

N° d'ordre : 737

50376
1978
234

50376
1978
234

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR TROISIEME CYCLE

SPECIALITE : ELECTRONIQUE

par

Francis WATTIAU

CONTRIBUTION A L'ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DES ECHANGES
THERMIQUES EN REGIME TRANSITOIRE DANS LES MATERIAUX DE CONSTRUCTION.

APPLICATION A LA MESURE DES CONSTANTES THERMOPHYSIQUES.



Soutenue le 18 Décembre 1978 devant la Commission d'Examen

Membres du jury : MM. A. LEBRUN Président
P. THERY Rapporteur
E. CONSTANT Examineur
J.P. DUBUS Examineur
J.C. MARECHAL Invité

B.U. LILLE 1



D 030 139766 6

à ma femme,
à mes enfants,

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Mesures Automatiques de l'Université des Sciences et Techniques de Lille dans le cadre du Centre de Recherche Sciences des Matériaux et Techniques de Construction (CRESMAT).

Monsieur THERY m'a confié le sujet de ce mémoire. Je le remercie de m'avoir incité à développer l'aspect expérimental de ma recherche, donné les bases fondamentales de thermophysique, et encouragé tout au long de mon travail.

Monsieur le Professeur LEBRUN, Directeur du Laboratoire, m'a accueilli dans son service. Je lui exprime ma profonde gratitude pour les conseils et encouragements qu'il m'a prodigués et l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le Jury.

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur le Professeur CONSTANT, Directeur du Centre de 3ème cycle, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de juger mon travail.

Monsieur DUBUS s'est beaucoup intéressé à mes travaux. Son aide et ses conseils dans le domaine du traitement numérique du signal m'ont été très précieux et je lui suis reconnaissant de bien vouloir faire partie du jury.

Monsieur MARECHAL, Directeur de la section Thermique du C.E.B.T.P., dont les travaux font autorité en France, a accepté de faire partie de mon Jury, je l'en remercie vivement.

Mes remerciements vont également aux membres de l'équipe de Mesures Automatiques et notamment à Monsieur WATTRELOT pour son aide technique et sa compétence en microcalculateur.

J'adresse mes remerciements à Madame CASTEGNIER qui a dactylographié le manuscrit, ainsi qu'à l'ensemble du personnel technique et administratif du Service Electronique.

SOMMAIRE

INTRODUCTION	0
 <u>CHAPITRE I : ETUDE ET CARACTERISATION DES ECHANGES THERMIQUES EN REGIME TRANSITOIRE. METHODES FLUXMETRIQUES.</u>	
I - DEFINITION DES GRANDEURS A MESURES	5
I - 1 - Capacité thermique	5
I - 2 - Flux et conductivité thermique : (Loi de Fourier)	5
I - 3 - Equation d'évolution des échanges thermiques	6
II - ETUDE DES ECHANGES THERMIQUES DANS UN MILIEU A UNE DIMENSION.....	7
III - METHODES DE MESURES FLUXMETRIQUES	10
IV - CONDITIONS LIMITEES DEPENDANTES DU TEMPS	16
IV - 1 - Utilisation des transformées de Laplace	17
IV - 2 - Application du principe de superposition.....	17
Exemple d'application à l'étude des échanges thermiques	17
IV - 3 - Identification par la méthode du modèle	20
V - CONCLUSION	23
 <u>CHAPITRE II : ETUDE ET REALISATION DU SYSTEME EXPERIMENTAL PERMETTANT DE CREER UN CHAMP THERMIQUE UNIDIRECTIONNEL.</u>	
I - REALISATION PRATIQUE	25
I - 1 - Plaques échangeuses	25
I - 2 - Vérin pneumatique	27
I - 3 - Sélecteur de source de température	27
I - 4 - Circulation du liquide	28
I - 5 - Sources de températures régulées	28
II - UTILISATION ET CARACTERISATION	28
II - 1 - Utilisation du système	28
II - 2 - Caractérisation des échangeurs	30
III - CONCLUSION	35

CHAPITRE III : MESURE DES FLUX THERMIQUES, REALISATION PRATIQUE DES FLUX-METRES

I - PRINCIPE DE MESURE D'UN FLUX THERMIQUE	37
II - REALISATION DES FLUXMETRES	37
II - 1 - Fluxmètre réel	37
II - 2 - Détails de construction	38
III - MESURES DES CARACTERISTIQUES DES FLUXMETRES	40
III - 1 - Etude en régime permanent	40
III - 1 - 1 - Méthode dite du flux nul	40
III - 1 - 2 - Méthode d'évaluation du rapport des coefficients de transfert des fluxmètres et détermination de ces coefficients ..	41
III - 2 - Etude en régime transitoire	46
III - 2 - 1 - Mesures des capacités respectives	47
III - 2 - 2 - Mesures des constantes de temps. Application de la méthode dite du modèle	48
IV - CONCLUSION	56

CHAPITRE IV : MESURE DES CONSTANTES THERMOPHYSIQUES - RESULTATS EXPERIMENTAUX.

I - METHODE DITE DU BILAN THERMIQUE	59
I - 1 - Description de la mesure	59
I - 2 - Détermination théorique de la capacité mesurée	61
I - 3 - Interprétation des relevés expérimentaux	64
I - 3 - 1 - Considérations expérimentales	64
I - 3 - 2 - Résultats expérimentaux	65
I - 3 - 3 - Conductivité et diffusivité thermique	67
a) Exploitation de la forme d'évolution de $\phi_d(t)$	67
b) Application de la méthode dite du modèle	69
II - METHODE DU GRADIENT THERMIQUE	84
II - 1 - Description de la mesure	84
II - 2 - Expressions analytiques des flux et de la température $T_d(t)$	84
II - 3 - Interprétations des relevés expérimentaux	85
a) Conductivité thermique λ	85
b) Exploitation des évolutions de flux $\phi_d(t)$ $\phi_s(t)$	87
III - AMELIORATION ENVISAGEE	89

./...

IV - APPLICATION DE LA METHODE DU BILAN THERMIQUE DANS LE CAS D'UN MATERIAU HETEROGENE HUMIDE	95
IV - 1 - Généralités	95
IV - 2 - Mesure de la capacité thermique d'un matériau humide	95
IV - 3 - Considérations expérimentales	95
IV - 4 - Résultats expérimentaux	98
CONCLUSION	110
<u>ANNEXE I</u> : ETUDES THEORIQUES DES ECHANGES THERMIQUES EN REGIME TRANSITOIRE DANS UN SYSTEME A TROIS COUCHES "UN ECHANTILLON DE MATERIAU, DEUX FLUXMETRES" SOUMIS A UN CHAMP UNIDIRECTIONNEL DE TEMPERATURE.	112
<u>ANNEXE II</u> : DESCRIPTION DU BANC DE MESURE THERMIQUE ET DE LA CHAINE D'AC- QUISITION NUMERIQUE	121
<u>ANNEXE III</u> : DETERMINATION DES POLES DE LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYS- TEME DU DEUXIEME ORDRE A PARTIR DES COEFFICIENTS DE L'EQUATION DE RECURRENCE DU MODELE QUI LE DECRIT	125
BIBLIOGRAPHIE	128

INTRODUCTION

--:--:--:--:--:--:--:--:--:--

L'isolation thermique est l'un des plus importants sujets d'actualité, qu'il s'agisse d'économie d'énergie ou de confort thermique.

- Du point de vue économie d'énergie, on caractérise un matériau par son coefficient de conductivité thermique " λ ". C'est une grandeur physique positive qui caractérise le transfert de chaleur dans le sens des températures décroissantes. Ce coefficient permet de définir la quantité de chaleur traversant un matériau quand celui-ci est soumis à une différence de température donnée.

- Du point de vue confort thermique, la notion d'inertie calorifique a une importance fondamentale. Lorsqu'un matériau est soumis à une élévation de température donnée, il emmagasine une quantité de chaleur déterminée en un temps donné. Cette quantité de chaleur dépend de la masse volumique " ρ ", de la chaleur massique " c " et du coefficient de conductivité thermique " λ ".

La plupart des matériaux utilisés, pour le confort thermique, ou pour l'économie d'énergie, dans l'habitat, sont des corps poreux, capillaires de type fibreux ou alvéolaire.

Le pouvoir isolant étant associé en partie à la proportion entre la matière solide et les cellules d'air constituant le matériau, il s'en suit que si le matériau s'humidifie, son coefficient de conductivité s'éloigne de celui de l'air pour se rapprocher de celui de l'eau, (dans un rapport voisin de 30). Il en résulte une perturbation profonde de la conductivité apparente du matériau.

Il en est de même de la chaleur spécifique, il faut beaucoup plus d'énergie pour échauffer de un degré un matériau humide que le même matériau sec.

De façon plus générale, les coefficients thermiques effectifs des corps humides dépendent de la coïncidence entre les champs de températures et la distribution d'humidité. Les transferts calorifiques dans les matériaux étant liés à ces coefficients, l'étude détaillée de ces phénomènes commence par la mesure des coefficients thermiques effectifs en fonction du pourcentage d'humidité répartie uniformément dans le milieu poreux.

Nous avons étudié les problèmes expérimentaux spécifiques posés par la mesure des constantes thermophysiques apparentes d'un corps poreux capillaire, humide ou non, et proposons une méthode expérimentale permettant d'apprécier les perturbations induites par de faible pourcentage d'humidité.

Aucun travail de ce type n'ayant été développé jusqu'à présent, au laboratoire de Mesures Automatiques, nous avons passé en revue les diverses méthodes actuellement mises en oeuvre dans les laboratoires universitaires et dans l'industrie pour mesurer les constantes thermophysiques de matériaux de grandes dimensions.

Les méthodes expérimentales généralement choisies pour déterminer la conductivité thermique, sont des méthodes de régime permanent et des méthodes dites calorimétriques pour la mesure de la chaleur massique. Ces méthodes apparaissent à priori simples, surtout dans leur fondement théorique, par contre au niveau expérimental et pour les matériaux de grandes dimensions, elles sont compliquées. Elles posent en effet le problème de l'obtention du régime permanent qui pour être parfait demande un temps d'attente très long, de plus lorsqu'il est obtenu, il faut tenir compte des perturbations parasites et pour obtenir une bonne précision de " λ " il est nécessaire de faire un nombre important de mesures. Les méthodes calorimétriques pour la mesure de la chaleur massique sont bien adaptées pour les matériaux de petites dimensions, la mise en oeuvre d'un tel dispositif pour les matériaux de construction demanderait des moyens expérimentaux très complexes de très grandes dimensions.

Parallèlement à ces méthodes calorimétriques ou de régime permanent déjà anciennes, se sont développées ces dernières années des méthodes de mesures dites de régime transitoire, dans lesquelles on observe les effets d'une rupture de l'équilibre thermique provoquée par un moyen quelconque en un point du matériau étudié. La perturbation résultante ou "signal thermique" peut présenter un caractère transitoire ou permanent comme la perturbation qui lui a donné naissance. L'évolution dans le temps et dans l'espace de l'influence de ce déséquilibre thermique est liée aux grandeurs géométriques et physiques du matériau dans lequel il chemine, ainsi qu'aux conditions limites. L'évolution pseudotemporelle des phénomènes thermiques fait intervenir la diffusivité $a = \lambda/\rho.c$ qui se mesure en m^2/s . L'amplitude du signal thermique fait intervenir le coefficient d'arrachement thermique ou effusivité $\beta = \sqrt{\lambda.\rho.c}$.

Les avantages de ces méthodes sont de nature expérimentale, mesure rapide de quelques dizaines de minutes à l'heure dans la plupart des cas. La grande difficulté du régime permanent due au fait que l'on est jamais sûr d'être en régime stationnaire est supprimée. Par contre, les difficultés sont de types théoriques : dans la résolution des équations thermocinétiques et dans le dépouillement expérimental. Mais l'introduction des "mini calculateurs", des systèmes d'acquisitions de données numériques, fait que ces difficultés théoriques sont fortement minimisées tout en apportant plus de précision sur le dépouillement des mesures.

La rapidité de ce type de mesures et la facilité relative de mise en oeuvre pratique justifie leur utilisation pour la caractérisation thermophysique des matériaux de grandes dimensions, les propriétés de ces derniers ne devant pas être perturbées.

De façon générale, il faut imposer une perturbation des conditions limites appliquées sur l'une ou les deux surfaces externes d'un matériau d'épaisseur donnée et mesurer la grandeur physique caractérisant le mieux l'évolution d'état thermique. Pendant cette transformation les échanges calorifiques s'effectuent au travers des surfaces externes du matériau étudié. La mesure d'une grandeur physique représentant les échanges en régime transitoire permet de déterminer la diffusivité, lorsque les conditions limites restent bien définies pendant la durée de l'évolution du phénomène, ainsi que les autres paramètres λ et c sans qu'il soit nécessaire d'attendre la fin complète du régime transitoire.

Cette façon de faire permet l'utilisation d'un modèle pour représenter les échanges, cette condition est essentielle pour pouvoir dépouiller les mesures à l'aide de modèles théoriques.

Plusieurs configurations expérimentales sont possibles, pour imposer la perturbation : on chauffe la ou les surfaces de l'échantillon par rayonnement et l'on mesure la température superficielle en régime transitoire, on peut également imposer une ou des températures superficielles sur les faces latérales du matériau et mesurer le flux thermique en régime transitoire. Après étude bibliographique des divers systèmes utilisés nous avons choisi le système à températures superficielles imposées qui présente l'avantage de bien définir les conditions limites.

La mise en oeuvre de cette configuration expérimentale a nécessité la réalisation d'un système permettant d'imposer des changements d'état thermique superficiel dans un temps faible vis-à-vis de la constante de temps fondamentale du matériau étudié, la réalisation de capteurs de flux thermique de faible constante de temps nous a permis de mesurer les échanges calorifiques en régime transitoire.

Cette méthode a l'avantage d'être globale et de donner à chaque instant une moyenne spatiale des échanges à travers les surfaces limitant le matériau. Cette façon de procéder est peu répandue à cause des problèmes que pose la construction et l'utilisation des fluxmètres thermiques. Ces capteurs ont une capacité propre qui perturbe les mesures en régime variable et rend délicate l'interprétation des mesures. Il faut pour obtenir des mesures correctes tenir compte de l'effet inertiel du aux capteurs utilisés.

A l'aide d'un système d'acquisition de données numériques les résultats expérimentaux obtenus sont mis en mémoire et traités par des appareils numériques "type calculateur ..." permettant non seulement des relevés rapides et précis mais également d'en déduire avec une très bonne précision et facilité les grandeurs thermophysiques de l'échantillon grâce à la programmation des différents calculs nécessaires.

Nous présentons notre rapport suivant un plan correspondant à l'évolution de notre travail.

Dans une première partie, nous examinons le problème des échanges calorifiques dans un milieu homogène soumis à un champ unidirectionnel de température.

L'exploitation du régime transitoire des flux s'acheminant dans le milieu nous conduit à proposer des méthodes de mesures fluxmétriques permettant de déterminer les constantes thermophysiques des matériaux. Nous développons en particulier les problèmes de la mesure de capacité calorifique.

Dans une deuxième partie, nous détaillons la réalisation des dispositifs expérimentaux : les capteurs de flux caractérisés en régimes permanent et transitoire ainsi que le banc de mesure thermique permettant d'imposer aux surfaces limites du système échantillon-fluxmètres des variations rapides de températures.

Dans une troisième partie, nous examinons le problème des échanges calorifiques dans un milieu à trois couches : un échantillon de matériau et deux fluxmètres. Cette étude permet de tenir compte de la présence des capteurs pour interpréter les relevés expérimentaux présentés.

C H A P I T R E I

ETUDE ET CARACTERISATION DES ECHANGES THERMIQUES EN REGIME TRANSITOIRE. METHODES FLUXMETRIQUES.

Les matériaux de construction étudiés se présentent sous forme de parallélépipède de faible épaisseur vis-à-vis de leurs dimensions latérales. En première approximation, nous pouvons nous limiter à l'étude des échanges thermiques dans le sens de l'épaisseur.

Cette étude préliminaire a pour objet :

- de rappeler la définition des grandeurs à mesurer,
- de déterminer l'expression des températures et flux calorifiques lorsque le matériau est soumis à des sollicitations thermiques suivant son épaisseur, et d'établir les fondements des méthodes de mesure des grandeurs thermophysiques,
- de montrer que les méthodes fluxmétriques sont particulièrement bien adaptées à l'étude des matériaux hétérogènes ; elles permettent notamment l'étude des corps humides dans lesquels les inhomogénéités sont dues à des apports d'humidité localisée dans l'échantillon,
- de définir le système expérimental à réaliser.

I - DEFINITION DES GRANDEURS A MESURER

I - 1 - Capacité thermique

La capacité thermique d'un corps est la quantité de chaleur nécessaire pour élever sa température de un degré à pression constante. Compte-tenu de la définition de la chaleur spécifique c , nous obtenons pour une élévation de température dT ;

$$dQ = M c dT \quad (1)$$

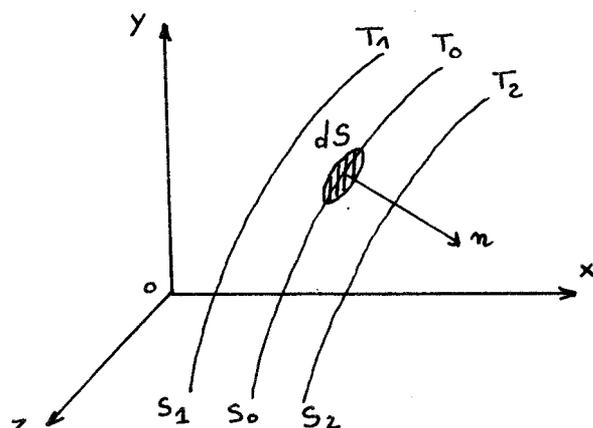
(M étant la masse du corps)

$$d'où : \quad C = \frac{dQ}{dT} = M c \quad (2)$$

(M en kg , c en j/kg.°C , Q en joules , C en j/°C)

I - 2 - Flux et conductivité thermique : (loi de Fourier)

Considérons, dans un échantillon de matériaux, des surfaces isothermes S_1 S_0 S_2 de températures respectives T_1 T_0 T_2 , un élément de surface dS et sa normale n (figure 1). On définit le flux thermique $\phi(n)$ comme étant la quantité de chaleur ∂Q qui traverse, par unité de temps suivant la normale n , l'élément de surface dS .



$$\phi(n) = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (3)$$

($\phi(n)$ en watts par unité de surface)

Figure 1

Le flux est lié au champ de température par la relation phénoménologique :

$$\phi(n) = - \lambda \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial n} dS \quad (4)$$

(λ étant la conductivité thermique suivant la direction normale)

On peut écrire cette relation locale sous la forme :

$$dT = \frac{dn}{\lambda \frac{dS}{S}} \quad \phi(n) = dR \quad \phi(n) \quad (5)$$

définissant ainsi la valeur locale de la résistance thermique dR .

La résistance globale de l'échantillon, supposée homogène, est obtenue par intrégration ;

$$R = \int dR = \int \frac{dn}{\lambda \frac{dS}{S}} = \frac{e}{\lambda S} \quad (6)$$

(e : épaisseur de l'échantillon se mesurant en mètres, λ en watts/°C.m, R en °C/watt).

I - 3 - Equation d'évolution des échanges thermiques

Lorsqu'un solide est soumis à un champ thermique, il est possible d'effectuer à chaque instant le bilan de la chaleur stockée dans un élément de volume dv quelconque (figure 2).

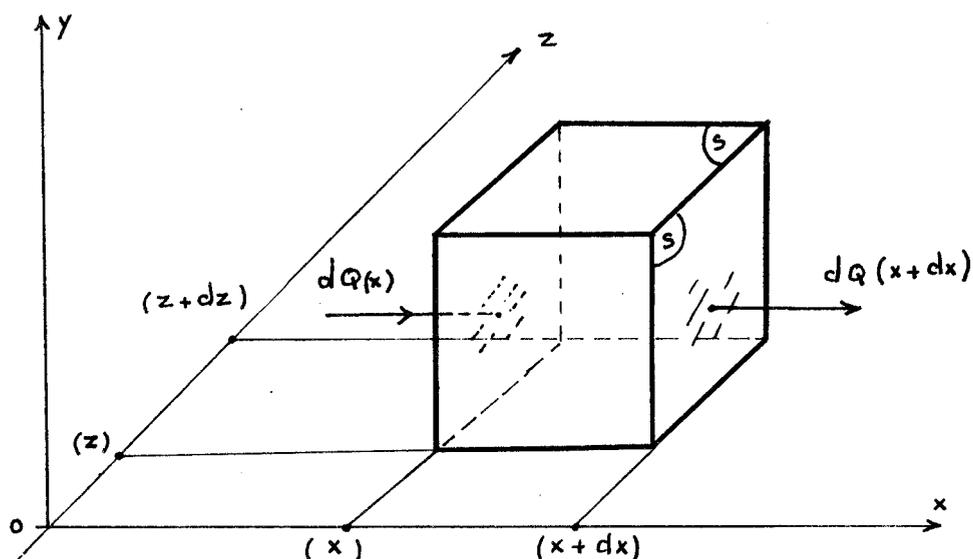


Figure 2

Soit $T(x,y,z)$ le champ thermique. Suivant l'axe ox , l'élément de volume dv reçoit en x une quantité de chaleur $dQ(x)$, (étendue à dS), et libère en $x+dx$ une quantité de chaleur $dQ(x+dx)$. La relation (4) permet d'écrire :

$$dQ(x) - dQ(x+dx) = \lambda \quad dv \quad \frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial x^2} \quad dt \quad (7)$$

En considérant également la progression de la chaleur suivant les axes oy et oz, dans l'élément de volume dv il reste la quantité de chaleur dQ tel que :

$$dQ = \lambda dv \Delta T(x,y,z,t) dt \quad (8)$$

(Δ étant l'opérateur Laplacien)

L'apport calorifique dQ provoque un échauffement et l'application au premier principe (relation 1, sachant que $dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt$), permet d'établir l'équation :

$$\frac{\lambda}{\rho c} \Delta T(x,y,z,t) = \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} \quad (9)$$

(ρ étant la masse volumique).

Cette équation introduit la diffusivité $a = \lambda/\rho c$ qui se mesure en m^2/s .

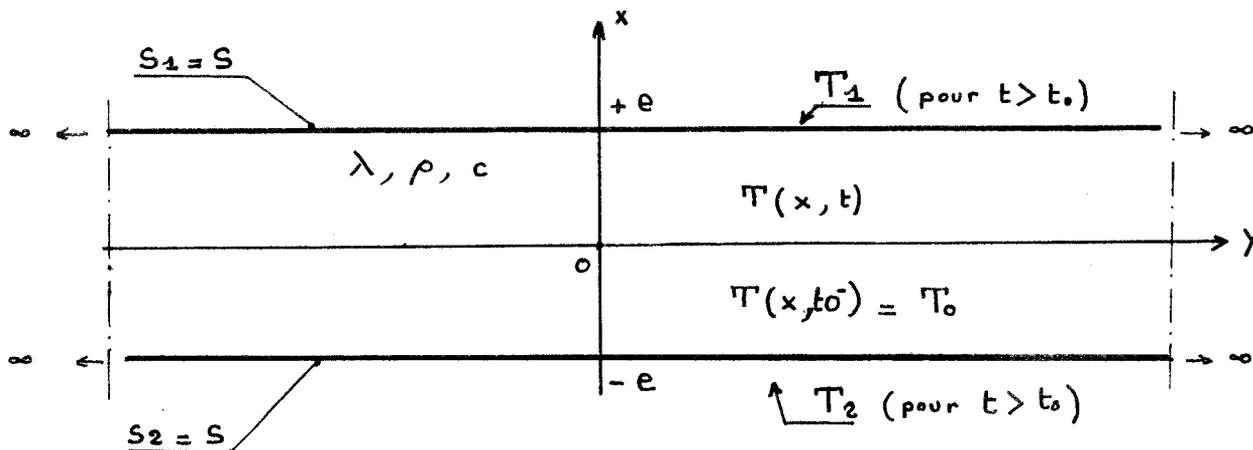
La solution de tout problème de thermique nécessite la résolution de cette équation. Cette solution est déterminée lorsque les conditions limites et initiales sont fixées. Nous nous limiterons à des conditions de Dirichlet dans lesquelles les températures sont imposées sur les surfaces de l'échantillon (dans les conditions de Neuman, le flux est imposé sur la paroi).

II - ETUDE DES ECHANGES THERMIQUES DANS UN MILIEU A UNE DIMENSION

Soit un échantillon d'épaisseur $2.e$ faible vis-à-vis de ses dimensions latérales.

A l'instant initial t_0 , l'échantillon est en équilibre thermique à la température T_0 . A $t = t_0^+$, on impose les conditions limites suivantes :

T_1 température superficielle en $x = +e$, T_2 en $x = -e$



(S : surface de l'échantillon)

Figure 3

Le problème posé de cette façon permet de traiter simultanément plusieurs problèmes d'échanges en régime transitoire, en particulier :

- passage d'un état d'équilibre T_0 à un autre T_1 ; cas où $T_1 = T_2$
- passage d'un état d'équilibre T_0 à un état stationnaire ;
"gradient thermique" , lorsque $T_1 \neq T_2$.

Pour un champ unidirectionnel de température suivant l'axe ox l'équation de Fourier se réduit à :

$$a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

En utilisant la transformée de Laplace, " $\mathcal{L}[T(x,t)] = \Theta(x,p)$ ", qui permet d'introduire facilement les conditions limites et initiales, l'équation (10) devient :

$$a \frac{\partial^2 \Theta(x,p)}{\partial x^2} - p \Theta(x,p) + T(x,0^+) = 0 \quad (11)$$

avec $T(x,0^+) = T_0$, $\forall x$ pour $-e < x < +e$, et T_0 solution particulière

En posant $z = \sqrt{\frac{p}{a}}$, $\Theta(x,p)$ est de la forme :

$$\Theta(x,p) = A \exp(-z x) + B \exp(+z x) + \frac{T_0}{p} \quad (12)$$

Les conditions aux limites définissent deux équations permettant de déterminer les constantes A et B

$$\text{pour } x = e \quad \frac{T_1}{p} = A \exp(-z e) + B \exp(+z e) + \frac{T_0}{p} \quad (13)$$

$$\text{pour } x = -e \quad \frac{T_2}{p} = A \exp(z e) + B \exp(-z e) + \frac{T_0}{p} \quad (14)$$

$$\text{soit } 2 A \operatorname{sh} 2 z e = \frac{T_2 - T_0}{p} \exp(z e) - \frac{T_1 - T_0}{p} \exp(-z e)$$

$$\text{et } -2 B \operatorname{sh} 2 z e = \frac{T_2 - T_0}{p} \exp(-z e) - \frac{T_1 - T_0}{p} \exp(z e)$$

il s'en suit pour l'expression de la température $\Theta(x,p)$:

$$\Theta(x,p) = \frac{T_0}{p} + \frac{(T_2 - T_0) \operatorname{sh} z (e-x) + (T_1 - T_0) \operatorname{sh} z (e+x)}{p \operatorname{sh} 2 z e} \quad (15)$$

et pour l'expression du flux $\Phi(x,p) = -\lambda S \frac{\partial \theta(x,p)}{\partial x}$:

$$\Phi(x,p) = \lambda S z \frac{(T_2 - T_0) \operatorname{ch} z(e-x) - (T_1 - T_0) \operatorname{ch} z(e+x)}{p \operatorname{sh} 2 z e} \quad (16)$$

Les originaux $T(x,t)$ et $\phi(x,t)$ sont obtenus en appliquant l'intégrale de Mellin-Fourier aux images $\Theta(p)$ et $\Phi(p)$. Pour l'expression de la température nous obtenons :

$$T(x,t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} \Theta(x,p) \exp(p t) dp = \Sigma \text{ des résidus de } \Theta(x,p) \exp(p t)$$

Soit $R_0(T)$ le résidu relatif au pôle $p = 0$ de la quantité " $\Theta(x,p) \exp(p t)$ ", $R_k(T)$ un des résidus correspondant aux pôles définis par la relation $\operatorname{sh} 2 z e = 0$

Nous obtenons pour $p = 0$ la solution du régime permanent :

$$R_0(T) = \frac{T_2 + T_1}{2} + \frac{x}{e} \frac{T_1 - T_2}{2} \quad (17)$$

Les pôles relatifs à $\operatorname{sh} 2 z e = 0$ conduisent à la solution du régime transitoire. D'une façon générale $z = \sqrt{\frac{p}{a}}$ est un complexe, en posant $z = \alpha + j\beta$ nous obtenons :

$$\operatorname{sh} 2 z e = \operatorname{sh} 2 e \alpha \cos 2 e \beta + j \operatorname{ch} 2 e \alpha \sin 2 e \beta = 0$$

ce qui implique $\alpha = 0$ d'où $z = \sqrt{\frac{p}{a}} = j\beta$

En posant $p = -m$ où encore $z = j\sqrt{\frac{m}{a}}$ les pôles relatifs à $\operatorname{sh} 2 z e = 0$ sont de la forme :

$$m_k = \frac{a k^2 \pi^2}{4 e^2} \quad \text{avec } k \neq 0$$

et le résidu relatif au pôle $p = -m_k$ est :

$$R_k(t) = \frac{(T_2 - T_0) \sin \sqrt{\frac{m_k}{a}}(e-x) + (T_1 - T_0) \sin \sqrt{\frac{m_k}{a}}(e+x)}{\sqrt{\frac{m_k}{a}} e \cos 2 \sqrt{\frac{m_k}{a}} e} \exp(-m_k t) \quad (18)$$

il s'en suit pour l'expression de la température $T(x,t)$

$$T(x,t) = R_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(t)$$

Soit :

$$T(x,t) = \frac{T_2+T_1}{2} + \frac{x}{e} \frac{T_1-T_2}{2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(T_2-T_0) \sin \frac{k\Pi}{2} (1-\frac{x}{e}) + (T_1-T_0) \sin \frac{k\Pi}{2} (1+\frac{x}{e})}{k\Pi \cos k\Pi} \cdot \exp(-\frac{a k^2 \Pi^2}{4 e^2} t) \quad (19)$$

L'expression du flux $\phi(x,t)$ peut être obtenu indifféremment à partir de l'expression (16) en suivant la même méthode de calcul que pour la température, ou directement de l'expression (19) jusque $\phi(x,t) = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} S$

Soit :

$$\phi(x,t) = \frac{\lambda S}{e} \frac{T_1-T_2}{2} - \frac{\lambda S}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(T_2-T_0) \cos \frac{k\Pi}{2} (1-\frac{x}{e}) - (T_1-T_0) \cos \frac{k\Pi}{2} (1+\frac{x}{e})}{\cos k\Pi} \cdot \exp(-\frac{a k^2 \Pi^2}{4 e^2} t) \quad (20)$$

Dans le prochain paragraphe, nous exploitons cette relation pour définir les méthodes de mesures fluxmétriques utilisables en régime transitoire et permanent.

III - METHODES DE MESURES FLUXMETRIQUES

Pour caractériser thermiquement un matériau, il faut déterminer les constantes thermophysiques à partir de l'évolution de la température $T(x,t)$ et du flux $\phi(x,t)$ en divers points du solide (définis pour plusieurs valeurs données à x).

Expérimentalement, les fluxmètres sont placés sur les faces externes de l'échantillon en $x = -e$ et $x = +e$, ce qui permet des mesures non destructives. Au lieu des valeurs individuelles $\phi(-e,t)$ et $\phi(e,t)$, il est intéressant d'introduire le flux de chaleur entrant dans l'échantillon que nous appellerons $\phi_d(t)$, "différence des flux" ;

$$\phi_d(t) = \phi(e,t) - \phi(-e,t)$$

Introduisons également la composante symétrique $\phi_S(t)$, "somme des flux"

$$\phi_S(t) = \phi(e,t) + \phi(-e,t)$$

Pour l'échange thermique étudié précédemment, compte tenu des relations, nous obtenons :

$$\phi_d(t) = \lambda \frac{S}{e} (T_1 + T_2 - 2 T_0) \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - (-1)^k \right] \exp \left(- \frac{a k^2 \Pi^2}{4 e^2} t \right) \quad (21)$$

$$\phi_S(t) = \lambda \frac{S}{e} (T_1 - T_2) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 + (-1)^k \right] \exp \left(- \frac{a k^2 \Pi^2}{4 e^2} t \right) \right] \quad (22)$$

L'expression (21) ne contient que des harmoniques impairs, l'expression (22) des harmoniques pairs. Soit en explicitant les valeurs de $k = 2p+1$ ou $k = 2 p$;

$$\phi_d(t) = 2 \lambda \frac{S}{e} (T_1 + T_2 - 2 T_0) \sum_{p=0}^{\infty} \exp \left(- \frac{a (2p+1)^2 \Pi^2}{4 e^2} t \right) \quad (23)$$

$$\phi_S(t) = \lambda \frac{S}{e} (T_1 - T_2) \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \exp \left(- \frac{a p^2 \Pi^2}{e^2} t \right) \right] \quad (24)$$

La somme des flux ne dépend pas de l'état initial de température T_0 . Elle converge beaucoup plus rapidement vers son régime permanent que la différence des flux qui a un terme fondamental de constante de temps beaucoup plus important. Il s'en suit, qu'au delà d'un temps relativement court, le régime permanent de la somme des flux est atteint avec une bonne précision et l'expression de la différence des flux se réduit au premier terme de la série (23) (régime exponentiel simple).

Exemple : On souhaite obtenir le régime permanent de $\phi_S(t)$ et le régime exponentiel simple de $\phi_d(t)$ à 1 % près.

- pour l'expression de $\phi_d(t)$, il suffit d'écrire :

$$\exp \left(- \frac{a \Pi^2}{4 e^2} t \right) > 100 \exp \left(- \frac{a 9 \Pi^2}{4 e^2} t \right)$$

soit $t > \frac{\text{Ln } 100}{8} \frac{4 e^2}{a \Pi^2}$ ce qui entraîne $t > 0,058 R C = t_1$

d'où $\phi_d(t) \approx \frac{2 \lambda S}{e} (T_1 + T_2 - 2 T_0) \exp \left(- \frac{\Pi^2}{RC} t \right)$ pour $t > t_1$ (25)

- pour l'expression de $\phi_S(t)$ on impose :

$$100 \times 2 \exp\left(-\frac{a \pi^2}{2} t\right) < 1 \quad \text{ce qui entraîne} \quad t > 0,13 R C = t_2$$

$$\text{d'où } \phi_S(t) \neq \lambda \frac{S}{e} (T_1 - T_2) \quad \text{pour } t > t_2 \quad (26)$$

Les méthodes numériques actuelles nous permettent, à l'aide de programmes d'ajustement exponentiel, de déterminer avec une bonne précision la valeur "R.C." et la valeur $R = \frac{2 \cdot e}{\lambda S}$

L'étude des fonctions $\phi_S(t)$ et $\phi_d(t)$ en régime transitoire est particulièrement intéressante puisqu'elle permet de connaître en des temps assez faibles les constantes thermophysiques des matériaux.

Cette méthode est relativement simple à exploiter lorsque les fluxmètres ne perturbent pas, par leurs présences, les échanges thermiques.

Par contre, elle ne s'applique pas lorsque le matériau est poreux et rendu inhomogène, notamment par une distribution non uniforme de l'humidité, car les relations ci-dessus ont été établis dans le cas de l'étude d'un échantillon de matériau homogène.

Dans la plupart des cas, il est également nécessaire de tenir compte des perturbations introduites par les fluxmètres, l'étude du système (fluxmètres et échantillon) fait l'objet du chapitre IV.

Nous avons mis au point une autre méthode de mesure permettant de déduire avec précision la capacité thermique du matériau, indépendamment de sa conductivité. On effectue le bilan des échanges d'énergie entre le matériau et le milieu extérieur lorsque le système évolue d'un état d'équilibre (T_i température initiale) à un autre (T_f température finale). Entre ces deux états d'équilibre, régime transitoire, la chaleur dQ , entrant dans l'échantillon, par unité de temps est liée à la différence des flux $\phi_d(t)$ par la relation :

$$dQ(t) = \phi_d(t) dt = C \overline{dT}$$

\overline{dT} étant l'augmentation de la température moyenne du matériau.

En intégrant cette relation entre les deux états d'équilibre, nous obtenons :

$$\Delta Q = \int_{t_0}^{\infty} \phi_d(t) dt = C (T_f - T_i)$$

Ce bilan thermique, application du premier principe (paragraphe I-1), permet la mesure de C indépendamment de tout modèle concernant le matériau étudié lorsque l'on connaît $(T_f - T_i)$ et ΔQ . L'exploitation de la courbe donnant l'évolution de $\phi_d(t)$ permet de déterminer la quantité R C .

Des relations obtenues précédemment (paragraphe II), nous pouvons calculer le bilan thermique donnant l'énergie nécessaire pour passer de la température initiale T_0 à un état tel que $T(+e,t) = T_2$ et $T(-e,t) = T_1$.

Nous devons évaluer, sur le régime transitoire, l'intégrale :

$$J_T = \int_{t_0}^{\infty} \phi_d(t) dt \quad (\text{sachant que } \int_0^{t_0} \phi_d(t) dt = 0)$$

Introduisons $\Phi_d(p) = \Phi(e,p) - \Phi(-e,p)$, la relation (16) permet d'écrire :

$$\Phi_d(p) = \frac{\lambda S}{\sqrt{a}} (T_1 + T_2 - 2T_0) \frac{[1 - \text{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} 2e]}{\sqrt{p} \text{sh} 2 \sqrt{\frac{p}{a}} e} \quad (27)$$

Les théorèmes relatifs aux transformées de Laplace nous donnent :

$$\mathcal{L} \left[\phi_d(t) dt \right] = \frac{\Phi_d(p)}{p}$$

$$\limite_{t \rightarrow 0} \phi_d(t) = \limite_{p \rightarrow \infty} p \Phi_d(p) \text{ et inversement,}$$

$$\text{il s'en suit que : } \int_0^{\infty} \phi_d(t) dt = \limite_{p \rightarrow 0} \Phi_d(p) - \limite_{p \rightarrow \infty} \Phi_d(p)$$

La relation (27) permet de déduire ces limites

$$\limite_{p \rightarrow \infty} \Phi_d(p) = 0 \quad \text{et} \quad \limite_{p \rightarrow 0} \Phi_d(p) = \frac{\lambda S e}{a} (T_1 + T_2 - 2T_0)$$

D'où l'expression de l'intégrale J_T :

$$J_T = \int_0^{\infty} \phi_d(t) dt = C \frac{T_1 + T_2 - 2T_0}{2} \quad (28)$$

L'intégrale de la différence des flux est facilement mesurable sur la durée du régime transitoire (à l'aide du calcul numérique). Les températures T_2 , T_1 sont celles des plaques imposant les conditions limites $T(-e,t)$ et $T(e,t)$ de l'échantillon dans l'état final, ces températures comme T_0 , sont expérimentalement faciles à relever.

L'évolution de $\phi_d(t)$ pouvant être assimilée à un régime exponentiel simple pour $t > t_1$ (relation 25), il n'est pas nécessaire d'attendre le régime final d'équilibre thermique pour obtenir la valeur du bilan.

La figure 4 représente la forme de l'évolution de $\phi_d(t)$

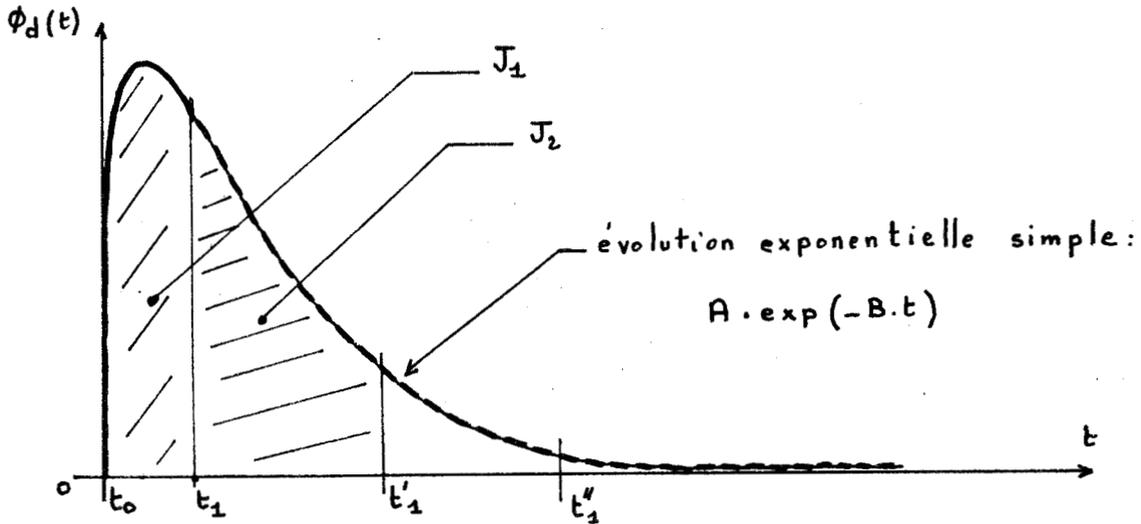


Figure 4

A partir du temps $t = t_1$ la courbe est assimilable à une exponentielle de la forme $A \exp(-B t)$. Le bilan thermique peut être exprimé par les expressions suivantes :

$$J_T = J_1 + \int_{t_1}^{\infty} A \exp(-B t) dt = J_1 + J_2 + \int_{t'_1}^{\infty} A \exp(-B t) dt \quad (29)$$

Pour exploiter cette relation en pratique, nous avons relevé la courbe $\phi_d(t)$ entre l'instant t_0 et l'instant t''_1 et déterminé les coefficients A et B ainsi que la valeur de l'intégrale $J_1 + J_2$, à l'aide de méthodes numériques. Pour obtenir une bonne précision sur les valeurs A , B , l'intervalle de temps (t_1, t''_1) doit être suffisamment élevé.

Dans ce type de mesure, il est très intéressant de choisir $T_1 = T_2$ ce qui entraîne :

$$J_T = J_1 + J_2 + \int_{t'_1}^{\infty} 4 \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_0) \exp\left(-\frac{\Pi^2}{R C} t\right) dt \quad (30)$$

d'où $C = \frac{J_T}{T_1 - T_0}$

avec $A = 4 \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_0)$ et $B = \frac{\Pi^2}{R C}$

Le bilan thermique montre en particulier que la capacité globale d'un matériau humide est égale à la somme des capacités : matériau sec plus l'humidité interne.

Cette méthode vérifie également les hypothèses émises pour l'interprétation des phénomènes. En effet, lorsque le matériau est homogène et que les évolutions temporelles des températures, en $x = e$ et $x = -e$, sont identiques, la symétrie du système impose $\phi_S(t) = 0$ (figure 5) . Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, le matériau est inhomogène. Dans ce cas le déséquilibre des flux observés est caractéristique du degré d'inhomogénéité suivant l'épaisseur de l'échantillon.

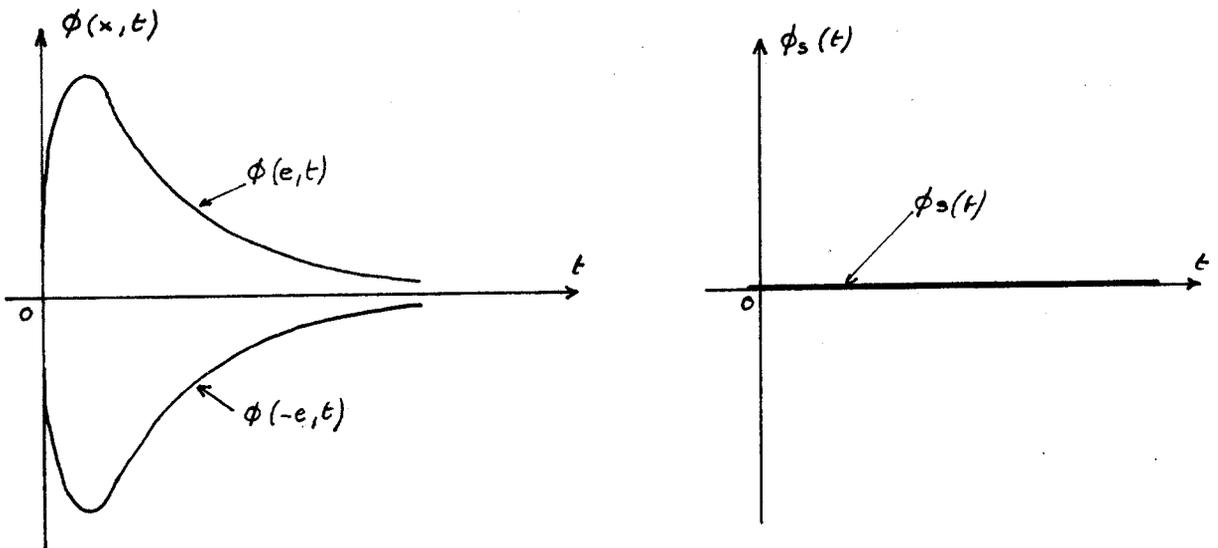


Figure 5

Dans le cas particulier où le matériau étudié se réduit à une capacité d'épaisseur très faible localisée en $x=e$, il est facile de montrer en reprenant les équations de départ que :

$$\phi(-e,t) \neq 0 \quad \text{et} \quad \phi_S(t) \neq \phi(e,t)$$

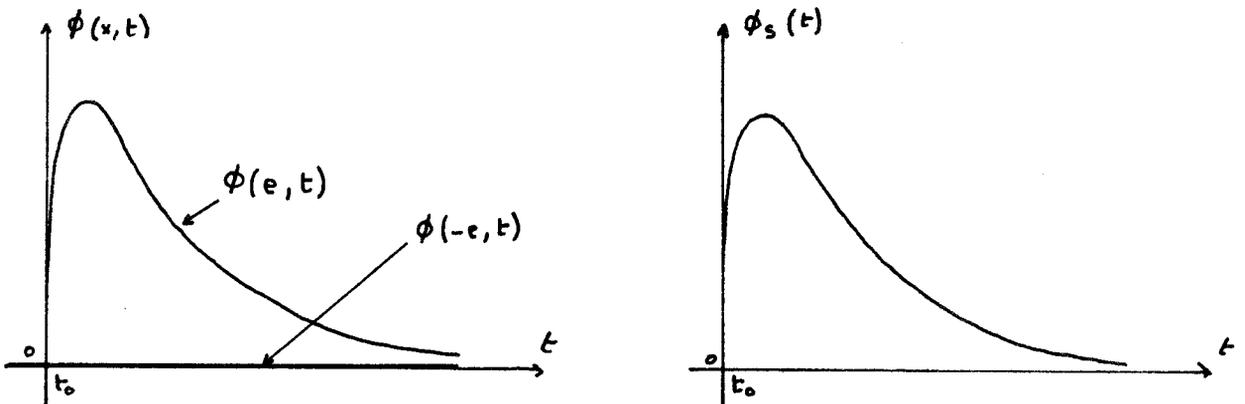


Figure 6

Ces considérations simples, développées dans ce cas particulier, montrent que $\phi_d(t)$ est une mesure instantanée des échanges thermiques et $\phi_s(t)$ une mesure instantanée de la symétrie des échanges. Dans le cas particulier des matériaux humides, ϕ_s peut être utilisée pour localiser, suivant l'épaisseur, le centre de gravité de l'eau par rapport au centre de symétrie de l'échantillon.

Conclusion : en pratique, nous utiliserons deux méthodes de mesure :

- 1) La première caractérise le passage d'un état d'équilibre thermique T_0 à un autre état d'équilibre T_1 ($T_1 = T_2$ dans les expressions). Cette méthode permet, la mesure de la capacité thermique et, de contrôler l'homogénéité de l'échantillon. L'homogénéité étant assurée nous pouvons également déterminer la diffusivité.

- 2) La seconde caractérise le passage d'un état d'équilibre thermique T_0 à un régime permanent (gradient thermique imposé pour $T_1 = T_0$, $T_1 \neq T_2$ dans les expressions). Elle permet la détermination simultanée de la résistance thermique et de la diffusivité dans le cas d'un matériau homogène.

Ces deux méthodes sont complémentaires.

IV - CONDITIONS LIMITES DEPENDANTS DU TEMPS

Nous avons considéré, jusqu'à présent, des changements d'états thermiques idéaux, (échelons de température) aux limites de l'échantillon. En pratique ces conditions idéales ne sont pas toujours respectées.

Considérations expérimentales

-L'état initial de température T_0 est obtenu :

- a) soit en imposant suffisamment longtemps en $x = e$ et $x = -e$ une température superficielle T_0 ,
- b) soit en plaçant l'échantillon dans une enceinte thermostatée, ou en considérant simplement que T_0 représente la température ambiante.

-Deux plaques régulées en température (voir chapitre II) permettent d'imposer pour $t = t_0^+$, à l'échantillon les conditions aux limites T_1, T_2 ;

- 1°) soit mécaniquement (plaques mobiles suivant l'axe o, x)
- 2°) soit par changement d'état des températures des plaques (l'état initial étant obtenu suivant le procédé a) exposé ci-dessus).

Pour ce deuxième cas, les conditions aux limites ne peuvent pas être considérées comme des constantes pour $t \geq t_0^+$. Il est donc nécessaire d'étudier, l'influence de conditions aux limites dépendant du temps sur le comportement thermodynamique du matériau étudié.

IV - 1 - Première méthode : utilisation des transformées de Laplace

Soit $f_{T_1}(t)$, $f_{T_2}(t)$ les fonctions représentant les évolutions temporelles des conditions aux limites pour $t \geq t_0^+$, et $F_{T_1}(p)$, $F_{T_2}(p)$ leurs transformées de Laplace.

Les expressions analytiques de la température $T(x,t)$ et du flux $\phi(x,t)$ sont obtenues en utilisant la méthode mathématique exposée au paragraphe II en remplaçant $\frac{T_1}{p}$ et $\frac{T_2}{p}$ par $F_{T_1}(p)$ et $F_{T_2}(p)$ dans les expressions de $\Theta(x,p)$ et $\Phi(x,p)$.

Cette méthode, dans le cas général où nous devons tenir compte des perturbations des fluxmètres, conduit à des expressions analytiques difficiles à exploiter.

IV - 2 - Deuxième méthode : application du principe de superposition

Si les conditions aux limites dépendent du temps, les relations représentatives de la température et du flux (19) et (20) doivent être généralisées.

Les problèmes étudiés sont linéaires, si les évolutions ultérieures $T^{(1)}$ et $T^{(2)}$ correspondent aux données initiales C_1 et C_2 . En appliquant le théorème de superposition, à la condition initiale $k_1 C_1 + k_2 C_2$ correspond l'évolution $k_1 T^{(1)} + k_2 T^{(2)}$.

Dans le cas particulier qui nous intéresse la solution du problème dépend d'un paramètre Z (Z pouvant représenter par exemple les évolutions des conditions limites en $x=+e$ et $x=-e$ lorsque celles-ci sont identiques).

Z est une fonction du temps τ , à l'instant $t = \tau$; Z varie de dZ entre τ et $\tau + d\tau$. Etudions l'effet déclenché par dZ à partir de l'instant τ sur une fonction $F(x,t)$ dépendant du paramètre Z . Soit :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial Z} dZ = \frac{\partial F}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \tau} d\tau \quad (31)$$

Si nous souhaitons connaître, à l'instant t l'effet de dF , nous devons calculer la perturbation à partir du temps $t - \tau$.

La variation de Z se fait par échelons infiniment petits et la contribution apportée par chacun de ces échelons est :

$$\frac{\partial F(x, t-\tau, Z(\tau))}{\partial Z} \frac{\partial Z(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (32)$$

Sommons les conséquences de ces perturbations, soit :

$$\int_0^t \frac{\partial F(x, t-\tau, z(\tau))}{\partial z} \frac{\partial z(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (33)$$

La valeur de fonction $F(x, t)$ dépendant du paramètre z est donnée par la relation :

$$F(x, t, z) = F(x, t, z_0) + \int_0^t \frac{\partial F(x, t-\tau, z(\tau))}{\partial z} \frac{\partial z(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (34)$$

z_0 étant la valeur de z au démarrage du phénomène.

$F(x, t, \tau)$ peut être dans notre cas un flux ou une température.

Exemple d'application à l'étude des échanges thermiques

Considérons l'expression de la différence des flux :

$$\phi_d(t) = 2 \lambda \frac{S}{e} (T_1 + T_2 - 2T_0) \sum_{p=0}^{\infty} \exp \left(-a \frac{(2p+1)^2 \pi^2}{4 e^2} t \right)$$

Dans le cas particulier où l'on applique des conditions limites identiques en $x = +e$ et $x = -e$, soit $T_1 = T_2 = z$ où z est fonction exponentielle du temps tel que :

$$z(\tau) = \Delta T [1 - \exp(-\tau/b)] + T_0$$

avec $\Delta T = T_1 - T_0$

Ce qui caractérise très bien le cas pratique d'une mesure de bilan thermique.

Pour $T_1 = T_2 = z(\tau)$, l'expression de la différence des flux, à l'instant $t-\tau$ devient :

$$\phi_d(t-\tau, z(\tau)) = 4 \frac{\lambda S}{e} [z(\tau) - T_0] \sum_{p=0}^{\infty} \exp \left[-a \frac{(2p+1)^2 \pi^2}{4 e^2} (t-\tau) \right]$$

La relation (34) entraîne :

$$\phi_d(t, z(\tau)) = \phi_d(t, z_0) + \int_0^t \frac{4 \lambda S}{e} \sum_{p=0}^{\infty} \exp \left[-a \frac{(2p+1)^2 \pi^2}{4 e^2} (t-\tau) \right] \cdot \frac{\Delta T}{b} \exp \left(-\frac{\tau}{b} \right) d\tau$$

Or $z_0 = T_0$ ce qui donne $\phi_d(t, z_0) = 0$ et :

$$\phi_d(t, z_{(\tau)}) = 4 \frac{\lambda S}{e} \Delta T \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\exp [-(2p+1)^2 \Pi^2 t/R C] - \exp [-t/b]}{1 - b \Pi^2 (2p+1)^2 /R C} \quad (35)$$

La solution se confond avec l'expression obtenue au paragraphe précédent pour $b = 0$. Elle sera utilisée pour interpréter une partie de nos résultats expérimentaux.

- En souhaitant utiliser les résultats obtenus au paragraphe précédent, afin de déterminer la quantité $R C$ à 1% près, il faut que $1000 b < R C$ (la variation de la température limite $z_{(\tau)}$ peut ainsi être assimilé à un échelon). Mais en pratique cette condition est difficilement réalisable.

- Nous pouvons cependant rechercher les conditions nécessaires afin que l'expression (35) se réduise également à un régime exponentiel simple.

pour $t > t_1$, t_1 défini au paragraphe II, on peut écrire :

$$\phi_d(t, z_{(\tau)}) \approx 4 \frac{\lambda S}{e} \Delta T \frac{\exp(-\Pi^2 t/R C) - \exp(-t/b)}{1 - b \Pi^2 /R C}$$

On démontre facilement que pour $RC > 90 b$ on a pour $t > t_1$

$$\phi_d(t, z_{(\tau)}) \approx 4 \frac{\lambda S}{e} \Delta T \frac{\exp(-\Pi^2 t/RC)}{1 - b \Pi^2 /RC} \quad \text{à } \pm 1 \% \quad (36)$$

En pratique, pour des échantillons d'épaisseur suffisante ($2e > 15$ mm), la condition $RC > 90 b$ est généralement plus que réalisée, ce qui nous permet encore ici de déterminer la quantité RC avec précision.

Il est à remarquer que la forme de l'évolution temporelle des conditions limites ne perturbe pas la mesure de la capacité C

La relation $\int_0^{\infty} \phi_d(t, z_{(\tau)}) dt = C \Delta T$ est vérifiée.

Il est cependant nécessaire que le temps de passage de T_0 à T_1 , pour les conditions aux limites, soit court afin d'avoir une information de flux d'amplitude convenable.

IV - 3 - Troisième méthode : Identification par la méthode du modèle

Nous avons jusqu'à présent supposé connue, sous forme analytique, l'évolution en fonction du temps des conditions aux limites imposées. Or, nous disposons, pour pratiquer les mesures de température et de flux, d'une chaîne d'acquisition numérique dont le schéma synoptique est donné ci-dessous figure 7.

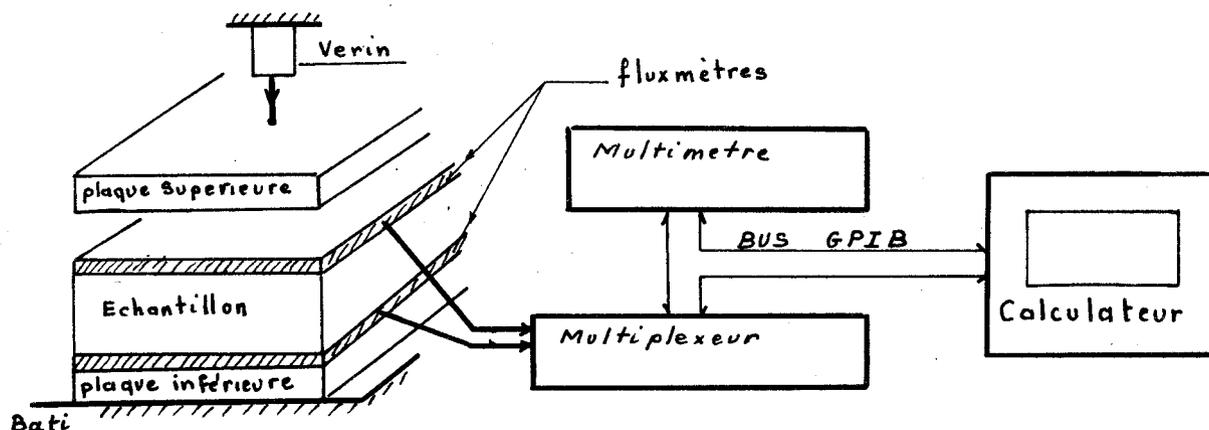


Figure 7

Cette chaîne, décrite en détail en annexe II comporte un multiplexeur bas niveau 40 voies et un multimètre numérique programmable. Le banc de mesure thermique et la chaîne de mesure sont contrôlés par un ordinateur graphique type 4051 Tektronix.

Nous avons profité de la puissance de traitement de ce système pour exploiter les résultats sans avoir besoin de connaître la forme analytique des conditions aux limites imposées au matériau sous épreuve.

Nous avons vu précédemment que l'échantillon pouvait être assimilé à un système du $n^{\text{ième}}$ ordre aperiodique.

Parmi toutes les méthodes numériques d'identification de tels systèmes, nous avons choisi au Laboratoire celle dite du modèle qui ne tient pas compte à priori de la forme du signal d'excitation (conditions aux limites imposées).

Le principe de cette méthode consiste comme le montre la figure 8 à appliquer le signal d'excitation $e(t)$ au système à identifier et à l'entrée d'un modèle mathématique dont on détermine les paramètres. Ce modèle représente le système à identifier lorsqu'il a la même réponse que le système ($y_m(t) = y_s(t)$).

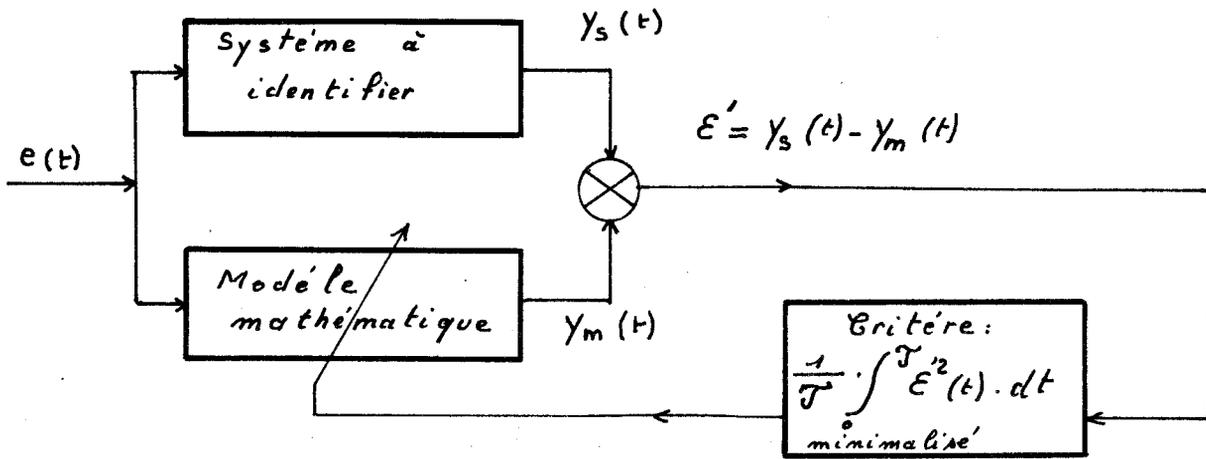


Figure 8

Le modèle mathématique du nième ordre se présente sous la forme d'une équation de récurrence (voir annexe III)

$$y_m(n T) = a_1 y_m ((n-1) T) + a_2 y_m ((n-2) T) + \dots + a_q y_m ((n-q) T) + \dots + b_1 e ((n-1) T) + b_2 e ((n-2) T) + \dots + b_q e ((n-q) T) + \dots \quad (37)$$

où T = période d'échantillonnage

e(iT) sont des échantillons du signal d'excitation

Les coefficients du modèle a_i et b_i sont déterminés de telle façon, qu'au sens des moindres carrés, la différence entre la réponse du modèle et la réponse du système soit minimale.

Soit ε_k = y_s(kT) - y_m(kT) la différence à l'instant kT entre un échantillon du système et un échantillon du modèle.

La différence de réponse qu'il faut rendre minimum entre le modèle et le système au sens des moindres carrés est donné par :

$$D = \sum_{k=1}^{k=N} \left[y_s(kT) - y_m(kT) \right]^2 \quad (38)$$

où N = nombre total d'échantillons mesurés.

Les coefficients a_i et b_i sont alors solution du système d'équations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial a_1} = 0 & \quad \frac{\partial D}{\partial a_2} = 0 & \text{-----} & \quad \frac{\partial D}{\partial a_q} = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial b_1} = 0 & \quad \frac{\partial D}{\partial b_2} = 0 & \text{-----} & \quad \frac{\partial D}{\partial b_q} = 0 \end{aligned} \tag{39}$$

que l'on résout numériquement.

L'expérience montre, qu'au delà du 2ème ordre les termes de la série, représentant la réponse du système, sont pratiquement confondus aux imperfections de la mesure ; pour cette raison, l'identification a été limitée à un modèle du deuxième ordre. Cette limitation offre l'avantage de n'utiliser qu'un très faible emplacement mémoire du calculateur et de rendre transposable le calcul sur microprocesseur en vue de la réalisation d'une chaîne de mesure automatique spécialisée. Le programme a été conçu de telle sorte que l'on puisse aisément augmenter l'ordre du modèle.

Lorsqu'un modèle du deuxième ordre aperiodique a une fonction de transfert donnée par :

$$F(p) = \frac{K}{(p+\alpha_1)(p+\alpha_2)} \tag{40}$$

où α_1 et α_2 sont les inverses des constantes de temps τ_1 et τ_2

On montre que (voir annexe III) l'on obtient les pôles $p_1 = -\alpha_1$ et $p_2 = -\alpha_2$ de la fonction de transfert à partir des coefficients a_1 , a_2 et b_1 , b_2 à l'aide des relations :

$$\alpha_1 = -\frac{1}{T} \operatorname{Ln} \left[\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4 a_2}}{2} \right] \tag{41}$$

et

$$\alpha_2 = -\frac{1}{T} \operatorname{Ln} \left[\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4 a_2}}{2} \right]$$

* Application à la détermination des constantes thermophysiques.

D'une façon très générale l'évolution temporelle de la température $T(x,t)$ ou du flux $\phi(x,t)$, lorsque l'échantillon est soumis à un échelon de température peut être mis sous la forme suivante :

$$F(x,t) = A(x) + \sum_{k=1}^{\infty} B(x,m_k) \exp(-m_k t) \quad (42)$$

en limitant la série au deuxième terme, nous obtenons :

$$F(x,t) = A(x) \left[1 + \frac{B(x,m_1)}{A(x)} \exp(-m_1 t) + \frac{B(x,m_2)}{A(x)} \exp(-m_2 t) \right] + \varepsilon(x,t) \quad (43)$$

Cette expression est représentative de la réponse indicielle d'un système du deuxième ordre. ($\varepsilon(x,t)$ pouvant être négligé dans la plupart des cas). La méthode d'identification présentée ci-dessus nous permet ainsi, de calculer les grandeurs m_1 , m_2 liées à la constante de temps propre R C de l'échantillon, indépendamment de la connaissance de l'évolution temporelle des conditions aux limites imposées.

Cette méthode a été mise au point au Laboratoire récemment sous la direction de J.P. Dubus, et jusqu'à présent nous ne l'avons tester que sur un nombre restreint de campagnes de mesures dont quelques résultats sont résumés dans les prochains chapitres.

V - CONCLUSION

Cette étude théorique simplifiée montre que l'évolution des flux sur les surfaces d'un échantillon caractérise les échanges thermiques dans le matériau et permet la détermination des constantes thermophysiques.

En réalité, le système étudié n'est pas constitué d'un matériau homogène seul, mais d'un ensemble à trois couches : l'échantillon et deux fluxmètres. Pour tenir compte de la présence des fluxmètres sur la dynamique des échanges thermiques, il est nécessaire de reprendre le problème traité dans le cas d'un milieu symétrique à trois couches. Compte tenu de la complexité des expressions obtenues, nous reportons ce calcul en annexe.

I - REALISATION PRATIQUE

Compte tenu des différents critères définis ci-dessus, nous avons mis en oeuvre le montage expérimental représenté figure 1, page 26 .

Deux bains réglés en température jouent le rôle de sources thermiques. Des circuits hydrauliques assurent les liaisons entre les bains et deux plaques de grandes dimensions. Ces dernières ont pour rôle d'imposer les températures superficielles limites à l'échantillon.

Le système ainsi réalisé, tout en étant représentatif d'un générateur de températures superficielles, offre l'avantage d'une grande souplesse d'utilisation, soit :

I - 1 - Plaques échangeuses

Une plaque est constituée d'un serpentin fraisé dans une masse métallique (figure 2, page 26) où peut circuler le liquide provenant d'un bain réglé en température. La forme géométrique du serpentin a été choisie de façon à obtenir une répartition homogène en surface de la température.

Si l'on change brusquement la température du liquide passant dans le serpentin, et si nous souhaitons que la masse métallique suive rapidement ce changement d'état, nous avons intérêt à choisir un volume faible de métal par rapport à celui représentant le serpentin.

Compte tenu du fait qu'il faut également une bonne rigidité mécanique (la planéité étant très importante pour le contact thermique), nous avons pris un volume de métal, qui est ici du laiton, à peu près égal au double de celui du serpentin.

D'autres plaques actuellement en projet seront réalisées dans un matériau plus rigide, tel que certains alliages d'aluminium, qui, tout en étant légers conservent des propriétés mécaniques et thermiques très intéressantes. Le rapport, volume serpentin sur volume métal, sera alors augmenté, ce qui permettra une diminution du temps de réponse de la plaque.

Les surfaces non actives des plaques sont isolées thermiquement par 2 cm de polystyrène, afin de minimiser les déperditions de chaleur ; ces derniers pouvant influencer très fortement sur la stabilisation thermique. Des rainures de 0,3 mm de profondeur sont réalisées (cotés actifs) afin de permettre la prise d'information de température à l'aide de thermocouples.

Deux plaques sont ainsi mises en oeuvre : une plaque inférieure fixée sur le bâti , une plaque supérieure mobile guidée latéralement en trois points et pouvant se déplacer verticalement grâce à un vérin pneumatique.

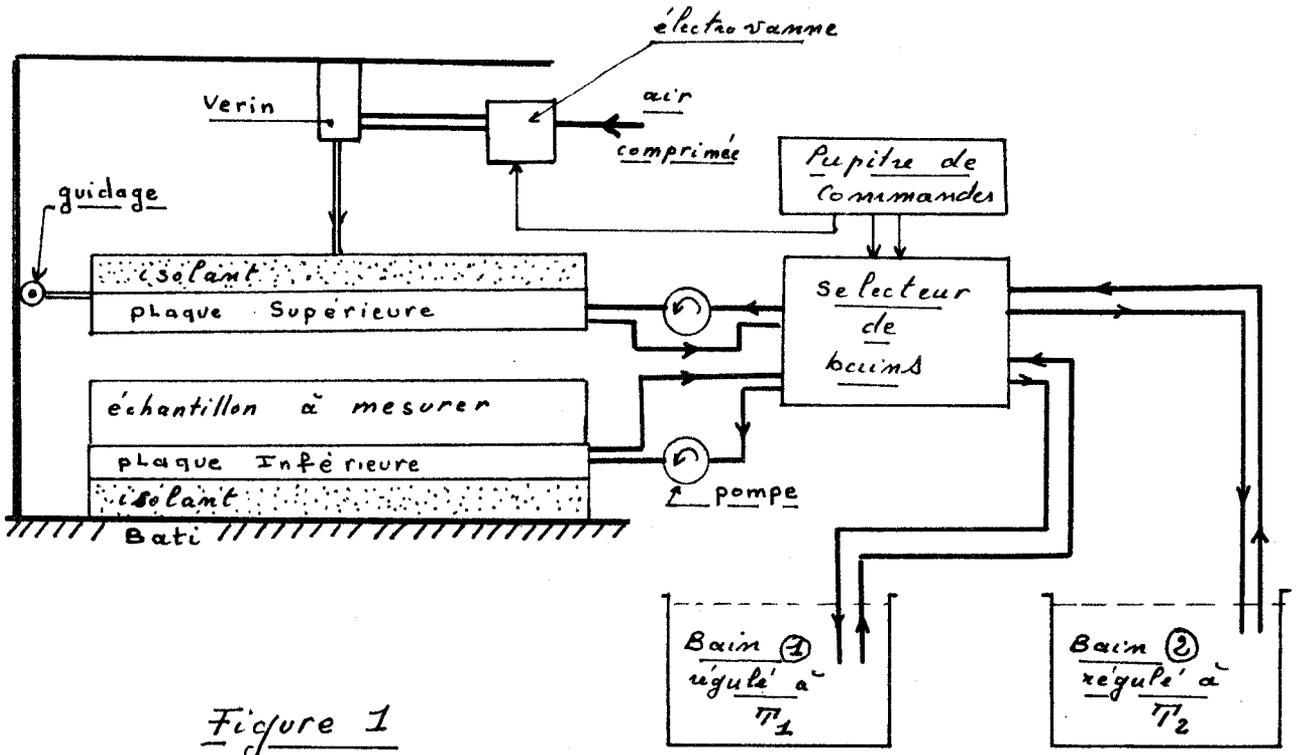


Figure 1

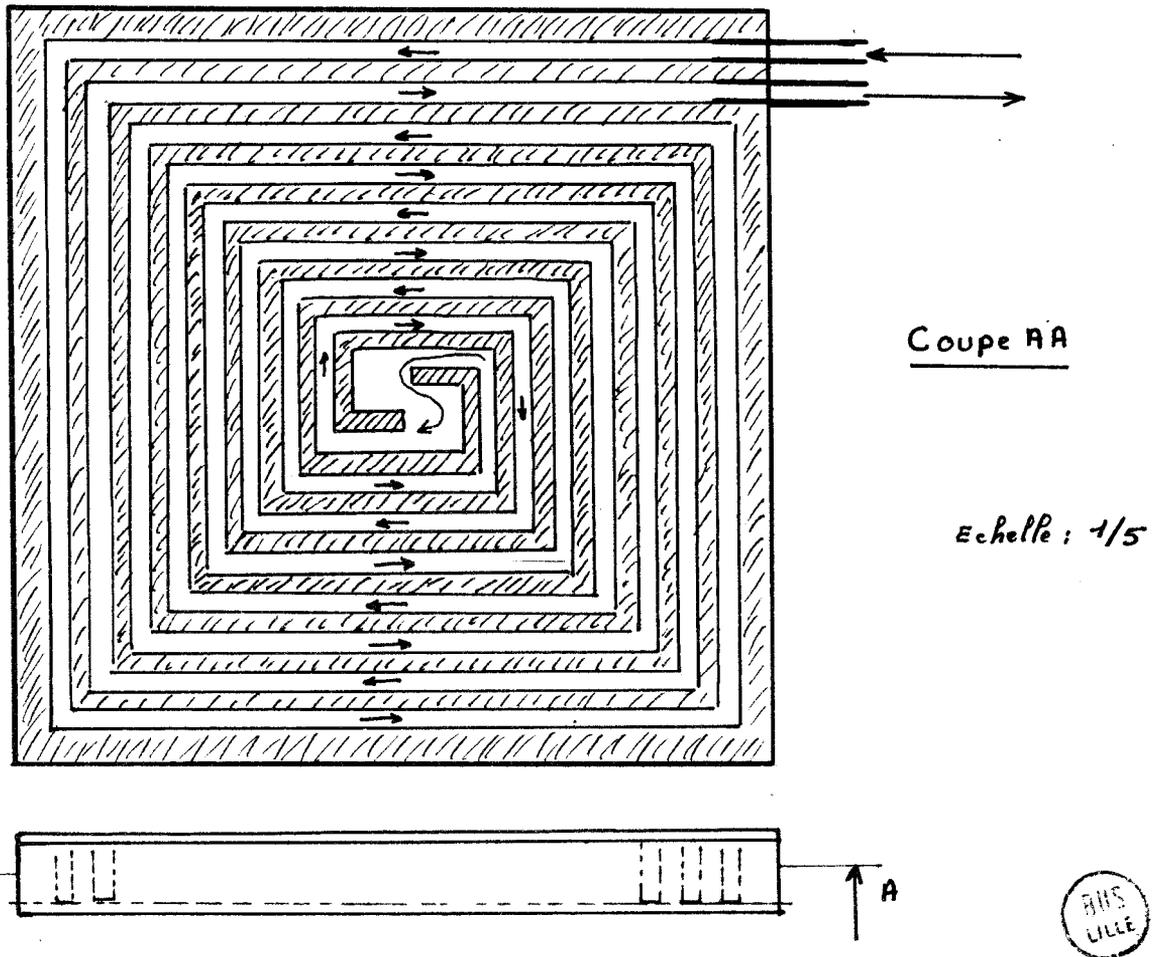


Figure 2

I - 2 - Vérin pneumatique

Le déplacement par vérin permet une certaine souplesse de l'application de la plaque sur l'échantillon (certains matériaux ne pouvant pas résister au choc mécanique important) tout en imposant une pression P contrôlable (certains matériaux étant très compressibles).

Une électrovanne double permet la commande (descente ou montée du vérin (figure 3) ce qui permettra une automatisation du système.

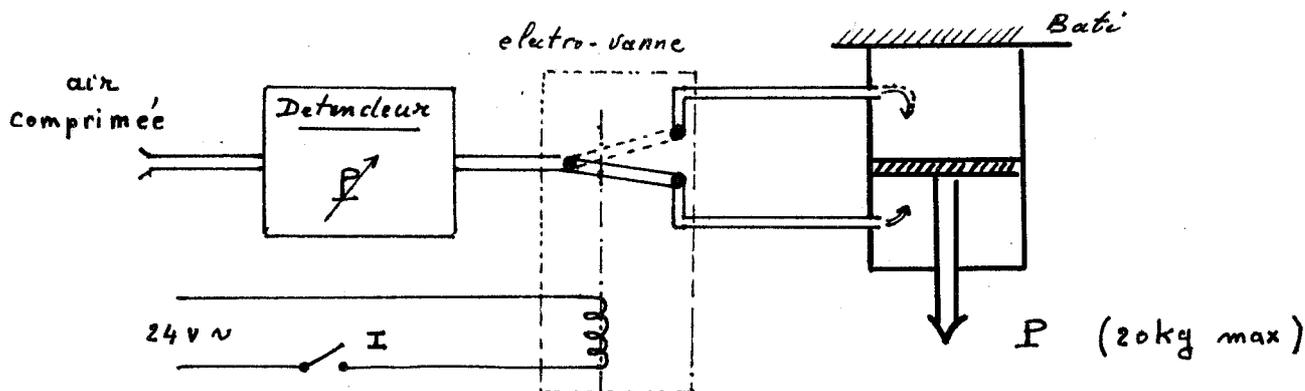


Figure 3

I - 3 - Sélecteur de Source de température

Le schéma de principe pour une plaque est donné figure 4 , page 29 Le sélecteur est essentiellement constitué de deux groupes d'électrovannes, l'un permettant les différentes possibilités de liaisons des plaques avec les bains régulés, l'autre servant de sécurité pour les pompes.

Les différentes possibilités sont :

- les deux plaques sont à des températures identiques, donc reliées au même bain ① ou ② ,
- les plaques sont à des températures différentes : plaque supérieure reliée au bain ① et plaque inférieure au bain ② ou inversement.

La difficulté de trouver des électrovannes doubles pour des sections de passage important nous a fait utiliser 5 électrovannes simples pour réaliser la commutation d'une plaque, soit :

- | | |
|-------------------------|-----------------------------------|
| plaque reliée au bain ① | A et C ouvertes
B et D fermées |
| plaque reliée au bain ② | A et C fermées
B et D ouvertes |

I - 4 - Circulation du liquide

Le liquide utilisé pour la liaison thermique, entre plaques et bains, est ici de l'eau distillée. Sa circulation est assurée à l'aide de pompes à débit ajustable (de 200 à 300 l/h). Elles sont placées au niveau des plaques afin que le système conserve des caractéristiques identiques quelle que soit la position du sélecteur. L'ajustement de la vitesse de chaque pompe permet de minimiser les imperfections de symétrie des systèmes (les températures des plaques ayant ainsi des évolutions temporelles identiques lors d'une commutation de bains).

I - 5 - Sources de températures réglées

Le schéma de principe est donné figure 5, page 29

Les sources de températures sont obtenues à l'aide de deux bains d'eau de grande capacité (30 litres), ce qui permet de fournir à l'échantillon une quantité de chaleur instantanée élevée tout en introduisant un minimum de perturbation sur les températures superficielles imposées. La stabilisation en température d'un bain est assurée par un circuit de refroidissement et un ensemble régulateur comprenant une résistance chauffante commandée à l'aide d'un ultrathermostat. Un agitateur rend le bain isotherme. La température du bain est stable à $\pm 0,05^\circ\text{C}$.

Nous avons choisi un ensemble régulateur du type "tout ou rien" pour son temps de réponse (ou de récupération) relativement faible. Cette caractéristique est importante, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, pour certains types de manipulations.

Remarque : Il est nécessaire de faire une distinction entre les modes de régulation des deux bains. Le bain dit chaud n° ② (35°C à 40°C) doit généralement fournir de l'énergie à l'échantillon tandis que le bain froid n° ① (20°C à 25°C) doit être capable d'évacuer cette énergie. Il s'en suit que le circuit de refroidissement du bain froid doit être beaucoup plus important que celui du bain chaud (pour des ensembles régulateurs de mêmes caractéristiques).

II - UTILISATION ET CARACTERISATION

II - 1 - Utilisation du système

Deux méthodes d'utilisation sont possibles :

a) l'une consiste à imposer le changement d'état thermique des conditions limites de l'échantillon, mécaniquement (à l'aide du vérin) :

- initialement, l'échantillon étant à une température uniforme T_0 est placé sur la plaque inférieure, à la température T_2 , tandis que la plaque supérieure à T_1 est en position haute (figure 6)

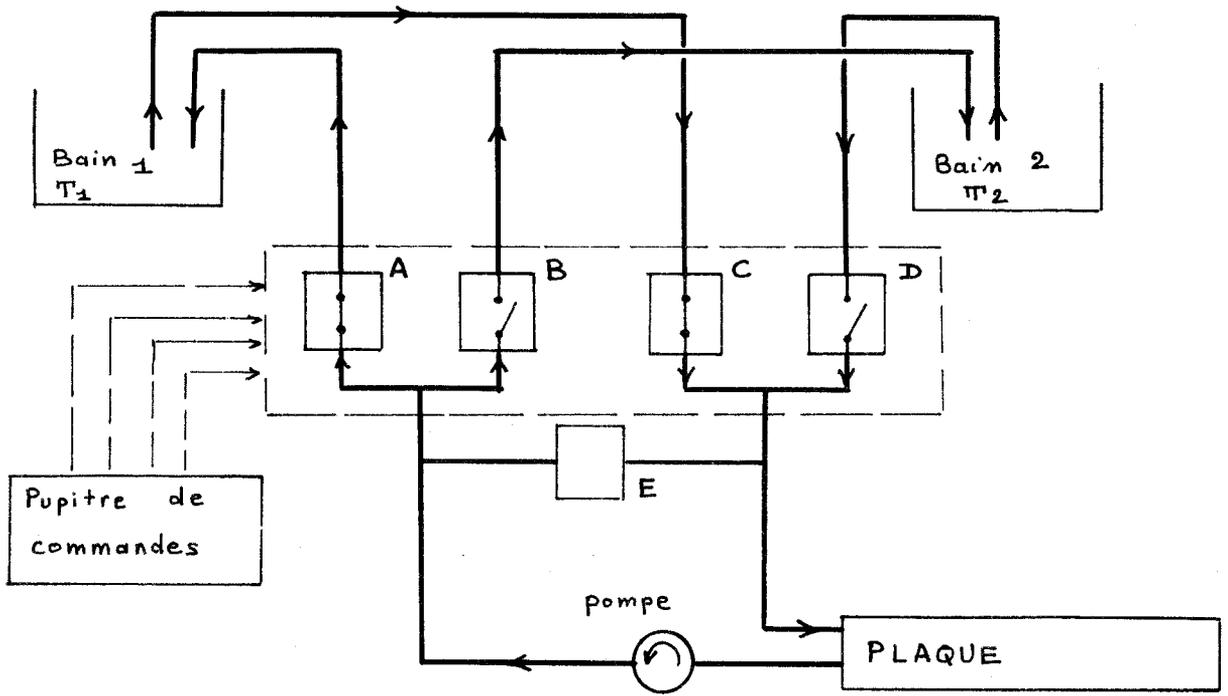
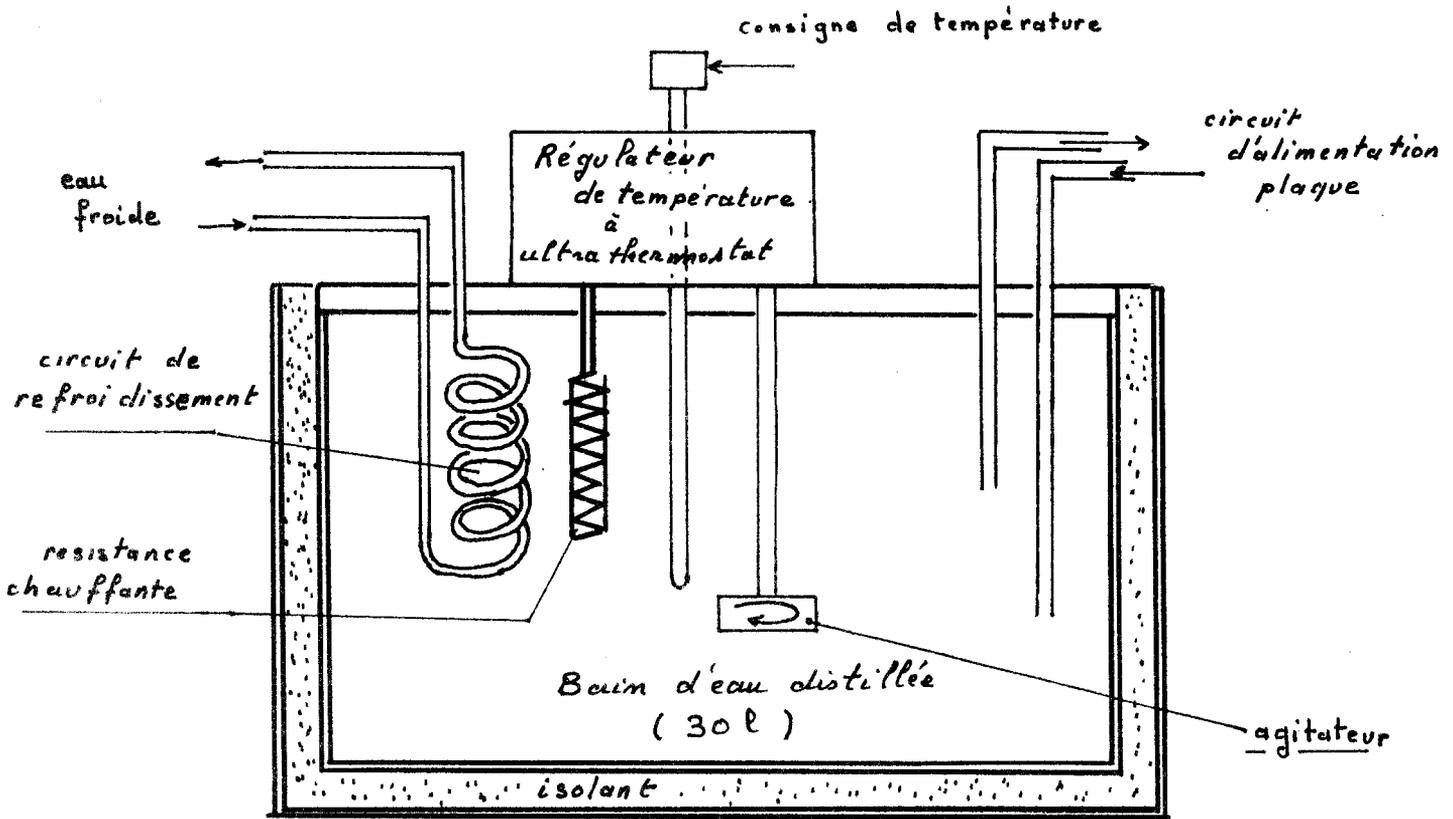


Figure: 4



Source de température

Figure: 5



- à l'instant t_0^+ on vient appliquer la plaque supérieure sur l'échantillon

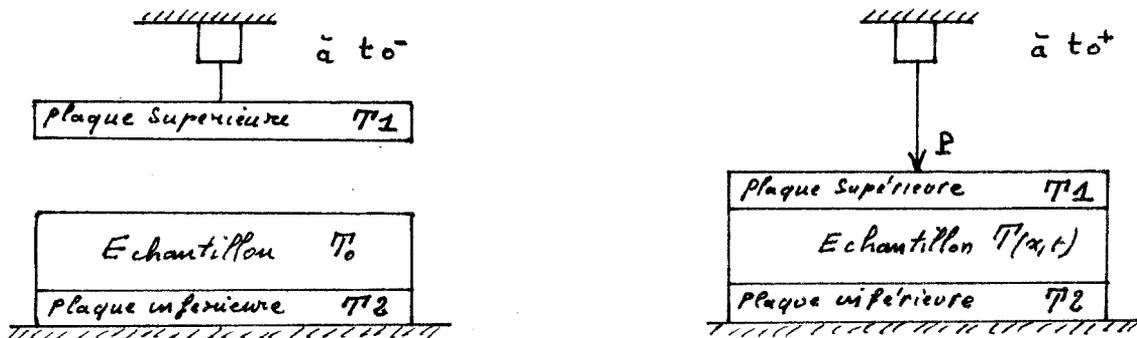


Figure 6

Il est à remarquer, pour ce type d'utilisation, qu'il est nécessaire de choisir T_2 très peu différent de T_0 (T_0 représentant généralement la température ambiante), pour que l'on puisse considérer l'échantillon soumis à un échelon de température.

b) L'autre méthode consiste à laisser en permanence les plaques échangeuses en contact avec l'échantillon. Le changement d'état thermique des conditions limites imposées est obtenu par commutation des plaques d'un bain sur l'autre. Dans ce cas l'échantillon n'est pas soumis à un échelon de température parfait et il est nécessaire de tenir compte de l'évolution temporelle des conditions limites (voir chapitre I, paragraphe IV).

Les différentes possibilités de commutation qu'offre le sélecteur de sources permettent l'étude du comportement thermique d'un échantillon dans les configurations suivantes :

- passage d'un état d'équilibre thermique à un autre et réciproquement,
- passage d'un état d'équilibre à un état stationnaire (gradient de température) et inversement,
- passage d'un état stationnaire positif à un état stationnaire négatif.

II - 2 - Caractérisation des échangeurs

Lors d'une commutation des plaques d'un bain sur l'autre, il se produit des perturbations qui font que le changement d'état des conditions limites imposées à l'échantillon n'est pas un échelon de température. L'étude théorique étant très complexe, nous nous sommes limités à l'étude expérimentale de la réponse du système.

On peut cependant introduire :

- le temps d'échange du liquide (contenu dans une plaque)
- le temps de récupération d'un bain
- le temps d'échange thermique entre le liquide et la plaque
- le temps de réponse propre de la masse métallique constituant la plaque

Afin de donner une interprétation physique de la réponse d'une plaque, le graphe 1, page 33 représente l'évolution temporelle de la température d'une plaque, ainsi que celle du bain sur lequel la plaque est commutée à l'instant t_0^+ (initialement la plaque est alimentée par le bain ① et pour $t > t_0$ par le bain ②).

a) Interprétation physique du graphe 1

- l'intervalle de temps t_0, t_r (ou retard) est lié essentiellement à la vitesse de la pompe ; il correspond, en première approximation, au temps d'échange complet du liquide contenu par une plaque ($t_r - t_0 \neq 10$ s)

- entre l'instant t_r et t_a intervient principalement le temps d'échange thermique entre liquide et plaque ainsi que le temps de réponse propre de la plaque.

Pour la température du bain, on peut remarquer en première approximation que tout se passe comme si nous venions plonger, à une vitesse donnée, la plaque échangeuse et son liquide initialement à T_1 , dans le bain d'eau initialement à une température T_2 . Ceci explique la diminution observée de la température du bain 2 .

- pour les temps $t > t_a$ on voit apparaître le temps de récupération du système, lié à la puissance de chauffe du régulateur. Cette montée lente de température est néfaste pour nos expérimentations.

b) Suppression du temps de récupération du système

Afin de conserver une bonne stabilité de la température des bains, nous avons employé la méthode dite de surchauffe initiale qui supprime l'effet du temps de récupération.

Initialement, pour t_0^- le bain est régulé à une température $T_2 + dT_2$; au moment de la commutation la consigne de température du régulateur est mise à T_2 , figure 7 ci-dessous

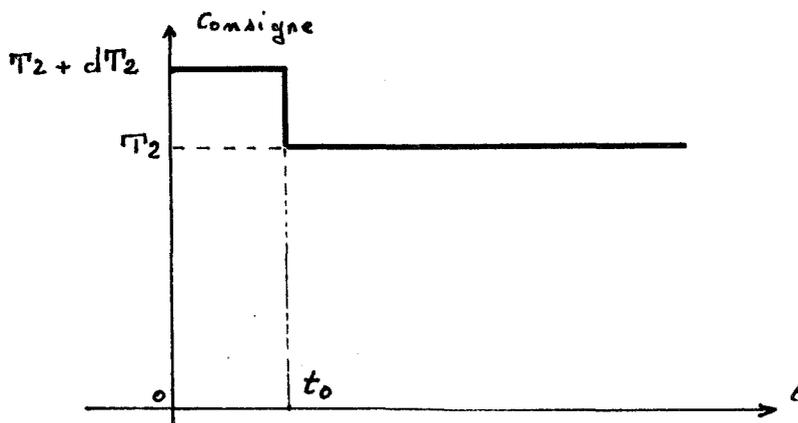


Figure 7

Les réponses temporelles du bain et de la plaque échangeuse supérieure sont représentées graphe 2, page 33 . La surchauffe dT_2 est déterminée expérimentalement.

En utilisant la méthode d'identification dite du modèle décrite au chapitre I , nous pouvons dire que la réponse temporelle Z de la plaque supérieure est identique à celle d'un premier ordre pour $t > t_r$, $(t_r - t_0)$ étant un retard pur, soit :

$$Z \neq \Delta T \left(1 - \exp \left[-\frac{1}{\tau_1} (t - t_r) \right] \right) + T_i$$

avec $\Delta T = T_f - T_i$: différence des températures finale et initiale

τ_1 = constante de temps de la réponse de la plaque supérieure.

L'évolution Z calculée à l'aide du modèle mathématique est portée sur le graphe 3, page 34 et montre que l'identification est excellente.

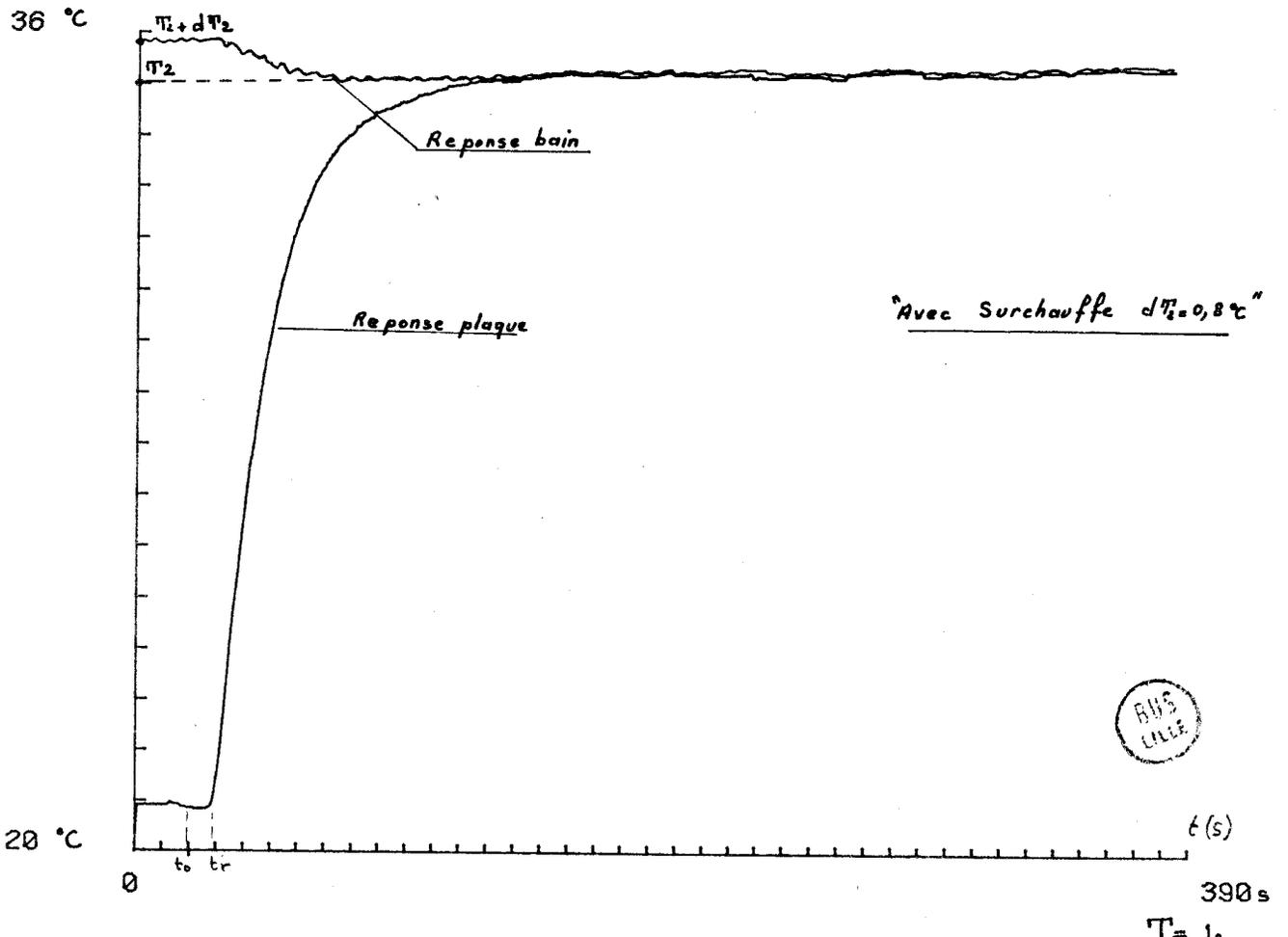
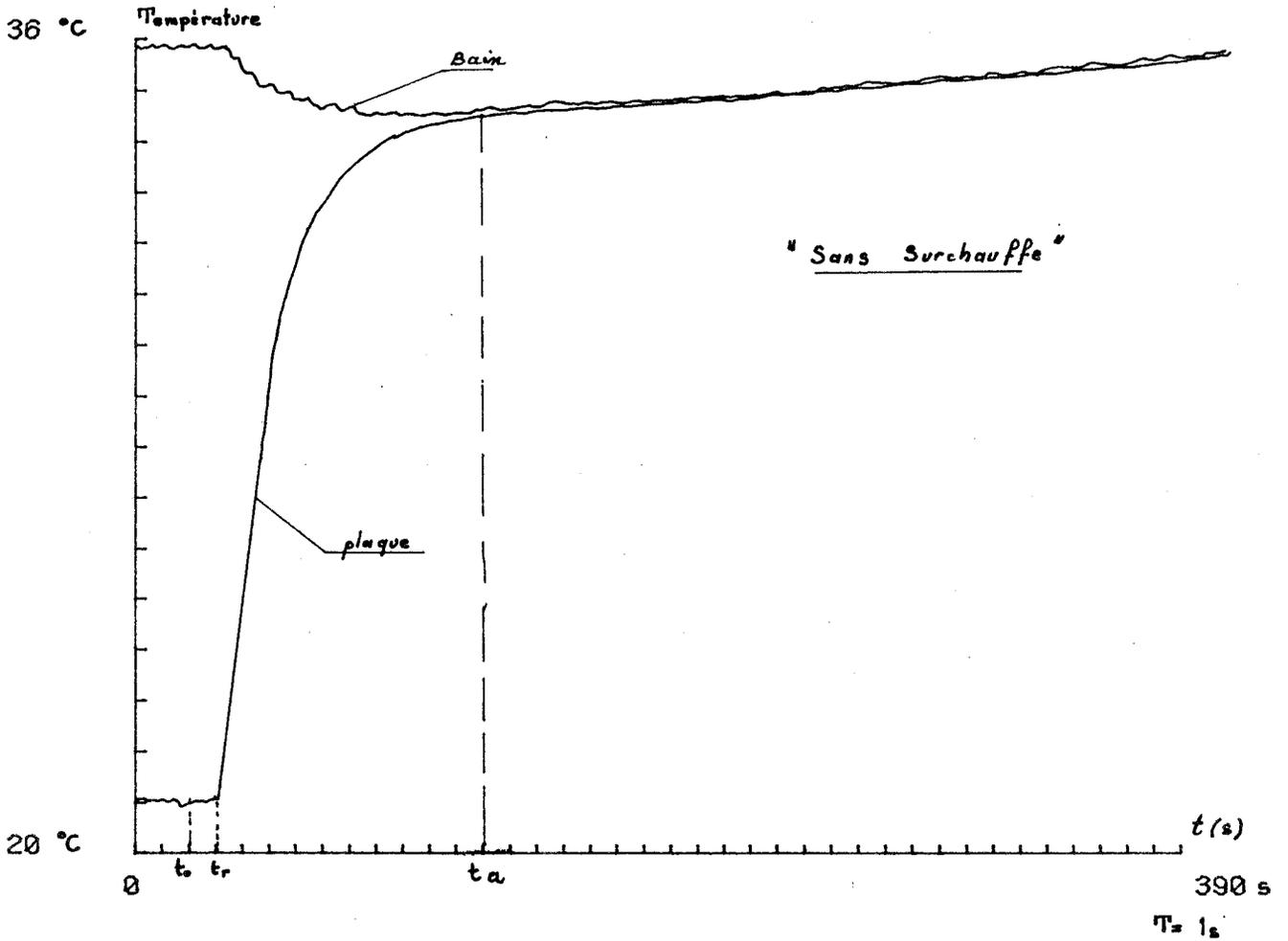
Nous avons fait la même étude pour la plaque inférieure et nous pouvons conclure, avec une précision de l'ordre de quelques %, que les réponses temporelles des deux plaques échangeuses sont identiques en ajustant convenablement les vitesses des pompes. Le graphe 4, page 34 représente les évolutions temporelles des températures des deux plaques lorsque celles-ci sont commutées sur le même bain.

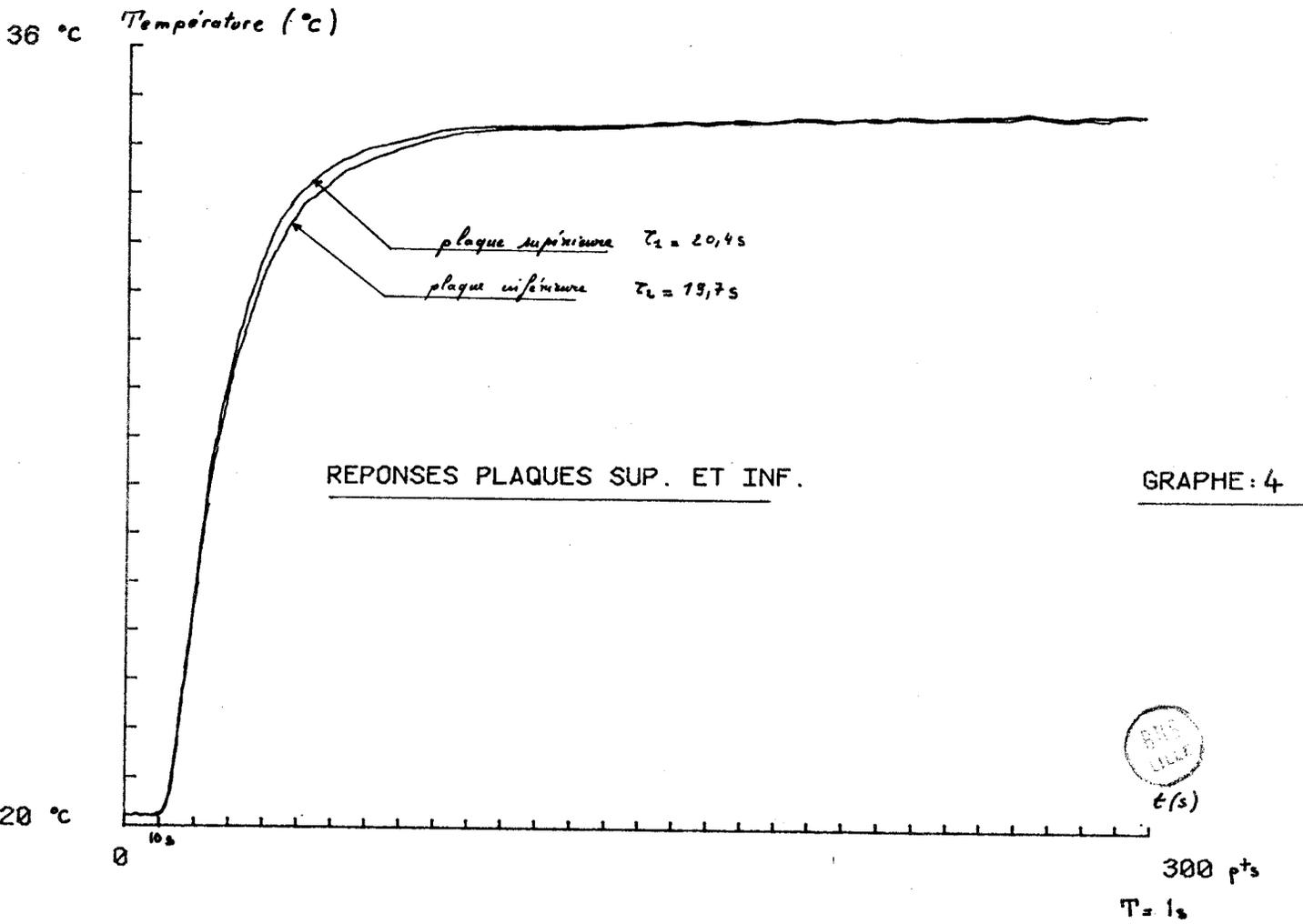
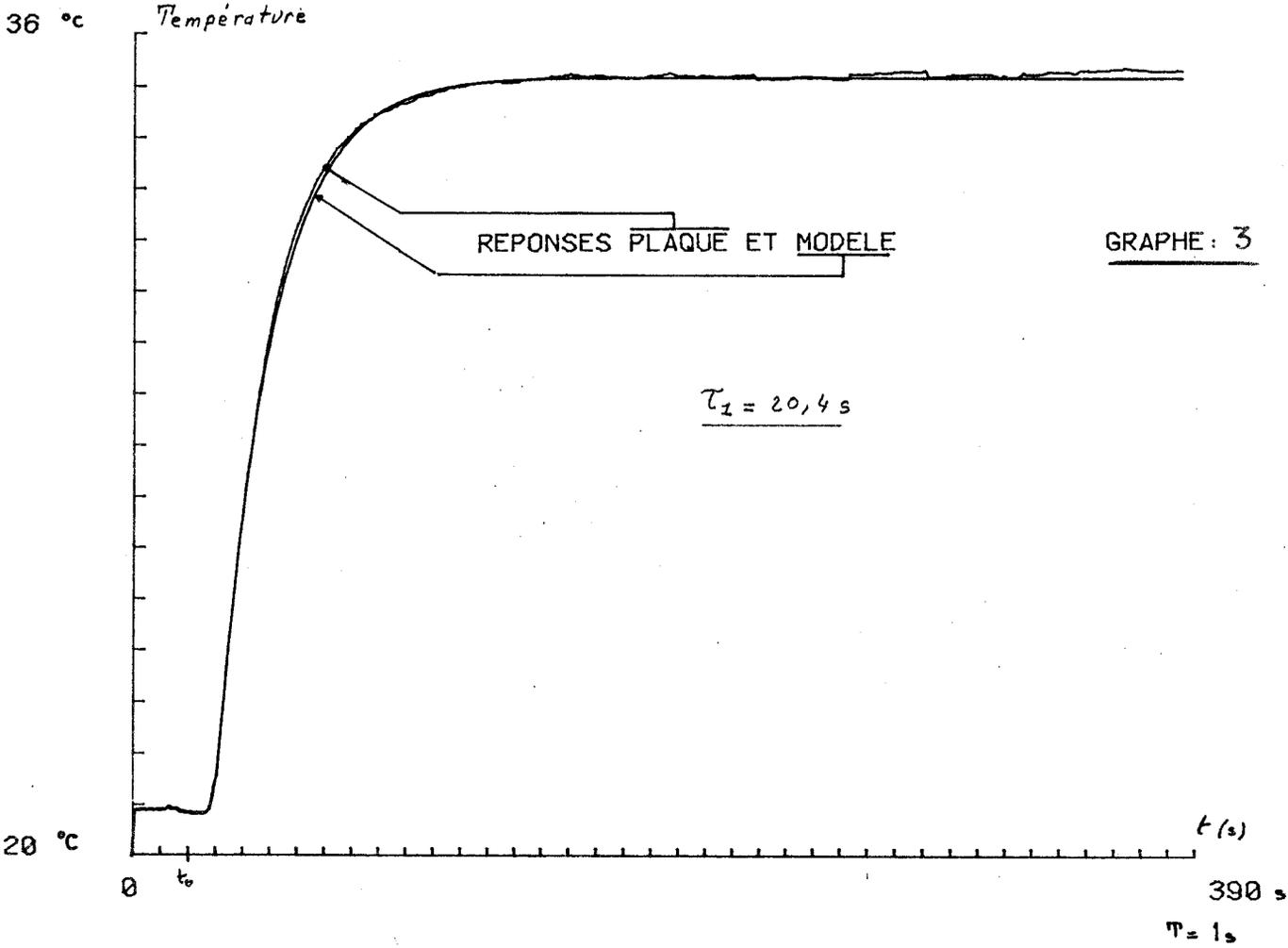
Nous obtenons :

- pour la plaque supérieure $\tau_1 = 20,4$ s et $t_o - t_r = 10$ s

- pour la plaque inférieure $\tau_2 = 19,7$ s et $t_o - t'_r = 10$ s

soit une constante de temps $\tau = 20$ s à ± 2 %





Remarques :

A partir du temps $t = t_1$ défini précédemment le régulateur de température du bain considéré doit agir instantanément, il n'est donc pas possible ici d'utiliser des régulations du type proportionnelle et intégrale.

La constante de temps τ de la réponse des échangeurs est indépendante du type de commutation (plaque bain) choisi. Seule doit être modifiée la valeur dT_2 , de surchauffe, suivant que l'on commute une plaque ou deux, sur le même bain.

Dans le cas d'une manipulation inverse (passage du bain ② au bain ①), il faut effectuer initialement un refroidissement dT_1 du bain ① ; la symétrie du système permet d'écrire que $(dT_1) = (dT_2)$.

III - CONCLUSION

Le système expérimental actuel nous a donné satisfaction en ce qui concerne les méthodes de mesures utilisées pour la détermination des constantes thermophysiques des matériaux d'épaisseur convenable. Il serait cependant très appréciable d'avoir des échangeurs thermiques ayant des temps de réponse plus faible afin d'étudier des échantillons de faible épaisseur.

I - PRINCIPE DE MESURE D'UN FLUX THERMIQUE (à travers une grande surface)

La méthode générale de mesure de la valeur instantanée du flux thermique traversant une surface S consiste à interposer une résistance thermique R' de surface S et d'épaisseur ϵ sur le trajet du flux et à mesurer la différence de température induite entre les faces externes limitant la résistance.

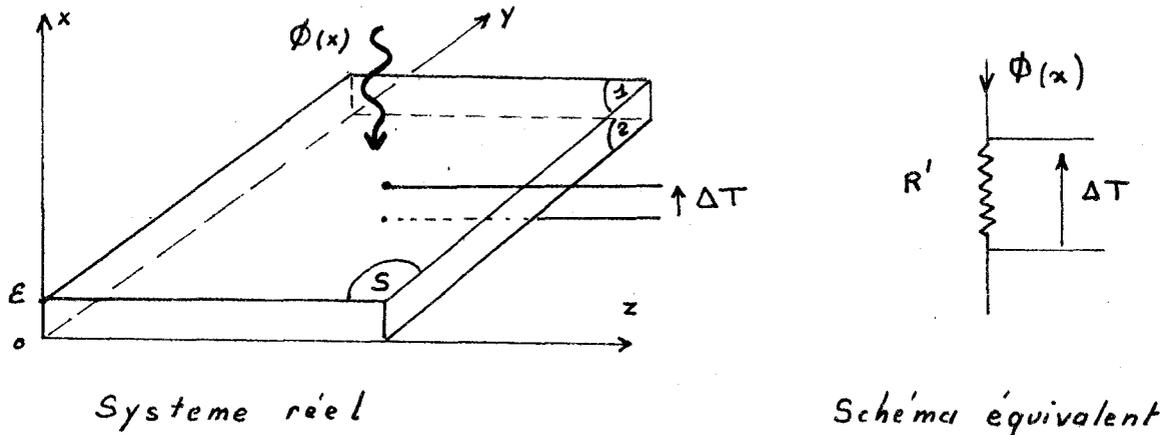


Figure 1

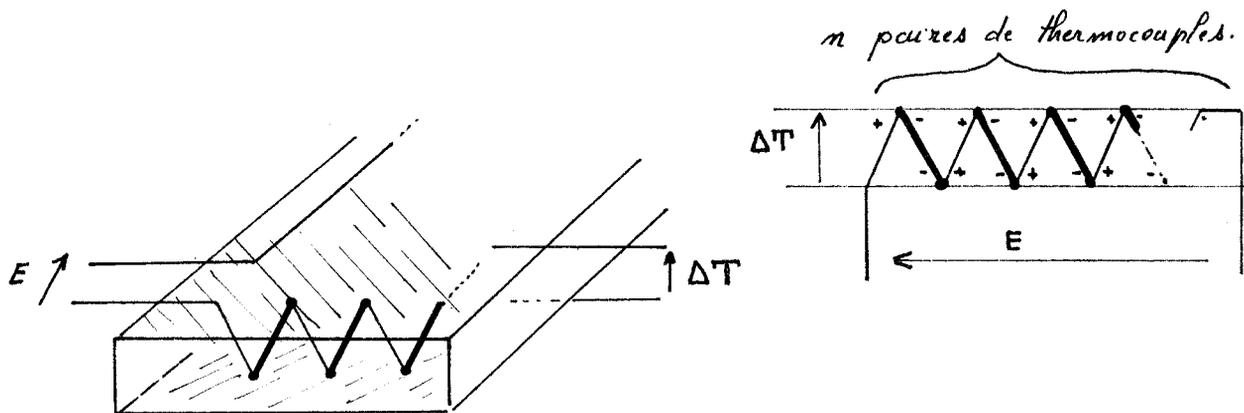
Si l'élément de volume, constituant R' , a une structure homogène en surface (pour une valeur x donnée) et que chaque plan limite (1)(2) est isotherme, le flux ϕ s'exprime par le rapport $\Delta T/R'$.

II - REALISATION DES FLUXMETRES

II - 1 - Fluxmètre réel

Pour prendre l'information de température ΔT , nous avons choisi d'utiliser des thermocouples qui présentent l'avantage de donner une information électrique proportionnelle à la différence ΔT de température dans une large plage, avec une constante de temps faible de l'ordre de quelques dixièmes de seconde.

Afin d'obtenir une information représentative du flux traversant S , il est nécessaire de prendre l'information ΔT en surface donc d'utiliser un très grand nombre de thermocouples, ce qui permet également d'uniformiser la valeur de la résistance thermique équivalente R' en surface.



$$E = n k_1 \Delta T \text{ avec } \Delta T = R' \phi$$

k_1 coefficient de transfert d'une paire de thermocouples

Figure 2 : Schéma de principe

dans le fluxmètre réel, l'information ΔT n'est plus prise "aux bornes d'une résistance pure" ; les capacités thermiques des différents éléments vont introduire un temps de réponse non nul.

Les soudures thermoélectriques introduisent une discontinuité thermique aux niveaux des surfaces limitant le fluxmètre et il est nécessaire de recouvrir celles-ci de plans métalliques afin de les rendre isothermes.

L'information électrique E recueillie est alors représentative du flux moyen traversant la surface S .

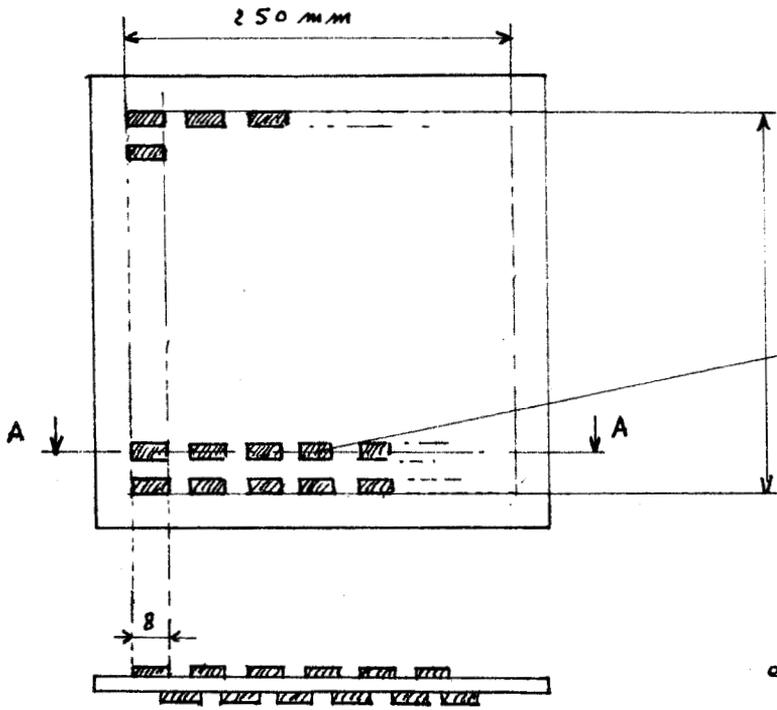
II - 2 - Détails de construction

La réalisation d'un fluxmètre à thermocouples est un travail artisanal très important. Plusieurs techniques de réalisation sont possibles ; le laboratoire étudie actuellement ces différentes techniques.

Compte tenu des moyens techniques du laboratoire nous avons réalisé, en premier lieu, la pile thermoélectrique en connectant alternativement des fils de cuivre et de constantan sur un stratifié cuivré préalablement gravé par précé chimique. Ce type de support a été choisi à la fois pour sa rigidité mécanique (incompressibilité) et sa tenue en température (soudures des thermocouples). Deux fluxmètres ont été ainsi réalisés.

Nous présentons à la page 39 , figure 3, les détails de construction. Dans les dispositifs réalisés, nous avons assemblé 1200 paires de thermocouples pour une surface de $1/16$ de m^2 sur un support dont l'épaisseur est de 0,2 mm. Afin d'assurer l'isolation électrique, de chaque côté sont déposées une feuille de therphane de 0,1 mm d'épaisseur et une feuille d'aluminium également de 0,1mm pour uniformiser les températures sur les surfaces limites du fluxmètre. La zone fluxmétrique est limitée à un carré central de 0,25 m de côté, l'ex-

Support



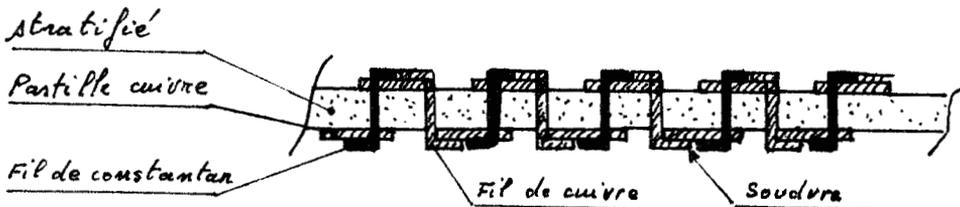
Vue en plan du support stratifié grave

48 lignes de 25 paires de pastille de cuivre

Vue en coupe

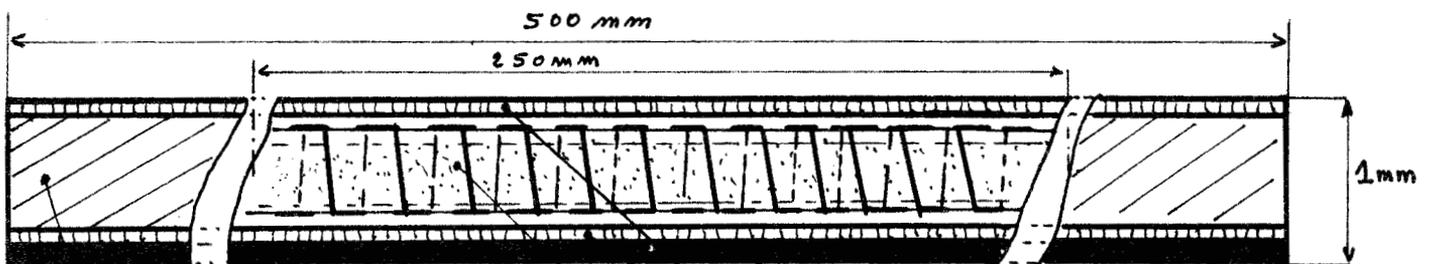
épaisseur : pastille cuivre 25μ
stratifié 150μ

Assemblage des couples thermoélectriques



Vue en coupe
 ϕ fils = 0,2 mm

Recouvrement et extension aux dimensions normalisées



papier huilé de $0,5 \times 0,5 \times 0,7 \cdot 10^{-3}$ m
sauf dans le carré central

feuille d'aluminium de $0,5 \times 0,5 \times 0,1 \cdot 10^{-3}$ m

feuilles de thiophane de $0,5 \times 0,5 \times 0,1 \cdot 10^{-3}$ m

Carré central de $0,25 \times 0,25 \times 0,7 \cdot 10^{-3}$ m
zone active d'un Flux metre



Figure 3

tension aux dimensions des plaques de 0,5 m de côté est obtenue à l'aide d'un papier huilé ayant des propriétés thermiques et une épaisseur identiques au carré central. Cette limitation géométrique, pour l'information du flux, nous permettra d'étudier des échantillons de matériau de plusieurs centimètres d'épaisseur ; l'influence des déperditions par effets de bord devenant négligeable dans la partie centrale de l'échantillon.

La bonne utilisation d'un fluxmètre suppose la connaissance de ses caractéristiques thermiques et électriques. Nous définissons, dans le prochain paragraphe, les principes de mesures des caractéristiques des fluxmètres.

III - MESURES DES CARACTERISTIQUES DES FLUXMETRES

III - 1 - Etude en régime permanent

De par définition, un fluxmètre est un capteur de type ampèremètre utilisé dans les montages électriques. Il doit comme l'ampèremètre être linéaire dans une large gamme d'utilisation, avoir un coefficient de transfert élevé, une faible résistance thermique. Pour caractériser le comportement des fluxmètres en régime permanent, nous avons utilisé plusieurs méthodes que nous présentons ci-après.

III - 1 - 1 - Méthode dite de flux nul

Le schéma de montage est présenté ci-dessous figure 4

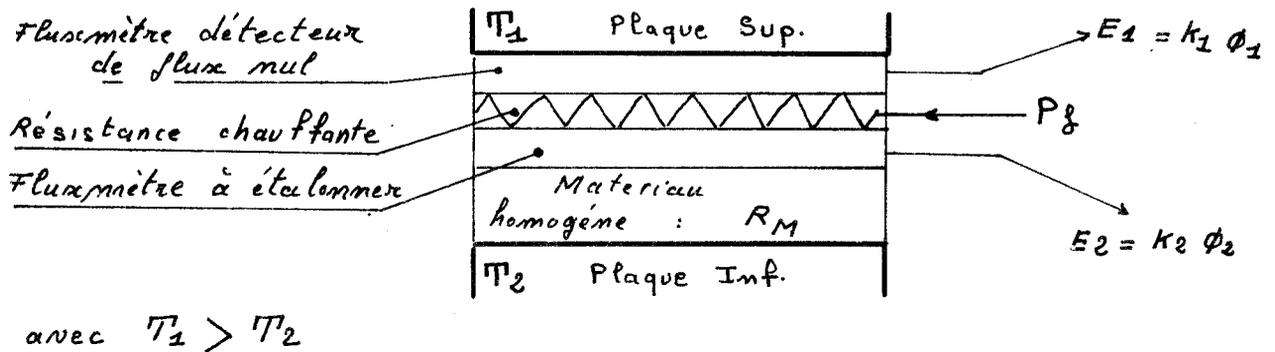


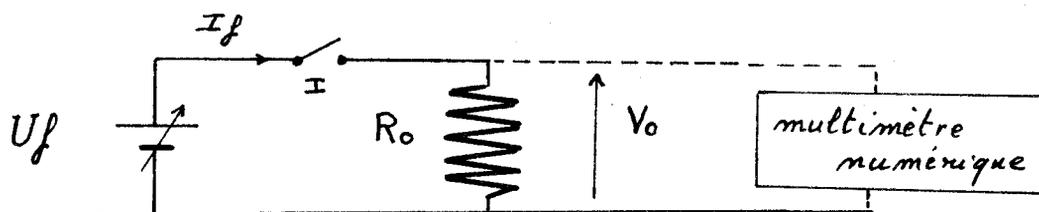
Figure 4

Une puissance électrique P_f est dissipée, par une résistance chauffante plane, dans le système. La valeur de cette puissance est réglée de telle façon, qu'en régime établi, la température de la résistance chauffante soit égale à T_1 ; le flux supérieur ϕ_1 est alors nul et toute la puissance P_f traverse le fluxmètre inférieur à étalonner.

Le coefficient de transfert K d'un fluxmètre étant défini par la relation $E = K \phi$ on peut écrire que :

$$E_2 = K_2 P_f \quad \text{pour} \quad E_1 = 0 \quad (K_2 \text{ en volts/watt})$$

Nous avons réalisé une résistance chauffante plane symétrique, homogène en surface et très stable en température à l'aide d'un support stratifié recouvert de constantan gravé par préci chimique (épaisseur : 1,3 mm). Cette résistance électrique R_o est alimentée à l'aide d'un générateur de tension continue (figure 5)



$$R_o = 36 \Omega \pm 0,1 \quad \text{entre } 10^\circ\text{C et } 60^\circ\text{C et pour une surface de } 1/4 \text{ m}^2$$

Figure 5

$$\text{Soit : } P_f = \frac{V_o^2}{4 R_o} = \frac{E}{K} \quad \text{pour une surface de } 1/16 \text{ m}^2$$

En mesurant K pour différentes valeurs de R_M , de T_1 et de T_2 on peut ainsi étudier la linéarité du fluxmètre en fonction, de l'amplitude du flux qui le traverse et de la température moyenne où il est placé.

Cependant, il est très difficile expérimentalement de maintenir la condition $\phi_1 = 0$, de plus la valeur de la puissance P_f nécessaire pour obtenir cette condition, ne peut être connue qu'après un grand nombre d'approximations successives compte-tenu de la constante de temps du système.

Les quelques mesures effectuées de cette façon nous ont permis d'évaluer que :

$$K_1 \approx 250 \mu\text{V/watt} \quad \text{et} \quad K_2 \approx 220 \mu\text{V/watt}$$

III - 1 - 2 - Méthode d'évaluation préalable du rapport : K_1/K_2

Une autre méthode aussi précise, mais de mise en oeuvre plus aisée, consiste à évaluer en premier lieu le rapport K_1/K_2 des coefficients de transfert des fluxmètres et ensuite à dissocier les valeurs K_1 , K_2 . Elle permet également l'étude de la linéarité des fluxmètres en fonction de la température moyenne où ils sont placés et en fonction de l'amplitude du flux qui les traverse.

a) Evaluation du rapport des coefficients de transfert

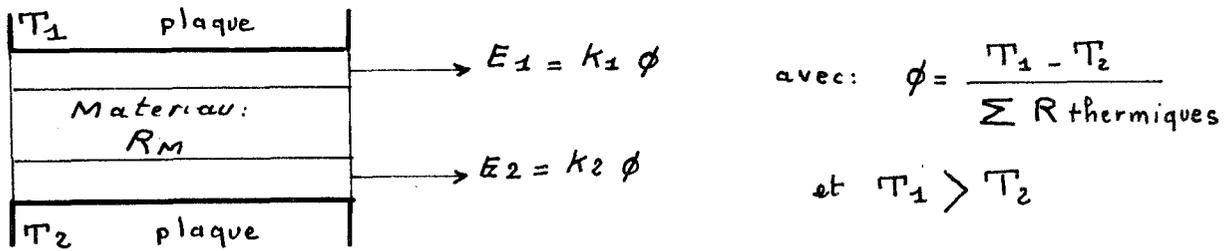


Figure 6

En régime permanent $K_1/K_2 = E_1/E_2$; ce rapport peut être ainsi relevé dans les configurations suivantes :

- pour différentes valeurs de R_M avec T_1 et T_2 constants
- pour différentes valeurs de T_1 avec R_M et T_2 constants
- pour différentes valeurs de T_2 avec T_1 et R_M constants

Nous présentons graphe 5 , page 44 , l'évolution de E_1 et E_2 en fonction de la différence de température ($T_1 - T_2$) pour $R_M = 0$. Ce relevé est obtenu en faisant monter très lentement de T_2 vers T_1 la température de la plaque supérieure, tout en gardant constant (à T_2) celle de la plaque inférieure.

Dans cette gamme de température, les évolutions $E_1 = f(T_1 - T_2)$, $E_2 = f(T_1 - T_2)$ sont des droites. Or, en régime permanent les fluxmètres sont équivalents à des résistances thermiques R' et R'' avec :

$$E_1 = \frac{K_1}{R'} \Delta T_1 \quad \text{et} \quad E_2 = \frac{K_2}{R''} \Delta T_2$$

ΔT étant la différence de température aux bornes d'un fluxmètre.

En écartant l'hypothèse où une variation de résistance thermique, compenserait une variation de K_1 ou K_2 nous pouvons conclure que R'_1 , R'_2 , K_1 et K_2 ont des valeurs constantes.

On obtient : $\frac{K_1}{K_2} = 1,15$ à 1 % près dans une gamme de température comprise entre 15 et 40°C, et pour des flux de 0 à 50 watts. Cette valeur du rapport K_1/K_2 a été vérifiée pour $R_M \neq 0$ pour différentes épaisseurs de plexi-glass et d'aluminium.

b) Détermination des coefficients K_1, K_2

Connaissant la valeur du rapport K_1/K_2 , nous pouvons déterminer les valeurs K_1, K_2 en utilisant la méthode décrite ci-dessous (figure 7).

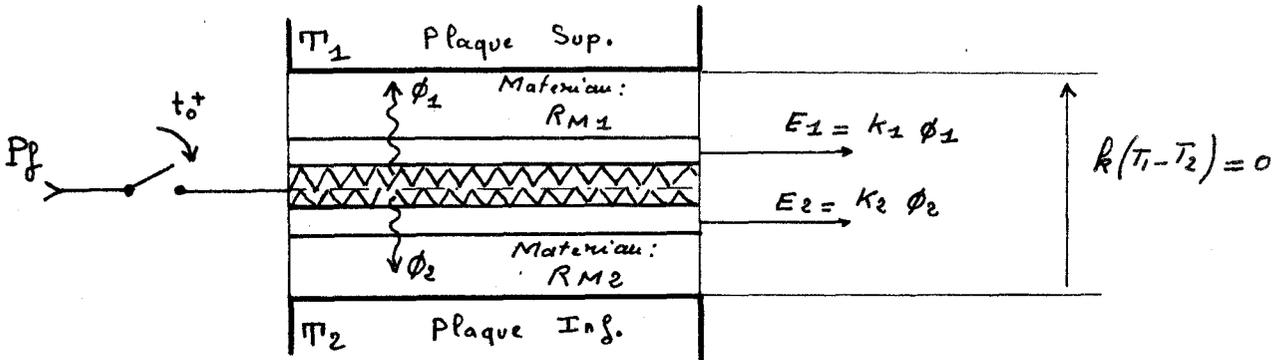


Figure 7

Initialement tout le système est à une température uniforme T_0 . A l'instant t_0^+ , on envoie une puissance donnée P_f par l'intermédiaire de la résistance chauffante R_0 , et nous relevons les évolutions temporelles $E_1(t)$, $E_2(t)$ des fluxmètres, (graphe 6, page 44).

Dans le cas général, la puissance P_f engendre des flux ϕ_1, ϕ_2 non identiques. Elle est liée aux indications E_1, E_2 correspondant aux régimes permanents de $E_1(t)$ et $E_2(t)$ par la relation :

$$P_f = \frac{U_0^2}{4 R_0} = \frac{E_1}{K_1} + \frac{E_2}{K_2} = \frac{1}{K_1} \left(E_1 + \frac{K_1}{K_2} E_2 \right) \quad (1)$$

Afin d'examiner les évolutions de la différence et de la somme des flux, il est intéressant de poser :

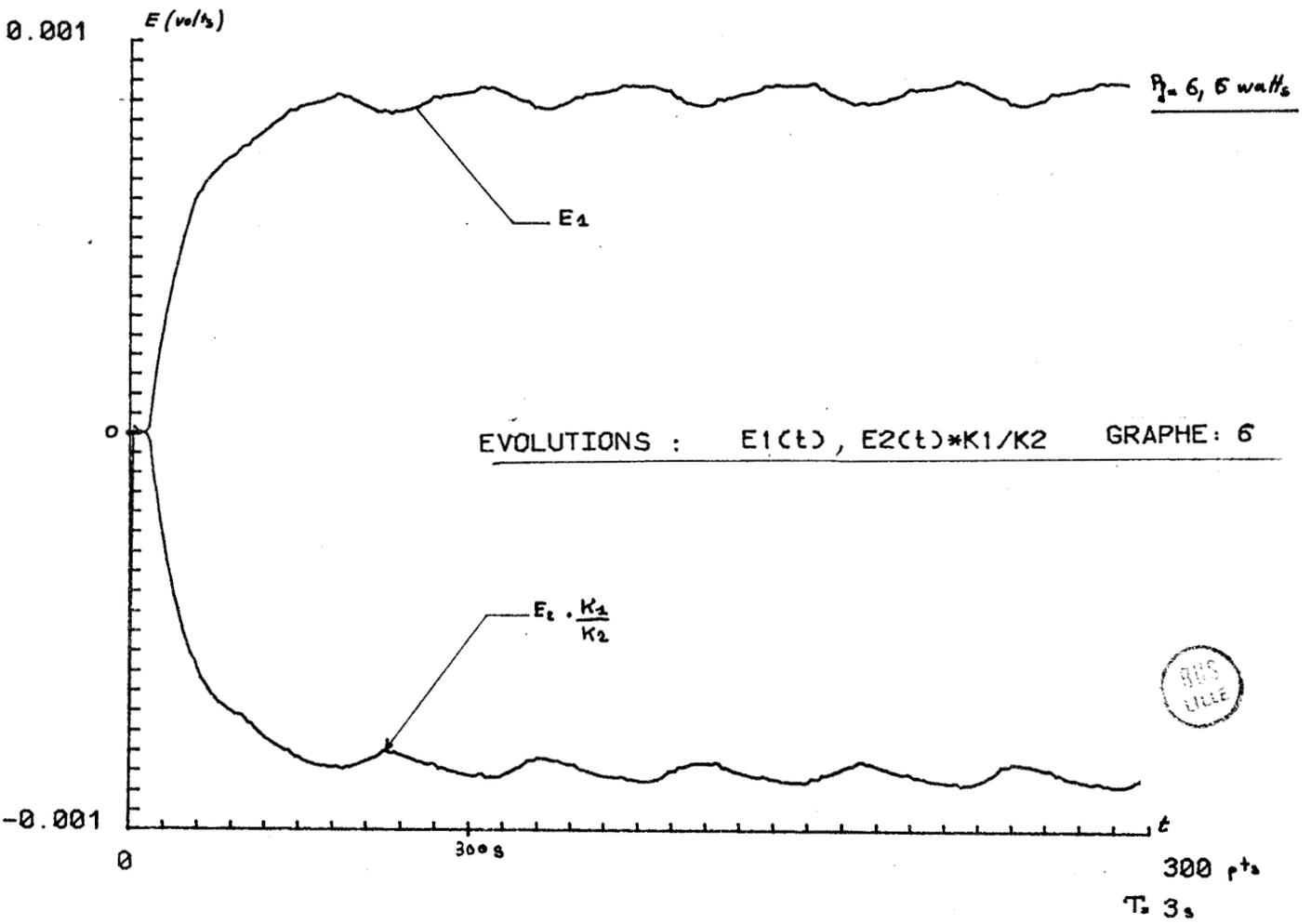
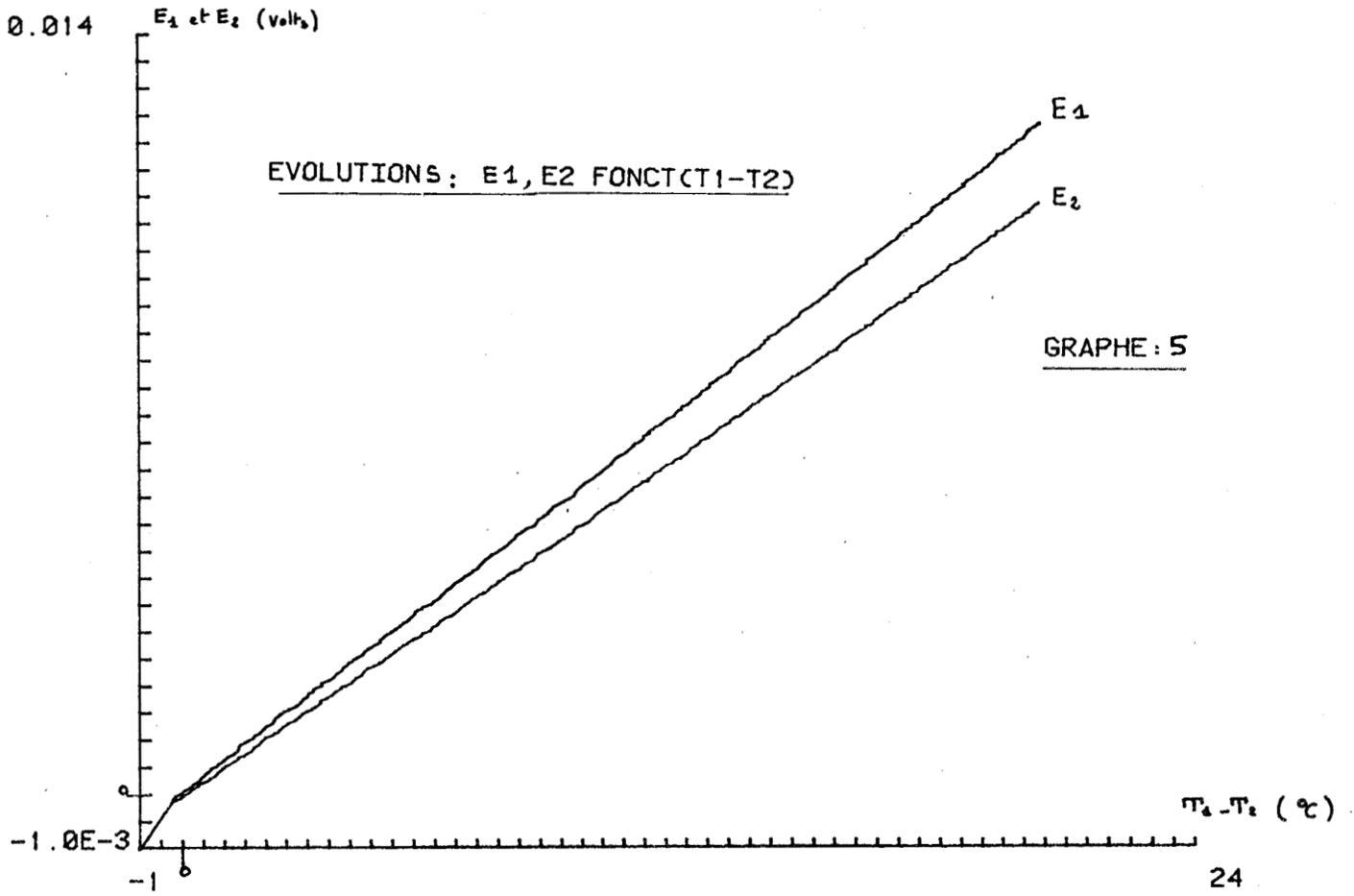
$$E_s(t) = E_1(t) + E_2(t) \quad K_1/K_2 = K_1 (\phi_1(t) + \phi_2(t)) \quad (2)$$

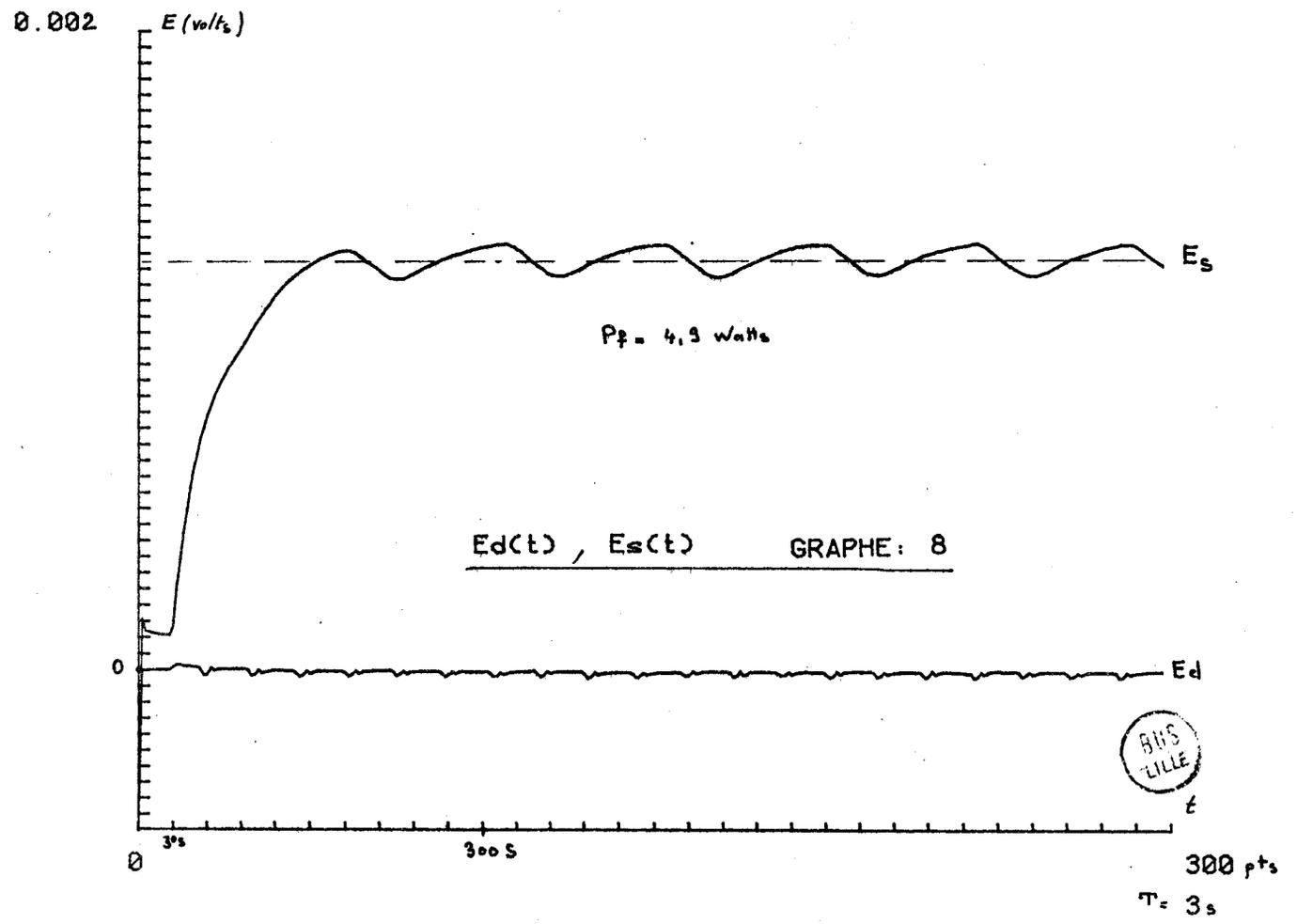
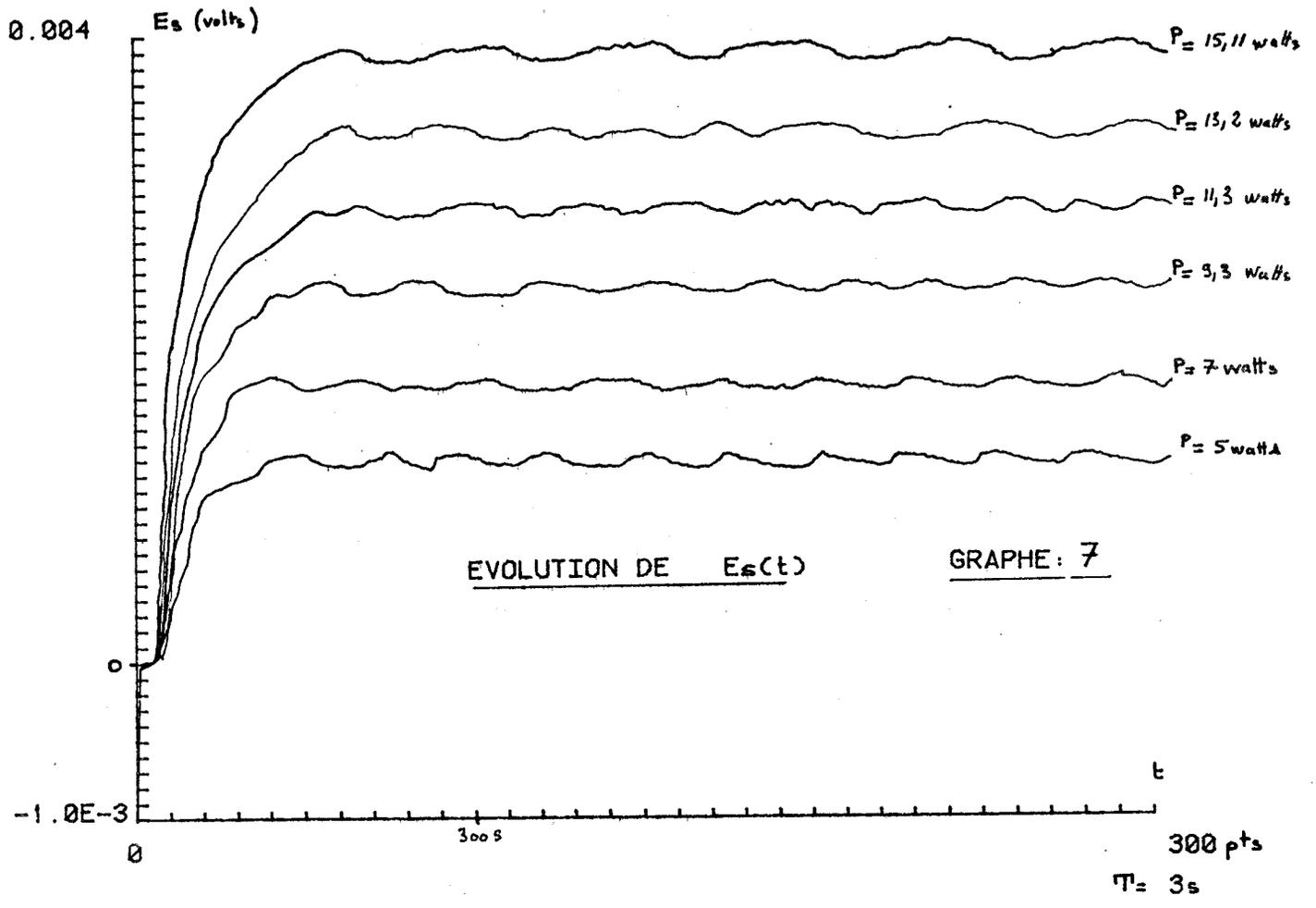
$$E_d(t) = E_1(t) - E_2(t) \quad K_1/K_2 = K_1 (\phi_1(t) - \phi_2(t)) \quad (3)$$

Nous présentons page 45, graphe 7 quelques uns des relevés effectués pour différentes valeurs de la puissance P_f .

Nous pouvons remarquer (voir graphe 8, page 45) que $E_d(t) \neq 0$ pour $R_{M1} = R_{M2} = 0$, ce qui nous permet de dire que le système est symétrique par rapport à l'origine 0 et d'en conclure que :

- pour les résistances des fluxmètres, nous avons $R' \neq R''$
- que le rapport K_1/K_2 établi précédemment est vérifié.





Remarquons également que les petites fluctuations (dues à la régulation de température des bains), observées sur l'information $E_s(t)$ sont périodiques ce qui permet d'obtenir une excellente définition de la valeur moyenne de $E_s(t)$ en régime établi.

Cette manipulation, a été faite pour différentes valeurs de la température T_0 , pour différentes valeurs de R_M ($R_{M1} = R_{M2} = R_M$), et nous permet de conclure que :

$K_1 = 258 \mu\text{V/watt}$, $K_2 = 224 \mu\text{V/watt}$ à 1 % près dans une gamme de température comprise entre 15°C et 40°C et pour des flux compris entre 0 et 40 watts.

Remarque : comparativement à la méthode dite de flux nul, celle-ci présente l'avantage d'être plus rapide et de pouvoir imposer initialement les valeurs P_f et T_0 , et de ne demander aucun réglage pour obtenir le régime permanent.

III - 2 - Etude en régime transitoire

Les fluxmètres réalisés sont constitués d'un assemblage de fils thermoélectriques maintenus par un substrat. Un tel dispositif est par nature même hétérogène, et compte tenu des irrégularités de construction, il est théoriquement impossible de prévoir son comportement. Nous pouvons toutefois chercher à définir l'équivalent constitué par un matériau homogène qui aurait des caractéristiques thermiques identiques à celles du capteur réalisé.

Appelons R' , R'' les résistances équivalentes des fluxmètres et C' , C'' leurs capacités respectives. Ces grandeurs déterminent de façon univoque le comportement thermique du dispositif capteur.

De par leur constitution, les fluxmètres doivent être symétriques par rapport au plan passant par le milieu du support isolant. L'information électrique est prise à ce niveau.

Afin de nous assurer de cette symétrie, nous distinguerons les deux parties situées de part et d'autre de ce plan (figure 8).

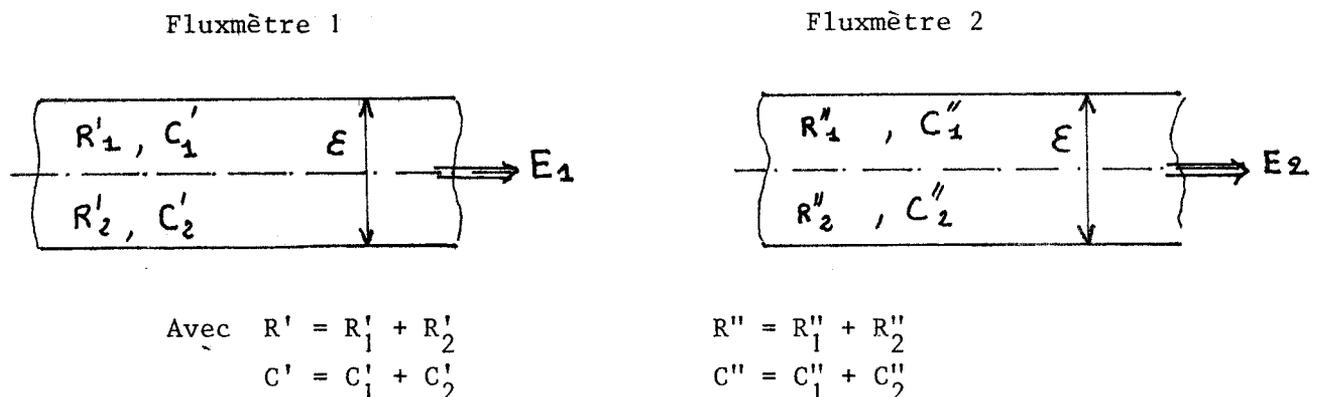


Figure 8

III - 2 - 1 - Mesures des capacités respectives

Pour déterminer les capacités respectives des fluxmètres, nous utilisons la méthode dite du bilan thermique exposée au chapitre I dans le cas d'un matériau homogène, et celle présentée au chapitre IV lorsque le système comporte 3 couches (un échantillon et deux fluxmètres).

Nous rappelons ci-dessous figure 9 le schéma de principe :

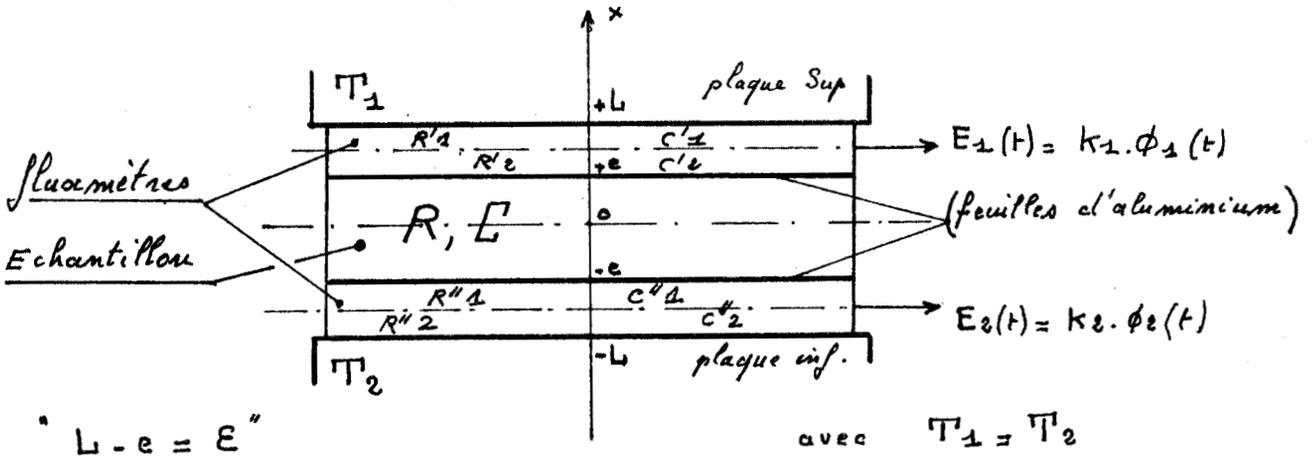


Figure 9

Initialement, tout le système est à une température uniforme T_0 (les deux plaques échangeuses étant alimentées par le bain 1) et à l'instant $t_0 +$, on commute les plaques sur le bain 2. Les températures limites, en $x = L$ et $x = -L$, passant ainsi de T_0 à T_1 , imposent un changement d'état d'équilibre thermique au système.

Aux informations fluxmétriques $E_1(t)$, $E_2(t)$ correspondent la quantité de chaleur apportée au système (entre $x = e + \epsilon/2$ et $x = -e - \epsilon/2$) pour que ce dernier passe de l'état d'équilibre T_0 à l'état d'équilibre T_1 , ($T_1 > T_0$).

On démontre que :

$$J(\infty) = \int_0^\infty [\phi_1(t) - \phi_2(t)] dt = (T_1 - T_0) (C + C'_2 + C''_1) \quad (4)$$

avec $\phi_1(t) - \phi_2(t) = E_d(t) / k_1$

Rappelons que cette méthode de mesure précise a fait l'objet d'une étude de linéarité, pour différentes valeurs données à C, présentée au chapitre IV. Nous nous placerons donc ici dans le cas particulier où $C = 0$.

A la page 49, graphe 9 sont représentées les évolutions $E_d(t)$, $E_s(t)$, ainsi que le graphe correspondant à l'intégrale $J(t)$ calculée numériquement par la méthode de Simpson, et page 50 l'évolution de la température des plaques.

$$\text{On déduit : } C'_2 + C''_1 = 87 \text{ j/}^\circ\text{C à } \pm 1 \%$$

En effectuant ces mesures pour différentes positions des fluxmètres, en les retournant sur eux, on déduit également :

$$C'_2 + C''_2 = 70 \text{ j/}^\circ\text{C} \quad C'_1 + C''_1 = 69 \text{ j/}^\circ\text{C} \quad C'_1 + C''_2 = 54,8 \text{ j/}^\circ\text{C}$$

Les différences observées entre ces relevés s'expliquent par le fait qu'un fluxmètre est recouvert d'une feuille d'aluminium de $16,1 \text{ j/}^\circ\text{C}$ que sur une seule de ses faces. On déduit ainsi qu'un fluxmètre, sans sa feuille d'aluminium, est symétrique du point de vue capacitif, par rapport au plan passant par le milieu de son support, à quelques % près.

$$\text{On obtient } C' = C'' = 70,9 \text{ j/}^\circ\text{C à } \pm 2 \%$$

Nous présentons également graphe 12, page 51, le cas d'un refroidissement ($T_1 < T_0$). Les informations sont de signes opposés ce qui correspond bien à une évacuation de chaleur pour l'information $E_d(t)$. Nous obtenons au pourcentage près de la mesure les mêmes valeurs pour les capacités C' et C'' .

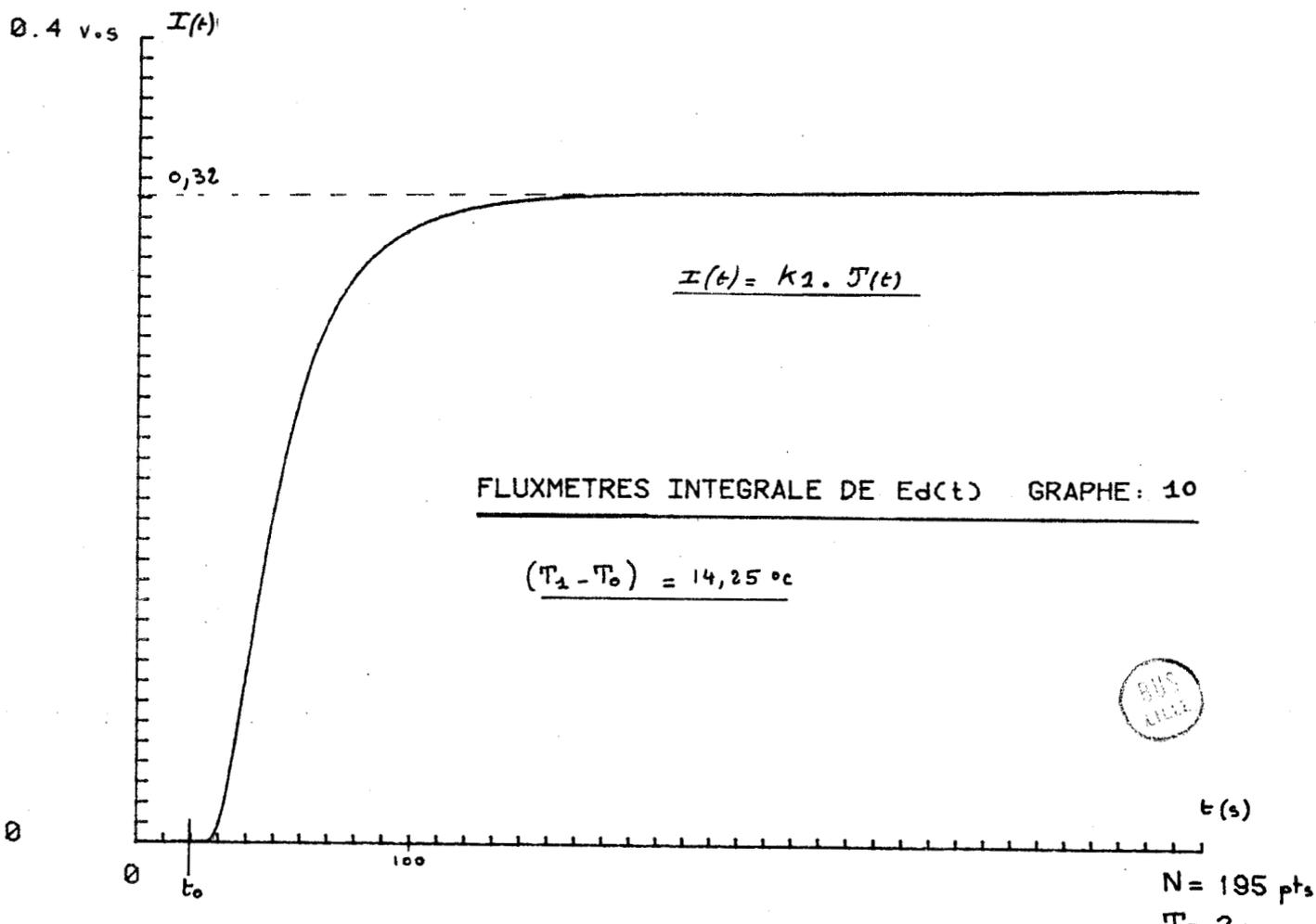
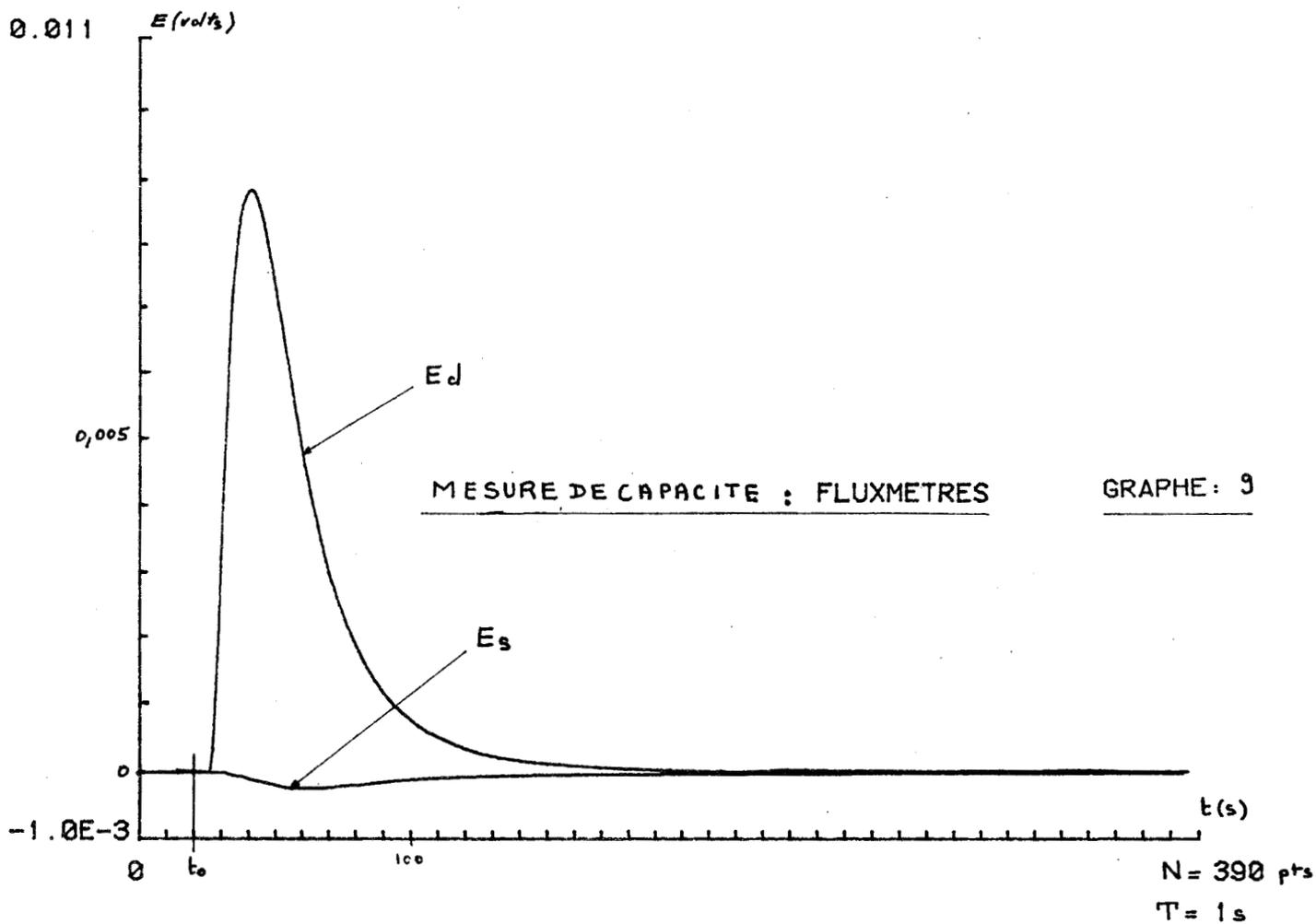
Remarquons que l'information de somme des flux $E_s(t)$ est nulle lorsque le système est symétrique par rapport au plan, passant par l'origine 0. On peut donc encore déduire ici, que les résistances R' , R'' des fluxmètres sont identiques à quelques % près.

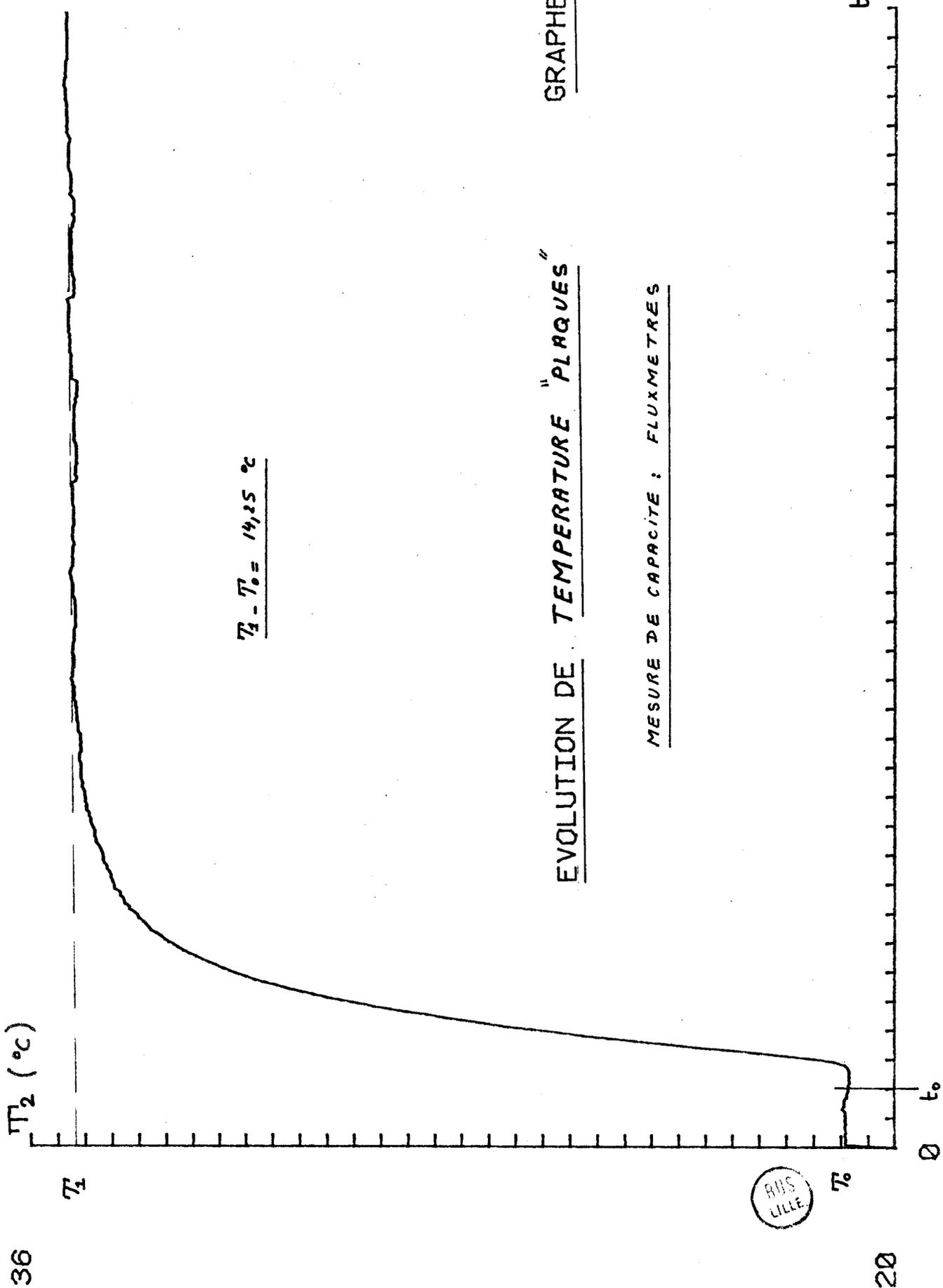
III - 2 - 2 - Mesures des constantes de temps

Il est très difficile, compte tenu de la faible épaisseur des capteurs de flux, de mesurer les résistances thermiques R' et R'' indépendamment de leurs capacités. Compte tenu des résultats des différentes mesures précédentes on peut écrire que :

$$R' C' = R'' C'' \text{ à quelques \% près}$$

Nous pouvons ainsi nous placer dans le cas d'une mesure de constante de temps telle qu'elle est présentée au chapitre I, paragraphe





GRAPHE: 11

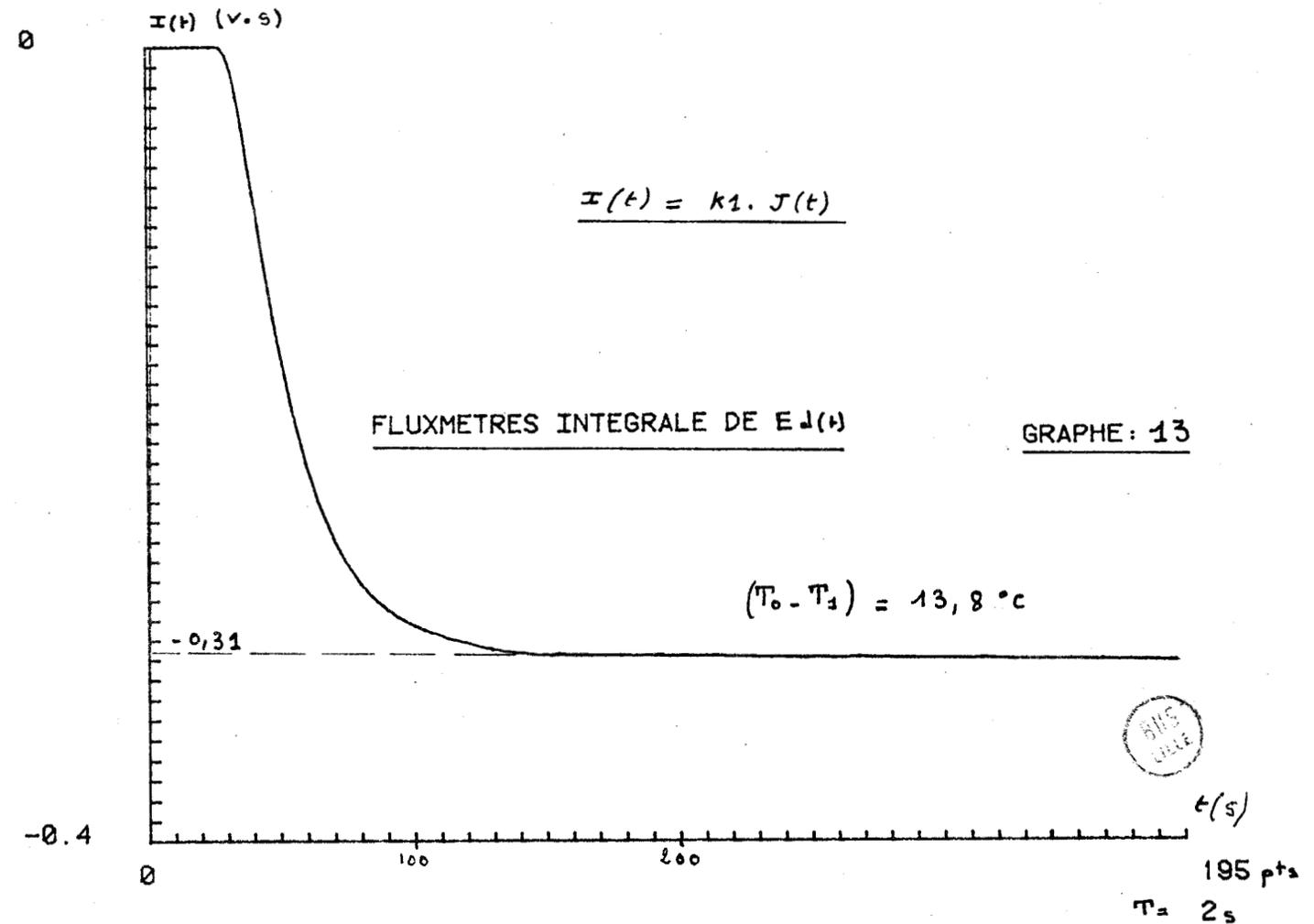
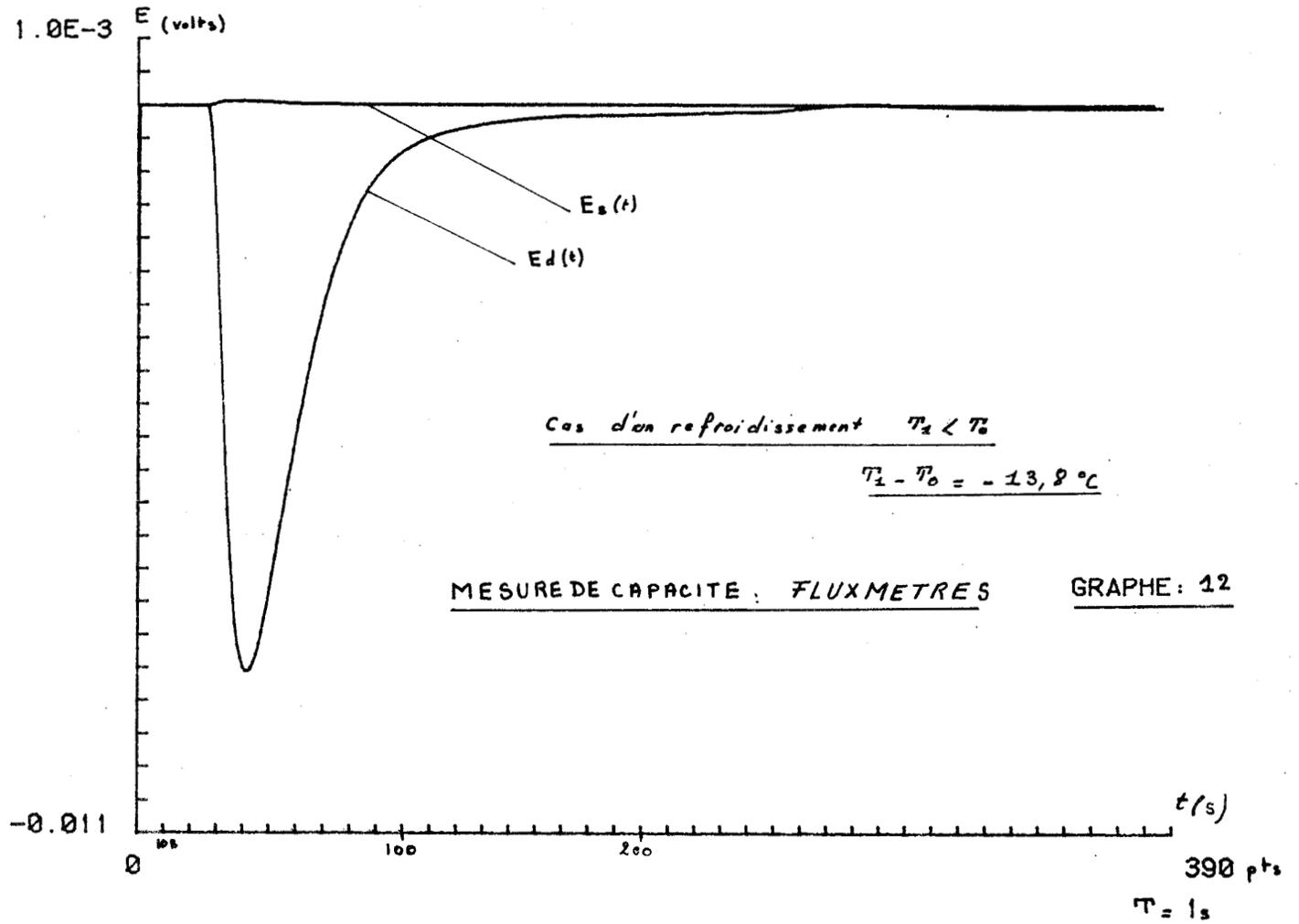
EVOLUTION DE TEMPERATURE "PLRQUES"

MESURE DE CAPACITE: FLUXMETRES

390 pts

$T = 1$ s

RHS
LILLE



Le schéma de principe est représenté ci-dessous figure 10

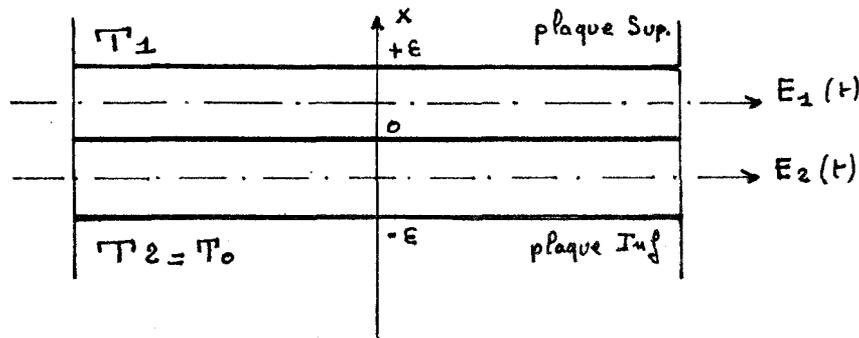


Figure 10

Nous considérons ici que les deux fluxmètres se comportent comme un échantillon de matériau homogène de constantes thermiques λ' , ρ' , c' .

Initialement, les deux fluxmètres sont à une température uniforme T_0 , et à l'instant t_0^+ on impose, mécaniquement (voir chapitre II, paragraphe II-1) en $x = +\epsilon$ la température superficielle T_1 (figure 11).

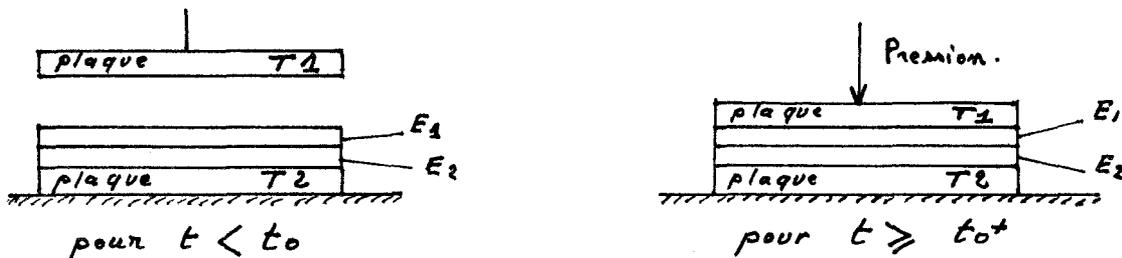


Figure 11

On démontre (voir chapitre I, relation 20) que l'évolution du flux $\phi(x,t)$ est de la forme suivante, pour $T_2 = T_0$:

$$\phi(x,t) = \frac{\lambda' S}{2 \epsilon} (T_1 - T_0) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{k \Pi}{2} \left(1 + \frac{x}{\epsilon}\right)}{\cos k \Pi} \exp \left(- \frac{a' k^2 \Pi^2}{4 \epsilon^2} t \right) \right] \quad (5)$$

Les informations $E_1(t)$, $E_2(t)$ sont prises pour $x = +\epsilon/2$ et $x = -\epsilon/2$

$$\phi\left(-\frac{\epsilon}{2}, t\right) = \frac{\lambda' S}{2 \epsilon} (T_1 - T_0) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos k \frac{3\Pi}{4} \exp \left(- \frac{a' k^2 \Pi^2}{4 \epsilon^2} t \right) \right] \quad (6)$$

$$\phi\left(+\frac{\epsilon}{2}, t\right) = \frac{\lambda' S}{2 \epsilon} (T_1 - T_0) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos \frac{k \Pi}{4} \exp \left(- \frac{a' k^2 \Pi^2}{4 \epsilon^2} t \right) \right] \quad (7)$$

En appelant : $\phi'_d(t)$ la différence $\left[\phi\left(\frac{\varepsilon}{2}, t\right) - \phi\left(-\frac{\varepsilon}{2}, t\right) \right]$
 $\phi'_s(t)$ la somme $\left[\phi\left(\frac{\varepsilon}{2}, t\right) + \phi\left(-\frac{\varepsilon}{2}, t\right) \right]$

et en posant $k = 2p+1$ pour l'expression $\phi'_d(t)$, $k = 2p$ pour l'expression $\phi'_s(t)$ nous obtenons :

$$\phi'_d(t) = 2(T_1 - T_0) \frac{\lambda' S}{\varepsilon} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \sin(2p+1) \frac{\Pi}{4} \exp\left(-\frac{a'}{4\varepsilon^2} (2p+1)^2 \Pi^2 t\right) \quad (8)$$

$$\phi'_s(t) = (T_1 - T_0) \frac{\lambda' S}{\varepsilon} \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \cos p \frac{\Pi}{2} \exp\left(-\frac{a'}{\varepsilon^2} p^2 \Pi^2 t\right) \right] \quad (9)$$

Les évolutions temporelles relevées $E_1(t)$, $E_2(t)$, K_1/K_2 , $E_d(t)$ et $E_s(t)$ sont présentées page 54, graphes 14 et 15.

Rappelons que pour les temps $t > t_1$ (voir chapitre I, paragraphe III), l'expression de $\phi'_d(t)$ se réduit du 1er terme de la série (8); soit à un régime exponentiel simple $A \exp(-m_1 t)$. En utilisant une méthode numérique d'ajustement exponentiel, l'exploitation de $E_d(t)$ donne :

$$t_1 \approx 2 \text{ s}, \quad m_1 = 0,0931 \text{ à } \pm 4 \% \quad \text{avec} \quad m_1 = \frac{a' \Pi^2}{4 \varepsilon^2} = \frac{\Pi^2}{4 R' C'}$$

d'où $R' C' = 26,5 \text{ s}$

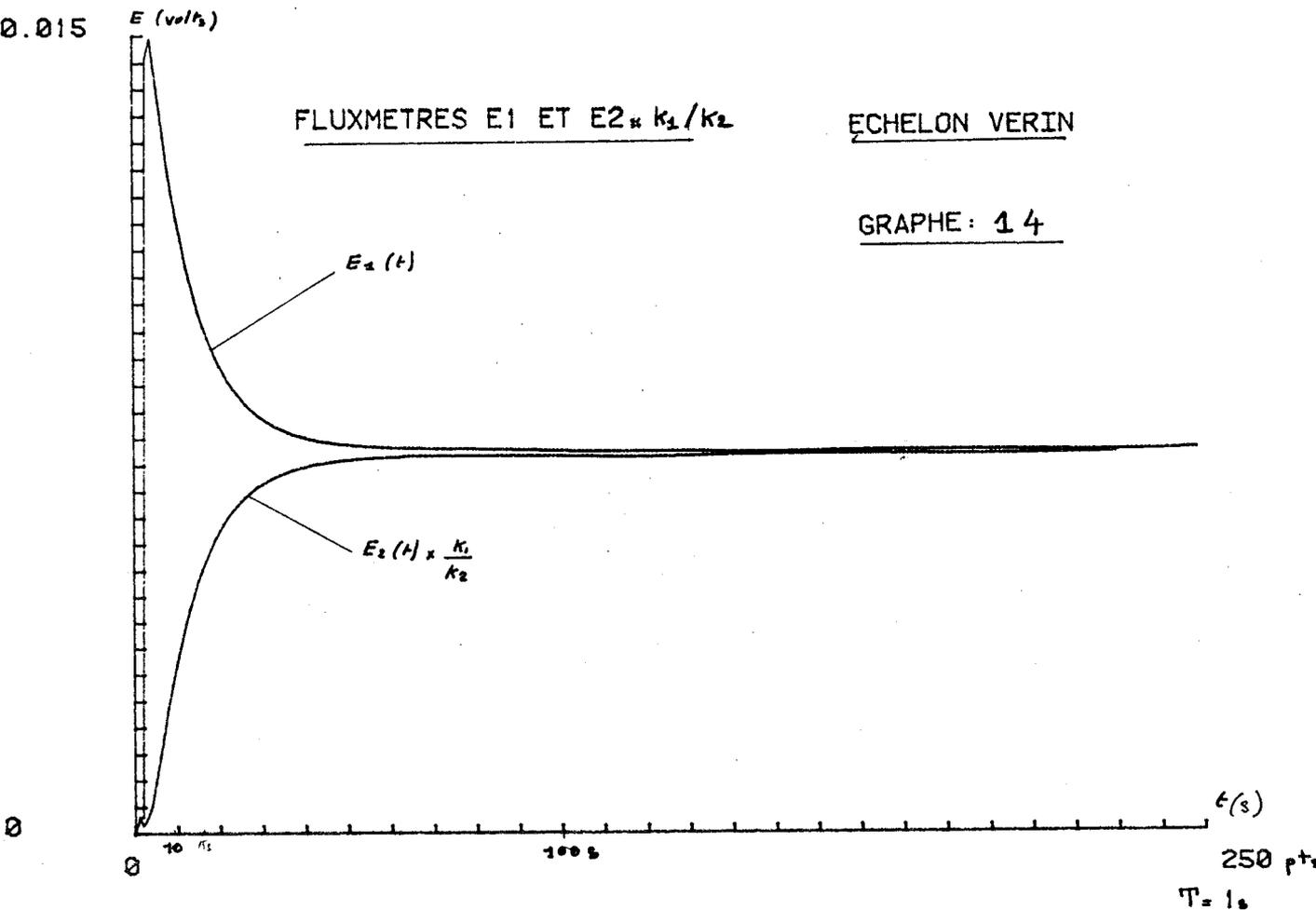
avec en définitive $C' = 70,9 \text{ j/}^\circ\text{C}$ à 2 % et $R' = 0,37^\circ\text{C/Watt}$ à 6 %

* Application de la méthode dite du modèle :

$$\text{posons : } m_k = -\frac{k^2 \Pi^2}{4 R' C'} \quad \text{avec } k = 2p+1$$

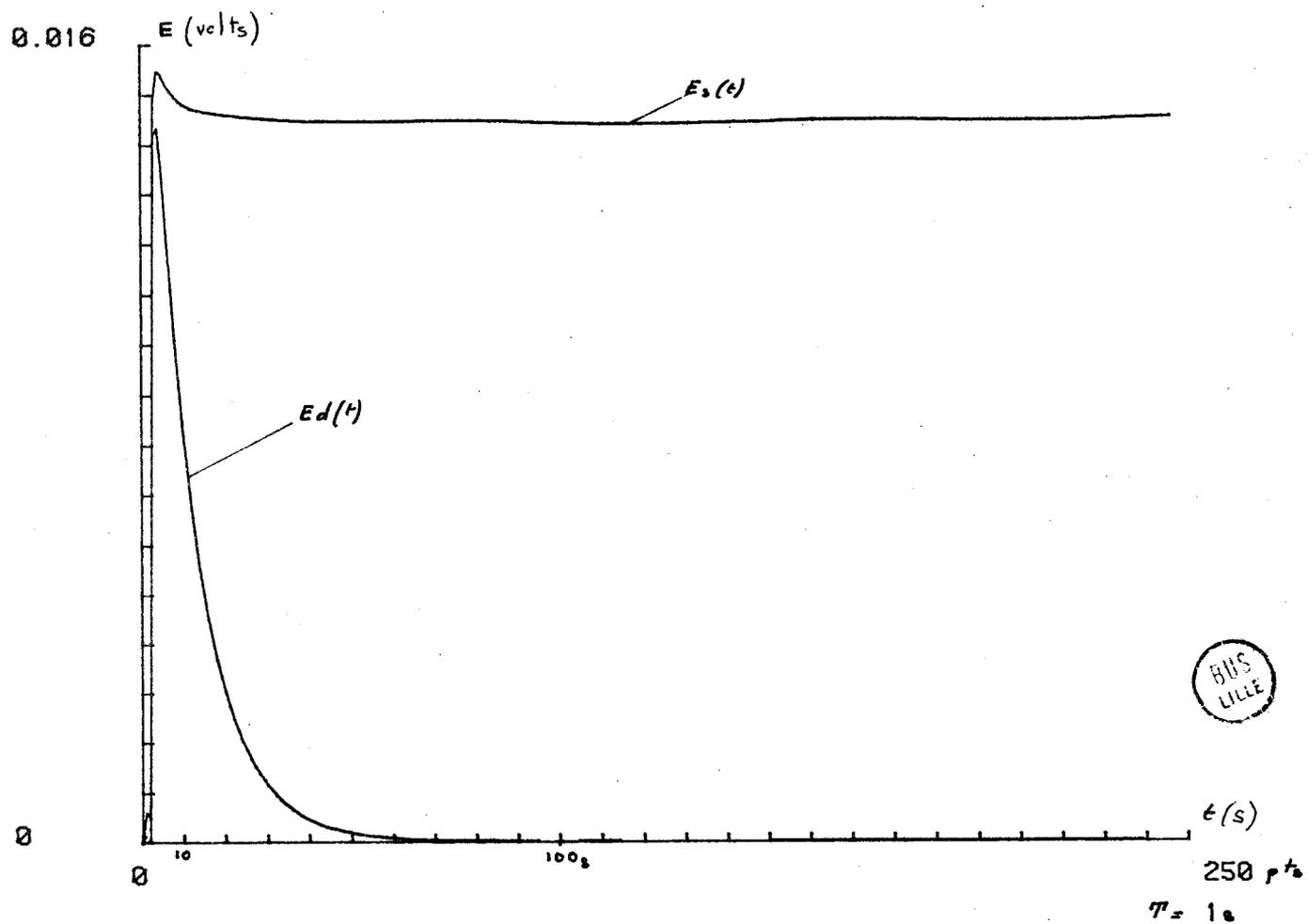
$$A_k = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \sin k \frac{\Pi}{4} \quad \text{pour } k \text{ impair}$$

$$K = 2 (T_1 - T_0) \frac{\lambda' S}{\varepsilon} A_1 (m_3 - m_1)$$



FLUXMETRES Ed et Es

GRAPHE: 15



On obtient pour l'intégrale de la différence des flux, k étant impair :

$$J(t) = \int_0^t \phi'_d(t) dt = \frac{K}{A_1(m_3 - m_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{m_k} (1 - \exp(-m_k t)) \quad (10)$$

en limitant la série au deuxième terme, on peut écrire :

$$J(t) \approx \frac{K}{A_1(m_3 - m_1)} \left[\frac{A_1}{m_1} + \frac{A_3}{m_3} - \frac{A_1}{m_1} \cdot \exp(-m_1 t) - \frac{A_3}{m_3} \exp(-m_3 t) \right] \quad (11)$$

avec $A_1 = -A_3 = \sqrt{2}/2$

La transposée de Laplace de l'expression (11) est :

$$[J(t)] = \frac{K}{p(p+m_1)(p+m_3)}$$

L'expression (11) correspondant à la réponse indicielle d'un système du second ordre dont la transmittance est :

$$F(p) = \frac{1}{(p+m_1)(p+m_3)}$$

Remarquons que lorsque t tend vers l'infinie l'expression (11) tend vers :

$$J(\infty) = \frac{K}{m_3 - m_1} \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_3} \right)$$

avec

$$m_1 = \frac{a' \Pi^2}{4 \epsilon^2}, \quad m_3 = \frac{9a' \Pi^2}{4 \epsilon^2}, \quad A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a' = \frac{4 \epsilon^2}{R' C'}$$

et $K = 2(T_1 - T_0) \frac{\lambda' S}{\epsilon} A_1(m_3 - m_1)$

soit $J(\infty) = \frac{T_1 - T_0}{2} \rho' c' \epsilon S \cdot 1,0189$

alors que pour l'expression (10), non limitée au deuxième ordre, nous obtenons :

$$J(\infty) = \frac{T_1 - T_0}{2} \rho' c' \epsilon S$$

Nous pouvons utiliser ici la méthode du modèle présentée au chapitre I, paragraphe IV. Le graphe 16, page 57 représente l'intégrale de $E_d(t)$ du système, ainsi que la réponse du modèle mathématique.

On obtient $m_1 = 0,0991$ au % près

d'où $C' = 70,9 \text{ j/}^\circ\text{C}$ à 2 % près et $R' = 0,35^\circ\text{C/Watt}$ à 3 % près.

Remarque :

L'information donnée par un fluxmètre est une valeur moyenne du flux traversant la surface centrale de $1/16 \text{ m}^2$.

Les fluxmètres sont constitués de 1200 paires de thermocouples (48 lignes de 25), lors de la construction nous avons relevé ligne par ligne les informations E_1 , E_2 pour une différence de température imposée aux bornes des fluxmètres

L'incertitude absolue moyenne sur une ligne est au maximum de $50 \text{ } \mu\text{V}$ pour une information électrique $\approx 20 \text{ mV}$ pour les 48 lignes. Afin de conserver une précision de $\pm 1\%$ sur la mesure du flux, il est donc nécessaire de travailler au moins sur une surface fluxmétrique égale à $1/4$ de $1/16 \text{ m}^2$.

Nous verrons dans le chapitre IV, notamment pour certaines mesures d'humidité, que la connaissance de cette surface de travail minimale est importante.

IV - CONCLUSION

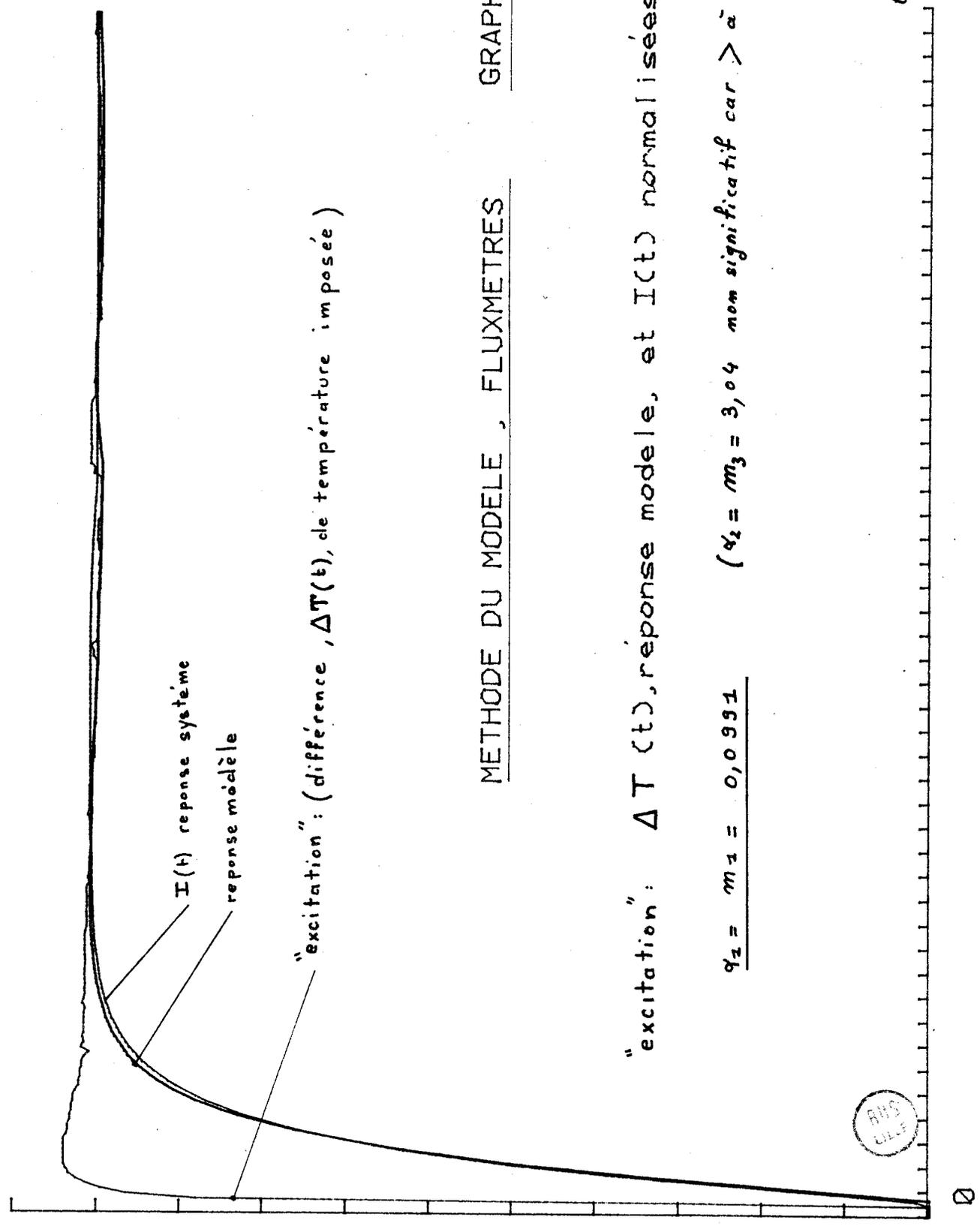
Un fluxmètre à thermocouples de grandes dimensions est un système extrêmement difficile à réaliser ; pour qu'il soit le plus idéal possible, il doit posséder les caractéristiques suivantes :

- un temps de réponse très faible ($C' \neq 0$ et R' faible)
- un coefficient de transfert élevé
- des caractéristiques indépendantes de la température et du flux.

Le système capteur étant très complexe, nous n'avons étudié dans ce chapitre que les critères les plus importants.

Le Laboratoire étudie actuellement des nouvelles techniques : par dépôts électrolytiques, vaporisation sous vide ...), dans le but d'une réalisation industrielle de capteurs de flux thermique les plus idéaux possibles.

1.1



METHODE DU MODELE , FLUXMETRES GRAPHE : 16

"excitation" : $\Delta T(t)$, réponse modèle, et $I(t)$ normalisées a 1

$$q_1 = m_1 = 0,0991 \quad (q_2 = m_3 = 3,04 \text{ non significatif car } > \alpha 0,31)$$

250 s

I - METHODE DITE DU BILAN THERMIQUE

Cette méthode, voir chapitre I, repose sur la définition de la capacité thermique. Nous rappelons ci-dessous figure 1 le schéma de principe du système échantillon-fluxmètres.

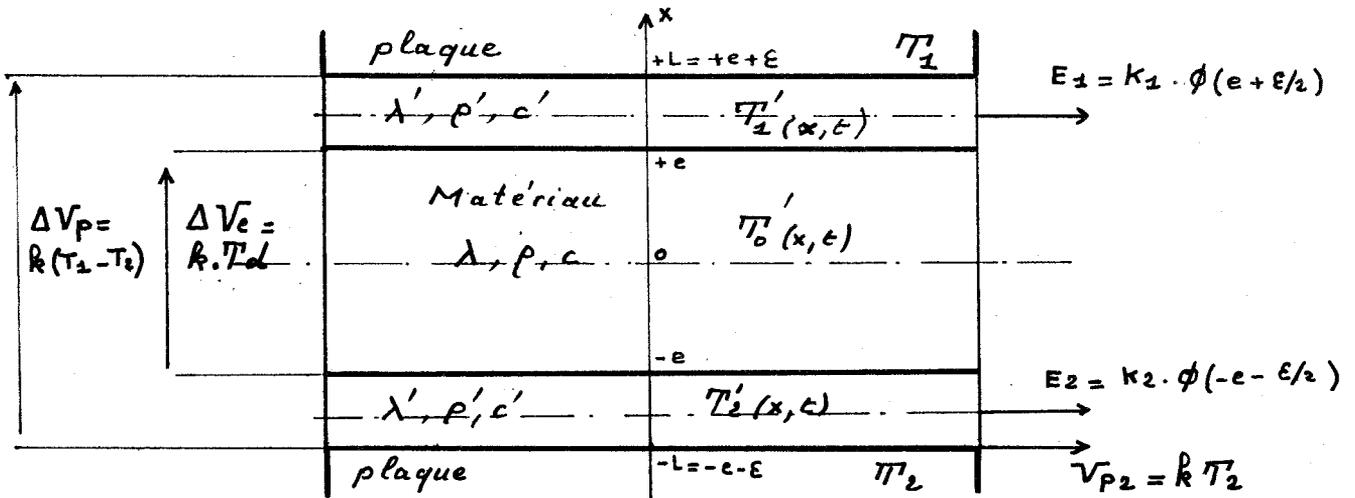


Figure 1

On pose :

$$E_s = E_1 + (K_1/K_2) E_2 = \phi_s(t) / K_1$$

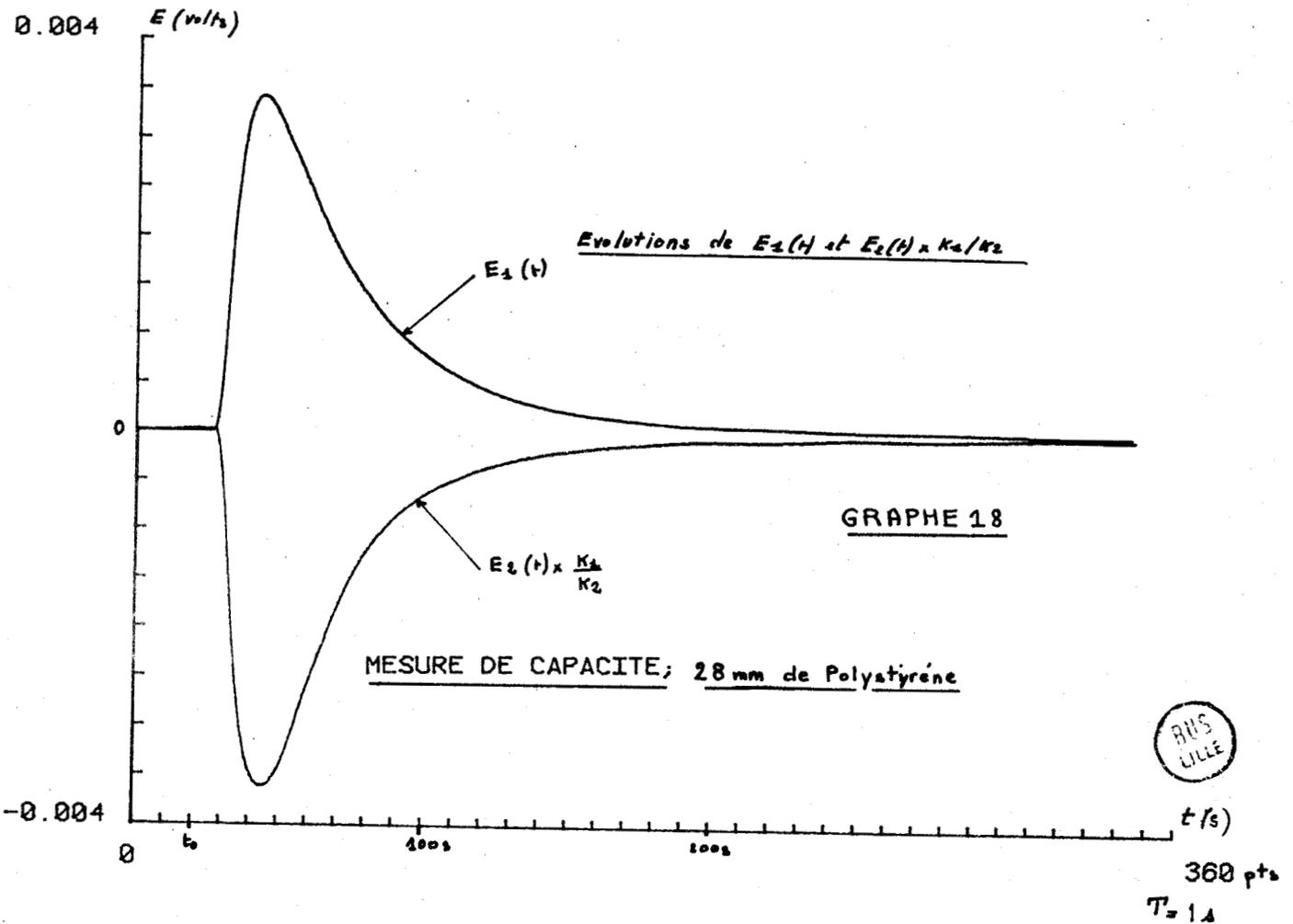
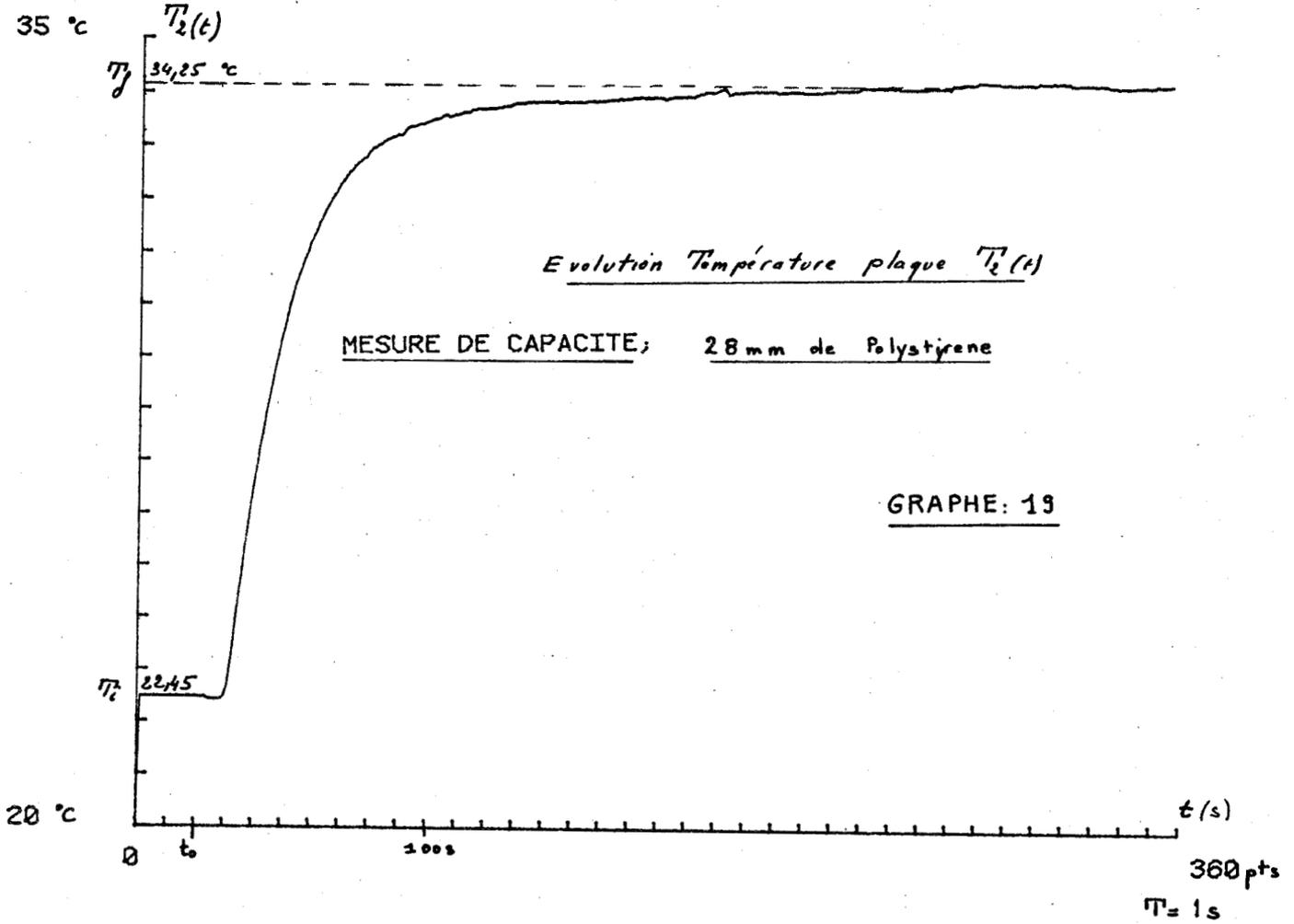
$$E_d = E_1 - (K_1/K_2) E_2 = \phi_d(t) / K_1$$

I - 1 - Description de la mesure

Dans ce type de mesure l'échantillon et les fluxmètres sont soumis au champ de température imposé par les plaques échangeuses portées à des températures identiques $T_1(t) = T_2(t)$. Le système échantillon-fluxmètres, initialement en équilibre thermique à la température T_i , évolue vers un état d'équilibre final caractérisé par une valeur T_f de la température.

Nous relevons à chaque instant les grandeurs électriques $E_1(t)$, $E_2(t)$, $V_{p2}(t)$ respectivement proportionnelles aux flux thermiques $\phi(e+\epsilon/2, t)$, $\phi(-e - \epsilon/2, t)$ et à la température $T_2(t)$ de la plaque inférieure, voir graphes 18, 19, page 60.

Nous nous assurons que $T_1(t) = T_2(t)$ en relevant l'information ΔV_p qui est proportionnelle à $T_1(t) - T_2(t)$.



Le système étant symétrique par rapport au plan passant par le milieu de l'échantillon ($x = 0$), nous pouvons écrire que :

$$T_d(x,t) = T(x,t) - T(-x,t) = 0 \quad \text{et} \quad \phi_s(x,t) = \phi(x,t) + \phi(-x,t) = 0 \quad (1)$$

quel que soit x pour les expressions établies en annexe I. Dans ces conditions, les échanges thermiques sont représentés par le seul mode :

$$T_s(x,t) = T(x,t) + T(-x,t) = 2T(x,t) \quad \text{et} \quad \phi_d(x,t) = \phi(x,t) - \phi(-x,t) = 2\phi(x,t) \quad (2)$$

La quantité de chaleur entrant dans le système localisé entre les deux plans de mesures de flux est obtenue par intégration de la différence des flux $\phi_d(t)$. Connaissant la valeur initiale et la valeur finale de $T_s(x,t)$, la valeur $J(\infty)$ de l'intégrale conduit à la détermination de la somme (ΣC) des capacités thermiques comprises entre ces deux plans, par la relation :

$$J(\infty) = \int_0^{\infty} \phi_d(t) dt = \frac{\Sigma C}{2} \left[T_s(x,\infty) - T_s(x,0^-) \right] \quad (3)$$

avec ici

$$T_s(x,\infty) - T_s(x,0^-) = 2 \left[T_2(\infty) - T_2(0^-) \right] = 2 \left[T_f - T_i \right]$$

et

$$\phi_d(t) = \phi(e+\epsilon/2,t) - \phi(-e-\epsilon/2,t)$$

I - 2 - Détermination théorique de la capacité mesurée

A partir des expressions $\Phi_d(p)$, $\phi_d(t)$ établies en annexe I, nous pouvons vérifier que la valeur théorique de l'intégrale $J(\infty)$ ne dépend que des grandeurs T_f , T_i et ΣC .

$$(\Phi_d(p) = \text{Transformée de Laplace de } \phi_d(t))$$

Les conditions initiales de températures sont identiques pour l'échantillon et les fluxmètres soit :

$$T_{00} = T_{01} = T_{12} = T_i \quad (4)$$

Pour $t \geq t_0^+$ les conditions limites imposées sont :

$$T(-L,t) = T_2 = T(+L,t) = T_1 = T_f \quad \forall t \quad (5)$$

Dans ces conditions la relation (29) de l'annexe I devient :

$$\Phi_d(p) = -z' \lambda' S \frac{(T_f - T_i)}{p} \frac{\operatorname{ch} z' \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a'}{a}} \operatorname{cth} z e \operatorname{sh} z' \frac{\varepsilon}{2}}{\operatorname{ch} z' \varepsilon \cdot (\operatorname{th} z' \varepsilon + \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a'}{a}} \operatorname{cth} z e)} \quad (6)$$

avec $z = \sqrt{\frac{p}{a}}$, $z' = \sqrt{\frac{p}{a'}}$, $a = \frac{\lambda}{\rho c}$, $a' = \frac{\lambda'}{\rho' c'}$

et pour l'expression analytique de la différence des flux, relation (32) de l'annexe I, nous obtenons :

$$\phi_d(t) = 4 \lambda' S (T_f - T_i) \sum_{k=1}^{\infty} A(m_k) \exp(-m_k t) \quad (7)$$

avec $k = 2p+1$, m_k solution de l'équation :

$$\sqrt{\frac{R'}{C'}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{m_k} \sqrt{R' C'} \right) - \sqrt{\frac{R}{C}} \operatorname{cotg} \left(\frac{1}{2} \sqrt{m_k} \sqrt{RC} \right) = 0 \quad (8)$$

et

$$A(m_k) = \frac{\cos \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a'}{a}} \operatorname{cotg} \sqrt{\frac{m_k}{a'}} e \sin \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \frac{\varepsilon}{2}}{\cos \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \varepsilon \left[\frac{\varepsilon}{\cos^2 \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \varepsilon} - \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{e}{\sin^2 \sqrt{\frac{m_k}{a'}} e} \right]} \quad (9)$$

En pratique, pour ce type de mesure, les plaques sont en contact avec le système échantillon-fluxmètres quel que soit t (pour $t < t_0$ et $t \geq t_0$). Le changement d'état thermique des conditions limites imposées, voir chapitre II, est obtenu en faisant évoluer les températures des plaques. Le dispositif générateur des échangeurs thermiques est réglé de telle façon que les températures des plaques soient identiques aussi bien en régime permanent qu'en régime transitoire, soit $T_1(t) = T_2(t)$. Le changement d'état thermique imposé aux limites, pour $t \geq t_0^+$, n'est pas représentatif d'un échelon de température idéal, puisque l'évolution de la température d'une plaque est de la forme :

$$z(t) = T_1(t) = T_2(t) = (T_f - T_i) \left[1 - \exp(-t/\tau) \right] + T_i \quad (10)$$

dont la transformée de Laplace est :

$$\mathcal{L} [\bar{Z}(t)] = Z(p) = \frac{T_f - T_i}{p(1 + \tau_p)} + \frac{T_i}{p} \quad (11)$$

Il en résulte, qu'en toute rigueur, si nous souhaitons tenir compte de cette évolution de température, il faut remplacer le terme T_f/p par $Z(p)$ dans l'expression (6) de $\Phi_d(p)$.

On montre également, en suivant une étude théorique analogue à celle menée au chapitre I paragraphe IV, que l'expression analytique de la différence des flux $\phi_d(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$\phi_d(t) = 4 \lambda' S (T_f - T_i) \sum_{k=1}^{\infty} A'(m_k, \tau) \left[\exp(-m_k t) - \exp(-t/\tau) \right] \quad (12)$$

avec $k = 2p+1$

On vérifie que la valeur de l'intégrale $J(\infty)$ de la différence des flux est indépendante de la forme d'évolution $Z(t)$ de la température des plaques en appliquant les théorèmes suivants :

$$J(\infty) = \int_0^{\infty} \phi_d(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} J(t) - \lim_{t \rightarrow 0} J(t)$$

avec $J(t) = \int_0^t \phi_d(t) dt$

ou encore en utilisant les propriétés des transformées de Laplace :

$$J(\infty) = -\lim_{p \rightarrow \infty} p J(p) + \lim_{p \rightarrow 0} p J(p) \quad \text{avec} \quad J(p) = \frac{\Phi_d(p)}{p}$$

Or la limite de $\Phi_d(p)$ quand $p \rightarrow \infty$ est nulle, et la limite de $\Phi_d(p)$ quand $p \rightarrow 0$, conduit à l'expression du bilan thermique du système sur la durée du régime transitoire.

Soit $J(t)_{\text{quand } t \rightarrow \infty} = (T_f - T_i) (2 \rho c e S + \rho' c' \varepsilon S) \quad (13)$

avec $2 \rho c e S = C$ ["capacité thermique de l'échantillon"]
 et $\rho' c' \varepsilon S = C'$ ["capacité thermique d'un fluxmètre"]

La valeur de cette intégrale représente la quantité de chaleur Q nécessaire pour faire passer la température du système, compris entre les deux plans de mesure de flux, de T_i à T_f

$$\text{soit } Q = \Sigma C (T_i - T_f)$$

avec pour $T_f > T_i$ $J(\infty) > 0$ "cas d'un réchauffement"

et pour $T_f < T_i$ $J(\infty) < 0$ "cas d'un refroidissement"

En fait, lorsque $C = 0$, on mesure une capacité C_0 différente de C' , voir chapitre III, paragraphe III-2, puisqu'elle correspond à la somme des capacités des deux demi-fluxmètres (côté recouvert d'une feuille d'aluminium)

$$\text{d'où } C_0 - C' + 16,1 \text{ j/}^\circ\text{C} = 70,9 + 16,1 = 87 \text{ j/}^\circ\text{C à } \pm 1 \%$$

(une feuille d'aluminium ayant une capacité de 16,1 j/°C)

Il s'en suit que la valeur expérimentale de l'intégrale $J(\infty)$ est :

$$J(t) = (T_f - T_i)(C + C_0) = (T_f - T_i) (M c + C_0) \quad (14)$$

quand $t \rightarrow \infty$

avec M = masse de l'échantillon et c = chaleur spécifique

Nota : à l'aide d'une méthode numérique (Simpson), nous pouvons connaître à chaque instant la valeur de $J(t)$, d'après le relevé expérimental de $\phi_d(t)$, et tracer son évolution temporelle.

I - 3 - Interprétations des relevés expérimentaux

I - 3 - 1 - Considérations expérimentales

Lorsque les échantillons ont une constante de temps faible ($R C < 2.10^3$ s) nous obtenons, pour des temps ne dépassant pas l'heure, le régime final de l'intégrale $J(t)$ au % près, voir les graphes 20, 21, 22, 23 pages 71, 72 pour un échantillon de plexiglass et un échantillon de polystyrène .

Pour des échantillons où "RC" est élevé, le régime final de $J(t)$ est très long à obtenir avec précision. Nous pouvons toutefois approximer la valeur limite $J(\infty)$ d'après la forme de l'évolution de $\phi_d(t)$ suivant une méthode analogue à celle exposée au chapitre I, paragraphe IV-2.

A partir d'un certain temps $t \geq t_e$ l'expression (12) est assimilable à un régime exponentiel simple :

$$\phi_d(t) \neq 4 \lambda' S (T_f - T_i) A'(m_1, \tau) \exp(-m_1 t) \quad (15)$$

pour $t > t_e$

$$A'(m_1, \tau) \exp(-m_1 t_e) \gg \gg A'(m_3, \tau) \exp(-m_3 t_e) \quad (15-a)$$

$$\text{et } \exp(-m_1 t_e) \gg \gg \exp(-t_e / \tau) \quad (15-b)$$

La valeur du temps $t = t_e$ peut être déterminée expérimentalement en traçant le logarithme de $\phi_d(t)$, figure 2 ci-dessous.

Cette valeur correspond au temps à partir duquel le " $\ln[\phi_d(t)]$ " est assimilable à une droite, la pente de la droite est égale dans ce cas à la plus petite racine de l'équation (8), soit m_1 .

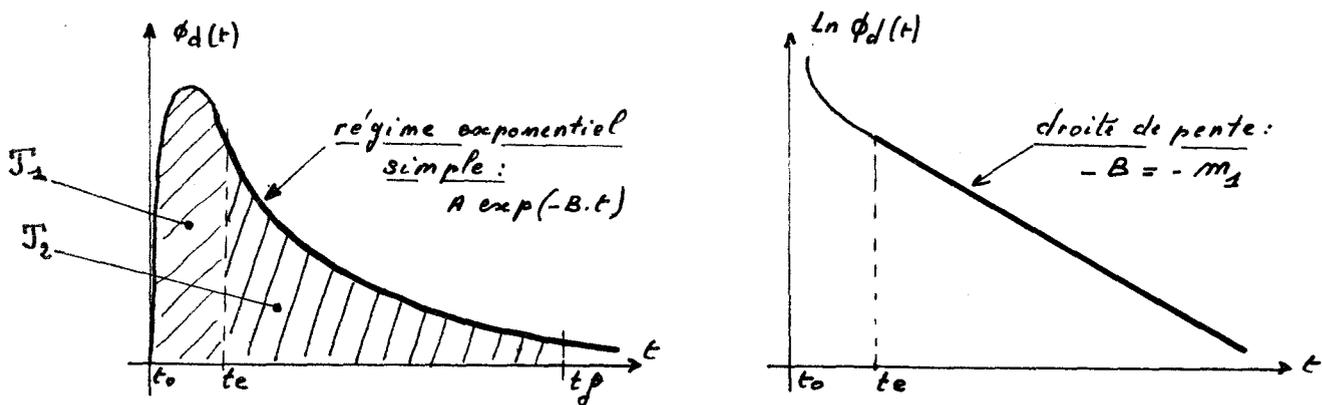


Figure 2

Connaissant la valeur t_e , nous calculons, par une méthode numérique, les coefficients A et B du régime exponentiel simple $A \exp(-B t)$ dans l'intervalle de temps t_e, t_f .

On peut ainsi écrire :

$$J(\infty) = J_1 + J_2 + \int_{t_f}^{\infty} A \exp(-B t) \quad (16)$$

I - 3 - 2 - Résultats expérimentaux

Nous avons effectué, en premier lieu, des mesures sur des plaques de plexiglass, d'épaisseur comprise entre 0 et 50 mm. Quelques uns de ces relevés sont présentés, pages 73, 74, 75.

En reportant les valeurs obtenues pour la capacité thermique totale $C + C_0$ en fonction de la masse M de chaque échantillon, graphe 31 page 68 nous constatons que la linéarité de la mesure est excellente jusque $M = 3000$ gr (soit une épaisseur de l'ordre de 40 mm). Au-delà de cette valeur, les déperditions par effet de bord ne sont plus négligeables par rapport à la précision de la mesure pour ce type de matériau.

La valeur C_0 obtenue pour la capacité thermique résiduelle quand $M = 0$ nous permet de définir la sensibilité de notre dispositif expérimental. Cette sensibilité ne dépend théoriquement que de la précision obtenue sur les informations de flux et de température. Pour vérifier cette sensibilité, nous avons mesuré la capacité d'une feuille d'aluminium de 0,1 mm et de 0,2 mm d'épaisseur, graphes 33, 34, 35, 36, pages 76, 77.

$$\text{or } C_0 = 87 \text{ j/}^\circ\text{C à 1 \% près } (\pm 1 \text{ j/}^\circ\text{C})$$

et nous obtenons pour 0,2 mm d'aluminium $C + C_0 = 118 \text{ j/}^\circ\text{C à 2 \% près } (\pm 2 \text{ j/}^\circ\text{C})$

$$\text{soit } C = 31 \text{ j/}^\circ\text{C à 10 \% près } (\pm 3 \text{ j/}^\circ\text{C})$$

Cette valeur correspond, aux imprécisions de mesures près, à la valeur présumée : $C = 32,2 \text{ j/}^\circ\text{C}$.

Nous résumons dans le tableau 1, page 83 les résultats obtenus sur les différents types de matériaux mesurés. Les résultats sont conformes à ceux publiés dans la littérature, et pour des échantillons de capacité supérieure à $3 C_0$ la précision de la mesure est de l'ordre de 2,5 %.

En conséquence, une telle méthode permet de mesurer les chaleurs spécifiques des matériaux de construction avec une précision correcte en des temps relativement courts : (inférieurs à l'heure en général).

Remarque : Dans les exemples cités ci-dessus les échantillons ont une structure homogène et les graphes représentatifs des évolutions de flux montrent que la condition $\phi_s(t) = 0$ est vérifiée, aux imprécisions de mesure près.

Une mesure de bilan thermique a été effectuée sur un système composé de 4 couches : deux fluxmètres, un échantillon de plexiglass de 2,85 mm et un échantillon de polystyrène de 28 mm d'épaisseur, figure 3 ci-dessous.

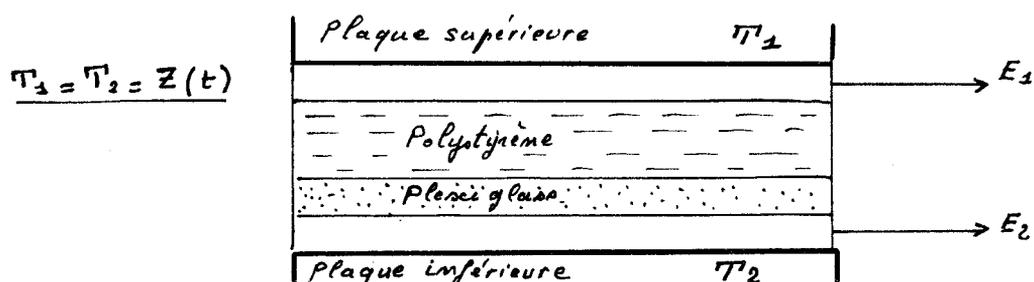


Figure 3

Les différents relevés sont présentés aux pages 81, 82 .

On constate :

- que le flux supérieur a une amplitude beaucoup plus faible que celle du flux inférieur et que leurs évolutions respectives ont des allures différentes ;
- que la somme des flux $\phi_s(t)$ est différente de 0 ;
- que l'intégrale de la différence des flux correspond toujours à la somme des capacités mises en jeu, mais que l'intégrale de la somme des flux n'est pas nulle.

Nous comptons analyser ultérieurement ces phénomènes afin de modéliser le comportement de l'humidité dans les matériaux : notamment déterminer le centre de gravité de l'échantillon humide.

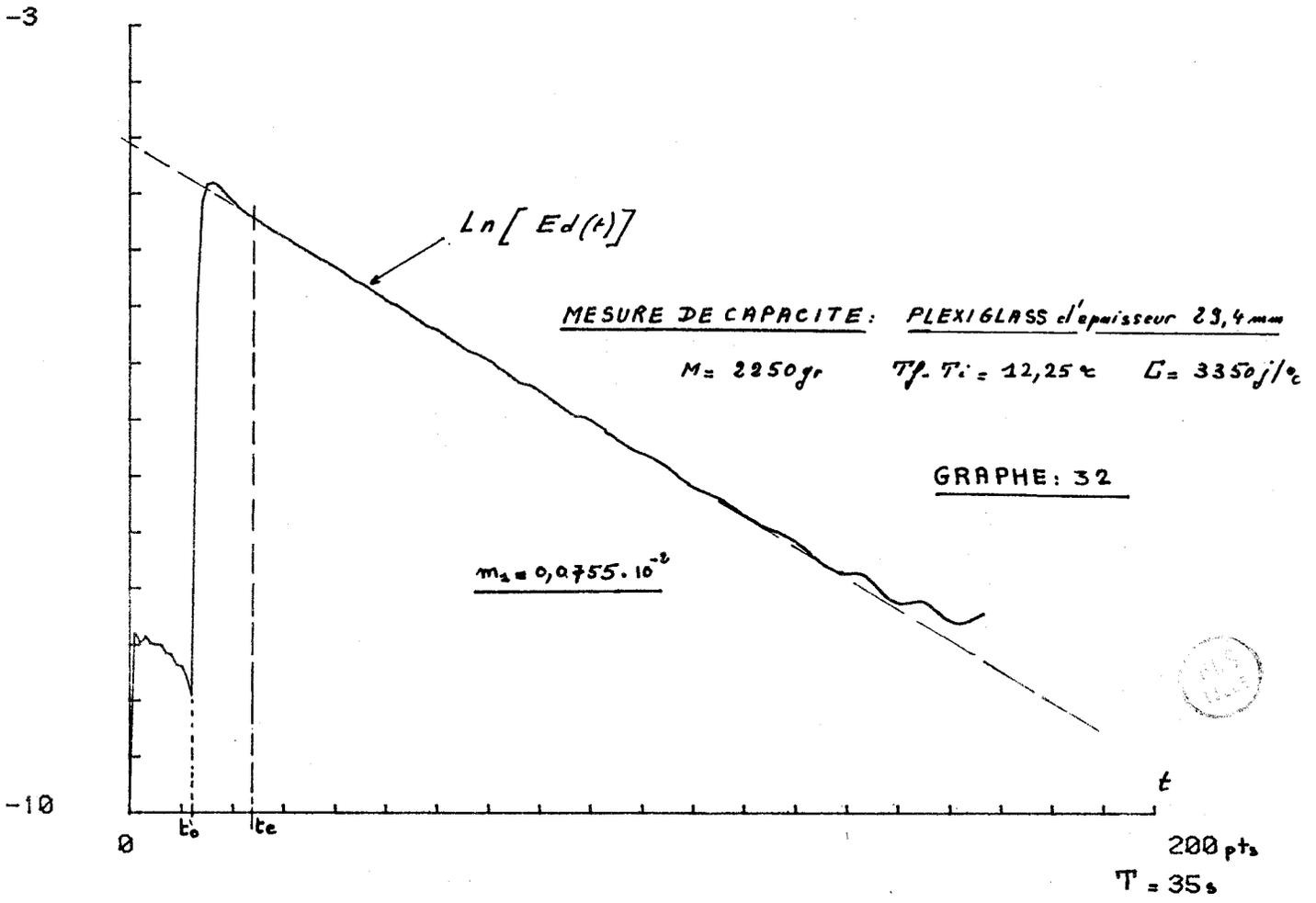
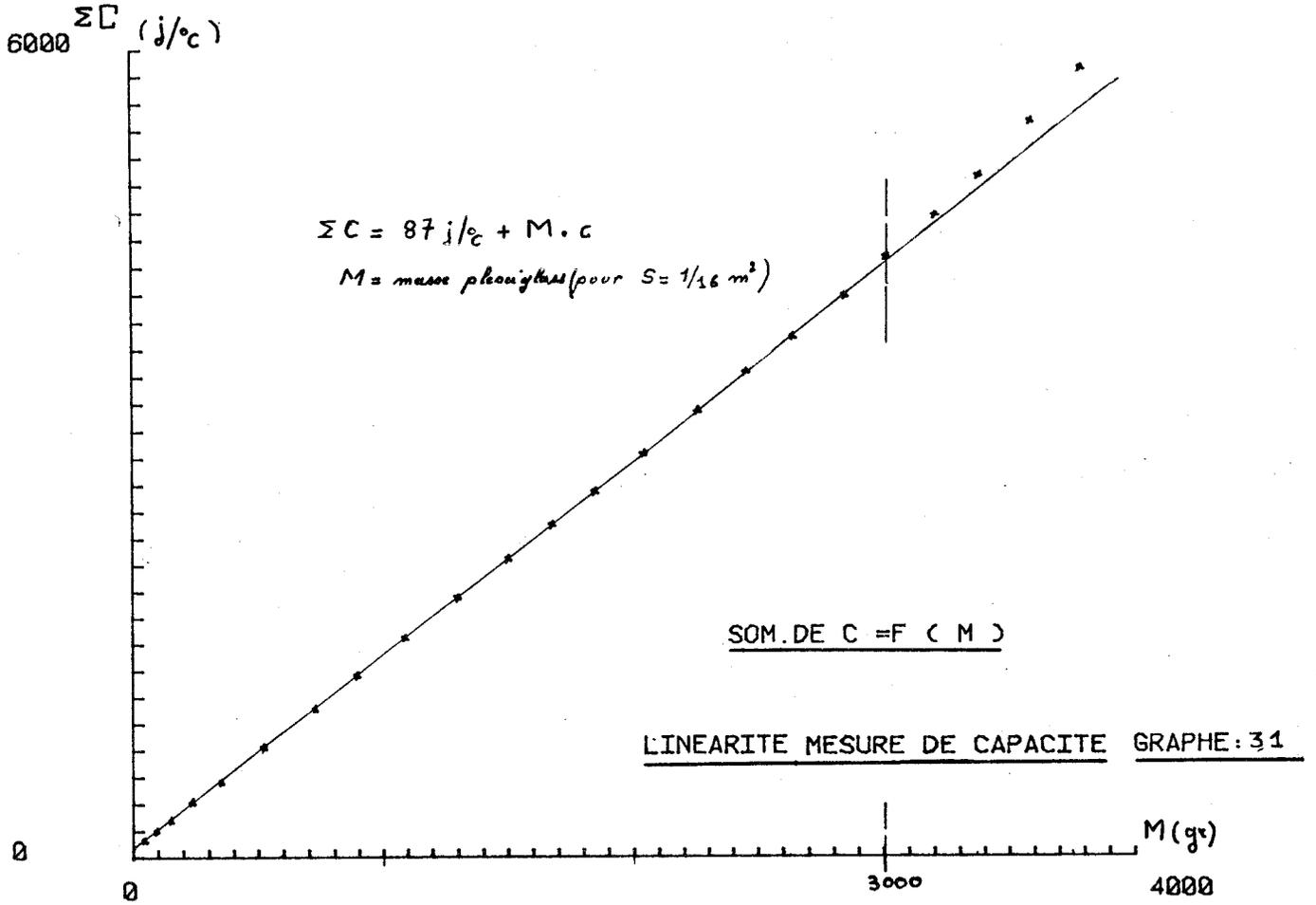
I - 3 - 3 - Conductivité et diffusivité thermique

La méthode du bilan thermique permet également de déterminer la valeur λ de la conductivité et la valeur a de la diffusivité de l'échantillon.

a) Exploitation de la forme d'évolution de $\phi_d(t)$

Pour des échantillons de constante de temps propre RC élevée, le $l_n [\phi_d(t)]$ est une droite pour $t > t_e$, voir graphe 32 page 68 . La pente de cette droite est égale à m_1 : valeur de la plus petite racine solution de l'équation (8).

Nota : m_1 est obtenue avec une meilleure précision ($\approx 2\%$) en utilisant le programme d'ajustement exponentiel, (existant en calculateur, voir annexe II) pour $t > t_e$.



Pour le graphe cité ci-dessus (plexiglass de 29,4 mm), on obtient :

$$t_e - t_o = 360 \text{ s} \qquad m_1 = 0,755 \cdot 10^{-3}$$

avec $M = 2250 \text{ gr}$ et $C = 3350 \text{ j/}^\circ\text{C}$

Pour $t > t_e$ les conditions (15-a) et (15-b) sont vérifiées au % près.

En utilisant une méthode numérique de résolution d'une équation $f(x) = 0$, nous obtenons la valeur de R ou de RC en posant $x = R$ ou $x = RC$ dans l'équation (8)

Soit pour $R = x$

$$f(x) = \sqrt{\frac{R^T}{C^T}} \operatorname{tg} \sqrt{m_1} \sqrt{R^T C^T} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{C}} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \sqrt{m_1} \sqrt{C} \sqrt{x} = 0 \quad (17)$$

et pour $RC = x$

$$f(x) = \sqrt{\frac{R^T}{C^T}} \operatorname{tg} \sqrt{m_1} \sqrt{R^T C^T} - \frac{\sqrt{x}}{C} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \sqrt{m_1} \sqrt{x} = 0 \quad (18)$$

avec $\sqrt{\frac{R^T}{C^T}} = 0,070$ et $\sqrt{R^T C^T} = 4,99$

On obtient ainsi :

$$R = 2,37^\circ\text{C/watt} \qquad RC = 7850 \text{ s}$$

soit $\lambda = 0,198 \text{ watts/}^\circ\text{C.m}$ $a = 3,95 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{h}$

L'ensemble des résultats expérimentaux obtenus par cette méthode sont consignés dans le tableau 1 page 83.

b) Application de la méthode dite du modèle
.....

Pour des échantillons de faible constante de temps RC la condition (15-b) n'est plus respectée pour un temps t_e faible par rapport à celui de la mesure, et la méthode présentée ci-dessus a) n'est pas applicable.

Nous pouvons utiliser ici la méthode du modèle présentée au chapitre I paragraphe IV qui tient compte de la forme d'évolution $Z(t)$ de la température des plaques échangeuses.

En considérant l'intégrale $J(t)$ comme étant l'information de sortie du système échantillon-fluxmètres et $Z(t)$ comme étant l'information d'entrée (ou excitation), cette méthode permet, comme nous l'avons montré au chapitre III, paragraphe III-2-2, de déterminer la valeur m_1 solution de l'équation (8) avec une bonne précision.

Nota : Le bon fonctionnement du programme relatif à cette méthode demande cependant que m_1 soit inférieur à l'inverse de la constante de temps τ des plaques ($m_1 < 0,02$).

Nous donnons pages 79 et 80 les graphes représentatifs de la réponse du système échantillon-fluxmètres et celle du modèle pour un échantillon de plexiglass et un échantillon de klegicel.

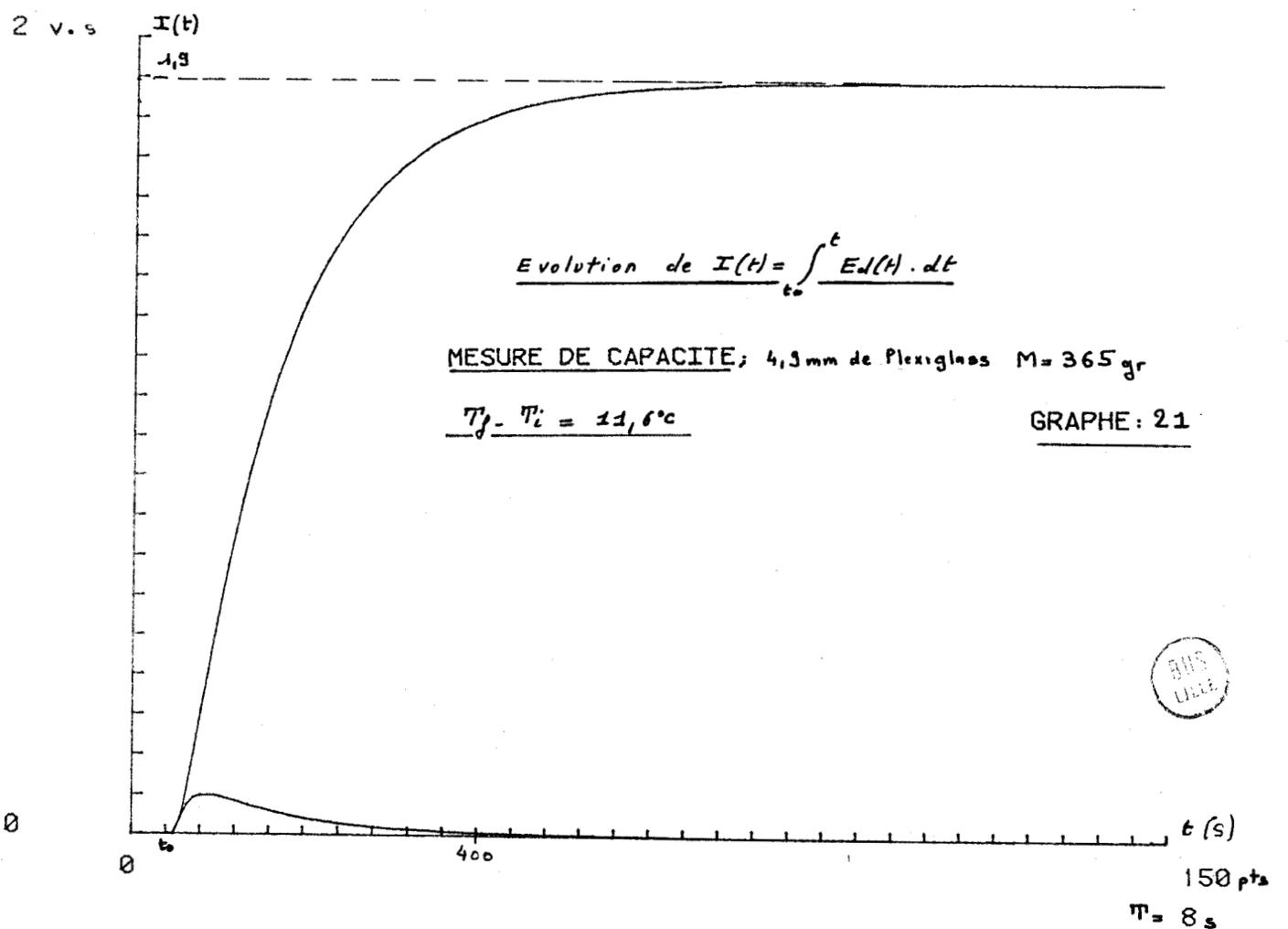
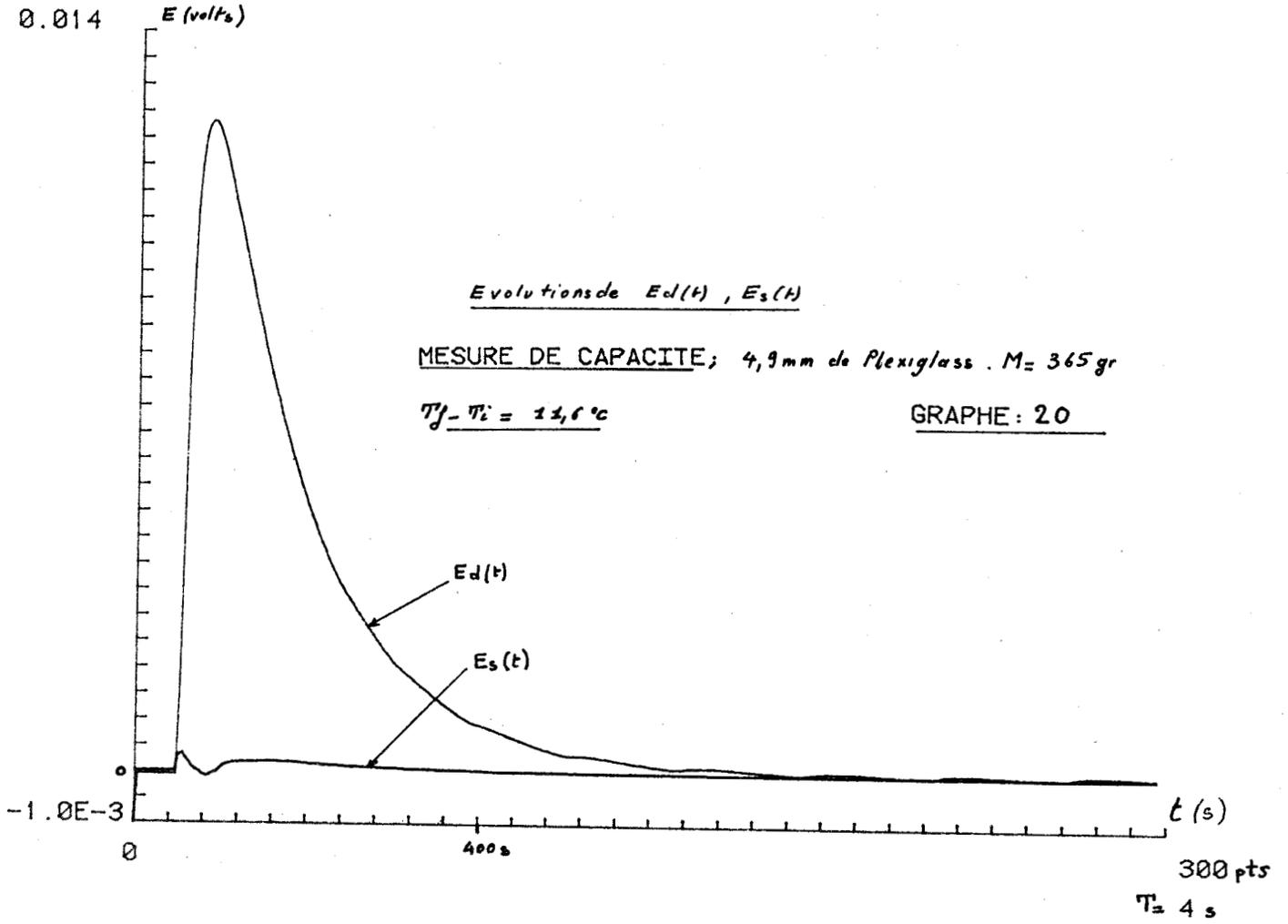
Nous obtenons :

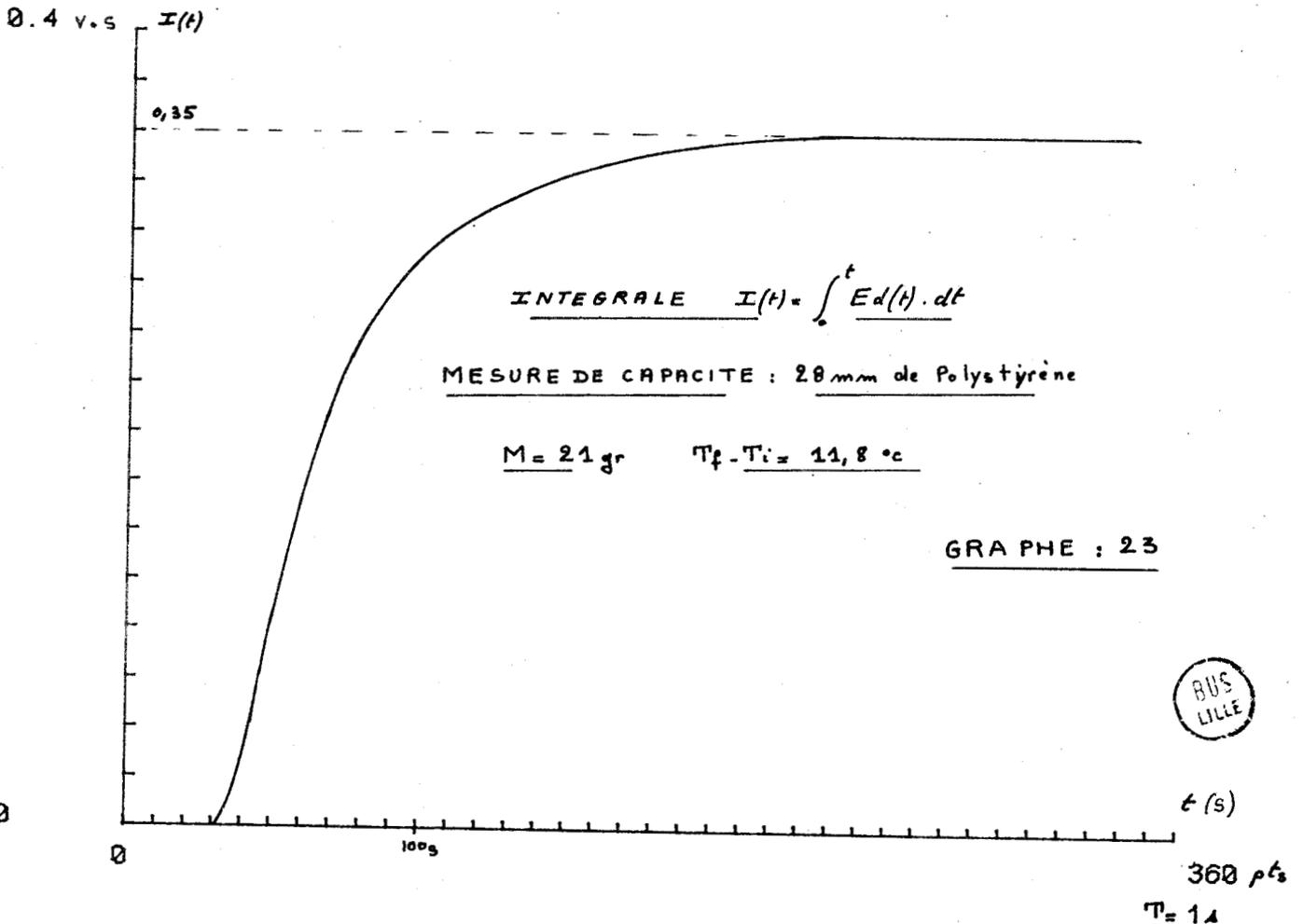
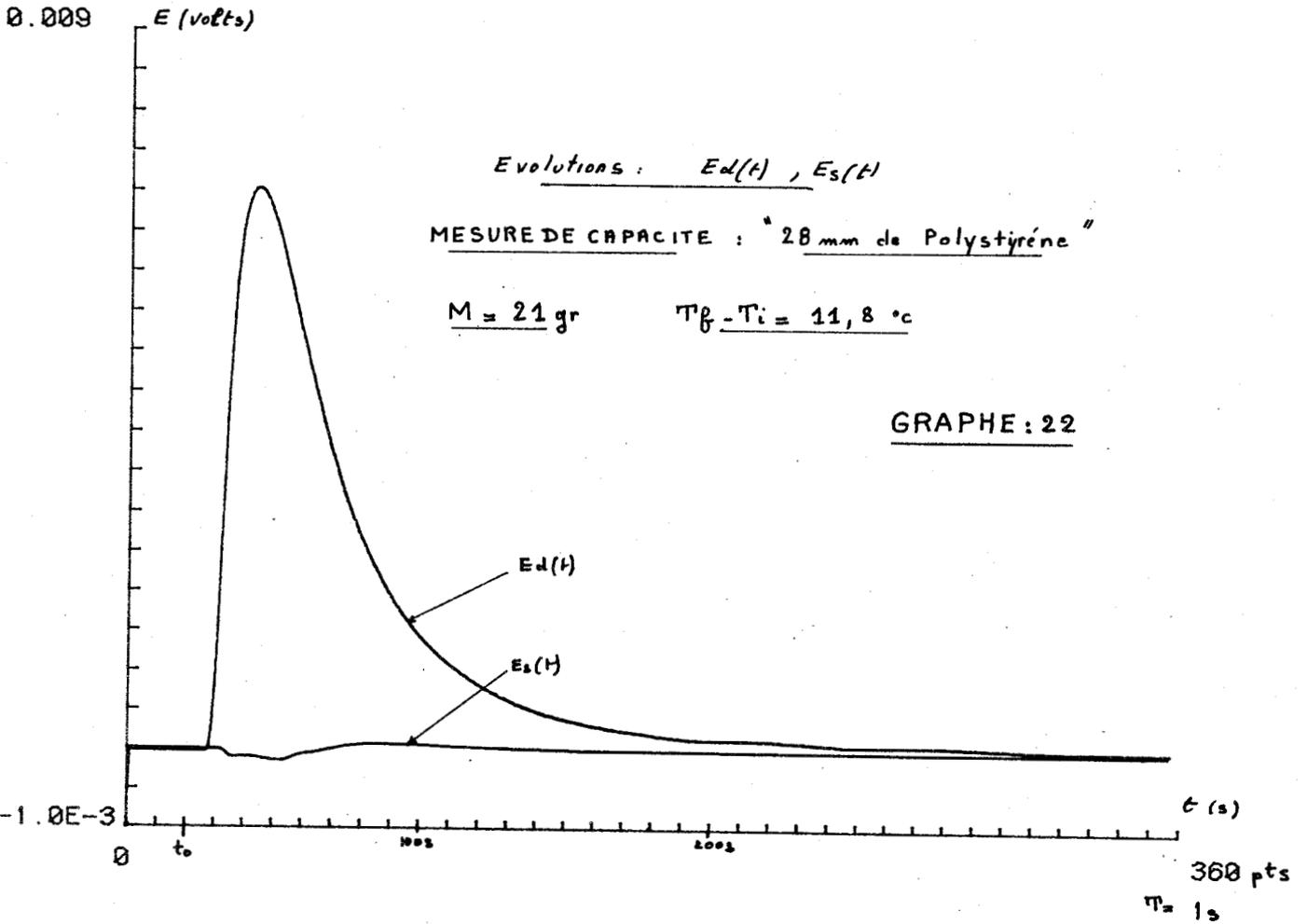
- pour le plexiglass $m_1 = 0,00263$ --- à quelques % près
d'épaisseur 14,8 mm $m_3 = 0,0321$
- pour le klegicel $m_1 = 0,00559$ --- à quelques % près
d'épaisseur 14 mm $m_3 = 0,0953$

et après résolution des équations (17) et (18)

- pour le plexiglass $R = 1,27^\circ\text{C/watt}$ $RC = 2120 \text{ s}^{-4} \text{ m}^2/\text{heure}$
donc $\lambda = 0,185 \text{ watts}/^\circ\text{C.m}$ $a = 3,72 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{heure}$
- pour le klegicel $R = 4,86^\circ\text{C/watts}$ $RC = 1346 \text{ s}^{-4} \text{ m}^2/\text{heure}$
donc $\lambda = 0,046 \text{ watts}/^\circ\text{C.m}$ $a = 5,33 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{heure}$

Remarque : En réalité, l'évolution de la différence des flux $\phi_d(t)$ est représentée en toute rigueur par une série infinie de termes exponentiels. Or, on identifie cette série à un modèle dont la réponse est limitée à deux termes. Si la valeur du premier pôle est obtenue avec précision, on peut s'attendre à ce que le deuxième terme de la réponse du modèle représente le reste de la série infinie. Il en résulte que dans ces conditions, la valeur m_3 peut ne pas être significative.





0.014

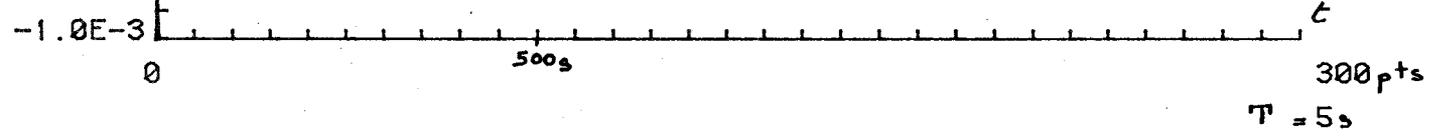
Ed (volts)

Evolutions Ed(t) pour des échantillons de plexiglass d'épaisseur comprise entre 2 et 6 mm

MESURE DE CAPACITE :

GRAPHE : 24

- ① $M_1 = 140 \text{ gr} , z_e = 1,85 \text{ mm}$
- ② $M_2 = 210 \text{ gr} , z_e = 2,85 \text{ mm}$
- ③ $M_3 = 290 \text{ gr} , z_e = 3,3 \text{ mm}$
- ④ $M_4 = 365 \text{ gr} , z_e = 4,9 \text{ mm}$
- ⑤ $M_5 = 440 \text{ gr} , z_e = 5,85 \text{ mm}$



2.5 v.s I(t)

2,34

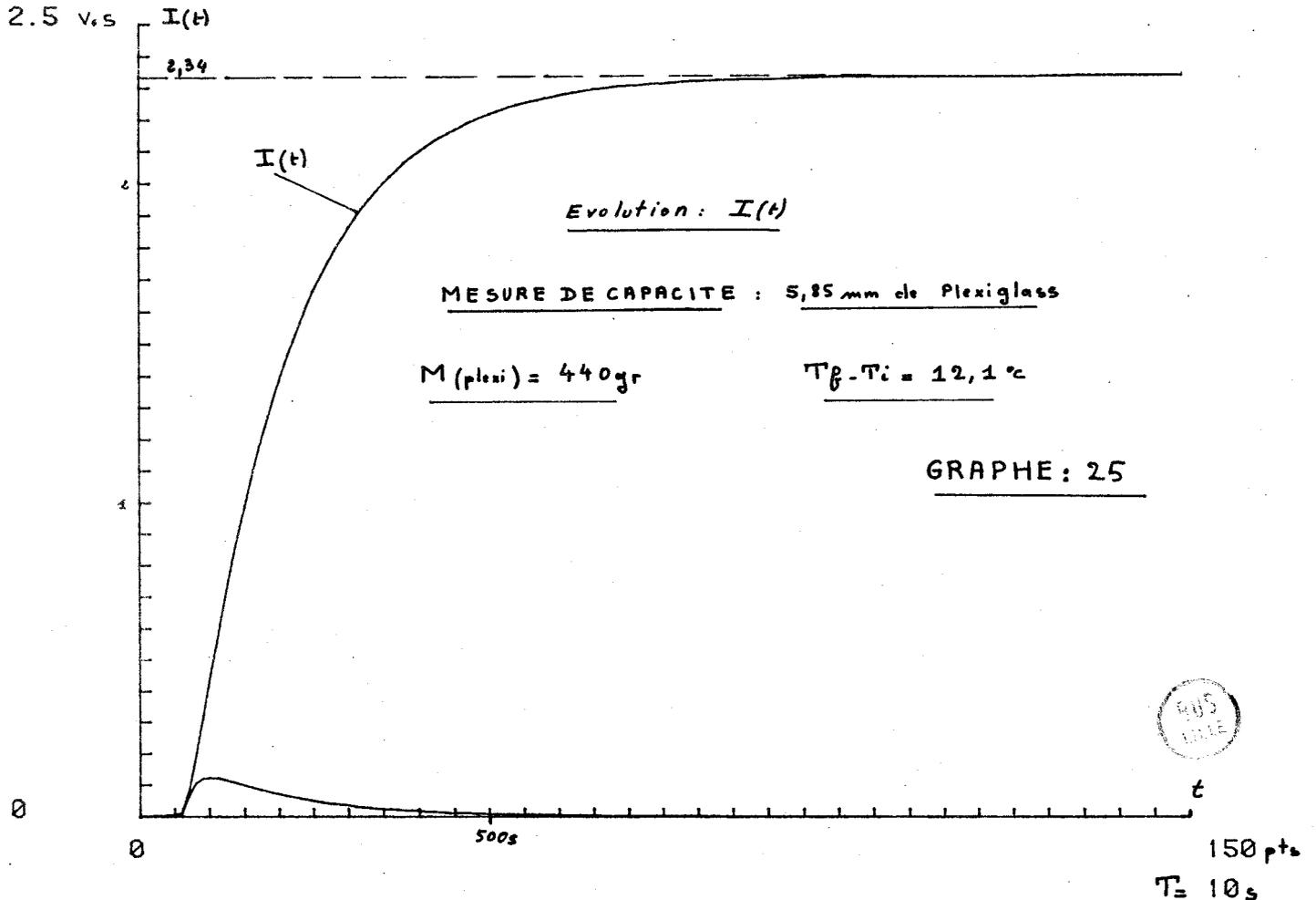
Evolution : I(t)

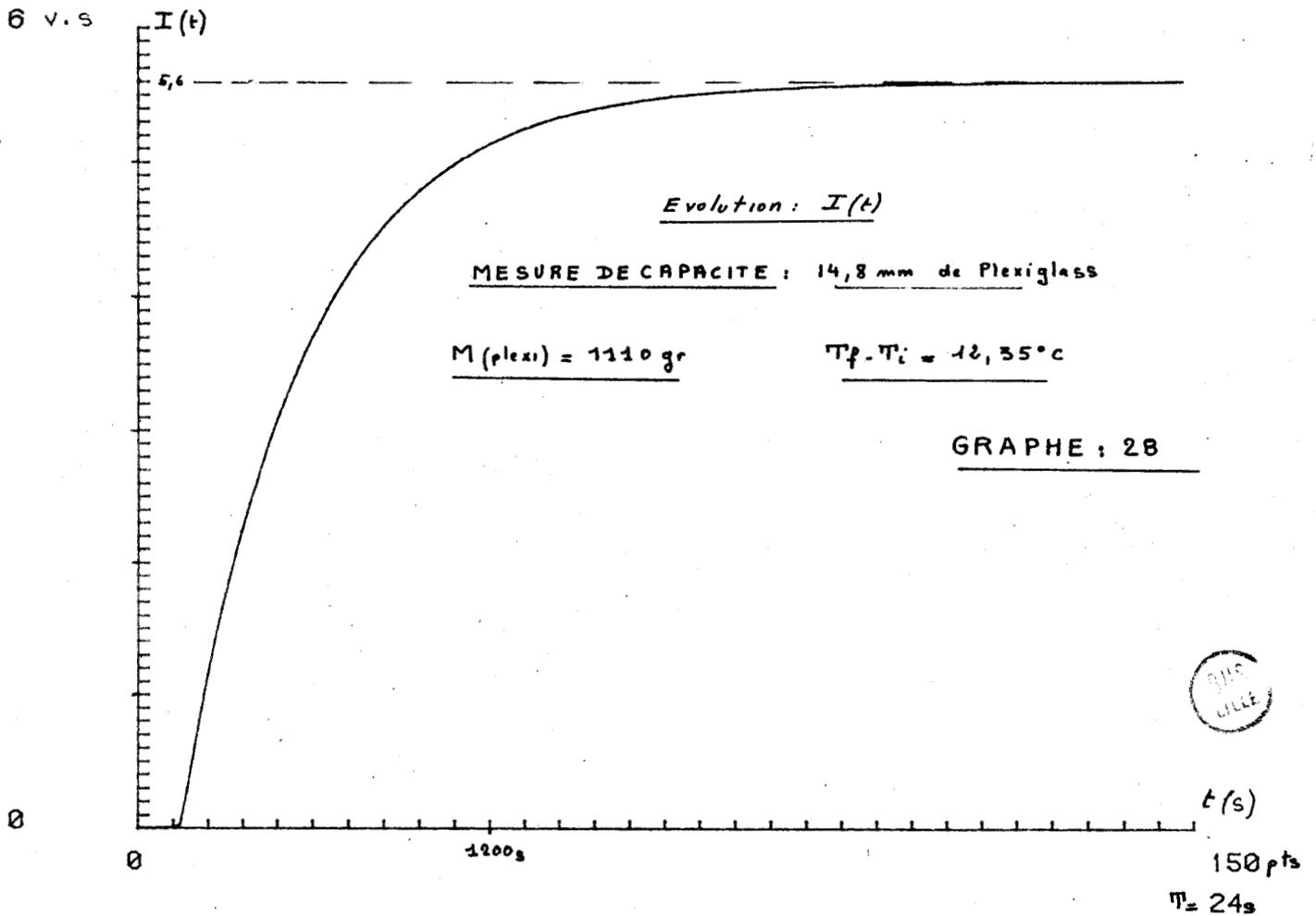
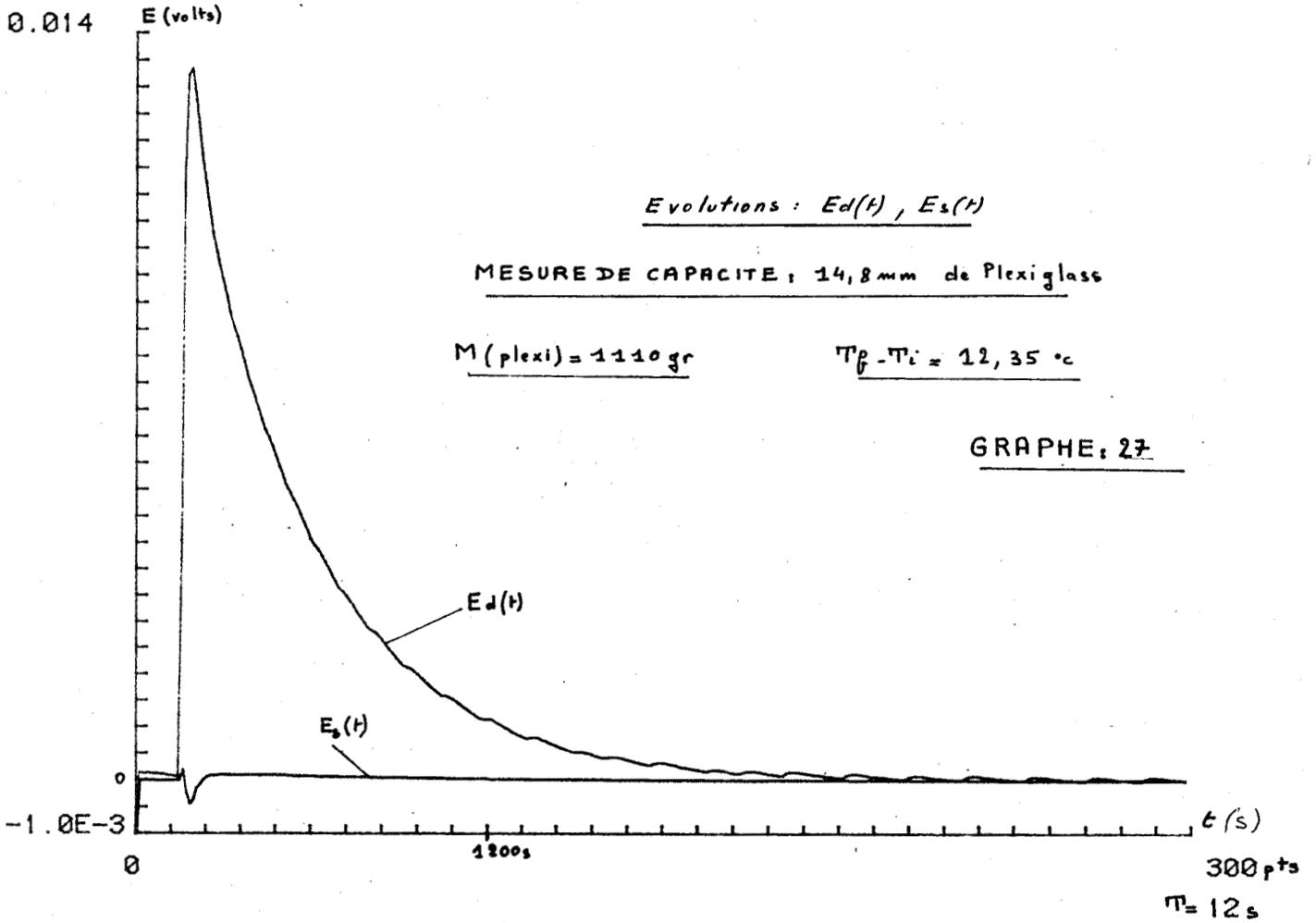
MESURE DE CAPACITE : 5,85 mm de Plexiglass

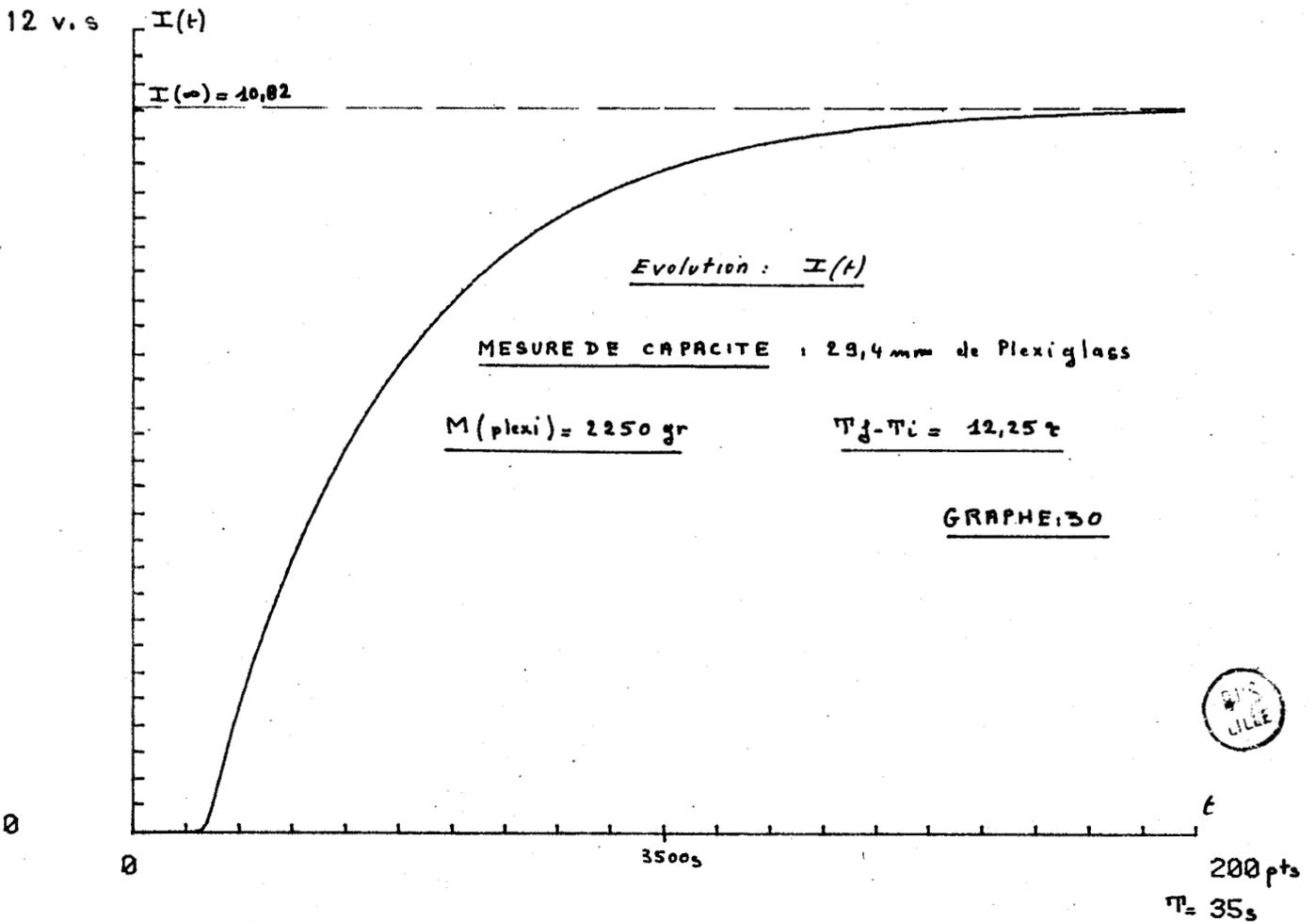
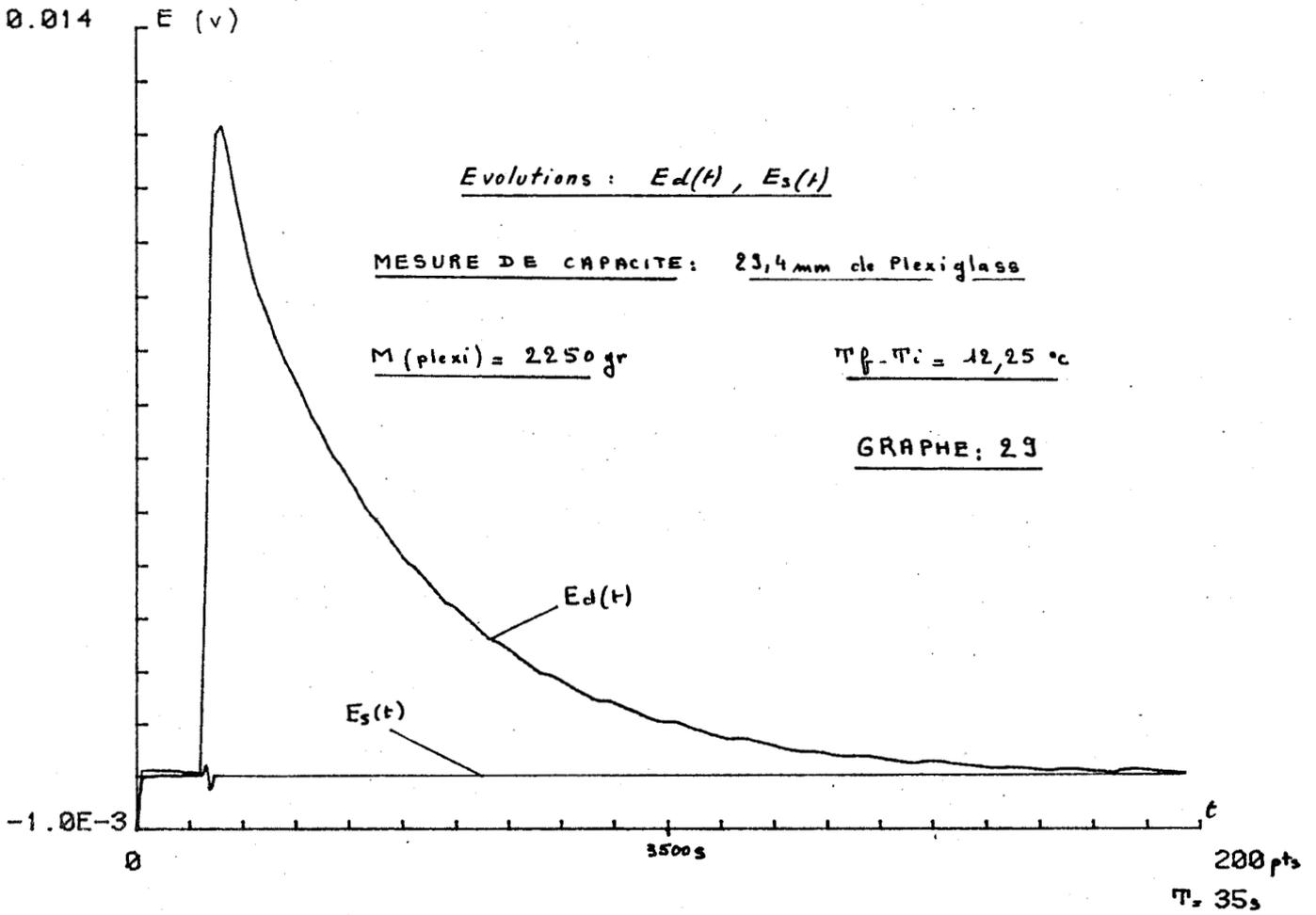
M (plexi) = 440 gr

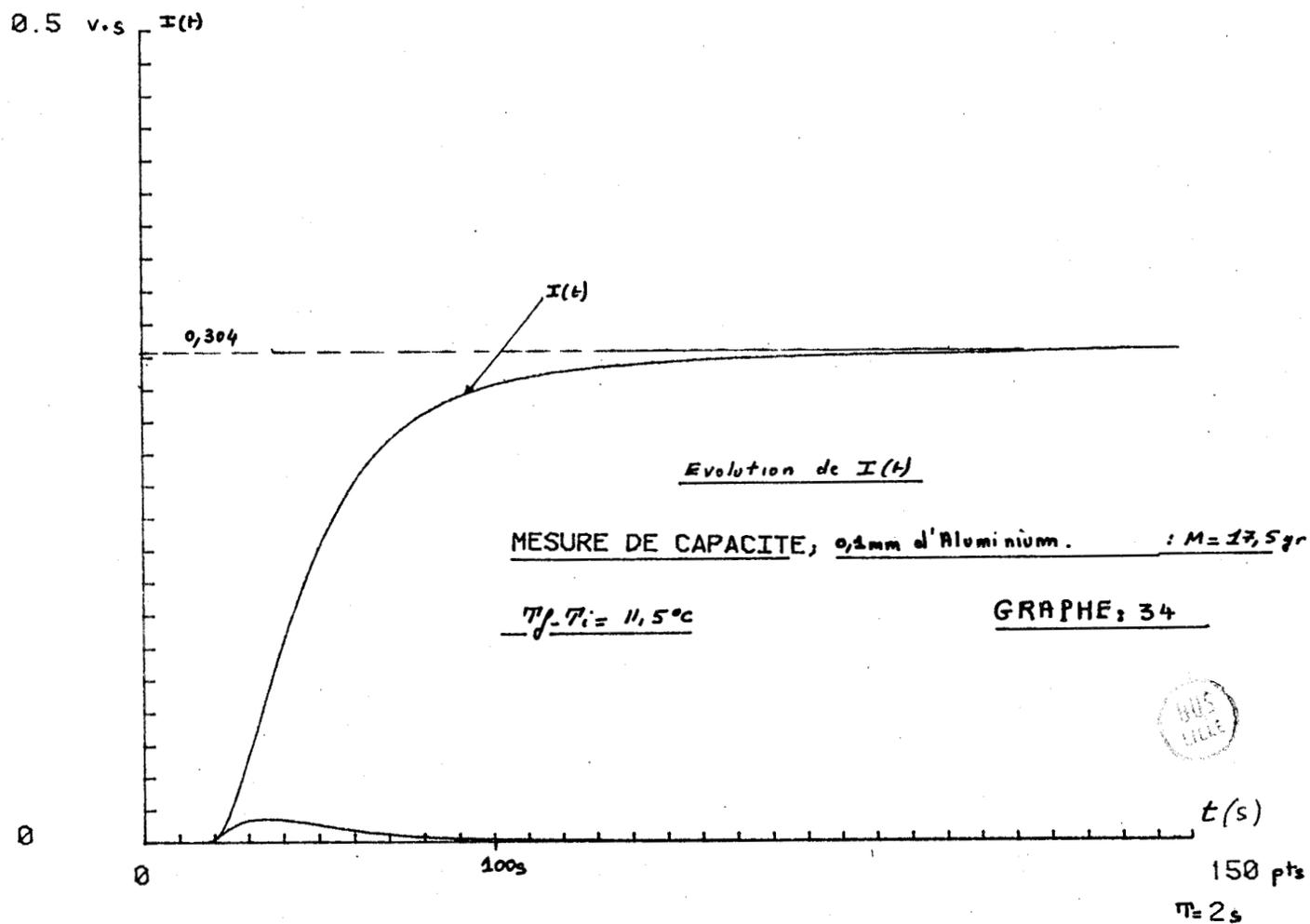
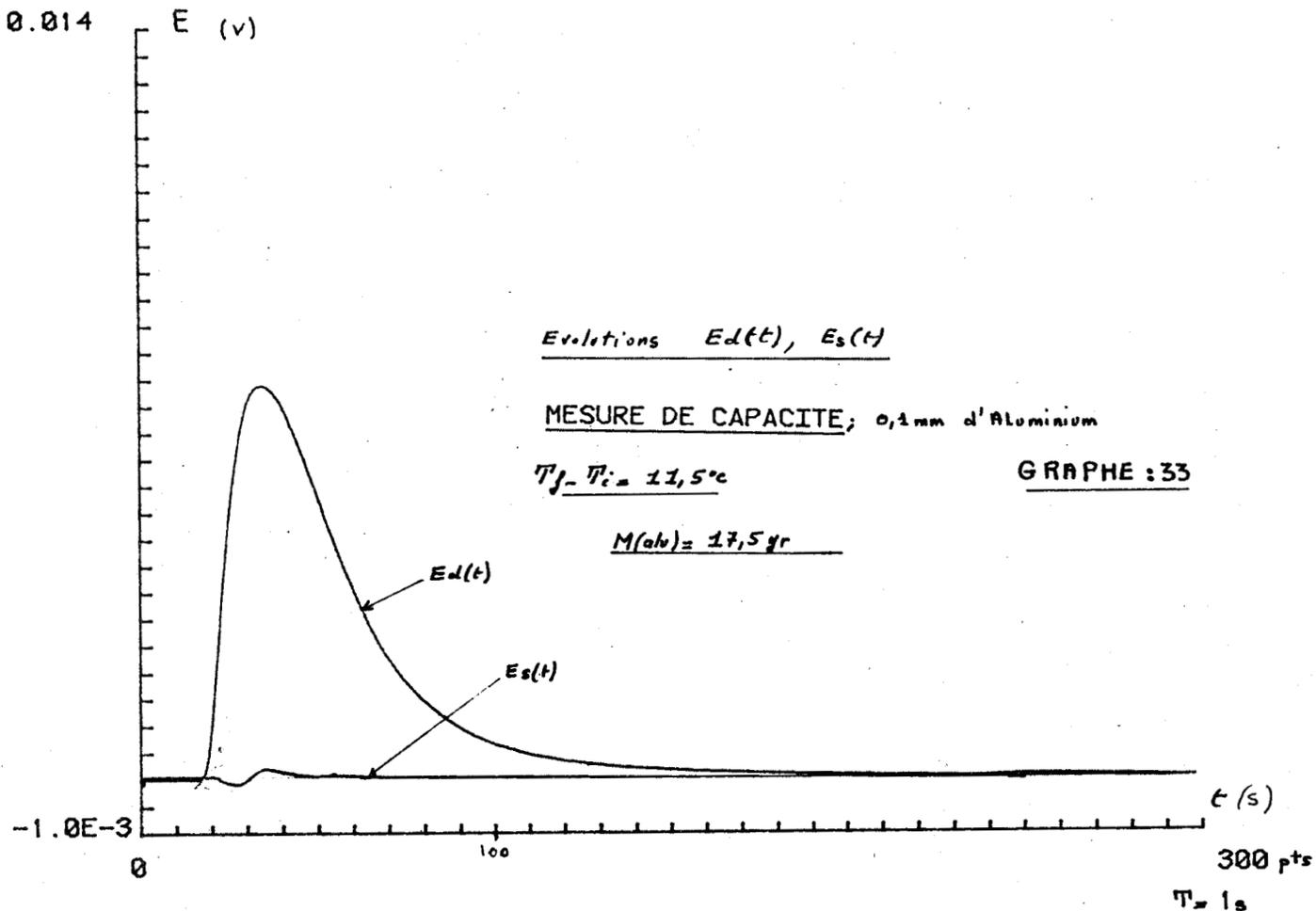
T_f - T_i = 12,1 °C

GRAPHE : 25









0.014

E (volts)

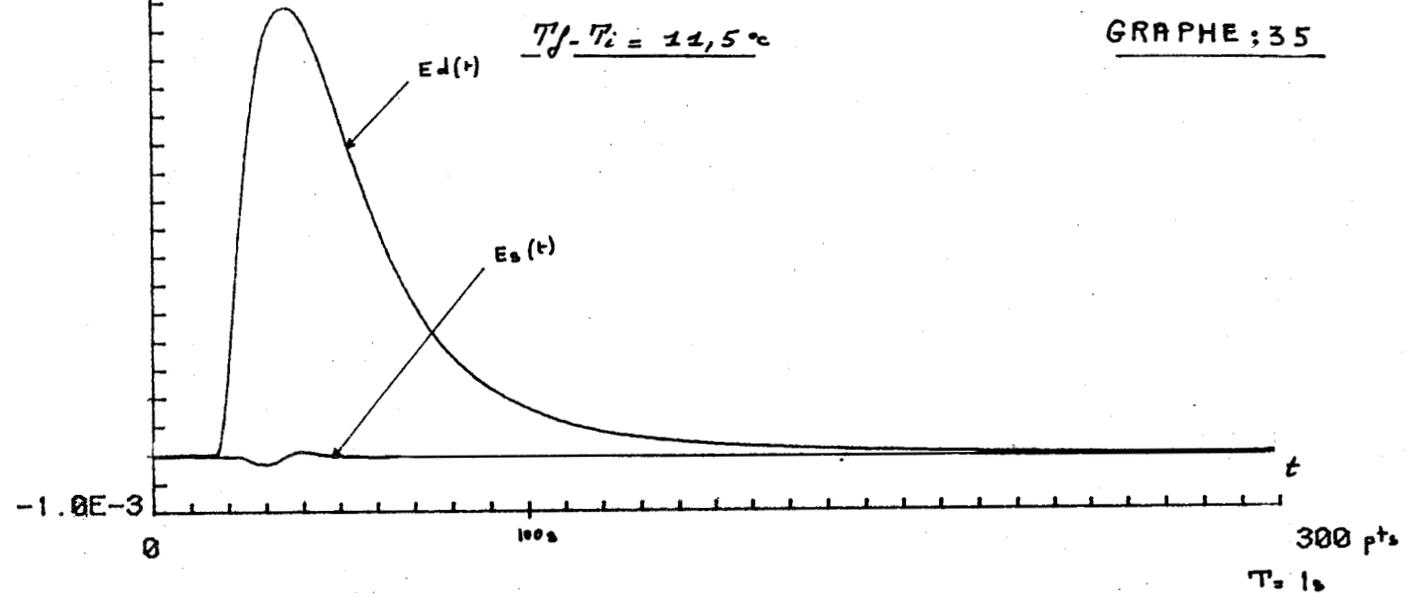
Evolutions $E_d(t)$, $E_s(t)$

MESURE DE CAPACITE; 0,2 mm d'Aluminium

M = 35gr

$T_f - T_i = 11,5^\circ C$

GRAPHE; 35



0.5 v.s

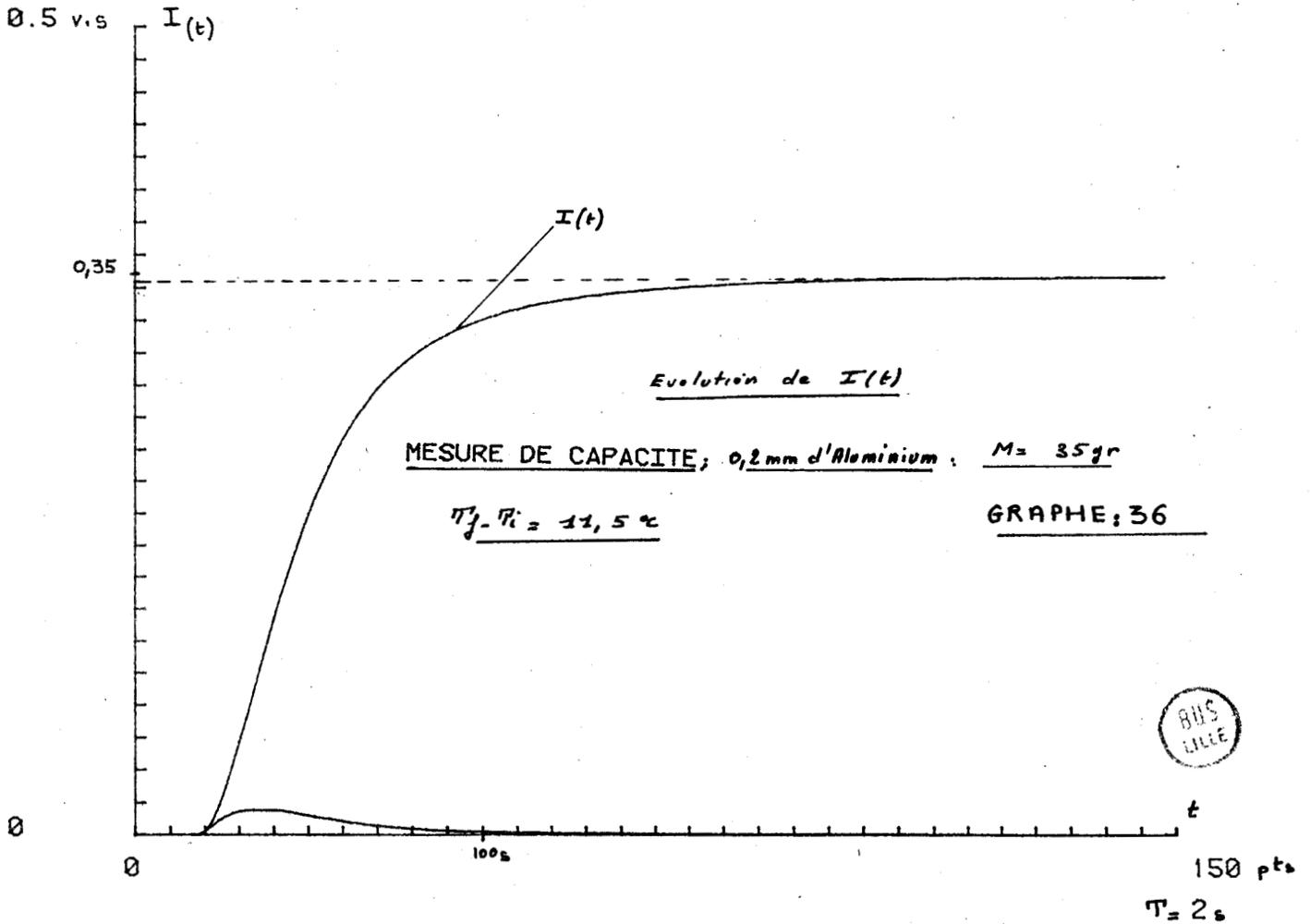
I (t)

Evolution de $I(t)$

MESURE DE CAPACITE; 0,2 mm d'Aluminium; M = 35gr

$T_f - T_i = 11,5^\circ C$

GRAPHE; 36



0.014

E (volts)

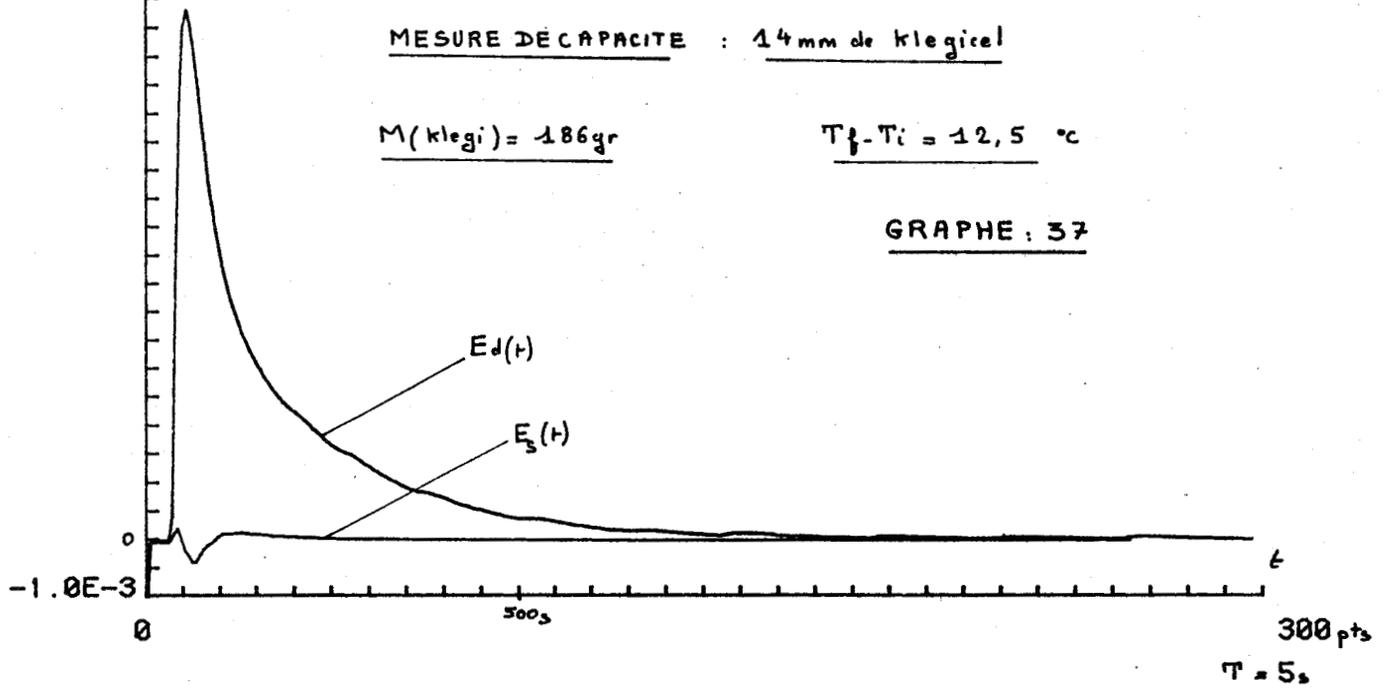
Evolutions $E_d(t)$, $E_s(t)$

MESURE DÉCAPACITE : 14 mm de klegicel

$M(klegi) = 186 \text{ gr}$

$T_f - T_i = 12,5 \text{ } ^\circ\text{C}$

GRAPHE : 37



2 v.s

I (t)

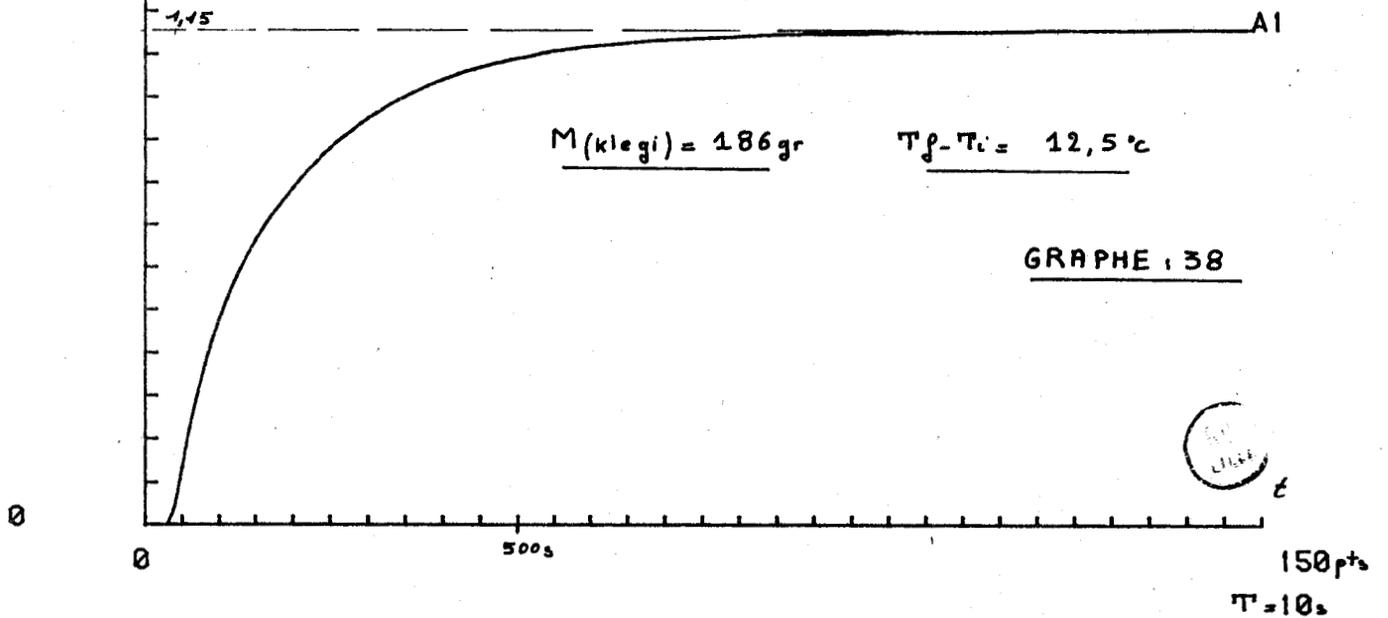
Evolution : I (t)

MESURE DE CAPACITE : 14 mm de klegicel

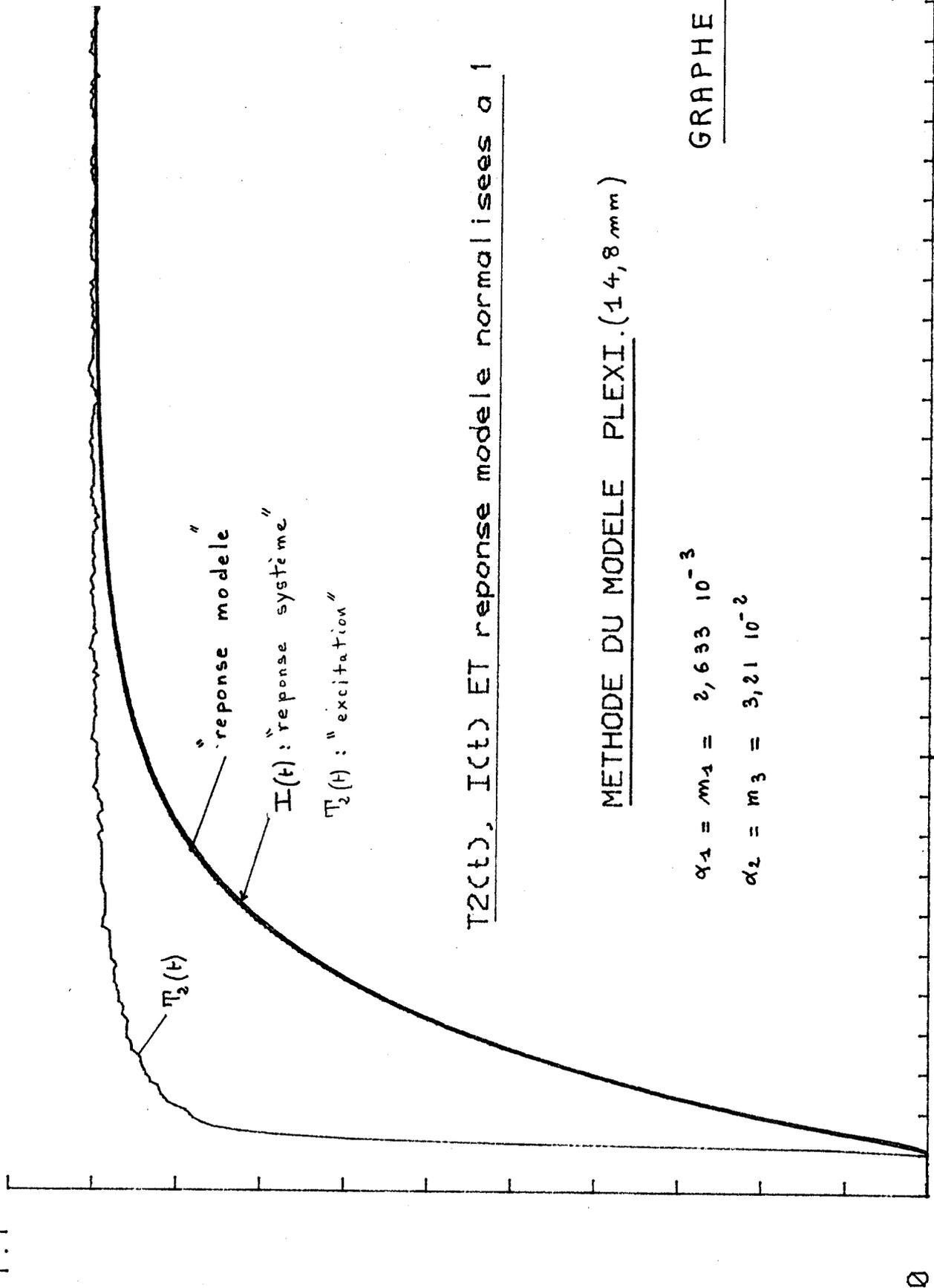
$M(klegi) = 186 \text{ gr}$

$T_f - T_i = 12,5 \text{ } ^\circ\text{C}$

GRAPHE : 38



1.1



$T_2(t)$

"reponse modele"

$I(t)$: "reponse systeme"

$T_3(t)$: "excitation"

$T_2(t), I(t)$ ET reponse modele normalisees a 1

METHODE DU MODELE PLEXI. (14,8 mm)

$\alpha_1 = m_1 = 2,633 \cdot 10^{-3}$

$\alpha_2 = m_3 = 3,21 \cdot 10^{-2}$

GRAPHE : 39

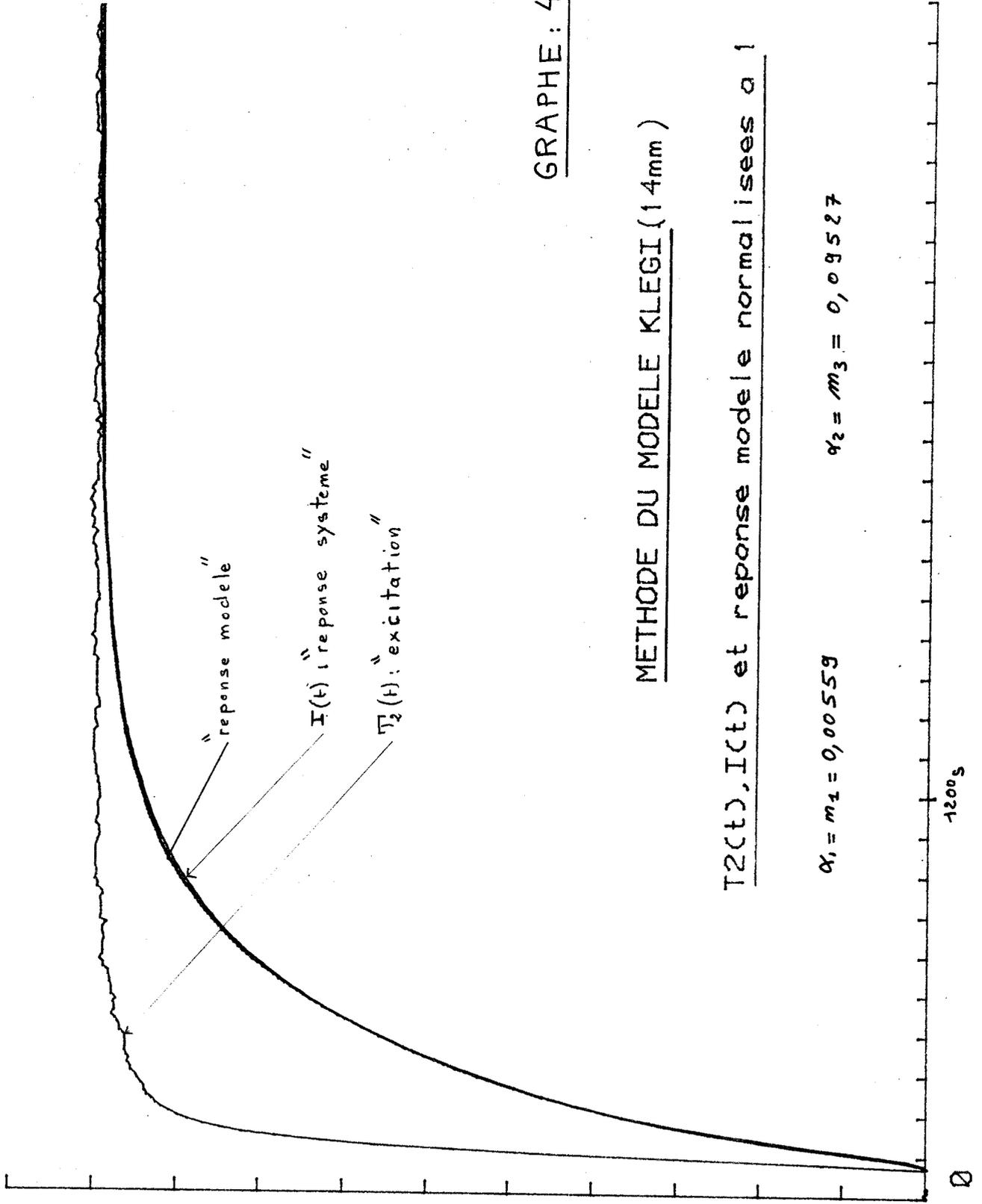
0

1200s

t



300 Pts
 $T = 12s$



GRAPHE : 40

METHODE DU MODELE KLEGI (14mm)

T2(t), I(t) et reponse modele normalisees a 1

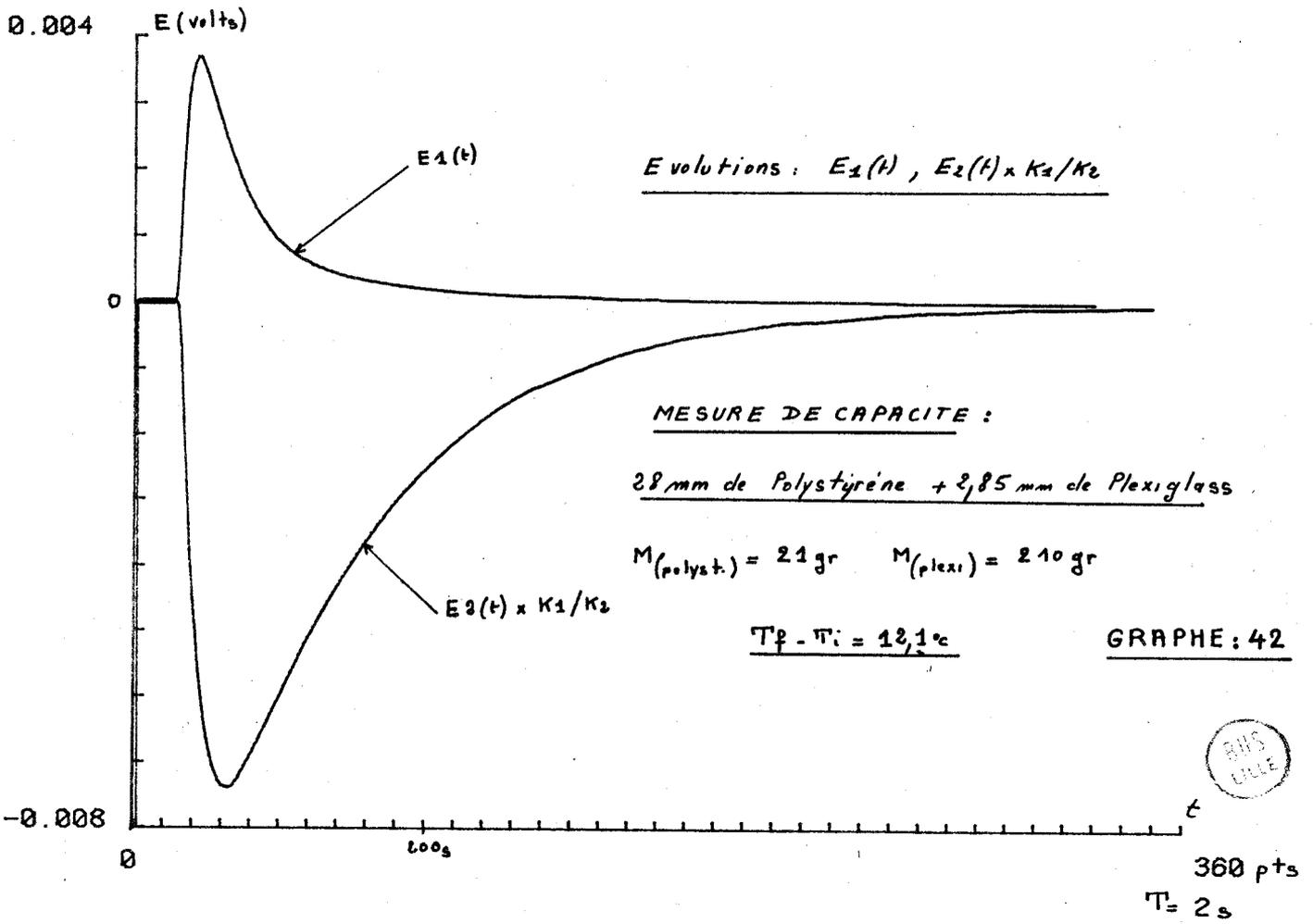
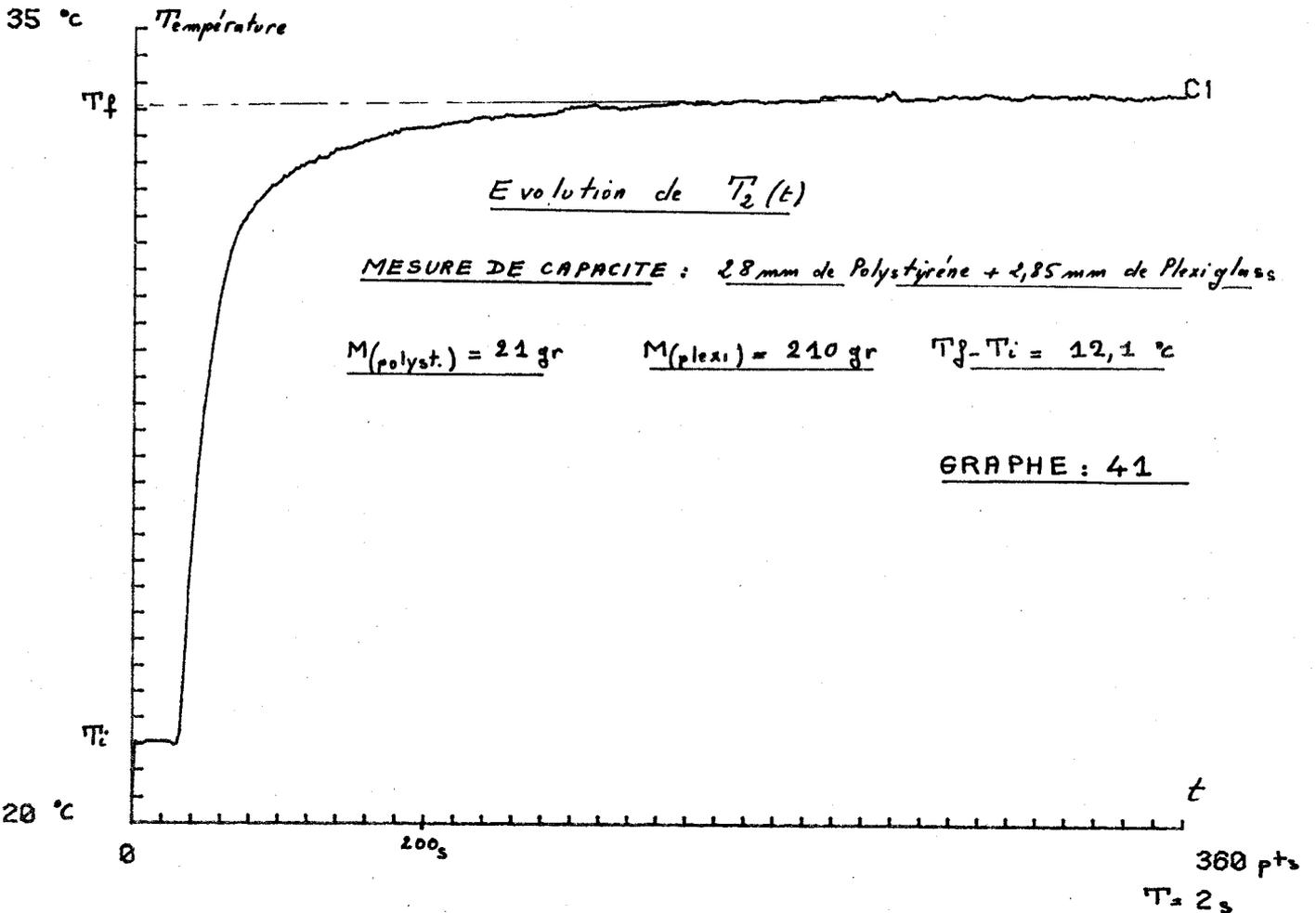
$\alpha_1 = m_1 = 0,0055g$

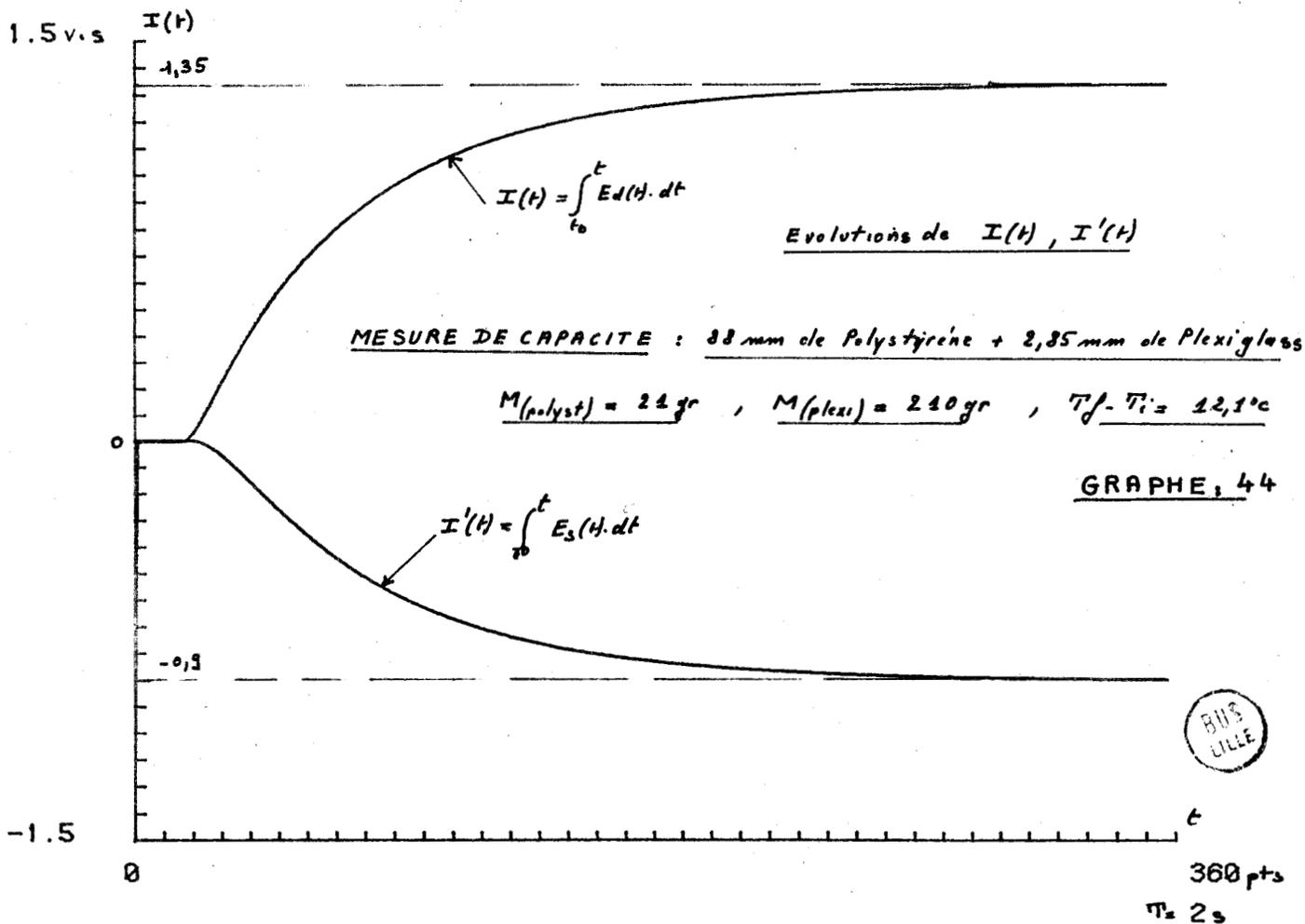
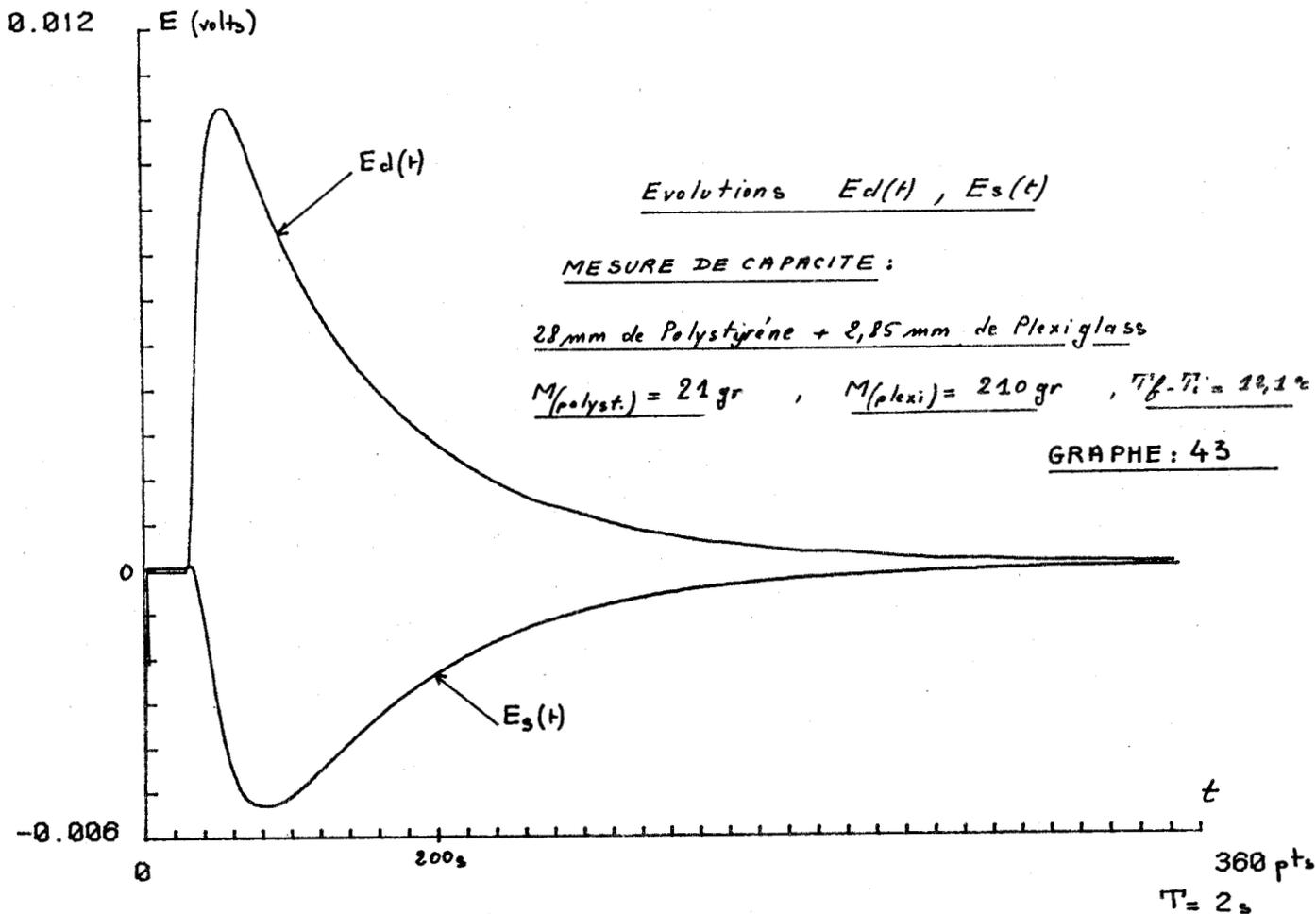
$\alpha_2 = m_3 = 0,09527$

1200s

300pts

T = 12 s





Matériau pour $S=1/16 \text{ m}^2$	2.e en mm	P en kg/m^3	M en grammes	ΣC en $\text{j/}^\circ\text{C}$ à 2%	C en $\text{j/}^\circ\text{C}$	R en $^\circ\text{C/Watt}$	RC en s	λ en Watts/cm	c en $\text{cal/}^\circ\text{C.gr}$	a en m^2/h
Plexiglass	2,85	1130	210	404	317(±9) à 3%	0,2 à 5%	63 à 5%	0,228 à 8%	0,36 à 3%	4,65.10 ⁻⁴ à 8%
	4,9	1130	365	635	547(±10) à 2%	0,34 à 4%	130 à 4%	0,231 à 7%	0,36 à 2%	4,6.10 ⁻⁴ à 8%
	14,8	1130	1110	1757	1670(±35) à 2%	1,22 à 4%	2000 à 4%	0,197 à 5%	0,36 à 2%	3,96.10 ⁻⁴ à 5%
	29,4	1130	2250	3437	3350(±67) à 2%	2,37 à 4%	7850 à 4%	0,198 à 5%	0,36 à 2%	3,35.10 ⁻⁴ à 4%
Polystyrène	28	11,7	21	115	28(±3) à 10%	1,8 à 12%	330 à 12%	0,038 à 12%	0,32 à 10%	85.10 ⁻⁴ à 12%
Klegicel	14	210	186	356	269(±8) à 3%	4,9 à 5%	1320 à 5%	0,046 à 6%	0,35 à 3%	5,35.10 ⁻⁴ à 6%
Aluminium	0,1	2800	17,5	102,5	15,5(±3) à 20%				0,21 à 20%	
	0,2	2800	35	118	31(±3) à 10%				0,21 à 10%	
Papier huile	0,6	445	16,8	125	38(±3,5) à 9%				0,54 à 10%	
Feutre	10	225	140	333	306(±7) à 2%				0,525 à 2%	

Les précisions données sont celles estimées théoriquement

DETERMINATION DE m_1 PAR LA METHODE DITE DU MODELE

Matériau	2.e (mm)	P (kg/m^3)	M (gr)	ΣC ($\text{j/}^\circ\text{C}$)	C ($\text{j/}^\circ\text{C}$)	R ($^\circ\text{C/Watt}$)	RC (s)	λ (Watts/cm)	c ($\text{cal/}^\circ\text{C.gr}$)	a (m^2/h)
Plexiglass	14,8	1130	1110	1757	1670	1,27 à 2%	2120 à 2%	0,185 à 3%	0,36 à 2%	3,75 à 3%
Klegicel	14	210	186	356	269	4,86 à 3%	1346 à 3%	0,046 à 4%	0,35 à 3%	5,33.10 ⁻⁴ à 4%

Remarque : (Graphes 42, 43, 44)

Polystyrène de 28 mm + Plexiglass de 2,85 mm

M(polyst.) = 21 gr M(plexi) = 210 gr

ΣC mesurée = 430 $\text{j/}^\circ\text{C}$ soit C(polyst.) + C(plexi) = 343 $\text{j/}^\circ\text{C}$

or C(polyst.) = 28 $\text{j/}^\circ\text{C}$ et C(plexi) = 317 $\text{j/}^\circ\text{C}$ d'après les mesures précédentes

On vérifie ici que : $\frac{1}{T_f - T_i} \int_0^\infty \phi_d(t) dt = \Sigma C$



II - METHODE DU GRADIENT THERMIQUE

Cette méthode ⁽¹⁾ correspond assez bien, en ce qui concerne les conditions limites imposées, à l'étude théorique menée en annexe I.

II - 1 - Description de la mesure

Initialement, le système échantillon-fluxmètre est placé sur la plaque inférieure à la température T_2 et à l'instant t_0 la plaque supérieure, à une température $T_1 > T_2$, est appliquée mécaniquement sur le système (figure 4).

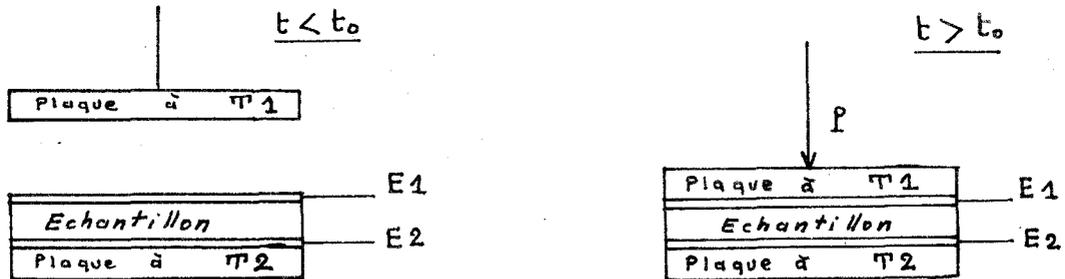


Figure 4

Nous relevons à tout instant les grandeurs électriques $E_1(t)$, $E_2(t)$ et $\Delta V_e(t)$ (voir graphes 45,46, page 90) respectivement proportionnelles aux flux et à la différence de température $T_d(t)$ aux bornes de l'échantillon.

Le système échantillon-fluxmètres devant initialement être déposé sur la plaque inférieure impose de choisir pour les conditions initiales de températures :

$$T_2 \neq T_0 \quad \text{et} \quad T_{00} \neq T_{01} \neq T_{02} \neq T_0 \quad (20)$$

si l'on souhaite que le système échantillon-fluxmètres soit considéré comme étant soumis à un échelon de température parfait.

II - 2 - Expressions analytiques du flux et de la température $T_d(t)$

Dans ces conditions expérimentales, relation(20), les échanges calorifiques peuvent être représentés par les évolutions temporelles, de la somme des flux, de la différence des flux et de la différence de température aux bornes de l'échantillon.

Il s'en suit que les expressions (32), (33) , (34) établies en annexe I deviennent :

- Pour la différence des flux :

$$\phi_d(t) = 2 \lambda' S (T_1 - T_0) \sum_{k=1}^{\infty} A(m_k) \exp(-m_k t) \quad (21)$$

avec $k = 2p+1$, m_k solution de l'équation (8) et $A(m_k)$ défini dans le paragraphe précédent , relation (9)

- Pour la somme des flux et la différence de température :

$$\phi_s(t) = (T_1 - T_0) \left[\frac{S}{\varepsilon/\lambda' - e/\lambda} - 2 \lambda' S \sum_{k=2}^{\infty} B(m_k) \exp(-m_k t) \right] \quad (22)$$

$$T_d(t) = (T_1 - T_0) \left[\frac{e/\lambda}{\varepsilon/\lambda' + e/\lambda} - 2 \sum_{k=2}^{\infty} C(m_k) \exp(-m_k t) \right] \quad (23)$$

avec $k = 2p$, m_k solution de l'équation :

$$\sqrt{\frac{R'}{C'}} \operatorname{tg}(\sqrt{m_k} \sqrt{R'C'}) + \sqrt{\frac{R}{C}} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \sqrt{m_k} \sqrt{RC}\right) = 0 \quad (24)$$

$$B(m_k) = \frac{\cos \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{a'}} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{m_k}{a'}} e \sin \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \frac{\varepsilon}{2}}{\cos \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \varepsilon \left[\frac{\varepsilon}{\cos^2 \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \varepsilon} + \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{e}{\cos^2 \sqrt{\frac{m_k}{a'}} e} \right]} \quad (25)$$

$$C(m_k) = \frac{-\frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{a'}} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{m_k}{a'}} e}{\sqrt{\frac{m_k}{a'}} \cos \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \varepsilon \left[\frac{\varepsilon}{\cos^2 \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \varepsilon} + \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{e}{\cos^2 \sqrt{\frac{m_k}{a'}} e} \right]} \quad (26)$$

Remarque : Il est important de constater que seules les valeurs de rang impair de m_k ($k = 2p+1$) interviennent dans l'expression de la différence des flux et les valeurs de rang pair de m_k ($k = 2p$) dans les expressions de la différence de température et de la somme des flux.

II - 3 - Interprétation des relevés expérimentaux

a) Conductivité thermique λ

Les évolutions temporelles de la somme des flux $\phi_s(t)$ et de la différence de température $T_d(t)$, dépendant des valeurs de rang pair de m_k , atteignent rapidement leur régime permanent ; pour $t > t_{e_0}$

On a alors $R = \frac{2 e}{\lambda S} = 2 \frac{T_d(t)}{\phi_s(t)}$ pour $t > t_{e_0}$

- Le tracé de l'évolution de $\phi_s(t)$ en fonction de l'évolution de $T_d(t)$ figure 5 ci-dessous nous donne :

$$R = \frac{2 e}{\lambda S} = 2 \cotg \gamma_0$$

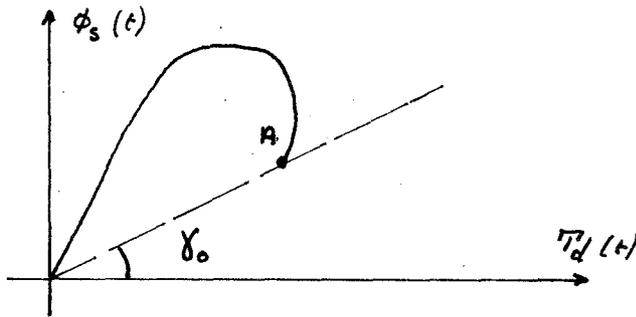


Figure 5

Les graphes 51 et 52 page 93 représentent $E_s(t) = f [T_d(t)]$ pour un échantillon de plexiglass et un échantillon de Klegicel.

- Le tracé de l'évolution de $R(t) = 2 \frac{T_d(t)}{\phi_s(t)}$ nous donne à partir du temps $t = t_{e_0}$ la valeur moyenne de $R(t)$ obtenue à l'aide d'une étude statique, figure 6.

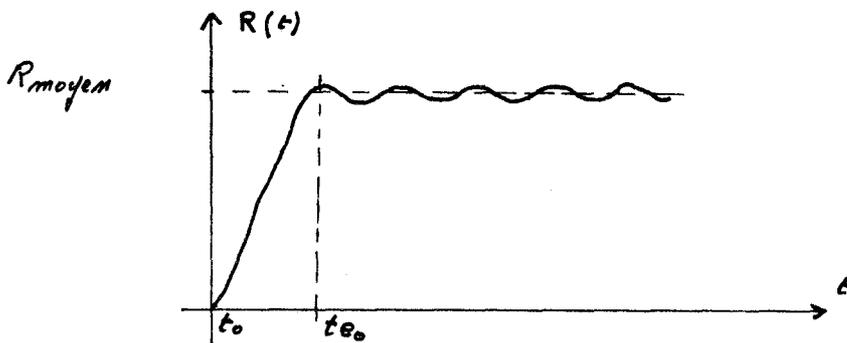


Figure 6

Nous présentons graph 50 page 92 l'évolution de $R(t)$ pour un échantillon de Klegicel.

Précision de la mesure : Des études analogues faites dans d'autres laboratoires⁽¹⁾ montrent que la précision théorique obtenue sur λ est minimale ($\approx 3,5\%$) pour des épaisseurs d'échantillon comprises entre 2 et 6 cm sachant que :

$$\frac{\delta \lambda}{\lambda} = \frac{\delta e}{e} + \frac{\delta \phi_s(\infty)}{\phi_s(\infty)} + \frac{\delta T_d(\infty)}{T_d(\infty)}$$

En pratique, cette précision minimale est difficile à obtenir compte tenu que l'information de différence de température est prise uniquement entre deux points situés sur les surfaces limitant l'échantillon. D'autre part, la résistance de contact (lame d'air) existant inévitablement entre un fluxmètre et l'échantillon n'est pas négligeable. Il est donc important de placer les sondes de températures sur les surfaces limites de l'échantillon et lorsque le matériau le permet de placer ces sondes dans des petites rainures de profondeur égale à l'épaisseur des capteurs (thermocouples)⁽²⁾.

Nota : Une lame d'air de 0,1 mm d'épaisseur pour une surface S de $1/16 \text{ m}^2$ a une résistance thermique de l'ordre de $0,08^\circ\text{C/Watt}$.

Nous reportons dans le tableau 2, page 94 les résultats obtenus sur les différents types de matériaux mesurés. La précision obtenue pour des échantillons d'épaisseur convenable (2 à 4 cm) est correcte (3 à 5 %).

b) Exploitation des évolutions de flux $\phi_d(t)$ et $\phi_s(t)$

Suivant une étude analogue à celle mesurée au chapitre I, paragraphe III, on montre qu'au delà d'un certain temps les séries (21), (22), se réduisent aux expressions suivantes avec une précision de l'ordre du % :

- pour $t > t_{e1}$

$$\phi_d(t) \approx 2 \lambda' S (T_1 - T_0) A(m_1) \exp(-m_1 t) \quad (27)$$

- pour $t > t_{e2}$

$$\phi_s(t) \approx (T_1 - T_0) \left[\frac{S}{\epsilon/\lambda' - e/\lambda} - 2 \lambda' S B(m_2) \exp(-m_2 t) \right] \quad (28)$$

A partir de ces temps le logarithme de $\phi_d(t)$ et le logarithme de $\phi_s(t)$ moins son asymptote sont des droites de pentes respectives m_1 , m_2 , figure 7.

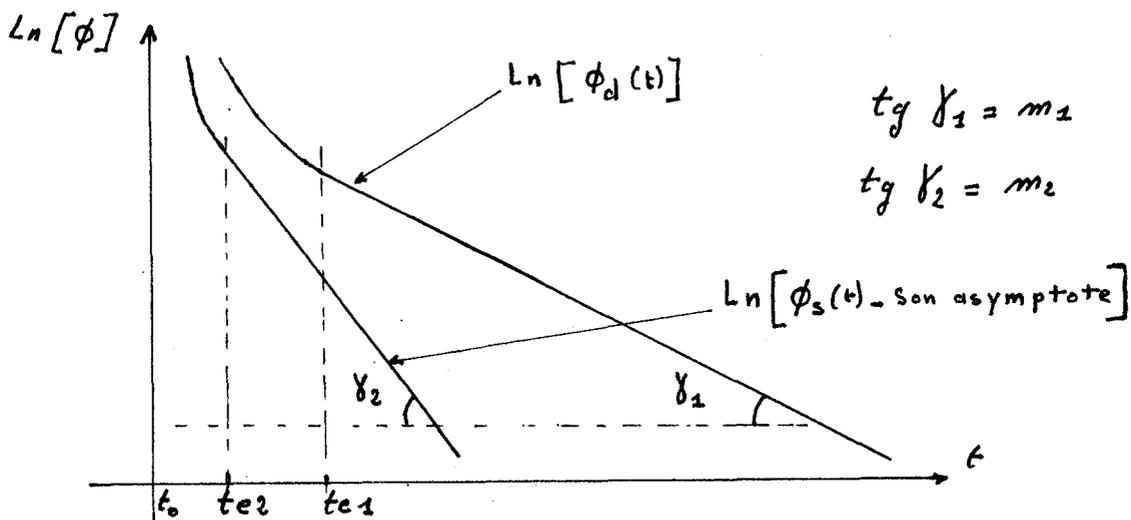


Figure 7

Par des méthodes numériques analogues à celles présentées au paragraphe précédent I-3-1, on détermine m_1 et m_2 et par le système d'équation (8) et (24), on peut écrire que :

$$\frac{\text{tg } \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{R^*C^*}}}{\text{tg } \frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{R^*C^*}}} = \text{tg} \left(\frac{1}{2} \sqrt{m_2} \sqrt{RC} \right) \text{tg} \left(\frac{1}{2} \sqrt{m_1} \sqrt{RC} \right) \quad (29)$$

Cette équation résolue numériquement nous donne la valeur de RC indépendamment des valeurs de R et de C.

En pratique, comme le montre le graphe 48 page 91 (pour un échantillon de plexiglass de 14,8 mm, la valeur de m_2 est connue avec peu de précision. Ceci est dû au fait que l'information du flux inférieur est relativement faible en général dans ce type de manipulation, et conduit à des imprécisions importantes. Seul m_1 est connu avec précision et permet de calculer la grandeur RC par résolution de l'équation (8) en remplaçant R par la valeur obtenue précédemment.

Nos différents résultats obtenus sont portés dans le tableau 2, page 94.

En conséquence, une telle méthode permet de connaître la conductivité λ rapidement avec une précision de l'ordre de 3 à 5 % pour des échantillons d'épaisseur convenable.

Il serait cependant intéressant de réaliser un dispositif permettant de donner une information de différence de température $T_d(t)$ moyenne (étendue aux surfaces limites de l'échantillon).

III - AMELIORATION ENVISAGEE

La précision obtenue sur la diffusivité thermique dépend soit de celle obtenue sur la mesure de C (méthode du bilan thermique), soit de celle obtenue sur la mesure de λ (méthode du gradient thermique)

On peut montrer que les deux méthodes sont complémentaires et peuvent amener à connaître la diffusivité ou le produit RC avec une précision indépendante de celle de C ou de celle de λ .

La méthode du modèle tenant compte de l'excitation va permettre de connaître avec une précision de quelques % les valeurs m_1 et m_2 en effectuant les deux manipulations suivantes :

a) Mesure de capacité par la méthode du bilan thermique qui conduit comme nous l'avons vu à la connaissance de C et m_1 .

b) Mesure dite du gradient à conditions limites imposées symétriques.

Cette dernière nécessite de disposer de trois bains, réglés respectivement aux températures T_0 , $T_0 + \Delta T$ et $T_0 - \Delta T$. Un dispositif sélecteur de bains amélioré choisira pour chacune des deux plaques leur source de température.

Initialement, les plaques sont alimentées par le bain ① à T_0 et le système échantillon-fluxmètres placé entre les plaques est à une température uniforme T_0 .

A l'instant t_0^+ , on commute la plaque supérieure sur le bain ② à $T_0 + \Delta T$ et la plaque inférieure sur le bain ③ à $T_0 - \Delta T$

La réponse temporelle des plaques ayant des constantes de temps identiques, on peut écrire que :

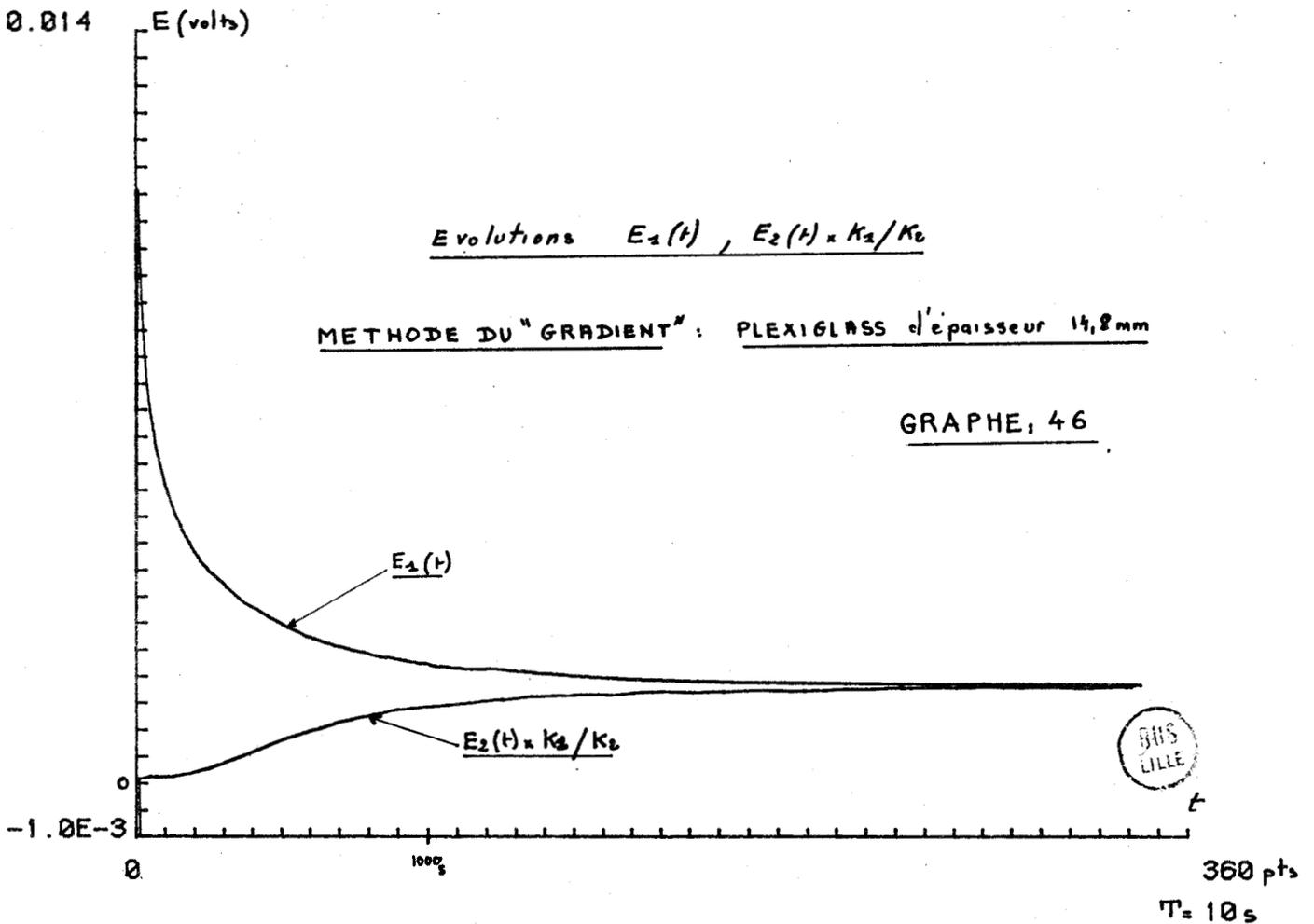
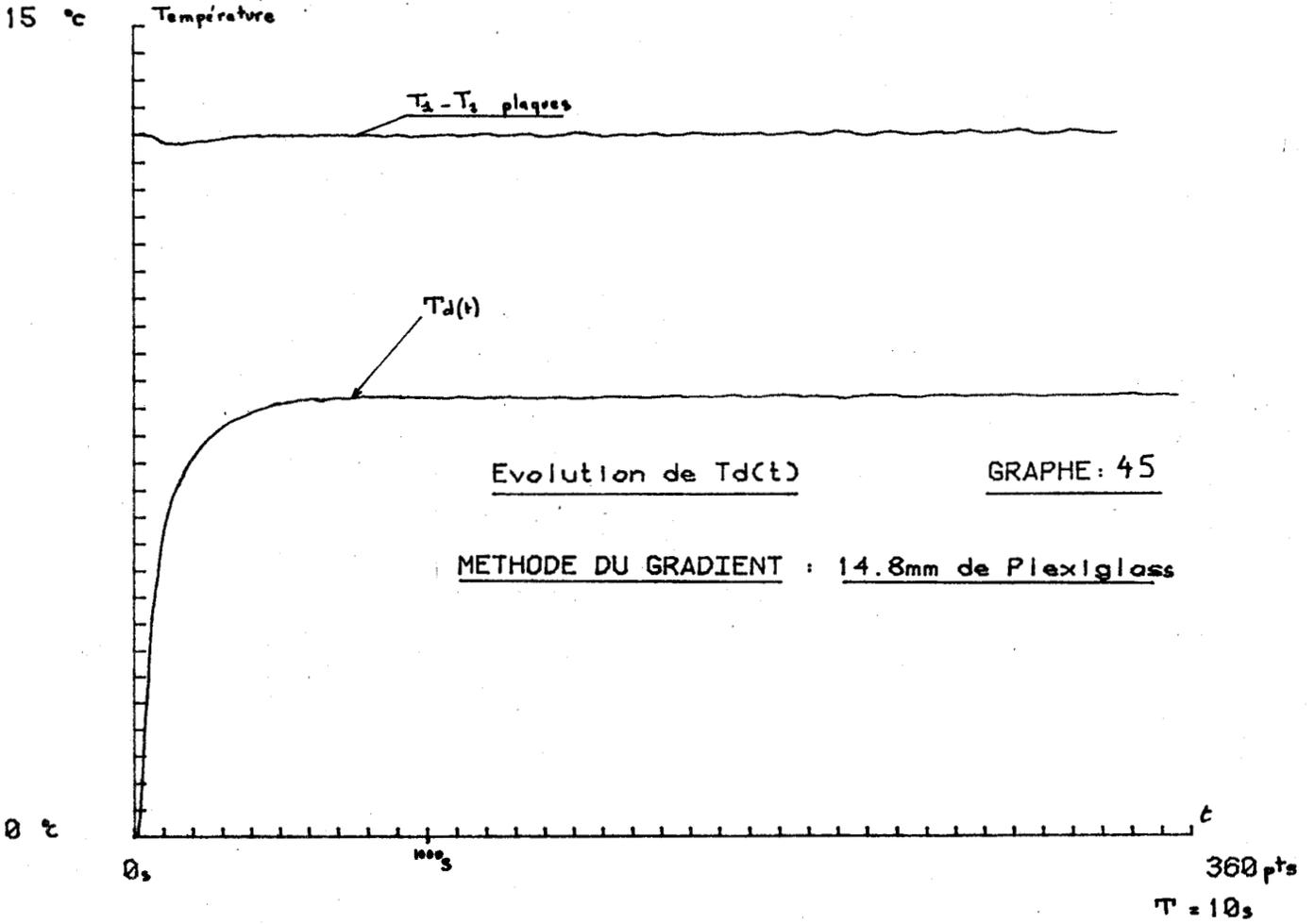
$$T_2(t) = - \Delta T (1 - \exp(-t/\tau)) + T_0$$

$$T_1(t) = + \Delta T (1 - \exp(-t/\tau)) + T_0$$

La symétrie du système impose dans ces conditions $\phi_d(t) = 0$ et $\phi_s(t) = \phi(x,t) + \phi(-x,t)$ avec $\phi(x,t) = \phi(-x,t)$.

Les évolutions des flux ayant ainsi des amplitudes comparables pour $x = e + \varepsilon/2$ et $x = -e - \varepsilon/2$, l'évolution de la somme des flux qui en découle nous permettra de connaître m_2 avec précision. Nous déduirons ainsi la diffusivité a , indépendamment de R et C, par la résolution de l'équation (29).

Nous pouvons ainsi connaître également avec une précision correcte la conductivité thermique des échantillons de matériau de faible épaisseur.



0.014

E (volts)

METHODE DU GRADIENT : 14.8mm de Plexiglass

GRAPHE, 47

$E_s(t)$

$E_d(t)$

-1.0E-3

0

1000s

t (s)

360pts

T = 10s

-4

$\ln [\cdot]$

METHODE DU GRADIENT : 14,8mm de Plexiglass

$m_1 = 2,06 \cdot 10^{-3} \text{ à } \pm 2\%$

$(m_2 \approx 8,10^{-3} \text{ à } \pm 20\%)$

GRAPHE: 48

$\ln [E_d(t)]$

$\ln [E_s(t) - \text{son asymptote}]$

δ'_2

δ'_1



t (s)

0

t_{e2}

t_{e1}

500

1000

150pts

T = 10s

-8

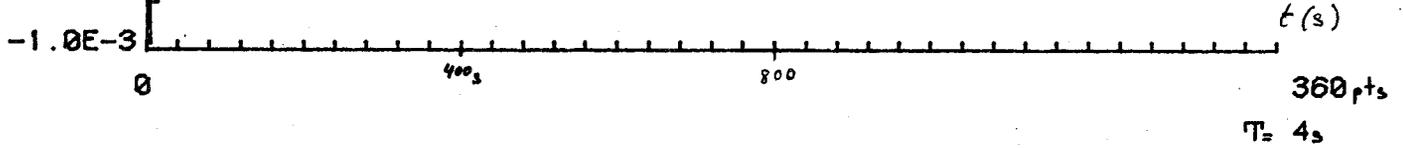
0.008

E (volts)

Evolutions : $E_d(t)$, $E_s(t)$

METHODE DU GRADIENT : 14 mm de Klegicel

GRAPHE : 49



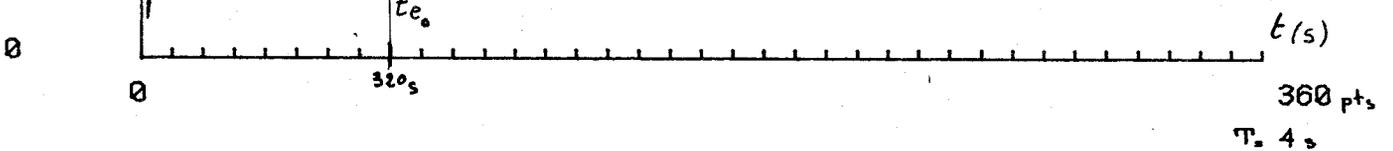
6 (°C/watt) R(t)

4,96

Evolution : $R(t)$

METHODE DU GRADIENT : 14 mm de Klegicel

GRAPHE : 50



0.014

E_s (volts)

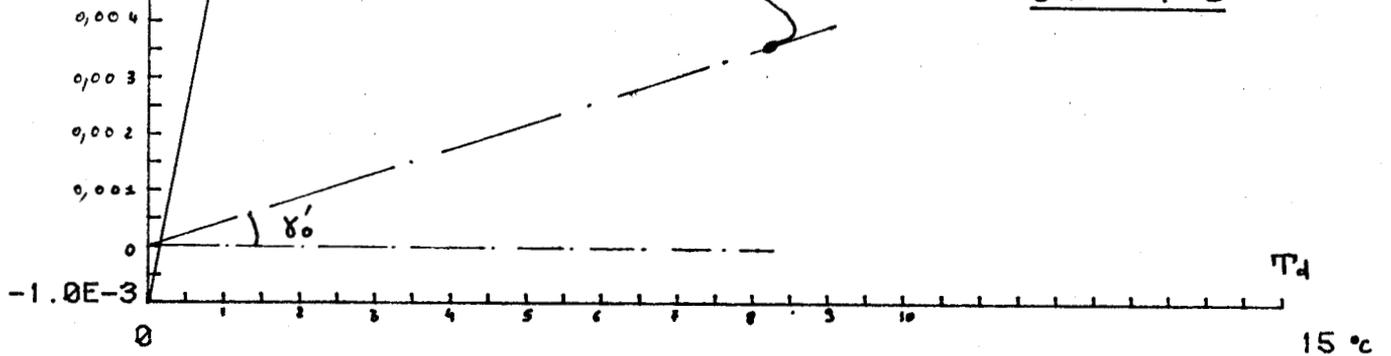
METHODE DU GRADIENT : 14.8mm de Plexiglass

$$E_s = K_2 \cdot \phi_s \Rightarrow \cot \gamma'_0 = R / 2 \cdot K_2$$

$$\cot \gamma'_0 = 22.77$$

$$R = 1.18 \text{ } \tau/\text{watt}$$

GRAPHE, 51



0.008

E_s (v)

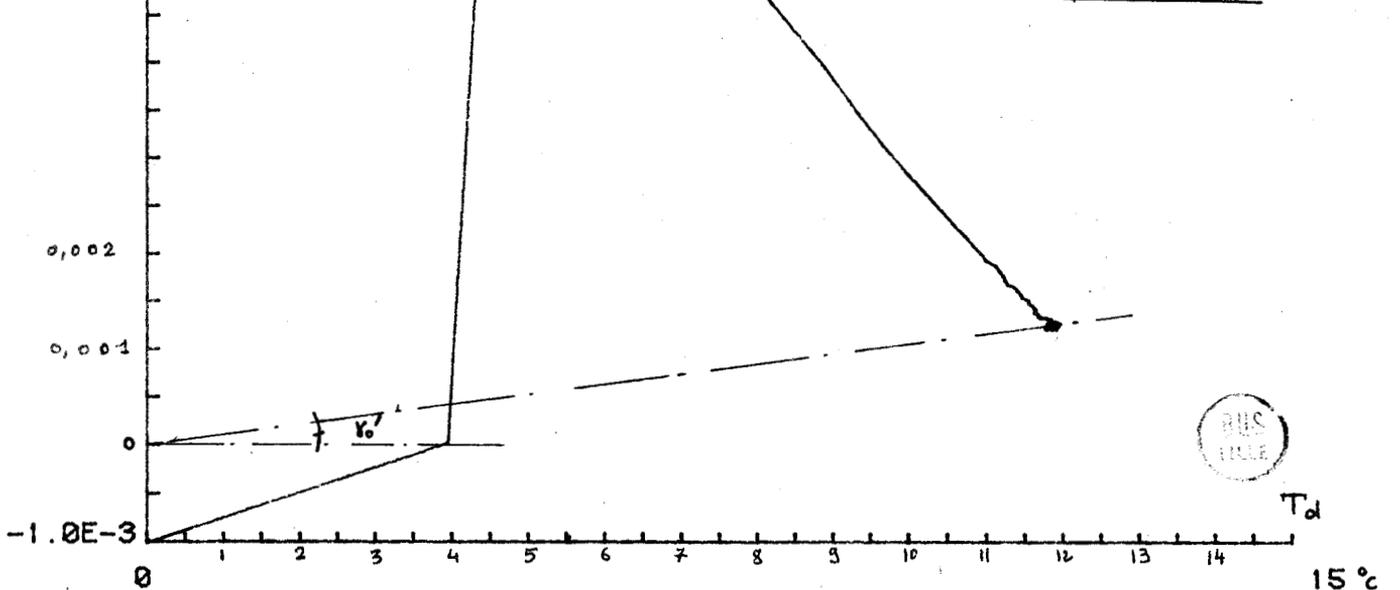
$$E_s(t) = f(T_d(t))$$

METHODE DU GRADIENT : 14mm de Klegical

$$2 \cot \gamma'_0 = 18.93 \cdot 10^3$$

$$R = 4.9 \text{ } \tau/\text{watt}$$

GRAPHE: 52



Materiau de section $\frac{1}{16}m^2$	2e en mm	P en kg/m^3	M en gr	R moyen en $^{\circ}C/Watt$	R.C en . S	C en $J/^{\circ}C$	λ Watt/ $^{\circ}C.m$	c cal/ $g.^{\circ}C$	a mm^2/h
Plexiglass	14,8	1190	1110	1,2 \pm 4%	2050 \pm 6%	1710 \pm 6%	0,197 \pm 5%	0,37 \pm 6%	$3,9 \cdot 10^{-4}$ \pm 7%
	29,4	1190	2250	2,35 \pm 3%	7550 \pm 5%	3200 \pm 5%	0,200 \pm 4%	0,34 \pm 5%	$4,1 \cdot 10^{-4}$ \pm 5%
K'legicel	14	210	186	4,96 \pm 3%	1230 \pm 6%	250 \pm 6%	0,045 \pm 4%	0,32 \pm 6%	$5,7 \cdot 10^{-4}$ \pm 6%
	28	210	370	9,9 \pm 3%	5200 \pm 6%	520 \pm 6%	0,045 \pm 4%	0,34 \pm 6%	$5,4 \cdot 10^{-4}$ \pm 6%
Polystyrène	28	11,7	21	11,9 \pm 3%	310 \pm 6%	25 \pm 7%	0,038 \pm 4%	0,29 \pm 7%	$9,1 \cdot 10^{-4}$ \pm 7%

M : obtenue par pesée

$$\lambda = \frac{2e}{R.S}$$

$$a = \frac{4e^2}{RC}$$

$$c = \frac{C}{4,18.M}$$

C et RC obtenues par resolution de l'equation (8) connaissant m1

Les précisions données sont celles estimées théoriquement

TABLEAU : 2



IV - APPLICATION DE LA METHODE DU BILAN THERMIQUE DANS LE CAS D'UN MATERIAU HETEROGENE HUMIDE

IV - 1 - Généralités

L'eau contenue dans un matériau hétérogène peut être retenue dans la matière de différentes manières. Nous pouvons distinguer, en première approximation l'eau liée et l'eau d'humidification.

L'eau d'humidification est l'eau qui peut être éliminée par évaporation en chauffant l'échantillon sans que sa composition chimique ne soit modifiée. Cette eau peut donc subir des transformations de phase : passage de l'état liquide à l'état vapeur.

L'étude énergétique des phénomènes liés à l'humidification d'un matériau justifierait d'importants développements théoriques et expérimentaux. Nous nous sommes limités à la mesure de la capacité thermique des matériaux hétérogènes humides.

IV - 2 - Mesure de la capacité thermique d'un matériau humide

Du point de vue thermique (pour des températures comprises entre 20 et 35°C), seule l'eau sous forme liquide a une influence appréciable sur la capacité thermique d'un échantillon humide puisque la masse volumique de la vapeur d'eau est négligeable par rapport à celle de l'eau liquide. Dans ces conditions, la capacité thermique apparente d'un matériau humide est égale à la somme de la capacité du même matériau sec et de la capacité thermique de l'eau qu'il contient.

Nous avons par définition :

$$C(\text{humide}) = C(\text{sec}) + M_e \quad 4,18 \quad (1)$$

M_e = masse d'eau contenue (en grammes)

La méthode dite du bilan thermique nous a permis de vérifier cette définition.

IV - 3 - Considérations expérimentales

Rappelons que la zone active d'un fluxmètre (voir chapitre III) est limitée au carré central de 0,25 m de côté, tandis que les échantillons de matériau à mesurer ont une surface de base égale à 0,5 m x 0,5 m. Il en résulte qu'il est impossible théoriquement de relier les résultats expérimentaux obtenus par la méthode classique du bilan thermique au taux d'humidité contenu dans le matériau si l'eau n'est pas répartie uniformément dans le volume de l'échantillon.

Le Laboratoire ne disposant pas actuellement de dispositifs permettant d'humidifier uniformément et d'assécher des échantillons de grandes dimensions, nous avons localisé artificiellement l'humidité dans un carré central de surface de base inférieure à la zone active d'un fluxmètre.

Cette localisation est obtenue à l'aide d'une cellule, voir figure 8 , page 97 dans laquelle nous déposons l'échantillon de matériau humide ou non.

La méthode du bilan thermique définie au paragraphe I permet d'écrire :

$$J(t) = \Sigma C (T_f - T_i)$$

$t \rightarrow \infty$

Remarque : La première cellule que nous avons réalisée avait une surface de base identique à la surface active des fluxmètres (0,25 m x 0,25 m) et une épaisseur totale de 15 mm.

Les valeurs expérimentales obtenues pour la capacité thermique de l'eau localisée dans la cellule étaient inférieures à celles présumées (de 10 à 15%). Cette imprécision de mesure s'explique par le fait que l'air environnant la cellule présente une constante de temps $R_a C_a$, faible par rapport à celle de la cellule et son contenu.

($R_a C_a \approx 10$ s pour une surface de $1/16$ m² et une épaisseur de 15 mm).

Il en résulte que, pendant le régime transitoire de la mesure (passage de la température d'équilibre T_i à la température d'équilibre T_f), cet air apporte une quantité de chaleur non négligeable à la cellule et son contenu, au travers des parois latérales.

Nous représentons ci-dessous figure 9 les lignes de flux au voisinage de la cellule pendant le régime transitoire.

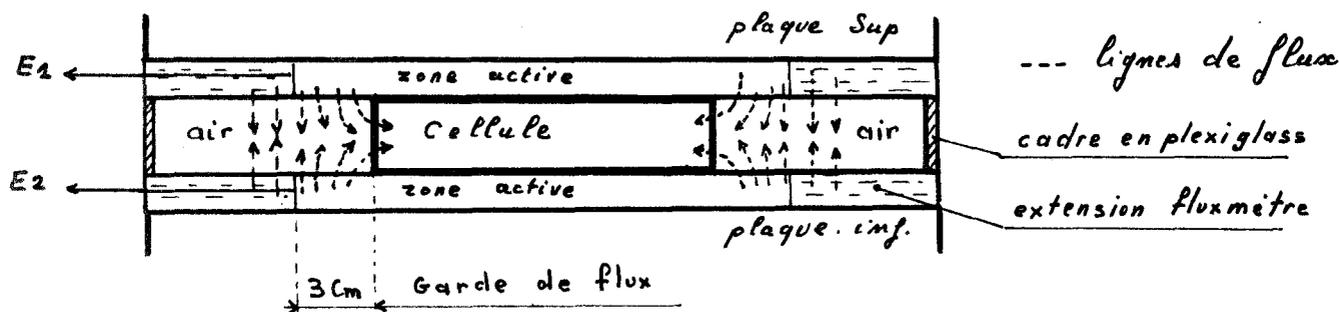
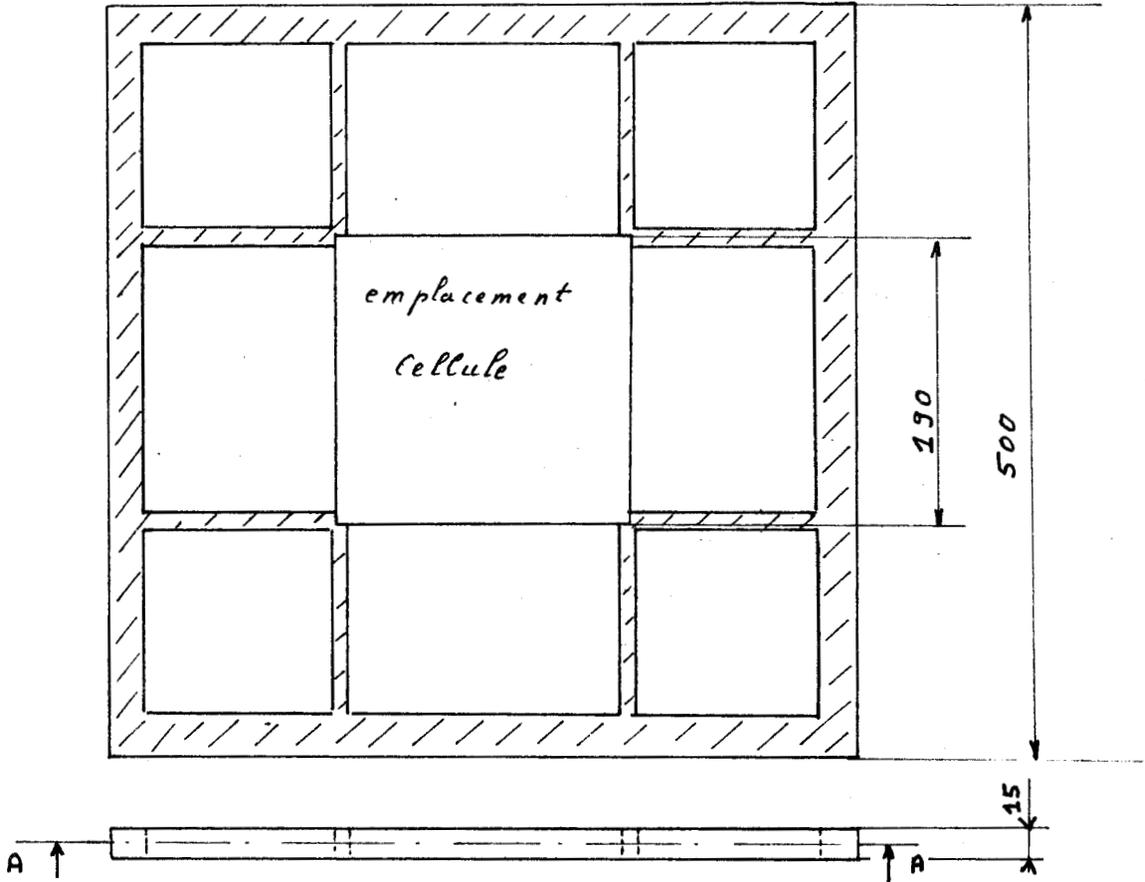


Figure 9

CADRE PLEXIGLASS DE CENTRAGE DE LA CELLULE

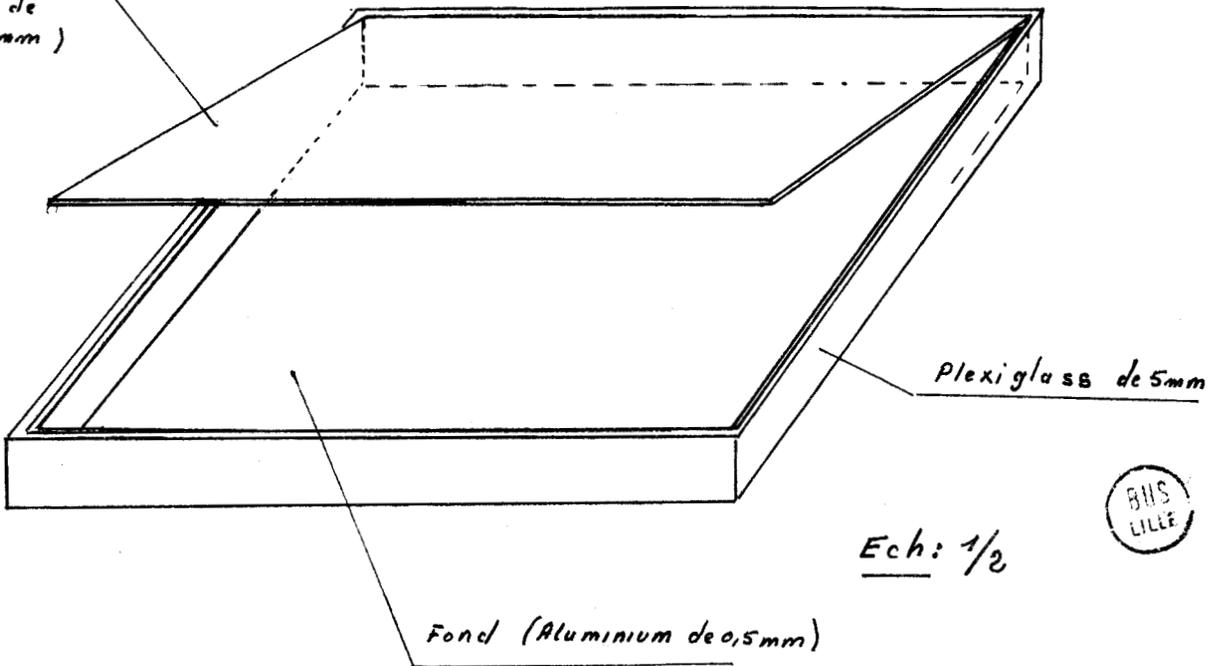
Coupe AA



Ech: 1/5

CELLULE

Couvercle
(Aluminium de
0,5mm)



Plexiglass de 5mm

Fond (Aluminium de 0,5mm)

Ech: 1/2



Pour que les capteurs de flux enregistrent également cet apport calorifique latéral, nous avons réduit la surface de base de la cellule. Une garde de 3 cm nous a donné pleine satisfaction.

IV - 4 - Résultats expérimentaux

Le volume extérieur de la cellule est de $0,542 \text{ dm}^3$, sa contenance est de $0,454 \text{ dm}^3$.

Les relevés expérimentaux ainsi que leur dépouillement sont effectués de la même manière qu'au paragraphe I. C'est-à-dire que nous relevons à chaque instant les informations $E_1(t)$, $E_2(t)$, V_{p2} pendant le temps nécessaire au passage d'un état d'équilibre thermique T_i à un autre état d'équilibre T_f .

Nous connaissons ainsi à tout instant :

- l'information de somme des flux $E_s(t) = \phi_s(t)/k_1$
- l'information de différence des flux $E_d(t) = \phi_d(t)/k_1$
- l'information correspondant à l'évolution de température imposée $T_2(t) = V_{p2}/k$
- l'information de l'intégrale de la différence des flux $I_d(t) = J(t)/k_1$

et déduisons la valeur de la capacité totale ΣC présentée entre les deux plans de mesure de flux par la relation :

$$J(t) = k_1 I_d(t) = (T_2(\infty) - T_2(0)) \Sigma C$$

$t \rightarrow \infty \qquad t \rightarrow \infty$

avec $\Sigma C = C_o + C_1 + C_s + M_e \quad 4,18$

C_o = Capacité résiduelle due aux fluxmètres = $87 \text{ j}/^\circ\text{C}$

C_1 = capacité thermique de la cellule = $223 \text{ j}/^\circ\text{C}$

C_s = capacité du matériau sec placé dans la cellule

M_e = masse d'eau ajoutée au matériau pour l'humidifier.

Nous donnons quelques exemples de relevés expérimentaux aux pages : 101 à 108.

Le graphe 55 page 101 montre que le système fluxmètres-cellule vide est symétrique par rapport au plan passant par le milieu de la cellule puisque $\phi_s(t) \neq 0$.

Nous obtenons pour la cellule vide :

$$C_1 + C_0 = 310 \text{ j/}^\circ\text{C à 2 \% près soit } C_1 = 223 \text{ j/}^\circ\text{C à 2,5 \%}$$

pour une masse $M_1 = 250 \text{ gr} \pm 1 \text{ gr}$

En remplissant la cellule d'un matériau homogène, voir graphe 57 page 102 pour un échantillon de Klegicel de masse = 86 gr, nous vérifions également que $\phi_s(t) \neq 0$

$$\text{Nous obtenons : } \Sigma C = C_0 + C_1 + C_s = 426 \text{ j/}^\circ\text{C à 2 \% près}$$

$$\text{Soit encore } C_s = 116 \text{ j/}^\circ\text{C à 4 \% près et } c = 0,37 \text{ cal/gr }^\circ\text{C}$$

ce qui correspond, aux imprécisions de mesures près, à la valeur trouvée au paragraphe I.

Nous avons également mesuré la capacité présentée par un échantillon de feutre déposé dans la cellule plus ou moins humide.

Le graphe 71 page 100 montre l'évolution de la capacité totale (ΣC) mesurée en fonction de différents taux d'humidité dans le feutre (de 0 à 250 gr d'eau). La précision de la mesure est de 2 % sur la valeur totale de la capacité mais étant donné que $C_0 + C_1 + C_s = 451 \text{ j/}^\circ\text{C}$ pour 10 mm de feutre, il faut au moins 100 gr d'eau pour obtenir une précision de 4 % et 200 gr pour obtenir une précision de l'ordre de 2 % sur la valeur du taux d'humidité.



Les valeurs expérimentales obtenues sont résumées dans le tableau 3, page 109.

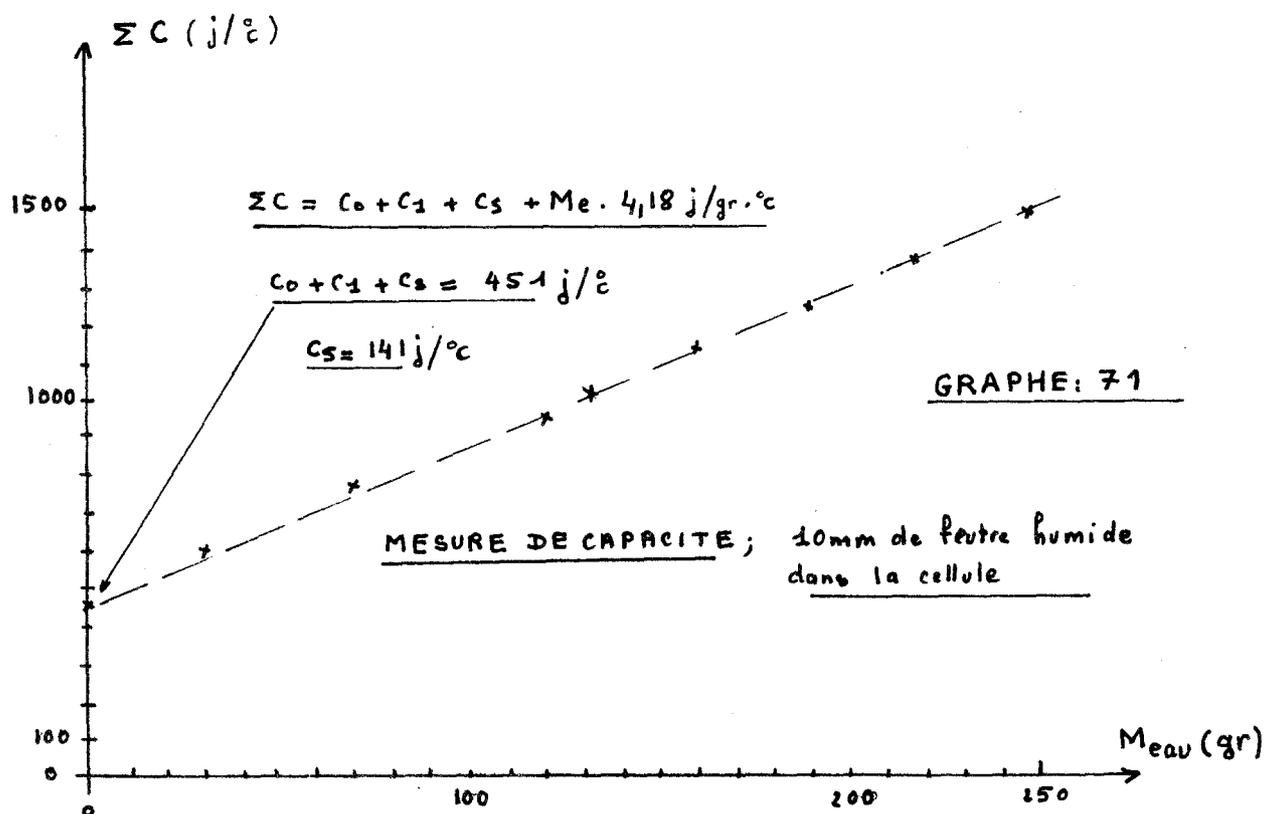
Remarque : Lorsque l'eau est localisée dans le bas de la cellule, la somme des flux $\phi_s(t)$ n'est pas nulle (voir graphes 59, 61 pages 103, 104).

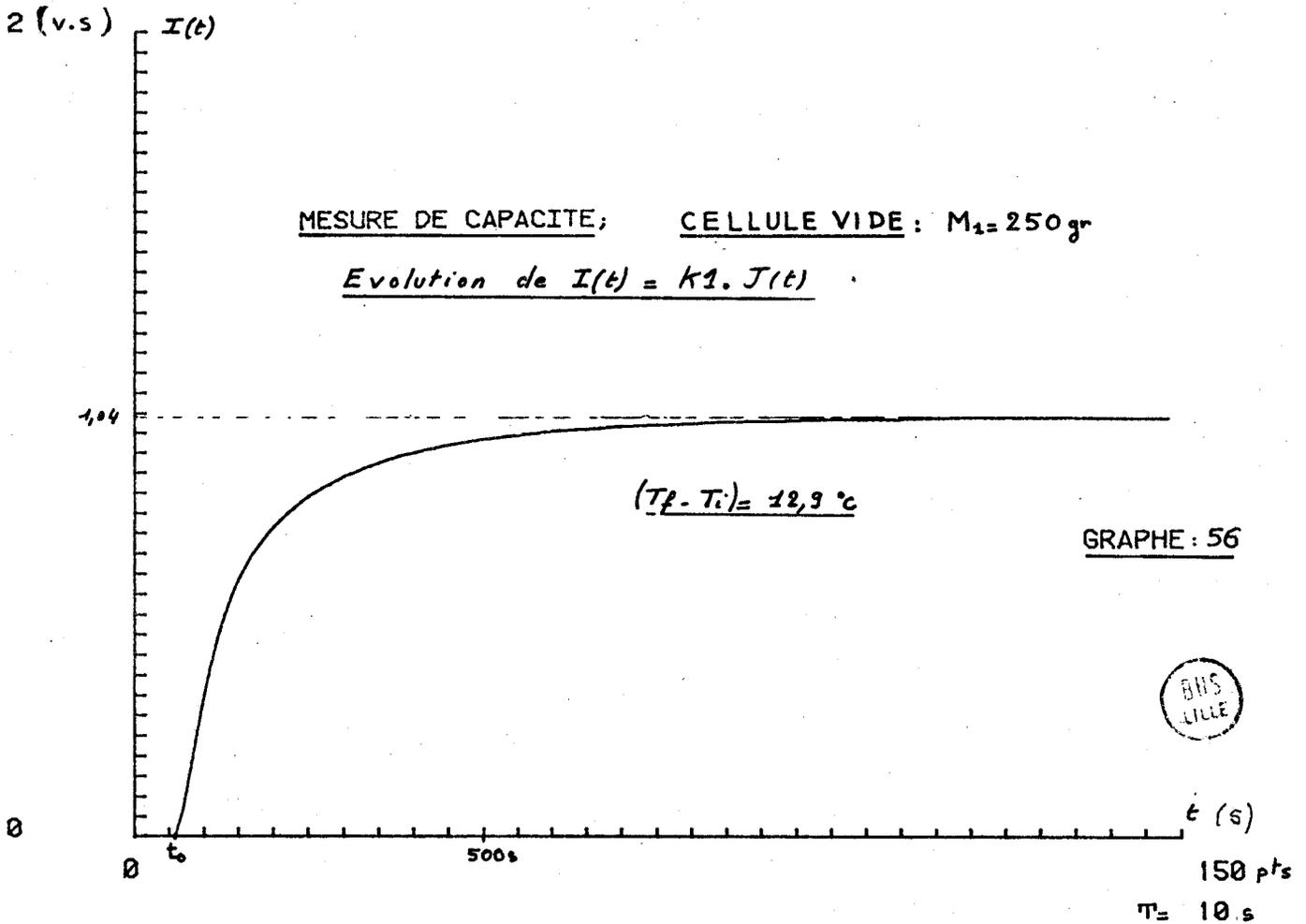
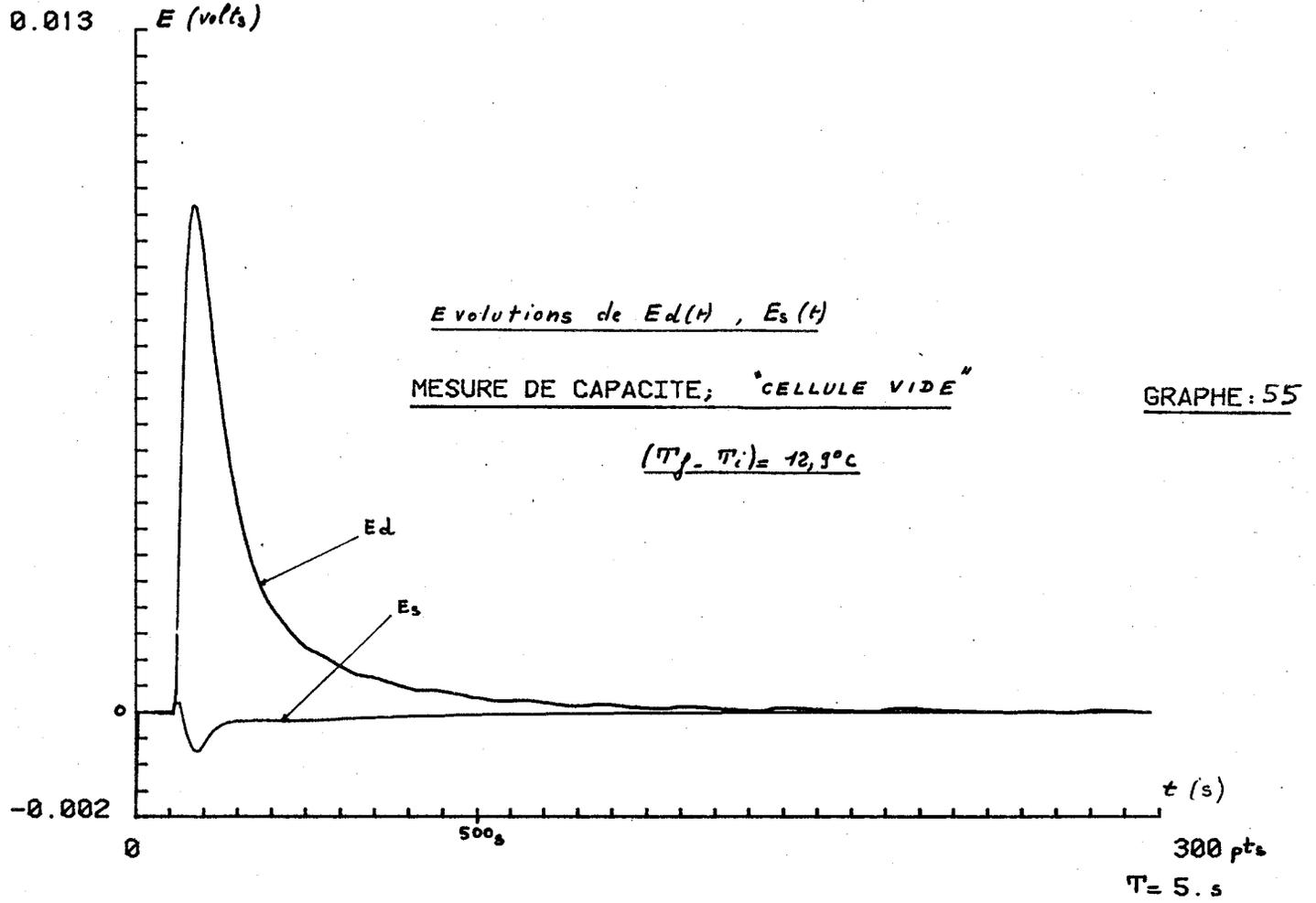
Plus la valeur de la capacité localisée dans le bas de la cellule est importante, plus l'amplitude de $\phi_s(t)$ augmente, et des études futures sur l'évolution de la somme des flux et son intégrale permettront éventuellement de connaître expérimentalement la répartition de l'humidité suivant l'épaisseur du matériau.

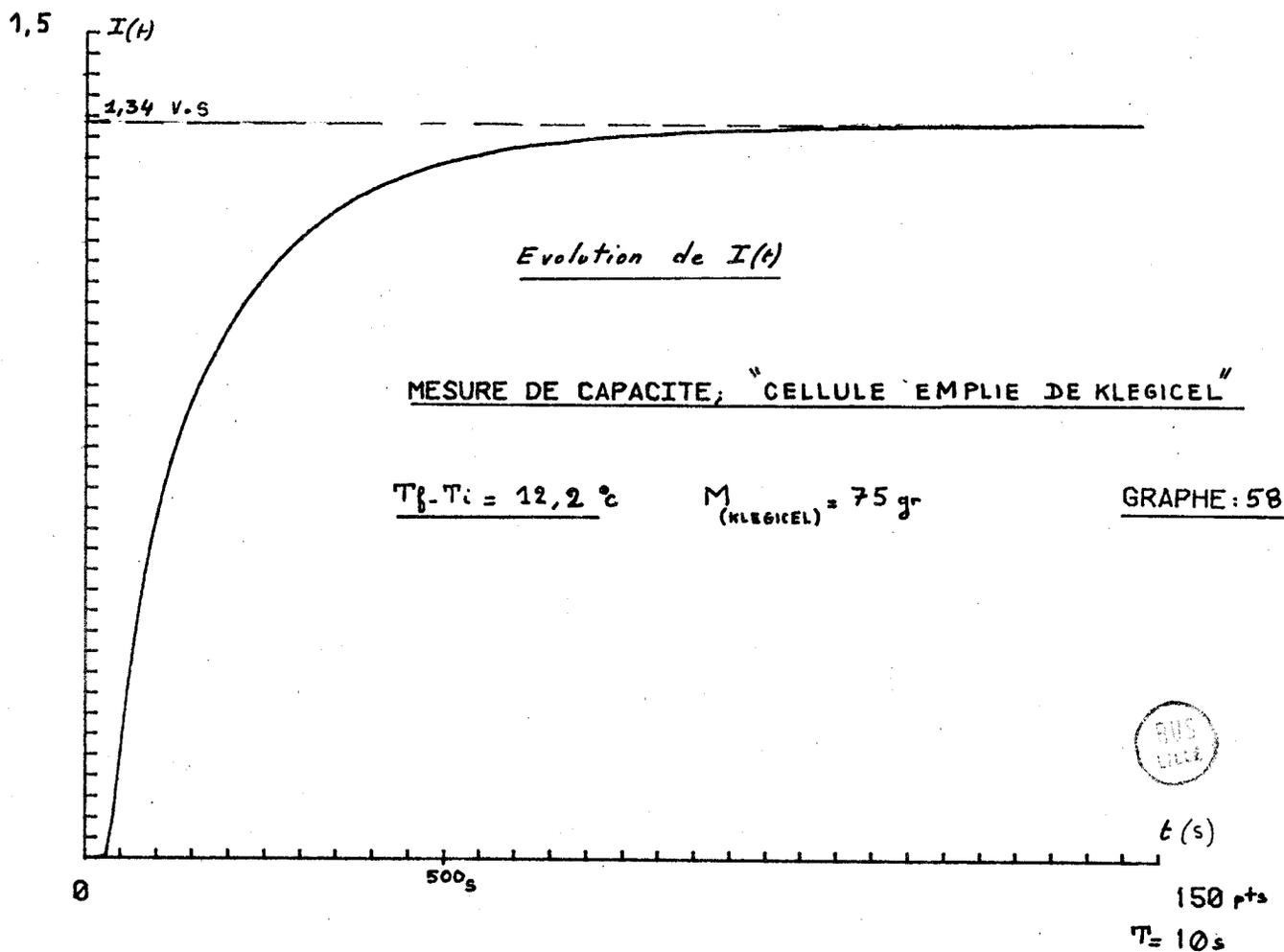
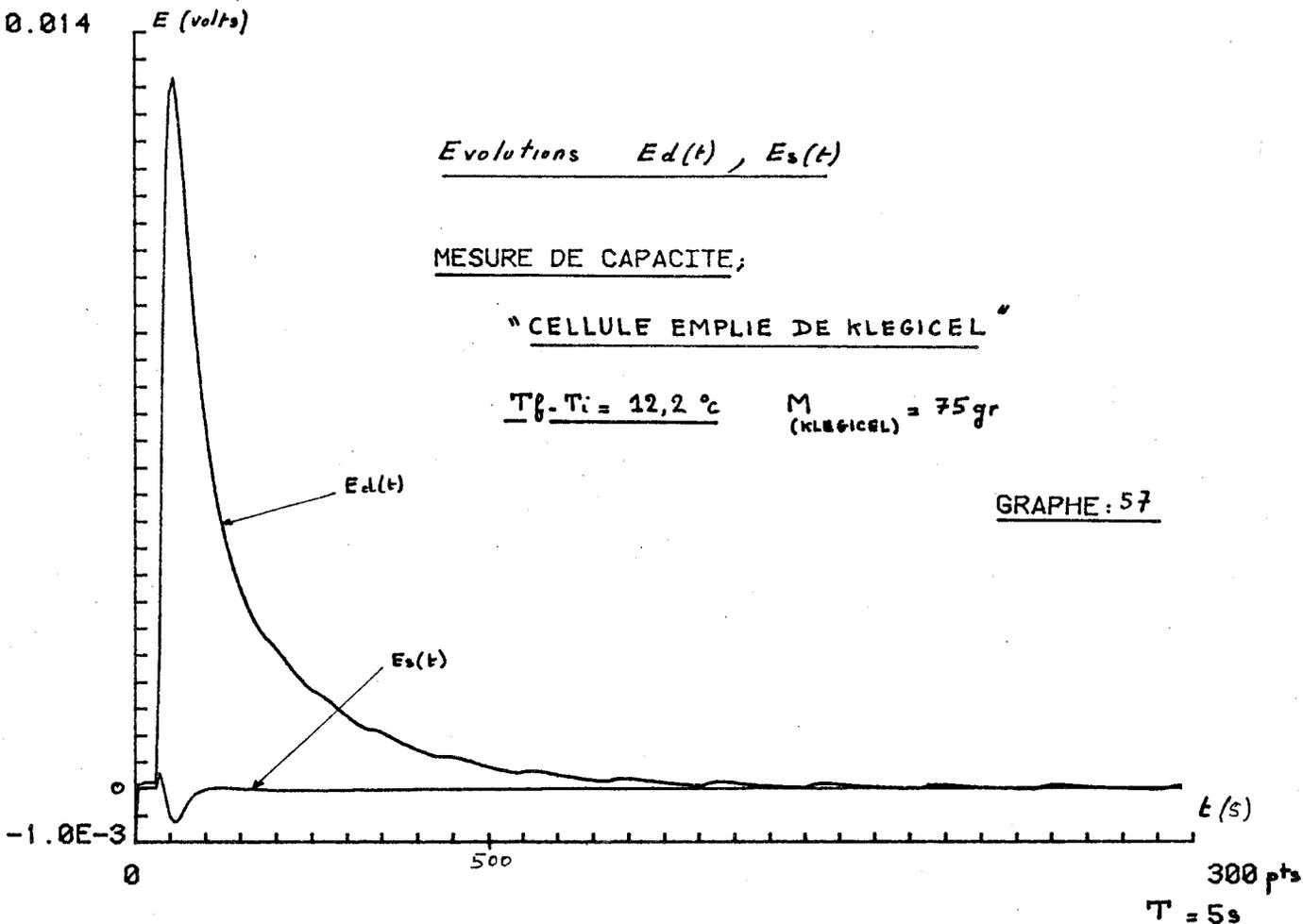
En conclusion, cette étude montre que la méthode du bilan thermique est bien adaptée à la mesure de capacité thermique des matériaux hétérogènes humides.

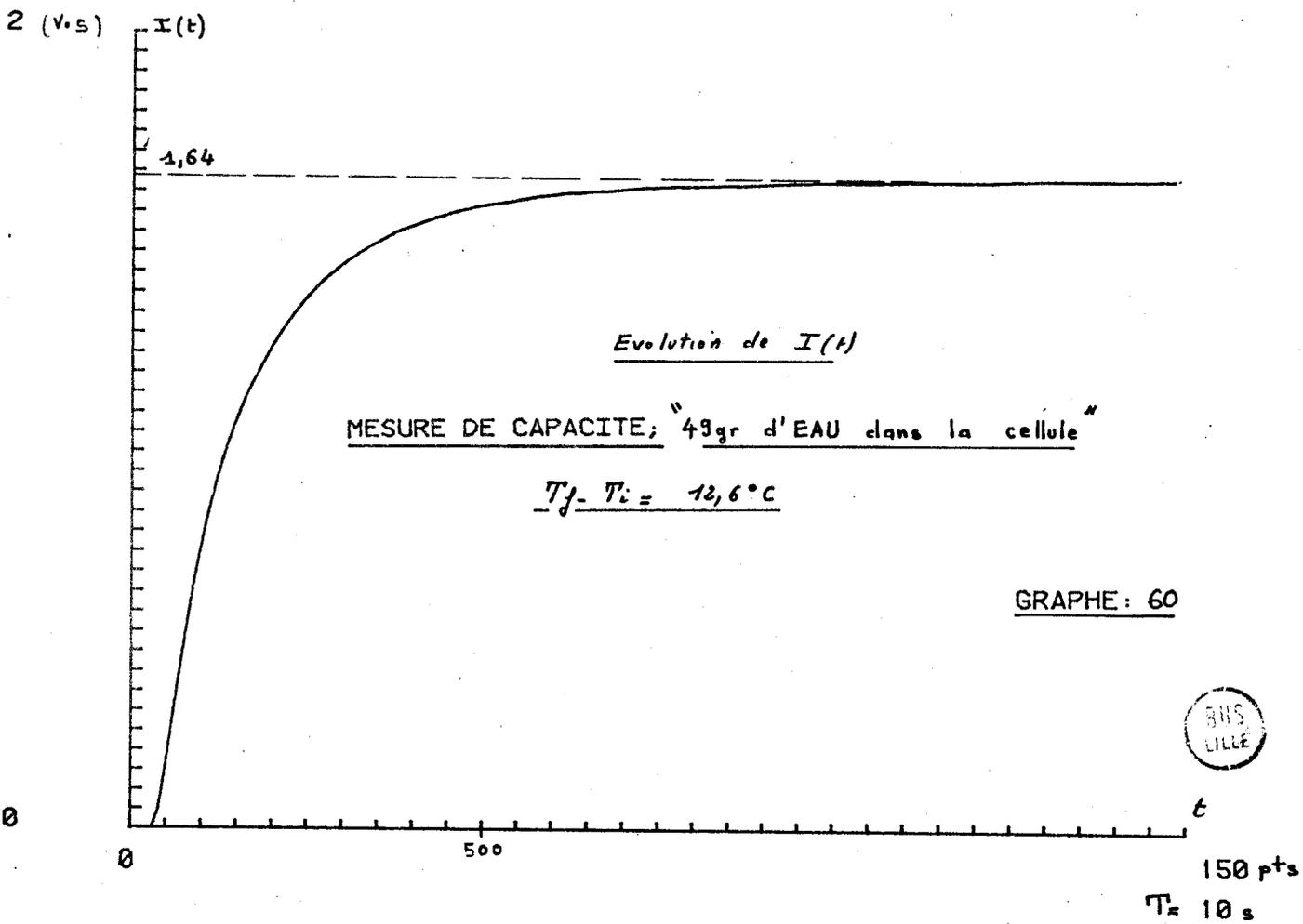
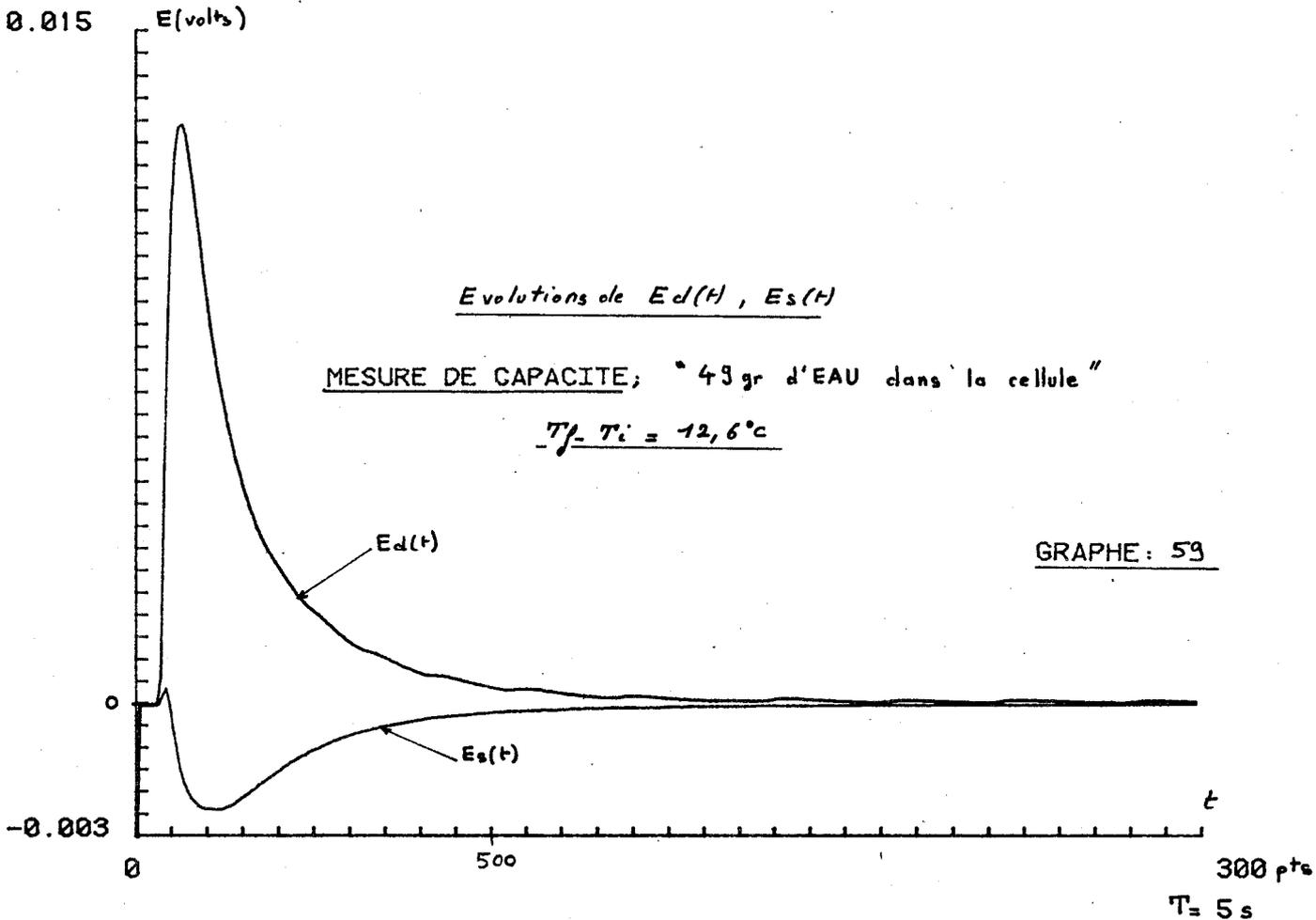
L'utilisation d'une cellule, qui n'avait pour but initial que de bien définir le taux d'humidité, peut présenter un certain intérêt par exemple pour mesurer la capacité présentée par des matériaux granuleux tels que le sable, le gravier, le ciment etc.

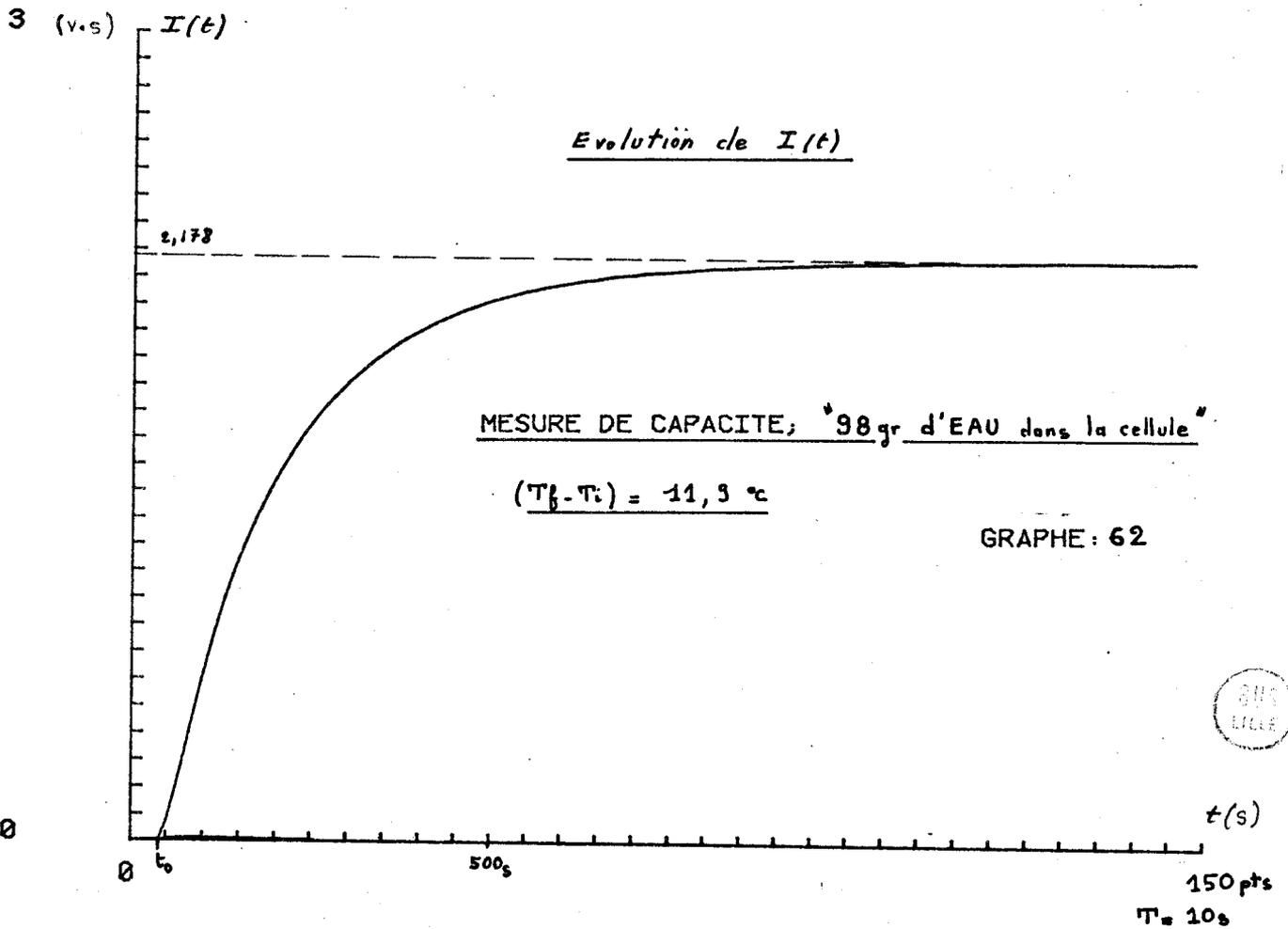
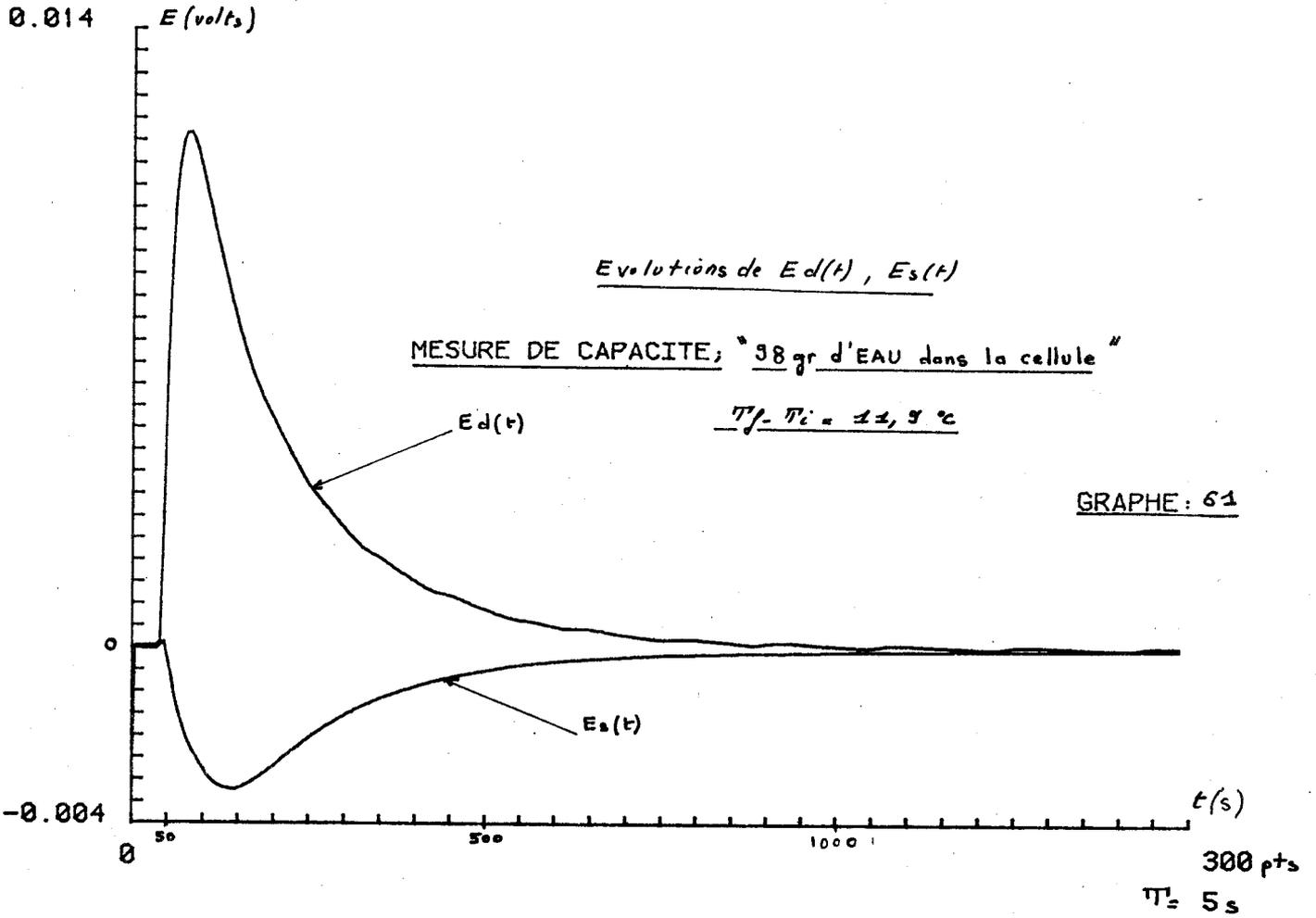
Il est bien évident que nous n'avons exploité qu'un petit nombre des propriétés que peut présenter une telle méthode. Cette méthode permettrait de caractériser quantitativement la migration de l'humidité dans les matériaux hétérogènes.

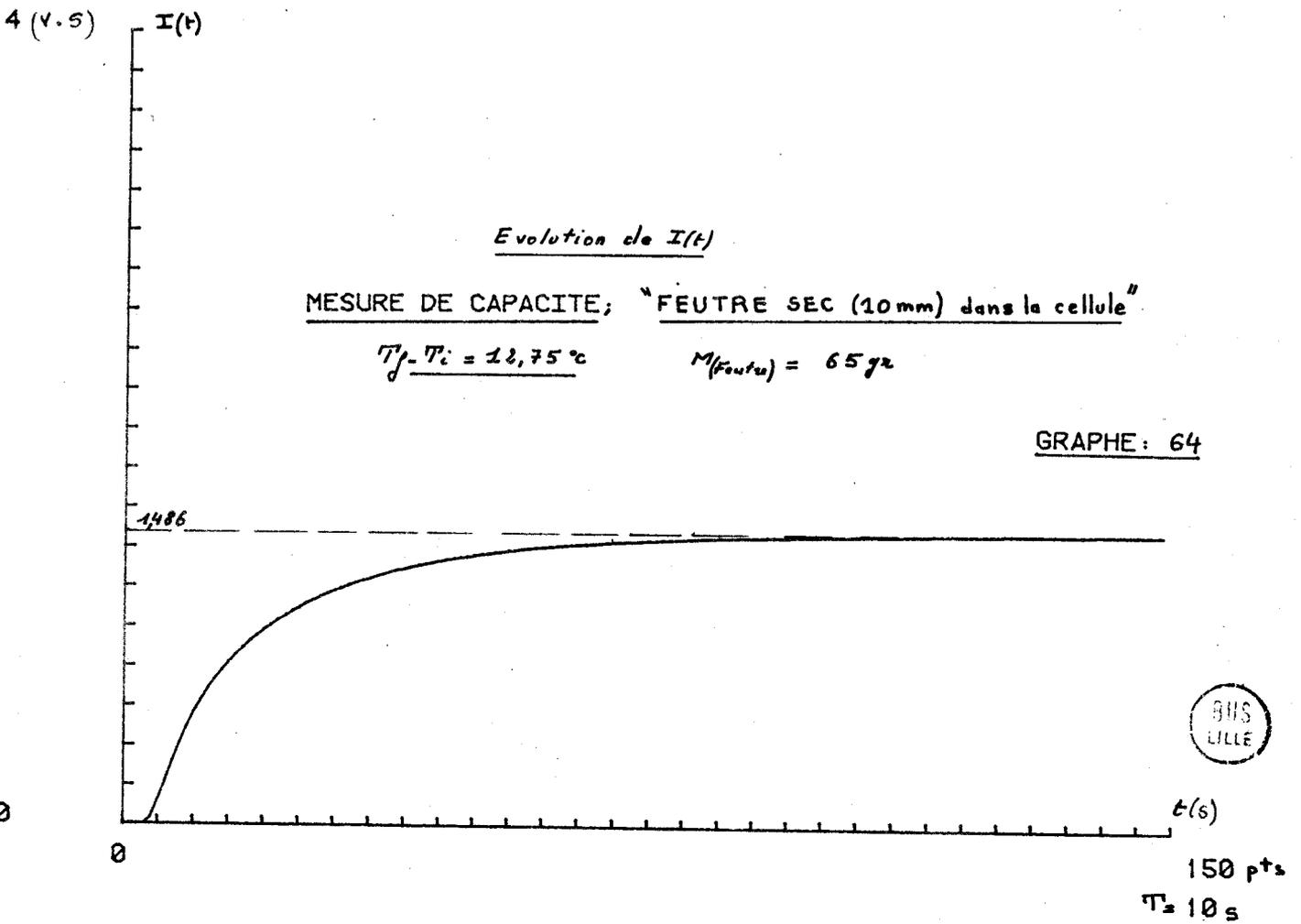
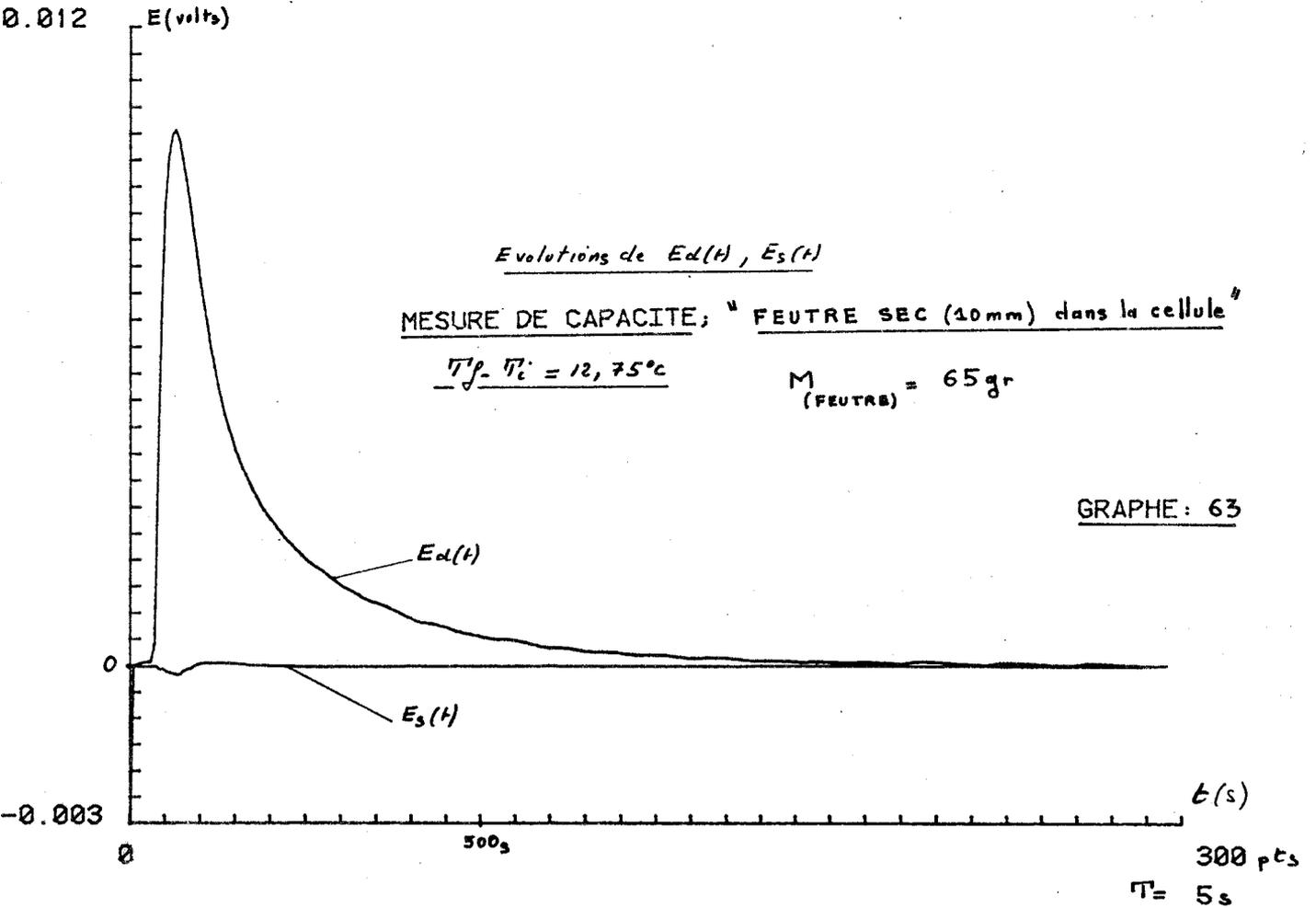












0.012

E (volts)

Evolutions $E_d(t)$, $E_s(t)$

MESURE DE CAPACITE; "FEUTRE HUMIDE dans la cellule"

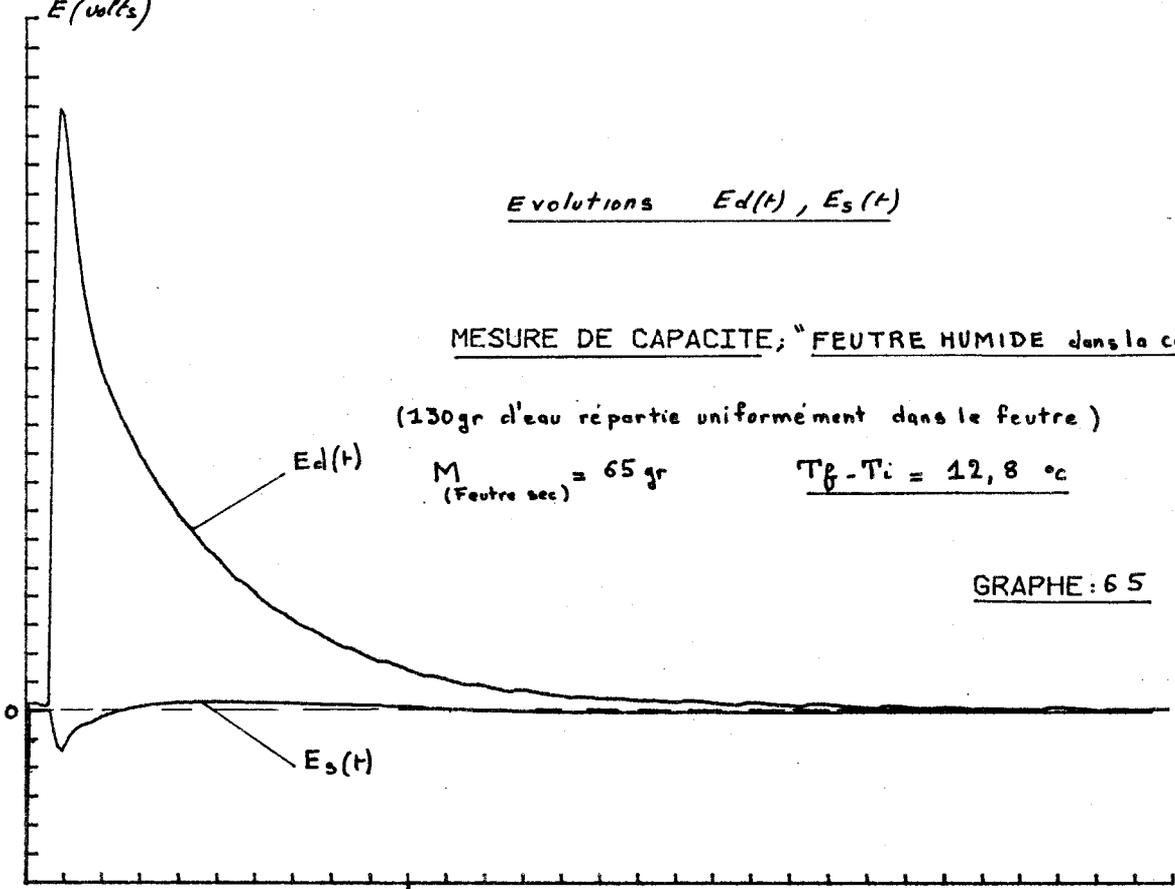
(130gr d'eau répartie uniformément dans le feutre)

$M_{(Feutre sec)} = 65 \text{ gr}$

$T_f - T_i = 12,8 \text{ } ^\circ\text{C}$

GRAPHE: 65

-0.003



t (s)

300 pts

$\tau = 10 \text{ s}$

4 v.s

I (t)

Evolution de $I(t)$

MESURE DE CAPACITE; "FEUTRE HUMIDE dans la cellule"

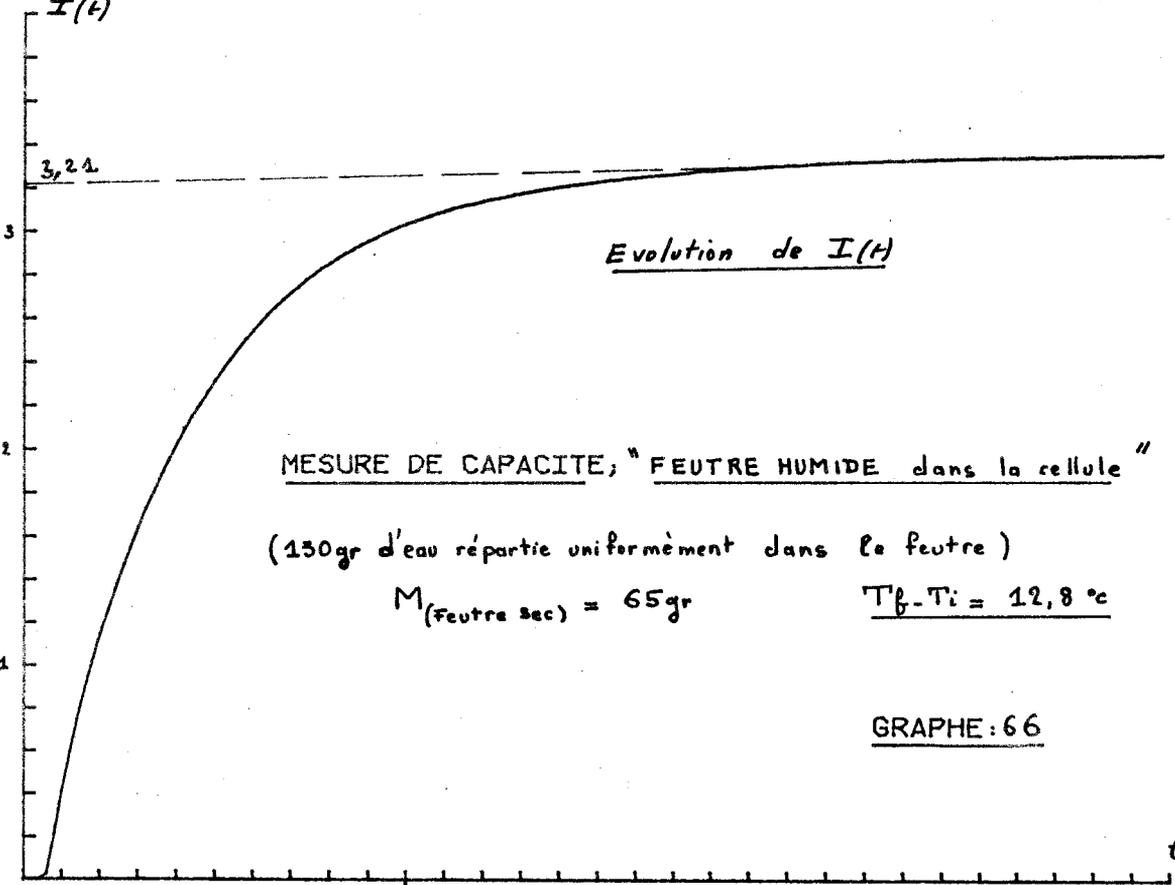
(130gr d'eau répartie uniformément dans le feutre)

$M_{(Feutre sec)} = 65 \text{ gr}$

$T_f - T_i = 12,8 \text{ } ^\circ\text{C}$

GRAPHE: 66

3,24

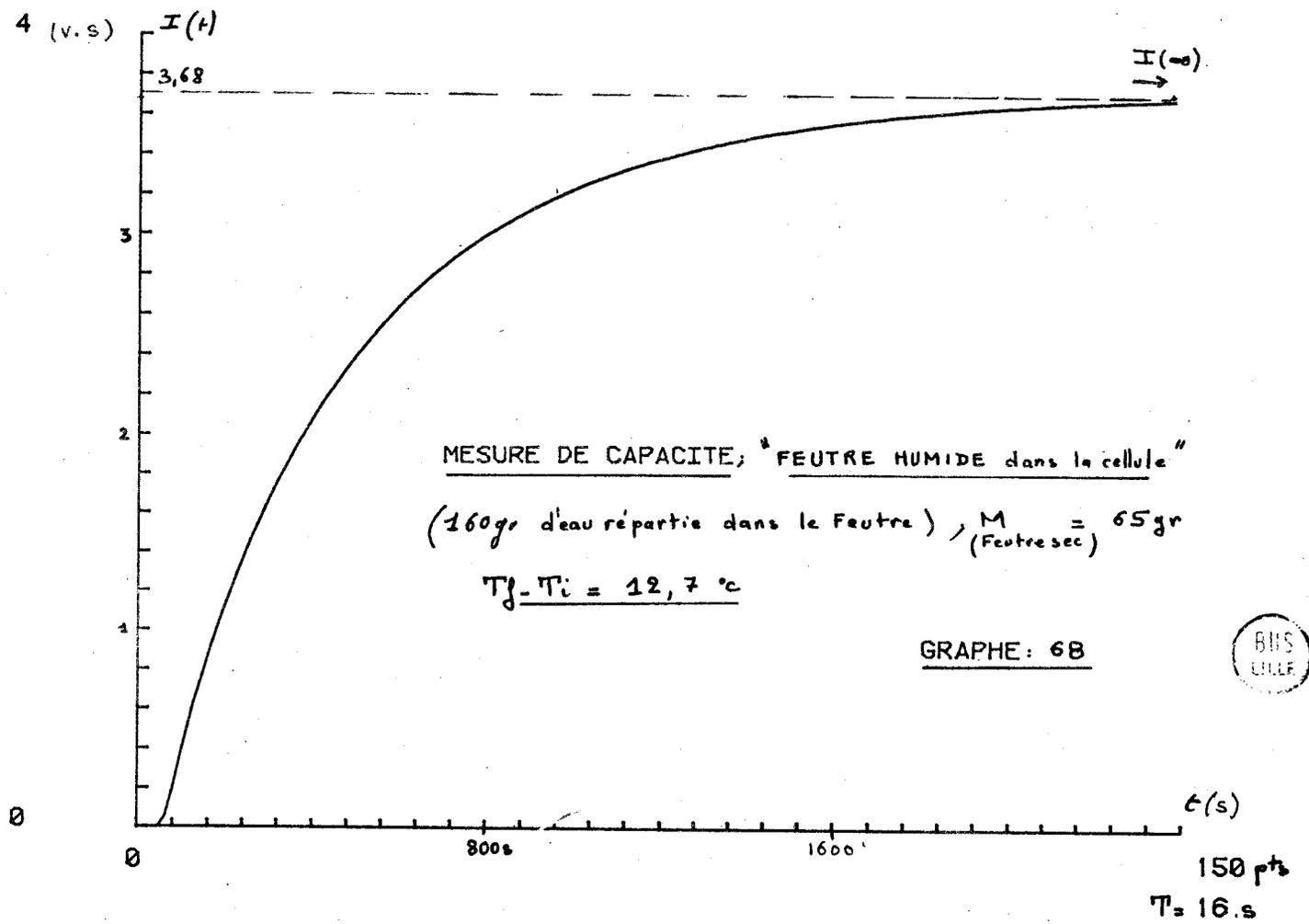
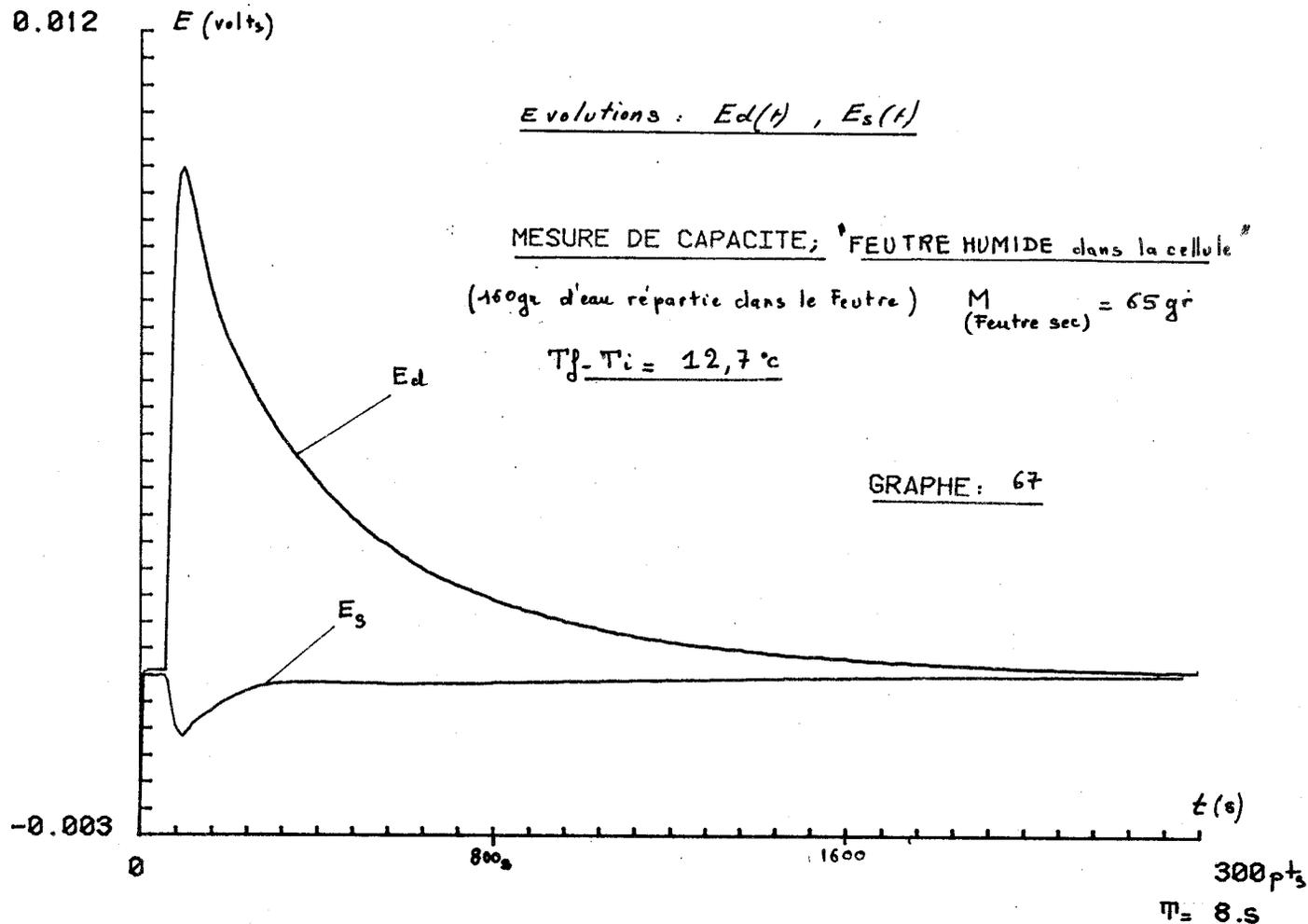


t (s)

150 pts

$\tau = 20 \text{ s}$





0.012

E (volts)

Evolutions $E_d(t)$, $E_s(t)$

MESURE DE CAPACITE; " FEUTRE SEC ET FEUTRE HUMIDE "
 dans la cellule

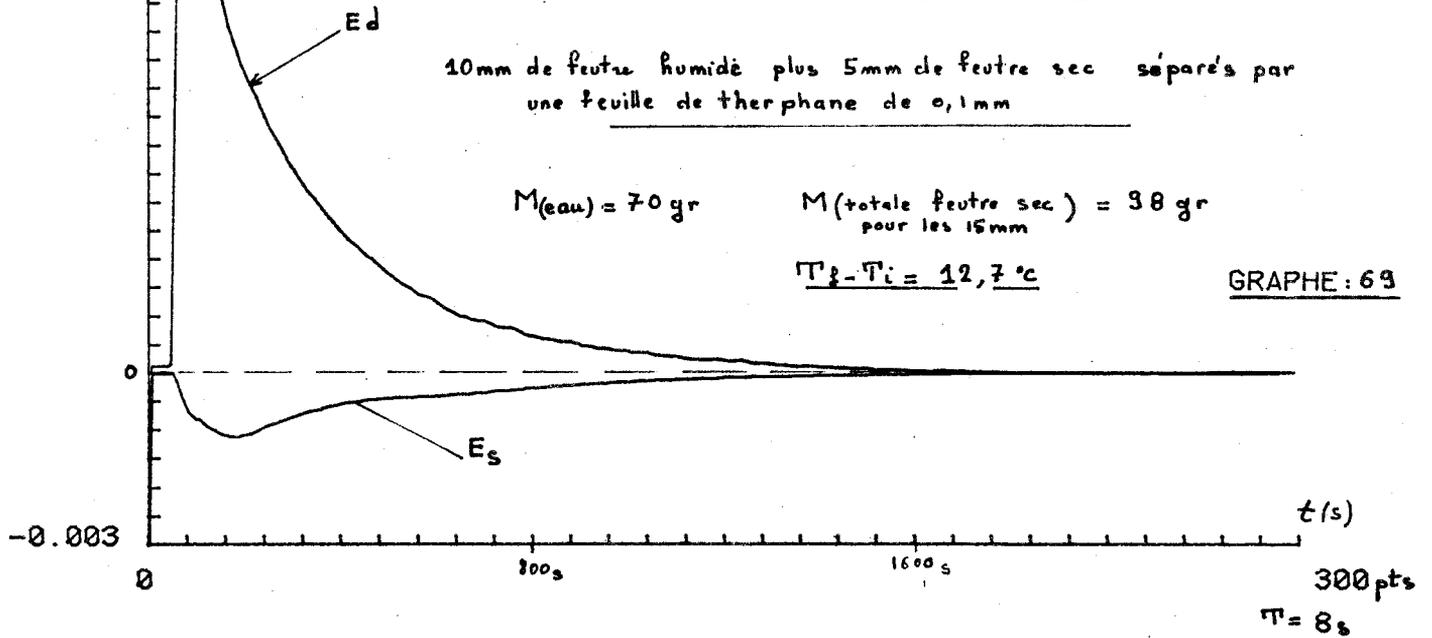
10mm de feutre humide plus 5mm de feutre sec séparés par
une feuille de therphane de 0,1mm

$M(\text{eau}) = 70 \text{ gr}$

$M(\text{totale feutre sec}) = 38 \text{ gr}$
pour les 15mm

$T_f - T_i = 12,7 \text{ }^\circ\text{C}$

GRAPHE: 69



4 (v.s)

I (t)

Evolution $I(t) = \int_0^t E_d(t) \cdot dt$

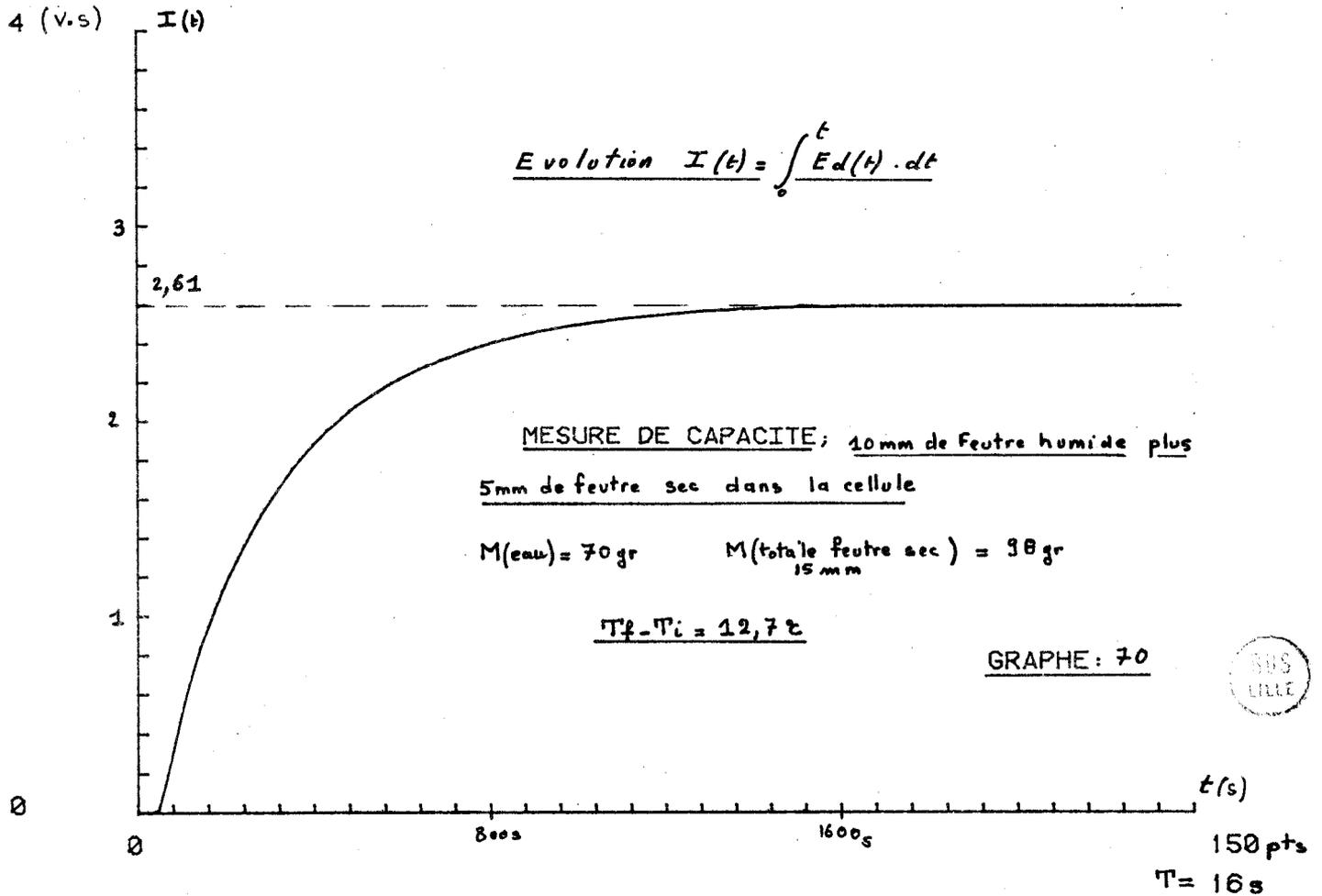
MESURE DE CAPACITE; 10mm de feutre humide plus
5mm de feutre sec dans la cellule

$M(\text{eau}) = 70 \text{ gr}$

$M(\text{totale feutre sec}) = 38 \text{ gr}$
15 mm

$T_f - T_i = 12,7 \text{ }^\circ\text{C}$

GRAPHE: 70



Contenu cellule →	M _s (gr)	M _e (gr)	Σ C (j/°c)	C _s +C _e (j/°c)	C _s (j/°c)	M' _e (gr)	-C _s (cal/gr.°c)	-C _e mesurée (cal/gr.°c)
	0	0	310	0	0			
Klegiciel	75	0	426	116 à 10%	116 à 10%	0	0,37 à 10%	
Feutre sec	65	0	451	141 à 10%	141 à 10%	0	0,52 à 10%	
Feutre humide	65	30	555	245 à 7%		25		0,183
	65	78	770	460 à 5%		76		0,197
	65	130	972	612 à 4%		125		0,196
	65	160	1123	813 à 3%		161		1,01
	65	195	1258	948 à 2%		193		0,199
	65	248	1475	1165 à 2%		245		0,199
Feutre sec	98	0	523	213 à 8%	213 à 8%	0	0,52 à 8%	
Feutre humide	98	70	798	498 à 4%		66		0,194
Eau	0	49	505	195 à 8%	0	46,5		0,195
Eau	0	98	710	400 à 4%	0	95,7		0,198
		Par Pesée						

Σ C = C₀+C₁+C_s+M'_e.4,18 avec C₀+C₁ = 310 j/°c

et C_s = M_s.c_s.4,18

Les précisions données sont celles estimées théoriquement



TABEAU: 3

C O N C L U S I O N

---:---:---:---:---:---:---:---:---:---

Nous avons développé l'étude théorique et expérimental des méthodes fluxométriques et montré leur intérêt pour la caractérisation des échanges calorifiques en régime transitoire.

Dès notre arrivée au Laboratoire, le problème des mesures fluxométriques a été repris à la base en utilisant comme document de travail les premières publications sur le sujet datant de 1973.

Nous pensons avoir fait évoluer le sujet aussi bien sur le plan théorique que sur le plan expérimental.

Du point de vue théorique, une étude détaillée de la dynamique des échanges thermiques dans un milieu à trois couches nous montre l'intérêt des modes normaux pour la représentation des échanges calorifiques. Les résultats obtenus nous conduisent à des modèles mathématiques sous forme de séries rapidement convergentes pour des valeurs convenables du temps. Ces modèles ont pu être utilisés pour caractériser nos capteurs en régime transitoire et ont permis de mesurer la diffusivité d'échantillon de matériau avec une bonne précision. Ces résultats montrent l'intérêt de développer à l'avenir de nouveaux modèles tenant compte également des faibles valeurs du temps.

Du point de vue expérimental, nous avons réalisé de façon artisanale des capteurs de flux précis et sensibles, dont les caractéristiques ont été mesurées. Nous avons mis au point une mesure précise de la capacité thermique d'échantillon de grandes dimensions, de conception originale à notre connaissance. La détermination expérimentale de la capacité thermique a nécessité la mise au point d'un banc de mesures thermique présentant l'avantage de bien définir les températures limites imposées au système échantillon-fluxmètres.

L'utilisation d'une chaîne d'acquisition numérique et de traitement nous a permis, de réaliser un grand nombre d'expériences en régime transitoire pendant la durée de notre travail de thèse, et de faire des études statistiques sur les différents relevés expérimentaux.

L'ensemble des résultats obtenus montrent que l'on peut définir des critères de choix quant aux méthodes utilisées (méthode du bilan thermique et méthode du gradient thermique) pour définir les constantes thermophysiques des matériaux. Le choix de la méthode dépendra des souhaits de l'utilisateur (précision ou rapidité de mesure) compte tenu de la nature et des dimensions du matériau à caractériser.

La fiabilité de ces méthodes devra être confirmée par des mesures systématiques sur les matériaux de construction.

Comme il est signalé dans ce rapport, nous envisageons d'améliorer la méthode dite du gradient thermique, afin de déterminer avec plus de précision la diffusivité d'un échantillon indépendamment de sa conductivité et de sa capacité.

Dans une dernière partie, nous appliquons les techniques mises au point à l'étude des matériaux humides. Nous nous sommes limités aux mesures de capacités thermiques. La précision de ce type de mesure a permis de mettre en évidence de faibles quantités d'humidité dans le feutre.

Une étude plus fine des échanges thermiques, notamment sur la dissymétrie des flux, nous permettra de localiser l'humidité dans les matériaux poreux et éventuellement de définir ces modes de mouvement.

Les prolongements de notre travail semblent être intéressants aussi bien du point de vue expérimental que du point de vue fondamental. D'autres études sont actuellement en cours au Laboratoire sur le développement des méthodes fluxmétriques et sur les applications de ces méthodes aux matériaux humides.

A l'instant $t = t_0$ et pour $t > t_0$ on applique les températures superficielles suivantes :

$$\begin{aligned} & \text{en } x = +L && T'_1(L, t) = T_1 \\ \text{et} & \text{en } x = -L && T'_2(-L, t) = T_2 \end{aligned}$$

La loi de Fourier ou "équation de la chaleur" reste vraie pour chacune des couches ; en posant $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ et $a' = \frac{\lambda'}{\rho' c}$, les équations respectives sont :

$$a' \frac{\partial^2 T'_1(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial T'_1(x, t)}{\partial t} = 0$$

$$a \frac{\partial^2 T'_0(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial T'_0(x, t)}{\partial t} = 0$$

$$a' \frac{\partial^2 T'_2(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial T'_2(x, t)}{\partial t} = 0$$

En posant $z = \sqrt{\frac{p}{a}}$, $z' = \sqrt{\frac{p}{a'}}$, et en utilisant la transformée de Laplace (voir chapitre 1) les solutions des équations de chaleur sont respectivement sous forme de Laplace :

$$\theta'_1(x, p) = A_1 \exp(-z'x) + B_1 \exp(z'x) + \frac{T_{01}}{p}$$

$$\theta'_0(x, p) = A_0 \exp(-zx) + B_0 \exp(zx) + \frac{T_{00}}{p}$$

$$\theta'_2(x, p) = A_2 \exp(-z'x) + B_2 \exp(z'x) + \frac{T_{02}}{p}$$

Les conditions aux limites sont :

$$\text{pour } x = +L \quad \theta'_1(+L, p) = \frac{T_1}{p}, \quad \forall t \geq t_0$$

$$\text{pour } x = -L \quad \theta'_2(-L, p) = \frac{T_2}{p}, \quad \forall t \geq t_0$$

$$\text{en } x = +e \quad \theta'_1(e, p) = \theta'_0(e, p) \quad \Phi_1(x, p) = -\lambda' \frac{\partial \theta'_1(x, p)}{\partial x}$$

$$\text{et } \Phi_1(e, p) = \Phi_0(e, p) \quad \text{avec} \quad \Phi_0(x, p) = -\lambda \frac{\partial \theta'_0(x, p)}{\partial x}$$

$$\text{en } x = -e \quad \Theta_2'(-e,p) = \Theta_0'(-e,p)$$

$$\text{et } \Phi_2(-e,p) = \Phi_0(-e,p) \quad \text{avec } \Phi_2(x,p) = -\lambda' \frac{\partial \Theta_2'(x,p)}{\partial x}$$

De ces conditions aux limites se déduisent 6 équations à 6 inconnues :

$$\text{Pour } x = +L \quad \frac{T_1 - T_{01}}{p} = A_1 \exp(-z' L) + B_1 \exp(z' L) \quad (1)$$

$$\text{Pour } x = -L \quad \frac{T_2 - T_{02}}{p} = A_2 \exp(z' L) + B_2 \exp(-z' L) \quad (2)$$

en $x = e$:

$$A_0 \exp(-z e) + B_0 \exp(z e) + A_1 \exp(-z' e) + B_1 \exp(z' e) + \frac{T_{01} - T_{00}}{p} \quad (3)$$

$$A_0 \exp(-z e) - B_0 \exp(z e) = \frac{z' \lambda'}{z \lambda} \left[A_1 \exp(-z' e) - B_1 \exp(z' e) \right] \quad (4)$$

en $x = -e$:

$$A_0 \exp(z e) + B_0 \exp(-z e) = A_2 \exp(z' e) + B_2 \exp(-z' e) + \frac{T_{02} - T_{00}}{p} \quad (5)$$

$$A_0 \exp(z e) - B_0 \exp(-z e) = \frac{z' \lambda'}{z \lambda} \left[A_2 \exp(z' e) - B_2 \exp(-z' e) \right] \quad (6)$$

La résolution de ce système de 6 équations nous permet de déterminer les constantes $A_1, B_1, A_2, B_2, A_0, B_0$.

Etant donné la complexité des calculs permettant d'aboutir aux expressions analytiques : $T_1'(x,t)$, $T_2(x,t)$, $T_0(x,t)$, nous n'exposerons que ceux nécessaires à la compréhension et à l'interprétation des mesures expérimentales.

Calcul des constantes A_1, B_1, A_2, B_2 (sous forme de Laplace)

En faisant (3)+(5), (4)+(6), (5)-(3) et (6)-(4), on obtient respectivement :

$$2(A_0 + B_0) \operatorname{ch} z e = \frac{T_{01} + T_{02} - 2T_{00}}{p} + (A_1 + B_2) \exp(-z' e) + (A_2 + B_1) \exp(z' e) \quad (7)$$

$$2(A_0 - B_0) \operatorname{ch} z e = \frac{z' \lambda'}{z \lambda} \left[(A_1 - B_2) \exp(-z' e) + (A_2 - B_1) \exp(z' e) \right] \quad (8)$$

$$2(A_0 - B_0) \operatorname{sh} z e = \frac{T_{02} - T_{01}}{p} - (A_1 - B_2) \exp(-z' e) + (A_2 - B_1) \exp(z' e) \quad (9)$$

$$2(A_0 + B_0) \operatorname{sh} z e = \frac{z' \lambda'}{z \lambda} \left[-(A_1 + B_2) \exp(-z' e) + (A_2 + B_1) \exp(z' e) \right] \quad (10)$$

Les rapports (7)/(10) et (9)/(8) nous donnent respectivement :

$$\frac{z' \lambda'}{z \lambda} \operatorname{cth} z e = \frac{(A_1+B_2) \exp(-z' e) + (A_2+B_1) \exp(z' e) + (T_{01}+T_{02}-2T_{00})/p}{-(A_1+B_2) \exp(-z' e) + (A_2+B_1) \exp(z' e)} \quad (11)$$

$$\frac{z' \lambda'}{z \lambda} \operatorname{th} z e = \frac{-(A_1-B_2) \exp(-z' e) + (A_2-B_1) \exp(z' e) + (T_{02}-T_{01})/p}{(A_1-B_2) \exp(-z' e) + (A_2-B_1) \exp(z' e)} \quad (12)$$

En utilisant les relations (1) et (2), liant A_1 à B_1 et A_2 à B_2 , on déduit que :

$$A_1+B_2 = \frac{(T_1+T_2-T_{01}-T_{02})(1 - \frac{z' \lambda'}{z \lambda} \operatorname{cth} z e) + (T_{01}+T_{02}-2T_{00}) \exp(z' \varepsilon)}{-2p (\operatorname{sh} z' \varepsilon + \frac{z' \lambda'}{z \lambda} \operatorname{cth} z e \operatorname{ch} z' \varepsilon)} \exp(z' e) \quad (13)$$

$$A_1-B_2 = \frac{(T_2-T_1+T_{01}-T_{02})(1 - \frac{z' \lambda'}{z \lambda} \operatorname{th} z e) + (T_{02}-T_{01}) \exp(z' \varepsilon)}{2p (\operatorname{sh} z' \varepsilon + \frac{z' \lambda'}{z \lambda} \operatorname{th} z e \operatorname{ch} z' \varepsilon)} \exp(z' e) \quad (14)$$

$$A_2+B_1 = \frac{(T_1+T_2-T_{01}-T_{02})(1 + \frac{z' \lambda'}{z \lambda} \operatorname{cth} z e) + (T_{01}+T_{02}-2T_{00}) \exp(-z' \varepsilon)}{2p (\operatorname{sh} z' \varepsilon + \frac{z' \lambda'}{z \lambda} \operatorname{cth} z e \operatorname{ch} z' \varepsilon)} \exp(-z' e) \quad (15)$$

$$A_2-B_1 = \frac{(T_2-T_1+T_{01}-T_{02})(1 + \frac{z' \lambda'}{z \lambda} \operatorname{th} z e) + (T_{02}-T_{01}) \exp(-z' \varepsilon)}{2p (\operatorname{sh} z' \varepsilon + \frac{z' \lambda'}{z \lambda} \operatorname{th} z e \operatorname{ch} z' \varepsilon)} \exp(-z' e) \quad (16)$$

En posant :

$$D_1(p) = (\operatorname{th} z' \varepsilon + \frac{z' \lambda'}{z \lambda} \operatorname{cth} z e)$$

$$D_2(p) = (\operatorname{th} z' \varepsilon + \frac{z' \lambda'}{z \lambda} \operatorname{th} z e)$$

$$N_1(p) = (T_1+T_2-T_{01}-T_{02})(1 + \frac{z' \lambda'}{z \lambda} \operatorname{cth} z e) + (T_{01}+T_{02}-2T_{00}) \exp(-z' \varepsilon)$$

$$N'_1(p) = (T_1+T_2-T_{01}-T_{02})(1 - \frac{z' \lambda'}{z \lambda} \operatorname{cth} z e) + (T_{01}+T_{02}-2T_{00}) \exp(z' \varepsilon)$$

$$N_2(p) = (T_2-T_1+T_{01}-T_{02})(1 + \frac{z' \lambda'}{z \lambda} \operatorname{th} z e) + (T_{02}-T_{01}) \exp(-z' \varepsilon)$$

$$N'_2(p) = (T_2-T_1+T_{01}-T_{02})(1 - \frac{z' \lambda'}{z \lambda} \operatorname{th} z e) + (T_{02}-T_{01}) \exp(z' \varepsilon)$$

Nous obtenons :

$$A_2 = \frac{\exp(-z'e)}{4 p \operatorname{ch} z'\varepsilon} \left[\frac{N_1(p)}{D_1(p)} + \frac{N_2(p)}{D_2(p)} \right]$$

$$B_2 = \frac{\exp(z'e)}{4 p \operatorname{ch} z'\varepsilon} \left[-\frac{N'_1(p)}{D_1(p)} - \frac{N'_2(p)}{D_2(p)} \right]$$

$$A_1 = \frac{\exp(z'e)}{4 p \operatorname{ch} z'\varepsilon} \left[-\frac{N'_1(p)}{D_1(p)} + \frac{N'_2(p)}{D_2(p)} \right]$$

$$B_1 = \frac{\exp(-z'e)}{4 p \operatorname{ch} z'\varepsilon} \left[\frac{N_1(p)}{D_1(p)} - \frac{N_2(p)}{D_2(p)} \right]$$

Il s'en suit pour les expressions des températures $\Theta'_1(x,p)$ et $\Theta'_2(x,p)$

$$\Theta'_1(x,p) = \frac{-N'_1(p) \exp[z'(e-x)] + N_1(p) \exp[-z'(e-x)]}{4 p \operatorname{ch}(z' \varepsilon) D_1(p)} + \frac{N'_2(p) \exp[z'(e-x)] - N_2(p) \exp[-z'(e-x)]}{4 p \operatorname{ch}(z' \varepsilon) D_2(p)} + \frac{T_{01}}{p} \quad (17)$$

$$\Theta'_2(x,p) = \frac{N_1(p) \exp[-z'(e+x)] - N'_1(p) \exp[z'(e+x)]}{4 p \operatorname{ch}(z' \varepsilon) D_1(p)} + \frac{N_2(p) \exp[-z'(e+x)] - N'_2(p) \exp[z'(e+x)]}{4 p \operatorname{ch}(z' \varepsilon) D_2(p)} + \frac{T_{02}}{p} \quad (18)$$

L'expression de $\Theta'_0(x,p)$ peut être obtenue de la même façon et les originaux $T'_1(x,t)$, $T'_2(x,t)$, $T'_0(x,t)$ en utilisant (voir chapitre 1) l'intégrale de Mellin, Fourier et le théorème des Résidus.

De façon générale, nous avons :

$$T'(x,t) = \frac{1}{2 \Pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} \Theta'(x,p) \exp(p t) dp = \Sigma \text{ des résidus de } \Theta'(x,p) \exp(p t)$$

et interviennent dans les expressions (sous forme de Laplace) des températures et des flux les pôles tels que :

$p = 0$, qui conduit aux solutions des régimes permanents

$$\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a}} \varepsilon = 0 \text{ , donnant des résidus nuls}$$

$D_1(p) = 0$ et $D_2(p) = 0$ qui conduisent aux solutions des régimes transitoires.

Etude des pôles générés par les dénominateurs $D_1(p)$ et $D_2(p)$

$$D_1(p) = \operatorname{th} z' \varepsilon + \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{a'}} \operatorname{cth} z e = 0 \quad (19)$$

et

$$D_2(p) = \operatorname{th} z' \varepsilon + \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{a'}} \operatorname{th} z e = 0 \quad (20)$$

D'une façon générale z est un complexe de la forme $\alpha + j\beta$.

Les équations $D_1(p) = 0$ et $D_2(p) = 0$ n'admettent de solutions que pour z imaginaire pure.

$$\text{On pose aussi } p = -m \text{ ce qui donne } z = j\sqrt{\frac{m}{a}} \text{ et } z' = j\sqrt{\frac{m}{a'}}$$

Les équations (19) et (20) deviennent :

$$\operatorname{tg} \sqrt{\frac{m}{a'}} \varepsilon - \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{a'}} \operatorname{cotg} \sqrt{\frac{m}{a}} e = 0 \quad (21)$$

et

$$\operatorname{tg} \sqrt{\frac{m}{a'}} \varepsilon + \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{a'}} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{m}{a}} e = 0 \quad (22)$$

ou encore, sachant que $R' = \frac{\varepsilon}{\lambda' S}$, $R' C' = \frac{\varepsilon^2}{a'}$, $R = \frac{2 e}{\lambda S}$, $R C = \frac{4 e^2}{a}$

$$\operatorname{tg} \sqrt{m} \sqrt{R' C'} - \frac{R}{R'} \sqrt{\frac{R' C'}{R C}} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \sqrt{m} \sqrt{R C} = 0 \quad (23)$$

$$\operatorname{tg} \sqrt{m} \sqrt{R' C'} + \frac{R}{R'} \sqrt{\frac{R' C'}{R C}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \sqrt{m} \sqrt{R C} = 0 \quad (24)$$

La résolution de ces équations ne peut être faite que "graphiquement" ou à l'aide de méthodes numériques

Remarque : Lorsque l'influence des fluxmètres est négligeable ($R' \rightarrow 0$ et $C' \rightarrow 0$) les expressions ci-dessus se réduisent à :

$$\operatorname{cotg} \sqrt{\frac{m}{a'}} e = 0 \quad \text{pour l'expression (21)}$$

et

$$\operatorname{tg} \sqrt{\frac{m}{a'}} e = 0 \quad \text{pour l'expression (22)}$$

Dans ce cas particulier, l'expression (21) génère des solutions de type impair pour m

$$\text{En posant } k = 2p + 1 \text{ on a } m_{(2p+1)} = \frac{a}{e^2} (2p+1)^2 \frac{\pi^2}{4}$$

et l'expression (22) génère des solutions de type pair pour m

$$\text{En posant } k = 2p \text{ on a } m_{(2p)} = \frac{a}{e^2} (2p)^2 \frac{\pi^2}{4}$$

Nous retrouvons ici les valeurs de m_k établies au chapitre I dans le cas idéal :

$$m_k = \frac{a k^2 \Pi^2}{4 e^2}$$

Dans le système trois couches, on a dans la plupart des cas $R' C'$ assez petit devant $R C$, il s'en suit que les solutions générées sont "voisines" de celles données dans le cas idéal (chapitre I).

Nous appellerons donc $m_1, m_3, \dots, m_{(2p+1)}$ les solutions de l'équation (21) ou (23) et $m_2, m_4, \dots, m_{(2p)}$ les solutions de l'équation (22) ou (24).

Les pôles de $D_1(p)$ et $D_2(p)$ caractérisent l'évolution temporelle du champ de température en régime transitoire, indépendamment des conditions initiales. Le pôle $p = 0$ correspond au régime permanent, les pôles de $D_1(p)$ et $D_2(p)$ définissent les modes normaux du système. L'observation, en régime transitoire, de la température et du flux en un point quelconque du système est une superposition de modes normaux.

La forme analytique de la solution peut être simplifiée par un changement de fonction permettant de séparer les modes normaux. Nous introduisons pour cela les composantes symétriques Θ_s et Φ_s ainsi que les composantes dissymétriques Θ_d et Φ_d des champs de température et de flux, définies par les relations :

$$\Theta_s(x,p) = [\Theta'_1(x,p) + \Theta'_2(-x,p)] \quad \Phi_s(x,p) = \Phi'_1(x,p) + \Phi'_2(-x,p)$$

$$\Theta_d(x,p) = [\Theta'_1(x,p) - \Theta'_2(-x,p)] \quad \Phi_d(x,p) = \Phi'_1(x,p) - \Phi'_2(-x,p)$$

soit en développant :

$$\Theta_s(x,p) = \frac{N_1(p) \exp[-z'(e-x)] - N'_1(p) \exp[z'(e-x)]}{2 p \operatorname{ch} z'\epsilon D_1(p)} + \frac{T_{01} + T_{02}}{p} \quad (25)$$

$$\Phi_d(x,p) = -z' \lambda' S \frac{N_1(p) \exp[z'(e-x)] + N'_1(p) \exp[-z'(e-x)]}{2 p \operatorname{ch} z'\epsilon D_1(p)} \quad (26)$$

$$\Theta_d(x,p) = \frac{N'_2(p) \exp[z'(e-x)] - N_2(p) \exp[-z'(e-x)]}{2 p \operatorname{ch} z'\epsilon D_2(p)} + \frac{T_{01} - T_{02}}{p} \quad (27)$$

$$\Phi_s(x,p) = +z' \lambda' S \frac{N_2(p) \exp[-z'(e-x)] + N'_2(p) \exp[z'(e-x)]}{2 p \operatorname{ch} z'\epsilon D_2(p)} \quad (28)$$

Les évolutions temporelles de Θ_s et Φ_d sont déterminées par les pôles de $D_1(p)$, celles de Θ_d et Φ_s par les pôles de $D_2(p)$. Les couples $[\Theta_d \text{ et } \Phi_s]$ et $[\Theta_s \text{ et } \Phi_d]$ sont des grandeurs thermiques conjuguées définissant chacun des modes normaux. Nous retrouvons ici les propriétés des composantes symétriques et dissymétriques exposées au chapitre I.

En pratique, l'information de différence de température $\Theta_d(x,p)$ est celle relative aux surfaces limites de l'échantillon ($x = e$ et $x = -e$), et les informations de flux $\Phi_d(x,p)$ et $\Phi_s(x,p)$ sont données pour les abscisses correspondants au milieu de chaun des fluxmètres ($x = e + \frac{\epsilon}{2}$ et $x = -e - \frac{\epsilon}{2}$). En remplaçant N_1, N'_1, N_2, N'_2 par leurs valeurs, nous obtenons :

- pour l'expression de la différence des flux $\Phi_d(p, e + \epsilon/2)$:

$$\Phi_d(p, e + \epsilon/2) = -z' \lambda' S \frac{(T_1+T_2-2T_{00}) \operatorname{ch} z' \frac{\epsilon}{2} + (T_1-T_{01}+T_2-T_{02}) \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a'}{a}} \operatorname{cth} z e \operatorname{sh} z' \frac{\epsilon}{2}}{p \operatorname{ch} z' \epsilon (\operatorname{th} z' \epsilon + \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a'}{a}} \operatorname{cth} z e)} \quad (29)$$

- pour l'expression de la somme des flux $\Phi_s(p, e + \epsilon/2)$:

$$\Phi_s(p, e + \epsilon/2) = z' \lambda' S \frac{(T_2-T_1) \operatorname{ch} z' \frac{\epsilon}{2} + (T_2-T_{02}-T_1+T_{01}) \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a'}{a}} \operatorname{th} z e \operatorname{sh} z' \frac{\epsilon}{2}}{p \operatorname{ch} z' \epsilon (\operatorname{th} z' \epsilon + \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a'}{a}} \operatorname{th} z e)} \quad (30)$$

- pour l'expression de la différence de température $\Theta_d(p,e)$:

$$\Theta_d(p,e) = \frac{T_{01}-T_{02}}{p} - \frac{(T_{01}-T_{02}) \operatorname{sh} z' \epsilon + (T_2-T_{02}-T_1+T_{01}) \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a'}{a}} \operatorname{th} z e}{p \operatorname{ch} z' \epsilon (\operatorname{th} z' \epsilon + \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a'}{a}} \operatorname{th} z e)} \quad (31)$$

Expressions analytiques

En appliquant le théorème d'inversion de la transformée de Laplace (voir chapitre I), nous obtenons les expressions temporelles des flux et de température, soit :

- expression analytique de la différence des flux :

$$\phi_d(t) = 2 \lambda' S \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(T_1+T_2-2T_{00}) \cos \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \frac{\epsilon}{2} + (T_1+T_2-T_{01}-T_{02}) \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a'}{a}} \operatorname{cotg} \sqrt{\frac{m_k}{a}} e \cdot \sin \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \frac{\epsilon}{2}}{\cos \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \epsilon \left[\frac{\epsilon}{\cos^2 \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \epsilon} - \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{e}{\sin^2 \sqrt{\frac{m_k}{a}} e} \right]}$$

(32)

• $\exp(-m_k t)$

avec $k = 2p+1$ et m_k solution de l'équation :

$$\operatorname{tg} \sqrt{m_k} \frac{\epsilon}{\sqrt{a'}} - \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{a'}} \operatorname{cotg} \sqrt{m_k} \frac{e}{\sqrt{a}} = 0$$

- expression analytique de la somme des flux :

$$\begin{aligned} \phi_s(t) &= \frac{T_2 - T_1}{e/\lambda + \epsilon/\lambda'} S - \\ 2 \lambda' S \sum_{k=2}^{\infty} & \frac{(T_2 - T_1) \cos \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \frac{\epsilon}{2} - (T_2 - T_{02} - T_1 + T_{01}) \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{a'}} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{m_k}{a}} e \sin \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \frac{\epsilon}{2}}{\cos \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \epsilon \cdot \left[\frac{\epsilon}{\cos^2 \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \epsilon} + \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{e}{\cos^2 \sqrt{\frac{m_k}{a}} e} \right]} \\ & \cdot \exp(-m_k t) \end{aligned} \quad (33)$$

- expression analytique de la différence de température :

$$\begin{aligned} T_d(t) &= (T_1 - T_2) \frac{e/\lambda}{e/\lambda + \epsilon/\lambda'} - \\ 2 \sum_{k=2}^{\infty} & \frac{(T_{01} - T_{02}) \sin \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \epsilon + (T_2 - T_1 - T_{02} + T_{01}) \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{a'}} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{m_k}{a}} e}{\sqrt{\frac{m_k}{a'}} \cos \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \epsilon \cdot \left[\frac{\epsilon}{\cos^2 \sqrt{\frac{m_k}{a'}} \epsilon} + \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{e}{\cos^2 \sqrt{\frac{m_k}{a}} e} \right]} \exp(-m_k t) \end{aligned} \quad (34)$$

avec pour les expressions (33) et (34), $k = 2p$ et m_k solution de :

$$\operatorname{tg} \sqrt{m_k} \frac{\epsilon}{\sqrt{a'}} + \frac{\lambda'}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{a'}} \operatorname{tg} \sqrt{m_k} \frac{e}{\sqrt{a}} = 0$$

Il est important de constater que seules, les valeurs de rang impair de m_k ($k=2p+1$) interviennent dans l'expression analytique de la différence des flux et les valeurs de rang pair de m_k ($k=2p$) dans les expressions de la différence de température et de la somme des flux.

A N N E X E II

DESCRIPTION DU BANC DE MESURE THERMIQUE ET DE LA CHAINE D'ACQUISITION NUMERIQUE

Le schéma synoptique de l'appareillage mis en oeuvre est rappelé figure 1 page 122.

I - BANC DE MESURE THERMIQUE

Nous pouvons distinguer deux parties fondamentales :

- la première partie (générateurs de températures superficielles) est constituée essentiellement de deux plaques échangeuses thermiques alimentées respectivement par deux bains régulés en température (voir chapitre II) ;

- la seconde englobe les dispositifs capteurs de flux et de température. Les fluxmètres (voir chapitre III) permettent à chaque instant de connaître la quantité de chaleur échangée entre l'échantillon et les plaques. Les capteurs de températures, thermocouples de type N, sont montés de telle façon que leurs informations électriques représentent la différence de température existant entre les deux plaques, la température T_2 de la plaque inférieure et la différence de température existant entre les deux surfaces limites de l'échantillon (figure 2 ci-dessous).

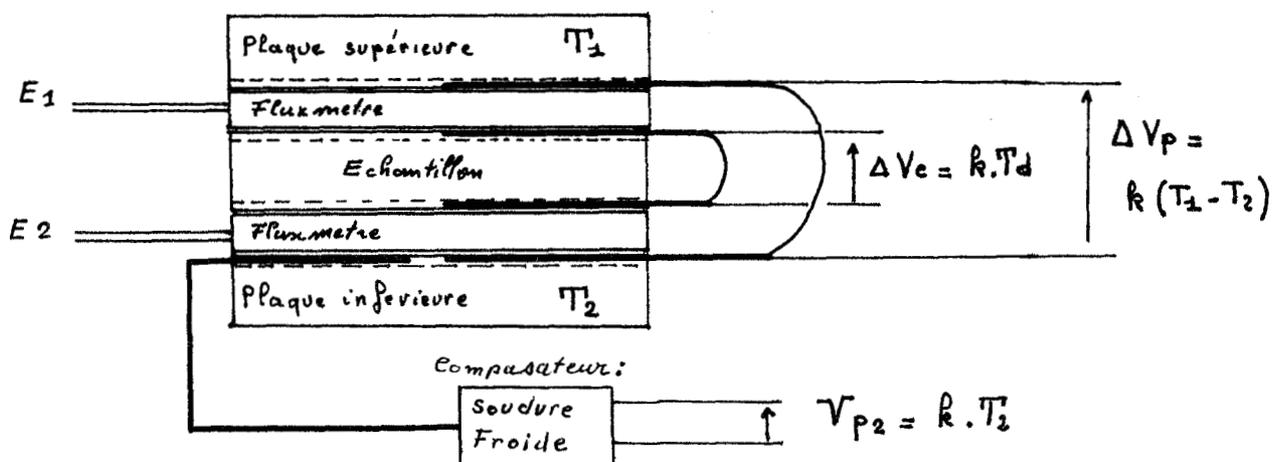


Figure 2

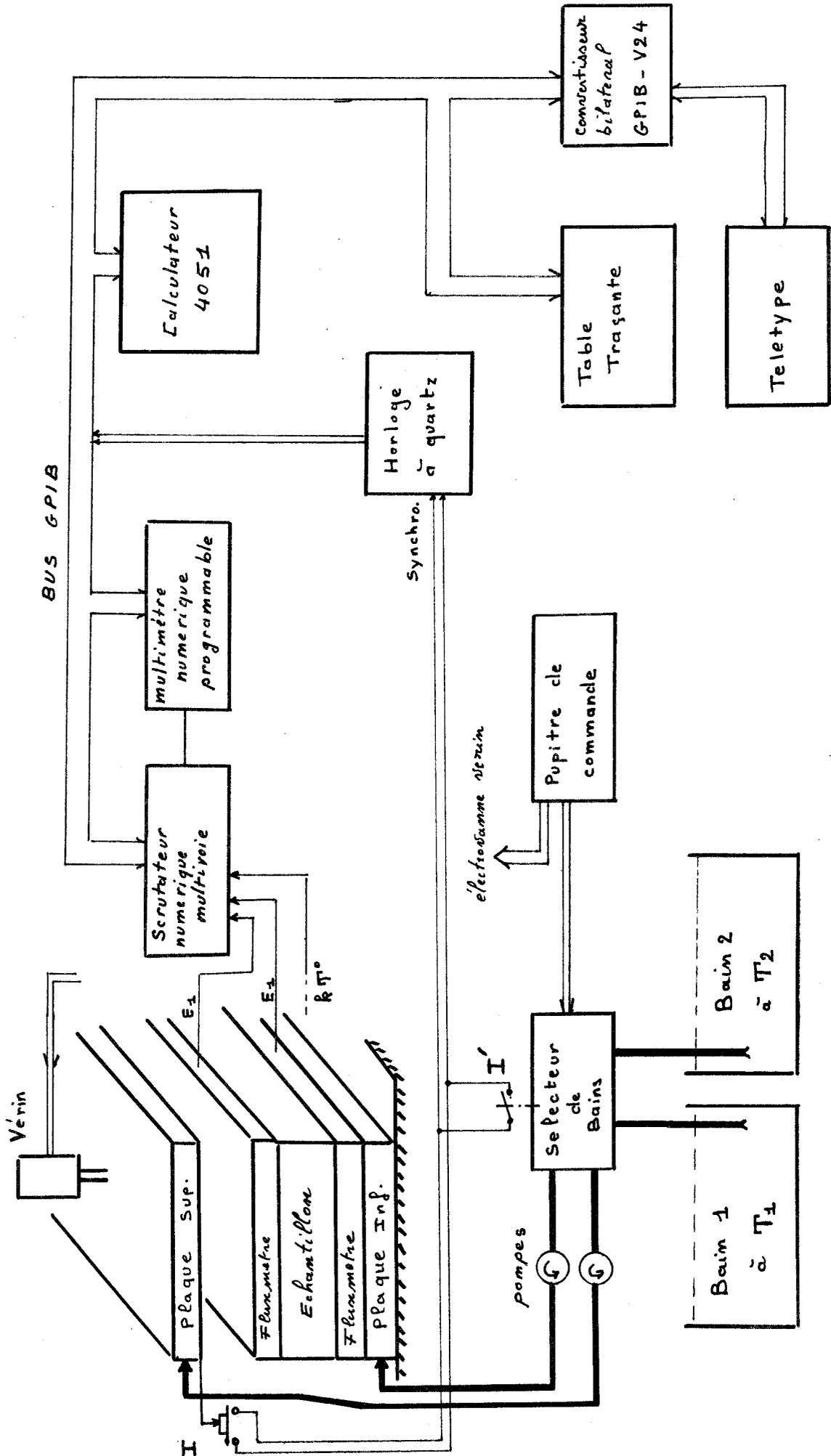


Figure 1



II - CHAÎNE D'ACQUISITION NUMÉRIQUE

La chaîne de mesure comporte un multiplexeur bas niveau 40 voies et un multimètre numérique de résolution $2 \mu\text{V}$, programmables. Le banc de mesure thermique et la chaîne de mesure sont contrôlés par un ordinateur graphique.

Fonctionnement

La procédure d'acquisition démarre :

- soit au moment où l'on descend l'échangeur supérieur par la commande du vérin (pour la mesure dite du gradient thermique),
- soit au moment où un échangeur, initialement alimenté par l'un des deux bains, se trouve alimenté par l'autre bain (pour la mesure dite du bilan thermique).

A partir de ce moment, l'interrupteur I ou l'interrupteur I' est fermé et commande l'horloge pour fournir une impulsion négative sur la ligne (SRQ) de service : "demande d'interruption" du BUS GPIB.

L'instant de délivrance de cette impulsion détermine l'origine des temps ($t = t_0$) de la mesure.

Les divers organes de la chaîne de mesure sont reliés en parallèle sur le BUS GPIB. Un seul de ces organes : le calculateur, est contrôleur.

Lorsque l'impulsion délivrée par l'horloge apparaît sur la ligne SRQ, le calculateur quitte sa tâche de fond et exécute une routine dite d'interruption. Cette routine consiste à commander successivement : la scrutation, la conversion analogique numérique et la lecture de la valeur : de la voie fluxmètre supérieur, de la voie fluxmètre inférieur, de la voie température.

Chacune de ces informations est stockée respectivement dans un tableau : A_1 , B_1 , C_1 de dimension N (N représente le nombre d'échantillons de l'horizon). Ensuite, le calculateur retourne à sa tâche de fond à l'endroit où il l'avait quittée, et continue à l'exécuter jusqu'à la génération d'une nouvelle impulsion d'horloge.

A chacune de ces impulsions, le calculateur exécute la même procédure que précédemment. L'intervalle de temps T qui sépare l'apparition de deux impulsions successives est égal à la période d'échantillonnage.

Cette période d'échantillonnage doit être choisie telle que les conditions du théorème de Shannon soient respectées. C'est-à-dire, qu'elle doit être au moins inférieure à la moitié de l'inverse de la fréquence la plus élevée du spectre du signal (température ou flux) observé.

Or, l'ensemble multimètre-multiplexeur demande que la période d'échantillonnage ne soit pas inférieure à 1 seconde environ pour la scrutation de trois voies. Ceci ne nous permet donc que d'observer des signaux dont le spectre s'étend théoriquement jusque 0,5 Hz.

En pratique, on limitera le spectre des signaux observables avec cette chaîne à 0,05 Hz. Il en résulte que la valeur du pôle le plus élevé des signaux observables est égal à 0,31.

Lorsque les tableaux A_1 , B_1 et C_1 sont remplies au bout de N mesures, les valeurs acquises peuvent être : soit stockées dans un fichier d'une cartouche magnétique, soit reportées sur un graphique fonction du temps à l'aide de la table traçante, soit encore imprimées sur papier ou stockées sur ruban par perforation à l'aide de la télétype....., après avoir été converties en unités de température et de flux.

Ces données disponibles sur l'un des supports précédent peuvent être interprétées par le calculateur à l'aide de l'un des divers programmes énumérés ci-dessous pour obtenir les constantes thermophysiques de l'échantillon sous épreuve.

Les principaux programmes utilisés afin de déterminer les constantes thermophysiques du matériau sont :

- les programmes permettant de calculer l'intégrale $J(t)$ de la différence ou de la somme des flux (méthode de Simpson),
- le programme de calcul des valeurs moyennes des régimes permanents des informations de flux et de température,
- le programme permettant de calculer les valeurs de x telle que la fonction $f(x) = 0$ par approximations successives,
- le programme d'ajustement exponentiel ou le programme qui exploite une identification du système à un modèle mathématique, ces derniers utilisant chacun un critère au sens des moindres carrés.

A N N E X E III

DETERMINATION DES POLES DE LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME DU DEUXIEME ORDRE A PARTIR DES COEFFICIENTS DE L'EQUATION DE RECURRENCE DU MODELE QUI LE DECRIT.

Un système du deuxième ordre est décrit par l'équation différentielle :

$$y'' + a y' + b y = c e \quad (1)$$

avec $y = y(t) = \text{"signal de sortie"}$

$e = e(t) = \text{"signal d'entrée"}$

Si on pose :

$$\overrightarrow{x(t)} = \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} = \text{"vecteur d'état du système"} \quad (2)$$

tel que $x_1(t) = y(t)$ et $x_2(t) = y'(t)$

Ce système peut être décrit par l'équation vectorielle d'état :

$$\overrightarrow{x'(t)} = \begin{vmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{vmatrix} = [A] \overrightarrow{x(t)} + [B] \overrightarrow{e(t)} \quad (3)$$

$$\overrightarrow{y(t)} = [C] \overrightarrow{x(t)} + [D] \overrightarrow{e(t)}$$

avec

$$[A] = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} \quad [B] = \begin{vmatrix} 0 \\ c \end{vmatrix} \quad (4)$$

On montre que, lorsque les signaux $e(t)$ et $y(t)$ sont échantillonnés l'équation d'état s'écrit :

$$\overrightarrow{x}((k+1)T) = [E(T)] \overrightarrow{x}(kT) + [F(T)] \overrightarrow{u}(kT) \quad (5)$$

avec

$$[E(T)] = \mathcal{L}^{-1} [p I - A]^{-1}$$

$$[F(T)] = A^{-1} [\exp(A T) - I] B$$

I étant la matrice unité, et T, la période d'échantillonnage.

La transformée de Laplace de l'équation (1) est :

$$\frac{y(p)}{c e(p)} = \frac{1}{p^2 + ap + b} = \frac{1}{(p+\alpha_1)(p+\alpha_2)} \quad (6)$$

si on pose :

$$\underline{[E(T)]} = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{[F(T)]} = \begin{vmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{vmatrix} \quad (7)$$

avec

$$E_{11} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} [\alpha_2 \exp(-\alpha_2 T) - \alpha_1 \exp(-\alpha_1 T)]$$

$$E_{12} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} [\exp(-\alpha_1 T) - \exp(-\alpha_2 T)]$$

$$E_{21} = \frac{-\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} [\exp(-\alpha_1 T) - \exp(-\alpha_2 T)]$$

$$E_{22} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} [\alpha_2 \exp(-\alpha_2 T) - \alpha_1 \exp(-\alpha_1 T)]$$

et

$$F_{11} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \left[-\frac{\exp(-\alpha_1 T) - 1}{\alpha_1} + \frac{\exp(-\alpha_2 T) - 1}{\alpha_2} \right]$$

$$F_{21} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} [\exp(-\alpha_1 T) - \exp(-\alpha_2 T)]$$

On obtient, en remplaçant $E(T)$ et $F(T)$ dans l'équation (5) :

$$y \underline{[(k+2) T]} = a_1 y \underline{[(k+1) T]} + a_2 y(k T) + b_1 e \underline{[(k+1) T]} + b_2 e(kT) \quad (8)$$

avec

$$a_1 = E_{11} + E_{22} = \exp(-\alpha_2 T) + \exp(-\alpha_1 T) \quad (9)$$

$$a_2 = -(E_{11} E_{22} - E_{12} E_{21}) = -[\exp(-\alpha_1 T) \exp(-\alpha_2 T)] \quad (10)$$

en posant :

$$X = \exp(-\alpha_1 T) \quad \text{et} \quad Y = \exp(-\alpha_2 T)$$

on a : $a_1 = X + Y$ et $a_2 = -XY$

soit : $Y = a_1 - X$ d'où $\alpha_2 = -X(a_1 - X) = -a_1 X + X^2$

et X solution de l'équation : $X^2 - a_1 X - a_2 = 0$

Il en résulte que :

$$\alpha_1 = - \frac{\text{Ln} \left[a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4 a_2} \right]}{T}$$
$$\alpha_2 = - \frac{\text{Ln} \left[a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4 a_2} \right]}{T}$$

(11)

