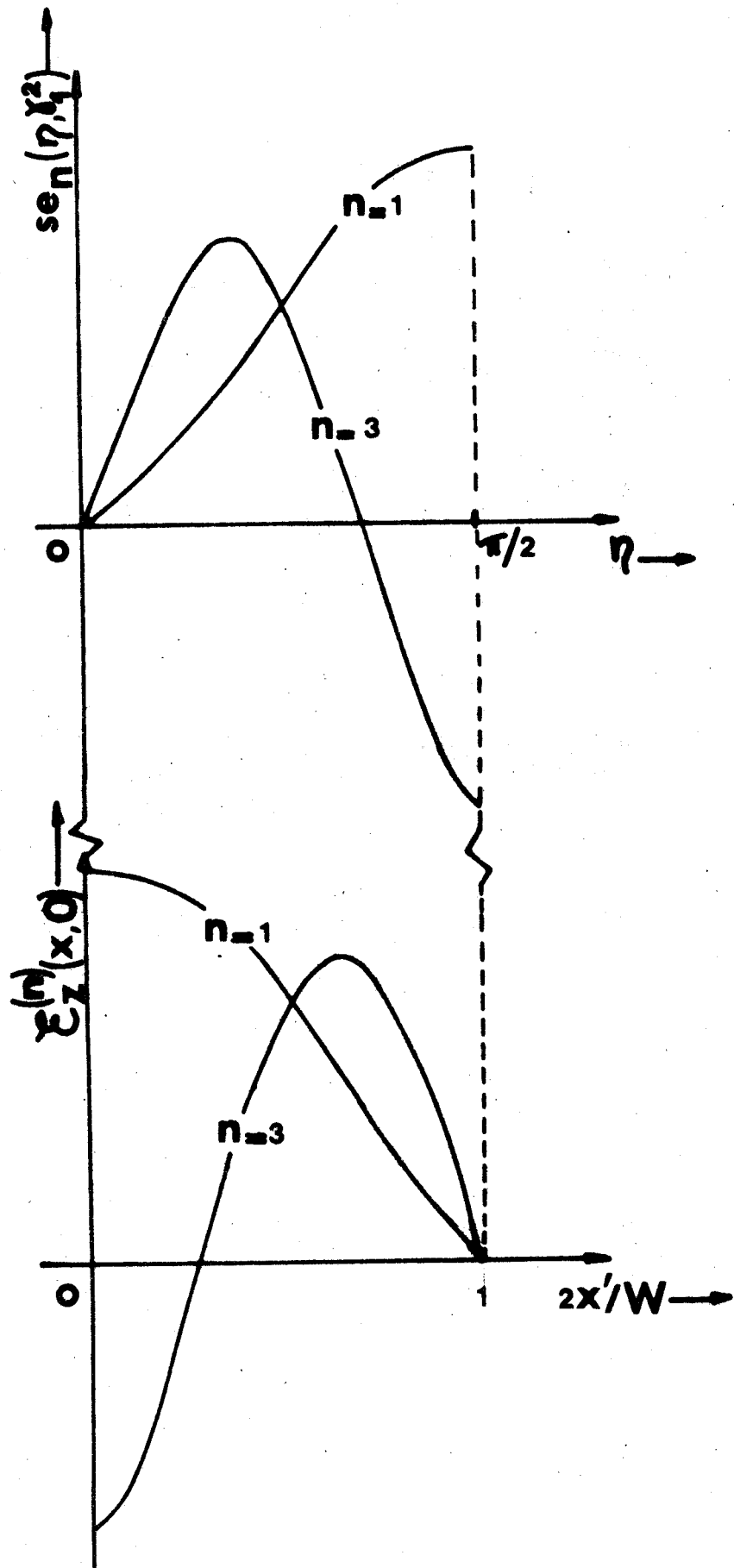


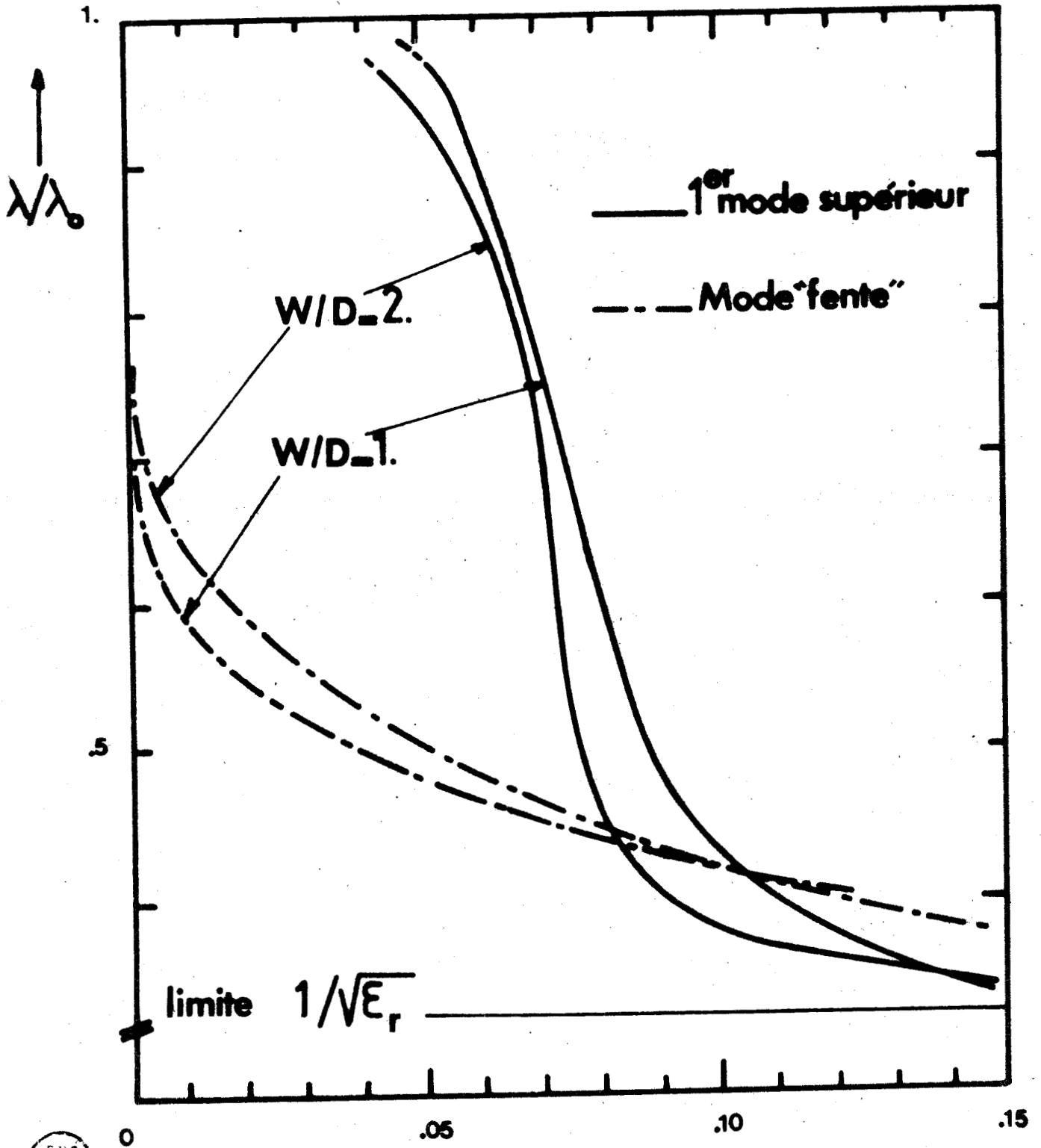
Fig. III-26 Assistance de la modélisation elliptique dans le choix des fonctions de base de l'Approche Spectrale

sont définies comme :

$$\begin{aligned}
 E_{z,1}(x',0) &= \begin{cases} \left[ \left( \frac{W}{2} \right)^2 - x'^2 \right]^{1/2} & \text{si } |x'| < W/2 \\ 0 & \text{si } |x'| \geq W/2 \end{cases} \\
 E_{x',1}(x,0) &= \begin{cases} j x' / \left[ \left( \frac{W}{2} \right)^2 - x'^2 \right]^{1/2} & \text{si } |x'| < W/2 \\ 0 & \text{si } |x'| \geq W/2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

III-3-7

Les calculs sont d'abord menés en supposant le champ électrique tangentiel réduit à une composante longitudinale  $E_z(x',0)$ . L'introduction d'une composante transversale  $E_{x'}(x',0)$  ne modifie pas sensiblement les résultats précédents. Cette stabilité que l'on observe à toutes les fréquences et l'observation d'une fréquence de coupure nulle sont autant d'indices de la validité des résultats numériques qui sont reproduits sur la figure III-27. En dépit de l'assistance de la modélisation elliptique, l'obtention des caractéristiques de dispersion du premier mode supérieur de la ligne micro-fente s'avère une entreprise fort délicate. Il faut savoir en effet que le choix des fonctions de base telles que les définissent les relations III-3-7 n'a pu être effectué qu'à l'issue de nombreux essais. Ainsi l'usage des polynômes de Tchebicheff  $U_n(2x'/W)$  et des fonctions trigonométriques  $\cos(n\pi x'/W)$  dans les représentations successives des composantes transversales et longitudinales du champ électrique tangentiel conduisent à des "convergences" qui se rélèlent très instables vis à vis de toute modification de la représentation initiale. Quand le nombre de fonctions de base est néanmoins suffisamment élevé pour entraîner une stabilité des résultats ces derniers deviennent difficilement interprétables vers les basses fréquences puisqu'ils décrivent un comportement "quasi T.E.M." pour ce mode supérieur! On retrouve finalement dans la mise en oeuvre numérique de l'Approche Spectrale toutes les anomalies introduites par une description mathématique incomplète du problème à résoudre [64]. Il est intéressant de confronter les prévisions théoriques sur les caractéristiques de dispersion du premier mode supérieur issues respectivement de l'Approche Spectrale et de la modélisation



BUS  
LILLE

Fig III-27 Approche Spectrale. Caractéristiques de dispersion des deux premiers modes de la ligne microfente dissymétrique réelle.  $\epsilon_r = 9.6$

élliptique en l'absence de correction au premier ordre. C'est le but de la figure III-28 qui fait apparaître, malgré un désaccord important sur les ordres de grandeurs, une similitude formelle dans les évolutions. On note par ailleurs sur cette figure III-28 que par rapport à la modélisation élliptique, l'Approche Spectrale réduit l'amplitude de variation du seuil de "guidabilité" en fonction du facteur de forme  $W/D$ . Lorsque  $W/D$  est fixé ce seuil de "guidabilité" varie considérablement en fonction de l'épaisseur  $D$  du substrat. Ainsi avec  $W/D = 1$  et  $\epsilon_r = 9.6$  il est de l'ordre de  $10 \text{ GHz}$  si  $D = 2 \text{ mm}$  alors qu'il atteint  $30 \text{ GHz}$  si  $D = .635 \text{ mm}$ . La gamme de fréquence de l'investigation expérimentale s'est avérée en conséquence trop réduite, pour déceler la présence d'une resonance de ce mode supérieur dans les cavités guides microfentes de la figure III-15.

### III - 3 - 2 Détermination précise des paramètres pratiques du mode "fente" dans la ligne microfente dissymétrique.

Dans la modélisation de S.B. COHN, les caractéristiques de dispersion du mode "fente" sont déduites d'une résolution très approximative du traitement guide d'onde. *L'Approche Spectrale fournit des résultats rigoureusement identiques !* Cet accord aussi remarquable qu'inattendu se retrouve sur l'impédance caractéristique  $Z_{c,u}$  comme on l'a déjà signalé sur la figure I-13. La figure III-29 décrit l'évolution fréquentielle de l'impédance caractéristique équivalente en courant  $Z_{c,x}$  définies comme en III-2-3. La mise en oeuvre de ce calcul, comme celui du coefficient atténuation dû aux pertes métalliques, nécessite un retour sur les composantes réelles du champ magnétique en tout point des faces inférieures et supérieures des demi-plans conducteurs. La figure III-30 montre comment l'Approche Spectrale s'affranchit numériquement de la présence de discontinuité sur les composantes  $H_x(x',0)$  et  $H_y(x',0)$  sur les bords minces de la fente. Par cette aptitude à fournir rigoureusement les composantes des champs modaux l'Approche Spectrale juge sans appel la qualité prévisions théoriques issues des modélisations. En ce qui concerne la modélisation élliptique, l'accord sur les formes est souvent satisfaisant mais celui sur les ordres de grandeurs s'avère trop localisé pour éviter des écarts importants sur les diverses estimations. Comme le montre la figure III-31 la modélisation de S.B. COHN souffre des mêmes défauts. La modélisation élliptique apparaît réaliste dans l'estimation des pertes diélectriques ainsi que dans celle de l'impédance caractéristique en tension



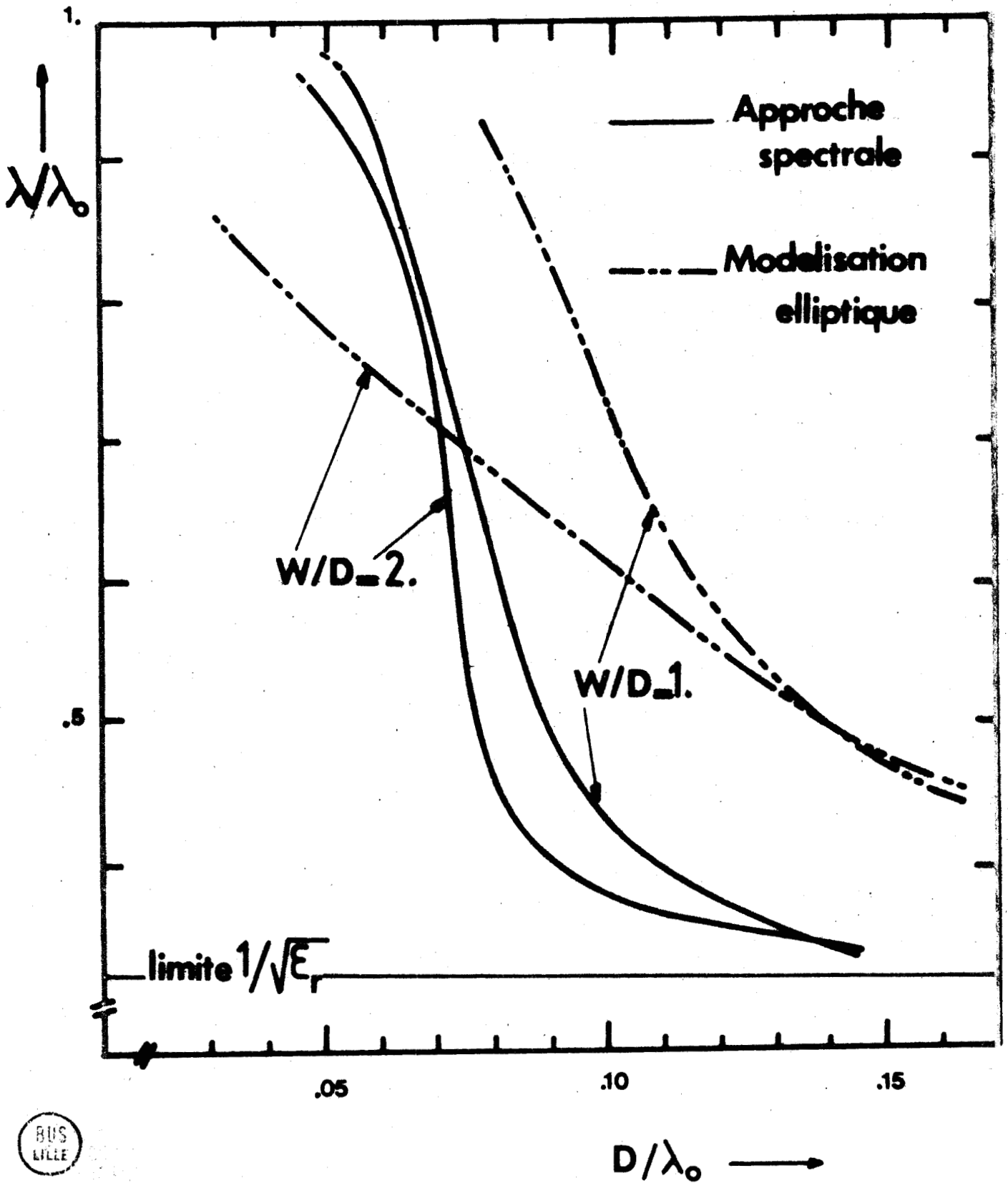


Fig. III-28 Caractéristiques de dispersion du 1er mode supérieur dans la ligne microfente dissymétrique.  $\epsilon_r = 9.6$

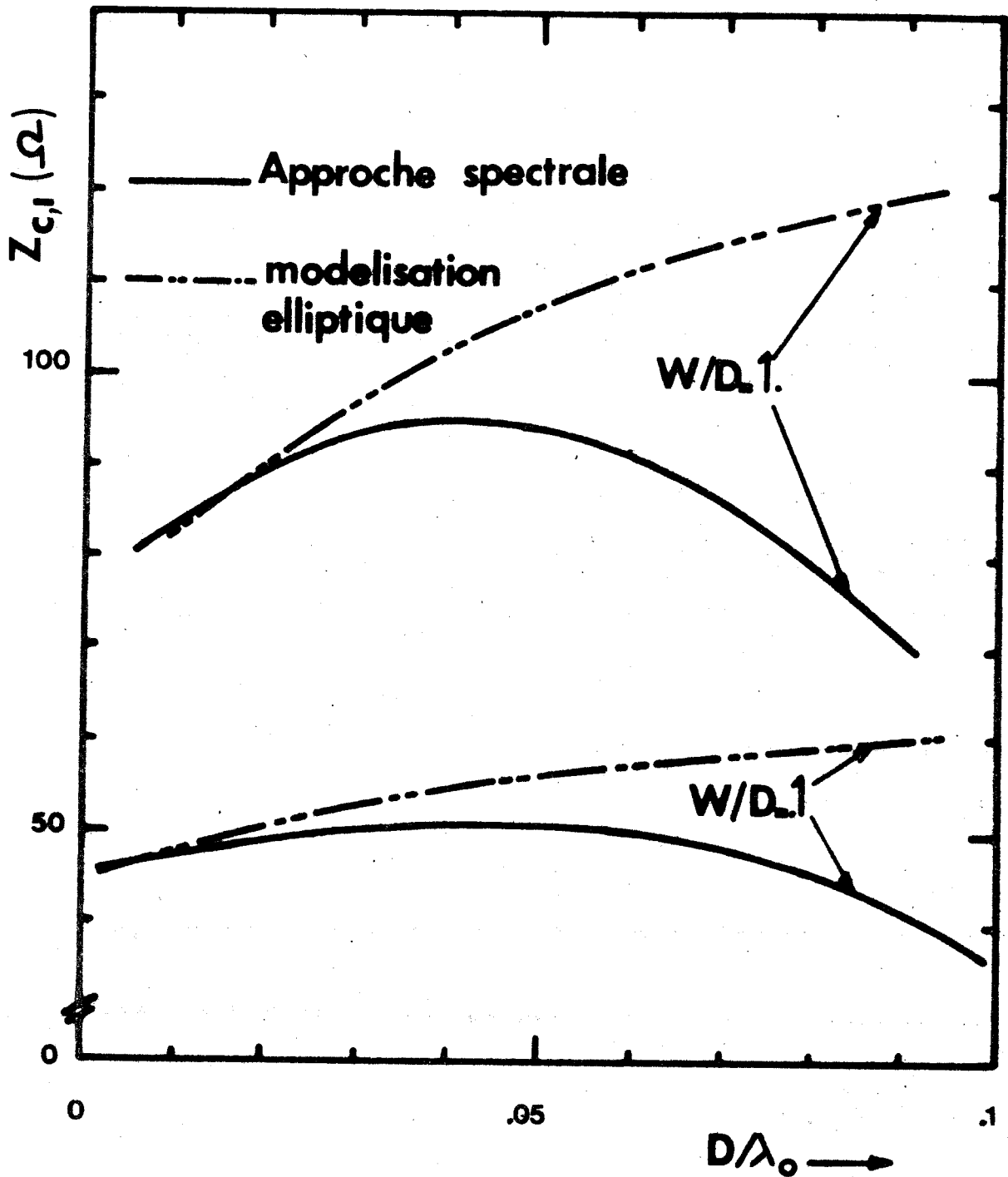


Fig. III-29 Ligne microfente dissymétrique. Impédance caractéristique équivalente en courant. Comparaison entre l'approche spectrale et la modélisation elliptique.  $\epsilon_r = 9.6$ .

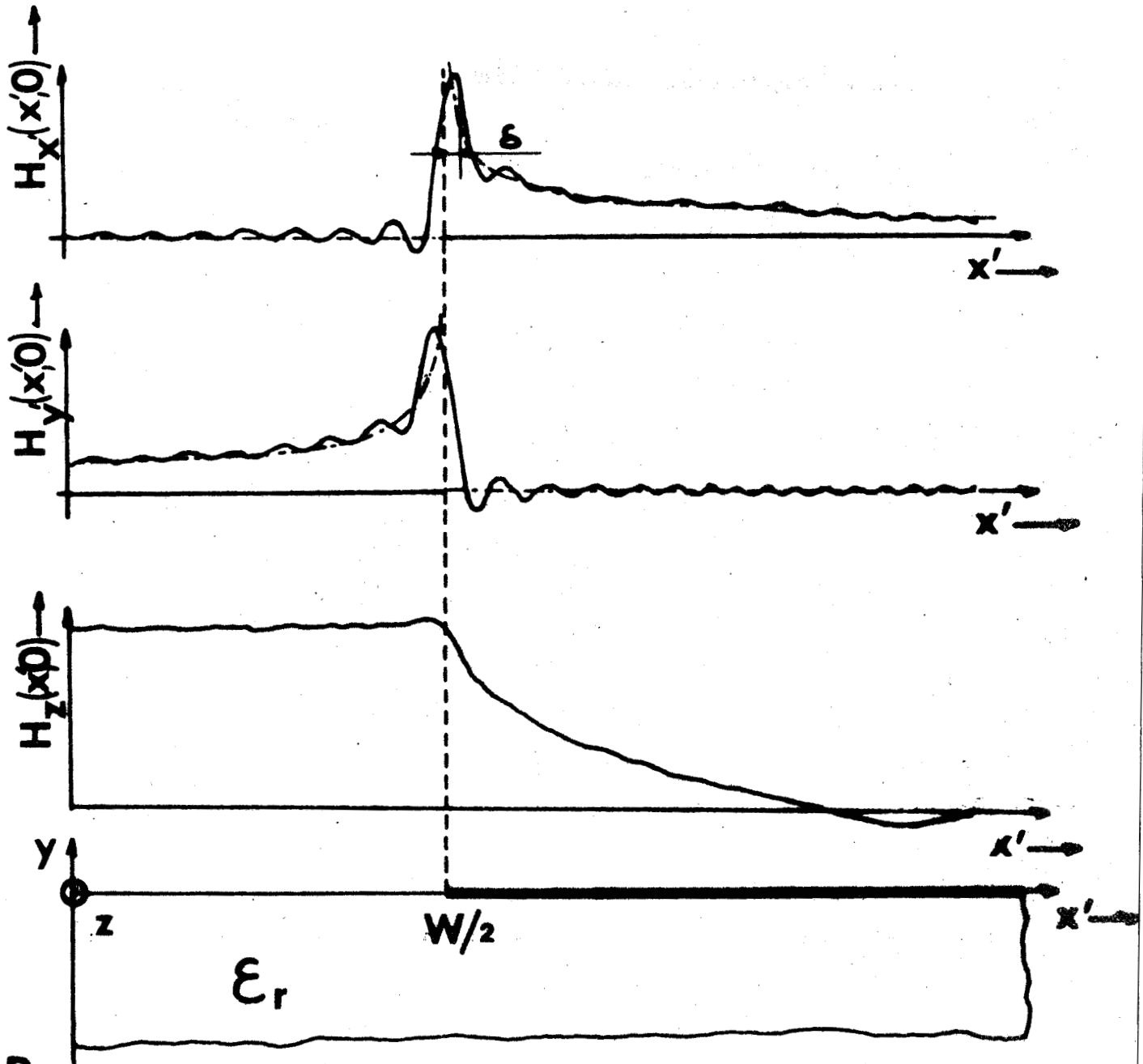


Fig. III-30 Approche Spectrale. Composantes du champ magnétique du mode fente sur l'interface  $y' = 0$ .  $W = 1 \text{ mm}$  ;  $D = 1 \text{ mm}$  ;  $\epsilon_r = 9.6$  ;  $F = 20 \text{ GHz}$

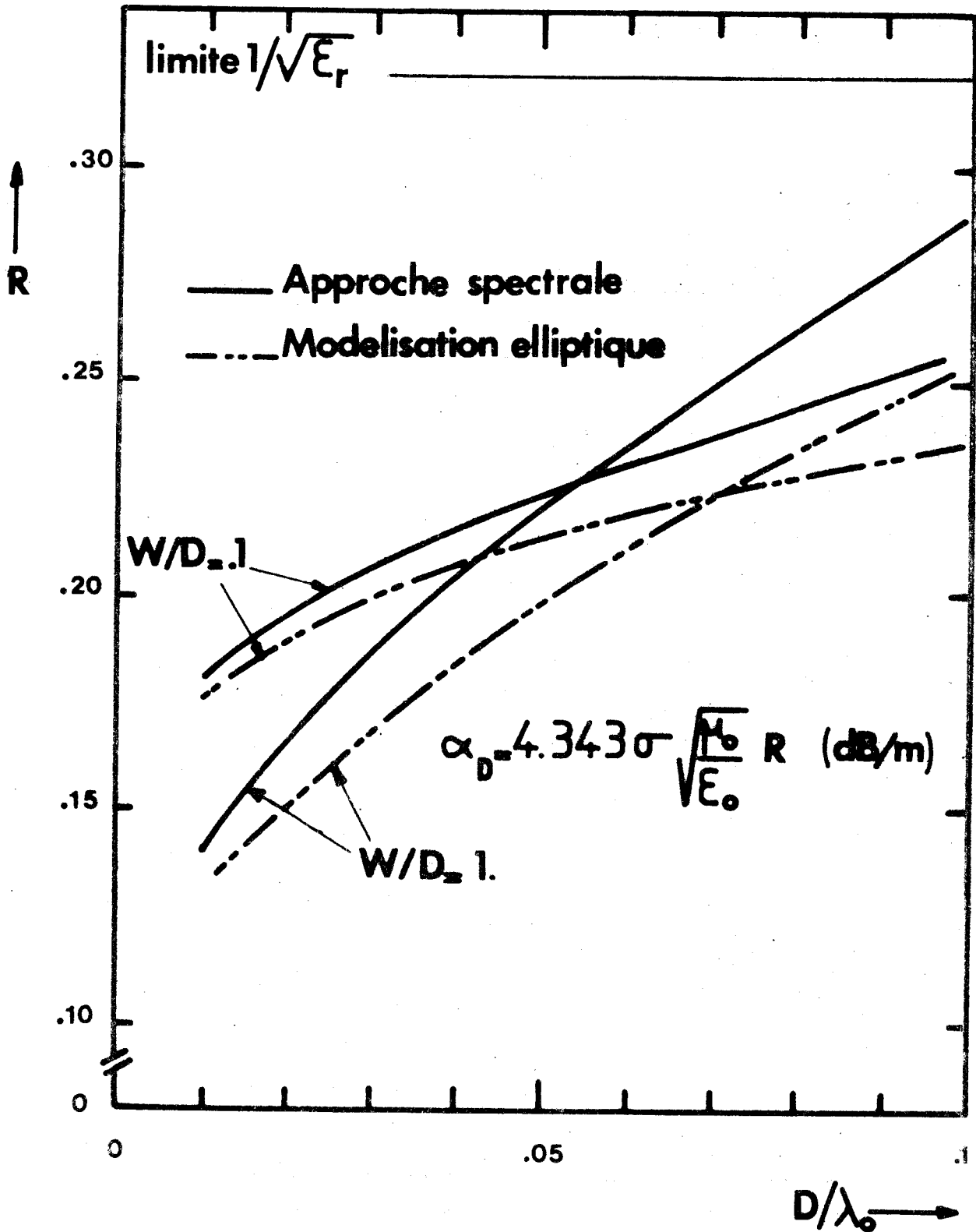


Fig. III-32 Ligne microfente dissymétrique. Estimation des pertes dans les matériaux diélectriques. Comparaison entre l'approche spectrale et la modélisation elliptique  $\epsilon_r = 9.6$ .

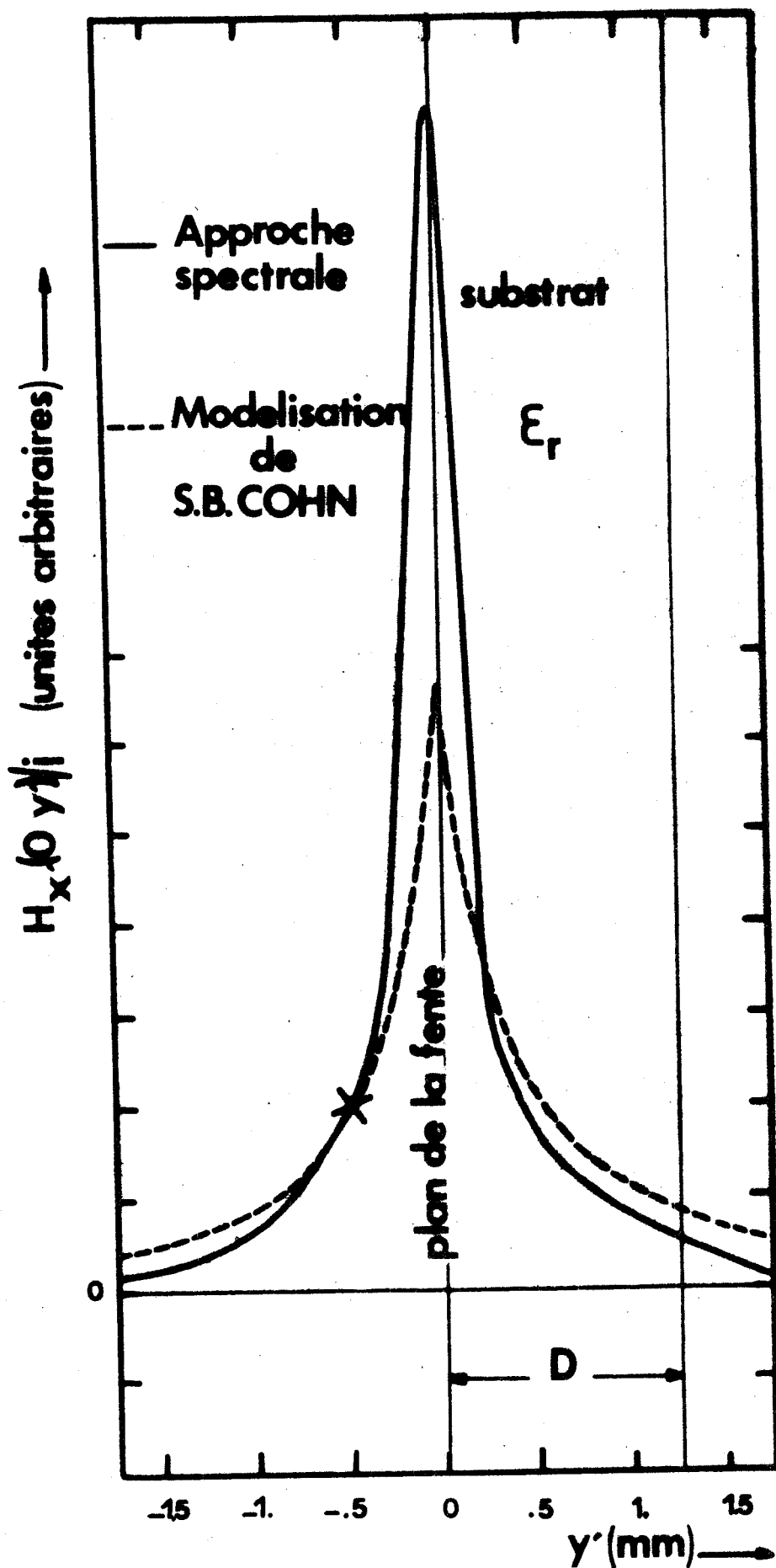


Fig. III-31 Composante  $H_x$  du champ magnétique du mode "fente" d'une ligne microfente dissymétrique. Comparaison entre l'Approche Spectrale de la modélisation de S.B. COHN. (Le signe X indique le point de référence)  
 $\epsilon_r = 16$  ;  $w = 0.5$  mm ;  $D = 1.27$  mm ;  $F = 10$  GHz .

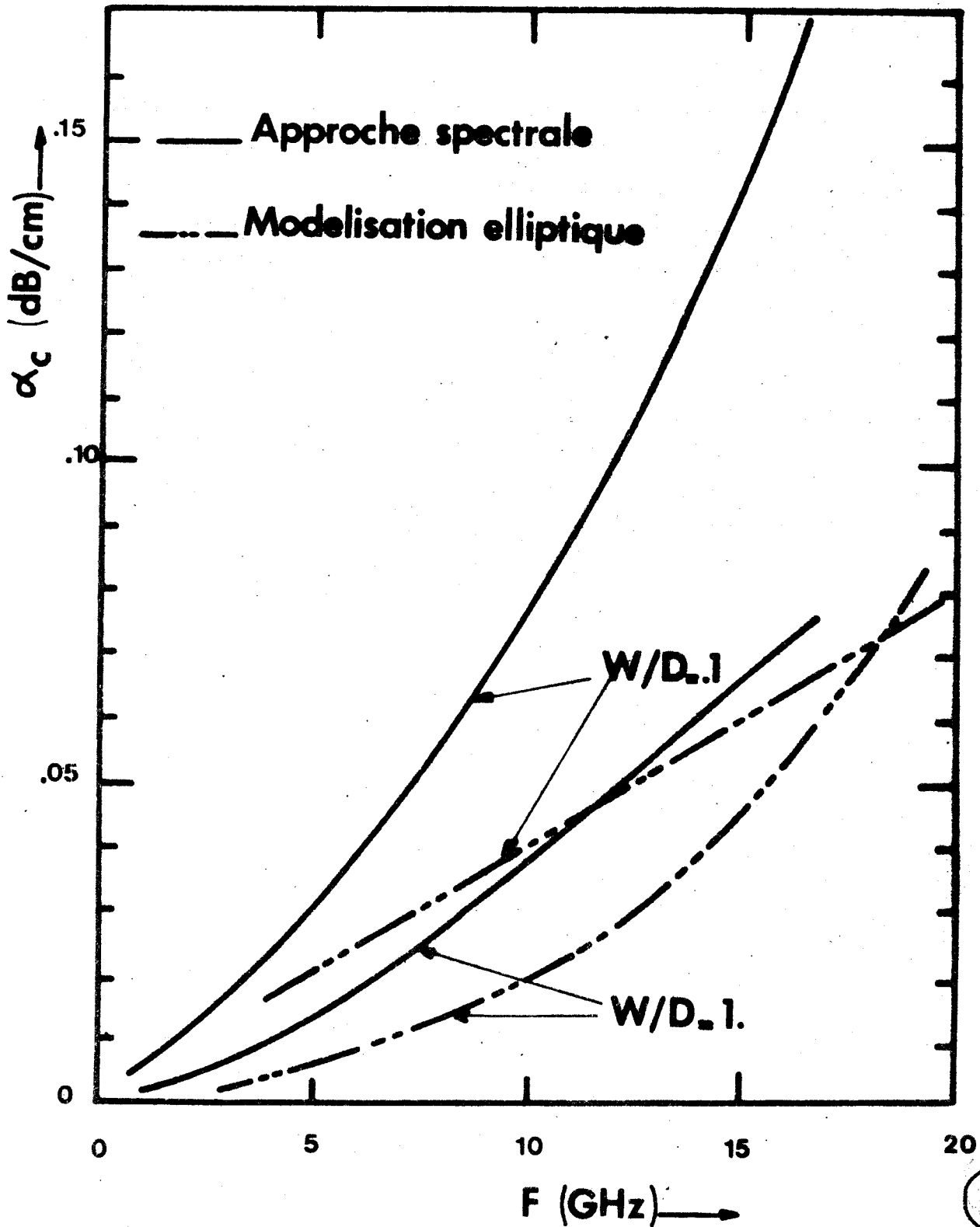


Fig. III-33 Ligne microfente dissymétrique. Estimation des pertes dans les matériaux conducteurs. Comparaison entre l'Approche Spectrale et la modélisation elliptique.  $\epsilon_r = 9.6$  ;  $\sigma_c = 5.8 \cdot 10^7 \text{ } \Omega/\text{m}$  ;  $D = 1.58 \text{ mm}$ .

(figure III-32). Elle l'est beaucoup moins aussi bien dans l'estimation de l'impédance caractéristique en courant  $Z_{c,z}$  (figure III-29) que dans celle des pertes métalliques  $\alpha_c$  (figure III-33).

### III - 3 - 3 Conclusions

Face à l'Approche Spectrale généralisée à l'étude des modes supérieurs d'une part et au retour sur les composantes réelles des champs modaux la modélisation elliptique révèlent ses insuffisances. Il ne faut toutefois pas minimiser son rôle dans l'extension des possibilités numériques de l'Approche Spectrale sur la ligne microfente. Ainsi, la représentation du champ électrique tangent au plan de la fente pour l'onde guidée déduite du modèle elliptique permet de compléter le spectre de mode. Par cette aptitude à décrire même approximativement les champs modaux elle rend possible l'optimisation des conditions numériques dans la mise en oeuvre de la Transformation de FOURIER inverse qui reconstruit exactement ces champs modaux. Ainsi complétée, l'Approche Spectrale apporte un jugement de valeur sur les prévisions théoriques issues de la modélisation elliptique.

## CONCLUSION

L'objet du travail était de bâtir une nouvelle modélisation analytique du traitement électromagnétique des lignes microfentes. Le but ultime recherché, était d'expérimenter cette solution approximative comme une première approche d'une solution numérique rigoureuse.

Le point de vue général des méthodes de perturbations a conduit à la définition de modèles élliptiques dont le spectre était susceptible de présenter beaucoup de points communs avec celui des structures microfentes réelles étudiées.

Il a donc fallu aborder la résolution analytique des modèles en recherchant constamment à demeurer à un niveau de complexité intermédiaire pour ne pas risquer de compromettre l'efficacité de la description proposée.

Ceci n'a pu être accompli qu'au terme d'une résolution complète du traitement électromagnétique du guide diélectrique élliptique. Cette étude a nécessiter l'élaboration d'une bibliothèque de fonctions mathématiques qui regroupe tous les harmoniques élliptiques et certaines de leurs formes asymptotiques dont la plupart sont encore inédites. Le traitement du guide diélectrique élliptique est d'une grande complexité dès lors qu'une approche globale du spectre doit être entreprise. Celle-ci est fortement atténuée quand une approche mode par mode est possible et cela se produit dans le domaine spectral basse fréquence.

La modélisation élliptique s'est appliquée aux tous premiers modes des lignes microfentes dans le cadre de cette approximation. On a établi analytiquement que la structure microfente symétrique propageait trois modes à fréquence de coupure nulle alors que la structure dissymétrique n'en propageait que deux.

Disposant d'une description analytique simplifiée du domaine basse fréquence du spectre des structures microfentes modélisées, on a envisagé sur les modes "fente" fondamentaux le passage aux structures réelles par un traitement de perturbation limité au premier ordre. Les caractéristiques de dispersion des modes "fente" obtenues à l'issue de ce passage, se sont avérées proches de celles déduites de la modélisation analytique de S.B. COHN.



L'identification a eu lieu quand les modes "fente" se sont situés en fréquence relativement loin de leur coupure. Ceci a pu être vérifié expérimentalement sur les lignes microfentes dissymétriques.

La connaissance de toutes les fonctions de mode et en particulier de celles du mode "fente" a autorisé une estimation des paramètres pratiques tels que les coefficients d'atténuation dus aux pertes métalliques et diélectriques. L'absence totale d'éléments de comparaison a nécessairement conduit à l'expérimentation qui a confirmé tout au plus les ordres de grandeurs sans pouvoir amener un jugement de valeur sur la qualité des estimations.

Ce jugement de valeur on l'a obtenu en définitive à l'aide de l'Approche Spectrale dont on a accru les possibilités numériques à l'étude des modes supérieurs et au retour sur les composantes réelles des champs modaux. Cette extension de l'Approche Spectrale a pu être envisagée et menée à terme grâce précisément à l'assistance de la modélisation elliptique. Dès lors, une investigation plus fine sur les composantes des champs du mode "fente" a montré que l'accord sur les "formes" était souvent satisfaisant mais que celui sur les ordres de grandeurs était trop localisé pour éviter des écarts parfois très importants sur les estimations des paramètres pratiques.

Sur les modes "fente", la modélisation elliptique est apparue finalement assez réaliste dans les estimations des caractéristiques de dispersion, des impédances caractéristiques équivalentes en tension et des pertes diélectriques. Les estimations des impédances caractéristiques équivalentes en courant et des pertes métalliques se sont avérées relativement éloignées des valeurs réelles fournies par l'Approche Spectrale.

Ce travail par ses trois aspects, modélisation analytique, expérimentation et résolution numérique rigoureuse apporte une contribution originale à l'étude des propriétés électromagnétiques des lignes microfentes. Replacé dans le cadre plus vaste de l'étude des guides planaires en général, il met en relief le domaine d'application souvent très restreint d'une modélisation.

## ANNEXE I

Calcul des  
Fonctions de MATHIEU d'ordre entier.

## I - 1 FONCTIONS DE MATHIEU ANGULAIRES [45]

Ces fonctions sont solutions de l'équation différentielles du second ordre dite "de MATHIEU" :

$$\frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} + (c^2 - 2\gamma^2 \cos 2\eta) \Theta = 0 \quad \text{I-1}$$

dans laquelle :

- .  $\gamma^2$  est une constante qui peut être positive ou négative
- .  $c^2 = c^2(\gamma^2)$  est la constante de séparation qui est encore appelée *nombre caractéristique*

Les solutions périodiques de l'équation I-1 peuvent s'exprimer en série de fonctions trigonométriques comme il suit :

$$\Theta = ce_{2n}(\eta, \gamma^2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}(\gamma^2) \cos 2r\eta \quad \text{I-2}$$

$$\Theta = ce_{2n+1}(\eta, \gamma^2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)}(\gamma^2) \cos(2r+1)\eta \quad \text{I-3}$$

$$\Theta = se_{2n+1}(\eta, \gamma^2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)}(\gamma^2) \sin(2r+1)\eta \quad \text{I-4}$$

$$\Theta = se_{2n+2}(\eta, \gamma^2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)}(\gamma^2) \sin(2r+2)\eta \quad \text{I-5}$$

pour  $\gamma^2 > 0$  et comme il suit :

$$\Theta^* = ce_{2n}^*(\eta, \gamma^2) = (-1)^n ce_{2n}(\pi/2 - \eta, |\gamma^2|) \quad \text{I-6}$$

$$\Theta^* = ce_{2n+1}^*(\eta, \gamma^2) = (-1)^n se_{2n+1}(\pi/2 - \eta, |\gamma^2|) \quad \text{I-7}$$



$$\Theta^* = se_{2n+1}^*(\eta, \gamma^2) = (-1)^n ce_{2n+1}(\pi/2 - \eta, |\gamma^2|) \quad \text{I-8}$$

$$\Theta^* = se_{2n+2}^*(\eta, \gamma^2) = (-1)^n se_{2n+2}(\pi/2 - \eta, |\gamma^2|) \quad \text{I-9}$$

pour  $\gamma^2 < 0$ .

## I - 2 FONCTIONS DE MATHIEU RADIALES [45]

Ces fonctions sont solution de l'équation différentielle dite "de MATHIEU modifiée":

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} - (c^2 - 2\gamma^2 \operatorname{ch} 2\xi) R = 0 \quad \text{I-10}$$

les solutions stables de I-10. qui correspondent aux solutions périodiques de I-1 sont exprimées sous la forme de séries de produits de fonctions de BESSEL d'ordre entier [62] telles que :

pour  $\gamma^2 \geq 0$ ,

$$ce_{2n}(\xi, \gamma^2) = \frac{P_{2n}(\gamma^2)}{A_0^{(2n)}(\gamma^2)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)}(\gamma^2) J_r(\mu) J_r(\mu) \quad \text{I-11}$$

$$ce_{2n+1}(\xi, \gamma^2) = \frac{P_{2n+1}(\gamma^2)}{A_1^{(2n+1)}(\gamma^2)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)}(\gamma^2) \left[ J_r(\mu) \cdot J_{r+1}(\mu) + J_{r+1}(\mu) \cdot J_r(\mu) \right] \quad \text{I-12}$$

$$se_{2n+2}(\xi, \gamma^2) = -\frac{S_{2n+2}(\gamma^2)}{B_2^{(2n+2)}(\gamma^2)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{(2n+2)}(\gamma^2) \left[ J_r(\mu) J_{r+2}(\mu) - J_{r+2}(\mu) J_r(\mu) \right] \quad \text{I-13}$$

$$se_{2n+1}(\xi, \gamma^2) = \frac{S_{2n+1}(\gamma^2)}{B_1^{(2n+1)}(\gamma^2)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)}(\gamma^2) \left[ J_r(\mu) \cdot J_{r+1}(\mu) - J_{r+1}(\mu) J_r(\mu) \right] \quad \text{I-14}$$

$$fe_{2n}(\xi, \gamma^2) = \frac{P_{2n}(\gamma^2)}{A_0^{(2n)}(\gamma^2)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)}(\gamma^2) J_r(\mu) Y_r(\mu) \quad \text{I-15}$$

$$Fey_{2n+1}(\xi, \gamma^2) = \frac{P_{2n+1}(\gamma^2)}{A_1^{(2n+1)}(\gamma^2)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)}(\gamma^2) \left[ J_r(\mu) Y_{r+1}(\nu) + J_{r+1}(\mu) Y_r(\nu) \right] \quad \text{I-16}$$

$$Gey_{2n+2}(\xi, \gamma^2) = -\frac{S_{2n+2}(\gamma^2)}{B_2^{(2n+2)}(\gamma^2)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+2}^{(2n+2)}(\gamma^2) \left[ J_r(\mu) Y_{r+2}(\nu) - J_{r+2}(\mu) Y_r(\nu) \right] \quad \text{I-17}$$

$$Gey_{2n+1}(\xi, \gamma^2) = \frac{S_{2n+1}(\gamma^2)}{B_1^{(2n+1)}(\gamma^2)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)}(\gamma^2) \left[ J_r(\mu) Y_{r+1}(\nu) - J_{r+1}(\mu) Y_r(\nu) \right] \quad \text{I-18}$$

$$Fe_{2n}(\xi, \gamma^2) = Ce_{2n}(\xi, \gamma^2) - \frac{Ce_{2n}(0, \gamma^2)}{Fey_{2n}(0, \gamma^2)} \cdot Fey_{2n}(\xi, \gamma^2) \quad \text{I-19}$$

$$Fe_{2n+1}(\xi, \gamma^2) = Ce_{2n+1}(\xi, \gamma^2) - \frac{Ce_{2n+1}(0, \gamma^2)}{Fey_{2n+1}(0, \gamma^2)} \cdot Fey_{2n+1}(\xi, \gamma^2) \quad \text{I-20}$$

$$Ge_{2n+2}(\xi, \gamma^2) = Se_{2n+2}(\xi, \gamma^2) - \frac{Se_{2n+2}'(0, \gamma^2)}{Gay_{2n+2}'(0, \gamma^2)} \cdot Gey_{2n+2}(\xi, \gamma^2) \quad \text{I-21}$$

$$Ge_{2n+1}(\xi, \gamma^2) = Se_{2n+1}(\xi, \gamma^2) - \frac{Se_{2n+1}'(0, \gamma^2)}{Gay_{2n+1}'(0, \gamma^2)} \cdot Gey_{2n+1}(\xi, \gamma^2) \quad \text{I-22}$$

et pour  $\gamma^2 < 0$ .

$$Fek_{2n}(\xi, \gamma^2) = \frac{(-1)^n P_{2n}(\gamma^2)}{\pi A_0^{(2n)}(\gamma^2)} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}(\gamma^2) I_r(\mu) K_r(\nu) \quad \text{I-23}$$

$$Fek_{2n+1}(\xi, \gamma^2) = \frac{(-1)^n S_{2n+1}(\gamma^2)}{\pi B_1^{(2n+1)}(\gamma^2)} \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)}(\gamma^2) \left[ I_r(\mu) K_{r+1}(\nu) - I_{r+1}(\mu) K_r(\nu) \right] \quad \text{I-24}$$

$$Gek_{2n+2} \left( \frac{\vartheta}{\gamma}, |\gamma^2| \right) = \frac{(-1)^{n+1} S_{2n+2}(|\gamma^2|)}{\pi B_2^{(2n+2)}(|\gamma^2|)} \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)}(|\gamma^2|) \left[ I_r(\mu) K_{r+2}(\vartheta) - I_{r+2}(\mu) K_r(\vartheta) \right] \quad \text{I-25}$$

$$Gek_{2n+1} \left( \frac{\vartheta}{\gamma}, |\gamma^2| \right) = \frac{(-1)^n P_{2n+1}(|\gamma^2|)}{\pi A_1^{(2n+1)}(|\gamma^2|)} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)}(|\gamma^2|) \left[ I_r(\mu) K_{r+1}(\vartheta) + I_{r+1}(\mu) K_r(\vartheta) \right] \quad \text{I-26}$$

avec  $\mu = \gamma e^{-\xi}$ ;  $\mu = \gamma e^{\xi}$  si  $\gamma^2 > 0$  I-27

ou alors  $\mu = |\gamma| e^{-\xi}$ ;  $\mu = |\gamma| e^{\xi}$  si  $\gamma^2 < 0$ . I-28

En outre, on a :

$$P_{2n} \left( \begin{matrix} \gamma^2 \\ |\gamma^2| \end{matrix} \right) = \frac{ce_{2n} \left( \begin{matrix} 0, \gamma^2 \\ 0, |\gamma^2| \end{matrix} \right) \cdot ce_{2n} \left( \begin{matrix} \pi/2, \gamma^2 \\ \pi/2, |\gamma^2| \end{matrix} \right)}{A_0^{(2n)}(\gamma^2)} \quad \text{I-29}$$

$$P_{2n+1} \left( \begin{matrix} \gamma^2 \\ |\gamma^2| \end{matrix} \right) = - \frac{ce_{2n+1} \left( \begin{matrix} 0, \gamma^2 \\ 0, |\gamma^2| \end{matrix} \right) \cdot ce'_{2n+1} \left( \begin{matrix} \pi/2, \gamma^2 \\ \pi/2, |\gamma^2| \end{matrix} \right)}{\left( \frac{\gamma}{\sqrt{|\gamma^2|}} \right) A_1^{(2n+1)}(\gamma^2)} \quad \text{I-30}$$

$$S_{2n+1} \left( \begin{matrix} \gamma^2 \\ |\gamma^2| \end{matrix} \right) = \frac{se'_{2n+1} \left( \begin{matrix} 0, \gamma^2 \\ 0, |\gamma^2| \end{matrix} \right) \cdot se_{2n+1} \left( \begin{matrix} \pi/2, \gamma^2 \\ \pi/2, |\gamma^2| \end{matrix} \right)}{\left( \frac{\gamma}{\sqrt{|\gamma^2|}} \right) B_1^{(2n+1)}(\gamma^2)} \quad \text{I-31}$$

$$S_{2n+2} \left( \begin{matrix} \gamma^2 \\ |\gamma^2| \end{matrix} \right) = \frac{se'_{2n+2} \left( \begin{matrix} 0, \gamma^2 \\ 0, |\gamma^2| \end{matrix} \right) \cdot se'_{2n+2} \left( \begin{matrix} \pi/2, \gamma^2 \\ \pi/2, |\gamma^2| \end{matrix} \right)}{\left( \frac{\gamma^2}{|\gamma^2|} \right) B_2^{(2n+2)}(\gamma^2)} \quad \text{I-32}$$

La notation  $\left( \begin{matrix} \phantom{\gamma^2} \\ \phantom{|\gamma^2|} \end{matrix} \right)$  indique le choix à opérer suivant le signe de  $\gamma^2$ .

Quand les arguments des fonctions de BESSEL ne sont pas trop grands, elles sont générées à partir des développements en série suivants :

$$\left\{ \begin{aligned} J_0(\mu) &= 1 - \frac{1}{4} \mu^2 + \frac{\left(\frac{1}{4} \mu^2\right)^2}{(2!)^2} - \frac{\left(\frac{1}{4} \mu^2\right)^3}{(3!)^2} + \dots \end{aligned} \right. \quad \text{I-33}$$

$$\left\{ \begin{aligned} J_n(\mu) &= \left(\frac{1}{2} \mu\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4} \mu^2\right)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \quad ; (n > 0) \end{aligned} \right. \quad \text{I-34}$$

où

$$\Gamma(n+k+1) = (n+k)! \quad \text{I-35}$$

$$\left\{ \begin{aligned} Y_0(\mu) &= \frac{2}{\pi} \left\{ \text{Log}\left(\frac{1}{2} \mu\right) + \gamma \right\} J_0(\mu) + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\frac{1}{4} \mu^2}{(1!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. \frac{\left(\frac{1}{4} \mu^2\right)^2}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{\left(\frac{1}{4} \mu^2\right)^3}{(3!)^2} - \dots \right\} \end{aligned} \right. \quad \text{I-36}$$

$$\left\{ \begin{aligned} Y_n(\mu) &= -\frac{\left(\frac{1}{2} \mu\right)^{-n}}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{1}{4} \mu^2\right)^k + \frac{2}{\pi} \text{Log}\left(\frac{1}{2} \mu\right) J_n(\mu) \end{aligned} \right.$$

$$-\frac{\left(\frac{1}{2} \mu\right)^n}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Psi(k+1) + \Psi(n+k+1) \right\} \frac{\left(-\frac{1}{4} \mu^2\right)^k}{k! (n+k)!} \quad (n > 0) \quad \text{I-37}$$

avec

$$\Psi(N) = -\gamma + \sum_{k=1}^{N-1} k^{-1} \quad \text{I-38}$$

$\gamma = .5772$  (Constante d'Euler)

$$\left\{ \begin{aligned} I_0(\mu) &= 1 + \frac{1}{4} \mu^2 + \frac{\left(\frac{1}{4} \mu^2\right)^2}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{4} \mu^2\right)^3}{(3!)^2} + \dots \end{aligned} \right. \quad \text{I-39}$$

$$\left\{ I_n(\nu) = \left(\frac{1}{2}\nu\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\nu^2\right)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \quad (n > 0) \right.$$

I-40

$$\left\{ K_0(\nu) = -\left\{ \text{Log}\left(\frac{1}{2}\nu\right) + \gamma \right\} I_0(\nu) + \frac{1}{4}\nu^2 \frac{1}{(1!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{1}{4}\nu^2\right)^2}{(2!)^2} + \right.$$

$$\left. \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{\left(\frac{1}{4}\nu^2\right)^3}{(3!)^2} + \dots \right.$$

I-41

$$\left\{ K_n(\nu) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\nu\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(-\frac{1}{4}\nu^2\right)^k + (-1)^{n+1} \text{Log}\left(\frac{1}{2}\nu\right) I_n(\nu) \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\nu\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Psi(k+1) + \Psi(n+k+1) \right\} \frac{\left(\frac{1}{4}\nu^2\right)^k}{k!(n+k)!} \quad (n > 0) \right.$$

I-42

Par contre pour les grands arguments elles sont générées à partir des formes limites :

$$J_n(\mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi\mu}} \left\{ P(n, \mu) \cos \chi - Q(n, \mu) \sin \chi \right\} \quad \text{I-43}$$

$$Y_n(\nu) = \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \left\{ P(n, \nu) \cos \chi + Q(n, \nu) \sin \chi \right\} \quad \text{I-44}$$

avec si l'on note  $\mathcal{X}$  la variable  $\mu$  ou la variable  $\nu$  :

$$\chi = \mathcal{X} - \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}\right)\pi ; \mu = 4n^2 \quad \text{I-45}$$

$$P(n, x) = 1 - \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2! (8x)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)}{4! (8x)^4} \quad \text{I-46}$$

$$Q(n, x) = \frac{\mu-1}{8x} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3! (8x)^3} + \dots \quad \text{I-47}$$

Par ailleurs on a :

$$I_n(\mu) = \frac{e^\mu}{\sqrt{2\pi\mu}} \left\{ 1 - \frac{\mu-1}{8\mu} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2! (8\mu)^2} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3! (8\mu)^3} + \dots \right\} \quad \text{I-48}$$

et

$$K_n(\mu) = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}} e^{-\mu} \left\{ \frac{\mu-1}{8\mu} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2! (8\mu)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3! (8\mu)^3} + \dots \right\} \quad \text{I-49}$$

I - 3 CALCULS DES COEFFICIENTS DE FOURIER  $A_{2r+p}^{(2n+p)}(\gamma^2)$  ( $p=0,1$ ) ET  $B_{2r+s}^{(2n+s)}(\gamma^2)$  ( $s=1,2$ ) [48].

On traite seulement l'exemple du calcul des coefficients de Fourier  $A_{2r}^{(2n)}(\gamma^2)$  qui interviennent dans la fonction  $\Theta = c e_{2n}(\eta, \gamma^2)$ . Les calculs des autres coefficients de Fourier  $A_{2r+1}^{(2n+1)}(\gamma^2)$ ,  $B_{2r+1}^{(2n+1)}(\gamma^2)$  et  $B_{2r+2}^{(2n+2)}(\gamma^2)$  sont similaires.

La substitution de la série infinie I-2 dans l'équation différentielle I-1 conduit aux relations de récurrence suivantes :

$$a_{2n}(\gamma^2) A_0^{(2n)}(\gamma^2) - \gamma^2 A_2^{(2n)}(\gamma^2) = 0 \quad ; \quad r=0$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$



$$\begin{aligned} & \left[ a_{2n}(\gamma^2) - 4 \right] A_2^{(2n)}(\gamma^2) - \gamma^2 \left[ A_4^{(2n)}(\gamma^2) + 2A_0^{(2n)}(\gamma^2) \right] = 0 ; r=1 \\ & \vdots \\ & \left[ a_{2n}(\gamma^2) - (2r)^2 \right] A_{2r}^{(2n)}(\gamma^2) - \gamma^2 \left[ A_{2r+2}^{(2n)}(\gamma^2) + A_{2r-2}^{(2n)}(\gamma^2) \right] = 0 ; r \geq 2 \\ & \text{ou } a_{2n}(\gamma^2) = c^2(\gamma^2). \end{aligned}$$

I-50

En posant alors :

$$G_0^{(2n)}(\gamma^2) = A_2^{(2n)}(\gamma^2) / A_0^{(2n)}(\gamma^2)$$

$$G_2^{(2n)}(\gamma^2) = A_4^{(2n)}(\gamma^2) / A_2^{(2n)}(\gamma^2)$$

$$\vdots$$

$$G_{2r}^{(2n)}(\gamma^2) = A_{2r+2}^{(2n)}(\gamma^2) / A_{2r}^{(2n)}(\gamma^2)$$

I-51

Les relations de récurrence précédentes I-50 prennent la forme :

$$G_0^{(2n)}(\gamma^2) = \frac{2}{\left[ a_{2n}(\gamma^2) - 4 \right] / \gamma^2 - G_2^{(2n)}(\gamma^2)}$$

$$G_2^{(2n)}(\gamma^2) = \frac{1}{\left[ a_{2n}(\gamma^2) - 16 \right] / \gamma^2 - G_4^{(2n)}(\gamma^2)}$$

$$\vdots$$

$$G_{2r}^{(2n)}(\gamma^2) = \frac{1}{\left[ a_{2n}(\gamma^2) - (2r+2)^2 \right] / \gamma^2 - G_{2r+2}^{(2n)}(\gamma^2)}$$

I-52

où l'on remarque  $c^2(\gamma^2) = a_{2n}(\gamma^2)$  est la  $(n+1)^{\text{ième}}$  racine de l'équation :

$$G_0^{(2n)}(\gamma^2) = \frac{a_{2n}(\gamma^2)}{\gamma^2} = \frac{2}{\left[ a_{2n}(\gamma^2) - 4 \right] / \gamma^2} - \frac{1}{\left[ a_{2n}(\gamma^2) - 16 \right] / \gamma^2} - \dots - \frac{1}{\left[ a_{2n}(\gamma^2) - (2r)^2 \right] / \gamma^2}$$

I-53

On détermine numériquement cette  $(n+1)^{\text{ième}}$  racine en tronquant l'équation caractéristique (I-53) à un ordre  $r$  très supérieur à  $n$ . Si l'on choisit

par exemple  $r = n + 10$ , cela signifie que l'on pose arbitrairement  $G_{2n+22}^{(2n)}(\gamma^2) \approx 0$  ce qui sous entend que la suite  $|G_{2r}^{(2n)}(\gamma^2)|$  est strictement décroissante. On calcule ensuite de proche en proche toutes les quantités  $G_{2n+20}^{(2n)}(\gamma^2)$ ,  $G_{2n+18}^{(2n)}(\gamma^2)$  etc... jusque  $G_0^{(2n)} = a_{2n}(\gamma^2)/\gamma^2$  "en remontant" les relations de récurrence I-52. Cette procédure a déjà utilisée par E.T. KIRKPATRICK [63] pour construire les seules tables disponibles actuellement sur les fonctions de MATHIEU radiales  $Ce_m(\xi, \gamma^2)$  et  $Se_m(\xi, \gamma^2)$  ( $0 < \xi < 1$ ;  $0 < \gamma^2 < 20$ ;  $0 < m < 6$ )

Les grandes et les faibles valeurs du paramètre  $\gamma^2$  peuvent cependant rompre la monotonie de la suite  $|G_{2r}^{(2n)}(\gamma^2)|$  décrite par la relation :

$$|G_{2r+2}^{(2n)}(\gamma^2)| < |G_{2r}^{(2n)}(\gamma^2)| \quad \text{I-54}$$

Or si on se fixe l'argument  $\eta$  dans la série I-2, celle-ci converge absolument. Autrement dit il doit exister un ordre  $r_0$  tel que si  $r > r_0$  alors :

$$|G_{2r}^{(2n)}(\gamma^2)| < 1. \quad \text{I-55}$$

Les relations de récurrence I-52 permettent de réécrire I-55 sous la forme suivante :

$$\left| \frac{[a_{2n}(\gamma^2) - (2r+2)^2]}{\gamma^2} - G_{2r+2}^{(2n)}(\gamma^2) \right| > 1 \quad \text{I-56}$$

Les grandes valeurs de  $\gamma^2$  conduisent à  $[a_{2n}(\gamma^2) - (2r+2)^2]/\gamma^2 \approx 0$  de sorte que I-56 se transforme comme :

$$|G_{2r+2}^{(2n)}(\gamma^2)| > 1 \quad \text{I-57}$$

ce qui est contraire d'après I-55 à la relation I-54. Cette situation se reproduit pour les faibles valeurs de  $\gamma^2$  qui entraînent  $a_{2n}(\gamma^2) - (2r+2)^2 \approx 0$ . Il est clair que cette rupture de la monotonie de la suite  $|G_{2r}^{(2n)}(\gamma^2)|$  va se produire à un ordre  $r$  inférieur à  $n+10$ . La quantité  $G_0^{(2n)}(\gamma^2)$  calculée devient très différente de la valeur exacte déduite de la résolution de l'équation caractéristique I-53.

En conservant la même hypothèse arbitraire  $G_{2n+22}^{(2n)}(\gamma^2) \approx 0$  dans la résolution de l'équation caractéristique I-53, on calcule à partir de  $G_{2n}^{(2n)}(\gamma^2)/\gamma^2$  toutes les quantités  $G_2^{(2n)}(\gamma^2), G_4^{(2n)}(\gamma^2), \dots$  jusque  $\dots G_{2n+22}^{(2n)}(\gamma^2)$ . Ces calculs s'effectuent en "descendant" les relations de récurrence I-52. Comme dans le calcul précédent qualifié de "montant", on assiste à une rupture de la monotonie de la suite décroissante  $G_{2r}^{(2n)}(\gamma^2)$  qui empêche de retrouver l'hypothèse initiale  $G_{2n+22}^{(2n)}(\gamma^2) \approx 0$ .

Ce sont ici les erreurs d'arrondi commises par le calculateur [63] qui détruisent la monotonie de la suite  $|G_{2r}^{(2n)}(\gamma^2)|$  et non plus les ordres de grandeurs du paramètre  $\gamma^2$ . En effet le critère de convergence absolue I-55 de la série I-2 qui peut encore s'écrire comme :

$$\left| \left[ \frac{a_{2n}(\gamma^2) - (2r)^2}{\gamma^2} - 1 / G_{2r-2}^{(2n)}(\gamma^2) \right] \right| < 1 \quad \text{I-58}$$

montre que les quantités  $1/G_{2r-2}^{(2n)}(\gamma^2)$  et  $[a_{2n}(\gamma^2) - (2r)^2]/\gamma^2$  sont nécessairement du même signe et du même ordre de grandeur. Dans la progression du calcul "descendant" la soustraction de ces deux termes amènent des incertitudes importantes sur le résultat qui peut à un certain ordre  $r$  ne plus vérifier I-58.

Quand le paramètre  $\gamma^2$  est ni trop grand ni trop faible, on observe numériquement que les calculs des quantités  $G_{2r}^{(2n)}(\gamma^2)$  effectués soit "en remontant" soit en "descendant" les relations de récurrence I-52, possèdent un ordre de recouvrement de leurs résultats. Le tableau I illustre ce recouvrement qui peut être localisé par un test approprié. Ce test rétablit la monotonie de la suite décroissante  $|G_{2r}^{(2n)}(\gamma^2)|$  et les coefficients de Fourier sont déduits des quantités  $G_{2r}^{(2n)}(\gamma^2)$  par la relation :

$$A_{2r}^{(2n)}(\gamma^2) = G_{2r-2}^{(2n)}(\gamma^2) \cdot G_2^{(2n)}(\gamma^2) \cdot G_0^{(2n)}(\gamma^2) \cdot A_0^{(2n)}(\gamma^2) \quad \text{I-59}$$

Le premier coefficient  $A_0^{(2n)}(\gamma^2)$  doit être finalement déterminé par une condition de normalisation particulière [64] ; celle de GOLDSTEIN-INCE [65] conduit à la valeur  $A_0^{(2n)}(\gamma^2)$  telle que :

$$\left[ 1/A_0^{(2n)}(\gamma^2) \right]^2 = 1 = 2 + \left[ G_0^{(2n)}(\gamma^2) \right]^2 + \left[ G_0^{(2n)}(\gamma^2) \cdot G_2^{(2n)}(\gamma^2) \right]^2 + \left[ G_{2n+10}^{(2n)}(\gamma^2) \cdot G_{2n+18}^{(2n)}(\gamma^2) \cdot \dots \cdot G_0^{(2n)}(\gamma^2) \right]^2 \quad \text{I-60}$$

Quand on limite l'équation caractéristique à l'ordre  $r = n + 10$ , le recouvrement des calculs "montant" et "descendant" peut ne pas se produire pour de très faibles valeurs et pour de très grandes valeurs du paramètre  $\gamma^2$ . Les figures A 1 a) et b) indiquent la limite supérieure du domaine de variation du paramètre  $\gamma^2$  dans lequel l'algorithme (recouvrement des calculs "montant" et "descendant") fournit les coefficients de FOURIER  $A_{2r+p}^{(2n+p)}(\gamma^2)$  et  $B_{2r+s}^{(2n+s)}(\gamma^2)$ . Les ordres entiers  $m = 2n+p$  et  $m = 2n+s$  des fonctions de MATHIEU restent inférieurs à 30. Les figures A2 a) et b) déterminent pour  $0 < m < 30$  la limite inférieure du domaine de variation du paramètre  $\gamma^2$  dans lequel l'algorithme reste performant.

On observe en outre que :

. L'augmentation du nombre de terme dans l'équation caractéristique I-52 a pour effet d'augmenter la limite du domaine d'efficacité du seul calcul "montant" ce qui relève d'autant la limite du domaine d'application en  $\gamma^2$  de l'algorithme.

. Dans les mêmes conditions la limite inférieure du domaine de variation de  $\gamma^2$  reste inchangée.

. L'emploi de la double précision dans les procédures numériques, ne modifie pas appréciablement ces limites, elle retarde l'ordre de rupture de la monotonie de la suite  $|G_{2r}^{(2n)}(\gamma^2)|$  dans le calcul "descendant", ce qui augmente la plage de coïncidence des ordres de recouvrement.

La figure A3 décrit la limite supérieure d'emploi de l'algorithme dans lequel l'ordre de troncature est fixé à  $r = n + 20$

Le tableau II donne les coefficients de FOURIER  $B_{2r+1}^{(2n+1)}(\gamma^2)$  pour  $\gamma^2 = 25$  et  $n = 7$ . Des résultats publiés [62] y sont également reportés pour permettre une comparaison directe avec ceux issus de l'algorithme.

Les figures A-4- a) b) c) et d) décrivent les évolutions des fonctions radiales  $F_{em}(\xi, \gamma^2)$  et  $G_{em}(\xi, \gamma^2)$  qui servent à décrire le champ électromagnétique dans les structures microfentes modélisées.

## I - 4 FORMES LIMITES DES COEFFICIENTS DE FOURIER [62]

quand  $\gamma^2 \rightarrow 0$ .

$A_{2r+p}^{(2n+p)}(\gamma^2)$  ( $p=0,1$ ) et  $B_{2r+s}^{(2n+s)}(\gamma^2)$  ( $s=1,2$ )

\* Cas particuliers pour les  $A_{2r}^{(0)}(\gamma^2)$

$$A_0^{(0)}(\gamma^2) = 1/\sqrt{2}$$

$$A_{2r}^{(0)}(\gamma^2) = (-1)^r \frac{\gamma^{2r}}{(r!)^2 2^{(r-1)}} A_0^{(0)}(\gamma^2)$$

I-63

\* Cas général pour les  $A_{m+2r}^{(m)}(\gamma^2)$  et  $B_{m+2r}^{(m)}(\gamma^2)$  ( $m \neq 0$ ).

$$\left. \begin{array}{l} A_{m+2r}^{(m)}(\gamma^2) \\ B_{m+2r}^{(m)}(\gamma^2) \end{array} \right\} \approx (-1)^r \frac{m!}{r!(m+r)!} \frac{\gamma^{2r}}{4}; \quad \left. \begin{array}{l} A_{m-2r}^{(m)}(\gamma^2) \\ B_{m-2r}^{(m)}(\gamma^2) \end{array} \right\} \approx \frac{(m-r-1)!}{r!(m-1)!} \frac{\gamma^{2r}}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_m^{(m)} \\ B_m^{(m)} \end{array} \right\} \approx 1.$$

I-64

## I - 5 RELATIONS D'ORTHOGONALITÉ DES FONCTIONS DE MATHIEU ANGULAIRES

Elles s'écrivent :

pour  $\gamma^2 > 0$ .

$$\int_0^{2\pi} ce_m(\eta, \gamma^2) \cdot ce_p(\eta, \gamma^2) d\eta = 0 \quad \text{si } m \neq p$$

$$\int_0^{2\pi} se_m(\eta, \gamma^2) \cdot se_p(\eta, \gamma^2) d\eta = 0 \quad \text{si } m \neq p$$

$$\int_0^{2\pi} ce_m(\eta, \gamma^2) \cdot se_p(\eta, \gamma^2) d\eta = 0 \quad \text{si } m \neq p \text{ et } m = p$$

$$\int_0^{2\pi} ce_{2n}^2(\eta, \gamma^2) d\eta = 2\pi \left[ A_0^{(2n)}(\gamma^2) \right]^2 + \pi \sum_{r=1}^{\infty} \left[ A_{2r}^{(2n)}(\gamma^2) \right]^2$$

$$\int_0^{2\pi} ce_{2n+1}^2(\eta, \gamma^2) d\eta = \pi \sum_{r=0}^{\infty} \left[ A_{2r+1}^{(2n+1)}(\gamma^2) \right]^2$$

$$\int_0^{2\pi} se_{2n+1}^2(\eta, \gamma^2) d\eta = \pi \sum_{r=0}^{\infty} \left[ B_{2r+1}^{(2n+1)}(\gamma^2) \right]^2$$

$$\int_0^{2\pi} se_{2n+2}^2(\eta, \gamma^2) d\eta = \pi \sum_{r=0}^{\infty} \left[ B_{2r+2}^{(2n+2)}(\gamma^2) \right]^2$$

I-65

et pour  $\gamma^2 < 0$ .

$$\int_0^{2\pi} ce_m^*(\eta, \gamma^2) \cdot ce_p^*(\eta, \gamma^2) d\eta = 0 \quad \text{si } m \neq p$$

$$\int_0^{2\pi} se_m^*(\eta, \gamma^2) \cdot se_p^*(\eta, \gamma^2) d\eta = 0 \quad \text{si } m \neq p$$

$$\int_0^{2\pi} ce_m^*(\eta, \gamma^2) \cdot se_p^*(\eta, \gamma^2) d\eta = 0 \quad \text{si } m \neq p \text{ et } m = p$$

$$\int_0^{2\pi} ce_{2n}^{*2}(\eta, \gamma^2) d\eta = 2\pi \left[ A_0^{(2n)}(|\gamma^2|) \right]^2 + \pi \sum_{r=1}^{\infty} \left[ A_{2r}^{(2n)}(|\gamma^2|) \right]^2$$

$$\int_0^{2\pi} ce_{2n+1}^{*2}(\eta, \gamma^2) d\eta = \pi \sum_{r=0}^{\infty} \left[ B_{2r+1}^{(2n+1)}(|\gamma^2|) \right]^2$$

$$\int_0^{2\pi} se_{2n+1}^{*2}(\eta, \gamma^2) d\eta = \pi \sum_{r=0}^{\infty} \left[ A_{2r+1}^{(2n+1)}(|\gamma^2|) \right]^2$$

$$\int_0^{2\pi} se_{2n+2}^*(\eta, \gamma^2) d\eta = \pi \sum_{r=0}^{\infty} \left[ B_{2r+2}^{(2n+2)}(\gamma^2) \right]^2$$

I-66

La normalisation de GOLDSTEIN-INCE [65] consiste à poser :

$$2 \left[ A_0^{(2n)}(\gamma^2) \right]^2 + \sum_{r=1}^{\infty} \left[ A_{2r}^{(2n)}(\gamma^2) \right]^2 = 1.$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left[ A_{2r+1}^{(2n+1)}(\gamma^2) \right]^2 = 1.$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left[ B_{2r+1}^{(2n+1)}(\gamma^2) \right]^2 = 1.$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left[ B_{2r+2}^{(2n+2)}(\gamma^2) \right]^2 = 1.$$

I-67.

### I - 6 QUELQUES DÉVELOPPEMENTS UTILES

$$ce_m^*(\eta, \gamma_0^2) = \sum_n' \alpha_{m,n}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) ce_n(\eta, \gamma_1^2)$$

$$se_m^*(\eta, \gamma_0^2) = \sum_n' \beta_{m,n}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) se_n(\eta, \gamma_1^2)$$

$$ce_m'(\eta, \gamma_1^2) = \sum_n' \chi_{m,n}(\gamma_1^2) se_n(\eta, \gamma_1^2)$$

$$se_m'(\eta, \gamma_1^2) = \sum_n' \gamma_{m,n}(\gamma_1^2) ce_n(\eta, \gamma_1^2)$$

I-68

Le signe  $\sum'$  dans ces expressions signifie que la sommation doit s'effectuer sur les entiers  $n$  pairs ou impairs selon la parité de  $m$ . Les relations d'orthogonalité précédentes permettent d'exprimer les coefficients  $\alpha_{m,n}$ ,  $\beta_{m,n}$ ,  $\chi_{m,n}$  et  $\gamma_{m,n}$  comme :

$$a) \quad \alpha_{m,n}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) = \frac{\int_0^{2\pi} ce_m^*(\eta, \gamma_0^2) \cdot ce_n(\eta, \gamma_1^2) d\eta}{\int_0^{2\pi} ce_n^2(\eta, \gamma_1^2) d\eta} \quad \text{I-69}$$

$(m, n) = 0, 1, 2 \dots$  toujours de même parité

. si  $m = 2p$  et  $n = 2q$  ( $p, q = 0, 1, 2 \dots$ )

$$\alpha_{2p, 2q}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) = (-1)^p \left[ A_0^{(2p)}(\gamma_0^2) \cdot A_0^{(2q)}(\gamma_1^2) + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2p)}(\gamma_0^2) \cdot A_{2r}^{(2q)}(\gamma_1^2) \right] \quad \text{I-70}$$

. si  $m = 2p + 1$  et  $n = 2q + 1$  ( $p, q = 0, 1, 2 \dots$ )

$$\alpha_{2p+1, 2q+1}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) = (-1)^p \left[ \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2p+1)}(\gamma_0^2) \cdot A_{2r+1}^{(2q+1)}(\gamma_1^2) \right] \quad \text{I-71}$$

$$b) \quad \beta_{m,n}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) = \frac{\int_0^{2\pi} se_m^*(\eta, \gamma_0^2) se_n(\eta, \gamma_1^2) d\eta}{\int_0^{2\pi} se_n^2(\eta, \gamma_1^2) d\eta} \quad \text{I-72}$$

$(m, n) = 1, 2, 3 \dots$  toujours de même parité

. si  $m = 2p + 2$  et  $n = 2q + 2$  ( $p, q = 0, 1, 2 \dots$ )

$$\beta_{2p+2, 2q+2}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) = (-1)^p \left[ \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t B_{2t+2}^{(2p+2)}(\gamma_0^2) \cdot B_{2t+2}^{(2q+2)}(\gamma_1^2) \right] \quad \text{I-73}$$

. si  $m = 2p + 1$  et  $n = 2q + 1$  ( $p, q = 0, 1, 2, \dots$ )

$$\beta_{2p+1, 2q+1}(\gamma_0^2, \gamma_1^2) = (-1)^p \left[ \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t A_{2t+1}^{(2p+1)}(\gamma_0^2) \cdot B_{2t+1}^{(2q+1)}(\gamma_1^2) \right] \quad \text{I-74}$$



$$c) \chi_{m,n}(\delta_1^2) = \frac{\int_0^{2\pi} ce'_m(\eta, \delta_1^2) se_n(\eta, \delta_1^2) d\eta}{\int_0^{2\pi} se_n^2(\eta, \delta_1^2) d\eta}$$

I-75

$$m = 0, 1, 2 \dots$$

$$n = 1, 2 \dots$$

} toujours de même partie

. si  $m = 2p$  et  $n = 2q + 2$  ( $p, q = 0, 1, 2 \dots$ )

$$\chi_{2p, 2q+2}(\delta_1^2) = - \sum_{r=1}^{\infty} (2r) \cdot A_{2r}^{(2p)}(\delta_1^2) \cdot B_{2r}^{(2q+2)}(\delta_1^2)$$

I-76

. si  $m = 2p + 1$  et  $n = 2q + 1$  ( $p, q = 0, 1, 2 \dots$ )

$$\chi_{2p+1, 2q+1}(\delta_1^2) = - \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(2p+1)}(\delta_1^2) B_{2r+1}^{(2q+1)}(\delta_1^2)$$

I-77

$$d) \psi_{m,n}(\delta_1^2) = \frac{\int_0^{2\pi} se'_m(\eta, \delta_1^2) ce_n(\eta, \delta_1^2) d\eta}{\int_0^{2\pi} ce_n^2(\eta, \delta_1^2) d\eta}$$

I-78

$$m = 1, 2, 3 \dots$$

$$n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

} toujours de même parité

. si  $m = 2p + 2$  et  $n = 2q$  ( $p, q = 0, 1, 2 \dots$ )

$$\psi_{2p+2, 2q}(\delta_1^2) = \sum_{r=1}^{\infty} (2r) \cdot B_{2r}^{(2p+2)}(\delta_1^2) \cdot A_{2r}^{(2q)}(\delta_1^2)$$

I-79

. si  $m = 2p + 1$  et  $n = 2q + 1$  ( $p, q = 0, 1, 2, 3 \dots$ )

$$\psi_{2p+1, 2q+1}(\delta_1^2) = \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) B_{2r+1}^{(2p+1)}(\delta_1^2) A_{2r+1}^{(2q+1)}(\delta_1^2)$$

I-80

ORDER	"BACKWARD" SCHEME	"FORWARD" SCHEME
r	$G_{2r}^{(10)}(1.)$	$G_{2r}^{(10)}(1.)$
0	.2083573 $10^{-1}$	.1000051 $10^3$
1	.1609343 $10^{-1}$	.9598505 $10^2$
2	.2186790 $10^2$	.8399463 $10^2$
3	.6395932 $10^2$	.6399315 $10^2$
4	.3598942 $10^2$	.3598942 $10^2$
5	-.2273527 $10^{-1}$	-.2273526 $10^{-1}$
6	-.1041791 $10^{-1}$	-.1040557 $10^{-1}$
7	-.6410647 $10^{-2}$	-.1074534
8	-.4464453 $10^{-2}$	-.1653013 $10^3$
9	-.3333418 $10^{-2}$	-.2239889 $10^3$
10	-.2604215 $10^{-2}$	-.2999905 $10^3$
11	-.2100870 $10^{-2}$	-.3829916 $10^3$
12	-.1736131 $10^{-2}$	-.4759923 $10^3$
13	-.1462002 $10^{-2}$	-.5759928 $10^3$
14	-.1250010 $10^{-2}$	-.6839932 $10^3$
15	-.1082257 $10^{-2}$	-.7999935 $10^3$

TABLE I

## NUMERICAL CONDITIONS

$$q = 1.$$

$$n = 5$$

$$a_{10}^{(1.)} = .1000051 \ 10^3$$



ORDER	"BACKWARD" SCHEME	"FORWARD" SCHEME	OUR RESULTS	PUBLISHED RESULTS [62]
r	$G_{2r+1}^{(15)} (25)$	$G_{2r+1}^{(15)} (25)$	$B_{2r+1}^{(15)} (25)$	$B_{2r+1}^{(15)} (15)$
0	X	10.01603	.3716764 $10^{-5}$	.3717 $10^{-5}$
1		8.596188	.3722720 $10^{-4}$	.37227 $10^{-4}$
2		7.939697	.3200120 $10^{-3}$	.320013 $10^{-3}$
3		6.970078	.2540798 $10^{-2}$	.2540804 $10^{-2}$
4		5.672557	.1770955 $10^{-1}$	.17709603 $10^{-1}$
5	4.039759	4.039759	.1004584	.100458755
6	2.048489	X	.4058276	.405827403
7	-.4321360		.8313332	.831332650
8	-.1898853		-.3592491	-.359248830
9	-.1176343		.6821609 $10^{-1}$	.68216074 $10^{-1}$
10	-.8304924 $10^{-1}$		-.8024555 $10^{-2}$	-.8024551 $10^{-2}$
11	-.6291634 $10^{-1}$		.6664332 $10^{-3}$	.666432 $10^{-3}$
12	-.4984245 $10^{-1}$		-.4192954 $10^{-4}$	-.41930 $10^{-4}$
13	-.4073339 $10^{-1}$		.2089871 $10^{-5}$	.2090 $10^{-5}$
14	-.3406580 $10^{-1}$		-.8512751 $10^{-7}$	-.86 $10^{-7}$
15	-.2900325 $10^{-1}$		.2899930 $10^{-9}$	.3 $10^{-9}$
16	-.2504880 $10^{-1}$		-.8410757 $10^{-10}$	
17	-.2187794 $10^{-1}$		.2106793 $10^{-11}$	

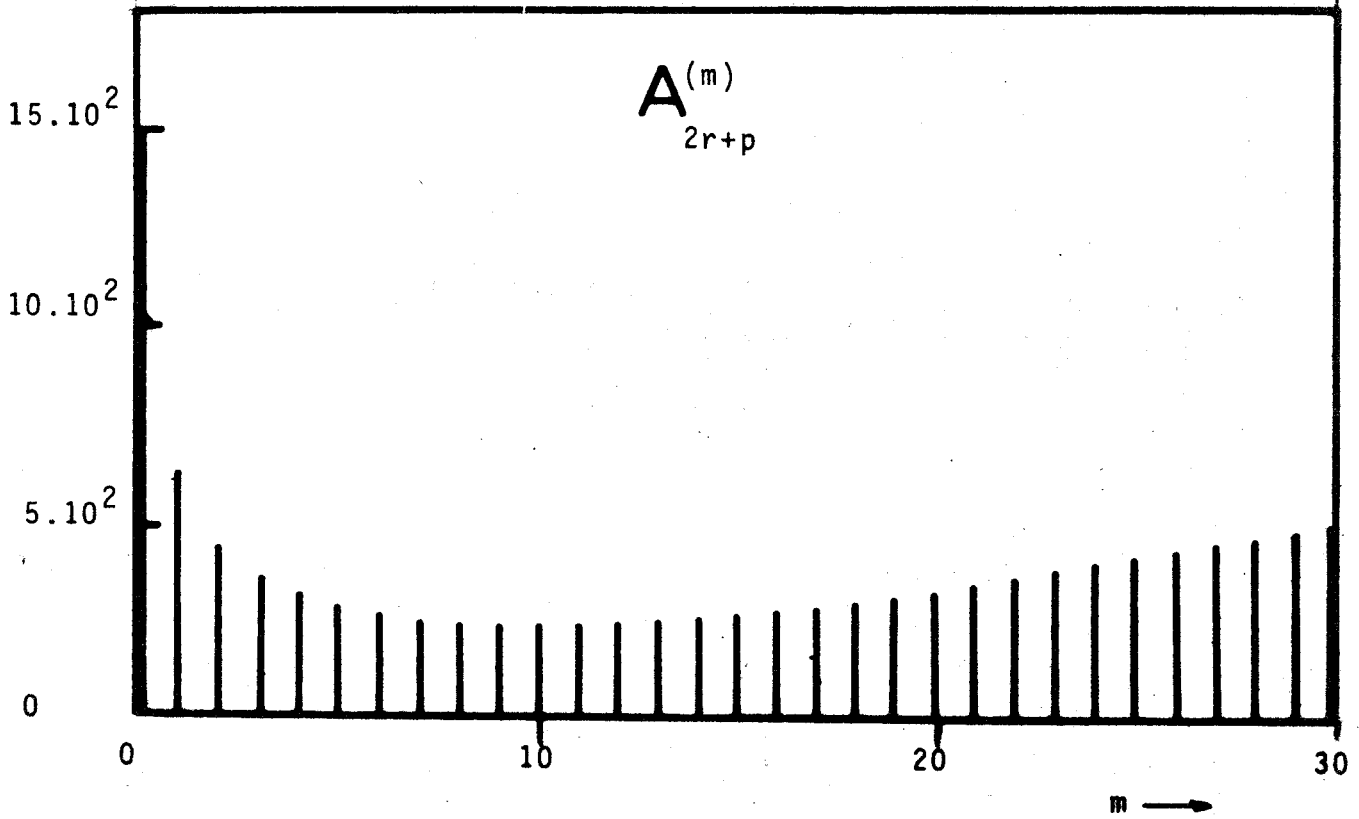
TABLE II  
NUMERICAL CONDITIONS

q = 25

n = 7

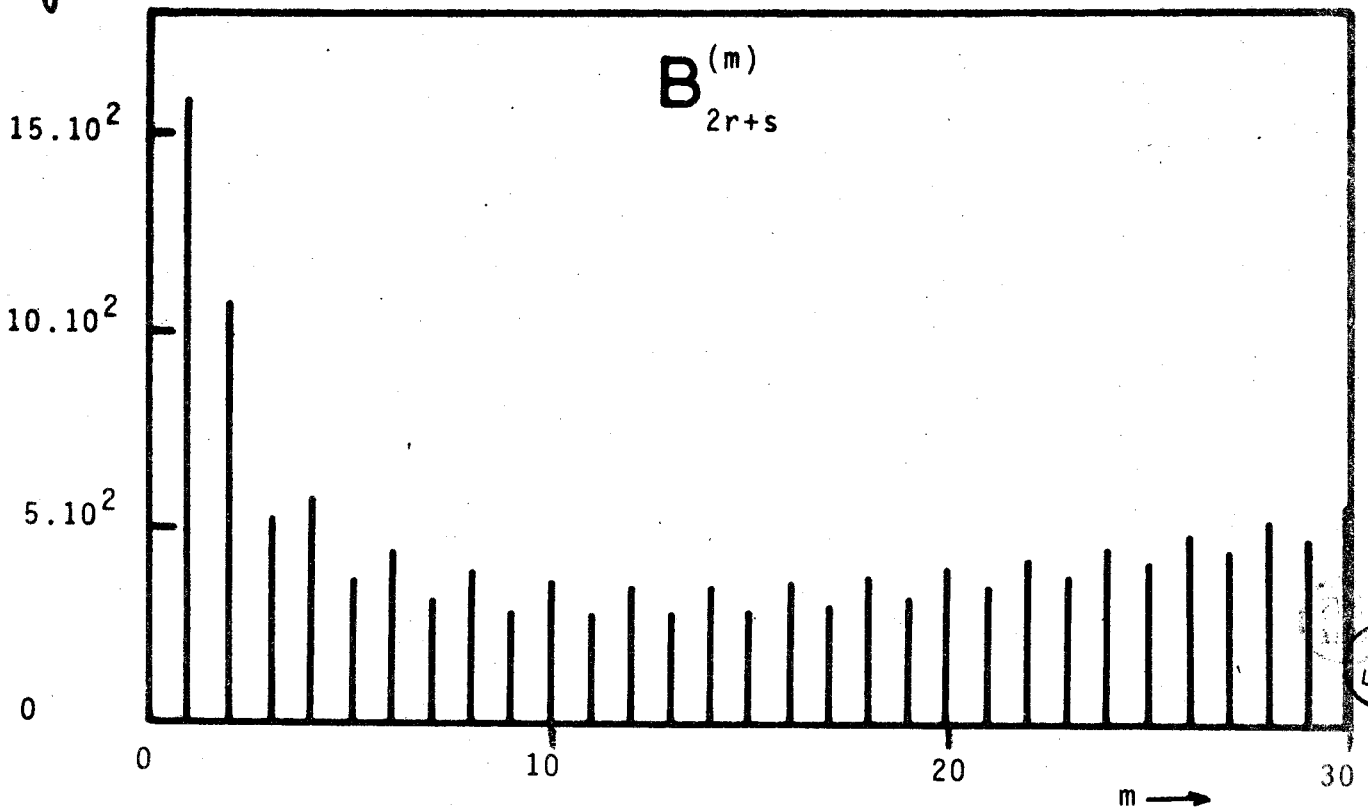
 $b_{15} (25) = 226.4007$ 

$\uparrow$   
 $\gamma^2$



a)

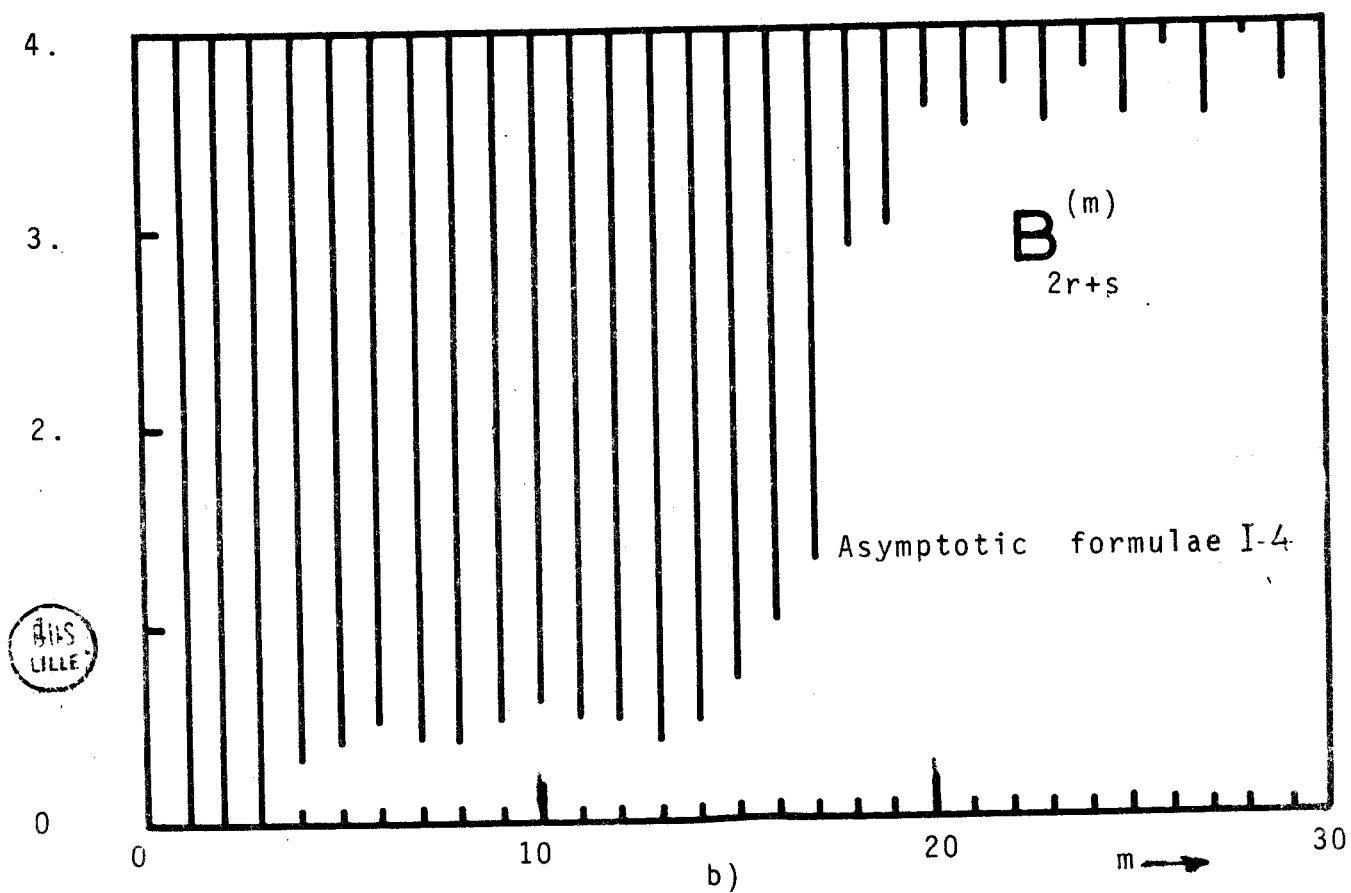
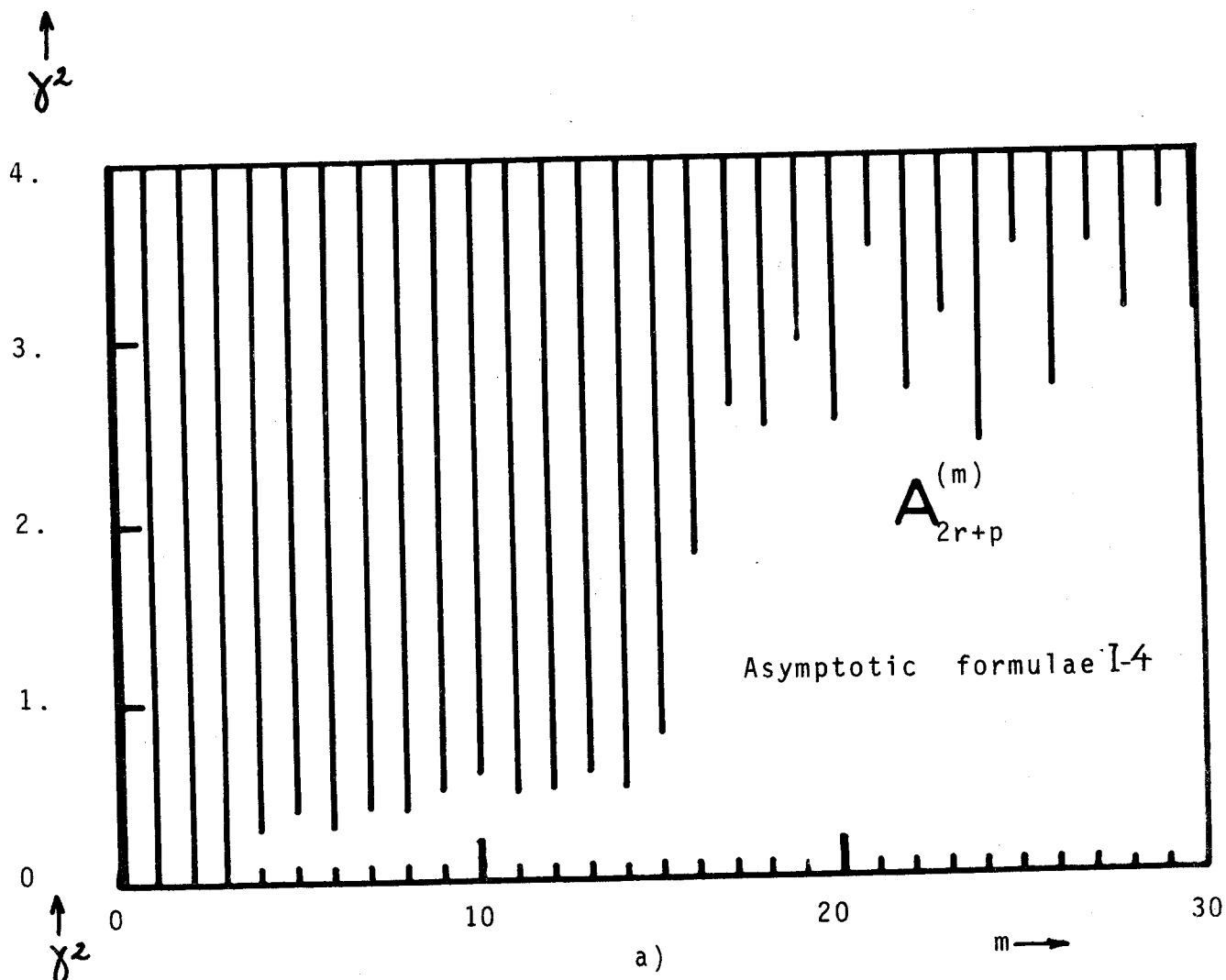
$\uparrow$   
 $\gamma^2$



b)

BUS  
LILLE

Fig. A 1

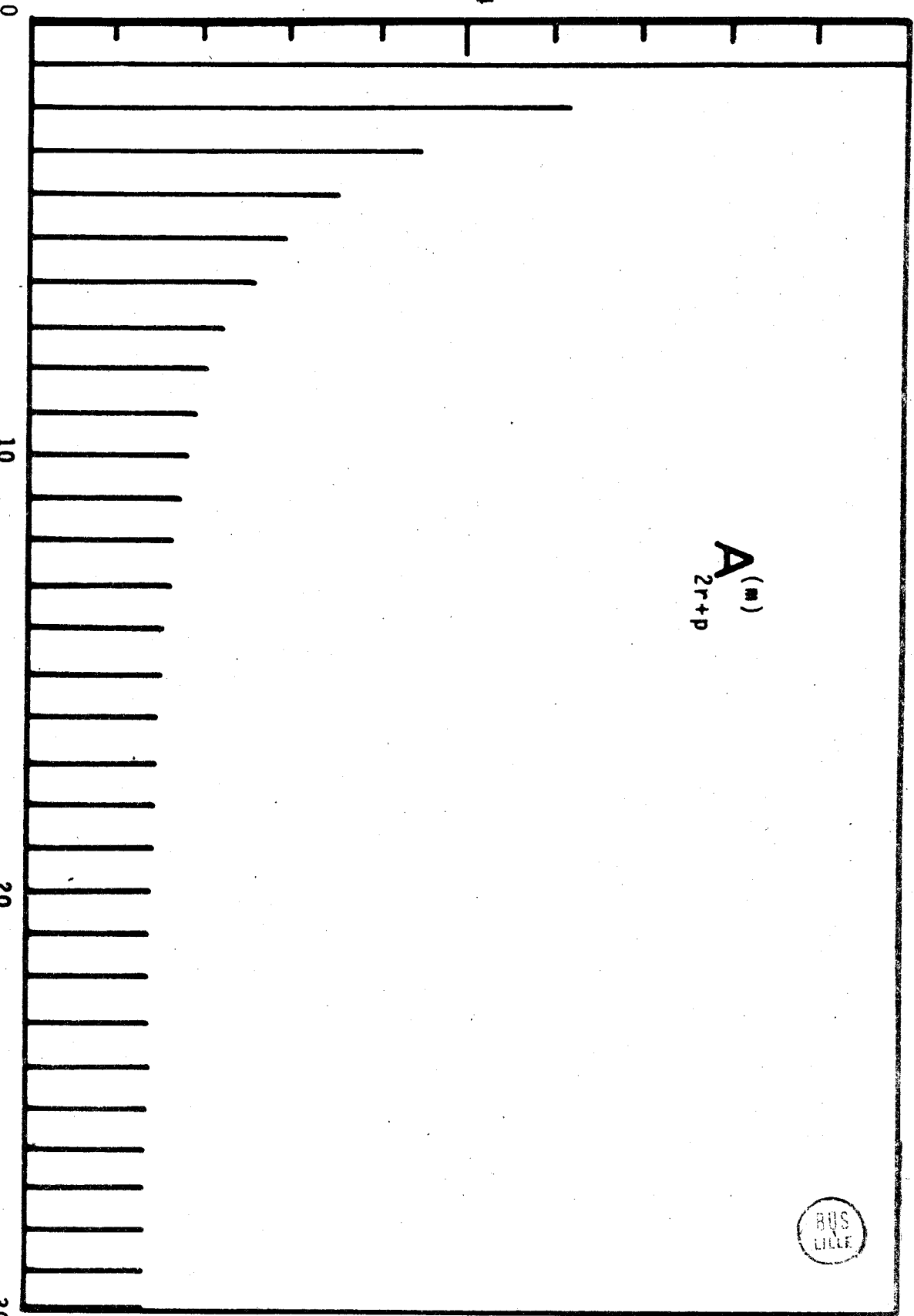


$\gamma^2$

$1 \cdot 10^4$

$.5 \cdot 10^4$

0



$A^{(m)}$   
 $2r+p$

BUS  
LILLE

m

10

20

30

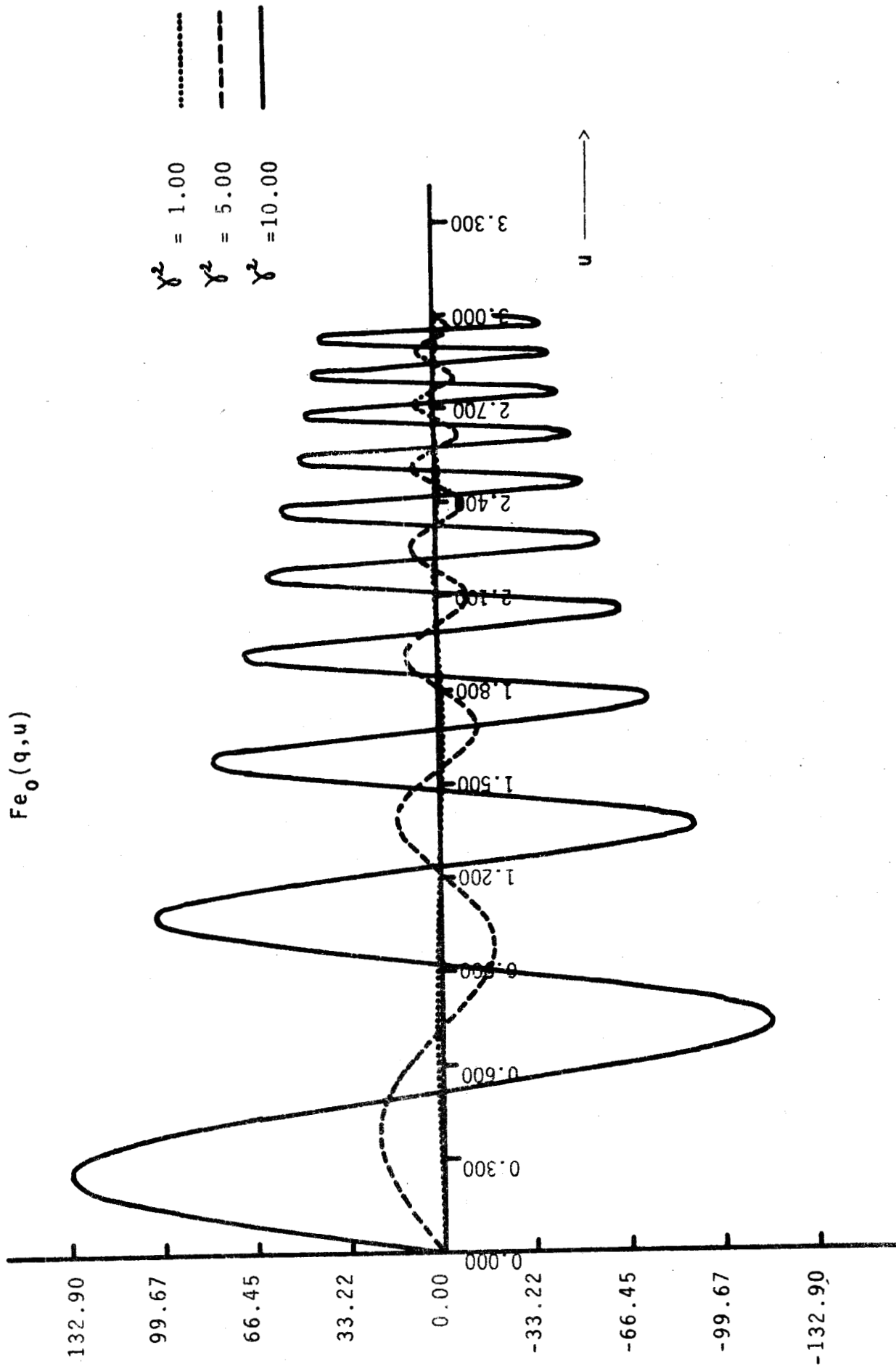


Fig. A 4 a)

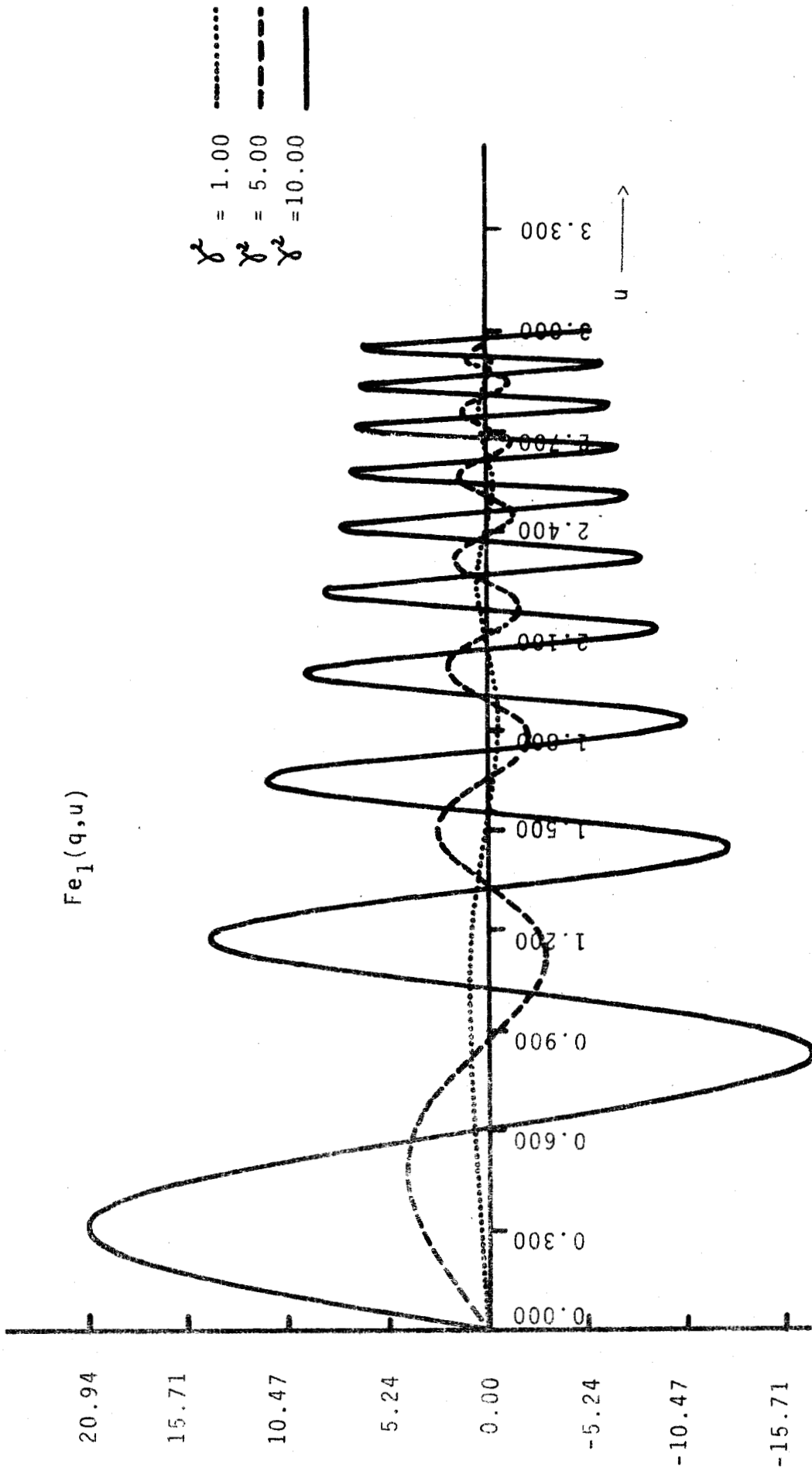


Fig. A 4 b)





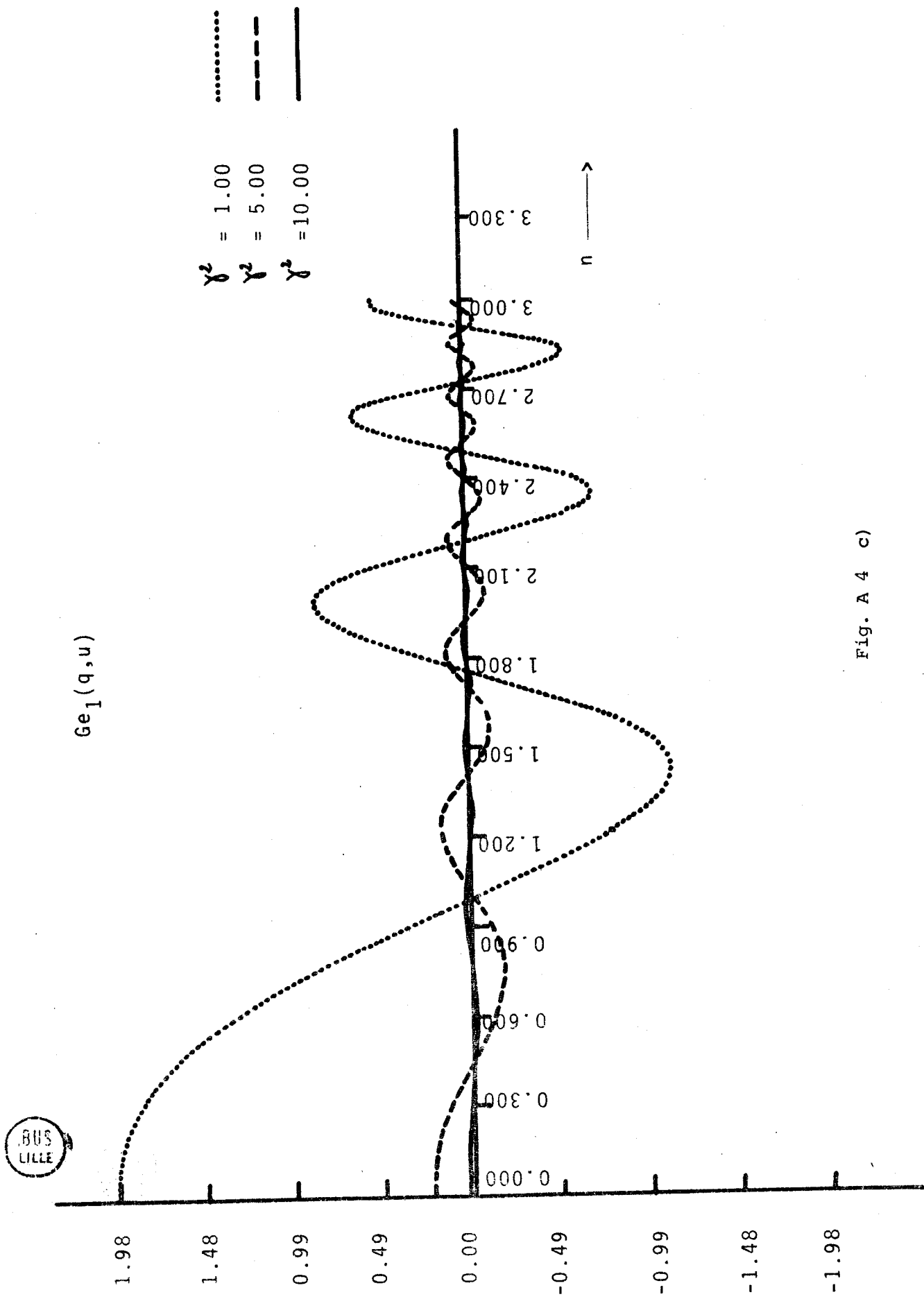


Fig. A 4 c)

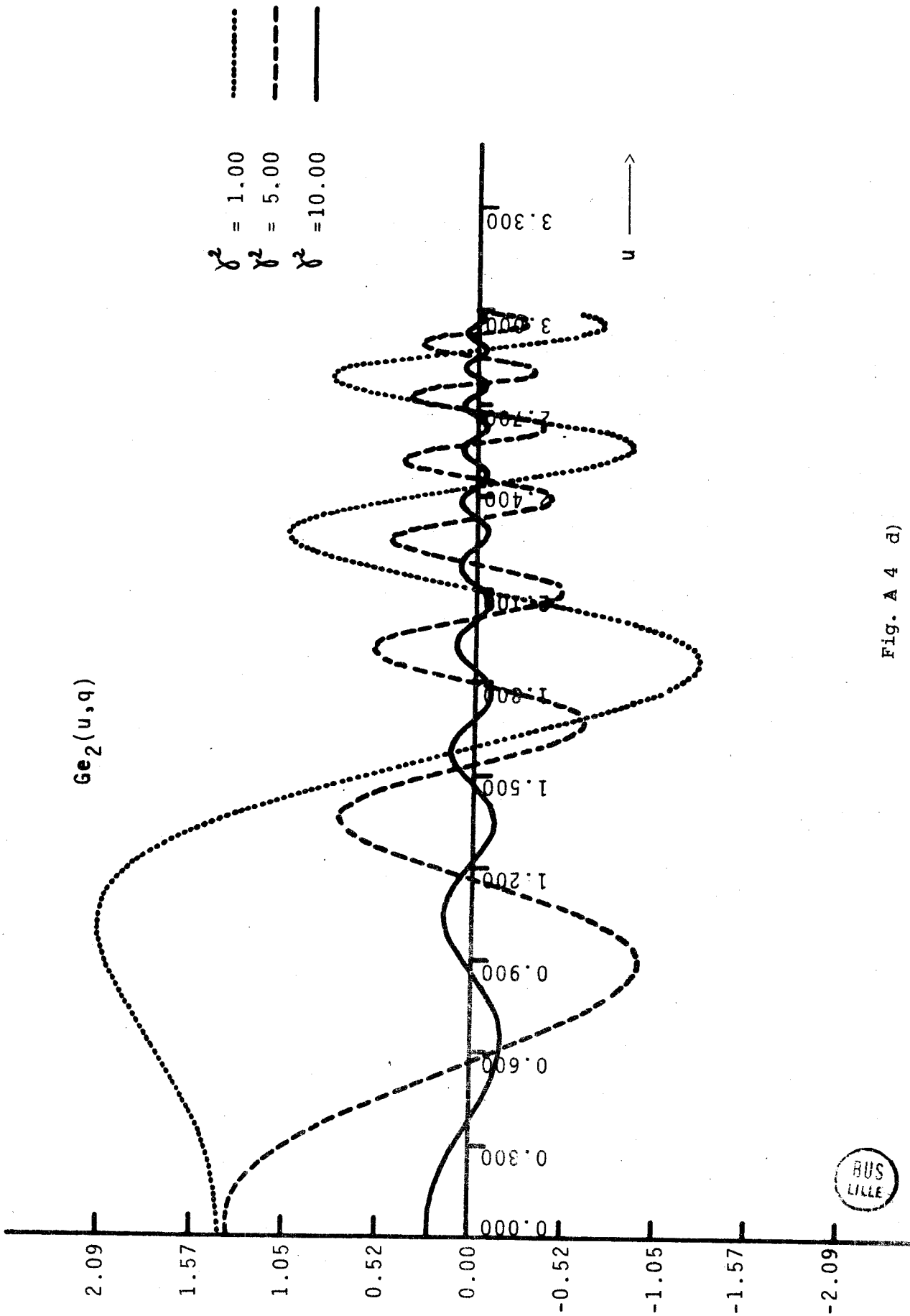


Fig. A 4 d)



## ANNEXE II

Formes limites des fonctions de MATHIEU modifiées d'ordre entier pour les faibles valeurs du paramètre.

## II - FONCTIONS DE PREMIER ESPACE À PARAMÈTRE POSITIF

Elles se notent  $Ce_m(\xi, \gamma^2)$  et  $Se_m(\xi, \gamma^2)$ . Les développements en série de fonctions de BESSEL de ces fonctions de premier espace sont construits différemment suivant la parité de l'ordre  $m$ . Pour les ordres pairs  $m = 2n$  ( $n = 0, 1, 2 \dots$ ) on a par exemple :

$$Ce_{2n}(\xi, \gamma^2) = \frac{ce_{2n}(0, \gamma^2)}{A_0^{(2n)}(\gamma^2)} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} J_{2r}(2\gamma \operatorname{sh} \xi) \quad \text{II-1}$$

Lorsque le paramètre  $\gamma^2$  est petit et que la variable  $\xi$  reste bornée, l'argument  $2\gamma \operatorname{sh} \xi$  reste toujours suffisamment faible pour justifier l'introduction dans I-2 de la forme limite suivante :

$$J_{2r}(2\gamma \operatorname{sh} \xi) = \frac{2^{(2r-1)/2} (\gamma \operatorname{sh} \xi)^{2r}}{(2r)!} + O(\gamma^{2r+2}) \quad \text{II-2}$$

On use par ailleurs des formes asymptotiques des coefficients de FOURIER  $A_{2r}^{(2n)}(\gamma^2)$  définies en I-64 pour écrire finalement la fonction  $Ce_{2n}(\xi, \gamma^2)$

comme :

$$Ce_{2n}(\xi, \gamma^2) \sim ce_{2n}(0, \gamma^2) \left[ \frac{\gamma^{2n}}{(2n-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+r-1)!}{(n-r)!} \frac{(\operatorname{sh} \xi)^{2r}}{4^{(n-r)/2} (2r)!} \right] \quad \text{II-3}$$

si  $n \geq 1$  ou comme:  $+ O(\gamma^{2n+2})$

$$Ce_0(\xi, \gamma^2) \sim ce_0(0, \gamma^2) + O(\gamma^2) \quad \text{II-4}$$

si  $n = 0$

De la même façon on construit les formes limites des fonctions  $ce_{2n+1}(\xi, \eta^2)$   
 $se_{2n+2}(\xi, \eta^2)$  et  $se'_{2n+1}(\xi, \eta^2)$  quand  $\delta^2 \rightarrow 0$  On obtient successivement :

$$ce_{2n+1}(\xi, \eta^2) \sim ce_{2n+1}(0, \eta^2) ch \xi \left[ \frac{\eta^{2n}}{(2n)!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+r)! (sh \xi)^{2r+1}}{(n-r)! 4^{n-r} (2r)!} \right] + O(\eta^{2n+2}) \quad \text{II-5}$$

$$se_{2n+2}(\xi, \eta^2) \sim se'_{2n+2}(0, \eta^2) ch \xi \left[ \frac{\eta^{2n}}{(2n+1)!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+r+1)! (sh \xi)^{2r+2}}{(n-r)! 4^{n-r} (2r+1)!} \right] + O(\eta^{2n+2}) \quad \text{II-6}$$

$$se'_{2n+1}(\xi, \eta^2) \sim se'_{2n+1}(0, \eta^2) \left[ \frac{\eta^{2n}}{(2n)!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+r)! (sh \xi)^{2r+1}}{(n-r)! 4^{n-r} (2r+1)!} \right] + O(\eta^{2n+2}) \quad \text{II-7}$$

## II - 2 FONCTIONS DE SECONDE ESPECE A PARAMETRE POSITIF ET NEGATIF

Voir note aux compte rendus de l'Académie des Sciences ci-jointe .

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Formes limites des fonctions de Mathieu modifiées de seconde espèce et d'ordre entier pour de faibles valeurs du paramètre.* Note (\*) de Jacques Citerne, présentée par M. Pierre Grivet.

A partir des développements des fonctions de Bessel pour les petits arguments, on construit les formes limites des fonctions de Mathieu modifiées de seconde espèce d'ordre entier quelconque applicables, pour de faibles valeurs des paramètres quand la variable des fonctions reste bornée. Les résultats généraux sont fournis sous une forme indépendante de la normalisation choisie pour le calcul des coefficients de Fourier. Ils sont ensuite confrontés à ceux obtenus par un calcul précis de ces fonctions, en vue d'établir leur domaine d'application.

*The limiting form of the modified Mathieu functions of second kind for small values of the parameter are generated at any integer order from the well known limiting form of the Bessel functions for small arguments. Results are applicable when the argument is bounded and they are presented in a special form which is not dependent upon the specific normalization of the Fourier coefficients.*

1. Cette Note, présente les formes limites des fonctions de Mathieu modifiées de seconde espèce et d'ordre entier quelconque, applicables pour les faibles valeurs du paramètre mais seulement quand la variable des fonctions reste bornée. Nous utilisons la notation de McLachlan <sup>(1)</sup> pour les fonctions de Mathieu modifiées de seconde espèce et d'ordre entier de sorte qu'elles se distinguent selon les valeurs négatives ( $-q$ ) et positives ( $q$ ) du paramètre. Pour les valeurs négatives ( $-q$ ) du paramètre, ces fonctions se notent comme  $Fek_m(\xi, -q)$  et  $Gek_m(\xi, -q)$  alors que pour les valeurs positives ( $q$ ) du paramètre ces fonctions s'écrivent comme  $Fey_m(\xi, q)$  et  $Gey_m(\xi, q)$ . Des formes limites des premières on déduit celles des secondes en changeant le signe des quantités devant lesquelles le paramètre  $q$  est en facteur. Les rapports des fonctions à leurs dérivées sont indépendants de la normalisation <sup>(2)</sup> choisie pour le calcul des coefficients de Fourier c'est donc sous cette forme que nous formulerons nos résultats finaux.

2. On exprime généralement les fonctions de Mathieu modifiées de seconde espèce, d'ordre entier et paramètre négatif ( $-q$ ) sous la forme de développement en série de produits de fonctions de Bessel modifiées. Elles se construisent différemment suivant la parité de l'ordre  $m$  <sup>(1)</sup>.

En notant  $\xi$  la variable, on a par exemple pour les ordres impairs  $m=2n+1$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) :

$$(1) \quad Fek_{2n+1}(\xi, -q) = \frac{(-1)^n s_{2n+1}(q)}{\pi B_1^{(2n+1)}(q)} \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)}(q) [I_r(u) \cdot K_{r+1}(v) - I_{r+1}(u) K_r(v)],$$

avec

$$(2) \quad s_{2n+1}(q) = \frac{se'_{2n+1}(0, q) \cdot se_{2n+1}(\pi/2, q)}{\sqrt{q} B_1^{(2n+1)}(q)}.$$

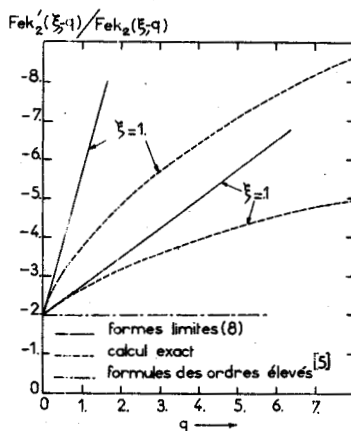
Les fonctions  $I_r$  et  $K_r$  dans la série (1) sont les fonctions de Bessel modifiées d'ordre entier dont les variables sont respectivement  $u = \sqrt{q}e^{-\xi}$  et  $v = \sqrt{q}e^{\xi}$ . Les coefficients  $B_{2r+1}^{(2n+1)}(q)$  sont ceux du développement en série de Fourier de la fonction de Mathieu d'ordre entier impair  $se_{2n+1}(\xi, q)$ . Cette fonction prise en  $\xi=0$ , ainsi que sa dérivée prise en  $\xi=\pi/2$ , figurent dans l'expression de  $s_{2n+1}(q)$  notée en (2).

Lorsque le paramètre  $q$  est petit et que la variable  $\xi$  reste bornée les arguments  $u$  et  $v$  demeurent faibles et l'on peut exprimer les formes limites des fonctions de Bessel modifiées comme :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} I_m(u) &\sim \frac{u^m}{2^m m!} \left[ 1 + \frac{u^2}{2(2m+2)} + \mathcal{O}(u^4) \right], \\ K_m(v) &\sim \frac{(m-1)! 2^{m-1}}{v^m} - \frac{2^{m-3}(m-2)!}{v^{m-2}} + \mathcal{O}(v^{4-m}) \\ &\quad + (-1)^{m+1} I_m(v) \operatorname{Log} \frac{ve^\alpha}{2} \quad \text{si } m \geq 1, \end{aligned} \right.$$

$$(4) \quad K_0(v) \sim -\operatorname{Log} \frac{ve^\alpha}{2} \quad \text{si } m=0,$$

$\alpha$  désigne dans les expressions ci-dessus la constante d'Euler ( $\alpha = 0.5772$ ).



Par ailleurs quand  $q$  est faible, les coefficients de Fourier  $B_{2r+1}^{(2n+1)}(q)$  dans la normalisation de Goldstein-Ince <sup>(3)</sup> s'approximent comme :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} B_{2n+1}^{(2n+1)}(q) &\sim \frac{1}{2n} \frac{q}{4} + \mathcal{O}(q^2); & B_{2n+1}^{(2n+1)}(q) &\sim 1 + \mathcal{O}(q^2); \\ B_{2n+3}^{(2n+1)} &\sim -\frac{1}{2(n+1)} \frac{q}{4} + \mathcal{O}(q^2). \end{aligned} \right.$$

Les manipulations algébriques qui mènent à la forme limite de  $Fek_{2n+1}(\xi, -q)$  sont longues et fastidieuses. Elles conduisent finalement au résultat suivant :

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &Fek_{2n+1}(\xi, -q) \\ &\sim \frac{(-1)^n s_{2n+1}(q) (2n)! 2^{2n}}{\pi q^n \sqrt{qe^{(2n+1)\xi}}} \left\{ 1 - \frac{q}{8n(n+1)} [(n+1)e^{2\xi} + 2 - ne^{-2\xi}] + \mathcal{O}(q^2) \right\} \\ &\quad \text{si } n \geq 1, \\ &Fek_1(\xi, -q) \sim \frac{s_1(q)}{\pi \sqrt{qe^\xi}} \left\{ 1 + \frac{q}{2} (e^{2\xi} + 1) \operatorname{Log} \frac{\sqrt{qe^{\xi+\alpha}}}{2} + \frac{q}{8} e^{-2\xi} + \mathcal{O}(q^2) \right\} \\ &\quad \text{si } n=0. \end{aligned} \right.$$

De la même manière, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} & \text{Fek}_{2n}(\xi, -q) \\ & \sim \frac{(-1)^n p_{2n}(q)(2n-1)! 2^{2n-1}}{\pi q^n e^{2n\xi}} \left\{ 1 + \frac{q}{4(4n^2-1)} [(2n-1)e^{-2\xi} - (2n+1)e^{2\xi}] + \mathcal{O}(q^2) \right\} \\ & \quad \text{si } n \geq 1, \\ & \text{Fek}_0(\xi, -q) \sim -\frac{p_0}{\pi} \text{Log} \frac{\sqrt{q}e^{\xi+\alpha}}{2} \\ & \quad \text{si } n=0, \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Gek}_{2n+2}(\xi, -q) & \sim \frac{(-1)^{n+1} s_{2n+2}(q)(2n+1)! 2^{2n+1}}{\pi q^{n+1} e^{(2n+2)\xi}} \\ & \left\{ 1 + \frac{q}{4(2n+1)(2n+3)} [(2n+1)e^{-2\xi} - (2n+3)e^{2\xi}] + \mathcal{O}(q^2) \right\} \\ & \quad \text{si } n \geq 0, \end{aligned}$$

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & \text{Gek}_{2n+1}(\xi, -q) \sim \frac{(-1)^n p_{2n+1}(q)(2n)! 2^{2n}}{\pi q^n \sqrt{q} e^{(2n+1)\xi}} \\ & \quad \left\{ 1 - \frac{q}{8n(n+1)} [(n+1)e^{2\xi} + 2 - ne^{-2\xi}] + \mathcal{O}(q^2) \right\} \\ & \quad \text{si } n \geq 1, \\ & \text{Gek}_1(\xi, -q) \sim \frac{s_1(q)}{\pi \sqrt{q} e^\xi} \left\{ 1 + \frac{q}{2} (e^{2\xi} - 1) \text{Log} \frac{\sqrt{q}e^{\xi+\alpha}}{2} + \frac{q}{8} e^{-2\xi} + \mathcal{O}(q^2) \right\} \\ & \quad \text{si } n=0. \end{aligned} \right.$$

Compte tenu des résultats précédents on peut déduire également des formes limites pour les nouvelles quantités  $\text{Fek}'_m(\xi, -q)/\text{Fek}_m(\xi, -q)$  et  $\text{Gek}'_m(\xi, -q)/\text{Gek}_m(\xi, -q)$ . Elles s'écrivent successivement :

$$\frac{\text{Fek}'_{2n}(\xi, -q)}{\text{Fek}_{2n}(\xi, -q)} \sim -2n - \frac{q}{2(4n^2-1)} [(2n-1)e^{-2\xi} + (2n+1)e^{2\xi}] + \mathcal{O}(q^2) \quad \text{si } n \geq 1,$$

$$\frac{\text{Fek}'_0(\xi, -q)}{\text{Fek}_0(\xi, -q)} \sim 1/\text{Log} \frac{\sqrt{q}e^{\xi+\alpha}}{2} \quad \text{si } n=0,$$

$$\frac{\text{Gek}'_{2n+2}(\xi, -q)}{\text{Gek}_{2n+2}(\xi, -q)} \sim -(2n+2) - \frac{q}{2(2n+1)(2n+3)} [(2n+3)e^{2\xi} - (2n+1)e^{-2\xi}] + \mathcal{O}(q^2) \\ \text{si } n \geq 0$$

$$\frac{\text{Fek}'_{2n+1}(\xi, -q)}{\text{Fek}_{2n+1}(\xi, -q)} \sim -(2n+1) - \frac{q}{4n(n+1)} [(n+1)e^{2\xi} + ne^{-2\xi}] + \mathcal{O}(q^2) \quad \text{si } n \geq 1,$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{Fek'_1(\xi, -q)}{Fek_1(\xi, -q)} \sim -1 + qe^{2\xi} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{qe^{\xi+\alpha}}}{2} + qP_1(\xi) + \mathcal{O}(q^2) \\ P_1(\xi) = -\frac{1}{8}(5e^{-2\xi} - 4e^{2\xi} - 4) \quad \text{si } n=0, \\ \frac{Gek'_{2n+1}(\xi, -q)}{Gek_{2n+1}(\xi, -q)} \sim -(2n+1) - \frac{q}{4n(n+1)} [(n+1)e^{2\xi} - ne^{-2\xi}] + \mathcal{O}(q^2) \quad \text{si } n \geq 1 \\ \frac{Gek'_1(\xi, -q)}{Gek_1(\xi, -q)} \sim -1 + qe^{2\xi} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{qe^{\xi+\alpha}}}{2} + qP_2(\xi) + \mathcal{O}(q^2) \\ P_2(\xi) = -\frac{1}{8}(5e^{-2\xi} - 4e^{2\xi} + 4). \end{array} \right.$$

On déduit des relations (7) les formules générales suivantes, valables quel que soit l'ordre  $m > 1$  et sa parité :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{Fek'_m(\xi, -q)}{Fek_m(\xi, -q)} \\ \frac{Fey'_m(\xi, q)}{Fey_m(\xi, q)} \end{array} \right\} \sim -m \left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right\} \frac{q}{2(m^2-1)} [(m-1)e^{-2\xi} + (m+1)e^{2\xi}] + \mathcal{O}(q^2),$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{Gek'_m(\xi, -q)}{Gek_m(\xi, -q)} \\ \frac{Gey'_m(\xi, q)}{Gey_m(\xi, q)} \end{array} \right\} \sim -m \left\{ \begin{array}{l} - \\ + \end{array} \right\} \frac{q}{2(m^2-1)} [(m+1)e^{2\xi} - (m-1)e^{-2\xi}] + \mathcal{O}(q^2).$$

3. Nous avons comparé les résultats fournis par les formes limites (8) avec ceux obtenus par un calcul précis de ces fonctions pour l'ordre  $m=2$ . Les résultats sont donnés sur la figure qui représente la quantité  $Fek'_2(\xi, -q)/Fek_2(\xi, q)$  en fonction du paramètre  $q$  pour deux valeurs très différentes de la variable  $\xi$ . Pour tout couple  $(\xi, q)$  le domaine de validité de nos formes limites apparaît relativement restreint mais celles-ci sont néanmoins plus précises que celles construites par J. E. Burke et V. Twersky sur les ordres élevés [(4), (5)].

Ces formes limites ont permis des développements analytiques nouveaux dans le domaine de l'électromagnétisme des ondes guidées (6).

(\*) Séance du 12 décembre 1977.

(1) N. W. McLachlan, *Theory and Applications of Mathieu Functions*, Clarendon Press, Oxford, England, 1947.

(2) P. M. Morse et H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw Hill Book Company, Inc., New York, 1946, chap. 11.

(3) M. Abramowitz et I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, part 20.

(4) J. E. Burke, *J. Math. Phys.*, 43, n° 3, 1964, p. 234-240.

(5) J. E. Burke et V. Twersky, *J. Opt. Soc. Amer.*, 54, n° 6, 1964, p. 732-744.

(6) J. Citerne, S. Toutain et Ph. Gelin, *Étude du spectre de modes de structures complexes. Guides diélectriques elliptique et rectangulaire. Mise en évidence d'anomalies numériques dans leur traitement* [Colloque Optique Hertzienne et Diélectrique, Marseille 8-10 septembre 1977 (à paraître dans les *Annales de l'Université de Clermont-Ferrand*, avril 1978)].

Centre Hyperfréquences et semiconducteurs, E.R.A. au C.N.R.S. n° 454,  
Université de Lille-I, B. P. n° 36, 59650 Villeneuve-d'Ascq.



## ANNEXE III

Expressions des composantes transversales des champs d'une onde guidée en fonction des composantes longitudinales dans le système de coordonnées elliptiques  $(\eta, \xi, z)$

$$E_{\eta} = \frac{1}{jk^2 p} \left[ \beta \frac{\partial E_z}{\partial \eta} - \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right] \quad (\text{III-1})$$

$$E_{\xi} = \frac{1}{jk^2 p} \left[ \beta \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial \eta} \right] \quad (\text{III-2})$$

$$H_{\eta} = \frac{1}{jk^2 p} \left[ \omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial \eta} \right] \quad (\text{III-3})$$

$$H_{\xi} = \frac{1}{jk^2 p} \left[ -\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right] \quad (\text{III-4})$$

$$\text{où } k^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2 ; \quad p = q \left( \text{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta \right)^{1/2}$$

(III-5)

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S.B. COHN "Slot-line - An alternative transmission medium for integrated circuits" 1968 I.E.E.E. G-MTT Internat. Microwave Symp. Digest, p. 104
- [2] G.H. ROBINSON et J.L. ALLEN "Application of slot-line to miniature ferrite devices" 1969 I.E.E.E. G-MTT Internat. Microwave Symp. Digest, p. 106 and I.E.E.E. Trans. Microwave Theory Tech. vol. MTT-17, p. 1097, Déc. 1969.
- [3] J.K. HUNTON et J.S. TAKEUCHI "Recent development in microwave slot-line mixers and frequency multipliers", 1970 I.E.E.E. G-MTT Internat. Microwave Symp. Digest. p. 296.
- [4] S.B. COHN "Sandwich slot-line" I.E.E.E. trans. Microwave Theory tech., vol. MTT-18, p. 1089, Déc. 1970.
- [5] E. MARIANI et J.P. AGRIOS "Slot-line filters", 1969 I.E.E.E. G-MTT Internat. Microwave Symp. Digest, p.190 and "Slot-line filters and couplers" I.E.E.E. Trans. Microwave Theory Tech. vol. MTT-18, p. 1089, Déc. 1970.
- [6] S.B. COHN "Slot-line on a dielectric substrate" I.E.E.E. Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-17, p. 768, oct. 1969.
- [7] T. ITOH et R. MITTRA "Dispersion characteristics of slot-lines" Electronic Letters, vol. 7, n°13, July 1971.
- [8] E.J. DENLINGER "A frequency dependent solution for microstrip transmission lines". I.E.E.E. Trans. Microwave Theory Tech. vol. MTT-19, p. 30 Jan. 1971.
- [9] T. ITOH et R. MITTRA "Spectral domain approach for calculating the dispersion characteristics of microstrip lines" I.E.E.E. Trans. Microwave Theory Tech. vol. MTT-21, n°7, p. 496, July 1973.
- [10] T. KITAZAWA, Y. FUJIKI, Y. HAYASHI et M. SUZUKI "Slot-Line with thick metal coating" I.E.E.E. Trans. Microwave Theory Tech. (short paper) vol. MTT-21, p. 580, Sept. 1973.

- [11] R. PREGLA et S.G. PINTZOS "Determination of the propagation constants in coupled microslot by a variational method". Proc. of the 5<sup>th</sup> Coll. on Microwave Comm., p. 491, BUDAPEST, June 1974.
- [12] J.B. KNORR et K.D. KUCHLER "Analysis of coupled slots and coplanar strips on dielectric substrate". I.E.E.E. Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-23, p. 541, July 1975.
- [13] T. KITAZAWA, Y. HAYASHI et M. SUZUKI "A coplanar waveguide with thick metal coating" I.E.E.E. Trans. Microwave Theory Tech. (short Paper) vol. MTT-24, n°9, p. 604, Sept. 1976 .
- [14] E. YAMASHITA et K. ATSUKI "Analysis of microstrip-like transmission lines by non uniform discretization of integral equations". I.E.E.E. Trans. Microwave Theory Tech. vol. MTT-24, n°4, p. 195, April 1976.
- [15] C.J. BOUWKAMP "A note on singularities occuring at sharp edges in electromagnetic diffraction theory", Physica XII, p. 467, October 1946.
- [16] J. MEIXNER "The behavior of electromagnetic fields at edges". I.E.E.E. AP-20; p. 442, 1972.
- [17] B. MANGIN "Etude de lignes microbandes et microfentes en modes hybrides" Thèse 3e cycle, TOULOUSE, 1974.
- [18] J. ROUSSET "Méthode des moments et des différences finies appliquées à l'analyse en mode hybride des lignes microruban et microfente". Thèse 3e cycle, LIMOGES, 1976.
- [19] J.S. HORNSBY et A. GOPINATH "Fourier analysis of a dielectric loaded waveguide with a microstrip line". Electr. Lett. Vol.5, n°12, p. 265, June 1969.
- [20] J.S. HORNSBY et A. GOPINATH "Numerical analysis of a dielectric loaded waveguide with a microstrip line. Finite differences method", I.E.E.E. Trans. Microwave Theory Tech, vol. MTT-17, n°9, p. 684, Sept. 1969.
- [21] M. AUBOURG "Approximation TEM des lignes blindées pour microélectronique. Application à l'étude de la ligne microruban par la méthode des éléments finis", D.E.A., LIMOGES, octobre 1977.

- [22] Ch. VASSALO "Notes de cours de l'Ecole d'été d'Electromagnétisme, LANNION, juillet 1973.
- [23] T. KAHAN "Théorie des groupes", tome II , DUNOD Paris.
- [24] P.R. ISAAC "Symmetry-induced modal characteristics of uniform waveguides. 1. Summary of results, 2. Theory." I.E.E.E. Trans. on MTT vol. MTT-23, n°5, p. 421, May 1975.
- [25] S. RAMO et J.R. WHINNERY "Fields and Waves in Modern Radio". 2nd edition New York : Wiley, 1953.
- [26] R.E. COLLIN "Field Theory of Guided waves New-York : Mc Graw Hill, 1960.
- [27] J. ORTUSI "Propagation des ondes électromagnétiques de haute fréquence" Collection des Annales de Radioélectricité. S.F.D.E. PARIS, 1957.
- [28] R.A. WALDRON "Characteristic impedances of waveguides" The MARCONI Review Third quart., p. 125.
- [29] R.M. WALKER "Waveguide impedance. Too many definitions" Electronic Communicator, vol. 1, n°3, p. 13, May, June 1966.
- [30] D.I. BLOCKHINTSEV "Mecanique quantique et application à l'étude de la matière" MASSON Paris, 1967.
- [31] J.J. GUSTINCIC "A general powerloss method for attenuation of cavities and waveguides". I.E.E.E. Trans. on Microwave Theory and Tech., vol.MTT-11 p. 83, Jan. 1963).
- [32] J.A. ARNAUD "Beam and Fiber optics" Academic Press New-York, 1976.
- [33] N. MARCUWITZ "Waveguide Handbook" MIT. Rad. Lab. Ser., vol.10, New York Mc Graw Hill, 1951.
- [34] W.L. WEEKS "Electromagnetic Theory of Engineering Applications", J. Wiley, New York, 1964.
- [35] S.B. COHN "Slot line fieldscomponents". I.E.E.E. Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-20, n°2, p. 172, Feb. 1972.

- [36] G.G. MONTGOMERY, R.H. DICKE et E.M. PURCELL "Principle of Microwave Circuits", MIT. Rad. Lab. Ser., vol.8, New York : Mc Graw Hill, 1948.
- [37] A.L. CULLEN Note de cours, Ecole d'Eté d'Electromagnétisme LANNION, juillet 1973.
- [38] L. SCHWARTZ "L'intégrale de FOURIER" C.D.U. Paris, 1963.
- [39] D.S. JONES "The theory of Electromagnetism" Pergamon New York, 1964.
- [40] R.F. HARRINGTON "Field computation by moment method". Mc Graw Hill, New York, 1968.
- [41] T. ITOH "Communication personnelle, I.E.E.E. S-MTT Intern. Symposium CHERRY HILL, June 1976.
- [42] E.A.J. MARCATILI "Dielectric rectangular waveguide and directional coupler for integrated optics". Bell Syst. Tech. J. 48, p. 2071, 1969.
- [43] C. YEH "Elliptical dielectric waveguide" J. Appl. Phys. 33, p. 3235, 1962.
- [44] L.A. LYUBINOV, G.I. VESELOV et N. BEI "Dielectric waveguide with elliptical cross section" Radio Eng. Electron. (USSR) (English transl.) p.6, 1961.
- [45] N.W. Mc LACHLAN "Theory and applications of MATHIEU functions", Oxford Univ. Press., 1947.
- [46] J.E. GOELL "A circular harmonic computer analysis of rectangular dielectric waveguide", Bell Syst. tech., J. 48, p. 2133, 1969.
- [47] D. MARCUSE "Light Transmission Optics" Van Nostrand New York, 1972.
- [48] J. CITERNE, Y. TINEL "Simple algorithm for computing the MATHIEU functions of integer order". J. of Appl. Math. and Phys. (ZAMP) (à paraître).
- [49] L. KANTOROVITCH et V. KRILOV "Approximate Methods of Higher Analysis" (Interscience Publishers, Inc New York, 1958.

- [50] J. CITERNE, S. TOUTAIN et Ph. GELIN "Etude du Spectre de mode de structures complexes. Guides diélectriques elliptique et rectangulaire. Mise en évidence d'anomalie numérique dans leur traitement". Colloque Opt. Hertz. et Diél. MARSEILLE, 8-10 sept. 1977.
- [51] E. SNITZER "Cylindrical dielectric waveguide modes". J. Opt. Soc. Amer., 51, p. 491, 1961.
- [52] Y. GARAUULT "Etude d'une classe d'ondes électromagnétiques guidées : les ondes EH. Application aux structures déflectrices pour les séparateurs à onde progressive de particules relativistes"., Thèse d'Etat, Orsay, 1964.
- [53] J.B. CLARRICOATS "Circular-waveguide backward-wave structures". Proc. I.E.E., vol.110, n°2, p. 261, 1963.
- [54] J. CITERNE "Formes limites des fonctions de MATHIEU modifiées de seconde espèce et d'ordre entier pour de faibles valeurs du paramètre". C.R. Acad. Sc. série A, t 286, p. 123, 1978.
- [55] C. YEH "Electromagnetic surface wave propagation along a dielectric cylinder of elliptic cross section. These California Institute of Technology Pasadena, 1962.
- [56] A.M.A. EL SHERBINY "Cut-off wavelengths of ridged, circular and elliptic guides". I.E.E.E., Trans. Microwave Theory Techn., vol. MTT-21, n°1, p. 7, Jan. 1973.
- [57] GORWARA A.K. "Transmission media. What's suitable at millimetre wavelengths" Microwaves, p. 36, March 1976.
- [58] R. PREGLA Communication personnelle 5<sup>th</sup> Europ. Microw. Conf. HAMBOURG RFA, 1975.
- [59] M. SUCHER et J. FOX "Handbook of Microwave Measurements" Vol. II, 3<sup>rd</sup> edition New York Polytechnic Press, p. 417, 1963.
- [60] L. FAUCON "L'approche spectrale des guides planaires. Paramètres électromagnétiques des lignes microfente et coplanaire". Thèse 3e cycle, LILLE, sept. 1978.

- [61] A. FARRAR et A.T. ADAMS "Computation of propagation constants for the fundamental and higher order modes in microstrip". I.E.E.E. Trans. Microw. Theory Tech., vol. MTT-24, p. 456, July 1976.
- [62] M. ABRAMOWITZ et I.A. STEGUN "Handbook of Mathematical Functions". Dover Publications INC New York.
- E. KIRKPATRICK  
[63] Tables of values of modified MATHIEU functions. Math. Com., 14, p.70, 1960.
- [64] P.M. MORSE et H. FESH BACH "Methods of Theoretical Physics". Mc Graw Hill, New York, 1946.
- [65] E.L. INCE "Tables of elliptic cylinder functions" Proc. Roy Soc. EDIMBURG vol. 52, p.355 , 1932.

