

N° d'ordre : 702

50376
1978
45

50376
1978
45

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

par

Jean-Louis MARTIN

Ingénieur I.D.N.

ETUDE THEORIQUE DE L'INFLUENCE D'UNE HETEROGENEITE DE CONDUCTIVITE
ET DE FORME QUELCONQUE SUR LE CHAMP ELECTROMAGNETIQUE RAYONNE
PAR UN DIPOLE MAGNETIQUE VERTICAL EN MILIEU STRATIFIE.



Soutenu le 29 juin 1978 devant la Commission d'Examen

MEMBRES DU JURY :	MM.	R. GABILLARD	Président
		M. CAUTERMAN	Rapporteur
		C. BRESINSKI	Examineur
		P. DEGAUQUE	Examineur
		G. SALMER	Examineur

Ce travail a été effectué sous la direction de Monsieur le Professeur GABILLARD dans le cadre du Laboratoire de Radiopropagation et Electronique de l'Université des Sciences et Techniques de LILLE I.

Qu'il me soit permis d'exprimer à Monsieur le Professeur GABILLARD mes sentiments de profondes gratitude pour ses conseils et les facilités qu'il m'a accordés pour mener à bien cette thèse.

Je remercie Messieurs C. BREZINSKI, P. DEGAUQUE et G. SALMER qui ont bien voulu examiner ce travail et me faire l'honneur de participer à mon jury. Je tiens à leur exprimer ma reconnaissance.

Pendant toute la durée de ce travail j'ai travaillé en étroite collaboration avec Monsieur M. CAUTERMAN. Les nombreux encouragements et conseils précieux qu'il m'a apportés ont été déterminants pour la réalisation de cette étude. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance pour cette aide amicale et efficace.

Les autres membres de l'équipe m'ont également apporté leur aide sympathique. Que tous soient ici remerciés.

Je ne terminerai pas cet avant propos sans exprimer mes remerciements à l'ensemble du personnel technique et administratif du Laboratoire, en particulier Mme PAIN, MM. DEHORTER et PLUQUET pour leur collaboration amicale et efficace.

o

o o

SOMMAIRE

INTRODUCTION

CHAPITRE I :

MODELISATION NUMERIQUE DU RAYONNEMENT D'UN DIPOLE MAGNETIQUE VERTICAL EN PRESENCE D'UN MILIEU STRATIFIE A DEUX COUCHES CONTENANT UNE ANOMALIE DE CONDUCTIVITE

- I.1 - DESCRIPTION SOMMAIRE DU SCHEMA DE SIMULATION
- I.2 - EXPRESSION DES POTENTIEL DE HERTZ INTERVENANT DANS LE CALCUL DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE RAYONNE PAR LE DIPOLE EMETTEUR ET PAR LA DISTRIBUTION EQUIVALENTE
- I.3 - EXPRESSION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE TOTAL SOUS FORME D'EQUATIONS INTEGRALES
- I.4 - EXPRESSION DU SYSTEME D'EQUATIONS INTEGRALES DANS LE CAS DU CALCUL DU CHAMP ELECTRIQUE DANS L'ANOMALIE
- I.5 - TRANSFORMATION DU SYSTEME D'EQUATIONS INTEGRALES EN UN SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES
- I.6 - CALCUL DES ELEMENTS DE LA MATRICE A et RESOLUTION DU SYSTEME MATRICIEL
 - I.6-1 - Calcul des éléments de la matrice
 - I.6-2 - Optimisation du calcul des éléments de la matrice
 - I.6-3 - Résolution du système d'équations linéaires
- I.7 - CALCUL DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE TOTAL A LA SURFACE DU SOL

CHAPITRE II :

ETUDE PARAMETRIQUE DU RAYONNEMENT D'UN DIPOLE MAGNETIQUE VERTICAL EN MILIEU STRATIFIE A DEUX COUCHES CONTENANT UNE ANOMALIE DE CONDUCTIVITE

- II.1 - ETUDE PARAMETRIQUE DE LA REPONSE D'UNE ANOMALIE DONNEE EN PROSPECTION DIPOLE-DIPOLE
 - II.1-1 - Caractéristiques du terrain et anomalie étudiée
 - II.1-2 - Définition des quantités mesurées
 - II.1-3 - Etude de la convergence du procédé de calcul
 - II.1-4 - Etude de l'influence de la fréquence
 - II.1-5 - Etude de la variation de la distance émetteur-récepteur

II. 2 - INFLUENCE DES CARACTERISTIQUES DE LA COUCHE SUPERFICIELLE

II. 3 - UTILISATION D'UN DISPOSITIF DE DEUX EMETTEURS COUPLES

II. 4 - ETUDE DE LA VARIATION DE L'EPAISSEUR DE LA COUCHE SUPERFICIELLE

CHAPITRE III :

VERIFICATION NUMERIQUE ET EXPERIMENTALE DES MODELES NUMERIQUES
UTILISES

III. 1 - VERIFICATION NUMERIQUE

III. 2 - VERIFICATION EXPERIMENTALE

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXES

I N T R O D U C T I O N

---:---:---:---:---:---:---:---:---

L'étude de la propagation des ondes dans le sol est la base de nombreuses méthodes de prospection géophysique.

Elle permet de mettre en évidence une variation de conductivité du milieu dans lequel ses ondes pénètrent. L'activité de notre laboratoire est principalement centrée sur la détection d'hétérogénéités enterrées. Nous travaillons actuellement sur la détection d'anomalies situées à faible profondeur. La connaissance de la nature du sol est d'une grande importance pour le Génie Civil. La construction d'un lotissement par exemple exige de savoir s'il n'existe pas d'anciennes carrières ou d'anciennes sapes creusées pendant la première guerre mondiale l'emplacement du site choisi.

La méthode électromagnétique de prospection la plus classique est la méthode "dipôle-dipôle". Cette méthode consiste à déplacer à la surface du sol un dispositif émetteur-récepteur composé d'une boucle émettrice horizontale et d'un récepteur soit de type magnétique, soit de type électrique. L'écart entre le récepteur et l'émetteur est maintenu constant. La présence d'une hétérogénéité se manifeste par une variation du module et/ou de la phase des composantes du champ électromagnétique mesurées.

Nous disposons d'un certain nombre "d'outils numériques" permettant de simuler une variation de la conductivité du milieu encaissant. Nous pouvons en particulier, quantifier la perturbation sur le champ électromagnétique provoquée par une anomalie de forme quelconque enterrée dans un demi-milieu homogène^[3]. Mais la structure réelle du terrain n'est que rarement assimilable à un demi-milieu homogène. Il existe presque toujours une couche superficielle conductrice qui diminue la pénétration des ondes électromagnétiques. La simulation d'un terrain stratifié montre bien ce phénomène.

Nous avons donc entrepris la modélisation numérique d'un terrain composé d'un substratum contenant une anomalie, surmonté d'une couche superficielle conductrice.

Le modèle mis au point permet de quantifier la diminution de la réponse d'une hétérogénéité provoquée par cette couche superficielle, en méthode "dipôle-dipôle".

Nous montrons que l'on peut "filtrer" cette couche en utilisant un dispositif émetteur composé de 2 boucles magnétiques ayant des caractéristiques telles que l'on élimine les courants induits au voisinage du récepteur.

Avec ce "dispositif deux émetteurs", la variation de l'épaisseur du terrain superficiel ne devrait pas masquer la présence d'une anomalie enterrée pourvu que la distance sur laquelle se produit la variation d'épaisseur soit grande devant la distance émetteur-récepteur.

Enfin, nous comparons les résultats obtenus avec nos modèles avec ceux que l'on peut trouver dans la littérature. Nous utilisons comme comparaison, d'une part, un modèle numérique et d'autre part, un modèle analogique sur cuve rhéographique.

CHAPITRE I

MODELISATION NUMERIQUE DU RAYONNEMENT D'UN DIPOLE MAGNETIQUE VERTICAL
EN PRESENCE D'UN MILIEU STRATIFIE A DEUX COUCHES CONTENANT UNE ANOMALIE
DE CONDUCTIVITE.

Considérons un milieu stratifié à deux couches de conductivités différentes, surmonté d'un demi-milieu isolant : *l'atmosphère*. La deuxième couche est un demi-milieu conducteur infini, contenant une anomalie de conductivité.

Cette structure est excitée par un dipôle magnétique vertical, que nous appellerons dans la suite de ce travail par ses initiales D.M.V. Ce dipôle est supposé placé à la surface du sol. Nous calculerons en tout point de cet interface les composantes du champ électrique \vec{E} et magnétique \vec{H} (figure 1).

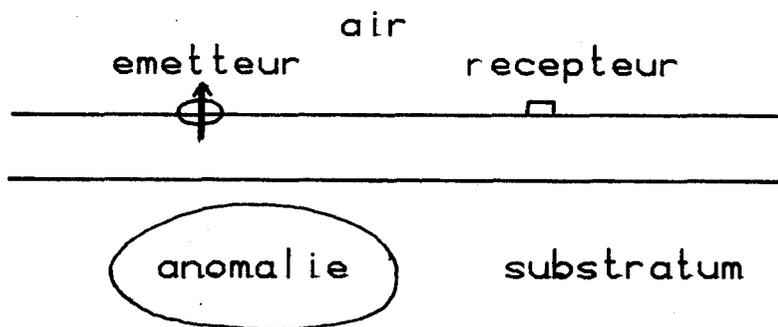


Figure - 1 -

En définissant la fréquence caractéristique d'un milieu de conductivité σ et de permittivité ϵ par la relation suivante^[1]

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma}{\epsilon}$$

nous supposons que la fréquence du courant sinusoïdal circulant dans le D.M.V. est toujours très faible par rapport aux fréquences caractéristiques des milieux considérés.

Nous montrons tout d'abord que chaque élément de volume entourant un point courant M de l'anomalie a un comportement équivalent à celui d'un dipôle électrique. Ceci suppose cependant que les milieux considérés aient la même perméabilité magnétique égale à celle de l'air.

Dans ces conditions, le moment du dipôle électrique équivalent est proportionnel au champ électrique total régnant au point M.

Nous calculons ensuite le champ électromagnétique total, dans le substratum puis à la surface du sol, en fonction du champ électrique inconnu dans l'anomalie.

Nous montrons que les composantes du champ électromagnétique sont solutions d'un système de 3 équations intégrales de FREDHOLM, que nous transformons en un système d'équations linéaires en utilisant une méthode de discrétisation et d'approximation d'une fonction sur des sous domaines d'application.*²

* Point Matching Method.

I. 1 - DESCRIPTION SOMMAIRE DU SCHEMA DE SIMULATION

Soient ϵ_0 , ϵ_1 , ϵ_2 et ϵ_3 les permittivités de l'air, de la première couche d'épaisseur h , du substratum et de l'anomalie, que nous appellerons respectivement milieu (0), milieu (1) etc...

Nous affecterons de même à chacun de ces milieux une conductivité σ_i , et une perméabilité μ_i . Chaque milieu est supposé isotrope et homogène.

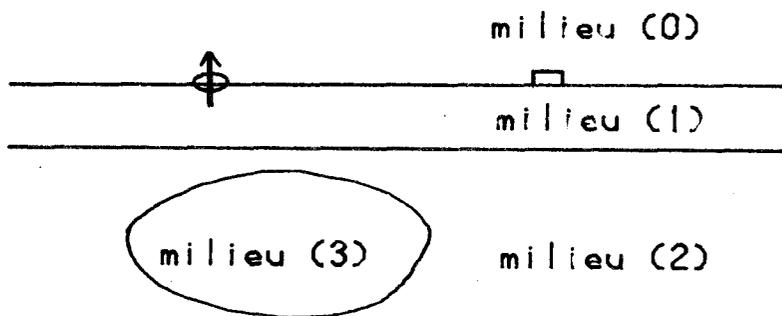


Figure - 2 -

L'équation de MAXWELL-AMPERE dans le milieu (3) s'écrit :

$$\text{ROT } \vec{B}_3 = \mu_3 \sigma_3 \vec{E}_3 \quad (1)$$

En ajoutant et en retranchant respectivement dans les deux membres de (1) les quantités suivantes, $\mu_2 \vec{H}_3$ et $\mu_2 \sigma_2 \vec{E}_3$, cette relation s'écrit :

$$\text{ROT } (\mu_2 \vec{H}_3 + (\mu_3 - \mu_2) \vec{H}_3) = \mu_2 \sigma_2 \vec{E}_3 + (\mu_2 \sigma_3 - \mu_2 \sigma_2) \vec{E}_3 \quad (2)$$

Cette relation peut être considérée comme l'équation de MAXWELL-AMPERE écrite dans un milieu de caractéristiques σ_2 , μ_2 contenant une distribution de courant $\rho_m \vec{V}_e$ telle que :

$$\rho_m \vec{V}_e = \frac{\mu_3 \sigma_3 - \mu_2 \sigma_2}{\mu_2} \vec{E}_2 + \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2} \text{ROT } \vec{H}_2$$

(2) devient donc :

$$\vec{\text{ROT}} H_3 = \sigma_2 \vec{E}_3 + \rho_m \vec{V}_e \quad (4)$$

Les milieux ayant une perméabilité magnétique identique, la distribution de courant devient :

$$\rho_m \vec{V}_e = (\sigma_3 - \sigma_2) \vec{E}_3 \quad (5)$$

On peut donc dire que chaque élément de volume de l'anomalie est équivalent à un dipôle électrique dont le moment est :

$$\vec{P} = \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{4\pi \sigma_2} \right) \vec{E}_3 dv \quad (6)$$

Compte tenu de (6), il est clair que le potentiel de HERTZ $\vec{\pi}$ dans l'une quelconque des couches, s'exprime sous la forme suivante^{[3][4]}

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}_p + \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{4\pi \sigma_2} \int_V |G(P, M)| \vec{E}_3(M) dv \quad (7)$$

avec :

$\vec{\pi}_p$: potentiel de HERTZ créé par le D.M.V. dans la couche considérée

V : volume de l'anomalie de conductivité

$|G(P, M)|$: matrice des fonctions de GREEN correspondant au rayonnement des dipôles électriques équivalents dans le milieu à 2 couches

\vec{E}_3 : Champ électrique total au point courant M de l'anomalie.

Nous allons maintenant établir les expressions des potentiels de HERTZ $\vec{\pi}_0$ et $\vec{\pi}_2$ régissant respectivement le comportement du champ électromagnétique dans l'air et dans le substratum.

Nous montrerons que l'expression $\vec{\pi}_2$ nous permettra de calculer les composantes du champ électrique inconnu \vec{E}_3 .

I. 2 - EXPRESSIONS DES POTENTIELS DE HERTZ INTERVENANT DANS LE CALCUL DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE RAYONNE PAR LE DIPOLE EMETTEUR et PAR LA DISTRIBUTION EQUIVALENTE

Considérons un milieu à deux couches, constitué d'un substratum d'épaisseur infini et de conductivité σ_2 (milieu 2). Ce substratum est surmonté d'une couche de couverture d'épaisseur h_1 et de conductivité σ_1 (milieu 1). L'ensemble de ces deux couches parallèles constitue un modèle de terrain stratifié.

Au-dessus de cette stratification un milieu homogène d'épaisseur infinie de conductivité σ_0 (milieu 0) simule l'atmosphère (nous ferons tendre ensuite σ_0 vers zéro).

Un point quelconque de l'espace ainsi défini est repéré par ses coordonnées cylindriques dans un repère trirectangle direct (0, X, Y, Z) dont le plan (0, X, Y) coïncide avec la surface du sol. L'axe vertical OZ est orienté vers l'atmosphère.

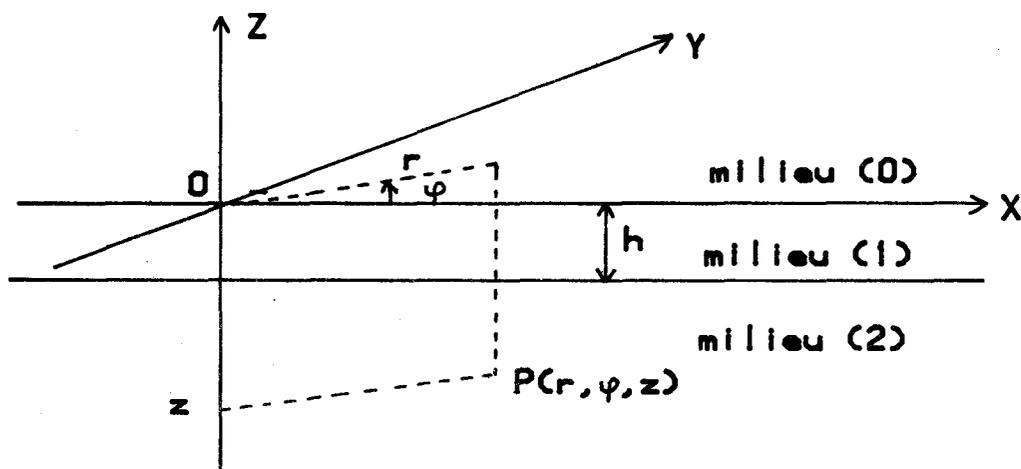


Figure - 3 -

Nous définissons la constante de propagation dans chaque milieu par la relation :

$$\gamma_j = \sqrt{j\omega\mu\sigma_j} \quad (8)$$

(hypothèse des basses fréquences).

Nous utiliserons l'approximation du quasi-statique. Cette approximation revient à supposer que la distance horizontale séparant l'émetteur et le récepteur est faible devant la longueur d'onde dans l'air, soit :

$$|\gamma_0 r| \ll 1 \quad (9)$$

on posera dans les calculs :

$$\gamma_0 = 0 \quad (10)$$

Nous allons rappeler la méthode de calcul des potentiels de HERTZ dans le cas général où la stratification comporte $M + 1$ couches de caractéristiques électriques différentes. Nous supposerons en outre, que l'émetteur est placé dans la couche d'indice n tandis que le récepteur est situé dans la couche d'indice m (Figure 4).

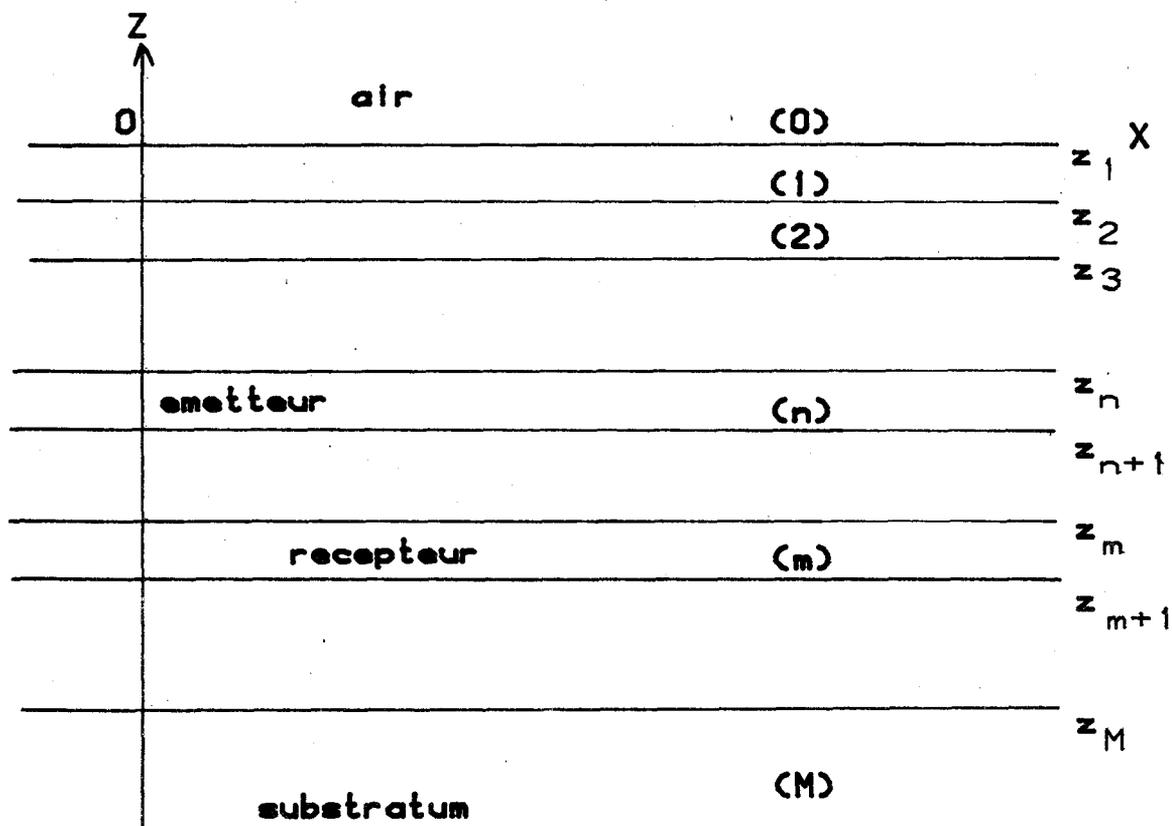


Figure - 4 -

Nous résumerons ensuite les expressions obtenues pour les différents types d'excitation envisagés.

Le potentiel de HERTZ associé à un dipôle placé dans le plan $(0, X, Z)$ a, en général, deux composantes π_x et π_z ¹. Dans le cas de dipôles verticaux et à cause de la symétrie de révolution du problème autour de l'axe du dipôle, la composante π_x du potentiel de HERTZ est nulle.

Nous appellerons respectivement par leurs initiales D.E.V. et D.E.H. les dipôles électriques verticaux et horizontaux.

Les expressions du potentiel de HERTZ dans une couche d'indice n sont données par les intégrales de SOMMERFELD :

- Cas des dipôles verticaux (D.M.V., D.E.V.)

$$(\pi_z)_m = \int_0^\infty (c_m e^{-u_m z} + d_m e^{u_m z}) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (11)$$

avec :

$$u_m = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_m^2} \quad R(u_m) > 0$$

- Cas du dipôle horizontal (D.E.H.)

$$(\pi_x)_m = \int_0^\infty (a_m e^{-u_m z} + b_m e^{u_m z}) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (12)$$

$$(\pi_z)_m = \int_0^\infty (f_m e^{-u_m z} + g_m e^{u_m z}) J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \quad (13)$$

Dans le cas où le dipôle émetteur se trouve dans la couche où l'on calcule le potentiel de HERTZ, il faut rajouter la contribution du potentiel primaire, soit dans le cas du D.M.V.

$$\pi_{zp} = \int_0^\infty \frac{M \lambda}{u_n} e^{-u_n(z)} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (14)$$

M étant le moment magnétique du D.M.V., donné par la relation :

$$M = \frac{N I S}{4\pi} \quad (15)$$

Nous rappelons que pour satisfaire la condition de rayonnement, à savoir que le champ soit nul à l'infini, il faut que les coefficients d_0 b_0 g_0 soient nuls dans l'air, et que les coefficients c_M a_M f_M soient nuls dans le substratum.

Les coefficients a_i b_i c_i d_i f_i et g_i sont déterminés en écrivant les conditions de continuité des composantes tangentielles des champs électromagnétiques sur l'interface séparant chaque milieu.

Soit :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{m-1}(z_m) &= \vec{E}_m(z_m) \\ \vec{H}_{m-1}(z_m) &= \vec{H}_m(z_m) \end{aligned} \quad (16)$$

Pour ce faire, nous avons utilisé un formalisme matriciel établi par le Professeur GABILLARD^[5] et développé par plusieurs auteurs^{[6][7]} pour les différents types de dipôles.

Nous allons donner les expressions des potentiels de HERTZ dans l'air (milieu -0-) et dans le substratum (milieu -2-) dans les 3 cas suivants :

1er cas :

Le dipôle émetteur est un D.M.V. placé à la surface du sol et situé à l'origine du repère de coordonnées.

Le récepteur est situé dans l'air ou dans le substratum. Ce récepteur est placé au point P repéré par ses coordonnées cylindriques $(r \ \phi \ z)$ (Figure 5).

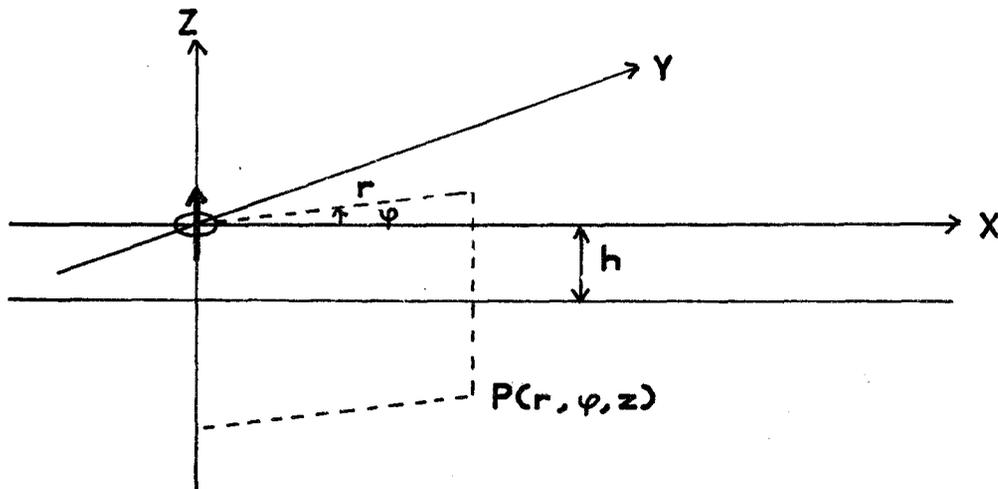


Figure - 5 -

Nous obtenons les expressions suivantes :

$$(\pi_z)_0 = M \left[\frac{e^{-\gamma_0 R}}{R} + \int_0^\infty \frac{u_0 - u_1/Q}{u_0 + u_1/Q} e^{-u_0 z} \frac{\lambda}{u_0} J_0(\lambda r) d\lambda \right] \quad (17)$$

$$(\pi_z)_2 = 4 M \left[\int_0^\infty \frac{u_1 e^{u_2(z+h_1)} \lambda J_0(\lambda r)}{(u_0+u_1)(u_2+u_1) e^{u_1 h_1} + (u_1-u_0)(u_2-u_1) e^{-u_1 h_1}} d\lambda \right] \quad (18)$$

avec :

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}$$

Q coefficient de stratification défini par WAIT^[8]

$$Q = \frac{u_2 \operatorname{th}(u_1 h_1) + u_1}{u_1 \operatorname{th}(u_1 h_1) + u_2}$$

M moment magnétique de l'antenne

$$M = \frac{N I S}{4\pi}$$

2ème cas :

Le dipôle émetteur est un D.E.V. placé sur l'axe O_z à la côte z_e .
Le récepteur est situé dans l'air ou dans le substratum (Figure -6-)

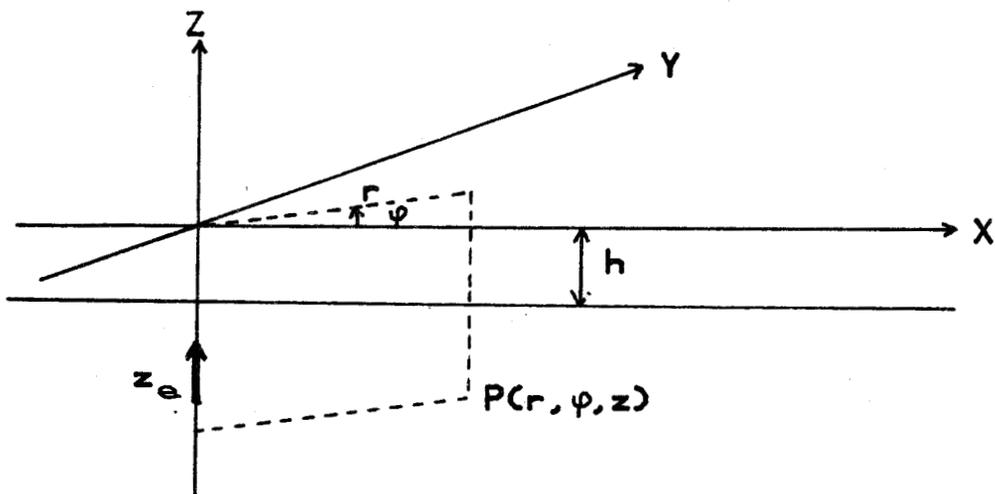


Figure - 6 -

Nous obtenons les expressions suivantes :

$$(\pi_z)_0 = P_2 \left[\int_0^\infty c_0 e^{u_2 z} e^{-u_0 z} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \right] \quad (19)$$

$$(\pi_z)_2 = P_2 \left[\int_0^\infty (e^{-u_2 |z-z_e|} + c_2 e^{u_2(z+z_e)}) \frac{J_0(\lambda r)}{u_2} \lambda d\lambda \right] \quad (20)$$

avec :

$$c_0 = \frac{4 u_1 \sigma_2 e^{u_2 h_1}}{u_0 \Delta_2} \quad (21)$$

$$c_2 = - \left[\frac{(u_1 \sigma_2 - u_2 \sigma_1) e^{u_1 h_1} + (u_1 \sigma_2 + u_2 \sigma_1) e^{-u_1 h_1}}{\Delta_2} \right] e^{2u_2 h_1} \quad (22)$$

$$\Delta_2 = (u_1 \sigma_2 + u_2 \sigma_1) e^{u_1 h_1} + (u_1 \sigma_2 - u_2 \sigma_1) e^{-u_1 h_1} \quad (23)$$

P_2 : moment électrique du D.E.V.

3ème cas :

Le dipôle émetteur est un D.E.H. placé sur l'axe O_z à la côte z_e .
Le récepteur est situé dans l'air ou dans le substratum (Figure -7-)

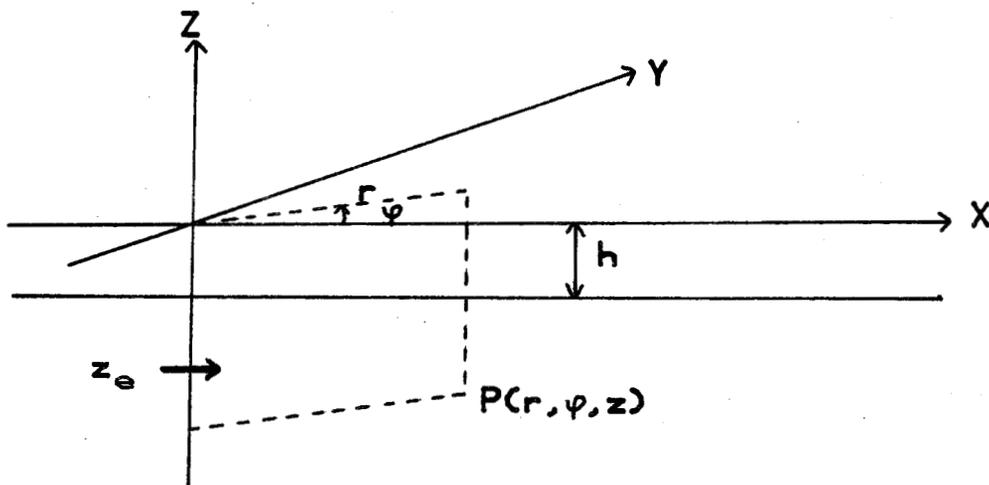


Figure -7-

Nous obtenons les résultats suivants :

$$(\pi_x)_0 = P_2 \left[\int_0^\infty a_0 e^{u_2 z} e^{-u_0 z} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \right] \quad (24)$$

$$(\pi_z)_0 = -P_2 \cos \phi \left[\int_0^\infty f_0 e^{u_2 z} e^{-u_0 z} J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda \right] \quad (25)$$

$$(\pi_x)_2 = P_2 \left[\int_0^\infty (e^{-u_2 |z-z_e|} + b_2 e^{u_2(z+z_e)}) \frac{J_0(\lambda r)}{u_2} \lambda d\lambda \right] \quad (26)$$

$$(\pi_z)_2 = -P_2 \cos \phi \left[\int_0^\infty g_2 e^{u_2(z+z_e)} \frac{J_1(\lambda r)}{u_2} \lambda^2 d\lambda \right] \quad (27)$$

avec :

$$b_2 = \frac{(u_0 + u_1)(u_1 - u_2) e^{u_1 h_1} + (u_0 - u_1)(u_1 + u_2) e^{-u_1 h_1}}{\Delta_1} e^{2u_1 h_1} \quad (28)$$

$$g_2 = 2u_2 \left[\frac{2u_1^2 \sigma_2 + 2u_2^2 \sigma_1 + u_0(\sigma_2 - \sigma_1)((u_0 + u_1) e^{2u_1 h_1} + (u_0 - u_1) e^{-2u_1 h_1})}{u_0 \Delta_1 \Delta_2} \right] e^{2u_2 h_1} \quad (29)$$

$$\Delta_1 = (u_0 + u_1)(u_1 + u_2) e^{u_1 h_1} + (u_0 - u_1)(u_1 - u_2) e^{-u_1 h_1} \quad (30)$$

$$\Delta_2 = (u_1 \sigma_2 + u_2 \sigma_1) e^{u_1 h_1} + (u_1 \sigma_2 - u_2 \sigma_1) e^{-u_1 h_1}$$

$$a_0 = \frac{4u_1 \sigma_2}{\sigma_0 \Delta_1} e^{u_2 h_1} \quad (31)$$

$$f_0 = \frac{4u_1 \sigma_2}{\sigma_1 \Delta_1} e^{u_2 h_1} \quad (32)$$

Le calcul des coefficients a_0 et f_0 fait apparaître un σ_0 au dénominateur, ce qui nous donne des potentiels infinis en faisant tendre σ_0 vers 0.

On remarquera cependant que ces coefficients interviennent dans le calcul des composantes du champ électromagnétique sous la forme des produits et expressions suivantes :

$$\sigma_0 a_0, \quad \sigma_0 f_0 \quad \text{et} \quad a_0 - u_0 f_0$$

Cette dernière quantité peut encore s'exprimer comme suit :

$$a_0 - u_0 f_0 = \frac{4u_1 \sigma_2 e^{u_2 h_1}}{u_0 \sigma_1 \Delta_1 \Delta_2} \left[(u_0 + u_1) [(u_0 + u_2)\sigma_1 - (u_1 - u_0)\sigma_2] e^{u_1 h_1} \right. \\ \left. + (u_0 - u_1) [(u_0 - u_2)\sigma_1 - (u_1 + u_0)\sigma_2] e^{-u_1 h_1} \right] \quad (33)$$

Il est alors clair que ces quantités sont indépendantes de σ_0 - qui n'intervient plus que dans γ_0 -

En conséquence, les coefficients qui figurent dans les expressions de \vec{E}_0 et \vec{H}_0 restent finis quand σ_0 tend vers 0.

1. 3 - EXPRESSION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE TOTAL SOUS FORME D'EQUATIONS INTEGRALES

Le potentiel de HERTZ est la somme des contributions du potentiel primaire associé au D.M.V. émetteur placé à la surface du milieu à deux couches et du potentiel secondaire associé à la distribution de dipôles électriques équivalents à l'anomalie. Nous rappelons que chaque élément de volume de l'hétérogénéité rayonne comme deux dipôles électriques horizontaux (respectivement parallèle aux axes o_x et o_y) et un dipôle électrique vertical.

Les moments associés à chacun de ces dipôles seront donc les suivants :

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{4\pi \sigma_2} E_{3x} dv \\ & \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{4\pi \sigma_2} E_{3y} dv \\ & \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{4\pi \sigma_2} E_{3z} dv \end{aligned} \quad (34)$$

Nous appellerons respectivement π_x^{sx} , π_y^{sx} , π_z^{sx} , π_x^{sy} , π_y^{sy} , π_z^{sy} , π_z^{sz} les composantes du potentiel de HERTZ secondaires liées à chacun des dipôles élémentaires précités.

Les expressions de ces quantités sont données par les formules (24) à (27) et (19) (20).

Nous aurons donc en un point quelconque de la surface du sol ou du substratum les expressions finales ci-dessous :

$$\begin{aligned} \pi_x &= \pi_x^{sx} \\ \pi_y &= \pi_y^{sy} \\ \pi_z &= \pi_z^p + \pi_z^{sx} + \pi_z^{sy} + \pi_z^{sz} \end{aligned} \quad (35)$$

Le champ électromagnétique en un point dérive du potentiel de HERTZ $\vec{\pi}$ par les relations bien connues :

$$\vec{E} = \text{grad} (\text{div } \vec{\pi}) - \gamma^2 \vec{\pi} \quad (36)$$

$$\vec{H} = \sigma \text{ROT} (\vec{\pi}) \quad (37)$$

Ces champs s'exprimeront donc sous la forme d'un champ primaire dû à la source et d'un champ secondaire diffracté par l'anomalie comme le montre la Figure -8-.

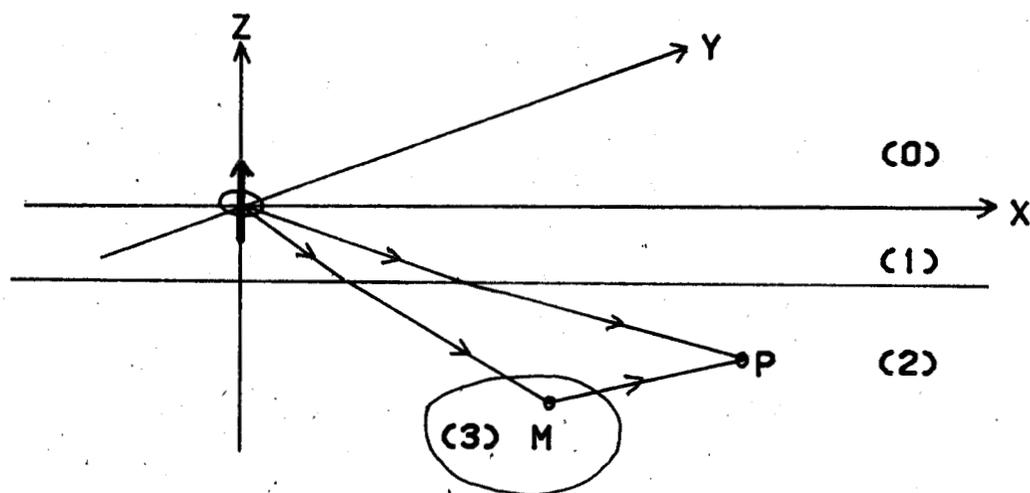


Figure - 8 -

Sachant qu'un DMV ne rayonne pas de champ électrique vertical, les expressions des champs E et H seront :

$$\begin{aligned} E_x(P) &= E_x^P(P) + \Lambda \left[\int_{V_3} E_{3x}(M) G_x^X dv + \int_{V_3} E_{3y}(M) G_x^Y dv + \int_{V_3} E_{3z}(M) G_x^Z dv \right] \\ E_y(P) &= E_y^P(P) + \Lambda \left[\int_{V_3} E_{3x}(M) G_y^X dv + \int_{V_3} E_{3y}(M) G_y^Y dv + \int_{V_3} E_{3z}(M) G_y^Z dv \right] \\ E_z(M) &= E_z^P(P) + \Lambda \left[\int_{V_3} E_{3x}(M) G_z^X dv + \int_{V_3} E_{3y}(M) G_z^Y dv + \int_{V_3} E_{3z}(M) G_z^Z dv \right] \end{aligned} \quad (38)$$

avec :

$$\Lambda = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{4\pi \sigma_2}$$

$$\begin{aligned}
 H_x(P) &= H_x^P(P) + \Lambda \left[\int_{V_3} E_{3x}(M) G_x^X dv + \int_{V_3} E_{3y}(M) G_x^Y dv + \int_{V_3} E_{3z}(M) G_x^Z dv \right] \\
 H_y(P) &= H_y^P(P) + \Lambda \left[\int_{V_3} E_{3x}(M) G_y^X dv + \int_{V_3} E_{3y}(M) G_y^Y dv + \int_{V_3} E_{3z}(M) G_y^Z dv \right] \\
 H_z(P) &= H_z^P(P) + \Lambda \left[\int_{V_3} E_{3x}(M) G_z^X dv + \int_{V_3} E_{3y}(M) G_z^Y dv + \int_{V_3} E_{3z}(M) G_z^Z dv \right]
 \end{aligned} \tag{39}$$

Le point P correspond au point d'observation et le point M au point courant d'intégration sur le volume V_3 .

Ces expressions sont valables quelque soit la position du point d'observation P à l'intérieur du substratum, mais les fonctions de GREEN figurant dans les expressions (38) et (39) dépendent des caractéristiques électriques du milieu dans lequel on est amené à calculer les composantes du champ électromagnétique.

Le point P peut donc se tourner à l'intérieur de l'anomalie. Dans ces conditions les relations intégrales données par (38) se transforment en un système de 3 équations intégrales de FREDHOLM dont l'inconnue est précisément le champ électrique total à l'intérieur de l'anomalie en fonction duquel nous avons exprimé la distribution équivalente.

La résolution de ce système doit nous permettre dans un premier temps de calculer le champ électrique \vec{E}_3 dans l'anomalie.

En reportant ensuite les valeurs ainsi obtenues dans les équations linéaires (38) et (39), nous en déduirons le champ électromagnétique en tout point de la surface du sol.

I. 4 - EXPRESSION DU SYSTEME D'EQUATIONS INTEGRALES DANS LE CAS DU CALCUL DU CHAMP ELECTRIQUE DANS L'ANOMALIE

Le champ électrique dans l'anomalie est lié au potentiel de HERTZ total par la relation :

$$\vec{E}_3 = \text{grad} (\text{div } \vec{\pi}) - \gamma_2^2 \vec{\pi} \quad (40)$$

Nous obtenons en utilisant (35) et (40) les formules suivantes :

$$\begin{aligned} E_{3x}(P) &= E_{3x}^P(P) + \Lambda \left[\int_{V_3} E_{3x}(M) G_x^x dv + \int_{V_3} E_{3y}(M) G_x^y dv + \int_{V_3} E_{3z}(M) G_x^z dv \right] \\ E_{3y}(P) &= E_{3y}^P(P) + \Lambda \left[\int_{V_3} E_{3x}(M) G_y^x dv + \int_{V_3} E_{3y}(M) G_y^y dv + \int_{V_3} E_{3z}(M) G_y^z dv \right] \\ E_{3z}(P) &= \Lambda \left[\int_{V_3} E_{3x}(M) G_z^x dv + \int_{V_3} E_{3y}(M) G_z^y dv + \int_{V_3} E_{3z}(M) G_z^z dv \right] \end{aligned} \quad (41)$$

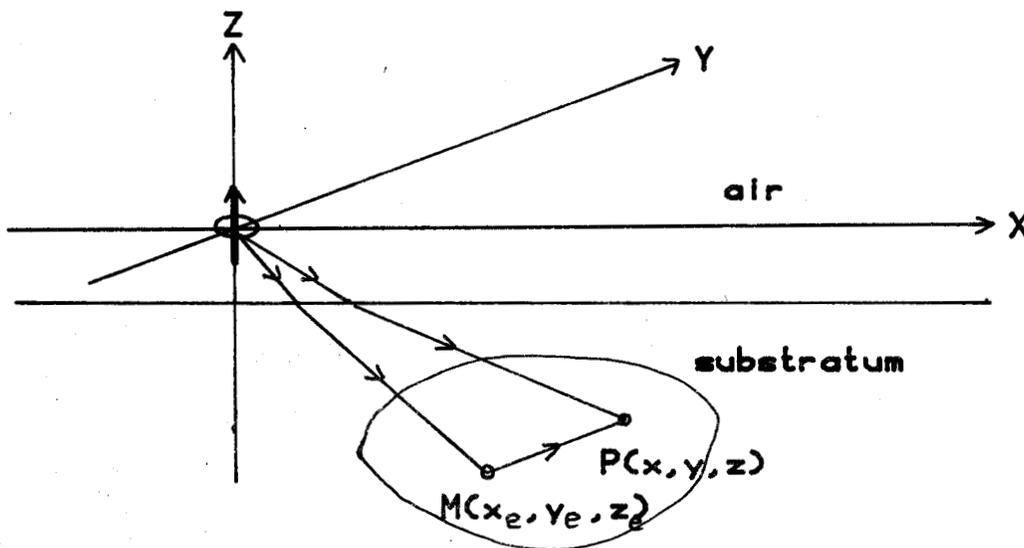


Figure -9-

P est le point d'observation et M est le point courant d'intégration.

Le développement analytique de la relation (40) où le potentiel de Hertz est donné par les formules (20) (26) et (27), nous donne les expressions des fonctions de GREEN qui à notre connaissance sont originales.

Ces fonctions sont composées d'intégrales de SOMMERFELD du même type que les relations (20) (26) (27).

TABLEAUX des FONCTIONS DE GREEN

$$G_x^x = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \gamma_2^2 P - \gamma_2^2 \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial z}$$

$$G_x^y = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 W_1}{\partial x \partial y \partial z}$$

$$G_x^z = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial z}$$

$$G_y^x = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 W_1}{\partial x \partial y \partial z}$$

$$G_y^y = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \gamma_2^2 P - \gamma_2^2 \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 W_3}{\partial y \partial z}$$

(42)

$$G_y^z = \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y \partial z}$$

$$G_z^x = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x \partial z}$$

$$G_z^y = \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial y \partial z}$$

$$G_z^z = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \gamma_2^2 P - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} V_2 - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} V_3$$

TABLEAU DES INTEGRALES DE SOMMERFIELD

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^{\infty} b_2 e^{u_2(z+z_e)} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \\
 V_1 &= \int_0^{\infty} c_2 e^{u_2(z+z_e)} \frac{J_0(\lambda r) \lambda d\lambda}{u_2} \\
 V_2 &= -\frac{(x-x_e)}{r} \int_0^{\infty} c_2 e^{u_2(z+z_e)} \frac{J_1(\lambda r)}{u_2^2} \lambda^2 d\lambda \\
 V_3 &= -\frac{(y-y_e)}{r} \int_0^{\infty} c_2 e^{u_2(z+z_e)} \frac{J_1(\lambda r)}{u_2^2} \lambda^2 d\lambda \\
 W_1 &= \int_0^{\infty} (b_2+u_2 \cdot g_2) e^{u_2(z+z_e)} \frac{J_0(\lambda r)}{u_2^2} \lambda d\lambda \\
 W_2 &= \frac{-(x-x_e)}{r} \int_0^{\infty} (b_2+u_2 \cdot g_2) e^{u_2(z+z_e)} \frac{J_1(\lambda r)}{u_2^2} \lambda^2 d\lambda \\
 W_3 &= \frac{-(y-y_e)}{r} \int_0^{\infty} (b_2+u_2 \cdot g_2) e^{u_2(z+z_e)} \frac{J_1(\lambda r)}{u_2} \lambda^2 d\lambda \\
 P &= \int_0^{\infty} e^{-u_2|z-z_e|} \frac{J_0(\lambda r)}{u_2} \lambda d\lambda = \frac{e^{-\gamma_2 R}}{R} \\
 R &= \sqrt{(x-x_e)^2 + (y-y_e)^2 + (z-z_e)^2} \\
 \Lambda &= \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{4\pi \sigma_2}
 \end{aligned} \tag{43}$$



$$c_2 = - \frac{[(u_1 \sigma_2 - u_2 \sigma_1) e^{u_1 h_1} + (u_1 \sigma_2 + u_2 \sigma_1) e^{-u_1 h_1}] e^{2u_2 h_1}}{\Delta_2}$$

avec :

$$b_2 = \frac{(u_0 + u_1)(u_1 - u_2) e^{u_1 h_1} + (u_0 - u_1)(u_1 + u_2) e^{-u_1 h_1}}{\Delta_1} e^{2u_1 h_1}$$

$$g_2 = 2u_2 \left[\frac{2u_1^2 \sigma_2 + 2u_2^2 \sigma_1 + u_0 (\sigma_2 - \sigma_1) [(u_0 + u_1) e^{2u_1 h_1} + (u_0 - u_1) e^{-2u_1 h_1}]}{u_0 \Delta_1 \Delta_2} \right] e^{2u_2 h_1}$$

$$\Delta_1 = (u_0 + u_1)(u_1 + u_2) e^{u_1 h_1} + (u_0 - u_1)(u_1 - u_2) e^{-u_1 h_1}$$

$$\Delta_2 = (u_1 \sigma_2 + u_2 \sigma_1) e^{u_1 h_1} + (u_1 \sigma_2 - u_2 \sigma_1) e^{-u_1 h_1}$$

Nous donnons en annexe 5 un rappel de l'origine mathématique et de la signification physique de la fonction de GREEN.

La fonction de GREEN primaire P est une fonction singulière sur le volume V_3 . Pour des raisons de commodité au niveau de l'intégration de cette fonction de GREEN, que nous développons en annexe 6, nous exprimons celle-ci en fonction de ses données secondes en utilisant l'équation d'HELMOLTZ ci-dessous :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_2^2 \right) P = - 4\pi \delta(R) \quad (44)$$

Le système d'équations intégrales (41) se transforme alors en le système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_3}{\sigma_2} E_{3x} &= E_{3x}^P + \Lambda \left[\int_{V_3} E_{3x}(M) G_x^X dv + \int_{V_3} E_{3y}(M) G_x^Y dv + \int_{V_3} E_{3z}(M) G_x^Z dv \right] \\ \frac{\sigma_3}{\sigma_2} E_{3y} &= E_{3y}^P + \Lambda \left[\int_{V_3} E_{3x}(M) G_y^X dv + \int_{V_3} E_{3y}(M) G_y^Y dv + \int_{V_3} E_{3z}(M) G_y^Z dv \right] \\ \frac{\sigma_3}{\sigma_2} E_{3z} &= \Lambda \left[\int_{V_3} E_{3x}(M) G_z^X dv + \int_{V_3} E_{3y}(M) G_z^Y dv + \int_{V_3} E_{3z}(M) G_z^Z dv \right] \end{aligned} \quad (45)$$

Les quantités G_x^x G_y^y G_z^z s'expriment alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} G_x^x &= -\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \gamma^2 \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 W_2}{\partial x \partial z} \\ G_y^y &= -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \gamma^2 \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 W_3}{\partial y \partial z} \\ G_z^z &= -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 V_3}{\partial y \partial z} \end{aligned} \quad (46)$$

Nous allons résoudre le système d'équations intégrales (45) en le transformant en un système d'équations linéaires, en utilisant une méthode de discrétisation et d'approximation d'une fonction sur des sous domaines d'application.

I. 5 - TRANSFORMATION DU SYSTEME D'EQUATIONS INTEGRALES EN UN SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES

Nous avons utilisé un cas particulier de la méthode des moments, intéressant pour sa facilité d'emploi.

Cette méthode consiste à discrétiser le volume d'intégration V_3 en N éléments parallélépipédiques égaux de volume ΔV .

Les dimensions de ces mailles (hx, hy, hz) sont telles que l'on supposera le champ électrique constant à l'intérieur de chacune de celles-ci.

Chaque maille est caractérisée par les coordonnées de son centre $M_i (x_i, y_i, z_i)$.

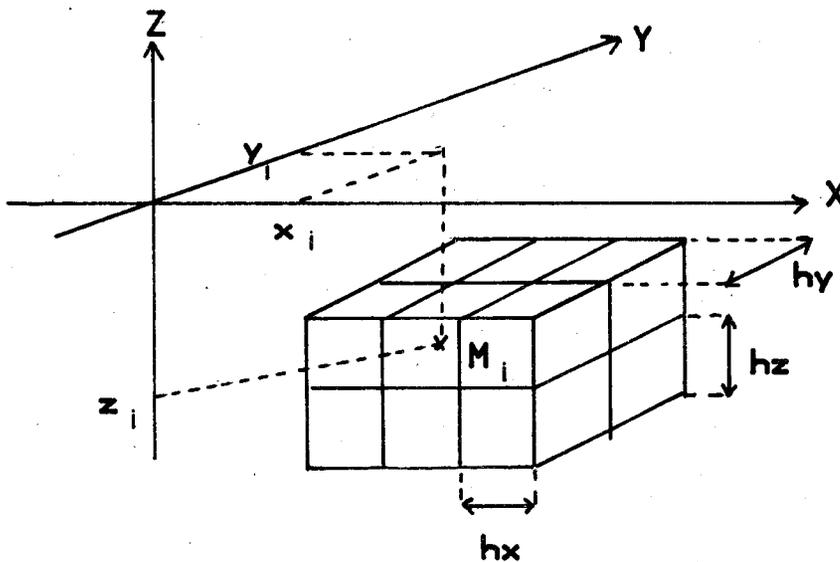


Figure - 10-

Le champ électrique dans une maille i va donc être :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_3}{\sigma_2} E_{3x}(M_i) &= E_{3x}^p(M_i) + \Lambda \sum_{j=1}^N \left[E_{3x}(M_j) \int_{\Delta v_j} G_x^x dv + E_{3y}(M_j) \int_{\Delta v_j} G_x^y dv + E_{3z}(M_j) \int_{\Delta v_j} G_x^z dv \right] \\ \frac{\sigma_3}{\sigma_2} E_{3y}(M_i) &= E_{3y}^p(M_i) + \Lambda \sum_{j=1}^N \left[E_{3x}(M_j) \int_{\Delta v_j} G_y^x dv + E_{3y}(M_j) \int_{\Delta v_j} G_y^y dv + E_{3z}(M_j) \int_{\Delta v_j} G_y^z dv \right] \\ \frac{\sigma_3}{\sigma_2} E_{3z}(M_i) &= \Lambda \sum_{j=1}^N \left[E_{3x}(M_j) \int_{\Delta v_j} G_z^x dv + E_{3y}(M_j) \int_{\Delta v_j} G_z^y dv + E_{3z}(M_j) \int_{\Delta v_j} G_z^z dv \right] \end{aligned}$$

Où les fonctions de GREEN G sont définies par les formules (42) (46), avec :

$$\Lambda = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{4\pi \sigma_2}$$

Le calcul du champ électrique inconnu dans les N mailles nous donne donc un système de $3 N$ équations linéaires à $3 N$ inconnues.

Ce système d'équations peut s'exprimer sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\vec{E}_3 = \vec{E}_p + \Lambda A \vec{E}_3 \quad (48)$$

où :

\vec{E}_3 est le champ électrique inconnu dans l'anomalie

\vec{E}_p est le champ primaire dans l'anomalie rayonnée par le dipôle source

A est la matrice des intégrales des fonctions de GREEN étendues aux volumes Δv_j

I. 6 - CALCUL DES ELEMENTS DE LA MATRICE A et RESOLUTION DU SYSTEME MATRICIEL

I. 6.1 - Calcul des éléments de la matrice

Nous devons calculer les intégrales des fonctions de GREEN, définies dans le tableau (42), qui sont du type suivant :

$$\int_{\Delta v_j} G dx_e dy_e dz_e$$

Nous distinguons deux types de fonctions de GREEN :

- . Les fonctions de GREEN primaires qui sont singulières sur le volume d'intégration (fonction P et ses dérivées)
- . Les fonctions de GREEN secondaires qui sont régulières sur V_3 .

Dans les deux cas nous allons utiliser les relations qui existent entre les dérivées des fonctions de GREEN par rapport aux coordonnées du point d'observation $M(x y z)$ et les dérivées de ces mêmes fonctions par rapport aux coordonnées du point d'intégration $(P(x_e y_e z_e))$.

I. 6.1a - Cas des fonctions de GREEN primaires

Nous avons rendu régulières ces fonctions en utilisant l'équation d'HELMOLTZ

$$(\Delta - \gamma^2) P = - 4\pi\delta$$

Ces fonctions sont continues sur V_3 au sens des distributions^{[9] [10]}

La propriété de réciprocité de la fonction de GREEN par rapport aux points d'intégration et d'observation s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x_e} \quad \frac{\partial}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y_e} \quad \frac{\partial}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z_e} \quad (49)$$

Etudions comme exemple l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\Delta v_j} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P \, dx_e \, dy_e \, dz_e \quad (50)$$

$$I = \int_{\Delta v_j} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{(x - x_e)}{R^3} e^{-\gamma_2 R} (1 + \gamma_2 R) \right] dx_e \, dy_e \, dz_e \quad (51)$$

$$I = \int_{\Delta v_j} \frac{\partial}{\partial x_e} \left[\frac{(x - x_e)}{R^3} e^{-\gamma_2 R} (1 + \gamma_2 R) \right] dx_e \, dy_e \, dz_e \quad (52)$$

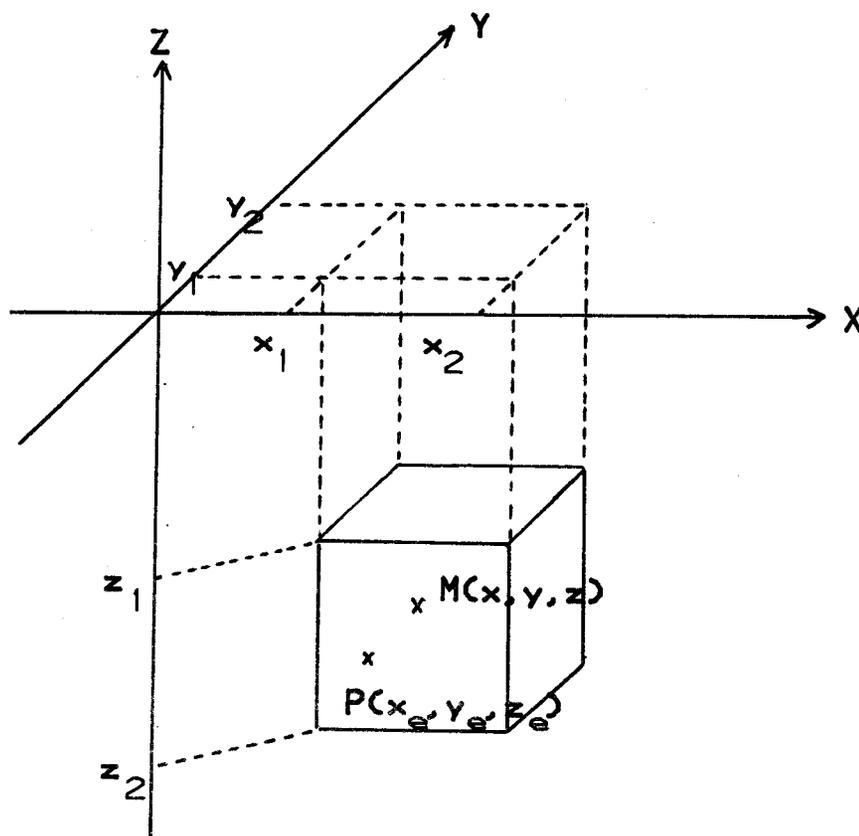


Figure -11-



L'intégration par rapport à x_e se fera donc analytiquement et l'on aura :

$$I = \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \left| \frac{(x-x_2)}{R_2^3} e^{-\gamma_2 R_2} (1+\gamma_2 R_2) - \frac{(x-x_1)}{R_1^3} e^{-\gamma_2 R_1} (1+\gamma_2 R_1) \right| dy_e dz_e \quad (53)$$

avec :

$$R_1 = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_e)^2 + (z-z_e)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_e)^2 + (z-z_e)^2}$$

En effectuant une démarche analogue pour toutes les fonctions de GREEN primaires on se rend compte que tous les intégrands sont réguliers, et surtout que l'on transforme les intégrales triples en intégrales doubles ou simples.

1. 6.1b - Cas des fonctions de GREEN secondaires :

Les relations entre les dérivées par rapport au point d'observation et celles par rapport au point d'intégration sont :

$$\frac{\partial}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x_e} \quad \frac{\partial}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y_e} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_e} \quad (54)$$

Etudions comme exemple l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\Delta v_j} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} W_2 dx_e dy_e dz_e \quad (55)$$

$$\text{avec } W_2 = - \frac{(x-x_e)}{r} \int_0^\infty (b_2 + u_2 y_2) e^{u_2(z+z_e)} \frac{J_1(\lambda r)}{u_2^2} \lambda^2 d\lambda \quad (56)$$

(54) appliquée à (55) donne :

$$I = - \int_{\Delta v_j} \frac{\partial^2}{\partial x_e \partial z_e} W_2 dx_e dy_e dz_e \quad (57)$$

$$\text{et donc : } I = - \int_{y_1}^{y_2} \left[\begin{matrix} W_2 & z_2 \\ I_{z_1} & \end{matrix} \right]_{x_1}^{x_2} dy_e \quad (58)$$

Nous pouvons de la même façon obtenir une formulation en intégrales simples ou doubles pour les autres intégrales des fonctions de GREEN secondaires.

Nous décrivons en Annexe 1 et 2 les méthodes d'intégration utilisées pour les intégrales bornées et pour les intégrales de 0 à l'infini.

Nous pouvons résumer l'ensemble des intégrales intervenant dans le calcul de la matrice A dans le tableau suivant :

$$\begin{aligned} \int_{\Delta v_i} G_x^x dv &= - I_2 - I_3 - I_{16} + I_8 \\ \int_{\Delta v_i} G_x^y dv &= I_4 + I_7 \\ \int_{\Delta v_i} G_x^z dv &= I_6 + I_{14} \\ \int_{\Delta v_i} G_y^x dv &= I_4 + I_7 \\ \int_{\Delta v_i} G_y^y dv &= - I_1 - I_3 - I_{16} + I_9 \\ \int_{\Delta v_i} G_y^z dv &= I_5 + I_{15} \\ \int_{\Delta v_i} G_z^x dv &= I_6 - I_{14} \\ \int_{\Delta v_i} G_z^y dv &= I_5 - I_{15} \\ \int_{\Delta v_i} G_z^z dv &= - I_1 - I_2 - I_{12} - I_{13} \end{aligned} \quad (59)$$

avec :

$$I_1 = \int \frac{\partial^2 P}{\Delta v_i \partial x^2} dx_e dy_e dz_e$$

$$I_2 = \int \frac{\partial^2 P}{\Delta v_i \partial y^2} dx_e dy_e dz_e$$

$$I_3 = \int \frac{\partial^2 P}{\Delta v_i \partial y} dx_e dy_e dz_e$$

$$I_4 = \int \frac{\partial^2 P}{\Delta v_i \partial x \partial y} dx_e dy_e dz_e$$

$$I_5 = \int \frac{\partial^2 P}{\Delta v_i \partial y \partial z} dx_e dy_e dz_e$$

$$I_6 = \int \frac{\partial^2 P}{\Delta v_i \partial x \partial z} dx_e dy_e dz_e$$

$$I_7 = \int \frac{\partial^3 W_1}{\Delta v_i \partial x \partial y \partial z} dx_e dy_e dz_e$$

$$I_8 = \int \frac{\partial^2 W_2}{\Delta v_i \partial x \partial z} dx_e dy_e dz_e$$

$$I_9 = \int \frac{\partial^2 W_3}{\Delta v_i \partial y \partial z} dx_e dy_e dz_e$$

$$I_{12} = \int \frac{\partial^2 V_2}{\Delta v_i \partial x \partial z} dx_e dy_e dz_e$$

$$I_{13} = \int \frac{\partial^2 V_3}{\Delta v_i \partial y \partial z} dx_e dy_e dz_e$$

$$I_{14} = \int \frac{\partial^2 V_1}{\Delta v_i \partial x \partial z} dx_e dy_e dz_e$$

$$I_{15} = \int \frac{\partial^2 V_1}{\Delta v_i \partial y \partial z} dx_e dy_e dz_e$$

$$I_{16} = \int \frac{\partial U}{\Delta v_i \partial z} dx_e dy_e dz_e$$

(60)



1. 6-2 - Optimisation du calcul des éléments de la matrice A

La matrice A va donc être composée de 9 blocs et peut être représentée sous la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} B_x^x & B_x^y & B_x^z \\ B_y^x & B_y^y & B_y^z \\ B_z^x & B_z^y & B_z^z \end{pmatrix} \quad (62)$$

où un bloc B_{α}^{β} , α et β représentant l'une des variables x y ou z, est composé de NxN éléments a_{ij} permettant de déterminer la contribution d'un dipôle orienté suivant la direction β au champ électrique dans la direction α

Considérons l'élément a_{ij} d'un bloc B_{α}^{β}

$$a_{ij} = \int_{\Delta_i} G_{\alpha}^{\beta}(x_j, y_j, z_j) dv_i \quad (63)$$

i est le numéro de la maille dans laquelle se déplace le point d'intégration

j est le numéro de la maille dans laquelle se trouve le point d'observation.

La fonction G_{α}^{β} est la combinaison de fonctions de GREEN primaires et de fonctions de GREEN secondaires.

En appelant respectivement t_{ij} et t'_{ij} la partie primaire et la partie secondaire de a_{ij} , ce coefficient peut s'écrire : $a_{ij} = t_{ij} + t'_{ij}$.

Le volume d'intégration étant le même pour chaque maille, on peut montrer en examinant les intégrales dont le tableau figure page 29 que l'on a toujours :

$$t_{ij} = t_{ji}$$

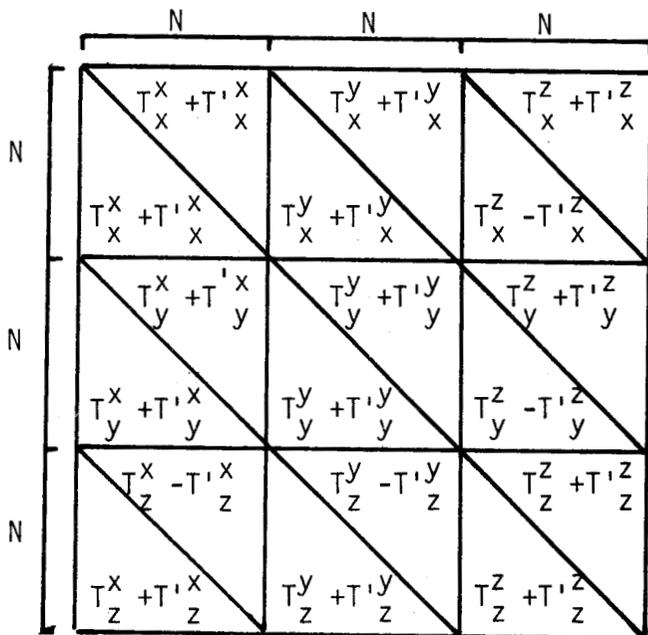
et soit :

$$t'_{ij} = t'_{ji}$$

soit :

$$t'_{ij} = -t'_{ji}$$

on peut donc représenter la matrice A de la façon suivante :



où les matrices T_α^β et $T_\alpha'^\beta$ sont des matrices triangulaires composées respectivement des éléments primaires et secondaires d'un bloc B_α^β

Les différentes matrices T_α^β et $T_\alpha'^\beta$ sont composées des éléments t_{ij} et t'_{ij} suivants :

matrice T_x^x :- $I_2 - I_3$

matrice $T_x'^x$:- $I_{16} - I_8$

" T_x^y : I_4

" $T_x'^y$: I_7

" T_x^z : I_6

" $T_x'^z$: I_{14}

" T_y^y :- $I_1 - I_3$

" $T_y'^y$:- $I_{16} - I_9$

" T_y^z : I_5

" $T_y'^z$: I_{15}

" T_z^z :- $I_1 - I_2$

" $T_z'^z$:- $I_{12} - I_{13}$



Une symétrie générale de la matrice par rapport à la diagonale principale apparaît. Ce qui nous permet de n'avoir à calculer que les éléments des 6 blocs triangulaires supérieures $T_x^x + T_x^x$, $T_x^y + T_x^y$, $T_x^z + T_x^z$, $T_y^y + T_y^y$, $T_y^z + T_y^z$, $T_z^z + T_z^z$.

Dans l'annexe 3, on montre comment on peut réduire le nombre d'intégrales à calculer en faisant l'hypothèse d'une anomalie parallépipédique.

I. 6.3 - Résolution du système d'équations linéaires.

La matrice A étant une matrice symétrique, nous pouvons résoudre le système d'équations linéaires en utilisant l'algorithme de CHOLESKI qui se révèle suffisamment performant pour ce genre de résolution de système (voir annexe 4).

Nous connaissons maintenant le champ électrique inconnu dans l'anomalie. Nous pouvons donc calculer le champ électromagnétique en n'importe quel point du milieu (0).

I.7 - CALCUL DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE TOTAL A LA SURFACE DU SOL

Nous avons vu dans le paragraphe I.3 que, quelque soit la position du récepteur, le champ électrique est donné par la relation intégrale (38), que l'on peut exprimer sous la forme d'un système d'équations linéaires d'une manière tout à fait analogue aux relations (47).

Sous forme matricielle ce système s'écrit :

$$\vec{E} = \vec{E}_p + \Lambda \int_V (G) \vec{E}_3 dv \quad (64)$$

où (G) est la matrice des intégrales des fonctions de GREEN liée à la position de l'anomalie. Les expressions de ces fonctions de GREEN, dépendant du milieu dans lequel on calcule le champ électromagnétique, sont donc différentes de celles établies page 19.

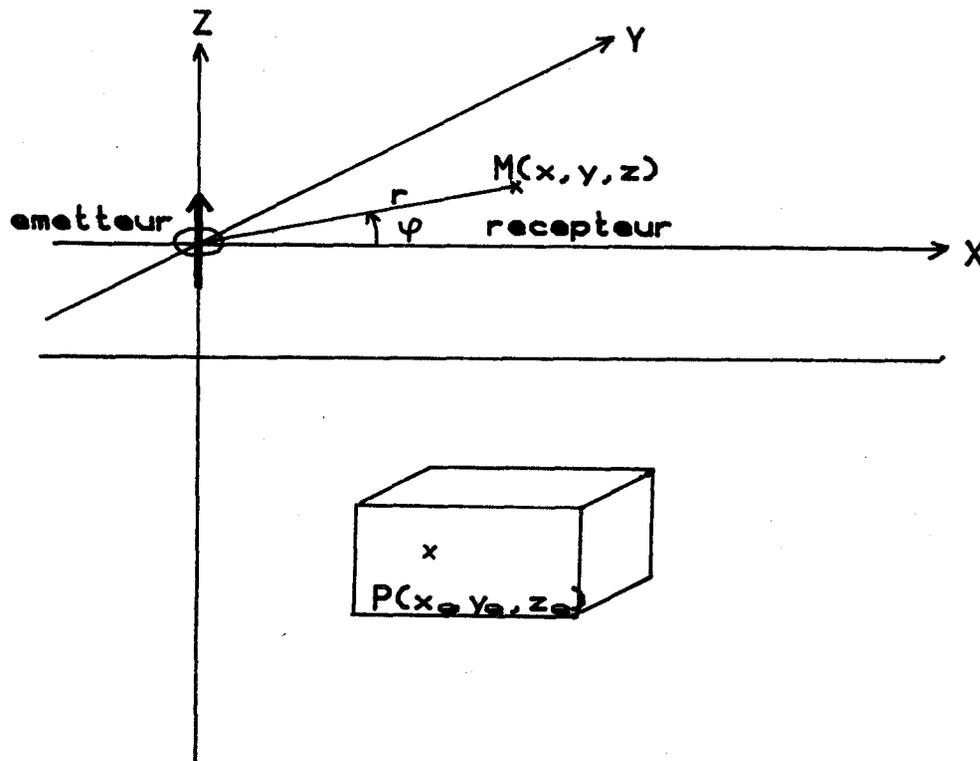


Figure -12-

Dans ces conditions, et compte tenu de la relation

$$\vec{H} = - \frac{1}{j\omega\mu} \text{ROT } \vec{E} \quad (65)$$

Les expressions du champ électromagnétique à la surface du sol sont réunies dans les 2 tableaux suivants :

CHAMP ELECTRIQUE

$$E_x = E_{xp} + \Lambda \sum_{i=1}^N \left[E_{3x} \int_{\Delta v_j} G_x^x dv + E_{3y} \int_{\Delta v_j} G_x^y dv + E_{3z} \int_{\Delta v_j} G_x^z dv \right]$$

$$E_y = E_{yp} + \Lambda \sum_{i=1}^N \left[E_{3x} \int_{\Delta v_j} G_y^x dv + E_{3y} \int_{\Delta v_j} G_y^y dv + E_{3z} \int_{\Delta v_j} G_y^z dv \right]$$

$$G_x^x = -\gamma_o^2 \frac{\partial U}{\partial z_e} - \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_e \partial z_e}$$

$$G_x^y = G_y^x = \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_e \partial y_e \partial z_e}$$

$$G_x^z = \frac{\partial^2 V}{\partial x_e \partial z_e}$$

$$G_y^y = -\gamma_o^2 \frac{\partial U}{\partial z_e} - \frac{\partial^2 T_3}{\partial y_e \partial z_e}$$

$$G_y^z = \frac{\partial^2 V}{\partial y_e \partial z_e}$$

$$U = \int_0^\infty \frac{a_0}{u_2} e^{(u_2 z_e - u_0 z)} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda$$

$$V = \int_0^\infty c_0 \frac{u_0}{u_2} e^{(u_2 z_e - u_0 z)} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda$$

$$T_1 = \int_0^\infty \frac{a_0 - u_0 f_0}{u_2} e^{(u_2 z_e - u_0 z)} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda$$

$$T_2 = -\frac{(x-x_e)}{r} \int_0^\infty \frac{a_0 - u_0 f_0}{u_2} e^{(u_2 z_e - u_0 z)} J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda$$

$$T_3 = -\frac{y-y_e}{r} \int_0^\infty \frac{a_0 - u_0 f_0}{u_2} e^{(u_2 z_e - u_0 z)} J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda$$

$$E_{\phi p} = -j\omega\mu M \left[\frac{1}{r^2} + \int_0^\infty \frac{\lambda - u_1/Q}{\lambda + u_1/Q} J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \right]$$

$$E_{xp} = -\sin \phi E_{\phi p} \quad E_{yp} = \cos \phi E_{\phi p}$$

Q coefficient de stratification $Q = \frac{u_2 \operatorname{th}(u_1) + u_2}{u_1 \operatorname{th}(u_2) + u_2}$

M Moment magnétique de l'antenne.



Les coefficients a_0 c_0 f_0 sont définis par les formules (21), (31), (32), (33) du paragraphe I.2.

CHAMP MAGNETIQUE

$$H_x = H_{xp} + \Lambda \sum_{i=1}^N \left[E_{3x} \int_{\Delta v_i} G_x^x dv + E_{3y} \int_{\Delta v_i} G_x^y dv \right]$$

$$H_y = H_{yp} + \Lambda \sum_{i=1}^N \left[E_{3x} \int_{\Delta v_i} G_y^x dv + E_{3y} \int_{\Delta v_i} G_y^y dv \right]$$

$$H_z = H_{zp} + \Lambda \sum_{i=1}^N \left[E_{3x} \int_{\Delta v_i} G_z^x dv + E_{3y} \int_{\Delta v_i} G_z^y dv \right]$$

$$G_x^x = \sigma_0 \frac{\partial^3 T_1}{\partial x_e \partial y_e \partial z_e}$$

$$G_x^y = -\sigma_0 \frac{\partial^2 T_3}{\partial y_e \partial z_e} + \frac{u_0 \sigma_0}{u_2} \frac{\partial U_1}{\partial z_e}$$

$$G_y^x = \sigma_0 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_e \partial z_e} - \frac{u_0 \sigma_0}{u_2} \frac{\partial U_1}{\partial z_e}$$

$$G_y^y = -\sigma_0 \frac{\partial^3 T_1}{\partial x_e \partial y_e \partial z_e}$$

$$G_z^x = -\sigma_0 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y_e \partial z_e}$$

$$G_z^y = -\sigma_0 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_e \partial z_e}$$

$$U_1 = \int_0^\infty a_0 e^{(u_2 z_e - u_0 z)} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda$$

$$U_2 = \int_0^\infty \frac{a_0}{u_2} e^{(u_2 z_e - u_0 z)} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda$$

$$T_1 = \int_0^\infty \frac{f_0}{u_2} e^{(u_2 z_e - u_0 z)} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda$$

$$T_2 = -\frac{(x-x_e)}{r} \int_0^\infty \frac{f_0}{u_2} e^{(u_2 z_e - u_0 z)} J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda$$

$$T_3 = -\frac{(y-y_e)}{r} \int_0^\infty \frac{f_0}{u_2} e^{(u_2 z_e - u_0 z)} J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda$$

$$H_z = M \left[-\frac{1}{r^3} + \int_0^\infty \frac{\lambda - u_1/Q}{\lambda + u_1/Q} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda \right]$$

$$H_r = M \left[\int_0^\infty \frac{\lambda - u_1/Q}{\lambda + u_1/Q} J_1(\lambda r) \lambda^2 d\lambda \right]$$

$$H_x = \cos \phi H_r \quad H_y = \sin \phi H_r$$



C H A P I T R E II

ETUDE PARAMETRIQUE DU RAYONNEMENT D'UN DIPOLE MAGNETIQUE
VERTICAL (D.M.V.) EN MILIEU STRATIFIE A DEUX COUCHES CONTENANT
UNE ANOMALIE DE CONDUCTIVITE

Nous disposons, depuis quelques années, d'un modèle de simulation^[3] permettant de mettre en évidence la perturbation du champ électromagnétique provoquée par une hétérogénéité enterrée dans un milieu homogène.

Ce modèle numérique nous permet en particulier d'étudier quantitativement une méthode de prospection classique : *la méthode "dipôle-dipôle"*. L'émetteur et le récepteur sont deux dipôles magnétiques que l'on déplace à la surface du sol en maintenant un écartement constant.

Cependant, dans bien des cas, la présence d'une couche superficielle peut modifier, voir supprimer, la réponse de l'anomalie.

Notre Laboratoire s'est déjà intéressé à l'influence d'une telle couche sur la réponse de carrières souterraines. Dans le cas où l'anomalie a des dimensions suffisamment grandes pour être assimilée à une couche isolante, les auteurs^{[6][7]} ont montré qu'une couche superficielle plus conductrice que les autres terrains peut masquer totalement la présence de l'anomalie isolante.

Cette étude a montré plus précisément qu'il était possible de "filtrer" l'effet de la couche superficielle en utilisant un dispositif émetteur conçu pour annuler le champ électrique au voisinage du récepteur.

Notre travail a consisté dans un premier temps à déterminer les conditions paramétriques optimales permettant de détecter une anomalie de dimensions finies. Nous avons ensuite mis en évidence l'influence perturbatrice d'une couche superficielle de conductivité et/ou d'épaisseur variables.

Nous étudions ensuite dans quelle mesure on peut éliminer l'effet de cette couche superficielle en utilisant le dispositif émetteur précédent.

Nous terminons en étudiant l'influence de la variation de l'épaisseur de la couche superficielle.

II. 1 - ETUDE PARAMETRIQUE DE LA REPOSE D'UNE ANOMALIE DONNEE EN PROSPECTION "DIPOLE-DIPOLE"

II. 1-1 - Caractéristique du terrain et de l'anomalie étudiée

Notre Laboratoire a entrepris récemment de détecter la présence d'anciennes sapes creusées pendant la 1ère guerre mondiale, dans la zone d'aménagement concertée (Z.A.C.) des Marichelles.

Ces sapes sont des cavités dont les dimensions sont d'environ 7 mètres en longueur, 7 mètres en largeur et 2 mètres en hauteur. Le toit de ces chambres est situé à environ 7 mètres de la surface du sol. (Figure 1)

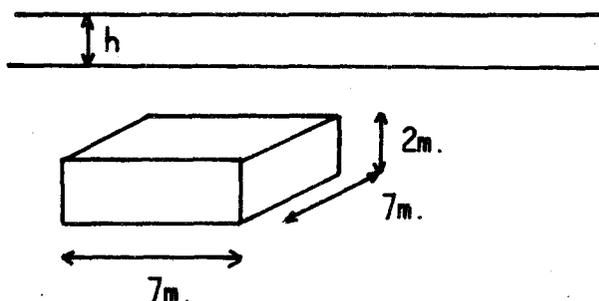


Figure - 1 -

Des études précédentes^[15] ont montré que le volume de la cavité à étudier ne pouvait pas se limiter aux seules dimensions du vide. En effet, il existe entre "le terrain vierge" et la cavité proprement dite une "zone de transition" dans laquelle les caractéristiques du terrain sont modifiées par des phénomènes complexes tel que le drainage.

Il apparaît empiriquement que le volume à prendre en compte pour une cavité donnée est environ 8 fois le volume réel - ce qui revient à doubler les dimensions de la cavité (ceci suppose qu'aucune direction de l'espace n'est privilégiée)-.

Il en résulte que cette cavité sera représentée par un parallélépipède de dimensions 15 m x 15 m x 4 m dont le toit est situé à 6 m de la surface du sol.

Cette anomalie de conductivité nulle, est enterrée dans un substratum de conductivité 0.02 mho/m et surmonté d'une couche superficielle d'épaisseur h et de conductivité σ_1 .

II. 1-2 - Définition des quantités mesurées

Nous allons simuler la méthode de prospection "dipôle-dipôle". L'émetteur est un dipôle magnétique vertical, le récepteur est soit de type magnétique, soit de type électrique. Tous deux sont placés à la surface du sol. Le procédé de prospection consiste à déplacer le dispositif émetteur-récepteur sur le terrain en gardant un écartement constant et une fréquence de travail fixée.

Nous avons la possibilité de simuler les variations des 3 composantes du champ électromagnétique E_ϕ H_R H_Z rayonnées par un D.M.V. en fonction de la distance R séparant l'émetteur du récepteur, et de la fréquence du courant I circulant dans la boucle émettrice (Figure 2)

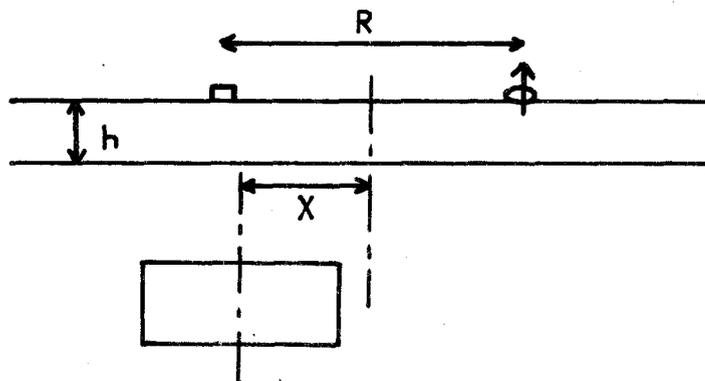


Figure - 2 -

Nous nous sommes principalement intéressés aux composantes E_{ϕ} et H_R qui sont les plus sensibles à une variation de la conductivité du milieu encaissant.

Sur les courbes que nous présentons, nous avons tracé l'indice d'anomalie de la quantité mesurée en fonction de X qui est la distance du milieu de l'anomalie au milieu du dispositif émetteur-récepteur.

Nous rappelons la définition de l'indice d'anomalie :

$$I_a(V) = \frac{V - V_0}{V_0}$$

V : quantité mesurée en présence de l'anomalie

V_0 : quantité mesurée en l'absence d'anomalie.

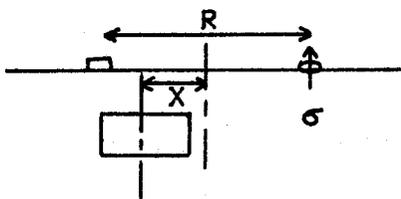
II. 1-3 - Etude de la convergence du procédé de calcul

Nous avons supposé dans notre développement théorique que l'anomalie pouvait être discrétisée en N mailles parallélépipédiques à l'intérieur desquelles le champ électrique est constant et a pour valeur celle prise au centre de la maille considérée.

Avant d'interpréter les résultats du calcul, il faut vérifier l'hypothèse que nous venons de rappeler. Pour ce faire, on fait un même calcul en utilisant 2 ou plusieurs découpages possibles choisis de telle manière que les mailles élémentaires soient de plus en plus petites.

On définit alors la notion de convergence en admettant que le résultat obtenu a convergé vers la solution exacte quand avec deux découpages donnés on a obtenu des résultats identiques à quelques pourcents près.

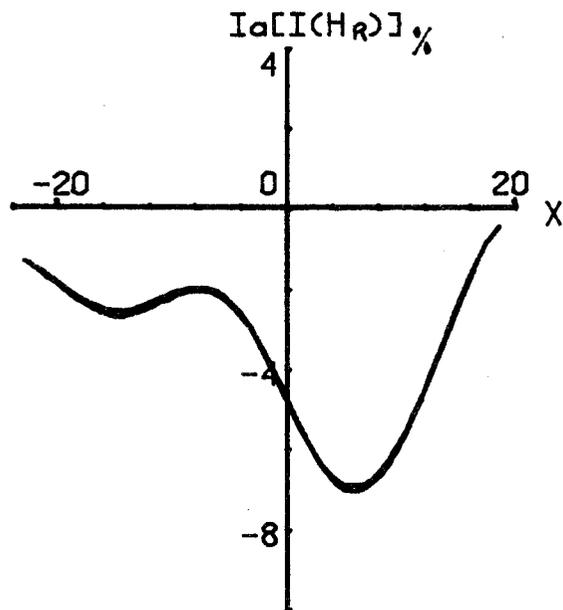
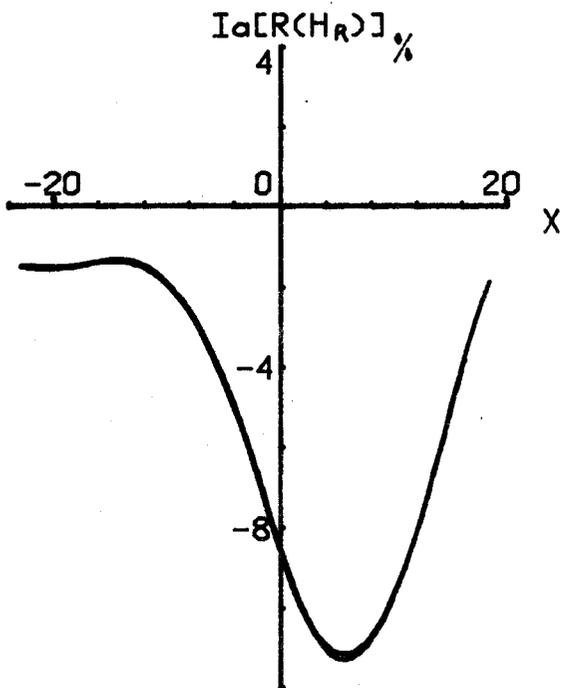
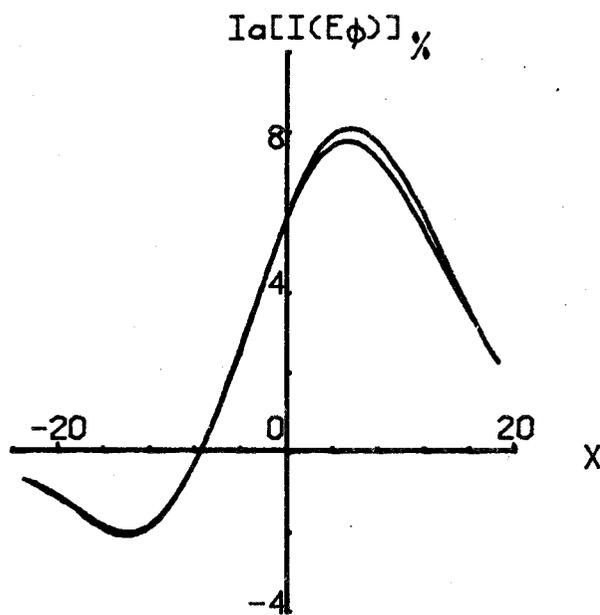
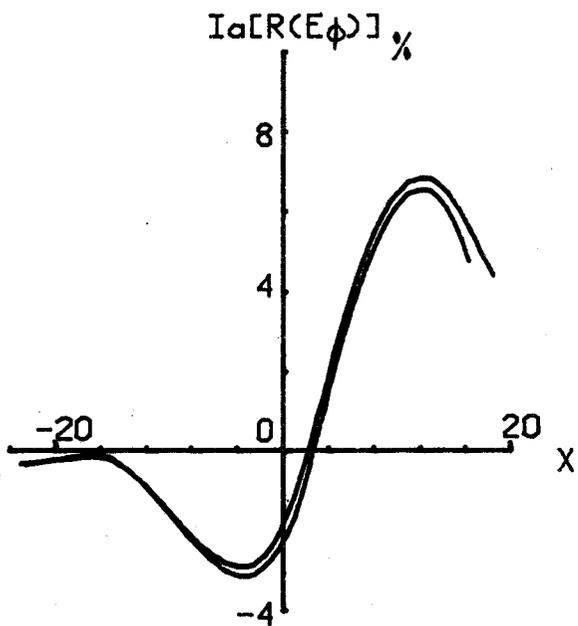
ETUDE DE LA CONVERGENCE DE PROCEDE DE CALCUL



DECOUPAGE 1 3*3*1

DECOUPAGE 2 3*3*2

F=20KHz
R=16m.
G=.02mho/m.



BUS
LILLE

Nous avons successivement découpé notre anomalie en 9 mailles (3x3x1) puis en 18 mailles (3x3x2).

Cette étude a été effectuée en demi-milieu homogène pour des paramètres géométriques et électriques se situant dans la moyenne des intervalles considérés, soit à une fréquence de 20 KHz et pour une distance émetteur-récepteur de 16 m.

Nous représentons sur la planche I les indices d'anomalie sur les parties réelles et imaginaires des composantes E_{ϕ} et H_R pour les 2 découpages précédemment définis.

On note que le critère de convergence est vérifié pour le découpage en 9 mailles. Nous l'avons ensuite contrôlé pour une fréquence de 70 KHz qui est un cas numérique plus défavorable.

On utilisera donc, par la suite, systématiquement ce découpage en 9 mailles (3x3x1).

II. 1-4 - Etude de l'influence de la fréquence

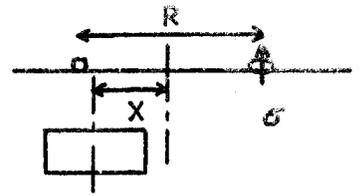
La planche II montre que les indices d'anomalie sur les modules du champ électrique E_{ϕ} et sur le champ magnétique H_R sont peu sensibles à une variation de la fréquence dans une bande de 100 Hz à 45 KHz.

Nous avons représenté sur la planche III l'évolution des modules et phases du champ électromagnétique rayonné par un D.M.V. en demi-milieu homogène en fonction de la fréquence.

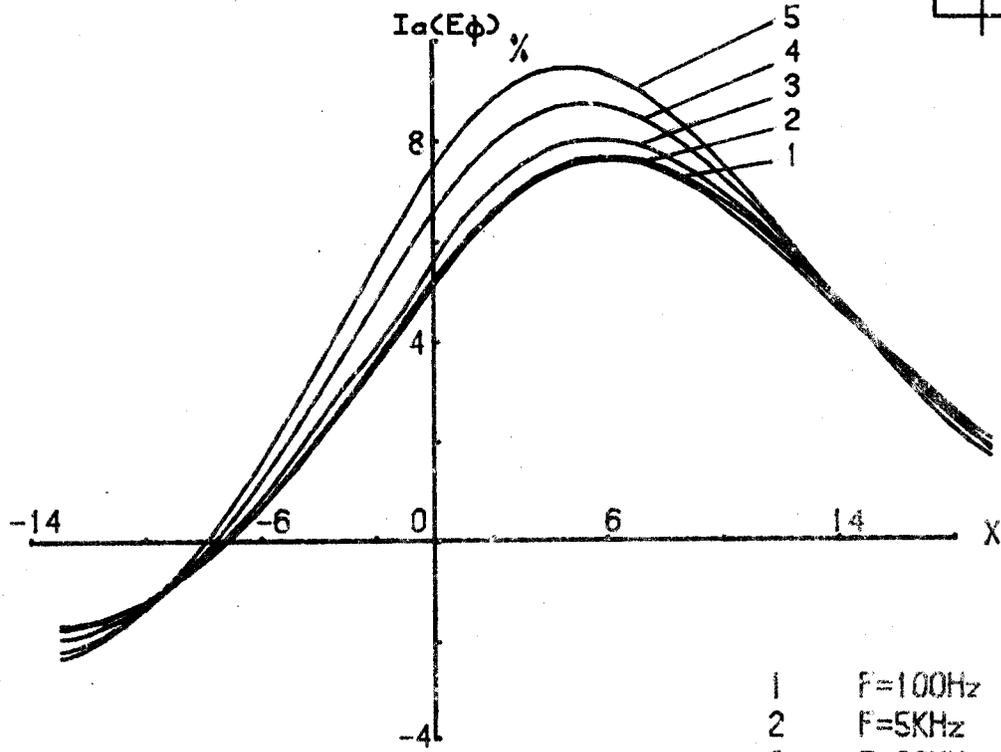
On note que les modules de E_{ϕ} et H_R augmentent sensiblement avec la fréquence tandis que le module de H_Z reste pratiquement constant. Par ailleurs, comme nous l'avons précédemment rappelé, le champ magnétique H_Z est peu sensible à la variation de la conductivité tandis que le champ magnétique H_R y est très sensible. Il en résulte donc qu'une mesure expérimentale de la composante H_R se fera dans de meilleures conditions si l'on choisit une fréquence dans le haut de la gamme. En effet, si le rapport H_R/H_Z est trop faible, une légère erreur dans le positionnement du récepteur nous donnerait une mesure sans signification.



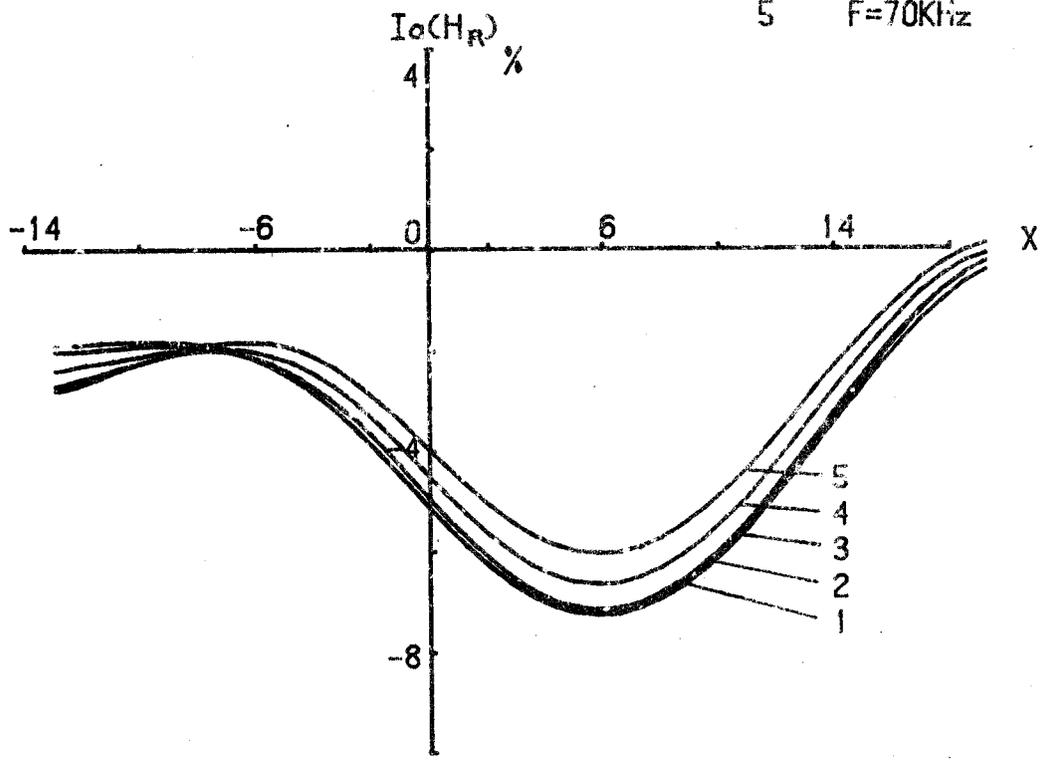
ETUDE DE LA VARIATION DE LA FREQUENCE



$R = 16m.$
 $\sigma = .02mho/m.$

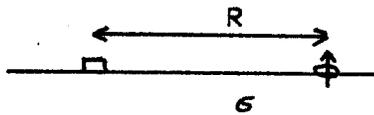


- 1 F=100Hz
- 2 F=5KHz
- 3 F=20KHz
- 4 F=45KHz
- 5 F=70KHz

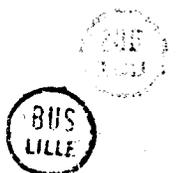
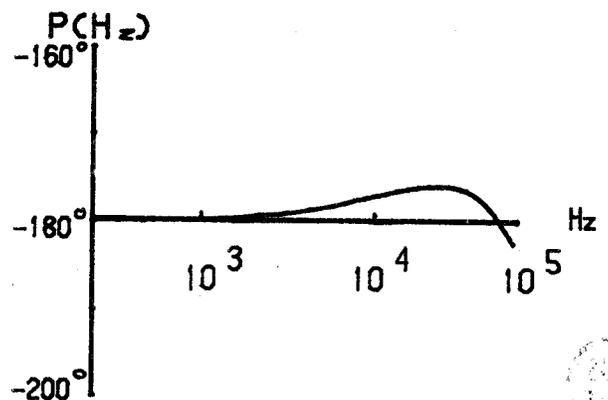
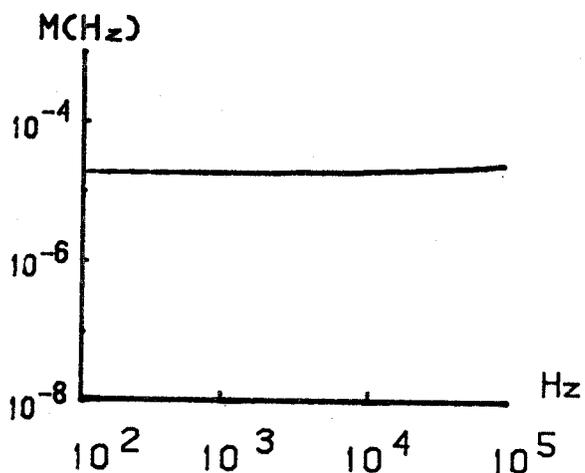
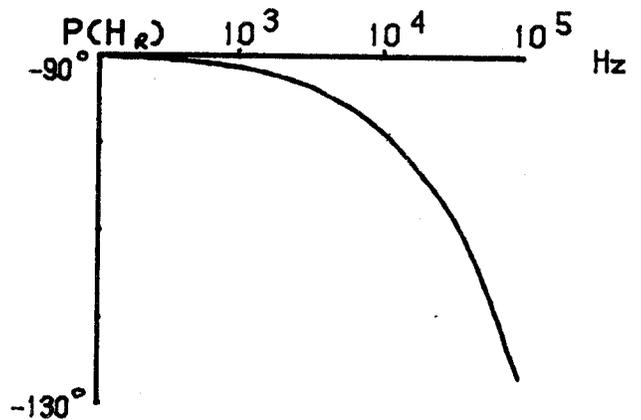
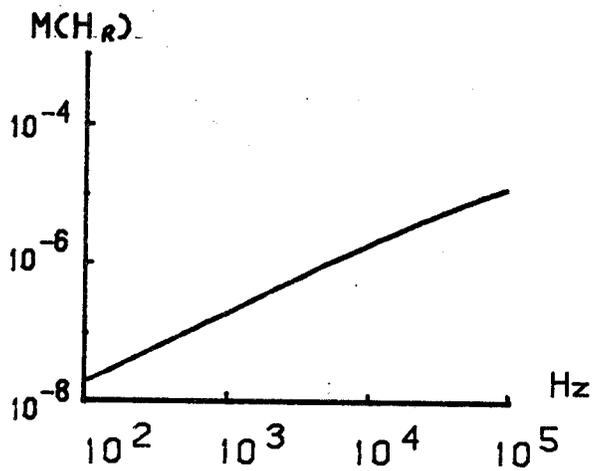
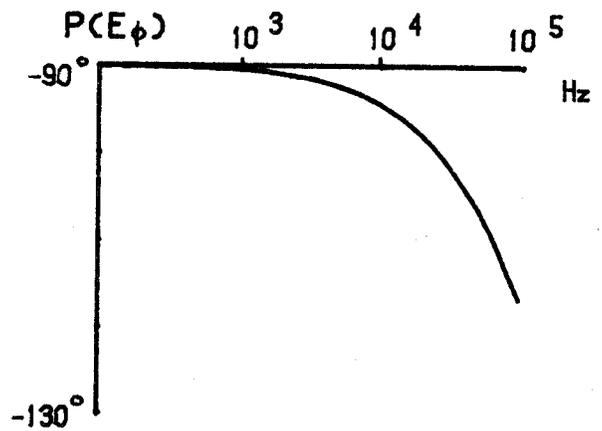
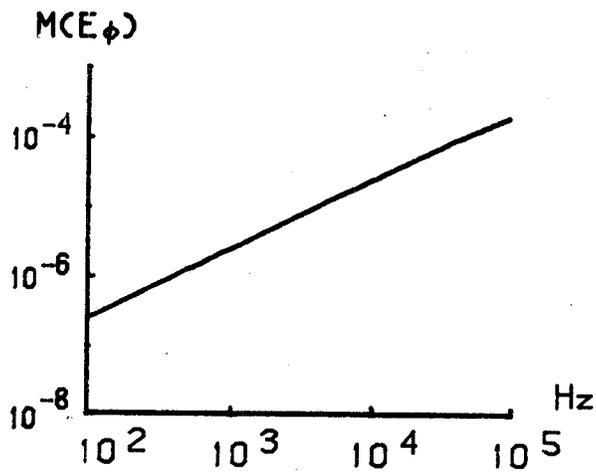


BUS
LILLE

CHAMP ELECTROMAGNETIQUE RAYONNE PAR UN DMV EN DEMI-MILIEU
(MODULE ET PHASE)



$R=16m.$
 $\sigma=.02mho/m.$



Cependant, pour des considérations purement numériques et tenant compte de la remarque sur la stabilité des indices d'anomalie en fonction de la fréquence, nous continuerons notre travail à une fréquence de 5 KHz.

II. 1-5 - Etude de la variation de la distance émetteur-récepteur

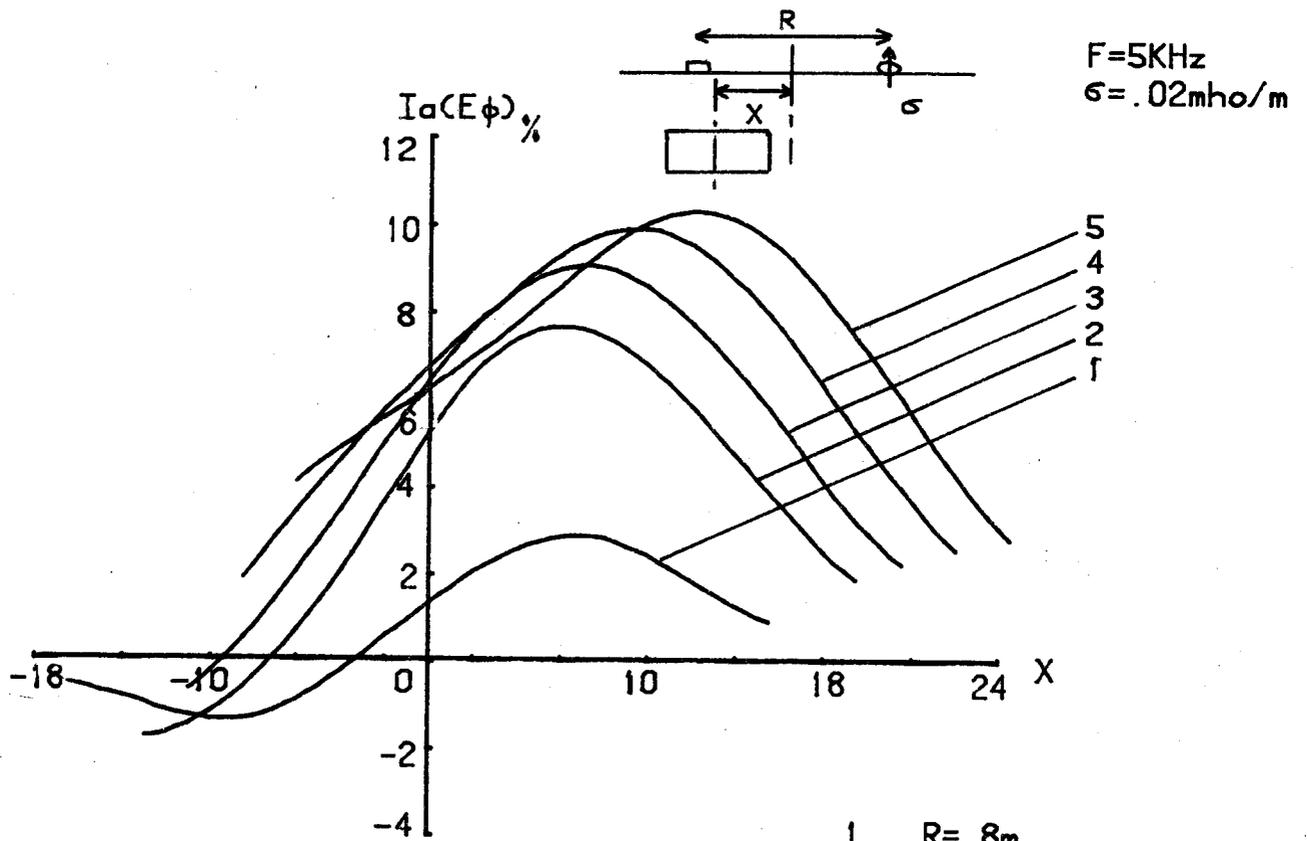
La planche IV représente la réponse de l'anomalie en champ magnétique H_R et en champ électrique E_ϕ pour différentes distances émetteur-récepteur.

- L'indice d'anomalie en champ magnétique passe par un maximum pour une distance comprise entre 16 m et 20 m. On retrouve là un résultat bien connu en détection magnétique^[7]: la distance émetteur-récepteur donnant le meilleur taux de perturbation sur le champ magnétique est environ le double de la profondeur de l'anomalie à détecter.

- Le maximum d'indice d'anomalie en champ électrique croît constamment et tend vers une limite correspondant au taux de perturbation créé par une onde plane.

Sur toutes ces courbes on note que l'on a un maximum du taux d'anomalie quand le récepteur passe au-dessus de l'anomalie. On sonde donc sous le récepteur.

ETUDE DE LA VARIATION DE LA DISTANCE EMETTEUR-RECEPTEUR



- 1 $R = 8m.$
- 2 $R = 16m.$
- 3 $R = 20m.$
- 4 $R = 25m.$
- 5 $R = 30m.$

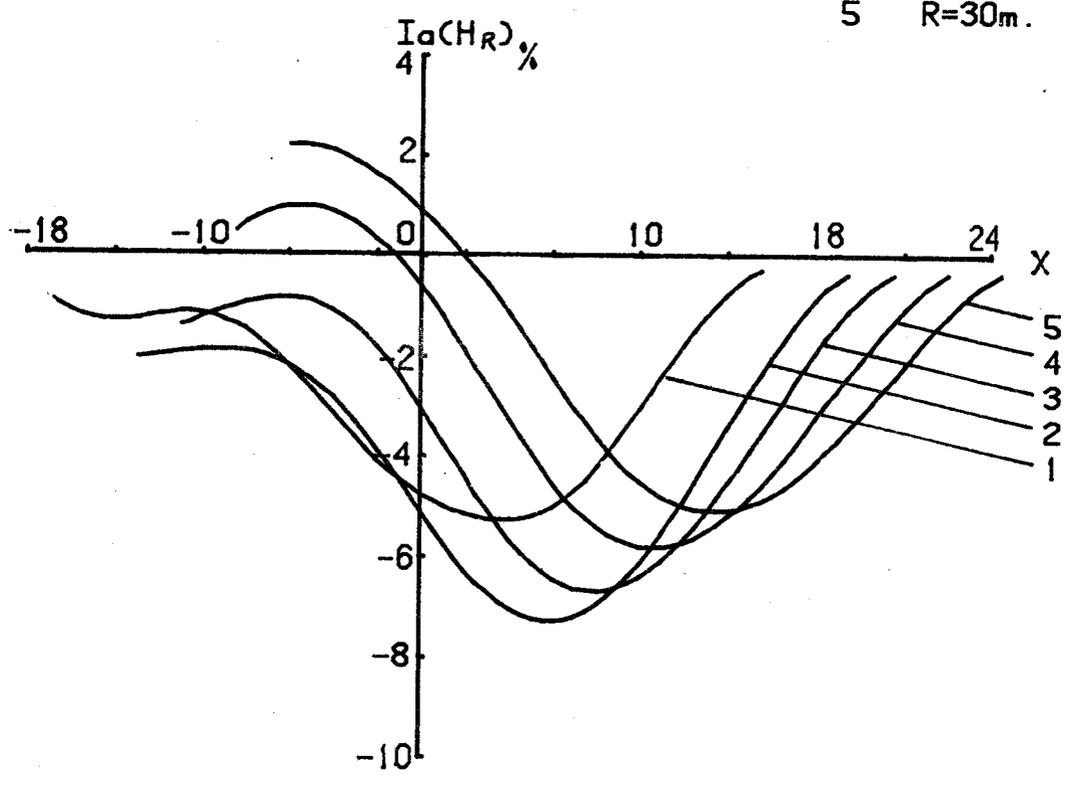


PLANCHE IV

II. 2 - INFLUENCE DES CARACTERISTIQUES DE LA COUCHE SUPERFICIELLE

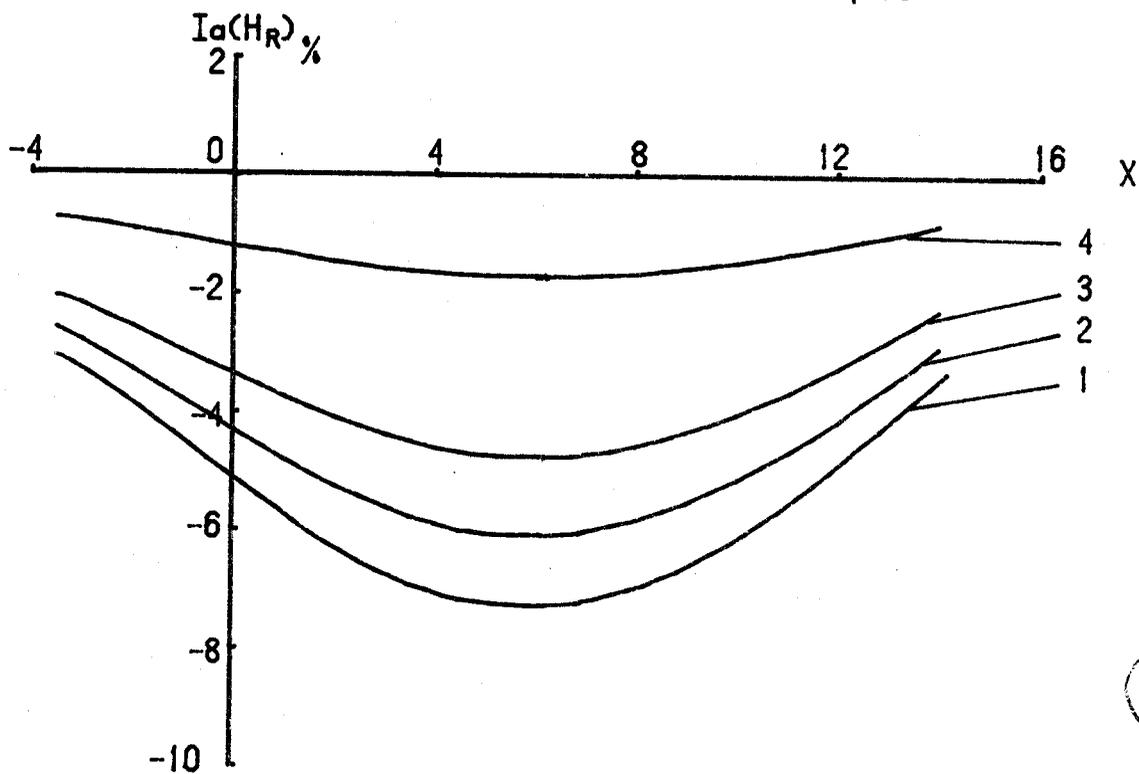
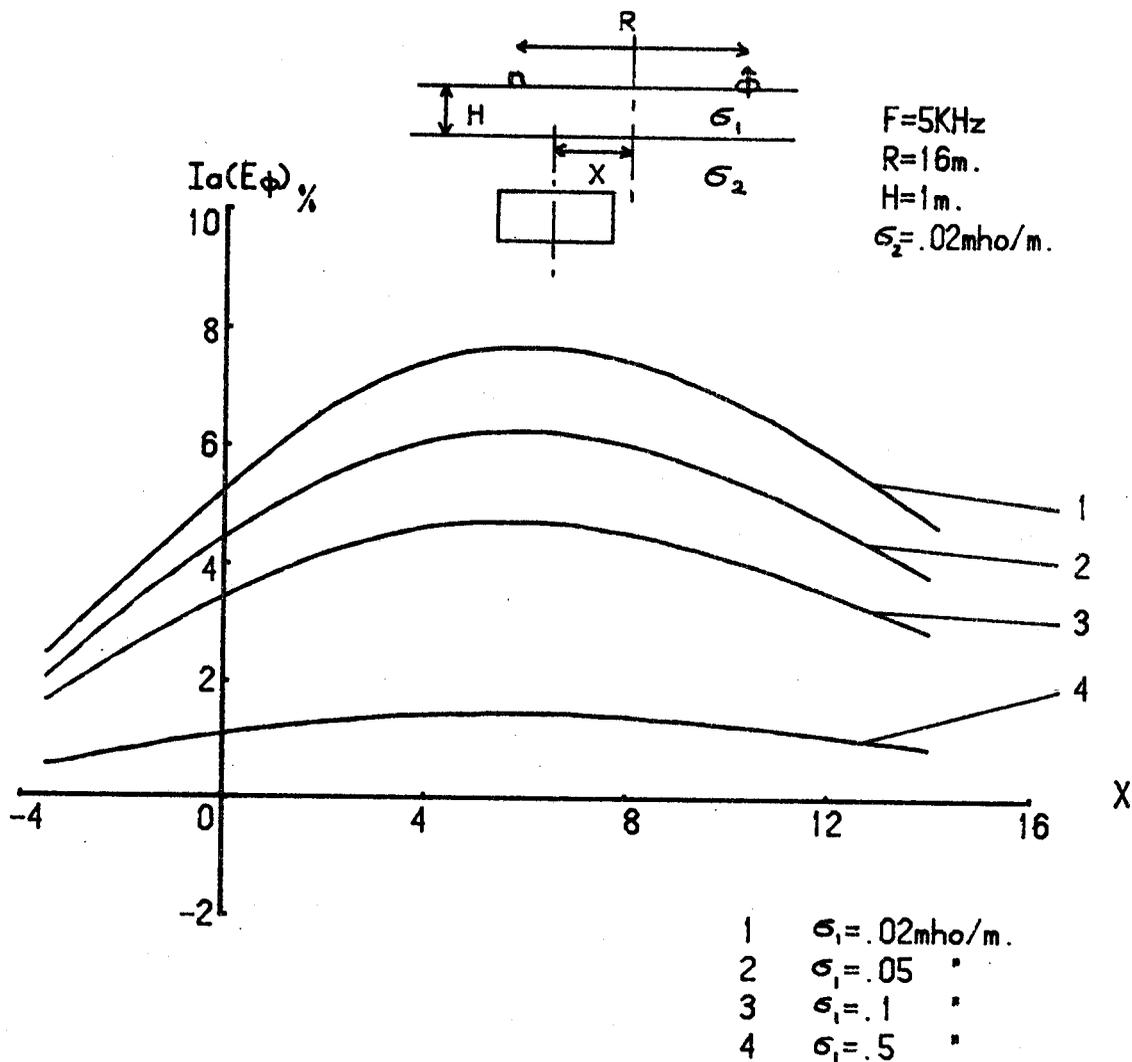
Les études menées dans le paragraphe précédent nous ont permis de déterminer les paramètres de fréquences et de distance émetteur-récepteur permettant de détecter au mieux notre anomalie.

Nous allons, dans ces conditions, étudier l'influence de l'épaisseur et de la conductivité de la couche superficielle.

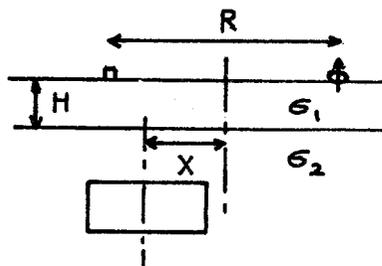
Les planches V et VI représentent le taux d'anomalie en champ électrique et en champ magnétique respectivement pour différentes valeurs de la conductivité et de l'épaisseur de la lère couche.

On note que ces 2 paramètres ont la même influence. L'effet de masque de la lère couche est d'autant plus fort que la couche superficielle est conductrice et qu'elle est épaisse. Elle joue le rôle d'un blindage électrostatique.

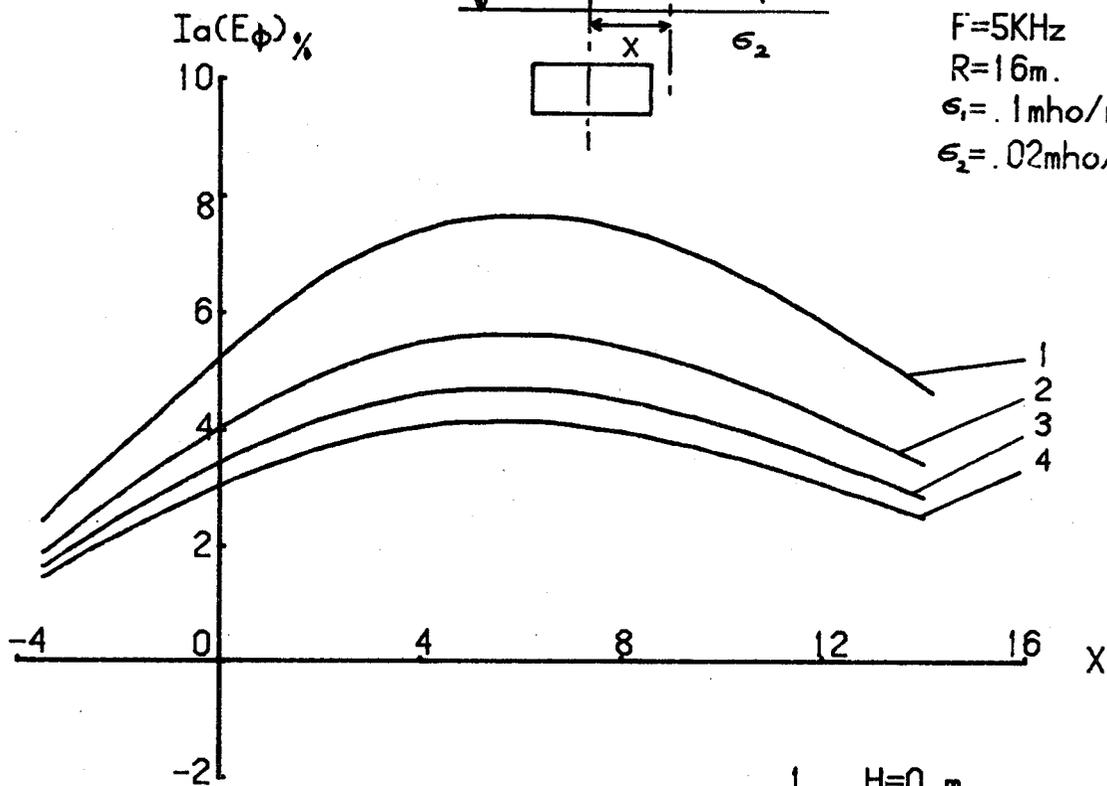
ETUDE DE LA VARIATION DE LA CONDUCTIVITE DE LA COUCHE SUPERFICIELLE



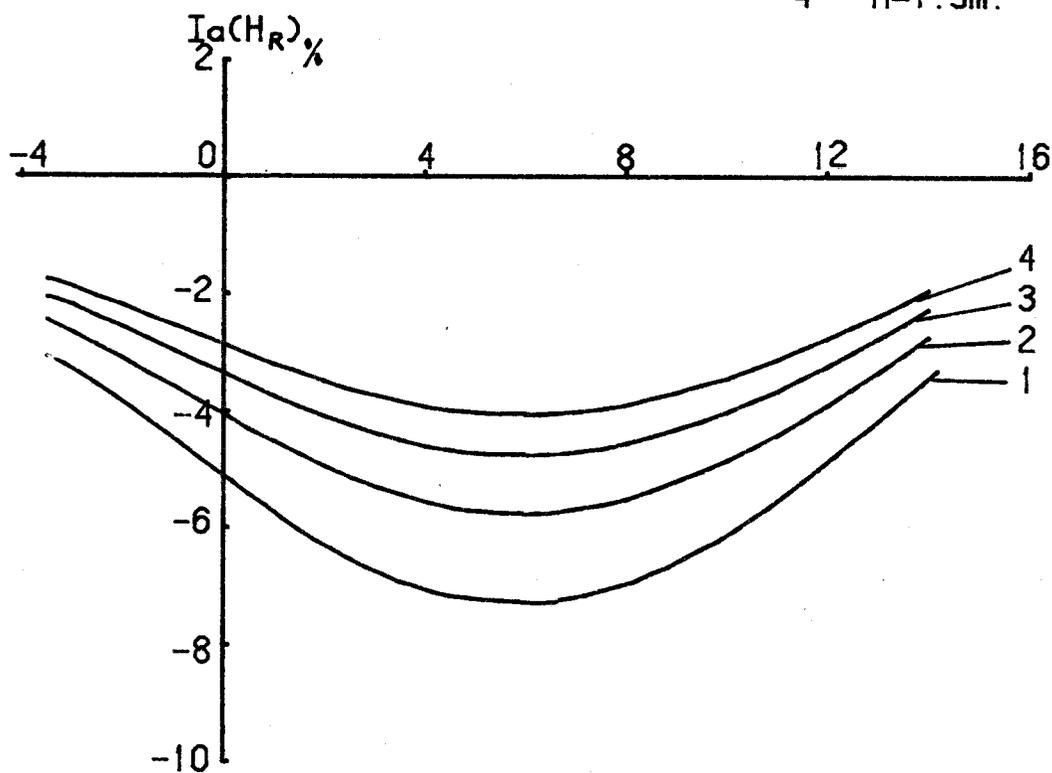
ETUDE DE LA VARIATION DE L'EPAISSEUR DE LA COUCHE SUPERFICIELLE



$F=5\text{KHz}$
 $R=16\text{m.}$
 $\sigma_1=.1\text{mho/m.}$
 $\sigma_2=.02\text{mho/m.}$



- 1 $H=0.\text{m.}$
- 2 $H=.5\text{m.}$
- 3 $H=1.\text{m.}$
- 4 $H=1.5\text{m.}$



II. 3 - UTILISATION D'UN DISPOSITIF DE DEUX ÉMETTEURS COUPLES

Nous allons montrer qu'il est possible de diminuer l'effet de la couche superficielle en utilisant un système émetteur composé de deux boucles magnétiques disposées horizontalement sur le sol : *une boucle principale et une boucle auxiliaire*. La boucle auxiliaire placée entre la boucle principale et l'émetteur est parcourue par un courant I_S tel que les modules du champ électrique créés par les 2 boucles à l'emplacement du récepteur soient égaux. De plus, ce courant est déphasé par rapport au courant circulant dans l'émetteur primaire de telle façon que le champ électrique total au voisinage du récepteur soit quasiment nul.

De cette façon, on élimine en grande partie les courants induits au voisinage du récepteur. La planche VII montre comment les lignes de courants dans le sol sont déformées par l'introduction de l'émetteur auxiliaire.

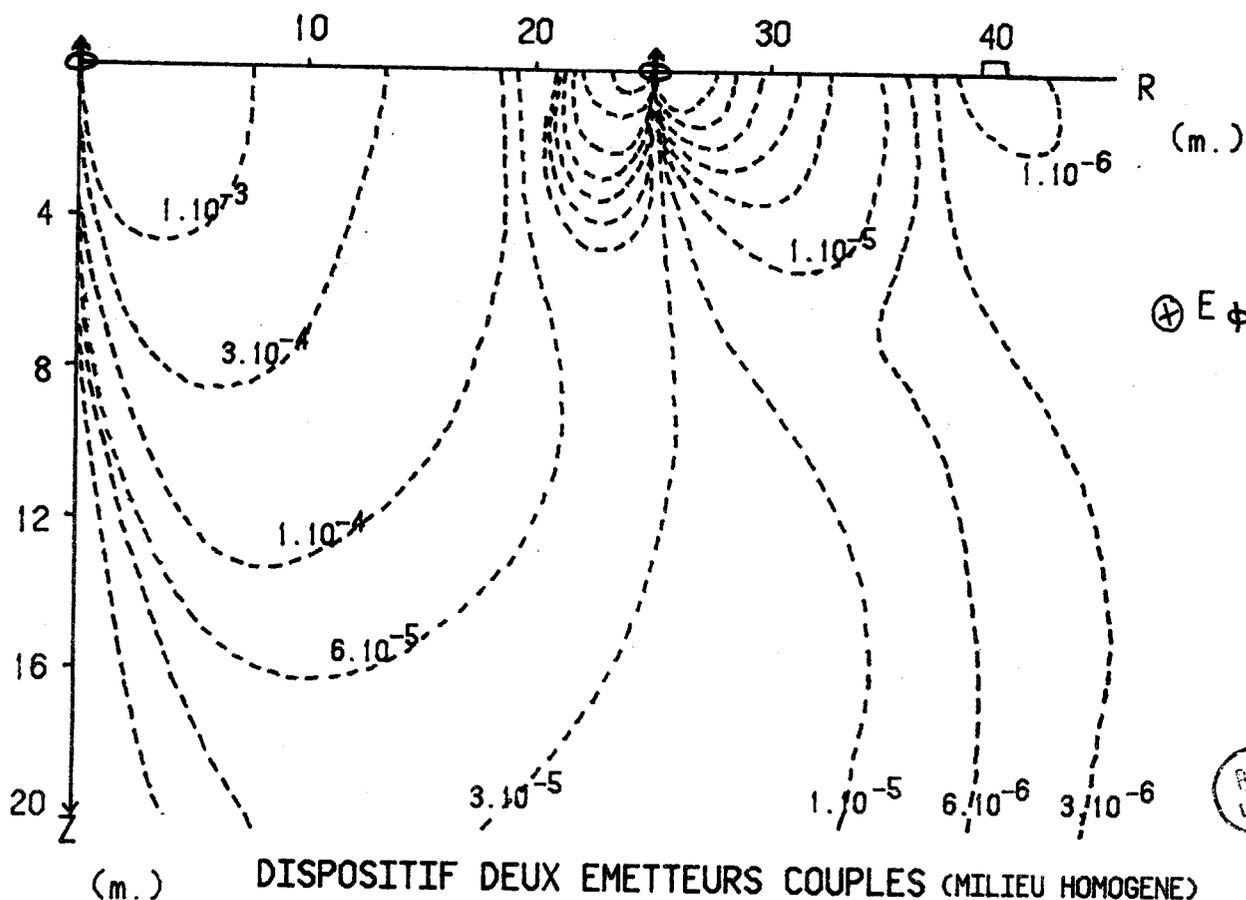
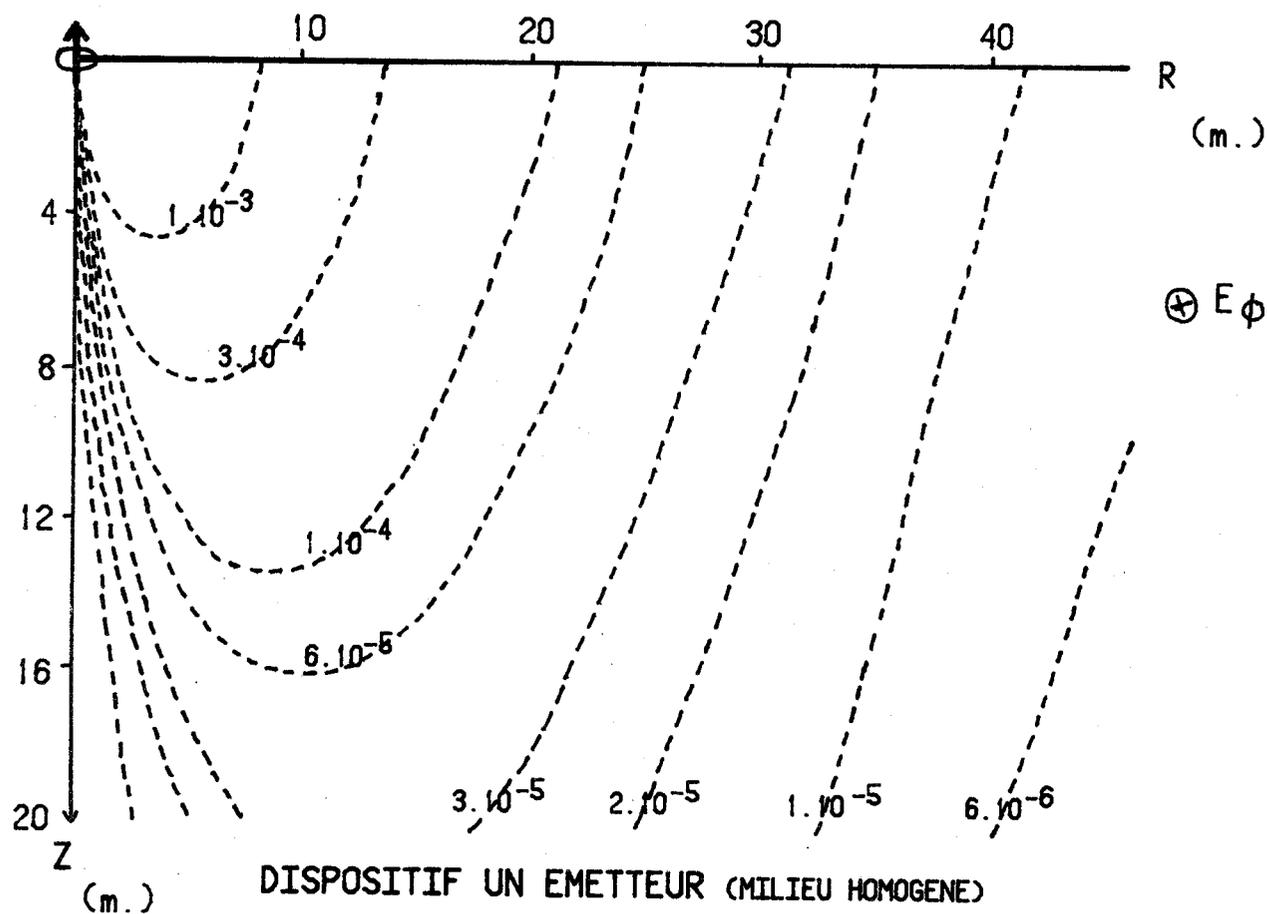
La quantité mesurée sera évidemment la composante H_R du champ magnétique.

Nous allons examiner le rôle joué par les deux boucles émettrices.

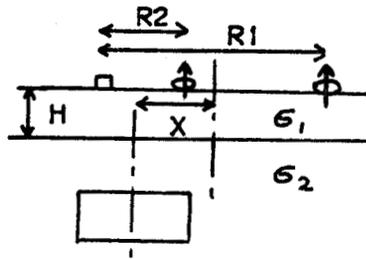
- La boucle principale joue le même rôle que dans le cas d'un dispositif composé d'un seul émetteur. C'est principalement elle qui va exciter l'anomalie. On utilisera un écartement émetteur principal - récepteur de 16 m qui est la distance qui donne le meilleur taux d'anomalie sur le champ magnétique H_R .

- La boucle secondaire sert principalement à éliminer les courants induits au voisinage du récepteur. Il faut la placer de telle façon que sa présence ne perturbe pas le champ électrique dans l'anomalie. Nous présentons sur la planche VIII l'influence de la variation de la distance émetteur secondaire-récepteur sur le taux d'anomalie en champ magnétique H_R . On note qu'une distance voisine de 6 m donne le meilleur indice d'anomalie. Nous allons maintenant étudier à nouveau l'influence de la variation de la conductivité et de l'épaisseur de la couche superficielle sur la réponse de notre anomalie excitée par un tel dispositif émetteur.

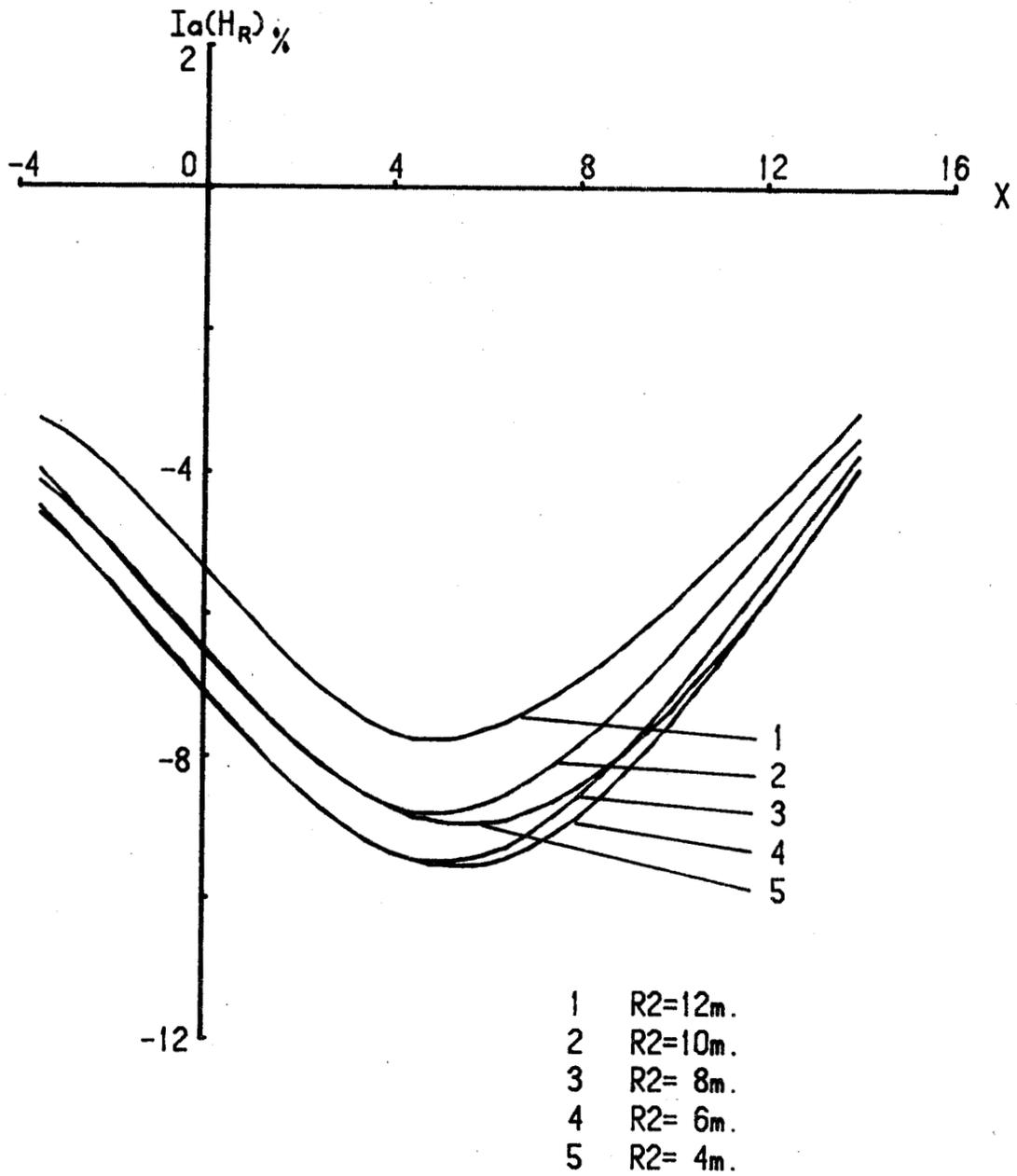
REPRESENTATION DES LIGNES DE COURANT DANS LE SOL



ETUDE DE LA VARIATION DE LA DISTANCE EMETTEUR SECONDAIRE-RECEPTEUR



F=5KHz
 $\sigma_1 = .05 \text{ mho/m.}$
 $\sigma_2 = .02 \text{ mho/m.}$
H=1m.
R1=16m.



La planche IX représente l'influence de l'épaisseur et de la conductivité de la lère couche sur le champ magnétique H_R .

On constate deux phénomènes importants

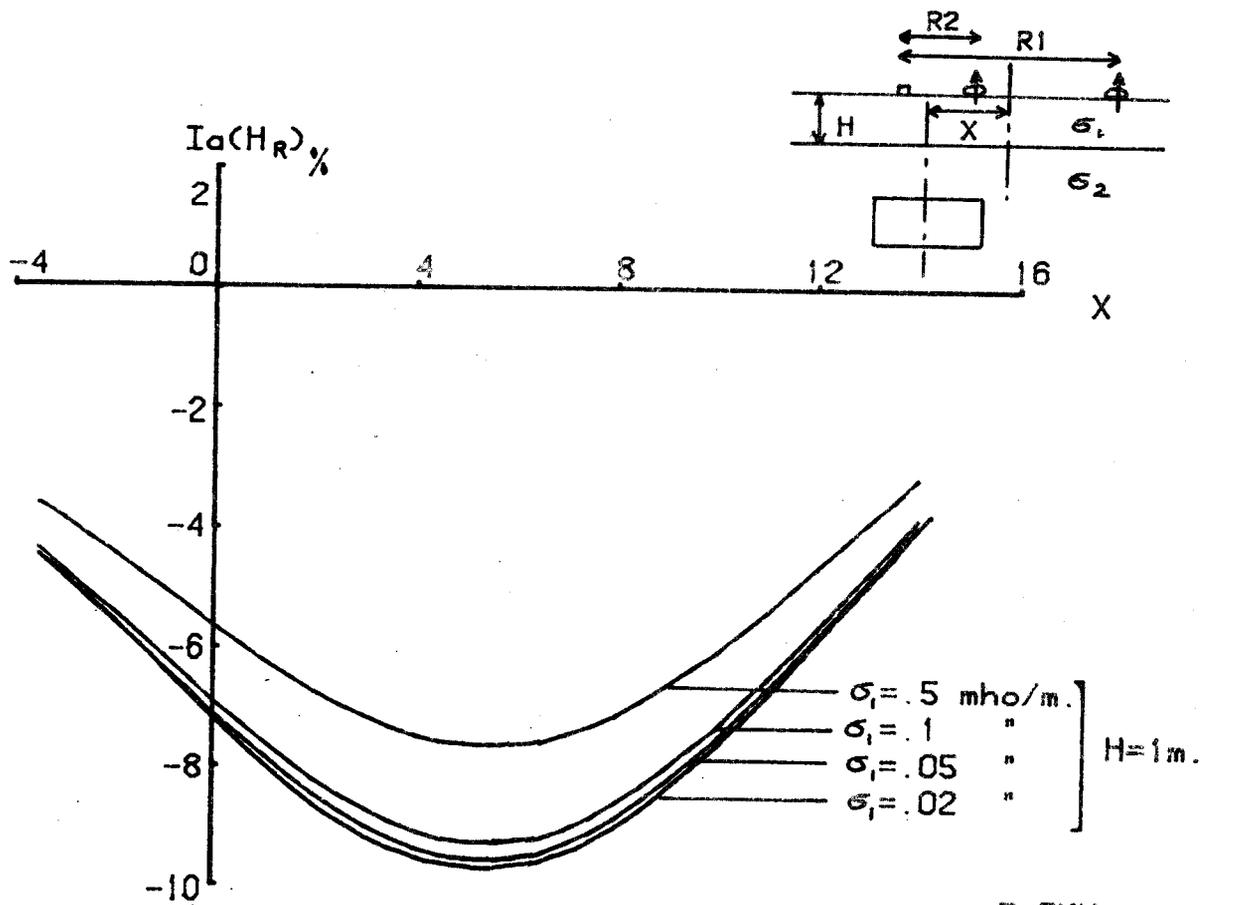
- La composante H_R est pratiquement insensible à une variation de l'épaisseur et de la conductivité de la couche superficielle quand ces paramètres varient dans une zone compatible avec la réalité. ($0. < h < 1.5$, $1 < \sigma_1/\sigma_2 < 25$)
- Le maximum d'indice d'anomalie augmente d'environ 20 % par rapport à la valeur obtenue avec un dispositif composé d'un seul émetteur. La valeur du module du champ est environ divisée par 2, ce champ reste donc toujours mesurable.

Nous avons mis en évidence de façon plus nette les différences dues à l'utilisation d'un dispositif "1 émetteur" ou "2 émetteurs" en traçant sur la planche X des courbes représentant l'évolution des maximums d'indice d'anomalie sur le champ magnétique H_R en fonction de l'épaisseur et de la conductivité de la lère couche pour les dispositifs précités.

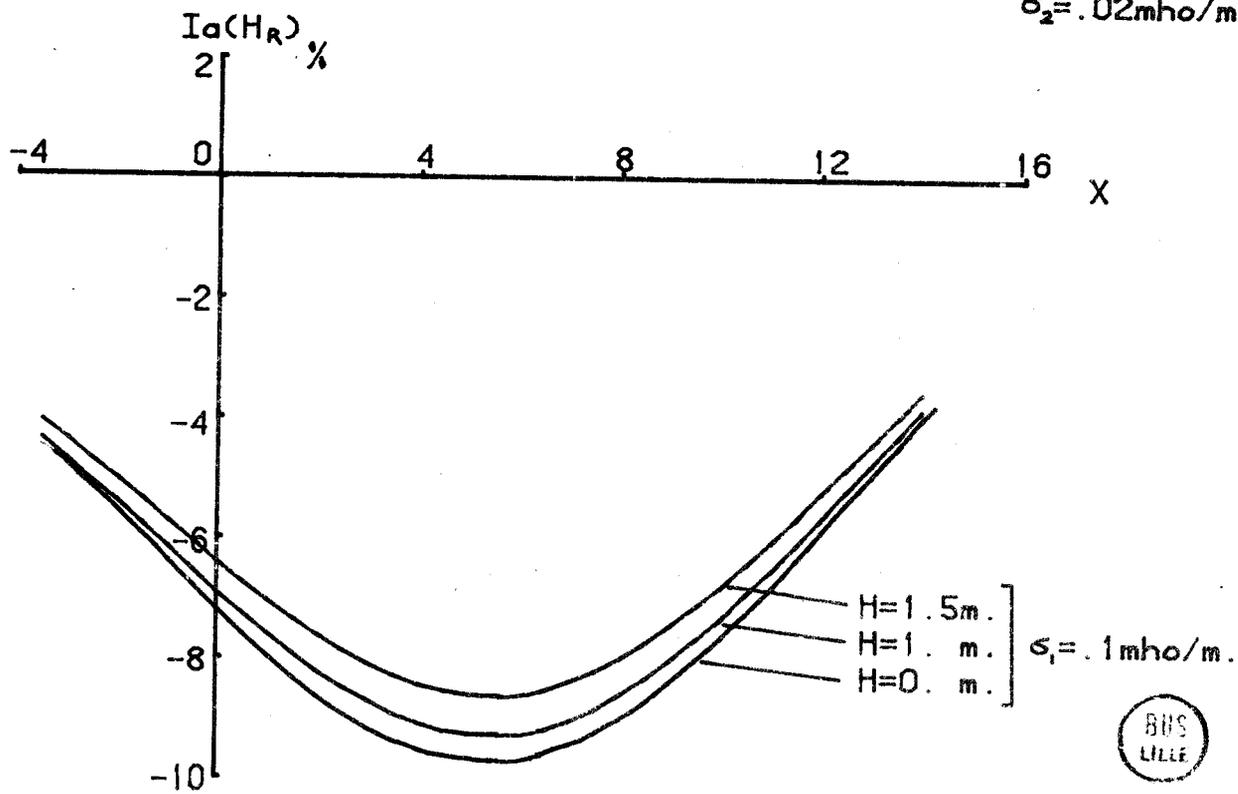
Le lieu de ces maximums est donné pour une distance milieu de l'anomalie - milieu du dispositif émetteur récepteur d'environ 6 m (cf. planches V, VI, IX).

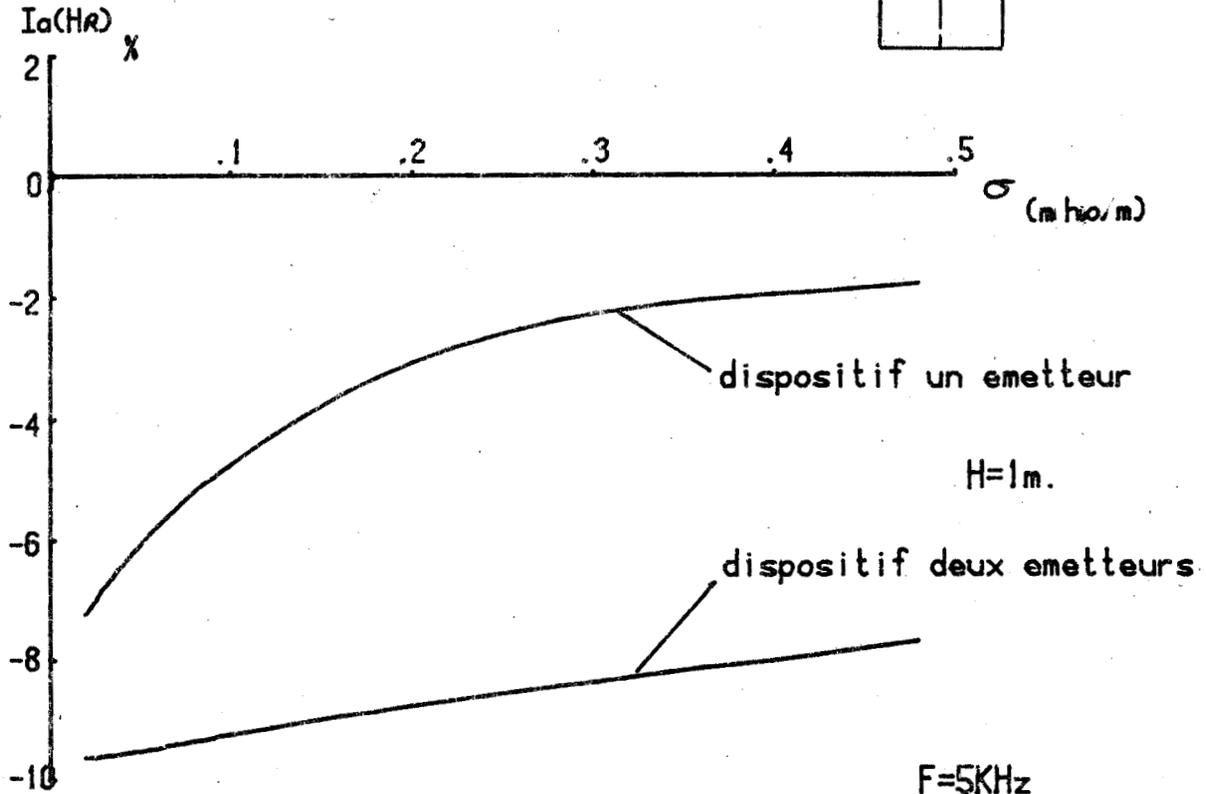
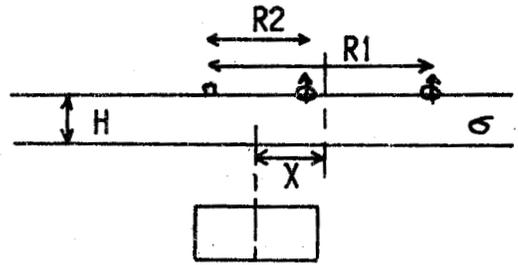
Le dispositif "2 émetteurs" permet donc, d'une part, d'augmenter légèrement la réponse de l'anomalie et d'autre part, de "filtrer" une couche superficielle de terrain.

ETUDE DE LA VARIATION DE LA CONDUCTIVITE ET DE L EPAISSEUR DE LA COUCHE SUPERFICIELLE (2 EMETTEURS COUPLES)

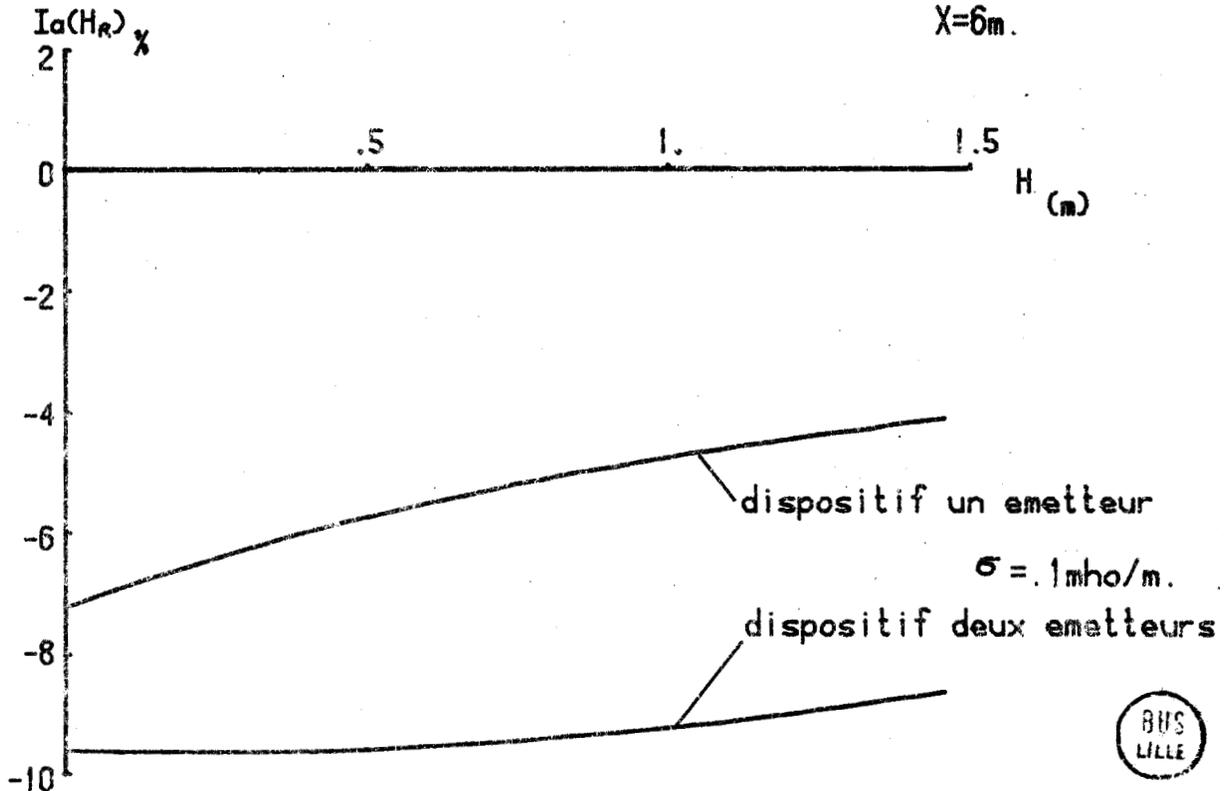


$F = 5$ KHz
 $R_1 = 16$ m.
 $R_2 = 6$ m.
 $\sigma_2 = 0.02$ mho/m.





$F=5KHz$
 $R1=16m.$
 $R2=6m.$
 $X=6m.$



II. 4 - ETUDE DE LA VARIATION DE L'ÉPAISSEUR DE LA COUCHE SUPERFICIELLE

Nous allons maintenant aborder une structure de terrain un peu plus complexe. Nous allons supposer que la couche superficielle de terrain présente une variation d'épaisseur non négligeable.

La Figure 5 représente une structure géologique où la couche superficielle présente une augmentation puis une diminution de son épaisseur.

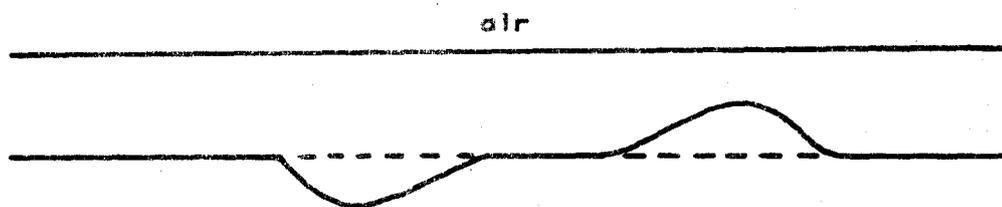


Figure - 5 -

II. 4-1 - Limitation due à la structure des modèles utilisés

Dans le paragraphe précédent nous avons montré qu'un dispositif de 2 émetteurs couplés peut filtrer une couche homogène ayant jusqu'à 2 m d'épaisseur. Dans ces conditions une anomalie enterrée est toujours décelable. Le seul moyen de simuler une variation d'épaisseur est de représenter cette variation par une anomalie collée à l'interface inférieure de la couche.

Mais le modèle numérique dont nous disposons ne nous permet pas de simuler un milieu à deux terrains contenant deux anomalies de conductivité différente enterrées dans le substratum, à savoir une première

collée à l'interface inférieur de la couche superficielle et ayant la même conductivité que celle-ci et une anomalie de conductivité nulle plus profondément enterrée représentant une sape par exemple.

Dans cette partie nous nous sommes donc limité à étudier l'influence d'une variation d'épaisseur sur le champ primaire rayonné par la ou les boucles dans le milieu sans anomalie.

De plus nous n'avons pas la possibilité de simuler une remontée du socle. En effet, pour ce faire, il faudrait introduire dans la première couche une anomalie de même conductivité que celle du substratum, représentant la variation d'épaisseur de cette couche. Le fait de placer l'anomalie non plus dans le substratum mais dans la lère couche nous obligerait à établir les expressions des nouvelles fonctions de GREEN d'une façon similaire au chapitre I. Ceci constitue une extension possible de notre modèle.

Nous n'allons donc aborder que le cas d'une augmentation de l'épaisseur de la couche superficielle.

Les paramètres de prospection (fréquence, distance émetteur-récepteur) sont ceux utilisés pour détecter les sapes dont nous avons parlé dans les paragraphes précédents.

Nous allons envisager le cas où la variation d'épaisseur se produit sur une distance petite devant la distance émetteur-récepteur, et ensuite le cas contraire.

II. 4-2 - La variation d'épaisseur se produit sur une distance petite devant la distance émetteur-récepteur

Pour ce faire, nous avons représenté cette variation d'épaisseur par une petite anomalie de 4 m sur 4 m et de 50 cm de hauteur collée à une couche superficielle de 1 m d'épaisseur (figure 6)

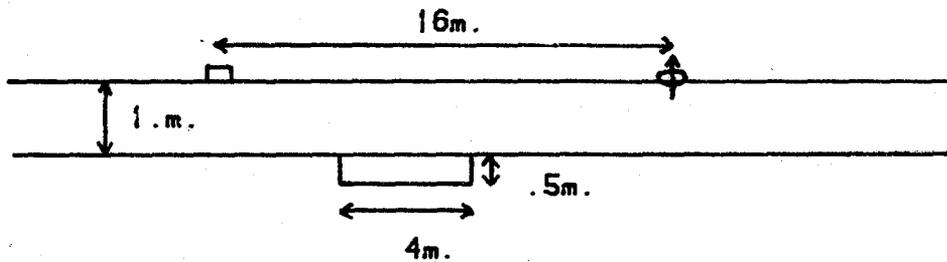


Figure - 6 -

La planche XI nous donne la réponse d'une telle anomalie excitée successivement par un dispositif composé d'un émetteur unique (méthode "dipôle-dipôle" classique) et par un dispositif composé de deux émetteurs couplés.

Nous allons tout d'abord donner deux définitions : on appellera respectivement "effet émetteur" et "effet récepteur" la réponse de l'anomalie quand l'émetteur ou le récepteur passe au dessus de celle-ci.

Etudions les deux courbes de la planche XI :

Cas de l'émetteur unique

La distance émetteur-récepteur (16 m) étant grande devant la longueur de l'anomalie (4 m), on peut distinguer nettement l'effet émetteur de l'effet récepteur.

L'effet émetteur (intervalle |A B|) a l'allure d'une portion de sinusoïde, et passe par zéro quand l'émetteur est au dessus de l'anomalie. Par contre, l'effet récepteur (intervalle |C D|) a l'allure d'une courbe de résonance ayant son maximum quand le récepteur passe au milieu de l'anomalie.

On remarque que ces deux effets sont du même ordre de grandeur. Mais quand on enfonce l'anomalie plus profondément ce phénomène est moins net. L'effet récepteur devient prépondérant devant l'effet émetteur. On peut comparer aux courbes de la planche I où l'on note une légère bosse due à l'effet émetteur.

Cas des deux émetteurs couplés

On retrouve sur cette courbe distinctement les deux effets. L'effet émetteur voit son intensité quasiment doublée et accuse une remontée (intervalle |A'B'|) quand l'émetteur secondaire passe au dessus du centre de l'anomalie. Par contre, l'effet récepteur est presque nul. Ceci confirme bien les affirmations des paragraphes précédents relatives au fonctionnement du "dispositif à deux émetteurs" qui permet d'éliminer en partie les courants induits au voisinage du récepteur.

Ce système est donc plus sensible à la présence de petites hétérogénéités conductrices sous l'émetteur, que le dispositif composé d'un seul émetteur, par contre une telle anomalie n'est pas détectable si elle est à proximité du récepteur.

II. 4-3 - La variation d'épaisseur se produit sur une distance grande devant la distance émetteur-récepteur

Pour représenter une telle configuration, il faudrait coller à l'interface inférieur de la couche superficielle une anomalie de grande taille. Ceci suppose que l'on puisse découper cette anomalie en un nombre important de mailles (> 100). Or, principalement pour des raisons de temps calcul, notre modèle stratifié ne nous permet pas de traiter un tel cas.

Une autre solution serait d'utiliser le modèle milieu homogène¹³ avec lequel on peut simuler des volumes importants, et de donner à l'anomalie la forme suivante (Figure 7)

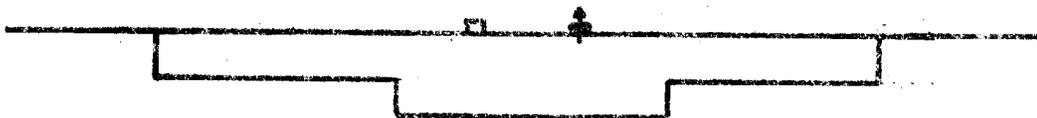
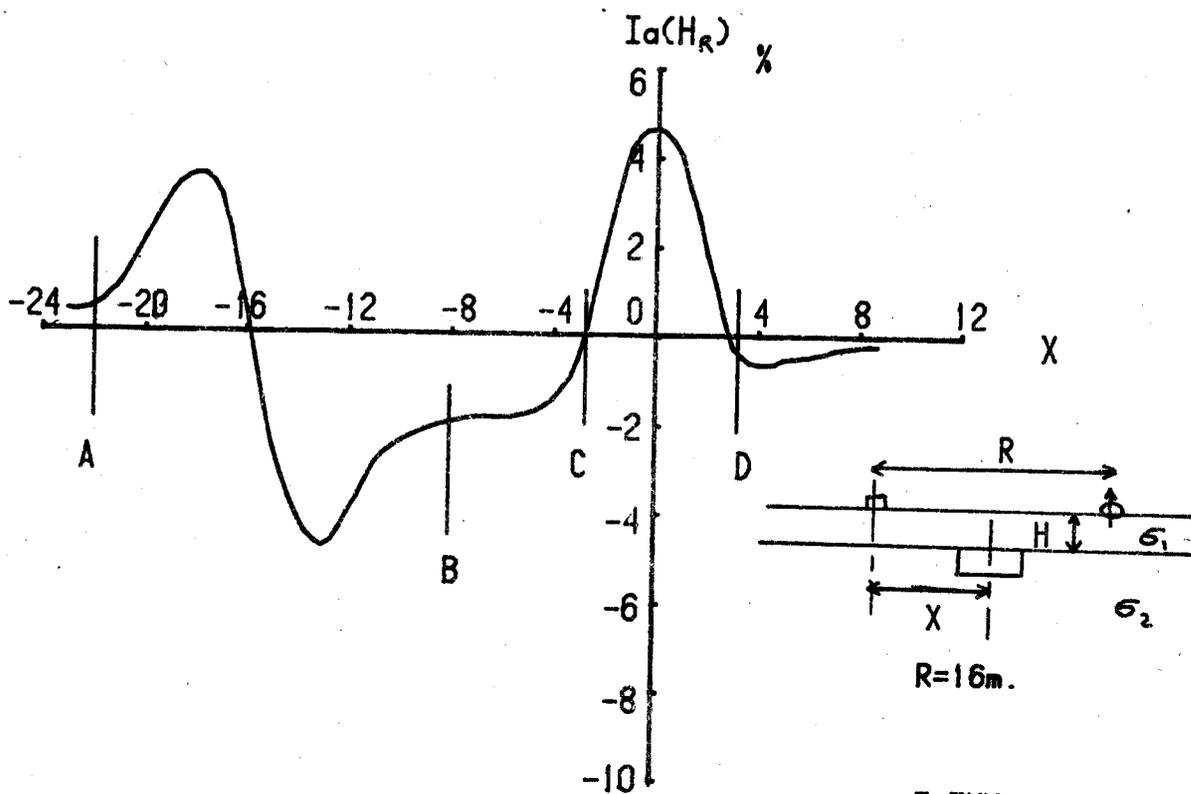


Figure - 7 -



F=5KHz
 $\sigma_1 = .1 \text{ mho/m.}$
 $\sigma_2 = .02 \text{ mho/m.}$

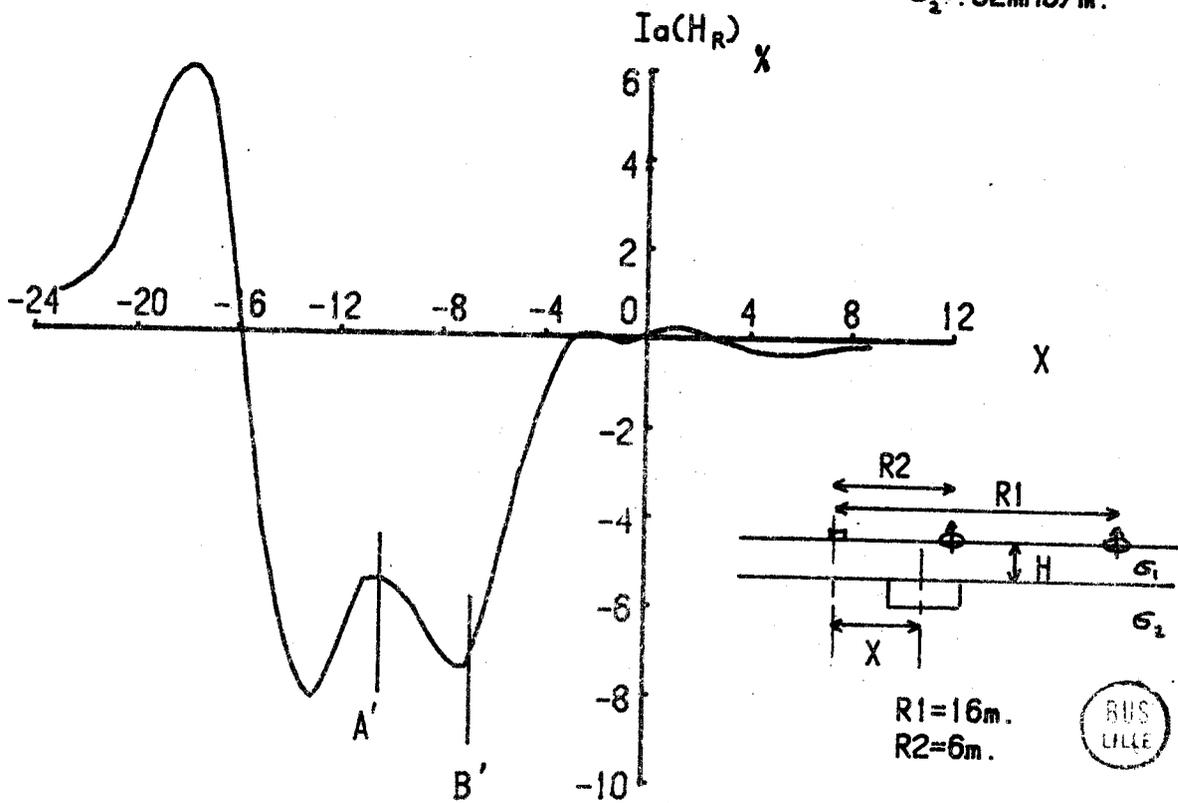


PLANCHE XI

Dans ce cas, le fait que l'émetteur "colle" à l'anomalie pose un gros problème. En effet, le gradient de champ électrique au voisinage de l'émetteur est important et nous serions obligés de découper l'anomalie en un nombre très important de mailles pour avoir un procédé de calcul qui converge ^[18].

Nous nous sommes donc limité à étudier l'évolution du champ primaire en fonction de l'épaisseur de la couche superficielle en utilisant les dispositifs 1 émetteur et 2 émetteurs. Nous présentons ces résultats sur la planche XII.

Nous remarquons que le champ primaire augmente de 20 % en utilisant un dispositif 2 émetteurs, quand la couche passe d'une épaisseur de 0 m à 2 m.

Considérons la structure suivante : (Figure 8)

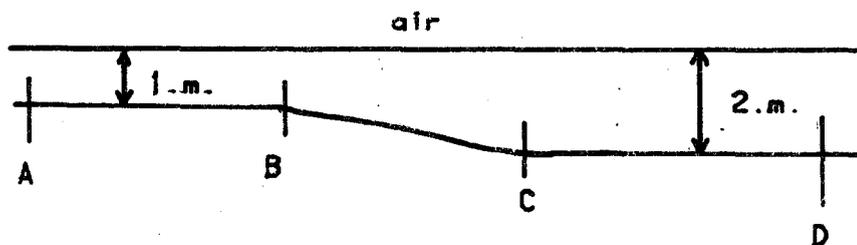
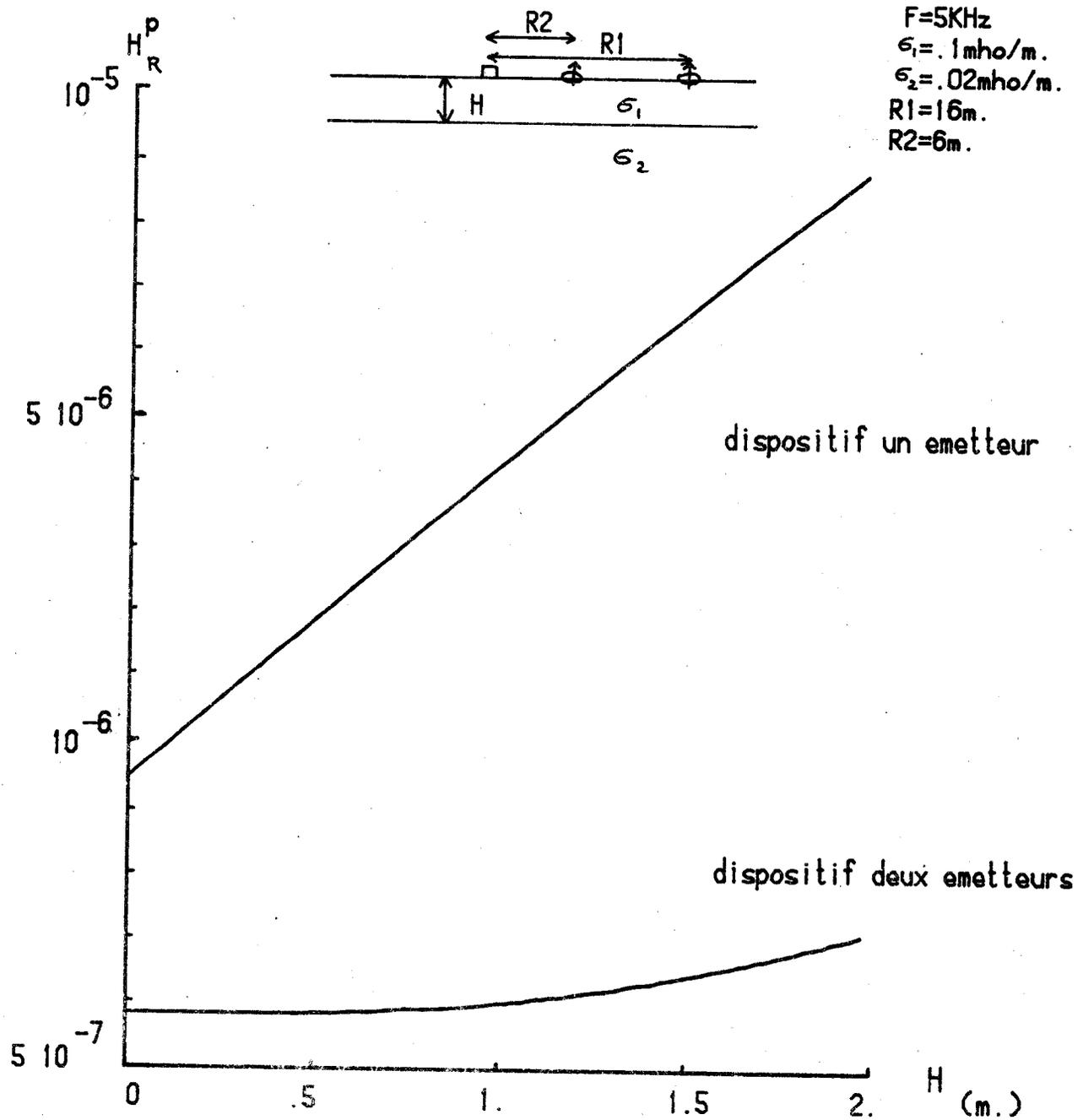


Figure - 8 -

Si l'intervalle $|B C|$ est grand devant la distance émetteur-récepteur, le champ primaire devrait évoluer d'une façon lente de la valeur obtenue avec une couche homogène de 1 m jusqu'à la valeur obtenue avec une couche de 2 m.

Dans ce cas, la variation du champ magnétique due à la présence d'une anomalie enterrée devrait donc se manifester par une variation locale se superposant à la variation lente du champ primaire.

ETUDE DE L INFLUENCE DE L EPAISSEUR DE LA COUCHE SUPERFICIELLE
SUR LE CHAMP MAGNETIQUE PRIMAIRE H_R^P



C H A P I T R E I I I

VERIFICATION NUMERIQUE ET EXPERIMENTALE DES MODELES NUMERIQUES UTILISES

Au cours de notre travail nous avons utilisé deux modèles numériques permettant de simuler l'influence d'une anomalie sur le champ électromagnétique rayonné par une boucle magnétique horizontale. Dans l'un des modèles "modèle milieu homogène" l'hétérogénéité est enterrée dans un demi-milieu homogène, et dans le deuxième, "modèle milieu stratifié", elle est enterrée dans un terrain stratifié à deux couches.

Il faut tout d'abord noter que nos deux modèles donnent des résultats analogues quand dans le modèle stratifié on affecte à la conductivité de la première couche la même valeur qu'à celle du substratum.

De plus, des expériences faites dans notre Laboratoire sur cuve analogique en champ électrique ont montré une bonne corrélation avec les résultats obtenus avec le modèle milieu homogène³.

Il nous paraît intéressant de donner quelques éléments de comparaison avec les résultats que l'on peut trouver dans la littérature.

Nous avons choisi deux nouvelles vérifications avec deux auteurs étrangers :

- une vérification numérique en se référant aux résultats obtenus par HOHMANN⁴

- une vérification expérimentale en comparant aux nôtres les résultats donnés par GAUR, VERMA et GUPTA^{[16][17]} qui ont développé une étude analogue à la notre sur cuve rhéographique tridimensionnelle.

Le premier exemple nous permet de confirmer la validité de notre modèle tridimensionnel en milieu homogène, tandis que le deuxième, simulant une prospection aéroportée, nous permet de vérifier notre modèle en milieu stratifié.

Les courbes que nous avons tracées, représentent la variation du rapport H_Z^S/H_Z^n en fonction de la distance x séparant le milieu de l'anomalie du milieu du dispositif émetteur-récepteur.

H_Z^S est le champ magnétique vertical diffracté par l'anomalie à la surface du sol.

H_Z^n est le champ magnétique rayonné par une boucle dans un milieu homogène ayant les caractéristiques électromagnétiques de l'air.

Dans l'approximation des très basses fréquences H_Z^n est donné par la relation suivante :

$$H_Z^n = \frac{I}{4\pi R^3}$$

où

I : est l'intensité du courant parcourant la boucle d'émission

R : est la distance horizontale séparant l'émetteur du point de réception.

III. 1 - VERIFICATION NUMERIQUE

HOHMANN^[4], dans l'article auquel nous faisons référence, a étudié la configuration décrite sur la Figure 1.

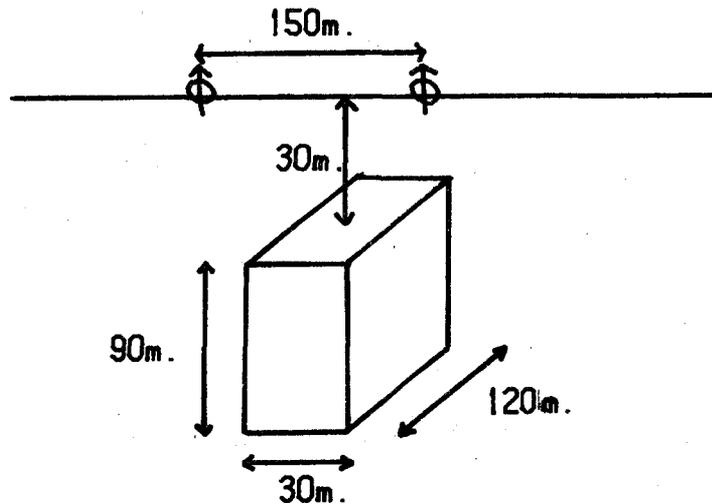


Figure - 1 -

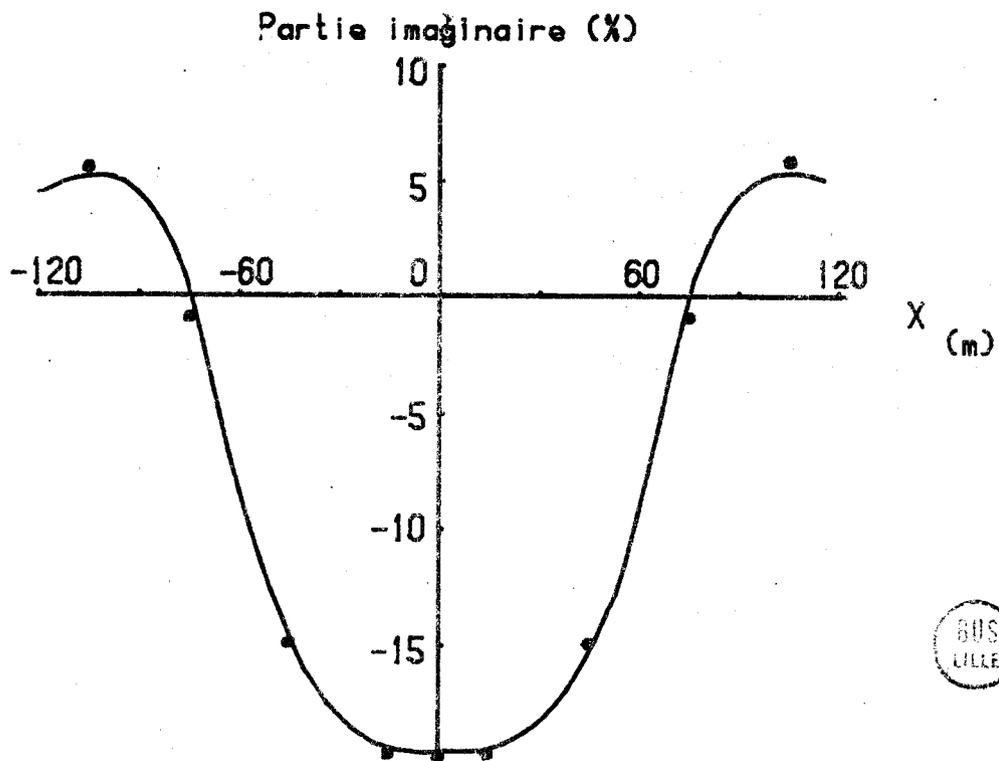
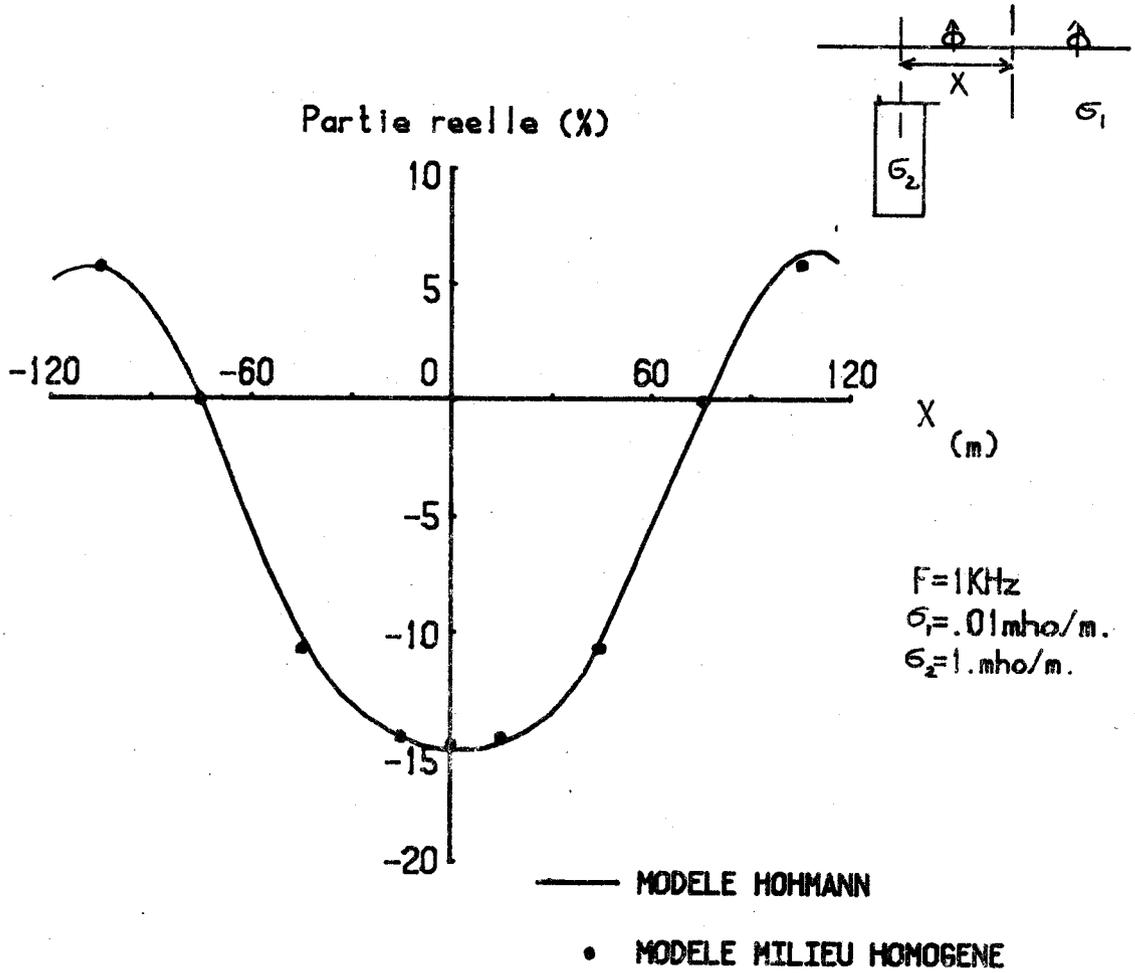
Nous avons simulé cette anomalie conductrice en utilisant le même découpage qu'HOHMANN : soit 96 mailles (2x8x6).

Nous présentons sur la planche XIII les résultats d'HOHMANN et ceux obtenus avec le modèle milieu homogène^[3].

III. 2 - VERIFICATION EXPERIMENTALE

GAUR, VERMA et GUPTA, dans deux articles^{[16][17]} décrivent un modèle analogique leur permettant de simuler une prospection aéroportée.

VERIFICATION NUMERIQUE DU MODELE MILIEU HOMOGENE



Nous avons choisi comme élément de comparaison la configuration suivante (p 599 de ¹⁶)

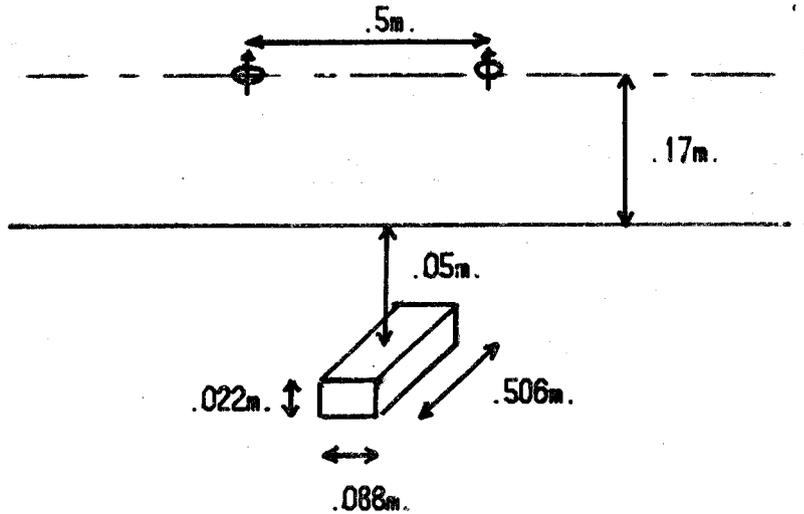


Figure - 2 -

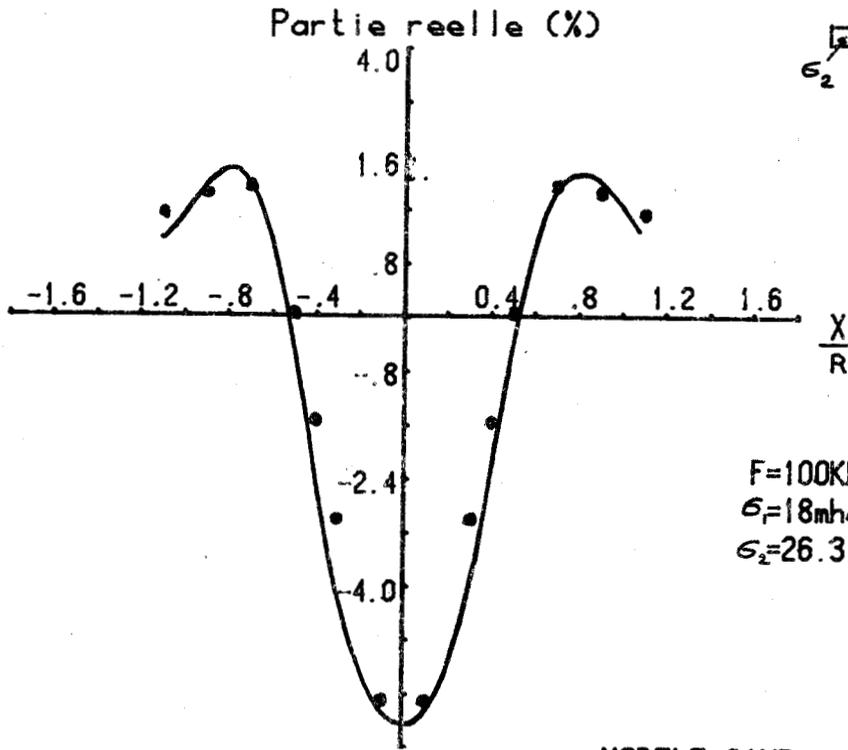
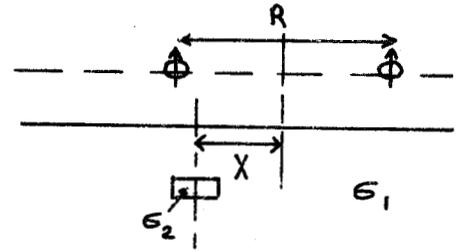
Dans ce cas, nous avons utilisé notre modèle stratifié en assimilant la première couche à la tranche d'air comprise entre la surface de l'électrolyte et le dispositif émetteur-récepteur. Il nous a fallu diviser le parallélépipède considéré en 18 mailles.

La planche XIV nous montre qu'un modèle analogique nous donne des résultats identiques à ceux obtenus avec un modèle numérique simulant une structure analogue.

Toutes ces vérifications nous permettent de confirmer la validité des résultats obtenus avec nos deux modèles numériques.



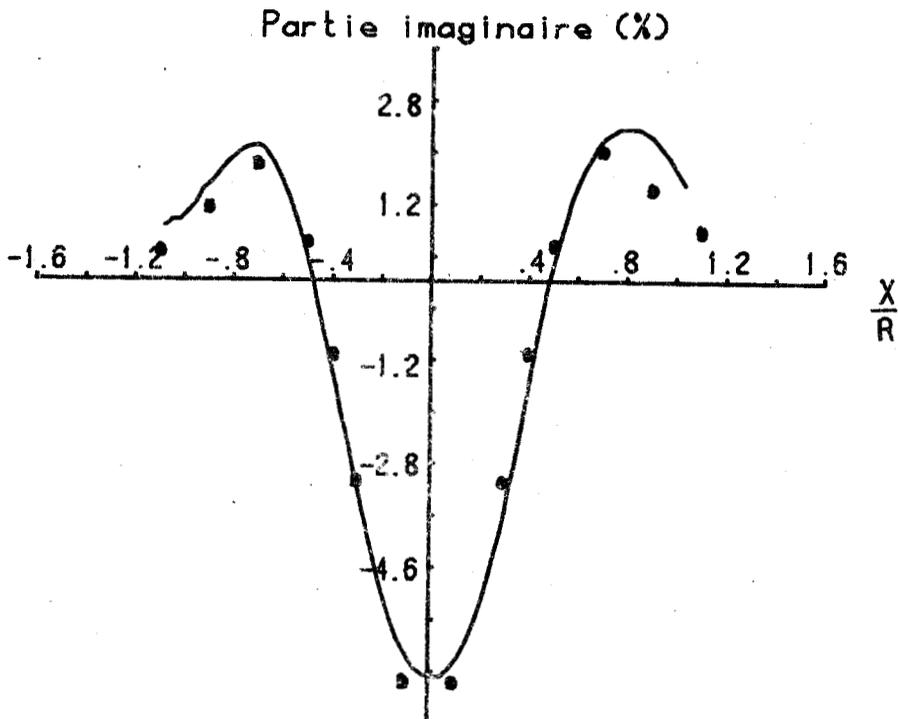
VERIFICATION EXPERIMENTALE DU MODELE MILIEU STRATIFIE



F=100KHz
 $\sigma_1=18\text{mho/m.}$
 $\sigma_2=26.3 \cdot 10^3\text{mho/m.}$

— MODELE GAUR

• MODELE MILIEU STRATIFIE



- 16 V. K. GAUR, O.P. VERMA, C.P. GUPTA
"Enhancement of electromagnetic anomalies by a conducting overburden"
1971, Geophysical prospecting - vol. 20 - p. 580-605
- 17 V.K. GAUR, O.P. VERMA
"Enhancement of electromagnetic anomalies by a conducting overburden II"
1973, geophysical prospecting - vol. 21 - p. 159-184
- 18 J.L. MARTIN
"Etude théorique de l'influence de la topologie du terrain sur le champ électromagnétique rayonné par un dipôle électrique horizontal placé à la surface du sol"
Juillet 1976 - D.E.A. Université de LILLE I

OUVRAGES CONSULTÉS

F.C. FRISCHKNETCH

"Electromagnetic probing in geophysics. Electromagnetic scale modelling"
1971, the golden press., Boulder - Colorado - J.R. WAIT (éditeur)

I.B. HILDEBRAND

"Introduction to numerical analysis" - 1966, Mc. GRAW-HILL Book Company

A. BANDS

"Dipole radiation in the présence of a conducting half space"
Pergamon Press - 1966

A. DEY, H.F. MORRISSON

"Electromagnetic response of two-dimensional inhomogeneities in a dissipative half space for turam interpretation". May 1972 - Geophysics - vol. 36.n° 1
p. 340 à 365

A N N E X E 1

-:--:--:--

CALCUL DES INTEGRALES DE VOLUME

Nous avons à calculer des intégrales de la forme suivante :

$$I = \int_{\Delta V} G \, dv$$

Nous avons vu que l'on pouvait transformer ces intégrales triples en intégrales doubles ou simples.

L'emploi d'une quadrature de GAUSS s'est révélée suffisante. En effet, les intégrands sont suffisamment réguliers sur le domaine d'intégration pour que l'on puisse fixer le nombre d'appels de fonctions afin d'obtenir une précision donnée.

Nous avons utilisé une quadrature dite de GAUSS-LEGENDRE^[11] qui s'écrit :

$$\int_{-1}^1 f(x) \, dx = \sum_{K=1}^n H_K f(x_K)$$

x_K et H_K sont respectivement les abscisses et poids de la quadrature de GAUSS-LEGENDRE en n points. Appliquée à un intervalle $|a \, b|$ elle s'écrit :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \frac{b-a}{2} \sum_{K=1}^n H_K f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} x_K\right)$$

Nous utiliserons donc cette quadrature pour les intégrales simples et nous l'appliquerons 2 fois pour les intégrales doubles.

Une étude paramétrique nous a permis de choisir l'ordre de cette quadrature. Une quadrature en 2 points suffit pour les fonctions de GREEN secondaires et nous avons utilisé une quadrature en 4 points pour les fonctions de GREEN primaires.

A N N E X E 2

-:~::~:~::~:~::~:~::~:~::~:~::~:~::~:-

CALCUL DES INTEGRALES de SOMMERFIELD

Les intégrales de SOMMERFIELD que nous devons calculer sont de la forme suivante :

$$I = \int_0^{\infty} f(\lambda) e^{uz} J(\lambda r) d\lambda$$

z et r sont respectivement la côte et la distance horizontale définies sur la figure 1.

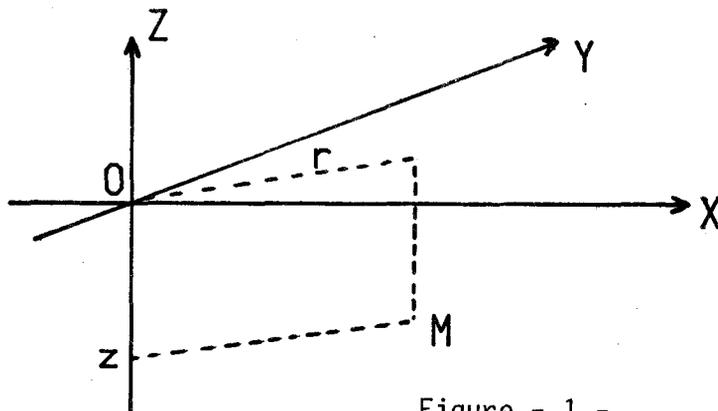


Figure - 1 -

J : fonction de BESSEL d'ordre 0 ou 1

$$u = \sqrt{\lambda^2 + \gamma^2} \quad R(u) > 0$$

$\gamma^2 = j\omega\mu\sigma$ constante de propagation

f : fraction rationnelle dépendant de λ

La méthode d'intégration que nous allons développer est adaptée aux conditions d'exploitation de notre modèle numérique.

La distance horizontale r varie de 1 m à quelques centaines de mètres, et la fréquence de 1 Hz à 100 KHz.

Ces restrictions paramétriques nous permettent de définir d'une façon assez précise le comportement de l'intégrant.

La fonction de BESSEL est une fonction oscillante lentement décroissante dont on connaît parfaitement les zéros.

Le facteur u devenant rapidement réel dans ces conditions de fréquence, le comportement sinusoïdal de l'exponentielle e^{uz} est négligeable devant celui de la fonction de BESSEL. Le terme e^{uz} a donc un comportement essentiellement exponentiel réel.

- La fonction f est une fonction qui ne présente pas de pôles proches de l'axe réel et qui a un comportement en $1/\lambda_n$ ($n=0,1,2,3$).

Nous pouvons donc avoir deux comportements extrêmes de l'intégrant suivant la valeur du rapport z/r .

Si ce rapport a une valeur très grande l'intégrant va avoir un comportement essentiellement exponentiel.

Si ce rapport est nul, l'intégrant aura un comportement sinusoïdal dont la décroissance sera donnée par $f(\lambda)$.

Nous illustrons ces deux cas en étudiant une intégrale dont on connaît le résultat analytique :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{uz}}{u} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda = \frac{e^{-\lambda R}}{R}$$

avec : $R = \sqrt{r^2 + z^2}$

Nous avons tracé sur les figures 2 et 3 le comportement de la partie réelle et de la partie imaginaire de l'intégrant en faisant varier r pour un R fixé. Ce qui revient à déplacer le point d'observation sur un quart de cercle centré en 0 et de rayon R . La valeur de l'intégrale est donc toujours la même.

Sur la figure 2, nous représentons le comportement de la partie réelle de l'intégrant en fonction de la variable d'intégration λ .

On note bien l'évolution du comportement de l'intégrant qui passe d'un comportement sinusoïdal lentement décroissant à un comportement essentiellement exponentiel.

COMPORTEMENT DE L INTEGRANT EN FONCTION DU RAPPORT Z/R

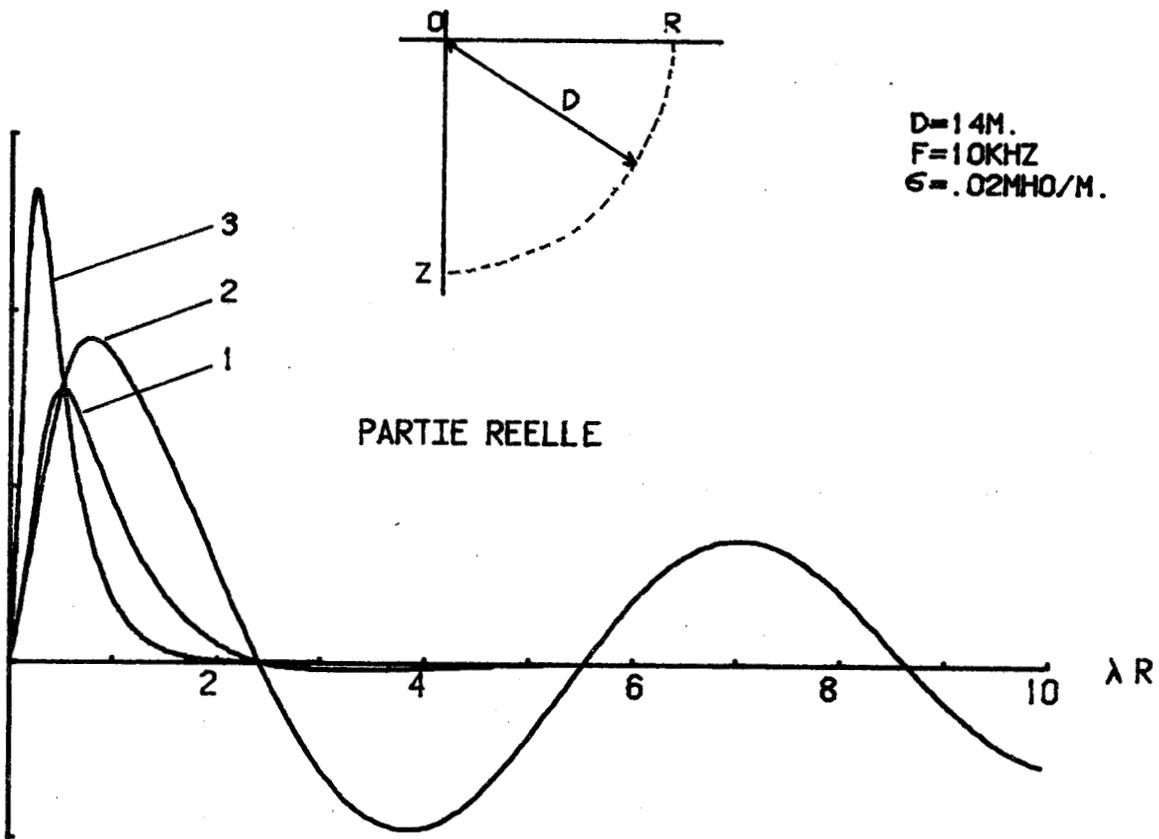


FIGURE -2-

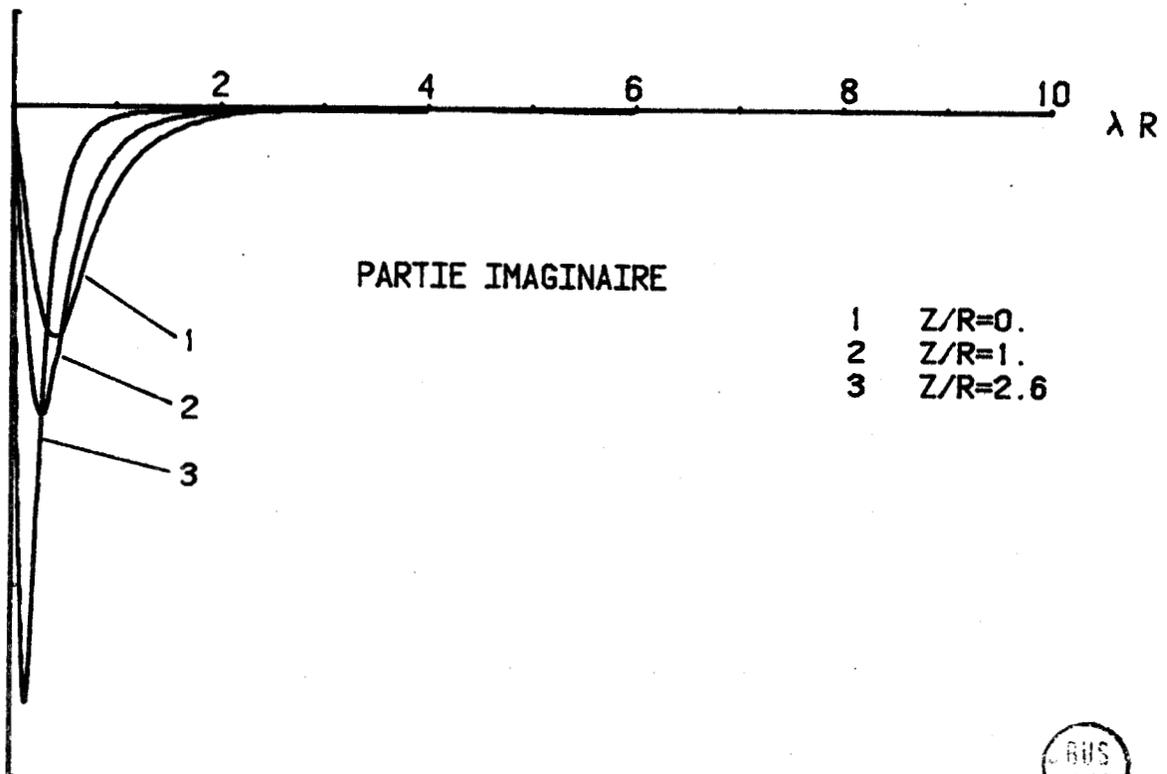


FIGURE -3-



La partie imaginaire représentée sur la figure 3 a un comportement essentiellement exponentiel, qui vient du fait que dans le domaine de variation de nos paramètres physiques, le facteur u devient rapidement réel et il en est donc de même pour l'intégrant.

On note que sur la 1ère arche de la fonction de BESSEL, c'est-à-dire entre l'abscisse 0 et celle du 1er zéro de la fonction de BESSEL la partie réelle et la partie imaginaire a un comportement semblable quelque soit la valeur du rapport z/r .

Il paraît donc possible d'intégrer cette fonction complexe sans séparer partie réelle et partie imaginaire ce qui évite un développement analytique lourd.

Nous avons donc étudié 2 procédures d'intégrations l'une permettant d'intégrer une fonction oscillante lentement décroissante, l'autre permettant d'intégrer une fonction à comportement fortement exponentiel, dans ce cas, toute l'information est concentrée sur un intervalle de largeur très faible.

Chacune de ces procédures gère 3 modules d'intégration de base :

- règle de SIMPSON
- règle des TRAPEZES
- quadrature de GAUSS-LEGENDRE.

Dans le cas des quadratures de NEWTON-COTES (Simpson et les trapèzes) nous avons appliqué des extrapolations qui permettent donc d'atteindre le résultat avec la précision demandée plus rapidement, pour une masse de calcul analogue.

Nous avons utilisé l'extrapolation de RICHARDSON^[11] pour Simpson et l'algorithme de ROMBERG pour les trapèzes.

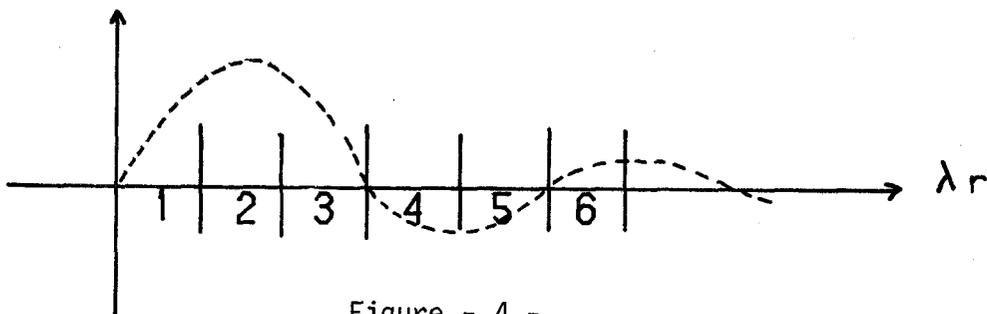


Figure - 4 -

Nous verrons par la suite que l'on intégrera la fonction sur un certain nombre de segments numérotés par exemple comme sur la figure 4.

La contribution d'un intervalle pouvant être d'un ordre de grandeur différent de la contribution d'un autre intervalle, nous avons défini une précision dynamique que nous avons appliquée aux quadratures de NEWTON-COTES.

Supposons que l'on intègre la fonction sur les intervalles 1,2,3... l'intégration sur l'intervalle 1 se fera en demandant une précision relative EPS. Nous définissons alors une précision absolue sur la partie réelle et sur la partie imaginaire fonction du résultat et de EPS. L'intégration sur le 2ème intervalle se fera donc en précision absolue. En cours de calcul nous estimons l'ordre de grandeur du résultat. S'il est supérieur au résultat de l'intégration sur l'intervalle précédent nous continuons le calcul avec la précision relative EPS, sinon nous continuons avec la précision absolue que nous nous sommes définies. Et de même pour les intervalles suivants.

Nous allons maintenant décrire les 2 modules d'intégration mis au point pour les 2 comportements extrêmes de l'intégrant.

1 - Cas du comportement exponentiel de l'intégrant

Ce cas correspond à une valeur grande du rapport z/r . L'information est concentrée sur un intervalle qui peut être très étroit.

Nous avons donc utilisé un découpage logarithmique que nous avons déterminé expérimentalement. Nous appliquons la règle de Simpson sur chacun de ces intervalles, le test de sortie se faisant en comparant le résultat de l'intégration sur un intervalle à la somme des résultats de l'intégration sur les intervalles précédents.

Les résultats obtenus se sont montrés satisfaisant dans la zone de variation de nos paramètres physiques.

2 - Cas du comportement oscillant lentement décroissant de l'intégrant

La procédure mise au point est basée sur la méthode d'accélération de convergence de GRAY-ATCHISON^{|12|}. Nous allons tout d'abord décrire brièvement cette méthode.

Soit à calculer l'intégrale $I = \int_a^{\infty} f(x) dx$

où f est une fonction réelle oscillante lentement décroissante.

Soit $F(T) = \int_a^T f(x) dx$ une fonction qui tend vers S quand $T \rightarrow \infty$

On pose $R(T, K) = f \frac{(T+K)}{f(T)}$ avec $f(T) \neq 0$ $K > 0$

Si il existe K tel que $R(T, K) \rightarrow R(K) \neq 1$

on définit la transformation linéaire suivante qui est la base de cette méthode :

$$G(F, T, K) = \frac{F(T + K) - R(T, K) F(T)}{1 - R(T, K)}$$

On montre aussi que dans ce cas G converge vers S et plus rapidement que F .

A partir de la série $F(T), F(T+K), \dots F(T+nK)$ nous allons donc construire une série $G(F, T, K) \dots$ qui converge plus vite.

Cette "G Transformation" peut se généraliser à une "Gn transformation"^{|13| |14|} en construisant une suite de séries parentes qui convergent plus vite.

C'est cette "Gn transformation" que nous avons mis en oeuvre, Nous l'avons appliquée séparément à la partie réelle et à la partie imaginaire de la fonction.

Il nous reste à déterminer les 2 paramètres K et T .

Le paramètre K doit être tel que :

$$R(K) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{f(T+K)}{f(T)}$$

On peut exprimer l'intégrant sous la forme :

$$f(T) = g(T) J_n(Tr) \quad n = 0 \quad 1$$

$$g(T) \text{ est telle que } g \frac{(T+K)}{g(T)} \rightarrow 1 \text{ quand } T \rightarrow \infty$$

$$J_n(T_r) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi T_r}} \cos\left(T_r - \frac{i\pi}{4}\right) \text{ quand } T \rightarrow \infty$$

$$\begin{array}{ll} i = 1 & \text{si } n = 0 \\ i = 3 & \text{si } n = 1 \end{array}$$

on a alors :

$$R(K) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\cos(T_r + K - i\pi/4)}{\cos(T_r - i\pi/4)}$$

On remarque que $K = \pi$ nous donne dans tous les cas $R(K) = -1$.

Nous choisirons donc $K = T$.

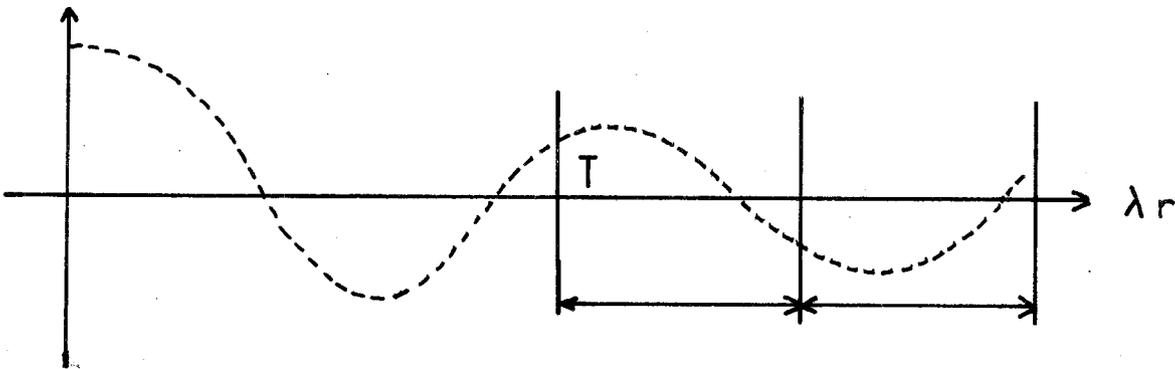


Figure - 5 -

T a été choisi expérimentalement :

Dans le cas où J_0 intervient : $T = 2\pi$
" où J_1 intervient : $T = 5\pi/2$



Nous devons donc intégrer la fonction de 0 à T puis de T à T + K. Sur les intervalles (T, T+K) ... la fonction a un comportement suffisamment régulier pour que l'on puisse utiliser une quadrature de GAUSS-LEGENDRE.

Nous avons choisi une quadrature en 8 points.

L'intégration de 0 à T se fait sur plusieurs intégrales qui ont été déterminées de façon expérimentale.

On découpe la 1ère arche en 4 intervalles, la 2e en 2 intervalles. On applique la règle de Simpson sur le 1er intervalle et la règle des trapèzes sur les suivants.

Nous donnons un exemple d'application de notre méthode d'intégration sur la fonction $\frac{e^{uz}}{u} J_0(\lambda r)\lambda$ dont le résultat est la fonction $\frac{e^{-\gamma R}}{R}$.

Nous faisons varier le rapport z/r pour un R fixe, où $R = \sqrt{z^2 + r^2}$.

Pour chacun des résultats nous donnons le nombre d'appel de fonction ainsi que la précision obtenue sur la partie réelle et sur la partie imaginaire.

Z/R	NB APPEL DE F	ERR, R	ERR, I
0/50	215	-.302E-06	.302E-07
2/48	207	-.116E-06	.215E-07
4/46	207	-.333E-07	.495E-08
6/44	199	-.469E-07	.416E-07
8/42	199	-.220E-07	.157E-07
10/40	199	-.928E-08	.609E-08
12/38	191	.311E-06	.147E-06
14/36	191	.148E-06	.688E-07
16/34	191	.697E-07	.313E-07
18/32	191	.325E-07	.135E-07
20/30	191	.149E-07	.519E-08
22/28	191	.652E-08	.132E-08
24/26	191	.218E-08	-.445E-09
26/24	191	-.499E-09	-.114E-08
28/22	191	-.256E-08	-.117E-08
30/20	191	-.424E-08	-.639E-09
32/18	207	-.346E-08	.412E-09
34/16	207	-.253E-08	.123E-08
36/14	199	.263E-08	.212E-08
38/12	215	.215E-08	.142E-08
40/10	215	.271E-08	.426E-09
42/ 8	167	-.113E-05	-.405E-07
44/ 6	167	-.804E-07	-.325E-08
46/ 4	199	-.932E-09	.706E-09
48/ 2	166	-.771E-09	.477E-09
50/ 0	179	.213E-08	.198E-08

F = 10 KHz
R = 40 m
EPS= 10⁻⁶

A N N E X E 3

---:---:---:---

OPTIMISATION DU CALCUL DES ELEMENTS DE LA MATRICE A

Nous avons montré dans le § 6 du chapitre 1, qu'il suffit de connaître les éléments de 6 blocs diagonaux supérieurs pour connaître entièrement la matrice des intégrales des fonctions de GREEN.

Nous rappelons que chaque bloc, de dimension N, est composé d'éléments a_{ij} qui sont des intégrales de fonctions de GREEN. L'indice i est le numéro de la maille où se déplace le point d'intégration, et l'indice j est le numéro de la maille au centre de laquelle se trouve le point d'observation.

Nous allons tout d'abord nous définir une numérotation des mailles.

Soit une anomalie parallélépipédique composée de N mailles avec

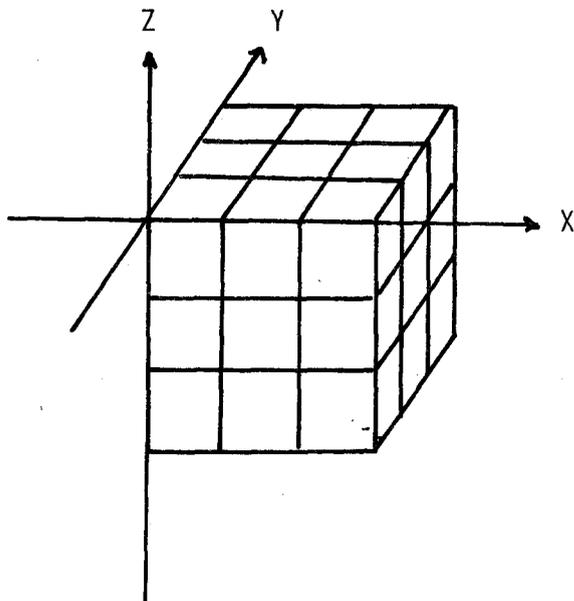
$$N = NX.NY.NZ$$

NX : nombre de mailles suivant la direction OX

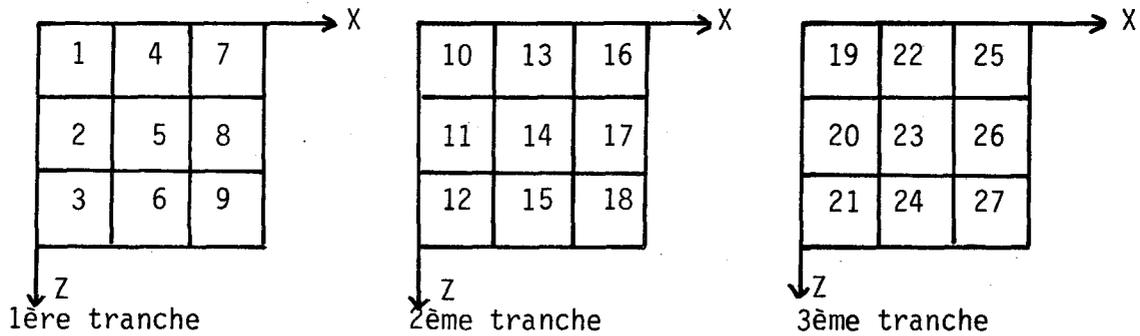
NY : nombre de mailles suivant la direction OY

NZ : nombre de mailles suivant la direction OZ.

Pour simplifier les explications nous allons utiliser une anomalie de 27 mailles (3, 3, 3).



Cette anomalie comporte 3 tranches suivant la direction OY.
 Nous numérotons successivement chacune de ces tranches comme suit :



les éléments d'un bloc vont être rangés de la façon suivante :

$$\begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\
 & a_{22} & \dots & \vdots \\
 & & \dots & \vdots \\
 & & & a_{nn}
 \end{array}$$

un élément a_{ij} correspondra donc à l'influence de la maille i sur la maille j .

Il est important de noter que les coordonnées du point d'observation et celles du point d'intégration apparaissent dans les fonctions de GREEN sous la forme de distances. C'est-à-dire sous les formes :

$x_i - x_j, y_i - y_j, z_i - z_j$ pour les fonctions primaires

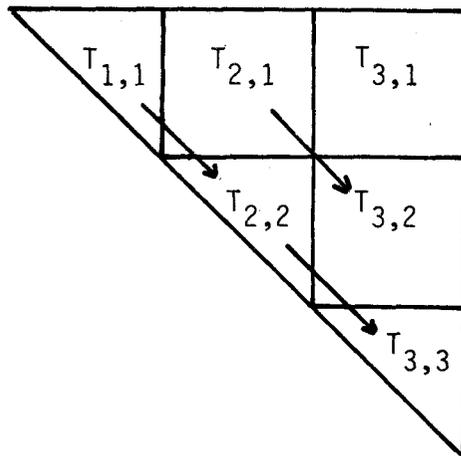
$x_i - x_j, y_i - y_j, z_i + z_j$ pour les fonctions secondaires.

On remarque que, dans ces conditions, l'influence de toutes les mailles de la 1ère tranche sur elles-mêmes sera la même que l'influence de toutes les mailles de la 2ème tranche sur elles-mêmes...

De même, l'influence des mailles de la 2ème tranche sur les mailles de la 1ère tranche sera la même que celle des mailles de la 3ème tranche sur celles de la 2ème tranche.

En effet, dans ces cas, les distances mises en jeu sont identiques.

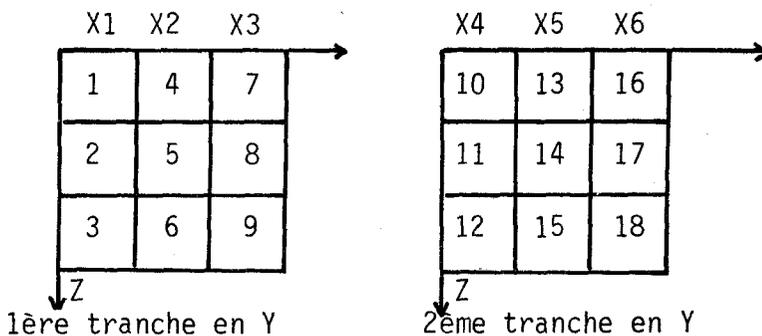
Ces considérations nous montrent qu'il suffit de calculer les éléments correspondants à l'influence des mailles de chaque tranche en Y sur les mailles de la 1ère tranche en Y.



Dans notre exemple il suffit de remplir les 3 tableaux $T_{1,1}$, $T_{2,1}$ et $T_{3,1}$ pour reconstituer le bloc.

Nous devons donc maintenant calculer l'influence des mailles d'une tranche en Y sur celles d'une autre tranche.

Traitons le cas de l'influence des mailles de la 2ème tranche sur celles de la 1ère tranche (tableau $T_{2,1}$). Soit :



Nous découpons chacune de ces tranches en NX tranches suivant OX notées X_j . Dans notre exemple, chacune de ces tranches sera composée de 3 mailles.

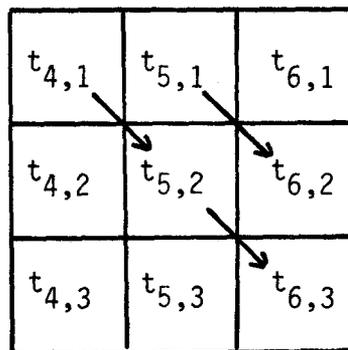
Ce découpage met en évidence 3 propriétés que nous illustrons par 3 exemples :

- l'influence de X_5 sur X_2 est la même que celle de X_4 sur X_1
- l'influence de X_6 sur X_2 est la même que celle de X_5 sur X_1
- l'influence de X_4 sur X_3 est la même que celle de X_6 sur X_1 en changeant $x_i - x_j$ en $x_j - x_i$.

On remarque que le fait de changer $x_i - x_j$ en $x_j - x_i$ dans une intégrale de fonction de GREEN change au plus le signe de cette intégrale.

Ceci implique que le bloc $T_{2,1}$ sera symétrique ou antisymétrique par rapport à sa diagonale principale. Les éléments du bloc $T_{2,1}$ vont être rangés de la façon suivante :

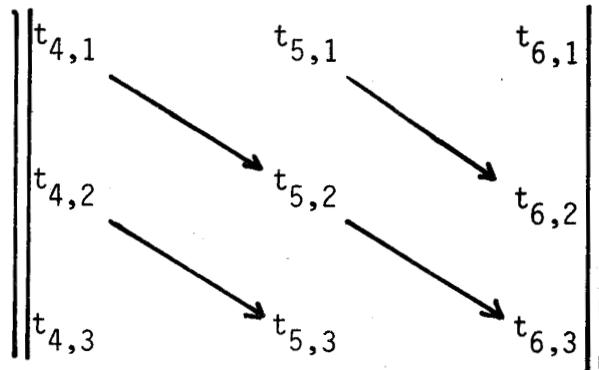
$t_{4,1}$	$t_{5,1}$	$t_{6,1}$
$t_{4,2}$	$t_{5,2}$	$t_{6,2}$
$t_{4,3}$	$t_{5,3}$	$t_{6,3}$



Un bloc t_{ij} correspond à l'influence des mailles de la tranche X_i sur les mailles de la tranche X_j .

Il suffit donc de connaître les éléments des 3 matrices $t_{4,1}$ - $t_{5,1}$ - $t_{6,1}$ pour connaître la matrice $T_{2,1}$.

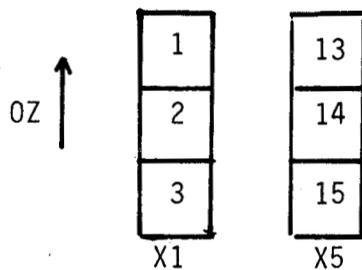
Les blocs vont se transmettre de la façon suivante :



avec une symétrie ou une antisymétrie par rapport à la diagonale principale.

Il ne reste plus qu'à remplir les matrices $t_{4,1}$; $t_{5,1}$; $t_{6,1}$.

Traitons le cas de la matrice $t_{5,1}$. Cette matrice est composée d'éléments correspondant à l'influence des mailles de la tranche X_5 sur celles de la tranche X_1 . Soit :



les éléments de la matrice $t_{5,1}$ vont être rangés de la façon suivante :

$$\begin{vmatrix} a_{13,1} & a_{14,1} & a_{15,1} \\ a_{13,2} & a_{14,2} & a_{15,2} \\ a_{13,3} & a_{14,3} & a_{15,3} \end{vmatrix}$$

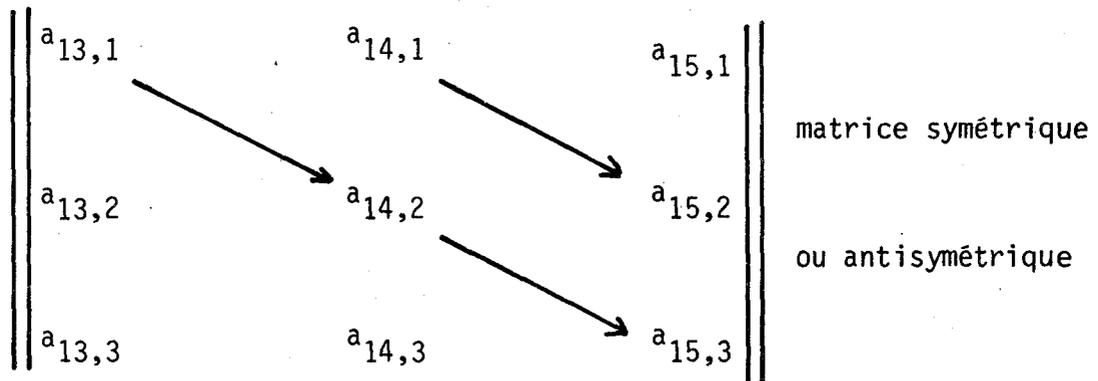
Dans ce cas les distances $x_i - x_j$ seront les mêmes pour toutes les fonctions de GREEN composant un élément a_{ij} . Seules les distances $z_i - z_j$ pour les fonctions primaires et $z_i + z_j$ pour les fonctions secondaires les distingueront. Nous devons donc étudier séparément ces deux cas.

Fonctions de GREEN primaires

On remarque que $a_{15,3} = a_{14,2} = a_{13,1}$, que $a_{15,2} = a_{14,1}$, que $a_{13,3}$ se retrouve à partir de $a_{15,1}$ en changeant $z_i - z_j$ en $z_j - z_i$, ce qui n'affecte au plus que le signe de l'élément.

La matrice $t_{5,1}$ est donc symétrique ou antisymétrique par rapport à sa diagonale principale et il suffit de connaître les éléments $a_{13,1}$, $a_{14,1}$, $a_{15,1}$ soit la 1ère ligne, pour reconstituer cette matrice.

On aura l'organisation suivante :

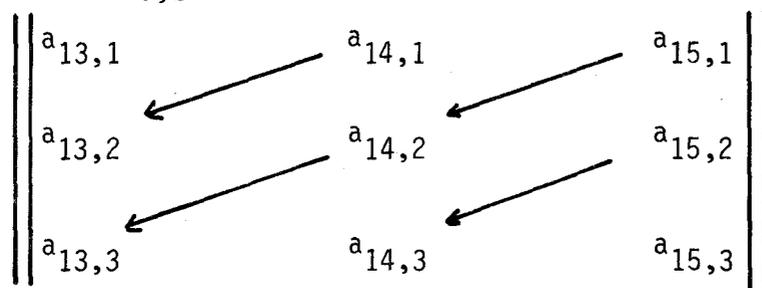


Fonctions de GREEN secondaires

Dans ce cas les côtes du point d'observation et du point d'intégration interviennent sous la forme $z_i + z_j$.

On remarque que $a_{13,2} = a_{14,1}$, $a_{13,3} = a_{14,2} = a_{15,1} = a_{14,3} = a_{15,3}$ la distance $z_i + z_j$ étant la même pour chacun de ces éléments.

Il suffit donc de connaître la 1ère ligne et la dernière colonne de la matrice $t_{5,1}$ pour la connaître en entier :



CONCLUSION :

Pour obtenir les $3 N(3 N + 1)/2$ éléments de la matrice des intégrales des fonctions de GREEN, il suffit de calculer $3 N$ éléments pour les fonctions de GREEN primaires et $3 N + 3 N X.NY.(NZ-1)$ éléments pour les fonctions de GREEN secondaires.

A N N E X E 4

---:---:---:---

RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATION LINEAIRE PAR LA
METHODE CHOLESKI

Soit à résoudre le système $AX = B$

A est une matrice carrée symétrique.

On montre que l'on peut décomposer d'une manière unique la matrice A en un produit de 2 matrices triangulaires.

L'une étant triangulaire inférieure, l'autre est triangulaire supérieure. Ces deux matrices sont transposées l'une de l'autre.

On a donc :

$$A = \bar{M} \cdot M$$

on résoud donc successivement :

$$\bar{M} Y = B$$

puis

$$M X = Y$$

Cette méthode appliquée brutalement demande que la matrice A soit entièrement en mémoire.

Il est possible de l'appliquer à de gros systèmes en divisant la matrice en bloc carrés et en utilisant une résolution de CHOLESKI par blocs.

A N N E X E 5

RAPPELS SUR LA FONCTION de GREEN

1°) UTILISATION DE LA FONCTION DE GREEN

Considérons l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\Delta A - \gamma^2 A = - \alpha \quad (1)$$

En électromagnétisme, une telle équation régit, par exemple, le potentiel de HERTZ dans un volume V limité par une surface S, associé à une distribution de courant quelconque (Figure 1).

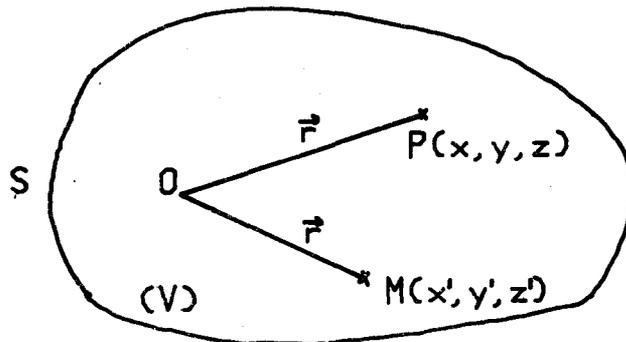


Figure - 1 -

La fonction A vérifie des conditions aux limites du volume V du type NEUMANN ou DIRICHLET.

Une des solutions possibles pour résoudre cette équation est d'appliquer le théorème de GREEN.

L'utilisation de ce théorème nécessite la construction d'une fonction G, appelée "*fonction de GREEN*", vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$(\Delta - \gamma^2) G = - 4 \pi \delta (|\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (2)$$

D'autre part, cette fonction possède un certain nombre de propriétés que nous rappelons plus tard.

Appliquons le théorème de GREEN aux fonctions A et G, sous réserve que ces deux fonctions soient définies et continues dans tout le volume V, ainsi que leur dérivées premières et secondes.

Nous obtenons dans ces conditions :

$$\int_V (G \Delta A - A \Delta G) dv = \int_S \left(G \frac{\partial A}{\partial n} - \frac{A \partial G}{\partial n} \right) ds \quad (3)$$

\vec{n} est la normale à la surface S.

$\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée normale définie de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial n} (A) = \vec{n} \text{ grad. } (A)$$

Nous pouvons transformer le 1er membre de (3) en remplaçant ΔG par sa valeur déduite de (2) et en introduisant le second membre de l'équation d'onde en A :

$$\int_V (G \Delta A - A \Delta G) dv = 4 \pi A(P) - \int_V \alpha G dv \quad (4)$$

(4) appliquée à (3) nous donne donc :

$$A(P) = - \frac{1}{4 \pi} \int_V \alpha G dv + \frac{1}{4 \pi} \int_S \left(G \frac{\partial A}{\partial n} - \frac{A \partial G}{\partial n} \right) ds \quad (5)$$

Le second membre de (5) dépend de la fonction G et de la forme de la surface S. On a donc intérêt à choisir une fonction de GREEN ayant des propriétés particulières sur la surface S de manière à simplifier au maximum l'équation (5).

2°) PROPRIETES DE LA FONCTION DE GREEN

Soit $G(\vec{r} | \vec{r}')$ la fonction de GREEN. Cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

- Cette fonction est symétrique par rapport aux coordonnées du point d'observation $P(x, y, z)$ et à celles du point d'intégration $M(x', y', z')$.

$$G(\vec{r} | \vec{r}') = G(\vec{r}' | \vec{r}) \quad (6)$$

- Cette fonction vérifie des conditions aux limites du volume V du type NEUMANN ou DIRICHLET.

- Cette fonction vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\Delta G(\vec{r} | \vec{r}') - \gamma^2 G(\vec{r} | \vec{r}') = 4\pi \delta(|\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (7)$$

$G(\vec{r} | \vec{r}')$ présente une discontinuité pour $\vec{r} = \vec{r}'$.

On suppose que G est composée de 2 parties, une partie régulière et continue partout dans V , et une partie continue et régulière partout sauf pour $\vec{r} = \vec{r}'$. Soit g cette 2ème partie ne dépendant que de $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$

Cette fonction g est donc telle que, si le point d'observation et le point d'intégration ne sont pas infiniment près de S , on a :

$$\lim_{R \rightarrow 0} G(\vec{r} | \vec{r}') = g(R) \quad (8)$$

Nous allons déterminer le comportement de g pour R petit en intégrant membre à membre l'équation (7) sur une petite sphère de centre M et de rayon ε suffisamment faible pour que l'on puisse appliquer (8)

$$\int_V \Delta g \, dv - \gamma^2 \int_V g \, dv = -4\pi \quad (9)$$

On va supposer que le laplacien de la singularité et plus singulier que la singularité elle-même alors (9) devient :

$$\int_V \Delta g \, dv = -4\pi \quad (10)$$

La fonction Δg est régulière au sens des distributions, ceci résulte du prolongement analytique utilisé dans (7).

Nous pouvons donc appliquer une extension du théorème de la divergence au 1er membre de (10).

$$\begin{aligned} \int_V \Delta g \, dv &= \int_S \operatorname{div} (g \vec{r} \operatorname{ad} g) \, ds \\ &= \int_S g \vec{r} \operatorname{ad} g \, \vec{d}s \end{aligned} \quad (11)$$

g ne dépendant que de la coordonnée sphérique R, on peut écrire :

$$g \vec{r} \operatorname{ad} g = \frac{\partial g}{\partial R} \vec{R}$$

(11) devient donc :

$$\int_V \Delta g \, dv = 4\pi \epsilon^2 \left| \frac{\partial g}{\partial R} \right|_{R=\epsilon} \quad (12)$$

alors (10) et (12) donnent :

$$\lim_{R \rightarrow 0} G(\vec{r} | \vec{r}') = \frac{1}{R} \quad (13)$$

Nous devons maintenant vérifier la proposition qui nous a permis de transformer (9) et (10) - soit :

$$I = \int_V g \, dv = \int_V \frac{1}{R} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dR$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I = 0$$

$$\epsilon \rightarrow 0$$

Ce résultat nous montre bien que le laplacien de la singularité est plus singulier que la singularité elle-même.

3°) EXEMPLE DE FONCTIONS DE GREEN

La solution élémentaire bien connue de l'équation d'HELMOLTZ est la suivante :

$$G = \frac{e^{-\gamma R}}{R}$$

On remarque que cette fonction vérifie bien toutes les propriétés ci-dessus.

Cette fonction de GREEN correspond à un milieu infini homogène.

Considérons maintenant un volume V constitué d'une demi sphère de rayon R_0 arbitrairement grand et de centre O. (Figure -2-).

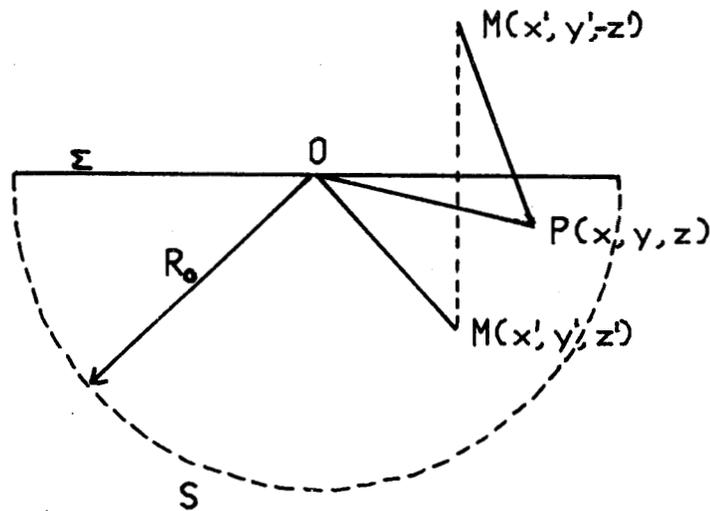


Figure - 2 -

alors l'équation (5) du § 1 s'écrit :

$$A(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \alpha G \, dv + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left(G \frac{\partial A}{\partial n} - A \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_S \left(G \frac{\partial A}{\partial n} - A \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds \quad (14)$$

En faisant tendre R_0 vers l'infini, la surface S se trouve suffisamment éloignée des sources du champ électromagnétique pour admettre que A et $\frac{\partial A}{\partial n}$ sont nuls. (14) devient alors :

$$A(P) = - \frac{1}{4\pi} \int_V \alpha G \, dv + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left(G \frac{\partial A}{\partial n} - A \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds \quad (15)$$

Il faut maintenant construire une fonction de GREEN qui nous permette d'avoir l'expression de (15) la plus simple possible.

Notant que toute combinaison linéaire de solutions élémentaires est encore solution de l'équation de HELMOLTZ, considérons la fonction de GREEN suivante :

$$G = \frac{e^{-\gamma R}}{R} - \frac{e^{-\gamma R'}}{R'}$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

$$R' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}$$

Cette fonction de GREEN a la propriété de s'annuler quand le point M appartient au plan Σ

(15) devient alors :

$$A(P) = - \frac{1}{4\pi} \int_V \alpha G \, dv - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} A \frac{\partial G}{\partial n} \, ds$$

Cette fonction de GREEN nous permet d'introduire les notions de fonction de GREEN primaire et secondaire. La fonction de GREEN primaire est la partie singulière de G et la fonction de GREEN secondaire est la partie régulière de G .

Ces deux fonctions sont associées respectivement au potentiel primaire et secondaire que l'on peut introduire en supposant que le volume V est infini et qu'il existe une source de champ symétrique de la source existante par rapport au plan Σ .

Dans notre travail (chapitre 1) nous parlons de fonctions de GREEN primaires et secondaires.

Ces expressions n'ont pas été obtenues en appliquant le théorème de GREEN. L'application de ce théorème nous aurait donné des résultats analogues, et ce n'est que par extension que l'on donne ce nom à ces expressions.

ANNEXE 6

REMARQUES SUR L'INTEGRATION VOLUMIQUE DE LA FONCTION DE GREEN PRIMAIRE P

$$\text{Soit } P = \frac{e^{-\gamma R}}{R}$$

avec
$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

nous devons intégrer cette fonction sur l'élément de volume défini par la Figure 1.

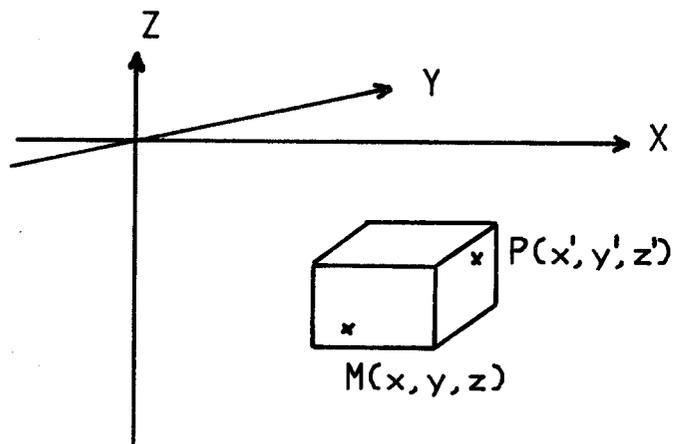


Figure - 1 -

M et P sont respectivement le point d'observation et le point d'intégration. Cette fonction présente une singularité quand le point P est en M.



L'intégration analytique sur un tel volume est impossible. De plus, l'intégration numérique n'est pas envisageable à cause de la présence de la singularité.

HOHMANN⁴ a tourné la difficulté en utilisant que des mailles cubiques et en approximant leur volume à celui de sphères. Dans ce cas l'intégration analytique est évidente.

Mais ceci demande, d'une part, de ne plus découper l'anomalie en mailles parallépipédiques, ce qui permettait un découpage souple, et d'autre part, de commettre une erreur dont il est difficile d'évaluer l'importance après la résolution du système matriciel.

Une autre solution, plus élégante, est celle employée par CAUTERMAN³. Elle consiste à exprimer la fonction P en fonction de ses dérivées secondes, en utilisant l'équation d'HELMOLTZ (cf. annexe 5).

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma^2 \right) P = - 4\pi \delta(R)$$

Nous n'avons alors à intégrer que les dérivées secondes de P sur le volume V. Ces intégrales se transforment analytiquement en intégrales de surface. Nous intégrons alors numériquement ces fonctions sur un domaine d'intégration ne présentant pas de singularité.