50376
1978
221

DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES POUR UN SYSTEME LINEAIRE D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES ADMETTANT UNE CARACTERISTIQUE DOUBLE.

par

Robert BERZIN

N° d'ordre : 431

50376
1978
221

50376
1978
221

THÈSES

Présentées par

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

ROBERT BERZIN

Première Thèse

SYSTEMES HYPERBOLIQUES A MULTIPLICITE CONSTANTE

Deuxième Thèse

HYPERFONCTIONS ET THEOREME DU "EDGE OF THE WEDGE"

Thèses soutenues le 9 Octobre 1978 devant la Commission d'Examen :

MM. G. COEURÉ, Examinateur
J.C. DE PARIS, Rapporteur
M. PARREAU, Président, Examinateur,
F. PARSY, Examinateur,
J. VAILLANT, Directeur de Recherche, Rapporteur,
C. WAGSCHAL, Examinateur.

Ma thèse se compose des publications suivantes :

1) Ondes asymptotiques et problème de Cauchy à données singulières pour un système d'équations linéaires avec une caractéristique double.

Note de M. Robert Berzin aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [t. 275, série A, 20 novembre 1972, p. 1091] présentée par M. Jean Leray.

2) Un fascicule intitulé "Développements asymptotiques pour un système linéaire d'équations aux dérivées partielles admettant une caractéristique double par Robert Berzin" détaillant les calculs précédents.

3) Problème de Cauchy pour un système hyperbolique d'équations linéaires avec une caractéristique double.

Note de M. Robert Berzin aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [t. 280, série A, 17 février 1975, p. 443] présentée par M. Jean Leray.

4) Un fascicule intitulé "Problème de Cauchy en C^∞ pour un opérateur matriciel d'ordre $\leq t$, $t \geq 1$, avec une caractéristique double par Robert Berzin" détaillant les calculs de la 2ème note.

5) Paramétrix du problème de Cauchy pour un système faiblement hyperbolique à caractéristiques multiples.

Note de MM. Robert Berzin et Jean Vaillant aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [t. 283, série A, 4 octobre 1976, p. 485] présentée par M. Jean Leray.

6) Paramétrix du problème de Cauchy pour un système faiblement hyperbolique à caractéristiques multiples par Robert Berzin et Jean Vaillant. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2ème série, 102, 1978 p. 287 à 294.

7) Systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante.

Note de MM. Robert Berzin et Jean Vaillant aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [t. 287, série A, 9 octobre 1978, p. 643], présentée par M. Jean Leray.

8) Un fascicule intitulé : "Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples par Robert Berzin et Jean Vaillant détaillant la note précédente (à paraître au Journal de Math. Pures et Appliquées).

Je suis profondément reconnaissant à M. Jean Vaillant de m'avoir permis, grâce à ses conseils et ses encouragements, de mener à bien mes premiers travaux concernant les opérateurs à caractéristique double et d'avoir bien voulu m'accepter comme collaborateur pour la partie commune. Je ne saurais trop le remercier d'avoir été pour moi plus qu'un directeur de recherche.

Monsieur Jean Leray m'a permis de faire une conférence à son séminaire au Collège de France et a bien voulu présenter toutes les notes que j'ai rédigées, soit en collaboration avec M. Jean Vaillant, soit personnellement et je souhaiterais qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie M. Paul Malliavin d'avoir bien voulu me montrer de l'intérêt en permettant la publication d'un article au Bulletin des Sciences Mathématiques.

Monsieur Michel Parreau a bien voulu accepter la présidence du jury de ma thèse. Qu'il trouve ici l'expression de la plus vive reconnaissance de son ancien élève de propédeutique.

Monsieur Gérard Coeuré pour ma seconde thèse m'a demandé de m'intéresser aux hyperfonctions et entre-autre au théorème du "edge of the wedge". Il m'a consacré beaucoup de temps pour m'expliquer en détail plusieurs points délicats. Qu'il en soit ici vivement remercié.

Je remercie également MM. Fernand Parsy et Claude Wagschal d'avoir bien voulu accepter de rapporter sur mon travail et de m'avoir prêté beaucoup d'attention lors de conversationsque j'ai eues avec eux au sujet des difficultés rencontrées dans mes recherches.

Jean-Claude De Paris n'a jamais ménagé, ni sa peine ni son temps pour moi. J'ai toujours su trouver auprès de lui l'aide nécessaire qui me permettait de surmonter les difficultés rencontrées dans mon travail depuis le début et de favoriser la progression de mes recherches. Il a accepté de plus d'être un des rapporteurs du jury de ma thèse. Je le remercie infiniment mais peut-on remercier comme il faut un véritable ami.

J'ai été très sensible à l'aide matérielle que m'ont apportée toutes les personnes qui ont contribué à l'élaboration de cette thèse, je leur suis très reconnaissant et je voudrais remercier particulièrement Madame Bérat et Madame Lengaigne de m'avoir consacré beaucoup de leur temps et d'avoir été si patientes avec moi.

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE

15 Septembre 1978

DOYENS HONORAIRES De l'Ancienne Faculté des Sciences

MM. R.DEFRETIN, H.LEFEBVRE, M.PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES des Anciennes Facultés de Droit et Sciences Economiques, des Sciences et des Lettres

MM. ARNOULT, Mme BEAUJEU, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, CORSIN, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, P.GERMAIN, GLACET, GONTIER, HEIM DE BALSAC, HOCQUETTE, KAMPE DE FERIET, KOUGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, Mme LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SAVARO, SCHILTZ, WATERLOT, WIEMAN, ZAMANSKI.

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. R.DEFRETIN, M.PARREAU, J.LOMBARD.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

M. M.MIGEON.

PROFESSEURS TITULAIRES

M.	BACCHUS Pierre	Astronomie
M.	BEAUFILS Jean-Pierre	Chimie Physique
M.	BILLARD Jean	Physique du Solide
M.	BIAYS Pierre	Géographie
M.	BONNOT Ernest	Biologie Végétale
M.	BOUGHON Pierre	Algèbre
M.	BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M.	CELET Paul	Géologie Générale
M.	COEURE Gérard	Analyse
M.	CONSTANT Eugène	Electronique
M.	CORDONNIER Vincent	Informatique
M.	DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des Entreprises
M.	DELATTRE Charles	Géologie Générale
M.	DELHAYE Michel	Chimie Physique
M.	DERCOURT Jean	Géologie Générale
M.	DURCHON Maurice	Biologie Expérimentale
M.	FAURE Robert	Mécanique
M.	FOURET René	Physique du Solide
M.	GABILLARD Robert	Electronique
M.	GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M.	GRUSON Laurent	Algèbre
M.	GUILLAUME Jean	Microbiologie
M.	HECTOR Joseph	Géométrie
M.	HEUBEL Joseph	Chimie Minérale
M.	LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique

.../...

M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M. LANSRAUX Guy	Physique Atomique et Moléculaire
M. LAVEINE Jean-Pierre	Paléontologie
M. LEBRUN André	Electronique
M. LEHMANN Daniel	Géométrie
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M. LHOMME Jean	Chimie
M. LINDER Robert	Biologie et Physiologie Végétales
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M. LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M. MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. PAQUET Jacques	Géologie Générale
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. SALMER Georges	Electronique
Mme SCHWARTZ Marie-Hélène	Géométrie
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M. TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. VIVIER Emile	Biologie Cellulaire
M. WERTHEIMER Raymond	Physique Atomique et Moléculaire
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie Végétale
M. BOILLY Bénoni	Biologie Animale
M. CAPURON Alfred	Biologie Animale
M. CARREZ Christian	Informatique
M. CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
Mme DACHARRY Monique	Géographie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie Animale
M. HERMAN Maurice	Physique Spatiale
M. JOURNEL Gérard	Physique Atomique et Moléculaire
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LENTACKER Firmin	Géographie
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
Mle MARQUET Simone	Probabilités
M. MESSELYN Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. MIGEON Michel	Chimie Physique
M. MONTEL Marc	Physique du Solide
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. ROUSSEAU Jean-Paul	Physiologie Animale
M. SLIWA Henri	Chimie Organique
M. WATERLOT Michel	Géologie Générale

.../...

MAITRES DE CONFERENCES (et Chargés d'Enseignement)

M. AL FAKIR Sabah	Algèbre
M. ANTOINE Philippe	Analyse
M. BART André	Biologie Animale
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BOBE Bernard	Sciences Economiques
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie
M. BOSCQ Denis	Probabilités
M. BREZINSKI Claude	Analyse Numérique
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CHAMLEY Hervé	Géotechnique
M. COQUERY Jean-Marie	Psychophysiologie
M. COURBIS Bernard	Sciences Economiques
M. COUTURIER Daniel	Chimie Organique
M. DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DELORME Pierre	Physiologie Animale
M. DE PARIS Jean-Claude	Mathématiques
M. DHAINAUT André	Biologie Animale
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique du Solide
M. DUBOIS Henri	Physique
M. DUBRULLE Alain	Physique
M. DUEE Gérard	Géologie
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du Solide
M. FLAMME Jean-Marie	Technologie de Construction
M. FONTAINE Hubert	Physique
M. GAMBLIN André	Géographie
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GREVET Patrick	Sciences Economiques
M. JACOB Gérard	Informatique
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LAURENT François	Automatique
Mle LEGRAND Denise	Algèbre
Mle LEGRAND Solange	Algèbre
M. LEVASSEUR Michel	Sciences Economiques
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique Théorique
M. LOSFELD Joseph	Informatique
M. MACKE Bruno	Physique
M. MIGNOT Fulbert	Analyse Numérique
M. N'GUYEN VAN CHI Régine	Géographie
M. PARSY Fernand	Mécanique
Mle PAUPARDIN Colette	Biologie Physiologie Végétales
M. PERROT Pierre	Chimie Appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie Animale
M. PONSOLLE Louis	Chimie Physique
M. POVY Lucien	Automatique
M. RICHARD Alain	Biologie
M. RIETSCH François	Chimie
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROY Jean-Claude	Psychophysiologie
M. SALAMA Pierre	Sciences Economiques
Mme SCHWARZBACH Yvette	Mathématiques
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SOMME Jean	Géographie

.../...

Mle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STERBOUL François	Informatique
M. TAILLIEZ Roger	Biologie
M. TOULOTTE Jean-Marc	Automatique
M. TREANTON Jean-René	Sociologie
M. VANDORPE Bernard	Chimie Minérale
M. WALLART Francis	Chimie
Mme ZINN-JUSTIN Nicole	Algèbre

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — *Ondes asymptotiques et problème de Cauchy à données singulières pour un système d'équations linéaires avec une caractéristique double.* Note (*) de M. **Robert Berzin**, présentée par M. Jean Leray.

Pour un système d'équations aux dérivées partielles, dans l'hypothèse où un polynôme construit à partir de la matrice sous-caractéristique [et qui généralise la fonction de Lévi, utilisée dans le cas d'une seule équation] est divisible par un facteur, dont la multiplicité est 2, dans le polynôme caractéristique, on construit une onde asymptotique dont la phase satisfait à l'équation caractéristique relative à ce facteur, ce qui permet de résoudre de façon unique, un problème de Cauchy à données singulières sur une hypersurface non caractéristique.

1. Soit Ω une variété réelle C^∞, de dimension $(n+1)$ et (h_B^A) une matrice d'ordre m, d'opérateurs différentiels C^∞, d'ordre $\leq t$:

$$h_B^A(x, D) = H_B^A(x, D) + H_B^{*A}(x, D) + \ldots,$$

de sorte que $(H_B^A(x, l))$ est la matrice caractéristique du système et que $(H_B^{*A}(x, l))$ est formée de polynômes homogènes de degré $\leq t-1$, où l désigne un covecteur en x, de composantes en coordonnées locales $(l_0, l_1, \ldots, l_n)$.

On suppose que

$$\det(H_B^A(x, l)) = [H_0(x, l)]^2 H'(x, l),$$

où H_0 est irréductible et H' non divisible par H_0.

Dans l'anneau localisé de $\mathbf{R}[l_0, l_1, \ldots, l_n]$ par rapport à l'idéal premier défini par H_0, on suppose (5) que

$$(H_B^A) \sim \begin{pmatrix} (H_0)^2 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

On désigne (5) par (δ^B) une suite de m polynômes telle que

$$\sum_B H_B^A \delta^B \equiv 0 \qquad [\mathrm{mod}\,(H_0)^2]$$

et de même pour la transposée :

$$\sum_A \gamma_A H_B^A \equiv 0 \qquad [\mathrm{mod}\,(H_0)^2].$$

On pose

$$\mathcal{K} = \sum_{A,B}\left[H_B^{*A} - \frac{1}{2}\sum_\lambda \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda\, \partial l_\lambda} H_B^A\right]\gamma_A \delta^B + \frac{1}{2}\sum_{A,B,\lambda} H_B^A\left[\frac{\partial \delta^B}{\partial l_\lambda}\frac{\partial \gamma_A}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \gamma_A}{\partial l_\lambda}\frac{\partial \delta^B}{\partial x^\lambda}\right].$$

On suppose que $\mathcal{K}$ est divisible par H_0.

On cherche une solution formelle de $\sum_{B} h_B^A(x, D)\, y^B(x) = 0$ sous la forme

$$y^B(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(\varphi(x))\, a^{j,B}(x), \qquad \text{avec} \quad f'_j(\varphi) = f_{j-1}(\varphi).$$

Les coefficients $a^{j,B}$ déterminés par récurrence sont de la forme

$$a^{j,B}(x) = U_j(x)\, d^B(x, \operatorname{grad}\varphi(x)) + V_j^B(x),$$

V_j^B ne dépendant que de l'opérateur (h_B^A), de φ et des $U_{j-1}, U_{j-2}, \ldots$, déjà déterminés.

U_j vérifie l'équation différentielle du deuxième ordre :

$$\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} U_j + w_j \frac{\partial}{\partial x^1} U_j + 0\, U_j + w'_j = 0,$$

w_j, 0 ne dépendent que de l'opérateur et de φ, la dérivation ayant lieu par rapport à x^1, le long des bicaractéristiques, w'_j dépend des coefficients $a^{k,B}$, $k < j$, de l'opérateur et de φ.

2. Problème de Cauchy. — On suppose que

$$H(x, l) = \prod_{s=0}^{s=\sigma} [H_s(x, l)]^{\nu_s} \qquad \text{avec} \quad \nu_0 = 2.$$

Les hypothèses faites sur H_0 sont dans 1.

Dans l'anneau localisé de $R[l_0, l_1, \ldots, l_n]$ par rapport à l'idéal premier $H_s(x, l)$ on suppose que pour $s \geqq 1$:

$$(H_B^A) \sim \begin{pmatrix} H_s & & & 0 & \\ & \ddots & & & \\ & & H_s & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \Big\} \nu_s$$

On pose $K(x, l) = \prod_{s=0}^{s=\sigma} H_s(x, l)$ et on suppose $H(a, 1, 0, \ldots, 0) \neq 0$.

Soit $\Psi(x^i)$, $x^i = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, une fonction C^∞, définie dans un voisinage de a, vérifiant $\operatorname{grad}\Psi(a) \neq 0$. On pose $(\operatorname{grad}\Psi)_i(a) = p_i(a)$ et on suppose que l'équation $K(a, l_0, p_i(a)) = 0$, $p_i = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, a toutes ses racines $p_0^\rho(a)$ réelles et distinctes. On peut construire τ fonctions φ^ρ, C^∞ dans un voisinage de a, vérifiant

$$K(x, \operatorname{grad}\varphi^\rho(x)) = 0, \qquad \varphi^\rho(0, x^i) = \Psi(x^i) \qquad \text{et} \quad (\operatorname{grad}\varphi^\rho)_0(a) = p_0^\rho(a).$$

Les vecteurs $d_{0\rho}^B$ forment une base de

$$\operatorname{Ker}(H_B^A(x, \operatorname{grad}\varphi^\rho(x))), \qquad 1 \leqq \rho \leqq \tau_0.$$

Les vecteurs $d^{B}_{\rho\,\overline{D}(\rho)}$ forment une base de

$$\operatorname{Ker}\left(H^{A}_{B}(x, \operatorname{grad}\varphi^{\rho}(x)\right), \qquad \tau_0 + 1 \leq \rho \leq \tau,$$

$1 \leq \overline{D}(\rho) \leq \nu_s$ si p^{0}_{0} est une racine provenant de H_s;

$$\tau = \prod_{s=0}^{s=\sigma} \tau_s \qquad (\tau_s \text{ degré de } H_s).$$

On associe à chaque φ^{ρ}, $\rho \geq \tau_0 + 1$, une onde asymptotique

$$y^{\rho,B}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(\varphi^{\rho}(x))\, a^{j,B}_{\rho}(x).$$

Les coefficients $a^{j,B}$ vérifient des équations différentielles du premier ordre.

On se donne les t vecteurs de $\mathbf{R}^n$, $\partial_{(0)^k} y^{B}(0, x^i)$, $0 \leq k \leq t-1$, restrictions d'une solution formelle sur l'hypersurface non caractéristique d'équation $x^0 = 0$ définie dans un voisinage de a.

On cherche y^{B} sous la forme

$$y^{B}(x) = \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_0} f_0(\varphi^{\rho}(x))\, a^{0,B}_{\rho}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} f_j(\varphi^{\rho}(x))\, a^{j,B}_{\rho}(x)$$

et on a

$$\partial_{(0)^k} y^{B}(0, x^i) = \sum_{j=-k-1}^{\infty} f_j(\Psi(x^i))\, b^{j,B}_{k}(x^i).$$

On constate alors en montrant que le déterminant d'ordre mt,

$$1 \leq B \leq m, \quad 0 \leq k \leq t-1 \left\{ \begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ldots (p^{\rho}_{0})^k\, d^{B}_{0\rho} & (p^{\rho}_{0})^k\, \partial^0 d^{B}_{0\rho} + k\,(p^{\rho}_{0})^{k-1} d^{B}_{0\rho} & \ldots & (p^{\rho}_{0})^k\, d^{B}_{\rho\,\overline{D}(\rho)} \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underbrace{\qquad}_{1 \leq \rho \leq \tau_0} & \underbrace{\qquad\qquad}_{1 \leq \rho \leq \tau_0} & & \underbrace{\qquad}_{\tau_0 + 1 \leq \rho \leq \tau} \end{array} \right.$$

est non nul que les valeurs

$$a^{j,B}_{\rho}(0, x^i),\ \rho > \tau_0, \quad a^{j,B}_{\rho}(0, x^i) \quad \text{et} \quad \partial_{(0)}\, a^{j,B}_{\rho}(0, x^i), \qquad \rho \leq \tau_0,$$

sont imposées et que le développement y^{B} est unique.

3. Convergence du développement. — Si on suppose l'analycité au voisinage de l'origine dans R^{n+t} de

$$B_k(x^i, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} b^{-(k-1)+j}_{k}(x^i) \frac{\xi^j}{j!}, \qquad 0 \leq k \leq t-1$$

et si les opérateurs $h^{A}_{B}(x, D)$ sont analytiques au voisinage de l'origine

dans R^{n+1}, les fonctions

$$y^{\rho,B}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_\rho^{j,B}(x)\frac{\xi^j}{j!}, \qquad \rho \leq \tau_0,$$

$$y^{\rho,B}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_\rho^{j,B}(x)\frac{\xi^j}{j!}, \qquad \rho > \tau_0$$

sont analytiques dans un voisinage de l'origine de R^{n+2}. On peut ainsi généraliser les résultats obtenus dans (8).

(*) Séance du 6 novembre 1972.

(1) Mme Y. Choquet-Bruhat, *J. Math. pures et appl.*, 48, 1969, p. 117 à 158.

(2) Gärding, Kotake et Leray, *Bull. Soc. math. Fr.*, 92, 1964, p. 263-361.

(3) D. Ludwig, *Comm. pure appl.*, 13, 1960, p. 473-508.

(4) D. Ludwig, n° 40, Report NO 9351, Courant Institute of Math. Sc., A. E. C. Computing and applied Math. Center, 1961.

(5) J. Vaillant, *J. Math. pures et appl.*, 47, 1968, p. 1 à 40.

(6) J. Vaillant, *J. Math. pures et appl.*, 50, 1971, p. 25 à 51.

(7) J. C. de Paris, *J. Math. pures et appl.*, 51, 1972, p. 231 à 256.

(8) Wagschal, *Comptes rendus*, 272, série A, 1971, p. 1719; *J. Math. pures et appl.* (à paraître).

84, *rue Carpeaux*,
59100 *Roubaix, Nord.*

On considère le système carré d'ordre m :

$$hy = h_B^A(x,D)\ y^B(x) = 0\ ,\quad h_B^A(x,D) \quad \text{opérateur d'ordre} \leq t\ ,$$

$t \geq 1$, $x \in \Omega$ ouvert d'une variété C^∞ de dimension $(n+1)$, $1 \leq A, B \leq m$.

Dans une carte de coordonnées locales on notera :

$$(x,\xi) = ((x^o,x^1,\ldots,x^n)\ ,\ (\xi_o,\xi_1,\ldots,\xi_n)) \in T^*(\Omega)$$

et les équations s'écriront :

$$\left[H_B^A(x,D) + H_B^{*A}(x,D) + H_B^{**A}(x,D) + \ldots + \overbrace{H_B^{*\ldots*A}}^{t}(x,D)\right]\ y^B(x) = 0$$

$H = (H_B^A(x,\xi))$ désigne le symbole principal de h au sens de Cauchy-Kowaleski et on suppose dét H non identiquement nul ; H^*, H^{**} , etc... désignent les matrices des termes d'ordre $t-1$, $t-2$, etc ; .

On suppose qu'il existe des entiers $\nu_o,\nu_1,\ldots\nu_\sigma$, $\nu_o = 2$, strictements positifs et des fonctions C^∞ en x, polynômiales en ξ, irréductibles sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \Omega$, de degré $\tau_o,\tau_1,\ldots,\tau_\sigma$, constants, tels que :

$$\text{dét } H = \prod_{s=0}^{s=\sigma} \left[H_s\right]^{\nu_s}$$

on posera $H' = H_o$ et $H'' = \prod_{s=1}^{s=\sigma} \left[H_s\right]^{\nu_s}$.

On notera Φ_s , l'anneau localisé de $\mathbb{R}\left[\xi_o,\xi_1,\ldots,\xi_n\right]$ par rapport à l'idéal engendré par H_s , $0 \leq s \leq \sigma$.

I - HYPOTHESES RELATIVES A H' ET DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE.-

(1) Si $\sim$ désigne l'équivalence des matrices on suppose :

$$H \sim \begin{bmatrix} (H')^2 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

On construit des polynômes $\delta^B(x,\xi)$ et $\gamma_A(x,\xi)$ vérifiant :

$\delta^B(x,\xi) = A^B_1(x,\xi)$ avec $A = A^1_1(x,\xi)$ non divisible par $H'(x,\xi)$

$\gamma_A(x,\xi) = A^1_A(x,\xi)$ ce qui donne : (convention d'Enstein pour la sommation)

$$H^A_B \, \delta^B \equiv 0 \left[\text{mod. } (H')^2\right] \quad \text{et} \quad \gamma_A \, H^A_B \equiv 0 \left[\text{mod. } (H')^2\right].$$

Les polynômes δ^B et γ_A sont des polynômes en $(\xi_o,\xi_1,\ldots,\xi_n)$ indépendants du choix des coordonnées.

On désigne, en un point x, par Ψ_o le quotient de $\emptyset_o$ par l'idéal engendré par $(H')^2.(H^A_B)$ définit canoniquement une matrice d'éléments de Ψ_o équivalente à :

$$\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

(H^A_B) définit aussi un endomorphisme de $(\Psi_o)^m$ dont le noyau est un module libre de dimension 1. On désigne par $(\tilde{d}^B)$ une base de ce noyau et (d^B) un représentant dans $\emptyset_o^m$, (d^B) vérifie : $H^A_B \, d^B \equiv 0 \left[\text{mod. } (H')^2\right]$.

d^B est définie à la transformation $d \xrightarrow{\psi} \lambda d + \mu (H')^2$ près, λ inversible dans $\emptyset_o$, $\mu \in \emptyset_o^m$.

On a donc $H^A_B \, d^B = \sigma^A (H')^2$ avec $\sigma^A \in \emptyset_o$.

On vérifie que δ^B est un d^B particulier.

[On a des résultats analogues pour g_A vérifiant $g_A H_B^A \equiv 0$ [mod. $(H')^2$] et pour γ_A].

On remarque que les éléments déduits de (δ^B) par une transformation $\hat{\psi}$, indépendante du choix des coordonnées, sont eux-mêmes indépendants de ce choix.

On a $H_B^A \delta^B \gamma_A = (H')^2 H'' A$.

On appelle ν la valuation de l'anneau localisé $\emptyset_o$

$$\nu\left[\frac{H_B^A \delta^B \gamma_A}{(H')^2}\right] = 0 \iff H'' A \text{ non divisible par } H'$$

On pose : $g_A H_B^A = (H')^2 \rho_B$.

$$H_B^A d^B g_A = \sigma^A g_A (H')^2 = \rho_B d^B (H')^2 .$$

$\nu[\sigma^A g_A]$ et $\nu[\rho_B d^B]$ ne dépendent pas du choix de d^B et g_A à la transformation $\hat{\psi}$ près.

Puisque δ^B et γ_A sont des d^B et g_A particuliers :

$\nu[\sigma^A g_A] = \nu[\rho_B d^B]$. On pose : $H = \sigma^A g_A$.

(2) On construit, si η est une forme élément de volume sur la variété, le polynôme :

$[H_B^{*A} - \frac{1}{2\eta} \partial_\lambda^\lambda (\eta H_B^A)] \gamma_A \delta^B$ invariant dans un changement de coordonnées locales.

Le polynôme $K = [H_B^{*A} - \frac{1}{2\eta} \partial_\lambda^\lambda (\eta H_B^A)] \gamma_A \delta^B + \frac{1}{2} H_B^A [\partial^\lambda \delta^B \partial_\lambda \gamma_A - \partial_\lambda \delta^B \partial^\lambda \gamma_A]$

est aussi un invariant.

On démontre que : $g_A \partial^\alpha H_B^A d^B \equiv 0$ [mod. H']

$$g_A \partial_\alpha H_B^A d^B \equiv 0 \text{ [mod. } H']$$

$$g_A \partial^{\alpha\beta} H_B^A d^B + g_A \partial^\alpha H_B^A \partial^\beta d^B + g_A \partial^\beta H_B^A \partial^\alpha d^B \equiv 2H \partial^\alpha H' \partial^\beta H' \text{ [mod. } H']$$

α et β varient de 0 à n.

On en déduit que :

$$K \equiv \left[H_B^{*A} - \frac{1}{2}\partial_\lambda^\lambda H_B^A\right]\gamma_A\ \delta^B + \frac{1}{2} H_B^A\left[\partial^\lambda\delta^B\partial_\lambda\gamma_A - \partial^\lambda\gamma_A\partial_\lambda\delta^B\right] \quad [\text{mod. } H']$$

On pose : $K' = \left[H_B^{*A} - \frac{1}{2}\partial_\lambda^\lambda H_B^A\right]g_A\ d^B + \frac{1}{2} H_B^A\left[\partial^\lambda d^B\partial_\lambda g_A - \partial^\lambda g_A\partial_\lambda d^B\right]$

et on a : $K' \equiv \lambda K$ avec $\nu(\lambda) = 0$.

K' n'est pas invariant a priori mais $\nu(K') > 0 \Longleftrightarrow \nu(K) > 0$.

On pose enfin : $K = H_B^{*A}\ g_A\ d^B - H_B^A\partial^\alpha g_A\partial_\alpha d^B - H\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'$

alors $\nu(K) > 0 \Longleftrightarrow \nu(K) > 0$ car $K \equiv K' \pmod{H'}$.

En résumé : $\nu(K) > 0$ est indépendant en un point $x \in \Omega$ de la carte locale et du choix de d^B, g_A et de η.

(3) Si une hypersurface P d'équation locale $\psi(x) = C^{te}$, de forme $\eta = (\eta_o,\eta_1,\ldots,\eta_n) = (\partial_o\psi,\partial_1\psi,\ldots,\partial_n\psi)$ vérifie dét $H(x,\eta) = 0$ en tout $x \in \Omega$ on dit qu'elle est caractéristique.

Ceci sera vrai pour P vérifiant $H'(x,\eta) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.

On fait les hypothèses suivantes pour toute P caractéristique vérifiant $\forall\, x \in \Omega$, $H'(x, \text{grad } \psi(x)) = 0$.

i) $A_1^1(x, \text{grad } \psi(x)) \neq 0$ sur $\Omega \cap P$.

ii) $\nu(K) > 0$ sur $\Omega \cap P$.

iii) $\begin{cases} H''(x, \text{grad } \psi(x)) \neq 0 & \text{sur } \Omega \cap P \text{ et} \\ H(x, \text{grad } \psi(x)) \neq 0 & \text{sur } \Omega \cap P \end{cases}$

iv) $p^\alpha = \partial^\alpha H'(x, \text{grad } \psi(x)) \neq 0$ sur $\Omega \cap P$

(p^α) est appelé vecteur bicaractéristique.

Ces conditions sont celles du cas II(b), dans l'étude faite par Monsieur Jean Vaillant du problème : données de Cauchy portées par une caractéristique double [8].

④ - *Résolution formelle.*

On cherche une solution formelle de l'équation : $h_B^A(x,D) = 0$

sous la forme : $y^B(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(\psi(x))a^{j,B}(x)$ avec $f_j'(\psi) = f_{j-1}(\psi)$.

$\forall\, j \in \mathbb{Z}$, $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (ou f_j est une distribution).

On rappelle le résultat suivant :

$$h_B^A(y^B(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{r+j=k} H_B^{r,A}(\psi(x)) \left[a^{j,B}(x)\right] \right] f_{-t+k}(\psi(x)) \ .$$

Les opérateurs $H_B^{r,A}(\psi(x))$ dépendent de ψ et sont d'ordre $\leq r$.

On trouve une solution en identifiant les crochets à zéro pour tout k

$$H_B^{OA}(\psi(x)) = H_B^A(x,\text{grad } \psi(x))$$

on suppose ψ déterminée vérifiant I (3).

On effectue alors un changement de coordonnées, ce qui est toujours possible, de telle sorte que l'on ait :

$$x^{o'} = \psi(x) \quad , \quad x = (x^o,x^1,\ldots,x^n) = (x^{o'},x^1,\ldots,x^n)$$

$$H_B^{1A}(\psi(x)) = \partial^\alpha H_B^A(x,\text{grad } \psi(x))\ \partial_\alpha + H_B^{*A}(x,\text{grad } \psi(x)) \ .$$

$$H_B^{2A}(\psi(x)) = \frac{1}{2}\ \partial^{\alpha\beta} H_B^A(x,\text{grad } \psi(x))\ \partial_{\alpha\beta} + \partial^\alpha H_B^{*A}(x,\text{grad } \psi(x))\ \partial_\alpha + H_B^{**A}(x,\text{grad } \psi(x)).$$

On écrira désormais $(x,\text{grad } \psi(x)) = P$.

∂_o désignant la dérivation par rapport à $x^{o'}$.

a) Détermination de $a^{O,B}$: *$O^{ième}$ équation :*

$H_B^A(P)a^{O,B} = 0 \iff a^{O,B}$ vecteur du noyau de $(H_B^A(P))$.

$a^{O,B} \neq 0$.

On a alors $a^{O,B}(x) = U_o(x)d^B(P)$ qu'on écrit : $a^{O,B} = U_o d^B(P)$.

Essayons de déterminer U_o .

1ère équation :

$$H_B^{0A}[a^{1,B}] + H_B^{1A}[a^{0,B}] = 0 \iff H_B^A(P)a^{1,B} + \partial^\alpha H_B^A(P)\,\partial_\alpha a^{0,B} + H_B^{*A}(P)a^{0,B} = 0 .$$

On trouve une condition suffisante pour résoudre en $a^{1,B}$:

$$g_A(P)\left[\partial^\alpha H_B^A(P)\,\partial_\alpha a^{0,B} + H_B^{*A}(P)a^{0,B}\right] = 0 \qquad (1)$$

$\partial_\alpha a^{0,B} = \partial_\alpha U_o d^B(P) + U_o \partial_\alpha d^B(P)$ d'où la condition :

$$g_A(P)\left(\partial^\alpha H_B^A(P)d^B(P)\right)\partial_\alpha U_o + g_A(P)\left(\partial^\alpha H_B^A(P)\partial_\alpha d^B(P) + H_B^{*A}(P)d^B(P)\right)U_o = 0$$

comme $g_A(P)\partial^\alpha H_B^A(P)d^B(P) = 0$ on obtient :

$$g_A(P)\left[\partial^\alpha H_B^A(P)\partial_\alpha d^B(P) + H_B^{*A}(P)d^B(P)\right] = 0 \iff g_A(P)\Omega^A(P) = 0$$

avec $\Omega^A(P) = \partial^\alpha H_B^A(P)\partial_\alpha d^B(P) + H_B^{*A}(P)d^B(P) = H_B^{1,A}[d^B(P)]$

Nous allons expliciter cette condition :

$$K = g_A\, H_B^{*A} d^B - H_B^A \partial^\alpha g_A \partial_\alpha d^B - H\partial^\alpha H' \partial_\alpha H'$$

$$g_A \partial^\alpha H_B^A \partial_\alpha d^B + g_A H_B^{*A} d^B = - H_B^A \partial^\alpha g_A \partial_\alpha d^B + g_A H_B^{*A} d^B$$

$\forall\, x \in \Omega$, $H'(P) = 0$ car ψ vérifie I (3)

$$\partial_o H'(P) + \partial^\alpha H'(P)\partial_{o\alpha}\psi(x) = 0 \quad \text{or} \quad \partial_{o\alpha}\psi(x) = 0$$

donc $\partial_o H'(P) = 0$ et $\partial^o H'(P) = 0$ d'après l'identité d'Euler.

$$\partial_i H'(P) + \partial^\alpha H'(P)\partial_{i\alpha}\psi(x) = 0 \quad \text{or} \quad \partial_{i\alpha}\psi(x) = 0 \Longrightarrow \partial^\alpha H'(P)\partial_\alpha H'(P) = 0$$

i variant de 1 à n.

$$K(P) = 0 \iff g_A(P)\Omega^A(P) = 0 \iff g_A(P)H_B^{1A}[U_o d^B(P)] = 0 \qquad (2)$$

On a supposé $K(P) = 0$

$a^{1,B} = U_1 d^B(P) + V_1^B(P)$, $V_1^B(P)$ solution particulière de la 1ère équation.

$$H_B^A(P)V_1^B(P) + H_B^{1,A}[a^{o,B}] = 0 \Longleftrightarrow H_B^A(P)V_1^B(P) + \partial^\alpha H_B^A(P)d^B(P)\partial_\alpha U_o + \Omega^A(P)\ U_o = 0 \Longleftrightarrow$$

$$H_B^A(P)(V_1^B(P) - \partial^\alpha d^B(P)\partial_\alpha U_o) + \Omega^A(P)\ U_o = 0 .$$

On choisit $V_1^B(P) = \partial^\alpha d^B(P)\partial_\alpha U_o + \lambda^B(P)U_o$ ce qui impose de choisir $\lambda^B(P)$ vérifiant : $H_B^A(P)\lambda^B(P) + \Omega^A(P) = 0$ ce qui est possible.

Il reste à déterminer U_o et U_1.

2ème équation :

$$H_B^A(P)a^{2,B} + H_B^{1,A}[a^{1,B}] + H_B^{2,A}[a^{o,B}] = 0 \Longleftrightarrow$$

$$H_B^A(P)a^{2,B} + H_B^{1,A}[U_1 d^B(P)] + H_B^{1,A}[V_1^B(P)] + H_B^{2,A}[U_o d^B(P)] = 0$$

$$H_B^{1,A}[V_1^B(P)] = \partial^\alpha H_B^A(P)\partial_\alpha V_1^B(P) + H_B^{*A}(P)V_1^B(P)$$

$$H_B^{2,A}[U_o d^B] = \frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H_B^A(P)d^B(P)\partial_{\alpha\beta}U_o + [\partial^{\alpha\beta}H_B^A(P)\partial_\beta d^B(P)$$

$$+ \partial^\alpha H_B^{*A}(P)d^B(P)]\partial_\alpha U_o + [\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H_B^A(P)\partial_{\alpha\beta}d^B(P) + \partial^\alpha H_B^{*A}(P)\partial_\alpha d^B(P) + H_B^{**A}(P)d^B(P)]U_o = 0 .$$

On sait que d'après le calcul qui a permis d'établir (2) :

$$g_A(P)H_B^{1,A}[U_1 d^B(P)] = 0$$

$$\partial_\beta V_1^B(P) = \partial_\beta\partial^\alpha d^B(P)\partial_\alpha U_o + \partial^\alpha d^B(P)\partial_{\alpha\beta}U_o + \partial_\beta\lambda^B(P)U_o + \lambda^B(P)\partial_\beta U_o .$$

On obtient après multiplication de la 2ème équation par $g_A(P)$ la condition suffisante qui permettra de résoudre en $a^{2,B}$:

$$g_A(P)\left[\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H_B^A(P)d^B(P) + \partial^\alpha H_B^A(P)\partial^\beta d^B(P)\right]\partial_{\alpha\beta}U_o + g_A(P)\left[\partial^\beta H_B^A(P)\partial_\beta^\alpha d^B(P) + \right.$$

$$\left.\partial^\alpha H_B^A(P)\lambda^B(P) + H_B^{*A}(P)\partial^\alpha d^B(P) + \partial^{\alpha\beta}H_B^A(P)\partial_\beta d^B(P) + \partial^\alpha H_B^{*A}(P)d^B(P)\right]\partial_\alpha U_o +$$

$$g_A(P)\left[H_B^{1,A}[\lambda^B(P)] + H_B^{2,A}[d^B(P)]\right]U_o = 0 .$$

Nous savons que :

$$\left[\frac{1}{2}g_A(P)\partial^{\alpha\beta}H_B^A(P)d^B(P) + g_A(P)\partial^\alpha H_B^A(P)\partial^\beta d^B(P)\right]\partial_{\alpha\beta} = H(P)\partial^\alpha H'(P)\partial^\beta H'(P)\partial_{\alpha\beta}$$

Précisons le coefficient de $\partial_\alpha U_o$.

$$g_A(P)\partial^\alpha H_B^A(P)\lambda^B(P) = -\partial^\alpha g_A(P)H_B^A(P)\lambda^B(P) = \partial^\alpha g_A(P)\partial^\beta H_B^A(P)\partial_\beta d^B(P) + \partial^\alpha g_A(P)H_B^{*A}(P)d^B(P)$$

Posons : $K_1 = H_B^{*A} g_A d^B$, $K_2 = H_B^A \partial_\alpha d^B \partial^\alpha g_A$ et $K_3 = H\partial^\alpha H' \partial_\alpha H'$

$$-\partial^\alpha K_2(P) = \left(g_A\left[\partial^\beta H_B^A \partial_\beta^\alpha d^B + \partial^{\alpha\beta} H_B^A \partial_\beta d^B\right] + \partial^\alpha g_A \partial^\beta H_B^A \partial_\beta d^B\right)(P)$$

$$\partial^\alpha K_1(P) = \left[\partial^\alpha g_A H_B^{*A} d^B + g_A H_B^{*A} \partial^\alpha d^B + g_A \partial^\alpha H_B^{*A} d^B\right](P)$$

$$\partial^\alpha (K_1 - K_2)(P) = \partial^\alpha K(P) + \partial^\alpha K_3(P)$$

$$K = H'K' \Longrightarrow \partial^\alpha K(P) = 0 \quad (\text{mod. } p^\alpha)$$

$$\partial^\alpha K_3(P) = H(P)\partial^\beta H'(P)\partial_\beta^\alpha H'(P)$$

d'où la condition qui permettra de résoudre en $a^{2,B}$:

$$H(P)p^\alpha p^\beta \partial_{\alpha\beta} U_o + H(P)p^\beta \partial_\beta p^\alpha \partial_\alpha U_o + \theta(P)U_o = 0 \quad \text{avec}$$

$$\theta(P) = g_A(P)\left[H_B^{1,A}\left[\lambda^B(P)\right] + H_B^{2,A}\left[d^B(P)\right]\right]$$

$H(P) \neq 0$ et d'après l'identité d'Euler $p^o = 0$.

L'équation obtenue s'écrit :

$$p^i p^j \partial_{ij} U_o + p^j \partial_j p^i \partial_i U_o + \theta_1(P)\, U_o = 0 \quad , \quad 1 \leq i, j \leq n .$$

Si $p^1 \neq 0$ par exemple, on considère une hypersurface Q, transverse à P d'équation $x^1 = 0$ et l'on obtient :

$$\partial_{(1)^2} U_o + w(P)\, \partial_{(1)} U_o + w_1(P)\, U_o = 0 ,$$

équation différentielle du second ordre qui s'intégre le long des bicaractéristiques issues de Φ.

On connaît donc U_o et par suite $(a^{o,B})$.

b) *Détermination de* $a^{p-1,B}$:

On suppose connus les coefficients $a^{k,B}$, $0 \leq k \leq p-2$.

Ils vérifient la $(k)^{\text{ième}}$ équation :

$$H_B^A(P)\, a^{k,B} + H_B^{1,A}\left[a^{k-1,B}\right] + \sum_{\substack{r+j=k \\ r\geq 2}} H_B^{r,A}\left[a^{j,B}\right] = 0$$

$$a^{k,B} = U_k d^B(P) + V_k^B(P) \quad \text{et} \quad V_k^B(P) = \partial^\alpha d^B(P)\partial_\alpha U_{k-1} + \lambda^B(P)U_{k-1} + W_k^B(P) \ .$$

Les coefficients U_k sont déterminés par l'équation différentielle :

$$\partial_{(1)}{}^2 U_k + w(P)\, \partial_{(1)} U_k + w_1(P)\, U_k + w_k(P) = 0$$

$$w_k(P) = \frac{g_A(P)}{H(P)} \left(H_B^{1,A}\left[W_{k+1}^B(P)\right] + H_B^{2,A}\left[V_k^B(P)\right] + \sum_{\substack{r+j=k+2 \\ r>2}} H_B^{r,A}\left[a^{j,B}\right]\right) \ .$$

Les équations qui permettent de déterminer les coefficients $a^{k,B}$ sont compatibles jusqu'à l'ordre p, de façon précise, il est possible de déterminer $a^{p,B}$ et $a^{p-1,B}$ de la $p^{\text{ème}}$ et de la $(p-1)^{\text{ième}}$ équation sous la forme :

$$a^{p-1,B} = U_{p-1} d^B(P) + V_{p-1}^B(P) \ ,$$

$$a^{p,B} = U_p d^B(P) + V_p^B(P)$$

$V_{p-1}^B(P)$ et $V_p^B(P)$ sont des solutions particulières des respectivement $(p-1)^{\text{ième}}$ et $p^{\text{ième}}$ équations et :

$$V_{p-1}^B(P) = \partial^\alpha d^B(P)\partial_\alpha U_{p-2} + \lambda^B(P)\, U_{p-2} + W_{p-1}^B(P)$$

Montrons que l'on peut déterminer alors U_{p-1} en intégrant une équation différentielle du type indiqué ce qui détermine $a^{p+1,B}$ sous la forme précisée ci-dessus.

$V_p^B(P)$ étant solution particulière de la $(p+1)^{\text{ième}}$ équation on a :

$$H_B^A(P)V_p^B(P) + H_B^{1,A}\left[a^{p-1,B}\right] + \sum_{\substack{r+j=p \\ r>1}} H_B^{r,A}\left[a^{j,B}\right] = 0 \quad \text{soit}$$

$$H_B^A(P)V_p^B(P) + H_B^{1,A}\left[U_{p-1} d^B(P)\right] + H_B^{1,A}\left[V_{p-1}^B(P)\right] + \sum_{\substack{r+j=p \\ r>1}} H_B^{r,A}\left[a^{j,B}\right] = 0$$

avec

$$H_B^{1,A}[U_{p-1}d^B] = \partial^\alpha H_B^A(P)d^B(P)\partial_\alpha U_{p-1} + \Omega^A(P)U_{p-1} = - H_B^A(P)\partial^\alpha d^B(P)\partial_\alpha U_{p-1} + \Omega^A(P)U_{p-1}$$

soit encore :

$$H_B^A(P)(V_p^B(P) - \partial^\alpha d^B(P)\partial_\alpha U_{p-1}) + \Omega^A(P)U_{p-1} + H_B^{1,A}[V_{p-1}^B(P)] + \sum_{\substack{r+j=p \\ r>1}} H_B^{r,A}[a^{j,B}] = 0$$

On choisit $V_p^B(P) = \partial^\alpha d^B(P)\partial_\alpha U_{p-1} + \lambda^B(P)U_{p-1} + W_p^B(P) = \tilde{V}_p^B(P) + W_p^B(P)$

$W_p^B(P)$ vérifiant :

$$H_B^A(P)W_p^B(P) + H_B^{1,A}[V_{p-1}^B(P)] + \sum_{\substack{r+j=p \\ r>1}} H_B^{r,A}[a^{j,B}] = 0$$

ce qui est possible d'après les hypothèses de récurrence.

On écrit ensuite la $(p+1)^{ième}$ équation :

$$H_B^{0,A}\, a^{p+1,B} + H_B^{1,A}[a^{p,B}] + \sum_{\substack{r+j=p+1 \\ r>1}} H_B^{r,A}[a^{j,B}] = 0$$

$$H_B^{1,A}[a^{p,B}] = H_B^{1,A}[U_p d^B(P) + V_p^B(P)] = H_B^{1,A}[U_p d^B(P)] + H_B^{1,A}[V_p^B(P)]$$

La $(p+1)^{ième}$ équation s'écrit :

$$H_B^{0,A}[a^{p+1,B}] + H_B^{1,A}\, U_p d^B(P) + H_B^{1,A}[V_p^B(P)] + \sum_{\substack{r+j=p+1 \\ r>1}} H_B^{r,A}[a^{j,B}] = 0$$

$$H_B^{2,A}[a^{p-1,B}] = H_B^{2,A}[U_{p-1}d^B(P)] + H_B^{2,A}[V_{p-1}^B(P)].$$

On multiplie par $g_A(P)$ et on trouve la condition qui permet de déterminer $a^{p+2,B}$:

$$g_A(P)(H_B^{1,A}[\tilde{V}_p^B(P)] + H_B^{2,A}[U_{p-1}d^B(P)]) + g_A(P)(H_B^{1,A}[W_p^B(P)] + H_B^{2,A}[V_{p-1}^B(P)]) + g_A(P)\Big(\sum_{\substack{r+j=p+1 \\ r>2}} H_B^{r,A}[a^{j,B}]\Big) = 0 \iff$$

$$H(P)\left[\partial_{(1)}{}^2 U_{p-1} + w(P)\,\partial_{(1)} U_{p-1} + w_1(P)U_{p-1}\right] + H(P)w_{p-1}(P) = 0$$

$$w_{p-1}(P) = \frac{1}{H(P)}\, g_A(P)\left[H_B^{1,A}[W_p^B(P)] + H_B^{2,A}[V_{p-1}^B(P)] + \sum_{\substack{r+j=p+1 \\ r>2}} H_B^{r,A}[a^{j,B}]\right] = 0 .$$

On peut donc déterminer U_{p-1} en intégrant une équation différentielle du type indiqué.

$$a^{p+1,B} = U_{p+1} d^B(P) + V^B_{p+1}(P)$$

$V^B_{p+1}(P)$ solution particulière de la $(p+1)^{\text{ième}}$ équation.

$$a^{p,B} = U_p d^B(P) + V^B_p(P)$$

$V^B_p(P) = \partial^\alpha d^B(P) \partial_\alpha U_{p-1} + \lambda^B(P) U_{p-1} + W^B_p(P)$, solution particulière de la $(p)^{\text{ième}}$ équation.

On peut donc déterminer tous les coefficients $a^{j,B}$.

II - HYPOTHESES RELATIVES AUX AUTRES FACTEURS ET DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES.-

On suppose pour tout $1 \leq s \leq \sigma$

$$H \sim \begin{bmatrix} H_s & & & & & \\ & H_s & & 0 & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & H_s & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \\ & 0 & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \nu_s$$

Soit s fixé.

On construit des polynômes $\delta^B_D(x,\xi)$ et $\gamma^{\bar{F}}_{\bar{A}}(x,\xi)$, $1 \leq \bar{A}, \bar{F} \leq \nu_s$ vérifiant :

$$H^A_B \, \delta^B_D \equiv 0 \pmod{H_s}$$ et indépendants du choix des coordonnées. En un point $x \in \Omega$, on désigne par Ψ_s le quotient de Φ_s par l'idéal engendré par H_s. H définit un endomorphisme de $(\Psi_s)^m$ dont le noyau est un module libre de dimension ν_s et :

$$H \sim \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \\ & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right] \Bigg\} \nu_s$$

On désigne par $(\tilde{d}{}^B_{\overline{D}})$ une base de ce noyau et $(d^B_{\overline{D}})$ un représentant dans $(\Phi_s)^m$ alors $H^A_B \, d^B_{\overline{D}} \equiv 0 \pmod{H_s}$.

d^B est défini à la transformation $(d^B) \longrightarrow \lambda(d^B) + \mu H_s$ près λ inversible dans Φ_s , $\mu \in (\Phi_s)^m$.

On a donc $H^A_B \, d^B_{\overline{D}} = \sigma^A_{\overline{D}} \, H_s$ avec $\sigma^A_{\overline{D}} \in \Phi_s$.

On vérifie que $\delta^B_{\overline{D}}$ est un $d^B_{\overline{D}}$ particulier.

On a des résultats analogues pour $g^{\overline{F}}_A$ vérifiant :

$$g^{\overline{F}}_A \, H^A_B \equiv 0 \pmod{H_s} \quad \text{et pour} \quad \gamma^{\overline{F}}_A .$$

On pose :

$$H^{\overline{F}}_{\overline{D}} = \frac{g^{\overline{F}}_A \, H^A_B \, d^B_{\overline{D}}}{H_s}$$

on sait que $H_s = \det (H^{\overline{F}}_{\overline{D}})$ n'est pas divisible par H_s.

Pour toute ψ caractéristique pour H_s on suppose que :

$$H_s(x, \operatorname{grad} \psi(x)) \neq 0 .$$

Il reste à déterminer une solution formelle de $h^A_B(x,D) \, y^B(x) = 0$ sous la forme :

$$y^B(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(\psi(x)) \, a^{j,B}(x) \ , \ \psi \text{ caractéristique pour } H_s$$

$$f'_j = f_{j-1} \quad j \in \mathbb{Z} .$$

On doit avoir

1) $H_B^A(x,\text{grad } \psi(x))\ a^{1,B}(x) = 0$ d'où

$$a^{1,B}(x) = U_1^{\bar{D}}(x)\ d_{\bar{D}}^B(x,\text{grad } \psi(x)) \ , \quad 1 \leq \bar{D} \leq \nu_s \ ,$$

2) $H_B^A(x,\text{grad } \psi(x))\ a^{2,B}(x) + H_B^{1,A}(\psi(x))\ [a^{1,B}(x)] = 0$

d'où la condition pour résoudre (2) :

$$g_A^{\bar{F}}(x,\text{grad } \psi(x))\ H_B^{1,A}(\psi(x))\ [a^{1,B}(x)] = 0 \iff$$

$$H_{\bar{D}}^{\bar{F}}(x,\text{grad } \psi(x))\ p^\alpha \partial_\alpha U_1^{\bar{D}} + \theta_{\bar{D}}^{\bar{F}}(x,\text{grad } \psi(x))\ U_1^{\bar{D}} = 0 \ .$$

On détermine $U_1^{\bar{D}}$ en intégrant une équation différentielle ordinaire le long des bicaractéristique issues de ψ compte tenu que $H_s(x,\text{grad } \psi(x)) \neq 0$ et si on suppose par exemple $\partial^o H_s(x,\text{grad } \psi(x)) \neq 0$ (voir le calcul pour H'). Les autres coefficients $a^{j,B}$, $j > 1$ se déterminent de proche en proche.

III - INTEGRATION DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE.-

Soit $a \in \Omega$ et Q une hypersurface passant par a d'équation $x^o = 0$ (sans rapport avec ce qui précède).

Supposons que $H'(a,1,0,\ldots,0) \neq 0$.

On aura donc dans un voisinage Ω' de a, $H'(x,1,0,\ldots,0) \neq 0$.

On suppose que $H'(a,\xi_o,\eta') = 0$ admet τ_o racines distinctes $\xi_o^\rho(\eta')$ réelles pour η' réel, $\eta' \neq 0$, $\eta' = (\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$.

On considère Ψ fonction C^∞, à valeurs réelles, définie dans $\Omega \cap \Omega'$ vérifiant grad $\Psi(a) \neq 0$. On pose $(\text{grad } \Psi)_i(a) = \eta'(a)$.

Soit $\xi_o^\rho(\eta'(a))$ une racine. On sait alors que [3] :

Il existe Ω'' ouvert contenant a, $\Omega'' \subset \Omega \cap \Omega'$ il existe ψ^ρ fonction C^∞ unique vérifiant :

$\forall\, x \in \Omega''$: $\psi^\rho(0,x^1,x^2,\ldots,x^n) = \Psi(x^1,x^2,\ldots,x^n) = \Psi(x')$, $x' = (x^1,x^2,\ldots,x^n)$

$$(\text{grad}\ \psi^\rho)_o(a) = \xi_o^\rho(a) = \xi_o^\rho(\eta'(a))$$

$$H'(x,\text{grad}\ \psi^\rho(x)) = 0 \quad .$$

D'après les hypothèses I (3)

$$H''(x,\ \text{grad}\ \psi^\rho(x)) \neq 0,\ H(x,\text{grad}\ \psi^\rho(x)) \neq 0$$

$$K(x,\text{grad}\ \psi^\rho(x)) = 0$$

$$\partial^\alpha H'(x,\text{grad}\ \psi^\rho(x)) \neq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega'' \ .$$

IV - PROBLEME DE CAUCHY.-

1) Soit $\det(H_B^A(x,\xi)) = \left[\bar{H}_o^2\ H_1^{\nu_1}\ \ldots\ H_\sigma^{\nu_\sigma}\right](x,\xi)$.

On suppose que dans un voisinage de $a \in \Omega$, l'équation :

$$\prod_{s=0}^{s=\sigma} H_s(x,\xi_o,\eta') = 0 \quad \text{admette} \quad \tau \quad \text{racines distinctes.}$$

On notera τ_s le nombre des racines provenant de H_s et $\tau = \sum_{s=0}^{s=\sigma} \tau_s$.

D'après III si on suppose que $H_s(a,1,0,\ldots,0) \neq 0$, $0 \leqslant s < \sigma$ ce qui implique $H_s(x,1,0,\ldots,0) \neq 0$ dans un voisinage de a, on peut construire τ fonctions ψ^ρ vérifiant :

$$\psi^\rho(0,x') = \Psi(x')$$

$$(\text{grad}\ \psi^\rho)_o(a) = \xi_o^\rho(a)$$

$$\prod_{s=0}^{s=\sigma} H_s(x,\text{grad}\ \psi^\rho(x)) = 0.$$

On notera $\partial_o \psi^\rho(0,x') = \xi_o^\rho$.

On associe les vecteurs $(d_{o\rho}^B(P^\rho))$ et les coefficients $a_\rho^{j,B}$, aux racines ξ_o^ρ , $\rho \leqslant \tau_o$.

Le vecteur $(d_{o\rho}^B(P^\rho))$ forme une base du noyau de $(H_B^A(x,\text{grad}\ \psi^\rho(x)))$ avec $P^\rho = (x,\text{grad}\ \psi^\rho(x))$ et sont déterminés en intégrant des équations

différentielles du 2ème ordre le long des bicaractéristiques issues de ψ^ρ.

On associe les vecteurs $(d^B_{\rho\bar{D}(\rho)})$ et les coefficients $a^{j,B}_\rho$ aux racines ξ^ρ_o, $\rho > \tau_o$.

Les vecteurs $(d^B_{\rho\bar{D}(\rho)})$ forment une base du noyau de $H^A_B(x,\text{grad } \psi^\rho(x))$ $\bar{D}(\rho)$ précisant la dimension de ce noyau.

Par exemple si $\tau_o + \tau_1 + \ldots + \tau_{s-1} < \rho < \tau_o + \tau_1 + \ldots + \tau_s$.

$\bar{D}(\rho)$ varie de 1 à ν_s exposant de H_s dans dét H.

Les coefficients $a^{j,B}$ sont déterminés en intégrant des équations différentielles du 1er ordre le long des bicaractéristiques issues de ψ^ρ.

Si $x^o = 0$ est l'équation d'une hypersurface non caractéristique pour h la détermination de $a^{j,B}$, $\rho \leq \tau_o$, impose la connaissance de $a^{j,B}_\rho(0,x')$ et $\partial_{(0)} a^{j,B}_\rho(0,x')$ et celle de $a^{j,B}_\rho$, $\rho > \tau_o$, impose la connaissance de $a^{j,B}_\rho(0,x')$.

2) On se donne les t vecteurs de $\mathbb{R}^m$: $\partial_{(0)^k} y^B(0,x')$, $0 \leq k \leq t-1$, restrictions d'une solution formelle y^B, sur l'hypersurface $x^o = 0$, non caractéristique, définie dans un voisinage de a.

$$\partial_{(0)^k} y^B(0,x') = \sum_{-(k-1)}^{\infty} f_j(\Psi(x'))b^{j,B}_k(x')$$

Le décalage des indices n'impose pas de conditions sur les données.

$$y^B(x) = \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} f_o(\psi^\rho(x))a^{o,B}(x) + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} f_j(\psi^\rho(x))a^{j,B}_\rho(x) .$$

Etude de $\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} f_o(\psi^\rho(x))a^{o,B}_\rho(x) = z^B(x)$

$$\partial_{(o)^k} z^B(x) = \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} \Big(\sum_{r=0}^{r=k} \Big[(A_k^{r,\rho,B}(\psi^\rho(x)) \; [a_\rho^{O,B}(x)]) \; f_{-k+r}(\psi^\rho(x)) \Big] \Big)$$

$A_k^{r,\rho,B}(\psi^\rho(x))$ opérateur d'ordre $\leq r$

Les techniques qui suivent permettent de supposer $U_o^\rho(0,x') = 0$ donc on peut supposer $a^{O,B}(0,x') = 0$.

On rappelle que $a_\rho^{O,B} = U_o^\rho d_{o\rho}^B$, $0 \leq \rho \leq \tau_o$

alors $\partial_{(0)} a_\rho^{O,B}(0,x') = \partial_{(0)} U_o^\rho(0,x') d_{o\rho}^B(0,x') = \partial_{(0)} U_o^\rho(0,x') d_{o\rho}^B$ et

$$\partial_{(0)^k} z^B(0,x') = \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} \Big(\sum_{r=1}^{r=k} A_k^{r,\rho,B}(\xi_o^\rho) [a_\rho^{O,B}(0,x')] \Big) f_{-k+r}(\Psi(x'))$$

et en particulier on obtient, pour $r = 1$, le coefficient de $f_{-k+1}(\Psi(x'))$

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} A_k^{1,\rho,B}(\xi_o^\rho) [a_\rho^{O,B}(0,x')] = \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} k(\xi_o^\rho)^{k-1} \partial_o a_\rho^{O,B}(0,x') = \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} k(\xi_o)^{k-1} \partial_o U_o^\rho(0,x') d_{o\rho}^B$$

et $\quad A_k^{o,\rho,B}(\xi_o^\rho) [a_\rho^{O,B}(0,x')] = 0$

Etude de $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} f_j(\psi^\rho(x)) a_\rho^{j,B}(x) = Z^B(x)$

$$\partial_{(0)^k} Z^B(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \Big[\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} \Big(\sum_{r+j=q} \mathcal{B}_k^{r,\rho,B}(\psi^\rho(x)) [a_\rho^{j,B}(x)] \Big) f_{-k+q}(\psi^\rho(x)) \Big]$$

$\mathcal{B}_k^{r,\rho,B}(\psi^\rho(x))$ opérateur d'ordre $\leq r$

$$\partial_{(0)^k} Z^B(0,x') = \sum_{q=1}^{\infty} \Big[\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} \Big(\sum_{r+j=q} \mathcal{B}_k^{r,\rho,B}(\xi_o^\rho) [a_\rho^{j,B}(0,x')] \Big) \Big] f_{-k+q}(\Psi(x')) \; .$$

On obtient pour $q = 1$ $(j = 1)$ le coefficient de $f_{-k+1}(\Psi(x'))$:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} \mathcal{B}_k^{O,\rho,B}(\xi_o^\rho) [a_\rho^{1,B}(0,x')] = \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} (\xi_o^\rho)^k \; a_\rho^{1,B}(0,x') \; .$$

On rappelle que $a_\rho^{1,B} = U_1^{\rho\bar{D}(\rho)} d_{\rho\bar{D}(\rho)}^B$, $\rho > \tau_o$

$$a_\rho^{1,B}(0,x') = U_1^{\rho\bar{D}(\rho)}(0,x') d_{\rho\bar{D}(\rho)}^B(0,x') = U_1^{\rho\bar{D}(\rho)}(0,x') d_{\rho\bar{D}(\rho)}^B$$

$$a_\rho^{1,B}(0,x') = U_1^\rho(0,x') d_{o\rho}^B + \partial^o d_{o\rho}^B \partial_o U_o(0,x') \; , \quad \rho \leq \tau_o \; .$$

On identifie le coefficient de $f_{-k+1}(\Psi(x'))$ à celui de $\partial_{(0)^k} y^B(0,x')$ soit $b_k^{-(k-1)}(x')$ et on obtient: [2], [3], [6], [9], [10] .

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (U_1^\rho(0,x')d_{o\rho}^B + \partial_o U_o^\rho(0,x')\partial^o d_{o\rho}^B) + \sum_{\rho>\tau_o}^{\rho=\tau} U_1^{\rho\bar{D}(\rho)}(0,x')d_{\rho\bar{D}(\rho)}^B = b_o^{1,B}(x')$$

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\partial_o U_o^\rho(0,x')d_{o\rho}^B + (\xi_o^\rho)\partial_o U_o^\rho(0,x')\partial^o d_{o\rho}^B) + \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)U_1^\rho(0,x')d_{o\rho}^B + \sum_{\rho>\tau_o}^{\rho=\tau} (\xi_o^\rho)U_1^{\rho\bar{D}(\rho)}(0,x')d_{\rho\bar{D}(\rho)}^B = b_1^{0,B}(x')$$

$$\vdots$$

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} k(\xi_o^\rho)^{k-1}\partial_o U_o^\rho(0,x')d_{o\rho}^B + (\xi_o^\rho)^k\partial_o U_o^\rho(0,x')\partial^o d_{o\rho}^B + \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^k U_1^\rho(0,x')d_{o\rho}^B + \sum_{\rho>\tau_o}^{\rho=\tau} (\xi_o^\rho)^k U_1^{\rho\bar{D}(\rho)}(0,x')d_{\rho\bar{D}(\rho)}^B = b_k^{-(k-1)B}(x')$$

$$\vdots$$

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (t-1)(\xi_o^\rho)^{t-2}\partial_o U_o^\rho(0,x')d_{o\rho}^B + (\xi_o^\rho)^{t-1}\partial_o U_o^\rho(0,x')\partial^o d_{o\rho}^B + \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^{t-1}U_1^\rho(0,x')d_{o\rho}^B + \sum_{\rho>\tau_o}^{\rho=\tau} (\xi_o^\rho)^{t-1}U_1^{\rho\bar{D}(\rho)}(0,x')d_{\rho\bar{D}(\rho)}^B = b_{t-1}^{-(t-2)B}(x')$$

On obtient un système de mt équations à mt inconnues :

$$\ldots \underbrace{U_1^{\rho}(0,x') \;\; \partial_o U_o^{\rho}(0,x')}_{1 \leq \rho \leq \tau_o} \quad \ldots \quad \underbrace{U_1^{\rho \bar{D}(\rho)}(0,x')}_{\tau_o+1 \leq \rho \leq \tau} \quad \ldots$$

et le déterminant du système est le suivant :

$$\begin{array}{cccccccc}
d^B_{o1} & \partial^o d^B_{o1} & \cdots & d^B_o & \partial^o d^B_o & \cdots & d^B_{\rho \bar{D}(\rho)} & \cdots \\
(\xi_o^1)\, d^B_{o1} & (\xi_o^1)\, \partial^o d^B_{o1} + d^B_{o1} & \cdots & (\xi_o)\, d^B_{o\rho} & (\xi_o)\, \partial^o d^B_{o\rho} + d^B_{o\rho} & \cdots & (\xi_o^{\rho})\, d^B_{\rho \bar{D}(\rho)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
(\xi_o^1)^k d^B_{o1} & (\xi_o^1)^k \partial^o d^B_{o1} + k\,(\xi_o^1)^{k-1}\, d^B_{o1} & \cdots & (\xi_o)^k\, d^B_{o\rho} & (\xi_o^{\rho})^k\, \partial^o d^B_{o\rho} + k\,(\xi_o^{\rho})^{k-1}\, d^B_{o\rho} & \cdots & (\xi_o^{\rho})^k\, d^B_{\rho \bar{D}(\rho)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
(\xi_o^1)^{t-1}\, d^B_{o1} & (\xi_o^1)^{t-1}\, \partial^o d^B_{o1} + (t-1)\,(\xi_o^1)^{t-2}\, d^B_{o1} & \cdots & (\xi_o^{\rho})^{t-1}\, d^B_{o\rho} & (\xi_o^{\rho})^{t-1}\, \partial^o d^B_{o\rho} + (t-1)\,(\xi_o^{\rho})^{t-2}\, d^B_{o\rho} & \cdots & (\xi_o^{\rho})^{t-1}\, d^B_{\rho \bar{D}(\rho)} & \cdots
\end{array}$$

$$mt = 2\,\tau_o + \sum_{s=1}^{s=\sigma} \tau_s\, \nu_s \quad .$$

Pour montrer que le déterminant est non nul nous allons prouver que le système homogène associé n'admet que la solution nulle. Ce système s'écrit :

$$(0)\quad \Big(\sum_{\rho\leq\tau_o} d^B_{o\rho}\,\lambda^{o\rho} + \sum_{\rho\leq\tau_o} \partial^o d^B_{o\rho}\,\lambda^{\rho} + \sum_{\rho>\tau_o} d^B_{\rho\bar{D}(\rho)}\,\lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = 0\Big)$$

$$(q)\quad \Big(\sum_{\rho\leq\tau_o} (\xi^\rho_o)^q d^B_{o\rho}\lambda^{o\rho} + \sum_{\rho\leq\tau_o}\Big[(\xi^\rho_o)^q\partial^o d^B_{o\rho} + q(\xi^\rho_o)^{q-1} d^B_{o\rho}\Big]\lambda^{\rho} + \sum_{\rho>\tau_o} (\xi^\rho_o)^q d^B_{\rho\bar{D}(\rho)}\lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = 0\Big)$$

$$(t-1)\quad \Big(\sum_{\rho\leq\tau_o} (\xi^\rho_o)^{t-1} d^B_{o\rho}\lambda^{o\rho} + \sum_{\rho\leq\tau_o}\Big[(\xi^\rho_o)^{t-1}\partial^o d^B_{o\rho} + (t-1)(\xi^\rho_o)^{t-2} d^B_{o\rho}\Big]\lambda^{\rho} + \sum_{\rho>\tau_o} (\xi^\rho_o)^{t-1} d^B_{\rho\bar{D}(\rho)}\lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = 0\Big)$$

Rappelons que $H^A_B(\xi_o,\eta') = H^A_B(\tilde{q})(\xi^t_o) + \sum_{q=1}^{q=t-1} L^{qA}_B(\eta')(\xi^q_o) + L^{oA}_B(\eta')$

pour $0\leq q\leq t-1$ L^{qA}_B est un polynôme en (η').

On sait que $\det(H^A_B(\tilde{q})) \neq 0$, $\tilde{q} = (1,0,\ldots,0)$ puisque $x^o = 0$ n'est pas caractéristique.

On supposera désormais l'opérateur normalisé relativement à $\tilde{q}$, à savoir :

$$H^A_B(\tilde{q}) = \delta^A_B \quad \text{symbole de Kronecker}$$

On obtient alors :

$$\Big[\delta^A_B(\xi^\rho_o)^t + \sum_{q=1}^{q=t-1} L^{qA}_B(\xi^\rho_o)^q + L^{oA}_B\Big]\, d^B_{o\rho} = 0 \qquad \rho\leq\tau_o$$

$$\Big[\delta^A_B(\xi_o)^t + \sum_{q=1}^{q=t-1} L^{qA}_B(\xi^\rho_o)^q + L^{oA}_B\Big]\, d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} = 0 \qquad \rho>\tau_o$$

Appliquons la matrice $L^{oA}_B(\eta') = L^{oA}_B$ (pour simplifier) au vecteur de $\mathbb{R}^m$ défini par la 1ère équation du système [(0)] on obtient alors :

$$\sum_{\rho\leq\tau_o} L_B^{oA}\, d_{o\rho}^B\, \lambda^{o\rho} + \sum_{\rho\leq\tau_o} L_B^{oA}\, \partial^o d_{o\rho}^B\, \lambda^{\rho} + \sum_{\rho>\tau_o} L_B^{oA}\, d_{\rho\bar{D}(\rho)}^B \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = 0$$

qui compte tenu des remarques précédentes s'écrit :

$$\sum_{\rho\leq\tau_o} \delta_B^A (\xi_o^\rho)^t d_o^B\, \lambda^{o\rho} + \sum_{\rho\leq\tau_o} \sum_{q=1}^{q=t-1} L_B^{qA} (\xi_o^\rho)^q d_o^B\, \lambda^{o\rho} - \sum_{\rho\leq\tau_o} L_B^{oA} \partial^o d_o^B \lambda^\rho$$

$$+ \sum_{\rho>\tau_o} \delta_B^A (\xi_o^\rho)^t d_{\rho\bar{D}(\rho)}^B \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} + \sum_{\rho>\tau_o} \sum_{q=1}^{q=t-1} L_B^{qA} (\xi_o^\rho)^q d_{\rho\bar{D}(\rho)}^B \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = 0$$

On regroupe convenablement :

$$\sum_{\rho\leq\tau_o} (\xi_o^\rho)^t d_o^A\, \lambda^{o\rho} - \sum_{\rho\leq\tau_o} H_B^A \partial^o d_{o\rho}^B \lambda^\rho + \sum_{\rho\leq\tau_o} (\xi_o^\rho)^t\, \partial^o d_{o\rho}^A \lambda^\rho + \sum_{\rho>\tau_o} (\xi_o^\rho)^t d_{\rho\bar{D}(\rho)}^A \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)}$$

$$+ \sum_{q=1}^{q=t-1} L_B^{qA} \left[\sum_{\rho\leq\tau_o} (\xi_o^\rho)^q d_{o\rho}^B \lambda^{o\rho} + \sum_{\rho\leq\tau_o} (\xi_o^\rho)^q \partial^o d_{o\rho}^B \lambda^\rho + \sum_{\rho>\tau_o} (\xi_o^\rho)^q d_{\rho\bar{D}(\rho)}^B \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} \right] = 0$$

On rappelle que : $H_B^A\, d_o^B \equiv 0 \pmod{H'^2}$

d'où $H_B^A(\xi_o^\rho)\, d_{o\rho}^B = 0$

et $\partial^o H_B^A(\xi_o^\rho)\, d_{o\rho}^B + H_B^A(\xi_o^\rho)\, \partial^o d_{o\rho}^B = 0$.

Compte tenu de la $(q+1)^{\text{ème}}$ équation (q) du système le crochet s'écrit : $-\, q(\xi_o^\rho)^{q-1}\, d_{o\rho}^B \lambda^\rho$

or $\sum_{\rho\leq\tau_o} H_B^A \partial^o d_{o\rho}^B + \sum_{q=1}^{q=t-1} q(\xi_o^\rho)^{q-1} d_{o\rho}^B = -\sum_{\rho\leq\tau_o} \partial^o H_B^A d_{o\rho}^B + \sum_{q=1}^{q=t-1} q(\xi_o^\rho)^{q-1} d_{o\rho}^B$

avec $\partial^o H_B^A = t\delta_B^A(\xi_o)^{t-1} + \sum_{q=1}^{q=t-1} q L_B^{qA}(\xi_o)^{q-1}$ car L_B^{oA} ne dépend pas de ξ_o .

On obtient donc pour tout A

$$\sum_{\rho\leq\tau_o} (\xi_o^\rho)^t d_{o\rho}^A \lambda^{o\rho} + \sum_{\rho\leq\tau_o} \left[(\xi_o^\rho)^t \partial^o d_{o\rho}^A + t(\xi_o^\rho)^{t-1} d_{o\rho}^A \right] \lambda^\rho + \sum_{\rho>\tau_o} (\xi_o^\rho)^t d_{\rho\bar{D}(\rho)}^A \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = 0$$

c'est-à-dire l'équation (t).

Ensuite on procède par récurrence ; supposons vraie

$$(q') \sum_{\rho\leq\tau_o} (\xi_o^\rho)^{q'} d^B_{o\rho}\lambda^{o\rho} + \sum_{\rho\leq\tau_o}\left[(\xi_o^\rho)^{q'}\partial^o d^B_{o\rho} + q'(\xi_o)^{q'-1} d^B_{o\rho}\right]\lambda^\rho + \sum_{\rho>\tau_o}(\xi_o^\rho)^{q'} d^B_{\rho\bar{D}(\rho)}\lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = 0$$

pour $t\leq q'\leq t'+t-1$, t' entier quelconque ≥ 1.

Appliquons la matrice à l'équation t' ce qui est possible puisque $t'\leq t'+t-1 \Longleftrightarrow t\geq 1$.

On obtient l'équation $t'+t$ de façon évidente et on déduit que l'équation (q') est vraie pour tout q'.

Nous allons effectuer un changement de variables

Posons pour $\tau_o<\rho\leq\tau$, $\sum_{\bar{D}(\rho)} d^B_{\rho\bar{D}(\rho)}\lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = \Lambda^B_\rho$

et pour $1\leq\rho\leq\tau_o$, $d^B_{o\rho}\lambda^{o\rho} = \overset{\gamma}{\Lambda}{}^B_\rho$

$1\leq\rho\leq\tau_o$. $\partial^o d^B_{o\rho}\lambda^\rho = \Gamma^B_\rho$ si $d^B_{o\rho} = 0$

Nous allons nous intéresser à chacun des m systèmes homogènes obtenus en isolant du système initial [écrit jusqu'à l'ordre (q'), q' dépendant de B] chaque ligne indicée par B ce qui donne

$$\begin{cases} \sum_{\rho\leq\tau_o} \overset{\gamma}{\Lambda}{}^B_\rho + \sum_{\rho\leq\tau_o} \partial^o d^B_{o\rho}\lambda^\rho + \sum_{\rho>\tau_o}\Lambda^B_\rho = 0 \\ \sum_{\rho\leq\tau_o} (\xi_o^\rho)^k \overset{\gamma}{\Lambda}{}^B_\rho + \sum_{\rho\leq\tau_o}\left[(\xi_o^\rho)^k\partial^o d^B_{o\rho} + k(\xi_o^\rho)^{k-1} d^B_{o\rho}\right]\lambda^\rho + \sum_{\rho>\tau_o}(\xi_o^\rho)^k \Lambda^B_\rho = 0 \\ \sum_{\rho\leq\tau_o} (\xi_o)^{q'}\overset{\gamma}{\Lambda}{}^B_\rho + \sum_{\rho\leq\tau_o}\left[(\xi_o^\rho)^{q'}\partial^o d^B_{o\rho} + q'(\xi_o^\rho)^{q'-1} d^B_{o\rho}\right]\lambda^\rho + \sum_{\rho>\tau_o}(\xi_o^\rho)^{q'}\Lambda^B_\rho = 0 \end{cases}$$

Chacun des sytèmes n'est pas forcément carré.

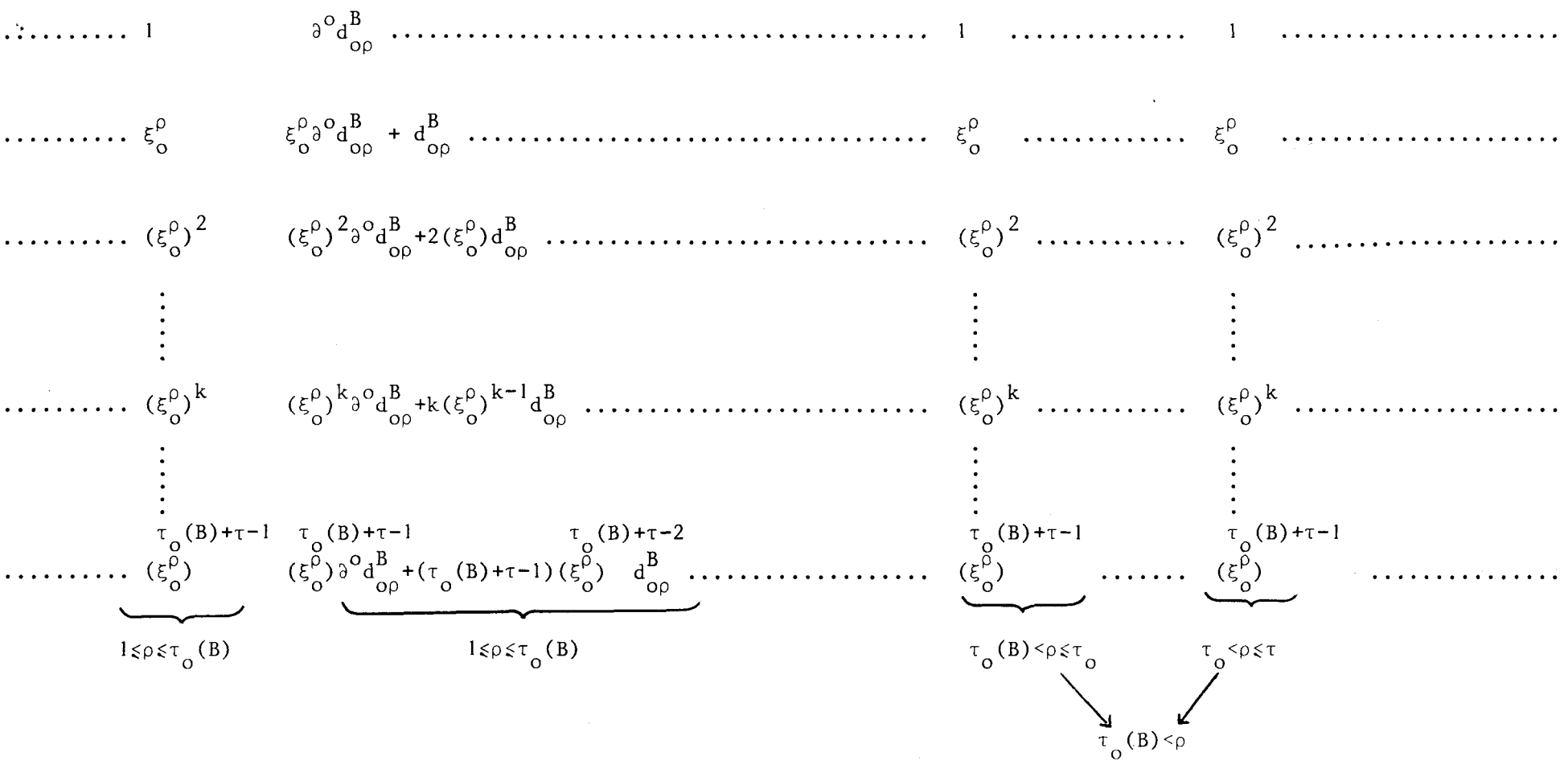
Pour ce faire nous allons [si $d^B_{o\rho} = 0$] éliminer le coefficient $\overset{\sim}{\Lambda}{}^B_\rho$ qui est nul et remplacer $\partial^o d^B_{o\rho} \lambda^\rho$ par Γ^B_ρ. B donné, $\tau_o(B)$ désigne le nombre d'éléments $d^B_{o\rho}$ non nuls.

① $\tau_o(B) \neq 0$.

Nous allons nous intéresser à un système homogène carré d'ordre $\tau_o(B) + \tau_o + (\tau_1 + \ldots + \tau_\sigma)$, τ_o précisant le nombre d'inconnues λ^ρ, Γ^B_ρ et $(\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_\sigma)$ le nombre d'inconnues Λ^B_ρ.

Il est clair que nous choisissons $q' = q'(B)$ dans chaque système d'ordre B, $\tau_o(B) \neq 0$ et $q'(B) = \tau_o(B) + \tau - 1$.

Le déterminant du système B, $\tau_o(B) \neq 0$, est le suivant [au signe près car nous allons supposer que les $d^B_{o\rho}$ non nuls sont les $\tau_o(B)$ premiers



On multiplie chaque ligne par (p^1_o) (sauf la dernière et on retranche à la suivante.

On obtient : (au signe près).

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & \partial^o d^B_{o1} & \cdots\cdots & 1 & \partial^o d^B_{o\rho} & \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots \\
0 & d^B_{o1} & \cdots\cdots & (\xi^\rho_o-\xi^1_o) & (\xi^\rho_o-\xi^1_o)\partial^o d^B_{o\rho} + d^B_{o\rho} & \cdots\cdots & (\xi^\rho_o-\xi^1_o) & \cdots\cdots \\
0 & (\xi^1_o)\, d^B_{o1} & \cdots\cdots & (\xi^\rho_o)\,(\xi^\rho_o-\xi^1_o) & \xi^\rho_o(\xi^\rho_o-\xi^1_o)\partial^o d^B_{o\rho} + (2\xi^\rho_o-\xi^1_o)d^B_{o\rho} & \cdots\cdots & \xi^\rho_o\,(\xi^\rho_o-\xi^1_o) & \cdots\cdots \\
\vdots & & & \vdots & & & & \\
0 & (\xi^1_o)^k d^B_{o1} & \cdots\cdots & (\xi^\rho_o)^k(\xi^\rho_o-\xi^1_o) & (\xi^\rho_o)^k(\xi^\rho_o-\xi^1_o)\partial^o d^B_{o\rho} + \left[(k+1)\xi^\rho_o-k\xi^1_o\right](\xi^\rho_o)^{k-1}d^B_{o\rho} & \cdots\cdots & (\xi^\rho_o)^k(\xi^\rho_o-\xi^1_o) & \cdots\cdots \\
\vdots & & & \vdots & & & & \\
0 & (\xi^1_o)^{\tau+\tau_o(B)-2}\, d^B_{o1} & \cdots\cdots & (\xi^\rho_o)^{\tau+\tau_o(B)-2}\,(\xi^\rho_o-\xi^1_o) & (\xi^\rho_o)^{\tau+\tau_o(B)-2}\,(\xi^\rho_o-\xi^1_o)\partial^o d^B_{o\rho} + \left[(\tau+\tau_o(B)-1)\xi^\rho_o - (\tau+\tau_o(B)-2)\xi^1_o\right](\xi^\rho_o)^{\tau+\tau_o(B)-3}\, d^B_{o\rho} & \cdots\cdots & \underbrace{(\xi^\rho_o)^{\tau+\tau_o(B)-1}\,(\xi^\rho_o-\xi^1_o)}_{\tau_o(B)<\rho} & \cdots\cdots
\end{array}
$$

On divise chaque colonne par $(\xi^\rho_o-\xi^1_o)$ sauf les 2 premières et on obtient :

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & \partial^o d^B_{o1} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{\xi_o^\rho - \xi_o^1} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{\xi_o^\rho - \xi_o^1} \\
0 & d^B_{o1} & \cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots & 1 \\
0 & \xi_o^1 d^B_{o1} & \cdots\cdots & \xi_o^\rho & \cdots\cdots & \xi_o^\rho \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots \\
0 & (\xi_o^1)^k & \cdots\cdots & (\xi_o^\rho)^k & \cdots\cdots & (\xi_o^\rho)^k \\
\vdots & & & & & \vdots \\
0 & (\xi_o^1)^{\tau+\tau_o(B)-2} & \cdots\cdots & (\xi_o^\rho)^{\tau+\tau_o(B)-2} & \cdots\cdots & (\xi_o^\rho)^{\tau+\tau_o(B)-2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\partial^o d^B_{o\rho} \Big/ \xi_o^\rho - \xi_o^1 \\
\partial^o d^B_{o\rho} + \dfrac{d^B_{o\rho}}{\xi_o^\rho - \xi_o^1} \\
\xi_o \partial^o d^B_{o\rho} + \dfrac{2\xi_o^\rho - \xi_o^1}{\xi_o^\rho - \xi_o^1} d^B_{o\rho} \\
\vdots \\
(\xi_o^\rho)^k \partial^o d^B_{o\rho} + \dfrac{(k+1)\xi_o^\rho - k\xi_o^1}{\xi_o^\rho - \xi_o^1} (\xi_o^\rho)^{k-1} d^B_{o\rho} \\
\\
(\xi_o^\rho)^{\tau+\tau_o(B)-2} \partial^o d^B_{o\rho} + \dfrac{(\tau+\tau_o(B)-1)\xi_o^\rho - (\tau+\tau_o(B)-2)\xi_o^1}{\xi_o^\rho - \xi_o^1} (\xi_o^\rho)^{\tau+\tau_o(B)-3} d^B_{o\rho}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \dfrac{1}{\xi_o^\rho - \xi_o^1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 1 \quad \cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \xi_o^\rho \quad \cdots\cdots \\
\vdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\xi_o^\rho)^k \quad \cdots\cdots \\
\\
\cdots\cdots \underbrace{(\xi_o^\rho)^{\tau+\tau_o(B)-2}}_{\rho > \tau_o(B)} \cdots\cdots
\end{array}
$$

On développe le déterminant par rapport à la 1ère colonne et l'on obtient :

$$\begin{array}{lllll}
d_{o1}^B & 1 & \partial^o d_o^B + \dfrac{d_{o\rho}^B}{\xi_o^\rho - \xi_o^1} \cdots\cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots \\[2ex]
\xi_o^1 d_{o1}^B & \xi_o^\rho & \xi_o^\rho \partial^o d_{o\rho}^B + \dfrac{2\xi_o^\rho - \xi_o^1}{\xi_o^\rho - \xi_o^1} d_{o\rho}^B \cdots\cdots\cdots & \xi_o^\rho & \cdots\cdots \\[2ex]
(\xi_o^1)^2 d_{o1}^B & (\xi_o^\rho)^2 & (\xi_o^\rho)^2 \partial^o d_{o\rho}^B + \dfrac{3\xi_o^\rho - 2\xi_o^1}{\xi_o^\rho - \xi_o^1} \xi_o d_{o\rho}^B \cdots\cdots\cdots & (\xi_o^\rho)^2 & \cdots\cdots \\
\vdots & \vdots & \qquad\qquad\vdots & \vdots & \\
(\xi_o^1)^k d_{o1}^B & (\xi_o^\rho)^k & (\xi_o^\rho)^k \partial^o d_{o\rho}^B + \dfrac{(k+1)\xi_o^\rho - k\xi_o^1}{\xi_o^\rho - \xi_o^1} (\xi_o^\rho)^{k-1} d_{o\rho}^B \cdots\cdots\cdots & (\xi_o^\rho)^k & \cdots\cdots \\
\vdots & \vdots & \qquad\qquad\vdots & \vdots & \\
(\xi_o^1)^{\tau+\tau_o(B)-2} d_{o1}^B & (\xi_o^\rho)^{\tau+\tau_o(B)-2} & (\xi_o^\rho)^{\tau+\tau_o(B)-2} \partial^o d_{o\rho}^B + \dfrac{(\tau+\tau_o(B)-1)p_o - (\tau+\tau_o(B)-2)\xi_o^1}{\xi_o^\rho - \xi_o^1} (\xi_o^\rho)^{\tau+\tau_o(B)-3} d_{o\rho}^B \cdots\cdots & \underbrace{(\xi_o)^{\tau+\tau_o(B)-2}}_{\rho>\tau_o(B)} & \cdots\cdots
\end{array}$$

On multiplie chaque ligne (sauf la dernière) par ξ_o^1 et on la retranche à la suivante.

On obtient :

$$
\begin{array}{cccccc}
d^B_{o1} & \cdots & 1 & \partial^o d^B_{o\rho} + \dfrac{d^B_{o\rho}}{\xi^\rho_o - \xi^1_o} & \cdots & 1 \quad \cdots \\
0 & \cdots & (\xi^\rho_o - \xi^1_o) & (\xi^\rho_o - \xi^1_o)\partial^o d^B_{o\rho} + 2\, d^B_{o\rho} & \cdots & (\xi^\rho_o - \xi^1_o) \quad \cdots \\
0 & \cdots & (\xi^\rho_o)\ (\xi^\rho_o - \xi^1_o) & \xi^\rho_o(\xi^\rho_o - \xi^1_o)\partial^o d^B_{o\rho} + \left[(\xi^\rho_o - \xi^1_o) + 2\,\xi^\rho_o\right] d^B_{o\rho} & \cdots & (\xi^\rho_o)\ (\xi^\rho_o - \xi^1_o) \quad \cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & (\xi^\rho_o)^k\ (\xi^\rho_o - \xi^1_o) & (\xi^\rho_o)^k\ (\xi^\rho_o - \xi^1_o)\partial^o d^B_{o\rho} + (k(\xi^\rho_o - \xi^1_o) + 2\xi^\rho_o)(\xi^\rho_o)^{k-1} d^B_{o\rho} & \cdots & (\xi^\rho_o)^k\ (\xi^\rho_o - \xi^1_o) \quad \cdots \\
\vdots & & \tau+\tau_o(B)-3 & \tau+\tau_o(B)-3 & & \tau+\tau_o(B)-3 \\
0 & \cdots & (\xi^\rho_o)\ (\xi^\rho_o - \xi^1_o) & (\xi^\rho_o)\ (\xi^\rho_o - \xi^1_o)\partial^o d^B_{o\rho} + \left[(\tau+\tau_o(B)-3\ [\xi^\rho_o - \xi^1_o] + 2\,\xi^\rho_o\right] (\xi^\rho_o)\ d^B_{o\rho} & \cdots & \underbrace{(\xi^\rho_o)\ (\xi^\rho_o - \xi^1_o)}_{\rho > \tau_o(B)} \quad \cdots
\end{array}
$$

On divise chaque colonne par $(\xi^\rho_o - \xi^1_o)$ sauf la première et on obtient

$$
\begin{array}{llll}
d^B_{o1} & 1 \Big/ (\xi^\rho_o - \xi^1_o) & \left[\partial^o d^B_{o\rho} + \dfrac{d^B_{o\rho}}{\xi^\rho_o - \xi^1_o}\right] \Big/ \xi^\rho_o - \xi^1_o \ \cdots\cdots & 1 \Big/ \xi^\rho_o - \xi^1_o \ \cdots\cdots \\
0 \ \cdots\cdots & 1 & \partial^o d^B_{o\rho} + \dfrac{2\, d^B_{o\rho}}{\xi^\rho_o - \xi^1_o} \ \cdots\cdots & 1 \ \cdots\cdots \\
0 \ \cdots\cdots & \xi^\rho_o & \xi^\rho_o \partial^o d^B_{o\rho} + \dfrac{\xi^\rho_o - \xi^1_o + 2\xi^\rho_o}{\xi^\rho_o - \xi^1_o}\, d^B_{o\rho} \ \cdots\cdots & \xi^\rho_o \ \cdots\cdots \\
0 \ \cdots\cdots & (\xi^\rho_o)^2 & (\xi^\rho_o)^2 \partial^o d^B_{o\rho} + \dfrac{2(\xi^\rho_o - \xi^1_o) + 2\xi^\rho_o}{\xi^\rho_o - \xi^1_o}\, d^B_{o\rho}(\xi^\rho_o) \ \cdots\cdots & (\xi^\rho_o)^2 \ \cdots\cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \ \cdots\cdots & (\xi^\rho_o)^k & (\xi^\rho_o)^k \partial^o d^B_{o\rho} + \dfrac{k(\xi^\rho_o - \xi^1_o) + 2\xi^\rho_o}{\xi^\rho_o - \xi^1_o}\, d^B_{o\rho}\, (\xi^\rho_o)^{k-1} \ \cdots\cdots & (\xi^\rho_o)^k \ \cdots\cdots \\
\vdots & & & \vdots \\
0 \ \cdots\cdots & (\xi^\rho_o)^{\tau+\tau_o(B)-3} & (\xi^\rho_o)^{\tau+\tau_o(B)-3} \partial^o d^B_{o\rho} + \dfrac{(\tau+\tau_o(B)-3)(\xi^\rho_o - \xi^1_o) + 2\xi^\rho_o}{\xi^\rho_o - \xi^1_o}\, d^B_{o\rho}(\xi^\rho_o)^{\tau+\tau_o(B)-3} \ \cdots\cdots & \underbrace{(\xi^\rho_o)^{\tau+\tau_o(B)-3} \ \cdots\cdots}_{\rho > \tau_o(B)}
\end{array}
$$

On multiplie chaque ρ^{e} colonne par $\dfrac{2\, d^B_{o\rho}}{\xi^\rho_o - \xi^1_o}$, $\rho \leq \tau_o(B)$, on la retranche à la suivante [sauf la 1ère colonne].

On obtient :

$$
\begin{array}{ccccccc}
d^B_{o1} & \cdots\cdots & 1 \Big/ {\scriptstyle \xi^\rho_o - \xi^1_o} & (\partial^o d^B_{o\rho} + \dfrac{d^B_{o\rho}}{\xi^\rho_o - \xi^1_o}) \Big/ {\scriptstyle \xi^\rho_o - \xi^1_o} & - \dfrac{2\, d^B_{o\rho}}{(\xi^\rho_o - \xi^1_o)^2} & \cdots\cdots & 1 \Big/ {\scriptstyle \xi^\rho_o - \xi^1_o} \\
0 & \cdots\cdots & 1 & \partial^o d^B_{o\rho} & & \cdots\cdots & 1 \\
0 & \cdots\cdots & \xi^\rho_o & \xi^\rho_o \partial^o d^B_{o\rho} + d^B_{o\rho} & & \cdots\cdots & \xi^\rho_o \\
0 & \cdots\cdots & (\xi^\rho_o)^2 & (\xi^\rho_o)^2 \partial^o d^B_{o\rho} + 2(\xi^\rho_o)\, d^B_{o\rho} & & \cdots\cdots & (\xi^\rho_o)^2 \\
0 & \cdots\cdots & (\xi^\rho_o)^k & (\xi^\rho_o)^k\, \partial^o d^B_{o\rho} + k(\xi^\rho_o)^{k-1}\, d^B_{o\rho} & & \cdots\cdots & (\xi^\rho_o)^k \\
0 & \cdots\cdots & (\xi^\rho_o)^{\tau+\tau_o(B)-3} & (\xi^\rho_o)^{\tau+\tau_o(B)-3}\, \partial^o d^B_{o\rho} + (\tau+\tau_o(B)-3)\, (\xi^\rho_o)^{\tau+\tau_o(B)-4}\, d^B_{o\rho} & & \cdots\cdots & \underbrace{(\xi^\rho_o)^{\tau+\tau_o(B)-3}}_{\rho > \tau_o(B)}
\end{array}
$$

On développe par rapport à la 1ère colonne avec rappelons le $d^B_{o1} \neq 0$ et on obtient :

$$
\begin{array}{ccccccc}
\cdots\cdots & 1 & \partial^o d^B_{o\rho} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \xi^\rho_o & \xi^\rho_o \partial^o d^B_{o\rho} + d^B_{o\rho} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \xi^\rho_o & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots & (\xi^\rho_o)^k & (\xi^\rho_o)^k \partial^o d^B_{o\rho} + k(\xi^\rho_o)^{k-1} d^B_{o\rho} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (\xi^\rho_o)^k & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \underbrace{(\xi^\rho_o)^{\tau+\tau_o(B)-3}}_{2\leq\rho\leq\tau_o(B)} & \underbrace{(\xi_o)^{\tau+\tau_o(B)-3}\,\partial^o d^B_{o\rho} + (\tau+\tau_o(B)-3)(\xi^\rho_o)^{\tau+\tau_o(B)-4}\, d^B_{o\rho}}_{2\leq\rho\leq\tau_o(B)} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \underbrace{(\xi^\rho_o)^{\tau+\tau_o(B)-3}}_{\rho>\tau_o(B)} & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

c'est-à-dire un déterminant identique à celui de départ au signe près et au facteur d^B_{o1} près.

Il suffit alors de développer en utilisant la méthode précédente par rapport au coefficient d^B_{o2}. Une récurrence immédiate nous montre alors que le déterminant initial est égal au signe près et au facteur $d^B_{o1} \times \ldots \times d^B_{o\tau_o(B)}$ près au déterminant suivant [qui est un VAN DER MONDE d'ordre $\tau-\tau_o(B)$] :

$$\begin{array}{ccc} \cdots\cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \xi_o^{\rho} & \cdots\cdots\cdots \\ & \vdots & \\ \cdots\cdots\cdots & (\xi_o^{\rho})^{k} & \cdots\cdots\cdots \\ & \vdots & \\ \cdots\cdots\cdots & (\xi_o^{\rho})^{\tau-\tau_o(B)-1} & \cdots\cdots\cdots \\ & \underbrace{\qquad\qquad} & \\ & \rho \geq \tau_o(B)+1 & \end{array}$$

Ce déterminant est non nul puisque les racines sont distinctes.

② $\tau_o(B) = 0$.

Tous les $d_{o\rho}^{B}$ sont nuls.

Nous allons nous intéresser à un système carré d'ordre $\tau_o + (\tau_1 + \ldots + \tau_\sigma)$, τ_o précisant le nombre d'inconnues Γ_ρ^B et $(\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_\sigma)$ le nombre d'inconnues Λ_ρ^B.

Nous choisissons $q'(B) = q' = \tau-1$.

Le déterminant du système B est le suivant

$$\begin{array}{ccc} \cdots\cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \xi_o^{\rho} & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & (\xi_o^{\rho})^{2} & \cdots\cdots\cdots \\ & \vdots & \\ \cdots\cdots\cdots & (\xi_o^{\rho})^{k} & \cdots\cdots\cdots \\ & \vdots & \\ \cdots\cdots\cdots & (\xi_o^{\rho})^{\tau-1} & \cdots\cdots\cdots \end{array} \qquad 1<\rho\leq\tau$$

C'est un Van der Monde d'ordre τ non nul.

a) On en déduit que $\forall B \quad \forall \rho > \tau_o \quad \Lambda_\rho^B = 0$

$$\Lambda_\rho^B = 0 \iff \sum_{\bar{D}(\rho)} d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = 0$$

Les vecteurs $(d^B_{\rho\bar{D}(\rho)})$ de $\mathbb{R}^m$, ρ fixé, forment une base de noyau de $H_B^A(x, \text{grad}\psi^\rho(x))$ par suite $\forall \rho$, $\rho > \tau_o$, $\lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = 0$.

b) B donné, $\tau_o(B) \neq 0$, les coefficients $\tilde{\Lambda}_\rho^B$ sont nuls, $\rho \leq \tau_o(B)$

$$\tilde{\Lambda}_\rho^B = 0 \iff d^B_{o\rho} \lambda^{o\rho} = 0 \Longrightarrow \lambda^{o\rho} = 0 \quad \text{puisque} \quad d^B_{o\rho} \neq 0$$

Mais alors tous les coefficients $\lambda^{o\rho}$ sont nuls.

Supposons en effet que pour ρ_o donné, aucun des m systèmes ne contienne $\tilde{\Lambda}^B_{\rho_o}$, cela signifie que , $\forall B$, $d^B_{o\rho_o} = 0$ ce qui veut dire que le vecteur $(d^B_{o\rho_o})$ de $\mathbb{R}^m$ est nul, ce qui est impossible puisqu'il est vecteur de base de $\text{Ker}(H_B^A(x, \text{grad}\, \psi^{\rho_o}(x)))$.

c) Tous les coefficients λ^ρ sont nuls. En effet pour B donné $\tau_o(B) \neq 0$ $\lambda^\rho = 0$ si $\rho \leq \tau_o(B)$.

ρ_o étant donné, $\exists B$ tel que λ^{ρ_o} apparaisse autrement que dans $\Gamma^B_{\rho_o}$. Sinon $\forall B$, λ^{ρ_o} est tel que $\rho_o > \tau_o(B)$ ce qui implique $d^B_{o\rho_o} = 0 \Longrightarrow (d^B_{o\rho_o}) = 0$ impossible.

Tous les coefficients λ^ρ , $\lambda^{o\rho}$ et $\lambda^{\rho\bar{D}(\rho)}$ sont nuls.

c.q.f.d.

Les valeurs initiales $U_1^\rho(0,x')$, $\partial_o U_o^\rho(0,x')$, $U_1^{\rho\bar{D}(\rho)}(0,x')$ sont imposées en fonction des $b_k^{-(k-1)}(x')$, $0 \leq k \leq t-1$.

Les coefficients $a_\rho^{0,B}$ sont alors déterminés, $\rho \leq \tau_o$.

Les coefficients $a_\rho^{1,B}$ sont aussi déterminés, $\rho > \tau_o$.

Détermination des coefficients $a^{q,B}$, $q \geq 2$

On suppose connus les coefficients :

$$a_\rho^{q'-2,B} \quad \rho \leq \tau_o \quad \text{et} \quad a_\rho^{q'-1,B} \quad \rho > \tau_o \ , \ q \geq q' \geq 2$$

$$a_\rho^{q-1,B} = U_{q-1}^{\rho} \ d_{o\rho}^{B} + V_{q-1,\rho}^{B} \quad \rho \leq \tau_o \ .$$

On suppose connu également $U_{q-1}^{\rho}(0,x')$.

Les coefficients $V_{q-1,\rho}^{B}$ sont connus d'après l'hypothèse de récurrence :

$$a_\rho^{q,B} = U_q^{\rho\bar{D}(\rho)} \ d_{\rho\bar{D}(\rho)}^{B} + V_{q,\rho}^{B} \quad \rho > \tau_o$$

Les coefficients $V_{q,\rho}^{B}$ sont connus d'après l'hypothèse de récurrence. $\partial_{(0)^k} z^B(0,x')$ est connu puisque $a_\rho^{o,B}$ est connu, $\rho \leq \tau_o$.

Le coefficient de $f_{-k+q}(\psi(x'))$ dans $\partial_{(0)^k} Z^B(0,x')$ s'écrit :

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} (\mathcal{B}_k^{o,\rho,B}(\xi_o^\rho) \ [a_\rho^{q,B}(0,x')] + \mathcal{B}_k^{1,\rho,B}(\xi_o^\rho)[a_\rho^{q-1,B}(0,x')] + \sum_{r+j=q} \mathcal{B}_k^{r,\rho,B}(\xi_o^\rho)[a_\rho^{j,B}(0,x')])$$

$$q \geq 2 \ .$$

$$\rho \leq \tau_o \quad a_\rho^{q,B}(0,x') = U_q^{\rho}(0,x')d_{o\rho}^{B} + \partial^o d_{o\rho} \partial_o U_{q-1}^{\rho}(0,x') + W'^{B}_{q,\rho}(0,x')$$

$$W'^{B}_{q,\rho}(0,x') = \partial^i d_{o\rho}^{B} \partial_i \ U_{q-1}^{\rho}(0,x') + \lambda^B \ U_{q-1}^{\rho}(0,x') + W_{q,\rho}^{B}(0,x')$$

$$\mathcal{B}_k^{o,\rho,B}(\xi_o^\rho) \ [a_\rho^{q,B}(0,x')] = (\xi_o^\rho)^k [U_q^{\rho}(0,x')d_{o\rho}^{B} + \partial^o d_{o\rho}^{B} \ \partial_o U_{q-1}^{\rho}(0,x') + W'^{B}_{q,\rho}(0,x')]$$

$$\mathcal{B}_k^{1,\rho,B}(\xi_o^\rho) \ [a^{q-1,B}(0,x')] = k(\xi_o^\rho)^{k-1} \partial_o a_\rho^{q-1,B}(0,x') = k(\xi_o^\rho)^{k-1}(\partial_o U_{q-1}^{\rho}(0,x')d_{o\rho}^{B} + V'^{B}_{q-1,\rho}(0,x')$$

$$V'^{B}_{q-1,\rho}(0,x') = U_{q-1}^{\rho}(0,x') \ \partial_o \ d_{o\rho}^{B} + \partial_o \ V_{q-1,\rho}^{B}(0,x')$$

$$\mathcal{B}_k^{o,\rho,B}(\xi_o^\rho) \ [a_\rho^{q,B}(0,x')] = (\xi_o^\rho)^k \ [U_q^{\rho\bar{D}(\rho)}(0,x') \ d_{\rho\bar{D}(\rho)}^{B} + V_{q,\rho}^{B}(0,x')] \quad \text{si} \quad \rho > \tau_o$$

$$\sum_{\rho=1}^{\tau_o} (U_q^{\rho}(0,x') \ (\xi_o^\rho)^k \ d_{o\rho}^{B} + \partial_o U_{q-1}^{\rho}(0,x') \ [(\xi_o^\rho)^k \ \partial^o d_{o\rho}^{B} + k(\xi_o^\rho)^{k-1} \ d_{o\rho}^{B}])$$

$$+ \sum_{\rho>\tau_o} U_q^{\rho\bar{D}(\rho)}(0,x')d_{\rho\bar{D}(\rho)}^{B} = b_k^{k-q,B}(x') - \sum_{\rho=1}^{\tau_o} ((\xi_o^\rho)^k W'^{B}_{q,\rho}(0,x') + k(\xi_o^\rho)^{k-1} V'^{B}_{q-1,\rho}(0,x'))$$

$$- \sum_{\rho=1}^{\tau} \sum_{\substack{r+j=q \\ r\geq 1 \text{ si } \rho>\tau_o \\ r\geq 2 \text{ si } \rho\leq\tau_o}} \mathcal{B}_k^{r,\rho,B}(\xi_o^\rho) \ [a^{j,B}(0,x')] - \sum_{\rho>\tau_o} (\xi_o^\rho)^k V_{q,\rho}^{B}(0,x')$$

Les équations qui donnent les restrictions à l'hypersurface $x^o = 0$ peuvent s'écrire :

$$\sum_{\rho} \sum_{\alpha(\rho)} a^{\rho,B}_{k,\alpha(\rho)} U^{\alpha(\rho)}_{q,\rho}(0,x') = C^B_{k,q} \qquad \alpha(\rho) \in \{0,1,\bar{D}(\rho)\}$$

$$\rho \leqslant \tau_o \qquad U^{\alpha(\rho)}_{q,\rho}(0,x') = U^{\rho}_{q}(0,x') \qquad \text{si} \quad \alpha(\rho) = 0$$

$$U^{\alpha(\rho)}_{q,\rho}(0,x') = \partial_o U^{\rho}_{q-1}(0,x') \qquad \text{si} \quad \alpha(\rho) = 1$$

$$\rho > \tau_o \qquad U^{\alpha(\rho)}_{q,\rho}(0,x') = U^{\rho\bar{D}(\rho)}_{q}(0,x') \ .$$

On sait d'après ce qui précède que $\det(a^{\rho,B}_{k,\alpha(\rho)}) \neq 0$.

$C^B_{k,q}$ dépend des données de Cauchy et des coefficients $a^{q',B}_{\rho}(0,x')$ connus.

On peut donc déterminer $U^{\alpha(\rho)}_{q}(0,x')$ d'une façon unique en fonction de $C^B_{k,q}$ ce qui impose les valeurs de :

$U^{\rho}_{q}(0,x')$, $\partial_o U_{q-1}(0,x')$, $U^{\rho\bar{D}(\rho)}_{q}(0,x')$ et par suite on sait déterminer $a^{q-1,B}_{\rho}$, $\rho \leqslant \tau_o$ et $a^{q,B}_{\rho}$, $\rho > \tau_o$.

V - CONVERGENCE.-

Nous allons rappeler les équations qui déterminent les coefficients $a^{p,B}_{\rho}$.

① *Equations qui déterminent les restrictions des coefficients sur l'hypersurface* $x^o = 0$.

On utilisera constamment la convention d'Euler

$$a^{\rho,B}_{k,\alpha(\rho)} U^{\alpha(\rho)}_{p+1,\rho}(0,x') = b^{-k(p+1),B}_{k}(x') - \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi^{\rho}_o)^k W'^{,B}_{p+1,\rho}(0,x')$$

$$- \sum_{\rho=1}^{\tau_o} k(\xi^{\rho}_o)^{k-1} V'^{,B}_{p,\rho}(0,x') - \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} \sum_{\substack{r+j=p+1 \\ r\geqslant 2}} B^{r,\rho,B}_{k}(\xi^{\rho}_o) \left[a^{j,B}_{\rho}(0,x')\right]$$

$$- \sum_{\rho>\tau_o} (\xi^{\rho}_o)^k V^B_{p,\rho}(0,x') - \sum_{\rho>\tau_o} \sum_{\substack{r+j=p \\ r\geqslant 1}} B^{r,\rho,B}_{k}(\xi^{\rho}_o) \left[a^{j,B}_{\rho}(0,x')\right] .$$

Les opérateurs $B_k^{r,\rho,B}$ sont d'ordre $\leq r$.

Les solutions particulières $V_{p,\rho}^B$ et $W_{p,\rho}^B$ peuvent être explicités.

$\rho \leq \tau_o$.

$H_B^A(x,\text{grad } \psi^\rho(x))$ est de rang $(m-1)$.

En numérotant convenablement les équations et en supposant qu'un indice chapeauté varie de 1 à $(m-1)$ on peut écrire puisque

$$H_B^A(\xi_o^\rho)\ V_{p,\rho}^B(0,x') = - \sum_{\substack{r+j=p \\ r\geq 1}} H_{B',\rho}^{r,A}\left[a_\rho^{j,B'}(0,x')\right]$$

$$V_{p,\rho}^{\hat{B}}(0,x') = \sum_{\substack{r+j=p \\ r\geq 1}} \tilde{H}_{B,\rho}^{r,\hat{B}}\left[a_\rho^{j,B}(0,x')\right]$$

en imposant $V_{p,\rho}^m(0,x') = 0$ et après avoir multiplié par la matrice carrée d'ordre $(m-1)$ inverse de celle définie par les $(m-1)$ premières équations qui permettent de résoudre $V_{p,\rho}^B(0,x')$.

Les opérateurs notés avec un indice r sont d'ordre $\leq r$.

$$\partial_o V_{p,\rho}^{\hat{B}}(0,x') = \sum_{\substack{r+j=p+1 \\ r\geq 2}} \tilde{\tilde{H}}_{B,\rho}^{r,\hat{B}}\left[a^{j,B}(0,x')\right]$$

Les opérateurs $\tilde{\tilde{H}}_{B,\rho}^{r,\hat{B}}$ sont obtenus à partir des opérateurs $\tilde{H}_{B,\rho}^{r,\hat{B}}$ par dérivation de l'expression qui donne $V_{p,\rho}^{\hat{B}}(0,x')$.

On peut alors expliciter $V'^B_{p,\rho}(0,x')$:

$$V'^B_{p,\rho}(0,x') = \partial_o d_{o\rho}^B U_p^\rho(0,x') + \sum_{\substack{r+j=p+1 \\ r\geq 2}} \tilde{\tilde{H}}_{B',\rho}^{r,B}\left[a_\rho^{j,B'}(0,x')\right]$$

sachant que $\tilde{\tilde{H}}_{B',\rho}^{r,m} = 0$.

On sait d'autre part que :

$$H_B^A(\xi_o^\rho) W_{p+1,\rho}^B(0,x') = - \left(H_{B,\rho}^{1,A}\left[V_{p,\rho}^B(0,x')\right] + \sum_{\substack{r+j=p+1 \\ r\geq 2}} H_{B,\rho}^{r,A}\left[a_\rho^{j,B}(0,x')\right]\right)$$

on peut alors déterminer $W^{\hat{B}}_{p+1,\rho}(0,x')$ en imposant $W^{m}_{p+1,\rho}(0,x') = 0$

$$W^{\hat{\hat{B}}}_{p+1,\rho}(0,x') = \tilde{H}^{1,\hat{\hat{B}}}_{\hat{B}\rho}\left[V^{\hat{B}}_{p,\rho}(0,x')\right] + \sum_{\substack{r+j=p+1 \\ r\geq 2}} \tilde{H}^{r,\hat{\hat{B}}}_{B,\rho}\left[a^{j,B}_{\rho}(0,x')\right]$$

$W^{\hat{\hat{B}}}_{p+1,\rho}(0,x') = \sum_{\substack{r+j=p+1 \\ r\geq 2}} \bar{\tilde{H}}^{r,B}_{B,\rho}\left[a^{j,B}_{\rho}(0,x')\right]$ après avoir remplacé $V^{\hat{B}}_{p,\rho}(0,x')$ par son expression en fonction de $a^{j,B}_{\rho}(0,x')$

$$W'^{B}_{p+1,\rho}(0,x') = \partial^{i} d^{B}_{o\rho} \partial_{i} U^{\rho}_{p}(0,x') + \lambda^{B} U^{\rho}_{p}(0,x') + \sum_{\substack{r+j=p+1 \\ r\geq 2}} \bar{\tilde{H}}^{r,B}_{B',\rho}\left[a^{j,B'}_{\rho}(0,x')\right]$$

sachant que $\bar{\tilde{H}}^{r,m}_{B'\rho} = 0$

$\underline{\rho > \tau_o}$.

$H^{A}_{B}(x,\text{grad}\ \psi^{\rho}(x))$ est de rang $m-\nu_s$ si ψ^{ρ} est racine de l'équation $H_s(x,\text{grad}\ \psi^{\rho}(x)) = 0$.

En numérotant convenablement les équations et en supposant encore qu'un indice chapeauté varie de 1 à $(m-\nu_s)$ on peut écrire puisque :

$$H^{A}_{B}(\xi^{\rho}_{o}) V^{B}_{p,\rho}(0,x') = - \sum_{\substack{r+j=p \\ r\geq 1}} H^{r,A}_{B',\rho}\left[a^{j,B'}_{\rho}(0,x')\right]$$

$$V^{\hat{B}}_{p,\rho}(0,x') = \sum_{\substack{r+j=p \\ r\geq 1}} H^{r,\hat{B}}_{B,\rho}\left[a^{j,B}(0,x')\right]$$

en imposant $V^{B}_{p,\rho}(0,x') = 0$ $(m-\nu_s < B \leq m)$ et après avoir multiplié par la matrice carrée d'ordre $(m-\nu_s)$ inverse de celle définie par les $(m-\nu_s)$ premières équations qui déterminent $V^{B}_{p,\rho}(0,x')$.

On peut alors écrire :

$$\sum_{\rho>\tau_o} (\xi^{\rho}_{o})^{k} V^{B}_{p,\rho}(0,x') = \sum_{\rho>\tau_o}^{\rho=\tau} (\xi^{\rho}_{o})^{k} \sum_{\substack{r+j=p+1 \\ r\geq 1}} \tilde{H}^{r,B}_{B',\rho}\left[a^{j,B'}(0,x')\right]$$

avec $\tilde{H}^{r,B}_{B',\rho} = 0$ si $B > m-\nu_s$, ρ associé à H_s.

On peut alors écrire :

$$a^{\rho,B}_{k,\alpha(\rho)}\, U^{\alpha(\rho)}_{p+1,\rho}(0,x') = b^{-k+(p+1),B}_{k}(x') - \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi^\rho_o)^k\, \Gamma^B_\rho U^\rho_p(0,x')$$

$$- \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} \sum_{\substack{r+j=p+1\\ r\geq 2}} (\xi^\rho_o)^k\, \tilde{H}^{r,B}_{B',\rho}\left[a^{j,B'}_\rho(0,x')\right] - \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} k(\xi^\rho_o)^{k-1}\, \partial_o d^B_{o\rho} U^\rho_p(0,x')$$

$$- \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} k(\xi^\rho_o)^{k-1} \sum_{\substack{r+j=p+1\\ r\geq 2}} \tilde{H}^{r,B}_{B',\rho}\left[a^{j,B'}_\rho(0,x')\right] - \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} \sum_{\substack{r+j=p+1\\ r\geq 2}} \mathcal{B}^{r,\rho,B}_{k}(\xi^\rho_o)\left[a^{j,B}_\rho(0,x')\right]$$

$$- \sum_{\rho>\tau_o}^{\rho=\tau_o} (\xi^\rho_o)^k \sum_{\substack{r+j=p+1\\ r\geq 1}} \tilde{H}^{r,B}_{B',\rho}\left[a^{j,B'}_\rho(0,x')\right] - \sum_{\rho>\tau_o}^{\rho=\tau} \sum_{\substack{r+j=p+1\\ r\geq 1}} \mathcal{B}^{r,\rho,B}_{k}(\xi^\rho_o)\left[a^{j,B}_\rho(0,x')\right]$$

Γ^B_ρ opérateur d'ordre ≤ 1

ce qui donne :

$$a^{\rho,B}_{k,\alpha(\rho)} U^{\alpha(\rho)}_{p+1,\rho}(0,x') = b^{-k+(p+1),B}_{k}(x') + \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} \tilde{\Gamma}^B_{k,\rho} U^\rho_p(0,x')$$

$$+ \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} \sum_{\substack{r+j=p+1\\ r\geq 2}} \mathcal{B}^{r,B,\rho}_{k,B'}\left[a^{j,B'}_\rho(0,x')\right] + \sum_{\rho>\tau_o}^{\rho=\tau} \sum_{\substack{r+j=p+1\\ r\geq 1}} C^{r,B,\rho}_{k,B'}\left[a^{j,B'}_\rho(0,x')\right]$$

après avoir regroupé les opérateurs de même ordre.

Appelons $A^{k,\alpha(\rho)}_{\rho,B}$ la matrice inverse de $a^{\rho,B}_{k,\alpha(\rho)}$.

On obtient après multiplication à gauche par cette matrice :

$$U^{\alpha(\rho)}_{p+1,\rho}(0,x') = A^{k,\alpha(\rho)}_{\rho,B} b^{-k+(p+1),B}(x') + \sum_{q=1}^{q=\tau_o} A^{k,\alpha(\rho)}_{\rho,B} \tilde{\Gamma}^B_{k,q} U^q_p(0,x')$$

$$+ \sum_{q=1}^{q=\tau_o} \sum_{\substack{r+j=p+1\\ r\geq 2}} A^{k,\alpha(\rho)}_{\rho,B} \mathcal{B}^{r,B,q}_{k,B'}\left[a^{j,B'}_q(0,x')\right] + \sum_{q>\tau_o}^{q=\tau_o} \sum_{\substack{r+j=p+1\\ r\geq 1}} A^{k,\alpha(\rho)}_{\rho,B} C^{r,B,q}_{k,B'}\left[a^{j,B'}_q(0,x')\right]$$

$$U^{\alpha(\rho)}_{p+1,\rho}(0,x') = A^{k,\alpha(\rho)}_{\rho,B} b^{-k+(p+1),B}_{k}(x') + \sum_{q=1}^{q=\tau_o} (\mathcal{A}^{\alpha(\rho)}_{\rho,q} U^q_p(0,x') + \sum_{q=1}^{q=\tau_o} \sum_{\substack{r+j=p+1\\ r\geq 2}} \mathcal{B}^{\alpha(\rho),r,q}_{\rho,B'}\left[a^{j,B'}_q(0,x')\right]$$

$$+ \sum_{q>\tau_o}^{q=\tau} \sum_{\substack{r+j=p+1\\ r\geq 1}} \mathcal{C}^{\alpha(\rho),r,q}_{\rho,B'}\left[a^{j,B'}_q(0,x')\right] \qquad p > 0$$

$$\partial_o U_o^\rho(0,x') = A_{\rho,B}^{k,o}\, b_k^{-k,B}(x')$$

$$U_1^\rho(0,x') = A_{\rho,B}^{k,1}\, b_k^{-k,B}(x')$$

$$U_1^{\rho \bar{D}(\rho)}(0,x') = A_{\rho,B}^{k,\bar{D}(\rho)}\, b_k^{-k,B}(x') \quad \text{si} \quad p = 0 .$$

② *Equation différentielle qui détermine* $a_\rho^{p,B}$ $\quad \rho \leq \tau_o$.

$$\partial_{(0)^2} U_p^\rho = \Omega\, U_p^\rho + \tilde{H}^1_{B,\rho}\left[W^B_{p+1,\rho}\right] + \tilde{H}^2_{B,\rho}\left[V^B_{p,\rho}\right] + \sum_{\substack{r+j=p+2 \\ r\geq 3}} \tilde{H}^r_B\left[a_\rho^{j,B}\right]$$

on a isolé $\partial_{(0)^2} U_p^\rho$ dans les équations écrites dans II.

On peut remplacer $W^B_{p+1,\rho}$ et $V^B_{p,\rho}$ par leurs expressions en fonction des coefficients $a_\rho^{j,B}$.

On obtient :

$$\partial_{(0)^2} U_p^\rho = \Omega\, U_p^\rho + \sum_{\substack{r+j=p+2 \\ r\geq 3}} \mathcal{B}^r_{B,\rho}\left[a_\rho^{j,B}\right]$$

Ω opérateur d'ordre 1 [une dérivation par rapport à x^o].

③ *Equations différentielles qui déterminent* $a_\rho^{p,B}$, $\rho > \tau_o$.

$$\partial_o U_{p+1}^{\rho \bar{D}(\rho)} = \Omega_{L(\rho)}\left[U_{p+1}^{\rho L(\rho)}\right] + \tilde{H}^1_{B,\rho}\left[V^B_{p,\rho}\right] + \sum_{\substack{r+j=p+1 \\ r\geq 2}} \tilde{H}^r_{B,\rho}\left[a_\rho^{j,B}\right]$$

Compte-tenu de l'expression de $V^{\hat{B}}_{p,\rho}$

$$\partial_o U_{p+1}^{\rho \bar{D}(\rho)} = \Omega_{L(\rho)} U_{p+1}^{\rho L(\rho)} + \sum_{\substack{r+j=p+1 \\ r\geq 2}} \tilde{M}^r_{B,\rho}\left[a_\rho^{j,B}\right]$$

$\Omega_{L(\rho)}$ opérateur d'ordre 0

$L(\rho)$ varie de 1 à $\nu_{s(\rho)}$.

RÉSUMÉ.

$$U^{\alpha(\rho)}_{p+1,\rho}(0,x') = A^{k,\alpha(\rho)}_{\rho,B} b_k^{-k+(p+1),B}(x') + \sum_{q=1}^{q=\tau_o} \left[\hat{A}^{\alpha(\rho)}_{\rho,q} [U^q_p(0,x')] + \sum_{\substack{r+j=p+1 \\ r\geq 2}} \hat{B}^{\alpha(\rho),r,q}_{\rho,B'} [a^{j,B'}_q(0,x')] \right]$$

$$+ \sum_{q>\tau_o}^{q=\tau} \sum_{\substack{r+j=p+1 \\ r\geq 1}} \tilde{C}^{\alpha(\rho),r,q}_{\rho,B'} [a^{j,B'}_q(0,x')] \qquad p > 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\partial_o U^\rho_o(0,x') = A^{k,o}_{\rho,B} b_k^{-k,B}(x') \ , \ U^\rho_1(0,x') = A^{k,1}_{\rho,B} b_k^{-k,B}(x') \\ &U^{\rho\bar{D}(\rho)}_1(0,x') = A^{k,\bar{D}(\rho)}_{\rho,B} b_k^{-k,B}(x') \end{aligned}\right\} \quad p = 0$$

$$\begin{cases} \partial_o 2 U_p = \Omega[U^\rho_p] + \sum\limits_{\substack{r+j=p+2 \\ r\geq 3}} B^r_{B,\rho}[a^{j,B}_\rho] \ , \ \rho \leq \tau_o \ , \ p > 0 \\ \partial_o 2 U^\rho_o = \Omega[U^\rho_o] \qquad \text{obtenue pour} \quad p = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_o U^{\rho\bar{D}(\rho)}_{p+1} = \Omega_{L(\rho)}[U^{\rho L(\rho)}_{p+1}] + \sum\limits_{\substack{r+j=p+1 \\ r\geq 2}} \tilde{M}^r_{B,\rho}[a^{j,B}_\rho] \ , \ \rho > \tau_o \ , \ p > 0 \\ \partial_o U^{\rho\bar{D}(\rho)}_1 = \Omega[_{L(\rho)}] \ U^{\rho L(\rho)}_1 \quad \text{obtenue pour} \quad p = 0 \end{cases}$$

④

a) - *Rappels et définitions.*

$$\Delta_R = \{x, \ x \in \mathbb{K}^{n+1} \ , \ \mathbb{K} = \mathbb{R} \ \text{ou} \ \mathbb{C} \ , \ \sum_{i=0}^{i=n} |x^i| < R\}$$

$$\Delta_{\alpha,r} = \{x, \alpha|x^o| + \sum_{i=1}^{i=n} |x^i| < r\}$$

$$\theta_o(R,\xi) = \frac{1}{R-\xi} \qquad \xi \in \mathbb{K} \ , \quad |\xi| < R$$

$$\theta_j(R,\xi) = \frac{d^j}{d\xi^j} \ \theta_o(R,\xi) = \frac{j!}{(R-\xi)^{j+1}}$$

$$\Psi_j(R,x) = \theta_j(R, \sum_{i=0}^{i=n} x^i) \ , \ \emptyset(\alpha,r,x) = \theta_j(r, \alpha x^o + \sum_{i=1}^{i=n} x^i)$$

$x \in \Delta_R$, $\Psi_j(R,x) << R\Psi_{j+1}(R,x)$, $r \lesssim R$ $\Psi_j(R,x) << \Psi_j(r,x)$

$x \in \Delta_{\alpha,r}$, $\phi_j(\alpha,r,x) << r\,\phi_{j+1}(\alpha,r,x)$

$\Psi_j(r,x) << \phi_j(\alpha,r,x)$

$r \lesssim R \quad \alpha \gtrsim 1 \quad x \in \Delta_{\alpha,r} \quad \Psi_j(R,x) << \phi_j(\alpha,r,x)$.

b) - *Analycité et majorantes.*

Si f est analytique au voisinage de 0 dans $\mathbb{K}^{n+1}$, $\exists\, M > 0$, $\exists\, R > 0$, $x \in \Delta_R$, $f(x) << M\Psi_o(R,x)$.

Si c est un opérateur différentiel à coefficients analytiques au voisinage de l'origine [ses coefficients admettent une majorante commune $M\Psi_o(R,x)$ sur Δ_R convenable] et si pour $x \in \Delta_{\alpha,r}$, $r < R$, $\alpha \gtrsim 1$, on a $y(x) << \phi_j(\alpha,r,x)$ alors il existe γ dépendant seulement de c telle que

$$c(y(x)) << \gamma\alpha^p\, \phi_{j+m}(\alpha,r,x)$$

m ordre de l'opérateur, p nombre de dérivations par rapport à x^o.

$F(x,\xi) = \sum_{j=0} a_j(x)\, \frac{\xi^j}{j!}$ analytique au voisinage de l'origine $\Longleftrightarrow$ il existe M,r,α et C positifs tels que :

$$\forall\, x \in \Delta_{\alpha,r} \quad a_j(x) << M\, C^{j+1}\, \phi_j(\alpha,r,x)$$

c - *Nous allons montrer le théorème suivant* :

Si on suppose $B_k(x',\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} b_k^{-(k-1)+j}(x')\, \frac{\xi^j}{j!}$, $0 \lesssim k \lesssim t-1$ analytiques au voisinage de l'origine dans $\mathbb{K}^{n+1}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et si les opérateurs $h_B^A(x,D)$ sont analytiques au voisinage de l'origine dans $\mathbb{K}^{n+1}$, les fonctions

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_\rho^{j,B}(x)\, \frac{\xi^j}{j!} = y^B(x,\xi) \qquad \rho \lesssim \tau_o$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_\rho^{j,B}(x)\, \frac{\xi^j}{j!} = y^B(x,\xi) \qquad \rho > \tau_o$$

sont analytique au voisinage de l'origine dans $\mathbb{K}^{n+2}$.

Preuve : On peut choisir C_1 telle que :

$$A^{k,\alpha(\rho)}_{\rho,B}[\phi_p(\alpha,r,x')] << C_1\ \phi_p(\alpha,r,x)\ ,\ \hat{H}^{s}_{\rho,B}[\phi_p(\alpha,r,x)] \leq C_1\ \alpha^s\ \phi_{p+s}(\alpha,r,x)$$

$$\tilde{A}^{\alpha(\rho)}_{\rho,q}[\phi_p(\alpha,r,x')] << C_1\ \phi_{p+1}(\alpha,r,x)$$

$$\tilde{B}^{\alpha(\rho),s,q}_{\rho,B'}[\phi_p(\alpha,r,x')] << C_1\ \alpha^s\ \phi_{p+s}(\alpha,r,x)$$

$$\tilde{C}^{\alpha(\rho),s,q}_{\rho,B'}[\phi_p(\alpha,r,x')] << C_1\ \alpha^s\ \phi_{p+s}(\alpha,r,x)$$

$$\Omega[\phi_p(\alpha,r,x)] << C_1\ \alpha\ \phi_{p+1}(\alpha,r,x)$$

$$\mathcal{B}^{s}_{B,\rho}[\phi_p(\alpha,r,x)] << C_1\ \alpha^s\ \phi_{p+s}(\alpha,r,x)$$

$$\Omega_{L(\rho)}[\phi_p(\alpha,r,x)] << C_1\ \phi_p(\alpha,r,x)$$

$$\hat{M}^{s}_{B,\rho}[\phi_p(\alpha,r,x)] << C_1\ \alpha^s\ \phi_{p+s}(\alpha,r,x)$$

$$d^{B}_{o\rho}\ \phi_p(\alpha,r,x) << C_1\ \phi_p(\alpha,r,x)$$

$$d^{B}_{\rho\bar{D}(\rho)}\ \phi_p(\alpha,r,x) << C_1\ \phi_p(\alpha,r,x)\quad .$$

On rappelle que $U^{\rho}_{o}(0,x') = 0$ et que $\partial_o U^{\rho}_{o}(0,x')$, $U^{\rho}_{1}(0,x')$, $U_1^{\rho\bar{D}(\rho)}$ sont imposées et analytiques au voisinage de l'origine de $\mathbb{K}^n$.

On détermine alors U^{ρ}_{o} et $U_1^{\rho\bar{D}(\rho)}$ analytiques au voisinage de l'origine de $\mathbb{K}^{n+1}$.

$\exists$ M , $\exists$ R tels que pour $r \leq R$, $\alpha \geq 1$,

$$U_o^\rho << M\Psi_o(R,x) << M\Psi_o(r,x) << M\emptyset_o(\alpha,r,x) << C\emptyset_o(\alpha,r,x)$$

$$\partial_o U_o^\rho(0,x') << M\Psi_o(R,x') << MR\emptyset_1(\alpha,r,x') << C^2\emptyset_1(\alpha,r,x')$$

$$U_1^{\rho\bar{D}(\rho)} << M\Psi_o(R,x) << MR\Psi_1(R,x) << MR\emptyset_1(\alpha,r,x) << C^2\emptyset_1(\alpha,r,x)$$

$$U_1^\rho(0,x') << M\Psi_o(R,x') << MR\emptyset_1(\alpha,r,x') << C^2\emptyset_1(\alpha,r,x') \quad \text{avec :}$$

$$KC = \alpha \quad , \quad K < 1 \quad , \quad M < \alpha \quad , \quad MR < \alpha^2 \quad ,$$

on a alors puisque $a_\rho^{O,B} = U_o^\rho \, d_{o\rho}^B \qquad \rho \lesssim \tau_o$

$$a_\rho^{1,B} = U^{\rho\bar{D}(\rho)} \, d_{\rho\bar{D}(\rho)}^B \qquad \rho > \tau_o$$

$$a_\rho^{O,B} << \frac{C_1}{C} C^2 \, \emptyset_o(\alpha,r,x) << C^2 \, \emptyset_o(\alpha,r,x) \quad \text{si} \quad C_1 < KC = \alpha \, , \; \rho \lesssim \tau_o$$

$$a_\rho^{1,B} << \nu C_1 \, C^2 \, \emptyset_1(\alpha,r,x) << C^3 \, \emptyset_1(\alpha,r,x) \quad \text{si } \nu \, C_1 < KC = \alpha, \quad \rho > \tau_o$$

$$\nu = \operatorname*{Max}_{\rho>\tau_o} \bar{D}(\rho) \quad .$$

On peut également choisir C tel que $b_k^{-(k-1)+q}(x') << C^{q+1}\emptyset_q(\alpha,r,x')$.

En résumé : on peut choisir C , $KC = \alpha$, $K < 1$, $\alpha \geq 1$,

$$\begin{cases} U_o^\rho << C \, \emptyset_o(\alpha,r,x) \quad \text{et} \quad a_\rho^{O,B} << C^2 \, \emptyset_o(\alpha,r,x) \\ \partial_o U_o^\rho(0,x') << C^2 \, \emptyset_1(\alpha,r,x') \qquad\qquad \rho \lesssim \tau_o \\ U_1^\rho(0,x') << C^2 \, \emptyset_1(\alpha,r,x') \end{cases}$$

$$U_1^{\rho\bar{D}(\rho)} << C^2 \, \emptyset_1(\alpha,r,x) \quad \text{et} \quad a_\rho^{1,B} << C^3 \, \emptyset_1(\alpha,r,x) \qquad \rho > \tau_o$$

Supposons les conditions suivantes réalisées : $0 \lesssim q \lesssim p-1$

$$\left.\begin{array}{l} U_q^\rho << C^{q+1} \, \emptyset_q(\alpha,r,x) \quad \text{et} \quad a_\rho^{q,B} << C^{q+2} \, \emptyset_q(\alpha,r,x) \\ \partial_o \, U_q^\rho(0,x') << C^{q+2} \, \emptyset_{q+1}(\alpha,r,x') \; U_{q+1}^\rho(0,x') << C^{q+2} \, \emptyset_{q+1}(\alpha,r,x') \end{array}\right\} \rho \lesssim \tau_o$$

$$U_{q+1}^{\rho\bar{D}(\rho)} << C^{q+2} \, \emptyset_{q+1}(\alpha,r,x) \quad \text{et} \quad a_\rho^{q+1,B} << C^{q+3} \, \emptyset_{q+2}(\alpha,r,x) \; , \; \rho > \tau_o$$

Nous allons montrer que les conditions supposées vraies pour $0 \leq q \leq p-1$ sont vraies pour $q = p$.

Soit $\gamma_q(\alpha,r,x) = C^{q+1}\ \phi_q(\alpha,r,x) = \gamma_q(x)$

Pour que $\gamma_p(x)$ soit une majorante de U_p^{ρ} et $U_{p+1}^{\rho \bar{D}(\rho)}$, il suffit que :

$$\partial_{o^2}\ \gamma_p(x) >> \check{\Omega}[\gamma_p(x)] + \sum_{\substack{s+j=p+2 \\ s\geq 3}} \sum_{B} \check{B}^{s}_{B,\rho}[\gamma_j(x)], \qquad \rho \leq \tau_o \tag{1}$$

$$\partial_o\ \gamma_{p+1}(x) >> \sum_{L(\rho)} \check{\Omega}_{L(\rho)}[\gamma_{p+1}(x)] + \sum_{\substack{s+j=p+1 \\ s\geq 2}} \sum_{B} \check{M}^{s}_{B,\rho}[\gamma_j(x)], \quad \rho > \tau_o \tag{2}$$

$$\gamma_{p+1}(0,x') >> \sum_{B} A^{k,\alpha(\rho)}_{\rho,B}\ \gamma_p(0,x') + \sum_{q=1}^{q=\tau_o} \hat{A}^{\alpha(\rho)}_{\rho,q}[\gamma_p(0,x')] + \tag{3}$$

$$\sum_{q=1}^{\tau_o} \sum_{B} \sum_{\substack{s+j=p+1 \\ s\geq 2}} \hat{B}^{\alpha(\rho)s,q}_{\rho,B}[\gamma_j(0,x')] + \sum_{q>\tau_o}^{q=\tau} \sum_{B} \sum_{\substack{s+j=p+1 \\ s\geq 1}} \hat{C}^{\alpha(\rho),s,q}_{\rho,B}[\gamma_j(0,x')]$$

les opérateurs munis d'un signe $\check{}$ sont des opérateurs majorant les opérateurs figurant dans les équations.

On obtient :

Pour la 1ère inéquation.-

$$\alpha^2\ C^{p+1}\ \phi_{p+2} >> C_1\ \alpha\ C^{p+1}\ \phi_{p+1} + m\ C_1 \sum_{\substack{s+j=p+2 \\ s\geq 3}} \alpha^s\ C^{p+4-s}\ \phi_{p+2}$$

qui sera réalisée si

$$C^{p+1} \geq C_1\ \frac{\alpha r}{\alpha^2}\ C^{p+1} + m\ C_1 \sum_{\substack{s+j=p \\ s\geq 1}} \alpha^s\ C^{p+2-s}$$

$$\sum_{\substack{s+j=p \\ s\geq 1}} \alpha^s\ C^{p+2-s} = \frac{C^{p+3} - \ p+3}{C - \alpha} - \left[C^{p+2} + \alpha^p\ C^2 + \alpha^{p+1}\ C + \alpha^{p+2}\right]$$

$$\sum_{\substack{s+j=p \\ s\geq 1}} \alpha^s\ C^{p+2-s} = \frac{\alpha\, C^3\ \left[C^{p-1} - \alpha^{p-1}\right]}{C - \alpha} \quad \frac{\alpha\ C^{p+2}\ \left[1 - K^{p-1}\right]}{C(1-K)}$$

On obtient alors une condition acceptable

$$\frac{C_1 r}{\alpha} + m\, C_1 \frac{\alpha}{1-K} \leq 1$$

qui s'écrit : $C_1 \left[\frac{r}{\alpha} + m \frac{\alpha}{1-K}\right] \leq 1$ vraie si $C_1 \left[r + \frac{m\, KC}{1-K}\right] \leq 1$

si $\alpha \geq 1$

Pour la 2ème inéquation.-

$$\alpha\, C^{p+2}\, \phi_{p+2} >> \nu\, C_1\, C^{p+2}\, \phi_{p+1} + m\, C_1 \sum_{\substack{s+j=p+1 \\ s\geq 2}} \alpha^s\, C^{p+3-s}\, \phi_{p+1}$$

qui sera réalisée si

$$C^{p+2} >> \frac{\nu\, C_1 \times C^{p+2}}{\alpha} r + m\, C_1 \sum_{\substack{s+j=p \\ s\geq 1}} \alpha^s\, C^{p+2-s}$$

On obtient alors une condition acceptable

$$\frac{\nu\, C_1\, r}{\alpha} + m\, C_1 \frac{K}{1-K} \leq 1 \quad \text{vraie si} \quad C_1 (\nu r + \frac{m-K}{1-K}) \leq 1$$

Pour la 3ème inéquation.-

$$C^{p+2}\, \phi_{p+1} >> m\, C_1\, C^{p+1}\, \phi_p + \tau_o\, C_1\, C^{p+1}\, \phi_{p+1} + m\, \tau_o\, C_1 \sum_{\substack{s+j=p+1 \\ s\geq 2}} \alpha^s\, C^{p+3-s}\, \phi_{p+1}$$

$$+ (\tau - \tau_o)\, m\, C_1 \sum_{\substack{s+j=p+1 \\ s\geq 1}} \alpha^s\, C^{p+3-s}\, \phi_{p+1}$$

qui sera réalisée si

$$C^{p+2} \geq \frac{m\, C_1}{C} r\, C^{p+2} + m\, \tau\, C_1 \sum_{\substack{s+j=p+1 \\ s\geq 1}} \alpha^s\, C^{p+3-s}$$

$$\frac{m\, C_1\, r}{C} + m\, \tau\, C_1 \frac{KC}{1-K} \leq 1 \quad \text{vrai si} \quad m\, C_1\, r + m\, \tau\, C_1 \frac{KC}{1-K} \leq 1 \quad \text{si} \quad C \geq 1$$

$$a_\rho^{p,B} = U_p^\rho \, d_{o\rho}^B + \sum_{\substack{s+j=p \\ s\geq 1}} \tilde{H}^s_{B',\rho}\left[a^{j,B'}\right] \qquad \rho \leq \tau_o$$

$$a_\rho^{p,B} << C_1 \, C^{p+1} \, \phi_p + \sum_{\substack{s+j=p \\ s\geq 1}} m \, C_1 \, \alpha^s \, C^{p+2-s}$$

$$a_\rho^{p,B} << C_1 \, C^{p+1} \, \phi_p + m \, C_1 \, C^{p+2} \, \frac{\alpha}{C} \, \frac{1}{1-K} \, \phi_p$$

$$a_\rho^{p,B} << \left(\frac{C_1}{C} + m \, C_1 \, \frac{K}{1-K}\right) C^{p+2} \, \phi_p$$

ce qui impose $\dfrac{C_1}{C} + m \, C_1 \, \dfrac{K}{1-K} \leq 1$

$$a_\rho^{p+1,B} = U_{p+1}^{\rho\bar{D}(\rho)} \, d_{\rho\bar{D}(\rho)}^B + \sum_{\substack{s+j=p+1 \\ s\geq 1}} \tilde{H}^s_{B',\rho}\left[a^{j,B'}\right] \, , \; \rho > \tau_o$$

$$a_\rho^{p+1,B} << \frac{\nu}{C} \, C_1 \, C^{p+3} \, \phi_{p+1} + r \, m \, C_1 \, \frac{K}{1-K} \, C^{p+3} \, \phi_{p+1}$$

ce qui impose

$$\frac{\nu \, C_1}{C} + r \, m \, C_1 \, \frac{K}{1-K} \leq 1$$

On a à choisir r, C, α, K tels que $\alpha \geq 1 \qquad \alpha = KC$

$$C \geq 1 \qquad K < 1$$

$$r \leq R$$

de telle sorte que :

$$C_1\left[r + \frac{m \, KC}{1-K}\right] \leq 1 \qquad C_1\left(\nu r + \frac{m \, K}{1-K}\right) \leq 1$$

$$C_1\left[\frac{1}{C} + \frac{m \, K}{1-K}\right] \leq 1 \qquad C_1\left[\frac{\nu}{C} + \frac{m \, r \, K}{1-K}\right] \leq 1$$

$$m \, C_1\left[r + \frac{KC}{1-K}\right] \leq 1$$

On doit avoir :

$$\frac{K}{1-K} \leq \left(\frac{1}{C_1} - r\right) \frac{1}{m\,C} \,, \quad \frac{1}{1-K} \leq \left(\frac{1}{C_1} - \nu r\right) \frac{1}{m}$$

$$\frac{K}{1-K} \leq \left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C}\right) \frac{1}{m} \,, \quad \frac{K}{1-K} \leq \left(\frac{1}{C_1} - \frac{\nu}{C}\right) \frac{1}{rm} \,, \quad \frac{K}{1-K} \leq \left(\frac{1}{m\,C_1} - r\right) \frac{1}{\tau C} \,.$$

On représente pour $C > \nu\, C_1$ les 5 fonctions de r graphiquement et on remarque qu'il existe r_o tel que :

$$r \leq r_o \quad \frac{K}{1-K} \leq \left(\frac{1}{m\,C_1} - r\right) \frac{1}{\tau C} = \frac{\mu}{C} \,, \quad r_o \text{ ne dépend pas de } C$$

On a à résoudre $\begin{cases} K \geq \dfrac{1}{C} \\ K \leq \dfrac{1}{1 + \mu/C} \end{cases}$

On choisit alors C_o suffisamment grand pour que $\dfrac{1}{C_o} < \dfrac{1}{1 + \mu/C_o}$ et on prendra $\dfrac{1}{C_o} < K < \dfrac{1}{1 + \mu/C_o}$.

Ce choix de C_o et de r_o implique $\alpha \geq 1$, $\alpha < C_o$.

Les coefficients $a_\rho^{j,B}$ vérifient donc :

$$a_\rho^{p,B} << C_o^{p+2}\, \phi_p(\alpha, r_o, x) \qquad \rho \leq \tau_o$$

$$a_\rho^{p+1,B} << C_o^{p+3}\, \phi_{p+1}(\alpha, r_o, x) \qquad \rho > \tau_o$$

Le théorème est démontré.

Conséquence : Propagation des singularités [2], [4], [6], [9], [10].

Si on particularise les distributions f_j , $j \in \mathbb{Z}$ en choisissant f_o définie sur un ouvert de l'origine dans $\mathbb{R}$, dont le support singulier est l'origine on montre par un raisonnement classique [2], [4], que la solution y^B :

$$y^B(x) = \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} f_o(\phi^\rho(x))\, a_\rho^{0,B}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} f_j(\phi^\rho(x))\, a_\rho^{j,B}(x)$$

est de classe C^∞ sauf pour les x tels que $\phi^\rho(x) = 0$ donc le support singulier de la solution est contenu dans le support singulier des données.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Mme Y. CHOQUET-BRUHAT , J. Math. Pures et Appl., 48, 1969, p. 117 à 158.

[2] A. DELCAMBRE , Thèse de Doctorat 3ème cycle, Lille 24-1-1972.

[3] J.C. DE PARIS, J. Math. Pures et Appl., 51, 1972, p. 231 à 256.

[4] J.C. DE PARIS, J. Math. Pures et Appl., 51, 1972, p. 465 à 488.

[5] GÄRDING, KOTAKÉ et LERAY, Bull. Soc. Math. Fr. 92, 1964, p. 263-361.

[6] D. LUDWIG, Comm. Pure Appl. 13, 1960, p. 473-508.

[7] D. LUDWIG, n° 40, Report NO 9351, Courant Institute of Math. Sc., A.E.C. Computing and applied Math. Center, 1961.

[8] J. VAILLANT, J. Math. Pures et Appl., 47, 1968, p. 1 à 40.

[9] J. VAILLANT, J. Math. Pures et Appl., 50, 1971, p. 25 à 51.

[10] C. WAGSCHAL, Comptes rendus, 272, série A, 1971, p. 1719 ; J. Math. Pures et Appl., (à paraître).

50376
1978
221

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

U.E.R. DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES

PROBLEME DE CAUCHY EN C^∞ POUR UN OPERATEUR MATRICIEL D'ORDRE $\leq t$, $t \geq 1$, AVEC UNE CARACTERISTIQUE DOUBLE

par

Robert BERZIN

Février 1975

50376
1978
221

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — *Le problème de Cauchy pour un système hyperbolique d'équations linéaires avec une caractéristique double.* Note (*) de M. **Robert Berzin**, présentée par M. Jean Leray.

Pour un système d'équations aux dérivées partielles faiblement hyperbolique, dans l'hypothèse où un polynôme construit à partir de la matrice sous-caractéristique est divisible par un facteur de multiplicité deux dans le symbole principal, on construit une paramétrix au moyen d'opérateurs intégraux de Fourier.

1. NOTATIONS. HYPOTHÈSES. — X′ désigne une variété compacte $\mathscr{C}^\infty$, de dimension n, et $X = [0, T] \times X'$, la variété produit, $T \in \mathbf{R}$, $T > 0$. $P(x, D) = (h_B^A(x, D))$ est un opérateur différentiel d'ordre $\leqq t$, $t \geqq 1$, $(H_B^A(x, l))$ sa matrice caractéristique, $d^0(H_B^A(x, l)) = t$ ou $H_B^A(x, l) = 0$, $1 \leqq B \leqq m$, $1 \leqq A \leqq m$.

Dans une carte de coordonnées locales, on notera $((x^0, x'), (l_0, l'))$, $x' = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $l' = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$, les éléments (x, l) de $T^*(X)$.

1° On suppose que $\det(H_B^A(x, l)) = \prod_{s=0}^{s=\sigma} [H_s(x, l)]^{\nu_s}$ est de degré mt, les polynômes homogènes H_s étant irréductibles, les ν_s constants et $\nu_0 = 2$.

2° On suppose que pour tout x, le radical hyperbolique $H = \prod_{s=0}^{s=\sigma} H_s$ admet $(1, 0, \ldots, 0)$ comme direction de stricte hyperbolicité c'est-à-dire que l'équation : $H(x, l_0, p') = 0$ admet, pour p′ réel non nul, τ racines réelles $p_0^p(p')$ distinctes, avec $\tau = \sum_{s=0}^{s=\sigma} \tau_s$, $\tau_s = d^0 H_s$.

3° Pour tout x fixé, pour tout $s \geqq 1$, dans l'anneau principal Φ_s, localisé de $\mathbf{R}[l_0, l_1, \ldots, l_n]$ par rapport à l'idéal premier (H_s) on suppose que

$$(H_B^A) \sim \begin{bmatrix} H_s & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & H_s & & \\ & & & 1 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \Bigg\} \nu_s$$

On construit, (H_B^A) définissant un endomorphisme de $(\Phi_s/(H_s))^m$, des représentants $(d_{\bar{D}}^B)$ particuliers notés $(\delta_{\bar{D}}^B)$ de $\operatorname{Ker}(H_B^A)$, $1 \leqq \bar{D} \leqq \nu_s$, et des représentants $(g_A^{\bar{F}})$ particuliers notés $(\gamma_A^{\bar{F}})$ de $\operatorname{Ker}^{co}(H_B^A)$, $1 \leqq \bar{F} \leqq \nu_s$ [(13), (14)].

4° Pour tout x fixé, dans l'anneau Φ_0, localisé de $\mathbf{R}[l_0, l_1, \ldots, l_n]$ par rapport à l'idéal premier (H_0), on suppose que

$$(H_B^A) \sim \begin{bmatrix} (H_0)^2 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE
Section de SCIENCES

Cette condition précise la faible hyperbolicité.

On construit, (H_B^A) définissant un endomorphisme de $(\Phi_0/(H_0))^m$, un représentant particulier (d^B) noté (δ^B) de $\mathrm{Ker}\,(H_B^A)$ module libre de dimension 1, et un représentant particulier (g_A) noté (γ_A) de $\mathrm{Ker}^{co}\,(H_B^A)$.

On suppose que si $\partial_\lambda = \partial/\partial x^\lambda$ et $\partial^\lambda = \partial/\partial l_\lambda$:

$$K_0 = \left[H_B^{*A} - \frac{1}{2}\partial_\lambda^\lambda H_B^A\right]\gamma_A\,\delta^B + \frac{1}{2}H_B^A\left[\partial^\lambda\delta^B\partial_\lambda\gamma_A - \partial_\lambda\delta^B\partial^\lambda\gamma_A\right]$$

est divisible par H_0, ce qui impose une condition sur les termes d'ordre $\leqq t-1$ de l'opérateur.

$[H_B^{*A} - (1/2)\,\partial_\lambda^\lambda H_B^A]$ désigne un polynôme construit à partir de la matrice sous-caractéristique [(7), (10)].

5° On note $(d_{0\rho}^B(x, p_0^\rho, p'))$ les vecteurs de $\mathrm{Ker}\,(H_B^A(x, p_0^\rho, p'))$, $1 \leqq \rho \leqq \tau_0$, et $(d_{\rho\overline{D}(\rho)}^B(x, p_0^\rho, p'))$ ceux de $\mathrm{Ker}\,(H_B^A(x, p_0^\rho, p'))$, $\tau_0+1 \leqq \rho \leqq \tau$ et $1 \leqq \overline{D}(\rho) \leqq \nu_s$ si

$$\tau_0 + \ldots + \tau_{s-1} < \rho \leqq \tau_0 + \ldots + \tau_s.$$

On suppose que, pour tout x, pour tout ρ, $1 \leqq \rho \leqq \tau_0$, et tout $p' \neq 0$, dans l'anneau localisé de $\mathbf{R}[l_0]$ par rapport à l'idéal premier $(l_0 - p_0^\rho)$:

$$(H_B^A(x, l_0, p')) \sim \begin{bmatrix} [l_0 - p_0^\rho(p')]^2 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (8).$$

On montre que

$$1 \leqq B \leqq m$$
$$0 \leqq k \leqq t-1, \det\Big(\underbrace{\ldots (p_0^\rho)^k d_{0\rho}^B \ldots}_{1 \leqq \rho \leqq \tau_0} \quad \underbrace{(p_0^\rho)^k \partial^0 d_{0\rho}^B + k(p_0^\rho)^{k-1} d_{0\rho}^B \ldots}_{1 \leqq \rho \leqq \tau_0} \quad \underbrace{(p_0^\rho)^k d_{\rho\overline{D}(\rho)}^B \ldots}_{\tau_0+1 \leqq \rho \leqq \tau} \Big) \neq 0 \quad (4).$$

2. Énoncé du théorème principal [(2), (3), (12), (11)]. — $P(x, D)$ satisfaisant aux hypothèses de 1, pour tout $f = (f^A), f^A \in \mathscr{C}^\infty(X, \Omega_{1/2})$, pour tout $g_k = (g_k^A)$, $0 \leqq k \leqq t-1$, $g_k^A \in \mathscr{C}^\infty(X', \Omega_{1/2})$, [$f^A$ et g_k^A désignant respectivement des densités d'ordre 1/2 sur X et X'], il existe $u = (u^B)$ unique, $u^B \in \mathscr{C}^\infty(X, \Omega_{1/2})$ vérifiant

$$P(x, D)u = f \quad \text{et} \quad D_0^k u\big|_{x^0 = t^0} = g_k, \quad 0 \leqq k \leqq t-1.$$

On fournit la preuve de 2 en établissant :

3. Proposition. — *Les notations sont celles de* (5), (6), et (9).

Sous les hypothèses de 1, on peut construire pour $0 \leqq \mu \leqq t-1$, $t^0 \in [0, T]$, des opérateurs

$$E_\mu(t^0) = (E_{\mu, A}^B(t^0)), \qquad E_{\mu, A}^B(t^0) \in I^{1-\mu-1/4}(X, X', C(t^0)),$$

$$C(t^0) = \bigcup_{\rho=1}^{\rho=\tau} C_\rho(t^0),$$

$C_\rho(t^0)$ relation canonique homogène (associée à ψ^ρ construite à partir d'une racine p_0^ρ particulière), vérifiant :

$PE_\mu(t^0) \equiv 0$ (modulo un opérateur à noyau C^∞);

$\gamma_k E_\mu(t^0) = \delta_{k,\mu} I$, $\delta_{k,\mu}$ symbole de Krönecker, I opérateur identique, γ_k opérateur de trace sur $x^0 = t^0$ de D_0^k, $0 \leqq k \leqq t-1$.

On construit pour cela $F^B_{\mu,\rho,A}(t^0) \in I^{\alpha(\rho)-\mu-1-1/4}(X, X', C_\rho(t^0))$, $\alpha(\rho) = 2$ si $1 \leqq \rho \leqq \tau_0$ et $\alpha(\rho) = 1$ si $\rho > \tau_0$, par un développement asymptotique de composantes $F^{B,j}_{\mu,\rho,A}(t^0)$ vérifiant localement

$$[F^{B,j}_{\mu,\rho,A}(t^0)u](x) = (2\pi)^{-n+1}\int e^{i\psi^\rho(x,p')} a^{B,j}_{\mu,\rho,A}(x, p')\,\hat{u}(p')\,dp',$$

$u \in \mathscr{C}_0^\infty(X, \Omega_{1/2})$, $a^{B,j}_{\mu,\rho,A} \in S^{-\mu-j}(X, \Omega_{1/2})$ symbole d'ordre $(-\mu-j)$. Les composantes $a^{B,j}_{\mu,\rho,A}$ sont déterminées par les techniques de [1].

4. Construction de la solution. — La solution unique au problème de Cauchy 2 est donnée par

$$u = \sum_{k=0}^{k=t-1} G_k[g_k] + \mathscr{G}\circ\mathscr{T}\left[f - \sum_{k=0}^{k=t-1} Q_k[g_k]\right],$$

$P\mathscr{G}\circ\mathscr{T} = I$ et $\gamma_k \mathscr{G}\circ\mathscr{T} = 0$ avec G_k, Q_k, $\mathscr{G}$, $\mathscr{T}$, désignant des opérateurs obtenus en explicitant ceux apparus dans 3, grâce à des techniques utilisées par Chazarain [2].

Résumé d'un texte qui sera conservé 5 ans par les Archives de l'Académie et dont copie peut être obtenue de l'Académie.

(*) Séance du 6 janvier 1975.

(1) R. Berzin, *Comptes rendus*, 275, série A, 1972, p. 1091.
(2) J. Chazarain, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 24, n° 1, 1974, p. 173-202.
(3) Y. Demay, *Comptes rendus*, 278, série A, 1974, p. 771.
(4) J.-C. de Paris, *J. Math. pures et appl.*, 51, 1972, p. 231-256.
(5) J. J. Duistermaat et L. Hörmander, *Acta. Math.*, 128, 1972.
(6) J. J. Duistermaat, *Séminaire Goulaouic-Schwartz*, École Polytechnique, 1972.
(7) Garding, Kotake et Leray, *Bull. Soc. math. Fr.*, 92, 1964, p. 263 à 361.
(8) D. Gourdin, *Comptes rendus*, 278, série A, 1974, p. 269.
(9) L. Hörmander, *Acta Math.*, 127, 1971.
(10) J. Leray et Ohya, *Colloque de Liège*, 1964, C. N. R. B.
(11) D. Ludwig, *Comm. pure appl.*, 13, 1960, p. 473-508.
(12) Y. Petkov, *Dokl. Akad. Mauk S. S. S. R.*, 209, 1973, p. 795-797.
(13) J. Vaillant, *J. Math. pures et appl.*, 47, 1968, p. 1 à 40.
(14) J. Vaillant, *J. Math. pures et appl.*, 50, 1971, p. 25 à 51.

84, *rue Carpeaux*,
59100 *Roubaix, Nord.*

PROBLEME DE CAUCHY EN C^∞ POUR UN OPERATEUR MATRICIEL D'ORDRE $\leq t$, $t \geq 1$, AVEC UNE CARACTERISTIQUE DOUBLE *par R. BERZIN.*

I - INTRODUCTION.

II - RADICAL HYPERBOLIQUE - INVARIANTS.

1. Préliminaires.
2. Radical hyperbolique.
3. Localisation :
   a) facteurs d'indice $s \geq 1$;
   b) facteur d'indice 0 ; sous-caractéristique.

III - DETERMINANT.

IV - DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES.

1. Détermination des coefficients relatifs à la caractéristique double.
2. Détermination des coefficients relatifs aux autres caractéristiques.
3. Problème de Cauchy asymptotique.

V - RELATION CANONIQUE.

VI - THEOREME PRINCIPAL.

1. Enoncé.
2. Construction des opérateurs à noyau C^∞ :
   a) Proposition ;
   b) Explicitation de la technique utilisée ;
   c) Calcul des composantes des développements asymptotiques
      1er cas : relativement au facteur d'ordre $s \geq 1$;
      2e cas : relativement au facteur d'ordre 0 ;
3. Résolution en C^∞.

VII - BIBLIOGRAPHIE.

I - INTRODUCTION.

Pour un opérateur différentiel matriciel, lorsque sa forme réduite dans un anneau localisé convenable contient un facteur invariant de multiplicité deux et qu'un polynôme (généralisant la fonction de Lévi dans le cas d'une équation et construit à partir de la matrice sous-caractéristique) est divisible par ce facteur, on démontre que le problème en C^∞ est bien posé.

En utilisant une méthode mise au point par HÖRMANDER et DUISTERMAAT, on construit des opérateurs matriciels intégraux de Fourier qui résolvent le problème de Cauchy modulo des opérateurs à noyau C^∞ que l'on explicite par la suite. Ce travail prolonge celui de CHAZARAIN (3) (opérateur hyperbolique à caractéristiques multiples) de DEMAY (5) (opérateur hyperbolique d'ordre 1, matriciel, à caractéristiques d'ordre 1 et 2) de PETKOV (12) (système hyperbolique du 1er ordre à caractéristiques multiples).

Les techniques utilisées sont celles des développements asymptotiques (1) aussi il nous a semblé plus commode d'en rappeler les calculs dans un paragraphe distinct IV afin de ne pas alourdir la partie relative aux opérateurs Intégraux de Fourier. Dans un même souci de clarté nous introduisons les éléments algébriques indispensables dans les deux paragraphes distincts II et III. La relation canonique convenable du paragraphe V est celle décrite par CHAZARAIN (2). Les notations sont celles de HÖRMANDER (7), (8), (11).

II - RADICAL HYPERBOLIQUE - INVARIANTS.

1. Préliminaires.

Soit X' une variété compacte C^∞ de dimension n et $X = \mathbb{R} \times X'$ la variété produit. On note (dans une carte de coordonnées locales) $x = (x^0,x')$, $\xi = (\xi_0,\xi')$, $x' = (x^1,\ldots,x^n)$ $\xi' = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$, $(x,\xi) \in T^*(X)$. Soit $P(x,D) = (h_B^A(x,D))$ un opérateur différentiel d'ordre $\leq t$, $t \geq 1$ et $(H_B^A(x,\xi))$ sa matrice caractéristique, $d^o H_B^A(x,\xi) = t$ ou $H_B^A(x,\xi) = 0$.

On suppose que $\det(H_B^A(x,\xi)) = \prod_{s=0}^{s=\sigma} \left[H_s(x,\xi)\right]^{\nu_s}$ est une application polynômiale de degré mt, $1 \leq B \leq m$, $1 \leq A \leq m$, les polynômes H_s étant irréductibles, les ν_s constants, $\nu_o = 2$.

2. Radical hyperbolique.

Soit $H = \prod_{s=0}^{s=\sigma} H_s$. On suppose que $(1,0,\ldots,0)$ est une direction de stricte hyperbolicité pour H c'est-à-dire que l'équation $H(x,\xi_o,\eta') = 0$ admet τ racines réelles distinctes pour $\eta' \neq 0$ réel que l'on notera $\xi_o^\rho(\eta')$, $\tau = \sum_{s=0}^{s=\sigma} \tau_s$.

3. Localisation.

a) facteurs d'indice $s \geq 1$ (16), (17), (18).

Pour tout x et tout $s \geq 1$, on suppose que :

$$(H_B^A) \sim \begin{bmatrix} H_s & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & H_s & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \Big\} \nu_s$$

dans l'anneau principal Φ_s localisé de $\mathbb{R}[\xi_o,\xi_1,\ldots,\xi_n]$ par rapport à l'idéal premier défini par H_s. (H_B^A) définit canoniquement un endomorphisme de $(\Phi_{s/(H_s)})^m$ dont le noyau est de dimension ν_s.

On désigne par $(\tilde{d}_{\bar{D}}^B)$ des vecteurs de base de $\mathrm{Ker}(H_B^A)$ et par $(d_{\bar{D}}^B)$ des représentants dans $(\Phi_s)^m$. $1 \leq \bar{D} \leq \nu_s$.

On construit des vecteurs $(\delta_{\bar{D}}^B)$, $(d_{\bar{D}}^B)$ particuliers, avec $(\delta_{\bar{D}}^{\bar{D}}) = A_s$ cofacteur d'ordre $m - \nu_s$ de (H_B^A) non divisible par H_s.

Si $(\tilde{g}_A^{\bar{F}})$ désigne des vecteurs de base de $\mathrm{Ker}^{co}(H_B^A)$ et $(g_A^{\bar{F}})$ des représentants dans $(\Phi_s)^m$, $1 \leq \bar{F} \leq \nu_s$, on construit des vecteurs $(\gamma_A^{\bar{F}})$, $(g_A^{\bar{F}})$ particuliers, avec $(\gamma_{\bar{F}}^{\bar{F}}) = A_s$.

Remarque :

Soit $\xi_o^\rho(\eta')$ une racine de $H_s(x,\xi_o,\eta') = 0$ avec $\eta' \neq 0$. Dans le localisé de $\mathbb{R}[\xi_o]$ par rapport à l'idéal $(\xi_o - \xi_o^\rho)$ on a :

$$(H_B^A(\xi_o,\eta')) \sim \left[\begin{array}{ccc} (\xi_o - \xi_o^\rho)^{\chi_1} & & \\ & \ddots & 0 \\ & & (\xi_o - \xi_o^\rho)^{\chi_\nu} \\ & 1 & \\ 0 & \ddots & \\ & & 1 \end{array}\right] \Bigg\} \nu \leq \nu_s$$

et par suite dans $\mathbb{R}$ et d'après les hypothèses faites sur H_s.

$$(H_B^A(x,\xi_o^\rho,\eta')) \sim \left[\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & \ddots \\ & & 1 \end{array}\right] \Bigg\} \nu_s$$

Il existe donc dans $(H_B^A(x,\xi_o^\rho,\eta'))$ un mineur d'ordre $m - \nu_s$ soit $A_s(x,\xi_o^\rho,\eta')$ non nul et alors $\dim \mathrm{Ker}(H_B^A(x,\xi_o^\rho,\eta')) = \nu_s$.

b) facteur d'indice 0 - Sous-caractéristique (2), (10), (17).

Pour tout x et pour $s = 0$, on suppose que dans l'anneau localisé $\emptyset_o$ de $\mathbb{R}[\xi_o,\xi_1,\ldots,\xi_n]$ par rapport à l'idéal premier défini par H_o :

$$(H_B^A) \sim \left[\begin{array}{ccc} [H_o]^2 & & 0 \\ & 1 & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{array}\right]$$

(H_B^A) définit canoniquement un endomorphisme de $(\Phi_o/([H_o]^2))^m$ dont le noyau est un module libre de dimension 1.

On désigne par $(\tilde{d}^B)$ une base de $\mathrm{Ker}(H_B^A)$ et par (d^B) un représentant dans $(\Phi_o)^m$. On construit (δ^B) vecteur (d^B) particulier avec $\delta^1 = A_o$ cofacteur de (H_B^A) d'ordre m-1 non divisible par H_o.

Si $(\tilde{g}_A)$ désigne une base de $\mathrm{Ker}^{co}(H_B^A)$ et (g_A) un représentant dans $(\Phi_o)^m$, on construit (γ_A) vecteur (g_A) particulier avec $\gamma_1 = A_o$. On construit le polynôme :

$$K_o = \left[H_B^{*A} - \frac{1}{2\eta}\,\partial_\lambda^\lambda(\eta H_B^A)\right]\gamma_A\delta^B + \frac{1}{2}\,H_B^A\left[\partial^\lambda\delta^B\partial_\lambda\gamma_A - \partial_\lambda\delta^B\partial^\lambda\gamma_A\right]$$

η désignant une forme élément de volume sur X et

$\left(\left[H_B^{*A} - \frac{1}{2\eta}\,\partial_\lambda^\lambda(\eta H_B^A)\right]\right)$ la matrice sous-caractéristique du système.

On suppose que K_o est divisible par H_o et on prouve que $K_o = H_B^{*A}\,g_A\,d^B - H_B^A\partial^\lambda g_A\partial_\lambda d^B - H_o\partial^\lambda H_o\partial_\lambda H_o$ est divisible par H_o en posant $H_o = \dfrac{H_B^A d^B g_A}{[H_o]^2}$, non divisible par H_o.

Remarque :

Soit $\xi_o^\rho(\eta')$ une racine de $H_o(x,\xi_o^\rho,\eta') = 0$ avec $|\eta'| = 1$; η' est sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

On peut avoir dans le localisé de $\mathbb{R}[\xi_o]$ par rapport à $(\xi_o - \xi_o^\rho)$

$$(H_B^A(x,\xi_o,\eta')) \sim \begin{bmatrix} [\xi_o-\xi_o^\rho]^2 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad (H_B^A(x,\xi_o,\eta') \sim \begin{bmatrix} \xi_o-\xi_o^\rho & & & \\ & \xi_o-\xi_o^\rho & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui donne dans le quotient du localisé par $(\xi_o - \xi_o^\rho)$:

$$(H_B^A(x,\xi_o^\rho,\eta')) \sim \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad (H_B^A(x,\xi_o^\rho,\eta') \sim \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & 0 \\ & 1 & \ddots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Dans le 1er cas, il existe un mineur A_o d'ordre m-1 non nul en $\xi_o^\rho(\eta')$. Dans le 2ème cas, $\xi_o^\rho(\eta')$ peut annuler exceptionnellement tous les mineurs d'ordre m-1 et en particulier A_o.

Nous supposerons par la suite que seul le 1er cas peut se produire.

On peut alors, compte tenu des hypothèses faites sur H_o, supposer que dans un voisinage d'un tel η', un mineur A_o ne s'annule jamais. Nous recouvrirons la sphère unité par un nombre fini r de voisinages V_λ de tels points c'est-à-dire que pour tout $\eta' \in V_\lambda$ nous pouvons supposer $A_o(x,\xi_o^\rho,\eta') \neq 0$ et

$$\dim \operatorname{Ker}(H_B^A(x,\xi_o^\rho,\eta')) = 1.$$

III - DETERMINANT.

On note $(d_{o\rho}^B(x,\xi_o^\rho,\eta'))$ les vecteurs (d^B) associés à $(H_B^A(x,\xi_o^\rho,\eta'))$, ξ_o^ρ racine de H_o, $1 \leq \rho \leq \tau_o$ et $(d_{\rho\bar{D}(\rho)}^B(x,\xi_o^\rho,\eta'))$ les vecteurs $(d_{\bar{D}}^B)$ associés pour $\rho > \tau_o$ à $(H_B^A(x,\xi_o^\rho,\eta'))$, $1 \leq \bar{D}(\rho) \leq \nu_s$ si $\tau_o + \tau_1 + \ldots + \tau_{s-1} < \rho \leq \tau_o + \ldots + \tau_s$, ξ_o^ρ racine de H_s.

Le déterminant suivant est non nul : (3), (4), (6), (18)

$$\left| \cdots \underbrace{\begin{matrix} \vdots \\ (\xi_o^\rho)^k d_{o\rho}^B \\ \vdots \end{matrix}}_{1\leq\rho\leq\tau_o} \underbrace{\begin{matrix} \vdots \\ (\xi_o^\rho)^k \partial^o d_{o\rho}^B + k(\xi_o^\rho)^{k-1} d_{o\rho}^B \\ \vdots \end{matrix}}_{1\leq\rho\leq\tau_o} \cdots \underbrace{\begin{matrix} \vdots \\ (\xi_o^\rho)^k d_{\rho\bar{D}(\rho)}^B \\ \vdots \end{matrix}}_{\tau_o+1\leq\rho\leq\tau} \cdots \right| \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 1 \leq B \leq m \\ 0 \leq k \leq t-1 \end{matrix}$$

Pour prouver ce résultat on montre que le système homogène associé n'admet que la solution nulle.

Ce système s'écrit :

$$(q)\ \sum_{\rho\leq\tau_o}(\xi_o^\rho)^q d^B_{o\rho}\,\lambda^{o\rho} + \sum_{\rho\leq\tau_o}\left[(\xi_o^\rho)^q\partial^o d^B_{o\rho} + q(\xi_o^\rho)^{q-1}d^B_{o\rho}\right]\lambda^\rho + \sum_{\rho>\tau_o}(\xi_o^\rho)^q d^B_{\rho\bar{D}(\rho)}\,\lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = 0$$

$$0 \leq q \leq t-1.$$

Rappelons que $H^A_B(\xi_o,\eta') = H^A_B(g)(\xi_o^t) + \sum_{q=1}^{q=t-1} L^{qA}_B(\eta')(\xi_o^q) + L^{oA}_B(\eta')$

pour $0\leq q\leq t-1$, L^{qA}_B est un polynôme en (η').

On sait que $\det(H^A_B(g)) \neq 0, g = (1,0,\ldots,0)$ puisque $x^o = 0$ n'est pas caractéristique.

On supposera désormais l'opérateur normalisé relativement à g, à savoir :

$$H^A_B(g) = \delta^A_B \qquad \text{symbole de Kronecker.}$$

On obtient alors :

$$\left[\delta^A_B(\xi_o^\rho)^t + \sum_{q=1}^{q=t-1} L^{qA}_B(\xi_o^\rho)^q + L^{oA}_B\right] d^B_{o\rho} = 0 \quad , \quad \rho \leq \tau_o$$

$$\left[\delta^A_B(\xi_o^\rho)^t + \sum_{q=1}^{q=t-1} L^{qA}_B(\xi_o^\rho)^q + L^{oA}_B\right] d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} = 0 \quad , \quad \rho > \tau_o$$

Appliquons la matrice $L^{oA}_B(\eta') = L^{oA}_B$ (pour simplifier) au vecteur de $\mathbb{R}^m$ défini par la 1ère équation (0) du système on obtient alors :

$$\sum_{\rho\leq\tau_o} L^{oA}_B\, d^B_{o\rho}\,\lambda^{o\rho} + \sum_{\rho\leq\tau_o} L^{oA}_B\partial^o d^B_{o\rho}\,\lambda^\rho + \sum_{\rho>\tau_o} L^{oA}_B\, d^B_{\rho\bar{D}(\rho)}\,\lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = 0$$

qui compte tenu des remarques précédentes s'écrit :

$$\sum_{\rho\leq\tau_o} \delta_B^A(\xi_o^\rho)^t d_{o\rho}^B \lambda^{o\rho} + \sum_{\rho\leq\tau_o} \sum_{q=1}^{q=t-1} L_B^{qA}(\xi_o^\rho)^q d_{o\rho}^B \lambda^{o\rho} - \sum_{\rho\leq\tau_o} L_B^{oA} \partial^o d_{o\rho}^B \lambda^\rho$$

$$+ \sum_{\rho>\tau_o} \delta_B^A(\xi_o^\rho)^t d_{\rho\bar{D}(\rho)}^B \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} + \sum_{\rho>\tau_o} \sum_{q=1}^{q=t-1} L_B^{qA}(\xi_o^\rho)^q d_{\rho\bar{D}(\rho)}^B \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = 0.$$

On regroupe convenablement :

$$\sum_{\rho\leq\tau_o} (\xi_o^\rho)^t d_{o\rho}^A \lambda^{o\rho} - \sum_{\rho\leq\tau_o} H_B^A \partial^o d_{o\rho}^B \lambda^\rho + \sum_{\rho\leq\tau_o} (\xi_o^\rho)^t \partial^o d_{o\rho}^A \lambda^\rho + \sum_{\rho>\tau_o} (\xi_o^\rho)^t d_{\rho\bar{D}(\rho)}^A \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)}$$

$$+ \sum_{q=1}^{q=t-1} L_B^{qA}\left[\sum_{\rho\leq\tau_o} (\xi_o^\rho)^q d_{o\rho}^B \lambda^{o\rho} + \sum_{\rho\leq\tau_o} (\xi_o^\rho)^q \partial^o d_{o\rho}^B \lambda^\rho + \sum_{\rho>\tau_o} (\xi_o^\rho)^q d_{\rho\bar{D}(\rho)}^B \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)}\right] = 0.$$

On rappelle que : $\partial^o H_B^A(\xi_o^\rho, \eta')\ d_{o\rho}^B(\xi_o^\rho, \eta') + H_B^A(\xi_o^\rho, \eta')\partial^o d_o^B\ (\xi_o^\rho, \eta') = 0.$

Compte tenu de la $(q+1)^{ème}$ équation (q) du système le crochet s'écrit : $- q(\xi_o^\rho)^{q-1}\ d_{o\rho}^B \lambda^\rho$

or $\sum_{\rho\leq\tau_o} H_B^A \partial^o d_{o\rho}^B + \sum_{q=1}^{q=t-1} q(\xi_o^\rho)^{q-1} d_{o\rho}^B = - \sum_{\rho\leq\tau_o} \partial^o H_B^A d_{o\rho}^B + \sum_{q=1}^{q=t-1} q(\xi_o^\rho)^{q-1} d_{o\rho}^B$

avec $\partial^o H_B^A = t\delta_B^A(\xi_o)^{t-1} + \sum_{q=1}^{q=t-1} qL_B^{qA}(\xi_o)^{q-1}$ car L_B^{oA} ne dépend pas de ξ_o .

On obtient donc pour tout A

$$\sum_{\rho\leq\tau_o} (\xi_o^\rho)^t d_{o\rho}^A \lambda^{o\rho} + \sum_{\rho\leq\tau_o} \left[(\xi_o^\rho)^t \partial^o d_{o\rho}^A + t(\xi_o^\rho)^{t-1} d_{o\rho}^A\right]\lambda^\rho + \sum_{\rho>\tau_o} (\xi_o^\rho)^t d_{\rho\bar{D}(\rho)}^A \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = 0$$

c'est-à-dire l'équation (t).

Ensuite on procède par récurrence.

Nous allons effectuer un changement de variables.

Posons pour $\tau_o < \rho \leqslant \tau$, $\sum_{\bar{D}(\rho)} d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = \Lambda^B_\rho$

et pour $1 \leqslant \rho \leqslant \tau_o$, $\qquad d^B_{o\rho}\lambda^{o\rho} = \tilde{\Lambda}^B_\rho$

$1 \leqslant \rho \leqslant \tau_o$, $\qquad \partial^o d^B_{o\rho}\lambda^\rho = \Gamma^B_\rho$ si $d^B_{o\rho} = 0$.

Nous allons nous intéresser à chacun des m systèmes homogènes obtenus en isolant du système initial [écrit jusqu'à l'ordre (q'), q' pris au moins égal à $\tau+\tau_o-1$] chaque ligne indicée par B ce qui donne pour tout B :

$$\begin{array}{ccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{\rho\leqslant\tau_o} (\xi^\rho_o)^k \tilde{\Lambda}^B_\rho & + & \sum_{\rho\leqslant\tau_o} \left[(\xi^\rho_o)^k \partial^o d^B_{o\rho} + k(\xi^\rho_o)^{k-1} d^B_{o\rho}\right]\lambda^\rho & + & \sum_{\rho>\tau_o} (\xi^\rho_o)^k \Lambda^B_\rho = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

$$0 \leqslant k \leqslant q' .$$

Chacun des systèmes n'est pas forcément carré.

Pour ce faire nous allons [si $d^B_{o\rho} = 0$] éliminer le coefficient $\tilde{\Lambda}^B_\rho$ qui est nul et remplacer $\partial^o d^B_{o\rho}\lambda^\rho$ par Γ^B_ρ. B donné, $\tau_o(B)$ désigne le nombre d'éléments $d^B_{o\rho}$ non nuls. Nous choisissons $q'(B) = \tau_o(B) + \tau - 1$.

On montre alors que le déterminant de chaque système se ramène à un VAN-DER-MONDE d'ordre $(\tau-\tau_o(B))$

$$\begin{array}{ccc} \cdots\cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots\cdots \\ & \vdots & \\ \cdots\cdots\cdots & (\xi^\rho_o)^k & \cdots\cdots\cdots \\ & \vdots & \\ \cdots\cdots\cdots & (\xi^\rho_o)^{\tau-\tau_o(B)-1} & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\rho\geqslant\tau_o(B)+1}$$

Ce VAN-DER-MONDE est non nul puisque les racines (ξ^ρ_o) sont distinctes.

a) On en déduit que $\forall$ B, $\forall \rho > \tau_o$, $\Lambda_B^\rho = 0$

$$\Lambda_\rho^B = 0 \iff \sum_{\bar{D}(\rho)} d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} \lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = 0.$$

Les vecteurs $(d^B_{\rho\bar{D}(\rho)})$ de $\mathbb{R}^m$, ρ fixé, forment une base de noyau de $H^A_B(x,\text{grad } \phi^\rho(x))$ par suite $\forall \rho$, $\rho > \tau_o$, $\lambda^{\rho\bar{D}(\rho)} = 0$.

b) B donné, $\tau_o(B) \neq 0$, les coefficients $\overset{\sim}{\Lambda}{}^B_\rho$ sont nuls, $\rho \leq \tau_o(B)$

$$\overset{\sim}{\Lambda}{}^B_\rho = 0 \iff d^B_{o\rho} \lambda^{o\rho} = 0 \implies \lambda^{o\rho} = 0 \text{ puisque } d^B_{o\rho} \neq 0.$$

Mais alors tous les coefficients $\lambda^{o\rho}$ sont nuls.

Supposons en effet que pour ρ_o donné, aucun des m sytèmes ne contienne $\overset{\sim}{\Lambda}{}^B_{\rho_o}$, cela signifie que, $\forall$ B, $d^B_{o\rho_o} = 0$ ce qui veut dire que le vecteur $(d^B_{o\rho_o})$ de $\mathbb{R}^m$ est nul, ce qui est impossible puisqu'il est vecteur de base de $\text{Ker}(H^A_B(x,\text{grad } \phi^{\rho_o}(x)))$.

c) Tous les coefficients λ^ρ sont nuls. En effet, pour B donné $\tau_o(B) \neq 0$, $\lambda^\rho = 0$ si $\rho \leq \tau_o(B)$.

ρ_o étant donné, $\exists$ B tel que λ^{ρ_o} apparaisse autrement que dans $\Gamma^B_{\rho_o}$. Sinon $\forall$ B, λ^{ρ_o} est tel que $\rho_o > \tau_o(B)$ ce qui implique $d^B_{o\rho_o} = 0 \implies (d^B_{o\rho_o}) = 0$ impossible.

Tous les coefficients λ^ρ, $\lambda^{o\rho}$ et $\lambda^{\rho\bar{D}(\rho)}$ sont nuls.

IV - DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES.

On cherche une solution formelle de l'équation $h^A_B(x,D) = 0$ sous la forme :

$$y^B(x) = \sum_{j=(0,1)}^{\infty} f_j(\phi(x)) a^{B,j}(x) \quad \text{avec} \quad f'_j(\phi) = f_{j-1}(\phi).$$

On obtient :

$$h_B^A(x,D)y^B(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big[\sum_{r+j=k} H_B^{r,A}(\psi(x))\big[a_\rho^{B,j}(x)\big]\Big] f_{-t+k}(\psi(x)).$$

$H_B^{r,A}$ désignant un opérateur d'ordre $\leq r$, dépendant de ψ supposée caractéristique relativement à H.

1) Détermination de $a_\rho^{B,o}$ de $\mathrm{Ker}(H_B^A(x,d\psi^\rho(x)))$, $1 \leq \rho \leq \tau_o$, $H_o(x,d\psi^\rho(x)) = 0$.

On obtient : $H_B^A(x,d\psi^\rho(x))a_\rho^{B,o}(x,d\psi^\rho(x)) = 0$

$$a_\rho^{B,o}(x,d\psi^\rho(x)) = U_o^\rho(x)d_{o\rho}^B(x,d\psi^\rho(x)) = U_o^\rho \; d_{o\rho}^B.$$

On trouve une condition suffisante pour résoudre en $a_\rho^{B,1}$ dans une carte convenable :

$$g_A(x,d\psi^\rho(x))\Big[\partial^\alpha H_B^A(x,d\psi^\rho(x))\partial_\alpha d_{o\rho}^B(x,d\psi^\rho(x)) + H_B^{*A}(x,d\psi^\rho(x))d_{o\rho}^B(x,d\psi^\rho(x))\Big] = 0.$$

Cette condition est équivalente à $K_o(d\psi^\rho(x)) = 0$.

On a alors :

$$a_\rho^{B,1} = U_1^\rho \; d_{o\rho}^B + V_1^{B,\rho}, \text{ avec } H_B^A(x,d\psi^\rho(x))V_1^{B,\rho} + H_B^{1,A}(\psi^\rho(x))\big[a_\rho^{B,o}\big] = 0.$$

On choisit $V_1^{B,\rho} = \partial^\alpha d_{o\rho}^B(x,d\psi^\rho(x))\partial_\alpha U_o^\rho + \lambda^{B,\rho}(x,d\psi^\rho(x))U_o^\rho$

avec $\lambda^{B,\rho}$ vérifiant :

$$H_B^A(x,d\psi^\rho(x))\lambda^{B,\rho}(x,d\psi^\rho(x)) + \partial^\alpha H_B^A(x,d\psi^\rho(x))\partial_\alpha d_{o\rho}^B(x,d\psi^\rho(x)) + H_B^{*A}(x,d\psi^\rho(x))d_{o\rho}^B(x,d\psi^\rho(x)) = 0.$$

On trouve une condition suffisante pour résoudre en $a_\rho^{B,2}$ qui dans une carte convenable s'écrira :

$$H_o(x,d\psi^\rho(x))\left[p^\alpha p^\beta \partial_{\alpha\beta} U_o^\rho + p^\beta \partial_\beta p^\alpha \partial_\alpha U_o^\rho\right] +$$

$$g_A(x,d\psi^\rho(x))\left[H_B^{1,A}(\psi^\rho(x))\left[\lambda^{B,\rho}(x,d\psi^\rho(x))\right] + H_B^{2,A}(\psi^\rho(x))\left[d_{o\rho}^B(x,d\psi^\rho(x))\right]\right] = 0$$

avec $p^\alpha = \partial^\alpha H_o(x,d\psi^\rho(x))$.

Cette condition s'écrit :

$$p^i\, p^j\, \partial_{ij}\, U_o^\rho + p^j\, \partial_j\, p^i\, \partial_i\, U_o^\rho + \theta_1^\rho = 0 .$$

θ_1^ρ dépendant de l'opérateur et de ψ^ρ, $1 \leq i \leq n$.

Si $p^1 \neq 0$ par exemple, on considère une hypersurface Q, d'équation $x^1 = 0$ et on obtient la condition :

$$\partial_{(1)^2}\, U_o^\rho + \omega^\rho\, \partial_{(1)}\, U_o^\rho + \omega_1^\rho\, U_o^\rho = 0 \qquad (\omega^\rho \text{ et } \omega_1^\rho$$

dépendant de l'opérateur et de ψ^ρ) qui est une équation différentielle du 2ème ordre qui s'intègre le long des bicaractéristiques issues de ψ^ρ.

On connait donc $a_\rho^{B,O}$.

On détermine par récurrence les vecteurs $(a_\rho^{B,j})$, $j \geq 1$.

2) Détermination de $a_\rho^{B,1}$ de $\mathrm{Ker}(H_B^A(x,d\psi^\rho(x)))$, $\rho > \tau_o$, $H_s(x,d\psi^\rho(x)) = 0$.

On obtient : $H_B^A(x,d\psi^\rho(x))\, a_\rho^{B,1}(x,d\psi^\rho(x)) = 0$.

$$a_\rho^{B,1}(x,d\psi^\rho(x)) = \sum_{\bar{D}(\rho)} U_1^{\rho\bar{D}(\rho)}(x) d^B_{\rho\bar{D}(\rho)}(x,d\psi^\rho(x)), \quad 1 \leq \bar{D}(\rho) \leq \nu_s.$$

On trouve une condition suffisante pour résoudre en $a_\rho^{B,2}$ qui conduit à un système d'équations différentielles d'ordre 1, que l'on intègre le long des bicaractéristiques issues de ψ^ρ et qui permet de déterminer $U_1^{\rho\bar{D}(\rho)}$.

On détermine par récurrence les vecteurs $a^{B,j}$, $j \geq 2$.

Les détails ont été donnés dans (18) et dans (1).

3) Problème de Cauchy asymptotique ($x^o = t^o$ non caractéristique).

On impose les valeurs de $\partial_{(o)}{}^k y^B$ sur $x^o = t^o$, $0 \leq k \leq t-1$,

avec $y^B(x) = \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} f_o(\psi^\rho(x)) a_\rho^{B,o}(x) + \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} \sum_{j=1}^{\infty} f_j(\psi^\rho(x)) a_\rho^{B,j}(x)$.

On trouve pour les premiers coefficients $a_\rho^{B,o}\Big|_{x^o=t^o} = 0$ si $\rho \leq \tau_o$

et les conditions sur les premiers coefficients, $j = (0,1)$:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} A_k^{1,\rho,B}(\xi_o^\rho)\left[a_\rho^{B,o}\right] + \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} B_k^{o,\rho,B}(\xi_o^\rho)\left[a_\rho^{B,1}\right] = b_k^{B,k+1}.$$

$A_k^{1,\rho,B}$ et $B_k^{o,\rho,B}$ désignent des opérateurs d'ordre $\leq k$.

On explicite ces conditions et on obtient un système de mt équations à mt inconnues : $U_1^\rho, \partial_o U_o^\rho, U_1^{\rho\bar{D}(\rho)}$, qui s'écrit :

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} k(\xi_o^\rho)^{k-1} \partial_o U_o^\rho d^B_{o\rho} + (\xi_o^\rho)^k \partial_o U_o^\rho \partial^o d^B_{o\rho} + \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^k U_1^\rho d^B_{o\rho} + \sum_{\rho>\tau_o} (\xi_o^\rho)^k U_1^{\rho\bar{D}(\rho)} d^B_{\rho\bar{D}(\rho)} = b_k^{B,-k+1}.$$

Le déterminant du système est celui de III.

Par suite les valeurs des coefficients $\partial_o a_\rho^{B,o}\Big|_{x^o=t^o}$ si $\rho \leqslant \tau_o$

et $a^{B,1}\Big|_{x^o=t^o}$, $\rho > \tau_o$, sont imposées.

On complète par récurrence.

Les détails ont été donnés dans (1).

V - RELATION CANONIQUE.

$$H_s(x,\xi) = \prod_{\rho=\alpha(s-1)+1}^{\rho=\alpha(s)} (\xi_o - \xi_o^\rho(\xi')) = \prod_{\rho=\alpha(s-1)+1}^{\rho=\alpha(s)} q^\rho(x,\xi)$$

$$\text{avec} \quad \alpha(s) = \sum_{j=0}^{j=s} \tau_j$$

Il est possible (3) de construire dans un voisinage conique d'un point (t^o,x'^o,η'^o) une solution $\psi^\rho(x,\eta')$ vérifiant :

$$q^\rho(x,d_x\psi^\rho) = 0$$

$$\psi^\rho(x,\eta')\Big|_{x^o=t^o} = \langle x',\eta'\rangle \quad \text{pour tout} \quad \rho, \quad 1 \leqslant \rho \leqslant \tau,$$

on définit la phase $\Phi^\rho(x,y',\eta') = \psi^\rho(x,\eta') - \langle y',\eta'\rangle$.

La variété Lagrangienne Λ_{Φ^ρ} définie par :

$$\Lambda_{\Phi^\rho} = \{(x,d_x\Phi^\rho(x,y',\eta'),y',d_{y'}\Phi^\rho(x,y',\eta')),\ d_{\eta'}\Phi^\rho(x,y',\eta') = 0\}$$

est localement le graphe de $C_\rho(t^o) \subset T^*(X)/0 \times T^*(X')/0$ avec

$C_\rho(t^o) = \{((x,\xi),(y',\eta'))$; $(x,\xi) \in N_\rho$ bicaractéristique de q^ρ issue du point $(t^o,y',\xi_o^\rho(t^o,y',\eta')),\eta')\}$.

$C_\rho(t^o)$ est d'après Duistermaat une relation canonique homogène et $C(t^o) = \bigcup_{\rho=1}^{\rho=\tau} C_\rho(t^o)$ est, comme réunion disjointe, une relation canonique homogène dans $T^*(X)/O \times T^*(X')/O$.

VI - THEOREME PRINCIPAL (2), (3), (4), (5), (9), (12), (13), (14), (15).

1. Enoncé.

Dans l'hypothèse où l'opérateur $P(x,D)$ satisfait aux conditions II, pour tout $f = (f^A)$, $f^A \in C^\infty(X,\Omega_{1/2})$ et tout $g_k = (g_k^A)$, $k = 0, 1, \ldots, t-1$, $g_k^A \in C^\infty(X',\Omega_{1/2})$ [f^A et g_k^A désignant des densités d'ordre $\frac{1}{2}$ sur X et X' respectivement], il existe $u = (u^B)$, unique, $u^B \in C^\infty(X,\Omega_{1/2})$ vérifiant :

$$P(x,D)u = f$$

$$D_o^k u\Big|_{x^o=t^o} = g_k$$

2. Construction des opérateurs à noyau C^∞.

a) Proposition.

On peut construire pour tout $\mu = 0, 1, \ldots, t-1$ des opérateurs matriciels $E_\mu(t^o) = (E^B_{\mu,C}(t^o))$, $E^B_{\mu,C}(t^o) \in I^{1-\mu-\frac{1}{4}}(X,X',C(t^o))$ $C(t^o)$ définie dans V, $1 \leq B \leq m$, $1 \leq C \leq m$, vérifiant :

$$PE_\mu(t^o) \equiv 0 \quad \text{(modulo un opérateur à noyau } C^\infty)$$

$$\gamma_k E_\mu(t^o) = \delta_{k,\mu} I, \quad k = 0,1,\ldots,t-1.$$

γ_k opérateur sur $x^o = t^o$ de D_o^k, t^o fixé, en identifiant X' et $x^o = t^o$, I opérateur identique, $\delta_{k,\mu}$ symbole de Krönecker.

Preuve :

On construit des opérateurs $F_{\mu,\rho}(t^o) = (F^B_{\mu,\rho,C}(t^o))$ pour tout ρ, $1 \leq \rho \leq \tau$, vérifiant :

$$PF_{\mu,\rho}(t^o) \equiv 0$$

$$\gamma_k\Big(\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} F_{\mu,\rho}(t^o)\Big) = \delta_{k,\mu}\, I$$

$$F^B_{\mu,\rho,C}(t^o) \in I^{\alpha(\rho)-\mu-1-\frac{1}{4}}(X,X',C_\rho(t^o)),$$

$C_\rho(t^o)$ décrite dans V et $\alpha(\rho) = 2$ si $\rho \leq \tau_o$

$\alpha(\rho) = 1$ si $\rho > \tau_o$

On pose $E_\mu(t^o) = \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} F_{\mu,\rho}(t^o)$.

b) Technique.

On cherche pour chaque $F^B_{\mu,\rho,C}(t^o)$ un développement asymptotique $\sum_{j=\beta(\rho)}^{\infty} F^{B,j}_{\mu,\rho,C}(t^o)$ $\qquad \beta(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \leq \tau_o \\ 1 & \text{si } \rho > \tau_o \end{cases}$

Cette construction découle du résultat suivant :
si C est une relation canonique homogène et si $G_k \in I^{m_k}(X,X',C)$, $m_k \to -\infty$ si $k \to \infty$, il existe un opérateur Fourier-Intégral unique G tel que :

$$G - \sum_{k<h} G_k \in I^{m'_h}(X,X',C) \quad \text{avec} \quad m'_h = \operatorname*{Max}_{k \geq h} m_k$$

$\sum_{k=0}^{\infty} G_k$ est appelé développement asymptotique de G.

Nous allons imposer les conditions suivantes sur $F^B_{\mu,\rho,C}(t^o)$:

i) $$\begin{cases} h_B^A F^{B,o}_{\mu,\rho,C}(t^o) \in I^{t-\frac{1}{4}-\mu}(X,X',C_\rho(t^o)) & \text{si } \rho \leq \tau_o \\ h_B^A F^{B,1}_{\mu,\rho,C}(t^o) \in I^{t-\frac{1}{4}-\mu-1}(X,X',C_\rho(t^o)) & \text{si } \rho > \tau_o \end{cases}$$

ii) $$\gamma_k\left[\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o}(F^{B,o}_{\mu,\rho,C}(t^o)+F^{B,1}_{\mu,\rho,C}(t^o))+\sum_{\rho>\tau_o}F^{B,1}_{\mu,\rho,C}(t^o)\right]-\delta_{k,\mu}I \in L^{-1-\mu+k}(X')$$

iii) $$h_B^A\left[\sum_{j<\ell}F^{B,j}_{\mu,\rho,C}(t^o)\right] \in I^{t-\frac{1}{4}-\mu+1-\ell}(X,X',C_\rho(t^o))$$
$\ell > 1 \quad \rho \leq \tau_o$ et $\ell > 2 \quad \rho > \tau_o$

iv) $$\gamma_k\left[\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau}\sum_{j<2+\ell}F^{B,j}_{\mu,\rho,C}(t^o)\right]-\delta_{k,\mu}\,I \in L^{-1-\mu-\ell+k}(X'), \quad \ell \in \mathbb{N}^*.$$

Dans tout ce qui suit, pour soulager l'écriture, nous allons omettre d'écrire t^o, C, μ qui sont fixés.

$F^{B,j}_{\mu,\rho,C}(t^o)$ sera donc noté $F^{B,j}_\rho$.

c) Calcul des composantes des développements asymptotiques.

· 1er cas : relativement au facteur d'ordre $s \geq 1$ donc $\rho > \tau_o$.

Les opérateurs sont cherchés localement de la forme :

$$[F^{B,j}_\rho u](x) = (2\pi)^{-n+1}\int e^{i\varphi^o(x,\eta')}a^{B,j}_\rho(x,\eta')\hat{u}(\eta')d\eta'$$

avec $u \in C_o^\infty(X)$ et $a^{B,j}_\rho \in S^{-\mu-j+1}$.

D'après II, A fixé, il existe B tel que $h^A_B(x,D)$ soit d'ordre t. Désignons par $\hat{h}^A_B(x,\eta')$ le symbole de h^A_B.

$F^{B,j}_\rho \in I^{-\mu-j+1}(X,X',C_\rho(t^o))$ d'où $h^A_B F^{B,j}_\rho \in I^{t-\frac{1}{4}-\mu-j+1}(X,X',C_\rho(t^o))$.

Nous savons d'après (8) que le symbole de $h_B^A F_\rho^{B,j}$ est :

$$(*) \qquad \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D^\alpha \hat{h}_B^A(x,\eta') D_z^\alpha \left[a_\rho^{B,j} e^{i\psi^\rho(x,z,\eta')} \right]_{z=x}$$

avec $\psi^\rho(x,z,\eta') = \phi^\rho(z,\eta') - \phi^\rho(x,\eta') - \langle z-x, d_x\phi^\rho(x,\eta')\rangle$.

On peut expliciter (*) en faisant le choix $\rho > \tau_o$ dans (i)
On obtient d'après IV le symbole de $h_B^A F_\rho^{B,1}$ (on écrira $\phi^\rho(x,\eta') = \phi^\rho(x)$)

$$\sum_{r=0}^{\infty} H_B^{r,A}(x,d\phi^\rho(x))\left[a_\rho^{B,1}\right] = H_B^{o,A}(x,d\phi^\rho(x))a_\rho^{B,1} + \ldots$$

Les pointillés désignent des symboles d'ordre $\leq t-\mu-1$.

Comme $H_B^{o,A} = H_B^A$, le symbole $H_B^A(x,d\phi^\rho(x))a^{B,1}$ est d'ordre $t-\mu-1$ d'après (i), il doit être d'ordre $t-\mu-2$ donc $H_B^A(x,d\phi^\rho(x))a_\rho^{B,1} = 0$.
On cherche $a_\rho^{B,1}$ dans Ker $H_B^A(x,d\phi^\rho(x))$.

On explicite ensuite (iii) avec $\ell = 3$.

Le symbole de $\sum_{j\leq 2} h_B^A F_\rho^{B,j}$ est :

$$H_B^A(x,d\phi^\rho(x))a_\rho^{B,2} + H_B^{1,A}(x,d\phi^\rho(x))\left[a_\rho^{B,1}\right] + \ldots$$

Les pointillés désignent des symboles d'ordre $\leq t-1-\mu-1 = t-\mu-2$.
Le symbole doit être d'ordre $t-\mu-2$ d'après iii), d'où :

$$H_B^A(x,d\phi^\rho(x))a_\rho^{B,2} + H_B^{1,A}(x,d\phi^\rho(x))\left[a_\rho^{B,1}\right] = 0.$$

On obtient $a_\rho^{B,1}$ en intégrant une équation différentielle d'ordre 1, puis les coefficients $a_\rho^{B,j}$, $j \geq 2$ de proche en proche.

2ème cas : relativement au facteur d'ordre 0, donc $\rho \leq \tau_0$.

On cherche les opérateurs de la forme :

$$F_\rho^{B,j} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} F_{\rho,\lambda}^{B,j}.$$

Les opérateurs $F_{\rho,\lambda}^{B,j}$ sont déterminés localement de la forme :

$$[F_{\rho,\lambda}^{B,j} u](x) = (2\pi)^{-n+1} \int e^{i\phi^\rho(x,\eta')} a_{\rho,\lambda}^{B,j}(x,\eta') \hat{u}(\eta') d\eta'$$

$$a_{\rho,\lambda}^{B,j} \in S^{-j-\mu+1}.$$

D'après les hypothèses de localisation, on peut recouvrir la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ par r voisinages V_λ que l'on prolongera à $\mathbb{R}^n$, de telle façon que $\forall\, \eta' \in V_\lambda$, $\dim \mathrm{Ker}(H_B^A(x,\xi_o^\rho,\eta')) = 1$.

On associera à ces voisinages une partition C^∞ de l'unité (X_λ) et on déterminera le symbole de $F_\rho^{B,j}$ sous la forme :

$$a_\rho^{B,j} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} a_{\rho,\lambda}^{B,j} X_\lambda.$$

Le symbole de $\sum_{j\leq 1} h_B^A F_{\rho,\lambda}^{B,j}$ est donné par :

$$H_B^A(x,d\phi^\rho(x)) a_{\rho,\lambda}^{B,1} + H_B^{1,A}(x,d\phi^\rho(x)) \left[a_{\rho,\lambda}^{B,o}\right] + \ldots .$$

Les pointillés désignent des symboles d'ordre $\leq t-\mu-1$ d'où d'après (iii) avec $\ell = 2$, on doit avoir :

$$H_B^A(x,d\phi^\rho(x)) a_{\rho,\lambda}^{B,1} + H_B^{1,A}(x,d\phi^\rho(x)) \left[a_{\rho,\lambda}^{B,o}\right] = 0.$$

Le symbole de $\sum_{j\leq 2} h_B^A F_{\rho,\lambda}^{B,j}$ est donné par :

$$H_B^A(x,d\psi^\rho(x))a_{\rho,\lambda}^{B,2} + H_B^{1,A}(x,d\psi^\rho(x))\left[a_{\rho,\lambda}^{B,1}\right] + H_B^{2,A}(x,d\psi^\rho(x))\left[a_{\rho,\lambda}^{B,o}\right] + \ldots .$$

Les pointillés désignent des symboles d'ordre $\lesssim t-\mu-2$ d'où d'après (iii) avec $\ell = 3$ on doit avoir :

$$H_B^A(x,d\psi^\rho(x))a_{\rho,\lambda}^{B,2} + H_B^{1,A}(x,d\psi^\rho(x))\left[a_{\rho,\lambda}^{B,1}\right] + H_B^{2,A}(x,d\psi^\rho(x))\left[a_{\rho,\lambda}^{B,o}\right] = 0$$

On peut déterminer $a_{\rho,\lambda}^{B,o}$ en intégrant une équation différentielle du 2ème ordre. Les autres coefficients seront déterminés de proche en proche. Le symbole $a_\rho^{B,o}$, $\rho \lesssim \tau_o$, sera complètement déterminé si on connaît sa trace ainsi que celle de sa dérivée par rapport à x^o sur $x^o = t^o$.
Le symbole $a_\rho^{B,1}$, $\rho \gtrsim \tau_o + 1$, sera complètement déterminé si on connaît sa trace sur $x^o = t^o$.

Ces traces sont données par les conditions (ii) que nous explicitons en déterminant les symboles des opérateurs pseudo-différentiels qui y interviennent.

On obtient des équations dont les 1ers membres sont du type :

$$e^{-i\langle x',\eta'\rangle} D_o^k \left[(\quad) e^{i\psi^\rho(x,\eta')} \right]_{x^o=t^o} - \delta_{k,\mu}.$$

En tenant compte de l'ordre imposé, on obtient :

$$\rho \lesssim \tau_o, \quad A_k^{o,\rho,B}(\xi_o^\rho) a_\rho^{B,o} = 0$$

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} A_k^{1,\rho,B}(\xi_o^\rho)\left[a_\rho^{B,o}\right] + \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau} B_k^{o,\rho,B}(\xi_o^\rho)\left[a_\rho^{B,1}\right] - \delta_{k,\mu} = 0.$$

On retrouve le problème de Cauchy asymptotique avec $t^o = 0$. Les traces sont donc imposées.

On complète la détermination des symboles d'indice plus élevé par récurrence.

3. Résolution en C^∞.

Nous explicitons la proposition.

$PE_\mu(t^o) = R_\mu(t^o)$

$\gamma_k E_\mu(t^o) = \delta_{k,\mu} I + R_{k,\mu} \qquad k,\mu = 0,1,\ldots,t-1$

$R_\mu(t^o)$ opérateur à noyau C^∞ de X' dans X

$R_{k,\mu}(t^o)$ opérateur à noyau C^∞ de X' dans X'.

Pour obtenir des données exactes, nous posons :

$$G_\mu(t^o) = E_\mu(t^o) - \sum_{k=0}^{k=t-1} \frac{(x^o-t^o)^k}{k!} R_{k,\mu}(t^o), \quad \mu = 0,\ldots,t-1.$$

Nous obtenons :

$PG_\mu(t^o) = Q_\mu(t^o)$

$\gamma_k G_\mu(t^o) = \delta_{k,\mu} I$

$Q_\mu(t^o) = R_\mu(t^o) - \sum_{k=0}^{k=t-1} P\left[\frac{(x^o-t^o)^k}{k!} R_{k,\mu}\right]$ est un opérateur à noyau C^∞.

La construction des opérateurs est valable pour $x^o = t^o$ non caractéristique. Elle est valable pour $x^o = y^o$, $y^o \in [0,T]$.

Nous allons introduire un opérateur matriciel à partir de $G_{t-1}(y^o)$ de la façon suivante :

Soit $h = (h^A), h^A \in C^\infty(X,\Omega_{1/2}) \to [Gh](x) = \int_{t^o}^{x^o} G_{t-1}(y^o)h(y^o,x')dy^o$.

$PGh = Ih + \int_{t^o}^{x^o} Q_{t-1}(y^o)h(y^o,.)dy^o$.

$\gamma_k Gh = 0 \qquad k = 0,\ldots,t-1$

$Q(y^o,x,x')$ désigant le noyau C^∞ de $-Q_{t-1}(y^o)$ nous écrirons :

$$- \int_{t^o}^{x^o} Q_{t-1}(y^o)h(y^o,x')dy^o = \int_{t^o}^{x^o} \int_{X'} Q(y^o,x,y')h(y^o,y')dy'dy^o.$$

Posons $(Th)(x) = \int_{t^o}^{x^o} \int_{X'} Q(y^o,x,y')h(y^o,y')dy'dy^o$ nous obtenons

$PGh = [I - T]h$

$$\gamma_k Gh = 0, \quad k = 0,\ldots,t-1.$$

Chazarain a montré que les composantes T_B^A de T étaient des opérateurs de Volterra en utilisant un lemme dans $C^\infty([0,T] \times X')$ et en étendant par récurrence à $C^\infty([0,T] \times X')$, alors $\forall \tilde{h} = (\tilde{h}^A)$, $\tilde{h}^A \in C^\infty[0,T] \times X')$, $\exists h = (h^A)$, $h^A \in C^\infty([0,T] \times X')$ tel que :

$$h^A = \sum_{B=1}^{B=m} T_B^A h^B + \tilde{h}^A \quad \text{soit} \quad \tilde{h} \xrightarrow{T'} h \quad \text{cette correspondance}$$

d'où $[I - T]h = \tilde{h} \quad <==> \quad h = T'\tilde{h}$

alors $[PG \circ T']\tilde{h} = \tilde{h}$

$$\gamma_k G \circ T' \tilde{h} = 0, \quad k = 0,1,\ldots,t-1 \quad \text{pour tout} \quad \tilde{h}.$$

Théorème.

La solution au problème de Cauchy VI - 1

$$\begin{cases} Pu = f \\ D_o^k u \Big|_{x^o=t^o} = g_k, \quad k = 0,\ldots,t-1 \end{cases}$$

est donnée par :

$$u = \sum_{k=0}^{k=t-1} G_k[g_k] + G \circ T'\left[f - \sum_{k=0}^{k=t-1} Q_k g_k\right].$$

On montre ensuite que les conditions II sont vraies pour l'adjoint P^* de P et que la solution u est unique en utilisant des résultats de (3).

VII - BIBLIOGRAPHIE.

(1) R. BERZIN, Comptes rendus, 275, série A, 1972, p. 1091.

(2) R. BERZIN, Comptes rendus, 280, série A, 1975, p. 443.

(3) J. CHAZARIN, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 24, n° 1, 1974, p. 173-202.

(4) Mme Y. CHOQUET-BRUHAT, J. Math. Pures et Appl., 48, 1969, p. 117 à 158.

(5) Y. DEMAY, Comptes rendus, 278, série A. 1974, p. 771.

(6) J.C. DE PARIS, J. Math. Pures et Appl., 51, 1972, p. 231-256.

(7) J.J. DUISTERMAAT - L. HÖRMANDER, Acta Math., 128, 1972.

(8) J.J. DUISTERMAAT - Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole polytechnique, 1972.

(9) H. FLASCHKA - G. STRANG, Adv. in math. 6, N° 3 (1971), 347-379.

(10) GÄRDING, KOTAKE et LERAY, Bull. Soc. Math. Fr. 92, 1964, p. 263 à 361.

(11) L. HÖRMANDER, Acta Math. 127, 1971.

(12) V. IVRII et V. PETKOV, Uspehi Math. Nauk. 29, 5 (1974), 3.70.

(13) P.D. LAX, Duke Math. J, 24, n° 4 (1957), 627-646.

(14) D. LUDWIG, Comm. pure appl. 13, 1960, p. 473-508.

(15) D. LUDWIG, n° 40, Report N° 9351, Courant Institute of Math. Sc, A.E.C. computing and applied Math. Center, 1961.

(16) J. VAILLANT, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 15, n° 2, 1965, p. 225-311.

(17) J. VAILLANT, J. Math. Pures et Appl. 47, 1968, p. 1 à 40.

(18) J. VAILLANT, J. Math. Pures et Appl. 50, 1971, p. 25 à 51.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — *Paramétrix du problème de Cauchy pour un système d'équations aux dérivées partielles linéaires à caractéristiques multiples.* Note (*) de MM. **Robert Berzin** et **Jean Vaillant**, présentée par M. Jean Leray.

h est un opérateur matriciel faiblement hyperbolique, à caractéristiques de multiplicité constante; on le diagonalise, à droite et à gauche, de façon à faire apparaître les ordres des équations différentielles de propagation. Lorsque les opérateurs obtenus sont bien décomposables, on obtient l'existence et l'unicité du problème de Cauchy.

I. NOTATIONS ET HYPOTHÈSES. — $h = h(x, D) = (h_B^A(x, D))$ désigne un opérateur différentiel matriciel de classe C^∞, d'ordre $t \geqq 1$, $x \in X = [0, T] \times X'$, $T > 0$, X' variété compacte C^∞ de dimension n; $1 \leqq A, B \leqq m$.

On notera dans une carte de coordonnées locales :

$$(x, \xi) = ((x^0, x^1, \ldots, x^n), (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)) \in T^*(X);$$

$(H_B^A(x, \xi))$ est le symbole principal de h au sens de Cauchy-Kowaleski.

On suppose que (8) :

1° Pour tout x, $\det(H_B^A(x, \xi)) = \prod_{s=0}^{s=\sigma} [H_s(x, \xi)]^{\nu_s}$ est de degré mt, les polynômes H_s étant irréductibles et de degré τ_s, $\left(\text{on posera } \tau' = \sum_{s=0}^{s=\sigma} \tau_s\right)$, les ν_s constants.

2° Pour tout x, si $H = \prod_{s=0}^{s=\sigma} H_s$ désigne le radical hyperbolique de h, l'équation :

$H(x, \xi_0, \eta') = 0$ admet pour $\eta' \neq 0$, $\eta' = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, τ' racines réelles $\xi_0^\rho(x, \eta')$ distinctes.

3° Pour tout x fixé, $\forall\, s = 0, 1, \ldots, \sigma$, dans l'anneau Φ_s, localisé de $\mathbf{R}[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ par rapport à l'idéal premier défini par H_s,

$$(H_B^A) \sim \begin{bmatrix} [H_s]^{q_1(s)} & & & 0 \\ & [H_s]^{q_2(s)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & [H_s]^{q_m(s)} \end{bmatrix},$$

$q_1(s) \geqq q_2(s) \geqq \ldots \geqq q_m(s)$; $q_1(s)$ constant.

On pose $\bar{\tau} = \sum_{s=0}^{s=\sigma} q_1(s)\, \tau_s \leqq mt$.

4° Notons $A_C'^B$ le cofacteur de H_B^C; on obtient

$$A_C'^B(x, \xi) = \prod_{s=0}^{s=\sigma} \prod_{i=2}^{i=m} [H_s(x, \xi)]^{q_i(s)} . A_C^B(x, \xi).$$

On suppose (6) qu'il existe un opérateur matriciel $\mathscr{A}(x, D) = (\mathscr{A}^B_C(x, D))$ de symbole principal $(A^B_C(x, \xi))$ vérifiant

$$\sum_{B=1}^{B=m} h^A_B \mathscr{A}^B_C = k^A_C = \sum_{r=0}^{r=\bar{\tau}} l^A_{r,C} h_0^{[\alpha_0 - r]_+} \dots h_\sigma^{[\alpha_\sigma - r]_+},$$

$l^A_{0,C} = \delta^A_C$ I, δ^A_C symbole de Krönecker, I opérateur identique, h_s opérateur de symbole H_s.

$$\alpha_s = q_1(s), \quad [\alpha_s - r]_+ = \begin{cases} \alpha_s - r & \text{si } \alpha_s \geqq r, \\ 0 & \text{si } \alpha_s < r; \end{cases}$$

$$\forall r \leqq \bar{\tau}, \text{ ordre } \left(k^A_C - \sum_{d=0}^{d=r} l^A_{d,C} h_0^{[\alpha_0 - d]_+} \dots h_\sigma^{[\alpha_\sigma - d]_+} \right) < \bar{\tau} - r.$$

Ces conditions généralisent celles de (3) pour un opérateur scalaire.

5° On suppose de même qu'il existe un opérateur matriciel $\tilde{\mathscr{A}}(x, D) = (\tilde{\mathscr{A}}^B_C(x, D))$ de symbole principal $(A^B_C(x, \xi))$ tel que $\tilde{\mathscr{A}} h$ vérifie les conditions analogues.

Pour simplifier les notations, on suppose désormais que pour $s \geqq 1$, $\alpha_s = 1$.

6° On montre que pour tout x, $0 \leqq \tau \leqq \bar{\tau} - 1$:

$$\det \left| \frac{1}{p!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_0} \right)^p [(\xi^\rho_0)^\tau] \qquad [\xi^\rho_0]^\tau \right| (x, \eta') \neq 0.$$

$$0 \leqq p \leqq \alpha_0 - 1, \ 1 \leqq \rho \leqq \tau_0, \qquad \rho > \tau_0.$$

On obtient en se servant de (1), (2), (4) et (7) :

II. Proposition. — *Sous les hypothèses de* I *on peut construire pour* $0 \leqq \mu \leqq \bar{\tau} - 1$, $t^0 \in [0, T]$ *des opérateurs matriciels* [(4), (7), (2)] :

$$E_\mu(t^0) = (E^C_{\mu,D}(t^0)), \ E^C_{\mu,D}(t^0) \in I^{-\mu - 1/4}(X, X', C(t^0)),$$

$$\left[C(t^0) = \bigcup_{\rho=1}^{\rho=\tau'} C_\rho(t^0), \ C_\rho(t^0) \text{ } \textit{relation canonique homogène associée à } \xi^\rho_0 \right], \textit{ vérifiant, si } (k^A_C) = k :$$

$$k E_\mu(t^0) \equiv 0 \ (\textit{modulo un opérateur à noyau } C^\infty)$$

$\gamma_\tau E_\mu(t^0) = \delta_{\tau,\mu} I$, $\delta_{\tau,\mu}$ *symbole de Krönecker*, I *opérateur identique*, γ_τ *opérateur de trace sur* $x^0 = t^0$ *de* D^τ_0, $0 \leqq \tau \leqq \bar{\tau} - 1$.

On construit pour cela

$$F_{\mu,\rho}(t^0) \in I^{-(1/4)-\mu}(X, X', C_\rho(t^0)), \ \rho \leqq \tau_0,$$

$$F_{\mu,\rho}(t^0) \in I^{-(1/4)-\mu-(\alpha_0 - 1)}(X, X', C_\rho(t^0)), \ \rho > \tau_0$$

par des développements asymptotiques de termes $F^j_{\mu,\rho}(t^0)$ vérifiant localement :

$$[F^j_{\mu,\rho}(t^0) u](x) = (2\pi)^{-n+1} \int e^{i\varphi^\rho(x,\eta')} b^j_{\mu,\rho}(x, \eta') \hat{u}(\eta') d\eta',$$

$u \in C^\infty_0(X, \Omega_{1/2})$, $b^j_{\mu,\rho} \in S^{-\mu-j}(X, \Omega_{1/2})$, symbole d'ordre $-\mu - j$ (φ^ρ est construite à partir de ξ^ρ_0 et détermine $C_\rho(t^0)$).

Les composantes de $b^j_{\mu,\rho}$ sont déterminées par l'intégration de systèmes d'équations différentielles ordinaires d'ordre α_0 si $\rho \leqq \tau_0$ et d'ordre 1 si $\rho > \tau_0$, suivant la technique des développements asymptotiques, la détermination des traces sur $x^0 = t^0$, *supposée non caractéristique pour h*, conduisant au déterminant de I, 6°.

On pose $E_\mu(t^0) = \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau'} F_{\mu,\rho}(t^0)$.

III. $k(x, D)$ satisfaisant aux hypothèses de I, pour tout $f = (f^A)$, $f^A \in C^\infty(X, \Omega_{1/2})$, pour tout $g_\tau = (g^C_\tau)$, $0 \leqq \tau \leqq \bar{\tau}-1$, $1 \leqq A, C \leqq m$, $g^C_\tau \in C^\infty(X', \Omega_{1/2})$ [f^A et g^C_τ désignant respectivement des densités d'ordre 1/2 sur X et X′ respectivement], il existe $u = (u^C)$ unique, $u^C \in C^\infty(X, \Omega_{1/2})$ vérifiant

$$\begin{cases} k(x, D)u = f, \\ D^\tau_0 u|_{x^0=t^0} = g_\tau, \qquad 0 \leqq \tau \leqq \bar{\tau}-1. \end{cases}$$

On en déduit le théorème 1.

Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} h(x, D)v = f, \\ D^\tau_0 v|_{x^0=t^0} = g_\tau, \qquad 0 \leqq \tau \leqq t-1, \end{cases}$$

admet une solution unique $v = (v^B)$, $v^B \in C^\infty(X, \Omega_{1/2})$, $1 \leqq B \leqq m$.

On pose pour cela $v = \mathscr{A}(x, D)u$.

On détermine les traces de u en fonction de celles de v et on se ramène au problème de Cauchy pour k et u.

Dans une prochaine publication nous ferons une diagonalisation plus précise, tenant compte des entiers $q_2, q_3, \ldots, q_m$, et nous décrirons aussi la propagation des singularités.

Résumé d'un texte qui sera conservé 5 ans par les Archives de l'Académie et dont copie peut être obtenue.

(*) Séance du 12 juillet 1976.

(1) R. Berzin, *Comptes rendus*, 281, série A, 1975, p. 637.
(2) J. Chazarain, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 24, n° 1, 1974, p. 173-202.
(3) J. C. De Paris, *J. Math. Pures et Appl.*, 51, 1972, p. 231-256.
(4) J. J. Duistermaat et L. Hörmander, *Acta Math.*, 128, 1972.
(5) Leray et Ohya, *Systèmes linéaires hyperboliques non stricts*, Colloque de Liège, C.N.R.B., Gauthier-Villars, Paris, 1975.
(6) D. Gourdin, *Comptes rendus*, 282, série A, 1976, p. 1105.
(7) L. Hörmander, *Acta Math.*, 127, 1971.
(8) J. Vaillant, *J. Math. Pure et Appl.*, 50, 1971, p. 25-51.
(9) V. M. Petkov, *Équations et systèmes à caractéristiques multiples*, Université de Paris VI, Analyse numérique, 1975.

84, *rue Carpeaux*,
59100 *Roubaix*
et
76, *avenue du Général-Leclerc*,
92340 *Bourg-la-Reine*.

Bull. Sc. math., 2e série,
102, 1978, p. 287-294.

PARAMÉTRIX DU PROBLÈME DE CAUCHY POUR UN SYSTÈME FAIBLEMENT HYPERBOLIQUE A CARACTÉRISTIQUES MULTIPLES

PAR

ROBERT BERZIN et JEAN VAILLANT
[Villeneuve-d'Ascq et Paris]

RÉSUMÉ. — h est un opérateur matriciel faiblement hyperbolique, à caractéristiques de multiplicité constante. On le diagonalise à droite et à gauche. Lorsque les opérateurs obtenus sont bien décomposables, on obtient l'existence et l'unicité du problème de Cauchy.

ABSTRACT. — h is a matrix operator, weakly hyperbolic, with characteristics of constant multiplicity. It is diagonalized on the left and on the right. In the case where the operators we obtain are well decomposed, we construct the unique solution of the Cauchy Problem.

I. — Notations et hypothèses

$h = (h_B^A(x, D))$ désigne un opérateur différentiel matriciel d'ordre $\leqslant t$, $t \geqslant 1$, $1 \leqslant A \leqslant m$, $1 \leqslant B \leqslant m$, $x \in [0, T] \times X'$, $T > 0$, X' variété compacte $\mathscr{C}^\infty$, de dimension n; h est $\mathscr{C}^\infty$.

On notera $((x^0, x^1, \ldots, x^n), (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n))$ les coordonnées locales de $(x, \xi) \in T^*(X)$.

$(H_B^A(x, \xi))$ est le symbole principal de h au sens suivant : pour chaque x $H_B^A(x, \xi)$ est le symbole principal de h_B^A si celui-ci est d'ordre t, 0 sinon et dét $(H_B^A(x, \xi))$ n'est pas identiquement nul; il est aussi réel.

1° On suppose qu'il existe des entiers strictement positifs $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_\sigma$, et des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ en x, polynômiales en ξ et irréductibles pour tout x, $H_0, H_1, \ldots, H_\sigma$, telles que pour tout $x \in X$:

$$\det(H_B^A(x, \xi)) = \prod_{s=0}^{s=\sigma} (H_s(x, \xi))^{\mu_s}.$$

Le degré de $H_s(x, \xi)$ est constant et égal à τ_s, et on posera $\tau' = \sum_{s=0}^{s=\sigma} \tau_s$.

2° On pose $H(x, \xi) = \prod_{s=0}^{s=\sigma} H_s(x, \xi)$; on suppose que H est hyperbolique

par rapport à $N = (\underbrace{1, 0, \ldots, 0}_{n+1})$, c'est-à-dire que pour tout $x \in X$, $H(x, \xi_0, \eta') = 0$ admet pour η' réel, $\eta' \neq 0$, τ' racines distinctes réelles $(\xi_0^\rho(x,\eta'))$, $1 \leqslant \rho \leqslant \tau'$.

3° Pour x fixé, Φ_s désigne l'anneau localisé de $\mathbf{R}[\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ par rapport à l'idéal engendré par H_s. Dans Φ_s, si $\sim$ désigne l'équivalence des matrices :

$$(H_B^A) \sim \begin{pmatrix} H_s^{q_1(s)} & & & 0 \\ & H_s^{q_2(s)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & H_s^{q_m(s)} \end{pmatrix},$$

$q_1(s) \geqslant q_2(s) \geqslant \ldots \geqslant q_m(s)$.

On fait l'hypothèse que $q_1(s)$ reste constant quand x varie. Ces hypothèses sont du type de celles faites par J. VAILLANT dans [9] et [10].

4° $A_A'^B$ désigne le cofacteur d'ordre $(m-1)$ de H_B^A dans le symbole principal de h :

$$A_A'^B = \prod_{s=0}^{s=\sigma} H_s^{q_2(s)+\ldots+q_m(s)} A_A^B.$$

On peut vérifier que les A_A^B sont des fonctions régulières en (x, ξ). On vérifie que

$$K_C^A = \sum_{B=1}^{B=m} H_B^A A_C^B = \prod_{s=0}^{s=\sigma} H_s^{q_1(s)} \delta_C^A$$

δ_C^A désigne le symbole de Krönecker.

On suppose l'existence d'un opérateur différentiel matriciel $\mathscr{A} = (\mathscr{A}_C^B)$ de symbole principal (A_C^B) vérifiant :

$$h \circ \mathscr{A} = k = (k_C^A) = \sum_{B=1}^{B=m} h_B^A \mathscr{A}_C^B = \sum_{r=0}^{r=\tilde{\tau}} l_r (h_0)^{[\alpha_0 - r]_+} \ldots (h_\sigma)^{[\alpha_\sigma - r]_+},$$

l_r, opérateur différentiel matriciel; (h_s), opérateur différentiel de symbole principal H_s; $[\alpha_s - r]_+ = \operatorname{Max}(0, \alpha_s - r)$; l_0, matrice identique; $\tilde{\tau}$ = ordre de k; $\alpha_s = q_1(s)$, de telle façon que

$$\text{ordre } (k - \textstyle\sum_{\rho=0}^{\rho=r} l_\rho (h_0)^{[\alpha_0-\rho]_+} \ldots h_\sigma^{[\alpha_\sigma-\rho]_+}) < \tilde{\tau} - r.$$

On pourra remarquer que k_A^A est, pour tout $1 \leqslant A \leqslant m$, bien décomposable au sens défini par J. C. DE PARIS [3].

On a aussi :

$$K_B^C = \sum_{A=1}^{A=m} A_A^C H_B^A$$

et on suppose l'existence d'un opérateur différentiel matriciel $\mathscr{A}' = (\mathscr{A}'^{C}_{A})$ de symbole principal (A^{C}_{A}) de telle sorte que $k' = \mathscr{A}' \circ h$ possède une décomposition du genre précédent.

Ces hypothèses sont celles qu'utilise D. GOURDIN dans la note [6] et dans [11].

II. — Développements asymptotiques et problème de Cauchy asymptotique

1. Développements asymptotiques

Soit $(f_j)_{j\in\mathbf{Z}}$, f_j est une application de **R** dans **C** (ou une distribution) vérifiant : $f_j' = f_{j-1}$.

Soit K_0 un facteur H_s et k_0 un opérateur différentiel de partie principale K_0. On pose $\nu_0 = q_1(s)$.

On a [11] :

$$k = \sum_{r=0}^{r=\bar{\tau}} \dot{l}_r k_0^{[\nu_0 - r]_+}.$$

On cherche, pour tout point x_0 de X une solution formelle non nulle de la forme

$$z = \sum_{j\in\mathbf{Z}} Z^j \times f_j \circ \varphi,$$

où φ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ réelle caractéristique pour k_0 dans un voisinage V de x_0, telle que grad $\varphi(x_0) \neq 0$:

$$Z^j = (Z^{C,j}) \in \mathscr{C}^\infty(V), \qquad Z^{C,j} = 0 \quad \text{si } j < 0;$$

z vérifie donc $k(z) = 0$.

On obtient :

$$k(z) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \sum_{r=0}^{r=\bar{\tau}} \mathscr{K}^r(\varphi)[Z^{\bar{\tau}+j-r}] \times f_j \circ \varphi,$$

$\mathscr{K}^r(\varphi)$ est un opérateur matriciel d'ordre $\leqslant r$ dépendant de φ et de k et $\mathscr{K}^r \mathscr{I}(\varphi) = 0$ si $0 \leqslant r \leqslant \nu_0 - 1$. On obtient pour : $\bar{\tau} + j = \nu_0$,

$$\sum_{r=0}^{r=\nu_0} \dot{\mathscr{L}}_r(\varphi)[\mathscr{T}(\varphi)]^{\nu_0 - r}[Z^0] = 0;$$

si $A \neq C$, $\dot{\mathscr{L}}^A_{0,C}(\varphi) = 0$ et $\dot{\mathscr{L}}^A_{0,A}(\varphi) \neq 0$. $\mathscr{T}(\varphi)$ est l'opérateur bicaractéristique associé à k_0; $\mathscr{L}_r(\varphi)$ est d'ordre 0. On obtient Z^0 en intégrant un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre ν_0 le long des bicaractéristiques relatives à φ. Z^j, $j > 0$, s'obtient en intégrant un système d'équations différentielles ayant même premier membre que le précédent et un second membre dépendant de Z^l, $l < j$, de φ et de l'opérateur k.

2. Problème de Cauchy asymptotique

$x^0 = 0$, par exemple est un hyperplan non caractéristique pour k; $\psi(x')$ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur W voisinage de 0, de gradient non nul; $x' = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Pour simplifier la présentation, on supposera $\alpha_s = 1$, si $s \geqslant 1$. On cherche des solutions formelles z_ρ de la forme

$$z_\rho = \sum_{j=\beta(\rho)}^{\infty} Z_\rho^j \times f_{j+1-\alpha_0} \circ \varphi^\rho,$$

$$\beta(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \rho \leqslant \tau_0, \\ \alpha_0 - 1 & \text{si} \quad \tau_0 < \rho \leqslant \tau', \end{cases}$$

chaque φ^ρ vérifie l'équation caractéristique relative à H et est telle que $\varphi^\rho(0, x') = \psi(x')$, dans un voisinage V de l'origine et que :

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \varphi^\rho(0, x') = \xi_0^\rho . (x', \operatorname{grad} \psi(x'))$$

On se donne des fonctions données de Cauchy B_τ^j, $\mathscr{C}^\infty$ dans W; les z_ρ doivent vérifier les données de Cauchy :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^\tau \left(\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau'} z_\rho\right)\Bigg|_{x^0=0} = \sum_{j=-\tau}^{\infty} B_\tau^j \times f_j \circ \psi, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant \bar{\tau} - 1.$$

On identifie les différents coefficients des f_j dans les deux membres et on trouve sur $x^\circ = 0$.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^p Z_\rho^0 = 0, \qquad 0 \leqslant p \leqslant \alpha_0 - 2,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^p Z_\rho^1 = 0, \qquad 0 \leqslant p \leqslant \alpha_0 - 3,$$

$$\vdots$$

$$Z_\rho^{\alpha_0 - 2} = 0$$

et

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_0} \sum_{p=0}^{p=\alpha_0-1} C_\tau^p (\xi_0^\rho)^{\tau-p} \left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^p Z_\rho^{\alpha_0-1-p}(0, x') + \sum_{\rho>\tau_0} (\xi_0^\rho)^\tau Z_\rho^{\alpha_0-1}(0, x') = B_\tau^{-\tau}, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant \bar{\tau} - 1$$

(on conviendra que $C_\tau^p = 0$ si $p > \tau$).

Le déterminant du système [3] :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{p!}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0^\rho}\right)^p [\xi_0^\rho]_\delta^\tau \ [\xi_0^\rho]^\tau \\ 1 \leqslant \rho \leqslant \tau_{0\delta}[\rho > \tau_0 \\ 0 \leqslant p \leqslant \alpha_0 - 1] \end{array} \right\} \text{ est non nul}$$

et on peut déterminer les conditions initiales permettant de résoudre de façon unique le problème de Cauchy asymptotique dans V.

III. — Proposition

En utilisant une méthode analogue à celle employée par HÖRMANDER et DUISTERMAAT [4] et par J. CHAZARAIN [2] on construit une paramétrix pour le système grâce à la :

PROPOSITION. — *Pour* $t^0 \in [0, T]$, $0 \leqslant \mu \leqslant \bar{\tau} - 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant \bar{\tau} - 1$, *il existe des opérateurs matriciels :*

$$F_{\mu,\rho}(t^0) \in I^{-(1/4)-\mu+\alpha_0-1-\beta(\rho)}(X, X', C_\rho(t^0)),$$

$$\beta(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \rho \leqslant \tau_0, \\ \alpha_0 - 1 & \text{si} \quad \rho > \tau_0 \end{cases}$$

vérifiant : $k\, F_{\mu,\rho}(t^0) = 0$ (*modulo un opérateur à noyau* $\mathscr{C}^\infty$) :

$$\gamma_\tau\left[\Pi_{\rho=1}^{\rho=\tau'} F_{\mu,\rho}(t^0)\right] \equiv \delta_{\tau,\mu} I,$$

$\delta_{\tau,\mu}$, *symbole de Krönecker;* I, *opérateur identique;* γ_τ, *opérateur de trace sur* $x^0 = t^0$ *de* D_0'; $C_\rho(t^0)$, *relation canonique homogène décrite à partir d'une fonction de phase* φ^ρ *associée à* ξ_0^ρ.

On cherche $F_{\mu,\rho}(t^0)$ sous forme de développements asymptotiques

$$F_{\mu,\rho}(t^0) \sim \sum_{j=\beta(\rho)}^{\infty} F_{\mu,\rho}^j(t^0),$$

vérifiant :

$$k\left(\sum_{j<l} F_{\mu,\rho}^j(t^0)\right) \in I^{\bar{\tau}-(1/4)-\mu-l-1+\beta(\rho)}(X, X', C_\rho(t^0)), \qquad l \in N^*,$$

$$\gamma_\tau\left(\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau'} \sum_{j<\alpha_0+l} F_{\mu,\rho}^j\right) - \delta_{\tau,\mu} I \in L^{-\mu+\tau-(l+1)}(X'), \qquad l \in \mathbf{N}.$$

On aura localement :

$$[F_{\mu,\rho}^j(t^0) u](x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\varphi^\rho(x,\eta')} B_{\mu,\rho}^j(x, \eta') \hat{u}(\eta') d\eta',$$

$$u \in C_0^\infty(X, \Omega_{1/2}) \qquad \text{et} \qquad B_{\mu,\rho}^j \in S^{-\mu-j+(\alpha_0-1)}(X', \delta).$$

Les symboles $B^j_{\mu,\rho}$ se déterminent par intégration d'un système d'équations différentielles d'ordre α_0 ou d'ordre 1 comme au paragraphe II.1; les traces sur $x^0 = t^0$ s'obtiennent comme au paragraphe II.2.

On pose

$$E_\mu(t^0) = \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau'} F_{\mu,\rho}(t^0).$$

IV. — Théorème

THÉORÈME. — *Le problème de Cauchy sous les hypothèses de I :*

$$ku = f, \qquad f = (f^A), \qquad f^A \in C^\infty(X, \Omega_{1/2}),$$

$$D_0^\tau u\,|_{x^0=t^0} = g_\tau, \qquad g_\tau = (g_\tau^A), \qquad g_\tau^A \in C^\infty(X', \Omega_{1/2}), \qquad t^0 \in [0, T]$$

admet une solution unique $u \in C^\infty(X, \Omega_{1/2})$.

On suit la démonstration de [2]. On explicite les opérateurs à noyau C^∞ de la proposition.

On a en effet :

$$\begin{cases} k E_\mu(t^0) = R_\mu(t^0) & \text{opérateur à noyau } \mathscr{C}^\infty \text{ de } X' \text{ dans } X, \\ \gamma_\tau E_\mu(t^0) = R_{\tau,\mu}(t^0) + \delta_{\tau,\mu} I R_{\tau,\mu}(t^0) & \text{opérateur à noyau } \mathscr{C}^\infty \text{ de } X' \text{ dans } X', \end{cases}$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant \bar{\tau} - 1, \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant \bar{\tau} - 1.$$

On se ramène à des opérateurs G_μ et Q_μ vérifiant :

$$\begin{cases} k G_\mu(t^0) = Q_\mu(t^0), & \text{opérateur à noyau } \mathscr{C}^\infty \text{ de } X' \text{ dans } X, \\ \gamma_\tau G_\mu(t^0) = \delta_{\tau,\mu} I. \end{cases}$$

On associe à $G_{\bar{\tau}-1}$ un opérateur G, au noyau $\mathscr{C}^\infty$ de $Q_{\bar{\tau}-1}$ un opérateur T vérifiant :

$$\begin{cases} k G = I - T, \\ \gamma_\tau G = 0. \end{cases}$$

On prouve que $I - T$ admet un inverse T' (en utilisant un lemme de Volterra) qui vérifie :

$$\begin{cases} k GT' = I, \\ \gamma_\tau GT' = 0. \end{cases}$$

La solution au problème de Cauchy est donnée par

$$u = \sum_{\tau=0}^{\tau=\bar{\tau}-1} G_\tau[g_\tau] + G \circ T'\left[f - \sum_{\tau=0}^{\tau=\bar{\tau}-1} Q_\tau[g_\tau]\right].$$

Pour montrer que u est unique, on prouve que la distribution u vérifiant :

$$\begin{cases} ku = 0, \\ D_0^\tau u\,|_{x^0=t^0} = 0 \end{cases}$$

est unique en utilisant les propriétés de l'adjoint de k et le théorème de Holgrem.

V. — Théorème

THÉORÈME. — *L'opérateur h satisfaisant les hypothèses de I, le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} hv = f, \quad f = (f^A), \quad f^A \in \mathscr{C}^\infty(X, \Omega_{1/2}), \\ D_0^\tau v|_{x^0=t^0} = \dot{g}_\tau, \quad \dot{g}_\tau = (\dot{g}_\tau^A), \quad \dot{g}_\tau^A \in \mathscr{C}^\infty(X', \Omega_{1/2}), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t-1. \end{cases}$$

admet une solution $v \in \mathscr{C}^\infty(X, \Omega_{1/2})$ unique.

On prend pour cela : $v = (v^B)$, avec $v^B = \sum_C \mathscr{A}_C^B u^C$, où $u = (u^C)$ est la fonction construite par le théorème IV.

On montre que la connaissance des t traces de v permet de déterminer les $\bar{\tau}$ traces de u sur $x^0 = t^0$ et de construire u.

L'unicité de v se déduit par un procédé analogue à celui utilisé dans IV.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERZIN (R.) et VAILLANT (J.). — Paramétrix du problème de Cauchy pour un système d'équations aux dérivées partielles linéaires à caractéristiques multiples, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 283, série A, 1976, p. 485-487.

[2] CHAZARAIN (J.). — Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante, *Ann. Inst. Fourier*, t. 24, 1974, fascicule 1, p. 173-202.

[3] DE PARIS (J.-C.). — Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples; lien avec l'hyperbolicité, *J. Math. pures et appl.*, t. 51, 1972, p. 231-256.

[4] DUISTERMAAT (J. J.) and HÖRMANDER (L.). — Fourier integral operators II, *Acta Math.*, t. 128, 1972, p. 182-269.

[5] LERAY (J.) et OHYA (Y.). — Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts, « *Colloque sur l'analyse fonctionnelle* [2.1964.Liège] », p. 145-152. — Louvain, Librairie Universitaire; Paris, Gauthiers-Villars, 1964 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[6] GOURDIN (D.). — Le problème de Cauchy pour les systèmes linéaires faiblement hyperboliques à caractéristiques multiples, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 282, série A, 1976, p. 1105-1107.

[7] HÖRMANDER (L.). — Fourier integral operators I, *Acta Math.*, t. 127, 1971 p. 79-183.

[8] PETKOV (V. M.). — Équations et systèmes à caractéristiques multiples, *Séminaire d'analyse numérique*, 1975.

[9] VAILLANT (J.). — Remarques sur les sytèmes fortement hyperboliques, *J. Math. pures et appl.*, t. 50, 1971, p. 25-51.

[10] VAILLANT (J.). — Caractéristiques multiples et bicaractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants, *Ann. Inst. Fourier*, t. 15, 1965, fascicule 2, p. 225-311.

[11] GOURDIN (D.). — *J. of Math. of Kyoto Univ.*, 17, 1977, p. 539-566.

[12] CHOQUET-BRUHAT (Y.). — Diagonalisation des systèmes quasi linéaires et hyperbolicité non stricte, *J. Math. pures et appl.*, t. 45, 1966, p. 371-386.

(Texte reçu le 3 octobre 1977,
présenté par P. Malliavin.)

Robert BERZIN,
Mathématiques,
Université des Sciences et Techniques
de Lille-I, B.P. n° 36,
56950 Villeneuve-d'Ascq
et
Jean VAILLANT,
Mathématiques, Tour 46,
Université Pierre-et-Marie Curie,
4, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. – *Systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante.* Note (*) de **Robert Berzin** et **Jean Vaillant,** présentée par M. Jean Leray.

Nous considérons un opérateur différentiel matriciel à coefficients C^∞, d'ordre $t \geqq 1$, dont les caractéristiques sont réelles et de multiplicité constante. Nous donnons, dans un cas de multiplicité trois, des conditions nécessaires et des conditions suffisantes d'hyperbolicité obtenues à partir d'une condition de décomposition générale.

We consider a matrix linear differential operator, with coefficients C^∞, and order $t \geqq 1$; characteristics are real and with constant multiplicity. We give, in a case of multiplicity 3, necessary and sufficient conditions of hyperbolicity; we from obtain them a general condition of decomposition.

I. X′ est une variété compacte réelle C^∞ de dimension n; $x'=(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ un point de X′; T^+ est un nombre réel strictement positif et : $X=[0, T^+]\times X'$; $x=(x^0, x')=(x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ est un point de X.

Un point de l'espace cotangent à X est noté (x, ξ) avec

$$\xi=(\xi_0, \xi')=(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n).$$

h est un opérateur différentiel matriciel carré, à m lignes, linéaire, de classe C^∞, d'ordre $t \geqq 1$ sur X. $H(x, \xi)$ est la matrice caractéristique, de degré t, de h; on suppose que son déterminant est réel et n'est pas identiquement nul; dans une carte h s'écrit :

$$h(x, D)=H(x, D)+H^*(x, D), + \ldots,$$

où H^* est d'ordre $(t-1)$.

(1) On suppose qu'il existe des entiers strictement positifs $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_\sigma$ et des fonctions C^∞ en x, polynômiales en ξ, irréductibles sur **R** pour tout x, $H_0, H_1, \ldots, H_\sigma$ telles que

$$\text{dét } H=\prod_{s=0}^{s=\sigma}[H_s]^{\nu_s}.$$

Le degré de H_s est constant et égal à τ_s.

On posera $\tau=\sum_{s=0}^{s=\sigma}\tau_s$.

(2) On suppose que : $\prod_{s=0}^{s=\sigma} H_s$ est strictement hyperbolique par rapport à la direction $N=(1, 0)$, c'est-à-dire que pour tout $x\in X$, $\prod_{s=0}^{s=\sigma} H_s(x, \xi_0, \eta')=0$ admet pour tout (x, η'), $\eta'\neq 0$, τ racines distinctes réelles $\xi_0^\rho(x, \eta')$, $1\leqq\rho\leqq\tau$.

A désigne la matrice des cofacteurs d'ordre $(m-1)$ de H, de sorte que :

$$HA=AH=\text{dét } H\,.\,I;$$

I est la matrice unité d'ordre m.

II. Hypothèse (D) : On suppose l'existence d'un opérateur différentiel matriciel a de symbole principal A tel que

$$h\circ a=\sum_{r=0}^{r=\tau} l_r[h_0]^{[\nu_0-r]_+}\ldots[h_s]^{[\nu_s-r]_+}\ldots[h_\sigma]^{[\nu_\sigma-r]_+},$$

où l_r est un opérateur différentiel matriciel, h_s un opérateur différentiel de symbole principal H_s, $[\nu_s - r]_+ = \mathrm{Max}(0, \nu_s - r)$, l_0 est la matrice identique, $\bar{\tau} = mt$, et tel que

$$\text{ordre}\left(h \circ a - \sum_{\rho=0}^{\rho=r} l_\rho h_0^{[\nu_0-\rho]_+} \ldots h_\sigma^{[\nu_\sigma-\rho]_+}\right) < \bar{\tau} - r,$$

et on suppose l'existence de a' de symbole principal A tel que : $a' \circ h$ possède une décomposition du type précédent.

THÉORÈME 1. — *Sous l'hypothèse* (D), *le problème de Cauchy est bien posé en* C^∞ *pour des données* C^∞ *sur* $x^0 = t^0$, $(0 \leqq t^0 \leqq T^+)$.

Cette proposition s'obtient par une démonstration analogue à celles de ([1]), ([2]) et ([4]).

Remarque. — On peut remplacer cette hypothèse par une hypothèse analogue où a est pseudo-différentiel en $\partial/\partial x^i$, $i \geqq 1$.

III. Nous supposerons maintenant que $\nu_0 = 3$ et, pour simplifier, que $\nu_s = 1$, $s \geqq 1$. On pose dét $H = [H_0]^3 H'$.

Pour x fixé, considérons l'anneau localisé de celui des polynômes par rapport à l'idéal engendré par H_0, c'est-à-dire l'anneau principal des fractions rationnelles dont le dénominateur n'est pas divisible par H_0.

Nous supposerons que H a dans cet anneau la forme réduite :

$$\begin{bmatrix} [H_0]^2 & & & & \\ & H_0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Posons $A/H_0 = B$; il existe un élément de B non divisible par H_0; notons A_A^B le cofacteur de H_B^A dans H et B_A^B l'élément correspondant de B; on peut convenir que B_1^1 n'est pas divisible par H_0 et nous supposerons que B_1^1 ne s'annule pas pour les racines caractéristiques de H_0. Il existe aussi un cofacteur de H d'ordre $(m-2)$ non divisible par H_0; notons A_{AC}^{BD} le cofacteur de H obtenu en barrant la A-ième et la C-ième lignes et la B-ième et la D-ième colonnes; on peut convenir que A_{12}^{12} n'est pas divisible par H_0 et on suppose de plus que A_{12}^{12} ne s'annule pas pour les racines caractéristiques de H_0.

Une généralisation facile permettrait d'étendre les résultats obtenus aux cas où les ν_s, $s \geqq 1$ sont $\geqq 1$ et où les éléments des matrices réduites correspondantes sont simples. Si U, V sont 2 fonctions polynômiales en ξ, C^∞ en x, on notera $U \equiv V$ si $U - V$ est divisible par H_0. Posons

$$L = B\left[H^* B + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n}\left(\frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial B}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial H_0}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial H_0}{\partial x^\alpha} H'.I\right)\right].$$

PROPOSITION 1. — *On a*

$$L \equiv \left[BH^* + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n}\left(\frac{\partial B}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial H_0}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial H_0}{\partial x^\alpha} H'.I\right)\right] B.$$

PROPOSITION 2. — *Si h vérifie l'hypothèse* (D) *on a* $L \equiv 0$. *Posons alors*

$$M = \left[BH^* + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n}\left(\frac{\partial B}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial H_0}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial H_0}{\partial x^\alpha} H'.I\right)\right]\frac{L}{H_0}.$$

Si h vérifie (D), *on a* $M \equiv 0$.

PROPOSITION 3. — $L \equiv 0$ *équivaut à* $L_1^1 \equiv 0$ *et alors* $M \equiv 0$ *équivaut à* $M_1^1 \equiv 0$.

Notons

$$K = H^* - \frac{1}{2\rho} \sum_\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi_\alpha \partial x^\alpha}(\rho H)$$

la matrice sous-caractéristique de h; ρ est une mesure positive sur X :

$$C = \sum_\alpha \left(\frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial B}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} \frac{\partial B}{\partial \xi_\alpha} \right),$$

$$D = \sum_\alpha \left(\frac{\partial B}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial B}{\partial x^\alpha} \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha} \right).$$

K, C, D définissent évidemment des champs de tenseurs sur X.

PROPOSITION 4 :

$$L \equiv B\left(KB + \frac{1}{2}C\right) \equiv \left(BK + \frac{1}{2}D\right)B.$$

Si

$$L \equiv 0, \quad M \equiv \frac{[BK + (1/2)D]\,B\,[KB + (1/2)C]}{H_0}.$$

Convenons que les indices surbarrés varient entre 1 et 2 : $1 \leqq \bar{A} \leqq 2$. Il sera commode en particulier, en vue de généralisation de ces résultats, d'introduire la matrice $\mathscr{A}$ d'ordre 2 dont les éléments sont

$$\mathscr{A}_{\bar{D}}^{\bar{A}} = (-1)^{\bar{A}+\bar{D}} \frac{A_{\bar{A}-1\,\bar{A}+1}^{\bar{D}-1\,\bar{D}+1}}{H_0}$$

(ainsi par exemple $\mathscr{A}_2^1 = -B_2^1$), et de définir les invariants :

$$\mathscr{K}_{\bar{D}}^{\bar{A}} = \sum_{F,B} A_{\bar{A}-1F}^{12} \left[K_B^F A_{12}^{\bar{D}-1B} + \frac{1}{2} \sum_\alpha \left(\frac{\partial H_B^F}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial A_{12}^{\bar{D}-1B}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial H_B^F}{\partial x^\alpha} \frac{\partial A_{12}^{\bar{D}-1B}}{\partial \xi_\alpha} \right) \right],$$

$$\hat{\mathscr{K}}_{\bar{D}}^{\bar{A}} = \sum_{\bar{E}} B_{\bar{E}}^{\bar{A}} \left[\mathscr{K}_{\bar{D}}^{\bar{E}} + \frac{1}{2} \sum_\alpha \left(\frac{\partial H_0}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \mathscr{A}_{\bar{D}}^{\bar{E}}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial H_0}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathscr{A}_{\bar{D}}^{\bar{E}}}{\partial \xi_\alpha} \right) A_{12}^{12} \right],$$

$$\check{\mathscr{K}}_{\bar{D}}^{\bar{A}} = \sum_{\bar{E}} \left[\mathscr{K}_{\bar{E}}^{\bar{A}} + \frac{1}{2} \sum_\alpha \left(\frac{\partial \mathscr{A}_{\bar{E}}^{\bar{A}}}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial H_0}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \mathscr{A}_{\bar{E}}^{\bar{A}}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial H_0}{\partial \xi_\alpha} \right) A_{12}^{12} \right] B_{\bar{D}}^{\bar{E}}.$$

PROPOSITION 5 :

$$L_1^1 \equiv \sum_{\bar{A}} \hat{\mathscr{K}}_{\bar{A}}^1 B_1^{\bar{A}} \equiv \sum_{\bar{A}} B_{\bar{A}}^1 \check{\mathscr{K}}^{\bar{A}}.$$

Si $L_1^1 \equiv 0$, $M_1^1 \equiv 0$ *équivaut à* $\hat{\mathscr{K}}_2^1 \check{\mathscr{K}}_1^2 \equiv 0$.

THÉORÈME 2. — *Si h est tel que :*

(*a*) L_1^1 *soit divisible par* H_0;

(*b*) $\hat{\mathscr{K}}_2^1$ *ou bien* $\check{\mathscr{K}}_1^2$ *soit divisible par* H_0,

le problème de Cauchy est bien posé en C^∞ *pour des données sur les hyperplans* $x^0 = t^0$.

On le démontre en construisant une paramétrix à l'aide d'opérateurs intégraux de Fourier [(1), (2), (3)].

THÉORÈME 3. — *Si h est tel que, au voisinage d'un point, il existe une fonction phase réelle* ψ *telle que*

$$H_0(x, \operatorname{grad}\psi(x)) = 0$$

et

$$[L_1^1(x, \operatorname{grad}\psi(x)) \neq 0 \text{ ou } \hat{\mathcal{K}}_2^1(x, \operatorname{grad}\psi(x)) \cdot \check{\mathcal{K}}_1^2(x, \operatorname{grad}\psi(x)) \neq 0],$$

alors le problème de Cauchy n'est pas bien posé en C^∞ *au voisinage de ce point.*

On le démontre en suivant la méthode, utilisée par Ivrii et Petkov ([5]), de construction de développements asymptotiques violant une inégalité du type

$$\|y\|_p \leqq C\|hy\|_q,$$

où les normes sont celles d'espaces de Sobolev convenables. Les démonstrations détaillées seront données dans une autre publication.

(*) Séance du 11 septembre 1978.

([1]) R. BERZIN et J. VAILLANT, *Séminaire sur les équations aux dérivées partielles de J. Leray*, Collège de France, Paris, 1976-1977.

([2]) R. BERZIN et J. VAILLANT, *Bull. Sc. math.*, 2e série, 102, 1978.

([3]) Y. DEMAY, *J. Math. pures et appl.*, 56, 1977, p. 393-422.

([4]) KAJITANI, Preprint.

([5]) V. PETKOV, *Travaux du Séminaire I.G. Petrovski*, Moscou, 1975, p. 211-236.

R. B. : *Mathématiques, Université de Lille-I*, B.P. n° 36, 59650 *Villeneuve d'Ascq*;

J. V. : *Mathématique, U.E.R.* n° 47, *Université de Paris-VI*, 4, *place Jussieu*, 75230 *Paris Cedex* 05.

SYSTEMES HYPERBOLIQUES A CARACTERISTIQUES MULTIPLES.

par

R. BERZIN *et* J. VAILLANT

INTRODUCTION.

L'objet de cet article est de donner des conditions nécessaires et des conditions suffisantes d'hyperbolicité pour les systèmes, lorsque la multiplicité des caractéristiques est constante ; "dans toute la suite la notion d'hyperbolicité utilisée sera la suivante, en bref : un opérateur est hyperbolique, lorsque le problème de Cauchy est bien posé dans C^∞". En ce qui concerne les conditions suffisantes nous avons utilisé la technique des opérateurs intégraux de Fourier de HÖRMANDER et DUISTERMAAT (1972) sous la forme utilisée par CHAZARAIN (1974) ; en ce qui concerne les conditions nécessaires celles des développements asymptotiques de STRANG et FLASCHKA (1969, 1971), IVRII et PETKOV (1973, 1974). Nous nous sommes souciés particulièrement d'obtenir ces conditions par des procédés de calcul qui puissent se généraliser et pour des systèmes d'ordre non nécessairement égal à 1 et c'est là qu'est essentiellement notre contribution.

Dans le cas scalaire, les conditions de LEVI, sur les termes d'ordre inférieur de l'opérateur, ont été beaucoup étudiées ; nous citerons particulièrement les auteurs dont les travaux nous ont été directement utiles : A. LAX (1956), MIZOHATA et OHYA et OHYA (1968, 1972), LERAY et OHYA (1964), Mme CHOQUET (1966), CHAILLOU (1969), DE PARIS (1972).

Les systèmes présentent de nombreuses difficultés de calcul ; de plus si les coefficients sont C^∞, la non-intégrité de l'anneau des fonctions C^∞, et les variations de rang de la matrice caractéristique sont parmi des causes de la difficulté à obtenir des conditions à la fois nécessaires et suffisantes. Nous donnons une condition suffisante simple d'hyperbolicité (D), elle exprime en bref que l'opérateur matriciel h composé avec un opérateur a dont la

matrice caractéristique est celle des cofacteurs A de la partie principale H de h se décompose bien. Elle rejoint ainsi les définitions du cas scalaire et du cas des coefficients constants.

Des définitions voisines avaient d'abord été données par GOURDIN (1976) puis BERZIN et VAILLANT (1976) et KAJITANI et DEMAY (1977). Pour des raisons invoquées précédemment la démonstration des conditions nécessaires sera plus facile si nous transformons la condition de LEVI (D) précédente : elle entraîne des conditions algébriques polynômiales sur h dans une carte locale exprimant que l'on peut trouver les parties homogènes de a et les opérateurs du second membre de la condition de LEVI (D).

Nous vérifions dans les cas de caractéristiques de multiplicité ≤ 3 que les conditions algébriques obtenues sont bien nécessaires ; nous montrons aussi directement que ces conditions sont suffisantes. La distinction des divers cas nécessite des hypothèses supplémentaires de "constance du rang" qui sont commodes à exprimer pour les systèmes d'ordre t en utilisant des anneaux locaux naturels. La technique de calcul est celle utilisée par VAILLANT pour les opérateurs à coefficients constants (1964), à caractéristiques doubles (1968) et les opérateurs fortement hyperboliques (1971) puis par BERZIN (1972) (1975) pour les différents cas envisagés dans ce mémoire.

Les conditions algébriques que nous obtenons systématiquement à l'aide de la condition (D) coïncident avec les conditions sur les systèmes d'ordre 1 de PETKOV (1973) (1975) qui expriment la possibilité d'obtenir la paramétrix et de DEMAY (1974). Elles nous conduisent à la construction d'invariants polynômiaux d'un emploi plus agréable que les expressions des conditions de LEVI précédemment introduites.

La bibliographie précise les références de différents travaux utilisés.

I - NOTATIONS - HYPOTHESES ET DEFINITIONS.-

X' est une variété réelle compacte C^∞ de dimension n ; on note : $x' = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ un point de X'. T^+ est un réel strictement positif et $X = [0, T^+] \times X'$; on note $x = (x^o, x') = (x^o, x^1, \ldots, x^\alpha, \ldots, x^n)$ un point de X. Un point de l'espace cotangent $T^*(X)$ est noté : (x,ξ) , avec : $\xi = (\xi_o, \xi') = (\xi_o, \xi_1, \ldots, \xi_\alpha, \ldots, \xi_n)$. On posera :

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} = \partial^\alpha \ .$$

$h = (h_B^A)$ est un opérateur différentiel matriciel à m lignes, m colonnes : $1 \leq A , B \leq m$, linéaire, de classe C^∞ sur X ; son ordre est : $t \geq 1$; $H_B^A(x,\xi)$ est le symbole principal de h_B^A si celui-ci est d'ordre t , et 0 sinon ; si $H = (H_B^A)$ on suppose que le déterminant de H est réel et n'est pas identiquement nul. Dans une carte locale, h s'écrit :

$$h(x,\partial) = H(x,\partial) + H^*(x,\partial) + H^{**}(x,\partial) + \ldots \ ,$$

$H^*(x,\xi)$ est homogène en ξ, d'ordre $t-1$; $H^{**}(x,\xi)$ est homogène en ξ d'ordre $t-2$.

On suppose qu'il existe des entiers strictements positifs, $\nu_o, \nu_1, \ldots, \nu_s, \ldots, \nu_\sigma$ et des fonctions C^∞ en x, polynômiales en ξ, $H_o, H_1, \ldots, H_s, \ldots, H_\sigma$, telles que :

$$\text{dét } H = \prod_{s=0}^{s=\sigma} [H_s]^{\nu_s}$$

et satisfaisant aux conditions suivantes :

a) pour tout s, le degré de H_s est constant et égal à τ_s ; on pose :

$$\tau' = \sum_{s=0}^{s=\sigma} \tau_s \ ;$$

b) $\prod_{s=0}^{s=\sigma} H_s$ est strictement hyperbolique par rapport à la direction $N = (1,0)$, c'est-à-dire que pour tout (x,ξ') , $\xi' \neq 0$, l'équation en ξ_o : $\prod_{s=0}^{s=\sigma} H_s(x,\xi_o,\xi') = 0$ admet τ' racines distinctes réelles $\xi_o^\rho(x,\xi')$, $1 \leq \rho \leq \tau'$; ces racines sont donc des fonctions C^∞ en (x,ξ') et homogènes de degré 1 en ξ'.

A désigne la matrice des cofacteurs d'ordre $(m-1)$ de H de sorte que :

$$HA = AH = \text{dét } H \, . \, I \, ,$$

I matrice unité d'ordre m.

Définition 1.- Le problème de Cauchy C^∞ pour h est bien posé dans X si et seulement si :

a) pour tout T , $0 \leq T < T^+$, pour toute fonction (vectorielle) $f \in C^\infty(X)$, pour tout $g_\tau \in C^\infty(\{T\} \times X')$, $0 \leq \tau \leq t-1$, il existe $u \in C^\infty(X)$ telle que :

$$hu = f \quad \text{et} \quad (\partial_o)^\tau u\Big|_{x^o=T} = g_\tau \, .$$

b) pour tous T, T' , $0 \leq T < T' \leq T^+$, pour toute distribution $u \in \mathcal{D}'(X)$, on a l'implication :

si $hu = 0$ dans $X_{T'}^-$ et supp $u \subset X_T^+$ où :

$X_T^+ = X \cap \{x^o \geq T\}$ et $X_{T'}^- = X \cap \{x^o < T'\}$, alors $u = 0$ dans $X_{T'}^-$.

II - CONDITION DE DECOMPOSITION.-

Définition 2.- h vérifie la condition (D) si et seulement si :

a) il existe un opérateur différentiel linéaire matriciel a de symbole principal A tel que , pour tout s , $0 \leq s \leq \sigma$,

$$h \circ a = \sum_{r=0}^{r=\bar{\tau}} \ell_{r,s} \, [h_s]^{[\nu_s - r]_+} \quad ,$$

où $\ell_{r,s}$ est un opérateur différentiel linéaire matriciel, h_s un opérateur différentiel de symbole principal H_s, $[\nu_s - r]_+ = \mathrm{Max}(0, \nu_s - r)$ et $\bar{\tau} = mt$, et tel que :

$$\text{ordre } (h \circ a - \sum_{\rho=0}^{\rho=r} \ell_{\rho,s} \, [h_s]^{[\nu_s - \rho]_+}) < \bar{\tau} - r \, .$$

b) il existe de même un opérateur a' de symbole principal A tel que $a' \circ h$ admette une décomposition du type précédent.

Théorème 1.- Si h vérifie la condition (D), le problème de Cauchy pour h est bien posé dans X.

La démonstration consiste essentiellement en la construction d'une paramétrix et résulte du mémoire [4].

Comme nous serons amenés à faire des démonstrations analogues, nous ne la reprendrons pas ici.

Remarques :

1) La condition (D) s'exprime aisément sous la forme donnée par STRANG dans le cas scalaire ; en bref, si φ vérifie : $H_s(x, \mathrm{grad}\, \varphi(x)) = 0$, et si $Y \in C_o^\infty(X)$ et est vectoriel :

$$e^{-i\omega\varphi(x)} \; h \circ a \; (e^{i\omega\varphi} Y)(x) = O(\omega^{\bar{\tau} - \nu_s}) \quad , \quad \text{si} \quad \omega \to \infty \, .$$

2) On peut la généraliser au cas d'un opérateur muni d'ordres de LERAY-VOLEVIČ, à l'aide de la matrice caractéristique associée ; nous ne le ferons pas ici pour éviter de compliquer encore les notations.

3) On peut la généraliser en prenant pour a et a' des opérateurs différentiels en x^o et pseudo-différentiels en x' dont les symboles sont dans chaque carte développables en symboles homogènes.

III - SYSTEMES FORTEMENT HYPERBOLIQUES.-

On suppose désormais dans toute la suite que, pour tout x, et pour tout s, $H_s(x,\xi)$ est un polynôme irréductible en ξ.

Pour chaque x et chaque s, il sera commode alors de considérer l'anneau localisé Φ_s de celui des polynômes par rapport à l'idéal engendré par H_s, c'est-à-dire l'anneau principal des fractions rationnelles dont le dénominateur n'est pas divisible par H_s [39] . On rappelle que ses idéaux sont engendrés par les puissances de H_s.

Définition 3.- h vérifie la condition (H.F) si et seulement si : pour tout x et pour tout s, la matrice $H(x,\xi)$ est équivalente dans Φ_s à une matrice dont tous les facteurs invariants sont engendrés par H_s :

$$H \sim \begin{bmatrix} H_s & & & & 0 \\ & H_s & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & H_s & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \\ & 0 & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \Big\} \nu_s$$

Remarque : Il résulte de [41], pages 30 et 31, que, pour tout x, tout $\xi' \neq 0$ et toute racine caractéristique $\xi_o^\rho(x,\xi')$, la matrice H est équivalente, dans l'anneau localisé de celui des polynômes à une variable ξ_o par rapport à l'idéal $\xi_o - \xi_o^\rho$, à une matrice dont tous les facteurs invariants sont engendrés par $\xi_o - \xi_o^\rho$:

$$H \sim \begin{bmatrix} \xi_o - \xi_o^\rho & & & & & \\ & \xi_o - \xi_o^\rho & & 0 & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \xi_o - \xi_o^\rho & & \\ & & & & 1 & \\ & 0 & & & & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{multiplicité de } \xi_o^\rho$$

On retrouve alors facilement l'équivalence de la condition (HF) dans le cas d'un système d'ordre 1 ($t = 1$) avec celles de diagonalisation utilisées par exemple par PETKOV [36] et DEMAY [13].

Proposition 1.- Si h vérifie (HF), h vérifie (D).

On remarque [19] que A est divisible par : $\prod_{s=0}^{s=\sigma} [H_s]^{\nu_s - 1}$,

$$A = \prod_{s=0}^{s=\sigma} [H_s]^{\nu_s - 1} \quad B \quad ,$$

où $B(x,\xi)$ est C^∞ en (x,ξ) polynômiale en ξ de degré : $\tau' - t$ et vérifie :

$$HB = BH = \prod_{s=0}^{s=\sigma} H_s \ . \ I \ .$$

Associons à B un opérateur b de symbole principal B, et à chaque H_s un opérateur h_s de symbole H_s ; l'opérateur

$$a = b \prod_{s=0}^{s=\sigma} [h_s]^{\nu_s - 1} = b \circ [h_o]^{\nu_o - 1} \circ [h_1]^{\nu_1 - 1} \circ \ldots \circ [h_\sigma]^{\nu_\sigma - 1}$$

a pour symbole principal :

$$A = B \prod_{s=0}^{s=\sigma} [H_s]^{\nu_s - 1}$$

On a de plus :

$$h \circ a = h \circ b \circ [h_o]^{\nu_o - 1} \circ [h_1]^{\nu_1 - 1} \circ \ldots \circ [h_\sigma]^{\nu_\sigma - 1}$$

et comme :

$$h \circ b - h_o \circ h_1 \circ \dots \circ h_\sigma \, I = \ell \quad \text{qui est d'ordre} < \tau' :$$

$$h \circ a = h_o \circ h_1 \circ \dots \circ h_\sigma \circ [h_o]^{\nu_o - 1} \circ [h_1]^{\nu_1 - 1} \circ \dots \circ [h_\sigma]^{\nu_\sigma - 1} \, I + \ell [h_o]^{\nu_o - 1} \circ \dots \circ [h_\sigma]^{\nu_\sigma - 1}$$

En commutant les opérateurs, on voit facilement [14], que $(D)_{a)}$ est vérifiée ; de même a vérifie aussi $(D)_{b)}$.

Théorème 2.- Si h vérifie la condition (HF) , le problème de Cauchy pour h et X est bien posé quels que soient les termes non principaux de h.

La démonstration est immédiate.

Remarque : On peut donner une démonstration élémentaire directe du théorème 2 en remarquant que $h \circ b$ est strictement hyperbolique et en bref que la solution de : $hy = f$ est de la forme bz où z vérifie $(h \circ b)z = f$ [41] ou construire directement une paramétrix ou un symétrisateur [41].

IV - SYSTEMES A CARACTERISTIQUES DOUBLES NON FORTEMENT HYPERBOLIQUES.-

Supposons d'abord $\nu_o = 2$, posons $H_o = H'$ et explicitons la condition (D) pour ce facteur ; avec des notations évidentes :

$$h \circ a = h'' \circ [h']^2 \, I + e \circ h' + f \, ;$$

h'' a donc pour symbole principal $H'' = \prod_{s=1}^{s=\sigma} [H_s]^{\nu_s}$, h' a pour symbole principal H' , e a pour symbole principal E et :

dét $H = [H']^2 H''$. Les ordres sont tels que (D) soit satisfaite.

En coordonnées locales :

$$a(x,\partial) = A(x,\partial) + A^*(x,\partial) + \dots ,$$

où A^* est d'ordre $(m-1)t-1$ et où les pointillés désignent des termes d'ordre inférieur.

On obtient facilement :

$$h \circ a(x,\partial) = HA(x,\partial) + \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} (\partial^\alpha H \partial_\alpha A + H^* A + HA^*)(x,\partial) + \dots ,$$

les pointillés réprésentent ici les termes d'ordre $\leq mt-2$.

De même :

$$h'' \circ [h']^2 I + e \circ h' + f = [H']^2 H'' I(x,\partial) + \Big[(H'' \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} \partial^\alpha H' \partial_\alpha H') I + EH'\Big](x,\partial) + \dots ,$$

les pointillés représentent des termes d'ordre $\leq mt-2$.

On a donc :

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} (\partial^\alpha H \partial_\alpha A + H^* A + HA^*)(x,\xi) = I(H'' \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} \partial^\alpha H' \partial_\alpha H')(x,\xi) + EH'(x,\xi)$$

Dans le cas du paragraphe précédent on trouve évidemment A^* et E vérifiant cette relation sans condition sur les termes d'ordre inférieur de h.

Définition 4.-

h vérifie la condition (DO) si et seulement si :

4a) pour tout x, dans l'anneau localisé Φ_o :

$$H \sim \begin{bmatrix} (H')^2 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

4b) Il existe donc pour chaque x au moins un cofacteur A_A^B non divisible par H' ; nous supposerons de plus qu'il en existe un tel que, pour tout x, il n'ait aucun zéro réel commun non nul avec H' ; on convient que ce soit A_1^1.

4c) $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_\sigma = 1$.

Remarques :

1) Alors pour tout x et toute racine caractéristique $\xi_o^\rho(\xi')$ de H' , H est équivalente dans l'anneau localisé des polynômes en ξ_o par rapport à l'idéal $\xi_o - \xi_o^\rho$ à la matrice :

$$\begin{bmatrix} [\xi_o - \xi_o^\rho]^2 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

et nos conditions impliquent celles de PETKOV et DEMAY pour $t = 1$. Une partition de l'unité permettrait facilement d'affaiblir l'hypothèse 4b) en ce qui concerne le choix du cofacteur A_1^1 indépendamment de x et $\xi_o^\rho(\xi')$; nous l'avons fait dans le seul but d'économiser les notations et une fois cet affaiblissement fait, nos hypothèses pour $t = 1$ coïncideraient avec celles de [36] et [13].

2) 4c) peut être affaiblie sans difficulté en supposant que les H_s vérifient des hypothèses analogues à celles imposées à H_o dans ce paragraphe ou bien à celles de la définition 3.

Notons $U \equiv V$ si $U - V$ est divisible par H', on a :

$$\sum_{\alpha} \partial^{\alpha} H \partial_{\alpha} A + H^{*} A + H A^{*} = I H'' \sum_{\alpha} \partial^{\alpha} H' \partial_{\alpha} H' \ .$$

En multipliant par A on a la conséquence de (D) :

$$A \left[\sum_{\alpha} \partial^{\alpha} H \partial_{\alpha} A + H^{*} A - I H'' \sum_{\alpha} \partial^{\alpha} H' \partial_{\alpha} H' \right] \equiv 0 \ .$$

Cette condition de divisibilité est évidemment invariante.

On vérifie que $(D)_{b)}$ conduit à la même condition.

On obtient donc la :

Proposition 2.- Si h vérifie (D) on a dans une carte quelconque la relation :

(1) $$A \left[\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} \partial^{\alpha} H \partial_{\alpha} A + H^{*} A - I H'' \sum_{\alpha} \partial^{\alpha} H' \partial_{\alpha} H' \right] (x,\xi) \quad \text{divisible par } H'(x,\xi).$$

Remarque : Une hypothèse de décomposition à l'aide de pseudo-différentiels en x' conduirait à la même relation.

Nous donnerons maintenant d'autres formulations de la relation (1) à l'aide du sous-caractéristique et de crochets construits à partir de la matrice caractéristique. On notera ρ une mesure positive sur X, (comme il est bien connu on pourrait aussi bien faire agir les opérateurs sur les densités d'ordre $\frac{1}{2}$).

Lemme 1.- Les matrices :

$$C = \sum_{\alpha} \partial^{\alpha} H \ . \ \partial_{\alpha} A - \partial_{\alpha} H \ . \ \partial^{\alpha} A$$

et

$$D = \sum \partial^{\alpha} A \ . \ \partial_{\alpha} H - \partial_{\alpha} A \ . \ \partial^{\alpha} H$$

sont des fonctions sur $T^*(X)$ et définissent aussi des invariants ; on a :

$$A \,.\, C \equiv D \,.\, A \quad .$$

C'est une propriété analogue à la propriété classique des parenthèses de Poisson et un calcul facile.

Lemme 2.- La matrice $K = H^* - \frac{1}{2\rho} \sum_\alpha \frac{\partial^2(\rho H)}{\partial x^\alpha \partial \xi_\alpha} = H^* - \frac{1}{2\rho} \sum \partial_\alpha^\alpha(\rho H)$

est l'invariant matrice sous-caractéristique ; c'est la matrice des symboles d'ordre $t-1$ des demi-différences des h_B^A et de leurs opérateurs adjoints formels $\hat{h}_B^A$.

Conséquence : Les matrices :

$$R = K \,.\, A + \frac{1}{2} C \quad , \quad S = A \,.\, K + \frac{1}{2} D$$

définissent des invariants et $A \,.\, R \equiv S \,.\, A$.

On posera :

$$L = A \,.\, R \equiv S \,.\, A \quad .$$

Lemme 3.-

$$L \equiv A \,.\, \Big[\sum_\alpha \partial^\alpha H . \partial_\alpha A + H^* . A - H'' \,.\, \sum_\alpha \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' I\Big]$$

$$\equiv \Big[\sum \partial^\alpha A . \partial_\alpha H + A . H^* - H'' \sum_\alpha \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' I\Big] \,.\, A \quad .$$

(modulo H') .

$$R \equiv H^{*}.A - \sum_{\alpha} \partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'H''I + \sum_{\alpha} \partial^{\alpha}H.\partial_{\alpha}A +$$

$$H \cdot \left[\frac{1}{2}\sum_{\alpha} \partial^{\alpha}_{\alpha}A + \frac{1}{2\rho}\sum_{\alpha} \partial_{\alpha}\rho\partial^{\alpha}A\right]$$

et A.R a la valeur indiquée ; on procède de même pour la deuxième expression.

Lemme 4.- L divisible par H' $\Longleftrightarrow$ L^{1}_{1} divisible par H'

Ce lemme, au contraire du précédent, utilise le fait que A^{1}_{1} n'est pas divisible par H' et résulte alors de la congruence

$$A^{1}_{1}\, L \equiv L^{1}_{1}\, A \quad .$$

En effet, en explicitant les indices des matrices, on a :

$$A^{1}_{1}\, L^{A}_{C} = A^{1}_{1} \sum_{F} A^{A}_{F}\, R^{F}_{C} \quad .$$

On rappelle l'identité de Jacobi entre les cofacteurs de H :

$$A^{1}_{1}\, A^{A}_{F} - A^{1}_{F}\, A^{A}_{1} = A^{1A}_{1F}\, \det H \quad ,$$

où A^{1A}_{1F} est le cofacteur d'ordre m-2 obtenu en rayant la 1ère et la $F^{ième}$ lignes et la 1ère et $A^{ième}$ colonnes dans H et en mettant le signe convenable (si $A \neq 1$, $F \neq 1$) et vaut 0 sinon ($A = 1$ ou $F = 1$).

On a donc encore :

$$A^{1}_{1}\, L^{A}_{C} \equiv \sum_{F} A^{1}_{F}\, A^{A}_{1}\, R^{F}_{C} = A^{A}_{1}\, L^{1}_{C} \quad .$$

De même :

$$L^{1}_{C}\, A^{1}_{1} \equiv A^{1}_{C}\, L^{1}_{1}$$

et :
$$(A_1^1)^2 L_C^A \equiv A_1^A A_C^1 L_1^1$$
$$\equiv A_1^1 A_C^A L_1^1$$

d'où le résultat.

On remarque que l'on a même :

$$A_1^1 L \equiv L_1^1 A \quad \text{modulo} \quad (H')^2 .$$

Lemme 5.- L'invariant $L(\hat{h})$ relatif à l'adjoint de h est l'opposé de la transposée de $L(h)$.

Cela résulte du fait en bref que :

$$K(\hat{h}) = - {}^t[K(h)] ,$$

où t désigne la transposition ;

$$A(\hat{h}) = {}^t[A(h)] \quad \text{et} \quad C(\hat{h}) = - {}^t[D(h)] .$$

Conséquence : Si $L(h)$ est divisible par H', $L(\hat{h})$ l'est aussi.

Définition 5.- h vérifie la condition (L) si et seulement si L est divisible par H'.

Conséquence : Si h vérifie (D), h vérifie (L).

C'est évident compte-tenu de ce qui précède.

Remarque : La condition (D) ne suppose pas d'hypothèses de rang constant et comme le montre l'exemple suivant de DEMAY est plus générale que (DO).

Cependant nous démontrerons sous l'hypothèse (DO) la nécessité de (L) pour que le problème de Cauchy soit bien posé par les méthodes

de STRANG, PETKOV alors que la démonstration de la nécessité de (D) paraît plus difficile.

Exemple dans $\mathbb{R}^2$

$$h(x,\partial) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^o} + H_1^{*1}(x) - \alpha(x^1)\frac{\partial}{\partial x^1} + H_2^{*1}(x) \\ \\ H_1^{*2}(x) \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial x^o} + H_2^{*2}(x) \end{pmatrix}$$

Théorème 3.- Si h vérifie (DO), une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy soit bien posé est que h vérifie (L).

On a donc d'abord à démontrer la :

Proposition 3.- Si h vérifie (DO) et (L), le problème de Cauchy est bien posé.

Cette proposition résulte de la construction pour h et son adjoint d'une paramétrix. Nous reprendrons la démonstration de [2], [3] qui aboutit à la :

Proposition 4.- Pour tous T, ρ tels que : $1 \leqslant \rho \leqslant \tau'$, μ tel que : $0 \leqslant \mu \leqslant t-1$, τ tel que : $0 \leqslant \tau \leqslant t-1$, il existe des opérateurs matriciels intégraux de Fourier :

$$F_{\mu,\rho}(T) \in I^{-1/4-\mu+1-\beta(\rho)}(X, X', C_\rho(T))$$

$$\beta(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \leqslant \tau_o \quad \text{(phases correspondant à } H' = H_o) \\ \\ 1 & \text{si } \rho > \tau_o \end{cases}$$

vérifiant :

$$h\, F_{\mu,\rho}(T) \equiv 0 \quad ,$$

$$\gamma_\tau\Big[\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau'} F_{\mu,\rho}(T)\Big] - \delta_{\tau,\mu}\, I \equiv 0 \quad .$$

Le signe $\equiv$ signifie dans cette proposition l'égalité modulo un opérateur à noyau C^∞ ; γ_τ est l'opérateur de trace de $(\frac{\partial}{\partial x^o})^\tau$ sur $X_T = \{x \in X\ ,\ x^o = T\}$; $\delta_{\tau,\mu}$ est le symbole de Krönecker , $C_\rho(T)$ est la relation canonique homogène décrite à partir de la fonction de phase $\psi^\rho(x,\eta')$ vérifiant localement :

$$\psi^\rho(x,\eta') = \xi_o^\rho(x,\, d_x \psi(x,\eta'))$$

et : $$\psi^\rho\Big|_{x^o=T} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} x^\alpha\, \eta_\alpha \ ; \ \eta' = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \quad .$$

On cherche $F_{\mu,\rho}(T)$ sous la forme d'un développement asymptotique en symboles homogènes :

$$F_{\mu,\rho}(T) \sim \sum_{j=\beta(\rho)}^{\infty} F^j_{\mu,\rho}(T) \quad \text{vérifiant :}$$

i) $h\Big[\sum_{\substack{j<\ell \\ \rho=\tau'}} F^j_{\mu,\rho}(T)\Big] \in I^{t-1/4-\mu-\ell+1}(X,\, X',\, C_\rho(T)) \ , \ \ell \in \mathbb{N}^*$

ii) $\gamma_\tau\Big[\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau'} \sum_{j<\ell+2} F^j_{\mu,\rho}(T)\Big] - \delta_{\tau,\mu}\, I \in L^{-\mu+\tau-\ell-1}(X') \ , \ \ell \in \mathbb{N}$

On aura localement :

$$\big[F^j_{\mu,\rho}(T)u\big](x) = (-i)^j (2\pi)^{-n} \int e^{i\psi^\rho(x,\eta')}\, Y^{\mu,\rho}_{t+j}(x,\eta')\, \hat{u}(\eta')\, d\eta' \ ,$$

$u \in C^\infty_o(X)$, $Y^{\mu,\rho}_{t+j} \in S^{-\mu-j+1}$.

Nous commençons par réaliser i) pour $1 \leq \rho \leq \tau_c$.

On a d'abord pour $\ell = 1$:

$$h\left[F^{o}_{\mu,\rho}(T)\right] \in I^{t-1/4-\mu}$$

On a donc la condition sur les symboles principaux :

$$\sum_B H^A_B(x, \text{ grad } \psi^\rho(x,\eta')) \; Y^B_{\mu,\rho,t,C}(x,\eta') = 0 \quad .$$

Nous omettrons dans la suite de ce calcul les indices μ,ρ, C ; nous utiliserons la convention de sommation d'Enstein pour les indices A, B ,..., $1 \leq A \leq m$ et les indices α , β ,..., $0 \leq \alpha \leq n$; nous omettrons aussi de réécrire η'. On a ainsi :

1) $$H^A_B(x, \text{ grad } \psi^\rho(x)) \; Y^B_t(x) = 0$$

L'on résout, $Y^1_t(x)$ restant arbitraire :

$$Y^B_t(x) = \frac{A^B_1(x, \text{ grad } \psi(x))}{A^1_1(x, \text{ grad } \psi(x))} \; Y^1_t(x) \quad .$$

Il sera commode de continuer le calcul dans des coordonnées locales $(y^o, y^1, \ldots, y^n)$ telles que : $y^o \equiv \psi(x)$ ce qui est évidemment permis ;

Pour $\ell = 2$, on obtient de même :

$$H^A_B(x, \text{ grad } \psi(x)) \; Y^B_{t+1}(x) + \partial^\alpha H^A_B(x, \text{ grad } \psi(x)) \; \partial_\alpha Y^B_t(x) + H^{*A}_B(x, \text{ grad } \psi(x)) \; Y^B_t(x) = 0$$

on a ainsi :

$$H^A_B(y,1,0,\ldots,0) \; Y^B_{t+1}(y) + \partial^\alpha H^A_B(y,1,0,\ldots,0) \; \partial_\alpha Y^B_t(y) + H^{*A}_B(y,1,0,\ldots,0) \; Y^B_t(y) = 0$$

On omettra de réécrire les variables. On a encore :

2) $$H^A_B \; Y^B_{t+1} + \partial^\alpha H^A_B \frac{A^B_1}{A^1_1} \partial_\alpha Y^1_t + \left[\partial^\alpha H^A_B \; \partial_\alpha \left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right) + H^{*A}_B \frac{A^B_1}{A^1_1}\right] Y^1_t = 0$$

La condition de compatibilité s'écrit :

$$3)\qquad A_A^1 \partial^\alpha H_B^A \frac{A_1^B}{A_1^1}\,\partial_\alpha Y_t^1 + A_A^1\left[\partial^\alpha H_B^A\,\partial_\alpha\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right) + H_B^{*A}\frac{A_1^B}{A_1^1}\right] Y_t^1 = 0$$

et en intégrant par parties, comme $H'(y,1,0,\ldots,0) = 0$, $\forall y$, comme

$$L_1^I = A_A^1\left[\partial^\alpha H_B^A \partial_\alpha A_1^B + H_B^{*A} A_1^B - I_1^A H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'\right]$$

est nul aussi pour $(y,1,0,\ldots,0)$, elle est identiquement vérifiée.

Il reste en résolvant 2) :

$$4)\quad Y_{t+1}^B = \frac{A_1^B}{A_1^1} Y_{t+1}^1 - \frac{A_{1C}^{1B}}{A_i^1}\partial^\alpha H_D^C \frac{A_1^D}{A_1^1}\partial_\alpha Y_t^1 - \frac{A_{1C}^{1B}}{A_1^i}\left[\partial^\alpha H_D^C\,\partial_\alpha\left(\frac{A_1^D}{A_1^1}\right) + H_D^{*C}\frac{A_1^D}{A_1^1}\right] Y_t^1$$

où comme on l'a vu A_{1C}^{1B} est un cofacteur d'ordre m-2.

Soit encore :

$$Y_{t+1}^B = \frac{A_1^B}{A_1^1} Y_{t+1}^1 + \partial^\alpha\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right)\partial_\alpha Y_t^1 - \frac{A_{1C}^{1B}}{A_1^1}\left[\partial^\alpha H_D^C\,\partial_\alpha\left(\frac{A_1^D}{A_1^1}\right) + H_D^{*C}\frac{A_1^D}{A_1^1}\right] Y_t^1$$

Pour $\ell = 3$, on a :

$$5)\qquad H_B^A Y_{t+2}^B + \partial^\alpha H_B^A Y_{t+1}^B + H_B^{*A} Y_{t+1}^B + \frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta} H_B^A \partial_{\alpha\beta} Y_t^B + \partial^\alpha H_B^{*A}\partial_\alpha Y_t^B + H_B^{**A} Y_t^B = 0$$

Soit encore en remplaçant :

$$6)\quad H_B^A Y_{t+2}^B + \partial^\alpha H_B^A \frac{A_1^B}{A_1^1}\partial_\alpha Y_{t+1}^1 + \left[\partial^\alpha H_B^A\partial_\alpha\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right) + H_B^{*A}\frac{A_1^B}{A_1^1}\right] Y_{t+1}^1 +$$
$$\left[\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta} H_B^A \frac{A_1^B}{A_1^1} + \partial^\alpha H_B^A \partial^\beta\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right)\right]\partial_{\alpha\beta} Y_t^1 + \left[\partial^\alpha H_B^A\partial^\beta_\alpha\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right) + H_B^{*A}\partial^\beta\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right) -\right.$$
$$\partial^\beta H_B^A \frac{A_{1C}^{1B}}{A_1^1}\left(\partial^\alpha H_D^C\partial_\alpha\left(\frac{A_1^D}{A_1^1}\right) + H_D^{*C}\frac{A_1^D}{A_1^1}\right) + \partial^{\alpha\beta} H_B^A\partial_\alpha\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right) + \partial^\beta H_B^{*A}\left.\frac{A_1^B}{A_1^1}\right]\partial_\beta Y_t^1 +$$
$$\left\{-\partial^\alpha H_B^A\partial_\alpha\left[\frac{A_{1C}^{1B}}{A_1^1}\left(\partial^\beta H_D^C\partial_\beta\left(\frac{A_1^D}{A_1^1}\right) + H_D^{*C}\frac{A_1^D}{A_1^1}\right)\right] - H_B^{*A}\frac{A_{1C}^{1B}}{A_1^1}\left[\partial^\alpha H_D^C\partial_\alpha\left(\frac{A_1^D}{A_1^1}\right) + H_D^{*C}\frac{A_1^D}{A_1^1}\right] +\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta} H_B^A\partial_{\alpha\beta}\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right) + \partial^\alpha H_B^{*A}\partial_\alpha\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right) + H_B^{**A}\frac{A_1^B}{A_1^1}\right\} Y_t^1 = 0$$

ou bien en intégrant par parties :

$$7)\quad H_B^A\left[Y_{t+2}^B - \partial^\alpha\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right)\partial_\alpha Y_{t+1}^1 - \frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right)\partial_{\alpha\beta}Y_t^1\right] + \left[\partial^\alpha H_B^A\partial_\alpha\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right) + H_B^{*A}\,\frac{A_1^B}{A_1^1}\right]Y_{t+1}^1 +$$

$$\frac{1}{2}\,\partial^{\alpha\beta}\left(\frac{H_B^A A_1^B}{A_1^1}\right)\partial_{\alpha\beta}Y_t^1 + \left\{\partial^\beta\left[\partial^\alpha H_B^A\partial_\alpha\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right) + H_B^{*A}\,\frac{A_1^B}{A_1^1}\right] - \partial^\beta H_B^A\,\frac{A_{1C}^{1B}}{A_1^1}\left[\partial^\alpha H_D^C\partial_\alpha\left(\frac{A_1^D}{A_1^1}\right) + H_D^{*C}\,\frac{A_1^D}{A_1^1}\right]\right\}\partial_\beta Y_t^1 + N^A\,Y_t^1 = 0\ .$$

Le terme N^A sera utile dans un autre paragraphe.

Ecrivons que ce système est compatible en multipliant par $A_A^1\,A_1^1$, on obtient, compte-tenu de ce qui précède, en posant :

$$p = d_\xi H'(x,\ \mathrm{grad}\ \varphi(x)) :$$

$$A_1^1\left[H''p^\alpha p^\beta\partial_{\alpha\beta}Y_t^1 + H''p^\alpha\partial_\alpha p^\beta\partial_\beta Y_t^1\right] + \partial^\beta L_1'^1\partial_\beta Y_t^1 + N_1^1 Y_t^1 = 0 \qquad \text{soit}$$

l'équation différentielle du $2^{\text{ème}}$ ordre le long des bicaractéristiques correspondant à la phase φ^ρ :

$$A_1^1 H''p^\alpha\partial_\alpha\left[p^\beta\partial_\beta Y_t^1\right] + \Lambda_1'^1 p^\alpha\partial_\alpha Y_t^1 + N_1^1 Y_t^1 = 0$$

On a posé :

$$L_1'^1 = A_A^1\left[\partial^\alpha H_B^A\partial_\alpha A_1^B + H_B^{*A}A_1^B - I_1^A\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'\right] - H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha A_1^1$$

et $$L_1'^1 = \Lambda_1'^1 H'\ .$$

Il est bien connu que, dans les coordonnées initiales $p^o \neq 0$ et est par suite transverse à X', donc localement Y_t^1 est déterminé et C^∞ si on connaît les restrictions C^∞ de Y_t^1 et de $\partial_o Y_t^1$ à $x^o = T$. Alors on connaît aussi Y_t^B, puis à l'étape suivante Y_{t+1}^1 et par suite Y_{t+1}^B et ainsi de suite, par récurrence, pourvu que soient connues les restrictions à $x^o = T$ des Y_{t+j}^1 et $\partial_o Y_{t+j}^1$. On réalise i) pour $\rho > \tau_o$, (racines simples). Le rang du système aux $Y_{\mu,\rho,t+1}^B$ qui apparaît le premier est constamment égal à $m-1$, mais là encore, a priori, le choix du mineur non

nul peut varier et il faut faire une partition de l'unité. Dans le seul but de simplifier les notations et comme les équations différentielles de propagation sont toujours d'ordre 1, nous supposerons que pour $\rho > \tau_o$ le même mineur $A^{\bar{D}}_{\bar{D}}$ ne s'annule jamais et que par suite l'on est toujours ramené à la détermination des restrictions à $x^o = T$ des $Y^{\bar{D}}_{\mu,\rho,t+j}$, où l'indice $\bar{D}$ est fixe.

Nous ne détaillerons pas cette étape qui est classique.

On doit réaliser ensuite les conditions de trace ii).

Pour $\ell = 0$, on obtient,

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^\tau Y^B_{\mu,\rho,t,C}(T) = 0 \quad , \quad 0 \leq \tau \leq t-1 \ .$$

Soit en omettant les indices μ, C, et T, en posant :

$$A^B_{\rho,1} = A^B_1(x, \text{grad } \psi^\rho(x)) \quad \text{pour} \quad x^o = T \ :$$

$$8)_\tau \qquad \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^\tau A^B_{\rho,1} Y^1_{\rho,t} = 0 \quad , \quad 0 \leq \tau \leq t-1 \ .$$

Nous montrerons que $Y^1_{\rho,t} = 0$ en utilisant une technique dont l'origine est dans [41].

Or donnons en ξ_o l'élément $H^A_B(\xi)$:

$$9) \quad H^A_B(\xi) = H^A_B(N)(\xi_o)^t + \sum_{q=1}^{q=t-1} G^{q,A}_B(\xi')(\xi_o)^q + G^{O,A}_B(\xi') \ .$$

Multiplions $8)_o$ par $G^{O,A}_B$, on a :

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} G^{O,A}_B A^B_{\rho,1} Y^1_{\rho,t} = 0 \quad , \quad 0 \leq \tau \leq t-1 \ .$$

En remplaçant $G^{O,A}_B$ à l'aide de 9), avec $\xi_o = \xi_o^\rho$, et en tenant compte des $8)_\tau$ on obtient :

$$H^A_B(N) \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^t . A^B_{\rho,1} Y^1_{\rho,t} = 0$$

d'où : $$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^t A^B_{\rho,1} Y^1_{\rho,t} = 0$$

Par récurrence, on obtient :

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^\tau A^B_{\rho,1} Y^1_{\rho,t} = 0 \qquad \forall \tau$$

D'où à l'aide du déterminant de Vandermonde :

$$Y^1_{\rho,t}(T) = 0$$

Pour $\ell = 1$, on obtient :

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} \tau(\xi_o^\rho)^{\tau-1} \partial_o Y^B_{\mu,\rho,t,C}(T) + \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^\tau Y^B_{\mu,\rho,t+1,C}(T) + \sum_{\rho>\tau_o} (\xi_o^\rho)^\tau Y^B_{\mu,\rho,t+1,C}(T) = \delta_{\tau,\mu} I^B_C$$

avec $0 \leq \tau \leq t-1$

Nous savons que pour $1 \leq \rho \leq \tau_o$:

$$\partial_o Y^B_{\mu,\rho,t,C}(T) = \frac{A^B_{\rho,1}}{A^1_{\rho,1}} \partial_o Y^1_{\mu,\rho,t,C}(T)$$

$$Y^B_{\mu,\rho,t+1,C}(T) = \frac{A^B_{\rho,1}}{A^1_{\rho,1}} Y^1_{\mu,\rho,t+1,C}(T) + \partial^o\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)_\rho \partial_o Y^1_{\mu,\rho,t,C}$$

où : $$\partial^o\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)_\rho = \partial^o\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)(x, \operatorname{grad} \varphi^\rho(x)) \quad \text{pour} \quad x^o = T$$

Pour $\rho > \tau_o$:

$$Y^B_{\mu,\rho,t+1,C}(T) = \frac{A^B_{\rho,\bar{D}}}{A^{\bar{D}}_{\rho,\bar{D}}} Y^{\bar{D}}_{\mu,\rho,t+1,C}(T) \quad .$$

Pour C fixé on a un système à $2\tau_o + \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_\sigma = mt$ inconnues et mt équations. Démontrons que le système homogène associé n'a que la solution nulle, il s'écrit avec des notations évidentes :

$$\sum_{\rho>\tau_o} (\xi_o^\rho)^\tau \frac{A^B_{\rho,\bar{D}}}{A^{\bar{D}}_{\rho,\bar{D}}} Y_\rho = 0$$

avec $1 \leq B \leq m$, $0 \leq \tau \leq t-1$.

Soit pour $\tau = 0$:

$$9)_o \quad \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} \frac{A^B_{\rho,1}}{A^1_{\rho,1}} Y_\rho + \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} \partial^o \left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)_\rho Z_\rho + \sum_{\rho>\tau_o} \frac{A^B_{\rho,\bar{D}}}{A^{\bar{D}}_{\rho,\bar{D}}} Y_\rho = 0$$

Multiplions $9)_o$ par $- G^{O,A}_B$, on obtient :

$$H^A_B(N)\left[\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^t \frac{A^B_{\rho,1}}{A^1_{\rho,1}} Y_\rho\right] + \sum_{q=1}^{q=t-1} G^{q,A}_B\left[\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^q \frac{A^B_{\rho,1}}{A^1_{\rho,1}} Y_\rho\right] - \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} H^A_B(\xi_o^\rho,\xi')\partial^o\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)_\rho Z_\rho +$$

$$H^A_B(N)\left[\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^t \partial^o\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)_\rho Z_\rho\right] + \sum_{q=1}^{q=t-1} G^{q,A}_B\left[\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^q \partial^o\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)_\rho Z_\rho\right] +$$

$$H^A_B(N)\left[\sum_{\rho>\tau_o} (\xi_o^\rho)^t \frac{A^B_{\rho,\bar{D}}}{A^{\bar{D}}_{\rho,\bar{D}}} Y_\rho\right] + \sum_{q=1}^{q=t-1} G^{q,A}_B\left[\sum_{\rho>\tau_o} (\xi_o^\rho)^q \frac{A^B_{\rho,\bar{D}}}{A^{\bar{D}}_{\rho,\bar{D}}} Y_\rho\right] = 0 .$$

Le $2^{\text{ème}}$, $5^{\text{ème}}$ et $7^{\text{ème}}$ termes se remplacent à l'aide de $9)_\tau$:

$$10) \quad H^A_B(N)\left[\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^t \frac{A^B_{\rho,1}}{A^1_{\rho,1}} Y_\rho + \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^t \partial^o\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)_\rho Z_\rho + \right.$$

$$\left. \sum_{\rho>\tau_o} (\xi_o^\rho)^t \frac{A^B_{\rho,\bar{D}}}{A^{\bar{D}}_{\rho,\bar{D}}} Y_\rho\right] - \sum_{q=1}^{q=t-1} G^{q,A}_B\left[\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} q(\xi_o^\rho)^{q-1} \frac{A^B_{\rho,1}}{A^1_{\rho,1}} Z_\rho\right] - \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} H^A_B(\xi_o^\rho,\xi')\partial^o\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)_\rho Z_\rho = 0$$

Mais d'autre part :

$$H^A_B(\xi_o,\xi') \frac{A^B_1(\xi_o,\xi')}{A^1_1(\xi_o,\xi')} = \delta^A_1 \frac{\text{dét } H(\xi_o,\xi')}{A^1_1(\xi_o,\xi')}$$

Dérivons en ξ_o et remplaçons ξ_o par ξ_o^ρ, $1 \leq \rho \leq \tau_o$, on a :

$$H_B^A(\xi_o^\rho,\xi')\partial^o\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right)_\rho + \left[H_B^A(N)t(\xi_o^\rho)^{t-1} + \sum_{q=1}^{q=t-1} G_B^{q,A} q(\xi_o^\rho)^{q-1}\right]\frac{A_{\rho,1}^B}{A_{\rho,1}^1} = 0 \quad .$$

En remplaçant dans 10) on obtient :

$$H_B^A(N)\left[\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o}(\xi_o^\rho)^t\frac{A_{\rho,1}^B}{A_{\rho,1}^1}Y_\rho + \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o}(\xi_o^\rho)^t\partial^o\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right)_\rho Z_\rho + \sum_{\rho>\tau_o}(\xi_o^\rho)^t\frac{A_{\rho,\bar{D}}^B}{A_{\rho,\bar{D}}^{\bar{D}}}Y_\rho + \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} t(\xi_o^\rho)^{t-1}\frac{A_{\rho,1}^B}{A_{\rho,1}^1}Z_\rho\right] = 0$$

c'est-à-dire $9)_t$.

En itérant ce procédé on obtient que pour tout $\tau \in N$, l'équation $9)_\tau$ doit être vérifiée.

On a donc ainsi pour B fixé quelconque :

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o}\tau(\xi_o^\rho)^{\tau-1}\frac{A_{\rho,1}^B}{A_{\rho,1}^1}Z_\rho + \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o}(\xi_o^\rho)^\tau\left[\frac{A_{\rho,1}^B}{A_{\rho,1}^1}Y_\rho + \partial^o\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right)_\rho Z_\rho\right] + \sum_{\rho>\tau_o}(\xi_o^\rho)^\tau\frac{A_{\rho,\bar{D}}^B}{A_{\rho,\bar{D}}^{\bar{D}}}Y_\rho = 0$$

avec $0 \leq \tau < mt$.

Ce système a mt équations et mt inconnues :

$$\left[\frac{A_{\rho,1}^B}{A_{\rho,1}^1}Z_\rho \ , \ \frac{A_{\rho,1}^B}{A_{\rho,1}^1}Y_\rho + \partial^o\left(\frac{A_1^B}{A_1^1}\right)_\rho Z_\rho \ , \ \frac{A_{\rho,\bar{D}}^B}{A_{\rho,\bar{D}}^{\bar{D}}}Y_\rho\right].$$

On voit facilement que son déterminant :

$$\begin{matrix}(\tau(\xi_o^\rho)^{\tau-1} & (\xi_o^\rho)^\tau & (\xi_o^\rho)^\tau\ ) \\ 1\leq\rho\leq\tau_o & 1\leq\rho\leq\tau_o & \tau_o<\rho\leq\tau'\end{matrix}$$

est non nul.

Par conséquent, $\forall B$:

$$A^B_{\rho,1}\, Z_\rho = 0 \quad , \quad \frac{A^B_{\rho,1}}{A^1_{\rho,1}}\, Y_\rho + \partial^o\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)_\rho Z_\rho = 0 \quad , \quad A^B_{\rho,\bar{D}}\, Y_\rho = 0 \quad .$$

On en déduit :

$$Z_\rho = 0 \ , \ \text{pour} \ 1 \leq \rho \leq \tau_o \ , \ Y_\rho = 0 \ \text{pour} \ 1 \leq \rho \leq \tau' \ .$$

Le système initial (obtenu pour $\ell = 1$) s'en suit donc régulièrement et on obtient les conditions initiales des équations différentielles en Y^1_t , puis ainsi de suite tous les symboles cherchés.

Proposition 5.- Si h vérifie (DO) et si le problème de Cauchy est bien posé, h vérifie (L).

On l'obtient en démontrant d'abord la :

Proposition 6.- S'il existe un point y et une fonction de phase réelle ψ définie dans un voisinage de y vérifiant : $H'(x, \text{grad}\ \psi(x)) = 0$ dans ce voisinage et telle que : $L^1_1(y, \text{grad}\ \psi(y)) \neq 0$, alors le problème de Cauchy n'est pas bien posé dans un voisinage de y.

Cette proposition s'obtient à partir d'un lemme commode d'IVRII et PETKOV [23] que nous résumerons :

Lemme 6.- S'il existe dans un voisinage W de y une solution asymptotique, pour $\omega \to +\infty$, u, de la forme :

$$u(x,\omega) = \sum_{0 \leq j \leq \infty} Y_{t+j}(x)\ \omega^{-j/\ell}\ \exp\left[i\ E(x,\omega)\right] \ ,$$

où $\ell \in \mathbb{N}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $Y_{t+j} \in C^\infty_o(W)$ et $Y_t(y) \neq 0$,

$$E(x,\omega) = \omega\,\varphi_o(x) + \sum_{k=0}^{k=\ell'-1} \varphi_{k+1}(x)\omega^{\ell'-k/\ell} \quad , \ \ell' \in \mathbb{N} \ , \ 1 \leq \ell' < \ell$$

φ_o est C^∞ scalaire à valeurs réelles, les φ_{k+1} sont C^∞ scalaires, telle que pour N assez grand on ait :

$$hu(x,\omega) = O(\omega^{-N})\ \exp\left[i\ E(x,\omega)\right] \ ,$$

pour $\varepsilon > 0$ convenable, pour tout $x^o \leq y^o$:

$$\text{Im } E(x,\omega) \geq (\varepsilon + O(1))\ \omega^{\ell'/\ell}\left[y^o - x^o + |y'-x'|^2\right] \ ,$$

alors le problème de Cauchy n'est pas bien posé au voisinage de y.

On cherchera ici u sous la forme :

$$u(x,\omega) = \sum_{0\leq j\leq N} Y_{t+j}(x)\omega^{-j/2}\ e^{i\left[\omega\varphi_o(x)+\omega^{1/2}\psi(x)\right]}$$

Il sera commode de l'écrire d'abord sous la forme :

$$u(x,\omega) = \sum_j U_j(x,\omega)\ e^{i\omega\Phi(x,\omega)}(i\omega)^{-j} \ .$$

hu se calcule alors facilement ; on explicite les coefficients des $\omega^{t-j/2}$, $0 \leq j \leq 3$ et on les annule. Choisissons tout de suite $\varphi_o = \delta\psi$, $\delta = \pm 1$, ψ satisfaisant aux hypothèses de la proposition 6 et des coordonnées telles que : $\psi(x) \equiv y^o$; on obtient, en notant les matrices brièvement ainsi : $H(x, \text{grad } \psi(x)) = H(\psi)$:

11) $H(\psi)Y_t = 0$

12) $H(\psi)Y_{t+1} + \partial^\alpha H(\psi)\partial_\alpha\psi\delta Y_t = 0$

13) $H(\psi)Y_{t+2} + \partial^\alpha H(\psi)\partial_\alpha\psi\delta Y_{t+1} + \left\{\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H(\psi)\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi - i\delta(\partial^\alpha H(\psi)\partial_\alpha + H^*(\psi))\right\}Y_t = 0$

14) $H(\psi)Y_{t+3} + \delta\partial^\alpha H\partial_\alpha\psi Y_{t+2} + \left\{\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H(\psi)\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi - i\delta(\partial^\alpha H(\psi)\partial_\alpha + H^*(\psi))\right\}Y_{t+1} +$

$$\left\{\frac{1}{3!}\partial^{\alpha\beta\gamma}H(\psi)\delta\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi\partial_\gamma\psi - i\left[\partial^{\alpha\beta}H(\psi)\partial_\beta\psi\partial_\alpha + \partial^\alpha H^*(\psi)\partial_\alpha\psi + \frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H(\psi)\partial_{\alpha\beta}\psi\right]\right\}Y_t = 0$$

On résout (11), Y^1_t étant pour l'instant arbitraire, on ne répétera pas toujours la lettre ψ :

$$Y^B_t = \frac{A^B_1}{A^1_1} Y^1_t \quad .$$

On remarque que (12) est possible en multipliant par A^1_A.

On la résout et on trouve :

$$Y^B_{t+1} = \frac{A^B_1}{A^1_1} Y^1_{t+1} + \delta\partial^\alpha\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right) \partial_\alpha\psi Y^1_t \quad .$$

(13) est possible quel que soit Y^1_t si ψ est tel que :

$$A^1_1\left[\partial^\alpha H^A_B \partial_\alpha\psi\partial^\beta\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)\partial_\beta\psi + \frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H^A_B\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi\,\frac{A^B_1}{A^1_1}\right] = i\delta A^1_A\left[\partial^\alpha H^A_B\partial_\alpha\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right) + H^{*A}_B\,\frac{A^B_1}{A^1_1}\right] \quad .$$

Cette condition s'écrit :

$$H''(\psi)A^1_1(\psi)\left[\partial^\alpha H'(\psi)\partial_\alpha\psi\right]^2 = i\delta L^1_1(\psi) \quad . \quad \text{Soit :}$$

$$(p^\alpha\partial_\alpha\psi)^2 = i\delta L(\psi) \qquad \text{avec} \quad L(\psi) \neq 0.$$

On détermine ψ, δ et W de sorte que la condition soit réalisée et que $\operatorname{Im}\psi$ vérifie l'inégalité imposée par le lemme 6.

On résout (13) et on obtient :

$$Y^B_{t+2} = \frac{A^B_1}{A^1_1} Y^1_{t+2} + \partial^\alpha\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)\partial_\alpha\psi Y^1_{t+1} - i\partial^\alpha\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)\partial_\alpha Y^1_t + GY^1_t$$

où G est un coefficient régulier que nous ne préciserons pas. On reporte dans (14) et on écrit que ce système est compatible en multipliant par A^1_A ; compte-tenu du choix de ψ, on obtient :

$$i\,A^1_1(\psi)H''(\psi)p^\alpha\partial_\alpha\psi p^\beta\partial_\beta Y^1_t + W'Y^1_t = 0 \quad .$$

Y^1_t satisfait donc à une équation différentielle d'ordre 1 le long des bicaractéristiques relatives à $H'(p = d_\xi H'(x, \operatorname{grad}\psi(x)))$ et peut être donc être choisi satisfaisant aux hypothèses du lemme 6.

On en déduit Y^B_t , puis en itérant ce procédé les Y^B_{t+j} pour tout j et par suite une solution asymptotique convenable.

La proposition 6 est donc démontrée.

La proposition 5 s'en déduit facilement en remarquant que si $L^1_1(x,\xi)$ s'annule dès que $H'(x,\xi)$ s'annule alors L^1_1 est divisible par H'.

V - SYSTEMES A CARACTERISTIQUES TRIPLES.-

Premier cas :

Explicitons d'abord la condition $(D)_{a)}$ pour $\nu_o = 3$ et pour $H_o = H'$. On sait que :

15) $h \circ a = h'' \circ [h']^3 I + e \circ [h']^2 + f \circ h' + g$;

h'' a pour symbole principal : $H'' = \prod_{s=1}^{s=\sigma} [H_s]^{\nu_s}$, h' a pour symbole principal H' ;

On a : $\det H = [H']^3 H''$; e a pour symbole principal E ; les ordres sont tels que (D) soit satisfaite. On a aussi en coordonnées locales :

$$a(x,\partial) = A(x,\partial) + A^*(x,\partial) + A^{**}(x,\partial) + \ldots \ ;$$

où A^{**} est d'ordre $(m-1)t-2$ et où les pointillés désignent des termes d'ordre inférieur ;

$$h'(x,\partial) = H'(x,\partial) + H'^*(x,\partial) + \ldots \ ;$$

H'^* est d'ordre $\tau_o - 1$ et les pointillés désignent des termes d'ordre inférieur. De même :

$$h''(x,\partial) = H''(x,\partial) + H''^*(x,\partial) + \ldots \ ;$$

On obtient :

$$h \circ a(x,\partial) = \left[(H')^3 H'' I\right](x,\partial) + \left[HA^* + \partial^\alpha H \partial_\alpha A + H^* A\right](x,\partial) +$$

$$\left[HA^{**} + \partial^\alpha H \partial_\alpha A^* + \frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta} H \partial_{\alpha\beta} A + \partial^\alpha H^* \partial_\alpha A + H^* A^* + H^{**} A\right](x,\partial) + \ldots$$

et on calcule de même les premiers termes des seconds membres de 15). En écrivant que les termes d'ordre mt-1 sont les mêmes, on obtient :

$$16)\quad \left[HA^* + \partial^\alpha H \partial_\alpha A + H^* A\right](x,\xi) = \left[(H')^3 H''^* I + 3(H')^2 \partial^\alpha H'' \partial_\alpha H' I + 3H''H'(\partial^\alpha H' \partial_\alpha H' + H'H'^*)I + E(H')^2\right](x,\xi)$$

et à l'ordre mt-2 :

$$17)\quad \left[HA^{**} + \partial^\alpha H \partial_\alpha A^* + \frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta} H \partial_{\alpha\beta} A + \partial^\alpha H^* \partial_\alpha A + H^* A^* + H^{**} A\right](x,\xi) \equiv IJ(x,\xi) + \left[E\partial^\alpha H' \partial_\alpha H'\right](x,\xi) + 3I\left[H'' \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' H'^*\right](x,\xi)$$

en posant :

$$J = 3\partial^\alpha H' \partial_\alpha H' \partial^\beta H' \partial_\beta H'' + H''\left[\partial^\alpha H' \partial^\beta H' \partial_{\alpha\beta} H' + \partial^{\alpha\beta} H' \partial_\alpha H' \partial_\beta H' + \partial^\alpha H' \partial^\beta_\alpha H' \partial_\beta H'\right]$$

la congruence a lieu modulo un multiple de H'.

Définition 6.- h vérifie la condition (TR 1) si et seulement si :

6a) pour tout x, dans l'anneau localisé Φ_o :

$$H \sim \begin{bmatrix} (H')^2 & & & & \\ & H' & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

A est donc divisible par H' ; on pose $\frac{A}{H'} = B$.

6b) il existe donc au moins un cofacteur d'ordre m-2 non divisible par H' ; nous supposerons de plus qu'il en existe un, tel que, pour tout x, il n'ait aucun zéro réel commun non nul avec H' ; on convient que ce soit A^{12}_{12}.

Il existe au moins un élément de B non divisible par H' ; nous supposerons de plus qu'il en existe un tel que, pour tout x, il n'ait aucun zéro réel commun avec H' ; on convient que ce soit B_1^1.

6c) $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_\sigma = 1$.

Remarques.-

1) Alors pour tout x et toute racine caractéristique $\xi_o^\rho(\xi')$ de H' , H est équivalente dans l'anneau localisé des polynômes en ξ_o par rapport à l'idéal $\xi_o - \xi_o^\rho$ à la matrice :

$$\begin{bmatrix} [\xi_o - \xi_o^\rho]^2 & & & & 0 \\ & \xi_o - \xi_o^\rho & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

et nos conditions impliquent les conditions à l'aide de la forme de JORDAN pour $t = 1$ utilisées par PETKOV. Une partition de l'unité permettrait facilement d'affaiblir l'hypothèse 6b) en ce qui concerne le choix de mineurs A_{12}^{12} , B_1^1 indépendants de x, $\xi_o^\rho(\xi')$; cette partie de l'hypothèse est faite dans le seul but d'économiser les notations. Une fois cet affaiblissement fait, nos hypothèses si $t = 1$ coïncident avec celles de PETKOV.

2) 6c) peut être affaiblie sans difficulté en supposant que les H_s vérifient des hypothèses analogues à celles pour H_o dans ce paragraphe ou bien à celles de la définition 3 ou bien à celles des définitions 4 et 5.

Multiplions 16) par B, on a, puisque $BH = HB = (H')^2 H''I$

18) $(H')^2 H''A^* + B\left[\partial^\alpha H \partial_\alpha BH' + \partial^\alpha H \partial_\alpha H'B + H^* BH'\right] =$

$B\left[3(H')^2 \partial^\alpha H'' \partial_\alpha H' + 3H''H'(\partial^\alpha H' \partial_\alpha H' + H'H'^*) + (H')^3 H''^* + E(H')^2\right]$

On remarque que :

$$B\partial^\alpha HB = B\partial^\alpha\left[(H')^2 H''\right] - (H')^2 H'' \partial^\alpha B \ .$$

On divise les deux membres par H' et on obtient que nécessairement :

19) $B\left[\partial^\alpha H \partial_\alpha B + H^* B - H'' \partial^\alpha H' \partial_\alpha H'\right] = \overset{\circ}{\Lambda} H'$,

$\overset{\circ}{\Lambda}$ est un polynôme en ξ, C^∞ en x.

On a alors :

20) $H''\left[A^* - \partial^\alpha B \partial_\alpha H' - 3BH'^*\right] + \overset{\circ}{\Lambda} = B\left[2\partial^\alpha H'' \partial_\alpha H' + H'H''^* + E\right]$.

On multiplie 17) par $(H'')^2$ et on remplace $H''A^*$ à l'aide de 20) ; on obtient après quelques calculs :

21) $(H'')^2 HA^{**} + \left[H''\partial^\beta H \partial_\beta - \partial^\beta H \partial_\beta H'' + H^* H''\right]\left[3H''BH'^* - \overset{\circ}{\Lambda} + B(2\partial^\alpha H'' \partial_\alpha H' + H'H''^* + E)\right] + (H'')^2 \partial^\alpha H \partial_\alpha(\partial^\beta B \partial_\beta H') + \frac{1}{2}(H'')^2 \partial^{\alpha\beta} H \partial_{\alpha\beta}(BH') +$

$(H'')^2 \partial^\alpha H^* \partial_\alpha(BH') + (H'')^2 H^* \partial^\alpha B \partial_\alpha H' \equiv (H'')^2\left[J + 3H''\partial^\alpha H' \partial_\alpha H' H'^* I + E\partial^\alpha H' \partial_\alpha H'\right]$

On multiplie par B et on remarque que :

$$H\overset{\circ}{\Lambda} = H'H''\left[\partial^\alpha H \partial_\alpha B + H^* B - \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' I\right] \ ;$$

après quelques calculs il ne reste que :

22) $\left[\partial^\alpha B \partial_\alpha H + BH^* - \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' H'' I\right] \overset{\circ}{\Lambda} \equiv 0$.

On obtient donc la :

Proposition 7.- Si h vérifie (D) et 6a) on a dans une carte quelconque les relations :

"$B[\partial^\alpha H \partial_\alpha B + H^* B - H'' \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' I](x,\xi)$ est divisible par $H'(x,\xi)$" et

"$\dfrac{[\partial^\alpha B \partial_\alpha H + BH^* - H'' \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' I] B [\partial^\alpha H \partial_\alpha B + H^* B - H'' \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' I](x,\xi)}{H'}$

est divisible par $H'(x,\xi)$".

Remarque : Là encore une hypothèse de décomposition à l'aide de pseudo-différentiels en x' conduirait aux mêmes relations.

Comme au paragraphe IV nous donnerons d'autres formulations à l'aide d'invariants.

Lemme 7.- Les matrices :

$$\overset{\circ}{C} = \partial^\alpha H \partial_\alpha B - \partial_\alpha H \partial^\alpha B$$

et

$$\overset{\circ}{D} = \partial^\alpha B \partial_\alpha H - \partial_\alpha B \partial^\alpha H$$

définissent des invariants ; on a : $B\overset{\circ}{C} \equiv \overset{\circ}{D}B$.

Conséquence : On posera :

$$\overset{\circ}{R} = KB + \frac{1}{2}\overset{\circ}{C}$$

$$\overset{\circ}{S} = BK + \frac{1}{2}\overset{\circ}{D} \quad .$$

Ces matrices invariantes sont telles que :

$$B\overset{\circ}{R} \equiv \overset{\circ}{S}B \quad .$$

Lemme 8.- On posera :

$$\overset{\circ}{L} = B\overset{\circ}{R} \quad , \quad \overset{\circ}{L}' = \overset{\circ}{S}B \quad ,$$

$$\overset{\circ}{L} \equiv \overset{\circ}{L}' \equiv B[\partial^\alpha H \partial_\alpha B + H^* B - H'' \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' I] \equiv [\partial^\alpha B \partial_\alpha H + BH^* - H'' \partial^\alpha H' \partial_\alpha H' I] B$$

En effet :

$$\mathring{R} \equiv H^{*}B + \partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B - \partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'H''I + \frac{1}{2}H\left[\partial^{\alpha}_{\alpha}B + \frac{\partial_{\alpha}\rho}{\rho}\partial^{\alpha}B\right]$$

et $B\mathring{R}$ a la valeur indiquée ; on procède de même pour l'autre égalité.

Lemme 9.- $\left[\mathring{L}\right.$ divisible par $H'\left.\right] \Longleftrightarrow \left[\mathring{L}^{1}_{1}\right.$ divisible par $H'\left.\right]$.

Ce lemme qui utilise le fait que B^{1}_{1} n'est pas divisible par H' se démontre comme le lemme 4.

Lemme 10.- Si $\mathring{L}(h)$ est divisible par H' , $\mathring{L}$ (adjoint de h) l'est aussi.

On posera, si $\mathring{L}$ est divisible par H' :

$$\mathring{M} = \frac{\mathring{S}B\mathring{R}}{H'} \ .$$

On obtient dans ces conditions le :

Lemme 11.-

$$\mathring{M} \equiv \frac{\left[\partial^{\alpha}B\partial_{\alpha}H + BH^{*} - H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'I\right]B\left[\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B + H^{*}B - H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'I\right]}{H'}$$

En reportant l'expression 23) de $\mathring{R}$ dans la définition de $\mathring{M}$, on obtient :

$$\mathring{M} \equiv \frac{\mathring{S}B}{H'}\left[H^{*}B + \partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B - \partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'H''I\right]$$

puis en remplaçant $\mathring{S}$ par l'expression analogue à 23), on a le résultat.

Il sera commode dans la suite d'avoir d'autres expressions de $\overset{\circ}{M}$.

Lemme 12.- $\quad B^{1}_{1}\ \overset{\circ}{M}{}^{D}_{C} \equiv \overset{\circ}{S}{}^{D}_{A}\ A^{1A}_{1B}\ \overset{\circ}{R}{}^{B}_{C}\ H''$.

On rappelle que (voir lemme 4) :

24) $B^{1}_{1}\ B^{A}_{B} - B^{1}_{B}\ B^{A}_{1} = A^{1A}_{1B}\ H'H''$.

On en déduit que :

$$B^{1}_{1}\ \overset{\circ}{M}{}^{D}_{C} = \frac{\overset{\circ}{S}{}^{D}_{A}\ B^{A}_{1}\ B^{1}_{B}\ \overset{\circ}{R}{}^{B}_{C}}{H'} + \overset{\circ}{S}{}^{D}_{A}\ A^{1A}_{1B}\ \overset{\circ}{R}{}^{B}_{C}\ H''$$

d'où le résultat.

Lemme 13.- $\quad A^{12}_{12}\ B^{1}_{1}\ \overset{\circ}{M}{}^{D}_{C} \equiv \left[\overset{\circ}{S}{}^{D}_{A}\ A^{1A}_{12}\right]\ \left[A^{12}_{1B}\ \overset{\circ}{R}{}^{B}_{C}\right]\ H''$.

On rappelle l'identité entre cofacteurs :

$$A^{12}_{12}\ A^{1A}_{1B} - A^{1A}_{12}\ A^{1B}_{12} = A^{1}_{1}\ A^{12A}_{12B}$$

où A^{12A}_{12B} est un cofacteur d'ordre $m-3$ obtenu en rayant les 1ère, 2ème et $B^{ème}$ lignes et les 1ère, 2ème et $A^{ème}$ colonnes et en mettant le signe convenable (si $A \neq 1$, $A \neq 2$, $B \neq 1$, $B \neq 2$), sinon $A^{12A}_{12B} = 0$. Le résultat s'en déduit en remarquant que $A^{1}_{1} \equiv 0$ et en utilisant le lemme précédent.

On est donc conduit à introduire les matrices colonne et ligne :

$Q^{D} = \overset{\circ}{S}{}^{D}_{A}\ A^{1A}_{12}$ et $P_{C} = A^{12}_{1B}\ \overset{\circ}{R}{}^{B}_{C}$ qui définissent des invariants.

Avec ces notations on a donc :

25) $A^{12}_{12}\ B^{1}_{1}\ \overset{\circ}{M}{}^{D}_{C} = Q^{D}\ P_{C}\ H''$

et la matrice $\overset{\circ}{M}{}^{D}_{C}$ est le produit tensoriel de Q^{D} et de P_{C}.

Lemme 14.-

$$P_{C} \equiv A^{12}_{1B}\left[H^{*}B + \partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}B - \partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'H''I\right]^{B}_{C}$$

$$Q^{D} \equiv \left[BH^{*} + \partial^{\alpha}B\partial_{\alpha}H - \partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'H''I\right]^{D}_{A}\ A^{1A}_{12}\ .$$

En effet par exemple :

$$A^{12}_{1B}\ H^{B}_{E} \equiv 0$$

Lemme 15.- $B^{1}_{1}\ P_{C} \equiv B^{1}_{C}\ P_{1}$ et $B^{1}_{1}\ Q^{D} \equiv B^{D}_{1}\ Q^{1}$.

Démontrons par exemple la 2ème égalité :

$$B^{1}_{1}\ Q^{D} \equiv \left[B^{1}_{1}\ B^{D}_{B}\ H^{*B}_{A} + \partial^{\alpha}(B^{1}_{1}\ B^{D}_{B})\ \partial_{\alpha}H^{F}_{A} - \partial^{\alpha}B^{1}_{1}\ B^{D}_{B}\ \partial_{\alpha}H^{B}_{A}\right] A^{1A}_{12} - B^{1}_{1}\ \partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'H''A^{1D}_{12}\ .$$

On remplace $B^{1}_{1}\ B^{D}_{B}$ par 24) ; on simplifie en remarquant que :

$$A^{1A}_{12}\ H^{2}_{A} = B^{1}_{1}\ H'$$

et on obtient le résultat.

Conséquence : $B^{1}_{1}\ \overset{\circ}{M} \equiv \overset{\circ}{M}{}^{1}_{1}\ B$.

En effet à l'aide de 25) et du lemme 15 :

$$A_{12}^{12}(B_1^1)^3 \overset{\circ}{M}_C^D = H'' B_1^1 Q^D B_1^1 P_C$$
$$\equiv H'' B_1^D B_C^1 Q^1 P_1$$
$$\equiv A_{12}^{12} (B_1^1)^2 B_C^D \overset{\circ}{M}_1^1$$

on simplifie et on obtient le résultat.

Les lemmes qui suivent expriment la "dualité" entre la matrice A et la matrice des cofacteurs qui "bordent" $A_{12\ldots k}^{12\ldots k}$ [39], [42].

Ici $k = 2$ et on pourrait obtenir quelques simplifications. Mais nous garderons une présentation générale utile pour un exposé ultérieur de cas plus généraux.

Notations.- Un indice barré varie entre 1 et 2. $1 \leq \bar{A} \leq 2$.

$$A_{A-1B}^{1\ 2} = \begin{cases} A_{B2}^{12} & \text{si } \bar{A} = 1 \\ A_{1B}^{12} & \text{si } \bar{A} = 2 \end{cases} \qquad A_{\bar{E}-1\bar{E}+1}^{\bar{G}-1\bar{G}+1} = \begin{cases} A_2^2 & \text{si } (\bar{E},\bar{G}) = (1,1) \\ A_2^1 & \text{si } (\bar{E},\bar{G}) = (1,2) \\ A_1^2 & \text{si } (\bar{E},\bar{G}) = (2,1) \\ A_1^1 & \text{si } (\bar{E},\bar{G}) = (2,2) \end{cases}$$

Lemme 16.- $$B_F^1 A_{12}^{12} = \sum_{\bar{E}} B_{\bar{E}}^1 A_{\bar{E}-1F}^{1\ 2}$$
$$B_1^B A_{12}^{12} = \sum_{\bar{G}} B_1^{\bar{G}} A_{1\ 2}^{\bar{G}-1B}$$
$$\sum_{\bar{E}} A_{\bar{E}}^{\bar{F}} A_{\bar{E}-1\bar{E}+1}^{\bar{G}-1\bar{G}+1} (-1)^{(\bar{E}+\bar{G})} = A_{12}^{12} \text{ dét } H\ \delta_{\bar{G}}^{\bar{F}} .$$
$$\sum_{\bar{E}} A_{\bar{E}-1\bar{E}+1}^{\bar{F}-1\bar{F}+1} \cdot A_{\bar{E}}^{\bar{G}} (-1)^{(\bar{E}+\bar{F})} = A_{12}^{12} \text{ dét } H\ \delta_{\bar{G}}^{\bar{F}} .$$

Les premières sont des identités déduites par division par H' des identités correspondantes avec A_F^1 , $A_{\bar{E}}^1$,... Nous renvoyons pour leurs démonstrations à [42] ou à un traité spécialisé [1].

La troisième se déduit du lemme 4.

Notations.- On posera :

$$(-1)^{\bar{E}+\bar{G}} \frac{A^{\bar{G}-1\bar{G}+1}_{\bar{E}-1\bar{E}+1}}{A^{12}_{12}} = A^{\bar{E}}_{\bar{G}} H' \ .$$

La troisième formule du lemme 6 donne alors :

26) $$B^{\bar{F}}_{\bar{E}} A^{\bar{E}}_{\bar{G}} = H'H'' \delta^{\bar{F}}_{\bar{G}} \ . \ A^{\bar{F}}_{\bar{E}} B^{\bar{E}}_{\bar{G}} = H'H'' \delta^{\bar{F}}_{\bar{G}} \ .$$

Notations.- On posera :

$$H^{*\bar{A}}_{\bar{D}} = \frac{A^{1\ 2}_{\bar{A}-1F}}{A^{12}_{12}} H^{*F}_{B} \frac{A^{\bar{D}-1B}_{1\ 2}}{A^{12}_{12}} + \partial^{\alpha} H^{F}_{B} \partial_{\alpha} \left[\frac{A^{\bar{D}-1B}_{1\ 2}}{A^{12}_{12}} \right] \frac{A^{1\ 2}_{A-1F}}{A^{12}_{12}}$$

et :
$$K^{\bar{A}}_{\bar{D}} = H^{*\bar{A}}_{\bar{D}} - \frac{1}{2} \partial^{\alpha}_{\alpha} \left[\rho \ A^{\bar{A}}_{\bar{D}} H' \right]$$

Notations.- On étendra la notation $\equiv$ aux fractions dont le dénominateur n'est pas divisible par H' : $U \equiv V$ si et seulement si la fraction réduite $U-V$ a son numérateur divisible par H'.

Lemme 17.-

$$K^{\bar{A}}_{\bar{D}} \equiv \frac{A^{1\ 2}_{\bar{A}-1F}}{A^{12}_{12}} K^{F}_{B} \frac{A^{\bar{D}-1B}_{1\ 2}}{A^{12}_{12}} + \frac{1}{2} \frac{A^{1\ 2}_{\bar{A}-1F}}{A^{12}_{12}} \left[\partial^{\alpha} H^{F}_{B} \partial_{\alpha} \left(\frac{A^{\bar{D}-1B}_{1\ 2}}{A^{12}_{12}} \right) - \partial_{\alpha} H^{F}_{B} \partial^{\alpha} \left(\frac{A^{\bar{D}-1B}_{1\ 2}}{A^{12}_{12}} \right) \right]$$

et est par conséquent invariant.

C'est une vérification où l'on utilise que :

$$\frac{H^{\bar{A}}_{B} A^{\bar{D}-1B}_{1\ 2}}{A^{12}_{12}} = A^{\bar{A}}_{\bar{D}} H' \ .$$

Notation.- On posera :

$$\hat{K}^{\bar{C}}_{\bar{D}} = B^{\bar{C}}_{\bar{A}}\left[K^{\bar{A}}_{\bar{D}} + \frac{1}{2}\left(\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}A^{\bar{A}}_{\bar{D}} - \partial_{\alpha}H'\partial^{\alpha}A^{\bar{A}}_{\bar{D}}\right)\right]$$

c'est évidemment un invariant.

Lemme 18.-

$$\hat{K}^{\bar{C}}_{\bar{D}} \equiv B^{\bar{C}}_{\bar{A}}\left[H^{*\bar{A}}_{\bar{D}} - \partial^{\alpha}A^{\bar{A}}_{\bar{D}}\partial_{\alpha}H'\right]$$

Notation.-

$$\check{K}^{\bar{A}}_{\bar{E}} = \left[K^{\bar{A}}_{\bar{D}} + \frac{1}{2}\left(\partial^{\alpha}A^{\bar{A}}_{\bar{D}}\partial_{\alpha}H' - \partial_{\alpha}A^{\bar{A}}_{\bar{D}}\partial^{\alpha}H'\right)\right] B^{\bar{D}}_{\bar{E}}$$

c'est aussi un invariant.

Lemme 19.-

$$\check{K}^{\bar{A}}_{\bar{E}} \equiv \left[H^{*\bar{A}}_{\bar{D}} - \partial_{\alpha}A^{\bar{A}}_{\bar{D}}\partial^{\alpha}H'\right] B^{\bar{D}}_{\bar{E}} \quad .$$

Lemme 20.-

$$\overset{\circ}{L}{}^{1}_{1} \equiv B^{1}_{\bar{A}}\, H^{*\bar{A}}_{\bar{D}}\, B^{\bar{D}}_{1} - B^{1}_{1}\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'H'' \quad .$$

Cela résulte des lemmes 8 et 16 et de la définition de $H^{*\bar{A}}_{\bar{D}}$.

Lemme 21.-

$$L^{1}_{1} = \hat{K}^{1}_{\bar{D}}\, B^{\bar{D}}_{1} = B^{1}_{\bar{A}}\, \check{K}^{\bar{A}}_{1}$$

Cela résulte des lemmes 20, 18, resp. 19 et de la formule 26.

Lemme 22.-

$$Q^{1} \equiv A^{12}_{12}\, \hat{K}^{1}_{2} \quad , \quad P_{1} \equiv A^{12}_{12}\, \check{K}^{2}_{1}$$

Le lemme 14 donne :

$$Q^1 \equiv \left[B^1_B H^{*B}_A + \partial^\alpha B^1_B \partial_\alpha H^B_A\right] A^{12}_{12} \equiv A^{12}_{12}\left[B^1_B H^{*B}_A \frac{A^{1A}_{12}}{A^{12}_{12}} + \partial^\alpha B^1_B \partial_\alpha \left(H^B_A \frac{A^{1A}_{12}}{A^{12}_{12}}\right) - \partial^\alpha B^1_B H^B_A \partial_\alpha \left(\frac{A^{1A}_{12}}{A^{12}_{12}}\right)\right]$$

On remplace B^1_B par son expression du lemme 16 et tenant compte de la formule 27), on obtient :

$$Q^1 \equiv A^{12}_{12}\left[\sum_{\bar{E}} B^1_{\bar{E}} \frac{A^{1\ 2}_{\bar{E}-1F}}{A^{12}_{12}} H^{*F}_A \frac{A^{1A}_{12}}{A^{12}_{12}} + \partial^\alpha B^1_{\bar{E}} A^{\bar{E}}_2 \partial_\alpha H' + \sum B^1_{\bar{E}} \frac{A^{1\ 2}_{\bar{E}-1F}}{A^{12}_{12}} \partial^\alpha H^F_A \partial_\alpha \left(\frac{A^{1A}_{12}}{A^{12}_{12}}\right)\right] .$$

$$Q^1 \equiv A^{12}_{12} \hat{K}^1_2 \quad .$$

On démontre l'autre formule de façon analogue.

Proposition 8.- Si $\overset{\circ}{L}$ est divisible par H', alors pour que $\overset{\circ}{M}$ soit divisible par H', il faut et il suffit que $\hat{K}^1_2 \check{K}^2_1$ soit divisible par H'.

La conséquence du lemme 15 et la formule 25) donnent :

$$A^{12}_{12} \left[B^1_1\right]^2 \overset{\circ}{M}{}^D_C \equiv B^D_C Q^1 P_1 H''$$

$$\equiv \left[A^{12}_{12}\right]^2 H'' \hat{K}^1_2 \check{K}^2_1 .$$

On utilise le fait que A^{12}_{12}, B^1_1 et H'' ne sont pas divisibles par H'.

Lemme 23.- Lorsque $\overset{\circ}{L}$ est divisible par H', si l'invariant $\hat{K}^1_2(h)$ [resp. $\check{K}^2_1(h)$] est divisible par H', alors l'invariant $\check{K}^2_1$ (adjoint de h) [resp. $\hat{K}^1_2$ (adjoint de h)] est divisible par H' .

Cela résulte du fait que par exemple (cf. lemme 5) :

$$\overset{\circ}{R}(h) = - {}^{t}\overset{\circ}{S} \text{ (adjoint de h)}.$$

Définition 7.- h vérifie la condition $(\overset{\circ}{L}\text{-}\overset{\circ}{M})$ si et seulement si :

$(\overset{\circ}{L})$: $\overset{\circ}{L}$ est divisible par H'.

$(\overset{\circ}{M})$: $\overset{\circ}{M}$ est divisible par H'.

Conséquences :

1) Si h vérifie la condition (D) et (TR1) a) [définition 6a)], alors h vérifie $(\overset{\circ}{L}\text{-}\overset{\circ}{M})$.

2) Si h vérifie (D) et (TR1), alors $\hat{K}_2^1 \cdot \check{K}_1^2$ est divisible par H'.

Théorème 4 a).-

Si h vérifie (TR1) et $\overset{\circ}{L}$, si de plus $\hat{K}_2^1$ (resp. $\check{K}_1^2$) , est divisible par H' et si $\check{K}_1^2$ (resp. $\hat{K}_2^1$) n'a aucun zéro réel commun avec H', alors le problème de Cauchy est bien posé.

Ce théorème résulte de la construction d'une paramétrix.

Proposition 9.- Elle est identique à la proposition 4.

On cherchera $F_{\mu,\rho}(T)$ sous la même forme que lors de la démonstration de la proposition 4.

On commence aussi par réaliser i) pour $1 \leq \rho \leq \tau_o$ et on obtient, avec des notations analogues à celles de la démonstration de la proposition 4.

$$H_B^A(x, \text{grad } \psi(x))\ Y_t^B(x) = 0 \ .$$

D'où en abrégeant les notations, comme pour la proposition 4.

$$27) \quad Y_t^B = \sum_{\bar{D}} \frac{A^{\bar{D}-1B}_{1\ 2}}{A_{12}} Y_t^{\bar{D}} \ .$$

On conviendra aussi d'omettre $\sum$ dans les conditions analogues à celles de cette formule.

On choisit des coordonnées telles que $y^o \equiv \psi(x)$, on a encore, ensuite :

$$28) \quad H_B^A\ Y_{t+1}^B + \partial^\alpha H_B^A \partial_\alpha Y_t^B + H_B^{*A}\ Y_t^B = 0 \ .$$

La condition de compatibilité s'écrit :

$$A^{1\ 2}_{\bar{A}-1F}\ \partial^\alpha H_B^F \frac{A^{\bar{D}-1B}_{1\ 2}}{A_{12}}\ \partial_\alpha Y_t^{\bar{D}} + A^{1\ 2}_{\bar{A}-1F}\left[\partial^\alpha H_B^F \partial_\alpha \left(\frac{A^{\bar{D}-1B}_{1\ 2}}{A_{12}}\right) + H_B^{*A}\ \frac{A^{\bar{D}-1B}_{1\ 2}}{A_{12}}\right] Y_t^{\bar{D}} = 0 \ .$$

Soit, par 27), en posant : $p^\alpha = \dfrac{\partial H'}{\partial \xi_\alpha}(x, \text{grad } \psi(x))$:

$$A_{\bar{D}}^{\bar{A}}\ p^\alpha \partial_\alpha Y_t^{\bar{D}} + H_{\bar{D}}^{*\bar{A}} Y_t^{\bar{D}} = 0 \ .$$

Ce système se réduit, puisque $\overset{\circ}{L}{}_1^1(x, \text{grad } \psi(x)) = 0$ et en tenant compte du choix des coordonnées et du lemme 18, à :

$$29) \quad A_{\bar{D}}^2\ p^\alpha \partial_\alpha Y_t^{\bar{D}} + H_{\bar{D}}^{*2} Y_t^{\bar{D}} = 0$$

et :

$$30) \quad \hat{K}_{\bar{D}}^1 Y_t^{\bar{D}} = 0 \ .$$

Nous sommes maintenant amenés à distinguer les 2 cas du théorème 4a) :

1er cas : $\hat{K}_2^1(x,\xi)$ divisible par $H'(x,\xi)$.

Comme $\overset{\circ}{L}_1^1$ est divisible par H' , compte-tenu du lemme 21, alors $\hat{K}_1^1 B_1^1$ est divisible par H' et la définition 6b) implique $\hat{K}_1^1$ divisible par H'. Le système 29) 30) se réduit donc à 29).

2ème cas : $\check{K}_1^2(x,\xi)$ divisible par $H'(x,\xi)$.

On sait que $\hat{K}_2^1(x, \text{grad } \varphi(x)) \neq 0$.

La relation $\overset{\circ}{L}_1^1 \equiv 0$ entraîne (lemme 21) que 30) équivaut à :

31) $$A_{\bar{D}}^{2}\, Y_t^{\bar{D}} = 0$$

soit encore (cf. 26) .

$$Y_t^{\bar{D}} = \frac{B_1^{\bar{D}}}{B_1^1}\, Y_t^1 .$$

Le lemme 19 montre que 29) est identiquement vérifiée.

Dans les deux cas on a, en résolvant (28) en Y_{t+1}^B par les formules de Cramer [1] :

32) $$Y_{t+1}^B = \frac{A_{12}^{\bar{D}-1B}}{A_{12}}\, Y_{t+1}^{\bar{D}} + \partial^\alpha\left(\frac{A_{12}^{\bar{D}-1B}}{A_{12}}\right)\partial_\alpha Y_t^{\bar{D}} - \frac{A_{12}^{12B}}{A_{12}}\left[\partial^\alpha H_E^{A}\partial_\alpha\left(\frac{A_{12}^{\bar{D}-1E}}{A_{12}}\right) + H_E^{*A}\,\frac{A_{12}^{\bar{D}-1E}}{A_{12}}\right] Y_t^{\bar{D}} .$$

On doit avoir :

33) $$H_B^A Y_{t+2}^B + (\partial^\alpha H_B^F \partial_\alpha + H_B^{*A})\, Y_{t+1}^B + \left(\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta} H_B^F \partial_{\alpha\beta} + \partial^\alpha H_B^{*F}\partial_\alpha + H_B^{**F}\right) Y_t^B = 0 .$$

On remplace Y_{t+1}^B par 32) ; on écrit que ce système est compatible en multipliant par $A_{\bar{A}-1F}^{-1\ 2}$. On obtient après quelques calculs :

34) $$\left[A_{\bar{D}}^{\bar{A}} p^\alpha \partial_\alpha + H_{\bar{D}}^{*\bar{A}}\right] Y_{t+1}^{\bar{D}} + \left[\frac{1}{2} A_{\bar{D}}^{\bar{A}} \partial^{\alpha\beta} H' \partial_{\alpha\beta} + \partial^\alpha A_{\bar{D}}^{\bar{A}} p^\beta \partial_{\alpha\beta} + \partial^\alpha H_{\bar{D}}^{*\bar{A}}\partial_\alpha + \ldots\right] Y_t^{\bar{D}} = 0 .$$

les pointillés désignent les coefficients du terme linéaire en $Y_t^{\bar{D}}$ que nous n'aurons pas besoin de préciser.

Ce système équivaut à :

$$35)\quad B\frac{1}{A}\,H\frac{\bar{A}}{D}\,Y^{\bar{D}}_{t+1} + B\frac{1}{A}\Big[\partial^{\alpha}A\frac{\bar{A}}{D}p^{\beta}\partial_{\alpha\beta} + \partial^{\alpha}H\frac{\bar{A}}{D}\partial_{\alpha} + \ldots\Big]\,Y^{\bar{D}}_{t} = 0$$

et

$$36)\quad \Big[A\frac{2}{D}p^{\alpha}\partial_{\alpha} + H\frac{2}{D}\Big]\,Y^{\bar{D}}_{t+1} + \Big[\frac{1}{2}\,A\frac{2}{D}\partial^{\alpha\beta}H'\partial_{\alpha\beta} + \partial^{\alpha}A\frac{2}{D}p^{\beta}\partial_{\alpha\beta} + \partial^{\alpha}H\frac{*2}{D}\partial_{\alpha} + \ldots\Big]\,Y^{\bar{D}}_{t} = 0\ .$$

Revenons à la distinction des 2 cas :

1er cas : Transformons (35). On obtient :

$$B\frac{1}{A}\Big[\partial^{\alpha}A\frac{\bar{A}}{D}\partial_{\alpha}(p^{\beta}\partial_{\beta}Y^{\bar{D}}_{t}) + (\partial^{\beta}H\frac{\bar{A}}{D} - \partial^{\alpha}A\frac{\bar{A}}{D}\partial_{\alpha}p^{\beta})\partial_{\beta}\,Y^{\bar{D}}_{t}\Big] + \ldots = 0$$

soit :

$$H''p^{\alpha}\partial_{\alpha}(p^{\beta}\partial_{\beta}Y^{1}_{t}) - A\frac{\bar{A}}{D}\partial^{\alpha}(B\frac{1}{A})\partial_{\alpha}(p^{\beta}\partial_{\beta}Y^{\bar{D}}_{t}) + B\frac{1}{A}(\partial^{\beta}H\frac{\bar{A}}{D} - \partial^{\alpha}A\frac{\bar{A}}{D}\partial_{\alpha}p^{\beta})\partial_{\beta}\,Y^{\bar{D}}_{t} + \ldots = 0$$

soit à l'aide de 29) :

$$H''p^{\alpha}\partial_{\alpha}(p^{\beta}\partial_{\beta}Y^{1}_{t}) + \partial^{\alpha}B\frac{1}{A}\partial_{\alpha}(H\frac{\bar{A}}{D}Y^{\bar{D}}_{t}) + (\partial^{\alpha}B\frac{1}{A}\partial_{\alpha}A\frac{\bar{A}}{D})\,p^{\beta}\partial_{\beta}Y^{\bar{D}}_{t} +$$

$$B\frac{1}{A}(\partial^{\beta}H\frac{\bar{A}}{D} - \partial^{\alpha}A\frac{\bar{A}}{D}\partial_{\alpha}p^{\beta})\,\partial_{\beta}Y^{\bar{D}}_{t} + \ldots = 0$$

soit encore :

$$H''p^{\alpha}\partial_{\alpha}(p^{\beta}\partial_{\beta}Y^{1}_{t}) + (\partial^{\alpha}B\frac{1}{A}\partial_{\alpha}A\frac{\bar{A}}{D})p^{\beta}\partial_{\beta}Y^{\bar{D}}_{t} + \Big[\partial^{\beta}(B\frac{1}{A}H\frac{\bar{A}}{D}) - B\frac{1}{A}\partial^{\alpha}A\frac{\bar{A}}{D}\partial_{\alpha}p^{\beta}\Big]\partial_{\beta}\,Y^{\bar{D}}_{t} + \ldots = 0\ .$$

soit (lemme 18) :

$$37)\quad H''p^{\alpha}\partial_{\alpha}(p^{\beta}\partial_{\beta}Y^{1}_{t}) + Pp^{\beta}\partial_{\beta}Y^{\bar{D}}_{t} + \partial^{\beta}K\frac{1}{D}\partial_{\beta}Y^{\bar{D}}_{t} + \ldots = 0$$

P est un coefficient que nous n'explicitons pas.

29) et 37) expriment que Y^{1}_{t} et Y^{2}_{t} satisfont à un système d'équations différentielles ordinaires le long des bicaractéristiques du type en bref :

$$\begin{cases} (Y^{1}_{t})'' + (\ )\,(Y^{i}_{t})' + \text{comb. linéaires des } Y^{\bar{D}}_{t} = 0 \\ (Y^{2}_{t})' + (\ )\,(Y^{1}_{t})' + \text{comb. linéaires des } Y^{\bar{D}}_{t} = 0\ . \end{cases}$$

On obtient donc des symboles C^∞ localement en intégrant ce système pourvu que l'on connaisse les restrictions des $Y_t^{\bar{D}}$ et d'une dérivée transversale de Y_t^1 à l'hypersurface initiale $x^o = T$.

Ensuite par une récurrence facile que nous n'expliciterons pas, on détermine tous les $Y_{t+j}^{\mu,\rho}(x,\eta')$ pourvu que l'on connaisse les traces C^∞ des $Y_{t+j}^{\mu,\rho,\bar{D}}$ et les traces C^∞ d'une dérivée transversale de $Y_{t+j}^{\mu,\rho,1}$ sur $x^o = T$.

2ème cas : On transforme d'abord 35). Par un calcul analogue au précédent mais un peu long, on obtient la formule invariante :

$$38)\quad Y_{t+1}^{\bar{D}} = \frac{B_1^{\bar{D}}}{B_1^1} Y_{t+1}^1 + \partial^\alpha\left(\frac{B_1^{\bar{D}}}{B_1^1}\right)\partial_\alpha Y_t^1 + P^{\bar{D}} p^\alpha \partial_\alpha (p^\beta \partial_\beta Y_t^1) + P'^{\bar{D}} p^\alpha \partial_\alpha Y_t^1 + P''^{\bar{D}} Y_t^1 .$$

On n'explicitera pas les coefficients $P^{\bar{D}}$, $P'^{\bar{D}}$, $P''^{\bar{D}}$.

On remarque cependant que :

$$P^2 = \frac{H''(x,\ \mathrm{grad}\ \varphi(x))}{\hat{K}_2^1(x,\ \mathrm{grad}\ \varphi(x))\ (A_{12}^{12}\ B_1^1)\ (x,\ \mathrm{grad}\ \varphi(x))}$$

et ne s'annule pas. $P^1 = P'^1 = P''^1 = 0$.

On reporte dans (36) après l'avoir transformée :

$$P^2 A_2^2 p^\alpha \partial_\alpha [p^\beta \partial_\beta (p^\gamma \partial_\gamma Y_t^1)] + A_2^2 p^\alpha \partial_\alpha [\partial^\beta (\frac{B_1^2}{B_1^1}) \partial_\beta Y_t^1] + H_2^{*2} \partial^\alpha (\frac{B_1^2}{B_1^1}) \partial_\alpha Y_t^1 -$$

$$p^\alpha \partial_\alpha [B_1^1 \partial^\alpha (\frac{B_1^2}{B_1^1}) \partial_\alpha Y_t^1] - \partial^\beta (\frac{B_1^2}{B_1^1}) [H_2^{*2} - \partial_\alpha A_2^2 p^\alpha] \partial_\beta Y_t^1 + R p^\alpha \partial_\alpha (p^\beta \partial_\beta Y_t^1) + R' p^\alpha \partial_\alpha Y_t^1 + R'' Y_t^1 = 0 .$$

On simplifie et on obtient une équation différentielle ordinaire du 3ème ordre le long des bicaractéristiques ;

$$A_2^2(x,\ \mathrm{grad}\ \varphi(x)) = \frac{B_1^1}{A_{12}^{12}}(x,\ \mathrm{grad}\ \varphi(x)) \neq 0 .$$

On obtient donc Y_t^1 fonction C^∞ de x localement pourvu que l'on connaisse les restrictions de Y_t^1 et de ses deux dérivées premières

transversales à l'hypersurface $x^o = T$, Y^2_t s'obtient par (31).

Par récurrence on détermine tous les $Y^{\mu,\rho,}_{t+j}(x,\eta')$ pourvu que l'on connaisse donc les traces C^∞ des $Y^{\mu,\rho,1}_{t+j}$ et de leurs deux premières dérivées sur $x^o = T$.

On réalise ensuite i) pour $\rho > \tau_o$, comme dans la démonstration de la proposition 4.

Il ne reste donc qu'à déterminer les traces en vérifiant la condition ii) (cf. proposition 9 ou 4).

Pour $\ell = 0$, on obtient encore :

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi^\rho_o)^\tau Y^B_{\mu,\rho,t,C}(T) = 0$$

puis comme au paragraphe IV :

$$Y^B_{\rho,t}(T) = 0$$

ce qui est possible.

Pour $\ell = 1$, on obtient encore :

$$39) : \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} \tau(\xi^\rho_o)^{\tau-1} \partial_o Y^B_{\mu,\rho,t,C}(T) + \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi^\rho_o)^\tau Y^B_{\mu,\rho,t+1,C}(T) +$$

$$\sum_{\rho>\tau_o} (\xi^\rho_o)^\tau Y^B_{\mu,\rho,t+1,C}(T) = \delta_{\tau,\mu} I^B_C \qquad \text{avec } 0 \leq \tau \leq t-1 .$$

Nous distinguerons alors les deux cas :

1er cas : Nous savons que pour $1 \leq \rho \leq \tau_o$, compte-tenu en particulier de 29) :

$$\partial_o Y^B_{\mu,\rho,t,C}(T) = \frac{A^{\bar{D}-1B}_{\rho 1\ 2}}{A_{\rho 12}} \partial_o Y^{\bar{D}}_{\mu,\rho,t,C}(T)$$

où $A^{\bar{D}-1B}_{\rho 1\ 2}$ par exemple est égal à $A^{\bar{D}-1B}_{1\ 2}(T, x', \text{grad } \phi^\rho(T, x'))$.

$$\partial_o Y^{\bar{D}}_{\mu,\rho,t,C}(T) = \frac{B^{\bar{D}}_{\rho 1}}{B_{\rho 1}} \partial_o Y^{B}_{\mu,\rho,t,C}(T)$$

$$Y^{B}_{\mu,\rho,t+1,C}(T) = \frac{A^{\bar{D}-1B}_{\rho 1\ 2}}{A_{\rho 12}} Y^{\bar{D}}_{\mu,\rho,t+1,C}(T) + \partial^o \left[\frac{A^{\bar{D}-1B}_{1\ 2}}{A_{12}}\right]_\rho \partial_o Y^{\bar{D}}_{\mu,\rho,t,C}(T)$$

pour $\rho > \tau_o$:

$$Y^{B}_{\mu,\rho,t+1,C}(T) = \frac{A^{B}_{\rho \tilde{D}}}{A^{\tilde{D}}_{\rho \tilde{D}}} Y^{\tilde{D}}_{\mu,\rho,t+1,C}(T) \quad , \quad \tilde{D} \text{ fixé .}$$

Pour C fixé, 39) est donc un système à $3\tau_o + \tau_1 + \ldots + \tau_\sigma = mt$ inconnues qui sont :

$$Z_\rho = \partial_o Y^{1}_{\mu,\rho,t,C}(T) \quad , \quad Y^{\bar{D}}_\rho = Y^{\bar{D}}_{\mu,\rho,t+1,C}(T) \quad , \quad 1 \leq \rho \leq \tau_o$$

$$Y_\rho = Y^{\tilde{D}}_{\mu,\rho,t+1,C}(T) \quad , \quad \rho > \tau_o \ .$$

Démontrons que le système homogène associé n'a que la solution nulle.

Il sera commode de poser d'abord.

$$Z^{\bar{D}}_\rho = \frac{B^{\bar{D}}_{\rho 1}}{B_{\rho 1}} Z_\rho \ .$$

On a donc le système :

$$40) \quad \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} \tau (\xi_o^\rho)^{\tau-1} \frac{A^{\bar{D}-1B}_{\rho 1\ 2}}{A_{\rho 12}} Z^{\bar{D}}_\rho + \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^\tau \frac{A^{\bar{D}-1B}_{\rho 1\ 2}}{A_{\rho 12}} Y^{\bar{D}}_\rho +$$
$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^\tau \partial^o \left[\frac{A^{\bar{D}-1B}_{1\ 2}}{A_{12}}\right]_\rho Z^{\bar{D}}_\rho + \sum_{\rho>\tau_o} (\xi_o^\rho)^\tau \frac{A^{B}_{\rho \tilde{D}}}{A^{\tilde{D}}_{\rho \tilde{D}}} Y_\rho = 0$$

avec $1 \leq B \leq m$, $0 \leq \tau \leq t-1$.

Soit pour $\tau = 0$.

$$40)_o \quad \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^\tau \frac{A^{\bar{D}-1B}_{\rho 1\ 2}}{A_{\rho 12}} Y^{\bar{D}}_\rho + \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} (\xi_o^\rho)^\tau \partial^o \left[\frac{A^{\bar{D}-1B}_{1\ 2}}{A_{12}}\right]_\rho Z^{\bar{D}}_\rho + \sum_{\rho>\tau_o} (\xi_o^\rho)^\tau \frac{A^{B}_{\rho \tilde{D}}}{A^{\tilde{D}}_{\rho \tilde{D}}} Y_\rho = 0$$

On multiplie $(40)_o$ par $-G_B^{oA}$ (cf. formule 9)) et en suivant le calcul du paragraphe 4 on reporte $40)_\tau$ dans la formule obtenue.

On remarque que 27) :

$$H_B^A(\xi_o,\xi')\ \frac{A_{12}^{\bar{D}-1B}}{A_{12}^{12}}(\xi_o,\xi') = \begin{cases} 0 \text{ si } A \neq (1,2) \\ \text{et sinon} \\ (-1)^{\bar{A}+\bar{D}}\ \dfrac{A_{\bar{A}-1\bar{A}+1}^{\bar{D}-1\bar{D}+1}}{A_{12}^{12}} = A_{\bar{D}}^{\bar{A}}\ H' \ . \end{cases}$$

On dérive en ξ_o et on remplace ξ_o par ξ_o^ρ, $1 \leq \rho \leq \tau_o$, on a :

$$H_B^{\bar{A}}(\xi_o^\rho,\xi')\partial^o\left[\frac{A_{12}^{\bar{D}-1B}}{A_{12}^{12}}\right]_\rho + \left[H_B^{\bar{A}}(N)\,t(\xi_o^\rho)^{t-1} + \sum_{q=1}^{q=t-1} G_B^{q\bar{A}}\ q(\xi_o^\rho)^{q-1}\right]\frac{A_{12}^{\bar{D}-1B}}{A_{12}^{12}} = A_{\rho\bar{D}}^{\bar{A}}\ p_\rho^o \ .$$

En reportant on a alors :

$$H_B^A(N)\left[\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o}(\xi_o^\rho)^t\ \frac{A_{\rho 1\ 2}^{\bar{D}-1B}}{A_{\rho 12}^{12}}\ Y_\rho^{\bar{D}} + \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o}(\xi_o^\rho)^t\ \partial^o\left[\frac{A_{12}^{\bar{D}-1B}}{A_{12}^{12}}\right]_\rho Z_\rho^{\bar{D}} + \sum_{\rho>\tau_o}(\xi_o^\rho)^\tau\ \frac{A_{\rho\tilde{D}}^{B}}{A_{\rho\tilde{D}}^{\tilde{D}}}\ Y_\rho + \right.$$

$$\left. \sum_{\rho=1}^{\rho=\tau_o} t(\xi_o^\rho)^{t-1}\ \frac{A_{\rho 1\ 2}^{\bar{D}-1B}}{A_{12}^{12}}\ Z_\rho^{\bar{D}}\right] = 0 \quad \text{car} \quad A_{\rho\bar{D}}^{\bar{A}} B_{\rho 1}^{\bar{D}} = 0 \ .$$

On obtient donc $40)_t$ et en itérant $40)_\tau$ est vérifiée pour tout τ.

On fixe B et en remarquant que le même déterminant qu'au paragraphe IV est non nul on en déduit :

$$1 \leq \rho \leq \tau_o \quad \frac{A_{\rho 1\ 2}^{\bar{D}-1B}}{A_{\rho 12}^{12}}\ Z_\rho^{\bar{D}} = 0 \ , \quad \frac{A_{\rho 1\ 2}^{\bar{D}-1B}}{A_{\rho 12}^{12}}\ Y_\rho^{\bar{D}} + \partial^o\left[\frac{A_{12}^{\bar{D}-1B}}{A_{12}^{12}}\right]_\rho Z_\rho^{\bar{D}} = 0$$

$$\rho > \tau_o \quad \frac{A_{\rho\tilde{D}}^{B}}{A_{\rho\tilde{D}}^{\tilde{D}}}\ Y_\rho = 0$$

d'où : $\quad 1 \leq \rho \leq \tau_o : Z_\rho^{\bar{D}} = Y_\rho^{\bar{D}} = 0 \ ; \qquad \rho > \tau_o : Y_\rho = 0$

et finalement : $1 \leq \rho \leq \tau_o : Z_\rho = 0 \ , \ Y_\rho^{\bar{D}} = 0 \ ; \ \rho > \tau_o : Y_\rho = 0$.

aux caractéristiques d'indice $\rho > \tau_o$. On obtient ensuite par récurrence tous les symboles cherchés.

La proposition 9) est démontrée.

2ème cas :

Nous savons que pour $1 \leq \rho \leq \tau_o$, compte-tenu de 31) et de 38) :

$$\partial_o Y^B_{\mu,\rho,t,C}(T) = \frac{A^{\bar{D}-1B}_{\rho 1\ 2}}{A_{\rho 12}} \partial_o Y^{\bar{D}}_{\mu,\rho,t,C}(T) \ .$$

$$\partial_o Y^{\bar{D}}_{\mu,\rho,t,C}(T) = \frac{B^{\bar{D}}_{\rho 1}}{B_{\rho 1}} \partial_o Y^1_{\mu,\rho,t,C}(T)$$

$$Y^B_{\mu,\rho,t+1,C}(T) = \frac{A^{\bar{D}-1B}_{\rho 1\ 2}}{A_{12}} Y^{\bar{D}}_{\mu,\rho,t+1,C}(T) + \partial^o\left[\frac{A^{\bar{D}-1B}_{1\ 2}}{A_{12}}\right]_\rho \partial_o Y^{\bar{D}}_{\mu,\rho,t,C}(T)$$

$$Y^{\bar{D}}_{\mu,\rho,t+1,C}(T) = \frac{B^{\bar{D}}_{\rho 1}}{B_{\rho 1}} Y^1_{\mu,\rho,t+1,C}(T) + \partial^o\left(\frac{B^{\bar{D}}_1}{B^1_1}\right)_\rho \partial_o Y^1_{\mu,\rho,t,C}(T) +$$

$$P^{\bar{D}}_\rho (p^o_\rho)^2 \partial_{(o)^2} Y^1_{\mu,\rho,t,C} + P^{\bar{D}}_{\rho p_\rho \alpha} \partial_\alpha p^o_\rho \partial_o Y^1_{\mu,\rho,t,C} + P^{\bar{D}}_{\rho p_\rho o p_\rho i} \partial_i (\partial_o Y^1_{\mu,\rho,t,C}) + P'^{\bar{D}}_{\rho p_o \rho} \partial_o Y^1_{\mu,\rho,t,C} \ .$$

avec $P^1_\rho = P'^1_\rho = 0$, $P^2_\rho \neq 0$,

et que pour $\rho > \tau_o$:

$$Y^B_{\mu,\rho,t+1,C} = \frac{A^{B}_{\rho \tilde{D}}}{A_{\rho \tilde{D}}} Y^{\tilde{D}}_{\mu,\rho,t+1,C}$$

Pour C fixé, 39) est donc un système linéaire à $3\tau_o + \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_\sigma = mt$ inconnues soit :

$$1 \leq \rho \leq \tau_o : Z_\rho = \partial_o Y^1_{\mu,\rho,t,C}(T) \qquad Y_\rho = Y^1_{\mu,\rho,t+1,C}(T)$$

$$U_\rho = p^o_\rho \partial_{(o)^2} Y^1_{\mu,\rho,t,C}(T) + p^i_\rho \partial_i (\partial_o Y^1_{\mu,\rho,t,C})$$

$$\rho > \tau_o : Y_\rho = \tilde{Y}^{\bar{D}}_{\mu,\rho,t+1,C}(T) \quad , \text{ et à mt équations.}$$

On démontre que le système homogène associé n'a que la solution nulle. On pose d'abord pour cela :

$$Z^{\bar{D}}_\rho = \frac{B^{\bar{D}}_{\rho 1}}{B^{1}_{\rho 1}} Z_\rho$$

$$Y^{\bar{D}}_\rho = \frac{B^{\bar{\bar{D}}}_{\rho 1}}{B^{!}_{\rho 1}} Y_\rho + \partial^o \left(\frac{B^{\bar{D}}_1}{B^1_1}\right)_\rho Z_\rho + P^{\bar{D}}_\rho p^o_\rho U_\rho + P^{\bar{D}}_\rho p^\alpha_\rho \partial_\alpha p^o_\rho Z_\rho + P'_\rho p^\rho_o Z_\rho .$$

On obtient un système $41)_\tau$ identique à $40)_\tau$ que l'on transforme de même. On obtient ainsi :

$$1 \leq \rho \leq \tau_o : Z_\rho = 0 = Y_\rho = U_\rho \qquad \rho > \tau_o : Y_\rho = 0 \ .$$

On obtient donc, en remontant au système avec second membre, Z_ρ et Y_ρ comme données C^∞ ; on a aussi U_ρ donné C^∞ et par suite $\partial_{(o)^2} Y^1_{\mu,\rho,t,C}(T)$ puisque $p^o(T,x',\xi^\rho_o(T,\eta'),\eta') \neq 0$.

On a donc les conditions initiales relatives aux premières équations différentielles permettant de déterminer les symboles.

Par récurrence on résout complétement le problème et la proposition 9 est encore démontrée.

Le théorème 4a) s'en déduit aisément dans les deux cas à l'aide du lemme 23).

Théorème 4b).- S'il existe un point y et une fonction de phase réelle φ définie dans un voisinage de y vérifiant $H'(x, \text{grad } \varphi(x)) = 0$ dans ce voisinage et telle que :
$[\overset{\circ}{L}{}^1_1(x, \text{grad } \varphi(x)) \neq 0$ ou $\widehat{K}^1_2(x, \text{grad } \varphi(x)) \cdot \overset{\vee}{K}{}^2_1(x, \text{grad } \varphi(x)) \neq 0]$, alors le problème de Cauchy n'est pas bien posé au voisinage de ce point.

Cette proposition s'établit à l'aide du lemme 6.

---

1) Supposons d'abord φ telle $\overset{\circ}{L}{}^1_1(x, \text{grad } \varphi(x)) \neq 0$.

On cherchera encore u sous la forme :

$$u(x,\omega) = \sum_{0 \leq j \leq +\infty} Y_{t+1}(x)\, \omega^{-j/2}\, e^{i\left[\omega\varphi_o(x)+\omega^{1/2}\psi(x)\right]} .$$

On annulera de même les coefficients des $\omega^{t-j/2}$, $0 \leq j \leq 3$, dans hu et on choisira $\varphi_o = \delta\varphi$, $\delta = \pm 1$; on prendra des coordonnées telles que $\varphi(x) \equiv x'^o$.

Les formules (11), (12), (13), (14) restent valables.

On résout (11) ; avec des notations abrégées, on obtient :

$$Y^B_t = \frac{A^{\bar{D}-1B}_{1\ 2}}{A_{12}}\, Y^{\bar{D}}_t$$

où l'on somme en $\bar{D}$.

On écrit que 12) est possible en multipliant par $A^{-1\ 2}_{\bar{A}-1F}$ et en sommant en F , on obtient, avec des notations précédentes :

$$p^\alpha \partial_\alpha \psi A^{\bar{A}}_{\bar{D}} Y^{\bar{D}}_t = 0 \quad ; \quad \text{on imposera :}$$

41) $A^{\bar{A}}_{\bar{D}} Y^{\bar{D}}_t = 0$ soit : $Y^{\bar{D}}_t = \frac{B^{\bar{D}}_1}{B^1_1} Y^1_t$.

On résout 12) :

$$Y^B_{t+1} = \frac{A^{\bar{D}-1B}_{12}}{A_{12}} Y^{\bar{D}}_{t+1} + \delta\, \partial^\alpha \left(\frac{A^{\bar{D}-1B}_{12}}{A_{12}}\right) \partial_\alpha \psi Y^{\bar{D}}_t \quad .$$

On reporte dans 13) et on multiplie par $A^{1\,2}_{\bar{A}-1F}$; on obtient :

42) $$\delta A^{\bar{A}}_{\bar{D}} p^\alpha \partial_\alpha \psi Y^{\bar{D}}_{t+1} + \left[\frac{1}{2} A^{\bar{A}}_{\bar{D}} \partial^{\alpha\beta} H' + \partial^\alpha A^{\bar{A}}_{\bar{D}} p^\beta\right] \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi Y^{\bar{D}}_t =$$
$$i\,\delta \left[A^{\bar{A}}_{\bar{D}} p^\alpha \partial_\alpha Y^{\bar{D}}_t + H'^{*\bar{A}}_{\bar{D}} Y^{\bar{D}}_t\right] .$$

On écrit que cette équation est possible en multipliant par $B^1_{\bar{A}}$; on obtient, compte-tenu de 41) et du lemme (20) et de la formule (26) :

$$H'' B^1_1 \left[p^\alpha \partial_\alpha \psi\right]^2 Y^1_t = i\delta \overset{\circ}{L}{}^1_1 Y^1_t \quad .$$

Cette équation est résolue quel que soit Y^1_t si :

$$\left[p^\alpha \partial_\alpha \psi\right]^2 = i\delta L(\psi) \ ,$$

où $L(\psi)$ n'est jamais nul.

On détermine ψ, δ, W de sorte que cette condition soit réalisée et que $Im\ \psi$ vérifie l'inégalité du lemme 6.

On résout alors 42) en ne conservant que l'équation principale ($\bar{A} = 2$) qui se réduit à :

$$\delta A^2_{\bar{D}} p^\alpha \partial_\alpha \psi Y^{\bar{D}}_{t+1} = G Y^1_t$$

où G est un coefficient régulier que nous n'explicitons pas ;

$$Y^2_{t+1} = \frac{B^2_1}{B^1_1} Y^1_{t+1} + G' Y^1_t$$

et par suite Y^B_{t+1} en fonction de Y^1_{t+1} et Y^1_t .

On résout 13) :

$$Y^B_{t+2} = \frac{A^{\bar D-1}B}{A_{12}}\, Y^{\bar D}_{t+2} + \delta\partial^\alpha\Big(\frac{A^{\bar D-1}B}{A_{12}}\Big)\,\partial_\alpha\psi Y^{\bar D}_{t+1} - i\delta\partial^\alpha\Big(\frac{A^{\bar D-1}B}{A_{12}}\Big)\,\partial_\alpha Y^{\bar D}_t + \dots \ ,$$

les pointillés désignent un terme multiple de Y^1_t.

On reporte dans 14) et on écrit qu'elle est possible en multipliant par $A^{-1}_{\bar A-1F}$, on obtient :

$$\delta A\tfrac{\bar A}{\bar D}p^\alpha\partial_\alpha\psi Y^{\bar D}_{t+2} + \Big[\tfrac12 A\tfrac{\bar A}{\bar D}\partial^{\alpha\beta}H' + \partial^\alpha A\tfrac{\bar A}{\bar D}p^\beta\Big]\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi Y^{\bar D}_{t+1} = i\delta\Big[A\tfrac{\bar A}{\bar D}p^\alpha\partial_\alpha Y^{\bar D}_{t+1} + H\tfrac{\bar A}{\bar D}Y^{\bar D}_{t+1}\Big] +$$
$$2i\delta\Big[\tfrac12 A\tfrac{\bar A}{\bar D}\partial^{\alpha\beta}H' + \partial^\alpha A\tfrac{\bar A}{\bar D}p^\beta\Big]\partial_\beta\psi\partial_\alpha Y^{\bar D}_t + \dots \ ,$$

les pointillés désignent un multiple de Y^1_t .

En multipliant par $B\frac{1}{A}$, on obtient, compte tenu du choix de ψ, une équation du type :

$$p^\alpha\partial_\alpha Y^1_t + (\dots)\, Y^1_t = 0$$

où le coefficient de Y^1_t est C^∞.

BUS LILLE

On peut donc choisir Y^1_t satisfaisant aux hypothèses du lemme 6. On en déduit Y^B_t, puis en itérant le procédé les Y^B_{t+j} pour tout j et une solution asymptotique convenable.

2) Supposons maintenant $\mathring{L}^1_1 \equiv 0$ et φ telle que

$$[\mathring{R}^1_2 \,.\, \check{K}^2_1]\ (x, \operatorname{grad}\varphi(x)) \neq 0 \ .$$

On cherchera ici u sous la forme :

$$u(x,\omega) = \sum_{0\leq j\leq\infty} Y_{t+j}(x)\ \omega^{-j/3}\ e^{i\left[\omega\varphi_o(x)+\omega^{1/3}\theta(x)\right]} \ ,$$

on annule les coefficients des $\omega^{t-j/3}$, $0 \leq j \leq 5$ et on choisit $\varphi_o = \varphi$. On utilise encore des coordonnées où $\varphi(x) \equiv x'^o$.

On obtient :

43) $HY_t = 0$.

44) $HY_{t+1} = 0$.

45) $HY_{t+2} + \partial^\alpha H \partial_\alpha \theta Y_t = 0$.

46) $HY_{t+3} + \partial^\alpha H \partial_\alpha \theta Y_{t+1} - i\left[\partial^\alpha H \partial_\alpha + H^*\right] Y_t = 0$.

47) $HY_{t+4} + \partial^\alpha H \partial_\alpha \theta Y_{t+2} - i\left[\partial^\alpha H \partial_\alpha + H^*\right] Y_{t+1} + \frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta} H \partial_\alpha \theta \partial_\beta \theta Y_t = 0$

48) $HY_{t+5} + \partial^\alpha H \partial_\alpha \theta Y_{t+3} - i(\partial^\alpha H \partial_\alpha + H^*)\, Y_{t+2} + \frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta} H \partial_\alpha \theta \partial_\beta \theta Y_{t+1} +$
$- i\left[\partial^{\alpha\beta} H \partial_\beta \theta \partial_\alpha + \partial^\alpha H^* \partial_\alpha \theta + \frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta} H \partial_{\alpha\beta} \theta\right] Y_t = 0$.

On résout 43) et 44) en choisissant :

$$Y_t^B = \frac{A_{12}^{\bar{D}-1B}}{A_{12}^{12}} Y_t^{\bar{D}} \qquad \text{et}$$

$$Y_{t+1}^B = \frac{A_{12}^{\bar{D}-1B}}{A_{12}^{12}} Y_{t+1}^{\bar{D}} \ .$$

On remplace Y_t^B dans 45) ; on écrit qu'elle est possible en multipliant par $A^{12}_{\bar{A}-1F}$, on obtient :

$$p^\alpha \partial_\alpha \theta A^{\bar{A}}_{\bar{D}} Y_t^{\bar{D}} = 0$$

on impose : $$A^{\bar{A}}_{\bar{D}} Y_t^{\bar{D}} = 0 \quad ; \quad \text{soit}$$

49) $$Y_t^{\bar{D}} = \frac{B_1^{\bar{D}}}{B_1^1} Y_t^1 \ .$$

On résout 45) :

$$Y_{t+2}^B = \frac{A_{12}^{\bar{D}-1B}}{A_{12}^{12}} Y_{t+2}^{\bar{D}} + \partial^\alpha \left(\frac{A_{12}^{\bar{D}-1B}}{A_{12}^{12}}\right) \partial_\alpha \theta Y_t^{\bar{D}} \ .$$

On reporte dans 46) ; on écrit que celle-ci est possible en multipliant par $A^{-1}_{\bar{A}-1F}$; on obtient :

$$50)\quad p^{\alpha}\partial_{\alpha}\theta A^{\bar{A}}_{\bar{D}}Y^{\bar{D}}_{t+1} = i\left[A^{\bar{A}}_{\bar{D}}p^{\alpha}\partial_{\alpha}Y^{\bar{D}}_{t} + H^{*\bar{A}}_{\bar{D}}Y^{\bar{D}}_{t}\right] .$$

On multiplie par B^{1}_{A} ; puisque $\overset{\circ}{L}{}^{1}_{1}(x, \operatorname{grad}\psi(x)) = 0$, la condition obtenue est réalisée quel que soient Y^{1}_{t} , $Y^{\bar{D}}_{t+1}$.

On résout 50), en supposant $p^{\alpha}\partial_{\alpha}\theta \neq 0$:

$$Y^{2}_{t+1} = \frac{B^{2}_{1}}{B^{1}_{1}}\,Y^{1}_{t+1} + i\,\frac{\overset{\vee}{K}{}^{2}_{1}}{\left[B^{1}_{1}\right]^{2}p^{\alpha}\partial_{\alpha}\theta}\,Y^{1}_{t} .$$

On peut donc résoudre 46) :

$$Y^{B}_{t+3} = \frac{A^{\bar{D}-1B}_{12}}{A_{12}}\,Y^{\bar{D}}_{t+3} + \partial^{\alpha}\left(\frac{A^{\bar{D}-1B}_{12}}{A_{12}}\right)\partial_{\alpha}\theta Y^{\bar{D}}_{t+1} - i\partial^{\alpha}\left(\frac{A^{\bar{D}-1B}_{12}}{A_{12}}\right)\partial_{\alpha}Y^{\bar{D}}_{t} + (\ldots)\,Y^{1}_{t} .$$

On écrit que 47) est possible en multipliant par $A^{-1}_{\bar{A}-1F}$.

On obtient :

$$51)\quad p^{\alpha}\partial_{\alpha}\theta A^{\bar{A}}_{\bar{D}}Y^{\bar{D}}_{t+2} + \left[\partial^{\alpha}A^{\bar{A}}_{\bar{D}}p^{\beta} + \frac{1}{2}\,A^{\bar{A}}_{\bar{D}}\partial^{\alpha\beta}H\right]\partial_{\alpha}\theta\partial_{\beta}\theta Y^{\bar{D}}_{t} = i\left[A^{\bar{A}}_{\bar{D}}p^{\alpha}\partial_{\alpha}Y^{\bar{D}}_{t+1} + H^{*\bar{A}}_{\bar{D}}Y^{\bar{D}}_{t+1}\right].$$

On multiplie par B^{1}_{A} et on a :

$$\left[B^{1}_{1}\right]^{2}H''p^{\alpha}\partial_{\alpha}\theta p^{\beta}\partial_{\beta}\theta Y^{1}_{t} = -\,\frac{\hat{K}{}^{1}_{2}\,\overset{\vee}{K}{}^{2}_{1}}{p^{\alpha}\partial_{\alpha}\theta}\,Y^{1}_{t} .$$

Ceci est vérifié quel que soit Y^{1}_{t} si :

$$(p^{\alpha}\partial_{\alpha}\theta)^{3} = H(\psi)$$

où $H(\psi)$ n'est jamais nul.

On choisit θ , W de façon à réaliser cette condition et de sorte que Im θ vérifie l'inégalité du lemme 6.

On peut résoudre 51) en Y^{2}_{t+2} :

$$Y^2_{t+2} = \frac{B^2_1}{B^1_1} Y^1_{t+2} - \frac{\check{K}^2_1 p^\alpha \partial_\alpha Y^1_t}{(p^\alpha \partial_\alpha \theta)^2 [B^1_1]^2} + i \frac{\check{K}^2_1 Y^1_{t+1}}{p^\alpha \partial_\alpha \theta [B^1_1]^2} + (\ldots) Y^1_t \quad .$$

On pourra donc résoudre 47).

Enfin on écrit que 48) est possible , d'où :

$$A\frac{\bar{A}}{D} p^\alpha \partial_\alpha \theta Y^{\bar{D}}_{t+3} - i\left[A\frac{\bar{A}}{D} p^\alpha \partial_\alpha Y^{\bar{D}}_{t+2} + H\frac{*\bar{A}}{D} Y^{\bar{D}}_{t+2}\right] + \left[\frac{1}{2} A\frac{\bar{A}}{D} \partial^{\alpha\beta} H' + \partial^\alpha A\frac{\bar{A}}{D} p^\beta\right] \partial_\alpha \theta \partial_\beta \theta Y^{\bar{D}}_{t+1}$$

$$- 2i\left[\frac{1}{2} A\frac{\bar{A}}{D} \partial^{\alpha\beta} H' + \partial^\alpha A\frac{\bar{A}}{D} p^\beta\right] \partial_\beta \theta \partial_\alpha Y^{\bar{D}}_t + \ldots = 0 \quad .$$

On multiplie par $B\frac{1}{A}$, il reste, compte-tenu de ce qui précède :

$$p^\alpha \partial_\alpha Y^1_t + (\ldots) Y^1_t = 0$$

où le coefficient (...) est C^∞.

On peut donc choisir Y^1_t satisfaisant aux hypothèses du lemme 6. On en déduit Y^B_t , puis en itérant ce procédé les Y^B_{t+j} pour tout j et une solution asymptotique convenable.

VI - SYSTEMES A CARACTERISTIQUES TRIPLES.-

Deuxième cas :

Les formules 16) et 17) restent vraies.

Définition 8.- h vérifie la condition (TR2) si et seulement si :

8a) pour tout x , dans l'anneau localisé Φ_o :

$$H \sim \begin{bmatrix} (H')^3 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

8b) il existe donc au moins un cofacteur d'ordre $(m-1)$ non divisible par H' ; nous supposerons de plus qu'il en existe un, tel que, pour tout x, il n'ait aucun zéro réel commun avec H' ; on convient que ce soit A_1^1.

8c) $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_\sigma = 1$.

Remarques :

1) Alors pour tout x et toute racine caractéristique $\xi_o^\rho(\xi')$ de H', H est équivalente dans l'anneau localisé de celui des polynômes en ξ_o par rapport à l'idéal $\xi_o - \xi_o^\rho$ à la matrice :

$$\begin{bmatrix} [\xi_o - \xi_o^\rho]^3 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

et nos conditions impliquent les conditions exprimées, à l'aide de la forme de JORDAN, pour $t = 1$, par PETKOV. Une partition de l'unité permettrait d'affaiblir l'hypothèse 8b) en ce qui concerne le choix d'un mineur A_1^1 indépendant de x et de $\xi_o^\rho(x,\xi')$. Une fois cet affaiblissement fait nos hypothèses pour $t = 1$ coïncident avec celles de PETKOV.

2) On peut affaiblir 8c) dans un sens analogue à celui des remarques 2) suivant les définitions 4) et 6).

Multiplions 16) par A, on a puisque $AH = HA = (H')^3 H''I$:

$$52) \quad (H')^3 H'' A^* + A\left[\partial^\alpha H \partial_\alpha A + H^* A - 3H'H''\partial^\alpha H' \partial_\alpha H' I\right] =$$

$$[H']^2 A\left[(3\partial^\alpha H'' \partial_\alpha H' + 3H''H'^* + H'H^{*\prime})I + E\right]$$

On a donc nécessairement :

$$A(\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A + H^{*}A - 3H'H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'I) = \tilde{\Lambda}(H')^{2} \ ;$$

$\tilde{\Lambda}$ est un polynôme en ξ, C^{∞} en x.

52) s'écrit alors :

53) $H'H''A^{*} + \tilde{\Lambda} = A\left[(3\partial^{\alpha}H''\partial_{\alpha}H' + 3H''H'^{*} + H'H^{*''})I+E\right]$.

On multiplie 17) par $[H'H'']^{2}$ et on remplace $H'H''A^{*}$ à l'aide de 53), on obtient :

54) $(H'H'')^{2}HA^{**} + \left[H'H''\partial^{\beta}H\partial_{\beta} - \partial^{\beta}H\partial_{\beta}H'H'' - \partial^{\beta}H\,\partial_{\beta}H''H' + H'H''H^{*}\right]\left[3H''AH'^{*}\right.$
$\left. - \tilde{\Lambda} + A((3\partial^{\alpha}H''\partial_{\alpha}H' + H'H''^{*})I+E)\right] + \frac{1}{2}(H'H'')^{2}\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}A + (H'H'')^{2}\partial^{\alpha}H^{*}\partial_{\alpha}A$
$+ (H'H'')^{2}H^{**}A \equiv (H'H'')^{2}\left[J + 3H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'H'^{*}I + E\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'\right]$.

La congruence ayant bien ici modulo un multiple de $(H')^{3}$.

On multiplie par A ; on remarque que :

$$H\tilde{\Lambda} = H'H''\left[\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A + H^{*}A - 3H'H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'I\right]$$

On obtient après un calcul élémentaire mais long :

55) $-\left[\partial^{\alpha}A\partial_{\alpha}H + AH^{*} - 2H'H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'I\right]\tilde{\Lambda} + H'H''\partial^{\alpha}A\partial_{\alpha}\left[\partial^{\beta}H\partial_{\beta}A + H^{*}A\right.$
$\left. - 3H'H''\partial^{\beta}H'\partial_{\beta}H'I\right] + H'H''A\left[\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}A + \partial^{\alpha}H^{*}\partial_{\alpha}A + H^{**}A\right] \equiv AH'(H'')^{2}\left[\partial^{\alpha}H'\partial^{\beta}H'\partial_{\alpha\beta}H'\right.$
$\left. + \partial^{\alpha\beta}H'\partial_{\alpha}H'\partial_{\beta}H' + \partial^{\beta}H'\partial^{\alpha}_{\beta}H'\partial_{\alpha}H'\right]$.

La congruence ayant bien ici modulo un multiple de $(H')^{2}$.

Proposition 10.- Si h vérifie (D) et 8) on a dans une carte quelconque les relations :

"$A\left[\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}A + H^{*}A - 3H'H''\partial^{\alpha}H'\partial_{\alpha}H'I\right]$ est divisible par $(H')^{2}$"

La différence du 1er et du 2e membre de 55) est divisible par $(H')^{2}$.

Remarque : On pourrait faire un calcul analogue avec des opérateurs pseudo-différentiels en x'.

Lemme 24.- (cf. aussi le lemme 1)

AC et DA sont des invariants et :

$$AC \equiv DA \quad , \quad \text{modulo} \quad [H']^2$$

Conséquence :

$$R = KA + \frac{1}{2} C \quad \text{et} \quad S = AK + \frac{1}{2} D$$

sont des invariants et :

$$AR \equiv SA \quad , \quad \text{modulo} \quad [H']^2 \ .$$

Lemme 25.- Dans ce paragraphe :

$$L \equiv A(H^* A + \partial^\alpha H \partial_\alpha A - 3\partial^\alpha H' \partial_\alpha H' H' H'' I) \equiv [\partial^\alpha A \partial_\alpha H + A H^* - 3\partial^\alpha H' \partial_\alpha H' H' H'' I] A$$

$$\text{modulo} \quad (H')^2 \ .$$

La démonstration est analogue à celle du lemme 3.

Lemme 26.- Si $L(h)$ est divisible par $(H')^2$, $L(\hat{h})$ l'est aussi.

Lemme 27.- Soit h un opérateur tel que $\nu_0 = 3$ et tel que L soit divisible par $(H')^2$; soit h' , h'', a, des opérateurs de symboles principaux H' , H'', A ; notons $\overset{\approx}{\lambda}$ un opérateur ayant pour symbole principal le quotient par $(H')^2$ du symbole principal de l'opérateur $a(ha - h''(h')^3)$; alors le symbole sous-principal de l'opérateur :

$$h''h'a(ha - h''(h')^3) - \overset{\approx}{\lambda} ha + [3h''(h'a - ah') + h'(h''a - ah'')]ha$$

est congru modulo $(H')^2$ à la différence du 1er membre de 55) et du 2ème membre de (55).

La démonstration n'utilise que des calculs analogues aux calculs précédents et est assez longue. Nous laissons la vérification aux lecteurs. On remarque que ce symbole sous-principal ne dépend pas de A^*, A^{**} ,... ; H'^*, H''^* ,... ;

Conséquence : Dans les conditions du lemme 27), si 55) est vérifiée dans un atlas, elle l'est dans tout atlas : elle est "invariante modulo $(H')^2$".

Il sera commode d'obtenir une condition équivalente obtenue en multipliant par un élément fixe de la matrice des cofacteurs A ; dans l'hypothèse de la définition 8, nous choisissons tout de suite de multiplier par A_1^1 , le calcul général ne différant que par le choix du cofacteur.

Le 1er terme de 55) s'écrit donc, en explicitant $\tilde{\Lambda}$:

$$- (\partial^\alpha A \partial_\alpha H + AH^* - 2H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'I)^E_A \frac{A^1_1 A^A_C}{(H')^2} (\partial^\alpha H \partial_\alpha A + H^* A - 3H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'I)^C_F \quad .$$

Or : $$A^1_1 A^A_C - A^1_C A^A_1 = A^{1A}_{1C}(H')^3 H'' \ .$$

En remplaçant $A^1_1 A^A_C$, on obtient donc deux termes dont l'un est :

$$- \left[(\partial^\alpha A \partial_\alpha H + AH^* - 2H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'I)A\right]^E_1 \tilde{\Lambda}^1_F$$

$$\equiv - \tilde{\Lambda}^1_F(\tilde{\Lambda}^E_1 (H')^2 + H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H' A^E_1) \equiv - \tilde{\Lambda}^1_F H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H' A^E_1$$

modulo $(H')^2$ modulo $(H')^2$

L'équation (55) implique donc en divisant par $H'H''$:

$$56) \ - \tilde{\Lambda}^1_F \partial^\alpha H'\partial_\alpha H' A^E_1 - \left[\partial^\alpha A \partial_\alpha H + AH^* - 2H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'I\right]^E_A A^{1A}_{1C}\left[\partial^\alpha H \partial_\alpha A + H^* A - 3H'H''\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'I\right]^C_F + A^1_1\left[\partial^\alpha A \partial_\alpha (\partial^\beta H \partial_\beta A + H^* A - 3H'H''\partial^\beta H'\partial_\beta H'I\right]^E_F +$$

$$A^1_1\left[A(\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta} H \partial_{\alpha\beta} A + \partial^\alpha H^* \partial_\alpha A + H^{**} A)\right]^E_F \equiv A^1_1 A^E_F\left[\partial^\alpha H'\partial^\beta H'\partial_{\alpha\beta} H' + \partial^{\alpha\beta} H'\partial_\alpha H'\partial_\beta H' + \partial^\beta H'\partial^\alpha_\beta H'\partial_\alpha H'\right] H'' \quad .$$

La congruence ayant lieu modulo H' .

Notation : On pose :

$$N_F^E = -\overset{\sim}{\Lambda}_F^1\,\partial^\alpha H'\partial_\alpha H' A_1^E - \left[\partial^\alpha A\partial_\alpha H + AH^*\right]_A^E A_{1C}^{1A}\left[\partial^\alpha H\partial_\alpha A + H^*A\right]_F^C +$$

$$A_1^1\left[\partial^\alpha A\partial_\alpha(\partial^\beta H\partial_\beta A + H^*A - 3H'H''\partial^\beta H'\partial_\beta H'D\right]_F^E + A_1^1\left[A(\frac{1}{2}\,\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}A + \partial^\alpha H^*\partial_\alpha A + H^{**}A)\right]_F^E$$

$$- A_1^1\,A_F^E\left[\partial^\alpha H'\partial^\beta H'\partial_{\alpha\beta}H' + \partial^{\alpha\beta}H'\partial_\alpha H'\partial_\beta H' + \partial^\beta H'\partial_\beta^\alpha H'\partial_\alpha H'\right] H''$$

Définition 9.-

h vérifie la condition $((L)^2 - N)$ si et seulement si :

$(L)^2$: L est divisible par $[H']^2$.

(N) : N_1^1 est divisible par H' .

Ces conditions sont intrinsèques.

Conséquence : Si h vérifie la condition (D) et la définition 8, alors h vérifie $((L)^2 - N)$.

Lemme 28.- Lorsque L est divisible par $(H')^2$, si l'on a pour h la condition N_1^1 divisible par H' , alors on a la condition pour l'adjoint.

Théorème 5.- Si h vérifie (TR2) une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy soit bien posé est que h vérifie $((L)^2 - N)$.

On a d'abord à démontrer la :

Proposition 11.- Si h vérifie (TR2) et $((L)^2 - N)$, le problème de Cauchy est bien posé.

Cette proposition résulte de la construction d'une paramétrix pour h (resp. son adjoint). On a à démontrer la :

Proposition 12.- Pour tous T,ρ tel que : $1 \leq \rho \leq \tau'$, μ tel que : $0 \leq \mu \leq t-1$, τ tel que $0 \leq \tau \leq t-1$, il existe des opérateurs matriciels intégraux de Fourier :

$$F_{\mu,\rho}(T) \in I^{-1/4-\mu+2-\beta(\rho)}(X, X', C_\rho(T))$$

$$\beta(\rho) = \begin{cases} 0 \text{ si } \rho \leq \tau_o \text{ (phases correspondant à } H' = H_o) \\ 2 \text{ si } \rho > \tau_o \end{cases}$$

vérifiant : $h\, F_{\mu,\rho}(T) \equiv 0$

$$\gamma_\tau \left[\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau'} F_{\mu,\rho}(T) \right] - \delta_{\tau,\mu}\, I \equiv 0$$

Le signe $\equiv$ signifie dans cet énoncé, l'égalité modulo un opérateur à noyau C^∞.

On cherche $F_{\mu,\rho}(T)$ sous la forme d'un développement :

$$F_{\mu,\rho}(T) \sim \sum_{j=\beta(\rho)}^{\infty} F^j_{\mu,\rho}(T) \quad \text{vérifiant :}$$

i) $h\left[\sum_{j<\ell} F^{j}_{\mu,\rho}(T)\right] \in I^{t-1/4-\mu-\ell+2}(X, X', C_\rho(T))$, $\ell \in \mathbb{N}^*$.

ii) $\gamma_\tau\left[\sum_{\rho=1}^{\rho=\tau'} \sum_{j<\ell+3} F^{j}_{\mu,\rho}(T)\right] - \delta_{\tau,\mu}\, I \in L^{-\mu+\tau-\ell-1}(X')$

On a localement :

$$\left[F^{j}_{\mu,\rho}(T)u\right](x) = (-i)^j\,(2\pi)^{-n} \int e^{i\phi^\rho(x,\eta')}\, Y^{\mu,\rho}_{t+j}(x,\eta')\, \hat{u}(\eta')\, d\eta'$$

$u \in C^\infty_o(X)$, $Y^{\mu,\rho}_{t+j} \in S^{-\mu-j+2}$.

Nous réalisons i) pour $1 \leq \rho \leq \tau_o$; pour $\ell = 1$:

$$h\, F^{o}_{\mu,\rho}(T) \in I^{t-1/4-\mu+1}$$

d'où : $$\sum_B H^A_B(x, \text{grad } \phi^\rho(x,\eta'))\, Y^B_{\mu,\rho,t,C}(x,\eta') = 0 .$$

Nous emploierons comme au paragraphe IV des notations simplifiées.

On a donc :

$$H^A_B(x, \text{grad } \phi(x))\, Y^B_t(x) = 0$$

d'où :

$$Y^B_t(x) = \frac{A^B_1(x, \text{grad } \phi(x))}{A^1_1(x, \text{grad } \phi(x))}\, Y^1_t(x)$$

On choisit une carte telle que $y^o \equiv \phi(x)$. Pour $\ell = 2$, on a encore :

2) $$H^A_B\, Y^B_{t+1} + \partial^\alpha H^A_B \partial_\alpha Y^B_t + H^{*A}_B Y^B_t = 0 .$$

Comme au paragraphe IV, on reporte $Y^B_t(x)$ dans 2). On remarque que le système en Y^B_{t+1} est compatible du fait que : $L^1_1(x, \text{grad } \phi(x)) = 0$. La formule 4) reste valable.

Pour $\ell = 3$, on obtient encore la formule 5), que l'on transforme de façon à obtenir 7), mais nous utiliserons le terme N^A.

Le système 7) en Y^B_{t+2} est compatible ; en effet le coefficient de $\partial_\beta Y^1_t$ dans la condition de compatibilité est :

$$L^1_1(x, \text{grad } \psi(x)) = 0$$

et le coefficient de Y^1_t est :

$$A^1_A N^A = A^1_A \left[\frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta} H^A_B \partial_{\alpha\beta} \left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right) + \partial^\alpha H^{*A}_B \partial_\alpha \left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right) + H^{**A}_B \frac{A^B_1}{A^1_1} \right] + \partial^\alpha \left(\frac{A^1_A}{A^1_1}\right) \partial_\alpha \left[\partial^\beta H^A_B \partial_\beta \left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right) + H^{*A}_B \frac{A^B_1}{A^1_1} \right] A^1_1$$

$$- \left[\partial^\alpha \left(\frac{A^1_A}{A^1_1}\right) \partial_\alpha H^A_C + \frac{A^1_A H^{*A}_C}{A^1_1} \right] A^{1C}_{1D} \left[\partial^\beta H^D_B \partial_\beta \left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right) + H^{*D}_B \frac{A^B_1}{A^1_1} \right] .$$

On déduit de l'hypothèse : $N^1_1 = 0$, qu'il est nul. En effet : $A^1_A N^A$ est la valeur d'une expression en (x,ξ) congrue à un multiple de N^1_1 modulo H'.

On résout 7) :

$$57) \quad Y^B_{t+2} = \frac{A^B_1}{A^1_1} Y^1_{t+2} + \partial^\alpha \left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right) \partial_\alpha Y^1_{t+1} + \frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta} \left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right) \partial_{\alpha\beta} Y^1_t$$

$$- \frac{A^{1B}_{1C}}{A^1_1} \left[\partial^\alpha H^C_D \partial_\alpha \left(\frac{A^D_1}{A^1_1}\right) + H^{*C}_D \frac{A^D_1}{A^1_1} \right] Y^1_{t+1} - \frac{A^{1B}_{1C}}{A^1_1} \left[R^C \partial_\beta Y^1_t + N^C Y^1_t \right]$$

R^C est le coefficient de $\partial_\beta Y^1_t$ dans 7).

Pour $\ell = 4$ on obtient :

$$58) \quad H^A_B Y^B_{t+3} + \partial^\alpha H^A_B \partial_\alpha Y^B_{t+2} + H^{*A}_B Y^B_{t+2} + \left[\frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta} H^A_B \partial_{\alpha\beta} + \partial^\alpha H^{*A}_B \partial_\alpha + H^{**A}_B \right] Y^B_{t+1} +$$

$$\left[\frac{1}{3!} \partial^{\alpha\beta\gamma} H^A_B \partial_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta} H^{*A}_B \partial_{\alpha\beta} + \partial^\alpha H^{**A}_B \partial_\alpha + H^{***A}_B \right] Y^B_t = 0$$

On remplace dans 58) Y^B_{t+2} par son expression 57), Y^B_{t+1} par son expression donnée à la suite de 4) et Y^B_t en fonction de Y^1_t .

En multipliant par A^1_A , on assure que le système en Y^B_{t+3} est compatible ; compte tenu des calculs précédents, il n'interviendra dans la condition de compatibilité que Y^1_t et ses dérivées jusqu'à l'ordre 3. On obtient, après un calcul assez long mais analogue aux précédents, que la condition s'écrit :

$$H''p^\alpha\partial_\alpha\left[p^\beta\partial_\beta(p^\gamma\partial_\gamma Y^1_t)\right] + \overset{\gamma}{\Lambda}{}^1_1\, p^\alpha\partial_\alpha(p^\beta\partial_\beta Y^1_t) + N^{'1}_1\, p^\alpha\partial_\alpha Y^1_t + PY^1_t = 0 \quad .$$

$N^{'1}_1$ et P sont des coefficients C^∞ que nous n'expliciterons pas. C'est une équation différentielle du $3^{\text{ème}}$ ordre le long des bicaractéristiques relatives à la phase φ choisie.

Y^1_t est déterminé localement si on connait les restrictions de Y^1_t et de ses deux premières dérivées transversales à $x^o = T$ (dans les coordonnées locales).

On connait alors Y^B_t , puis Y^B_{t+1} et ainsi de suite tous les Y^B_{t+j} pourvu que l'on connaisse leurs restrictions ainsi que celles de leurs deux premières dérivées à $x^o = T$. On réalise i) pour $\rho > \tau_o$ dans des conditions identiques à celles du paragraphe IV. On emploiera les mêmes notations.

On doit enfin réaliser les conditions de traces ii).

Pour $\ell = 0$, on obtient, par une technique analogue à celle du paragraphe IV :

$$Y^1_{\rho,t}(T) = 0 \quad .$$

Pour $\ell = 1$, on obtient aussi :

$$\partial_o Y^1_{\rho,t}(T) = 0 \quad \text{et} \quad Y^1_{\rho,t+1}(T) = 0$$

Pour $\ell = 2$, on obtient :

$$\partial_{(o)^2} Y^1_{\rho,t}(T) \ , \ \partial_o Y^1_{\rho,t+1}(T) \quad \text{et} \quad Y^1_{\rho,t+2}(T)$$

en utilisant le fait que le déterminant de la matrice :

$$\left(\underbrace{C^2_\tau (\xi^\rho_o)^{\tau-2}}_{1\leq\rho\leq\tau_o} \quad \underbrace{C^1_\tau (\xi^\rho_o)^{\tau-1}}_{\substack{1\leq\rho\leq\tau_o \\ 1\leq\tau\leq mt}} \quad \underbrace{(\xi^\rho_o)^\tau}_{1\leq\rho\leq\tau_o} \quad \underbrace{(\xi^\rho_o)^\tau}_{\rho>\tau_o} \right)$$

est non nul.

On a ainsi les traces des $Y^1_{\rho,t}$ et de leurs premières dérivées et par suite les $Y^1_{\rho,t}$ et par récurrence tous les symboles cherchés.

Proposition 13.- Si h vérifie (TR2) et si le problème de Cauchy est bien posé, h vérifie $((L)^2 - N)$. On l'obtient en démontrant les trois parties de la proposition 14.

Proposition 14 a).- S'il existe un point y et une fonction de phase réelle ψ définie dans un voisinage de y vérifiant :

$H'(x, \text{grad } \psi(x)) = 0$ dans ce voisinage et telle que :

$L^1_1(y, \text{grad } \psi(y)) \neq 0$ alors le problème de Cauchy n'est pas bien posé dans un voisinage de y.

On utilise encore le lemme 6. On cherche u sous la forme :

$$u(x,\omega) = \sum_{0\leq j\leq\infty} Y_{t+j}(x)\ \omega^{-j/3}\ e^{i\left[\omega\psi_o(x)+\omega^{1/3}\theta(x)+\omega^{2/3}\psi(x)\right]}$$

hu se calcule comme au paragraphe IV ; on explicite les coefficients des $\omega^{t-j/3}$, $0 \leq j \leq 5$ et on les annule. On choisit $\psi_o = \psi$, ψ satisfaisant aux hypothèses de la proposition 15a). On utilisera des coordonnées où $\psi(x) \equiv x'^o$ pour simplifier les calculs intermédiaires, les expressions finales étant invariantes ; les polynômes H, A,..., sont toujours pris pour $(x, \text{grad } \psi(x))$; les Y, ψ, θ, dépendent de x et on omettra de répéter ces arguments. On obtient :

59) $HY_t = 0$

60) $HY_{t+1} + \partial^\alpha H \partial_\alpha \psi Y_t = 0$

61) $HY_{t+2} + \partial^\alpha H \partial_\alpha \psi Y_{t+1} + \left[\frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta} H \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi + \partial^\alpha H \partial_\alpha \theta\right] Y_t = 0$

62) $HY_{t+3} + \partial^\alpha H \partial_\alpha \psi Y_{t+2} + \left[\frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta} H \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi + \partial^\alpha H \partial_\alpha \theta\right] Y_{t+1} +$
$\left[\frac{1}{3!} \partial^{\alpha\beta\gamma} H \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi \partial_\gamma \psi + \partial^{\alpha\beta} H \partial_\alpha \psi \partial_\beta \theta - i(\partial^\alpha H \partial_\alpha + H^*)\right] Y_t = 0$

63) $HY_{t+4} + \partial^\alpha H \partial_\alpha \psi Y_{t+3} + \left[\frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta} H \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi + \partial^\alpha H \partial_\alpha \theta\right] Y_{t+2} +$
$\left[\frac{1}{3!} \partial^{\alpha\beta\gamma} H \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi \partial_\gamma \psi + \partial^{\alpha\beta} H \partial_\alpha \psi \partial_\beta \theta - i(\partial^\alpha H \partial_\alpha + H^*)\right] Y_{t+1} +$
$\left[\frac{1}{4!} \partial^{\alpha\beta\gamma\delta} H \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi \partial_\gamma \psi \partial_\delta \psi + \frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta\gamma} H \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi \partial_\gamma \theta + \frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta} H \partial_\alpha \theta \partial_\beta \theta\right.$
$\left. - i(\partial^{\alpha\beta} H \partial_\beta \psi \partial_\alpha + \partial^\alpha H^* \partial_\alpha \psi + \frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta} H \partial_{\alpha\beta} \psi)\right] Y^1_t = 0$

64) $HY_{t+5} + \partial^\alpha H \partial_\alpha \psi\ Y_{t+4} + \left[\frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta} H \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi + \partial^\alpha H \partial_\alpha \theta\right] Y_{t+3} +$
$\left[\frac{1}{3!} \partial^{\alpha\beta\gamma} H \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi \partial_\gamma \psi + \partial^{\alpha\beta} H \partial_\alpha \psi \partial_\beta \theta - i(\partial^\alpha H \partial_\alpha + H^*)\right] Y_{t+2} +$
$\left[\frac{1}{4!} \partial^{\alpha\beta\gamma\delta} H \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi \partial_\gamma \psi \partial_\delta \psi + \frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta\gamma} H \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi \partial_\gamma \theta +\right.$
$\left. \frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta} H \partial_\alpha \theta \partial_\beta \theta - i(\partial^{\alpha\beta} H \partial_\beta \psi \partial_\alpha + \partial^\alpha H^* \partial_\alpha \psi + \frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta} H \partial_{\alpha\beta} \psi)\right] Y_{t+1}$
$- i(\frac{1}{2} \partial^{\alpha\beta\gamma} H \partial_\beta \psi \partial_\gamma \psi + \partial^{\alpha\beta} H \partial_\beta \theta)\ \partial_\alpha Y^1_t + \ldots = 0\ ,$

les pointillés désignent un terme linéaire en Y^1_t à coefficients C^∞.

On résout 59) :

$$Y^B_t = \frac{A^B_1}{A^1_1}\, Y^1_t$$

On reporte dans 60) et on résout 60) :

$$Y^B_{t+1} = \frac{A^B_1}{A^1_1}\, Y^1_{t+1} + \partial^\alpha\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)\, \partial_\alpha \psi Y^1_t \ .$$

On reporte dans 61) et on résout 61) :

$$Y^B_{t+2} = \frac{A^B_1}{A^1_1}\, Y^1_{t+2} + \partial^\alpha\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)\, \partial_\alpha \psi Y^1_{t+1} + \left[\frac{1}{2}\, \partial^{\alpha\beta}\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)\, \partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi + \partial^\alpha\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)\, \partial_\alpha\theta\right] Y^1_t \ .$$

On reporte dans 62) ; on écrit que 62) est possible en multipliant par A^1_A ; cette compatibilité est réalisée quel que soit Y^1_t si :

65) $(H''A^1_1)\ (x, \text{grad}\ \psi(x))\ \left[p^\alpha(x)\ \partial_\alpha\psi(x)\right]^3 = i\, L^1_1(x, \text{grad}\ \psi(x))$,

où l'on a encore posé : $p^\alpha(x) = \partial^\alpha H'(x, \text{grad}\ \psi(x))$.

On détermine ψ et W de telle sorte que la condition 65) soit réalisée et que $\text{Im}\ \psi$ vérifie l'inégalité du lemme 6, ce qui est possible puisque $L^1_1(y, \text{grad}\ \psi(y)) \neq 0$.

On résout 62) :

$$Y^B_{t+3} = \frac{A^B_1}{A^1_1}\, Y^1_{t+3} + \partial^\alpha\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)\, \partial_\alpha\psi Y^1_{t+2} + \frac{1}{2}\, \partial^{\alpha\beta}\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)\, \partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi Y^1_t - i\, \partial^\alpha\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)\, \partial_\alpha Y^1_t +$$
$$\partial^{\alpha\beta}\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)\, \partial_\alpha\psi\partial_\beta\theta Y^1_t + \frac{1}{3!}\, \partial^{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{A^B_1}{A^1_1}\right)\, \partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi\partial_\gamma\psi Y^1_t + i\, \frac{A^{1B}_1}{A^1_1}\left[\partial^\alpha H^A_C \partial_\alpha\left(\frac{A^C_1}{A^1_1}\right) + H^{*A}_C\right] Y^1_t \ .$$

On reporte dans 63) ; on écrit que 63) est possible en multipliant par A^1_A ; cette compatibilité est réalisée quel que soit Y^1_t si :

66) $(A^1_1 H'')\ (x, \text{grad}\ \psi(x))\ \left[p^\alpha\partial_\alpha\psi(x)\right]^2\ \left[p^\beta\partial_\beta\theta(x)\right] + P(x) = 0$

où P est connu.

Comme $p^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi(x) \neq 0$, on obtient en fait :

$p^{\beta}\partial_{\beta}\theta(x) = P'(x)$, et on détermine θ tel que $\theta(y^{o},x') \equiv 0$.

On résout 63) comme précédemment ; on reporte dans 65) ; on sait que 65) est compatible ; on trouve que Y_t^1 satisfait à une équation différentielle du 1er ordre le long des bicaractéristiques relatives à ψ. Par récurrence on a une solution asymptotique convenable.

Pour que le problème de Cauchy soit bien posé il faut donc que L_1^1 soit divisible par H' ; nous le supposerons désormais et poserons :

$L_1^1 = \Lambda_1^1 H'$. On démontre alors la :

Proposition 14 b).- S'il existe un point y et une fonction de phase réelle ϕ définie dans un voisinage de y vérifiant $H'(x, \text{grad } \phi(x)) = 0$ dans ce voisinage et telle que $\Lambda_1^1(x, \text{grad } \phi(x)) \neq 0$ alors le problème de Cauchy n'est pas bien posé dans un voisinage de y.

On cherche u sous la forme :

$$u(x,\omega) = \sum_{0 \leq j \leq \infty} Y_{t+j}(x)\ \omega^{-j/2}\ e^{\left[i\omega\delta\phi(x)+\omega^{1/2}\psi(x)\right]}$$

comme au paragraphe IV.

hu se calcule comme au paragraphe IV ; on explicite les coefficients de $\omega^{t-j/2}$, $0 \leq j \leq 4$ et on les annule.

On obtient donc à nouveau 11), 12), 13), 14) et de plus :

$$67)\quad HY_{t+4} + \delta\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}\psi Y_{t+3} + \left\{\frac{1}{2}\,\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha}\psi\partial_{\beta}\psi - i\left[\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha} + H^{*}\right]\right\}Y_{t+2} +$$

$$\left\{\frac{1}{3!}\,\partial^{\alpha\beta\gamma}H\delta\partial_{\alpha}\psi\partial_{\beta}\psi\partial_{\gamma}\psi - i\left[\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha}\psi\partial_{\alpha} + \delta\partial^{\alpha}H^{*}\partial_{\alpha}\psi + \partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}\psi\right]\right\}Y_{t+1} +$$

$$\left\{\frac{1}{4!}\,\partial^{\alpha\beta\gamma\delta}H\partial_{\alpha}\psi\partial_{\beta}\psi\partial_{\gamma}\psi\partial_{\delta}\psi - \frac{i}{2}\left[\partial^{\alpha\beta\gamma}H\partial_{\beta}\psi\partial_{\gamma}\psi\partial_{\alpha} + \partial^{\alpha\beta}H^{*}\partial_{\alpha}\psi\partial_{\beta}\psi + \right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{2}\,\delta\partial^{\alpha\beta\gamma}H\partial_{\gamma}\psi\partial_{\alpha\beta}\psi\right]\right\}Y_{t} = 0\ .$$

On résout 11) comme au paragraphe IV ; on reporte dans 12) de même ; on résout 12) de même ; on reporte dans 13) ; compte tenu des hypothèses, 13) est compatible quel que soit Y_t^1 ; on résout 13) mais en explicitant les termes en Y_t^1 ; on reporte dans 14) , on écrit qu'elle est compatible ; on obtient :

$$\left[p^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi(x)\right]^2 = i\,\delta\,L'(x,\ \text{grad}\ \psi(x))$$

où $L'(\psi)$ est non nul et proportionnel à $\Lambda_1^1(x,\ \text{grad}\ \psi(x))$.

On détermine ψ comme au paragraphe IV.

On résout 14) et on reporte dans 67) ; on écrit qu'elle est compatible ; on trouve que Y_t^1 satisfait à une équation différentielle du 1er ordre le long des bicaractéristiques relatives à ψ .

On a donc, après une récurrence convenable, démontré la proposition.

Pour que le problème de Cauchy soit bien posé il faut donc que L_1^1 soit divisible par $(H')^2$; nous le supposerons désormais et poserons : $L_1^1 = \dot{\Lambda}(H')^2$

On démontre alors :

Proposition 14 c).- S'il existe un point y et une fonction de phase réelle ψ définie dans un voisinage de y vérifiant :
$H'(x,\ \text{grad}\ \psi(x)) = 0$ dans ce voisinage et telle que : $N_1^1(x,\ \text{grad}\ \psi(x)) \neq 0$
alors le problème de Cauchy n'est pas bien posé dans un voisinage de y.

On cherche u sous la forme :

$$u(x,\omega) = \sum_{0\leq j\leq\infty} Y_{t+j}(x)\ \omega^{-j/3}\ e^{i\left[\omega\psi_o(x)+\omega^{1/3}\theta(x)\right]} .$$

On annule les coefficients des $\omega^{t-j/3}$, $0 \leq j \leq 7$ et on choisit $\psi_o = \psi$.

On choisit encore des coordonnées locales adaptées. Les formules 43), 44), 45), 46), 47), 48) restent valables.

On leur adjoint :

68) $$HY_{t+6} + \partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}\theta Y_{t+4} - i(\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha} + H^{*})Y_{t+3} + \frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha}\theta\partial_{\beta}\theta Y_{t+2} -$$
$$i(\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\beta}\theta\partial_{\alpha} + \partial^{\alpha}H^{*}\partial_{\alpha}\theta + \frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}\theta)Y_{t+1} + \Big[-\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta} - \partial^{\alpha}H^{*}\partial_{\alpha} - H^{**} +$$
$$\frac{1}{3!}\partial^{\alpha\beta\gamma}H\partial_{\alpha}\theta\partial_{\beta}\theta\partial_{\gamma}\theta\Big]Y_{t} = 0 .$$

69) $$HY_{t+7} + \partial^{\alpha}H\partial_{\alpha}\theta Y_{t+5} - i(\partial^{\alpha}H\partial_{\alpha} + H^{*})\ Y_{t+4} + \frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha}\theta\partial_{\beta}\theta Y_{t+3} -$$
$$i(\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\beta}\theta\partial_{\alpha} + \partial^{\alpha}H^{*}\partial_{\alpha}\theta + \frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta}\theta)Y_{t+2} + \Big[-\partial^{\alpha\beta}H\partial_{\alpha\beta} - \partial^{\alpha}H^{*}\partial_{\alpha} - H^{**} +$$
$$\frac{1}{3!}\partial^{\alpha\beta\gamma}H\partial_{\alpha}\theta\partial_{\beta}\theta\partial_{\gamma}\theta\Big]\ Y_{t+1} - i\Big[\frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta\gamma}H\partial_{\beta}\theta\partial_{\gamma}\theta\partial_{\alpha} + \frac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H^{*}\partial_{\alpha}\theta\partial_{\beta}\theta +$$
$$\frac{1}{4}\partial^{\alpha\beta\gamma}H\partial_{\alpha\beta}\theta\partial_{\gamma}\theta\Big]Y_{t} = 0 .$$

Nous ne détaillerons pas tous les calculs.

On résout 43), 44), 45), 46), 47) et 48) dans les hypothèses de la proposition sans obtenir de conditions sur θ ou Y^{1}_{t}.

On reporte Y^{B}_{t} , Y^{B}_{t+1} , Y^{B}_{t+2} , Y^{B}_{t+3} , Y^{B}_{t+4} et Y^{B}_{t+5} obtenus dans 68) et on écrit qu'elle est possible en multipliant par A^{1}_{A}.

Cette compatibilité est réalisée quel que soit Y_t^1 si :

$$\left[p^\alpha \partial_\alpha \theta(x)\right]^3 = \dot{N}(x, \text{ grad } \psi(x))$$

où $\dot{N}$ est proportionnel à $N_1^1(x, \text{ grad } \psi(x))$ et non nul.

On en déduit le choix de θ convenable. On résout 68) en Y_{t+6}^B de façon analogue aux calculs précédents. On reporte dans 69). En écrivant que 69) est compatible on obtient une équation différentielle du 1er ordre en Y_t^1 le long des bicaractéristiques de ψ. La proposition, après une récurrence est démontrée et par suite la proposition 13 et le théorème 5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AITKEN, Determinants and matrices, OLIVER BOYD, EDINBURGH, 1959.

[2] R. BERZIN, Comptes rendus, 275, série A, 1972, p. 1091.

[3] R. BERZIN, Comptes rendus, 280, série A, 1975, p. 443.

[4] R. BERZIN et J. VAILLANT, Bull. Sc. Math., 2e série, 102, 1978.

[5] R. BERZIN et J. VAILLANT, Séminaire Leray - Collège de France - 1976-77.

[6] R. BERZIN et J. VAILLANT, Comptes Rendus (à paraître).

[7] BOURBAKI, Modules plats. Localisation, Hermann, Paris, 1961.

[8] BOURBAKI, Groupes et corps ordonnés, Hermann, Paris, 1964.

[9] CHAILLOU, Thèse Sc. Math., Paris, 1969.

[10] J. CHAZARAIN, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 24, n° 1, 1974, p. 173-202.

[11] Mme Y. CHOQUET-BRUHAT, J. Math. Pures et Appl., 48, 1969, p. 117 à 158.

[12] COURANT et HILBERT, II, Interscience Publishers, New York, 1965.

[13] Y. DEMAY, J. Math. Pures et Appl., 51, 1972, p. 393 à 422.

[14] J.C. DE PARIS, J. Math. Pures et Appl., 51, 1972, p. 231-256.

[15] J.J. DUISTERMAAT - L. HÖRMANDER, Acta Math., 128, 1972.

[16] J.J. DUISTERMAAT - Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique, 1972.

[17] H. FLASCHKA - G. STRANG, Adv in math. 6, n° 3 (1971), 347-379.

[18] GÄRDING, KOTAKE et LERAY, Bull. Soc. Math. Fr. 92, 1964, p. 263 à 361.

[19] D. GOURDIN, C.R. Acad. Sc., Paris, t. 278, série A, 1974, p. 269.

[20] D. GOURDIN, J. of Math. of Kyoto Univ., Vol. 17, n° 3, 1977, p. 539 à 566.

[21] HADAMARD, Leçon sur la propagation des ondes, Hermann, Paris, 1903.

[22] L. HORMANDER, Acta Math. 127, 1971.

[23] V. IVRII et V.M. PETKOV, Uspehi Math. Nauk. 29, 5 (1974), 3.70.

[24] KAJITANI, Preprint.

[25] KASAHARA et M. YAMAGUTI,Mem. Coll. Sc. Kyoto, 23, n° 1, 1960.

[26] A. LAX, Comm. Pure Appl. Math., 9 (1956).

[27] P.D. LAX, Duke Math. J., 24, n° 4 (1957), 627-646.

[28] J. LERAY et Y. OHYA, Colloque sur l'analyse fonctionnelle 2 - 1964 - Liège, p. 145-152, C.N.R.B.

[29] J. LERAY, Cours du Collège de France (1976).

[30] LEVI, Ann. mathematica, série III - FA - t. 16, 1909, p. 161-201.

[31] D. LUDWIG, Comm. pure et appl. 13, 1960, p. 473-508.

[32] S. MIZOHATA et Y. OHYA, R.I.M.S. Vol. 4, n° 2 (1966), Kyoto University.

[33] S. MIZOHATA et Y. OHYA, Jap. J. of Math., Vol. 40 (1971).

[34] Y. OHYA, Comm. Pure Appl. Math., 25 (1972).

[35] V.M. PETKOV, Koklody, t. 209, 1973, p. 795-797.

[36] V.M. PETKOV, Travaux du Séminaire I.G. PETROSKI, 1975, p. 211-236, Moscou.

[37] V.M. PETKOV, Equations et systèmes à caractéristiques multiples, Séminaire d'analyse numérique, 1975.

[38] STRANG, Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 33, 1969, p. 358-373.

[39] J. VAILLANT, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 15, n° 2, 1965, p. 225-311.

[40] J. VAILLANT, J. Math. Pures et Appl. 47, 1968, p. 1 à 40.

[41] J. VAILLANT, J. Math. Pures et Appl. 50, 1971, p. 25 à 51.

[42] J. VAILLANT, Annali della scuola normale superiore di Pisa, Classe di scienze, serie 4, vol. 5, n° 2 - 1978.

[43] VAN DER WAERDEN, Modern algebra, Frederick Ungar Publications, New York, 194[illegible]

[44] M. YAMAGUTI, Mem. Coll. Sc. Kyoto, 32 (1959).

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
Section de SCIENCES
LILLE

DEUXIEME THESE

HYPERFONCTIONS ET THEOREME DU "EDGE OF THE WEDGE".

PROPOSITIONS DONNEES PAR L'UNIVERSITE.

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE
Section de SCIENCES
LILLE