N° d'ordre : 669

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

pour obtenir

le grade de Docteur 3ème cycle

Spécialité : Mathématiques Pures

par

AGOSSA AZANNEY

Sur "les sous-groupes algébriques différentiels de SL_2 et leur application aux extensions de corps différentiels fortement normales"

Membres du Jury : D. LEHMANN, *Président*
R. BKOUCHE, *Rapporteur*
L. GRUSON, *Examinateur*

Soutenue le 17 janvier 1978

AVERTISSEMENT

Dans ce travail de Recherche que j'ai fait en collaboration avec YASIN AL-HITI, sur les Groupes Algébriques Différentiels, je me suis particulièrement intéressé à l'étude des Sous-Groupes Algébriques Différentiels de SL_2 et leur application aux Extensions de Corps Différentiels Fortement Normales. Ceci se trouve dans les chapitres IV et V.

Le chapitre I est entièrement commun, car il réunit toutes les définitions et généralités dont chacun de nous a eu besoin.

Le but que nous poursuivons est d'arriver à changer le "Langage" de WEIL qui emploie les notions de Corps Différentiel Universel, de points génériques et de spécialisations.

Ceci fait l'objet de notre prochain travail de Recherche.

AZANNEY AGOSSA

AVANT-PROPOS

Je tiens à exprimer à Monsieur BKOUCHE mon directeur de THESE, ma profonde gratitude pour la sollicitude avec laquelle il m'a guidé tout au long de ce travail.

J'adresse l'expression de ma vive reconnaissance à Messieurs GOBLOT, GERGONDEY, VENKEN et toute l'équipe du séminaire d'ALGEBRE DIFFERENTIELLE pour toutes les aides qu'ils m'ont apportées depuis l'A.E.A.

Je tiens à remercier tous les membres du JURY ici présents pour le grand honneur qu'ils me font en acceptant de faire partie de ce JURY.

INTRODUCTION

Le but visé ici est d'étudier, de façon générale, les groupes algébriques différentiels pour faire ressortir quelques résultats qui contrastent avec la situation en géométrie algébrique et, de façon particulière, les sous-groupes algébriques différentiels de SL2 et leur application aux extensions de corps différentiels fortement normales.

Dans toute la suite, U désigne un corps différentiel universel de caractéristique nulle, de corps des constantes K et ayant ; ,...., comme opérateurs de dérivation.

L'étude qui va suivre comporte cinq chapitres :

Dans le chapitre I, il sera établi quelques résultats généraux sur les ensembles algébriques différentiellement fermés au sens de la topologie de Zariski différentielle et il seré démontré le théorème de Kolchin sur la dimension polynomiale.

Dans le chapitre II, il sera démontré que l"anneau des fonctions rationnelles différentielles partout définies sur un ensemble algébrique différentiel V, défini sur un sous-corps différentiel F de U, est plus gros que l'anneau des coordonnées. Ce résultat contraste avec la situation en géométrie algébrique où l'anneau des fonctions rationnelles partout définies sur un ensemble algébrique est égal à l'anneau des coordonnées.

Dans le chapitre III, on montrera qu'il existe des groupes algébriques différentiels dont les lois de composition ne sont pas des fonctions polynomiales différentielles. Ce résultat qui contraste aussi avec la situation en géométrie algébrique est une conséquence du résultat établi au chapitre II.

Le chapitre IV sera consacré à l'étude des sous-groupes algébriques différentiels de SL2 et leur classification. Mais avant cette étude importante, quelques résultats généraux seront établis sur les groupes algébriques différentiels linéaires ; en particulier, on montrera que tout groupe algébrique différentiel dont la loi de composition est une fonction polynomiale différentielle est isomorphe à un groupe algébrique différentiel linéaire. On remarquera que quelques résultats sont énoncés comme rappels.

Enfin, le chapitre V est une application des sous-groupes algébriques différentiels de SL2 aux extensions de corps différentiels fortement normales, au sens de Kolchin. Il s'agit de trouver parmi ces sous-groupes algébriques différentiels de SL2, ceux qui sont isomorphes aux groupes de Galois des extensions de corps différentiels fortement normales.

"Le langage utilisé est celui de Weil" qui emploie les notions de corps différentiel universel, de spécialisations et de points génériques.

CHAPITRE I : NOTATIONS ET NOTIONS DE BASE

§ 1 . Notations de base :

U désigne un corps différentiel universel de caractéristique nulle. Δ est l'ensemble des opérateurs de dérivation qui commutent entre eux.

K est le corps des constantes de U.

Θ est le monoïde commutatif libre engendré par $\delta_1, \ldots\ldots, \delta_m$, c'est-à-dire, si θ appartient à Θ , $\theta = \delta_1^{e_1} \ldots\ldots \delta_m^{e_m}$ où les e_i sont des entiers positifs ou nuls, et $\sum e_i$ est appelé l'ordre de θ .

Soit R un anneau différentiel commutatif ayant Δ comme ensemble fondamental des opérateurs de dérivation ; $\mathcal{D}$ désigne l'ensemble des opérateurs différentiels linéaires, c'est-à-dire , si D appartient à $\mathcal{D}$, on a $D = \sum a_\theta \theta$ avec les a_θ appartenant à R presque tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Enfin, tout corps différentiel F considéré est un sous-corps différentiel de U sur lequel U est une extension universelle .

$U[y] = U[y_1, \ldots\ldots, y_n]$ désigne l'anneau des polynômes à coefficients dans U.

$U\{y\} = U\{y_1, \ldots\ldots, y_n\}$ désigne l'anneau différentiel des polynômes différentiels en les indéterminées différentielles $y_1, \ldots\ldots, y_n$ à coefficients dans U.

Si Σ est un sous-ensemble de $U\{y\}$, $[\Sigma]$ est l'idéal différentiel engendré par Σ et $\{\Sigma\}$ est l'idéal différentiel parfait engendré par Σ .

Si V est un sous-ensemble de U^n , alors I(V) est l'ensemble des polynômes différentiels de $U\{y\}$ qui s'annulent pour tout élément de V.

Si Σ est un sous-ensemble de $U\{y\}$, on note $Z(\Sigma)$ l'ensemble des éléments de U^n qui annulent tout polynôme de Σ .

§ 2. Définitions générales :

a) Anneau différentiel : Soit R un anneau commutatif unitaire d'élément unité 1 . Une dérivation δ de R est un homomorphisme de groupes de R dans R vérifiant :

$$\delta(ab) = \delta a.b + a.\delta b$$

$$\delta(a+b) = \delta a + \delta b \quad \text{pour tous } a, b \in R$$

D'autre part $\delta(1) = 0$, car $\delta(1) = \delta(1.1) = 1.\delta(1) + 1.\delta(1)$, soit $\delta(1) = 2\,\delta(1)$, d'où $\delta(1) = 0$.

L'anneau R muni d'une telle dérivation s'appelle anneau différentiel. Le noyau de δ est un anneau et s'appelle l'anneau des constantes de R.

<u>Proposition 1</u> : Soit R un anneau différentiel, et soit S une partie multiplicative de R ; alors toute dérivation δ de R se prolonge de manière unique en une dérivation de $S^{-1}R$ définie par

$$\delta\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{s.\delta a - a.\delta s}{s^2}$$

<u>Démonstration</u> : On doit avoir

$$\delta a = \delta\left(s.\frac{a}{s}\right) = \delta s.\frac{a}{s} + s\cdot\delta\left(\frac{a}{s}\right)$$

, d'où l'unicité ; de plus pour tout $u \in S$, on a par définition

$$\delta\left(\frac{au}{su}\right) \quad \frac{su.\,\delta(au) - au.\,\delta(su)}{(su)^2}$$

$$\frac{su^2.\,\delta a - au^2.\,\delta s}{(su)^2} = \delta\left(\frac{a}{s}\right)$$

Comme $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ s'il existe $v \in S$ tel que $v(at - bs) = 0$, on a donc, puisque $sv \in S$,

, d'où on a bien une application définie sur S R.

On vérifie enfin que l'on a

$$\delta\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}\right) = \frac{st.\,\delta(at + bs) - (at + bs).\,\delta(st)}{(st)^2}$$

$$= \frac{s^2(\delta b.t - b.\delta t) + t^2(s.\delta a - a.\,\delta s)}{(st)^2}$$

$$= \delta\left(\frac{a}{s}\right) + \delta\left(\frac{b}{t}\right) .$$

$$\frac{b}{t}\cdot\delta\left(\frac{a}{s}\right) + \frac{a}{s}\cdot\delta\left(\frac{b}{t}\right) = \frac{bt(s.\,\delta a - a.\delta s) + as(t.\,\delta b - b.\,\delta t)}{(st)^2}$$

$$= \frac{st.\,\delta(ab) - ab.\,\delta(st)}{(st)^2}$$

$$= \delta\left(\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}\right),$$ d'où on a bien une dérivation.

b) Corps différentiel : Un corps F qui est (en tant qu'anneau) un anneau différentiel, s'appelle un corps différentiel. Il est évident que l'anneau des constantes de F est un corps .

c) Corps différentiel universel : Soit U un corps différentiel et soit F un sous-corps différentiel de U. U est une extension universelle de F, si pour toute extension différentielle F_1 de F, $F \subset F_1 \subset U$, engendrée sur F par un nombre fini d'éléments, et pour tout entier n strictement positif, et tout idéal différentiel premier propre $\wp$ de $F_1\{y_1,\dots,y_n\}$, il existe un zéro générique* $(\eta_1,\dots,\eta_n)$ de $\wp$ avec $\eta_1,\dots,\eta_n$ dans U. U est un corps différentiel universel s'il est une extension universelle de son corps différentiel premier(ici $\mathbb{Q}$).

§ 3 . Ensemble algébrique différentiel et topologie de Zariski différentielle :

1°) Ensemble algébrique différentiel : Soit V un sous-ensemble de U^n. On dit que V est un ensemble algébrique différentiel s'il existe un sous-ensemble Σ de $U\{y_1,\dots,y_n\}$ tel que V soit l'ensemble des zéros communs aux éléments de Σ , c'est-à-dire,

$$V = \{m \in U^n \mid \forall f \in \Sigma,\ f(m) = 0\}$$

Soit $T = \{V \subset U^n \mid V = Z(\Sigma), \text{ avec } \Sigma \subset U\{y\}\}$, et soit Π l'ensemble des idéaux différentiels parfaits(*) de $U\{y\}$. Comme en géométrie algébrique, il y a une correspondance bijective entre T et Π définie par

$$V \longmapsto I(V), \text{ et } \mathfrak{A} \longmapsto Z(\mathfrak{A}).$$

(*) voir chapitre I, §3,4°

Par définition I(V) s'appelle l'idéal différentiel de définition de V.

2°) <u>Topologie de Zariski différentielle:</u> Les éléments de T sont fermés dans une topologie sur U^n appelée topologie de Zariski différentielle. Donc un fermé de la topologie de Zariski différentielle sur U^n est un sous-ensemble de U^n qui est un ensemble algébrique différentiel.
On dit aussi qu'un ensemble fermé dans la topologie de Zariski différentielle est un ensemble différentiellement fermé.
Si V est un sous-ensemble de U^n, la clôture différentielle de V sera notée $\overline{V}^d$.
Soit W un sous-ensemble de U^n tel que $V \subset W$, on dit que V est différentiellement dense dans W si $\overline{V}^d = W$.
Soit $V \subset U$ différentiellement fermé. V est dit irréductible s'il ne peut s'écrire comme réunion de deux ensembles propres différentiellement fermés.

<u>Proposition 2</u>: Soit V un sous-ensemble de U^n différentiellement fermé tel que V est irréductible et soit A un sous-ensemble de V différentiellement ouvert dans V. Alors A est différentiellement dense dans V.
<u>Démonstration :</u> $\overline{A}^d$ est différentiellement fermé par définition, ainsi que le complémentaire de A dans V, puisque A est différentiellement ouvert dans V.
Supposons $V \neq \overline{A}^d$, on a $V = A \cup \complement_V A$ donc $\overline{V}^d = \overline{A \cup \complement_V A}^d = \overline{A}^d \cup \overline{\complement_V A}^d$
$= A \cup \complement_V A$

Mais $\overline{V}^d = V$ car V est différentiellement fermé.
V s'écrirait donc comme réunion de deux sous- ensembles propres différentiellement fermés. Ce qui contredit le fait que V est irréductible. Donc $V = \overline{A}^d$.

<u>Remarque 1 :</u> Un espace topologique est dit noethérien si les fermés satisfont à la condition de chaîne descendante.
D'après le " Ritt-Raudenbush basis theoreme" sur les idéaux différentiels parfaits de type fini , on déduit que U^n est un espace noethérien par la topologie de Zariski différentielle.

<u>Proposition 3 :</u> Soit V un sous-ensemble de U^n différentiellement fermé. Alors V est irréductible si et seulement si son idéal différentiel de définition I(V) est premier.

( ) Un idéal différentiel est dit parfait s'il est égal à son radical
c'est-à-dire a a , n N.

Démonstration :

C.N: Supposons que V soit irréductible. On va montrer que I(V) est premier. Soient $f \notin I(V)$ et $g \notin I(V)$; il faut montrer que $f.g \notin I(V)$.
Supposons que $f.g \in I(V)$ et considérons les idéaux

$$I_1 = I(V) + f \quad \text{et} \quad I_2 = I(V) + g.$$

$I \subsetneq I \Longrightarrow V_1 = Z(I_1) \subsetneq V = Z(I(V))$, de même $I \subsetneq I_2 \Longrightarrow V_2 = Z(I_2) \subsetneq V$.
On a $V_1 \cup V_2 \subset V$, et comme $f.g \in I(V)$, on a aussi $I_1 . I_2 \subset I$, donc $V = Z(I) \subset Z(I_1 . I_2) = Z(I_1) \cup Z(I_2) = V_1 \cup V_2$; il résulte que $V = V_1 \cup V_2$; ce qui contredit le fait que V est irréductible. Donc V irréductible implique que I(V) est premier.

C.S : Supposons maintenant que I(V) soit premier. Il faut montrer que V est irréductible.
Supposons V non irréductible, c'est-à-dire $V = V_1 \cup V_2$ avec $V_1 \subsetneq V$ et $V_2 \subsetneq V$.

$$V = Z(I(V)) = Z(I(V_1)) \cup Z(I(V_2)) = Z[I(V_1) \cap I(V_2)]$$

Donc $I(V) = I(V_1) \cap I(V_2)$.

$$V_1 \subsetneq V \Longrightarrow I(V) \subsetneq I(V_1) \quad \text{et}$$
$$V_2 \subsetneq V \Longrightarrow I(V) \subsetneq I(V_2) .$$

Soient f_1 dans $I(V_1) - I(V)$ et f_2 dans $I(V_2) - I(V)$; on a $f_1 . f_2 \in I(V_1) \cap I(V_2)$, donc $f_1 . f_2 \in I(V)$; on vient de montrer que $f_1 \notin I(V)$ et $f_2 \notin I(V)$ et pourtant $f_1 . f_2 \in I(V)$; ceci contredit l'hypothèse que I(V) est premier. Donc I(V) premier implique V irréductible.

Définition : Soit V un sous-ensemble de U^n différentiellement fermé, on appelle composante de V, un sous-ensemble maximal irréductible différentiellement fermé de V.

Remarque 2 : Comme U^n est un espace noetherien pour la topclogie de Zariski différentielle, alors tout sous-ensemble différentiellement fermé de U^n s'écrit comme union finie de ses composantes.

Proposition 4 : Soit V un sous-ensemble de U^n différentiellement fermé. Soit A un sous-ensemble différentiellement ouvert de V. Alors A est différentiellement dense dans V si et seulement si pour toute composante V_i de V, $A \cap V_i$ est différent de l'ensemble vide.

Démonstration : Si V est irréductible la démonstration est terminée (d'après la prop. 2). Si V n'est pas irréductible, soit $V = \bigcup V_i$.

C.N : Supposons que A soit différentiellement dense dans V, c'est-à-dire $\bar{A}^d = V$. Soit V_i une compsante quelconque de V telle que $A \cap V_i = \emptyset$. Comme A est un ouvert dans V, $A \cap V_i \subset V_i$ est un ouvert de V_i. D'après la proposition 2, $A \cap V_i$ est différentiellement dense dans V_i, c'est-à-dire $\overline{A \cap V_i}^d = V_i$. Or si $A \cap V_i$ est un ensemble vide on a $\overline{A \cap V_i}^d = \emptyset = V_i$; ce qui est impossible car V_i est une composante de V. Il en résulte que toute composante V_i de V a une intersection non vide avec A.

C.S : Supposons que toute composante V_i de V est une intersection non vide avec A. Il faut montrer que A est différentiellement dense dans V, c'est-à-dire $\bar{A}^d = V$.

On a $A \subset V$ donc $\bar{A}^d \subset V$. Il faut montrer que $V \subset \bar{A}^d$. Pour toute composante V_i de V, on a $A \cap V_i$ différent de l'ensemble vide. $A \cap V_i$ est différentiellement dense dans V_i (Prop. 2), c'est-à-dire $\overline{A \cap V_i}^d = V_i$, mais $\overline{A \cap V_i}^d$ est inclus dans $\bar{A}^d \cap V_i$, donc $V_i \subset \bar{A}^d \cap V_i$ implique que V_i est inclus dans $\bar{A}^d$, pour tout i. Par conséquent la réunion des V_i est contenue dans $\bar{A}^d$, donc V est inclus dans $\bar{A}^d$. On en déduit que $V = \bar{A}^d$. D'où A est différentiellement dense dans V.

3°) Corps de définition d'un ensemble algébrique différentiel et topologie associée au corps de définition :

Définition : Soient F un sous-corps différentiel de U et V un sous-ensemble de U^n différentiellement fermé. On dit que V est défini sur F (ou que F est un corps de définition de V) si $I(V) = U.I_F(V)$ avec $I_F(V) = I(V) \cap F\{y_1, \dots y_n\}$. Puisqu'on est en caractéristique zéro, cette définition est équivalente à la suivante :

Soit F un sous-corps différentiel de U et soit V un sous-ensemble de U^n différentiellement fermé. On dit que V est défini sur F s'il existe

$$\Sigma \subset F\{y_1, \dots, y_n\} \quad \text{tel que } V = Z(\Sigma).$$

Remarque 3 : Soit $V \subset U^n$ différentiellement fermé. Alors il existe un plus petit corps différentiel de définitions de V noté def V ; de plus def V est engendré par un nombre fini d'éléments sur le corps premier (ici Q puisque les corps considérés sont de caractéristique nulle).

Les sous-ensembles $V \subset U^n$ tels que $V = Z(\Sigma)$ pour $\Sigma \subset F\{y_1,\dots,y_n\}$ sont des ensembles fermés dans une topologie sur U^n appelée topologie de Zariski différentielle relative à F (ou simplement la F-topologie de U^n). Les sous-ensembles différentiellement fermés de U^n qui sont définis sur F sont dits F-fermés.

Si V est un sous-ensemble quelconque de U^n, on va noter la F-clôture différentielle de V par $\overline{V}^{d}_{F}$.

Si $\mathcal{G}$ est un sous-corps différentiel de U tel que $F \subset \mathcal{G}$, alors tout ensemble F-fermé est $\mathcal{G}$-fermé.

Il en résulte que tout sous-ensemble de U^n F-fermé est fermé.

4°) Point générique et spécialisation différentiels : Soit V un sous-ensemble de U^n différentiellement F-fermé, irréductible. Un point s de U^n est dit point générique différentiel pour V sur F, si $I_F(V) = I_F(s)$.

Les éléments t de V sont alors appelés spécialisations différentielles de s sur F, on écrit $s \xrightarrow[F]{} t$.

Si t est aussi un point générique différentiel pour V sur F, alors on écrit

$$s \xleftrightarrow[F]{} t .$$

En conséquence, si s appartient à U^n est différentiellement générique pour V sur F, alors le corps quotient de $F\{y_1,\dots,y_n\} / I \ (V)$ est isomorphe à $F<s_1,\dots,s_n>$ sur F, où $F<s_1,\dots,s_n>$ est le corps différentiel engendré sur F par $s_1,\dots,s_n$.

D'autre part, si $\mathfrak{p}$ est un idéal différentiel premier de $F\{y_1,\dots,y_n\}$, un point de U^n ayant $\mathfrak{p}$ comme idéal différentiel de définition est appelé un zéro générique de $\mathfrak{p}$.

§ 4. Notions de dimension :

Soit F un sous-corps différentiel de U et soit V un sous-ensemble de U^n différentiellement F-fermé et irréductible. Soit s élément de U^n tel que s est un point générique différentiel pour V sur F. On appelle dimension différentielle de V sur F, le degré de transcendance différentielle de $F\langle s_1,\dots,s_n\rangle$ sur F.

Théorème 1 : Soit F et $\mathcal{G}$ deux corps différentiels de caractéristique nulle, tels que $\mathcal{G}$ soit une extension différentielle de F engendrée par $s_1,\dots,s_n$ éléments de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire $\mathcal{G} = F\langle s_1,\dots,s_n\rangle$. Soit $\mathcal{G}_r$ inclus dans $\mathcal{G}$ une extension de F engendrée par les dérivées de $s_1,\dots,s_n$ d'ordre inférieur ou égal à r, c'est-à-dire $\mathcal{G}_r = F((\theta s_i), \theta\in\Theta(r), 1\leq i\leq n)$ où $\Theta(r)$ est l'anneau des opérateurs différentiels d'ordre inférieur ou égal à r.
Alors il y a polynôme w_S / F à coefficients rationnels tel que, pour r élément de N suffisamment grand, w_S / F est le degré de transcendance de $\mathcal{G}_r$ sur F.
Pour démontrer ce théorème, on a besoin des résultats suivants :

1°) Filtration : Soit R un anneau différentiel. Soit r un entier positif ou nul et soit $\Theta(r)\subset\Theta$ l'ensemble des opérateurs différentiels d'ordre inférieur ou égal à r.
Soit $\mathcal{D}_r\subset\mathcal{D}$ l'ensemble des éléments de la forme $\sum_{\theta\in\Theta(r)} a_\theta\theta$ avec a_θ élément de R presque tous nuls sauf un nombre fini.
Si r est négatif, on pose $\Theta(r) = \emptyset$, et $\mathcal{D}_r = \{0\}$. Si D appartient à $\mathcal{D}_r - \mathcal{D}_{r-1}$ l'ordre de D est égal à r.
Avec ces définitions, $\mathcal{D}$ est un anneau filtré au sens de Bourbaki.

Rappels :
a) Groupes filtrés : On appelle filtration croissante (respectivement décrois.) sur un groupe G, une suite croissance (resp. décrois.) (G_n) $n\in Z$ de sous-groupes de G.
Dans la suite, les filtrations considérées sont des filtrations croissantes.
On appelle groupe filtré, un groupe muni d'une filtration.
b) Anneaux filtrés : Etant donné un anneau R, on dit qu'une filtration $(R_r)r\in Z$ sur le groupe additif R est compatible avec la structure d'anneau de R si l'on a :

1) $R_p . R_q \subset R_{p+q}$ pour p et q éléments de Z
2) 1 appartient à R_o

L'anneau R, muni de cette filtration, est alors appelé anneau fitré.

c) Modules filtrés : Soit R un anneau filtré, $(R_n)_{n \in Z}$ sa filtration et soit M un R-module. On dit qu'une filtration $(M_n)_{n \in Z}$ sur M est compatible avec sa structure de module sur l'anneau filtré R si l'on a:

$$R_m M_n \subset M_{m+n} \quad \text{pour m et n éléments de Z.}$$

Le R-module M muni de cette filtration est appelé module filtré.

2°) Graduation : On dit qu'un anneau R est gradué s'il existe une famille $(R_r)_{r \in Z}$ de sous-groupes additifs de R tels que:

1) $R = \bigoplus_r R_r$

2) $R_p . R_q \subset R_{p+q}$

avec r, p et q éléments de Z .

La famille $(R_r)_{r \in Z}$ est appelée graduation sur l'anneau R.
Les éléments de R_r sont dits homogènes de degré r.

3°) Modules différentiels : Soit R un anneau différentiel ayant Δ comme ensemble des opérateurs de dérivation. Soit $\mathcal{D}$ l'anneau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans R. La multiplication dans $\mathcal{D}$ est telle que si $a \in R$ et $\delta \in \Delta$, alors $\delta a = \delta(a) + a\delta$.
Donc si M est un $\mathcal{D}$ -module à gauche et pour $\delta \in \Delta$, $x \in M$, on pose $\delta(x) = \delta x$, alors pour a élément de R, x élément de M et $\delta \in \Delta$, $\delta(ax) = \delta(a).x + a.\delta(x)$.
Le $\mathcal{D}$ -module à gauche M est appelé module différentiel sur R ou simplement module différentiel .
Soit M un module différentiel sur R soit donnée une filtration de M (comme ($\mathcal{D}$-module à gauche). Alors, si la filtration est exhaustive et discrète (i.e $\bigcup_{r \in Z} M_r = M$ et $M_r = (0)$ si r est suffisamment petit), M est appelé module différentiel filtré sur R.
De cette façon, seuls seront considérés comme modules filtrés, les modules dont les filtrations sont exhaustives et discrètes.
Si M est un module différentiel filtré sur R et si pour tout $r \in Z$, M_r est de type fini comme R-module, on dit que la filtration de M est finie ou que M est finiment-filtré.
S'il existe $r \in Z$ tel que pour tout $s > r$, $M_s = \mathcal{D}_{s-r} M_r$

la filtration de M est dite bonne ou que M est bien filtré.
Si la filtration de M est finie et bonne, on dit que la filtration de M est excellente ou que M est excellemment filtré.

Définitions :

1) Une suite $M \longrightarrow N \longrightarrow P$ d'homomorphismes de modules différentiels filtrés sur R est dite exacte si pour tout $r \in Z$, la suite

$$M_r \longrightarrow N_r \longrightarrow P_r \quad \text{est exacte.}$$

2) Soit $\mathfrak{D}$ un R-module avec la multiplication

$$(D, a) \longmapsto Da \text{ pour tout } D \text{ appartenant à } \mathfrak{D} \text{ et}$$

tout a appartenant à R.

On peut définir le produit tensoriel $\mathfrak{D} \otimes A$ pour tout R-module A; $\mathfrak{D} \otimes A$ est alors canoniquement un module différentiel sur R.

Si A est un R-module filtré, posons:

$$(\mathfrak{D} \otimes A)_r = \sum_{s+t=r} \mathfrak{D}_s(1 \otimes A_t)$$

Alors $\mathfrak{D} \otimes A$ devient un R-module différentiel filtré.

Soit M un module différentiel filtré. Si $\varphi : A \longrightarrow M$ est un homomorphisme de R-modules filtrés, la formule

$$\phi(D \otimes \xi) = D.\varphi(\xi)$$

définit un homomorphisme de modules différentiels filtrés

$$\phi : \mathfrak{D} \otimes A \longrightarrow M \text{ qui sera appelé}$$

ci-dessous homomorphisme canonique.

Si A est un R-module filtré et si $B \subset A$ est un sous R-module de A, B sera considéré comme un R-module filtré en posant $B_r = B \cap A_r$ pour r élément de Z.

Même chose pour les modules différentiels. Ainsi, si T est un objet filtré (anneau, module, ...), alors $\mathfrak{gr}(T)$ désigne l'objet gradué associé et $\mathfrak{gr}_r(T)$ désigne l'ensemble des éléments homogènes de $\mathfrak{gr}(T)$ de degré r.

Rappel : Soit R un anneau filtré; $(R_r)_{r \in Z}$ une filtration de R.

Posons:

$$\mathfrak{gr}_r(R) = R_{r+1} / R_r$$

$$\mathfrak{gr}(R) = \bigoplus_{r \in Z} \mathfrak{gr}_r(R).$$

L'anneau $\mathfrak{gr}(R)$ est donc un anneau gradué de type Z, appelé l'anneau gradué associé à l'anneau filtré R; les éléments homogènes de degré r de $\mathfrak{gr}(R)$ étant ceux de $\mathfrak{gr}_r(R)$.

Lemme 1: Soient $y_1, \ldots\ldots, y_m$ des indéterminées sur R ($m = \mathrm{card}\,\Delta$).
Alors $\mathfrak{gr}\,(\mathfrak{D})$ est canoniquement isomorphe à $R[y_1, \ldots, y_m]$.

Proposition 5: Le polynôme caractéristique d'Hilbert pour les modules différentiels
Supposons que l'anneau différentiel R soit un anneau artinien (c'est-à-dire R est de longueur finie comme R-module), et soit M un module différentiel filtré de filtration excellente sur R. Soit $l(M_r)$ la longueur de M_r pour r élément de Z.
Alors il existe un polynôme $w_M(r)$ à coefficients rationnels tel que pour tout r élément de Z suffisamment grand $l(M_r) = w_M(r)$.
Le degré de $w_M(r)$ est inférieur ou égal à m ($m = \mathrm{card}\,\Delta$).

Rappels :

1) Soit R un anneau et soit M un module gradué sur $B = R[y_1, \ldots, y_m)$. Soit $M = \oplus_r M_r$, alors tout M_r est un R-module. De plus, si M est un B-module de type fini, alors M_r est un R-module de type fini.

2) ((Théorème d'Hilbert-Serre)).
Soit R un anneau satisfaisant à la condition de chaîne descendante et soit M un module de type fini sur B avec $M = \oplus_r M_r$.
Alors, M considéré comme un R-module, a une longueur finie notée $w_M(r)$. Pour r suffisamment grand, la fonction $w_M(r)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à m.

Démonstration de la proposition 5 : Comme la filtration de M est excellente , M_r est de type fini sur R.

$$\mathfrak{gr}_s(M) = M_{s+1} / M_s \text{ et on a}$$

$$l(\mathfrak{gr}_s(M)) = l(M_{s+1}) - l(M_s)$$

Par conséquent $l(M_r) = \sum_{s \leq r} l(\mathfrak{gr}_s(M))$.

Donc, d'après le théorème 2 rappelé ci-dessus, il suffira de montrer que $\mathfrak{gr}(M)$ est un module de type fini sur $\mathfrak{gr}(\mathfrak{D}) = R[y_1, \ldots, y_m]$ puisqu'alors $\mathfrak{gr}_s(M)$ serait un R-module de type fini (d'après les rappels 1 et 2 ci-dessus).
Etant donné que la filtration de M est excellente, on peut choisir r élément

de Z tel que la flèche $\mathcal{D} \otimes M_r \longrightarrow M$ définie par:

$$i : M_r \longrightarrow M$$

et $$\mathcal{D} \otimes M_r \longrightarrow M$$

$$D \otimes m_r \longrightarrow D.i(m_r)$$ est surjective.

Donc $\mathcal{D} \otimes M_r \longrightarrow M \longrightarrow 0$ est exacte. On en déduit la suite exacte

$$gr(\mathcal{D} \otimes M_r) \longrightarrow gr(M) \longrightarrow 0 .$$

D'autre part

$$gr(\mathcal{D}) \otimes gr(M_r) \longrightarrow gr(\mathcal{D} \otimes M_r)$$ est aussi surjective.

Il en résulte que

$$gr(\mathcal{D}) \otimes gr(M_r) \longrightarrow gr(M)$$ est surjective.

Comme $gr(\mathcal{D}) \otimes gr(M_r)$ est un $gr(\mathcal{D})$-module de type fini, on en déduit que $gr(M)$ est un $gr(\mathcal{D})$- module de type fini. Or $gr(\mathcal{D}) = R[y_1,\dots,y_m]$.,

Ceci implique que $gr_s(M)$ est un R-module de type fini (d'après le rappel 1).

D'après le théorème 2 rappelé, $l(gr_s(M))$ est fini et égal à une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à m .

D'où $l(M_r) = \sum_{s \leq r} l(gr_s(M))$ assure l'existence du polynôme $w_M(r)$ pour r suffisamment grand de degré inférieur ou égal à m tel que $l(M_r) = w_M(r)$.

<u>Exemple:</u> On a $w(r) = \binom{m+r}{m}$. Ceci provient du fait que $\Theta(r)$ est une base de $\mathcal{D}_r$ et que card $\Theta(r) = \binom{m+r}{m}$.

Soient F et $\mathcal{G}$ des corps, avec $\mathcal{G}$ une extension de F. Soit $Der_F(\mathcal{G})$ le $\mathcal{G}$ - espace vectoriel de toutes les dérivations F-linéaires de $\mathcal{G}$ et soit $(Der_F(\mathcal{G}))^*$ son $\mathcal{G}$ -espace dual.

Si $\eta \in \mathcal{G}$, on définit $d\eta \in (Der_F(\mathcal{G}))^*$ par:

$$d\eta(D) = D(\eta)$$ pour tout D élément de $Der_F(\mathcal{G})$.

Finalement soit $\Omega_F(\mathcal{G})$ le sous $\mathcal{G}$ -espace vectoriel de $(Der_F(\mathcal{G}))^*$

engendré par tous les $d\eta_\alpha$ pour η élément de $\mathcal{G}$. Supposons maintenant que F et $\mathcal{G}$ soient des corps différentiels avec $\mathcal{G}$ une extension de F. Soient M et N des espaces vectoriels différentiels sur $\mathcal{G}$, et considérons $\mathrm{Hom}_F(M,N)$ le $\mathcal{G}$ - espace vectoriel de toutes les applications F-linéaires de M dans N. Si , pour δ élément de Δ et f élément de $\mathrm{Hom}_F(M,N)$, on définit $[\delta, f] = \delta \circ f - f \circ \delta$

alors $\mathrm{Hom}_F(M,N)$ devient un espace vectoriel différentiel sur $\mathcal{G}$.

En particulier, prenons $M = N = \mathcal{G}$ et considérons D élément de $\mathrm{Der}_F(\mathcal{G})$ ($\mathrm{Der}_F(\mathcal{G})$ étant un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_F(\mathcal{G}, \mathcal{G})$) .

Alors , si δ appartient à Δ , $[\delta, D]$ est un élément de $\mathrm{Der}_F(\mathcal{G})$ et $\mathrm{Der}_F(\mathcal{G})$ est un espace vectoriel différentiel sur $\mathcal{G}$; il en est de même pour $(\mathrm{Der}_F(\mathcal{G}))^*$ et pour η élément de $\mathcal{G}$, δ élément de Δ ,

$$d(\delta(\eta)) = [\delta, d(\eta)]$$

Donc $\Omega_F(\mathcal{G})$ est un sous-espace vectoriel différentiel de $(\mathrm{Der}_F(\mathcal{G}))^*$.

<u>Filtration :</u> Soit $\mathcal{G}$ une extension de corps différentiel de F. Une filtration de $\mathcal{G}$ sur F est une suite croissante $(\mathcal{G}_r)_{r \in Z}$ de sous-corps de $\mathcal{G}$ telle que:

1) Pour tout r élément de Z suffisamment petit $\mathcal{G}_r = F$

2) Si δ appartient à Δ , η appartient à $\mathcal{G}_r$, alors $\delta(\eta) \in \mathcal{G}_{r+1}$

3) $\bigcup_{r \in Z} \mathcal{G}_r = \mathcal{G}$.

D'après la définition ci-dessus, $(\mathcal{G}_r)_{r \in Z}$ n'est pas une filtration de $\mathcal{G}$ considéré comme un F-espace vectoriel différentiel.

La filtration est dite finie si pour tout r élément de Z, $\mathcal{G}_r$ est une extension de F engendrée par un nombre fini d'éléments.

La filtration est dite excellente si elle est finie et bonne.

Soit donnée une filtration de $\mathcal{G}$ sur F, alors $\Omega_F(\mathcal{G})$ est muni d'une filtration naturelle définie par $(\Omega_F(\mathcal{G}))_r$ telle que $(\Omega_F(\mathcal{G}))_r$ soit un $\mathcal{G}$ -espace vectoriel par $d\eta$ avec η élément de $\mathcal{G}_r$.

Il est clair que si la filtration de $\mathfrak{G}$ sur F est finie, bonne ou excellente, alors la filtration de $\Omega_F(\mathfrak{G})$ est aussi finie, bonne ou excellente.
La filtration de $\mathfrak{G}$ sur F est dite séparable si pour tout r élément de Z, $\mathfrak{G}$ est une extension séparable de $\mathfrak{G}_r$.
Nous allons maintenant démontrer le théorème 1 de Kolchin énoncé plus haut, mais que nous allons donner sous une forme améliorée qui ne change rien au théorème 1 compte tenu des conditions de filtration excellente et séparable de l'extension $\mathfrak{G}$ de F.

<u>Théorème 2 :</u> Soient F et $\mathfrak{G}$ deux corps différentiels, avec $\mathfrak{G}$ une extension de F. On suppose donnée une filtration $(\mathfrak{G}_r)_{r \in Z}$ de $\mathfrak{G}$ sur F qui est excellente et séparable. Alors il existe un polynôme w(r) à coefficients rationnels tel que w(r) soit le degré de transcendance de $\mathfrak{G}_r$ sur F.

<u>Démonstration :</u> Des remarques antérieures et de la proposition 5, on a déjà l'existence du polynôme w(r) tel que, pour r suffisamment grand,

$$w(r) = l((\Omega_F(\mathfrak{G}))_r) = \dim_{\mathfrak{G}}(\Omega_F(\mathfrak{G}))_r, \text{ car } (\Omega_F(\mathfrak{G}))_r \text{ est un}$$

sous- $\mathfrak{G}$ - espace vectoriel de $\Omega_F(\mathfrak{G})$ et on a: $l(\Omega_F(\mathfrak{G}))_r = \dim_{\mathfrak{G}}(\Omega_F(\mathfrak{G}))_r$
Il reste donc seulement à montrer que

$$\dim_{\mathfrak{G}}(\Omega_F(\mathfrak{G}))_r = \deg tr_F \, \mathfrak{G}_r \qquad .$$

Soit $(\eta_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ une base de transcendance séparante(*) de $\mathfrak{G}_r$ sur F.

Il est clair que $d\eta_\alpha$ avec α élément de Λ , engendrent $(\Omega_F(\mathfrak{G}))_r$.

Nous allons donc montrer que les $d\eta_\alpha$ pour α élément de Λ sont linéairement indépendants sur $\mathfrak{G}$. Pour α élément de Λ , il y a une dérivation unique D_α de $\mathfrak{G}_r$ sur F telle que $D_\alpha(\eta_\beta) = 0$ pour tout β élément de Λ et $\beta \neq \alpha$ et telle que
$D_\alpha(\eta_\alpha) = 1$ (en fait D_α , pour α élément de Λ , est une dérivation par rapport à η_α).

D'après A. Grothendieck et J. Dieudonné (Eléments de géométrie algébrique, vol. 20, 20-6-3) il existe des dérivations $\overline{D}_\alpha$ de $\mathcal{G}$ telles que pour tout α élément de Λ, la restriction de $\overline{D}_\alpha$ à $\mathcal{G}_r$ coincide avec D_α. Soit maintenant λ_α élément de $\mathcal{G}$ pour α appartenant à Λ avec seulement un nombre fini de λ_α non nuls et tel que $\sum_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha d\eta_\alpha = 0$,

alors $\sum \lambda_\alpha d\eta_\alpha(\overline{D}_\beta) = 0$ pour tout β élément de Λ. Mais

$\lambda_\alpha \overline{D}_\beta(\eta_\alpha) = \lambda_\alpha d\eta_\alpha(\overline{D}_\beta)$ pour $\alpha = \beta$, $\lambda_\beta \overline{D}_\beta(\eta_\beta) = \lambda_\beta D_\beta(\eta_\beta) = \lambda_\beta$,

et pour $\alpha \neq \beta$, $\lambda_\alpha \overline{D}_\beta(\eta_\alpha) = 0$.

Donc $\sum \lambda_\alpha d\eta_\alpha(\overline{D}_\beta) = 0$ implique que $\lambda_\beta = 0$ pour tout β élément de Λ.

Il en résulte que les $d\eta_\alpha$ sont linéairement indépendants sur $\mathcal{G}$.

D'où $\dim_{\mathcal{G}} (\Omega_F(\mathcal{G}))_r = \deg tr_F \mathcal{G}_r$. Ce qui montre que

$$w(r) = \deg tr_F \mathcal{G}_r .$$

Le théorème 1 se trouve ainsi démontré en posant:

$$\eta_\alpha = \theta s_\alpha \quad \text{avec } \theta \text{ élément de } \Theta(r) \text{ ; ce qui}$$

donne $F((\theta s_\alpha), \theta \in \Theta(r), 1 \leq \alpha \leq n) = F(\eta_1, \dots, \eta_n) = \mathcal{G}_r$.

Si le polynôme $w(r)$ de degré inférieur ou égal à m s'écrit sous la forme

$\sum_{j=1}^{m} a_j \binom{X+j}{j}$, alors a_m s'appelle le degré de transcendance différentiel du corps différentiel $F\langle s_1, \dots, s_n \rangle$ sur F.

(*) Une extension K/k de type fini est séparable s'il existe une famille $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ d'éléments de K, algébriquement libre sur k (i.e $k[x_\alpha]_{\alpha\in\Lambda}$ est isomorphe à l'anneau $k[X_\alpha]_{\alpha\in\Lambda}$) telle que K soit une extension algébrique séparable de $k(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. La famille $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ est alors appelée base de transcendance séparante de K sur k.

§ 5. Comparaison de la topologie de Zariski différentielle avec la topologie de Zariski :

Rappelons qu'un sous-ensemble V de U^n est fermé dans la topologie de Zariski si $V = Z(\Sigma)$ avec Σ inclus dans $U[y_1, \dots, y_n]$.

Il est clair que tout sous-ensemble fermé V de U est différentiellement fermé, car $U[y_1, \dots, y_n]$ est inclus dans $U\{y_1, \dots, y_n\}$, donc Σ contenu dans $U[y_1, \dots, y_n]$ implique que Σ est inclus dans $U\{y_1, \dots, y_n\}$.

Proposition 6 : Soit Σ un sous-ensemble de $U[y_1, \dots, y_n]$ et soit V un sous-ensemble de U^n, alors :

(1) (Σ) est l'idéal de définition de V dans $U[y_1, \dots, y_n]$ si et seulement si $\{\Sigma\} = I(V)$.

(2) (Σ) est un idéal premier dans $U[y_1, \dots, y_n]$ si et seulement si $\{\Sigma\}$ est un idéal différentiel premier dans $U\{y_1, \dots, y_n\}$.

(KOLCHIN)

§ 6. Ensemble caractéristique d'un idéal différentiel premier :

Soit A un polynôme de $F\{y_1, \dots, y_n\}$, A n'appartenant pas à F.
On appelle classe de A le plus grand entier p tel que $y_p^{(j)}$ est dans un terme de A. Si A appartient à F, on dit que A est de classe zéro.
Si y_i apparaît effectivement dans A, par l'ordre de A par rapport à y_i on entend le plus grand entier j tel que $y_i^{(j)}$ apparaît effectivement dans A.

Soient A_1 et A_2 deux polynômes différentiels. Supposons que y_p apparaît effectivement dans A_1 et A_2 ; si A_2 est d'ordre plus grand que A_1 en y_p A_2 sera dit de rang plus grand que A_1 en y_p. Si A_1 et A_2 sont de même ordre , soit q, en y_p et si A_2 de degré plus grand que A_1 en $y_p^{(q)}$, alors A_2 sera dit aussi de rang plus grand que A_1 en y_p.
Finalement, A_2 sera dit de rang plus grand que A_1 en y_p si A_2 contient y_p et A_1 ne contient pas y_p.

Si A_2 est de classe plus grande que A_1, A_2 sera dit de rang plus grand que A_1.

Si A_1 est de classe p strictement positif, A_2 sera dit réduit par rapport à A_1 si A_2 est de rang plus petit que A_1 en y_p.

Un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $F\{y_1, \ldots, y_n\}$ est dit autoréduit si aucun élément de $\mathcal{A}$ n'appartient à F et chaque élément de $\mathcal{A}$ est réduit par rapport à tous les autres.

Soient $A_1, \ldots, A_r$ respectivement $B_1, \ldots, B_s$ les éléments d'un ensemble autoréduit $\mathcal{A}$ respectivement $\mathcal{B}$.

1) L'ensemble $\mathcal{A}$ est dit de rang plus grand que le rang de $\mathcal{B}$ s'il existe un entier naturel k non nul avec k inférieur ou égal à r et k inférieur ou égal à s tel que :

$$\text{rang } A_i = \text{rang } B_i \quad (1 \leq i < k) \text{ et rang } A_k \text{ supérieur au rang } B_k$$

ou si s est plus grand que r et

$$\text{rang } A_i = \text{rang} B_i \quad (1 \leq i \leq r).$$

(2) Si $r = s$ et rang A_i = rang B_i $(1 \leq i \leq r)$, alors on dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont le même rang.

<u>Remarques 4 :</u>

(1) Dans tout ensemble non vide des sous-ensembles autoréduits de $F\{y_1, \ldots, y_n\}$ il existe un sous-ensemble autoréduit de rang plus petit.

(2) Si $\wp$ est un idéal différentiel de $F\{y_1, \ldots, y_n\}$, il existe un sous-ensemble autoréduit $\mathcal{A}$ de $\wp$ tel que $S_A \notin \wp$ $(A \in \mathcal{A})$; par exemple l'ensemble vide. Un tel ensemble autoréduit de rang plus petit est appelé ensemble caractéristique de $\wp$ (relativement à un rangement donné).

(3) Tout ensemble autoréduit est fini.

Lemme 2 : Soit $\mathcal{A}$ un en ensemble caractéristique d'un idéal différentiel $\wp$ de $R\{y_1,\ldots,y_n\}$. Alors $D_A \notin \wp$ ($A \in \mathcal{A}$) et ,pour tout P élément de $\wp$ n'appartenant pas à R et réduit par rapport à $\mathcal{A}$,

S_P appartient à $\wp$.

Démonstration : Soit P élément de $\wp$ avec P n'appartenant pas à R, et supposons que P soit réduit par rapport à A ($A \in \mathcal{A}$). Alors P et les éléments A de $\mathcal{A}$ pour lesquels U_A est inférieur à U_P , forment un ensemble autoréduit plus petit que $\mathcal{A}$. Il en résulte que S_P appartient à $\wp$.

Maintenant, si pour A quelconque élément de $\mathcal{A}$, on avait $D_A \in \wp$,alors

$A - D_A U_A^d$ avec $\deg_{U_A} A = d$ serait un élément de de $\wp$

réduit par rapport à A et ou bien avec dominant U_A ou bien

indépendant de U_A . En d'autres termes, le polynôme différentiel

$$\frac{(A - D_A U_A)}{U_A} = S_A - d\, D_A\, U_A^{d-1} \text{ serait un élément de } \wp ,$$

donc S_A aussi ; ce qui contredit le fait que S_A n'est pas élément de $\wp$.

Donc D_A n'appartient pas à $\wp$.

Soit A élément de $U\{y_1,\ldots,y_n\}$, avec A n'appartenant pas à U; on note U_A (resp. D_A , resp. S_A) le dominant (resp. coefficient dominant resp. séparant) de A. Si $\mathcal{A}$ est un ensemble de tels polynômes différentiels , on pose :

$$H_{\mathcal{A}} = \prod_{A \in \mathcal{A}} D_A S_A$$

$\mathcal{A}$ est dit cohérent si, quels que soient A , A' éléments de $\mathcal{A}$ et v une dérivée commune à U_A et $U_{A'}$ avec $v = \theta\, U_A = \theta'\, U_{A'}$, alors

$$S_{A'}\,\theta A - S_A\,\theta' A' \text{ appartient à } (\mathcal{A}_v) : H_{\mathcal{A}}^{\infty}$$

où $\mathcal{A}_v = \left\{ \theta'' A'' \,/\, A'' \in \mathcal{A},\ \theta'' \in \Theta \text{ et } \theta'' U_{A''} < v \right\}$

<u>Remarque 5 :</u> Soit R un anneau et soient I un idéal de R et Σ un sous-ensemble de R. Alors $I : \Sigma = \left\{ x \in R \,/\, xs \in I, \text{pour tout } s \in \Sigma \right\}$ est un idéal de R. Lorsque Σ est formé d'un seul élément s, on écrit $I : s$ pour $I : \Sigma$. L'union $\bigcup_{n \in N} I :: s^n$ notée par $I : s^{\infty}$ est un idéal de R.

<u>Critère de Rosenfeld :</u> Si $\mathcal{A}$ est un ensemble caractéristique d'un idéal différentiel premier $\wp$ de $U\{y_1, \ldots, y_n\}$, alors :

$$\wp = [\mathcal{A}] : H_{\mathcal{A}}^{\infty}, \quad \mathcal{A} \text{ est cohérent et } (\mathcal{A}) : H_{\mathcal{A}}^{\infty} \text{ est un}$$

idéal premier ne contenant pas un élément non nul réduit par rapport à $\mathcal{A}$. Réciproquement, si $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble autoréduit cohérent de $U\{y_1, \ldots, y_n\}$ tel que $(\mathcal{A}) : H_{\mathcal{A}}^{\infty}$ soit un idéal premier et ne contenant pas un élément non nul réduit par rapport à $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ est un ensemble caractéristique d'un idéal différentiel premier de $U\{y_1, \ldots, y_n\}$.

<u>Proposition 7 :</u> Soit V un sous-ensemble différentiellement fermé de U^n, irréductible et soit $\mathfrak{A}$ son idéal différentiel de définition. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble caractéristique de $\mathfrak{A}$ par rapport à un rangement qui ordonne les dérivées $\delta_1^{c_1} \ldots \delta_m^{c_m} y_j$ lexicographiquement par rapport à $\left(\sum_{1 \le \lambda \le m} c_\lambda, j, c_m, \ldots, c_1\right)$. Soit $\mathcal{A}_0$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{A}$ qui sont d'ordre zéro. Alors

$$[\mathcal{A}_0] : H_{\mathcal{A}_0}^{\infty} \text{ est l'idéal différentiel de définition de } \overline{V}.$$

<u>Démonstration :</u> Il est clair que $\mathcal{A}_0$ est un sous-ensemble autoréduit de l'idéal différentiel premier $I(\overline{V})$ et $\mathcal{A}_0$ a la propriété que pour tout grand A élément de $\mathcal{A}_0$, $S_A \notin I(\overline{V})$, car $I(\overline{V}) = \left\{ \mathfrak{A} \cap U[y_1, \ldots, y_n] \right\}$.

On va donc montrer que $\mathcal{A}_0$ est la plus petite chaîne de $I(\bar{V})$ c'est-à-dire est un ensemble caractéristique de $I(\bar{V})$.

Soit $\mathcal{B}$ inclus dans $I(\bar{V}) \cap U\{y_1, \ldots, y_n\}$ un ensemble caractéristique de $I(\bar{V})$.

On va montrer que le rang de $\mathcal{A}_0$ est égal au rang de $\mathcal{B}$.

Soient $A_1, \ldots, A_r$ et $B_1, \ldots, B_s$ les éléments de $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{B}$ respectivement, rangés dans un ordre croissant. S'il existe k élément de N tel que $k \leq r$ et $k \leq s$ et rangA_i = rang B_i $(1 \leq i \leq k)$ et rang $A_k \leq$ rang B_k, alors, puisque tous les éléments de $\mathcal{B}$ sont d'ordre 0, le rang de $\mathcal{B}$ est plus petit que le rang de l'ensemble caractéristique $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{A}$; ce qui est impossible. Par conséquent, puisque $\mathcal{B}$ est un ensemble caractéristique de $I(\bar{V})$, il en résulte que s supérieur ou égal à r et rang A_i = rang B_i $(1 \leq i \leq r)$.

Si $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$, alors, puisque $\mathcal{A}$ est un ensemble caractéristique de $\mathfrak{A}$, on en déduit que r égal à s.

Si $\mathcal{A}_0 \neq \mathcal{A}$, on range les éléments de $\mathcal{A}$ dans un ordre croissant.

Si s est strictement plus grand que r, alors, puisque l'ordre de B_{r+1} est zéro, le rang de B_{r+1} est plus petit que le rang de A_{r+1}.

Par conséquent, $\mathcal{B}$ est de rang plus petit que $\mathcal{A}$. Comme ceci est impossible on a r = s et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}_0$ ont le même rang .

Il en résulte que $\mathcal{A}_0$ est un ensemble caractéristique de $I(\bar{V})$. D'où d'après le critère de Rosenfeld, $I(\bar{V}) = [\mathcal{A}_0] : H^{\infty}_{\mathcal{A}_0}$.

CHAPITRE II : FONCTIONS RATIONNELLES DIFFERENTIELLES

Dans ce chapitre, on va montrer que l'anneau des fonctions rationnelles différentielles partout définies sur une variété algébrique différentielle est plus gros que l'anneau des coordonnées différentielles.
Ce résultat contraste avec la situation en géométrie algébrique où l'anneau des fonctions rationnelles partout définies est égal à l'anneau des coordonnées.

Rappels :

Soit R un anneau différentiel. On dit que R est un anneau différentiel local s'il n'a qu'un seul idéal différentiel maximal et qui est un idéal différentiel de type fini.
Soit F un corps différentiel quelconque et soit R une algèbre différentielle de type fini sur F. Supposons $R = F\{s_1, \dots, s_n\}$.
Soit

$$\mathfrak{A} = \{ f \in F\{y_1, \dots, y_n\} \ / \ f(s_1, \dots, s_n) = 0 \} ,$$

$\mathfrak{A}$ est un idéal différentiel, R est différentiellement isomorphe à $F\{y_1, \dots, y_n\} / \mathfrak{A}$.

Soit P un idéal différentiel premier de R et soit Σ la partie multiplicative R - P. Alors $\Sigma^{-1} R$ est un anneau local noté R_P appelé la localisation de R en P.

§ 1. Anneau des coordonnées différentielles et anneau des fonctions rationnelles différentielles ;

Soit V un sous-ensemble de U^n différentiellement fermé.
On a un isomorphisme canonique de

$$U\{y_1, \dots, y_n\} \quad \text{dans} \quad U\{y_1, \dots, y_n\} / I(V)$$

qui à y_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ associe $\bar{y}_j$.
L'anneau différentiel $U\{y_1, \dots, y_n\} / I(V) = U\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n\}$ noté

$U\{V\}$, s'appelle l'anneau des coordonnées différentielles de V. Les éléments de $U\{V\}$ sont appelés fonctions polynômes différentielles sur V.

On note $U\langle V\rangle$ l'anneau différentiel des quotients de $U\{V\}$ et on l'appelle l'anneau différentiel des fonctions rationnelles différentielles sur V.
En d'autres termes, $U\langle V\rangle$ est l'anneau différentiel des fonctions de $U\{V\}$ à dénominateurs dans l'ensemble des fonctions polynômes sur V qui ne sont identiquement nulles sur aucune composante de V.
$U\langle V\rangle$ est un corps si et seulement si V est irréductible.

Soient $V_1, \ldots\ldots, V_q$ les composantes de V; on a:

$$U\langle V\rangle \simeq \prod_{1\leq i\leq q} U\langle V_i\rangle$$

Soit F un corps différentiel de définition de V; une fonction rationnelle différentielle f élément de $U\langle V\rangle$ est dite définie sur F si elle appartient à $F\langle V\rangle$. Il est clair que $F\langle V\rangle \cap U\{V\}$ est isomorphe à

$$F\{\bar{y}_1, \ldots\ldots, \bar{y}_n\} = F\{V\}$$

Si V est irréductible et si s est un poit différentiellement générique pour V sur F, il y a un F- isomorphisme différentiel

$$F\langle V\rangle \xrightarrow{\sim} F\langle s\rangle$$

$$\bar{y}_j \longmapsto s_j$$

Soit s élément de V et soit $\wp_s$ l'idéal différentiel de définition de s dans $U\{V\}$ c'est-à-dire $\wp_s = \{ f \in U\{V\} \;/\; f(s) = 0 \}$.

On note $\mathcal{O}_s$ la localisation de $U\{V\}$ en $\wp_s$, et on l'appelle l'anneau local de s sur V.

Soit f élément de $U\langle V\rangle$,on dit que f est défini en s s'il existe P et Q dans $U\{y_1, \ldots\ldots\ldots, y_n\}$, avec $Q(s) \neq 0$ tels que

$$f = \frac{P(\bar{y}, \ldots, \bar{y})}{Q(\bar{y}_1, \ldots\ldots, \bar{y}_n)}$$

Dans ce cas

$$f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$ est appelé la valeur de f en s.

Cette valeur est indépendante du choix de P et Q, mais dépend de s.
Si f est défini en s, alors $F\langle f(s)\rangle$ est inclus dans $F\langle s\rangle$.
L'ensemble des éléments de $U\langle V\rangle$ qui sont définis en s est un anneau différentiel contenant $U\{V\}$ et est contenu dans $U\langle V\rangle$; on le note $U_s\langle V\rangle$.
Soit f élément de $U\langle V\rangle$ (où, si V est différentiellement F - fermé soit f élément de $F\langle V\rangle$). L'ensemble

$$\{ s \in V \ / \ f \text{ est défini en } s \}$$

est un sous-ensemble différentiellement ouvert de V (resp. différentiellement F-ouvert); appelé le domaine de f et noté domf.

Remarque 6 : Soit t un élément de domf. Si s appartient à V tel que

$$s \xrightarrow[F]{\hspace{2cm}} t$$

alors s appartient à domf .
En résulte que domf contient tous les points différentiellement génériques pour les composantes de V sur n'importe quel corps de définition des composantes de V et de f, et en conséquence , que domf est différentiellement dense dans V (d'après ch. I, proposition 4)

Soit W un sous-ensemble différentiellement fermé et irréductible de V.
Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal différentiel des fonctions polynômes sur V qui s'annulent sur W.

On note $\mathcal{O}_{W,V}$ la localisation de $U\{V\}$ en $\mathfrak{p}$, appelée l'anneau local de W sur V.
Soit f élément de $U\langle V\rangle$. On dit que f est partout définie sur V si pour tout s élément de V, s est élément de domf, c'est-à-dire V = domf .
Si H est l'ensemble des fonctions rationnelles différentielles partout définies sur V, alors H est un sous-anneau différentiel de $U\langle V\rangle$ contenant $U\{V\}$.
On va montrer que H contient strictement $U\{V\}$,ce qui contraste avec le résultat bien connu en géométrie algébrique que l'anneau des fonctions rationnelles partout définies est égal à l'anneau des coordonnées d'une variété algébrique.
Pour cela, il nous suffira, étant donné le sous-ensemble différentielle fermé V de U^n ,de trouver une fonction rationnelle différentielle partout

définie sur V qui n'est pas un élément de $U\{V\}$.

Supposons que Δ ne contient qu'une seulement dérivation δ et soit le polynôme différentiel $Q = \delta y - y$ un élément de $U\{y\}$.

Posons
$$V = Z(\delta y - y) = Z(y' - y) \quad \text{où} \quad \delta y = y' \ .$$

Alors
$$V = \{ae^x / a \in K\} \qquad \text{avec} \quad \delta x = x' = 1$$

Soit λ un élément de K avec $\lambda \neq 0$ et considérons la fonction rationnelle différentielle
$$f = \frac{1}{y - \lambda} \qquad \text{élément de } U\langle V\rangle$$

1°) f est partout définie sur V.

En effet, les éléments de V étant de la forme ae^x, on a :
$$f(0) = \frac{1}{-\lambda} = -\frac{1}{\lambda} \qquad \text{dans le cas } a = 0$$
$$f(ae^x) = \frac{1}{ae^x - \lambda} \qquad ; \text{ supposons } ae^x - \lambda = 0$$

alors $ae^x = \lambda$ et donc $a\ \delta(e^x) = \delta\lambda = 0$; on en déduirait que $e^x = 0$ ce qui est impossible. D'où
$$ae^x - \lambda \neq 0 \ .$$

2°) Il n'existe aucun polynôme différentiel P de $U\{V\}$ tel que $f = P$.

En effet, supposons qu'il existe P élément de $U\{V\}$ tel que :
$$P = \frac{1}{y - \lambda} \quad ; \text{ alors} \quad P.(y - \lambda) = 1$$

On a:
$$\delta(P.(y - \lambda)) = \delta P.(y - \lambda) + P.\ \delta y = 0$$
$$\delta P.(y - \lambda) = -P.\ \delta y$$
$$\overset{(*)}{\mathrm{ord}}(\delta P.(y - \ )) = \mathrm{ord}(-P.\ \delta y) = \mathrm{ord}(P.\ \delta y)\ .$$

Mais $\mathrm{ord}(\delta P.(y - \lambda)) = \mathrm{ord}\, P + 1$ et
$$\mathrm{ord}(P.\ \delta y) = \sup(\mathrm{ord}\, P, \mathrm{ord}\, \delta y) = \sup(\mathrm{ord}\, P, 1), \text{ car}$$
$\mathrm{ord}\ \delta y = 1$

Donc, on doit avoir $\operatorname{ord} P + 1 = \sup(\operatorname{ord} P, 1)$; ceci n'est possible que si $\operatorname{ord} P = 0$. Ce qui signifie que si P existe, il ne contient aucune dérivée de y.

On va raisonner maintenant sur les degrés :

On a $\qquad P.(y - \lambda) = 1$ pour tout y.

donc $\qquad \deg(P.(y - \lambda)) = \deg 1 = 0$

or $\qquad \deg(P.(y - \lambda)) = \deg P + 1 \quad \Longrightarrow \deg P = -1$

impossible, car $\deg P$ est positif ou nul.

Il en résulte qu'il n'existe aucun polynôme P élément de $U\{V\}$ tel que

P $\qquad P = f = \dfrac{1}{y - \lambda}$, c'est-à-dire f n'appartient pas à $U\{V\}$.

D'où $\qquad U\{V\}$ est strictement contenu dans H.

§ 2 . Applications rationnelles différentielles :

Définitions : Soient V un sous-ensemble de U^n différentiellement fermé et W un sous-ensemble de U^p différentiellement fermé.

On appelle application rationnelle différentielle de V dans W, une famille $\alpha = (f_1, \ldots, f_p)$ d'éléments f_i appartenant à $U\langle V\rangle$ telle que $(f_1(s), \ldots, f_p(s))$ soit un élément de W , en tout point s appartenant à V où les $f_1, \ldots, f_p$ sont définies.

Exemple : Toute fonction rationnelle différentielle sur V est une application rationnelle différentielle de V dans U.

On dit que α est définie en s élément de V, si les $f_1, \ldots, f_p$ sont toutes définies en s, et on dit que α est définie sur F, si V, W, $f_1, \ldots, f_p$ sont tous définis sur F.

α est dite une application polynôme différentielle si les $f_1, \ldots, f_p$ sont éléments de $U\{V\}$.

On appelle domaine de définition de α et on note dom α, l'ensemble des s éléments de V tel que α est définie en s. Cet ensemble est un sous-ensemble de V différentiellement ouvert et différentiellement dense dans V.

Si α est définie sur F, dom α est différentiellement F-ouvert et différentiellement F- dense dans V.

<u>Remarque 7 :</u> Soit t élément de dom α (α est définie sur F), alors $F\langle \alpha(t) \rangle$ est inclus dans $F\langle t \rangle$.

<u>Proposition 8 :</u> Si s est un élément de V tel que $s \xrightarrow[F]{} t$, alors s appartient à dom α et $\alpha(s) \longrightarrow \alpha(t)$.

<u>Démonstration :</u> Si t appartient à dom α et s appartient à V tels que $s \xrightarrow[F]{} t$, on a $\alpha(t) = (f_1(t), \ldots, f_p(t))$.

Supposons que α ne soit pas définie en s ; alors il existe f_i $(i = 1, \ldots, p)$ telle que f_i non définie en s.

Comme s est un point générique de V sur F, on a :

$I_F(s) = I_F(V)$. En écrivant $f_i = \dfrac{P_i}{q_i}$, avec P_i et q_i sont éléments de $F\{V\}$, on a $q_i(t) \neq 0$. Comme f_i est non défini en s, $q_i(t) = 0$ implique que q_i appartient à $I_F(s) = I_F(V)$; donc $q_i(t) = 0$ puisque t est élément de V ; contradiction.

Reste à montrer que $\alpha(s) \xrightarrow[F]{} \alpha(t)$, c'est-à-dire, quel que soit P élément de $F\{W\}$ tel que $P(\alpha(s)) = 0$, alors $P(\alpha(t)) = 0$ où t appartient à dom α et $s \xrightarrow[F]{} t$.

On a $\alpha(s) = (f_1(s),\ldots,f_p(s))$; soit P élément de $F\{W\}$ tel que $P(\alpha(s)) = 0$, alors $P(\alpha(s)) = P(f_1(s),\ldots,f_p(s))$

$$= (Pof_1(s),\ldots,Pof_p(s)) = 0 .$$

Ce qui équivaut à dire que $Pof_i(s) = 0$ pour tout $i = 1,\ldots,p$; or $f_i = \frac{P_i}{q_i}$ avec P_i et q_i éléments de $F\{V\}$ et $q_i(s) \neq 0$; donc $Pof_i(s) = 0$ implique $PoP_i(s) = 0$ implique PoP_i appartient à $I_F(s) = I_F(V)$ implique $PoP_i(t) = 0$ pour tout $i = 1,\ldots,p$. Il en résulte que $Po\frac{P_i(t)}{q_i(t)} = 0$ car $q_i(t)$ est différent de zéro (t élément de dom α) pour tout $i = 1,\ldots,p$.

Donc $Pof_i(t) = 0$ pour tout $i = 1,\ldots,p$. Ce qui implique que $(Po\,f_1(t),\ldots,Po\,f_p(t)) = 0$ implique $P(f_1(t),\ldots f_p(t)) = 0$ implique $P(\alpha(t)) = 0$. Donc $P(\alpha(s)) = 0$ implique que $P(\alpha(t)) = 0$.

D'où $\alpha(s) \xrightarrow[F]{} \alpha(t)$.

<u>Remarques 8 :</u> Soient V inclus dans U^n, W inclus dans U^p différentiellement F- fermés et α une application rationnelle différentielle de V dans W définie sur F. Alors :

1) (V) est différentiellement F- fermé ; si V est irréductible il en

est de même pour $\overline{\alpha(V)}^{d}$, et si s est différentiellement générique pour V sur F, $\alpha(s)$ est différentiellement générique pour $\overline{\alpha(V)}^{d}$ sur F. De plus $\alpha(V)$ contient un ensemble différentiellement ouvert et différentiellement dense dans $\overline{\alpha(V)}^{d}$.

2) α est continue dans la F- topologie différentielle.

Soit V un sous-ensemble différentiellement fermé de U^n tel que V irréductible, alors $\overline{\alpha(V)}^{d}$ la clôture différentielle de $\alpha(V)$ est un sous-ensemble irréductible de W définie sur n'importe quel corps différentiel de définition de V, W et α.

Si $\overline{\alpha(V)}^{d} = W$, alors on dit que α est dominante ou différentiellement génériquement surjective.

Soit α dominante ; alors α induit un homorphisme différentiel d'anneaux différentiels,(*)

$$\alpha^{o} : U\langle W\rangle \longrightarrow U\langle V\rangle \text{ défini par}$$

$$\alpha^{o}(f) = f o \alpha \text{ , pour tout f appartenant}$$

à $U\langle W\rangle$.

De même , si α est une application polynôme différentielle (non nécessairement dominante), alors α induit un homomorphisme différentiel,

$$\alpha^{o}: U\{W\} \longrightarrow U\{V\}$$

$$\alpha^{o}(P) = P o \alpha$$ quel que soit P appartenant à $U\{W\}$. Si α est surjective, alors α^{o} est injective.

Soit $\alpha : V \longrightarrow W$ telle que α soit dominante. On dit que α est une application birationnelle différentielle de V dans W s'il existe une application rationnelle différentielle dominante β de W dans V telle que $\alpha o \beta = Id_W$ et $\beta o \alpha = Id_V$. Alors α^{o} et β^{o} sont inverses l'une de l'autre.

Si α et β sont partout définies, alors on dit que α est biholomorphe.

§ 3 : Produit d'ensembles différentiellement fermés :

Si F et $\mathcal{G}$ sont deux corps différentiels ($F \subset \mathcal{G}$) . On dit que $\mathcal{G}$ est régulier sur F si F est algébriquement fermé dans $\mathcal{G}$, c'est-à-dire tout élément de $\mathcal{G}$ algébrique sur F est dans F.

Soit s élément de U^n ; on dit que s est régulier sur F si $F\langle s\rangle$ est régulier sur F.

Soient s élément de U^n et t élément U^p ; on dit que s et t sont indépendants sur F, si les corps différentiels $F\langle s\rangle$ et $F\langle t\rangle$ sont linéairement disjoints sur F, c'est-à-dire que s'il existe un ensemble fini d'éléments de $F\langle s\rangle$ linéairement indépendants sur F, ils le sont aussi sur $F\langle t\rangle$ et réciproquement .

On dit que s et t sont quasi-indépendants si $F\langle s\rangle$ et $F\langle t\rangle$ sont algébriquement disjoints , c'est-à-dire que tout ensemble fini d'éléments de $F\langle s\rangle$ algébriquement indépendants sur F, sont aussi algébriquement indépendants sur $F\langle t\rangle$.

Soient maintenant V inclus dans U^n et W inclus dans U^p deux sous-ensembles différentiellement fermés. Soit $\mathfrak{A}$ l'idéal différentiel engendré par I(V) U I(W) dans $U\{y_1,\ldots\ldots,y_n,z_1,\ldots\ldots,z_p\}$ où I(V) est inclus dans $U\{y_1,\ldots\ldots,y_n\}$ et I(W) est inclus dans $U\{z_1,\ldots\ldots,z_p\}$. Alors V x W est un sous-ensemble différentiellement fermé de U^{n+p} avec son idéal différentiel de définition $\mathfrak{A}$. V x W est différentiellement F - fermé si V et W le sont.

<u>Proposition 9 :</u> $U\{V \times W\}$ et $U\{V\} \underset{U}{\otimes} U\{W\}$ sont isomorphes.

<u>Démonstration</u> : On a $U\{V \times W\} = U\{y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p\}/\mathfrak{a}$, il existe un homomorphisme canonique surjectif

$$\varphi : U\{V\} \underset{U}{\otimes} U\{W\} \longrightarrow U\{V \times W\} \qquad \text{tel que}$$

pour tout (y, z) appartenant à $V \times W$, on a :

$$\varphi(f \otimes g)(y,z) = f(y)\, g(z)$$

Comme φ est surjectif, on va montrer que φ est injectif.

Soit $h = \sum_{i=r}^{r} f_i \otimes g_i \neq 0$ un élément de Ker φ, et supposons

r le plus petit entier tel que h puisse s'exprimer comme somme de termes $f_i \otimes g_i \neq 0$. Comme les g_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ ne sont pas toutes nulles, il existe z appartenant à W tel que $g_i(z)$ soit élément de U. et $g_i(z) \neq 0$. Or par définition, pour tout y élément de V, on a $\sum f_i(y)\, g_i(z) = 0$, donc les f_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ sont linéairement dépendants sur U dans $U\{V\}$.

Supposons par exemple

$$f_1 = \sum_{j=2}^{r} a_j f_j \qquad (a_j \in U) \; ;$$

alors,

$$\begin{aligned} h &= f_1 \otimes g_1 + \sum_{j=2}^{r} f_j \otimes g_j \\ &= \sum_{j=2}^{r} a_j f_j \otimes g_1 + \sum_{j=2}^{r} f_j \otimes g_j \\ &= \sum_{j=2}^{r} f_j \otimes (g_j + a_j g_1) \end{aligned}$$

Ceci montre que h peut s'exprimer comme somme de moins de r termes non nuls; ce qui contredit le fait que r est le plus entier tel que

$$h = \sum_{i=1}^{r} f_i \otimes g_i \quad \text{avec } f_i \otimes g_i \quad \text{différent de } 0$$

On en conclut que $h = 0$; d'où φ est injectif et $U\{V \times W\}$ est isomorphe à $U\{V\} \underset{U}{\otimes} U\{W\}$.

Remarques 9 : Comme en géométrie algébrique, on a aussi :

1) Si V et W sont irréductibles, alors, $V \times W$ est irréductible et

$$w_{V \times W} = w_V + w_W \ .$$

2) Si s est différentiellement générique pour V sur F et t est différentiellement générique pour W sur F, alors (s,t) est différentiellement générique pour $V \times W$ sur F.

3) Soient $pr_1 : V \times W \longrightarrow V$

et $pr_2 : V \times W \longrightarrow W$

les projections canoniques et soient

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

et $\beta : U \longrightarrow W$ deux applications rationnells dif- où $\mathcal{U}$ est un sous-ensemble différentiellement fermé de U^{p}. Alors il existe une application rationnelle différentielle unique

$$\gamma : \mathcal{U} \longrightarrow V \times W \quad \text{définie par}$$

$\gamma(z) = (\alpha(z), \beta(z))$ telle que $\alpha = pr_1 \circ \gamma$ et

$$\beta = pr_2 \circ \gamma \ .$$

4) Soit $\alpha : V \longrightarrow W$ une application rationnelle différentielle. On appelle graphe de α l'ensemble Γ des couples $(s, \alpha(s))$ avec s élément de dom α.

La diagonale $Diag_V$ inclus dans $V \times V$ est différentiellement fermé; de même que Γ est un sous-ensemble différentiellement fermé de $V \times W$.

CHAPITRE III : GROUPES ALGEBRIQUES DIFFERENTIELS

Dans ce chapitre, nous montrerons qu'il existe des groupes algébriques différentiels dont les lois de groupe ne sont pas des fonctions polynômes différentielles.

§ 1 . Notions fondamentales sur les groupes algébriques différentiels :

Définitions : Soit G un sous-ensemble différentiellement fermé de U^n . On dit que G est un groupe algébrique différentiel si G, muni des lois de composition suivantes est un groupe

(id) un élément noté $1 \in G$.

(multiplication) $\mu : G \times G \longrightarrow G$, $(s,t) \longmapsto st$

(inverse) $i : G \longrightarrow G$, $s \longmapsto s^{-1}$

où μ et i sont des applications rationnelles différentielles partout définies. Si G, comme sous-ensemble différentiellement fermé de U^n, est tel que μ et i sont toutes définies sur F, alors on dit que le groupe algébrique différentiel G est défini sur F.

Remarque 10 : Les applications :

$\lambda_s : G \longrightarrow G$, $t \longmapsto st$ (translation à gauche)

$\rho : G \longrightarrow G$, $t \longmapsto ts^{-1}$ (translation à droite)

$i : G \longrightarrow G$, $s \longmapsto s^{-1}$ (inverse)

sont des applications différentielles birationnelles biholomorphes de G dans G qui envoient une composante de G sur une autre composante de G. Il en résulte que les composantes de G ont la même dimension différentielle.

<u>Proposition 10 :</u> Soit G un groupe algébrique différentiel.

(a) Il y a une seule composante de G qui contient l'identité 1, notée G°.

(b) Les composantes de G sont les classes de G°.

(c) Les composantes de G sont deux à deux disjointes.

<u>Démonstration :</u>

(a) Soient G^i et G^j deux composantes de G telles que 1 appartient à $G^i \quad G^j$.
Soit $\mathcal{G}$ le corps différentiel de définition pour G^i et G^j, et soient s^i et s^j deux points génériques différentiels indépendants pour G^i et G^j sur $\mathcal{G}$.
Alors (s^i, s^j) est différentiellement générique pour $G^i x G^j$ sur $\mathcal{G}$.
Soit V inclus dans G l'ensemble des spécialisations de $s^i s^j$. V est un sous-ensemble de G différentiellement fermé et irréductible. Comme 1 appartient à $G^i \cap G^j$, on a, pour tous x^i élément de G^i et x^j élément de G^j,

$$s^i s^j \xrightarrow[\mathcal{G}]{\qquad} x^i.1 \qquad \text{et} \qquad s^i s^j \xrightarrow[\mathcal{G}]{\qquad} x^j.1$$

c'est-à-dire,

$$s^i s^j \xrightarrow[\mathcal{G}]{\qquad} x^i \qquad \text{et} \qquad s^i s^j \xrightarrow[\mathcal{G}]{\qquad} x^j$$

Ce qui implique que G^i est inclus dans V et G^j inclus dans V. Comme V est différentiellement fermé et irréductible, nécessairement

$$V = G^i = G^j .$$

Il en résulte que G° est la seule composante contenant 1.

(b) Soit G^i une composante quelconque de G différente de G°.
Soit s^i élément de G^i; on a $(s^i)^{-1} G^i = \lambda_{(s^i)^{-1}}(G^i)$. Comme $\lambda_{(s^i)^{-1}}$ est une applications différentielle birationnelle biholomorphe de G dans G qui permute les composantes, alors $(s^i)^{-1} G^i$ est une composante de G.
Or $(s^i)^{-1} G^i$ contient l'identité 1.

Il en résulte que $(s^i)^{-1} G^i = G^o$. Ce qui implique que $G^i = s^i G^o$

(c) Soient G^i et G^j deux composantes de G et soit s un élément de $G^i \cap G^j$. On a $G^i = sG^o$ et $G^j = sG^o$ (d'après b); donc $G^i = sG^o = G^j$. Il en résulte que deux composantes de G qui ont une intersection non vide sont égales .

Proposition 11 : G^o est le seul sous-groupe algébrique différentiel de G, normal, connexe et d'indice fini .

Démonstration : Il est clair que G^o est un sous-groupe algébrique différentiel de G. Car 1 est élément de G^o et pour tout a élément de G^o, a^{-1} appartient à G^o.

En effet: $G^o = aG^o$ (prop. 10 -(b)) et $G^o = a^{-1} G^o$, d'où a^{-1} est élément de G^o.

Pour tous a élément de G^o et b élément de G^o, ab appartient à G^o; en effet : $G^o = bG^o$ et $G^o = aG^o$, donc $G^o = abG^o$. Ce qui implique que ab est élément de G^o.

- G^o est un sous- groupe algébrique différentiel normal de G.

En effet, soit s élément de G, sG^o est une composante de G,

On a $\rho_s^o(sG^o) = sG^os^{-1}$ qui est aussi une composante de G car, ρ_s est une application différentielle birationnelle biholomorphe de G dans G.

D'autre part, comme G^o contient l'identité, sG^os^{-1} contient l'identité.

Donc $sG^os^{-1} = G^o$ (prop. 10-(a)).

Il en résulte que $sG^o = G^os$. Ce qui montre que G^o est normal.

- G^o étant irréductible, ne peut donc s'écrire sous forme de réunion de deux fermés propres disjoints. Il en résulte que G^o est connexe.

- G^o est d'indice fini.

En effet, indice G = Card G/G^o = nombre de classes ; et comme les classes sont les composantes de G, alors Card G/G^o est fini.

- G^o est le seul sous-groupe algébrique différentiel de G vérifiant ces propriétés. En effet, soit H un sous-groupe de G vérifiant ces propriétés. Alors H est différentiellement ouvert et différentiellement fermé dans G. Or 1 appartient à H et H est connexe ; étant donné que les composantes sont deux à deux disjointes, on a nécessairement H inclus dans G^o. en En effet, si H n'est pas tout entier contenu dans G^o, comme G est la réunion des composantes qui sont deux à deux disjointes, soit G^i une autre composante de G telle que

$$G^i \cap H \neq \emptyset \text{ et telle que } H = (H \cap G^o) \cup (H \cap G^i);$$

mais $H \cap G^i$ et $H \cap G^o$ sont des fermés car intersection de deux fermés. D'autre part, $(H \cap G^o) \cap (H \cap G^i) = \emptyset$, H s'écrivant donc comme réunion de deux sous-ensembles propres fermés disjoints. Ce qui contredit le fait que H est connexe. Il en résulte que H est tout entier contenu dans G^o. Par conséquent $H = G^o$; d'où G^o est le seul sous-groupe algébrique différentiel normal connexe d'indice fini de G.

<u>Proposition 12 :</u> G^o est défini sur tout corps différentiel de définition pour G.

<u>Démonstration :</u> Soit F un corps différentiel de définition pour G.

D'abord, montrons que 1 est rationnel sur $F^{(*)}$. Pour cela soient s et t deux éléments de G indépendants sur F.

On a $\lambda_{s^{-1}}(s)$ est rationnel sur $F\langle s\rangle$, car $F\langle\lambda_{s^{-1}}(s)\rangle$ est contenu dans $F\langle s\rangle$ (d'après la remarque 7) ; de même $\lambda_{t^{-1}}(t)$ est rationnel sur $F\langle t\rangle$.

Or $\lambda_{s^{-1}}(s) = \lambda_{t^{-1}}(t) = 1$, donc 1 est rationnel sur $F\langle s\rangle \cap F\langle t\rangle = F$, car $F\langle s\rangle$ et $F\langle t\rangle$ sont linéairement disjoints puisque s et t sont indépendants sur F.

Considérons maintenant un corps de définition $\mathfrak{g}$ pour les composantes de G tel que $\mathfrak{g}$ soit une extension galoisienne finie de F.

Soit $I_{\mathfrak{g}}(G^{o})$ l'idéal de définition de G^{o} sur $\mathfrak{g}$; soit σ un F- automorphisme de $\mathfrak{g}$ (à fortiori un F- automorphisme différentiel).

On a $I_{\mathfrak{g}}(G^{o})^{\sigma} = I_{\mathfrak{g}}(G^{i})$ où G^{i} est une composante de G (σ permute les idéaux de définition pour les composantes de G).

Soit P élément de $I_{\mathfrak{g}}(G^{o})$; P s'écrit sous la forme $\sum a_M M$ où M est un monôme différentiel en les indéterminées $y_1, \dots\dots, y_n$ et les a_M presque tous nuls sauf pour un nombre fini de M.

$$P^{\sigma}(1) = \sum \sigma a_M M(1)$$ et comme

$M(1)$ appartient à F, $\sigma(M(1)) = M(1)$; donc

$$\begin{aligned} P^{\sigma}(1) &= \sum \sigma a_M \, \sigma(M(1)) \\ &= \sigma\left(\sum a_M M(1)\right) \\ &= \sigma(P(1)) = \sigma(0) = 0 \end{aligned}$$

Il en résulte que 1 appartient à G^{i}, car P^{σ} appartient à $I_{\mathfrak{g}}(G^{i}) = I_{\mathfrak{g}}(G^{o})^{\sigma}$;

mais, comme G^{o} est la seule composante de G qui contient 1, cela entraîne que $G^{i} = G^{o}$ et on a $I_{\mathfrak{g}}(G^{o})^{\sigma} = I_{\mathfrak{g}}(G^{o})$.

On en déduit que $I_{\mathcal{G}}(G^o)$ a une base à coefficients dans F. D'où G^o est défini sur le corps différentiel de définition de G.

Proposition 13 : Soit G un groupe algébrique différentiel et soit M un sous-ensemble de G contenant un sous-ensemble différentiellement ouvert et différentiellement dense de G. Alors, tout élément de G est produit de deux éléments de M.

Démonstration : Soit i l'application inverse de G dans G ; comme i est une application différentielle birationnelle biholomorphe et étant dense dans G, i(M) est aussi dense dans G.

Posons $i(M) = M^{-1}$; soit λ_s (s élément de G) la translation à gauche de G dans G. Alors $\lambda_s(M^{-1})$ est dense dans G puisque M l'est.

$\lambda_s(M^{-1})$ a une intersection non vide avec tout ouvert de G. Il en résulte que

$$M \cap \lambda_s(M^{-1}) \neq \emptyset \text{ car M contient un ouvert de G.}$$

Soit alors t élément de $M \cap \lambda_s(M^{-1})$; on a t élément de M et t élément de $\lambda_s(M^{-1})$. Il existe donc t' élément de M tel que

$$st'^{-1} = t, \text{ alors } s = tt' .$$

Ce qui implique que tout élément de G est produit de deux éléments de M.

Corollaire : Si M est un sous-groupe de G, alors M = G.

En effet, on a M inclus dans G. Soit x élément de G; il existe t et t' appartenant à M tels que $x = tt'$. Or, M étant un sous-groupe de G, on a tt' appartenant à M; donc x appartient à M et on a G inclus dans M.

D'où M = G.

Définition : On appelle espace de transformation algébrique différentiel, tout triplet (G, V, α) où G est un groupe algébrique différentiel, V un sous-ensemble de U^n différentiellement fermé et

$$\alpha : G \times V \longrightarrow V$$

une application rationnelle différentielle partout définie, définie par :

$$\alpha(s,x) = sx \quad \text{et telle que}$$

$$1.x = x$$

$$s(tx) = (st)x \quad \text{pour tout x élément de V et}$$

tous s et t éléments de G.

L'espace de transformation algébrique différentiel (G,V,α) est dit défini sur F si G, V et α le sont.

Soient M et N deux sous-ensemble de V. On appelle transporteur,

$$\mathrm{Tran}_G(M,N) = \{s \in G \ / \ sM \subset N\}.$$

$\mathrm{Tran}_G(M,M)$ s'appelle le normalisateur de M dans G noté $N_G(M)$.

Lorsque M est réduit à un seul élément x, le normalisateur de x dans G s'appelle le groupe d'isotropie de x dans G noté G_x.

L'ensemble des éléments de V de la forme sx, avec s élément de G, s'appelle l'orbite de x.

Si V est l'orbite de x, avec x élément de V, l'espace (G,V,α) est dit homogène pour G.

L'ensemble noté $Z_G(M) = \bigcap_{x \in M} G_x$ s'appelle le centralisateur de M dans G.

Remarques 11 : Soient (G,V,α) un espace de transformation algébrique différentiel défini sur F et M, N deux sous-ensembles de V. Alors :

a) $\mathrm{Tran}_G(M,N)$ est inclus dans $\mathrm{Tran}_G(M, N)$, et ils sont égaux si N est différentiellement fermé.

b) Si N est différentiellement fermé, $\mathrm{Tran}_G(M,N)$ est différentiellement fermé. Si M est inclus dans $V \cap F^n$, alors, $\mathrm{Tran}_G(M,N)$ est différentiellement F-fermé.

c) $Z_G(M) = Z_G(M)$ et $N_G(M)$ sont différentiellement fermés ; si M est inclus dans $V \cap F^n$, alors, $Z_G(M)$ et $N_G(M)$ sont différentiellement F-fermés.

§ 2 . Homomorphisme de groupes algébriques différentiels :

Définition : Soient G et G' deux groupes algébriques différentiels. Un homomorphisme de groupes algébriques différentiels de G dans G' est un homomorphisme de groupes $\alpha : G \longrightarrow G'$ qui est une application rationnelle différentielle partout définie.

Proposition 14 : Soient G et G' deux groupes algébriques différentiels et $\alpha : G \longrightarrow G'$ une application rationnelle différentielle qui est définie sur le corps différentiel F de définition des composantes de G et G'. Alors α est un homomorphisme rationnel différentiel si et seulement si $\alpha(st) = \alpha(s)\,\alpha(t)$ où s et t sont des points génériques différentiels pour les composantes de G et indépendants.

Démonstration : Si α est un homomorphisme rationnel différentiel de G dans G', alors, quels que soient s et t éléments de G $\alpha(st) = \alpha(s)\,\alpha(t)$.

Soient maintenant s et t deux points différentiellement génériques indépendants sur F des composantes de G tels que $\alpha(st) = \alpha(s)\ \alpha(t)$.

Il faut montrer que α est partout définie sur G et que quels que soient s et t éléments de G, $\alpha(st) = \alpha(s)\ \alpha(t)$.

Soit s élément de G et soient t et t' deux points différentiellement génériques indépendants de G^o sur $F\langle s\rangle$. IL est clair que s est rationnel sur $F\langle s\rangle$. Alors t et st' sont des points différentiellement génériques indépendants sur $F\langle s\rangle$ pour G^o et sG^o. On a alors :

$$\alpha(st't) = \alpha(st')\ \alpha(t).$$

En spécialisant y en t^{-1} relativement au corps différentiel $F\langle t,t'\rangle$, et comme st^{-1} est aussi un point générique sur $F\langle s\rangle$ de sG^o, alors α est définie en st^{-1}.

Il en résulte que $\alpha(st^{-1})\ \alpha(t')$ est bien défini dans G'. Or $\alpha(st')\ \alpha(t)$ est l'expression de $\alpha(st't)$ considérée comme fonction de t' définie sur $F\langle t,s\rangle$. Ce qui entraîne que α est définie en $t' = t^{-1}$. On en déduit que α est définie en $st^{-1}t = s$. Donc α est partout définie sur G.

Il reste à montrer que , quels que soient s et t élément de G,

$$\alpha(st) = \alpha(s)\ \alpha(t).$$

Considérons la formule qui à (s,t) éléments de GxG associe

$\alpha(s)^{-1}\ \alpha(st)\ \alpha(t)^{-1}$. Cette formule définit une application différentielle rationnelle partout définie de $G \times G$ dans G'.

Si (s,t) est un point générique sur F pour une composante de $G \times G$, alors $\alpha(s)^{-1}\ \alpha(st)\ \alpha(t)^{-1}$ est égal à l'identité 1 de G'.

Or cette relation est conservée pour toute spécialisation . Il en résulte que quels que soient s et t éléments de G, $\alpha(s)^{-1}\ \alpha(st)\ \alpha(t)^{-1} = 1$.
Ce qui donne $\alpha(st) = \alpha(s)\ \alpha(t)$, quels que soient s et t éléments de G.
D'où α est un homomorphisme de groupes algébriques différentiels.

<u>Proposition 15 :</u> Soit $\alpha : G \longrightarrow G'$ un homomorphisme rationnel différentiel de groupes algébriques différentiels.

Alors :

1) Ker α est un sous-groupe algébrique différentiel normal de G défini sur tout corps différentiel F de définition pour G, G' et α .

2) $\alpha(G)$ est un sous-groupe algébrique différentiel de G' qui est aussi défini sur F.

3) $\alpha(G^{o}) = \alpha(G)^{o}$.

<u>Démonstration :</u>

1) Comme α est une application rationnelle différentielle partout définie et comme $\{1\}$ est différentiellement F- fermé alors, Ker $\alpha = \alpha^{-1}\{1\}$ est différentiellement F-fermé (car α est continue dans la F-topologie).
Ker α étant le noyau d'un homomorphisme de groupes est un sous-groupe normal de G qui est donc différentiellement F-fermé.

2) L'image d'un homomorphisme de groupes est un sous-groupe ; donc $\alpha(G)$ est un sous-groupe de G'. Or $\alpha(G)$ contient un sous-ensemble différentiellement ouvert , différentiellement dense dans $\overline{\alpha(G)}^{d}$ qui est un

sous-groupe algébrique différentiel (d'après la remarque 8).

Donc $\alpha(G) = \overline{\alpha(G)}^{d}$ (corollaire de la prop. 13)

3) On a $\alpha(G^{o}) = \overline{\alpha(G^{o})}^{d}$. Donc $\overline{\alpha(G^{o})}^{d}$ est un sous-groupe algébrique différentiel de $\alpha(G)$. Mais $\alpha(G^{o})$ est aussi connexe d'indice fini dans $\alpha(G)$ (prop. 11) .

Il en résulte que $\alpha(G^{o}) = \alpha(G)^{o}$.

Corollaire : Soit $\alpha : G \longrightarrow G'$ un homomorphisme rationnel différentiel de groupes, et soit H un sous-groupe de G.

Alors $\alpha(\overline{H}^{d}) = \overline{\alpha(H)}^{d}$.

Démonstration : Comme $\overline{H}^{d}$ est un sous-groupe algébrique différentiel de G, $\alpha(\overline{H}^{d})$ est un sous-groupe algébrique différentiel de G' contenant $\overline{\alpha(H)}^{d}$.

D'autre part $\alpha^{-1}(\overline{\alpha(H)}^{d})$ est un sous-ensemble différentiellement fermé de G contenant H; donc contient $\overline{H}^{d}$. On a:

$$H \subset \overline{H}^{d} \subset \alpha^{-1}(\overline{\alpha(H)}^{d}) \text{ entraîne } \alpha(\overline{H}^{d}) \subset \overline{\alpha(H)}^{d} .$$

D'où $\alpha(\overline{H}^{d}) = \overline{\alpha(H)}^{d}$.

Remarques 12 :

1) Soit $\alpha : G \longrightarrow G'$ un homomorphisme rationnel différentiel de groupes . Alors α est un isomorphisme si et seulement si α est bijective.

2) Soient $\alpha : G \longrightarrow H$ et $\alpha' : G \longrightarrow H'$

deux homomorphismes rationnels différentiels de groupes tels que α soit surjectif et Ker α inclus dans Ker α'. Alors, il existe un homomorphisme rationnel différentiel unique β de H dans H' tel que

$$\beta \circ \alpha = \alpha' \quad .$$

3) Soient $\alpha : G \longrightarrow H$ et $\alpha' : G \longrightarrow H'$ deux homomorphismes rationnels différentiels surjectifs tels que Ker α = Ker α'. Alors, il existe un unique isomorphisme β de groupes algébriques différentiels de H dans H' tel que $\beta \circ \alpha = \alpha'$.

§ 3 . Les groupes algébriques différentiels dont les lois de composition sont des applications polynômiales différentielles :

Soit G un groupe algébrique différentiel dont les lois de composition μ et i sont des applications polynômiales différentielles.
Alors, en particulier, μ^{o} applique $U\{G\}$ dans $U\{G\} \otimes_U U\{G\}$ qui est égal à $U\{G \times G\}$.

Proposition 16 : Soit G un groupe algébrique différentiel dont la loi de composition μ est une application polynômiale différentielle et soit F un corps différentiel de définition de G.
Soit V contenu dans $U\{G\}$ un espace vectoriel sur U de dimension finie défini sur F, c'est-à-dire que V a une base dans $F\{G\}$.
Alors, il existe W contenu dans $U\{G\}$ un espace vectoriel sur U défini sur F de dimension finie contenant V et stable par la translation à gauche.

<u>Démonstration :</u> Soit f élément de $F\{G\}$. On va montrer que les translations à gauche de f engendrent un U-espace vectoriel de dimension finie et défini sur F.

On a : $$\overset{\circ}{\mu} : U\{G\} \longrightarrow U\{G\} \underset{U}{\otimes} U\{G\} \text{ ; donc}$$

$$\overset{\circ}{\mu}(f) = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes h_i \text{ , avec } f_i \text{ et } h_i \text{ dans } F\{G\} .$$

Soit s élément de G et soit $$\overset{\circ}{\lambda}_s : U\{G\} \longrightarrow U\{G\}$$

$$f \longmapsto \overset{\circ}{\lambda}_s(f) = f \circ \lambda_s$$

l'homomorphisme d'anneaux différentiels associé à la translation à gauche

$$\lambda_s : G \longrightarrow G$$
$$t \longmapsto st .$$

Alors $$\overset{\circ}{\lambda}_s(f)(t) = f\circ \lambda_s(t) = f(st) = f(\mu(s,t))$$
$$= f \circ \mu(s,t)$$
$$= \overset{\circ}{\mu}(f)(s,t)$$

Or $$\overset{\circ}{\mu}(f) = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes h_i \text{ , donc}$$

$$\overset{\circ}{\lambda}_s(f)(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(s)h_i(t) \quad \text{implique} \quad \overset{\circ}{\lambda}_s(f) = \sum_{i=1}^{n} f_i(s)h_i .$$

Il en résulte qu'il existe un sous-espace de dimension finie dans $U\{G\}$ défini sur F contenant tous les $\overset{\circ}{\lambda}_s(f)$, pour s élément de G .

L'intersection de tels sous-espaces de $U\{G\}$ est l'espace vectoriel W cherché.

On avait montré dans le chapitre II que l'anneau des fonctions rationnelles différentielles partout définies sur un ensemble algébrique différentiel est plus gros que l'anneau des coordonnées différentielles.

Il en résulte qu'il existe des groupes algébriques différentiels dont les lois de composition ne sont pas des applications polynômiales différentielles.

Exemple : Soit $V = Z(y' - y) = \left\{ ae^x \ / \ a \in K \right\}$ (Ch.II. § 1)

L'ensemble algébrique V est muni d'une structure de groupe additif .

On transporte la structure de groupe additif de V par l'intermédiaire de l'application rationnelle différentielle partout définie

$$z = \frac{1}{y + 1} \quad , \text{ dans le sous-ensemble différentiellement}$$

ouvert des éléments non nuls de $Z(z^2 - z' - z)$ qui sont de la forme

$$\frac{1}{1 + ae^x} \quad \text{avec a élément de K.}$$

On rend le sous-ensemble $V' = \left\{ \frac{1}{1 + ae^x} \ / \ a \in K \right\}$ différentiellement fermé par l'intermédiaire de l'application qui, à z, associe $(z, \frac{1}{z})$.

Munissons le sous-ensemble différentiellement fermé

$$G = Z(z^2 - z' - z, zw - 1) \text{ de } U^2 \text{ de la loi}$$

de composition $\mathcal{M}$ définie par :

$$\mathcal{M}(s, t) = \left(\frac{s_1 t_1}{s_1 + t_1 - s_1 t_1} , \frac{s_1 + t_1 - s_1 t_1}{s_1 t_1} \right)$$

avec $s = (s_1, s_2)$ et $t = (t_1, t_2)$ éléments de G .

On a

$$G = \left\{ \left(\frac{1}{1 + ae^x} , 1 + ae^x \right) / \ a \in K \right\}$$

$$= Z (z^2 - z' - z , zw - 1) .$$

Montrons que G muni de cette loi de composition est un groupe algébrique différentiel .

$G \neq \emptyset$ car contient $(1,1)$ en prenant $a = 0$

Pour tous s et t éléments de G avec $s = \left(\frac{1}{1 + ae^x} , 1 + ae^x \right)$ et

$t = \left(\frac{1}{1 + be^x} , 1 + be^x \right)$ où a et b sont éléments de K, on a :

$\mathcal{M}(s,t) = \left(\frac{1}{1 + (a + b)e^x} , 1 + (a + b)e^x \right)$ appartient à G car

a et b sont éléments de K

Il est clair que $(1,1)$ est l'identité de G.

D'autre part, pour tout s élément de G, il existe t élément de G tel que

$\mathcal{M} (s,t) = (1,1)$. En effet , posons $s = \left(\frac{1}{1 + ae^x} , 1 + ae^x \right)$

et $t = (t_1,t_2)$. Par un calcul simple on trouve $t_1 = \frac{1}{1 - ae^x}$.

D'où $t = \left(\frac{1}{1 - ae^x} , 1 - ae^x \right)$ est l'inverse de s .

Donc G est muni d'une structure de groupe algébrique différentiel .

IL est clair que $\mathcal{M}$ n'est pas une fonction polynômiale .

Par contre les lois de composition $\mathcal{M}$ telles que

$$\mathcal{M}((u_1,\ldots\ldots,u_n),(v_1,\ldots\ldots,v_n)) = (u_1+v_1,\ldots\ldots,u_n+v_n)$$

et i telle que $i(u_1,\ldots\ldots,u_n) = (-u_1,\ldots\ldots,-u_n)$

définissent une structure de groupe algébrique différentiel sur l'espace affine U^n. On va noter ce groupe G_a^n.

Il est clair que ces lois de composition sont des fonctions différentielles polynômiales.

<u>Remarque 13</u> : Les sous-groupes algébriques de G_a^n sont précisément les sous U-espaces vectoriels de U^n, c'est-à-dire, les ensembles des zéros des idéaux linéaires homogènes de $U[y_1,\ldots\ldots,y_n]$.

La proposition suivante nous donne un résultat analogue en algèbre différentielle.

<u>Proposition 17</u> : Un sous-ensemble V de U^n est un sous-groupe algébrique différentiel de G_a^n si et seulement si V est l'ensemble des zéros d'un idéal différentiel linéaire homogène de $U\{y_1,\ldots\ldots,y_n\}$.

<u>Démonstration</u> :

<u>Condition nécessaire</u> : Supposons que V soit un sous-groupe algébrique différentiel de G_a^n, irréductible.

Soit I(V) son idéal différentiel de définition. I(V) est premier.

Soient $A_1,\ldots\ldots,A_r$ les éléments d'un ensemble caractéristique $\mathcal{A}$ de

I(V) par rapport à un rangement donné des indéterminées différentielles écrites dans un ordre croissant .

Soient U_k (resp. D_k , resp. S_k), le dominant (resp. le coefficient dominant , resp. le séparant) de A_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ et posons $H = \Pi D_k S_k$. Alors H n'appartient pas à I(V) et d'après le critère de Rosenfeld , on a : $I(V) = [A_1, \ldots\ldots, A_r] : H^{\infty}$.

Comme H n'appartient pas à I(V) , il existe x élément de V tel que $H(x) \neq 0$. La formule , qui à P élément de $U\{y_1, \ldots\ldots, y_n\}$ associe

$\sum_{\theta, i} (\partial P / \partial \theta y_i)(x).\theta y_i$ définit une application U-linéaire ψ de $U\{y\}$ dans $U\{y\}$.

Pour chaque P élément de $U\{y\}$, $\psi(P)$ est la partie linéaire de $P(x + y)$.

Il en résulte que $\psi(\delta P) = \delta \psi(P)$ $(\delta \in \Delta)$.

Aussi quels que soient P et Q éléments de $U\{y\}$,

$$\begin{aligned}
\psi(PQ) &= \sum_{\theta, i} (\partial(PQ) / \partial \theta y_i)(x).\theta y_i \\
&= \Big[\sum_{\theta, i} (\partial P / \partial \theta y_i . Q)(x) + \sum_{\theta, i} (P . \partial Q / \partial \theta y_i)(x)\Big] \theta y_i \\
&= \psi(P). Q(x) + P(x). \psi(Q) .
\end{aligned}$$

Une dérivée de θy_i ne peut apparaître dans $\psi(P)$, à moins que θy_i apparaisse dans P .

Etant donné que $H(x) \neq 0$, le dominant de $\psi(A_k)$ est U_k et le séparant de $\psi(A_k)$ est $S_k(x)$.

D'autre part, puisque $V = Z(I(V))$ est un sous-groupe additif de G_a^n ,

$\psi(A_k) = \sum_{\theta,i} (\partial A_k / \partial \theta y_i)(x) \cdot \theta y_i$ s'annule sur V car

$0 = (0,\ldots\ldots,0)$ appartient à V et $\psi(A_k)(0) = 0$, donc

$\psi(A_k)$ appartient à $I(V)$.

D'après- ci-dessus, il en résulte que $\psi(A_k)$ ne comporte pas une dérivée propre de U_k pour tout k et ne comporte pas non plus de dérivée de $U_{k'}$ si k' supérieur à k ; mais $\psi(A_k)$ peut comporter de dérivée propre de $U_{k'}$ pour k' inférieur à k. Choisissons convenablement des éléments $a_{kk'}$ de U $(1 \leqslant k' < k \leqslant r)$ et posons

$$L_1 = \psi(A_1)$$

$$L_2 = a_{21}\,\psi(A_1) + \psi(A_2)$$

$$\vdots$$

$$L_r = a_{r1}\,\psi(A_1) + \ldots\ldots + a_{rr-1}\,\psi(A_{r-1}) + \psi(A_r).$$

Alors L_r est un polynôme différentiel linéaire homogène de $I(V)$ ayant comme dominant U_k et séparant $S_k(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ et $L_1,\ldots\ldots,L_r$ forment un ensemble autoréduit. Et de plus il est évident que le rang de cet ensemble autoréduit n'est pas supérieur à celui de $\mathcal{A}$. Il en résulte que l'ensemble des polynômes différentiels linéaires homogènes $L_1,\ldots\ldots,L_r$ est un ensemble caractéristique de $I(V)$.

D'après le critère de Rosenfeld on a $I(V) = [L_1,\ldots\ldots,L_r]$.

D'où $I(V)$ est un idéal différentiel linéaire homogène car engendré par des polynômes différentiels linéaires homogènes.

D'autre part, quel que soit x élément de V et quel que soit λ élément de K, $L_k(\lambda x) = \lambda L_k(x) = 0$ implique que λx appartienne à V.

Donc V est un espace vectoriel sur K (les propriétés sont faciles à vérifier).

Condition suffisante : Soit V l'ensemble des zéros d'un idéal différentiel linéaire homogène. Il est clair que V est un espace vectoriel sur K, donc à fortiori, V est un sous-groupe algébrique différentiel de $\mathcal{G}_a^n$. Ce qui achève la démonstration de la proposition 17.

CHAPITRE IV: ETUDE DE SL_2

Ce chapitre a pour objet, l'étude des sous-groupes algébriques différentiels de SL_2 .

§ 1 . Notions de base sur les groupes algébriques différentiels linéaires :

Soit $GL_n(U)$ le groupe multiplicatif des matrices inversibles d'ordre n à coefficients dans U, muni de la topologie induite par la topologie de Zariski différentielle sur U^{n^2} .

Un sous-groupe G de $GL_n(U)$ est un groupe algébrique différentiel linéaire (ou groupe algébrique différentiel de matrices) si G est un sous-groupe différentiellement fermé de $GL_n(U)$ dans la topologie de Zariski induite sur $GL_n(U)$.

Remarques 14 :

1) $GL_n(U)$ se plonge dans $SL_{n+1}(U)$ en associant à la matrice $s = (s_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, la matrice $s' = (s'_{ij})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ où $s'_{ij} = s_{ij}$ pour $1 \leq i,j \leq n$, $s'_{n+1,i} = s'_{i,n+1} = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et $s'_{n+1,n+1} = 1/(\det s)$ où $SL(U)_{n+1}$ est le groupe algébrique différentiel de matrices d'ordre n + 1 et de déterminant +1 .

2) Soit G inclus dans $GL_n(U)$ un sous-groupe algébrique différentiel considéré comme un sous-groupe algébrique différentiel de $SL_{n+1}(U)$. Alors

les lois de groupe sont données par des fonctions polynômiales .

Si s est élément de $GL_n(U)$, on a s appartient à G si et seulement si

$$\overset{o}{\rho}_s(I(G)) = I(G), \text{ où } I(G) \text{ est inclus dans } U\{y_{ij}, 1/\det(y_{ij})\} \qquad \text{et}$$

$\overset{o}{\rho}_s$ est l'homomorphisme d'anneaux différentiels, associé à la translation à droite $\rho_{s^{-1}}$ de G dans G.

En effet, supposons que $\overset{o}{\rho}_s(I(G)) = I(G)$. Soit P élément de I(G), alors

$P(s) = \overset{o}{\rho}_s(P)(1) = 0$, car $\overset{o}{\rho}_s(P)$ est élément de I(G) et 1 appatient à G;

par conséquent, s appartient à G .

Réciproquement, supposons que s soit élément de G. Soit P appartenant à I(G) et soit t élément de G, alors, $\overset{o}{\rho}_s(P)(t) = P(ts) = 0$. Il en résulte que $\overset{o}{\rho}_s(P)$ appartient à I(G); donc $\overset{o}{\rho}_s(I(G))$ est inclus dans I(G).

D'autre part, comme s appartient à G, s^{-1} appartient à G, et on a :

$\overset{o}{\rho}_{s^{-1}}(\overset{o}{\rho}_s(I(G)))$ est contenu dans $\overset{o}{\rho}_{s^{-1}}(I(G))$.

Or $\overset{o}{\rho}_{s^{-1}}(\overset{o}{\rho}_s(I(G))) = I(G)$ donc I(G) est inclus dans $\overset{o}{\rho}_{s^{-1}}(I(G))$.

D'où $\overset{o}{\rho}_s(I(G)) = I(G)$.

Proposition 18 : Soit G un groupe algébrique différentiel dont les lois de composition sont des fonctions différentielles polynômiales et soit F un corps différentiel de définition de G. Alors G est F-isomorphe à un sous-groupe différentiellement F-fermé de $GL_n(U)$.

Démonstration : Il est clair que $U\{G\}$ est une U-algèbre différentielle de type fini .

Soit V un sous U-espace vectoriel de $U\{G\}$ invariant à droite, de dimension finie et défini sur F tel que $V \cap F\{G\}$ contienne un système de générateurs de $U\{G\}$ (V existe d'après la proposition 16).

Soit $(f_1, \ldots\ldots, f_p)$ une base de V. Alors $F\{G\} = F\{f_1, \ldots\ldots, f_p\}$.

Soit f_i élément de $F\{G\}$; $\overset{o}{\rho}_s(f_i)$ appartient à $F\{G\}$ et on a :

$$\overset{o}{\rho}_s(f_i) = \sum_{1 \leq j \leq p} h_{ij}(s)\, f_j \qquad (1 \leq i \leq p), \text{ avec } h_{ij}$$

élément de $F\{G\}$.

Il est clair que $(h_{ij}(s))$ appartient à $GL_p(U)$. On obtient alors une application

$$\begin{aligned} \alpha : G &\longrightarrow GL_p(U) \\ s &\longmapsto (h_{ij}(s))_{1 \leq i,j \leq p} \end{aligned}$$

α est un homomorphisme rationnel différentiel de G défini sur F car les h_{ij} le sont.

Montrons que α est injectif.

Soit s élément de G tel que $\alpha(s) = 1 = (h_{ij}(s))$; alors :

$\overset{o}{\rho}_s(f_i) = f_i \quad (1 \leq i \leq p)$. Il en résulte que pour tout f élément de $U\{G\}$, $\overset{o}{\rho}_s(f) = f$. Comme f est une fonction coordonnée quelconque de G,

$$\begin{aligned} \overset{o}{\rho}_s(f)(t) &= f \circ \rho_s(t) \\ &= f(ts) = f(t) \end{aligned}$$

Ce qui implique que $ts = t$, en prenant f = fonction coordonnée identité, pour tout t élément de G.

Il en résulte que $s = 1_G$ et α est injectif .

Soit α' la restriction de α , de G dans $\alpha(G)$. Il est clair que α' est un F-isomorphisme de G dans $\alpha(G)$ avec $\alpha(G)$ inclus dans $GL_p(U)$.

Il en résulte que G est F-isomorphe à un sous-groupe algébrique différentiel linéaire .

Semi-invariants de groupes algébriques différentiels linéaires :

Soit $R = U\{y\} = U\{(y_{ij}), 1 \leq i,j \leq n\}$ l'algèbre des polynômes différentiels et soit L le corps différentiel des quotients de R.

Si s est élément de $GL_n(U)$, la substitution de

$$ys = \sum_{1 \leq k \leq n} y_{ik}\, s_{kj} \qquad (1 \leq i,j \leq n)$$

pour y donne un automorphisme noté $\overset{o}{\rho}_s$ de L qui envoie R sur lui-même.

Un élément f de L est appelé un invariant d'un élément s de $GL_n(U)$ si

$$\overset{o}{\rho}_s(f) = f$$

et f est appelé un invariant d'un sous-ensemble A de $GL_n(U)$ si c'est un invariant de tout élément de A.

Un élément P de R est appelé un semi-invariant de s s'il existe un élément a de U tel que

$$\overset{o}{\rho}_s(P) = aP.$$

Evidemment si $P \neq 0$, a est unique; de même, P est appelé semi-invariant de A inclus dans $GL_n(U)$ si c'est un semi-invariant de tout élément de A.

Maintenant soit G un sous-groupe algébrique différentiel de $GL_n(U)$ et soit P un élément de R avec $P \neq 0$.

Si P est un semi-invariant de G, la formule

$$\chi(s) = \overset{o}{\rho}_s(P) / P$$

définit une application $\chi : G \longrightarrow U^*$, appelée la fonction de poids du semi-invariant P de G .

On a $\chi(st) = \chi(s)\,\chi(t)$, pour tous s et t éléments de G.

En effet , $\overset{o}{\rho}_{st}(P) = \chi(st).P$

Or $\overset{o}{\rho}_{st}(P) = \overset{o}{\rho}_s \circ \overset{o}{\rho}_t(P)$

$= \overset{o}{\rho}_s(\chi(t).P)$

$= \overset{o}{\rho}_s(P).\,\chi(t)$

$= \chi(s).\,\chi(t).P$

D'où $\chi(st) = \chi(s).\,\chi(t)$.

§ 2 . Algèbre de Lie d'un groupe algébrique différentiel linéaire :

1°) Les algèbres de Lie considérées ici sont des algèbres de Lie sur un corps.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et S un sous-ensemble de , l'ensemble

$$\{x \in \mathfrak{g} \;/\; [x, y] = 0\ S,\ \forall y \in S\}$$

est une sous-algèbre de L , appelée le centralisateur de S dans $\mathfrak{g}$, noté $Z_{\mathfrak{g}}(S)$. Lorsque S est un sous-espace de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$, l'ensemble

$$\{x \in \mathfrak{g} \;/\; [x, y] \in S,\ \forall y \in S\}$$

est aussi une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, appelée le normalisateur de S dans $\mathfrak{g}$ noté $N_{\mathfrak{g}}(S)$. Lorsque S est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, alors S est un idéal de $N_{\mathfrak{g}}(S)$.

Si F est un corps différentiel, $M_n(F)$ désigne l'algèbre associative différentielle sur F de matrices d'ordre n à coefficients dans F. On peut regarder $M_n(F)$ comme une algèbre associative de dimension n^2 sur F, ou bien comme une algèbre associative de dimension infinie sur C où C est le corps des constantes de F .

De plus, si on définit $[x , y]$ par $xy - yx$, on peut munir $M_n(F)$ d'une structure d'algèbre de Lie de dimension n^2 sur F , ou bien d'une structure d'algèbre de Lie de dimension infinie sur C ; cette algèbre est notée $gl_n(F)$.

Une sous- K-algèbre de $gl_n(U)$ (où K est le corps des constantes de U) est dite algébrique différentielle si elle est de plus un sous-groupe algébrique différentiel du groupe additif $M_n(U)$.

Cela signifie (prop. 17) que toute sous K-algèbre algébrique différentielle de $gl_n(U)$ est l'ensemble des solutions d'un idéal différentiel homogène linéaire dans $U\{y\}$, où $y = (y_{ij})$ $(1 \leq i , j \leq n)$ est une famille d'indéterminées différentielles (qu'on identifie avec les fonctions coordonnées sur $M_n(U)$.

Soit x un élément de $M_n(U)$. Alors x détermine une dérivation notée adx de l'algèbre de Lie $gl_n(U)$ sur U définie par la formule

$$y \longrightarrow [x,y] .$$

De plus, puisque les coordonnées de $[x,y]$ sont des fonctions polynômes, adx est un homorphisme rationnel de groupes algébriques additifs de $M_n(U)$.

2°) Soit R un sous-anneau différentiel d'un anneau différentiel S avec l'ensemble des opérateurs de dérivation $\Delta = \{\delta_1, \ldots\ldots, \delta_m\}$.

Une dérivation différentielle de R dans S est une dérivation

$$D : R \longrightarrow S$$

telle que $D(\delta a) = \delta(Da)$ pour tout δ élément de Δ et tout a élément de R.

Si R est égal à S, on appelle D une dérivation différentielle de R.

Soit G un sous-groupe algébrique différentiel de $GL_n(U)$; $U\{G\}$ désigne l'anneau des coordonnées différentiel de G (comme ensemble différentiellement fermé de U^{n^2}) et $I(G)$ désigne l'idéal différentiel de définition de G.

Alors $U\{G\} = U\{\bar{y}\}$ où $\bar{y} = (\bar{y}_{ij})$ $(1 \leq i,j \leq n)$.

Par une dérivation différentielle sur G, on entend une dérivation de $U\langle G^o\rangle$ sur U.

Soit F un corps différentiel de définition de G (et donc de G^o).

Une dérivation différentielle D sur G est définie sur F si

$$D(F\langle G^o\rangle) \text{ est inclus dans } F\langle G^o\rangle .$$

Soit s un élément de G^o. Une dérivation D sur G est définie en s si $D(\overset{o}{\mathcal{O}}_s)$ est inclus dans $\overset{o}{\mathcal{O}}_s$, où $\overset{o}{\mathcal{O}}_s$ est l'anneau différentiel local de s sur $\overset{o}{G}$.

D est dite invariante si

$$\overset{o}{\rho}_s \circ D = D \circ \overset{o}{\rho}_s \quad \text{pour tout } s \text{ appartenant à } G^o.$$

<u>Remarque 15 :</u> Si D est invariante, alors D est définie en tout point s de G^o.

L'ensemble des dérivations différentielles invariantes de $U\langle G^o\rangle$ sur U est une algèbre de Lie sur K notée $\mathrm{Lie}(G)$.

Soit x un élément de $M_n(U)$ et soit V l'espace vectoriel différentiel sur U des polynômes différentiels homogènes linéaires de $U\{y\}$. La matrice x induit un endomorphisme

$$\lambda_x : V \longrightarrow V \text{ tel que } \lambda_x(L(y)) = -L(xy) \text{ pour}$$

tout L élément de V.

Soit V^* le dual de V et ${}^t\lambda_x$ l'endomorphisme de V^* trasposé de λ_x (Bourbaki, alg. Ch. II, § 4, n° 9). Alors la dérivation de $U\langle y\rangle$ qui envoie $U\{y\}$ sur lui-même et qui prolonge de façon unique l'endomorphisme $-{}^t\lambda_x$ s'appelle la dérivation de $U\langle y\rangle$ canoniquement associée à λ_x qu'on va noter D_{λ_x} ou $D(x)$ si in identifie x à l'endomorphisme λ_x associé.

Ainsi on définit

$$\begin{aligned} D : gl_n(U) &\longrightarrow \mathrm{Lie}(GL_n(U)) \\ x &\longmapsto D(x). \end{aligned}$$

tel que pour tout y élément de $GL_n(U)$, $D(x)(y) = -{}^t xy$. (Chevalley : Théorie des groupes de Lie, Groupes algébriques, Tome II).

<u>Proposition 19 :</u> D est un isomorphisme de K-algèbres de Lie.

<u>Démonstration :</u> Il est clair que D est K-linéaire . D'autre part, pour tous x et y appartenant à $gl_n(U)$

$$\begin{aligned} D([x,y])(y_{ij}) &= -{}^t[x,y]\,.\,(y_{ij}) \\ &= -{}^t[xy-yx]\,.\,(y_{ij}) \\ &= (-{}^t(xy) + {}^t(yx)).(y_{ij}) \end{aligned}$$

$$= (-{}^ty\,{}^tx + {}^tx\,{}^ty).(y_{ij})$$
$$= \left[-{}^tx\,,\,-{}^ty\right].(y_{ij})$$
$$= \left[D(x)\,,\,D(y)\right]\,(y_{ij})$$

D est injective. En effet, supposons que $D(x) = 0$; alors, pour tout y appartenant à $GL_n(U)$, on a $-{}^txy = D(x)(y) = 0$ implique ${}^tx = 0$.

D'où $x = 0$

La surjectivité de D résulte du lemme suivant :

<u>Lemme 3 :</u> Soit R un sous-anneau différentiel de $U\langle y\rangle$ contenant $U\{y\}$ tel que $\overset{o}{\rho}_s(R) = R$ avec s élément de $GL_n(U)$. Soit D une dérivation différentielle invariante de R sur U.

Alors $Dy\,.y^{-1}$ appartient à $M_n(U)$ où $Dy = (Dy_{ij})$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$.

<u>Démonstration :</u> Il suffit de montrer que $Dy.y^{-1}$ a ses coordonnées dans U, c'est-à-dire est invariante par $\overset{o}{\rho}_s$.

Soit s un élément de $GL_n(U)$; comme $\overset{o}{\rho}_s(y) = ys$, on a

$$\begin{aligned}(Dy.y^{-1}) &= Dy.s\,(ys)^{-1}\\ &= Dy.s.s^{-1}.y^{-1}\\ &= Dy.y^{-1}\end{aligned}$$

Donc $Dy.y^{-1}$ est invariante par $\overset{o}{\rho}_s$. D'où $Dy.y^{-1}$ a ses coordonnées dans U. Il en résulte que $Dy.y^{-1}$ appartient à $M_n(U)$.

<u>D est surjective :</u> En effet , soit D' un élément de Lie $(GL_n(U))$ et soit x

un élément de $gl_n(U)$ tel que $D(x) = D'$; on a donc :

$$D(x)(y) = D'y$$
$$-{}^t xy = D'y$$

Ce qui implique que $x = -{}^t(D'y.y^{-1})$

D'après le lemme 3 $-(D'y.y^{-1})$ appartient à $gl_n(U)$.

Donc il existe bien x élément de $gl_n(U)$ tel que $D(x) = D'$.

Il en résulte que D est un isomorphisme de K-algèbres de Lie.

Soit G un sous-groupe algébrique différentiel de $GL_n(U)$. L'ensemble $\{x \in gl_n(U) \; / \; D(x)\,(I(G)) \subset I(G)\}$ est une sous K-algèbre de l'algèbre de Lie $gl_n(U)$ sur K, notée $L(G)$, et appelée l'algèbre de Lie de G.

Remarques 16 :

1) La matrice x appartient à $L(G)$ si et seulement si $D(x)(P)(1) = 0$ pour tout P élément de $I(G)$ où 1 est la matrice identité.

La condition nécessaire est évidente.

Supposons x élément de $gl_n(U)$ tel que $D(x)(P)(1) = 0$ pour tout P élément de $I(G)$. Comme $D(x)$ est invariante, c'est-à-dire $D(x) \circ \overset{\circ}{\rho}_s = \overset{\circ}{\rho}_s \circ D(x)$ pour tout s élément de G, on a p pour tout P élément de $I(G)$,

$$D(x) \circ \overset{\circ}{\rho}_s(P) = \overset{\circ}{\rho}_s \circ D(x)(P)$$

$$D(x)(\overset{\circ}{\rho}_s(P)) = D(x)(P)(\rho_s)$$

$$D(x)(P \circ \rho_s)(1) = D(x)(P)(\rho_s)(1)$$

$$D(x)(P(s)) = 0 = (D(x)(P))(s) \text{ ; ce qui implique que } D(x)(P)$$

appartient à $I(G)$. D'où x appartient à $L(G)$.

Il en résulte que $L(G)$ est une sous K-algèbre différentielle de $gl_n(U)$.

2) Si H est un sous-groupe algébrique différentiel de G, alors

$$L(H) \text{ est inclus dans } L(G) .$$

En effet, comme H est inclus dans G, on a $I(G)$ contenu dans $I(H)$, et si x appartient à $L(H)$, $D(x)(P)(1) = 0$ pour tout P élément de $I(H)$; donc pour tout P appartenant à $I(G)$. Il en résulte que x appartient à $L(G)$. D'où $L(H)$ inclus dans $L(G)$.

Soit s un élément de G^o. $L_s(G)$ désigne le K-espace vectoriel formé des zéros de l'idéal différentiel homogène linéaire

$$\left[\sum_{\theta,i,j} \frac{\partial P}{\partial(\theta y_{ij})}(s)\, \theta y_{ij} \right]_{P \in I(G)}$$

Proposition 20 : Soit G un sous-groupe algébrique différentiel de $GL_n(U)$. Alors $L(\bar{G}) = \overline{L(G)} = U.L(G)$

Démonstration : Comme G est inclus dans $\bar{G}$, il en résulte que $L(G)$ est inclus dans $L(\bar{G})$; donc, puisque $L(\bar{G})$ est fermé, on a :

$$\overline{L(G)} \subset \overline{L(\bar{G})} = L(\bar{G}) .$$

Soit $I(G)$ l'idéal différentiel de définition de G et soient $A_1, \ldots\ldots, A_r$ les éléments d'un ensemble caractéristique de $I(G)$ par rapport à un rangement des indéterminées différentielles y_{ij} $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$. Soit U_k, (resp. D_k, resp. S_k), le dominant, (resp. le coefficient dominant, resp. le séparant) de A_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ et posons $H = \Pi\, D_k S_k$.

Alors , H n'appartient pas à I(G). Soit s un élément de G tel que $H(s) \neq 0$. Si $A_1, \ldots\ldots, A_q$ sont ceux des polynômes A_k qui sont d'ordre zéro et H_o le produit de leurs coefficients dominants et leurs séparants .

Alors, $I(\bar{G}) = [A_1, \ldots\ldots, A_q] : H_o^{\infty}$. Maintenant, puisque $H(s) \neq 0$,

$$I(L_s(G)) = [\psi A_1, \ldots\ldots, \psi A_r] .$$ Similairement,

$$I(L_s(\bar{G})) = [\psi A_1, \ldots, \psi A_q] .$$

D'autre part, on a : $I(L_s(G)) = [L_1, \ldots\ldots, L_r]$ où les L_k ont la même signification que dans la démonstration de la proposition 17.

Donc $L_1, \ldots\ldots, L_q$ sont ceux des polynômes différentiels L_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ qui sont d'ordre zéro . En conséquence $I(\overline{L_s(G)}) = [L_1, \ldots\ldots, L_q]$.

Il en résulte que $\overline{L_s(G)} = L_s(\bar{G})$. Donc,

$$\begin{aligned} L(\bar{G}).s &= L_1(\bar{G}).s = L_s(\bar{G}) = \overline{L_s(G)} \\ &= \overline{L(G).s} \\ &= \overline{L(G)}\,.s \end{aligned}$$

D'où $L(\bar{G}) = \overline{L(G)}$.

Comme L(G) est un K-espace vectoriel, $\overline{L(G)}$ est un U-espace vectoriel et on a :

$$\overline{L(G)} = U.\, L(G) .$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition .

Soit D une dérivation de U . La formule $s \longmapsto Ds.s^{-1}$ où $Ds = (Ds_{ij})$, définit une application de $GL_n(U)$ dans $gl_n(U)$ appelée dérivée logarithmique notée Dl .

Cette dérivée logarithmique a les propriétés suivantes :

1) $Dl(st) = Dl(s) + s.Dl(t).s^{-1}$ pour toutes matrices s et t éléments de $GL_n(U)$.

En effet,
$$\begin{aligned} Dl(st) &= D(st).(st)^{-1} \\ &= (Ds.t + s.Dt)\, t^{-1}s^{-1} \\ &= Ds.tt^{-1}.s^{-1} + s.Dtt^{-1}.s^{-1} \\ &= Ds.s^{-1} + s.Dtt^{-1}.s^{-1} \\ &= Dl(s) + s.Dl(t).s^{-1} \end{aligned}$$

2) $Dl(s) = Dl(t)$ si et seulement si $s^{-1}t$ appartient à $GL_n(L)$ où L est le corps des constantes de D.

En effet, supposons que $Dl(s) = Dl(t)$; alors ,

$$Dl(s^{-1}t) = D(s^{-1}t).(s^{-1}t) \quad \text{implique} \quad D(s^{-1}t) = Dl(s^{-1}t).s^{-1}t$$

Or
$$\begin{aligned} Dl(s^{-1}t) &= Dl(s^{-1}) + s^{-1}.Dl(t).s \\ &= Dl(s^{-1}) + s^{-1}.Dl(s).s \quad \text{(car } Dl(s) = Dl(t)\text{, hypothèse);} \end{aligned}$$

mais $$Dl(s^{-1}) = -s^{-1}.Dl(s).s \quad .$$

D'où $$Dl(s^{-1}t) = -s^{-1}.Dl(s).s + s^{-1}.Dl(s) = 0$$

Donc $D(s^{-1}t) = 0$; ce qui implique que $s^{-1}t$ appartient à $GL_n(L)$.

Réciproquement, supposons que $s^{-1}t$ appartienne à $GL_n(L)$, c'est-à-dire,

$D(s^{-1}t) = 0$.

Alors, on a : $$Dl(s^{-1}t) = Dl(s^{-1}) + s^{-1}.Dl(t).s = 0 ;$$

or, $$Dl(s^{-1}) = -s^{-1}.Dl(s).s .$$

Donc $-s^{-1}.Dl(s).s + s^{-1}Dl(t).s = 0$; ce qui implique que

$$Dl(s) = Dl(t) .$$

§ 3 . Rappels sur les sous-groupes algébriques de $SL_2(U)$

Dans ce paragraphe U est un corps universel de caractéristique nulle et F désigne un sous-corps de U .

1°) Notations et définitions : $GL_2(U)$ désigne le groupe algébrique des matrices inversibles d'ordre 2 à coefficients dans U et $SL_2(U)$ le sous-groupe algébrique linéaire spécial.

$$Z_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si F est inclus dans U , $GL_2(F)$ désigne le sous-ensemble de $GL_2(U)$ dont les éléments sont à coefficients dans F. De même que $SL_2(F)$.

Définitions :

Une matrice x élément de $SL_2(U)$ est dite projectivement rationnelle sur F s'il existe un élément non nul u de U tel que ux soit élément de $GL_2(F)$.

L'ensemble des matrices projectivement rationnelles sur F est noté par $\mathbb{P}(F)$.

Un sous-ensemble H de $SL_2(U)$ est dit projectivement rationnel sur F si H est inclus dans $\mathbb{P}(F)$.

Deux sous-ensembles H et H' de $SL_2(U)$ sont dits conjugués sur F s'il existe un élément x de $\mathbb{P}(F)$ tel que $xHx^{-1} = H'$

2°) Sous-groupes algébriques standards de $SL_2(U)$:

Les sous-groupes algébriques standards de $SL_2(U)$ sont :

1) $ST_2(U)$ est le groupe des matrices triangulaires supérieures.

$ST_2(U)$ est défini sur F, connexe et de dimension 2 .

2) $U_2^n(U) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} / \quad \alpha^n = 1 \, , \; \beta \in U \right\}$ est un sous-groupe algébrique de $SL_2(U)$ défini sur Q et de dimension 1 .

La composante de l'identité de $U_2^n(U)$ est égal à

$U_2^1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / \quad \beta \in U \right\}$ le groupe des matrices unipotentes de $ST_2(U)$; de plus, on a $\left[U_2^n(U) \; : \; U_2^1 \right] = n$.

3) $SO_2^e(U) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} / \alpha^2 - e\gamma^2 = 1 \, , \; e \in F^* \right\}$ est un

sous-groupe algébrique diagonalisable de $SL_2(U)$, (i.e, équivalent , par un automorphisme intérieur de $SL_2(U)$, à un sous-groupe diagonal de $SL_2(U)$, défini sur F et de dimension 1 .

4) $SO_2^e(U)^+ = SO_2^e(U) \cup SO_2^e(U)^*$ où

$$SO_2^e(U)^* = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -e\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} / -\alpha^2 + e\gamma^2 = 1 \right\} .$$

$SO_2^e(U)^+$ est un sous-groupe algébrique de $SL_2(U)$ défini sur F et de dimension 1.

La composante de l'identité de $SO_2^e(U)^+$ est $SO_2^e(U)$, et $\left[SO_2^e(U)^+ : SO_2^e(U) \right] = 2$

5) $C_n(U) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} / \alpha^n = 1 \right\}$ est un sous-groupe algébrique cyclique de $SL_2(U)$ d'ordre n défini sur Q .

6) $$D(4n,e) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} / \alpha^{2n} = 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^{-1} & 0 \end{pmatrix} / \beta^{2n} = e^n \right\}$$

est un sous-groupe fini de $SL_2(U)$ défini sur F.

D'autre part , on a Z_2 inclus dans $D(4n,e)$ et $D(4n,e) / Z_2$ est diédral d'ordre 2n.

7) T = l'ensemble des matrices de $SL_2(U)$ engendré par $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi & \xi \\ -\xi^{-1} & \xi^{-1} \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}$ où δ est la racine primitive $8^{\text{ième}}$ de l'unité et $i = \sqrt{-1}$.

T est un sous-groupe de $SL_2(U)$ d'ordre 24 défini sur Q.

De plus Z_2 inclus dans T et T / Z_2 est isomorphe (comme groupe abstrait) à A_4 le groupe alterné de degré 4.

8) OC le sous-groupe de $SL_2(U)$ engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \delta & \delta \\ -\delta^{-1} & \delta^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{, d'ordre 48, défini sur Q.}$$

De plus Z_2 est inclus dans OC et OC / Z_2 est isomorphe (comme un groupe abstrait à) S_4, le groupe symétrique de degré 4.

9) DI le sous-groupe de $SL_2(U)$ engendré par $\begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta^{-1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$ où η est une racine primitive $10^{\text{ième}}$ de l'unité,

$\alpha = (\eta - \eta^{-1})^{-1}$ et $\alpha^2 + \beta^2 = -1$.

DI est un groupe d'ordre 120, défini sur Q. De plus Z_2 est inclus dans DI / Z_2 est isomorphe (comme un groupe abstrait) à A_5 le groupe alterné de degré 5.

10) $$D(8,e,f,g) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ -\epsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} -\epsilon\gamma & \epsilon\alpha \\ \epsilon^{-1}\alpha & \epsilon\gamma \end{pmatrix} \right\}$$

où e,f,g appartiennent à F tels que $e \neq 0$ et $f^2 + eg^2 = 1$, et où

$\epsilon^2 = e$, $\alpha^2 + e\gamma^2 = -1$, $\alpha^2 - e\gamma^2 = f$ et $2\alpha\gamma = g$, est un sous-groupe de $SL_2(U)$ d'ordre 8 défini sur F.

On a Z_2 inclus dans $D(8,e,f,g)$ et $D(8,e,f,g) / Z_2$ est isomorphe au groupe de Klein-4 (qui est le groupe diédral d'ordre 4).

On rappelle les résultats suivants sans démonstration.

Théorème 3 : Soit G un sous-groupe algébrique infini de $SL_2(U)$ défini sur F.

Alors, G vérifie une et une seule des affirmations suivantes :

1) DimG = 3 ; dans ce cas $G = SL_2(U)$.

2) DimG = 2 ; dans ce cas G est conjugué sur F à $ST_2(U)$, et G est connexe.

3) DimG = 1 et G^o est unipotent ; dans ce cas G est conjugué sur F à $U_2^n(U)$ pour un certain n appartenant à N.

4) DimG = 1 et G est connexe et diagonalisable ; dans ce cas G est conjugué sur F à $SO_2^e(U)$ pour un certain e élément de F^*

5) DimG = 1, $G \neq G^o$ et G^o est diagonalisable ; dans ce cas G est conjugué sur F à $SO_2^e(U)^+$ pour un certain e élément de F^*.

Remarque 17 :

a) Le théorème ci-dessus, donne une classification complète de tous les sous-groupes algébriques de $SL_2(U)$ qui sont définis sur F et de dimension strictement positive.

b) Les sous-groupes algébriques de $SL_2(U)$ qui sont de dimension zéro sont précisement les sous-groupes finis .

Théorème 4 : Soit G un sous-groupe fini de $SL_2(U)$. Alors, G vérifie l'une des affirmations suivantes :

1) G est cyclique .

2) Z_2 est inclus dans G et G / Z_2 est diédral .

3) Z_2 est inclus dans G et G / Z_2 est isomorphe à A_4 .

4) Z_2 est inclus dans G et G / Z_2 est isomorphe à S_4 .

5) Z_2 est inclus dans G et G / Z_2 est isomorphe à A_5 .

Théorème 5 : Soit G un sous-groupe de $SL_2(U)$ d'ordre n et soit F un corps tel que G soit inclus dans $\mathbb{P}(F)$. Alors G vérifie l'une des affirmations suivantes :

1a) G est cyclique et n est impair ; dans ce cas , si F contient une racine n-ième primitive de l'unité, alors G est conjugué sur F à C(n) .

1b) G est cyclique et $n = 2m \neq 4$; dans ce cas si F contient une racine primitive m-ième de l'unité, alors G est conjugué sur F à C(n) .

1c) G est cyclique et $n = 4$; dans ce cas G est conjugué sur F à C(4) ou à D(4,e) pour un certain e élément de F^*.

2b) Z_2 est inclus dans G, G/Z_2 est diédral et $n = 8$; dans ce cas G est conjugué sur F à D(8,e,f,g) pour certains e, f, g appartenant à F $(e \neq 0)$ et $f^2 + eg^2 = 1$.

2a) Z_2 est inclus dans G, G/Z_2 est diédral et $n = 4m \neq 8$; dans ce cas si F contient une racine primitive m-ième de l'unité , alors G est conjugué sur F à $D(4m,e)$ pour un certain e élément de F^*.

3) Z_2 est inclus dans G, et $G/Z_2 \simeq A_4$; dans ce cas $n = 24$, et si F contient une racine primitive 4-ième de l'unité, alors G est conjugué sur F à T.

4) Z_2 est inclus dans G et G/Z_2 est isomorphe à S_4 ; dans ce cas $n = 48$ et si F contient une racine primitive 4-ième de l'unité, alors G est conjugué sur F à OC.

5) Z_2 est inclus dans G et G/Z_2 est isomorphe à A_5 ; dans ce cas $n = 120$ et si F contient une racine primitive 5-ième de l'unité, alors G est conjugué sur F à DI.

§ 4 : Les sous-groupes algébriques différentiels de $SL_2(U)$.

U est un corps universel différentiel de caractéristique nulle, =
est son ensemble des opérateurs de dérivation et K son corps de constantes.
F est un sous-corps différentiel de U sur lequel U est universel, de corps de constantes C , et H est un sous-groupe algébrique différentiel de $SL_2(U)$ défini sur F.

Soit $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{P}(FK)$; t^x désigne l'élément $(dt - b)(-ct + a)^{-1}$ de $FK\langle t\rangle$, où t est un élément de U différentiellement transcendant sur F.

Il est clair qu'il existe un FK-auto-morphisme , noté σ_{x}, de FK$\langle t\rangle$ tel que $\sigma_{x}(t) = t^{x}$.

Si H est inclus dans $\mathbb{P}$(FK), on note T(H) l'ensemble des auto-morphismes σ_{x} pour x élément de H c'est-à-dire $T(H) = \{ \sigma_{x} / x \in H \}$.

On se propose dans ce paragraphe de caractériser tous les sous-groupes algébriques différentiels de $SL_2(U)$ conjugués sur F et définis sur F.

Soit G la clôture de Zariski de H dans $SL_2(U)$. Il est clair que G est un sous-groupe algébrique de $SL_2(U)$ aussi défini sur F.

D'après le théorème 3 rappelé, G est alors conjugué sur F à l'un des groupes SL_2 , ST_2 , U_2^n , SO_2^e , SO_2^{e+} si G est infini.

Il en résulte que, pour étudier les sous-groupes algébriques différentiels infinis de $SL_2(U)$, il suffit d'étudier les sous-groupes algébriques différentiels denses de SL_2 , ST_2 , U_2^n , SO_2^e , SO_2^{e+}.

I - Quelques résultats sur $SL_n(U)$:

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des opérateurs de dérivation sur U de la forme $D = \sum_{i=1}^{m} a_i \delta_i$ avec a_i élément de U . Il est clair que $\mathcal{D}$ a une structure d'espace vectoriel sur U ayant Δ comme base.

1°) Action de Lowy : Soit $S = \{D_1, \ldots, D_p\}$ un sous-ensemble libre de $\mathcal{D}$ et soit $L = \bigcap_{1 \leq i \leq p} \mathrm{Ker} D_i$.

Soit l'application Sl de $SL_n(U)$ dans $(sl_n(U))^p$ définie par

$Sl(s) = (D_1 s . s^{-1}, \ldots, D_p s . s^{-1})$. Soit I_S l'image de Sl. Il est évident que $\mathrm{Ker}\, Sl = SL_n(L)$.

Rappels :

1) Soit $D_i = \delta_i + \sum_{p<h\leq m} a_{ih}\,\delta_h$, avec a_{ih} appartenant à U et supposons $[D_i, D_j] = 0$. Soit $S = \{D_1, \ldots, D_p\}$ et soit $(x_1, \ldots, x_p)$ un élément de $(sl_n(U))^p$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que $(x_1, \ldots, x_p)$ appartienne à I_S est que $D_i x_j - D_j x_i = [x_i, x_j]$

2) Soit S comme défini ci-dessus. Alors I_S est un sous-ensemble différentiellement fermé de $(sl_n(U))^p$. Il en résulte, en particulier, que I_Δ est un sous-ensemble différentiellement fermé de $(sl_n(U))^m$.

Proposition 21 : Soit $\mathcal{E}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{D}$, et soit $L = \bigcap_{D\in\mathcal{E}} \operatorname{Ker} D$ (L est un sous-corps de U). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Tout élément D de $\mathfrak{D}$ tel que $DL = 0$ est un élément de $\mathcal{E}$.

2) $\mathcal{E}$ a une base commutative , c'est-à-dire, une base $\{D_1, \ldots, D_p\}$ telle que $[D_i, D_j] = 0$ avec $1 \leq i,j \leq p$.

Démonstration : Soit $\{D_1, \ldots, D_p\}$ une base de $\mathcal{E}$. Tout élément D_i de cette base peut s'écrire sous la forme $D_i = \delta_i + \sum_{p<h\leq m} a_{ih}\,\delta_h$ $(1 \leq i \leq p)$

On range lexicographiquement les dérivées $\delta_1^{e_1} \cdots\cdots \delta_m^{e_m} y$ par rapport à

$\sum_{1\leq i\leq m} e_i,\ e_m, \ldots, e_1$.

<u>Lemme 4 :</u> Les opérateurs de dérivation $D_i = \delta_i + \sum_{p<h\leqslant m} a_{ih}\,\delta_h$ forment une base commutative pour le sous-espace vectoriel U si et seulement si les polynômes différentiels linéaires homogènes associés $A_i = D_i y = (\delta_i + \sum a_{ih}\delta_h)y$ forment un ensemble autoréduit cohérent . (Pour ce qui concerne l'ensemble caractéristique et l'ensemble autoréduit cohérent, voir Ch. I, § 6).

<u>Démonstration :</u> Supposons que $D_1,\ldots,D_p$ forment une base commutative de $\mathcal{E}$. Alors $[D_i, D_j] = D_i.D_j - D_j.D_i = 0$

$$= (\delta_i + \sum_{p<h\leqslant m} a_{ih}\,\delta_h).(\delta_j + \sum_{p<k\leqslant m} a_{jk}\,\delta_k) - (\delta_j + \sum a_{jk}\delta_k).(\delta_i + \sum a_{ih}\delta_h)$$

$$= \sum_{p<h\leqslant m}(\delta_i a_{jh} - \delta_j a_{ih} + \sum_{p<k\leqslant m} a_{ih}\,\delta_h a_{jk} - a_{jh}\,\delta_h a_{ik})\,\delta_h \ .$$

Donc $\delta_i a_{jh} - \delta_j a_{ih} + \sum_{p<k\leqslant m}(a_{ih}\,\delta_h a_{jk} - a_{jh}\,\delta_h a_{ik}) = 0 \quad (1\leqslant i,j\leqslant p\ ,\ p<h\leqslant m$

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble dont les éléments sont $A_i = \delta_i y + \sum a_{ih}\,\delta_h y$.

On va montrer que $\mathcal{A}$ est un ensemble autoréduit cohérent .

Or il est clair que $\mathcal{A}$ est un ensemble autoréduit au sens de Rosenfeld . Il reste donc à montrer que $\mathcal{A}$ est cohérent .

Mais le séparant de A_i $(1\leqslant i\leqslant p)$ est égal à 1, et la plus petite dérivée commune à $\delta_i y$ et $\delta_j y$ est $\delta_i\delta_j y$. On a, par un simple calcul :

$$\delta_i A_j - \delta_j A_i = \sum_{p<h\leqslant m}(a_{jh}\,\delta_h A_i - a_{ih}\,\delta_h A_j)$$

Toute dérivée apparaissant dans le membre de droite est de rang plus petit que $\delta_i \delta_j y$ par rapport à δ_i et δ_j ; il en résulte que l'ensemble autoréduit $\mathcal{A}$ est cohérent .

Réciproquement, supposons que $\mathcal{A}$ soit autoréduit cohérent . Il faut montrer que $\{D_1, \ldots\ldots, D_p\}$ est une base commutative de $\mathcal{E}$.

$[D_1 , D_j]y$ est réduit par rapport à $\mathcal{A}$, car $\deg_{D_i y}(D_i . D_j y - D_j . D_i y) =$

$$\deg_{D_j y}(D_i . D_j y - D_j . D_i y) = 0$$

Or tout polynôme réduit par rapport à $\mathcal{A}$ est d'ordre 1 ou zéro car $\mathcal{A}$ est autoréduit cohérent . Comme l'ordre de $D_i . D_j y - D_j . D_i y$ est égal à 2 $(1 \leq i,j \leq p)$

cela implique que $[D_i , D_j] = 0$. D'où la réciproque . Le lemme est ainsi démontré .

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition 21 .

Supposons que $\mathcal{E}$ ait une base commutative . On a $Z([Dy]_{D \in \mathcal{E}}) = L$; alors l'idéal différentiel de définition de L est $[Dy]_{D \in \mathcal{E}}$ qui est un idéal différentiel linéaire, donc premier et, à fortiori, parfait. Donc la condition (1) est équivalente à celle que $\mathcal{E}$ a une base $D_1, \ldots\ldots, D_p$ avec $D_i = \delta_i + \sum_{p<h\leq m} a_{ih} \delta_h$ telle que les polynômes différentiels linéaires homogènes associés

$$A_i = D_i y = \delta_i y + \sum_{p<h\leq m} a_{ih} \delta_h y$$ forment un ensemble caractéristique

pour $[Dy]_{D \in \mathcal{E}}$.

Or si $A_1, \ldots\ldots, A_p$ forment un ensemble caractéristique , alors, puisque Dy est d'ordre 1, Dy est partiellement réduit par rapport à l'ensemble caractéristique ; donc Dy appartient à $(A_1,\ldots\ldots,A_p)$ l'idéal engendré par $A_1,\ldots\ldots,A_p$. Mais Dy est un polynôme linéaire homogène ;n on a $Dy = \sum_{1\leq i\leq p} u_i A_i$; d'où $D = \sum_{1\leq i\leq p} u_i D_i$. Il en résulte que D appartient à $\mathcal{E}$.

Réciproquement , supposons que tout élément D de $\mathcal{D}$ tel que $DL = 0$ soit élément de $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble caractéristique de $[Dy]_{D\in\mathcal{E}}$. On suppose que les éléments A_i de $\mathcal{A}$ sont de la forme $A_i = \delta_i y + \sum_{e<h\leq m} a_{ih}\,\delta_h y$, $(1\leq i\leq e)$ où $\delta_i y$ est le dominant de A_i (en réordonnant et en rangeant les opérateurs de dérivation δ appartenant à Δ si nécessaire). Les opérateurs de dérivation associés aux polynmes A_i, $D_i = \delta_i + \sum_{e<h\leq m} a_{ih}\,\delta_h$, $(1\leq i\leq e)$ s'annulent sur L, donc D_i appartient à $\mathcal{E}$ (par hypothèse) ; il est clair que les D_i $(i = 1,\ldots\ldots,e)$ forment une base de $\mathcal{E}$ et en particulier $(e = p)$. Il résulte Il résulte du lemme 4 que $\mathcal{E}$ a une base commutative puisque l'ensemble des polynômes différentiels linéaires homogènes associés aux D_i est autoréduit cohérent . D'où (1) implique (2)

Il en résulte que (1) est équivalent à (2)

Lorsque $\mathcal{E}$ vérifie les conditions de la proposition 21, on dit que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de Lie de $\mathcal{D}$.

Soit $\mathcal{E}$ un sous-espace de $\mathcal{D}$ vérifiant les conditions équivalentes de la proposition 21; soient S une base de $\mathcal{E}$ et L le corps des constantes de S, c'est-à-dire, $L = \bigcap_{D\in S} \operatorname{Ker} D$. Alors d'après le rappel 2 (§ 4 , Ch.IV) , I_S est un sous-ensemble différentiellement fermé de $(sl_n(U))^p$.

Soient $G = SL_n(U)$ et s et t deux éléments de G ; alors, il est facile de voir que :

$$Sl(st) = Sl(s) + s. Sl(t) .s^{-1} .$$

Il en résulte que la formule $(s,x) \longmapsto Sl(s) + s.x.s^{-1}$ définit une action de G sur I_S , faisant de I_S un espace homogène pour G .

Cette action s'appelle l'action de Lowy de G sur I_S .

Pour tout $x = Sl(t)$ élément de I_S, le stabilisateur de x dans G est le sous-groupe algébrique différentiel , noté G_x , de G formé de tous les éléments s de $SL_n(U)$ tels que

$$Sl(t) = x = Sl(s) + s.x.s^{-1}$$

c'est-à-dire, tels que $t^{-1}st$ appartienne à $SL_n(L)$. Donc

$$G_x = t . SL_n(L) .t^{-1}$$

2°) Sous-groupes algébriques différentiels denses de $SL_2(U)$: On rappelle les résultats suivants sans démonstration :

a) Il existe un sous-ensemble libre commutatif S de $\mathfrak{D}$ tel que la sous K-algèbre de Lie algébrique différentielle dense $\mathfrak{g}$ de $sl_n(U)$ est une algèbre de Lie de dimension finie $n^2 - 1$ sur L où L est le corps des constantes de S .

b) $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie du stabilisateur de Lowy G_x de $x = (x_1, \ldots, x_p)$.

c) Soit G un sous-groupe algébrique différentiel propre dense de $SL_n(U)$.

Alors, il existe un sous-ensemble fini S de $\mathfrak{D}$ tel que G soit conjugué à

$SL_n(L)$ où L est le corps des constantes de S .

D'autre part, $SL_n(L)$ est son propre normalisateur dans $SL_n(U)$.

II. Etude des sous-groupes algébriques différentiels de $SL_2(U)$:

- Si $S = \{D_1, \ldots\ldots, D_p\}$ est une base de $\mathcal{G}$, un élément D de $\mathcal{G}$ est dit rationnel sur F par rapport à la base S , si $D = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} a_i D_i$ entraîne

que les a_i appartiennent à F.

- On dit que $\mathcal{G}$ est défini sur F si $\mathcal{G}$ a une base et si tout élément de cette base est rationnel sur F par rapport à la base $\Delta = \{\delta_1, \ldots\ldots, \delta_m\}$ de $\mathcal{D}$.

L'ensemble de tous les éléments D de $\mathcal{G}$ qui sont rationnels sur F est noté par $\mathcal{G}_F$.

Avant de continuer, on va démontrer les lemmes ci-dessous qui seront utiles pour la suite .

Lemme 5 : Soit V un sous-ensemble différentiellement fermé de U^n défini sur F et soit P un polynôme différentiel de $F\{y_1, \ldots\ldots, y_n\}$. Si V contient un élément v de $(FK)^n$ tel que $P(v) \neq 0$, alors, V contient un élément v' de $(FC_a)^n$ tel que $P(v') \neq 0$ où C_a est la clôture algébrique de C .

Démonstration : Soit $\eta = (\eta_1, \ldots\ldots, \eta_r)$ un élément de K^r, et soient $f_1, \ldots\ldots, f_n$, g des polynômes homogènes de $F[X_1, \ldots\ldots, X_r]$ avec $g(\eta) \neq 0$.

Posons $v = \left(\frac{f_1(\eta)}{g(\eta)}, \dots\dots\dots, \frac{f_n(\eta)}{g(\eta)} \right)$; comme V est défini sur F,

il existe $P_1, \dots\dots, P_h$ dans $F\{y_1, \dots\dots, y_n\}$ tel que x appartenant à U^n est un élément de V si et seulement si $P_j(x) = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant h)$. En particulier

$P_j(v) = 0$.

Posons $P_0 = P$ et choisissons e élément de N tel que les polynômes

$$Q_j = g(X_1, \dots\dots, X_r)^e P_j\left(\frac{f_1(X_1, \dots, X_r)}{g(X_1, \dots, X_r)}, \dots\dots\dots, \frac{f_n(X_1, \dots\dots, X_r)}{g(X_1, \dots\dots, X_r)} \right)$$

appartiennent à $F[X_1, \dots\dots, X_r]$ $(0 \leqslant j \leqslant h)$. Il est clair que $Q_j(\eta) = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant h$ et $Q_0(\eta) \neq 0$.

Soit $\eta' = (\eta_1', \dots\dots, \eta_r')$ une spécialisation différentielle contrainte* de η sur F de polynôme contraint $Q_0 g$. Alors η' appartient à K_r^r et $F < \eta_1', \dots\dots, \eta_r' >$ a pour corps des constantes $C(\eta_1', \dots\dots, \eta_r')$ qui est algébrique sur C car η' est contraint sur F. Donc $\eta_1', \dots\dots, \eta_r'$ appartiennent à C_a. De plus, $Q_0(\eta')g(\eta') \neq 0$ et $Q_j(\eta') = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant h$ car η' est une spécialisation de η sur F.

Posons $v' = \left(\frac{f_1(\eta')}{g(\eta')}, \dots\dots, \frac{f_n(\eta')}{g(\eta')} \right)$. Il est clair que v' appartient à $(FC_a)^n$ puisque $\frac{f_j(\eta')}{g(\eta')}$ appartient à FC_a $(1 \leqslant j \leqslant h)$. D'autre part

$P_0(v') = P(v') \neq 0$ car sinon $Q_0(\eta')$ serait nul ; ce qui contredirait le fait que $Q_0(\eta')g(\eta')$ est différent de zéro. Mais $P_j(v') = 0$ pour $(1 \leqslant j \leqslant h)$

car $Q_j(\eta') = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant h$; alors $P_j\left(\frac{f_1(\eta')}{g(\eta')}, \dots\dots, \frac{f_n(\eta')}{g(\eta')}\right) = 0$,

c'est-à-dire, $P_j(v') = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant h)$. Ce qui démontre le lemme.

Corollaire : Soient v appartenant à $(FK)^n$ et P un polynôme différentiel de $F\{y_1, \dots\dots, y_n\}$ tel que $P(v) \neq 0$. Il existe une spécialisation différentielle v' de v sur F telle que v' appartienne à $(FC_a)^n$ et $P(v') \neq 0$.

Proposition 22 : Soit B un sous-groupe algébrique différentiel de G_a^n défini sur F. Si B est inclus dans $(FK)^n$, alors B (considéré comme un K-espace vectoriel) a une base finie dans F^n.

Démonstration : Soit $\eta = (\eta_1, \dots\dots, \eta_n)$ un point générique pour B sur F. Comme η appartient à $(FK)^n$, le corps différentiel $\mathcal{G} = F\langle\eta_1, \dots\dots, \eta_n\rangle$ est contenu dans FK. Donc, par la disjonction linéaire de F et de K sur C, $\mathcal{G} = FC'$ où C' est le corps des constantes de $\mathcal{G}$ (F et C' étant linéairement disjoints sur C). D'où C' est une extension de type fini sur C, car $\mathcal{G}$ l'est sur F. Le $\operatorname{degtr}_F \mathcal{G}$ est égal au $\operatorname{degtr}_C C'$ et est fini ; soit r ce degré de transcendance.

Soit W le sous-K-espace de B engendré par $B \cap F^n$. Alors $\dim W$ est inférieure ou égale à r. En effet, supposons le contraire et soient $v_1, \dots\dots, v_{r+1}$ $r+1$ éléments de $B \cap F^n$ linéairement indépendants sur K. Fixons $c_1, \dots\dots, c_{r+1}$ des éléments de K algébriquement indépendants sur C (et par conséquent sur F), et, pour $1 \leqslant i \leqslant r+1$, posons $v_i = (v_{i1}, \dots\dots, v_{in})$.

Soit $\eta'_k = \sum_{j=1}^{r+1} c_j v_{jk}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Alors $\eta' = (\eta'_1, \ldots\ldots, \eta'_n)$ est dans B, et donc η' est une spécialisation différentielle de η sur F, car η est un point de B sur F.

Si on pose $\mathcal{G}' = F\langle \eta'_1, \ldots\ldots, \eta'_n \rangle$, on a $\operatorname{degtr}_F \mathcal{G}' = \operatorname{degtr}_F \mathcal{G}$.

Comme les $v_1, \ldots\ldots, v_{r+1}$ sont linéairement indépendants sur K, il existe des opérateurs différentiels $\theta_1, \ldots\ldots, \theta_{r+1}$ éléments de $\overset{*}{\Theta}$ et des indices $k(1), \ldots\ldots, k(r+1)$ tels que $\det(\theta_i v_{jk(i)}) \neq 0$ avec $1 \leqslant i \leqslant r+1$ et $1 \leqslant j \leqslant r+1$.

Puisque $\theta_i \eta'_{k(i)} = \sum_{j=1}^{r+1} c_j \, \theta_i v_{jk(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant r+1)$, la règle de Cramer montre que le système

$$\begin{aligned} \theta_1 \eta'_{k(1)} &= \sum_{j=1}^{r+1} c_j \, \theta_1 v_{jk(1)} \\ &\vdots \\ \theta_{r+1} \eta'_{k(r+1)} &= \sum_{j=1}^{r+1} c_j \, \theta_{r+1} v_{jk(r+1)} \end{aligned}$$

admet une solution unique $(c_1, \ldots\ldots, c_{r+1})$ puisque son déterminant est différent de zéro ; comme chaque c_j est un quotient de deux éléments de $\mathcal{G}'$ (règle de Cramer), on a $c_1, \ldots\ldots, c_{r+1}$ appartienne à $\mathcal{G}'$. Il en résulte que $\operatorname{degtr}_F \mathcal{G}' \geqslant r+1 > r$ où $r = \operatorname{degtr}_F \mathcal{G}$; ce qui contredit le fait que $\operatorname{degtr}_F \mathcal{G}' \leqslant \operatorname{degtr}_F \mathcal{G}$. Donc $\dim W \leqslant r$.

Comme W est de dimension finie sur K, alors W est différentiellement fre fermé (Kolchin Ch. IV , prop. 2) . De plus W a une base composée d'éléments de F^n . Donc W est différentiellement F-fermé (Kolchin Ch. IV corol. 3)

Pour terminer la démonstration de la proposition , il suffira de montrer que W est différentiellement F-dense dans B .

Soit P un élément de $F\{y_1,\ldots\ldots,y_n\}$ tel que $P(v) \neq 0$ pour un certain v appartenant à B . Il faut trouver w élément de W tel que $P(w) \neq 0$. Comme v appartient à $(FK)^n$, le corollaire du lemme 5 montre qu'il existe une spécialisation différentielle w de v sur F telle que w appartienne à $(FC_a)^n$ et $P(w) \neq 0$. Ecrivons $w = \sum_{i=1}^{h} w_i d_i$ où les $d_1,\ldots\ldots,d_h$ sont dans C_a et linéairement indépendants sur C donc sur F, et les $w_1,\ldots\ldots,w_h$ dans F^n . Comme w est une spécialisation de v sur F et que $d_1,d_2,\ldots\ldots,d_h$ appartiennent à C_a , on a $w_1,\ldots\ldots,w_h$ appartenant à B, donc w appartient à W, car w appartient à $B \cap F^n$. Il en résulte que W est F-dense dans B. Comme W est de dimension finie sur K, $\bar{W}_B^d = B$ est aussi de dimension finie sur K . Donc B est de dimension finie sur K avec une base finie dans F^n .

<u>Lemme 6 :</u> Soit η un élément de F^n ($\eta \neq 0$) , et soit $\Delta l : U^* \longrightarrow G_a^m$ l'application dérivée logarithmique. Si η appartient à $\Delta l(FK)^*$, alors η appartient à $\Delta l(F^*)$.

<u>Démonstration :</u> Soit $\eta = (\eta_1,\ldots\ldots,\eta_m)$ et soit α élément de $(FK)^*$ tels que $\Delta l(\alpha) = \eta$, c'est-à-dire, $\delta l_i(\alpha) = \eta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. D'après le corollaire du lemme 5, il y a une spécialisation différentielle β de α sur F avec $\beta \neq 0$, et β appartient à FC_a . Posons $\beta = \sum_{j=1}^{r} \beta_j \varphi_j$ où $\varphi_1,\ldots,\varphi_r$ sont éléments de C_a et linéairement indépendants sur C donc sur F , et $\beta_1,\ldots,\beta_r$ appartiennent à F . Comme $\beta \neq 0$,

il y a un indice k tel que $\beta_K \neq 0$. Mais $\delta l_i(\alpha) = \eta_i$ implique

$\delta_i\alpha = \eta_i\alpha$, c'est-à-dire, $\delta_i\alpha - \eta_i\alpha = 0$. Donc $\delta_i\beta - \eta_i\beta = \sum(\delta_i\beta_j - \eta_i\beta_j)\psi_j = 0.$

Puisque les ψ_j ($1 \leqslant j \leqslant r$) sont linéairement indépendants sur F , on a

$\delta_i\beta_K - \eta_i\beta_K = 0$; ce qui implique que $\delta_i\beta_K = \eta_i\beta_K$, c'est-à-dire $\delta l_i(\beta_K) = \eta_i$

($1 \leqslant i \leqslant m$) . D'où η appartient à $\Delta l(F^*)$.

Lemme 7 : Soient η et Δl comme définis dans le lemme 6 et supposons de plus que F ait un corps des constances C algébriquement clos . Soit c un élément de K . Si $c\eta$ appartient à $\Delta l(FK)^*$, alors c appartient à F .

Démonstration : Supposons que c ne soit pas élément de F ; alors c est transcendant sur C . Mais , comme F et K sont linéairement disjoints sur C, c est aussi transcendant sur F. Puisque $c\eta$ appartient à $F(c)^* = F\langle c\rangle^*$, le lemme 6 montre qu'il existe b élément de $F(c)^*$ tel que $\Delta l(b) = c\eta$.
Posons $b = P(c)/Q(c)$ où P et Q appartiennet à $F\{X\}$ et $P(c)Q(c) \neq 0$.
Puisque $\eta \neq 0$, il existe un indice i tel que $\eta_i \neq 0$. Il résulte de la relation $\delta l_i(b) = c\eta_i$ que $Q(c)P^{\delta_i}(c) - P(c)Q^{\delta_i}(c) = cP(c)Q(c)$ où P^{δ_i} et Q^{δ_i} sont les polynômes obtenus en remplaçant les coefficients de P et Q par les δ_i- dérivées .
Donc le polynôme non nul $PQX - QP^{\delta_i} + PQ^{\delta_i}$ s'annule en c ; ce qui contredit le fait que c est transcendant sur F. On en déduit que c appartient à F.

<u>Proposition 23 :</u> Soit A un sous-groupe algébrique différentiel de U^* tel que $K^* \subset A \subset (FK)^*$ pour un certain sous-corps différentiel F de U sur lequel U est universel. Alors $A = K^*$.

<u>Démonstration :</u> Supposons qu'on ait $A \neq K^*$; alors, il existe un élément t de A tel que $\eta = \Delta l(t) = (\delta l_1(t), \ldots\ldots, \delta l_m(t)) \neq 0$.

Quitte à agrandir F si nécessaire, on peut supposer que t appartient à F et que le corps des constances C de F est algébriquement clos . On a K^* qui est inclus dans A et il existe un sous-groupe algébrique différentiel B de $\Delta l(U) = I$ tel qu'un élément s appartient à A si et seulement si $\Delta l(s)$ appartient à B . En particulier η appartient à B et donc $c\eta$ appartient à B pour tout c élément de K .

Soit s élément de U^* tel que $\Delta l(s) = c\eta$. Alors , s appartient à $A \subset (FK)$ et $c\eta$ appartient à $\Delta l(FK)^*$. D'après le lemme 7, c appartient à F pour tout c élément de K^*. Ce qui implique que K^* est inclus dans F . Ceci contredit le fait que U est universel sur F. Donc on a $A = K^*$.

Nous sommes maintenant en mesure de caractériser les sous-groupes algébriques différentiels de $SL_2(U)$.

Soient $\mathcal{E}$ un sous-espace vectoriel de Lie de $\mathcal{D}$ défini sur F et s appartenant à s $SL_n(U)$ tel que $Ds.s^{-1}$ appartienne à $sl_n(F)$ pour tout D appartenant à $\mathcal{E}$, où $sl_n(F)$ désigne l'ensemble des matrices d'ordre n de trace nulle.

Soit $L = \bigcap_{D \in \mathcal{E}} \operatorname{Ker} D$. Il est clair que L est un corps algébriquement clos.

Théorème 6 :

a) Soit $(\mathcal{G}, s)$ défini comme ci-dessus ; alors, le groupe $SL(\mathcal{G},s) = s.SL_n(L).s^{-1}$ est un sous-groupe algébrique différentiel dense de $SL_n(U)$ défini sur F.

b) Si H est un sous-groupe algébrique différentiel dense de $SL_n(U)$ défini sur F, alors il existe un couple $(\mathcal{G}, s)$ comme ci-dessus tel que $H = SL(\mathcal{G},s)$.

c) Si $(\mathcal{G}, s)$ et $(\mathcal{G}', s')$ sont deux couples comme ci-dessus, une condition nécessaire et suffisante pour que $SL(\mathcal{G},s)$ soit conjugué sur F à $SL(\mathcal{G}',s')$ est que $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$ et il existe z élément de $\mathbb{P}(F)$ tel que $s'^{-1}zs$ appartienne à $SL_n(L)$.

d) Soit $n = 2$. Si $(\mathcal{G}, s)$ est un couple comme ci-dessus, une condition nécessaire et suffisante pour que $SL(\mathcal{G},s)$ soit inclus dans $\mathbb{P}(FK)$ est que $\mathcal{G} = \mathcal{D}$ (donc $L = K$) et s appartienne à $\mathbb{P}(FK)$.
Si c'est le cas, $SL(\mathcal{G},s) = SL(\mathcal{D},s')$ pour un certain couple $(\mathcal{D},s')$ avec s' élément de $\mathbb{P}(FC_a)$.

Démonstration :

a) D'après les rappels du paragraphe 4, 2°, Ch. IV, $SL(\mathcal{G},s)$ est bien un sous-groupe algébrique différentiel dense de $SL_n(U)$. Il reste à montrer que $SL(\mathcal{G},s)$ est défini sur F.
Soit $S = \{D_1, \ldots\ldots, D_k\}$ une base commutative de $\mathcal{G}$ telle que pour tout i appartenant à $1,\ldots\ldots,k$ D_i soit rationnel sur F relativement à la base Δ de $\mathcal{D}$.
Soit $Sl : SL_n(U) \longrightarrow sl_n(U)^k$ la dérivée logarithmique définie par :

$$Sl(t) = (D_1t.t^{-1},\ldots\ldots,D_kt.t^{-1}),$$ t appartenant à $SL_n(U)$.

Alors $\mathrm{KerSl} = SL_n(L)$ où $L = \bigcap_{D \in S} \mathrm{KerD}$.

Un élément t de $SL_n(U)$ est dans $SL(\mathcal{E}, s) = s.SL_n(L).s^{-1}$ si et seulement si $s^{-1}ts$ appartienne à $SL_n(L)$, ou de façon équivalente

$$0 = \mathrm{Sl}(s^{-1}ts) = \mathrm{Sl}(s^{-1}t) + s^{-1}t.\mathrm{Sl}(s).t^{-1}s$$

$$= \mathrm{Sl}(s^{-1}) + s^{-1}.\mathrm{Sl}(t).s + s^{-1}t.\mathrm{Sl}(s).t^{-1}s$$

$$= - s^{-1}.\mathrm{Sl}(s).s + s^{-1}.\mathrm{Sl}(t).s + s^{-1}t.\mathrm{Sl}(s).t^{-1}s \ ;$$

ce qui donne : $\quad \mathrm{Sl}(s) = \mathrm{Sl}(t) + t.\mathrm{Sl}(s).t^{-1}$

$$= \mathrm{Sl}(t) + t.x.t^{-1} \quad \text{où } x = (x_1, \ldots\ldots, x_k) = \mathrm{Sl}(s)$$

appartient à $SL_n(F)^k$.

D'autre part cette relation donne : $\quad D_i t.t^{-1} + tx_i t^{-1} = x_i$

$$D_i t.t^{-1}t + tx_i t^{-1}t = x_i t$$

implique que $\quad D_i t + tx_i = x_i t$

D''où les équations qui définissent $SL(\mathcal{E},s)$ sont :

$$D_i y + yx_i - x_i y = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant k)$$

et

$$\det y - 1 = 0$$

Comme les x_i sont des matrices à coefficients dans F, il en résulte que $SL(\mathcal{E},s)$ est défini sur F. Ce qui démontre (a).

b) Les rappels du paragraphe 4, 2°, Ch. IV montre qu'il existe $\mathcal{E}$ contenu dans $\mathcal{D}$ tel que H soit conjugué à $SL_n(L)$ où $L = \bigcap_{D \in \mathcal{E}} \mathrm{KerD}$, c'est-à-dire qu'il existe s élément de $SL_n(U)$ tel que $H = s.SL_n(L).s^{-1}$.

Il reste à montrer que H est défini sur F. Pour cela on va démontrer deux choses :

1) $\mathcal{E}$ est rationnel sur F.

2) s est tel que $Ds.s^{-1}$ appartienne à $sl_n(F)$ pour tout D élément de $\mathcal{E}$.

Soit $(\mathcal{E}, s)$ tel que $H = SL(\mathcal{E}, s)$. On avait montré que $\mathcal{E}$ a une base commutative $\{D_1, \ldots\ldots, D_k\}$ telle que $D_i = \delta_i + \sum_{k < h \leqslant m} a_{ih}\delta_h \quad (1 \leqslant i \leqslant k)$,

où a_{ih} appartient à U. Soit $x_i = D_i s.s^{-1}$. On va, en fait, montrer que a_{ih} appartient à F et que chaque x_i appartient à $sl_n(F)$.

D'après la proposition 20, l'algèbre de Lie L(H) associée à H est une sous-K-algèbre de Lie algébrique différentielle dense de $sl_n(U)$ aussi définie sur F.

Soit $\mathfrak{A}$ l'idéal différentiel de définition de L(H) dans $U\{y\}$ où $y = (y_{pq})$ est une matrice d'ordre n d'indéterminées sur U.

Soit $\mathfrak{A}_F = \mathfrak{A} \cap F\{y\}$. Alors $\mathfrak{A} = U.\mathfrak{A}_F$.

D'après la démonstration de la proposition (40) [6 - p.951], l'idéal $\mathfrak{A}$ a une base caractéristique $\mathcal{A}$ formée de Tr(y) et des polynômes différentiels :

$$L_{ipq} = D_i y_{pq} + Tr(b_{ipq}) \qquad \text{où } b_{ipq} \text{ appartient à } sl_n(U),$$

$1 \leqslant i \leqslant k, \quad 1 \leqslant p \leqslant n, \quad 1 \leqslant q \leqslant n \quad$ et $(p,q) \neq (n,n)$.

Soient $A_i = D_i y - x_i y + yx_i$ et A_{ipq} = la (p,q)-ième coordonnée de A_i pour $1 \leqslant i \leqslant k$.

Puisque $A_i = 0$ $(1 \leq i \leq k)$ et $\det y = 1$ sont les équations de définition de H, on a, d'après la démonstration de la proposition (41) [6],

$$\mathfrak{a} = \left[\mathrm{Tr}(y), \quad (A_{ipq}) \qquad 1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq p, q \leq n\right].$$

On peut écrire $a_{ih} = \sum_{j=1}^{r} a_{ihj}\eta_j$ et $x_i = \sum x_{ij}\eta_j$ avec $1 \leq i \leq k$, $k < h \leq m$ où $\eta_1, \ldots\ldots, \eta_r$ appartenant à U sont linéairement indépendants sur F, $\eta_1 = 1$, a_{ihj} appartient à F et x_{ij} appartient à $gl_n(F)$.

Comme $\mathrm{Tr}x_i = 0$, d'après l'indépendance linéaire des $\eta_1, \ldots\ldots, \eta_r$, on a $\mathrm{Tr}(x_{ij}) = 0$.

Il résulte de l'écriture de a_{ih} et de x_i que :

$$A_i = D_i x_i - x_i y + y x_i$$

$$= \delta_i y + \sum a_{ih1}\delta_h y - x_{i1}y + yx_{i1} + \sum_{\substack{j=2 \\ k<h\leq m}}^{r} (a_{ihj}\delta_h y - x_{ij}y + yx_{ij})\eta_j$$

Puisque A_{ipq} appartient à $\mathfrak{a} = U.\mathfrak{a}_F$, l'indépendance linéaire de $\eta_1, \ldots\ldots, \eta_r$ montre que, pour tous (i,j,p,q) avec $1 \leq i \leq k$, $2 \leq j \leq r$, $1 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq n$, les polynômes différentiels :

$$A_{ipq} = \delta_i y_{pq} + \sum a_{ih1}\delta_h y_{pq} - x_{i1}y_{pq} + y_{pq}x_{i1} \quad \text{et}$$

$$A'_{ijpq} = \sum a_{ihj}\delta_h y_{pq} - x_{ij}y_{pq} + y_{pq}x_{ij} \quad \text{sont des éléments}$$

de $\mathfrak{a}_F$.

S'il existe des indices i', j', h' tels que $j' \geq 2$ et $a_{i'h'j'} \neq 0$, alors pour $p \neq q$, $A'_{i'j'pq}$ serait un polynôme différentiel non nul , réduit par rapport à $\mathcal{A}$. Ce qui contredit le fait que $\mathcal{A}$ est un ensemble caractéristique de $\mathfrak{a}$.

Il en résulte que $a_{ihj} = 0$, pour tout (i,j,h) avec $j \geqslant 2$. D'où

$a_{ih} = \sum_{j=1}^{r} a_{ihj} \eta_j = a_{ih1}$ appartient à F . Donc les a_{ih} appartiennent à F, $A'_{ijpq} = - x_{ij}y_{pq} + y_{pq}x_{ij}$ appartient à $\mathfrak{a}$ pour $j \geqslant 2$.

Pour s appartenant à $L(H)$ on a $A'_{ijpq}(s) = 0$; ce qui donne $x_{ij}s = sx_{ij}$

et par conséquent, quel que soit s appartenant à $gl_n(U) = U.L(H)$ (prop. 20), $x_{ij}s = sx_{ij}$ et donc aussi pour tout s appartenant à $gl_n(U) = sl_n(U) + U.I_n$.

Donc la matrice x_{ij} commute avec tous les éléments de $gl_n(U)$.

Il en résulte que x_{ij} est une matrice scalaire , c'est-à-dire, il existe λ élément de U tel que $x_{ij} = \lambda .I_n$. Or $Tr(x_{ij}) = 0 = \lambda . Tr(I_n) = \lambda .n$; on en déduit que $\lambda = 0$ car $n \neq 0$.

Ce qui implique que $x_{ij} = 0$ pour $j \geqslant 2$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

D'où $x_i = \sum_{j=1}^{r} x_{ij} \eta_j = x_{i1}$ appartient à $sl_n(F)$. Ce qui démontre le (b) .

c) Soient (ξ , s) et (ξ', s') deux couples comme définis dans le théorème. La condition suffisante est évidente . Il reste à montrer la condition nécessaire. Supposons que $H = SL(\xi , s)$ et $H' = SL(\xi', s')$ soient conjugués sur F .

On va montrer que $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ et qu'ilexiste z élément de $\mathbb{P}(F)$ tel que $s'^{-1}zs$ appartienne à $SL_n(L)$.

Comme H et H' sont conjugués sur F , il existe z appartenant à $\mathbb{P}(F)$ tel que $zHz^{-1} = H'$. Or $H = s.SL_n(L).s^{-1}$ et $H' = s'.SL_n(L').s'^{-1}$;

on en déduit que $SL_n(L)$ et $SL_n(L')$ sont conjugués sur F .

Si a appartient à L^* , la matrice diagonale (a_{ij}) avec $a_{11} = a$, $a_{ii} = 1$

$(1 < i < n)$, $a_{nn} = a^{-1}$ et $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ est semblable à

une matrice de $SL_n(L')$.

Puisque deux matrices semblables ont le même ensemble de valeurs et puisque L' est algébriquement clos , il en résulte que a appartient à L' ; donc L est inclus dans L' . De la même façon , on montre que L' est inclus dans L . D'où $L = L'$ où $L = \bigcap_{D \in \mathcal{E}} \mathrm{Ker} D$ et $L' = \bigcap_{D' \in \mathcal{E}'} \mathrm{Ker} D'$. On en déduit

que $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ (d'après la proposition 21).

D'autre part, $s'^{-1}zs$ normalise $SL_n(L) = SL_n(L')$. Comme $SL_n(L)$ est

son propre normalisateur dans $SL_n(U)$, il en résulte que $s'^{-1}zs$ appartient

à $SL_n(L)$. Ce qui démontre le (c) .

d) La condition suffisante est évidente .

Soit ($\mathcal{E}$, s) un couple tel que $\mathcal{E}$ soit un sous-espace vectoriel de Lie de $\mathcal{D}$ défini sur F et s un élément de $SL_2(U)$ avec $Ds.s^{-1}$ appartenant à $sl_2(F)$ pour tout D élément de $\mathcal{E}$. Supposons que $H = SL(\mathcal{E}, s)$

soit inclus dans $\mathbb{P}(FK)$. On va montrer que $\mathcal{E} = \mathcal{D}$, c'est-à-dire $L = K$ où $L = \bigcap_{D \in \mathcal{E}} \mathrm{KerD}$ et $K = \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \mathrm{KerD}$ et s appartenant à $SL_2(FK)$.

Remarquons qu'une matrice w appartient à $SL_2(U)$ avec $Tr(w)$ appartenant à $(FK)^*$ est un élément de $\mathbb{P}(FK)$ si et seulement si w appartient à $SL_2(FK)$.

Considérons les matrices sw_is^{-1} (i = 1, 2, 3) dans $H = s.SL_2(L).s^{-1}$

où $w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

forment une base de $SL_2(U)$.

Soit $s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $ad - bc = 1$. Un calcul simple donne

$s^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Mais $sw_1s^{-1} = \begin{pmatrix} ad - bc - ac & a^2 \\ -c^2 & ad - bc + ac \end{pmatrix}$ de trace $2 \neq 0$

appartient à $(FK)^*$.

En vertu de la remarque faite ci-dessus, sw_1s^{-1} appartient à $SL_2(FK)$.

Il en résulte que a, b, c, d appartiennent à FK . D'où s appartient à $SL_2(FK)$ et d'où s est un élément de $\mathbb{P}(FK)$.

Donc, puisque s appartient à $\mathbb{P}(FK)$, $H = s.SL_2(L).s^{-1}$ implique que $SL_2(L) = s^{-1} H s$ est inclus dans $\mathbb{P}(FK)$.

D'autre part, comme L est algébriquement clos et que tout élément de L est un carré dans L, on a L inclus dans FK . Comme L peut être considéré comme un sous-groupe algébrique différentiel de G_a, d'après la proposition 22, L (comme espace vectoriel sur K) a une base dans F, donc $[L : K]$ est fini ; ce qui implique que $L = K$ car L et K sont des corps algébriquement clos.
La proposition 21 montre que $\mathcal{E} = \mathcal{D}$.
Il reste à montrer qu'ilexiste s' élément de $\mathbb{P}(FC_a)$ tel que $SL_2(\mathcal{E}, s) = SL_2(\mathcal{D}, s')$.
Pour cela, soit u élément de U^* tel que la matrice $t = su$ appartienne à $GL_2(FK)$.
D'après l'hypothèse sur s et du fait que $\mathcal{E} = \mathcal{D}$, les matrices $x_i = \delta l_i(s)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ sont des éléments de $sl_2(F)$. On a :

$$\begin{aligned}\delta l_i(t) &= \delta l_i(s) + s.\, \delta l_i(uI_2).s^{-1}\\ &= \delta l_i(s) + \delta l_i(uI_2).ss^{-1}\\ &= \delta l_i(s) + \delta l_i(uI_2)\\ &= x_i + \frac{1}{2}\, \delta l_i(\text{détt})I_2)\end{aligned}$$

où I_2 est la matrice identité .

D'après le corollaire du lemme 5, il existe t' élément de $GL_2(FC_a)$ tel que

$$\delta l_i(t') = x_i + \frac{1}{2}\, \delta l_i(\,(\text{détt}')I_2)\ .$$

Fixons v élément de U^* tel que $v^2 = \text{détt}'$ et posons $s' = v^{-1}t'$.
Alors s' appartient à $\mathbb{P}(FC_a)$ et :

$$\delta l_i(s') = \delta l_i(v^{-1}t') = \delta l_i(v^{-1}I_2) + v^{-1}.\delta l_i(t').v$$

$$= -\frac{1}{2}\, v^{-1}\, \delta l_i(\,(\text{détt}')I_2)v + x_i + \frac{1}{2}\, v^{-1}\, \delta l_i(\,(\text{détt}')I_2).v$$

$$= x_i \text{ élément de } sl_2(F) \qquad (1 \leqslant i \leqslant m)\ .$$

Donc $SL(\mathcal{P}, s')$ est bien défini . Par ailleurs,

$$\delta l_i(s'^{-1}s) = \delta l_i(s'^{-1}) + s'^{-1}.\delta l_i(s).s'$$

$$= - s'^{-1}.\delta l_i(s').s' + s'^{-1}.\delta l_i(s).s'$$

$$= - s'^{-1}x_i s' + s'^{-1}x_i s'$$

$$= 0$$

Donc $s'^{-1}s$ appartient à $SL_2(K)$. D'où $SL(\mathcal{P}, s) = SL(\mathcal{P}, s')$; on prend $z = I_2$. Ce qui achève la partie (d). D'où le théorème 6 .

Remarque 18 : En général, dans la partie (d), on ne peut choisir s' appartenant à $\mathbb{P}(F)$; c'est-à-dire que $SL(\mathcal{P}, s)$ n'est pas en général conjugué sur F à $SL_2(K)$. En effet, la partie (c) montre que, pour tout s appartenant à $SL_2(U)$ avec $\delta_i s.s^{-1}$ élément de $sl_2(F)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, le groupe $SL(\mathcal{P}, s)$ est conjugué sur F au groupe $SL(\mathcal{P}, 1) = SL_2(K)$ si et seulement s'il existe z appartenant à $\mathbb{P}(F)$ et c appartenant à $SL_2(K)$ tels que $s = zc$.

Théorème 7 : Soient un sous-groupe algébrique différentiel de G_a^n défini sur F et $\wp$ inclus dans $U\{y_1, \ldots\ldots, y_n\}$ l'idéal différentiel linéaire correspondant .

a) L'ensemble K( ) de tous les éléments a de U tels que a soit inclus dans est le corps des constantes d'un sous-espace vectoriel de Lie de défini sur F .

b) Relativement à un ordre de rangement, $\wp$ a un ensemble caractéristique B inclus dans $F\{y_1, \ldots, y_n\}_1$ tel que $L(ay_1, \ldots, ay_n) = aL(y_1, \ldots, y_n)$

où L appartient à B et a appartient à K( ) .

Ensemble caractéristique canonique d'un idéal différentiel linéaire :

Soit $\wp$ un idéal différentiel linéaire dans $U\{y_1, \ldots\ldots, y_n\}$ et soit $L_\wp$ l'ensemble de toutes les dérivées θy_i ($1 \leqslant i \leqslant n, \theta \in \Theta$) telles qu'il existe un polynôme différentiel linéaire homogène L appartenant à $\wp$ ayant θy_i comme dominant . Si u appartient à $L_\wp$, il existe un polynôme différentiel linéaire homogène L_u appartenant à $\wp$ de la forme $u + \sum a_{uu'} u'$ où $a_{uu'}$ appartient à U et où la sommation est prise sur toutes les dérivées u' telles que u' ne soit pas élément de $L_\wp$ et u' de rang plus petit que u .

Si $\wp$ est défini sur F, alors l'unicité de L_u montre que L_u appartient à $F\{y_1, \ldots\ldots, y_n\}$ pour tout u élément de $L_\wp$. D'après la proposition 17 , $\wp$ a un ensemble caractéristique constitué des polynômes différentiels de la forme $u + \sum_{u' \notin L_\wp} a_{uu'} u'$ appelé l'ensemble caractéristique canonique de $\wp$.

Proposition 24 : Soit R un sous-groupe algébrique différentiel infini de G_a défini sur F qui est un sous-anneau de U . Alors il existe un sous-espace vectoriel de Lie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{D}$ défini sur F tel que $R = \bigcap_{D \in \mathcal{E}} \operatorname{Ker} D$.

Démonstration : Soit $\wp$ inclus dans $U\{y\}$ l'idéal différentiel linéaire de définition de R . Alors $\wp$ est défini sur F . Soit B contenu dans $U\{y\}_1$ l'ensemble caractéristique canonique de $\wp$, et soit $A = \theta y + \sum a_{\theta'} \theta' y$

un élément de B . Alors $a_{\theta'}$ appartient à F pour θ' appartenant à Θ avec $\theta' y$ n'appartenant pas à $L_{\wp}$ et de rang plus petit que θy . Comme R est un anneau infini, $\theta \neq 1$.

Soit δ élément de Δ tel que δ / θ . Alors, si $\theta = \theta_0 \delta$, δy appartient à $L_{\wp}$.

En effet, pour tous t et s éléments de R, ts appartient à R et A(ts) = 0.

Ce qui implique que A(ts) appartient à $\wp$. On a :

$$A(ts) = t\theta y + \left[\binom{\theta}{\theta_0}\delta t + \sum a_{\theta'}\binom{\theta'}{\theta_0}\delta' t + a_{\theta_0} t\right]\theta_0 y + \sum c_{\theta''}\theta'' y \qquad \text{où}$$

$\binom{\theta}{\theta_0}$, $\binom{\theta'}{\theta_0}$ sont des entiers et c appartient ; la première sommation est prise sur les θ' éléments de Θ tels que $\theta' y$ n'appartienne pas à $L_{\wp}$, de rang plus petit que θ y et il existe δ' appartenant à Δ avec $\theta' = \delta' \theta_0$; la deuxième sommation est prise sur θ'' appartenant à Θ avec $\theta'' \neq \theta_0$, $\theta'' y$ n'appartenant pas à $L_{\wp}$ de rang plus petit que θy . D'après l'unicité de l'écriture de L_u ci-dessus, on a $A(ty) = t(A(y))$ et :

$$\binom{\theta}{\theta_0}\delta t + \sum a_{\theta'}\binom{\theta'}{\theta_0}\delta' t = 0 \text{ . Il en résulte que } \binom{\theta}{\theta_0}\delta y + \sum a_{\theta'}\binom{\theta'}{\theta_0}\delta' y$$

appartient à $\wp$; donc δy appartient à $L_{\wp}$.

Soit alors Δ_R l'ensemble des δ appartenant à Δ tels que δ / θ pour θ élément de Θ et tel que θy soit le dominant d'un élément A de B .

Pour convenance de la notation, on pose $\Delta_R = \{\delta_1, \ldots\ldots\ldots, \delta_k\}\ 1 \leq k \leq m$.

D'après ci-dessus, $\delta_i y$ appartient à $L_{\wp}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ et si $L_i = L_{\delta_i y}$, alors, $L_1, \ldots, L_k$ forment un ensemble autoréduit dans $\wp$ dont le rang n'est pas plus grand que celui de B ; donc $\{L_1, \ldots, L_k\}$ est un ensemble caractéristique de $\wp$. A cause de l'unicité de l'ensemble caractéristique canonique, on a $B = \{L_1, \ldots, L_k\}$.

On voit que pour δ élément de Δ, δy appartient à $L_{\wp}$ si et seulement si δ appartient à Δ_R ; donc les éléments L_i peuvent s'écrire :

$L_i = \delta_i y + \sum a_{ih} \delta_h y$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ et a_{ih} élément de F puisque $\wp$ est défini sur F.

Posons $D_i = \delta_i + \sum\limits_{k < h \leqslant m} a_{ih} \delta h$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Comme $D_1 y, \ldots, D_k y$ forment un ensemble autoréduit cohérent, $D_1, \ldots, D_k$ forment un ensemble commutatif des opérateurs de dérivation (Lemme 4).

Soit alors $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de Lie de $\mathcal{D}$ engendré par $D_1, \ldots, D_k$.

Il est clair que $\bigcap\limits_{D \in \mathcal{E}} \operatorname{Ker} D = K(\mathcal{E}) = R$. Ce qui achève la démonstration de la proposition.

<u>Corollaire 1 :</u> Soit R défini comme dans la proposition 24 ; alors R est un sous-corps de U algébriquement clos.

<u>Corollaire 2 :</u> L'application qui à $\mathcal{E}$ associe $L = \bigcap\limits_{D \in \mathcal{E}} \operatorname{Ker} D$ définit une bijection entre l'ensemble des sous-espaces vectoriels de Lie de $\mathcal{D}$ définis sur F et l'ensemble des sous-groupes algébriques différentiels infinis de G_a définis sur F et qui sont des sous-corps de U.

Démonstration : L'injection résulte de la proposition 21 et la surjection résulte de la proposition 24 .

Démonstration du théorème 7 : Soient $\mathbb{B}$, $\wp$, K($\mathbb{B}$) comme définis dans l'énoncé du théorème .

Soit B contenu dans $F\{y_1,\ldots\ldots,y_n\}_1$ l'ensemble caractéristique canonique de $\wp$. Comme K($\mathbb{B}$) est l'ensemble des t éléments de U tels que t$\mathbb{B}$ soit contnu dans $\mathbb{B}$, et puisque $\wp = [B]$ (critère de Rosenfeld et prop. 7) , on a t élément de K($\mathbb{B}$) si et seulement si $L(ty_1,\ldots\ldots,ty_n)$ appartienne à $\wp$, pour tout L élément de B .

Ecrivons L sous la forme $L = u + \sum a_v v$ où u est le dominant de L, a_v appartenant à F et v une dérivée de la forme θy_i de rang plus petit que celui de u et n'appartenant pas à $L_\wp$.

On a, pour tout t élément de K($\mathbb{B}$) , $L(ty_1,\ldots\ldots,ty_n) = tu + \sum c_v v$ où c_v appartient à U et où v est une dérivée de rang plus petit que celui de u , n'appartenant pas à $L_\wp$.

D'après l'unicité de l'écriture de L, $L(ty_1,\ldots\ldots,ty_n)$ appartient à $\wp$ si et seulement si $L(ty_1,\ldots\ldots,ty_n) = t\,L(y_1,\ldots\ldots,y_n)$. Ceci démontre le (b) et montre aussi que K($\mathbb{B}$) est algébriquement clos et défini sur F. Comme K($\mathbb{B}$) est un sous-groupe et un sous-anneau de G_a et K($\mathbb{B}$) contient K, alors la proposition 24 montre que K($\mathbb{B}$) est le corps des constantes d'un sous-espace vectoriel unique de Lie de $\mathcal{D}$ défini sur F. Ceci démontre le (a), et d'où la démonstration du théorème 7 .

Remarque 19 : On vient de montrer en fait que l'ensemble caractéristique canonique B de $\wp$ a la propriété suivante :

$L(ty_1,\ldots\ldots,ty_n) = tL(y_1,\ldots\ldots,y_n)$ pour tout t élément de $K(\mathbb{B})$ et tout L élément de B.

Nous allons maintenant étudier les sous-groupes algébriques différentiels de $ST_2(U)$ et de $U_2^n(U)$ définis sur F.

Soient $\mathbb{B}$ un sous-groupe algébrique différentiel de G_a défini sur F, $\mathcal{A}$ un sous-groupe algébrique différentiel de $K(\mathbb{B})^*$ défini sur F (par exemple, si $\mathcal{A}$ est un sous-groupe quelconque fini de U, $\mathcal{A} = \mathbb{P}_n$ le groupe des racines n-ième de l'unité) et enfin soit β élément de U ayant la propriété que l'élément $\beta + \mathbb{B}$ appartenant à $G_a/\mathbb{B}$ est rationnel sur F, c'est-à-dire que $L(\beta)$ appartient à F pour tout L élément de $F\{y\}_1$ s'annulant sur $\mathbb{B}$ (ou de façon équivalente pour tout L élément de B, B désignant un ensemble caractéristique dans $F\{y\}_1$ de l'idéal différentiel linéaire $\wp$ correspondant à $\mathbb{B}$ comme défini dans le théorème 7.

Alors pour un triplet $(\mathbb{B}, \mathcal{A}, \beta)$ comme défini ci-dessus, on définit

$$ST(\mathbb{B}, \mathcal{A}, \beta) = \left\{ \begin{pmatrix} a & (a-a^{-1})\beta + b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \;/\; a \in \mathcal{A}, \; b \in \mathbb{B} \right\}.$$

<u>Théorème 8 :</u>

a) Si $(\mathbb{B}, \mathcal{A}, \beta)$ est un triplet comme défini ci-dessus, alors $ST(\mathbb{B}, \mathcal{A}, \beta)$ est un sous-groupe algébrique différentiel de $ST_2(U)$ défini sur F. De plus

$$ST(\mathbb{B}, \mathcal{A}, \beta) = ST(\mathbb{B}, 1, 0) \,.\, ST(0, \mathcal{A}, \beta).$$

b) Si H est un sous-groupe algébrique différentiel de $ST_2(U)$ défini sur F, alors, il existe un triplet $(\mathbb{B}, \mathcal{A}, \beta)$ comme ci-dessus tel que $H = ST(\mathbb{B}, \mathcal{A}, \beta)$.

c) Si $(\mathbb{B}, \mathcal{A}, \beta)$ et $(\mathbb{B}', \mathcal{A}', \beta')$ sont deux triplets comme ci-dessus, une condition nécessaire et suffisante pour que $ST(\mathbb{B}, \mathcal{A}, \beta)$ soit conjugué sur F à $ST(\mathbb{B}', \mathcal{A}', \beta')$ est que $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ et il existe f élément de F^* tel que $f\mathbb{B} = \mathbb{B}'$ et $(f\beta - \beta' + \mathbb{B}') \cap F \neq \emptyset$.

d) Si $(\mathbb{B}, \mathcal{A}, \beta)$ est un triplet comme ci-dessus, une condition nécessaire et suffisante pour que $ST(\mathbb{B}, \mathcal{A}, \beta)$ soit projectivement rationnel sur FK est que $(\beta + \mathbb{B}) \cap F \neq \emptyset$, ou bien $\mathcal{A} = K^*$ ou bien $\mathcal{A} = \mathbb{P}_n$, et $\mathbb{B}$ a (comme espace vectoriel sur K) une base finie dans F. Lorsque c'est le cas, $ST(\mathbb{B}, \mathcal{A}, \beta)$ est conjugué sur F à $ST(\mathbb{B}, K^*, \beta)$ ou à $ST(\mathbb{B}, \mathbb{P}_n, 0)$.

Démonstration :

a) Soit $(\mathbb{B}, \mathcal{A}, \beta)$ un triplet ; puisque $\mathcal{A}$ est contenu dans $K(\mathbb{B})^*$, il est clair que $ST(\mathbb{B}, \mathcal{A}, \beta)$ est un sous-groupe algébrique différentiel de $SL_2(U)$, donc un sous-groupe de $ST_2(U)$. On va montrer qu'il est défini sur F.

Soit $B = \{L_1, \ldots\ldots, L_r\}$ contenu dans $F\{y_1, \ldots\ldots, y_n\}_1$ l'ensemble caractéristique canonique de l'idéal de définition $\wp$ de $\mathbb{B}$.

D'après la remarque 19, on a, pour toute matrice $x = \begin{pmatrix} a & b' \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$,

$$x \in ST(\mathbb{B}, \mathcal{A}, \beta) \iff a \in \mathcal{A}, \text{ et } b' = (a - a^{-1})\beta + b \text{ pour un certain } b \in \mathbb{B}$$

$$\iff a \in \mathcal{A}, \text{ et } L_i(b') - (a - a^{-1})L_i(\beta) = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

Par hypothèse, $L_i(\beta)$ appartient à F et $\mathcal{A}$ est défini sur F. Il en résulte que $ST(\mathbb{B}, \mathcal{A}, \beta)$ est un sous-groupe algébrique différentiel de $ST_2(U)$ défini sur F.

D'autre part, $ST(0, \mathcal{A}, \beta)$ et $ST(\mathbb{B}, 1, 0)$ sont clairement des sous-groupes algébriques différentiels de $ST(\mathbb{B}, \mathcal{A}, \beta)$ et $ST(0, \mathcal{A}, \beta)$ normalise $ST(\mathbb{B}, 1, 0)$ dans $ST(\mathbb{B}, \mathcal{A}, \beta)$. En effet, quel que soit x élément de

$ST(0\,,\mathcal{A},\beta)$ avec $x = \begin{pmatrix} a & (a-a^{-1})\beta \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, alors $x^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -(a-a^{-1})\beta \\ 0 & a \end{pmatrix}$;

on a pour toute matrice $x' = \begin{pmatrix} 1 & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec a élément de $\mathcal{A}$

$(\mathcal{A} \subset K(\mathbb{B}^{*}))$, donc ab appartient à $\mathbb{B}$, pour b élément de $\mathbb{B}$,

$$xx'x^{-1} = \begin{pmatrix} a & (a-a^{-1})\beta \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & -(a-a^{-1})\beta \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a^3b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un élément de $ST(\mathbb{B}\,,1,0)$. Par ailleurs, pour toute matrice $x = \begin{pmatrix} 1 & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

appartenant à $ST(\mathbb{B}\,,1\,,0)$ et pour toute matrice $x' = \begin{pmatrix} a & (a-a^{-1})\beta \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$

élément de $ST(0,\mathcal{A},\beta)$, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & (a-a^{-1})\beta \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & (a-a^{-1})\beta + b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} .$$

Il résulte de l'équation: $\begin{pmatrix} a & (a-a^{-1})\beta + b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & (a-a^{-1})\beta \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$

et du fait que $\mathcal{A}$ soit inclus dans $K(\mathbb{B}\;)^{*}$ que le produit semi-direct

$ST(\mathbb{B}\,,1\,,0).ST(0\,,\mathcal{A},\beta) = ST(\mathbb{B}\,,\mathcal{A},\beta)$.

D'où la démonstration du (a) .

b) Soit H un sous-groupe algébrique différentiel de $ST_2(U)$ défini sur F .

Il faut trouver un triplet $(\mathbb{B}\,,\mathcal{A}\,,\beta)$ défini comme ci-dessus tel que

$H = ST(\mathbb{B}\,,\mathcal{A},\beta)$.

Soit p la projection de $ST_2(U)$ dans U^* qui à x appartenant à $ST_2(U)$, associe

$p(x) = a$ si $x = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. Il est clair que p est un homomorphisme

rationnel surjectif défini sur le corps premier .

$$\mathrm{Kerp} = \left\{ x \in ST_2(U) \ / \ p(x) = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \ b \in U \right\} \quad \text{et}$$

on a , pour toute matrice x appartenant à Kerp avec $x = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc Kerp est égal à $U_2^1(U)$ le groupe des matrices unipotentes dans $SL_2(U)$.

Soit $p/_H$ la restriction de p à H, c'est-à-dire, $p/_H : H \longrightarrow U^*$ est un homomorphisme rationnel différentiel de noyau $\mathrm{Kerp} \cap H$, c'est-à-dire , $U_2^1 \cap H$. Il en résulte que $U_2^1 \cap H$ est un sous-groupe algébrique différentiel de H contenu dans $U_2^1(U)$ et défini sur F . Or $U_2^1(U)$ est isomorphe à G_a ; donc il existe un sous-groupe algébrique différentiel $\mathbb{B}$ de G_a défini sur F tel que $U_2^1(U) \cap H = ST(\mathbb{B}, 1, 0)$.

L'image p(H) de $p/_H$ est un sous-groupe algébrique différentiel $\mathcal{A}$ de U^* défini sur F.

Si $\mathcal{A} = 1$ ou si $\mathcal{A} = \mathbb{F}_2$, la démonstration est immédiate.

On va donc supposer que $\mathcal{A}$ a plus de deux éléments.

Faisons remarquer que si $\mathcal{A}$ est infini , alors il y a un sous-groupe algébrique différentiel $\mathbb{B}'$ de G_a^m tel que , pour tout a élément de U^* , a appartient à $\mathcal{A}$ si et seulement si $\Delta l(a)$ appartient à $\mathbb{B}'$. En particulier K^* est inclus dans $\mathcal{A}$ et pour tout a élément de U^*, a^n appartient à $\mathcal{A}$ si et seulement si a appartient à $\mathcal{A}$ ($a^n \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \Delta 1(a^n) = n\, \Delta 1(a) \in \mathbb{B}' \Longleftrightarrow \Delta 1(a) \in \mathbb{B}'$).

On va montrer que $\mathcal{A}$ est inclus dans $K(\mathbb{B})^*$.

Si $\mathcal{A} = \mathbb{P}_n$, pour tout α élément de $\mathbb{P}_n$, $\alpha^n = 1 \Rightarrow \Delta 1(\alpha^n) = 0 \Rightarrow \Delta 1(\alpha) = 0$; d'où α appartient à K^*. Donc : $\alpha \in K(\mathbb{B})^* \Rightarrow \mathcal{A} \subset K(\mathbb{B})^*$.

Supposons que $\mathcal{A}$ soit infini . Soit a élément de $\mathcal{A}$ et fixons b appartenant à $\mathcal{A}$ avec $b^2 = a$. Pour un certain c appartenant à U, la matrice $\begin{pmatrix} b & c \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$ appartient à H . Il en résulte que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à H pour tout q élément de $\mathbb{B}$.

Donc la matrice $\begin{pmatrix} 1 & b^2q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}^{-1} =$

$\begin{pmatrix} b & c \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{-1} & -c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ appartient à H.

D'où $aq = b^2q$ appartient à $\mathbb{B}$, c'est-à-dire, $a\mathbb{B}$ est inclus dans $\mathbb{B}$.

Donc $\mathcal{A} \subset K(\mathbb{B})^*$.

Pour tout a élément de $\mathcal{A}$, soit Γ_a l'ensemble de tous les éléments b de U tels que $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ appartienne à H . Il est clair que Γ_a est non vide ; fixons un élément α_a de Γ_a. Si b est un élément quelconque de U, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & ab - a\alpha_a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \alpha_a \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$; comme

$\begin{pmatrix} a & \alpha_a \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ appartient à H , alors b appartient à Γ_a , c'est-à-dire

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ appartient à H si et seulement si $\begin{pmatrix} 1 & ab - a\alpha_a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à H , c'est-à-dire , si et seulement si $ab - a\alpha_a = a(b - \alpha_a)$ appartient à $\mathcal{B}$.

Puisque a est élément de $K(\mathcal{B})^*$, Γ_a est la classe $\alpha_a + \mathcal{B}$ de $\mathcal{B}$ dans G_a .

On fixe c élément de $\mathcal{A}$ avec $c^2 \neq 1$; posons $\beta = c(c^2 - 1)^{-1}\alpha_c$.

Quel que soit a élément de $\mathcal{A}$,

$$\begin{pmatrix} c & \alpha_c \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \alpha_a \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & \alpha_c \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & \alpha_a \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c\alpha_c - a\alpha_a + c^2a\alpha_a - a^2c\alpha_c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ est dans H . Donc

$$c\alpha_c - a\alpha_a + c^2a\alpha_a - a^2c\alpha_c = (1 - a^2)c\alpha_c - (1 - c^2)a\alpha_a$$

appartient à $\mathcal{B}$.

Etant donné que $K^* \subset \mathcal{A} \subset K(\mathcal{B})^*$, $(1 - c^2)\ a \in K(\mathcal{B})$, on a

$(c^2 - 1)\beta = c\alpha_c \qquad -(1 - c^2)\beta = c\alpha_c$ et

$(1 - a^2)c\alpha_c - (1 - c^2)a\alpha_a = (a^2 - 1)(1 - c^2)\beta - (1 - c^2)\,a\alpha_a =$

$(1 - c^2)\left[(a^2 - 1)\beta - a\alpha_a\right] = (1 - c^2)\left[(a^2 - aa^{-1})\beta - a\alpha_a\right] =$

$(1 - c^2)\,a((a - a^{-1})\beta - \alpha_a)$ est un élément de $\mathcal{B}$; donc $(a - a^{-1})\beta - \alpha_a$

appartient à $\mathcal{B}$. Il en résulte que $(a - a^{-1})\beta$ est dans $\alpha_a + \mathcal{B} = \Gamma_a$.

D'où ST(0 , ,) est inclus dans H .

Comme $\Gamma_a = \alpha_a + \mathcal{B}$ peut encore s'écrire $\Gamma_a = (a - a^{-1})\beta + \mathcal{B}$, pour tout a élément de $\mathcal{A}$, on en déduit que

$$H = ST(\mathcal{B}, 1, 0) . ST(0, \mathcal{A}, \beta) = ST(\mathcal{B}, \mathcal{A}, \beta) .$$

Il reste à montrer que $\beta + \mathcal{B}$ appartenant à $G_a / \mathcal{B}$ est rationnel sur F.

Soit B l'ensemble caractéristique canonique de l'idéal différentiel linéaire $\mathcal{P}$ de définition de $\mathcal{B}$; on a B inclus dans $F\{y\}_1$ et $L(ay) = aL(y)$ pour tout a appartenant à $K(\mathcal{B})^*$ et tout L appartenant à B . Soit $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ l'idéal différentiel de définition de H dans $U\{z\}$ où $z = (z_{ij})$ est une matrice d'ordre 2 d'indéterminées différentielles sur U . Pour un L fixé dans B et pour $z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$,

le polynôme $L(z_{12}) - (z_{11} - z_{22}) L(\beta) = L(z_{12}) + (z_{22} - z_{11}) L(\beta)$

appartient à $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$. On va montrer que $L(\beta)$ appartient F . Pour cela, écrivons $L(\beta)$ sous la forme $L(\beta) = \sum_{k=1}^{r} \beta_k \eta_k$ avec $\eta_1, \ldots\ldots, \eta_r$ appartenant à U sont linéairement indépendants sur F, β_k appartenant à F et $\eta_1 = 1$.

On a $L(z_{12}) + (z_{22} - z_{11}) L(\beta) = L(z_{12}) + (z_{22} - z_{11}) \sum_{k=2}^{r} \beta_k \eta_k =$

$$L(z_{12}) + (z_{22} - z_{11}) \beta_1 + \sum_{k=2}^{r} (z_{22} - z_{11}) \beta_k \eta_k .$$

Comme H est défini sur F, $L(z_{12}) + (z_{22} - z_{11})\beta_1$ appartient à $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ et $(z_{22} - z_{11})\beta_k$ appartient à $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ pour $k \geqslant 2$. Mais H contient les éléments

de la forme $\begin{pmatrix} c & \alpha c \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$ avec $c - c^{-1} \neq 0$; et comme $(z_{22} - z_{11})\beta_k$ appartient à $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$, on a $(c^{-1} - c)\beta_k = 0$ implique $\beta_k = 0$ pour $k \geqslant 2$.

Il en résulte que $L(\beta) = \beta_1$ appartient à F . Ce qui montre que l'élément $\beta + \mathcal{B}$ de $G_a / \mathcal{B}$ est rationnel sur F . D'où le (b) .

c) Soient deux triplets $(\mathcal{B}, \mathcal{A}, \beta)$ et $(\mathcal{B}', \mathcal{A}', \beta')$ et posons $H = ST(\mathcal{B}, \mathcal{A}, \beta)$ et $H' = ST(\mathcal{B}', \mathcal{A}', \beta')$.

Supposons que $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ et qu'il existe f, g appartenant à F avec $f \neq 0$, $f\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ et g appartenant à $f\beta - \beta' + \mathcal{B}'$. On va montrer que H est conjugué sur F à H'.

Soit la matrice $x = \begin{pmatrix} f & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; alors x appartient à $GL_2(F)$ c'est-à-dire x appartient à $P(F)$. Pour tout a élément de $\mathcal{A}$ et pour tout b élément de $\mathcal{B}$ on a :

$$\begin{pmatrix} f & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & (a - a^{-1})\beta + b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} f & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & (a - a^{-1})\beta + b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{-1} & -gf^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & (a - a^{-1})(f\beta - g) + fb \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Comme $(a - a^{-1})(f\beta - g) + fb = (a - a^{-1})\beta' + b'$ pour un certain b' appartenant à $\mathcal{B}$, on a $xHx^{-1} \subset H'$.

De la même façon, on montre que $x^{-1}H'x \subset H$. D'où $xHx^{-1} = H'$.

Réciproquement, supposons qu'il existe x appartenant à $GL_2(F)$ avec $x = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ telle que $xHx^{-1} = H'$. Pour tout a élément de $\mathcal{A}$ et tout b élément de $\mathcal{B}$,

la matrice $t = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & (a - a^{-1})\beta + b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{-1}$ appartient

à H' (par hypothèse).

Supposons d'abord $r \neq 0$. Le calcul de t montre que $r(a - a^{-1})(s - r\beta) - r^2 b = 0$ $(a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B})$.

Lorsque $\mathcal{A} = \{1\}$ ou $\mathcal{A} = P_2$, alors $r^2 b = 0$ et comme $r \neq 0$, on a $b = 0$ pour tout b élément de $\mathcal{B}$; ce qui implique que $\mathcal{B} = \{0\}$ et $H = H'$.

On a, $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ et quel que soit f appartenant à F^*, $f\{0\} = \{0\}$, ce qui donne $\mathcal{B} = \{0\}$.

Supposons maintenant $\mathcal{A} \neq \{1\}$ et $\mathcal{A} \neq P_2$. Puisque $r \neq 0$ et $a - a^{-1} \neq 0$, $r(a - a^{-1})(s - r\beta) - r^2 b = 0$ implique $(s - r\beta) - r(a - a^{-1})^{-1} b = 0$ pour tout a appartenant à $\mathcal{A}$ avec $a^2 - 1 \neq 0$ et pour tout b appartenant à $\mathcal{B}$.

En particulier, $\beta = sr^{-1}$ appartient à F, donc $\mathcal{B} = \{0\}$

On a $t = \begin{pmatrix} a & b' \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. En effet, $t = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & (a-a^{-1})\beta \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}(ps-rq)$

$$= (ps - rq)^{-1} \begin{pmatrix} spa-qra & sp(a - a^{-1})\beta + sqa^{-1} - rq(a - a^{-1})\beta - qsa^{-1} \\ 0 & -rp(a - a^{-1})\beta - rqa^{-1} + rp(a - a^{-1})\beta + spa^{-1} \end{pmatrix} ;$$

d'où en simplifiant, t est de la forme $t = \begin{pmatrix} a & b' \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ pour b' élément de U. Donc t appartient à H. Ce qui entraîne que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$

Utilisant le fait que $x^{-1}Hx$ est inclus dans H, de façon analogue, on a β' appartenant à F, $\mathcal{B}' = \{0\}$ et $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$.

Si on prend $f = 1$, alors $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, $f\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ et $(f\beta - \beta' + \mathcal{B}') \cap F \neq \emptyset$; ce qui démontre que la réciproque est vraie pour $r \neq 0$.

Maintenant supposons que $r = 0$. Alors on a :

$$t = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & (a - a^{-1})\beta + b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & -q \\ 0 & p \end{pmatrix}(ps)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} a & (a - a^{-1})(ps^{-1}\beta - qs^{-1}) + ps^{-1}b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \alpha' \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

en posant $\alpha' = (a - a^{-1})(ps^{-1}\beta - qs^{-1}) + ps^{-1}b$ élément de $\mathcal{B}'$.

Ceci montre de nouveau que $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.

Posons $f = ps^{-1} \in F^*$ et $g = qs^{-1} \in F$. En prenant $a = 1$ et b élément de U, on voit que b appartient à $\mathfrak{B}$ si et seulement si fb appartient à $\mathfrak{B}'$; donc $f\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$.

Si $\mathcal{A} = \{1\}$ ou si $\mathcal{A} = P_2$, c'est le cas qu'on vient de montrer.

Si $\mathcal{A} \neq \{1\}$ et $\mathcal{A} \neq P_2$, on peut prendre a élément de $\mathcal{A}$ tel que $a^2 \neq 1$. Alors, en fixant b appartenant à $\mathfrak{B}$, on a $\alpha' = (a - a^{-1})\beta' + b'$ pour un certain b' appartenant à $\mathfrak{B}'$.

Donc $g = f\beta - \beta' + (a - a^{-1})^{-1}(fb - b') \in (f\beta - \beta' + \mathfrak{B}) \cap F$. Ce qui démontre le (c).

d) Soit $(\mathfrak{B}, \mathcal{A}, \beta)$ un triplet. Si β appartient à F, si $\mathfrak{B}$ a une base finie dans F et si, ou bien $\mathcal{A} = K^*$ ou bien $\mathcal{A} = P_n$ (pour un certain $n \in N$), alors $H = ST(\mathfrak{B}, \mathcal{A}, \beta) \subset SL_2(FK) \subset P(FK)$.

Réciproquement, supposons que $H \subset P(FK)$. Comme $ST(\mathfrak{B}, 1, 0)$ est inclus dans H, on a $\mathfrak{B}$ inclus dans FK. D'après la proposition 19, $\mathfrak{B}$ a une base finie dans F.

Si $\mathcal{A} = \{1\}$ ou $\mathcal{A} = P_2$, le résultat est immédiat.

Supposons donc $\mathcal{A} \neq \{1\}$ et $\mathcal{A} \neq P_2$.

Rappelons que si $\mathcal{A}$ est infini, alors, pour tout a appartenant à U, a^2 appartient à $\mathcal{A}$ si et seulement si a appartient à $\mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ est inclus dans FK et d'après la proposition 23, $\mathcal{A} = K^*$.

Montrons maintenant que $(\beta + \mathfrak{B}) \cap F \neq \emptyset$.

Soit B inclus dans $F\{y\}_1$ l'ensemble caractéristique canonique de l'idéal différentiel de définition $\mathcal{P}$ de $\mathfrak{B}$. D'après ce qui a été montré, β appartient à FK et donc d'après le corollaire du lemme 5, il y a une spécialisation différentielle β' de β sur F avec β' élément de FC_a .

Ecrivons β' sous la forme $\beta' = \sum_{i=1}^{r} \beta'_i \psi_i$ où $\psi_1, \ldots\ldots, \psi_r$ appartiennet à C_a et linéairement indépendants sur C , $\psi_1 = 1$ et $\beta'_1, \ldots\ldots, \beta'_r$ appartiennent à F .

Pour tout L élément de B, le polynôme différentiel L - L(β) appartient à $F\{y\}$ et s'annule en β . Il en résulte que L(β') - L(β) = 0 =

L(β'_1) - L(β) - $\sum_{i=2}^{r}$ L(β'_i) ψ_i . D'après la disjonction linéaire de F et K sur C, $\psi_1, \ldots\ldots, \psi_r$ sont linéairement indépendants sur F, donc nécessairement on a L(β'_1) - L(β) = 0 pour tout L appartenant à B .

Donc L($\beta'_1 - \beta$) = 0 ; ce qui entraîne que $\beta'_1 - \beta$ appartient à $\mathfrak{B}$, c'est-à-dire β'_1 appartient à $\beta + \mathfrak{B}$. D'où β'_1 appartient à $(\beta + \mathfrak{B}) \cap F$.

Il en résulte que $(\beta + \mathfrak{B}) \cap F \neq \emptyset$. Ce qui démontre l'équivalence .

La dernière partie de (d) est une conséquence directe du (c) .

<u>Corollaire :</u> Soit $(\mathfrak{B}, \mathcal{A}, \beta)$ un triplet comme c-dessus et soit H = ST$(\mathfrak{B}, \mathcal{A}, \beta)$.

Alors, un et un seul des énoncés suivants est vrai :

1) $\mathfrak{B} \neq \{0\}$ et $\mathcal{A}$ est infini; dans ce cas H est dense dans $ST_2(U)$.

2) $\mathfrak{B} \neq \{0\}$ et $\mathcal{A} = P_n$ pour un certain n élément de N; dans ce cas H est dense dans $U_2^n(U)$.

3) $\mathfrak{B} = \{0\}$ et $\mathcal{A}$ est infini; dans ce cas β appartient à F et H est conjugué sur F à ST(0,$\mathcal{A}$, 0) qui est dense dans $SD_2(U)$ le sous-groupe

diagonal de $SL_2(U)$.

4) $\mathcal{B} = \{0\}$ et $\mathcal{A} = P_n$ pour un certain n élément de N; dans ce cas β appartient à F, H est fini et H est conjugué sur F à $C_n(U)$.

<u>Démonstration :</u> Comme un sous-groupe algébrique différentiel non nul (resp. infini) de G_a (resp. de U) est dense dans G_a (resp. U) et puisque,

$$ST_2(U) = ST(G_a, G_m, 0)$$

$$U_2^n(U) = ST(G_a, P_n, 0)$$

$$SD_2(U) = ST(0, G_m, 0)$$

$$C_n(U) = ST(0, P_n, 0)$$

la démonstration résulte des parties (a) et (c) du théorème 8 .

<u>Les sous-groupes algébriques différentiels de $SO_2^e(U)$ et $SO_2^e(U)^+$:</u>

Soit F un sous-corps différentiel de U sur lequel U est universel et soit C son corps des constantes .

Soit e un élément de F^*; l'application $II_e : SO_2^e(U) \longrightarrow G_a^m$ définie par :

$$II_e \begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{cases} (\delta_1\alpha.\gamma^{-1}, \dots, \delta_m\alpha.\gamma^{-1}) & \text{si } \gamma \neq 0 \\ (0,\dots\dots,0) & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$

est un homomorphisme rationnel différentiel , défini sur Q, de noyau

$$\mathrm{Ker}II_e = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \Big/ \alpha \in K,\ \gamma \in U,\ \alpha^2 - e\gamma^2 = 1 \right\}.$$

De même , l'application $II_e^* : SO_2^e(U)^* \longrightarrow G_a^m$ définie par :

$$II_e^* \begin{pmatrix} \alpha & -e\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} = \begin{cases} (\delta_1\alpha.\gamma^{-1}, \dots\dots, \delta_m\alpha.\gamma^{-1}) & \text{si } \gamma \neq 0 \\ (0,\dots\dots\dots,0) & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$

est une application rationnelle différentielle, définie sur Q, de noyau

$$\mathrm{Ker}\,\Pi_e^* = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -e\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \Big/ \alpha \in K,\ \gamma \in U,\quad \alpha^2 - e\gamma^2 = -1 \right\}.$$

On va établir quelques propriétés fondamentales de Π_e et Π_e^* .

Il est clair que Π_e et Π_e^* sont des applications rationnelles différentielles partout définies , définies sur F.

Soit ε fixé dans U avec $\varepsilon^2 = e$ et posons $s = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$. Considérons la suite des homomorphismes :

$$SO_2^e \xrightarrow{\tau_s} SD_2 \xrightarrow{p} U^* \xrightarrow{\Delta l} G_a^m \xrightarrow{l_\varepsilon} G_a^m$$

où $\tau_s \begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} s^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha + \varepsilon\gamma & 0 \\ 0 & \alpha - \varepsilon\gamma \end{pmatrix}$ avec $\alpha^2 - e\gamma^2 = 1$

$$p \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = a \qquad (a \in U^*)$$

$$\Delta l(a) = (\delta l_1 a \ \ldots\ldots, \delta l_m a) \qquad (a \in U^*)$$

$$l_\varepsilon(x_1, \ldots\ldots, x_m) = (\varepsilon x_1, \ldots\ \ldots, \varepsilon x_m) \qquad (x_1, \ldots\ \ldots, x_m) \in G_a^m .$$

De façon semblable, considérons les applications :

$$SO_2^{e*} \xrightarrow{\tau_s^*} SD_2^{*\,(*)} \xrightarrow{p^*} U^* \xrightarrow{\Delta l} G_a^m \xrightarrow{l_\varepsilon} G_a^m$$

où $\tau_s^* \begin{pmatrix} \alpha & -e\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \alpha & -e\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} s^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha - \varepsilon\gamma \\ -\alpha + \varepsilon\gamma & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha^2 - e\gamma^2 = -1$

$$p^* \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix} = b \qquad (b \in U^*).$$

(*) $SD_2(U)^* = SD_2(U) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Remarquons que $p \circ \tau_s$ est un isomorphisme rationnel et que $p^* \circ \tau_s^*$ est une application birationnelle bijective car p^* est surjective et τ_s^* est injective.

Lemme 8 : Soient e, ε, α, γ appartenant à U tels que $\varepsilon^2 = e$ et $\alpha^2 - e\gamma^2 = k$ élément de K^*. Alors pour tout δ appartenant à Δ, on a :

$$\varepsilon\delta l(\alpha + \varepsilon\gamma) = k^{-1}\left[\frac{1}{2}(\delta e)\alpha\gamma + e(\alpha\delta\gamma - \gamma\delta\alpha)\right]$$

$$= \begin{cases} \delta\alpha.\gamma^{-1} & \text{si } \gamma \neq 0 \\ 0 & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$

Démonstration : Par hypothèse, on a $\alpha^2 - e\gamma^2 = k$. Ce qui donne :

$$0 = \delta(\alpha^2 - e\gamma^2)$$

$$= 2\alpha\delta\alpha - 2e\gamma\delta\gamma - \delta e.\gamma^2 \quad ;$$

donc $$\alpha\delta\alpha - e\gamma.\delta\gamma = \frac{1}{2}(\delta e)\gamma^2$$

$$\alpha^2.\delta\alpha - \alpha e\gamma.\delta\gamma = \frac{1}{2}(\delta e)\alpha\gamma^2 \qquad \text{(en multipliant par } \alpha\text{)}.$$

Mais $\alpha^2 = k + e\gamma^2$. Ce qui donne :

$$(k + e\gamma^2)\delta\alpha = \frac{1}{2}(\delta e)\alpha\gamma^2 + \alpha e\gamma.\delta\gamma$$

$$k.\delta\alpha = \frac{1}{2}(\delta e)\alpha\gamma^2 + \alpha e\gamma.\delta\gamma - e\gamma^2\delta\alpha$$

$$\delta\alpha.\gamma^{-1} = k^{-1}\left[\frac{1}{2}(\delta e)\alpha\gamma + e(\alpha\delta\gamma - \gamma.\delta\alpha)\right]$$

Ce qui démontre la 2^e égalité.

D'autre part $\alpha^2 - e\gamma^2 = k$ implique $(\alpha + \varepsilon\gamma)(\alpha - \varepsilon\gamma) = k$;

donc $(\alpha + \varepsilon\gamma)^{-1} = k^{-1}(\alpha - \varepsilon\gamma)$.

Or $e = \varepsilon^2 \Longrightarrow \delta e = 2\varepsilon.\delta\varepsilon \Longrightarrow \varepsilon.\delta\varepsilon = \frac{1}{2}(\delta e)$.

$$\varepsilon\delta 1(\alpha + \varepsilon\gamma) = \varepsilon\left[\delta(\alpha + \varepsilon\gamma).(\alpha + \varepsilon\gamma)^{-1}\right]$$

$$= \varepsilon k^{-1}.\delta(\alpha + \varepsilon\gamma).(\alpha - \varepsilon\gamma)$$

$$= k^{-1}(\varepsilon\alpha.\delta\alpha + \alpha\varepsilon^2.\delta\gamma + \alpha\varepsilon.\delta\varepsilon.\gamma - \varepsilon^2\gamma.\delta\alpha - \varepsilon^3\gamma.\delta\gamma - \varepsilon^2.\delta\varepsilon.\gamma^2)$$

$$= k^{-1}(\alpha e.\delta\gamma + \frac{1}{2}(\delta e)\alpha\gamma - e\gamma.\delta\alpha + \varepsilon\alpha\delta\alpha - \varepsilon^3\gamma.\delta\gamma - \varepsilon.\frac{1}{2}(\delta e)\gamma^2)$$

$$= k^{-1}(\frac{1}{2}(\delta e)\alpha\gamma + e(\alpha\delta\gamma - \gamma\delta\alpha) + k^{-1}(\varepsilon\alpha\delta\alpha - \varepsilon^3\gamma\delta\gamma - \varepsilon(\frac{1}{2}\delta e)\gamma^2).$$

Mais, on avait $\alpha\delta\alpha - e\gamma\delta\gamma = \frac{1}{2}(\delta e)\gamma^2$

$$\Longrightarrow \varepsilon\alpha\delta\alpha - \varepsilon e\gamma.\delta\gamma = \varepsilon.\frac{1}{2}(\delta e)\gamma^2$$

$$\Longrightarrow k^{-1}(\varepsilon\alpha\delta\alpha - \varepsilon^3\gamma.\delta\gamma - \varepsilon.\frac{1}{2}(\delta e)\gamma^2) = 0 \quad .$$

D'où la double égalité :

$$\varepsilon\delta 1(\alpha + \varepsilon\gamma) = k^{-1}\left[\frac{1}{2}(\delta e)\alpha\gamma + e(\alpha\delta\gamma - \gamma\delta\alpha)\right] = \begin{cases} \delta\alpha.\gamma^{-1} & \text{si } \gamma \neq 0 \\ 0 & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$

<u>Corollaire :</u>

a) On a $II_e = 1_\varepsilon \circ \Delta 1 \circ p \circ \zeta_s$; en particulier II_e est un homomorphisme .

b) $\quad II_e^* = 1_\xi \circ \Delta 1 \circ p^* \circ \zeta_s^*$

c) Les images I_e et I_e^* de II_e et II_e^* coincident et chacune est le sous-groupe algébrique différentiel I_e de G_a^m correspondant à l'idéal différentiel linéaire de $U\{y_1,\ldots\ldots,y_m\}$ engendré par les polynômes différentiels

$$\delta_i y_j - \delta_j y_i + \left(\frac{1}{2}(\delta 1_j e) y_i - \frac{1}{2}(\delta 1_i e) y_j \right) \qquad (1 \leq i < j \leq m)$$

Démonstration :

a) Il faut montrer que pour toute matrice $x = \begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ appartenant à SO_2^e, on a :

$$II_e(x) = 1_\xi \circ \Delta 1 \circ p \circ \zeta_s(x) = II_e \begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

$$II_e(x) = II_e \begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{cases} (\delta_1 \alpha . \gamma^{-1}, \ldots\ldots; \delta_m \alpha . \gamma^{-1}) & \text{si } \gamma \neq 0 \\ (0, \ldots\ldots, 0) & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$

et $\quad 1_\xi \circ \Delta 1 \circ p \circ \zeta_s \begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} = 1_\xi \circ \Delta 1 \circ p \begin{pmatrix} \alpha + \varepsilon\gamma & 0 \\ 0 & \alpha - \varepsilon\gamma \end{pmatrix}$

$$= 1_\xi \circ \Delta 1 (\alpha + \varepsilon\gamma) = \xi \Delta 1 (\alpha + \varepsilon\gamma)$$

$$= \begin{cases} (\delta_1 \alpha . \gamma^{-1}, \ldots\ldots, \delta_m \alpha . \gamma^{-1} & \text{si } \gamma \neq 0 \\ (0, \ldots\ldots, 0) & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$$

(d'après le lemme 8 en remarquant qu'ici $\alpha^2 - e\gamma^2 = 1$).

D'où $II_e = 1_\xi \circ \Delta 1 \circ p \circ \zeta_s$.

b) Par des calculs semblables que dans le (a), en appliquant le lemme 8, on trouve aussi $II_e^* = 1_\xi \circ \Delta 1 \circ p^* \circ \zeta_s^*$.

c) Il est clair que les images de II_e et de II_e^* coincident . En effet, chacune est égale à l'ensemble de tous les éléments $(x_1,\ldots\ldots,x_m)$ appartenant à G_a^m de la forme $(\delta_1\alpha.\gamma^{-1},\ldots\ldots,\delta_m\alpha.\gamma^{-1})$ tels que

$$\begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \text{appartient à } SO_2^e \text{ et } \begin{pmatrix} \alpha & -e\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \text{appartient à } SO_2^{e*} .$$

Comme II_e est un homomorphisme rationnel différentiel, son image I_e est un sous-groupe algébrique différentiel de G_a^m .

D'autre part , pour tout $(x_1,\ldots\ldots,x_m)$ appartenant à I_e , on a :

$$x_i = \delta_i\alpha.\gamma^{-1} \Longrightarrow \delta_j x_i = \delta_j\delta_i\alpha.\gamma^{-1} - \delta_i\delta_j\gamma.\gamma^{-2}$$

$$x_j = \delta_j\alpha.\gamma^{-1} \Longrightarrow \delta_i x_j = \delta_i\delta_j\alpha.\gamma^{-1} - \delta_j\delta_i\gamma.\gamma^{-2}$$

$$\text{d'où } \delta_i(x_j) - \delta_j(x_i) = \delta_i\alpha.\gamma^{-1}.\delta_j\gamma.\gamma^{-1} - \delta_j\alpha.\gamma^{-1}.\delta_i\gamma.\gamma^{-1}$$

$$\text{implique que } \delta_i(x_j) - \delta_j(x_i) + (\delta l_i\gamma)x_j - (\delta l_j\gamma)x_i = 0$$

Or $\alpha^2 \quad -e\gamma^2 = 1$ et pour $\quad = 0$, on a $-e\gamma^2 = 1$; ce qui implique $e = -\gamma^{-2}$ et $\delta l_i e = 2\,\delta l_i\gamma$. Donc

$$\delta_i(x_j) - \delta_j(x_i) + \frac{1}{2}(\delta l_i e)x_j - \frac{1}{2}(\delta l_j e)x_i = 0 .$$

Alors , l'idéal différentiel de définition de I_e est l'idéal engendré par les polynômes différentiels :

$$\delta_i(y_j - \delta_j(y_i) + \frac{1}{2}(\delta l_i e)y_j - \frac{1}{2}(\delta l_j e)y_i .$$

Voici quelques formules qui seront utiles pour la suite.

<u>Lemme 9 :</u> Soient x, x' éléments de $SO_2^e(U)^*$ et v élément de $SO_2^e(U)^+$.

Alors : a) $II_e(xx') = II_e^*(x) - II_e^*(x')$

b) $II_e^*(x^{-1}) = II_e^*(x)$

c) $II_e^*(vxv^{-1}) = \begin{cases} 2II_e(v) + II_e^*(x) & \text{si } v \in SO_2^e \\ 2II_e^*(v) - II_e^*(x) & \text{si } v \in SO_2^e(U)^*. \end{cases}$

<u>Démonstration :</u> Soient x, x' appartenant à $SO_2^e(U)^*$.

a) On a : $II_e(xx') = l_\varepsilon \circ \Delta l \circ p \circ \zeta_s(xx')$

Remarquons que $p \circ \zeta_s(xx') = -p^* \circ \zeta_s^*(x) p^* \circ \zeta_s^*(x')^{-1}$.

En effet, pour $x = \begin{pmatrix} \alpha & -e\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ et $x' = \begin{pmatrix} \alpha' & -e\gamma' \\ \gamma' & -\alpha' \end{pmatrix}$, on a

$$p \circ \zeta_s(xx') = \alpha\alpha' - e\gamma\gamma' + \varepsilon(\alpha'\gamma - \alpha\gamma') \quad \text{et}$$

$$-p^* \circ \zeta_s^*(x) p^* \circ \zeta_s^*(x') = -(\alpha + \varepsilon\gamma)(\alpha' + \varepsilon\gamma')^{-1} = -(\alpha + \varepsilon\gamma)(-\alpha' + \varepsilon\gamma')$$
$$= \alpha\alpha' - e\gamma\gamma' + \varepsilon(\alpha'\gamma - \alpha\gamma').$$

Donc, $II_e(xx') = l_\varepsilon \circ \Delta l \circ p \circ \zeta_s(xx')$

$$= -l_\varepsilon \circ \Delta l \circ (p^* \circ \zeta_s^*(x) p^* \circ \zeta_s^*(x'))$$

$$= -l_\varepsilon \circ \Delta l((\alpha + \varepsilon\gamma)(\alpha' + \varepsilon\gamma')^{-1})$$

$$= -\varepsilon\delta l_1(\alpha + \varepsilon\gamma)(\alpha' + \varepsilon\gamma')^{-1}, \ldots\ldots, -\varepsilon\delta l_m(\alpha + \varepsilon\gamma)(\alpha' + \varepsilon\gamma')^{-1}$$

On a donc pour δl_i :

$$-\varepsilon\delta l_i((\alpha + \varepsilon\gamma)(\alpha' + \varepsilon\gamma')^{-1}) = -\varepsilon\delta_i((\alpha + \varepsilon\gamma)(\alpha' + \varepsilon\gamma')^{-1}).(\alpha + \varepsilon\gamma)(\alpha' + \varepsilon\gamma')^{-1}$$

$$= -\varepsilon\left[\delta_i(\alpha+\varepsilon\gamma).(\alpha+\varepsilon\gamma)^{-1} + \delta_i(\alpha'+\varepsilon\gamma')^{-1}.(\alpha'+\varepsilon\gamma')\right].$$

$$= -\varepsilon\,\delta 1_i(\alpha+\varepsilon\gamma) + \varepsilon\,\delta 1_i(\alpha'+\varepsilon\gamma')$$ et comme $\alpha^2 - e\gamma^2 = -1$,

la formule $\varepsilon\,\delta 1_i(\alpha+\varepsilon\gamma) = k^{-1}\left[\frac{1}{2}(\delta_i e)\alpha\gamma + e(\alpha\,\delta_i\gamma - \gamma\delta_i\alpha)\right]$

$$= \delta_i\alpha\,.\,\gamma^{-1}$$, pour $k = -1$ donne :

$\varepsilon\,\delta 1_i(\alpha+\varepsilon\gamma) = -\,\delta_i\alpha\,.\gamma^{-1}$; ce qui implique $-\,\varepsilon\,\delta 1_i(\alpha+\varepsilon\gamma) = \delta_i\alpha\,.\gamma^{-1}$.

D'où $-\,\varepsilon\,\delta 1_i(\alpha+\varepsilon\gamma) + \varepsilon\,\delta 1_i(\alpha'+\varepsilon\gamma') = \delta_i\alpha\,.\gamma^{-1} - \delta_i\alpha'.\gamma'^{-1}$.

Ce qui donne : $II_e(xx') = (\delta_1\alpha\,.\gamma^{-1} - \delta_1\alpha'\,.\gamma'^{-1},\ldots\ldots,\delta_m\alpha.\gamma^{-1} - \delta_m\alpha'.\gamma'^{-1})$

$$= II^*_e(x) - II^*_e(x') .$$

b) Si dans la formule (a), on fait $x' = x^{-1}$, on obtient :

$II_e(xx^{-1}) = II^*_e(x) - II^*_e(x^{-1})$, comme $II_e(xx^{-1}) = II_e(I_2) = 0$,

on obtient $II^*_e(x) = II^*_e(x^{-1})$. D'où (b).

c) Si v appartient à $SO_2^e(U)$, la formule (a) donne :

$II_e(xx') = II^*_e(x) - II^*_e(x') \Longrightarrow II_e(vxx') = II^*_e(vx) - II^*_e(x')$, donc

$II_e(vxv^{-1}x') = II^*_e(vxv^{-1}) - II^*_e(x')$; en prenant $x' = x^{-1}$, on a :

$II_e(vxv^{-1}x^{-1}) = II^*_e(vxv^{-1}) - II^*_e(x^{-1})$

c'est-à-dire , $\Pi_e^*(vxv^{-1}) = \Pi_e(vxv^{-1}x^{-1}) + \Pi_e^*(x^{-1})$.

Or $\quad \Pi_e(vxv^{-1}x) = \Pi_e^*(vx) - \Pi_e^*(v^{-1}x)$

$$= \Pi_e^*(vx) - \Pi_e^*(x^{-1}v)$$

$$= \Pi_e(vxx^{-1}v)$$

$$= \Pi_e(v^2) \; .$$

Et comme Π_e est un homomorphisme rationnel différentiel de $SO_2^e(U)$ dans G_a^m , on a $\Pi_e(v^2) = 2\Pi_e(v)$. D'où $\Pi_e(vxv^{-1}x) = 2\Pi_e(v)$; ce qui donne

$\Pi_e^*(vxv^{-1}) = 2\Pi_e(v) + \Pi_e^*(x)$.

- Si v appartient à $SO_2^e(U)^*$, alors on a :

$\Pi_e(xx') = \Pi_e^*(x) - \Pi_e^*(x')$

$\Pi_e(vx^{-1}) = \Pi_e^*(v) - \Pi_e^*(x^{-1})$

$\qquad = \Pi_e^*(v) - \Pi_e^*(x)$

Or $\Pi_e(vx^{-1}) = \Pi_e^*(vx^{-1}v^{-1}) - \Pi_e^*(v)$

$\qquad = \Pi_e^*(vxv^{-1}) - \Pi_e^*(v)$

d'où $\Pi_e^*(vxv^{-1}) = \Pi_e^*(v) - \Pi_e^*(x) + \Pi_e^*(v)$.

Donc $\quad \Pi_e^*(vxv^{-1}) = 2\Pi_e^*(v) - \Pi_e^*(x)$.

<u>Proposition 25 :</u> L'application $\mathcal{B} \rightsquigarrow \Pi_e^{-1}(\mathcal{B})$ définit une bijection entre l'ensemble des sous-groupes algébriques différentiels $\mathcal{B}$ de I_e définis sur F et l'ensemble des sous-groupes algébriques différentiels denses H de $SO_2^e(U)$ définis sur F.

<u>Démonstration :</u> Etant donné que $\Pi_e : SO_2^e \longrightarrow G_a^m$ est un homorphisme homomorphisme rationnel différentiel défini sur F ayant pour image I_e, la formule $\mathcal{B} \rightsquigarrow \Pi_e^{-1}(\mathcal{B})$ est bien une bijection de l'ensemble des sous-groupes algébriques différentiels de I_e dans l'ensemble des sous-groupes algébriques différentiels de $SO_2^e(U)$ contenant $\operatorname{Ker}\Pi_e$ et définis sur F. Il suffira donc de montrer que H est un sous-groupe algébrique différentiel dense de $SO_2^e(U)$ contenant $\operatorname{Ker}\Pi_e$.

D'après le corollaire du lemme 8 , on a :

$$
\begin{aligned}
(*)\ H \text{ est dense dans } SO_2^e(U) &\Longleftrightarrow p \circ \zeta_s(H) \text{ est dense dans } U^* \\
&\Longleftrightarrow p \circ \zeta_s(H) \supset K \\
&\Longleftrightarrow p \circ \zeta_s(H) \supset p \circ \zeta_s(\operatorname{Ker}\Pi_e) \\
&\Longleftrightarrow H \supset \operatorname{Ker}\Pi_e .
\end{aligned}
$$

Ce qui achève la démonstration.

Si $\mathcal{B}$ est un sous-groupe algébrique différentiel de I_e défini sur F , on notera $SO^e(\mathcal{B})$ le sous-groupe algébrique différentiel dense $\Pi_e^{-1}(\mathcal{B})$ de $SO_2^e(U)$.

<u>(*) Rappel (prop. 31 , Cassdy) :</u> Soit G un sous-groupe algébrique différentiel de U^{*n}. Alors G est dense dans U^{*n} si et seulement si $G \supset (U^{*n})_K = U^{*n} \cap K^n$.

<u>Proposition 26 :</u> Soit H un sous-groupe algébrique différentiel dense dans $SO_2^e(U)$. Alors H et $SO_2^e(U)$ ont le même normalisateur dans $GL_2(U)$.

<u>Démonstration :</u> Soit z appartenant à $GL_2(U)$. Puisque H est dense dans $SO_2^e(U)$, il est clair que si z normalise H, alors z normalise $SO_2^e(U)$.

Inversement, supposons que z normalise $SO_2^e(U)$. Soit $x = \begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ appartenant à H, donc élément de $SO_2^e(U)$. On a zxz^{-1} appartient à $SO_2^e(U)$.

Donc $z\begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}z^{-1}$ est encore de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$, c'est-à-dire

$$z\begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}z^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \pm e\gamma \\ \pm\gamma & \alpha \end{pmatrix}; \text{ d'où } \quad II_e\left(z\begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}z^{-1}\right) = II_e\begin{pmatrix} \alpha & \pm e\gamma \\ \pm\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \pm\, II_e\begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \in II_e(H) .$$

D'après la proposition 25, H est déterminé de façon unique par $II_e(H)$. Il en résulte que $z\begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}z^{-1}$ appartient à H . D'où z normalise H .

<u>Corollaire :</u> Soient H et H' deux sous-groupes algébriques différentiels denses de $SO_2^e(U)$. Alors H est conjugué à H' si et seulement si H = H' .

<u>Démonstration :</u> Si H = H', alors H est conjugué à H' .

Réciproquement, supposons que H soit conjugué à H' . Alors, si z appartient à $GL_2(U)$, zHz^{-1} = H' . Donc z normalise $SO_2^e(U)$, et normalise par conséquent H . Ce qui implique que zHz^{-1} = H' = H .

Théorème 9 :

a) Soit e un élément de F^*. Un sous-groupe algébrique différentiel H de $SO_2^e(U)$ est dense dans $SO_2^e(U)$ si et seulement si H contient $\mathrm{Ker}\Pi_e$ (ou de façon équivalente, si et seulement si $H = SO^e(\mathcal{B})$ pour un certain sous-groupe algébrique différentiel $\mathcal{B}$ de I_e). Lorsque c'est le cas, H est connexe .

b) Si e, e' appartiennent à F^* et $\mathcal{B}$ (rep. $\mathcal{B}'$) est un sous-groupe algébrique différentiel de I_e (resp. $I_{e'}$) , une condition nécessaire et suffisante pour que $SO^e(\mathcal{B})$ soit conjugué sur F à $SO^{e'}(\mathcal{B}')$ est qu'il existe f appartenant à F^* tel que $e'^{-1}e = f^2$ et $f\mathcal{B}' = \mathcal{B}$.

c) Si e est un élément de F^* et $\mathcal{B}$ un sous-groupe algébrique différentiel de I_e défini sur F . Une condition nécessaire et suffisante pour que $SO^e(\mathcal{B}) \subset P(FK)$ est que $\mathcal{B} = \{0\}$ et qu'il existe e' appartenant à C^* tel que $e'^{-1}e$ soit un carré dans F . Lorsque c'est le cas, $SO^e(\mathcal{B})$ est conjugué sur F à $SO^e(K)$.

Démonstration :

a) La première partie est déjà démontrée dans la proposition 25 .

Il reste à montrer que H est connexe .

Comme H est un sous-groupe algébrique différentiel dense de $SO_2^e(U)$, posons $H = SO^e(\mathcal{B})$. Soit $H°$ la composante de l'identité de H .

Etant donné que $SO_2^e(U)$ est connexe , $H°$ est dense dans $SO_2^e(U)$.

D'après la proposition 25, il existe un sous-groupe algébrique différentiel $\mathcal{B}'$ de I_e tel que $H° = SO^e(\mathcal{B}')$. Donc

$$\mathcal{B}' = \Pi_e(H°) = \Pi_e(H)° = \mathcal{B}° = \mathcal{B} .$$

Donc $H = H°$. Ce qui démontre que H est connexe .

b) Supposons qu'il existe f élément de F^* tel que $e'^{-1}e = f^2$ et $f\mathcal{B}' = \mathcal{B}$.

On va montrer qu'alors $SO^e(\mathcal{B})$ est conjugué sur F à $SO^{e'}(\mathcal{B}')$.

Soit $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$ et soient $\zeta_z : SO_2^e(U) \longrightarrow SO_2^{e'}(U)$ et

$l_f : G_a^m \longrightarrow G_a^m$ définies par :

$$\zeta_z(x) = zxz^{-1} \qquad \forall x \in SO_2^e(U)$$

et

$$l_f(x_1, \ldots\ldots, x_m) = (fx_1, \ldots\ldots, fx_m).$$

Montrons que $\Pi_{e'} \circ \zeta_z = l_f^{-1} \circ \Pi_e$.

Pour cela, soit $x = \begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ un élément de $SO_2^e(U)$. On a :

$$\Pi_{e'} \circ \zeta_z(x) = \Pi_{e'}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}^{-1}\right]$$

$$= \Pi_{e'}\begin{pmatrix} \alpha & ef^{-1}\gamma \\ f\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$; mais $e'^{-1}e = f^2$ implique

$e = e'f^2$, donc $ef^{-1} = e'f$.

Ce qui donne :
$$\Pi_{e'}\begin{pmatrix} \alpha & e'f\gamma \\ f\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{cases} (\delta_1\alpha.(f\gamma)^{-1}, \ldots\ldots, \delta_m\alpha.(f\gamma)^{-1} & \text{si } f\gamma \neq 0 \\ (0, \ldots\ldots\ldots, 0) & \text{si } f\gamma = 0 \end{cases}$$

Donc $\Pi_{e'} \circ \zeta_z(x) = (\delta_1\alpha.(f\gamma)^{-1}, \ldots\ldots\ldots, \delta_m\alpha.(f\gamma)^{-1})$ et

$$l_f^{-1} \circ \Pi_e(x) = l_f^{-1}(\delta_1\alpha.\gamma^{-1}, \ldots\ldots\ldots, \delta_m\alpha.\gamma^{-1})$$

$$= f^{-1}\delta_1\alpha.\gamma^{-1}, \ldots\ldots\ldots, f^{-1}\delta_m\alpha.\gamma^{-1})$$

$$= (\delta_1\alpha.(f\gamma)^{-1}, \ldots\ldots\ldots, \delta_m\alpha.(f\gamma)^{-1})$$

D'où $\Pi_{e'} \circ \zeta_z(x) = 1_f^{-1} \circ \Pi_e(x)$ pour tout x appartenant à $SO_2^e(U)$. Ce qui implique que $\Pi_{e'} \circ \zeta_z = 1^{-1} \circ \Pi_e$. D'où :

$zSO^e(\mathcal{B})z^{-1} = SO^{e'}(\mathcal{B}')$ car $SO^e(\mathcal{B})$ est déterminé de façon unique par Π_e . On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} SO_2^{e'}(U) \arrow[r, "\Pi_{e'}"] & G_a^m \\ SO_2^e(U) \arrow[u, "\zeta_z"] \arrow[ur] \arrow[r, "\Pi_e"'] & G_a^m \arrow[u, "1_f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Donc $SO^e(\mathcal{B})$ et $SO^{e'}(\mathcal{B}')$ sont conjugués sur F .

Réciproquement , supposons que les groupes $H = SO^e(\mathcal{B})$ et $H' = SO^{e'}(\mathcal{B}')$ soient conjugués sur F . Comme la conjugaison est un homomorphisme rationnel et comme H (resp. H') est dense dans $SO_2^e(U)$ (resp. $SO_2^{e'}(U)$) , il en résulte que $SO_2^e(U)$ et $SO_2^{e'}(U)$ sont aussi conjugués sur F (d'après la prop. 26).

<u>Rappel de géométrie algébrique :</u> Soient e, e' éléments de F (F étant un corps non nécessairement différentiel) . Alors $SO_2^e(U)$ et $SO_2^{e'}(U)$ (resp. $SO_2^e(U)^+$ et $SO_2^{e'}(U)^+$) sont conjugués sur F si et seulement si $e'^{-1}e$ est un carré dans F .

D'après ce rappel, il existe f appartenant à F^* tel que $e'^{-1}e = f^2$.

Posons $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$ et considérons ζ_z et 1_f comme définies ci-dessus . On a donc $z\, SO_2^e(U)\, z^{-1} = SO_2^{e'}(U)$ et $\Pi_{e'} \circ \zeta_z = 1_f^{-1} \circ \Pi_{e'}$.

D'autre part, le groupe zHz^{-1} contenu dans $SO_2^{e'}(U)$ est conjugué à H' ; d'après le corollaire de la proposition 26, on a $z H z^{-1} = H'$.

Comme $\mathcal{B}' = \Pi_{e'}(H')$, on a

$$
\begin{aligned}
f\mathcal{B}' &= f\,\Pi_{e'}(zHz^{-1}) \\
&= 1_f(\Pi_{e'}(zHz^{-1})) \\
&= 1_f \circ \Pi_{e'} \circ \zeta_z(H) \\
&= \Pi_e(H) \\
&= \mathcal{B}
\end{aligned}
$$

Donc $f\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. Ce qui achève la démonstration du (b) .

c) Supposons que $\mathcal{B} = \{0\}$ et qu'il existe e' appartenant à C^* tel que $e'^{-1}e$ soit un carré dans F . On va montrer que $SO^e(\mathcal{B}) \subset P(FK)$.

D'abord, montrons la dernière partie du (c) .

D'après le (b), $SO_2^e(U)$ et $SO_2^{e'}(U)$ sont conjugués sur F ; ce qui implique que $SO^e(0)$ est conjugué sur F à $SO^{e'}(0)$, et, puisque e' appartient à C^*, $SO_2^{e'}(K) = \operatorname{Ker}\Pi_{e'} = SO^{e'}(0)$. Car ,

$$\operatorname{Ker}\Pi_{e'} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & e'\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \;/\; \alpha \in K,\ \gamma \in U,\ \alpha^2 - e'\gamma^2 = 1 \right\}$$

Mais, comme e' appartient à C^*, on a $\delta(\alpha^2 - e'\gamma^2) = 0$; ce qui implique $0 - 2e'\gamma\delta\gamma = 0$; d'où $\delta\gamma = 0$, c'est-à-dire γ appartient à K.

Il en résulte que $SO^e(0)$ est conjugué sur F à $SO_2^{e'}(K)$.

La condition suffisante s'en déduit puisqu'il existe z appartenant à $P(F)$ (par exemple $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$) tel que

$$SO^e(0) = SO^e(\mathcal{B}) = z\, SO_2^{e'}(K)\, z^{-1} \text{ inclus dans } P(FK) .$$

D'où $SO^e(\mathcal{B}) \subset P(FK)$.

Réciproquement, supposons que $SO^e(\mathcal{B}) \subset P(FK)$.

On va montrer que $\mathcal{B} = \{0\}$ et qu'il existe e' appartenant à C^* tel que $e'^{-1}e$ soit un carré dans F.

Fixons ε appartenant à U tel que $\varepsilon^2 = e$ et soit $s = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$.

Posons $H = SO^e(\mathcal{B})$. Soit $x = \begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ élément de H; alors:

$p \circ \zeta_s(x) = p(sxs^{-1})$. Or, $sxs^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}^{-1}$

$= \begin{pmatrix} \alpha + \varepsilon\gamma & 0 \\ 0 & \alpha - \varepsilon\gamma \end{pmatrix}$ et

$$p \circ \zeta_s(x) = p\begin{pmatrix} \alpha + \varepsilon\gamma & 0 \\ 0 & \alpha - \varepsilon\gamma \end{pmatrix} = \alpha + \varepsilon\gamma$$

Donc $\{\alpha + \varepsilon\gamma \ / \ \alpha, \gamma \in FK, \ \varepsilon \in U\}$ contient K^*, c'est-à-dire $K^* \subset p \circ \zeta_s(H)$. Donc il existe un élément $\begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ de H tel que $\alpha + \varepsilon\gamma \in K^*$, $\alpha^2 \neq 1$ et $\alpha \neq 0$.

Comme $(\alpha - \varepsilon\gamma) = (\alpha + \varepsilon\gamma)^{-1}$ appartient à K^*, il en résulte que $\alpha + \varepsilon\gamma + \alpha - \varepsilon\gamma = 2\alpha$ appartient à K^* et $\alpha + \varepsilon\gamma - \alpha + \varepsilon\gamma = 2\varepsilon\gamma$ appartient à K^*. Donc α et $\varepsilon\gamma$ appartiennent à K^*. En particulier α et $\varepsilon\gamma$

appartiennent à FK. Comme $H \subset P(FK)$, il existe u appartenant à U^* tel que $u\begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\alpha & ue\gamma \\ u\gamma & u\alpha \end{pmatrix}$ appartienne à $GL_2(FK)$; ce qui implique que $u\alpha$, $u\gamma$ et $ue\gamma$ appartiennent à FK. On en déduit que u et ε appartiennent à FK car : $u\gamma$ appartient à FK et α appartient à FK, ce qui implique que u appartient à FK; de même $ue\gamma = u\varepsilon^2\gamma = u\varepsilon . \varepsilon\gamma$ appartient à FK.

Comme u et $\varepsilon\gamma$ appartiennent à FK, on a ε appartient à FK.

D'autre part, F et K sont linéairement disjoints sur C, donc $F\langle\varepsilon\rangle = FC'$ où C' est le corps des constantes de $F\langle\varepsilon\rangle$. Par ailleurs, $[C' : C] \leqslant [F\langle\varepsilon\rangle : F] \leqslant 2$, car $\varepsilon^2 = e$ appartient à F^*. Il existe donc ε' appartenant à C^* tel que $C' = C(\varepsilon')$ et ε'^2 soit élément de C. Mais alors $F(\varepsilon) = F(\varepsilon')$ et ε appartient à F si et seulement si ε' appartient à F. Il existe donc f élément de F^* tel que $\varepsilon = f\varepsilon' \Longrightarrow \varepsilon\varepsilon'^{-1} = f$. Posons $e' = \varepsilon'^2$; alors

$$e'^{-1}e = (\varepsilon'^2)^{-1}\varepsilon^2 = (\varepsilon'^{-1}\varepsilon)^2 = f^2$$

Donc $e'^{-1}e$ est un carré dans F.

Il reste à montrer que $\mathcal{B} = \{0\}$. Puisque SO_2^e et $SO_2^{e'}$ sont conjugués sur F et qu'on peut remplacer H par un F-conjugué (d'après la partie b), supposons que e appartienne à C^*. Alors s appartient à $SL_2(K)$ et $\zeta_s(H)$ inclus dans $\zeta_s(P(FK)) = P(FK)$.

Comme $p \circ \zeta_s$ est un homomorphisme rationnel, $p \circ \zeta_s(H)$ est un sous-groupe algébrique différentiel dense de U^* et, par conséquent, a la propriété que a^2 appartient à $p \circ \zeta_s(H)$ si et seulement si a appartient à $p \circ \zeta_s(H)$. (*)

On a : $K^* \subset p \circ \zeta_s(H) \subset FK$.

Donc $\mathcal{B} = l_\varepsilon \circ \Delta l \circ p \circ \zeta_s(H) = l_\varepsilon \circ \Delta l(K^*) = \{0\}$; d'où $\mathcal{B} = \{0\}$.

Ce qui achève la démonstration du théorème 9 .

<u>Théorème 10 :</u> Soit e élément de F^*, soit $\mathcal{B}$ un sous-groupe algébrique différentiel de I_e défini sur F et soit β appartenant à I_e tel que $\beta + \mathcal{B}$ appartenant à $G_a^m / \mathcal{B}$ soit rationnel sur F.

a) Si (e, B, β) est un triplet comme défini ci-dessus, alors l'ensemble $SO^e(\mathcal{B},\beta)^+ = \Pi_e^{-1}(\mathcal{B}) \cup \Pi_e^{*-1}(\beta + B)$

(*) En effet, $\exists v$ élément de H tq $p \circ \zeta_s(v) = a^2$; comme $v \in H$, $\exists x \in H$ tq $v = x^2$, et $p \circ \zeta_s(x^2) = (p \circ \zeta_s(x))^2$. Donc par un simple calcul, on a $p \circ \zeta_s(v) = (p \circ \zeta_s(x))^2$ implique $p \circ \zeta_s(x) = a \in p \circ \zeta_s(H)$.

est un sous-groupe algébrique différentiel dense de $SO_2^e(U)^+$ défini sur F.
La composante de l'identité de $SO^e(\mathcal{B},\beta)^+$ est $SO^e(\mathcal{B})$.

b) Si H est un sous-groupe algébrique différentiel dense de $SO_2^e(U)^+$, défini sur F, alors il existe un triplet (e, B, β) comme ci-dessus tel que

$$H = SO^e(\mathcal{B}, \beta)^+ .$$

c) Si (e, B, β) et (e', B', β') sont deux triplets comme définis ci-dessus, une condition nécessaire et suffisante pour que $SO^e(\mathcal{B}, \beta)^+$ soit conjugué sur F à $SO^{e'}(\mathcal{B}', \beta')$ est qu'il existe un f appartenant à F^* tel que $e'^{-1}e = f^2$, $f\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ et $SO_2^e(F) \cap \Pi_e^{-1}((f\beta' - \beta + \mathcal{B}) \cup (f\beta' + \beta + \mathcal{B})) \neq \emptyset$

d) Si $(e, \mathcal{B}, \beta)$ est un triplet comme ci-dessus, une condition nécessaire et suffisante pour que $SO^e(\mathcal{B}, \beta)^+ \subset P(FK)$ est que $\mathcal{B} = \{0\}$ et il existe des éléments e', f, g, h de F tels que e' appartienne à C^*, $g \neq 0$, $e = f^2 e'$, $h^2 - eg^2$ appartienne à C^* et $\beta = (\frac{1}{2}\delta_1 h.g^{-1}, \ldots\ldots, \frac{1}{2}\delta_m h.g^{-1})$.
Lorsque c'est le cas, $SO^e(\mathcal{B}, \beta)^+$ est conjugué sur F à $SO^{e'}(0, f^{-1}\beta)^+$.

<u>Démonstration :</u>

a) Il est clair que d'après le théorème 9-(a), $SO^e(\mathcal{B},\beta)^+$ est un sous-groupe de $SO_2^e(U)^+$ et différentiellement F-fermé puisque l'ensemble $\beta + \mathcal{B}$ est différentiellement F-fermé et Π_e^* est une application rationnelle différentielle définie sur F.

D'après le théorème 9-(a), $SO^e(\mathcal{B})$ est un sous-groupe algébrique différentiel propre connexe de $SO^e(\mathcal{B}, \beta)^+$. De plus, quel que soit x élément de $SO^e(\mathcal{B},\beta)^+$ et quel que soit t élément de $SO^e(\mathcal{B})$, xt appartient à $SO^e(\mathcal{B})$ si x appartient à $SO^e(\mathcal{B})$, c'est-à-dire $x.SO^e(\mathcal{B}) = SO^e(\mathcal{B}) = \Pi_e^{-1}(\mathcal{B})$ et xt appartient à $\Pi_e^{*-1}(\beta + \mathcal{B}) = SO^e(\beta + \mathcal{B})^*$ si x appartient à $SO^e(\beta + \mathcal{B})^*$, c'est-à-dire $x . SO^e(\mathcal{B}) = SO^e(\beta + \mathcal{B})^*$. Il en résulte que

$$\left[SO^e(\mathcal{B}, \beta)^+ : SO^e(\beta + B)\right] = 2 .$$

Donc $SO^e(\mathcal{B})$ est un sous-groupe algébrique différentiel connexe d'indice finide de $SO^e(\mathcal{B}, \beta)^+$. On en déduit que $SO^e(\mathcal{B})$ est la composante de l'identité de $SO^e(\mathcal{B}, \beta)^+$. Comme $SO^e(\mathcal{B})$ est dense dans $SO_2^e(U)$ et que $\left[SO_2^e(U)^+ : SO_2^e(U)\right] = 2$, $SO^e(\mathcal{B}, \beta)^+$ est dense dans $SO_2^e(U)^+$. Ce qui achève la démonstration de (a).

b) Soit H un sous-groupe algébrique différeintiel dense de $SO_2^e(U)^+$ défini sur F. Alors la composante de l'identité H° de H est dense dans $SO_2^e(U)$ et est défini sur F.

D'après le théorème 9-(a), il existe un sous-groupe algébrique différentiel $\mathcal{B}$ de I_e défini sur F tel que $H° = SO^e(\mathcal{B})$.

Il est clair que $H \neq H°$; posons $[H : H°] = n$. Pour tout x appartenant à $H \cap SO_2^e(U)$, x^n appartient à H°. D'autre part, po $\zeta_s(H°)$ est un sous-groupe algébrique différentiel dense de U^*, et par conséquent, comme $(\text{po}\, \zeta_s(x))^n = \text{po}\, \zeta_s(x^n)$ appartient à po $\zeta_s(H°)$, on a po $\zeta_s(x)$ appartient à po $\zeta_s(H°)$. D'où x appartient à H°. Donc $H° = H \cap SO_2^e(U)$, implique que $n = 2$.

Fixons w appartenant $H - H°$ et posons $\beta = \Pi_e^*(w)$. Il est clair que β appartient à $I_e = \mathrm{Im}\Pi_e^* = \mathrm{Im}\,\Pi_e$.

De plus, si x' appartient à $SO_2^e(U)^*$, alors, d'après le lemme 9,

$$\Pi_e^*(x') \in \beta + \mathcal{B} \Longleftrightarrow \Pi_e^*(x') - \Pi_e^*(w) \in \mathcal{B}. \text{ Or } \Pi_e^*(x') - \Pi_e^*(w) = \Pi_e(x'w) \in \mathcal{B} .$$

Ce qui équivaut à dire que x'w appartient à $\Pi_e^{-1}(\mathcal{B}) = H°$; donc, on a $x' \in H - H°$.

Il en résulte que $H = SO^e(\mathcal{B}, \beta)$.

Il reste à montrer que l'élément $\beta + \mathfrak{B}$ de $G_a^m / \mathfrak{B}$ est rationnel sur F.

Pour cela, soit B contenu dans $F\{y_1, \ldots\ldots, y_n\}_1$ l'ensemble caractéristique canonique pour l'idéal différentiel linéaire de définition de $\mathfrak{B}$. On va montrer que $L(\beta)$ appartient à F pour tout L élément de B .

Soit $\mathfrak{A}$ l'idéal différentiel de définition de H dans $U\{z\}$ où $z = (z_{ij})$ est une matrice d'ordre 2 d'indéterminées différentielles sur U .

Posons $f_i(z) = \frac{1}{2}\,(\delta_i e) z_{11} z_{21} + e(z_{11} \cdot \delta_i z_{21} - \delta_i z_{11} \cdot z_{21})$ $(1 \leq i \leq m)$

et soit $f(z) = (f_1(z), \ldots\ldots, f_m(z))$.

D'après le lemme 8, pour tout x appartenant à H, $f(x) = \begin{cases} II_e(x) & \text{si } x \in H^o \\ -II_e^*(x) & \text{si } x \in H - H^o \end{cases}$

Alors, le polynôme différentiel $L(f(z))(L(f(z)) + L(\beta)$ appartient à $\mathfrak{A}$ pour tout L fixé dans B .

Ecrivons $L(\beta) = \sum_{j=1}^{r} \beta_j \eta_j$ où $\eta_1, \ldots\ldots, \eta_r$ appartenant à U sont linéairement indépendants sur F, $\eta_1 = 1$ et $\beta_1, \ldots\ldots, \beta_r$ appartiennent à F ; alors, les polynômes différentiels :

$L(f(z))^2 + \beta_1 L(f(z)), \beta_2 L(f(z)), \ldots\ldots, \beta_r L(f(z))$ appartiennent à $\mathfrak{A}$ puisque $\mathfrak{A}$ est défini sur F ; supposons qu'il existe un entier $j \geqslant 2$ tel que $\beta_j \neq 0$, alors $L(\beta) \neq 0$; mais $L(f(z))$ appartient à $\mathfrak{A}$ et donc $L(\beta) = L(II_e^*(w)) = -L(f(w)) = 0$, contradiction . Donc pour tout $j \geqslant 2$, $\beta_j = 0$. Ce qui implique que $L(\beta) = \beta_1$ appartient à F . D'où la partie (b) .

c) Posons $H = SO^e(\mathfrak{B}, \beta)^+$ et $H' = SO^{e'}(\mathfrak{B}', \beta')^+$. On va montrer que la condition est suffisante . Soient f appartenant à F^* et w appartenant à $SO_2^e(F)$ tels que $e'^{-1}e = f^2$, $f\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$ et supposons que $II_e(w)$ appartienne à $f\beta' - \beta + \mathcal{B}$. Puisque $SO_2^e(U)$ est isomorphe à U^* (par $p \circ \zeta_s$), il existe v appartenant à $SO_2^e(U)$ tel que $v^2 = w$; alors, v est projectivement rationnel sur F et normalise $SO_2^e(U)$, $SO_2^e(U)^+$ et donc aussi $H°$ (prop. 26).

Posons $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$; on a $zvHv^{-1}z^{-1} = H'$.

En effet, le rappel du résultat de géométrie algébrique dans la démonstration du théorème 9-(b) et ce théorème 9-(b) nous donnent :

$zvH°v^{-1}z^{-1} = zH°z^{-1} = H'°$ et $zvSO_2^e(U)^* v^{-1}z^{-1} = z\, SO_2^e(U)^* z^{-1} = SO_2^e(U)^*$

D'où $zvHv^{-1}z^{-1} = H'$

Si x appartient à $SO_2^e(U)^*$, on a : $\Pi^*_{e'}(zxz^{-1}) = \Pi^*_{e'}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & -e\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^{-1} \end{pmatrix}\right]$

$$= \Pi^*_{e'}\begin{pmatrix} \alpha & -ef^{-1}\gamma \\ f\gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \Pi^*_{e'}\begin{pmatrix} \alpha & -e'f\gamma \\ f\gamma & -\alpha \end{pmatrix} \text{ car}$$

$e'^{-1}e = f^2$. Donc $\Pi^*_{e'}(zxz^{-1}) = (\delta_1\alpha . f^{-1}\gamma^{-1}, \ldots\ldots\ldots, \delta_m\alpha . f^{-1}\gamma^{-1})$

$$= f^{-1}\,\Pi^*_e(x) \quad .$$

Aussi, vxv^{-1} est un élément de $SO_2^e(U)^*$. On a donc :

$\Pi^*_{e'}(zvxv^{-1}z^{-1}) = f^{-1}\,\Pi^*_e(vxv^{-1}) = f^{-1}\,(2\,\Pi_e(v) + \Pi^*_e(x))$ (d'après le lemme 9-(c))

D'où $\Pi^*_e(x) = f\,\Pi^*_{e'}(zvxv^{-1}z^{-1}) - 2\,\Pi_e(v)$.

Cette égalité et le fait que $II_e(w)$ appartient à $f\beta' - \beta + \mathcal{B}$, montre

qu'on a :

$$
\begin{aligned}
x \in H - H^{\circ} &\Longleftrightarrow II_e^*(x) \in \beta + \mathcal{B} \\
&\Longleftrightarrow fII_{e'}^*(zvxv^{-1}z^{-1}) - 2II_e(v) \in \beta + \mathcal{B} \\
&\Longleftrightarrow f\,II_{e'}^*(zvxv^{-1}z^{-1}) - II_e(w) \in \beta + B \quad (\text{car } v^2 = w) \\
&\Longleftrightarrow II_{e'}^*(zvxv^{-1}z^{-1}) \in f^{-1}(II_e(w) + \beta + \mathcal{B}) = \beta' + \mathcal{B}' \\
&\Longleftrightarrow zvxv^{-1}z^{-1} \in H' - H'^{\circ} .
\end{aligned}
$$

Ce qui montre que H et H' sont conjugués sur F .

Maintenant supposons que $II_e(w)$ appartienne à $f\beta' + \beta + \mathcal{B}$. Il faut aussi montrer que H est conjugué à H' sur F.

Soit $w = \begin{pmatrix} a & ec \\ c & a \end{pmatrix}$ avec a, c éléments de F et $a^2 - ec^2 = -1$.

Soit $v^* = \begin{pmatrix} \alpha & -e\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ appartenant à $SO_2^e(U)^*$ tel que $\alpha^2 + e\gamma^2 = a$

et $2\alpha\gamma = c$. Alors il est clair que v^* est projectivement rationnelle sur F (i.e $v^* \in P(F)$) , et on a : $2II_e^*(v^*) = 2\,\varepsilon\Delta 1(\alpha + \varepsilon\gamma)$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon\Delta 1(\alpha + \varepsilon\gamma)^2 \\
&= \varepsilon\Delta 1(a + \varepsilon c) \\
&= II_e(w) .
\end{aligned}
$$

Il en résulte, par des calculs semblables comme ci-dessus, que $zv^*Hv^{*-1}z^{-1} = H'$, c'est-à-dire H est conjugué sur F à H' . D'où la condition suffisante.

<u>Condition nécessaire :</u> Supposons que H et H' soient conjugués sur F. Alors il en est de même pour $H^\circ = SO^e(\mathcal{B})$ et $H'^\circ = SO^{e'}(\mathcal{B}')$.

D'après le théorème 9-(b), il existe f appartenant à F^* tel que $e'^{-1}e = f^2$ et $f\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. Posons $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$. Alors :

$z^{-1}H'^\circ z = H^\circ$ et $z^{-1}H'^\circ z \subset SO_2^e(U)^+$. Posons $H'' = z^{-1}H'z$; d'après la partie (a), il existe $\mathcal{B}''$ inclus dans I_e et β'' appartenant à I_e tels que $H'' = SO^e(\mathcal{B}'', \beta'')$. Puisque $SO^e(\mathcal{B}'') = H''^\circ = (z^{-1}H'z)^\circ = H^\circ = SO^e(\mathcal{B})$, on en conclut, d'après la proposition 25, que $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}$.

D'autre part, en fixant un élément x' appartenant à $H' - H'^\circ$ et en posant $x'' = z^{-1}x'z$, on obtient : $f\beta' = f\,\Pi^*_{e'}(x') = f\,\Pi^*_{e'}(zx''z^{-1}) = f\,\Pi^*_{e'}(z^{-1}x''^{-1}z)$

$$= \Pi^*_e(x''^{-1}) = \Pi^*_e(x'') = \beta'' \pmod{\mathcal{B}}.$$

Maintenant H'' et H sont conjugués sur F, c'est-à-dire qu'il existe v appartenant à P(F) tel que $vHv^{-1} = H''$. Alors v normalise $SO_2^e(U)^+$ et comme $SO_2^e(U)^+$ est son propre normalisateur dans $SL_2(U)$, on a v élément de $SO_2^e(U)^+$.

D'abord supposons que v appartienne à $SO_2^e(U)$; alors l'élément $w = v^2$ appartient à $SO_2^e(F)$, et fixons x appartenant à $H - H^\circ$.

On a : $f\beta' = \beta'' = \Pi^*_e(vxv^{-1}) = 2\,\Pi_e(v) + \Pi^*_e(x) = \Pi_e(w) + \beta \pmod{\mathcal{B}}$,

c'est-à-dire, $\Pi_e(w) \in f\beta' - \beta + \mathcal{B}$.

Maintenant, supposons que v appartienne à $SO_2^e(U)^*$. Soit $v = \begin{pmatrix} \alpha & -e\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ et posons $a = \alpha^2 + e\gamma^2$ et $c = 2\alpha\gamma$. Il est facile de vérifier que la matrice $w = \begin{pmatrix} a & ec \\ c & a \end{pmatrix}$ appartient à $SO_2^e(F)$, et que $\Pi_e(w) = 2\,\Pi^*_e(v)$.

D'où $f\beta' = \beta'' = II_e^*(vxv^{-1}) = 2\, II_e^*(v) - II_e^*(x) = II_e(w) - \beta \pmod{\mathcal{B}}$;

ce qui implique que $II_e(w)$ appartient à $f\beta' + \beta + \mathcal{B}$. Ce qui achève la démonstration du (c) .

d) Si $\mathcal{B} = \{0\}$ et qu'il existe e', f, g, h éléments de F tels que :
$e' \in C^*$, $g \neq 0$, $e = f^2 e'$, $h^2 - eg^2 \in C^*$ et $\beta = (\frac{1}{2}\delta_1 h.g^{-1}, \ldots, \frac{1}{2}\delta_m h.g^{-1})$
alors, la dernière partie du (d) résulte du (c) car on a $f^{-1}\beta$ appartient à $I_{e'F}$ et $SO^{e'}(0, f^{-1}\beta)^+$ est bien défini .

<u>Condition nécessaire :</u> Soit $H = SO^e(\mathcal{B}, \beta)^+$ et supposons que H soit inclus dans $P(FK)$. Alors, nécessairement, $H°$ est inclus dans $P(FK)$ et d'après le théorème 9-(c) , on a $\mathcal{B} = \{0\}$ et il existe e' appartenant à C^*, f élément de F^* avec $e'^{-1}e = f^2 \Longrightarrow e = f^2 e'$.
Fixons ε élément de U avec $\varepsilon^2 = e$ et posons $\beta = (\beta_1, \ldots\ldots, \beta_m)$; soit z une indéterminée différentielle sur U, et soit $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ inclus dans $U\{z\}$ l'idéal différentiel linéaire engendré par $(\delta_i z - 2\beta_i \varepsilon^{-1} z)_{1 \leq i \leq m}$.

$\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ a un zéro non trivial dans $F\langle\varepsilon\rangle = F(\varepsilon)$. En effet, puisque l'ensemble A des zéros de $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ est un sous-groupe algébrique différentiel de G_a défini sur $F(\varepsilon)$, il suffira de montrer que $A \subset FK \subset F(\varepsilon)K$ (prop. 22) .
Soit a appartenant à A $(a \neq 0)$ et fixons b appartenant à U^* avec $b^2 = a$ et soit x élément de SO^{e*} tel que $p^* o\, \zeta_s^*(x) = b$. Alors $II_e^*(x) = \beta$ et x appartient à $H - H°$. En particulier, x appartient à $P(FK)$, ainsi que $a = b^2 = (p^* o\, \zeta_s^*(x))^2$ appartient à FK . D'où $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ a un zéro non trivial .

Si $\beta = 0$, on prend $b = 0$ et $g = f^{-1}$.

Supposons que $\beta \neq 0$ et soit a élément de $A \cap F(\xi)^{*}$. Si $F(\xi) = F$, alors, a appartient à F et on choisit $h = \frac{1}{2}(a + a^{-1})$ et $g = \frac{1}{2}(a - a^{-1})\xi^{-1}$.

Ce qui donne $h^2 - eg^2 = \frac{1}{4}(a^2 + a^{-2} + 2) - \frac{1}{4}(a^2 + a^{-2} - 2)e^{-1} = 1$,

donc $h^2 - eg^2 = 1$ et d'après le lemme 8, on a ;

$$\beta_i = \frac{1}{2}\xi\delta 1_i a = \frac{1}{2}\xi\,\delta 1_i(h + \xi g) = \frac{1}{2}(\delta_i h)g^{-1} \qquad (1 \leq i \leq m).$$

D'autre part, si $F(\xi)$ différent de F, alors a appartient à $F(\xi)$ et les éléments 1 et ξ sont linéairement indépendants sur F. Dans ce cas posons $a = h + \xi g$ $(h, g \in F)$. Alors $g \neq 0$ et $h^2 - eg^2 \neq 0$.

Soit l'équation $\delta_i(h + \xi g) = 2\beta_i\,\xi^{-1}(h + \xi g)$. En dérivant, on a :

$$\delta_i h = 2\beta_i g \quad \text{et} \quad \delta_i g = 2\beta_i e^{-1}h, \text{ donc } h^2 - eg^2 \text{ appartient à } C.$$

Finalement le lemme 8 montre que $\beta_i = \frac{1}{2}(\delta_i h)g^{-1}$. D'où la condition nécessaire.

<u>Condition suffisante :</u> Supposons $\mathcal{B} = 0$ et e', f', g et h comme définis dans le théorème. Puisque $e'^{-1}e = f^2$, le théorème 9-(c) montre que le groupe $H^o = SO^e(0)$ est projectivement rationnel sur FK. Pour montrer que $H \subset P(FK)$, il suffira de construire un élément x appartenant à $H - H^o$ avec x élément de $P(FK)$.

Soit c fixé dans K^{*} avec $c^2 = h^2 - eg^2$. Choisissons α, γ appartenant à U tels que $\alpha^2 + e\gamma^2 = c^{-1}f$, $2\alpha\gamma = c^{-1}g$, $\alpha^2 - e\gamma^2 = -1$

et posons $x = \begin{pmatrix} \alpha & -e\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$. Alors, x appartient à $SO_2^{e*} \cap P(FK)$.

De plus, d'après le lemme (8), $II_e^*(x) = \varepsilon\Delta 1(\alpha + \varepsilon\gamma) = \frac{1}{2}\varepsilon\Delta 1(\alpha + \varepsilon\gamma)^2$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon\Delta 1(c^{-1}(f + \varepsilon g))$$

$$= \beta$$

Il en résulte que x appartient à $H - H^o$. Ce qui complète le (d) et achève la démonstration du théorème 10 .

Remarque 10 :

a) Dans la partie (d) du théorème précédent, on a vu que si e, h, g appartiennent à F tels que $eg \neq 0$ et $h^2 - eg^2$ appartienne à C^*, alors, l'élément défini par $\beta = (\frac{1}{2}\delta_1 h.g^{-1}, \ldots\ldots, \frac{1}{2}\delta_m h.g^{-1})$ appartient à I_{eF} .

b) Encore dans la partie (d), si $\beta' = f^{-1}\beta$, alors ,

$\beta' = (\frac{1}{2}\delta_1 h'.g'^{-1}, \ldots\ldots\ldots, \frac{1}{2}\delta_m h'.g'^{-1})$ pour certains h' , g' appartenant

à F, avec $g' \neq 0$ et $h'^2 - e'g'^2$ éléments de C^*. Çla peut se voir directement en supposant $h' = h$ et $g' = f^{-1}g$ ou indirectement en remarquant que $SO^{e'}(0, \beta')^+$ est inclus dans P(FK) .

c) Si $SO^e(0, \beta)^+$ est inclus dans P(FK), alors $F(\varepsilon)$ contient un élément non nul a tel que $\Delta 1(a) = 2\beta\varepsilon^{-1}$.

Corollaire : Soient e élément de F^*, et β élément de I_{eF} tels que le groupe $H = SO^e(0, \beta)^+ \subset P(FK)$. Si n appartient à N, posons :

$H_n = SO^e(0, n\beta)^+$. Alors, pour tout n appartenant à N,

(1) H_{4n} est conjugué sur F à $H_0 = SO_2^e(K)^+$.

(2) H_{2n+1} est conjugué sur F à H .

(3) $H_{2n} \subset SO_2^e(FK)^+$.

(4) $H_n \subset P(FK)$.

<u>Démonstration :</u> Le (1) se montre d'après le théorème 10 -(c) .

Pour cela, on va construire un élément x_n de $SO_2^e(F)$ tel que $II_e(x_n) = 4n\beta$.

Mais, comme II_e est un homomorphisme, il suffit de construire x_1 $(n = 1)$

Soient h, g éléments de F tels que $h^2 - eg^2$ appartienne à C^*, et soit

$$\beta = \left(\frac{1}{2}\,\delta_1 h.g^{-1}, \dots\dots, \frac{1}{2}\,\delta_m h.g^{-1}\right) \quad \text{avec } g \neq 0 .$$

Fixons c appartenant à K^* avec $h^2 - eg^2 = c^2$ et posons $x = c^{-1}\begin{pmatrix} h & eg \\ g & h \end{pmatrix}$

et $x_1 = x^2$. On a :

$$II_e(x_1) = II_e(x^2) = 2\,II_e^*(x) = 2(\,\delta_1(c^{-1}h).g^{-1}c, \dots\dots, \delta_m(c^{-1}h).g^{-1}c) .$$

$$\text{Or} \quad \delta_i(c^{-1}h).g^{-1}c = (\,\delta_i c^{-1} h + c^{-1}\,\delta_i h)g^{-1}c = \delta_i h.g^{-1}$$

$$\text{D'où} \quad II_e(x_1) = 2\,(\,\delta_1 h.g^{-1}, \dots\dots, \delta_m h.g^{-1}\,) = 4\left(\frac{1}{2}\,\delta_1 h.g^{-1}, \dots\dots, \frac{1}{2}\,\delta_m h.g^{-1}\right)$$

$$= 4\,\beta .$$

Donc $II_e(x_1) - 4\,\beta = 0$. Ce qui démontre le (1), c'est-à-dire, H_{4n} contenu dans $SO_2^e(FK)^+$ est conjugué sur F à $H_0 = SO_2^e(K)^+$.

Pour démontrer le (2), remarquons qu'un entier rationnel impair peut s'écrire sous la forme $4n - 1$ ou $4n + 1$.

Comme $II_e(x_n) \pm \beta + 4(n \mp 1)\beta = 0$, il résulte du théorème 10-(c) que le groupe $H_1 = H$ est conjugué sur F à la fois au groupe H_{4n+1} et au groupe H_{4n-1} . Ce qui achève le (2) .

D'après le (1) H_{4n} est inclus dans $SO_2^e(FK)^+$, donc, pour démontrer le (3), il reste à montrer que $H_{4n+2} \subset SO_2^e(FK)^+ \quad (n \in N)$.

D'après le (2), il suffit de montrer que $H_2 \subset SO_2^e(FK)^+$.

En réalité, $H_2^o \subset SO_2^e(FK)$, et, pour tout w appartenant à $H_2 - H_2^o$, on a

$$II_e^*(w) = 2\beta = 0 .$$

Fixons v appartenant à $H - H^o$. Alors, $II_e^*(v) - \beta = 0$ et v appartient à $P(FK)$ (voir 1) . D'après le lemme 9 - (c), $II_e^*(vwv^{-1}) = 2\,II_e^*(v) - II_e^*(w)$

$$= 2\beta - 2\beta = 0 .$$

Puisque e appartient à FK (voir théorème 10 - (d) , on a $vwv^{-1} = k$ appartient à $SO_2^e(FK)^+$ c'est-à-dire, $w = v^{-1}kv$. Donc w appartient à $SO_2^e(FK)$. Ce qui démontre le (3) .

Le (4) est une conséquence du (2) et du (3) . En effet, quel que soit n appartenant à N, on a, n pair donc le (3) démontre le (4), ou n impair donc le (2) démontre le (4) . Ce qui achève la démonstration du corollaire .

Remarque 21 : Nous allons maintenant donner l'exemple d'un groupe du type $SO^e(0,\beta)^+$ tel que ni $SO^e(0,\beta)^+$, ni $SO^e(0,2\beta)$ ne soient conjugués sur le corps de base à $SO^e(0,0) = SO_2^e(K)^+$.

Soit F un corps différentiel de corps des constante Q . Alors, le corps des constantes de $F(i)$ est $Q(i)$ à cause de la disjonction linéaire de F et de K sur Q .

Posons $e = -1$, $h = i \sin x$, $g = i\cos x$ et $\beta = \frac{1}{2}$. Il est clair que les conditions du théorème 10-(d) sont satisfaites et donc le groupe $H = SO^e(0,\beta)^+$ est projectivement rationnel sur FK. Mais ni H, ni $H_2 = SO^e(0, 2\beta)$ ne sont conjugués sur F à $SO_2^e(K)^+$.

En effet, supposons que H soit conjugué sur F à $SO_2^e(K)^+$.

D'après le théorème 10-(c), il existe α, γ appartenant à F tels que $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$ et $\delta l(\alpha + i\gamma) = -\frac{1}{2} i$. Posons $\psi = \exp(-\frac{1}{2} ix)$; alors, il existe k appartenant à K^* tel que $\psi = k(\alpha + i\gamma)$ (ψ et $\alpha + i\gamma$ ayant la même dérivée logarithmique), ainsi que ψ appartient à $FK(\exp(ix))$.

Soient P et Q éléments de $K[X]$ tels que $\psi = P(\exp(ix)) / Q(\exp(ix))$.

Alors $\exp(ix).P(\exp(ix))^2 = Q(\exp(ix))^2$ et donc $\exp(ix)$ vérifie sur K la relation $XP^2 - Q^2 = 0$. Ceci est impossible car $\exp(ix)$ est transcendant sur K.

Il en résulte que H n'est pas conjugué sur F à $SO_2^e(K)^+$.

De même, $H_2 = SO^e(0, 2\beta)^+$ n'est pas conjugué sur F à $SO_2^e(K)^+$.

En effet, supposons que H_2 le soit ; alors, il existe α, γ appartenant à F avec $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$ et $\delta l(\alpha + i\gamma) = -i$. Donc, il existe une constante k telle que $\alpha + i\gamma = k\exp(-ix)$. Puisque $\alpha + i\gamma$ et $\exp(-ix)$ appartiennent à $F(i)$, on a k appartenant à $Q(i)$. Posons donc $k = a + bi$ avec a et b éléments de Q. On a :

$\alpha + i\gamma = k(\cos x - i\sin x) = k(-gi - h) = (a + bi)(-gi - h)$ entraîne $\alpha = -ah + bg$ et $\gamma = -(ag + bh)$. Comme $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$, on a

$$
\begin{aligned}
2\quad \alpha^2 + \gamma^2 = 1 &= a^2h^2 + b^2g^2 - \cancel{2abhg} + a^2g^2 + b^2h^2 + \cancel{2abhg} \\
&= a^2(h^2 + g^2) + b^2(h^2 + g^2) = -a^2 - b^2 \\
&= -(a^2 + b^2) .
\end{aligned}
$$

Donc $1 = -(a^2 + b^2)$; ceci est impossible . D'où H_2 n'est pas conjugué sur F à $SO_2^e(K)^+$.

Ces deux exemples montrent que, ni $H = SO^e(0, \beta)^+$, ni $H_2 = SO^e(0, 2\beta)^+$ ne sont en général conjugué sur F à $SO_2^e(K)^+$.

<u>Théorème 11</u> : Soit H un sous-groupe algébrique différentiel de $SL_2(U)$ défini sur F ; soit C le corps des constantes de F.

Supposons que $Z_2 \subset H \subset P(FK)$.

a) Si H est infini , alors H est conjugué sur F à un sous-groupe algébrique différentiel de l'un des types suivants :

1) $s.SL_2(K).s^{-1}$ où s appartient à $P(FC_a)$ et est tel que $\Delta l(s)$ appartient à $sl_2(F)^m$.

2) $ST(\mathfrak{B}, K^*, 0)$, où $\mathfrak{B}$ est un sous-groupe algébrique différentiel non nul de G_a défini sur F et ayant (comme espace vectoriel sur K) une base finie dans F.

3) $ST(\mathfrak{B}, P_n, 0)$, où n appartient à N et $\mathfrak{B}$ défini comme dans (2).

4) $SO_2^e(K)$, où e appartient à C^*.

5) $SO^e(0, \beta)^+$, où e appartient à C^*et $\beta = (\frac{1}{2}\delta_1 h.g^{-1}, \ldots\ldots\ldots, \frac{1}{2}\delta_m h.g^{-1})$

pour certains éléments h, g appartenant à F, $g \neq 0$ et $h^2 - eg^2$ appartient à C^*.

b) Si H est fini et si C est algébriquement clos, alors $H \subset P(F)$ et H est conjugué sur F à l'un des groupes suivants :

6) C_{2n} où n appartient à N .

7) $D(4n,e)$ où e appartient à F^*et n élément de N .

8) $D(8,e,f,g)$ où e, f, g appartiennent à F, $eg \neq 0$ et $f^2 + eg^2 = 1$

9) T

10) OC

11) DI

Démonstration :

a) Soit G la clôture de Zariski de H dans $SL_2(U)$. Alors, G est un sous-groupe algébrique de $SL_2(U)$ défini sur F. Comme G est infini, on peut supposer, d'après le théorème 3, que G est l'un des groupes suivants : SL_2, ST_2, U_2^n $(n \in N)$, SO_2^e ou $SO_2^e(U)^+$ pour un certain e appartenant à F^*. Puisque H est dense dans G, le résultat s'obtient par les théorèmes 6-(d), 8-(d), 9-(c), 10-(d), corollaire du théorème 8 et les remarques 20 .

b) Supposons H fini et C algébriquement clos . Posons $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ élément de H .Alors, les éléments a, b, c, d sont algébriques sur F et si r est un rapport de deux d'entre eux, alors r est aussi algébrique sur F . Mais x appartient à $P(FK)$, donc r appartient à FK . Comme C est algébriquement clos, F est relativement algébriquement clos dans FK et par conséquent r appartient à F . Ce qui montre que x appartient à $P(F)$. D'où $H \subset P(F)$. On applique le théorème 5 rappelé. Puisque F contient le corps des constantes C algébriquement clos, et puisque $Z_2 \subset H$, les résultats s'en déduisent . D' où le théorème 11 .

CHAPITRE V : APPLICATION DES SOUS-GROUPES ALGEBRIQUES DIFFERENTIELS DE $SL_2(U)$ AUX EXTENSIONS DE CORPS DIFFERENTIELS FORTEMENT NORMALES .

§ . 1. Notations de base et énoncés des résultats principaux :

F désigne un sous-corps différentiel de U sur lequel U est universel, C son corps des constantes, t un élément fixe de U différentiellement transcendant sur F. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des sous-corps différentiels $\mathcal{E}$ de $F\langle t\rangle$ contenant F tel que $F\langle t\rangle$ soit une extension fortement normale sur $\mathcal{E}$. On identifiera canoniquement le groupe de Galois $G(F\langle t\rangle / \mathcal{E})$ avec un sous-groupe du groupe $Aut(FK\langle t\rangle / FK)$ des automorphismes de $FK\langle t\rangle$ sur FK .

Définitions :

a) Deux sous-corps différentiels $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de $F\langle t\rangle$ sont dits conjugués sur F s'il existe un automorphisme différentiel σ de $F\langle t\rangle$ sur F tel que $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}'$.

b) Quel que soit δ appartenant à Δ et quel que soit u appartenant à U avec $\delta u \neq 0$, on pose :

$$\delta S(u) = \delta^3 u(\delta u)^{-1} - \frac{3}{2}(\delta^2 u)^2(\delta u)^{-2} .$$

C'est la dérivée Schwarzienne de u relativement à δ .

Soit $\mathcal{B}$ un sous-groupe algébrique différentiel de G_a défini sur F . On note $\Gamma(\mathcal{B})$ l'ensemble des polynômes différentiels homogènes linéaires non nuls de $F\{y\}$ qui s'annulent sur $\mathcal{B}$.

Rappels :

a) Isomorphisme fort : Soit C le corps des constantes de F. Un isomorphisme σ de F est dit fort s'il satisfait aux conditions suivantes :

1) σ laisse invariant tout élément de C.

2) $\sigma F \subset FK$ et $F \subset \sigma F.K$; ce qui équivaut à dire que $FK = \sigma F.K$

où K est le corps des constantes de U.

b) Extension fortement normale : Une extension différentielle $\mathcal{G}$ de F est fortement normale si $\mathcal{G}$ est engendré par un nombre fini d'éléments tel que tout F-isomorphisme de $\mathcal{G}$ est fort.

c) Pour tout x appartenant à $P(FK)$ avec $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$t^x = (dt - b)(-ct + a)^{-1} \qquad \text{(voir ch. IV, § 4).}$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-groupes algébriques différentiels H de $SL_2(U)$ définis sur F tel que $Z_2 \subset H \subset P(FK)$ où $Z_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$. .

Quel que soit x appartenant à $P(FK)$, soit σ_x l'unique automorphisme différentiel de $FK\langle t \rangle$ sur FK avec $\sigma_x(t) = t^x$.

Si H appartient à $\mathcal{S}$, on pose $T(H) = \left\{ \sigma_x \;/\; x \in H \right\}$ et

$$E(H) = \left\{ \eta \in F\langle t \rangle \;/\; \sigma_x(\eta) = \eta \;, \quad \forall x \in H \right\} .$$

$E(H)$ est un sous-corps différentiel de $F\langle t \rangle$ contenant F.

Théorème 12 : Soit $\mathcal{E}$ un sous-corps différentiel de $F\langle t \rangle$ contenant F et supposons $F\langle t \rangle$ fortement normal sur $\mathcal{E}$.

a) Si $G(F\langle t \rangle / \mathcal{E})$ est infini, alors $\mathcal{E}$ est conjugué sur F à un corps différentiel de l'un des types suivants :

1) $F\left\langle \delta s_1(t^s), \ldots\ldots, \delta s_m(t^s) \right\rangle$ où s appartient à $P(FC_a)$ et

$\Delta l(s)$ appartient à $sl_2(F)^m$.

2) $F\langle (\delta_i L(t))_{1 \leq i \leq m,\ L \in \Gamma(\mathcal{B})} \rangle$ où $\mathcal{B}$ est un sous-groupe algébrique différentiel non nul de G_a, défini sur F et $\mathcal{B}$ (comme espace vectoriel sur K) a une base finie dans F.

3) $F\langle (L(t^n))_{L \in \Gamma(B)} \rangle$ où n appartient à N et $\mathcal{B}$ comme défini dans (2).

4) $F\langle (\delta_i t / (e - t^2))_{1 \leq i \leq m} \rangle$ où e appartient à C^* .

5) $F\langle ((\delta_i t / (e - t^2) - \beta_i e^{-1})^2)_{1 \leq i \leq m} \rangle$ où e appartient à C^* et $\beta_i = \frac{1}{2} (\delta_i h) g^{-1}$ pour certains éléments h et g appartenant à F , avec $g \neq 0$ et $h^2 - eg^2$ appartenant à C^*.

b) Si $G(F\langle t \rangle / \mathcal{E})$ est fini et si C est algébriquement clos , alors $\mathcal{E}$ est conjugué sur F à un corps différentiel de l'un des types suivants ; de plus $F\langle t \rangle$ est galoisienne sur $\mathcal{E}$.

6) $F\langle t^n \rangle$ où n appartient à N.

7) $F\langle t^n + e^n t^{-n} \rangle$ où n appartient à N et e appartient à C^* .

8) $F\langle (t^2 + e^2)t^{-1}(t^2 - 2fg^{-1}t - e)^{-1} \rangle$ où e, f, g appartiennent à F , $eg \neq 0$ et $f^2 + eg^2 = 1$.

9) $F\langle (t^{12} - 33t^8 - 33t^4 + 1)(t^4 - 1)^{-2} t^{-2} \rangle$.

10) $F\langle (t^{12} - 33t^8 - 33t^4 + 1)^2 (t^4 - 1)^{-4} t^{-4} \rangle$.

11) $F\langle (t^{20} - 228t^{15} + 494t^{10} + 228t^5 + 1)^3 t^{-5} (t^{10} + 11t^5 - 1) \rangle$.

<u>Théorème 13 :</u> Il y a une application injective $\mathcal{H} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{S}$ définie par : $\forall \mathcal{E} \in \mathcal{G}$, $T(\mathcal{H}(\mathcal{E})) = G(F\langle t \rangle / \mathcal{E})$.

De plus, si H appartient à $\mathfrak{S}$, alors il existe un élément $\mathcal{E}$ de $\mathcal{G}$ avec $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = H$, pourvu qu'on suppose C algébriquement clos dans le cas H fini.

<u>Théorème 14 :</u> Soit k un entier positif inférieur ou égal à 11. Soit

Soit H_k appartenant à $\mathfrak{S}$ de type (k) comme défini dans le théorème 11 .

Si k est supérieur ou égal à 6 , on suppose C algébriquement clos. Alors il existe un élément $\mathcal{E}_k$ de $\mathcal{G}$ de type (k) comme défini dans le théorème 12 avec $G(F\langle t\rangle / \mathcal{E}_k) = T(H_k)$. En particulier on a $\mathcal{E}_k = E(H_k)$.

Avant de montrer ces théorèmes, nous avons besoin des lemmes et propositions suivants .

Faisons remarquer que la démonstration des théorèmes 12 et 13 dépend de celle du théorème 14. On démontrera donc d'abord le théorème 14.

Soit $\mathcal{G}$ un sous-corps différentiel de U , U n'étant pas nécessairement universel sur $\mathcal{G}$ et soit s élément de U différentiellement transcendant sur $\mathcal{G}$.
On considère le corps différentiel $\mathcal{G}\langle s\rangle$ et le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}\langle s\rangle / \mathcal{G})$ des automorphismes différentiels de $\mathcal{G}\langle s\rangle$ sur $\mathcal{G}$.
Soit y une indéterminée différentielle sur U. Pour tout u appartenant à $U\{y\}$ et pour tout $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $GL_2(U)$ tel que $-cu + a \neq 0$,

on pose $u^x = (du - b)(-cu + a)^{-1}$. Lorsque c'est le cas, on dit que u^x est défini .

Soit $T_{s,\mathcal{G}} : P(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{G}\langle s\rangle / \mathcal{G})$ l'application définie comme suit : pour tout x appartenant à $P(\mathcal{G})$, s^x est évidemment défini et on note $T_{s,\mathcal{G}}(x)$ l'unique automorphisme différentiel de $\mathcal{G}\langle s\rangle$ sur $\mathcal{G}$

tel que $T_{s,\mathcal{G}}(x)(s) = s^x$.

Ainsi, si x' appartient à $P(\mathcal{G})$, on a $(s^x)^{x'} = s^{xx'}$. Donc

$T_{s,\mathcal{G}}(xx') = T_{s,\mathcal{G}}(x') \circ T_{s,\mathcal{G}}(x)$. Il est clair que $T_{s,\mathcal{G}}$ est un homomorphisme de groupes de noyau :

$$\operatorname{Ker}T_{s,\mathcal{G}} = Z_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$. En effet

$\operatorname{Ker}T_{s,\mathcal{G}} = \left\{ x \in P(\mathcal{G}) \;/\; T_{s,\mathcal{G}}(x) = \mathrm{Id} \right\}$; ce qui donne :

$T_{s,\mathcal{G}}(x)(s) = \mathrm{Id}(s) = s$, ce qui implique $s^x = s$; donc $(ds-b)(-cs+a)^{-1} = s$;

si $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc = 1$, on a $cs^2 + (d-a)s - b = 0$;

comme s est ranscendant sur $\mathcal{G}$ et x projectivement rationnel sur $\mathcal{G}$,

on a $c = 0 = b = d - a$ ce qui donne $d = a$. Mais comme $ad - bc = 1$,

on a $a^2 = 1$ c'est-à-dire $a = d = 1$ ou $a = d = -1$ d'où

$$\operatorname{Ker} T_{s,} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} = Z_2 .$$

<u>Lemme 10 (de Ritt) :</u> $T_{s,\mathcal{G}}$ est surjective. Donc on a la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow P(\mathcal{G}) \xrightarrow{T_{s,\mathcal{G}}} \operatorname{Aut}(\mathcal{G}\langle s\rangle / \mathcal{G}) \longrightarrow 1$$

<u>Démonstration :</u> Soit σ appartenant à $\operatorname{Aut}(\mathcal{G}\langle s\rangle / \mathcal{G})$ et soit $s' = \sigma(s)$. Comme s' appartient à $\mathcal{G}\langle s\rangle$, il existe deux polynômes A et B premiers entre eux appartenant à $\mathcal{G}\{y\}$ $(AB \notin \mathcal{G})$ et tels que $s' = A(s) / B(s)$. Il en résulte que s' est différentiellement transcendant sur $\mathcal{G}$ et le polynôme différentiel $P = A - s'B$ appartient à $\mathcal{G}\langle s'\rangle\{y\}$ et est irréductible .

Soient U et S le dominant et le séparant de P relativement à un rangement fixé. On a $P(s) = 0$, mais $S(s) \neq 0$, car autrement on aurait $B(\frac{\partial A}{\partial U}) = A(\frac{\partial B}{\partial U})$, ainsi que B diviserait $\frac{\partial B}{\partial U}$ et A diviserait $\frac{\partial A}{\partial U}$; donc $\frac{\partial A}{\partial U} = 0$ et $\frac{\partial B}{\partial U} = 0$. Ce qui contredit le fait que $S \neq 0$.

En particulier, s est un zéro de la composante générale(*) $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{\mathcal{G}\langle s'\rangle}(P)$ de P.

Soit η un zéro générique de $\mathfrak{P}$ sur $\mathcal{G}\langle s'\rangle$; puisque s est différentiellement transcendant sur $\mathcal{G}$, η est une spécialisation différentielle de s sur $\mathcal{G}$. Comme $A(\eta) - s'B(\eta) = 0$, η est aussi une spécialisation différentielle de s sur $\mathcal{G}\langle s'\rangle$, donc cette spécialisation est générique. D'où s est un zéro générique de $\mathfrak{P}$ sur $\mathcal{G}\langle s'\rangle$.

Mais le polynôme $y - s$ s'annule en s et s appartient à $\mathcal{G}\langle s'\rangle$, donc $y - s$ appartient à $\mathfrak{P}$ et par conséquent P est d'ordre zéro ; ce qui implique que P est linéaire. Il en résulte que $A = ay + b$ et $B = cy + d$ avec $cs + d \neq 0$, où a, b, c, d appartiennent à $\mathcal{G}$, donc $P = ay + b - s'(cy + d)$.

Comme $P(s) = 0$, on a :

$$as + b - s'(cs + d) = 0 \qquad s' = (as + b)(cs + d)^{-1}. \text{ D'où}$$

$$s' = s^x \text{ avec } x = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ élément de } P(\mathcal{G}).$$

La suite exacte est une conséquence du fait que $T_{s,\mathcal{G}}$ est une application surjective.

(*) Soit $F \in K\{X\}$, d'ordre r et de séparant S. L'idéal $J = [\{F\} : S]$ est parfait et on a $\{F\} = J \cap \{F, S\} = J \cap P_1 \cap \ldots\ldots \cap P_r$. J est appelé la composante générale de F $(S \notin J)$.

Soit $\mathcal{E}$ tel que $F \subset \mathcal{E} \subset F\langle t \rangle$ avec $\mathcal{E}$ élément de $\mathcal{G}$. D'après le lemme de Ritt (10), on a une suite exacte de groupes

$$1 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow P(FK) \xrightarrow{T_{t,FK}} \mathrm{Aut}(FK\langle t \rangle \,/\, FK) \longrightarrow 1$$

On va poser $T_{t,FK} = T$ et $\sigma_x = T(x)$ si x appartient à $P(FK)$.

Pour tout H appartenant à $\mathcal{S}$, on a un homomorphisme induit

$$T_{/H} : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(FK\langle t \rangle \,/\, FK) .$$

En particulier, pour tout x appartenant à H, σ_x peut être considéré comme un isomorphisme fort de $F\langle t \rangle$ sur F.

<u>Proposition 27 :</u> Soit $\mathcal{E}$ élément de $\mathcal{G}$. Alors, il existe un unique $H(\mathcal{E})$ appartenant à $\mathcal{S}$ tel que la suite

$$1 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{E}) \xrightarrow{T/\mathcal{H}(\mathcal{E})} G(F\langle t \rangle \,/\, \mathcal{E}) \longrightarrow 1$$

soit exacte.

<u>Démonstration :</u> L'unicité de $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ est évidente à partir de la suite exacte car $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = T^{-1}(G(F\langle t \rangle \,/\, \mathcal{E}))$.

Il reste à établir l'existence. Pour cela, soient y, z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22} des indéterminées différentielles sur U et posons $z = (z_{ij})_{i=1,2\,;\,j=1,2}$.

Pour chaque élément η appartenant à $\mathcal{E}$, soient A_η, B_η appartenant à $F\{y\}$ tels que $\eta = A_\eta(t) / B_\eta(t)$. Alors, il existe un entier naturel $d = d_\eta$ tel que si on pose $P_\eta(y,z) = (-z_{21}y + z_{11})^d \, (A_\eta(y^3)\, B_\eta(y) - B_\eta(y^3)\, A_\eta(y))$ où

$y^3 = (z_{22}y - z_{12})(-z_{21}y + z_{11})^{-1}$, alors $P_\eta(y,z)$ est un polynôme différentiel de $F\{y,z\}$. Donc on peut écrire $P_\eta(y,z)$ sous la forme $P_\eta(y,z) = \sum P_{\eta,M}(z).M$ où $P_{\eta,M}(z)$ appartient à $F\{z\}$ et la sommation étendue à l'ensemble $\mathcal{M}$ de tous les monômes différentiels M en l'indéterminée différentielle y .

Soit $\mathcal{A}$ l'idéal différentiel de $U\{y\}$ engendré par $(P_{\eta,M}(z))_{M\in\mathcal{M},\eta\in\mathcal{E}}$ et $\det(z) - 1$. D'où l'ensemble $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ des zéros de $\mathcal{A}$ est contenu dans $SL_2(U)$ et un élément x de $SL_2(U)$ est dans $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ si et seulement si $A_\eta(y^x)B_\eta(y^x)^{-1} = A_\eta(y)B_\eta(y)^{-1}$, $\forall\eta\in\mathcal{E}$.

Donc $H(\mathcal{E})$ est un sous-groupe algébrique différentiel de $SL_2(U)$ défini sur F.

Remarquons que si $x = (x_{ij})$ appartient à $SL_2(U)$ et si u élément de U est différentiellement transcendant sur $F\langle x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}\rangle$, alors x appartient à $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ si et seulement si la condition ci-dessus reste vraie lorsqu'on remplace y par u.

Il est clair que Z_2 est contenu dans $\mathcal{H}(\mathcal{E})$. Pour montrer que $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ est contenu dans $P(FK)$, posons $x = (x_{ij})$ élément de $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ et fixons s élément de U différentiellement transcendant sur $F\langle x\rangle$, le corps différentiel engendré sur F par les coordonnées x_{ij} de x . Il existe un isomorphisme

$$\psi : F\langle t\rangle \longrightarrow F\langle s\rangle \text{ sur } F$$

défini par $\psi(t) = s$. Posons $\mathcal{E}' = \psi(\mathcal{E})$. Alors $F\langle s\rangle$ est fortement normal sur $\mathcal{E}'$. D'après la remarque faite ci-dessus on a , :

$$A_\eta(s^x)\,B_\eta(s^x)^{-1} = A_\eta(s)\,B_\eta(s)^{-1} = \psi(s)\ ,\ \forall\eta\in\mathcal{E}\ .$$

En d'autre termes , l'unique isomorphisme différentiel

$$\zeta_x : F\langle s\rangle \longrightarrow F\langle s^x\rangle \text{ sur } F \text{ avec } \zeta_x(s) = s^x \text{ laisse}$$

$\mathcal{E}'$ invariant. D'où ζ_x est un isomorphe fort et d'après le lemme 10 (de Ritt), il existe x' appartenant à $P(FK)$ tel que $\zeta_x = T_{s,FK}(x')$ qui est tel que $s^x = \zeta_x(s) = T_{s,FK}(x')(s) = s^{x'}$. Comme s est différentiellement transcendant sur $FK\langle x \rangle$, $s^x = s^{x'}$ implique $x = \pm x'$ appartient à $P(FK)$.
D'où $H(\mathcal{E})$ appartient à $\mathcal{S}$.

En résumé, en appliquant la remarque faite avec $u = t$, on a

$$T(\mathcal{H}(\mathcal{E})) \subset G(F\langle t \rangle / \mathcal{E}).$$

Réciproquement, soit σ appartenant à $G(F\langle t \rangle / \mathcal{E})$; alors d'après le lemme 10, on a $\sigma = \sigma_x$ pour un certain x appartenant à $P(FK)$.
Mais σ laisse $\mathcal{E}$ invariant et t est différentiellement transcendant sur FK.
Utilisant une fois de plus la ramarque, on voit que x appartient à $H(\mathcal{E})$ et donc $T(\mathcal{H}(\mathcal{E})) = G(F\langle t \rangle / \mathcal{E})$, c'est-à-dire que T est injective et la suite induite est exacte. Ce qui achève la démonstration de la proposition 27.

<u>Corollaire :</u> Soit $\mathcal{E}$ appartenant à $\mathcal{G}$. Alors $E(H(\mathcal{E})) = \mathcal{E}$.

D'après la proposition 27 et son corollaire, on a une application injective $\mathcal{H} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{S}$ où pour tout $\mathcal{E}$ appartenant à $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ est l'unique élément de $\mathcal{S}$ tel que $T(\mathcal{H}(\mathcal{E})) = G(F\langle t \rangle / \mathcal{E})$.
Pour compléter la démonstration du théorème 13, on va montrer qu'étant donné H appartenant à $\mathcal{S}$, (en supposant C algébriquement clos lorsque H est fini), il existe $\mathcal{E}$ élément de $\mathcal{G}$ avec $T(H) = G(F\langle t \rangle / \mathcal{E})$. Il résulte de la théorie de Galois que si un tel $\mathcal{E}$ existe, alors $\mathcal{E} = E(H)$.
La proposition qui va suivre, ensemble avec le théorème 11, montre qu'il suffit de résoudre ce problème pour les sous-groupes algébriques différentiels H des types comme ceux de la liste du théorème 11.

<u>Proposition 28 :</u> Soient H et H' appartenant à $\mathcal{S}$ tels que H et H' soient conjugués sur F. Posons $\mathcal{E} = E(H)$ et $E(H') = \mathcal{E}'$. Alors $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont conjugués sur F . En particulier , $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{G}$ si et seulement si $\mathcal{E}'$ appartient à $\mathcal{G}$ et lorsque c'est le cas, $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = H$ si et seulement si $\mathcal{H}(\mathcal{E}') = H'$.

<u>Démonstration :</u> Soit z élément de P(F) tel que $zHz^{-1} = H'$. Alors σ_z appartient à $\mathrm{Aut}(F\langle t\rangle / F)$. Pour tout h' appartenant à H' , on a $h' = zhz^{-1}$ pour un certain h appartenant à H ; ainsi que, si η appartient à $\mathcal{E}$, alors

$$\sigma_{h'}(\sigma_z(\eta)) = \sigma_{zhz^{-1}}(\sigma_z(\eta)) = \sigma_z(\sigma_h(\eta)) = \sigma_z(\eta) \text{ ; donc } \sigma_z(\eta)$$

appartient à $\mathcal{E}'$; ce qui implique que $\sigma_z(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}'$.

De façon semblable, on montre que $\sigma_z^{-1}(\mathcal{E}')$ est inclus dans $\mathcal{E}$, et par conséquent, on a $\sigma_z(\mathcal{E}) = \mathcal{E}'$. Ce qui montre que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont conjugués sur F .

Supposons maintenant que $\mathcal{E}$ appartienne à $\mathcal{G}$. Alors , d'après Kolchin, on rappelle les résultats suivants :

<u>Rappel :</u> Soit $\mathcal{G}$ une extension fortement normale de F; soit C le corps des constantes de $\mathcal{G}$ .Soit φ un isomorphisme de $\mathcal{G}$ sur C tel que U soit universel sur φF . Il y a un isomorphisme unique $\mathcal{G}K \simeq \varphi\mathcal{G}.K$ sur K qui prolonge φ , encore noté φ . Lorsque $G(\mathcal{G}/F)$ (resp. $G(\varphi\mathcal{G}/\varphi F)$) est identifié caniquement au groupe $\mathrm{AUt}(\mathcal{G}K / FK)$ (resp. $\mathrm{AUt}(\varphi\mathcal{G}.K / \varphi F.K)$), la formule $T_\varphi(\sigma) = \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$ définit un C-isomorphisme

$$T_\varphi : G(\mathcal{G}/F) \xrightarrow{\sim} G(\varphi\mathcal{G}/\varphi F) .$$

On a $\mathcal{C}'$ appartenant à $\mathcal{G}$. De plus, l'application qui à τ associe $\sigma_z \circ \tau \circ \sigma_z^{-1}$ définit un C - isomorphisme du groupe de Glois $G(F\langle t\rangle / \mathcal{C})$ dans le groupe de Galois $G(F\langle t\rangle / \mathcal{C}')$.

Si de plus on suppose $\mathcal{H}(\mathcal{C}) = H$, alors $T(\mathcal{H}(\mathcal{C})) = G(F\langle t\rangle / \mathcal{C})$ et ainsi $H' = z. H ((\mathcal{C}).z^{-1}$. Constatons que z appartient à P(FK) et par conséquent σ_z appartient à $Aut(FK\langle t\rangle / FK)$. On a $T(H') = T(zHz^{-1}) = T(z\mathcal{H}(\mathcal{C})z^{-1}) = \sigma_z T(\mathcal{H}(\mathcal{C}))\sigma_z^{-1} = G(F\langle t\rangle / \mathcal{C}')$; donc $H' = \mathcal{H}(\mathcal{C}')$. Comme les rôles de H et H' peuvent s'interchanger, on voit que si $\mathcal{H}(\mathcal{C}) = H'$ alors $\mathcal{H}(\mathcal{C}) = H$. Ce qui démontre la proposition 28 .

Il reste , pour terminer la démonstration du théorème 13, à démontrer le théorème 14.

Le théorème 12 dépend du théorème 14 . En effet pour montrer le théorème 12, soit $\mathcal{C}$ appartenant à $\mathcal{G}$ et supposons C algébriquement clos si $G(F\langle t\rangle / \mathcal{C})$ est fini ou de façon équivalente si $H(\mathcal{C})$ est fini. D'après le théorème 11, $H(\mathcal{C})$ est conjugué sur F à un certain sous-groupe algébrique différentiel H_k du type (k). Donc d'après la proposition 28, $\mathcal{C} = E(H(\mathcal{C}))$ est conjugué sur F à $E(H_k)$ qui est du type (k) d'après le théorème 14.

§. 2 Démonstration du théorème 14 :

Avant de commencer la démonstration du théorème 14, nous allons étudier une propriété importante de la dérivée Schwarzienne .

Lemme 11 : Posons $K_\delta = \mathrm{Ker}\,\delta$ et soient u et v n'appartenant pas à K_δ . Alors $\delta S(u) = \delta S(v)$ si et seulement s'il existe a,b, c,d éléments de K_δ avec $ad - bc \neq 0$ tels que $u = (av + b)(cv + d)^{-1}$.

<u>Démonstration :</u> Soient les éléments $uv, u, v, 1$. On sait que ces éléments sont linéairement dépendants si et seulement si leur wronskien est nul, c'est-à-dire $W(uv,u,v,1) = 0$ où

$$W(uv,u,v,1) = \text{dét} \begin{pmatrix} uv & u & v & 1 \\ (uv)' & u' & v' & 0 \\ {}^{2}(uv) & {}^{2}u & {}^{2}v & 0 \\ {}^{3}(uv) & {}^{3}u & {}^{3}v & 0 \end{pmatrix}$$

est le Wronskien par rapport à δ .

En développant ce déterminant , on a :

$$W(uv,u,v,1) = 2(\delta u)^2 (\delta v)^2 (\delta S(u) - \delta S(v)) .$$

En conséquence, $\delta S(u) = \delta S(v)$ si et seulement si $uv, u, v, 1$ sont linéairement dépendants sur K_δ , c'est-à-dire qu'il existe a,b,c,d éléments de K_δ tels que $cuv + du = av + b$ ce qui implique $u = (av + b)(cv + d)^{-1}$.

Ce qui démontre le lemme 11.

<u>Démonstration du théorème 14 :</u>

1) $k = 1$: Soit $H_1 = s . SL_2(K).s^{-1}$ où s appartient à $P(FC_a)$ est tel que $\Delta l(s)$ appartient à $sl_2(F)^m$. Il est clair que la dérivée Schwarzienne $\delta S_i(t^s)$ de t^s est bien définie pour $1 \leqslant i \leqslant m$.

Alors, posons $\mathcal{E}_1 = F \langle \delta S_1(t^s), \ldots\ldots, \delta S_m(t^s) \rangle$. On va montrer que $\mathcal{E}_1$ appartient à $\mathcal{G}$ et que $G(F\langle t \rangle / \mathcal{E}_1) = T(H_1)$.

D'abord montrons que $\mathcal{E}_1 \subset F\langle t \rangle$.

Faisons remarquer que $\delta S_i(t^s)$ appartient à $F\langle t,s \rangle$ ($1 \leqslant i \leqslant m$) . On va en fait, montrer que $\delta S_i(t^s)$ est invariant par tout isomorphisme de $F\langle t,s \rangle$ sur $F\langle t \rangle$.

Soit σ un isomorphisme différentiel quelconque de $F\langle t,s \rangle$ sur $F\langle t \rangle$. Puisque

$\delta l_i s$ appartient à $sl_2(F)$ (par hypothèse), on a $\delta l_i s = \delta l_i(\sigma s)$ $(1 \leq i \leq m)$ car σ est un $F\langle t\rangle$-isomorphisme de $F\langle t,s\rangle$, de telle sorte qu'il existe un élément c appartenant à $GL_2(K)$ tel que $\sigma s = sc$. Or s et σs appartiennent à $SL_2(U)$; donc $\det(\sigma s) = \det(sc) = 1 = \det s.\det c = \det c$. Il en résulte que c appartient à $SL_2(K)$.

Soit $\sigma_s = T(s)$; alors le lemme 11 montre que pour tout $i = 1,\ldots\ldots,m$,

$$\sigma(\delta s_i(t^s)) = \delta s_i(t^{\sigma s}) = \delta s_i(t^{s.c}) = \sigma_s(\delta s_i(t^c)) = \sigma_s(\delta s_i(t)) = \delta s_i(t^s).$$

Il en résulte que $\delta s_i(t^s)$ appartient à $F\langle t\rangle$.

Donc $\mathcal{E}_1 = F\langle\delta s_1(t^s),\ldots\ldots\ldots,\delta s_m(t^s)\rangle \subset F\langle t\rangle$.

Il nous reste à montrer que $F\langle t\rangle$ est une extension fortement normale sur $\mathcal{E}_1$. Pour cela, soit σ un isomorphisme différentiel de $F\langle t\rangle$ sur $\mathcal{E}_1$. On prolonge σ à un isomorphe différentiel (encore noté σ) de $FK\langle t\rangle$ sur $\mathcal{E}_1 K$ d'après la disjonction linéaire de $F\langle t\rangle$ et K sur C. Comme s appartient à $P(FC_a)$ et que σ laisse $\mathcal{E}_1$ invariant, on a $\delta s_1(t^s) = \sigma(\delta s_1(t^s)) = \delta s_1((\sigma t)^s)$. Donc, d'après le lemme 11, il existe c_1 appartenant à GL_2 avec $\delta_1 c_1 = 0$ et tel que $(\sigma t)^s = (t^s)^{c_1}$; ce qui implique $\sigma t = t^{sc_1 s^{-1}}$. De façon semblable on a, pour tout $i = 2,\ldots\ldots,m$, $\sigma t = t^{sc_i s^{-1}}$ avec c_i appartenant à $GL_2(U)$ et $\delta_i c_i = 0$. Il en résulte que pour chaque i, on a : $t^{sc_1 s^{-1}} = t^{sc_i s^{-1}}$.

Il existe donc u_i appartenant à U^* tel que $sc_1 s^{-1} = u_i sc_i s^{-1}$; ce qui implique que $c_1 = u_i c_i$ et donc $\det c_1 = u_i^2 \det c_i$. Fixons d_i appartenant à à $\operatorname{Ker}\delta_i$ ($\operatorname{Ker}\delta_i$ étant algébriquement clos) tel que $d_i^2 = \det c_i$; on a donc $d_1^2 = u_i^2 d_i^2$, ce qui donne $d_1 = \pm u_i d_i$ où le signe dépend de i.

Donc l'élément $d_1^{-1}c_1 = \ldots\ldots = d_m^{-1}c_m$ appartient à $SL_2(K)$. Posons $d_1^{-1}c_1 = c$.

Alors $\sigma t = t^{scs^{-1}}$; ce qui montre que σ est un isomorphisme fort . Comme $F\langle t\rangle$ et $\mathcal{C}_1$ ont le même corps des constantes , $F\langle t\rangle$ est fortement normale sur $\mathcal{C}_1$.

D'autre part, puisque $H_1 = s.SL_2(K).s^{-1}$, on a $G(F\langle t\rangle/\mathcal{C}_1) \subset T(H_1)$.

Par ailleurs , pour tout c appartenant à $SL_2(K)$ et $1 \leqslant i \leqslant m$, on a, d'après le lemme 11, $\sigma_{scs^{-1}}(\delta s_i(t^s)) = \delta s_i(t^{scs^{-1}s}) = \delta s_i(t^{sc}) = \delta s_i(t^s)$.

Donc σ_{scs} laisse fixe $\mathcal{C}_1$; ce qui implique que $G(F\langle t\rangle/\mathcal{C}_1)$ contient $T(H_1)$. D'où $T(H_1) = G(F\langle t\rangle/\mathcal{C}_1)$.

2) <u>$k = 2$</u>

Posons $H_2 = ST(\mathcal{B},K^*,0)$ où $\mathcal{B}$ est un sous-groupe algébrique différentiel non nul de G_a défini sur F tel que $\mathcal{B}$ ait une base finie dans F en tant qu'espace vectoriel sur K .

On sait que $ST(\mathcal{B},K^*,0) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \ / \ a \in K^*,\ b \in \mathcal{B} \right\} = H_2$.

Donc $T(H_2)$ est égal à l'ensemble des isomorphismes σ de $F\langle t\rangle$ sur F tel que $\sigma(t) = at + b$ avec a appartenant à K^* et b appartenant à $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{P}$ l'idéal différentiel de définition de $\mathcal{B}$ dans $F\{y\}$ et soit $\Gamma(\mathcal{B})$ l'ensemble des polynômes différentiels linéaires homogènes non nuls dans $\mathcal{P}$.

Posons $\mathcal{C}_2 = F\left\langle (\delta l_i L(t))_{1 \leqslant i \leqslant m,\ L \in \Gamma(\mathcal{B})} \right\rangle$.

On va montrer que $F\langle t\rangle$ est fortement normale sur $\mathcal{C}_2$ et que $T(H_2) = G(F\langle t\rangle/\mathcal{C}_2)$.

Soit σ un isomorphisme différentiel de $F\langle t\rangle$ sur $\mathcal{C}_2$. Pour tout L élément de $\Gamma(\mathcal{B})$ et $1 \leqslant i \leqslant m$, on a $\delta 1_i L(\sigma t) = \delta 1_i(\sigma(L(t))) = \sigma(\delta 1_i L(t)) = \delta 1_i L(t)$ car $\delta 1_i L(t)$ appartient à $\mathcal{C}_2$. Donc il existe a_L appartenant à K^* tel que $L(\sigma t) = a_L L(t)$. Pour tous L, L' appartenant à $\Gamma(\mathcal{B})$, on a $a_L = a_{L'}$.

Pour cela supposons $L + L' \neq 0$. Il est clair que $\delta 1_i(L(t) + L'(t))$ est aussi invariant par σ et que :

$$\delta 1_i(L(t) + L'(t)) = \left(1 + \frac{L'(t)}{L(t)}\right)^{-1}(\delta 1_i L(t) - \delta 1_i L'(t)) + \delta 1_i L'(t).$$

En effet, $\left(1 + \frac{L'(t)}{L(t)}\right)^{-1}(\delta 1_i L(t) - \delta 1_i L'(t)) + \delta 1_i L'(t) =$

$$L(t)(L(t) + L'(t))^{-1}(\delta_i L(t).L(t)^{-1} - \delta_i L'(t).L'(t)^{-1}) + \delta_i L'(t).L'(t)^{-1} =$$

$$\delta_i L(t).(L(t) + L'(t))^{-1} - L(t)(L(t) + L'(t))^{-1}\delta_i L'(t).L'(t)^{-1} + \delta_i L'(t).L'(t)^{-1}$$

$$= \delta_i L(t).(L(t) + L'(t))^{-1} + \delta_i L'(t).(L'(t)^{-1} - L(t)L'(t)^{-1}(L(t) + L'(t))^{-1}) =$$

$$\delta_i L(t).(L(t) + L'(t))^{-1} + \delta_i L'(t).(L(t) + L'(t))^{-1}.(L'(t)^{-1}(L(t) + L'(t)) - L'(t)L(t))$$

$$= \delta_i L(t).(L(t) + L'(t))^{-1} + \delta_i L'(t).(L(t) + L'(t))^{-1} = \delta 1_i(L(t) + L'(t)).$$

On en déduit que σ laisse fixe $L'(t)L(t)^{-1}$. On a donc :

$$(L'(t)L(t)^{-1}) = L'(\sigma t)L(\sigma t)^{-1}$$

$$L'(t)L(t)^{-1} = a_{L'}L'(t).a_L^{-1}L(t)^{-1}$$; ce qui implique $a_L = a_{L'}$.

D'où il existe a appartenant à K^* tel que $L(\sigma t) = aL(t)$ pour tout L élément de $\Gamma(\mathcal{B})$, donc tel que $L(\sigma t - at) = 0$. Comme $\Gamma(\mathcal{B})$ engendre $\wp$, il existe b appartenant à $\mathcal{B}$ tel que $\sigma t - at = b$; ce qui implique $\sigma t = at + b$.

Mais $\mathcal{B}$ est inclus dans FK car $\mathcal{B}$ a une base finie dans F . Donc σt appartient à $FK\langle t\rangle$, σ est un isomorphisme fort et σ appartenant à $T(H_2)$. Ce qui démontre le fait que $F\langle t\rangle$ est fortement normale sur $\mathcal{E}_2$ et que $G(F\langle t\rangle/\mathcal{E}_2) \subset T(H_2)$.

D'autre part, tout σ appartenant à $T(H_2)$ laisse fixe $\mathcal{E}_2$. En effet, on sait que $\sigma t = at + b$ avec a appartenant à K^* et b appartenant à $\mathcal{B}$.

Donc $\sigma(\delta l_i L(t)) = \delta l_i L(\sigma t) = \delta l_i L(at+b) = \delta l_i L(at) = \delta l_i aL(t) =$

$$(\delta_i a . L(t) + \delta_i L(t).a)\, a^{-1}L(t)^{-1} = \delta_i L(t).L(t)^{-1} = \delta l_i L(t) .$$

Il en résulte que $T(H_2) = G(F\langle t\rangle/\mathcal{E}_2)$. Ce qui démontre le cas $k = 2$.

Corollaire :

a) $\mathcal{E}_2$ est engendré sur F par un nombre fini d'éléments de la forme $\delta l_i L(t)$ $1 \le i \le m$, L appartenant à $\Gamma(\mathcal{B})$.

b) $F\langle t\rangle$ est une extension de Picard-Vessiot de $\mathcal{E}_2$.

c) Le groupe de Galois $G(F\langle t\rangle/\mathcal{E}_2)$ est C-isomorphe au groupe $G(1,0)$ de toutes les matrices d'ordre $(1+1)$ de la forme :

$$g(b_1,\ldots\ldots,b_l\,;a) = \left(\begin{array}{c|c} & b_1 \\ 1_l & \vdots \\ & b_l \\ \hline 0\ldots\ldots\ldots 0 & a \end{array}\right) \quad \text{où } b_1,\ldots\ldots,b_l,a \in K,\ a \neq 0$$
$$l = \dim_K \mathcal{B} .$$

Démonstration : Avant de commencer la démonstration , on fait les rappels suivants :

Rappels : Soient $\mathcal{G}$ une extension de corps différentiel de F et C le corps des constantes de F ; $\mathcal{G}$ est une extension de Picard-Vessiot de F si :

- $\mathcal{G}$ a même corps des constantes C que F.
- Il existe une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n et à coefficients dans F, $P = 0$, telle que si $V = \mathrm{Sol}(P, \mathcal{G})$, l'espace des solutions de P dans $\mathcal{G}$, alors : $\dim_C V = n$

$\mathcal{G} = F\langle V \rangle$. Si $\eta_1, \ldots\ldots, \eta_n$ est une base de V sur C, alors on a $\mathcal{G} = F\langle \eta_1, \ldots\ldots, \eta_n \rangle$, et le degré de transcendance de $\mathcal{G}$ sur F est inférieur ou égal à n^2.

a) Soient $L_1, \ldots.. L_r$ un nombre fini d'éléments de $\Gamma(\mathcal{B})$ qui engendrent $\mathcal{P}$. On peut par exemple prendre l'ensemble caractéristique canonique de $\mathcal{P}$ relativement à un ordre de rangement. De plus, on peut supposer que $L_1 + L_{j'} \neq 0$ pour $1 < j' \leq r$. Soit $\mathcal{E}'_2$ le corps différentiel engendré sur F par $\delta l_i L_j(t)$ et $\delta l_i (L_1(t) + L_{j'}(t))$ avec $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq r$, $1 < j' \leq r$. Evidemment $\mathcal{E}'_2$ est inclus dans $\mathcal{E}_2$ et en conséquence $\mathcal{E}_2'$ est invariant par les éléments de $T(H_2)$. On montre comme dans le cas de $\mathcal{E}_2$ que $F\langle t \rangle$ est fortement normale sur $\mathcal{E}_2'$ et que $G(F\langle t \rangle / \mathcal{E}_2') = T(H_2)$. Faisons remarquer simplement que si σ est un isomorphisme différentiel de $F\langle t \rangle$ sur $\mathcal{E}'_2$ et si $L_j(\sigma t) = a_j L_j(t)$ $(1 \leq j \leq r)$, $a_1 = a_{j'}$ $(1 < j' \leq r)$. Donc $\mathcal{E}'_2 = E(H_2) = \mathcal{E}_2$. D'où le (a).

b) Evidemment $F\langle t \rangle$ et $\mathcal{E}_2$ ont le même corps des constantes.
Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal différentiel dans $\mathcal{E}_2\{y\}$ engendré par les polynômes différentiels suivants : $\delta_i L - \delta l_i L(t) L$ $(1 \leq i \leq m,\ L \in \Gamma(\mathcal{B}))$.
Soient $\eta_1, \ldots\ldots, \eta_l$ appartenant à F une base de $\mathcal{B}$ sur K, $l = \dim_K \mathcal{B}$.
Alors $\eta_1, \ldots\ldots, \eta_l$, t sont les zéros de $\mathfrak{a}$ et sont linéairement

indépendants sur K. Soit η un zéro quelconque de $\mathfrak{a}$; on va montrer que $\eta, \eta_1, \ldots\ldots, \eta_l, t$ sont linéairement dépendants sur K, d'où $\eta_1, \ldots\ldots, \eta_l, t$ forment un système fondamental de zéros de $\mathfrak{a}$. On suppose que $\mathfrak{a}$ est de dimension linéaire finie $l + 1$ et que $F\langle t\rangle$ est une extension de Picard-Vessiot de $\mathcal{E}_2$.

On peut supposer que η n'appartient pas à $\mathcal{B}$, car autrement $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_l$ seraient linéairement dépendants sur K. Donc il existe L_0 appartenant à $\Gamma(\mathcal{B})$ avec $L_0(\eta) \neq 0$. En fait, pour tout L élément de $\Gamma(\mathcal{B})$, $L(\eta) \neq 0$.

En effet, supposons qu'il existe L appartenant à $\Gamma(\mathcal{B})$ tel que $L(\eta) = 0$ (on a $L \neq 0$, par définition de $\Gamma(\mathcal{B})$). De $L_0(\eta) \neq 0$ et

$$\delta_i L_0(\eta) - \delta l_i L(t) L_0(\eta) = 0 \quad (1 \leq i \leq m), \text{ on obtient :}$$

$$L_0(\eta)(\delta_i L_0(\eta) L_0(\eta)^{-1} - \delta l_i L(t)) = 0 \quad ; \text{ ce qui implique}$$

$$\delta l_i L_0(\eta) = \delta l_i L(t)$$

. D'où $L_0(\eta) = aL_0(t)$ pour un certain a élément de K^*

De façon semblable, puisque $L(\eta) + L_0(\eta) \neq 0$ et $L + L_0$ élément de $\Gamma(\mathcal{B})$, on a : $L(\eta) + L_0(\eta) = b(L(t) + L_0(t))$ pour un certain b élément de K^*.

De ces relations et de $L(\eta) \neq 0$, il en résulte que $(b - a)L_0(t) + bL(t) = 0$.

Comme t est différentiellement transcendant sur FK, on a $(b - a)L_0(t) + bL(t) = 0$ implique que $(b - a)L_0 + bL$ est identiquement nul. Donc $(b - a)L_0 + bL = 0$, c'est-à-dire $L = (a - b)b^{-1}L_0$.

Mais $0 = L(\eta) = (a - b)b^{-1}L_0(\eta)$; ce qui donne $b = a$.

Comme $L = (a - b)b^{-1}L_0$, on a $L = 0$. Contradiction, car $L \neq 0$. Donc $L(\eta) \neq 0$ pour tout L appartenant à $\Gamma(\mathcal{B})$.

Puisque η est un zéro de $\mathfrak{a}$, on a $\delta l_i L(\eta) = \delta l_i L(t)$ pour tout L élément appartenant à $\Gamma(\mathcal{B})$ et $1 \leq i \leq m$. Il existe donc a_L appartenant à K^* tel que $L(\eta) = a_L L(t)$. Comme dans la démonstration du théorème 14 si $k = 2$, en remplaçant σt par η , il existe a appartenant à K^* tel que η - at appartient à $\mathcal{B}$. Comme $\eta_1, \ldots\ldots, \eta_l$ est une base de $\mathcal{B}$ sur K, on a :

$$\eta - at = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \eta_j \qquad (\alpha_j \in K^*)$$. Il en résulte que $\eta, \eta_1, \ldots\ldots, \eta_l, t$ sont linéairement dépendants sur K .

c) La représentation de $G(F\langle t\rangle / \mathcal{E}_2)$ associée au système fondamental $\eta_1, \ldots\ldots, \eta_l$ de l'idéal différentiel linéaire $\mathcal{A}$ comme défini dans (b) est donnée par

$$e : G(F\langle t\rangle / \mathcal{E}_2) \longrightarrow G_{l+1}(K) \quad \text{tel que}$$

pour tout σ appartenant à $G(F\langle t\rangle / \mathcal{E}_2)$, $e(\sigma) = g(b_1, \ldots\ldots, b_l, a)$ si

$$\sigma t = at + \sum_{j=1}^{l} b_j \eta_j$$. Il est clair que σ est un C- homomorphisme injectif . L'image est l'ensemble $G(1,0)$. En effet, quels que soient $b_1, \ldots\ldots, b_l, a$ éléments de K, $a \neq 0$, la formule $\sigma t = at + \sum_{j=1}^{l} b_j \eta_j$ définit un élément σ de $T(H_2) = G(F\langle t\rangle / \mathcal{E}_2)$. Ce qui achève la démonstration du corollaire .

3) <u>$k = 3$:</u>

Soit $$H_3 = ST(\mathcal{B}, P_{2n}, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \Big/ \ a^{2n} = 1, \ b \in \mathcal{B} \right\}$$

où $\mathcal{B}$ est un sous-groupe algébrique différentiel de G_a défini sur F et $\mathcal{B}$ (comme un K-espace vectoriel) a une base finie dans F, et n un élément de N .

Donc $T(H_3)$ est l'ensemble de tous les isomorphismes σ de $F\langle t \rangle$ sur F tels que $\sigma t = at + b$ avec $a^n = 1$, $b \in \mathbb{B}$.

Posons $\mathcal{C}_3 = F\langle (L(t)^n)_{L \in \Gamma(\mathbb{B})} \rangle$. On va montrer que $F\langle t \rangle$ est fortement normale sur $\mathcal{C}_3$ et que $G(F\langle t \rangle / \mathcal{C}_3) = T(H_3)$.

La démonstration est semblable à celle du cas $k = 2$. Comme $\mathcal{C}_2$ est engendré sur F par $\delta_i L(t)$ $(1 \leq i \leq m,\ L \in \Gamma(\mathbb{B}))$, on a $\mathcal{C}_2 = E(H_2) \subset \mathcal{C}_3$.

Comme $F\langle t \rangle$ est fortement normale sur $\mathcal{C}_2$, on en déduit que $F\langle t \rangle$ est fortement normale sur $\mathcal{C}_3$. Si σ appartient à $G(F\langle t \rangle / \mathcal{C}_3)$, alors σ appartient à $G(F\langle t \rangle / \mathcal{C}_2) = T(H_2)$; donc $\sigma t = at + b$ pour a élément de K^* et b élément de $\mathbb{B}$. Mais comme $\sigma(L(t)^n) = L(t)^n$, on a :

$L(t)^n = L(\sigma t)^n = L(at + b)^n = L(at)^n = a^n L(t)^n$; ce qui implique $a^n = 1$; donc σ appartient à $T(H_3)$.

Il est clair que $\mathcal{C}_3$ est invariant par tout élément de $T(H_3)$. Il en résulte que $T(H_3) = G(F\langle t \rangle / \mathcal{C}_3)$. Ce qui achève la démonstration du cas $k = 3$.

<u>Corollaire :</u>

a) $\mathcal{C}_3$ est engendré par un nombre fini d'éléments de la forme $L(t)^n$ avec L appartenant à $\Gamma(\mathbb{B})$.

b) $F\langle t \rangle$ est une extension de Picard-Vessiot de $\mathcal{C}_3$.

c) Le groupe de Galois $G(F\langle t \rangle / \mathcal{C}_3)$ est C-isomorphe au groupe $G(l,n)$ de toutes les matrices d'ordre $l + 1$ de la forme

$$g(b_1, \ldots\ldots, b_l\, ; a) = \left(\begin{array}{c|c} I_l & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_l \end{matrix} \\ \hline 0 \ldots\ldots\ldots 0 & a \end{array}\right) \quad \text{avec } b_1, \ldots\ldots, b_l, a \in K,\quad a^n = 1,\ l = \dim_K \mathbb{B}.$$

Démonstration :

a) Soient $L_1, \ldots\ldots, L_r$ appartenant à $\Gamma(\mathfrak{B})$ un nombre fini de générateurs de γ. On peut supposer que $L_1 + L_{j'} \neq 0$ pour $1 < j' \leq r$. Soit $\mathcal{E}'_3$ l'extension différentielle de F engendrée par $(L_j(t)^n)_{1 \leq j \leq r}$ et $(L_1(t) + L_{j'}(t)^n)_{1 < j' \leq r}$. D'après le corollaire du cas $k = 2$, on a

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}'_2 \subset \mathcal{E}'_3 \text{ , où } \mathcal{E}'_3 = E(H_3) \text{ . D'où } \mathcal{E}'_3 = \mathcal{E}_3 \text{ .}$$

Le (b) et le (c) sont des conséquences directes du collaire du cas $k = 2$, puisque $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_3$ et $G(F\langle t\rangle / \mathcal{E}_3) = T(H_3)$. Ce qui achève la démonstration du corollaire .

4) <u>$k = 4$:</u>

Posons $H_4 = SO_2^e(K) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} / \ \alpha^2 - e\gamma^2 = 1, \alpha, \gamma \in K, e \in C^* \right\}$

Soit $\mathcal{E}_4$ le sous-corps différentiel de $F\langle t\rangle$ engendré sur F par les éléments $(\delta_i t)(e - t^2)^{-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. On va montrer que $F\langle t\rangle$ est fortement normale sur $\mathcal{E}_4$ et que $G(F\langle t\rangle / \mathcal{E}_4) = T(H_4)$.

D'abord , si ε appartient à K^* tel que $\varepsilon^2 = e$ et si $s = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$, alors $sH_4s^{-1} = \left\{ sxs^{-1} \ / \ x \in H_4 \right\}$; si x appartient à $SO_2^e(K)$, on a $x = \begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$

Ce qui donne $sxs^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha + \varepsilon\gamma & 0 \\ 0 & \alpha - \varepsilon\gamma \end{pmatrix}$ qui est un élément de $SD_2(K)$.

Alors H_4 est conjugué sur K à $SD_2(K)$, c'est-à-dire $sH_4s^{-1} = SD_2(K)$.

$T(SD_2(K))$ est l'ensemble des automorphismes σ appartenant à $Aut(FK\langle t\rangle / FK)$ tels que $\sigma t = at$ pour un certain a élément de K^*, et les éléments de la forme

$\delta l_i(t)$ $(1 \leq i \leq m)$ sont invariants par les éléments de $T(SD_2(K))$.

D'autre part, $(\delta_i t)(e - t^2)^{-1} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{-1}\,\delta l_i(t^{s^{-1}})$ $(1 \leq i \leq m)$.

En effet : $s^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\varepsilon^{-1}}{2} & \frac{\varepsilon^{-1}}{2} \end{pmatrix}$,et

$$t^{s^{-1}} = \left(\frac{\varepsilon^{-1}}{2}t + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\varepsilon^{-1}}{2}t + \frac{1}{2}\right)^{-1} = (t + \varepsilon)(-t + \varepsilon)^{-1}.$$

$$\begin{aligned}
\delta l_i(t^{s^{-1}}) &= \delta l_i(t + \varepsilon)(-t + \varepsilon)^{-1} \\
&= \delta_i((t + \varepsilon)(-t + \varepsilon)^{-1}).(-t + \varepsilon)(t + \varepsilon)^{-1} \\
&= \left[\delta_i(t + \varepsilon)(t + \varepsilon)^{-1} + \delta_i(-t + \varepsilon)^{-1}.(t + \varepsilon)\right].(-t + \varepsilon)(t + \varepsilon)^{-1} \\
&= \delta_i(t + \varepsilon)(t + \varepsilon)^{-1} + \delta_i(-t + \varepsilon)(-t + \varepsilon)^{-1} \\
&= \delta_i(t).(t + \varepsilon)^{-1} + \delta_i(t).(-t + \varepsilon)^{-1} \\
&= \left[\delta_i(t).(-t + \varepsilon) + \delta_i(t).(t + \varepsilon)\right](t + \varepsilon)^{-1}(-t + \varepsilon)^{-1} \\
&= 2\,\varepsilon(\delta_i(t))(\varepsilon^2 - t^2)^{-1}.
\end{aligned}$$

D'où $\frac{\varepsilon^{-1}}{2}(\delta l_i(t^{s^{-1}})) = \frac{\varepsilon^{-1}}{2}.2\,\varepsilon.(\delta_i t).(e - t^2)^{-1} = (\delta_i t).(e - t^2)^{-1}$.

On en déduit que $(\delta_i t)(e - t^2)^{-1}$ est invariant par $T(H_4) = T(SD_2(K))$. D'où $\mathcal{E}_4$ est invariant par $T(H_4)$.

Soit σ un isomorphisme différentiel quelconque de $F\langle t\rangle$ sur $\mathcal{E}_4$.
Utilisant la disjonction linéaire de $F\langle t\rangle$ et K sur C, on prolonge σ à un isomorphisme différentiel qu'on note encore σ de $FK\langle t\rangle$ sur $\mathcal{E}_4K$.
Comme les générateurs de $\mathcal{E}_4$ sont invariants par σ, les relations

$(\delta_i t)(e - t^2)^{-1} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{-1}\,\delta l_i(t^{s^{-1}})$ $(1 \leq i \leq m)$ montrent que

$\sigma(\delta l_i(t^{s^{-1}})) = \delta l_i(t^{s^{-1}})$ $(1 \leq i \leq m)$. Donc il existe a appartenant à K^*

tel que $\sigma(t^{s^{-1}}) = at^{s^{-1}}$, c'est-à-dire $(\sigma t + \varepsilon)(-\sigma t + \varepsilon)^{-1} = (at + \varepsilon).(-t + \varepsilon)^{-1}$

D'où, on en déduit que $\sigma t = \dfrac{\varepsilon(a+1)t + (a-1)e}{(a-1)t + \varepsilon(a+1)}$ appartient à $FK\langle t\rangle$.

Ce qui implique σ est un isomorphisme fort et d'où $F\langle t\rangle$ est fortement normale sur $\mathcal{C}_4$.

D'autre part, en prenant $b^2 = a$, $\alpha = \frac{1}{2}(b + b^{-1})$ et $\gamma = \frac{1}{2}{}^{-1}(b^{-1} - b)$,

on a $\varepsilon(a+1) = 2\varepsilon b\alpha$ et $(a-1) = -2\varepsilon b\gamma$; de sorte qu'il existe

h appartenant à H_4 tel que $\sigma = \sigma_h$ appartienne à $T(H_4)$, $h = \begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$.

Donc $G(F\langle t\rangle / \mathcal{C}_4) \subset T(H_4)$. Mais, comme $T(H_4)$ est inclus dans $G(F\langle t\rangle / \mathcal{C}_4)$ on obtient $G(F\langle t\rangle / \mathcal{C}_4) = T(H_4)$. Ce qui achève la démonstration du cas $k = 4$.

5) <u>$k = 5$:</u>

Posons $H_5 = SO_2^e(0,\beta)^+ = SO_2^e(K) \cup SO^e(0,\beta)$ où e appartient à C^* ,

$\beta = (\beta_1, \ldots\ldots, \beta_m)$ appartient à F^m tels qu'il existe h,g éléments de F

avec $g \neq 0$, $h^2 - eg^2$ appartenant à C^* et $2\beta_i = (\delta_i h)g^{-1}$, $(1 \leq i \leq m)$

et $SO^e(0,\beta)^* = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -e\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} / \alpha, \gamma \in U,\ \begin{matrix} \delta_i\alpha = \beta_i\gamma \ (1 \leq i \leq m) \\ \alpha^2 - e\gamma^2 = -1 \end{matrix} \right\}$

Soit $\mathcal{C}_5$ le sous-corps différentiel de $F\langle t\rangle$ engendré sur F par les éléments $(2(\delta_i t)(e - t^2)^{-1} - \beta_i e^{-1})^2_{1 \leq i \leq m}$. On va montrer que $F\langle t\rangle$ est fortement normale sur $\mathcal{C}_5$ et que $G(F\langle t\rangle / \mathcal{C}_5) = T(H_5)$.

Remarquons que si ε et s sont définis comme dans le cas $k = 4$, on a

$$sH_5s^{-1} = SD_2(K) \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad / \quad \delta l_i b = \beta_i \, \mathcal{E}^{-1} \quad (1 \leqslant i \leqslant m) \right\} .$$

Il en résulte que les éléments de la forme $(\delta l_i t - \beta_i \, \mathcal{E}^{-1})^2_{1 \leqslant i \leqslant m}$ sont invariants par les éléments de $T(sH_5s^{-1})$.

Mais pour tout $i = 1,\ldots\ldots,m$, $(\delta l_i(t^{s^{-1}}) - \beta_i \, \mathcal{E}^{-1})^2 = e(2\delta_i t / (e-t^2) - \beta_i e^{-1})^2$.

On en déduit que $e(2\delta_i t / (e - t^2) - \beta_i e^{-1})^2$ est invariant par $T(H_5)$, donc $\mathcal{C}_5$ est invariant par $T(H_5)$.

Soit maintenant σ un isomorphisme différentiel quelconque de $F\langle t \rangle$ sur $\mathcal{C}_5$. On prolonge σ à un isomorphisme différentiel de $FK\langle t \rangle$ sur $\mathcal{C}_5K$ encore noté σ . Quel que soit $i = 1,\ldots\ldots\ldots,m$, le membre de droite et donc aussi le membre de gauche de l'équation

$$(\delta l_i(t^{s^{-1}}) - \beta_i \, \mathcal{E}^{-1})^2 = e(2\delta_i t / (e - t^2) - \beta_i e^{-1})^2$$

est invariant par σ . Donc on a

$$\sigma(\delta l_i(t^{s^{-1}}) - \beta_i \, \mathcal{E}^{-1}) = \delta l_i(t^{s^{-1}}) - \beta_i \, \mathcal{E}^{-1} \qquad \text{ou}$$

$$\sigma(\delta l_i(t^{s^{-1}}) - \beta_i \, \mathcal{E}^{-1}) = -(\delta l_i(t^{s^{-1}}) - \beta_i \, \mathcal{E}^{-1}) .$$

Dans le premier cas, on a $\sigma(\delta l_i(t^{s^{-1}})) = \delta l_i(t^{s^{-1}})$. Il existe donc certains a_i appartenant à $\operatorname{Ker} \delta_i$ tels que $\sigma(t^{s^{-1}}) = a_i t^{s^{-1}}$ (I) .

Dans le deuxième cas, on a $\sigma(\delta l_i(t^{s^{-1}}) + \delta l_i(t^{s^{-1}}) = 2\beta_i \, \mathcal{E}^{-1} = \delta l_i \eta$; en écrivant $2\beta_i \, \mathcal{E}^{-1} = \delta l_i \eta$ pour un certain η appartenant à $F\langle \mathcal{E} \rangle \subset FK$, $\eta \neq 0$ (voir remarque 20-(c)) .

Or $\delta\,\delta l_i(t^{s^{-1}}) + \delta l_i(t^{s^{-1}}) = \delta l_i(\sigma t^{s^{-1}}) + \delta l_i(t^{s^{-1}}) = \delta l_i((\sigma t^{s^{-1}})t^{s^{-1}}) =$

$\delta l_i\, \eta$. D'où il existe a_i appartenant à Ker δ_i tels que $(\sigma t^{s^{-1}})t^{s^{-1}} = a_i\eta$ (II)

Du fait que t est différentiellement transcendant sur FK et $\xi \neq 0$, l'équation (I) est vraie pour tout i, de même que l'équation (II). Dans le premier cas, on montre, comme dans le cas $k = 4$, que σ est un isomorphisme fort et que $\sigma = \sigma_h$ pour un certain élément h de $H_5^o = SO_2^e(K)$ la composante de l'identité de H_5. Dans le cas (II), puisque (II) est vrai pour tout $i = 1, \ldots, m$, il existe a appartenant à K^* tel que $(\sigma t^{s^{-1}})t^{s^{-1}} = a\eta$; ce qui implique que

$$\left(\frac{\sigma t + \xi}{-\sigma t + \xi}\right)\left(\frac{t + \xi}{-t + \xi}\right) = a\eta \quad \text{, c'est-à-dire,}$$

$$\sigma t = \frac{-\xi(1 + a\eta)t - e(1 - a\eta)}{(1 - a\eta)t + \xi(1 + a\eta)}$$ appartient à $FK\langle t\rangle$. Donc, σ est encore un isomorphisme fort. D'autre part, si on pose $b^2 = -a\eta$,

$\alpha = \frac{1}{2}(b^{-1} + b)$ et $\gamma = -\frac{1}{2}\xi^{-1}(b^{-1} + b)$, alors $\xi(1 + a\eta) = 2\xi b\alpha$ et $(1 - a\eta) = -2\xi b\gamma$. Donc il existe h appartenant à $SO^e(0, \beta)^*$, donc h appartenant à H_5 , avec $h = \begin{pmatrix} \alpha & -e\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ tel que $\sigma = \sigma_h$ appartienne à $T(H_5)$.

Ce qui montre que tout isomorphisme différentiel de $F\langle t\rangle$ sur $\mathcal{E}_5$ est fort et appartient à $T(H_5)$, ; donc $F\langle t\rangle$ est fortement normale sur $\mathcal{E}_5$ et $G(F\langle t\rangle/\mathcal{E}_5)$ est inclus dans $T(H_5)$. Comme $T(H_5)$ est inclus dans $G(F\langle t\rangle/\mathcal{E}_5)$, on a donc $G(F\langle t\rangle/\mathcal{E}_5) = T(H_5)$. Ce qui achève la démonstration du cas $k = 5$.

6) k est supérieur ou égal à 6 :

On examine ici ensemble les cas $k = 6, 7, 8, 9, 10, 11$.

On suppose que C est algébriquement clos.

D'après le théorème 11 , si H_k appartenant à $\mathfrak{S}$ est de type (k), alors H_k est inclus dans $P(F)$ et donc $T(H_k)$ est un groupe d'automorphismes de $F\langle t\rangle$ sur F . Si $E(H_k)$ est le corps des invariants de $T(H_k)$ dans $F\langle t\rangle$, alors le théorème d'Artin (*) montre que $F\langle t\rangle$ est une extension Galoisienne de $E(H_k)$ de groupe de Galois $T(H_k)$ et que $[F\langle t\rangle : E(H_k)] = |T(H_k)|$ (l'ordre de $T(H_k)$).

Il en résulte qu'en particulier, $F\langle t\rangle$ est fortement normale sur $E(H_k)$ avec $T(H_k)$ comme groupe de Galois différentiel .

Donc pour achever la démonstration du théorème 14, il suffira de montrer que chaque $E(H_k)$ est du type (k) comme décrit dans le théorème 12 .

Considérons, en général, un élément η appartenant à $F\langle t\rangle$ tel que $\eta = \dfrac{P(t)}{Q(t)}$

où P et Q appartiennent à $F\{X\}$ et sont premiers entre eux avec $Q \neq 0$.

Soit n le degré de η , c'est-à-dire $n = \sup(\deg P, \deg Q)$.

$F\langle t\rangle$ est une extension algébrique de $F\langle \eta\rangle$ de degré n (voir Van der Waerden, moderne Algebra, vol. 1) .

D'autre part, si H_k est le groupe algébrique différentiel de SL_2 de type (k) comme définis dans le théorème (8), alors le corps différentiel $\mathcal{E}_k$ de type (k) comme défini dans le théorème 12 est invariant par les éléments de $T(H_k)$ entendu que e, f, g , n correspondant aux deux théorèmes 11 et 12 , ont la même signification . Comme $\mathcal{E}_k$ a un générateur de degré $|T(H_k)|$, on a

$$[F\langle t\rangle : \mathcal{E}_k] = |T(H_k)|, \text{ donc } \mathcal{E}_k = E(H_k) .$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 14 .

Remarques 22 :

a) Dans le cas $k = 2$ (corollaire), le résultat le plus important n'est pas le fait que $\mathcal{E}_2$ soit engendré par un nombre fini d'éléments . Mais le fait que l'extension différentielle $\mathcal{E}'_2$ de F engendrée par $\delta l_i L_j(t)$, $\delta l_i(L_1(t) + L_{j'}(t))_{1 \leqslant i \leqslant m}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 < j' \leqslant r$
est telle que pour tout L appartenant à $\Gamma(\mathcal{B})$, $\delta l_i L(t)$ appartienne à $\mathcal{E}'_2$.

b) Dans le cas $k = 3$ (corollaire) on a pour L appartenant à $\Gamma(\mathcal{B})$, $L(t)^n$ appartient à $\mathcal{E}'_3$.

c) Dans le cas où k est supérieur ou égal à 6, nous avons supposé que le corps des constantes C de F est algébriquement clos parce que les calculs dans le chapitre IV ont été faits avec cette hypothèse .
On peut se demander quels seront les résultats lorsque C n'est pas algébriquement clos .
D'autre part, c'est par des calculs directs que l'on trouve les corps $\mathcal{E}_k$ pour k supérieur ou égal à 6 .

Mais avant de faire ces calcls , on a besoin des résultats suivants :

Proposition 29 : Soit G un sous-groupe fini de $Aut(F\langle t\rangle / F)$. Posons $G = \{\sigma_1, \ldots\ldots\ldots, \sigma_n\}$ et soit $S_i(X_1, \ldots\ldots, X_n)$ $1 \leqslant i \leqslant n$, les polynômes symétriques élémentaires à n variables . Alors, pour tout indice i tel que $(\sigma_1(t), \ldots\ldots, \sigma_n(t))$ ne soit pas un élément de F^n , le corps différentiel $F\langle S_i(\sigma_1(t), \ldots\ldots, \sigma_n(t)\rangle$ est le corps des invariants de G dans $F\langle t\rangle$.

(*) P.164 : Soit H un groupe fini d'automorphismes d'un corps K et soit L = inv(H). Alors $[K : L] = \#(H)$, K/L est une extension normale et séparable et $H = G(K/L)$

Démonstration : Soit F^G le corps des invariants de G . Il est clair que pour tout indice i , $S_i(\sigma_1(t), \ldots\ldots\ldots, \sigma_n(t))$ appartient à F^G .

D'après le lemme 10, $\sigma_i(t)$ est une expression fractionnaire linéaire à coefficients dans F .

Considérons le polynôme $P(Y) = \prod(Y - \sigma_i(t))$. On a

$$P(Y) = Y^n - S_1(\sigma_1(t), \ldots\ldots, \sigma_n(t))Y^{n-1} + \ldots\ldots + (-1)^n S_n(\sigma_1(t), \ldots\ldots, \sigma_n(t)) .$$

Il est clair que $P(Y)$ appartient à $F^G\{Y\}$ et $P(t) = 0$.

D'après le théorème d' Artin, $F\langle t \rangle$ est algébrique sur F^G de degré n ; donc, à cause du fait que P est unitaire et de degré n , P doit être le polynôme minimal de t sur F^G. La proposition résulte alors de la démonstration du théorème suivant appelé théorème de Luroth.

Théorème 15 : Si λ est un élément transcendant sur K et si $K \subset \Sigma \subset K(\lambda)$ $\Sigma \neq K$, alors il y a un μ transcendant sur K tel que $\Sigma = K(\mu)$.

Démonstration : On va montrer qu'il existe μ appartenant à Σ tel que $K(\mu) = \Sigma$.

Soit $\varphi = g(\lambda) / h(\lambda)$ un élément non constant de Σ . On a alors $g(\lambda) - \varphi h(\lambda) = 0$; ce qui veut dire que λ est une racine de l'équation $g(x) - \varphi h(x) = 0$ à coefficients dans Σ . Il en résulte que λ est algébrique sur Σ .

Soit $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots\ldots\ldots + a_r x^r$, avec a_i appartenant à Σ, $a_r \neq 0$, un polynôme irréductible sur Σ tel que $f(\lambda) = 0$. Comme les a_i appartiennent à $K(\lambda)$, ils sont des fonctions rationnelles de λ . Soit $h(\lambda)$ le plus petit commun multiple des dénominateurs des a_i , et soit $k(\lambda)$ le plus grand facteur commun de leurs numérateurs. Alors $b_i = a_i h / k$ appartient à $K[\lambda]$ et $f_1(\lambda, x) = b_0 + b_1 x + \ldots\ldots + b_r x^r$ est un polynôme en λ et x n'ayant aucun facteur en λ seulement. Au moins un des b_i / b_r, soit b_s / b_r n'est pas un élément de K. Car, posons $P(\lambda) = b_s$, $Q(\lambda) = b_r$,

$\mu = b_s / b_r = a_s / a_r$ éléments de Σ.

Alors $P(x) - \mu Q(x)$ appartient à $\Sigma[x]$, et comme $P(\lambda) - \mu Q(\lambda) = 0$, on a, d'après le théorème sur les places d'une courbe paramétrique qui dit que "tout point de la courbe C est le centre d'au moins une place de C"

(voir R.J. Walker, algebraic curves),

$P(x) - \mu Q(x) = g(x)f(x) \qquad (g(x) \in \Sigma[x])$. Ceci se réduit à

$Q(\lambda) P(x) - P(\lambda) Q(x) = g_1(\lambda, x) f_1(\lambda, x)$ où

$g_1(\lambda, x) = g(x) Q(\lambda) k(\lambda) / h(\lambda)$ appartient à $K(\lambda)[x]$.

Mais, puisque f_1 n'est divisible par aucun polynôme en λ, on doit avoir g_1 appartenant à $K[\lambda, x]$. Le degré de $P(\lambda)$ ou de $Q(\lambda)$ par rapport à λ ne peut être supérieur au degré de $f_1$pa par rapport à λ. Il en résulte que λ ne peut apparaîtredans g_1. Mais, si $Q(\lambda) P(x) - P(\lambda) Q(x)$ avait un facteur où apparaissait x seulement, il aurait, par symétrie, un facteur où apparaitrait λ seulement. On en déduit que g_1 est constant et que le degré de P et le degré de Q sont au plus égaux à r, le degré de f en x.

D'où $P(x) - \mu Q(x) = 0$ est une équation de degré r sur le corps $K(\mu)$ admettant λ pour racine. Mais, puisque $K(\mu)$ est inclus dans Σ, si $K(\mu) \neq \Sigma$, il existe ψ appartenant à Σ tel que ψ n'appartinne pas à $K(\mu)$. Or, comme ψ appartient à $K(\lambda)$ et λ de degré au plus r sur $K(\mu)$, on a

$$\psi = c_0 + c_1 \lambda + \ldots\ldots + c_{r-1} \lambda^{r-1} \qquad (c_i \in K(\mu)).$$

Mais alors, λ serait de degré plus petit que r sur Σ ; ceci contredit le fait que λ est de degré r sur Σ. Donc, on a $K(\Psi) = \Sigma$.

Il résulte donc de ce théorème que

$$F^G = F\langle S_1(\sigma_1(t),\dots\dots,\sigma_n(t)),\dots\dots, S_n(\sigma_1(t),\dots\dots,\sigma_n(t))\rangle .$$

Maintenant nous allons calculer les invariants dans les cas k = 6, 7, 8, 9, 10, 11 .

<u>k = 6</u> :

Posons $H_6 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \;/\; \alpha^{2n} = 1 \right\} = C_{2n}$.

H_6 est un groupe cyclique d'ordre 2n.

Il en résulte que $T(H_6)$ est l'ensemble des éléments $\sigma_1,\dots\dots,\sigma_n$ avec :

$$\sigma_1(t) = \sigma(t) = (\alpha^{-1}t - 0)(0 + \alpha)^{-1} = \alpha^{-2}t$$

$$\sigma_2(t) = \sigma\circ\sigma(t) = \alpha^{-2}(\alpha^{-2}t) = \alpha^{-4}t$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n(t) = \sigma\dots\dots\sigma(t) = \alpha^{-2n}t$$

Donc $\sigma(t)\dots\dots\sigma(t) = \alpha^{-2}t\dots\dots\alpha^{-2}t = \alpha^{-2n}t^n = t^n$

car $\alpha^{2n} = 1$.

D'après la proposition 29 $\underbrace{\sigma(t).\,\sigma(t)\dots\dots\sigma(t)}_{n \text{ facteurs}}$ engendre $E(H_6)$.

<u>k = 7</u> :

On a $H_7 = D(4n,e)$ où e appartient à F^* et n un élément de N avec

$$H_7 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \;/\; \alpha^{2n} = 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^{-1} & 0 \end{pmatrix} \;/\; \beta^{2n} = e^n \right\}$$

H_7 est un sous-groupe fini d'ordre 4n défini sur F .

Le calcul pour la première partie, c-est-à-dire $H_7^o = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \;/\; \alpha^{2n} = 1 \right\}$

est déjà fait dans le cas $k = 6$. Il reste à calculer pour la deuxième partie

c'est-à-dire $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^{-1} & 0 \end{pmatrix} \;/\; \beta^{2n} = e^n \right\}$.

$$\tau(t) = (t)^{\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^{-1} & 0 \end{pmatrix}} = (0 - \beta)(\beta^{-1}t + 0)^{-1} = -\beta^2 t^{-1}$$

Comme précédemment, on a $\underbrace{\tau(t).\,\tau(t)\,\ldots\ldots\ldots\,\tau(t)}_{(\text{ n facteurs })} = (-\beta^2 t^{-1})\ldots\ldots(-\beta^2 t^{-1})$

$$= (-1)^n \beta^{2n} t^{-n}$$

$$= (-1)^n e^n t^{-n}$$

D'où on obtient $t^n + (-1)^n e^n t^{-n}$. D'après la proposition 29,

$$\sigma(t)\ldots\ldots\ldots\sigma(t) + \tau(t)\ldots\ldots\ldots\tau(t) = t^n + (-1)^n e^n t^{-n}$$

engendre $E(H_7)$ puisque $F\langle t^n + e^n t^{-n} \rangle = F\langle t^n + (-1)^n e^n t^{-n} \rangle = E(H_7)$.

<u>$k = 8$</u>:

Posons $H_8 = D(8, e, f, g)$ où e, f, g appartiennent à F et $eg \neq 0$,

$f^2 + eg^2 = 1$. Alors, fixons ε , α , γ appartenant à U assujettis aux conditions $\varepsilon^2 = e$, $\alpha^2 + e\gamma^2 = -1$, $\alpha^2 - e\gamma^2 = f$ et $2\alpha\gamma = g$; on a par définition

$$H_8 = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} \alpha & e\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} -\varepsilon\gamma & \varepsilon\alpha \\ \varepsilon^{-1}\alpha & \varepsilon\gamma \end{pmatrix} \right\}$$

Il en résulte que $T(H_8)$ est l'ensemble des éléments σ_1 , σ_2, σ_3, σ_4

tels que :

$$\sigma_1(t) = t^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = (t - 0)(0 + 1)^{-1} = t$$

$$\sigma_2(t) = t^{\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix}} = (0 - \varepsilon)(\varepsilon^{-1}t + 0)^{-1} = -\varepsilon^2 t^{-1} = -et^{-1}$$

$$\sigma_3(t) = t^{\begin{pmatrix}\alpha & e\gamma\\ \gamma & -\alpha\end{pmatrix}} = (-\alpha t - e\gamma)(-\gamma t + \alpha)^{-1} = \frac{\alpha t + e\gamma}{\gamma t - \alpha}$$

$$= \frac{\alpha^2 t + e\alpha\gamma}{\alpha\gamma t - \alpha^2} = \frac{\alpha^2 t + \frac{e}{2} g}{\frac{1}{2} gt - \alpha^2}$$

D'autre part, $\left.\begin{array}{l}\alpha^2 + e\gamma^2 = -1\\ \alpha^2 - e\gamma^2 = f\end{array}\right\}$ implique $\alpha^2 = \frac{1}{2}(f-1)$

Donc $\sigma_3(t) = \dfrac{\frac{1}{2}(f-1)t + \frac{e}{2}g}{\frac{1}{2}gt - \frac{1}{2}(f-1)} = \dfrac{(-1+f)t + eg}{gt - (-1+f)}$.

De la même façon, on montre que

$$\sigma_4(t) = t^{x_4} = (\varepsilon\gamma t - \varepsilon\alpha)(-\varepsilon^{-1}\alpha t - \varepsilon\gamma)^{-1}$$

$$= e\left(\frac{gt - (-1+f)}{(-1+f)t + eg}\right)$$

D'où $\sum_{i=1}^{4} \sigma_i(t) = \dfrac{t^2 + e}{t(t^2 - 2fg^{-1}t - e)}$ n'appartient pas à F .

Donc d'après la proposition 29, $\sum_{i=1}^{4} \sigma_i(t)$ engendre $E(H_8) = F\langle (t^2 + e)t^{-1}\rangle$.

Les calculs de l'invariant de $T(H_9)$ est semblable au calcul de l'invariant de ($T(H_8)$ et se trouve dans l'article 745 de Cayley paragraphe 117 .

Les invariants de $T(H_{10})$ et de $T(H_{11})$ sont relatifs aux fonctions polyédriques .

On a $Z_2 \subset OC$ où OC est le sous-groupe de $SL_2(U)$ engendré par les deux matrices $\begin{pmatrix}\xi & 0\\ 0 & \xi^{-1}\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\xi & \xi\\ -\xi^{-1} & \xi^{-1}\end{pmatrix}$ où ξ est une racine primitive 8-ième de l'unité .

On va considérer OC / Z_2 comme un groupe de transformations fractionnaires linéairesdu plan complexe et donc comme un groupe G d'automorphismes de la sphère (régulière (par la projection stéréographique) régulière (voir Cayley, article 745 , paragraphes 94-95 et 104-117) .

Considérons les polynômes $\Pi (t - m)$ et $\Pi (t - c)$ en la variable complexe t où m parcourt les milieux des côtés de l'octaèdre et où c parcourt les centres des faces de l'octaèdre . Ces polynômes sont appelés des fonctions octaédriques. Lorsque l'octaèdre est placé de sorte qu'un sommet soit à l'infini et un autre à l'origine , les fonctions octaédriques sont respectivement $t^{12} - 33t^8 - 33t^4 + 1$ et $t^8 + 14t^4 + 1$ (voir Cayley, article 745 , paragraphes 73-74 et A. Forsyth ; theory of fonctions of a complex variable 3^e^ édition - Cambridge University press London 1918).

Si on considère m comme milieu d'un côté fixé et c comme centre d'une face fixée, le groupe d'isotropie de m est d'ordre 2 et celui de c est d'ordre 3. Il en résulte que :

$$\Pi \frac{(t - m^x)}{(t - c^x)} = \frac{(t^{12} - 33t^8 - 33t^4 + 1)^2}{(t^8 + 14t^4 + 1)^3}$$ où le produit

est pris sur tous les x appartenant à G . Posons $f(t) = \Pi \dfrac{(t - m^x)}{(t - c^x)}$.

Alors $f(t)$ appartient à $F\langle t \rangle$ et quel que soit y appartenant à OC , la fonction $\sigma_y(f(t)) = f(t^y)$ a le même ensemble de zéros et de pôles que $f(t)$; donc $\sigma_y(f(t)) = f(t)$.

D'où $E(H_{10}) = F \left\langle (t^{12} - 33t^8 - 33t^4 + 1)^2 (t^8 + 14t^4 + 1)^{-3} \right\rangle$.

En fait, on choisit le générateur de $E(H_{10})$ comme donné dans le théorème 12 en prenant : $\dfrac{108\, f(t)}{1 - f(t)} = \dfrac{(t^{12} - 33t^8 - 33t^4 + 1)^2}{t^4 (t^4 - 1)^4}$ pour

souligner la relation qu'il y a entre $E(H_9) = F\langle (t^{12} - 33t^8 - 33t^4 + 1)(t^4-1)^{-2}t^{-2} \rangle$
et $E(H_{10}) = F\langle (t^{12} - 33t^8 - 33t^4 + 1)^2(t^4 - 1)^{-4}\, t^{-4} \rangle$.

Enfin , d'après les références citées, les fonctions icosaédriques correspondant au groupe DI sont :

$$h(t) = \Pi(t - m) = t^{30} + 522t^{25} - 10\,005t^{20} - 10\,005t^{10} - 522t^5 + 1$$

$$g(t) = \Pi(t - c) = t^{20} - 228t^{15} + 494t^{10} + 228t^5 + 1$$

Si on pose $f(t) = \dfrac{g(t)^3}{h(t)^2}$, alors

$$\frac{1\,728\, f(t)}{1 - f(t)} = \frac{(t^{20} - 228t^{15} + 494t^{10} + 228t^5 + 1)^3}{(t^{10} + 11t^5 - 1)^5\, t^5}$$

est le générateur de $E(H_{11})$. Ce qui achève la démonstration du théorème 14 .

BIBLIOGRAPHIE

ARTIN E. : Elements of algebraic geometry, New-York University, spring 1955.

BOREL A. : Linear algebraic groups, W. A. Benjamin, New-York and Amsterdam 1969.

BOREL A. : Groupes linéaires algébriques, Annals of mathematics, Vol. 64 (1956) pages 20 - 82.

BOURBAKI N. : Eléments de mathématiques, Algèbre commutative chap. III, Graduation, Filtration et topologie. (Hermann, Paris 1961).

BRASSELET (Mme) : "Dépendance algébrique des solutions d'équations différentielles", Université des Sciences et Techniques de Lille I, (Publication interne de l'U.E.R de mathématiques pures et appliquées N° 105 mars 77).

CASSIDY P. J. : Differential algebraic groups, American Journal of mathematics, Vol. 94 (1972) pages 891 - 954.

CASSIDY P. J. : The differential rational representation algebra on a linear differential algebraic groups. Journal of Algebra Vol. 37 (1975).

CARTAN H. et CHEVALLEY C. : Géométrie Algébrique Séminaire E. N. S 1955 - 1956.

CHEVALLEY C. : Théorie des Groupes de Lie, Tome 2 (groupes algébriques).

CHEVALLEY C. : Fondements de la géométrie Algébrique , Mathématiques approfondies 1957 - 1958.

CHOQUET G. : Cours d'Algèbre Tome II, Topologie 1964.

COXETER H.S.M. : Regular Complex Polytopes , Cambridge University Press.

DELAUTRE C. : Séminaire d'algèbre différentielle, Année 74 - 75. (Publication interne de l'U.E.R de Mathématiques Pures et Appliquées, Université des Sciences et Techniques de Lille I, N° 55).

DIEUDONNE J. : Cours de géométrie algébrique , Tomes I et II, Collection Sup, Presses Universitaires de France, 1974.

GROTHENDIECK A. and DIEUDONNE J. : Eléments de Géométrie Algébrique,chap.IV (20.6.3). IHES, Publications Math. (20), Burrés-sur-Yvette, 1964 .

HOCHSCHILD G. : An Introduction to Algebraic Groups , Holden-Day, San Francisco, 1971 .

JOHNSON J. L. : Differential Dimension Polynômials and a Fundamental Theorem on Differential Modules, American Journal of Mathematics Vol. 91 (1969) .

JOHNSON J. L. : Kohler Differential and Differential Algebra , Annals Mathematics Vol. 89 (1969) .

JOHNSON J. L. : A Notion of Krull Dimension for Differential Rings .

KAPLANSKY I. : An Introduction to Differential Algebra (Hermann, Paris).

KOLCHIN E. R. : Differential Algebra and Algebraic Groups, Academic Press, New-York 1973 .

KOLCHIN E. R. : The Notion of Dimension in the Theory of Algebraic Differential Equations , Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 70 (1964) ,Pages 570 - 573 .

KOLCHIN E. R. : Galois Theory of Differential Fields , American Journal of Mathematics Vol. 75 (1953) , Pages 753 - 824 .

KOLCHIN E. R. : On Certain Concepts in the Theory of Algebraic Matrix Groups . Annals of Mathematics Vol. 49 (1948) Pages 774-789

KOLCHIN E. R.: Algebraic Matric Groups and the Picard-Vessiot Theory of Homogeneous Linear Ordinary Differential Equations , Annals of Mathematics Vol. 49 (1948) Pages 01-42 .

KOLCHIN E. R. : On the Galois Theory of Differential Fields, American Journal of Mathematics Vol.77 (1959) Pages 868 .

LANG S. : Introduction to Algebraic Geometry, Interscience Publishes. INC. New- York .

RIBENBOIM P. : L'Arithmétique des Corps , Hermann, Paris .

RITT J. F : Differential Algebra, Dover Publication, INC. New-York 1966 .

ROSENFELD A. : Specialisation in Differential Algebra, Transactions of the American Mathematical Society, Vol.90 (1959)

SERRE J.P. : Groupes Algébriques et Corps de Classes , Hermann Paris.

SIT W.Y. : Differential Algebraic Sub Groups of SL_2 and Strong Normality in Simple Extension. American Journal of Mathematics, Vol. 97 (1973) Pages 627 - 698.

SIT W.Y. : Typical Differential Dimension of Intersection of Linear Differential Algebraic Groups, Journal of Algebra (32) (1974) Pages 476 - 487.

WALKER R.J. : Algebraic Curves, Dover Publication INC. New-York.

ZARISKI O. and SAMUEL P. : Commutative Algebra , Vol. I et II.

TABLE DES MATIERES