50 376
1 9 7 8
61

N° D'ORDRE 705

50376
1978
61

THESE

PRESENTEE

A

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

POUR OBTENIR LE TITRE
DE
DOCTEUR DE 3ème CYCLE
EN MECANIQUE

par

MOKADDEM Mahmoud

SUR UNE METHODE MATRICIELLE DE CONSTRUCTION DES LIGNES DE GLISSEMENT EN PLASTICITE. APPLICATION AU FORMAGE DES METAUX : COMPRESSION ET LAMINAGE A CHAUD.

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
Section de SCIENCES
LILLE

Soutenue le 3 Juillet 1978

Président : M. ZEYTOUNIAN, Professeur (Lille I)
Rapporteur : M. PARSY, Maître de Conférences (Lille I)
Examinateur : M. BEGUIN, Maître de Conférences (Lille I)
Invités : M. OUDIN, Professeur (I.C.A.M. à Lille)
M. RAVALLARD, Professeur (I.C.A.M. à Lille)

B.U. LILLE 1
D 030 104770 7

A Saïd, ...

A la mémoire de mon père.

A ma mère.

A ma famille.

A Catherine.

A tous les amis.

Je tiens à remercier Madame Françoise GOUTHIER qui a assuré soigneusement la frappe du manuscrit ainsi que Monsieur HOUZET qui a réalisé les croquis et tout le personnel des Mathématiques Pures et Appliquées.

Je tiens à remercier vivement Monsieur le Professeur ZEYTOUNIAN qui me fait l'honneur de présider le Jury ainsi que Monsieur BEGUIN, Maître de Conférences, Monsieur OUDIN et Monsieur RAVALLARD, Professeurs à l'I.C.A.M. qui ont accepté d'en faire partie.

Ma reconnaissance va à Monsieur PARSY, Maître de Conférences, pour le sujet de recherche qu'il a bien voulu me proposer. Les conseils précieux qu'il n'a cessé de me prodiguer et l'attention qu'il me portait ont été pour moi un constant encouragement.

Que tous ceux qui m'ont aidé et encouragé trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

TABLE DES MATIERES

I.- Etat plan de déformation et méthode des lignes de glissement.

1.1.- Introduction.

1.2.- Etat plan de déformation et critère de plasticité de MISES.

1.3.- Définition des lignes de glissement.

1.4.- Propriétés géométriques de lignes de glissement.

1.5.- Principe de superposition de HILL.

1.6.- Applications.

II.- Représentation de la solution en série entière.

2.1.- Introduction.

2.2.- Intégration des équations.

2.3.- Développement en série entière.

2.4.- Détermination des coordonnées, des efforts et des moments transmis par le réseau.

a) Calcul des coordonnées.

b) Calcul des efforts transmis par le réseau.

c) Calcul du moment transmis par le réseau.

2.5.- Représentation des efforts transmis par des séries entières.

III.- Formulation matricielle.

3.1.- Introduction.

3.2.- Représentation matricielle des lignes de glissement. Détermination des opérateurs P^* et Q^* .

a) P^* et Q^* .

b) Les opérateurs P et Q.

c) Les opérateurs particuliers :

. L'opérateur de frontière lisse T.

. L'opérateur de translation S .

. L'opérateur de frontière rectiligne parfaitement lisse F .

. L'opérateur de surface libre H .

3.3.- Similitude des champs donnés par deux frontières lisses rectangulaires. Conclusion.

IV.- Laminage à chaud.

4.1.- Introduction.

4.2.- Méthodes de résolution et champs de lignes de glissement.

4.2.1.- Champs de lignes de glissement et hodographes.

4.2.2.- Résolution par la méthode matricielle.

4.3.- Calcul de l'effort, de laminage, de la contre-traction et du mouvement de laminage.

4.3.1.- Calcul de l'effort de laminage EL.

4.3.2.- Calcul de la longueur TL de la région en état plan de déformations.

4.4.- Calcul de l'effort et du moment de laminage par la méthode de SINS.

4.5.- Résultats numériques et discussion.

V. Compression sans frottement, d'une barre entre deux plateaux.

5.1.- Introduction.

5.2.- Champs proposés par GREEN.

5.3.- Calcul numérique et relations proposées par GREEN.

5.4.- Analyse du champ par la méthode matricielle et justification des relations de GREEN.

5.5.- Cas du champ de lignes de glissement avec $\rho = 0$

5.6.- Calcul de la longueur du champ et de la pression transmise dans le cas où $\rho = 0$.

5.7.- Extension des champs au cas $\eta > 2$ et relations de GREEN.

5.8.- Programmes de calcul et résultats.

Conclusion.

NOTATIONS

σ : contrainte normale

ε : déformation

u : déplacement

τ : contrainte tangentielle

k : contrainte de cisaillement maximale

p : pression hydrostatique

ϑ : angle entre l'axe Ox et l'axe principal I

R : rayon de courbure d'une ligne α

S : rayon de courbure d'une ligne β

R_o, S_o : rayons de courbure d'une ligne α et d'une ligne β initiales

θ : angle entre la tangente à la ligne α au point A et la tangente à l'origine

Ψ : angle entre la tangente à la ligne β au point B et la tangente à l'origine

ϕ : angle formé entre la tangente à la ligne α au point final et l'axe Ox tangente à l'origine.

x, y : coordonnées cartésiennes

$\bar{x}, \bar{y}$: coordonnées de Mikhlin

$F_{\bar{x}}$: composante de l'effort transmis sur une ligne suivant l'axe $O\bar{x}$

$F_{\bar{y}}$: composante de l'effort transmis sur une ligne suivant l'axe $O\bar{y}$

M : moment des efforts transmis par le réseau

V_1 : Matrice colonne représentant le rayon de courbure de la ligne α initiale

V_2 : Matrice colonne représentant le rayon de courbure de la ligne β initiale

V_3 : Matrice colonne représentant le rayon de courbure de la ligne α passant par $P(\theta,\Psi)$

V_4 : Matrice colonne représentant le rayon de courbure de la ligne α passant par $P(\theta,\Psi)$

$R_\phi, P^*_\Psi, Q^*_\Psi, P_\theta, Q_\theta, T_\theta, T^{-1}_\Psi, S_\phi$: les opérateurs matriciels de base

ρ_1, ρ_2 : discontinuités de la vitesse.

W_1, W_2 : largeurs des champs.

P_s, P_c : efforts donnés par la méthode de Sims et de Collins.

INTRODUCTION

Dans la théorie classique du solide rigide-plastique en déformation plane, les problèmes aux limites rencontrées en mise à forme des métaux peuvent être divisés en deux classes : problèmes linéaires et non linéaires. Nous pouvons aussi les classer selon la méthode avec laquelle ont été construits les champs des lignes de glissement et des vitesses. Le premier type de problème est celui pour lequel la solution est construite directement à partir d'un éventail de PRANDTL, c'est le cas de la majorité des problèmes d'extrusion et d'étirage avec des frontières rectilignes, de la compression entre deux plateaux rugueux. HILL avait montré qu'on pouvait donner une solution sans donner la distribution actuelle des vitesses (outils rigides, zone de métal au repos...). Le deuxième type est celui où aucune caractéristique initiale n'est connue dans le plan physique et dans celui de l'hodographe. Pour ce problème de type indirect, l'intégration des équations de base conduit à la résolution d'une équation intégrale de FREDHOLM. La majorité des autres problèmes aux limites à résoudre sont de type mixte, c'est-à-dire que la solution doit satisfaire simultanément des conditions sur les contraintes et sur les vitesses et pour lesquelles la forme des lignes de glissement initiales, qui nous permettrons de tracer le champ complet, n'est pas connue d'avance. Leurs équations aux dérivées partielles à intégrer sont linéaires et de type hyperbolique.

Si pour résoudre un tel problème, nous avons à construire un champ de lignes de glissement à partir de deux lignes initiales (α) et (β) ce problème sera toujours linéaire et nous le ferons à l'aide des opérateurs matriciels dûs à COLLINS qui ne sont que l'expression algébrique de la méthode de construction géométrique de HILL basée essentiellement sur le principe de superposition de deux champs pour donner naissance à un troisième.

Mais, si par contre, la construction de la solution se fait à partir d'une ligne de glissement donnée et d'une ligne qui n'est pas de glissement avec des conditions sur les contraintes et les vitesses, ce problème ne sera pas toujours linéaire. Il ne le sera que dans le cas où les conditions sur la courbe non-caractéristique se traduisent par une relation linéaire entre les paramètres du champ à savoir les couples (X,Y), $(\bar{X},\bar{Y})$, (R,S), ... (Frontières se déplaçant rigidement et sans frottement, frontières libres...). La méthode qu'on utilisera ne pourra s'appliquer qu'à de tels problèmes n'impliquant pas de non linéarité dans les conditions à la frontière (frottement de coulomb, par exemple).

Les premiers chapitres de ce travail concernent l'intégration des équations aux dérivées partielles du problème pour expliciter les opérateurs matriciels qui transforment une caractéristique en une autre.

La méthode classique de résolution de tels problèmes est de trouver par tatonnement la forme de la caractéristique initiale à partir de laquelle on construit le champ complet et on s'assure par la suite que le champ des contraintes vérifie bien les conditions mixtes à la frontière. Nous obtenons ainsi des solutions approchées statiquement ou cinématiquement admissibles. La construction se fait soit par le traçage graphique de PRAGER, soit par une approximation de la solution à l'aide des différences finies utilisées par GREEN.

Des méthodes numériques, plus récentes, ont été proposées, permettant d'obtenir plus rapidement les solutions à l'aide de l'ordinateur.

En effet, l'intégration du système d'équations aux dérivées partielles par la méthode de RIEMANN sur un contour fermé, conduit à une équation intégrale de FREDHOLM. Proposée par GEIRINGER et reprise par EWING, une représentation de la solution par une fonction analytique développée sur en double série

entière absolument convergente permet à COLLINS et DEW HURST de donner une formulation numérique du problème à l'aide de certains opérateurs matriciels de base.

Dans ces mêmes chapitres, certaines propriétés algébriques de ces opérateurs linéaires seront établies ainsi que leur rôle géométrique de transformation.

Les autres chapitres seront consacrés à l'illustration pratique de l'utilisation de cette méthode algébrique de résolution dans des problèmes rencontrés en mise à forme des métaux, et d'un grand intérêt industriel (laminage à chaud, compression entre deux plateaux lisses pour $w/h > 1$...).

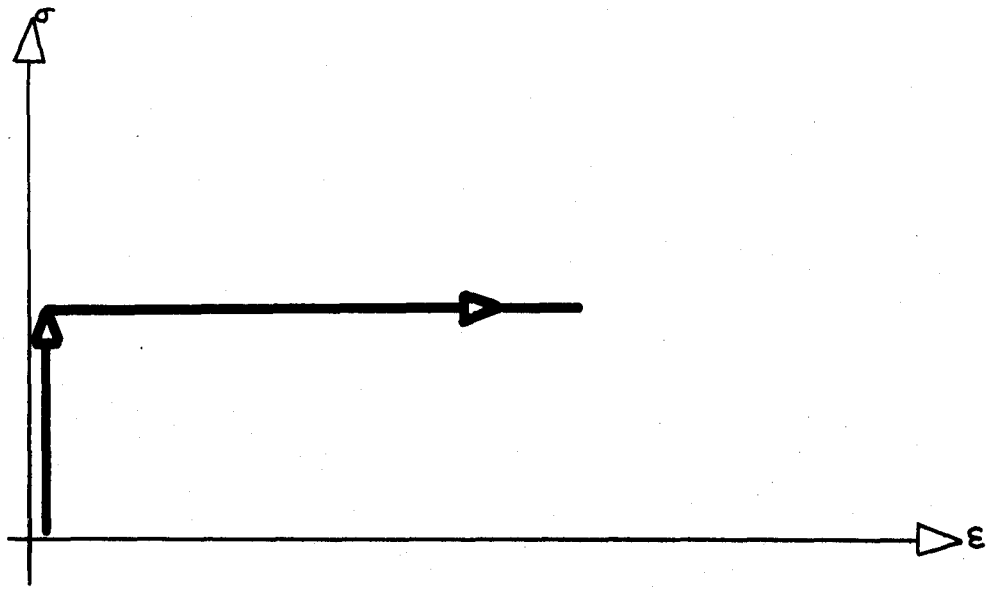
Une comparaison sera faite avec les théories technologiques.

CHAPITRE I

ETAT PLAN DE DEFORMATION ET METHODE DES LIGNES DE GLISSEMENT

1.1.- Introduction

Dans ce chapitre, la méthode des lignes de glissement est développée pour prévoir le comportement d'un matériau isotrope rigide-plastique parfait en état plan de déformations (Fig. 1).

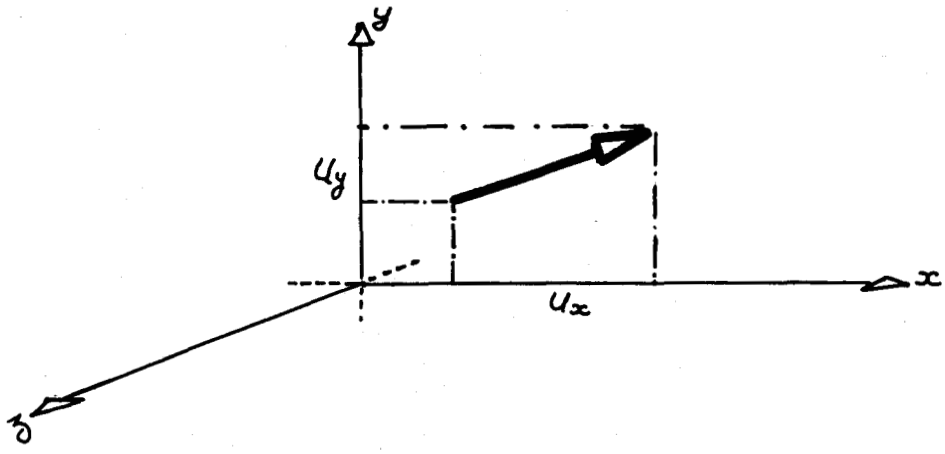


Cette idéalisation concernant le matériau n'est évidemment pas réalisée dans les matériaux industriels, mais elle nous permet d'avoir, en première approximation, des indications sur la manière avec laquelle le matériau se déforme. Cette méthode est utilisée dans certains procédés industriels tels que le poinçonnage, l'étirage, l'extrusion etc...

1.2.- Etat plan de déformation et critère de plasticité de VON MISES.

En tout point du matériau, le vecteur de déplacement sera supposé parallèle au plan z = 0 et indépendant de z (Fig. 2).

$u_z = 0$ et $\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0$.



L'axe parallèle à Oz sera donc un axe principal de déformation et on supposera qu'il le sera aussi pour les contraintes.

Nous obtenons alors à partir des relations de LEVY-MISES qui relient les vitesses de déformation aux contraintes (déviatoriques aux déviateurs s_{ij}).

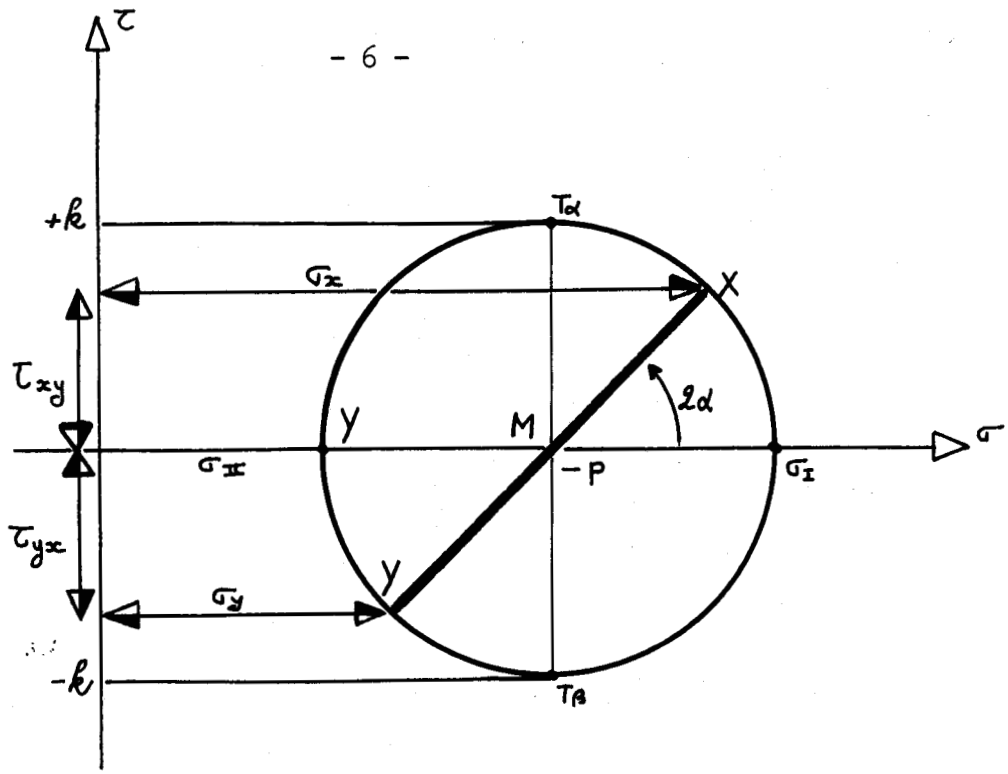
$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$s_3 = 0 \Rightarrow \sigma_z - \frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3} = 0 \Rightarrow \sigma_z = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \qquad (1)$$

L'état de contrainte en un point du matériau déformé sera représenté par une contrainte de cisaillement k et par une pression hydrostatique $-p = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$ qui varie d'un point à un autre à travers le matériau (Fig. 3).

L'écoulement plastique du matériau apparaît, lorsque le critère de MISES est vérifié compte tenu de (1).

$4\tau_{xy}^2 + (\sigma_x-\sigma_y)^2 = 4k^2$ où k est la contrainte de cisaillement maximale.



Dans le plan de représentation de MOHR (Fig. 3), le cercle de MOHR nous permet d'écrire σ_x, σ_y et τ_{xy} en fonction de p et de ϕ, ϕ étant ici l'angle que fait la direction x avec la direction principale I .

$$\sigma_x = - p + k \cos 2 \phi$$

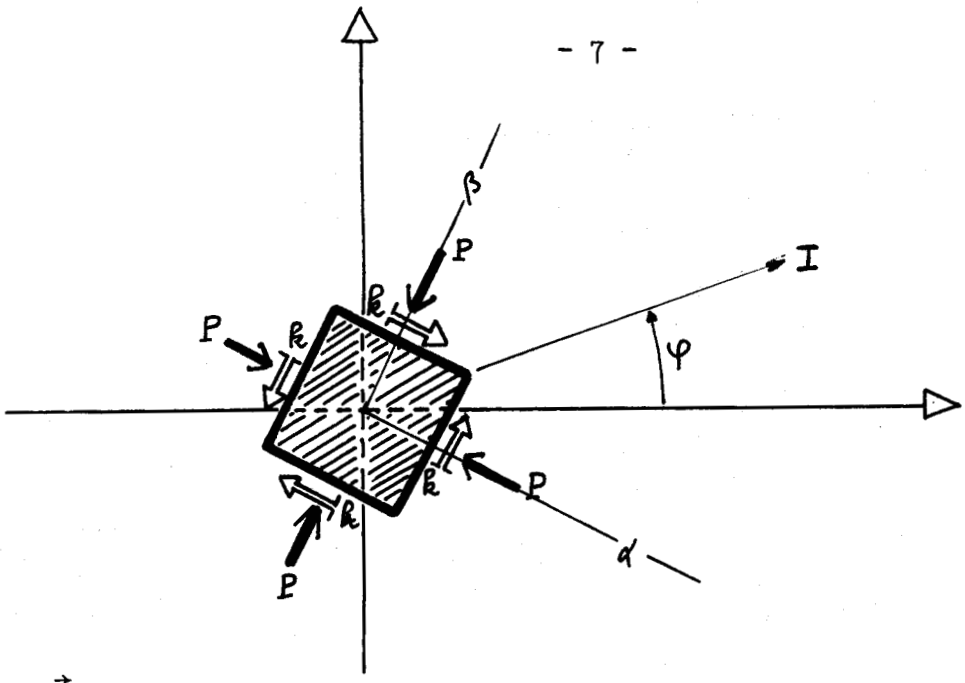
$$\sigma_y = - p - k \cos 2 \phi \qquad (3)$$

$$\tau_{xy} = k \sin 2 \phi$$

Le point X sur la Fig. 3 représente l'état de contrainte d'une surface perpendiculaire à l'axe Ox du repère physique.

T_α représente l'état de contrainte d'une facette dont la normale $\vec{n}$ fait avec l'axe principal I l'angle $-\Pi/4$ et dont les composantes du vecteur contrainte sont $(- p, k)$.

Ce vecteur $\vec{n}$ est tangent à la ligne de glissement α (Fig. 4).



$\vec{n}$ perpendiculaire au plan de la facette c'est-à-dire ici au plan de la feuille.

<u>Les équations d'équilibre</u> :

Si l'on néglige les forces de volume, on obtient, après projection sur les axes, les équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Nous pouvons, à partir des expressions des composantes du vecteur contrainte en fonction de p et ϕ (3), écrire ces équations d'équilibre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x} - 2k \sin 2\phi \dfrac{\partial \phi}{\partial x} + 2k \cos 2\phi \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 0 & (5) \\[2ex] -\dfrac{\partial p}{\partial y} + 2k \cos 2\phi \dfrac{\partial \phi}{\partial x} + 2k \sin 2\phi \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 0 & (6) \end{cases}$$

1.3.- Définition des lignes de glissement.

Les deux équations ainsi obtenues forment un système de deux équations aux dérivées partielles du 1er ordre, quasi-linéaires, car elles sont linéaires pour les dérivées des fonctions p et ϕ et hyperboliques.

La théorie mathématique des équations hyperboliques nous donne une simplification de telles équations pour les résoudre par la méthode des caractéristiques. Pour celà, on se sert de la notion de dérivée suivant une direction pour simplifier les équations et aboutir à une équation différentielle simple grâce à un choix de deux directions particulières à la place de $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$.

En effet, les dérivées qui interviennent dans le système c'est-à-dire $\partial p/_{\partial x}$, $\partial p/_{\partial y}$, $\partial \phi/_{\partial x}$ et $\partial \phi/_{\partial y}$ sont dans les directions $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$.

Cherchons une combinaison linéaire des 2 équations du système qui ne contiendrait que des dérivées suivant une seule direction $\vec{s}$ en multipliant la première (5) par $\cos(\phi-\Pi/4)$ et la seconde (6) par $\sin(\phi-\Pi/4)$ et en sommant les deux on obtient :

$$-\partial p/_{\partial \vec{s}_\alpha} - 2k \frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}_\alpha} = 0 \qquad (7)$$

où $\vec{s}_\alpha$ est le vecteur unitaire d'angle polaire $(\overrightarrow{Ox},\vec{s}_\alpha) = \phi-\Pi/4$,

sachant que l'on a : $\dfrac{\partial p}{\partial \vec{s}_\alpha} = \dfrac{\partial p}{\partial x}(\vec{s}_\alpha)_x + \dfrac{\partial p}{\partial y}(\vec{s}_\alpha)_y$.

Puis cherchons une seconde combinaison linéaire en multipliant la première équation (5) par $\cos(\phi+\Pi/4)$ et la seconde (6) par $\sin(\phi+\Pi/4)$ et en prenant la somme des deux nous obtenons :

$$-\partial p/_{\partial \vec{s}_\beta} + 2k \frac{\partial \phi}{\partial \vec{s}_\beta} = 0 \qquad (8)$$

avec $\vec{s}_\beta$ vecteur unitaire d'angle polaire $(\overrightarrow{Ox},\vec{s}_\beta) = \phi+\Pi/4$.

Les directions $\vec{s}_\alpha$ et $\vec{s}_\beta$ ainsi obtenues, faisant respectivement les angles $-\Pi/4$ et $\Pi/4$ avec l'axe principal I sont appelés les directions caractéristiques α et β au point considéré.

Dans chacune de ces directions, on réduit le système d'équations quasi-linéaires à une équation différentielle ordinaire.

Les lignes qui sont tangentes en chacun de leurs points à $\vec{s}_\alpha$ (respectivement à $\vec{s}_\beta$) sont les lignes de glissement α (respectivement β). Ces deux lignes bissectent les directions principales I et II et sont orthogonales entre elles (Fig. 4).

Nous pouvons encore écrire ces deux équations sous les formes suivantes, données respectivement par KOÏTER et HENKY :

$$\begin{cases} dp + 2k\, d\phi = 0 & \text{le long de la ligne } \alpha \\ dp - 2k\, d\phi = 0 & \text{le long de la ligne } \beta \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} p + 2k\, \phi = cte & \text{le long de la ligne } \alpha \\ p - 2k\, \phi = cte & \text{le long de la ligne } \beta \end{cases}$$

Les constantes variant d'une ligne à une autre.

1.4.- Propriétés géométriques des lignes de glissement.

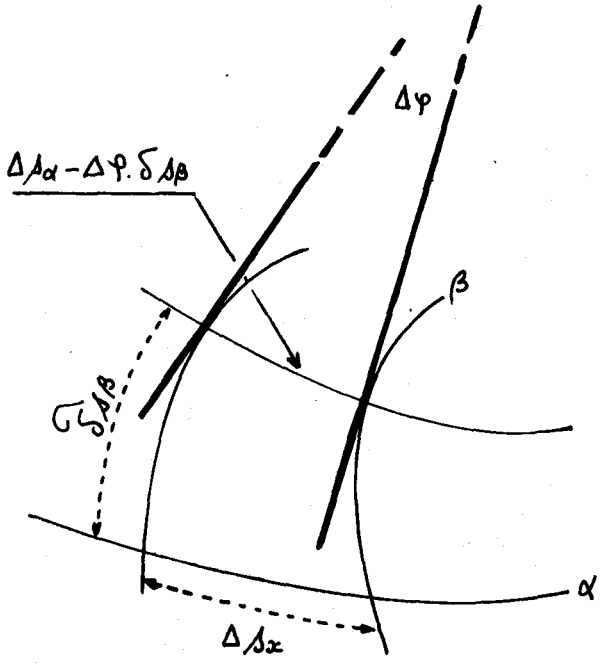
Les rayons de courbure des lignes de glissement α et β sont donnés par :

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial\phi}{\partial s_\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{1}{S}\ \frac{\partial\phi}{\partial s_\beta} \qquad (10)$$

où R et S sont les rayons de courbure des lignes α et β .

Ce sont des quantités algébriques dont le signe dépend du sens de $\frac{\partial}{\partial s_\alpha}$ et $\frac{\partial}{\partial s_\beta}$ dérivées directionnelles prises le long des lignes α et β respectivement.

Considérons deux lignes β infiniment voisines et soit $\Delta\phi$ le petit angle constant entre elles aux points où elles coupent la ligne α (Fig. 5).



Les équations (10) nous permettent d'écrire

$$R\Delta\phi = \Delta s_\alpha \quad \text{on aura donc}$$

$$\frac{\partial}{\partial s_\beta}(R\Delta\phi) = \frac{\partial}{\partial s_\beta}(\Delta s_\alpha) = -\Delta\phi$$

or $\Delta\phi$ est constant. On peut donc le sortir de la parenthèse et obtenir le système :

$$\frac{\partial R}{\partial s_\beta} = -1 \ , \ \frac{\partial S}{\partial s_\alpha} = -1 \ .$$

Ceci veut dire que lorsqu'on se déplace le long d'une ligne de glissement, le rayon de courbure des autres lignes aux points d'intersection

varie de la grandeur de l'arc parcouru.

En remplaçant les longueurs d'arcs Δs_α et Δs_β par $R\Delta\phi$ et $-S\Delta\phi$ on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} dR - Sd\phi &= 0 \quad \text{sur la ligne } \beta \\ dS + Rd\phi &= 0 \quad \text{sur la ligne } \alpha \ . \end{aligned} \qquad (11)$$

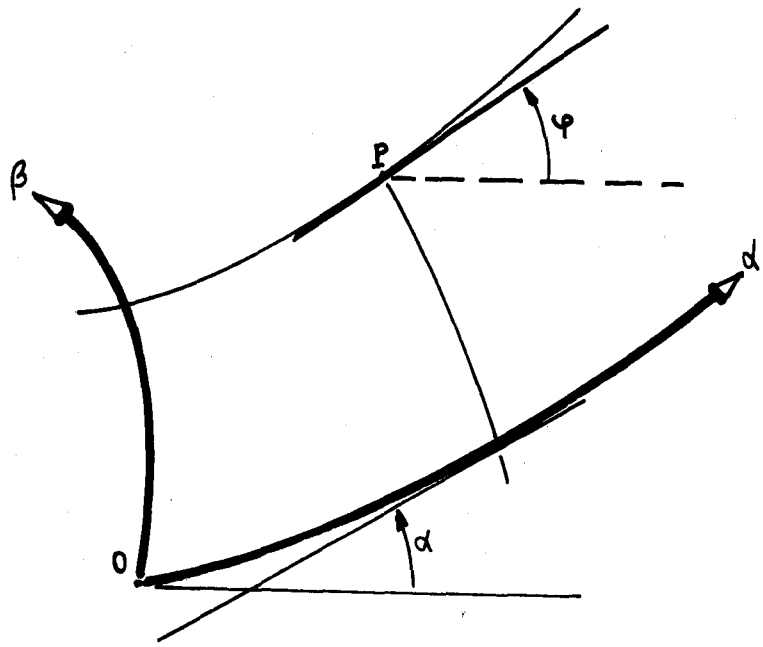
Introduisons maintenant les coordonnées curvilignes (α,β) relativement aux axes curvilignes α et β . On a :

$$d\phi = d\alpha \quad \text{sur la ligne } \alpha$$

$$d\phi = d\beta \quad \text{sur la ligne } \beta \ .$$

ϕ est ici l'angle entre la direction de α en un point O et en un autre point P ;

α sera la valeur de ϕ au point où la ligne β qui passe par P coupe la ligne α (Fig. 6).



Les équations (11) compte tenu de ce changement de coordonnées deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \alpha} + R = 0 & \text{sur une ligne } \alpha \\ \dfrac{\partial R}{\partial \beta} - S = 0 & \text{sur une ligne } \beta \end{cases} \quad (12) \text{ ou encore en tout point } P(\alpha,\beta)$$

C'est le système d'équations aux dérivées partielles du 1er ordre que doivent satisfaire les rayons de courbure des lignes de glissement.

Le travail qu'on étudie propose une méthode algébrique pour construire les lignes de glissement en se servant des équations (12) qu'on intègrera par la méthode de RIEMANN.

1.5.- Le principe de superposition de HILL

Pour un matériau isotrope rigide-plastique en état de déformation plane, les champs de contraintes et de vitesses sont solutions d'équation aux dérivées partielles linéaires et de type hyperbolique.

Il en est de même pour le système d'équations que satisfont les rayons de courbures R et S des familles de lignes de glissement α et β .

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\alpha\partial\beta} + S = 0$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha\partial\beta} + R = 0$$

Les coordonnées le long des lignes de glissement et les vitesses le long des lignes caractéristiques de l'hodographe vérifient le même système d'équations.

La linéarité de ces équations montre bien que la somme des deux champs de lignes de glissement en donne un troisième par simple addition des rayons R et S des deux champs aux points (α,β) correspondants. GREEN avait

utilisé ce principe pour les coordonnées de MIKHLIN $(\bar{x},\bar{y})$, mais c'est HILL qui, en 1967, a montré comment construire géométriquement la somme de deux champs de caractéristiques par addition de deux vecteurs.

- Formulation algébrique et construction géométrique.

Soit $R(\alpha,\beta)$ et $S(\alpha,\beta)$ les rayons de courbure des lignes (α) et (β) en un point d'un champ donné. On considère le champ transformé de ce dernier par une rotation de $\Pi/_2$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et on intervertit les coordonnées curvilignes α et β : le coupe $(R(\alpha,\beta), S(\alpha,\beta))$ devient $(-S(\beta,\alpha), R(\beta,\alpha))$.

La somme de ces deux champs de base donne naissance à un troisième champ qui sera déterminé par le couple$(R'(\alpha,\beta), S'(\alpha,\beta))$. a et b étant deux constantes arbitraires on aura :

$$\begin{cases} R'(\alpha,\beta) = a\,R(\alpha,\beta) - b\,S(\beta,\alpha) \\ S'(\alpha,\beta) = a\,S(\alpha,\beta) + b\,R(\beta,\alpha) \end{cases} \qquad \text{(i)}$$

or le couple (R,S) vérifie le système (12)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = -R(\alpha,\beta) \\ \dfrac{\partial R(\alpha,\beta)}{\partial \beta} = S(\alpha,\beta) \end{cases} \qquad \text{(ii)}$$

la dérivation de $R'(\alpha,\beta)$ et de $S'(\alpha,\beta)$ par rapport à α et β respectivement nous donne :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R'(\alpha,\beta)}{\partial \beta} = a\,\dfrac{\partial R(\alpha,\beta)}{\partial \beta} - b\,\dfrac{\partial S(\beta,\alpha)}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial S'(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} = a\,\dfrac{\partial S(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} + b\,\dfrac{\partial R(\beta,\alpha)}{\partial \alpha} \end{cases} \qquad \text{(iii)}$$

portons les valeurs de $R(\alpha,\beta)$ et $S(\alpha,\beta)$ du système (12) dans le système (i) :

$$\begin{cases} R'(\alpha,\beta) = -\,a\,\dfrac{\partial S(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} - b\,\dfrac{\partial R(\beta,\alpha)}{\partial\alpha} \\[2ex] S'(\alpha,\beta) = a\,\dfrac{\partial R(\alpha,\beta)}{\partial\beta} - b\,\dfrac{\partial S(\beta,\alpha)}{\partial\beta} \end{cases} \qquad \text{(IV i)}$$

la comparaison de (iii) et de (IVi) donne le système suivant :

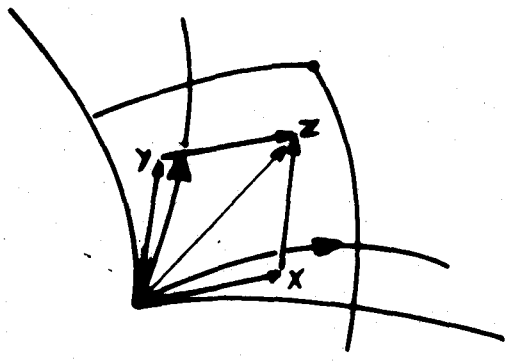
$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial R'(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = S'(\alpha,\beta) \\[2ex] \dfrac{\partial S'(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = -\,R'(\alpha,\beta) \end{array} \right.$$

et montre que R' et S' vérifient le même système que R et S.

La construction géométrique de la superposition de deux champs est la suivante :

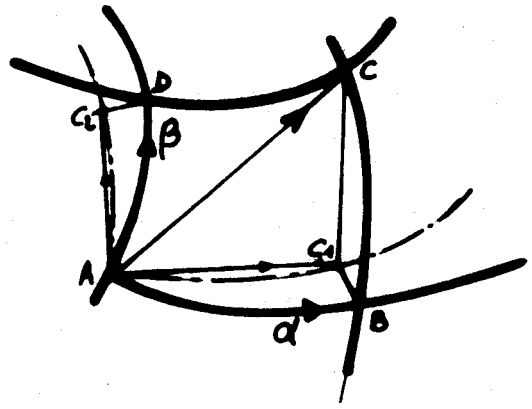
X et Y sont deux points de deux champs de base donnés avec des coordonnées curvilignes (α) et (β) qui coïncident. Le point Z, appartenant au champ engendré par l'addition des deux champs de base, sera construit par la somme des vecteurs $\overrightarrow{OX}$ et $\overrightarrow{OY}$ par la méthode du parallélogramme

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$$



Le cas le plus important pour une telle construction et que l'on rencontre le plus souvent est celui de la superposition de deux champs centrés.

Examinons rapidement ce cas en partant d'un champ où une singularité apparait au point A (voir figure).



Le champ ABCD est construit à partir de la superposition des champs centrés construits sur les lignes de base AB et AD. Pour construire le champ curviligne ABCD, on construit la ligne DC de telle façon que les tangentes aux points C1 et C2 soient parallèles à la tangente en C. Lorsque deux points X et Y de coordonnées (α,β) coïncidants parcourent les lignes AC1 et DC2 respectivement, le point Z, résultat de leur addition, parcourt la ligne DC.

On voit donc bien que l'on a d'après cette construction en symbolisant les lignes de glissement par des flèches courbes.

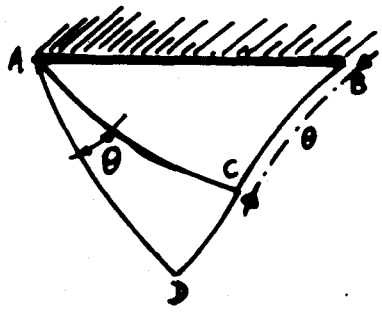
$$DC = AC_1 + DC_2$$

$$BC = AC_2 + BC_1$$

Nous verrons l'application simple donnée par HILL dans son article et le champ "auto-semblable" de COLLINS.

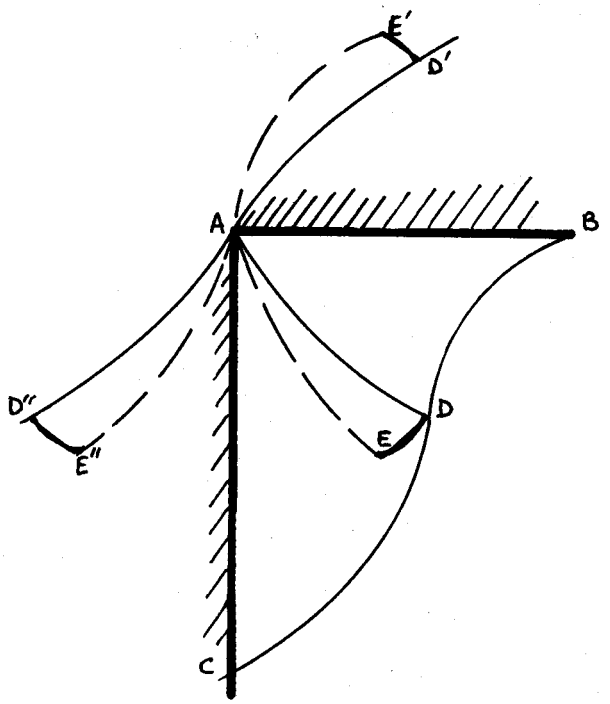
1.6.- Application.

Nous verrons essentiellement deux cas très répandus dans la résolution des problèmes aux limites en formage des métaux. Ceci nous permettra de mettre en évidence certaines propriétés et certaines relations géométriques qui seront d'une grande utilité par la suite pour étudier la transformation algébrique d'une ligne et la construction d'un champ de lignes de glissement.



Soit un plan AB une frontière sans frottement et soit A un point de singularité. Le champ centré ACD est le champ associé à cette singularité. ABC sera construit par la ligne AC et la ligne réfléchie par rapport à AB. Le triangle curviligne ABD est isocèle et D se trouve sur la bissectrice de AB, sachant que les lignes AC et BC font un angle $\Pi/_4$ avec le plan AB.

Voyons tout d'abord la justification de cette dernière propriété. Pour cela considérons le champ suivant : soient deux plans $\perp$ AB et AC sans frottement, et soit le champ de ligne. Les deux moitiés de champs ABD et ACD peuvent être construits à partir du même champ centré ADE par la méthode de superposition de HILL.



Ils seront les moitiés des champs engendrés par la superposition du champ centré ADE et de son image dans la réflexion par rapport à AB et AC respectivement. Soit $x_E(\alpha,\beta)$ et $y_E(\alpha,\beta)$ les coordonnées de E du champ ADE les coordonnées de E' du champ AE'D' image de AED. On aura donc pour le point E' $[-y_E(\beta,\alpha)\ ,\ x_E(\beta,\alpha)]$ et la superposition des deux champs nous donne encore conformément à la relation (i)

$$\begin{cases} x_B(\alpha,\beta) = x_E(\alpha,\beta) - y_E(\beta,\alpha) \\ y_B(\alpha,\beta) = y_E(\alpha,\beta) + x_E(\alpha,\beta) \end{cases}$$

Si maintenant on suppose que les lignes tournent toutes du même angle θ , que A est pris comme origine du repère d'axes AB et BC alors on aura

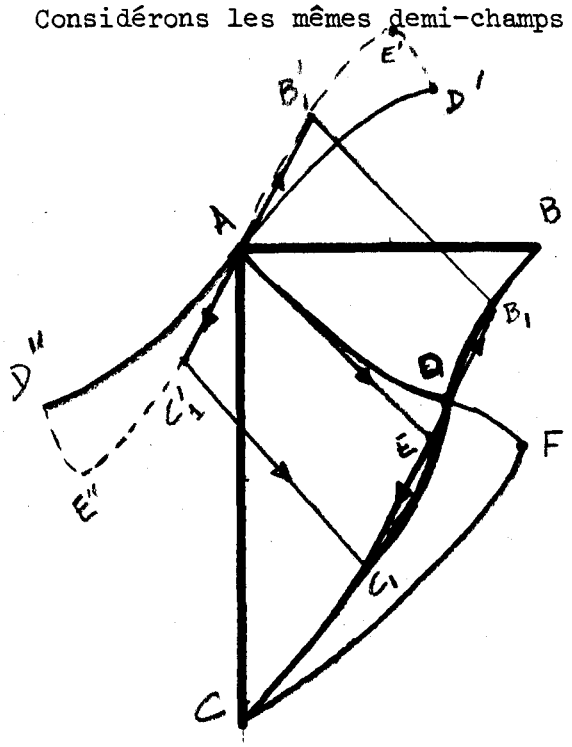
$$y_E(\theta,\theta) = -\ x_E(\theta,\theta) \quad \text{et}$$

$$x_{B'}(\theta,\theta) = 2\ x_E(\theta,\theta)$$

Comme autre application, nous allons voir le champ dit "auto-semblable" qui a été étudié par I.F. COLLINS et dont il se servit pour justifier mathématiquement les relations établies par GREEN, pour

certains champs, entre la longueur, la hauteur et les valeurs des discontinuités des vitesses. COLLINS avait donné une démonstration de ces relations en utilisant les champs "auto-semblables" et leurs propriétés géométriques dans le problème de compression entre deux plateaux rigides sans frottement (avec le rapport $1 < \frac{\text{longueur}}{\text{hauteur}} < 2$) et pour le problème de l'extrusion symétrique avec une matrice rectangulaire lisse et un rapport $1 < \nu < 2$.

Considérons les mêmes demi-champs



ABD et ACD obtenus par la superposition des champs singuliers ADE et ses images AD'E' et AD"E" et une singularité au point C. Si on suppose que les lignes AD et CD sont géométriquement semblables, alors les lignes CD et BD le seront aussi. Nous en verrons une démonstration algébrique au chapitre 4. Ceci a été avancé par HILL et utilisé par I.F. COLLINS pour démontrer que dans ce cas les points BDEC sont collinéaires et que les lignes FD et CD sont semblables. Seulement, pour l'alignement des points BDEC, il est nécessaire que l'angle dont tourne toutes les lignes soit le

même. S'il n'en est pas ainsi, on aura l'alignement des points B_1 D E_1 C_1 .

Supposons que nous ayons CD et AD semblables, les triangles curvilignes CDA et ADB sont alors semblables, puisque tous les deux sont construits par la superposition du champ singulier AED et ses 2 images AE'D' et AE"D". On aura donc une similitude entre les lignes DC et DB, elles sont mêmes homothétiques de centre D. Soient B_1 et C_1 deux points homothétiques sur DC et DB. Or le point E_1 sur la ligne DE engendre par le principe de superposition B_1 et C_1 donc les angles de D à E_1, D à B_1, D à C_1, A à B_1' et de A à C_2' sont les mêmes avec A le milieu de B_1' C_1' . La loi du parallélogramme qui donne la position des points C_1, B_1, B_1' et C_1' montre que E_1 est milieu de B_1 C_1 . Il en découle que les quatre points B_1 D E_1 C_1 sont alignés et puisque DB_1 et DC_1 d'une part et E_1 B_1 et E_1 C_1 d'autre part sont homothétiques il en sera de même pour DE_1 et DC_1 . A la limite, lorsque E_1 est confondu avec le point E, C_1 et B_1 seront confondus respectivement avec les points C et B d'où l'on a l'homothétie entre les lignes DE et DC. Les champs singuliers DEA et DFC étant construits sur les côtés convexes de lignes DA et DC respectivement sont semblables. Ainsi les lignes FD et CD seront semblables.

Ces résultats importants seront utilisés par COLLINS pour justifier les relations de GREEN dans le problème de la compression. Ceci sera vu dans le 5ème chapitre consacré à l'étude de ce problème.

CHAPITRE II

REPRESENTATION DE LA SOLUTION EN SERIE ENTIERE
INTEGRATION DU SYSTEME D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

2.1.- Introduction.

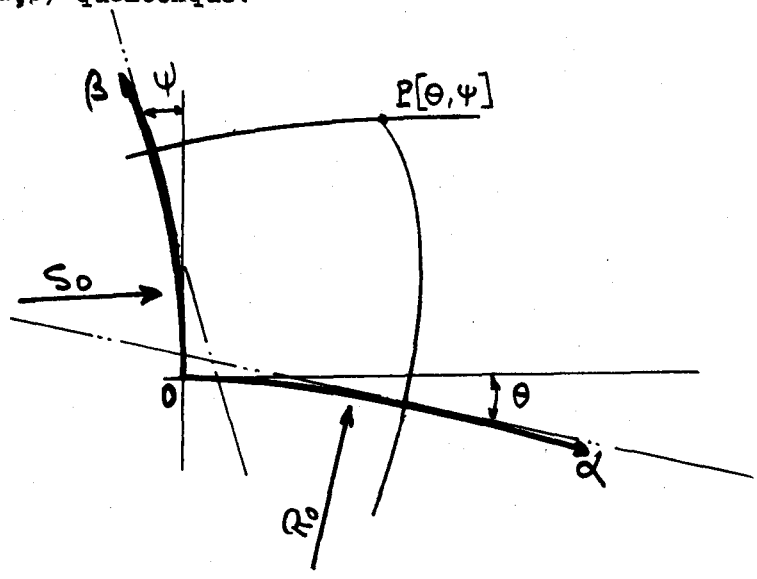
Les rayons de courbures R et S des lignes de glissement prises comme fonctions représentatives de ces lignes, vérifient l'équation des télégraphistes. On intègre cette équation sur un contour fermé par la méthode de RIEMANN. Nous utilisons l'idée de GEIRINGER de représenter la solution sous forme de série entière pour la construction d'une solution analytique du problème. Pour les problèmes aux limites où deux lignes initiales sont données, l'intégration nous ramène à la résolution d'une double équation intégrale de FREEDHOLM pour les fonctionnelles représentatives des lignes dans le contour fermé. La plupart des problèmes aux limites, rencontrés en formage des métaux sont de type mixte et conduisent à de telles équations intégrales. Leur résolution à l'aide d'une représentation analytique de la solution et donc des fonctionnelles représentant les lignes de base nous permet de tirer les relations liant les fonctionnelles R et S en n'importe quel point du contour en fonction des valeurs initiales R_o et S_o. En d'autres termes, le développement de ces fonctionnelles analytiques en série entière nous donne les relations liant les coefficients du développement de R et S en fonction des coefficients du développement des fonctionnelles R_o et S_o représentant les lignes initiales données. La forme linéaire d'une telle représentation et de telles relations nous conduira à

donner une forme matricielle à ces relations et à définir des opérateurs matriciels de transformation des lignes initiales aux lignes finales de représentation fonctionnelles R et S.

La deuxième partie de ce chapitre sera consacrée au calcul de l'effort et du moment transmis par une ligne de glissement ainsi que des coordonnées cartésiennes des points du champ. Nous exposerons dans cette partie la méthode d'EWING de tels calculs qui utilise la représentation en série entière des intégrales donnant les coordonnées et l'effort, sous forme d'intégrales de convolution. Cette représentation aura l'intérêt pratique d'être utilisé aisément pour un calcul numérique à l'aide de l'ordinateur.

2.2.- Intégration des équations.

Soit le problème de construire le réseau entre deux lignes de glissement de base OA et OB (Fig. 7). Si les rayons de courbure de OA et OB, R_o et S_o sont connus, le problème sera de trouver les rayons de courbure R et S des lignes de glissement α et β qui passent par un point $P(\alpha,\beta)$ quelconque.



Pour de telles lignes de glissement de base OA et OB, les rayons de courbure R et S satisfont le système d'équations linéaires (11).

Adoptons, pour le rayon de courbure ρ tiré de la relation $1/\rho = \pm \left|\frac{d\Psi}{ds}\right|$ où Ψ est l'angle de la tangente locale et ds l'élément d'arc, la convention de signe suivante : le signe est + quand l'angle Ψ croît dans le sens inverse des aiguilles d'une montre; le signe - quand Ψ croît dans le sens des aiguilles d'une montre lorsque l'on parcourt la ligne dans le sens de s.

Avec cette convention, les rayons de courbure R et S satisfont le système d'équations linéaires aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha} + R &= 0 \\ \frac{\partial R}{\partial \beta} + S &= 0 \end{aligned} \qquad (13)$$

que nous allons intégrer par la méthode de RIEMANN.

Le système d'équations linéaires à intégrer peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial S}{\partial \alpha} &= 0 \\ \frac{\partial^2 S}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial R}{\partial \beta} &= 0 \end{aligned} \qquad (14)$$

En multipliant la 2ème relation de (13) par $S d\beta$ et la 1ère relation de (13) par $R d\alpha$, on obtient :

$$\begin{aligned} S \frac{\partial R}{\partial \beta} d\beta + S^2 d\beta &= 0 \\ R \frac{\partial S}{\partial \alpha} d\alpha + R^2 d\alpha &= 0 \end{aligned} \qquad (15)$$

Soit en remplaçant R en fonction de S d'une part et S en fonction de R d'autre part, il vient :

$$S \frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right) d\beta + S^2 d\beta = 0 \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial\alpha\partial\beta} - S = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad (16)$$

$$R \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(-\frac{\partial R}{\partial\beta}\right) d\alpha + R^2 d\alpha = 0 \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial\alpha\partial\beta} - R = 0$$

R et S vérifient des équations de la forme $\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + Cu$ avec $c = \pm 1$.

Les deux expressions suivantes sont différentielles totales exactes :

$$R \frac{\partial u}{\partial\alpha} d\alpha + u \frac{\partial R}{\partial\beta} d\beta = dg$$

$$u \frac{\partial R}{\partial\alpha} d\alpha + R \frac{\partial u}{\partial\beta} d\beta = dg' \quad . \qquad (17)$$

Intégrons l'une des deux différentielles totales sur un contour fermé. Le théorème de CAUCHY-RIEMANN donne :

$$\int_{OAPBO} dg = 0 = \int_{OAPBO} \left(R \frac{\partial u}{\partial\alpha} d\alpha + u \frac{\partial R}{\partial\beta} d\beta\right) = \int_{OA} R \frac{\partial u}{\partial\alpha} d\alpha + \int_{AP} u \frac{\partial R}{\partial\beta} d\beta$$

$$(\beta=0 \quad \alpha\in[0,\theta]) \qquad (\alpha=\theta \quad \beta\in[0,\Psi])$$

$$+ \int_{PB} R \frac{\partial u}{\partial\alpha} d\alpha + \int_{BO} u \frac{\partial R}{\partial\beta} d\beta \quad \Longrightarrow$$

$$(\beta=\Psi \quad \alpha\in[\theta,0]) \qquad (\alpha=0 \quad \beta\in[\Psi,0])$$

$$0 = \int_0^\theta R(\alpha,0) \frac{\partial u}{\partial\alpha} d\alpha + \int_0^\Psi u \frac{\partial R}{\partial\beta}(\theta,\beta) d\beta + \int_\Psi^0 R(\alpha,\Psi) \frac{\partial u}{\partial\alpha} d\alpha + \int_\theta^0 u \frac{\partial R}{\partial\beta}(0,\beta) d\beta .$$

Prenons comme fonction u, la fonction de BESSEL $u = J_o(2\sqrt{(\theta-\alpha)(\Psi-\beta)})$ qui vérifie bien l'équation hyperbolique avec $J_o(z)$ définie par

$$J_o(0) = 1 \qquad J_o'(0) = 0 \text{ et } J_o'' + J_o'/z + J_o = 0$$

Voyons si $J_o(z)$ avec $z = 2\sqrt{(\theta-\alpha)(\Psi-\beta)}$ vérifie bien l'équation hyperbolique.

$$\frac{\partial J_o(z)}{\partial\alpha} = \frac{\partial J_o}{\partial z}\,\frac{z}{\partial\alpha} = J_o'(z)\,\frac{\partial z}{\partial\alpha}$$

$$\frac{\partial z}{\partial\alpha}\;\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[2\sqrt{(\theta-\alpha)(\Psi-\beta)}\right] = -\frac{2(\Psi-\beta)}{2\sqrt{(\theta-\alpha)(\Psi-\beta)}} = -\sqrt{\frac{\Psi-\beta}{\theta-\alpha}}$$

donc $$\frac{\partial J_o}{\partial\alpha} = -J_o'(z)\sqrt{\frac{\Psi-\beta}{\theta-\alpha}}$$

$$\frac{\partial^2 J_o}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial J_o}{\partial\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial J_o}{\partial\alpha}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial z}\left[-J_o'(z)\cdot\sqrt{\frac{\Psi-\beta}{\theta-\alpha}}\right]\frac{\partial z}{\partial\beta}$$

$$= -J_o''\sqrt{\frac{\Psi-\beta}{\theta-\alpha}}\,\frac{\partial z}{\partial\beta} - J_o'\cdot\frac{\partial z}{\partial\beta}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{\frac{\Psi-\beta}{\theta-\alpha}}\right) = -J_o''\cdot\sqrt{\frac{\Psi-\beta}{\theta-\alpha}}\cdot\frac{\partial z}{\partial\beta} - J_o'\,\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sqrt{\frac{\Psi-\beta}{\theta-\alpha}}\right)$$

or $$\frac{\partial z}{\partial} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(2\sqrt{(\theta-\alpha)(\Psi-\beta)}\right) = -\frac{2(\theta-\alpha)}{2\sqrt{(\theta-\alpha)(\Psi-\beta)}} = -\sqrt{\frac{(\theta-\alpha)}{(\Psi-\beta)}}$$

et $$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sqrt{\frac{\Psi-\beta}{\theta-\alpha}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{\theta-\alpha}}\cdot(\Psi-\beta)^{-1/2} = \frac{-1}{2\sqrt{(\theta-\alpha)(\Psi-\beta)}}$$

donc finalement :

$$\frac{\partial^2 J_o}{\partial\alpha\partial\beta} = \left(-J_o''\sqrt{\frac{\Psi-\beta}{\theta-\alpha}}\right)\cdot\left(-\sqrt{\frac{\theta-\alpha}{\Psi-\beta}}\right) - J_o'\cdot\frac{-1}{2\sqrt{(\theta-\alpha)(\Psi-\beta)}}$$

$$\frac{\partial^2 J_o}{\partial\alpha\partial\beta} = J_o'' + \frac{J_o'}{z} \implies \frac{\partial^2 J_o}{\partial\alpha\partial\beta} + J_o = J_o'' + \frac{J_o'}{z} + J_o = 0 \quad ;$$

la fonction de BESSEL $J_o(z)$ vérifie bien l'équation hyperbolique $\frac{\partial^2 J_o}{\partial\alpha\partial\beta} + J_o = 0$.

Remplaçons alors u par la fonction $J_o(z)$ dans l'intégration de RIEMANN sur le contour fermé OAPBO.

$$0 = \int_o^\theta R(\alpha,0)\,\frac{\partial J_o}{\partial\alpha}\,(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)})d\alpha + \int_o^\Psi \underbrace{J_o(0)}_{=1}\,\frac{\partial R}{\partial\beta}\,(\theta,\beta)d\beta - \int_o^\theta R(\alpha,\Psi)\,\frac{\partial J_o(0)}{\partial\alpha}\,d\alpha$$

$$- \int_o^\Psi \frac{\partial R(0,\beta)}{\partial\beta}\,d\beta.J_o(2\sqrt{\theta(\Psi-\beta)})$$ * la 2ème intégrale est égale à $\begin{Bmatrix} R(\theta,\Psi) \\ -R(\theta,o) \end{Bmatrix}$;

la 3ème est nulle car $\frac{\partial J_o}{\partial\alpha}(0) = 0$ et la 4ème reste avec la 1ère.

$$R(\theta,\Psi) - R(\theta,0) = \int_o^\Psi J_o(2\sqrt{\theta(\Psi-\beta)})\,\frac{\partial R}{\partial\beta}\,(0,\beta)d\beta - \int_o^\theta R(\alpha,0)\,\frac{\partial J_o}{\partial\alpha}\,(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)})d\alpha.$$

Calculons la 2ème intégrale du 2ème membre par parties en posant

$R(\alpha,0) = u$ et $\frac{\partial J_o}{\partial\alpha}\,d\alpha = dv$ on a :

$$\int_o^\theta R(\alpha,0)\,\frac{\partial J_o}{\partial\alpha}\,(\quad)d\alpha = \left[J_o(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)}.R(\alpha,0)\right]_o^\theta - \int_o^\theta J_o(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)})\,\frac{\partial R(\alpha,0)}{\partial\alpha}\,d\alpha.$$

$$\int_o^\theta R(\alpha,\theta)\,\frac{\partial J_o}{\partial\alpha}\,(\quad)d\alpha = R(\theta,0) - R(0,0)J_o(2\sqrt{\theta\Psi}) - \int_o^\theta J_o(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)})\,\frac{\partial R(\alpha,0)}{\partial\alpha}\,d\alpha$$

remplaçons cette valeur de l'intégrale dans la relation trouvée il vient :

$$R(\theta,\Psi) - R(\theta,0) = \int_o^\Psi J_o(2\sqrt{\theta(\Psi-\beta)})\,\frac{\partial R(0,\beta)}{\partial\beta}\,d\beta - \{R(\theta,0) - R(0,0)J_o(2\sqrt{\theta\Psi}) - \int_o^\theta J_o(\;)\,\frac{\partial R(\alpha,0)}{\partial\alpha}\,d\alpha$$

ou encore

$$\boxed{R(\theta,\Psi) = R(0,0)J_o(2\sqrt{\theta,\Psi}) + \int_o^{\Psi} J_o(2\sqrt{\theta(\Psi-\beta)})\,\frac{\partial R(0,\beta)}{\partial\beta}\,d\beta + \int_o^{\theta} J_o(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)})\,\frac{\partial R(\alpha,0)}{\partial\alpha}\,d\alpha}$$

Il en est de même pour S qui vérifie l'équation hyperbolique.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha\partial\beta} + S = 0$$

$S\,\frac{\partial u}{\partial\alpha}\,d\alpha + u\,\frac{\partial S}{\partial\beta}\,d\beta$ est différentielle totale exacte avec u fonction vérifiant l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} + u = 0$.

L'intégration de RIEMANN nous donne :

$$\oint_{OAPBO} S\,\frac{\partial u}{\partial\alpha}\,d\alpha + u\,\frac{\partial S}{\partial\beta}\,d\beta = 0 = \int_{\substack{OA\\(\beta=0\\ \alpha\in[0,\theta])}} S\,\frac{\partial u}{\partial\alpha}\,d\alpha + \int_{\substack{AP\\(\alpha=\theta\\ \beta\in[0,\Psi])}} u\,\frac{\partial S}{\partial\beta}\,d\beta + \int_{\substack{PB\\(\beta=\Psi\\ \alpha\in[\theta,0])}} S\,\frac{\partial u}{\partial\alpha}\,d\alpha +$$

$$+ \int_{\substack{BO\\(\alpha=0\\ \beta\in[\Psi,0])}} u\,\frac{\partial S}{\partial\beta}\,d\beta$$

$$0 = \int_o^{\theta} S(\alpha,0)\,\frac{\partial u}{\partial\alpha}\,d\alpha + \int_o^{\Psi} u\,\frac{\partial S}{\partial\beta}\,(\theta,\beta)d\beta + \int_{\theta}^{o} S(\alpha,\Psi)\,\frac{\partial u}{\partial\alpha}\,d\alpha + \int_{\Psi}^{o} u\,\frac{\partial S(0,\beta)}{\partial\beta}\,d\beta \qquad (18)$$

Comme fonction u prenons $u = J_o(2\sqrt{(\theta-\alpha)(\Psi-\beta)})$ avec $J_o(0) = 1$ et $J_o'(0) = 0$

$$0 = \int_o^{\theta} S(\alpha,0)\,\frac{\partial J_o}{\partial\alpha}\,(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)}d\alpha + \int_o^{\Psi} J_o(0)\,\frac{\partial S(\theta,\beta)}{\partial\beta}\,d\beta + \int_{\theta}^{o} S(\alpha,\Psi)\,\frac{\partial J_o(0)}{\partial\alpha}\,d\alpha +$$

$$+ \int_{\Psi}^{o} J_o(2\sqrt{\theta(\Psi-\beta)})\,\frac{\partial S(0,\beta)}{\partial\beta}\,d\beta$$

$$0 = S(\theta,\Psi) - S(\theta,0) + \int_0^\theta S(\alpha,0)\,\frac{\partial J_0}{\partial\alpha}\,(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)})\,d\alpha - \int_0^\Psi J_0(2\sqrt{\theta(\Psi-\beta)})\,\frac{\partial S(0,\beta)}{\partial\beta}\,d\beta \implies$$

$$S(\theta,\Psi) - S(\theta,0) = \int_0^\Psi J_0(2\sqrt{\theta(\Psi-\beta)})\,\frac{\partial S(0,\beta)}{\partial\beta}\,d\beta - \int_0^\theta S(\alpha,0)\,\frac{\partial J_0}{\partial\alpha}\,(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)})\,d\alpha$$

$$= \int_0^\Psi J_0(\quad)\,\frac{\partial S(0,\beta)}{\partial\beta}\,d\beta - \left[\left[S(\alpha,0)J_0(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)})\right]_0^\theta - \int_0^\theta J_0(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)})\,\frac{\partial S(\alpha,0)}{\partial\alpha}\,d\alpha\right]$$

$$= \int_0^\Psi J_0(\quad)\,\frac{\partial S(0,\beta)}{\partial\beta}\,d\beta - S(\theta,0) + S(0,0)J_0(2\sqrt{\theta\Psi}) + \int_0^\theta J_0(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)})\,\frac{\partial S(\alpha,0)}{\partial\alpha}\,d\alpha.$$

on obtient donc

$$S(\theta,\Psi) = S(0,0)J_0(2\sqrt{\theta\Psi}) + \int_0^\Psi J_0(2\sqrt{\theta(\Psi-\beta)})\,\frac{\partial S(0,\beta)}{\partial\beta}\,d\beta + \int_0^\theta J_0(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)})\,\frac{\partial S(\alpha,0)}{\partial\alpha}\,d\alpha$$

L'intégration de RIEMANN nous a conduit à résoudre, pour trouver les solutions $S(\theta,\Psi)$ et $R(\theta,\Psi)$ en un point $P(\theta,\Psi)$, les deux équations intégrales suivantes :

$$R(\theta,\Psi) = R(0,0)J_0(2\sqrt{\theta\Psi}) + \int_0^\Psi J_0(2\sqrt{\theta(\Psi-\beta)})\,\frac{\partial R(0,\beta)}{\partial\beta}\,d\beta + \int_0^\theta J_0(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)})\,\frac{\partial R(\alpha,0)}{\partial\alpha}\,d\alpha \tag{19}$$

$$S(\theta,\Psi) = S(0,0)J_0(2\sqrt{\theta\Psi}) + \int_0^\Psi J_0(2\sqrt{\theta(\Psi-\beta)})\,\frac{\partial S(0,\beta)}{\partial\beta}\,d\beta + \int_0^\theta J_0(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)})\,\frac{\partial S(\alpha,0)}{\partial\alpha}\,d\alpha \tag{20}$$

2.3.- Développement en série entière.

Les rayons R et S sont considérés comme étant des fonctions continues et dérivables dans OAPBO et sur le contour.

Etant donné qu'on peut approcher une fonction continue quelconque par un polynôme, le théorème établi par H. GEIRINGER nous fournit un moyen pour déterminer pratiquement les solutions de notre problème.

Théorème.

Etant donnés deux polynômes

$$R(\alpha,0) = A_o + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \dots + A_n\,\alpha^n \quad \text{dans OA}$$

$$S(0,\beta) = B_o + B_1\beta + B_2\beta^2 + \dots + B_n\,\beta^n \quad \text{dans OB}$$

la fonction $u(\alpha,\beta)$ qui satisfait à l'équation $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} = u$ dans OAPBO et qui se réduit à $R(\alpha,0)$ sur OA et $S(0,\beta)$ sur OB est la suivante :

$$u(\alpha,\beta) = A_o + \sum_{\mu=1}^{m} B_\mu\,\mu!\,\frac{\partial^\mu J}{\partial\alpha^\mu} + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu\,\nu!\,\frac{\partial^\nu J}{\partial\beta^\nu}$$

avec J la fonction de BESSEL vérifiant l'équation $\boxed{\dfrac{\partial^2 J}{\partial\alpha\partial\beta} - J = 0}$

ici on développe les rayons R_o et S_o en série entière en les considérant comme fonctions analytiques :

$$R_o = R(\alpha,0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\alpha^n}{n!}$$

$$S_o = S(0,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\beta^n}{n!}$$

d'où $R(0,0) = a_o$

$S(0,0) = b_o$

Le choix de telles séries avec des coefficients $A_n = \frac{a_n}{n!}$ et $B_n = \frac{b_n}{n!}$ est retenu pour la convergence, car les séries $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ sont convergentes.

De plus, on trouve pratiquement que l'on a $a_m \sim 10^{-m} a_o$ ce qui rend les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\alpha^n}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\beta^n}{n!}$ rapidement convergentes.

Les équations (19) et (20) se transforment :

$$R(\theta,\Psi) = \int_o^{\Psi} J_o(2\sqrt{\theta(\Psi-\beta)}) \frac{\partial R(0,\beta)}{\partial \beta} d\beta + \int_o^{\theta} J_o(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)}) \frac{\partial R(\alpha,0)}{\partial \alpha} d\alpha + a_o J_o(2\sqrt{\theta\Psi}$$

$$S(\theta,\Psi) = \int_o^{\Psi} J_o(2\sqrt{\theta(\Psi-\beta)}) \frac{\partial S(0,\beta)}{\partial \beta} d\beta + \int_o^{\theta} J_o(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)}) \frac{\partial S(\alpha,0)}{\partial \alpha} d\alpha + b_o J_o(2\sqrt{\theta\Psi}$$

or on a aussi $\frac{\partial R}{\partial \beta} = -S$ (12) $\Longrightarrow$ $\frac{\partial R(0,\beta)}{\partial \beta} = -S(0,\beta)$

$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = -R$ (13) $\Longrightarrow$ $\frac{\partial S(\alpha,0)}{\partial \alpha} = -R(\alpha,0)$

Les deux équations à résoudre (19) et (20) deviennent :

$$\begin{cases} R(\theta,\Psi) = \int_o^{\theta} J_o(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)}) \frac{\partial R(\alpha,0)}{\partial \alpha} d\alpha - \int_o^{\Psi} J_o(2\sqrt{\theta(\Psi-\beta)}).S(0,\beta)d\beta + a_o J_o(2\sqrt{\theta\Psi}) + \ldots & (21) \\ S(\theta,\Psi) = \int_o^{\Psi} J_o(2\sqrt{\theta(\Psi-\beta)}) \frac{\partial S(0,\beta)}{\partial \beta} d\beta - \int_o^{\theta} J_o(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)}) R(\alpha,0) d\alpha + a_o J_o(2\sqrt{\theta\Psi}) + \ldots & (22) \end{cases}$$

introduisons dans ces 2 équations les rayons $R(\alpha,0)$ et $S(0,\beta)$ sous forme de séries entières il vient,

$$\begin{cases} R(\theta,\Psi) = \int_o^{\theta} J_o(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)}) \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\alpha^n}{n!}\right) d\alpha - \int_o^{\Psi} J_o(2\sqrt{\theta(\Psi-\beta)}) . \sum_{n=0}^{\infty} b_n \beta^n/n!.d\beta + \ldots \\ S(\theta,\Psi) = \int_o^{\Psi} J_o(2\sqrt{\theta(\Psi-\beta)}) . \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\beta^n}{n!}\right) d\beta - \int_o^{\theta} J_o(2\sqrt{\Psi(\theta-\alpha)}) . \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\alpha^n}{n!} d\alpha . + \ldots \end{cases}$$

L'intégration de ces deux équations donne :

$$R(\theta,\Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{\theta}{\Psi}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{\theta\Psi}) - b_n \left(\frac{\Psi}{\theta}\right)^{n+1/2} J_{n+1}(2\sqrt{\theta\Psi})\right]$$

$$S(\theta,\Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-a_n \left(\frac{\theta}{\Psi}\right)^{\frac{n+1}{2}} J_{n+1}(2\sqrt{\theta\Psi}) + b_n \left(\frac{\Psi}{\theta}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{\theta\Psi})\right]$$

avec $J_n(2\sqrt{\theta\Psi}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\sqrt{\theta\Psi}]^{2m+n}}{m!\,(m+n)!}$

$$J_{n+1}(2\sqrt{\theta\Psi}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\sqrt{\theta\Psi}]^{2m+n+1}}{m!\,(m+n+1)!}$$

avec les expressions de J_n et J_{n+1} sous forme de séries on obtient :

$$R(\theta,\Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{\theta}{\Psi}\right)^{n/2} . \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\theta\Psi)^{m+n/2}}{m!\,(m+n)!} - b_n \left(\frac{\Psi}{\theta}\right)^{\frac{n+1}{2}} . \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\theta\Psi)^{m+\frac{n+1}{2}}}{m!\,(m+n+1)!}\right]$$

$$R(\theta,\Psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \frac{\Psi^m}{m!} \frac{\theta^{m+n}}{(m+n)!} - b_n \frac{\theta^m}{m!} \frac{\Psi^{m+n+1}}{(m+n+1)!}\right]$$

et

$$S(\theta,\Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-a_n \left(\frac{\theta}{\Psi}\right)^{\frac{n+1}{2}} . \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\theta\Psi)^{m+\frac{n+1}{2}}}{m!\,(m+n+1)!} + b_n \left(\frac{\Psi}{\theta}\right)^{n/2} . \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\theta\Psi)^{m+n/2}}{m!\,(m+n)!}\right]$$

$$S(\theta,\Psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-a_n \frac{\Psi^m}{m!} \frac{\theta^{m+n+1}}{(m+n+1)!} + b_n \frac{\theta^m}{m!} \frac{\Psi^{m+n}}{(m+n)!}\right].$$

Donc en tout point $P(\theta,\Psi)$ on a les expressions des rayons de courbure R et S suivantes :

$$(23) \qquad R(\theta,\Psi) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(a_n \frac{\theta^{m+n}}{(m+n)!} \frac{\Psi^m}{m!} - b_n \frac{\theta^m}{m!} \frac{\Psi^{m+n+1}}{(m+n+1)!}\right)$$

$$(24) \qquad S(\theta,\Psi) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(-a_n \frac{\theta^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \frac{\Psi^m}{m!} + b_n \frac{\theta^m}{m!} \frac{\Psi^{m+n}}{(m+n)!}\right)$$

Reprenons les équations (23) et (24) qui ont donné R et S en un point $P(\theta,\Psi)$.

$$R(\theta,\Psi) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(a_n \frac{\theta^{m+n}}{(m+n)!} \frac{\Psi^m}{m!} - b_n \frac{\theta^m}{m!} \frac{\Psi^{m+n+1}}{(m+n+1)!}\right)$$

$$S(\theta,\Psi) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(-a_n \frac{\theta^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \frac{\Psi^m}{m!} + b_n \frac{\theta^m}{m!} \frac{\Psi^{m+n}}{(m+n)!}\right)$$

nous pouvons à partir de ces relations développer les rayons de courbure des lignes α et β passant par le point $P(\theta,\Psi)$ en série entière de la forme

$$R(\alpha,\Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(\Psi) \frac{\alpha^n}{n!}$$

$$S(\theta,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(\theta) \frac{\beta^n}{n!}$$

et nous nous proposons de déterminer les coefficients $r_n(\Psi)$ et $s_n(\theta)$, dans l'expression de $R(\theta,\Psi)$ où l'on prend $\theta = \alpha$ comme variable le 1er membre s'écrit

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{m+n}}{(m+n)!} \frac{\Psi^m}{m!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{\alpha^n}{n!} \Psi^o + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\Psi^1}{1!} + \frac{\alpha^{n+2}}{(n+2)!} \frac{\Psi^2}{2!} + \frac{\alpha^{n+3}}{(n+3)!} \frac{\Psi^3}{3!} + \right.$$

$$\left. + \ldots\right]$$

$$J = a_o \left[\alpha^o \Psi^o + \frac{\alpha^1}{1} \frac{\Psi^1}{1} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{\Psi^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} \frac{\Psi^3}{3!} + \ldots\right]$$

$$+ a_1 \left[\alpha \Psi^o + \frac{\alpha^2}{2!} \Psi^1 + \frac{\alpha^3}{3!} \Psi^2/2! + \ldots\right]$$

$$+ a_2 \left[\frac{\alpha^2}{2!} \Psi^o + \frac{\alpha^3}{3!} \Psi^1 + \frac{\alpha^4}{4!} \frac{\Psi^2}{2!} + \ldots\right]$$

$$+ \vdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_o \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\Psi^n}{n!} + a_1 \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\Psi^{n-1}}{(n-1)!} + a_2 \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\Psi^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_o \frac{\Psi^n}{n!} + a_1 \frac{\Psi^{n-1}}{(n-1)!} + a_2 \frac{\Psi^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + a_p \frac{\Psi^{n-p}}{(n-p)!} + \ldots + \right.$$

$$\left. + a_n \Psi^o\right] \alpha^n/n!$$

en posant $n-p = m \Rightarrow p = n-m$

et p varie de 0 jusqu'à n d'où m varie de 0 jusqu'à n donc on obtient :

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left(\sum_{m=0}^{n} a_{n-m} \frac{\Psi^m}{m!}\right.$$

Prenons cette fois le 2ème membre de l'expression de $R(\theta,\Psi)$ c'est à dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_n \frac{\alpha^m}{m!} \frac{\psi^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \right) = I$$

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left[\frac{\psi^{n+1}}{(n+1)!} \alpha^o + \alpha \frac{\psi^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{\psi^{n+3}}{(n+3)!} + \frac{\alpha^3}{3!} \frac{\psi^{n+4}}{(n+4)!} + \dots \right]$$

$$I = b_o \left[\frac{\psi^1}{1!} \alpha^o + \alpha \frac{\psi^2}{2!} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{\psi^3}{3!} + \frac{\alpha^3}{3!} \frac{\psi^4}{4!} + \dots \right]$$

$$+ b_1 \left[\alpha^o \frac{\psi^2}{2!} + \alpha \frac{\psi^3}{3!} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{\psi^4}{4!} + \frac{\alpha^3}{3!} \frac{\psi^5}{5!} + \dots \right]$$

$$+ b_2 \left[\alpha^o \frac{\psi^3}{3!} + \alpha \frac{\psi^4}{4!} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{\psi^5}{5!} + \frac{\alpha^3}{3!} \frac{\psi^6}{6!} + \dots \right]$$

$$+ \vdots$$

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \left[b_o \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\psi^{n+1}}{(n+1)!} + b_1 \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\psi^{n+2}}{(n+2)!} + b_2 \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\psi^{n+3}}{(n+3)!} + \dots + \right.$$

$$\left. + b_p \frac{\alpha^n}{n!} \frac{\psi^{n+p+1}}{(n+p+1)!} + \dots \right]$$

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left[b_o \frac{\psi^{n+1}}{(n+1)!} + b_1 \frac{\psi^{n+2}}{(n+2)!} + \dots + b_p \frac{\psi^{n+p+1}}{(n+p+1)!} + \dots \right]$$

posons $n+p+1 = m \Rightarrow p = m-n-1$

avec p variant de 0 à l'∞ d'où m varie de $n+1$ à l'∞

donc I s'écrit encore :

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left[\sum_{m=n+1}^{\infty} b_{m-n-1} \frac{\psi^m}{m!} \right] \quad \text{donc}$$

$$R(\alpha,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(\psi) \frac{\alpha^n}{n!} = J-I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left[\sum_{m=0}^{n} a_{n-m} \frac{\psi^m}{m!} - \sum_{m=n+1}^{\infty} b_{m-n+1} \frac{\psi^m}{m!} \right]$$

ce qui nous donne bien

$$r_n(\Psi) = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} \frac{\Psi^m}{m!} - \sum_{m=n+1}^{\infty} b_{m-n-1} \frac{\Psi^m}{m!} \quad . \tag{25}$$

Les deux relations donnant $R(\theta,\Psi)$ et $S(\theta,\Psi)$ étant symétriques pour les a_n et b_n on obtient sans difficulté la forme du coefficient du développement en série entière de $S(\theta,\beta)$ à savoir :

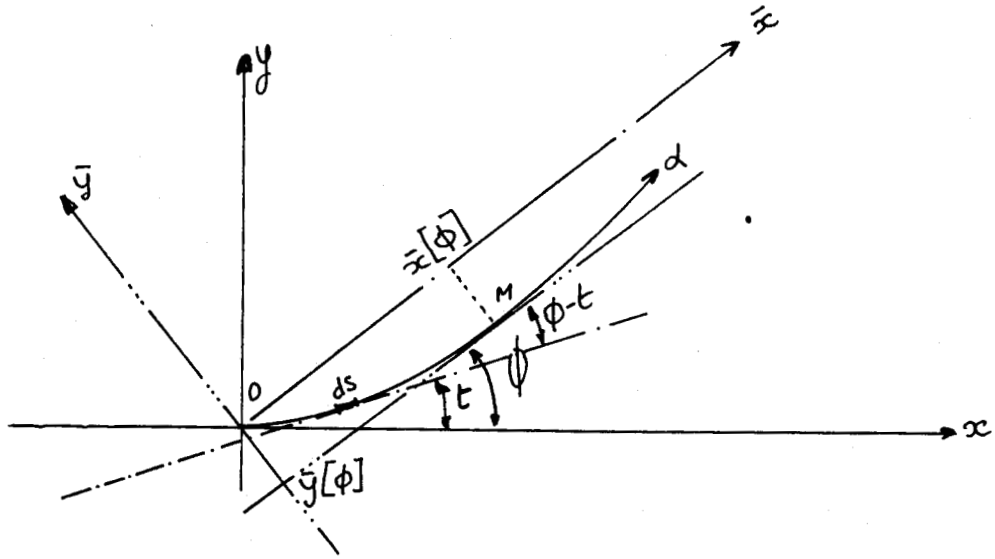
$$s_n(\theta) = \sum_{m=0}^{n} b_{n-m} \frac{\theta^m}{m!} - \sum_{m=n+1}^{\infty} a_{m-n} \frac{\theta^m}{m!} \tag{26}$$

2.4.- Détermination des coordonnées, des efforts et des moments transmis par le réseau.

A partir des résultats précédents, nous nous proposons de calculer les coordonnées cartésiennes de tout point P du réseau des lignes de glissement, les efforts agissant sur un segment d'une ligne et le moment résultant de ces efforts le long d'une ligne par rapport à un point fixe.

a) Coordonnées cartésiennes.

Tout d'abord, calculons les coordonnées cartésiennes. Pour celà, connaissant le développement en série entière du rayon de courbure de la ligne de glissement considéré, nous calculerons les coordonnées cartésiennes (x,y) de tout point de cette ligne en introduisant les coordonnées de MIKHLIN $(\bar{x},\bar{y})$ que nous allons illustrer sur la figure 8.



ϕ est l'angle de la tangente locale avec Ox au point final M .

Les coordonnées (x,y) sont reliées aux coordonnées $(\bar{x},\bar{y})$ par les relations

$$\begin{cases} x = \bar{x}\cos\phi - \bar{y}\sin\phi \\ y = \bar{x}\sin\phi + \bar{y}\cos\phi \ . \end{cases} \qquad (27)$$

Exprimons les coordonnées $\bar{x}$ et $\bar{y}$ en fonction du rayon de courbure R de la ligne .

Considérons un élément d'arc ds d'une ligne de glissement (Fig. 8) au point P où l'angle ϕ a pour valeur t, nous aurons $ds = R(t)\,dt$, et par projection de l'élément ds sur les axes de MIKHLIN, on obtient :

$$d\bar{x} = R(t).\cos(\phi-t)\,dt$$

$$d\bar{y} = R(t).\sin(\phi-t)\,dt$$

et par intégration de O à ϕ , si l'on prend O comme origine d'angle et l'angle maximum, nous aurons les coordonnées en ce point final M :

$$\bar{x}(\phi) = \int_0^{\phi} R(t).\cos(\phi-t)\,dt$$

$$\bar{y}(\phi) = \int_0^{\phi} R(t).\sin(\phi-t)\,dt \ . \qquad (28)$$

Il est avantageux d'utiliser les intégrales sous forme d'intégrales de convolution, car elles peuvent ainsi être développées en séries entières dont les coefficients sont données par des relations de récurrence particulièrement simples. En effet, nous avons trouvé les intégrales de convolution suivantes :

$$\begin{matrix}\bar{x}(\phi)\\ \bar{y}(\phi)\end{matrix} = \int_0^{\phi} R(t) \begin{matrix}\cos(\phi-t)\\ \sin(\phi-t)\end{matrix} dt .$$

Soit $R(\phi)$ le rayon de courbure au point relatif à l'angle ϕ et qui est développé en une série entière donnée : $R(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \frac{\phi^n}{n!}$

$$\bar{x}(\phi) = \int_0^{\phi} R(t)\cos(\phi-t)dt = \left[R(t).\sin(\phi-t)\right]^{\phi} + \int_0^{\phi} R'(t).\sin(\phi-t)dt.$$

$$\left[R(t)\sin(\phi-t)\right]_0^{\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad x(\phi) = \int_0^{\phi} R'(t)\sin(\phi-t).dt$$

$$\text{et} \quad \bar{y}(\phi) = \int_0^{\phi} R(t).\sin(\phi-t).dt = \left[R(t)\cos(\phi-t)\right]^{\phi} - \int_0^{\phi} R'(t).\cos(\phi-t).dt .$$

$$\left[R(t).\cos(\phi-t)\right]_0^{\phi} = R(\phi) \quad \Rightarrow \quad y(\phi) = R(\phi) - \int_0^{\phi} R'(t).\cos(\phi-t).dt$$

ou encore

$$\begin{matrix}\bar{x}(\phi) = \bar{y}'(\phi)\\ \bar{y}(\phi) = R(\phi) - \bar{x}'(\phi)\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}\bar{y}'(\phi) = \bar{x}(\phi) & (29)\\ \bar{x}'(\phi) = R(\phi) - \bar{y}(\phi) & (30)\end{cases}$$

des relations (29), (30) nous allons tirer les relations de récurrence qui lient les coefficients des séries entières des développements de $\bar{x}$ et $\bar{y}$. On obtient :

$$\bar{x}(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \frac{\phi^n}{n!}$$

$$\bar{y}(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \frac{\phi^{n+1}}{(n+1)!}$$

donnés par (29)

et la relation (30) avec $R(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \frac{\phi^n}{n!}$ nous donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_{n+1} \frac{\phi^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} t_{n-1} \frac{\phi^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \frac{\phi^n}{n!} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (t_{n+1} - t_{n-1}) \frac{\phi^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \frac{\phi^n}{n!} \Rightarrow \quad t_{n+1} - t_{n-1} = r_n \quad (31)$$

avec $t_o = t_{-1} = 0$ et $t_1 = r_o$.

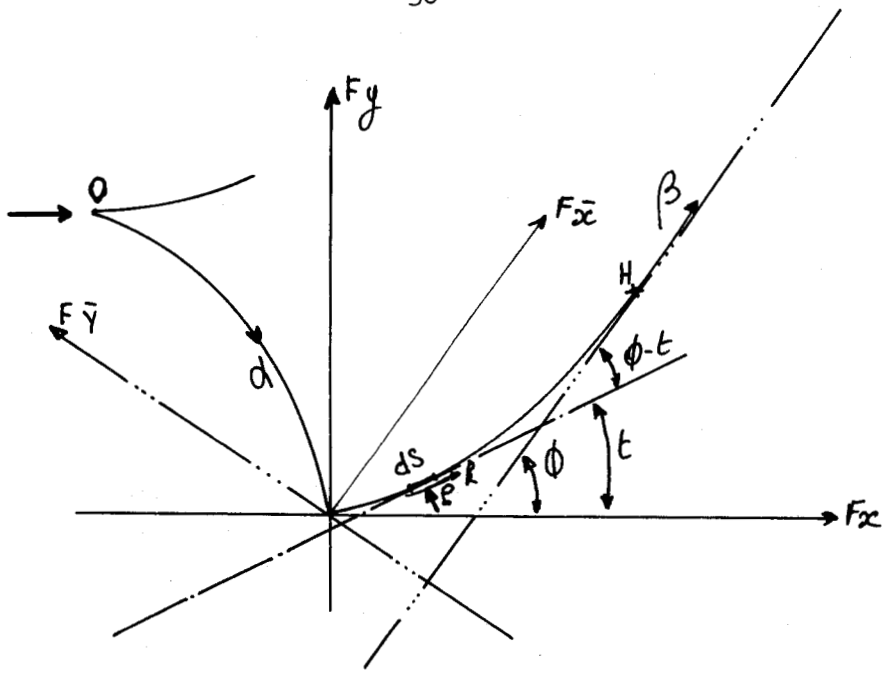
Nous avons ainsi obtenus des développements des coordonnées $\bar{x}$ et $\bar{y}$ en séries entières en α et β analogues à celles de R et S rayons de courbures des lignes α et β .

b) Calcul des efforts transmis.

Pour calculer la résultante des efforts transmis le long des lignes, nous utilisons la même technique qui introduit des intégrales de convolution développées en séries entières pour obtenir des relations de récurrence entre les coefficients de ces séries comme on l'a fait pour les coordonnées.

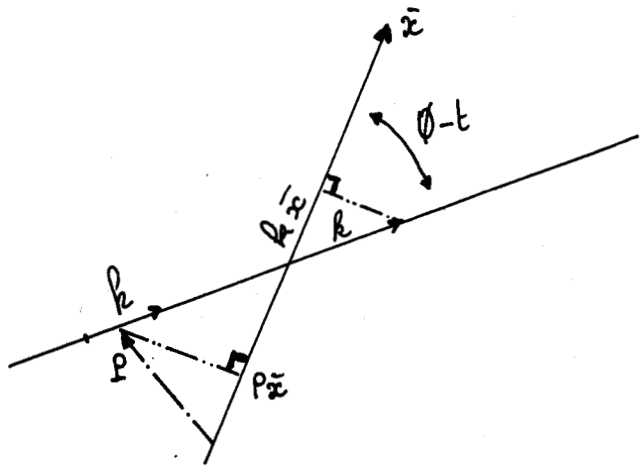
Nous nous proposons de calculer la résultante des forces et le moment résultant agissant sur le côté concave d'un arc d'une ligne de glissement.

Considérons une ligne α (Fig. 9) caractérisée par son rayon de courbure $R(\alpha)$ et soit p_o la pression hydrostatique au point origine O .



Sur l'élément ds de la ligne α s'exercent une pression p et une contrainte tangentielle k .

Soit $p_{\bar{x}}$ la projection de cette pression p sur l'axe $\bar{x}$ et soit $k_{\bar{x}}$ la projection de k sur le même axe, on aura : (Fig. 10).



$$\sin(\phi-t) = \frac{p_{\bar{x}}}{p} \Rightarrow p_{\bar{x}} = p \sin(\phi-t)$$

$$\cos(\phi-t) = \frac{k_{\bar{x}}}{k} \Rightarrow k_{\bar{x}} = k \cos(\phi-t) .$$

Les relations (9) nous permettent de calculer p de k au point considéré où l'angle ϕ a pour valeur t

$$p - 2k\,\alpha = cte \Rightarrow p_o - 2k.0 = p-2kt \Rightarrow$$

$$p = p_o + 2kt \quad \text{pour la ligne } \beta; \quad \alpha = 0$$

pour $\alpha \neq 0$, on a : $p_o = p - 2k(\alpha+t) \Rightarrow p = p_o + 2k(\alpha+t)$.

L'effort élémentaire $dF_{\bar{x}}$ qui agit sur ds a pour valeur, en tenant compte du calcul de p en fonction de k; :

$$dF_{\bar{x}} = k.\cos(\phi-t).ds + p\,\sin(\phi-t).ds$$

$$= k.\cos(\phi-t)R(t)dt + p\,\sin(\phi-t)R(t)dt$$

$$= k.\cos(\phi-t)R(t)dt + p_o\,\sin(\phi-t)R(t)dt + 2kt\,\sin(\phi-t)R(t)dt$$

$$\frac{dF_{\bar{x}}}{k} = R(t)dt\,\left[\cos(\phi-t) + 2t\,\sin(\phi-t)\right] + p_o/k\,\sin(\phi-t).R(t)dt$$

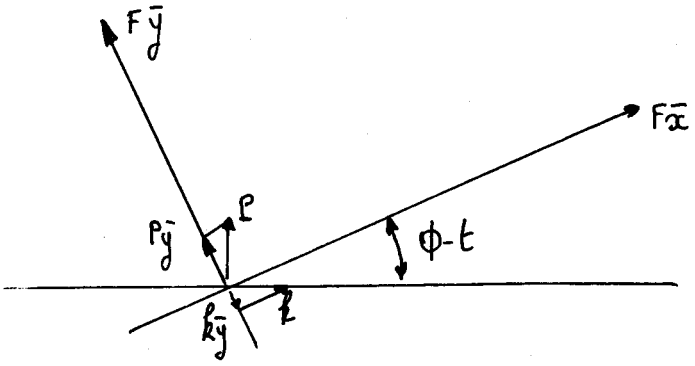
or $\sin(\phi-t)R(t)dt = -d\bar{y}$.

Intégrons alors de 0 à H cette quantité pour obtenir l'effort résultant $F_{\bar{x}}$.

$$\frac{F_{\bar{x}}}{k} = \int_o^\phi \cos(\phi-t)R(t)dt + \int_o^\phi 2t\,\sin(\phi-t)R(t)dt - p_o/k\int_o^\phi d\bar{y}$$

$$\frac{F_{\bar{x}}}{k} = \bar{x} - \frac{p_o}{k}\,\bar{y} + \int_o^\phi 2t\,\sin(\phi-t)R(t)dt \qquad (32)$$

Calculons maintenant la composante de l'effort résultant $F_{\bar{y}}$ suivant l'axe $\bar{y}$



nous partons toujours d'un élément ds soumis à p et k . La projection de p et k sur $\bar{y}$ donne $k_{\bar{y}} = -k \sin(\phi-t)$

$$p_{\bar{y}} = p \cos(\phi-t) .$$

La somme des projections de ces efforts élémentaires sera $dF_{\bar{y}}$

$$dF_{\bar{y}} = -k \sin(\phi-t)ds + p \cos(\phi-t)ds.$$

$$dF_{\bar{y}} = -k \sin(\phi-t)R(t)dt + p \cos(\phi-t)R(t)dt$$

$$= -k \sin(\phi-t)R(t)dt + p_o \cos(\phi-t)R(t)dt + 2kt \cos(\phi-t)R(t)dt$$

$$\frac{dF_{\bar{y}}}{k} = \left[2t \cos(\phi-t) - \sin(\phi-t)\right] R(t)dt + p_o/k \cos(\phi-t)R(t)dt$$

or $\cos(\phi-t)R(t)dt = d\bar{x}$

donc $$\frac{dF_{\bar{y}}}{k} = \left[2t \cos(\phi-t) - \sin(\phi-t)\right]R(t)dt + \frac{p_o}{k} d\bar{x} .$$

Intégrons de 0 à ϕ cette quantité pour avoir la valeur de l'effort résultant suivant $\bar{y}$ qui agit sur l'arc OH de la ligne de glissement

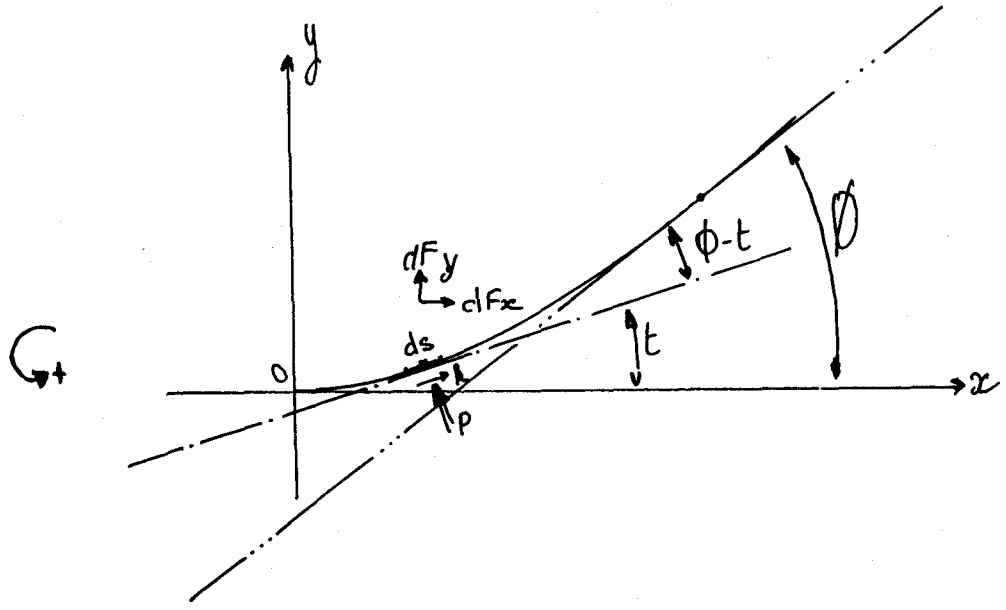
$$\frac{F_{\bar{y}}}{k} = \int_o^\phi 2t \cos(\phi-t)R(t)dt - \int_o^\phi \sin(\phi-t)R(t)dt + p_{o/k} \int_o^\phi d\bar{x}$$

$$\frac{F_{\bar{y}}}{k} = \bar{y} + \frac{p_o}{} x + 2 \int_o^\phi t.\cos(\phi-t)R(t)dt \qquad (33)$$

c) Calcul du moment transmis par la ligne (α) au point O .

Soit la ligne de glissement de type (α) dont l'origine est le point O et tournant d'un angle ϕ ,$\alpha \in [0,\phi]$.

Prenons, pour simplifier, comme axes de coordonnées (OXY) la tangente $\overrightarrow{Ox}$



en O à cette ligne et sa perpendiculaire $\overrightarrow{Oy}$.

Considérons l'élément de ligne da au point P . L'effort élémentaire transmis par la ligne jusqu'au point P aura comme projection sur les axes dF_x et dF_y . Le moment élémentaire transmis par cette tranche de ligne, en prenant comme sens positif le sens indiqué sur la figure , sera :

$$dM = x(t).dF_y - y(t).dF_x$$

sachant que l'on a : $\begin{cases} dF_x = (k.\cos t - p.\sin t)\ ds \\ dF_y = (k \sin t + p \sin t)\ ds \end{cases}$

l'expression du moment élémentaire sera donc :

$$dM = x(t)\ [k.\sin t + p.\cos t]\ ds - y(t)\ [k.\cos t - p.\sin t]\ ds$$

or si la pression hydrostatique en O est p_o donnée, la relation de HENKY pour cette ligne (α) nous donne la valeur de la pression hydrostatique en P p_P à porté dans l'expression donnant le moment élémentaire.

$$p_P + 2kt = p_o + 2k.0 \Rightarrow p_P = p_o - 2k.t$$

et

$$dM = k\ ds\ [x(t).\sin t - y(t).\cos t] + p_o\ ds\ [x(t).\cos t + y(t).\sin t]$$
$$- 2k.t\ [x(t).\cos t + y(t).\sin t]\ ds\ .$$

ou encore en divisant le tout par k .

$$\frac{dM}{k} = ds\ \{(x(t).\sin t - y(t).\mathrm{costt}) + \frac{p_o}{k}(x(t).\cos t + y(t).\sin t)\}$$
$$- 2t(x(t).\cos t + y(t)\sin t)\}$$

or si on exprime cette relation avec les coordonnées de MIKHLIN (les coordonnées locales) :

$$\bar{x}(t) = x(t).\cos t + y(t).\sin t$$

$$\bar{y}(t) = x(t).\sin t - y(t).\cos t$$

on obtient

$$\frac{dM}{k} = \left[\bar{x}(t)\left[p_{o/k} - 2t\right] + \bar{y}(t)\right] \times ds$$

ou portant la valeur $ds = R\ dt$ dans cette relation et en intégrant entre O et ϕ puisque $t \in [0,\phi]$ on aura le moment transmis par toute la ligne c'est-à-dire

$$\frac{M}{k} = \int_o^{\phi} [\bar{y}(t) + \bar{x}(t)\ (\frac{p_o}{k} - 2t)]\ R(t).dt \qquad (34)$$

2.5.- Représentation des efforts transmis par des séries entières.

Nous avons trouvé au paragraphe 2.4. les efforts transmis $F_{\bar{x}}$ et $F_{\bar{y}}$

$$\frac{F_{\bar{x}}}{k} = \bar{x} - p_o/_k\, \bar{y} + 2 \int_o^{\phi} t \sin(\phi-t)R(t).dt$$

$$\frac{F_{\bar{y}}}{k} = \bar{y} + p_o/_k\, \bar{x} + 2 \int_o^{\phi} t \cos(\phi-t)R(t).dt \ ,$$

dans les 2 expressions interviennent les intégrales

$$\int_o^{\phi} t \cos(\phi-t)R(t)dt \quad \text{et} \quad \int_o^{\phi} t \sin(\phi-t)R(t).dt,$$

si l'on a $\int_o^{\phi} t \cos(\phi-t)R(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{n}{n!}$ on aura

conformément à la relation (29)

$$\int_o^{\phi} t \sin(\phi-t)R(t).dt = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n-1} \frac{\phi^n}{n!}$$

avec cette fois-ci la relation de récurrence liant les coefficients de ces séries entières :

$$C_{n-1} + C_{n+1} = n|r_{n-1}|$$

et $\quad C_{-1} = C_o = 0$.

Mais contrairement à l'effort et aux coordonnées de MIKHLIN, on ne peut trouver un développement en série pour l'expression du moment qui donnerait une relation de récurrence simple. On utilisera pour le moment une intégration numérique.

CHAPITRE III

FORMULATION MATRICIELLE

3.1. - Introduction.

Notre problème est de construire le réseau des lignes de glissement ne connaissant pas la forme des deux lignes initiales. Pour calculer ces deux lignes initiales R_o et S_o nous formulerons les résultats du chapitre II de l'analyse du réseau sous forme matricielle, car les équations aux dérivées partielles du problèmes sont linéaires. Nous construisons le réseau à partir d'une maille dans laquelle la solution est analytique.

Deux telles mailles sont séparées par une ligne de glissement. Nous notons symboliquement une ligne de glissement de cette région par un vecteur V d'un espace linéaire de dimension infinie. Ce vecteur caractérisera toute fonctionnelle représentant la ligne de glissement (rayon de courbure, coordonnées de Mikhlin...).

3.2. - Représentation matricielle des lignes de glissement.

Une ligne de glissement V est définie par son rayon de courbure qui est développé en série entière. Nous la représentons par la matrice colonne des coefficients de la série entière.

Les lignes de glissement initiales OA et OB de rayons de courbure $R_o = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\alpha^n}{n!}$ et $S_o = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\beta^n}{n!}$ (Fig. 7) sont représentées par les matrices colonnes :

$$V_1 = \begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad V_2 = \begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

De la même manière les lignes passant par $P'(\theta,\Psi)$ de rayons de courbure $R(\alpha,\Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(\Psi) \cdot \frac{\alpha^n}{n!}$ et $S(\theta,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(\theta) \frac{\beta^n}{n!}$ seront représentées par les matrices colonnes :

$$V_3 = \begin{bmatrix} r_o \\ r_1 \\ r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \qquad V_4 = \begin{bmatrix} s_o \\ s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

or nous avons établi au chapitre II les relations (25) et (26) qui relient les coefficients r_n et s_n aux a_n et b_n ; ceci nous permettra de relier les composantes des vecteurs V_3 et V_4 à celles de V_1 et V_2 qu'on écrira matriciellement :

$$V_3 = P^*_\Psi V_1 + Q^*_\Psi V_2 \qquad (37)$$

$$V_4 = P^*_\theta V_2 + Q^*_\theta V_1 \qquad (38)$$

nous avons introduit ici deux opérateurs linéaires P^* et Q^* dont on va donner la forme et la signification.

a) <u>Détermination des opérateurs</u> P^* et Q^*.

Nous avons les relations suivantes :

$$r_n = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} \frac{\Psi^m}{m!} - \sum_{m=n+1}^{\infty} b_{m-n-1} \frac{\Psi^m}{m!} \qquad (39)$$

$$s_n = \sum_{m=0}^{n} b_{n-m} \frac{\theta^m}{m!} - \sum_{m=n+1}^{\infty} a_{m-n-1} \frac{\theta^m}{m!} \qquad (40)$$

c'est-à-dire pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$...

$$r_o = a_o\ \psi^o - (b_o\ \psi + b_1 \frac{\psi^2}{2!} + b_2 \frac{\psi^3}{3!} + \ldots$$

$$r_1 = \sum_{m=0}^{1} a_{1-m} \frac{\psi^m}{m!} - \sum_{m=2}^{\infty} b_{m-2} \frac{\psi^m}{m!} = a_o\ \psi + a_1\ \psi^o - (b_o \frac{\psi^2}{2!} + b_1 \frac{\psi^3}{3!} + \ldots$$

$$r_2 = \sum_{m=0}^{2} a_{2-m} \frac{\psi^m}{m!} - \sum_{m=3}^{\infty} b_{m-3} \frac{\psi^m}{m!} = a_o\ \psi^2/2! + a_1\ \psi + a_2 \psi^o -$$

$$(b_o\ \psi^3/3! + b_1\ \psi^4/4! + b_2\ \psi^5/5! + \ldots$$

$$\vdots$$

ce qui s'écrit matriciellement

$$\begin{bmatrix} r_o \\ r_1 \\ r_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi^o & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \psi^1 & \psi^o & 0 & 0 & \ldots \\ \psi^2/2! & \psi^1 & \psi^o & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \psi^1 & \psi^o & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \psi^1 & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \psi^1 & \psi^2/2! & \psi^3/3! & \\ \psi^2/2! & \psi^3/3! & \psi^4/4! & \ldots \\ \psi^3/3! & \psi^4/4! & \psi^5/5! & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$[r_n(\Psi)] = P^*_\Psi \times [V_1] + Q^*_\Psi \times [V_2]$$

avec :

$$P^*_\Psi = \begin{bmatrix} \psi^o & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \psi^1 & \psi^o & 0 & 0 & \ldots \\ \psi^2/2! & \psi^1 & \psi^o & 0 & \ldots \\ \psi^3/3! & \psi^2/2! & \psi^1 & \psi^o & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \qquad Q^*_\Psi = - \begin{bmatrix} \psi^1 & \psi^2/2! & \psi^3/3! & \psi^4/4! & \ldots \\ \psi^2/2! & \psi^3/3! & \psi^4/4! & \psi^5/5! & \ldots \\ \psi^3/3! & \psi^4/4! & \psi^5/5! & \vdots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

on en fera de même pour $s_n(\theta)$ pour obtenir les opérateurs P^*_θ et Q^*_θ.

Les rôles des opérateurs P^* et Q^* sont illustrés par les exemples qui suivent.

Si l'une des deux lignes de glissement est réduite à un point O, par exemple $V_2 = 0$, on aura alors à construire le champ centré à partir d'une seule ligne de glissement V_1 (Fig. 12).

OAB est le champ centré défini par OA avec une singularité en O (discontinuité de la contrainte)

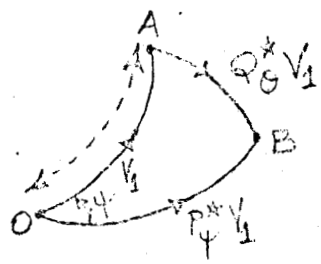


Fig. 12

on représente alors la construction de la façon suivant :
OA est transformé en OB par l'opérateur P_ψ^* et OA en AB par l'opérateur Q_θ^*.

Si au contraire, on avait V_1 réduit à un point, on aurait construit le champ centré à partir de V_2 et on aurait obtenu (Fig. 13).

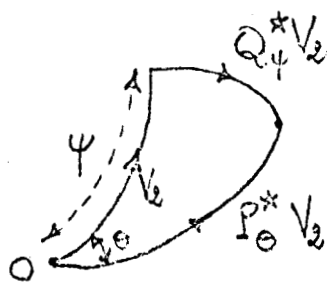


Fig. 13

L'intérêt de ces constructions vient du fait que le champ défini par deux lignes de glissement initiales (α et β) peut être pris comme la somme des deux champs centrés construits chacun sur une ligne initiale (α puis β) (Fig. 14).

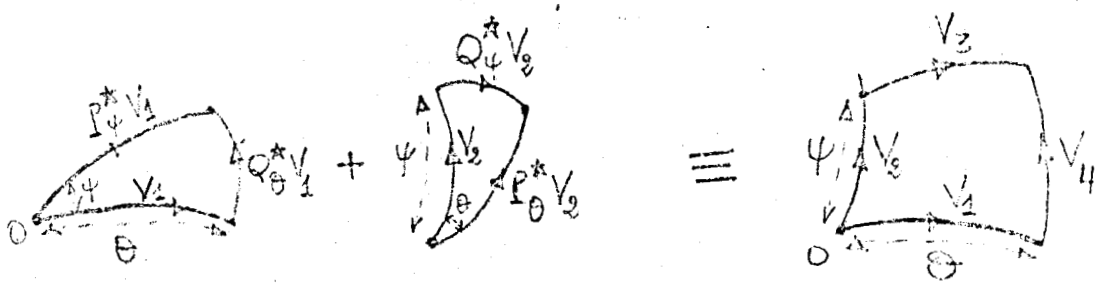


Fig. 14

b) <u>Les opérateurs</u> P <u>et</u> Q.

Il est important de noter le sens des lignes de glissement originales et images obtenues par la construction précédente, par exemple la construction qui transforme OA en OB est différente de celle qui envoie OA en BO.

L'opérateur P^*_ψ qui transforme OA en OB détermine l'opérateur qui transforme OA en BO.

Soit la partie AB d'une ligne de glissement (α) de rayon de courbure $R_A(\alpha)$ développable en série entière c'est-à-dire $R_A(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\alpha^n}{n!}$. AB est parcouru de A vers B (Fig. 15).

Quand on inverse la direction de la ligne c'est-à-dire quand on parcourt la partie de la ligne de B vers A son rayon devient $R_B(\bar{\alpha})$, car l'angle de variation de la tangente à la ligne change et on aura

$$R_B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\bar{\alpha}^n}{n!}$$

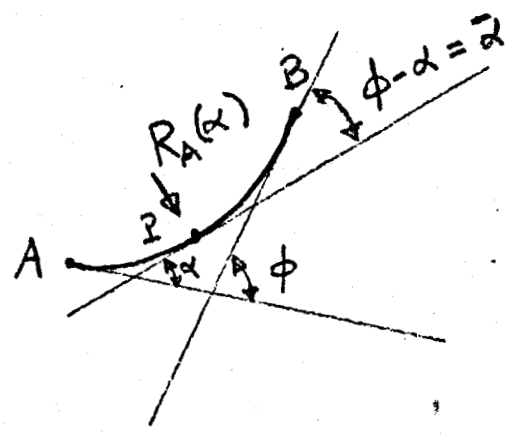


Fig. 15

on pose $\phi - \alpha = \bar{\alpha}$

$$\phi - \alpha = \bar{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \phi - \bar{\alpha}$$

on aura $R_B(\bar{\alpha}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\bar{\alpha}^n}{n!} = - R_A(\alpha)$

or $R_A(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\alpha^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(\phi-\bar{\alpha})^n}{n!}$ ce qui nous donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\bar{\alpha}^n}{n!} = - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(\phi-\bar{\alpha})^n}{n!} .$$

Le signe (-) est introduit conformément à la règle, car en partant de B l'angle croît dans le sens inverse que quand on part de A.

Comparons alors les coefficients a_n et b_n :

$$b_o + b_1\bar{\alpha} + b_2 \frac{\bar{\alpha}^2}{2!} + b_3 \frac{\bar{\alpha}^3}{3!} + \ldots = - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n!} (C_n^o \phi^n \bar{\alpha}^o - C_n^1 \phi^{n-1} \bar{\alpha} + C_n^2 \phi^{n-2} \bar{\alpha}^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + (-1)^m C_m^n \phi^{n-m} \bar{\alpha}^m + \ldots)\right]$$

donc on aura :

$$b_o = -\left[a_o + a_1(C_1^o\phi) + \frac{a_2}{2!} C_2^o \phi^2 + \frac{a_3}{3!} C_3^o \phi^3 + \ldots + \frac{a_m}{m!} C_m^o \phi^m + \ldots\right]$$

$$\frac{b_1}{n!} = -\left[-a_1 C_1^1 \phi^o - \frac{a_2}{2!} C_2^1 \phi - \frac{a_3}{3!} C_3^1 \phi^2 + \ldots - \frac{a_m}{m!} C_m^1 \phi^{m-1} + \ldots\right]$$

$$\vdots$$

$$\frac{b_n}{n!} = -\left[(1)^n \sum_{m=n}^{\infty} \frac{a_m}{m!} C_m^n \phi^{m-n}\right] = (-1)^{n+1} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{a_m}{m!} \frac{m!}{n!(m-n)!} \phi^{m-n}$$

$$\frac{b_n}{\cancel{n!}} = (-1)^{n+1} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{a_m}{\cancel{m!}} \frac{\cancel{m!}}{\cancel{n!}(m-n)!} \phi^{m-n}$$

ou encore

$$b_n = (-1)^{n+1} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{a_m}{(m-n)!} \phi^{m-n} \qquad (41)$$

La forme générale de b'_n est donc :

$$b_n = (-1)^{n+1} \sum_{m=n}^{\infty} a_m \frac{\phi^{m-n}}{(m-n)!}$$

ce qui nous donne pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$b_o = - \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{\phi^m}{m!} = - a_o \phi^o - a_1 \phi^1 - a_2 \phi^2/_{2!} \ldots$$

$$b_1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{\phi^{m-1}}{(m-1)!} = a_1 \phi^o + a_2 \phi + a_3 \phi^2/_{2!} + \ldots$$

$$b_2 = - \sum_{m=2}^{\infty} a_m \frac{\phi^{m-2}}{(m-2)!} = - a_2 \phi^o - a_3 \phi - a_4 \phi^2/_{2!} \ldots$$

$$\vdots$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \phi^o & \phi & \phi^2/2! & \phi^3/3! & \ldots \\ 0 & -\phi^o & -\phi^1/1! & -\phi^2/2! & \ldots \\ 0 & 0 & \phi^o & \phi^1/1! & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad (42)$$

et on voit que le passage des a_n aux b_n se fait par l'opérateur matriciel R_ϕ

$$R_\phi = - \begin{bmatrix} \phi^o & \phi & \phi^2/2! & \phi^3/3! & \ldots \\ 0 & -\phi^o & -\phi & -\phi^2/2! & \ldots \\ 0 & 0 & \phi^o & \phi & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Cet opérateur nous permet d'inverser le sens de la direction de la ligne de glissement.

On définit maintenant les opérateurs P et Q par :

$$P_{\theta\Psi} = R_\theta P^*_\Psi \quad \text{et} \quad Q_{\theta\Psi} = R_\Psi Q^*_\theta \tag{43}$$

R_Ψ car quand on se déplace sur une ligne β c'est Ψ qui varie.

Les 2 opérateurs $P'_{\theta\Psi}$ et $Q_{\theta\Psi}$ transforment OA en BO et BA respectivement (figure 16)

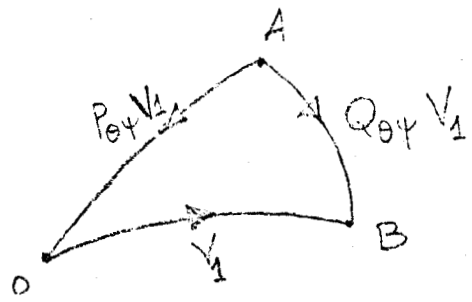


Fig. 16

Si on multiplie les équations

$$\begin{cases} V_3 = P^*_\Psi V_1 + Q^*_\Psi V_2 & (37) \\ V_4 = P^*_\theta V_2 + Q^*_\theta V_1 & (38) \end{cases}$$

par R_θ et R_Ψ respectivement, on obtient les nouvelles équations suivantes :

$$\begin{cases} V_3 = P_{\theta\Psi}\, V_1 + Q_{\Psi\theta}\, V_2 & (44) \\ V_4 = P_{\Psi\theta}\, V_2 + Q_{\theta\Psi}\, V_1 & (45) \end{cases}$$

pour lesquelles les directions des lignes de glissement V_3 et V_4 sont opposées aux directions de V_3 et V_4 des équations (37) et (38) (voir les figures 17 et 18)

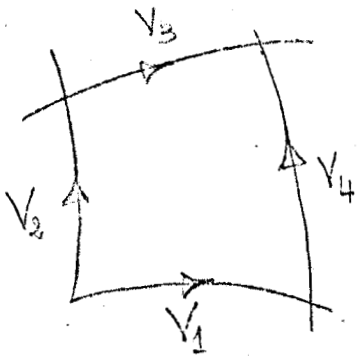


Fig. 17

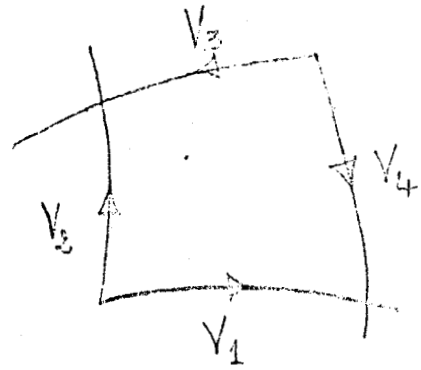


Fig. 18

Ces opérateurs satisfont certaines identités que nous nous proposons de déterminer. Pour celà, au lieu de prendre V_1 et V_2 comme lignes de glissement de base prenons les lignes V_3 et V_4. On déduira alors V_1 et V_2 à partir des nouvelles lignes de base V_3 et V_4.

Ici les lignes de base n'ont pas la même concavité que V_1 et V_2 ; leurs rayons de courbure vérifient de nouvelles équations.

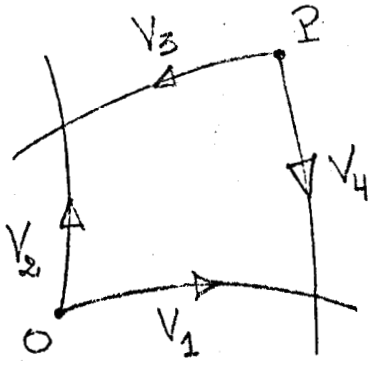


Fig. 19

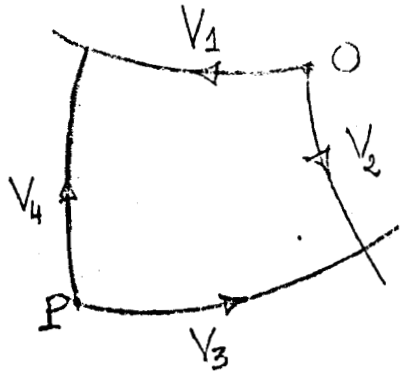


Fig. 20

En effet, nous passons de (19) à (20) en changeant de base les lignes, (α) et (β) ayant des concavités différentes, leurs rayons satisfont à des équations qui diffèrent d'un signe pour respecter la règle des signes donnée au début.

Pour la figure (19) les rayons R et S satisfont aux équations linéaires suivantes

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial R}{\partial \beta} = -S \\[2ex] \dfrac{\partial S}{\partial \alpha} = -R \end{array}\right.$$

et pour la figure (20) R et S satisfont le système :

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial R}{\partial \beta} = S \\[2ex] \dfrac{\partial S}{\partial \alpha} = R \end{array}\right.$$

le 1er système, nous l'avons déjà intégré. L'intégration de Riemann du second système faite par Ewing et par Collins donne les rayons en un point $P(\theta,\psi)$:

$$\left\{\begin{array}{l} R(\theta,\psi) = \displaystyle\sum_{m,n=0}^{\infty} \left(a_n \frac{\theta^{m+n}}{(m+n)!} \frac{\psi^m}{m!} + b_n \frac{\theta^m}{m!} \frac{\psi^{m+n+1}}{(m+n+1)!}\right) \\[3ex] S(\theta,\psi) = \displaystyle\sum_{m,n=0}^{\infty} \left(a_n \frac{\theta^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \frac{\psi^m}{m!} + b_n \frac{\theta^m}{m!} \frac{\psi^{m+n}}{(m+n)!}\right) \end{array}\right.$$

ou encore en posant pour ce système comme on l'a fait pour le système (1)

$$R(\alpha,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(\psi) \frac{\alpha^n}{n!} \quad \text{et} \quad S(\theta,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(\theta) \frac{\beta^n}{n!}$$

$$(19) \implies \left|\begin{array}{ll} r_n(\psi) = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}\, \psi^m/m! - \sum_{m=n+1}^{\infty} b_{m-n-1}\, \psi^m/m! & (46) \\[2ex] s_n(\theta) = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} b_{n-m} \frac{\theta^m}{m!} - \sum_{m=n+1}^{\infty} a_{m-n-1}\, \theta^m/m! & (47) \end{array}\right.$$

$$(20) \implies \left|\begin{array}{ll} r_n(\psi) = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}\, \psi^m/m! + \sum_{m=n+1}^{\infty} b_{m-n-1}\, \psi^m/m! & (48) \\[2ex] s_n(\theta) = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} b_{n-m} \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{m=n+1}^{\infty} a_{m-n-1}\, \theta^m/m! & (49) \end{array}\right.$$

on s'intéresse ici au système (48, 49) dans lequel les a_n et b_n sont les

a_n et b_n sont les coefficients des lignes de base c'est-à-dire des lignes V_3 et V_4 donc $a_n = r_n$ et $b_n = s_n$ et les lignes obtenus V_1 et V_2 passant par $P(\theta,\Psi)$ ont comme coefficient $a_n = r_n$ et $b_n = s_n$ donc dans le système (48, 49) on remplace les r_n par les a_n et les s_n par les b_n et vice-versa, on obtient donc :

$$a_n(\Psi) = \sum_{m=0}^{n} r_{n-m}\ \Psi^m/m! + \sum_{m=n+1}^{\infty} s_{m-n-1}\ \Psi^m/m! \tag{50}$$

$$b_n(\theta) = \sum_{m=0}^{n} s_{n-m}\ \theta^m/m! + \sum_{m=n+1}^{\infty} r_{m-n-1}\ \theta^m/m! \tag{51}$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{cases} V_1 = P_{\theta\Psi}\ V_3 - Q_{\Psi\theta}\ V_4 & (52) \\ V_2 = P_{\Psi\theta}\ V_4 - Q_{\theta\Psi}\ V_3 & (53) \end{cases}$$

obtenue de façon analogue que pour le système (I).

Remplaçons dans les relations qu'on vient d'obtenir V_3 et V_4 par leurs valeurs lorsque V_1 et V_2 sont les caractéristiques de base :

$$(54) \qquad \begin{cases} V_1 = P_{\theta\Psi}[P_{\theta\Psi}\ V_1 + Q_{\Psi\theta}\ V_2] - Q_{\Psi\theta}[P_{\Psi\theta}\ V_2 + Q_{\theta\Psi}\ V_1] \\ V_2 = P_{\Psi\theta}[P_{\Psi\theta}\ V_2 + Q_{\theta\Psi}\ V_1] - Q_{\theta\Psi}[P_{\theta\Psi}\ V_1 + Q_{\Psi\theta}\ V_2] \end{cases} \Longrightarrow$$

$$(55) \qquad \begin{cases} V_1 = [P^2_{\theta\Psi} - Q_{\Psi\theta}\ Q_{\theta\Psi}]V_1 + [P_{\theta\Psi}\ Q_{\Psi\theta} - Q_{\Psi\theta}\ P_{\Psi\theta}\ V_2] \\ V_2 = [P^2_{\Psi\theta} - Q_{\theta\Psi}\ Q_{\Psi\theta}]V_2 + [P_{\Psi\theta}\ Q_{\theta\Psi} - Q_{\theta\Psi}\ P_{\theta\Psi}]V_1\ . \end{cases}$$

Ces équations nous donnent les identités suivantes

$$\begin{cases} P^2_{\theta\Psi} - Q_{\Psi\theta}\ Q_{\theta\Psi} \equiv I & (56) \\ P_{\Psi\theta}\ Q_{\theta\Psi} = Q_{\theta\Psi}\ P_{\theta\Psi} & (57) \end{cases}$$

Voyons l'interprétation géométrique de ces identités :
soit AB une ligne de glissement de base V et BAC le champ sigulier construit sur AB avec l'angle de singularité Ψ. CAD et CBE sont les champs singuliers construits sur CA et CB avec les angles de singularité Ψ et θ respectivement.

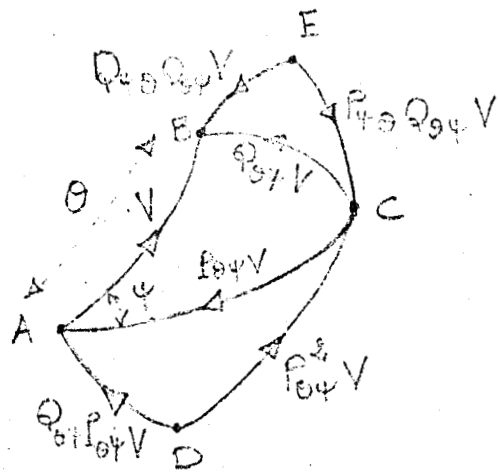


Fig. 21

Nous pouvons considérer le champ BAC comme la somme des deux champs CAD et CBE.

Alors, EC et DA se combinent pour donner le point singulier A, ceci nous donne l'égalité

$$Q_{\theta\Psi}\, P_{\theta\Psi} = P_{\Psi\theta}\, Q_{\theta\Psi}$$

et EB se combine avec DC pour donner AB(V) la ligne de base et ceci nous donne la seconde identité :

$$P^2_{\theta\Psi} - Q_{\Psi\theta} \cdot Q_{\theta\Psi} = I.$$

c) <u>Les opérateurs particuliers.</u>

α) <u>L'opérateur de frontière lisse</u> T :

Cet opérateur est important dans les applications. Il permet de construire le réseau de lignes de glissement entre une ligne donnée et une frontière

droite lisse. C'est un problème aux limites mixtes.

Soit AB la ligne donnée V (Figure 22) et on désire construire le réseau des lignes entre cette ligne V et les frontières rectilignes lisses AX et AY.

En notant que la condition de nullité de la contrainte de cisaillement sur le bord lisse est automatiquement satisfaite si l'on choisit la 2ème ligne de base la ligne réfléchie de V sur le bord, le problème pourra être vu comme un problème avec ligne caractéristique initiale.

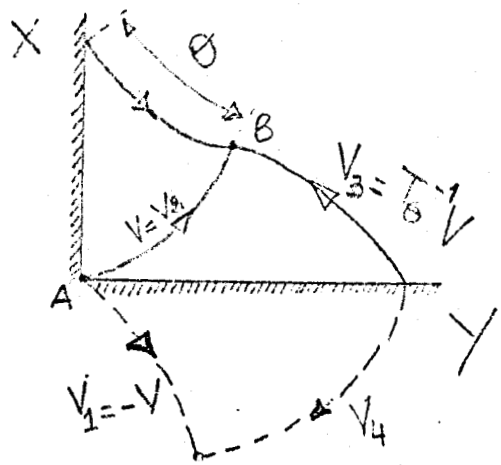


Fig. 22

Pour ce réseau de Hill formé des lignes V_1 V_2 V_3 V_4 on a :

$$V_3 = P_{\theta\theta} V_1 + Q_{\theta\theta} V_2 = -P_{\theta\theta} V + Q_{\theta\theta} V$$

$$= V(-P_{\theta\theta} + Q_{\theta\theta}) = T_\theta^{-1} V \quad \Longrightarrow$$

$$T_\theta^{-1} = -P_{\theta\theta} + Q_{\theta\theta}. \qquad (58)$$

Prenons cette fois le réseau de Hill de la ligne donnée V et de la ligne réféchie de V sur le bord AX comme lignes de base. Ici, les lignes de glissement changent de concavité (Figure 23).

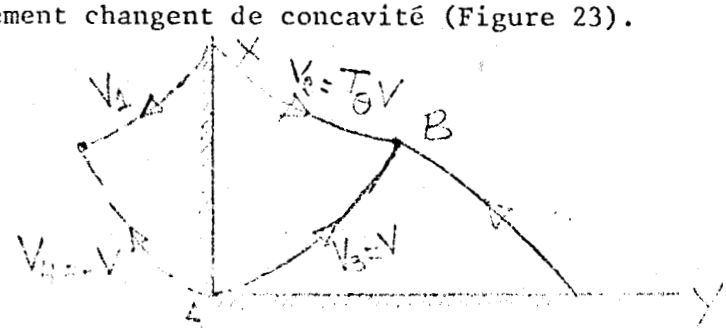


Fig. 23

Appliquons les relations trouvées dans le chapitre pour un réseau de Hill ayant des lignes de base de même concavité, on aura :

$$V_2 = P_{\theta\theta} V_4 - Q_{\theta\theta} V_3 = -P_{\theta\theta} V - Q_{\theta\theta} V'$$

$$= V(-P_{\theta\theta} - Q_{\theta\theta}) = T_\theta V \qquad ==>$$

$$T_\theta = - P_{\theta\theta} - Q_{\theta\theta}. \qquad (59)$$

On peut noter encore les opérateurs :

$$\begin{cases} T = - P - Q \\ T^{-1} = - P + Q \end{cases} \qquad (60)$$

Une propriété intéressante de cet opérateur T est à noter. En effet, nous avons trouvé l'identité, vérifiée par les opérateurs P et Q, suivante :

$$P_{\Psi\theta} Q_{\theta\Psi} = Q_{\theta\Psi} P_{\theta\Psi}.$$

Si les angles θ et Ψ sont égaux pour le réseau ce qui est le cas pour l'opérateur du "bord lisse", car toutes les lignes de glissement font un angle de 45° avec les bords AX et AY, cette identité devient :

$$P_{\theta\theta} Q_{\theta\theta} = Q_{\theta\theta} P_{\theta\theta} \qquad (61)$$

ceci veut dire que les opérateurs P et Q commutent. On voit alors, à partir des expressions de T et de T^{-1} en fonction de P et Q, que ces opérateurs de frontière lisse commutent avec P et Q.

$$T = - P - Q \quad ==> \quad TP = - PP - QP$$

$$PT = - PP - PQ$$

or $QP = PQ$ d'où $TP = PT$

et

$$\left.\begin{array}{l} TQ = -PQ - QQ \\ QT = -QP - QQ \end{array}\right\| \quad \Longrightarrow \quad T.Q = Q.T \qquad (62)$$

Il en est de même pour l'opérateur T^{-1}.

β) L'opérateur de Translation $S\phi$.

On considère une branche de ligne de glissement d'origine A. S'il s'agit d'une ligne α son rayon de courbure sera $R_A(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\alpha^n}{n!}$.

Faisons subir à l'origine A de cette ligne α une translation d'angle ϕ. Le rayon de courbure sera

$$R'_A(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\alpha^n}{n!} \qquad \text{on le note } R'_A(\alpha) \text{ car}$$

on fait la translation d'angle dans la direction intrinsèque. On a donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\alpha^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(\alpha+\phi)^n}{n!}$$

Cherchons l'opérateur $S\phi$ qui nous permet de passer de R_A à R'_A.

$$(\alpha+\phi)^n = C_n^o \alpha^n \phi^o + C^1 \alpha^{n-1} \phi + C_n^2 \alpha^{n-2} \phi^2 + \ldots C_n^m \alpha^{n-m} \phi^m + \ldots + \phi^n$$

donc :

$$b_o + b_1\alpha + b_2 \frac{a^2}{2!} + \ldots + b_n \frac{\alpha^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \Big[C_n^o \alpha^n \phi^o + C_n^1 \alpha^{n-1} \phi +$$

$$+ C_n^2 \alpha^{n-2} \phi^2 + \ldots + C_n^m \alpha^{n-m} \phi^m \ldots + \phi^n \Big]$$

$$b_o = a_o + a_1 C_1^1 \phi + \frac{a_2}{2!} C_2^2 \phi^2 + \frac{a_3}{3!} C_3^3 \phi^3 + \ldots + \frac{a_m}{m!} C_m^m \phi^m \ldots$$

$$b_1 = a_1 C_1^o \phi^o + \frac{a_2}{2!} C_2^1 \phi + \frac{a_3}{3!} C_3^2 \phi^2 + \ldots + \frac{a_m}{m!} C_m^{m-1} \phi^{m-1} + \ldots$$

$$\frac{b_2}{2!} = \frac{a_2}{2!} C_2^o \phi^o + \frac{a_3}{3!} C_3^1 \phi + \ldots + \frac{a_m}{m!} C_m^{m-2} \phi^{m-2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{b_n}{n!} = \frac{a_n}{n!} C_2^o \phi^o + \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} C_{n+1}^1 \phi + \ldots + \frac{a_m}{m!} C_m^{m-n} \phi^{m-n} + \ldots$$

on a bien donc : $\frac{b_n}{n!} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{a_m}{m!} C_m^{m-n} \phi^{m-n}$

$$C_m^{m-n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \quad \text{d'où alors :}$$

$$\frac{b_n}{\cancel{n!}} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{a_m}{\cancel{m!}} \frac{\cancel{m!}\,\phi^{m-n}}{\cancel{n!}(m-n)!} \implies b_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m \frac{\phi^{m-n}}{(m-n)!}$$

on a donc la relation entre les coefficients

$$b_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m \frac{\phi^{m-n}}{(m-n)!}$$

d'où l'on tire :

$$b_o = a_o \phi^o + a_1 \frac{\phi^1}{1!} + a_2 \frac{\phi^2}{2!} + a_3 \frac{\phi^3}{3!} + \ldots$$

$$b_1 = a_1 \phi^o + a_2 \frac{\phi}{1!} + a_3 \frac{\phi^2}{2!} + a_4 \frac{\phi^3}{3!} + \ldots$$

$$b_2 = a_2 \phi^o + a_3 \frac{\phi}{1!} + a_4 \frac{\phi^2}{2!} + a_5 \frac{\phi^3}{3!} + \ldots$$

ou encore sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^o & \frac{\phi^1}{1!} & \frac{\phi^2}{2!} & \cdots\cdots & \\ 0 & \phi^o & \frac{\phi^1}{1!} & \frac{\phi^2}{2!} & \cdots \\ 0 & 0 & \phi^o & \frac{\phi^1}{1!} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad (63)$$

l'opérateur matriciel qui nous fait passer du vecteur de composantes les a_n au vecteur de composantes les b_n est l'opérateur de translation $S\phi$ donné par la matrice calculée plus haut :

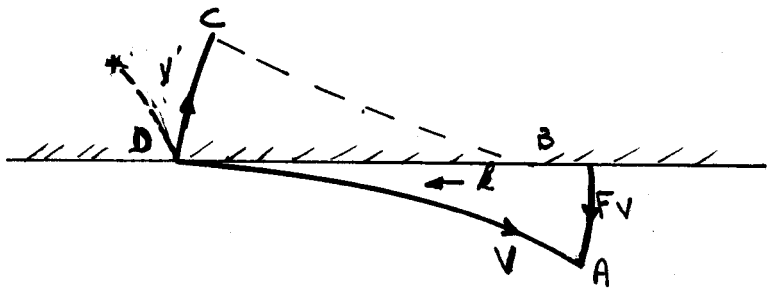
$$S_\phi = \begin{bmatrix} \phi^o & \frac{\phi^1}{1!} & \frac{\phi^2}{2!} & \frac{\phi^3}{3!} & \cdots \\ 0 & \phi^o & \frac{\phi^1}{1!} & \frac{\phi^2}{2!} & \cdots \\ 0 & 0 & \phi^o & \frac{\phi^1}{1!} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{bmatrix}$$

Cet opérateur a la propriété suivante :

$$S_\theta . S_\psi = S_\psi . S_\theta = S_{\theta+\psi} \qquad (64)$$

γ) <u>L'opérateur F de frontière rectiligne parfaitement rugueuse.</u>

Nous venons de voir l'opérateur de frontière lisse T qui a une forme simple en fonction de P et Q. Nous allons donner ici la forme de l'opérateur F qui transforme une ligne de glissement V tangente à une frontière rectiligne parfaitement rugueuse.



Soit OB la frontière parfaitement rugueuse et soit OA la ligne qu'on dénote V . La ligne BA sera la transformée de la ligne OA par l'opérateur F que l'on se propose d'expliciter.

OA est une ligne α qui rencontre tangentiellement la frontière OB puisque $\tau = k$ (frontière parfaitement rugueuse) et AB est une ligne β qui rencontre orthogonalement la frontière OB. Les conditions sur la frontière OB sont les suivantes :

$$\alpha = \beta \quad \text{et} \quad S = 0$$

Ces deux conditions sont données respectivement par les relations de HENHY-PRANDTL et la projection d'un élément ds de la frontière sur une (α) et (β) . Si V_1 et V_1' sont représentés par les coefficients a_n et a_n' de leur représentation en série entières en α et β .

$V_1 = \{a_n\}$ et $V_1' = \{a_n'\}$ vecteurs de l'espace linéaire infini.

Nous avons établi au IIème chapitre que si V_1 et V_1' sont deux lignes de base d'un champ dont les rayons de courbure seront représentés par les vecteurs $[a_n]$ et $[a_n']$, les lignes finales V_3 et V_4 auront pour rayons de courbure $R(\alpha,\beta)$ et $S(\alpha,\beta)$ donnés par les relations qui suivent :

$$R(\alpha,\beta) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[a_n \frac{\alpha^{m+n}}{(m+n)!} \frac{\beta^m}{m!} - a'_n \frac{\alpha^m}{m!} \frac{\beta^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \right]$$

$$S(\alpha,\beta) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[-a_n \frac{\alpha^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \frac{\beta^m}{m!} + a'_n \frac{\alpha^m}{m!} \frac{\beta^{m+n}}{(m+n)!} \right]$$

portons dans ces relations, les conditions vérifiées sur OB à savoir $\alpha = \beta$ et $\beta = 0$, pour celà il suffit d'utiliser la 2ème relation :

$$S(\alpha,\alpha) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[-a_n \frac{\alpha^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \frac{\alpha^m}{m!} + a'_n \frac{\alpha^m}{m!} \frac{\alpha^{m+n}}{(m+n)!} \right] = 0$$

c'est-à-dire on a : $a'_n - a_{n-1} = 0$

pour $n = 1$ $\quad a'_1 - a_o = 0$

$n = 2$ $\quad a'_2 - a_1 = 0$

$a'_3 - a_2 = 0$

et ainsi de suite.

Introduisons maintenant la matrice

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & & \end{vmatrix}$$

dont la ligne parallèle à la diagonale et en dessous de celle-ci est occupée par le nombre 1. V'_1 et V_1 seront liées par la relation matricielle suivante :

$$V_1 = J.V_1' \quad \text{ou encore}$$

$$V_1' = J^{-1}.V_1$$

portant cette égalité dans la relation donnant la ligne $V_4 = P_{\theta\theta} \; V_2 + Q_{\theta\theta} \; V_1$.

que $\left| \begin{array}{l} V_2 = V_1' \\ V_4 = BA = \mathbb{F}.\, V_1 \end{array} \right.$

donc $\mathbb{F}\, V_1 = \left[Q_{\theta\theta} + P_{\theta\theta}.J^{-1} \right] V_1 = 0$ d'où alors l'expression de l'opérateur F

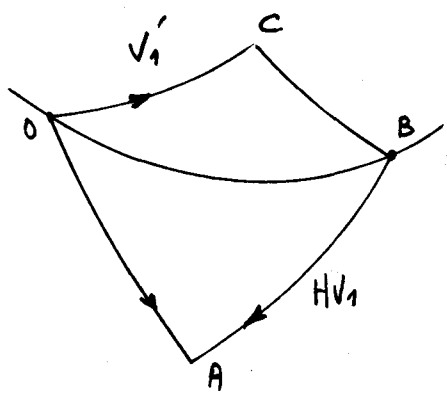
$$\mathbb{F} = Q_{\theta\theta} + P_{\theta\theta}.J^{-1}$$

$$\mathbb{F} = Q_{\theta\theta} + P_{\theta\theta}.J$$

Cet opérateur est un cas particulier du cas plus général où la frontière n'est pas parfaitement rugueuse, c'est-à-dire pour lequel on a $r = m\,k$ avec $0 < m < 1$ donc où les lignes de glissement font avec cette frontière un angle $\lambda \neq \pi/4$ et $\lambda \neq 0$. Cet opérateur plus général a été donné par I.F. COLLINS et l'a noté G_λ.

d) <u>L'opérateur de surface libre.</u>

Dans certains problèmes, on a à construire le champ de lignes de glissement entre une ligne OA (V_1) donnée et une surface libre OB dont la position n'est pas connue à priori.



Cette surface libre est tout de même déterminée par les conditions suivantes; à savoir la nullité en chaque point de cette surface OB des composantes à la fois normale σ_n et tangentielle τ de la contrainte. Ceci se traduit par les conditions suivantes :

La pression hydrostatique p_o est constante tout le long de OB.
Toutes les lignes de glissement font un angle $\Pi/_4$ avec la surface OB .

Ces conditions peuvent s'écrire d'une autre façon :

Sur la frontière OB on a $Rd\alpha = Sd\beta$

et des relations de HENKY : $p_A + 2k\alpha = p_o$ sur la ligne OA de type (α)

$p_A - 2k \times 0 = p_B - 2k\beta$ sur la ligne AB de type(β)

p_o étant constant sur la frontière OB nous permet d'écrire :

$$\left| \begin{array}{l} p_A = p_B - 2k\beta = p_o - 2k\beta \\ p_A = p_o - 2k\alpha \end{array} \right. \Rightarrow \quad p_o - 2k\alpha = p_o - 2k\beta \quad \text{d'où} \quad \alpha = \beta \quad \text{sur OB.}$$

Les conditions à écrire deviennent alors :

$Rd\alpha = Sd\beta$ et $\alpha = \beta$ sur la frontière OB. La variation de β sur la frontière [HILL]: $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{P}{2k}\right) = -2\left(\frac{\sin\theta}{S} + \frac{\cos\theta}{R}\right)$ avec ici $\theta = -\Pi/_4 \Rightarrow R = S$.

Pour construire le champ de lignes de glissement, supposons que les deux lignes OA (V_1) et OC(V_1') soient les deux lignes de base et on se propose de donner l'expression de l'opérateur H qui construit la ligne BA à partir de V_1 et V_1' . Si R et S sont les rayons de courbure des lignes BC et BA respectivement, la loi des signes vue dans le 2ème chapitre donne le système d'équations aux dérivées partielles satisfaites par R et S :

$$\frac{\partial R(\alpha,\beta)}{\partial\beta} = -S(\alpha,\beta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial S(\alpha,\beta)}{\partial\alpha} = R(\alpha,\beta)$$

Les lignes de base V_1 et V_1' étant représentées formellement par des vecteurs d'un espace linéaire infini : $V_1 = [a_n]$ et $V_1' = [a_n']$ on aura après intégration :

$$R(\alpha,\beta) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[a_n \frac{\alpha^{m+n}}{(m+n)!} \frac{(-\beta)^m}{m!} - b_n \frac{(-\alpha)^m}{m!} \cdot \frac{(\beta)^{m+n+1}}{(m+n+1)} \right]$$

$$S(\alpha,\beta) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[\alpha_n \frac{\alpha^{m+n+1}}{(m+n+1)} \frac{(-\beta)^m}{m!} + b_n \frac{(-\alpha)^m}{m!} \frac{(\beta)^{m+n}}{(m+n)!} \right]$$

portons les conditions établies plus haut dans ces deux relations on obtient l'égalité suivante :

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \left[a_n \frac{\alpha^{m+n}}{(m+n)!} \frac{(-\alpha)^m}{m!} - a_n' \frac{(-\alpha)^m}{m!} \frac{(\alpha)^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \right] =$$

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \left[a_n \frac{(\alpha)^{m+n+1}}{(m+n+1)} \frac{(-\alpha)^m}{m!} + a_n' \frac{(-\alpha)^m}{m!} \frac{\alpha^{m+n}}{(m+n)!} \right]$$

Ceci nous donne la relation que vérifient les composantes a_n et a_n' :

$a_n - a_{n-1} = a_n' + a_{n-1}'$

$$\begin{array}{lll} n = 1 & a_1 - a_o = a_1' + a_o' & \\ n = 2 & a_2 - a_1 = a_2' + a_1' & \qquad (i) \\ n = 3 & a_3 - a_2 = a_3' + a_2' & \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots & \end{array}$$

et ainsi de suite.

Introduisons les matrices $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & & 0 & 1 & \\ 0 & & 0 & & \end{bmatrix}$

et $\quad I = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

pour établir entre les vecteurs V_1 et V_1' une relation matricielle, les relations (i) s'écrivent encore sous forme matricielle :

$$[\mathbb{D} + \mathbb{I}]\ V_1' = [\mathbb{D} - \mathbb{I}]\ V_1 \quad \text{ou encore}$$

$$V_1' = [\mathbb{D} + \mathbb{I}]^{-1}\ [\mathbb{D} - \mathbb{I}]\ V_1$$

Combinons cette relation avec la relation (53) i.e.

$R_\theta\ V_1' = P_{\theta\theta}\ V_4 - Q_{\theta\theta}\ V_3$ avec $V_3 = R_\theta\ V_1$ et $V_4 = R_\theta(BA)$

$R_\theta\ V_1' = P_{\theta\theta}\ R_\theta\ (H\ V_1) - Q_{\theta\theta}\ R_\theta\ V_1$

on a multiplié par R_θ pour avoir la direction intrinsèque des lignes.

$$R_\theta . [\mathbb{D}+\mathbb{I}]^{-1} [\mathbb{D}-\mathbb{I}] V_1 = P_{\theta\theta}\ R_\theta\ \mathbb{H}\ V_1 - Q_{\theta\theta}\ R_\theta\ V_1$$

$$[R_\theta\ [\mathbb{D}+\mathbb{I}]^{-1}\ [\mathbb{D}-\mathbb{I}] + Q_{\theta\theta}\ R_\theta]\ V_1 = P_{\theta\theta}\ R_\theta\ H\ V_1$$

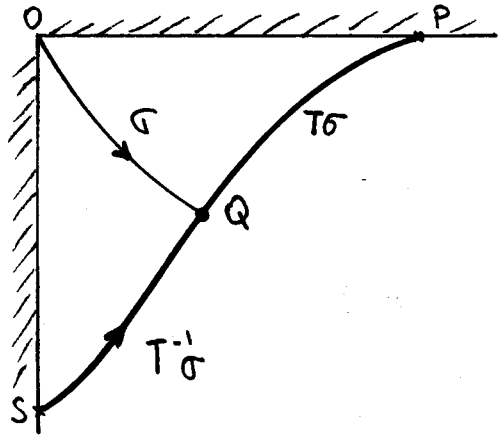
$$\mathbb{H} = R_\theta\ P_{\theta\theta}^{-1} . [R_\theta(\mathbb{D} + \mathbb{I})^{-1}\ (\mathbb{D}-\mathbb{I}) + Q_{\theta\theta}\ R_\theta]$$

I.F. COLLINS l'avait donné sous cette forme et avait donné une sous-broutine permettant d'engendrer la ligne $\mathbb{H}.V$ à partir de la ligne V.

3.3.- Similitude des champs donnés par deux frontières lisses rectangulaires.

Nous avons vu dans le 1er chapitre un tel champ pris par HILL comme application au principe de superposition. Le théorème établi était le suivant :

- Si les lignes σ et $T.\sigma$ sont semblables, alors σ et $T^{-1}.\sigma$ sont aussi semblables.



géométriquement ceci se traduit par la similitude entre OQ et SQ si OQ et PQ sont semblables.

Mais la représentation de PQ par $T\sigma$ et SQ par $T^{-1}\sigma$ suppose l'introduction d'opérateurs linéaires de transformation T et T^{-1} et la représentation symbolique des lignes, ici OQ par des vecteurs d'un espace linéaire de dimension infinie. Une ligne de glissement comme élément d'un champ est cette fois prise comme élément d'un espace linéaire. Les différentes représentations fonctionnelles du champ établissent un isomorphisme entre cet espace linéaire et l'espace des fonctions analytiques, espace fermé des solutions analytiques du système d'équations aux dérivées partielles. Nous pouvons donc introduire une formulation algébrique et exprimer algébriquement les propriétés géométriques de certains champs, pour notre exemple du champ dit "Auto-semblable".

Nous avons introduit dans l'exposé de la théorie plus haut les opérateurs linéaires de transformation des champs et nous allons introduire maintenant des concepts de valeurs propres et de lignes propres (vecteurs propres dans l'espace linéaire de dimension infinie) qui jouent un role important dans la théorie des lignes de glissement

pour la méthode d'EWING. DEWHURST et COLLINS. L'expression algébrique du théorème de HILL est la suivante : Deux lignes de glissement sont semblables si l'une d'elle est vecteur propre de l'opérateur linéaire qui la transforme en l'autre ligne.

Si OQ est la ligne σ et T l'opérateur linéaire qui transforme OQ en PQ, alors OQ c'est-à-dire σ sera vecteur propre de l'opérateur T associé à la valeur propre λ tel que l'on ait :

$$T\,\sigma = t\,\sigma$$

Si OQ et PQ sont semblables.

or $SQ = T^{-1}\,\sigma$ avec $T = -P - Q$ et $T^{-1} = -P + Q$.

$T\,\sigma = \lambda\,\sigma$ implique $T^{-1}\,T\,\sigma = \lambda\,T^{-1}\,\sigma$ ou encore

$T^{-1}\,\sigma = \frac{1}{\lambda} = \mu\,\sigma \quad (\mu = 1/_{\lambda})$

Si $\lambda \neq 0$ on a bien la ligne σ ligne propre de T et T^{-1} pour les valeurs propres respectives λ et $1/\lambda$.

Si σ est ligne propre de l'opérateur T elle est ligne propre de son inverse T^{-1} .

donc PQ et SQ seront aussi semblables avec comme rapport de similitude : $\frac{PQ}{SQ} = \lambda/_{\mu} = \lambda^2$ ou encore avec Q comme centre de similitude

$$\frac{QP}{QS} = \lambda^2$$

et ceci est vrai pour n'importe quel couple de points correspondant sur les lignes PQ et SQ.

Conclusion :

La méthode algébrique de construction des lignes de glissement exposé dans les chapitres précédents tire son intérêt de la possibilité qu'elle offre de résoudre certains problèmes aux limites rencontrés dans la mise en forme des métaux à l'aide de l'ordinateur et semble être moins

onéreuse pour certains problèmes que les autres méthodes de résolution, à savoir la méthode graphique de PRAGER et la méthode des coéfficients d'influence utilisée par GREEN.

Pour le problème du laminage à chaud, ALEXANDER a utilisé la méthode de RUNGE-KUTTER d'ordre 4 pour intégrer numériquement les équations et calculer l'effort et le moment de laminage à l'aide de l'ordinateur.

La méthode graphique n'est pas restreinte au cas des problèmes linéaires, ainsi que la méthode d'intégration de RUNGE-KUTTA qu'utilise d'ailleurs ALEXANDER pour le laminage à froid et pour un métal écrouissable avec loi de SWIFT $\sigma = \sigma_o (1 + B \bar{\varepsilon})^n$. Une autre méthode utilisée dans les problèmes non linéaires et développée dans les années 50 est la méthode de perturbation de SPENCER avec laquelle on peut étudier les problèmes dynamiques et les problèmes où la contrainte n'est pas homogène en posant $k(x,y) = k_o + \varepsilon k'$.

Les problèmes linéaires pour lesquels la forme des lignes initiales n'est connue ni dans le plan physique ni dans l'hodographe sont justement les problèmes aux limites pour la résolution desquels nous pouvons appliquer la méthode matricielle de COLLINS et DEWHUNST. Parmi ces problèmes rencontrés dans la pratique nous notons, l'extrusion asymétrique, l'extrusion pour laquelle le rapport $1 < \eta < 2$, le laminage à chaud, la compression entre deux plateaux partiellement rugueux, la compression avec le rapport $1 < \eta < 2$ et supérieur à 1 ($\eta = \frac{W}{H}$) ainsi que d'autres. Nous en verrons deux comme application et vérification avec d'autres théories, la compression avec $\eta > 1$ et le laminage à

chaud (CHITKANA et JOHNSON).

COLLINS avait publié l'étude de la compression avec plateau tournant et le poinçonnage plat d'une barre sur une fondation lisse. Pour les problèmes où la non linéarité est due à la condition à la frontière, le frottement de COULOMB ($\varepsilon = \mu p$) par exemple, on peut aussi résoudre le problème par la méthode des éléments finis.

CHAPITRE IV

LAMINAGE A CHAUD

4.1.- Introduction

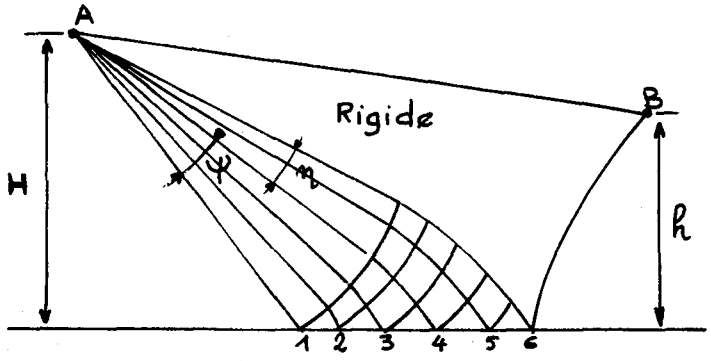
Pour la recherche de solutions (exactes) au problème du laminage à chaud, on considère que le matériau est rigide parfaitement plastique, que la déformation plastique est plane avec un frottement collant entre les cylindres et le matériau et on adoptera la méthode des lignes de glissement pour calculer l'effort de laminage, la contre-traction, le rayon et le moment de laminage pour différentes géométries. De grandes difficultés, pour résoudre ce problème, sont inhérentes à la nature statiquement indéterminés de ce problème de mise en forme des métaux qui rend laborieux la recherche de solution acceptables pour une méthode numérique pas à pas. La méthode graphique proposée par PRAGER pour tracer le champ des lignes de glissement et l'hodographe est aussi laborieuse et couteuse, ceci essentiellement dû à la nature "indirecte" de ce type de problème où la forme d'aucune ligne de glissement initiale n'est connue à l'avance.

La formulation mathématique de ce problème et sa résolution par la méthode matricielle due à DEWHUNST et COLLINS donne, tout d'abord la forme de la ligne de glissement initiale comme solution d'une équation intégrale linéaire puis le reste du champ à l'aide d'opérateur matriciels de base. On se limitera ici au cas où l'équation intégrale est linéaire c'est-à-dire pour les cylindres de taille moyenne et petite pour lesquels la région rigide occupe tout l'arc de contact et où le frottement nécessaire à l'avancement du matériau est collant.

4.2.- Méthodes de résolution et champs de lignes de glissement.

2.1. Champs de lignes de glissement et hodographes.

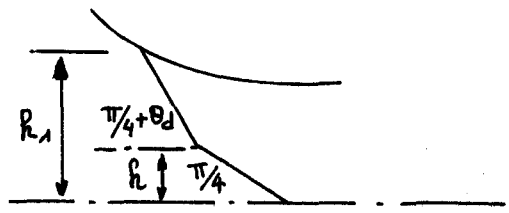
ALEXANDER avait proposé un champ solution du problème qui ne concernait qu'une seule géométrie pour laquelle la réduction de la hauteur $r = \frac{H-h}{H} = 0,33$ et le rapport du rayon de laminage et de la hauteur du matériau laminé $\frac{R}{h} = 86,7$. Ceci ne permettait pas l'application de sa solution à des problèmes industriels pratiques qui intéressent une large gamme de géométries. Pour éviter cette insuffisance, FORD et ALEXANDER proposèrent un champ de lignes de glissement pour le laminage à chaud dans lequel la ligne d'entrée est rectiligne et celle de la sortie un arc circulaire.



Plus tard, CRANE et ALEXANDER proposent un champ de lignes de glissement simplifié dans lequel la ligne d'entrée sera représentée par une double ligne rectiligne et considère la surface de contact à la sortie comme une surface plane.

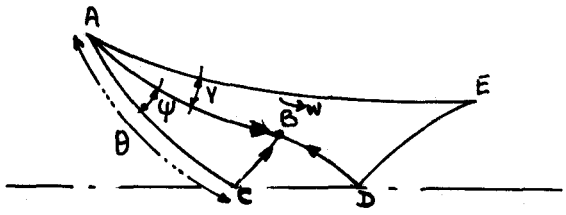
Pour ce champ proposé, la vitesse des particules à la sortie est parallèle à la tangente à la surface de contact et a sa plus petite valeur à $\frac{R}{h}$ donné, lorsque la ligne de glissement à la sortie est un arc circulaire de discontinuité. CHITKARA et JOHNSON utilisent un champ avec un arc circulaire de discontinuité comme ligne de glissement à la sortie.

On retient ici le champ donné par CRANE et ALEXANDRE où la région rigide occupe tout l'arc de contact et où l'arc circulaire à la sortie est de discontinuité pour la vitesse. C'est aussi le champ utilisé par CHITKARA et JOHNSON.

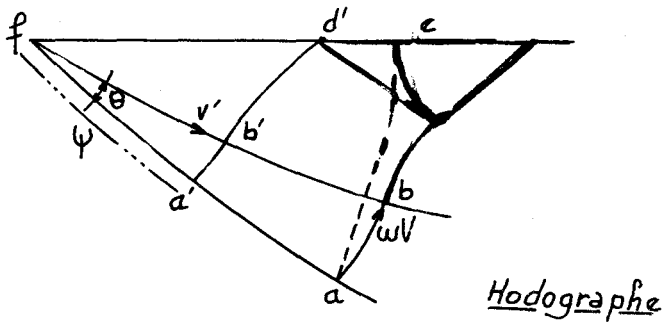


2.2. Résolution par la méthode matricielle.

a) Cas où $\eta = 0$.



Plan physique



Pour ce champ simple proposé par CHITKARA et JOHNSON dans lequel $\eta = 0$, le frottement est collant et la région rigide tourne avec une vitesse angulaire si le champ des lignes de glissement et le champ des vitesses sont géométriquement semblables, mais l'hodographe tourne d'un angle $\pi/_2$ dans la direction de ω par rapport au plan physique et est multiplié scalairement par ω . La recherche de la solution pour ce type de problème nécessite l'utilisation du champ des lignes de glissement et celui des vitesses.

Posons $AB = V$ comme première ligne initiale du champ dont la forme est inconnue et $fb' = V'$ la deuxième ligne initiale du champ des vitesses et dont la forme est aussi inconnue.

Les lignes CB, DB, db, Q'b' et d'b' seront déduites des lignes initiales V et V' à l'aide des opérateurs matriciels de base, établis dans les chapitres précédents, de la façon suivante :

$$CB = Q_{\theta\psi}\ V \text{ et } DB = T_{\psi}^{-1}\ CB = T_{\psi}^{-1}.Q_{\theta\psi}\ V$$

db et DB étant semblables et de rapport ω on a donc :

$$db = \omega\ T_{\psi}^{-1}\ Q_{\theta\psi}\ V$$

db et d'b' sont parallèles sur l'hodographe et les rayons de courbure des points correspondants diffèrent de $\rho.c$ où c est le vecteur unité

$c = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ et ρ la discontinuité de la vitesse le long de l'arc circulaire de sortie DE d'où : $d'b' = \omega\, T_{\psi}^{-1}\, Q_{\theta\psi}\, V + \rho\, c$.

Or sur l'hodographe on a : $V' = T_{\psi}^{-1}\, d'b' = T_{\psi}^{-1}\, (\omega\, T_{\psi}^{-1}\, Q_{\theta\psi}\, V + \rho\, c)$

et $ab = \omega\, V = a'b' + \rho\, c = Q_{\psi\theta}\, V' + \rho\, c$ (IV.1) ce qui nous donne

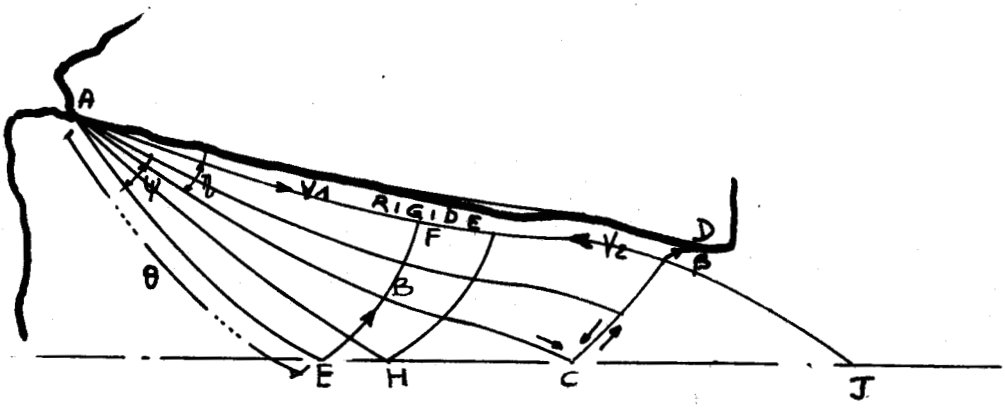
$$V' = Q_{\psi\theta}^{-1}\, (\omega\, V - \rho c) \qquad \text{(IV.2)}$$

éliminons maintenant V' entre les relations (IV.1) et (IV.2) :

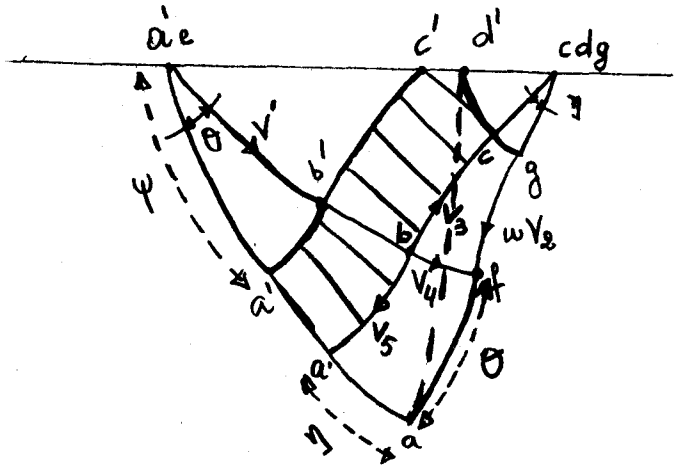
$$(I - Q_{\psi\theta}\, T_{\psi}^{-2}\, Q_{\theta\psi})\, V = (\rho/_{\omega})\, (I + Q_{\psi\theta}\, T_{\psi}^{-1})\, c \qquad \text{(IV.3)}$$

La résolution de cette équation matricielle linéaire nous donnera la forme des lignes initiales V et V' à partir desquels on construira les deux champs à l'aide des opérateurs de base de transformation d'une ligne à une autre.

b) <u>Cas où $\eta \neq 0$</u>



Champ des lignes de glissement ($\eta \neq 0$)



Hodographe ($\eta \neq 0$)

on pose ici AF = V_1 et a'b' = V' comme lignes initiales dont on veut chercher la forme et à partir desquelles on construira entièrement les deux champs.

On applique les opérateurs P et Q obtenus pour représenter les autres lignes du champ comme transformés de V_1 et V' .

$$AF = V_1 \Rightarrow EF = Q_{\theta(\eta+\psi)} \cdot V_1 \qquad \text{(IV.4)} \quad \text{et}$$

$$FJ = T^{-1}_{(\eta+\psi)} \; EF = T^{-1}_{(\eta+\psi)} \; Q_{\theta(\eta+\psi)} \cdot V_1 \qquad \text{(IV.5)}$$

pour obtenir la ligne GF on doit faire une translation d'angle η pour la ligne FJ ceci veut dire que la ligne GF sera la transformée de la ligne FJ par l'opérateur de translation d'angle S_η, η étant l'angle dont tourne GJ . on a donc :

$$GF = S_\eta . FJ \qquad \text{soit} \qquad GF = S_\eta \; T^{-1}_{(\eta+\psi)} \; Q_{\theta(\eta+\psi)} \; V_1 \qquad \text{(IV.6)}$$

Les champs de lignes de glissement et des vitesses étant géométriquement semblables et la zone rigide tournant avec la vitesse angulaire ω , les lignes AF = V_1 et GF = V_2 auront comme images dans le champ des vitesses

les lignes $af = \omega V_1$ et $gf = \omega V_2$.

Considérons maintenant le quadrilatère curviligne g c b f avec $gc = -\rho c$ et $gf = \omega V_2$ comme lignes de base. On tire aisément les lignes $bc = V_3$ et $bf = V_4$ à l'aide des opérateurs adéquats :

$$V_3 = P_{\psi\eta}\, \omega V_2 - Q_{\eta\psi}\, \rho c \qquad \text{(IV.7)}$$

$$V_4 = -P_{\eta\psi}\, \rho C + Q_{\psi\eta}\, \omega V_2 \qquad \text{(IV.8)}$$

où ρ est la discontinuité de la vitesse.

Utilisons cette fois le quadrilatère curviligne fb a' a pour tracer la ligne $ba' = V_5$.

Supposons que les lignes V_4 et V_5 sont les lignes de base de ce quadrilatère curviligne. On en déduit de la même manière que précédemment : $\omega V_1 = P_{\theta\eta} V_5 + Q_{\eta\theta} V_4$ d'où l'on tire la ligne V_5 en multipliant les membres de droite et de gauche de cette relation par $P^{-1}_{\theta\eta}$ soit :

$$V_5 = P^{-1}_{\theta\eta}\, \omega V_1 - P^{-1}_{\theta\eta}\, Q_{\eta\theta} V_4 \qquad \text{(IV.9)}$$

d'autre part nous avons dans le champ des vitesses $b'a' = V_5 + \rho c$ et $b'a' = Q^*_\psi V'$ ce qui nous donne $Q^*_\psi V' = V_5 + \rho c = P^{-1}_{\theta\eta}\, \omega V_1 - P^{-1}_{\theta\eta}.Q_{\eta\theta} V_4 + \rho c$ (IV.10)

et $c'b' = T_\psi V' = R_\psi b'c' = R_\psi (V_3 - \rho c)$ ou encore

$$T_\psi V' = R_\psi (V_3 - \rho c) \qquad \text{(IV.11)}$$

Les équations (IV.6) et (IV.7) donnent :

$$V_3 = P_{\psi\eta}\, \omega S_\eta T^{-1}_{(\eta+\psi)} Q_{\theta(\eta+\psi)} V_1 - Q_{\eta\psi}\, \rho c$$

Les équations (IV.10) et (IV.11) donnent :

$$Q^*_\psi T^{-1}_\psi R_\psi \left[P_{\psi\eta}\, \omega S_\eta T^{-1}_{(\eta+\psi)} Q_{\theta(\eta+\psi)} V_1 - Q_{\eta\psi}\, \rho c - \rho c\right] = P^{-1}_{\theta\eta}\left[\omega V_1 - Q_{\eta\theta} V_4\right] + \rho c$$

ou encore :

$$\omega V_1 \left[P_{\theta\eta} Q^*_\psi T^{-1}_\psi R_\psi P_{\psi\eta} S_\eta T^{-1}_{(\eta+\psi)} Q_{\theta(\eta+\psi)} - I\right] = \rho c \left[P_{\theta\eta} - Q_{\eta\theta} V_4 + P_{\theta\eta} Q^*_\psi T^{-1}_\psi R (Q_{\eta\psi} + I)\right]$$

avec $V_4 = - P_{\eta\psi} \rho c + Q_{\psi\eta} \omega V_2 = -P_{\eta\psi} \rho c + Q_{\psi\eta} \omega S_\eta T^{-1}_{(\eta+\psi)} Q_{\theta(\eta+\psi)} V_1$

et $R_\psi P_{\psi\eta} = P^*_\eta$

en remplaçant V_4 par sa valeur dans l'équation qui précède on obtient :

$$V_1 \left[P_{\theta\eta} Q^*_\psi T^{-1}_\psi P^*_\eta S_\eta T^{-1}_{(\eta+\psi)} Q_{\theta(\eta+\psi)} + Q_{\eta\theta} Q_{\psi\eta} S_\eta T^{-1}_{(\eta+\psi)} Q_{\theta(\eta+\psi)} - I \right] =$$

$$(\rho/_\omega) \left[P_{\theta\eta} + Q_{\eta\theta} P_{\eta\psi} + P_{\theta\eta} Q^*_\psi T^{-1}_\psi R_\psi (I + Q_{\eta\psi}) \right] c \qquad \text{(IV.12)}$$

Cette équation matricielle linéaire donnant V_1 s'écrit :

$$\mathbb{D}.V_1 = (\rho_{/\omega}) \mathbb{E} . c \qquad \text{avec}$$

$$\begin{cases} \mathbb{D} = S_\eta T^{-1}_{(\eta+\psi)} Q_{\theta(\psi+\eta)} (P_{\theta\eta} Q^*_\psi T^{-1}_\psi P^*_\eta + Q_{\eta\theta} Q_{\psi\theta}) - I & \text{(IV.13)} \\ \mathbb{E} = P_{\theta\eta} (I + Q^*_\psi T^{-1}_\psi R_\psi (I + Q_{\eta\psi})) + Q_{\eta\theta} P_{\eta\psi} & \text{(IV.14)} \end{cases}$$

Faisons la vérification de la relation donnée par CHITKARA et JOHNSON pour le cas où $\eta = 0$:

$\eta = 0 \Rightarrow S_\eta = S_o = I \qquad P_{\theta\eta} = R_\theta P^*_\eta = R_\theta P^*_o = R_\theta I = R_\theta$

$Q_{\theta(\psi+\eta)} = Q_{\theta\psi}$ et $\qquad Q_{\eta\theta} = R_\theta Q^*_\eta = R_\theta Q^*_o = 0$.

Ceci nous donne :

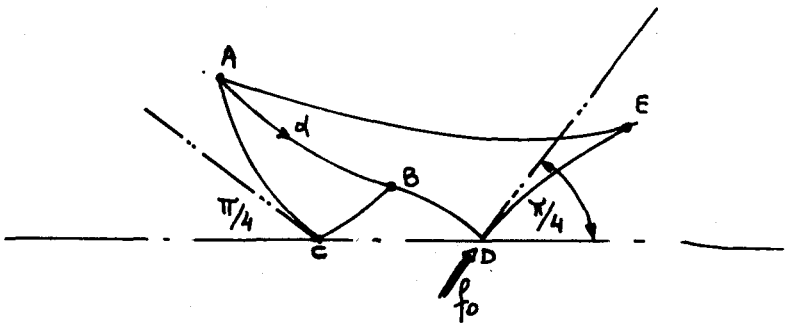
$$\mathbb{D} = Q_{\psi\theta} T^{-2}_\psi Q_{\theta\psi} - I \qquad \text{(IV.15)}$$

$$\mathbb{E} = I + Q_{\psi\theta} T^{-1}_\psi \qquad \text{(IV.16)}$$

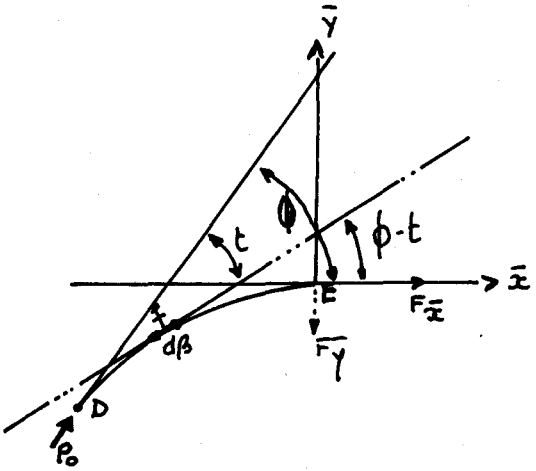
Ce qui correspond bien à l'équation trouvée au 4.2 pour le champ proposé par CHITKARA et JOHNSON relatif au cas où l'angle η est nul.

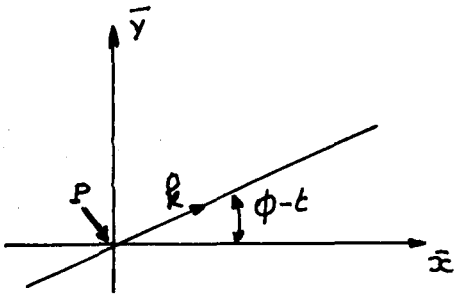
4.3.- Calcul de l'effort de laminage, de la contre-traction et du moment de laminage.

3.1. Calcul de l'effort de laminage EL :



Calculons tout d'abord les résultantes de l'effort transmis par la ligne DE au point E, $\frac{F_{\bar{x}}}{k}$ et $\frac{F_{\bar{y}}}{k}$ à partir des relations établies (32) et (33). L'effort normal au point E recherché sera $\frac{F_{\bar{y}}}{k}$ car la ligne DE est tangente en E à la surface de contact à la sortie. En tenant compte du fait que l'angle $t \in [0,\pi/4]$, $\phi = \pi/4$ et que le rayon R est indépendant de ϕ puisque DE est un arc circulaire.





Considérons un élément ds de la ligne (β) DE . Il est soumis à la scission k et à la pression normale p . DE étant une ligne β et la pression normale au point D étant la pression hydrostatique P_o , on a d'après les relations de HENKY :

$$\left.\begin{array}{l} p - 2\,k\,\psi = p_o + 2\,k.0 \\ p + 2\,k\,\vartheta = p_o + 2\,k.0 \end{array}\right. \Rightarrow \quad p = p_o - 2\,k\,\vartheta \quad (\text{avec } \vartheta = -\,\psi)$$

Si D est pris comme origine d'angle on a $\vartheta = t$ d'où alors

$$p = p_o - 2\,k\,t \qquad (17)$$

pour calculer l'effort transmis par la ligne DE, projetons sur l'axe $\bar{y}$ et intégrons de 0 à $\pi/4$ pour obtenir l'effort résultant normal transmis par la ligne de glissement DE :

$$dF_{\bar{y}} = k.\sin(\phi-t)ds - p.\cos(\phi-t)ds = \left[k\,\sin(\phi-t) - p\,\cos(\phi-t)\right] ds$$

avec $ds = R\,dt$ où $R = cte$.

or l'effort de laminage P qui concerne la partie du champ occupée par la ligne DE est $P = -\,F_{\bar{y}}$ soit :

$$P = -\int_0^{\pi/4} \left[k\,\sin(\phi-t) - p\,\cos(\phi-t)\right] R.dt = R\int_0^{\pi/4} (k\,\sin(\phi-t) - p\,\cos(\phi-t))\,dt$$

portons dans cette intégrale la valeur de p calculée plus haut (17) :

$$\frac{P}{R} = -\int_0^{\pi/4} \left[k\,\sin(\phi-t) - p_o\,\cos(\phi-t) + 2kt.\cos(\phi-t)\right] dt \qquad \text{ou encore}$$

or $\phi = \pi/4$

$$\frac{P}{Rk} = \int_0^{\pi/4} \sin(\pi/4-t)dt + \frac{p_o}{k}\int_0^{\pi/4} \cos(\pi/4 - t)\,dt - 2\int_0^{\pi/4} t.\cos(\pi/4-t)\,dt$$

$$\frac{P}{Rk} = \left[\cos\,(\pi/4-t)\right]_0^{\pi/4} + \frac{p_o}{k}\left[-\sin\,(\pi/4-t)\right]_0^{\pi/4} - 2\left\{\left[-t\,\sin(\pi/4-t)\right]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \sin\,(\pi/4-t)\,dt\right\}$$

$$\frac{P}{Rk} = \frac{p_o}{k}\,\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \frac{P}{Rk} = \frac{p_o}{k}.0{,}7071 - 0{,}2928 \qquad (IV.18)$$

Calculons maintenant la résultante des efforts transmis par les lignes de glissement AB et DB au point final B. La ligne DB fait un angle de $\pi/4$ avec l'axe $\overrightarrow{Ox}$ au point D et tourne d'un angle $-\,\psi$ de D en B, donc l'angle que fait la tangente à la ligne DB en B avec l'axe $\overrightarrow{Ox}$

sera $\pi/4 - \psi$. Tandis que la tangente au point A à la ligne de glissement AB fait avec l'axe $\overrightarrow{Ox}$ l'angle $\pi/4 + \theta - \psi$, car la tangente tourne à partir du point D jusqu'au point A d'un angle égal à $\theta - \psi$, θ étant l'angle dont tourne la tangent à AB. Les formules (32) et (33) nous donnent $F_{\bar{x}}$ et $F_{\bar{y}}$ et les soubroutines SLFORC nous donnent F_x et F_y en tenant compte du fait que l'on a d'après les relations de HENKY pour les lignes (α) DB et BA :

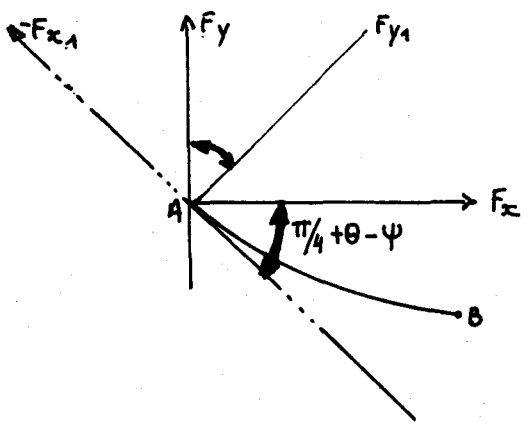
$$p_B = p_o + 2k\,(-\psi) = p_o - 2k\,\psi$$

$$p_A = p_o + 2k\,(\theta - \psi)$$

car on a $p_B + 2k\,\psi = p_o + 2k.0$ et

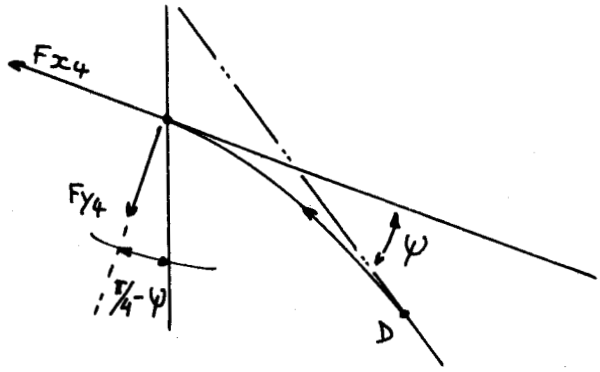
$$p_A + 2k(\psi - \theta) = p_o + 2k.0$$

nous projetons par la suite F_x et F_y ainsi calculée par les soubroutine sur les tangentes aux points B et A et sur les normales à ces tangentes (voir fig.) on obtient :



$$P_1 = F_{y_1}.\cos\,(\pi/4 + \theta - \psi) - F_{x_1}.\sin\,(\pi/4 + \theta - \psi) \qquad \text{(IV.19)}$$

Pour la ligne **DB**, en prenant la ligne initiale la tangente en D et la ligne finale la tangente à DB en B, puis en projetant sur l'axe $\overrightarrow{Oy}$ on obtient en sachant que l'angle fait par Oy avec la tangente en B à DB est $\pi/4 - \psi$:



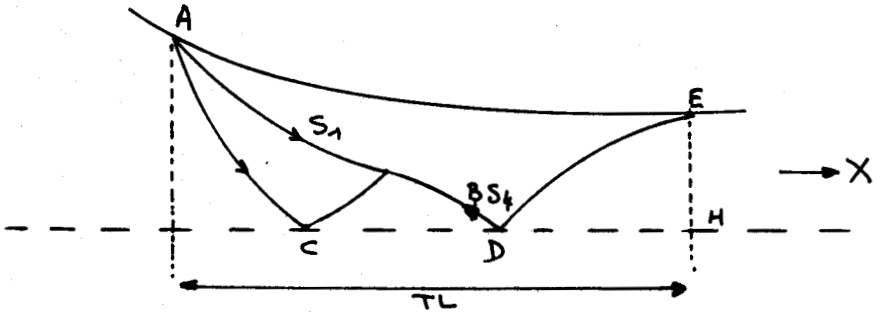
$$P_2 = Fx_4.\sin(\pi/4-\psi) - Fy_4 \cos(\pi/4-\psi)$$

La somme de tous ces efforts résultants transmis par les lignes de glissement nous donne l'effort de laminage :

$$P = Fy_1 \cos(\pi/4 + \theta - \psi) - Fx_1.\sin(\pi/4+\theta-\psi) - Fy_4\cos(\pi/4-\psi) + Fx_4 \sin(\pi/4-\psi)$$

$$+ P_o \frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}2928. \qquad \text{(IV.20)}$$

3.2. <u>Calcul de la longueur TL de la région en état plan de déformation</u>.

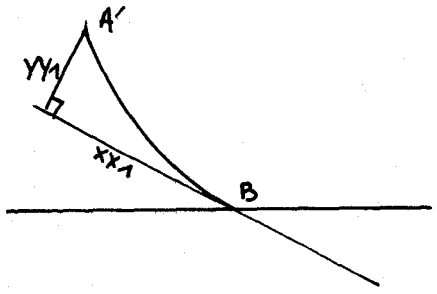


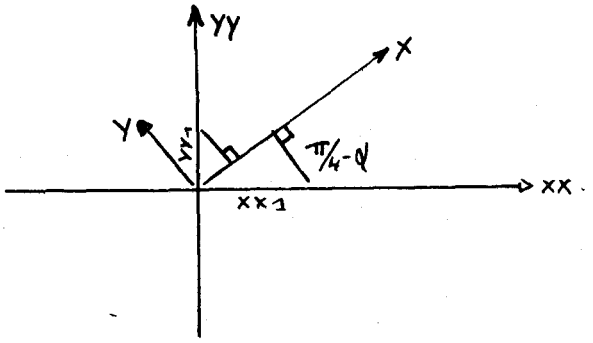
Pour les lignes S1 et S4, les sous-programmes "CORDXY" nous donnent directement les coordonnées de MIKHLIN XX1, YY1 et XX4, YY4. La projection sur l'axe des X de ces coordonnées donnent la longueur cherchée soit :

$$TL = X1 + X4 + DH$$

a) Calcul de X1 :

Prenons comme origine d'angle pour la ligne AB = S1 le point A et comme point final le point B. La tangente au point B à la ligne de glissement initiale AB fait avec l'axe $\overrightarrow{OX}$ l'angle $\pi/4-\psi$.



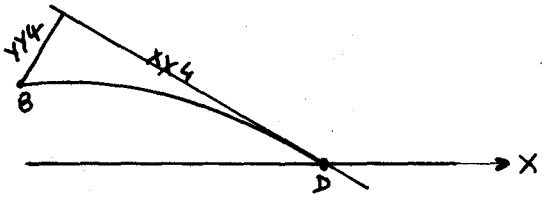


La projection sur l'axe X donne la quantité suivante :

$X1 = XX1 \cos(\pi/4-\psi) + YY1 \sin(\pi/4-\psi)$

b) Calcul de X4

Prenons comme origine d'angle pour la ligne de glissement BD = S4 le point B et comme point final de cette ligne le point D. La tangente à cette ligne au point D fait avec l'axe $\overrightarrow{OX}$ l'angle $\pi/4$.

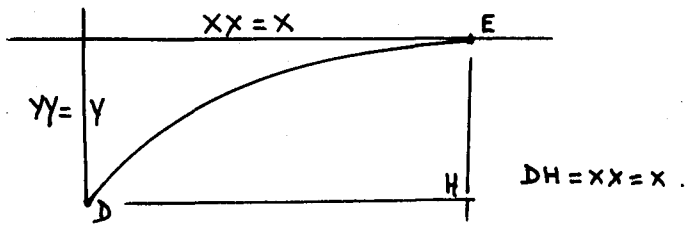


La projection de XX4 et YY4 sur l'axe X donne :

$X = XX4 \cos \pi/4 + YY4.\sin\pi/4 = (XX4 + YY4)\sqrt{2/2}$

c) Calcul de la longueur DH.

Prenons pour la ligne de glissement à la sortie, l'arc de cercle DE, comme point origine des angles le point D et comme point final le point E. La tangente au point E à la ligne en question est confondue avec l'axe $\overrightarrow{OX}$ puisque par définition, elle coïncide avec la tangente à la surface du cylindre de laminage en ce point, alors qu'au point D elle fait l'angle $\pi/4$. Donc ici, l'abscisse de MIKHLIN XX coïncide avec l'abscisse X (voir schéma).



or on avait vu que l'abscisse de MIKHLIN XX est donnée par l'intégrale de convolution suivante :

$$XX = \int_0^{\phi} R(t).\cos(\phi-t)\ dt$$

avec ici $R(t) = cte$ et $\phi = \pi/4$ d'où alors :

$$XX = X = R \int_0^{\pi} \cos(\pi/4-t)\ dt = R\left[-\sin\ (\pi/4-t)\right]^{\pi/4} = R\ \sqrt{2/2}$$

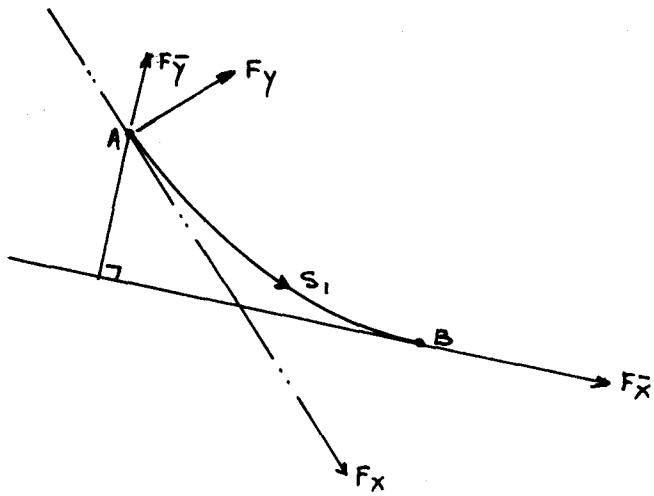
La sommation des trois quantités calculées nous donne la longueur TL :

$$TL = XX1\ \cos(\pi/4-\psi) + YY1\ \sin\ (\pi/4-\psi) + (XX4 + YY4).\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ .$$

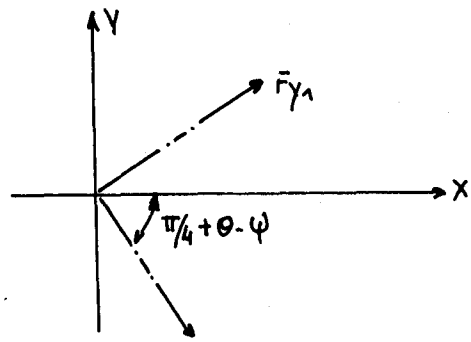
d) Calcul de la contre-traction CT :

La contre traction sera la somme des projections des efforts transmis par les lignes de glissement S1 et S4 sur l'axe $\overrightarrow{Ox}$.

Considérons tout d'abord la ligne S1 et projetons sur l'axe $\overrightarrow{Ox}$ les résultantes des efforts transmis F_x et F_y par cette ligne.



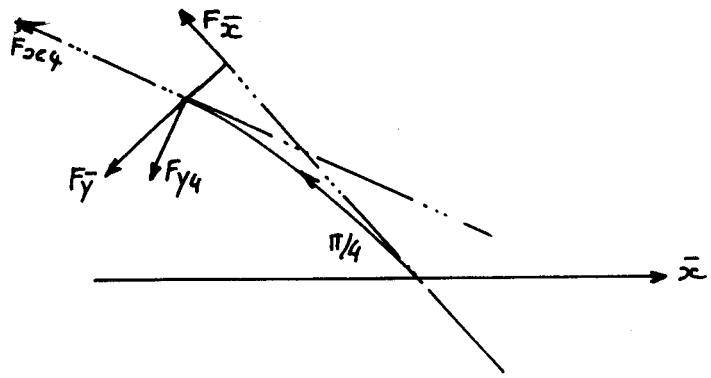
Soit A le point origine et B le point final de la ligne de glissement AB = S1. La tangente à cette ligne en A fait avec l'axe $\overrightarrow{Ox}$ l'angle $\pi/4 + \theta - \psi$ et en B l'angle $\pi/4 - \psi$. Le sous-programme "SLFORC" nous permet de calculer les résultantes des efforts transmis par la ligne au point origine A $F\bar{x}$ et $F\bar{y}$ suivant le repère de MIKHLIN et les résultantes Fx et Fy au même point, mais dans le repère constitué par la tangente à la ligne en A et sa perpendiculaire.



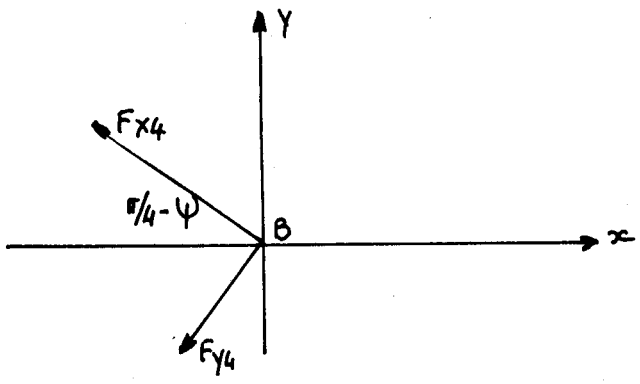
La projection de ces deux résultantes F_x et F_y sur l'axe $\overrightarrow{Ox}$ donne :

$$F_x^1 = FX_1 \cos(\pi/4 + \theta - \psi) + Fy_1 . \operatorname{Sin}(\pi/4 + \theta - \psi)$$

Considérons maintenant la ligne de glissement S4 et projetons comme pour S1, les résultants FX4 et FY4 des efforts transmis par la ligne BD = S4 et données par le sous-programme "SLFORC", sur l'axe $\overrightarrow{Ox}$:



Soit B, cette fois, le point initial et D le point final de la ligne de glissement S4. La tangente à la ligne au point D fait avec l'axe $\overrightarrow{Ox}$ $\pi/4$ et la tangente au point B fait un angle de $\pi/4 - \psi$. Le sous-programme "SLFORC" donne les résultantes des efforts transmis par la ligne FX4 et FY4 au point B dans le repère constitué par la tangente à la ligne au point initial B et sa perpendiculaire.



Soit F_X^2 la projection sur l'axe $\overrightarrow{Ox}$ des efforts résultants calculés sur la ligne S4 :

$$F_X^2 = - FX4.\cos(\pi/4-\psi) - FY4 \sin(\pi/4 - \psi)$$

La sommation de F_x^1 et F_x^2 nous donne donc la contre traction CT :

$CT = -(F_x^1 + F_x^2)$ soit

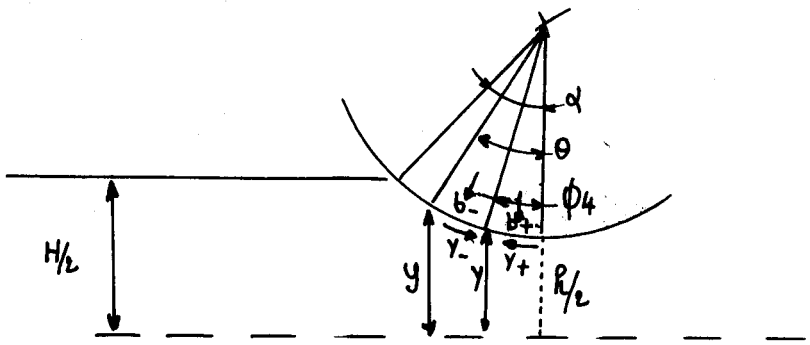
$$CT=-FX1\cos(\pi/4+\theta-\psi)-FY1\sin(\pi/4+\theta-\psi)+FX4\cos(\pi/4-\psi)+FY4\sin(\pi/4-\psi) \quad (IV.21)$$

La contre-traction n'étant ici pas nulle, la recherche de la pression hydrostatique p_o au point D doit être telle que l'effort horizontal résultant transmis à gauche par la ligne de glissement à l'entrée AC soit égal à la contre-traction et non pas égal à zéro. Ceci sera vérifié par le programme de calcul.

4.4.- Calcul de l'effort et du moment de laminage par la méthode de SIMS :

Les premiers travaux sur ce problème dûs à SIEBEL et VON KARMAN ont conduit à la résolution d'une équation différentielle demandant des calculs très complexes et très longs. Des théories de simplifications donnant des solutions approchées acceptables pour étudier des problèmes industriels avaient apparus.

On considère tout d'abord que le matériau est isotrope rigide-plastique et que les tranches dans la région en déformation sont soumises à une déformation homogène de compression. Les contraintes horizontales et verticales agissant sur une tranche sont constantes et la contrainte tangentielle maximale k est constante dans la région en déformation plastique. On considère aussi que l'arc de contact est circulaire et on néglige de ce fait les effets élastiques sur l'arc à l'entrée et à la sortie, c'est-à-dire avant et après laminage. A ces hypothèses sur les données physiques et sur la géométrie, s'ajoutent des hypothèses mathématiques simplificatrices pour la résolution de l'équation différentielle du problème.



on se base sur la théorie d'OROWAN et de SIMS pour ce cas choisi où l'on prend comme loi de frottement celle du frottement collant sur l'arc de contact ce qui donne pour contrainte tangentielle sur l'arc $\tau = k = cte$. On négligera aussi les effets de température sur la loi d'écoulement pour le matériau.

Le calcul de l'effort et du moment de laminage sera utilisé pour une comparaison avec ceux donnés par la méthode des lignes de glissement tracées par la méthode matricielle de COLLINS et DEWHURST.

L'effort et le moment transmis par ces lignes de glissement est calculé selon la méthode d'EWING par l'ordinateur. Si s est la pression normale sur l'arc et T la contrainte horizontale sur une tranche, l'équation à résoudre est la suivante :

$$R d\theta \left[s.tg\ \theta \pm \mu\ s \right] = 1/2\ d(T)$$

le signe $\pm$ vient du fait qu'il existe une section droite neutre où T est maximale, à droite de laquelle les sections droites sont serrées vers la sortie avec $\tau = -\mu\ s$ et à gauche de laquelle les sections sont serrées vers l'entrée avec une contrainte de frottement $\tau = +\mu\ s$.

Les hypothèses supplémentaires de SIMS sont les suivantes :

a) $\tau = \mu\ s = k = cte.$

b) $tg\ \theta = \sin\ \theta = \theta$

c) y étant l'ordonnée d'un point de l'arc pour l'angle θ donné par rapport à la sortie ou $y/2 = \frac{h}{2} + R(1-\cos\ \theta)$ (b) donne l'approximation $\cos\ \theta \sim 1-\theta^2/2$ donc

$$y = h + R\,\theta^2 .$$

θ est considéré petit.

d) $T = y\,(s - \pi/4.k)$

e) $R = cte.$

avec ces hypothèses supplémentaires l'équation à résoudre prend la forme :

$$\frac{d}{d\theta}(T) = 2R\,(s\theta \pm k) .$$

$$y\,\frac{d}{d\theta}\left[\frac{s}{k} - \frac{\pi}{4}\right] + \left[\frac{s}{k} - \frac{\pi}{4}\right] \cdot \frac{dy}{d\theta} = 2R\,\left(\frac{s\theta}{k} \pm 1\right)$$

or $y = h + R\,\theta^2$

$$y\,\frac{d}{d\theta}\left[\frac{s}{k} - \frac{\pi}{4}\right] = 2R\,\frac{s}{R}\,\theta \pm 2R - \left(\frac{s}{k} - \frac{\pi}{4}\right)\frac{dy}{d\theta} = 2R\,\frac{s}{k}\,\theta \pm 2R - \left[\frac{S}{k} - \frac{\pi}{4}\right]\frac{d}{d\theta}\left[h + R\theta^2\right]$$

$$y\,\frac{d}{d\theta}\left[\frac{s}{k} - \frac{\pi}{4}\right] = 2R\,\frac{s}{k}\,\theta \pm 2R - \left(\frac{s}{k} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad 2R\theta = \pm\,2R + \frac{\pi}{2}\,.R\theta$$

d'où alors :

$$\frac{d}{d\theta}(s/k - \pi/4) = \frac{\pi R\theta}{2(h+R\theta^2)} \pm \frac{2R}{h+R\theta^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2R\theta}{h+R\theta^2} \pm \frac{2R}{h+R\theta^2}$$

on notera s^+ la valeur de la pression normale s avant le plan neutre et s^- sa valeur après le plan neutre c'est-à-dire pour l'angle θ compris entre ϕ et α .

Nous aurons en vertu de celà les intégrations suivantes :

$$\theta \in [0,\theta] \;:\; \frac{d}{d\theta}\left[\frac{s^+}{k} - \pi/4\right] = \pi/2.\,\frac{2R\theta}{h+R\theta^2} + \frac{2R}{h+R\theta^2}$$

$$\frac{s^+}{k} = \pi/4.\mathrm{Log}\,\left(\frac{y}{h}\right) + \frac{\pi}{4} + 2\,\sqrt{\frac{R}{h}}\;\mathrm{arc\ tg}\,\left(\sqrt{R/h}.\theta\right)$$

$$- \theta \in [\phi,\alpha] : \frac{d}{d\theta}\left[\frac{s^-}{k} - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4} \quad \frac{2R\theta}{h+R\theta^2} - \frac{2R}{h+R\theta^2}$$

$$\frac{s^-}{k} = \frac{\pi}{4} .\mathrm{Log}\,\frac{y}{H} + \frac{\pi}{4} + 2\sqrt{R/h} \quad \left[\mathrm{arc\ tg}\ \sqrt{2/h}\ \alpha) - \mathrm{arc\ tg}\ (\ \sqrt{R/h}.\theta)\right]$$

Au plan neutre pour $\theta = \phi$ on a

$\frac{s^+}{k} = \frac{s^-}{k}$ relation qui nous permet d'obtenir l'angle neutre ϕ et la cote en ce point $Y = h + R\ \phi^2$

$$\frac{\pi}{4}\,\mathrm{Log}\,\frac{h}{H} = 4\ \sqrt{R/h}\ \ \mathrm{arc\ tg}\ (\sqrt{R/h}\ \phi) - 2\ \ \sqrt{R/h}\ \mathrm{arc\ tg}\ \ \sqrt{R/h}$$

d'où la valeur de l'angle neutre :

$$\phi = \sqrt{\frac{h}{R}}\ .\mathrm{tg}\left[\frac{1}{4}.\sqrt{\frac{h}{R}}\ (2\ \sqrt{R/h}\ \ \mathrm{arc\ tg}\ \sqrt{R/h}\ \alpha - \frac{\pi}{4}\,\mathrm{Log}\,\frac{h}{H}\ )\right]$$

L'effort de laminage P pour une largeur unité sera donnée par l'intégrale suivante :

$$P = R\int_0^\alpha s\ d\theta = R\left[\int_0^\phi s^+\ d\theta\ + \int_\phi^\alpha s^-\ d\theta\right]$$

en portant les valeurs de s^+ et s^- on a :

$$P = R\Big[\pi/4\ (\int_0^\phi \mathrm{Log}\,\frac{y}{h}\ d\theta + \int_\phi^\alpha \mathrm{Log}\ y/H\ d\theta\ ) + \frac{\pi}{4}\ (\int_0^\phi\ d\theta\ + \int_\phi^\alpha d\theta\ )$$

$$+ 2\ \sqrt{R/h}\ (\int_0^\phi \mathrm{arc\ tg}\ \ \sqrt{R/h}\ \theta).d\theta + \int_\phi^\alpha \mathrm{arc\ tg}\ (\sqrt{R/h}.\alpha).d\theta$$

$$- \int_\phi^\alpha \mathrm{arc\ tg}\ (\sqrt{\frac{R}{h}}\ \theta).d\theta\ )\Big]$$

Après le calcul des différentes intégrales on obtient la relation approchée donnant l'effort de laminage :

$$\frac{P}{k} = 2R\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{H}{h} - \frac{\pi\alpha}{4} - \mathrm{Log}\,\frac{Y}{h} + \frac{\pi}{2}\ \sqrt{\frac{h}{R}}\ \mathrm{arc\ tg}\ (\sqrt{\frac{H-h}{h}}\ )\right.$$

k étant ici la contrainte tangentielle maximale.

L'expression du moment de laminage est donnée par :

$$G = 2\,R^2 \int_0^{\alpha} s.\theta.d\theta \ .$$

ou encore :

$$\frac{G}{2R^2} = \int_0^{\alpha} s.\theta.d\theta = \int_0^{\phi} s^{+}\ \theta\ d\theta + \int_{\phi}^{\alpha} s^{-}\theta\ d\theta$$

remplaçons s^{+} et s^{-} par leurs valeurs calculés plus haut :

$$\frac{G}{2R^2k} = \frac{\pi}{4}\int_0^{\phi} \mathrm{Log}\ (\frac{y}{h})\ \theta\ d\theta + \frac{\pi}{4}\int_0^{\phi}\theta\ d\theta + 2\sqrt{\frac{R}{h}}\int_0^{\phi}\mathrm{arc\ tg}\ (\sqrt{\frac{R}{h}}.\theta).\theta\ d\theta$$

$$+\ \frac{\pi}{4}\int_{\phi}^{\alpha} \mathrm{Log}\ (\frac{y}{H}).\theta.d\theta + \frac{\pi}{4}\int_{\phi}^{\alpha}\theta.d\theta + 2\sqrt{\frac{R}{h}}\int_{\phi}^{\alpha}\left[\mathrm{arc\ tg}\ (\sqrt{R/h}.\alpha - \mathrm{arc\ tg}(\sqrt{R/h}.\theta)\right]\theta.d\theta$$

nous avons les égalités suivantes :

$$\frac{\pi}{4}\left[\int_0^{\phi}(\mathrm{Log}\ y/h)\theta\ d\theta + \int_{\phi}^{\alpha}(\mathrm{Log}\ \frac{y}{H})\ \theta\ d\theta = \frac{\pi}{4}\ \left[1/2\ \mathrm{Log}\ \frac{H}{h}\ (\phi^2-\alpha^2)\right.\right.$$

$$\left.+\int_0^{\alpha}\ \mathrm{Log}\ (1 + R/h\ \theta^2).\theta\right]d\theta$$

avec $\int_0^{\alpha}\ \mathrm{Log}\ (1 + \frac{R}{h}\ \theta^2)\theta.d\theta = (\alpha^2 + 1/2\ \frac{h}{R}\ )\ \mathrm{Log}\ \frac{H}{h}\ .- \frac{\alpha^2}{2}$

d'autre part :

$$2\sqrt{\frac{R}{h}}\int_{\phi}^{\alpha}\mathrm{arc\ tg}\ (\sqrt{\frac{R}{h}}\ \alpha).\theta.d\theta = \sqrt{\frac{h}{R}}\ (\frac{H-Y}{h})\ \mathrm{arc\ tg}\ \sqrt{\frac{H-h}{h}}$$

et $2\sqrt{\frac{R}{h}}\left\{\int_0^{\phi}\mathrm{arc\ tg}\ (\sqrt{\frac{R}{h}}\ \theta).\theta\ d\theta - \int_{\phi}^{\alpha}\ \mathrm{arc\ tg}\ (\sqrt{\frac{R}{h}}.\theta).\theta\ d\theta\right\} = A\ .$

$$A = \sqrt{\frac{R}{h}} \left[2\,\phi^2 \text{ arc tg } \left(\sqrt{\frac{R}{h}}\,\phi\right) - \alpha^2 \text{ arc tg } \left(\sqrt{R/h}\,\alpha\right)\right] + \frac{h}{R}\,(\alpha - 2\phi)$$

$$+ \sqrt{R/h} \left[\text{arc tg } \sqrt{R/h}\,\phi) - \text{arc tg } \left(\sqrt{R/h}\,\alpha\right)\right] . \; h/R$$

Après calculet en ayant négligé les termes au deuxième ordre par rapport aux angles α et ϕ on obtient

$$\frac{G}{2R^2k} = 2\,(\alpha/2 - \phi) \text{ ou encore}$$

$$\frac{G}{k} = 2R^2\,(\alpha - 2\phi)$$

Introduisons les coefficients sans dimension

$\frac{P}{kh_1}$ et $\frac{GG}{kh_1^2}$ où h_1 est la hauteur du matériau non laminé ($h_1 = H$).

On aura les coefficients sous leur forme finale :

$$\frac{P}{kh_1} = 2 \,.\, \frac{R}{h_1} \left[\frac{1}{2} \text{ Log } \frac{h_1}{h_2} - \frac{\pi\alpha}{4} - \text{Log } \frac{Y}{h_2} + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{h}{R}} \text{ arc tg } \sqrt{\frac{r}{1-r}}\right], \; (h_2 = h)$$

où r est la réduction et h_2 la hauteur du matériau à la sortie.

$$\frac{G}{kh_1^2} = 2\,\left(\frac{R}{h_1}\right)^2 (\alpha - 2\phi)$$

Nous porterons sur le même graphique donnant les efforts et les moments par méthode de ligne de glissement pour certaines géométries et certaines réduction, les valeurs calculées par la méthode approchée de SIMS que nous venons de voir.

Lesprogrammes et les graphes sont donnés dans les pages suivantes pour le cas du champpproposé par CHITKARA et JOHNSON et qui ne concerne qu'une petite gamme de géométries et de réductions. L'un d'eux est celui où l'on a : $\frac{R}{h_1} \sim 10$; $\phi = 0{,}186$ rad. et $r = 35{,}8$ %.

4.5.- RESULTATS ET DISCUSSION.

Comme application nous avons étudié un champ particulier de lignes de glissement. C'est un champ de transition pour lequel $\eta = 0$ représentant donc celui donné par Chitkara et Johnson. Il a été étudié par ailleurs dans un article de Collins, Dewhurst et Johnson et présenté comme cas limite du champ général. Nous ne gardons que les valeurs pour lesquelles l'angle ϕ est assez petit pour que les hypothèses restent valables. Le calcul de l'effort P_c par le programme 4.I est représenté sur le graphique ainsi que l'effort P_s donnée par la formule analytique de Sims. Les valeurs données par les deux méthodes et correspondant aux mêmes réductions et mêmes rapports R/h présentent des différences de 5 à 15% (graphe p.95). Ces résultats sont assez voisins. Pour les rapports R/h petits et moyens qui sont l'objet de notre étude, la méthode de Sims donne des valeurs de qualité très moyenne comme la plupart des méthodes des tranches.

Nous remarquons que pour certaines valeurs des angles θ et ψ dont tournent les lignes de glissement, on obtient une hauteur de sortie supérieure à 1 c'est-à-dire à l'hauteur d'entrée. L'angle total ϕ est aussi bien supérieur à 10°. Ces champs ne peuvent correspondre au laminage. La seule explication que l'on retient est celle donnée par Collins et Johnson. Le champ est celui de l'étirage avec un bord concave circulaire.

Mais pour le moment de laminage, les valeurs données par la théorie de Sims et par la méthode des lignes de glissement sont assez éloignées. Alexander utilisant, pour intégrer l'équation différentielle, la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour 1500 divisions de l'arc de contact, trouve aussi un grand écart entre la valeur exacte et la valeur donnée par la théorie simplificatrice de Sims.

Prenons un exemple précis. Soit le cas où $\theta = 12°$ et $\psi = 25°.75$.

Ceci nous donne les valeurs suivantes :

$h_{sortie} = 0{,}752$, réduction $= 0{,}248$, $\frac{R}{h_{entrée}} = 13{,}68$ et $\frac{M}{K} = 1{,}097$.

Calculons par la méthode de Sims le moment M :

la formule donnant le moment est $M = 2\ R^2\ k\ Q_G$

Q_G est donnée par un tableau en fonction de la réduction et du rapport $\frac{R}{h_{sortie}}$.

On calcule tout d'abord $\frac{R}{h_s} = \frac{R}{h_e} \times \frac{h_e}{h_s} = \frac{R}{1-r}$ d'où $\frac{R}{h_s} = 18,2$. Ceci donne $Q_G = 0,012$. Donc :

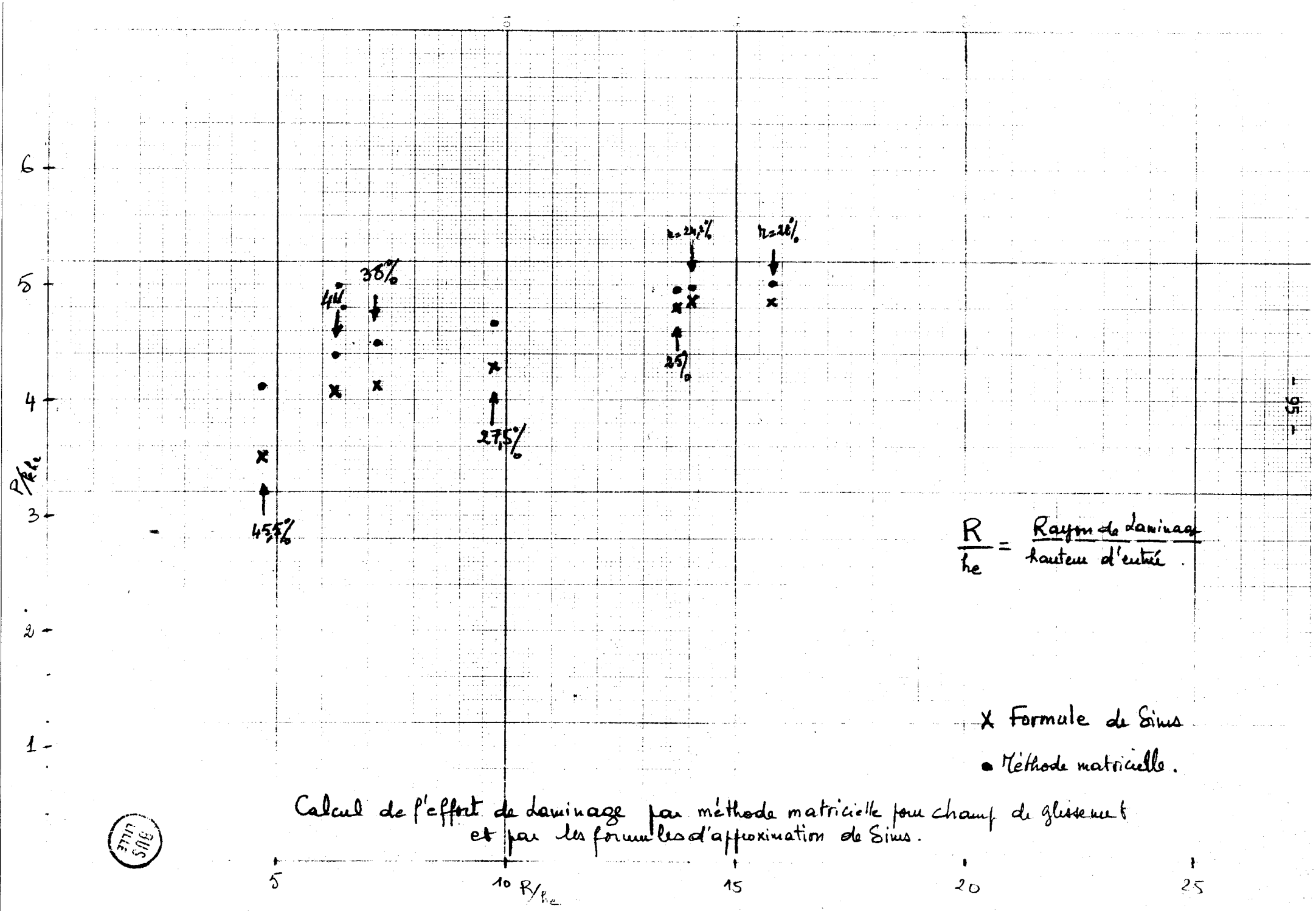
$$\frac{M}{k\ h_e^2} = 2\ (\frac{R}{R_e^o})^2 \ .\ Q_G = 2 \times (13,68)^2 \times 0,012 = 4,49 \ .$$

nous voyons ici que l'écart est bien grand entre les valeurs données par les deux méthodes.

Alexandre trouvait un écart presque aussi grand, la méthode de Runge-Kutta donnait pour le moment la valeur de 2,431 alors celle de Sims 0,7369 pour une autre géométrie.

La comparaison entre la méthode de la borne supérieure avec celle de Sims donne un écart de 10 à 20 % pour R/h_s entre 20 et 100 et des réductions de 10 à 20 % pour R/h_s entre 20 et 100 et des réductions de 10 à 50 % . Lorsque θ est fixé et ψ varie, les valeurs R/h , P/h et G/kh_e varient lentement. Ceci est en contradiction avec l'évolution très rapide lorsque ψ est fixe et θ varie.

Nous constatons d'autre part que le moment augmente avec la contre traction. Le calcul de S1 montre aussi que le rayon de courbure est presque indépendant de l'angle α c'est-à-dire que les lignes de glissement ne s'éloignent jamais d'un arc de cercle. Ceci prouve l'approximation utilisée auparavant. C'est encore plus vrai pour l'étirage, nous le voyons d'ailleurs dans le cas où $\frac{H}{h} > 1$ dans lequel le coefficient a_1 est négligeable. $a_o = 1,60108$ et $a_1 = -\ 0,08918$, sachant que le rayon de courbure de S1 s'écrit $R_1 = a_o + a_1\ \alpha + a_2\ \frac{\alpha^2}{2} + \ldots$ nous constatons enfin que la série exprimant le rayon de courbure est alternée et que le terme $|a_n| \sim 10^-\ a_o$. Ceci montre la convergence rapide de la série et justifie le choix de N = 6 .



$$\frac{R}{h_e} = \frac{\text{Rayon de laminage}}{\text{hauteur d'entrée}}.$$

X Formule de Sims

• Méthode matricielle.

Calcul de l'effort de laminage par méthode matricielle pour champ de glissement et par les formules d'approximation de Sims.

BUS CULLE

CHAPITRE V

COMPRESSION SANS FROTTEMENT D'UNE BARRE ENTRE DEUX PLATEAUX RIGIDES.

5.1.- Introduction

Dans ce chapitre on s'intéressera uniquement au cas où le rapport η de la largeur sur la hauteur de la barre est compris entre 1 et 2 et au cas où $\eta > 2$. On utilisera pour l'étude de ce problème les champs de lignes de glissement donnés par GREEN en 1951 pour lesquels il avait établi des relations empiriques entre les largeurs et les discontinuités des vitesses des différents champs et on exposera la justification mathématique de ces relations par la méthode matricielle telle que l'a faite I.F. COLLINS.

L'extension de ces champs au cas où $\eta > 2$, proposée par GREEN et reprise par COLLINS, sera aussi exposée et des programmes de calcul seront élaborés pour l'obtention par ordinateur de la forme de la ligne initiale, du champ complet, de la longueur du champ ainsi que les discontinuités des vitesses et des pressions totales transmises par le champ.

Une vérification numérique des relations et une comparaison entre les données de GREEN et celles des programmes de calcul dûs à la méthode matricielle seront faites en fin de chapitre.

5.2.- Compression d'une barre entre 2 plateaux lisses : champs proposés par GREEN (Schéma de la compression).

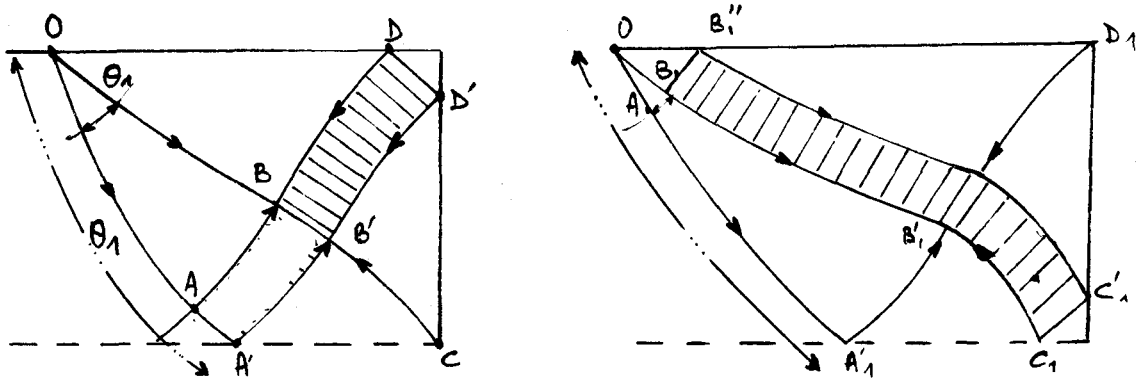
Pour l'étude de ce problème et l'analyse des distributions des contraintes et des vitesses, on se sert de la théorie des déformations plastiques planes et de la méthode des lignes de glissement pour les matériaux rigidesparfaitement plastiques dont la largeur W est supérieure à leur hauteur h.

Pour le cas où $\frac{W}{h} < 1$, une solution complète a été donnée par HILL (1950) et les pressions sur les plateaux ont été calculées. Une solution complète est donnée aussi pour les champs où $\frac{W}{h}$ sont entiers; les champs sont représentés par des blocs triangulaires où les lignes de glissement sont rectilignes due à HILL. Sa forme et son étude sont simples.

Pour les matériaux dont le rapport $\frac{W}{h} > 1$, une solution a été donnée en 1951 pour A.P. GREEN qui avait proposé trois champs de lignes de glissement curvilignes le premier pour $1 < \frac{W}{h} < \sqrt{2}$, le second pour $\sqrt{2} < \frac{W}{h} < 2$ et le troisième pour $\frac{W}{h} = \sqrt{2}$ pour lequel la discontinuité de la vitesse s'annule. Nous voyons que le dernier champ peut-être obtenu continûment à partir des deux premières où l'on fait tendre la discontinuité de la vitesse vers zéro.

Lorsque $\frac{W}{h}$ tend vers une valeur entière le champ de ligne de glissement tend continûment vers le champ de HILL simple formé par des blocs de lignes rectilignes faisant un angle de 45° avec les plàteaux et et avec la ligne de symétrie.

Les équations de type hyperboliques vérifiées par les contraintes et les vitesses étant les mêmes, les champs de lignes de glissement et des vitesses sont alors confondus et font entre eux un angle de $\pi/2$. Ceci simplifie l'étude et rend futile la recherche d'un champ de vitesses solution pour vérifier que la forme du champ de lignes de glissements proposée est bien compatible avec les conditions à la frontière sur la vitesse. Dans certains problèmes on propose un champ de contraintes solution et on construit son hodographe. Si l'hodographe n'est pas compatible avec les conditions à la frontière sur les vitesses, on est dans l'obligation de modifier le champ des contraintes proposé.

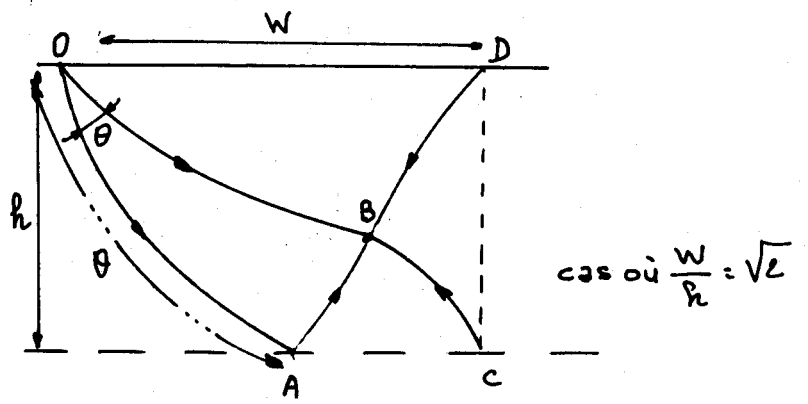


a) Cas où $1 < \frac{W}{h} < \sqrt{2}$ et les discontinuité de la vitesse ρ_1 .

b) Cas où $\sqrt{2} < \frac{W}{h} < 2$ et la discontinuité de la vitesse ρ_2 .

Les lignes OBB'C et $OA_1A'_1B'_1D_1$ sont des lignes de discontinuités des vitesses pour les 2 cas de figure.

Le 3ème cas de figure pour lequel la discontinuité de la vitesse est nulle est le suivant :



Dans chacun de ces cas la figure représente le quart du champ complet, (plus précisément, si on divise le champ en quatre, elle représente le quadrant supérieur de gauche.

BUS LILLE

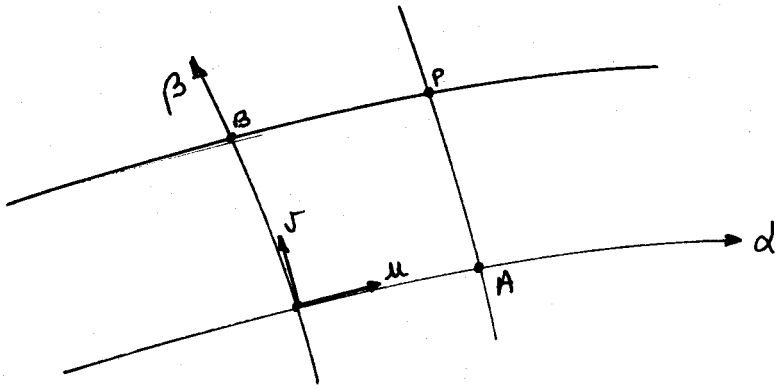
5.3.- Calcul numérique et relations proposées par GREEN.

La méthode numérique utilisée par GREEN consistait à diviser les lignes de glissement en un nombre fini de points tels que les variations des angles $\Delta\phi$ entre les points qui divisent les lignes soient les mêmes à travers tout le champ. Ceci est rendu possible par le fait que toutes les lignes tournent avec le même angle θ . Il remplace après les équation différentielles par des relations linéaïres aux différences finies. Par exemple pour calculer la vitesse en un point P d'une maille à partir des vitesses connues aux points A et B on a les relations :

$$u_P - u_B = 1/2\ \lambda\ \Delta\ \phi\ (v_P + v_B)$$

$$v_P - v_A = -\ 1/2\ \mu\ \Delta\ \phi\ (u_P + u_A)$$

λ et μ sont 1 ou -1 si ϕ croît ou décroît.



Les équations deviennent en négligeant le 3ème ordre $(\Delta\phi^3)$:

$$u_P = (1-1/4\ \lambda\ \mu\ \Delta\ \phi^2)\ u_B + 1/2\ \lambda\ \Delta\ \phi(1-1/4\ \lambda\ \mu\ \Delta\ \phi^2)\ (v_A + v_B)-1/4\ \lambda\ \mu\ \Delta\ \phi^2\ u_A$$

$$v_P = (1-1/4\ \lambda\ \mu\ \Delta\ \phi^2)\ v_A -1/2\ \mu\ \Delta\ \phi(1-1/4\ \lambda\ \mu\ \Delta\ \phi^2)(u_A+ u_B)-1/4\ \lambda\ \mu\ \Delta\ \phi^2\ v_B$$

Ces équations donnent les vitesses en tout point du champ dès qu'on connait des vitesses normales sur deux lignes initiales α et β.

Pour le problème étudié, les vitesses ne sont connues que sur la ligne d'entrée OA, OA', où u et v sont nuls car le matériau à gauche est rigide. Donc ni l'angle θ, ni les discontinuités de vitesses correspondantes à une vitesse V du plateau ne sont connus à l'avance. On ne peut alors calculer les vitesses à travers le champ. GREEN avait choisi une seconde ligne pour laquelle il essaye certaines valeurs des composantes normales de la vitesse .

Après le calcul numérique pour certaines géométries, GREEN avait remarqué que certaines relations existaient entre les longueurs et les discontinuités des deux cas de figures proposées (a) et (b) à savoir :

1) $W_1^2 + 1/2\ \rho_1^2 = W_2^2 - \rho_2^2 = 2$

$$\text{et} \quad \left.\begin{array}{l} W_1\ W_2 = 2 \\ P_1 = P_2 \end{array}\right\} \quad \text{si } \theta_1 = \theta_2$$

Il avait étendu ces cas de figures pour les rapports plus généraux supérieurs à 2 et avait établit aussi des relations analogues au cas étudié précédemment.

$$W_1^2 + \frac{m}{2}\,\rho_1^2 = m(m+1)$$

$$W_2^2 + \left(\frac{m+1}{2}\right)\rho_2^2 = m(m+1)$$

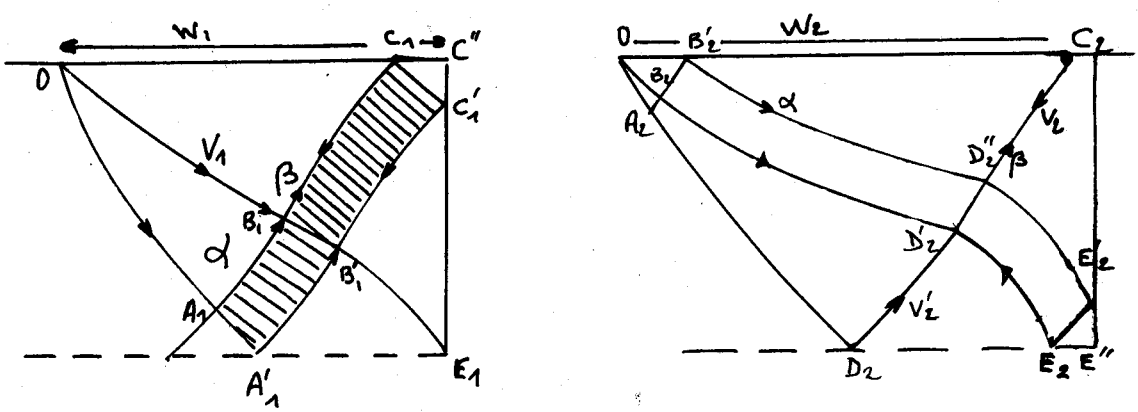
$$\left.\begin{array}{l} \text{et} \quad W_1\,W_2 = m\,(m+1) \\ \quad P_1 = P_2 \end{array}\right\} \text{si } \theta_1 = \theta_2 \text{ et le même nombre } m\,.$$

P_1 et P_2 étant les pressions totales transmises par les champs (a) et (b) respectivement. Le nombre m lié à la largeur du champ, détermine la forme du champ en liaison avec la largeur.

Ces relations avaient été obtenues à partir des résultats numériques et non pas par une justification mathématique. C'est I.F. COLLINS qui se servit de la notion des champs auto-semblables et le principe de superposition pour en donner une justification mathématique.

5.4.- Analyse du champ par la méthode matricielle et justification des relations de GREEN.

Considérons les champs de ligne de glissement donnée par GREEN pour les rapports $\eta = \frac{W}{h}$ compris entre 1 et $\sqrt{2}$ et entre $\sqrt{2}$ et 2. (figure).



(i) $1 < \eta < \sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{2} < \eta < 2$

Voyons tout d'abord le cas $1 < \eta < \sqrt{2}$ c'est-à-dire le champ représenté par la figure (5.4.2) Représentons la ligne de glissement OB_1 par le vecteur V_1 d'un espace vectoriel linéaire de dimension infini introduit dans les chapitres précédents et la ligne $E_1 B'_1$ par le vecteur V'_1. OC" étant lisse, on transforme V1 par l'application de l'opérateur lisse T pour construire la ligne $C_1 B_1$ donc on aura $C_1 B_1 = T V_1$. $C_1 C'_1$ étant la longueur égale à la discontinuité de la vitesse ρ_1 on déduit la ligne $C'_1 B'_1$ à partir de $C_1 B_1$ par la relation : $C'_1 B_1 = C_1 B_1 - \rho_1 C = T V_1 - \rho_1 C$

avec $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$. D'autre part l'axe C" E_1 étant axe de symétrie pour le champ c'est un bord lisse qui réfléchit les lignes de glissement du champ. L'opérateur T transforme alors la ligne $C'_1 B'_1$ en la ligne $E_1 B'_1$ ou ce qui revient au même l'opérateur T^{-1} transforme la ligne $E_1 B'_1$ en la ligne $C'_1 B'_1$. Ceci s'écrit matriciellement :

$$T^{-1} E_1 B'_1 = C'_1 B'_1 \quad \Rightarrow \quad T^{-1}.V'_1 = T.V_1 - \rho_1 C \qquad (5.4.1)$$

or l'analyse du champ singulier $OA_1 B_1$ nous permet de transformer la ligne V_1 en $A_1 B_1$ par l'opérateur Q, puis en $A'_1 B'_1$ par translation des points $A_1 B_1$ d'une longueur ρ_1 ce qui nous permet d'écrire en fin de compte : $A'_1 B'_1 = QV_1 + \rho_1 C$.

La ligne $A'_1 E_1$ est une ligne de symétrie ($\tau = 0$), elle reflète donc les lignes de glissement qui la coupent.

La ligne $A'_1 B'_1$ est la transformée de la ligne V'_1 par l'opérateur T.

$$T.V'_1 = A'_1 B'_1 = QV_1 + \rho_1 c \qquad (5.4.2)$$

additionnons (5.4.1) et (5.4.2) en tenant compte du fait que $T = -P - Q$

$T^{-1} = P + Q$

on obtient :

$$(T + T^{-1})\ V_1' = (T + Q)\ V_1 \qquad (5.4.3)$$

et

$$-\ 2.P\ V_1' = -\ P\ V_1 \quad \text{multiplions cette dernière par } -\ P^{-1}$$

on aura :

$$V_1' = \frac{V_1}{2} \qquad (5.4.4)$$

portons cette égalité dans la relation (5.4.1) :

$$T^{-1}\ \frac{V_1}{2} = T\ V_1 - \rho_1\ c \qquad \text{d'où} \qquad (T - \frac{T^{-1}}{2})\ V_1 = \rho_1\ c \qquad (5.4.5)$$

V_1 est donc la solution de l'équation matricielle (5.4.5) et les triangles curvilignes $OB_1'\ C_1$ et $E_1\ B_1'\ A_1'$ sont semblables et de rapport de similitude 2. Voyons maintenant le 2ème cas pour lequel $\sqrt{2} < \eta < 2$ dont le champ est représenté par la figure (5.4.ii). Pour ce cas de figure, la ligne de discontinuité de la vitesse est la ligne $OA_2\ D_2\ D_2'\ D_2''\ C_2$. Représentons alors la ligne $C_2\ D_2''$ par le vecteur V_2 et la ligne $D_2\ D_2'$ par le vecteur V_2'. La longueur $D_2'\ D_2''$ représente la grandeur de la discontinuité de la vitesse ρ_2. Les lignes de symétrie $C_2\ E''$ et $D_2\ E''$ et le bord lisse OC_2 pour lesquels $\tau = 0$ reflètent les lignes de glissement qui les coupent. On utilisera alors les opérateurs T et T^{-1} pour transformer les unes en les autres. Donc la ligne $E_2\ D_2' = T.V_2 - \rho_2.C$ (5.4.6) et comme $E_2D_2' = T^{-1}D_2\ D_2'$ on aura :

$$T^{-1}\ V_2' = T.V_2 - \rho_2\ C \qquad (5.4.7)$$

d'autre part la ligne $B_2\ D_2' = T^{-1}\ V_2 + \rho_2\ C$ et la ligne $B_2\ A_2 = -\rho_2\ C$. Considérons le rectangle curviligne $B_2\ A_2\ D_2\ D_2'$ et tirons la ligne $D_2\ D_2'$ à partir des lignes $B_2\ A_2 = -\ \rho_2\ C$ et $B_2\ D_2' = T^{-1}\ V_2 + \rho_2\ C$. Pour cela nous appliquerons la relation $V_3 = P\ V_1 + Q\ V_2$ du chapitre 3. avec ici $V3 = V_2'$, $V_1 = B_2\ A_2$ et $V_2 = B_2\ D_2'$.

$V_2' = - P \ \rho_2 \ C + Q(T^{-1}.V_2 + \rho_2 \ C)$

$V_2' = (-P + Q) \ \rho_2 \ C + QT^{-1} \ V_2 = T^{-1} \ \rho_2 \ C + Q \ T^{-1} \ V_2 = T^{-1} \ [Q.V_2 + \rho_2 \ C]$

car $Q \ T^{-1} = T^{-1} \ Q$ (ceci vient de la relation établie $PQ = QP$ et de $T^{-1}=-P+Q$)

donc on aura $T.V_2' = Q \ V_2 + \rho_2 \ C$ (5.4.8)

additionnons les 2 relations (5.4.7) et (5.4.8).

$(T + T^{-1}) \ V_2' = (T + Q) \ V_2$ avec $T = -P - Q$

$T^{-1} = -P + Q$

on obtient $-2 \ P \ V_2' = - P \ V_2$.

Multiplions cette relation par l'opérateur $- P^{-1}$ on aura :

$$V_2' = \frac{V_2}{2}$$

Ceci prouve la similitude entre les triangles curvilignes $C_2 \ D_2'' \ B_2'$ et $D_2 \ D_2' \ E_2$ de rapport de similitude 2.

La relation (5.4.7) dans laquelle nous remplaçons V_2' par $V_2/2$ devient

$$(T - 1/2 \ T^{-1}) \ V_2 = \rho_2 \ C \qquad (5.4.9)$$

Cette équation matricielle est l'équation qui permet d'obtenir la ligne V_2 par une simple inversion de la matrice $T - 1/2 \ T^{-1}$.

Nous voyons à partir des relations matricielles (5.4.5) et (5.4.9) que les vecteurs V_{1/ρ_1} et V_{2/ρ_2} satisfont la même équation et quand elles tournent du même angle θ , elles seront les éléments du même espace vectoriel donc seront égales. A partir de ceci on a les similitudes évidentes entre les triangles $OB_1 \ C_1$, $E_1 \ B_1' \ A_1'$ de (5.4.i) et le triangle $C_2 \ D_2'' \ E_2'$ dans les rapports suivants :

$$\frac{OB_1C_1}{E_1B_1'A_1'} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{OB_1C_1}{C_2D_2''E_2'} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad .$$

Les côtés rectilignes de ces triangles curvilignes sont semblables et leur rapport équivaut au rapport de similitude :

$$\frac{OC_1}{C_2E_2'} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

admettons que la hauteur soit égale à l'unité et W_1 la largeur correspondante on aura

$$OC_1 = W_1 - \rho_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad C_2\,E_2' = 1 - \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{W_1 - \rho_1 \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \rho_2 \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}\,W_1 - \rho_1}{\sqrt{2} - \rho_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{2}\,W_1 = (\sqrt{2} - \rho_2)\frac{\rho_1}{\rho_2} + \rho_1 = \sqrt{2}\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$W_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (5.4.10)$$

D'autre part la similitude entre les triangles curvilignes $C_2\,D_2''\,B_2'$ et $E_1'\,B_1'\,C_1'$ de rapport $2\rho_2/\rho_1$ nous permet d'écrire le rapport suivant.

$$\frac{C_2\,B_2'}{E_1\,C_1'} = \frac{2\rho_2}{\rho_1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C_2\,B_2' = W_2 - \rho_2\sqrt{2} \\ \text{et} \\ E_1\,C_1' = 1 - \rho_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

W_2 étant ici rapportée à une hauteur unité. Ceci s'écrit :

$$\frac{W_2 - \rho_2\sqrt{2}}{1 - \rho_1 \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\rho_2}{\rho_1}$$ ou encore en multipliant par $\sqrt{2}$ en haut et en bas le 1er membre.

$$\frac{\sqrt{2}\,W_2 - 2\rho_2}{\sqrt{2} - \rho_1} = \frac{2\rho_2}{\rho_1} \Rightarrow \sqrt{2}\,W_2 = (\sqrt{2} - \rho_1)\frac{2\rho_2}{\rho_1} + 2\rho_2 = 2\sqrt{2}\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

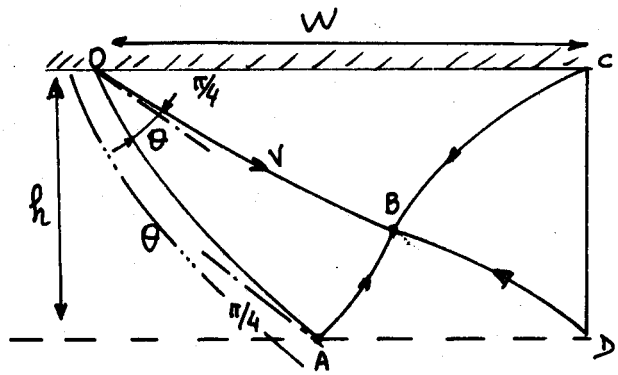
$$W_2 = \frac{2\rho_2}{\rho_1} \quad (5.4.11)$$

en multipliant les 2 relations (5.4.10) et (5.4.11) on obtient la relation donnée par GREEN à savoir

$$W_1 . W_2 = 2 \qquad (5.4.12)$$

5.5.- Cas du champ de lignes de glissement avec $\rho = 0$.

Pour le rapport $1 < \frac{W}{h} < 2$, GREEN avait proposé un champ de ligne de glissement auquel tendent continûment les deux champs (5.4.i) et (5.4.ii), étudiés précédemment, quand la discontinuité de la vitesse tend vers la valeur zéro. Il l'avait proposé pour la valeur du rapport $\eta = \frac{W}{h}$ égale à $\sqrt{2}$. Nous allons le justifier par la méthode matricielle.



L'angle dont tournent toutes les lignes du champ est l'angle θ et on rapportera la longueur W à une hauteur h unité. Il est bien entendu que le rapport est $\eta = \frac{2W}{2h}$, car ici on ne retient, pour des raisons de symétrie, que le quadrant supérieur de gauche du champ complet.

Admettons que la ligne de glissement OB soit ligne initiale et représenté dans l'espace linéaire de dimension infinie par le vecteur V. OC, CD et AD reflètent les lignes de glissement qui les coupent, car OC est un bord lisse par hypothèse, CD et AD sont des lignes de symétrie donc pour lesquels ou $\tau = 0$. CB sera la transformée de V par l'opérateur lisse T ce qui peut s'écrire symboliquement CB = TV et DB le transformé de CB par l'opérateur T DB = T^2 V. Il en est de même de la ligne AB

transformée de DB par T qu'on écrira $AB = T^3.V$.

Or nous savons que la ligne AB est la transformée de la ligne V par l'opérateur matriciel Q, ce qui nous donne l'équation matricielle vérifiée par le vecteur V représentant symboliquement la ligne initiale OB du champ.

$$T^3 V = QV \quad \text{ou encore :}$$

$$(T^3 - Q) V = 0 \qquad (5.5.1)$$

Cette relation est vérifiée par les vecteurs propres des opérateurs Q et T^3 qui sont égaux. Les valeurs correspondantes des valeurs propres seront $\lambda^3 = \mu$ (5.5.2) avec $T^3 V = \lambda^3 V$ λ étant la valeur propre de T et $QV = \mu V$ μ étant ici la valeur propre de l'opérateur Q.
L'opérateur T s'écrit : $T = - P - Q$ et son inverse $T^{-1} = - P + Q$ en faisant la différence des deux on obtient l'opérateur Q soit :
$Q = \frac{T^{-1}-T}{2}$ et la valeur propre de Q sera lié à celles de T et T^{-1} par la relation suivante $\mu = \frac{\lambda^{-1} - \lambda}{2}$ nous avons déjà vu que $\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda}$ donc (5.5.2) s'écrira :

$$\mu = \lambda^3 = \frac{1/\lambda - \lambda}{2} \Rightarrow 2\lambda^3 = \frac{1-\lambda^2}{\lambda} \Rightarrow 2\lambda^4 = 1 - \lambda^2$$

la valeur propre λ doit satisfaire l'équation $\lambda^4 + \lambda^2/2 - 1 = 0$ ou encore $(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1/2) = 0$

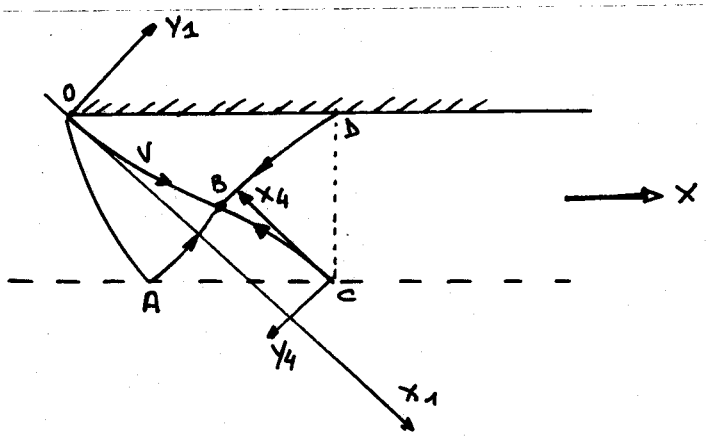
Seule la valeur $\lambda^2 = 1/2$ peut-être retenue ce qui nous donne une valeur de $\lambda = \sqrt{2}/_2$ et ceci a un sens physique.

Les triangles curvilignes O B C et C B D sont alors semblables et de rapport de similitude $\frac{OBC}{CBD} = \frac{1}{\sqrt{2}/_2} = \sqrt{2}$.

Les côtés rectilignes seront proportionnels et de même rapport $\frac{OC}{CD} = \sqrt{2}$ avec $OC = W$ et $CD = 1$ car la hauteur est rapportée à l'unité d'où l'on obtient $W = \sqrt{2}$.

Un programme de calcul a été élaboré pour ce cas et permet de calculer la pression totale transmise par ce champ. Dans ce programme nous avons introduit une sous-broutine calculant les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur matriciel T_θ . On en retient la valeur λ dont le cube est égal à la valeur propre de l'opérateur $Q_{\theta\theta}$ et le vecteur correspondant. On construit le champ complet à l'aide des opérateurs linéaires de transformation une fois trouvée la ligne initiale V.

5.6.- Calcul de la longueur du champ et la pression totale transmise pour le cas où $\rho = 0$.



On considère les 2 lignes de glissement OB = S1 et CB = S4. Les soubroutines CORDXY nous donnent les coordonnées X1, Y1, X4 et Y4 de ces lignes. La longueur sera obtenue par simple projection de ces coordonnées sur l'axe horizontal, en sachant qu'aux points O et C les lignes font un angle $\pi/_4$ avec la frontière lisse et l'axe de symétrie respectivement ($\tau = 0$).

$$Z = (X1 + Y1) \times \frac{\sqrt{2}}{2} + (X4 + Y4) \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad .$$

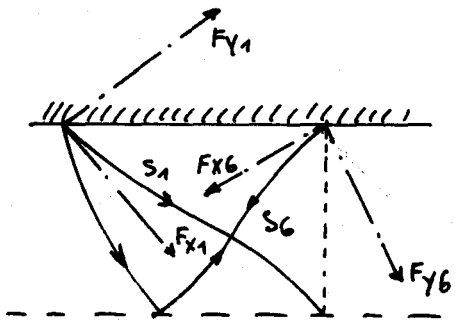
Ceci doit être rapporté à la hauteur du champ, on doit donc diviser cette valeur par celle de la hauteur du champ :

$$W = \frac{Z}{H} \quad \text{avec} \quad H = (Y1 - X1) \times \frac{\sqrt{2}}{2} + (X4 - Y4) \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ceci s'obtient pour une géométrie bien déterminée, c'est-à-dire pour un angle θ dont on a trouvé la valeur. Pour le calcul de la pression totale transmise par le champ, nous avons trouvé la pression hydrostatique P_o appliquée en A qui donne un effort horizontal nul à gauche de la ligne OA. Cette pression est $P_o = 1{,}065$.

La soubroutine SLFORC nous donne les composantes FX et FY dont la projection sur l'axe vertical permet de calculer la pression totale P. Son expression est la suivante :

$$PC1 = (FX1 + FX6 + FY6 - FY1) \times \sqrt{2}/2$$



PC1 est la pression totale rapportée à une hauteur unité. Pour une hauteur H du champ la pression sera :

$$PC = \frac{PC1}{H}$$

5.7.- <u>Extension des champs au cas $\eta > 2$ et relations de GREEN.</u>

GREEN avait étendu les champs étudiés précédemment au cas où le rapport $\frac{W}{H}$ est supérieur à 2. Les 3 cas de figure sont gardés pour ce cas étudié. Il a aussi généralisé les relations qu'il a trouvé entre la largeur et la discontinuité de la vitesse pour les champs ou $1 < \eta < 2$.

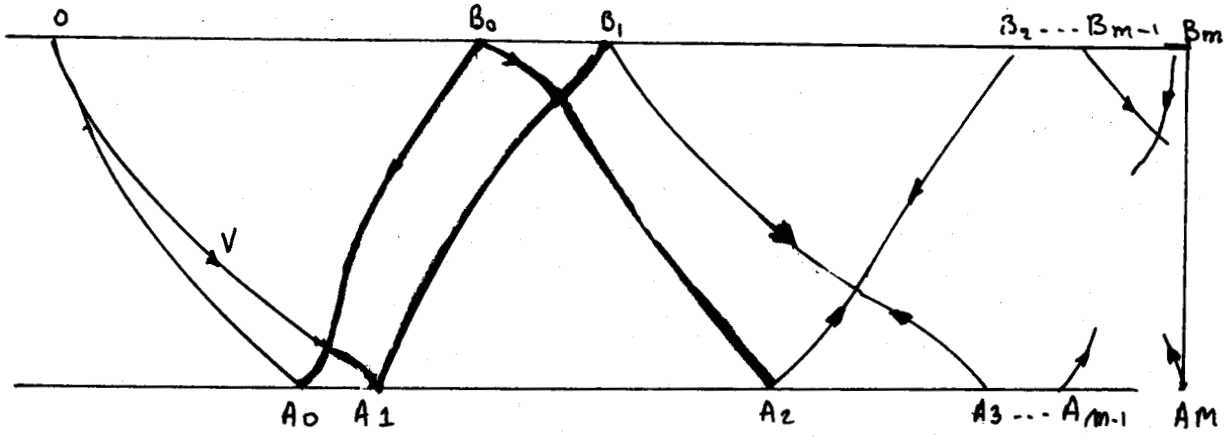
$$W1^2 + \frac{m}{2} \rho_1^2 = m\ (m+1) \qquad \text{avec } m = 1,2,3,\ldots$$

$$W2^2 - \frac{(m+1)}{2} \rho_2^2 = m\ (m+1)$$

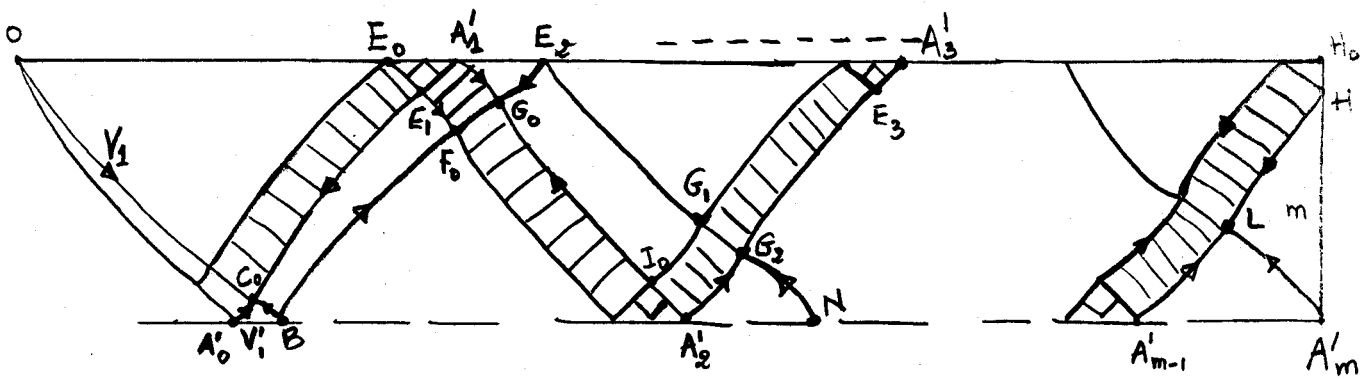
et $\begin{cases} W_1 . W_2 = m\ (m+1) \\ P1 = P2 \end{cases}$ quand les angles sont égaux et pour le même m.

quand m = 1 c'est-à-dire dans le cas où $1 < \eta < 2$ on retrouve les relations de départ.

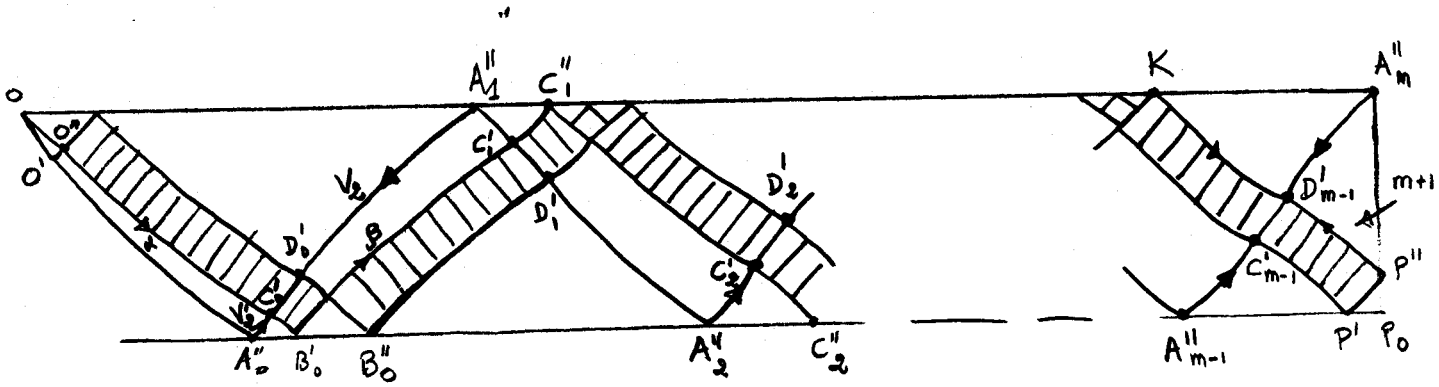
Les champs de lignes de glissement seront les suivants :



cas où $\rho = 0$ et $\eta > 2$



(i) cas correspondant au champ (a) étudié précédemment au 5.2.



(ii) cas correspondant au champ (b) étudié au 5.2.

Ces champs ont été repris par COLLINS pour donner une justification mathématique des relations empiriques généralisées de GREEN et nous les prenons pour vérifier ces relations et calculer la longueur, la discontinuité de la vitesse et la pression totale transmise par le champ.

Pour celà nous avons proposés des programmes de calcul et nous avons comparé les résultats utilisant la méthode matricielle avec les

BUS LILLE

résultats de GREEN. Nous verrons celà dans le paragraphe réservé à la discussion des résultats.

Considérons le cas de figure (i). Représentons la ligne initiale OD par le vecteur V_1 et la ligne de glissement $A'_o\ C_o$ par V'_1 et représentons pour le cas de figure (ii) les lignes de glissement $A''_1\ D'_o$ par le vecteur V_2 et $A''_o\ C'_o$ par le vecteur V'_2 .

L'analyse de ces champs par la méthode matricielle nous donne les relations suivantes; sachant que toutes les lignes des champs tournent du même angle θ :

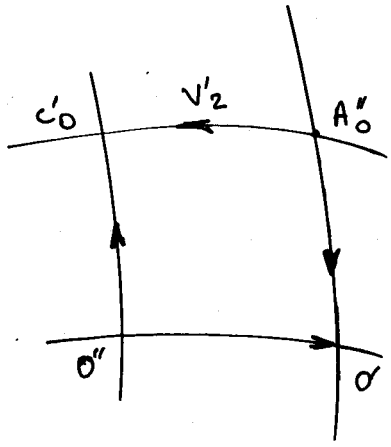
$V'_1 = Q_\theta\ V_1 + \rho_1 C$ (5.7.1) avec ρ_1 la valeur de la discontinuité de la vitesse pour le champ (i).

Pour le champ (ii) considérons le quadrilatère $O'\ O''\ C'_o\ A''_o$ formé par les lignes de glissement $O''O' = -\rho_2\ C$, $O''\ C'_o = T_\theta^{-1}\ V_2 + \rho_2\ C$, $O'\ A''_o$ et $A''_o\ C'_o$ dont on peut avoir l'expression matricielle à l'aide des deux premiers, nous retenons seulement l'expression de $A''_o\ C'_o = V'_2$ dont on a besoin ici. D'après la relation (44) établie au 3ème chapitre on a :

$V''_3 = V'_2 = P_{\theta\theta}\ V''_1 + Q_{\theta\theta}\ V''_2$ avec $V''_1 = O''\ O' = -\rho_2\ C$

ρ_2 étant la discontinuité de la vitesse pour le champ (ii) et

$V''_2 = O''\ C'_o = T_\theta^{-1}\ V_2 + \rho_2\ C$



donc : $V_2' = - P_{\theta\theta}\rho_2 C + Q_{\theta\theta}\left[T_\theta^{-1} V_2 + \rho_2 C\right]$

$$V_2' = \left[- P_{\theta\theta} + Q_{\theta\theta}\right] \rho_2 C + Q_{\theta\theta} \cdot T_\theta^{-1} V_2$$

or la commutativité des opérateurs Q et P nous permet d'écrire

$$Q_{\theta\theta} T_\theta^{-1} = T_\theta^{-1} Q_{\theta\theta} \qquad \text{avec} \qquad T_\theta^{-1} = - P_{\theta\theta} + Q_{\theta\theta}$$

et l'expression de V_2' devient :

$$V_2' = T_\theta^{-1}\left[\rho_2 C + Q_{\theta\theta} V_2\right] \qquad (5.7.2)$$

A partir de la connaissance de ces vecteurs on construira le champ complet. Tout d'abord exprimons les lignes de glissement du champ (i) à l'aide des lignes V_1 et V_1' et à l'aide des opérateurs matriciels de transformation. OD étant représentée par le vecteur V_1, la ligne E_o D est sa transformée par l'opérateur lisse T_θ . La ligne E_1 C_o est la translatée de E_o D de la valeur ρ_2 elle s'écrira :

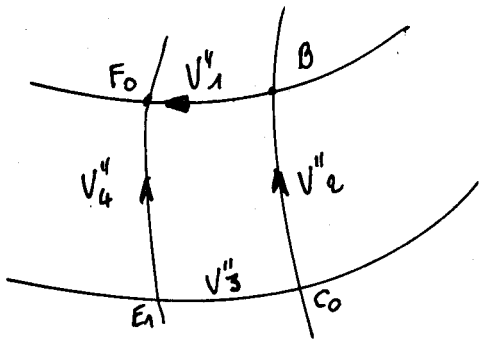
$$E_1 C_o = T_\theta V_1 - \rho_1 C = -P_{\theta\theta} V_1 - Q_{\theta\theta} V_1 - \rho_1 C = - P_{\theta\theta} V_1 - (Q_{\theta\theta} V + \rho_1 C)$$

$$E_1 C_o = - P_{\theta\theta} V_1 - V_1' \qquad (5.7.3)$$

La ligne B C_o est la transformée de A_o' C_o par l'opérateur T_θ^{-1} elle s'écrit dont :

$$BC_o = T_\theta^{-1} V_1' \quad .$$

Prenons cette fois la quadrilatère curviligne E_1 C_o B F_o formé par les lignes de glissement $E_1 C_o = - P_{\theta\theta} V_1 - V_1'$, B $C_o = T_\theta^{-1} V_1'$, EF_o et BF_o dont on cherche l'expression à l'aide des deux autres lignes et des opérateurs matriciels.



Les relations (52), (53) du chapitre III nous permettent de tirer V''_1 et V''_2 à partir de $V''_3 = - P_{\theta\theta} V_1 - V'_1$ et V''_4 que l'on cherche, c'est-à-dire :

$$V''_2 = P_{\theta\theta} V''_4 - Q_{\theta\theta} V''_3 \Rightarrow T_\theta^{-1} V'_1 = P_{\theta\theta} V''_4 - Q_{\theta\theta}\left[-P_{\theta\theta} V_1 - V'_1\right]$$

tirons V''_4 de cette égalité :

$$V''_4 = P_{\theta\theta}^{-1} \left[T_\theta^{-1} V'_1 - Q_{\theta\theta} (P_{\theta\theta} V_1 + V'_1)\right]$$

$$V''_4 = E_1 F_o = P_{\theta\theta}^{-1} \left[(-P_{\theta\theta} + Q_{\theta\theta}) V'_1 - Q_{\theta\theta} P_{\theta\theta} V_1 - Q_{\theta\theta} V'_1\right]$$

Sachant que $P_{\theta\theta} Q_{\theta\theta} = Q_{\theta\theta} P_{\theta\theta}$ on aura :

$E_1 F_o = - V'_1 - Q_{\theta\theta} V_1$ avec $Q_{\theta\theta} V_1 = V'_1 + \rho_1 C$ tirée de (5.7.1)

$$E_1 F_o = - V'_1 - V'_1 - \rho_1 C = - 2 V'_1 - \rho_1 C$$

La ligne $A'_1 G_o$ étant la translation de $E_1 F_o$ par le vecteur $\rho_1 C$ on aura :

$$A'_1 G_o = E_1 F_o + \rho_1 C = -2 V'_1 - \rho_1 C + \rho_1 C$$

$$A'_1 G_o = - 2 V'_1 \qquad (5.7.4)$$

la ligne $B F_o = V''_1$ sera donnée par la relation (53) du 3ème chapitre

$V''_1 = P_{\theta\theta} V''_3 - Q_{\theta\theta} V''_4$ avec $V''_3 = - P_{\theta\theta} V_1 - V'_1$

et $V''_4 = -2 V'_1 + \rho_1 C$

pour obtenir

$$BF_o = P_{\theta\theta} (- P_{\theta\theta} V_1 - V'_1) - Q_{\theta\theta} (-2 V'_1 + \rho_1 C) \qquad (5.7.5)$$

pour alléger l'écriture on écrira P et Q à la place de $P_{\theta\theta}$ et $Q_{\theta\theta}$.

Développons la relation (5.7.5).

$$BF_o = -P^2 V_1 - P V_1' + 2Q V_1' + Q \rho_1 C = (-P+2Q) V_1' - Q\rho_1 C - P^2 V_1 \qquad (5.7.6)$$

l'axe B H_o étant de symétrie, la ligne $H_o F_o$ est la transformée de la ligne BF_o par l'opérateur lisse T_θ . La ligne I_oG_o sera la translatée de $H_o F_o$ par le vecteur $-\rho_1 C$. L'expression matricielle du vecteur représentant la ligne $I_o G_o$ sera :

$I_o G_o = T_\theta BF_o + \rho_1 C$ où à l'aide de la relation (5.7.6)

$$I_o G_o = T_\theta \left[(-P + 2Q) V_1' - Q \rho_1 C - P^2.V_1\right] + \rho_1 C \quad \text{avec } T_\theta = -P_{\theta\theta} - Q_{\theta\theta}$$

$$I_o G_o = (-P - Q) \left[(-P + 2 Q) V_1' - Q \rho_1 C - P^2 V_1\right] + \rho_1 C$$

$$I_o G_o = \left[P^2 + Q P - 2PQ - 2Q^2\right] V_1' - \left[PQ + Q^2 + I\right]\rho_1 C + (P^3 + Q P^2) V_1$$

$$I_oG_o = P^3 V_1 + P^2 V_1' - 2PQ V_1' + PQ \rho_1 C + QP^2 V_1 - 2Q^2 V_1' + Q^2\rho_1 C + QPV_1' + \rho_1 C$$

Après simplification on aura :

$$I_oG_o = P^3 V_1 + \left[P^2-2Q^2\right] V_1' - PQ\left[QV_1 + \rho_1 C\right] + PQ\rho_1 C + QP^2 V_1 + Q^2\rho_1 C + \rho_1 C$$

$$V_1' = QV_1 + \rho_1 C \Rightarrow \qquad Q^{-1} V_1' - Q^{-1} \rho_1 C = V_1$$

portons la valeur de V_1 dans l'équation ci-dessus :

$$I_oG_o = P^3 V_1 - P Q^2 V_1 + \left[P^2-Q^2\right]V_1' - Q^2V_1' - PQ\rho_1 C + PQ\rho_1 C + QP^2\left[Q^{-1}V_1' - Q^{-1}\rho_1 C\right]$$

$$+ Q^2 \rho_1 C + \rho_1 C$$

puisque $PQ = QP$ on aura $QP^2 = P^2 Q$

et $P^2 - Q^2 = I$ I étant la matrice identité.

$$I_oG_o = \left[P^2-Q^2\right] PV_1 + \left[P^2-Q^2\right] V_1' + \left[P^2-Q^2\right] V_1' + \left[Q^2-P^2\right]\rho_1 C + \rho_1 C$$

$$I_oG_o = I.P V_1 + I V_1' + I.V_1' - I \rho_1 C + \rho_1 C \Rightarrow$$

$$I_oG_o = P V_1 + 2 V_1' \qquad (5.7.7)$$

Prenons cette fois, le quadrilatère curviligne $E_2\ G_o\ I_o\ G_1$ constitué des lignes de glissement $E_2\ G_o = T_\theta^{-1}\ A_1'\ G_o$, $I_o\ G_o$ donnée par la relation (5.7.7) et les lignes $E_2\ G_1$ et $I_o\ G_1$ dont on voudrait donner l'expression matricielle. Admettons que les lignes $E_2\ G_o$ et $E_1\ G_1$ soient les lignes initiales à partir desquelles on tire les deux autres; on a d'après les relations (44) et (45) du IIIème chapitre :

(i) $\quad I_o\ G_1 = P\ E_2\ G_o + Q\ E_2\ G_1 \qquad$ avec $\quad E_2\ G_o = -\ 2\ (-P + Q)\ V_1'$

(ii) $\quad I_o\ G_o = Q\ E_2\ G_o + P\ E_2\ G_1 \qquad$ et $\quad I_o\ G_1 = P\ V_1 + 2\ V_1'$

multiplions (i) par Q^{-1} et (ii) par P^{-1} et faisons la différence pour éliminer $E_2\ G_1$:

$$P^{-1}\ I_oG_o - Q^{-1}\ I_o\ G_1 = Q^{-1}\ P\ E_1\ G_o - P^{-1}\ Q\ E_1\ G_o = \left[Q^{-1}\ P - P^{-1}\ Q\right]\ E_2\ G_o$$

remplaçons les lignes $I_o\ G_o$, $I_o\ G_1$ et $E_2\ G_o$ par leur expression matricielle et tirons $I_o\ G_1$ de l'expression ci-dessus.

$$I_o\ G_1 = Q\ P^{-1}\left[PV_1 + 2\ V_1'\right] + \left[P-Q\ P^{-1}\ Q\right]\left[2P\ V_1' - 2Q\ V_1'\right]$$

$$I_oG_1 = -2\ Q^2\ V_1' + 2P^2\ V_1' + 2\ Q\ P^{-1}\ Q^2\ V_1' - 2P\ Q\ V_1' + Q\ V_1 + 2\ Q\ P^{-1}\ V_1'$$

$$I_oG_1 = 2\left[P^2-Q^2\right]V_1' + 2\ Q\ P^{-1}\left[Q^2 + I\right]V_1' + Q\ V_1 - 2\ P\ Q\ V_1'$$

or $P^2 - Q^2 = I \quad \Rightarrow \quad Q^2 + I = P^2$

et $PQ = QP \quad \Rightarrow \quad Q\ P^{-1}\left[Q^2+I\right] = Q\ P^{-1}\ P^2 = QIP = QP = PQ$

donc on obtient

$$I_o\ G_1 = 2\ V_1' + 2\ PQ\ V_1' - 2\ PQ\ V_1' + Q\ V_1 = 2\ V_1' + Q\ V_1$$

puisque la ligne de glissement $A_2'\ G_2$ est la translatée de la ligne $I_o\ G_1$

d'un vecteur + ρ_1 C on a :

$$A'_2\ G_2 = 2\ V'_1 + Q\ V_1 + \rho_1\ C = 3\ V'_1 \qquad (5.7.8)$$

Pour donner l'expression matricielle de la ligne $E_3\ G_2$, calculons d'abord $E_2\ G_1$ puis on aura la transformation simple de $E_2\ G_1$ pour obtenir $E_3\ G_2$ à l'aide de l'opérateur T_θ et la translation $-\rho_1$ C :

$E_3\ G_2 = T_\theta\ \ E_2\ G_1 - \rho_1\ C.$

Pour le quadrilatère considérée, nous avons la relation (ii) :

$I_oG_o = Q\ E_2\ G_o + P\ E_2\ G_1$ qui devient en multipliant à droite et à gauche par P^{-1}

$E_2\ G_1 = P^{-1}\ I_o\ G_o - P^{-1}\ Q\ E_2\ G_o$ où l'on a : $I_o\ G_o = P\ V_1 + 2\ V'_1$

et $E_2\ G_o = T^{-1}\ A'_1\ G_o = (-P + Q) \times -\ 2\ V'_1$

$$E_2\ G_1 = P^{-1}\ (PV_1 + 2V'_1) + 2P^{-1}\ Q(-P + Q)\ V'_1$$

$$E_2\ G_1 = V_1 + 2\ P^{-1}\ V'_1 - 2\ Q\ V'_1 + 2\ P^{-1}\ Q^2\ V'_1$$

et

$$E_3\ G_2 = T_\theta\ E_2\ G_1 - \rho_1\ C = (-P - Q)\ \left[V_1 + 2\ P^{-1}\ V'_1 - 2\ Q\ V'_1 + 2\ P^{-1}\ Q^2\ V'_1\right]$$

$$E_3\ G_2 = -PV_1 - 2V'_1 - QV_1 - 2QP^{-1}\ V'_1 + 2Q\ P\ V'_1 + 2Q^2\ V'_1 - 2Q^2V'_1 - 2QP^{-1}\ Q^2\ V'_1 - \rho_1\ C$$

$$E_3\ G_2 = -PV_1 - 2V'_1 - (QV_1 + \rho_1\ C) - 2Q\ P^{-1}\ V'_1 + 2Q\ P\ V'_1 - 2\ Q\ P^{-1}\ Q^2\ V'_1 \qquad (5.7.9)$$

Voyons ce que donne l'expression $Q\ P^{-1}\ Q^2$:

$$P^2 - Q^2 = I \Rightarrow Q^2 = P^2 - I \Rightarrow Q\ P^{-1}\ Q^2 = Q\ P^{-1}\ \left[P^2 - I\right] = QP - Q\ P^{-1}$$

et $\quad -2\ Q\ P^{-1}\ Q^2\ V'_1 = -\ 2\ (QP - Q\ P^{-1})\ V'_1$

portons cette expression dans la relation (5.7.9) :

$$E_3\ G_2 = -\ P\ V_1 - 3\ V_1' - 2\ Q\ P^{-1}\ V_1' + 2\ Q\ P\ V_1' - 2\ (QP - QP^{-1})\ V_1'$$

$$E_3\ G_2 = -\ P\ V_1 - 3\ V_1' \qquad (5.7.10)$$

ceci nous amènera par extension jusqu'à la $m^{\text{ième}}$ ligne aux relations :

$$HL = -\ (P\ V_1 + m\ V_1')\ \text{ et }\ A'_{m-1}\ L = m\ V_1'$$

et montrent aussi que les triangles curvilignes aux bords des plans de symétrie et de la frontière lisse sont semblables.

Les triangles $OD\ E_o$, $A'_o\ C_o\ B$, $B\ F_o\ H_o$, $A'_1\ G_o\ E_2$, ..., $H\ L\ A'_m$ sont semblables.

D'autre part le choix de la ligne initiale V_1 sera fixé par le fait que le champ se termine au $m^{\text{ième}}$ triangle par un axe $H\ A'_m$ de symétrie.

$$HL = T_\theta^{-1}\ A'_m\ L \Rightarrow (-\ P\ V_1 + m\ V_1') = (-\ P + Q)\ A'_m\ L$$

or $A'_m\ L = \dfrac{V_1}{2}$ donc on a l'égalité suivante :

$$-\ PV_1 + m\ V_1' = -\ P\ V_1 + m\ (Q\ V_1 + \rho_1\ C) = (-\ P + Q)\ 1/2\ V_1 \Rightarrow$$

$$[P + (2m + 1)Q]\ V_1 = -2\ m\ \rho_1\ C \Rightarrow 2\ m\ \rho_1\ C = -\ [P + Q + 2\ m\ Q]\ V_1 = |-P-Q-2mQ|V_1$$

$$[T - 2\ m\ Q]\ V_1 = 2\ m\ \rho_1\ C \qquad (5.7.11)$$

Le vecteur V_1 satisfait cette équation matricielle pour la résolution de laquelle un programme de calcul sera élaboré.

La relation (5.7.11) peut encore s'écrire :

$$T_\theta\ V_1 = 2m\ (Q_{\theta\theta}\ V_1 + \rho_1\ C) = 2\ m\ V_1'$$

l'analyse du champ et tout particulièrement pour le triangle curviligne $O\ D\ E_o$ montre que $T_\theta\ V_1$ n'est rien d'autre que la ligne $E_o\ D$. En d'autres termes les lignes $E_o\ D$ et $V_1' = A'_o\ C_o$ sont semblables et de rapport 2m donc les triangles curvilignes $O\ D\ E_o$ et $A'\ C_o\ B$ sont semblables et de rapport

et de rapport

$$\frac{O\ D\ E_o}{A'C_o\ B} = 2\ m\ .$$

Il en est de même pour les autres triangles curvilignes, mais de rapports respectifs 2 m - 1, 2 m - 2, ... m .

$$\left.\begin{array}{l} A'_1\ G_o = -2\ A'_o\ C_o \\ A'_2\ G_2 = 3\ A'_o\ C_o \\ \vdots \\ A'_{m-1}\ L = m\ A'_o\ C_o \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Les triangles } A'_o\ C_o\ B_o,\ A'_1\ G_o\ E_2,\ A'_2\ G_2\ N, \ldots A'_{m-1}\ L\ A'_m \\ \text{sont semblables et de rapports, } 2,\ 3, \ldots\ m\ . \end{array}\right.$$

d'où

L'analyse du champ (ii) par la même technique donne les expressions suivantes :

$A''_1\ D'_o = V_2$ $\quad A''_1\ C'_1 = -2\ V'_2$ $\quad A''_2\ C'_2 = 3\ V'_2$ $\quad A''_m\ D'_{m-1} = V_2-(m-1)V'_2$

$A''_o\ C'_o = V'_2$ $\quad A''_2\ D'_1 = -(V_2-V'_2)$ $\quad A''_3\ D'_2 = V_2-2\ V'_2$ $\quad A''_{m-1}\ C'_{m-1} = m\ V'_2$

Ces relations liant les lignes de glissement du champ complet aux lignes V_2 et V'_2 établissent la similitude entre les triangles curvilignes :

$$\frac{E'_o\ D'_o\ A''_1}{A''_o\ C'_o\ B'_o} = 2m\ ,\quad \frac{B''_o\ D'_1\ A''_2}{A''_o\ C'_o\ B'_o} = 2\ m - 1\ ,\ldots,\ \frac{K\ D'_{m-1}\ A''_m}{A''_o\ C'_o\ B'_o} = m + 1$$

et entre les triangles curvilignes suivants :

$$\frac{A''_1\ C'_1\ C''_1}{A''_o\ C'_o\ B'_o} = -\ 2\ ,\quad \frac{A''_2\ C'_2\ C''_2}{A''_o\ C'_o\ B'_o} = 3\ ,\quad \ldots\ldots\ ,\quad \frac{A''_{m-1}\ C'_{m-1}\ P'}{A''\ C'_o\ B'_o} = m\ .$$

Le vecteur V_2 satisfait la même équation matricielle :

$$\left[T - 2\ m\ Q\right]\ V_2 = 2\ m\ \rho_2\ C \qquad (5.7.12)$$

pour le même angle θ et le même m, V_2/ρ_2 et V_1/ρ_1, satisfont la même équation $\left[T - 2\ m\ Q\right]\ V/_\rho = 2m\ C$ et sont éléments du même espace vectoriel. Ceci établit la similitude entre les triangles curvilignes du champ (i) qui ont un côté commun avec la frontière lisse ou la ligne de symétrie parallèle à la frontière d'une part et le triangle $P''\ D'_{m-1}\ A''_m$ et

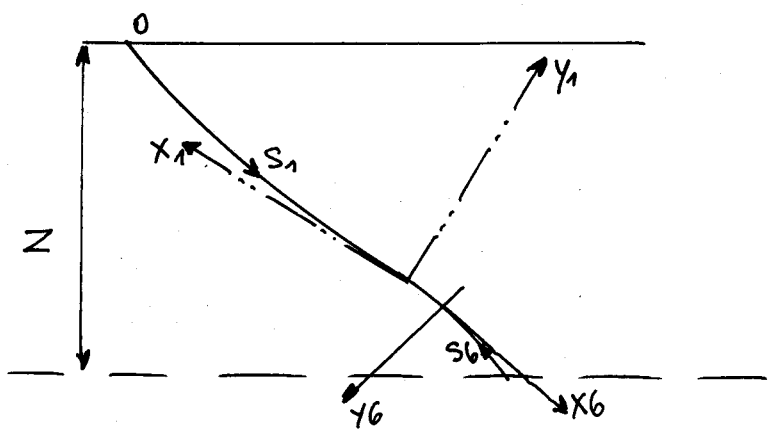
réciproquement comme celà a été vu pour le cas m = 1 .

Si $H_o A'_m = 1$ et $A''_m P_o = 1$ on obtient les relations plus générales : $W_1 = m\ \rho_1/\rho_2$, $W_2 = (m+1)\ \rho_2/\rho_1$ et $W_1 W_2 = m\ (m + 1)$.

5.8.- Programmes de calculs et résultats.

Un programme de calcul est donné pour résoudre les 2 cas de champ (i) et (ii) en FORTRAN IV. On résoud les équations matricielles (5.7.11) et (5.7.12) en inversant la matrice T - 2 m Q pour avoir les composants des vecteurs initiaux respectifs V_1 et V_2 à partir desquels on construit le champ complet par multiplication simple de V_1 et V_2 par les opérateurs matriciel P, Q, T et T^{-1} . Le programme est fait de telle façon que l'on puisse donner à m le nombre entier qu'on veut et obtenir directement la longueur des champs, les discontinuités des vitesses et les pressions totales transmises par ces champs. Au départ, la longueur est rapportée à une hauteur 1 et une discontinuité égale à l'unité. Pour obtenir la longueur et la discontinuité correspondantes à l'angle θ qui détermine la géométrie, on divise par la hauteur du champ qui est calculée par le programme.

Dans le programme de calcul S1 étant le vecteur V_1 et S6 le vecteur B C_o du champ (i) par exemple la hauteur sera :



$$Z = (X1 + X6 + 1.0).\sin(\pi/_4-\theta)-(Y1 + Y6)\cos(\pi/_4-\theta)$$

la longueur sera la longueur totale rapportée à cette hauteur d'où

$$HT = H/Z$$

et la discontinuité $\rho = \frac{1}{Z}$

Pour le cas m = 1 la comparaison avec les valeurs données par GREEN en 1951 sont sur le tableau qui suit :

θ	W_1 GREEN	W_1 COLLINS	ρ_1 GREEN	ρ_1 COLLINS
0	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
5°	1.1646	1.16455	1.1348	1.1347
10°	1.2985	1.2985	0.7922	0.79174
15°	1.3859	1.3853	0.3977	0.3962

Nous avons étendu le calcul jusqu'au cas où m = 4 et pour des valeurs des angles θ = 2°, 4°, 6° et 8° . Nous constatons qu'à mesure que m augmente la discontinuité tend vers zéro pour des angles de plus en plus petits et le champ correspondant devient celui où ρ = 0 donc à étudier par la recherche des lignes propres.

Le tableau donné ci-dessus correspond au cas de figure (b). L'étude du cas de figure (c) de la même manière nous donne le tableau de comparaison suivant :

θ	$\rho_{2\,Green}$	$\rho_{2\,Collins}$	$W_{2\,Green}$	$W_{2\,Collins}$	$P_{2/k}$ Green	$P_{2/k}$ Collins	$P_{1/k}$ Green	$P_{1/k}$ Collins
0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	2	1	1	1	1
5	0,9744	0,9744	1,7174	1,7174	1,0108	1,052	1,0106	0,966
10	0,6098	0,6097	1,54	1,54	1,0279	1,1834	1,0277	0,85074
15	0,2858	0,2858	1,4429	1,4428	1,0377	1,364	1,0376	0,6392

TABLEAU 5.1.

Les pressions $P_{1/k}$ et $P_{2/k}$ sont calculées pour une pression hydrostatique $P_o = 0$. La pression totale $P_{/k}$ est la somme des pressions $P_{1/k}$ et $P_{2/k}$ calculées pour les deux cas de figure. La comparaison avec les données de Green donnent les valeurs ci-dessous :

θ	$\rho_{1\,Green}$	$\rho_{1\,Collins}$	$W_{1\,Green}$	$W_{1\,Collins}$
0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	1
5°	1.1348	1.1347	1.1646	1.1645
10°	0.7922	0.7917	1.2985	1.2986
15°	0.3977	0.3962	1.3859	1.3854
19.30	0.015	0.031	1.44	1.411

TABLEAU 5.2

θ	$P_{/k}$ Green	$P_{/k}$ Collins
0	2	2
5°	2,0214	2,018
10°	2,0556	2,034
15°	2,0753	2,003

TABLEAU 5.3

Les relations données par Green et qui relient les discontinuités de la vitesse ρ_1 et ρ_2 et les longueurs des champs W_1 et W_2 sont toutes vérifiées par les données obtenues par cette méthode matricielle.

Voyons l'évolution de la discontinuité de la vitesse ρ_2 pour le cas de figure lorsque m augmente. Ici on s'arrêtera au cas où m = 4, mais on peut très bien prendre un chiffre plus grand.

	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4
θ^o	ρ_2			
2	1,2263	1,1321	1,0376	0,9429
4	1,055	0,873	0,6891	0,5037
6	0,8968	0,6303	0,3584	0,0889
6,39	0,867	0,5844	0,2951	–
8	0,7491	0,399	0,0364	–
10	0,6097	0,1746	–	–
15	0,2858	–	–	–
19.30	0,0221	–	–	–

TABLEAU 5.3

Ceci montre qu'à mesure que m augmente la discontinuité diminue et s'annule pour un certain angle θ. Au delà de cet angle et pour le même m, elle devient négative et non acceptable. Le champ ne peut alors comporter autant d'éléments que le précédent. On en arrive au cas où la discontinuité ρ_2 s'annule pour m = 1 pour $\theta = 19°30$ Ce champ, comme tous ceux pour lesquels la discontinuité de la vitesse s'annule, s'obtient pour la méthode des lignes propres développée dans les paragraphes 5.5 et 5.6. Il en est de même pour le cas de figure (b). D'autre part nous remarquons que les pressions totales trouvées pour le cas m = 1 vérifient à 5 % près la relation de Green.

$$P/_k = \frac{2m+1}{\sqrt{m(m+1)}}$$

C'est-à-dire dans ce cas précis $P/_k = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2,1$

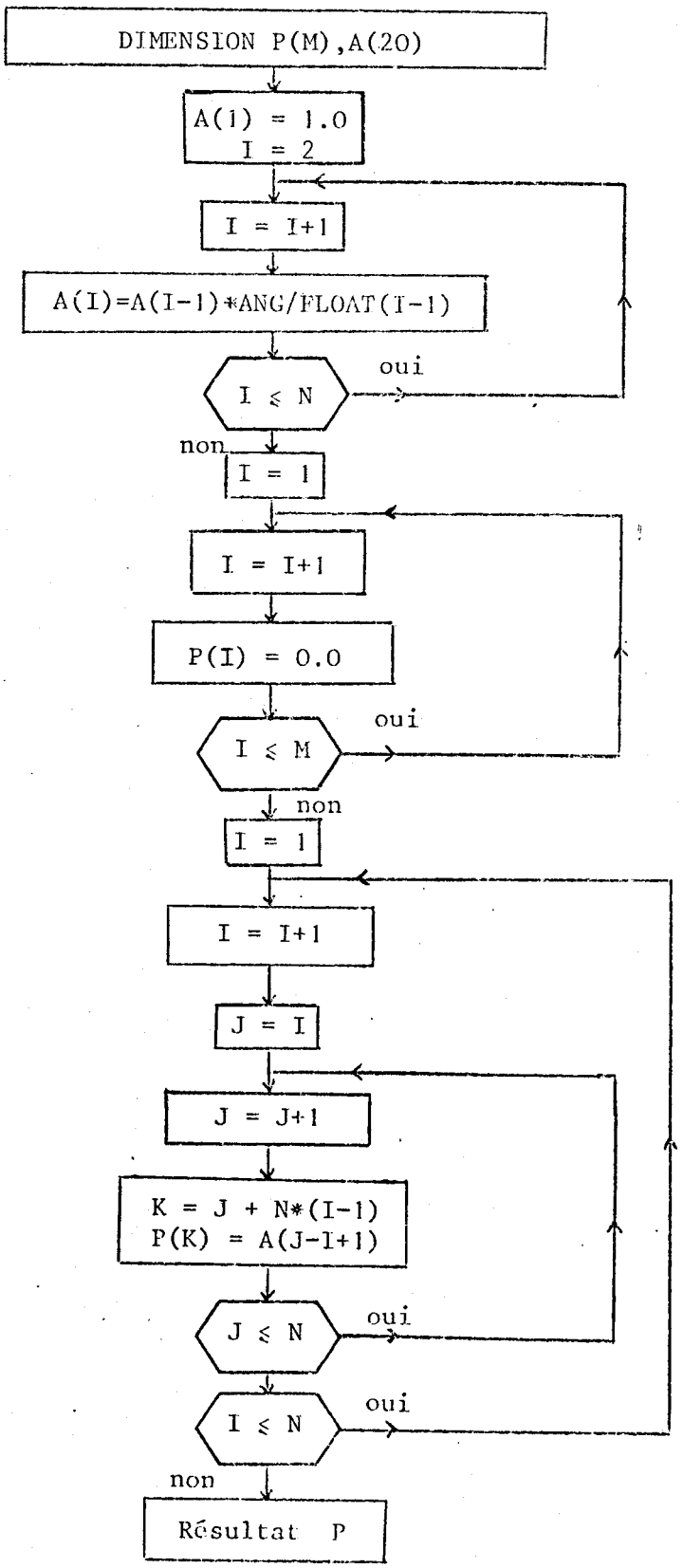
Cette erreur de 5 % diminue à la fois quand l'angle θ augmente et que m augmente aussi indépendemment de l'angle.

(voir les tableaux 5.3 et les programmes I et II).

Pour les cas où m = 1 d'une part et la discontinuité de la vitesse $\rho = 0$ un programme a été mis au point utilisant la méthode des lignes propres. Le programme III nous donne à la fois le rapport $\eta = \frac{\text{longueur}}{\text{hauteur}}$ et l'**effort** total de compression. Cet effort est calculé pour une pression hydrostatique $P_o = 1{,}065$ qui donne un effort horizontal négligeable.

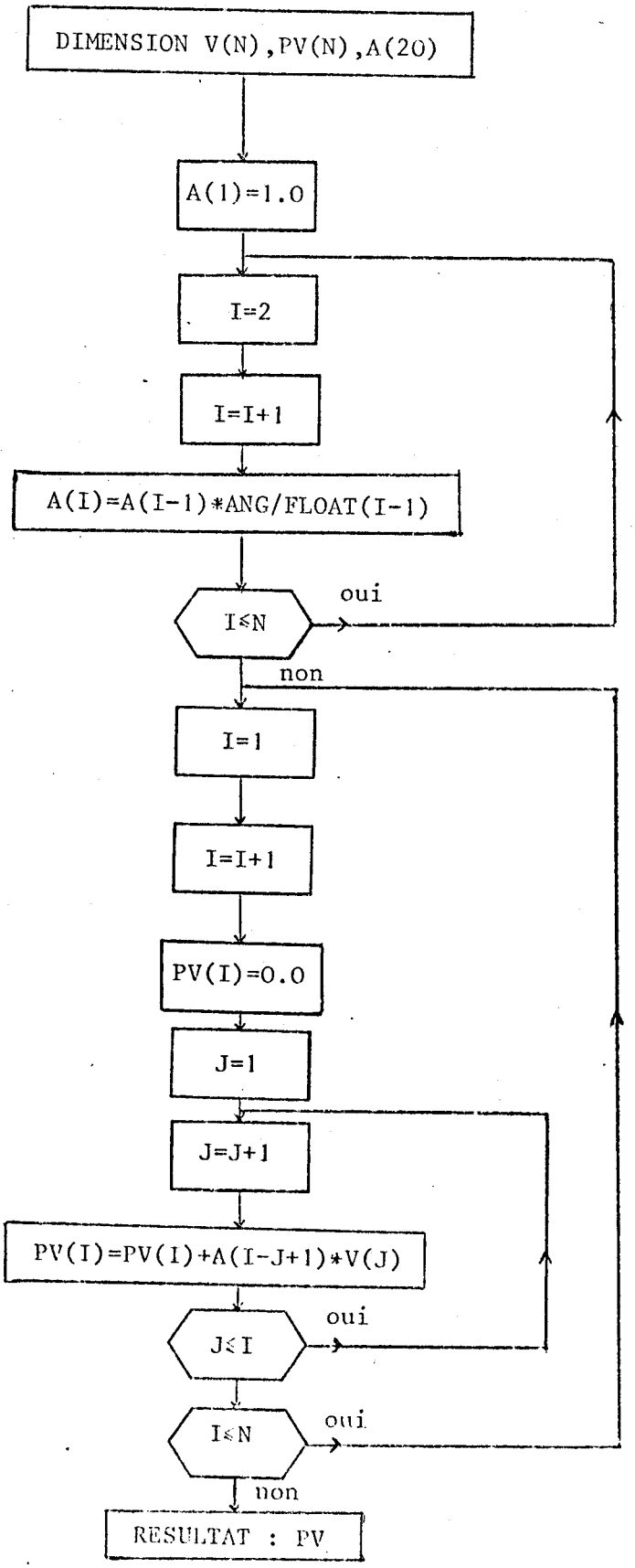
Dans ce programme particulier on calcule les vecteurs propres (lignes propres) et on retient la ligne S1 pour laquelle la relation $t^3 = q$ est bien satisfaite, t et q étant les valeurs propres des opérateurs T_θ et Q_θ respectivement. On obtient $\eta = 1{,}414 = \sqrt{2}$ et effort de compression PC = 1,038. Ces valeurs s'obtiennent bien pour la valeur de $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ soit pour t = 0,70709.

SUBROUTINE P^*(N,M,ANG,P)



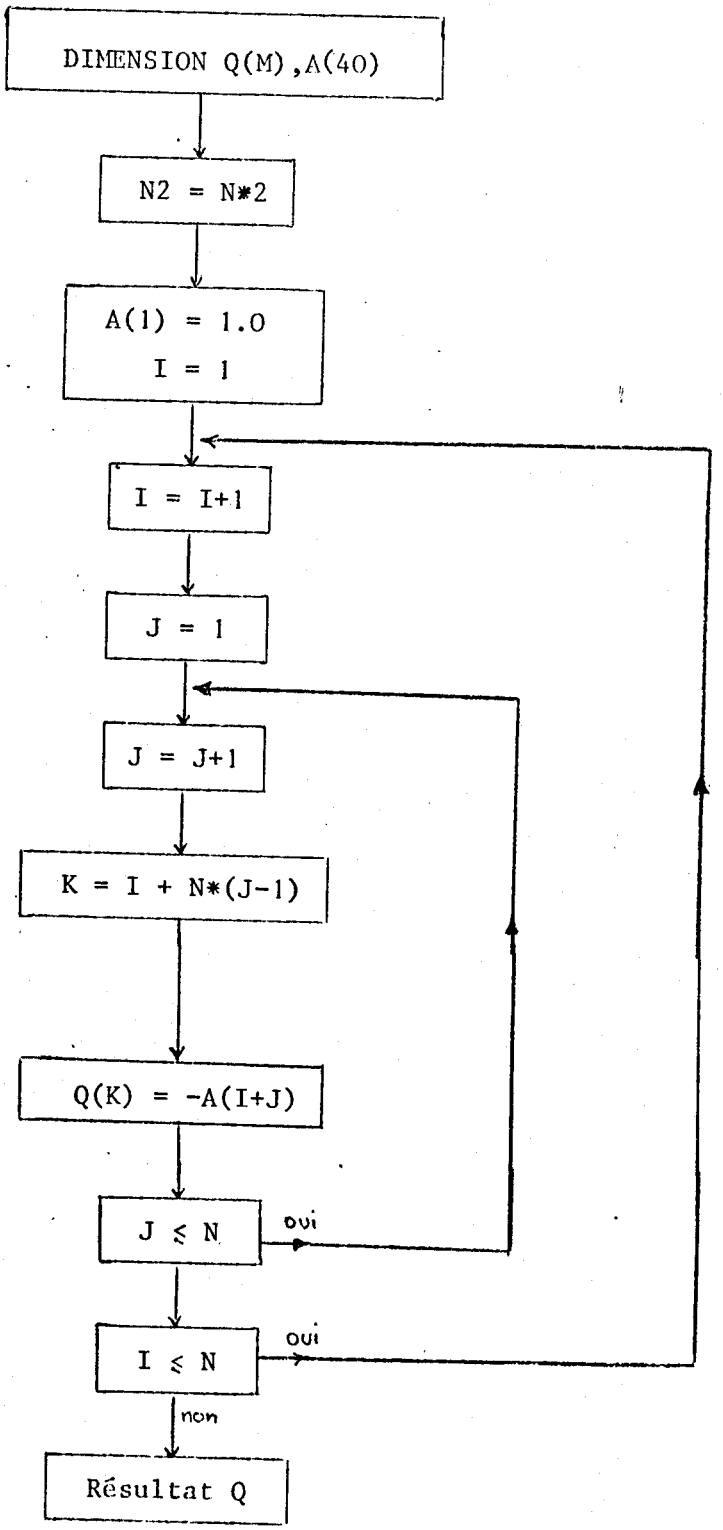
BU LILLE

SUBROUTINE PMULT(N,ANG,V,PV)



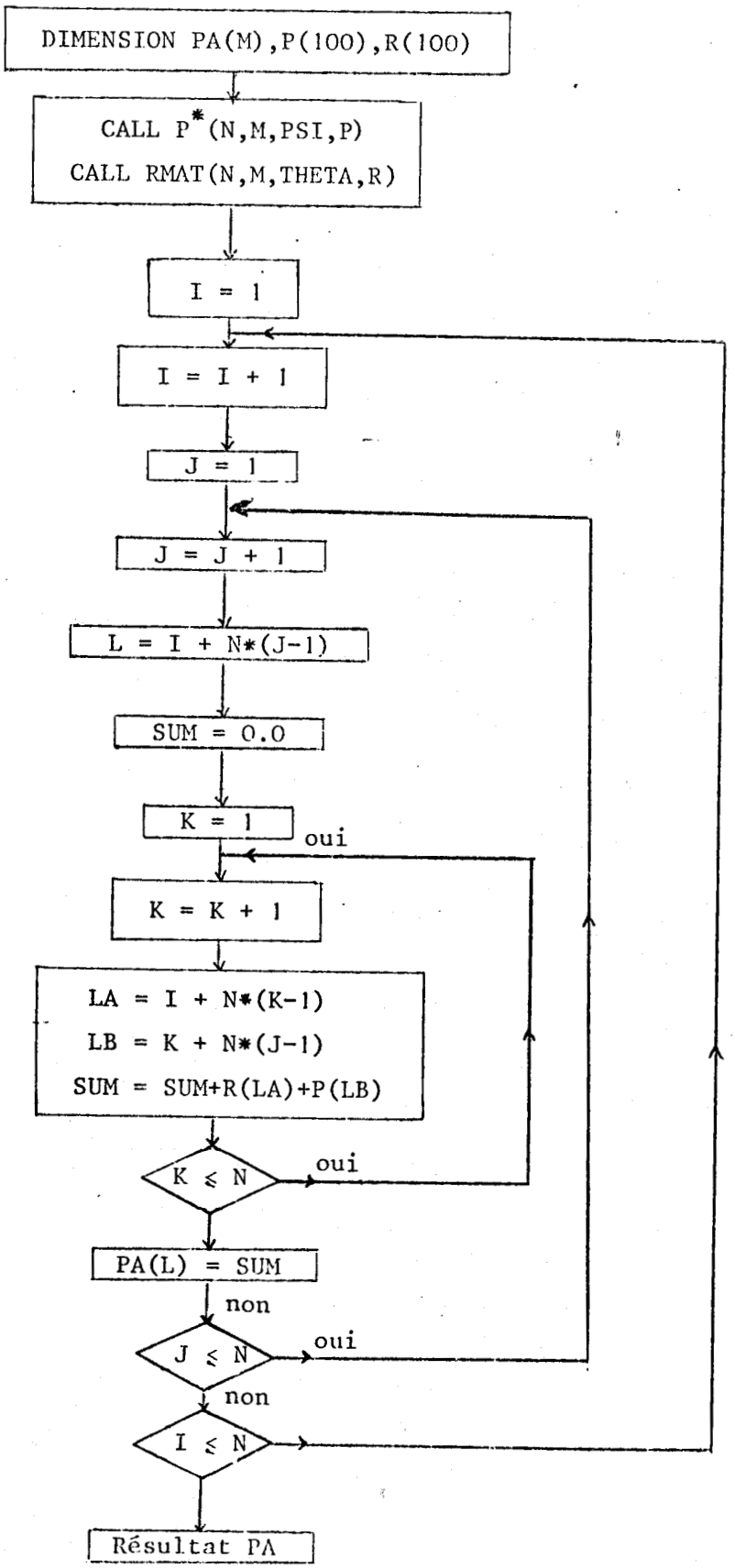
BUS LILLE

SUBROUTINE Q^*(N,M,ANG,Q)



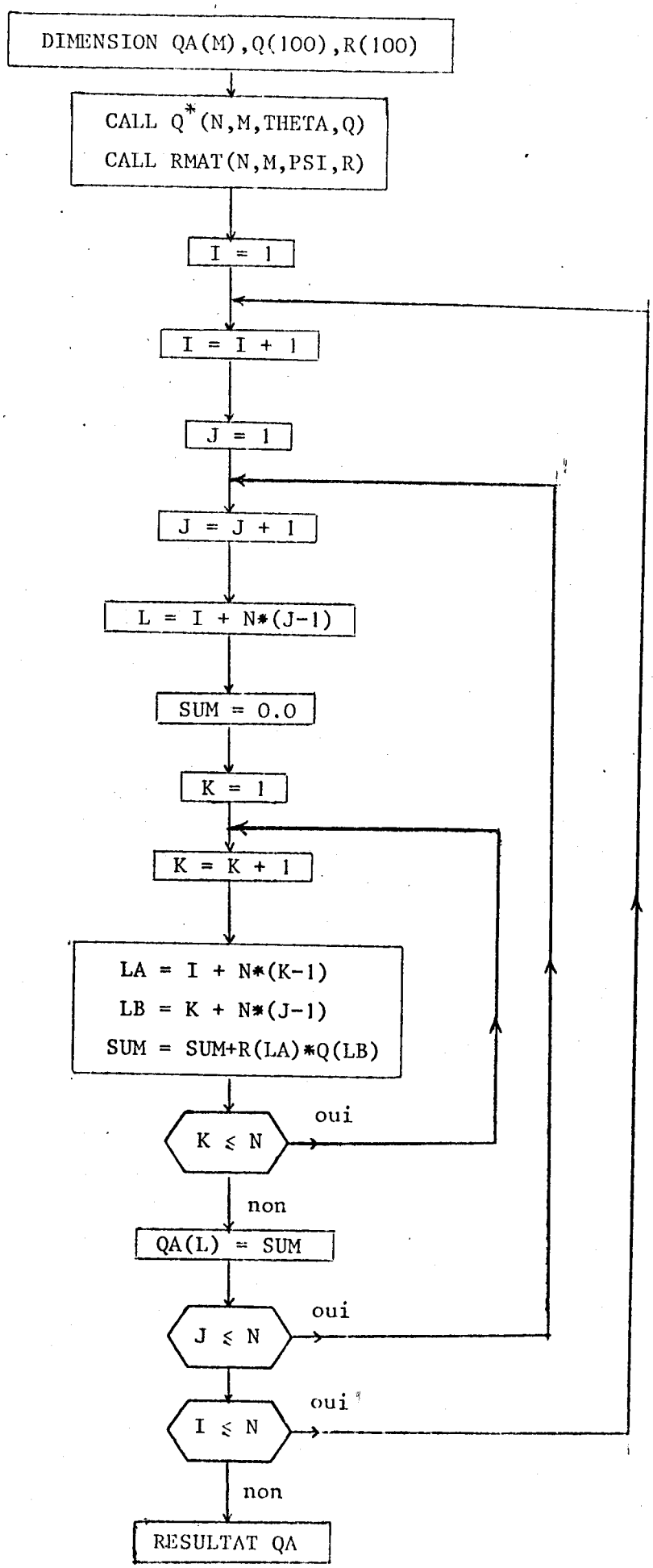
BUS LILLE

SUBROUTINE PMAT(N,M,THETA,PSI,PA)



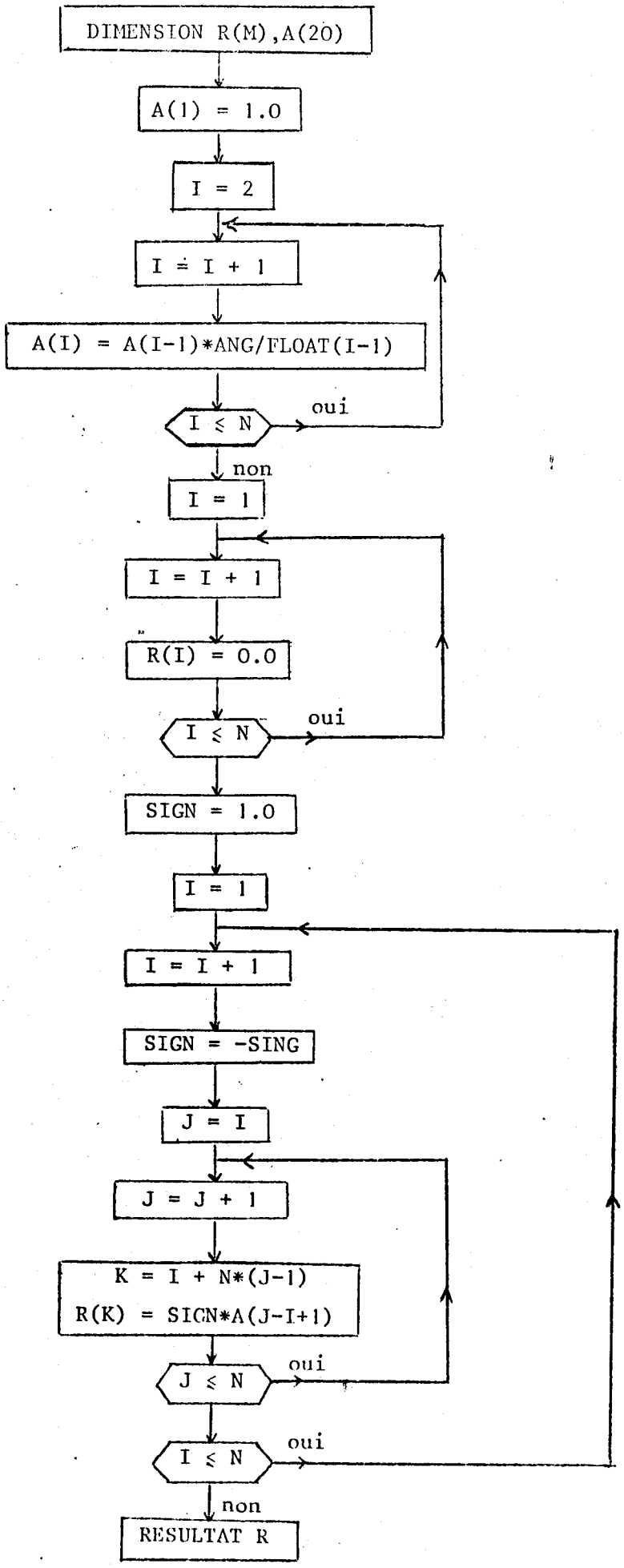
BUS LILLE

SUBROUTINE QMAT(N,M,THETA,PSI,QA)



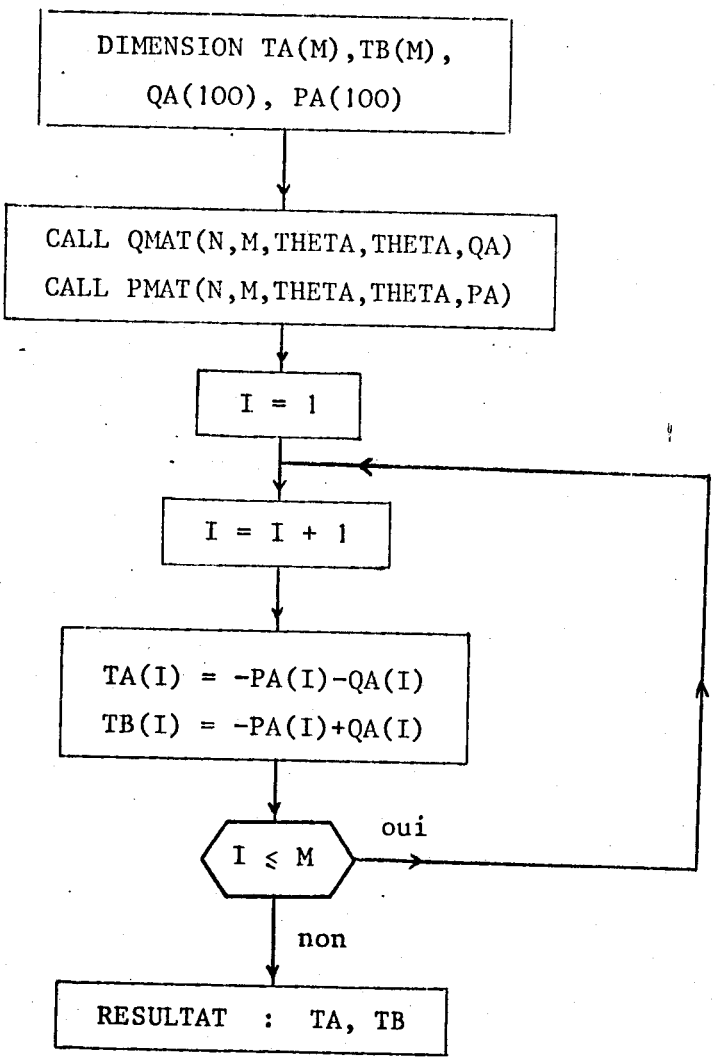
BUS LILLE

SUBROUTINE RMAT(N,M,ANG,R)



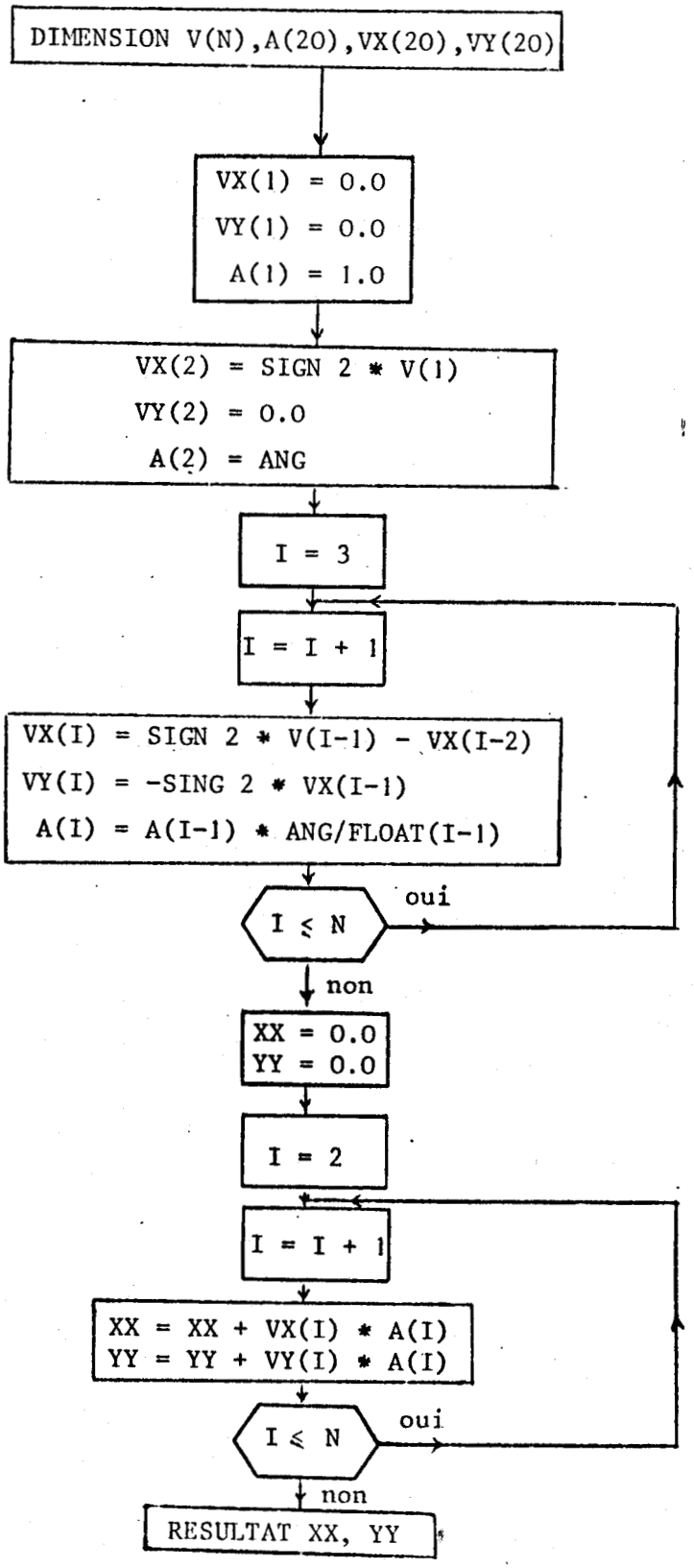
BIBLIOTHEQUE LILLE

SUBROUTINE TMAT(N,M,THETA,TA,TB)



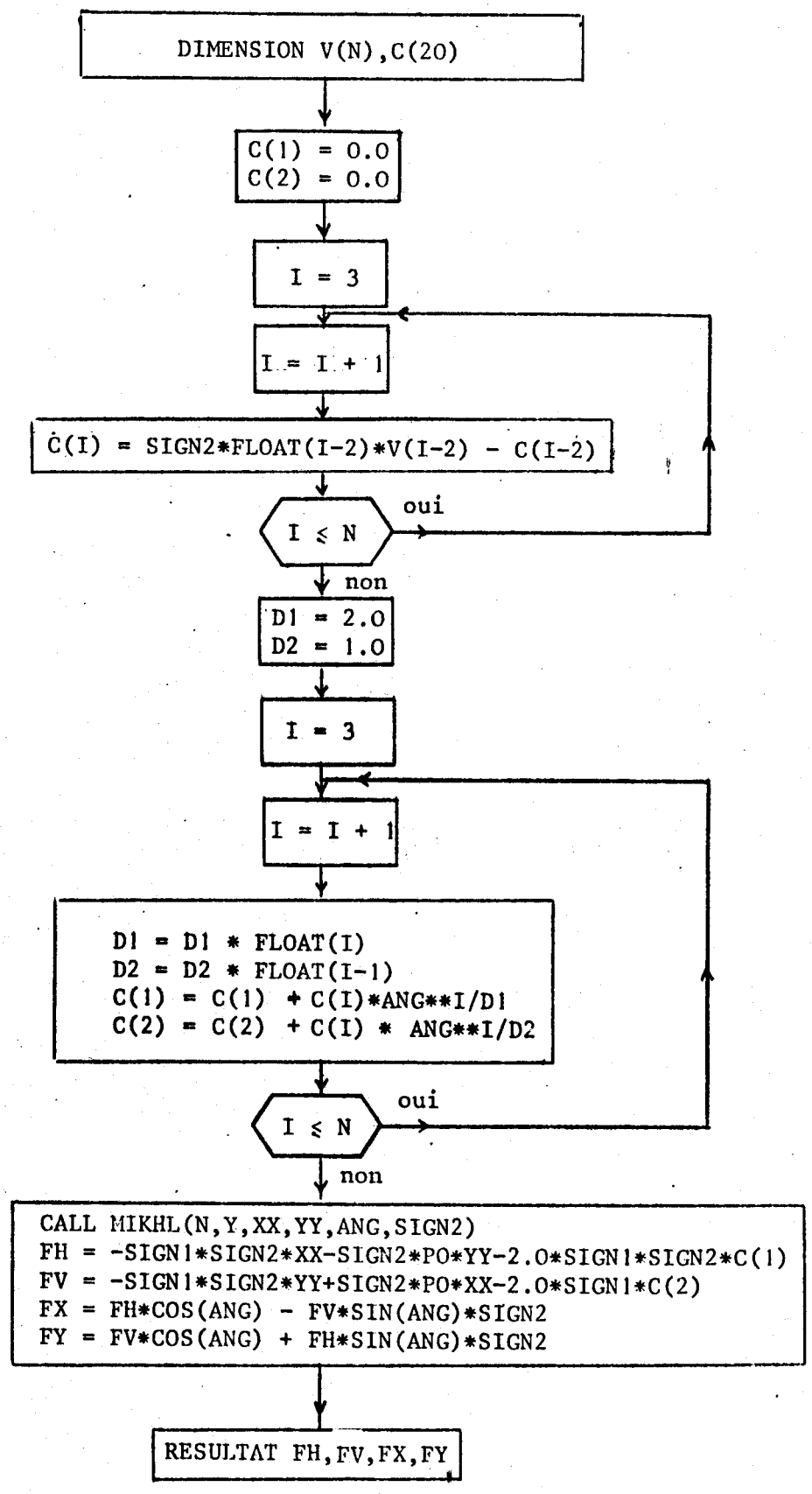
BUS LILLE

SUBROUTINE MIKHL(N,V,XX,YY,ANG,SIGN2)



BUS LILLE

SUBROUTINE SLFORC(N,V,XX,YY,FX,FY,ANG,PO,SIGN1,SIGN2)



BUS LILLE

```
      SUBROUTINE PSTAR(N,M,ANG,P)
      DIMENSION P(M),A(20)
      A(1)=1.0
      DO 10 I=2,N
      A(I)=A(I-1)*ANG/FLOAT(I-1)
   10 CONTINUE
      DO 20 I=1,M
      P(I)=0.0
   20 CONTINUE
      DO 40 I=1,N
      DO 30 J=I,N
      K=J+N*(I-1)
      P(K)=A(J-I+1)
   30 CONTINUE
   40 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE GSTAR(N,M,ANG,G)
      DIMENSION G(M),A(40)
      N2=2*N
      A(1)=1.0
      DO 10 I=2,N2
      A(I)=A(I-1)*ANG/FLOAT(I-1)
   10 CONTINUE
      DO 30 I=1,N
      DO 20 J=1,N
      K=I+N*(J-1)
      G(K)=-A(I+J)
   20 CONTINUE
   30 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE PMAT(N,M,THETA,PSI,PA)
      DIMENSION PA(M),P(100),R(100)
      CALL PSTAR(N,M,PSI,P)
      CALL RMAT(N,M,THETA,R)
      DO 70 I=1,N
      DO 71 J=1,N
      L=I+N*(J-1)
      SUM=0.0
      DO 72 K=1,N
      LA=I+N*(K-1)
      LB=K+N*(J-1)
      SUM=SUM+R(LA)*P(LB)
   72 CONTINUE
      PA(L)=SUM
   71 CONTINUE
   70 CONTINUE
      RETURN
      END
```

BUS LILLE

```
      SUBROUTINE QMAT(N,M,THETA,PSI,QA)
      DIMENSION QA(M),Q(100),R(100)
      CALL QSTAR(N,M,THETA,Q)
      CALL RMAT(N,M,PSI,R)
      DO 70 I=1,N
      DO 71 J=1,N
      L=I+N*(J-1)
      SUM=0.0
      DO 72 K=1,N
      LA=I+N*(K-1)
      LB=K+N*(J-1)
      SUM=SUM+R(LA)*Q(LB)
   72 CONTINUE
      QA(L)=SUM
   71 CONTINUE
   70 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE RMAT(N,M,ANG,R)
      DIMENSION R(M),A(20)
      A(1)=1.0
      DO 10 I=2,N
      A(I)=A(I-1)*ANG/FLOAT(I-1)
   10 CONTINUE
      DO 20 I=1,M
      R(I)=0.0
   20 CONTINUE
      SIGN=1.0
      DO 40 I=1,N
      SIGN=-SIGN
      DO 30 J=I,N
      K=I+N*(J-1)
      R(K)=SIGN*A(J-I+1)
   30 CONTINUE
   40 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE TMAT(N,M,THETA,TA,TB)
      DIMENSION TA(M),TB(M),QA(100),PA(100)
      CALL QMAT(N,M,THETA,THETA,QA)
      CALL PMAT(N,M,THETA,THETA,PA)
      DO 75 I=1,M
      TA(I)=-PA(I)-QA(I)
      TB(I)=-PA(I)+QA(I)
   75 CONTINUE
      RETURN
      END
```

BUS LILLE

```
      SUBROUTINE MIKHL(N,V,XX,YY,ANG,SIGN2)
      DIMENSION V(N),A(20),VX(20),VY(20)
      VX(1)=0.0
      VY(1)=0.0
      A(1)=1.0
      VX(2)=SIGN2*V(1)
      VY(2)=0.0
      A(2)=ANG
      DO 10 I=3,N
      VX(I)=SIGN2*V(I-1)-VX(I-2)
      VY(I)=-SIGN2*VX(I-1)
      A(I)=A(I-1)*ANG/FLOAT(I-1)
   10 CONTINUE
      XX=0.0
      YY=0.0
      DO 20 I=2,N
      XX=XX+VX(I)*A(I)
      YY=YY+VY(I)*A(I)
   20 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SLFORC(N,V,XX,YY,FX,FY,ANG,PO,SIGN1,SIGN2)
      DIMENSION V(N),C(20)
      C(1)=0.0
      C(2)=0.0
      DO 10 I=3,N
      C(I)=SIGN2*FLOAT(I-2)*V(I-2)-C(I-2)
   10 CONTINUE
      D1=2.0
      D2=1.0
      DO 20 I=3,N
      D1=D1*FLOAT(I)
      D2=D2*FLOAT(I-1)
      C(1)=C(1)+C(I)*ANG**I/D1
      C(2)=C(2)+C(I)*ANG**(I-1)/D2
   20 CONTINUE
      CALL MIKHL(N,V,XX,YY,ANG,SIGN2)
      FH=-SIGN1*SIGN2*XX-SIGN2*PO*YY-2.0*SIGN1*SIGN2*C(1)
      FV=-SIGN1*SIGN2*YY+SIGN2*PO*XX-2.0*SIGN1*C(2)
      FX=FH*COS(ANG)-FV*SIN(ANG)*SIGN2
      FY=FV*COS(ANG)+FH*SIN(ANG)*SIGN2
      WRITE(108,209)FH,FV
  209 FORMAT(1H0,4X,3HFH=,E15.5,4X,3HFV=,E15.5,/)
      RETURN
      END
```

BUS LILLE

Les sous-programmes

```
      SUBROUTINE PMULT(N,ANG,V,PV)
      DIMENSION V(N),PV(N),A(20)
      A(1)=1.0
      DO 10 I=2,N
      A(I)=A(I-1)*ANG/FLOAT(I-1)
   10 CONTINUE
      DO 30 I=1,N
      PV(I)=0.0
      DO 20 J=1,I
      PV(I)=PV(I)+A(I-J+1)*V(J)
   20 CONTINUE
   30 CONTINUE
      RETURN
      END
```

BUS LILLE

Programme II (I) Laminage à chaud

```
      REAL HL
      DIMENSION PTP(36),OPT(36),TA(36),TB(36),W1(36),W2(36),W3(36),PTP(3
     16),WP(36),S1(6),W3(6),S4(6),V1(6),V2(6),V5(6)
      N=6
      READ(105,100)PSI,THETA
  100 FORMAT(2F4.1)
      PSI=PSI*3.14159/180.0
      THETA=THETA*3.14159/180.0
      M=N*N
      CALL PMAT(N,M,THETA,PSI,PTP)
      CALL OMAT(N,M,THETA,PSI,OTP)
      CALL OMAT(N,M,PSI,THETA,OPT)
      CALL TMAT(N,M,PSI,TA,TB)
      CALL MRMUL(OPT,TB,W1,N,N,N)
      CALL MRMUL(W1,TB,W2,N,N,N)
      CALL MRMUL(W2,OTB,W3,N,N,N)
      DO 10 I=1,N
      K=I+N*(I-1)
      W3(K)=W3(K)-1.0
   10 CONTINUE
      DO 20 I=1,N
      S1(I)=-V1(I)
   20 CONTINUE
      S1(1)=S1(1)-1.0
      CALL MRSOL(W3,S1,N,EPD,0.00001)
      OUTPUT S1
      CALL COORXY(N,S1,XX1,YY1,X1,Y1,THETA,1.0)
      PI=3.14159/4.0
      PO=2.9480
      CALL RMULT(N,PSI,S1,V1)
      P1=PO+2.0*(THETA-PSI)
      P2=PO-2.0*PSI
      CALL SLFOR(N,V1,XX8,YY8,FX8,FY8,THETA,P1,1.0,1.0)
      PS=-(FX8*COS(PI+THETA)+FY8*SIN(PI+THETA))
      CALL RMULT(N,THETA,V1,S3)
      CALL MRMUL(PTP,S1,V1,N,N,1)
      CALL MRMUL(PTP,V1,V2,N,N,1)
      CALL RMULT(N,PSI,V2,S4)
      CALL COORXY(N,S4,XX4,YY4,X4,Y4,PSI,1.0)
      CALL COORXY(N,S3,XX3,YY3,X3,Y3,THETA,-1.0)
      WRITE(105,212)X3,Y3
  212 FORMAT(1H0,4X,3HX3=,F10.5,4X,3HY3=,F10.5,/)
      CALL SLFOR(N,S1,XX1,YY1,FX1,FY1,THETA,P1,1.0,1.0)
      CALL SLFOR(N,S4,XX4,YY4,FX4,FY4,PSI,P2,1.0,-1.0)
C     REDUCTION MILIEU DE LAMINAGE
      H1=(X3-Y3)*0.70711
      H2=0.29289
      TL=XX1*COS(PI-PSI)+YY1*SIN(PI-PSI)+(YY4+XX4)*0.70711+0.70711
      ALPHA=2.0*ATAN((H1-H2)/TL)
      PL=TL/SIN(ALPHA)
C     EFFORT DE LAMINAGE
```

BUS LILLE

```
      EL=FY1*COS(PI+THETA-PSI)-FX1*SIN(PI+THETA-PSI)-FY4*COS(PI-PSI)+FX4
     1*SIN(PI-PSI)-0,29289+P0*0,70711
C     CONTRE REACTION
      CT=-FY1*SIN(PI+THETA-PSI)-FX1*COS(PI+THETA-PSI)+FY4*SIN(PI-PSI)+FX
     14*COS(PI-PSI)
C     MOMENT DE LAMINAGE
      CALL SLMMNT(N,20,S1,P1,THETA,T1,1,0,1,0)
      CALL SLMMNT(N,20,S4,P2,PSI,T2,1,0,-1,0)
      T3=0,78539
      ML=T2+T3-T1+(FY1*COS(PI+THETA-PSI)-FX1*SIN(PI+THETA-PSI))*TL+(FY1*
     1SIN(PI+THETA-PSI)+FX1*COS(PI+THETA-PSI))*(H1-H2)+(FX4*SIN(PI-PSI)-
     2FY4*COS(PI-PSI)) *((YY4+XX4)*0,70711+0,70711)+(FX4*COS(PI-PSI)+FY4
     3*SIN(PI-PSI))*(0,29289+(YY4-XX4)*0,70711)+CT*RL
C     HAUTEUR D'ENTREE =1,0
      SORTIE=H2/H1
      RL=RL/(2,0*H1)
      EL=EL/(2,0*H1)
      CT=CT/H1
      ML=ML/(4,0*H1*H1)
      WRITE(108,110)
      WRITE(108,63)P5
   63 FORMAT(X,'P5=',F10,5,/)
      WRITE(108,120)SORTIE
      WRITE(108,130)ALPHA
      WRITE(108,140)RL
      WRITE(108,150)EL
      WRITE(108,160)CT
      WRITE(108,170)ML
      WRITE(108,180)H1
      WRITE(108,190)TL
  110 FORMAT(10X,18H HAUTEUR D'ENTREE=,F10,5//)
  120 FORMAT(10X,18HHAUTEUR DE SORTIE=,F10,5//)
  130 FORMAT(10X,17HANGLE DE CONTACT=,F10,5//)
  140 FORMAT(10X,18HRAYON DE LAMINAGE=,F10,5//)
  150 FORMAT(10X,10HTRACTION= ,F10,5//)
  160 FORMAT(10X,17HCONTRE TRACTION= ,F10,5//)
  170 FORMAT(10X,20HMOMENT DE LAMINAGE= ,F10,5//)
  180 FORMAT(10X,3HH1=,F10,5//)
  190 FORMAT(10X,3HTL=,F10,5//)
      STOP
      END
```

BUS LILLE

Résultats du Programme IV 1.

$\psi = 25°$ $\theta = 12°$

S1 = 2,23538
-,270718
3,946251E-02
-4,310496E-03
3,764641E-04
-2,704178E-05

X3= ,48036 Y3= -,04994

HAUTEUR D'ENTREE=
P5= -,55405

HAUTEUR DE SORTIE= ,78108

ANGLE DE CONTACT= ,11800

RAYON DE LAMINAGE= 15,74203

TRACTION= 5,04595

CONTRE TRACTION= -,60490

MOMENT DE LAMINAGE= ,24571

$\psi = 25.2$ $\theta = 12$

S1 = 2,25746
-,277795
4,082061E-02
-4,494675E-03
3,956992E-04
-2,864841E-05

0 X3= ,48519 Y3= -,05043

HAUTEUR D'ENTREE=
P5= -,55696

HAUTEUR DE SORTIE= ,77332

ANGLE DE CONTACT= ,12244

RAYON DE LAMINAGE= 15,13843

TRACTION= 5,02989

CONTRE TRACTION= -,59092

MOMENT DE LAMINAGE= ,49884

$\psi = 25.4$ $\theta = 12°$

S1 = 2,27996
-,285046
4,222115E-02
-4,685953E-03
4,158220E-04
-3,034162E-05

0 X3= ,49010 Y3= -,05094

HAUTEUR D'ENTREE=
P5= -,55992

HAUTEUR DE SORTIE= ,76557

ANGLE DE CONTACT= ,12691

RAYON DE LAMINAGE= 14,57610

TRACTION= 5,01386

CONTRE TRACTION= -,57093

MOMENT DE LAMINAGE= ,75182

$\psi = 25.6$ $\theta = 12$

S1 = 2,30291
-,292477
4,366558E-02
-4,684612E-03
4,368741E-04
-3,212603E-05

0 X3= ,49511 Y3= -,05140

HAUTEUR D'ENTREE=
P5= -,56294

HAUTEUR DE SORTIE= ,75782

ANGLE DE CONTACT= ,13138

RAYON DE LAMINAGE= 14,05108

TRACTION= 4,99789

CONTRE TRACTION= -,56295

MOMENT DE LAMINAGE= ,94661

$\psi = 25.8$ $\theta = 12$

S1 = 2,32630
-,300090
4,515516E-02
-5,090892E-03
4,588913E-04
-3,400583E-05

0 X3= ,50022 Y3= -,05199

HAUTEUR D'ENTREE=
P5= -,56601

HAUTEUR DE SORTIE= ,75009

ANGLE DE CONTACT= ,13586

RAYON DE LAMINAGE= 13,55982

TRACTION= 4,98196

CONTRE TRACTION= -,54697

MOMENT DE LAMINAGE= 1,14500

$\psi = 26°$ $\theta = 12$

S1 = 2,35015
-,307895
4,669147E-02
-5,305108E-03
4,819192E-04
-3,598607E-05

0 X3= ,50543 Y3= -,05255

HAUTEUR D'ENTREE=
P5= -,56914

HAUTEUR DE SORTIE= ,74236

ANGLE DE CONTACT= ,14036

RAYON DE LAMINAGE= 13,09929

TRACTION= 4,96608

CONTRE TRACTION= -,53499

MOMENT DE LAMINAGE= 1,32847

BIUS LILLE

Résultats de IV. 1. Suite.

Ψ = 25° θ = 10.5

S1 = 2.14409
-.259299
3.677434E-02
-4.068722E-03
3.502779E-04
-2.520965E-05

0 X3= .40232 Y3= -.03661

HAUTEUR D'ENTREE=
P5= -.44355

HAUTEUR DE SORTIE= .96347

ANGLE DE CONTACT= .02725

RAYON DE LAMINAGE= 75.93835

TRACTION= 5.54841

CONTRE TRACTION= -.55645

MOMENT DE LAMINAGE= -14.89661

Ψ = 25 θ = 11

S1 = 2.17361
-.257580
3.757636E-02
-4.106361E-03
3.587508E-04
-2.580273E-05

0 X3= .42759 Y3= -.04076

HAUTEUR D'ENTREE=
P5= -.47865

HAUTEUR DE SORTIE= .88440

ANGLE DE CONTACT= .05809

RAYON DE LAMINAGE= 34.20204

TRACTION= 5.37934

CONTRE TRACTION= -.57265

MOMENT DE LAMINAGE= -4.03690

Ψ = 25° θ = 11.5

S1 = 2.20462
-.264050
3.850535E-02
-4.206907E-03
3.674755E-04
-2.641320E-05

0 X3= .45360 Y3= -.04519

HAUTEUR D'ENTREE=
P5= -.51545

HAUTEUR DE SORTIE= .43062

ANGLE DE CONTACT= .08834

RAYON DE LAMINAGE= 21.74553

TRACTION= 5.20553

CONTRE TRACTION= -.58880

MOMENT DE LAMINAGE= -1.04471

Ψ = 17° θ = 12

S1 = 1.60108
-8.918752E-02
8.821521E-03
-6.543845E-04
3.883151E-05
-1.903409E-06

0 X3= .34140 Y3= -.03558

HAUTEUR D'ENTREE=
P5= -.46856

HAUTEUR DE SORTIE= 1.09876

ANGLE DE CONTACT= -.04823

RAYON DE LAMINAGE= -42.45599

TRACTION= 5.72392

CONTRE TRACTION= -1.16430

MOMENT DE LAMINAGE= 51.29713

BUS LILLE

```
      DIMENSION QTP(36),PTP(36),TA(36),TB(36),A(36),S1(6),S2(6),S3(6),S4
     1(6),S5(6),S6(6),V1(6),V2(6),RT(36)
      N=6
      P0=0.
      READ(105,100)THETA
  100 FORMAT(F6.4)
      OUTPUT THETA
      L=4
      THETA=THETA*3.14159/180.0
      M=N*N
      DO 10 J=1,L
      OUTPUT J
      CALL QMAT(N,M,THETA,THETA,QTP)
      CALL PMAT(N,M,THETA,THETA,PTP)
      CALL TMAT(N,M,THETA,TA,TB)
      DO 20 I=1,M
      A(I)=TA(I)-2.0*J*PTP(I)
   20 CONTINUE
      DO 30 I=2,N
      S1(I)=0.0
   30 CONTINUE
      S1(1)=2.0*J
      CALL RESOL(A,S1,N,KOD,0.0001)
      CALL MRMUL(QTP,S1,S2,N,N,1)
      S2(1)=S2(1)+1.
      CALL MRMUL(TB,S2,S3,N,N,1)
      CALL MIKHL(N,S3,X3,Y3,THETA,1.0)
      CALL MIKHL(N,S1,X1,Y1,THETA,1.0)
      PI=3.14159/4.
      CX=COS(PI-THETA)
      SX=SIN(PI-THETA)
      CALL MRMUL(PTP,S1,V1,N,N,1)
      V1(1)=V1(1)-1.0
      CALL MRMUL(TB,V1,S6,N,N,1)
      CALL RMAT(N,M,THETA,RT)
      CALL MRMUL(RT,S6,V2,N,N,1)
      CALL MIKHL(N,V2,X2,Y2,THETA,1.0)
      CALL SLFORC(N,V2,AX2,YY2,FX2,FY2,THETA,P0+2*THETA,1.0,1.0)
      P2=(FX2-FY2)*0.70711
      PT2=-(FX2+FY2)*0.70711
      OUTPUT P2,PT2
      Z=(X3+X1+1)*CX+(Y1+Y3)*SX
      OUTPUT Z
      RO=1/Z
      OUTPUT RO
      CX4=0.
      CY4=0.
      CX5=0.
      CY5=0.
      CFX4=0.
      CFY4=0.
```


LILLE BIBS

```
      CFX5=0.
      CFY5=0.
      P=-1.
      DO 50 K=1,J
      P=-P
      DO 60 I=1,N
      S5(I)=P*S1(I)-P*(K-1)*S3(I)
      S4(I)=P*K*S3(I)
   60 CONTINUE
      CALL MIKHL(N,S4,X4,Y4,THETA,P)
      CALL MIKHL(N,S5,X5,Y5,THETA,P)
      CX4=CX4+X4+1.0
      CY4=CY4-P*Y4
      CX5=CX5+X5
      CY5=CY5-P*Y5
      CALL SLFORC(N,S4,XX4,YY4,FX4,FY4,THETA,P0,-P,P)
      CALL SLFORC(N,S5,XX5,YY5,FX5,FY5,THETA,P0,-P,P)
      CFX4=CFX4-P*FX4
      CFY4=CFY4-P*FY4
      CFY5=CFY5+P*FY5
      CFX5=CFX5+P*FX5
   50 CONTINUE
      H4=CX4*SX+CY4*CX
      H5=CY5*CX+CX5*SX
      H=H4+H5
      HT=2*H/Z
      OUTPUT HT
      PN=(CFX4+CFX5+CFY4+CFY5)*0.70711
      PCO=2*PN/Z
      OUTPUT PCO
      PC=CX-2*THETA*SX
      OUTPUT PC
      PC1=(PC+PT2)/Z
      PCF1=PC1+PCO
      OUTPUT PCF1
   10 CONTINUE
      STOP
      END
```


CNRS LILLE

Résultats de V (1) le cas (c)

THETA = ,000000
J = 1
P2 = ,000000
PT2 = ,000000
Z = ,707107
RO = 1,41421
HT = 1,99999
PCO = ,000000
PC = ,707107
PCF1 = 1,00000
J = 2
P2 = ,000000
PT2 = ,000000
Z = ,707107
RO = 1,41421
HT = 3,99999
PCO = ,000000
PC = ,707107
PCF1 = 1,00000
J = 3
P2 = ,000000
PT2 = ,000000
Z = ,707107
RO = 1,41421
HT = 5,99999
PCO = ,000000
PC = ,707107
PCF1 = 1,00000
J = 4
P2 = ,000000
PT2 = ,000000
Z = ,707107
RO = 1,41421
HT = 7,99998
PCO = ,000000
PC = ,707107
PCF1 = 1,00000

THETA = 2,00000
J = 1
P2 = -8,411431E-02
PT2 = 8,123112E-02
Z = ,815435
RO = 1,22634
HT = 1,87187
PCO = 7,104445E-02
PC = ,683742
PCF1 = 1,00916
J = 2
P2 = -,152043
PT2 = ,146831
Z = ,883337
RO = 1,13207
HT = 3,75288
PCO = ,149337
PC = ,683742
PCF1 = 1,08960
J = 3
P2 = -,232518
PT2 = ,224548
Z = ,963781
RO = 1,03758
HT = 5,64308
PCO = ,234907
PC = ,683742
PCF1 = 1,17733
J = 4
P2 = -,329370
PT2 = ,318079
Z = 1,06059
RO = ,942869
HT = 7,54251
PCO = ,327774
PC = ,683742
PCF1 = 1,27236

THETA = 4,00000
J = 1
P2 = -,193470
PT2 = ,180461
Z = ,947886
RO = 1,05498
HT = 1,76436
PCO = ,144594
PC = ,663107
PCF1 = 1,03454
J = 2
P2 = -,391489
PT2 = ,365162
Z = 1,14560
RO = ,872904
HT = 3,56350
PCO = ,318107
PC = ,663107
PCF1 = 1,21569
J = 3
P2 = -,697401
PT2 = ,650495
Z = 1,45105
RO = ,689158
HT = 5,39788
PCO = ,520945
PC = ,663107
PCF1 = 1,42622
J = 4
P2 = -1,23240
PT2 = 1,14949
Z = 1,98522
RO = ,503721
HT = 7,26799
PCO = ,753506
PC = ,663107
PCF1 = 1,66655

THETA = 5,00000
J = 1
P2 = -,260817
PT2 = ,239116
Z = 1,02625
RO = ,974420
HT = 1,71740
PCO = ,182324
PC = ,653858
PCF1 = 1,05245
J = 2
P2 = -,568848
PT2 = ,521504
Z = 1,33356
RO = ,749874
HT = 3,48799
PCO = ,409870
PC = ,653858
PCF1 = 1,29124
J = 3
P2 = -1,15185
PT2 = 1,05595
Z = 1,91518
RO = ,522143
HT = 5,31288
PCO = ,683617
PC = ,653858
PCF1 = 1,57638
J = 4
P2 = -2,67483
PT2 = 2,45207
Z = 3,43455
RO = ,291159
HT = 7,19321
PCO = 1,00456
PC = ,653858
PCF1 = 1,90888

THETA = 6,00000
J = 1
P2 = -,339063
PT2 = ,305559
Z = 1,11509
RO = ,896791
HT = 1,67458
PCO = ,220699
PC = ,645342
PCF1 = 1,07346
J = 2
P2 = -,812141
PT2 = ,731847
Z = 1,58659
RO = ,630284
HT = 3,42432
PCO = ,506656
PC = ,645342
PCF1 = 1,37467
J = 3
P2 = -2,01999
PT2 = 1,82016
Z = 2,79038
RO = ,358374
HT = 5,25146
PCO = ,859894
PC = ,645342
PCF1 = 1,74347
J = 4
P2 = -11,6231
PT2 = 10,4727
Z = 12,3612
RO = 8,089846E-02
HT = 7,15833
PCO = 1,28250
PC = ,645342
PCF1 = 2,18193

BIBLIOTHEQUE LILLE

Résultats de V (1) Suite

THETA = 6,39000

J = 1
P2 = -,373062
PT2 = ,333962
Z = 1,15308
RO = ,867240
HT = 1,65894
PCO = ,235840
PC = ,642224
PCF1 = 1,08243

J = 2
P2 = -,933124
PT2 = ,835261
Z = 1,71104
RO = ,584441
HT = 3,40257
PCO = ,545786
PC = ,642224
PCF1 = 1,40929

J = 3
P2 = -2,61653
PT2 = 2,34193
Z = 3,38806
RO = ,295154
HT = 5,23372
PCO = ,932439
PC = ,642224
PCF1 = 1,81322

J = 4
P2 = 1194,96
PT2 = -1069,47
Z = -1189,64
RO = -8,405929E-04
HT = 7,15540
PCO = 1,39849
PC = ,642224
PCF1 = 2,29695

THETA = 8,00000

J = 1
P2 = -,539392
PT2 = ,469821
Z = 1,33496
RO = ,749089
HT = 1,60035
PCO = ,299403
PC = ,630578
PCF1 = 1,12370

J = 2
P2 = -1,71755
PT2 = 1,49573
Z = 2,50630
RO = ,398994
HT = 3,33034
PCO = ,715778
PC = ,630578
PCF1 = 1,56416

J = 3
P2 = -26,8293
PT2 = 23,3599
Z = 27,4718
RO = 3,640094E-02
HT = 5,19671
PCO = 1,25553
PC = ,630578
PCF1 = 2,12880

J = 4
P2 = 3,76758
PT2 = -3,27975
Z = -2,94678
RO = -,339354
HT = 7,20672
PCO = 1,92548
PC = ,630578
PCF1 = 2,82448

THETA = 10,0000

J = 1
P2 = -,828222
PT2 = ,697574
Z = 1,64022
RO = ,609673
HT = 1,54003
PCO = ,380754
PC = ,618937
PCF1 = 1,18339

J = 2
P2 = -4,95164
PT2 = 4,16860
Z = 5,72728
RO = ,174603
HT = 3,27840
PCO = ,946731
PC = ,618937
PCF1 = 1,78265

J = 3
P2 = 4,37093
PT2 = -3,67801
Z = -3,51271
RO = -,284680
HT = 5,23111
PCO = 1,71378
PC = ,618937
PCF1 = 2,58463

J = 4
P2 = 2,13698
PT2 = -1,79736
Z = -1,29839
RO = -,770185
HT = 7,41594
PCO = 2,69947
PC = ,618937
PCF1 = 3,60708

THETA = 15,0000

J = 1
P2 = -2,68115
PT2 = 2,08123
Z = 3,49849
RO = ,285838
HT = 1,44280
PCO = ,596157
PC = ,604227
PCF1 = 1,36376

J = 2
P2 = 3,55385
PT2 = -2,75213
Z = -2,62057
RO = -,381596
HT = 3,32488
PCO = 1,63272
PC = ,604227
PCF1 = 2,45235

J = 3
P2 = 1,78251
PT2 = -1,37714
Z = -,881384
RO = -1,13458
HT = 5,72645
PCO = 3,19711
PC = ,604227
PCF1 = 4,07404

J = 4
P2 = 1,39718
PT2 = -1,07691
Z = -,502591
RO = -1,98969
HT = 8,74846
PCO = 5,39927
PC = ,604227
PCF1 = 6,33977

THETA = 19,3000

J = 1
P2 = -45,5448
PT2 = 33,0458
Z = 45,1416
RO = 2,215249E-02
HT = 1,41437
PCO = ,796122
PC = ,608923
PCF1 = 1,54166

J = 2
P2 = 2,08961
PT2 = -1,50653
Z = -1,12436
RO = -,889396
HT = 3,57429
PCO = 2,37612
PC = ,608923
PCF1 = 3,17427

J = 3
P2 = 1,44733
PT2 = -1,03665
Z = -,498858
RO = -2,00458
HT = 6,71420
PCO = 5,01234
PC = ,608923
PCF1 = 5,86976

J = 4
P2 = 1,23870
PT2 = -,881616
Z = -,294586
RO = -3,39459
HT = 11,1778
PCO = 9,10400
PC = ,608923
PCF1 = 10,0297

BIBL. LILLE

Programme V(II) Cas de figure (b)

```
C       COMPRESSION
        N=6
        REAL L7
        REAL L8
        L=4
        READ (105,100)THETA
  100   FORMAT(F6.4)
        OUTPUT THETA
        THETA=THETA*3.14159/180.0
        P0=0.
        M=N*N
        DIMENSION QTP(36),PTP(36),TA(36),TB(36),A(36),S1(6),S2(6),S4(6),S5
       1(6),V1(6),V2(6),V3(6),RP(36),W6(6),PS(36),W4(6)
        DO 10 J=1,L
        OUTPUT J
        CALL TMAT(N,M,THETA,TA,TB)
        CALL QMAT(N,M,THETA,THETA,QTP)
        CALL PMAT(N,M,THETA,THETA,PTP)
        DO 20 I=1,M
        A(I)=TA(I)-2.0*J*QTP(I)
   20   CONTINUE
        DO 30 I=2,N
        S1(I)=0.0
   30   CONTINUE
        S1(1)=2.0*J
        CALL RESOL(A,S1,N,KOD,0.0001)
        CALL MIKHL(N,S1,X1,Y1,THETA,1.0)
        CALL SLFORC(N,S1,XX1,YY1,FX1,FY1,THETA,P0,1.0,1.0)
        PI=3.14159/4.0
        CALL MRMUL(PTP,S1,S4,N,N,1)
        CALL SLFORC(N,S4,XX4,YY4,FX4,FY4,THETA,P0,1.0,-1.0)
        PT4=-(FX4+FY4)*0.70711
        CALL MRMUL(QTP,S1,V1,N,N,1)
        CALL CORDXY(N,V1,XX7,YY7,X7,Y7,THETA,1.0)
        L7=(X7+Y7)*0.70711
        Z7=(Y7-X7)*0.70711
        V1(1)=V1(1)+1.0
        CALL CORDXY(N,V1,XX8,YY8,X8,Y8,THETA,1.0)
        L8=(X8+Y8)*0.70711
        CALL MRMUL(TB,V1,W6,N,N,1)
        CALL MIKHL(N,W6,X6,Y6,THETA,1.0)
        SX=SIN(PI-THETA)
        CX=COS(PI-THETA)
        Z=(X1+X6+1.0)*SX-(Y1+Y6)*CX
        H1=(X1+X6+1.0)*CX+(Y1+Y6)*SX
        U=(0.70711-SIN(PI-THETA))*Z
        RO=(L8-L7)/U
        OUTPUT RO
        CALL PSTAR(N,M,THETA,PS)
        CALL MRMUL(PS,S1,S5,N,N,1)
        CALL MIKHL(N,S5,X5,Y5,THETA,1.0)
```

```
      H5=(X5+1,0+Y5)*0,70/11
      CALL MRMUL(PTP,S1,S2,N,N,1)
      CX2=0
      CY2=0
      CX3=0
      CY3=0
      CFX2=0
      CFY2=0
      CFX3=0
      CFY3=0
      P=1.
      DO 50 K=1,J
      P=-P
      DO 60 I=1,N
      V2(I)=P*(S2(I)+K*V1(I))
      V3(I)=-P*K*V1(I)
   60 CONTINUE
      CALL MIKHL(N,V2,X2,Y2,THETA,-P)
      CALL MIKHL(N,V3,X3,Y3,THETA,-P)
      CALL SLFORC(N,V3,XX3,YY3,FX3,FY3,THETA,P0,P,-P)
      CALL SLFORC(N,V2,XX2,YY2,FX2,FY2,THETA,P0,P,-P)
      CX2=CX2+X2+1,0
      CY2=CY2-P*Y2
      CX3=CX3+X3
      CY3=CY3-P*Y3
      CFX3=CFX3+P*FX3
      CFX2=CFX2-P*FX2
      CFY2=CFY2-P*FY2
      CFY3=CFY3+P*FY3
   50 CONTINUE
      H2=(CX2+CY2-1,0)*0,70/11
      H3=(CX3+CY3)*0,70/11
      H=H2+H3+H5
      HT=H/Z
      OUTPUT HT
      PC=(CFX2+CFX3+CFY2+CFY3)*0,70/11
      PC=PC/Z
      PCF=(-PT4+0,70711)/Z
      OUTPUT PCF
   10 CONTINUE
      STOP
      END
```


BUS LILLE

Résultats de V(II) le cas (b)

```
THETA = .000000
J = 1
RO = 1.41422
HT = 1.00000
PCF = 1.00000
J = 2
RO = 1.41422
HT = 2.00001
PCF = 1.00000
J = 3
RO = 1.41422
HT = 3.00002
PCF = 1.00000
J = 4
RO = 1.41422
HT = 4.00002
PCF = 1.00000
```

```
THETA = 2.00000
J = 1
RO = 1.31007
HT = 1.06845
PCF = .994905
J = 2
RO = 1.20642
HT = 2.13170
PCF = .989817
J = 3
RO = 1.10303
HT = 3.18975
PCF = .984741
J = 4
RO = .999896
HT = 4.24263
PCF = .979678
```

```
THETA = 4.00000
J = 1
RO = 1.19579
HT = 1.13356
PCF = .978693
J = 2
RO = .979756
HT = 2.24499
PCF = .957608
J = 3
RO = .765975
HT = 3.33464
PCF = .936743
J = 4
RO = .554415
HT = 4.40284
PCF = .916095
```

```
THETA = 5.00000
J = 1
RO = 1.13469
HT = 1.16455
PCF = .966004
J = 2
RO = .859896
HT = 2.29357
PCF = .932574
J = 3
RO = .589638
HT = 3.38795
PCF = .899702
J = 4
RO = .323796
HT = 4.44852
PCF = .867376
```

```
THETA = 6.00000
J = 1
RO = 1.07101
HT = 1.19432
PCF = .950044
J = 2
RO = .736208
HT = 2.33619
PCF = .901314
J = 3
RO = .409437
HT = 3.42748
PCF = .853769
J = 4
RO = 9.040707E-02
HT = 4.46999
PCF = .807370
```

```
THETA = 6.39000
J = 1
RO = 1.04548
HT = 1.20558
PCF = .942900
J = 2
RO = .687028
HT = 2.35111
PCF = .887401
J = 3
RO = .338353
HT = 3.43904
PCF = .833441
J = 4
RO = -9.396933E-04
HT = 4.47169
PCF = .780957
```

```
THETA = 8.00000
J = 1
RO = .936123
HT = 1.24970
PCF = .907726
J = 2
RO = .479207
HT = 2.40196
PCF = .819600
J = 3
RO = 4.202590E-02
HT = 3.46309
PCF = .735358
J = 4
RO = -.376695
HT = 4.43887
PCF = .654747
```

```
THETA = 10.0000
J = 1
RO = .791746
HT = 1.29858
PCF = .850681
J = 2
RO = .213024
HT = 2.43957
PCF = .712083
J = 3
RO = -.326515
HT = 3.43897
PCF = .583099
J = 4
RO = -.830820
HT = 4.31066
PCF = .462763
```

```
THETA = 15.0000
J = 1
RO = .396220
HT = 1.38536
PCF = .639245
J = 2
RO = -.459073
HT = 2.40101
PCF = .337953
J = 3
RO = -1.18876
HT = 3.12849
PCF = 8.257365E-02
J = 4
RO = -1.81944
HT = 3.62629
PCF = -.136613
```

```
THETA = 19.3000
J = 1
RO = 3.132479E-02
HT = 1.41100
PCF = .378614
J = 2
RO = -.995319
HT = 2.22050
PCF = -7.658195E-02
J = 3
RO = -1.79134
HT = 2.63167
PCF = -.424190
J = 4
RO = -2.42952
HT = 2.76218
PCF = -.698169
```

BUS LILLE

Compression discontinuité de la vitesse $\rho = 0$. Programme V (III). méthode des lignes propres.

```
      DIMENSION TA(36),PT(36),QT(36),W1(36),W2(36),W3(36),A(36),AP(36),V
     1PR(36),VPI(36),AR(0:6),AI(0:6),C(7),BR(6),BI(6),VR(6),VI(6),J1(6),
     2TR(6),TI(6),TB(36),TA1(36),S1(6),S3(6),S4(6),S5(6),S6(6)
      N=6
      THETA=19.665
      READ (105,100)P0
  100 FORMAT(F.0)
      THETA=THETA*3.14159/180.0
      M=N*N
      CALL PMAT(N,M,THETA,THETA,PT)
      CALL QMAT(N,M,THETA,THETA,QT)
      CALL TMAT(N,M,THETA,TA,TB)
      CALL MRMUL(TA,TA,W1,N,N,N)
      CALL MRMUL(W1,TA,W2,N,N,N)
      DO 10 I=1,M
      A(I)=W2(I)-QT(I)
      AP(I)=A(I)
      TA1(I)=TA(I)
   10 CONTINUE
      CALL DANILEV(TA,N,TR,TI,C,VR,VI,KOD,0.0001)
      OUTPUT KOD
      CALL VECPRI(N,TA1,VR,VI,VPR,VPI,AR,AI,BR,BI,0.0001)
      WRITE(108,50)(VR(I),I=1,N)
      WRITE(108,51)
      WRITE(108,50)(VI(I),I=1,N)
      WRITE(108,51)
      DO 40 I=1,N
   40 WRITE(108,50)(VPR(I-1+J),J=1,M,N)
      DO 41 I=1,N
   41 WRITE(108,50)(VPI(I-1+J),J=1,M,N)
   50 FORMAT(X,6E18.5)
   51 FORMAT(//)
      DO 70 J=1,N
      I=4
      S1(J)=VPR((I-1)*N+J)
   70 CONTINUE
      CALL CORDXY(N,S1,XX1,YY1,X1,Y1,THETA,1.0)
      H1=(Y1+X1)*0.70711
      H2=(Y1-X1)*0.70711
      CALL MRMUL(W1,S1,S4,N,N,1)
      CALL CORDXY(N,S4,XX4,YY4,X4,Y4,THETA,1.0)
      H3=-(X4+Y4)*0.70711
      H4=(X4-Y4)*0.70711
      W=H3+H1
      WRITE(108,300)W
  300 FORMAT(X,'W=',F10.5)
      H=H2+H4
      RAP=-W/H
      WRITE(108,410)RAP
  410 FORMAT(X,'RAP=',F10.5)
      PI=3.14159/4.0
```

Sous-programmes donnant les valeurs et les vecteurs propres de l'opérateur matriciel

```
      SUBROUTINE VECPRI (N,A,VR,VI,VPR,VPI,AR,AI,BR,BI,EPS)
      DIMENSION A(1),VR(1),VI(1),VPR(1),VPI(1),AR(0:1),AI(0:1),
     1BR(1),BI(1)
      DO 1 I=1,N*N
      VPR(I) = 0
    1 VPI(I) = 0
      DO 50 I=1,N
      I1=I
      I2=I
      N1=N-1
      IF(ABS(VI(I)).LE.EPS) GOTO 5
      DO 12 J=I+1,N
      IF(ABS(VI(I)+VI(J)).LT.EPS) GOTO 16
   12 CONTINUE
      GOTO 50
   16 I1=I
      I2=J
      N1= N-2
    5 AR(0) = 1
      AI(0) = 0
       M=1
      DO 20 K=1,N1
      IF(M.EQ.I1.OR.M.EQ.I2) M=M+1
      AR(K) = 0
      AI(K) = 0
      DO 10 J=1,K
      X=AR(J-1)
      Y=AI(J-1)
      CALL POL(X,Y)
      R=VR(M)
      Z=VI(M)
      CALL POL(R,Z)
      X=X*R
      Y=Y+Z
      CALL CART(X,Y)
      BR(J) = X + AR(J)
      BI(J) = Y + AI(J)
   10 CONTINUE
      DO 15 J=1,K
      AR(J) = BR(J)
   15 AI(J) = BI(J)
       M=M+1
   20 CONTINUE
      DO 25 J=2,N
   25 BR(J) = 0
      BR(1) = 1
   70 CONTINUE
      IS=(N1-1)-(N1-1)/2*2
      IF (IS.EQ.0) IS=-1
      DO 26 J=1,N
   26 VPR((I-1)*N+J)=IS*AR(N1)*BR(J)
      DO 40 K=1,N1
      DO 30 M=1,N
      BI(M) = 0
      DO 30 L=1,N
   30 BI(M) = BI(M) + A((L-1)*N+M)*BR(L)
      IS = -IS
      DO 35 L=1,N
      L1 = (I-1)*N+L
   35 VPR(L1) = VPR(L1) + IS * BI (L) *AR (N1-K)
      DO 37 L=1,N
   37 BR(L) = BI(L)
   40 CONTINUE
      IF (I1.EQ.I2) GOTO 80
      DO 43 M=1,N
      BI(M) = 0
      DO 43 L=1,N
   43 BI(M) = BI(M) + A((L-1)*N+M)*VPR((I-1)*N+L)
      DO 45 L=1,N
      L1 = (I-1)*N+L
      L2=(I2-1)*N+L
      VPI(L1) = (VR(I)*VPR(L1)-BI(L))/(2*VI(I))
   45 VPI(L2)=-VPI(L1)
      DO 46 L=1,N
      L1 = (I-1)*N+L
      L2=(I2-1)*N+L
      VPR(L1)=VPR(L1)/2
   46 VPR(L2)=VPR(L1)
   80 S1=0
      S2=0
      DO 48 L=1,N
      L1=(I-1)*N+L
      S1=S1+VPR(L1)
   48 S2=S2+VPI(L1)
      IF(S1.NE.0.OR.S2.NE.0)GOTO 50
      DO 60 J=1,N
   60 BR(J)=J
      GOTO 70
   50 CONTINUE
      RETURN
      END
```

BUS LILLE

```
      SUBROUTINE POL(X,Y)
      PI=3.14159265359
      R=X
      EPS=1E-15
      IF(ABS(R)-EPS)108,108,109
  108 X=ABS(Y)
      Y=Y*PI/2./X
      GOTO 117
  109 Z=Y
      X=SQRT(X*X+Y*Y)
       Y=ATAN(Y/R)
      IF(Z)110,110,111
  110 IF(Y)112,112,113
  113 Y=Y-PI
      GOTO 112
  111 IF(Y)114,112,112
  114 Y=Y+PI
  112 IF (ABS(Z/R)-0.001)115,117,117
  115 IF(R)116,118,118
  118 Y=0.
      GOTO 117
  116 Y=PI
  117 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE CART(X,Y)
      R=X
      X=X*COS(Y)
      Y=R*SIN(Y)
      RETURN
      END
```

BUS LILLE

Résultats de V (III)

P0 = 1.065

KOD = 0

-.10034E 01	-.99997E 00	-.94281E 00	.70709E 00	.99998E 00	.99999E 00
.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00
.43750E-04	.18477E-05	.12517E-05	.42537E 00	-.12398E-04	-.12517E-04
-.25278E-03	-.22054E-05	-.35763E-06	-.72282E-01	.18477E-05	.18477E-05
.42904E-04	.28312E-06	.55879E-07	.82290E-02	-.52154E-07	.31292E-06
-.43884E-05	.43213E-06	.00000E 00	-.70402E-03	-.14901E-07	-.78231E-07
.33178E-06	-.76136E-07	.21653E-07	.43227E-04	.46566E-09	.65193E-08
-.14130E-07	.47003E-08	-.13727E-06	-.27351E-05	.15007E-09	-.29104E-09
.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00
.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00
.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00
.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00
.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00
.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00	.00000E 00

W= .05761

RAP= 1.41424

FH= -.12642E 00 FV= .13078E 00

FX= -.16306E 00 FY= .80605E-01

P5 = -3.078818E-03

FH= -.11861E 00 FV= .12464E 00

FX= -.15364E 00 FY= .77456E-01

FH= .14099E 00 FV= -.14858E-01

FX= .13777E 00 FY= .33445E-01

PC = 1.03944

BUS LILLE

CONCLUSION

Pour la plupart des problèmes aux limites de type mixte que l'on rencontre en formage des métaux et dont la solution conduit à la résolution d'une équation intégrale linéaire, la méthode de résolution exposée dans cette étude donne de bons résultats. L'avantage que possède cette méthode numérique pour construire le champ des lignes de glissement sur la méthode graphique de Prager et la méthode aux différences finies est la possibilité de construire le champ en question sans avoir besoin de la forme des lignes initiales de base. La recherche de la forme de ces lignes de base se réduit alors à l'inversion d'une équation matricielle. Le reste du champ est construit par les opérateurs des transformations linéaires.

Cette méthode matricielle permettant de résoudre le problème à l'aide de l'ordinateur a aussi l'avantage d'être plus exacte, moins onéreuse et plus rapide que la méthode géométrique de construction pas à pas malgré les difficultés à mettre au point des programmes de calcul adéquats.

Mais cette méthode nous limite tout de même aux problèmes qui conduisent à des équations linéaires et où n'interviennent pas de conditions à la frontière non linéaires du type frottement de Coulombs par exemple.

De tels problèmes ainsi que les problèmes de formage des métaux dans lesquels on tiendra compte de l'écrouissance, de la température, des vitesses de déformations et des effets élastiques(le laminage par exemple) peuvent être résolus numériquement par la méthode des éléments finis. Pour le laminage, la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 permet l'insertion dans l'équation différentielle à intégrer les effets élastiques et une loi d'écrouissage.

Mis à part, les problèmes étudiés ici, cette méthode matricielle peut s'appliquer à plusieurs problèmes linéaires d'intérêt pratique. Nous en citons l'extrusion asymétrique, l'extrusion avec réduction moyenne, le poinçonnet plat sur un fond lisse, l'étirage à travers une matrice inclinée rigide et lisse ainsi que la compression entre deux plateaux partiellement rugueux (utilisation de l'opérateur G).

La méthode graphique de Prager possède l'avantage de s'appliquer aux problèmes non linéaires ainsi que la méthode des perturbations de Spencer (1962).

Cette méthode matricielle ne concerne donc qu'une classe de problèmes linéaires d'intérêt pratique certain.

BIBLIOGRAPHIE

BAQUÉ P. *Mise en forme des métaux, DUNOD 1973.*

HILL R. *The mathematical theory of plasticity, 1950.*

KACHANOV L. *Eléments de la théorie de la plasticité, Editions MIR, 1975.*

PRAGER W. *Theory of perfectly plastic solids, DOVER, Public inc. New-York, 1951.*

JOHNSON and MELLOR P.B. *Engineering plasticity. VAN NOSTRAND REINHOD COMPANY.*

MANDEL J. *Problèmes de déformation plane (contraintes planes) pour les corps parfaitement plastiques.*

MANDEL J. *Bases physiques et équations fondamentales de la théorie de la plasticité.*

MANDEL J. et PARSY F. *Quelques problèmes tridimentionnels de la théorie du corps parfaitement plastique.*

GERINGER H. *Fondement mathématique de la théorie des corps plastiques isotropes, J.M. 1937.*

R. HILL *On the vectorial superposition of Henky-Prandtl nets. J. Mec. Phy. Solids 15, 255-262 (1967).*

I.F. COLLINS *A Matrix technique for constructing slip-line field solution to a class of plane strain plasticity problems. Int. Jour. of Numerical Method In Ing. Vol. 7 (1973).*

I.F. COLLINS *Geometrie properties of some slip line field for compression and extrusion, J. Mec. Phy. Solids, 16, 137-152 (1968).*

EWING D.J.F. *A series method for constructing plastic slip line fields, Mec. Phys. Solids, 15-105-114 (1967).*

PRAGER W. *A Geometrical Discussion of the slip line field in plane plastic flow Kunglika Teckniska Högskolans Handlingar (1953).*

ALEXANDER J.M. *A slip line field for the Hot Rolling Process M.T.D.R.*

CRANE F.A.A. & ALEXANDER J.M. *Slip line fields and deformation in Hot Rolling of Strip.*
Jou. of the Insti. of metals (1968).

ALEXANDER J.M. *On the Theorie of Rolling.*
Proc Royal. Soc. A 326 535-563 (1972).

DEWHURST P., COLLINS I.F. & JOHNSON W. *A class of slip line field solutions for the Hot Rolling of strip.*
J. Mec. Engin. Science vol. 15, n° 6, 1973.

GREEN A.P. *A theoretical investigations of the compression of a ductile material between smooth flat dies.*
Phil. Mag 42, 900 (1951).

COLLINS I.F. *The algebraic - geometry of slip line fields with applications to boundary value - problems.*
Proc. Roy. Soc. A 303, 317-338 (1968).

SPENCER A.J.M. *Perturbation methods in plasticity Plane strain of non Homogeneous plastic solids.*
J. Mech. Phy. Solids, vol. 9 279-288 (1961)

OROWAN E. *The calculation of roll force and torque in hot and cold flat Rolling.*
Proc. Inst. Mech. Eng. 150 (1943).

SIMS *Calculation of roll force and torque in hot rolling mills.*
Proc. Inst. Mech. Eng. 168 (1954).