N° d'ordre 680

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR DE 3ÈME CYCLE
EN MATHÉMATIQUES PURES

PAR

Abid Ali ALTA'AI

ESPACE SIMPLICIAL ASSOCIÉ A UNE ALGÈBRE MINIMALE

MEMBRES DU JURY : MM. G. HECTOR, *PRÉSIDENT*
D. LEHMANN, *RAPPORTEUR*
R. BARRE, *EXAMINATEUR*

SOUTENANCE LE 21 AVRIL 1978

J'adresse à Monsieur Hector tous mes remerciements pour avoir bien voulu accepter la présidence du jury.

J'ai mené à bien ce travail sous la direction de Monsieur Lehmann. Je ne pourrais jamais dire combien ses suggestions et ses conseils m'ont été précieux. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie Monsieur Barre qui a bien voulu faire partie du jury et je remercie tous les participants au Séminaire de Topologie et Géométrie différentielle particulièrement S. Halperin et J.C. Thomas, aussi tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail, particulièrement Madame Bérat et Madame Lengaigne qui en ont assuré la présentation dactylographique.

INTRODUCTION

Sullivan a construit pour tout ensemble simplicial K le complexe de de Rham des formes polynomiales $A^*_{\mathbb{Q}}(K)$, qui est une algèbre différentielle graduée commutative sur $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$-ADGc). Cette algèbre contient beaucoup d'informations sur le type d'homotopie rationnelle de l'ensemble simplicial K.

Dans sa théorie, on peut construire, pour tout ensemble simplicial K, la $\mathbb{Q}$-ADGc $A^*_{\mathbb{Q}}(K)$ et son modèle minimal $\mathcal{M}_K$ c'est-à-dire, un couple $(\mathcal{M}_K, \rho)$ où $\mathcal{M}_K$ est une $\mathbb{Q}$-ADGc minimale et $\rho : \mathcal{M}_K \to A^*_{\mathbb{Q}}(K)$ est un homomorphisme d'ADGc qui induit un isomorphisme en cohomologie (quasi-isomorphisme).

Dans ce travail, on se donne une k-ADGc $\mathcal{A}$ (k désigne un corps de caractéristique 0) ; on associe à cette algèbre donnée $\mathcal{A}$ un ensemble simplicial $< \mathcal{A} >$ et on veut démontrer l'existence d'un homomorphisme d'ADGc naturelle ;

$$\Pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow A^*_k(< \mathcal{A} >)$$

qui induit un isomorphisme en cohomologie lorsque l'algèbre $\mathcal{A}$ est nilpotente.

En particulier, si l'algèbre donnée $\mathcal{A}$ est minimale, on aura démontré que le couple $(\mathcal{A}, \Pi_{\mathcal{A}})$ est un modèle minimal de $A^*_k(< \mathcal{A} >)$.

P L A N.

CHAPITRE I

DEFINITIONS ET NOTATIONS.

1. - *Formes polynomiales sur* Δ^r.

On note $\Delta^r = \{(t_o,\dots,t_r) \in \mathbb{R}^{r+1} \mid \sum_{i=0}^{r} t_i = 1$ et $0 \leqslant t_i \leqslant 1$ $\forall\, i = 0,\dots,1\}$ le r-simplexe standard (en coordonnées barycentriques) et $A^*_{DR}(\Delta^r)$ la $\mathbb{R}$-ADGc des formes différentielles sur Δ^r, c'est-à-dire des restrictions à Δ^r de formes différentielles définies sur un voisinage de Δ^r dans l'hyperplan $\sum_{i=0}^{r} t_i = 1$ de $\mathbb{R}^{r+1}$.

Notons $A^*_{\mathbb{Q}}(\Delta^r)$ la $\mathbb{Q}$-ADGc (une $\mathbb{Q}$-sous-ADGc de $A^*_{DR}(\Delta^r)$) des formes polynomiales sur Δ^r à coefficients rationnels ; c'est-à-dire des formes différentielles dont les coefficients sont des polynômes à coefficients rationnels par rapport aux coordonnées barycentriques $(t_o,\dots,t_r)$.

Soit k un corps de caractéristique zéro $(\mathbb{Q} \hookrightarrow k)$ i.e., est une extension de $\mathbb{Q}$.

Notons $A^*_k(\Delta^r) = A^*_{\mathbb{Q}}(\Delta^r) \otimes_{\mathbb{Q}} k$ la k-ADGc des formes polynômiales à coefficients dans k.

Soit $\underline{\Delta}$ la catégorie dont les objets sont les simplexes standards Δ^r pour $r \in \mathbb{N}$, et les morphismes sont les applications obtenues par composition des opérateurs;

$$\Delta^r \underset{\delta_i}{\overset{\sigma_i}{\rightleftarrows}} \Delta^{r+1}$$ de co-face et de co-dégénérescence définis par :

$$\delta_i(t_o,\dots,t_r) = (t_o,\dots,t_{i-1},0,t_i,\dots,t_r),\quad 0 \leqslant i \leqslant r+1$$
$$\sigma_i(t_o,\dots,t_{r+1}) = (t_o,\dots,t_{i-1},t_i+t_{i+1},t_{i+2},\dots,t_{r+1}),\quad 0 \leqslant i \leqslant r.$$

On rappelle qu'un objet simplicial dans une catégorie C la donnée d'un foncteur contravariant $F : \underline{\Delta} \to C$.

Donc $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $A_k^p(\underline{\Delta})$ est un k-espace vectoriel simplicial,

$$\left(A_k^p(\Delta^r) \underset{\partial_i}{\overset{S_i}{\rightleftarrows}} A_k^p(\Delta^{r+1}) \text{ sont des applications k-linéaires}\right).$$

D'autre part, $A_k^*(\underline{\Delta})$ est une k-ADGc simpliciale,

$(A_k^*(\Delta^r) \underset{\partial_i}{\overset{S_i}{\rightleftarrows}} A_k^*(\Delta^{r+1})$ sont des homomorphismes d'ADGc) où les opérateurs de face ∂_i et les opérateurs de dégénérescence S_i sont induits par

$$\Delta^r \underset{\delta_i}{\overset{\sigma_i}{\leftrightarrows}} \Delta^{r+1}.$$

2. - *Ensemble simplicial* $<\mathcal{A}>$ *associé à une ADGc* $\mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{A}$ une k-ADGc où k est toujours un corps de caractéristique 0.

Notons

$$\boxed{<\mathcal{A}>_r = \operatorname*{Hom}_{ADGc}(\mathcal{A};A_k^*(\Delta^r))}$$

(ADGc désignant la catégorie des ADGc) l'ensemble des homomorphismes σ d'ADGc ($\sigma(\mathcal{A}^p) = 0$ pour $p > r$).

Donc pour tous les $r \geqslant 0$, on a une collection d'ensembles $\{<\mathcal{A}>_r\}_{r\in\mathbb{N}}$.

D'autre part, on définit des applications :

$$<\partial_i> : <\mathcal{A}>_r \longrightarrow <\mathcal{A}>_{r-1} \quad \text{et} \quad <S_i> : <\mathcal{A}>_r \longrightarrow <\mathcal{A}>_{r+1}$$

par :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, dashed, "\partial_i \circ \sigma"'] & A_k^*(\Delta^r) \arrow[d, "\partial_i"] \\ & A_k^*(\Delta^{r-1}) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, dashed, "S_i \circ \sigma"'] & A_k^*(\Delta^r) \arrow[d, "S_i"] \\ & A_k^*(\Delta^{r+1}) \end{tikzcd}$$

Compositions d'homomorphismes d'ADGc ;

$$<\partial_i> (\sigma) = \partial_i \circ \sigma \quad \text{et} \quad <S_i>(\sigma) = S_i \circ \sigma$$
$$\forall \quad \sigma \in <\mathcal{A}>_r, \quad r \in \mathbb{N}^*.$$

Puisque ∂_i et S_i sont les opérateurs de face et de dégénérescence de l'objet simplicial $A_k^*(\underline{\Delta})$, alors la famille ;

$(<\mathcal{A}>_r, <\partial_i>, <S_i>)_{r\in\mathbb{N}}$ est bien un ensemble simplicial qu'on notera $<\mathcal{A}>$.

Définition 1.-

L'ensemble simplicial $<\mathcal{A}>$ est dit l'ensemble simplicial associé à la k-ADGc $\mathcal{A}$.

3. - k-ADGc $A_k^*(K)$ *associé à un ensemble simplicial* K.

Soit K un ensemble simplicial.

Une p-forme simpliciale ψ à coefficients dans k sur l'ensemble simplicial K est une collection $\{\psi_\sigma\}_{\substack{\sigma\in K_r \\ r\in\mathbb{N}}}$ de p-formes $\psi_\sigma \in A_k^p(\Delta^r)$ $\forall\ \sigma \in K_r$, $r \in \mathbb{N}$, telle qu'elle satisfait aux conditions suivantes ;

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i)} & \partial_i \psi_\sigma = \psi_{\tilde{\partial}_i \sigma} \\ \text{ii)} & S_i \psi_\sigma = \psi_{\tilde{S}_i \sigma} \end{array}\right\} \quad \forall\ \sigma \in K_r, \quad r \in \mathbb{N}$$

où $\tilde{\partial}_i, \tilde{S}_i$ sont les opérateurs de face et de dégénérescence de K.

C'est-à-dire, compatible aux opérateurs de faces et de dégénérescences, autrement dit :

Une p-forme simpliciale sur K est un homomorphisme d'ensembles simpliciaux :

$$\emptyset : K \longrightarrow A_k^p(\underline{\Delta})$$

qui, à tout simplexe $\sigma \in K_r$, $r \in \mathbb{N}$, associe une p-forme polynômiale $\emptyset_\sigma \in A_k^p(\Delta^r)$ à coefficient dans k.

Notons

$$\boxed{A_k^p(K) = \operatorname{Hom}_S(K; A_k^p(\underline{\Delta}))}$$

(S <u>désignant la catégorie des ensembles simpliciaux</u>) l'ensemble des homomorphismes simpliciaux de K dans $A_k^p(\underline{\Delta})$, c'est-à-dire l'ensemble des p-formes simpliciales sur K.

Puisque $A_k^p(\overset{r}{\Delta})$ est un k-espace vectoriel pour tout $r \in N$, donc $A_k^p(K)$ possède une structure de k-espace vectoriel pour tout $p \geq 0$.

Posons $A_k^*(K) = \bigoplus_{p\geq 0} A_k^p(K)$ <u>le</u> <u>k-espace vectoriel gradué des formes simpliciales sur</u> K.

<u>*Lemme*</u> *1.* - $A_k^*(K)$ possède une structure naturelle de k-ADGc.

En effet, soient $\emptyset \in A_k^p(K)$ et $\Psi \in A_k^q(K)$ deux formes simpliciales sur K, i.e., deux homomorphismes simpliciaux ;

$\emptyset : K \to A_k^p(\underline{\Delta})$ et $\Psi : K \to A_k^q(\underline{\Delta})$ définies par :

$$\sigma \rightsquigarrow \emptyset_\sigma \qquad \text{et} \qquad \sigma \rightsquigarrow \Psi_\sigma$$

pour tout $\sigma \in K_r$ et $r \in \mathbb{N}$.

Puisque $\varphi_\sigma \wedge \Psi_\sigma$ est le produit dans l'algèbre $A_k^*(\Delta^r)$, $\forall\, r \in \mathbb{N}$.
Alors, l'application :

$$\sigma \rightsquigarrow \varphi_\sigma \wedge \Psi_\sigma \quad \text{de } K \text{ dans } A_k^{p+q}(\underline{\Delta})$$

est bien un homomorphisme simplicial.

On pose :

$$\boxed{(\varphi.\Psi)_\sigma = \varphi_\sigma \wedge \Psi_\sigma} \qquad \forall\, \sigma \in K_r,\ r \in \mathbb{N}.$$

donc le produit de φ et Ψ est : $\varphi.\Psi = \{\varphi_\sigma \wedge \Psi_\sigma\}_{\substack{\sigma\in K_r \\ r\in N}}$.

D'autre part, soit $\varphi \in A_k^p(K)$, on définit l'opérateur différentiel $d : A_k^p(K) \to A_k^{p+1}(K)$ comme la composition de deux applications k-linéaires simpliciales :

$$K \xrightarrow{\ \varphi\ } A_k^p(\underline{\Delta}) \xrightarrow{\ d_{DR}\ } A_k^{p+1}(\underline{\Delta})$$

(d_{DR} désignant la différentielle de de Rham), c'est-à-dire en posant :

$$d\varphi = \{d_{DR}\ \varphi_\sigma\}_{\substack{\sigma\in K_r \\ r\in\mathbb{N}}}$$

i.e. $d\varphi$ est la forme définie par :

$\sigma \rightsquigarrow d_{DR}(\varphi_\sigma) \in A_k^{p+1}(\Delta^r)$ lorsque φ_σ est définie par φ pour tout $\sigma \in K_r$ et $r \in \mathbb{N}$, d'où le lemme 1.

Définition 2. - L'algèbre $A_k^*(K)$ construite ci-dessus est dite <u>la k-ADGc associée à l'ensemble simplicial</u> K.

4. - <u>*Homomorphisme naturel* d'ADGc</u> $\Pi_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \longrightarrow A_k^*(<\mathfrak{A}>)$.

Pour tout $\sigma \in <\mathfrak{A}>_r$, $r \in \mathbb{N}$ (un homomorphisme d'ADGc

$\sigma : \mathfrak{A} \longrightarrow A_k^*(\Delta^r))$ et si x est un générateur de l'algèbre $\mathfrak{A}$ de degré p ; on a $\sigma(x) \in A_k^p(\Delta^r)$ une p-forme polynômiale sur Δ^r ; d'où une famille de p-formes polynômiales $\{\sigma(x)\}_{\substack{\sigma \in <\mathfrak{A}>_r \\ r \in \mathbb{N}}}$.

Evidemment, cette famille définit une p-forme simpliciale sur l'ensemble simplicial $<\mathfrak{A}>$.

Soit $A_k^*(<\mathfrak{A}>)$ désigne la k-ADGc associé à $<\mathfrak{A}>$.
On définit une application :

$$\Pi_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \longrightarrow A_k^*(<\mathfrak{A}>)$$

en posant

$$\boxed{\Pi_{\mathfrak{A}}(x) = \{\sigma(x)\}_{\substack{\sigma \in <\mathfrak{A}>_r \\ r \in \mathbb{N}}}}$$

où x est un générateur de $\mathfrak{A}$ de degré p.

Lemme 2. - $\Pi_{\mathfrak{A}}$ est un homomorphisme d'ADGc.

En effet, $\Pi_{\mathfrak{A}}$ est une application k-linéaire car les σ le sont, et

i) $\Pi_{\mathfrak{A}}(x.y) = \{\sigma(x.y)\}_{\substack{\sigma \in <\mathfrak{A}>_r \\ r \in \mathbb{N}}} = \{\sigma(x) \wedge \sigma(y)\}_{\substack{\sigma \in <\mathfrak{A}>_r \\ r \in \mathbb{N}}}$

donc

$$\Pi_{\mathfrak{A}}(x.y) = \Pi_{\mathfrak{A}}(x).\Pi_{\mathfrak{A}}(y) \qquad \forall\, x,y \in \mathfrak{A} ,$$

$\Pi_{\mathfrak{A}}$ sera un homomorphisme d'algèbres.

ii) $\Pi_{\mathfrak{A}}$ est homogène de degré 0 (évident d'après la définition).

iii) puisque $(d(\Pi_{\mathfrak{A}}(x)))_\sigma = d_{DR}(\sigma(x)) = \sigma(d_{\mathfrak{A}}(x))$ pour tout $\sigma \in <\mathfrak{A}>_r$ et $r \in \mathbb{N}$, ceci implique que :

$d\Pi_{\mathfrak{A}}(x) = \Pi_{\mathfrak{A}}(d_{\mathfrak{A}}(x))$, i.e. $\Pi_{\mathfrak{A}}$ commute aux différentielles où $d_{<\mathfrak{A}>}$ et $d_{\mathfrak{A}}$ sont les différentielles de $A_k^*(<\mathfrak{A}>)$ et $\mathfrak{A}$ respectivement.

En effet, on peut voir facilement que $\Pi_{\mathfrak{A}}$ est un homomorphisme d'ADGc car tous les σ le sont. D'où le lemme.

Remarque 1.- On a désigné par ADGc la catégorie des algèbres différentielles graduées commutatives.

Soient $\mathrm{Id} : \mathrm{ADGc} \longrightarrow \mathrm{ADGc}$ le foncteur covariant identique, et

$$A_k^* \cdot <\cdot> : \mathrm{ADGc} \to \mathrm{ADGc}$$

le foncteur covariant qui associe à toute k-ADGc $\mathfrak{A}$ la k-ADGc $A_k^*(<\mathfrak{A}>)$ associée à $<\mathfrak{A}>$ (l'ensemble simplicial associé à $\mathfrak{A}$).

On définit une flèche :

$\Pi\cdot : \mathrm{Id} \to A_k^*\cdot<\cdot>$ en associant à toute k-ADGc $\mathfrak{A}$ un homomorphisme d'ADGc $\Pi_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \longrightarrow A_k^*(<\mathfrak{A}>)$. Pour vérifier que $(\mathfrak{A} \longrightarrow \Pi_{\mathfrak{A}})$ est une transformation naturelle ; on se donne $f : \mathfrak{A} \longrightarrow B$ un homomorphisme d'ADGc, qui induit une application simpliciale :

$$<f> : <B> \longrightarrow <\mathfrak{A}>$$

définie par : $<f>(\sigma) = \sigma \circ f$

$\forall\, \sigma \in <B>_r$ et $r \in \mathbb{N}$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "\sigma \circ f"'] & B \arrow[d, "\sigma"] \\ & A_k^*(\Lambda^r) \end{tikzcd}$$

D'autre part, $<f>$ induit un homomorphisme d'ADGc :

$$<f>^* : A_k^*(<\mathfrak{A}>) \longrightarrow A_k^*(<B>)$$

qui est défini par :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "<f>"] \arrow[dr, dashed, "\psi \circ <f>"'] & <\mathfrak{A}> \arrow[d, "\psi"] \\ & A_k^p(\underline{\Delta}) \end{tikzcd}$$

$$\langle f\rangle^{*}(\psi) = \psi \circ \langle f\rangle$$

$$\forall \quad \psi \in A^{p}_{k}(\langle \mathfrak{A} \rangle),$$

i.e. $$(\langle f\rangle^{*}(\psi))_{\sigma} = (\psi \circ \langle f\rangle)_{\sigma} = \psi_{\sigma \circ f}$$

$$\forall\, \sigma \in \langle B\rangle_{r}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Une vérification immédiate nous donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Pi_{\mathfrak{A}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[d, "\Pi_{B}"] \\
A^{*}_{k}(\langle \mathfrak{A} \rangle) \arrow[r, "\langle f\rangle^{*}"] & A^{*}_{k}(\langle B\rangle)
\end{tikzcd}$$

d'où $\mathfrak{A} \rightsquigarrow \Pi_{\mathfrak{A}}$ est une transformation naturelle.

Remarque 2.- Si $q \in \mathbb{N}$ désigne le plus petit degré des générateurs de $\mathfrak{A}$, alors l'ensemble $\langle \mathfrak{A} \rangle_{r}$ est infini pour chaque $r \geqslant q$ (i.e. possède un nombre infini d'éléments), même si l'algèbre $\mathfrak{A}$ a un nombre fini des générateurs.

Par conséquent, l'ensemble simplicial $\langle \mathfrak{A} \rangle$ est infini, c'est-à-dire qu'il possède un nombre infini des simplexes non dégénérés.

Remarque 3.- L'ensemble simplicial $\langle \mathfrak{A} \rangle$ ne possède pas de structure naturelle de k-espace vectoriel car la somme de deux homomorphismes d'ADGc n'est plus un homomorphisme d'ADGc.

[Rappelons $\langle \mathfrak{A} \rangle_{r} = \operatorname{Hom}_{\text{ADGc}}(\mathfrak{A}; A^{*}_{k}(\Delta^{r}))$].

CHAPITRE II

§ 1. - ALGEBRE D'EILENBERG-MAC LANE.

On note $L_n(x)$ la k-ADGc libre sur un seul générateur x de degré n (n entier ≥ 1) dont la différentielle est nulle, i.e. $dx = 0$, donc :

$$L_n(x) = \begin{cases} E(x), \text{ algèbre extérieure sur } x, \text{ si } n \text{ est impair.} \\ S(x), \text{ algèbre symmétrique sur } x, \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Proposition 1.- L'homomorphisme :

$$\Pi_{L_n(x)} : L_n(x) \longrightarrow A_k^*(<L_n(x)>)$$

induit un isomorphisme en cohomologie (quasi-isomorphisme).

D'abord, on va calculer l'ensemble simplicial $<L_n(x)>$ en suite la cohomologie de formes simpliciales sur $<L_n(x)>$ et puis la démonstration de la proposition 1.

i) Calcul de $<L_n(x)>$.

a) Pour $0 \leq r \leq n-1$, on a :

$$<L_n(x)>_r = \operatorname{Hom}_{ADGc}(L_n(x); A_k^*(\Delta^r)) = \left\{\sigma_r \middle| \sigma_r : \begin{matrix} 1 & \rightsquigarrow & 1 \\ x & \rightsquigarrow & 0 \end{matrix}\right\}$$

à cause de dimension dans Δ^r ; où 1 désigne l'élément unité ; d'où $<L_n(x)>_r = \{\sigma_r\}$ un ensemble d'un seul élément pour $0 \leq r \leq n-1$.

b) Pour $r \geq n$,

$$<L_n(x)>_r = \operatorname{Hom}_{ADGc}(\mathcal{A}; A_k^*(\Delta^r)) = \operatorname{Hom}_k(kx; Z^n(A_k^*(\Delta^r))) = Z^n(A_k^*(\Delta^r)) \underset{k}{\otimes} (kx)^*$$

où $Z^n(A_k^*(\Delta^r))$ = le noyau de $d_{DR} : A_k^n(\Delta^r) \to A_k^{n+1}(\Delta^r)$ et kx désigne le k-espace vectoriel de base d'un seul générateur x et $(kx)^*$ son dual ; mais $(kx)^* \simeq k$, d'où finalement ; $\langle L_n(x)\rangle_r = Z^n(A_k^*(\Delta^r))$ en tant qu'ensemble pour $r \geqslant n$.

Il est évident que :

$\boxed{\langle L_n(x)\rangle = Z^n(A_k^*(\underline{\Delta}))}$ en tant qu'ensemble simplicial.

Lemme 1.- L'ensemble simplicial $\langle L_n(x)\rangle$ est de type $K(k,n)$.

Démonstration : Il suffit de montrer que $Z^n(A_k^*(\underline{\Delta})$ est un ensemble simplicial de type $K(k,n)$.

Rappelons le principe de la démonstration, telle qu'elle est exposée dans H. Cartan [2] ou C Watkiss [10].

Puisque, pour tout $r \geqslant 0$ la k-ADGc $A_k^*(\Delta^r)$ est acyclique i.e., $H^o(A_k^*(\Delta^r)) = k$ et $H^p(A_k^*(\Delta^r)) = 0$ pour tout $p > 0$, on a donc une suite exacte de groupes simpliciaux :

$$0 \longrightarrow Z^n(A_k^*(\underline{\Delta})) \longrightarrow A_k^n(\underline{\Delta}) \xrightarrow{d_{DR}} Z^{n+1}(A_k^*(\underline{\Delta})) \longrightarrow 0$$

qui est, en effet, une fibration principale de Kan.

La suite exacte longue d'homotopie associée à cette fibration est :

$$\dots \to \Pi_{p+1}(A_k^n(\underline{\Delta})) \to \Pi_{p+1}(Z^{n+1}(A_k^*(\underline{\Delta}))) \to \Pi_p(Z^n(A_k^*(\underline{\Delta}))) \to \Pi_p(A_k^n(\underline{\Delta})) \to \dots$$

mais pour tout $n \geqslant 0$, $A_k^n(\underline{\Delta})$ est un ensemble simplicial contractile, c'est-à-dire que ses groupes d'homotopie sont tous nuls, d'où

$$\Pi_{p+1}(Z^{n+1}(A_k^*(\underline{\Delta}))) \simeq \Pi_p(Z^n(A_k^*(\underline{\Delta})))$$

mais le groupe simplicial $Z^o(A_k^*(\underline{\Delta}))$ est simplicialement trivial (i.e. dont les opérateurs de face et de dégénérescence sont des isomorphismes simpliciaux), alors par récurrence sur n, on en déduit que :

$$\Pi_p(Z^n(A_k^*(\underline{\Delta}))) = 0 \quad \text{pour} \quad p \neq n$$

et

$$\Pi_n(Z^n(A_k^*(\underline{\Delta}))) \cong \Pi_o(Z^o(A_k^*(\underline{\Delta}))) = Z^o(A_k^*(\Delta^o)) = k$$

c.q.f.d.

ii) Calcul de $H^*(A_k^*(<L_n(x)>))$.

Puisque pour tout $0 \leq r < n$, $<L_n(x)>_r$ est un ensemble d'un seul élément, alors :

$$H^o(<L_n(x)>;k) \cong k \quad \text{et} \quad H^p(<L_n(x)>;k) = 0, \quad \forall \ 0 < p < n$$

mais $<L_n(x)>$ est un ensemble simplicial de type $K(k,n)$ donc :
$H^n(<L_n(x)>;k) \cong \mathrm{Hom}_k(k;k)$ un k-espace vectoriel de base d'un seul générateur (qui est en effet l'homomorphisme identique de k sur k).

En général, puisque $<L_n(x)>$ est un $K(k,n)$ alors :
$H^*(<L_n(x)>;k) \cong L_n(x)$ (isomorphisme d'ADc) où x représente le générateur de l'espace vectoriel $H^n(<L_n(x)>;k)$. En utilisant le théorème de de Rham simplicial ; c'est-à-dire :

$$H^*(<L_n(x)>;k) \cong H^*(A_k^*(<L_n(x)>))$$

(cf. [2] ou [10]) on obtient le lemme suivant :

Lemme 2.-

$$H^*(L_n(x)) \simeq H^*(A_k^*(<L_n(x)>)).$$

Démonstration de la proposition 1 :

Puisque $H^n(A_k^*(<L_n(x)>))$ est un k-espace vectoriel de dimension 1 engendré par un seul générateur (la n-forme simpliciale fondamentale) et d'après lemme 2, il suffit donc, pour montrer que $\Pi^*_{L_n(x)}$ est un isomorphisme, de montrer que l'image de x par $\Pi_{L_n(x)}$ est une n-forme fermée non-exacte dans

$A_k^*(\langle L_n(x)\rangle)$, c'est-à-dire que $\Pi_{L_n(x)}(x)$ est la n-forme fondamentale sur $\langle L_n(x)\rangle$.

i) $\Pi_{L_n(x)}(x)$ est une n-forme fermée (évident d'après la définition de $\Pi_{L_n(x)}$).

ii) $\Pi_{L_n(x)}(x)$ est non exacte ?

Puisque $\langle L_n(x)\rangle = Z^n(A_k^*(\underline{\Delta}))$ et puisque $\Pi_{L_n(x)}(x)$ est une n-forme fermée sur $\langle L_n(x)\rangle$, alors l'homomorphisme simplicial :

$$\Pi_{L_n(x)}(x) : \langle L_n(x)\rangle \longrightarrow Z^n(A_k^*(\underline{\Delta}))$$

sera l'homomorphisme identique de $Z^n(A_k^*(\underline{\Delta}))$ sur $Z^n(A_k^*(\underline{\Delta}))$.

On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & A_k^{n-1}(\underline{\Delta}) \arrow[d, "d_{DR}"] \\
Z^n(A_k^*(\underline{\Delta})) \arrow[r, "id"] \arrow[ur, dashed] & Z^n(A_k^*(\underline{\Delta}))
\end{tikzcd}$$

maintenant, si $\Pi_{L_n(x)}(x)$ était exacte, c'est-à-dire que s'il existait une flèche de $Z^n(A_k^*(\underline{\Delta}))$ dans $A_k^{n-1}(\underline{\Delta})$ rendant le diagramme ci-dessus commutatif, alors cela impliquerait qu'il existe un relèvement de $\Pi_{L_n(x)}(x) = id_{Z^n(A_k^*(\underline{\Delta}))}$ dans le fibré :

$$A_k^{n-1}(\underline{\Delta}) \xrightarrow{d_{DR}} Z^n(A_k^*(\underline{\Delta}))$$

donc

$$id_{Z^n(A_k^*(\underline{\Delta}))} \overset{\text{homotope}}{\sim} 0$$

c'est-à-dire que :

$\mathrm{id}_{Z^n(A_k^*(\underline{\Delta}))}$ serait homotope au morphisme nul (cf. [10]).

On aurait donc : $H^n(Z^n(A_k^*(\underline{\Delta}));k) = 0$.

Mais $Z^n(A_k^*(\underline{\Delta}))$ est un $K(k,n)$ alors :

$\Pi_n(Z^n(A_k^*(\underline{\Delta}))) = 0$ et ceci impossible, d'où la proposition 1.

§ 2. - *EXTENSION ELEMENTAIRE D'UNE ADGc.*

Soit B une k-ADGc donnée.

Soit $\mathcal{A} = B \underset{k}{\otimes} L_n(x)$ une extension principale élémentaire de B dont la différentielle $d_{\mathcal{A}}$ est définie par :

i) $d_{\mathcal{A}}(b\otimes 1) = d_B(b) \otimes 1$

ii) $d_{\mathcal{A}}(1\otimes x) = \alpha \otimes 1$

où $b \in B$ et $\alpha \in Z^{n+1}(B)$ (est un (n+1)-cocycle dans B).

Notre but dans cette section est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 2. -

> Soit $(\mathcal{A}, d_{\mathcal{A}})$ l'extension principale élémentaire de (B, d_B) ci-dessus.
> Alors, si Π_B est un quasi-isomorphisme, $\Pi_{\mathcal{A}}$ l'est aussi.

On va donner (et prouver) quelques résultats qu'on utilisera pour démontrer la proposition 2.

1) *Calcul de l'ensemble simplicial* $<\mathcal{A}>$ *et et fibration principale* $K(k,n) \to <\mathcal{A}> \to <B>$.

Dans la k-ADGc $\mathcal{A} = B \otimes L_n(x)$, on considère la relation suivante : $d_{\mathcal{A}}(x) = \alpha$ pour $\alpha \in Z^{n+1}(B)$.

Donc tout homomorphisme d'ADGc :

$$\tau : \mathcal{A} \longrightarrow A_k^*(\Delta^r), \quad \text{pour} \quad r \geq 0$$

est défini par ses restrictions à B et à l'élément x, soient respectivement $\sigma \in \operatorname{Hom}_{ADGc}(B;A_k^*(\Delta^r))$ et $\tau(x) = \Psi \in A_k^n(\Delta^r)$ vérifiant :

$$d_{DR}\tau(x) = \sigma(\alpha)$$

autrement dit :

Tout élément $\tau \in <\mathcal{A}>_r$ est complètement déterminé par un élément $\sigma \in <B>_r$ et un élément $\Psi \in A_k^n(\Delta^r)$ vérifiant la relation $d_{DR}\Psi = \sigma(\alpha)$.

On posera : $\boxed{\tau = (\sigma,\Psi).}$

On peut définir donc l'ensemble $<\mathcal{A}>_r$, pour tout $r \geq 0$ par :

$$\boxed{<\mathcal{A}>_r = \{(\sigma,\Psi) \mid \sigma \in <B>_r \text{ et } \Psi \in A_k^n(\Delta^r) \text{ avec } d_{DR}\Psi = \sigma(\alpha)\}}$$

Il est bien clair que :

$$<\mathcal{A}>_r \subset <B>_r \times A_k^n(\Delta^r) \quad \text{pour tout} \quad r \in \mathbb{N},$$

en tant qu'ensemble.

On peut vérifier aisément (après cette définition) que $<\mathcal{A}>$ est un ensemble simplicial dont les opérateurs de faces et de dégénérescences sont induits par ceux de $<B> \times A_k^n(\underline{\Delta})$ et qui satisfont à la relation $d_{DR}\Psi = \sigma(\alpha)$ où $\alpha \in Z^{n+1}(B)$.

Soit maintenant :

$$p : <\mathfrak{A}> \to <B>$$

la projection définie par ; $p(\sigma,\Psi) = \sigma$ pour tout $\sigma \in <B>_r$ et $\Psi \in A_k^n(\Delta^r)$ et $r \in \mathbb{N}$.

P est un homomorphisme simplicial.

<u>*Lemme*</u> *3.* -

L'homomorphisme simplicial ;

$p : <\mathfrak{A}> \to <B>$ est une fibration principale de Kan(1)

de fibre ;

$Z^n(A_k^*(\underline{\Delta})) = <L_n(x)>$ (de type $K(k,n)$).

<u>*Démonstration*</u> :

Définissons pour tout $r \in \mathbb{N}$, une application $\ell_r : <B>_r \longrightarrow Z^{n+1}(A_k^*(\Delta^r))$ par ; $\ell(\sigma) = \sigma(\alpha)$ i.e. $\sigma \rightsquigarrow \sigma(\alpha)$ où $\alpha = d_{\mathfrak{A}}\, x \in Z^{n+1}(B)$.

D'où la famille $\{\ell_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ d'application qui définit évidemment un homomorphisme d'ensembles simpliciaux ;

$$\ell : <B> \longrightarrow Z^{n+1}(A_k^*(\Delta)).$$

$$\sigma \rightsquigarrow \sigma(\alpha).$$

On est donc dans la situation suivante ;

---

(1) pour la définition d'une fibration de Kan, voir [6].

$$\begin{array}{ccc} & & Z^n(A_k^*(\underline{\Delta})) = K(k,n) \\ & & \downarrow \\ & & A_k^n(\underline{\Delta}) = PK(k,n+1) \\ & & \downarrow d_{DR} \\ \langle B\rangle & \xrightarrow{\quad \ell \quad} & Z^{n+1}(A_k^*(\underline{\Delta})) = K(k,n+1). \end{array}$$

On décrit maintenant l'image réciproque $C \xrightarrow{q} \langle B\rangle$ du fibré de Kan $A_k^n(\underline{\Delta}) \xrightarrow{d_{DR}} Z^{n+1}(A_k^*(\underline{\Delta}))$ par l'application simpliciale ℓ de la façon suivante ;

i) $\forall\, r \in \mathbb{N}$, $C_r = \{(\sigma,\Psi) \mid \ell(\sigma) = d_{DR}\Psi\} \subset \langle B\rangle_r \times A_k^n(\Delta^r)$

ii) $\forall\, r \in \mathbb{N}$, $q_r : C_r \longrightarrow \langle B\rangle_r$ est défini par ; $q_r(\sigma,\Psi) = \sigma$, $\forall\, (\sigma,\Psi) \in C_r$

d'où l'application simpliciale ; $q : C \to \langle B\rangle$.

Comme $\ell(\sigma) = \sigma(\alpha) = d_{DR}\Psi$ $\forall\, \sigma \in \langle B\rangle_r$ et $\Psi \in A_k^n(\Delta^r)$.

On constate : $C = \langle \mathcal{A} \rangle$ et $q = p$.

Ainsi, $p : \langle \mathcal{A} \rangle \to \langle B\rangle$ est égal à l'image réciproque de $d_{DR} : A_k^n(\underline{\Delta}) \to Z^{n+1}(A_k^*(\underline{\Delta}))$ par ℓ.

Mais l'application simpliciale $d_{DR} : A_k^n(\underline{\Delta}) \to Z^{n+1}(A_k^*(\underline{\Delta}))$ est une fibration principale de Kan de fibre type $K(k,n)$.

L'application simpliciale ;

$p : \langle \mathcal{A} \rangle \to \langle B\rangle$ l'est donc aussi.

d'où le lemme.

Remarque 2.-

La fibre de la fibration $<\mathfrak{A}> \xrightarrow{p} <B>$ est l'ensemble simplicial $<L_n(x)> = Z^n(A_k^*(\underline{\Delta}))$ qui est un $K(k,n)$.

Notons $<L_n(x)> \xrightarrow{\iota} <\mathfrak{A}>$ l'inclusion simpliciale qui est définie, pour tout $\Psi \in Z^n(A_k^*(\Delta^r))$ et $r \in \mathbb{N}$, par ;

$$\iota(\Psi) = (0,\Psi) \in <\mathfrak{A}>_r.$$

2) *Les ADGc^s de formes simpliciales de la fibration principale* $<L_n(x)> \to <\mathcal{O}\!\mathcal{C}> \to <B>$.

Soient respectivement $A_k^*(<\mathcal{O}\!\mathcal{C}>)$, $A_k^*(<B>)$ et $A_k^*(<L_n(x)>)$ les k-ADGc^s des formes simpliciales sur l'espace total $<\mathcal{O}\!\mathcal{C}>$, la base $<B>$ et la fibre $<L_n(x)>$ de la fibration principale de Kan ;

$$<L_n(x)> \xrightarrow{\iota} <\mathcal{O}\!\mathcal{C}> \xrightarrow{p} <B> .$$

Soit $\emptyset$ une p-forme simpliciale sur $<B>$, c'est-à-dire ;
$\emptyset : <B> \longrightarrow A_k^p(\underline{\Delta})$ est une application simpliciale.

L'application simpliciale composée ;
$<\mathcal{O}\!\mathcal{C}> \xrightarrow{p} <B> \xrightarrow{\emptyset} A_k^p(\underline{\Delta})$ définit une p-forme simpliciale sur $<\mathcal{O}\!\mathcal{C}>$, l'application simpliciale ;

$p : <\mathcal{O}\!\mathcal{C}> \to <B>$ induit donc un homomorphisme de k-ADGc
$p^* : A_k^*(<B>) \longrightarrow A_k^*(<\mathcal{O}\!\mathcal{C}>)$ défini par ;

$$p^*(\emptyset) = (\emptyset \circ p) \quad \text{pour tout} \quad \emptyset \in A_k^*(<B>)$$

i.e., $\forall\, \tau \in <\mathcal{O}\!\mathcal{C}>_r$, $r \in \mathbb{N}$, on a ;

$$\boxed{(p^*\emptyset)_\tau = \emptyset_{p(\tau)}} \,.$$

D'autre part, soit $\Psi : <\mathcal{O}\!\mathcal{C}> \longrightarrow A_k^q(\underline{\Delta})$ une application simpliciale, alors l'application simpliciale composée ;

$$<L_n(x)> \xrightarrow{\iota} <\mathcal{O}\!\mathcal{C}> \xrightarrow{\Psi} A_k^q(\underline{\Delta})$$

définit une q-forme simpliciale sur la fibre $<L_n(x)>$.

L'application simpliciale ι induit donc un homomorphisme d'ADGc ;
$\iota^* : A_k^*(<\mathcal{O}\!\mathcal{C}>) \longrightarrow A_k^*(<L_n(x)>)$ défini par ;

$$\iota^*(\Psi) = \Psi \circ \iota \qquad \forall\, \Psi \in A_k^*(<\mathcal{O}\!\mathcal{C}>).$$

Remarque 3.-

Puisque l'application simpliciale $\iota : <L_n(x)> \to <\mathcal{A}>$ est une inclusion simpliciale, elle induit un homomorphisme surjectif d'ADGc $\iota^* : A_k^*(<\mathcal{A}>) \to A_k^*(<L_n(x)>)$.

D'après la proposition 1, on en déduit donc, une n-forme $\phi \in A_k^n(<\mathcal{A}>)$ telle que ;

$\iota^*(\phi)$ soit la n-forme simpliciale fondamentale sur la fibre $<L_n(x)>$. C'est-à-dire :

$[\iota^*(\phi)] = x$ le générateur (de degré n) de l'espace vectoriel $H^n(<L_n(x)>;k) \simeq H^n(A_k^*(<L_n(x)>))$.

Remarque 4.-

Soient $\Pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow A_k^*(<\mathcal{A}>)$, $\Pi_B : B \longrightarrow A_k^*(<B>)$ et $\Pi_{L_n(x)} : L_n(x) \longrightarrow A_k^*(<L_n(x)>)$ les homomorphismes d'ADGc définis au chapitre (I.4).

Puisque le morphisme $\mathcal{A} \to \Pi_{\mathcal{A}}$ est une transformation naturelle (remarque 1, chapitre I). On obtient deux diagrammes commutatifs ;

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "incl"] \arrow[d, "\Pi_B"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \otimes L_n(x) = \mathcal{A} \arrow[d, "\Pi_{\mathcal{A}}"] \\ A_k^*(<B>) \arrow[r, "p^*"'] & A_k^*(<\mathcal{A}>) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{A} = B \otimes L_n(x) \arrow[r] \arrow[d, "\Pi_{\mathcal{A}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & L_n(x) \arrow[d, "\Pi_{L_n(x)}"] \\ A_k^*(<\mathcal{A}>) \arrow[r, "\iota^*"'] & A_k^*(<L_n(x)>) \end{tikzcd}$$

i.e.

$$\Pi_{\mathcal{A}} \circ \text{incl.} = p^* \circ \Pi_B$$

i.e.

$$(\iota^* \circ \Pi_{\mathcal{A}})(1 \otimes x) = \Pi_{L_n(x)}(x)$$

D'après la proposition 1, $\Pi_{L_n(x)}(x)$ est la n-forme fondamentale dans $A_k^*(<L_n(x)>)$, et d'après remarque 3, page précédente $\Pi_{\mathcal{O}\!\mathcal{C}}(1 \otimes x)$ sera la n-forme dans $A_k^*(< \mathcal{O}\!\mathcal{C} >)$ telle que ;

$$[\iota^* \Pi_{\mathcal{O}\!\mathcal{C}}(1 \otimes x)] = [\Pi_{L_n(x)}(x)] = x$$ le générateur de l'espace vectoriel

$$H^n(A_k^*(<L_n(x)>)) \cong H^n(<L_n(x)>;k).$$

3) *Transgression de la fibration principale de Kan*

$$<L_n(x)> \longrightarrow <\mathfrak{A}> \longrightarrow <B>$$

On a vu au paragraphe 2 que la fibration principale de Kan $<L_n(x)> \xrightarrow{\iota} <\mathfrak{A}> \xrightarrow{p} <B>$ est l'image réciproque du fibré de Kan ; $A^n_k(\underline{\Delta}) \xrightarrow{d_{DR}} Z^{n+1}(A^*_k(\underline{\Delta}))$ par l'application simpliciale $\ell : <B> \longrightarrow Z^{n+1}(A^*_k(\underline{\Delta}))$ définie au paragraphe 1.

On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
K(K,n) = <L_n(x)> \arrow[rr, equal] \arrow[d, "\iota"] & & Z^n(A^*_k(\underline{\Delta})) = K(k,n) \arrow[d] \\
<\mathfrak{A}> \arrow[rr, "\tilde{\ell}"] \arrow[d, "p"] & & A^n_k(\underline{\Delta}) = pK(k,_{n+1}) \arrow[d, "d_{DR}"] \\
<B> \arrow[rr, "\ell"] & & Z^{n+1}(A^*_k(\underline{\Delta})) = K(k,n+1)
\end{tikzcd}$$

où ℓ peut être considéré comme une application classifiante. On a le lemme suivant :

Lemme 4.- La fibration principale de Kan ;

$$<L_n(x)> \xrightarrow{\iota} <\mathfrak{A}> \xrightarrow{p} <B>$$

est totalement transgressive.

Le principe de la démonstration est celle qui est exposée dans [4] c'est-à-dire que l'élément x (le générateur) de H^n $(<L_n(x)>, k)$ est transgressif (1).

D'autre part, puisque $H^n(Z^n(A^*_k(\underline{\Delta}))$, k) et $H^{n+1}(Z^{n+1}(A^*_k(\underline{\Delta}))$ sont deux k-espaces vectoriels de base d'un seul générateur, alors il existe

----

(1) Pour une définition, voir [9, pp. 434] aussi voir [1, pp. 132].

un isomorphisme d'espaces vectoriels ;

$$H^n(Z^n(A_k^*(\underline{\Delta})),k) \cong H^{n+1}(Z^{n+1}(A_k^*(\underline{\Delta})) ; k)$$

et par conséquent un isomorphisme : $H^n(<L_n(x)> ; k) \cong H^{n+1}(Z^{n+1}(A_k^*(\underline{\Delta})) ; k)$.

L'application simpliciale ;

$$\ell : <B> \longrightarrow Z^{n+1}(A_k^*(\underline{\Delta}))$$ induit un homomorphisme ;

$$\ell^* : H^{n+1}(Z^{n+1}(A_k^*(\underline{\Delta})) ; k) \longrightarrow H^{n+1}(<B> ; k) .$$

Alors, l'application composée :

$$H^n(<L_n(x)> ; k) \xrightarrow{\cong} H^{n+1}(Z^{n+1}(A_k^*(\underline{\Delta})) ; k) \xrightarrow{\ell^*} H^{n+1}(<B> ; k)$$

est une transgression de la fibration $<\mathfrak{A}> \xrightarrow{p} <B>$: on la note

$$\boxed{[\ell] : H^n(<L_n(x)> ; k) \longrightarrow H^{n+1}(<\mathcal{B}> ; k) .}$$

Maintenant on va définir une transgression correspondante dans la cohomologie des formes simpliciales de la fibration principale de Kan totalement transgressive $<\mathfrak{A}> \xrightarrow{p} <B>$.

Puisque ; $H^*(<L_n(x)> ; k) \cong H^*(A_k^*(<L_n(x)>)) \cong L_n(x)$.

Il existe une application linéaire de degré 0 ;

$\Pi_o : kx \longrightarrow A_k^n(<\mathfrak{A}>)$ qui est effectivement la restriction de $\Pi_{\mathfrak{A}}$ à kx i.e. , à l'élément de la forme $1 \otimes x$.

Aussi, il existe une application linéaire de degré + 1 ;

$$\tau : kx \longrightarrow Z^{n+1}(A_k^*(<B>))$$ définie par ;

$$\tau(x) = \{\sigma(\alpha)\}_{\sigma\in<B>} \quad \text{où} \quad \alpha = d_{\mathfrak{A}}\, x \in Z^{n+1}(B) .$$

i) c'est évident que $\tau(x)$ est une application simpliciale de $\langle B\rangle$ dans $Z^{n+1}(A_k^*(\underline{\Delta}))$.

ii) $\tau(x) = \Pi_B(\alpha)$ (définition de Π_B).

D'après remarque 3 et remarque 4 paragraphe 2 précédent, on obtient :

i) $[i^* \, \Pi_o(x)] = x$ le générateur de $H^n(\langle L_n(x)\rangle \; ; \; k) \cong H^n(A_k^*(\langle L_n(x)\rangle))$, c'est-à-dire que $i^* \, \Pi_o(x) = i^*(\Pi_{\mathfrak{A}} \; (1 \otimes x))$ est la n-forme fondamentale sur la fibre $\langle L_n(x)\rangle$.

ii) $d_{\langle\mathfrak{A}\rangle} \, \Pi_o(x) = p^* \, \tau(x)$ où $d_{\langle\mathfrak{A}\rangle}$ est la différentielle de $A_k^*(\langle \mathfrak{A} \rangle)$.

mais $\tau(x) \in Z^{n+1}(A_k^*(\langle B\rangle))$, alors l'application composée suivante :

$$\begin{tikzcd}
{[\tau]} : H^n(A_k^*(\langle L_n(x)\rangle)) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, equal, "\wr"] & Z^{n+1}(A_k^*(\langle B\rangle)) \arrow[r] & H^{n+1}(A_k^*(\langle B\rangle)) \\
kx & &
\end{tikzcd}$$

est une transgression de la fibration en utilisant la cohomologie de formes simpliciales.

<u>*Remarque*</u> 5.- D'après le théorème de de Rham simplicial, on a :

$$\begin{tikzcd}
{[\tau]} : H^n(A_k^*(\langle L_n(x)\rangle)) \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & H^{n+1}(A_k^*(\langle B\rangle)) \arrow[d, equal, "\wr"] \\
{[\ell]} : H^n(\langle L_n(x)\rangle \; ; \; k) \arrow[r] & H^{n+1}(\langle B\rangle \; ; \; k)
\end{tikzcd}$$

correspond à :

4) *Démonstration de la proposition 2.*

Notons $A_k^*(\langle B\rangle) \underset{\tau}{\otimes} L_n(x)$ l'extension principale de $A_k^*(\langle B\rangle)$ dont la différentielle d_τ est définie par :

i) $d_\tau(\psi \otimes 1) = d_{\langle B\rangle}(\psi) \otimes 1$

$\forall\, \psi \in A_k^*(\langle B\rangle)$, où $d_{\langle B\rangle}$ désigne la différentielle de $A_k^*(\langle B\rangle)$.

ii) $d_\tau(1 \otimes x) = \tau(x) \otimes 1 = \Pi_B(\alpha) \otimes 1$

où $\tau(x)$ est la transgression définie au paragraphe 3 précédent. Rappelons l'existence d'un quasi-isomorphisme :

$$f : A_k^*(\langle B\rangle) \underset{\tau}{\otimes} L_n(x) \longrightarrow A_k^*(\langle \mathfrak{A}\rangle)$$

défini par :

i) $f(\psi \otimes 1) = p^*(\psi)$

ii) $f(1 \otimes x) = \Pi_o(x)$

(Théorème de transgression, cf. [4]) où $p^* : A_k^*(\langle B\rangle) \longrightarrow A_k^*(\langle \mathfrak{A}\rangle)$ l'homomorphisme d'ADGc défini au paragraphe 2 et Π_o la restriction de $\Pi_{\mathfrak{A}}$ à x définie au paragraphe 3.

On considère maintenant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} = B \otimes L_n(x) \arrow[r, "\Pi_B \otimes id"] \arrow[rr, bend left, "\Pi_{\mathfrak{A}}"] & A_k^*(\langle B\rangle) \underset{\tau}{\otimes} L_n(x) \arrow[r, "f"] & A_k^*(\langle \mathfrak{A}\rangle) \\
B \arrow[u, "incl."] \arrow[r, "\Pi_B"] & A^*(\langle B\rangle) \arrow[u, "incl."] \arrow[ur, "p^*"'] &
\end{tikzcd}$$

"$\mathfrak{F}$"

On suppose que Π_B est un quasi-isomorphisme de B dans $A_k^*(\langle B\rangle)$, on a le lemme suivant :

Lemme 5.-

$$\Pi_B \otimes \mathrm{id} : \mathfrak{A} = B \otimes L_n(x) \longrightarrow A_k^*(\langle B\rangle) \underset{\tau}{\otimes} L_n(x)$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration : Posons $L_n(x) = \bigoplus_{q\geq 0} (L_n(x))^q$ l'AGc libre sur x ($|x| = n$ entier ≥ 1).

Posons

$$\left.\begin{array}{ll} & M_p = \bigoplus_{q\leq p} (B \otimes (L_n(x))^q) \\ \text{et} & \hat{M}_p = \bigoplus_{q\leq p} (A_k^*(\langle B\rangle) \underset{\tau}{\otimes} (L_n(x))^q) \end{array}\right\} \text{ pour } p \text{ entier } \geq 0$$

M_p et $\hat{M}_p$ sont des sous-espaces vectoriels différentiels gradués de $B \otimes L_n(x)$ et $A_k^*(\langle B\rangle) \underset{\tau}{\otimes} L_n(x)$ respectivement et ;

$$B \otimes L_n(x) = \varinjlim_p M_p$$

$$A_k^*(\langle B\rangle) \underset{\tau}{\otimes} L_n(x) = \varinjlim_p \hat{M}_p$$

Définissons les projections (qui commutent aux différentielles) :

$$\left.\begin{array}{ll} & \rho_p : M_p \longrightarrow B \\ \text{par :} & \sum_{q\geq 0}^{p} b_q \otimes x^q \rightsquigarrow b_p \\ \text{et} & \hat{\rho}_p : \hat{M}_p \longrightarrow A_k^*(\langle B\rangle) \\ \text{par :} & \sum_{q\geq 0}^{p} \varphi_q \otimes x^q \rightsquigarrow \varphi_p \end{array}\right] \begin{array}{l}\text{pour } p = 0 , 1 , \text{ si } n \text{ est} \\ \text{impair et pour tout } p \text{ si } n \text{ est pair.}\end{array}$$

Il est évident que ; $\ker \rho_p = M_{p-1}$ et $\ker \hat{\rho}_p = \hat{M}_{p-1}$.

D'où pour tout $p \geq 1$, un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes ;

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "(\Pi_B \otimes id)_{p-1}"'] & M_p \arrow[r, "\rho_p"] \arrow[d, "(\Pi_B \otimes id)_p"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\Pi_B"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{M}_{p-1} \arrow[r] & \hat{M}_p \arrow[r, "\hat{\rho}_p"] & A_k^*(<B>) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

d'où encore un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes ;

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{m-1}(B) \arrow[r] \arrow[d, "\Pi_B^*"', "\cong"] & H^m(M_{p-1}) \arrow[r] \arrow[d, "(\Pi_B \otimes id)^*_{p-1}"] & H^m(M_p) \arrow[r, "\rho_p^*"] \arrow[d, "(\Pi_B \otimes id)^*_p"] & H^m(B) \arrow[r] \arrow[d, "\Pi_B^*", "\cong"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{m-1}(A_k^*(<B>)) \arrow[r] & H^m(\hat{M}_{p-1}) \arrow[r] & H^m(\hat{M}_p) \arrow[r, "\hat{\rho}_p^*"'] & H^m(A_k^*(<B>)) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

par récurrence sur p ;

i) pour $p = 1$, évidemment $(\Pi_B \otimes id)_1 : M_1 \longrightarrow \hat{M}_1$ est un quasi-isomorphisme.

ii) Supposons qu'on a montré que ;

$$(\Pi_B \otimes id)_{p-1} : M_{p-1} \longrightarrow \hat{M}_{p-1}$$

est un quasi-isomorphisme (pour $p > 1$), et en appliquant le lemme des cinq sur le deuxième diagramme, on obtient que ;

$$(\Pi_B \otimes id)_p : M_p \longrightarrow \hat{M}_p \quad \text{est aussi un quasi-isomorphisme}$$

mais $\Pi_B \otimes id = \varinjlim_p (\Pi_B \otimes Id)_p$ est un homomorphisme d'ADGc alors $\Pi_B \otimes id$ est un quasi-isomorphisme.

Lemme 6.-

$$\Pi_{\mathfrak{A}} = f \circ (\Pi_B \otimes id) .$$

En effet ;

i) $(f \circ (\Pi_B \otimes id) \circ incl.)(b) = (p^* \circ \Pi_B)(b) \qquad \forall\, b \in B$

d'après le diagramme $\mathcal{F}$) mais $p^* \circ \Pi_B = \Pi_{\mathfrak{A}} \circ incl.$ (paragraphe 2),

d'où $\qquad (f \circ (\Pi_B \otimes id))(b \otimes 1) = \Pi_{\mathfrak{A}}(b \otimes 1) \qquad \forall\, b \in B$.

ii) $(f \circ (\Pi_B \otimes id))(1 \otimes x) = f(1 \otimes x) = \Pi_o(x)$ (définition de f)

mais $\Pi_o(x) = \Pi_{\mathfrak{A}}(1 \otimes x)$ (Π_o est la restriction de $\Pi_{\mathfrak{A}}$ à x),

d'où $\qquad (f \circ (\Pi_B \otimes Id))(1 \otimes x) = \Pi_{\mathfrak{A}}(1 \otimes x)$

d'où finalement $\qquad f \circ (\Pi_B \otimes id) = \Pi_{\mathfrak{A}}$.

Lemme 5 et lemme 6 avec le théorème de transgression achèvent la démonstration de la proposition 2, c.q.f.d.

§ 3.-

ALGEBRE NILPOTENTE ET ALGEBRE MINIMALE (THEOREME PRINCIPAL).

Une k-ADGc $\mathfrak{A}$ est dite nilpotente si ; il existe un k-espace vectoriel gradué $W = \bigoplus_{n\geq 1} W^n$ et un ensemble d'indices I bien ordonné avec $W = \bigoplus_{\alpha\in I} W_\alpha$ tel que $\mathfrak{A} = L(W)$ (algèbre libre sur W) où ;

i) W_α est formé d'éléments homogènes $\forall\, \alpha \in I$, c'est-à-dire ; $\forall\, \alpha \in I$, $\exists\, n_\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $W_\alpha \subset W^{n_\alpha}$.

ii) $\forall\, \alpha \in I$, $\dim W_\alpha < +\infty$ (finie).

iii) $d_{\mathfrak{A}}(W_\alpha) \subset L(\bigoplus_{\beta<\alpha} W_\beta)$.

Si en plus; la fonction $\alpha \longrightarrow n_\alpha$ est croissante (au sens large), c'est-à-dire que si $\alpha < \beta \Longrightarrow n_\alpha \leq n_\beta$, l'algèbre $\mathfrak{A}$ est dite minimale.

Remarque 6.- Soit $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ une base homogène bien ordonnée de W, alors, l'ADGc libre $\mathfrak{A}$ définie sur W s'écrit sous la forme ;

$$\mathfrak{A} = L(x_1) \otimes L(x_2) \otimes \ldots \otimes L(x_\alpha) \otimes \ldots$$

où le produit tensoriel gradué pour chaque étape sur les générateurs peut être considéré comme une extension élémentaire principale (au sens algèbrique) de la précédente et la différentielle de chaque générateur est ; $d_{\mathfrak{A}}(x_\alpha) \in L(x_1) \otimes \ldots \otimes L(x_{\alpha-1})$.

Remarque 7.- D'après les définitions d'algèbres nilpotente et minimale $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^0 = H^0(\mathfrak{A}) = k$, c'est-à-dire que $\mathfrak{A}$ est connexe.

D'autre part $\exists\, \alpha \in I$ tel que $W_\alpha \subset W^{1_\alpha}$ dont tous les générateurs sont des 1-cocycle, i.e., $d_{\mathfrak{A}}(W_\alpha) = 0$.

Théorème principal.-

> Soit $(\mathfrak{A}, d_{\mathfrak{A}})$ une k-ADGc nilpotente alors, $\Pi_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \longrightarrow A_k^*(<\mathfrak{A}>)$ est un quasi-isomorphisme.

Démonstration : Soit I un ensemble d'indices bien ordonné.

Soit $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ une base homogène bien ordonnée de W (l'espace vectoriel gradué où $\mathfrak{A} = L(W)$).

Puisque $\mathfrak{A}$ est nilpotente ; alors $\mathfrak{A}$ est comme la limite d'une suite d'extensions élémentaires principales (par rapport à la base $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$).

On démontre le théorème par récurrence sur les générateurs $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ en utilisant le fait que chaque étape est une extension élémentaire principale de la précédente et en appliquant la proposition (1) et remarque (7) pour le départ et la proposition (2) pour la récurrence.

Corollaire.-

> Soit $\mathfrak{M}$ une k-ADGc minimale, alors l'ensemble simplicial $<\mathfrak{M}>$ admet $\mathfrak{M}$ comme modèle minimal.

R E F E R E N C E S.

[1] BOREL A. - *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*. Annals of Math. n° 57 (1953).

[2] CARTAN H. - *Théories cohomologiques*. Inventiones Math. n° 35 (1976).

[3] FRIEDLANDER E. GRIFFITHS, MORGAN - *Homotopy theory and differential forms*. Seminario di Geometria (1972) Firenze.

[4] LEHMANN D. - *Théorie homotopique des formes différentielles*. Astérisques n° 45 (1977).

[5] LEHMANN D. - *Résumé de la théorie du type d'homotopie rationnelle de Sullivan*. Séminaire Lille-Valenciennes (1975-1976). publications internes n° 86, Université de Lille I.

[6] MAY J.P. - *Simplicial objects in algebraic topology*.

[7] SULLIVAN D. - *Infinitesimal computations in topology*. à paraître (1975).

[8] SULLIVAN, DELIGNE, GRIFFITHS et MORGAN - *Real homotopy theory of Käbler manifolds*. Inventiones Math. n° 29 (1975).

[9] SERRE J.P. - *Homologie singulière des espaces fibrés*. Annals of Math. n° 54 (1951).

[10] WATKISS C. - *Cochaînes commutatives sur les ensembles simpliciaux*. Publications internes n° 107, Université de Lille I.